



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΡΟΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ-ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Άλγεβρα Temperley-Lieb και Εφαρμογές

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΑΙΜΙΛΙΑΣ ΨΑΡΡΑ

Επιβλέπουσα: Σοφία Λαμπροπούλου
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2020



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΡΟΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ-ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Άλγεβρα Temperley-Lieb και Εφαρμογές

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΑΙΜΙΛΙΑΣ ΨΑΡΡΑ

Επιβλέπουσα: Σοφία Λαμπροπούλου

Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Σοφία Λαμπροπούλου Παναγιώτης Ψαρράκος Δημήτριος Κοντοκώστας
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π. Καθηγητής Ε.Μ.Π. Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2020

Στη μνήμη της γιαγιάς μου Μαρίας

Περίληψη

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να παρέχει μία εισαγωγή στις άλγεβρες Temperley-Lieb και τις αναπαραστάσεις τους, αλλά και να παρουσιάσει κάποιες από τις βασικές τους εφαρμογές. Στο πρώτο μέρος περιγράφονται τα διαγράμματα Temperley-Lieb, ο πολλαπλασιασμός τους και οι γεννήτορες των διαγραμμάτων. Επίσης αναλύεται η διαδικασία εύρεσης του πλήθους των διαγραμμάτων TL_n χρησιμοποιώντας τους αριθμούς Catalan και ορίζεται η άλγεβρα $TL_n(x)$. Στο δεύτερο μέρος της εργασίας περιγράφεται μία μεθοδολογία εύρεσης των αναπαραστάσεων της άλγεβρας $TL_n(x)$ κάνοντας χρήση ενός ακόμα πολύ σημαντικού συνδυαστικού εργαλείου, των Young ταμπλώ. Τέλος, στο τρίτο μέρος γίνεται μια σύντομη περιγραφή κάποιων εφαρμογών των αλγεβρών Temperley-Lieb.

Abstract

The goal of this dissertation is to provide an introduction to the Temperley-Lieb algebras and their representations, as well as present some of their practical applications. In the first part of this work we describe the Temperley-Lieb diagrams, their multiplication and the generator diagrams. We also analyze the process of finding the number of TL_n diagrams by using the Catalan numbers and we define the $TL_n(x)$ algebra. In the second part we describe a method for finding the representations of the $TL_n(x)$ algebra using another very important combinatorial tool, the Young tableaux. Finally, in the third part we provide a brief description of some of the applications of the Temperley-Lieb algebras.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Η Άλγεβρα Temperley-Lieb	1
1.2	Βασικές Έννοιες	1
2	Διαγράμματα Temperley-Lieb	5
2.1	Δομή των Διαγραμμάτων Temperley-Lieb	5
2.2	Απαρίθμηση Διαγραμμάτων και οι Αριθμοί Catalan	6
2.3	Πολλαπλασιασμός Διαγραμμάτων	12
2.4	Βαθμός Διαγραμμάτων	15
2.5	Ταυτοτικό και Αντίστροφο στοιχείο	19
2.6	Γεννήτορες	21
2.7	Σχέσεις Γεννητόρων	26
2.8	Ίχνος	28
3	Η Άλγεβρα TL_n	29
3.1	Η Δομή της Άλγεβρας TL_n	29
3.2	Dropped Loops	31
4	Αναπαραστάσεις της Άλγεβρας $TL_n(x)$	34
4.1	Εισαγωγή στις Αναπαραστάσεις της $TL_n(x)$	34
4.2	Διαγράμματα Young	36
4.3	Young Ταμπλώ	39
4.3.1	Πλήθος των Young Ταμπλώ	39
4.3.2	Ο Διανυσματικός Χώρος των Young Ταμπλώ	41
4.4	Η Δράση των Γεννητόρων στα Young Ταμπλώ	43
4.4.1	Το πολυώνυμο $[d]$	43
4.4.2	Εύρεση των συντελεστών C και C'	45
4.5	Αναπαραστάσεις των $TL_2(x)$ και $TL_3(x)$	47
4.5.1	Αναπαραστάσεις της $TL_2(x)$	47
4.5.2	Αναπαραστάσεις της $TL_3(x)$	48
5	Εφαρμογές της Άλγεβρας TL_n	51
5.1	Φυσικά Μοντέλα	51
5.1.1	Πίνακας Μεταφοράς	51
5.1.2	Potts Model	54
5.2	Θεωρία Κόμβων	58

1 Εισαγωγή

1.1 Η Άλγεβρα Temperley-Lieb

Η άλγεβρα Temperley-Lieb παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους φυσικούς, Neville Temperley και Elliott Lieb το 1971. Η άλγεβρα αυτή παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά, τη φυσική και τη στατιστική μηχανική και έχει εφαρμογές στα μοντέλα Potts, $O(n)$, στην τοπολογία, στη θεωρία γραφημάτων κ.α. Στην εργασία αυτή θα κάνουμε μία εισαγωγή στην προσεταιριστική άλγεβρα Temperley-Lieb, στις αναπαραστάσεις της και θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές της εφαρμογές.

1.2 Βασικές Έννοιες

Στην παράγραφο αυτή ακολουθούν κάποιες βασικές έννοιες θεωρίας ομάδων, που θα χρησιμοποιηθούν στη παρούσα εργασία.

Ορισμός 1 (διμελής πράξη): Μία διμελής πράξη $*$ σε ένα μη κενό σύνολο A είναι ένας κανόνας, με τον οποίο κάθε διατεταγμένο ζεύγος (a, b) στοιχείων του A αντιστοιχίζεται σε ένα μοναδικό στοιχείο του A . Ο παραπάνω ορισμός αναφέρεται συχνά και ως συνθήκη κλειστότητας.

Ορισμός 2 (αντιμεταθετική πράξη): Μία διμελής πράξη $*$ σε ένα σύνολο A λέγεται αντιμεταθετική αν (και μόνο αν) $a * b = b * a$ για κάθε $a, b \in A$.

Ορισμός 3 (προσεταιριστική πράξη): Μία διμελής πράξη $*$ σε ένα σύνολο A λέγεται προσεταιριστική αν (και μόνο αν) $(a * b) * c = a * (b * c)$ για κάθε $a, b, c \in A$.

Ορισμός 4 (καλά ορισμένη πράξη): Μία διμελής πράξη $*$ σε ένα σύνολο A είναι καλά ορισμένη αν ακριβώς ένα στοιχείο αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε διατεταγμένο ζεύγος στοιχείων του A .

Ορισμός 5 (μονοειδές): Ένα ζεύγος $(A, *)$ όπου $*$ είναι μια πράξη επί ενός συνόλου A καλείται μονοειδές, αν :

1. Η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική.
2. Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο e για την πράξη $*$ επί του A .

Το μονοειδές $(A, *)$ καλείται αντιμεταθετικό μονοειδές, αν η πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική.

Ορισμός 6 (ομάδα): Έστω ένα μη κενό σύνολο G και μία διμελής πράξη $*$ στο G . Το σύνολο G μαζί με την διμελή πράξη $*$ λέγεται ομάδα και συμβολίζεται με $\langle G, * \rangle$, αν ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

1. Η διμελής πράξη $*$ είναι προσεταιριστική.
2. Υπάρχει ένα στοιχείο e στο G τέτοιο, ώστε $e * x = x * e = x$ για κάθε $x \in G$. Το στοιχείο αυτό λέγεται ταυτοτικό στοιχείο για την διμελή πράξη $*$ στο G .
3. Για κάθε $x \in G$ υπάρχει στοιχείο x' στο G , τέτοιο ώστε να ισχύει: $x * x' = x' * x = e$. Το στοιχείο αυτό λέγεται συμμετρικό ή αντίστροφο του x ως προς την διμελή πράξη $*$.

Στην περίπτωση όπου έχουμε $\langle G, * \rangle$ ομάδα με πράξη $*$ και για κάθε $a, b \in G$ ισχύει: $a * b = b * a$ η ομάδα ονομάζεται αβελιανή.

Ορισμός 7 (δακτύλιος): Ένας δακτύλιος είναι μια τριάδα $(R, +, *)$, όπου:

1. Το ζεύγος $(R, +)$ είναι μια αβελιανή ομάδα.
2. Το ζεύγος $(R, *)$ είναι ένα μονοειδές.
3. Ικανοποιείται η επιμεριστική ιδιότητα της πράξης της πρόσθεσης $+$ ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού $*$: Για κάθε $a, b, c \in R$ ισχύει $a * (b + c) = a * b + a * c$ και $(a + b) * c = a * c + b * c$ (Επιμεριστική Ιδιότητα).

Ορισμός 8 (μονάδα, σώμα): Έστω R ένα δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Ένα στοιχείο a του R λέγεται μονάδα του R αν έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στο R . Αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο του R είναι μονάδα, τότε ο R λέγεται δακτύλιος διαίρεσης. Σώμα λέγεται ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης.

Ορισμός 9 (διανυσματικός χώρος): Έστω F ένα σώμα. Ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το F αποτελείται από μία αβελιανή ομάδα V με την πρόσθεση, μαζί με μία πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού των στοιχείων του V με τα στοιχεία του F από τ' αριστερά, τέτοια, ώστε για κάθε $a, b \in F$ και $x, y \in V$ να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

1. $ax \in V$
2. $a(bx) = (ab)x$
3. $(a + b)x = (ax) + (bx)$
4. $a(x + y) = (ax) + (ay)$
5. $1x = x$

Ορισμός 10 (γραμμική θήκη, γραμμικός συνδυασμός): Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το F . Τα διανύσματα ενός υποσυνόλου $S = \{a_i \mid i \in I\}$ του V παράγουν τον V αν για κάθε $b \in V$, έχουμε

$$b = f_1 a_{i_1} + f_2 a_{i_2} + \dots + f_n a_{i_n}$$

για κάποιο $f_j \in F$ και $a_{i_j} \in S, j = 1, 2, \dots, n$. Κάθε διάνυσμα $\sum_{j=1}^n f_j a_{i_j}$ λέγεται γραμμικός συνδυασμός των a_{i_j} .

Ορισμός 11 (βάση): Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το F , λέμε ότι τα διανύσματα ενός υποσυνόλου $B = \{b_i \mid i \in I\}$ του V σχηματίζουν μία βάση του V πάνω από το F αν παράγουν τον V και είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Ορισμός 12 (έκταμα (*span*)): Έκταμα των διανυσμάτων v_i θα λέγεται το σύνολο όλων των δυνατών γραμμικών συνδυασμών των v_i .

Ορισμός 13 (άλγεβρα): Μία άλγεβρα αποτελείται από έναν διανυσματικό χώρο V πάνω από ένα σώμα F , μαζί με μία διμελή πράξη πολλαπλασιασμού στο σύνολο V των διανυσμάτων τέτοια, ώστε για κάθε $f \in F$ και $a, b, c \in V$ να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1. $(fa)b = f(ab) = a(fb)$
2. $(a + b)c = ac + bc$
3. $a(b + c) = ab + ac$

Χωρίς απαιτήσεις αυστηρότητας θα μιλάμε για μία άλγεβρα V πάνω από το F . Επίσης η V λέγεται προσεταιριστική άλγεβρα πάνω από το F , αν, εκτός από τις προηγούμενες τρεις συνθήκες ισχύει και:

4. $(ab)c = a(bc)$ για κάθε $a, b, c \in V$.

Ορισμός 14 (πρότυπο (module)): Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος και M μία αντιμεταθετική ομάδα. Λέμε ότι η M είναι πρότυπο όταν υπάρχει εξωτερικός πολλαπλασιασμός $R \times M \rightarrow M, (r, m) \rightarrow rm$ έτσι ώστε :

1. $1m = m$
 2. $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$
 3. $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$
 4. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
- για κάθε $r_1, r_2, r \in R$ και $m_1, m_2, m \in M$.

Ορισμός 15 (ομομορφισμός ομάδων): Έστω (G_1, \star) και $(G_2, *)$ δύο ομάδες. Μια απεικόνιση $f : G_1 \rightarrow G_2$ καλείται ομομορφισμός ομάδων αν:

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1 \star x_2) = f(x_1) * f(x_2)$$

Ένας ομομορφισμός με τον οποίο απεικονίζεται η G_1 επί της G_2 λέγεται συχνά επιμορφισμός.

Ορισμός 16 (αναπαράσταση): Έστω G ομάδα και K σώμα. Μια αναπαράσταση της G υπέρ του K είναι ένας ομομορφισμός ομάδων $r : G \rightarrow GL_n(K)$, για κάποιο n , όπου $GL_n(K)$ είναι η ομάδα των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το K . Το n ονομάζεται βαθμός της αναπαράστασης.

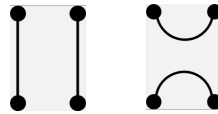
2 Διαγράμματα Temperley-Lieb

2.1 Δομή των Διαγραμμάτων Temperley-Lieb

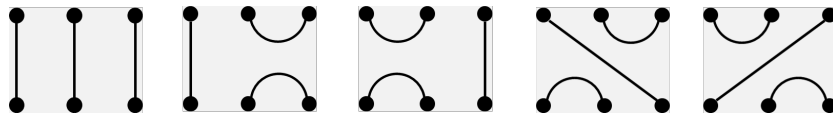
Τα διαγράμματα Temperley-Lieb αποτελούνται από δύο παράλληλες σειρές n σημείων και τις ακμές που ενώνουν κάθε σημείο με ακριβώς ένα άλλο σημείο. Οι ακμές δεν τέμνονται και παραμένουν πάντα εντός του νοητού παραλληλογράμμου που δημιουργείται από τις παράλληλες σειρές των σημείων. Το κάθε σημείο είναι στοιχισμένο έτσι ώστε να βρίσκεται ακριβώς απέναντι από το αντίστοιχο σημείο της άλλης παράλληλης σειράς. Οι ακμές μπορούν να ενώνουν σημεία τα οποία βρίσκονται είτε στην ίδια είτε σε διαφορετική σειρά. Ως TL_n ονομάζουμε το σύνολο των διαγραμμάτων που έχουν n σημεία σε κάθε σειρά.



