Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Βελτιωμένα Φράγματα άνευ Μοντέλου για Χρηματοοικονομικά Παράγωγα

Διπλωματικη Εργασια

του

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΥ

Επιβλέπων: Αντώνιος Παπαπαντολέων
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2020

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Βελτιωμένα Φράγματα άνευ Μοντέλου για Χρηματοοικονομικά Παράγωγα

Διπλωματική Εργασία

του

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΥ

Επιβλέπων: Αντώνιος Παπαπαντολέων
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 3$^{\eta}$ Νοεμβρίου 2020.

(Υπογραφή)	*(Υπογραφή)*	*(Υπογραφή)*
....	....	....
Αντώνιος Παπαπαντολέων	Ιωάννης Κολέτσος	Μιχαήλ Λουλάκης
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2020

(Υπογραφή)

....

Νικολαος Νικολοπουλος

Αριθμός Μητρώου: ge15039

email: ge15039@central.ntua.gr

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Ευχαριστίες

Κατ΄ αρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Αντώνη Παπαπαντολέων για την καθοδήγησή του, τις πολύτιμες συμβουλές και τις γνώσεις που μου προσέφερε κατά την διάρκεια της φοιτητικής μου πορείας.

Επίσης, ευχαριστώ την μεταδιδακτορική ερευνήτρια κυρία Χάρις Ντακόλια για τον χρόνο που μου αφιέρωσε.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, που με στηρίζει σε κάθε βήμα της ζωής μου.

Περίληψη

Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας αποτελεί η διερεύνηση ενός κλασικού προβλήματος τιμολόγησης στον χώρο των χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Το μαθηματικό υπόβαθρο που είναι απαραίτητο για την κατανόηση και επίλυση του προβλήματος παρουσιάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε κεφάλαιο να διαδέχεται ομαλά το προηγούμενό του, χωρίς να δημιουργούνται κενά. Το τελευταίο κεφάλαιο αξιοποιεί την θεωρία που αναπτύσσεται προηγουμένως για τον ορισμό του προβλήματος και την επίλυση του, χρησιμοποιώντας θεωρήματα και τεχνικές που έχουν συζητηθεί σε συνδυασμό με αποτελέσματα από επιστημονικά άρθρα και δημοσιεύσεις που έχουν επιχειρήσει να επιλύσουν προβλήματα της ίδιας μορφής.

Πιο συγκεκριμένα, πρόκειται περί ενός προβλήματος βελτιστοποίησης το οποίο σχετίζεται με την εύρεση φραγμάτων στην τιμή ενός χρηματοοικονομικού παραγώγου. Η προτεινόμενη προσέγγιση περιλαμβάνει τον μετασχηματισμό του αρχικού προβλήματος, το οποίο έχει ως μεταβλητές μέτρα πιθανότητας, σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης με μεταβλητές διανύσματα πραγματικών αριθμών. Συνεπώς, η εργασία περιλαμβάνει τις απαραίτητες έννοιες θεωρίας πιθανοτήτων και χρηματοοικονομικών μαθηματικών για την κατανόηση του αρχικού προβλήματος βελτιστοποίησης καθώς επίσης και βασικές αρχές γραμμικού προγραμματισμού και θεωρίας δυϊκότητας οι οποίες χρησίμευσαν τόσο στο μετασχηματισμό του αρχικού προβλήματος στις ισοδύναμες μορφές του όσο και στην συστηματική επίλυσή του. Επίσης, στο τελευταίο κεφάλαιο παρατίθεται αλγόριθμος ο οποίος επιχειρεί να επιλύσει το αρχικό πρόβλημα μέσω μιας ισοδύναμης μορφής του. Η απόδοση του προτεινόμενου αλγορίθμου ελέγχεται με την εκπόνηση αριθμητικών πειραμάτων για διάφορα στιγμιότυπα του αρχικού προβλήματος.

Εναλλακτικές προοπτικές και δυνητικές επεκτάσεις για την επίλυση προβλημάτων αυτού του τύπου αναφέρονται καθ΄ όλη την διάρκεια του τελευταίου κεφαλαίου, ρητά ή με την μορφή παραπομπών σε πηγές της βιβλιογραφίας. Το θεωρητικό υπόβαθρο που περιέχεται σε αυτή την διπλωματική εργασία αρκεί για την πολύπλευρη εξέταση του εν λόγω προβλήματος και συγγενικών προβλημάτων, τα οποία είναι πολυσυζητημένα στην επιστημονική κοινότητα που δραστηριοποιείται στον χώρο των χρηματοοικονομικών μαθηματικών.

Λέξεις Κλειδιά

Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά, Βελτιστοποίηση, Γραμμικός Προγραμματισμός, Δυϊκότητα, Τιμολόγηση Δικαιωμάτων χωρίς Μοντέλο, Φράγματα Δικαιωμάτων χωρίς Arbitrage, Πρόβλημα Διαχωρισμού, Χαρτοφυλάκιο Υπέρ- και Υπό-αντιστάθμισης, Basket Δικαίωμα.

Abstract

The purpose of this diploma thesis is to investigate a classic pricing problem in the area of financial mathematics. The necessary mathematical background for both, the comprehension and the solution process of the considered problem is presented in a way such that each chapter smoothly suceeds the previous one, without skipping anything important. The last chapter makes good use of the aforementioned theory in order to define the problem and proceed to its solution by utilizing theorems and techniques that have already been introduced, in combination with results from scientific articles and publications attempting problems of the same form.

In particular, this thesis delves into an optimization problem which has to do with the computation of bounds on the price of a financial derivative. The proposed approach involves the transformation of the original problem, over probability measures, into an equivalent more tractable optimization problem, over real-valued vectors. Consequently, the theoretical base introduced consists of the necessary notions of probability theory and financial mathematics for the comprehension of the original problem, as well as the basic principles of linear programming and duality theory, so that one may acquire equivalent forms of the original problem in order to solve it. Moreover, in the last chapter an algorithm attempting to solve the original problem through one of its equivalent expressions, is presented. The performance of the proposed algorithm is tested in several numerical experiments conducted by varying the parameters of the original problem.

Alternative perspectives and possible extensions for tackling similar problems are referred to directly or in a manner of bibliographic citations during the last chapter. The theoretical framework introduced in this thesis is sufficient for a multidisciplinary evaluation, not only of the problem considered here, but also of other related problems of growing attention in the world of financial mathematics.

Keywords

Financial Mathematics, Optimization, Linear Programming, Duality, Model-Free Option Pricing, Arbitrage-Free Option Bounds, Separation Problem, Super- and Sub-replicating Portfolio, Basket Option.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες

Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο παρατίθενται απαραίτητες μαθηματικές έννοιες για την κατανόηση της μετέπειτα ανάλυσης. Ειδικότερα, το κεφάλαιο χωρίζεται στις εξής θεματικές ενότητες: Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων 1.1 και Στοιχεία Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών 1.2. Η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε σε αυτό το κεφάλαιο περιλαμβάνει τα [4], [5], [7], [8], [10] και [14].

1.1 Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Ορισμός 1.1.1 (σ-άλγεβρα)
Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Μια μη κενή συλλογή υποσυνόλων $\mathcal{F}$ του Ω ονομάζεται **σ-άλγεβρα** αν ικανοποιεί τα παρακάτω:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε $A^c \in \mathcal{F}$.
3. Αν A_n είναι μια ακολουθία συνόλων με $A_n \in \mathcal{F}$, τότε για την ένωση ισχύει $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Παράδειγμα 1.1.1
Από τον ορισμό προκύπτουν άμεσα τα παρακάτω.

- Για κάθε σύνολο Ω το $\{\emptyset, \Omega\}$ είναι η μικρότερη και το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\Omega)$ η μεγαλύτερη σ-άλγεβρα που το περιλαμβάνει.
- Τα ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}$ δεν είναι σ-άλγεβρα, το συμπλήρωμά τους είναι κλειστό σύνολο το οποίο δεν είναι κλειστό ως προς αριθμήσιμη ένωση (ιδιότητα *3* του Ορισμού 1.1.1).

Πρόταση 1.1.1
Αν $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια σ-αλγεβρών υποσυνόλων του Ω, τότε η τομή τους $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{F}_i$ είναι επίσης σ-άλγεβρα.

Σημείωση 1.1.1
Δηλαδή, εφόσον $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{i\in I}(A_i^c)^c$, ισχύει ότι μια σ-άλγεβρα είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές.

Ορισμός 1.1.2 (Παραγόμενη σ-άλγεβρα)
Έστω A ένα σύνολο και $C \subset \mathcal{P}(A)$, όπου $\mathcal{P}(A)$ είναι το δυναμοσύνολο του A. Το C δεν είναι απαραίτητα σ-άλγεβρα. Ορίζουμε το σύνολο των σ-αλγεβρών στο A που καθεμία περιέχει την οικογένεια C ως:

$$\mathcal{J}(C) := \{\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(A) : \mathcal{F} \supset C \text{ και } \mathcal{F} \text{ είναι σ-άλγεβρα}\}.$$

Η σ-άλγεβρα που παράγεται από το C ορίζεται ως η τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την C και συμβολίζεται με $\sigma(C)$, δηλαδή

$$\sigma(C) := \bigcap_{\mathcal{F}\in\mathcal{J}(\mathcal{C})} \mathcal{F}.$$

Η **παραγόμενη σ-άλγεβρα** $\sigma(C)$ περιέχει ακριβώς όλα τα $D \subset A$ με την ιδιότητα $D \in \mathcal{F}$, για κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ στο A με $\mathcal{F} \supset C$.

Ορισμός 1.1.3 (Borel σ-άλγεβρα)
Έστω Ω ένας τοπολογικός χώρος. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των ανοιχτών υποσυνόλων του Ω ονομάζεται **Borel σ-άλγεβρα** στο Ω και συμβολίζεται με $\mathcal{B}(\Omega)$ (στον $\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται με $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}^n$).

Ορισμός 1.1.4 (Διύλιση ή Διήθηση (Filtration))
Διύλιση ή Διήθηση (Filtration) ονομάζεται κάθε αύξουσα οικογένεια $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ υπο-σ-αλγεβρών της $\mathcal{F}$, δηλαδή $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $\forall\, t \in \mathbb{T}$ και $\forall\, t_1,\ t_2 \in \mathbb{T}$ με $t_1 \leq t_2$ ισχύει $\mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}$, όπου $\mathbb{T}$ ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο. Συνήθως $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ (όπου $T \in \mathbb{N}$) ή $\mathbb{T} = [0, +\infty)$.

Σημείωση 1.1.2
Έχει επικρατήσει ο συμβολισμός $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ για μια διύλιση. Το σύνολο $\mathbb{T}$ συνήθως αναπαριστά τον χρόνο (συνεχής ή διακριτός). Τα ενδεχόμενα της μορφής $A \in \mathcal{F}_t$ θεωρούνται γνωστά στον χρόνο t.

Ορισμός 1.1.5 (Μέτρο πιθανότητας & χώρος πιθανότητας)
Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{F}$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Η μη αρνητική συνολοσυνάρτηση $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ καλείται **μέτρο πιθανότητας** αν ικανοποιεί τα εξής:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

2. Για κάθε ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{F}$ ισχύει

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ καλείται **χώρος πιθανότητας**.

Σημείωση 1.1.3 (Μέτρο & χώρος μέτρου)
Αν η συνολοσυνάρτηση $\mathbb{P}$ δεν ικανοποιεί την σχέση *1.* του παραπάνω ορισμού 1.1.5, τότε ονομάζεται απλά **μέτρο** και η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ καλείται **χώρος μέτρου**.

Παράδειγμα 1.1.2 (Ρίψη Νομίσματος)
Για το πείραμα ρίψης ενός νομίσματος που έχει πιθανότητα $p \in [0,1]$ να προκύψει ως αποτέλεσμα «κορώνα» και $1-p$ να προκύψει ως αποτέλεσμα «γράμματα», ένας φυσιολογικός χώρος πιθανότητας προκύπτει θεωρώντας $\Omega := \{K, \Gamma\}$, $\mathbb{P}(K) = p$ και $\mathbb{P}(\Gamma) = 1-p$. Ορίζεται έτσι ένα μέτρο πιθανότητας, έστω $\mathbb{P}$ και τελικά ο χώρος πιθανότητας είναι ο $(\{K,\Gamma\},\ \mathcal{P}(\{K,\Gamma\}), \mathbb{P})$.

Πρόταση 1.1.2 (Ιδιότητες του μέτρου πιθανότητας)
Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A),\ \forall\ A \in \mathcal{F}$.

3. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1,\ \forall\ A \in \mathcal{F}$.

4. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B),\ \forall\ A, B \in \mathcal{F}$.

5. Αν $A, B \in \mathcal{F}$ με $A \subset B$, τότε $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

6. Αν $A, B \in \mathcal{F}$, τότε $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

7. Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, τότε $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Ορισμός 1.1.6 (Ισοδύναμο, απολύτως συνεχές & ιδιάζων μέτρο)
Έστω $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ δύο μέτρα πιθανότητας στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$. Το μέτρο $\mathbb{Q}$ ονομάζεται:

- **ισοδύναμο** ως προς το $\mathbb{P}$ $(\mathbb{Q} \sim \mathbb{P})$ εάν $\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{Q}(A) = 0,\ \forall\ A \in \mathcal{F}$.

- **Απολύτως συνεχές** ως προς το $\mathbb{P}$ $(\mathbb{Q} \ll \mathbb{P})$ εάν $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$, $\forall\ A \in \mathcal{F}$.

- **Ιδιάζων** ως προς το $\mathbb{P}$ ($\mathbb{Q} \perp \mathbb{P}$) εάν $\exists\ A \in \mathcal{F}:\ \mathbb{Q}(A) = 0$ και $\mathbb{P}(A) = 1$.

Ορισμός 1.1.7 (Τυχαία μεταβλητή)
Έστω χώρος $(\Omega, \mathcal{F})$. Μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο Ω καλείται **τυχαία μεταβλητή** αν για κάθε Borel σύνολο $B \subset \mathbb{R}$ ισχύει $X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$. Όποτε χρειάζεται να δοθεί έμφαση στην σ-άλγεβρα, θα λέγεται ότι η τ.μ. X είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη ή ισοδύναμα $X \in \mathcal{F}$.

Παράδειγμα 1.1.3
Χρήσιμο παράδειγμα τ.μ. αποτελεί η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου $A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}.$$

Ορισμός 1.1.8 (Τυχαίο διάνυσμα ή τυχαία μεταβλητή στον $\mathbb{R}^n$)
Έστω χώρος $(\Omega, \mathcal{F})$. Μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο Ω καλείται **τυχαίο διάνυσμα** αν για κάθε Borel σύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$ ισχύει $X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$. Το X καλείται και $\mathcal{F}-$μετρήσιμο ή ισοδύναμα $X \in \mathcal{F}$.

Ορισμός 1.1.9 (Μετρήσιμη τ.μ.)
Μια τυχαία μεταβλητή X, που παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}^n$, ονομάζεται **μετρήσιμη** ως προς την σ-άλγβερα $\mathcal{F}$ εάν

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F},\ \forall \text{ σύνολο Borel } B \subseteq \mathbb{R}^n.$$

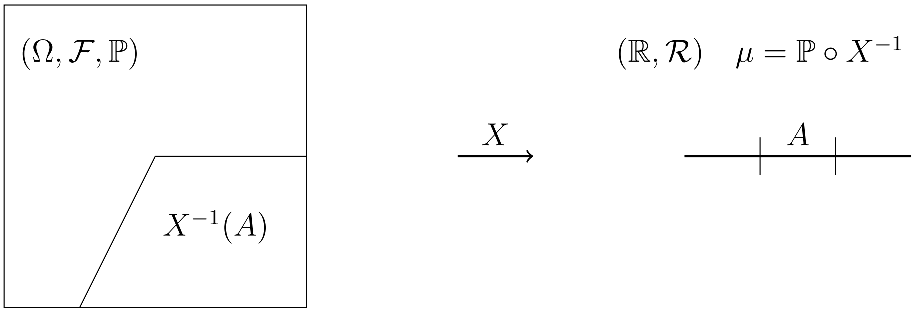
Συντομογραφία: $X \in \mathcal{F}$.

Ορισμός 1.1.10 (Προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία)
Μια στοχαστική διαδικασία $S = (S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ (ακολουθία από τ.μ.) ορισμένη στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ονομάζεται **προσαρμοσμένη** στην διύλιση $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, εάν ισχύει

$$S_t \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \in \mathbb{T}.$$

Σημείωση 1.1.4
Διαισθητικά, η τιμή S_t θεωρείται γνωστή στον χρόνο t. Προσαρμοσμένη σημαίνει ότι η τ.μ. S_t είναι μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}_t,\ \forall\ t \in \mathbb{T}$.

Ορισμός 1.1.11 (Κατανομή μιας τ.μ.)
Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}^X : \mathcal{B} \to [0, 1]$ με $\mathbb{P}^X(A) = \mathbb{P}(X \in A),\ \forall A \in \mathcal{F}$ ονομάζεται **κατανομή** της X.



Σχήμα 1.1: Κατανομή της τ.μ. X.

Σημείωση 1.1.5
Γράφοντας $\mu(A) = \mathbb{P}(X \in A)$, όπου A Borel σύνολο. Το δεξί μέλος της ισότητας μπορεί να γραφεί ως $\mathbb{P}(X^{-1}(A))$. Δηλαδή, υπολογίζεται το μέτρο $\mathbb{P}$ της αντίστροφης απεικόνισης $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ με $A \in \mathcal{R}$.

Ορισμός 1.1.12 (Ισόνομες τ.μ.)
Δύο τ.μ. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ οι οποίες έχουν την ίδια κατανομή, λέγονται **ισόνομες**. Δηλαδή, αν $\mathbb{P}^X(A) = \mathbb{P}^Y(A)$, $\forall\, A \in \mathcal{B}$, τότε οι X και Y είναι **ισόνομες** (συμβολισμός $X \overset{d}{=} Y$).

Πρόταση 1.1.3 (Συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ. και ιδιότητες)
Η κατανομή μιας τ.μ. X συνήθως περιγράφεται με την βοήθεια της **συνάρτησης κατανομής**, $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Κάθε συνάρτηση κατανομής F έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. η F είναι αύξουσα.
2. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
3. Η F είναι δεξιά συνεχής, δηλαδή $\lim_{y\downarrow x} F(y) = F(x)$.
4. Αν $F(x-) = \lim_{y\uparrow x} F(y)$, τότε $F(x-) = \mathbb{P}(X < x)$.
5. $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x-)$.

Πρόταση 1.1.4 (Συνάρτηση κατανομής σε σχέση με μέτρο πιθανότητας)
Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας. Η **συνάρτηση κατανομής που σχετίζεται με το μέτρο πιθανότητας** μ, $F_\mu : \mathbb{R} \to [0, 1]$ ορίζεται ως εξής

$$F_\mu(x) := \int_{-\infty}^{x} d\mu \equiv \mu((-\infty, x]).$$

Η συνάρτηση κατανομής $F_\mu(x)$ έχει τις ιδιότητες *1, 2* και *3* της πρότασης 1.1.3.

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή δοθείσης συνάρτησης κατανομής $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες *1*, *2* και *3* της πρότασης 1.1.3, τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ τέτοιο ώστε $\mu((-\infty, x]) = F(x)$.

Ορισμός 1.1.13 (Μετασχηματισμός ποσοστημορίων (quantile function))
Έστω $T : \mathbb{R} \to [0,1]$ συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση $T^- : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$, όπου $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ με

$$T^-(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} : \ T(x) \geq y\}, \ y \in [0,1]$$

(με την σύμβαση ότι $\inf \emptyset = \infty$) καλείται **μετασχηματισμός ποσοστημορίων** της T.

Παράδειγμα 1.1.4 (Μέθοδος Αντιστροφής (Inversion Method))
Σημαντική εφαρμογή του μετασχηματισμού ποσοστημορίων αποτελεί η **μέθοδος αντιστροφής**, η οποία χρησιμεύει στην δημιουργία τ.μ. από ομοιόμορφες τ.μ. (εφαρμόζεται συνήθως σε προσομοιώσεις Monte Carlo). Ακολουθεί η διατύπωση της μεθόδου.

Έστω F συνάρτηση κατανομής και X τ.μ. με $X \sim F$ (X ακολουθεί F).

1. Αν F συνεχής, τότε $F(X) \sim U[0,1]$ (όπου $U[0,1]$ είναι η ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$).

2. Αν U τ.μ. με $U \sim U[0,1]$, τότε $F^-(U) \sim F$.

Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο άρθρο [14].

Ορισμός 1.1.14 (Μέση τιμή, διασπορά & συνδιακύμανση (δύο τ.μ.))
Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μια τυχαία μεταβλητή, τότε:

1. το ολοκλήρωμα της X ως προς το μέτρο $\mathbb{P}$, ονομάζεται **μέση** ή **αναμενόμενη τιμή** της X και ορίζεται ως:

$$\mathbb{E}(X) := \int X d\mathbb{P}.$$

2. Αν επιπλέον ισχύει $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ η **διασπορά** της X ορίζεται ως:

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

3. Αν $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και ορίζεται η μέση τιμή $\mathbb{E}[XY]$, η **συνδιακύμανση** των X, Y ορίζεται ως:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\right].$$

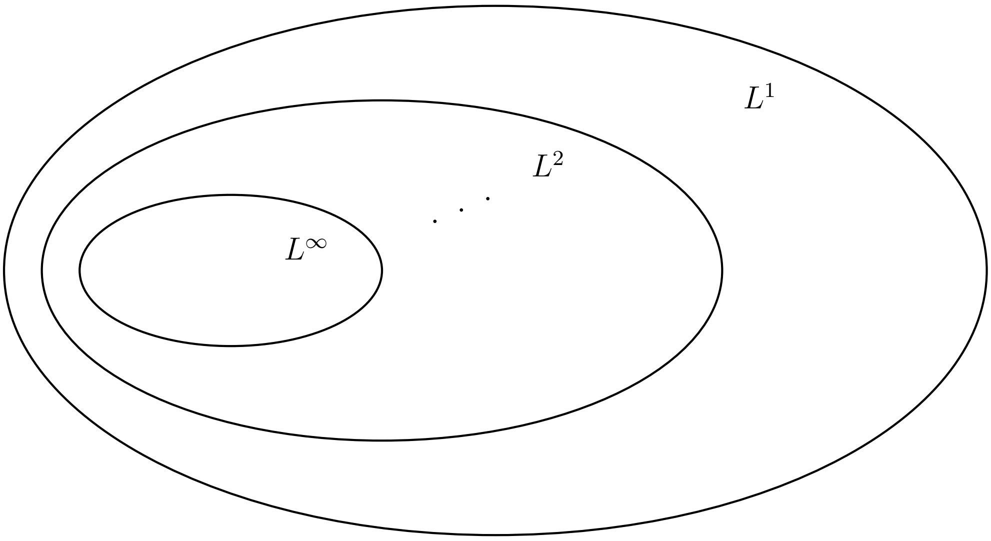
Για την δεσμευμένη μέση τιμή μιας τ.μ. X ως προς ένα σύνολο $A \in \mathcal{F}$ ισχύει:

$$\mathbb{E}[X \mid A] = \int_A X d\mathbb{P}.$$

Ορισμός 1.1.15 (Οι χώροι $(L^p(\mathbb{P}), \|\cdot\|_p)$)
Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας. Ορίζονται, για κάθε $p \geq 1$, οι $\boldsymbol{L^p}(\mathbb{P})$ **χώροι** τυχαίων μεταβλητών

$$L^p(\mathbb{P}) = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid X \ \mathcal{F}\text{-μετρήσιμη και } \mathbb{E}[|X|^p] < \infty\},$$

όπου $\|X\|_p = \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}}$ είναι η $\boldsymbol{L^p}$**-νόρμα**. Όταν είναι σαφές ποιο είναι το μέτρο $\mathbb{P}$, τότε χρησιμοποιείται ο συμβολισμός L^p αντί για $L^p(\mathbb{P})$[(1)].
$L^p(\mathbb{P})$: το σύνολο όλων των τ.μ. με πεπερασμένη $\boldsymbol{L^p}$**-νόρμα**.



Σχήμα 1.2: $L^s \subset L^r$ για $1 \leq r < s$.

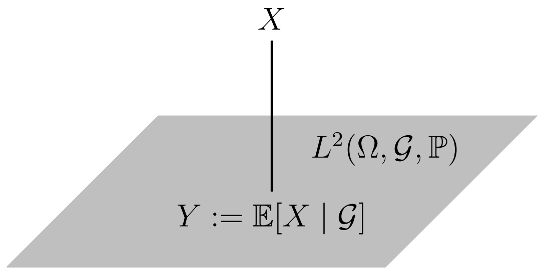
Σημείωση 1.1.6
Οι χώροι $(L^p(\mathbb{P}), \|\cdot\|_p)$ είναι πλήρεις χώροι με νόρμα, δηλαδή είναι χώροι Banach. Ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων τ.μ. $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ είναι χώρος Hilbert, με εσωτερικό γινόμενο $\langle X, Y\rangle_{L^2} = \mathbb{E}[XY]$.

Ορισμός 1.1.16 (Δεσμευμένη μέση τιμή τ.μ. ως προς σ-άλγεβρα)
Έστω τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ και χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ με $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και σ-άλγεβρα $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Η τ.μ. $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ονομάζεται **δεσμευμένη μέση τιμή της X ως προς την** $\mathcal{G}$ εάν ισχύει

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A Y] \iff \mathbb{E}[\mathbb{1}_A X] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]], \quad \forall\, A \in \mathcal{G}.$$

[(1)]Αν $1 \leq r < s$, τότε $L^s(\mathbb{P}) \subset L^r(\mathbb{P})$, όπως απεικονίζεται και στο σχήμα 1.2. Αυτός ο ισχυρισμός προκύπτει από την ανισότητα $\|X\|_r \leq \|X\|_s$, για $1 \leq r < s$ και $x \in \overline{\mathbb{R}}$, η οποία αποτελεί άμεση συνέπεια της ανισότητας Hölder (για $p = \frac{s}{r}$ και $q = \frac{s}{s-r}$).

Πρόταση 1.1.5
Έστω $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid X \in \mathcal{F} \text{ και } \mathbb{E}[X^2] < \infty\}$. Τότε υπάρχει (με πιθανότητα 1) μοναδική **ορθογώνια προβολή** της X στον $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, η οποία συμβολίζεται ως $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$.



Σχήμα 1.3: Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς σ-άλγεβρα σαν ορθογώνια προβολή.

Πρόταση 1.1.6
Μερικές χρήσιμες ανισότητες.

1. **Ανισότητα Jensen**
   Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. με $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ και $\Phi : I \to \mathbb{R}$ κυρτή[2] συνάρτηση σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ με $\mathbb{P}(X \in I)$ και $\mathbb{E}[|\Phi(X)|] < \infty$, τότε:
   $$\Phi\left(\mathbb{E}[X]\right) \leq \mathbb{E}\left[\Phi(X)\right].$$

2. **Ανισότητα Markov**
   Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to [0, \infty]$ τ.μ. και $\alpha > 0$, τότε:
   $$\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}.$$

3. **Ανισότητα Chebyshev**
   Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ τ.μ. με $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ και $\alpha > 0$, τότε:
   $$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\operatorname{Var}(X)}{\alpha^2}.$$

4. **Ανισότητα Hölder**
   Εστω $p,\ q \in (1, \infty)$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (συζυγείς εκθέτες) και $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. με $\|X\|_p < \infty$ και $\|Y\|_q < \infty$. Τότε $XY \in L^1$ και
   $$|\mathbb{E}(XY)| \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

Σημείωση 1.1.7 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)
Η ανισότητα Hölder με συζυγείς εκθέτες $p = q = 2$ είναι γνωστή ως **ανισότητα Cauchy-Schwarz**.

---

[2]Θα ακολουθήσει εκτενής αναφορά στην έννοια της κυρτότητας στο επόμενο κεφάλαιο.

Ορισμός 1.1.17 (Σύγκλιση τ.μ.)
Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, X πραγματικές τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. $X_n \to X$ **με πιθανότητα 1** ή **σχεδόν βεβαίως (σ.β.)**, αν
$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

2. $X_n \to X$ **στον L^p**, για $p \geq 1$ και $X_n, X \in L^p, \forall\ n \in \mathbb{N}$, αν
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right) = 0.$$

3. $X_n \to X$ **κατά πιθανότητα**, αν για κάθε $\epsilon > 0$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}\right) = 0.$$

4. $X_n \to X$ **κατά κατανομή**, αν και μόνο αν
$$F_{X_n}(x) \to F_X(x)$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τ.ω. $F_X(x)$ συνεχής (συμβολισμός[3] $X_n \stackrel{d}{\to} X$).

Σημείωση 1.1.8
Μερικές παρατηρήσεις που προκύπτουν από τους παραπάνω ορισμούς.

- Η **σ.β.** σύγκλιση και η σύγκλιση **στον L^p** είναι ισχυρότερες από την σύγκλιση **κατά πιθανότητα**.
- Στον ορισμό της **κατά κατανομή** σύγκλισης οι τ.μ. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, X δεν είναι απαραίτητο να ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας.

Θεώρημα 1.1.1
Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. στον L^1, τότε
$$XY \in L^1 \text{ και } \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$
Αν επιπλέον οι X, Y ανήκουν στον L^2, τότε
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \text{ και } \mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

Σημείωση 1.1.9 (Ανεξαρτησία συνόλων, κλάσεων συνόλων και τ.μ.)
Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας.

- Τα **σύνολα $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{F}$ είναι ανεξάρτητα**, αν $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

[3] Το d στον συμβολισμό προέρχεται από το distribution.

- Οι **κλάσεις υποσυνόλων** $\mathcal{C}_i, i \in I$ με $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{F}$ είναι **ανεξάρτητες**, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_n \in I$ και για κάθε $A_k \in \mathcal{C}_{i_k}$ με $k = 1, \dots, n$, ισχύει $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.
- Οι **τ.μ. $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ είναι ανεξάρτητες**, αν οι παραγόμενες σ-άλγεβρες $\sigma(X), \sigma(Y)$ είναι ανεξάρτητες.

Θεώρημα 1.1.2 (Οριακά θεωρήματα)
Βασικά οριακά θεωρήματα.

1. **Θεώρημα μονότονης σύγκλισης**
   Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, με $f_n : X \to [0, \infty]$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, τότε
   $$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$
2. **Λήμμα Fatou**
   Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, με $f_n : X \to [0, \infty]$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, τότε
   $$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$
3. **Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης**
   Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, με $f_n : X \to \mathbb{R}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, έτσι ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού και $|f_n(x)| \leq g(x)$, $\forall\ x \in X$, όπου $g : X \to [0, \infty]$ είναι μετρήσιμη με $\int g d\mu < \infty$. Τότε $\int |f| d\mu < \infty$ και
   $$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$
4. **Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης**
   Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, με $f_n : X \to \mathbb{R}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, με $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ και $|f_n| \leq M$, όπου $M < \infty$ σταθερά. Τότε $\int |f| d\mu < \infty$ και
   $$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Θεώρημα 1.1.3 (Radon-Nikodym)
Έστω $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ δύο μέτρα πιθανότητας στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$. Ισχύουν τα ακόλουθα:

- $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ εάν και μόνο εάν, υπάρχει μια τ.μ. $X > 0$ και $X \in L^1(\mathbb{P})$, τέτοια ώστε
  $$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{Q}(A) = \int_A X d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X \mathbb{1}_A],\ \forall\ A \in \mathcal{F}. \tag{1.1.1}$$

- $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ εάν και μόνο εάν, υπάρχει μια τ.μ. $X \geq 0$ και $X \in L^1(\mathbb{P})$, τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση (1.1.1).

Η τ.μ. X ονομάζεται πυκνότητα είναι $\mathbb{P}$-σ.β. μοναδική και συμβολίζεται με $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

Θεώρημα 1.1.4 (Ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών)
Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητες, ισόνομες και πραγματικές τ.μ. στον L^2. Αν $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ και $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, τότε $\frac{S_n}{n} \to \mu$ σχεδόν βεβαίως.

Θεώρημα 1.1.5 (Κεντρικό οριακό θεώρημα)
Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητες, ισόνομες και πραγματικές τ.μ. στον L^2. Αν $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ με $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ και $\sigma^2 = Var(X_1)$, τότε $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to Z$ κατά κατανομή, όπου $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

1.2 Χρηματοοικονομική Θεωρία

Ορισμός 1.2.1 (Παράγωγα (derivatives))
Τα **παράγωγα (derivatives)** είναι χρηματοοικονομικά προϊόντα των οποίων η αξία εξαρτάται/παράγεται από την τιμή ενός ή περισσότερων βασικών αγαθών (underlyings).

Χρεόγραφα	μετοχές	συναλλάγματα	ομόλογα
Εμπορεύματα	πετρέλαιο	ενέργεια	μεταλλεύματα
Μη-διαπραγματεύσιμα αγαθά	καιρός		

Πίνακας 1.1: Παραδείγματα **βασικών αγαθών (underlyings)**.

Σημείωση 1.2.1 (Συμβάσεις, συμβολισμοί και η ερμηνεία τους)
Στην συνέχεια, ακολουθούν συμβολισμοί συνοδευόμενοι από ερμηνευτικά σχόλια.

- Για τα d-χρεόγραφα (assets) με $i \in \{1, \ldots, d\}$.
  - $S^i : \Omega \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ και $(\omega, t) \mapsto S^i_t(\omega)$ αξία του χρεογράφου i την χρονική στιγμή t σε περίπτωση που συμβαίνει το ενδεχόμενο ω.
  - S^i_0 είναι ντετερμινιστική.
- Για τον άξονα του χρόνου $\mathbb{T}$.
  - Μοντέλα διακριτού χρόνου:
    - $\mathbb{T} = \{0, 1\}$ μοντέλο μιας περιόδου (Μ.Μ.Π.).
    - $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ μοντέλο πολλαπλών περιόδων (Μ.Π.Π.).
  - Μοντέλα συνεχούς χρόνου:

- $\mathbb{T} = [0, T]$ μοντέλο συνεχούς χρόνου (Μ.Σ.Χ.).

- Για το χρεόγραφο/αγαθό άνευ ρίσκου (risk-free asset), με επιτόκιο r και αρχική τιμή $S_0^0 = 1$, ισχύει

$$S_t^0 = \begin{cases} (1+r)^t, & \text{μοντέλα διακριτού χρόνου} \\ e^{rt}, & \text{μοντέλα συνεχούς χρόνου.} \end{cases}$$

Ορισμός 1.2.2 (Ομόλογο (bond))
Η στοχαστική διαδικασία $B(\cdot, T)$ που ορίζεται με βάση την S^0 ως εξής:

$$B(t,T) = \frac{S_t^0}{S_T^0}$$

ονομάζεται **ομόλογο (bond)**, με αξία $B(t,T)$ την χρονική στιγμή t, που αποπληρώνει €1 στην χρονική στιγμή T.

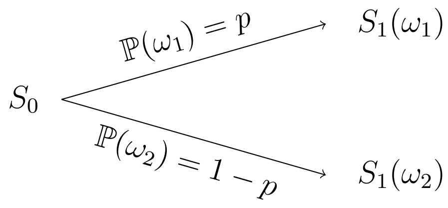
Ορισμός 1.2.3 (Χ.Α. & εκτεταμένη Χ.Α.)
Ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ μαζί με:

- τα χρεόγραφα $S := (S^1, \dots, S^d)$ ονομάζεται **χρηματοοικονομική αγορά**.
- τα χρεόγραφα $\overline{S} := (S^0, S)$ ονομάζεται **εκτεταμένη χρηματοοικονομική αγορά**.

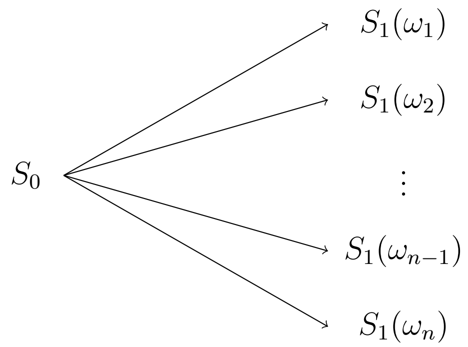
Μ.Μ.Π.	$\mathbb{T} = \{0, 1\}$	Οι τιμές των χρεογράφων $S = (S^1, \dots, S^d)$ είναι απλά τ.μ. στον $\mathbb{R}^d$, χωρίς να υπάρχει ενδιαφέρον για το τι συμβαίνει μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 και 1.
Μ.Π.Π.	$\mathbb{T} = \{0, \dots, T\}$	Οι τιμές των χρεογράφων $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d),\ t \in \{0, \dots, T\}$. Ισχύουν τα εξής: $$t \mapsto S_t^i(\omega) \text{ είναι μια συνάρτηση } (\forall\ \omega \in \Omega),$$ $$\omega \mapsto S_t^i(\omega) \text{ είναι μια τ.μ. } (\forall\ t \in \{1, \dots, T\}),$$ όπου και οι δύο οπτικές γωνίες είναι σημαντικές.
Μ.Σ.Χ.	$\mathbb{T} = [0, T]$	Ο άξονας του χρόνου $\mathbb{T}$ είναι υπεραριθμήσιμα άπειρος. Οι τιμές των χρεογράφων είναι στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου (εδώ χρησιμεύουν εργαλεία Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων όπως το ολοκλήρωμα και το λήμμα του Itô).

Πίνακας 1.2: Επισκόπηση των **μοντέλων**.

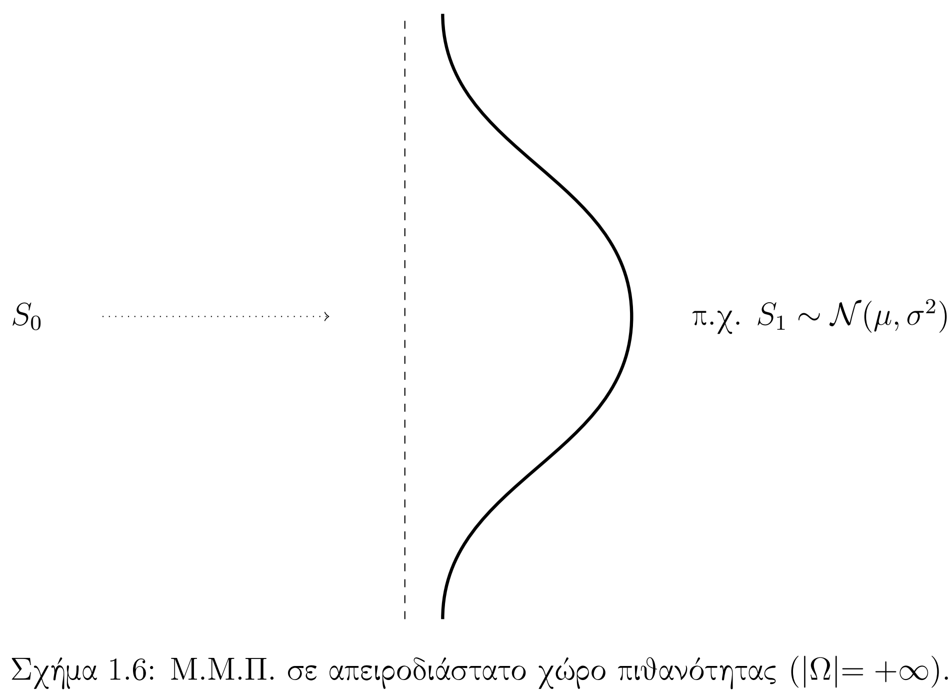
Παράδειγμα 1.2.1 (Μ.Μ.Π.)
Διάφορα μοντέλα μιας περιόδου.



Σχήμα 1.4: Διωνυμικό δέντρο ($|\Omega| = 2$).



Σχήμα 1.5: Μ.Μ.Π. σε πεπερασμένο χώρο πιθανότητας ($|\Omega| = n < \infty$).



Σχήμα 1.6: Μ.Μ.Π. σε απειροδιάστατο χώρο πιθανότητας ($|\Omega| = +\infty$).

Ορισμός 1.2.4 (Κίνηση Brown)
Μια στοχαστική διαδικασία $\{W_t\}_{t\geq 0}$ ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και με τιμές στο $\mathbb{R}$ λέγεται (μονοδιάστατη) **κίνηση Brown** αν ισχύουν τα παρακάτω.

1. Η σ.δ. έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Δηλαδή, για κάθε $n \geq 1$ και $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n$, οι τ.μ.

$$W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, W_{t_4} - W_{t_3}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

   είναι ανεξάρτητες.

2. Για κάθε $0 \leq s < t$,

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s).$$

3. Με πιθανότητα 1, η συνάρτηση $t \mapsto W_t$ είναι συνεχής.

