ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Μονότονοι τελεστές και εφαρμογή σε προβλήματα συνοριακών τιμών

Διπλωματική Εργασία

του

ΣΚΑΡΤΣΙΛΑ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ

Επιβλέποντας: Γιαννακάκης Νίκος, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Εξεταστική επιτροπή : Γιαννακάκης Νίκος, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ
Σμυρλής Γιώργος, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ
Χαραλαμπόπουλος Αντώνης, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2020

Περίληψη

Οι τελεστές αποτελούν ένα απο τα βασικότερα εργαλεία της συναρτησιακής ανάλυσης. Πρόκειται απεικονίσεις οι οποίες μας επιτρέπουν να μεταφέρουμε συναρτήσεις από έναν χώρο σε έναν άλλο, σεβόμενοι πάντα την εκάστοτε δομή τους. Οι τελεστές υπακούν σε διάφορες ιδιότητες όπως το να είναι γραμμικοι, φραγμένοι, συνεχείς κλπ. Έτσι και η μονοτονία είναι μια χαρακτηριστική ιδιότητα των τελεστών την οποία μάλιστα μπορούμε να εκμεταλευτούμε και να εξάγουμε συμπεράσματα στο πεδίο της μελέτης των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Σκοπός μας στην παρούσα εργασία είναι, δοθείσας μιας μη γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης, να μελετήσουμε τον τρόπο που μία ισοδύναμη εξίσωση μονότονων τελεστών μπορεί να μας οδηγήσει στο ότι το αρχικό πρόβλημα είναι μοναδικά επιλύσιμο.

Για την επίλυση του προβλήματος δεν θα αναζητήσουμε μία κλασική λύση όπως συνηθίζεται. Θα ασχοληθούμε με την έννοια της ασθενούς λύσεως και κατ' επέκτασιν με την έννοια της ασθενούς παραγώγου. Και οι δύο αυτές έννοιες αποτελούν εργαλεία των χώρων Sobolev τους οποίους θα ορίσουμε και θα διατυπώσουμε μερικές από τις βασικές ιδιότητές τους.

Προκειμένου να εφαρμόσουμε τους μονότονους τελεστές, θα διατυπώσουμε και θα μελετήσουμε το θεώρημα Minty-Browder, κομβικό θεώρημα στη θεωρία τους. Το θεώρημα αποδεικνύει πως η εξίσωση των τελεστών $Au = b$ είναι μοναδικά επιλύσιμη και επιπλέον ότι με τη βοήθεια της μεθόδου Galerkin μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία λύσεων που συγκλίνει στη λύση της παραπάνω εξίσωσης.
Φτάνοντας στο τελικό κομμάτι της εργασίας, θα δούμε πως με χρήση της μεθόδου Galerkin και με την άμεση εφαρμογή του θεωρήματος Minty-Browder είναι εφικτό να λύσουμε μια μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση ελλειπτικού τύπου.

Abstract

Operators are one of the most crucial topics of functional analysis. They are mappings which allow us to transfer functions between two spaces. Operators are defined under some properties such as linearity, continuity, boundness etc. Monotonicity is one of those properties too, which can take advantage of and draw conclusions in the field of partial defferential equations. Our main objective on this thesis is, given a quasi-linear partial differential equation, to study the way an equivalent operator equation can be used to show that the main problem has a unique solution.

To solve that problem, instead of seeking regular solutions we will introduce the solutions in the weak sense and the weak derivatives. These two are the main tools of Sobolev spaces which are going to define, along with some of their most important properties.

In order to apply the monotone operators, we will formulate the theorem of Minty-Browder which is critical in the theory of monotone operators. The theorem proves that the operator equation $Au = b$ has a unique solution and with the use of *The Galerkin Method*, we can find a sequence converging in that solution.
Finally, we will see how we can solve an elliptic quasi-linear partial deifferential equation using the Galerking method and applying the Minty-Browder theorem.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικοί ορισμοί

1.1 Αυτοπαθείς χώροι και κυρτά σύνολα

Για την διατύπωση των παρακάτω ορισμών ακολουθούμε τα [5], [1], [2]

Έστω X χώρος με νόρμα στον $\mathbb{R}$. Ο δυικός χώρος του X συμβολιζόμενος με X^*, αποτελείται από όλα τα γραμμικά συνεχή συναρτησιακά

$$f : X \to \mathbb{R}.$$

Ορίζουμε επίσης τον δεύτερο δυικό του X :

$$X^{**} := (X^*)^*$$

ο οποίος αποτελείται από όλα τα γραμμικά, συνεχή συναρτησιακά

$$F : X^* \to \mathbb{R}$$

Συμβολίζουμε για κάθε $f \in X^*$ και $u \in X$:

$$\langle f, u \rangle := f(u)$$

Την τιμή δηλαδή του συναρτησιακού f για κάποιο $u \in X$.

Ορισμός 1.1.
*Ένας χώρος με νόρμα X καλείται **αυτοπαθής** αν και μόνο αν για κάθε $F \in X^{**}$ ισχύει ότι:*

$$F(f) = \langle f, u \rangle \quad \text{για κάθε } f \in X^* \text{ και συγκεκριμένο } u \in X$$

Ορισμός 1.2.
*Ένα σύνολο C σε ένα γραμμικό χώρο καλείται **κυρτό** αν και μόνο αν για $u, v \in C$ και $t \in [0, 1]$ ισχύει:*

$$tu + (1 - t) \in C$$

Με άλλα λόγια αν τα σημεία u, v ανήκουν στο C τότε το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει ανήκει επίσης στο C.

Ορισμός 1.3.
Ένα συναρτησιακό $f : C \to \mathbb{R}$ όπου C είναι κυρτό σύνολο είναι κυρτό αν και μόνο αν

$$f((1 - t)u + tv) \leq (1 - t)f(u) + tf(v)$$

για κάθε $t \in [0, 1]$ και για κάθε $u, v \in C$.

1.2 Ασθενής σύγκλιση

Ορισμός 1.4. *Μια ακολουθία (u_n) στο χώρο Banach X λέγεται **ασθενώς συγκλίνουσα**:*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{καθώς } n \to \infty$$

Αν και μόνο αν:

$$\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle \quad \text{καθώς } n \to \infty \text{ για κάθε } f \in X^*.$$

Το επόμενο λήμμα αφορά τις υπακολουθίες και τις ιδιότητές τους ως προς την ασθενή σύγκλιση. Θα το χρησιμοποιήσουμε σε αρκετά σημεία στην πορεία.

Λήμμα 1.5. *Έστω μια ακολουθία (x_n) σε έναν πραγματικό χώρο Banach X. Τότε αυτή έχει τις ακόλουθες ιδιότητεσ:*

1. ***Ασθενής Σύγκλιση :*** *Έστω x ένα συγκεκριμένο σημείο στον X. Εάν κάθε υπακολουθία της (x_n), έχει με τη σειρά της μια υπακολουθία η οποία συγκλίνει ασθενώς στο x, τότε η αρχική ακολουθία συγκλίνει ασθενώς στο x:*

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{καθώς } n \to \infty$$

2. *Αν ο X είναι αυτοπαθής χώρος, τότε κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n) \in X$ έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $x_{n'}$:*

$$x_{n'} \rightharpoonup x \quad \text{καθώς } n \to \infty$$

3. *Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία σε έναν αυτοπαθή πραγματικό χώρο Banach X. Αν όλες οι ασθενώς συγκλίνουσες υπακολουθίες της (x_n) έχουν το ίδιο όριο x, τότε*

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{καθώς } n \to \infty$$

Η απόδειξη του παραπάνω λήμματος απατεί έννοιες τοπολογίας στις οποίες δεν είναι σκόπιμο να επεκταθούμε,καθώς θα απομακρυνθούμε αρκετά από το αντικείμενο της εργασίας.

1.3 Στοιχεία από τη θεωρία μέτρου

Στην πορεία θα αναφερθούμε συχνά σε έννοιες όπως μετρήσιμη συνάρτηση, μετρήσιμο σύνολο, σύνολο μηδενικού μέτρου κλπ. Οι έννοιες αυτές ανήκουν στην περιοχή της θεωρίας μέτρου και είναι χρήσιμο να αναλλώσουμε μερικές γραμμές στον ορισμό τους.
Σκοπός της Θεωρίας Μέτρου είναι να βρει μια μεγάλη ομάδα συνόλων στον $\mathbb{R}^N$, τα οποία έχουν μέτρο $measS$, όπου $0 \leq measS \leq \infty$. Η ποσότητα αυτή καλείται μέτρο Lebesgue και θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι μια γενίκευση της έννοιας του όγκου. Σύνολα τα οποία έχουν μέτρο τα λέμε μετρήσιμα.

Ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}^N$ λέμε ότι έχει μέτρο 0 **(σύνολο μηδενικού μέτρου)** αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μια οικογένεια μετρήσιμων κυβοειδών το πολύ πλήθους C_i τέτοιων ώστε $S \subseteq \bigcup_i C_i$ και $\sum_i measC_i \leq \epsilon$.

Παραδείγματα συνόλων μηδενικού μέτρου είναι ένα σύνολο πεπερασμένων σημείων στον $\mathbb{R}^N$ και οι κανονικές καμπύλες στους $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

Επίσης μια έννοια που θα χρησιμοποιούμε συχνά είναι η ¨**σχεδόν παντού**¨. Θα λέμε ότι μια ιδιότητα P είναι αληθής σχεδόν παντού αν και μόνο αν η P είναι αληθής για όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^N$ εκτός από ένα σύνολο μηδενικού μέτρου.

Περνάμε τώρα στον ορισμό των μετρήσιμων συναρτήσεων.

Στους παρακάτω ορισμούς θεωρούμε ότι ο Y είναι ένας χώρος Banach

Ορισμός 1.6. *Η συνάρτηση $f : M \subseteq \mathbb{R}^N \to Y$ λέγεται **κλιμακωτή συνάρτηση (step function)** αν και μόνο αν η f είναι σταθερή ανά τμήματα. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι το M είναι μετρήσιμο σύνολο και ότι υπάρχουν πεπερασμένα και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα M_i του M, τέτοια ώστε το μέτρο τους να είναι πεπερασμένο : $measM_i \leq \infty$ για όλα τα i και*

$$f(x) = \begin{cases} a_i & \text{αν } x \in M_i \text{ για όλα τα } i \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ορισμός 1.7. *Η συνάρτηση $f : M \subseteq \mathbb{R}^N \to Y$ με τιμές στον χώρο Banach Y είναι **μετρήσιμη** αν και μόνο αν ισχύουν τα παρακάτω:*

- *Το πεδίο ορισμού M είναι μετρήσιμο*
- *Υπάρχει μια ακολουθία (f_n) step functions*

$$f_n : M \to Y$$

  τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ σχεδόν παντού στο } M$$

Πρόταση 1.8. *Θέτω $F(x) = f(x, u(x))$. Αν η συνάρτηση $u : M \subseteq \mathbb{R}^N \to U$ είναι μετρήσιμη τότε, η $F : M \to Y$ είναι επίσης μετρήσιμη αν ικανοποιούνται οι παρακάτω υποθέσεις:*

- *Το σύνολο M είναι μετρήσιμο και οι χώροι Banach U, Y είναι πραγματικοί και διαχωρίσιμοι*
- *Η συνάρτηση $f : M \times U \to Y$ ικανοποιεί την συνάρτηση Καραθεοδωρή.*

Θα διατυπώσουμε το θεώρημα σύγκλισης του Lebesgue το οποίο αφορά τις μετρήσιμες συναρτήσεις και τα ολοκληρώματα.