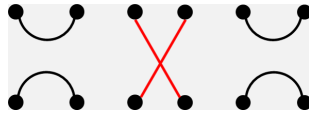
Σχήμα 1: Διάγραμμα της TL_1



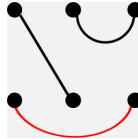
Σχήμα 2: Διαγράμματα της TL_2



Σχήμα 3: Διαγράμματα της TL_3



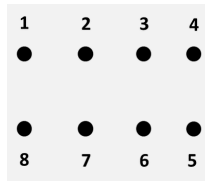
Σχήμα 4: Όχι διάγραμμα Temperley-Lieb



Σχήμα 5: Όχι διάγραμμα Temperley-Lieb

2.2 Απαρίθμηση Διαγραμμάτων και οι Αριθμοί Catalan

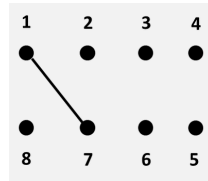
Κάθε σύνολο TL_n έχει πεπερασμένο αριθμό διαγραμμάτων, $|TL_n|$. Για να βρούμε πόσα διαγράμματα έχει κάθε TL_n θα εργαστούμε αναδρομικά. Για αρχή ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε πόσα διαφορετικά διαγράμματα περιέχει το σύνολο TL_4 . Ξεκινάμε με δύο σειρές τεσσάρων σημείων τις οποίες και αριθμούμε σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού όπως φαίνεται παρακάτω.



Σχήμα 6: Αριθμημένα Σημεία

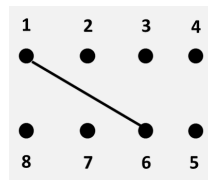
Παρατηρούμε ότι για να μπορέσουμε να σχηματίσουμε ένα TL_n διάγραμμα δεν μπορούμε να ενώσουμε δύο σημεία με μονό αριθμό απαρίθμησης μεταξύ τους. Αυτό συμβαίνει διότι η ακμή που θα ενώσει αυτά τα δύο σημεία θα δημιουργήσει δύο σύνολα με μονό αριθμό σημείων και δεν θα υπάρχει τρόπος να ενώσουμε όλα τα σημεία μεταξύ

τους χωρίς να υπάρχουν ακμές που τέμνονται.



Σχήμα 7: Ακμή μεταξύ σημείων με μονή απαρίθμηση

Όπως φαίνεται καθαρά στο παραπάνω σχήμα δεν υπάρχει κάποιος τρόπος να ενώσουμε το σημείο 8 με κάποιο άλλο σημείο χωρίς να υπάρχουν ακμές που τέμνονται. Με την ίδια λογική δεν μπορούμε να ενώσουμε δύο σημεία με ζυγό αριθμό απαρίθμησης μεταξύ τους. Άρα το σημείο 1 μπορούμε να το ενώσουμε μόνο με 4 άλλα σημεία. Έστω λοιπόν ότι συνδέουμε το σημείο 1 με το σημείο 6. Τότε παρατηρούμε ότι το διάγραμμα χωρίζεται στα δύο. Από αριστερά υπάρχουν δύο σημεία και από δεξιά τέσσερα.



Σχήμα 8: Ακμή 1-6

Ξεχνώντας την ακμή που έχουμε ήδη τραβήξει είναι προφανές ότι το αριστερό κομμάτι του διαγράμματος έχει πλήθος πιθανών συνδέσεων ίσο με $|TL_1|$ και το δεξί κομμάτι ίσο με $|TL_2|$. Άρα το πλήθος των πιθανών διαγραμμάτων που μπορούν να προκύψουν αφού ενώσουμε τα σημεία 1 και 6 μεταξύ τους είναι $|TL_1| * |TL_2|$ το οποίο ισούται με $1 * 2 = 2$. Εάν ακολουθήσουμε την ίδια λογική και για τις υπόλοιπες ακμές που μπορούμε να τραβήξουμε από το 1. Καταλήγουμε στον

παρακάτω τύπο για τον αριθμό των διαγραμμάτων του συνόλου $|TL_4|$:

$$\begin{aligned} |TL_4| &= |TL_0| * |TL_3| + |TL_1| * |TL_2| + |TL_2| * |TL_1| + |TL_3| * |TL_0| \\ &= 1 * 5 + 1 * 2 + 2 * 1 + 5 * 1 = 14 \end{aligned}$$

Τώρα θα προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε τη παραπάνω λογική ώστε να βρούμε τον αριθμό των διαγραμμάτων που περιέχει το σύνολο TL_n . Όπως είδαμε το σημείο 1 μπορούμε να το ενώσουμε με n σημεία. Κάθε μία από τις n αυτές ακμές θα χωρίσει τα σημεία σε δύο σύνολα. Εάν από τη μία πλευρά της ακμής έχουμε k σημεία τότε από την άλλη θα έχουμε $2n - 2 - k$ όπου για το k θα ισχύει $k = [0, 2, 4, \dots, 2n - 2]$. Άρα τα πιθανά διαγράμματα που θα προκύψουν αφού έχουμε ενώσει το σημείο 1 με κάποιο από τα n σημεία με ζυγό αριθμό απαρίθμησης θα είναι: $|TL_{k/2}| * |TL_{(2n-2-k)/2}|$. Κατά συνέπεια καταλήγουμε στον παρακάτω αναδρομικό τύπο για τον υπολογισμό του αριθμού διαγραμμάτων που εμπεριέχει το σύνολο TL_n :

$$|TL_n| = \sum_{i=0}^{n-1} |TL_i| * |TL_{n-1-i}| \quad (1)$$

Το παραπάνω άθροισμα μας παραπέμπει αμέσως στον αναδρομικό τύπο των αριθμών Catalan. Οι αριθμοί Catalan είναι μία ακολουθία ακεραίων που έχει χρησιμοποιηθεί για τη λύση πολλών προβλημάτων και έχει τον παρακάτω αναδρομικό τύπο:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k * C_{n-k} \quad (2)$$

Οι αριθμοί Catalan χρησιμοποιήθηκαν το 1838 από τον Βέλγο μαθηματικό E.C.Catalan, στην προσπάθεια του να επιλύσει ένα πρόβλημα καλής διάταξης παρενθέσεων. Παλαιότερα (περί το 1751) ο Euler είχε καταλήξει στους ίδιους αριθμούς μελετώντας τις τριγωνοποιήσεις κυρτών πολυγώνων. Κάποια από τα προβλήματα των οποίων η λύση είναι οι αριθμοί Catalan είναι τα παρακάτω:

Βουνοκορφές

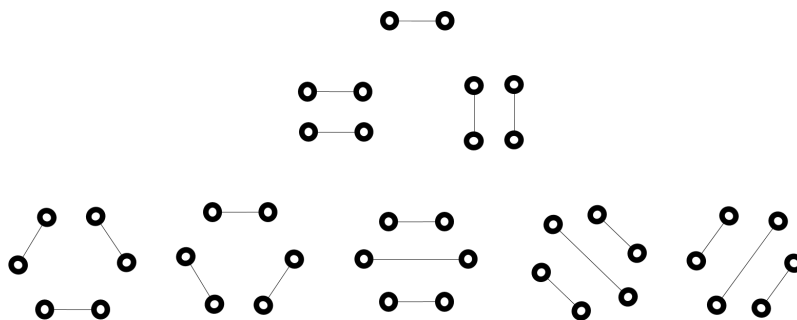
Σε αυτό το πρόβλημα ψάχνουμε να βρούμε πόσες "βουνοκορφές" μπορούμε να σχηματίσουμε έχοντας τον ίδιο αριθμό γραμμών με φορά προς τα πάνω και προς τα κάτω χωρίς όμως να τέμνουμε την οριζόντια γραμμή.

$n = 0$:	*
$n = 1$:	\wedge
$n = 2$:	$\wedge\wedge, / \ \backslash$
$n = 3$:	$\wedge\wedge\wedge, \wedge\ / \ \backslash, / \ \backslash\ \backslash, / \ \backslash\ \wedge, / \ \backslash\ \backslash\ \backslash$

Σχήμα 10: Βουνοκορφές[1]

Χειραψίες γύρω από ένα τραπέζι

Σε αυτό το πρόβλημα ψάχνουμε να βρούμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να συστηθούν $2n$ άνθρωποι που κάθονται σε ένα τραπέζι χωρίς να υπάρχουν χειραψίες οι οποίες τέμνονται όπως φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα για $n = 1, 2, 3$.



Σχήμα 11: Χειραψίες

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι τα τρία παραπάνω προβλήματα είναι ισοδύναμα και επίσης είναι προφανές ότι το πρόβλημα των χειραψιών είναι ακριβώς το ίδιο με το πρόβλημα της απαρίθμησης των διαγραμμάτων TL_n . Ο μη αναδρομικός τύπος υπολογισμού των αριθμών Catalan είναι ο παρακάτω:

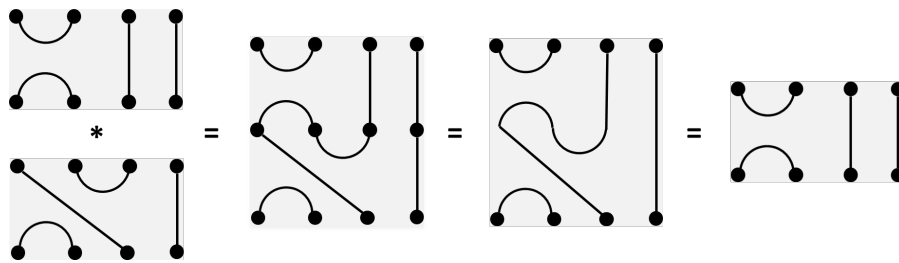
$$C_n = \frac{2n!}{(n+1)!n!} \quad (3)$$

Συνεπώς

$$|TL_n| = \frac{2n!}{(n+1)!n!} \quad (4)$$

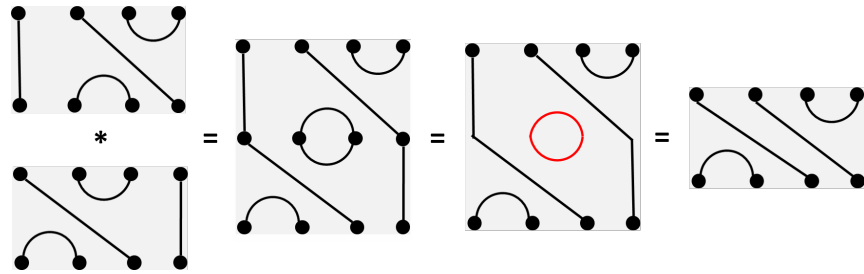
2.3 Πολλαπλασιασμός Διαγραμμάτων

Τα διαγράμματα TL_n μπορούν να πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους φτάνει να έχουν το ίδιο αριθμό σημείων. Για να πολλαπλασιάσουμε δύο διαγράμματα τοποθετούμε το ένα πάνω από το άλλο έτσι ώστε τα σημεία τους να ευθυγραμμιστούν. Στη συνέχεια ξεκινάμε από τα σημεία της πάνω σειράς του ενός διαγράμματος και ακολουθούμε τις ακμές μέχρι την κάτω σειρά του δεύτερου διαγράμματος. Τα σημεία των δύο ενδιάμεσων σειρών συναντιούνται έτσι ώστε όταν φτάσουμε στο i -οστό σημείο της δεύτερης γραμμής του πάνω διαγράμματος συνεχίζουμε στο i -οστό σημείο της πρώτης γραμμής του κάτω διαγράμματος. Ο πολλαπλασιασμός διαγραμμάτων είναι μία διμελής πράξη. Ένα παράδειγμα πολλαπλασιασμού διαγραμμάτων TL_n φαίνεται παρακάτω.



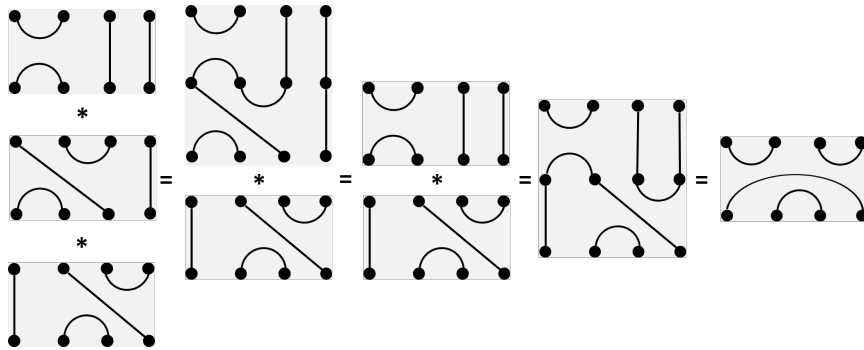
Σχήμα 12: Πολλαπλασιασμός Διαγραμμάτων

Όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα κατά τη διάρκεια του πολλαπλασιασμού μπορεί να προκύψουν κάποιοι κύκλοι (dropped loops) οι οποίοι δεν θα αποτελέσουν μέρος του αποτελέσματος, αλλά όπως θα δούμε στη συνέχεια υπάρχει τρόπος με τον οποίο μπορούμε να τους μετρήσουμε.

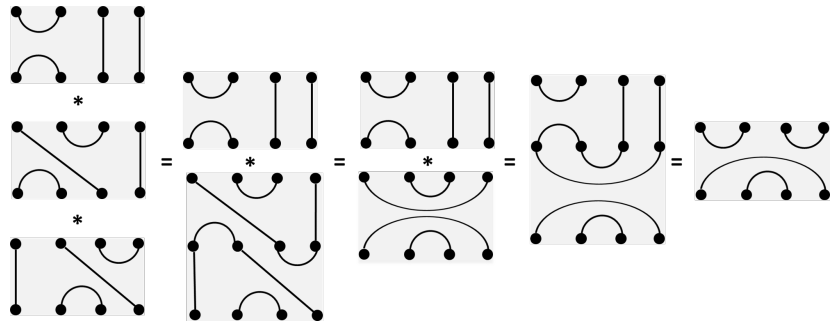


Σχήμα 13: Dropped Loop

Ο πολλαπλασιασμός των διαγραμμάτων TL_n είναι προφανώς προσεταιριστικός γιατί ουσιαστικά στοιβάζουμε τα διαγράμματα το ένα πάνω από το άλλο και ακολουθούμε τη διαδρομή των ακμών. Αρχικά ξεκινάμε από ένα σημείο της πάνω σειράς του πρώτου διαγράμματος και καταλήγουμε σε ένα σημείο το οποίο είτε ανήκει στην ίδια σειρά ή ανήκει στην κάτω σειρά του τελευταίου διαγράμματος. Στη συνέχεια, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για τα σημεία της κάτω σειράς του τελευταίου διαγράμματος τα οποία δεν προσεγγίσαμε στο παραπάνω βήμα. Είναι λοιπόν προφανές ότι με οποιαδήποτε σειρά και αν κάνουμε τον πολλαπλασιασμό τα αποτελέσματα θα είναι ίδια.

