ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ & ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΠΡΟΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΣΕ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

Βενέδικτος Γαρουφαλής

Επιβλέπων καθηγητής: Τατσιόπουλος Ηλίας

Αθήνα 2011

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ευκαιρία της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω εκ βάθους καρδίας τον Καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Ηλία Τατσιόπουλο για την ανάθεση της εργασίας αυτής και την πολύτιμη στήριξή του καθ' όλη τη διάρκεια αυτής ως την περάτωσή της.

Επίσης, ιδιαιτέρως ευχαριστώ τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Αθανάσιο Τόλη για τη συνεργασία του και την αμέριστη βοήθεια κι επίβλεψη που μου παρείχε, καθώς και για τις συμβουλές, παρατηρήσεις, διορθώσεις του που οδήγησαν στην ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Η διπλωματική εργασία αυτή αφιερώνεται με όλο μου το είναι στους γονείς μου Δημήτριο κι Ελπίδα (η οποία σίγουρα θα χαίρεται εκεί ψηλά που βρίσκεται, τώρα που βλέπει το γιο της να ολοκληρώνεται ως φοιτητής), καθώς και στην αρραβωνιαστικιά μου Μαρία. Όλοι τους πάντα με στήριζαν και με στηρίζουν και μου έμαθαν να μην εγκαταλείπω ποτέ το στόχο μου, γιατί μετά τη δοκιμασία ακολουθεί πάντοτε η ευτυχία.

Περιεχόμενα

Σελ.

Έποψη 9

ΜΕΡΟΣ Α΄
ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΕΣ ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Σελ.

Κεφάλαιο 1: Επενδυτικές ευκαιρίες και χρονοδιάγραμμα επενδύσεων 13
1.1 Το βασικό μοντέλο 14
1.2 Επίλυση με Δυναμικό Προγραμματισμό 17
1.3 Επίλυση μέσω της ανάλυσης πιθανών αξιώσεων 24
1.4 Χαρακτηριστικά του κανόνα βέλτιστης επένδυσης 28
1.5 Εναλλακτικές Στοχαστικές Διαδικασίες 36

Κεφάλαιο 2: Η αξία ενός έργου και η απόφαση για επένδυση 49
2.1 Η απλούστερη περίπτωση: δεν υπάρχουν λειτουργικά κόστη 51
2.2 Λειτουργικά Κόστη και Προσωρινή Αναστολή 58
2.3 Έργο με μεταβλητή έξοδο 67
2.4 Απαξίωση 71
2.5 Αβεβαιότητα τιμής και κόστους 78

Κεφάλαιο 3: Εισροές, εκροές, διακοπή της λειτουργίας και απόσυρση 83
3.1 Συνδυασμένες εισροές και στρατηγικές εκροών 84
3.2 Διακοπή της λειτουργίας, επανενεργοποίηση και απόσυρση 97

Κεφάλαιο 4: Εφαρμογές και Εμπειρική Έρευνα 111
4.1 Επενδύσεις σε Υπεράκτια Πετρελαϊκά Αποθέματα 112

ΜΕΡΟΣ Β΄
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ

Σελ.

Κεφάλαιο 1: Επιτόκια 123
1.1 Τύποι επιτοκίων 123
1.2 Μέτρηση των επιτοκίων 125
1.3 Συνεχής ανατοκισμός 126

1.4 Τιμολόγηση ομολόγων 129
1.5 Προσδιορισμός μηδενικών επιτοκίων του δημοσίου 131
1.6 Προθεσμιακά επιτόκια 134
1.7 Συμβάσεις προθεσμιακού επιτοκίου 136
1.8 Διάρκεια 139
1.9 Κυρτότητα 143
1.10 Θεωρίες υπό το πρίσμα της διάρθρωσης των επιτοκίων 145

Κεφάλαιο 2: Διαδικασίες Wiener και Λήμμα Itô 149
2.1 Η ιδιότητα του Markov 149
2.2 Στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου 150
2.3 Η διαδικασία για μια τιμή μετοχής 156
2.4 Οι παράμετροι 160
2.5 Λήμμα του Itô 161
2.6 Η λογαριθμική ιδιότητα 163

Κεφάλαιο 3: Το μοντέλο των Black, Scholes και Merton 165
3.1 Λογαριθμική ιδιότητα των τιμών των μετοχών 165
3.2 Η κατανομή του ποσοστού επιστροφής 168
3.3 Η αναμενόμενη επιστροφή 169
3.4 Μεταβλητότητα 170
3.5 Η ιδέα στην οποία βασίζεται η διαφορική εξίσωση των Black, Scholes και Merton 174
3.6 Παραγωγή της διαφορικής εξίσωσης Black, Scholes και Merton 176
3.7 Η αξιολόγηση ουδέτερου κινδύνου 179
3.8 Τύποι τιμολόγησης των Black και Scholes 180
3.9 Η Συνάρτηση Αθροιστικής Κανονικής Κατανομής 183
3.10 Options Ενταλμάτων και Αγοράς Μετοχών 185
3.11 Εκτιμώμενες μεταβλητότητες 186
3.12 Μερίσματα 188

Κεφάλαιο 4: Βασικές αριθμητικές διαδικασίες 193
4.1 Διωνυμικά δέντρα 193
4.2 Χρήση του διωνυμικού δέντρου για options επί δεικτών, ισοτιμιών και futures συμβολαίων 202
4.3 Διωνυμικό μοντέλο για μια μετοχή που πληρώνει μερίσματα 206
4.4 Εναλλακτικές διαδικασίες για την κατασκευή των δέντρων 213
4.5 Παράμετροι που εξαρτώνται από το χρόνο 217
4.6 Προσομοίωση Monte Carlo 218
4.7 Διαδικασίες μείωσης της διακύμανσης 223
4.8 Μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών 227

Κεφάλαιο 5: Θεωρία Πιθανοτήτων και μέτρα 241
5.1 Παράγωγοι καιρού 241
5.2 Παράγωγοι ενέργειας 242
5.3 Παράγωγοι Ασφάλισης 246

Κεφάλαιο 6: Πραγματικές options	249
6.1 Αξιολόγηση επενδυτικού κεφαλαίου	249
6.2 Επέκταση του πλαισίου για την αποτίμηση ουδετέρου κινδύνου	251
6.3 Εκτίμηση της εμπορεύσιμης τιμής του κινδύνου	252
6.4 Εφαρμογή στην αξιολόγηση μιας επιχείρησης	254
6.5 Τιμές των βασικών εμπορευμάτων	254
6.6 Αξιολόγηση των options σε μια επενδυτική ευκαιρία	259

ΜΕΡΟΣ Γ΄
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΙΜΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

	Σελ.
Κεφάλαιο 1: Τιμές αναγωγής και κεφαλαίου	267
1.1 Πρώτες αρχές	267
1.2 Ένα πολύ μικρό πηγάδι πετρελαίου	269
1.3 Ετήσιες καταθέσεις	273
1.4 Μερικά σχόλια της κεφαλαιουχικές αξίες	277
1.5 Εξάντληση αποθεμάτων	279
1.6 Συμπεράσματα	282
Κεφάλαιο 2: Η παγκόσμια αγορά πετρελαίου	283
2.1 Λίγο υπόβαθρο για τη μελέτη της πορείας της το φινάλε της αγοράς πετρελαίου	285
2.2 Η αναλογία αποθεματικών-παραγωγής	289
2.3 Προμήθεια και ζήτηση πετρελαίου και ο λόγος αποθεματικών-παραγωγής	294
2.4 Μια μη τεχνική επισκόπηση της προθεσμιακής αγοράς	297
2.5 Τα αποθέματα και οι τιμές του πετρελαίου	301
2.6 Συμπεράσματα	308
2.7 Παράρτημα: Η εγχώρια βιομηχανοποίηση των υδρογονανθράκων	309
Κεφάλαιο 3: Ένα καύσιμο του μέλλοντος: Το φυσικό αέριο	311
3.1 Γεωλογία, μονάδες και λίγα οικονομικά	311
3.2 Οικονομική Θεωρία και Φυσικό Αέριο: Μια εισαγωγή	318
3.3 Ρύθμιση και Απελευθέρωση	330
3.4 Οριακά κόστη και τιμολόγηση του φορτίου αιχμής	333
3.5 Συμπεράσματα	344
Κεφάλαιο 4: Ηλεκτρική Ενέργεια και Οικονομολογία	345
4.1 Κάποιες εισαγωγικές παρατηρήσεις	346
4.2 Καμπύλες καθημερινής φόρτωσης και Καμπύλες διάρκειας φόρτωσης	350
4.3 Η Οικονομολογία της Διαίρεσης του Φορτίου	355
4.4 Ορισμένες Τελικές Παρατηρήσεις στα Τιμολόγια Ηλεκτρικής Ενέργειας	363
4.5 Συμπεράσματα	367

ΜΕΡΟΣ Δ΄
ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΣ: ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΕΣ ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΣΕ ΣΥΜΒΑΤΙΚΗ ΘΕΡΜΟΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΣ ΕΞΕΛΙΣΣΟΜΕΝΩΝ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ ΑΝΑΓΩΓΗΣ

Σελ.

Κεφάλαιο 1: Μεθοδολογία 371
1.1 Μοντελοποίηση μιας μελέτης περίπτωσης 371
1.2 Μαθηματική διατύπωση 372

Κεφάλαιο 2: Αριθμητικός αλγόριθμος 377
2.1 Τα δεδομένα εισόδου του μοντέλου 377
2.2 Πρόβλεψη των στοχαστικών μεταβλητών 378

Κεφάλαιο 3: Αποτελέσματα και συζήτηση 381

Κεφάλαιο 4: Συμπεράσματα 389

Βιβλιογραφία 391

ΕΠΟΨΗ

Στόχος

Ο στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι η αξιολόγηση του αντίκτυπου της εξέλιξης των στοχαστικών επιτοκίων στην ανάλυση των ενεργειακών επενδύσεων. Το σημείο αναφοράς της μελέτης είναι ένα εργοστάσιο ισχύος βάσης το οποίο έχει καύσιμο το λιγνίτη και μεικτή δυναμικότητα ισχύος 330 MWel το οποίο προσεγγίζει το όριο του επιχειρησιακού χρόνου ζωής του μέσα στα επόμενα 15 έτη. Εξετάζουμε την αντικατάστασή του από νέα μονάδα και παρουσιάζονται οι ακόλουθες επιλογές:

1) Συνολική μετασκευή της υπάρχουσας υποδομής με την χρήση συστήματος κατακράτησης και δέσμευσης του CO_2 και με ταυτόχρονη αναβάθμιση της θερμοδυναμικής υποδομής.
2) Επένδυση σε μια εντελώς νέα μονάδα φυσικού αερίου (συνδυασμένου κύκλου) με σκοπό την εκμετάλλευση των πλεονεκτημάτων του (χαμηλό κόστος καυσίμου και χαμηλός βαθμός εκπομπών CO_2).
3) Διατήρηση της υπάρχουσας κατάστασης (καμία πραγματοποίηση επένδυσης)

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζονται τα ακόλουθα:

1) Προσδιορισμός της πιο κερδοφόρας επενδυτικής επιλογής στη διάρκεια του χρόνου
2) Προσδιορισμός της βέλτιστης χρονικής στιγμής για την υλοποίηση της επένδυσης για διάφορα σενάρια εξέλιξης των επιτοκίων
3) Διερεύνηση της επιρροής των επενδυτικών επιλογών στις συνολικές εκπομπές CO_2 στην διάρκεια του χρόνου

Μεθοδολογία

Δημιουργούμε έναν αλγόριθμο πραγματικών options, χρησιμοποιώντας προβλέψεις στοχαστικών επιτοκίων προκειμένου να ερευνήσουμε τις επιπτώσεις τους στην οικονομική αλλά και την περιβαλλοντική αποτελεσματικότητα των ενεργειακών έργων. Δε χρησιμοποιείται η παραδοσιακή παραδοχή σταθερών επιτοκίων και υψηλών ασφαλίστρων κινδύνου διότι μπορεί να μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά μεγαλύτερες χρονικές στιγμές έναρξης των επενδύσεων απ’ ό,τι εκείνων που προτείνονται από στοχαστικώς εξελισσόμενες τιμές. Η πρόγνωση των επιτοκίων καθώς και όλων των υπολοίπων στοχαστικών μεγεθών γίνεται με τη χρήση στατιστικών μεθόδων τυχαίου περιπάτου. Η δε ανάλυση πραγματικών options γίνεται με βάση τη θεωρία των real options και της επιρροής τους στα επενδυτικά σχέδια (business plans).

Αποτελέσματα-Συμπεράσματα

Μπορούν να εντοπιστούν ελάχιστες διαφορές στους υπολογιζόμενους βέλτιστους χρόνους έναρξης των επενδύσεων μεταξύ υψηλά διακυμαινόμενης και ομαλής εξέλιξης των επιτοκίων, που παράγονται από διαφορετικούς αριθμούς δοκιμών Monte Carlo (μικρότερες των 400 δοκιμών και μεγαλύτερες των 5.000 δοκιμών αντίστοιχα). Στην υψηλά διακυμαινόμενη εξέλιξη, η βέλτιστη καθαρή παρούσα αξία της επένδυσης υπολογίζεται περίπου κατά 8% μικρότερη από την περίπτωση της ομαλής εξέλιξης των επιτοκίων.

Καθώς μειώνεται το επίπεδο των επιτοκίων, παρατηρούμε ότι αυξάνονται οι αναμενόμενες τιμές καθαρών παρουσών αξιών. Οι παραδοχές για σταθερά επιτόκια (ακόμη και για επιτόκια υψηλού κινδύνου) μπορεί να σημάνουν τη σύγκλιση των καθαρών παρουσών αξιών μεταξύ του βέλτιστου και του άμεσου χρόνου έναρξης της επένδυσης. Αντίθετα, τα στοχαστικά ή μηδενικά επιτόκια μπορεί να οδηγήσουν σε σημαντικά αποκλίνουσες καθαρές παρούσες αξίες. Στην τελευταία περίπτωση, ο βέλτιστος χρόνος έναρξης της επένδυσης μπορεί να καταστεί έως και 20% περισσότερο επικερδής απ’ τον αντίστοιχο χρόνο άμεσης έναρξης της επένδυσης. Ενδέχεται να υπάρξουν κάποιες επιδράσεις στη βιωσιμότητα, ανάλογα με τη χρονική στιγμή αντικατάστασης ή μετασκευής του παλαιού εργοστασίου. Ταχύτερα χρονικά σημεία έναρξης της επένδυσης ενδέχεται να οδηγήσουν σε ταχύτερη μείωση του ποσοστού συσσώρευσης του CO_2 (όπως στην περίπτωση των σταθερών επιτοκίων). Όταν λαμβάνονται υπόψη τα επιτόκια που εξελίσσονται βάσει στοχαστικών προβλέψεων, η λειτουργία του παλαιού εργοστασίου θα πρέπει να επεκταθεί προς το όφελος των μελλοντικών και πιο αποδοτικών μετασκευών (ή αντικαταστάσεων). Έτσι βέβαια παρατείνονται τα υψηλά ποσοστά εκπομπών CO_2 και μέχρι να πραγματοποιηθούν οι μετατροπές ή αντικαταστάσεις που έχουμε προγραμματίσει. Χρειάζεται παρόλα αυτά επιπλέον έρευνα για την αξιολόγηση των επιπτώσεων των αλμάτων στις τιμές των καυσίμων και της ηλεκτρικής ενέργειας, τα οποία άλματα των τιμών μπορούν να τροποποιήσουν τα μελλοντικά σχέδια για τα έργα που αφορούν την ενέργεια.

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΕΣ ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Επενδυτικές ευκαιρίες και χρονοδιάγραμμα επενδύσεων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα στραφούμε στην ανάλυση των επενδυτικών αποφάσεων υπό συνθήκες αβεβαιότητας. Το κύριο μέλημά μας θα είναι οι επενδυτικές δαπάνες οι οποίες έχουν δύο πολύ σημαντικά χαρακτηριστικά. Πρώτον, οι δαπάνες είναι τουλάχιστον εν μέρει αμετάκλητες. Με άλλα λόγια, είναι εφάπαξ κόστη που δε μπορούν να ανακτηθούν. Δεύτερον, αυτές οι επενδύσεις μπορούν να καθυστερήσουν, ώστε η επιχείρηση να έχει τη δυνατότητα να περιμένει να φτάσουν νέες πληροφορίες σχετικά με τις τιμές, τα κόστη και άλλες συνθήκες αγοράς πριν δεσμεύσει πόρους.

Η δυνατότητα να καθυστερήσει μια αμετάκλητη επενδυτική δαπάνη μπορεί να επηρεάσει σε βάθος την απόφαση για επένδυση. Ειδικότερα, ακυρώνει τον απλό κανόνα για την καθαρή παρούσα αξία όπως αυτός διδάσκεται στους φοιτητές των τεχνικών σχολών: «Επενδύστε σε ένα έργο όταν η παρούσα αξία των αναμενόμενων ταμειακών ροών του είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο το κόστος του.» Αυτός ο κανόνας είναι εσφαλμένος διότι αγνοεί το ευκαιριακό κόστος της ανάληψης κάποιας δέσμευσης τώρα και επομένως αγνοεί να δοθεί η δυνατότητα της αναμονής για νέες πληροφορίες. Αυτό το ευκαιριακό κόστος πρέπει να συμπεριληφθεί ως μέρος του συνολικού κόστους της επένδυσης. Σε αυτό το κεφάλαιο αλλά και σε αυτά που ακολουθούν θα εξετάσουμε αυτό το ευκαιριακό κόστος και τις συνέπειές του για επένδυση σε ένα υψηλότερο επίπεδο γενικότητας και με περισσότερες λεπτομέρειες.

Στο κεφάλαιο αυτό θα προβληθεί και θα αναλυθεί με μεγάλη λεπτομέρεια ένα από τα πιο βασικά μοντέλα συνεχούς χρόνου μονίμων επενδύσεων. Σε αυτό το μοντέλο, το οποίο αναπτύχθηκε αρχικά από τους McDonald και Siegel (1986), μια επιχείρηση πρέπει να αποφασίσει για το πότε να επενδύσει σε ένα μόνο σχέδιο. Το κόστος I της επένδυσης είναι γνωστό και σταθερό, αλλά η αξία V του έργου ακολουθεί γεωμετρική Brownian motion. Ο απλός κανόνας της καθαρή παρούσας αξίας είναι να επενδύει κανείς όσο ισχύει $V > I$, αλλά όπως απέδειξαν οι McDonald και Siegel αυτό είναι λάθος. Επειδή οι *μελλοντικές* τιμές της V δεν είναι γνωστές, υπάρχει ευκαιριακό κόστος στο να επενδύσει κανείς άμεσα. Έτσι ο κανόνας της βέλτιστης επένδυσης είναι το να επενδύσει κανείς όταν η V είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο μια κρίσιμη τιμή V^* που υπερβαίνει το I. Όπως θα δούμε, για λογικές τιμές των παραμέτρων, αυτή η κρίσιμη τιμή μπορεί να είναι *δύο ή τρεις φορές* μεγαλύτερη του I. Συνεπώς ο απλός κανόνας της καθαρής παρούσας αξία δεν είναι απλά λάθος. Συχνά είναι πολύ λάθος.

Μετά την περιγραφή του βασικού μοντέλου με περισσότερες λεπτομέρειες, θα δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να βρεθεί ο κανόνας της βέλτιστης επένδυσης (που αφορά την κρίσιμη τιμή V^*) με δυναμικό προγραμματισμό. Ένα ζήτημα που προκύπτει ωστόσο είναι η επιλογή του αναγωγικού επιτοκίου. Αν οι κεφαλαιαγορές είναι «πλήρεις» (κατά μία έννοια που θα καταστεί σαφής), το πρόβλημα των επενδύσεων μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πρόβλημα τιμολόγησης option και να επιλυθεί με τη χρήση τεχνικών ανάλυσης των πιθανών αξιώσεων. Θα ξαναλύσουμε το πρόβλημα της βέλτιστης επένδυσης με αυτόν τον τρόπο και στη συνέχεια θα εξετάσουμε τα χαρακτηριστικά της επιλογής της εταιρείας να επενδύσει και την εξάρτησή της από τις βασικές παραμέτρους. Τέλος, θα επεκτείνουμε το μοντέλο με την εξέταση εναλλακτικών στοχαστικών διαδικασιών για την αξία του έργου V. Ειδικότερα, θα βρούμε και θα χαρακτηρίσουμε τους κανόνες της βέλτιστης επένδυσης που ισχύουν όταν η V ακολουθεί μια διαδικασία που την επαναφέρει στη μέση τιμή και στη συνέχεια όταν ακολουθεί μια μικτή διαδικασία Brownian motion/Poisson διακριτών μετακινήσεων.

1.1 Το Βασικό Μοντέλο

Αφετηρία μας είναι ένα μοντέλο που αρχικά αναπτύχθηκε από τους McDonald και Siegel (1986). Θεώρησαν το εξής πρόβλημα: Σε ποιο σημείο είναι βέλτιστο να καταβληθεί ένα εφάπαξ ποσό I σε αντάλλαγμα για ένα έργο του οποίου η αξία είναι V, δεδομένου ότι η V εξελίσσεται σύμφωνα με την ακόλουθη γεωμετρική Brownian motion:

$$dV = \alpha V\, dt + \sigma V\, dz \tag{1}$$

όπου το dz είναι η επαύξηση από μια διαδικασία Wiener. Η εξίσωση (1) υπονοεί ότι η τρέχουσα αξία του έργου είναι γνωστή, αλλά οι μελλοντικές τιμές έχουν λογαριθμική κατανομή με μια διακύμανση που αυξάνει γραμμικά με το χρονικό ορίζοντα. Έτσι αν και οι πληροφορίες φτάνουν με την πάροδο του χρόνου (η εταιρεία παρατηρεί τις μεταβολές της V), η μελλοντική αξία του έργου είναι πάντοτε αβέβαιη.

Η εξίσωση (1) αποτελεί σαφώς μια σύνοψη από πολλά πραγματικά έργα. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι το έργο είναι κάποιο εργοστάσιο με ορισμένη παραγωγική ικανότητα. Αν τα μεταβλητά κόστη είναι θετικά και οι διευθυντές έχουν τη δυνατότητα να κλείσουν το εργοστάσιο προσωρινά όταν η τιμή του προϊόντος είναι κάτω από το μεταβλητό κόστος και/ή οι διευθυντές έχουν τη δυνατότητα της τελείως εγκατάλειψης του έργου, η V δεν ακολουθεί τη γεωμετρική Brownian motion ακόμη κι αν το κάνει η τιμή του προϊόντος. Αν τα μεταβλητά κόστη είναι θετικά και οι διευθυντές *δεν έχουν* τη δυνατότητα να κλείσουν το εργοστάσιο (ίσως εξαιτίας κανονιστικών περιορισμών), η V μπορεί να γίνει αρνητική, το οποίο έρχεται και πάλι σε αντίθεση με την παραδοχή της λογαριθμικής κατανομής. Επιπλέον θα μπορούσε κανείς να πιστέψει ότι μια ανταγωνιστική αγορά από προϊόντα θα εμπόδιζε την τιμή από το να βρεθεί πολύ πιο μακριά από το μακροπρόθεσμο οριακό κόστος σε επίπεδο κλάδου, ή ότι οι στοχαστικές μεταβολές στην τιμή είναι πιθανόν να είναι σπάνιες αλλά μεγάλες, έτσι ώστε η V να ακολουθεί διαδικασία διακριτών μετακινήσεων ή παλινδρόμησης γύρω από μια μέση τιμή. Προς το παρόν αγνοούμε αυτές τις πιθανότητες προκειμένου να παρέχουμε την πιο απλή εισαγωγή στις βασικές ιδέες και τεχνικές.

Ας προσεχθεί ότι η επενδυτική ευκαιρία της εταιρείας είναι ισοδύναμη με μια διαρκή option αγοράς – το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση αγοράς μιας μετοχής χρηματιστηρίου σε μια προκαθορισμένη τιμή. Συνεπώς η απόφαση για επένδυση είναι ισοδύναμη με την απόφαση για το πότε θα διατεθεί μια τέτοια option. Έτσι, η απόφαση για επένδυση μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πρόβλημα εκτίμησης option. Εναλλακτικά, μπορεί να αντιμετωπισθεί ως πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού. Εμείς θα παράγουμε τον κανόνα βέλτιστης επένδυσης με δύο τρόπους, πρώτα χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας μεθόδους για την αποτίμηση της option. Αυτό θα μας επιτρέψει να συγκρίνουμε αυτές τις δύο προσεγγίσεις και τις παραδοχές που καθεμιά απαιτεί. Κατόπιν θα εξετάσουμε τα χαρακτηριστικά της λύσης.

Στη συνέχεια θα σημάνουμε την αξία της επενδυτικής ευκαιρίας (δηλαδή στην αξία της option επένδυσης) με F(V). Χρειαζόμαστε έναν κανόνα που μεγιστοποιεί αυτήν την τιμή. Δεδομένου ότι η αποπληρωμή από την επένδυση σε χρόνο t είναι V_t – I, θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την αναμενόμενη παρούσα αξία της:

$$F(V)= \max \mathcal{E}[(V_T - I)e^{-\rho T}] \tag{2}$$

όπου το Ɛ δηλώνει την προσδοκία, το T είναι η (άγνωστη) μελλοντική χρονική στιγμή που γίνεται η επένδυση, το ρ είναι το επιτόκιο αναγωγής και η μεγιστοποίηση υπόκειται στην εξίσωση (1) για τη V. Για να έχει νόημα το πρόβλημα αυτό, πρέπει επίσης να υποθέσουμε ότι α < ρ. Διαφορετικά το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (1) θα γινόταν απεριόριστα μεγαλύτερο αν επιλέγαμε ένα μεγαλύτερο T. Έτσι το να περιμένουμε όσο το δυνατόν περισσότερο θα ήταν για πάντα η καλύτερη πολιτική και δε θα υπήρχε κάποια βέλτιστη πολιτική. Θα ονομάσουμε με δ τη διαφορά ρ – α. Συνεπώς υποθέτουμε ότι δ > 0.

1.1.Α Η ντετερμινιστική υπόθεση

Αν και ως επί το πλείστον θα ασχοληθούμε με τους τρόπους με τους οποίους η απόφαση για επένδυση επηρεάζεται από την αβεβαιότητα, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση κατά την οποία δεν υπάρχει αβεβαιότητα, το οποίο σημαίνει ότι το σ στην εξίσωση (1) είναι μηδέν. Όπως θα δούμε, εξακολουθεί να υπάρχει μια τιμή σε αναμονή.

Αν σ = 0, $V(t) = V_0 \cdot e^{\alpha t}$, όπου $V_0 = V(0)$. Έτσι με δεδομένη μια τρέχουσα τιμή V, η αξία της επενδυτικής ευκαιρίας, υποθέτοντας ότι επενδύουμε σε κάποια αυθαίρετη μελλοντική στιγμή T, είναι

$$F(V) = (V \cdot e^{\alpha T} - I) \cdot e^{-\rho T} \tag{3}$$

Ας υποθέσουμε ότι α ≤ 0. Τότε το V(t) θα παραμείνει σταθερό ή θα πέσει με την πάροδο του χρόνο και έτσι είναι σαφώς βέλτιστη επιλογή να επενδύσουμε αμέσως αν V > I και ποτέ να μην επενδύσουμε διαφορετικά. Εξ ου και το ότι F(V) = max[V – I, 0].

Τι θα συμβεί αν 0 < α < ρ; Τότε είναι F(V) > 0 ακόμη κι αν ισχύει την τρέχουσα στιγμή ότι V < I, επειδή τελικά η V θα ξεπεράσει το I. Επίσης, ακόμη κι αν η V είναι μεγαλύτερη του I από τώρα, μπορεί να είναι καλύτερο να περιμένουμε από το να επενδύσουμε άμεσα. Για να γίνει αντιληπτό αυτό, μεγιστοποιούμε το F(V) στην εξίσωση (3) σε σχέση με το T. Ο πρώτης τάξης όρος είναι

$$\frac{dF(V)}{dT} = -(\rho - a)\cdot V \cdot e^{-(\rho-\alpha)\mathrm{T}} + \rho \cdot \mathrm{I} \cdot e^{-\rho \mathrm{T}} = 0,$$

το οποίο δίνει

$$\mathrm{T}^* = \max\left\{\frac{1}{a}\log\left[\frac{\rho \cdot \mathrm{I}}{(\rho-\alpha)\cdot V}\right], 0\right\} \tag{4}$$

Προσέξτε ότι αν η V δεν είναι πολύ μεγαλύτερη του I, θα έχουμε $T^* > 0$. Ο λόγος για την καθυστέρηση της επένδυσης σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι, σε παρούσα αξία, το κόστος της επένδυσης μειώνεται κατά ένα συντελεστή $e^{-\rho T}$, ενώ η αποπληρωμή μειώνεται κατά ένα μικρότερο συντελεστή $e^{-(\rho-\alpha)T}$.

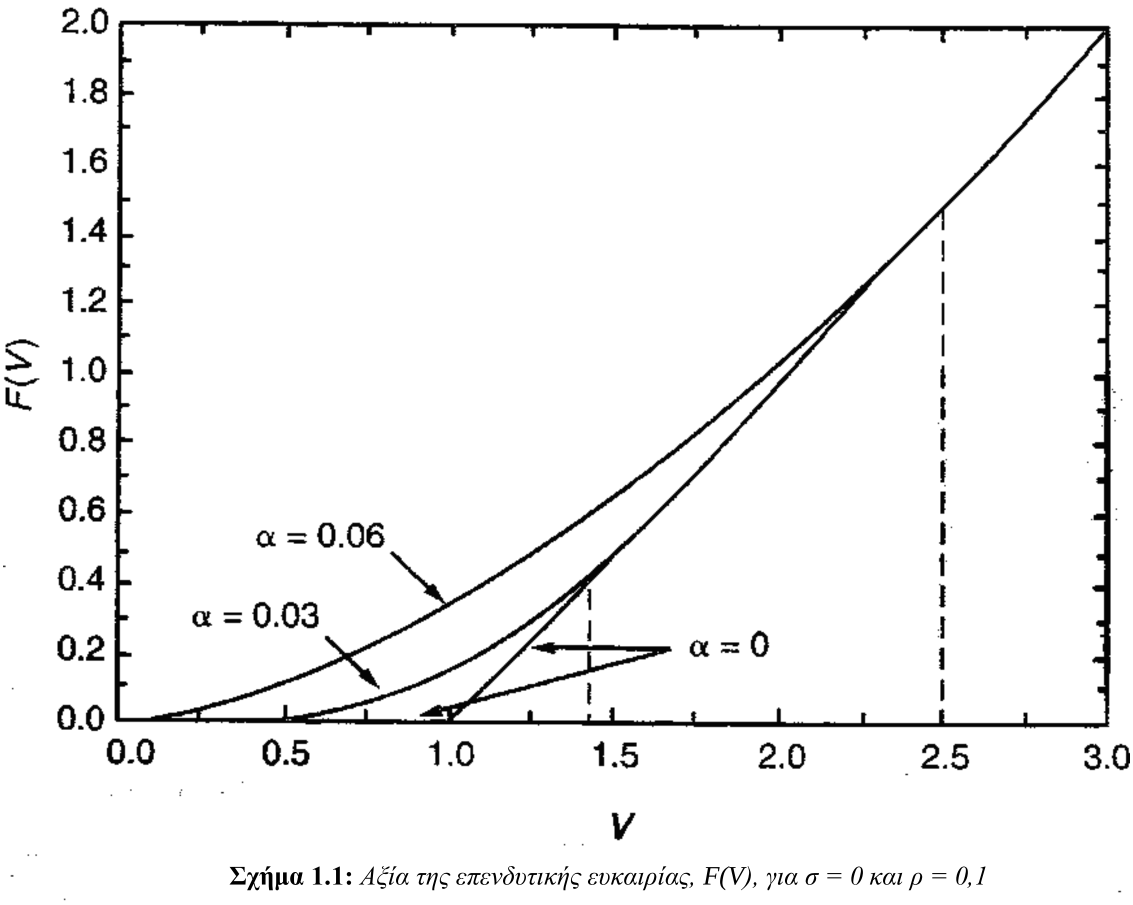
Για ποιες τιμές της V είναι βέλτιστο να επενδύσουμε άμεσα; Θέτοντας $T^* = 0$, βλέπουμε ότι πρέπει κανείς να επενδύσει άμεσα αν $V \geq V^*$, όπου

$$V^* = \frac{\rho}{\rho-\alpha} I > I \tag{5}$$

Τελικά, με την αντικατάσταση της σχέσης (4) στην εξίσωση (3), παίρνουμε την ακόλουθη λύση για την F(V):

$$F(V) = \begin{cases} [\alpha \cdot I / (\rho - \alpha)] \cdot [(\rho - \alpha) \cdot V / \rho \cdot I]^{\rho/\alpha} & \text{για } V \leq V^* \\ V - I & \text{για } V > V^* \end{cases} \tag{6}$$

Το παρακάτω σχήμα δείχνει την F(V) σε συνάρτηση της V για I = 1, ρ = 0,10 και α = 0, 0,03 και 0,06. Σε κάθε περίπτωση το σημείο επαφής της F(V) με τη γραμμή V – I είναι στην κρίσιμη τιμή $V^* = \rho \cdot I/(\rho - \alpha)$. Προσέξτε ότι η F(V) αυξάνεται όταν αυξάνεται το α και το ίδιο συμβαίνει με την κρίσιμη τιμή V^*. Η αύξηση της V δημιουργεί μια τιμή σε αναμονή και αυξάνει την τιμή της επενδυτικής ευκαιρίας.



Σχήμα 1.1: *Αξία της επενδυτικής ευκαιρίας, F(V), για σ = 0 και ρ = 0,1*

1.1.B Η στοχαστική υπόθεση

Θα επιστρέψουμε τώρα στη γενική περίπτωση στην οποία σ > 0. Το πρόβλημα είναι να προσδιοριστεί το σημείο στο οποίο είναι βέλτιστο να επενδύσουμε με κόστος I σε αντάλλαγμα για ένα κεφάλαιο αξίας V. Δεδομένου ότι η V εξελίσσεται στοχαστικά, δε θα μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τη χρονική στιγμή T όπως κάναμε και πιο πάνω. Αντ' αυτού, ο κανόνας για την επένδυσή μας θα πάρει τη μορφή μιας κρίσιμης τιμής V^* έτσι ώστε να είναι βέλτιστο να επενδύσει κανείς εφόσον $V \geq V^*$. Όπως θα δούμε, μια υψηλότερη τιμή του σ θα καταλήξει σε μεγαλύτερη V^*, που σημαίνει μεγαλύτερη τιμή στην αναμονή. Είναι σημαντικό να έχουμε κατά νου ωστόσο, ότι σε γενικές γραμμές τόσο η ανάπτυξη (α > 0) όσο και η αβεβαιότητα (σ > 0) μπορούν να δημιουργήσουν μια τιμή για την αναμονή και επομένως να επηρεάσουν το χρονοδιάγραμμα των επενδύσεων.

Στις επόμενες δύο ενότητες, θα λύσουμε το πρόβλημα της επένδυσης με δύο τρόπους. Πρώτα, θα χρησιμοποιήσουμε δυναμικό προγραμματισμό και στη συνέχεια θα λύσουμε το ίδιο πρόβλημα ξανά χρησιμοποιώντας μεθόδους πιθανών αξιώσεων. Αυτό θα μας δώσει τη δυνατότητα να συγκρίνουμε προσεκτικά αυτές τις δύο προσεγγίσεις.

1.2 Επίλυση με Δυναμικό Προγραμματισμό

Γενικά, έχουμε ένα πρόβλημα βέλτιστης διακοπής σε συνεχή χρόνο. Επειδή η επενδυτική ευκαιρία F(V) δεν αποδίδει χρηματοροές μέχρι τη στιγμή T που αναλαμβάνεται η επένδυση, η μόνη επιστροφή από την εκμετάλλευση είναι η ανατίμηση του κεφαλαίου της. Ως εκ τούτου, στην περιοχή της συνέχισης (για την οποία οι τιμές της V δεν είναι οι βέλτιστες για επένδυση) η εξίσωση Bellman είναι

$$\rho \cdot F \cdot dt = \mathcal{E}(dF) \tag{7}$$

Η εξίσωση (7) απλά λέει ότι με την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος dt, η συνολική αναμενόμενη απόδοση για την επενδυτική ευκαιρία, $\rho \cdot F \cdot dt$, ισούται με το αναμενόμενο ρυθμό της ανατίμησης του κεφαλαίου.

Επεκτείνουμε το dF χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Itô και χρησιμοποιούμε αρχές για να ορίσουμε τις παραγώγους, για παράδειγμα, $F' = dF/dV$, $F'' = d^2F/dV^2$ κλπ. Τότε

$$dF = F'(V)dV + \frac{1}{2}F''(V)(dV)^2$$

Αντικαθιστώντας το dV από την εξίσωση (1) σε αυτήν την έκφραση και παρατηρώντας ότι $\mathcal{E}(dz) = 0$, παίρνουμε

$$\mathcal{E}[dF] = \alpha \cdot V \cdot F'(V) \cdot dt + (1/2) \cdot \sigma^2 \cdot V^2 \cdot F''(V) \cdot dt$$

Έτσι η εξίσωση Bellman γίνεται (μετά τη διαίρεση με το dt):

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot V^2\cdot F''(V)+\alpha\cdot V\cdot F'(V)-\rho\cdot F=0 \qquad (8)$$

Θα είναι πιο εύκολο να αναλυθεί η λύση και να συγκριθεί με εκείνη που αποκτάται μέσω της ανάλυσης των πιθανών αξιώσεων αν κάνουμε την αντικατάσταση α = ρ – δ. Για να εξασφαλιστεί η ύπαρξη ενός βέλτιστου (για λόγους που έχουν ήδη εξηγηθεί στο πλαίσιο της ντετερμινιστικής υπόθεσης), κάνουμε την παραδοχή ότι α < ρ, ή δ > 0. Με αυτό το συμβολισμό, η εξίσωση του Bellman γίνεται η ακόλουθη διαφορική εξίσωση που πρέπει να ικανοποιηθεί από την F(V):

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot V^2\cdot F''(V)+(\rho-\delta)\cdot V\cdot F'(V)-\rho\cdot F=0 \qquad (9)$$

Επιπλέον, η F(V) πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$F(0) = 0 \qquad (10)$$
$$F(V^*) = V^* - I \qquad (11)$$
$$F'(V^*) = 1 \qquad (12)$$

Η συνθήκη (10) προκύπτει από την παρατήρηση ότι αν η V γίνει μηδέν, θα παραμείνει μηδενική [αυτό είναι μια επίπτωση της στοχαστικής διαδικασίας (1) για τη V]. Επομένως, η option επένδυσης δε θα έχει καμιά αξία όταν V = 0. Οι άλλες δύο συνθήκες προέρχονται από την εξέταση της βέλτιστης επένδυσης. Η V^* είναι η τιμή στην οποία είναι βέλτιστο να επενδύσουμε ή η ελεύθερη συνθήκη της περιοχής συνέχισης. Τότε η (11) είναι η συνθήκη ταιριάσματος της τιμής. Απλά λέει ότι άπαξ και γίνει η επένδυση, η εταιρεία λαμβάνει μια καθαρή αποπληρωμή V^* – I. Τέλος, η συνθήκη (12) είναι μια συνθήκη «ομαλής επικόλλησης». Αν η F(V) δεν ήταν συνεχής και ομαλή στο κρίσιμο σημείο διάθεσης V^*, θα ήταν καλύτερο για κάποιον να επενδύσει σε κάποιο διαφορετικό σημείο.

Προσέξτε ότι η εξίσωση (9) είναι μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, αλλά υπάρχουν τρεις οριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιηθούν. Ο λόγος είναι ότι παρόλο που η θέση της πρώτης συνθήκης (V = 0) είναι γνωστή, η θέση της δεύτερης συνθήκης δεν είναι. Με άλλα λόγια, το «ελεύθερο όριο» V^* πρέπει να καθοριστεί ως μέρος της λύσης. Αυτό όμως χρειάζεται τον τρίτο όρο.

Η εξίσωση (11) έχει μια άλλη χρήσιμη ερμηνεία. Τη γράφουμε ως V^* – F(V^*) = I. Όταν η εταιρεία επενδύει, παίρνει το έργο που έχει αξία V, αλλά δίνει την ευκαιρία ή δυνατότητα για επένδυση, η οποία έχει αξία F(V). Έτσι το όφελός της, καθαρό από το ευκαιριακό κόστος, είναι V – F(V). Η κρίσιμη τιμή V^* είναι αυτή όπου αυτό το καθαρό κέρδος ισούται με το άμεσο ή υλικό κόστος της επένδυσης, I. Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να γράψουμε την εξίσωση ως V^* = I + F(V^*), ορίζοντας την αξία του έργου ίση με το συνολικό κόστος (άμεσο κόστος συν ευκαιριακό κόστος) από την υλοποίηση της επένδυσης. Θα συζητήσουμε αυτό το σημείο με περισσότερες λεπτομέρειες αργότερα.

Για να βρούμε το F(V), πρέπει να λύσουμε την εξίσωση (9) που υπόκειται στις οριακές συνθήκες (10) έως (12). Σε αυτήν την περίπτωση είναι εύκολο να βρεθεί μια λύση: μπορούμε να μαντέψουμε μια λειτουργική μορφή και να καθορίσουμε μέσω αντικαταστάσεων αν λειτουργεί. Αρχικά αναφέρουμε τη λύση και αντλούμε κάποιες από τις ιδιότητές της και στη συνέχεια συζητούμε γι' αυτήν με περισσότερες λεπτομέρειες.

Προκειμένου να ικανοποιείται η οριακή συνθήκη (10), η λύση πρέπει να πάρει τη μορφή

$$F(V) = A \cdot V^{\beta_1} \tag{13}$$

όπου το Α είναι μια σταθερά που πρόκειται να καθοριστεί και η $\beta_1 > 1$ είναι μια γνωστή σταθερά της οποίας οι τιμές εξαρτώνται από τις παραμέτρους σ, ρ και δ της διαφορικής εξίσωσης.

Οι εναπομείνασες οριακές συνθήκες (11) και (12) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση των δύο εναπομεινάντων αγνώστων – της σταθεράς Α και της κρίσιμης τιμής V^* στην οποία είναι βέλτιστο να επενδύσουμε. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (13) στην (11) και τη (12) και κάνοντας κάποιες πράξεις διαπιστώνουμε ότι

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I \tag{14}$$

και

$$A = (V^* - I)/(V^*)^{\beta_1} = (\beta_1 - 1)^{\beta_1 - 1}/[(\beta_1)^{\beta_1} I^{\beta_1 - 1}] \tag{15}$$

Οι εξισώσεις (13) έως (15) δίνουν την τιμή της επενδυτικής ευκαιρίας και του κανόνα βέλτιστης επένδυσης, δηλαδή την κρίσιμη τιμή V^* στην οποία είναι βέλτιστο να επενδύσουμε. Θα εξετάσουμε αργότερα τα χαρακτηριστικά αυτής της λύσης με περισσότερες λεπτομέρειες. Προς το παρόν, το πιο σημαντικό σημείο είναι ότι δεδομένου πως $\beta_1 > 1$, έχουμε ότι $\beta_1/(\beta_1 - 1) > 1$ και επίσης $V^* > I$. Έτσι ο απλός κανόνας της καθαρής παρούσας αξίας είναι εσφαλμένος. Η αβεβαιότητα και η μη αντιστρεψιμότητα κείνται μεταξύ της κρίσιμη τιμής V^* και του Ι. Το μέγεθος της έκτασης είναι ο παράγοντας $\beta_1/(\beta_1 - 1)$ και είναι σημαντικό να εξετάσουμε το μέγεθός της για ρεαλιστικές τιμές των βασικών παραμέτρων και την ανταπόκρισής της στις μεταβολές των παραμέτρων αυτών. Για να γίνει αυτό πρέπει να εξετάσουμε τη λύση (13) εις βάθος.

1.2.Α Η θεμελιώδης εξίσωση δευτέρου βαθμού

Δεδομένου ότι η ομογενής διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού (9) είναι γραμμική με την εξαρτημένη μεταβλητή F(V) και τις παραγώγους της, η γενική της λύση μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός οποιωνδήποτε δύο ανεξάρτητων λύσεων. Αν δοκιμάσουμε τη συνάρτηση $A \cdot V^{\beta}$ βλέπουμε μέσω αντικατάστασης ότι ικανοποιεί την εξίσωση με την προϋπόθεση ότι το β αποτελεί λύση του εξής πολυωνύμου δευτέρου βαθμού:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta - 1) + (\rho - \delta)\beta - \rho = 0 \tag{16}$$

Οι δύο ρίζες είναι

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - (\rho - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{[\rho - \delta)/\sigma^2 + 2\rho/\sigma^2} \quad > 1$$

και

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - (\rho - \delta)/\sigma^2 - \sqrt{[\rho - \delta)/\sigma^2 + 2\rho/\sigma^2} \quad < 0$$

Έτσι η γενική λύση της εξίσωσης (9) μπορεί να γραφεί ως

$$F(V) = A_1 \cdot V^{\beta_1} + A_2 \cdot V^{\beta_2}$$

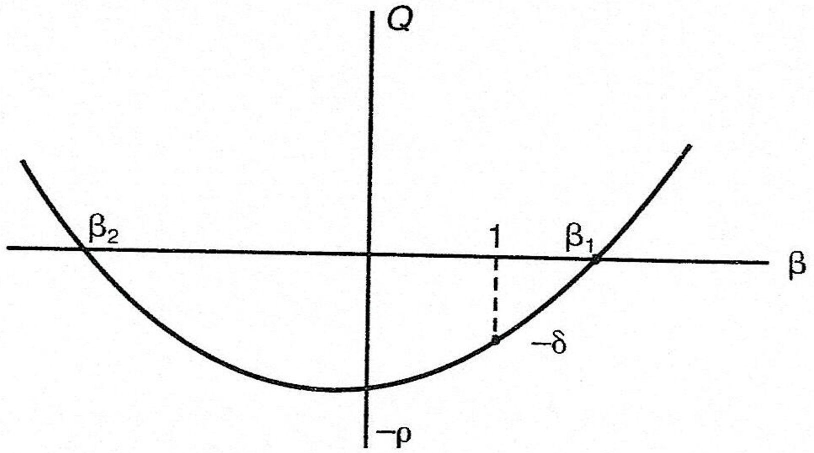
όπου τα A_1 και A_2 είναι σταθερές που πρέπει να καθοριστούν. Στο πρόβλημά μας, η οριακή συνθήκη (10) υποδηλώνει ότι $A_2 = 0$, εγκαταλείποντας την εξίσωση (13).

Προκειμένου να απαντήσουμε στις ερωτήσεις οικονομικού ενδιαφέροντος σχετικά με το γινόμενο $\beta_1/(\beta_1 - 1)$, πρέπει να εξετάσουμε το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού της εξίσωσης (16) με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Δεδομένου ότι αυτή η εξίσωση, αλλά και παρόμοιες εξισώσεις, θα εμφανίζονται πολύ συχνά, είναι βοηθητικό να εγκαθιδρύσουμε μια σταθερή ορολογία και να αποκτήσουμε κάποια γενικά αποτελέσματα στην αρχή.

Γενικά θα ορίσουμε τη μεταβλητή στην εξίσωση με β και ολόκληρη την πολυωνυμική έκφραση (στο αριστερό μέλος) με Q. Έτσι το Q είναι μια συνάρτηση της μεταβλητής β, καθώς επίσης και των παραμέτρων σ, ρ και δ. Δε θα δείξουμε αυτήν την εξάρτηση ρητά, εκτός κι αν είναι σημαντικό να το κάνουμε αυτό.

Αν και οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης δίνονται σε σαφή αλγεβρική μορφή, θα βοηθήσει να τις δείξουμε γεωμετρικά. Η πιο κάτω εικόνα δείχνει το Q ως συνάρτηση του β. Ο συντελεστής β_2 της Q(β) είναι θετικός και έτσι γραφική παράσταση είναι μια παραβολή που κοιτάζει προς τα πάνω ενώ εκτείνεται στο ∞ και καθώς το β πηγαίνει προς το $\pm\infty$. Επίσης είναι $Q(1) = -\delta < 0$ (θυμηθείτε πως υποθέτουμε ότι $\delta > 0$) και $Q(0) = -\rho < 0$. Κατά συνέπεια η γραφική παράσταση διασταυρώνεται με τον οριζόντιο άξονα σε ένα σημείο στα δεξιά του 1 και σε ένα άλλο σημείο στα αριστερά του 0. Δηλαδή, η μια ρίζα που ας πούμε ότι είναι η β_1 ξεπερνά το 1 και η άλλη – η β_2 – είναι αρνητική.

Εστιάζουμε στη θετική ρίζα β_1. Πώς μεταβάλλεται όταν αλλάζει μια παράμετρος, έστω η σ; Αυτό απαντάται μέσω συγκριτικών στατικών.



Σχήμα 1.2: *Η βασική πολυωνυμική εξίσωση*

Διαφορίζουμε την πολυωνυμική έκφραση και έχουμε

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta}\frac{\partial \beta_1}{\partial \sigma}+\frac{\partial Q}{\partial \sigma}=0$$

όπου όλες οι παράγωγοι αποτιμώνται στο β_1. Η παραπάνω εικόνα δείχνει ότι $\partial Q/\partial \beta > 0$ στο β_1. Επίσης

$$\partial Q/\partial \sigma = \sigma \cdot \beta \cdot (\beta - 1) \ > 0$$

στο $\beta_1 > 1$. Επομένως $\partial \beta_1 / \partial \sigma < 0$. Με άλλα λόγια, καθώς το σ αυξάνεται, το β_1 μειώνεται και κατά συνέπεια το $\beta_1/(\beta_1 - 1)$ αυξάνεται. Όσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα για τις μελλοντικές τιμές της V, τόσο μεγαλύτερη είναι η έκταση ανάμεσα στη V^* και το I, δηλαδή τόσο μεγαλύτερη είναι η υπερβάλλουσα απόδοση που θα απαιτήσει η εταιρεία πριν προθυμοποιηθεί να κάνει την αμετάκλητη επένδυση.

Οι αναγνώστες μπορούν να ελέγξουν δύο άλλες ιδιότητες αυτής της εξίσωσης δευτέρου βαθμού. Πρώτον, το β_1 αυξάνεται καθώς το δ μειώνεται και έτσι ένα υψηλότερο δ σημαίνει μια μικρότερη έκταση $\beta_1/(\beta_1 - 1)$. Δεύτερον, το β_1 μειώνεται καθώς το ρ αυξάνεται και έτσι ένα υψηλότερο ρ υποδηλώνει μια πιο ευρεία έκταση. Θα συζητήσουμε αυτά τα αποτελέσματα με μεγαλύτερη λεπτομέρεια και θα παρουσιάσουμε κάποιες αριθμητικές τιμές στην ενότητα 4 αυτού του κεφαλαίου.

Κάποια περιοριστικά αποτελέσματα σχετικά με το β_1 είναι επίσης κατατοπιστικά. Τα δηλώνουμε με απλό τρόπο. Επιβεβαιώνονται εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε την αλγεβρική μορφή. Πρώτα, καθώς το $\sigma \to \infty$, έχουμε ότι $\beta_1 \to 1$ και $V^* \to \infty$, δηλαδή η εταιρεία δε θα επενδύσει ποτέ αν το σ είναι άπειρο. Στη συνέχεια θα δούμε τι συμβαίνει όταν το $\sigma \to 0$. Έχουμε

Αν $\alpha > 0$, τότε $\beta_1 \to \rho/(\rho - \delta)$ και $V^* \to (\rho/\delta) \cdot I$
Αν $\alpha \leq 0$, τότε $\beta_1 \to \infty$ και $V^* \to I$

Αυτά τα αποτελέσματα συμφωνούν με εκείνα της ντετερμινιστικής υπόθεσης που εξετάσαμε νωρίτερα.

1.2.Β Σχέση με τη Νεοκλασική Θεωρία Επενδύσεων

Για να ωθήσουμε αυτήν την ανάλυση λίγο πιο μακριά, ας υποθέσουμε ότι το ίδιο το έργο είναι ένα εργοστάσιο που ζει για άπειρο χρόνο και παράγει μια ροή κέρδους π_t, δηλαδή ακολουθεί τη διαδικασία

$$d\pi = \alpha \cdot \pi \cdot dt + \sigma \cdot \pi \cdot dz$$

Τώρα η V δίνεται από τη σχέση

$$V_E = \varepsilon \int_t^{\infty} \pi_s e^{-\rho(s-t)} ds = \frac{\pi_t}{\rho - \alpha}$$

και το dV δίνεται από την εξίσωση (1). Χρησιμοποιείται ο συνήθης Marshallian κανόνας για να επενδύσουμε όσο $V_t \geq I$ ή $\pi_t \geq (\rho - \alpha)I$. Ωστόσο, η εξίσωση (14) μας λέει ότι αντιθέτως η εταιρεία θα έπρεπε να επενδύσει όταν

$$\pi_t \geq \pi^* = \frac{\beta}{\beta - 1}(\rho - \alpha)\, I \; > \; (\rho - \alpha)\, I \tag{17}$$

Ένας άλλος τρόπος για να εξετάσουμε αυτό είναι υπό το πρίσμα της Jorgensonian προσέγγισης για επένδυση. Από τη δευτέρου βαθμού εξίσωση (16) που ικανοποιείται με τη ρίζα β_1, έχουμε

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}(\rho - \alpha) = \rho + \frac{1}{2}\sigma^2 \beta_1$$

Έτσι το κρίσιμο επίπεδο κέρδους π^* μπορεί να γραφεί ως

$$\pi^* = (\,\rho + \frac{1}{2}\sigma^2 \beta_1)\, I \tag{18}$$

Δεδομένου ότι έχουμε υποθέσει πως έχουμε μηδενική απόσβεση, το $\rho \cdot I$ είναι το Jorgensonian κόστος χρήσης του κεφαλαίου. Ο Jorgensonian κανόνας αφορά επενδύσεις όταν $\pi_t = \rho \cdot I$. Η εξίσωση (18) μας λέει ότι όταν τα μελλοντικά κέρδη είναι αβέβαια, το κατώτατο όριο π^* πρέπει να υπερβαίνει το κόστος χρήσης του κεφαλαίου.

Σε περίπτωση απουσίας της αβεβαιότητας ο Jorgensonian κανόνας επενδύσεων κάνει την εταιρεία να επενδύει όταν $\pi_t = \rho \cdot I$, όχι όταν $\pi_t = (\rho - \alpha) \cdot I$. Όπως είδαμε νωρίτερα, αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως κανόνας βέλτιστου συγχρονισμού. Για άλλη μια φορά, η εταιρεία πρέπει να επιλέξει κάποιο T ώστε να το μεγιστοποιήσει.

$$\max\left(\frac{\pi_0 \cdot e^{a \cdot T}}{\rho - \alpha} - I\right) \cdot e^{-\rho \cdot \mathrm{T}} = \frac{\pi_0 \cdot e^{-(\rho - \alpha)\mathrm{T}}}{\rho - \alpha} - I \cdot e^{-\rho \mathrm{T}} \tag{19}$$

Η λύση είναι να επενδύσει η εταιρεία σε μια χρονική στιγμή Τ, όταν

$$\pi_{\mathrm{T}} = \pi_0 \cdot e^{\alpha \cdot \mathrm{T}} = \rho \cdot I \tag{20}$$

Συνεπώς η επιχείρηση θα πρέπει να περιμένει πριν επενδύσει ακόμη κι αν δεν υπάρχει αβεβαιότητα, επειδή η αναμονή επιτρέπει την αναβολή (και επομένως την αναγωγικότητα) της πληρωμής I. Όπως δείχνει και η εξίσωση (18), με την αβεβαιότητα υπάρχει ένας επιπρόσθετος όρος $\frac{1}{2}\sigma^2\beta_1$, έτσι ώστε η εταιρεία να πρέπει να περιμένει ακόμη περισσότερο πριν επενδύσει. Ο πρόσθετος αυτός όρος μπορεί να θεωρηθεί ως μια διόρθωση στο νεοκλασικό μοντέλο επένδυσης.

1.2.Γ Σχέση με το μέγεθος q του Tobin

Ο Tobin (1969) εισήγαγε ένα μέγεθος q, το οποίο ορίζεται ως ο λόγος «της αξίας των υφισταμένων κεφαλαιουχικών αγαθών ή των τίτλων αυτών» προς «το τρέχον κόστος της αναπαραγωγής της». Αυτό αποτελεί πλέον μια κεντρική έννοια στην ορθόδοξη θεωρία των επενδύσεων. Η ιδέα είναι ότι εάν ο λόγος του υπερβαίνει τη μονάδα, τότε μια επιχείρηση μπορεί να αυξήσει την αγοραστική της αξία με την αύξηση του μετοχικού κεφαλαίου της. Ως εκ τούτου θα πρέπει να δούμε μια επιχείρηση να επενδύει όταν η τιμή του q για την εταιρεία είναι μεγαλύτερη του 1 και δε θα τη δούμε να επενδύει όταν το q είναι μικρότερο του 1. Επιπλέον, μπορούμε να αθροίσουμε υπολογίζοντας ένα q που βασίζεται στη μέση αγοραστική αξία των εταιρειών σε μια επένδυση (ή το σύνολο της οικονομίας) και στο αντίστοιχο μέσο κόστος του κεφαλαίου. Θα πρέπει τότε να παρατηρήσουμε ότι στο επίπεδο της άθροισης οι επενδυτικές δαπάνες σχετίζονται θετικά με την τιμή αυτού του q.

Προκύπτουν ορισμένα θέματα σε σχέση με τη μέτρηση και την ερμηνεία του q. Ένα από αυτά που είναι και σημαντικό είναι ότι αυτό που θα έπρεπε να απασχολεί την επένδυση είναι το *οριακό* q, δηλαδή το q που ισχύει για την εταιρεία ή το πρόσθετο επενδυτικό σχέδιο μιας βιομηχανίας, σε αντίθεση με το *μέσο* q που ισχύει για το σύνολο της αξίας και του μετοχικού κεφαλαίου της εταιρείας ή της βιομηχανίας. Όπως έχει αναφερθεί, ο αριθμητής στο q είναι η αγοραστική αξία των *υφισταμένων* περιουσιακών στοιχείων. Αυτό που έχει σημασία για την επενδυτική απόφαση είναι η επίδραση του *επόμενου* σχεδίου στην αξία της εταιρείας. Κατά συνέπεια, όταν εγκαθιδρύεται ένα έργο αξίας V και με αξία για την option F(V), η αξία της εταιρείας θα πρέπει να αυξηθεί κατά V – F(V), όχι κατά V. Αντίστοιχα, το q θα πρέπει να οριστεί ως ο λόγος [V – F(V)]/*I*. Τότε η κρίσιμη τιμή του q που δικαιολογεί την επένδυση θα είναι πράγματι 1, όπως βλέπουμε από την εξίσωση (11), η οποία ορίζει την κρίσιμη V^*.

Ωστόσο, είναι δύσκολο να προσδιορίσει κανείς το τμήμα της αγοραστικής αξίας μιας εταιρείας που προέρχεται από την οριακή μονάδα του κεφαλαίου. Εν μέρει, εξαιτίας αυτού, το q πρέπει οπωσδήποτε να οριστεί ή τουλάχιστον να μετρηθεί κάπως διαφορετικά, δηλαδή ως ο λόγος της αναμενόμενης παρούσας αξίας των κερδών που θα απορρέουν από μια ολοκληρωμένη επένδυση προς το κόστος της κατασκευής της. Αυτό είναι αντίστοιχο με την αξία των υφιστάμενων ενεργητικών κεφαλαίων, όπου η option επένδυσης έχει ήδη διατεθεί και το ευκαιριακό της κόστος έχει ξεπεραστεί. Στο συμβολισμό της, αυτό σημαίνει ότι ορίζουμε το q ως V/*I*. Μπορούμε να εκφράσουμε το κριτήριο της σωστής επένδυσης υπό το πρίσμα της έννοιας q: Το κατώτατο όριο q^* που δικαιολογεί την επένδυση δίνει ως

$$Q^* = \beta_1/(\beta_1 - 1) > 1 \qquad (21)$$

Καθώς το V θα κυμαίνεται, θα υπάρχουν τμήματα του χρόνου όπου το συμβατικά μετρούμενο q υπερβαίνει το 1 χωρίς την προσέλκυση επενδύσεων. Αυτό δίνει μια νέα προοπτική στην επίδραση του αμετάκλητου στην απόφαση της εταιρείας για επένδυση.

1.3 Επίλυση μέσω της ανάλυσης πιθανών αξιώσεων

Σε περίπτωση που η εταιρεία που κάνει επενδύσεις είναι εισηγμένη στο χρηματιστήριο και οι διευθυντές της θέλουν οι αποφάσεις τους να αντικατοπτρίζουν τα συμφέροντα των μετόχων, θα πρέπει να προσπαθήσουν να μεγιστοποιήσουν την αγοραστική αξία της εταιρείας. Πώς ξέρουμε ότι ο κανόνας επένδυσης που αναφέρεται παραπάνω θα το κάνει αυτό; Ένα πρόβλημα με αυτόν τον επενδυτικό κανόνα είναι ότι βασίζεται σε ένα αυθαίρετο και σταθερό επιτόκιο αναγωγής ρ. Δεν είναι σαφές από πού θα έπρεπε να προέρχεται το επιτόκιο αυτό, ή ακόμα και ότι θα πρέπει να είναι σταθερό με το χρόνο. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους πιθανών αξιώσεων (τιμολόγησης option) για την εξαγωγή ενός ελαφρώς τροποποιημένου κανόνα επένδυσης που πράγματι θα μεγιστοποιεί την αγοραστική αξία της εταιρείας. Στην ενότητα αυτή, θα εξετάσουμε λεπτομερώς τα απαραίτητα βήματα.

1.3.Α Επανερμηνεία του μοντέλου

Η χρήση της ανάλυσης πιθανών αξιώσεων απαιτεί μια σημαντική υπόθεση: οι στοχαστικές μεταβολές στη V πρέπει να συνδέονται με τα υπάρχοντα ενεργητικά κεφάλαια στην οικονομία. Συγκεκριμένα, οι κεφαλαιαγορές πρέπει να είναι αρκετά «πλήρεις» έτσι ώστε τουλάχιστον κατ’ αρχήν να μπορεί κάποιος να βρει κάποιο κεφάλαιο ή να δημιουργήσει ένα δυναμικό χαρτοφυλάκιο κεφαλαίων (δηλαδή ένα χαρτοφυλάκιο του οποίου οι περιουσίες προσαρμόζονται συνεχώς στις μεταβολές των τιμών των κεφαλαίων), η τιμή του οποίου σχετίζεται απόλυτα με τη V. Αυτό ισοδυναμεί με το να πούμε ότι οι αγορές είναι αρκετά πλήρεις ώστε οι αποφάσεις της εταιρείας να μην επηρεάζουν την ευκαιρία που είναι διαθέσιμη για τους επενδυτές.

Η υπόθεση της βαθμονόμησης αυτής θα πρέπει να ισχύει για τα περισσότερα αγαθά, τα οποία συνήθως αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης τόσο στις άμεσες αγορές όσο και στις futures αγορές καθώς και για τα βιομηχανικά προϊόντα, στο βαθμό που οι τιμές συσχετίζονται με τις τιμές των μετοχών ή των χαρτοφυλακίων. Ωστόσο, ενδέχεται να υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες η υπόθεση αυτή να μη μπορεί να διατηρηθεί. Ένα παράδειγμα μπορεί να είναι ένα σχέδιο για την ανάπτυξη ενός νέου προϊόντος που είναι ξένο προς οποιοδήποτε υφιστάμενο προϊόν, ή ένα τόλμημα έρευνας και ανάπτυξης τα αποτελέσματα του οποίου μπορεί να είναι δύσκολο να προβλεφθούν.

Θα υποθέσουμε σε αυτήν την ενότητα ότι υπάρχει βαθμονόμηση, δηλαδή ότι κατ’ αρχήν η αβεβαιότητα για τις μελλοντικές τιμές της V μπορούν να αναπαραχθούν από τα υφιστάμενα ενεργητικά κεφάλαια. Με την παραδοχή αυτή, μπορούμε να καθορίσουμε τον επενδυτικό κανόνα που μεγιστοποιεί την αγοραστική αξία της εταιρείας χωρίς να κάνουμε υποθέσεις σχετικά με τις προτιμήσεις κινδύνου ή τα αναγωγικά επιτόκια. Επίσης, η χρήση της ανάλυσης των πιθανών αξιώσεων θα διευκολύνει την ερμηνεία ορισμένων ιδιοτήτων της λύσης. Φυσικά, αν δε μπορεί να εφαρμοσθεί η βαθμονόμηση αυτή, μπορεί ακόμη να χρησιμοποιηθεί ο δυναμικός προγραμματισμός ώστε να μεγιστοποιήσει την παρούσα αξία των αναμενόμενων ροών κέρδους της εταιρείας, που υπόκειται σε ένα αυθαίρετο επιτόκιο αναγωγής.

Ακολουθούμε τη θεωρία της αποτίμησης των πιθανών αξιώσεων τώρα. Έστω x η τιμή του κεφαλαίου ή του δυναμικού χαρτοφυλακίου κεφαλαίων που σχετίζεται τέλεια με τη V και υποδηλώνουμε με το ρ_{xm} τη συσχέτιση της x με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Δεδομένου ότι η x συσχετίζεται τέλεια με τη V, ισχύει ότι $\rho_{xm} = \rho_{Vm}$. Θα υποθέσουμε ότι αυτό το ενεργητικό κεφάλαιο δεν πληρώνει κάποιο μέρισμα και έτσι όλη του η απόδοση είναι από τις υπεραξίες. Τότε η x εξελίσσεται σύμφωνα με τη σχέση

$$dx = \mu \cdot x \cdot dt + \sigma \cdot x \cdot dz \tag{22}$$

όπου το μ, ο ρυθμός εκτροπής, είναι ο αναμενόμενος ρυθμός απόδοσης από την εκμετάλλευση του ενεργητικού κεφαλαίου ή του χαρτοφυλακίου των ενεργητικών κεφαλαίων. Σύμφωνα με το Capital Asset Pricing Model (CAPM – μοντέλο αποτίμησης ενεργητικών κεφαλαίων) το μ θα πρέπει να αντανακλά το συστηματικό (μη διαφοροποιήσιμο) κίνδυνο του ενεργητικού κεφαλαίου και δίνεται ως εξής

$$\mu = r + \phi \cdot \rho_{xm} \cdot \sigma ,$$

όπου το r είναι το άνευ κινδύνου επιτόκιο και φ είναι η εμπορεύσιμη τιμή του κινδύνου. Έτσι το μ είναι το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο αναμενόμενο ποσοστό επιστροφής που θα απαιτούσαν οι επενδυτές αν έχουν ως σκοπό να διευθύνουν το έργο. Θα υποθέσουμε ότι το α, το αναμενόμενο μέσο ποσοστό μεταβολής της V, είναι μικρότερο από αυτό το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο ποσοστό επιστροφής μ. (Όπως θα δούμε, μια εταιρεία ποτέ δε θα επένδυε εάν δε συνέβαινε αυτό. Άσχετα με το ποιο είναι το τρέχον επίπεδο της V, η εταιρεία πάντοτε θα προτιμούσε να περιμένει και απλά να εκμεταλλεύεται την option επένδυσης.) Θα ονομάσουμε με δ τη διαφορά ανάμεσα στο μ και το α, δηλαδή δ = μ – α. Έτσι υποθέτουμε ότι δ > 0 και αυτό παίζει τον ίδιο ρόλο όπως η αντίστοιχη υπόθεση στη διαμόρφωση του δυναμικού προγραμματισμού της ενότητας 2.

Η παράμετρος δ διαδραματίζει σημαντικό ρόλο σε αυτό το μοντέλο. Θα είναι χρήσιμο να αξιοποιήσουμε την αναλογία με μια χρηματοπιστωτική option αγοράς. Αν είναι V η τιμή μιας κοινής μετοχής, το δ θα είναι το ποσοστό μερίσματος για τη μετοχή αυτή. Η συνολική αναμενόμενη απόδοση της μετοχής θα είναι μ = δ + α, δηλαδή το ποσοστό μερίσματος συν το αναμενόμενο ποσοστό της υπεραξίας. Αν το ποσοστό μερίσματος είναι μηδέν, μια option αγοράς στο χρηματιστήριο θα κρατηθεί μέχρι την ωρίμανση και ποτέ δε θα διατεθεί πρόωρα. Ο λόγος είναι ότι ολόκληρη η απόδοσή της στο χρηματιστήριο αποτυπώνεται στις κινήσεις της τιμής της και έτσι δεν υπάρχει κάποιο κόστος διατήρησης της option αυτής ζωντανής. Ωστόσο, αν το ποσοστό μερίσματος είναι θετικό, υπάρχει ένα ευκαιριακό κόστος για τη διατήρηση της option αυτής ζωντανής και όχι για τη διάθεσή της. Το ευκαιριακό κόστος είναι η ροή του μερίσματος που αφήνεται να χαθεί από την κράτηση της option παρά της μετοχή. Επειδή το δ είναι αναλογικός συντελεστής μερίσματος, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του χρηματιστηρίου, τόσο μεγαλύτερη είναι η ροή των μερισμάτων. Σε κάποια αρκετά υψηλή τιμή το ευκαιριακό κόστος των διαφυγόντων μερισμάτων γίνεται αρκετά μεγάλο ώστε να αξίζει να διατεθεί η option.