Θεώρημα 1.9. *Αν οι παρακάτω προυποθέσεις ισχύουν:*

1. *$\|f_n(x)\| \leq g(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in M$ και για κάθε $x \in M$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η g είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.*
2. *Το $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει σχεδόν για κάθε $x \in M$, όπου $f_n : M \subseteq \mathbb{R}^N \to Y$ είναι μετρήσιμη για κάθε n.*

τότε ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n dx = \int_M \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx$$

Κεφάλαιο 2

Οι χώροι Sobolev

2.1 Χώροι Hölder

Θα ξεκινήσουμε την εισαγωγή στους χώρους Sobolev δίνοντας πρώτα μερικά στοιχεία των χώρων Hölder. Στους επόμενους ορισμούς καθώς και στο σύνολο της εργασίας θα υιοθετήσουμε τον συμβολισμό $D^a u$ για τις μερικές παραγώγους τάξης α, της συνάρτησης u.

Μια επέκταση της συνέχειας κατά Lipschitz είναι η συνέχεια κατά Hölder. Αν θεωρήσω ένα ανοιχτό υποσύνολο $U \subset \mathbb{R}^N$ και έναν πραγματικό αριθμό $0 < \gamma \leq 1$, τότε μια συνάρτηση $u \in U$ είναι συνεχής κατά Hölder με εκθέτη γ εάν ικανοποιεί τη σχέση

$$\left|u(x) - u(y)\right| \leq C\left|x - y\right|^{\gamma}$$

για κάθε $x, y \in U$.

Ορισμός 2.1. 1. *Αν η $u : U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και φραγμένη τότε γράφουμε*

$$\|u\|_{C(\bar{U})} := \sup_{x\in U}\left|u(x)\right|$$

2. *Η γ-Hölder ημινόρμα της $u : U \to \mathbb{R}$ είναι*

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \sup_{x,y\in U}\left\{\frac{\left|u(x) - u(y)\right|}{\left|x - y\right|^{\gamma}}\right\}$$

3. *Η γ-Hölder νόρμα είναι*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \|u\|_{C(\bar{U})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}$$

Δεδομένου του παραπάνω προχωράμε στον ορισμό των χώρων Hölder.

Ορισμός 2.2. *Ο χώρος Hölder $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $u \in C^k(\bar{U})$ για τις οποίες η παρακάτω νόρμα είναι πεπερασμένη.*

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} := \sum_{|a|\leq k} \left\|D^a u\right\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|a|=k} \left[D^a u\right]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η παραπάνω νόρμα είναι καλά ορισμένη. Είναι σημαντικό επίσης να σημειώσουμε ότι οι χώροι Hölder είναι Banach.

Ο χώρος που μας ενδιαφέρει περισσότερο για τη μετάβαση στους χώρους Sobolev είναι ο $C_0^\infty(G)$ στον οποίο ανήκουν οι απείρως παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα στο σύνολο G.
Με άλλα λόγια $C_0^\infty(G)$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $u \in C^\infty(G)$ οι οποίες έχουν τιμές μονάχα στο εσωτερικό ενός συμπαγούς υποσυνόλου K του G, ενώ στο $G \setminus K$ έχουν τιμή 0.

2.2 Χώροι L_p

Επειδή οι χώροι Sobolev είναι αλληλένδετοι με τις μετρήσιμες συναρτήσεις και κατ' επέκτασιν με τους χώρους L_p, κρίνεται αναγκαίο να δώσουμε σε αυτό το σημείο κάποια στοιχεία από τη θεωρία των χώρων Lebesgue.

Στους παρακάτω ορισμούς και όπου εμφανίζεται, το G είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ εφοδιασμένο με το μέτρο Lebesque.

Ορισμός 2.3. *Έστω $p \in \mathbb{R}$ με $1 \leq p < \infty$. Θέτουμε*

$$L_p(G) = \left\{f : G \to \mathbb{R} : f \ \text{ μετρήσιμη και } \ |f|^p \in L^1(G)\right\}$$

Θέτουμε επίσης

$$\left\|f\right\|_p = \left[\int_G \left|f(x)\right|^p dx\right]^{\dfrac{1}{p}}$$

Ο $L_1(G)$ είναι ο χώρος των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο G με τιμές στον $\mathbb{R}$ και η νόρμα του ορίζεται ως:

$$\left\|f\right\|_1 = \int_G |f(x)| dx$$

Στην περίπτωση που το p είναι μη πεπερασμένο ορίζουμε το χώρο ως εξής:

Ορισμός 2.4. *Θέτουμε*

$$L_\infty(G) = \left\{ f : G \to \mathbb{R} : f \ \text{ μετρησιμη και } \exists \text{ σταθερά } C \text{ τ.ω. } |f(x)| \leq C \ \text{ σχεδόν παντού στο } G \right\}$$

εφοδιάζουμε επίσης με τη νόρμα

$$\|f\|_\infty = \inf\left\{ C : |f(x)| \leq C \ \text{ σχεδόν παντού στο } G \right\}$$

Πριν δείξουμε ότι οι παραπάνω νόρμες είναι καλά ορισμένες οφείλουμε να ασχοληθούμε με την ανισότητα Hölder:

Θεώρημα 2.5. *Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Θα συμβολίσουμε με q τον συζυγή εκθέτη του p: $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Έστω $f \in L_p$ και $g \in L_q$. Τότε $f \cdot g \in L_1$ και*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$$

Απόδειξη. Στην περίπτωση όπου $p = 1$ και $p = \infty$ το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα. Περνάμε συνεπώς στην περίπτωση $1 < p < \infty$.
Παραθέτουμε σε αυτό το σημείο την ανισότητα Young:

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \tag{1}$$

για κάθε $a \geq 0$, $b \geq 0$. Μπορούμε να δείξουμε την παραπάνω ως εξής:
Επειδή η log είναι κοίλη στο $(0, \infty)$ ισχύει:

$$log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right) \geq \frac{1}{p} log(a^p) + \frac{1}{q} log(b^q) = log(ab)$$

Άρα αν αντικαταστήσουμε τους a, b με τις απόλυτες τιμές των συναρτήσεων f, g, λαμβάνουμε:

$$|f(x)|\,|g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q \tag{2}$$

σχεδόν παντού στο G.

Βλέπουμε ότι fg είναι ολοκληρώσιμη ποσότητα και συνεπώς $fg \in L_1$. Ολοκληρώνοντας λοιπόν την παραπάνω ανίσωση παίρνουμε

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p} \|f\|_{L_p}^p + \frac{1}{q} \|g\|_{L_q}^q$$

Επιλέγουμε τώρα κάποιο $\lambda > 0$ και αντικαθιστούμε στην ανίσωση την f με λf:

$$\int |fg| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_{L_p}^p + \frac{1}{\lambda q} \|g\|_{L_q}^q$$

Αν πάρουμε ένα $\lambda = \dfrac{\|g\|_{L_q}^{q/p}}{\|f\|_{L_p}}$ βλέπουμε ότι το δεξί μέλος ελαχιστοποιείται και εν τέλει καταλήγουμε στη ζητούμενη ανισότητα.

□

Με τη χρήση της ανισότητας Hölder θα δείξουμε ότι οι χώροι L_p είναι γραμμικοί και ότι η νόρμα είναι καλά ορισμένη.

Απόδειξη. Στην περίπτωση όπου $p = 1$ έχουμε

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)|dx$$

Προφανώς οι πρώτες ιδιότητες της νόρμας ισχύουν, ενώ για την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\|f+g\|_{L_1} = \int_G |f+g|dx \leq \int_G |f(x)|dx + \int_G |g(x)|dx = \|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}$$

Για την περίπτωση που έχουμε $p = \infty$ παρατηρούμε αρχικά ότι αν $f \in L_\infty$ τότε υπάρχει ακολουθία C_n τέτοια ώστε $C_n \to \|f\|_{L_\infty}$ και για κάθε n $|f(x)| \leq C_n$ σχεδόν παντού στο G δηλαδή $|f(x)| \leq C_n$ για κάθε $x \in G \setminus E_n$ με E_n μηδενικού μέτρου. Αν πάρουμε λοιπόν την ένωση ως $E = \bigcup_n E_n$, τότε το E είναι επίσης μηδενικού μέτρου οπότε έχουμε:

$$|f(x)| \leq C_n \text{ για κάθε } x \in G \setminus E, n$$

Άρα σύμφωνα με τον τρόπο που έχουμε ορίσει τη νόρμα έχουμε

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L_\infty}$$

σχεδόν παντού στο G.

Δεδομένου αυτού και της καλά ορισμένης νόρμας στον L_1 προκύπτει ότι η νόρμα στον L_∞ είναι επίσης καλά ορισμένη.

Ας πάμε στην περίπτωση τώρα όπου $1 < p < \infty$. Έστω $f, g \in L_p$. Έχω:

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

Δηλαδή $f + g \in L_p$ και συνεπώς είναι γραμμικός ο χώρος. Για την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\|f+g\|_{L_p}^p = \int |f+g|^{p-1}|f+g| \leq \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g|$$

Λόγω του συζυγή εκθέτη ισχύει $|f+g|^{p-1} \in L_q$ και από την ανισότητα Hölder παίρνουμε:

$$\|f+g\|_{L_p}^p \leq \|f+g\|_{L_p}^{p-1}\|f\|_{L_p} + \|f+g\|_{L_p}^{p-1}\|g\|_{L_p}$$

Η ισοδύναμα

$$\|f+g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$$

□

Να σημειώσουμε επίσης ότι οι χώροι L_p είναι Banach για κάθε $1 \leq p \leq \infty$.

Θεώρημα 2.6. ***(Θεώρημα σύγκλισης)***
Έστω $1 \leq p < \infty$ και έστω G ένα μη κενό μετρήσιμο σύνολο στον $\mathbb{R}^N, N \geq 1$. Αν

$$u_n \to u \ \text{ στον } L^p(G) \text{ καθώς } n \to \infty$$

Υπάρχει μια ακολουθία $(u_{n'})$ και μια συνάρτηση $v \in L^p(G)$ με

$$u_{n'}(x) \to u(x) \ \text{ καθώς } n \to \infty \text{ για σχεδόν κάθε } x \in G$$

και $|u_{n'}(x)| \leq v(x)$ για σχεδόν κάθε $x \in G$ και κάθε n.

2.3 Ασθενείς Παράγωγοι

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $u \in C^1(G)$. Τότε για κάποια συνάρτηση $\phi \in C_0^\infty(G)$ ισχύει:

$$\int_G u\phi_{x_i} dx = -\int_G u_{x_i}\phi dx \quad (i = 1, ..., n)$$

Το παραπάνω έχει προκύψει από ολοκλήρωση κατά παράγοντες και δεδομένου ότι η συνάρτηση ϕ έχει συμπαγή φορέα στο G πράγμα που σημαίνει ότι μηδενίζεται κοντά στο σύνορο του συνόλου. Γι αυτό το λόγο οι ποσότητες του συνόρου απαλείφονται.

Γενικότερα αν η u είναι περισσότερες φορές παραγωγίσιμη, δηλαδή $u \in C^k(G)$ και αν $a = (a_1 ... a_n)$ είναι ένας πολυδείκκτης τάξης $|a| = a_1 + ... + a_n = k$. Δεδομένου ότι

$$D^a\phi = \frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}} \cdots \frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}}\phi$$

κάνοντας διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες, δηλαδή με χρήση του θεωρήματος Gauss έχουμε:

$$\int_G uD^a\phi dx = (-1)^{|a|}\int_G D^a u\phi dx \tag{3}$$

Παρόμοια κι εδώ λόγω του συμπαγούς φορέα της ϕ οι όροι του συνόρου απαλείφονται.

Εάν τώρα στην παραπάνω ισότητα θέσουμε $w = D^a u$ τότε έχουμε:

$$\int_G uD^a\phi dx = (-1)^{|a|}\int_G w\phi dx \tag{4}$$

για κάθε $\phi \in C_0^\infty(G)$.