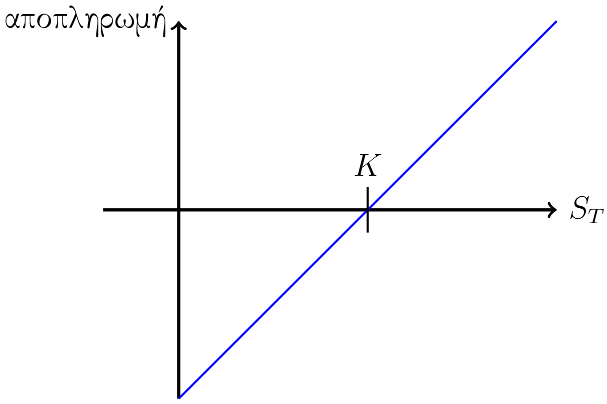
Σημείωση 1.2.2 (Τυπική κίνηση Brown)
Μια κίνηση Brown για την οποία με πιθανότητα 1 ισχύει $W_0 = x$ λέγεται κίνηση Brown που ξεκινάει απο το x, ενώ όταν $x = 0$ μια τέτοια σ.δ. λέγεται **τυπική κίνηση Brown**.

Σημείωση 1.2.3
Στην απαίτηση 1. του ορισμού 1.2.4, η W_{t_1} δεν είναι προσαύξηση της W εκτός αν η W είναι τυπική κίνηση Brown, οπότε $W_{t_1} = W_{t_1} - W_0$. Έτσι η 1. στην γενική περίπτωση είναι κάτι παραπάνω από «ανεξάρτητες προσαυξήσεις».

Ορισμός 1.2.5 (Προθεσμιακά συμβόλαια (forward contracts))
Ένα **προθεσμιακό συμβόλαιο** είναι ένα συμβόλαιο που υπογράφεται σε κάποιο χρόνο t, από το οποίο προκύπτει η υποχρέωση να αγοραστεί ή να πουληθεί

- ένα βασικό αγαθό S με τιμή S_t (underlying),
- σε κάποιο συγκεκριμένο μελλοντικό χρόνο $T > t$ (χρόνος ωρίμανσης, maturity),
- σε κάποια τιμή K που καθορίζεται στον χρόνο t (strike).

Συνάρτηση αποπληρωμής (από την σκοπιά του αγοραστή): $S_T - K$.
Τιμή στον χρόνο t: F_t.

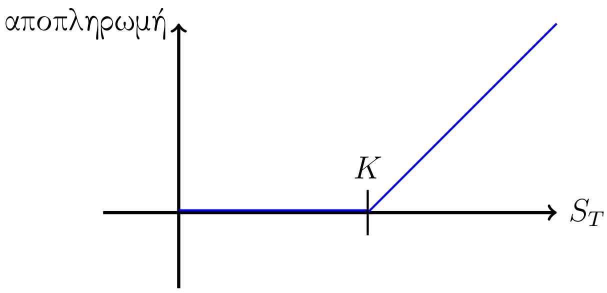


Σχήμα 1.7: Προφίλ αποπληρωμής, $S_T - K$.

Ορισμός 1.2.6 (Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (european call option))
Ένα **ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς** είναι ένα συμβόλαιο που υπογράφεται σε κάποιον χρόνο t, από το οποίο προκύπτει το δικαίωμα να αγοραστεί

- ένα βασικό αγαθό S με τιμή S_t,
- σε κάποιον συγκεκριμένο μελλοντικό χρόνο $T > t$,
- σε κάποια τιμή K που καθορίζεται στον χρόνο t.

Συνάρτηση αποπληρωμής: $(S_T - K)^+$, όπου $x^+ := max\{x, 0\}$.
Τιμή στον χρόνο t: C_t.

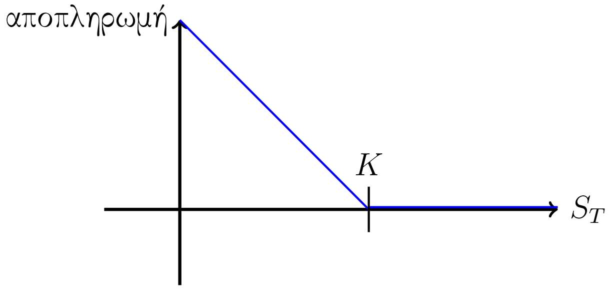


Σχήμα 1.8: Προφίλ αποπληρωμής ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς, $(S_T - K)^+$.

Ορισμός 1.2.7 (Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης (european put option))
Ένα **ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης** είναι ένα συμβόλαιο που υπογράφεται σε κάποιον χρόνο t, από το οποίο προκύπτει το δικαίωμα να πωληθεί

- ένα βασικό αγαθό S με τιμή S_t,
- σε κάποιον συγκεκριμένο μελλοντικό χρόνο $T > t$,
- σε κάποια τιμή K που καθορίζεται στον χρόνο t.

Συνάρτηση αποπληρωμής: $(K - S_T)^+$.
Τιμή στον χρόνο t: P_t.



Σχήμα 1.9: Προφίλ αποπληρωμής ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης, $(K - S_T)^+$.

Σημείωση 1.2.4 (Κατηγορίες συμβολαίων-δικαιωμάτων (options))
Οι όροι εξάσκησης κάθε δικαιώματος διαφέρουν ανάλογα με την κατηγορία στην οποία ανήκει. Παρακάτω αναφέρονται ενδεικτικά ορισμένες χαρακτηριστικές κατηγορίες δικαιωμάτων.

- **Αμερικάνικα δικαιώματα (american options)**: Μπορούν να εξασκηθούν οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι τον χρόνο ωρίμανσης (σε αντίθεση με τα ευρωπαϊκά δικαιώματα τα οποία εξασκούνται μόνο στον χρόνο ωρίμανσης).

- **Bermudan δικαιώματα (bermudan options)**: Μπορούν να εξασκηθούν μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές πριν ή κατά την λήξη τους. Αποτελούν συνδυασμό ευρωπαϊκών και αμερικάνικων δικαιωμάτων.

- **Barrier δικαιώματα (barrier options)**: Ενεργοποιούνται όταν η τιμή του υποκείμενου χρεογράφου (underlying asset) ξεπεράσει το προκαθορισμένο επίπεδο τιμών.

- **Exotic δικαιώματα (exotic options)**: Είναι η κατηγορία δικαιωμάτων που περιλαμβάνουν σύνθετες χρηματοδοτικές δομές. Συνήθως η τιμή των δικαιωμάτων αυτών εξαρτάται από την τροχιά που ακολουθούν οι τιμές των υποκείμενων χρεογράφων (path dependent options).

- **Vanilla δικαιώματα (vanilla options)**: Τα χρηματοοικονομικά παράγωγα εκείνα από τα οποία προκύπτει το δικαίωμα (όχι η υποχρέωση) αγοράς ή πώλησης υποκείμενων χρεογράφων, σε μια προκαθορισμένη τιμή και εντός ενός προκαθορισμένου χρονικού διαστήματος.

- **Basket δικαιώματα (basket options)**: Ένα basket δικαίωμα βασίζεται στις τιμές διαφόρων υποκείμενων χρεογράφων. Η συνάρτηση αποπληρωμής του δικαιώματος αυτού είναι ουσιαστικά ο σταθμισμένος μέσος των τιμών των υποκείμενων χρεογράφων. Σημειωτέον ότι τα βάρη των υποκείμενων χρεογράφων δεν είναι απαραίτητα ίσα μεταξύ τους, ενδέχεται να είναι και ανομοιόμορφα κατανεμημένα.

- **Ασιατικά δικαιώματα (asian options)**: Τα Ασιατικά δικαιώματα ανήκουν στα πιο διαδεδομένα exotic δικαιώματα. Η συνάρτηση αποπληρωμής τους καθορίζεται από τον αριθμητικό μέσο των τιμών των υποκείμενων χρεογράφων σε συγκεκριμένες προκαθορισμένες χρονικές στιγμές.

Παράδειγμα 1.2.2
Η συνάρτηση αποπληρωμής ενός **ευρωπαϊκού basket δικαιώματος αγοράς** δίνεται από

$$(w \cdot S(T) - K)^+ = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K \right)^+ ,$$

όπου $w = (w_1, \ldots, w_n)$ είναι το διάνυσμα με τα βάρη, $S(T) = (S_1(T), \ldots, S_n(T))$ αναπαριστά το διάνυσμα με τιμές των υποκείμενων χρεογράφων στον χρόνο ωρίμανσης T και K είναι η προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης (strike) του συμβολαίου.

Η συνάρτηση αποπληρωμής ενός **ασιατικού δικαιώματος αγοράς** δίνεται από

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_{t_i} - K \right)^+ ,$$

όπου σε αυτή την περίπτωση αντί για τις τιμές των υποκείμενων χρεογράφων στον χρόνο ωρίμανσης, $\{S_i(T) : 1 \leq i \leq n\}$, χρειάζονται οι τιμές των χρεογράφων σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq T$, δηλαδή οι $\{S_{t_i} : 1 \leq i \leq n\}$.

Αρχή 1.2.1 (Η αρχή της αναπαραγωγής)
«Δύο χαρτοφυλάκια που έχουν το ίδιο προφίλ αποπληρωμής, πρέπει να έχουν και την ίδια τιμή.»

Αρχή 1.2.2 (Η αρχή του no-arbitrage)
«Χωρίς αρχικό κεφάλαιο, δεν μπορεί κάποιος να έχει βέβαιο κέρδος χωρίς να πάρει ρίσκο.»

Λήμμα 1.2.1 (Στοιχειώδη no-arbitrage φράγματα)
Για κάθε χρονική στιγμή $t \leq T$ ισχύει:

$$(S_t - K \cdot B(t,T))^+ \leq C_t \leq S_t.$$

Λήμμα 1.2.2 (Put-call parity)
Ισχύει η εξής ισότητα:

$$C_t - P_t = S_t - K \cdot B(t,T).$$

S_t	Αξία του υποκείμενου χρεογράφου την χρονική στιγμή t (underlying asset price).
P_t	Αξία του ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης την χρονική στιγμή t (put price).
C_t	Αξία του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς την χρονική στιγμή t (call price).
$B(t,T)$	Αξία του ομολόγου την χρονική στιγμή t, αποπληρώνει €1 στον χρόνο T (bond price).
K	Τιμή εξάσκησης ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και πώλησης (strike price).
T	Χρόνος ωρίμανσης ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και πώλησης (maturity).

Πίνακας 1.3: Συμβολισμοί λημμάτων 1.2.1 και 1.2.2.

Ορισμός 1.2.8 (Επενδυτική στρατηγική & διαδικασία αξίας)
Η **επενδυτική στρατηγική** $\overline{\xi} := (\xi^0, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}$ αντιστοιχίζεται σε μια **διαδικασία αξίας** $V = V^{\overline{\xi}}$, όπου

$$V_t = V_t^{\overline{\xi}} = \overline{\xi} \cdot \overline{S}_t = \sum_{i=0}^{d} \xi_t^i \cdot S_t^i, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Η V_t είναι η αξία του χαρτοφυλακίου σε κάθε χρονική στιγμή $t \in \mathbb{T}$.

Ορισμός 1.2.9 (Arbitrage επενδυτική στρατηγική στο Μ.Μ.Π.)
Μια **επενδυτική στρατηγική** $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ με διαδικασία αξίας V ονομάζεται **arbitrage στο Μ.Μ.Π.** εάν ισχύουν τα εξής:

- $V_0 \leq 0$ (μηδενικό αρχικό κόστος),
- $\mathbb{P}(V_1 \geq 0) = 1$ (καμία απώλεια με βεβαιότητα),
- $\mathbb{P}(V_1 > 0) > 0$ (κέρδος με θετική πιθανότητα).

Σημείωση 1.2.5
Σε μια αποτελεσματική αγορά δεν υπάρχει κέρδος χωρίς ρίσκο.

$$\textbf{Arbitrage} \iff \textbf{Η αγορά δεν είναι αποτελεσματική}.$$

Ορισμός 1.2.10 (Στοχαστική διαδικασία martingale στο Μ.Π.Π.)
Μια **στοχαστική διαδικασία** $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ με τιμές στον $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ονομάζεται **martingale** (για το Μ.Π.Π.) εάν:

- η $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$,
- $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty, \ \forall \ t \in \mathbb{T}$,
- η $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα:

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s \ \forall \ s,t \in \mathbb{T}, \ s \leq t.$$

Σημείωση 1.2.6 (Προσαρμοσμένες, sub- και super-martingale διαδικασίες)
Συμπληρωματικές παρατηρήσεις.

- Μια **σ.δ.** $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ είναι **προσαρμοσμένη** ως προς μια διύλιση $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ εάν ισχύει

$$X_t \in \mathcal{F}_t, \ \forall \ t \in \mathbb{T}.$$

  Δηλαδή εάν X_t είναι $\mathcal{F}_t$ μετρήσιμο για κάθε $t \in \mathbb{T}$.

- Μια **σ.δ.** $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ονομάζεται **submartingale** εάν ισχύει

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s.$$

- Μια **σ.δ.** $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ονομάζεται **supermartingale** εάν ισχύει

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s.$$

Ορισμός 1.2.11 (Μέτρο martingale στο Μ.Μ.Π.)
Ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ στον $(\Omega, \mathcal{F})$ ονομάζεται **μέτρο martingale** (martingale measure - M.M.) ή **μέτρο ουδέτερου κινδύνου** (για το Μ.Μ.Π.) εάν

- $S_1 \in L^1(\mathbb{Q})$ και
- $S_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1}{1+r}\right]$.

Σημείωση 1.2.7 (Παρατηρήσεις & ερμηνευτικά σχόλια)
Ο παραπάνω ορισμός μπορεί διαισθητικά να ερμηνευτεί ως εξής:

- Η προεξοφλημένη αναμενόμενη, υπό το μέτρο $\mathbb{Q}$, τιμή του χρεογράφου ισούται με την σημερινή τιμή του.

Επίσης, μερικές βασικές παρατηρήσεις.

- Εάν το $\mathbb{Q}$ είναι μέτρο martingale και επίσης ισχύει ότι $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ (όπως διατυπώθηκε στον ορισμό 1.1.6), τότε το $\mathbb{Q}$ ονομάζεται **ισοδύναμο μέτρο martingale** (equivalent martingale measure - E.M.M.).

- Υπό το μέτρο $\mathbb{Q}$, ισχύει για την εκτεταμένη χρηματοοικονομική αγορά

$$\overline{S}_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\overline{S}_1}{1+r}\right], \quad \text{διότι} \quad \frac{S_1^0}{1+r} = \frac{(1+r)S_0^0}{1+r} = S_0^0 = 1.$$

Ορισμός 1.2.12 (Σύνολο των ισοδύναμων μέτρων martingale)
Το **σύνολο των ισοδύναμων μέτρων martingale** συμβολίζεται με $\mathscr{P}$ και ορίζεται ως εξής:

$$\mathscr{P} := \{\mathbb{Q} \mid \mathbb{Q} \sim \mathbb{P},\ \mathbb{Q} \text{ είναι E.M.M.}\}\,.$$

Θεώρημα 1.2.1 (Θεμελειώδες θεώρημα αποτίμησης χρεογράφων στο Μ.Μ.Π.)
Μια χρηματοοικονομική αγορά είναι ελεύθερη από arbitrage αν και μόνο αν υπάρχει τουλάχιστον ένα ισοδύναμο μέτρο martingale, δηλαδή

$$\text{no-arbitrage} \iff \mathscr{P} \neq \emptyset.$$

Συντομογραφία: **Θ.Θ.Α.Χ.**
Διεθνής ορολογία: Fundmamental theorem of asset pricing - **F.T.A.P.**

Ορισμός 1.2.13 (Ενδεχόμενη απαίτηση (contingent claim))
Μια **ενδεχόμενη απαίτηση** C είναι μια τ.μ. $C : \Omega \to \mathbb{R}$, την οποία ερμηνεύουμε ως αποπληρωμή στον χρόνο $T = 1$.

Σημείωση 1.2.8
Ένα παράγωγο (derivative) με συνάρτηση αποπληρωμής (payoff function) $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ είναι μια **απαίτηση** της μορφής

$$C = f(S_T^0, S_T^1, \ldots, S_T^d).$$

Θεώρημα 1.2.2
Έστω μια ελεύθερη από arbitrage χρηματοοικονομική αγορά $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \overline{S})$, δηλαδή $\mathscr{P} \neq \emptyset$. Τότε, το σύνολο $\Pi(C)$ όλων των τιμών για το C που είναι ελεύθερες από arbitrage είναι της μορφής:

$$\Pi(C) := \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C}{1+r}\right] \middle| \mathbb{Q} \in \mathscr{P} \text{ και } \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|C|] < \infty \right\}.$$

Το επόμενο θεώρημα δίνει μια δυϊκή αναπαράσταση για το κάτω και άνω φράγμα του συνόλου $\Pi(C)$

$$\underline{\pi} = \underline{\pi}(C) = \inf \Pi(C) \text{ και } \overline{\pi} = \overline{\pi}(C) = \sup \Pi(C).$$

Αυτά συνήθως ονομάζονται **no-arbitrage φράγματα** για την τιμή της απαίτησης C.

Θεώρημα 1.2.3 (No-arbitrage φράγματα)
Σε μια αγορά ελεύθερη απο arbitrage, τα **no-arbitrage φράγματα** δίνονται από τις εκφράσεις:

$$\begin{aligned}
\underline{\pi}(C) &= \inf_{\mathbb{Q}\in\mathscr{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C}{1+r}\right] && \text{(κάτω no-arbitrage φράγμα)}\\
&= \max\left\{m\in[0,\infty) \middle| \exists\ \xi\in\mathbb{R}^d : m+\xi\cdot Y \le \frac{C}{1+r}\ \mathbb{P}-\text{σ.β.}\right\} && \text{(subhedging duality)}\\
\overline{\pi}(C) &= \sup_{\mathbb{Q}\in\mathscr{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C}{1+r}\right] && \text{(άνω no-arbitrage φράγμα)}\\
&= \min\left\{m\in[0,\infty) \middle| \exists\ \xi\in\mathbb{R}^d : m+\xi\cdot Y \ge \frac{C}{1+r}\ \mathbb{P}-\text{σ.β.}\right\} && \text{(superhedging duality)}
\end{aligned}$$

όπου $Y = \frac{S_1}{1+r} - S_0$, δηλαδή $Y^i = \frac{S_1^i}{1+r} - S_0^i,\ \forall\ i\in\{0,1,\ldots,d\}$.

Ορισμός 1.2.14
Έστω C μια απαίτηση. Μια στρατηγική $\overline{\xi}\in\mathbb{R}^{d+1}$ ονομάζεται **στρατηγική αντιστάθμισης (hedging strategy)** εάν ισχύει $\overline{\xi}\cdot\overline{S}_1 = C$, $\mathbb{P}-$σχεδόν βεβαίως, δηλαδή εάν η απαίτηση C είναι προσεγγίσιμη.

Το χαρτοφυλάκιο $V = \overline{\xi}\cdot\overline{S}$ ονομάζεται **χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης (replicating portfolio)** και η αρχική τιμή $\overline{\xi}\cdot\overline{S_0}$ ονομάζεται **τιμή αντιστάθμισης (hedging price)**.

Αντίστοιχα, μια στρατηγική $\overline{\xi}\in\mathbb{R}^{d+1}$ ονομάζεται **στρατηγική υπό-** ή **υπέρ-αντιστάθμισης** για το C εάν ισχύουν

$$\overline{\xi}\cdot\overline{S}_1 \le C \quad \text{ή} \quad \overline{\xi}\cdot\overline{S}_1 \ge C \quad \mathbb{P}-\text{σχεδόν βεβαίως.}$$

Η αρχική τιμή $\overline{\xi}\cdot\overline{S}_0$ στην περίπτωση αυτή λέγεται **τιμή υπό-** ή **υπέρ-αντιστάθμισης** για το C.

Σημείωση 1.2.9
Ορισμένες παρατηρήσεις σχετικά με τους παραπάνω ορισμούς (στο Μ.Μ.Π.).

- Έστω $\overline{\xi}$ μια **στρατηγική υπεραντιστάθμισης** για την απαίτηση C. Τότε, η **τιμή υπεραντιστάθμισης** $\overline{\xi}\cdot\overline{S}_0$ επιτρέπει στον πωλητή της C, μέσω της πώλησης του **χαρτοφυλακίου υπεραντιστάθμισης**, να ασφαλιστεί ως προς κάθε ενδεχόμενη απαίτηση που θα προκύψει από την C στον χρόνο $t = 1$.

- Ομοίως, έστω $\overline{\xi}$ μια **στρατηγική υποαντιστάθμισης** για την απαίτηση C. Τότε, η **τιμή υποαντιστάθμισης** $\overline{\xi}\cdot\overline{S}_0$ επιτρέπει στον αγοραστή της C, μέσω της αγοράς του **χαρτοφυλακίου υποαντιστάθμισης**, να προσεγγίσει την τιμή της απαίτησης C στον χρόνο $t = 1$.

- Εάν η απαίτηση C είναι προσεγγίσιμη, τότε οι **τιμές υπό-** και **υπέρ-αντιστάθμισης** ταυτίζονται με την **τιμή αντιστάθμισης**, $\overline{\xi}\cdot\overline{S}_0$.

Η θεωρία που ακολουθεί προετοιμάζει το έδαφος για τον ορισμό της φόρμουλας του Itô και ύστερα των περίφημων μοντέλο & Μ.Δ.Ε. Black-Scholes. Δηλαδή, σε αυτό το κομμάτι θα γίνει αναφορά σε στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου και σε έννοιες στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (Σ.Δ.Ε. - [10]).

Ορισμός 1.2.15 (Χρόνος διακοπής (stopping time))
Η μη αρνητική τ.μ. τ ονομάζεται **χρόνος διακοπής** εάν ισχύει

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0.$$

Ορισμός 1.2.16 (Τοπικό martingale (local martingale))
Μια στοχαστική διαδικασία M ονομάζεται **τοπικό martingale** εάν υπάρχει αύξουσα ακολουθία χρόνων διακοπής ($\tau_n \nearrow \infty$ - σ.β.), τ.ω. η σταματημένη διαδικασία

$$M^{\tau_n} = (M_t^{\tau_n})_{t\geq 0} \text{ με } M_t^{\tau_n}(\omega) := M_{\tau_n(\omega)\wedge t}(\omega)$$

να είναι martingale.

Ορισμός 1.2.17 (Διαδικασία πεπερασμένης κύμανσης)
Μια **διαδικασία** A έχει **πεπερασμένη κύμανση** εάν για κάθε $\omega \in \Omega$ η $t \mapsto A_t(\omega)$ έχει πεπερασμένη κύμανση για κάθε πεπερασμένο $[0, t]$, δηλαδή

$$V_{A(\omega)}[0,t] := \sup\left\{\sum_{k=1}^{r} |A_{t_k}(\omega) - A_{t_{k-1}}(\omega)| \ : \ 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_r \leq t\right\} < \infty.$$

Ορισμός 1.2.18 (Semimartingale)
Μια càdlàg στοχαστική διαδικασία $S = (S_t)_{t\geq 0}$ ονομάζεται **semimartingale** εάν είναι της μορφής

$$S_t = S_0 + M_t + A_t, \quad t \geq 0$$

για πεπερασμένο $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμο S_0, $(M_t)_{t\geq 0}$ τοπικό martingale με $M_0 = 0$ και $(A_t)_{t\geq 0}$ διαδικασία πεπερασμένης κύμανσης με $A_0 = 0$.

Σημείωση 1.2.10
Οι ιδιότητες που ορίστηκαν στον διακριτό χρόνο προσαρμόζονται με προφανή τρόπο και στον συνεχή (π.χ. martingale, sub- και super-martingale).

Μια **càdlàg** διαδικασία είναι συνεχής από τα δεξιά και το όριο της από αριστερά υπάρχει

$$\underline{\text{càdlàg}} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\text{c}}\text{ontinue } \underline{\text{à}} \ \underline{\text{d}}\text{roite, } \underline{\text{l}}\text{imite } \underline{\text{à}} \ \underline{\text{g}}\text{auche.}$$

Παράδειγμα 1.2.3
Μερικά απλά παραδείγματα semimartingale διαδικασιών.

- Η διαδικασία $A_t = bt$ καλείται linear drift και είναι μια διαδικασία πεπερασμένης κύμανσης.
- Η κίνηση Brown W_t είναι martingale και έχει άπειρη κύμανση.

Ορισμός 1.2.19 (Τετραγωνική κύμανση (quadratic variation))
Έστω X μια semimartingale στοχαστική διαδικασία. Η **τετραγωνική κύμανση** της X συμβολίζεται ως $[X] \equiv [X, X] = ([X, X]_t)_{t\geq 0}$ και ορίζεται ως

$$[X, X] = X^2 - 2\int X_- dX - X_0^2.$$

Ορισμός 1.2.20 (Προβλέψιμη τετραγωνική κύμανση)
Η **προβλέψιμη τετραγωνική κύμανση** ορίζεται για τετραγωνικά ολοκληρώσιμα martingales και είναι μοναδική, αύξουσα και προβλέψιμη διαδικασία τ.ω.

$$M^2 - \langle M \rangle$$

να είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale. Η τετραγωνική κύμανση $[X]$ είναι επίσης αύξουσα αλλά όχι εν γένει προβλέψιμη. Ωστόσο οι δύο έννοιες ταυτίζονται για συνεχή martingales.

Σημείωση 1.2.11 (Προβλέψιμη σ.δ.)
Μια **σ.δ.** $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ είναι **προβλέψιμη** (στον διακριτό χρόνο) ως προς μια διύλιση $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ εάν ισχύει

$$X_t \in \mathcal{F}_{t-1}, \ \forall \ t \in \mathbb{T}.$$

Δηλαδή, εάν X_t είναι $\mathcal{F}_{t-1}-$μετρήσιμη για κάθε $t \in \mathbb{T}$.

Στον συνεχή χρόνο $\mathbb{T} = [0, T]$, η **προβλεψιμότητα** μιας **σ.δ.** X δεν είναι και τόσο απλή υπόθεση. Πριν την επέκταση της έννοιας της **προβλεψιμότητας** στον συνεχή χρόνο πρέπει να εισαχθεί η έννοια της **προβλέψιμης σ-άλγεβρας**.

Μια **σ-άλγεβρα** καλείται **προβλέψιμη** και συμβολίζεται με $\mathcal{P}$, εάν είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $\mathcal{F} \times \mathcal{B}([0,T])$ και παράγεται από το στοχαστικό διάστημα της μορφής:

$$]\!]\sigma,\tau]\!] := \{(\omega,t) : \sigma(\omega) < t \leq \tau(\omega)\}\,,$$

όπου σ και τ είναι χρόνοι διακοπής.

Εναλλακτικά, μια **σ-άλγεβρα** ονομάζεται **προβλέψιμη**, εάν ορίζεται πάνω στο καρτεσιανό γινόμενο $\Omega \times [0,T]$ και παράγεται από προσαρμοσμένες, αριστερά συνεχείς διαδικασίες, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως απεικονίσεις:

$$(\omega,t) \mapsto X_t(\omega)$$

πάνω στο σύνολο $\Omega \times [0,T]$.

Μια **σ.δ.** καλείται **προβλέψιμη**, στον συνεχή χρόνο $\mathbb{T} = [0,T]$, εάν είναι προσαρμοσμένη και μετρήσιμη ως προς την **προβλέψιμη σ-άλγεβρα** $\mathcal{P}$.

Θεώρημα 1.2.4 (Η φόρμουλα του Itô)
Έστω $f \in C^2(\mathbb{R})$ και $S = M + A$ ένα συνεχές semimartingale. Τότε ισχύει

$$\begin{aligned} f(S_t) &= f(S_0) + \int_0^t f'(S_u)dS_u + \frac{1}{2}\int_0^t f''(S_u)d\langle S\rangle_u \\ &= f(S_0) + \int_0^t f'(S_u)dM_u + \int_0^t f'(S_u)dA_u + \frac{1}{2}\int_0^t f''(S_u)d\langle M\rangle_u, \end{aligned}$$

όπου $f(S_t)$ είναι και αυτό συνεχές semimartingale.

Σημείωση 1.2.12 (Φόρμουλα του Itô σε διαφορική μορφή)
Η φόρμουλα του Itô συχνά γράφεται σε διαφορική μορφή

$$df(S_t) = f'(S_t)dS_t + \frac{1}{2}f''(S_t)d[S]_t,$$

η οποία πρέπει πάντοτε να ερμηνεύεται ως (στοχαστική) ολοκληρωτική εξίσωση, δηλαδή

$$f(S_t) - f(S_0) = \int_0^t df(S_u) = \int_0^t f'(S_u)dS_u + \frac{1}{2}\int_0^t f''(S_u)d[S_u].$$

1.2.1 Black-Scholes

Σε αυτό το σημείο θα ανακτηθεί η Μ.Δ.Ε. Black-Scholes χρησιμοποιώντας επιχειρήματα αναπαραγωγής και no-arbitrage. Γίνονται ορισμένες υποθέσεις σχετικά με την αγορά, συγκεκριμένα ότι δεν έχει «τριβές», δηλαδή:

- δεν υπάρχει διαφορά στις τιμές ζήτησης και προσφοράς (bid-ask spread),
- δεν υπάρχει κόστος συναλλαγής (transaction cost),
- δεν υπάρχει ασυμμετρία στα επιτόκια (interest rate asymmetry),
- δεν υπάρχουν περιορισμοί στις ανοικτές πωλήσεις (short selling constraints) και
- δεν υπάρχει πιστωτικός κίνδυνος αντισυμβαλλόμενου (counterparty credit risk).

Έστω $(U_t)_{t\geq 0}$ και $(V_t)_{t\geq 0}$ δύο ροές αποπληρωμής (payoff streams) τ.ω. $U_T = V_T$ για κάποιον σταθερό χρόνο T, τότε απουσία arbitrage σημαίνει $U_t = V_t,\ \forall t \in [0, T]$. Στο μοντέλο Black-Scholes η τιμή της μετοχής $(S_t)_{t\geq 0}$ δίνεται από την Σ.Δ.Ε.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \iff S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right),$$

με $S_0 > 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$ και $(W_t)_{t\geq 0}$ μια κίνηση Brown. Επιπλέον το ομόλογο άνευ ρίσκου $(B_t)_{t\geq 0}$ περιφράφεται από την Σ.Δ.Ε.

$$dB_t = rB_t dt \iff B_t = B_0 \exp(rt),$$

όπου r θετικό και οι δύο παραπάνω ισοδυναμίες προκύπτουν από εφαρμογή της φόρμουλας του Itô.

Έστω απαίτηση ή παράγωγο με αποπληρωμή $H(S_T)$ και χρόνο ωρίμανσης T. Προς απάντηση του ερωτήματος: «πόσο κοστίζει η $H(S_T)$ σήμερα $(t = 0)$;» ορίζεται επενδυτική στρατηγική $(\alpha_t, \beta_t)_{t\geq 0}$, όπου α_t η επένδυση στην μετοχή και β_t η επένδυση στο ομόλογο. Η διαδικασία αξίας δίνεται από

$$V_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t.$$

Δύο ιδιότητες οδηγούν στο ζητούμενο αποτέλεσμα. Η πρώτη είναι ότι πρόκειται περί στρατηγικής αντιστάθμισης, δηλαδή

$$V_T = H(S_T)$$

και η δεύτερη είναι ότι εφόσον για το παράγωγο ισχύει ότι δεν υπάρχουν χρηματικές συναλλαγές (cash flows) πριν από τον χρόνο T, το ίδιο πρέπει να ισχύει και για την στρατηγική αντιστάθμισης. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να είναι αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική, δηλαδή

$$dV_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t = \alpha_t S_t \sigma dW_t + (\alpha_t \mu S_t + \beta_t r B_t)dt.$$

Υποτεθείσθω ότι η τιμή δίνεται από $(v(t,S_t))_{t\geq 0}$ [«Μαρκοβιανή υπόθεση»]. Τότε εφαρμόζοντας την φόρμουλα του Itô με

$$v_t = \frac{\partial}{\partial t}v(t,x), \quad v_x = \frac{\partial}{\partial x}v(t,x), \quad v_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x),$$

και $d\langle W\rangle_t = dt$ ισχύει

$$\begin{aligned} dv(t,S_t) &= v_t(t,S_t)dt + v_x(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}v_{xx}(t,S_t)d[S]_t \\ &= v_t(t,S_t)dt + v_x(t,S_t)\sigma S_t dW_t + v_x(t,S_t)\mu S_t dt + \frac{1}{2}v_{xx}(t,S_t)\sigma^2 S_t^2 dt. \end{aligned}$$

Η απουσία arbitrage σημαίνει ότι $V_t = v(t,S_t)$, για $t\in[0,T]$ και από σύγκριση συντελεστών στις παραπάνω σχέσεις προκύπτει άμεσα ότι $\alpha_t = v_x(t,S_t)$ το οποίο είναι το ποσό που επενδύθηκε στην μετοχή σε κάθε $t\in[0,T]$. Επομένως,

$$\begin{aligned} v_x(t,S_t)\mu S_t + \beta_t r B_t &= v_t(t,S_t) + v_x(t,S_t)\mu S_t + \frac{1}{2}v_{xx}(t,S_t)\sigma^2 S_t^2 \\ \iff \beta_t r B_t &= v_t(t,S_t) + \frac{1}{2}v_{xx}(t,S_t)\sigma^2 S_t^2. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ότι $V_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$ και $V_t = v(t,S_t)$ προκύπτει

$$\beta_t B_t = v(t,S_t) - v_x(t,S_t)S_t.$$

Συνδυάζοντας προκύπτει

$$\begin{cases} v_t(t,S_t) + rS_t v_x(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t,S_t) = rv(t,S_t) \\ v(T,S_T) = H(S_T) \end{cases}$$

και η **Μ.Δ.Ε. Black-Scholes** δίνεται από

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + rx\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x) = rv(t,x), & (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}_+ \\ v(T,x) = H(x), & x\in\mathbb{R}_+. \end{cases}$$

□

Πρόταση 1.2.1

Έστω δικαίωμα αγοράς $H(S_T) = (S_T - K)^+$. Τότε η λύση της Μ.Δ.Ε. Black-Scholes δίνεται από

$$v(t,S_t) = S_t\Phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-), \quad d_\pm = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r\pm\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

η οποία είναι η φόρμουλα Black-Scholes με Φ συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Η στρατηγική αντιστάθμισης τότε είναι $\alpha_t = \frac{\partial}{\partial x}v(t,S_t) = \Phi(d_+)$.

Κεφάλαιο 2

Γραμμικός Προγραμματισμός

Αυτό το κεφάλαιο περιέχει θεματικές περιοχές γραμμικού προγραμματισμού - Γ.Π. (linear programming - L.P.) ο οποίος εντάσσεται στον ευρύτερο κλάδο της βελτιστοποίησης. Από την βιβλιογραφία χρησιμοποιήθηκαν οι εξής πηγές [1], [2], [6], [9], [11] και [16].

2.1 Εισαγωγή

Αρχικά γίνεται μια σύντομη επισκόπηση του μαθηματικού υποβάθρου για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Το πρώτο βήμα για την επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης είναι η μαθηματική μοντελοποίηση του. Τα μαθηματικά μοντέλα σε αυτές τις περιπτώσεις περιλαμβάνουν:

1. Τις **μεταβλητές απόφασης** (**decision variables**), οι οποίες ορίζουν με σαφή τρόπο τις ποσότητες που πρέπει να υπολογιστούν ώστε να αποτελέσουν την λύση του προβλήματος.

2. Την **αντικειμενική συνάρτηση** (**objective function**) η οποία εκφράζει με έναν μετρήσιμο τρόπο τον στόχο του προβλήματος και τελικά βελτιστοποιεί (μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί) το κριτήριο απόδοσης που έχει τεθεί.

3. Τους **περιορισμούς** (**constraints**) που είναι εξισώσεις ή ανισώσεις και αντιστοιχούν στους περιορισμούς του φυσικού προβλήματος.

Έστω πρόβλημα με n το πλήθος μεταβλητές απόφασης $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και συντελεστές βαρύτητας κάθε μεταβλητής στο κριτήριο απόδοσης $c_1, c_2, \ldots, c_n$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με την προαναφερθείσα μαθηματική μοντελοποίηση προκύπτει η ακόλουθη γενική μορφή.

Βελτιστοποίηση της α.σ.	$\underbrace{\text{optimize}}_{\text{minimize / maximize}} \quad z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$
Υπό τους περιορισμούς	$G(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0},\ \text{δηλαδή} \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \end{cases},$ $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\ \text{δηλαδή} \begin{cases} \phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \phi_l(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases},$ $Q(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0},\ \text{δηλαδή} \begin{cases} q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \\ \vdots \\ q_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \end{cases}.$

Πίνακας 2.1: Μαθηματική μοντελοποίηση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης.

Σε πολλά προβλήματα υπάρχουν και περιορισμοί μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.$$

Ανάλογα με την μορφή των περιορισμών και της αντικειμενικής συνάρτησης προκύπτουν διάφορες κατηγορίες προβλημάτων. Ενδεικτικά, ένα παράδειγμα **προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού (linear programming - L.P. problem)** με την βοήθεια πινάκων παίρνει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} \max z = f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

όπου

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}.$$

Ένα παράδειγμα προβλήματος μη-γραμμικού (τετραγωνικού) προγραμματισμού (**non linear programming problem**) με χρήση πινάκων παίρνει την εξής μορφή:

$$\max z = f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\mathbf{T}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x},$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

όπου

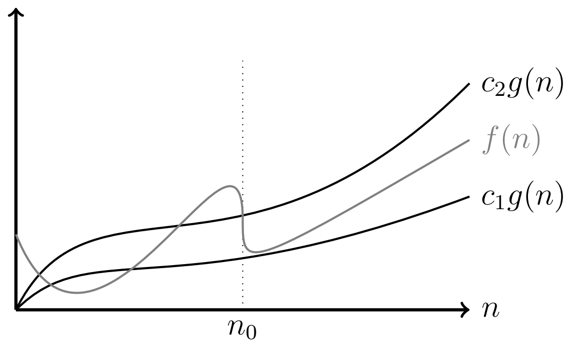
$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}.$$

Σε αυτό το σημείο γίνεται μια σύντομη αναφορά σε έννοιες **ασυμπτωτικής πολυπλοκότητας** και σε ορισμένους πολύ διαδεδομένους συμβολισμούς.

Ορισμός 2.1.1 ($\Theta-$notation)
Έστω συνάρτηση $g(n)$, με $\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{g}(\mathbf{n}))$ συμβολίζεται το σύνολο των συναρτήσεων:

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists\ c_1, c_2 \text{ και } n_0 \geq 0 :\ 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n),\ \forall\ n \geq n_0\}.$$

Η $g(n)$ είναι ένα **ασυμπτωτικά σφικτό φράγμα** (**asymptotically tight bound**) της $f(n)$.
Σύμβαση: Συνήθως γράφεται $f(n) = \Theta(g(n))$ αντί για $f(n) \in \Theta(g(n))$.

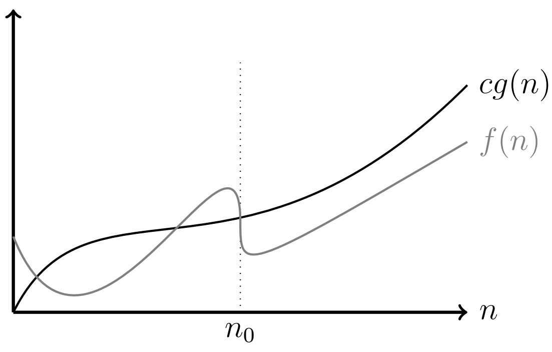


Σχήμα 2.1: Γραφική αναπαράσταση **ασυμπτωτικά σφικτού φράγματος**.

Ορισμός 2.1.2 ($O-$notation)
Έστω συνάρτηση $g(n)$, με $\mathbf{O}(\mathbf{g}(\mathbf{n}))$ συμβολίζεται το σύνολο των συναρτήσεων:

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists\ c \text{ και } n_0 \geq 0 :\ 0 \leq f(n) \leq cg(n),\ \forall\ n \geq n_0\}.$$

Η $g(n)$ είναι ένα **ασυμπτωτικό άνω φράγμα** (**asymptotic upper bound**) της $f(n)$.
Σύμβαση: Συνήθως γράφεται $f(n) = O(g(n))$ αντί για $f(n) \in O(g(n))$.

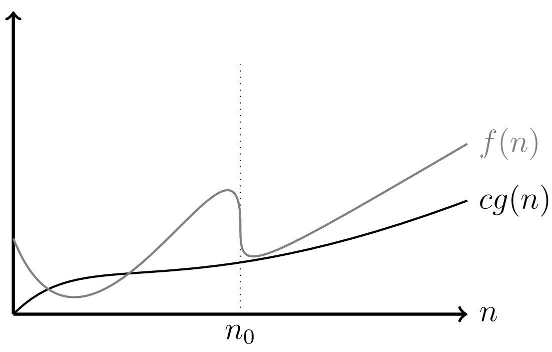


Σχήμα 2.2: Γραφική αναπαράσταση **άνω ασυμπτωτικού φράγματος**.