Για το επενδυτικό μας πρόβλημα, το μ είναι το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης από την κατοχή ολοκλήρου του έργου. Πρόκειται για το επιτόκιο ισορροπίας που θεσπίστηκε από την κεφαλαιαγορά και περιλαμβάνει ένα κατάλληλο ασφάλιστρο κινδύνου. Αν το $\delta > 0$, το αναμενόμενο ποσοστό υπεραξίας του έργου είναι μικρότερο του μ. Ως εκ τούτου, το δ είναι ένα ευκαιριακό κόστος καθυστέρησης της κατασκευής του έργου και όχι κράτησης της option επένδυσης ζωντανής. Αν το δ ήταν μηδέν, δε θα υπήρχε ευκαιριακό κόστος για τη διατήρησης της option ζωντανής και κανείς δε θα μπορούσε να επενδύσει ποτέ, ανεξάρτητα από το πόσο υψηλή θα ήταν η καθαρή παρούσα αξία του έργου. Αυτό συμβαίνει γιατί υποθέτουμε πως $\delta > 0$. Από την άλλη πλευρά, αν το δ είναι πολύ μεγάλο, η αξία της option θα είναι πολύ μικρή επειδή το ευκαιριακό κόστος της αναμονής θα είναι μεγάλο. Καθώς το $\delta \rightarrow \infty$, η αξία της option τείνει προς το μηδέν. Στην πραγματικότητα, οι μόνες επιλογές είναι να επενδύσουμε ή τώρα ή ποτέ και έτσι εφαρμόζεται και πάλι ο πρότυπος κανόνας της καθαρής παρούσης αξίας.

Η παράμετρος δ μπορεί να ερμηνευθεί και με άλλους τρόπους. Για παράδειγμα θα μπορούσε να αντικατοπτρίζει τη διαδικασία επέκτασης των πρώτων υλών και της δυναμικότητας από τους ανταγωνιστές. Ή μπορεί απλά να αντικατοπτρίζει τις χρηματοροές από το έργο. Αν το έργο ζήσει για πάντα, τότε η εξίσωση (1) μπορεί να αντιπροσωπεύει την εξέλιξη της V κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του έργου και το dV είναι τότε το ποσοστό των χρηματοροών που αποδίδει το έργο. Δεδομένου πως υποθέτουμε ότι το δ είναι σταθερό, αυτό είναι σύμφωνο με το ότι οι μελλοντικές χρηματοροές αποτελούν ένα σταθερό ποσοστό της αγοραστικής αξίας του έργου.

Όταν μεταβάλλεται κάποια άλλη παράμετρος του μοντέλο (όπως η σ), πρέπει να αναρωτηθούμε τι συμβαίνει με το δ. Μπορούν να υποτεθούν διάφορες δυνατότητες. Πάντα θα υποθέτουμε ότι το άνευ κινδύνου επιτόκιο r καθορίζεται από τα μεγαλύτερα ζητήματα του συνόλου της κεφαλαιαγοράς, ανεξάρτητα από το τι συμβαίνει σε οποιοδήποτε κεφάλαιο (εταιρείας ή ακόμη και βιομηχανίας). Η συνολική εμπορεύσιμη τιμή του κινδύνου φ διατηρείται σταθερή. Τώρα ας υποθέσουμε ότι αυξάνεται το σ. Αυτό αυξάνει το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο αναγωγής μ. Για να διατηρήσουμε ισορροπία στη αγορά για τη x, πρέπει να αλλάξει είτε το α είτε το δ. Δύο ακραίες περιπτώσεις είναι δυνατές εδώ. Πρώτον, το α μπορεί να είναι ένα θεμελιώδες δεδομένο για τη x και έτσι το δ πρέπει να ανταποκριθεί στη μεταβολή του μ (για παράδειγμα, το ποσοστό μερίσματος μπορεί να εξαρτάται από την ποσότητα εμπορεύματος που κρατείται). Εναλλακτικά, το δ μπορεί να είμαι μια βασική παράμετρος συμπεριφοράς και η τιμή της διαδικασίας της x πρέπει να αλλάξει και συνεπώς το α είναι αυτό που πρέπει να προσαρμοστεί. Μια τρίτη πιθανότητα είναι ότι τόσο το α όσο και το δ λαμβάνουν μέρος στην προσαρμογή. Στις αριθμητικές ή συγκριτικές στατικές ασκήσεις συχνά θεωρούμε το δ ως βασική παράμετρο ανεξάρτητη του σ, αλλά θα αναφέρουμε εναλλακτικές δυνατότητες όπου υπάρχει ουσιαστική διαφορά στα αποτελέσματα.

1.3.Β Απόκτηση μιας Λύσης

Ας περάσουμε τώρα στην αποτίμηση της επενδυτικής ευκαιρίας και τον κανόνα βέλτιστης επένδυσης. Για άλλη μια φορά, θα ονομάσουμε F(V) την αξία της option επένδυσης της εταιρείας. Θα καθορίσουμε τη F(V) με την κατασκευή ενός άνευ κινδύνου χαρτοφυλακίου, προσδιορίζοντας τον αναμενόμενο ρυθμό επιστροφής και εξισώνοντας το αναμενόμενο ποσοστό επιστροφής με το άνευ κινδύνου επιτόκιο.

Σκεφτείτε το εξής χαρτοφυλάκιο: Εκμεταλλευόμαστε την option επένδυσης, η οποία αξίζει F(V) και πωλούμε n = F΄(V) μονάδες του έργου (ή ισοδύναμα, πωλούμε n μονάδες κεφαλαίου ή χαρτοφυλακίου x που σχετίζονται απόλυτα με τη V). Η αξία του χαρτοφυλακίου είναι Φ = F – F΄(V)˙V. Προσέξτε ότι αυτό το χαρτοφυλάκιο είναι δυναμικό: καθώς μεταβάλλεται η V, η F΄(V) μπορεί να αλλάξει από τη μια χρονική στιγμή στην άλλη και έτσι η σύνθεση του χαρτοφυλακίου θα αλλάξει. Ωστόσο, για κάθε μικρό χρονικό διάστημα dt, διατηρούμε το *n* σταθερό.

Η αρνητική θέση σε αυτό το χαρτοφυλάκιο θα απαιτήσει την καταβολή δ˙V˙F΄(V) ευρώ ανά χρονική περίοδο. Διαφορετικά κανείς λογικός επενδυτής δε θα μπει στη μεγάλη πλευρά της συναλλαγής. Ένας επενδυτής που κατέχει μια θετική θέση στο έργο θα απαιτήσει τη σταθμισμένη κατά τον κίνδυνο επιστροφή μ˙V, η οποία ισούται με το κέρδος κεφαλαίου α˙V συν τη ροή μερισμάτων δ˙V. Δεδομένου ότι η αρνητική θέση περιλαμβάνει F΄(V) μονάδες του έργου, θα απαιτηθεί καταβολή δ˙V˙F΄(V). Λαμβάνοντας υπόψη αυτήν την πληρωμή, η συνολική επιστροφή από την εκμετάλλευση του χαρτοφυλακίου για σύντομο χρονικό διάστημα dt είναι

$$dF - F'(V)\cdot dV - \delta\cdot V\cdot F'(V)\cdot dt$$

Για να πάρουμε μια έκφραση για το dF, χρησιμοποιούμε το Λήμμα του Itô:

$$dF = F'(V)dV + \tfrac{1}{2}F''(V)(dV)^2 .$$

Έτσι η συνολική επιστροφή στο χαρτοφυλάκιο είναι

$$\tfrac{1}{2}\cdot F''(V)\cdot(dV)^2 - \delta\cdot V\cdot F'(V)\cdot dt$$

Από την εξίσωση (1) για το dV, γνωρίζουμε ότι $(dV)^2 = \sigma^2 \cdot V^2 \cdot dt$ και έτσι η απόδοση του χαρτοφυλακίου γίνεται

$$\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot V^2\cdot F''(V)\cdot dt - \delta\cdot V\cdot F'(V)\cdot dt$$

Προσέξτε ότι αυτή η απόδοση είναι άνευ κινδύνου. Ως εκ τούτου για την αποφυγή πιθανοτήτων διαιτησίας, πρέπει να ισούται το r˙Φ˙dt = r˙[F – F΄(V)˙V]˙dt:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot V^2\cdot F''(V)\cdot dt - \delta\cdot V\cdot F'(V)\cdot dt = r\cdot[F - F'(V)\cdot V]\cdot dt$$

Διαιρώντας με το dt και κάνοντας κάποιες πράξεις παίρνουμε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί η F(V):

$$\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot V^2\cdot F''(V) + (r-\delta)\cdot V\cdot F'(V) - r\cdot F = 0 \qquad (23)$$

Παρατηρήστε ότι αυτή η εξίσωση είναι σχεδόν όμοια με την εξίσωση (9) που αποκτήσαμε χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό. Η μόνη διαφορά είναι ότι το άνευ κινδύνου επιτόκιο r αντικαθιστά το επιτόκιο αναγωγής ρ. Θα εφαρμοσθούν κι εδώ οι ίδιες οριακές συνθήκες (10) έως (12) και για τους ίδιους λόγους όπως πριν. Έτσι η λύση για την F(V) έχει και πάλι τη μορφή

$$F(V) = A \cdot V^{\beta_1}$$

εκτός από το ότι τώρα το r αντικαθιστά το ρ στον εκθέτη β_1 της πολυωνυμικής εξίσωσης και επομένως

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - (r - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{[r - \delta)/\sigma^2 + 2r/\sigma^2} \quad (24)$$

Η κρίσιμη τιμή V^* και η σταθερά Α δίνονται και πάλι από τις εξισώσεις (14) και (15).

Έτσι η λύση των πιθανών αξιώσεων στο επενδυτικό μας πρόβλημα είναι ισοδύναμη με τη λύση του δυναμικού προγραμματισμού, υπό την παραδοχή της ουδετερότητας κινδύνου (δηλαδή το επιτόκιο αναγωγής ρ είναι ίσο με το άνευ κινδύνου επιτόκιο). Είτε υπάρχει βαθμονόμηση είτε όχι λοιπόν, μπορούμε να αποκτήσουμε μια λύση στο επενδυτικό μας πρόβλημα, αλλά χωρίς τη βαθμονόμηση, η λύση θα εξαρτιόταν από ένα υποθετικό επιτόκιο αναγωγής. Σε κάθε περίπτωση, η λύση θα έχει την ίδια μορφή και οι επιδράσεις των μεταβολών στα σ και δ θα ήταν επίσης ίδιες. Ένα σημείο ωστόσο αξίζει να τονιστεί. Χωρίς τη βαθμονόμηση, δεν υπάρχει καμιά θεωρία για τον προσδιορισμό «σωστής» τιμής για το επιτόκιο αναγωγής ρ (εκτός κι αν κάνουμε περιοριστικές υποθέσεις για τις χρηστικές συναρτήσεις των επενδυτών και των διοικητών). Το Capital Asset Pricing Model (CAPM – μοντέλο αποτίμησης ενεργητικών κεφαλαίων) για παράδειγμα, δε θα είχε εφαρμογή και δε θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του σταθμισμένου κατά τον κίνδυνο αναγωγικού επιτοκίου με το συνηθισμένο τρόπο.

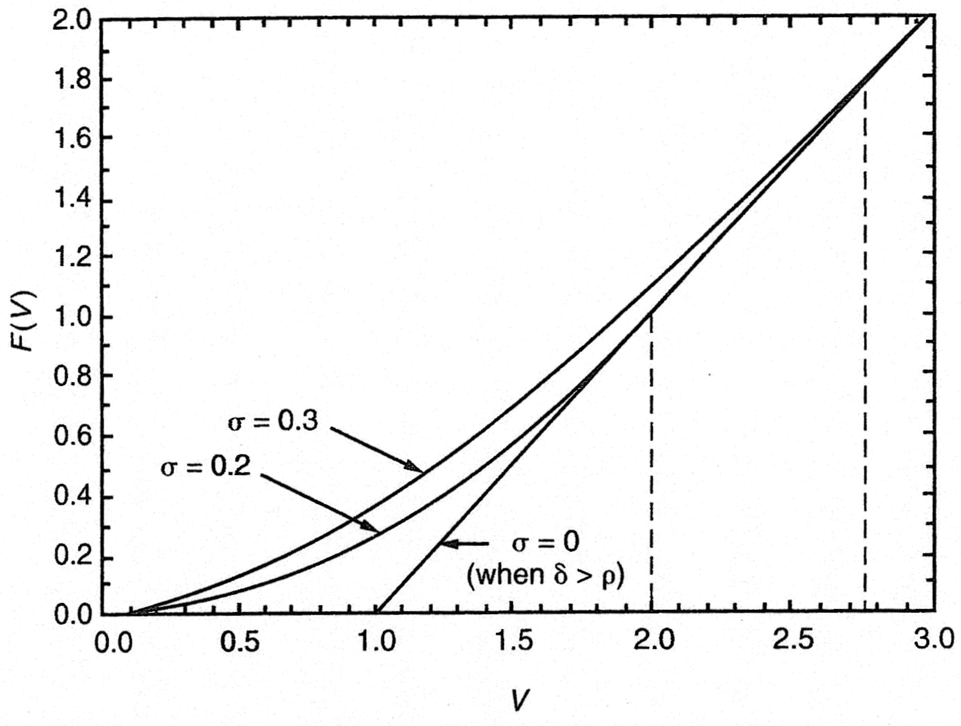
1.4 Χαρακτηριστικά του κανόνα βέλτιστης επένδυσης

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει βαθμονόμηση και ας εξετάσουμε τα χαρακτηριστικά του κανόνα βέλτιστης επένδυσης και της αξίας της επενδυτικής ευκαιρίας, όπως δίνονται στις εξισώσεις (13), (14), (15) και (24). Κάποιες αριθμητικές λύσεις θα βοηθήσουν να απεικονίσουμε τα αποτελέσματα και να δείξουμε πώς αυτά εξαρτώνται από τις τιμές των διαφόρων παραμέτρων. Όπως θα δούμε, αυτά τα αποτελέσματα είναι ποιοτικά τα ίδια με εκείνα που προκύπτουν από τα συνήθη μοντέλα αποτίμησης των options.

Εφόσον δεν αναφέρεται αλλιώς, σε ό,τι ακολουθεί θέτουμε το κόστος επένδυσης I ίσο με 1, το r = 0,04, το δ = 0,04 και το σ = 0,2 (σε ετήσια ποσοστά). (Προσέξτε ότι δε χρειάζεται να ξέρουμε το μ ή το α, αλλά μόνο τη μεταξύ τους διαφορά δ.) Τα ποσοστά αποπληρωμής για τα έργα διαφέρουν σημαντικά από το ένα έργο στο άλλο και έτσι αυτή η τιμή 4 τοις εκατό για το δ θα πρέπει να θεωρηθεί λογική, αλλά όχι και αντιπροσωπευτική απαραίτητα. Όσο για το σ, η τυπική απόκλιση του ποσοστού απόδοσης της χρηματιστηριακής αγοράς στο σύνολό της είναι περίπου 20 τοις εκατό κατά μέσο όρο. Αν και αυτό αποτελεί ένα διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο ενεργητικών κεφαλαίων, περιλαμβάνει επίσης τις επιπτώσεις της μόχλευσης επί των μετοχικών αποδόσεων και έτσι μπορεί να είναι ένας λογικός αριθμός για ένα μέσο κεφάλαιο.

Δίνονται οι τιμές των παραμέτρων ως εξής: $\beta_1 = 2$, $V^* = 2 \cdot I$ και A = ¼. Έτσι ο απλός κανόνας της καθαρής παρούσης αξίας, που λέει ότι η εταιρεία πρέπει να επενδύει όσο η V είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο το I, είναι τελείως λάθος. Γι' αυτό το λογικό σύνολο των παραμετρικών τιμών, η V πρέπει να είναι τουλάχιστον δυο φορές μεγαλύτερη του I πριν η εταιρεία μπορέσει να επενδύσει. Η αξία της επενδυτικής ευκαιρίας της εταιρείας είναι $F(V) = \frac{1}{4}V^2$ για $V \leq 2$ και $F(V) = V - 1$ για $V > 2$ (δεδομένου ότι η επιχείρηση διαθέτει την option επένδυσης και λαμβάνει καθαρή αποπληρωμή $V - 1$ όταν $V > 2$).

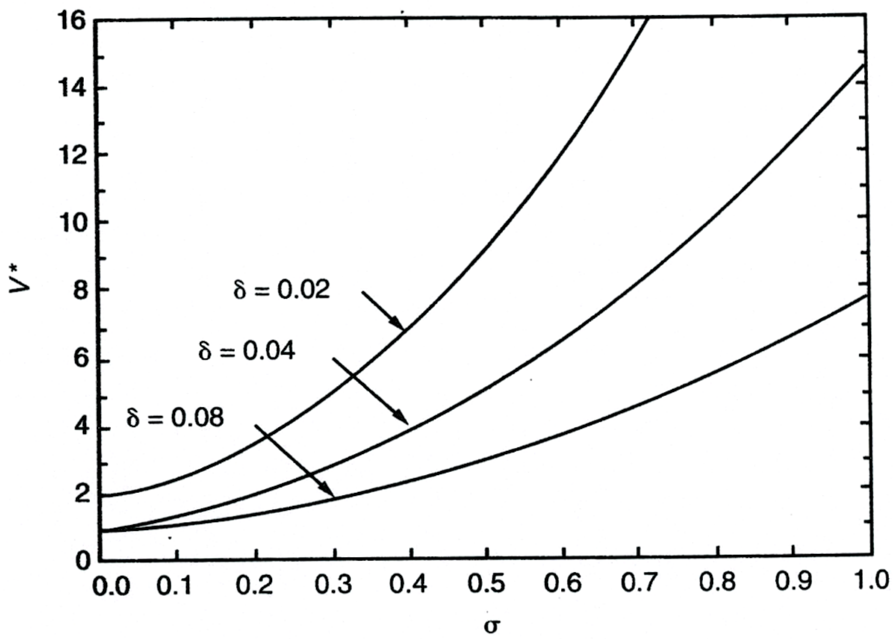
Η παρακάτω εικόνα δείχνει τη γραφική παράσταση της F(V) σε συνάρτηση με τη V γι' αυτές τις τιμές των παραμέτρων και επίσης για σ = 0 και σ = 0,3. Σε κάθε περίπτωση, το σημείο επαφής της F(V) με τη γραμμή $V - I$ δίνει την κρίσιμη τιμή V^*. Το διάγραμμα δείχνει επίσης ότι ο απλός κανόνας της καθαρής παρούσας αξίας πρέπει να τροποποιηθεί ώστε να περιλαμβάνει το ευκαιριακό κόστος του να επενδύσει κανείς τώρα παρά να περιμένει. Το ευκαιριακό κόστος είναι ακριβώς F(V). Όταν $V < V^*$, το $F(V) > V - I$ και επομένως $V < I + F(V)$ τότε η αξία του έργου είναι μικρότερη του συνολικού κόστους, δηλαδή το άμεσο κόστος I συν το ευκαιριακό κόστος F(V). [Όταν σ = 0, $V^* = I$ και $F(V) = 0$ για $V \leq I$.]



Σχήμα 1.3: *Αξία της επενδυτικής ευκαιρίας F(V) για σ = 0, 0,2 και 0,3*

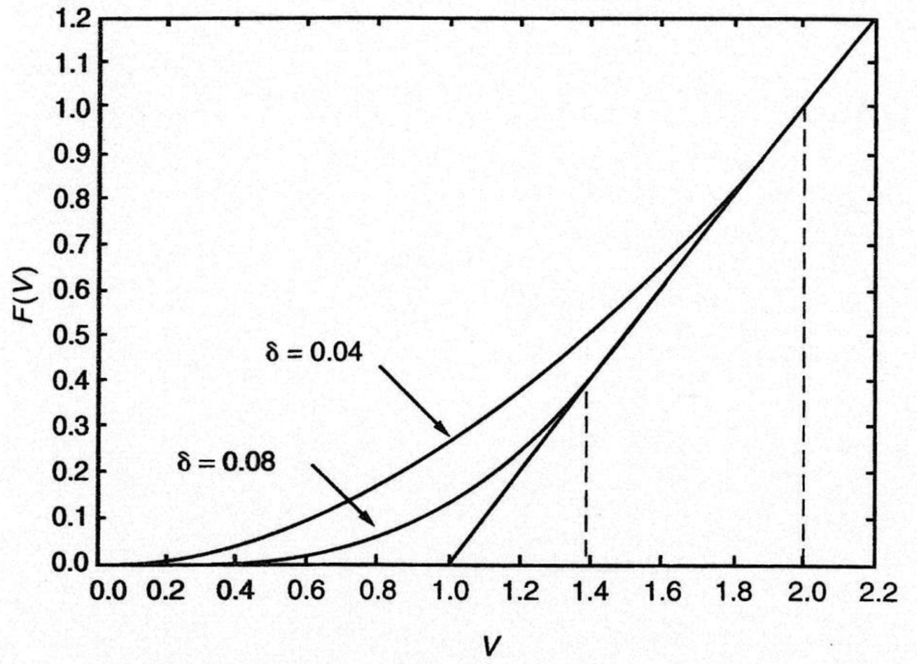
Προσέξτε πως όσο η F(V) αυξάνεται, αυξάνεται και η κρίσιμη τιμή της V^*. Έτσι η μεγαλύτερη αβεβαιότητα αυξάνει την τιμή της επενδυτικής ευκαιρίας της εταιρείας, αλλά (γι' αυτόν ακριβώς το λόγο) μειώνει το ποσό της πραγματικής επένδυσης που θα καταβάλει η εταιρεία. Ως αποτέλεσμα, όταν η αγορά μιας εταιρείας ή το οικονομικό περιβάλλον γίνονται αβέβαια, η αγοραστική αξία της εταιρείας μπορεί να αυξηθεί, παρόλο που η εταιρεία πραγματοποιεί λιγότερες επενδύσεις και πιθανώς παράγει και λιγότερα.

Η εξάρτηση της V^* από το σ φαίνεται πιο άμεσα στο σχήμα 4. Παρατηρήστε ότι η V^* αυξάνεται κατακόρυφα με το σ. Έτσι η επένδυση είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη στη μεταβλητότητα των τιμών του έργου, ανεξάρτητα των προτιμήσεων κινδύνου των επενδυτών ή των διευθυντών και ανεξάρτητα του βαθμού στον οποίο η επικινδυνότητα της V σχετίζεται με την αγορά. Οι εταιρείες μπορούν να είναι ουδέτερου κινδύνου και οι στοχαστικές μεταβολές στη V μπορούν να είναι πλήρως διαφοροποιήσιμες. Μια αύξηση στο σ θα αυξήσει τη V^* και έτσι συμβάλει στη μείωση των επενδύσεων.



Σχήμα 1.4: *Η κρίσιμη τιμή V^* ως συνάρτηση του σ*

Οι εικόνες 5 και 6 δείχνουν πώς η F(V) και η V^* εξαρτώνται από το δ. Παρατηρήστε ότι μια αύξηση του δ από 0,04 σε 0,08 οδηγεί σε μείωση της F(V) και έτσι μια μείωση στην κρίσιμη τιμή V^*. (Στο όριο καθώς το $\delta \to \infty$, το $F(V) \to 0$ για $V < I$ και $V^* < I$, όπως δείχνει και το σχήμα 6.) Ο λόγος είναι ότι καθώς το δ μεγαλώνει (κρατώντας όλα τα άλλα σταθερά εκτός από το α), ο αναμενόμενος ρυθμός αύξησης της V μειώνεται και έτσι η αναμενόμενη ανατίμηση της τιμής της option επένδυσης ώστε να αποκτήσουμε τη V πέφτει. Στην πραγματικότητα, καθίσταται δαπανηρότερη η αναμονή απ’ ότι η επένδυση αυτή τη στιγμή. Για να το δείτε αυτό, ας θεωρήσουμε μια επένδυση σε ένα κτίριο με διαμερίσματα όπου το δV είναι η καθαρή ροή εσόδων από τα μισθώματα. Η συνολική απόδοση του κτιρίου, που πρέπει να ισούται με το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο της αγοράς, έχει δύο συνιστώσες – αυτή τη ροή εσόδων συν το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους του κεφαλαίου. Έτσι όσο μεγαλύτερη είναι η ροή εσόδων που σχετίζεται με τη συνολική απόδοση του κτιρίου, τόσο περισσότερο χάνει κανείς με το να εκμεταλλεύεται κάποια option επένδυσης για το κτίριο παρά με το να κατέχει το ίδιο το κτίριο.

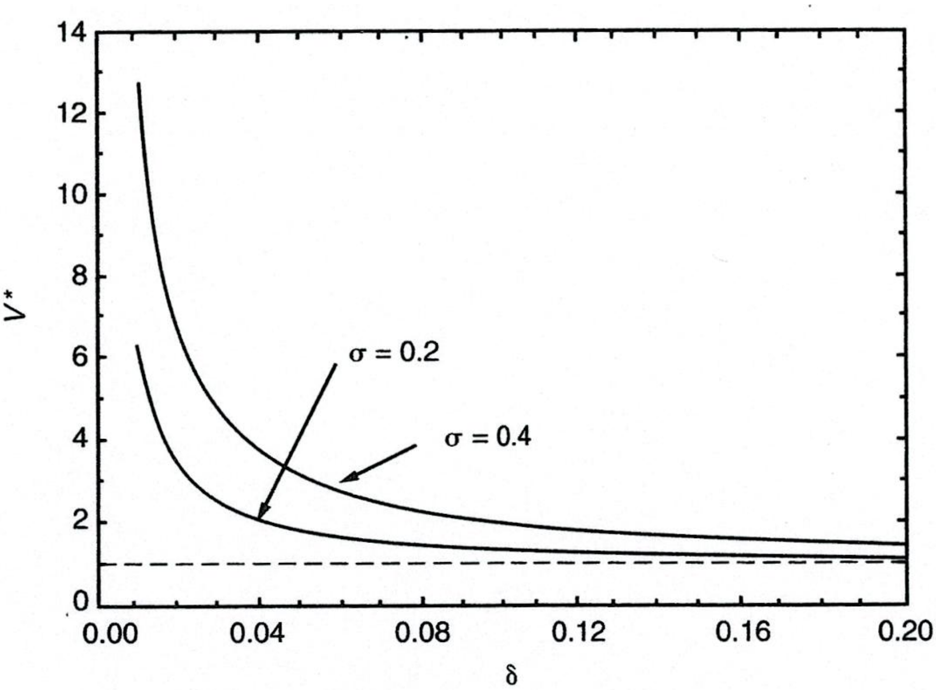


Σχήμα 1.5: *Αξία της επενδυτικής ευκαιρίας F(V) για δ = 0,04 και 0,08*

Αντιμετωπίζουμε τα σ και δ ως ανεξάρτητες παραμέτρους. Αν αντί γι' αυτή τη μέχρι τώρα θεώρηση, αφήσουμε το δ να προσαρμόζεται κάθε φορά που το σ μεταβάλλεται, τότε κάθε αύξηση κατά μία μονάδα του σ απαιτεί μια αύξηση του δ κατά $\varphi \cdot \rho_{xm}$ μονάδες, επειδή

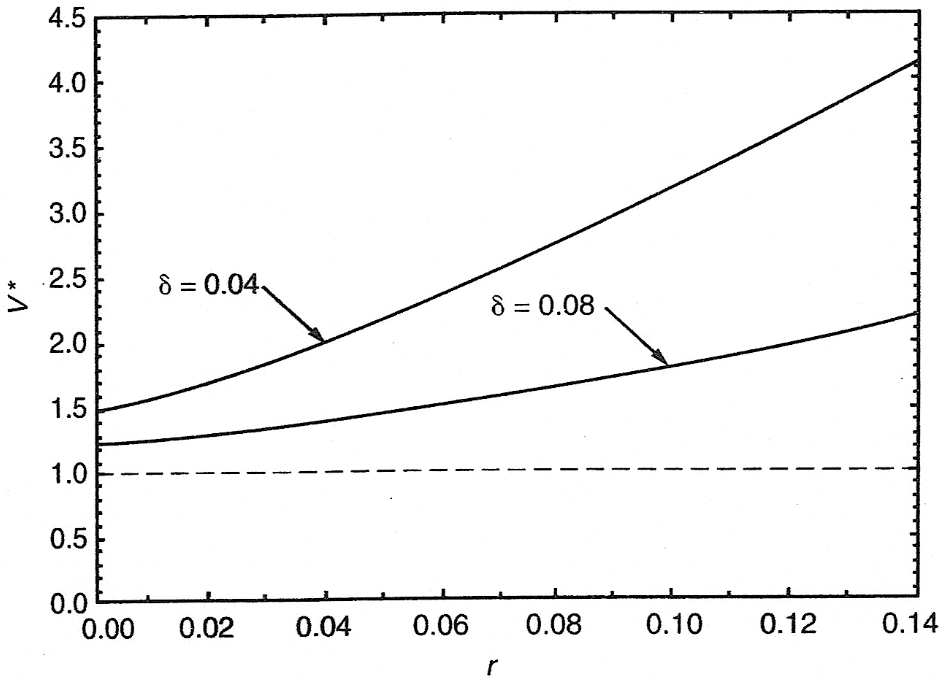
$$\delta = \mu - \alpha = r + \varphi \cdot \sigma \cdot \rho_{xm} - \alpha$$

Οι αναγνώστες μπορούν τώρα να καθορίσουν τις επιθυμητές τιμές γι' αυτές τις παραμέτρους και στη συνέχεια να συνδυάσουν τους δύο παραπάνω υπολογισμούς ώστε να αποκτήσουν την επίδραση των μεταβολών του σ γι' αυτήν την περίπτωση.



Σχήμα 1.6: *Η κρίσιμη τιμή V^* ως συνάρτηση του δ*

Αν αυξάνεται το άνευ κινδύνου επιτόκιο r, η F(V) αυξάνεται και το ίδιο συμβαίνει και με τη V^*. Ο λόγος είναι ότι η παρούσα αξία μιας επενδυτικής δαπάνης I που γίνεται σε κάποια μελλοντική στιγμή T είναι $I \cdot e^{-rT}$, αλλά η παρούσα αξία του έργου που κάποιος λαμβάνει ως αντάλλαγμα γι' αυτή τη δαπάνη είναι $V \cdot e^{-\delta T}$. Έτσι αν το δ είναι σταθερό, μια αύξηση στο r μειώνει την παρούσα αξία του κόστους της επένδυσης αλλά δε μειώνει την εξόφλησή του. Ωστόσο, προσέξτε ότι ενώ μια αύξηση του r αυξάνει την αξία των επενδυτικών options μιας εταιρείας, αυτή η ίδια αύξηση οδηγεί στο να διατεθούν λιγότερες τέτοιες επενδυτικές options. Έτσι, τα υψηλότερα (πραγματικά) επιτόκια μειώνουν την επένδυση, αλλά για ένα διαφορετικό λόγο απ' ότι στο σύνηθες μοντέλο. Στο σύνηθες μοντέλο, μια αύξηση του επιτοκίου μειώνει την επένδυση αυξάνοντας το κόστος του κεφαλαίου. Σε αυτό το μοντέλο, αυξάνει την τιμή της option επένδυσης και έτσι αυξάνει το ευκαιριακό κόστος του να επενδύσει κανείς τώρα. (Η εικόνα 7 δείχνει την εξάρτηση της V^* συναρτήσει του r, όταν το δ είναι 0,04 και 0,08.)



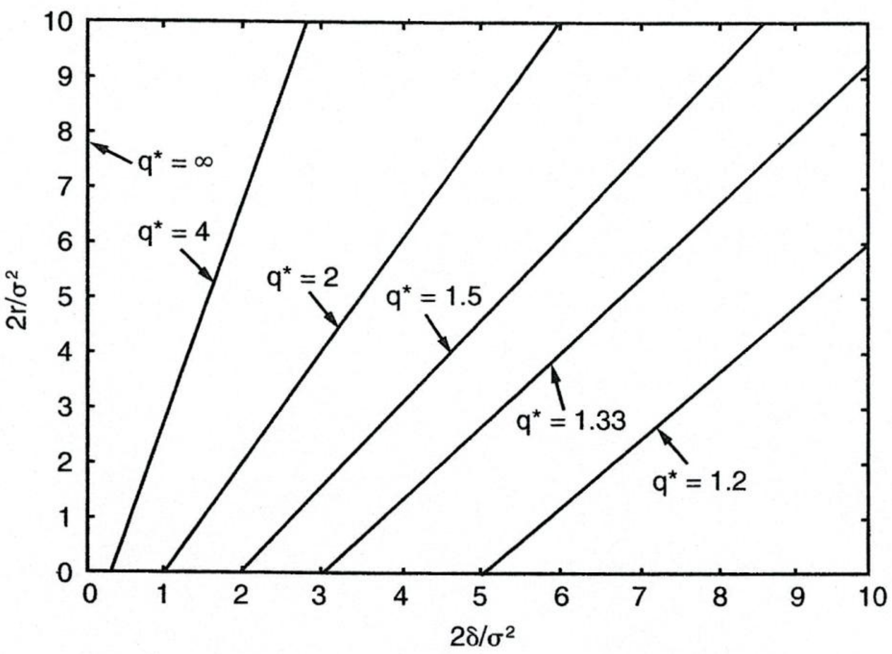
Σχήμα 1.7: *Η κρίσιμη τιμή V^* ως συνάρτηση του r*

Για άλλη μια φορά στον υπολογισμό αυτό κρατήσαμε το δ σταθερό καθώς το r αυξανόταν. Αν αντί γι' αυτό κρατούσαμε το α σταθερό, τότε το δ θα αυξανόταν ένα προς ένα με το r. Τώρα ένα χαμηλότερο επιτόκιο r μειώνει το συντελεστή β_1 και αυξάνει την κρίσιμη τιμή V^*. Με αυτήν την έννοια, ένα χαμηλότερο επιτόκιο αποθαρρύνει μια επένδυση. Αυτό αποτελεί μια καθαρή έκφραση της ιδέας της option: ένα χαμηλό επιτόκιο κάνει το μέλλον να είναι σχετικά πιο σημαντικό και επομένως αυξάνει το ευκαιριακό κόστος της διάθεσης μιας option επένδυσης.

Το σχήμα 8 προσφέρει έναν άλλο τρόπο για να δούμε πώς ο κανόνας βέλτιστης επένδυσης εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων. Επίσης μας επιτρέπει να δούμε τα αποτελέσματα υπό το πρίσμα του μεγέθους q του Tobin. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε τον ορισμό της «αξίας του ενεργητικού κεφαλαίου» που αγνοεί το ευκαιριακό κόστος της διάθεσης της option, όπως αυτό εξηγείται στην ενότητα 1.2.Γ πιο πάνω. Τότε η $q^* = V^*/I = \beta_1(\beta_1 - 1)$ είναι η κρίσιμη τιμή αυτού του q. Το σχήμα δείχνει τα περιγράμματα της σταθεράς q^* σχεδιασμένης για τους διαφορετικούς συνδυασμούς των παραμέτρων $2 \cdot r/\sigma^2$ και $2 \cdot \delta/\sigma^2$. Έχουμε μειώσει τα r και δ κατά $2/\sigma^2$ επειδή, όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει με την αντικατάσταση $\beta_1 = q^*/(q^* - 1)$ στην εξίσωση (16), το q^* πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{2r}{\sigma^2} = q^*\left(\frac{2\delta}{\sigma^2}\right) - \frac{q^*}{q^* - 1}$$

Όπως δείχνει και το σχήμα, το γινόμενο είναι μεγάλο όταν το δ είναι μικρό ή το r είναι μεγάλο.



Σχήμα 1.8: *Καμπύλες της σταθεράς* $q^* = \beta_1(\beta_1 - 1)$

Αυτά τα συγκριτικά στατικά αποτελέσματα είναι τα ίδια με εκείνα που ισχύουν για τις οικονομικές option αγοράς. Η option επένδυσης με την οποία ασχολούμαστε εμείς είναι ανάλογη μια διαρκούς option αγοράς μιας μετοχής που πληρώνει μερίσματα, όπου V είναι η τιμή της μετοχής, δ είναι το (αναλογικό) ποσοστό μερίσματος και I είναι η τιμή διάθεσης της option. Η αξία της option αγοράς μιας μετοχής και ο κανόνας βέλτιστης διάθεσης θα εξαρτώνται από τις παραμέτρους σ, δ και r όπως φαίνεται στα σχήματα από 1 έως 7.

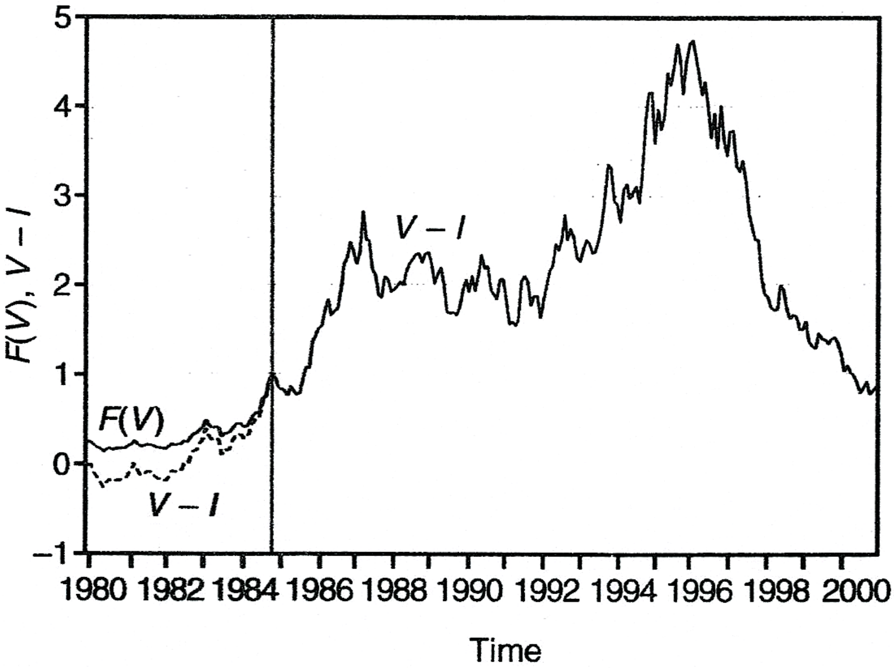
Επαναλαμβάνουμε ότι είναι σημαντικό να είμαστε προσεκτικοί στην ερμηνεία των συγκριτικών στατικών αποτελεσμάτων, επειδή κάποιες παράμετροι είναι απίθανο να είναι ανεξάρτητες η μια από την άλλη. Για παράδειγμα, μια αύξηση στο άνευ κινδύνου επιτόκιο r είναι πιθανό να οδηγήσει σε μια αύξηση της σταθμισμένης κατά τον κίνδυνο αναμενόμενης απόδοσης μ, η οποία – αν ο ρυθμός εκτροπής α (ο ρυθμός δηλαδή με τον οποίο μεταβάλλεται η μέση τιμή) είναι σταθερός – υποδηλώνει μια αύξηση στο δ. Ομοίως, μια αύξηση στο σ είναι πιθανό να συνοδευτεί από μια αύξηση του μ, η οποία υποδηλώνει και πάλι μια αύξηση του δ αν το α είναι σταθερό. Αυτές οι αλληλεξαρτήσεις θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά την ανάλυση του πώς μια μεταβολή σε μια παράμετρο η οποία έχει ως γνώμονα την αγορά (όπως το επιτόκιο r) θα επηρεάσει την τιμή της επενδυτικής ευκαιρίας και τον κανόνα βέλτιστης επένδυσης.

Ένα άλλο ζήτημα που πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά τη διεξαγωγή συγκριτικών στατικών πειραμάτων είναι ότι το μοντέλο μας υποθέτει ότι οι παράμετροι α, σ κλπ είναι σταθεροί αριθμοί. Αν τα α και σ μεταβάλλονται με το χρόνο ή μεταβάλλονται ως ανταπόκριση στις μεταβολές της μεταβλητής κατάστασης V (είτε ντετερμινιστικά είτε στοχαστικά) και η εταιρεία το γνωρίζει αυτό, θα πρέπει να το λάβει υπόψη της όταν προσδιορίζει το κανόνα βέλτιστης επένδυσης. Για παράδειγμα, μπορεί να χρειαστεί τα α και σ στην εξίσωση (1) να αντικατασταθούν από τις συναρτήσεις α(V, t) και σ(V, t). Αυτό θα περιπλέξει το πρόβλημα σημαντικά. Αν ο χρόνος επηρεάζει τις παραμέτρους, η αξία της επενδυτικής ευκαιρίας θα είναι πιθανώς μια συνάρτηση τόσο της V όσο και του χρόνο t και η εξίσωση (23) θα γίνει μια μερική διαφορική εξίσωση. Ακόμη κι αν τα α και σ είναι συναρτήσεις της V μόνο, όπως με τη διαδικασία επαναφοράς περί τη μέση τιμή για τη V, η συνήθης διαφορική εξίσωση για την F(V) θα γίνει πιο περίπλοκη και συνήθως χρειάζεται αριθμητική επίλυση: θα δούμε σύντομα ένα παράδειγμα γι' αυτήν την περίπτωση.

Τα σχήματα 9 και 10 δείχνουν τυχαίες διαδρομές για τα V – I και F(V) = ¼ V^2. Και στις δύο περιπτώσεις υποθέτουμε ότι μ = 0,08 έτσι ώστε το δ = 0,04 και ο ρυθμός εκτροπής α = 0,04. (Όπως και πριν, r = 0,04 και σ = 0,2, σε ετήσια ποσοστά και τα δύο.) Ξεκινούμε το κάθε σετ τυχαίων διαδρομών το 1980 με V_0 = I = 1. Λαμβάνοντας χρονικό διάστημα μήκους ενός μήνα, μπορούμε να υπολογίσουμε τη V_t χρησιμοποιώντας την εξίσωση

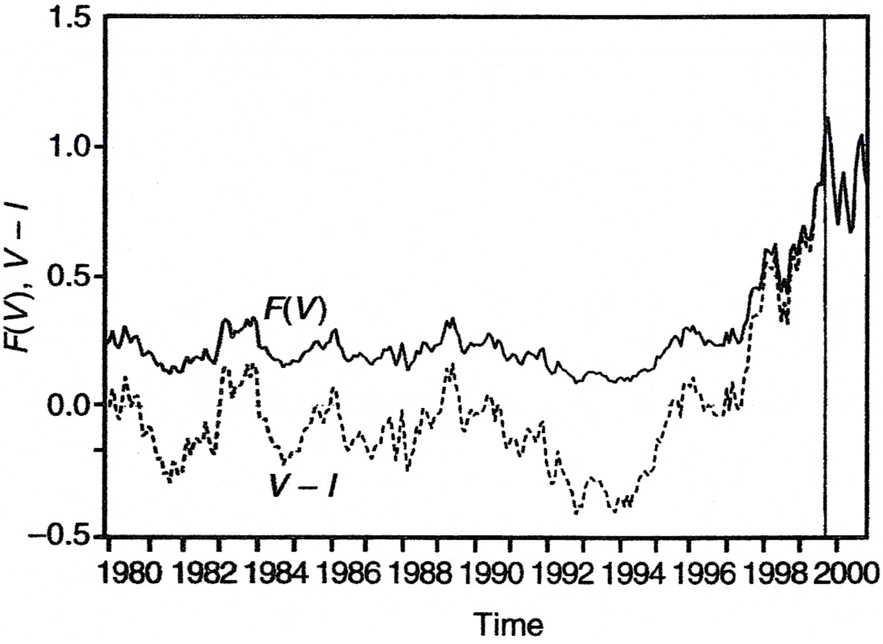
$$V_t = 1{,}00327 \cdot V_{t-1} + 0{,}0677 \cdot V_{t-1} \cdot \epsilon_t \qquad (25)$$

όπου σε κάθε χρονική στιγμή t, το ϵ_t προέρχεται από μια κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση ίση με τη μονάδα. (Προσέξτε ότι ο συντελεστής 0,0577 = 0,20/$\sqrt{12}$ είναι η μηνιαία τυπική απόκλιση.)



Σχήμα 1.9: *Μια δόκιμη γραφική παράσταση για την F(V) και το V – I*

Δεδομένου ότι V_0 = I = 1, ο τυπικός κανόνας καθαρής παρούσας αξίας θα απαιτούσε επενδύσεις αμέσως. Ωστόσο, F(V_0) = 0,25 και έτσι V_0 < I + F(V_0) και η εταιρεία θα έπρεπε να περιμένει παρά να επενδύσει. Στο παραπάνω σχήμα, η εταιρεία τυχαίνει να περιμένει περίπου πέντε χρόνια πριν η V φτάσει την τιμή V^* = 2. Ο χρόνος αναμονής T μπορεί να διαφέρει σημαντικά από μια τυχαία διαδρομή σε μια άλλη. Στην τυχαία διαδρομή που παρουσιάζεται στην εικόνα 10 για παράδειγμα, η εταιρεία πρέπει να περιμένει πολύ περισσότερο – σχεδόν 20 χρόνια – πριν η V φτάσει την κρίσιμη τιμή του 2.



Σχήμα 1.10: *Μια ακόμη δόκιμη γραφική παράσταση για την F(V) και το V – I*

1.5 Εναλλακτικές Στοχαστικές Διαδικασίες

Η χρήση γεωμετρικής Brownian motion ως μοντέλο για τη V είναι βολική, αλλά σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να μην είναι ρεαλιστική. Σε αυτήν την ενότητα θα εξετάσουμε την αξία της επενδυτικής ευκαιρίας και τον κανόνα της βέλτιστης επένδυσης όταν η V ακολουθεί εναλλακτικές στοχαστικές διαδικασίες. Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση μιας διαδικασίας επαναφοράς γύρω από τη μέση τιμή και στη συνέχεια μια διαδικασία Poisson διακριτών μετακινήσεων.

1.5.Α Διαδικασία επαναφοράς περί τη μέση τιμή

Ας υποθέσουμε ότι η V ακολουθεί μια διαδικασία επαναφοράς περί τη μέση τιμή

$$dV = \eta \cdot (\overline{V} - V) \cdot V \cdot dt - \sigma \cdot V \cdot dz \tag{26}$$

έτσι ώστε ο αναμενόμενος ρυθμός μεταβολής της V να είναι (1/dt)·Ɛ·(dV)/V = $\eta \cdot (\overline{V} - V)$ και ο αναμενόμενος απόλυτος ρυθμός της μεταβολής να είναι (1/dt)·Ɛ·(dV) = $\eta \cdot (\overline{V} - V) - \eta \cdot V^2$, μια παραβολή που ισούται με το μηδέν για V = 0 και $V = \overline{V}$ και έχει μέγιστο στο $V = \overline{V}/2$. Όπως θα δούμε, ένα πλεονέκτημα της συγκεκριμένης διαδικασίας είναι ότι θα είμαστε σε θέση να αποκτήσουμε μια αναλυτική λύση για το επενδυτικό μας πρόβλημα.

Για να βρούμε τον κανόνα βέλτιστης επένδυσης, θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση των πιθανών αξιώσεων. Έστω μ το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο αναγωγής για το έργο (δηλαδή το μ αντανακλά το συστηματικό κίνδυνο της στοχαστικές διακυμάνσεις της V). Στην περίπτωση αυτή ο αναμενόμενος ρυθμός αύξησης της V δεν είναι σταθερός, αλλά αντιθέτως είναι μια συνάρτηση της V. Έτσι το «έλλειμμα» (ένα ποσό δηλαδή που είναι μικρότερο του αναμενόμενου) δ = μ – 1˙Ɛ˙(dV/V) είναι μια συνάρτηση της V:

$$\delta(V) = \mu - \eta(\overline{V} - V) \tag{27}$$

Η διαφορική εξίσωση (23) θα εφαρμοστεί και πάλι, αλλά με την εξίσωση (27) να αντικαθιστά το δ. Έτσι η F(V) πρέπει να ικανοποιεί την

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot V^2 \cdot F''(V) + \left[r - \mu + \eta(\overline{V} - V)\right] \cdot V \cdot F'(V) - r \cdot F = 0 \tag{28}$$

Επίσης η F(V) πρέπει να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες (10) έως (12) όπως και πριν και για τους ίδιους λόγους. [Προσέξτε ότι η V = 0 αποτελεί ένα πολύ ενδιαφέρον φράγμα για τη διαδικασία (26), έτσι F(0) = 0.]

Η εξεύρεση μιας λύσης για την εξίσωση (28) είναι λίγο πιο πολύπλοκη απ' ό,τι ήταν για την εξίσωση (23). Ορίζουμε μια νέα συνάρτηση h(V) ως

$$F(V) = A \cdot V^{\theta} h(V) \tag{29}$$

όπου τα A και θ είναι σταθερές που θα επιλεγούν σε λίγο με τέτοιο τρόπο ώστε η h(V) να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση με μια γνωστή λύση. Αντικαθιστώντας την έκφραση της F(V) στην εξίσωση (28) και κάνοντας κάποιες πράξεις παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} &V^{\theta} \cdot h(V) \cdot [\tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \theta \cdot (\theta - 1) + \left(r - \mu + \eta \cdot \overline{V}\right) \cdot \theta - r] \\ &\quad + V^{\theta+1}\left[\tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot V \cdot h''(V) + \left(\sigma^2 \cdot \theta + r - \mu + \eta \cdot \overline{V} - \eta \cdot V\right)\right] \cdot h'(V) - \eta \cdot \theta \cdot h(V) = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Η εξίσωση (30) ισχύει για οποιαδήποτε τιμή της V και έτσι οι όροι εντός των αγκυλών τόσο στην πρώτη όσο και στη δεύτερη γραμμή της εξίσωσης πρέπει να είναι ίσοι με μηδέν. Πρώτα, προκειμένου να βρούμε το θ, θέτουμε τους όρους εντός της αγκύλης της πρώτης σειράς ίσους με το μηδέν:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \theta \cdot (\theta - 1) + \left(r - \mu + \eta \cdot \overline{V}\right) \cdot \theta - r = 0$$

Αυτή η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο ρίζες για το θ, η μια εκ των οποίων είναι θετική και η άλλη αρνητική. Για να ικανοποιήσουμε την οριακή συνθήκη που λέει πως F(0) = 0, χρησιμοποιούμε τη θετική ρίζα:

$$\theta = \tfrac{1}{2} + (\mu - r - \eta \cdot \overline{V}) / \sigma^2 + \sqrt{\left[\left(r - \mu + \eta \cdot \overline{V}\right) / \sigma^2 - \tfrac{1}{2}\right]^2 + 2 \cdot r / \sigma^2} \tag{31}$$

Από τη δεύτερη γραμμή της εξίσωσης (30) έχουμε

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot V \cdot h''(V) + \left(\sigma^2 \cdot \theta + r - \mu + \eta \cdot \overline{V} - \eta \cdot V\right) \cdot h'(V) - \eta \cdot \theta \cdot h(V) = 0 \tag{32}$$

Κάνοντας την αντικατάσταση x = 2·η·V/ σ^2, μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση (32) σε μια άλλη με τυπική μορφή. Αν θέσουμε h(V) = g(x), τότε h΄(V) = (2·η/σ^2)·g΄(x) και h΄΄(V) = (2·η/σ^2)^2·g΄΄(x). Έτσι η εξίσωση (32) γίνεται

$$x \cdot g''(x) + (b - x) \cdot g'(x) - \theta \cdot g(x) = 0 \qquad (33)$$

όπου

$$b = 2 \cdot \theta + 2(r - \mu + \eta \cdot \overline{V}) / \sigma^2$$

Η εξίσωση (33) είναι γνωστή ως εξίσωση του Kummer. Η λύση της είναι η συρρέουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση H(x; θ, b(θ)), η οποία έχει την ακόλουθη αναπαράσταση μέσω σειρών:

$$H(x;\theta,b) = 1 + \frac{\theta}{b} \cdot x + \frac{\theta \cdot (\theta+1)}{b \cdot (b+1)} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{\theta \cdot (\theta+1) \cdot (\theta+2)}{b \cdot (b+1) \cdot (b+2)} \cdot \frac{x^3}{3!} + ... \qquad (34)$$

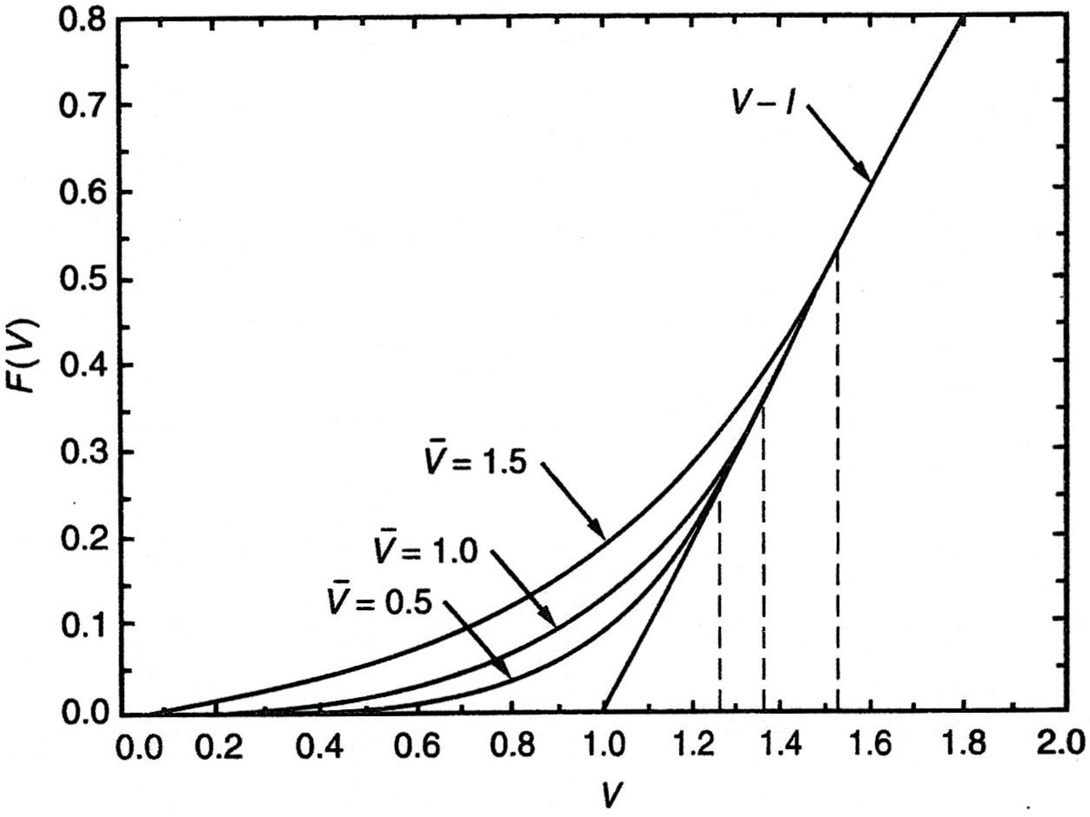
Έχουμε επιβεβαιώσει ότι η λύση της εξίσωσης (28) είναι πράγματι της μορφής της εξίσωσης (29). Η λύση είναι

$$F(V) = AV^{\theta} H\left(\frac{2 \cdot \eta}{\sigma^2} \cdot V; \theta, b \right) \qquad (35)$$

όπου το Α είναι μια σταθερά που δεν έχει οριστεί ακόμα. Μπορούμε να βρούμε το Α, καθώς και την κρίσιμη τιμή V^* όπου είναι βέλτιστο να επενδύσουμε, από τις εναπομείνασες δύο οριακές συνθήκες, δηλαδή $F(V^*) = V^* - I$ και $F_v(V^*) = 1$. Επειδή η συρρέουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση είναι μια άπειρη σειρά, τα Α και V^* πρέπει να βρεθούν αριθμητικά.

Μπορούμε να αποκτήσουμε μια εικόνα για τις επιδράσεις της επαναφοράς περί τη μέση τιμή με την εξέταση διαφόρων αριθμητικών λύσεων. Εάν δεν ορίζεται διαφορετικά, θέτουμε I = 1, r = 0,04, μ = 0,08 και σ = 0,2. Εμείς θα μεταβάλλουμε τα η και $\overline{V}$. Προσέξτε, ωστόσο, ότι η εξάρτηση του (1/dt)·Ɛ·(dV)/V πάνω στο η εξαρτάται από την κλιμάκωση της $\overline{V}$. Θα εργαστούμε με τιμές της $\overline{V}$ στην περιοχή 0,5 μέχρι 1,5 και κατά συνέπεια μια τιμή του η της τάξης του 0,5 ή παραπάνω υποδηλώνει ένα πολύ υψηλό ρυθμό επαναφοράς περί τη μέση τιμή.

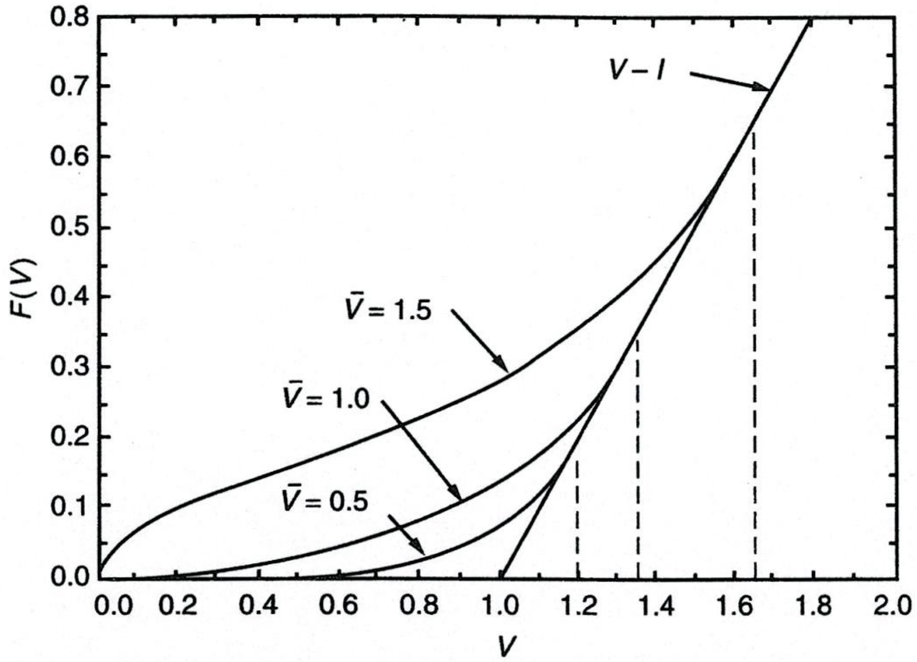
Το σχήμα 11 δείχνει την τιμή της επενδυτικής ευκαιρίας F(V) και της κρίσιμης τιμής V^* για η = 0,05 (που συνεπάγεται ένα σχετικό μικρό ρυθμό επαναφοράς γύρω από τη μέση τιμή και για $\overline{V}$ = 0,5, 1,0 και 1,5.



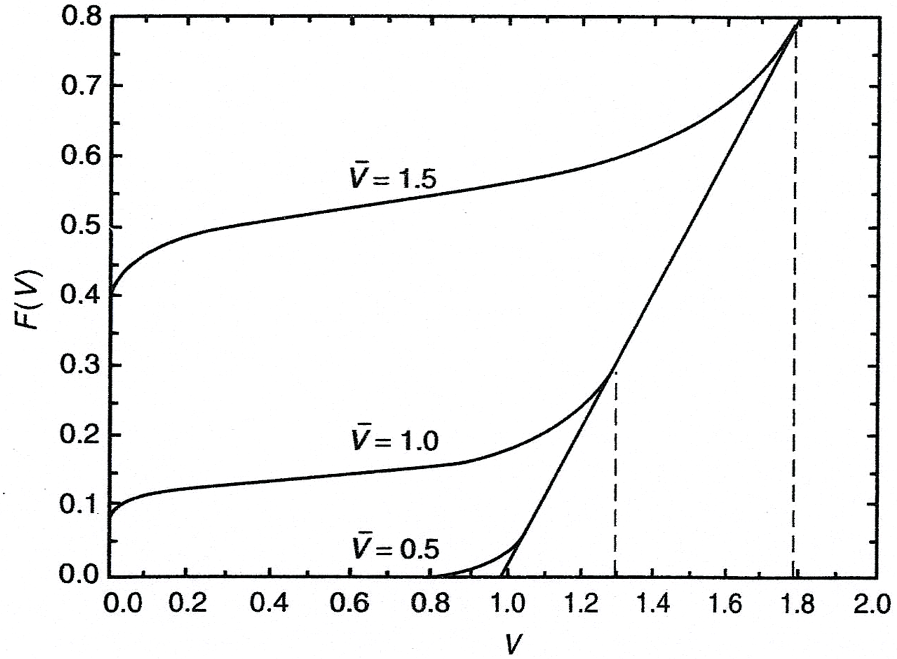
Σχήμα 1.11: *Διάγραμμα μέσης επαναφοράς – F(V) για n = 0,05 και* $\bar{V}$ *=0,5, 1,0 και 1,5*

Για σύγκριση, προσέξτε πως αν το η ήταν μηδέν, το μοντέλο θα αντιστοιχούσε στο βασικό μοντέλο της προηγούμενης ενότητα, α = 0 και κατά συνέπεια με δ = μ = 0,08. Σε εκείνη την περίπτωση η V^* θα ήταν ίση με 1,39. Στο σχήμα 11 το η είναι αρκετά μικρό και έτσι και η $\bar{V}$ αλλά και η V^* είναι αρκετά κοντά στο 1,39. Όπως θα περίμενε κανείς, όσο μεγαλύτερη είναι $\bar{V}$, τόσο μεγαλύτερη είναι η F(V) και τόσο υψηλότερη η V^*. Με τα άλλα πράγματα να είναι ίσα, μια μεγαλύτερη $\bar{V}$ υποδηλώνει έναν υψηλότερο αναμενόμενο ρυθμό ανάπτυξης της V και έτσι μια option αγοράς της V θα αξίζει περισσότερο.

Τα σχήματα 12 και 13 δείχνουν επίσης την τιμή της επενδυτικής ευκαιρίας F(V) και την κρίσιμη τιμή V^* για $\bar{V}$ = 0,5, 1,0 και 1,5, με τη διαφορά ότι στο σχήμα 12 το η = 0,1 και στο σχήμα 13 το η = 0,5. Όπως φαίνεται στα σχήματα αυτά, όταν η $\bar{V}$ είναι 1,5 (δηλαδή μεγαλύτερη του I), μια μεγαλύτερη τιμή του η αυξάνει την F(V), αλλά όταν η $\bar{V}$ είναι 0,5 (δηλαδή μικρότερη του I), μια μεγαλύτερη τιμή του η μειώνει την F(V). [Αν $\bar{V}$ < I και το η είναι μεγάλο, είναι μάλλον απίθανο για τη V να ξεπεράσει το I για πάρα πολύ χρόνο και η option επένδυσης δε θα αξίζει πολύ. Από την άλλη πλευρά, αν $\bar{V}$ > I και το η είναι μεγάλο, ακόμα κι αν η V είναι μικρή αρχικά, είναι πιθανό να αυξηθεί γρήγορα πάνω από το I και να παραμείνει μεγαλύτερη του I για τον περισσότερο χρόνο και έτσι η F(V) θα είναι μεγάλη.]



Σχήμα 1.12: *Διάγραμμα μέσης επαναφοράς – F(V) για η = 0,1 και* $\overline{V}$ *=0,5, 1,0 και 1,5*

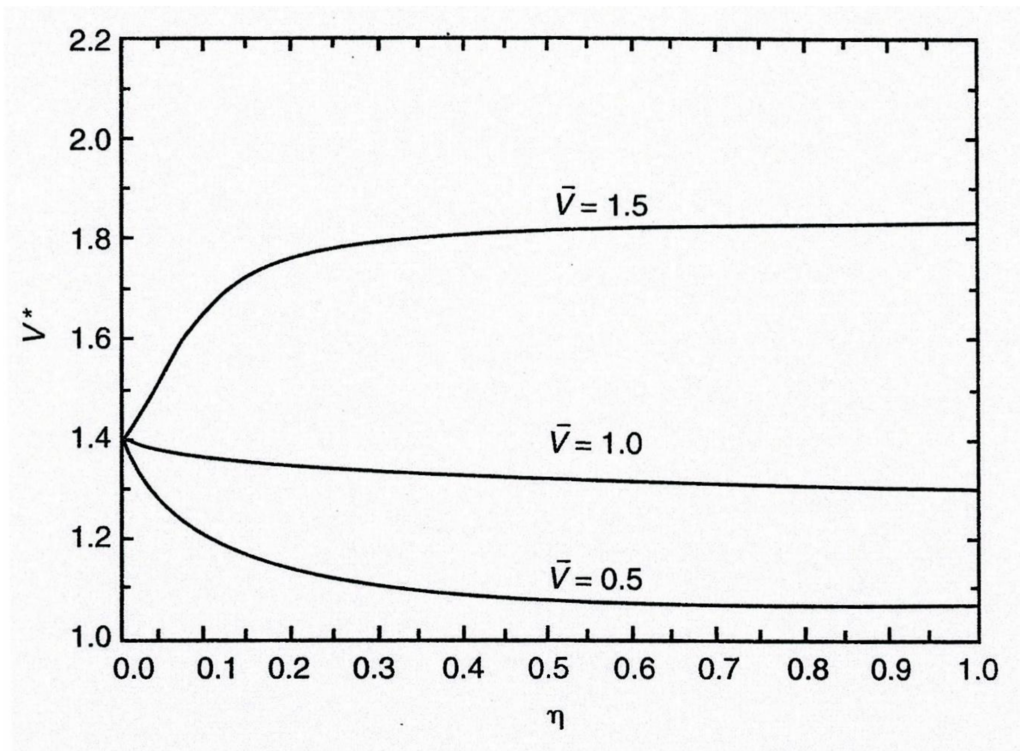


Σχήμα 1.13: *Διάγραμμα μέσης επαναφοράς – F(V) για η = 0,5 και* $\overline{V}$ *=0,5, 1,0 και 1,5*

Τα σχήματα 12 και 13 δείχνουν επίσης ότι αν η $\overline{V}$ και το η είναι μεγάλα, η F(V) δε θα είναι ενιαία κυρτή. Θα είναι κοίλη για μικρές τιμές της V. Αυτό είναι αποτέλεσμα της συγκεκριμένης στοχαστικής διαδικασίας (26) που χρησιμοποιήσαμε για να περιγράψουμε την εξέλιξη της V. Εκείνη η διαδικασία έχει ένα πολύ ενδιαφέρον φράγμα στο V = 0 [έτσι ώστε F(0) =)], αλλά ο απόλυτος ρυθμός επαναφοράς περί τη μέση τιμή αυξάνεται ραγδαία για μικρές αλλά θετικές τιμές της

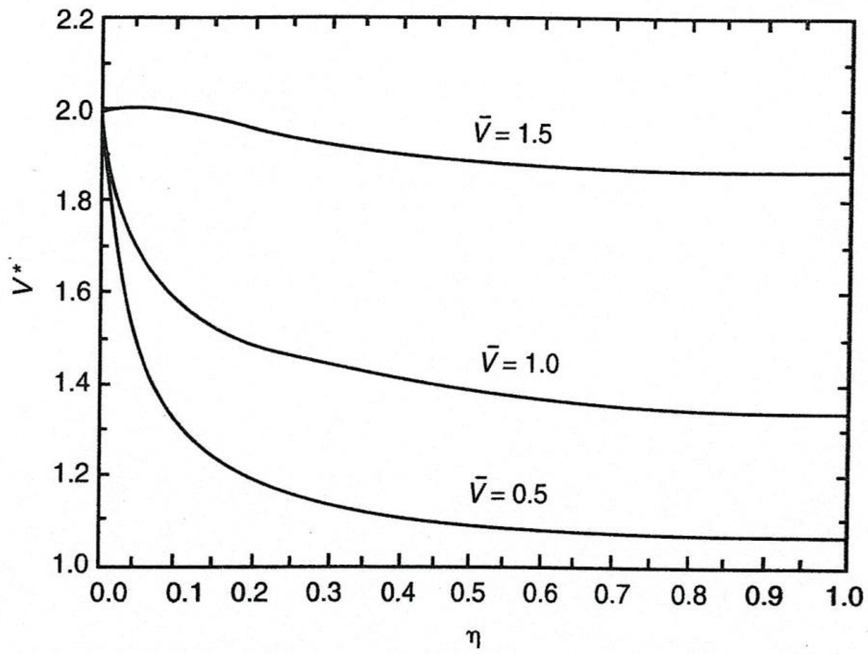
V και κατά συνέπεια η F(V) αυξάνεται παρομοίως με ραγδαίο ρυθμό. Αυτό είναι πιο εμφανές στο σχήμα 13 για την περίπτωση όπου $\bar{V}$ = 1,5, F(0) = 0, αλλά ο αναμενόμενος ρυθμός αύξησης της V γίνεται μεγαλύτερος όταν η V είναι έστω και λίγο μεγαλύτερη του μηδενός και έτσι η F(V) αυξάνεται γρήγορα.

Το σχήμα 14 δείχνει την κρίσιμη τιμή V^* ως συνάρτηση της παραμέτρου επαναφοράς στη μέση τιμή η για $\bar{V}$ = 0,5, 1,0 και 1,5. Προσέξτε ότι η V^* αυξάνει με το η όταν η $\bar{V}$ είναι μεγάλη, αλλά μειώνεται με το η όταν η $\bar{V}$ είναι μικρή. Αυτό αποτελεί ένα συμπέρασμα των όσων είδαμε προηγουμένως: όταν η $\bar{V}$ είναι μεγάλη, ένα μεγαλύτερο η αυξάνει την F(V) (και ως εκ τούτου και τη V^*), αλλά όταν η $\bar{V}$ είναι μικρή, ένα μεγαλύτερο η μειώνει την F(V). Το σχήμα 14 δείχνει ότι η $\bar{V}$ = I είναι μια διαχωριστική γραμμή, αλλά στην πραγματικότητα, το αν η V^* αυξάνεται ή ελαττώνεται με το η εξαρτάται επίσης και από το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο αναμενόμενο ποσοστό επιστροφής μ. Στο σχήμα 14 το μ = 0,08.