Για ένα μη κενό, ανοιχτό σύνολο G στον $\mathbb{R}^N$ με $N \geq 1$ και $u, w \in L^1_{loc}(G)$, η w είναι **ασθενής παράγωγος** της u αν και μόνο αν ικανοποιείται η (4). Καλούμε την ϕ συνάρτηση δοκιμής **(test function)**.

Επίσης ο χώρος $L^1_{loc}(G)$ ορίζεται ως:

$$L^1_{loc}(G) = \Big\{u : G \to \mathbb{R} \Big| u \in L^p(V) \quad \text{για κάθε} \quad V \subset\subset G\Big\} \tag{5}$$

Συναρτήσεις που ανήκουν στον παραπάνω χώρο μπορούμε να τις καλούμε και τοπικά ολοκληρώσιμες καθώς είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του συνόλου G.
Αν δηλαδή δοθείσας συνάρτησης u υπάρχει συνάρτηση w η οποία να ικανοποιεί την σχέση (4), τότε λέμε ότι $D^a u = w$ με την ασθενή έννοια. Εάν δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση τότε η u δεν έχει ασθενή μερική παράγωγο a τάξης.

Λήμμα 2.7. *Μια ασθενής παράγωγος a τάξης μιας συνάρτησης u, εάν υπάρχει, προσδιορίζεται μοναδικά αγνοώντας τα σύνολα μηδενικού μέτρου.*

Απόδειξη. Υποθέτω ότι οι συναρτήσεις $\upsilon, \bar{\upsilon} \in L^1_{loc}(G)$ ικανοποιούν την

$$\int_G u D^a \phi dx = (-1)^{|a|} \int_G \upsilon \phi dx = (-1)^{|a|} \int_G \bar{\upsilon} \phi dx$$

για κάθε $\phi \in C_0^\infty(G)$. Τότε για κάθε $\phi \in C_0^\infty(G)$

$$\int_G (\upsilon - \bar{\upsilon}) \phi dx = 0 \Leftrightarrow \upsilon - \bar{\upsilon} = 0$$

□

2.4 Χώροι Sobolev

Δεδομένων των παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε τους χώρους Sobolev. Θα ορίσουμε αρχικά τον $W^{m,p}$ και στη συνέχεια θα ασχοληθούμε εκτενέστερα με τους $W^{1,p}$ και $W_0^{1,p}$ που θα χρειαστούμε κυρίως στην πορεία.

Ορισμός 2.8. *Έστω G ένα μη κενό σύνολο στον $\mathbb{R}^N$ με $N \geq 1$. Έστω $1 \leq p < \infty$ και $m = 1, 2, ...$*
Ο χώρος Sobolev $W^{m,p}(G)$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $u \in L^p(G)$ οι οποίες έχουν ασθενείς παραγώγους μέχρι και τάξης m τέτοιες ώστε

$$D^a u \in L^p(G)$$

για κάθε πολυδείκτη $a : |a| \leq m$.

Για $m = 0$ ο $W^{0,p}(G)$ ταυτίζεται με τον $L^p(G)$

Εφοδιάζουμε τον χώρο $W^{m,p}(G)$ με τη νόρμα:

$$||u||_{W^{m,p}} = \left(\sum_{0 \leq |a| \leq m} \int_G \Big| D^a u(x)|^p dx \Big| \right)^{1/p} \tag{6}$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η νόρμα των χώρων Sobolev εκφράζεται ουσιαστικά με τη χρήση της νόρμας των χώρων L^p.
Δείχνουμε τώρα ότι η νόρμα είναι καλά ορισμένη:

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι $\|\lambda u\|_{W^{m,p}} = \lambda \|u\|_{W^{m,p}}$.
Καθώς επίσης και ότι $\|u\|_{W^{m,p}(G)} = 0$ αν και μόνο αν $u = 0$ σχεδόν παντού.

Έστω τώρα $u, v \in W^{m,p}(G)$. Τότε αν $1 \leq p \leq \infty$ από την ανισότητα Minkowski προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{W^{m,p}(G)} &= \left(\sum_{|a|\leq m} \left\| D^a u + D^a v \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{|a|\leq m} \left(\left\| D^a u \right\|_{L^p} + \left\| D^a v \right\|_{L^p} \right)_{L^p}^p \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{|a|\leq m} \left\| D^a u \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{|a|\leq m} \left\| D^a v \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \\
&= \|u\|_{W^{m,p}} + \|v\|_{W^{m,p}}
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 2.9. *Για κάθε $m = 1, 2, ..$ και $1 \leq p \leq \infty$ ο χώρος Sobolev $W^{m,p}$ είναι Banach.*

Απόδειξη. Έστω $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία Cauchy στον $W^{m,p}(G)$. Τότε για κάθε $|a| \leq m$ η $(D^a u_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $L^p(G)$. Εφόσον ο $L^p(G)$ είναι πλήρης υπάρχουν συναρτήσεις $u_a \in L^p(G)$ τέτοιες ώστε

$$D^a u_n \to u_a$$

στον $L^p(G)$ για κάθε $|a| \leq m$
Επίσης για την πρώτη παράγωγο $a = 0$ έχω

$$u_n \to u_{(0,\ldots,0)}$$

ή ισοδύναμα

$$u_n \to u \text{ στον } L^p(G)$$

Έστω μια συνάρτηση δοκιμής $\phi \in C_0^{\infty}(G)$, τότε:

$$\begin{aligned}
\int_G u D^a \phi dx &= \lim_{n\to\infty} \int_G u_n D^a \phi dx \\
&= \lim_{n\to\infty} (-1)^{|a|} \int_G D^a u_n \phi dx \\
&= (-1)^{|a|} \int_G u_a \phi dx
\end{aligned}$$

Συνεπώς η συνάρτηση u ανήκει στον $W^{m,p}$. Επιπλέον αφού $D^a u_n \to D^a u$ στον $L^p(G)$ για κάθε $|a| \leq m$ βλέπουμε ότι $u_n \to u$ στον $W^{m,p}$. □

Ο χώρος $W^{1,p}$ είναι Banach για $1 \leq p \leq \infty$, ανακλαστικός για $1 < p < \infty$ και διαχωρίσιμος για $1 \leq p < \infty$.

Ορισμός 2.10. *Ο χώρος $W_0^{m,p}$ δηλώνει την κλειστότητα του C_0^∞ στον $W^{m,p}$*

Δηλαδή αν πάρουμε συνάρτηση $u \in W^{m,p}$, τότε η u ανήκει στον $W_0^{m,p}(G)$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(u_n) \in C_0^\infty$ με $\|u_n - u\|_{m,p} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Προκύπτει επίσης ότι ο $C_0^\infty(G)$ είναι πυκνός στον $W_0^{1,p}$.

Ο χώρος $W_0^{1,p}$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach για $1 \leq p < \infty$ και ανακλαστικός για $1 < p < \infty$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει μία πιο πρακτική προσέγγιση στους χώρους $W_0^{1,p}$.

Θεώρημα 2.11. *Υποθέτουμε ότι το G είναι τάξεως C^1. Έστω*

$$u \in W^{1,p}(G) \cap C(\bar{G}) \text{ με } 1 \leq p < \infty$$

Τότε οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμεσ:

1. *$u = 0$ στο σύνορο*
2. *$u \in W_0^{1,p}(G)$*

Αυτός είναι και ο λόγος που ο χώρος $W_0^{1,p}$ χρησιμοποιείται κυρίως σε διαφορικές εξισώσεις με συνοριακές συνθήκες στις οποίες η συνάρτηση u μηδενίζεται στο σύνορο ∂G.

2.5 Θεώρημα ενσφήνωσης

Ορισμός 2.12. *Έστω X, Y δύο χώροι Banach πάνω στον $\mathbb{R}$ με $X \subseteq Y$. Ο τελεστής ενσφήνωσης $j : X \to Y$ ορίζεται ως $j(u) = u$ για κάθε $u \in X$. Δύο βασικές ιδιότητες της ενσφήνωσης είναι:*

Η ενσφήνωση $X \subseteq Y$ καλείται συνεχής αν και μόνο αν ο j είναι συνεχής, δηλαδή

$$\|u\|_Y \leq const\|u\|_X$$

για κάθε $u \in X$

Η ενσφήνωση $X \subseteq Y$ καλείται συμπαγής αν και μόνο αν ο j είναι συμπγής, δηλαδή αν είναι συνεχής και επιπλέον κάθε φραγμένη ακολουθία u_n στον X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στον Y.

Αυτό που επιτυγχάνουμε ουσιαστικά με την ενσφήνωση είναι κάθε $u \in X$ να μεταφέρεται μέσω του τελεστή j στην ίδια συνάρτηση $u \in Y$.

Θεώρημα 2.13. ***(Θεώρημα ενσφήνωσης Sobolev)***
Έστω $G \subset \mathbb{R}^N$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ με λείο σύνορο ∂G.

Αν $1 \leq p < N$ τότε για κάθε q^* με $1 \leq q^* \leq \dfrac{Np}{N-p}$ η ενσφήνωση

$$W_0^{1,p}(G) \subseteq L^{q^*}(G)$$

είναι συνεχής

Εάν $q^* \leq \dfrac{Np}{N-p}$ τότε η ενσφήνωση

$$W_0^{1,p}(G) \subseteq L^{q^*}(G)$$

είναι συμπαγής.

Ως άμεσο αποτέλεσμα του παραπάνω είναι ότι η ενσφήνωση

$$W_0^{1,p}(G) \subseteq L^2(G) \tag{7}$$

είναι συνεχής για $2 \leq p < \infty$

Για τους χώρους Hölder και Lebesgue ακολουθήσαμε το [4]. Για τους χώρους Sobolev τα [5] και [1]

Κεφάλαιο 3

Οι μονότονοι τελεστές

Θα δούμε σε αυτό το κεφάλαιο ορισμένες από τις ιδιότητες των μονότονων τελεστών, οι οποίοι αποτελούν σημαντικό κομμάτι της παρούσας εργασίας. Διατυπώνουμε τους ορισμούς με βάση το [1]

3.1 Διατύπωση βασικών ορισμών και ιδιοτήτων

Ορισμός 3.1. *Έστω X πραγματικός χώρος Banach και $A : X \to X^*$ τελεστής. Τότε:*

*i) Ο A καλείται **μονότονος** αν και μόνο αν*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0 \quad \text{για κάθε} \quad u, v \in X \tag{1}$$

*ii) Ο A καλείται **γνησίως μονότονος (strictly monotone)** αν και μόνο αν:*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0 \quad \text{για κάθε} \quad u, v \in X \quad \text{με} \;\; u \neq v \tag{2}$$

*iii) Ο A λέγεται **ισχυρά μονότονος (strongly monotone)** αν και μόνο αν υπάρχει $c > 0$, τέτοιο ώστε:*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq c\|u - v\|^2 \quad \text{για κάθε} \quad u, v \in X \tag{3}$$

*iv) Ο A λέγεται **πιεστικός (coercive)** αν και μόνο αν:*

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = +\infty \tag{4}$$

*v) Ο A καλείται **ομοιόμορφα μονότονος (uniformly monotone)** αν και μόνο αν:*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq a(\|u - v\|)\|u - v\| \quad \text{για κάθε} \;\; u, v \in X \tag{5}$$

η $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση με $a(0) = 0$ και $a(t) \to +\infty$ καθώς $t \to \infty$

Ισχύουν επίσης οι ακόλουθες συνεπαγωγές, οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό:

$$\begin{aligned}&\text{A ισχυρά μονότονος} \Rightarrow \text{A ομοιόμορφα μονότονος} \Rightarrow\\&\Rightarrow \text{A γνησίως μονότονος} \Rightarrow \text{A μονότονος}\end{aligned}$$