Ορισμός 2.1.3 ($\Omega-$notation)
Έστω συνάρτηση $g(n)$, με $\mathbf{\Omega(g(n))}$ συμβολίζεται το σύνολο των συναρτήσεων:

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists\, c \text{ και } n_0 \geq 0 :\ 0 \leq cg(n) \leq f(n),\ \forall\, n \geq n_0\}\,.$$

Η $g(n)$ είναι ένα **ασυμπτωτικό κάτω φράγμα** (**asymptotic lower bound**) της $f(n)$.
Σύμβαση: Συνήθως γράφεται $f(n) = \Omega(g(n))$ αντί για $f(n) \in \Omega(g(n))$.



Σχήμα 2.3: Γραφική αναπαράσταση **κάτω ασυμπτωτικού φράγματος**.

Παράδειγμα 2.1.1

Ένας	$\Theta(n)$	αλγόριθμος είναι «καλύτερος» από έναν
	$\Theta(n \log n)$	αλγόριθμο, ο οποίος είναι «καλύτερος» από έναν
	$\Theta(n \log^2 n)$	——————————//——————————
	$\Theta(n^2)$	——————————//——————————
	$\Theta(n^3)$	——————————//——————————
	$\Theta(2^n)$	——————————//——————————
	$\Theta(n2^n)$	——————————//——————————
	$\Theta(n!)$	——————————//——————————
	$\Theta(2^{2^n})$.	

Ένας αλγόριθμος είναι «καλύτερος» από έναν άλλον (για το ίδιο πρόβλημα), με την έννοια ότι είναι λιγότερο υπολογιστικά κοστοβόρος, δηλαδή εκτελεί λιγότερες πράξεις.

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού, η μαθηματική μοντελοποίηση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι η ακόλουθη:

Βελτιστοποίηση της α.σ.	$\underbrace{\text{optimize}}_{\text{minimize / maximize}} \quad z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$
Υπό τους περιορισμούς	$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \{\leq,\ =,\ \geq\} & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \{\leq,\ =,\ \geq\} & b_2, \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \{\leq,\ =,\ \geq\} & b_m, \\ \\ x_j \geq 0, & & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$

Πίνακας 2.2: Μοντελοποίηση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

Όπου τα a_{ij}, b_i, c_j είναι γνωστές σταθερές και για κάθε περιορισμό ισχύει μόνο μια από τις σχέσεις $\leq,\ =,\ \geq$.

Προκειμένου να εφαρμοστεί η θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού για την επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος βελτιστοποίησης πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες **προϋποθέσεις**.

1. **Γραμμικότητα (linearity)**.
   Η αντικειμενική συνάρτηση και οι διάφοροι περιορισμοί πρέπει να είναι πρώτου βαθμού συναρτήσεις ως προς τις μεταβλητές απόφασης, $x_1, x_2, \dots x_n$.

2. **Αναλογικότητα (proportionality)**.
   Εάν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι το άθροισμα των ατομικών συνεισφορών κάθε μεταβλητής και αν το αριστερό μέλος κάθε περιορισμού ισούται με το άθροισμα της συμβολής κάθε μεταβλητής στο μοντέλο, τότε ικανοποιείται η συνθήκη **αναλογικότητας**.

3. **Διαιρετότητα (divisibility)**.
   Η προϋπόθεση της **διαιρετότητας** εκφράζει την ικανότητα κατανομής των μεταβλητών $x_1, x_2, \dots x_n$ σε τέτοια επίπεδα, ώστε να είναι δυνατή η επίτευξη μη ακέραιων τιμών.

4. **Βεβαιότητα - προσδιορισμένοι συντελεστές (certainty)**.
   Οι διάφορες παράμετροι του προβλήματος πρέπει να είναι γνωστές σταθερές και μάλιστα γνωστές με απόλυτη βεβαιότητα. Συνήθως η προϋπόθεση αυτή παρακάμπτεται μέσω της χρήσης τεχνικών ανάλυσης ευασθησίας (sensitivity analysis) ώστε να εξετάζονται οι επιπτώσεις της μεταβολής των τιμών των παραμέτρων στην λύση του προβλήματος.

Σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορούν να παρουσιαστούν διάφορα **είδη λύσεων**. Παρακάτω γίνεται μια συνοπτική επισκόπηση των διαφορετικών **ειδών λύσεων ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού**.

1. **Λύση (solution)**.
   Ως **λύση** θεωρείται κάθε διάνυσμα $\mathbf{x}$ που ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος (εκτός ίσως από τους περιορισμούς μη αρνητικότητας).

2. **Δυνατή ή εφικτή λύση (feasible solution)**.
   Ως **εφικτή (δυνατή) λύση** θεωρείται κάθε διάνυσμα $\mathbf{x}$ που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του προβλήματος καθώς και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας.

3. **Βέλτιστη εφικτή λύση (optimal feasible solution)**.
   Η εφικτή λύση που βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος λέγεται **βέλτιστη εφικτή λύση**.

4. **Εφικτή λύση ακραίου σημείου**[4] **(corner point feasible solution)**.
   Η εφικτή λύση που κείται σε κάποιο γωνιακό σημείο λέγεται **εφικτή λύση ακραίου σημείου**.

5. **Γειτονικές ακραίες εφικτές λύσεις (adjacent corner point feasible solutions)**.
   Δύο οποιεσδήποτε ακραίες εφικτές λύσεις, αρκεί η ευθεία που τις ενώνει να αποτελεί εξίσωση ορίου για το χώρο εφικτότητας του προβλήματος λέγονται **γειτονικές ακραίες εφικτές λύσεις**.

6. **Επαυξημένη λύση (augmented solution)**.
   Δεδομένου ενός προβλήματος με περιορισμούς ανισότητες, η λύση εκείνου του ισοδύναμου προβλήματος το οποίο έχει επαυξηθεί με μεταβλητές απόφασης, ώστε να μετατραπεί σε πρόβλημα με περιορισμούς ισότητας λέγεται **επαυξημένη λύση**.

7. **Βασική λύση (basic solution)**.
   Κάθε ακραία επαυξημένη λύση λέγεται **βασική λύση**. Μια **βασική λύση** μπορεί να είναι εφικτή ή μη-εφικτή.

8. **Βασική εφικτή λύση (basic feasible solution)**.
   Η βασική εκείνη λύση του προβλήματος όπως αυτό μοντελοποιήθηκε στον πίνακα 2.2, της οποίας οι m βασικές μεταβλητές είναι μη αρνητικές και οι $(n-m)$ μη βασικές μεταβλητές είναι όλες ίσες με το μηδέν λέγεται **βασική εφικτή λύση**. Μια **βασική εφικτή λύση** καλείται **εκφυλισμένη (degenerated)**, εάν κάποιες από τις m βασικές μεταβλητές έχουν μηδενική τιμή.

9. **Εξισώσεις ορίων (boundary equations)**.
   Οι **εξισώσεις ορίων** ορίζουν ένα υπερεπίπεδο[4] ή ένα $n-$διάστατο γεωμετρικό σχήμα που είναι το ανάλογο μιας ευθείας στο επίπεδο ή ενός επιπέδου στον χώρο και κατασκευάζονται από τις ανισώσεις των περιορισμών, αν μετατραπούν σε ισότητες, δηλαδή αν τα '$\leq$' ή '$\geq$' αντικατασταθούν με '$=$'. Προφανώς, το όριο της εφικτής περιοχής ενός προβλήματος Γ.Π. αποτελείται από τις εφικτές λύσεις που ικανοποιούν μια ή περισσότερες εξισώσεις ορίων.

[4] Στην επόμενη υποενότητα θα οριστούν έννοιες όπως ακραίο σημείο και υπερεπίπεδο.

2.2 Γεωμετρία Χώρου Λύσεων Προβλημάτων Γ.Π.

Οι διάφοροι αλγόριθμοι επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού εκμεταλλεύονται τις ιδιότητες του χώρου επίλυσης του εκάστοτε προβλήματος, οι οποίες απλοποιούν την υπολογιστική διαδικασία. Σε αυτήν την υποενότητα θα επεκταθούν κάποιες γνωστές από την γραμμική άλγεβρα έννοιες για χώρους δύο και τριών διαστάσεων σε χώρους διάστασης n.

Ορισμός 2.2.1 (Ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων)
Έστω $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, με $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Η **ευθεία** L_0 **που διέρχεται από την αρχή των αξόνων** και παράγεται από το σημείο $\mathbf{c}$ είναι

$$L_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \lambda \mathbf{c},\ \text{με}\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Ορισμός 2.2.2 (Ευθεία (line))
Αν οι συντεταγμένες δύο σημείων του $\mathbb{R}^n$, K_1 και K_2 ($K_1 \neq K_2$) δίνονται από τα διανύσματα $\mathbf{x_1}$ και $\mathbf{x_2}$, τότε η **ευθεία** που ορίζουν αποτελείται από το σύνολο των σημείων:

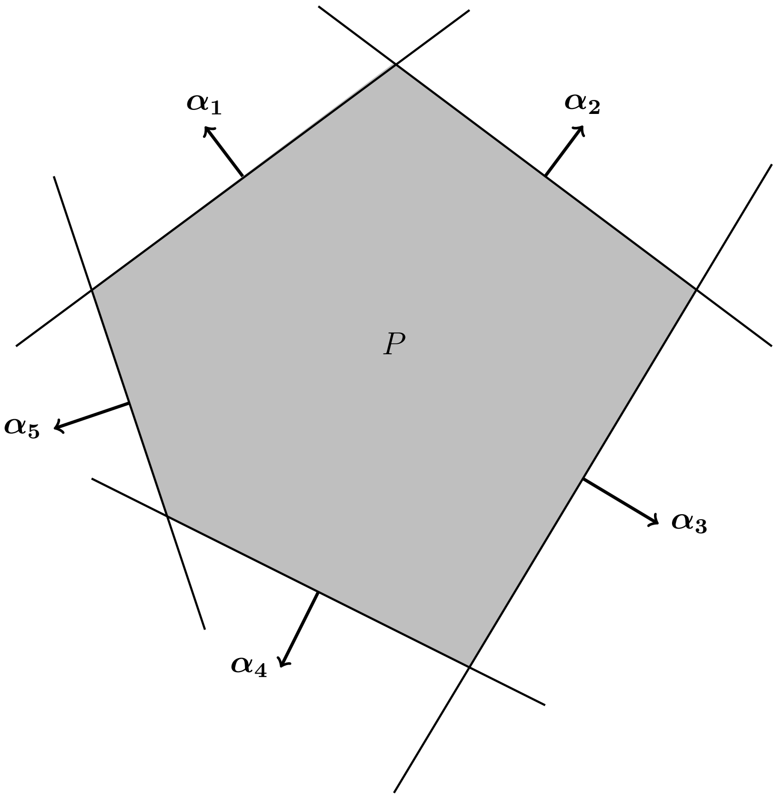
$$L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2},\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Αν $\lambda \in [0,1]$, τότε το σύνολο L παριστάνει το **ευθύγραμμο τμήμα** K_1K_2.

Ορισμός 2.2.3 (Πολύεδρο (polyhedron))
Ως **πολύεδρο** ορίζεται ένα σύνολο σημείων τα οποία περιγράφονται από την παρακάτω σχέση:

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\},$$

όπου $\mathbf{A}$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας και $\mathbf{b}$ διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$.



Σχήμα 2.4: **Πολύεδρο** P που ορίζεται ως η τομή πέντε ημιχώρων, όπου $\boldsymbol{\alpha_1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_5}$ τα κάθετα εξερχόμενα διανύσματα των ημιχώρων (πηγή: [11]).

Σημείωση 2.2.1

Ορισμένες χρήσιμες παρατηρήσεις και σχόλια.

- Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να περιγραφεί με περιορισμούς ανισότητες της μορφής $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$. Η λύση του εκάστοτε προβλήματος μπορεί να αναζητηθεί σε εκείνα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν τους διάφορους περιορισμούς του προβλήματος, δηλαδή στα σημεία του πολυέδρου P.

- **Πολύεδρο σε κανονική μορφή** είναι ένα πολύεδρο της μορφής

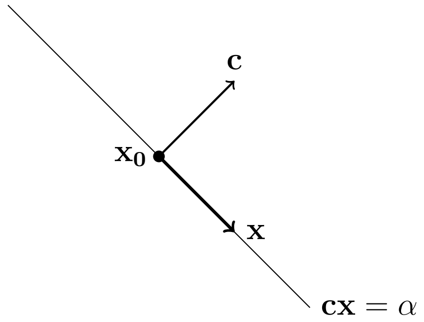
$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

- Ένα πολύεδρο μπορεί να επεκτείνεται μέχρι το άπειρο ή μπορεί να περιορίζεται σε κάποιο πεπερασμένο χωρίο. Ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ θα λέγεται **φραγμένο**, αν υπάρχει μια θετική σταθερά K, ώστε η απόλυτη τιμή κάθε συνιστώσας κάθε στοιχείου του συνόλου S να είναι μικρότερη ή ίση του K.

Ορισμός 2.2.4 (Υπερεπίπεδο (hyperplane))
Έστω $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Ως **υπερεπίπεδο** ορίζεται το σύνολο:

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{cx} = \alpha\}$$

και επεκτείνει την έννοια της ευθείας στον $\mathbb{R}^2$ και του επιπέδου στον $\mathbb{R}^3$ σε μεγαλύτερες διαστάσεις.

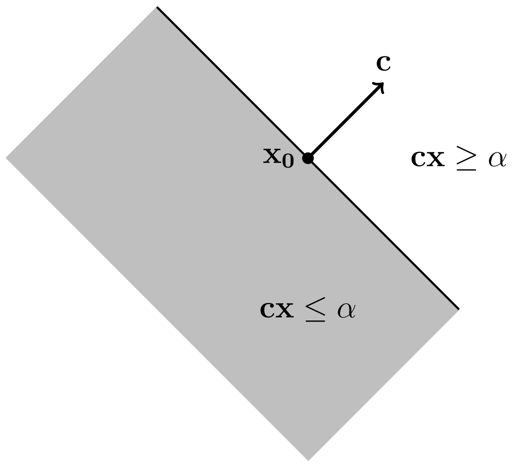


Σχήμα 2.5: **Υπερεπίπεδο** στον $\mathbb{R}^2$ (πηγή: [11]).

Ορισμός 2.2.5 (Ημιχώρος (halfspace))
Έστω $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, με $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Το σύνολο των στοιχείων:

$$E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{cx} \geq \alpha\},$$

καλείται **ημιχώρος**. Επιπροσθέτως, αν η μαθηματική σχέση που οριοθετεί τα στοιχεία που ανήκουν σε έναν **ημιχώρο** είναι μια σχέση ισότητας ή αυστηρής ανισότητας, τότε πρόκειται περί <u>ανοιχτού</u> **ημιχώρου**. Σε αντίθετη περίπτωση καλείται <u>κλειστός</u> **ημιχώρος**.



Σχήμα 2.6: **Ημιχώροι** στον $\mathbb{R}^2$, που ορίζονται από **υπερεπίπεδο** (πηγή: [11]).

Ορισμός 2.2.6 (Κυρτός συνδυασμός (convex combination))
Έστω ένα σύνολο C και έστω σημεία $\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2} \in C$. Ο **κυρτός συνδυασμός** αυτών των **δύο σημείων** προκύπτει από την σχέση:

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x_2},$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ με $0 \leq \lambda \leq 1$.

Ο **κυρτός συνδυασμός πεπερασμένου αριθμού σημείων** $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ του συνόλου C ορίζεται από την σχέση:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{x_i} = 1, \quad \beta_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

όπου $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1$.

Ορισμός 2.2.7 (Κυρτό σύνολο (convex set))
Ένα **σύνολο** $C \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **κυρτό** αν κάθε στοιχείο που προκύπτει σαν κυρτός συνδυασμός στοιχείων του C ανήκει επίσης στο C, δηλαδή αν και μόνο αν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\forall\ p \in \mathbb{N},\ \mathbf{x_i} \in C \text{ και } \mu_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ ισχύει ότι } \sum_{i=1}^{p} \mu_i \mathbf{x_i} \in C,$$

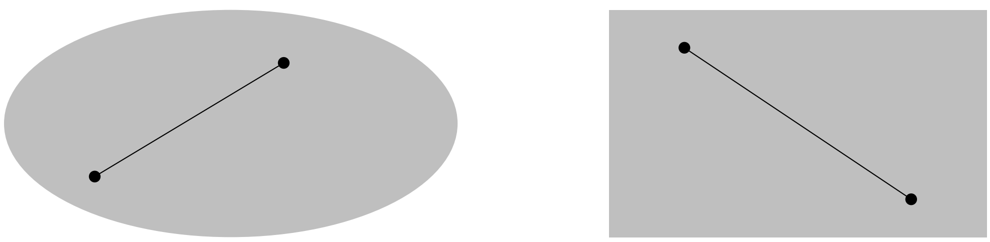
όπου $i = 1, 2, \ldots, p$ και $\sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1$.

Στην απλούστερη περίπτωση η συνθήκη παίρνει την εξής μορφή:

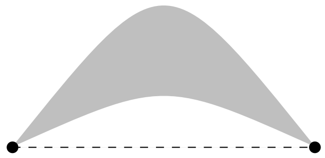
$$\forall\ \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in C,\ \ \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ ισχύει ότι } \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x_2} \in C,$$

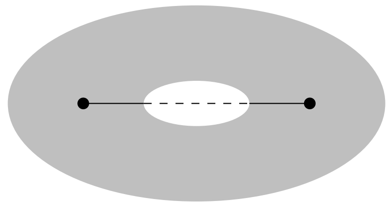
όπου $0 \leq \lambda \leq 1$.

Σημείωση 2.2.2
Διαισθητικά ένα σύνολο C λέγεται **κυρτό**, αν για οποιαδήποτε στοιχεία $\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2} \in C$, το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει περιέχεται μέσα στο C.



Σχήμα 2.7: Κυρτά σύνολα.





Σχήμα 2.8: Μη κυρτά σύνολα.

Ορισμός 2.2.8 (Ακραίο σημείο (extreme point))
Ένα σημείο $\mathbf{x}$ θα λέμε ότι είναι **ακραίο σημείο** ενός κυρτού συνόλου C, εάν δεν είναι δυνατό να εκφραστεί ως κυρτός συνδυασμός δυο διακεκριμένων σημείων του συνόλου C, δηλαδή[5]

$$\mathbf{x} \text{ ακραίο σημείο του } C \iff \nexists\, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in C : \; \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2},$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ 0 < \lambda < 1$. **Ακραίο σημείο** ενός πολυέδρου είναι κάποιο **γωνιακό σημείο** του πολυέδρου. Εναλλακτικά, ένα **ακραίο σημείο** ενός πολυέδρου λέγεται και **κορυφή (vertex)** του πολυέδρου.

Θεώρημα 2.2.1 (Ιδιότητες κυρτών συνόλων)
Μερικές βασικές **ιδιότητες κυρτών συνόλων**.

- Η τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο.

  Απόδειξη.
  Εάν η τομή των κυρτών συνόλων είναι το $\emptyset$ σύνολο ή περιέχει μονάχα ένα σημείο, τότε το θεώρημα ισχύει εξ ορισμού. Αλλιώς, έστω δύο σημεία A και B τα οποία ανήκουν στην τομή. Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα σημεία αυτά οφείλει να βρίσκεται εντός κάθε συνόλου που απαρτίζει την εν λόγω τομή. Άρα το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο αυθαίρετα σημεία της τομής ανήκει στην τομή, επομένως η τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο. □

- Το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών ενός πεπερασμένου αριθμού σημείων ορίζει το **κυρτό πολύεδρο** που παράγεται από τα σημεία αυτά.

- Κάθε σημείο σε ένα κλειστό και αυστηρά φραγμένο κυρτό σύνολο C, με πεπερασμένο αριθμό ακραίων σημείων, μπορεί να γραφεί σαν κυρτός συνδυασμός των ακραίων σημείων του συνόλου.

  Απόδειξη (Ιδέα).
  Ο ισχυρισμός αποδεικνύεται με επαγωγή στην διάσταση του συνόλου C.

[5] Ισοδύναμα,

$$\mathbf{x} \text{ ακραίο σημείο του } C \iff \forall\, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in C : \; \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2},$$

όπου $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$.

– *Επαγωγική βάση.*
Στην τετριμμένη περίπτωση όπου το σύνολο C είναι το $\emptyset$ σύνολο ή περιέχει μονάχα ένα στοιχείο (διάσταση $=\ 0$), τότε ο ισχυρισμός ισχύει.

– *Επαγωγική υπόθεση.*
Υποτεθείσθω ότι ο εν λόγω ισχυρισμός ισχύει για κάθε κλειστό, αυστηρά φραγμένο και κυρτό σύνολο C' διάστασης k.

– *Επαγωγικό βήμα.*
Θα αποδειχθεί ότι ο ισχυρισμός ισχύει για κλειστό, αυστηρά φραγμένο και κυρτό σύνολο C διάστασης $k+1$.

Έστω σημείο $x \in C$ και έστω ευθεία $L = \{x + \lambda h \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, με $h \neq 0$ στον $\mathbb{R}^{k+1}$ η οποία διέρχεται από το σημείο x. Ξεκινώντας από το σημείο x και ακολουθώντας οποιαδήποτε από τις δύο πιθανές κατευθύνσεις κατά μήκος της ευθείας L κάποια στιγμή το σύνολο C θα εγκαταλειφθεί, διότι πρόκειται περί φραγμένου συνόλου. Ισχύει πως τα σημεία εξόδου από το σύνολο C (x_- και x_+ αντίστοιχα) μέσω της ευθείας C μπορούν να γραφούν με την βοήθεια των μη αρνητικών πολλαπλασιαστών λ_- και λ_+ ως εξής:

$$x_{\pm} = x \pm \lambda_{\pm} h.$$

Επίσης και τα δύο προαναφερθέντα σημεία x_- και x_+ ανήκουν στο σύνορο (boundary) του συνόλου C. Η απόδειξη ολοκληρώνεται επιβεβαιώνοντας ότι τα σημεία $x_{\pm}$ μπορούν να γραφούν ως κυρτός συνδυασμός των ακραίων σημείων του C, εφόσον ισχύει προφανώς ότι το αρχικό σημείο x μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός των $x_{\pm}$ (ως συνευθειακά σημεία). Η πλήρης απόδειξη βρίσκεται στο εισαγωγικό κεφάλαιο της πηγής [16].

$\square$

- Ένα κυρτό πολύεδρο είναι κυρτό σύνολο με πεπερασμένο αριθμό ακραίων σημείων.

Απόδειξη.
Η ιδιότητα αυτή προκύπτει από τον ορισμό του κυρτού πολυέδρου εφόσον παράγεται από τους κυρτούς συνδυασμούς πεπερασμένου αριθμού σημείων.

$\square$

- Ένα κυρτό πολύεδρο δεν είναι απαραίτητα φραγμένο.

Απόδειξη.
Προκύπτει εξ ορισμού.

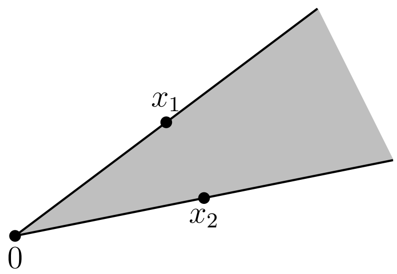
□

Ορισμός 2.2.9 (Κώνος (cone))
Ένα σύνολο C λέγεται **κώνος**, εάν για κάθε $x \in C$ και $\theta \geq 0$ ισχύει

$$\theta x \in C.$$

Ορισμός 2.2.10 (Κυρτός κώνος (convex cone))
Ένα σύνολο C λέγεται **κυρτός κώνος**, εάν είναι κυρτό και κώνος. Δηλαδή εάν για κάθε $x_1, x_2 \in C$ και $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ ισχύει

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C.$$

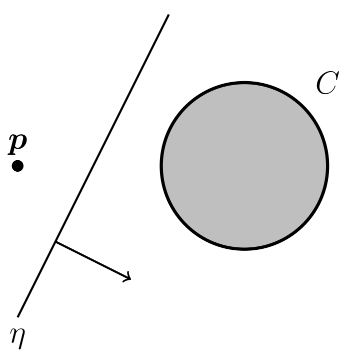


Σχήμα 2.9: **Κυρτός κώνος** στο επίπεδο (πηγή: [11]).

2.2.1 Το Θεώρημα του Διαχωρίζοντος Υπερεπιπέδου

Θεώρημα 2.2.2 (Διαχωρίζοντος υπερεπιπέδου (hyperplane separation))
Έστω C ένα μη-κενό, $C \neq \emptyset$, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω ένα σημείο εκτός του υποσυνόλου C, $\boldsymbol{p} \notin C$. Τότε υπάρχει ένα υπερεπίπεδο που τα διαχωρίζει αυστηρά, δηλαδή υπάρχει διάνυσμα $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ τ.ω.

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\eta} < \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{\eta}, \text{ για κάθε } \boldsymbol{c} \in C.$$



Σχήμα 2.10: **Θεώρημα διαχωρισμού** γραφικά (πηγή: [7]).

Απόδειξη.
Έστω $\overline{\boldsymbol{c}}$ η προβολή του $\boldsymbol{p}$ στην κλειστότητα $\overline{C}$, του C. Επίσης, έστω $\boldsymbol{c} \in C$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε τα σημεία

$$\boldsymbol{c_\lambda} = (1-\lambda)\overline{\boldsymbol{c}} + \lambda \boldsymbol{c}$$

ανήκουν στην κλειστότητα $\overline{C}$ εφόσον $\boldsymbol{c} \in C$, $\overline{\boldsymbol{c}} \in \overline{C}$ και C είναι κυρτό.
Θεωρώντας την Ευκλείδεια νόρμα για την απόσταση των σημείων $\boldsymbol{c_\lambda}$ από το αυθαίρετο σημείο $\boldsymbol{p}$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{c_\lambda} - \boldsymbol{p}\|^2 &= \|(1-\lambda)\overline{\boldsymbol{c}} + \lambda\boldsymbol{c} - \boldsymbol{p}\|^2 \\
&= \|\overline{\boldsymbol{c}} + \lambda(\boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}}) - \boldsymbol{p}\|^2 \\
&\geq \|\overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}\|^2 > 0.
\end{aligned}$$

Όμως από γνωστές ιδιότητες της Ευκλείδειας νόρμας και του εσωτερικού γινομένου ισχύουν:

$$\begin{aligned}
\|\overline{\boldsymbol{c}} + \lambda(\boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}}) - \boldsymbol{p}\|^2 &= \langle \overline{\boldsymbol{c}} + \lambda(\boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}}) - \boldsymbol{p}, \overline{\boldsymbol{c}} + \lambda(\boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}}) - \boldsymbol{p} \rangle \\
&= \langle (\overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}) + \lambda(\boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}}), (\overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}) + \lambda(\boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}}) \rangle \\
&= \|\overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}\|^2 + 2\lambda\langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}} \rangle + \lambda^2 \langle \boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}} \rangle.
\end{aligned}$$

Από προηγούμενη σχέση ισχύει:

$$\|\overline{\boldsymbol{c}} + \lambda(\boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}}) - \boldsymbol{p}\|^2 \geq \|\overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}\|^2.$$

Επομένως, συνδυάζοντας με την τελευταία σχέση προκύπτει:

$$\begin{aligned}
2\lambda\langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}} \rangle + \lambda^2 \langle \boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}} \rangle > 0 && \Longrightarrow \\
\langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}} \rangle \geq 0 && \Longleftrightarrow \\
\langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}} \rangle = \langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c} \rangle + \langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, -\overline{\boldsymbol{c}} \rangle \geq 0 && \Longleftrightarrow \\
\langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c} \rangle \geq \langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, \overline{\boldsymbol{c}} \rangle && \Longleftrightarrow \\
\langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c} \rangle \geq \langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} + \overline{\boldsymbol{c}} \rangle && \Longleftrightarrow \\
\langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c} \rangle \geq \langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \rangle + \langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p} \rangle && \Longleftrightarrow \\
\langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c} \rangle \geq \langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \rangle + \|\overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}\|^2 > \langle \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \rangle.
\end{aligned}$$

Άρα για $\boldsymbol{\eta} = \overline{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{p}$ από την τελευταία ανισότητα ισχύει:

$$\langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{c} \rangle > \langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p} \rangle, \quad \forall\ \boldsymbol{c} \in C.$$

□

Σημείωση 2.2.3 (Κλειστότητα, νόρμα διανυσμάτων και εσωτερικό γινόμενο)
Σε αυτό το σημείο γίνεται μια συνοπτική επισκόπηση εννοιών που χρησιμοποιήθηκαν στην παραπάνω απόδειξη (πηγές: [1] και [9]).

- **Μετρικός χώρος (metric space)** είναι ένα ζεύγος (X, ρ) όπου X είναι ένα μη κενό σύνολο και $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ μια απεικόνιση που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

  1. $\rho(x, y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και $\rho(x, y) = 0$ ανν $x = y$.
  2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$.
  3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$.

- Έστω $A \subset X$ όπου (X, ρ) μετρικός χώρος. Ένα σημείο $x \in X$ λέγεται **οριακό σημείο (limit point)** του συνόλου A αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει

  $$S(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset,$$

  όπου $S(x, \epsilon)$ είναι η ανοικτή σφαίρα με κέντρο x και ακτίνα ϵ.

- Η **κλειστότητα (closure)** ενός συνόλου A, υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου (X, ρ) συμβολίζεται με $\overline{A}$ και ορίζεται ως εξής:

  $$\overline{A} = \{x \in X \mid x \text{ είναι οριακό σημείο του } A\}.$$

- Μια συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **νόρμα διανυσμάτων (vector norm)** αν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, ικανοποιεί τα ακόλουθα:

  1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{x}\| = 0$ ανν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
  2. $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|$, για κάθε $\alpha \in C$.
  3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

- Μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο (inner product)** αν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, ικανοποιεί τα ακόλουθα:

  1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ και $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ ανν $\mathbf{x} = 0$.
  2. $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle$.
  3. $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, για κάθε $\alpha \in C$.
  4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$.

  Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου εύκολα μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει τις παρακάτω ιδιότητες:

  1. $\langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \alpha \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} = \overline{\alpha} \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} = \overline{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}\rangle = \overline{\langle \mathbf{y}+\mathbf{z}, \mathbf{x}\rangle} = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle} + \overline{\langle \mathbf{z}, \mathbf{x}\rangle} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle$.
3. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ανν $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$, για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$.

- Χαρακτηριστικό παράδειγμα νόρμας διανύσμάτων στον $\mathbb{C}^n$ είναι η **Ευκλείδεια νόρμα (Euclidean norm)** η οποία ορίζεται ως:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left\|[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T\right\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Επάγεται από το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{y}^*\mathbf{x} = [\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \overline{y_1}x_1 + \overline{y_2}x_2 + \cdots + \overline{y_n}x_n.$$

2.3 Βασικά Θεωρήματα

Σε αυτή την υποενότητα αξιοποιώντας έννοιες οι οποίες παρουσιάστηκαν προηγουμένως, αποδεικνύονται ορισμένα σημαντικά θεωρήματα σχετικά με τις λύσεις ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Επίσης, στα θεωρήματα χρησιμοποιείται ο ίδιος συμβολισμός που παρουσιάστηκε στην μοντελοποίηση του γενικού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού στον πίνακα 2.2. Προτού διατυπωθούν τα θεωρήματα υπενθυμίζονται μερικές απαραίτητες έννοιες από την γραμμική άλγεβρα. Από τις πηγές χρησιμοποιήθηκε η εξής βιβλιογραφία: [2], [3], [6].

Ορισμός 2.3.1 (Διανυσματικός χώρος (vector space))
Ένας **διανυσματικός χώρος ή γραμμικός χώρος (vector space** or **linear space)** $S \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα μη-κενό υποσύνολο διανυσμάτων κλειστό ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού με διάνυσμα. Δηλαδή, ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι **διανυσματικός χώρος** ανν

$$\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \text{ και } \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ο γραμμικός συνδυασμός } \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in S.$$

Ορισμός 2.3.2 (Γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα (linearly independent vectors))
Τα **διανύσματα** $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζονται **γραμμικά ανεξάρτητα** ανν

$$\forall\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^k \text{ εάν } \sum_{j=1}^{k} c_j\mathbf{x_j} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Ορισμός 2.3.3 (Διάσταση δ.χ.)
Η **διάσταση (dimension)** ενός διανυσματικού χώρου S, $\dim(S)$, είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων που ανήκουν σε αυτόν τον χώρο.

Ορισμός 2.3.4 (Βαθμός πίνακα)
Έστω πραγματικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ο **βαθμός (rank)** του A, $\text{rank}(A)$, ισούται με την διάσταση του χώρου των στηλών του.

Ορισμός 2.3.5 (Βάση πίνακα (matrix basis))
Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με $\text{rank}(A) = m$. Οποιοδήποτε σύνολο m γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A ονομάζεται **βάση**, διότι αποτελεί **βάση** του χώρου που παράγεται από τις στήλες του A. Κάθε **βάση** συνήθως συμβολίζεται είτε με το σύνολο των δεικτών, J, των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών που απαρτίζουν την βάση αυτή, είτε ως το σύνολο των διανυσμάτων $\{A_j : j \in J\}$.

Θεώρημα 2.3.1
Ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων είναι πεπερασμένος.

Απόδειξη.
Ο αριθμός των βασικών λύσεων του συστήματος ισούται με τον αριθμό των διαφορετικών βάσεων που μπορούν να δημιουργηθούν. Συνεπώς, ισούται με τον αριθμό των υποσυνόλων τα οποία περιέχουν m γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα που μπορούν να σχηματιστούν από τα n συνολικά διανύσματα στήλες του πίνακα A (πίνακας συντελεστών των μεταβλητών στους περιορισμούς). Κάθε υποσύνολο m διανυσμάτων δεν αποτελείται απαραίτητα από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, το πλήθος των προαναφερθέντων υποσυνόλων έχει ως άνω φράγμα τον αριθμό των συνδυασμών n αντικειμένων ανά m, δηλαδή

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Εφόσον ο αριθμός των βασικών λύσεων είναι πεπερασμένος, τότε θα είναι πεπερασμένος και ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων.

□

Θεώρημα 2.3.2
Το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός προβλήματος Γ.Π. είναι ένα κυρτό σύνολο.

Απόδειξη.
Έστω

$$X_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

το εν λόγω σύνολο για το οποίο πρέπει να αποδειχθεί η ιδιότητα της κυρτότητας. Αρκεί να αποδειχθεί ότι δεδομένων δύο αυθαίρετων σημείων του X_c, $\mathbf{x_1}$ και $\mathbf{x_2}$, κάθε κυρτός συνδυασμός αυτών είναι επίσης σημείο του X_c. Έστω $\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2} \in X_c$ και $\mathbf{x_c}$ τ.ω.

$$\mathbf{x_c} = \lambda\mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Όμως

$$\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2} \in X_c \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2} \geq \mathbf{0}$$

και αφού $0 \leq \lambda \leq 1$, ισχύει

$$\mathbf{x_c} = \lambda \mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2} \geq \mathbf{0}.$$

Χρησιμοποιώντας τους περιορισμούς $\mathbf{Ax_1} = \mathbf{b}$ και $\mathbf{Ax_2} = \mathbf{b}$ και πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την παραπάνω σχέση με τον πίνακα $\mathbf{A}$ προκύπτουν τα εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax_c} &= \mathbf{A}\Big[\lambda \mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2}\Big] \\ &= \lambda \mathbf{Ax_1} + (1-\lambda)\mathbf{Ax_2} \\ &= \lambda \mathbf{b} + (1-\lambda)\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, ότι $\mathbf{Ax_c} = \mathbf{b}$ και $\mathbf{x_c} \geq \mathbf{0}$, προκύπτει ότι $\mathbf{x_c} \in X_c$. Άρα το σύνολο X_c είναι κυρτό.

□

Θεώρημα 2.3.3
Η αντικειμενική συνάρτηση ενός προβλήματος Γ.Π. λαμβάνει την βέλτιστη τιμή της σε ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των εφικτών λύσεων.

Απόδειξη.
Έστω $\mathbf{x_1^{\alpha}}, \mathbf{x_2^{\alpha}}, \ldots, \mathbf{x_r^{\alpha}}$ πεπερασμένος αριθμός ακραίων σημείων και $\mathbf{x}^*$ το διάνυσμα της βέλτιστης λύσης. Προφανώς, αν το $\mathbf{x}^*$ είναι ακραίο σημείο, δηλαδή αν $\mathbf{x}^* \in \{\mathbf{x_1^{\alpha}}, \mathbf{x_2^{\alpha}}, \ldots, \mathbf{x_r^{\alpha}}\}$, τότε το θεώρημα ισχύει. Εάν η βέλτιστη τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση επιτυγχάνεται στο $\mathbf{x}^*$ και το $\mathbf{x}^*$ δεν είναι ακραίο σημείο, δηλαδή

$$\operatorname{opt} z \equiv z^* = \mathbf{c^T}\mathbf{x}^* \text{ και } \mathbf{x}^* \notin \{\mathbf{x_1^{\alpha}}, \mathbf{x_2^{\alpha}}, \ldots, \mathbf{x_r^{\alpha}}\}$$

και επειδή το $\mathbf{x}^*$ δεν είναι ακραίο σημείο, μπορεί να εκφραστεί ως κυρτός συνδυασμός ακραίων σημείων, δηλαδή

$$\mathbf{x}^* = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{x_k}^{\boldsymbol{\alpha}},$$

όπου $\lambda_k \geq 0,\ k = 1, 2, \ldots, r$ και $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1$. Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω η αντικειμενική συνάρτηση γράφεται ως εξής:

$$z^* = \mathbf{c^T}\mathbf{x}^* = \mathbf{c^T} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{x_k}^{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{c^T} \mathbf{x_k}^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Έστω $\mathbf{c^T x_{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{\alpha}}} = \max\limits_{1\le k\le r}\left(\mathbf{c^T x_k^{\boldsymbol{\alpha}}}\right)$, τότε για την αντικειμενική συνάρτηση ισχύει:

$$\begin{aligned} z^* &= \mathbf{c^T x^*} &&= \sum_{k=1}^{r}\lambda_k \mathbf{c^T x_k^{\boldsymbol{\alpha}}} \\ &\le \sum_{k=1}^{r}\lambda_k \mathbf{c^T x_{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{\alpha}}} &&= \mathbf{c^T x_{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{\alpha}}}\sum_{k=1}^{r}\lambda_k \\ &= \mathbf{c^T x_{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{\alpha}}} &&= z_\rho. \end{aligned}$$

Δηλαδή, ισχύει

$$z^* \le \mathbf{c^T x_{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{\alpha}}} = z_\rho.$$

Όμως το $z^* = \mathbf{c^T x^*}$ ορίζει την μέγιστη τιμή που θα μπορούσε να πάρει η αντικειμενική συνάρτηση, δηλαδή $z^* \ge z = \mathbf{c^T x}$, για κάθε $\mathbf{x}$. Επομένως, πρέπει να ισχύει ότι:

$$z_\rho = \mathbf{c^T x_{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{\alpha}}} = z^*$$

και άρα υπάρχει ακραίο σημείο, $\mathbf{x_{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{\alpha}}}$, στο οποίο η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει την μέγιστη τιμή της. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποτίθεται ότι πρόκειται περί προβλήματος μεγιστοποίησης, η απόδειξη προσαρμόζεται με προφανή τρόπο στην περίπτωση προβλημάτων ελαχιστοποίησης.

□

Θεώρημα 2.3.4
Αν υπάρχει ένα σύνολο $(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_k})$ από $k \le m$ γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα $\mathbf{A}$, τ.ω. $x_1\boldsymbol{\alpha_1} + x_2\boldsymbol{\alpha_2} + \cdots + x_k\boldsymbol{\alpha_k} = \boldsymbol{b}$ με όλα τα $x_j \ge 0$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, τότε το σημείο:

$$\mathbf{x} = (\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_k}_{\#k}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\#(n-k)})$$

είναι ένα ακραίο σημείο του X_c, του κυρτού συνόλου των εφικτών λύσεων.