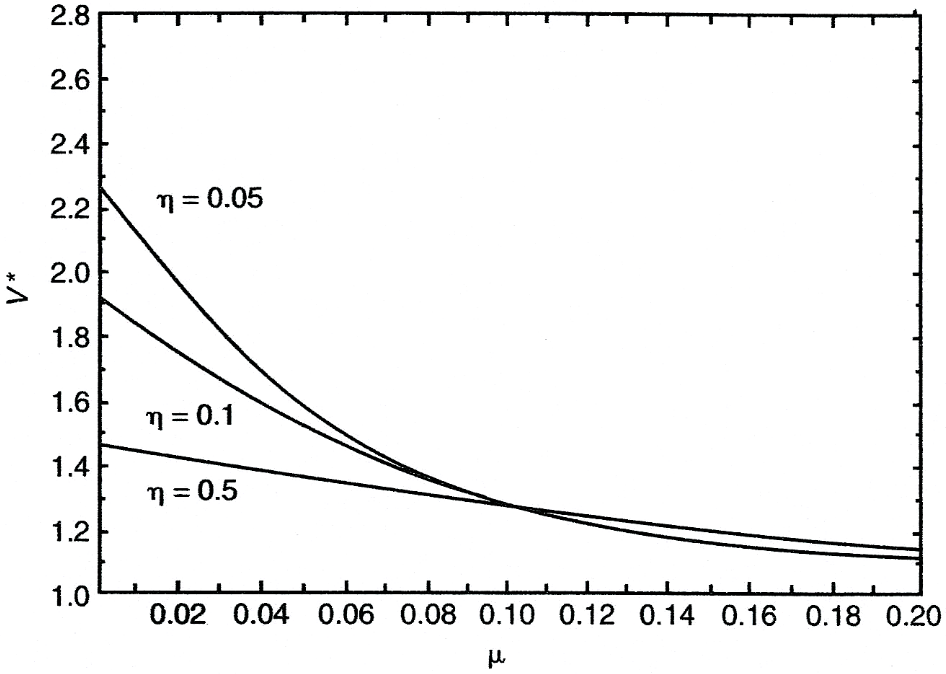
Σχήμα 1.14: *Η κρίσιμη τιμή V^* ως συνάρτηση του η για μ = 0,08 και $\bar{V}$ =0,5, 1,0 και 1,5*

Το σχήμα 15 δείχνει επίσης τη V^* ως συνάρτηση του η, αλλά για μ = 0,04. Με τα υπόλοιπα πράγματα να είναι ίσα, μια μικρότερη τιμή του μ υποδηλώνει μια μικρότερη τιμή για το αναμενόμενο ποσοστό «έλλειψης» του κέρδους κεφαλαίου, δηλαδή του $\delta = (1/dt)\cdot\mathcal{E}\cdot(dV)/V$, και έτσι έχουμε μια μεγαλύτερη τιμή για την F(V). Αυτή η αύξηση της F(V) θα είναι πιο έντονη όταν το η είναι μικρό. (Όταν το η είναι μεγάλο, η V αναμένεται σε κάθε περίπτωση να επανέλθει γρήγορα στην τιμή $\bar{V}$). Συνεπώς αν το μ είναι μικρό, η V^* θα μειωθεί με το η εκτός κι αν η $\bar{V}$ είναι πολύ μεγαλύτερη του I.



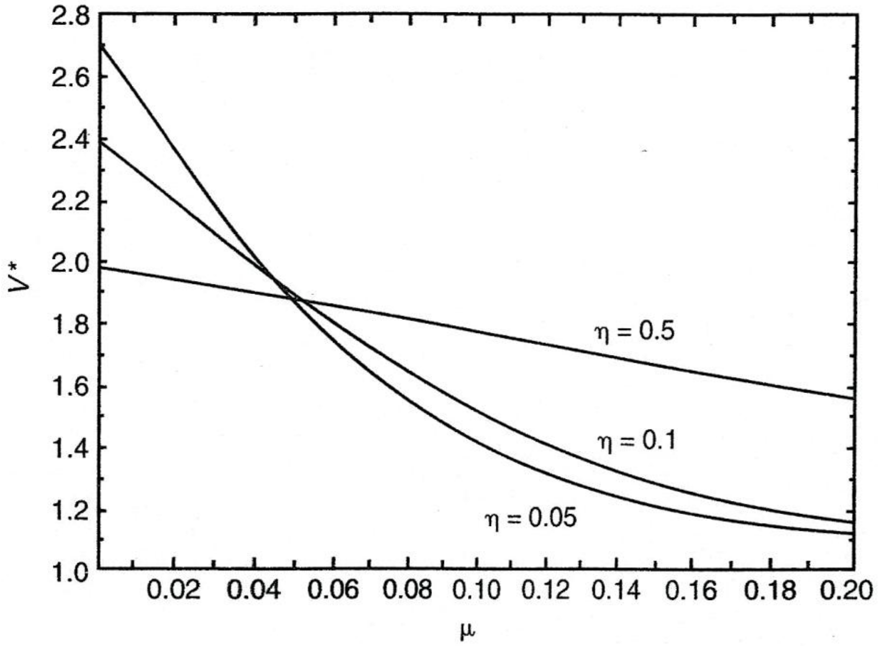
Σχήμα 1.15: *Η κρίσιμη τιμή V^* ως συνάρτηση του η για μ = 0,04 και $\overline{V}$ =0,5, 1,0 και 1,5*

Τέλος, τα σχήματα 16 και 17 δείχνουν την εξάρτηση της V^* από το μ. Το σχήμα 16 δείχνει τη V^* ως συνάρτηση του μ για $\overline{V}$ =1,0 και η = 0,05, 0,1 και 0,5 και το σχήμα 17 δείχνει το ίδιο, αλλά για $\overline{V}$ = 1,5. Προσέξτε ότι σε όλες τις περιπτώσεις η V^* μειώνεται με το μ. Και πάλι, ένα υψηλότερο μ συνεπάγεται υψηλότερο «έλλειμμα» κέρδους κεφαλαίου δ(V) (ένα ποσό δηλαδή που είναι μικρότερο του αναμενόμενου) και έτσι μια μικρότερη F(V) και μια μικρότερη V^*. Ωστόσο, το ποσοστό μείωσης εξαρτάται από τη $\overline{V}$ και το η. Όταν το η είναι μικρό, η V^* ξεκινά σε μεγαλύτερη τιμή (πάλι, αν το η ήταν μηδέν, το μοντέλο θα μειωνόταν σε εκείνο της προηγούμενης ενότητας, με α = 0 και δ = μ και έτσι το $\lim_{\mu \to 0} V^* = \infty$) και μειώνεται ταχύτερα (επειδή το ποσοστό της επιστροφής στη $\overline{V}$, και συνεπώς το αναμενόμενο ποσοστό του κέρδους του κεφαλαίου για τη V, είναι μικρό). Επίσης, όπως θα περιμέναμε, όσο μεγαλύτερη είναι η $\overline{V}$, τόσο μεγαλύτερη είναι η V^* [και η F(V)], ανεξάρτητα από τις τιμές του η και του μ.



Σχήμα 1.16: *Η κρίσιμη τιμή V^* ως συνάρτηση του μ για $\overline{V}$ = 1,0 και n = 0,05, 0,1 και 0,5*

Η επιλογή εκ μέρους μας της διαδικασίας (26) επαναφοράς περί τη μέση τιμή για τη V ήταν βολική, δεδομένου ότι οδήγησε σε μια οιονεί αναλυτική λύση για την αξία της επενδυτικής ευκαιρίας και του κανόνα βέλτιστης επένδυσης. Αυτό δε θα πρέπει να θεωρηθεί ιδιαίτερα περιοριστικό. Θα μπορούσαμε κάλλιστα να είχαμε προσδιορίσει κάποια εναλλακτική διαδικασία επαναφοράς γύρω από τη μέση τιμή για τη V (για παράδειγμα, μια διαδικασία στην οποία ο απόλυτος, παρά ο ποσοστιαίος, ρυθμός επαναφοράς στη μέση τιμή είναι γραμμικός με τη V). Ανάλογα με τη διαδικασία, η τελική διαφορική εξίσωση για την F(V) μπορεί να έχει, αλλά μπορεί και να μην έχει, μια γνωστή λύση που να βασίζεται σε σειρές. Σε κάθε περίπτωση θα μπορούσε να λυθεί αριθμητικά, συνήθως με λίγη δυσκολία.



Σχήμα 1.17: *Η κρίσιμη τιμή* V^* *ως συνάρτηση του μ για* $\overline{V}$ *= 1,5 και n = 0,05, 0,1 και 0,5*

1.5.B Συνδυασμένες διαδικασίες Brownian motion και διακριτών μετακινήσεων

Ας επιστρέψουμε τώρα στο βασικό μας μοντέλο στο οποίο η V ακολουθεί μια γεωμετρική Brownian motion και θα το επεκτείνουμε με ένα διαφορετικό τρόπο. Αυτή τη φορά θα επιτρέψουμε την πιθανότητα ότι σε κάποιο τυχαίο σημείο του χρόνο, η V θα πάρει μια Brownian μορφή καθοδικών μετακινήσεων. Αυτός ο τύπος του μοντέλου θα μπορούσε να περιγράψει μια κατάσταση στην οποία μια εταιρεία έχει μια πατέντα που της δίνει την option επένδυσης σε ένα έργο του οποίου η αξία είναι V, αλλά και άλλες εταιρείες κάνουν επίσης έρευνα η οποία, αν είναι επιτυχής, θα τους επιτρέψει να επενδύσουν σε ένα παρόμοιο έργο. Αν και όταν μία από αυτές τις εταιρείες είναι επιτυχής, ο ανταγωνισμός που προκύπτει θα μειώσει τα κέρδη και έτσι και τη V.

Για να τροποποιήσουμε το βασικό μας μοντέλο, θα υποθέσουμε ότι η V ακολουθεί μια μικτή διαδικασία Brownian motion/διακριτών μετακινήσεων:

$$dV = a \cdot V \cdot dt + \sigma \cdot V \cdot dz - V \cdot dq \qquad (36)$$

όπου το dq είναι η αύξηση μιας διαδικασία Poisson με μέσο ρυθμό αύξησης λ και τα dq και dz είναι ανεξάρτητα [έτσι ώστε $\mathcal{E}$ (dz·dq)=0]. Θα υποθέσουμε ότι όταν συμβαίνει κάποιο «γεγονός», το q μειώνεται κατά ένα σταθερό ποσοστό φ (με $0 \le \varphi \le 1$) με πιθανότητα 1. Έτσι η εξίσωση (36) λέει ότι η V θα μεταβάλλεται ως μια γεωμετρική Brownian motion, αλλά για κάθε χρονικό διάστημα dt υπάρχει μια μικρή πιθανότητα λ·dt ότι θα πέσει σε (1 – φ) επί την αρχικής της και έκτοτε θα συνεχίσει να κυμαίνεται έως ότου να συμβεί κάποιο γεγονός.

Είναι σημαντικό να είμαστε σαφείς όσο αφορά τη σημασία της εξίσωσης (36). Πρώτον, προσέξτε ότι το αναμενόμενο ποσοστό μεταβολή της V δεν είναι το α, αλλά αντί αυτού είναι το $(1/dt)\cdot\mathcal{E}\cdot(dV)/V = \alpha - \lambda\cdot\varphi$, διότι σε κάθε χρονικό διάστημα dt υπάρχει μια πιθανότητα $\lambda\cdot dt$ ότι η V θα μειωθεί κατά $100\cdot\varphi$ τοις εκατό. Έτσι οι αυξήσεις στο λ μειώνουν το αναμενόμενο ποσοστό του κέρδους του κεφαλαίου για τη V, αυξάνοντας την πιθανότητα μια ξαφνικής πτώσης στη V. Δεύτερον, επειδή ένα γεγονός Poisson συμβαίνει σπάνια μόνο, τον περισσότερο καιρό η μεταβολή dV/V σε ένα μικρό χρονικό διάστημα dt είναι ακριβώς αυτή του μέρους της Brownian motion, $\sigma^2 dt$. Ωστόσο, αν συμβεί το γεγονός, συμβάλλει σε μια πολύ μεγάλη απόκλιση κι έτσι δε μπορεί να αγνοηθεί η συμβολή του στη διακύμανση που υπολογίζεται με δεδομένες τις πληροφορίες για τη χρονική στιγμή t. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση των τυχαίων βημάτων για τη Brownian motion, θέτουμε για ευκολία α = 0 και γράφουμε

$$dV = \begin{cases} \sigma\cdot V\cdot\sqrt{dt} & \text{με πιθανότητα } \tfrac{1}{2}\cdot(1-\lambda\cdot dt) \\ -\sigma\cdot V\cdot\sqrt{dt} & \text{με πιθανότητα } \tfrac{1}{2}\cdot(1-\lambda\cdot dt) \\ -\phi\cdot V & \text{με πιθανότητα } \lambda\cdot dt \end{cases}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[dV] &= -\lambda\cdot dt\cdot\varphi\cdot V, \\ \mathcal{E}[(dV)^2] &= (1-\lambda\cdot dt)\cdot\sigma^{2}\cdot V^{2}\cdot dt + \lambda\cdot dt\cdot\varphi^{2}\cdot V^{2}, \\ V[dV] &= \mathcal{E}[(dV)^2] - \{\mathcal{E}[dV]\}^2 \\ &= (1-\lambda\cdot dt)\cdot\sigma^{2}\cdot V^{2}\cdot dt + \lambda\cdot dt\cdot\varphi^{2}\cdot V^{2} - \lambda^{2}\cdot dt^{2}\cdot\varphi^{2}\cdot V^{2} \\ &= \sigma^{2}\cdot V^{2}\cdot dt + \lambda\cdot\varphi^{2}\cdot V^{2}\cdot dt, \end{aligned}$$

Έχοντας αγνοήσει τους όρους $(dt)^2$ κλπ.

Προσέξτε ότι αυτή η διακύμανση έχει δύο συνιστώσες. Η πρώτη συνιστώσα, $\sigma^{2}\cdot V^{2}\cdot dt$, είναι η στιγμιαία (ή «τοπική») διακύμανση της dV, η οποία προκύπτει από το τμήμα της διαδικασίας που έχει να κάνει με τη Brownian motion και είναι υπό τον όρο ότι δε συμβαίνει κάποια μετακίνηση. Η δεύτερη συνιστώσα, $\lambda\cdot\varphi^{2}\cdot V^{2}\cdot dt$, έχει να κάνει με την πιθανότητα μετακίνησης. Σύντομα θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα του Itô για να βρούμε το διαφορικό της συνάρτησης της V. Όταν εφαρμόζουμε το Λήμμα του Itô σε μια συνδυασμένη διαδικασία Brownian motion και διακριτών μετακινήσεων, μόνο η πρώτη συνιστώσα της διακύμανσης αυτής συνεισφέρει στο νέο όρο που αφορά παραγώγους δεύτερης τάξης. Η δεύτερη συνιστώσα των διακριτών μετακινήσεων συμβάλλει με ένα διαφορετικό όρο που περιλαμβάνει μια διαφορά στις τιμές των διακριτών διαφόρων σημείων.

Τέλος, προκειμένου να γίνει μια εκτίμηση για τις επιδράσεις της μεταβολής του λ, θα θέλουμε να γνωρίζουμε την αναμενόμενη τιμή του T, το χρονικό διάστημα στο οποίο η V μεταβάλλεται πριν ξεκινά να πέφτει. Για να καθορίσουμε το $\mathcal{E}(T)$, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η πιθανότητα στην οποία δε συμβαίνει κάποιο γεγονός στο χρονικό διάστημα (0, T) είναι $e^{-\lambda T}$. Συνεπώς η πιθανότητα ότι θα συμβεί κάποιο γεγονός στο μικρό χρονικό διάστημα (T, T + dT) είναι $e^{-\lambda T}\cdot\lambda\cdot dT$. Έτσι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι η V να κάνει μια μετακίνηση κατά Poisson είναι

$$\mathcal{E}(T) = \int_0^\infty \lambda \cdot \mathrm{T} \cdot e^{-\lambda \mathrm{T}} dT = \frac{1}{\lambda} \tag{37}$$

Τώρα θα προχωρήσουμε στη λύση για τον κανόνα βέλτιστης επένδυσης χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό. Θα υποθέσουμε ότι η εταιρεία είναι ουδετέρου κινδύνου και έτσι το επιτόκιο αναγωγής της είναι ρ = r. Έτσι, η εξίσωση Bellman για την F(V), την αξία της επενδυτικής ευκαιρίας, είναι

$$r \cdot F \cdot dt = \mathcal{E}(dF)$$

Τώρα επεκτείνουμε τη dF χρησιμοποιώντας την εκδοχή του Λήμματος του Itô για τις συνδυασμένες διαδικασίες Brownian motion και διακριτών μετακινήσεων:

$$r \cdot F \cdot dt = \alpha \cdot V \cdot F'(V) \cdot dt + \tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot V^2 \cdot F''(V) \cdot dt - \lambda \cdot \{F(V) - F[(1-\phi) \cdot V]\} \cdot dt \tag{38}$$

Αντικαθιστώντας το α με r – δ, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot V^2 \cdot F''(V) + (r-\delta) \cdot V \cdot F'(V) - (r+\lambda) \cdot F(V) + \lambda \cdot F \cdot [(1-\phi) \cdot V] = 0 \tag{39}$$

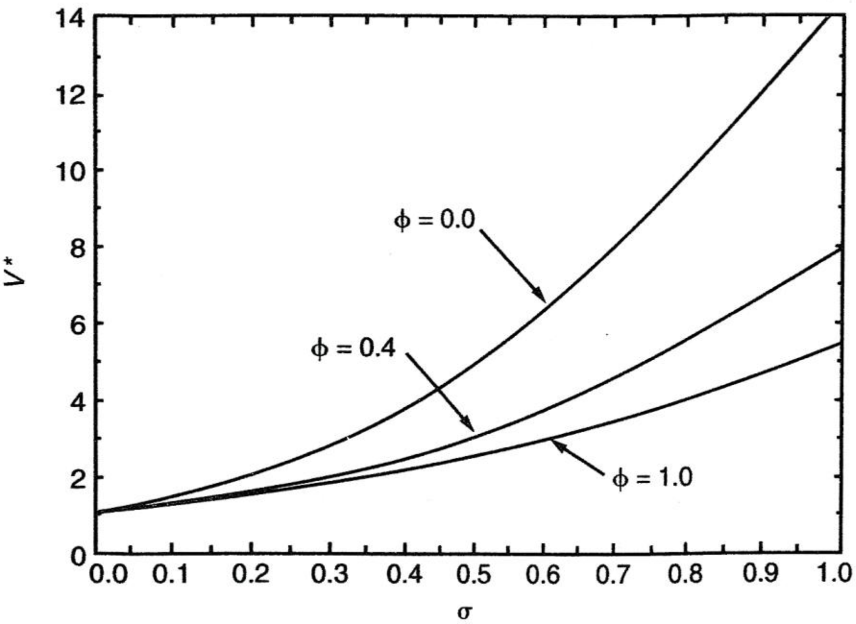
Οι ίδιες οριακές συνθήκες (10) έως (12) εφαρμόζονται και εδώ.

Η λύση στη σχέση (39) είναι και πάλι της μορφής $F(V) = A \cdot V \cdot e^{\beta_1}$, αλλά τώρα το β_1 είναι η θετική ρίζα σε μια κάπως πιο περίπλοκη μη γραμμική εξίσωση:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \beta \cdot (\beta - 1) + (r-\delta) \cdot \beta - (r+\lambda) + \lambda \cdot (1-\phi)^\beta = 0 \tag{40}$$

Η τιμή του β που ικανοποιεί την εξίσωση (40) και που επίσης ικανοποιεί τη συνθήκη F(0) = 0 μπορεί να βρεθεί αριθμητικά. Τότε, με δεδομένη το β_1, τα V^* και A μπορούν και πάλι να βρεθούν από τις εξισώσεις (14) και (15), οι οποίες με τη σειρά τους προκύπτουν από τις οριακές συνθήκες (11) και (12).

Το σχήμα 18 δείχνει την κρίσιμη τιμή της V^* σε συνάρτηση του σ για φ = 0, 0,4 και 1. (Σε κάθε περίπτωση, λ = 0,1, r = δ = 0,04 και I = 1.) Προσέξτε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το φ, τόσο μικρότερη είναι V^*. Ο λόγος είναι ότι μια μεγαλύτερη τιμή του φ συνεπάγεται μια μικρότερη αξία για την επενδυτική ευκαιρία (όταν εμφανιστεί ένα γεγονός, η V θα πέσει κατά μεγαλύτερο ποσοστό), το οποίο σημαίνει ότι έχουμε μικρότερο ευκαιριακό κόστος για την επένδυση τώρα παρά με την αναμονή.



Σχήμα 1.18: *Η κρίσιμη τιμή V^* ως συνάρτηση του σ για μεικτή διαδικασία Poisson/Brownian Motion για λ = 0,1*

Ο πίνακας 1 δείχνει τα β_1, V^* και Α για διάφορες τιμές του λ, για την περίπτωση που φ = 1 (και έτσι η V πέφτει στο μηδέν όταν συμβαίνει ένα γεγονός). (Στον πίνακα αυτό, r = δ = 0,04, σ = 0,2 και I = 1.) Μια θετική τιμή του λ επηρεάζει την αξία της επενδυτικής ευκαιρίας με δύο τρόπους. Πρώτον, μειώνει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους κεφαλαίου για τη V (από α σε α – λ), το οποίο μειώνει την F(V). Δεύτερον, αυξάνει τη διακύμανση των ποσοστιαίων μεταβολών της V κατά τη διάρκεια πεπερασμένων χρονικών διαστημάτων και αυτό τείνει να αυξήσει την F(V). Όπως φαίνεται στον πίνακα 1, η καθαρή επίδραση είναι η μείωση της F(V) και επομένων η μείωση της κρίσιμης τιμής V^*. Επιπλέον, αυτή η καθαρή επίδραση είναι αρκετά δυνατή. Μικρές αυξήσεις στο λ οδηγούν σε σημαντική πτώση της V^*. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (37) ξέρουμε ότι αν λ = 0,2, ο αναμενόμενος χρόνος Ɛ(T) για να παραμείνει η V θετική είναι 5 χρόνια, αλλά σε σύγκριση με το χρόνο όπου το λ είναι μηδέν, το Α μειώνεται κατά περισσότερο από το μισό και η V^* μειώνεται από 2 σε 1,33.

Πίνακας 1.1: *Εξάρτηση των β_1, V^* και A για διάφορες τιμές του λ.*
(Σημείωση: $I = 1$, $\varphi = 1$, $r = \delta = 0{,}04$ και $\sigma = 0{,}2$.)

λ	$\boldsymbol{\beta_1}$	$\boldsymbol{V^*}$	***A***
0	2.00	2.00	0.250
0.05	2.70	1.59	0.169
0.1	3.19	1.46	0.138
0.2	4.00	1.33	0.105
0.3	4.65	1.27	0.009
0.5	5.72	1.21	0.007
1.0	7.73	1.15	0.005

Όπως είπαμε και προηγουμένως, είναι σημαντικό να είμαστε προσεκτικοί κατά την ερμηνεία συγκριτικών στατικών αποτελεσμάτων. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε αυξήσει το λ ενώ κρατάμε το α σταθερό. Θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης για τη V, όπως αυτό καθορίζεται από την αγορά (το οποίο σε αυτήν την περίπτωση είναι το άνευ κινδύνου επιτόκιο r), θα πρέπει να παραμείνει σταθερό και έτσι μια αύξηση στο λ θα πρέπει να συνοδευτεί από μια ανάλογη αύξηση στο α (διαφορετικά κανείς επενδυτής δε θα επιλέξει να εκμεταλλευτεί αυτό το έργο). Υποθέστε ότι $\varphi = 1$. Τότε αν το α αυξάνεται ακριβώς όσο και το λ, έτσι ώστε το $\alpha - \lambda$ να παραμένει σταθερό, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τους όρους $(r - \delta)$ στην εξίσωση (40) με $(r + \lambda - \delta)$. Σε αυτήν την περίπτωση μια αύξηση στο λ θα ήταν ισοδύναμη με μια αύξηση στο άνευ κινδύνου επιτόκιο r και θα οδηγούσε σε αύξηση της F(V) και της V^*.

Η συγκεκριμένη διαδικασία διακριτών μετακινήσεων που δίνεται από την εξίσωση (36) οδηγεί σε μια διαφορική εξίσωση για την F(V) που είναι εύκολο να λυθεί. Κάποιος θα μπορούσε, βέβαια, να χρησιμοποιήσει εναλλακτικές διαδικασίες για τη V. Για παράδειγμα, μια εταιρεία που εκμεταλλεύεται μια πατέντα μπορεί να αντιμετωπίζει πολλούς πιθανούς ανταγωνιστές, καθένας από τους οποίους προσπαθεί να δημιουργήσει τη δική του πατέντα. Η επιτυχία κάποιου ανταγωνιστή μπορεί να προκαλέσει μια πτώση της V κατά ένα τυχαίο, παρά σταθερό, ποσό. Με τον καιρό, μπορεί να καταφέρουν και άλλοι ανταγωνιστές να μπουν στην αγορά και έτσι η V θα συνεχίσει να πέφτει. Ο υπολογισμός του κανόνα βέλτιστης επένδυσης για ένα μοντέλο αυτού του είδους θα είναι πιο δύσκολος ωστόσο και θα απαιτεί πιθανώς μια μέθοδο αριθμητικής επίλυσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η αξία του έργου και η απόφαση για επένδυση

Το βασικό μοντέλο της μόνιμης επένδυσης που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο κατέδειξε μια στενή αναλογία μεταξύ μιας option επένδυσης κάποιας εταιρείας και μιας χρηματοπιστωτικής option αγοράς. Στην περίπτωση της option αγοράς, η τιμή της μετοχής που αφορά την option θεωρείται ότι ακολουθεί μια εξωγενώς συγκεκριμένη στοχαστική διαδικασία, συνήθως μια γεωμετρική Brownian motion. Στο μοντέλο της πραγματικής επένδυσης, η αντίστοιχη καταστατική μεταβλητή ήταν η αξία του έργου V, για την οποία είχαμε καθορίσει μια εξωγενή στοχαστική διαδικασία.

Ωστόσο, όπως εξηγήσαμε στην αρχή του προηγούμενου κεφαλαίου, το να αφήνουμε τη V να ακολουθεί μια εξωγενή στοχαστική διαδικασία, και ιδιαίτερα μια γεωμετρική Brownian motion, είναι ένα μέρος της πραγματικότητας. Πρώτον, αν το έργο είναι ένα εργοστάσιο και υπάρχουν μεταβλητά κόστη λειτουργίας, η V δε θα ακολουθεί τη γεωμετρική Brownian motion. Δεύτερον και πιο σημαντικό, η αξία του έργου εξαρτάται από τις μελλοντικές τιμές των εκροών και των εισροών, τα επιτόκια κλπ. Αυτά με τη σειρά μπορούν να εξηγηθούν υπό το πρίσμα της βασικής ζήτησης και των τεχνολογικών συνθηκών στις διάφορες αγορές. Έτσι οι διακυμάνσεις της V μπορούν να αναχθούν σε αβεβαιότητα γι’ αυτές τις πιο βασικές μεταβλητές. Το πόσο βαθιά θα πάει κάποιος εξαρτάται από το σκοπό της ανάλυσης. Για να καταλάβουμε τη συμπεριφορά μιας εταιρείας, θα μέναμε ικανοποιημένοι αν εργαζόμασταν με μια εξωγενή διαδικασία για τις τιμές των εκροών και των εισροών. Σε επίπεδο βιομηχανίας, πρέπει να κάνουμε ενδογενή την αξία των εκροών. Σε ένα ακόμη πιο γενικό επίπεδο ισορροπίας, οι τιμές των εισροών πρέπει να καθορίζονται ταυτόχρονα, εξετάζοντας όλους τους συντελεστές ζήτησης των βιομηχανιών. Σε αυτό το κεφάλαιο κάνουμε τα πρώτα βήματα κατά μήκος της διαδρομής.

Για το μεγαλύτερο χρόνο σε αυτό το κεφάλαιο, θεωρούμε μια εταιρεία που έχει την προνομιακή δυνατότητα ή το δικαίωμα μονοπωλίου να επενδύσει σε ένα διακριτό σχέδιο που θα επιφέρει μια συγκεκριμένη ροή παραγωγής. Η βασική αβεβαιότητα είναι για τη ζήτηση του προϊόντος, αλλά με δεδομένη μια αντικειμενική κλίμακα, υπάρχει άμεση αντιστοιχία μεταξύ ζήτησης και τιμής. Επομένως επιτρέπουμε στην τιμή του προϊόντος P να είναι εξωγενής και καθορίζουμε την αξία V του έργου και την τιμή F της option επένδυσης, υπό το πρίσμα της προβλεπόμενης στοχαστικής διαδικασίας για την P. Οι μέθοδοι είναι οι ίδιες με αυτές που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή η ανάλυση πιθανών αξιώσεων και ο δυναμικός προγραμματισμός. Θα δούμε ότι για μια ακόμη φορά, η τιμή της option επένδυσης περιλαμβάνει ένα ασφάλιστρο εκμετάλλευσης, το οποίο συνεπάγεται μια πιο σκληρή δοκιμασία για την επένδυση απ’ ό,τι με το παραδοσιακό κριτήριο Marshallian.

Στην ενότητα 1, ξεκινάμε με την πιο απλή περίπτωση όπου η παραγωγή δεν έχει λειτουργικά κόστη. Τότε η αξία του ολοκληρωμένου έργου είναι ακριβώς η ανηγμένη παρούσα αξία της ροής των εσόδων και οι τύποι του προηγούμενου κεφαλαίου που εκφράστηκαν για τη V μεταφράζονται άμεσα σε αντίστοιχους τύπους για την P.

Στην ενότητα 2 εισάγουμε ένα λειτουργικό κόστος C. Έτσι το έργο θα δημιουργήσει μια ροή κέρδους από τη λειτουργία ίσης με (P – C) ανά περίοδο. Αυτό θέτει ένα νέο ζήτημα – η τιμή του προϊόντος μπορεί να πέσει κάτω από το C από στιγμή σε στιγμή, το οποίο θα οδηγήσει σε αρνητικό κέρδος λειτουργίας. Πρέπει να καθορίσουμε τι θα συμβεί τότε. Θα θεωρήσουμε δύο, κατά κάποιον τρόπο ακραίες, πιθανότητες. Η πρώτη, που αποτελεί αντικείμενο του κεφαλαίου αυτού, είναι ότι το έργο μπορεί να κλείσει χωρίς κόστος αν η P γίνει μικρότερη του C και αργότερα να επανεκκινήσει χωρίς κόστος αν η P γίνει μεγαλύτερη του C. Στην πράξη, αυτό κάνει το έργο να είναι μια άπειρη ακολουθία στιγμιαίων options λειτουργίας, κάθε μια από τις οποίες διατίθεται αν P > C και μπορεί να αποτιμηθεί αναλόγως. Η άλλη ακραία πιθανότητα, που θα εξετάσουμε στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο, απαγορεύει μια τέτοια προσωρινή αναστολή από την άποψη ότι το συνολικό κόστος επένδυσης I πρέπει να τις επιβαρύνει ξανά αν συνεχιστούν ποτέ οι λειτουργίες. Στη συνέχεια θα πρέπει να διατηρηθούν κάποιες απώλειες ώστε να συντηρηθεί η option μελλοντικών λειτουργιών ζωντανή, αλλά αν αυτές οι απώλειες γίνουν πολύ μεγάλες, το έργο θα εγκαταλειφθεί. Φυσικά, η πραγματικότητα έγκειται μεταξύ αυτών των δύο ακραίων περιπτώσεων. Τα εν εξελίξει έργα γενικά δημιουργούν συγκεκριμένα ενεργητικά κεφάλαια – δεξιότητες των εργατών, πίστη των πελατών κλπ – που σταδιακά θα εξαφανιστούν, ή θα «σκουριάσουν» αν ανασταλεί η λειτουργία. Έτσι η εξαγορά συνεπάγεται ένα κόστος, αλλά λιγότερο από το κόστος του νέου ξεκινήματος και η διαφορά εξαρτάται από τη φύση του προϊόντος και τη διάρκεια της αναστολής. Η ανάλυση εκ μέρους των ακραίων περιπτώσεων αποφέρει αποτελέσματα που μπορούν να συνδυαστούν κατάλληλα ώστε να ταιριάζουν σε συγκεκριμένες εφαρμογές που βρίσκονται στο ενδιάμεσο.

Στην ενότητα 3 επιτρέπουμε ορισμένη στιγμιαία διακύμανση των εισροών, όπως η εργασία και οι πρώτες ύλες, ώστε να μεταβάλουμε την εκροή από ένα έργο για την αντιμετώπιση παροδικών διακυμάνσεων στην τιμή. Τώρα η ροή κερδών γίνεται μια μη γραμμική συνάρτηση της τιμής, η οποία μεταβάλλει την επίδραση της αβεβαιότητας στην επένδυση.

Όλη η ανάλυση μέχρι αυτό το σημείο υποθέτει ότι το έργο, μόλις εγκατασταθεί, συνεχίζει την παραγωγή του για πάντα. Αυτή η μη ρεαλιστική υπόθεση γίνεται μόνο για τη μετάδοση βασικών ιδεών για τις τιμές των option με έναν απλούστερο τρόπο. Στην ενότητα 4 χαλαρώνουμε αυτήν την υπόθεση εισάγοντας τις αποσβέσεις. Δείχνουμε ότι η επίδραση στις τιμές της option δεν εξαρτάται από τη θνησιμότητα του έργου, αλλά από το πώς προσδιορίζουμε τις δυνατότητες που είναι διαθέσιμες στην εταιρεία και αφού το αρχικό έργο έχει φτάσει στο τέλος της ζωής του. Δείχνουμε ότι οι τιμές της option παραμένουν μεγάλης σημασίας ακόμη και με αρκετά γρήγορη απόσβεση.

Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου αυτού θεωρούμε μια κατάσταση όπου δύο μεταβλητές που επηρεάζουν στην απόφαση της εταιρείας για επένδυση – η τιμή του προϊόντος και το κόστος επένδυσης – είναι και οι δύο τυχαίες. Εδώ η τιμή της option επένδυσης είναι μια συνάρτηση και των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών και επομένως ικανοποιεί μια μερική διαφορική εξίσωση. Γενικά τέτοιες εξισώσεις είναι δύσκολες και πρέπει να επιλυθούν αριθμητικά. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της ομοιογένειας βοηθάει να μειώσουμε το πρόβλημα σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση και να τη λύσουμε αναλυτικά. Τώρα η επένδυση είναι βέλτιστη μόνο όταν ο λόγος της τιμής του προϊόντος και το κόστος επένδυσης υπερβαίνει ένα κατώτατο όριο που επηρεάζεται από την τιμή της option αναμονής.

Σε όλο αυτό το κεφάλαιο, οι ιδέες για τις τιμές των option που αποκτήσαμε από την ανάλυση που κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο θα εξακολουθούν να ισχύουν και θα είναι πολύτιμες καθώς θα εισάγουμε νέα χαρακτηριστικά στο μοντέλο. Οι τεχνικές που αναπτύχθηκαν εκεί, θα συνεχίσουν να είναι χρήσιμες. Στο επόμενο κεφάλαιο, θα θεωρήσουμε τη δυνατότητα προσωρινής διακοπής ή μόνιμης εγκατάλειψης του έργου αν οι χρηματοροές γίνουν αρνητικές.

2.1 Η απλούστερη περίπτωση: δεν υπάρχουν λειτουργικά κόστη

Σε αυτήν την ενότητα το επενδυτικό έργο της εταιρείας, μόλις ολοκληρωθεί, θα παράγει μια σταθερή ροή προϊόντων για πάντα. Για τη διευκόλυνσή μας, θα επιλέγουμε τις μονάδες έτσι ώστε η ποσότητα της παραγωγής από το έργο να είναι ίση με μία μονάδα ανά έτος.

Ας θεωρήσουμε την αντίστροφη συνάρτηση ζήτηση που δίνει μια τιμή P υπό το πρίσμα της ποσότητας Q να είναι P = Y·D(Q), όπου το Y είναι μια στοχαστική μεταβλητή μετατόπισης. Σε αυτήν την ενότητα τα μεταβλητά κόστη της παραγωγής τα θεωρούμε ίσα με μηδέν και έτσι οι ροές κέρδους της εταιρείας είναι ακριβώς P = Y·D(1). Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να πάρουμε το P να είναι η στοχαστική μεταβλητή.

Για τον περισσότερο χρόνο στο κεφάλαιο αυτό θα υποθέσουμε ότι έχουμε την απλούστερη στοχαστική διαδικασία για την P και που είναι πολύ κοντά στο πλαίσιο του προηγούμενου κεφαλαίου, δηλαδή γεωμετρική Brownian motion:

$$dP = a \cdot P \cdot dt + \sigma \cdot P \cdot dz \qquad (1)$$

Η ροή κέρδους είναι P στο διηνεκές και η αναμενόμενη τιμή της αυξάνει κατά τη φορά του συντελεστή α. Αν τα μελλοντικά έσοδα αναχθούν κατά το ποσοστό μ, τότε η αναμενόμενη παρούσα αξία V του έργου όταν η τρέχουσα τιμή είναι P δίνεται ακριβώς ως V = P/(μ – α). Στην περίπτωση αυτή η V, που είναι μια σταθερά που πολλαπλασιάζει το P, ακολουθεί επίσης γεωμετρική Brownian motion με τις ίδιες παραμέτρους α και σ. Έτσι το επενδυτικό πρόβλημα μειώνεται στο μοντέλο που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αλλά θα το επαναλάβουμε άμεσα υπό το πρίσμα της P για να θέσουμε το στάδιο για τις γενικεύσεις που θα έρθουν.

2.1.Α Το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο επιστροφής – απόδοσης

Το μοντέλο τιμολόγησης ενεργητικού κεφαλαίου μας επιτρέπει να καθορίσουμε το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο αναγωγής μ. Γι’ αυτό χρειαζόμαστε τις στοχαστικές διακυμάνσεις της P να «βαθμονομούνται» από τις χρηματαγορές, δηλαδή υπάρχει ένα εμπορεύσιμο κεφάλαιο, ή κάποιος θα μπορούσε να κατασκευάσει ένα δυναμικό χαρτοφυλάκιο κεφαλαίων, που σχετίζεται απολύτως με την P. Για την απλότητα της έκθεσης υποθέτουμε ότι η παραγωγή από το έργο είναι απόλυτα εμπορεύσιμη. Σε αυτήν την περίπτωση, το αναγωγικό επιτόκιο μ θα είναι το εμπορεύσιμο, σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο, αναμενόμενο ποσοστό επιστροφής για την P. Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, έχουμε τον τύπο του Capital Asset Pricing Model (CAPM – μοντέλο αποτίμησης ενεργητικών κεφαλαίων)

$$\mu = r + \phi \cdot \sigma \cdot \rho_{pm} \qquad (2)$$

όπου r είναι το επιτόκιο αναγωγής που είναι κατάλληλο για ταμειακές ροές άνευ κινδύνου, το ρ_{pm} είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των κεφαλαίων που παρακολουθεί η P και του συνόλου του χαρτοφυλακίου της αγοράς και φ είναι η εμπορεύσιμη τιμή του κινδύνου. Για τον περιορισμό της αξίας του έργου V, πρέπει να έχουμε $\mu > \alpha$. Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα ορίσουμε τη διαφορά $\mu - \alpha$ ως δ.

Οι επενδυτές θα εκμεταλλευτούν την παραγωγή ή το κεφάλαιο που σχετίζεται απόλυτα με την P μόνο αν πάρουν ένα συνολικό αναμενόμενο ποσοστό μ απ' αυτά. Από το ποσοστό, το α έρχεται στη μορφή της αναμενόμενης υπεραξίας. Το υπόλοιπο, το δ, πρέπει να λογιστεί ως κάποιο είδος μερίσματος. Αν η παραγωγή του έργου είναι ένα αποθηκεύσιμο αγαθό (για παράδειγμα, το πετρέλαιο ή ο χαλκός), το δ θα αντιπροσωπεύει την καθαρή οριακή ευκολία απόδοσης (ευκολία απόδοσης: το όφελος που συνδέεται με την εκμετάλλευση ενός συγκεκριμένου προϊόντος) από την αποθήκευση, δηλαδή τη ροή των παροχών (μείον τα κόστη αποθήκευσης) που παρέχει η οριακή αποθηκευμένη μονάδα. Γενικά θα αφήσουμε το δ να είναι μια εξωγενώς καθορισμένη παράμετρος. Ωστόσο, στην πράξη, η ευκολία απόδοσης μπορεί να ποικίλλει (στοχαστικά κατά την πάροδο του χρόνου και/ή σε απάντηση των μεταβλητών που είναι διαδεδομένοι στην αγορά όπως η συνολική αποθήκευση) και τα μοντέλα μας μπορούν να προσαρμοστούν για να το λογαριασμό της.

Όταν μεταβάλλεται κάποια βασική παράμετρος, η ισότητα $\mu - \alpha = \delta$ πρέπει να συνεχίσει να ισχύει, αλλά το ποιο από τα τρία μεγέθη προσαρμόζεται κάθε φορά ώστε να αποκαθιστά την ισότητα εξαρτάται από την υποκείμενη τεχνολογία και συμπεριφορά. Υποθέτουμε ότι το άνευ κινδύνου επιτόκιο r και η εμπορεύσιμη τιμή του κινδύνου φ, που αποτελούν τις ιδιότητες ολόκληρης της αγοράς, είναι ολοκληρωτικά εξωγενείς στην ανάλυσή μας. Τώρα, όταν το σ του P αυξάνεται, το μ πρέπει να αυξηθεί. Αν το δ είναι μια θεμελιώδης σταθερά της αγοράς, τότε το α πρέπει να αλλάζει ένα προς ένα με το μ. Ωστόσο, αν το α είναι μια θεμελιώδης σταθερά της αγοράς, τότε το δ είναι αυτό που πρέπει να προσαρμοστεί. Για παράδειγμα, το συνολικό ποσό αποθέματος μπορεί να αλλάξει. Όταν μελετάμε τις επιδράσεις των μεταβολών το σ στην επενδυτική απόφαση της εταιρείας, η απάντησή μας θα εξαρτάται από το ποια από αυτές τις απόψεις υιοθετούμε. Γενικά θα θεωρούμε το δ ως τη βασική παράμετρο και θα επιτρέπουμε στο α να προσαρμόζεται. Όταν μια άλλη προδιαγραφή οδηγεί σε ένα σημαντικό διαφορετικό αποτέλεσμα, θα το τονίζουμε.

2.1.B Αποτίμηση του έργου

Το έργο μας είναι ένα τυχαίο ή παράγωγο κεφάλαιο, του οποίου οι αποπληρωμές εξαρτώνται από την αξία του πολύ βασικού κεφαλαίου P. Τότε μπορούμε να αντλήσουμε την αξία του έργου ως μια συνάρτηση V(P) της τιμή του βασικού κεφαλαίου. Ακολουθούμε τη διαδικασία αποτίμησης των πιθανών αξιώσεων που έχει συζητηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Κατασκευάζουμε ένα άνευ κινδύνου χαρτοφυλάκιο θεωρώντας κατάλληλους συνδυασμούς του κεφαλαίου (του έργου) που πρόκειται να αποτιμηθεί και του βασικού κεφαλαίου P. Δεδομένου ότι το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι άνευ κινδύνου, πρέπει να κερδίζει το άνευ κινδύνου επιτόκιο απόδοσης. Αυτός ο όρος παράγει μια διαφορική εξίσωση για την άγνωστη αξία του έργου μας. Η εξίσωση μπορεί να λυθεί όταν έχουν δοθεί κατάλληλες οριακές συνθήκες.

Ας υποθέσουμε ότι κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο σε κάποια χρονική στιγμή t που περιέχει μια μονάδα του έργου και μια πώληση η μονάδων προϊόντων, όπου θα επιλέξουμε το η με τέτοιο τρόπο ώστε να καταστήσουμε το χαρτοφυλάκιο άνευ κινδύνου. Θεωρούμε την εκμετάλλευση αυτού του χαρτοφυλακίου για ένα μικρό χρονικό διάστημα (t, t + dt).

Αυτός που εκμεταλλεύεται το έργο θα έχει έσοδα ή ροή κερδών P˙dt για ένα χρονικό διάστημα μήκους dt. Επίσης, ο κάτοχος μερίσματος από option πώλησης πρέπει να πληρώσει στον κάτοχο του αντίστοιχου μερίσματος από option αγοράς ένα ποσό ίσο με το μέρισμα ή την ευκολία απόδοσης που ο τελευταίος θα είχε κερδίσει, δηλαδή το δ˙P˙dt. Έτσι η εκμετάλλευση του χαρτοφυλακίου μας δίνει ένα καθαρό μέρισμα (P – η ˙δ˙P)˙dt. Δίνει επίσης ένα (στοχαστικό) κέρδος κεφαλαίου, το οποίο είναι ίσο με

$$dV - n \cdot dP = \{\alpha(P) \cdot P[V'(P) - n] + \tfrac{1}{2} \cdot \sigma(P)^2 \cdot P^2 \cdot V''(P)\} \cdot dt + P[V'(P) - n] \cdot \sigma(P) \cdot dz$$

(Προσέξτε ότι χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα του Itô για να εκφράσουμε το dV υπό το πρίσμα της διαδικασίας των τιμών.) Τώρα επιλέγουμε n = V΄(P) και έτσι οι όροι που είναι στο dz εξαφανίζονται και το χαρτοφυλάκιο γίνεται άνευ κινδύνου. Η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι τότε

$$[P - \delta \cdot P \cdot V'(P) + \tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot P^2 \cdot V''(P)] \cdot dt$$

Εξισώνοντας αυτό με την άνευ κινδύνου r˙[V(P) – n˙P] ˙dt και συγκεντρώνοντας της όρους, έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot P^2 \cdot V''(P) + (r - \delta) \cdot P \cdot V'(P) - r \cdot V(P) + P = 0 \qquad (3)$$

Απλή αντικατάσταση δείχνει ότι το ομογενές τμήμα της εξίσωσης έχει λύσεις της μορφής V(P) = A˙P^{β} , υπό την προϋπόθεση ότι το β είναι ρίζα της θεμελιώδους εξίσωσης

$$Q \equiv \tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \beta \cdot (\beta - 1) + (r - \delta) \cdot \beta - r = 0 \qquad (4)$$

Αυτό μας είναι πολύ οικείο λόγω του προηγούμενου κεφαλαίου. Εκεί δώσαμε μια λεπτομερή περιγραφή των λύσεών της και της εξάρτησής τους από τις τρεις παραμέτρους r, δ και σ. Το πιο σημαντικό για τον άμεσο σκοπό μας, δεδομένων των οικονομικών περιορισμών ότι r > 0 και δ > 0, είναι ότι οι ρίζες ικανοποιούν το ότι $\beta_1 > 0$ και $\beta_2 < 0$.

Τότε η γενική λύση του ομογενούς μέρους της διαφορικής εξίσωσης είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των δύο ανεξάρτητων λύσεων $B_1 \cdot P^{\beta_1}$ και $B_2 \cdot P^{\beta_2}$. Σε αυτό προσθέτουμε οποιαδήποτε συγκεκριμένη λύση της πλήρους εξίσωσης. Η πιο εύκολη που μπορεί να βρεθεί είναι η P/δ. Επομένως

$$V(P) = B_1 \cdot P^{\beta_1} + B_2 \cdot P^{\beta_2} + P / \delta$$

όπου οι σταθερές B_1 και B_2 μένει να προσδιορισθούν.

2.1.Γ Βασικές Αρχές και Κερδοσκοπικές Φούσκες

Ο όρος P/δ στη λύση έχει μια άμεση ερμηνεία: είναι ακριβώς η αναμενόμενη παρούσα αξία των ροών των εσόδων P_t όταν το αρχικό επίπεδο είναι P. Αυτό συμβαίνει επειδή $\mathcal{E}[P_t] = P \cdot e^{at}$ και κάνοντας αναγωγή στο κατάλληλο και σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο μ παίρνουμε

$$\int_0^\infty P \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot e^{-\mu \cdot t} = P/(\mu - \alpha) = P/\delta$$

Αυτό θα μπορούσε να ονομαστεί θεμελιώδες συστατικό της αξίας του έργου, υπό την έννοια ότι δικαιολογείται από τις μελλοντικές ροές κέρδους. Οι άλλοι δύο όροι πρέπει να είναι οι κερδοσκοπικές συνιστώσες της αξίας. Μπορούμε να τις εξαλείψουμε επικαλούμενοι οικονομικούς λόγους ώστε να αποκλείσουμε την κερδοσκοπία

Πρώτα, έχει νόημα να απαιτήσουμε V(0) = 0. Αν η τιμή είναι πάντα μηδέν στη γεωμετρική Brownian motion (1), θα παραμείνει για πάντα μηδέν. Από τεχνικής πλευράς, το μηδέν είναι ένα απορροφητικό εμπόδιο για τη διαδικασία. Καθώς δεν υπάρχει προοπτική μια ροής κέρδους, το κεφάλαιο θα πρέπει να έχει μηδενική αξία. Ωστόσο, εφόσον $\beta_2 < 0$, εκείνη η δύναμη της P τείνει στο άπειρο καθώς η P τείνει στο μηδέν. Για να αποτρέψουμε την αξία από το να αποκλίνει, πρέπει να θέσουμε τον αντίστοιχο συντελεστή $B_2 = 0$.

Ο άλλος όρος, $B_1 \cdot P^{\beta_1}$, δεν είναι τόσο εύκολο να τον ξεφορτωθούμε. Αντιπροσωπεύει ένα στοιχείο της V που οφείλεται σε κερδοσκοπικές φούσκες καθώς το $P \to \infty$. Ο κόσμος μπορεί να αποτιμήσεις το κεφάλαιο πιο πάνω από τις βάσεις του αν περιμένει πως θα είναι σε θέση να το μεταπωλήσουν αργότερα σε κάποια επαρκή υπεραξία. Αυτό ακριβώς διασφαλίζει ο πρώτος όρος.

Για να το δείτε αυτό, δείχνουμε ότι ένα κεφάλαιο που έχει πάντα αξία P^{β_1} αποδίδει την κατάλληλη σταθμισμένη κατά τον κίνδυνο επιστροφή μόνο από την αναμενόμενη υπεραξία του. Με βάση το Λήμμα του Itô έχουμε:

$$\begin{aligned} d(P^{\beta_1})/P^{\beta_1} &= \left\{\beta_1 \cdot P^{\beta_1} \cdot dP + \tfrac{1}{2} \cdot \beta_1 \cdot (\beta_1 - 1) \cdot P^{\beta_1 - 2} \cdot \sigma^2 \cdot P^2 \cdot dt\right\} / P_1^{\beta} \\ &= \left\{\beta_1 \cdot \alpha + \tfrac{1}{2} \cdot \beta_1 \cdot (\beta_1 - 1) \cdot \sigma^2\right\} \cdot dt + \beta_1 \cdot \sigma \cdot dz \\ &= \left\{r + (\mu - r) \cdot \beta_1\right\} \cdot dt + \beta_1 \cdot \sigma \cdot dz \\ &= \left\{r + \phi \cdot \beta_1 \cdot \rho_{pm} \cdot \sigma\right\} \cdot dt + \beta_1 \cdot \sigma \cdot dz \end{aligned}$$

όπου η τρίτη γραμμή προκύπτει από το γεγονός ότι η β_1 ικανοποιεί τη δευτεροβάθμια εξίσωση Q = 0 και η τελευταία γραμμή χρησιμοποιεί τον τύπο (2) CAPM (Capital Asset Pricing Model – μοντέλο αποτίμησης ενεργητικών κεφαλαίων). Έτσι η τυπική απόκλιση της απόδοσης για τη P^{β_1} είναι ακριβώς β_1 φορές εκείνης της τυπικής απόκλισης της P. Η συνδιακύμανση της P^{β_1} με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς γίνεται επίσης β_1 φορές εκείνης της διακύμανσης της P με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Με τη συνδιακύμανση και την τυπική απόκλιση πολλαπλασιασμένες με τον ίδιο παράγοντα, ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ της P^{β_1} και του χαρτοφυλακίου της αγοράς είναι ο ίδιος με το συντελεστή συσχέτισης μεταξύ της P και του χαρτοφυλακίου της αγοράς, δηλαδή του ρ_{pm}. Επομένως, το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο ποσοστό απόδοσης για τη P^{β_1} είναι (r + φ˙ρ_{pm}˙β_1˙σ), το οποίο είναι ακριβώς το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης στην τελευταία σειρά πιο πάνω.

Στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου θα αποκλείσουμε τις κερδοσκοπικές φούσκες. Τότε μένουμε με τη θεμελιώδη συνιστώσα της τιμή που βρίσκεται με άμεση ολοκλήρωση πιο πάνω, δηλαδή

$$V(P) = P/\delta \qquad (5)$$

2.1.Δ Αποτίμηση της option επένδυσης

Όταν γίνει γνωστή η αξία της V της εγκατεστημένου έργου ως συνάρτηση της τωρινής τιμής P, μπορούμε να αποκτήσουμε τη διαδικασία διάχυσης της V από εκείνη της P χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Itô. Στη συνέχεια, κατ' αρχήν, οι μέθοδοι του προηγούμενου κεφαλαίου θα της επιτρέψουν να βρούμε την τιμή F της option επένδυσης για το έργο ως συνάρτηση της V. Ωστόσο, οι παράμετροι μετατόπισης και διάχυσης της διαδικασίας της V είναι γενικά αρκετά περίπλοκες εκφράσεις, καθιστώντας δύσκολη την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης που συνδέει την F με τη V. Μια εναλλακτική και γενική απλούστερη προσέγγιση είναι να βρούμε την αξία της option επένδυσης ως συνάρτηση της τιμής F(P), χρησιμοποιώντας την παραπάνω λύση για τη V(P) ως οριακή συνθήκη που έχει ισχύ στο όριο της βέλτιστης διάθεσης.

Τώρα θα ασχοληθούμε με αυτή τη μέθοδο για το απλό της έργο. Για μια ακόμη φορά ακολουθούμε τα βήματα της αποτίμησης των πιθανών αξιώσεων. Τώρα το χαρτοφυλάκιο θα αποτελείται από μια option επένδυσης και μια option πώλησης n = F΄(P) μονάδων του προϊόντος. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με πριν, ο αναγνώστης μπορεί να ελέγξει ότι παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot P^2\cdot F''(P)+(r-\delta)\cdot P\cdot F'(P)-r\cdot F(P)=0 \qquad (6)$$

Αυτή είναι ακριβώς όπως η εξίσωση (3) για την αξία του έργου, αλλά φυσικά η option δεν έχει μερίσματα ή ροές κέρδους. Αυτή είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και έτσι η λύση της είναι ένας γραμμικός συνδυασμός δύο οποιωνδήποτε ανεξάρτητων λύσεων, όπως π.χ.

$$F(P)=A_1\cdot P^{\beta_1}+A_2\cdot P^{\beta_2}$$

όπου τα A_1 και A_2 είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν. Αυτή η λύση ισχύει για το εύρος των τιμών για το οποίο είναι βέλτιστο να εκμεταλλευτεί κανείς την option. Δεδομένου ότι οι υψηλότερες τιμές κάνουν την επένδυση περισσότερο ελκυστική, το εν λόγω εύρος επεκτείνεται από το μηδέν μέχρι ένα όριο επένδυσης P^*. Φυσικά η P^* είναι από μόνη της μια άγνωστη ώστε να μπορεί να προσδιοριστεί ως μέρος της λύσης. Έτσι έχουμε τρεις αγνώστους – A_1, A_2 και P^* – και χρειαζόμαστε τρεις συνθήκες για να ολοκληρώσουμε τη λύση.

Η περιορισμένη συμπεριφορά της F(P) κοντά στο μηδέν μας δίνει μια συνθήκη. Όταν η P είναι πολύ μικρή, η προοπτική της να αυξηθεί μέχρι το όριο διάθεσης P^* είναι αρκετά απομακρυσμένη. Συνεπώς η option θα είναι σχεδόν χωρίς καμία αξία σε αυτό το άκρο. Για να εξασφαλίσουμε ότι η F(P) τείνει προς το μηδέν όταν η P τείνει προς το μηδέν, θα πρέπει να ορίσουμε το συντελεστή της αρνητικής δύναμης της P να είναι ίσος με το μηδέν. Δηλαδή $A_2 = 0$.

Για τις άλλες δύο συνθήκες, θεωρούμε τη συμπεριφορά της F(P) στην P^*. Σε αυτό το όριο γίνεται βέλτιστο να διατεθεί η option και επομένως αποκτούμε ένα κεφάλαιο (το έργο) αξίας V(P) αναλαμβάνοντας τη τιμή διάθεσης (εφάπαξ κόστος) της επένδυσης I. Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, υπάρχουν δύο όροι που το διέπουν αυτό. Πρώτον, η αξία της option πρέπει να ισούται με την καθαρή αξία που αποκτάται από τη διάθεσή της. Αυτή είναι η συνθήκη ταιριάσματος της τιμής:

$$F(P^*) = V(P^*) - I \tag{7}$$

Δεύτερον, οι γραφικές της F(P) και της V(P) – I να συντρέχουν εφαπτομενικά στην τιμή P^*. Αυτή είναι η συνθήκη ομαλής επικόλλησης:

$$F'(P^*) = V'(P^*) \tag{8}$$

Χρησιμοποιώντας τους ειδικούς συναρτησιακούς τύπους των F(P) και V(P), μπορούμε να γράψουμε τις συνθήκες ταιριάσματος της τιμής και της ομαλής επικόλλησης ως

$$A_1(P^*)^{\beta_1} = (P^*/\delta) - \mathrm{I}$$
$$\beta_1 \cdot A_1(P^*)^{\beta_1 - 1} = 1/\delta$$

Από αυτές προκύπτει

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \delta \cdot I \tag{9}$$

Για παραπομπή αναφέρουμε τη λύση για το A_1. Αυτή είναι

$$A_1 = (\beta_1 - 1)^{\beta_1 - 1} \cdot I^{-(\beta_1 - 1)} / (\delta\beta_1)^{\beta_1} \tag{10}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5), μπορούμε να εκφράσουμε την τιμή του ορίου ισοδύναμα υπό το πρίσμα μια τιμής ορίου,

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot I$$

Αυτή είναι ακριβώς η εξίσωση (14) του προηγούμενου κεφαλαίου. Έτσι η προσέγγισή μας που εκφράζει τόσο την αξία του έργου όσο και την αξία της option υπό το πρίσμα της υποκείμενης τιμής έχει παραγάγει το ίδιο αποτέλεσμα όπως θα μπορούσαμε να είχαμε αποκτήσει ξεκινώντας με την αξία του έργου άμεσα. Στην προκειμένη περίπτωση, η V είναι απλά μια σταθερά πολλαπλασιασμού της P και η ισοδυναμία των δύο προσεγγίσεων είναι εύκολο να αποδειχθεί άμεσα. Ωστόσο, το αποτέλεσμα είναι τελείως γενικό. Γενικά θα το βρούμε κάπως πιο βολικό να εργαστούμε υπό το πρίσμα της P, καθώς είναι οικονομικά η πιο βασική μεταβλητή.

Το σημαντικό σημείο που τονίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο ήταν ότι $V^* > I$. Η αξία της option επένδυσης για την αναμονή συνεπάγεται ένα κατώτατο όριο όπου η αναμενόμενη αξία από την επένδυση υπερβαίνει το κόστος. Εδώ η αντίστοιχη ιδέα είναι ότι $P^*/\delta > I$ ή $P^* > \delta \cdot I$. Θα μπορούσαμε να ονομάσουμε το $\delta \cdot I$ το ισοδύναμο όσο αφορά τη ροή κόστους της επένδυσης (ανά μονάδα χρόνου): αυτό είναι το επίπεδο που πρέπει να έχει η αρχική ροή κερδών αν η μεταγενέστερη αναμενόμενη αξία της πρόκειται να καλύψει το επενδυτικό κόστος.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο συζητήσαμε διεξοδικά το συντελεστή με τον οποίο η V^* υπερβαίνει το I, δηλαδή τον «πολλαπλασιαστή της αξίας της option» $\beta_1/(\beta_1 - 1)$. Υπολογίσαμε το μέγεθός του για μια σειρά παραλλαγών για τις παραμέτρους r, σ και δ. Δε χρειάζεται να επαναλάβουμε αυτά τα σημεία εδώ, αλλά θα κάνουμε αντίστοιχους υπολογισμούς για τα νέα και πιο γενικά μοντέλα που πρόκειται να αναπτυχθούν αργότερα σε αυτό το κεφάλαιο.

Επίσης, στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε την παράμετρο q του Tobin κατά την έννοια του λόγου της αξίας των κεφαλαίων προς το κόστος αντικατάστασής του, δηλαδή V/ I. Αυτό μας επιτρέπει να ερμηνεύσουμε την επίδραση της αναμονής ως τη πιθανότητα ότι δε συμβαίνουν επενδύσεις ακόμη κι το q υπερβαίνει το 1, για όσο διάστημα αυτό παραμένει κάτω του $\beta_1/(\beta_1 - 1)$. Μπορούμε τώρα ομοίως να ορίσουμε το $q = P/ \delta \cdot I$ και να αποκτηθεί η ίδια ερμηνεία.

2.1.Ε Δυναμικός Προγραμματισμός

Αν ο κίνδυνος στην P δε μπορεί να βαθμονομηθεί από τα υπάρχοντα κεφάλαια, τότε δε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα άνευ κινδύνου χαρτοφυλάκιο και να το χρησιμοποιήσουμε για την απόκτηση μιας διαφορικής εξίσωσης για τη V(P). Όπως εξηγήσαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, αντ’ αυτού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δυναμικό προγραμματισμό με ένα εξωγενώς ορισμένο επιτόκιο αναγωγής ρ, αν και δε θα είμαστε σε θέση να συσχετίσουμε το επιτόκιο αναγωγής με το άνευ κινδύνου επιτόκιο και την εμπορεύσιμη τιμή του κινδύνου χρησιμοποιώντας το CAPM (Capital Asset Pricing Model – μοντέλο αποτίμησης ενεργητικών κεφαλαίων). Θα παρουσιάσουμε εδώ μια σύντομη περίληψη των βημάτων.

Η αξία του έργου τη χρονική στιγμή t μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα του κέρδους λειτουργίας κατά το χρονικό διάστημα (t, t + dt) και την αξία στη συνέχεια μετά το t + dt. Έτσι

$$V(P) = P \cdot dt + \mathcal{E}\, [V \cdot (P + dP) \cdot e^{-\rho dt}]$$

Αναλύοντας το δεξί μέρος της εξίσωσης με τη χρήση του Λήμματος του Itô, έχουμε

$$V(P) = P \cdot dt + \left[a \cdot P \cdot V'(P) + \tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot P^2 \cdot V''(P)\right] \cdot dt + (1 - \rho \cdot dt) \cdot V(P) + o(dt)$$

όπου το o(dt) συγκεντρώνει τους όρους που τείνουν προς το μηδέν γρηγορότερα από το dt. Απλοποιούμε διαιρώντας με το dt και προχωρώντας προς το όριο καθώς το dt $\rightarrow 0$, παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot P^2 \cdot V''(P) + a \cdot P \cdot V'(P) - \rho \cdot V(P) + P = 0$$

Αυτή είναι ακριβώς όμοια με την εξίσωση (3) που είχαμε νωρίτερα, εκτός από το ότι το r αντικαταστάθηκε από το (αυθαίρετο) επιτόκιο αναγωγής ρ και το (r – δ) από το α. Η εξίσωση μπορεί να λυθεί με παρόμοιες μεθόδους και αποκλείοντας τις λύσεις φούσκες παίρνουμε V(P) = P/(ρ – α). Για να υπάρχει οικονομικό νόημα πρέπει ρ > α.

Στη συνέχεια η option επένδυσης μπορεί να αναλυθεί παρομοίως. Ξεκινάμε με μια τιμή για την P στο εύρος (0, P^*), όπου συνεχίζεται η εκμετάλλευση της option. Χωρίζουμε το μέλλον σε δύο άμεσα διαστήματα (t, t + dt) καθώς και τη συνέχιση πέρα απ' αυτό. Αναλύοντας και απλοποιώντας όπως και παραπάνω παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot P^2\cdot F''(P)+a\cdot P\cdot F'(P)-\rho\cdot F(P)=0$$

Τώρα θεωρούμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$Q\equiv\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\beta\cdot(\beta-1)+\alpha\cdot\beta-\rho=0$$

Δεδομένου ότι ρ > α, η μεγαλύτερη από τις ρίζες β_1 αυτής της εξίσωσης υπερβαίνει το 1. Με δεδομένο ότι ρ > 0, η άλλη ρίζα β_2 είναι αρνητική. Τότε η λύση για την αξία της option παίρνει τη μορφή $F(P)=A_1\cdot P^{\beta_1}$, όπου η σταθερά A_1 μένει να προσδιοριστεί.

Τέλος χρησιμοποιούμε τις διαδικασίες ταιριάσματος της τιμής και ομαλής επικόλλησης μεταξύ της F(P) και της V(P) στο σημείο P^* και ολοκληρώνουμε τη λύση. Το αποτέλεσμα είναι

$$P^*=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\cdot(\rho-\alpha)\cdot I$$

το οποίο είναι το φυσικό ανάλογο της σχέσης (9) που έχουμε γράψει πιο πάνω.

Για το περισσότερο χρόνο του υπόλοιπου κεφαλαίου θα υποθέσουμε ότι η βαθμονόμηση ισχύει και θα χρησιμοποιήσουμε μεθόδους πιθανών αξιώσεων, αφήνοντας στον αναγνώστη τις προφανείς τροποποιήσεις που εφαρμόζονται όταν χρησιμοποιείται αντί για τις μεθόδους αυτές ο δυναμικός προγραμματισμός. Περιστασιακά, για την ποικιλία και την απλότητα της έκθεσης, θα κάνουμε το αντίθετο.

2.2 Λειτουργικά Κόστη και Προσωρινή Αναστολή

Ας υποθέσουμε για μια ακόμη φορά ότι η τιμή ενός προϊόντος ακολουθεί τη γεωμετρική Brownian motion της εξίσωσης (1). Τότε τα α, σ, μ και δ = μ – α είναι όλα σταθερές. Αν η option επένδυσης του έργου πρόκειται να διατεθεί, χρειαζόμαστε το μ > α ή το δ > 0 και θα υποθέσουμε ότι όντως αυτό συμβαίνει. Θα υποθέσουμε επίσης ότι η λειτουργία του έργου συνεπάγεται μια ροή κόστους C, αλλά η λειτουργία μπορεί να ανασταλεί προσωρινά και χωρίς κόστος όταν η τιμή της P πέφτει κάτω του κόστους C και ότι μπορεί να συνεχιστεί η λειτουργία και πάλι χωρίς κόστος, όταν αργότερα η P αυξάνεται πάνω από το C. Επομένως, ανά πάσα στιγμή η ροή του κέρδους από αυτό το έργο δίνεται από τη σχέση

$$\pi(P) = max[P-C, 0] \qquad (11)$$

Οι McDonald και Siegel (1985) επεσήμαναν έναν ακόμη χρήσιμο τρόπο για να δούμε ένα τέτοιο έργο. Αυτός ο τρόπος δίνει στον ιδιοκτήτη ένα άπειρο σετ από options. Η option, αν διατεθεί σε κάποια στιγμή t, σημαίνει ότι πληρώνει το κόστος C ώστε να λάβει την P που επικρατεί εκείνη τη στιγμή. Δεδομένου ότι κάθε option μπορεί να διατεθεί στη συγκεκριμένη της στιγμή, αυτές είναι οι ευρωπαϊκές options αγοράς. Οι δυο τους έδειξαν επίσης ότι το έργο μπορεί να αποτιμηθεί με την αξιολόγηση κάθε μιας από αυτές τις options (χρησιμοποιώντας την τυποποιημένη σχέση των Black και Scholes) και στη συνέχεια αθροίζοντας αυτές τις τιμές με ολοκλήρωση ως προς το χρόνο t. Θα μας φανεί ευκολότερο να αποτιμήσουμε ένα έργο ως μια απλή πιθανή αξίωση που εξαρτάται από την P. Θα εξετάσουμε λεπτομερώς τα βήματα για την απόκτηση της V(P) στην επόμενη υποενότητα και κατόπιν θα στραφούμε στο πρόβλημα αποτίμησης της option επένδυσης.