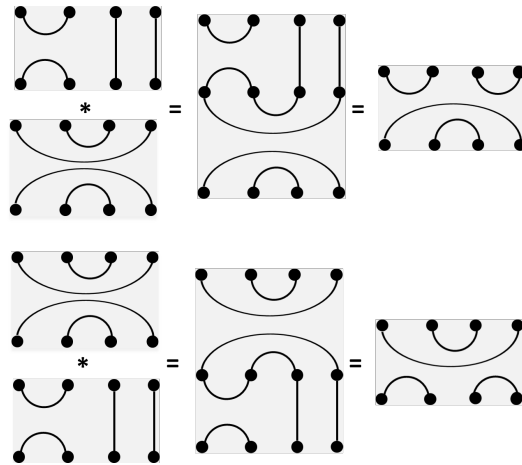


Σχήμα 14: Προσεταιριστική Ιδιότητα



Σχήμα 15: Προσεταιριστική Ιδιότητα

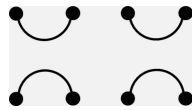
Ο πολλαπλασιασμός των διαγραμμάτων TL_n δεν είναι αντιμεταθετικός. Παρακάτω παραθέτουμε ένα αντιπαράδειγμα που αποδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό.



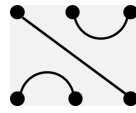
Σχήμα 16: Ο πολ/σμος δεν είναι αντιμεταθετικός

2.4 Βαθμός Διαγραμμάτων

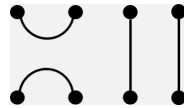
Ως βαθμό ενός διαγράμματος του TL_n ορίζουμε τον αριθμό των ακμών που ενώνουν σημεία της πάνω σειράς με σημεία της κάτω. Ακολουθούν κάποια παραδείγματα:



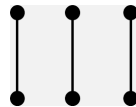
Σχήμα 17: Βαθμός 0



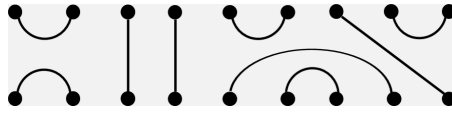
Σχήμα 18: Βαθμός 1



Σχήμα 19: Βαθμός 2



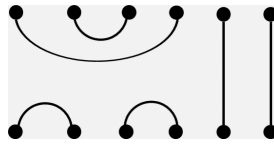
Σχήμα 20: Βαθμός 3



Σχήμα 21: Βαθμός 3

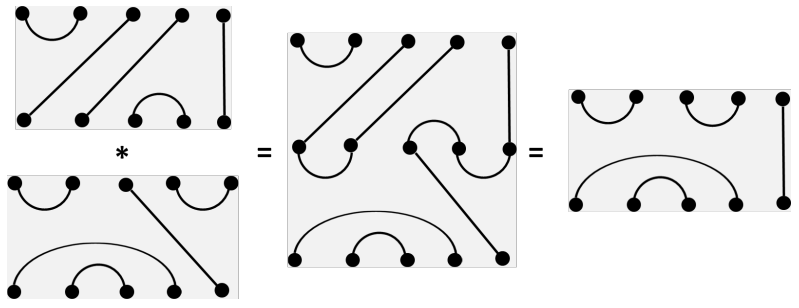
Όταν πολλαπλασιάζουμε διαγράμματα ο βαθμός του γινομένου δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τον minimum βαθμό των διαγραμμάτων που πολλαπλασιάσαμε.

Εάν ένα διάγραμμα TL_n έχει βαθμό x τότε στην πάνω σειρά θα υπάρχουν $n - x$ σημεία τα οποία θα ενώνονται μεταξύ τους. Παραδείγματος χάρη βλέπουμε στο Σχήμα 22 ένα διάγραμμα βαθμού 2 το οποίο έχει $6 - 2 = 4$ σημεία στην πάνω σειρά τα οποία ενώνονται μεταξύ τους και δεν επικοινωνούν με τα σημεία τη κάτω σειράς.

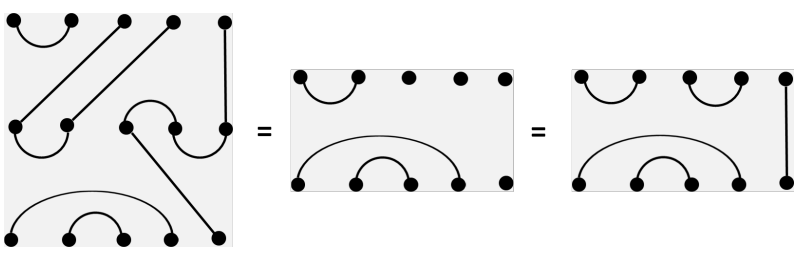


Σχήμα 22: Βαθμός 2

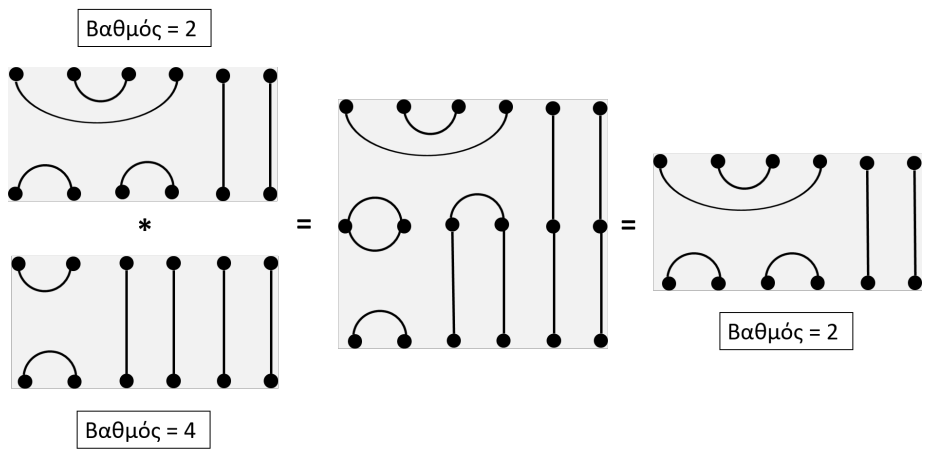
Έστω ότι ένα διάγραμμα που έχει την παραπάνω μορφή είναι το πρώτο σε έναν πολλαπλασιασμό. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι οι ενώσεις των $n - x$ σημείων μεταφέρονται αυτούσιες στο γινόμενο. Το αντίστοιχο ισχύει και για το δεύτερο διάγραμμα του πολλαπλασιασμού. Δηλαδή όλες οι ενώσεις μεταξύ των σημείων της κάτω γραμμής του διαγράμματος μεταφέρονται αυτούσιες στο γινόμενο. Κατ' επέκταση το γινόμενο θα έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο με τον minimum βαθμό των διαγραμμάτων που πολλαπλασιάσαμε. Στο παρακάτω σχήμα πολλαπλασιάζουμε ένα διάγραμμα με βαθμό 3 και ένα διάγραμμα με βαθμό 1. Το γινόμενο αυτού το πολλαπλασιασμού έχει βαθμό 1 ίσο δηλαδή με τον minimum βαθμό των διαγραμμάτων που πολλαπλασιάσαμε. Στο Σχήμα 24 βλέπουμε καθαρά ότι εάν μεταφέρουμε τις ακμές με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω τότε το γινόμενα στην κάτω σειρά έχει μόνο ένα σημείο ελεύθερο άρα αποκλείεται να έχει βαθμό μεγαλύτερο από 1. Ο βαθμός του γινομένου δεν είναι ανάγκη να ισούται με το minimum βαθμό των παραγόντων ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 26.



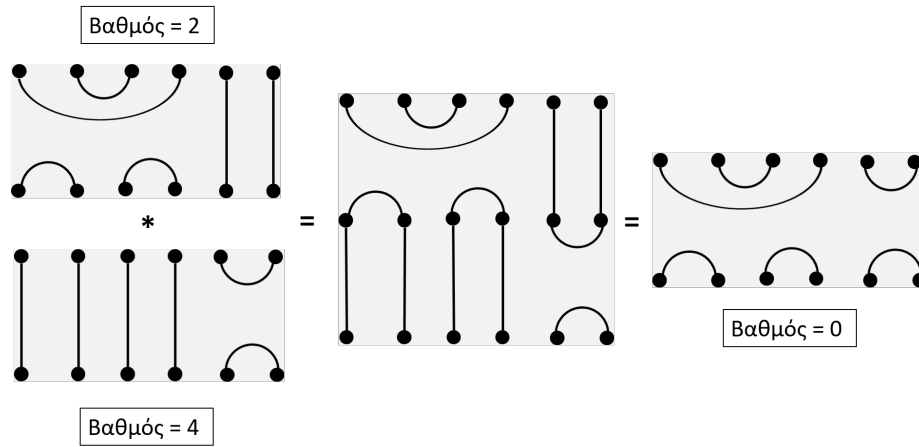
Σχήμα 23: Βαθμός και πολλαπλασιασμός



Σχήμα 24: Βαθμός και πολλαπλασιασμός



Σχήμα 25: Βαθμός γινομένου ίσος με τον minimum



Σχήμα 26: Βαθμός γινομένου μικρότερος από τον minimum

Το παραπάνω συμπέρασμα μπορούμε να το γενικεύσουμε και σε μία ακολουθία διαγραμμάτων που πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους. Έστω $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ n TL_n διαγράμματα και $rank(\Delta_1), rank(\Delta_2), \dots, rank(\Delta_n)$ οι αντίστοιχοι βαθμοί τους τότε από προσεταιριστική ιδιότητα:

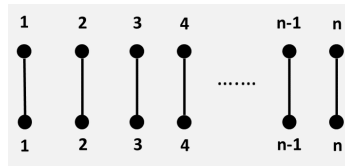
$$\begin{aligned} & \Delta_1 * \Delta_2 * \Delta_3 * \Delta_4 * \dots * \Delta_n = \\ & = \{ \dots \{ [(\Delta_1 * \Delta_2) * \Delta_3] * \Delta_4 \} * \dots * \Delta_n \} \end{aligned}$$

Και άρα για τους βαθμούς θα ισχύει:

$$\begin{aligned} & \{ \dots \{ [\min(rank(\Delta_1), rank(\Delta_2))] * \Delta_3 \} * \Delta_4 \} * \dots * \Delta_n \} = \\ & = \{ \dots \{ [\min(rank(\Delta_1), rank(\Delta_2), rank(\Delta_3))] * \Delta_4 \} * \dots * \Delta_n \} = \\ & = \min(rank(\Delta_1), rank(\Delta_2), rank(\Delta_3), \dots, rank(\Delta_n)) \end{aligned}$$

2.5 Ταυτοτικό και Αντίστροφο στοιχείο

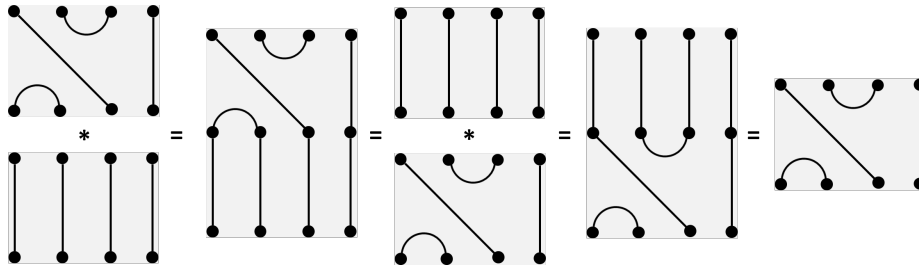
Σε κάθε άλγεβρα TL_n υπάρχει ένα ταυτοτικό στοιχείο. Στο ταυτοτικό διάγραμμα κάθε σημείο της πάνω γραμμής ενώνεται με το σημείο της κάτω που βρίσκεται ακριβώς απέναντί του όπως φαίνεται στο Σχήμα 27. Το στοιχείο αυτό είναι προφανώς ταυτοτικό γιατί απλά προεκτείνει τις ακμές που ενώνουν τα σημεία χωρίς να μεταβάλει καμία από τις αντιστοιχίες.



Σχήμα 27: Ταυτοτικό Στοιχείο

Έστω ότι Δ ένα διάγραμμα TL_n και I_n ταυτοτικό στοιχείο. Τότε ισχύει ότι:

$$\Delta * I_n = I_n * \Delta = \Delta$$



Σχήμα 28: Πολλαπλασιασμός Διαγράμματος με το Ταυτοτικό Στοιχείο

Το ταυτοτικό διάγραμμα είναι σημαντικό και λόγω το βαθμού του. Το ταυτοτικό στοιχείο κάθε TL_n έχει τον μέγιστο δυνατό βαθμό, δηλαδή n . Επίσης είναι προφανές ότι είναι το μοναδικό στοιχείο του TL_n που έχει αυτόν τον βαθμό. Στο Σχήμα 28 χρησιμοποιήσαμε το ταυτοτικό διάγραμμα του TL_4 το οποίο έχει βαθμό 4 δηλαδή τον μέγιστο βαθμό

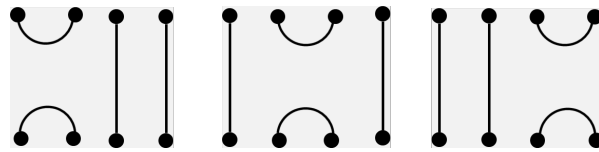
που μπορεί να έχει ένα στοιχείο που ανήκει στο TL_4 .

Η έννοια του βαθμού μαζί με όσα είδαμε για τον βαθμό του γινομένου και του ταυτοτικό στοιχείο μπορούν εύκολα να μας βοηθήσουν να δούμε ότι τα μη ταυτοτικά στοιχεία του TL_n δεν έχουν αντίστροφο στοιχείο.

Έστω Δ ένα μη ταυτοτικό στοιχείο του TL_n . Από τη στιγμή που δεν είναι ταυτοτικό τότε θα έχει βαθμό μικρότερο του n . Εάν το Δ είχε ένα αντίστροφο στοιχείο Δ^{-1} τότε θα ίσχυε ότι $\Delta\Delta^{-1} = \Delta^{-1}\Delta = I_n$, όπου I_n το ταυτοτικό διάγραμμα. Όμως με βάση όσα είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο το $\Delta\Delta^{-1}$ θα πρέπει να έχει ίσο ή μικρότερο βαθμό από το Δ άρα για το βαθμό του $\Delta\Delta^{-1}$ θα έχουμε ότι $\text{rank}(\Delta\Delta^{-1}) < n$ και άρα $\Delta\Delta^{-1} \neq I_n$ και προφανώς $\Delta^{-1}\Delta \neq I_n$. Άρα τα μη ταυτοτικά διαγράμματα δεν έχουν αντίστροφο στοιχείο.