Επιπλέον εάν ο τελεστής A είναι ομοιόμορφα μονότονος τότε είναι και πιεστικός:

$$\langle Au, u\rangle = \langle Au - A(0), u\rangle + \langle A(0), u\rangle \geq a\Big(\|u\|\Big)\|u\| - \|A(0)\|\,\|u\|$$

και καθώς $\|u\| \to \infty$

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} \geq \lim_{\|u\|\to\infty} \Big(a(\|u\|) - \|A(0)\|\Big) = +\infty$$

επειδή η a είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

Θα δώσουμε σε αυτό το σημείο ένα παράδειγμα μονότονου τελεστή, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα στην εφαρμογή της μεθόδου Galerking και των μονότονων τελεστών στο πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Παράδειγμα 3.2. *Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως εξής:*

$$g(u) = \begin{cases} |u|^{p-2}u & \text{αν } u \neq 0 \\ 0 & \text{αν } u = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Θα δείξουμε ότι ο g είναι ομοιόμορφα μονότονος για $p \geq 2$ και $c > 0$. Τότε θα είναι και γνησια μονότονος και μονότονος. Θέλουμε να καταλήξουμε σε έκφραση της μορφής:

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq a(\|u - v\|)\|u - v\|$$

ή ισοδύναμα στην περίπτωσή μας

$$(g(u) - g(v))(u - v) \geq a(\|u - v\|)\|u - v\| \tag{7}$$

Έχουμε λοιπόν στην πρώτη περίπτωση για $0 \leq v \leq u$

$$|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v = |u|^{p-1} - |v|^{p-1} = u^{p-1} - v^{p-1} =$$

$$= \int_0^{u-v} (p-1)(t+v)^{p-2}dt \geq \int_0^{u-v} (p-1)t^{p-2}dt = (u-v)^{p-1} \Rightarrow$$

$$|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v \geq |u - v|^{p-1}$$

ή ισοδύναμα

$$(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v) \geq c|u-v|^p|u-v|$$

Στην περίπτωση τώρα που $v \leq 0 \leq u$, το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την ανίσωση, στην οποία οι όροι $\xi_1, ..\xi_N$ είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και ο εκθέτης $0 < r < \infty$

$$(\sum_{i=1}^{N} \xi_i)^r \leq c \sum_{i=1}^{N} \xi_i^r \tag{8}$$

Ξεκινώντας από το πρώτο μέλος της (7), με την εφαρμογή της (8) προκύπτει

$$u^{p-1} + |v|^{p-1} \geq c(u+|v|)^{p-1}$$

Έχουμε δείξει και στις δύο περιπτώσεις ότι η g είναι ομοιόμορφα μονότονη, δηλαδή γνησίως μονότονη και μονότονη.

Προχωράμε στους ορισμούς της συνέχειας.

Ορισμός 3.3. *Έστω $A : X \to X^*$ τελεστής στον πραγματικό χώρο Banach X.*
i) Ο A είναι ***hemicontinuous*** *αν και μόνο αν η*

$$t \mapsto \langle A(u+tv), w \rangle$$

είναι συνεχής στο $[0,1]$ για κάθε $u, v, w \in X$.

ii) Ο A είναι ***demicontinuous*** *αν και μόνο αν*

$$u_n \to u \quad \textit{καθώς } n \to \infty \quad \textit{συνεπάγεται}$$
$$Au_n \rightharpoonup Au \quad \textit{καθώς } n \to \infty$$

iii) Ο A είναι ***strongly continuous*** *αν και μόνο αν*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{καθώς } n \to \infty$$
$$\textit{συνεπάγεται} \quad Au_n \to Au \quad \textit{καθως } n \to \infty$$

iv) Ο A είναι ***bounded*** *αν και μόνο αν μεταφέρει φραγμένα σύνολα σε φραγμένα σύνολα.*

v) Ο A είναι ***τοπικά φραγμένος*** *αν για κάθε $u \in X$ υπάρχει μια γειτονιά $U(u)$ τέτοια ώστε το $A(U(u))$ να είναι τοπικά φραγμένο.*

3.2 Πορίσματα από τη θεωρία των μονότονων τελεστών

Θα διατυπώσουμε σε αυτό το σημείο το ακόλουθο λήμμα, το οποία παίζει σημαντικό ρόλο στα προβλήματα των μη γραμμικών μονότονων τελεστών και θα την χρησιμοποιήσουμε σε αρκετά σημεία στην πορεία της εργασίας.

Λήμμα 3.4. *Έστω $A : X \to X^*$ μονότονος και hemicontinuous τελεστής στον πραγματικό χώρο Banach.*

α) Ο A είναι maximal monotone, δηλαδή:

$$\langle b - Av, u - v \rangle \geq 0$$

για κάθε $v \in X$ και συγκεκριμένες $u \in X$, $b \in X^*$ συνεπάγεται $Au = b$

β) Αν ισχύουν

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{στον } X \quad \text{καθώς } n \to \infty \\ Au_n &\rightharpoonup b \ \text{ στον } X^* \quad \text{καθώς } n \to \infty \end{aligned}$$

και

$$\langle Au_n, u_n \rangle \to \langle b, u \rangle \ \text{ καθώς } n \to \infty$$

ή γενικότερα

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle Au_n, u_n \rangle \leq \langle b, u \rangle$$

τότε $Au = b$

γ) Αν ισχύει μία εκ των δύο συνθηκών:

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \ \text{ στον } X \ \text{ καθώς } n \to \infty \ \text{ και} \\ Au_n &\to b \ \text{ στον } X^* \ \text{ καθώς } n \to \infty \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} u_n &\to u \ \text{ στον } X \ \text{ καθώς } n \to \infty \ \text{ και} \\ Au_n &\rightharpoonup b \ \text{ στον } X^* \ \text{ καθώς } n \to \infty \end{aligned}$$

τότε $Au = b$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του (α) θέτουμε $v = u - tw$, όπου $t > 0$ και $w \in X$. Τότε η συνθήκη

$$\langle b - Av, u - v \rangle \geq 0$$

γίνεται

$$\langle b - A(u - tw), w \rangle \geq 0$$

(α) Ο Α είναι hemicontinuous και μπορώ να πάρω το $t \to 0$, από το οποίο προκύπτει:

$$\langle b - Au, w \rangle \geq 0 \;\; \text{για κάθε} \;\; w \in X$$

Το παραπάνω θα ισχύει συνεπώς και για $-w$, δηλαδή

$$\langle b - Au, -w \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle b - Au, w \rangle \leq 0$$

Συνεπώς προκύπτει

$$\langle b - Au, w \rangle = 0$$

για κάθε $w \in X$ δηλαδή $b - Au = 0 \Leftrightarrow b = Au$.

(β),(γ) Ο τρόπος που θα εργαστούμε για τα (β),(γ) είναι ίδιος. Από τη μονοτονία του A έχουμε ότι:

$$\langle Au_n, u_n \rangle - \langle Au, u_n \rangle - \langle Au_n - Av, v \rangle = \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle \geq 0$$

για κάθε $v \in X$. Αν πάρω στην παραπάνω ανίσωση το όριο $n \to \infty$ τότε

$$\langle b, u \rangle - \langle Av, u \rangle - \langle b - Av, v \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle b - Av, u - v \rangle \geq 0$$

για κάθε $v \in X$. Τώρα όμως από το α, ο A είναι maximal monotone και συνεπώς $Au = b$. $\square$

Η επόμενη πρόταση συνδέει τους μονότονους τελεστές με τη συνέχεια. Πριν προχωρήσουμε όμως σε αυτή θα παραθέσουμε το θεώρημα Banach-Steinhaus (χωρίς απόδειξη) του οποίου και κάνει χρήση.

Θεώρημα 3.5. *[Banach Steinhaus]*
Έστω X, Y χώροι Banach και $A_n : X \to Y$ οικογένεια γραμμικών και συνεχών τελεστών για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτω ότι

$$\sup_n \|A_n x\| < \infty \qquad \text{για κάθε} \;\; x \in X$$

Τότε

$$\sup_n \|A_n\| < \infty$$

Πρόταση 3.6. *Έστω $A : X \to X^*$ ένας τελεστής στον πραγματικό χώρο Banach.*
α) Αν ο A είναι μονότονος, τότε είναι και τοπικά φραγμένος.
β) Αν ο A είναι μονότονος και hemicontinuous στον πραγματικό και ανακλαστικό χώρο Banach, τότε ο A είναι demicontinuous.

Απόδειξη.
α)Έστω ότι ο A είναι μονότονος και υποθέτουμε ότι δεν είναι τοπικά φραγμένος. Υπάρχει συνεπώς σημείο $u \in X$ και μια ακολουθία

$$u_n \text{ με } u_n \to u \text{ και } \|Au_n\| \to \infty \text{ καθώς } n \to \infty$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το σημείο είναι το $u = 0$ και θέτουμε

$$a_n = (1 + \|Au_n\|\|u_n\|)^{-1}$$

Επειδή ο A είναι μονότονος ισχύει ότι $\langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geq 0$, και μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{gathered}\langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle Au_n, u_n, v\rangle - \langle Av, u_n - v\rangle = \\ \langle Au_n, u_n\rangle - \langle Au_n, v\rangle - \langle Av, u_n - v\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \\ \langle Au_n, v\rangle \leq \langle Au_n, u_n\rangle - \langle Av, u_n - v\rangle\end{gathered}$$

Σύμφωνα με αυτό ισχύει

$$\begin{aligned}\pm a_n\langle Au_n, v\rangle &\leq a_n(\langle Au_n, u_n\rangle - \langle A(\pm u), u_n \mp v\rangle) \\ &\leq a_n(\|Au_n\|\|u_n\| + \|A(\pm u)\|\|u_n \mp v\|)\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\sup_n |\langle a_n Au_n\rangle| \leq \infty \quad \text{για κάθε } v \in X$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Banach-Steinhaus που διατυπώσαμε νωρίτερα ισχύει

$$\sup_n \|a_n Au_n\| \leq \infty$$

και συνεπώς υπάρχει αριθμός N τέτοιος ώστε

$$\sup_n \|a_n Au_n\| \leq N$$

Επίσης

$$a_n\|Au_n\| \leq N \Rightarrow \|Au_n\| \leq a_n^{-1}N = (1 + \|Au_n\|\|u_n\|)N \quad \text{για κάθε } n$$

Εφόσον $\|u_n\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$ η ακολουθία $\|Au_n\|$ είναι φραγμένη, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεσή μας, ότι δηλαδή $\|Au_n\| \to \infty$ καθώς $n \to \infty$.

β) Έστω ακολουθία (u_n) του X και $u_n \to u$ καθώς $n \to \infty$. Επειδή ο A είναι μονότονος, όπως είδαμε στο (α) είναι και τοπικά φραγμένος. Συνεπώς αφού η (u_n) είναι φραγμένη στον X, η Au_n είναι επίσης φραγμένη στον X^*. Η u_n τώρα είναι φραγμένη ακολουθία στον ανακλαστικό χώρο X και συνεπώς σύμφωνα με το Λήμμα (1.5) έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία έστω $u_{n'} \rightharpoonup u$. Ο X^* είναι επίσης ανακλαστικός χώρος και η Au_n έχει επίσης ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $Au_{n'}$ με

$$(Au_{n'}) \rightharpoonup b \text{ καθώς } n \to \infty$$

Τώρα όμως

$$\langle Au_{n'}, u_{n'} \rangle \to \langle b, u \rangle \quad \text{καθώς } n \to \infty$$

Από το λήμμα (5.4) προκύπτει λοιπόν ότι $Au = b$.
Η (Au_n) είναι φραγμένη και συγκλίνει στο Au. Η $Au_{n'}$ συγκλίνει επίσης στο Au, άρα $Au_n \rightharpoonup Au$ σύμφωνα με το Λήμμα (1.5).