2.2.Α Η αξία του έργου

Για μια ακόμη φορά θεωρούμε το χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από μια μονάδα ενός έργου και η = $V_p(P)$ μονάδες μιας option πώλησης του κεφαλαίου που βαθμονομεί την P. Όταν είναι εκμεταλλεύσιμο για κάποιο μικρό χρονικό διάστημα (t, t + dt), ο ιδιοκτήτης αυτού του χαρτοφυλακίου μπορεί να διαθέσει την τρέχουσα option λειτουργίας. Αυτό είναι συμφέρον αν ισχύει ότι P > C. Το ποσοστό της ροής του κέρδους που προκύπτει είναι απλά π(P) = max(P – C, 0). Οι άλλες πτυχές του χαρτοφυλακίου (κέρδη κεφαλαίου, κατανομή μερίσματος για την option πώλησης κλπ) είναι ίδιες με πριν. Επομένως η διαφορική εξίσωση για την αξία του έργου είναι

$$\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot P^2\cdot V''(P)+(r-\delta)\cdot P\cdot V'(P)-r\cdot V(P)+\pi(P)=0$$

Αυτή λύνεται με τις γνωστές μεθόδους. Η ομογενής της διαφορικής αυτής εξίσωσης έχει δύο ανεξάρτητες λύσεις P^{β_1} και P^{β_2} ακριβώς όπως και πιο πάνω. Το μόνο νέο χαρακτηριστικό είναι ότι το μη ομογενές τμήμα, ή συνάρτηση της ροής του κέρδους π(P), ορίζεται με διαφορετικό τρόπο όταν P < C και όταν P > C. Επομένως λύνουμε την εξίσωση χωριστά για P < C και για P > C και στη συνέχεια ενώνουμε τις δύο λύσεις στο σημείο P = C.

Στην περιοχή όπου P < C, έχουμε ότι π(P) = 0 και παραμένει μόνο το ομογενές τμήμα της διαφορικής εξίσωσης. Έτσι η γενική λύση είναι απλά ένας γραμμικός συνδυασμός των δύο λύσεων P^{β_1} και P^{β_2} που αντιστοιχούν στις δύο ρίζες:

$$V(P)=K_1\cdot P^{\beta_1}+K_2\cdot P^{\beta_2}$$

όπου οι σταθερές K_1 και K_2 μένει να προσδιοριστούν. Στην περιοχή όπου P > C, παίρνουμε έναν άλλο γραμμικό συνδυασμό των ανεξάρτητων λύσεων P^{β_1} και P^{β_2} και τον προσθέτουμε σε οποιαδήποτε συγκεκριμένη λύση της πλήρους διαφορικής εξίσωσης. Μια απλή αντικατάσταση δείχνει ότι η λύση (P/δ – C/r) ικανοποιεί την εξίσωση. Επομένως η γενική λύση για P > C είναι

$$V(P)=B_1\cdot P^{\beta_1}+B_2\cdot P^{\beta_2}+P/\delta-C/r$$

όπου οι σταθερές B_1 και B_2 μένει να προσδιοριστούν.

Αυτές οι λύσεις έχουν άμεση οικονομική ερμηνεία. Στην περιοχή όπου $P < C$, η λειτουργία αναστέλλεται και το έργο δεν παράγει καμία τρέχουσα ροή κέρδους. Ωστόσο, υπάρχει μια θετική πιθανότητα ότι η διαδικασία των τιμών θα μετακινηθεί κάποια στιγμή στο μέλλον στην περιοχή όπου $P > C$, όπου η λειτουργία θα συνεχίσει και θα εμφανιστούν κέρδη. Η τιμή $V(P)$ όταν το $P < C$ είναι ακριβώς η αναμενόμενη παρούσα αξία τέτοιων μελλοντικών ροών.

Στη συνέχεια θεωρούμε την περιοχή όπου $P > C$. Ας υποθέσουμε για μια στιγμή ότι η εταιρεία πιέζεται να συνεχίσει τη λειτουργία του έργου για πάντα, ακόμα και κατά τη διάρκεια των χρονικών περιόδων όπου τα ριψοκίνδυνα έσοδα γίνονται μικρότερα του C. Ποια είναι η καθαρή αξία ενός τέτοιου έργου; Η αναμενόμενη τιμή των εσόδων αυξάνεται με ποσοστό α και ανάγεται πίσω στο κατάλληλο και σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο μ και έτσι η αναμενόμενη παρούσα αξία είναι $P/(\mu - \alpha) = P/\delta$. Η σίγουρη σταθερή ροή κόστους C έχει αναχθεί κατά το άνευ κινδύνου επιτόκιο r, παρουσιάζονται μια παρούσα τιμή C/r. Η καθαρή αξία $(P/\delta - C/r)$ αποτελεί τους δύο τελευταίους όρους της λύσης που παρουσιάσαμε λίγο πριν. Δεδομένου ότι η λύση δεν επέβαλε κάποια απαίτηση για συνέχιση λειτουργία παρά τις απώλειες, οι άλλοι δύο όροι αποτελούν την πρόσθετη αξία P της option αναβολής της λειτουργίας στο μέλλον που θα πέσει κάτω από το C.

Οι σταθερές στις λύσεις προσδιορίζονται με τη χρήση εκτιμήσεων που εφαρμόζονται στα όρια των περιοχών. Ξεκινάμε με $P < C$. Καθώς η P γίνεται πολύ μικρή, το γεγονός της αύξησής της πάνω από το C γίνεται απίθανο, εκτός ίσως από το πολύ μακρινό μέλλον. Η αναμενόμενη παρούσα αξία των μελλοντικών κερδών πρέπει τότε να τείνει στο μηδέν και το ίδιο θα ισχύει για την αξία του έργου. Ωστόσο, με τη β_2 να είναι αρνητική, η P^{β_2} τείνει στο ∞ καθώς η P πηγαίνει προς το 0. Επομένως η σταθερά που πολλαπλασιάζει τον όρο αυτό, δηλαδή η K_2, θα πρέπει να είναι μηδέν. Τώρα ας στραφούμε στην περίπτωση όπου $P > C$. Όταν η P γίνεται πολύ μεγάλη, η option αναστολής είναι απίθανο να χρησιμοποιηθεί εκτός ίσως από το πολύ μακρινό μέλλον και έτσι η αξία της θα είναι μηδέν. Γι' αυτό θα πρέπει να αποκλειστεί η θετική δύναμη της P, θέτοντας $B_1 = 0$. Αυτό αφήνει:

$$V(P) = \begin{cases} K_1 \cdot P^{\beta_1} & \alpha\nu\ P < C \\ B_2 \cdot P^{\beta_2} + P/\delta - C/r & \alpha\nu\ P > C \end{cases} \qquad (12)$$

Αυτό αφήνει επίσης δύο σταθερές, για τις οποίες θεωρούμε το σημείο όπου $P = C$, εκεί δηλαδή που συναντώνται οι δύο περιοχές. Δεδομένου ότι η Brownian motion της P μπορεί να διαχυθεί ελεύθερα σε ολόκληρο το εν λόγω όριο, η τιμή της συνάρτησης δε μπορεί να αλλάξει απότομα σε αυτό. Στην πραγματικότητα, η λύση $V(P)$ πρέπει να είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε όλο το C. Εξισώνοντας τις τιμές και τις παραγώγους των δύο συνιστωσών λύσεων στο C, έχουμε

$$K_1 \cdot C^{\beta_1} = B_2 \cdot C^{\beta_2} + C/\delta - C/r,$$

$$\beta_1 \cdot K_1 \cdot C^{\beta_1 - 1} = \beta_2 \cdot B_2 \cdot C^{\beta_2 - 1} + 1/\delta$$

Αυτές είναι δύο γραμμικές εξισώσεις με αγνώστους τα K_1 και B_2, που δίνουν εύκολα τη λύση

$$K_1 = \frac{C^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2} \cdot \left(\frac{\beta_2}{r} - \frac{\beta_2 - 1}{\delta} \right) \quad (13)$$

και

$$\mathrm{B}_2 = \frac{C^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2} \cdot \left(\frac{\beta_1}{r} - \frac{\beta_1 - 1}{\delta} \right) \quad (14)$$

Δεδομένου ότι ο όρος K_1 αποτυπώνει το αναμενόμενο κέρδος από την option συνέχισης της λειτουργίας στο μέλλον και ότι ο όρος B_2 αποτυπώνει την αξία των μελλοντικών option αναστολής, οι δύο αυτές σταθερές πρέπει να είναι θετικές. Για να συμβεί αυτό, πρέπει

$$r > \beta_1 \cdot (r - \delta) \quad \text{και} \quad r > \beta_2 \cdot (r - \delta)$$

Για να επιβεβαιώσουμε αυτά, υπολογίζουμε την πολυωνυμική έκφραση Q(β) στο $\beta = r/(r - \delta)$. Έχουμε

$$Q(r/(r-\delta)) = \tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot r \cdot \delta / (r-\delta)^2 > 0$$

Επομένως το $r/(r - \delta)$ πρέπει να βρίσκεται στα δεξιά της μεγαλύτερης ρίζας β_1 ή να είναι αριστερά της μικρότερης ρίζας β_2. Πρώτα υποθέτουμε ότι $r > \delta$ και έτσι $r/(r - \delta) > 0$. Τότε

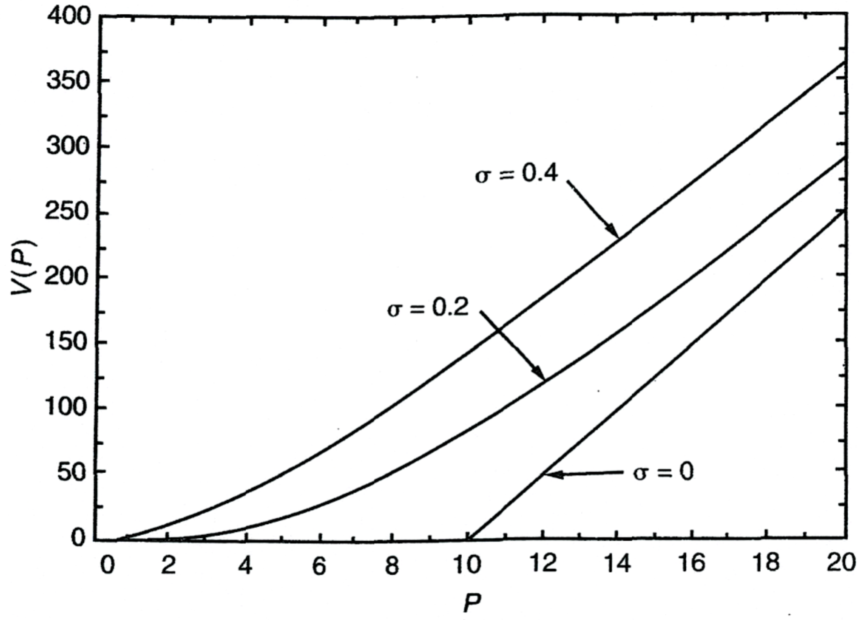
$$r/(r - \delta) > \beta_1 > \beta_2$$

και είμαστε εντάξει. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι $r < \delta$ και έτσι $r/(r - \delta) < 0$. Τότε

$$r/(r - \delta) < \beta_2 < \beta_1$$

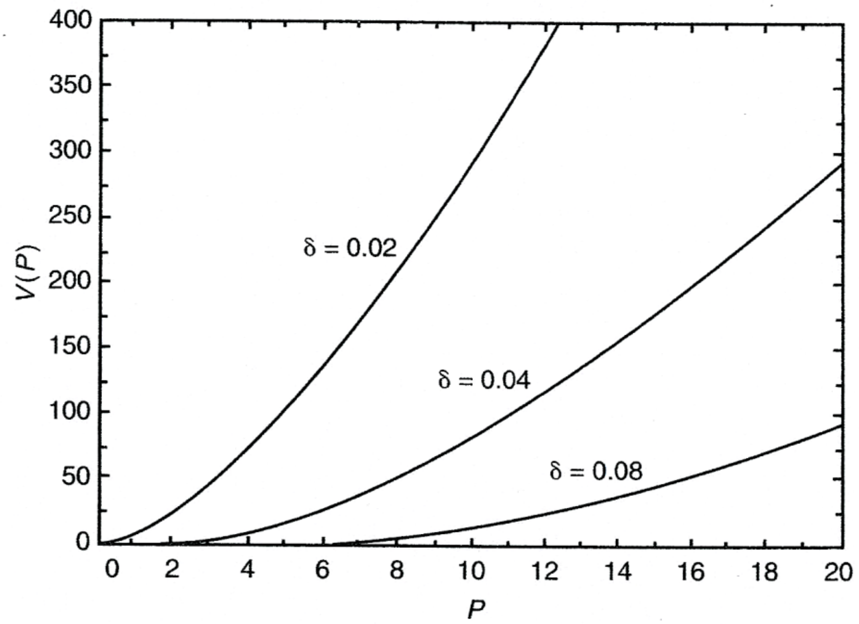
και πολλαπλασιάζοντας με τον αρνητικό αριθμό $(r - \delta)$, το οποίο αντιστρέφει την ανισότητα, έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα και πάλι.

Ένα αριθμητικό παράδειγμα θα βοηθήσει στο να τονιστεί αυτή η λύση. Εφόσον δεν αναφέρεται διαφορετικά, θέτουμε $r = \delta = 0{,}04$ και $C = 10$. Το σχήμα 1 δείχνει τη V(P) σε συνάρτηση της P για $\sigma = 0$, 0,2 και 0,4. Όταν $\sigma = 0$, δεν υπάρχει πιθανότητα ότι η P θα αυξηθεί στο μέλλον και έτσι σε αυτήν την περίπτωση το έργο ποτέ δε θα παράγει (και δεν έχει και καμιά αξία) για $P < 10$. Αν $P > 10$, το $V(P) = (P - 10)/0{,}04 = 25 \cdot P - 250$. Ωστόσο, αν $\sigma > 0$, το έργο πάντα έχει κάποια αξία όσο ισχύει $P > 0$. Αν και η εταιρεία μπορεί να μην παράγει σήμερα, είναι πιθανό να παράγει σε κάποια στιγμή στο μέλλον. Επίσης, δεδομένου ότι η πιθανότητα ανόδου για το κέρδος στο μέλλον είναι απεριόριστη, ενώ η πιθανότητα καθόδου περιορίζεται στο μηδέν, όσο μεγαλύτερο είναι το σ, τόσο μεγαλύτερη είναι αναμενόμενη μελλοντική ροή των κερδών και τόσο υψηλότερη είναι η V(P).



Σχήμα 2.1: *Αξία του έργου V(P) για σ = 0, 0,2 και 0,4 (όταν r = δ = 0,04 και C = 10)*

Το σχήμα 2 δείχνει τη V(P) για σ = 0,2 και δ = 0,02, 0,04 και 0,08. Για οποιοδήποτε σταθερό και σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο αναγωγής, μια υψηλότερη τιμή του δ σημαίνει ένα χαμηλότερο αναμενόμενο ποσοστό ανατίμησης της τιμής και έτσι μια χαμηλότερη τιμή για το έργο.



Σχήμα 2.2: *Αξία του έργου V(P) για δ = 0,02, 0,04 και 0,08 (όταν r = 0,04, σ = 0,2 και C = 10)*

2.2.Β Η τιμή της option επένδυσης

Τώρα που γνωρίζουμε την αξία του έργου V(P), μπορούμε να βρούμε την τιμή της option επένδυσης του έργου F(P), καθώς επίσης και τον κανόνα βέλτιστης επένδυσης. Δεδομένου ότι η τιμή P ακολουθεί τη γεωμετρική Brownian motion (1), μπορούμε να διέλθουμε από τα ίδια βήματα όπως στην προηγούμενη ενότητα ώστε να αποδείξουμε πως η τιμή της option επένδυσης παίρνει τη μορφή

$$F(P) = A_1 \cdot P^{\beta_1} + A_2 \cdot P^{\beta_2}$$

Εφόσον η P = 0 αποτελεί ένα όριο έτσι ώστε F(0) = 0, γνωρίζουμε ότι $A_2 = 0$. Στο βέλτιστο σημείο διάθεσης P^* έχουμε τις συνθήκες ταιριάσματος των τιμών και ομαλής επικόλλησης που συνδέουν την F(P) με την κατάλληλη V(P) από την εξίσωση (12). Φυσικά η option δε θα διατεθεί όταν P < C. Δεν υπάρχει κανένας λόγος να επιβαρυνθεί το κόστος επένδυσης I μόνο και μόνο για να διατηρήσει το έργο αδρανές για κάποιο χρόνο. Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί και επίσημα: Η $A_1 \cdot P^{\beta_1}$ δε μπορεί να ικανοποιήσει τις συνθήκες ταιριάσματος των τιμών και ομαλής επικόλλησης με $K_1 \cdot P^{\beta_1} - I$. Επομένως στην εξίσωση (12) χρησιμοποιούμε τη λύση για τη V(P) στην περιοχή λειτουργίας, δηλαδή για P > C. Οι συνθήκες ταιριάσματος των τιμών και ομαλής επικόλλησης τότε δίνουν

$$A_1 (P^*)^{\beta_1} = B_2 \cdot (P^*)^{\beta_2} + P^* / \delta - C / r - \mathrm{I} \tag{15}$$

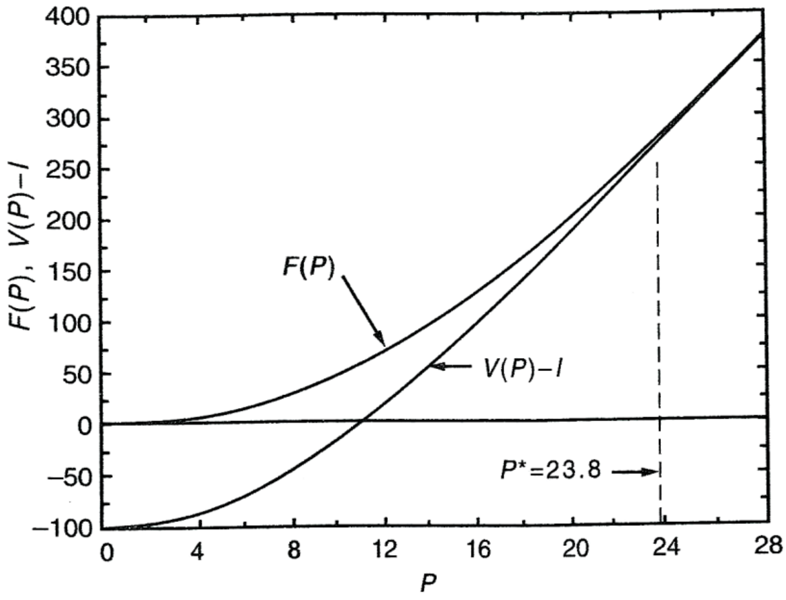
$$\beta_1 \cdot A_1 (P^*)^{\beta_1 - 1} = \beta_2 \cdot B_2 \cdot (P^*)^{\beta_2 - 1} + 1/\delta \tag{16}$$

Θυμηθείτε ότι η B_2 είναι γνωστή από την εξίσωση (14) και έτσι το ζεύγος των εξισώσεων (15) και (16) μπορούν να λυθούν για A_1 και P^*. Απαλείφοντας το A_1, μένουμε με μια εξίσωση για το κατώτατο όριο επένδυσης:

$$(\beta_1 - \beta_2) \cdot B_2 \cdot (P^*)^{\beta_2} + (\beta_1 - 1) \cdot P^* / \delta - \beta_1 \cdot (C / r - \mathrm{I}) = 0 \tag{17}$$

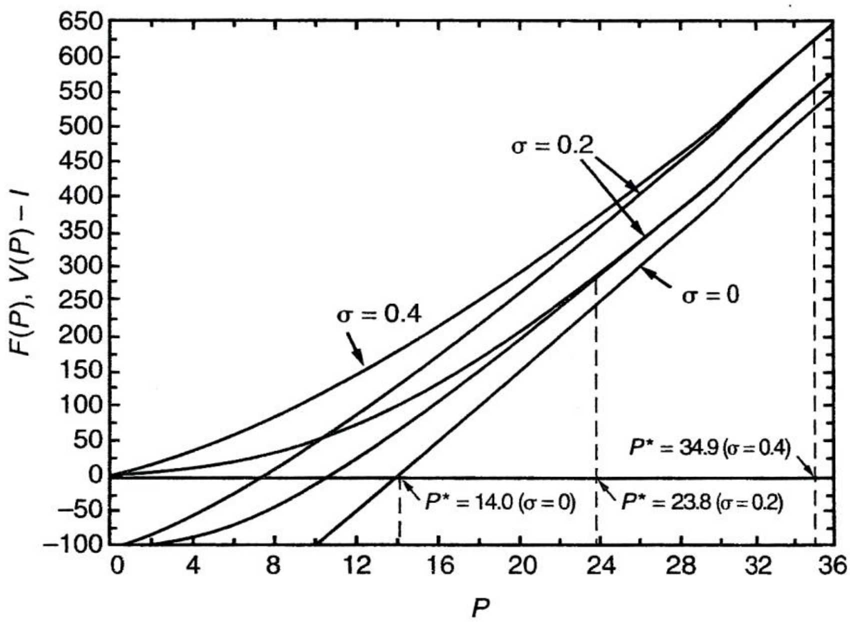
Η εξίσωση (17), η οποία λύνεται εύκολα αριθμητικά, δίνει τον κανόνα βέλτιστης επένδυσης. Ο αναγνώστης μπορεί να ελέγξει κατ' αρχάς ότι η (17) έχει μια μοναδική θετική λύση για την P^* η οποία είναι μεγαλύτερη του (C + rΙ), που είναι το συνολικό Marshallian κόστος (λειτουργικά κόστη συν τόκοι για το κόστος κεφαλαίου της επένδυσης) και δεύτερον, ότι η $V(P^*) > I$ και έτσι το έργο πρέπει να έχει μια καθαρή παρούσα αξία που υπερβαίνει το μηδέν πριν καταστεί βέλτιστο να επενδύσουμε.

Επιστρέφοντας στο αριθμητικό μας παράδειγμα, η λύση για την F(P) και την P^* παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 3 για r = δ = 0,04, σ = 0,2 και Ι = 100. Το σχήμα δείχνει τις γραφικές παραστάσεις των F(P) και V(P) – I. Θυμηθείτε ότι από τη συνθήκη ταιριάσματος της τιμής, η P^* ικανοποιεί τη σχέση $F(P^*) = V(P^*) - I$ και από τη συνθήκη ομαλής επικόλλησης η P^* είναι το σημείο επαφής των δύο καμπυλών.



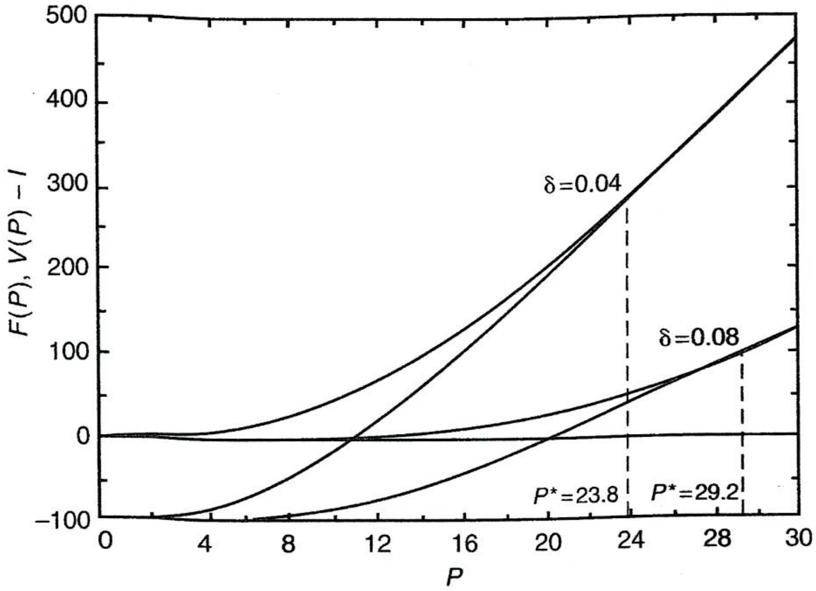
Σχήμα 2.3: *Αξία της επενδυτικής ευκαιρίας F(P) και V(P) – I (όταν r = δ = 0,04, σ = 0,2 και I = 100)*

Είναι χρήσιμο να εξετάσουμε πώς αυτές οι καμπύλες μεταβάλλονται όταν αλλάζουν το σ και το δ. Όπως είδαμε και πιο πριν, μια αύξηση στο σ οδηγεί σε αύξηση της V(P) για οποιαδήποτε P. (Όπως εξηγήσαμε, το έργο αφορά μια σειρά options αγοράς για μελλοντική παραγωγή και όσο μεγαλύτερη είναι η διακύμανση της τιμής, τόσο μεγαλύτερη είναι η αξία αυτών των options.) Ωστόσο, αν και η αύξηση του σ αυξάνει την αξία του έργου, αυξάνει επίσης την κρίσιμη τιμή στην οποία είναι βέλτιστο να επενδύσει κανείς, δηλαδή $\partial(P^*)/\partial\sigma > 0$. Ο λόγος είναι πως για οποιαδήποτε τιμή της P, η τιμή της option επένδυσης F(P) (και κατά συνέπεια το ευκαιριακό κόστος της επένδυσης) αυξάνεται ακόμη πιο πολύ σε σχέση με την V(P). Έτσι, με βάση το απλούστερο μοντέλο που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η αυξημένη αβεβαιότητα μειώνει την επένδυση. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 4, το οποίο δείχνει τις F(P) και V(P) – I για σ = 0, 0,2 και 0,4. Όταν το σ = 0, η κρίσιμη τιμή είναι 14, το οποίο απλά καθιστά την αξία του έργου ίση με το κόστους του που είναι 100. Καθώς το σ αυξάνεται, τόσο η V(P) όσο και η F(P) αυξάνονται επίσης. Η P^* είναι 23,8 για σ = 0,2 και 34,9 για σ = 0,4.



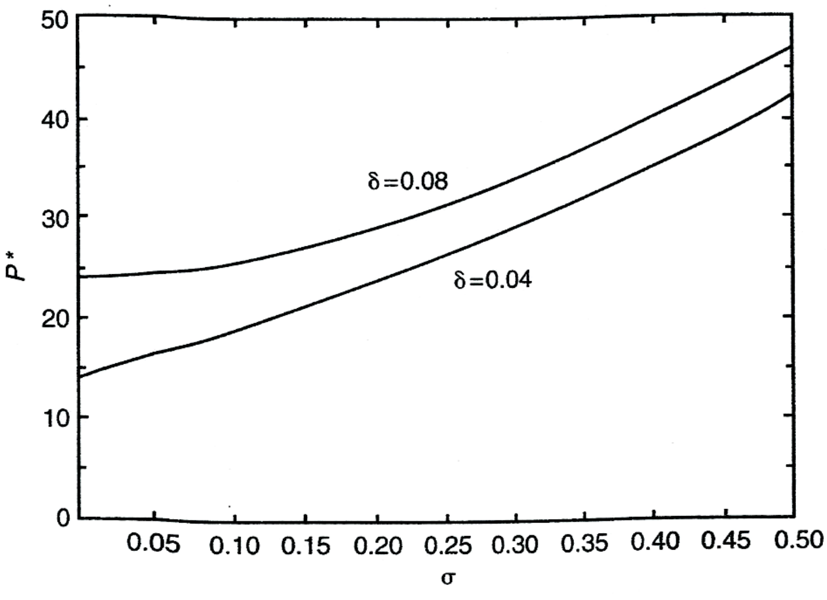
Σχήμα 2.4: *Αξία της επενδυτικής ευκαιρίας F(P) και V(P) – I για σ = 0, 0,2 και 0,4*

Η αύξηση του δ αυξάνει επίσης την κρίσιμη τιμή P^* στην οποία η εταιρεία θα πρέπει να επενδύσει. Υπάρχουν δύο αντίθετες επιδράσεις. Αν το δ είναι μεγαλύτερο – και έτσι το αναμενόμενο ποσοστό αύξησης της P είναι μικρότερο – οι options της μελλοντικής παραγωγής έχουν μικρότερη αξία και κατά συνέπεια η V(P) είναι μικρότερη. Ταυτόχρονα, αυξάνεται το ευκαιριακό κόστος αναμονής πριν επενδύσει κανείς [ο αναμενόμενος ρυθμός αύξησης της F(P) είναι μικρότερος] και έτσι υπάρχει μεγαλύτερο κίνητρο για τη διάθεση της option επένδυσης, παρά για τη διατήρησή της ζωντανή. Κυριαρχεί η πρώτη επίδραση και έτσι ένα μεγαλύτερο δ οδηγεί σε μεγαλύτερη P^*. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 5, το οποίο δείχνει τις F(P) και V(P) – I για δ = 0,04 και 0,08. (Και στις δύο περιπτώσεις το r = 0,04 και σ = 0,2.) Προσέξτε πως όταν αυξάνεται το δ, η V(P) και κατά συνέπεια και η F(P) πέφτουν κατακόρυφα, ενώ το σημείο επαφής μετακινείται προς τα δεξιά.

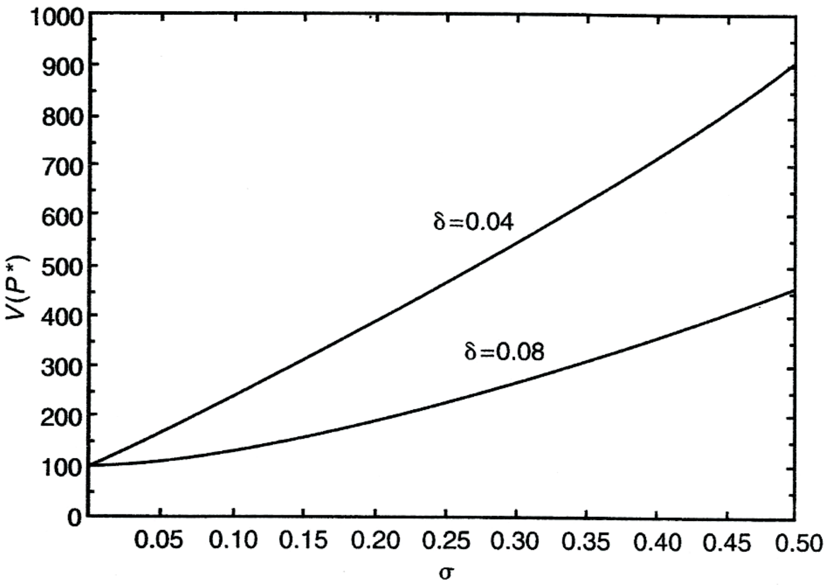


Σχήμα 2.5: *Αξία της επενδυτικής ευκαιρίας F(P) και V(P) – I για δ = 0,04 και 0,08*

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί αρχικά να φαίνεται πως έρχεται σε αντίθεση με ό,τι μας είπε το απλό μοντέλο του προηγούμενου κεφαλαίου. Υπενθυμίζουμε ότι σε εκείνο το μοντέλο, μια αύξηση του δ μειώνει την κρίσιμη τιμή του έργου V^* στην οποία πρέπει να επενδύσει η εταιρεία. Ωστόσο, ενώ σε αυτό το μοντέλο η P^* είναι υψηλότερη όταν το δ είναι μεγαλύτερο, η αντίστοιχη αξία του έργου $V(P^*)$ είναι χαμηλότερη. Αυτό μπορεί να φανεί στο σχήμα 6, το οποίο δείχνει την P^* ως συνάρτηση του σ για δ = 0,04 και 0,08 και το σχήμα 7 δείχνει τη $V(P^*)$. Αν π.χ. το σ = 0,2 και το δ αυξάνεται από 0,04 σε 0,08, η P^* θα αυξηθεί από 23,8 σε 29,2 αλλά ακόμη και στην υψηλότερη P^*, η V είναι χαμηλότερη. Επομένως η $V^* = V(P^*)$ μειώνεται με το δ, όπως και στο απλό μοντέλο.



Σχήμα 2.6: *Η κρίσιμη τιμή P^* ως συνάρτηση του σ για δ = 0,04 και 0,08*



Σχήμα 2.7: *Η $V(P^*)$ ως συνάρτηση του σ για δ = 0,04 και 0,08*

2.3 Έργο με μεταβλητή έξοδο

Το βασικό μοντέλο του κεφαλαίου αυτού μπορεί να επεκταθεί και να γενικευθεί με διάφορους τρόπους. Ο ένας είναι να επιτρέψουμε μια πιο γενική διαδικασία τιμών, για παράδειγμα, μια διαδικασία επαναφοράς περί τη μέση τιμή όπως εκείνη που μελετήσαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο ή ακόμα πιο γενικά μια διαδικασία του Itô. Η μόνη διαφορά που έχουμε είναι ότι στις διαφορικές εξισώσεις για την αξία του έργου κι εκείνων για την option, οι συντελεστές γίνονται πιο πολύπλοκες συναρτήσεις της P. Σε όλες σχεδόν αυτού του είδους τις περιπτώσεις πρέπει να στηριχθούμε σε αριθμητικές λύσεις. Δεδομένου ότι δεν υπάρχουν νέες γενικές οικονομικές γνώσεις που θα μπορούσαν να αποκτηθούν από τέτοιους υπολογισμούς, δε θα αναπτύξουμε αυτά τα μοντέλα εδώ.

Μια διαφορετική κατεύθυνση της έκτασης αξίζει την προσοχή μας. Ας υποθέσουμε ότι το ενιαίο διακριτό έργο, μόλις εγκατασταθεί, επιτρέπει κάποια ευελιξία στη λειτουργία του οποιαδήποτε στιγμή, με τη διαφοροποίηση κάποιων εισροών, όπως η εργασία και οι πρώτες ύλες, που δεν απαιτούν αμετάκλητες δεσμεύσεις που θα εκτείνονται με την πάροδο του χρόνου. Τότε τα βέλτιστα ποσά αυτών σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή θα εξαρτώνται από την τιμή εξόδου εκείνη τη στιγμή. Το έργο θα έχει καμπύλη προμηθειών που θα κοιτά προς τα πάνω. Η ροή κέρδους που προκύπτει θα εξαρτάται επίσης από την τιμή. Κοιτάζοντας πιο μακριά απ' αυτό, θα επηρεαστεί η απόφαση της εταιρείας για επένδυση. Τώρα θα εξετάσουμε αυτό το θέμα με περισσότερες λεπτομέρειες.

Σε κάθε στιγμή, έχουμε να επιλέξουμε μεταξύ ορισμένων μεταβλητών λειτουργίας, όπως π.χ. η εργασία ή κάποιες ενδιάμεσες εισροές, που συμβολίζονται με το διάνυσμα υ. Αυτά γενικεύουν την παραγωγή με βάση μια συνάρτηση παραγωγής h(υ) και συνεπάγονται ένα μεταβλητό κόστος C(υ). Η βέλτιστη επιλογή του v μεγιστοποιεί το κέρδος λειτουργίας. Μπορούμε να συλλάβουμε το αποτέλεσμα σε μια μειωμένης μορφής συνάρτηση στιγμιαίου κέρδους:

$$\pi(P) = \max_{\upsilon}\left[P \cdot h(\upsilon) - C(\upsilon)\right] \qquad (18)$$

Στην ενότητα 2 μελετήσαμε ένα βασικό μοντέλο όπου, σε κάθε στιγμή, η εταιρεία είχε μια απλή διττή επιλογή για το αν θα λειτουργούσε ή όχι. Τώρα μπορούμε να το δούμε αυτό ως μια ειδική περίπτωση αυτής της πιο γενικής μορφής. Ας υποθέσουμε ότι η μεταβλητή υ μπορεί να πάρει δύο τιμές, το 0 και το 1, όπου η πρώτη αντιστοιχεί στην αναστολή λειτουργίας και η δεύτερη στη λειτουργία. Ορίζουμε

$$h(\upsilon) = 1, \qquad C(\upsilon) = C \qquad \text{αν } \upsilon = 1$$
$$h(\upsilon) = 0, \qquad C(\upsilon) = 0 \qquad \text{αν } \upsilon = 0$$

Τότε έχουμε το μοντέλο που αναπτύχθηκε στην ενότητα 2 με $\pi(P) = \max[P - C, 0]$.

Ένα άλλο πολύ γνωστό παράδειγμα είναι η συνάρτηση παραγωγής των Cobb – Douglas. Υποθέτουμε ότι υ είναι βαθμωτό κι έχουμε

$$h(\upsilon) = \upsilon^{\theta}, \qquad 0 < \theta < 1$$

Ας επικεντρωθούμε στην αβεβαιότητα των τιμών εξόδου θέτοντας την τιμή εισόδου σταθερή και ίση με c. Τότε η μεγιστοποίηση του άμεσου κέρδους δίνει τη συνάρτηση ζήτηση των εισροών

$$\upsilon = [\theta \cdot P/c]^{1/(1-\theta)}$$

και η συνάρτηση στιγμιαίας προμήθειας για τις εκροές είναι

$$h(\upsilon) = [\theta \cdot P/c]^{\theta/(1-\theta)}$$

Η γενίκευση για περισσότερες μεταβλητές εισόδου είναι απλή και οδηγεί σε σχεδόν όμοιες εκφράσεις.

Η ροή κέρδους όταν η μεταβλητή εισόδου επιλέγεται βέλτιστα είναι

$$\pi(P) = (1 - \theta) \cdot (\theta/c)^{\theta/(1-\theta)} \cdot P^{1/(1-\theta)} \qquad (19)$$

Για λόγους συντομίας γράφουμε το παραπάνω ως $\pi(P) = K \cdot P^{\gamma}$, όπου $\gamma = 1/(1 - \theta) > 1$.

Η δύναμη της P στην έκφραση για το μεγιστοποιημένο κέρδος π(P) υπερβαίνει το 1. Έτσι το π(P) είναι μια κυρτή συνάρτηση της P. Αυτή αποτελεί μια τυπική «διπλή» ιδιότητα. Η διαίσθηση είναι ότι, χωρίς καμιά στιγμιαία διακύμανση των λειτουργιών, η παραγωγή είναι σταθερή και τα έσοδα και τα κέρδη μεταβάλλονται γραμμικά με την P. Όταν είναι δυνατή η στιγμιαία διακύμανση, η βέλτιστη επιλογή θα πρέπει να κάνει το κέρδος να αυξάνεται γρηγορότερα καθώς αυξάνεται η P και να μειώνεται πιο αργά καθώς η P πέφτει. Αυτό κάνει το π(P) κυρτή συνάρτηση. Αυτό έχει σημαντικές συνέπειες όσο αφορά την επίδραση της αβεβαιότητας στην επένδυση.

Τώρα ας βρούμε την αξία του έργου, δηλαδή την αξία ολόκληρης της ακολουθίας των options λειτουργίας. Εδώ φυσικά, η option διατίθεται σε κάθε στιγμή, αλλά με διαφορετική επιλογή για το υ καθώς μεταβάλλεται η P. Αν είχαμε τη δυνατότητα για ροή σταθερού κόστους παραγωγής για κάθε στιγμή, θα υπήρχε χαμηλότερο όριο στην P (το γνωστό Marshallian ελάχιστο μέσο κόστος) κάτω από το οποίο η λειτουργία θα έπρεπε να ανασταλεί.

Θα συνεχίσουμε να υποθέτουμε ότι η τιμή ακολουθεί τη γεωμετρική Brownian motion της εξίσωσης (1). Τότε τα γνωστά βήματα παράγουν τη διαφορική εξίσωση του έργου

$$\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot P^2\cdot V''(P)+(r-\delta)\cdot P\cdot V'(P)-r\cdot V(P)+K\cdot P^{\gamma}=0 \qquad (20)$$

Το ομογενές τμήμα της εξίσωσης αυτής είναι το ίδιο με πριν, αλλά ο μη ομογενής όρος είναι διαφορετικός. Δοκιμάζουμε μια μερική λύση της μορφής $K_1 \cdot P^{\gamma}$. Αντικαθιστώντας και λύνοντας ως προς K_1, βρίσκουμε τη λύση

$$K\cdot P^{\gamma}/[r-(r-\delta)\cdot\gamma-\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\gamma\cdot(\gamma-1)].$$

Αυτή η παράσταση μπορεί να φαίνεται πολύπλοκη, αλλά έχει μια φυσική οικονομική ερμηνεία: είναι ακριβώς η αναμενόμενη παρούσα αξία της ροής κέρδους $K \cdot P^{\gamma}$ υπολογισμένης με τη χρήση του κατάλληλου σταθμισμένου κατά τον κίνδυνο επιτοκίου αναγωγής. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί και ως μια άλλη εφαρμογή του ισοδύναμου άνευ κινδύνου τύπου για την αποτίμηση. Λέει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το άνευ κινδύνου επιτόκιο αναγωγής με την προϋπόθεση ότι αλλάζουμε τη στοχαστική διαδικασία της P ώστε να έχουμε ένα διαφορετικό ρυθμό αύξησης (r – δ). Τότε για οποιαδήποτε μελλοντική χρονική στιγμή t, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα για τη λογαριθμική κατανομή της P_t, έχουμε ότι

$$\mathcal{E}'[K(P_t)^{\gamma}] = K\cdot P^{\gamma}\cdot\exp\left\{[\gamma\cdot(r-\delta)+\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\gamma\cdot(\gamma-1)]\cdot t\right\}$$

όπου η P_t είναι η αρχική τιμή και η Ɛ΄ δηλώνει την προσδοκία που υπολογίζεται σε σχέση με αυτή τη νέα διαδικασία. Πολλαπλασιάζονται με το e^{-rt} και ολοκληρώνοντας, παίρνουμε την παρούσα αξία στην προηγούμενη εξίσωση.

Για να δούμε το αποτέλεσμα πιο άμεσα, χρησιμοποιούμε το Λήμμα του Itô για να γράψουμε τον αναμενόμενο ρυθμό αύξησης της P^{γ}, τον οποίο ορίζουμε ως α΄ και έτσι

$$\begin{aligned} \alpha' = \mathcal{E}[dP^{\gamma}]/P^{\gamma} &= \{\gamma\cdot P^{\gamma-1}\cdot\mathcal{E}[dP] + \tfrac{1}{2}\cdot\gamma\cdot(\gamma-1)\mathrm{P}^{\gamma-2}\cdot\sigma^2\cdot\mathrm{P}^2 dt\}/P^{\gamma} \\ &= \left\{\gamma\cdot\alpha+\tfrac{1}{2}\cdot\gamma\cdot(\gamma-1)\cdot\sigma^2\right\}\cdot dt \end{aligned}$$

Στην ενότητα 1.Γ πιο πάνω υπολογίσαμε το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο αναγωγής που είναι κατάλληλο για οποιαδήποτε δύναμη της P. Χρησιμοποιώντας εκείνο τον τύπο, το επιτόκιο μ΄ για μια ροή κέρδους που είναι ανάλογη της P^{γ} είναι

$$\mu' = r + \gamma\cdot(\mu - r)$$

Τότε το έλλειμμα επιστροφής ή ευκολία απόδοσης στην P^{γ} πρέπει να είναι

$$\delta' = \mu' - \alpha' = r-(r-\delta)\cdot\gamma-\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\gamma\cdot(\gamma-1) \qquad (21)$$

Με αυτό, η μερική λύση είναι ακριβώς $K{\cdot}P^{\gamma}/\delta'$, που είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία της ροής του κέρδους που υπολογίζεται με τη χρήση του κατάλληλου σταθμισμένου κατά τον κίνδυνο επιτοκίου αναγωγή.

Για άλλη μια φορά αποκλείουμε τις λύσεις – φούσκες και θέτουμε την αξία του έργου να είναι ίση με τη θεμελιώδη εξίσωση:

$$V(P) = K{\cdot}P^{\gamma}/\delta' \tag{22}$$

Για να έχουν όλα αυτά οικονομικό νόημα πρέπει $\delta' > 0$. Αυτό μπορεί να εξεταστεί από μια άλλη σκοπιά. Μπορούμε να αναγνωρίσουμε την έκφραση για το δ' απλά ως την αρνητική έκφραση της θεμελιώδους μας εξίσωσης δευτέρου βαθμού για τον υπολογισμό του γ. Επομένως με την απαίτηση $\delta' > 0$, απαιτούμε $Q(\gamma) < 0$. Έτσι το γ πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των δύο ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης και ειδικότερα να ισχύει $\gamma < \beta_1$. Με τη σειρά του, αυτό αθροίζεται στον περιορισμό ότι $\theta < (\beta_1 - 1){\cdot}\beta_1$ στην επιτρεπτή δύναμη της συνάρτησης παραγωγής των Cobb – Douglas.

Η λύση για την αξία της option παίρνει τη γνωστή μορφή

$$F(P) = A_1 \cdot P^{\beta_1}$$

Τέλος, οι συνήθεις συνθήκες ταιριάσματος των τιμών και ομαλής επικόλλησης,

$$F(P^*) = V(P^*) - I, \qquad F'(P^*) = V'(P^*)$$

μπορούν να επιλυθούν και να χαρακτηρίσουν το κατώτατο όριο της τιμής P^* που θέτει σε εφαρμογή την επένδυση:

$$\frac{K(P^*)^{\gamma}}{\delta'} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - \gamma} \cdot I \tag{23}$$

Η αριστερή πλευρά είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία των κερδών. Αυτά πρέπει να υπερβαίνουν το κόστος της επένδυσης από τον «πολλαπλασιαστή της τιμής της option» $\beta_1/(\beta_1 - \gamma)$. Υπό τις συνθήκες που έχουμε καθιερώσει, ισχύει $\beta_1 > \gamma > 0$ και έτσι ο πολλαπλασιαστής υπερβαίνει και πάλι τη μονάδα.

Τώρα μπορούμε να εξετάσουμε την επίδραση της αβεβαιότητας στην επένδυση. Νωρίτερα, θεωρήσαμε το δ ως μια παράμετρο ανεξάρτητη του σ. Ας συνεχίσουμε με την ίδια θεώρηση για λίγο. Ξέρουμε ήδη μια επίδραση της αύξησης του σ: μειώνει το β_1 και επομένως αυξάνει τον πολλαπλασιαστή $\beta_1/(\beta_1 - \gamma)$. Αυτό συμβάλλει στην αύξηση της P^*. Η μεγαλύτερη αστάθεια αυξάνει την τιμή της option επένδυσης και επομένως απαιτεί υψηλότερο τρέχον κατώτατο όριο για την κερδοφορία από την επένδυση. Ωστόσο, τώρα έχουμε μια πρόσθετη επίδραση. Καθώς το σ αυξάνεται και διατηρώντας το δ σταθερό, βλέπουμε από την εξίσωση (21) ότι το δ' μειώνεται. Τότε η εξίσωση (23) δείχνει ότι αυτή η πρόσθετη επίδραση οδηγεί σε χαμηλότερη P^* και επομένως συμβάλλει σε μεγαλύτερο κίνητρο για επένδυση.

Αυτή η νέα πτυχή προκύπτει από την κυρτότητα της τιμής του κέρδους. Καθώς κοιτούμε μακριά στο μέλλον, η διακύμανση της κατανομής της τιμής αυξάνεται. Από την ανισότητα Jensen, η αναμενόμενη τιμή μιας κυρτούς συνάρτησης αυξάνεται. Το Λήμμα του Itô κάνει αυτό ακριβώς: υπάρχει ένας πρόσθετος όρος

$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\gamma\cdot(\gamma-1)$ στον αναμενόμενο ρυθμό αύξησης της ροής του κέρδους. Επομένως ένα μεγαλύτερο σ σημαίνει μια μεγαλύτερη αναμενόμενη παρούσα αξία της ροής του κέρδους και επομένως ένα μεγαλύτερο κίνητρο για κάποιον ώστε να επενδύσει.

2.4 Απαξίωση

Έχουμε υποθέσει μέχρι τώρα ότι η επένδυση, εφόσον γίνει, διαρκεί για πάντα. Στην πραγματικότητα, η φυσική φθορά ή η τεχνολογική απαξίωση περιορίζουν τη διάρκεια ζωής ενός έργου. Με άλλα λόγια, το κεφάλαιο απαξιώνεται με την πάροδο του χρόνο, ή της χρήσης, ή με την εμφάνιση ανταγωνιστικών τεχνολογιών. Δεν είναι δύσκολο κατ' αρχάς να τροποποιήσουμε την ανάλυσή μας ώστε να λάβουμε υπόψη μας και αυτήν την πτυχή, αν και αυτό περιπλέκει την άλγεβρα πάρα πολύ. Σε αυτήν την ενότητα θα δείξουμε πώς μια τέτοια τροποποίηση μπορεί να γίνει για σχετικά απλές μορφές της φθοράς που είθισται να χρησιμοποιούνται στην οικονομική θεωρία.

Η απαξίωση έχει επίσης εννοιολογική συσχέτιση με την προσέγγισή μας για επένδυση μέσω «πραγματικών options». Κάποιος θα περίμενε ότι μια ευκαιρία για επένδυση σε ένα έργο που φθίνει θα ήταν λιγότερο αξιόλογη και επομένως εκείνη η ανοχή για την απαξίωση θα μείωνε τη σημασία των θεμάτων που έχουμε τονίσει. Η ανάλυσή μας θα δείξει ότι αυτή η διαίσθηση πρέπει να ερμηνευθεί με προσοχή. Η τιμή μιας option ανάληψης κάποιας δράσης εξαρτάται από το βαθμό της αντιστρεψιμότητας της δράσης. Αυτό εξαρτάται όχι μόνο από το προσδόκιμο ζωής ενός έργου, αλλά επίσης στις ευκαιρίες που μπορεί (ή μπορεί και όχι) να μείνουν διαθέσιμες αφού το πρώτο έργο φτάνει στο τέλος της ζωής του.

2.4.Α Εκθετική φθορά

Ξεκινούμε με μια μορφή απαξίωσης που χρησιμοποιείται συχνά στην οικονομική θεωρία και κυρίως για την αναλυτική της ευκολία. Εδώ η διάρκεια ζωής είναι τυχαία και ακολουθεί μια διαδικασία Poisson. Σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή T, αν το έργο έχει διαρκέσει μέχρι τότε, υπάρχει πιθανότητα $\lambda\cdot dT$ ότι θα πεθάνει κατά τη διάρκεια του επόμενου μικρού χρονικού διαστήματος dT. Τώρα, από την αρχική άποψη, η πιθανότητα ότι το έργο πεθαίνει πριν τη χρονική στιγμή T, ή η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανοτήτων της τυχαίας διάρκειας ζωής T είναι $1 - e^{-\lambda T}$. Η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας της πιθανότητας της T είναι $\lambda\cdot e^{-\lambda T}$.

Ας υποθέσουμε ότι κατά τη διάρκεια της ζωής του το έργο θα παράγει μια ροή προϊόντων χωρίς καθόλου μεταβλητά έξοδα. Η αρχική τιμή είναι P και η επακόλουθη πορεία P_t ακολουθεί γεωμετρική Brownian motion με ρυθμό αύξησης α. Το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο αναγωγής που είναι κατάλληλο για την P είναι μ.

Αν το έργο διαρκεί ακριβώς T χρόνια, η αναμενόμενη παρούσα αξία των ροών κερδών του είναι

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}\int_0^T e^{-\mu\cdot t}\cdot P_t\cdot dt &= \int_0^T P\cdot e^{a\cdot t}e^{-\mu\cdot t}\cdot dt \\
&= P\cdot[1-e^{-(\mu-\alpha)\cdot T}]/(\mu-\alpha) \\
&= P\cdot[1-e^{-\delta\cdot T}]/\delta
\end{aligned}
$$

όπου όπως και προηγουμένως έχουμε θέσει μ – α = δ και το δ είναι το έλλειμμα απόδοσης ή ευκολία απόδοσης σε ένα διαπραγματεύσιμο κεφάλαιο που αναπαράγει το κίνδυνο στην P. Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πυκνότητα πιθανότητας της ζωής για μια διαδικασία Poisson για να πάρουμε την αναμενόμενη αξία του έργου:

$$
\begin{aligned}
V(P) &= \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot T} \cdot P \cdot \frac{1-e^{-\delta \cdot T}}{\delta} \cdot dT \\
&= \frac{\lambda \cdot P}{\delta} \cdot \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda+\delta} \right] \\
&= P/(\lambda+\delta)
\end{aligned}
$$

Τυπικά, μπορούμε να θεωρήσουμε το έργο ως να έχει άπειρη ζωή, αλλά αυξάνεται το επιτόκιο στο οποίο αναγάγονται τα μελλοντικά κέρδη με την προσθήκη της παραμέτρου φθοράς του Poisson και έτσι το επιτόκιο αναγωγής αυξάνεται από μ σε μ + λ.

Αυτός ο τύπος έχει αρκετές ερμηνείες. Πρώτον, το έργο μπορεί να έχει άπειρη ζωή, αλλά μπορεί να λειτουργεί όλο και λιγότερο καθώς παλαιώνεται, παράγοντας μια ροή εξόδου $e^{-\lambda t}$ κατά τη χρονική στιγμή t από την εγκατάσταση. Αυτό θα αποφέρει την ίδια ανηγμένη παρούσα αξία με την αναμενόμενη αξία που υπολογίστηκε πιο πάνω. Δεύτερον, η μηχανή μπορεί να χρειάζεται αυξημένη ροή εξόδων για τη συντήρησή της καθώς θα γηράσκει. Μπορούμε να θεωρήσουμε το $P \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ ως μια αντιπροσωπευτική ή συντετμημένη έκφραση για τη ροή των κερδών που μπορεί να αυτή να παράγει τη χρονική στιγμή t.

Στη συνέχεια αποτιμούμε μια option επένδυσης για ένα τέτοιο έργο. Θα πρέπει να διακρίνουμε δύο πιθανότητες. Η option μπορεί να δώσει το δικαίωμα στην εταιρεία να επενδύσει σε αυτό το έργο για μόνο μία φορά: Αφού το έργο «πεθάνει», η εταιρεία δεν έχει άλλα δικαιώματα. Ή η εταιρεία μπορεί να έχει το δικαίωμα να επενδύσει στο διηνεκές: αφού «πεθάνει» το έργο, η εταιρεία παίρνει την αρχική δυνατότητα για να επενδύσει και πάλι. Ξεκινάμε με την πρώτη περίπτωση.

Έστω F(P) η αξία της option. Όπως και πριν, κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από μια μονάδα της option και F΄(P) μονάδες μιας option πώλησης του κεφαλαίου που βαθμονομούν τον κίνδυνο στην P. Προσέξτε ότι ένα τέτοιο διαπραγματεύσιμο κεφάλαιο είναι αρκετά εξωγενές για το έργο ή την εταιρεία. Δεν πεθαίνει μαζί με το έργο. Επομένως η ευκολία απόδοσης είναι δ = μ – α. Τότε ο υπολογισμός γίνεται όπως πριν και δίνει τη συναρτησιακή μορφή για την αξία της option

$$F(P) = A_1 \cdot P^{\beta_1}$$

όπου το A_1 είναι μια σταθερά που μένει να προσδιοριστεί και το β_1 είναι η θετική ρίζα της γνωστής μας δευτεροβάθμιας εξίσωσης (4).

Το κατώτατο όριο P^* της επένδυσης και η σταθερά A_1 καθορίζονται από κοινού με την επίλυση των συνθηκών ταιριάσματος των τιμών και ομαλής επικόλλησης

$$F(P^*) = V(P^*) - I, \qquad F'(P^*) = V'(P^*)$$

όπου το I είναι το εφάπαξ κόστος της επένδυσης. Ένας απλός υπολογισμός δίνει

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot (\delta + \lambda) \cdot I \tag{24}$$

Αυτό είναι σχεδόν όμοιο με τη σχέση (9) για το κατώτατο όριο της επένδυσης για ένα έργο άπειρης διάρκειας. Η μόνη διαφορά είναι ότι το δ στο δεξί μέρος της εξίσωσης αντικαθίσταται από το δ + λ. Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό με τη θεώρηση της ειδικής περίπτωσης ουδετερότητας του κινδύνου και μηδενικής τάσης στην τιμή. Τότε δ = r και το r˙I είναι το ετήσιο κόστους ή ροή ισοδυναμίας του κόστους της επένδυσης με άπειρη ζωή. Τότε στο κατώτατο όριο η ροή κέρδους θα είναι ένας πολλαπλασιαστής αυτής της ροής κόστους, ώστε να αντικατοπτρίζει την αξία της option η οποία θυσιάζεται όταν γίνεται η επένδυση. Όταν εισαγάγαμε την απαξίωση, η ροή ισοδυναμίας του κόστους αυξάνεται κατά την παράμετρο φθοράς του Poisson επειδή το εφάπαξ κόστος της επένδυσης θα πρέπει να αντισταθμιστεί από μια μικρότερη αναμενόμενη διάρκεια ζωής. Ωστόσο, ο ίδιος πολλαπλασιαστής της τιμής της option εφαρμόζεται σε αυτό το νέο κόστος ροής: η εξίσωση για το β_1 δεν επηρεάζεται από την υποτίμηση. Επομένως η διαίσθηση ότι η υποτίμηση θα μειώσει τις τιμές της option δεν είναι έγκυρη στο πλαίσιο αυτό.

Δεδομένου ότι δυνατότητα για επένδυση είναι διαθέσιμη μόνο για μια φορά, η διάθεση της option είναι εξίσου αμετάκλητη, παρότι το έργο έχει πεπερασμένη ζωή. Αν θεωρήσουμε την εναλλακτική προοπτική όπου η φυσική ζωή είναι άπειρη αλλά η ροή εξόδου μειώνεται εκθετικά, τότε η απαξίωση δεν έχει σχέση με το αμετάκλητο της ενέργειας.

Τα πράγματα είναι διαφορετικά αν η option επένδυσης είναι διαθέσιμη στο διηνεκές και έτσι η εταιρεία κερδίζει πάλι το δικαίωμα να ξεκινήσει ένα άλλο παρόμοιο έργο αφού λήξει το πρώτο. Φυσικά, η τυχαίως εξελισσόμενη τιμή μπορεί να είναι πολύ χαμηλή ώστε να δικαιολογήσει την επένδυση στην περίπτωση που λήξει το πρώτο έργο, αλλά η εταιρεία για μια ακόμη φορά έχει την option και μπορεί να ξεκινήσει ένα δεύτερο έργο όταν η τιμή αυξηθεί και πάλι στο κατώτατο όριο. Τώρα επιστρέφουμε σε αυτήν την περίπτωση.

Στην ανάλυση αυτή πρέπει να θεωρήσουμε τα έσοδα και τις τιμές ως διάφορες μη γραμμικές συναρτήσεις της P και ότι το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο αναγωγής που είναι κατάλληλο για το καθένα από αυτά είναι διαφορετικό. Χρησιμοποιούμε την προοπτική του δυναμικού προγραμματισμού με ένα εξωγενώς ορισμένο επιτόκιο αναγωγής ρ. Ωστόσο, μπορεί να διεξαχθεί μια παρόμοια ανάλυση με τη χρήση της προσέγγισης πιθανών αξιώσεων με την προϋπόθεση ότι η παράμετρος κινδύνου του Poisson που αφορά το «θάνατο» του έργου είναι πλήρως διαφορίσιμη.

Ας ορίσουμε με P^* το κατώτατο όριο της επένδυσης και ας είναι F(P) η τιμή της option επένδυσης. Όσο η option δε διατίθεται, στο εύρος $0 < P < P^*$ θα έχει απλώς το αναμενόμενο κέρδος κεφαλαίου

$$\mathcal{E}[dF(P)] = [\tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot P^2 \cdot F''(P) + a \cdot P \cdot F'(P)]dt$$

Θέτοντας αυτό ίσο με τη συνήθη απόδοση ρ˙F(P)˙dt παίρνουμε μια γνωστή διαφορική εξίσωση για την F(P) και μια εξίσου γνωστή λύση

$$F(P) = A_1 \cdot P^{\beta_1}$$

όπου το A_1 είναι μια σταθερά που μένει να προσδιοριστεί και το β_1 είναι η θετική ρίζα της γνωστής μας δευτεροβάθμιας εξίσωσης (4).

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \beta \cdot (\beta - 1) + a \cdot \beta - \rho = 0 \qquad (25)$$

Ως συνήθως, θεωρήσαμε το όριο καθώς η $P \to 0$ ώστε να αποκλείσουμε τον όρο με την αρνητική ρίζα.

Ας ορίσουμε με J(P) την αξία ενός εγκατεστημένου έργου μαζί με εκείνο το έργο όλων των μελλοντικών options αντικατάστασης. Πρώτα θεωρούμε το έργο $P < P^*$. Κατά το επόμενο μικρό χρονικό διάστημα dt, η ροή του κέρδους είναι $P \cdot dt$. Τότε με πιθανότητα $\lambda \cdot dt$, το τρέχον έργο θα λήξει και η εταιρεία θα επιστρέψει στην εκμετάλλευση της option αξίας F(P). Επομένως

$$J(P) = P \cdot dt + (1-\lambda) \cdot e^{-\rho \cdot dt} \cdot \mathcal{E}\, J(P+dP) + \lambda \cdot dt \cdot e^{-\rho \cdot dt} \cdot \mathcal{E} \cdot [F(P+dP)]$$

Επεκτείνοντας το δεξί μέρος χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Itô και απλοποιώντας, έχουμε

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot P^2 \cdot J''(P) + a \cdot P \cdot J'(P) - (\rho + \lambda) \cdot J(P) + P + \lambda \cdot \mathrm{A}_1 \cdot P^{\beta_1} = 0$$

Αυτή έχει ως λύση τη

$$J(P) = B_1 \cdot P^{\beta_1'} + P/(\rho + \lambda - \alpha) + A_1 \cdot P^{\beta_1}$$

όπου το B_1 είναι μια σταθερά που πρέπει να προσδιοριστεί και το β_1' είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \beta \cdot (\beta - 1) + a \cdot \beta - (\rho + \lambda) = 0 \qquad (26)$$

Πάνω από το εύρος $P > P^*$, εφαρμόζεται μια παρόμοια ανάλυση, αλλά αν λήξει το τρέχον έργο, θα ξεκινήσει αμέσως ένα νέο. Επομένως

$$J(P) = P \cdot dt + (1-\lambda) \cdot e^{-\rho \cdot dt} \cdot \mathcal{E}\, J(P+dP) + \lambda \cdot dt \cdot e^{-\rho \cdot dt} \cdot \mathcal{E} \cdot [J(P+dP) - I]$$

Αυτό γίνεται

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot P^2 \cdot J''(P) + a \cdot P \cdot J'(P) - \rho \cdot J(P) + P - \lambda \cdot I = 0$$

Και η λύση είναι

$$J(P) = B_2 \cdot P^{\beta_2'} + P/(\rho - \alpha) + \lambda \cdot I / \rho$$

όπου το B_1 είναι μια σταθερά που πρέπει να προσδιοριστεί και το β_2' είναι η αρνητική ρίζα της εξίσωσης (25).

Τώρα οι δύο κλάδοι της J(P) πρέπει να συναντώνται εφαπτομενικά στο κοινό σημείο P^* των διαστημάτων στα οποία ορίζονται. Επίσης, επειδή η P^* είναι το κατώτατο όριο για την επένδυση, η F(P) πρέπει να ικανοποιεί της συνθήκες ταιριάσματος της τιμής και ομαλής επικόλλησης J(P) – I στο σημείο P^*. Έτσι έχουμε τέσσερεις εξισώσεις για να προσδιορίσουμε τις σταθερές C_1, B_1, B_2 καθώς και το κατώτατο όριο P^*. Αυτό συμπληρώνει τη λύση.

Η φαινομενικά περίπλοκη διαδικασία παράγει μια πολύ απλή απάντηση. Δεδομένου ότι οι δύο κλάδοι της συνάρτησης J(P) στα δεξιά και αριστερά της P^* συναντώνται εφαπτομενικά στο P^*, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όποιον από τους δύο κλάδους για τις συνθήκες ταιριάσματος της τιμής και ομαλής επικόλλησης στο σημείο P^*. Ο αριστερός κλάδος δίνει τη λύση πιο εύκολα. Η συνθήκη ταιριάσματος της τιμής είναι

$$A_1 \cdot P^{\beta_1} = B_1 \cdot P^{\beta_1'} + P/(\rho+\lambda-\alpha) + A_1 \cdot P^{\beta_1} - I$$

ή

$$B_1 \cdot P^{\beta_1'} + P/(\rho+\lambda-\alpha) = I$$

Ο όρος ομαλής επικόλλησης είναι

$$\beta_1' \cdot B_1 \cdot P^{\beta_1'-1} + 1/(\rho+\lambda-\alpha) = 0$$

Επιλύοντας αυτές τις σχέσεις και θέτοντας ρ – α = δ, βρίσκουμε

$$P^* = \frac{\beta_1'}{\beta_1'-1} \cdot (\delta+\lambda) \cdot I \tag{27}$$

Αντιπαραθέστε αυτό το αποτέλεσμα με τον τύπο (24) για την περίπτωση όπου η option έδινε το δικαίωμα επένδυσης στο έργο μόνο μια φορά. Το μέρος του κόστους της ισοδύναμης ροής είναι το ίδιο, αλλά ο πολλαπλασιαστής της τιμής της option είναι διαφορετικός. Η ρίζα β_1' προέρχεται από μια εξίσωση (26) που είναι διαφορετική της εξίσωσης (25) για το β_1. Η τελευταία έχει την παράμετρο απαξίωσης λ που προστίθεται στο επιτόκιο αναγωγής ρ. Επομένως ισχύει $\beta_1' > \beta_1$ και $\beta_1'/(\beta_1' - 1) < \beta_1/(\beta_1 - 1)$ και έτσι σε αυτήν την περίπτωση η απαξίωση μειώνει τον πολλαπλασιαστή της τιμής της option. Αν είναι μονίμως διαθέσιμη η option επένδυσης, η διάθεσή της σε οποιαδήποτε περίπτωση είναι μια λιγότερο αμετάκλητη πράξη όταν το έργο φθίνει γρηγορότερα.

Στον Πίνακα 1 δείχνουμε την αριθμητική σημασία αυτής της επίδρασης. Όπως και στην κεντρική περίπτωση των προηγουμένων υπολογισμό στο κεφάλαιο αυτό, θεωρούμε ρ = r = 0,04 και α = 0. Δείχνουμε τότε τον πολλαπλασιαστή $\beta_1'/(\beta_1' - 1)$ της τιμής της option για διάφορες τιμές του σ και του λ. Η απαξίωση έχει σημαντική επίδραση στους πολλαπλασιαστές της τιμής της option. Αλλά οι πολλαπλασιαστές παραμένουν σημαντικά μεγαλύτεροι του 1, ιδίως όταν το σ δεν είναι πολύ χαμηλό.

Πίνακας 2.1. *Πολλαπλασιαστές της τιμής της option με απαξίωση*

	σ			
λ	0,1	0,2	0,3	0,4
0,00	1,4215	2,0000	2,7631	3,7321
0,01	1,3706	1,8632	2,5000	3,2966
0,05	1,2651	1,5954	2,0000	2,4868
0,10	1,2077	1,4561	1,7500	2,0938
0,15	1,1759	1,3813	1,6193	1,8927

2.4.Β Ξαφνικός θάνατος

Σε συνέχεια της εκθετικής φθοράς ή της φθοράς κατά Poisson, η μορφή της απαξίωσης που είναι πιο δημοφιλής στην οικονομική ανάλυση είναι μια σταθερή πεπερασμένη διάρκεια ζωής κατά τη διάρκεια της οποία το έργο συνεχίζεται με τέλεια υγεία, ακολουθούμενη από ξαφνικό στιγμιαίο θάνατο.

Ας ορίσουμε με T την πεπερασμένη διάρκεια ζωής. Το έργο συνεχίζει να παράγει μια μονάδα προϊόντων και επομένως υπάρχει μια ροή κέρδους $\{P_t\}$ για T χρόνια, στην οποία χρονική στιγμή το έργο σταματά ξαφνικά να λειτουργεί. Ας είναι η αρχική τιμή P. Η αξία του έργου κατά την εγκατάσταση είναι η ανηγμένη παρούσα αξία των αναμενόμενων κερδών καθόλη τη διάρκεια ζωής του:

$$\begin{aligned} V(P) = \quad & = \mathcal{E} \cdot \int_0^T e^{-\mu \cdot T} \cdot P_t \cdot dt \\ & = P \cdot [1 - e^{-(\mu - \alpha) \cdot T}] / (\mu - \alpha) \\ & = P \cdot [1 - e^{-\delta \cdot T}] / \delta \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο αναγωγής μ και αναγνωρίσαμε ότι η αναμενόμενη αξία της τιμής, και επομένως της ροής κέρδους, αυξάνεται εκθετικά με ρυθμό α.

Στην εξίσωση (5) βρήκαμε την τιμή V(P) = P/δ για ένα έργο άπειρης ζωής. Ο παραπάνω τύπος φαίνεται να είναι μια πολύ φυσική γενίκευση. Η περίπτωση άπειρης ζωής του έργου υπολογίστηκε βάσει του ορίου καθώς το T τείνει στο ∞.

Η τιμή της option επένδυσης μπορεί να βρεθεί τώρα ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως και στην προηγούμενη ενότητα και διακρίνοντας τις περιπτώσεις της option που διατίθεται για μία φορά και της διαρκούς option.

2.4.Γ Η γενική περίπτωση

Μπορούμε να περικλείσουμε τις παραπάνω κοινές μορφές απαξίωσης σε μια πολύ γενική ανάλυση. Ας υποθέσουμε ότι το έργο παράγει μια ροή κέρδους π(P,t). Η περίπτωση φθοράς κατά Poisson έχει το π να μειώνεται εκθετικά, ενώ στην περίπτωση της απαξίωσης λόγω ξαφνικού θανάτους το π παραμένει σταθερό για λίγο και στη συνέχεια πέφτει στο μηδέν. Πιο γενικά, το π μπορεί να μειώνεται σταδιακά με το χρόνο είτε επειδή το κεφάλαιο υποφέρει από τη σταδιακή φυσική φθορά, είτε επειδή το έργο – το οποίο ενσωματώνει την τεχνολογία κατά τη διάρκεια της κατασκευής του – πρέπει να ανταγωνιστεί με τα πρόσφατα και πιο νέα έργα. Στην τελευταία περίπτωση, το έργο θα σταματήσει να λειτουργεί κατά την ενδογενή ημερομηνία στην οποία το π(P,t) πέφτει στο μηδέν. Αυτό το φαινόμενο ορισμένες φορές αποκαλείται «οικονομική απαξίωση». Αυτό διαμορφώθηκε στο πλαίσιο μιας ντετερμινιστικής και μονότονης προόδου στην τεχνολογία από τους Solow, Tobin, von Weizsacker και Yaari (1967) και το Bliss (1968).