Θεώρημα 2.3.5
Έστω $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$ ένα ακραίο σημείο του συνόλου X_c, τότε το πολύ m από τα x_j^α, $j \in \{1, \ldots, n\}$ είναι θετικά και οι στήλες του πίνακα $\mathbf{A}$, οι οποίες σχετίζονται με αυτά, είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

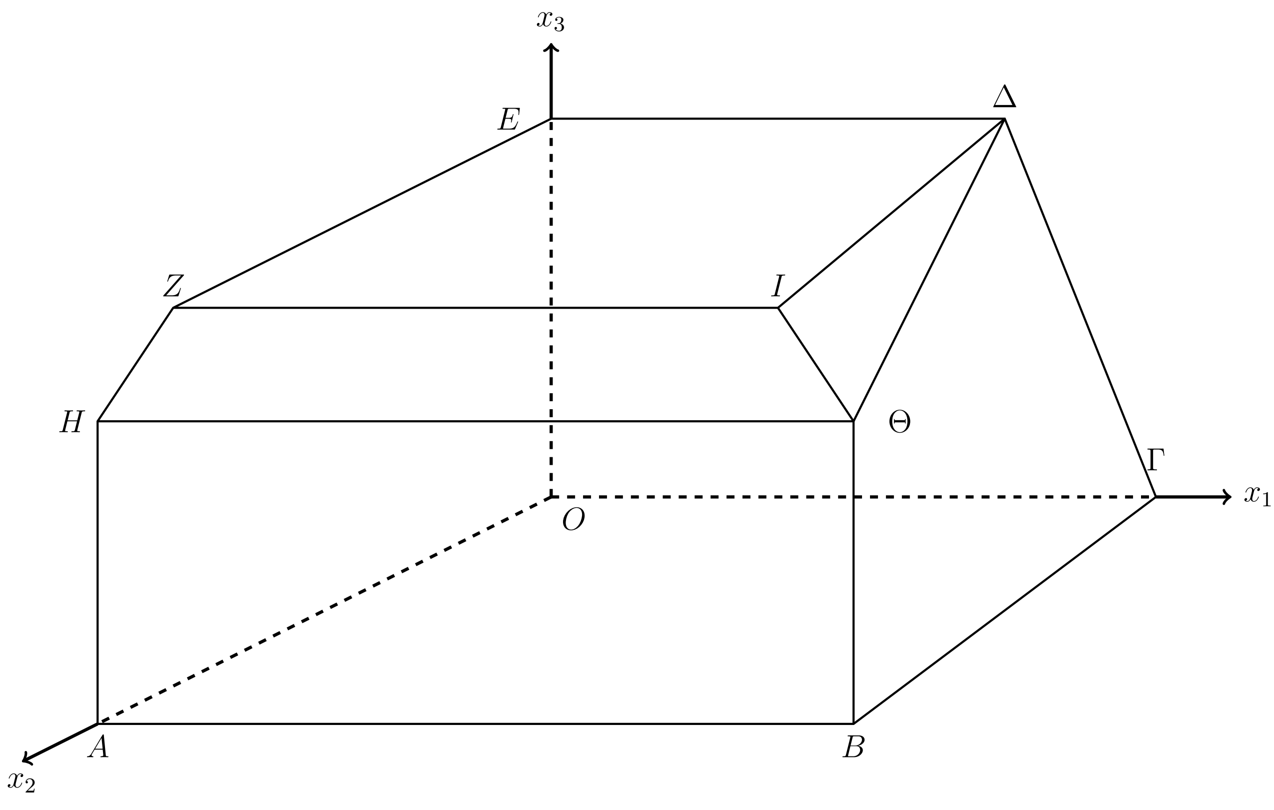
Οι αποδείξεις των δύο τελευταίων θεωρημάτων 2.3.4 και 2.3.5, μπορούν να βρεθούν στην εξής πηγή της βιβλιογραφίας: [6].

2.4 Εφαρμογές με Γραφική Επίλυση

Η γραφική επίλυση ενός προβλήματος δύο μεταβλητών συμβάλλει στην κατανόηση και την επαλήθευση των προαναφερθέντων θεωρημάτων. Συνήθως δεν υπάρχει η δυνατότητα γραφικής επίλυσης προβλημάτων Γ.Π. λόγω αδυναμίας γραφικής αναπαράστασής τους, όταν ξεπερνούν τις τρεις διαστάσεις. Η δυνατότητα γραφικής επίλυσης παρέχεται στα προβλήματα Γ.Π. τα οποία έχουν έως τρεις άγνωστες μεταβλητές. Στην περίπτωση των τριών μεταβλητών οι περιορισμοί δεν παριστάνονται από ευθείες (όπως θα διαπιστωθεί σύντομα στις εφαρμογές 2.4.1 και 2.4.2 που ακολουθούν), αλλά από ολόκληρα επίπεδα.

Παράδειγμα 2.4.1

Σε ένα πρόβλημα τριών διαστάσεων τα γωνιακά σημεία (corner points) του προβλήματος αποτελούν σημεία τομής επιπέδων. Η βέλτιστη λύση του προβλήματος ανάλογα με την κλίση του επιπέδου της αντικειμενικής συνάρτησης επιτυγχάνεται είτε σε γωνιακό σημείο, είτε αν υπάρχουν εναλλακτικά βέλτιστα σημεία σε ακμή του πολυέδρου, είτε ακόμη και σε μια ολόκληρη πλευρά του χώρου των λύσεων. Η εφικτή περιοχή είναι τρισδιάστατη και οριοθετείται από τους περιορισμούς-επίπεδα.



Σχήμα 2.11: Εφικτή περιοχή προβλήματος Γ.Π. τριών διαστάσεων (πηγή: [2]).

Η ανάπτυξη της γενικής αλγεβρικής μεθόδου Simplex για την λύση κάθε προβλήματος Γ.Π. βασίστηκε σε αποτελέσματα και παρατηρήσεις κατά την γραφική επίλυση προβλημάτων Γ.Π. σε χαμηλές διαστάσεις. Για μια συνοπτική παρουσίαση του αλγορίθμου της μεθόδου Simplex με συνοδευτικά παραδείγματα καθώς και μοντελοποίηση προβλημάτων με χρήση του CPLEX solver σε Python, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην ιστοσελίδα της IBM[6]. Χρήση του CPLEX solver θα γίνει και αργότερα στα πλαίσια της τιμολόγησης χρηματοοικονομικού παραγώγου (financial derivative pricing).

2.4.1 Μοναδικό Βέλτιστο Σημείο

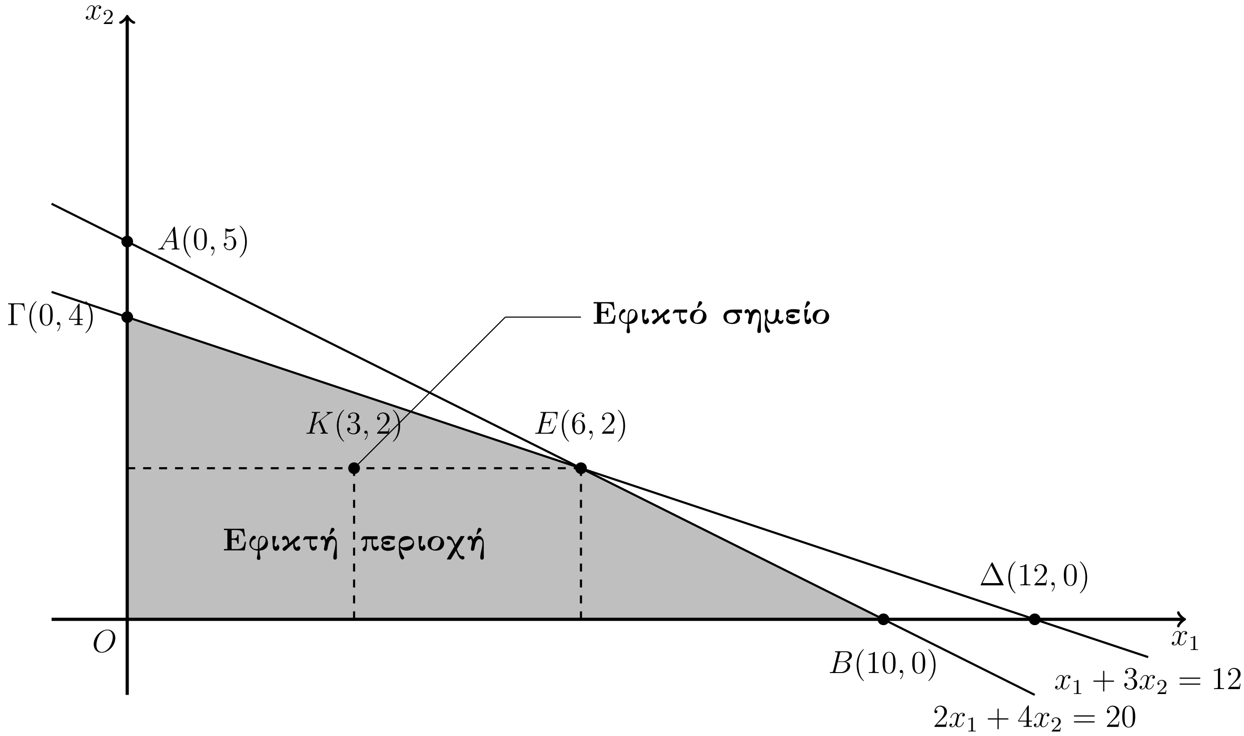
Μεγιστοποίηση της α.σ. (1)	$z = 40x_1 + 100x_2.$
Υπό τους περιορισμούς	$2x_1 + 4x_2 \leq 20,$ $x_1 + 3x_2 \leq 12,$ $x_1,\ x_2 \geq 0.$

Πίνακας 2.3: Μοντελοποίηση προβλήματος μεγιστοποίησης (1).

Ακολουθεί σχήμα στο οποίο δίνεται η γραφική αναπαράσταση των περιορισμών του προβλήματος:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 20, \\ x_1 + 3x_2 &\leq 12, \\ \\ x_1,\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

[6] https://ibmdecisionoptimization.github.io/tutorials/html/Linear_Programming.html.

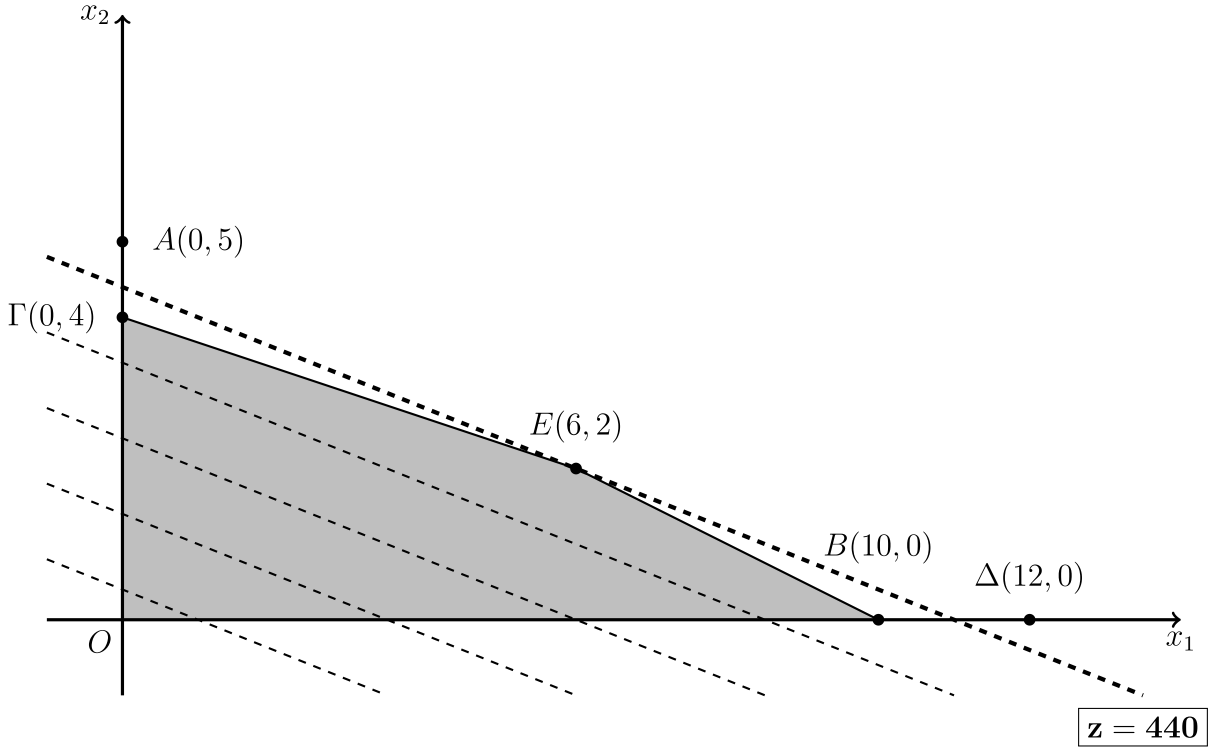


Σχήμα 2.12: Εφικτή περιοχή προβλήματος Γ.Π. (1) (πηγή: [2]).

Ο συνδυασμός $x_1 = 3$ και $x_2 = 2$ που αντιστοιχεί στο σημείο $K(3,2)$ δεν παραβιάζει κανέναν από τους περιορισμούς του προβλήματος, δηλαδή αποτελεί ένα **εφικτό σημείο (feasible point)**. Το γραμμοσκιασμένο τετράπλευρο ΟΓΕΒ του σχήματος 2.12 είναι το σύνολο όλων των εφικτών σημείων και καλείται **εφικτή περιοχή (feasible region)** του προβλήματος.

Στόχος είναι να εντοπιστεί το σημείο ή τα σημεία εκείνα της εφικτής περιοχής, τα οποία μεγιστοποιούν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η βέλτιστη λύση, όπως διατυπώθηκε και στο θεώρημα 2.3.3, επιτυγχάνεται πάντοτε σε κάποιο γωνιακό σημείο (corner point) της εφικτής περιοχής. Σε κάποιες περιπτώσεις ενδέχεται πάνω από ένα γωνιακά σημεία να αποτελούν βέλτιστη λύση.

Η ευθεία εκείνη που περιλαμβάνει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των x_1 και x_2 για μια σταθερή τιμή της α.σ. αναπαριστά την α.σ. για την σταθερή αυτή τιμή. Στο σχήμα 2.13 σχεδιάζονται με διακεκομμένες γραμμές οι γραφικές παραστάσεις μιας σειράς αντικειμενικών συναρτήσεων που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές.



Σχήμα 2.13: Διάφορες θέσεις της α.σ. (1) (πηγή: [2]).

Στα προβλήματα Γ.Π. όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την ίδια αντικειμενική συνάρτηση για διαφορετικές τιμές του δεξιού μέλους της, θα είναι παράλληλες μεταξύ τους.

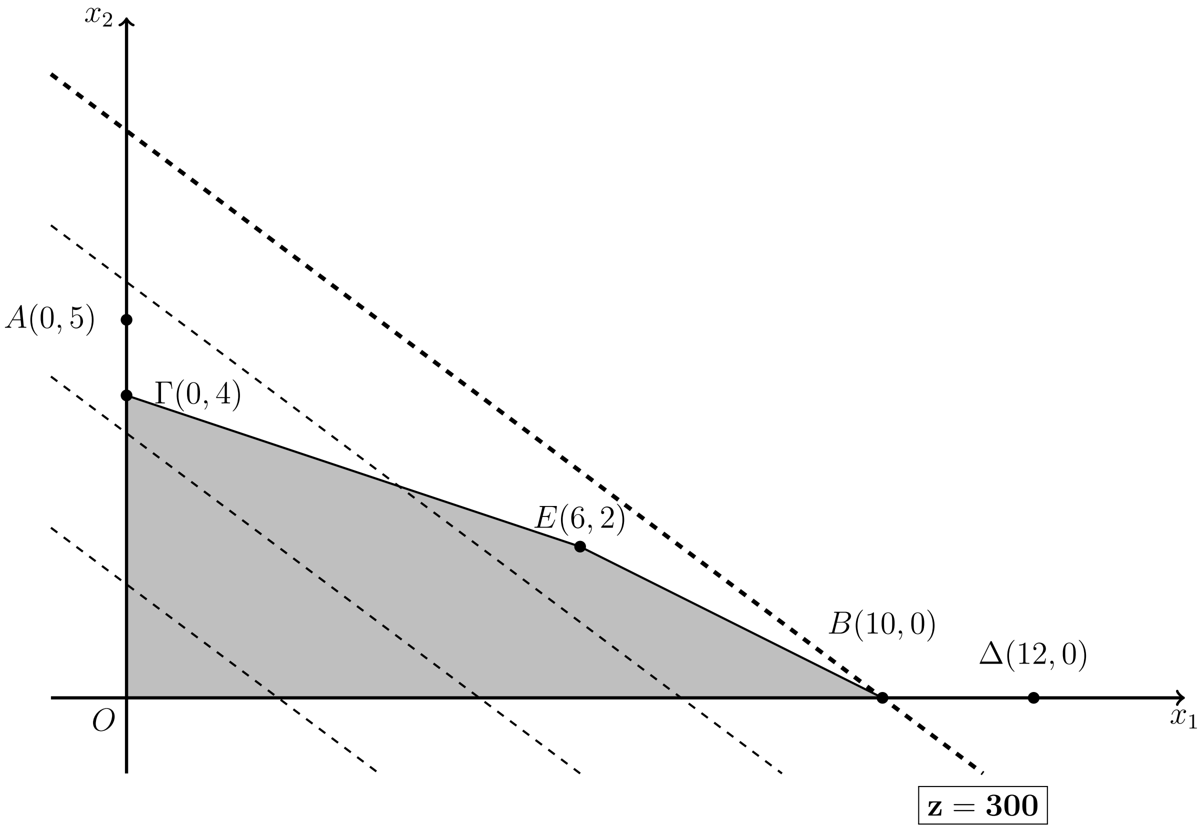
Το γωνιακό σημείο που αποτελεί την λύση ενός προβλήματος Γ.Π. εξαρτάται κάθε φορά από την κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία με την σειρά της εξαρτάται από τους συντελεστές των μεταβλητών του προβλήματος. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα ο συντελεστής διεύθυνσης της αντικειμενικής συνάρτησης ισούται με $-\frac{40}{100}\left(= -\frac{2}{5}\right)$.

Στην περίπτωση όπου ο συντελεστής της μεταβλητής x_1 στην αντικειμενική συνάρτηση λάβει την τιμή 30 και ο αντίστοιχος της μεταβλητής x_2 λάβει την τιμή 40, τότε η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης αλλάζει σημαντικά και ισούται με $-\frac{30}{40}\left(= -\frac{3}{4}\right)$.

Εάν ακολουθηθεί η ίδια διαδικασία όπως στην προηγούμενη περίπτωση διαπιστώνεται ότι η αντικειμενική συνάρτηση πλέον μεγιστοποιείται στο σημείο $B(10,0)$.

Μεγιστοποίηση της α.σ. (2)	$z = 30x_1 + 40x_2.$
Υπό τους περιορισμούς	$2x_1 + 4x_2 \leq 20,$ $x_1 + 3x_2 \leq 12,$ $x_1,\ x_2 \geq 0.$

Πίνακας 2.4: Μοντελοποίηση προβλήματος μεγιστοποίησης (2).



Σχήμα 2.14: Διάφορες θέσεις της α.σ. (2) (πηγή: [2]).

2.4.2 Εναλλακτικά Βέλτιστα Σημεία

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η αντικειμενική συνάρτηση τυχαίνει να έχει την ίδια κλίση με την συνάρτηση που περιγράφει κάποιον από τους περιορισμούς του προβλήματος. Παραδείγματος χάριν, εάν στα προηγούμενα προβλήματα 2.3 και 2.4 είχε υποτεθεί αντικειμενική συνάρτηση της μορφής:

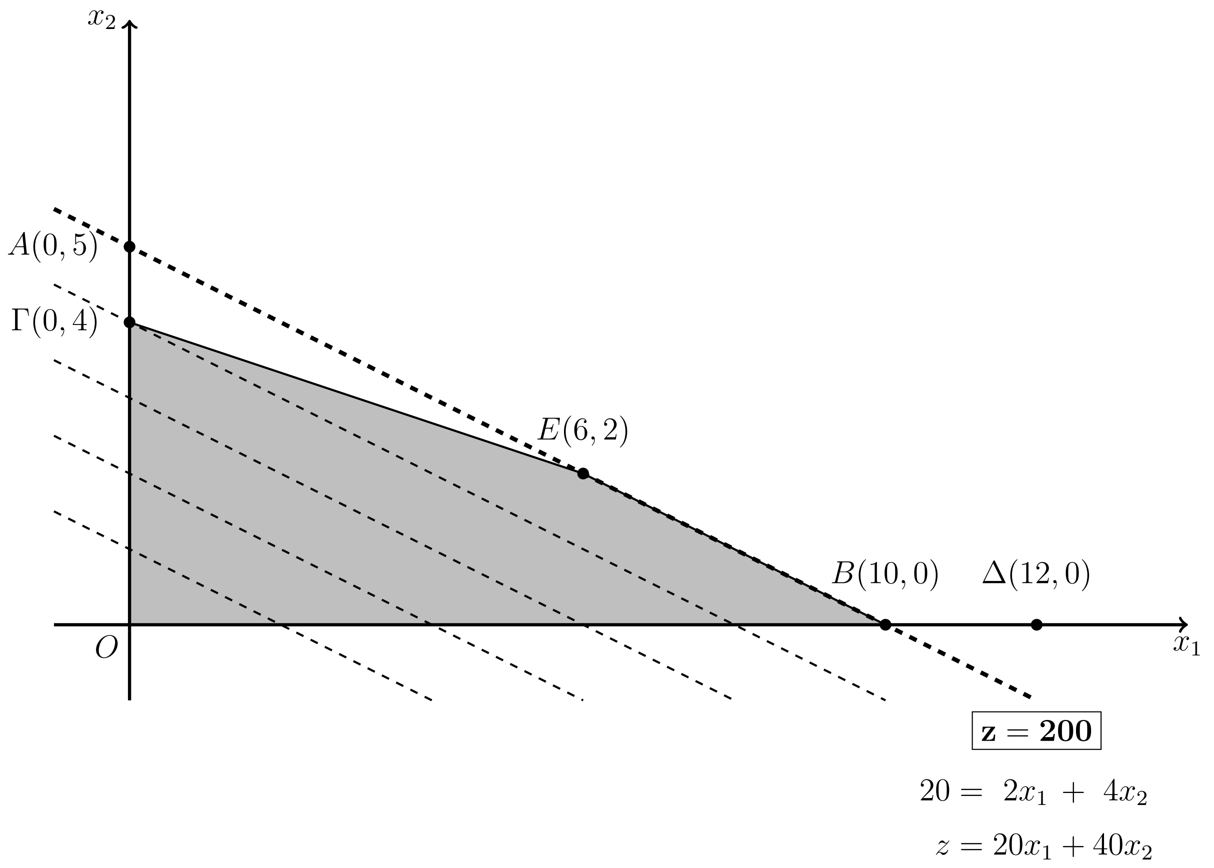
$$z = 20x_1 + 40x_2,$$

τότε η γραφική της παράσταση για διάφορες σταθερές τιμές είναι μια ευθεία παράλληλη στην ευθεία AB, δηλαδή την ευθεία που αντιστοιχεί στον πρώτο περιορισμό του προβλήματος.

Σε αυτή την περίπτωση κάθε σημείο της AB που ανήκει στην εφικτή περιοχή, δηλαδή κάθε σημείο του ευθυγράμμου τμήματος EB αποτελεί βέλτιστη λύση για το πρόβλημα. Τα σημεία αυτά λέγονται **εναλλακτικά βέλτιστα σημεία (alternative optimal points)** για το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (πρόβλημα Γ.Π. - L.P. problem).

Μεγιστοποίηση της α.σ. (3)	$z = 20x_1 + 40x_2.$
Υπό τους περιορισμούς	$2x_1 + 4x_2 \leq 20,$ $x_1 + 3x_2 \leq 12,$ $x_1,\ x_2 \geq 0.$

Πίνακας 2.5: Μοντελοποίηση προβλήματος μεγιστοποίησης (3).



Σχήμα 2.15: Διάφορες θέσεις της α.σ. (3) (πηγή: [2]).

Κεφάλαιο 3

Δυϊκότητα

Το κεφάλαιο αυτό πραγματεύεται έννοιες από την θεωρία δυϊκότητας Γ.Π. σε συνδυασμό με έννοιες όπως η συνάρτηση Lagrange και η δυϊκή της οι οποίες θα χρησιμεύσουν στο επόμενο κεφάλαιο, στην τιμολόγηση χρηματοοικονομικών παραγώγων. Η δυϊκότητα Γ.Π. είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, διότι αποτελεί αποδεικτικό στοιχείο βελτιστότητας μιας λύσης που επιτυγχάνεται με έναν συγκεκριμένο τρόπο. Από την βιβλιογραφία χρησιμοποιήθηκαν οι εξής πηγές: [2], [3] και [11].

3.1 Το Δυϊκό Πρόβλημα

Το **δυϊκό πρόβλημα (dual problem)** ενός προβλήματος Γ.Π. είναι και αυτό ένα πρόβλημα Γ.Π. το οποίο καθορίζεται με ντετερμινιστικό τρόπο από το **αρχικό** ή **πρωτεύον (primal** or **original)** μοντέλο προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

Το **δυϊκό** πρόβλημα προσδιορίζεται πλήρως από τα παρακάτω χαρακτηριστικά του **πρωτεύοντος**.

1. Το είδος της βελτιστοποίησης, δηλαδή εάν πρόκειται περί προβλήματος μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης (maximization or minimization problem).

2. Την μορφή των περιορισμών, δηλαδή εάν οι περιορισμοί περιλαμβάνουν ισότητες ή/και ανισότητες ('$=$' ή/και '$\leq, \geq$').

3. Το είδος των μεταβλητών, δηλαδή εάν οι μεταβλητές είναι ελεύθερες (δίχως πρόσημο) ή μη αρνητικές.

3.1.1 Κανονική Μορφή Προβλήματος Γ.Π.

Η υποενότητα αυτή είναι απαραίτητη, διότι η κατασκευή του δυϊκού προβλήματος προϋποθέτει το πρωτεύον να τεθεί στην **κανονική** του **μορφή** **(canonical form)**.

Συνοπτικά, αρκεί το πρωτεύον να μετασχηματιστεί ώστε να ισχύουν τα κάτωθι.

1. Όλοι οι περιορισμοί είναι ισότητες.
2. Τα δεξιά μέλη των περιορισμών είναι μη αρνητικά.
3. Για όλες τις μεταβλητές ισχύει ο περιορισμός μη αρνητικότητας.

Εάν η προς βελτιστοποίηση αντικειμενική συνάρτηση έχει την μορφή:

$$\underbrace{\text{optimize}}_{\text{minimize / maximize}} \quad z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Οι διάφοροι περιορισμοί των προβλημάτων Γ.Π. συνοψίζονται σύμφωνα με τον πίνακα 2.2 του προηγούμενου κεφαλαίου, ως εξής:

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \{\leq,\ =,\ \geq\} & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \{\leq,\ =,\ \geq\} & b_2, \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \{\leq,\ =,\ \geq\} & b_m, \end{array}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Για την μετατροπή των ανισοτήτων σε ισότητες διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις.

(I) Για τους περιορισμούς της μορφής:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \quad \leq \quad b_i.$$

Για την μετατροπή του παραπάνω περιορισμού σε ισότητα, μια μη αρνητική **περιθώρια** μεταβλητή, η οποία συμβολίζεται με s και λέγεται **χαλαρή μεταβλητή (slack variable)**, προστίθεται στο αριστερό μέλος του περιορισμού. Ο περιορισμός γράφεται εκ νέου ως ισότητα:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s \quad = \quad b_i, \quad s \geq 0.$$

(II) Για τους περιορισμούς της μορφής:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \quad \geq \quad b_i.$$

Για την μετατροπή του παραπάνω περιορισμού σε ισότητα, μια μη αρνητική **περιθώρια** μεταβλητή, η οποία συμβολίζεται επίσης με s και λέγεται **πλεονασματική μεταβλητή (surplus variable)**, αφαιρείται από το αριστερό μέλος του περιορισμού. Ο περιορισμός γράφεται εκ νέου ως ισότητα:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - s \quad = \quad b_i, \quad s \geq 0.$$

Στην συνέχεια, είναι απαραίτητο και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, το δεξί μέλος του περιορισμού-ισότητας να είναι μη αρνητικό. Αυτή η απαίτηση μπορεί να ικανοποιηθεί πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη του περιορισμού με (-1), όπου αυτό είναι απαραίτητο.

Υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις όπου μια μεταβλητή λαμβάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή (θετική, μηδέν ή αρνητική). Αυτές οι μεταβλητές ονομάζονται **ελεύθερες μεταβλητές** ή **μεταβλητές χωρίς πρόσημο**. Σε τέτοιες περιπτώσεις, αντί να χρησιμοποιηθούν απευθείας οι ίδιες **ελεύθερες μεταβλητές**, εκφράζονται συναρτήσει δύο μη αρνητικών μεταβλητών. Δηλαδή, έστω x μια **μεταβλητή χωρίς πρόσημο**, τότε η x εκφράζεται ως εξής:

$$x = x^+ - x^-,$$

όπου $x^+,\ x^- \geq 0$.

Το μοντέλο του γενικού προβλήματος Γ.Π. σε κανονική μορφή με χρήση πινάκων γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{optimize}}_{\min / \max}\ z = f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\mathbf{b} \geq \mathbf{0}), \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

3.1.2 Κατασκευή του Δυϊκού από το Πρωτεύον

Για την κατασκευή του δυϊκού προβλήματος, αρχικά, γράφεται το πρωτεύον σε κανονική μορφή:

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{optimize}}_{\min / \max}\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Οι μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ενδέχεται να περιλαμβάνουν ελλειμματικές, πλεονασματικές και τεχνητές μεταβλητές. Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει περιεκτικά την σχέση μεταξύ πρωτεύοντος και δυϊκού.
Πιο αναλυτικά, ισχύουν τα παρακάτω.

1. Για κάθε εξίσωση-περιορισμό του πρωτεύοντος προβλήματος καθορίζεται και μια μεταβλητή στο δυϊκό πρόβλημα.

Μεταβλητές του δυϊκού	**Μεταβλητές πρωτεύοντος**					**Συντελεστές α.σ. του δυϊκού**
	x_1	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	
	c_1	$\dots$	c_j	$\dots$	c_n	
y_1	a_{11}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	$\dots$	a_{2j}	$\dots$	a_{2n}	b_2
.	. . . .					.
.	. . . .					.
.	. . . .					.
y_m	a_{m1}	$\dots$	a_{mj}	$\dots$	a_{mn}	b_m

Πίνακας 3.1: Κατασκευή δυϊκού προβλήματος.

2. Για κάθε μεταβλητή του πρωτεύοντος προβλήματος καθορίζεται και ένας περιορισμός στο δυϊκό πρόβλημα.

3. Η στήλη των συντελεστών που αντιστοιχούν σε μια μεταβλητή του πρωτεύοντος προβλήματος, στους περιορισμούς (στον πίνακα με τους συντελεστές των περιορισμών), περιλαμβάνει τους συντελεστές στο αριστερό μέλος του αντίστοιχου περιορισμού στο δυϊκό πρόβλημα.

4. Ο συντελεστής μιας μεταβλητής στην αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος προβλήματος ταυτίζεται με τον σταθερό όρο στο δεξί μέλος του αντίστοιχου περιορισμού στο δυϊκό πρόβλημα.

5. Οι σταθεροί όροι στα δεξιά μέλη των περιορισμών του πρωτεύοντος προβλήματος ταυτίζονται τους συντελεστές των αντίστοιχων μεταβλητών (δυϊκών μεταβλητών) στην αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού προβλήματος.

6. Το είδος βελτιστοποίησης στο δυϊκό πρόβλημα είναι πάντα το «αντίθετο» από αυτό του αρχικού προβλήματος.

Πρωτεύον	**Δυϊκό**		
Βελτιστοποίηση	**Βελτιστοποίηση**	**Περιορισμοί**	**Μεταβλητές**
max	min	$\geq$	Χωρίς πρόσημο
min	max	$\leq$	Χωρίς πρόσημο

Πίνακας 3.2: Σχέση μεταξύ πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος (πηγή: [2]).

3.1.3 Παραδείγματα Μετατροπών

Όπως θα διαπιστωθεί, με την μορφή θεωρημάτων, στις επόμενες ενότητες η μετάβαση από το πρωτεύον πρόβλημα στο δυϊκό του μπορεί να οδηγήσει σε υπολογιστικά πλεονεκτήματα κατά την αναζήτηση της βέλτιστης λύσης. Τα παραδείγματα που ακολουθούν εφαρμόζουν τους κανόνες κατασκευής του δυϊκού προβλήματος που αναφέρθηκαν στην υποενότητα 3.1.2 και επιδεικνύουν την αντιστοιχία μεταξύ πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος.

Παράδειγμα 3.1.1
Εφαρμόζοντας τους μνημονικούς κανόνες που αναφέρθηκαν προηγουμένως προκύπτει με φυσικό τρόπο το δυϊκό του παρακάτω προβλήματος μεγιστοποίησης.

Πρωτεύον		**Δυϊκό**
Γενική μορφή	**Κανονική μορφή**	
$\max z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3,$	$\max z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 0x_4,$	$\min w = 11y_1 + 6y_2,$
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 11,$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6,$ $x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0.$	$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 11,$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 6,$ $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0.$	$y_1 + 2y_2 \geq 3,$ $2y_1 - y_2 \geq 7,$ $y_1 + 3y_2 \geq 5,$ $y_1 + 0y_2 \geq 0,$ $y_1,\ y_2 \in \mathbb{R}.$

Πίνακας 3.3: Μετατροπή πρωτεύοντος-δυϊκού (1) (πηγή: [2]).

Από τον τελευταίο περιορισμό σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι μεταβλητές του δυϊκού προβλήματος είναι ελεύθερες το δυϊκό γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\min w = 11y_1 + 6y_2,$$

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 3, \\ 2y_1 - y_2 &\geq 7, \\ y_1 + 3y_2 &\geq 5, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.1.2
Ομοίως δημιουργείται το δυϊκό ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Πρωτεύον		**Δυϊκό**
Γενική μορφή	**Κανονική μορφή**	
$\min z = 13x_1 + 9x_2,$	$\min z = 13x_1 + 9x_2 + 0x_3 + 0x_4,$	$\max w = 2y_1 + 8y_2,$
$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 2, \\ 2x_1 - 4x_2 &\leq 8, \\ x_1,\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 &= 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 0x_3 + x_4 &= 8, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\leq 13, \\ 2y_1 - 4y_2 &\leq 9, \\ -y_1 + 0y_2 &\leq 0, \\ 0y_1 + y_2 &\leq 0, \\ y_1,\ y_2 &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$

Πίνακας 3.4: Μετατροπή πρωτεύοντος-δυϊκού (2) (πηγή: [2]).

Από τους δύο τελευταίους περιορισμούς, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι μεταβλητές του δυϊκού προβλήματος είναι ελεύθερες, το δυϊκό γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\max w = 2y_1 + 8y_2,$$

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\leq 13, \\ 2y_1 - 4y_2 &\leq 9, \\ y_1 &\geq 0, \\ y_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.1.3
Σε αυτό το παράδειγμα, εξαιτίας της ύπαρξης μιας ελεύθερης μεταβλητής στην γενική μορφή του πρωτεύοντος προβλήματος, είναι απαραίτητη η αντικατάσταση:

$$x_1 = x_1^+ - x_1^-,$$

για την μετάβαση στην κανονική του μορφή (όπως επισημάνθηκε στο τέλος της υποενότητας 3.1.1).

Πρωτεύον		Δυϊκό
Γενική μορφή	**Κανονική μορφή**	
$\min z = 3x_1 + 2x_2,$	$\min z = 3x_1^+ - 3x_1^- + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4,$	$\max w = 5y_1 + 3y_2 + 9y_3,$
$x_1 + 2x_2 = 5,$ $-x_1 + 5x_2 \geq 3,$ $4x_1 + 7x_2 \leq 9,$ $x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0.$	$x_1^+ - x_1^- + 2x_2 = 5,$ $-x_1^+ + x_1^- + 5x_2 - x_3 = 3,$ $4x_1^+ - 4x_1^- + 7x_2 + x_4 = 9,$ $x_1^+,\ x_1^-,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0.$	$y_1 - y_2 + 4y_3 \leq 3,$ $-y_1 + y_2 - 4y_3 \leq -3,$ $2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \leq 2,$ $-y_2 \leq 0,$ $y_3 \leq 0,$ $y_1,\ y_2,\ y_3 \in \mathbb{R}.$

Πίνακας 3.5: Μετατροπή πρωτεύοντος-δυϊκού (3) (πηγή: [2]).

Οι δύο πρώτοι περιορισμοί στο δυϊκό πρόβλημα ως ετερόστροφες ανισότητες, εάν συνδυαστούν, οδηγούν στον περιορισμό-ισότητα:

$$y_1 - y_2 + 4y_3 = 3.$$

Στην πράξη ισχύει ο ισχυρισμός ότι **κάθε ελεύθερη μεταβλητή του πρωτεύοντος προβλήματος θα παράγει στο δυϊκό πρόβλημα ένα περιορισμό-ισότητα**. Επίσης, ισχύει και το αντίστροφο **κάθε περιορισμός-ισότητα του πρωτεύοντος προβλήματος θα παράγει στο δυϊκό πρόβλημα μια μεταβλητή χωρίς πρόσημο**. Τέλος, από τους δύο τελευταίους περιορισμούς σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι μεταβλητές του δυϊκού προβλήματος είναι ελεύθερες το δυϊκό γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\max w = 5y_1 + 3y_2 + 9y_3,$$

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 + 4y_3 &= 3,\\ 2y_1 + 5y_2 + 7y_3 &\leq 2,\\ y_2 &\geq 0,\\ y_3 &\leq 0,\\ y_1 &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Σημείωση 3.1.1

Σύμφωνα με τον ισχυρισμό της παραπάνω μετατροπής του πίνακα 3.5, σχετικά με την έλλειψη περιορισμού προσήμου για μια πρωτεύουσα μεταβλητή που οδηγεί σε ένα περιορισμό-ισότητα στο δυϊκό πρόβλημα, προκύπτει η παρατήρηση ότι όσο πιο αυστηροί είναι οι περιορισμοί στο πρωτεύον πρόβλημα, τόσο πιο χαλαροί είναι στο δυικό (ισχύει και το αντίστροφο).

3.1.4 Δυϊκότητα Προβλήματος σε Γενική Μορφή

Η μεθοδολογία που έχει παρουσιαστεί μέχρι στιγμής επαρκεί για τον μετασχηματισμό ενός προβλήματος στο δυϊκό του. Ωστόσο, είναι εφικτό να ανακτηθεί το δυϊκό ενός προβλήματος κατευθείαν από την **γενική** του **μορφή** **(general form)** παρακάμπτοντας τον μετασχηματισμό σε κανονική μορφή (canonical form). Αυτή η υποενότητα θα χρησιμεύσει αργότερα κυρίως στις αποδείξεις των θεωρημάτων δυϊκότητας. Από την βιβλιογραφία χρησιμοποιήθηκε η πηγή: [3].

Πριν την διατύπωση των υποθέσεων για την κατασκευή του δυϊκού προβλήματος στην γενική περίπτωση παρατίθεται μια χαρακτηριστική ιδιότητα των δυϊκών προβλημάτων.

Το δυϊκό πρόβλημα έχει την ιδιότητα ότι το «κόστος» της βέλτιστης λύσης του αποτελεί **κάτω φράγμα** για το «κόστος» της βέλτιστης λύσης του πρωτεύοντος προβλήματος **ελαχιστοποίησης**.

Με την έννοια, «κόστος» της βέλτιστης λύσης, εννοείται η τιμή που λαμβάνει η αντικειμενική συνάρτηση για την βέλτιστη λύση. Η προαναφερθείσα ιδιότητα προσαρμόζεται με προφανή τρόπο στις περιπτώσεις όπου το πρωτεύον είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης.

Έστω ένα πρόβλημα Γ.Π. με n μεταβλητές και m περιορισμούς σε **γενική μορφή** **(general form)**, το οποίο εκφράζεται με την βοήθεια πινάκων ως εξής (χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρείται πρόβλημα ελαχιστοποίησης):

$$\min \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x},$$

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{a}, \\ B\mathbf{x} &\geq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x}' &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

όπου οι πρώτες n_1 $(0 \leq n_1 \leq n)$ μεταβλητές του διανύσματος $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ συμβολίζονται με το διάνυσμα $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n_1\times 1}$ και είναι μη αρνητικές, οι υπόλοιπες μεταβλητές εντός του $\mathbf{x}$ είναι ελεύθερες. Επίσης, $A \in \mathbb{R}^{m_1\times n}$ είναι ο πίνακας με τους συντελεστές των μεταβλητών στους περιορισμούς-ισότητες, $B \in \mathbb{R}^{m_2\times n}$ είναι ο πίνακας με τους συντελεστές των μεταβλητών στους περιορισμούς-ανισότητες, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{m_1\times 1}$ είναι το διάνυσμα με τους σταθερούς όρους στο δεξί μέλος των περιορισμών-ισότητας και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m_2\times 1}$ είναι το διάνυσμα με τους σταθερούς όρους στο δεξί μέλος των περιορισμών-ανισότητας $(m = m_1 + m_2)$.

Έστω τα μεγέθη

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1} \text{ και } C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

στα οποία συνοψίζονται οι σταθεροί όροι και οι συντελεστές όλων των περιορισμών. Όπως παρουσιάστηκε στην υποενότητα 3.1.2, με το ίδιο σκεπτικό και παρόμοια μεθοδολογία για κάθε περιορισμό του πρωτεύοντος, ορίζεται μια μεταβλητή του δυϊκού ως εξής.

- Η μεταβλητή y_i (dual variable) αντιστοιχεί στον περιορισμό $A_i\mathbf{x} = a_i$, $\forall\ i \in \{1, \dots, m_1\}$.
- Η μεταβλητή z_i (dual variable) αντιστοιχεί στον περιορισμό $B_i\mathbf{x} \geq b_i$, $\forall\ i \in \{1, \dots, m_2\}$.