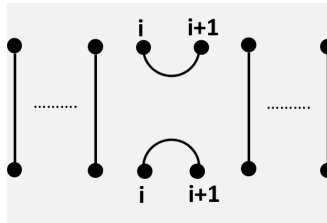
2.6 Γεννήτορες

Κάθε διάγραμμα TL_n μπορεί να προκύψει από τον πολλαπλασιασμό μίας ακολουθίας γεννητόρων διαγραμμάτων. Υπάρχουν $n - 1$ γεννήτορες για κάθε TL_n , τους οποίους θα συμβολίζουμε με e_1, e_2, \dots, e_n .



Σχήμα 29: Γεννήτορες TL_4

Το διάγραμμα e_i έχει μία ακμή που ενώνει το σημείο i με το σημείο $i + 1$ στην πάνω σειρά και μία ίδια ακμή στην κάτω. Όλα τα υπόλοιπα σημεία της πάνω σειράς ενώνονται με μία ευθεία ακμή με το σημείο που υπάρχει ακριβώς από κάτω τους όπως φαίνεται στο Σχήμα 30. Άρα τα διαγράμματα στο Σχήμα 29 είναι τα e_1, e_2 και e_3 αντίστοιχα.



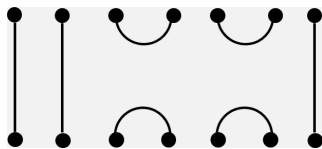
Σχήμα 30: Γεννήτορας

Για να αποδείξουμε με μία κατασκευαστική μέθοδο ότι όλα τα διαγράμματα του TL_n μπορούν να προκύψουν από τον πολλαπλασιασμό γεννητόρων θα ακολουθήσουμε τη λογική που χρησιμοποιείται στην εργασία [2]. Για τυποποιημένες αποδείξεις δεξ [3], [4].

Για να αποδείξουμε ότι όλα τα διαγράμματα είναι γινόμενα γεννητόρων διαγραμμάτων αρχικά θα εισάγουμε κάποια διαγράμματα ενδιάμεσης μορφής τα οποία προκύπτουν άμεσα από τον πολλαπλασιασμό των γεννητόρων και στη συνέχεια θα αναπτύξουμε έναν κατασκευαστι-

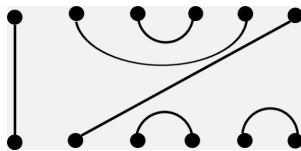
κό αλγόριθμο με τον οποίο θα μπορούμε να σχηματίσουμε οποιοδήποτε διάγραμμα θέλουμε πολλαπλασιάζοντας γεννήτορες και ενδιάμεσα διαγράμματα.

Στο Σχήμα 31 βλέπουμε ένα παράδειγμα ενδιάμεσου διαγράμματος του TL_7 το οποίο είναι το γινόμενο e_3e_5 . Σε ένα ενδιάμεσο διάγραμμα υπάρχουν ακμές που ενώνουν ένα σημείο με το ακριβώς διπλανό του με τον ίδιο τρόπο στην πάνω και την κάτω σειρά και ακμές που ενώνουν τα σημεία της πάνω σειράς που έχουν περισσέψει με τα σημεία που βρίσκονται ακριβώς από κάτω τους. Όλα τα ενδιάμεσα διαγράμματα προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό δύο ή και περισσότερων γεννητόρων, $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ για τους οποίους ισχύει $|i_a - i_b| \leq 2$.



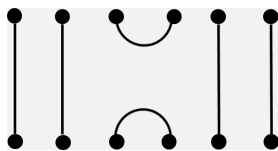
Σχήμα 31: Ενδιάμεσο Διάγραμμα

Τώρα θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε ένα τυχαίο διάγραμμα κάνοντας χρήση μόνο των γεννητόρων και των ενδιάμεσων διαγραμμάτων. Στο Σχήμα 32 βλέπουμε το διάγραμμα προς κατασκευή.



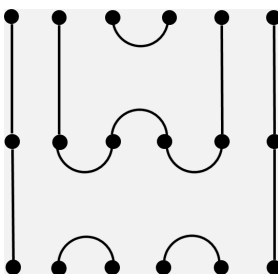
Σχήμα 32: Διάγραμμα προς Κατασκευή

Αρχικά θα ξεκινήσουμε κατασκευάζοντας τις ακμές που ενώνουν σημεία της πάνω σειράς μεταξύ τους. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μία ακμή που ενώνει το δεύτερο σημείο με το πέμπτο και το τρίτο σημείο με το τέταρτο. Θα αρχίσουμε κατασκευάζοντας την μικρότερη ακμή άρα θα χρησιμοποιήσουμε το διάγραμμα e_3 .



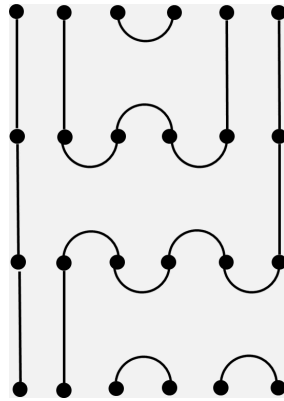
Σχήμα 33: Βήμα 1

Στη συνέχεια θέλουμε να κατασκευάσουμε την ακμή που ενώνει το δεύτερο με το πέμπτο σημείο της πάνω σειράς. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 33 έχουμε μία ακμή που ενώνει το δεύτερο σημείο της πάνω σειράς με το δεύτερο σημείο της κάτω, το τρίτο σημείο της πάνω σειράς με το τέταρτο και το πέμπτο σημείο της πάνω σειράς με το πέμπτο της κάτω. Οπότε το μόνο που μας λείπει είναι να δημιουργήσουμε μία ένωση ανάμεσα στο δεύτερο και το τρίτο σημείο και το τέταρτο και το πέμπτο της κάτω σειράς. Η ένωση αυτή κατασκευάζεται εύκολα πολλαπλασιάζοντας τον γεννήτορα e_3 με το ενδιάμεσο διάγραμμα που φαίνεται στο Σχήμα 34.



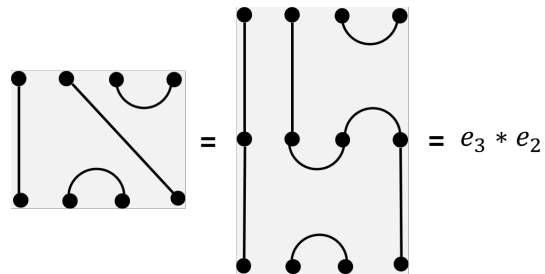
Σχήμα 34: Βήμα 2

Τέλος θέλουμε να δημιουργήσουμε μία ακμή που θα ενώνει το έκτο σημείο της πάνω σειράς με το δεύτερο της κάτω. Με την ίδια λογική που χρησιμοποιήσαμε στο βήμα 2, θα πολλαπλασιάσουμε με το κατάλληλο ενδιάμεσο διάγραμμα ώστε να σχηματίσουμε την ακμή που θέλουμε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ενδιάμεσο διάγραμμα με το οποίο πολλαπλασιάσαμε το αποτέλεσμα του βήματος δύο έχει ήδη στην κάτω σειρά τις ακμές του διαγράμματος προς κατασκευή άρα η δουλειά μας έχει τελειώσει.

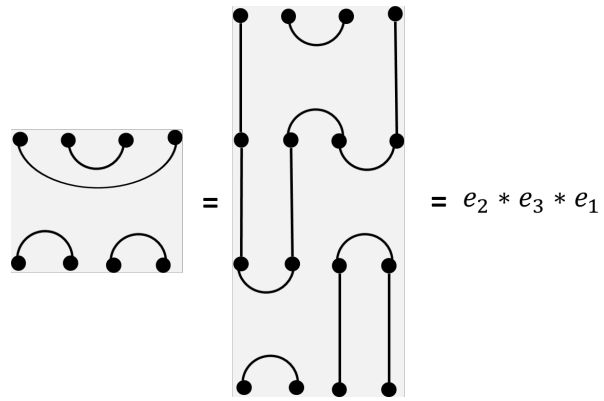


Σχήμα 35: Βήμα 3

Ακολουθώντας την παραπάνω λογική και χτίζοντας το διάγραμμα από πάνω προς τα κάτω μπορούμε να κατασκευάσουμε όποιο διάγραμμα θέλουμε.



Σχήμα 36: Παράδειγμα Κατασκευής Διαγράμματος από Γεννήτορες



Σχήμα 37: Παράδειγμα Κατασκευής Διαγράμματος από Γεννήτορες

2.7 Σχέσεις Γεννητόρων

Υπάρχουν τρεις σχέσεις που έχουν οι γεννήτορες μεταξύ τους:

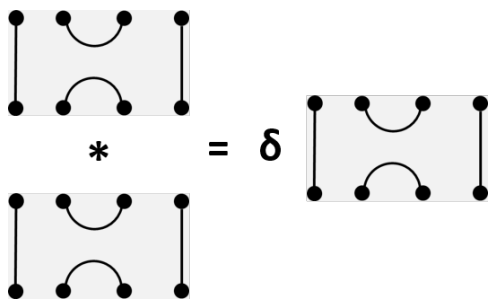
$$e_i e_i = e_i, \text{ με ένα dropped loop} \quad (5)$$

$$e_i e_{i+1} e_i = e_i \quad (6)$$

$$e_i e_j = e_j e_i, \quad |i - j| \leq 2 \quad (7)$$

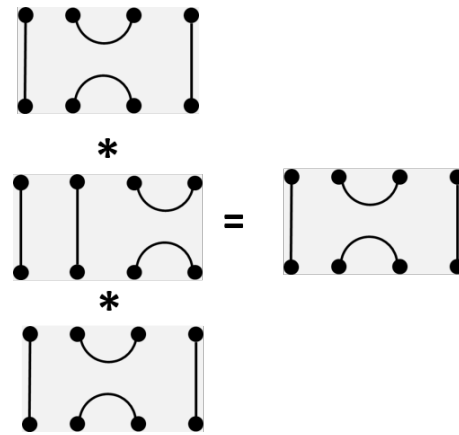
Για την απόδειξη των παραπάνω σχέσεων αρκούν τρία παραδείγματα γιατί το μόνο που αλλάζει σε κάθε γεννήτορα είναι ο αριθμός των κάθετων ακμών που υπάρχουν δεξιά και αριστερά των ημικυκλικών ακμών. Οι κάθετες αυτές ακμές προφανώς δεν επηρεάζουν το αποτέλεσμα.

Σχέση 1



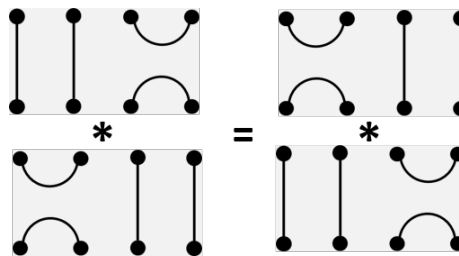
Σχήμα 38: Σχέση 1 (Το dropped loop το συμβολίζουμε με δ)

Σχέση 2



Σχήμα 39: Σχέση 2

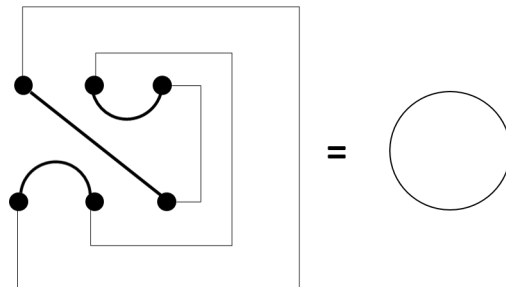
Σχέση 3



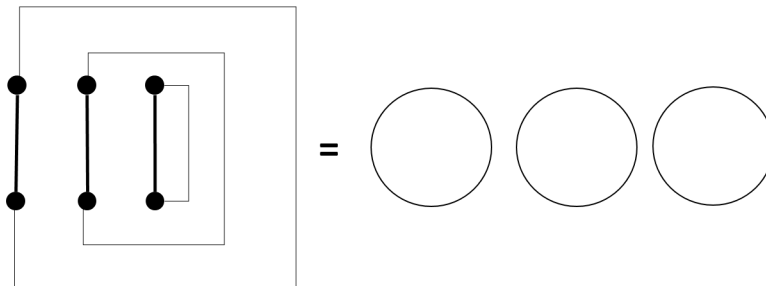
Σχήμα 40: Σχέση 3

2.8 Ίχνος

Υπάρχει μία φυσική συνάρτηση ίχνους πάνω στην άλγεβρα Temperley-Lieb. Η διαγραμματική έκφραση του ίχνους αυτού προκύπτει ενώνοντας εξωτερικά το κάθε σημείο της πάνω σειράς με το αντίστοιχο σημείο της κάτω. Αυτό μας οδηγεί πάντα σε ένα διάγραμμα ισόμορφο με τον αριθμό από dropped loops που δημιουργούνται από την παραπάνω ένωση σημείων. Παρακάτω βλέπουμε δύο παραδείγματα:



Σχήμα 41: Ίχνος παράδειγμα 1



Σχήμα 42: Ίχνος παράδειγμα 2

3 Η Άλγεβρα TL_n

3.1 Η Δομή της Άλγεβρας TL_n

Για $n \in \mathbb{N}$ και διάφορο του μηδέν και για $x \in \mathbb{C}$ η άλγεβρα Temperley-Lieb, $TL(x)$ είναι ο διανυσματικό χώρος η βάση του οποίο δίνεται από τα διαγράμματα του TL_n . Έτσι:

$$TL_n(x) = \mathbb{C} - \text{span}\{d \mid d \in TL_n\} = \left\{ \sum_{d \in TL_n} a_d d \mid a_d \in \mathbb{C} \right\}. \quad (8)$$

Η παράμετρος $x \in \mathbb{C}$ πρέπει να επιλέγεται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να αποφύγουμε κάποιες προβληματικές τιμές που δημιουργούν προβλήματα με τις αναπαραστάσεις.