Η αξία ενός τέτοιου έργου μπορεί να εκφρασθεί ως ένα ολοκλήρωμα της παρούσας αξίας για γενικές μορφές του π που είναι δύσκολες να υπολογιστούν. Εμείς περιγράφουμε μια εναλλακτική προσέγγιση. Έχει το πρόσθετο πλεονέκτημα να δίνει ένα γενικό τύπο για την αξία ενός έργου ανά πάσα στιγμή καθόλη τη διάρκεια της ζωής του και όχι απλά κατά την αρχική ημερομηνία κατασκευής.

Έστω V(P,t) η αξία του έργου ως συνάρτηση της τρέχουσας τιμής P και της τρέχουσας χρονικής στιγμής t. Θεωρούμε το σύνηθες χαρτοφυλάκιο που εκμεταλλεύεται το έργο και πωλεί n μονάδες ενός κεφαλαίου που συσχετίζεται πλήρως με την P για ένα μικρό χρονικό διάστημα dt. Σε αυτό το χρονικό διάστημα, το χαρτοφυλάκιο εισπράττει μερίσματα π(P,t)·dt – n·δ·P·d·dt, όπου ως συνήθως το δ = μ – α είναι το «έλλειμμα επιστροφής» ή η ευκολία απόδοσης στην P και ο δεύτερος όρος στην έκφραση για το μέρισμα αντιπροσωπεύει την πληρωμή που πρέπει να κάνει ο κάτοχος της option πώλησης στον κάτοχο της αντίστοιχης option αγοράς. Το χαρτοφυλάκιο έχει κέρδος κεφαλαίου που δίνεται από τη σχέση

$$dV(P,t)-n\cdot\delta\cdot P=[V_p(P,t)-n]\cdot dP+[\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot P^2\cdot V_{pp}(P,t)+V_t(P,t)]\cdot dt$$

όπου χρησιμοποιούμε δείκτες για να δείξουμε τις μερικές παραγώγους δεδομένου ότι η V έχει τώρα δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. Έτσι $V_p = \partial V/\partial P$ κλπ. Επιλέγοντας n = V_p (P,t) μπορούμε να καταστήσουμε το χαρτοφυλάκιο ως άνευ κινδύνου. Στη συνέχεια μπορούμε να θέσουμε τη συνολική αναμενόμενη απόδοσή του ίσης με την άνευ κινδύνου επιστροφή:

$$\pi(P,t)-\delta\cdot P\cdot V_p(P,t)+\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot P^2\cdot V_{pp}(P,t)+V_t(P,t)=r[V(P,t)-P\cdot V_p(P,t)]$$

ή

$$\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot P^2\cdot V_{pp}(P,t)+(r-\delta)\cdot P\cdot V_p(P,t)+V_t(P,t)-r\cdot V(P,t)+\pi(P,t)=0$$

Αυτή είναι μια μερική διαφορική εξίσωση που μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά. Αν υπάρχει μια γνωστή μέγιστη πιθανή διάρκεια ζωής T, τότε η λύση μπορεί να ξεκινήσει τη στιγμή t = T με τη συνθήκη ότι V(P,T) = 0 για όλες τις P και να ολοκληρωθεί προς τα πίσω.

Εδώ τονίζουμε την οικονομική σημασία του νέου όρου V_t (P,t) που μπαίνει στο προσκήνιο. Η αξία του έργου μπορεί τώρα να αλλάξει για δύο λόγους: λόγω της διαφορετικής αρχικής αξίας της στοχαστικής τιμής και λόγω του καθαρού περάσματος του χρόνο επειδή αυτά μεταβάλλουν το μελλοντικό προφίλ των ροών κέρδους. Η τελευταία επίδραση είναι αυτό ακριβώς που οι οικονομολόγοι εννοούν με τον όρο απαξίωση. Έτσι η V_t (P,t) μας δίνει ένα ποσοτικό μέτρο για την οικονομική απαξίωση. Αυτή η έννοια είχε διευκρινιστεί πολύ καλά από το Samuelson (1964) στο πλαίσιο της βεβαιότητας και της τέλειας πρόβλεψης και εδώ έχουμε μια φυσική προέκταση που ενσωματώνει την αβεβαιότητα και τις λογικές προσδοκίες.

2.5 Αβεβαιότητα τιμής και κόστους

Μέχρι τώρα έχουμε επιτρέψει την ύπαρξη μόνο μιας τυχαίας μεταβλητής, δηλαδή της τιμής προϊόντων (ή μεταβλητή μεταβολής της ζήτησης), με όλες τις άλλες παραμέτρους που επηρεάζουν μια επενδυτική απόφαση να είναι γνωστές και σταθερές. Το κάναμε αυτό για να αναπτύξουμε τις αναλυτικές μεθόδους σε μια σχετικά απλή σύνθεση. Οι ίδιες μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πιο γενικές λύσεις όπου δύο ή περισσότερες μεταβλητές επηρεάζουν την απόφαση της εταιρείας. Για παράδειγμα, αν τόσο το κόστος επένδυσης I όσο και η τιμή προϊόντων P είναι αβέβαια, τότε πρέπει να εκφράσουμε την αξία του έργου και της αξία της option επένδυσης ως συναρτήσεις και των δύο μεταβλητών, δηλαδή ως V(P, I) και F(P,I). Στη συνέχεια πρέπει να βρούμε ολόκληρη την περιοχή των (P, I) όπου συμβαίνει η επένδυση, ολόκληρη την περιοχή όπου δε συμβαίνει και την καμπύλη του κρίσιμου ή κατωτάτου ορίου που χωρίζει τις δύο περιοχές. Περιττό να πούμε ότι αυτό είναι μαθηματικά πολύ δύσκολο. Με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, οι τιμές των συναρτήσεων ικανοποιούν μερικές διαφορικές εξισώσεις και οι λύση τους μπορεί να απαιτούν αριθμητικές μεθόδους κάποιας πολυπλοκότητας. Ωστόσο, κάποια παραδείγματα με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά – συγκεκριμένα, με κάποια μορφή ομοιογένειας – μπορούν να επιλυθούν μειώνοντας το πρόβλημα σε κάποιο αντίστοιχο με μία βασική μεταβλητή. Τώρα θα το επιδείξουμε αυτό.

Θεωρήστε ένα μοναδιαίο έργο του οποίου το επενδυτικό κόστος I και η ροή εσόδων P είναι και τα δύο αβέβαια. Μπορούμε ακόμη να επιτρέψουμε στην αβεβαιότητα αυτών των δύο μεταβλητών να σχετίζεται με κάποιες κοινές μακροοικονομικές κρίσεις. Έτσι υποθέτουμε ότι τα P και I ακολουθούν γεωμετρικές Brownian motions:

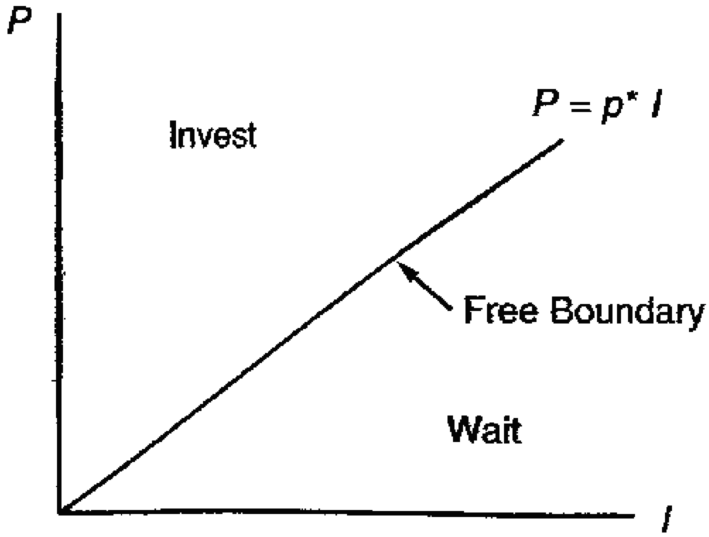
$$dP/P = \alpha_p \cdot dt + \sigma_p \cdot dz_p \quad \text{και} \quad dP/P = \alpha_I \cdot dt + \sigma_I \cdot dz_I$$

όπου

$$\mathcal{E}[dz_p^2] = dt \qquad \mathcal{E}[dz_I^2] = dt \qquad \mathcal{E}[dz_P dz_I] = \rho \cdot dt$$

Εφόσον γίνει η επένδυση, η επιπλέον αβεβαιότητα στην εξέλιξη του επενδυτικού κόστους είναι άνευ σημασίας. Η αξία ενός εν ζωή έργου όταν η τρέχουσα τιμή είναι η P είναι απλά $V(P) = P/(\mu_P - \alpha_P) = P/\delta_P$, όπου το $\mu_P = r + \phi \cdot \rho_{pm}\sigma_P$ είναι το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο αναγωγής που είναι κατάλληλο για την P και το $\delta_P = \mu_P - a_P$ είναι η «ευκολία απόδοσης» ή το «έλλειμμα του ποσοστού της απόδοσης» στην P.

Η τιμή της option επένδυσης, ωστόσο, εξαρτάται τόσο από την P όσο και από το I. Διαισθητικά, περιμένουμε ότι η option θα είναι εκμεταλλεύσιμη όταν η P είναι χαμηλή ή το I υψηλό και ότι θα διατεθεί όταν η P γίνει ικανοποιητικά υψηλή για κάποιο γνωστό I ή το I γίνει ικανοποιητικά χαμηλό για κάποια δοσμένη P. Το σχήμα 8 δείχνει τις προτεινόμενες περιοχές στο διάστημα (I, P) που αντιστοιχούν στην αναμονή και την επένδυση καθώς και το σύνορο που τις χωρίζει. Ο στόχος μας είναι να καταστήσουμε αυτή τη διαίσθησή μας πιο επακριβή και να αναπτύξουμε μια αναλυτική μέθοδο για να βρούμε το σύνορο και επομένως να καθορίσουμε τον κανόνα βέλτιστης επένδυσης.



Σχήμα 2.8: *Επένδυση με αβεβαιότητα τιμής και κόστους*

Μέχρι τώρα, τα βήματα θα πρέπει να είναι πολύ γνωστά. Έστω F(P, I) η τιμή της option. Βρίσκουμε μια διαφορική εξίσωση γι' αυτήν. Υποθέτουμε ότι τόσο οι κίνδυνοι στην τιμή των προϊόντων όσο και στο επενδυτικό κόστος βαθμονομούνται από τα υπάρχοντα κεφάλαια και λειτουργούν παράλληλα με τα κεφάλαια των οποίων οι τιμές είναι P και I αντίστοιχα. Ονομάζουμε αυτά τα κεφάλαια «παραγωγή» και «κεφάλαιο» για λόγους συντομίας. Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από μια μονάδα της option, m μονάδες options πώλησης και n μονάδες options αγοράς κεφαλαίου. Με βάση το Λήμμα του Itô έχουμε

$$d(F - m\cdot P - n\cdot I) = (F_P - m)\cdot dP + (F_1 - n)\cdot dI +$$
$$+\tfrac{1}{2}\cdot(F_{PP}\cdot\sigma_P^2\cdot P^2 + 2\cdot F_{PI}\cdot\rho\cdot\sigma_P\cdot\sigma_I\cdot P\cdot I + F_{II}\cdot\sigma_I^2\cdot I^2)\cdot dt$$

Προσέξτε ότι το dP και το dI στο δεξί μέρος της εξίσωσης είναι στοχαστικά μεγέθη. Ωστόσο, μπορούμε να επιλέξουμε $m = F_P$ και $n = F_I$ για να ξεφορτωθούμε αυτούς τους όρους και να καταστήσουμε το χαρτοφυλάκιο ως άνευ κινδύνου. Τότε ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου κατά το διάστημα (t, t + dt) θα έχει το σίγουρο κέρδος κεφαλαίου

$$\tfrac{1}{2}\cdot(F_{PP}\cdot\sigma_P^2\cdot P^2+2\cdot F_{PI}\cdot\rho\cdot\sigma_P\cdot\sigma_I\cdot P\cdot I+F_{II}\cdot\sigma_I^2\cdot I^2)\cdot dt$$

Πρέπει επίσης να κάνει μια πληρωμή που αντιστοιχεί στην ευκολία αποδόσεων για τα προϊόντα και το κεφάλαιο, ($m\cdot\delta_P\cdot P$ + $n\cdot\delta_I\cdot I$) $\cdot dt$, ώστε να εκμεταλλευτεί την πώληση. Εξισώνοντας το άθροισμα αυτών των δύο συνιστωσών με την άνευ κινδύνου απόδοση $r\cdot(F - m\cdot P - n\cdot I)\cdot dt$ και συμμαζεύοντας τους όρους, παίρνουμε τη βασική εξίσωση:

$$\tfrac{1}{2}\cdot(F_{PP}\cdot\sigma_P^2\cdot P^2+2\cdot F_{PI}\cdot\rho\cdot\sigma_P\cdot\sigma_I\cdot P\cdot I+F_{II}\cdot\sigma_I^2\cdot I^2)+(r-\delta_P)\cdot P\cdot F_P+ \\ +(r-\delta_I)\cdot I\cdot F_I-r\cdot F=0 \qquad (28)$$

Καθώς υπάρχουν δύο ανεξάρτητες μεταβλητές (P, I), αυτή είναι μια μερική διαφορική εξίσωση. Εφαρμόζεται πάνω στην περιοχή του διαστήματος (P, I) όπου είναι βέλτιστο να διατηρηθεί η option χωρίς να διατεθεί. Στην περιοχή όπου η option διατίθεται άμεσα, έχουμε

$$F(P,I)=V(P)-I=P/\delta_P-I$$

Στο σύνορο μεταξύ των δύο περιοχών, αυτό γίνεται μια συνθήκη ταιριασμάτων των τιμών. Οι δύο συναρτήσεις πρέπει επίσης να ενώνονται εφαπτομενικά στο σύνορο, παράγοντας δύο συνθήκες ομαλής επικόλλησης

$$F_P(P,I) = V'(P) = 1/\delta_P, \qquad F_I(P,I) = -1$$

Η διαφορική εξίσωση, μαζί με τις αυτές τις οριακές συνθήκες, καθορίζουν τη θέση του ίδιου του συνόρου και επίσης παράγουν μια λύση για τη συνάρτηση F στην περιοχή της αναμονής.

Το γεγονός ότι το ίδιο το σύνορο είναι άγνωστο δημιουργεί προβλήματα αυτού του είδους αρκετά δύσκολα. Στην πραγματικότητα η θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων έχει λίγα να μας πει για αυτήν την κατηγορία προβλημάτων «ελευθέρων ορίων» γενικά. Οι αναλυτικές λύσεις είναι σπάνια διαθέσιμες και οι μέθοδοι αριθμητικών επιλύσεων είναι έτσι προσαρμοσμένες ώστε να ταιριάζουν σε μια συγκεκριμένη κατάσταση. Αυτό κατ' αρχάς δε διαφέρει από το πρόβλημα ακόμα κι όταν μόνο η τιμή είναι αβέβαιη. Το κατώτατο όριο επένδυσης P^* είναι από μόνο του άγνωστο και γίνεται το σημείο του ελεύθερου συνόρου που χωρίζει το μονοδιάστατο εύρος τιμών της P όπου συμβαίνει η επένδυση από το εύρος όπου δε συμβαίνει. Σε μια διάσταση είναι πολύ πιο εύκολο να βρούμε τη λύση, είτε αναλυτικά είτε αριθμητικά. Ευτυχώς, στην προκείμενη περίπτωση η φυσική ομοιογένεια του προβλήματος, μας επιτρέπει να το μειώσουμε το πρόβλημα αυτό σε μία διάσταση.

Αν διπλασιαστούν οι τρέχουσες τιμές της P και του I, αυτό απλώς θα διπλασιάσει την αξία του έργου και επίσης το κόστος της επένδυσης. Η βέλτιστη απόφαση θα πρέπει επομένως να εξαρτηθεί μόνο από την αναλογία p = P/I και κατά συνέπεια το σύνορο στο σχήμα 8 θα πρέπει να είναι μια ευθεία που θα περνά από την αρχή των αξόνων. Αντίστοιχα, η τιμή της option θα είναι μια ομογενής πρώτου βαθμού των (P, I), δίνοντάς μας τη δυνατότητα να γράψουμε

$$F(P,I) = I \cdot f(P/I) = I \cdot f(p)$$

όπου η f είναι συνάρτηση που πρέπει να προσδιοριστεί.

Διαδοχική παραγώγιση δίνει

$$F_P(P,I) = f'(p) \qquad F_I(P,I) = f(p) - p \cdot f'(p)$$

Και

$$F_{PP}(P,I) = f''(p)/I \qquad F_{PI}(P,I) = -p \cdot f''(p)/I$$
$$F_{II}(P,I) = p^2 \cdot f''(p)/I$$

Αντικαθιστώντας αυτό στη μερική διαφορική εξίσωση (28) και ομαδοποιώντας τους όρους, βρίσκουμε ότι

$$\tfrac{1}{2} \cdot (\sigma_p^2 - 2 \cdot \rho \cdot \sigma_p \sigma_I + \sigma_I^2) \cdot p^2 \cdot f''(p) + (\delta_I - \delta_p) \cdot p \cdot f'(p) - \delta_I \cdot f(p) = 0 \quad (29)$$

Αυτή είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση για την άγνωστη συνάρτηση f(p) της βαθμωτής ανεξάρτητης μεταβλητής p. Επιπλέον, έχει ακριβώς την ίδια μορφή με τη γνωστή εξίσωση (6) για την περίπτωση όπου μόνο η τιμή είναι αβέβαιη. Οι οριακές της συνθήκες είναι επίσης παρόμοιες. Η συνθήκη ταιριάσματος της τιμής γίνεται

$$f(p) = p/\delta_p - 1$$

Οι δύο συνθήκες ομαλής επικόλλησης γίνονται

$$f'(p) = 1/\delta_p \qquad f(p) - f'(p) = 1/\delta_p$$

Από τις τρεις αυτές συνθήκες, η καθεμιά μπορεί να συναχθεί από τις άλλες δύο. Μπορούμε να επιλέξουμε τη συνθήκη ταιριάσματος της τιμών και την πρώτη συνθήκη ομαλής επικόλλησης ως τις δύο συνθήκες που είναι τελείως παράλληλες με την περίπτωση της καθαρής αβεβαιότητας σχετικά με την τιμή και να ολοκληρώσουμε την επίλυση όπως και πριν. Η θεμελιώδης εξίσωση δευτέρου βαθμού είναι

$$Q = \tfrac{1}{2} \cdot (\sigma_p^2 - 2 \cdot \rho \cdot \sigma_p \sigma_I + \sigma_I^2) \cdot \beta \cdot (\beta - 1) + (\delta_I - \delta_p) \cdot \beta - \delta_I = 0$$

Έστω β_1 η μεγαλύτερη από τις δύο ρίζες. Αν τα δ_I και δ_P είναι και τα δύο θετικά (το οποίο και υποθέτουμε), τότε θα είναι $\beta_1 > 1$. Έτσι βρίσκουμε

$$P^*/I^* = p^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \delta_p \qquad (30)$$

Αυτή η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων χωρίζει τις περιοχές αναμονής και επένδυσης στο διάστημα (P, I). Η κλίση της έχει την ερμηνεία του τυπικού πολλαπλασιαστή της τιμής της option. Έτσι αν αυξηθεί είτε το σ_P ή το σ_I, το β_1 θα μειωθεί και ο πολλαπλασιαστής $\beta_1/(\beta_1-1)$ θα αυξηθεί. Ωστόσο, ο πολλαπλασιαστής θα μειωθεί αν αυξηθεί το ρ. Κρατώντας τις μεταβολές τους σταθερές, μια μεγαλύτερη συνδιακύμανση μεταξύ των μεταβολών στην P και το I συνεπάγεται λιγότερη αβεβαιότητα στην αναλογία τους και κατά συνέπεια ένα μειωμένο κίνητρο για αναμονή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εισροές, εκροές, διακοπή της λειτουργίας και απόσυρση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δείξαμε πώς μπορεί κανείς να δώσει μια πρώτη αποτίμηση για ένα έργο και στη συνέχεια να αξιολογήσει την option επένδυσης στο έργο και να καθορίσει τον κανόνα βέλτιστης επένδυσης. Η αφετηρία μας ήταν μια στοχαστική διαδικασία για την εξέλιξη της τιμής των προϊόντων του έργου και ως εκ τούτου και η αβεβαιότητα για τη μελλοντική ροή των κερδών από τη λειτουργία. Αυτή η ροή κερδών θα μπορούσε να είναι αρνητική ορισμένες φορές και υποθέσαμε ότι σε τέτοιες στιγμές η εταιρεία μπορεί να αναστείλει τη λειτουργία και να τη συνεχίσει αργότερα αν η ροή του κέρδους γινόταν πάλι θετική, χωρίς την καταβολή τυχόν εφάπαξ κοστών διακοπής ή επανεκκίνησης.

Για πολλά έργα, αυτή η υπόθεση της αναστολής χωρίς κάποιο κόστος και της επανεκκίνησης δεν είναι η ρεαλιστική. Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι σχεδόν αδύνατη η αναστολή και αργότερα η επανεκκίνηση της λειτουργίας ενός έργου. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί ένα ερευνητικό εργαστήριο που ασχολείται με την ανάπτυξη ενός νέου φαρμακευτικού προϊόντος. Η αναστολή της λειτουργίας του εργαστηρίου αυτού μπορεί να σημαίνει την απώλεια της ομάδας των επιστημόνων – ερευνητών και κατά συνέπεια της ικανότητας να συνεχιστεί η ανάπτυξη του προϊόντος στο μέλλον. Σε άλλες περιπτώσεις είναι δυνατή η αναστολή και η επανεκκίνηση αργότερα, αλλά μόνο με σημαντικό κόστος. Για παράδειγμα, αν ανασταλεί η λειτουργία ενός υπόγειου ορυχείου, πρέπει να διατεθεί ένα εφάπαξ και να διατίθεται συνεχώς ένα σταθερό ποσό για τη διατήρηση του ορυχείου έναντι πλημμυρών ώστε να μπορεί να ανοίξει και πάλι αργότερα καθώς και ένα πρόσθετο εφάπαξ ποσό ώστε να ανοίξει και πάλι πραγματικά.

Αυτό το κεφάλαιο ξεκινά με ένα μοντέλο που είναι τελείως στο αντίθετο άκρο από το μοντέλο που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Θα υποθέσουμε ότι αν ποτέ ανασταλεί η λειτουργία, η εταιρεία πρέπει να καταβάλει ολόκληρο το κόστος της επένδυσης ώστε να το επανεκκινήσει. (Αυτό είναι σα να «οξειδώνεται» το κεφάλαιο και να θρυμματίζεται, εφόσον δε χρησιμοποιείται.) Αντί της αναστολής, ας υποθέσουμε τώρα ότι μια ενεργή εταιρεία πρέπει να σκεφτεί την ολοκληρωτική εγκατάλειψη. Φυσικά δε θα κινηθούμε προς αυτήν την κατεύθυνση τη στιγμή που η ροή των κερδών λόγω της λειτουργίας γίνεται αρνητική. Δεδομένου ότι η επανεκκίνηση είναι δαπανηρή, θα υπάρχει μια τιμή για κάποια option διατήρησης της λειτουργίας ζωντανής και η εγκατάλειψη θα αποτελεί τη βέλτιστη λύση μόνο σε ένα αρκετά μεγάλο κατώτατο όριο ζημιών από τη λειτουργία.

Στις περισσότερες περιπτώσεις η αλήθεια βρίσκεται μεταξύ των άκρων της ανέξοδης προσωρινής αναστολής και της άμεσης ολοκληρωτικής εγκατάλειψης. Το εφάπαξ κεφάλαιο στα περισσότερα έργα οξειδώνεται όταν δε χρησιμοποιείται, αλλά συμβαίνει σταδιακά. Τα μηχανήματα και τα πλοία οξειδώνονται – σκουριάζουν στην κυριολεξία, τα ορυχεία υπόκεινται σε καταρρεύσεις και πλημμύρες, ενώ άλλα άυλα στοιχεία όπως η εμπιστοσύνη των πελατών και η επώνυμη αναγνώριση ξεθωριάζουν. Τότε η επανεκκίνηση είναι δαπανηρή, αλλά όχι αρκετά δαπανηρή όσο μια νέα επένδυση. Σε ορισμένες περιπτώσεις, το κόστος επανεκκίνησης αυξάνεται με τη διάρκεια της αναστολής. Για να το μοντελοποιήσουμε αυτό, πρέπει να θεωρήσουμε μια option επανεκκίνησης και να εισάγουμε το χρόνο που έχει παρέλθει από την τελευταία αναστολή ως μια ρητή βασική μεταβλητή που επηρεάζει την τιμή αυτής της νέας option. Η μερική διαφορική εξίσωση που προκύπτει μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά, αλλά δε θα δώσει λύσει γι’ αυτήν την περίπτωση εδώ.

Αργότερα στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσουμε μια άλλη ενδιάμεση δυνατότητα. Η «οξείδωση» του αδρανούς κεφαλαίου μπορεί να αποφευχθεί με την ανάληψη κάποιας «συντήρησης» – που τη θεωρούμε κυριολεκτικά στην περίπτωση μηχανημάτων, πλοίων και ορυχείων και εικονικά στην περίπτωση άυλων κεφαλαίων όπως η εμπιστοσύνη των πελατών. Αντί για εγκατάλειψη, μια εταιρεία πρέπει να επιλέξει να κρατήσει το έργο της στη ζωή μέσω της διατήρησης του κεφαλαίου αλλά χωρίς ουσιαστικά να παράγει προϊόντα. Για παράδειγμα, τα πλοία «αδρανοποιούνται» ή «αποθηκεύονται για μελλοντική χρήση». Αυτό συνεπάγεται ένα συνεχές κόστος συντήρησης, αλλά σώζει την προοπτική του κόστους μελλοντικής επανεπένδυσης. Η αντίστροφη σχέση μεταξύ αυτών των εναλλακτικών λύσεων εξαρτάται από τα σχετικά μεγέθη των δύο εξόδων και από την πιθανότητα μιας γρήγορης επιστροφής σε ευνοϊκές συνθήκες λειτουργίας.

Από μαθηματική άποψη, εκτός από τη βασική μεταβλητή (για παράδειγμα την τιμή) που εξελίσσεται στοχαστικά και επηρεάζει την αποδοτικότητα της λειτουργίας, η πιθανότητα εγκατάλειψης εισάγει μια δεύτερη διακριτή βασική μεταβλητή, η οποία παίρνει την τιμή 0 αν το έργο δε λειτουργεί και την τιμή 1 αν λειτουργεί. Η στρατηγική της εταιρείας αποτελείται από ένα ζευγάρι αποφάσεων για εναλλαγή μεταξύ αυτών των δύο. Σε κάθε επιμέρους κατάσταση η εταιρεία έχει μια option αγοράς από την άλλη. Μια αδρανής εταιρεία μπορεί να διαθέσει την option επένδυσης. Αυτή γίνεται από τη ροή των κερδών λόγω της λειτουργίας συν την option εγκατάλειψης. Πρέπει να βρούμε τους κανόνες για τη βέλτιστη διάθεση αυτών των options ταυτόχρονα υπό το πρίσμα της βασικής τυχαίας μεταβλητής (της τιμής εν προκειμένω). Ομοίως, όταν θεωρούμε την τρίτη εναλλακτική λύση της «διακοπής λειτουργίας» ή «αποθήκευσης για μελλοντική χρήση», υπάρχουν τρεις διακριτές καταστάσεις, με τις βέλτιστες εναλλαγές μεταξύ αυτών να υπολογίζονται.

3.1 Συνδυασμένες εισροές και στρατηγικές εκροών

Περιορίζουμε τη συζήτηση στην περίπτωση της αβεβαιότητας ως προς τη ζήτηση, υποθέτοντας μια γεωμετρική Brownian motion διαδικασία για την τιμή. Οι αποφάσεις για επένδυση και εγκατάλειψη γίνονται από μια εταιρεία που παίρνει την τιμή ως δεδομένη και υποθέτουμε και πάλι ότι η τιμή ακολουθεί μια γεωμετρική Brownian motion:

$$dP = \alpha \cdot P \cdot dt + \sigma \cdot P \cdot dz \tag{1}$$

Αν η εταιρεία επενδύει (δηλαδή, αν μπαίνει στις αγορές), αποκτά ένα έργο που παράγει μια μονάδα προϊόντων ανά περίοδο και διαρκεί για πάντα ή μέχρι να εγκαταλειφθεί. Τα μεταβλητά κόστη C είναι γνωστά και σταθερά. Το άνευ κινδύνου επιτόκιο καθορίζεται εξωγενώς σε r. Θα υποθέσουμε πως οι στοχαστικές διακυμάνσεις των τιμών βαθμονομούνται από άλλα κεφάλαια στην οικονομία (αν και, όπως έχουμε δει, αν δε συνέβαινε αυτό, μια λύση θα μπορούσε να αποκτηθεί μέσω του δυναμικού προγραμματισμού). Το κατάλληλο σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο αναγωγής για τα έσοδα της εταιρείας είναι

$$\mu = r + \varphi \cdot \rho_{PM} \cdot \sigma \tag{2}$$

όπου το φ είναι η εμπορεύσιμη τιμή του κινδύνου και το ρ_{PM} είναι ο συντελεστή συσχέτισης μεταξύ της τιμής P και του συνολικού χαρτοφυλακίου της αγοράς. Ως συνήθως, θέτουμε με $\delta = \mu - \alpha$ το έλλειμμα του ρυθμού της απόδοσης της τιμής και υποθέτουμε ότι $\delta > 0$.

Η εταιρεία πρέπει να καταβάλει ένα εφάπαξ κόστος I για να επενδύσει στο έργο και ένα εφάπαξ κόστος E ώστε να το εγκαταλείψει. Αυτό το τελευταίο κόστος μπορεί να συμπεριλαμβάνει τις νόμιμα απαιτούμενες πληρωμές για τον τερματισμό προς τους εργαζόμενους, ή τα κόστη της αποκατάστασης του χώρου ενός ορυχείου στη φυσική του κατάσταση. Θα μπορούσε να είναι η περίπτωση όπου μέρος του κόστους επένδυσης I δεν είναι εφάπαξ και έτσι το E είναι αρνητικό, κάτι που αντικατοπτρίζει το τμήμα της επένδυσης που να αποσβεστεί κατά την έξοδο. Φυσικά χρειάζεται να ισχύει $I + E > 0$ για να αποκλείσουμε μια «μηχανή χρημάτων» γρήγορων κύκλων επένδυσης και εγκατάλειψης.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ξεκινήσαμε με την εύρεση της τιμής V της έργου εν ζωή και στη συνέχεια προχωρήσαμε στην εύρεση της αξία F της option επένδυσης. Τώρα εκείνη η ακολουθία γίνεται πλήρης κύκλος. Το έργο που είναι εν ζωή είναι πραγματικό ένα σύνθετο κεφάλαιο, μέρος του οποίου είναι η option εγκατάλειψης. Αν διατεθεί εκείνη η option, η εταιρεία επιστρέφει στην ανενεργή κατάσταση. Με άλλα λόγια, αποκτά ένα άλλο κεφάλαιο, δηλαδή την option επένδυσης. Όταν με τη σειρά της διατεθεί αυτή η option, οδηγεί πίσω σε ένα έργο εν ζωή. Έτσι οι αξίες μιας εν ζωή εταιρείας και μια αδρανούς εταιρείας είναι αλληλένδετες και πρέπει να προσδιοριστούν ταυτόχρονα.

Η διαίσθηση προτείνει ότι μια αδρανής εταιρεία θα επενδύσει όταν οι συνθήκες ζήτησης γίνουν αρκετά ευνοϊκές και μια ενεργή εταιρεία θα εγκαταλείψει όταν οι συνθήκες ζήτησης γίνουν αρκετά δυσμενείς. Μάλιστα, θα δούμε ότι η βέλτιστη στρατηγική για επένδυση και εγκατάλειψη, ή για την εκμετάλλευση ή διάθεση των δύο options, θα πάρει τη μορφή δύο κατωτάτων τιμών, της της πούμε P_H και P_L με $P_H > P_L$. Μια αδρανής εταιρεία θα θεωρήσει βέλτιστο να παραμείνει ανενεργή όσο η P είναι μικρότερη της P_H και θα επενδύσει αμέσως μόλις η P φτάσει το κατώτατο όριο P_H. Μια ενεργή εταιρεία θα θεωρήσει βέλτιστο να παραμείνει ενεργή όσο η P είναι μεγαλύτερη της P_L αλλά θα εγκαταλείψει αμέσως μόλις η P γίνει μικρότερη της P_L. Στο εύρος των τιμών μεταξύ των κατωτάτων ορίων P_L και P_H, η βέλτιστη πολιτική είναι να συνεχιστεί η παρούσα κατάσταση, είτε αυτή αφορά την ενεργή λειτουργία είτε την αναμονή. Προχωρούμε τώρα στην επαλήθευση της της διαίσθησης. Φυσικά πρέπει να βρούμε της τιμές αυτών των κατωτάτων ορίων υπό το πρίσμα εξωγενών δεδομένων.

3.1.Α Αποτίμηση των δύο options

Η αξία της εταιρείας αποτελεί πλέον συνάρτηση της εξωγενούς βασικής μεταβλητής P καθώς και της διακριτής βασικής μεταβλητής που δείχνει εάν η εταιρεία είναι στην τρέχουσα κατάστασής αδρανής (0) ή ενεργή (1). Για να διευκρινισθεί αυτό, θα αλλάξουμε ελαφρώς το συμβολισμό, ορίζοντας με $V_0(P)$ την αξία της option επένδυσης (δηλαδή την αξία μιας αδρανούς εταιρείας) και με $V_1(P)$ την αξία μια αδρανούς εταιρείας. Προσέξτε ότι το $V_1(P)$ είναι το άθροισμα δύο συνιστωσών, του δικαιώματος στα κέρδη από τη λειτουργία και της option εγκατάλειψης αν η τιμή πέσει πολύ χαμηλά.

Στο εύρος τιμών $(0, P_H)$ η εταιρεία εκμεταλλεύεται την option επένδυσης. Της και στο προηγούμενο κεφάλαιο, μια συζήτηση περί διαιτησίας της λέει ότι η $V_0(P)$

ικανοποιεί κάποια διαφορική εξίσωση σε αυτό το χρονικό διάστημα. Οι οριακές συνθήκες συνδέουν της τιμές και της παραγώγους της $V_0(P)$ με εκείνες της $V_1(P)$ στο P_H. Ομοίως, στο εύρος τιμών (P_L, ∞) μια ενεργή εταιρεία παραμένει έτσι, κρατώντας την option εγκατάλειψης. Η $V_1(P)$ ικανοποιεί μια αντίστοιχη διαφορική εξίσωση και οι οριακές της συνθήκες συνδέουν της τιμές και της παραγώγους της $V_1(P)$ με εκείνες της $V_0(P)$ στο P_L. Αυτό το σύστημα εξισώσεων και οριακών συνθηκών περιέχει αρκετές πληροφορίες για να ολοκληρωθεί η λύση.

Ξεκινάμε με την αδρανή εταιρεία. Για να αποκτήσουμε μια διαφορική εξίσωση για τη $V_0(P)$, κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο με μια μονάδα option επένδυσης και μια πώληση $V_0{'}(P)$ μονάδων προϊόντων. Η εξίσωση στην οποία καταλήγουμε είναι

$$\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot P^2\cdot V_0''(P)+(r-\delta)\cdot P\cdot V_0'(P)-r\cdot V_0(P)=0 \qquad (3)$$

Αυτή έχει μια γενική λύση

$$V_0(P)=A_1\cdot P^{\beta_1}+A_2\cdot P^{\beta_2}$$

όπου τα A_1 και A_2 είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν και τα β_1 και β_2 είναι ρίζες της γνωστής δευτεροβάθμιας εξίσωσης (λόγω των δύο προηγούμενων κεφαλαίων):

$$\beta_1=\frac{1}{2}-(\rho-\delta)/\sigma^2+\sqrt{[\rho-\delta)/\sigma^2+2\rho/\sigma^2}\quad >1$$

και

$$\beta_2=\frac{1}{2}-(\rho-\delta)/\sigma^2-\sqrt{[\rho-\delta)/\sigma^2+2\rho/\sigma^2}\quad <0$$

Δεδομένου ότι η option επένδυσης ξεφεύγει πάρα πολύ από τα χρήματα και επομένως γίνεται σχεδόν άνευ αξίας καθώς το P τείνει στο 0, ο συντελεστής A_2 που αντιστοιχεί στην αρνητική ρίζα πρέπει να είναι μηδέν. Αυτό αφήνει

$$V_0(P)=A_1\cdot P^{\beta_1} \qquad (4)$$

Θυμηθείτε πως αυτό ισχύει στο διάστημα (0, P_H) των τιμών.

Στη συνέχεια εξετάζουμε την αξία της ενεργούς εταιρείας. Ο υπολογισμός είναι γνωστός, εκτός ότι το έργο εν ζωή που είναι μέρος του χαρτοφυλακίου πληρώνει μια καθαρή χρηματοροή $(P – C)^{\cdot}dt$. Τότε παίρνουμε

$$\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot P^2\cdot V_1''(P)+(r-\delta)\cdot P\cdot V_1'(P)-r\cdot V_1(P)+P-C=0 \qquad (5)$$

Η γενική λύση σε αυτήν την εξίσωση είναι

$$V_1(P)=B_1\cdot P^{\beta_1}+B_2\cdot P^{\beta_2}+P/\delta-C/r$$

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ερμηνεύουμε τους δύο τελευταίους όρους ως την αξία του εν ζωή έργου όταν η εταιρεία υποχρεούται να το κρατήσει σε λειτουργία για πάντα και ανεξάρτητα των ζημιών και ερμηνεύουμε τους πρώτους δύο όρους ως την αξία της option εγκατάλειψης. Η πιθανότητα εγκατάλειψης στο όχι και πολύ μακρινό μέλλον γίνεται εξαιρετικά μικρή καθώς η P τείνει στο ∞ και έτσι η αξία της option εγκατάλειψης θα πρέπει να πλησιάζει το μηδέν καθώς το P γίνεται πολύ μεγάλο. Έτσι ο συντελεστής B_1 που αντιστοιχεί στη θετική ρίζα β_1 θα είναι μηδέν. Αυτό αφήνει

$$V_1(P) = B_2 \cdot P^{\beta_2} + P/\delta - C/r \tag{6}$$

Αυτό ισχύει για την P στο διάστημα (P_L, ∞).

Στο κατώτατο όριο επένδυσης P_H, η εταιρεία καταβάλλει το εφάπαξ κόστος I για να διαθέσει την option επένδυσης, εγκαταλείποντας αυτό το κεφάλαιο αξίας $V_0(P_H)$ ώστε να πάρει το εν ζωή έργο που έχει τιμή $V_1(P_H)$. Γι' αυτό έχουμε τις συνθήκες ταιριάσματος της τιμής και ομαλής επικόλλησης

$$V_0(P_H) = V_1(P_H) - I, \quad V_0'(P_H) = V_1'(P_H) \tag{7}$$

Ομοίως, στο κατώτατο όριο εγκατάλειψης P_L, οι συνθήκες ταιριάσματος της τιμής και ομαλής επικόλλησης

$$V_1(P_L) = V_0(P_L) - E, \quad V_1'(P_L) = V_0'(P_L) \tag{8}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4) και (6) για τα $V_0(P)$ και $V_1(P)$, αυτές οι συνθήκες μπορούν να γραφούν ως

$$-A_1 P_H^{\beta_1} + B_2 \cdot P_H^{\beta_2} + P_H/\delta - C/r = \mathrm{I} \tag{9}$$

$$-\beta_1 \cdot A_1 \cdot P_H^{\beta_1 - 1} + \beta_2 \cdot B_2 \cdot P_H^{\beta_2 - 1} + 1/\delta = 0 \tag{10}$$

$$-A_1 P_L^{\beta_1} + B_2 \cdot P_L^{\beta_2} + P_L/\delta - C/r = -E \tag{11}$$

$$-\beta_1 \cdot A_1 P_L^{\beta_1 - 1} + \beta_2 \cdot B_2 \cdot P_L^{\beta_2 - 1} + 1/\delta = 0 \tag{12}$$

Αυτές οι τέσσερις εξισώσεις καθορίζουν τους 4 αγνώστους – τα κατώτατα όρια P_H και P_L καθώς και τους συντελεστές A_1 και B_2 στις τιμές των options.

Οι εξισώσεις είναι τόσο μη γραμμικές στα κατώτατα όρια ώστε να είναι αδύνατη μια αναλυτική λύση σε κλειστή μορφή. Ωστόσο, μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει μια λύση, είναι μοναδική, και έχει οικονομικά ενστικτώδεις βασικές ιδιότητες. Τα όρια αυτά ικανοποιούν την ανισότητα $0 < P_L < P_H < \infty$ και οι συντελεστές των όρων των τιμών της option, A_1 και B_2 είναι θετικοί. Μερικές άλλες σημαντικές γενικές οικονομικές γνώσεις μπορούν να συναχθούν από αναλυτικές μεθόδους, αλλά τα επιπλέον αποτελέσματα απαιτούν αριθμητική επίλυση.

3.1.B Σύγκριση με αλόγιστες αποφάσεις

Η θεωρία των επενδύσεων και της εγκατάλειψης όπως συνήθως παρουσιάζεται στα μέσου επιπέδου μικροοικονομικά εγχειρίδια βασίζονται στις Marshallian έννοιες του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους και του βραχυπρόθεσμου μεταβλητού κόστους. Για την εταιρεία μας που είναι μοναδιαίου μεγέθους, το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος είναι το άθροισμα του λειτουργικού κόστους και του τόκου του εφάπαξ κόστους επένδυσης (C + r˙I). Η θεωρία των εγχειριδίων προτείνει σε μια εταιρεία να επενδύσει αν η τιμή υπερβεί αυτό το άθροισμα. Ομοίως, μια ενεργή εταιρεία θα πρέπει να εγκαταλείψει αν η τιμή γίνεται μικρότερη του μεταβλητού κόστους C. Όταν υπάρχει ρητό εφάπαξ κόστος E εγκατάλειψης, η εταιρεία θα πρέπει να λάβει υπόψη της τον τόκο γι' αυτό το κόστος και έτσι το κατώτατο όριο γίνεται (C – r˙E).

Με άλλα λόγια, η παραδοσιακή Marshallian ιδέα είναι να συγκριθεί το ποσοστό απόδοσης της επένδυσης [(P – C)/I] και αυτό της αποεπένδυσης [(C – P)/E] με την κανονική απόδοση r. Απόρροια αυτής της άποψης είναι η υπόθεση στατικών προσδοκιών – δηλαδή η τρέχουσα τιμή υποτίθεται ότι διατηρείται για πάντα. Αυτό μπορεί να είναι κατάλληλο για την ανάλυσης της μεταβολής κάποιας τιμής η οποία ήρθε ως έκπληξη και όταν η εταιρεία γνωρίζει με σιγουριά ότι κάτι τέτοιο δε θα ξανασυμβεί. Ωστόσο, τέτοιες μεταβολές στις τιμές είναι σπάνιες. Στις περισσότερες πραγματικές περιπτώσεις, οι συνθήκες ζήτησης (και κόστους) υφίστανται μια σταθερή μεταβολή όλο το χρόνο και η εταιρεία πρέπει να πάρει τις αποφάσεις της για επένδυση και μη επένδυση λαμβάνοντας υπόψη ότι το μέλλον είναι και θα είναι για πάντα αβέβαιο. Έτσι μια περισσότερο φυσική και θεωρητική προσέγγιση είναι να υποθέσουμε ότι η εταιρεία έχει λογικές προσδοκίες σχετικά με τον πιθανολογικό νόμο της μετακίνησης για το αβέβαιο περιβάλλον της. Το παραπάνω μοντέλο μας κάνει αυτό ακριβώς – οι αποφάσεις της εταιρείας είναι βέλτιστες και δίνονται από τη στοχαστική διαδικασία (1) για την τιμή.

Ας αναρωτηθούμε τώρα τι διαφορά κάνει το να δώσουμε στην εταιρεία λογικές παρά στατικές προσδοκίες. Πώς συγκρίνεται το βέλτιστο κατώτατο όριο P_H της επένδυσης με το Marshallian κατώτατο όριο (C + r˙I) και πώς συγκρίνεται το βέλτιστο κατώτατο όριο P_L της εγκατάλειψης μιας επένδυσης με το Marshallian κατώτατο όριο (C – r˙E); Για να απαντήσουμε αυτά, ξεκινούμε με τον ορισμό της συνάρτησης

$$G(P) \equiv V_1(P) - V_0(P) = -A_1 \cdot P^{\beta_1} + B_2 \cdot P^{\beta_2} + P/\delta - C/r \qquad (13)$$

Η συνάρτηση αυτή μπορεί να οριστεί επίσημα για όλες τις τιμές P. Προσέξτε ωστόσο, ότι η $V_1(P)$ ορίζει την αξία μιας ενεργούς εταιρείας μόνο για το διάστημα (P_L, ∞) ενώ η $V_0(P)$ ορίζει την αξία μιας αδρανούς εταιρείας μόνο για το διάστημα (0, P_H). Επομένως, για το διάστημα (P_L, P_H) μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη G(P) ως τη στοιχειώδη αξία της εταιρείας ώστε να γίνει ενεργή, δηλαδή πόσο πολύ αξίζει στην ενεργή παρά στην αδρανή κατάσταση.

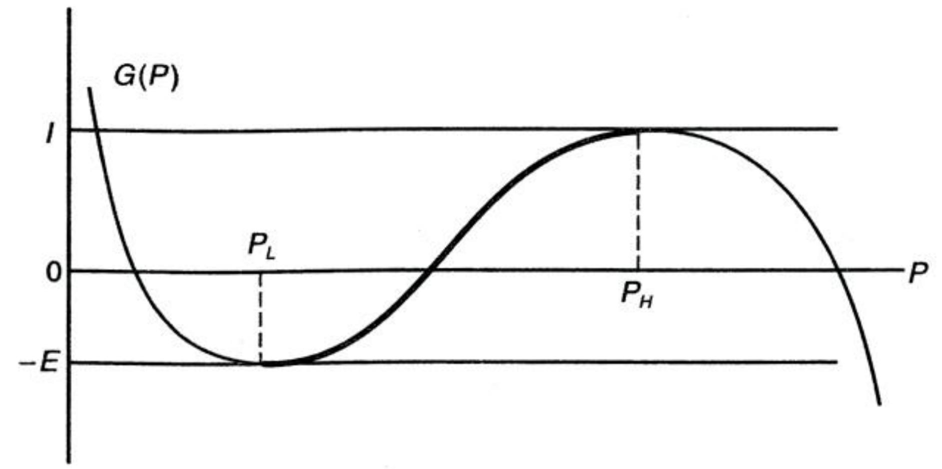
Για μικρές τιμές της P, ο κυρίαρχος όρος της G(P) είναι εκείνος με την αρνητική δύναμη β_2 της P. Αποτελεί φθίνουσα και κυρτή συνάρτηση. Για μεγάλες τιμές της P, ο κυρίαρχος όρος είναι εκείνος με τη δύναμη $\beta_1 > 1$. Αυτός ο όρος είναι αρνητικός, φθίνων και κοίλος. Για ενδιάμεσες τιμές, ο τρίτος όρος συμβάλλει στην αυξανόμενη μερίδα της G(P). Έτσι η γενική μορφή της G(P) είναι όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Οι οριακές συνθήκες που εφαρμόζονται για τα κατώτατα όρια μπορούν να γραφούν και για τη G(P). Οι συνθήκες ταιριάσματος τιμών (9) και (11) γίνονται

$$G(P_H) = I, \qquad G(P_L) = -E$$

ενώ οι συνθήκες ομαλής επικόλλησης (10) και (12) γίνονται

$$G'(P_H) = 0, \qquad G'(P_L) = 0$$



Σχήμα 3.1: *Καθορισμός των ορίων P_L και P_H*

Αναφερόμενοι στο παραπάνω σχήμα, οι συνθήκες αυτές συνεπάγονται ότι το γράφημα της G(P) θα έχει μια μορφή S για το εύρος από P_L μέχρι P_H και θα πρέπει να εφάπτεται στην οριζόντια γραμμή στο ύψος I στο άνω άκρο και να εφάπτεται στην οριζόντια γραμμή στο ύψος – E στο κάτω άκρο. Προσέξτε ότι η G(P) είναι κοίλη στο P_H και κυρτή στο P_L.

Τώρα ας εξετάσουμε το άνω όριο. Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση (3) το $V_0(P)$ από την εξίσωση (5) για το $V_1(P)$ έχουμε

$$\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot G''(P)+(r-\delta)\cdot G'(P)-r\cdot G(P)+P-C=0$$

Εξισώνοντας αυτό για $P = P_H$ και χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες που ισχύουν στο P_H βρίσκουμε ότι

$$-r\cdot I+P_H-C=\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot G''(P_H)\ >0$$

ή $P_H > C + r\cdot I$. Ομοίως στο άλλο άκρο, έχουμε $P_L < C - r\cdot E$. Με άλλα λόγια, τα βέλτιστα όρια με λογικές προσδοκίες απλώνονται μακρύτερα απ’ ό,τι τα αντίστοιχα Marshallian με στατικές προσδοκίες. Όταν οι αδρανείς εταιρείες λαμβάνουν υπόψη τους την αβεβαιότητα για τις μελλοντικές τιμές, είναι περισσότερο πρόθυμες να επενδύσουν και αν είναι ήδη ενεργές, είναι περισσότερο πρόθυμες να εγκαταλείψουν. Αυτό φυσικά είναι μια φανέρωση της τιμής της options για την παρούσα κατάσταση που συζητήσαμε σε δύο προηγούμενα κεφάλαια. Θα συζητήσουμε τις επιπτώσεις της πιο κάτω, αφού θα έχουμε εξετάσει την ποσοτική της σημασία στις αριθμητικές προσομοιώσεις.

3.1.Γ Συγκριτική Στατική

Αν και οι εξισώσεις που ορίζουν τα όρια είναι μη γραμμικές και δεν έχουν λύσεις κλειστής μορφής, οι ολικές διαφορικές εξισώσεις που αντιστοιχούν σε μικρές μεταβολές σε εξωγενείς παραμέτρους είναι ως συνήθως γραμμικές. Αυτό καθιστά σχετικά εύκολη την απόκτηση ποιοτικών συγκριτικών στατικών αποτελεσμάτων για τουλάχιστον ορισμένες παραμέτρους. Από την άλλη πλευρά, της παράμετροι που παρουσιάζουν ενδιαφέρον, κυρίως οι r, δ = μ – α και σ, μπαίνουν στη δευτεροβάθμια εξίσωση της οποίας οι ρίζες είναι οι δυνάμεις β_1 και β_2 και έτσι οι μεταβολές σε αυτές της παραμέτρους μπορεί να έχουν πολύπλοκες επιπτώσεις στη συνάρτηση G. Αυτό κάνει της αναλυτικές συγκριτικές στατικές εκφράσεις δύσκολες να ερμηνευθούν και θα πρέπει να καταφύγουμε σε αριθμητικές προσομοιώσεις. Οι της παράμετροι, I, E και C, έχουν απλούστερες επιδράσεις και λειτουργούν ώστε να καταδείξουν τη γενική μέθοδο. Θα εξετάσουμε λεπτομερώς το κόστος επένδυσης I, μιας και οι της δύο είναι παρόμοιες.

Το να ασχολούμαστε με τη συνάρτηση G παραμένει ακόμα χρήσιμο και βοηθάει στο να δείξουμε την εξάρτησή της από της συντελεστές τιμής της option. Έτσι γράφουμε $G(P, A_1, B_2)$. Οι συνθήκες ταιριάσματος των τιμών και ομαλής επικόλλησης είναι:

$$G(P_H, A_1, B_2) = I, \qquad G(P_L, A_1, B_2) = -E \tag{14}$$

$$G'(P_H, A_1, B_2) = 0, \qquad G'(P_L, A_1, B_2) = 0 \tag{15}$$

Τώρα ας υποθέσουμε ότι το I μεταβάλλεται κατά dI και ας εξετάσουμε πώς ανταποκρίνονται οι τέσσερις ενδογενείς μεταβλητές A_1, B_2, P_L και P_H. Ξεκινάμε με την πλήρη διαφόριση των συνθηκών ταιριάσματος των τιμών (14). Ορίζουμε τις μερικές παραγώγους της G με δείκτες ως συνήθως και γράφουμε $G_A(P_H, A_1, B_2) = G_A(H)$ κλπ για λόγους συντομίας. Παίρνουμε

$$G_A(H)dA_1 + G_B(H)dB_2 = dI$$
$$G_A(L)dA_1 + G_B(L)dB_2 = 0$$

Προσέξτε ότι οι όροι $G_p(H)dP_H$ και $G_p(L)dP_L$ έχουν εξαφανιστεί λόγω των συνθηκών ομαλής επικόλλησης (15). Επομένως το γενικό συγκριτικό στατικό σύστημα των τεσσάρων ενδογενών μεταβολών dA_1, dB_2, dP_L και dP_H στην πραγματικότητα χωρίζεται σε ένα απλούστερο σύστημα. Πρώτα λύνουμε τις παραπάνω δύο εξισώσεις για τις μεταβολές στους συντελεστές της τιμής της option dA_1 και dB_2. Στη συνέχεια μπορούμε να διαφορίσουμε πλήρως τις συνθήκες ομαλής επικόλλησης για να πάρουμε τις μεταβολές στα όρια dP_L και dP_H.

Προσέχοντας ότι $G_A(H) = -P_H^{\beta_1}$ κλπ, η λύση είναι

$$dA_1 = -P_L^{\beta_2} \cdot dI / \Delta, \qquad dB_2 = -P_L^{\beta_1} \cdot dI / \Delta$$

όπου

$$\Delta = P_H^{\beta_1} \cdot P_L^{\beta_2} - P_H^{\beta_2} \cdot P_L^{\beta_1}$$

το οποίο είναι θετικό επειδή $P_H > P_L$ και $\beta_1 > 0 > \beta_2$.

Τώρα διαφορίζουμε τη συνθήκη ομαλής επικόλλησης στο P_H στην εξίσωση (15) και γράφουμε

$$G_{PP}(H)dP_H + G_{PA}(H)dA_1 + G_{PB}(H)dB_2 = 0$$

το οποίο δίνει

$$G_{PP}(H)dP_H = -[\beta_1 \cdot P_H^{\beta_1 - 1} \cdot P_L^{\beta_2} - \beta_2 \cdot P_H^{\beta_2 - 1} \cdot P_L^{\beta_1}] \cdot dI / \Delta$$

Δεδομένου ότι η G(P) είναι κοίλη στο P_H, η $G_{pp}(H)$ είναι αρνητική και τότε $dP_H > 0$ όταν $dI > 0$. Το όριο των επενδύσεων αυξάνεται με το επενδυτικό κόστος, όπως θα περιμέναμε. Ομοίως, η P_L πέφτει καθώς το E αυξάνεται.

Με παρόμοιο τρόπο, η συνθήκη ομαλής επικόλλησης για το κάτω άκρο δίνει

$$G_{PP}(L)dP_L = -(\beta_1 - \beta_2) \cdot P_L^{\beta_1 + \beta_2 - 1} \cdot dI / \Delta$$

Δεδομένου ότι η G(P) είναι κυρτή στο P_L, η $G_{pp}(L)$ είναι θετική και τότε $dP_L < 0$ όταν $dI > 0$: το κατώτατο όριο για την εγκατάλειψη πέφτει όταν το κόστος της επένδυσης αυξάνεται. Αυτή τη σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ του κόστους και του κατωτάτου ορίου θα πρέπει επίσης να τη διαισθάνεται κανείς μετά από προβληματισμό. Η εταιρεία εγκαταλείπει ένα συνεχιζόμενο έργο με κάποια επιφυλακτικότητα εξαιτίας της τιμής της option. Με τη διατήρηση του έργου στη ζωή, η εταιρεία αποφεύγει να χρειάζεται να επιβαρυνθεί με το κόστος της επένδυσης για άλλη μια φορά αν η διαδικασία τιμών γίνει αρκετά ευνοϊκή στο μέλλον. Επομένως, όσο μεγαλύτερο είναι το κόστος της επένδυσης, τότε μεγαλύτερη είναι η αξία αυτής της option και τόσο μεγαλύτερη είναι η απροθυμία για εγκατάλειψη. Το αποτέλεσμα του ειδώλου – δηλαδή ότι το όριο P_H της επένδυσης αυξάνεται καθώς το κόστος εγκατάλειψης E αυξάνεται – είναι πιθανώς ακόμη πιο ξεκάθαρο. Η εταιρεία είναι περισσότερο απρόθυμη να αναλάβει το έργο αν θα έπρεπε να επιβαρυνθεί με μεγαλύτερο κόστος κλεισίματος στο μέλλον.

Αν αξιολογήσουμε αυτές τις συγκριτικές στατικές παραγώγους καθώς τα I και E πλησιάζουν το μηδέν, βρίσκουμε ότι και η P_H και η P_L τείνουν προς το C, αλλά το $dP_H/dI \to \infty$ και το $dP_L/dI \to -\infty$ και ομοίως για το E. Έτσι τα όρια εισροών και εκροών ξεκινούν να εξαπλώνονται πολύ γρήγορα ακόμη και για μικρά κόστη εισροών και εκροών. Επεκτείνοντας τις τέσσερις εξισώσεις (14) και (15) σε σειρές Taylor και κάνοντας λίγη κουραστική άλγεβρα, ο Dixit (1991) βρίσκει ότι

$$\log(P_H/P_L) = k \cdot (I + E)^{1/3} \qquad (16)$$

όπου το k είναι μια σταθερά. Με άλλα λόγια, τα κόστη εισροών και εκροών που είναι μικρά και τρίτης τάξης (ανάλογα του ϵ^3 όπου το ϵ είναι πολύ μικρό) παράγουν ένα κενό μεταξύ των κατωτάτων ορίων εισροών και εκροών το οποίο είναι πρώτης τάξης (και ανάλογο του ϵ). Έτσι τα πολύ μικρά εφάπαξ κόστη έχουν μια δυσανάλογα μεγάλη επίδραση στις αποφάσεις της εταιρείας.

Επιπλέον, η επίδραση από τα μικρά κόστη στα όρια είναι τελείως συμμετρική: το όριο εισροών επηρεάζεται από το κόστος εκροών ακριβώς το ίδιο όσο και από το κόστος εισροών. Για μεγαλύτερα μεγέθη, κάθε είδος κόστους θα επηρεάζει το «δικό» του κατώτατο όριο πιο πολύ. Ο λόγος είναι σαφής. Ας θεωρήσουμε μια εισροή κάποιας εταιρείας. Το κόστος εισόδου πρέπει να πληρωθεί άμεσα, ενώ το κόστος εξόδου επηρεάζει την απόφαση της εταιρείας για την είσοδο μόνο μέσο της προοπτικής ότι θα πρέπει να καταβληθεί κάποια στιγμή στο μέλλον. Εξαιτίας της αναγωγής, η άμεση επίδραση είναι η πιο ισχυρή. Ωστόσο, αν τα κόστη είναι πολύ μικρά, τα όρια είναι πολύ κοντά μεταξύ τους και η Brownian motion είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα φτάσει τα άλλα όρια πολύ γρήγορα. Επομένως, η διαφορά που υπάρχει λόγω της αναγωγής είναι μικρή και χάνεται στο όριο.

3.1.Δ Ένα παράδειγμα: Εισροές και εκροές στη βιομηχανία του χαλκού

Έχουμε δει ότι η αβεβαιότητα για τις μελλοντικές συνθήκες ζήτησης αυξάνει τη ζώνη αδράνειας μιας εταιρείας. Δηλαδή, προκαλεί στα κατώτατα όρια της βέλτιστης επένδυσης και εγκατάλειψης να απλωθούν πιο μακριά και χωριστά από τα παραδοσιακά Marshallian όρια. Πόσο πιο μεγάλη γίνεται αυτή η ζώνη αδράνειας στην πράξη; Είναι πραγματικό απαραίτητο να ληφθεί υπόψη η αμεταβλητότητα και η αβεβαιότητα όπως τις έχουμε ή θα μπορούσαν οι απλοί Marshallian κανόνες να παρέχουν μια αρκετά καλή προσέγγιση για τις περισσότερες αποφάσεις επένδυσης και εγκατάλειψης; Για να απαντήσουμε σε αυτές τις ερωτήσεις, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Θα εξετάσουμε την απόφαση για επένδυση σε μια νέα εγκατάσταση παραγωγής χαλκού – ένα συνδυασμένο ορυχείο, μεταλλουργείο και διυλιστήριο – και την απόφαση για οριστική εγκατάλειψη της εγκατάστασης που λειτουργεί σήμερα. Η τιμή του χαλκού ήταν ανέκαθεν αρκετά ασταθής. (Η τυπική απόκλιση των ετήσιων ποσοστιαίων μεταβολών στην τιμή του χαλκού ήταν από 20 έως 50 τοις εκατό κατά τη διάρκεια των δύο τελευταίων δεκαετιών.) Επιπλέον, το άνοιγμα ή το κλείσιμο ενός ορυχείου ή μεταλλουργείου συνεπάγεται μεγάλα εφάπαξ κόστη και έτσι οι παραγωγοί χαλκού πρέπει να πάρουν αυτές τις αποφάσεις εισροών και εκροών πολύ προσεκτικά, λαμβάνοντας υπόψη τους την αβεβαιότητα.

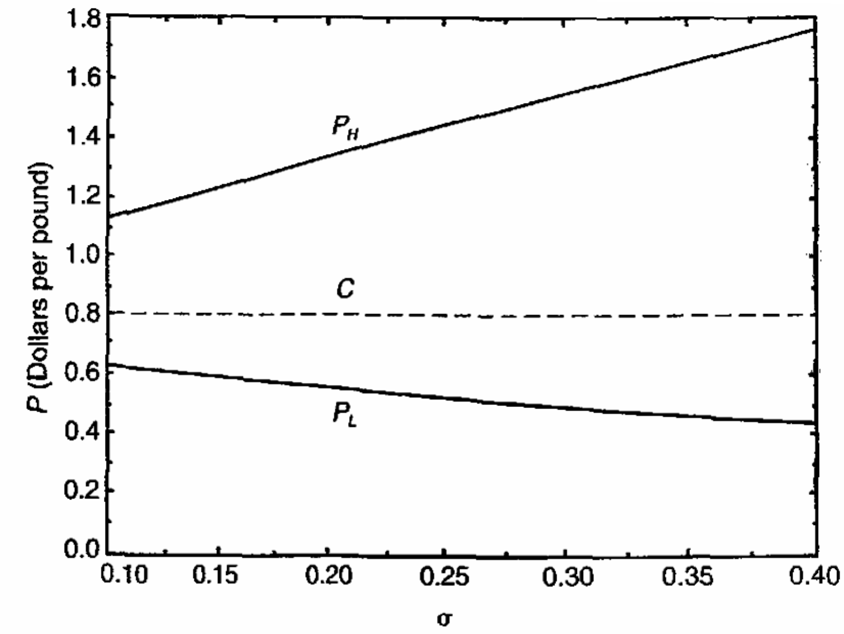
Στην πραγματικότητα, ένας παραγωγός με ένα λειτουργικό ορυχείο χαλκού έχει μια εναλλακτική option οριστικής εγκατάλειψης ή συνέχισης της λειτουργίας. Ένα ορυχείο χαλκού μπορεί να τεθεί σε αδράνεια προσωρινά και να ενεργοποιηθεί εκ νέου αργότερα όταν θα αυξηθεί η τιμή. Η προσωρινή αδρανοποίηση και η επανενεργοποίηση συνεπάγονται εφάπαξ κόστη (πρέπει να γίνει μια κατασκευή που να προστατεύει το ορυχείο από πλημμύρες ή καθιζήσεις όσο αυτό θα είναι ανενεργό και πρόσθετα έξοδα χρειάζονται επίσης για να ενεργοποιηθεί ξανά), καθώς επίσης και ένα συνεχές σταθερό κόστος (για την αντλία νερού, την πρόληψη παράνομης εισόδου κλπ). Ωστόσο, αν η επανενεργοποίηση είναι πιθανή στο όχι πολύ μακρινό μέλλον, αυτό μπορεί να είναι φθηνότερο από την εγκατάλειψη και στη συνέχεια κατασκευή ενός νέου ορυχείου από την αρχή. Στην επόμενη ενότητα, θα επεκτείνουμε το βασικό μας μοντέλο εισροών και εκροών ώστε να συμπεριλάβουμε τις πιθανότητες διακοπής της λειτουργίας και επανενεργοποίησης. Προς το παρόν όμως, θα αγνοήσουμε αυτήν την πρόσθετη option και θα εξετάσουμε μόνο την επένδυση και την εγκατάλειψη.

Ομοίως, ένας παραγωγός θα μπορούσε να ανοίξει ή να κλείσει ένα ορυχείο αλλά όχι ένα διυλιστήριο, αλλά για λόγους απλότητας θα αντιμετωπίσουμε την παραγωγή του εξευγενισμένου χαλκού ως μία ολοκληρωμένη λειτουργία.

Θα εξετάσουμε μια εγκατάσταση που παράγει 10 εκατομμύρια λίβρες (1 λίβρα = 0,45 kg) εξευγενισμένου χαλκού ανά χρόνο. Για να διατηρήσουμε την ανάλυση απλή, θα αγνοήσουμε το γεγονός ότι τα αποθέματα του ορυχείου είναι περιορισμένα και τελικά θα εξαντληθούν κάποια στιγμή. Θα υποθέσουμε, αντίθετα, ότι το ορυχείο μπορεί να λειτουργεί για πάντα. (Αυτό δεν αποτελεί κάποια πάρα πολύ ακραία υπόθεση, δεδομένου ότι τα περισσότερα ορυχεία χαλκού μπορούν να λειτουργούν για τουλάχιστον 20 ή 30 χρόνια.) Ένας λογικός αριθμός για το κόστος της οικοδομής (ορυχείο, μεταλλουργείο και διυλιστήριο) είναι I = 20 εκατομμύρια ευρώ και για το κόστος εγκατάλειψης (κυρίως για τον καθαρισμό και την αποκατάσταση του περιβάλλοντος) είναι E = 2 εκατομμύρια ευρώ. (Αυτοί καθώς και όλοι οι άλλοι αριθμοί είναι σε σταθερά ευρώ του 1992). Το μέσο μεταβλητό κόστος παραγωγής ποικίλλει μεταξύ των εταιρειών στις Ηνωμένες Πολιτείες και ακόμη περισσότερο ποικίλλει μεταξύ διαφορετικών χωρών. Εμείς θα θέσουμε το μεταβλητό κόστος σε C = 0,80 ευρώ ανά λίβρα, αλλά θα αλλάζουμε το κόστος αυτό ώστε να προσδιορίσουμε τον αντίκτυπό του στα κατώτατα όρια των εισροών και εκροών. (Για σύγκριση, το μέσο κόστος του χαλκού ήταν περίπου 1,00 ευρώ το 1992, αλλά στην περίοδο 1985 – 2002 έπεσε στα 0,60 ευρώ ανά λίβρα και ανήλθε κατόπιν σε 1,5 ευρώ ανά λίβρα.)

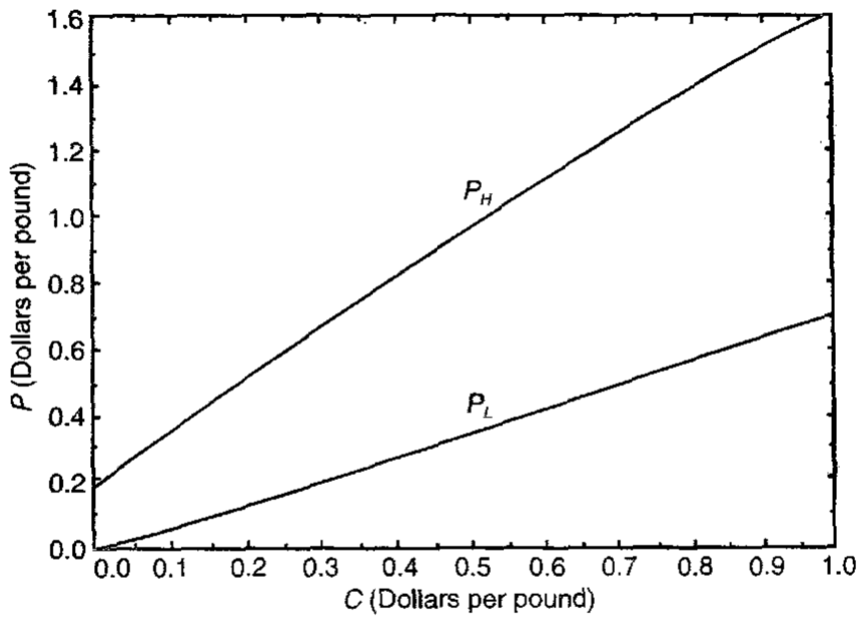
Μια λογική τιμή για το πραγματικό σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο ετήσιο ποσοστό επιστροφής για ένα ορυχείο ή διυλιστηρίου χαλκού είναι μ = 0,06, για το μέσο ποσοστό ευκολίας απόδοσης (ή έλλειμμα απόδοσης) είναι δ = μ – α = 0,04 και για το πραγματικό άνευ κινδύνου επιτόκιο έχουμε r = 0,04. Τέλος, θα πάρουμε το 0,2 ως τη τιμή βάσης για την παράμετρο μεταβλητότητας σ, αλλά θα εξετάσουμε τις τιμές αυτής της παραμέτρου στο εύρος από 0,1 έως 0,4, σύμφωνα με τις εκτιμήσεις που διαφέρουν στις διαφορετικές χρονικές περιόδους.