Έστω $\mathbf{w}$ μια οποιαδήποτε εφικτή λύση και έστω η ποσότητα

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i \in \{1,\dots,m_1\}} y_i A_i \mathbf{w} + \sum_{i \in \{1,\dots,m_2\}} z_i B_i \mathbf{w} \\ &= \mathbf{y}^{\mathbf{T}} A \mathbf{w} + \mathbf{z}^{\mathbf{T}} B \mathbf{w}, \end{aligned}$$

τέτοια ώστε να ισχύει

$$\mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{w} \geq f \geq \mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} + \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{z},$$

όπου $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m_1} \times \mathbf{1}}$ και $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m_2} \times \mathbf{1}}$ είναι οι δυϊκές μεταβλητές (dual variables) που προκύπτουν από τους περιορισμούς-ισότητες και τους περιορισμούς-ανισότητες αντίστοιχα.

Με την απαίτηση ότι $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{z} &\geq \mathbf{0}, \\ A\mathbf{w} &= \mathbf{a}, \\ B\mathbf{w} &\geq \mathbf{b}. \end{aligned}\right\} \implies f = \mathbf{y}^{\mathbf{T}} \underbrace{A\mathbf{w}}_{=\,\mathbf{a}} + \mathbf{z}^{\mathbf{T}} \underbrace{B\mathbf{w}}_{\geq\,\mathbf{b}} \geq \mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{a} + \mathbf{z}^{\mathbf{T}}\mathbf{b},$$

οπότε το κάτω φράγμα για την ποσότητα f εξασφαλίστηκε.

Σχετικά με το πάνω φράγμα της f ξεκινώντας από τον περιορισμό $\mathbf{x}' \geq \mathbf{0}$ του αρχικού προβλήματος γίνονται οι εξής διαδοχικές παρατηρήσεις. Αρχικά, προφανώς ισχύει ότι

$$w_j \geq 0, \quad \forall\ j \in \{1, \dots, n_1\},$$

άρα μια ικανή συνθήκη για να ισχύει η ζητούμενη ανισότητα, για κάθε $j \in \{1, \dots, n_1\}$, είναι η εξής:

$$\begin{aligned}
c_j &\geq \sum_{i\in\{1,\ldots,m_1\}} y_i A[i,j] \quad + \sum_{i\in\{1,\ldots,m_2\}} z_i B[i,j] && \Longleftrightarrow \\
c_j &\geq \left(\mathbf{y^T} A + \mathbf{z^T} B\right)_j && \Longrightarrow \\
c_j w_j &\geq \left(A^T\mathbf{y} + B^T\mathbf{z}\right)_j w_j.
\end{aligned}$$

Στην συνέχεια, για τις υπόλοιπες μεταβλητές της εφικτής λύσης, δηλαδή για τις w_j με $j \in \{n_1+1,\ldots,n\}$ ($\equiv \{1,\ldots,n\}\backslash\{1,\ldots,n_1\}$), ισχύει ότι δεν έχουν περιορισμό προσήμου. Επομένως, για την εξασφάλιση του πάνω φράγματος για την ποσότητα f πρέπει να απαιτηθεί, για κάθε $j \in \{n_1+1,\ldots,n\}$, η εξής σχέση:

$$\begin{aligned}
c_j &= \sum_{i\in\{1,\ldots,m_1\}} y_i A[i,j] \quad + \sum_{i\in\{1,\ldots,m_2\}} z_i B[i,j] && \Longleftrightarrow \\
c_j &= \left(\mathbf{y^T} A + \mathbf{z^T} B\right)_j && \Longrightarrow \\
c_j w_j &= \left(A^T\mathbf{y} + B^T\mathbf{z}\right)_j w_j.
\end{aligned}$$

Αξιοποιώντας τις προκύπτουσες συνθήκες και δεδομένου ότι γίνεται αναζήτηση του καλύτερου κάτω φράγματος για το κόστος της βέλτιστης λύσης του πρωτεύοντος προβλήματος, το **δυϊκό πρόβλημα** γράφεται ως εξής:

$$\max\ \mathbf{a^T y} + \mathbf{b^T z},$$

$$\begin{aligned}
\left(A^T\mathbf{y} + B^T\mathbf{z}\right)|_{\{1,\ldots,n_1\}} &\leq \mathbf{c}\big|_{\{1,\ldots,n_1\}}, \\
\left(A^T\mathbf{y} + B^T\mathbf{z}\right)|_{\{n_1+1,\ldots,n\}} &= \mathbf{c}\big|_{\{n_1+1,\ldots,n\}}, \\
\mathbf{z} &\geq \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Για την κατασκευή του δυϊκού ενός προβλήματος που βρίσκεται στην γενική του μορφή, αρκεί να ακολουθηθούν τα παρακάτω βήματα.

1. Κάθε μη τετριμμένος περιορισμός ανισότητας του πρωτεύοντος αντιστοιχίζεται σε μια μεταβλητή του δυϊκού με περιορισμό προσήμου.

2. Κάθε μη τετριμμένος περιορισμός ισότητας του πρωτεύοντος αντιστοιχίζεται σε μια μεταβλητή του δυϊκού χωρίς περιορισμό προσήμου.

3. Κάθε περιορισμός προσήμου του πρωτεύοντος αντιστοιχίζεται σε μη τετριμμένο περιορισμό ανισότητας για το δυϊκό.

4. Η έλλειψη περιορισμού προσήμου για μια μεταβλητή του πρωτεύοντος αντιστοιχίζεται σε μη τετριμμένο περιορισμό ισότητας για το δυϊκό.

Προβλήματα			
Πρωτεύον		Δυϊκό	
$\min \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$,		$\max\ \mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}+\mathbf{z}^{\mathbf{T}}\mathbf{b}$,	
$A_i\mathbf{x}=a_i$,	$\forall\ i\in\{1,\dots,m_1\}$,	$y_i\in\mathbb{R}$,	$\forall\ i\in\{1,\dots,m_1\}$,
$B_i\mathbf{x}\geq b_i$,	$\forall\ i\in\{1,\dots,m_2\}$,	$z_i\geq 0$,	$\forall\ j\in\{1,\dots,m_2\}$,
$x_j\geq 0$,	$\forall\ j\in\{1,\dots,n_1\}$,	$\mathbf{y}^{\mathbf{T}}A_j+\mathbf{z}^{\mathbf{T}}B_j\leq c_j$,	$\forall\ j\in\{1,\dots,n_1\}$,
$x_j\in\mathbb{R}$,	$\forall\ j\in\{n_1+1,\dots,n\}$.	$\mathbf{y}^{\mathbf{T}}A_j+\mathbf{z}^{\mathbf{T}}B_j=c_j$,	$\forall\ j\in\{n_1+1,\dots,n\}$.

Πίνακας 3.6: Μετατροπή πρωτεύοντος σε γενική μορφή στο δυϊκό του (πηγή: [3]).

3.2 Βασικά Θεωρήματα Δυϊκότητας

Σε αυτή την ενότητα θεμελιώνεται η άποψη, σύμφωνα με την οποία το πρωτεύον πρόβλημα και το δυϊκό του είναι άρρηκτα συνδεδεμένα μεταξύ τους σε βαθμό που από την βέλτιστη λύση του ενός προβλήματος αυτόματα προκύπτει η βέλτιστη λύση του άλλου. Επίσης, μέσω των θεωρημάτων που ακολουθούν τεκμηριώνεται η αμφίδρομη σχέση πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος.

Θεώρημα 3.2.1
Το δυϊκό πρόβλημα του δυϊκού προβλήματος ενός προβλήματος Γ.Π. είναι το ίδιο το πρωτεύον πρόβλημα.

Απόδειξη.
Η απόδειξη περιλαμβάνει την εφαρμογή του μετασχηματισμού δυϊκότητας για προβλήματα Γ.Π. σε γενική μορφή, δύο φορές. Έστω αρχικό πρόβλημα σε γενική μορφή (όπως στην υποενότητα 3.1.4)

$$\min \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x},$$

$$A\mathbf{x}=\mathbf{a},$$
$$B\mathbf{x}\geq\mathbf{b},$$
$$\mathbf{x}'\geq\mathbf{0}.$$

Ορίζεται νέα αναπαράσταση του διανύσματος των μεταβλητών $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, ως ένωση δύο διανυσμάτων. Το ένα διάνυσμα θα περιέχει τις n_1 μεταβλητές με περιορισμό προσήμου και θα συμβολίζεται με $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$ (στην πράξη $\mathbf{u}\equiv\mathbf{x}'$) και το άλλο διάνυσμα θα περιέχει τις υπόλοιπες $n_2=n-n_1$ μεταβλητές χωρίς περιορισμό προσήμου, το οποίο θα συμβολίζεται με $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$, δηλαδή

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0} \\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Η προαναφερθείσα σύμβαση για την αναπαράσταση του διανύσματος $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ επηρεάζει τους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, οι οποίοι με την σειρά τους γράφονται ως εξής:

$$A = [C, D] \text{ και } B = [E, F],$$

όπου $C \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $D \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $E \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$ και $F \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$.

Τέλος το διάνυσμα με τους συντελεστές των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση, $\mathbf{c}$, γράφεται με την βοήθεια των $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{n_1}$ και $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^{n_2}$ ως εξής:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} \in \mathbb{R}^{n_1} \\ \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^{n_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Στον πίνακα που ακολουθεί το πρωτεύον γράφεται ισοδύναμα μορφή και μετατρέπεται στο δυϊκό του.

Προβλήματα	
Πρωτεύον (P)	**Δυϊκό (D)**
$\min\ \mathbf{k}^\mathbf{T}\mathbf{u} + \boldsymbol{\ell}^T\mathbf{v}$,	$\max\ \mathbf{a}^\mathbf{T}\mathbf{y} + \mathbf{b}^\mathbf{T}\mathbf{z}$,
$C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}$,	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1}$,
$E\mathbf{u} + F\mathbf{v} \geq \mathbf{b}$,	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$,
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$,	$C^T\mathbf{y} + E^T\mathbf{z} \leq \mathbf{k}$,
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$.	$D^T\mathbf{y} + F^T\mathbf{z} = \boldsymbol{\ell}$.

Πίνακας 3.7: Δυϊκό του πρωτεύοντος, απόδειξη θεωρήματος 3.2.1 (πηγή: [3]).

Κατόπιν το πρόβλημα **(D)** γράφεται στην γενική του μορφή, από την οποία κατασκευάζεται το δυϊκό του.

Προβλήματα	
(D)	**Δυϊκό του (D)**
$\min\ (-\mathbf{a})^{\mathbf{T}}\mathbf{y} + (-\mathbf{b})^{\mathbf{T}}\mathbf{z},$	$\max\ (-\mathbf{k})^{\mathbf{T}}\mathbf{u} + (-\boldsymbol{\ell})^{T}\mathbf{v},$
$(-C)^T\mathbf{y} + (-E)^T\mathbf{z} \geq -\mathbf{k},$	$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0},$
$(-D)^T\mathbf{y} + (-F)^T\mathbf{z} = -\boldsymbol{\ell},$	$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2},$
$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1},$	$(-C)\mathbf{u} + (-D)\mathbf{v} = -\mathbf{a},$
$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}.$	$(-E)\mathbf{u} + (-F)\mathbf{v} \leq -\mathbf{b}.$

Πίνακας 3.8: Δυϊκό του δυϊκού, απόδειξη θεωρήματος 3.2.1 (πηγή: [3]).

Με ευκολία διαπιστώνει κανείς ότι το δυϊκό του **(D)** ταυτίζεται με το αρχικό πρόβλημα **(P)**.

□

3.2.1 Ασθενής Δυϊκότητα

Από τον τρόπο κατασκευής του δυϊκού προβλήματος και σύμφωνα με την χαρακτηριστική ιδιότητα που αναφέρθηκε στην αρχή της υποενότητας 3.1.4, μια λογική υπόθεση είναι ότι για οποιοδήποτε ζεύγος εφικτών λύσεων

$$\Bigg(\underbrace{\mathbf{x}}_{\substack{\text{εφικτή λύση} \\ \text{πρωτεύοντος}}} , \underbrace{(\mathbf{y},\mathbf{z})}_{\substack{\text{εφικτή λύση} \\ \text{δυϊκού}}} \Bigg)$$

για το πρωτεύον πρόβλημα **(P)** και το δυϊκό πρόβλημα **(D)** αντίστοιχα, το «κόστος» της πρωτεύουσας λύσης έχει ως κάτω φράγμα το «κόστος» της δυϊκής, δηλαδή

$$\mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \geq \mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} + \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{z}.$$

Αυτή ακριβώς η ιδιότητα ονομάζεται **ασθενής δυϊκότητα (weak duality)** και αποδεικνύεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.2 (Ασθενής δυϊκότητα (weak duality))
Έστω ένα πρόβλημα Γ.Π. σε γενική μορφή, **(P)** και το δυϊκό του, **(D)**. Για ένα οποιοδήποτε ζευγάρι εφικτών λύσεων για τα δύο προβλήματα, το «κόστος» της λύσης του δυϊκού προβλήματος είναι κάτω φράγμα του «κόστους» της λύσης του πρωτεύοντος προβλήματος.

Απόδειξη.
Έστω ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το πρωτεύον πρόβλημα Γ.Π. και το δυϊκό του έχουν την ακόλουθη μορφή.

Προβλήματα	
Πρωτεύον (P)	**Δυϊκό (D)**
$\min\ \mathbf{k}^{\mathbf{T}}\mathbf{u} + \boldsymbol{\ell}^{T}\mathbf{v},$	$\max\ \mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} + \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{z},$
$C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a},$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1},$
$E\mathbf{u} + F\mathbf{v} \geq \mathbf{b},$	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0},$
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0},$	$C^T\mathbf{y} + E^T\mathbf{z} \leq \mathbf{k},$
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}.$	$D^T\mathbf{y} + F^T\mathbf{z} = \boldsymbol{\ell}.$

Πίνακας 3.9: Δυϊκό του πρωτεύοντος, απόδειξη θεωρήματος 3.2.2 (πηγή: [3]).

Έστω ένα οποιοδήποτε ζεύγος εφικτών λύσεων

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}), (\mathbf{y}, \mathbf{z}))\,,$$

σύμφωνα με την σύμβαση για την αναπαράσταση του διανύσματος των μεταβλητών που έγινε νωρίτερα. Ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\mathbf{k}^{\mathbf{T}}}_{\geq\, \mathbf{y}^{\mathbf{T}}C + \mathbf{z}^{\mathbf{T}}E} \cdot \underbrace{\mathbf{u}}_{\geq\, \mathbf{0}} + \underbrace{\boldsymbol{\ell}^{T}}_{=\, \mathbf{y}^{\mathbf{T}}D + \mathbf{z}^{\mathbf{T}}F} \cdot \mathbf{v} &\geq (\mathbf{y}^{\mathbf{T}}C + \mathbf{z}^{\mathbf{T}}E)\mathbf{u} + (\mathbf{y}^{\mathbf{T}}D + \mathbf{z}^{\mathbf{T}}F)\mathbf{v} \\
&= \mathbf{y}^{\mathbf{T}} \cdot \underbrace{(C\mathbf{u} + D\mathbf{v})}_{=\, \mathbf{a}} + \underbrace{\mathbf{z}^{\mathbf{T}}}_{\geq\, \mathbf{0}} \cdot \underbrace{(E\mathbf{u} + F\mathbf{v})}_{\geq\, \mathbf{b}} \\
&\geq \mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{a} + \mathbf{z}^{\mathbf{T}}\mathbf{b},
\end{aligned}$$

επομένως ο ισχυρισμός του θεωρήματος αποδείχθηκε.

□

3.2.2 Ισχυρή Δυϊκότητα

Το ακόλουθο θεώρημα είναι ένα από τα βασικά θεωρήματα της θεωρίας δυϊκότητας και ονομάζεται **θεώρημα της ισχυρής δυϊκότητας**.

Θεώρημα 3.2.3 (Ισχυρή δυϊκότητα (strong duality))
Αν ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, **(P)**, έχει βέλτιστη λύση, τότε το ίδιο ισχύει και για δυϊκό του πρόβλημα, **(D)** και μάλιστα οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων για τις δύο αυτές βέλτιστες λύσεις ταυτίζονται.

Η απόδειξη του **θεωρήματος της ισχυρής δυϊκότητας** παραλείπεται, καθώς χρησιμοποιεί επιχειρήματα που εφαρμόζονται στον αλγόριθμο Simplex, όπως το κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου. Η πλήρης απόδειξη μπορεί να βρεθεί στην ενότητα

4.3 της πηγής: [3].

Διακρίνοντας τις εξής περιπτώσεις, σε συνδυασμό με τον πίνακα 3.10 που ακολουθεί συμπληρώνονται όλες οι πιθανές εκδοχές για ένα ζευγάρι πρωτεύοντος-δυϊκού προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

(1) Το πρωτεύον και το δυϊκό είναι **φραγμένα** και το «κόστος» της βέλτιστης λύσης στο πρωτεύον ισούται με το «κόστος» της βέλτιστης λύσης στο δυϊκό.

(2) Το πρωτεύον έχει εφικτές λύσεις, αλλά είναι **μη φραγμένο** και το δυϊκό είναι **μη επιλύσιμο** (ή το αντίστροφο).

(3) Τα δύο προβλήματα είναι **μη επιλύσιμα**.

Δυϊκό / **Πρωτεύον**	**Φραγμένο**	**Μη φραγμένο**	**Μη επιλύσιμο**
Φραγμένο	(1)	ΟΧΙ	ΟΧΙ
Μη φραγμένο	ΟΧΙ	ΟΧΙ	(2)
Μη επιλύσιμο	ΟΧΙ	(2)	(3)

Πίνακας 3.10: Εκδοχές ζεύγους πρωτεύοντος-δυϊκού προβλημάτων Γ.Π. (πηγή: [3]).

3.2.3 Συμπληρωματική Χαλαρότητα

Η **ικανή και αναγκαία** συνθήκη ώστε ένα ζευγάρι εφικτών λύσεων για ένα πρωτεύον πρόβλημα Γ.Π. και το δυϊκό του να είναι βέλτιστες λύσεις, είναι γνωστή ως **συμπληρωματική χαλαρότητα (complementary slackness)**.

Θεώρημα 3.2.4 (Συμπληρωματική χαλαρότητα (complementary slackness))
Έστω πρόβλημα Γ.Π. σε γενική μορφή, **(P)** και το δυϊκό του πρόβλημα, **(D)**, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Προβλήματα	
Πρωτεύον (P)	**Δυϊκό (D)**
min $\mathbf{k}^{\mathbf{T}}\mathbf{u} + \boldsymbol{\ell}^T\mathbf{v}$,	max $\mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} + \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{z}$,
$C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}$,	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1}$,
$E\mathbf{u} + F\mathbf{v} \geq \mathbf{b}$,	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$,
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$,	$C^T\mathbf{y} + E^T\mathbf{z} \leq \mathbf{k}$,
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$.	$D^T\mathbf{y} + F^T\mathbf{z} = \boldsymbol{\ell}$.

Πίνακας 3.11: Δυϊκό του πρωτεύοντος, θεώρημα 3.2.4 (πηγή: [3]).

Επίσης, έστω

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \text{ εφικτή λύση πρωτεύοντος,} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \text{ εφικτή λύση δυϊκού,}$$

$$A = \begin{bmatrix} C & D \\ E & F \end{bmatrix} \text{ πίνακας συντελεστών,} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \text{ διάνυσμα σταθερών όρων}$$

$$\text{και } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\ell} \end{bmatrix} \text{ διάνυσμα συντελεστών της α.σ. του } \mathbf{(P)},$$

όπου $n = n_1 + n_2$ και $m = m_1 + m_2$.

Τότε, η $\mathbf{x}$ είναι βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος και η $\mathbf{p}$ είναι βέλτιστη λύση του δυϊκού αν και μόνο αν

$$\Big[A_{i,*}\mathbf{x} - d_i\Big] \cdot p_i = 0, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\},$$

$$x_j \cdot \Big[c_j - A^T_{*,j}\mathbf{p}\Big] = 0, \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\},$$

όπου με $A_{i,*}$ συμβολίζεται η $i-$οστή γραμμή του πίνακα A και με $A^T_{*,j}$ συμβολίζεται η $j-$οστή στήλη του A, η οποία αναστρέφεται σε διάνυσμα-γραμμή (row vector).

Απόδειξη.

Αρχικά, για κάθε $i \in \{1,\ldots,m_1\}$ ισχύουν οι εξής συνεπαγωγές:

$$\begin{aligned} C_{i,*}\mathbf{u} + D_{i,*}\mathbf{v} = a_i &\qquad \Longrightarrow \\ A_{i,*}\mathbf{x} - d_i = 0 &\qquad \Longrightarrow \\ \Big[A_{i,*}\mathbf{x} - d_i\Big] \cdot y_i = 0. & \end{aligned}$$

Επίσης, για κάθε $i \in \{1,\ldots,m_2\}$ ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} E_{i,*}\mathbf{u} + F_{i,*}\mathbf{v} \geq b_i &\qquad \overset{z_i \geq 0}{\Longrightarrow} \\ \Big[E_{i,*}\mathbf{u} + F_{i,*}\mathbf{v} - b_i\Big] \cdot z_i \geq 0 &\qquad \Longrightarrow \\ \Big[A_{m_1+i,*}\mathbf{x} - d_{m_1+i}\Big] \cdot p_{m_1+i} \geq 0. & \end{aligned}$$

Στην συνέχεια, για κάθε $j \in \{1,\ldots,n_1\}$ ισχύουν:

$$\begin{aligned} C_{*,j}^T\mathbf{y} + E_{*,j}^T\mathbf{z} \leq k_j &\qquad \overset{u_j \geq 0}{\Longrightarrow} \\ \Big[k_j - C_{*,j}^T\mathbf{y} + E_{*,j}^T\mathbf{z}\Big] \cdot u_j \geq 0 &\qquad \Longrightarrow \\ x_j \cdot \Big[c_j - A_{*,j}^T\mathbf{p}\Big] \geq 0. & \end{aligned}$$

Τέλος, για κάθε $j \in \{1,\ldots,n_2\}$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\begin{aligned} D_{*,j}^T\mathbf{y} + F_{*,j}^T\mathbf{z} = \ell_j &\qquad \Longrightarrow \\ x_{n_1+j} \cdot \Big[c_{n_1+j} - A_{*,n_1+j}^T\mathbf{p}\Big] = 0. & \end{aligned}$$

Το άθροισμα:

$$t \;=\; \sum_{i\in\{1,\ldots,m\}} \Big[A_{i,*}\mathbf{x} - d_i\Big] \cdot p_i \;+\; \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}} x_j \cdot \Big[c_j - A_{*,j}^T\mathbf{p}\Big], \tag{3.2.1}$$

ονομάζεται **κενό δυϊκότητας (duality gap)** και είναι μη αρνητικός αριθμός, εφόσον κάθε όρος του είναι μη αρνητικός.

Ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} t &= \mathbf{p}^T A\mathbf{x} - \mathbf{d}^{\mathbf{T}}\mathbf{p} + \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T A^T\mathbf{p} \\ &= \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} - \mathbf{d}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}, \end{aligned}$$

δηλαδή το **κενό δυϊκότητας** μηδενίζεται αν και μόνο αν το $(\mathbf{x},\mathbf{p})$ είναι ζεύγος βέλτιστων λύσεων. Ο μόνος τρόπος για να ισχύει ότι $t = 0$ είναι κάθε όρος του αθροίσματος στην ισότητα (3.2.1) να είναι ίσος με το μηδέν.

□

Παράδειγμα 3.2.1

Έστω το ζεύγος πρωτεύοντος-δυϊκού προβλημάτων Γ.Π. του παρακάτω πίνακα.

Προβλήματα	
Πρωτεύον (P)	**Δυϊκό (D)**
$\min -4x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 4x_4 + 0x_5,$ $$\begin{array}{rcr} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &=& 6, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 &\geq& 4, \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 &\geq& -8, \\ x_1,\ x_3,\ x_4 &\geq& 0, \\ x_2 \text{ και } x_5 &\in& \mathbb{R}. \end{array}$$	$\max 6y + 4z_1 - 8z_2,$ $$\begin{array}{rcr} 2y + z_1 + 4z_2 &\leq& -4, \\ -y + 4z_1 + 6z_2 &=& 2, \\ 3y - z_1 - z_2 &\leq& -11, \\ -2y - z_1 - 5z_2 &\leq& 4, \\ y - 3z_1 + z_2 &=& 0, \\ y &\in& \mathbb{R}, \\ z_1 \text{ και } z_2 &\geq& 0. \end{array}$$

Πίνακας 3.12: Ζεύγος πρωτεύοντος-δυϊκού, παράδειγμα 3.2.1

Θα διαπιστωθεί κατά πόσο το διάνυσμα

$$\mathbf{x}^* = [1,\ -1,\ 2,\ 0,\ -3]^T$$

είναι μια βέλτιστη εφικτή λύση του παραπάνω προβλήματος Γ.Π. χωρίς να λυθεί το ίδιο το πρόβλημα.

Για το πρόβλημα του πίνακα 3.12 οι πίνακες συντελεστών, όπως εμφανίζονται στο θεώρημα 3.2.4, παίρνουν την εξής μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & -3 \\ 4 & 6 & -1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5} \quad \text{και} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}.$$

Έστω λοιπόν ότι το $\mathbf{x}^*$ είναι μια βέλτιστη εφικτή λύση του **(P)**. Τότε θα πρέπει να υπάρχει και μια βέλτιστη εφικτή λύση, $\mathbf{p}$, με

$$\mathbf{p}^* = [y^*,\ z_1^*,\ z_2^*]^T$$

για το **(D)**.

Σύμφωνα με την υπόθεση που έχει γίνει, πρέπει να ισχύει ότι

$$\begin{cases} \overbrace{\left[A_{3,*}\mathbf{x}^* - 8\right]}^{\neq 0} \cdot z_2^* = 0, \\ \\ \left[-4 - A_{1,*}^T\mathbf{p}^*\right] \cdot \underbrace{x_1^*}_{>0} = 0, \\ \\ \left[-11 - A_{3,*}^T\mathbf{p}^*\right] \cdot \underbrace{x_3^*}_{>0} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z_2^* = 0, \\ \\ 2y^* + z_1^* + 4z_2^* = -4, \\ \\ 3y^* - z_1^* - z_2^* = -11. \end{cases}$$

Από το τελευταίο σύστημα εξισώσεων εύκολα κανείς διαπιστώνει ότι

$$\mathbf{p}^* = [-3,\ 2,\ 0]^T,$$

το οποίο παραβιάζει τον τελευταίο μη τετριμμένο περιορισμό του **(D)**, συνεπώς δεν αποτελεί καν εφικτή λύση. Άρα, η $\mathbf{x}^*$ δεν μπορεί να είναι βέλτιστη εφικτή λύση για το **(P)**.

Σημείωση 3.2.1
Δημιουργώντας διαρκώς ζευγάρια λύσεων για το πρωτεύον και το δυϊκό και ταυτόχρονα παρακολουθώντας το κενό δυϊκότητας μεταξύ τους, μέχρι αυτό τελικά να γίνει μηδέν, εντοπίζεται με αυτόν τον τρόπο, σύμφωνα με το θεώρημα συμπληρωματικής χαλαρότητας 3.2.4, το ζευγάρι βέλτιστων λύσεων για τα δύο προβλήματα. Αυτός είναι άλλωστε ο τρόπος που οι **μέθοδοι εσωτερικών σημείων (interior point methods)** παρακολουθούν την πρόοδο τους προς την βέλτιστη λύση.

3.2.4 Το Λήμμα του Farkas

Το **λήμμα του Farkas** προσφέρει έναν πολύ απλό τρόπο για να ελέγξει κανείς αν ένα σύστημα γραμμικών ανισοτήτων της μορφής

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

έχει εφικτές λύσεις.

Λήμμα 3.2.1 (Farkas)
Το σύστημα γραμμικών ανισοτήτων $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ έχει εφικτές λύσεις αν και μόνο αν δεν υπάρχει εφικτή λύση του προβλήματος Γ.Π.

$$\min \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{y},$$

$$A^T\mathbf{y} = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

με αρνητικό «κόστος».

Απόδειξη.
Έστω το παρακάτω ζεύγος προβλημάτων πρωτεύοντος-δυϊκού.

Προβλήματα	
Πρωτεύον (P)	**Δυϊκό (D)**
$\max \mathbf{0}^{\mathbf{T}}\mathbf{x},$	$\min \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{y},$
$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}.$	$A^T\mathbf{y} = \mathbf{0},$ $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$

Πίνακας 3.13: Ζεύγος πρωτεύοντος-δυϊκού, λήμμα 3.2.1.

Αρχικά ισχύει ότι το **(P)** είναι είτε φραγμένο είτε αδύνατο, εφόσον κάθε εφικτή λύση του θα ήταν και βέλτιστη, από το τρόπο με τον οποίο έχει οριστεί η αντικειμενική συνάρτηση. Επομένως, από το γεγονός ότι το **(D)** έχει εφικτές λύσεις προκύπτει ότι θα πρέπει να είναι είτε φραγμένο είτε μη φραγμένο.

Εάν το γραμμικό σύστημα ανισοτήτων $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ έχει εφικτές λύσεις, τότε το **(P)** είναι φραγμένο οπότε οφείλει να είναι φραγμένο και το **(D)** (από τον πίνακα 3.10), μάλιστα με βέλτιστο «κόστος» μηδέν. Συνεπώς, καμία εφικτή λύση του **(D)** δεν μπορεί να έχει αρνητικό «κόστος».

Εάν όλες οι εφικτές λύσεις για **(D)** έχουν μη αρνητικά «κόστη», τότε το **(D)** είναι φραγμένο με βέλτιστο «κόστος» μηδέν, κατά συνέπεια και το **(P)** είναι φραγμένο. Άρα, το εν λόγω σύστημα γραμμικών ανισοτήτων για το οποίο γίνεται η μελέτη έχει εφικτές λύσεις.

□

3.3 Η Δυϊκότητα Lagrange

Η ενότητα αυτή εισάγει έννοιες όπως την **δυϊκή συνάρτηση Lagrange** και το **δυϊκό πρόβλημα Lagrange**. Από την βιβλιογραφία χρησιμοποιήθηκε η πηγή: [11].

3.3.1 Η Δυϊκή Συνάρτηση Lagrange

Έστω πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής (σύμφωνα με τον πίνακα 2.1):

$$\min f_0(\mathbf{x}), \tag{3.3.2}$$

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}) &\leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ h_i(\mathbf{x}) &= 0, \quad i = 1, \ldots, p, \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Έστω

$$D = \bigcap_{i=0}^{m} A_i \ \cap \ \bigcap_{i=1}^{p} B_i$$

το μη κενό πεδίο ορισμού του προβλήματος βελτιστοποίησης, όπου A_i και B_i τα πεδία ορισμού των f_i και h_i αντίστοιχα.

Η βασική ιδέα στην **δυϊκότητα Lagrange** είναι να ληφθούν υπόψιν οι περιορισμοί του παραπάνω προβλήματος βελτιστοποίησης επαυξάνοντας την α.σ. με ένα σταθμισμένο άθροισμα (weighted sum) των συναρτήσεων-περιορισμών.

Η **συνάρτηση Lagrange (Lagrangian - Lagrange function)** η οποία σχετίζεται με το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης ορίζεται ως εξής, $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ με

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(\mathbf{x})$$

και έχει πεδίο ορισμού το $D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$.

Για τους συντελεστές λ_i και ν_i ισχύουν τα ακόλουθα.

- Ο συντελεστής λ_i είναι γνωστός ως ο **πολλαπλασιαστής Lagrange (Lagrange multiplier)** που σχετίζεται με τον $i-$οστό περιορισμό-ανισότητα, $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$.

- Ο συντελεστής ν_i είναι γνωστός ως ο **πολλαπλασιαστής Lagrange (Lagrange multiplier)** που σχετίζεται με τον $i-$οστό περιορισμό-ισότητα, $h_i(\mathbf{x}) = 0$.

Τέλος, τα διανύσματα $\boldsymbol{\lambda}$ και $\boldsymbol{\nu}$ είναι γνωστά ως **διανύσματα πολλαπλασιαστές Lagrange (Lagrange multiplier vectors)** που σχετίζονται με το αρχικό πρόβλημα βελτιστοποίησης (3.3.2).

Η **δυϊκή συνάρτηση Lagrange**, $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, ορίζεται ως η ελάχιστη τιμή της **συνάρτησης Lagrange** ως προς $\mathbf{x}$ για $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ και $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^p$, δηλαδή

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \inf_{\mathbf{x} \in D} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \inf_{\mathbf{x} \in D} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(\mathbf{x}) \right).$$

Όταν η **συνάρτηση Lagrange** δεν έχει κάτω φράγμα ως προς $\mathbf{x}$, η **δυϊκή συνάρτηση Lagrange** παίρνει την τιμή $-\infty$.

Η **δυϊκή συνάρτηση Lagrange** φράσσει από κάτω το βέλτιστο «κόστος», p^*, του προβλήματος (3.3.2), δηλαδή

$$\forall\ \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^p \text{ και } \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \text{ ισχύει } g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \leq p^*.$$

Αυτή η σημαντική ιδιότητα επαληθεύεται εύκολα. Έστω $\tilde{\mathbf{x}}$ μια εφικτή λύση για το πρόβλημα (3.3.2), δηλαδή ισχύουν $f_i(\tilde{\mathbf{x}}) \leq 0$ και $h_i(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$ με $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ (το **διάνυσμα πολλαπλασιαστής Lagrange** $\boldsymbol{\lambda}$ μπορεί να ερμηνευθεί και ως διάνυσμα **ποινής (penalty)** που σχετίζεται με τους περιορισμούς ανισότητες).

Επομένως, ισχύει

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\tilde{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(\tilde{\mathbf{x}}) \leq 0,$$

αφού κάθε όρος στο πρώτο άθροισμα είναι μη θετικός και κάθε όρος του δεύτερου αθροίσματος είναι μηδέν.

Συνεπώς,

$$L(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = f_0(\tilde{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\tilde{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(\tilde{\mathbf{x}}) \leq f_0(\tilde{\mathbf{x}})$$

και άρα

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \inf_{\mathbf{x} \in D} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \leq L(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \leq f_0(\tilde{\mathbf{x}}).$$

Εφόσον για κάθε εφικτή λύση, $\tilde{\mathbf{x}}$, ισχύει ότι $g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \leq f_0(\tilde{\mathbf{x}})$, τότε με φυσικό τρόπο προκύπτει ότι $g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \leq p^*$.

Η **δυϊκή συναρτήση Lagrange**, g, αποτελεί μη τετριμμένο κάτω φράγμα για το βέλτιστο «κόστος» p^* μονάχα εάν $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ και το ζεύγος διανυσμάτων $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης g, τότε δηλαδή ισχύει

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) > -\infty.$$

3.3.2 Το Δυϊκό Πρόβλημα Lagrange

Όπως διαπιστώθηκε και προηγουμένως για κάθε ζεύγος $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})$ με $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ η **δυϊκή συνάρτηση Lagrange** αποτελεί ένα κάτω φράγμα στο βέλτιστο «κόστος» p^* του προβλήματος (3.3.2). Δηλαδή, το εν λόγω κάτω φράγμα είναι συνάρτηση των παραμέτρων $\boldsymbol{\lambda}$ και $\boldsymbol{\nu}$. Η εύρεση του καλύτερου δυνατού κάτω φράγματος που μπορεί να ανακτηθεί μέσω της **δυϊκής συνάρτησης Lagrange** οδηγεί στο παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}), \tag{3.3.3}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}.$$

Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται **δυϊκό πρόβλημα Lagrange** το οποίο σχετίζεται με το πρόβλημα (3.3.2).

Παράδειγμα 3.3.1 (Δυϊκά προβλήματα Lagrange ορισμένων προβλημάτων Γ.Π.) Στο παράδειγμα αυτό πρόκειται να ανακτηθούν τα **δυϊκά προβλήματα Lagrange** προβλημάτων Γ.Π. σε κανονική μορφή και γενική μορφή.

- Έστω το κάτωθι πρόβλημα Γ.Π. σε κανονική μορφή

$$\min \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x},$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Προκειμένου να βρεθεί η **συνάρτηση Lagrange** αρχικά παρατηρείται ότι οι συναρτήσεις που σχετίζονται με τους περιορισμούς-ανισότητες παίρνουν την εξής μορφή: $f_i(\mathbf{x}) = -x_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Στην συνέχεια η **συνάρτηση Lagrange** δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) &= \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \boldsymbol{\nu}^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= -\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\nu} + (\mathbf{c} + A^T\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\lambda})^T\mathbf{x} \end{aligned}$$

και για την **δυϊκή συνάρτηση Lagrange** ισχύει:

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) &= \inf_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \\ &= -\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\nu} + \inf_{\mathbf{x}} (\mathbf{c} + A^T\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\lambda})^T\mathbf{x} \\ &= \begin{cases} -\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\nu}, & \text{εάν} \quad A^T\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \\ -\infty, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \end{aligned}$$

Σκοπός του **δυϊκού προβλήματος Lagrange** είναι να μεγιστοποιήσει την **δυϊκή συνάρτηση Lagrange** g, υπό τον περιορισμό $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$, δηλαδή:

$$\max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}),$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}.$$

Μπορεί να επιλυθεί το εξής πρόβλημα ισοδύναμα:

$$\max -\mathbf{b^T}\boldsymbol{\nu},$$

$$\begin{aligned} A^T\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

το οποίο με την σειρά του ισοδυναμεί με:

$$\max -\mathbf{b^T}\boldsymbol{\nu},$$

$$A^T\boldsymbol{\nu} + \mathbf{c} \geq \mathbf{0}.$$

- Έστω το κάτωθι πρόβλημα Γ.Π. σε γενική μορφή

$$\min \mathbf{c^T x},$$

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}.$$

Συνοπτικά, η **συνάρτηση Lagrange** δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbf{c^T x} + \boldsymbol{\lambda^T}(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= -\mathbf{b^T}\boldsymbol{\lambda} + (A^T\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c})^T\mathbf{x} \end{aligned}$$

και για την **δυϊκή συνάρτηση Lagrange** ισχύει

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\lambda}) &= \inf_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ &= -\mathbf{b^T}\boldsymbol{\lambda} + \inf_{\mathbf{x}} (A^T\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c})^T\mathbf{x} \\ &= \begin{cases} -\mathbf{b^T}\boldsymbol{\lambda}, & \text{εάν} \quad A^T\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \\ -\infty, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \end{aligned}$$

Σκοπός του **δυϊκού προβλήματος Lagrange** είναι να μεγιστοποιήσει την **δυϊκή συνάρτηση Lagrange** g, υπό τον περιορισμό $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$. Ξανά μπορεί να επιλυθεί ισοδύναμα το εξής πρόβλημα:

$$\max \; -\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\lambda},$$

$$\begin{aligned} A^T\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

το οποίο είναι πρόβλημα Γ.Π. σε κανονική μορφή.

Σημείωση 3.3.1 (Παρατηρήσεις πάνω στο παράδειγμα 3.3.1)
Αξίζει να σημειωθεί μια ενδιαφέρουσα συμμετρία. Ξεκινώντας από ένα πρόβλημα Γ.Π. σε κανονική μορφή, τελικά το ζητούμενο αποτέλεσμα μπορεί να ανακτηθεί από ένα πρόβλημα Γ.Π. σε γενική μορφή (και αντιστρόφως). Τέλος, στις παραπάνω περιπτώσεις, τα προβλήματα είναι ισοδύναμα, με την έννοια ότι έχουν το ίδιο βέλτιστο «κόστος». Τα προβλήματα εν γένει διαφέρουν μεταξύ τους.

3.4 Το Πρόβλημα της Τιμολόγησης Χρεογράφων

Αυτή η ενότητα λειτουργεί ως κατακλείδα για το κεφάλαιο της δυϊκότητας και προετοιμάζει το έδαφος για το επόμενο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα, εδώ γίνεται μια απόπειρα περιγραφής του προβλήματος εύρεσης ελεύθερων από arbitrage φραγμάτων στην τιμολόγηση χρεογράφων (arbitrage-free bounds on asset pricing), με την θεωρία που έχει αναφερθεί έως τώρα.

Έστω ένα σύνολο n χρεογράφων (assets) με τιμές στο ξεκίνημα μιας επενδυτικής περιόδου (investment period):

$$p_1,\; p_2,\; p_3, \ldots,\; p_n,$$

αντίστοιχα. Στο τέλος της επενδυτικής περιόδου οι αξίες των χρεογράφων συμβολίζονται με:

$$v_1,\; v_2,\; v_3, \ldots,\; v_n.$$

Εάν με $x_1,\; x_2, \ldots,\; x_n$ συμβολιστούν οι αρχικές επενδύσεις (initial investments) σε κάθε χρεόγραφο, το κόστος της αρχικής επένδυσης ισούται με $\mathbf{p}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$ και η αξία της τελικής επένδυσης ισούται με $\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$.