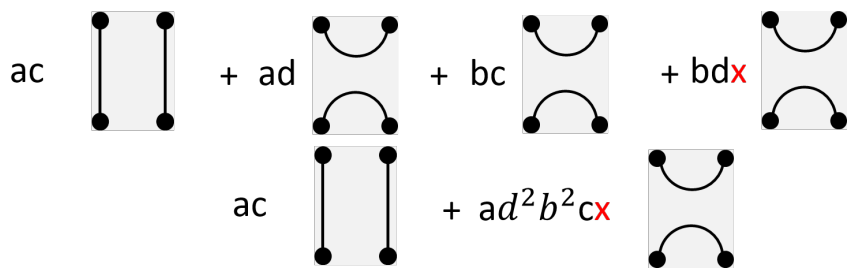
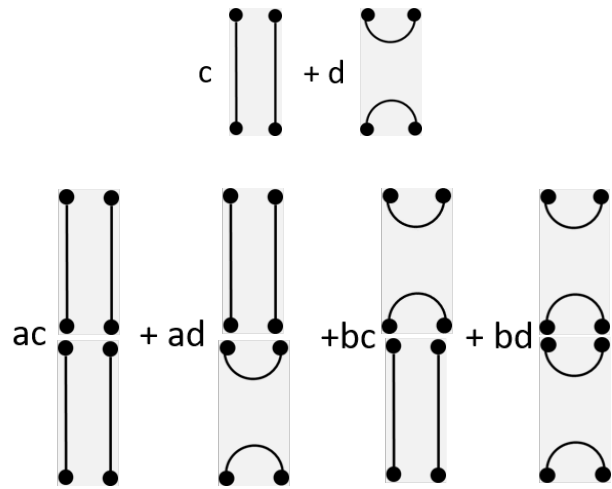
Στην άλγεβρα Temperley-Lieb τα διαγράμματα του TL_n είναι η βάση του διανυσματικού χώρου. Για παράδειγμα, ο διανυσματικός χώρος του $TL_2(x)$ είναι:

$$\text{span} \left\{ \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array} , \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \cup \quad \cup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\}$$

Έστω τα παρακάτω διανύσματα του διανυσματικού χώρου

$$a \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + b \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \cup \quad \cup \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

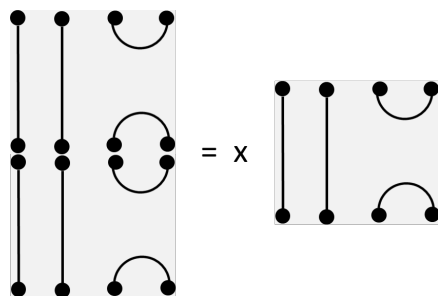
Για να έχουμε άλγεβρα πρέπει να υπάρχει μία καλά ορισμένη πράξη πολλαπλασιασμού των διανυσμάτων. Πολλαπλασιάζοντας τα δύο παραπάνω διανύσματα έχουμε:



Τα πρώτα τρία στοιχεία πολλαπλασιάζονται με τον ίδιον τρόπο που είδαμε στο μονοειδές TL_2 αλλά στο τέταρτο δημιουργείται ένα dropped loop το οποίο συμβολίζουμε με x . Παρότι τέτοιου είδους dropped loops τα αγνοούσαμε στο μονοειδές η άλγεβρα τα υπολογίζει.

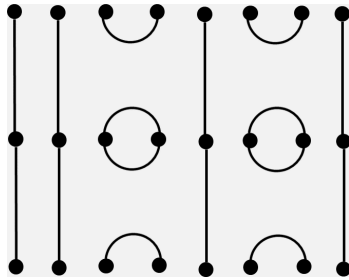
3.2 Dropped Loops

Ο πολλαπλασιασμός στην άλγεβρα Temperley-Lieb είναι ίδιος με τον πολλαπλασιασμό διαγραμμάτων όπως τον μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια μόνο που στην άλγεβρα μετράμε τον αριθμό των dropped loops που προκύπτουν σε κάθε πολλαπλασιασμό. Για να το κάνουμε αυτό εισάγουμε τη μεταβλητή x και κάθε φορά που εμφανίζεται ένα dropped loop πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με x . Δηλαδή εάν κατά τη διάρκεια ενός πολλαπλασιασμού προκύψουν δύο dropped loops τότε το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με x^2 και άρα η δύναμη στην οποία είναι υψωμένο το x μας δείχνει πόσα dropped loops έχουμε. Παρακάτω βλέπουμε ένα σημαντικό παράδειγμα. Ο πολλαπλασιασμός $e_i e_i$ δεν έχει πλέον γινόμενο e_i αλλά $x e_i$. Άρα η σχέση των γεννητόρων γίνεται $e_i e_i = x e_i$. Οι υπόλοιπες σχέσεις παραμένουν οι ίδιες γιατί δεν προκύπτει κάποιο dropped loop κατά τη διάρκεια των πολλαπλασιασμών.

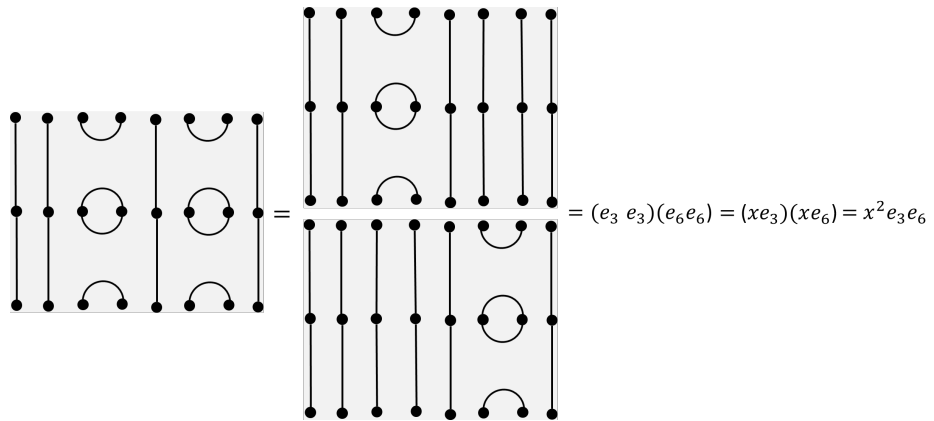


Στην παραπάνω πράξη είναι εύκολο να δούμε ότι προκύπτει ένα dropped loop αλλά αυτό δεν είναι εξίσου εύκολο σε κάθε πολλαπλασιασμό. Στο Σχήμα 43 παρατηρούμε ότι προκύπτουν δύο ένα dropped loops.

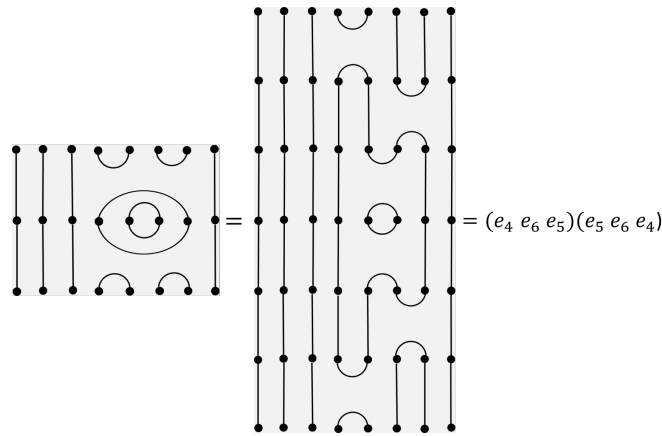
Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι τα δύο dropped loops που προκύπτουν μεταφράζονται στο x^2 με το οποίο θα πολλαπλασιάσουμε το γινόμενο αναλύοντας το διάγραμμα σε γεννήτορες και εφαρμόζοντας τις σχέσεις γεννητόρων όπως φαίνεται παρακάτω.



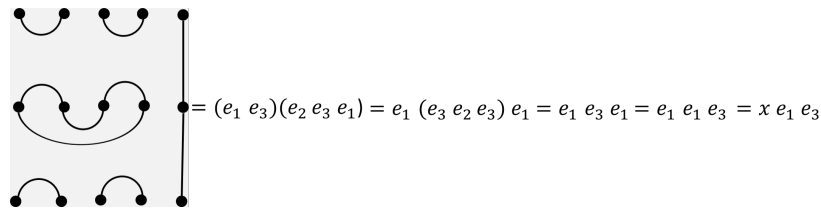
Σχήμα 43: Δύο Dropped Loops



Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και για το Σχήμα 44. Ο πολλαπλασιασμός του σχήματος αναλύεται σε $(e_4 e_6 e_5)(e_5 e_6 e_4) = e_4 e_6 (e_5 e_5) e_6 e_4$. Γνωρίζουμε όμως ότι $e_5 e_5 = x e_5$ το οποίο μας οδηγεί στο $x e_4 e_6 e_5 e_6 e_4$. Το x είναι σταθερά οπότε μπορούμε να το μεταφέρουμε στην αρχή. Από τη σχέση 3 των γεννητόρων έχουμε $e_i e_j = e_j e_i$, $|i - j| \leq 2$ και άρα καταλήγουμε στο $x e_6 e_4 e_5 e_4 e_6$. Επίσης από τη σχέση 2 γνωρίζουμε ότι $e_i e_{i+1} e_i = e_i$ και άρα έχουμε $x e_6 e_4 e_6$. Θα χρησιμοποιήσουμε ξανά τη σχέση 3 και θα καταλήξουμε στο $x e_6 e_6 e_4$ και τη σχέση 1 με αποτέλεσμα $x^2 e_6 e_4$. Βλέπουμε ότι παρότι στο σχήμα το ένα dropped loop εμπεριέχεται στο άλλο (nested loops) το γινόμενο πολλαπλασιάζεται με x^2 .



Σχήμα 44: Nested Loops



Σχήμα 45: Loops με πολλαπλές ακμές

4 Αναπαράστασεις της Άλγεβρας $TL_n(x)$

4.1 Εισαγωγή στις Αναπαράστασεις της $TL_n(x)$

Στο κεφάλαιο 1.2 ορίσαμε την αναπαράσταση μίας ομάδας υπέρ ενός σώματος. Έχουμε όμως ήδη παρατηρήσει ότι το σύνολο των διαγραμμάτων TL_n μαζί με τον πολλαπλασιασμό δεν αποτελούν ομάδα αλλά μονοειδές γιατί κανένα από τα μη ταυτοτικά διαγράμματα TL_n δεν έχουν αντίστροφο στοιχείο. Παρόλα αυτά και τα μονοειδή μπορούν να αναπαρασταθούν σε πίνακες. Η αναπαράσταση μέσω πινάκων με απλά λόγια είναι η αντιστοιχία ενός πίνακα σε κάθε στοιχείο του μονοειδούς (ή της ομάδας). Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε παραπάνω από ένα στοιχεία σε ένα πίνακα. Ένα παράδειγμα είναι η τετριμμένη αναπαράσταση που αντιστοιχεί όλα τα στοιχεία στο 1. Πιστή αναπαράστασή λέγεται η αντιστοίχιση ενός διαφορετικού πίνακα σε κάθε στοιχείο.

Είναι προφανές ότι για να βρούμε τους πίνακες που αντιστοιχούν σε κάθε διάγραμμα του μονοειδούς αρκεί να αντιστοιχίσουμε έναν μοναδικό πίνακα σε κάθε γεννήτορα. Έτσι εάν θέλουμε να βρούμε τον πίνακα που αντιστοιχεί σε ένα τυχαίο διάγραμμα Δ αρκεί να πολλαπλασιάσουμε με την κατάλληλη σειρά τους πίνακες που αντιστοιχούν στους γεννήτορες του. Οι γεννήτορες πίνακες θα ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις που ικανοποιούν και οι γεννήτορες των διαγραμμάτων. Έστω M_i ο πίνακας που αντιστοιχεί στον διάγραμμα γεννήτορα e_i . Τότε θα ισχύει:

$$M_i M_i = x M_i \quad (9)$$

$$M_i M_{i+1} M_i = M_i \quad (10)$$

$$M_i M_j = M_j M_i, \quad |i - j| \leq 2 \quad (11)$$

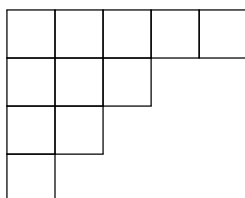
Σε κάθε αναπαράσταση αντιστοιχεί ένα πρότυπο. Έστω m_1, m_2, \dots, m_n η βάση του προτύπου. Κάθε στοιχείο του μονοειδούς δρα πάνω στο πρότυπο έτσι ώστε να αντιστοιχεί κάθε στοιχείο του προτύπου σε ένα άλλο. Η δράση αυτή είναι γραμμική άρα η δράση κάθε στοιχείου του

μονοειδούς σε κάθε στοιχείο του προτύπου καθορίζεται πλήρως από το πώς δρα στη βάση του προτύπου. Για να βρούμε τις αναπαραστάσεις θα αντιστοιχίσουμε κάθε βάση του προτύπου σε γραμμές και στήλες ενός $n \times n$ πίνακα. Δηλαδή έστω $m_i = s_1 m_1 + s_2 m_2 + \dots + s_n m_n$ τότε τα s θα αποτελούν τα στοιχεία της στήλης i . Για παράδειγμα εάν ισχύει ότι $m_4 = a m_2 + b m_3$ τότε η τέταρτη στήλη του πίνακα θα έχει το a στη γραμμή 2 το b στην τρίτη γραμμή και σε όλες τις υπόλοιπες σχέσεις θα έχει μηδέν. Ο πολλαπλασιασμός των στοιχείων του μονοειδούς διατηρείται και στο πρότυπο.

Για να βρούμε τις αναπαραστάσεις της άλγεβρας Temperley-Lieb θα κάνουμε χρήση ενός εργαλείου της συνδυαστικής, τα Young tableaux, τα οποία χρησιμοποίησε ο Alfred Young για να βρει τις αναπαραστάσεις της συμμετρικής ομάδας. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι και η άλγεβρα Hecke έχει αναπαραστάσεις για την εύρεση των οποίων χρησιμοποιούνται τα Young tableaux. Το 1987 ο V. F. R. Jones παρατήρησε ότι υπάρχει μία σύνδεση ανάμεσα στις άλγεβρες Temperley-Lieb και Hecke. Υπάρχει ένας επιμορφισμός από την $H_n(q)$ στην $TL_n(x)$ και η παράμετρος x της άλγεβρας Temperley-Lieb συνδέεται με την παράμετρο q της άλγεβρας Hecke με τον τύπο: $x = q + q^{-1}$. Η μέθοδος εύρεσης αναπαραστάσεων που θα χρησιμοποιήσουμε βασίζεται στην εργασία [2].

4.2 Διαγράμματα Young

Παρακάτω μπορούμε να δούμε ένα διάγραμμα Young.