Με δεδομένες αυτές τις τιμές για τις παραμέτρους, οι εξισώσεις (9) έως (12) μπορούν να λυθούν αριθμητικά για τις σταθερές A_1 και B_2 και τα κατώτατα όρια εισροών και εκροών P_H και P_L. Το σχήμα 2 δείχνει τα κρίσιμα όρια εισροών και εκροών P_H και P_L ως συναρτήσεις της παραμέτρου μεταβλητότητας σ. Παρατηρήστε ότι για σ = 0,2, αυτά τα όρια είναι περίπου 1,35 ευρώ και 0,55 ευρώ αντίστοιχα. Για σύγκριση, αν δεν υπήρχε αβεβαιότητα για τις μελλοντικές τιμές (σ = 0), τα όρια θα ήταν 0,88 και 0,79 ευρώ. Έτσι μια πολύ μέτρια ποσότητα αβεβαιότητας προκαλεί τη δραματική αύξηση της ζώνης αδράνεια από (0,88 – 0,79 =) 0,09 ευρώ σε (1,35 – 0,55) = 0,80 ευρώ. Παρατηρήστε ότι αυτή η ζώνη αυξάνεται όσο το σ αυξάνεται. Αν το σ είναι 0,4, το εύρος της ζώνης αυτής είναι περίπου 1,30 ευρώ.

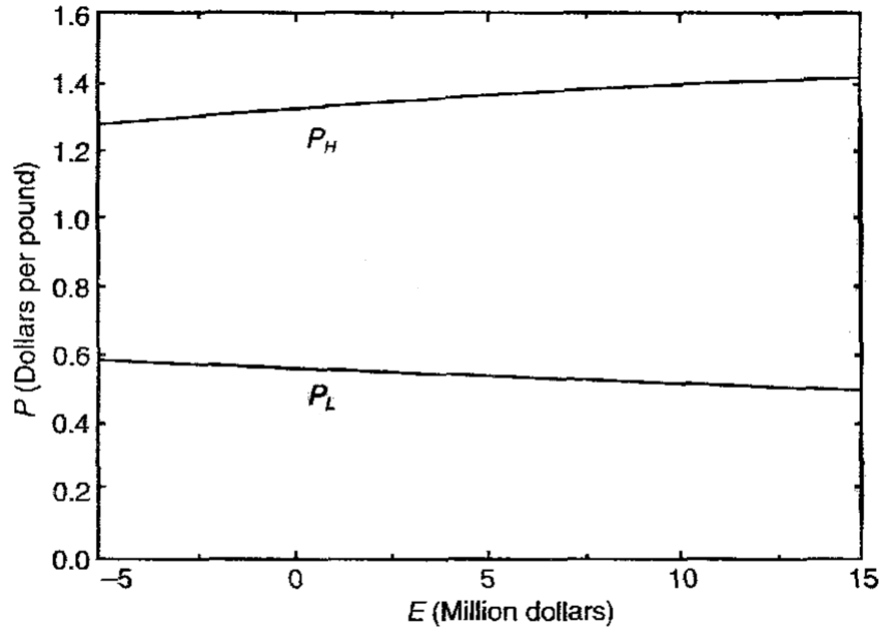


Σχήμα 3.2: *Χαλκός: όρια εισροών και εκροών ως συνάρτηση του σ*

Τα σχήματα 3 και 4 δείχνουν την εξάρτηση των κατωτάτων ορίων των εισροών και εκροών από το κόστος λειτουργίας C και από το εφάπαξ κόστος κλεισίματος E. Παρατηρήστε πως όσο το κόστος λειτουργίας αυξάνεται, τόσο η P_H όσο και η P_L αυξάνονται. Ένα υψηλότερο κόστος λειτουργίας μειώνει την αναμενόμενη ροή κερδών – και ως εκ τούτο την αξία – από το έργο και έτσι μια μεγαλύτερη τιμή απαιτείται πριν η εταιρεία γίνει πάλι πρόθυμη στο να επενδύσει. Επιπλέον, η εταιρεία θα εγκαταλείψει σε κάποια υψηλότερη τιμή του ορίου, επειδή θα χάσει περισσότερα χρήματα όταν το C είναι υψηλότερο.



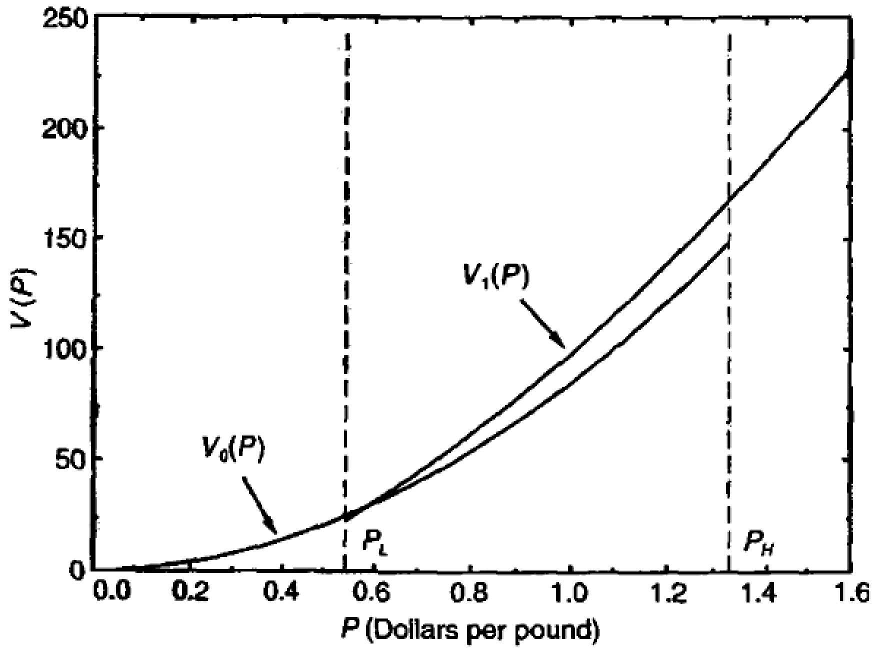
Σχήμα 3.3: *Όρια εισροών και εκροών ως συνάρτηση του λειτουργικού κόστους C για σ = 0,2*



Σχήμα 3.4: *Όρια εισροών και εκροών ως συνάρτηση του κόστους εγκατάλειψης Ε, για σ = 0,2*

Προσέξτε πως όταν το κόστος εγκατάλειψης Ε αυξάνεται, το όριο εισροών P_H αυξάνεται επίσης. Ο λόγος είναι πως για κάθε τιμή της P, ένα μεγαλύτερο Ε μειώνει την τιμή της option εγκατάλειψης από ένα ενεργό έργο και κατά συνέπεια μειώνει την αξία του έργου, το οποίο με τη σειρά του συνεπάγεται ότι η τιμή πρέπει να είναι μεγαλύτερη πριν η εταιρεία προθυμοποιηθεί να επενδύσει εξαρχής. Ομοίως, η αύξηση της Ε μειώνει το όριο εγκατάλειψης P_L. Η εταιρεία πρέπει να πληρώσει περισσότερα ώστε να διαθέσει την option εγκατάλειψης και έτσι η τιμή πρέπει να πέσει πριν η εταιρεία να γίνει πρόθυμη να εγκαταλείψει. Παρατηρήστε, ωστόσο, ότι ενώ η P_H αυξάνεται και η P_L πέφτει όταν το Ε αυξάνεται, δεν αυξάνονται και μειώνονται πάρα πολύ. Ο λόγος είναι ότι η αξία της option εγκατάλειψης καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από το σ και από το πολύ μεγαλύτερο κόστος εισροών Ι και δεν αλλάζει πάρα πολύ καθώς το Ε μεταβάλλεται.

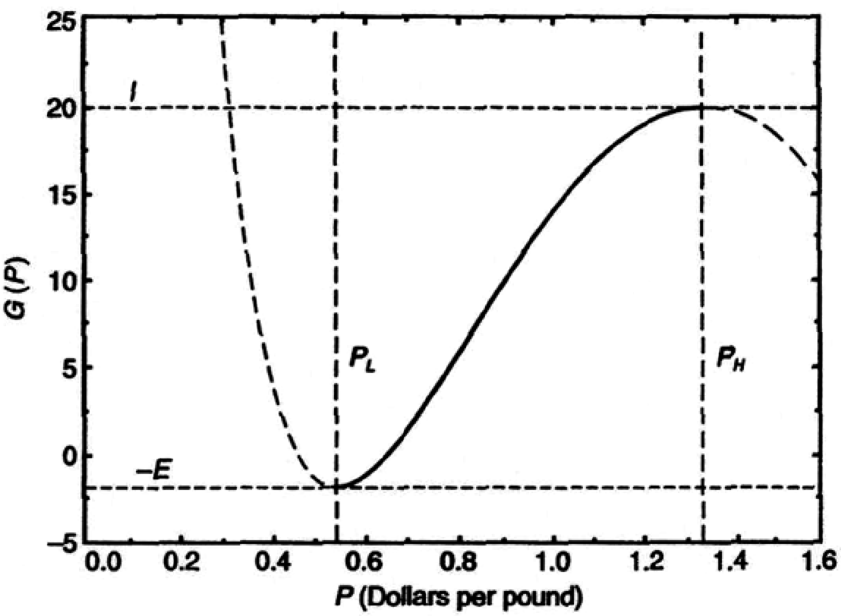
Το σχήμα 5 δείχνει την αξία $V_0(P)$ μια αδρανούς εταιρείας και την αξία $V_1(P)$ μιας ενεργής εταιρείας ως συναρτήσεις της τιμής P. (Χρησιμοποιήσαμε τις τιμές των παραμέτρων για τη βασική περίπτωση: Ι = 20 εκατομμύρια ευρώ, Ε = 2 εκατομμύρια ευρώ, C = 0,80 ευρώ ανά λίβρα, r = δ = 0,04 και σ = 0,2.) Επίσης φαίνονται τα όρια P_H και P_L. Σημειώστε ότι στο $P = P_L$, η $V_0(P)$ υπερβαίνει τη $V_1(P)$ κατά το κόστος εγκατάλειψης Ε = 2, δεδομένου ότι σε εκείνη την τιμή είναι βέλτιστο να διατεθεί η option εγκατάλειψης, αφήνοντας το $E + V_1$ και λαμβάνοντας τη V_0. Ομοίως, στο σημείο $P = P_H$ είναι βέλτιστο να επενδύσουμε και έτσι $V_1 = V_0 + I$.



Σχήμα 3.5: *$V_0(P)$ και $V_1(P)$ ως συνάρτηση της P*

Τέλος, το σχήμα 6 δείχνει τη συνάρτηση $G(P) = V_1(P) – V_0(P)$. Προσέξτε την καμπύλη που είναι μορφής S στην περιοχή αδράνειας ανάμεσα στα P_L και P_H, και το ότι εφάπτεται με την οριζόντια ευθεία I στο σημείο $P = P_H$ και με την οριζόντια ευθεία – E στο σημείο $P = P_L$.

Αυτό το παράδειγμα μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά των παραγωγών χαλκού στις Ηνωμένες Πολιτείες και αλλού κατά τη διάρκεια των δύο τελευταίων δεκαετιών. Σε περιόδους με πολύ χαμηλές τιμές (για παράδειγμα, στα μέσα της δεκαετίας του 1980, όταν οι τιμές του χαλκού είχαν πέσει στα χαμηλότερα επίπεδά τους σε πραγματικούς όρους από τη Μέση Ύφεση), οι εταιρείες συχνά συνέχιζαν να λειτουργούν ασύμφορα ορυχεία και μεταλλουργεία που είχαν ανοίξει όταν οι τιμές ήταν υψηλές. Σε άλλους χρόνους όταν οι τιμές ήταν υψηλές, οι εταιρείες δεν κατάφερναν να επενδύουν σε νέα ορυχεία ή να ανοίξουν εκ νέου κάποια φαινομενικά κερδοφόρα ορυχεία που είχαν κλείσει όταν οι τιμές ήταν χαμηλές. Αυτή η ανταπόκριση των παραγωγών στην αβεβαιότητα είχε επίδραση στο ίδιο το επίπεδο των τιμών. Η απροθυμία των εταιρειών να κλείσουν τα ορυχεία κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1980 όταν η ζήτηση ήταν αδύναμη επέτρεψε στην τιμή του χαλκού να πέσει ακόμη περισσότερο απ’ ό,τι θα έπεφτε διαφορετικά.



Σχήμα 3.6: $G(P) = V_1(P) - V_0(P)$

3.2 Διακοπή της λειτουργίας, επανενεργοποίηση και απόσυρση

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ένας παραγωγός χαλκού έχει κι άλλες options εκτός απ' αυτήν της μόνιμης εγκατάλειψης ενός λειτουργικού ορυχείου όταν η τιμή του χαλκού πέφτει. Αντ' αυτού, το ορυχείο θα μπορούσε να τεθεί σε μια κατάσταση προσωρινής αναστολής, επιτρέποντας την επανενεργοποίηση στο μέλλον με κάποιο εφάπαξ κόστος που είναι σαφώς μικρότερο του κόστους κατασκευής ενός νέου ορυχείου από την αρχή. Οι εργοστασιακές εγκαταστάσεις που είναι σε αδράνεια ή τα πλοία που παροπλίζονται είναι παραδείγματα αυτής της κατάστασης προσωρινής αναστολής.

Η διακοπή λειτουργίας, όπως η μόνιμη εγκατάλειψη, απαιτεί ένα εφάπαξ κόστος, το οποίο θα ορίσουμε ως E_M. Επίσης, εφόσον μια εργοστασιακή εγκατάσταση μπαίνει σε αδράνεια, η συντήρηση του κεφαλαίου απαιτεί μια χρηματοροή M. Η λειτουργία μπορεί να επανενεργοποιηθεί στο μέλλον με κάποιο περαιτέρω εφάπαξ κόστος R. Η διακοπή λειτουργίας έχει νόημα μόνο αν το κόστος συντήρησης M είναι μικρότερο του κόστους C της πραγματικής λειτουργίας και αν το κόστος επανενεργοποίησης R είναι μικρότερο του κόστους μιας νέας επένδυσης I. Θα υποθέσουμε ότι οι συνθήκες αυτές όντως πληρούνται. Ο στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε πώς η αξία ενός έργου εν λειτουργία, η αξία της ευκαιρίας για επένδυση σε ένα τέτοιο έργο και οι κανόνες λήψης αποφάσεων για την επένδυση, τη διακοπή λειτουργίας, την επανενεργοποίηση και την απόσυρση επηρεάζονται από τα διάφορα κόστη I, E_M, M, και R, καθώς επίσης και τη μεταβλητότητα της τιμής του προϊόντος.

Όπως και πριν, θα υποθέσουμε ότι η τιμή ακολουθεί τη γεωμετρική Brownian motion (1). Η εταιρεία πρέπει να αποφασίσει αν και πότε το εργοστάσιο θα πρέπει να αδρανοποιηθεί, λαμβάνοντας υπόψη αυτήν την αβεβαιότητα για τις μελλοντικές τιμές. Η διαίσθηση προτείνει το ακόλουθο γενικό σχήμα. Ξεκινώντας από μια κατάσταση στην οποία δεν έχει εγκατασταθεί κάποιο είδος κεφαλαίου, η εταιρεία θα κάνει την επένδυση αν η τιμή αυξάνεται μέχρι ένα όριο P_H. Η εταιρεία θα αδρανοποιήσει το έργο εν λειτουργία αν η τιμή πέσει σε κάποιο άλλο όριο P_M. Με δεδομένου ένα έργο σε αδράνεια, η εταιρεία θα το επανενεργοποιήσει αν η τιμή αυξηθεί μέχρι ένα τρίτο όριο P_R. Εφόσον το κόστος της επανενεργοποίησης είναι μικρότερο απ' αυτό της επένδυσης από την αρχή, περιμένουμε ότι $P_R < P_H$. Αν αντιθέτως η τιμή πέφτει, καθιστώντας την επανενεργοποίηση ένα αρκετά απίθανο ή μακρινό γεγονός, υπάρχει ένα τέταρτο όριο P_S στο οποίο το αδρανές έργο θα καταργηθεί τελείως για εξοικονόμηση του κόστους συντήρησης. Τότε η εταιρεία θα επανέλθει στην αρχική κατάσταση αναμονής.

Φυσικά όλα αυτά τα όρια P_H, P_M, P_R και P_S είναι ενδογενή και πρέπει να προσδιοριστούν με βάση τις κύριες παραμέτρους. Ακόμη πιο ουσιαστικά, πρέπει να αναρωτηθούμε εάν η εταιρεία το θεωρήσει βέλτιστο να χρησιμοποιήσει την option διακοπής λειτουργίας καθόλου. Αν το κόστος συντήρησης M είναι αρκετά υψηλό, ή το κόστος επανενεργοποίησης R δεν είναι επαρκώς χαμηλότερο από το κόστος μιας πλήρους επένδυσης I, τότε η εταιρεία θα μπορούσε να το θεωρήσει καλύτερο να θέσει άμεσα σε αδράνεια ένα έργο εν λειτουργία αν η τιμή χτυπά στο κατώτατο όριο P_L. Σε αυτήν την περίπτωση βρισκόμαστε πίσω στο μοντέλο της προηγούμενης ενότητας. Πρέπει να προσδιορίσουμε ενδογενώς αν η διακοπή λειτουργίας λογαριάζεται στη βέλτιστη στρατηγική της εταιρείας.

3.2.Α Κανόνες για βέλτιστες αλλαγές

Στην προηγούμενη ενότητα ορίσαμε το κόστος εγκατάλειψης ενός έργου εν ζωή ως E. Έστω τώρα ότι είναι E_M το κόστος διακοπής της λειτουργίας ενός έργου και ότι E_S είναι το κόστος απόσυρσης ενός έργου που είναι ήδη σε αδράνεια. (Στην περίπτωση ενός ορυχείου, το πρώτο μπορεί να είναι το κόστος της απόλυσης των ανθρακωρύχων και το τελευταίο μπορεί να είναι το κόστος της αποκατάστασης του χώρου. Στην περίπτωση ενός πλοίου, το τελευταίο μπορεί να είναι αρνητικό, αντιπροσωπεύοντας την αξία του παλιοσίδερου.) Προκειμένου να διατηρήσουμε την έκθεσή μας απλή, θα υποθέσουμε ότι $E_M + E_S = E$ και έτσι το κόστος της άμεσης εγκατάλειψης ενός ενεργού έργου είναι ακριβώς το άθροισμα του κόστους από τη διακοπή της λειτουργίας πρώτα και στη συνέχεια της του κόστους εγκατάλειψης του αδρανούς έργου. Στην πράξη, η μετάβαση από ένα έργο σε λειτουργία στην ολική απόσυρση μπορεί να είναι περισσότερο ή λιγότερο δαπανηρή όταν γίνεται μέσω του σταδίου της διακοπής της λειτουργίας. Οι δαπάνες για την προετοιμασία ενός πλοίου και την μετακίνησή του από και προς τη θέση παροπλισμού μπορεί να πρέπει να συμβούν δύο φορές, αλλά μπορεί να υπάρχει κάποια εξοικονόμηση στα κόστη απόλυσης εργατών αν η πιο σταδιακή πορεία επιτρέπει την επιβολή μείωσης προσωπικού να επιτευχθεί μέσω συνταξιοδοτήσεων ή παραιτήσεων.

Ανάλογες εκτιμήσεις ισχύουν για το κόστος επένδυσης I. Κατ' αρχάς, μπορεί κανείς να φανταστεί την εγκατάσταση ενός έργου στην παροπλισθείσα κατάσταση με κόστος J και στη συνέχεια την ενεργοποίηση κάποια στιγμή αργότερα με κόστος R. Ωστόσο, βλέπουμε λίγο λόγο για τον οποίο αυτή η έμμεση διαδρομή να πρέπει να είναι φθηνότερη από την απλή επένδυση σε ένα έργο εν λειτουργία. Ως εκ τούτου η εταιρεία δε θα το θεωρήσει ποτέ βέλτιστο να πάρει αυτή τη διαδρομή. Δε θα επενδύσει ποτέ σε ένα αδρανές έργο. Με την αναβολή της επένδυσης μέχρι τη στιγμή της λειτουργίας, μπορεί να καθυστερήσει τις δαπάνες του πρώτου τμήματος J του κόστους του κεφαλαίου και να εξοικονομήσει από τη ροή M του κόστους συντήρησης.

Αυτό μας αφήνει μια αλλαγή λιγότερη για να εξετάσουμε τις έξι πιθανές αλλαγές που είναι αντιληπτές στις τρεις καταστάσεις. Από τις υπόλοιπες πέντε αλλαγές – αδράνεια σε λειτουργία, λειτουργία σε διακοπή, διακοπή σε απόσυρση, διακοπή σε λειτουργία και λειτουργία σε απόσυρση – οι τέσσερις πρώτες χρησιμοποιούνται αν η διακοπή είναι στην πραγματικότητα ένα μέρος της βέλτιστης στρατηγικής. Διαφορετικά χρησιμοποιούνται μόνο η πρώτη και η τελευταία. Προχωρούμε για λίγο στην υπόθεση ότι όταν η τιμή πέφτει σε ένα ορισμένο σημείο, χρησιμοποιείται η διακοπή της λειτουργίας και στη συνέχεια προσδιορίζεται τα όρια ισχύος κατά τη διάρκεια της ανάλυσης.

Θα συνεχίσουμε να ορίζουμε τις καταστάσεις αδράνειας και λειτουργίας με τους δείκτες 0 και 1 αντίστοιχα και εισάγουμε έναν πρόσθετο δείκτη m για την κατάσταση διακοπής της λειτουργίας. Βρίσκουμε την αξία της εταιρείας σε κάθε κατάσταση με κατάλληλους συνδυασμούς με το αναμενόμενο κέρδος ή τις ροές κόστους και των options αλλαγής. Η μέθοδος είναι ακριβώς η ίδια με αυτή που περιγράφτηκε τόσο πριν, όσο και στα προηγούμενα κεφάλαια και γι’ αυτό θα σκιαγραφήσουμε την ανάλυση και θα παραλείψουμε πολλές λεπτομέρειες.

Η εταιρεία μπορεί να είναι σε κατάσταση αδράνειας για το εύρος τιμών (0, P_H). Τότε η αξία της δίνεται για άλλη μια φορά από την εξίσωση (4):

$$V_0(P) = A_1 \cdot P^{\beta_1}$$

όπου το A_1 είναι μια σταθερά που πρέπει να προσδιοριστεί. Αυτή είναι ακριβώς η αξία της option επένδυσης. Έχουμε, ως συνήθως, απαλείψει τον όρο με την αρνητική δύναμη β_2 χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $V_0(P)$ πρέπει να τείνει προς το μηδέν όταν η P τείνει στο μηδέν επίσης.

Ομοίως, η κατάσταση λειτουργίας μπορεί να διατηρηθεί στο διάστημα (P_L, ∞), με την αξία της εταιρείας να δίνεται και πάλι από την εξίσωση (6):

$$V_1(P) = B_2 \cdot P^{\beta_2} + P/\delta - C/r$$

όπου το B_2 μένει να προσδιοριστεί. Στο μοντέλο που αναπτύξαμε στην προηγούμενη ενότητα, το $B_2 \cdot P^{\beta_2}$ αντιπροσώπευε την αξία της option εγκατάλειψης. Τώρα αυτός ο όρος είναι η αξία της option διακοπής της λειτουργίας. Όπως και πριν, οι άλλοι δύο όροι δίνουν την αναμενόμενη παρούσα αξία από τη συνέχιση των λειτουργιών για πάντα. Φυσική η option διακοπής της λειτουργίας αποκτά την αξία της από τις άλλες δυνατότητες επανενεργοποίησης ή απόσυρσης.

Η κατάσταση διακοπής λειτουργίας μπορεί να συνεχίσει πέρα από κάποιο εύρος τιμών (P_S, P_R). Δεδομένου ότι ούτε το μηδέν ούτε το άπειρο περιλαμβάνονται στο εύρος αυτό, δε μπορούμε να εξαλείψουμε είτε τη θετική είτε την αρνητική δύναμη στο τμήμα της λύσης για την αξία της option. Επομένως η αξία του έργου που έχει διακοπεί δίνεται από τη σχέση

$$V_m(P) = D_1 \cdot P^{\beta_1} + D_2 \cdot P^{\beta_2} - M/r \qquad (17)$$

όπου οι σταθερές D_1 και D_2 πρέπει να προσδιοριστούν. Ο πρώτος όρος στην εξίσωση (17) είναι η αξία της option επανενεργοποίησης του έργου που έχει σταματήσει. Ο δεύτερος όρος είναι η αξία της option απόσυρσης του έργου. Τέλος, ο τελευταίος όρος είναι απλά το κεφαλαιοποιημένο κόστος συντήρησης, υποθέτοντας ότι το έργο παραμένει σταματημένο για πάντα.

Σε κάθε σημείο αλλαγής, έχουμε τις κατάλληλες συνθήκες ταιριάσματος των τιμών και ομαλής επικόλλησης. Για την αρχική επένδυση, οι συνθήκες αυτές είναι

$$V_0(P_H) = V_1(P_H) - I, \qquad V_0'(P_H) = V_1'(P_H)$$

Για τη διακοπή της λειτουργίας, οι συνθήκες είναι

$$V_1(P_M) = V_m(P_M) - E_M, \qquad V_1'(P_M) = V_m'(P_M)$$

Για την επανενεργοποίηση

$$V_m(P_R) = V_1(P_R) - R, \qquad V_m'(P_R) = V_1'(P_R)$$

Τέλος, για την απόσυρση

$$V_m(P_S) = V_0(P_S) - E_S, \qquad V_m'(P_S) = V_0'(P_S)$$

Αυτό το σύστημα των οκτώ εξισώσεων προσδιορίζει τα τέσσερα όρια P_H, P_M, P_R και P_S και τους τέσσερις συντελεστές της τιμής της option A_1, B_2, D_1, D_2. Μπορούμε να λύσουμε τις εξισώσεις τυπικά, αλλά στη συνέχεια θα πρέπει να αναρωτηθούμε αν η λύση έχει οικονομικό νόημα και επομένως να προσδιορίσουμε τα όρια στο εύρος των παραμέτρων όπου η option διακοπής λειτουργίας χρησιμοποιείται στην πράξη.

Το πιο ευοίωνο σημείο εκκίνησης είναι η αλληλεπίδραση μεταξύ διακοπής λειτουργίας και επανενεργοποίησης. Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω συναρτησιακούς τύπους, οι τέσσερις εξισώσεις σε αυτά τα δύο όρια γίνονται

$$-D_1 P_R^{\beta_1} + (B_2 - D_2) \cdot P_R^{\beta_2} + P_R/\delta - (C-M)/r = R \tag{18}$$

$$-\beta_1 \cdot D_1 \cdot P_R^{\beta_1 - 1} + \beta_2 \cdot (B_2 - D_2) \cdot P_R^{\beta_2 - 1} + 1/\delta = 0 \tag{19}$$

$$-D_1 P_M^{\beta_1} + (B_2 - D_2) \cdot P_M^{\beta_2} + P_M/\delta - (C-M)/r = -E_M \tag{20}$$

$$-\beta_1 \cdot D_1 P_M^{\beta_1 - 1} + \beta_2 \cdot (B_2 - D_2) \cdot P_M^{\beta_2 - 1} + 1/\delta = 0 \tag{21}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε το παραπάνω ως ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τους τέσσερις αγνώστους D_1, $(B_2 - D_2)$, P_R και P_M και να το λύσουμε μόνο του. Επιπλέον, το σύστημα έχει ακριβώς την ίδια μορφή με εκείνο με το οποίο εργαστήκαμε στην προηγούμενη ενότητα για την περίπτωση των επένδυσης και της εγκατάλειψης χωρίς την option διακοπής λειτουργίας. Συγκρίνουμε τις εξισώσεις από (18) έως (21) με τις εξισώσεις από (9) έως (12) πιο πάνω. Πρέπει να επανερμηνεύσουμε το R ως το κόστος της επένδυσης, το E_M ως το κόστος εγκατάλειψης και το (C – M) ως το κόστος λειτουργίας. Τότε το P_R είναι το όριο επένδυσης από την προηγούμενη ενότητα και το P_M είναι όπως το όριο εγκατάλειψης.

Για να συνεχίσουμε την αναλογία με το προηγούμενο μοντέλο, ας ορίσουμε το H(I, E, C) ως το άνω όριο και το L(I, E, C) το κάτω όριο που επιλύουν το σύστημα επένδυσης – εγκατάλειψης, καθένα εκφρασμένο ως συνάρτηση του εφάπαξ ποσού και των ροών κόστους. Θυμηθείτε τα συγκριτικά στατικά αποτελέσματα: και οι δύο συναρτήσεις H και L αυξάνονται στις συζητήσεις για το κόστος ροής C, η συνάρτηση H αυξάνεται στις συζητήσεις για τα εφάπαξ ποσά I και E, ενώ η συνάρτηση L μειώνεται σε αυτές τις δύο. Τώρα τα όρια της επανενεργοποίησης και της διακοπής λειτουργίας του παρόντος μοντέλου μας μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$P_R = H(R, E_M, C - M), \qquad P_M = L(R, E_M, C - M)$$

Γυρίζουμε τώρα στις υπόλοιπες τέσσερις εξισώσεις στο σύστημα των οκτώ εξισώσεων που έχουμε πιο πάνω. Οι συνθήκες ταιριάσματος των τιμών και ομαλής επικόλλησης για τη νέα επένδυση είναι γνωστές:

$$-A_1 P_H^{\beta_1} + B_2 \cdot P_H^{\beta_2} + P_H / \delta - C / r = \mathrm{I} \tag{22}$$

$$-\beta_1 \cdot A_1 \cdot P_H^{\beta_1 - 1} + \beta_2 \cdot B_2 \cdot P_H^{\beta_2 - 1} + 1/\delta = 0 \tag{23}$$

Αυτές οι συνθήκες στο όριο της απόσυρσης γίνονται

$$(D_2 - A_2) P_S^{\beta_1} + D_2 \cdot P_S^{\beta_2} - M / r = -E_S \tag{24}$$

$$-\beta_1 (D_1 - \cdot A_1) \cdot P_S^{\beta_1 - 1} + \beta_2 \cdot D_2 \cdot P_S^{\beta_2 - 1} = 0 \tag{25}$$

Αυτές οι εξισώσεις έχουν έξι αγνώστους – τα όρια P_H, P_S και τους συντελεστές A_1, B_2, $(D_1 - A_1)$ και D_2. Ωστόσο, η λύση για την πρώτη ομάδα των τεσσάρων παραπάνω εξισώσεων μας έδωσε δύο σχέσεις για τους συντελεστές. Ξέρουμε ότι $D_1 = (D_1 - A_1) + A_1$ και $(B_2 - D_2)$. Επομένως μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη λύση.

Αυτό το σύστημα είναι πολύ περίπλοκο ώστε να κατανοηθεί αναλυτικά και έτσι θα παρουσιάσουμε κάποιες αριθμητικές προσομοιώσεις που παρέχουν καλύτερη αντίληψη για τη φύση της λύσης. Ωστόσο, η διαίσθηση προτείνει ορισμένες γενικές ιδιότητες της λύσης. Πρώτα, αν το M και το R είναι και τα δύο μηδέν, τότε η διακοπή λειτουργίας ισοδυναμεί με μια ανέξοδη αναστολή λειτουργίας και επιστρέφουμε στο βασικό μοντέλο των McDonald – Siegel (1985) του προηγούμενου κεφαλαίου. Στη συνέχεια οι ενεργοποιητές της διακοπής λειτουργίας και της επανενεργοποίησης συγκλίνουν και οι δύο στο C και ο ενεργοποιητής της απόσυρσης καταρρέει προς το μηδέν. Τώρα θα εξετάσουμε την αύξηση του R και M σταδιακά, ένα κάθε φορά.

Όταν το R αυξάνεται και το M μένει σταθερό, το όριο επανενεργοποίησης P_R θα αυξηθεί και το όριο διακοπής λειτουργίας P_M θα πέσει, ακριβώς όπως συνέβη και με τα κατώτατα όρια επένδυσης και εγκατάλειψης νωρίτερα σε αυτό το κεφάλαιο όταν αυξήθηκε το κόστος της επένδυσης. Το κατώτατο όριο P_R για νέα επένδυση θα αυξηθεί. Όταν η επανενεργοποίηση είναι πιο δαπανηρή, η option διακοπής της λειτουργίας είναι λιγότερο χρήσιμο και επομένως η εταιρεία είναι περισσότερο απρόθυμη να επενδύσει. Τέλος, το κατώτατο όριο απόσυρσης P_S θα αυξηθεί και αυτό. Όταν η επανενεργοποίηση είναι πιο δαπανηρή, η εταιρεία δε θα συνεχίσει ένα έργο που έχει διακοπεί το ίδιο πρόθυμα όταν η τιμή πέφτει.

Καθώς συνεχίζουμε να αυξάνουμε το R, το κατώτατο όριο διακοπής P_M πέφτει και το όριο απόσυρσης P_S αυξάνεται. Για να είναι η διακοπή λειτουργίας μέρος της βέλτιστης στρατηγικής, πρέπει να έχουμε $P_M > P_S$. Επομένως η τιμή του R όπου αυτά τα δύο όρια συναντώνται ορίζει το σύνορο του χώρου της παραμέτρου όπου η διακοπή λειτουργίας παύει να είναι σχετική. Γράφουμε P_C για την κοινή τιμή αυτών των δύο σε αυτό το σύνορο. Προσθέτουμε τις οριακές συνθήκες ταιριασμάτων

των τιμών (20) και (24) που ικανοποιούνται από την κοινή P_C και ομοίως για τις συνθήκες ομαλή επικόλλησης (21) και (25) και βρίσκουμε

$$-A_1 P_C^{\beta_1} + B_2 \cdot P_C^{\beta_2} + P_C / \delta - C / r = -(E_M + E_S) = -E$$

$$-\beta_1 \cdot A_1 \cdot P_C^{\beta_1 - 1} + \beta_2 \cdot B_2 \cdot P_C^{\beta_2 - 1} + 1/\delta = 0$$

Αυτές είναι ακριβώς οι εξισώσεις εγκατάλειψης (11) και (12) οι οποίες, μαζί με το αντίστοιχο ζεύγος εξισώσεων για την επένδυση (9) και (10), ικανοποιούνταν από τα όρια P_H και P_L νωρίτερα σε αυτό το κεφάλαιο όταν η διακοπή λειτουργίας δεν ήταν καθόλου διαθέσιμη. Έτσι η όλη ιστορία ταιριάζει μαζί όπως θα έπρεπε. Για αρκετά υψηλές τιμές του R, η εταιρεία αγνοεί την πιθανότητα της διακοπής της λειτουργίας και αλλάζει με βέλτιστο τρόπο μεταξύ αδρανής και ενεργούς κατάστασης όπως πριν.

Στη συνέχεια κρατάμε το R σταθερό και αυξάνουμε το M. Αυτό μειώνει το (C – M), τη ροή εξοικονόμησης κόστους από τη διακοπή λειτουργίας. Επομένως τόσο το P_R όσο και το P_M πέφτουν. Η εταιρεία θα διακόψει ένα έργο σε λειτουργία λιγότερο εύκολα και θα επανενεργοποιήσει ένα σταματημένο έργο πιο εύκολα. Ωστόσο, τα P_H και P_S θα αυξηθούν. Η εταιρεία θα είναι πιο διστακτική να επενδύσει γενικά και θα διαλύσει ένα σταματημένο έργο με περισσότερη ευκολία. Για άλλη μια φορά μια φθίνουσα P_M και μια αυξανόμενη P_S θα συναντηθούν όταν το M αυξάνεται σε ένα κρίσιμο επίπεδο. Για τυχόν μεγαλύτερες τιμές του M, η διακοπή λειτουργίας δε θα χρησιμοποιηθεί.

Θα υπάρχει επίσης μια εξισορρόπηση μεταξύ των κρίσιμων τιμών R και M που ορίζουν τα σύνορα της χρήσης της διακοπής λειτουργίας. Όταν το R είναι μεγαλύτερο, η κρίσιμη τιμή του M θα είναι μικρότερη και αντίστροφα.

3.2.Β Αριθμητικά Αποτελέσματα

Τώρα θα στραφούμε σε αριθμητικές λύσεις για να επιβεβαιώσουμε αυτές τις διαισθήσεις. Οι παράμετροι που έχουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι η ροή του κόστους συντήρησης M και το κόστος επανενεργοποίησης R. Για να συγκεντρωθούμε σε αυτές, υποθέτουμε για το υπόλοιπο αυτής της έκθεσης ότι τα κόστη διακοπής και διάλυσης E_M και E_S είναι και τα δύο μηδέν. Τότε το ίδιο συμβαίνει και με το άθροισμά τους, δηλαδή για το κόστος άμεσης εγκατάλειψης E. Σύντομα θα παρουσιάσουμε ένα άλλο αριθμητικό παράδειγμα που δείχνει τις επιδράσεις από το να κάνουμε τις παραμέτρους αυτές μη μηδενικές.

Ομαλοποιούμε στο C = 1. Υποθέτουμε μια εταιρεία ουδετέρου κινδύνου, με r = 0,05. Η διαδικασία τιμών έχει α = 0 και σ = 0,2. Τότε μ = r = 0,05 και δ = μ – α = 0,05. Το εφάπαξ κόστος της επένδυσης είναι I = 2 και δεν υπάρχει εφάπαξ κόστος για αποεπένδυση και έτσι E = 0. με αυτούς τους αριθμούς και αγνοώντας την πιθανότητα διακοπής λειτουργίας, τα κατώτατα όρια της επένδυσης και της εγκατάλειψης προκύπτουν να είναι P_H = 1,5977 και P_L = 0,7135.

Τώρα επιτρέπουμε τη διακοπή της λειτουργίας και θεωρούμε δύο περιπτώσεις: M = 0,01 και M = 0,05. Για την καθεμιά, θεωρούμε ένα εύρος τιμών του

R. Οι τιμές που προκύπτουν για τα τέσσερα όρια φαίνονται στον Πίνακα 1. Οι επιδράσεις των μεταβολών του R για σταθερό M μπορούν να τα δει κανείς χωριστά για κάθε περίπτωση και με λεπτομέρειες εκεί. Στην περίπτωση 1, το κόστος συντήρησης είναι χαμηλό (M = 0,01). Τώρα χρησιμοποιείται η διακοπή λειτουργίας για κάποιο εύρος τιμών μέχρι το κρίσιμο όριο $\overline{R} \approx 1{,}76$. Μόλις το R υπερβεί το $\overline{R}$, η διακοπή της λειτουργίας δε θα χρησιμοποιηθεί ποτέ. Καθώς το R αυξάνεται πάνω από το εύρος 0 μέχρι $\overline{R}$:

1) αυξάνεται η P_H στο επίπεδό της με την απουσία της διακοπής λειτουργίας
2) μειώνεται η P_M και η P_S αυξάνεται μέχρι οι δυο τους να συναντηθούν στο P_L, όταν $R = \overline{R}$
3) αυξάνεται η P_R, μόνο και μόνο για να γίνει επουσιώδης όταν το R φτάσει το $\overline{R}$.

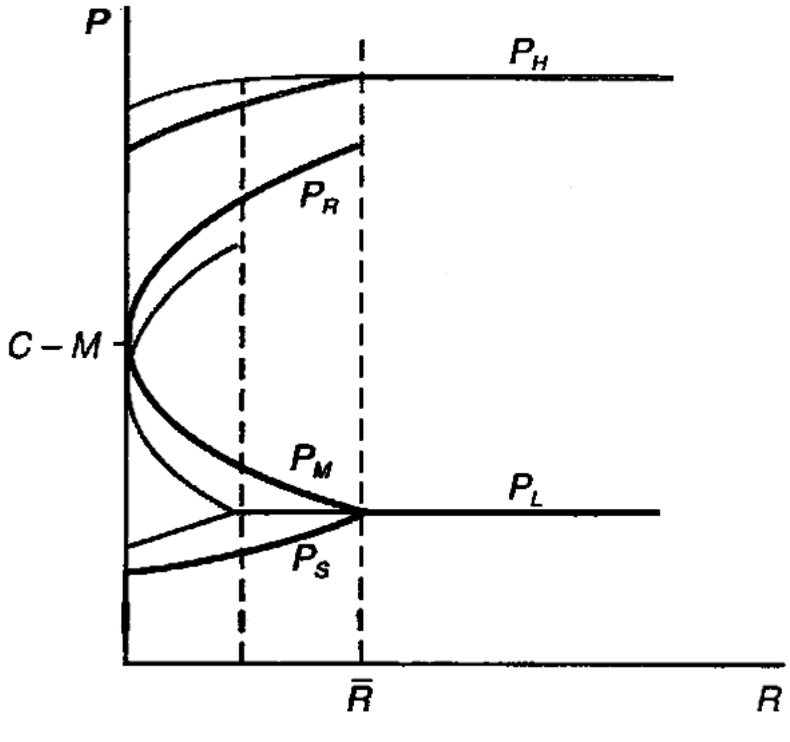
Πίνακας 3.1. *Κατώτατα όρια διακοπής λειτουργίας και απόσυρσης*
(Παράμετροι: r = 0,05, δ = 0,05, σ = 0,2, C = 1, I = 2, E = 0)

Περίπτωση 1: Χαμηλότερο κόστος M = 0,01				
R	**P_H**	**P_R**	**P_M**	**P_S**
0,2	1,557	1,202	0,8322	0,2937
0,4	1,568	1,272	0,7987	0,3171
0,6	1,576	1,325	0,7770	0,3424
0,8	1,582	1,372	0,7608	0,3713
1,0	1,587	1,413	0,7478	0,4061
1,2	1,591	1,451	0,7369	0,4498
1,4	1,594	1,487	0,7276	0,5085
1,6	1,597	1521	0,7195	0,5955
1,7634	1,598	1,548	0,7135	0,7135

Περίπτωση 2: Υψηλότερο κόστος M = 0,05				
R	**P_H**	**P_R**	**P_M**	**P_S**
0,1	1,577	1,108	0,8246	0,5240
0,2	1,583	1,157	0,7968	0,5430
0,3	1,587	1,194	0,7783	0,5612
0,4	1,590	1,225	0,7644	0,5793
0,5	1,592	1,253	0,7530	0,5978
0,6	1,594	1,278	0,7434	0,6170
0,7	1,596	1,301	0,7351	0,6371
0,8	1,597	1323	0,7278	0,6584
0,9	1,597	1,343	0,7212	0,6811
1,0307	1,598	1,370	0,7135	0,7135

Στην περίπτωση 2, το κόστος συντήρησης είναι μεγαλύτερο (M = 0,05). Τώρα η διακοπή λειτουργίας είναι απαραίτητη για κάποιο μικρότερο εύρος. Το $\overline{R}$ είναι μόλις λίγο μεγαλύτερο του 1.

Το γενικό σχέδιο είναι ευκολότερο να το δει κανείς στο σχήμα 7. Κρατώντας το M σταθερό σε κάποια σχετικά χαμηλή τιμή, τα διάφορα όρια παρουσιάζονται ως συναρτήσεις του R με τις παχύτερες γραμμές. Η διακοπή λειτουργίας είναι μέρος της βέλτιστης στρατηγικής όταν $R < \bar{R}$. Όταν $R \geq \bar{R}$, τα δύο κατώτατα όρια P_M και P_S συγχωνεύονται στο P_L. Όταν θεωρείται μια μεγαλύτερη τιμή του M, οι καμπύλες αλλάζουν στις θέσεις που δείχνουν οι πιο λεπτές γραμμές. Η καμπύλη P_M μετατοπίζεται προς τα κάτω και η καμπύλη P_S μετατοπίζεται προς τα πάνω και οι δύο συναντώνται σε μια μικρότερη τιμή $\bar{R}$. Η καμπύλη P_H μετακινείται προς τα πάνω για να φτάσει στο τελικό σταθερό επίπεδο σε αυτό το χαμηλότερο $\bar{R}$. Η καμπύλη P_R μετακινείται προς τα κάτω, μόνο για να σταματήσει όταν παύει να χρησιμοποιείται η διακοπή της λειτουργίας. Προσέξτε επίσης ότι καθώς αυξάνεται το R ξεκινώντας από το μηδέν, τα όρια επανεκκίνησης και διακοπής της λειτουργίας εξαπλώνονται πολύ γρήγορα. Δεδομένου ότι έχουμε θέσει το κόστος διακοπής $E_M = 0$, το σύνολο των εξόδων του ζεύγους των αλλαγών, δηλαδή το $R + E_M$, είναι μικρό και έχουμε την εμφάνιση του τύπου της κυβικής ρίζας (16) πιο πάνω.



Σχήμα 3.7: *Παροπλισμός και διάλυση*

Ένα επιπλέον αριθμητικό πείραμα είναι ενδιαφέρον, δηλαδή το να κάνουμε τόσο το R όσο και το M μικρά ώστε να οδηγήσουμε το μοντέλο της διακοπής λειτουργίας στο όριο του μοντέλου του προηγούμενου κεφαλαίου. Αυτό όντως συμβαίνει, αλλά η προσέγγιση στο όριο είναι πολύ αργή, σύμφωνα με τη γενική αντίληψη ότι ακόμη και τα μικρά εφάπαξ ποσά παίζουν σημαντικό ρόλο όταν υπάρχει μια συνεχής αβεβαιότητα. Έτσι, κρατώντας το C = 1 κλπ. όπως πριν, ακόμη κι όταν μειώνουμε τα κόστη που σχετίζονται με τη διακοπή λειτουργίας σε M = 0,001 και R = 0,02, βρίσκουμε ότι P_R = 1,089 και P_M = 0,919, το καθένα δηλαδή να είναι περίπου 10% μακριά από την κοινή τους οριακή τιμή, δηλαδή το 1. Το κατώτατο όριο απόσυρσης γίνεται P_S = 0,0963, που είναι και πάλι σημαντικά πάνω από το όριό του που είναι το μηδέν.

3.2.Γ Παράδειγμα: Κατασκευή, διακοπή λειτουργίας και απόσυρση πετρελαιοφόρων

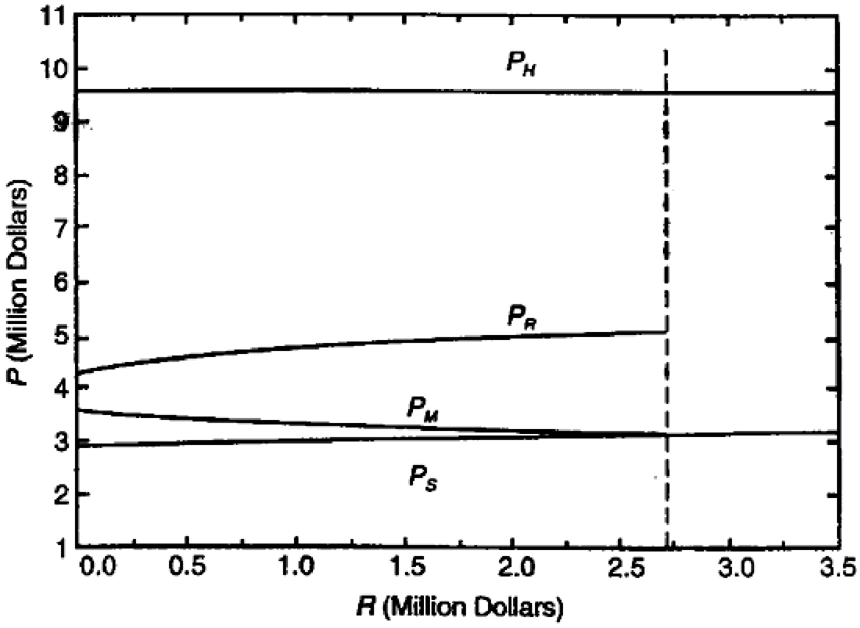
Οι αριθμητικές λύσεις που παρουσιάστηκαν πιο πάνω βοηθούν να καταδειχθεί η ποιοτική εξάρτηση των βέλτιστων ορίων για τις διάφορες παραμέτρους κόστους. Ωστόσο, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε επίσης τις αποφάσεις βέλτιστης επένδυσης, διακοπής λειτουργίας, επανενεργοποίησης και απόσυρσης για ένα παράδειγμα του πραγματικού κόσμου. Όπως και για το παράδειγμα με τη βιομηχανία χαλκού, αυτό το παράδειγμα μας δίνει μια καλύτερη εκτίμηση για τη σημασία του εφάπαξ κόστους και της αβεβαιότητας και επίσης δείχνει πώς το μοντέλο μπορεί να εφαρμοσθεί στην πράξη.

Θα εφαρμόσουμε το μοντέλο μας σε μια βιομηχανία πετρελαιοφόρων. Τα πετρελαιοφόρα αποτελούν ένα ιδιαίτερα καλό παράδειγμα δεδομένου ότι οι δυνητικοί ή οι πραγματικοί ιδιοκτήτες δεξαμενοπλοίων αντιμετωπίζουν μεγάλη αβεβαιότητα κερδών, καθώς επίσης και σημαντικά εφάπαξ κόστη. Η αβεβαιότητα αυξάνεται επειδή η αγορά για τα πετρελαιοφόρα είναι πολύ ανταγωνιστική και οι αξίες των δεξαμενοπλοίων (τα έσοδα ανά ημέρα για τη χρήση ενός δεξαμενόπλοιου, δηλαδή η τιμή P στο μοντέλο μας) παρουσιάζουν σημαντικές διακυμάνσεις ταυτόχρονα με τις διακυμάνσεις των τιμών του πετρελαίου, καθώς μεταβάλλεται η γεωγραφική κατανομή της παραγωγής πετρελαίου και η κατανάλωση και καθώς η παράδοση των δεξαμενοπλοίων αλλάζει. Επίσης, τα εφάπαξ κόστη είναι σημαντική εξαιτίας των σημαντικών εξόδων της κατασκευή ενός νέου δεξαμενόπλοιου και της συντήρησης ή επανενεργοποίησης κάποιου, του οποίου η λειτουργία είχε διακοπεί.

Υπάρχουν τέσσερα γενικά μεγέθη πετρελαιοφόρων – μικρών δεξαμενοπλοίων, με χωρητικότητες περίπου 35.000 τόνους εκτοπίσματος (deadweight tons – dwt), μεσαία δεξαμενόπλοια με χωρητικότητες περίπου 85.000 dwt, μεγάλα δεξαμενόπλοια με χωρητικότητες περίπου 140.000 και από τα μέσα της δεκαετίας του 1970 έχουμε τους πολύ μεγάλους μεταφορείς αργού πετρελαίου (Very Large Crude Carriers – VLCC) με χωρητικότητες περίπου 270.000 dwt. Οι τιμές των εσόδων και τα κόστη κατασκευής, λειτουργίας και λοιπά κόστη δεν αυξάνονται γραμμικά με τη χωρητικότητα δεξαμενόπλοιου και έτσι τα οικονομικά της επένδυσης, διακοπής λειτουργία κλπ. θα ποικίλλουν μεταξύ των διαφορετικών κατηγοριών δεξαμενοπλοίων. Θα εστιάσουμε σε μια συγκεκριμένη κατηγορία – των μεσαίων δεξαμενοπλοίων με χωρητικότητες περίπου 85.000 dwt.

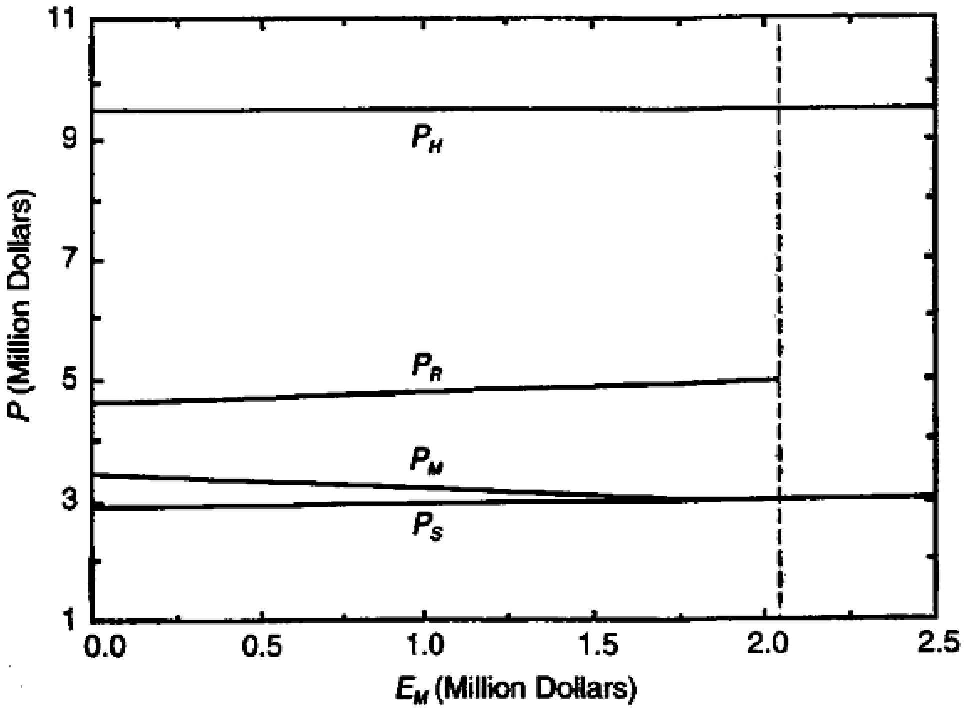
Το μέσο κόστος κατασκευής ενός νέου δεξαμενόπλοιου με 85.000 τόνους εκτοπίσματος είναι περίπου I = 40 εκατομμύρια ευρώ. (Όλα τα κόστη και τα έσοδα είναι εκφρασμένα σε ευρώ του 1992.) Το εφάπαξ κόστος διακοπής της λειτουργίας ενός δεξαμενόπλοιου είναι E_M = 200.000 ευρώ, το κόστος της απόσυρσης ενός παροπλισμένου δεξαμενόπλοιου είναι E_S = – 3,4 εκατομμύρια ευρώ (Δηλαδή, το δεξαμενόπλοιο έχει θετική τιμή απόσυρσης) και το κόστος επανενεργοποίησης ενός παροπλισμένου δεξαμενόπλοιου αυτού του μεγέθους είναι R = 790.000 ευρώ. Το ετήσιο κόστος συντήρησης ενός παροπλισμένου δεξαμενόπλοιου είναι M = 515.000 ευρώ. Τέλος, με δεδομένα τα κόστη καυσίμου και λειτουργίας, το ετήσιο κόστος λειτουργίας για ένα δεξαμενόπλοιο το 1992 ήταν C = 4,4 εκατομμύρια ευρώ. Το 1992, αυτό το δεξαμενόπλοιο θα είχε ακαθάριστα έσοδα P = 7,3 εκατομμύρια ευρώ ανά έτος. Υποθέσαμε ότι η P ακολουθεί γεωμετρική Brownian motion και η κλίση α και η μεταβλητότητα σ γι' αυτήν τη διαδικασία μπορούν να υπολογισθούν από την τυχαία μέση τιμή και τυχαία διακύμανση μιας πραγματικής χρονοσειράς για τα ακαθάριστα έσοδα. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία τριμήνων από το 1980 μέχρι τα μέσα του 1992 βρίσκουμε ότι $\alpha = 0$ και $\sigma = 0{,}15$. Τέλος, χρησιμοποιούμε την τιμή 0,05 τόσο για το πραγματικό άνευ κινδύνου επιτόκιο r, όσο και για το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο μ (και έτσι $\delta = 0{,}05$).

Το σχήμα 8 δείχνει τα κρίσιμα όρια P_H, P_M, P_R και P_S ως συναρτήσεις του εφάπαξ κόστους επανενεργοποίησης R. Προσέξτε ότι για την τιμή βάση μας 790.000 ευρώ, τα μέσα ακαθάριστα έσοδα του 1992 της τάξη των 7,3 εκατομμυρίων ευρώ ανά χρόνο θα ήταν αρκετά υψηλά ώστε να επανενεργοποιήσουν ένα παροπλισμένο δεξαμενόπλοιο, αλλά αρκετά κάτω από το όριο εσόδων των 9,5 εκατομμυρίων ευρώ ανά χρόνο που χρειάζονται για να επενδύσει κάποιος σε ένα νέο δεξαμενόπλοιου. Συνεπές με αυτό το αποτέλεσμα είναι το ότι υπήρχε πραγματικά μικρή ή και καθόλου επένδυση σε νέα δεξαμενόπλοια κατά τη διάρκεια του 1992. Παρατηρήστε ότι η P_R και η P_S αυξάνονται καθώς αυξάνεται το R και η P_M μειώνεται αλλά όχι πολύ γρήγορα. Η διακοπή λειτουργίας παραμένει μια βιώσιμη option εφόσον αυτό το κόστος της επανενεργοποίησης είναι κάτω των 2,7 εκατομμυρίων ευρώ. Το κατώτατο όριο επένδυσης P_H επίσης αυξάνεται καθώς αυξάνεται το R (αν και τόσο αργά που είναι δύσκολο να διακριθεί στο γράφημα). Ένα υψηλότερο R μειώνει την αξία του δεξαμενόπλοιου και επομένως αυξάνει τα έσοδα που η εταιρεία πρέπει να περιμένει να λάβει πριν γίνει πρόθυμη να επενδύσει.



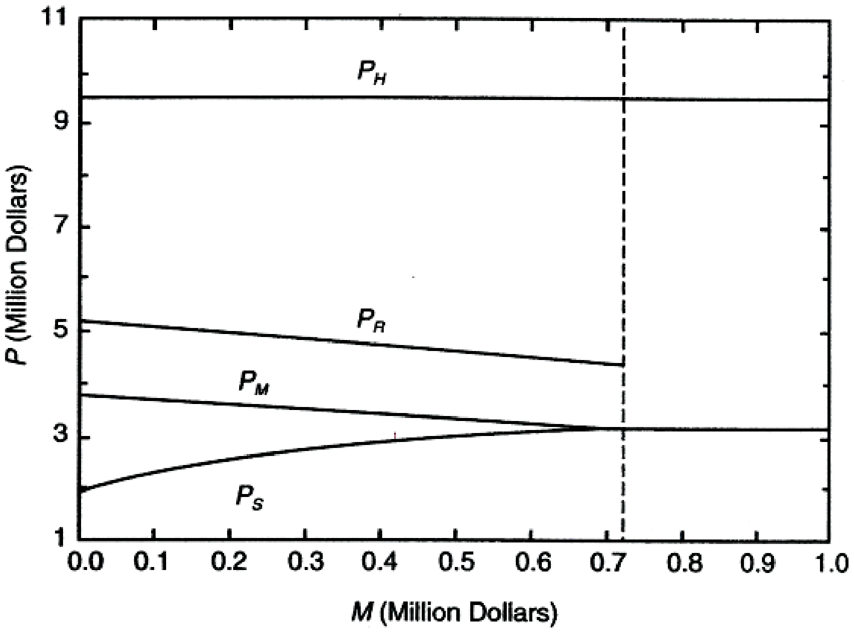
Σχήμα 3.8: *Τα κρίσιμα όρια ως συνάρτηση του κόστους επανενεργοποίησης R*

Το σχήμα 9 δείχνει τα βέλτιστα όρια ως συναρτήσεις του εφάπαξ κόστους E_M παροπλισμού ενός εν λειτουργία δεξαμενόπλοιου. Παρατηρήστε ότι η ποιοτική εξάρτηση των ορίων στο E_M είναι το ίδιο όπως και με το R. Τιμές του E_M μεγαλύτερες του 1 εκατομμυρίου ευρώ είναι μη ρεαλιστικές (υπενθυμίζουμε ότι η τιμή βάσης είναι 200.000 ευρώ), αλλά έχουμε συμπεριλάβει αυτό το μεγαλύτερο εύρος για λόγους απεικόνισης. Προσέξτε ότι ο παροπλισμός διατηρεί κάποια option για όσο το E_M είναι κάτω των 2,1 εκατομμυρίων ευρώ.



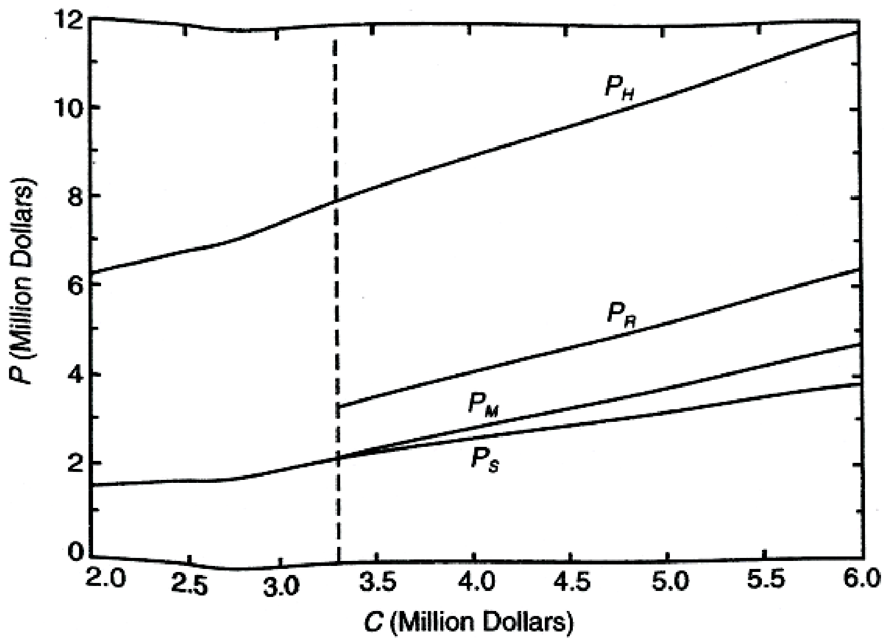
Σχήμα 3.9: *Τα κρίσιμα όρια ως συνάρτηση του εφάπαξ κόστους απόσυρσης E_M*

Το σχήμα 10 δείχνει τα βέλτιστα όρια ως συναρτήσεις του ετήσιου κόστους συντήρησης M ενός παροπλισμένου δεξαμενόπλοιου. Όπως φαίνεται ξεκάθαρα στο σχήμα, είναι μια κρίσιμη παράμετρος προσδιορισμού αν ο παροπλισμός είναι μια βιώσιμη option για την εταιρεία. Προσέξτε ότι ο παροπλισμός συντηρεί την option μόνο μέχρι ενός ποσού M της τάξης περίπου των 720.000 ευρώ και η τιμή βάσης μας είναι που είναι τα 515.000 ευρώ δεν είναι πολύ μακριά από αυτήν την τιμή. Θυμηθείτε ότι οι υψηλότερες τιμές του M μειώνουν την αξία ενός δεξαμενόπλοιου και επομένως αυξάνουν το κατώτατο όριο επένδυσης. Μια μεγαλύτερη τιμή του M κάνει επίσης τον παροπλισμό λιγότερο επιθυμητό και επομένως μειώνει τα P_R και P_M και αυξάνει το P_S.



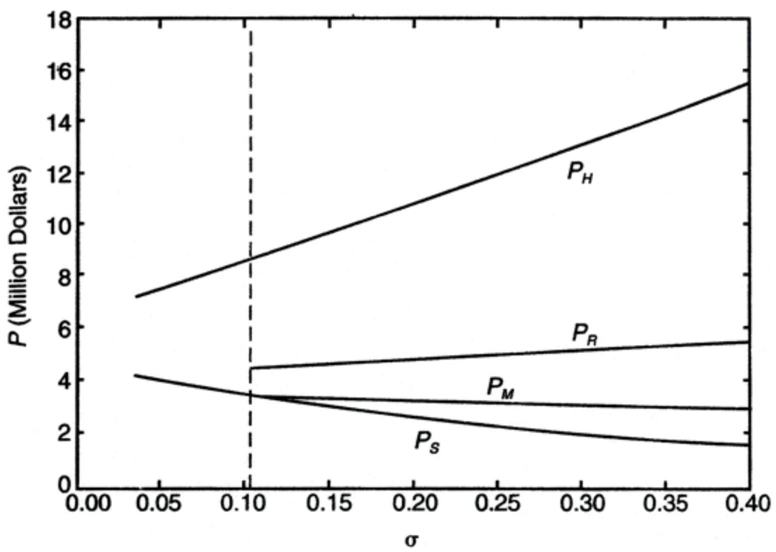
Σχήμα 3.10: *Τα κρίσιμα όρια ως συνάρτηση του κόστους ετήσιας συντήρησης M*

Το σχήμα 11 δείχνει τα τέσσερα κρίσιμα όρια ως συναρτήσεις του ετήσιου κόστους λειτουργίας C. Όπως και με την υψηλότερη τιμή του M, ένα υψηλότερο κόστος λειτουργίας μειώνει την αξία του δεξαμενόπλοιου και επομένως αυξάνει το όριο P_H που απαιτείται για την επένδυση. Όπως θα περίμενε κανείς ωστόσο, οι μεταβολές στο κόστος λειτουργίας έχουν πολύ μεγαλύτερη επίδραση στην αξία του δεξαμενόπλοιου και επομένως στο P_H απ' ό,τι οι μεταβολές στο κόστος συντήρησης M. Επίσης, επειδή ένα υψηλότερο κόστος λειτουργίας μειώνει την αξία ενός δεξαμενόπλοιου σε λειτουργία, αυξάνει το όριο P_R στο οποίο ένα παροπλισμένο δεξαμενόπλοιο επανενεργοποιείται και αυξάνει τα όρια P_M και P_S και έτσι τα έσοδα P δε χρειάζεται να πέσουν τόσο πολύ ώστε η εταιρεία να είναι πρόθυμη να παροπλίσει ή να αποσύρει το δεξαμενόπλοιό της.



Σχήμα 3.11: *Τα κρίσιμα όρια ως συνάρτηση του ετήσιου κόστους λειτουργίας C*

Τέλος, το σχήμα 12 δείχνει τα κρίσιμα όρια σε συνάρτηση του σ, της τυπικές απόκλισης των ετήσιων ποσοστιαίων μεταβολών στα έσοδα P. Παρατηρήστε ότι τα όρια, και ειδικά το P_H και το P_S, είναι αρκετά ευαίσθητα στο σ. Όπως είδαμε νωρίτερα στο παράδειγμά μας με το χαλκό, για μεγάλες τιμές του σ, η ζώνη αδράνειας διευρύνεται σημαντικά. Επίσης, προσέξτε ότι αν το σ μειώνεται σε κάποια τιμή μικρότερης του 0,1, τα P_M και P_S συμπίπτουν και η διακοπή λειτουργίας δεν αποτελεί πλέον μια option που χρησιμοποιείται από την εταιρεία. Ο λόγος είναι ότι η διακοπή λειτουργίας είναι χρήσιμη μόνο αν υπάρχει εύλογη πιθανότητα σημαντικής αύξησης των εσόδων στο άμεσο μέλλον (έτσι ώστε να επανενεργοποιηθεί το δεξαμενόπλοιο). Με το να ισχύει $\sigma < 0{,}1$, η πιθανότητα μιας αρκετά μεγάλης αύξηση των εσόδων είναι πολύ μικρή για να κάνει τον παροπλισμό οικονομικό, δεδομένου του κόστους παροπλισμού, επανενεργοποίησης και συντήρησης.



Σχήμα 3.12: *Τα κρίσιμα όρια ως συνάρτηση της μεταβλητότητας σ*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εφαρμογές και Εμπειρική Έρευνα

Θα ξεκινήσουμε με ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζουν συχνά οι εταιρείες σε βιομηχανίες εξόρυξης πόρων – πώς να αποτιμήσουν ένα υπανάπτυκτο απόθεμα πόρων και πώς να αποφασίσουν πότε να επενδύσουν στην ανάπτυξη και παραγωγή αυτού του αποθέματος. Όπως έχουμε πει σε προηγούμενα κεφάλαια, ένα υπανάπτυκτο απόθεμα πόρων είναι πιο εύκολα κατανοητό ως μια option, δηλαδή μια option επένδυσης στην ανάπτυξη του αποθέματος και στη συνέχεια στην παραγωγή του πόρου. Με την αποτίμηση της option μπορούμε αποτιμήσουμε το απόθεμα και να καθορίσουμε πότε θα πρέπει να αναπτυχθεί. Θα εστιάσουμε στο συγκεκριμένο παράδειγμα των υπεράκτιων πετρελαϊκών αποθεμάτων. Οι πετρελαϊκές εταιρείες προσφέρουν τακτικά εκατοντάδες εκατομμύρια ευρώ για υπεράκτιες πετρελαϊκές εκτάσεις που δημοπρατούνται από την κυβέρνηση των Ηνωμένων Πολιτειών και έτσι είναι σαφώς σημαντικό να είναι σε θέση να αποτιμούν αυτά τα αποθέματα και να καθορίσουν τον καλύτερο τρόπο για την εκμετάλλευσή τους.