Είναι προφανές ότι η αξία των χρεογράφων στο τέλος της επενδυτικής περιόδου, $\mathbf{v}$, είναι αβέβαιη. Έστω ότι μόνο m ενδεχόμενα για την αξία των χρεογράφων στο τέλος της επενδυτικής περιόδου είναι πιθανά. Εάν πραγματοποιηθεί το $i-$οστό ενδεχόμενο, τότε η τελική αξία των χρεογράφων θα συμβολίζεται με $\mathbf{v^{(i)}}$ και άρα η συνολική αξία των επενδύσεων είναι ίση με $\mathbf{v^{(i)T}x}$.

Επίσης, εάν υπάρχει επενδυτική στρατηγική $\mathbf{x}$ τέτοια ώστε για την διαδικασία αξίας που της αντιστοιχεί να ισχύει $\mathbf{p^T x} < 0$ και για όλα τα πιθανά ενδεχόμενα η τελική αξία είναι μη αρνητική, δηλαδή $\mathbf{v^{(i)T}x} \geq 0$ για $i = 1, \ldots, m$, τότε υπάρχει arbitrage (όπως διαπιστώνεται και στον ορισμό 1.2.9).

Η ύπαρξη arbitrage σημαίνει ότι υπάρχει επενδυτική στρατηγική η οποία συνδέεται με εγγυημένη κερδοφορία (βέβαιο κέρδος). Είθισται οι τιμές να είναι τέτοιες ώστε να μην υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage σε μια χρηματοοικονομική αγορά. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα ανισοτήτων:

$$\begin{aligned} V\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{p^T x} &< 0 \end{aligned}$$

είναι μη εφικτό, όπου $V_{ij} = v_j^{(i)}$.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Farkas 3.2.1 δεν υπάρχει arbitrage αν και μόνο αν υπάρχει $\mathbf{y}$ τ.ω.

$$\begin{aligned} -V^T\mathbf{y} + \mathbf{p} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ο παραπάνω χαρακτηρισμός τιμών ελεύθερων από arbitrage (arbitrage-free prices) χρησιμοποιείται εκτενώς στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά.

Για παράδειγμα, έστω ότι οι τιμές V είναι γνωστές και όλες οι τιμές εκτός από την τελευταία, p_n, είναι επίσης γνωστές. Το σύνολο τιμών που λαμβάνει το p_n οι οποίες συμβαδίζουν με την υπόθεση no-arbitrage είναι ένα διάστημα το οποίο μπορεί να βρεθεί επιλύοντας ένα ζεύγος προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Το βέλτιστο «κόστος» για το πρόβλημα Γ.Π.

$$\min\ p_n,$$

$$\begin{aligned} V^T\mathbf{y} &= \mathbf{p}, \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

με μεταβλητές p_n και $\mathbf{y}$ δίνει την μικρότερη δυνατή, ελεύθερη από arbitrage, τιμή για το n-οστό χρεόγραφο.

Επιλύοντας το ίδιο πρόβλημα Γ.Π. αλλά μεγιστοποιώντας την α.σ. αυτήν την φορά, δηλαδή λύνοντας το πρόβλημα

$$\max p_n,$$

$$\begin{aligned} V^T\mathbf{y} &= \mathbf{p}, \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

προκύπτει ως βέλτιστο «κόστος» η μεγαλύτερη δυνατή, ελεύθερη από arbitrage, τιμή για το n-οστό χρεόγραφο.

Εάν τα βέλτιστα «κόστη» για το παραπάνω ζεύγος προβλημάτων Γ.Π. ταυτίζονται, τότε η no-arbitrage υπόθεση οδηγεί σε μοναδική τιμή για το n-οστό χρεόγραφο και λέγεται ότι η **χρηματοοικονομική αγορά** είναι **πλήρης (complete financial market)**.

Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται στον υπολογισμό φραγμάτων στην τιμή χρηματοοικονομικών παραγώγων η οποία βασίζεται στην τελική τιμή άλλων βασικών αγαθών (underlying assets), δηλαδή όταν η συνάρτηση αποπληρωμής (payoff function) των παραγώγων που τιμολογούνται εξαρτάται από τις τελικές τιμές διάφορων βασικών αγαθών.

Κεφάλαιο 4

Φράγματα στην Τιμή Basket Δικαιωμάτων μέσω Γ.Π.

Το κεφάλαιο αυτό βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στην δημοσίευση [12] και θέτει σε εφαρμογή την θεωρία των προηγούμενων κεφαλαίων. Ειδικότερα, περιλαμβάνει αριθμητικά αποτελέσματα για τον υπολογισμό φραγμάτων στην τιμή ευρωπαϊκών basket δικαιωμάτων αγοράς χρησιμοποιώντας συνθετικά δεδομένα.

Ακολουθεί μια εισαγωγική περιγραφή του προβλήματος με αναφορές σε επιστημονικά άρθρα και δημοσιεύσεις που έχουν επιχειρήσει να επιλύσουν προβλήματα αυτής της μορφής. Επίσης, παρατίθεται αλγόριθμος πολυωνυμικής πολυπλοκότητας ως προς την είσοδο, ο οποίος εκτελείται στα πλαίσια εφαρμογής της θεωρίας που έχει αναπτυχθεί.

Τέλος, αναφέρονται δυνητικές επεκτάσεις σε συνδυασμό με εναλλακτικές στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων τέτοιου τύπου.

4.1 Εισαγωγή και Ορισμός του Προβλήματος

Ένα ευρωπαϊκό basket δικαίωμα αγοράς περιλαμβάνει ένα σταθμισμένο άθροισμα τιμών πολλαπλών χρεογράφων και είναι ιδιαίτερα δημοφιλές καθώς το χαρτοφυλάκιο (portfolio) που τα περιλαμβάνει διατηρεί διαχειρίσιμο ρίσκο και κόστος για τον εκάστοτε επενδυτή. Παρά την φαινομενικά απλή συνάρτηση αποπληρωμής του (ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται εδώ είναι πανομοιότυπος με τον συμβολισμό των ορισμών)

$$p(\mathbf{S}) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K \right)^{+},$$

όπου w_i το βάρος που αντιστοιχεί στο $i-$οστό χρεόγραφο, $S_i(T)$ η τιμή του $i-$οστού χρεογράφου στον χρόνο ωρίμανσης T του δικαιώματος και K η τιμή εξάσκησης, η τιμολόγηση τέτοιου τύπου δικαιωμάτων δεν είναι απλή υπόθεση, τόσο σε θεωρητικό επίπεδο όσο και σε υπολογιστικό.

Ο υπολογισμός φραγμάτων στην τιμή ευρωπαϊκών basket δικαιωμάτων αγοράς, χωρίς μοντέλο (model-free), είναι ένα πολυσυζητημένο πρόβλημα τα τελευταία χρόνια και έχει αποδειχθεί ότι η εύρεση άνω και κάτω φραγμάτων στην τιμή basket δικαιωμάτων ανάγεται σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Πιο συγκεκριμένα, το δυϊκό πρόβλημα του

$$\inf_{\pi} / \sup_{\pi} \ \mathbb{E}_{\pi} \left[p(\mathbf{S}) \right],$$

όπου το π είναι η κατανομή του τυχαίου διανύσματος $(S_1(T), S_2(T), \ldots, S_n(T))$, υπό τους περιορισμούς ότι οι αρχικές τιμές (spot prices) $S_i(0)$ για κάποια i και τα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς (european call options ή για συντομία call options) για κάθε χρεόγραφο παίρνουν προκαθορισμένες τιμές, ανάγεται σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Η εύρεση τέτοιων φραγμάτων χωρίς μοντέλο έχει χρήσιμες εφαρμογές επειδή, αφενός κανείς μπορεί να απαλλαγεί από το ρίσκο που υπεισέρχεται υποθέτοντας ότι οι τιμές των χρεογράφων περιγράφονται από κάποιο μοντέλο και αφετέρου τα φράγματα αυτά καθιστούν εφικτή την «στατική» τιμολόγηση παραγώγων και δικαιωμάτων (με την έννοια ότι δεν γίνονται υποθέσεις σχετικά με την δυναμική των τιμών των χρεογράφων). Αυτό σημαίνει ότι αν βρεθεί κάποιο στιγμιότυπο στο οποίο παραβιάζονται τα φράγματα αυτά μέσω κάποιου μοντέλου, τότε το μοντέλο αυτό είναι αναξιόπιστο και μπορεί να οδηγήσει σε arbitrage.

Έχουν γίνει προσπάθειες υπολογισμού φραγμάτων στην τιμή basket δικαιωμάτων τόσο με αναλυτικό τρόπο όσο και με προσεγγιστικό. Ειδικότερα, στην δημοσίευση [17] περιλαμβάνονται κλειστοί τύποι για την περίπτωση των άνω φραγμάτων στην τιμή ενός basket δικαιώματος δεδομένων ενός προθεσμιακού συμβολαίου (forward contract) και ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς (call option) ανά χρεόγραφο, μέσω επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Παρέχονται και αναλυτικοί τύποι για την περίπτωση των κάτω φραγμάτων αλλά μόνο για $n = 2$. Στην δημοσίευση [15] οι κλειστοί-αναλυτικοί τύποι των προαναφερθέντων άνω φραγμάτων γενικεύονται για τις περιπτώσεις πεπερασμένων και άπειρων το πλήθος ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς ανά χρεόγραφο.

Ενδιαφέρουσα σκοπιά υιοθετείται στην δημοσίευση [13] όπου το πρόβλημα εύρεσης φραγμάτων στην τιμή ενός basket δικαιώματος, δεδομένων τιμών άλλων συναφών δικαιωμάτων (όπως π.χ. ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς ή ευρωπαϊκών basket δικαιωμάτων αγοράς) μετασχηματίζεται μέσω της δυϊκότητας Lagrange σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Συγκεκριμένα, ξεκινώντας από ένα πρόβλημα της μορφής

$$\inf / \sup\ \mathbb{E}_\pi \left(\mathbf{w_0^T x} - K_0\right)^+,$$

$$\mathbb{E}_\pi \left(\mathbf{w_i^T x} - K_i\right)^+ = p_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

όπου $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ το διάνυσμα με τις τιμές των basket δικαιωμάτων στους περιορισμούς του παραπάνω προβλήματος βελτιστοποίησης, $K_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbf{w_0} \in \mathbb{R}^n_{>0}$ οι τιμές εξάσκησης και τα βάρη αντίστοιχα όπως εμφανίζονται στην α.σ., $K_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ και $\mathbf{w_i} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ για $i = 1, \ldots, m$ οι τιμές εξάσκησης και τα βάρη όπως εμφανίζονται στους περιορισμούς.

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που αφορά το πάνω φράγμα της τιμής του basket δικαιώματος, p^{sup}, από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$p^{\text{sup}} := \sup_\pi \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \tag{4.1.1}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \mathbf{p},$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} \pi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1,$$

όπου

$$\psi(\mathbf{x}) := (\mathbf{w_0^T x} - K_0)^+,$$
$$\phi_i(\mathbf{x}) := (\mathbf{w_i^T x} - K_i)^+, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Η συνάρτηση Lagrange για το παραπάνω πρόβλημα ορίζεται ως εξής, πάνω στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{K} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \equiv \mathcal{K} \times \mathbb{R}^{m+1}$:

$$L(\pi, \boldsymbol{\lambda}, \lambda_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} \left(\mathbf{p} - \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right) + \lambda_0 \left(1 - \int_{\mathbb{R}^n} \pi(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right),$$

όπου $\mathcal{K}$ ο κώνος των μη αρνητικών μέτρων $\pi(\mathbf{x})$ με $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$.

Σύμφωνα με την θεωρία της δυϊκότητας Lagrange το δυϊκό του προβλήματος (4.1.1) είναι το εξής:

$$d^{\sup} := \inf_{\lambda_0,\ \boldsymbol{\lambda}} \ \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{p} + \lambda_0,$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) + \lambda_0 \geq \psi(\mathbf{x}), \quad \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0},$$

ισοδύναμα:

$$d^{\sup} = \inf_{\boldsymbol{\lambda}} \ \sup_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}} \ \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{p} + \psi(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}).$$

Τόσο το πρωτεύον, όσο και το δυϊκό πρόβλημα, ερμηνεύονται με φυσικό τρόπο στα χρηματοοικονομικά. Το πρωτεύον πρόβλημα αναζητά εκείνο το μέτρο πιθανότητας που θα μεγιστοποιήσει την τιμή του basket δικαιώματος στην αντικειμενική συνάρτηση, ικανοποιώντας ταυτόχρονα τους περιορισμούς για τα εμπλεκόμενα χρεόγραφα που ορίζουν οι συνθήκες στην χρηματοοικονομική αγορά. Από την άλλη, το δυϊκό πρόβλημα αναζητά το φθηνότερο χαρτοφυλάκιο (portfolio) δικαιωμάτων και μετρητών (options & cash), $\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) + \lambda_0$, το οποίο καλύπτει την αποπληρωμή του basket δικαιώματος $\psi(\mathbf{x})$. Το βέλτιστο «κόστος» του δυϊκού προβλήματος, σύμφωνα με την θεωρία ασθενούς δυϊκότητας, αποτελεί άνω φράγμα του ζητούμενου άνω φράγματος που σχετίζεται με το πρωτεύον πρόβλημα.

Παρομοίως, ο υπολογισμός του κάτω φράγματος για την τιμή του basket δικαιώματος περιλαμβάνει το πρόβλημα:

$$p^{\inf} := \inf_{\pi} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \mathbf{p},$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \pi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$$

καθώς και το δυϊκό του:

$$d^{\inf} := \sup_{\lambda_0,\ \boldsymbol{\lambda}} \ \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{p} + \lambda_0,$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) + \lambda_0 \leq \psi(\mathbf{x}), \quad \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0},$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με:

$$d^{\inf} = \sup_{\boldsymbol{\lambda}} \ \inf_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}} \ \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{p} + \psi(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}).$$

Αντίστοιχα, από την θεωρία ασθενούς δυϊκότητας, το βέλτιστο «κόστος» του δυϊκού αποτελεί κάτω φράγμα στο ζητούμενο κάτω φράγμα που σχετίζεται με το πρωτεύον.

Η έρευνα για την περίπτωση των κάτω φραγμάτων στην τιμή ενός basket δικαιώματος συνεχίζεται στην δημοσίευση [20], όπου μέσω πλεονασματικών μεταβλητών το αρχικό πρόβλημα μετασχηματίζεται σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Επίσης, στην δημοσίευση [20] αναφέρεται ότι η περίπτωση εύρεσης κάτω φραγμάτων, διαφέρει σημαντικά από την περίπτωση των άνω φραγμάτων, καθώς έχει αναδειχθεί σε υπολογιστικά κοστοβόρο πρόβλημα εξαιτίας του εκθετικού μεγέθους που αποκτά.

Η προσέγγιση που ακολουθείται σε αυτό το κεφάλαιο έχει να κάνει με την εύρεση **«στατικών», ελεύθερων από arbitrage, κάτω φραγμάτων (static-arbitrage lower bounds)** στις τιμές basket δικαιωμάτων, δεδομένου αυθαίρετου πλήθους τιμών ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς ανά χρεόγραφο. Αναλυτικότερα, επεκτείνονται τα αριθμητικά πειράματα της δημοσίευσης [20], σε υψηλότερες διαστάσεις. Επιπλέον, παρουσιάζεται αλγόριθμος, πολυωνυμικής πολυπλοκότητας, ο οποίος επιλύει ισοδύναμο πρόβλημα Γ.Π. του αρχικού προβλήματος, μέσω του σχετιζόμενου **προβλήματος διαχωρισμού (separation problem)**. Ως επί το πλείστον, στην βιβλιογραφία, επιλύονται στιγμιότυπα χαμηλών διαστάσεων για το πρόβλημα εύρεσης κάτω φραγμάτων, εξαιτίας των υπολογιστικών δυσκολιών που ανακύπτουν. Ωστόσο, στην προκειμένη περίπτωση σημειώνεται πρόοδος, επιλύοντας προβλήματα υψηλότερων διαστάσεων.

4.2 Μεθοδολογία Επίλυσης του Προβλήματος

Συνοψίζοντας και πάλι η συνάρτηση αποπληρωμής ενός ευρωπαϊκού basket δικαιώματος αγοράς έχει την εξής μορφή:

$$(\mathbf{w} \cdot \mathbf{S}(T) - K)^+ \,,$$

όπου $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ το διάνυσμα με τα βάρη, $\mathbf{S}(T) = (S_1(T), \ldots, S_n(T))$ το τυχαίο διάνυσμα που αναπαριστά τις τιμές των χρεογράφων στον χρόνο ωρίμανσης T και K η προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης του δικαιώματος.

4.2.1 Υποθέσεις Διακριτοποίησης του Προβλήματος Γ.Π.

Η ανάλυση που ακολουθεί βασίζεται στις εξής παραδοχές.

- **Υπόθεση 1**

  Για κάθε χρεόγραφο S_i υπάρχουν m το πλήθος διαθέσιμα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς με ωρίμανση T και τιμές εξάσκησης:

$$K_{i1} \leq K_{i2} \leq K_{i3} \leq \cdots \leq K_{im}.$$

Για συντομία, η τιμή των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς συμβολίζεται με c_{ij}, όπου $i = 1, \ldots, n$ και $j = 1, \ldots, m$, δηλαδή ισχύει:

$$c_{ij} = \mathbb{E}_\pi \left[(S_i(T) - K_{ij})^+ \right],$$

όπου $i = 1, \ldots, n$ και $j = 1, \ldots, m$.

- **Υπόθεση 2**
  Για τα βάρη w_i ισχύει $w_i \in [0, 1]$, $\forall\ i \in \{1, \ldots, n\}$ τ.ω. $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Επίσης, οι τιμές εξάσκησης K, K_{ij} είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί και οι τιμές τους αυξάνονται το πολύ πολυωνυμικά καθώς οι διαστάσεις n, m αυξάνονται.

- **Υπόθεση 3**
  Η χρηματοοικονομική αγορά είναι απαλλαγμένη από «τριβές». Δηλαδή, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγική υποενότητα 1.2.1 του πρώτου κεφαλαίου ισχύουν αναλυτικά τα εξής:

  – δεν υπάρχει διαφορά στις τιμές ζήτησης και προσφοράς (bid-ask spread),

  – δεν υπάρχει κόστος συναλλαγής (transaction cost),

  – δεν υπάρχει ασυμμετρία στα επιτόκια (interest rate asymmetry),

  – δεν υπάρχουν περιορισμοί στις ανοικτές πωλήσεις (short selling constraints) και

  – δεν υπάρχει πιστωτικός κίνδυνος αντισυμβαλλόμενου (counterparty credit risk).

  Τέλος, υποτίθεται ότι το επιτόκιο άνευ ρίσκου (risk-free rate) είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή $r = 0$.

Η **υπόθεση 1** επιτρέπει τόσο ευρωπαϊκά δικαιώματα πώλησης (put options) όσο και προθεσμιακά συμβόλαια (forward contracts) ως περιορισμούς στο αρχικό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Για τα ευρωπαϊκά διακαιώματα πώλησης γίνεται χρήση του λήμματος 1.2.2 (Put-call parity) και για τα προθεσμιακά συμβόλαια αρκεί για την αντίστοιχη τιμή εξάσκησης να ισχύει $K_{ij} = 0$. Επίσης, επιτρέπεται το πλήθος των διαθέσιμων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων να αλλάζει ανά χρεόγραφο. Αυτή η περίπτωση αντιμετωπίζεται μέσω επανάληψης ορισμένων (αυθαίρετα επιλεγμένων) τιμών εξάσκησης (άρα και δικαιωμάτων) έως ότου να ικανοποιηθεί η **υπόθεση 1**.

4.2.2 Το Πρωτεύον Πρόβλημα και το Δυϊκό του

Υπό τις προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη υποενότητα 4.2.1, το πρόβλημα εύρεσης **κάτω φραγμάτων, απουσία μοντέλου, στην τιμή ενός ευρωπαϊκού basket δικαιώματος αγοράς** διαμορφώνεται ως εξής:

$$\inf_{\pi} \ \mathbb{E}_{\pi}\left[(\mathbf{w}\cdot\mathbf{S}(T)-K)^{+}\right], \tag{4.2.2}$$

$$\mathbb{E}_{\pi}\left[(S_i(T)-K_{ij})^{+}\right]=c_{ij}, \quad i\in\{1,\dots,n\}, \quad j\in\{1,\dots,m\}.$$

Το δυϊκό του προβλήματος (4.2.2), σύμφωνα με την δημοσίευση [12], είναι το εξής:

$$\sup_{z\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^{n\times m}} \ z+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}y_{ij}, \tag{4.2.3}$$

$$z+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(s_i-K_{ij})^{+}y_{ij}\le(\mathbf{w}\cdot\mathbf{s}-K)^{+}, \quad \forall\ \mathbf{s}\in\mathbb{R}^{n}_{\ge 0}.$$

Το ζήτημα της ισχυρής δυϊκότητας μεταξύ των προβλημάτων (4.2.2) και (4.2.3) καλύπτεται και πάλι στην δημοσίευση [20]. Μια **ικανή συνθήκη** προκειμένου να ισχύει η ισχυρή δυϊκότητα μεταξύ των (4.2.2) και (4.2.3) είναι να υπάρχει τουλάχιστον ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς ανά χρεόγραφο στους περιορισμούς του αρχικού προβλήματος. Το πρόβλημα (4.2.3) μπορεί να ερμηνευθεί με χρηματοοικονομικούς όρους ως αναζήτηση του μέγιστου χαρτοφυλακίου υπό-αντιστάθμισης (sub-replicating portfolio) δεδομένων των διαθέσιμων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς. Εν γένει, το μέγεθος του προβλήματος είναι υπολογιστικά απαγορευτικό και για αυτόν τον λόγο μονάχα ειδικές περιπτώσεις οι οποίες επιλύονται μέσω προβλημάτων Γ.Π. διαχειρίσιμου μεγέθους έχουν αποπειραθεί.

Η προσέγγιση που ακολουθείται στην δημοσίευση [12] αναφορικά με το δυϊκό πρόβλημα (4.2.3) θεωρεί επαρκές οι περιορισμοί του δυϊκού προβλήματος να αφορούν ένα πιο περιορισμένο σύνολο, αντί να έχουν την γενική μορφή $\forall\ \mathbf{s}\in\mathbb{R}^{n}_{\ge 0}$. Ειδικότερα, αρκεί ο περιορισμός του προβλήματος (4.2.3) να ισχύει $\forall\ \mathbf{s}\in\mathfrak{C}_0$, όπου:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{C}_0=\mathfrak{C}_1\cup\mathfrak{C}_2,\\
&\mathfrak{C}_1=\left\{\mathbf{s}\in\mathbb{R}^{n}_{\ge 0}\ \middle|\ \forall\ i,\ s_i=0 \text{ ή } K_{ij} \text{ για κάθε } j\right\},\\
&\mathfrak{C}_2=\bigcup_{k=1}^{n}\mathfrak{B}_k \quad \text{και}\\
&\mathfrak{B}_k=\left\{\mathbf{s}\in\mathbb{R}^{n}_{\ge 0}\ \middle|\ \forall\ i\ne k,\ s_i=0 \text{ ή } K_{ij} \text{ για κάθε } j,\ s_k=w_k^{-1}\Big(K-\sum_{i=1,\ i\ne k}^{n} w_i s_i\Big)\ge 0\right\}.
\end{aligned}$$

Διαισθητικά το σύνολο $\mathfrak{B}_k$ αναπαριστά τα σημεία στα οποία το υπερεπίπεδο το οποίο ορίζεται από την συνάρτηση αποπληρωμής του basket δικαιώματος τέμνεται με το πλέγμα (grid) που αντιστοιχεί στις τιμές εξάσκησης των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς που είναι διαθέσιμα. Κατά σύμβαση από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιείται η εξής αναπαράσταση[7]: $K_{i0} = 0, \ \forall\ i$.

4.2.3 Ισοδυναμία Προβλημάτων Γ.Π.

Λαμβάνοντας υπόψιν τα σύνολα ($\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}_1$ και $\mathfrak{C}_2$) και την μεθοδολογία που προηγήθηκε προκύπτει το εξής πρόβλημα Γ.Π.

$$\max_{z\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^{n\times m}} z + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}y_{ij}, \tag{4.2.4}$$

$$z + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (s_i - K_{ij})^+ y_{ij} \leq (\mathbf{w}\cdot\mathbf{s} - K)^+, \quad \forall\ \mathbf{s} \in \mathfrak{C}_0,$$
$$\sum_{j=1}^{m} y_{ij} \leq w_i, \quad \forall\ i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Η πρόταση που ακολουθεί εισάγει έναν πολύ σημαντικό ισχυρισμό για τα προβλήματα (4.2.3) και (4.2.4).

Πρόταση 4.2.1
Τα προβλήματα Γ.Π. (4.2.3) και (4.2.4) είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη.
Έστω (z, y) λύση του προβλήματος Γ.Π. (4.2.3), δηλαδή ικανοποιεί τον περιορισμό, για κάθε $\mathbf{s} = (s_1,\ s_2,\ldots,s_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει πως η λύση (z, y) ικανοποιεί και τους περιορισμούς του προβλήματος Γ.Π. (4.2.4), για κάθε $\mathbf{s} \in \mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2$. Μάλιστα η συνθήκη:

$$\sum_{j=1}^{m} y_{ij} \leq w_i, \quad \forall\ i \in \{1,\ldots,n\},$$

επαληθεύεται στέλνοντας το s_i στο άπειρο και κρατώντας όλα τα υπόλοιπα σταθερά.

Για το αντίστροφο, η απόδειξη απαιτεί περισσότερα βήματα. Αρχικά, θεωρείται διαμέριση για τον ημιχώρο $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$, από ξένες μεταξύ τους (mutually exclusive), φραγμένες και μη περιοχές. Πιο συγκεκριμένα, ο $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ διαιρείται σε περιοχές της μορφής:

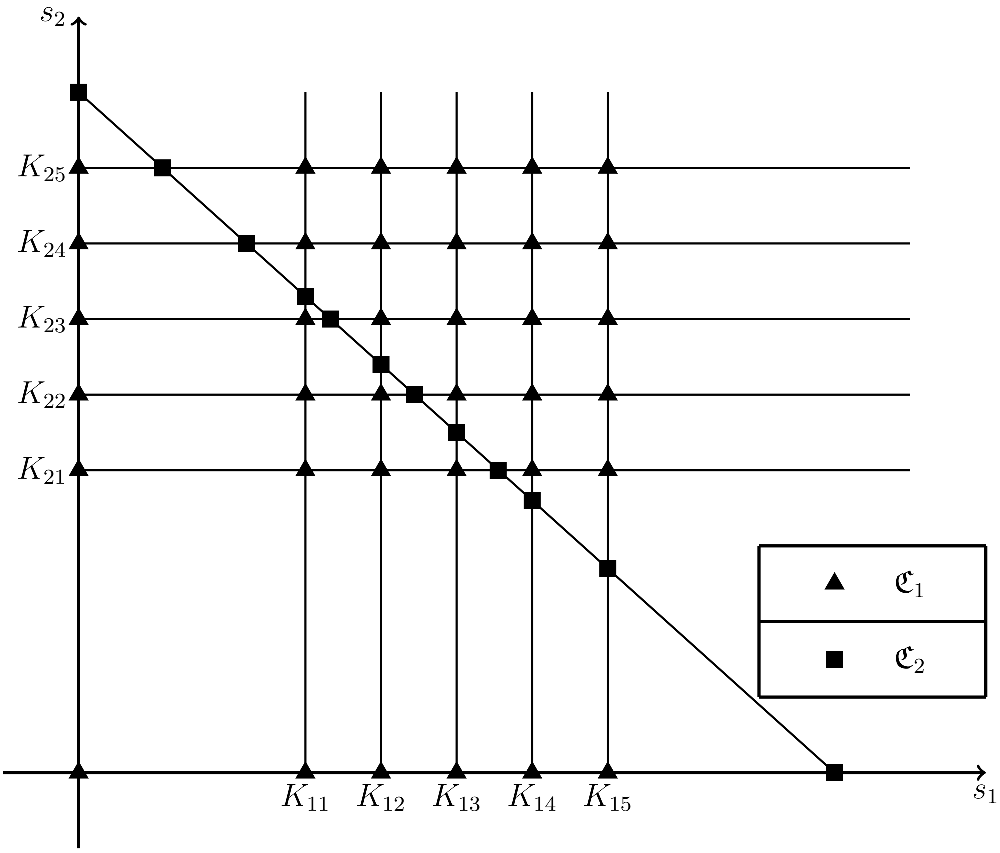
$$\left\{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid s_i = K_{ij},\ \forall\ i \in \{1,\ldots,n\} \text{ και } j \in \{1,\ldots,m\}\right\}$$

[7] Η σύμβαση αυτή αντιστοιχίζει στην τιμή εξάσκησης 0 (για τα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς) έναν βολικό συμβολισμό ο οποίος εμφανίζεται συχνά στην συνέχεια.

και

$$\left\{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid \mathbf{w} \cdot \mathbf{s} = K\right\}$$

η πρώτη περιοχή μπορεί να ερμηνευθεί ως το πλέγμα (grid) των τιμών εξάσκησης των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς για το οποίο έγινε λόγος προηγουμένως και η δεύτερη περιοχή ανταποκρίνεται στον ορισμό του υπερεπιπέδου. Το σχήμα 4.1 απεικονίζει γραφικά τις περιοχές αυτές σε χαμηλές διαστάσεις (για $n = 2$).



Σχήμα 4.1: Διαμέριση του $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ από $\left\{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} \mid s_i = K_{ij}\right\}$ και $\left\{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} \mid \mathbf{w} \cdot \mathbf{s} = K\right\}$ (πηγή: [12]).

Συνεπώς η συνάρτηση:

$$(\mathbf{w} \cdot \mathbf{s} - K)^+ - z - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (s_i - K_{ij})^+ \, y_{ij} \tag{4.2.5}$$

γίνεται γραμμική στις **φραγμένες περιοχές (bounded regions)** που ορίζει η προαναφερθείσα διαμέριση. Ως γνωστόν, από το θεώρημα 2.3.3 του δεύτερου κεφαλαίου, μια γραμμική συνάρτηση λαμβάνει την μέγιστη τιμή της σε ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των εφικτών λύσεων. Συνεπώς, προκειμένου να ικανοποιηθεί ο πρώτος περιορισμός του προβλήματος (4.2.3) μόνο στις φραγμένες περιοχές, αρκεί να γίνει έλεγχος μη αρνητικότητας της γραμμικής αυτής συνάρτησης στα ακραία σημεία των φραγμένων περιοχών. Εύκολα κανείς διαπιστώνει ότι τα ακραία σημεία των φραγμένων περιοχών είναι στοιχεία του συνόλου $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2$.

Όσον αφορά στις **μη φραγμένες περιοχές (unbounded regions)** που ορίζει η διαμέριση, μπορούν εκφραστούν από το σύνολο:

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{I}} = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid \mathbf{w} \cdot \mathbf{s} \geq K,\ s_i \geq \max_{j=1,\dots,m} K_{ij},\ \forall\, i \in \mathcal{I} \text{ και } s_i \in [\underline{K}_i, \overline{K}_i],\ \forall\, i \in \mathcal{I}^c \right\},$$

όπου $\mathcal{I}$ μη κενό υποσύνολο του $\{1, \dots, n\}$ και $\overline{K}_i \geq \underline{K}_i$ δύο τιμές εξάσκησης που αντιστοιχούν στα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς που περιλαμβάνουν το $i-$οστό χρεόγραφο. Επομένως, αρκεί αντίστοιχα να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση (4.2.5) είναι μη αρνητική $\forall\ \mathbf{s} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{I}}$ δεδομένου ότι ικανοποιούνται οι περιορισμοί του προβλήματος (4.2.4). Ισχύουν τα ακόλουθα, για κάθε $\mathbf{s} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{I}}$:

$$\begin{gathered}
(\mathbf{w} \cdot \mathbf{s} - K)^+ - z - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (s_i - K_{ij})^+ y_{ij} \\
\| \\
\mathbf{w} \cdot \mathbf{s} - K - z - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j=1}^{m} (s_i - K_{ij})\, y_{ij} - \sum_{i \in \mathcal{I}^c} \sum_{j=1}^{m} (s_i - K_{ij})^+ y_{ij} \\
\| \\
\sum_{i \in \mathcal{I}} s_i \left\{ w_i - \sum_{j=1}^{m} y_{ij} \right\} \quad + \quad (\text{υπόλοιποι όροι})\,.
\end{gathered}$$

Η τελευταία έκφραση ελαχιστοποιείται (στις μη φραγμένες περιοχές) όταν $s_i = \max_j K_{ij}$, $\forall\ i \in \mathcal{I}$, εξαιτίας του περιορισμού $\sum_{j=1}^{m} y_{ij} \leq w_i,\ \forall\ i \in \{1, \dots, n\}$ του προβλήματος (4.2.4). Οι υπόλοιποι όροι είναι γραμμικοί ως προς τις μεταβλητές $s_i \in \mathcal{I}^c$, οι οποίες ανήκουν σε φραγμένα σύνολα. Κατά συνέπεια, η συνάρτηση (4.2.5) ελαχιστοποιείται σε ακραίο σημείο, το οποίο ανήκει στο σύνολο $\mathfrak{C}_0$, άρα η εφικτότητα του προβλήματος (4.2.4) συνεπάγεται την εφικτότητα του προβλήματος (4.2.3).

$\square$

Σημειωτέον ότι το πρόβλημα Γ.Π. που αναφέρεται στην δημοσίευση [20] έχει μεταβλητές και περιορισμούς εκθετικού πλήθους ως προς n, ενώ το πρόβλημα (4.2.4) (όπως αναφέρεται στην δημοσίευση [12]) διαθέτει $nm + 1$ το πλήθος μεταβλητές. Ωστόσο το **σύνολο των περιορισμών**, του προβλήματος Γ.Π. (4.2.4), παραμένει εκθετικής τάξης μεγέθους ως προς n:

$$O\left((m+1)^{n-1}(m+n)\right),$$

γεγονός το οποίο υπογραμμίζει την υπολογιστική πολυπλοκότητα (computational complexity) του αρχικού προβλήματος.

Η επόμενη υποενότητα περιλαμβάνει το **πρόβλημα διαχωρισμού (separation problem)** που σχετίζεται με το πρόβλημα Γ.Π. που συζητήθηκε σε αυτή την υποενότητα καθώς επίσης και έναν **αλγόριθμο για το αρχικό πρόβλημα** ο οποίος αξιοποιεί την λύση του προβλήματος διαχωρισμού.

4.2.4 Το Πρόβλημα Διαχωρισμού και η Λύση του

Το **πρόβλημα διαχωρισμού (separation problem)** σχετίζεται με το πρόβλημα Γ.Π. (4.2.4) και έχει να κάνει με τον έλεγχο, κατά πόσο δεδομένα ζεύγη της μορφής:

$$\begin{array}{cc} \big(z\;, & y\big) \\ \Cap & \Cap \\ \mathbb{R} & \mathbb{R}^{n\times m} \end{array}$$

ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς του προβλήματος (4.2.4). Στην περίπτωση που δεν ικανοποιούνται οι περιορισμοί πρέπει να επιστραφεί ο περιορισμός που παραβιάζεται περισσότερο από τους υπόλοιπους. Το **πρόβλημα διαχωρισμού** που σχετίζεται με το πρόβλημα (4.2.4) για δεδομένο ζεύγος (z, y) μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

Έλεγξε εάν $z + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(s_i - K_{ij})^+ \, y_{ij} \le (\mathbf{w}\cdot\mathbf{s} - K)^+ , \quad \forall\, \mathbf{s} \in \mathfrak{C}_0,$

ή βρες $\mathbf{s}^* \in \mathfrak{C}_0$ **τ.ω. η παραπάνω ανισότητα να παραβιάζεται.**

Παρόλο που ο περιορισμός $\sum_{j=1}^{m} y_{ij} \le w_i,\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$ δεν φαίνεται να ελέγχεται παραπάνω, ο έλεγχος αυτών των n το πλήθος περιορισμών μπορεί να γίνει ανεξάρτητα, πριν την επίλυση του **προβλήματος διαχωρισμού**.

Το σημαντικότερο βήμα στην διαδικασία επίλυσης είναι ο υπολογισμός της μέγιστης τιμής που λαμβάνει το αριστερό μέλος του περιορισμού που ελέγχεται από το **πρόβλημα διαχωρισμού**, για κάποιο $\mathbf{s} \in \mathfrak{C}_0$. Η εν λόγω μέγιστη τιμή φαίνεται να εξαρτάται από μεταβλητές x της μορφής $\mathbf{w}\cdot\mathbf{s}$, για τις διάφορες τιμές που λαμβάνει το $\mathbf{s}$. Όπως φαίνεται και στην συνέχεια, ορίζονται συναρτήσεις $f_i(x)$ και $g_i(x)$ για $i \in \{1, \ldots, n\}$ οι οποίες μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας πετυχαίνουν το ζητούμενο. Κατά σύμβαση, ορίζεται ένα κάτω φράγμα για το αριστερό μέλος του περιορισμού που εξετάζει το **πρόβλημα διαχωρισμού** το οποίο θα συμβολίζεται με $l(z, y)$. Παραδείγματος χάριν, μπορεί κανείς να πάρει ένα τετριμμένο κάτω φράγμα, όπως:

$$l(z, y) = -\infty$$

ή κάτι της μορφής:

$$l(z, y) = z \quad + \sum_{(i,j):\ y_{ij}<0} (\overline{s}_i - K_{ij})\, y_{ij} - 1,$$

όπου $\overline{s}_i = \max\{s_i \mid \mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathfrak{C}_0\}$.

Πρόταση 4.2.2
Εάν οι υποθέσεις που έγιναν στην υποενότητα 4.2.1 ισχύουν, τότε το **πρόβλημα διαχωρισμού** επιλύεται με

$$O\left(nm^2(M + nK)\right)$$

πράξεις, όπου $M = \sum_{i=1}^{n} w_i K_{im}$.

Απόδειξη.
Έστω $l(z, y)$ κάτω φράγμα για τον περιορισμό που εξετάζει το πρόβλημα διαχωρισμού, σύμφωνα με την σύμβαση που έγινε προηγουμένως (δηλαδή το $l(z, y)$ είναι επαρκώς μικρός αριθμός ώστε να φράσσει από κάτω τον περιορισμό ή ένας μεγάλος κατ΄ απόλυτη τιμή αρνητικός αριθμός).

Αρχικά, μεγιστοποιείται το αριστερό μέλος του περιορισμού που εξετάζεται από το πρόβλημα διαχωρισμού επί του συνόλου $\mathfrak{C}_1$.
Οι συναρτήσεις f_1 και g_1 ορίζονται στο σύνολο $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, M\}$ ως εξής:

$$f_1(x) = \begin{cases} z + \sum\limits_{j=1}^{m} (K_{1h} - K_{1j})^+ \, y_{1j}, & \text{εάν } x = w_1 K_{1h}, \\ l(z, y), & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} h, & \text{εάν } x = w_1 K_{1h}, \\ 0, & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

όπου το h παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0, 1, \dots, m\}$. Συνολικά, στο πρώτο βήμα έγιναν $O(m^2 M)$ πράξεις.

Στην συνέχεια, ορίζεται η συνάρτηση f_2 στο σύνολο $\mathcal{D}$ ως εξής·

$$f_2(x) = \begin{cases} \max\limits_{h \in \mathcal{D}_2(x)} \left\{ f_1(x - w_2 K_{2h}) + \sum\limits_{j=1}^{m} (K_{2h} - K_{2j})^+ y_{2j} \right\}, & \text{εάν } \mathcal{D}_2(x) \neq \emptyset, \\ l(z, y), & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

όπου $\mathcal{D}_2(x)$ είναι το σύνολο δεικτών (set of indices) j_2, για τους οποίους η μεταβλητή x μπορεί να γραφεί ως:

$$w_1 K_{1j_1} + w_2 K_{2j_2} = x,$$

για κάποια j_1 και j_2. Ισοδύναμα, το $\mathcal{D}_2(x)$ παίρνει την εξής μορφή:

$$\mathcal{D}_2 = \{h \in \{0, \ldots, m\} \mid x' = x - w_2 K_{2h} \geq 0 \text{ και } f_1(x') > l(z, y)\}.$$

Η g_2 ορίζεται ως η συνάρτηση που λαμβάνει τιμές στο σύνολο $\mathcal{D}_2(x)$ και μάλιστα παίρνει εκείνες τις τιμές που μεγιστοποιούν την συνάρτηση f_2. Συνολικά, στο δεύτερο βήμα έγιναν $O(m^2 M)$ πράξεις (όσα περιγράφηκαν προηγουμένως υλοποιούνται στα βήματα [8]-[17] του αλγόριθμου Separation_Problem που ακολουθεί). Συνεπώς, το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f_2(x)$ περιλαμβάνει τις μέγιστες τιμές της έκφρασης:

$$z + \sum_{j=1}^{m} (s_1 - K_{1j})^+ y_{1j} + \sum_{j=1}^{m} (s_2 - K_{2j})^+ y_{2j},$$

για (s_1, s_2) τ.ω. $x = w_1 s_1 + w_2 s_2$, όπου s_1 και s_2 κάποιες τιμές εξάσκησης από τα δεδομένα εισόδου (input data).