Τα διαγράμματα Young έχουν αριστερή στοίχιση και ο αριθμός των τετραγώνων ανά γραμμή φθίνει ή παραμένει ο ίδιος από πάνω προς τα κάτω. Όπως βλέπουμε στο παραπάνω διάγραμμα η πρώτη γραμμή έχει πέντε τετράγωνα άρα με βάση τα παραπάνω η δεύτερη θα πρέπει να ξεκινάει από το ίδιο σημείο και να έχει πέντε ή λιγότερα τετράγωνα.

Τα διαγράμματα Young αντιστοιχούν στη διαμέριση φυσικών αριθμών. Η διαμέριση ενός αριθμού A , p_A είναι μία ακολουθία αριθμών a_1, a_2, \dots, a_k για την οποία ισχύει:

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_k \text{ και} \\ a_k \leq \dots \leq a_2 \leq a_1$$

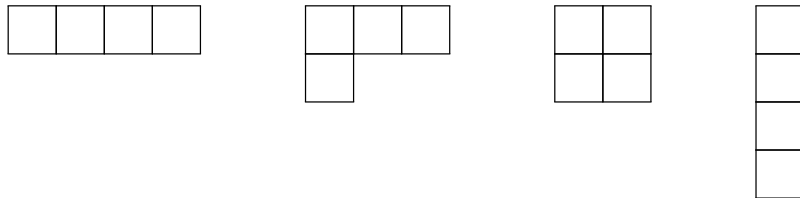
Παρακάτω θα δούμε τις διαμερίσεις και τα διαγράμματα Young για τους αριθμούς από το ένα μέχρι και το πέντε:

$$p_1 = (1) \quad \square$$

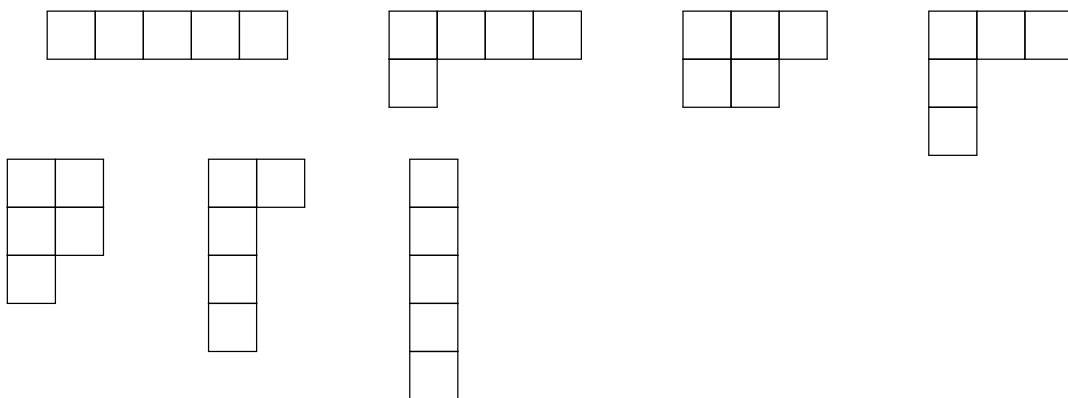
$$p_2 = (2), (1, 1) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$$p_3 = (3), (2, 1), (1, 1, 1) \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$


$$p_4 = (4), (3, 1), (2, 2), (1, 1, 1, 1)$$

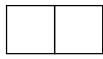



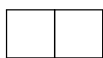
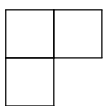
$$p_5 = (5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)$$

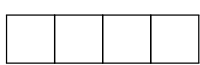
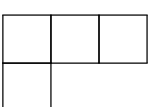
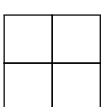



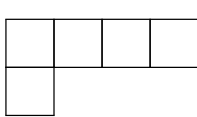
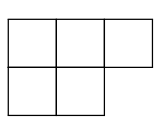
Το πρώτο διάγραμμα που είδαμε είναι το διάγραμμα Young της διαμέρισης $(5,3,2,1)$ του αριθμού έντεκα. Το διάγραμμα αυτό έχει τέσσερις γραμμές άρα θα λέμε ότι έχει μήκος τέσσερα. Επίσης εάν ένα διάγραμμα Young έχει n τετράγωνα θα λέμε ότι έχει μέγεθος n . Ακόμη η διαμέριση του διαγράμματος ονομάζεται και σχήμα του διαγράμματος. Για τις αναπαραστάσεις της άλγεβρας Temperley-Lieb θα χρησιμοποιήσουμε μόνο διαγράμματα μήκους το πολύ δύο. Παρακάτω βλέπουμε τα διαγράμματα μήκους μικρότερου ή ίσου του δύο για τους αριθμούς από το ένα μέχρι το έξι:

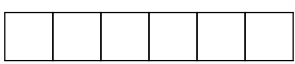
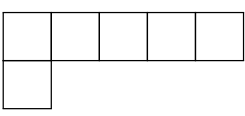
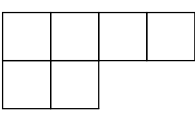
1. 

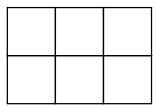
2.  

3.  

4.   

5.   

6.   



4.3 Young Ταμπλώ

Έστω ένα διάγραμμα Young μεγέθους n και σχήματος l τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα Young ταμπλώ τοποθετώντας τους ακέραιους αριθμούς από το 1 μέχρι το n στα τετράγωνα του διαγράμματος.

Ορισμός (κανονικό Young ταμπλώ) Ένα Young ταμπλώ σχήματος l λέγεται κανονικό εάν υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία T του συνόλου των τετραγώνων του ταμπλώ με ένα υποσύνολο Θ του συνόλου των θετικών ακεραίων, τέτοια ώστε:

1. οι ακέραιοι που αντιστοιχούν στα τετράγωνα οποιασδήποτε γραμμής του ταμπλώ αυξάνουν προς τα δεξιά και
2. οι ακέραιοι που αντιστοιχούν στα τετράγωνα οποιασδήποτε στήλης του ταμπλώ αυξάνουν προς τα κάτω.

Παρακάτω βλέπουμε ένα παράδειγμα κανονικού Young ταμπλώ και ένα ταμπλώ στο οποίο δεν έχουν τοποθετηθεί σωστά οι αριθμοί αντιστοιχία:

1	3	4
2	5	6
7		

3	1	7
6	5	2
4		

4.3.1 Πλήθος των Young Ταμπλώ

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε έναν τύπο για το πλήθος f_l των Young ταμπλώ σχήματος l . Ο τύπος που θα δούμε εκφράζει το f_l ως γινόμενο κάποιων ρητών αριθμών οι οποίοι ορίζονται με απλό τρόπο από το διάγραμμα Young της διαμέρισης l .

Έστω διαμέριση l του ακεραίου n . Για τετράγωνο x του διαγράμματος συμβολίζουμε με $h(x)$ το πλήθος των τετραγώνων του διαγράμματος που βρίσκονται στην ίδια γραμμή με το x αλλά όχι αριστερά του x , ή στην ίδια στήλη με το x αλλά όχι πάνω από το x . Το $h(x)$ ονομάζεται μήκος του Hook.

	x	.	.			
	.					
	.					

Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζονται οι αριθμοί $h(x)$ για διαμέριση $l = (5, 4, 2, 1)$.

8	6	4	3	1
6	4	2	1	
3	1			
1				

Θεώρημα 4.6.1 (Hook Length Formula) Έστω Y_l ένα Young ταμπλώ και $x \in Y_l$ σημαίνει x τετράγωνο του Y_l . Για κάθε διαμέριση l θετικού ακεραίου n ισχύει:

$$f_l = \frac{n!}{\prod_{x \in Y_l} h(x)} \quad (12)$$

Άρα για το παραπάνω διάγραμμα τα έχουμε:

$$\begin{aligned} f_l &= \frac{12!}{\prod_{x \in Y_l} h(x)} = \frac{479001600}{8 * 6 * 4 * 3 * 1 * 6 * 4 * 2 * 1 * 3 * 1 * 1} = \\ &= \frac{479001600}{82944} = 5775 \end{aligned}$$

Ακολουθεί ένα πιο απλό παράδειγμα στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζονται οι αριθμοί $h(x)$ για διαμέριση $l = (3, 2)$

4	3	1
2	1	

Άρα

$$f_l = \frac{5!}{\prod_{x \in Y_l} h(x)} = \frac{120}{4 * 3 * 1 * 2 * 1} = \frac{120}{24} = 5$$

4.3.2 Ο Διανυσματικός Χώρος των Young Ταμπλώ

Ένα σύνολο ταμπλώ μήκους n με το ίδιο σχήμα αποτελούν στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου που θα αποδείξουμε ότι είναι το πρότυπο των αναπαραστάσεων της άλγεβρας Temperley-Lieb. Για παράδειγμα κάθε ταμπλώ σχήματος $(3, 1)$ αποτελεί βάση ενός διανυσματικού χώρου τριών διαστάσεων. Υπάρχουν τρία ταμπλώ σχήματος $(3, 1)$ και άρα κάθε διάνυσμα του διανυσματικού χώρου θα έχει τη μορφή:

$$v = a \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} + b \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} + c \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

Όπου a, b, c σταθερές.

Έστω m στοιχείο της $TL_n(x)$ τότε:

$$m * v = am \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} + bm \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} + cm \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

Άρα η δράση του m σε οποιοδήποτε διάνυσμα του διανυσματικού χώρου είναι γνωστή από το πώς δρα το m στις βάσεις το διανυσματικού χώρου. Όπως έχουμε δει κάθε διάγραμμα TL_n είναι γινόμενο των γεννητόρων του. Άρα η δράση οποιοδήποτε διαγράμματος TL_n σε ένα διάνυσμα του διανυσματικού χώρου είναι γνωστή από το πώς δρουν οι γεννήτορες στις βάσεις το διανυσματικού χώρου. Συνεπώς η δράση

οποιοδήποτε διαγράμματος TL_n σε ένα διάνυσμα του διανυσματικού χώρου των Young ταμπλώ ενός σχήματος είναι γνωστή από το πώς δρουν οι γεννήτορες στο Young ταμπλώ αυτού του σχήματος. Κάθε μονοειδές $TL_n(x)$ θα έχει διαφορετική αναπαράσταση για κάθε σχήμα μεγέθους n .

4.4 Η Δράση των Γεννητόρων στα Young Ταμπλώ

Ένα καλός τρόπος να δούμε πώς ο γεννήτορας e_i δρα σε ένα ταμπλώ είναι να παρατηρήσουμε πώς δρουν τα στοιχεία της συμμετρικής ομάδας (ομάδα μεταθέσεων). Μια απλή μετάθεση $s_i = (i, i + 1) \in S_n$ είναι η μετάθεση που ανταλλάσσει το i με το $i + 1$. Το s_i δρα στο ταμπλώ Y_l ανταλλάσσοντας τις θέσεις των στοιχείων i και $i + 1$. Για παράδειγμα,

$$s_3 \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$$

$$s_4 \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 1 & \\ \hline \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι μερικές φορές το $s_i(Y_l)$ δεν είναι κανονικό Young ταμπλώ όπως βλέπουμε παραπάνω στο δεύτερο παράδειγμα.

Η δράση του e_i στο Y_l στέλνει το Y_l σε ένα γραμμικό συνδυασμό Y_l και $s_i(Y_l)$ όταν το $s_i(Y_l)$ είναι κανονικό και σε ένα πολλαπλάσιο του Y_l όταν το $s_i(Y_l)$ δεν είναι κανονικό.

$$e_i Y_l = \begin{cases} C Y_l + C' s_i(Y_l) & \text{εάν } s_i(Y_l) \text{ κανονικό} \\ C Y_l & \text{εάν το } s_i(Y_l) \text{ δεν είναι κανονικό} \end{cases} \quad (13)$$

4.4.1 Το πολυώνυμο $[d]$

Για να βρούμε τις τιμές των C και C' θα χρησιμοποιήσουμε το πολυώνυμο $[d]$ του x , [5]. Για να βρούμε την τιμή του $[d]$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την μεταβλητή q της αλγεβρας Hecke.

$$x = q + q^{-1} \quad (14)$$

$$[d] = \frac{q^d - q^{-d}}{q - q^{-1}} = q^{d-1} + q^{d-3} + \dots + q^{-(d-1)} \quad (15)$$

Παρακάτω ακολουθούν κάποιες τιμές του $[d]$:

$$[0] = \frac{q^0 - q^0}{q - q^{-1}} = 0 \quad (16)$$

$$[1] = \frac{q^1 - q^{-1}}{q - q^{-1}} = 1 \quad (17)$$

$$[2] = q^{2-1} + q^{-(2-1)} = q + q^{-1} = x \quad (18)$$

Εύρεση για $d = 3$:

$$\begin{aligned} [3] &= q^{3-1} + q^{3-3} + q^{-(3-1)} = q^2 + q^0 + q^{-2} = \\ &= q^2 + 1 + q^{-2} = q^2 + 2 + q^{-2} - 1 = (q^1 + q^{-1})^2 - 1 \end{aligned}$$

Άρα από (15):

$$[3] = x^2 - 1 \quad (19)$$

Κάποιες επιπλέον τιμές είναι οι παρακάτω:

$$[4] = x^3 - 2x \quad (20)$$

$$[5] = x^4 - 3x^2 + 1 \quad (21)$$

$$[6] = x^4 - 4x^2 + 3 \quad (22)$$

$$[7] = x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1 \quad (23)$$

4.4.2 Εύρεση των συντελεστών C και C'

Έστω ότι e_i δρα σε ένα ταμπλώ τότε το d θα είναι ίσο με τον αριθμό των βημάτων ανάμεσα στο στοιχείο i και το στοιχείο $i + 1$. Έστω ότι το e_3 δρα σε ένα ταμπλώ όπως φαίνεται παρακάτω.

$$e_3 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$$

Για να πάμε από το 3 στο 4 έχουμε δύο πιθανές διαδρομές. Είτε θα πάμε από το 3 στο 2 μετά από το 2 στο 1 και από το 1 στο 4 ή θα πάμε από το 3 στο 2 από το 2 στο 5 και από το 5 στο 4. Παρατηρούμε ότι και οι δύο διαδρομές χρειάζονται τρία βήματα, δύο βήματα αριστερά και ένα κάτω ($\alpha \setminus \chi$).

Τώρα έστω ότι το e_3 δρα στο παρακάτω ταμπλώ.

$$e_3 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}$$

Σε αυτή την περίπτωση για να μεταφέρουμε το 3 στο 4 θα πρέπει να κάνουμε ένα βήμα πάνω και δύο δεξιά ($\delta \setminus \pi$). Σε ένα κανονικό ταμπλώ Young η διαδρομή που θα πάρουμε για να μεταφέρουμε το i στο $i + 1$ θα είναι είτε $\alpha \setminus \chi$ (εμπεριέχει και τα μονοπάτια που έχουν μόνο βήματα προς τα κάτω) ή $\delta \setminus \pi$ (εμπεριέχει και τα μονοπάτια που έχουν μόνο βήματα προς τα δεξιά).