Τα προβλήματα αποτίμησης και χρονισμού της επένδυσης είναι επίσης πολύ σημαντικά στη βιομηχανία ηλεκτρικής ενέργειας. Οι εταιρείες παροχής ηλεκτρικής ενέργειας κάνουν μεγάλες και αμετάκλητες επενδύσεις σε νέες μονάδες ηλεκτροπαραγωγής και αντιμετωπίζουν μεγάλη αβεβαιότητα για τις μελλοντικές αποπληρωμές από τέτοιες επενδύσεις. Για παράδειγμα, υπάρχει αβεβαιότητα για τις μελλοντικές τιμές των καυσίμων, για τη μελλοντική ζήτηση ηλεκτρικής ενέργειας, για τους μελλοντικούς περιβαλλοντικούς κανονισμούς που θα περιορίζουν την εταιρεία και για τα κόστη των εναλλακτικών τεχνολογιών για τη συμμόρφωση με αυτούς τους κανονισμούς. Στο τμήμα 2 του κεφαλαίου αυτού εστιάζουμε σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν πολλές επιχειρήσεις κοινής ωφέλειας με την καύση κάρβουνου στους σταθμούς παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Η Clean Air Act απαιτεί μειώσεις των συνολικών εκπομπών διοξειδίου του θείου (SO_2), αλλά για να ελαχιστοποιηθεί το κόστος των μειώσεων αυτών, δίνει τη δυνατότητα επιλογής στις εταιρείες κοινής ωφέλειας. Μπορούν να επενδύσουν σε ακριβούς «σφουγγαριστές» για να μειώσουν τις εκπομπές στα επίπεδα που πρέπει ή μπορούν να αγοράσουν εμπορεύσιμα «δικαιώματα» που τους επιτρέπουν να ρυπαίνουν. (Αυτό το σύστημα μειώνει το συνολικό κοινωνικό κόστος της μείωσης ατμοσφαιρικής ρύπανσης με τη δημιουργία ενός κινήτρου για τις εταιρείες με το υψηλότερο κόστος μείωσης της εκπομπής να αγοράσουν τα δικαιώματα.) Αν οι μελλοντικές τιμές των δικαιωμάτων είναι γνωστές, θα ήταν απλό το πρόβλημα. Ωστόσο, υπάρχει μεγάλη αβεβαιότητα για τις μελλοντικές τιμές των δικαιωμάτων και μια επένδυση σε «πλυντρίδες» είναι αμετάκλητη. Η εταιρεία κοινής ωφέλειας πρέπει να αποφασίσει αν θα διατηρήσει την ευελιξία της στηριζόμενη σε αυτά τα δικαιώματα ή να επενδύσει σε πλυντρίδες – σφουγγαριστές. Θα δούμε πώς αυτό το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί χρησιμοποιώντας την προσέγγιση μέσω option.

Οι αρχές και τα αναλυτικά εργαλεία που έχουν αναπτυχθεί έχουν ενδιαφέρουν ώστε να υπερκαλύπτουν τις επενδυτικές αποφάσεις της εταιρείας. Ως παράδειγμα, ας δούμε πώς τα εργαλεία αυτά εφαρμόζονται σε ένα γενικό πρόβλημα σχεδιασμού περιβαλλοντικής πολιτική. Πότε θα πρέπει μια κυβέρνηση να υιοθετήσει μια πολιτική σε απάντηση μια παρατηρούμενης απειλής για το περιβάλλον; Το τυπικό πλαίσιο με το οποίο οι οικονομολόγοι υπολογίζουν τις περιβαλλοντικές πολιτικές είναι η ανάλυση κόστους – ωφέλειας. Θεωρήστε, για παράδειγμα, ένα φόρο άνθρακα για τη μείωση της υπερθέρμανσης του πλανήτη. Με στρέβλωση των σχετικών τιμών, αυτή η πολιτική θα επέβαλε μια αναμενόμενη ροή δαπανών για την κοινωνία πέραν των φορολογικών εσόδων της κυβέρνησης. Πιθανώς, θα αποφέρει επίσης μια αναμενόμενη ροή ωφελειών στην κοινωνία. Τα νοικοκυριά και οι εταιρείες θα έκαιγαν λιγότερα καύσιμα, θα μαζευόταν λιγότερο διοξείδιο του άνθρακα (CO_2) στην ατμόσφαιρα, η μέση παγκόσμια θερμοκρασία δε θα αυξανόταν τόσο πολύ και οι ζημιές που προξενούνται από τις υψηλότερες θερμοκρασίες θα ήταν αντίστοιχα μικρότερες. Το τυπικό πλαίσιο θα σύστηνε αυτήν την πολιτική αν η παρούσα αξία των αναμενόμενων ροών από τα οφέλη υπερέβαινε την παρούσα αξία των αναμενόμενων ροών κόστους.

Αυτό το τυπικό πλαίσιο αγνοεί τρία σημαντικά χαρακτηριστικά των περισσότερων περιβαλλοντικών προβλημάτων και των πολικών που σχεδιάζονται σε απάντηση αυτών. Πρώτον, υπάρχει μεγάλη αβεβαιότητα για τα μελλοντικά κόστη και οφέλη από την υιοθέτηση μιας συγκεκριμένης πολιτικής. Με την υπερθέρμανση του πλανήτη, για παράδειγμα, υπάρχει αβεβαιότητα σχετικά με το πόσο οι μέσες θερμοκρασίες είναι πιθανό να αυξηθούν με ή χωρίς τις μειωμένες εκπομπές CO_2 και υπάρχει επίσης αβεβαιότητα για τον οικονομικό αντίκτυπο των υψηλότερων θερμοκρασιών. Δεύτερον, υπάρχουν συνήθως σημαντικές αμεταβλητότητες που σχετίζονται με την περιβαλλοντική πολιτική. Αυτές οι αμεταβλητότητες μπορούν να προκύψουν σε σχέση με την ίδια την καταστροφή του περιβάλλοντος, αλλά επίσης σε σχέση με τα κόστη υιοθέτησης των πολιτικών για τη μείωση των ζημιών. Τρίτον, η υιοθέτηση μιας περιβαλλοντικής πολιτικής είναι σπάνια κάποια πρόταση που δεν υπήρχε ποτέ νωρίτερα. Στις περισσότερες περιπτώσεις η κυβέρνηση μπορεί να καθυστερήσει μια ενέργεια και να περιμένει για νέες πληροφορίες. Σαν αποτέλεσμα, οι ίδιες τεχνικές που χρησιμοποιήσαμε για τον προσδιορισμό του βέλτιστου χρονοδιαγράμματος επένδυσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό του βέλτιστου χρονοδιαγράμματος για μια περιβαλλοντική πολιτική.

4.1 Επενδύσεις σε Υπεράκτια Πετρελαϊκά Αποθέματα

Ξεκινάμε με ένα μοντέλο μισθώσεων υπεράκτιου πετρελαίου που αναπτύχθηκε από τους Paddock, Siegel και Smith (1988). Η κυβέρνηση των ΗΠΑ κάνει τακτικούς πλειστηριασμούς μίσθωσης υπεράκτιων πετρελαϊκών εκτάσεων και οι πετρελαϊκές εταιρείες κάνουν συνήθως αξιολογήσει αυτών των εκτάσεων στο πλαίσιο της διαδικασίας υποβολής των προσφορών του. Επειδή οι προσφορές μπορεί να περιλαμβάνουν εκατοντάδες εκατομμύρια ευρώ, είναι σημαντικό αυτές οι αξιολογήσεις να γίνουν με ακρίβεια. Επιπλέον, οι πετρελαϊκές εταιρείες πρέπει να αποφασίσουν τι θα κάνουν με τις εκτάσεις τις οποίες επιτυγχάνουν να μισθώσουν. Πόσο ψηλά θα πρέπει να είναι η τιμή του πετρελαίου πριν ξοδέψουν εκατοντάδες εκατομμύρια ευρώ περισσότερα ώστε να αναπτύξουν τα αποθέματα και να ξεκινήσουν την παραγωγή;

Θα πρέπει να είναι προφανές ότι η έλλειψη αναγνώρισης και κατανόησης της φύσης που μοιάζει με option ενός αποθέματος πετρελαίου μπορεί να οδηγήσει σε σοβαρά λάθη στην αξιολόγησή του. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι κάποιος προσπάθησε να αξιολογήσει ένα απόθεμα με τη χρήση της τυπικής προσέγγισης της καθαρής παρούσας αξίας. Ανάλογα με την τρέχουσα τιμή του πετρελαίου, ο αναμενόμενος ρυθμός μεταβολής των τιμών, καθώς και το κόστος ανάπτυξης του αποθέματος, θα μπορούσε κανείς να κατασκευάσει ένα σενάριο για το χρονοδιάγραμμα της ανάπτυξης και κατά συνέπεια του χρόνου (και μεγέθους) των μελλοντικών ταμειακών ροών από την παραγωγή. Κάποιος τότε θα αξιολογούσε το απόθεμα κάνοντας αναγωγή αυτών των αριθμών και αθροίζοντας. Επιπλέον, δεδομένου ότι η αβεβαιότητα των τιμών του πετρελαίου δεν είναι πλήρως διαφορίσιμη, όσο μεγαλύτερη είναι η παρατηρούμενη αστάθεια στις τιμές του πετρελαίου, τόσο μεγαλύτερο είναι το επιτόκιο αναγωγής και τόσο μικρότερη είναι η εκτιμώμενη αξία των υπανάπτυκτων αποθεμάτων. Ωστόσο, θα υποτιμούσε την αξία του αποθέματος και πιθανώς κατά ένα μεγάλο ποσό. Ο λόγος είναι ότι αγνοεί την ευελιξία που έχει ο ιδιοκτήτης όταν πραγματικά αναπτύσσει το απόθεμα, δηλαδή την αξία της option του αποθέματος. Επίσης προσέξτε ότι εξαιτίας αυτής της τιμής της option, όσο μεγαλύτερη είναι η μεταβλητότητα στις τιμές του πετρελαίου, τόσο μεγαλύτερη είναι η αξία του αποθέματος – ακριβώς το αντίθετο απ’ αυτό που μας λέει ο τυπικός υπολογισμός της καθαρής παρούσας αξίας.

Η αποτίμηση και εκμετάλλευση μιας υπεράκτιας πετρελαϊκής έκτασης μπορεί να θεωρηθεί ως μέρος του προβλημάτων της επένδυσης πολλών σταδίων. Το πρώτο στάδιο περιλαμβάνει την εξερεύνηση – σεισμική δραστηριότητα και γεωτρήσεις για να βρούμε πόσο πετρέλαιο υπάρχει και το κόστος της εξόρυξής του. Το δεύτερο στάδιο (το οποίο θα συμβεί μόνο αν η εξερεύνηση καταλήγει να είναι ευνοϊκή) περιλαμβάνει την ανάπτυξη – την εγκατάσταση των πλατφορμών και πετρελαιοπηγών που χρειάζονται για την εξόρυξη του πετρελαίου. Το τελευταίο στάδιο περιλαμβάνει την εξόρυξη του πετρελαίου για χρονική περίοδο κάποιων ετών. Δεδομένου ότι το στάδιο ανάπτυξης είναι αυτό που περιλαμβάνει τα μεγαλύτερα έξοδα κεφαλαίου, θα είναι αυτό το στάδιο για το οποίο η τιμή της option είναι πιο σημαντική. Έτσι θα επικεντρωθούμε στην αξιολόγηση ενός υπανάπτυκτου (αλλά και οριοθετημένου) αποθέματος και στην απόφαση για το πότε θα το αναπτύξουμε. Στο πλαίσιο αυτό, πρέπει να συνεκτιμηθεί το γεγονός ότι η option ανάπτυξης του αποθέματος δεν έχει αόριστη διάρκεια. Οι υπεράκτιες μισθώσεις υπόκεινται συνήθως σε απαιτήσεις παραίτησης, οι οποίες περιορίζουν το χρόνο που η εταιρεία μπορεί να εκμεταλλεύεται την έκταση και να την αναπτύσσει.

Η στενή σχέση μεταξύ της τιμής ενός υπανάπτυκτου αποθέματος και μιας option αγοράς σε μια μετοχή φαίνεται στον Πίνακα 1. Το βασικό κεφάλαιο στην περίπτωση αυτή είναι η τιμή της μετοχής. Για ένα υπανάπτυκτο απόθεμα είναι η τιμή ενός αναπτυγμένου αποθέματος (το οποίο με τη σειρά του είναι μια συνάρτηση της τιμής του πετρελαίου). Η τιμή διάθεσης για το υπανάπτυκτο απόθεμα είναι το κόστος ανάπτυξής του και ο χρόνος λήξης του είναι η απαίτηση παραίτησης. Η τιμής του κανόνα βέλτιστη διάθεσης για μια option αγοράς εξαρτάται από την τιμή μερίσματος της μετοχής. Όσο υψηλότερο είναι το μέρισμα, τόσο μεγαλύτερο είναι το ευκαιριακό κόστος (υπό το πρίσμα των απολεσθέντων μερισμάτων) της εκμετάλλευσης της option παρά της διάθεσής της. Η ανάλογη μεταβλητή για το αναπτυγμένο απόθεμα είναι τα καθαρά έσοδα από την παραγωγή μειωμένα κατά το ποσοστό εξάντλησης. Κάποιος μπορεί να το παρακάμψει αυτό καθυστερώντας την ανάπτυξη.

Πίνακας 4.1. *Σύγκριση μια option αγοράς με ένα υπανάπτυκτο απόθεμα πετρελαίου.*

Option αγοράς	**Υπανάπτυκτο απόθεμα**
Τιμή μετοχής	Τιμή αναπτυγμένου αποθέματος
Τιμή διάθεσης	Κόστος ανάπτυξης
Χρόνος λήξης	Απαίτηση παραίτησης
Μεταβλητότητα της τιμής μετοχής	Μεταβλητότητα της τιμής αναπτυγμένου αποθέματος
Μέρισμα επί μετοχών	Καθαρά έσοδα παραγωγής από αναπτυγμένο απόθεμα μειωμένο κατά την εξάντληση

4.1.Α Αξία του αναπτυγμένου αποθέματος

Ξεκινάμε με το χαρακτηρισμό της αξίας ενός αναπτυγμένου αποθέματος. Ας είναι B_t ο αριθμός των βαρελιών πετρελαίου σε ένα αναπτυγμένο απόθεμα, V_t η τιμή ανά βαρέλι του αναπτυγμένου αποθέματος και R_t η επιστροφή κάποια χρονική στιγμή στον ιδιοκτήτη του αναπτυγμένου αποθέματος. Αυτή η επιστροφή έχει δύο συνιστώσες – τη ροή των κερδών από την παραγωγή και το κέρδος κεφαλαίου για το υπόλοιπο πετρέλαιο. Ως λογική προσέγγιση, μπορούμε να εκφράσουμε την παραγωγή από ένα αναπτυγμένο απόθεμα ως μια εκθετική μείωση και έτσι

$$dB_t = -\omega \cdot B_t \cdot dt \qquad (1)$$

δηλαδή ένα κλάσμα ω του πετρελαίου που παράγεται κάθε χρόνο. Τότε η επιστροφή R_t μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} R_t \cdot dt &= \omega \cdot B_t \cdot \Pi_t \cdot dt + d(B_t \cdot V_t) \\ &= \omega \cdot B_t \cdot \Pi_t \cdot dt + B_t \cdot dt - \omega \cdot V_t \cdot B_t \cdot dt \end{aligned} \qquad (2)$$

όπου το Π_t είναι τα κέρδη μετά φόρων από την παραγωγή και πώληση ενός βαρελιού πετρελαίου.

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι ο ρυθμός επιστροφής στο αναπτυγμένο απόθεμα ακολουθεί γεωμετρική Brownian motion:

$$\frac{R_t \cdot dt}{B_t \cdot V_t} = \mu_\upsilon \cdot dt + \sigma_\upsilon \cdot dt \qquad (3)$$

όπου το μ_υ είναι το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο αναμενόμενο ποσοστό επιστροφής που απαιτείται από μια ανταγωνιστική κεφαλαιακή αγορά. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2) και (3) παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση για τη δυναμική της V, τη μοναδιαία αξία ενός αναπτυγμένου αποθέματος:

$$dV = (\mu_\upsilon - \delta_t) \cdot V \cdot dt + \sigma_\upsilon \cdot V \cdot dt \tag{4}$$

όπου το δ_t είναι το ποσοστό αποπληρωμής από μια μονάδα παραγωγής αναπτυγμένου αποθέματος και δίνεται

$$\delta_t = \omega \cdot (\Pi_t - V_t)/V_t \tag{5}$$

Προσέξτε τη στενή αναλογία εδώ με το μοντέλο της επένδυσης πριν 2 κεφάλαια, όπου η αξία του έργου ακολουθεί γεωμετρική Brownian motion. Σε εκείνο το κεφάλαιο, η αξία του έργο δινόταν $dV = \alpha \cdot V \cdot dt + \sigma \cdot V \cdot dz$ με $\alpha = \mu - \delta$, όπου το μ είναι το σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο ποσοστό επιστροφής. Ονομάσαμε δ το ποσοστό του ελλείμματος επιστροφής και εξηγήσαμε ότι θα μπορούσε να αντικατοπτρίζει τις ταμειακές ροές από το έργο εν λειτουργία. Τα ίδια ισχύουν κι εδώ, εκτός από το ότι τώρα ο ρυθμός αποπληρωμής είναι καθαρός από την εξάντληση του αποθέματος. Στην πραγματικότητα, η μόνη σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων είναι ότι εδώ η option επένδυσης (δηλαδή της ανάπτυξης του αποθέματος) δε διαρκεί για πάντα. Υπάρχει απαίτηση παραίτησης. Επίσης, δεδομένου ότι το οριακό κόστος παραγωγής είναι μικρό (το μεγαλύτερο μέρος του κόστους παραγωγής είναι το εφάπαξ κόστος ανάπτυξης) και δεδομένου ότι το πετρέλαιο μπορεί να εξαχθεί μόνο αργά (το ω είναι συνήθως περίπου 10% ανά έτος), είναι $\Pi_t > V_t$, έτσι ώστε να είναι $\delta > 0$ και τα αναπτυγμένα αποθέματα θα είναι για πάντα προς παραγωγή.

Πριν προχωρήσουμε, θα ήταν χρήσιμο να εκτιμήσουμε κατά προσέγγιση το ρυθμό αποπληρωμής δ. Η αξία ανά βαρέλι ενός αναπτυγμένου αποθέματος συνήθως ισούται με περίπου το ένα τρίτο της εμπορικής τιμής του πετρελαίου, η παραγωγή ανά βαρέλι κοστίζει περίπου 30% της εμπορικής τιμής και έτσι το κέρδος μετά φόρων από ένα βαρέλι πετρελαίου είναι περίπου στο 46% της τιμής. Χρησιμοποιώντας $\omega = 0{,}1$ και ορίζοντας με P την εμπορική τιμή ενός βαρελιού πετρελαίου, έχουμε

$$\delta = 0{,}1 \cdot (0{,}46 \cdot P - 0{,}33 \cdot P)/0{,}33 \cdot P \approx 0{,}04$$

Έτσι η εκμετάλλευση ενός αναπτυγμένου αποθέματος είναι σαν την εκμετάλλευση μια μετοχής που έχει μερισματική απόδοση της τάξης του 4%.

4.1.Β Η αξία ενός υπανάπτυκτου αποθέματος και ο κανόνας βέλτιστης επένδυσης

Με δεδομένη ενός εξίσωση (4) για την αξία ενός αναπτυγμένου αποθέματος, μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε την αξία ενός υπανάπτυκτου αποθέματος καθώς ενός και τον κανόνα βέλτιστου χρονοδιαγράμματος για την ανάπτυξή του. Δεδομένου ότι υπάρχει μια ποικιλία χρηματοδοτικών μέσων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επανάληψη των διακυμάνσεων στην τιμή του πετρελαίου (για παράδειγμα συμβόλαια futures, προθεσμιακές συμβάσεις και οι μετοχές των πετρελαϊκών εταιρειών) σίγουρα ισχύει η βαθμονόμηση και μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι πιθανών αξιώσεων για την αποτίμηση ενός υπανάπτυκτου αποθέματος. Ενός ορίσουμε με F(V, t) την αξία μιας μονάδας που αποτελείται από ένα βαρέλι ενός υπανάπτυκτου αποθέματος. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4) και περνώντας από τα συνήθη βήματα, η F(V, t) πρέπει να ικανοποιεί

$$\tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot V^2\cdot F_{VV}+(r-\delta)\cdot V\cdot F_V-r\cdot F=-F_t \tag{6}$$

Προσέξτε ότι η εξίσωση (6) είναι μια μερική διαφορική εξίσωση. Δεδομένου του ότι η option ανάπτυξης του αποθέματος λήγει τη χρονική στιγμή Ενός, η αξία ενός option εξαρτάται από την τρέχουσα χρονική στιγμή t.

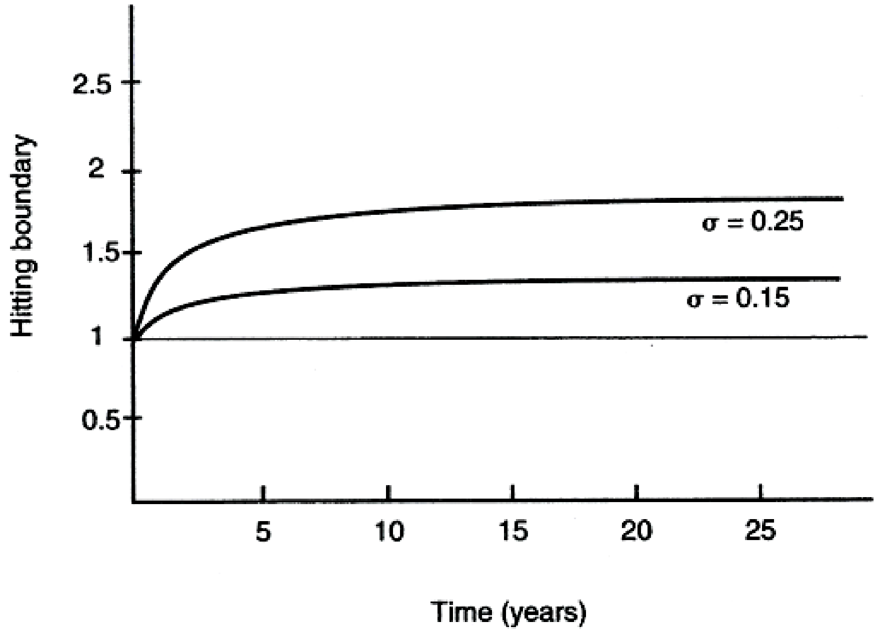
Η εξίσωση (6) πρέπει να λυθεί με κάποιες οριακές συνθήκες. Με D το κόστος ανά βαρέλι ανάπτυξης του αποθέματος (δηλαδή, η τιμή διάθεσης ενός option), οι συνθήκες αυτές είναι:

$$F(0, t) = 0 \tag{7}$$
$$F(V, t) = max[V_T - D, 0] \tag{8}$$
$$F(V^*, t) = V^* - D \tag{9}$$
$$F_V(V^*, t) = 1 \tag{10}$$

Η συνθήκη (8) απλά λέει ότι στη λήξη, η option ανάπτυξης θα διατεθεί αν $V_T > D$. Οι υπόλοιπες οριακές συνθήκες είναι τυπικές.

Η εξίσωση (6) δε μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά, αλλά δεν είναι δύσκολο να αποκτήσουμε μια αριθμητική λύση χρησιμοποιώντας μεθόδους πεπερασμένων διαφορών. Το σχήμα 1 και ο Πίνακας 2 δείχνουν λύσεις από ενός Siegel, Smith και Paddock (1987) που βασίζονται στο ρυθμό αποπληρωμής δ = 0,04 που συζητήθηκε πιο πάνω, σε ένα μετά φόρου άνευ κινδύνου επιτόκιο r = 0,0125 και σε διαφορετικές τιμές για το σ_υ. Η τιμή του σ_υ είναι μια σημαντική εισροή για το μοντέλο αυτό και μπορεί να υπολογισθεί με διάφορους τρόπους. Ενός υπολογισμός θα μπορούσε να βασίζεται σε ιστορικά στοιχεία ή να αποκτηθεί από μια αξιολόγηση από ειδικούς στη βιομηχανία πετρελαίου του διαστήματος εμπιστοσύνης 90%, ενός πούμε, για την τιμή του πετρελαίου σε κάποια στιγμή στο μέλλον. Οι εκτιμήσεις που βασίζονται σε δεδομένα των τελευταίων 30 χρόνων θα υπολόγιζαν το σ_υ σε περίπου 0,15, αλλά οι εκτιμήσεις που βασίζονται ενός προγνώσεις ενός βιομηχανίας μπορεί να το υπολόγιζαν σε κάτι υψηλότερο. Ένα λογικό εύρος του σ_υ θα ήταν από 0,15 έως 0,25.

Το σχήμα 1 δείχνει τον κρίσιμο λόγο V^*/D ως συνάρτηση του αριθμού των ετών για τη λήξη για σ_υ = 0,15 και 0,25. Προσέξτε ότι στη λήξη είναι $V^*/D = 1$ [το οποίο προκύπτει από την οριακή συνθήκη (8)] και έτσι εφαρμόζεται ο συνήθης κανόνας ενός καθαρής παρούσας αξίας. Ο κρίσιμος λόγος αυξάνεται σε 2 ή περισσότερο ωστόσο, όταν η εταιρεία μπορεί να περιμένει τουλάχιστον λίγα χρόνια πριν αποφασίσει για το αν θα αναπτύξει ή όχι το απόθεμα. Ενός, προσέξτε ότι ο κρίσιμος λόγος δεν είναι πολύ ευαίσθητος στη στιγμή ενός λήξης αν ενός ο χρόνος είμαι μεγαλύτερος από 1 ή 2 έτη. Έτσι για ενός τέτοιες επενδύσεις στα αποθέματα πετρελαίου, αποτελεί λογική προσέγγιση να αγνοήσουμε την απαίτηση παραίτησης συνολικά και απλά να αντιμετωπίσουμε την option ανάπτυξης διαρκή. Τότε ο όρος F_t στην εξίσωση (6) εξαφανίζεται και η εξίσωση μπορεί να λυθεί αναλυτικά (η λύση είναι η ίδια ενός εκείνη που προέκυψε πριν 2 κεφάλαια).



Σχήμα 4.1: *Η κρίσιμη αξία της ανάπτυξης των αποθεμάτων πετρελαίου (παρουσιάζεται ο λόγος V^*/D για δ = 0,04 και r = 0,0125, όπου το D είναι το κόστος ανάπτυξης)*

Ο Πίνακας 2 δείχνει την αξία ενός υπανάπτυκτου αποθέματος (δηλαδή την αξία μιας option ανάπτυξης) ανά ευρώ του κόστους ανάπτυξης για σ_υ = 0,142 [μια προσέγγιση που έγινε από ενός Siegel, Smith και Paddock (1987)] και για σ_υ = 0,25. Όταν το V/D είναι μικρότερο του 1, δηλαδή η αξία του αναπτυγμένου αποθέματος είναι μικρότερη του κόστους ανάπτυξης, δε θα μπορούσαμε να αναπτύξουμε το απόθεμα ακόμη κι αν χρησιμοποιούσαμε το σύνηθες κριτήριο ενός καθαρής παρούσας αξίας. (στη διάλεκτο των οικονομικών options, η option ανάπτυξης «έχει ξεμείνει από χρήματα.») Αν το V/D υπερβαίνει το 1 (έτσι ώστε η option ανάπτυξης να «έχει χρήματα»), το σύνηθες κριτήριο ενός καθαρής παρούσας αξίας θα ενός έλεγε να κάνουμε ανάπτυξη, αλλά ενός δείχνει το σχήμα 1, αν δεν είναι το V/D αρκετά μεγαλύτερο του 1, αυτή δεν είναι η βέλτιστη απόφαση. Οι καταχωρήσεις στον πίνακα δείχνουν την αξία ενός option ανά μονάδα κόστους ενός επένδυσης, δηλαδή F(V, t)/D. Για παράδειγμα, όταν σ_υ = 0,142, Ενός = 10 και V/D = 1, η αξία μιας option είναι περίπου εννέα σεντς για κάθε ευρώ του κόστους επένδυσης.

Πίνακας 4.2. *Τιμές της option ανά 1 ευρώ του κόστους επένδυσης*
(Σημείωση: επειδή οι τιμές της option είναι ομογενείς στο κόστος επένδυσης, η συνολική αξία της option είναι η καταχώρηση στον πίνακα επί το συνολικό κόστος επένδυσης)

	σ_υ = 0,142			σ_υ = 0,25	
V/D	T = 5	T = 10	T = 15	T = 5	T = 10
0,80	0,01810	0,02812	0,03309	0,07394	0,10392
0,85	0,02761	0,03894	0,04430	0,09174	0,12305
0,90	0,04024	0,05245	0,05803	0,11169	0,14390
0,95	0,05643	0,06899	0,07458	0,13380	0,16646
1,00	0,07661	0,08890	0,09431	0,15804	0,19071
1,05	0,10116	0,11253	0,11754	0,18438	0,21664
1,10	0,13042	0,14025	0,14464	0,21278	0,24424
1,15	0,16472	0,17242	0,17599	0,24321	0,27349

Ένα απλό παράδειγμα θα βοηθήσει στη ενός του πώς μπορούν αυτά τα αποτελέσματα να χρησιμοποιηθούν. Εάν θεωρήσουμε ένα υπανάπτυκτο απόθεμα το οποίο, αν αναπτυχθεί, αναμένεται να αποφέρει 100 εκατομμύρια ευρώ πετρελαίου και ένα μια απαίτηση παραίτησης μετά από 10 χρόνια.

Εάν υποθέσουμε ότι η αξία του αναπτυγμένου αποθέματος είναι 12 ευρώ ανά βαρέλι, ο ρυθμός αποπληρωμής (δηλαδή τα καθαρά έσοδα μείων την εξάντληση ως κλάσμα ενός αξίας του αποθέματος) είναι 4%, ότι η ανάπτυξη χρειάζεται τρία χρόνια (συνήθως για ένα υπεράκτιο απόθεμα στον Κόλπο του Μεξικού) και ότι η παρούσα αξία του κόστους ενός επένδυσης είναι 11,79 ευρώ ανά βαρέλι. Τότε θα αποτιμούσαμε το υπανάπτυκτο απόθεμα ως εξής

1. Δεδομένου ότι η ανάπτυξη χρειάζεται τρία χρόνια, πρέπει να υπολογίσουμε την παρούσα αξία του αναπτυγμένου αποθέματος. Το σωστό επιτόκιο αναγωγής είναι το ποσοστό αποπληρωμής δ (δηλαδή η διαφορά ανάμεσα στο σταθμισμένο κατά τον κίνδυνο επιτόκιο μ και του αναμενόμενου ρυθμού αύξηση ενός αξίας του αναπτυγμένου αποθέματος, που είναι μ – δ). Εφόσον δ = 0,04, η παρούσα αξία του αναπτυγμένου αποθέματος είναι $V' = e^{-0,12\cdot}$(12 ευρώ) = 10,64 ευρώ.
2. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το λόγο ενός τιμής αυτού του αναπτυγμένου αποθέματος ενός την παρούσα αξία του κόστους επένδυσης. Δηλαδή είναι V΄/D = 10,64/11,79 = 0,90. Εάν είναι μικρότερος του 1 και έτσι η option επένδυσης έχει ξεμείνει στην πραγματικότητα από χρήματα.
3. Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τον Πίνακα 2 για να υπολογίσουμε την αξία του υπανάπτυκτου αποθέματος. Υποθέτοντας μια τυπική απόκλιση σ_υ = 0,142, η τιμή ενός option ανά ευρώ του κόστους επένδυσης είναι 0,05245 και το συνολικό κόστος επένδυσης είναι (11,79 ευρώ)x(100 εκατομμύρια) = 1.179 εκατομμύρια ευρώ. Έτσι η συνολική αξία του υπανάπτυκτου αποθέματος είναι (0,05245)x(1.17 εκατομμύρια) = 61,84 εκατομμύρια ευρώ.

Έτσι, αν και αυτό το υπανάπτυκτο απόθεμα δε θα μπορούσε να αναπτυχθεί κερδοφόρα με δεδομένες ενός τρέχουσες τιμές του πετρελαίου, εξακολουθεί να αξίζει 62 εκατομμύρια ευρώ εξαιτίας ενός τιμής ενός option του. Επιπλέον, αυτή η τιμή θα μπορούσε να αυξηθεί σημαντικά αν οι συνθήκες ενός παγκόσμιες αγορές πετρελαίου άλλαζαν με τέτοιο τρόπο που θα έκαναν την αντιληπτή μεταβλητότητα των τιμών του πετρελαίου υψηλότερη. Για παράδειγμα, ενός μπορούμε να δούμε από τον Πίνακα 2, αν το σ_υ επρόκειτο να αυξηθεί σε 0,25, η αξία του υπανάπτυκτου αποθέματος θα αυξανόταν σε (0,14390)x(1.179 εκατομμύρια) = 169,66 εκατομμύρια ευρώ.

4.1.Γ Μέση επάνοδος στην τιμή του πετρελαίου

Έχουμε υποθέσει ότι η τιμή ενός αναπτυγμένου αποθέματος πετρελαίου – ενός και η τιμή του πετρελαίου – ακολουθεί γεωμετρική Brownian motion. Ωστόσο, ενός έχουμε αναφέρει πιο νωρίς, κάποιος θα μπορούσε να υποστηρίξει ότι οι τιμές του πετρελαίου και ως εκ τούτου και οι τιμές των αποθεμάτων, ακολουθούν κάποιες διαφορετικές στοχαστικές διαδικασίες. Για παράδειγμα, κάποιος θα μπορούσε να πιστέψει ότι για μεγάλα χρονικά διαστήματα, οι τιμές του πετρελαίου (και οι τιμές άλλων αγαθών) γυρίζουν πίσω ενός το μακροπρόθεσμο οριακό κόστος και έτσι είναι μέσης επανόδου. Ή, θα μπορούσε να πιστέψει κάποιος ότι η τιμή του πετρελαίου αντιπροσωπεύεται καλύτερα από μια διαδικασία διακριτών μετακινήσεων Poisson, παρά από μια συνεχή διαδικασία Itô.

Δυστυχώς, με περιορισμένα τα δεδομένα είναι δύσκολο να προσδιορίσουμε αν μια διαδικασία τιμών είναι ή δεν είναι μέσης επανόδου ή ότι έχει ένα σημαντικό στοιχείο άλματος. Για παράδειγμα, μπορεί κάποιος κατ' αρχάς να εκτελέσει ένα «τεστ μοναδιαίων ριζών» για να ελέγξει αν μια σειρά τιμών είναι μέσης επανόδου ή είναι τυχαίων βημάτων. Ωστόσο, αυτό είναι ένα αδύναμο τεστ και για σύντομες χρονοσειρές (για παράδειγμα, 30 χρόνων ή λιγότερο) και θα αποτυγχάνει συχνά να απορρίπτει την υπόθεση των τυχαίων βημάτων, ακόμα κι αν η σειρά είναι στην πραγματικότητα μέσης επανόδου. Ο λόγος είναι ότι οποιαδήποτε μέση επάνοδο είναι συνήθως πολύ αργή και είναι επομένως δύσκολο να διακρίνει κάνει ενός σύντομες χρονικές σειρές. Στην περίπτωση αυτή κάποιος θα ρωτούσε αν τα αποτελέσματα ενός ανάλυσης είναι πιθανόν να αλλάξουν σε μεγάλο βαθμό, ανάλογα με το αν κάποιος ξεκινά με μια διαδικασία μέσης επανόδου (ή Poisson) για τη βασική στοχαστική στατική μεταβλητή.

Όσο αφορά τη μέση επάνοδο, τα αριθμητικά παραδείγματα που αναπτύξαμε 2 κεφάλαια πριν αποτελούν καλό οδηγό. Τα επιπλέον αριθμητικά αποτελέσματα για το παράδειγμα των αποθεμάτων πετρελαίου σε αυτήν την ενότητα αποκτήθηκαν από το Wey (1993). Όπως θα περίμενε κανείς, ο βαθμός στον οποίο η απάντηση αλλάζει εξαρτάται από το ρυθμό ενός μέσης επανόδου και από το συγκεκριμένο επίπεδο στο οποίο η διαδικασία μπορεί να επαναφερθεί.

Θεωρούμε την ακόλουθη διαδικασία μέσης επανόδου για την αξία ενός αναπτυγμένου αποθέματος πετρελαίου:

$$dV = \eta \cdot (\bar{V} - V) \cdot V \cdot dt + \sigma \cdot V \cdot dz \tag{11}$$

Τότε η μερική διαφορική εξίσωση (6) για την αξία F(V, t) του υπανάπτυκτου αποθέματος γίνεται

$$\tfrac{1}{2}\cdot\sigma_{\upsilon}^{2}\cdot V^{2}\cdot F_{VV}+[r-\mu+\eta\cdot(\bar{V}-V)]\cdot V\cdot F_{V}-r\cdot F=-F_{t} \qquad (12)$$

Αν ο χρόνος μέχρι την παραίτηση είναι αρκετά μεγάλος (άνω των πέντε ετών), μπορούμε να αγνοήσουμε την εξάρτηση από το χρόνο της F(V, t) και έτσι ο όρος – F_t της εξίσωσης (12) εξαφανίζεται και έχουμε μια συνήθη διαφορική εξίσωση. Η λύση αυτής της εξίσωσης μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας τη συρρέουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση, η οποία παρουσιάζεται με σειρές. Κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει αυτή τη λύση, με διαφορετικές τιμές του η και του $\bar{V}$, για να προσδιορίσει το βαθμό στον οποίο η μέση επάνοδος μας ενδιαφέρει για την αξιολόγηση του υπανάπτυκτου αποθέματος και για τον κανόνα της βέλτιστης επένδυσης

Ο Wey (1993) έδειξε, χρησιμοποιώντας μια σειρά 100 ετών για την πραγματική τιμή του αργού πετρελαίου, ότι μια λογική εκτίμηση του η είναι περίπου 0,3 και ότι χρησιμοποιώντας αυτήν την τιμή (και μια τιμή του σ_υ = 0,20), ο βαθμός στον οποίο τα ζητήματα μέσης επανόδου εξαρτώνται από την τιμή στην οποία επανέρχεται η V (και είναι η $\bar{V}$), σε σχέση με το κόστος επένδυσης D. Όπως θα περίμενε κανείς, αν η $\bar{V}$ είναι πολύ μεγαλύτερη του D, ο συλλογισμός για τη μέση επάνοδο δίνει μια μεγαλύτερη αξία στο υπανάπτυκτο απόθεμα όταν V < D επειδή η V αναμένεται να αυξηθεί με το χρόνο. Ο Wey έδειξε ότι αν η $\bar{V}$ είναι περίπου διπλάσια του D, η αγνόηση της μέσης επανόδου μπορεί να οδηγήσει σε υποτίμηση του αποθέματος κατά 40% ή και περισσότερο. Από την άλλη πλευρά, αν η $\bar{V}$ είναι όσο περίπου και το D, η αγνόηση της μέσης επανόδου θα μας πειράξει λίγο.

Η αρχική μελέτη των Paddock, Siegel και Smith (1988) είχε ως στόχο να καταδείξει τη φύση ενός υπανάπτυκτου αποθέματος πετρελαίου που μοιάζει με option και έδειξαν ότι η χρήση συνήθων μεθόδων της καθαρής παρούσας αξίας θα οδηγούσαν σε σημαντική υποτίμηση του αποθέματος, καθώς επίσης και σε πρόωρη ανάπτυξη. Αυτό το βασικό αποτέλεσμα ισχύει ακόμη είτε κάποιος λαμβάνει υπόψη τη μέση επάνοδο, είτε όχι. Φυσικά, για μια πετρελαϊκή εταιρεία που πρόκειται να κάνει προσφορά 500 εκατομμυρίων ευρώ για υπεράκτιες μισθώσεις, ένα σφάλμα 10% στην αξιολόγηση ανέρχεται σε πολλά χρήματα, και έτσι θα άξιζε τον κόπο να κάνει μια προσεκτική ανάλυση που θα λαμβάνει υπόψη τη μέση επάνοδο και όποια άλλα χαρακτηριστικά της τιμής ή διαδικασία τιμών για το αναπτυγμένο απόθεμα που πιστεύεται ότι έχει σχέση με αυτήν.

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Επιτόκια

Τα επιτόκια αποτελούν ένα παράγοντα για την αποτίμηση του συνόλου σχεδόν των derivatives και θα έχουν εξέχουσα θέση σε ένα μεγάλο μέρος του υλικού που θα παρουσιαστεί σε αυτό το βιβλίο. Το κεφάλαιο αυτό ασχολείται με ορισμένα θεμελιώδη ζητήματα που αφορούν τον τρόπο με τον οποίο τα επιτόκια μετρώνται και αναλύονται. Εξηγεί τη συχνότητα του ανατοκισμού που χρησιμοποιείται για να καθορίσει ένα επιτόκιο και την έννοια του συνεχούς ανατοκισμού των επιτοκίων, τα οποία χρησιμοποιούνται ευρέως στην ανάλυση των derivatives. Καλύπτει μηδενικούς συντελεστές, άρτιες αποδόσεις και καμπύλες αποδόσεων, συζητά για τις τιμές των ομολόγων και περιγράφει μια διαδικασία που χρησιμοποιείται συνήθως από ένα συναλλαγματικό γραφείο derivatives για τον υπολογισμό του μηδενικού τοκομεριδίου στα επιτόκια του δημοσίου. Καλύπτει επίσης τα προθεσμιακά επιτόκια και τις προθεσμιακές συμβάσεις επιτοκίου και επανεξετάζει τις διαφορετικές θεωρίες υπό το πρίσμα της διάρθρωσης των επιτοκίων. Τέλος, εξηγεί τη χρήση μέτρων που αφορούν τη διάρκεια και την κυρτότητα για τον καθορισμό της ευαισθησίας των τιμών των ομολόγων στις μεταβολές των επιτοκίων.

1.1 Τύποι επιτοκίων

Ένα επιτόκιο σε συγκεκριμένη κατάσταση καθορίζει το ποσό των χρημάτων που ένας δανειολήπτης υπόσχεται να καταβάλει στο δανειστή. Για κάθε δεδομένο νόμισμα, εισάγονται πολλοί διαφορετικοί τύποι επιτοκίων. Αυτοί περιλαμβάνουν επιτόκια ενυπόθηκων δανείων, επιτόκια καταθέσεων, βασικά επιτόκια δανεισμού και ούτω καθεξής. Το επιτόκιο που εφαρμόζεται σε μια κατάσταση εξαρτάται από τον πιστωτικό κίνδυνο. Αυτός είναι ένας κίνδυνος που υπάρχει ως προεπιλογή σε αυτόν που δανείζεται κάποιο κονδύλια, έτσι ώστε οι τόκοι και το αρχικό κεφάλαιο δεν πληρώνονται στο δανειστή όπως είχε υποσχεθεί. Όσο μεγαλύτερος είναι ο πιστωτικός κίνδυνος, τόσο υψηλότερο είναι το επιτόκιο που υπόσχεται ο δανειζόμενος.

Επιτόκια του Γενικού Λογιστηρίου

Τα επιτόκια του Γενικού Λογιστηρίου είναι τα ποσοστά που κερδίζει ένας επενδυτής σε γραμμάτια και ομόλογα του Δημοσίου. Αυτά είναι τα μέσα που χρησιμοποιούνται από μια κυβέρνηση για να δανειστεί με το δικό της νόμισμα. Τα ιαπωνικά επιτόκια δημοσίου είναι τα επιτόκια με τα οποία η ιαπωνική κυβέρνηση δανείζεται σε γιεν. Τα επιτόκια δημοσίου στις ΗΠΑ είναι τα επιτόκια με τα οποία η αμερικανική κυβέρνηση δανείζεται σε ευρώ κλπ. Συνήθως θεωρείται ότι δεν υπάρχει πιθανότητα ότι μια κυβέρνηση θα αθετήσει μια υποχρέωση στο νόμισμά της. Τα επιτόκια του Γενικού Λογιστηρίου είναι κατά συνέπεια εντελώς ακίνδυνα επιτόκια υπό την έννοια ότι ο επενδυτής που αγοράζει ένα κρατικό ομόλογο ή ομόλογο του δημοσίου είναι βέβαιος ότι οι πληρωμές τόκου και κεφαλαίου θα πραγματοποιηθούν όπως του έχουν υποσχεθεί.

Τα επιτόκια του Γενικού Λογιστηρίου είναι σημαντικά διότι χρησιμοποιούνται για να τιμολογηθούν τα έντοκα γραμμάτια και τα ομόλογα του δημοσίου και μερικές φορές χρησιμοποιούνται για να καθορίσουν την εξόφληση από ένα derivative. Ωστόσο, οι έμποροι derivatives (ιδίως εκείνοι που δραστηριοποιούνται σε εξωχρηματιστηριακές αγορές) δε χρησιμοποιούν συνήθως επιτόκια του Γενικού Λογιστηρίου ως μηδενικού κινδύνου επιτόκια. Αντ' αυτών χρησιμοποιούν επιτόκια LIBOR.

LIBOR

Η λέξη LIBOR είναι η συντομογραφία για τη φράση *London Interbank Offered Rate* (= Λονδρέζικο Διατραπεζικό Προσφερόμενο Επιτόκιο). Η εισαγωγή ενός επιτοκίου LIBOR από μια συγκεκριμένη τράπεζα είναι το επιτόκιο με το οποίο η τράπεζα αυτή είναι διατεθειμένη να πραγματοποιήσει μια μεγάλη συνολική κατάθεση σε άλλες τράπεζες. Οι μεγάλες τράπεζες και άλλα οικονομικά ιδρύματα εισαγάγουν επιτόκια LIBOR σε όλα τα κύρια νομίσματα για διάρκειες μέχρι 12 μηνών: ενός μήνα επιτόκιο LIBOR είναι το επιτόκιο στο οποίο προσφέρονται οι καταθέσεις ενός μήνα, τρίμηνο επιτόκιο LIBOR είναι το επιτόκιο στο οποίο προσφέρονται οι τρίμηνες καταθέσεις και ούτω καθεξής.

Μια κατάθεση σε κάποια τράπεζα μπορεί να θεωρηθεί ως δάνειο στην εν λόγω τράπεζα. Η τράπεζα πρέπει επομένως να πληροί ορισμένα κριτήρια πιστοληπτικής ικανότητας προκειμένου να είναι σε θέση να δεχτεί ένα επιτόκιο LIBOR από μια άλλη τράπεζα έτσι ώστε να λαμβάνει καταθέσεις από εκείνη την τράπεζα σε επιτόκιο LIBOR. Συνήθως πρέπει να έχει πιστωτική βαθμολόγηση AA.

Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα AA θεωρούν το LIBOR ως το βραχυπρόθεσμο ευκαιριακό κόστος του κεφαλαίου. Μπορούν να δανείζονται βραχυπρόθεσμα κεφάλαια όπως ορίζει το LIBOR από άλλες χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Οι δικές του τιμές LIBOR καθορίζουν το επιτόκιο με το οποίο δανείζονται τα πλεονάζοντα κεφάλαια σε άλλα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Τα επιτόκια LIBOR δεν είναι εντελώς απελευθερωμένα από τον πιστωτικό κίνδυνο. Υπάρχει μια μικρή πιθανότητα ότι ένα AA χρηματοπιστωτικό ίδρυμα θα παραλείψει ένα βραχυπρόθεσμο LIBOR δάνειο. Ωστόσο, είναι κοντά προς το να μην υπάρχει πιστωτικός κίνδυνος. Οι έμποροι θεωρούν τα επιτόκια LIBOR ως την καλύτερη ένδειξη για τα «πραγματικά» επιτόκια μηδενικού κινδύνου παρά τα επιτόκια του Γενικού Λογιστηρίου, διότι μια σειρά φορολογικών και ρυθμιστικών θεμάτων καθιστούν τα επιτόκια του Γενικού Λογιστηρίου να είναι τεχνητά χαμηλά. Για να είμαι σύμφωνος με τη συνήθη πρακτική στις αγορές των derivatives, ο όρος «επιτόκιο μηδενικού κινδύνου» σε αυτό το βιβλίο θα πρέπει να ερμηνεύεται ως επιτόκιο LIBOR.

Επιπρόσθετα της χρήσης επιτοκίων LIBOR, οι μεγάλες τράπεζες χρησιμοποιούν επίσης επιτόκια LIBID. Αυτό σημαίνει *London Interbank Bid Rate* (= Λονδρέζικο Διατραπεζικό Επιτόκιο Προσφοράς) και είναι το επιτόκιο εκείνο στο οποίο θα δεχτούν καταθέσεις από άλλες τράπεζες. Σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα, υπάρχει συνήθως μια μικρή διαφορά μεταξύ των LIBID και LIBOR επιτοκίων (τα LIBOR είναι υψηλότερα των LIBID). Τα επιτόκια τα ίδια καθορίζονται από έντονες διαπραγματεύσεις μεταξύ των τραπεζών και αλλάζουν συνεχώς έτσι ώστε η παροχή κεφαλαίων στη διατραπεζική αγορά ισούται με τη ζήτηση για κεφάλαια στην αγορά αυτή. Για παράδειγμα, αν οι περισσότερες τράπεζες θέλουν να δανείζονται ευρώ για 3 μήνες από ό,τι να δανείζουν ευρώ για 3 μήνες, τα τρίμηνα ευρωπαϊκά LIBOR και LIBID επιτόκια που χρησιμοποιούνται από τις τράπεζες θα αυξηθούν. Ομοίως, αν οι περισσότερες τράπεζες θέλουν να δανείζουν τρίμηνα κεφάλαια αντί να τα δανείζονται, τότε τα τρίμηνα LIBOR και LIBID επιτόκια θα μειωθούν. Το εμπόριο LIBOR και LIBID είναι αυτό που είναι γνωστό ως *αγορά Ευρωνομίσματος*. Αυτή η αγορά δεν εμπίπτει σε κανέναν κυβερνητικό έλεγχο.

Επιτόκια των συμφωνιών επαναγοράς

Μερικές φορές οι εμπορικές δραστηριότητες χρηματοδοτούνται με συμφωνία επαναγοράς. Αυτή είναι ένα συμβόλαιο όπου ένας έμπορος επενδύσεων που κατέχει χρεόγραφα συμφωνεί να τα πουλήσει σε άλλη εταιρεία τώρα και να τα αγοράσει ξανά αργότερα σε ελαφρώς υψηλότερη τιμή. Η άλλη εταιρεία παρέχει ένα δάνειο σε κάποιον αντιπρόσωπο επενδύσεων. Η διαφορά μεταξύ της τιμής στην οποία πωλούνται τα χρεόγραφα και της τιμής στην οποία επαναγοράζονται είναι ο τόκος που κερδίζει. Το επιτόκιο στο οποίο αναφερόμαστε ονομάζεται *επιτόκιο της συμφωνίας επαναγοράς*. Αν δομηθεί σωστά, το δάνειο περιλαμβάνει πολύ μικρό πιστωτικό κίνδυνο. Αν ο οφειλέτης δεν τηρήσει τη συμφωνία, η εταιρεία που τον δάνεισε απλώς παρακρατεί τα χρεόγραφα. Αν η εταιρεία που δανείζει είναι εκείνη που δεν τηρεί τη συμφωνία, ο αρχικός κάτοχος των χρεογράφων κρατά τα μετρητά.

Το πιο κοινό επιτόκιο για επαναγορά είναι το *ολονύκτιο επιτόκιο*, στο οποίο η συμφωνία αποτελεί καθημερινό αντικείμενο επαναδιαπραγμάτευσης. Ωστόσο, οι μακροπρόθεσμες συμφωνίες, γνωστές και ως περίοδος επαναγοράς, χρησιμοποιούνται και αυτές μερικές φορές.

1.2 Μέτρηση των επιτοκίων

Η δήλωση εκ μέρους μιας τραπέζης ότι το επιτόκιο για τις ενός χρόνου καταθέσεις είναι 10% ακούγεται απλή και σαφής. Στην πραγματικότητα, η ακριβής σημασία της εξαρτάται από τον τρόπο που μετράται το επιτόκιο.

Πίνακας 1.1: *Επίδραση της αύξησης της συχνότητας ανατοκισμού*

Συχνότητα ανατοκισμού	Αξία των 100 ευρώ στο τέλος του χρόνου (σε ευρώ)
Ετησίως (m = 1)	110,00
Καθ’ εξάμηνο (m = 2)	110,25
Τριμηνιαία (m = 4)	110,38
Μηνιαία (m = 12)	110,47
Εβδομαδιαία (m = 52)	110,51
Καθημερινά (m = 365)	110,52

Αν το επιτόκιο υπολογίζεται με ετήσιο ανατοκισμό, η δήλωση της τράπεζας ότι το επιτόκιο είναι 10% σημαίνει ότι τα 100 ευρώ αυξάνονται σε

$$100 \times 1,1 = 110 \text{ ευρώ}$$

στο τέλος του ενός χρόνου. Όταν το επιτόκιο μετριέται με εξαμηνιαίους ανατοκισμούς, σημαίνει ότι κερδίζεται 5% κάθε 6 μήνες, με το επιτόκιο να επανεπενδύεται. Σε αυτήν την περίπτωση τα 100 ευρώ αυξάνονται σε

100 x 1,05 x 1,05 = 110,25 ευρώ

στο τέλος της ενός χρόνου. Όταν το επιτόκιο μετριέται με τριμηνιαίους ανατοκισμούς, η δήλωση της τράπεζας σημαίνει ότι κερδίζεται 2,5% κάθε τρίμηνο, με το επιτόκιο να επανεπενδύεται. Τα 100 ευρώ τότε αυξάνονται σε

$$100 \times 1{,}025^4 = 110{,}38 \text{ ευρώ}$$

στο τέλος του της έτους. Ο παραπάνω πίνακας δείχνει την επιπλέον επίδραση της αύξησης της συχνότητας ανατοκισμού.

Η συχνότητα ανατοκισμού καθορίζει τις μονάδες στις οποίες μετριέται ένα επιτόκιο. Ένα ποσοστό που εκφράζεται με μία συχνότητα ανατοκισμού μπορεί να μετατραπεί σε ισοδύναμο ποσοστό με διαφορετική συχνότητα ανατοκισμού. Για παράδειγμα, από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι ένα ποσοστό 10,25% με ετήσιο ανατοκισμό είναι ισοδύναμο με ένα ποσοστού 10% με εξαμηνιαίο ανατοκισμό. Μπορούμε να σκεφτούμε τη διαφορά ανάμεσα σε μία τιμή συχνότητας ανατοκισμού και μιας άλλης να είναι ανάλογη με τη διαφορά ανάμεσα σε χιλιόμετρα και μίλια. Πρόκειται για δύο διαφορετικές μονάδες μέτρησης.

Για να γενικεύσουμε τα αποτελέσματά μας, υποθέστε ότι ένα ποσό A επενδύεται για n χρόνια με επιτόκιο R ετησίως. Αν το επιτόκιο ανατοκίζεται μια φορά το χρόνο, η τελική αξία της επένδυσης είναι

$$A(1+R)^n$$

Αν το επιτόκιο ανατοκίζεται m φορές το χρόνο, η τελική αξία της επένδυσης είναι

$$A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{m \cdot n} \quad (1)$$

Όταν m = 1, το επιτόκιο αυτό ονομάζεται μερικές φορές ως *ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο*.

1.3 Συνεχής ανατοκισμός

Το όριο καθώς η συχνότητα ανατοκισμού, m, τείνει στο άπειρο είναι γνωστό ως *συνεχής ανατοκισμός*. Με το συνεχή ανατοκισμό, μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα ποσό A που επενδύεται για n χρόνια με επιτόκιο R αυξάνεται σε

$$Ae^{Rn} \quad (2)$$

όπου e = 2,718. Η εκθετική συνάρτηση e^x είναι ενσωματωμένη στις περισσότερες αριθμομηχανές, οπότε ο υπολογισμός της έκφρασης της παραπάνω σχέσης δε δημιουργεί προβλήματα. Στο παράδειγμα του πιο πάνω πίνακα, A = 100, n = 1 και R = 0,1 και έτσι η τιμή στην οποία αυξάνεται το ποσό A με το συνεχή ανατοκισμό είναι:

$$100e^{0,1} = 110,52 \text{ ευρώ}$$

Αυτό είναι (με δύο δεκαδικά ψηφία) το ίδιο με την τιμή του καθημερινού ανατοκισμού. Για πρακτικούς λόγους περισσότερο, ο συνεχής ανατοκισμός μπορεί να θεωρηθεί ότι ισοδυναμεί με τον καθημερινό ανατοκισμό. Ανατοκίζοντας ένα χρηματικό ποσό σε ένα συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο R για n χρόνια συνεπάγεται τον πολλαπλασιασμό του με το e^{Rn}. Αναγάγοντάς το με συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο R για n χρόνια συνεπάγεται τον πολλαπλασιασμό με το e^{-Rn}.

Σε αυτό το βιβλίο, τα επιτόκια θα μετρώνται με συνεχή ανατοκισμό εκτός κι αν δηλωθεί κάτι το διαφορετικό. Οι αναγνώστες που έχουν συνηθίσει να εργάζονται με επιτόκια που μετρώνται με ετήσια, εξαμηνιαία ή κάποια άλλη συχνότητα ανατοκισμού μπορούν να το βρουν λίγο παράξενο στην αρχή. Ωστόσο, τα συνεχώς ανατοκιζόμενα επιτόκια χρησιμοποιούνται σε τέτοιο βαθμό στην τιμολόγηση των παραγωγών που έχει νόημα να συνηθίσουν οι αναγνώστες να εργάζονται με αυτά τώρα.

Ας υποθέσουμε ότι R_c είναι το επιτόκιο με συνεχή ανατοκισμό και R_m είναι το ισοδύναμο επιτόκιο με m ανατοκισμούς ανά χρόνο. Από τα αποτελέσματα των εξισώσεων (1) και (2) έχουμε:

$$Ae^{R_c n} = A\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{m \cdot n}$$

ή

$$e^{R_c} = \left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{m}$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$R_c = m \cdot \ln\left(1+\frac{R_m}{m}\right) \tag{3}$$

Και

$$R_m = m\left(e^{R_C/m} - 1\right) \tag{4}$$

Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μετατρέψουν ένα επιτόκιο με m συχνότητα ανατοκισμού ανά έτος σε ένα συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο και αντίστροφα. Η συνάρτηση του φυσικού λογαρίθμου lnx, η οποία είναι ενσωματωμένη στους περισσότερους υπολογιστές τσέπης, είναι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης, έτσι ώστε, αν y = lnx, τότε $x = e^y$.

Παράδειγμα 1

Σκεφτείτε ένα επιτόκιο της τάξης του 10% ανά έτος με εξαμηνιαίο ανατοκισμό. Από την εξίσωση 3 με m = 2 και R_m = 0,1 το ισοδύναμο επιτόκιο με συνεχή ανατοκισμό είναι

$$2 \cdot \ln\left(1 + \frac{0,1}{2}\right) = 0,09758$$

ή 9,758% ανά έτος.

Παράδειγμα 2

Ας υποθέσουμε ότι ένας δανειστής δανείζει με επιτόκιο 8% ανά έτος με συνεχή ανατοκισμό και ότι οι τόκοι καταβάλλονται στην πραγματικότητα ανά τρίμηνο. Από την εξίσωση (4) με m = 4 και R_c = 0,08 το ισοδύναμο επιτόκιο με τριμηνιαίο ανατοκισμό είναι

$$4 \text{ x } (e^{0,08/4} - 1) = 0,0808$$

ή 8,08% ανά χρόνο. Αυτό σημαίνει πως σε ένα δάνειο 1.000 ευρώ, θα απαιτούνται πληρωμές τόκων των 20,20 ευρώ κάθε τρίμηνο.

Μηδενικά επιτόκια

Το επιτόκιο του νιοστού έτους με μηδενικό τοκομερίδιο είναι ένα επιτόκιο που εισπράττεται για μια επένδυση που αρχίζει σήμερα και τελειώνει μετά από n χρόνια. Όλος ο τόκος και το κεφάλαιο πραγματοποιούνται στο τέλος των n χρόνων. Δεν υπάρχουν ενδιάμεσες πληρωμές. Το επιτόκιο του νιοστού έτους με μηδενικό τοκομερίδιο πολλές φορές το βρίσκουμε και ως μηδενικό επιτόκιο του νιοστού έτους. Ας υποθέσουμε ένα μηδενικό επιτόκιο 5 χρόνων με συνεχή ανατοκισμό 5% κάθε χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι αν επενδύσουμε 100 ευρώ για 5 χρόνια, αυτά αυξάνονται σε:

$$100 \text{ x } e^{0,05\text{x}5} = 128,40 \text{ ευρώ}$$

Τα περισσότερα από τα επιτόκια που παρατηρούμε άμεσα στην αγορά δεν είναι καθαρά μηδενικά επιτόκια. Σκεφτείτε ένα 5-ετές κρατικό ομόλογο που παρέχει ένα τοκομερίδιο της τάξης του 6%. Η τιμή αυτού του ομολόγου δεν καθορίζει από μόνη της το μηδενικό επιτόκιο του δημοσίου, επειδή πραγματοποιούνται ορισμένες από τις επιστροφές του ομολόγου με τη μορφή τοκομεριδίων στο τέλος του πέμπτου έτους. Αργότερα σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε πώς μπορούμε να καθορίσουμε μηδενικά επιτόκια του δημοσίου από τις τιμές της αγοράς των τοκομεριδίων που φέρουν τα ομόλογα.

1.4 Τιμολόγηση ομολόγων

Τα περισσότερα ομόλογα πληρώνουν περιοδικά τοκομερίδια στους κατόχους τους. Το αρχικό κεφάλαιο του ομολόγου (το οποίο είναι γνωστό επίσης ως ονομαστική αξία) πληρώνεται στο τέλος της ζωής του. Η θεωρητική τιμή ενός ομολόγου μπορεί να υπολογιστεί ως η παρούσα αξία των χρηματοροών που θα ληφθούν από τον ιδιοκτήτη του ομολόγου. Μερικές φορές αυτοί που εμπορεύονται ομόλογα χρησιμοποιούν το ίδιο ποσοστό έκπτωσης για όλες τις χρηματοροές που στηρίζουν το ομόλογο, αλλά μια πιο ακριβή προσέγγιση είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα διαφορετικό μηδενικό επιτόκιο για κάθε χρηματοροή.

Για να φανεί αυτό, σκεφτείτε την περίπτωση όπου τα μηδενικά επιτόκια του δημοσίου μετρώνται με συνεχή ανατοκισμό, όπως στον επόμενο πίνακα. (Θα εξηγήσουμε αργότερα πώς μπορούν αυτά να υπολογιστούν.) Υποθέστε ότι ένα 2-ετές ομόλογο του δημοσίου με αρχικό κεφάλαιο 100 ευρώ παρέχει κάθε εξάμηνο κουπόνια σε επιτόκιο 6% ανά έτος. Για να υπολογίσουμε την παρούσα αξία του πρώτου κουπονιού ως 3 ευρώ, το αναγάγουμε σε 5% για 6 μήνες. Για να υπολογίσουμε την παρούσα αξία του δευτέρου κουπονιού ως 3 ευρώ, το αναγάγουμε σε 5,8 % για 1 χρόνο κλπ. Επομένως η θεωρητική τιμή του ομολόγου είναι

$$3e^{-0,05x0,5} + 3e^{-0,058x1,0} + 3e^{-0,064x1,5} + 103e^{-0,068x2,0} = 98,39 \text{ ευρώ}$$

Πίνακας 1.2: *Μηδενικά επιτόκια του δημοσίου.*

Λήξη (σε χρόνια)	Μηδενικό επιτόκιο (%) (συνεχώς ανατοκιζόμενο)
0,5	5,0
1,0	5,8
1,5	6,4
2,0	6,8

Απόδοση των ομολόγων

Η απόδοση των ομολόγων είναι το απλό αναγωγικό επιτόκιο, το οποίο όταν εφαρμόζεται σε της της χρηματοροές, δίνει μια τιμή του ομολόγου που ισούται με την τιμή αγοράς του. Υποθέστε ότι η θεωρητική τιμή του ομολόγου που έχουμε υπολογίσει πιο πάνω, τα 98,39 ευρώ, πως είναι της και η τιμή αγοράς (δηλ. η τιμή αγοράς του ομολόγου είναι σε ακριβή συμφωνία με τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα). Αν είναι y η απόδοση του ομολόγου, εκφρασμένη με συνεχή ανατοκισμό, θα πρέπει να ισχύει το παρακάτω

$$3e^{-y \times 0,5} + 3e^{-0,058y \times 1,0} + 3e^{-y \times 1,5} + 103e^{-y \times 2,0} = 98,39 \text{ ευρώ}$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας μια επαναληπτική μέθοδο και δίνει y = 6,76%.

Ονομαστική απόδοση

Η ονομαστική απόδοση για μια συγκεκριμένη λήξη (ωρίμανση) ομολόγου είναι το τοκομερίδιο που κάνει την τιμή του ομολόγου να είναι ίση με την ονομαστική του τιμή. (Η ονομαστική τιμή είναι ίδια με την τιμή του κεφαλαίου.) Συνήθως το ομόλογο θεωρείται ότι παρέχει εξαμηνιαία τοκομερίδια. Ας υποθέσουμε ότι το τοκομερίδιο σε ένα 2-ετές ομόλογο στο παράδειγμά μας είναι c ανά έτος (ή c/2 ανά εξάμηνο). Χρησιμοποιώντας τα μηδενικά επιτόκια του παραπάνω πίνακα, η τιμή του ομολόγου είναι ίση με την ονομαστική του τιμή όταν

$$\frac{c}{2}e^{-0,05x0,5}+\frac{c}{2}e^{-0,058x1,0}+\frac{c}{2}e^{-0,064x1,5}+\left(100+\frac{c}{2}\right)e^{-0,068x2,0}=100$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί με απλό τρόπο και δίνει c = 6,87. Η 2-ετής ονομαστική απόδοση είναι συνεπώς 6,87% ανά έτος με εξαμηνιαίο ανατοκισμό (ή 6,75 με συνεχή ανατοκισμό).

Πιο γενικά, αν d είναι η παρούσα αξία του 1 ευρώ που λαμβάνεται με τη λήξη του ομολόγου, A είναι η τιμή του ετήσιου εισοδήματος που πληρώνει ένα ευρώ σε κάθε ημερομηνία πληρωμής τοκομεριδίων και m είναι ο αριθμός των πληρωμών τοκομεριδίων ανά χρόνο, τότε η ονομαστική απόδοση c πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$100 = A\frac{c}{m}+100d$$

και έτσι

$$c=\frac{(100-100d)m}{A}$$

Στο παράδειγμά μας είναι

m = 2

d = $e^{-0,068x2,0}$ = 0,87284

A = $e^{-0,05x0,5}$ + $e^{-0,058x1,0}$ + $e^{-0,064x1,5}$ + $e^{-0,068x2,0}$ = 3,70027

Αυτός ο τύπος επιβεβαιώνει ότι η ονομαστική απόδοση είναι 6,87% ανά έτος. Παρατηρήστε ότι αυτό είναι ένα επιτόκιο εκφρασμένο με εξαμηνιαίο ανατοκισμό (και πληρώνεται κάθε 6 μήνες). Με συνεχή ανατοκισμό θα ήταν 6,75% ανά χρόνο.

1.5 Προσδιορισμός μηδενικών επιτοκίων του δημοσίου

Ένας τρόπος για να καθοριστούν τα μηδενικά επιτόκια του δημοσίου όπως εκείνα του προηγούμενου πίνακα είναι να προσέξουμε τις αποδόσεις στις «λωρίδες». Αυτά είναι ομόλογα άνευ τοκομεριδίων που έχουν δημιουργηθεί συνθετικά από τους συναλλασσομένους όταν πωλούν τα τοκομερίδια ενός ομολόγου του δημοσίου χωριστά από το αρχικό κεφάλαιο.

Ένας άλλος τρόπος για τον προσδιορισμό των μηδενικών επιτοκίων του δημοσίου είναι από τα έντοκα γραμμάτια και τα ομόλογα που αποδίδουν τοκομερίδια. Η πιο δημοφιλής προσέγγιση είναι γνωστή ως *μέθοδος bootstrap*. Για να καταδειχθεί η φύση της μεθόδου, θεωρήστε τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα σχετικά με τις τιμές των πέντε ομολόγων. Επειδή τα τρία πρώτα ομόλογα δεν πληρώνουν τοκομερίδια, τα μηδενικά επιτόκια που αντιστοιχούν σε αυτές τις διάρκειες ομολόγων μπορούν εύκολα να υπολογιστούν. Το 3-μηνο ομόλογο προσφέρει απόδοση της τάξης του 2,5 σε 3 μήνες για μια αρχική επένδυση ύψους 97,5. Με τριμηνιαίο ανατοκισμό, το 3-μηνο μηδενικό επιτόκιο είναι (4 x 25)/97,5 = 10,256% ετησίως. Η εξίσωση (3) δείχνει ότι, όταν το επιτόκιο εκφράζεται με συνεχή ανατοκισμό, γίνεται:

$$4\ln\left(1+\frac{0{,}10256}{4}\right)=0{,}10127$$

ή 10,127% ετησίως. Το 6-μηνο ομόλογο προσφέρει απόδοση της τάξης του 5,1 σε 6 μήνες για μια αρχική επένδυση των 94,9 ευρώ. Με εξαμηνιαίο ανατοκισμό το εξάμηνο επιτόκιο είναι (2 x 5,1)/94,9 = 10,748% ετησίως.

Πίνακας 1.3: *Δεδομένα για τη μέθοδο bootstrap.*

Αρχικό κεφάλαιο για το ομόλογο (€)	Χρόνος ωρίμανσης (έτη)	Ετήσιο τοκομερίδιο* (€)	Αξία ομολόγου (€)
100	0,25	0	97,5
100	0,50	0	94,9
100	1,00	0	90,0
100	1,50	8	96,0
100	2,00	12	101,6

* Το μισό του εκάστοτε δηλωμένου τοκομεριδίου υποθέτουμε ότι πληρώνεται κάθε 6 μήνες.