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία αυτή μέχρι και την συνάρτηση $f_n : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, διαπιστώνεται ότι η συνάρτηση $f_n(x)$ με $x \in \mathcal{D}$ ταυτίζεται με την μέγιστη τιμή του αριστερού μέλους του περιορισμού που εξετάζει το πρόβλημα διαχωρισμού, για κάθε $\mathbf{s} \in \mathfrak{C}_1$ τ.ω. $x = \mathbf{w} \cdot \mathbf{s}$, ενώ αν δεν υπάρχει τέτοιο $\mathbf{s}$, τότε $f_n(x) = l(z, y)$. Επίσης, η συλλογή

$$\big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\big)$$

δίνει τους δείκτες των τιμών εξάσκησης από το δεδομένα εισόδου, για τους οποίους επιτυγχάνεται η μεγιστοποίηση αυτή. Επομένως, συγκρίνοντας τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων $f_n(x)$ και $(x - K)^+$, μπορεί κανείς να βρει ένα υποσύνολο περιορισμών που παραβιάζονται πάνω στο σύνολο $\mathfrak{C}_1$ με $O(nm^2 M)$ πράξεις.

Ακολουθεί το μέρος της απόδειξης που ασχολείται με το σύνολο $\mathfrak{C}_2$. Ο τρόπος εργασίας είναι πανομοιότυπος με το πρώτο μέρος της απόδειξης με την εξαίρεση ότι πλέον ισχύει η εξής συνθήκη:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{s} = K.$$

Αυτή συνθήκη μπορεί να επαληθευτεί αν θεωρήσει κανείς το σύνολο $\mathfrak{B}_n$ (όπως αυτό είχε οριστεί στην υποενότητα 4.2.2) στο οποίο οι $n-1$ πρώτες συντεταγμένες $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ είναι ίσες με τιμές εξάσκησης από τα δεδομένα εισόδου και η $n-$οστή συντεταγμένη δίνεται από την σχέση:

$$w_n s_n = K - \sum_{i=1}^{n-1} w_i s_i.$$

Εάν αυτή την φορά θεωρηθεί ότι $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, K\}$ και ακολουθηθεί η ίδια διαδικασία όπως και στο πρώτο μέρος της απόδειξης μέχρι και τον υπολογισμό της συνάρτησης $f_{n-1} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, τότε θα επιτευχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα. Δηλαδή, οι τιμές που λαμβάνει η συνάρτηση $f_{n-1}(x)$ όταν $x = \sum_{i=1}^{n-1} w_i s_i \leq K$ αντιστοιχούν στις μέγιστες τιμές της έκφρασης:

$$z + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} (s_i - K_{ij})^+ \, y_{ij}.$$

Ανάλογα ορίζεται και η συλλογή με τους αντίστοιχους δείκτες:

$$\big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_{n-1}(x)\big).$$

Τέλος, υπολογίζεται η συνάρτηση $\tilde{f}(x)$:

$$\tilde{f}(x) = f_{n-1}(x) + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{K - x}{w_n} - K_{nj} \right)^+ y_{nj}, \quad x \in \mathcal{D}.$$

Συγκρίνοντας το σύνολο τιμών της συνάρτησης $\tilde{f}(x)$ με το 0, μπορεί κανείς να βρει ένα υποσύνολο περιορισμών που παραβιάζονται πάνω στο σύνολο $\mathfrak{B}_n$ με $O(nm^2K)$ πράξεις.

Το δεύτερο σκέλος της απόδειξης ολοκληρώνεται επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω και για τα σύνολα $\mathfrak{B}_1, \ \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}$. Επομένως, το **πρόβλημα διαχωρισμού** επιλύεται συνολικά με $O\left(nm^2(M + nK)\right)$ πράξεις.

□

Δεδομένου ότι υπάρχει η απαιτούμενη υπολογιστική ισχύς, η πολυπλοκότητα (complexity) της παραπάνω διαδικασίας μπορεί να μειωθεί. Εάν ο μέγιστος κοινός διαρέτης - Μ.Κ.Δ. (greatest common divisor - G.C.D.) στοιχείων της μορφής:

$$\{w_i s_i \ \forall \ i \text{ και } \forall \ \mathbf{s} \in \mathfrak{C}_1\},$$

συμβολιστεί με d, τότε αρκεί κάθε υπολογισμός να γίνει στο σύνολο:

$$\mathcal{J} := \{0, d, 2d, \ldots, M\},$$

μειώνοντας κατ΄ αυτόν τον τρόπο τις συνολικές απαιτούμενες πράξεις κατά έναν παράγοντα (factor) της τάξης του d. Το σύνολο $\mathcal{J}$ μπορεί να φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο όταν οι τιμές εξάσκησης (strike prices) στα δεδομένα εισόδου αποτελούν πολλαπλάσια ενός αριθμού.

Ακολουθεί αλγόριθμος ο οποίος επιλύει το **πρόβλημα διαχωρισμού**. Ο ψευδοκώδικας επιστρέφει το διάνυσμα $\mathbf{s}$ το οποίο παραβιάζει περισσότερο τον περιορισμό που εξετάζει το **πρόβλημα διαχωρισμού** πάνω στα σύνολα $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2, \ldots,$ $\mathfrak{B}_n$. Κατά σύμβαση, υιοθετείται ο εξής συμβολισμός για τον παρακάτω αλγόριθμο:

$$\mathrm{ind}(s_i) = j \text{ όπου } s_i = K_{ij},$$

δηλαδή αποτελεί συντομογραφία για τον δείκτη (index) τιμής εξάσκησης που εμφανίζεται στο $j-$οστό ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (call option) το οποίο σχετίζεται με το $i-$οστό χρεόγραφο.

Η πολυωνυμική ισοδυναμία (polynomial equivalence) μεταξύ του προβλήματος Γ.Π. (4.2.4) και του αντίστοιχου **προβλήματος διαχωρισμού** (με την έννοια ότι εφόσον το ένα πρόβλημα λύνεται με πολυωνυμικά πολλές πράξεις, το ίδιο θα ισχύει και για το άλλο πρόβλημα) ισχύει λόγω της **υπόθεσης 2** που έγινε στην υποενότητα 4.2.1 σε συνδυασμό με τον τρόπο με τον οποίο έχουν οριστεί τα σύνολα $\mathfrak{C}_1$ και $\mathfrak{C}_2$. Το ζήτημα αυτό μπορεί να διερευνηθεί περαιτέρω μέσω του θεωρήματος 14.1 και των συνεπειών του, στην πηγή: [21]. Ως εκ τούτου, προκύπτει το ακόλουθο συμπέρασμα.

Συμπέρασμα 4.2.1
Εάν οι υποθέσεις που έγιναν στην υποενότητα 4.2.1 ισχύουν, τότε το πρόβλημα Γ.Π. (4.2.4) μπορεί να επιλυθεί με πολυωνυμικό, ως προς n και m, αριθμό πράξεων.

Παρόλο που οι μέθοδοι ελλειψοειδούς (ellipsoid methods) θεωρούνται πιο αποτελεσματικές, στην πράξη δεν έχει διαπιστωθεί κάτι τέτοιο, σύμφωνα με την δημοσίευση [12]. Ο αλγόριθμος Separation_Problem χρησιμοποιείται στην πράξη μέσω μιας διαφορετικής προσέγγισης. Ειδικότερα, η προσέγγιση αυτή ξεκινάει από ένα αρχικό σύνολο περιορισμών, έστω $\mathfrak{C}$, για το πρόβλημα Γ.Π. (4.2.4) το οποίο με την σειρά του επιλύεται και προκύπτει η βέλτιστη λύση $(z^{(0)}, y^{(0)})$.

Στην συνέχεια, η βέλτιστη λύση $(z^{(0)}, y^{(0)})$ χρησιμοποιείται ως είσοδος στο **πρόβλημα διαχωρισμού** προκειμένου να προστεθεί ο περιορισμός που παραβιάζεται περισσότερο στο ευρύτερο σύνολο $\mathfrak{C}$. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται ξεκινώντας όμως με το εμπλουτισμένο σύνολο περιορισμών προς απόκτηση της επόμενης βέλτιστης λύσης $(z^{(1)}, y^{(1)})$ και ούτω καθεξής. Ο αλγόριθμος Lower_Bound υλοποιεί την επαναληπτική αυτή διαδικασία που μόλις περιγράφηκε.

Algorithm 1 Separation_Problem

1: **for all** $x \in \mathcal{J}$ **do**
2:     **if** $x = w_1 K_{1h},\ \forall\, h \in \{0, \ldots, m\}$ **then**
3:         **set** $f_1(x) = z + \sum_{j=1}^{m} (K_{1h} - K_{1j})^+ y_{1j}$ **and** $g_1(x) = h$;
4:     **else**
5:         **set** $f_1(x) = l(z, y)$ **and** $g_1(x) = 0$;
6:     **end if**
7: **end for**
8: **for** $i = 2 : n$ **do**
9:     **initialize** $f_i(x) = l(z, y)$ **and** $g_i(x) = 0,\ \forall\, x \in \mathcal{J}$;
10:     **for all** $x \in \mathcal{J}$ **do**
11:         **for** $h = 0 : m$ **do**
12:             **if** $f_{i-1}(x - w_i K_{ih}) > l(z, y)$ **and** $\xi := f_{i-1}(x - w_i K_{ih}) + \sum_{j=1}^{m} (K_{ih} - K_{ij})^+ y_{ij} \geq f_i(x)$ **then**
13:                 **set** $f_i(x) = \xi$ **and** $g_i(x) = h$;
14:             **end if**
15:         **end for**
16:     **end for**
17: **end for**
18: $x^* := \arg\max \left\{ f_n(x) - (x - K)^+ \right\}$;
19: **if** $f_n(x^*) > (x^* - K)^+$ **then**
20:     **return** $\mathbf{s}$ **such that** $\mathrm{ind}(s_i) = g_i(x^*),\ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
    // Returns $\mathbf{s}$ *that violates the constraint the most over* $\mathfrak{C}_1$.
21: **end if**
22: **for** $p = n : 1$ **do**
23:     **while** $x \leq K$ **do**
24:         **steps** [1]-[7] **and** [8]-[17] **with** $i \in \mathcal{I} := \{1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n\}$;
25:     **end while**
26:     **for all** $x \in \mathcal{J}$ **and** $x \leq K$ **do**
27:         **compute** $\tilde{f}(x) := f_{\max \mathcal{I}}(x) + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{K-x}{w_p} - Kpj \right)^+ y_{pj}$;
28:     **end for**
29:     $x^* := \arg\max \left\{ \tilde{f}(x) \right\}$;
30:     **if** $\tilde{f}(x^*) > 0$ **then**
31:         **return** $\mathbf{s}$ **such that** $\mathrm{ind}(s_i) = g_i(x^*),\ \forall\, i \in \mathcal{I}$ **and** $s_p = \frac{K - x^*}{w_p}$;
        // Returns $\mathbf{s}$ *that violates the constraint the most over* $\mathfrak{B}_p$.
32:     **end if**
33: **end for**

Το υπολογιστικό πλεονέκτημα (computational advantage) αυτής της μεθόδου έναντι των υπολοίπων εξαρτάται από το σύνολο $\mathfrak{C}$ που χρησιμοποιείται ως είσοδος, γεγονός το οποίο θα διαπιστωθεί αργότερα στην ενότητα των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

Algorithm 2 Lower_Bound

initialize $\mathfrak{C}$ **and set** flag $= 0$;
while flag $= 0$ **do**
  solve (4.2.4) **with** $\mathfrak{C}$ **to obtain** (z^*, y^*) **and the optimum** c^*;
  solve Separation_Problem **for** (z^*, y^*) **and find violated constraints** $\mathfrak{C}'$;
  if $\mathfrak{C}' = \emptyset$ **then**
    flag $= 1$;
    return c^*;
  else
    update $\mathfrak{C}$ **by** $\mathfrak{C} \cup \mathfrak{C}'$;
  end if
end while

Ας σημειωθεί ότι ο αλγόριθμος Separation_Problem εντοπίζει κάθε φορά τον περιορισμό $\mathfrak{C}'$ που παραβιάζεται περισσότερο πάνω στα σύνολα $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2, \ldots,$ $\mathfrak{B}_n$. Επίσης, ο αλγόριθμος Lower_Bound «τρέχει» έως ότου να μη παραβιάζεται κανένας περιορισμός, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ο κίνδυνος εκθετικών επαναλήψεων (exponential iterations). Αυτό μπορεί να αποφεχθεί, μέσω ενός κριτηρίου τερματισμού, θέτοντας π.χ. ένα ανώτατο όριο επαναλήψεων ή ένα $\epsilon-$κριτήριο βελτιστότητας ($\epsilon-$optimality criterion).

4.2.5 Επέκταση σε Αρνητικά Βάρη

Η ιδέα που υλοποιήθηκε στις προηγούμενες υποενότητες μπορεί να επεκταθεί και σε δυνητικά αρνητικά βάρη για τα ευρωπαϊκά basket δικαιώματα αγοράς. Εφόσον η περίπτωση όπου $\mathbf{w} < \mathbf{0}$ είναι τετριμμένη, υποτίθεται ότι υπάρχουν δύο μη κενά και ξένα μεταξύ τους σύνολα $\mathcal{I}_1$ και $\mathcal{I}_2$ τ.ω.

$$w_{i_1} > 0, \ \forall \ i_1 \in \mathcal{I}_1,$$

$$w_{i_2} < 0, \ \forall \ i_2 \in \mathcal{I}_2$$

και

$$\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιων δικαιωμάτων αποτελούν τα **spread δικαιώματα**, των οποίων η αποπληρωμή βασίζεται στην διαφορά τιμών δύο ή περισσότερων χρεογράφων. Ακολουθώντας την ίδια τακτική όπως και στις υποενότητες 4.2.2 και 4.2.3

κατασκευάζεται ισοδύναμη μορφή για το πρόβλημα (4.2.3). Μια συλλογή περιορισμών που προκύπτει με φυσικό τρόπο είναι η εξής:

$$\sum_{j=1}^{m} y_{ij} \leq w_i^+, \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

ωστόσο σε αντίθεση με την ισοδυναμία των προβλημάτων (4.2.3)-(4.2.4) η προκειμένη περίπτωση απαιτεί περισσότερους περιορισμούς στο ισοδύναμο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Πρόταση 4.2.3

Έστω $\mathbf{w}_{\mathcal{I}_1} > \mathbf{0}$ και $\mathbf{w}_{\mathcal{I}_2} < \mathbf{0}$ για δύο ξένα μεταξύ τους και μη κενά σύνολα τ.ω. $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$, τότε το πρόβλημα Γ.Π. (4.2.3) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο πρόβλημα Γ.Π.

$$\max_{z \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^{n \times m}} \ z + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} y_{ij}, \tag{4.2.6}$$

$$\begin{aligned} z + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (s_i - K_{ij})^+ y_{ij} \leq (\mathbf{w} \cdot \mathbf{s} - K)^+, &\quad \forall\, \mathbf{s} \in \mathfrak{C}_0, \\ \sum_{j=1}^{m} y_{ij} \leq w_i^+, &\quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}, \\ w_{i_1} \sum_{j=1}^{m} y_{i_2 j} \leq w_{i_2} \sum_{j=1}^{m} y_{i_1 j}, &\quad \forall\, i_1 \in \mathcal{I}_1 \text{ και } i_2 \in \mathcal{I}_2. \end{aligned}$$

Απόδειξη.

Αρχικά αποδεικνύεται ο ισχυρισμός ότι ένα ζεύγος (z, y) ικανοποιεί τον περιορισμό:

$$z + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (s_i - K_{ij})^+ y_{ij} \leq (\mathbf{w} \cdot \mathbf{s} - K)^+, \qquad \forall\, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$$

αν και μόνο αν ικανοποιεί την ακόλουθη συλλογή περιορισμών:

$$\begin{aligned} z + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (s_i - K_{ij})^+ y_{ij} \leq (\mathbf{w} \cdot \mathbf{s} - K)^+, &\qquad \forall\, \mathbf{s} \in \mathfrak{C}_0, \\ \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\eta} \leq (\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{w})^+, &\qquad \forall\, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}, \end{aligned}$$

όπου $\eta_i = \sum_{j=1}^{m} y_{ij}$ με $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Για την ορθή φορά της ισοδυναμίας, αρκεί για σταθερό $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ και $\mathbf{s} = p\boldsymbol{\lambda}$ (για αυθαίρετο p) να διαιρεθεί κατά μέλη η πρώτη ανισότητα με p και στην συνέχεια καθώς

$p \to \infty$, προκύπτει ότι $\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\eta} \leq (\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{w})^+$.

Για την αντίστροφη φορά της ισοδυναμίας, εάν θεωρηθούν οι μη φραγμένες περιοχές (unbounded regions) οι οποίες κατασκευάζονται με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα 4.1. Έστω $\tilde{\mathcal{I}}$ το σύνολο δεικτών τ.ω. η ποσότητα s_i να είναι φραγμένη, για κάθε $i \in \tilde{\mathcal{I}}$. Επομένως, ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$z + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (s_i - K_{ij})^+ y_{ij} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{s} - K)^+$$
$$||$$
$$(\text{γραμμικοί και φραγμένοι όροι}) + \sum_{i \in \tilde{\mathcal{I}}} s_i \eta_i - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{s} - K)^+.$$

Σε μια τέτοια μη φραγμένη περιοχή, η συνάρτηση $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{s} - K)^+$ είναι γραμμική, οπότε το δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας είτε μεγιστοποιείται σε ακραίο σημείο της περιοχής αυτής (σύμφωνα με το θεώρημα 2.3.3) είτε είναι μη φραγμένο.

Ωστόσο από τον περιορισμό:

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\eta} \leq (\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{w})^+, \quad \forall\, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0},$$

προκύπτει η εξής ανισότητα:

$$\sum_{i \in \tilde{\mathcal{I}}} s_i \eta_i - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{s} - K)^+ \leq (\mathbf{s}_{\tilde{\mathcal{I}}} \cdot \mathbf{w}_{\tilde{\mathcal{I}}})^+ - (\mathbf{s}_{\tilde{\mathcal{I}}} \cdot \mathbf{w}_{\tilde{\mathcal{I}}} + \mathbf{s}_{\tilde{\mathcal{I}}^c} \cdot \mathbf{w}_{\tilde{\mathcal{I}}^c} - K)^+,$$

από την οποία φαίνεται ότι το δεύτερο μέλος της προηγούμενης ισότητας είναι φραγμένο. Όσον αφορά στον συμβολισμό που χρησιμοποιήθηκε στις τελευταίες σχέσεις, με $\mathbf{s}_{\tilde{\mathcal{I}}}$ συμβολίζεται το διάνυσμα που περιέχει τις s_i συντεταγμένες του $\mathbf{s}$, για τις οποίες $i \in \tilde{\mathcal{I}}$.

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αξιοποιώντας το ακόλουθο λήμμα.

□

Λήμμα 4.2.1

Έστω $\mathbf{w}_{\mathcal{I}_1} > \mathbf{0}$ και $\mathbf{w}_{\mathcal{I}_2} < \mathbf{0}$ για δύο ξένα μεταξύ τους και μη κενά σύνολα τ.ω. $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$, τότε το διάνυσμα $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\eta} \leq (\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{w})^+, \qquad \forall\, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0},$$

αν και μόνο αν

$$\boldsymbol{\eta} \leq \mathbf{w}^+$$

και

$$w_{i_1} \eta_{i_2} \leq w_{i_2} \eta_{i_1}, \qquad \forall\, i_1 \in \mathcal{I}_1 \quad \text{και} \quad i_2 \in \mathcal{I}_2.$$

Απόδειξη.

$$(\Longrightarrow)$$

Για την ορθή φορά του λήμματος, αρχικά θεωρείται η κανονική βάση (canonical basis) του $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ η οποία αποτελείται από τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \ldots,\ \mathbf{e_n}$. Από την δεδομένη συνθήκη, για $a, b > 0$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\eta} &= a\eta_{i_1} + b\eta_{i_2} \\ &\leq (aw_{i_1} + bw_{i_2})^+,\end{aligned}$$

όπου $\boldsymbol{\lambda} = a\mathbf{e}_{i_1} + b\mathbf{e}_{i_2}$.

Επιλέγοντας $a = -\frac{bw_{i_2}}{w_{i_1}}$ εύκολα διαπιστώνεται ότι:

$$w_{i_2}\eta_{i_1} \geq w_{i_1}\eta_{i_2}.$$

Τα παραπάνω ισχύουν για κάθε ζεύγος (i_1, i_2) τ.ω. $w_{i_1} > 0$ και $w_{i_2} < 0$.

$$(\Longleftarrow)$$

Για την αντίστροφη φορά του λήμματος, εάν $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\mathcal{I}_1}} = \mathbf{0}$ με $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$, τότε η προς απόδειξη ανισότητα γίνεται

$$\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\mathcal{I}_2}} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mathcal{I}_2}} \leq 0.$$

Δηλαδή, αρκεί να δειχθεί ότι $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mathcal{I}_2}} \leq \mathbf{0}$, το οποίο αποτελεί άμεσο επακόλουθο της σχέσης:

$$\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mathcal{I}_2}} \leq \mathbf{w}^+_{\boldsymbol{\mathcal{I}_2}} = \mathbf{0}.$$

Εάν $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\mathcal{I}_2}} = \mathbf{0}$ με $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$, τότε πρέπει να δειχθεί ότι

$$\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\mathcal{I}_1}} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mathcal{I}_1}} \leq \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\mathcal{I}_1}} \cdot \mathbf{w}_{\boldsymbol{\mathcal{I}_1}},$$

το οποίο προκύπτει άμεσα από

$$\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mathcal{I}_1}} \leq \mathbf{w}^+_{\boldsymbol{\mathcal{I}_1}} = \mathbf{w}_{\boldsymbol{\mathcal{I}_1}}.$$

Επομένως για το υπόλοιπο της απόδειξης υποτίθεται ότι $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\mathcal{I}_1}} \neq \mathbf{0}$ και $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\mathcal{I}_2}} \neq \mathbf{0}$. Έστω $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ τ.ω. να ισχύει η παραπάνω υπόθεση. Από την ισχύουσα συνθήκη προκύπτει ότι:

$$\lambda_{i_1}\eta_{i_1}w_{i_2}\lambda_{i_2} \geq \lambda_{i_1}w_{i_1}\eta_{i_2}\lambda_{i_2},$$

για όλα τα ζεύγη (i_1, i_2) για τα οποία $w_{i_1} > 0$ και $w_{i_2} < 0$.

Αθροίζοντας πάνω στα σύνολα $\mathcal{I}_1$ και $\mathcal{I}_2$ προκύπτει η εξής σχέση:

$$(\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_1} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathcal{I}_1})(\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_2} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{I}_2}) \geq (\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_1} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{I}_1})(\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathcal{I}_2}). \tag{4.2.7}$$

Επίσης, από την σχέση $\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_2} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{I}_2} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_1} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{I}_1}$, προκύπτει άμεσα ότι

$$(\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_1} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathcal{I}_1})(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{w}) \geq (\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_1} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{I}_1})(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\eta}) \tag{4.2.8}$$

και η έκφραση $\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_1} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{I}_1} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_2} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{I}_2}$ εάν συνδυαστεί με την ανισότητα (4.2.7) προκύπτει η εξής σχέση:

$$(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_2} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{I}_2}) \geq (\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathcal{I}_2})(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{w}). \tag{4.2.9}$$

Εάν $\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{w} \geq 0$, τότε η ανισότητα (4.2.8) σε συνδυασμό με τις σχέσεις:

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_1} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathcal{I}_1} \leq \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_1} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{I}_1}$$

και

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_1} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{I}_1} > 0$$

οδηγεί στο ζητούμενο::

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\eta} \leq \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{w}.$$

Εάν $\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{w} \leq 0$, τότε ανισότητα (4.2.9) σε συνδυασμό με τις σχέσεις:

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_2} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{I}_2} < 0$$

και

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{I}_2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathcal{I}_2} \leq 0$$

οδηγεί στο ζητούμενο:

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\eta} \leq 0.$$

□

Ο αλγόριθμος Separation_Problem μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να καλύπτεται και η περίπτωση αρνητικών βαρών, ωστόσο η κεντρική ιδέα παραμένει η ίδια. Αρκεί το σύνολο $\mathcal{D}$, που εμφανίζεται στην απόδειξη της πρότασης 4.2.2, να γίνει ίσο με:

$$\mathcal{D} = \Big\{ -M_2, -M_2+1, \ldots, M_1-1, M_1 \Big\},$$

όπου $M_1 = \sum_{i\in\mathcal{I}_1} w_i K_{im}$ και $M_2 = -\sum_{i\in\mathcal{I}_2} w_i K_{im}$.

4.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Στα αριθμητικά πειράματα που ακολουθούν μεταβάλλεται τόσο το μέγεθος n των ευρωπαϊκών basket δικαιωμάτων αγοράς (basket options) όσο και πλήθος m των διαθέσιμων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς (call options) ανά χρεόγραφο. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούνται περιπτώσεις basket δικαιωμάτων μεγέθους 3, 4, 5, 6 και 8 χρεογράφων και ο αριθμός των διαθέσιμων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς αγγίζει σε μερικές περιπτώσεις τις εκατοντάδες (π.χ. στην περίπτωση $n = 3$). Οι τιμές που λαμβάνουν τα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς, τα οποία χρησιμοποιούνται στα ακόλουθα πειράματα, υπολογίζονται με την βοήθεια της φόρμουλας Black-Scholes, η οποία αναφέρθηκε στην υποενότητα 1.2.1. Μάλιστα, ιδιαίτερα χρήσιμη στον παραπάνω υπολογισμό είναι η πρόταση 1.2.1. Σημειωτέον ότι σε όλες τις περιπτώσεις η αρχική τιμή (spot price) των χρεογράφων είναι ίση με:

$$S_i(0) = 100, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$$

και η στοχαστική μεταβλητότητα (stochastic volatility) των χρεογράφων (volatility vector: $\boldsymbol{\sigma}$) δίνεται από τον πίνακα 4.1. Επίσης, στον πίνακα 4.1 καταγράφονται οι τιμές που λαμβάνουν τα διανύσματα με τα βάρη των basket δικαιωμάτων (weight vector: $\mathbf{w}$).

n	Τιμές διανυσμάτων $\boldsymbol{\sigma}$ και $\mathbf{w}$								
3	$\boldsymbol{\sigma}$	1.0	1.6	2.0					
	$\mathbf{w}$	0.3	0.35	0.35					
4	$\boldsymbol{\sigma}$	0.3	0.3	1.8	1.2				
	$\mathbf{w}$	0.1	0.2	0.3	0.4				
5	$\boldsymbol{\sigma}$	0.3	0.4	0.8	1.8	1.9			
	$\mathbf{w}$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2			
6	$\boldsymbol{\sigma}$	0.3	0.5	1.3	1.5	1.9	2.1		
	$\mathbf{w}$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.3		
8	$\boldsymbol{\sigma}$	0.1	0.2	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
	$\mathbf{w}$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3

Πίνακας 4.1: Παράμετροι αριθμητικών πειραμάτων.

Όσον αφορά στις τιμές εξάσκησης των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς, ξεκινούν από $K_{i1} = 100$, για το εκάστοτε χρεόγραφο i και καθώς αυξάνονται κατά πλήθος τα διαθέσιμα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς (δηλαδή καθώς αυξάνεται το m) η τιμή εξάσκησης αυξάνεται και αυτή με μοναδιαίο βήμα (δηλαδή step $+= 1$). Ο ακόλουθος πίνακας 4.2 περιέχει τις τιμές εξάσκησης στην γενική περίπτωση όπου οι διαστάσεις m και n δεν λαμβάνουν κάποια συγκεκριμένη τιμή.

Χρεόγραφο i	Τιμές εξάσκησης						
1	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}	$\ldots$	K_{1m}
	100	101	102	103	104	$\ldots$	$100+(m-1)$
2	K_{21}	K_{22}	K_{23}	K_{24}	K_{25}	$\ldots$	K_{2m}
	100	101	102	103	104	$\ldots$	$100+(m-1)$
3	K_{31}	K_{32}	K_{33}	K_{34}	K_{35}	$\ldots$	K_{3m}
	100	101	102	103	104	$\ldots$	$100+(m-1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	K_{n1}	K_{n2}	K_{n3}	K_{n4}	K_{n5}	$\ldots$	K_{nm}
	100	101	102	103	104	$\ldots$	$100+(m-1)$

Πίνακας 4.2: Τιμές εξάσκησης των call options στα αριθμητικά πειράματα.

Είναι γεγονός ότι η επίδοση του αλγορίθμου Lower_Bound εξαρτάται από την επιλογή του αρχικού συνόλου περιορισμών $\mathfrak{C}$. Τα αριθμητικά πειράματα εκπονήθηκαν με χρήση ενός πιο «φτωχού» συνόλου από τα σύνολα $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}_1$ και $\mathfrak{C}_2$ τα οποία περιέχουν εκθετικά ως προς n στοιχεία. Το σύνολο αυτό συμβολίζεται με $\mathfrak{C}_3$ και ορίζεται ως εξής:

$$\mathfrak{C}_3 = \Big\{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid s_i = K_{i0} \text{ ή } K_{im},\ i \in \{1, \ldots, n\} \text{ και } s_j = K_{jp},\ \forall\, j \neq i,\ p \in \{1, \ldots, m\}\Big\}.$$

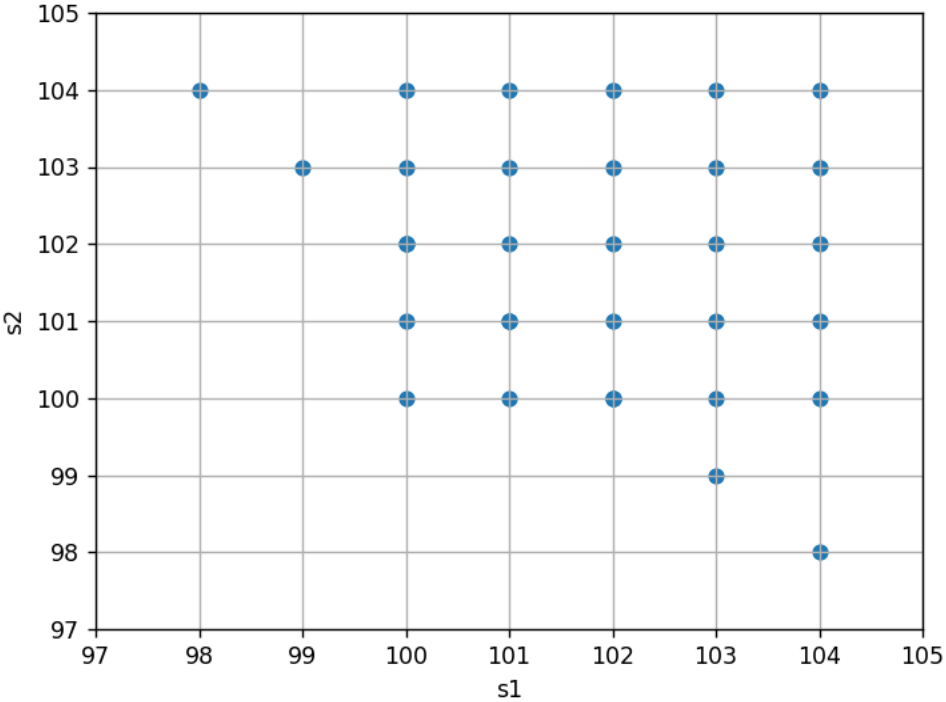
Διαπιστώνεται ότι με το σύνολο $\mathfrak{C}_3$ είναι επιλύσιμο μεγαλύτερο εύρος προβλημάτων, ως προς τις διαστάσεις τους, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση γραμμικού προγραμματισμού για την οποία έγινε λόγος στην προηγούμενη ενότητα. Για την μοντελοποίηση και την επίλυση των γραμμικών προγραμμάτων που συζητήθηκαν στο κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιήθηκε ο CPLEX solver σε Python[(8)].

Πριν παρουσιαστούν τα αριθμητικά πειράματα με τα συνθετικά δεδομένα (synthetic data) που αναφέρθηκαν προ λίγου, γίνεται μια συνοπτική επισκόπηση των συνόλων $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2$ και $\mathfrak{C}_3$ γραφικά σε χαμηλές διαστάσεις, για $n = 2$ (στο επίπεδο) και $n = 3$ (στον χώρο) με βολικές τιμές για το m, ώστε να γίνει κατανοητή η μορφή των συνόλων που υπεισέρχονται στους περιορισμούς των προβλημάτων Γ.Π. όπως π.χ. στο πρόβλημα (4.2.4).

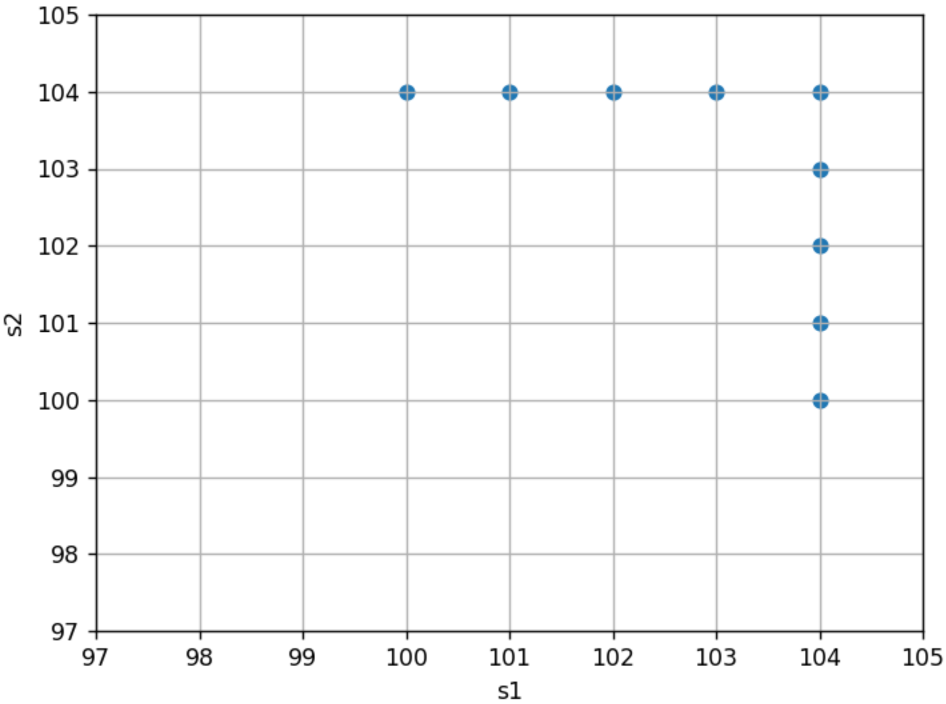
Για την γραφική αναπαράσταση των συνόλων, επιλέχθηκε η τιμή εξάσκησης (strike price) $K = 101$ για το basket δικαίωμα, ώστε να προκύψει συμμετρία με το σχήμα 4.1 στην υποενότητα 4.2.3.

---

(8) Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον CPLEX solver μπορούν να βρεθούν στην ιστοσελίδα: https://www.ibm.com/analytics/cplex-optimizer.

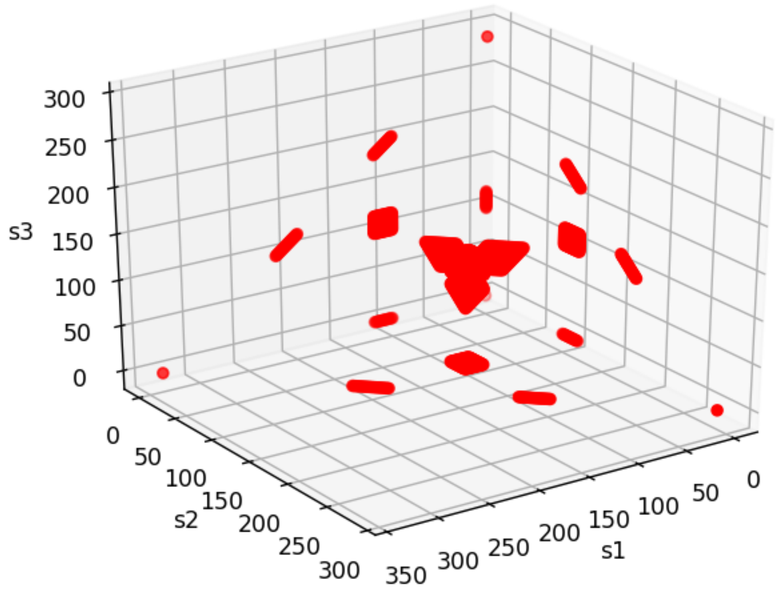


(i) Υποπεριοχή του συνόλου $\mathfrak{C}_0$.

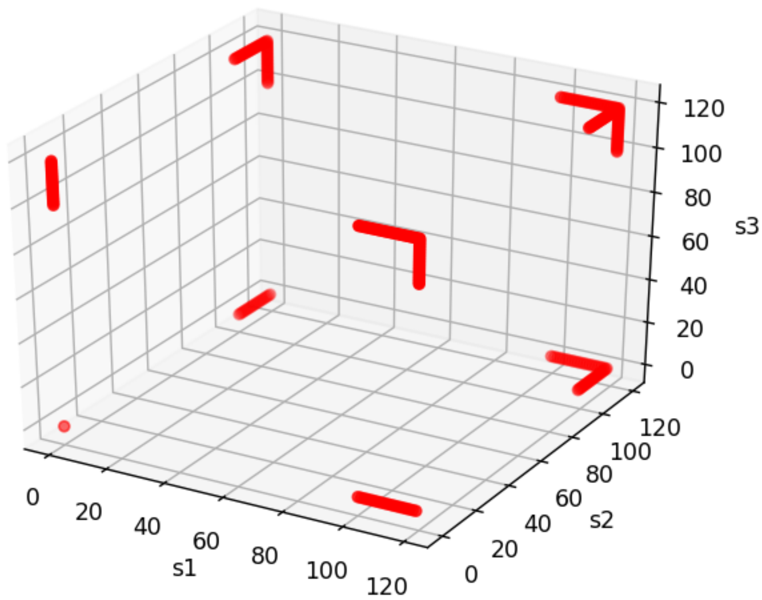


(ii) Υποπεριοχή του συνόλου $\mathfrak{C}_3$.

Σχήμα 4.2: Στιγμιότυπα των συνόλων $\mathfrak{C}_0$ και $\mathfrak{C}_3$ για $n = 2$ και $m = 5$.



(i) Το σύνολο $\mathfrak{C}_0$.



(ii) Το σύνολο $\mathfrak{C}_3$.

Σχήμα 4.3: Στιγμιότυπα των συνόλων $\mathfrak{C}_0$ και $\mathfrak{C}_3$ για $n = 3$ και $m = 20$.

Οι απεικονίσεις του σχήματος 4.2 αναπαριστούν υποπεριοχές του πρώτου τεταρτημορίου (first quadrant) $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$, πιο συγκεκριμένα απεικονίζονται ορθογώνια της μορφής $[97, 105] \times [97, 105]$ όπου παρατηρείται ομοιότητα με το σχήμα 4.1. Τα σημεία τομής με τους άξονες δεν απεικονίζονται στα σχήματα, λόγω εστίασης στις συγκεκριμένη ορθογώνια υποπεριοχή.

Η πρώτη απεικόνιση του σχήματος 4.3, αφορά το σύνολο $\mathfrak{C}_0$ στον χώρο $\mathbb{R}^3_{\geq 0}$. Παρατηρώντας προσεκτικά, μπορούν να διακριθούν τα σύνολα $\mathfrak{C}_1$ και $\mathfrak{C}_2$, το $\mathfrak{C}_1$ σε μορφή κυβικού πλέγματος διακριτών σημείων και τα σημεία του $\mathfrak{C}_2$ τα οποία ουσιαστικά είναι τα σημεία τομής του υπερεπιπέδου που ορίζει η συνάρτηση αποπληρωμής του basket δικαιώματος με το $\mathfrak{C}_1$. Επίσης, διακρίνονται και οι τομές με τα επίπεδα xOy, xOz και yOz ως ορθογώνιες επιφάνειες. Η διακριτοποίηση δεν είναι εμφανής όπως θα περίμενε κανείς, λόγω της επιλογής $m = 20$.