□

Κεφάλαιο 4

Μονότονοι τελεστές και συνοριακά προβλήματα

4.1 Θεώρημα σταθερού σημείου Brower

Αρχικά θα διατυπώσουμε το θεώρημα σταθερού σημείου Brower και ύστερα με χρήση του, θα δείξουμε ότι το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων $g_i(x) = 0$ έχει λύση. Για περαιτέρω μελέτη παραπέμπουμε τον αναγνώστη στη βιβλιογραφία [1].

Ορισμός 4.1. *Έστω $f : X \to X$ συνάρτηση και έστω $x_0 \in X$. Το x_0 λέγεται **σταθερό σημείο** της f αν ισχύει $f(x_0) = x_0$.*

Ορισμός 4.2. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $r : X \to M$ μια συνεχής απεικόνιση με $M \subseteq X$. Η απεικόνιση r καλείται περιστολή αν και μόνο αν $r(x) = x$ για κάθε $x \in M$. Το σύνολο M είναι περιστολή του χώρου X.*

Η επόμενη πρόταση παίζει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου Brouwer. Παρατίθεται ωστόσο δίχως απόδειξη καθώς εμπεριέχει στοιχεία τοπολογίας στα οποία δεν είναι σκόπιμο να επεκταθούμε.

Πρόταση 4.3.
α) *Κάθε κλειστό, κυρτό υποσύνολο M ενός μετρικού χώρου X είναι περιστολή.*
β) *Το σύνορο $\partial U(x_0, R)$ της N-διάστατης κλειστής μπάλας $\overline{U}(x_0, R)$ με ακτίνα $R > 0$ και $N \geq 1$ δεν είναι περιστολή της $\overline{U}(x_0, R)$.*

Συνεπώς δεν υπάρχει απεικόνιση f από την κλειστή μπάλα στο σύνορο της τέτοια ώστε για κάθε στοιχείο a του συνόρου να ισχύει $f(a) = a$. Μπορούμε πλέον να διατυπώσουμε το θέωρημα σταθερού σημείου Brouwer

Θεώρημα 4.4 «Σταθερου σημείου Browder».
Υποθέτουμε ότι M είναι ένα μη κενό, κυρτό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ όπου $N \geq 1$ και $f : M \to M$ είναι συνεχής απεικόνιση. Τότε η f έχει σταθερό σημείο.

Απόδειξη. Η απόδειξη αποτελείται από δύο σκέλη. Στο πρώτο σκέλος αποδεικνύεται το ζητούμενο υποθέτοντας ότι το σύνολο M είναι μπάλα ακτίνας R και στη συνέχεια αποδεικνύουμε τη γενική περίπτωση.

Έστω λοιπόν ότι $M = B$, δηλαδή το σύνολο M είναι η κλειστή μπάλα ακτίνας $R > 0$. Υποθέτουμε τώρα ότι η απεικόνιση $f : B \to B$ δεν έχει σταθερό σημείο, δηλαδή για κάθε $x \in B$ ισχύει $f(x) \neq x$. Μπορούμε συνεπώς να κατασκευάσουμε μία περιστολή $r : B \to \partial B$ ως εξής: Για κάθε x, φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα από την $f(x)$ στο x και προεκτείνουμε. Το σημείο τομής με το σύνορο της μπάλας είναι το $r(x)$. Στην περίπτωση που το x βρίσκεται όμως στο σύνορο τότε η $r : B \to \partial B$ είναι περιστολή κάτι το οποίο είναι άτοπο από την (4.1.β).

Στη γενική περίπτωση τώρα, έχουμε σύνολο M και θεωρούμε B μια κλειστή μπάλα που το περιέχει. Με βάση το (4.1.α) επειδή M είναι υποσύνολο της B, υπάρχει περιστολή $r : B \to M$. Η σύνθεση $B \xrightarrow{r} M \xrightarrow{f} M \subseteq B$ προκύπτει από το πρώτο σκέλος της απόδειξης ότι έχει σταθερό σημείο. Αυτό συμβαίνει διότι μέσω της r πηγαίνουμε από ένα σημείο της B σε ένα σημείο $r(x)$ του M, για το οποίο ισχύει $r(x) = x$ καθώς η r είναι περιστολή. Ύστερα μέσω της f πηγαίνουμε από το σημείο $r(x)$ σε ένα επίσης σημείο $f(r(x))$ του M και επειδή το M είναι υποσύνολο της κλειστής μπάλας έχει σταθερό σημείο $x = f(r(x))$. Τα σημεία $B \setminus M$ δεν είναι σταθερά και για κάθε $x \in M$ ισχύει $r(x) = x$ και $f(x) = x$. □

Έχοντας αποδείξει το θεώρημα σταθερού σημείου μπορούμε να προχωρήσουμε σε ένα θεώρημα ύπαρξης λύσης του συστήματος στο οποίο οι g_i είναι συνεχείς συναρτήσεις.

$$g_i(x) = 0 \quad \text{όπου} \quad x = (\xi_1, ..., \xi_N) \in \mathbb{R}^N \qquad\qquad i = 1, ..., N \tag{1}$$

και δεδομένης της συνοριακής συνθήκης:

$$\sum_{i=1}^{N} g_i(x)\xi_i \geq 0, \qquad \text{για κάθε } x \text{ με } \|x\| = R. \tag{2}$$

Το σύστημα (4.1) είναι ιδιαίτερα σημαντικό για την μέθοδο Galerkin για μονότονους τελεστές που θα χρησιμοποιήσουμε στις επόμενες σελίδες.

Πρόταση 4.5. *Έστω $\overline{U}(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq R\}$ για σταθερό $R > 0$ και $\|\cdot\|$ μία νόρμα στον $\mathbb{R}^N$. Έστω επίσης $g_i : \overline{U}(0, R) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για κάθε $i = 1, ..., N$. Εάν ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη (4.2), τότε το πρόβλημα (4.1) έχει λύση x με $\|x\| \leq R$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $g(x) = (g_1(x), ..., g_N(x))$ και υποθέτουμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \overline{U}(0, R)$.
Ορίζουμε τώρα συνάρτηση

$$f(x) = -\frac{Rg(x)}{\|g(x)\|}.$$

Η f είναι συνεχής απεικόνιση του συμπαγούς και κυρτού συνόλου $\overline{U}(0, R)$ στον εαυτό του. Πρόκειται για συμπαγές σύνολο εφόσον η μπάλα είναι κλειστή και φραγμένη. Από το θεώρημα σταθερού σημείου υπάρχει σταθερό σημείο $x = f(x)$.
Παίρνοντας τις νόρμες στην συνάρτηση f προκύπτει ότι $\|x\| = R$. Επίσης δεδομένου του σταθερού σημείου $f_i(x) = \xi_i$:

$$\sum_i g_i(x)\xi_i = -R^{-1}\|g(x)\| \sum_i f_i(x)\xi_i = -R^{-1}\|g(x)\| \sum_i \xi_i^2 < 0$$

κάτι το οποίο είναι άτοπο εξαιτίας της συνοριακής συνθήκης. □

4.2 Κατασκευή των εξισώσεων Galerkin

Το θεώρημα Minty-Browder το οποίο θα διατυπώσουμε βασίζεται κατά κύριο λόγο στην ύπαρξη και σύγκλιση των λύσεων των εξισώσεων που προκύπτουν στην μέθοδο Galerkin [3]. Η μέθοδος Galerkin είναι μια διαδικασία που εφαρμόζεται σε προβλήματα συνοριακών τιμών και μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίζουμε προσεγγιστικές λύσεις. Θα ορίσουμε τη μέθοδο εφαρμόζοντας την στην μερική διαφορική εξίσωση που θα εφαρμόσουμε και το θεώρημα Minty-Browder. Έχουμε λοιπόν το πρόβλημα:

$$\begin{gathered} -\sum_{i=1}^{N} D_i(|D_i u|^{p-2} D_i u) + su = f \ \text{ στο } G \\ u = 0 \ \text{ στο } \partial G \end{gathered} \tag{3}$$

Βλέπουμε ότι είναι μια μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση ελλειπτικού τύπου. Οι παρακάτω συναρτήσεις προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας την αρχική εξίσωση με μια συνάρτηση $v \in C_0^\infty$ και κάνοντας διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες. Το πρόβλημα που προκύπτει το καλούμε και γενικευμένο:

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_G (\sum_{i=1}^{N} |D_i u|^{p-2} D_i u \; D_i v + suv) dx \\ b(v) &= \int_G f \; v \; dx \end{aligned} \tag{4}$$

Προκειμένου να κατασκευάσουμε τώρα μια προσεγγιστική λύση του γενικευμένου προβλήματος με τη βοήθεια της μεθόδου Galerkin επιλέγουμε συναρτήσεις $w_1, ... w_n$ για τις οποίες να ισχύει

$$w_k = 0 \ \text{ στο } \ \partial G \ \text{ για } \ k = 1, ..., n$$

και προχωράμε θέτοντας

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_{nk} w_k$$

Παρατηρούμε ότι η u_n ικανοποιεί τη συνθήκη μηδενισμού στο σύνορο του G.

Αν τώρα στο γενικευμένο πρόβλημα αντικαταστήσουμε τη u με u_n και απαιτήσουμε να είναι ορθό για $v \in span\{w_1, ..., w_n\}$, παίρνουμε τις εξισώσεις Galerkin για $j = 1, ..., n$:

$$a(u_n, w_j) = b(w_j) \tag{5}$$

4.3 Το θεώρημα Minty-Browder

Στο παρόν κεφάλαιο θα διατυπώσουμε μέρος του θεωρήματος Minty Browder , το οποίο αποτελεί το κυριότερο θεώρημα πάνω στους μονότονους τελεστές. Βρίσκει εφαρμογή σε μη γραμμικά προβλήματα συνοριακών τιμών, όπως αυτό που θα δούμε αργότερα. Αντλούμε τα παρακάτω θεωρήματα και μεθόδους από το [3] στο οποίο και παραπέμπουμε τον αναγνώστη για επιπλέον μελέτη.

Καλούμαστε να μελετήσουμε την εξίσωση

$$Au = b \tag{6}$$

όπου $A : X \to X^*$ είναι ένας μονότονος τελεστής στον πραγματικό χώρο Banach X, u επίσης μια συνάρτηση στον X και $b \in X^*$.