Έστω ένα διάγραμμα στο οποίο πρέπει να κάνουμε δεξιά και κάτω βήματα για να μεταφέρουμε το i στο $i + 1$ όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline i & & \\ \hline x & & \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline i + 1 & \\ \hline \end{array}$$

Όπως γνωρίζουμε από τον ορισμό του κανονικού Young ταμπλώ το x θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο του i και μικρότερο του $i + 1$ και όλοι οι αριθμοί στα τετράγωνα θα είναι ακέραιοι. Προφανώς δεν υπάρχει κάποιος αριθμός που μπορεί να μπει στη θέση του x .

Ομοίως έστω ένα διάγραμμα στο οποίο πρέπει να κάνουμε αριστερά και πάνω βήματα για να μεταφέρουμε το i στο $i + 1$ όπως φαίνεται παρακάτω.

$i + 1$...	x	
			...	i	

Σε αυτή την περίπτωση πάλι δεν θα υπάρχει κάποιος αριθμός που μπορεί να μπει στη θέση του x αλλά και το διάγραμμα δεν είναι κανονικό Young ταμπλώ εξαιτίας των τετραγώνων που περιέχουν τα i και $i + 1$.

Συνεπώς:

$$C = \begin{cases} \frac{[d-1]}{[d]} & \text{εάν } i + 1 \text{ είναι } d \text{ βήματα } \delta \setminus \pi \text{ από το } i \\ \frac{[d+1]}{[d]} & \text{εάν } i + 1 \text{ είναι } d \text{ βήματα } \alpha \setminus \kappa \text{ από το } i \end{cases} \quad (24)$$

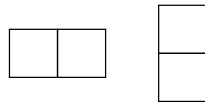
$$C' = \frac{\sqrt{[d-1][d+1]}}{[d]} \quad (25)$$

$$e_i Y_l = \begin{cases} C Y_l + C' s_i(Y_l) & \text{εάν } s_i(Y_l) \text{ κανονικό} \\ C Y_l & \text{εάν το } Y_l \text{ δεν είναι κανονικό} \end{cases}$$

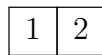
4.5 Αναπαραστάσεις των $TL_2(x)$ και $TL_3(x)$

4.5.1 Αναπαραστάσεις της $TL_2(x)$

Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν δύο διαγράμματα Young μεγέθους δύο άρα με βάση την παραπάνω μέθοδο θα προκύψουν δύο αναπαραστάσεις της $TL_2(x)$.



Επίσης υπάρχει ένα κανονικό ταμπλώ Young σχήματος (2).



Όπως έχουμε ήδη δει υπάρχει μόνο ένας γεννήτορας, e_1 στην $TL_2(x)$. Άρα η μόνη δράση που μπορεί να γίνει είναι η παρακάτω:

$$e_1 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Για να πάμε από το 1 στο 2 θα κάνουμε ένα βήμα στα δεξιά άρα από τον τύπο (25) θα έχουμε:

$$C = \frac{[1-1]}{1} = \frac{[0]}{[1]} = 0$$

Άρα το e_1 αντιστοιχεί στο (0). Παρατηρούμε ότι σε κάθε ταμπλώ στο οποίο το i βρίσκεται ακριβώς αριστερά του $i+1$ θα έχουμε $C = 0$.

Επίσης υπάρχει μόνο ένα ταμπλώ σχήματος (1,1).

1
2

Σε αυτή την περίπτωση θα κάνουμε ένα βήμα προς τα κάτω άρα πάλι από τον τύπο (25) θα έχουμε:

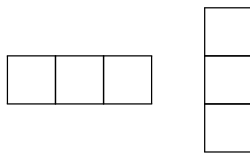
$$C = \frac{[1+1]}{1} = \frac{[2]}{[1]} = x$$

Άρα το e_1 αντιστοιχεί στο (x) . Παρατηρούμε ότι σε κάθε ταμπλώ στο οποίο το i βρίσκεται ακριβώς από πάνω από το $i + 1$ θα έχουμε $C = x$.

Το αποτέλεσμα και των δύο παραπάνω μεταθέσεων δεν είναι ένα κανονικό Young ταμπλώ οπότε δεν θα υπάρχει C' .

4.5.2 Αναπαραστάσεις της $TL_3(x)$

Υπάρχουν δύο Young διαγράμματα μεγέθους τρία με μήκος μικρότερο ή ίσο του δύο.



Επίσης υπάρχει ένα κανονικό ταμπλώ Young σχήματος (3).

1	2	3
---	---	---

Παρατηρούμε ότι το 1 βρίσκεται ακριβώς μία θέση αριστερά από το 2 και το 2 ακριβώς μία θέση αριστερά από το 3. Άρα με βάση ό,τι είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο γνωρίζουμε ότι και το e_1 και το e_2 θα αντιστοιχούν στο (0) .

Υπάρχουν δύο Young ταμπλώ με σχήμα (2,1).

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

Αρχικά θα εξετάσουμε το πρώτο ταμπλώ από τα αριστερά. Παρατηρούμε ότι το 1 βρίσκεται ακριβώς αριστερά του 2 άρα το e_1 στέλνει το πρώτο ταμπλώ στο μηδέν. Συνεπώς η πρώτη στήλη του πίνακα του e_1 θα είναι $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Τώρα θα εξετάσουμε το δεύτερο διάγραμμα. Στο δεύτερο ταμπλώ το 2 βρίσκεται ακριβώς από κάτω από το 1 οπότε το e_1 στέλνει το δεύτερο ταμπλώ στο x . Συνεπώς η δεύτερη στήλη του πίνακα του e_1 θα είναι $\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$.

Άρα ο πίνακας του e_1 θα είναι $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι η δράση του e_2 οδηγεί τα ταμπλώ σε κανονικά ταμπλώ Young άρα θα έχουμε και C' .

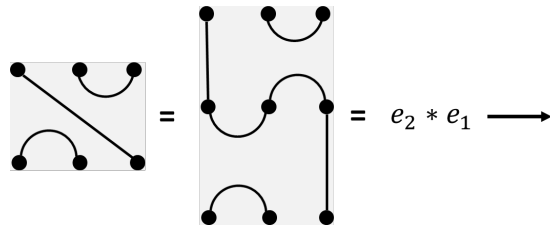
$$\begin{aligned} e_2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} &= C \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} + C' \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \\ &= \frac{[2+1]}{[2]} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} + \frac{\sqrt{[2-1][2+1]}}{[2]} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \\ &= \frac{x^2-1}{x} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} &= C \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} + C' \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \\
&= \frac{[2-1]}{[2]} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} + \frac{\sqrt{[2-1][2+1]}}{[2]} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \\
&= \frac{1}{x} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}
\end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας του e_2 θα είναι:
$$\begin{pmatrix} \frac{x^2-1}{x} & \frac{1}{x} \\ \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} & \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \end{pmatrix}.$$

Αφού έχουμε βρει τις αναπαραστάσεις των γεννητόρων μπορούμε να βρούμε και τις αναπαραστάσεις όλων των $TL_3(x)$ διαγραμμάτων. .

Παρακάτω ακολουθεί ένα παράδειγμα:



$$\begin{pmatrix} \frac{x^2-1}{x} & \frac{1}{x} \\ \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} & \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{x^2-1} \end{pmatrix}$$

5 Εφαρμογές της Άλγεβρας TL_n

5.1 Φυσικά Μοντέλα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα διερευνήσουμε τη σχέση μεταξύ της άλγεβρας Temperley-Lieb και διάφορων φυσικών μοντέλων. Αρχικά θα κάνουμε μία εισαγωγή στους βασικούς ορισμούς της στατιστικής φυσικής όπως την συνάρτηση διαμέρισης.

Για κάθε κατάσταση x κάποιου συστήματος το βάρος Boltzmann δίνεται από το $e^{-\beta E(x)}$. Το $E(x)$ είναι η ενέργεια της κατάστασης x και $\beta = \frac{1}{k_B T}$, όπου k_B είναι η σταθερά του Boltzmann και T η θερμοκρασία.

Η συνάρτηση διαμέρισης Z δίνεται από τον τύπο:

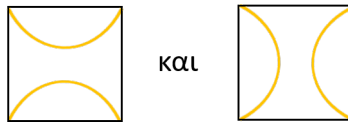
$$Z = \sum_x e^{-\beta E(x)} \quad (26)$$

όπου το άθροισμα αφορά όλες τις πιθανές καταστάσεις x του συστήματος μας. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η πιθανότητα για κάθε κατάσταση x δίνεται από τον τύπο:

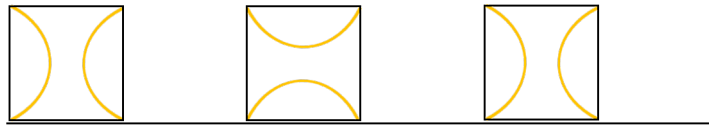
$$P(x) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(x)} \quad (27)$$

5.1.1 Πίνακας Μεταφοράς

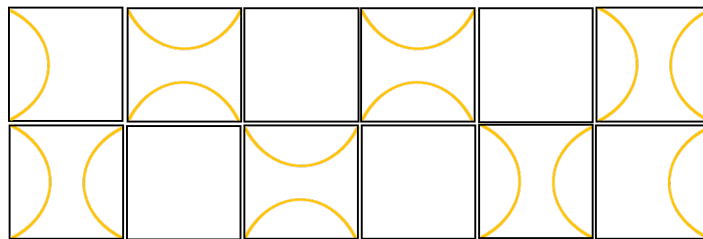
Τα μοντέλα που θα δούμε θα έχουν για καταστάσεις μονοπάτια σε τετράγωνα πλέγματα. Τα μονοπάτια αυτά θα προκύπτουν από έναν πίνακα μεταφοράς ο οποίος θα σχηματίζεται από τα παρακάτω δύο διαγράμματα.



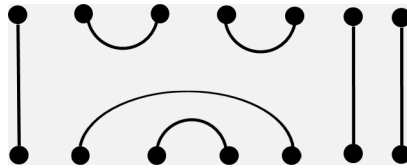
Θα δώσουμε στο πρώτο διάγραμμα βάρος α και στο δεύτερο βάρος β . Εάν έχουμε μία σειρά με n σημεία τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πίνακα μεταφοράς σε δύο βήματα. Αρχικά θα τοποθετήσουμε ένα διάγραμμα σε κάθε περιττή θέση. Με W θα συμβολίζουμε το σύνολο των διαγραμμάτων και το άθροισμα των βαρών τους. Παρακάτω ακολουθεί ένα παράδειγμα για $n = 7$.



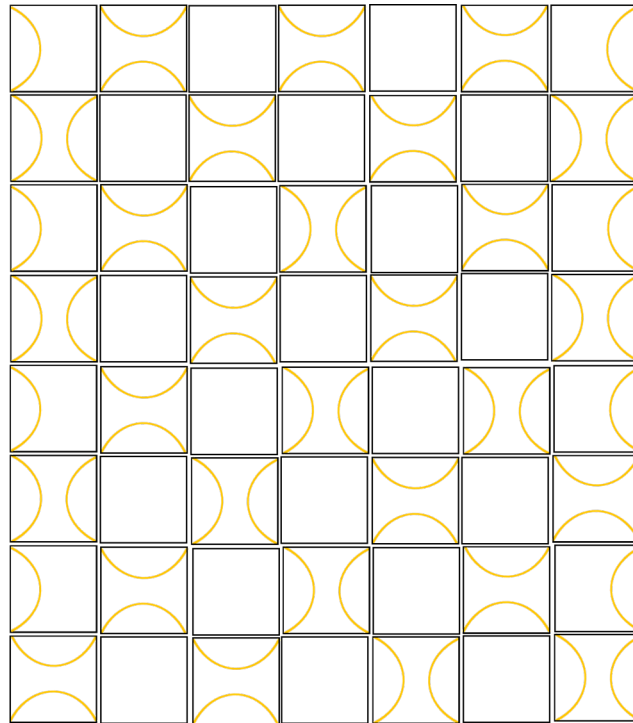
Παρατηρούμε όμως ότι το τελευταίο σημείο δεν ενώνεται με κάποιο διάγραμμα γι' αυτό στην τελευταία θέση θα προσθέσουμε το ταυτοτικό διάγραμμα. Στο δεύτερο βήμα θα δημιουργήσουμε μία άλλη γραμμή από διαγράμματα πάνω από τη σειρά που έχουμε ήδη κατασκευάσει. Στο δεύτερο αυτό βήμα θα τοποθετήσουμε διαγράμματα στις άρτιες θέσεις. Το σύνολο των διαγραμμάτων και το άθροισμα των βαρών θα συμβολίζεται με V .



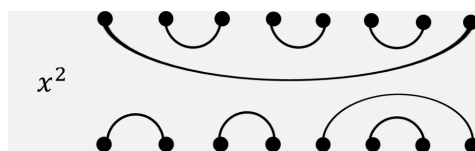
Ο πίνακας μεταφοράς T θα είναι το γινόμενο των δύο παραπάνω γραμμών που κατασκευάσαμε και θα αντιστοιχεί σε ένα διάγραμμα TL_n . Προφανώς δεν έχει κάθε διάγραμμα TL_n ένα τέτοιο αντίστοιχο στοιχείο. Το παραπάνω παράδειγμα αντιστοιχεί στο παρακάτω διάγραμμα TL_n .



Τα στοιχεία σε ένα πίνακα μεταφοράς αντιστοιχούν πάντα σε ένα διάγραμμα TL_n άρα μπορούμε να τα πολλαπλασιάσουμε με τον αντίστοιχο τρόπο. Παρακάτω βλέπουμε ένα παράδειγμα.



Το TL_n διάγραμμα που αντιστοιχεί σε αυτό το πολλαπλασιασμό πινάκων μεταφοράς είναι το παρακάτω.



5.1.2 Potts Model

Τώρα θα ορίσουμε το p -state Potts model και θα δείξουμε τη σχέση που έχει με τα τετράγωνα πλέγματα και την άλγεβρα Temperley-Lieb. Υπάρχουν πολλά μοντέλα Potts αλλά εμείς θα χρησιμοποιήσουμε το μονόμετρο και όχι το διανυσματικό. Το μοντέλο Potts έχει πολλές χρήσεις λόγω της απλότητας του.