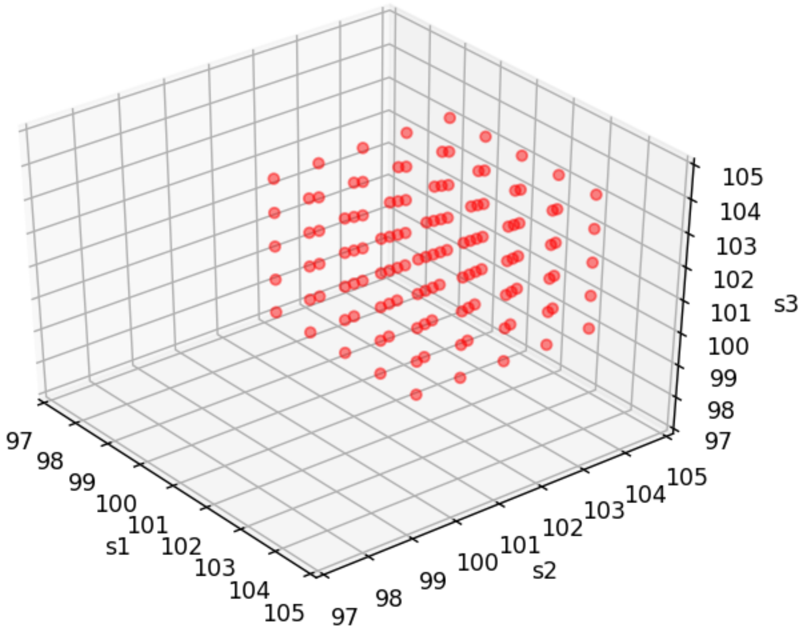
Κατ΄ αναλογία απεικονίζεται και το σύνολο $\mathfrak{C}_3$ στον χώρο $\mathbb{R}^3_{\geq 0}$. Διαπιστώνεται με ευκολία πως το καινούργιο σύνολο $\mathfrak{C}_3$ περιέχει λιγότερα στοιχεία από το $\mathfrak{C}_0$, γεγονός το οποίο συνδέεται άμεσα με την απόδοση του αλγορίθμου Lower_Bound.

Λίγα ακόμη λόγια σχετικά με το σύνολο $\mathfrak{C}_0$ στον χώρο $\mathbb{R}^3_{\geq 0}$. Το σχήμα 4.4 που ακολουθεί περιέχει ξεχωριστές γραφικές αναπαραστάσεις των συνόλων $\mathfrak{C}_1$ και $\mathfrak{C}_2$ στην υποπεριοχή $[97, 105] \times [97, 105] \times [97, 105]$ του $\mathbb{R}^3_{\geq 0}$, όπου το υπερεπίπεδο που ορίζεται από την αποπληρωμή του basket δικαιώματος τέμνει το κυβικό πλέγμα διακριτών τιμών του συνόλου $\mathfrak{C}_1$. Οι τομές με τα επίπεδα xOy, xOz και yOz, όπως επίσης τα σημεία τομής με τους άξονες δεν φαίνονται στην γραφική αναπαράσταση λόγω της εστίασης στην προαναφερθείσα υποπεριοχή. Το σύνολο $\mathfrak{C}_0$ ορίζεται ως η ένωση των συνόλων $\mathfrak{C}_1$ και $\mathfrak{C}_2$.

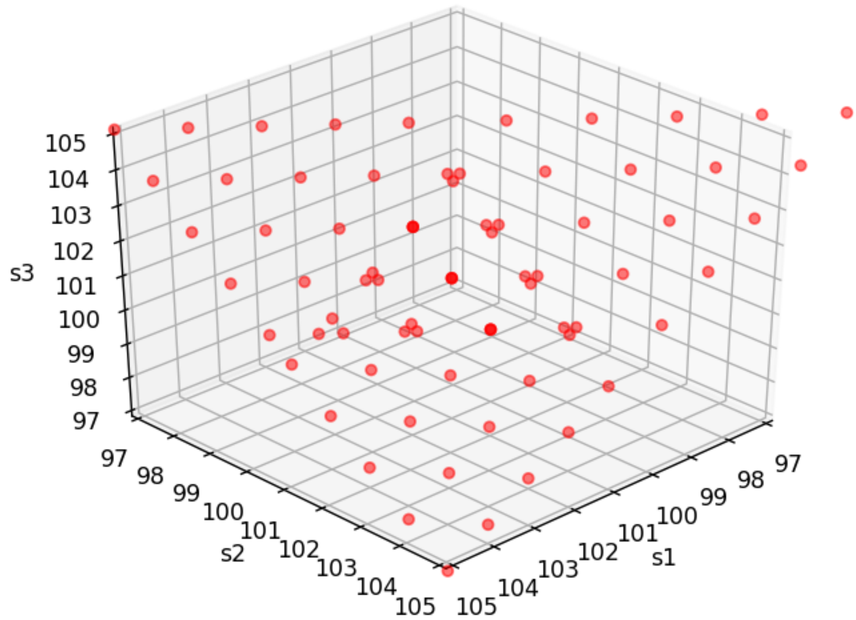
Συνοψίζοντας, επιλέχθηκαν βολικές τιμές των παραμέτρων:

- m: πλήθος διαθέσιμων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς (call options) με τιμές εξάσκησης όπως φαίνονται στον πίνακα 4.2,
- K: τιμή εξάσκησης ευρωπαϊκού basket δικαιώματος αγοράς (basket option)

σε συνδυασμό με τα δεδομένα που περιέχει ο πίνακας 4.1 για το διάνυσμα με τα βάρη $\mathbf{w}$ και σχεδιάστηκαν διάφορα στιγμιότυπα των συνόλων $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ και $\mathfrak{C}_3$ σε χαμηλές διαστάσεις όπου $n = 2$ και $n = 3$.



(i) Υποπεριοχή του συνόλου $\mathfrak{C}_1$.



(ii) Υποπεριοχή του συνόλου $\mathfrak{C}_2$.

Σχήμα 4.4: Στιγμιότυπα των συνόλων $\mathfrak{C}_1$ και $\mathfrak{C}_2$ για $n = 3$ και $m = 5$.

4.3.1 Περίπτωση Basket Δικαιώματος με 3 Χρεόγραφα

Στην προκειμένη περίπτωση παρατηρείται ότι επιλύεται πρόβλημα αρκετά μεγάλων διαστάσεων, λόγω της χαμηλής διάστασης του n. Τα αποτελέσματα μάλιστα επαληθεύονται, καθώς ταυτίζονται με αυτά της δημοσίευσης [12].

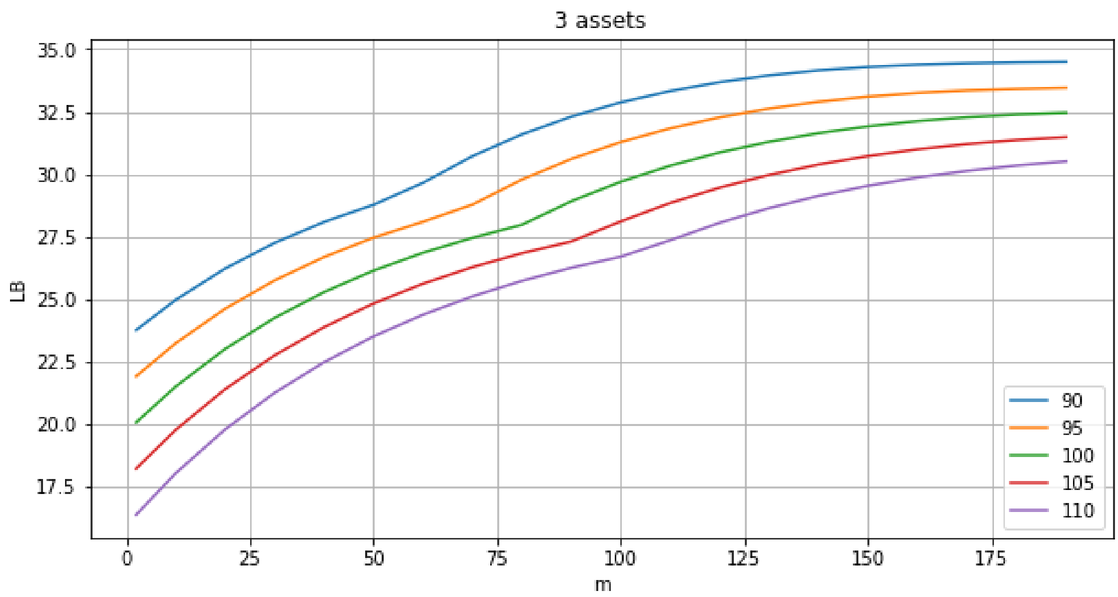
Ειδικότερα, όπως υπαινίχθηκε και στην εισαγωγή αυτής της υποενότητας, σε αυτή την περίπτωση επιλύονται προβλήματα όπου το πλήθος των διαθέσιμων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς (call options) ανέρχεται σε 190 (δηλαδή $m = 190$).

Επίσης, θεωρούνται 5 διαφορετικά basket δικαιώματα, όπου για την τιμή εξάσκησής τους ισχύει:

$$K \in \Big\{90, 95, 100, 105, 110\Big\},$$

εξού και οι 5 διαφορετικές γραφικές παραστάσεις του σχήματος 4.5.

Τέλος, παρατηρείται μια αύξουσα συμπεριφορά των κάτω φραγμάτων (lower bounds) καθώς το πλήθος των διαθέσιμων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς m αυξάνεται,



Σχήμα 4.5: Κάτω φράγματα στην τιμή basket δικαιώματος με $n = 3$.

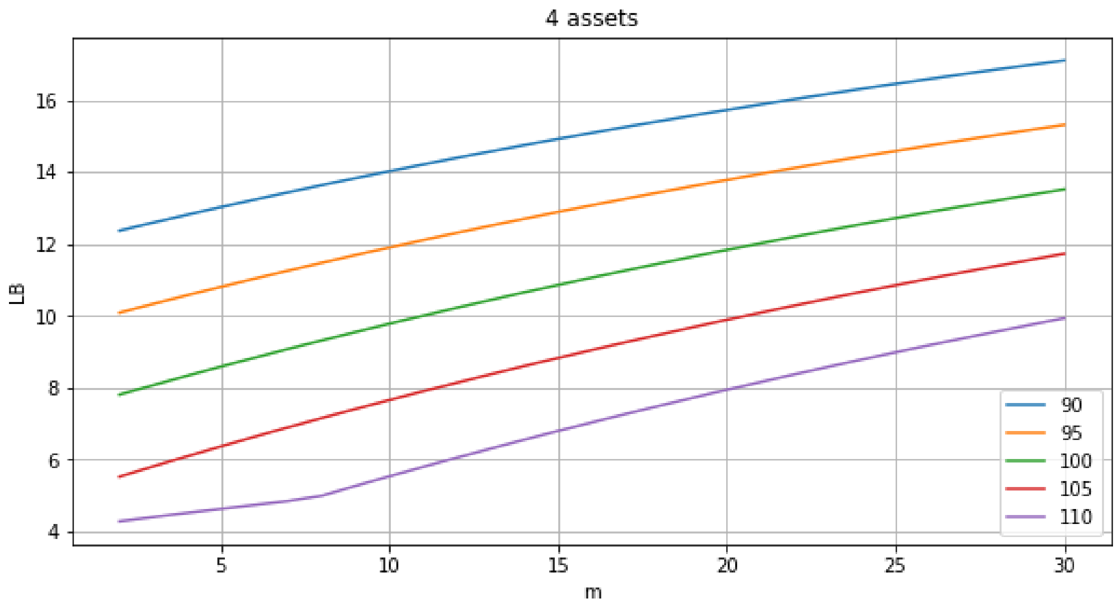
4.3.2 Περίπτωση Basket Δικαιώματος με 4 Χρεόγραφα

Σε αυτή την περίπτωση επιλύονται προβλήματα όπου το πλήθος των διαθέσιμων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς (call options) φτάνει μέχρι τα 30 (δηλαδή $m = 30$).

Υπενθυμίζεται ότι οι πληροφορίες σχετικά με το διάνυσμα που περιέχει τα βάρη $\mathbf{w}$ (υπεισέρχεται στην συνάρτηση αποπληρωμής του basket δικαιώματος) και το διάνυσμα στοχαστικής μεταβλητότητας (stochastic volatility) $\boldsymbol{\sigma}$ (εμπλέκεται στον υπολογισμό των τιμών των διαθέσιμων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς) δίνονται στον πίνακα 4.1.

Ακολουθείται η ίδια σύμβαση για την τιμή εξάσκησης των basket δικαιωμάτων, δηλαδή η τιμή εξάσκησης λαμβάνει τιμές στο σύνολο $\{90, 95, 100, 105, 110\}$.

Η ανοδική συμπεριφορά των κάτω φραγμάτων (lower bounds) για τιμή του basket δικαιώματος παρατηρείται και σε αυτή την περίπτωση.



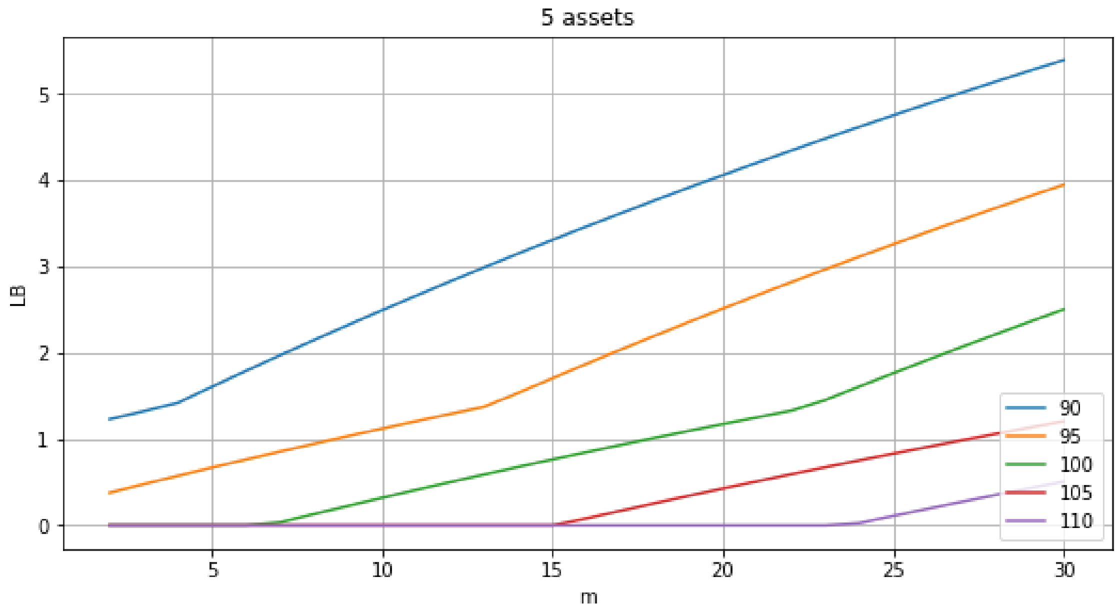
Σχήμα 4.6: Κάτω φράγματα στην τιμή basket δικαιώματος με $n = 4$.

4.3.3 Περίπτωση Basket Δικαιώματος με 5 Χρεόγραφα

Σε αυτή την περίπτωση επιλύονται προβλήματα όπου το πλήθος των διαθέσιμων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς (call options) φτάνει και πάλι μέχρι τα 30 (δηλαδή $m = 30$).

Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν να διαφέρουν από την δημοσίευση [12], ωστόσο εξετάζεται διαφορετική περίπτωση και δεν έχουν γίνει οι ίδιες υποθέσεις (πέρα από ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς στην δημοσίευση [12] θεωρούνται προθεσμιακά συμβόλαια και άλλα συμβόλαια στους περιορισμούς του αρχικού προβλήματος (4.2.2)).

Ακολουθείται και πάλι η ίδια σύμβαση για την τιμή εξάσκησης των basket δικαιωμάτων και διαπιστώνεται ξανά η αύξουσα τάση των κάτω φραγμάτων (lower bounds) για τιμή του basket δικαιώματος.



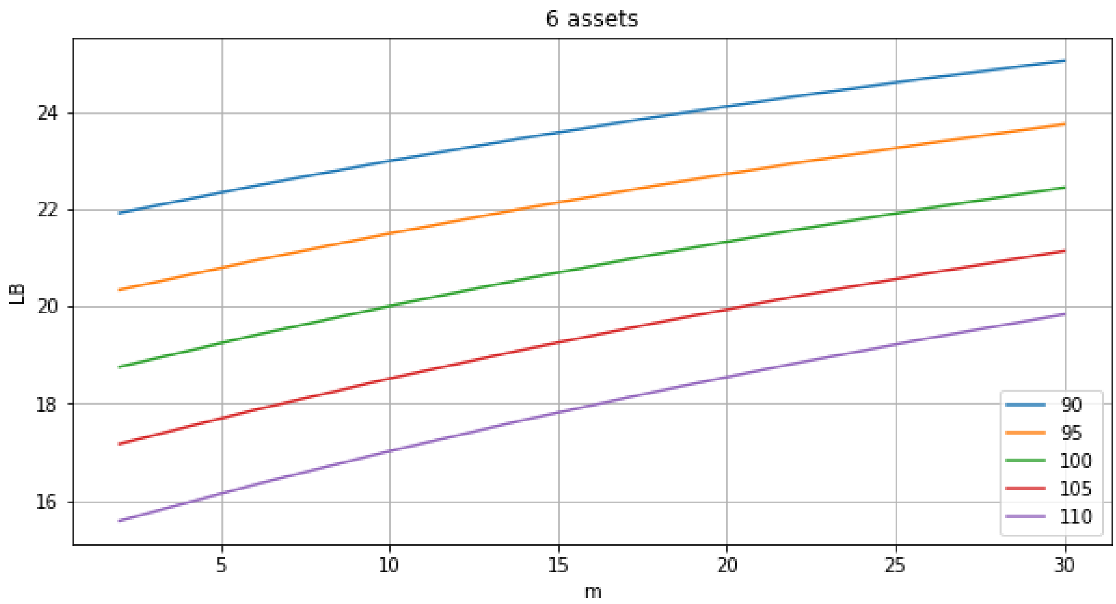
Σχήμα 4.7: Κάτω φράγματα στην τιμή basket δικαιώματος με $n = 5$.

4.3.4 Περίπτωση Basket Δικαιώματος με 6 Χρεόγραφα

Αυξάνοντας την διάσταση σε $n = 6$, το πλήθος των διαθέσιμων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς (call options) για το οποίο έγιναν υπολογισμοί παραμένει ίσο με 30 (δηλαδή $m = 30$).

Υπογραμμίζεται το γεγονός ότι οι γραφικές παραστάσεις προσαρμόζονται ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνουν τα κάτω φράγματα. Ειδικότερα ο άξονας y ξεκινά από τιμές κοντά στα εκάστοτε κάτω φράγματα, όπως προκύπτουν από τους υπολογισμούς, δεν ξεκινά πάντα από το 0 όπως συνηθίζεται.

Συνοπτικά, ισχύουν οι ίδιες υποθέσεις με αυτές που έγιναν στις προηγούμενες περιπτώσεις 4.3.1, 4.3.2 και 4.3.3. Τα κάτω φράγματα απεικονίζονται γραφικά παρακάτω στο σχήμα 4.8.



Σχήμα 4.8: Κάτω φράγματα στην τιμή basket δικαιώματος με $n = 6$.

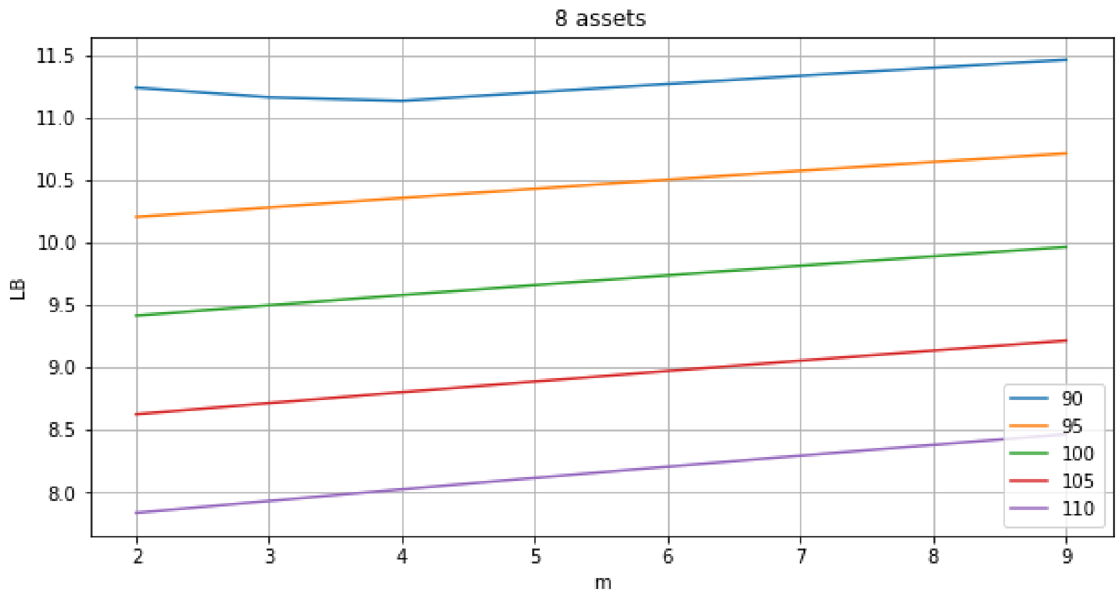
4.3.5 Περίπτωση Basket Δικαιώματος με 8 Χρεόγραφα

Τέλος, για την περίπτωση όπου $n = 8$, το πλήθος των διαθέσιμων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς (call options) μέχρι το οποίο έγιναν υπολογισμοί επιλέγεται ίσο με 9 (δηλαδή $m = 9$).

Η περίπτωση αυτή είναι και η πιο υπολογιστικά απαιτητική, για αυτόν τον λόγο δεν έγιναν υπολογισμοί για τιμές της παραμέτρου m μεγαλύτερες από 9.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για την τρέχουσα περίπτωση καθώς και για τις προηγούμενες ως κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου Lower_Bound έχει επιλεχθεί ένα $\epsilon-$κριτήριο βελτιστότητας ($\epsilon-$optimality criterion), τέτοιο ώστε όταν η απόσταση δύο διαδοχικών προσεγγίσεων (π.χ. ως απόσταση μπορεί να οριστεί η ευκλείδεια νόρμα τους ή απόλυτη τιμή τους) παραβιάζει ένα προκαθορισμένο «κατώφλι» (threshold) η επαναληπτική διαδικασία (iterative method) να σταματά. Υπενθυμίζεται ότι το κριτήριο τερματισμού είναι απαραίτητο, διότι υπάρχει ο κίνδυνος εκθετικών επαναλήψεων (exponential iterations).

Τα κάτω φράγματα που προέκυψαν, για αυτή την περίπτωση όπου $n = 8$, φαίνονται στην παρακάτω γραφική παράσταση του σχήματος 4.9.



Σχήμα 4.9: Κάτω φράγματα στην τιμή basket δικαιώματος με $n = 8$.

4.3.6 Σχολιασμός Αριθμητικών Αποτελεσμάτων

Προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβεια των κάτω φραγμάτων στις τιμές των Basket δικαιωμάτων που θεωρήθηκαν στις παραπάνω περιπτώσεις, χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο Longstaff-Schwartz για την, ανά περίπτωση, προσομοίωση των τιμών των basket δικαιωμάτων (περισσότερες πληροφορίες για το συγκεκριμένο μοντέλο υπάρχουν στην πηγή: [18]). Ειδικότερα, έγινε χρήση πακέτων τα οποία παρέχονται από την βιβλιοθήκη Financial Instruments Toolbox του MATLAB(9). Οι προσομοιωμένες τιμές των basket δικαιωμάτων για κάθε περίπτωση, συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα 4.3.

Συγκρίνοντας τις γραφικές παραστάσεις 4.5 έως 4.9, οι οποίες αναπαριστούν τα κάτω φράγματα των basket δικαιωμάτων, με τις προσομοιωμένες τιμές του πίνακα 4.3, διαπιστώνεται ότι εν γένει δεν πρόκειται περί «σφιχτών» φραγμάτων (tight bounds). Ωστόσο, παρατηρείται ότι λόγω της αύξουσας τάσης των φραγμάτων ως προς το πλήθος των διαθέσιμων call options (m) τα φράγματα προσεγγίζουν την προσομοιωμένη τιμή.

Επαληθεύεται λοιπόν ο ισχυρισμός ότι η απόδοση του προτεινόμενου αλγορίθμου Lower_Bound εξαρτάται από την επιλογή του αρχικού συνόλου περιορισμών. Τα αριθμητικά πειράματα της ενότητας 4.3 εκπονήθηκαν χρησιμοποιώντας το σύνολο $\mathfrak{C}_3$ ως αρχικό σύνολο περιορισμών. Επιλέγοντας το σύνολο $\mathfrak{C}_3$ ως αρχικό σύνολο περιορισμών, επιλύθηκαν αφενός μεν προβλήματα υψηλών διαστάσεων, αφετέρου δε το σύνολο αυτό αναδείχθηκε «φτωχό», διότι τα κάτω φράγματα που προέκυψαν απείχαν αρκετά από τις προσομοιωμένες τιμές των basket δικαιωμάτων.

(9) Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα πακέτα που χρησιμοποιήθηκαν μπορούν να βρεθούν στην ιστοσελίδα: https://www.mathworks.com/help/fininst/pricing-swing-options-using-the-longstaff-schwartz-method.html.

n	Πληροφορίες basket δικαιωμάτων	
	Τιμές εξάσκησης (K)	Προσομοιωμένες τιμές
3	90	41.962
	95	40.483
	100	39.089
	105	37.775
	110	36.533
4	90	35.240
	95	33.596
	100	32.067
	105	30.642
	110	29.312
5	90	35.065
	95	33.405
	100	31.862
	105	30.424
	110	29.085
6	90	39.873
	95	38.386
	100	36.986
	105	35.666
	110	34.420
8	90	40.107
	95	38.544
	100	37.074
	105	35.691
	110	34.387

Πίνακας 4.3: Προσομοιώσεις για τις τιμές των basket δικαιωμάτων.

4.4 Συμπεράσματα και Επεκτάσεις

Η τελευταία αυτή ενότητα κάνει μια ανασκόπηση του προβλήματος που θεωρήθηκε στο κεφάλαιο 4. Επίσης, αναφέρονται εναλλακτικές προοπτικές για την επίλυση προβλημάτων αυτού του τύπου. Η τελευταία υποενότητα 4.4.2 περιλαμβάνει δυνητικές επεκτάσεις για την βελτίωση της προτεινόμενης μεθόδου.

4.4.1 Σύνοψη

Το αρχικό πρόβλημα το οποίο ορίζεται πάνω στον κώνο των μη αρνητικών μέτρων πιθανότητας και αναζητά είτε το μέγιστο κάτω φράγμα (infimum - inf) είτε το ελάχιστο άνω φράγμα (supremum - sup) μιας αναμενόμενης τιμής, όπως φαίνεται παρακάτω

$$\inf_{\pi} / \sup_{\pi} \quad \mathbb{E}_{\pi}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K\right)^{+}\right],$$

κάτω από ένα πλήθος περιορισμών (είτε αυτοί είναι ένας αριθμός από call options όπως θεωρήθηκε στο κεφάλαιο αυτό είτε είναι ένα σύνολο συγγενικών δικαιωμάτων ή συμβολαίων όπως π.χ. forwards, basket options ή συνδυασμός αυτών) μπορεί να αντιμετωπιστεί ως η εύρεση της άγνωστης από κοινού κατανομής, δεδομένων των περιθωρίων κατανομών οι οποίες είναι γνωστές (υπολογίζονται από τα δεδομένα του αρχικού προβλήματος) για το τυχαίο διάνυσμα που περιέχει τις τιμές των χρεογράφων $S_i(T)$ με $i \in \{1, \ldots, n\}$. Η οπτική αυτή υιοθετήθηκε στην δημοσίευση [15] και είναι γνωστή ως αβεβαιότητα εξάρτησης (dependence uncertainty).

Χαρακτηριστική είναι η δημοσίευση [19], με ευρύ πεδίο εφαρμογών, η οποία χρησιμοποιεί συνδυασμό τεχνικών βελτιστοποίησης και θεωρίας πιθανοτήτων για την εύρεση φραγμάτων σε χρηματοοικονομικά παράγωγα πέρα από basket δικαιώματα (τιμολογούνται παράγωγα των οποίων οι συναρτήσεις αποπληρωμής είναι συνεχείς κατά τμήματα affine συναρτήσεις - continuous piece-wise affine functions). Μέσω των αριθμητικών πειραμάτων που εκπονούνται στην δημοσίευση αυτή, σε συνδυασμό με την προαναφερθείσα ερμηνεία του προβλήματος, κατανοούνται οι μεταβολές του κενού no-arbitrage (no-arbitrage gap), δηλαδή της διαφοράς του πάνω από το κάτω no-arbitrage φράγμα, το οποίο στενεύει όσο περισσότερες πληροφορίες συμπεριλαμβάνονται με την μορφή γνωστών τιμών για τα διαθέσιμα παράγωγα. Το no-arbitrage κενό αντανακλά το ρίσκο του εκάστοτε παραγώγου καθώς και τις πληροφορίες που είναι διαθέσιμες για το παράγωγο αυτό στην αγορά.

4.4.2 Επίλογος

Το θέμα των «στατικών» φραγμάτων, δίχως arbitrage, στην τιμή basket δικαιωμάτων (static-arbitrage bounds on basket option prices) και άλλων παρόμοιων δικαιωμάτων είναι πολυσυζητημένο στην επιστημονική κοινότητα των χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Η περίπτωση των άνω φραγμάτων (upper bounds) έχει κατανοηθεί τόσο σε θεωρητικό όσο και σε υπολογιστικό επίπεδο, ενώ η περίπτωση των κάτω φραγμάτων (lower bounds) είναι πιο απαιτητική υπολογιστικά, εξαιτίας της συνάρτησης αποπληρωμής (payoff function) που καθιστά την περίπτωση των κάτω φραγμάτων ριζικά διαφορετική από αυτή των άνω φραγμάτων.

Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε βασίστηκε σε θεμελιώδεις αρχές και θεωρήματα γραμμικού προγραμματισμού που αναπτύχθηκαν σε βάθος στα προηγούμενα κεφάλαια. Υλοποιήθηκε μάλιστα και αλγόριθμος (από τον ψευδοκώδικα της πηγής [12]) ο οποίος επιλύει το πρόβλημα διαχωρισμού που αναδύεται από το ισοδύναμο πρόβλημα Γ.Π. του αρχικού προβλήματος εύρεσης κάτω φραγμάτων στην τιμή του εκάστοτε basket δικαιώματος.

Ειδικότερα, θεωρήθηκε μια διακριτοποιημένη εκδοχή του δυϊκού προβλήματος (4.2.3) και ο αλγόριθμος που υλοποιήθηκε εξετάζει το πρόβλημα διαχωρισμού που σχετίζεται με την ισοδύναμη αυτή εκδοχή. Το υπολογιστικό φορτίο (computational load) του υλοποιημένου αλγόριθμου είναι πολυωνυμικό ως προς το μέγεθος του basket δικαιώματος n και το πλήθος των διαθέσιμων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς m ανά χρεόγραφο. Στα πλαίσια των αριθμητικών πειραμάτων διαπιστώθηκε ότι προβλήματα μεγάλων διαστάσεων μπορούν να επιλυθούν με την προτεινόμενη μέθοδο. Ωστόσο, εφόσον η αποδοτικότητα του προτεινόμενου αλγορίθμου εξαρτάται από την επιλογή του αρχικού συνόλου περιορισμών, ένα ερώτημα που μένει να απαντηθεί είναι:

> **«Ποιο σύνολο αρχικών περιορισμών θεωρείται κατάλληλο, ώστε να βελτιωθεί η αποτελεσματικότητα και η απόδοση του προτεινόμενου αλγορίθμου;»**

Βιβλιογραφία

Ελληνική Βιβλιογραφία

[1] Σπύρος Αργυρός. *Πραγματική Ανάλυση*. Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Σημειώσεις Μαθήματος. 2011.

[2] Ιωάννης Κολέτσος και Δημήτρης Στογιάννης. *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*. Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ, 2017.

[3] Σπύρος Κοντογιάννης. *Γραμμικός Προγραμματισμός*. Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων. Σημειώσεις Μαθήματος. 2009.

[4] Αγγελική Κουτσιμπέλα. *Θεωρία Στοχαστικού Χαρτοφυλακίου*. Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Διπλωματική Εργασία. 2018.

[5] Μιχάλης Νταούτης. *Βελτιωμένα Fréchet-Hoeffding Φράγματα και Τιμολόγηση Παραγώγων Χωρίς Μοντέλο*. Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Διπλωματική Εργασία. 2019.

[6] Δημήτρης Α. Ξηροκώστας. *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Εκδόσεις Συμμετρία, 1999.

[7] Αντώνης Παπαπαντολέων. *Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά*. Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Σημειώσεις Μαθήματος. 2019.

[8] Δημήτρης Χελιώτης. *Ένα Δεύτερο Μάθημα στις Πιθανότητες*. Κάλλιπος, 2015.

[9] Παναγιώτης Ι. Ψαρράκος. *Θέματα Ανάλυσης Πινάκων*. Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Σημειώσεις Μαθήματος. 2015.

Ξένη Βιβλιογραφία

[10] Peter Bank and Antonis Papapantoleon. *Financial Mathematics 2*. Technische Universität Berlin. Lecture Notes. 2017.

[11] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Mar. 2004. ISBN: 0521833787. URL: http://www.amazon.com/exec/obidos/redirect?tag=citeulike-20%5C&path=ASIN/0521833787.

[12] Hyunseok Cho, K. Kim, and K. Lee. «Computing lower bounds on basket option prices by discretizing semi-infinite linear programming». In: *Optimization Letters* 10 (2016), pp. 1629–1644.

[13] Alexandre d'Aspremont and Laurent El Ghaoui. «Static arbitrage bounds on basket option prices». In: *Mathematical programming* 106.3 (2006), pp. 467–489.

[14] Paul Embrechts and Marius Hofert. «A note on generalized inverses». In: *Mathematical Methods of Operations Research* 77.3 (2013), pp. 423–432. URL: https://EconPapers.repec.org/RePEc:spr:mathme:v:77:y:2013:i:3:p:423-432.

[15] David Hobson, Peter Laurence, and Tai-Ho Wang. «Static-arbitrage upper bounds for the prices of basket options». In: *Quantitative Finance* 5.4 (2005), pp. 329–342. DOI: 10.1080/14697680500151392. URL: https://doi.org/10.1080/14697680500151392.

[16] Anatoli Juditsky. *Convex Optimization*. Université Grenoble Alpes. Lecture Notes. 2015.

[17] P. Laurence and Tai-Ho Wang. *Sharp Upper and Lower Bounds for Basket Options*. 2005. URL: http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.578146.

[18] Francis Longstaff and Eduardo S Schwartz. «Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach». In: *Review of Financial Studies* 14.1 (2001), pp. 113–47. URL: https://EconPapers.repec.org/RePEc:oup:rfinst:v:14:y:2001:i:1:p:113-47.

[19] Ariel Neufeld, Antonis Papapantoleon, and Qikun Xiang. «Model-free bounds for multi-asset options using option-implied information and their exact computation». In: *arXiv e-prints*, arXiv:2006.14288 (June 2020), arXiv:2006.14288. arXiv: 2006.14288 [math.OC].

[20] Javier Peña, Juan C. Vera, and Luis F. Zuluaga. «Static-arbitrage lower bounds on the prices of basket options via linear programming». In: *Quantitative Finance* 10.8 (2010), pp. 819–827. DOI: 10.1080/14697680902956703. URL: https://doi.org/10.1080/14697680902956703.

[21] Alexander Schrijver. *Theory of linear and integer programming*. Wiley, 1998.

Γλωσσάριο

Ελληνικός όρος	Αγγλικός όρος
Διύλιση	Filtration
Μετασχηματισμός ποσοστημορίων	Quantile function
Μέθοδος αντιστροφής	Inversion method
Παράγωγα	Derivatives
Βασικά αγαθά	Underlyings
Χρεόγραφο	Asset
Ομόλογο	Bond
Προθεσμιακά συμβόλαια	Forward contracts - forwards
Ωρίμανση	Maturity
Τιμή εξάσκησης	Strike price
Δικαίωμα αγοράς	Call option - call
Δικαίωμα πώλησης	Put option - put
Ισοδύναμο μέτρο martingale	Equivalent martingale measure
Ενδεχόμενη απαίτηση	Contingent claim
Στρατηγική αντιστάθμισης	Hedging strategy
Χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης	Replicating portfolio
Τιμή αντιστάθμισης	Hedging price
Χρόνος διακοπής	Stopping time
Τοπικό martingale	Local martingale
Τετραγωνική κύμανση	Quadratic variation
Κόστος συναλλαγής	Transaction cost
Ασυμμετρία στα επιτόκια	Interest rate asymmetry
Περιορισμοί στις ανοιχτές πωλήσεις	Short selling constraints
Πιστωτικός κίνδυνος αντισυμβαλλόμενου	Counterparty credit risk
Ροές αποπληρωμής	Payoff streams
Ομόλογο άνευ ρίσκου	Risk-free bond
Χρηματικές συναλλαγές	Cash flows
Μεταβλητές απόφασης	Decision variables

Αντικειμενική συνάρτηση	Objective function
Περιορισμοί	Constraints
Βελτιστοποίηση	Optimization
Γραμμικός προγραμματισμός	Linear programming
Ασυμπτωτικά σφικτό φράγμα	Asymptotically tight bound
Ασυμπτωτικό άνω/κάτω φράγμα	Asymptotic upper/lower bound
Γραμμικότητα	Linearity
Αναλογικότητα	Proportionality
Διαιρετότητα	Divisibility
Βεβαιότητα	Certainty
Λύση	Solution
Εφικτή λύση	Feasible solution
Βέλτιστη εφικτή λύση	Optimal feasible solution
Εφικτή λύση ακραίου σημείου	Corner point feasible solution
Επαυξημένη λύση	Augmented solution
Βασική λύση	Basic solution
Βασική εφικτή λύση	Basic feasible solution
Εκφυλισμένη λύση	Degenerated solution
Εξισώσεις ορίων	Boundary equations
Ευθεία	Line
Πολύεδρο	Polyhedron
Υπερεπίπεδο	Hyperplane
Ημιχώρος	Halfspace
Κυρτός συνδυασμός	Convex combination
Ακραίο σημείο	Extreme point
Κορυφή	Vertex
Κώνος	Cone
Διαχωρίζον υπερεπίπεδο	Separating hyperplane
Μετρικός χώρος	Metric space
Οριακό σημείο	Limit point
Κλειστότητα	Closure
Διανυσματικός χώρος	Vector space
Βαθμός	Rank
Βάση	Base
Τιμολόγηση	Pricing
Εφικτή περιοχή	Feasible region
Εναλλακτικά βέλτιστα σημεία	Alternative optimal points
Δυϊκό πρόβλημα	Dual problem

Πρωτεύον πρόβλημα	Primal problem
Κανονική μορφή	Canonical form
Χαλαρή μεταβλητή	Slack variable
Πλεονασματική μεταβλητή	Surplus variable
Γενική μορφή	General form
Δυϊκή μεταβλητή	Dual variable
Ασθενής δυϊκότητα	Weak duality
Ισχυρή δυϊκότητα	Strong duality
Συμπληρωματική χαλαρότητα	Complementary slackness
Διάνυσμα-γραμμή	Row vector
Κενό δυϊκότητας	Duality gap
Μέθοδοι εσωτερικών σημείων	Interior point methods
Δυϊκότητα Lagrange	Lagrange duality
Συνάρτηση Lagrange	Lagrangian - Lagrange function
Πολλαπλασιαστής Lagrange	Lagrange multiplier
Όρος ποινής	Penalty term
Φράγματα ελεύθερα από arbitrage	Arbitrage-free bounds
Επενδυτική περίοδος	Investment period
Πλήρης χρηματοοικονομική αγορά	Complete financial market
Basket δικαίωμα	Basket option
Φράγματα χωρίς μοντέλο	Model-free bounds
«Στατικά» ελεύθερα από arbitrage φράγματα	Static-arbitrage bounds
Πρόβλημα διαχωρισμού	Separation problem
Χαρτοφυλάκιο υπό-αντιστάθμισης	Sub-replicating portfolio
Πλέγμα	Grid
Φραγμένες περιοχές	Bounded regions
Δεδομένα εισόδου	Input data
Μέγιστος κοινός διαιρέτης - Μ.Κ.Δ.	Greatest common divisor - G.C.D.
Παράγοντας	Factor
Δείκτης	Index
Πολυωνυμική ισοδυναμία	Polynomial equivalence
Μέθοδοι ελλειψοειδούς	Ellipsoid methods
Υπολογιστικό πλεονέκτημα	Computational advantage
Εκθετικές επαναλήψεις	Exponential iterations
Κριτήριο βελτιστότητας	Optimality criterion
Κανονική βάση	Canonical basis
Αρχική τιμή	Spot price
Στοχαστική μεταβλητότητα	Stochastic volatility

Συνθετικά δεδομένα	Synthetic data
Πρώτο τεταρτημόριο	First quadrant
«Κατώφλι»	Threshold
Επαναληπτική διαδικασία	Iterative method
Αβεβαιότητα εξάρτησης	Dependence uncertainty
Συνεχής κατά τμήματα affine συνάρτηση	Continuous piece-wise affine function
Κενό no-arbitrage	No-arbitrage gap
Ψευδοκώδικας	Pseudocode
Υπολογιστικό φορτίο	Computational load