Σε αυτό το σημείο θέτουμε τη συνάρτηση a ως $a(u, v) = \langle Au, v\rangle$ για κάθε $v \in X$. Όπως είδαμε και νωρίτερα οι εξισώσεις Galerkin διαμορφώνονται ως:

$$a(u_n, w_k) = \langle b, w_k\rangle \tag{7}$$

Θεωρούμε επίσης ακολουθία χώρων $X_n = span\{w_1, ..., w_n\}$

Αναζητούμε πλέον λύσεις της εξίσωσης (7), συναρτήσεις $u_n \in X_n$ της μορφής

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_{kn} w_k, \quad \text{για } \ c_{kn} \ \text{ πραγματικούς αριθμούς}$$

Να αναφέρουμε επίσης ότι από εδώ και στο εξής θα αντιλαμβανόμαστε τον όρο *βάση στον χώρο Banach X ως μια το πολύ αριθμήσιμη ακολουθία (w_j) στοιχείων $w_j \in X$ στην οποία, κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $(w_1, ..., w_n)$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο και*

$$X = \overline{\bigcup_n X_n} \tag{8}$$

με $X_n = span\{w_1, ..., w_n\}$

Θεώρημα 4.6. *Θεώρημα Minty-Browder*
Έστω $A : X \to X^*$ ένας μονότονος, πιεστικός και hemicontinuous τελεστής στον πραγματικό, διαχωρίσιμο και αυτοπαθή χώρο Banach X. Θεωρούμε μία βάση $\{w_1, w_2, ...\}$ του X. Τότε:

1. ***Μέθοδος Galerkin:*** *Εάν ο X είναι απειροδιάστατος ($\dim X = \infty$), τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οι εξισώσεις Galerkin (7) έχουν λύση $u_n \in X_n$ και η ακολουθία (u_n) έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία*
$$u_{n'} \rightharpoonup u \quad \text{στον } X \ \text{ καθώς } \ n \to \infty$$
2. *Το σύνολο των λύσεων της (6) είναι φραγμένο, κυρτό και κλειστό.*
3. *Αν ο τελεστής A είναι επιπλέον γνησίως μονότονος, τότε η εξίσωση (6) έχει μοναδική λύση στον X.*
4. *Αν ο A είναι γνησίως μονότονος, τότε η ακολουθία u_n της μεθόδου Galerkin συγκλίνει ασθενώς στον X στη μοναδική λύση της εξίσωσης (6). Αν είναι ομοιόμορφα μονότονος, τότε η u_n συγκλίνει ισχυρά στη μοναδική λύση της (6).*

Απόδειξη. Απόδειξη του 1:
Ξεκινάμε δείχνοντας ότι οι εξισώσεις Galerkin που ορίσαμε έχουν λύση.
Θέτουμε
$$g(u) = \langle Au - b, u\rangle \qquad g_k(u) = \langle Au - b, w_k\rangle$$
Ο A είναι πιεστικός και από τον ορισμό προκύπτει ότι
$$\frac{g(u)}{\|u\|} \to +\infty \quad \text{καθώς } \ \|u\| \to \infty$$
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $M > 0$ για το οποίο
$$\frac{g(u)}{\|u\|} > M$$
Υπάρχει επίσης $R > 0$ τέτοιο ώστε $\|u\| \geq R$. Άρα
$$\frac{g(u)}{\|u\|} > M \xRightarrow{\|u\|\geq R} g(u) \geq RM$$
και επειδή R, M είναι θετικές ποσότητες καταλήγουμε στο ότι
$$g(u) > 0 \quad \text{για κάθε } \ u : \|u\| \geq R \tag{9}$$
Είναι χρήσιμο σε αυτό το σημείο να συνοψίσουμε τις εξισώσεις Galerkin:
$$g_k(u_n) = 0, \qquad u_n \in X_n, \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{10}$$
με
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_{kn} w_k$$
Πρόκειται λοιπόν για ένα μη γραμμικό σύστημα πραγματικών συναρτήσεων.
Επειδή ο τελεστής A είναι hemicontinuous, από την πρόταση 5.6 είναι και demicontionuous και συνεπώς οι συναρτήσεις
$$u \mapsto g_k(u)$$

είναι συνεχείς στον X ως προς τα $(c_{1n}, ..., c_{nn})$.
Αν τώρα για κάθε $u_n \in X_n$ πάρουμε $\|u_n\| = R$, από την (3) και δεδομένου ότι ισχύει $\langle Au_n - b, w_k\rangle c_{kn} = \langle Au_n - b, c_{kn}w_k\rangle$ προκύπτει ότι

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(u_n)c_{kn} = g(u_n) > 0$$

Ικανοποιείται συνεπώς η συνοριακή συνθήκη της πρότασης 4.5 και οι εξισώσεις Galerkin έχουν λύση u_n.
Εάν τώρα η u_n είναι λύση του (4) τότε $g(u_n) = 0$ και συνεπώς από την (3) δεν μπορεί παρά να ισχύει $\|u_n\| \le R$ για κάθε n. Αντίστοιχα αν u είναι μια λύση της αρχικής εξίσωσης (1) τότε $g(u) = 0$ και από την (3):

$$\|u\| \le R.$$

Δείχνουμε τώρα ότι η ακολουθία Au_n είναι φραγμένη.
Ο τελεστής A είναι μονότονος και όπως προκύπτει από την πρόταση (5.6α),είναι και τοπικά φραγμένος. Υπάρχουν δηλαδή θετικές ποσότητες r, δ τέτοιες ώστε

$$\|v\| \le r \Rightarrow \|Av\| \le \delta$$

Επίσης από τη μονοτονία του A

$$\langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \le 0$$

Από τις εξισώσεις Galerkin έχουμε

$$\langle Au_n, u_n\rangle = \langle b, u_n\rangle \quad \text{για κάθε} \;\; n$$

Ο τελεστής b ανήκει στον X^* και είναι φραγμένος, συνεπώς

$$|\langle Au_n, u_n\rangle| \le \|b\| \, \|u_n\| \le \|b\| \, R \quad \text{για κάθε} \;\; n$$

Γνωρίζου επίσης ότι η νόρμα στον δυικό X^* ορίζεται ως

$$\|Au_n\| = \frac{1}{r} sup\{|Au_n(v), v \in X, \|v\| = r\}$$

Επιπλέον από τη μονοτονία του A:

$$\langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \ge 0 \Rightarrow \langle Au_n - Av, u_n\rangle \ge \langle Au_n - Av, v\rangle \Rightarrow \langle Au_n - Av, u_n\rangle \ge \langle Au_n, v\rangle - \langle Av, v\rangle$$

Δεδομένων των παραπάνω καταλήγουμε στην ανισότητα:

$$\begin{aligned}
\|Au_n\| &= \sup_{\|v\|=r} r^{-1}\langle Au_n, v\rangle \\
&\le \sup_{\|v\|=r} r^{-1}(\langle Av, v\rangle + \langle Au_n, u_n\rangle - \langle Av, u_n\rangle) \\
&\le r^{-1}(\delta r + \|b\|R + \delta R)
\end{aligned}$$

Και έχουμε δείξει ότι η Au_n είναι φραγμένη.

Προχωράμε τώρα στη **σύγκλιση της μεθόδου Galerkin**

Στο λήμμα (1.5) δείξαμε ότι σε έναν αυτοπαθή χώρο κάθε φραγμένη ακολουθία έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία. Η u_n είναι φραγμένη και συνεπώς έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθιά $u_{n'}$:

$$u_{n'} \rightharpoonup u \text{ στον } X \text{ καθώς } n \to \infty \tag{11}$$

Η $Au_{n'}$ είναι φραγμένη και από τις εξισώσεις Galerkin προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_{n'}, w \rangle = \langle b, w \rangle \quad \text{για κάθε} \quad w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \tag{12}$$

Ο X είναι διαχωρίσιμος χώρος. Συνεπώς για την ακολουθία υπόχωρων $X_n = \text{span}\{w_1, ..., w_n\}$ με $\text{dim} X_n < \infty$ ισχύει ότι :

$$X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}$$

Άρα αφού η ένωση των X_n είναι πυκνή στον X, η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε $w \in X$ και η $Au_{n'}$ συγκλίνει ασθενώς στον b

$$Au_{n'} \rightharpoonup b \text{ στον } X^* \text{ καθώς } n \to \infty$$

και από τις εξισώσεις Galerkin παίρνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_{n'}, u_{n'} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle b, u_{n'} \rangle = \langle b, u \rangle \tag{13}$$

Έχουμε τώρα λοιπόν τις συνθήκες:

$$u_{n'} \rightharpoonup u \text{ στον } X \text{ καθώς } n \to \infty$$
$$Au_{n'} \rightharpoonup b \text{ στον } X^* \text{ καθώς } n \to \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_{n'}, u_{n'} \rangle = \langle b, u \rangle$$

Από το λήμμα (5.46) προκύπτει ότι $Au = b$, δηλαδή ότι η αρχική εξίσωση (1) έχει λύση και μάλιστα υπάρχει υπακολουθία $u_{n'}$ που συγκλίνει ασθενώς σε αυτή.

Απόδειξη του 2

Δείξαμε στο πρώτο σκέλος ότι $||u|| \leq R$ και συνεπώς αν θεωρήσουμε S το σύνολο των λύσεων, είναι φραγμένο.

Θέλουμε να δείξουμε τώρα ότι είναι και κυρτό. Θεωρούμε $u_1, u_2 \in S$ δύο λύσεις και προφανώς

$$Au_i = b, \quad i = 1, 2$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι ο γραμμικός τους συνδιασμός ανήκει επίσης στο S, δηλαδή αποτελεί λύση του προβλήματος (1).

για κάθε $u, v \in X$ με $u \neq v$. Βλέπουμε ότι είναι άτοπο και η εξίσωση $Au = b$ έχει το πολύ μια λύση.

$$\langle b - Av, u - v\rangle = \sum_{i=1}^{2} t_i \langle Au_i - Av, u_i - v\rangle \geq 0$$

για κάθε $v \in X$. Αυτό σημαίνει λοιπόν ότι είναι μεγιστικά μονότονος και συνεπάγεται ότι $Au = b$ σύμφωνα με το λήμμα (5.4α). Έχουμε δείξει δηλαδή ότι ο γραμμικός συνδιασμός είναι επίσης λύση της (1) και συνεπώς το S είναι κυρτό.

Μένει να δείξουμε ότι είναι και κλειστό. Θα πάρουμε μια συγκλίνουσα ακολουθία του S και θα δείξουμε ότι το όριο της ανήκει επίσης στο S, είναι δηλαδή λύση. Έστω λοιπόν v_n του S και συνεπώς $Av_n = b$ για κάθε ν και $v_n \to u$ καθώς $n \to \infty$. Παρόμοια με πριν

$$\langle b - Av, u - v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Av_n - Av, v_n - v\rangle \geq 0$$

Και συνεπώς $Au = b$,δηλαδή το όριο είναι επίσης λύση της εξίσωσης και ανήκει στο S.

Απόδειξη του 3.

Έστω ότι το πρόβλημα έχει δύο λύσεις $u \neq v$. Σε αυτήν την περίπτωση θα ισχύει $Au = b = Av$. Ο A είναι γνησίως μονότονος:

$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0 \tag{14}$$

για κάθε $u, v \in X$ με $u \neq v$. Βλέπουμε ότι είναι άτοπο και η εξίσωση $Au = b$ έχει το πολύ μια λύση.

Απόδειξη του 4

Έχουμε αποδείξει ότι η ακολουθία u_n είναι λύση της εξίσωσης Galerkin. Επειδή είναι φραγμένη έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $(u_{n'})$ η οποία όπως έχουμε δει συγκλίνει ασθενώς στη μοναδική λύση u της εξίσωσης (1). Από το λήμμα (2.5), η (u_n) συγκλίνει επίσης ασθενώς στη λύση u.

Για την ισχυρή σύγκλιση τώρα, έχουμε δείξει ότι

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ στον } X \ \text{ καθώς } \ n \to \infty$$
$$Au_n \rightharpoonup b \ \text{ στον } X^* \ \text{ καθώς } \ n \to \infty$$
$$\langle Au_n, u_n \rangle \to \langle Au, u \rangle$$

και επειδή ο A είναι ομοιόμορφα μονότονος ισχύει

$$c\|u - u_n\|^p \leq \langle Au - Au_n, u - u_n \rangle = \langle Au, u \rangle - \langle Au, u_n \rangle - \langle Au_n, u \rangle + \langle Au_n, u_n \rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Άρα η u_n συγκλίνει ισχυρά στη λύση u:

$$u_n \to u \ \text{ καθώς } \ n \to \infty$$

□

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της απόδειξης, η εξίσωση Galerkin (2) έχει λύση την ακολουθία u_n. Η u_n έχει υπακολουθία $u_{n'}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς στη λύση της αρχικής εξίσωσης (1). Τώρα όμως και η λύση της εξίσωσης Galerkin συγκλίνει ασθενώς στη λύση u και αν ο A είναι επιπλέον uniformly monotone η σύγκλιση είναι ισχυρή.

4.4 Οι Τελεστές Nemyckii

Πρωτού περάσουμε στην εφαρμογή του θεωρήματος, είναι σημαντικό να ορίσουμε τον τελεστή Nemyckii διότι παίζει καθοριστικό στο πρόβλημα που θα κληθούμε να λύσουμε.