Ένα πλέγμα L αποτελείται από n σημεία και από γραμμές μεταξύ των σημείων που δείχνουν ότι είναι γείτονες. Σε κάθε πλέγμα αντιστοιχούμε ένα spin $\sigma_i \in (1, 2, \dots, p)$. Τα γειτονικά σημεία θα έχουν ενέργεια ϵ εάν είναι ίδια και μηδέν εάν είναι διαφορετικά. Τότε κάθε κατάσταση x αυτού του μοντέλου είναι μία από τις πιθανές συνθέσεις από spins στο πλέγμα και η ενέργεια της κατάστασης x είναι η παρακάτω.

$$E(x) = \epsilon \sum_{(i,j)} \delta(\sigma_i, \sigma_j) \quad (28)$$

Δηλαδή το άθροισμα για όλα τα σημεία που είναι γειτονικά. Η συνάρτηση διαμέρισης είναι.

$$Z = \sum_x \exp \left(\beta \epsilon \sum_{(i,j)} \delta(\sigma_i, \sigma_j) \right) \quad (29)$$

Όπου αθροίζουμε για p^n καταστάσεις. Τώρα θα θεωρήσουμε:

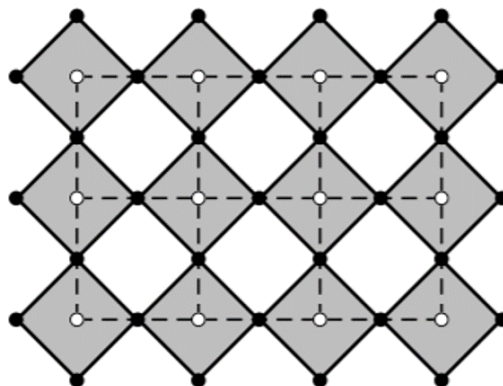
$$v = e^{\beta \epsilon} - 1 \quad (30)$$

και θα καταλήξουμε στο

$$Z = \sum_x \prod_{(i,j)} (1 + v \delta(\sigma_i, \sigma_j)) \quad (31)$$

Θα εξετάσουμε μόνο τετράγωνα πλέγματα με διαστάσεις $M \times N$. Σε κάθε πλέγμα L μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα περιβάλλον πλέγμα L' . Τα σημεία του L' βρίσκονται στη μέση των ακμών που ενώνουν τα σημεία του L , τα οποία θα ονομάσουμε εσωτερικά σημεία. Τα σημεία του L' ενώνονται μόνο εάν οι ακμές του L πάνω στις οποίες βρίσκονται έχουν κοινό σημείο στο L . Τέλος μπορούμε να προσθέσουμε σημεία στα σύνορα έτσι ώστε κάθε σημείο του L να εμπεριέχεται σε

ένα τετράγωνο του L' . Τα σημεία αυτά θα τα ονομάσουμε εξωτερικά σημεία. Παρακάτω βλέπουμε ένα παράδειγμα πλέγματος 3×4 (εργασία [6]).



Τώρα θα ορίσουμε το ice-type μοντέλο στο πλέγμα L' και θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση διαμέρισης του θα είναι $p^{n/2}Z$. Το μοντέλο αυτό ονομάζεται ice-type γιατί χρησιμοποιούμε ένα παρόμοιο μοντέλο για να περιγράψουμε τον πάγο. Έστω θ και s οι παράμετροι που δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$p^{1/2} = 2\cosh\theta, s = e^{\theta/2} \quad (32)$$

Το ice-type μοντέλο ορίζεται ως εξής:

1. Τοποθετούμε βέλη σε κάθε ακμή του L' έτσι ώστε κάθε σημείο να έχει ίσο αριθμό από βέλη που δείχνουν προς τα μέσα και προς τα έξω.
2. Σε κάθε σημείο αντιστοιχίζουμε ένα βάρος $s^{1/2}$ εάν τα βέλη στρίβουν αριστερά μέσω του σημείου και $s^{-1/2}$ εάν στρίβουν δεξιά.
3. Όλα τα εσωτερικά σημεία έχουν έξι πιθανές διατάξεις (εργασία [6]).



Τα παραπάνω έχουν βάρη $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = x$, $\omega_4 = x$, $\omega_5 = s^{-1} + xs$, $\omega_6 = s + xs^{-1}$

Η συνάρτηση διαμέρισης γίνεται

$$Z' = \sum \prod(\text{weights}) \quad (33)$$

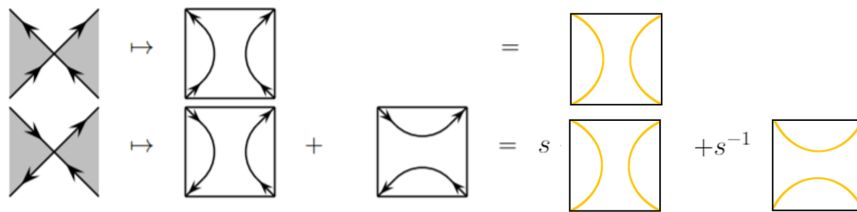
Όπου το άθροισμα αναφέρεται σε όλες τις πιθανές διατάξεις και το γινόμενο σε όλα τα σημεία.

Στην εργασία [7] αποδεικνύεται ότι $Z' = p^{-1/2}Z$ για το περιβάλλον πλέγμα ενός επίπεδου πλέγματος.

Μπορούμε να δούμε όλα τα εσωτερικά σημεία ως γραμμικό συνδυασμό δύο διαγραμμάτων. Αυτό γίνεται δίνοντας κατεύθυνση στις ακμές των παρακάτω διαγραμμάτων.

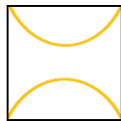


Τα κατευθυνόμενα αυτά διαγράμματα αντιστοιχούν στα διαγράμματα που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο πολλαπλασιασμένα επί έναν παράγοντα που βρίσκουμε με τον παρακάτω τρόπο. Ο παράγοντας αυτός είναι το s υψομένο στο 1 εάν και οι δύο γραμμές στρέφονται στα δεξιά στο -1 εάν και οι δύο γραμμές στρέφονται στα αριστερά και στο μηδέν εάν η μία γραμμή στρέφεται στα δεξιά και η άλλη στα αριστερά.

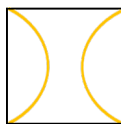


Τώρα θέλουμε τα βάρη των εσωτερικών σημείων να αντιστοιχούν

στα βάρη των αντίστοιχων διαγραμμάτων. Άρα το διάγραμμα



θα έχει βάρος 1 και το διάγραμμα



θα έχει βάρος x . Η παραπάνω ανάλυση μας δίνει την αντιστοιχία ανάμεσα στο ice type μοντέλο και το μοντέλο που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και για το οποίο δείξαμε τον τρόπο με τον οποίο ενώνεται με την άλγεβρα Temperley-Lieb. Το μόνο που λείπει τώρα είναι η αντιστοιχία του $x = q + q^{-1}$ της άλγεβρας Temperley-Lieb με τις σταθερές p, s, v . Η σχέση τους είναι η παρακάτω:

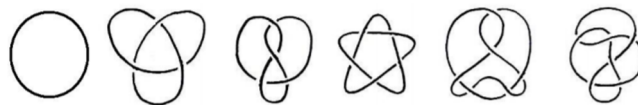
$$p = x^2 \tag{34}$$

$$s = \sqrt{q} \tag{35}$$

και το x είναι επίσης ίσο με την κρίσιμη τιμή του v .

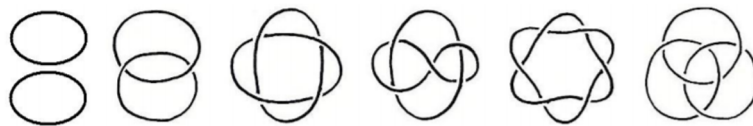
5.2 Θεωρία Κόμβων

Ορισμός: Ένας κόμβος (knot) K είναι η εικόνα ενός ομομορφισμού h του κύκλου S^1 στο χώρο \mathbb{R}^3 στη σφαίρα S^3 . Δηλαδή: $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ή S^3 , $h(O) = K$, όπου O είναι ο κύκλος S^1 .



Σχήμα 46: Παραδείγματα Κόμβων [8]

Ορισμός: Ένας κρίκος (link) L με n συνιστώσες είναι η ομοιομορφική εικόνα από n αντίγραφα του κύκλου S^1 στο \mathbb{R}^3 ή στην S^3 . Επιλέγοντας έναν προσανατολισμό για κάθε συνιστώσα, μιλάμε για προσανατολισμένους κρίκους.



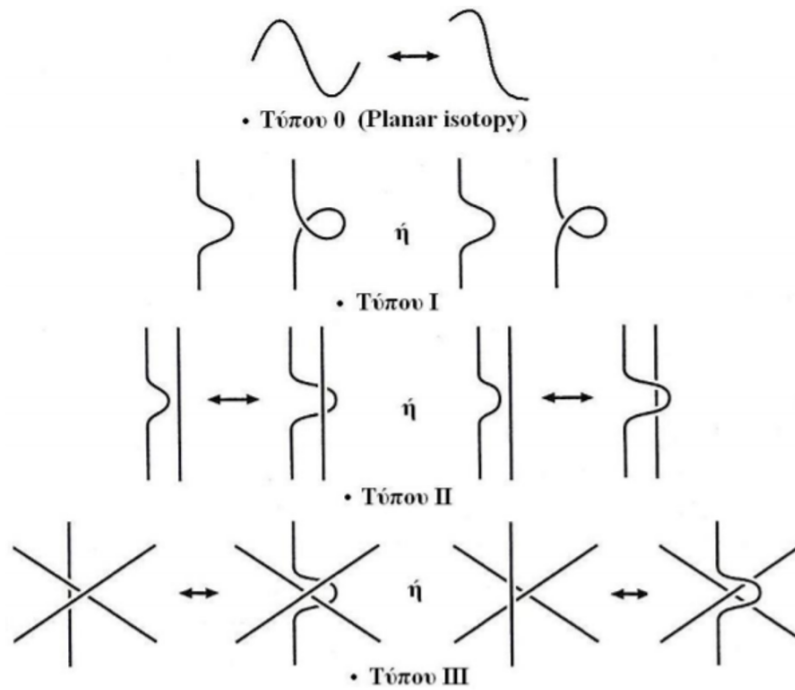
Σχήμα 47: Παραδείγματα Κρίκων [8]

Μία από της εφαρμογές της άλγεβρας Temperley-Lieb στη θεωρία των κόμβων προήλθε από τον Kauffman οποίος ανέπτυξε μία αντιστοιχία ανάμεσα στο πολυώνυμο Jones και το δικό του bracket πολυώνυμο. Η βασική ιδέα του bracket πολυωνύμου εκφράζεται από την παρακάτω σχέση.

$$\langle \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) \rangle = A \langle \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \rangle + B \langle \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \rangle \langle \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \rangle$$

Σχήμα 48: Bracket Polynomial [9]

Κάθε τομή σε ένα κόμβο ή ένα κρίκο αντιστοιχεί σε ένα άθροισμα με βάρος, των δύο πιθανών επίπεδων διαγραμμάτων του. Με τη σωστή επιλογή A και B είναι αμετάβλητο υπό τις κινήσεις Reidemeister δύο και τρία. Επίσης με τη σωστή επιλογή παράγοντα κανονικοποίησης γίνεται αμετάβλητο και υπό την κίνηση Reidemeister ένα και καταλήγει στο πολυώνυμο Jones.



Σχήμα 49: Κινήσεις Reidemeister [8]

Αλγεβρικά αυτό σημαίνει ότι το σύλλογο των (κλάσεων ισοτοπίας) κοτσίδων με n κλωστές, B_n έχει μία αναπαράσταση στην άλγεβρα Temperley-Lieb. Η παραπάνω εξίσωση bracket δείχνει την αντιστοιχία των γεννητόρων β_i της ομάδας των κοτσίδων με την άλγεβρα Temperley-Lieb.

$$\beta_i \rightarrow A * e_i + B * 1 \quad (36)$$

Αναφορές

- [1] Tom Davis. Catalan numbers. *Unpublished notes, November, 26, 2006.*
- [2] Anne Moore. Representations of the Temperley-Lieb algebra. *Honors Projects, 2008.*
- [3] K. Dosen and Z. Petric. Self-adjunctions and matrices. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 184:7–39, 2003.
- [4] L. H. Kauffman. An invariant of regular isotopy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 318(2):417–471, 1990.
- [5] Tom Halverson and Manuela Mazzocco and Arun Ram. Commuting families in Hecke and Temperley-Lieb algebras. *Nagoya Mathematical Journal*, 195:125–152, 2009.
- [6] Michiel Lieftink. Dilute Temperley-Lieb algebra. *University of Amsterdam, 2018.*
- [7] Rodney J Baxter and Stewart B Kelland and Frank Y Wu. Equivalence of the Potts model or Whitney polynomial with an ice-type model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 9(3):397, 1976.
- [8] Αντώνιος Πατεράκης. Τα Θεωρήματα Alexander και Markov της Θεωρίας Κόμβων. *Διπλωματική Εργασία Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. Ε.Μ.Π., 2008.*
- [9] Samson Abramsky. Temperley-Lieb algebra: from knot theory to logic and computation via quantum mechanics. *arXiv preprint arXiv:0910.2737, 2009.*
- [10] Harold NV Temperley and Elliott H Lieb. Relations between the ‘percolation’ and ‘colouring’ problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the ‘percolation’ problem. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 322(1549):251–280, 1971.
- [11] Catalan Numbers. <https://brilliant.org/wiki/catalan-numbers/>.

- [12] Bruce W Westbury. The representation theory of the Temperley-Lieb algebras. *Mathematische Zeitschrift*, 219(1):539–565, 1995.
- [13] Μιχάλης Μαλιάκας. Άλγεβρα ΙΙ. *Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Τμήματος ΕΚΠΑ*, 2020.
- [14] John B. Fraleigh. *Εισαγωγή στην Άλγεβρα*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.
- [15] Απόστολος Μπεληγιάννης. *Μια Εισαγωγή στη Βασική Άλγεβρα*. Σ.Ε.Α.Β., 2015.
- [16] Jim de Groot. An introduction to the representation theory of Temperley-Lieb algebras. *Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde Universiteit van Amsterdam*, 2015.
- [17] Χρήστος Α. Αθανασιάδης. *Άλγεβρική και Απαριθμητική Συνδυαστική Τόμος Α*. Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2016.
- [18] Colin C Adams. *The Knot Book*. American Mathematical Soc., 1994.