Ο τελεστής Nemyckii ορίζεται ως

$$(Fu)(x) = f(x, u_(x), ..., u_n(x))$$

όπου $u = (u_1, ..., u_n)$. Βλέπουμε ότι ο τελεστής δρα στις μεταβλητές u_j και τις αντικαθιστά με $u_j(x)$ στην $f(x, u_1, ..., u_n)$. Εμείς θα αρκεστούμε στην περίπτωση για $n = 1$, δηλαδή

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)).$$

Η συνάρτηση f, είναι απαραίτητο να ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. **Συνθήκη Καραθεοδωρή**: Έστω συνάρτηση $f : G \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, όπου G είναι ένα μη κενό, μετρήσιμο σύνολο στον $\mathbb{R}^N$ με $n, N \geq 1$. Τα επόμενα ισχύουν:

$$x \mapsto f(x,u) \quad \text{είναι μετρήσιμη στον } G \text{ για κάθε } u \in \mathbb{R}^n$$
$$u \mapsto f(x,u) \quad \text{είναι συνεχής στον } \mathbb{R}^n \text{ σχεδόν παντού στο } G$$

2. **Αυξητική συνθήκη**: Για κάθε $(x, u) \in G \times \mathbb{R}^n$

$$|f(x,u)| \leq a(x) + b|u|^{p/q}$$

   Η a είναι συνάρτηση του $L_q(G)$, μη αρνητική. Ο συντελεστής b είναι συγκεκριμένος θετικός αριθμός και $1 \leq q, p \leq \infty$.

Θα μελετήσουμε τις ιδιότητες του τελεστή όταν ορίζεται από τον χώρο X στον X^* με $X = L_p(G)$ και συνεπώς δυικό $X^* = L_q(G)$:

$$F : L_p \to L_q$$

με $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ή ισοδύναμα $\dfrac{p}{q} = p - 1$.
Αρχικά πρέπει να δείξουμε ότι ο τελεστής που έχουμε ορίσει είναι καλά ορισμένος. Δηλαδή ότι μεταφέρει πράγματι συναρτήσεις από τον $L_p(G)$ στον $L_q(G)$.

Θεώρημα 4.7. *Έστω $f : G \times \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (1),(2). Τότε ο τελεστής Nemyckii F απεικονίζει το $L_p(G)$ στο $L_q(G)$*

Απόδειξη. Έστω $u \in L_p(G)$. Τότε η $u(x)$ είναι μετρήσιμη και συνεπώς υπάρχει ακολουθία $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ κλιμακωτών συναρτήσεων τέτοια ώστε $u_n \to u$ σχεδόν παντού στο G. Από την Συνθήκη Καραθεοδωρή η $u \mapsto f(x,u)$ είναι συνεχής. Δηλαδή αν:

$$u_n \to u \quad \text{σχεδόν παντού στο } G \text{ τότε}$$
$$f(x,u_n) \to f(x,u) \quad \text{σχεδόν παντού στο } G$$

Και επειδή $f(u,u(x)) = F(u)(x)$ ισχύει

$$f(x,u_n(x)) \to (Fu)(x) \quad \text{σχεδόν παντού στο } G$$

Οι προυποθέσεις της πρότασης (2.8) ικανοποιούνται και συνεπώς αφού η u είναι μετρήσιμη συνάρτηση τότε και η $Fu(x)$ είναι μετρήσιμη.
Ισχύει τώρα $(a+b)^p \leq 2^p(a^p+b^p)$ για κάθε $a,b \in \mathbb{R}, a,b > 0$. Άρα από την Αυξητική Συνθήκη έχουμε:

$$\begin{aligned}|(Fu)(x)| = |f(x,u(x)|^q &\leq (|a(x)+b|u(x)|^{p-1})^q \\ &\leq 2^q(|a(x)+b|u(x)|^{p-1})^q \\ &= 2^q(|a(x)|^q + b^q|u(x)|^p)\end{aligned}$$

Η συνάρτηση $(|a(x)|^q + b^q|u(x)|^p)$ είναι ολοκληρώσιμη και συνεπώς η $|(Fu)(x)|^q$ είναι επίσης ολοκληρώσιμη. Έχουμε δείξει ότι για κάθε $u \in L_p(G)$, $F \in L_q(G)$ και ο τελεστής είναι καλά ορισμένος. □

Πρόταση 4.8. *Δεδομένου ότι ικανοποιεί τις συνθήκες (1),(2), ο τελεστής Nemyckii*

$$F : L_p(x) \to L_q(G)$$

είναι συνεχής και φραγμένος με

$$||Fu||_q \leq const(||a||_q + ||u||_p^{p/q}) \tag{15}$$

για κάθε $u \in L_p(G)$

Απόδειξη. Εφόσον $u \in L_p(G)$, η συνάρτηση $x \mapsto u(x)$ είναι μετρήσιμη στο G και από την *Συνθήκη Καραθεοδωρή* η $x \mapsto f(x,u(x)$ είναι μετρήσιμη στο G.

Από την *Αυξητική Συνθήκη* έχουμε τώρα

$$\begin{aligned}&|f(x,u)| \leq a(x) + b|u|^{p/q} \Leftrightarrow \\ &|f(x,u)|^q \leq a^q(x) + b|u|^p \Leftrightarrow \\ &|Fu(x)|^q \leq a^q(x) + b|u|^p\end{aligned}$$

Αν ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη στο G καταλήγουμε σε νόρμες των L_p,L_q

$$\begin{aligned}&||Fu||_q^q \leq const(||a||_q^q + ||u||_p^p) \Leftrightarrow \\ &||Fu||_q \leq const(||a||_q + ||u||_p^{p/q})\end{aligned}$$

Η τελευταία ανίσωση προκύπτει απο την ανισωτική σχέση:

$$(\sum_{i=1}^{N} x_i)^r \leq const(\sum_{x_i}^{N} x_i^r) \tag{16}$$

όπου x_i είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και r πεπερασμένος θετικός εκθέτης και συνεπώς ο F είναι φραγμένος.

Δείχνω τώρα ότι είναι συνεχής. Θεωρώ μια συγκλίνουσα ακολουθία u_n στον $L_p(G)$

$$u_n \to u \text{ καθώς } n \to \infty$$

Από το θεώρημα σύγκλισης στους χώρους L_p (2.6), υπάρχει μια υπακολουθία που συκλίνει επίσης στο $u(x)$

$$u_{n'}(x) \to u(x) \text{ καθώς } n \to \infty \text{ σχεδόν παντού στο } G$$

αλλά επίσης υπάρχει και συνάρτηση $v(x)$ για την οποία

$$|u_{n'}(x)| \leq v(x) \text{ για κάθε } n' \text{ σχεδόν παντού στο } G$$

Από την ανισωτική σχέση (10) και την *αυξητική συνθήκη* έχουμε

$$\begin{aligned}
||Fu_{n'} - Fu||_q^q &= \int_G |f(x, u_{n'}(x)) - f(x, u(x))|^q dx \\
&\leq const \int_G (|f(x, u_{n'}(x))|^q - |f(x, u(x))|^q dx \\
&\leq const \int_G (|a(x)|^q + |v(x)|^q + |u(x)|^p) dx
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανίσωση έχει προκύψει ως εξής

$$|f(x, u_{n'})| - |f(x, u)| \leq |f(x, u_{n'})| + |f(x, u)| \leq 2a(x) + b|u|^{p/q} + b|u_{n'}|^{p/q}$$

Από την *caratheodory condition* ισχύει ότι η f είναι συνεχής ως προς τη u και συνεπώς

$$f(x, u_{n'}(x)) - f(x, u(x)) \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty \text{ σχεδόν παντού στο } G$$

Επίσης ικανοποιούνται οι προυποθέσεις του θεωρήματος σύγκλισης του Lebesgue και άρα

$$\lim_{n\to\infty} \int_G |f(x, u_{n'}(x)) - f(x, u(x))|^q dx = \int_G \lim_{n\to\infty} |f(x, u_{n'}(x)) - f(x, u(x))|^q dx = 0$$

Άρα και

$$||Fu_{n'} - Fu||_q \to 0$$

Δηλαδή

$$Fu_{n'} \to Fu \text{ στον } L_p(G) \text{ καθώς } n \to \infty$$

Από το λήμμα (2.5) συγκλίνει και η αρχική ακολουθία

$$Fu_n \to Fu \text{ στον } L_p(G) \text{ καθώς } n \to \infty$$

και άρα ο τελεστής F είναι συνεχής. □

4.5 Εφαρμογή του Θεωρήματος Minty Browder

Μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στην εφαρμογή του θεωρήματος Minty-Browder (4.6) πρόβλημα συνοριακών τιμών. Το πρόβλημα είναι το εξής:

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{N} D_i(|D_i u|^{p-2} D_i u) + su = f \ \text{ στο } G \\
u = 0 \ \text{ στο } \partial G
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Η G είναι μια φραγμένη περιοχή στον $\mathbb{R}^N$ με $N \geq 1$. Επίσης $2 \leq p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ και s είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Θέτουμε $x = (\xi_1, ..., \xi_N)$ και $D_i = \partial/\partial\xi_i$. Επιπλέον επειδή η συνάρτηση *u μηδενίζεται στο σύνορο του συνόλου G, είναι συνεχής στην κλειστότητα του G και ικανοποιεί τον ορισμό του χώρου* $W^{1,p}$ ο χώρος στον οποίο θα εργαστούμε είναι ο sobolev $X = W_0^{1,p}(G)$.

Θέτουμε επίσης

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_G (\sum_{i=1}^{N} |D_i u|^{p-2} D_i u \, D_i v + suv) dx \\
b(v) &= \int_G f \, v \, dx
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Κατασκευάουμε με αυτόν τον τρόπο το γενικευμένο πρόβλημα που αντιστοιχεί στο αρχικό πρόβλημα (17). Για γνωστή συνάρτηση $f \in L_q(G)$, ψάχνουμε $u \in X$ τέτοια ώστε

$$a(u,v) = b(v) \ \text{ για κάθε } v \in X \tag{19}$$

Όπως έχουμε δει οι εξισώσεις Galerkin που προκύπτουν είναι

$$a(u_n, w_k) - b(w_k) = 0, \quad k = 1, ..., n \tag{20}$$

Επίσης θεωρούμε και την ακολουθία χώρων

$$X_n = span\{w_1, ..., w_n\}$$

Στόχος μας είναι αρχικά να δείξουμε ότι η εξίσωση (19) που αντιστοιχεί το γενικευμένο πρόβλημα (18) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $Au = b$. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε μέσω της $Au = b$ ότι το γενικευμένο πρόβλημα και η εξίσωση Galerkin (20) έχουν λύση και συγκλίνουν στην λύση του αρχικού προβλήματος. Συνοψίζουμε τα παραπάνω στην παρακάτω πρόταση η οποία ουσιαστικά περιγράφει τη μέθοδο απόδειξης ύπαρξης λύσεως στο πρόβλημα.

Πρόταση 4.9. *(Μέθοδος Galerkin)*

1. *Το γενικευμένο πρόβλημα (12) είναι ισοδύναμο με την εξίσωση*

$$Au = b, \quad u \in X$$

όπου $\langle Au, v\rangle = a(u, v)$ για κάθε $u, v \in X$ και ο τελεστής $A : X \to X^*$ είναι συνεχής, ομοιόμορφα μονότονος, πιεστικός και φραγμένος.

2. *Το γενικευμένο πρόβλημα (12) που αντιστοιχεί στο πρόβλημα (11) έχει **μοναδική** λύση $u \in X$. Η εξίσωση Galerkin (14) έχει **μοναδική** λύση $u_n \in X_n$ για κάθε n, και η u_n συγκλίνει στον X στην u καθώς $n \to \infty$*

3. *Για $s > 0$ και συγκεκριμένο n, η λύση u_n της εξίσωσης Galerkin μπορεί να υπολογιστεί στην περίπτωση όπου οι συναρτήσεις w_k και $D_i w_k$ είναι φραγμένες στο G για κάθε k, i.*

Απόδειξη. Αρχικά $u \in W_0^{1,p}$ και συνεπώς $D_i u \in L_p(G)$. Επιπλέον επειδή το $(p-1)q = p$

$$\begin{aligned}
\left\|D_i u\right\|_p^p &= \int_G \left|D_i u\right|^p dx \\
&= \int_G \left|D_i u\right|^{(p-1)q} dx \\
&= \int_G \left(\left|D_i u\right|^{p-2} D_i u\right)^q) dx \\
&= \left\| \, \left|D_i u\right|^{p-2} D_i u \, \right\|_q^q
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\left|D_i u\right|^{p-2} D_i u \in L_q(G)$$

Όπως έχουμε δει, η ενσφήνωση $W_0^{1,p}(G) \subseteq L_2(G)$ είναι συνεχής, δηλαδή

$$\|u\|_2 \leq const \; \|u\|_X \quad \text{για καθέ} \quad u \in X$$

Παίρνουμε τώρα την ισοδύναμη νόρμα στον χώρο Sobolev $X = W_0^{1,p}$

$$\|u\| = \left(\int_G \sum_{i=1}^N \left|D_i u\right|^p dx\right)^{1/p}$$

Ανισότητα 1: Προκύπτει από την ανισότητα Holder και δεδομένου οτι $(p-1)q = p$.
Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \int_G \left(\sum_{i=1}^N \left|D_i u\right|^{p-2} D_i u D_i v + suv\right) dx \quad \text{ισοδύναμα} \\
|a(u, v)| &= \left| \int_G \left(\sum_{i=1}^N \left|D_i u\right|^{p-2} D_i u D_i v + suv\right) dx\right| \\
&\leq \int_G \left| \sum_{i=1}^N \left|D_i u\right|^{p-2} D_i u D_i v + suv\right| dx \\
&\leq \int_G \left| \sum_{i=1}^N \left|D_i u\right|^{p-2} D_i u D_i v\right| dx + \int_G \left|suv\right| dx
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι

$$\left|D_i u\right|^{p-2} D_i u \in L_q(G) \quad \text{και} \quad D_i v \in L_q(G)$$

Άρα απο ανισότητα Holder στον πρώτο μέλος του αθροίσματοσ:

$$\int_G \left| \sum_{i=1}^{N} \left|D_i u\right|^{p-2} D_i u D_i v \right| dx \leq \sum_{i=1}^{N} \left(\int_G \| D_i u|^{p-2} D_i u|^q \right)^{1/q} \left(\int_G |D_i v|^p \right)^{1/p}$$

και επειδή

$$\left(\int_G \left|D_i u\right|^{(p-1)q} \right)^{1/q} = \left(\int_G \left|D_i u\right|^p \right)^{1/q}$$

αντικαθιστώντας την ισοδύναμη νόρμα το πρώτο μέλος διαμορφώνεται ως

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \left(\int_G |D_i u|^p \right)^{1/q} \left(\int_G |D_i v|^p \right)^{1/p} &= \sum_{i=1}^{N} \left(\int_G |D_i u|^p \right)^{(p-1)/p} \left(\int_G |D_i v|^p \right)^{1/p} \\ &= \|u\|^{p-1} \, \|v\| = \|u\|^{p/q} \, \|v\| \end{aligned} \tag{*}$$

Για το δεύτερο μέλος του αθροίσματος, από ανισότητα Cauchy Schwarz έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_G \left|suv\right| dx &= s \left(\int_G \left|u\right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_G \left|v\right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= s \left\|u\right\|_2 \left\|v\right\|_2 \end{aligned}$$

και εξαιτίας της συνεχούς ενσφήνωσης

$$s \, \|u\|_2 \, \|v\|_2 \leq const \, \|u\|_X \, \|v\|_X \tag{**}$$

Συνεπώς από (∗) και (∗∗) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \left|a(u,v)\right| &\leq \|u\|^{p/q} \|v\| + const \|u\| \, \|v\| \\ &\leq const \left(\|u\|^{p/q} + \|u\| \right) \|v\| \end{aligned} \tag{A1}$$

Ο τελεστής A

Η απεικόνιση a ορίζεται ως:

$$a : X \times X \to \mathbb{R}$$

Στο ισοδύναμο γενικευμένο πρόβλημα θέλουμε να βρούμε $u \in X$ για την οποία ισχύει

$$a(u,v) = b(v) \quad \text{για κάθε } v \in X \tag{21}$$

Η a επίσης είναι γραμμική ως προς την $v \in X$ και φραγμένη από την (A1). Πρόκειται δηλαδή για απεικόνιση η οποία ¨μεταφέρει¨ στοιχεία από τον $W_0^{1,p}$ στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τώρα τελεστή

$$A : X \to X^* \tag{22}$$

και θέτουμε

$$a(u, v) = \langle Au, v\rangle$$

για κάποιο $u \in X = W_0^{1,p}$ και κάθε $v \in X = W_0^{1,p}$.
Επειδή ο A ¨μεταφέρει¨ στοιχεία από τον X στον X^*, το στοιχείο Au βρίσκεται στον X^* και συνεπώς για κάθε $v \in X$, $\langle Au, v\rangle \in \mathbb{R}$. Ο A είναι δηλαδή καλά ορισμένος.

Έχουμε κατασκευάσει δύο προβλήματα:

$$a(u, v) = b(v) \quad \text{για κάθε } v \in X \tag{Π1}$$

$$Au = b \quad \text{για κάποιο } u \in X \tag{Π2}$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ισοδύναμα.

(Π1)⇒ (Π2). Ορίζουμε $A : X \to X^*$ με $\langle Au, v\rangle = a(u, v)$. Αν υπάρχει $u \in X$ τέτοιο ώστε $a(u, v) = b(v)$ τότε

$$\langle Au, v\rangle = b(v) = \langle b, v\rangle$$

δηλαδή

$$Au = b$$

(Π2)⇒(Π1). Αν τώρα $Au = b$ τότε για κάθε $v \in X$

$$\langle Au, v\rangle = \langle b, v\rangle$$

Αν θέσουμε $a(u, v) = \langle Au, v\rangle$, τότε

$$a(u, v) = \langle b, v\rangle = b(v) \quad \text{για κάποιο } u \in X \text{ και κάθε } v \in X$$

και τα προβλήματα είναι ισοδύναμα.

Ανισότητα 2: Στο παράδειγμα (3.2) δείξαμε ότι για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και συγκεκριμένο c ισχύει:

$$\left(|\lambda|^{p-2}\lambda - |\mu|^{p-2}\mu\right)(\lambda - \mu) \geq c|\lambda - \mu|^p$$

κάνοντας τις πράξεις και δεδομένου ότι

$$c\int_G \sum_{i=1}^{N} \left|D_i u - D_i v\right| = c\|u - v\|^p$$

ισχύει

$$a(u, u - v) - a(v, u - v) \geq c\|u - v\|^p + s\int_G (u - v)^2 dx$$

ή ισοδύναμα

$$\langle Au, u - v\rangle - \langle Av, u - v\rangle = \langle Au - Av, u - v\rangle \geq c\|u - v\|^p \tag{A2}$$

για κάθε $u, v \in X$.

Θα εφαρμόσουμε λοιπόν το θεώρημα Minty-Browder στην εξίσωση (Π1).

Από την (A1) έχω ότι ο A είναι **φραγμένος**

$$\|Au\|_* \leq const(\|u\|^{p/q} + \|u\|) \text{ για κάθε } u \in X$$

καθώς επίσης και από την (A2) προκύπτει ότι είναι γνησίως μονότονος, συνεπώς είναι **ομοιόμορφα μονότονος** και επιπλέον **πιεστικός**

Χρειαζόμαστε επίσης και την συνέχεια του A. Αυτό θα το δείξουμε μέσω του τελεστή Nemyckii.

Συνέχεια του $A : X \to X^*$.
Παίρνουμε μία ακολουθία στον X:

$$u_n \to u \text{ στον } X \text{ καθώς } n \to \infty$$

το οποίο εξαιτίας της σύγκλισης στον χώρο Sobolev σημαίνει ότι

$$D_i u_n \to D_i u \text{ στον } L_p(G) \text{ καθώς } n \to \infty$$

Ορίζουμε έναν τελεστή Nemyckii $F : L_p(G) \to L_q(G)$ ως:

$$F(u) = |u|^{p-2} u \text{ για κάθε } u \in \mathbb{R}$$

Ο τελεστής υπακούει στην αυξητική συνθήκη και

$$\left|F(u)\right| \leq |u|^{p-1} \text{ για κάθε } u \in \mathbb{R}$$

Επίσης είναι φραγμένος από την πρόταση (4.8). Άρα εφόσον $D_i u_n \to D_i u$ στον $L_p(G)$ καθώς $n \to \infty$

$$F(D_i u_n) \to F(D_i u) \text{ στον } L_q(G) \text{ καθώς } n \to \infty$$

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τώρα τον F στο συναρτησιακό $a(u, v)$

$$\begin{aligned}
\left|\langle Au_n - Au, v\rangle\right| &= |a(u_n, v) - a(u, v)| \\
&= \left| \int_G \sum_{i=1}^N \left|D_i u_n\right|^{p-2} D_i u_n \, D_i v + s \, u_n \, v dx - \right. \\
&\left. - \int_G \sum_{i=1}^N \left|D_i u\right|^{p-2} D_i u \, D_i v + s \, u_n \, v dx \right| \\
&= \left| \int_G \sum_{i=1}^N (F(D_i u_n) - F(D_i u)) D_i v + s(u_n - u) \, v dx \right|
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Holder και Cauchy-Riemann για το δεύτερο μέλος:

$$\Big| \int_G \sum_{i=1}^{N} (F(D_i u_n) - F(D_i u)) D_i v + s(u_n - u)\ v dx \Big| \leq$$
$$\leq \sum_i \left\| F(D_i u_n) - F(D_i v) \right\|_q \left\| D_i v \right\|_p + s \|u_n - u\|_2 \ \|v\|_2$$

Εξαιτίας της ισοδύναμης νόρμας ισχύει:

$$\left\| D_i v \right\|_p = \left(\int_G \sum_{i=1}^{N} \left| D_i v \right|^p \right)^{1/p} = \|v\|_X \tag{23}$$

Από την ενσφήνωση έχουμε ότι

$$\|u_n - u\| \leq const \|u_n - u\|_X$$

Και η ανίσωση γίνεται

$$\left| \langle Au_n - Au, v \rangle \right| \leq const \left(\sum_i \left\| F(D_i u_n) - F(D_i u) \right\|_q + \|u_n - u\| \right) \ \|v\|$$

και συνεπώς

$$\left\| Au_n - Au \right\|_{X^*} \leq \left(\sum_i \left\| F(D_i u_n) - F(D_i u) \right\|_q + \|u_n - u\| \right)$$

Το οποίο σημαίνει ότι

$$\|Au_n - Au\|_{X^*} \to 0 \ \text{ καθώς } n \to \infty$$

και συνεπώς ο $A : X \to X^*$ είναι συνεχής.

Από το θεώρημα (4.6) προκύπτει ότι για κάθε $b \in X$, η εξίσωση $Au = b$ έχει μοναδική λύση $u \in X$ και η μέθοδος galerking συγκλίνει. □

Βιβλιογραφία

[1] Eberhard Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Fixed Point Theorems*, Spinger-Verlag,1990

[2] Eberhard Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A, Linear Monotone Operators*, Spinger-Verlag, 1990

[3] Eberhard Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B, Non-Linear Monotone Operators*, Spinger-Verlag, 1990

[4] Lawrence C. Evans *Partial Differential Equations*, University of California Berkeley, 2010

[5] Haim Brezis, *Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα 1997