Η εξίσωση (3) δείχνει ότι, όταν το επιτόκιο εκφράζεται με συνεχή ανατοκισμό, γίνεται:

$$2\ln\left(1+\frac{0{,}10748}{2}\right)=0{,}10469$$

ή 10,469% ετησίως. Ομοίως, το επιτόκιο ενός χρόνου με συνεχή ανατοκισμό είναι

$$\ln\left(1+\frac{10}{90}\right)=0{,}10536$$

ή 10,536% ετησίως.

Το τέταρτο ομόλογο διαρκεί 1,5 χρόνο. Οι πληρωμές έχουν ως εξής:

6 μήνες: 4 ευρώ
1 χρόνος: 4 ευρώ
1,5 χρόνος: 104 ευρώ

Από τους προηγούμενους υπολογισμούς μας, γνωρίζουμε ότι το αναγωγικό επιτόκιο για την πληρωμή στο τέλος των 6 μηνών είναι 10,469% και ότι το αναγωγικό επιτόκιο στο τέλος του 1 έτος είναι 10,536%. Γνωρίζουμε επίσης ότι η αξία του ομολόγου, τα 96 ευρώ, πρέπει να ισούται με την παρούσα αξία του συνόλου των πληρωμών που εισπράχθηκαν από τους κατόχους ομολόγων. Υποθέτουμε πως έχουμε μηδενικό επιτόκιο διάρκειας 1,5 χρόνου και το συμβολίζουμε με R. Επομένως

$$4e^{-0,10469x0,5} + 4e^{-0,10536x1,0} + 104e^{-Rx1,5} = 96 \text{ ευρώ}$$

Αυτό συμπυκνώνεται στο

$$e^{-1,5xR} = 0{,}85196$$

ή

$$R=-\frac{\ln(0{,}85196)}{1{,}5}=0{,}10681$$

Το μηδενικό επιτόκιο 1,5 χρόνου λοιπόν είναι 10,681%. Αυτό είναι το μοναδικό μηδενικό επιτόκιο που είναι συνεπές με το 6-μηνο επιτόκιο, το ετήσιο επιτόκιο και τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα.

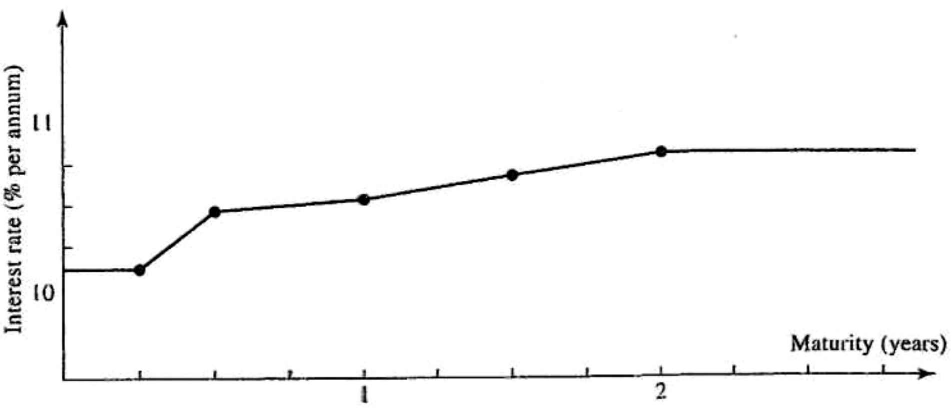
Το διετές μηδενικό επιτόκιο μπορεί να υπολογιστεί με όμοιο τρόπο για 6-μηνο, ετήσιο και 1,5 έτους μηδενικά επιτόκια καθώς και τις πληροφορίες σχετικά με το τελευταίο ομόλογο στον παραπάνω πίνακα. Αν είναι R το διετές μηδενικό επιτόκιο, τότε

$$6e^{-0,10469x0,5} + 6e^{-0,10536x1,0} + 6e^{-0,10681x1,5} + 106e^{-Rx2,0} = 101{,}6 \text{ ευρώ}$$

Αυτό δίνει R = 0,10808 ή 10,808%.

Πίνακας 1.4: *Συνεχώς ανατοκιζόμενα μηδενικά επιτόκια που προκύπτουν από τα δεδομένα του Πίνακα 3.*

Ωρίμανση (σε χρόνια)	Μηδενικό επιτόκιο (%) (συνεχώς ανατοκιζόμενο)
0,25	10,127
0,50	10,469
1,00	10,536
1,50	10,681
2,00	10,808



Σχήμα 1.1: *Μηδενικά επιτόκια που προκύπτουν από τη μέθοδο bootstrap*

Τα επιτόκια που έχουμε υπολογίσει συνοψίζονται στον Πίνακα 4. Ένα διάγραμμα που δείχνει το μηδενικό επιτόκιο σε συνάρτηση με την ωρίμανση είναι γνωστό ως *καμπύλη μηδενικού επιτοκίου*. Μια κοινή παραδοχή είναι ότι η καμπύλη μηδενικού επιτοκίου είναι γραμμική μεταξύ των σημείων που καθορίζονται με τη μέθοδο bootstrap. (Αυτό σημαίνει ότι το μηδενικό επιτόκιο του 1,25 χρόνου είναι 0,5 x 10,536 + 0,5 x 10,681 = 10,6085% στο παράδειγμά μας.) Επίσης, λαμβάνεται συνήθως ως δεδομένο ότι η καμπύλη μηδενικού επιτοκίου είναι οριζόντια πριν από το πρώτο σημείο και οριζόντια μετά το τελευταίο σημείο. Με τη χρήση ομολόγων μεγαλύτερης ωρίμανσης, η καμπύλη μηδενικού επιτοκίου θα ήταν πιο επακριβώς προσδιορισμένη πέραν των 2 ετών.

Στην πράξη, συνήθως δεν έχουμε ομόλογα με διάρκεια ίση με ακριβώς 1,5 χρόνο, 2 ή 2,5 χρόνια και ούτω καθεξής. Η προσέγγιση που χρησιμοποιείται συχνά από τους αναλυτές είναι να παρεμβληθούν δεδομένα ανάμεσα στις τιμές των ομολόγων προτού χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της καμπύλης μηδενικού επιτοκίου. Για παράδειγμα, εάν ξέρουν ότι ένα ομόλογο 2,3 ετών με τοκομερίδιο 6% πωλείται για 98 ευρώ και ότι ένα ομόλογο 2,7 ετών με τοκομερίδιο 6,5% πωλείται για 99 ευρώ, μπορεί να υποτεθεί ότι ένα ομόλογο 2,5 ετών με τοκομερίδιο 6,5% θα πωληθεί για 98,5 ευρώ.

1.6 Προθεσμιακά επιτόκια

Τα προθεσμιακά επιτόκια είναι τα επιτόκια που προκύπτουν από τα τρέχοντα μηδενικά επιτόκια για χρονικές στιγμές στο μέλλον. Για να δείξουμε πώς αυτά υπολογίζονται, υποθέτουμε ότι ένα συγκεκριμένο σύνολο μηδενικών επιτοκίων είναι ακριβώς έτσι όπως φαίνεται στον Πίνακα 5. Τα επιτόκια τα υποθέτουμε ως συνεχώς ανατοκιζόμενα. Έτσι ένα ετήσιο επιτόκιο 3% για 1 χρόνο σημαίνει ότι, σε απόδοση για μια επένδυση των 100 ευρώ σήμερα, ο επενδυτής παίρνει $100e^{0,03x1}$ = 103,05 ευρώ σε 1 χρόνο. Ένα ετήσιο επιτόκιο 4% για δύο χρόνια σημαίνει ότι, σε απόδοση για μια επένδυση 100 ευρώ σήμερα, ο επενδυτής παίρνει $100e^{0,04x2}$ = 108,33 ευρώ σε δύο χρόνια και ούτω καθεξής.

Το προθεσμιακό επιτόκιο του Πίνακα 5 για 2 χρόνια είναι 5% ετησίως. Αυτό είναι το επιτόκιο που προκύπτει από τα μηδενικά επιτόκια για την περίοδο ανάμεσα στο τέλος του πρώτου χρόνου και στο τέλος του δεύτερου χρόνου. Μπορεί να υπολογιστεί από ένα μηδενικό επιτόκιο ενός έτους της τάξης του 3% ετησίως και ένα διετές μηδενικό επιτόκιο της τάξης του 4% ετησίως. Είναι το επιτόκιο για το δεύτερο έτος το οποίο, όταν συνδυάζεται με επιτόκιο 3% για το πρώτο έτος, δίνει 4% συνολικά για τα 2 έτη. Για να δείξουμε ότι η σωστή απάντηση είναι 5% ετησίως, υποθέστε ότι επενδύουμε 100 ευρώ. Ένα επιτόκιο της τάξης του 3% για το πρώτο χρόνο και 5% για το δεύτερο χρόνο δίνει

$$100e^{0,03x1}e^{0,05x1} = 108,33 \text{ ευρώ}$$

στο τέλος του δεύτερου χρόνου. Ένα επιτόκιο της τάξης του 4% ετησίως για 2 χρόνια δίνει

$$100e^{0,04x2}$$

το οποίο δίνει επίσης 108,33 ευρώ. Αυτό το παράδειγμα δείχνει το γενικό αποτέλεσμα ότι όταν τα επιτόκια ανατοκίζονται συνεχώς και συνδυάζονται επιτόκια σε διαδοχικές χρονικές περιόδους, το συνολικό ισοδύναμο επιτόκιο είναι απλά το μέσο ποσοστό κατά τη διάρκεια ολόκληρης της περιόδου. Στο παράδειγμά μας, ένα επιτόκιο 3% για το πρώτο έτος και 5% για το δεύτερο έτος έχουν ως μέσο όρο τους το επιτόκιο 4% και για τα δύο χρόνια. Το αποτέλεσμα είναι μόνο κατά προσέγγιση αλήθεια όταν τα επιτόκια δεν ανατοκίζονται συνεχώς.

Το προθεσμιακό επιτόκιο για τον τρίτο χρόνο είναι το επιτόκιο που προκύπτει από διετές επιτόκιο 4% ετησίως και επιτόκιο 4,6% για τον τρίτο χρόνο. Είναι 5,8% κάθε χρόνο. Ο λόγος είναι ότι μια επένδυση για 2 χρόνια με 4% επιτόκιο συνδυασμένη με μια επένδυση 1 χρόνου με 5,8% επιτόκιο ετησίως δίνει ένα συνολικό μέσο επιτόκιο για την απόδοση για τα τρία χρόνια της τάξης του 4,6% ανά έτος. Γενικά, αν είναι R_1 και R_2 τα μηδενικά επιτόκια για τις ωριμάνσεις T_1 και T_2 αντίστοιχα και R_F είναι το προθεσμιακό επιτόκιο για την περίοδο ανάμεσα στα T_1 και T_2, τότε

$$R_F = \frac{R_2T_2 - R_1T_1}{T_2 - T_1} \qquad (5)$$

Για να φανεί αυτός ο τύπος, θεωρήστε τον υπολογισμό του έτους 4 ενός προθεσμιακού επιτοκίου για τα δεδομένα του Πίνακα 5: $T_1 = 3$, $T_2 = 4$, $R_1 = 0{,}046$ και $R_2 = 0{,}05$ και ο τύπος δίνει $R_F = 0{,}062$.

Η εξίσωση (5) μπορεί να γραφεί και ως

$$R_F = R_2 + (R_2 - R_1)\frac{T_1}{T_2 - T_1} \tag{6}$$

Αυτή δείχνει πως αν η καμπύλη μηδενικού επιτοκίου έχει ανοδική κλίση ανάμεσα στο T_1 και το T_2, έτσι ώστε $R_2 > R_1$, τότε $R_F > R_2$ (δηλ. το προθεσμιακό επιτόκιο για μια περίοδο που τελειώνει στο T_2 είναι μεγαλύτερο από το μηδενικό επιτόκιο του T_2). Ομοίως, αν η καμπύλη μηδενικού επιτοκίου έχει αρνητική κλίση με $R_2 < R_1$, τότε $R_F < R_2$ (δηλ. το προθεσμιακό επιτόκιο είναι μικρότερο απ' ό,τι το μηδενικό επιτόκιο του T_2).

Πίνακας 1.5: *Υπολογισμός προθεσμιακών επιτοκίων.*

Έτος (n)	Μηδενικό επιτόκιο για μια επένδυση n χρόνων (% ανά έτος)	Προθεσμιακό επιτόκιο για το n^{o} έτος (% ανά έτος
1	3,0	
2	4,0	5,0
3	4,6	5,8
4	5,0	6,2
5	5,3	6,5

Λαμβάνοντας όρια καθώς το T_2 πλησιάζει το T_1 στην εξίσωση (6) και χρησιμοποιώντας ως κοινή τιμή αυτών των δύο τιμών την τιμή T, παίρνουμε

$$R_F = R + T\frac{\partial R}{\partial T}$$

όπου R είναι το μηδενικό επιτόκιο για την ωρίμανση σε χρόνο T. Η τιμή του R_F που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο είναι γνωστή ως *στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο* για την ωρίμανση T. Αυτό είναι το προθεσμιακό επιτόκιο που ισχύει για μια πολύ σύντομη μελλοντική χρονική περίοδο που ξεκινά τη στιγμή T. Ορίζουμε P(0,T) ως την τιμή ενός ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου τη στιγμή T. Επειδή $P(0,T) = e^{-RT}$, η εξίσωση για το στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο μπορεί να γραφεί επίσης ως

$$R_F = -\frac{\partial}{\partial T}\ln P(0,T)$$

Υποθέτοντας ότι τα μηδενικά επιτόκια για δανεισμό και επενδύσεις είναι τα ίδια (το οποίο είναι κοντά στην αλήθεια για ένα μεγάλο χρηματοπιστωτικό ίδρυμα), ένας επενδυτής μπορεί να κλειδώσει το προθεσμιακό επιτόκιο για μια μελλοντική χρονική περίοδο. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι τα μηδενικά επιτόκια είναι όπως στον Πίνακα 5. Αν ένας επενδυτής δανείζεται 100 ευρώ με 3% για 1 χρόνο και στη συνέχεια επενδύει τα χρήματα με 4% για 2 χρόνια, το αποτέλεσμα είναι μια ταμειακή εκροή $100e^{0,03x1}$ = 103,05 ευρώ στο τέλος του χρόνου 1 και μια εισροή $100e^{0,04x2}$ = 108,33 στο τέλος του χρόνου 2. Από τη στιγμή που 108,33 = $103,05e^{0,05}$, μια απόδοση που ισούται με το προθεσμιακό επιτόκιο (5%) εισπράττεται για τα 103,05 ευρώ του δεύτερου χρόνου. Υποθέστε στη συνέχεια ότι ο επενδυτής δανείζεται 100 ευρώ για 4 χρόνια με 5% επιτόκιο και τα επενδύει για 3 χρόνια με επιτόκιο 4,6%. Το αποτέλεσμα είναι μια ταμειακή εισροή $100e^{0,046x3}$ = 114,80 ευρώ στο τέλος του τρίτου χρόνου και μια ταμειακή εκροή $100e^{0,05x4}$ = 122,14 ευρώ στο τέλος του τέταρτου χρόνου. Δεδομένου ότι 122,14 = $114,80e^{0,062}$, τα χρήματα δανείζονται στο τέλος του τέταρτου χρόνου με προθεσμιακό επιτόκιο 6,2%.

Εάν ο επενδυτής πιστεύει ότι τα επιτόκια στο μέλλον θα είναι διαφορετικά από τα σημερινά προθεσμιακά επιτόκια, υπάρχουν πολλές στρατηγικές διαπραγμάτευσης που θα βρει ελκυστικές ο επενδυτής. Μια από αυτές αφορά τη σύναψη σύμβασης γνωστής ως *σύμβαση προθεσμιακού επιτοκίου*. Θα συζητήσουμε τώρα πώς η σύμβαση αυτή λειτουργεί και πώς αξιολογείται.

1.7 Συμβάσεις προθεσμιακού επιτοκίου

Μια σύμβαση προθεσμιακού επιτοκίου (forward rate agreement – FRA), είναι μια συμφωνία όπου εφαρμόζεται ένα συγκεκριμένο επιτόκιο είτε για δανειοδότηση είτε για δανειοληψία κάποιου συγκεκριμένου κεφαλαίου κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης μελλοντικής χρονικής περιόδου. Η υπόθεση στην οποία βασίζεται η σύμβαση είναι ότι η δανειοδότηση ή η δανειοληψία θα γίνουν κανονικά σε επιτόκια LIBOR.

Σκεφτείτε μια σύμβαση με προθεσμιακό επιτόκιο όπου η εταιρεία Χ συμφωνεί να δανείσει χρήματα στην εταιρεία Υ για μια περίοδο ανάμεσα στις στιγμές T_1 και T_2. Ορίζουμε:

R_K: Το επιτόκιο που συμφωνήθηκε στη FRA
R_F: Το προθεσμιακό επιτόκιο LIBOR για τη χρονική περίοδο ανάμεσα στις χρονικές στιγμές T_1 και T_2, που υπολογίζεται σήμερα.
R_M: Το πραγματικό επιτόκιο LIBOR που παρατηρείται στην αγορά τη στιγμή T_1 για τη χρονική περίοδο ανάμεσα στις χρονικές στιγμές T_1 και T_2.
L: Το κεφάλαιο που στηρίζει τη σύμβαση

Θα ξεφύγουμε από τη συνήθη παραδοχή του συνεχούς ανατοκισμού και θα υποθέσουμε ότι τα επιτόκια R_K, R_F και R_M μετρώνται όλα με συχνότητα ανατοκισμού που αντικατοπτρίζει το μήκος της περιόδου στην οποία εφαρμόζονται. Αυτό σημαίνει ότι αν $T_2 - T_1 = 0,5$ αυτά εκφράζονται με εξαμηνιαίο ανατοκισμό. Αν $T_2 - T_1 = 0,25$ αυτά εκφράζονται με τριμηνιαίο ανατοκισμό και ούτω καθεξής. (Αυτή η παραδοχή αντιστοιχεί στη συνήθη πρακτική της αγοράς για τις FRA.)

Κανονικά η εταιρεία Χ θα κέρδιζε R_M από ένα δάνειο με επιτόκιο LIBOR. Η FRA σημαίνει ότι θα κερδίσει R_K. Το επιπλέον επιτόκιο (το οποίο μπορεί να είναι αρνητικό) που κερδίζει ως αποτέλεσμα της σύναψης της FRA είναι $R_K - R_M$. Το επιτόκιο έχει καθοριστεί από τη στιγμή T_1 και πληρώθηκε τη στιγμή T_2. Το επιπλέον επιτόκιο επομένως οδηγεί σε μια χρηματοροή για την εταιρεία Χ τη στιγμή T_2 που είναι

$$L(R_K - R_M)(T_2 - T_1) \tag{7}$$

Ομοίως υπάρχει ταμειακή ροή για την εταιρεία Υ τη στιγμή T_2 που είναι

$$L(R_M - R_K)(T_2 - T_1) \tag{8}$$

Από τις εξισώσεις (7) και (8) βλέπουμε ότι υπάρχει μια άλλη ερμηνεία της FRA. Είναι μια σύμβαση όπου η εταιρεία Χ θα λάβει τόκους του αρχικού κεφαλαίου ανάμεσα στις στιγμές T_1 και T_2 στο σταθερό επιτόκιο R_K και θα καταβάλει τόκους με το επιτόκιο της αγοράς R_M. Η εταιρεία Υ θα καταβάλει τόκους του αρχικού κεφαλαίου ανάμεσα στις στιγμές T_1 και T_2 στο σταθερό επιτόκιο R_K και θα λάβει τόκους με το επιτόκιο R_M.

Συνήθως οι FRA γίνονται στη στιγμή T_1 παρά στη στιγμή T_2. Η εξόφληση πρέπει τότε να αφαιρεθεί από τη στιγμή T_2 μέχρι την T_1. Για την εταιρεία Χ, η εξόφληση στη χρονική στιγμή T_1 είναι

$$\frac{L(R_K - R_M)(T_2 - T_1)}{1 + R_M(T_2 - T_1)}$$

και για την εταιρεία Υ, η εξόφληση τη στιγμή T_1 είναι

$$\frac{L(R_K - R_M)(T_2 - T_1)}{1 + R_M(T_2 - T_1)}$$

Παράδειγμα 3

Ας υποθέσουμε πως μια εταιρεία συνάπτει μια συμφωνία FRA που καθορίζει ότι θα λάβει ένα σταθερό επιτόκιο της τάξης του 4% επί ενός αρχικού κεφαλαίου 100 εκατομμυρίων ευρώ για μια περίοδο 3 μηνών που θα ξεκινά σε 3 χρόνια. Αν το 3-μηνο επιτόκιο LIBOR είναι 4,5% για την 3-μηνη περίοδο οι ταμειακές ροές στο δανειστή θα είναι

100.000.000 x (0,04 – 0,045) x 0,25 = – 125.000 ευρώ

στο σημείο των 3,25 χρόνων. Αυτό είναι ισοδύναμο με μία ταμειακή ροή από

$$-\frac{125.000}{1 + 0,04x0,25} = -123.609 \text{ ευρώ}$$

στα 3 χρόνια. Οι ταμειακές ροές για την ομάδα της αντίθετης πλευράς της συναλλαγής θα είναι +125.000 ευρώ στα 3,25 χρόνια ή +123.609 ευρώ στα 3 χρόνια. (Όλα τα επιτόκια σε αυτό το παράδειγμα εκφράζονται με τριμηνιαίο ανατοκισμό.)

Αποτίμηση

Για να αποτιμήσουμε μια συμφωνία FRA πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι έχει πάντα μηδενική αξία όταν $R_K = R_F$. Αυτό συμβαίνει επειδή ένα μεγάλο χρηματοπιστωτικό ίδρυμα μπορεί να κλειδώσει χωρίς κόστος σε ένα προθεσμιακό επιτόκιο για μια μελλοντική περίοδο. Για παράδειγμα, μπορεί να εξασφαλίσει ότι θα κερδίσει το προθεσμιακό επιτόκιο για το χρονικό διάστημα μεταξύ των ετών 2 και 3 δανειζόμενο ένα ορισμένο ποσό χρημάτων για 2 χρόνια και επενδύοντάς το για 3 χρόνια. Ομοίως, μπορεί να εξασφαλίσει ότι πληρώνει το προθεσμιακό επιτόκιο για το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα χρόνια 2 και 3 δανειζόμενο ένα ορισμένο ποσό χρημάτων για 3 χρόνια και επενδύοντάς το για 2 χρόνια.

Συγκρίνετε τώρα 2 συμφωνίες FRA. Η πρώτη υπόσχεται ότι το προθεσμιακό επιτόκιο LIBOR R_F θα εισπραχθεί επί ενός αρχικού κεφαλαίου L μεταξύ των χρονικών στιγμών T_1 και T_2. Η δεύτερη υπόσχεται ότι το επιτόκιο R_K θα εισπραχθεί επί του ίδιου αρχικού κεφαλαίου L και μεταξύ των ίδιων χρονικών στιγμών. Οι δύο συμβάσεις είναι ίδιες εκτός από τις πληρωμές τόκων που λαμβάνονται κατά τη χρονική στιγμή T_2. Η υπέρβαση της τιμής του δεύτερου συμβολαίου επί του πρώτου είναι, επομένως, η παρούσα αξία της διαφοράς μεταξύ αυτών των πληρωμών τόκων, ή

$$L(R_K - R_F)(T_2 - T_1)e^{-R_2 T_2}$$

όπου R_2 είναι το συνεχώς ανατοκιζόμενο μηδενικού κινδύνου επιτόκιο για διάρκεια (ωρίμανση) T_2. Επειδή η αξία του FRA συμβολαίου όπου εισπράττεται το R_F είναι μηδέν, η αξία του FRA όπου εισπράττεται το R_K είναι

$$V_{FRA} = L(R_K - R_F)(T_2 - T_1)e^{-R_2 T_2} \tag{9}$$

Ομοίως, για την εταιρεία που λαμβάνει τόκους στο κυμαινόμενο επιτόκιο και πληρώνοντας τόκους στο επιτόκιο R_K, η αξία του FRA είναι

$$V_{FRA} = L(R_F - R_K)(T_2 - T_1)e^{-R_2 T_2} \tag{10}$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (9) και (10) ή τις εξισώσει (8) και (10), βλέπουμε ότι μια συμφωνία FRA μπορεί να αποτιμηθεί αν εμείς:

1) Υπολογίσουμε την αποπληρωμή με βάση την υπόθεση ότι διαπιστώνονται προθεσμιακά επιτόκια (αυτό σημαίνει, με βάση την υπόθεση ότι $R_M = R_F$).
2) Αφαιρέσουμε την αποπληρωμή από το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο.

Παράδειγμα 4

Υποθέτουμε ότι τα LIBOR μηδενικά και προθεσμιακά επιτόκια είναι όπως στον Πίνακα 5. Θεωρούμε μια συμφωνία FRA όπου θα λάβουμε ένα επιτόκιο της τάξης του 6%, μετρουμένου με ετήσιο ανατοκισμό, επί αρχικού κεφαλαίου 100 εκατομμυρίων ευρώ μεταξύ του τέλους του έτους 1 και του τέλους του έτους 2. Σε αυτήν την περίπτωση, το προθεσμιακό επιτόκιο είναι 5% με συνεχή ανατοκισμό ή 5,127% με ετήσιο ανατοκισμό. Από την εξίσωση (9), προκύπτει ότι η αξία του FRA είναι

$$100.000.000 \text{ x } (0{,}06 – 0{,}05127)e^{-0{,}04\text{x}2} = 805.800 \text{ ευρώ}$$

1.8 Διάρκεια

Η διάρκεια ενός ομολόγου, όπως υποδηλώνει το όνομά του, είναι ένα μέτρο για το πόσο πρέπει να περιμένει ο κάτοχος του ομολόγου κατά μέσο όρο πριν εκείνος λάβει τις πληρωμές σε μετρητά. Ένα ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου που διαρκεί για *n* χρόνια έχει μια διάρκεια *n* χρόνων. Ωστόσο, ένα ομόλογο που αποδίδει τοκομερίδια το οποίο διαρκεί *n* χρόνια έχει διάρκεια μικρότερη των *n* χρόνων, επειδή ο κάτοχός του λαμβάνει κάποιες από τις πληρωμές νωρίτερα από το χρόνο *n*.

Υποθέστε ότι ένα ομόλογο παρέχει στον κάτοχο ταμειακές ροές c_i σε χρόνο t_i $(1 \leq i \leq n)$. Η τιμή B του ομολόγου και η απόδοση του ομολόγου y (που ανατοκίζεται συνεχώς) συνδέονται με τη σχέση

$$B = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-yt_i} \tag{11}$$

Η διάρκεια του ομολόγου D, ορίζεται ως

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i c_i e^{-yt_i}}{B} \tag{12}$$

Αυτό μπορεί να γραφεί ως

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \left[\frac{c_i e^{-yt_i}}{B} \right]$$

Ο όρος μέσα στις αγκύλες είναι ο λόγος της παρούσας αξίας των ταμειακών ροών στη χρονική στιγμή t_i προς την τιμή του ομολόγου. Η τιμή του ομολόγου είναι η παρούσα αξία για όλες τις πληρωμές. Η διάρκεια είναι επομένως ο σταθμισμένος όρος των χρόνων στους οποίους πραγματοποιούνται οι πληρωμές, με το συντελεστή στάθμισης που εφαρμόζεται στη χρονική στιγμή t_i να είναι ίσος με το ποσοστό της συνολικής παρούσης αξίας του ομολόγου που παρέχεται από την ταμειακή ροή κατά τη χρονική στιγμή t_i. Το άθροισμα των συντελεστών στάθμισης είναι 1,0. Προσέξτε ότι το σκοπό του ορισμού της διάρκειας όλες οι προεξοφλήσεις γίνονται στο επιτόκιο απόδοσης του ομολόγου, y. (Δε χρησιμοποιούμε διαφορετικό μηδενικό επιτόκιο για κάθε ταμειακή ροή.)

Πίνακας 1.6: *Υπολογισμός της διάρκειας.*

Χρόνος (έτη)	Ταμειακές ροές (ευρώ)	Παρούσα αξία	Συντελεστής στάθμισης	Χρόνος x συντ. στάθμισης
0,5	5	4,709	0,050	0,025
1,0	5	4,435	0,047	0,047
1,5	5	4,176	0,044	0,066
2,0	5	3,933	0,042	0,083
2,5	5	3,704	0,039	0,098
3,0	105	73,256	0,778	2,333
Σύνολο	130	94,213	1,000	2,653

Όταν υπάρχει μια μικρή μεταβολή Δy στην απόδοση, είναι περίπου αληθές ότι

$$\Delta \mathrm{B} = \frac{dB}{dy}\Delta y \tag{13}$$

Από την εξίσωση (11), το παραπάνω γίνεται

$$\Delta \mathrm{B} = -\Delta y \sum_{i=1}^{n} c_i t_i e^{-yt_i} \tag{14}$$

(Προσέξτε ότι υπάρχει αρνητική σχέση ανάμεσα στο B και το y. Όταν οι αποδόσεις του ομολόγου αυξάνονται, πέφτουν οι τιμές του ομολόγου. Όταν οι αποδόσεις του ομολόγου μειώνονται, αυξάνονται οι τιμές του ομολόγου.) Από τις εξισώσεις (12) και (14), προκύπτει η σχέση-κλειδί για τη διάρκεια:

$$\Delta B = -\,BD\Delta y \tag{15}$$

Αυτό μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{\Delta \mathrm{B}}{\mathrm{B}} = -D\Delta y \tag{16}$$

Η εξίσωση (16) είναι μια προσεγγιστική σχέση μεταξύ των ποσοστιαίων μεταβολών σε μια τιμή ομολόγου και των μεταβολών στην απόδοσή του. Είναι εύκολο να χρησιμοποιηθεί και είναι ο λόγος γιατί η διάρκεια, η οποία είχε αρχικά προταθεί από τον Macaulay το 1938, έχει γίνει ένα τόσο γνωστό μέτρο σύγκρισης.

Θεωρήστε ένα τριετές ομόλογο με 10% τοκομερίδιο με ονομαστική αξία 100 ευρώ. Υποθέστε ότι η απόδοση του ομολόγου είναι 12% ετησίως με συνεχή ανατοκισμό. Αυτό σημαίνει ότι y = 0,12. Οι πληρωμές των τοκομεριδίων των 5 ευρώ γίνονται κάθε 6 μήνες. Ο Πίνακας 6 δείχνει τους υπολογισμούς που είναι απαραίτητοι για τον καθορισμό της διάρκειας του ομολόγου. Οι παρούσες αξίες των ταμειακών ροών του ομολόγου, χρησιμοποιώντας την απόδοση όπως το αναγωγικό επιτόκιο, παρουσιάζονται στη στήλη 3 (δηλ. η παρούσα αξία της πρώτης ταμειακής ροής είναι $5e^{-0,12x0,5}$ = 4,709). Το άθροισμα των αριθμών της στήλης 3 δίνει μια τιμή ομολόγου 94,213 ευρώ. Οι συντελεστές στάθμισης υπολογίζονται με τη διαίρεση των αριθμών της στήλης 3 με το 94,213. Το άθροισμα των αριθμών της στήλης 5 δίνει τη χρονική διάρκεια ως 2,653 χρόνια.

Μικρές μεταβολές στα επιτόκια συχνά μετρώνται σε *μονάδες βάσης*. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μια μονάδα βάσης ισούται με 0,01% ετησίως. Το ακόλουθο παράδειγμα διερευνά την ακρίβεια της σχέσης για τη διάρκεια της εξίσωσης (15).

Παράδειγμα 5

Για το ομόλογο του Πίνακα 6, η τιμή του B είναι 94,213 και η διάρκειά του D είναι 2,653. Έτσι η εξίσωση (15) δίνει

$$\Delta B = -94{,}213 \times 2{,}653 \Delta y$$

ή

$$\Delta B = -249{,}95 \Delta y$$

Όταν η απόδοση του ομολόγου αυξάνεται κατά 10 μονάδες βάσης (=0,1%), το $\Delta y = +0{,}001$. Η σχέση της διάρκειας προβλέπει ότι $\Delta B = -295{,}95 \times 0{,}001 = -0{,}250$ κι έτσι η τιμή του ομολόγου μειώνεται στο 94,213 – 0,250 = 93,963. Πόσο ακριβές είναι αυτό; Αποτιμώντας το ομόλογο υπό το πρίσμα της απόδοσής του κατά το συνηθισμένο τρόπο, βρίσκουμε πως όταν η απόδοση του ομολόγου αυξάνεται κατά 10 μονάδες βάσης στο 12,1%, η τιμή του ομολόγου γίνεται

$$5e^{-0{,}121 \times 0{,}5} + 5e^{-0{,}121 \times 1{,}0} + 5e^{-0{,}121 \times 1{,}5} + 5e^{-0{,}121 \times 2{,}0} + 5e^{-0{,}121 \times 2{,}5} + 105e^{-0{,}121 \times 3{,}0} = 93{,}963$$

το οποίο είναι (με τρία δεκαδικά ψηφία) το ίδιο με αυτό που προβλέφθηκε από τη σχέση για τη διάρκεια.

Τροποποιημένη Διάρκεια

Η προηγούμενη ανάλυση βασίζεται στην υπόθεση ότι το y εκφράζεται με συνεχή ανατοκισμό. Αν το y εκφράζεται με ετήσιο ανατοκισμό, μπορεί να αποδειχθεί ότι η προσεγγιστική σχέση στην εξίσωση (15) γίνεται

$$\Delta B = -\frac{BD\Delta y}{1+y}$$

Γενικότερα, αν το y εκφράζεται με συχνότητα ανατοκισμού m φορές το χρόνο, τότε

$$\Delta B = -\frac{BD\Delta y}{1+y/m}$$

Μια μεταβλητή D^* που ορίζεται ως

$$D^* = -\frac{D}{1 + y/m}$$

μερικές φορές αναφέρεται ως *τροποποιημένη διάρκεια* του ομολόγου. Επιτρέπει στη σχέση για τη διάρκεια να απλουστευθεί στη σχέση

$$\Delta B = -BD^{*}\Delta y \qquad (17)$$

όταν το y εκφράζεται με συχνότητα ανατοκισμού m φορές το χρόνο. Το παρακάτω παράδειγμα διερευνά την ακρίβεια της σχέση για την τροποποιημένη διάρκεια.

Παράδειγμα 6

Το ομόλογο του Πίνακα 6 έχει μια τιμή 94,213 και μια διάρκεια 2,653. Η απόδοση, εκφρασμένη σε εξαμηνιαίο ανατοκισμό είναι 12,3673%. Η τροποποιημένη διάρκεια D^* δίνεται ως

$$D^* = \frac{2{,}653}{1 + 0{,}123673/2} = 2{,}499$$

Από την εξίσωση (17)

$$\Delta B = -94{,}213 \text{ x } 2{,}4985\Delta y$$

ή

$$\Delta B = -235{,}39\Delta y$$

Όταν η απόδοση (που ανατοκίζεται εξαμηνιαίως) αυξάνεται κατά 10 μονάδες βάσης (=0,1%), έχουμε Δy = +0,001. Η σχέση για τη διάρκεια προβλέπει ότι αναμένουμε το ΔB να είναι 235,39 x 0,001 = -0,235, έτσι ώστε η τιμή του ομολόγου να μειώνεται στα 94,213 – 0,235 = 93,978. Πόσο ακριβές είναι αυτό; Ένας ακριβής υπολογισμός, παρόμοιος με εκείνον του προηγούμενο παραδείγματος, δείχνει ότι όταν η απόδοση (που ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο) αυξάνεται κατά 10 μονάδες βάσης στο 12,4673%, η τιμή του ομολόγου γίνεται 93,978. Αυτό δείχνει ότι ο υπολογισμός τροποποιημένης διάρκειας δίνει καλή ακρίβεια για μικρές αλλαγές στην απόδοση.

Ένας άλλος όρος που χρησιμοποιείται μερικές φορές είναι η *διάρκεια του ευρώ*. Αυτό είναι το γινόμενο της τροποποιημένης διάρκειας και της τιμής του ομολόγου, έτσι ώστε $\Delta B = -D^{**}\Delta y$, όπου D^{**} είναι η διάρκεια του ευρώ.

Χαρτοφυλάκια ομολόγων

Η διάρκεια D ενός χαρτοφυλακίου ομολόγου μπορεί να οριστεί ως ο σταθμισμένος μέσος όρος των διαρκειών των ανεξαρτήτων ομολόγων του χαρτοφυλακίου, με τους συντελεστές στάθμισης να είναι ανάλογοι με τις τιμές των ομολόγων. Τότε εφαρμόζονται οι εξισώσεις (15) και (17), με το B να ορίζεται ως η αξία του χαρτοφυλακίου ομολόγων. Εκτιμούν την αλλαγή στην αξία του χαρτοφυλακίου ομολόγων για μια μικρή αλλαγή Δ στις αποδόσεις όλων των ομολόγων.

Είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε ότι όταν η χρησιμοποιείται η διάρκεια για τα χαρτοφυλάκια ομολόγων, υπάρχει μια σιωπηλή υπόθεση ότι οι αποδόσεις όλων των ομολόγων θα αλλάξουν κατά περίπου το ίδιο ποσό. Όταν τα ομόλογα παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές όσο αφορά τις διάρκειες, αυτό συμβαίνει μόνο όταν υπάρχει παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης αποδόσεων για τα ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου. Θα πρέπει λοιπόν να ερμηνεύσουμε τις εξισώσεις (15) και (17) ως να μας παρέχουν εκτιμήσεις για τις επιπτώσεις στην τιμή του χαρτοφυλακίου ομολόγων από μια μικρή παράλληλη μετατόπιση Δy στη καμπύλη μηδενικού τοκομεριδίου.

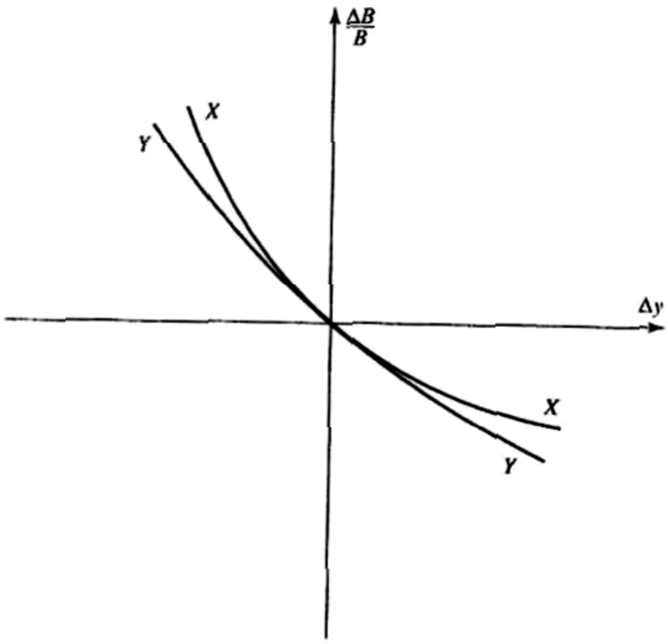
Με την επιλογή χαρτοφυλακίου έτσι ώστε η διάρκεια του κεφαλαίου να ισούται με τη διάρκεια των υποχρεώσεων (δηλ. η καθαρή διάρκεια να είναι μηδέν), ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα εξαλείφει την έκθεσή του σε μικρές παράλληλες μετατοπίσεις στην καμπύλη απόδοσης. Εξακολουθεί όμως να εκτίθεται σε μεταβολές που είναι είτε μεγάλες ή μη παράλληλες.

1.9 Κυρτότητα

Η σχέση για τη διάρκεια εφαρμόζεται μόνο σε μικρές αλλαγές στις αποδόσεις. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, το οποίο δείχνει τη σχέση μεταξύ της ποσοστιαίας μεταβολής στην τιμή και την αλλαγή της απόδοσης σε δύο χαρτοφυλάκια ομολόγων που έχουν την ίδια διάρκεια. Οι κλίσεις των δύο καμπυλών είναι ίδια στην αρχή. Αυτό σημαίνει ότι και τα δύο χαρτοφυλάκια ομολόγων αλλάζουν σε αξία κατά το ίδιο ποσοστό για μικρές αλλαγές στην απόδοση το οποίο είναι σταθερό βάσει της εξίσωσης (16). Για μεγάλες αλλαγές στην απόδοση, τα χαρτοφυλάκια συμπεριφέρονται διαφορετικά. Το χαρτοφυλάκιο X έχει μεγαλύτερη καμπυλότητα στη σχέση του με τις αποδόσεις απ' ό,τι το χαρτοφυλάκιο Y. Ένας συντελεστής που είναι γνωστός ως *κυρτότητα* μετρά αυτήν την καμπυλότητα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη βελτίωση της σχέσης στην εξίσωση (16).

Ένα μέτρο κυρτότητας είναι

$$C = \frac{1}{B}\frac{d^2B}{dy^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i t_i^2 e^{-yt_i}}{B}$$



Σχήμα 1.2: *Δύο χαρτοφυλάκια ομολόγων με ίδια διάρκεια*

Από τη διεύρυνση των σειρών Taylor, παίρνουμε μια πιο ακριβή έκφραση απ' αυτήν στην εξίσωση (13), η οποία είναι

$$\Delta \mathrm{B} = \frac{d\mathrm{B}}{dy}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{d^2B}{dy^2}\Delta y^2$$

που οδηγεί στη σχέση

$$\frac{\Delta \mathrm{B}}{\mathrm{B}} = -D \cdot \Delta y + \frac{1}{2}C(\Delta y)^2$$

Η κυρτότητα του χαρτοφυλακίου ομολόγων τείνει να είναι μεγαλύτερη όταν το χαρτοφυλάκιο παρέχει πληρωμές σε ίσα μέρη για μεγάλο χρονικό διάστημα. Είναι ελάχιστη όταν οι πληρωμές συγκεντρώνονται γύρω από ένα συγκεκριμένο χρονικό σημείο. Επιλέγοντας ένα χαρτοφυλάκιο κεφαλαίων και υποχρεώσεων με μηδενική καθαρή διάρκεια και μηδενική καθαρή κυρτότητα, ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα μπορεί να κάνει τον εαυτό του να μην υπόκειται σε σχετικά μεγάλες παράλληλες μετατοπίσεις στην καμπύλη μηδενικού τοκομεριδίου. Ωστόσο, εξακολουθεί και πάλι να εκτίθεται σε μη παράλληλες μετατοπίσεις.

1.10 Θεωρίες υπό το πρίσμα της διάρθρωσης των επιτοκίων

Είναι φυσικό να ρωτήσει κανείς τι καθορίζει το σχήμα της καμπύλης μηδενικού τοκομεριδίου. Γιατί μερικές φορές έχει κλίση προς τα κάτω και μερικές φορές μια ανοδική εν μέρει κλίση και μια εν μέρει καθοδική; Έχει προταθεί ένας αριθμός διαφορετικών θεωριών. Η πιο απλή από αυτές είναι η *θεωρία προσδοκιών*, η οποία εικάζει ότι τα μακροπρόθεσμα επιτόκια θα πρέπει να αντανακλούν τα μελλοντικά βραχυπρόθεσμα επιτόκια. Πιο συγκεκριμένα, υποστηρίζει ότι ένα προθεσμιακό επιτόκιο που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη μελλοντική χρονική περίοδο είναι ίση με το αναμενόμενο μελλοντικό μηδενικό επιτόκιο για αυτήν την περίοδο. Μια άλλη ιδέα, η *θεωρία κατάτμησης της αγοράς*, εικάζει ότι δε χρειάζεται κάποια σχέση ανάμεσα σε βραχυπρόθεσμα, μεσοπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα επιτόκια. Σύμφωνα με τη θεωρία, ένας κύριος επενδυτής όπως ένα μεγάλο συνταξιοδοτικό ταμείο επενδύει σε ομόλογα μιας ορισμένης ωρίμανσης (λήξης) και δεν αλλάζει εύκολα από μια ωρίμανση σε μια άλλη. Το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο εξαρτάται από την προσφορά και ζήτηση στη βραχυπρόθεσμη αγορά ομολόγων, το μεσοπρόθεσμο επιτόκιο εξαρτάται από την προσφορά και ζήτηση στη μεσοπρόθεσμων αγορά ομολόγων και ούτω καθεξής.

Η θεωρία που είναι η πιο ελκυστική είναι η *θεωρία προτίμησης ρευστότητας*, η οποία υποστηρίζει ότι τα προθεσμιακά επιτόκια θα πρέπει πάντα να είναι υψηλότερα από τα αναμενόμενα μελλοντικά μηδενικά επιτόκια. Η βασική υπόθεση στην οποία βασίζεται η θεωρία είναι ότι οι επενδυτές προτιμούν να διατηρούν τη ρευστότητά τους και να επενδύουν κεφάλαια σε σύντομες χρονικές περιόδους. Οι δανειολήπτες, από την άλλη πλευρά, συνήθως προτιμούν να δανείζονται με σταθερό επιτόκιο για μεγάλο χρονικό διάστημα. Η θεωρία προτίμησης ρευστότητας οδηγεί σε μια κατάσταση κατά την οποία τα προθεσμιακά επιτόκια είναι μεγαλύτερα από τα αναμενόμενα μελλοντικά μηδενικά επιτόκια. Είναι επίσης συνεπές αυτό με το εμπειρικό αποτέλεσμα όπου οι καμπύλες απόδοσης τείνουν να παίρνουν πιο συχνά ανοδική κλίση απ' ότι καθοδική.

Η Διαχείριση των Καθαρών Εσόδων από Τόκους

Για να κατανοήσουμε τη θεωρία προτίμησης ρευστότητας, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε το κίνδυνο επιτοκίου που αντιμετωπίζουν οι τράπεζες όταν λαμβάνουν καταθέσεις ή χορηγούν δάνεια. Τα *καθαρά έσοδα από τόκους* της τράπεζας είναι η διαφορά των τόκων που ελήφθηκαν από τους τόκους που πληρώθηκαν και χρειάζεται προσεκτική διαχείριση.

Θεωρήστε μια απλή κατάσταση όπου η τράπεζα προσφέρει στους καταναλωτές ένα ετήσιο και ένα πενταετές επιτόκιο για τις καταθέσεις, καθώς επίσης και ένα ετήσιο και ένα πενταετές επιτόκιο για τις υποθήκες. Τα επιτόκια φαίνονται στον Πίνακα 7. Κάνουμε την απλουστευτική παραδοχή ότι το αναμενόμενο ετήσιο επιτόκιο για μελλοντικές περιόδους ισούται με το ετήσιο επιτόκιο που επικρατεί στην αγορά σήμερα. Μιλώντας τελείως απλά, αυτό σημαίνει ότι η αγορά θεωρεί πως το επιτόκιο μπορεί και αυξάνεται ακριβώς με την ίδια ευκολία που μπορεί να μειωθεί. Ως αποτέλεσμα, τα επιτόκια του Πίνακα 7 είναι «δίκαια» καθώς αντανακλούν τις προσδοκίες της αγοράς (δηλ. αντιστοιχούν στη θεωρία των προσδοκιών). Το να επενδύει κανείς χρήματα για ένα χρόνο και να τα ξαναεπενδύει για τέσσερις ακόμη χρονικές περιόδους του ενός έτους δίνει την ίδια αναμενόμενη συνολική απόδοση όπως μία απλή πενταετής επένδυση. Ομοίως, το να δανείζεται κανείς χρήματα για ένα έτος και αναχρηματοδοτούμενος κάθε χρόνο για τα επόμενα τέσσερα χρόνια οδηγεί στα ίδια αναμενόμενα κόστη χρηματοδότησης όπως ένα απλό πενταετές δάνειο.

Υποθέστε ότι έχετε κάποια χρήματα για να τα καταθέσετε και ότι συμφωνείτε με την επικρατούσα άποψη ότι το επιτόκιο αυξάνεται ακριβώς το ίδιο εύκολα όπως μπορεί να μειωθεί. Θα επιλέγατε να καταθέσετε τα χρήματα για ένα χρόνο με 3% επιτόκιο ανά έτος ή για 5 χρόνια με επιτόκιο 3% ανά έτος; Οι πιθανότητες είναι ότι θα επιλέγατε για ένα χρόνο γιατί αυτό σας δίνει μεγαλύτερη οικονομική ευελιξία. Δένει τα κεφάλαιά σας για μικρότερο χρονικό διάστημα.

Πίνακας 1.7: *Παραδείγματα επιτοκίων που προσφέρονται από της τράπεζες της πελάτες.*

Ωρίμανση (έτη)	Επιτόκιο καταθέσεων	Επιτόκιο υποθήκης
1	3%	6%
5	3%	6%

Τώρα υποθέστε ότι θέλετε μια υποθήκη. Συμφωνείτε και πάλι με την επικρατούσα άποψη ότι το επιτόκιο αυξάνεται ακριβώς το ίδιο εύκολα όπως μπορεί να μειωθεί. Θα επιλέγατε ένα επιτόκιο υποθήκης 6% για ένα έτος ή ένα πενταετές επιτόκιο υποθήκης με 6% ετησίως; Οι πιθανότητες είναι ότι θα επιλέγατε ένα πενταετές επιτόκιο υποθήκης επειδή καθορίζει το χρεωστικό επιτόκιό σας για τα επόμενα πέντε χρόνια και σας θέτει σε μικρότερο κίνδυνο αναχρηματοδότησης.

Όταν η τράπεζα αναρτά τα επιτόκια που φαίνονται στον Πίνακα 7, είναι πιθανό να βρείτε ότι η πλειοψηφία των πελατών της τείνουν προς καταθέσεις ενός χρόνου και πενταετής υποθήκες. Αυτό δημιουργεί μια αναντιστοιχία ανάμεσα στο ενεργητικό και το παθητικό για την τράπεζα και την θέτει σε κίνδυνο. Δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα αν πέσουν τα επιτόκια. Η τράπεζα θα βρεθεί να χρηματοδοτεί τα πενταετή δάνεια του 6% με καταθέσεις που κοστίζουν λιγότερο από 3% στο μέλλον και τα καθαρά έσοδά της από τόκους θα αυξηθούν. Ωστόσο, αν αυξηθούν τα επιτόκια, οι καταθέσεις που χρηματοδοτούν αυτά τα δάνεια του 6% θα κοστίζουν περισσότερο από 3% στο μέλλον και τα καθαρά έσοδα από τους τόκους θα μειωθούν. Μια αύξηση 3% στα επιτόκια θα μείωνε τα καθαρά έσοδα από τους τόκους στο μηδέν.

Είναι δουλειά της ομάδας διαχείρισης ενεργητικού/παθητικού να εξασφαλίσει ότι ταιριάζουν οι ημερομηνίες λήξης των κεφαλαίων στις οποίες λαμβάνονται οι τόκοι και οι ημερομηνίες λήξης των υποχρεώσεων στις οποίες πληρώνονται οι τόκοι. Ένας τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι αυξάνοντας το πενταετές επιτόκιο και στις καταθέσεις και στις υποθήκες. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να μετακινηθεί στην κατάσταση που παρουσιάζεται στον Πίνακα 8 όπου το πενταετές επιτόκιο για καταθέσεις είναι 4% και το πενταετές επιτόκιο για υποθήκες είναι 7%. Αυτό θα έκανε τις πενταετείς καταθέσεις σχετικά περισσότερο ελκυστικές και τις υποθήκες ενός έτος επίσης το ίδιο. Μερικοί πελάτες που επιλέγουν καταθέσεις ενός χρόνου όταν τα επιτόκια είναι όπως στον Πίνακα 7, θα στραφούν σε πενταετείς καταθέσεις στην κατάσταση που περιγράφει ο Πίνακας 8. Ορισμένοι πελάτες που επιλέγουν πενταετείς υποθήκες όταν τα επιτόκια είναι όπως στον Πίνακα 7, θα επιλέξουν υποθήκες ενός έτους. Αυτό μπορεί να οδηγήσει στο ταίριασμα των ημερομηνιών λήξης (δηλ. στις ωριμάνσεις) των κεφαλαίων και υποχρεώσεων. Αν εξακολουθεί να υπάρχει ανισορροπία με τους καταθέτες να τείνουν να επιλέγουν ωρίμανση του ενός έτους και οι δανειολήπτες ωρίμανση πενταετή, τα πενταετή επιτόκια καταθέσεων και υποθηκών θα μπορούσαν να αυξηθούν ακόμη περισσότερο. Τελικά η ανισορροπία θα εξαφανιστεί.

Το καθαρό αποτέλεσμα όλων των τραπεζών που συμπεριφέρονται με τον τρόπο που μόλις περιγράψαμε είναι η θεωρία προτίμησης ρευστότητας. Τα μακροπρόθεσμα επιτόκια τείνουν να είναι υψηλότερα από εκείνα που θα προβλέπονταν από τα αναμενόμενα μελλοντικά βραχυπρόθεσμα επιτόκια. Η καμπύλη απόδοσης έχει κλίση προς τα πάνω τις περισσότερες φορές. Έχει καθοδική κλίση μόνο όταν η αγορά αναμένει μια πραγματικά απότομη πτώση των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων.

Πολλές τράπεζες τώρα έχουν εξελιγμένα συστήματα για την παρακολούθηση των αποφάσεων που παίρνουν οι πελάτες τους έτσι ώστε, όταν διαπιστώνουν μικρές διαφορές μεταξύ των προθεσμιών λήξης των κεφαλαίων και των υποχρεώσεων που επιλέγονται από τους πελάτες, μπορούν να τελειοποιήσουν τα επιτόκια που προσφέρουν.

Πίνακας 1.8: *Τα πενταετή επιτόκια αυξάνονται σε μια προσπάθεια να ταιριάξουν οι ωριμάνσεις ενεργητικού και παθητικού.*

Ωρίμανση (έτη)	Επιτόκιο καταθέσεων	Επιτόκιο υποθήκης
1	3%	6%
5	4%	7%

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαδικασίες Wiener και Λήμμα Itô

Κάθε μεταβλητή της οποίας η τιμή αλλάζει με την πάροδο του χρόνου με αβέβαιο τρόπο λέγεται ότι ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία. Οι στοχαστικές διαδικασίες μπορούν να διακριθούν ως διακριτού χρόνου ή συνεχούς χρόνου. Μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου είναι εκείνη όπου η τιμή της μεταβλητής μπορεί να αλλάξει μόνο σε ορισμένα σταθερά χρονικά σημεία, ενώ μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνους είναι εκείνη όπου οι αλλαγές μπορούν συμβούν οποιαδήποτε στιγμή. Οι στοχαστικές διαδικασίες μπορούν επίσης να ταξινομηθούν ως συνεχούς μεταβλητής και διακριτής μεταβλητής. Σε μια διαδικασία συνεχούς μεταβλητής, η βασική μεταβλητή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή σε μια συγκεκριμένη περιοχή, ενώ σε μια διαδικασία διακριτής μεταβλητής μόνο ορισμένες διακριτές τιμές είναι πιθανές.

Το κεφάλαιο αναπτύσσει μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς μεταβλητής, συνεχούς χρόνου για κάποιες τιμές μετοχών. Το να μάθει κανείς για τη διαδικασία αυτή αποτελεί το πρώτο βήμα για την κατανόηση της τιμολόγησης των δικαιωμάτων αγοραπωλησίας και άλλων πιο περίπλοκων παραγωγών. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, στην πράξη, δεν παρατηρούμε τις τιμές των μετοχών ακολουθώντας διαδικασίες συνεχούς μεταβλητής και συνεχούς χρόνου. Οι τιμές των μετοχών περιορίζονται σε διακριτές τιμές (π.χ. πολλαπλάσιες του ενός σεντ) και οι αλλαγές μπορούν να παρατηρηθούν μόνο όταν η συναλλαγή είναι ανοικτή. Παρόλα αυτά, η διαδικασία συνεχούς μεταβλητής και συνεχούς χρόνου αποδεικνύεται ότι είναι ένα χρήσιμο πρότυπο για πολλούς σκοπούς.

Πολλοί άνθρωποι θεωρούν ότι οι συνεχούς χρόνου στοχαστικές διαδικασίες είναι τόσο περίπλοκες ώστε να πρέπει να αφεθούν εξ ολοκλήρου στους καλύτερους επιστήμονες. Δεν είναι όμως έτσι. Το μεγαλύτερο εμπόδιο για την κατανόηση αυτών των διαδικασιών είναι ο συμβολισμός. Εδώ παρουσιάζουμε μια προσέγγιση βήμα προς βήμα με σκοπό να ξεπεράσει ο αναγνώστης το εμπόδιο αυτό. Εξηγούμε επίσης ένα σημαντικό αποτέλεσμα γνωστό ως Λήμμα Itô το οποίο έχει κεντρική σημασία για την τιμολόγηση των παραγωγών.

2.1 Η ιδιότητα του Markov

Μια διαδικασία Markov αποτελεί ένα ιδιαίτερο είδος στοχαστικής διαδικασίας όπου μόνο η παρούσα αξία μιας μεταβλητής έχει σημασία για την πρόβλεψη του μέλλοντος. Η παρελθούσα ιστορία της μεταβλητής και του τρόπου που το παρόν προέκυψε από το παρελθόν δε μας ενδιαφέρουν καθόλου.

Οι τιμές των μετοχών συνήθως θεωρούνται ότι ακολουθούν μια διαδικασία Markov. Υποθέστε ότι η τιμή της μετοχής της IBM είναι 100 ευρώ τώρα. Αν η τιμή της μετοχής ακολουθεί μια διαδικασία Markov, οι προβλέψεις μας για το μέλλον δε θα πρέπει να επηρεάζονται από την τιμή μια εβδομάδα πριν, ένα μήνα πριν ή ένα χρόνο πριν. Η μόνη σχετική πληροφορία είναι ότι η τιμή σήμερα είναι 100 ευρώ. Οι προβλέψεις για το μέλλον είναι αβέβαια και θα πρέπει να εκφράζονται υπό το πρίσμα των πιθανών κατανομών. Η ιδιότητα του Markov συνεπάγεται ότι η πιθανότητα κατανομής της τιμής σε μια συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη διαδρομή που ακολούθησε η τιμή στο παρελθόν.

Η ιδιότητα Markov για τις τιμές των μετοχών είναι σύμφωνη με την αδύναμη μορφή της αποτελεσματικότητας της αγοράς. Αυτό υποδηλώνει ότι η παρούσα τιμή μιας μετοχής εγκλείει όλες τις πληροφορίες που περιέχονται σε ένα αρχείο για τις προηγούμενες τιμές. Αν η αδύναμη μορφή της αποτελεσματικότητας της αγοράς δεν ήταν αληθινή, οι τεχνικοί αναλυτές θα μπορούσαν να κάνουν αποδόσεις πάνω από το μέσο όρο ερμηνεύοντας τα διαγράμματα του παρελθόντος για τις τιμές των μετοχών. Υπάρχουν πολύ λίγες ενδείξεις ότι είναι πράγματι σε θέση να το κάνουν αυτό.

Είναι ο ανταγωνισμός στην αγορά που τείνει να εξασφαλίσει ότι εξακολουθεί να υπάρχει η αποτελεσματικότητα των αγορών αδύναμης μορφής. Υπάρχουν πολλοί επενδυτές που παρακολουθούν στενά τη χρηματιστηριακή αγορά. Προσπαθώντας να αποκτήσουν κέρδος από αυτήν οδηγεί σε μια κατάσταση όπου η τιμή της μετοχής, σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, αντανακλά τις πληροφορίες των παρελθοντικών τιμών. Υποθέστε ότι ανακαλύφθηκε πως ένα συγκεκριμένο πρότυπο για τις τιμές των μετοχών που έδινε πάντα μια πιθανότητα 65% για μετέπειτα σημαντική άνοδο των τιμών. Οι επενδυτές θα επιχειρούσαν να αγοράσουν μια μετοχή αμέσως μόλις παρατηρούσαν αυτό το πρότυπο και η ζήτηση για τη μετοχή θα αυξανόταν αμέσως. Αυτό θα οδηγούσε σε μια άμεση αύξηση της τιμής της μετοχής και οι παρατηρημένες επιπτώσεις θα εξαλείφονταν, όπως θα συνέβαινε και με οποιαδήποτε κερδοφόρα συναλλακτική ευκαιρία.

2.2 Στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου

Θεωρήστε μια μεταβλητή που ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία Markov. Υποθέστε ότι η τρέχουσα αξία της είναι 10 και ότι η μεταβολή της αξίας της κατά τη διάρκεια 1 έτους είναι φ(0,1) όπου το φ(m,υ) δηλώνει μια κατανομή που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή m και διακύμανση υ. Ποια είναι η κατανομή πιθανότητας της μεταβολής στην τιμή της μεταβλητής κατά τη διάρκεια 2 χρόνων;

Η μεταβολή σε 2 χρόνια είναι το άθροισμα δύο κανονικών κατανομών, καθεμιά από τις οποίες έχει μια μέση τιμή μηδέν και διακύμανση 1,0. Επειδή η μεταβλητή είναι Markov, οι δύο κατανομές είναι ανεξάρτητες. Όταν προσθέτουμε δύο ανεξάρτητες κανονικές κατανομές, το αποτέλεσμα είναι μια κανονική κατανομή όπου η μέση τιμή είναι το άθροισμα των μέσων τιμών και η διακύμανση είναι το άθροισμα των διακυμάνσεων. Η μέση τιμή της μεταβολής κατά τη διάρκεια των 2 χρόνων για τη μεταβλητή που εξετάζουμε είναι, επομένως, μηδενική και η διακύμανση αυτής της αλλαγής είναι 2,0. Ως εκ τούτου, η μεταβολή της μεταβλητής για τα 2 χρόνια έχει μια κατανομή φ(0,2). Η τυπική απόκλιση της κατανομής είναι $\sqrt{2}$.

Θεωρήστε στη συνέχεια τη μεταβολή στη μεταβλητή κατά τη διάρκεια 6 μηνών. Η διακύμανση της τιμής της μεταβολής κατά τη διάρκεια 1 έτους ισούται με τη διακύμανση της μεταβολής κατά τη διάρκεια των πρώτων 6 μηνών συν τη διακύμανση της μεταβολής κατά τη διάρκεια των δεύτερων 6 μηνών. Υποθέτουμε ότι αυτές οι διακυμάνσεις είναι ίδιες. Επομένως η διακύμανση της μεταβολής κατά τη διάρκεια μιας εξαμηνιαίας περιόδου πρέπει να είναι 0,5. Αντίστοιχα, η τυπική απόκλιση της μεταβολής είναι $\sqrt{0,5}$. Η κατανομή για τη μεταβολή της τιμής της μεταβλητής κατά τη διάρκεια των 6 μηνών είναι φ(0, 0,5).

Μια παρόμοια συζήτηση δείχνει ότι η κατανομή για τη μεταβολή στην τιμή της μεταβλητής κατά τη διάρκεια 3 μηνών είναι φ(0, 0,25). Γενικότερα, η αλλαγή κατά τη διάρκεια μιας οποιασδήποτε περιόδου Τ είναι φ(0,Τ). Πιο συγκεκριμένα, η αλλαγή κατά τη διάρκεια μια πολύ μικρής περιόδου Δt είναι φ(0,Δt).

Σημειώστε πως, όσο αφορά τις διαδικασίες Markov, οι διακυμάνσεις των μεταβολών σε διαδοχικές χρονικές περιόδους είναι αθροιστικές. Οι τυπικές αποκλίσεις των μεταβολών σε διαδοχικές χρονικές περιόδους δεν είναι αθροιστικές. Η διακύμανση της μεταβολής της μεταβλητής στο παράδειγμά μας είναι 1,0 ανά έτος και έτσι η διακύμανση της μεταβολής σε 2 χρόνια είναι 2,0 και διακύμανση της μεταβολής σε 3 χρόνια είναι 3,0. Οι τυπικές αποκλίσεις των μεταβολών σε 2 και 3 χρόνια είναι $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$ αντίστοιχα. Για να κυριολεκτήσουμε, δε θα πρέπει να θεωρούμε την τυπική απόκλιση της μεταβλητής ως 1,0 ανά χρόνο. Τα αποτελέσματα εξηγούν γιατί η αβεβαιότητα είναι μερικές φορές ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα του χρόνου.

Διαδικασία Wiener

Η διαδικασία που ακολουθείται από τη μεταβλητή που εξετάζουμε είναι γνωστή ως *διαδικασία Wiener*. Είναι μια ιδιαίτερη μορφή της στοχαστικής διαδικασίας Markov με μια μέση μηδενική μεταβολή και μια διακύμανση του 1,0 ετησίως. Έχει χρησιμοποιηθεί στη φυσική για να περιγράψει την κίνηση ενός σωματιδίου που υπόκειται σε ένα μεγάλο αριθμό μικρών μοριακών διαταραχών και μερικές φορές αναφέρεται και ως *κίνηση του Brown*.

Μιλώντας επίσημα, μια μεταβλητή z ακολουθεί τη διαδικασία Wiener αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

Ιδιότητα 1: Η μεταβολή Δz κατά τη διάρκεια μιας μικρής περιόδου είναι

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{1}$$

όπου το ε έχει μια τυποποιημένη κανονική κατανομή φ(0,1)

Ιδιότητα 2: Οι τιμές των Δz για κάθε δύο διαφορετικά μικρά χρονικά διαστήματα Δt είναι ανεξάρτητες.

Όπως προκύπτει από την πρώτη ιδιότητα όπου το ίδιο το Δz έχει κανονική κατανομή με:

Μέση τιμή του Δz = 0
Τυπική απόκλιση του Δz = $\sqrt{\Delta t}$
Διακύμανση του Δz = Δt

Η δεύτερη ιδιότητα συνεπάγεται ότι το z ακολουθεί μια διαδικασία Markov.

Θεωρήστε μια μεταβολή στην τιμή του z κατά τη διάρκεια μιας σχετικά μεγάλης χρονικής περιόδου Τ. Αυτό μπορεί να συμβολιστεί με z(T) – z(0). Μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των μεταβολών του z σε N μικρά χρονικά διαστήματα Δt, όπου

$$N = \frac{T}{\Delta \mathrm{T}}$$

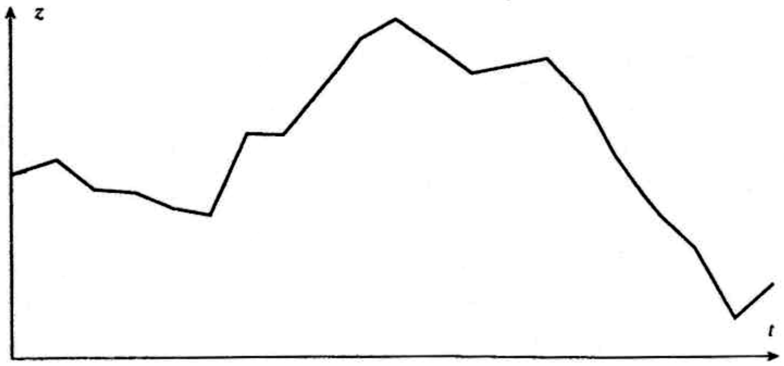
Έτσι,

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \qquad (2)$$

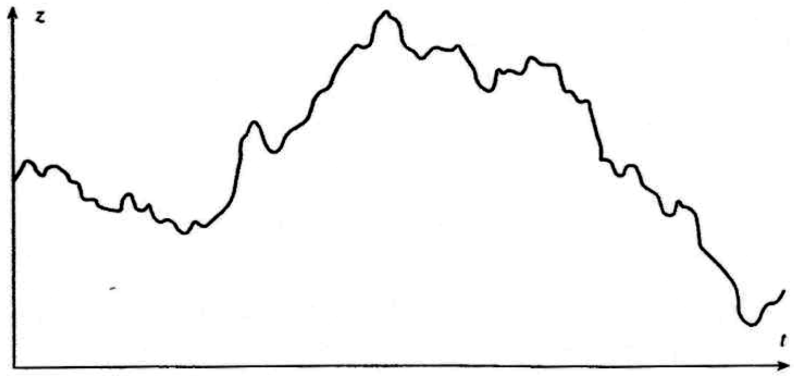
όπου το ε_i (I = 1,2,…., N) έχει μια κατανομή φ(0,1). Γνωρίζουμε από τη δεύτερη ιδιότητα της διαδικασίας Wiener ότι τα ε_i είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Επομένως από την εξίσωση (2) προκύπτει ότι το z(T) – z(0) έχει κανονική κατανομή, με:

Μέση τιμή του [z(T) – z(0)] = 0
Τυπική απόκλιση του [z(T) – z(0)] = $\sqrt{T}$
Διακύμανση του [z(T) – z(0)] = N Δt = T

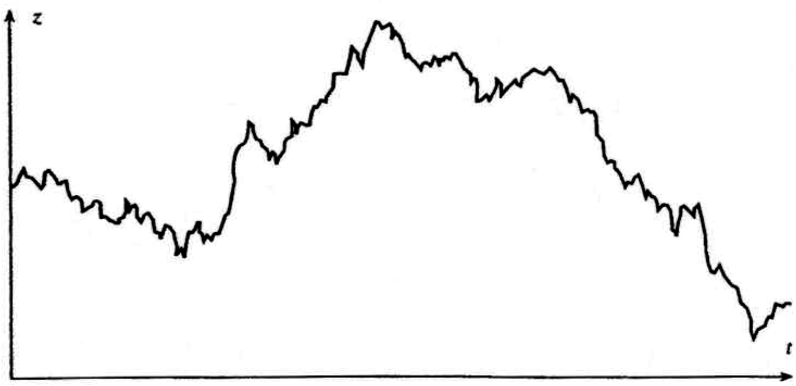
Αυτό είναι συνεπές και με τη συζήτηση που κάναμε νωρίτερα σε αυτό το τμήμα.



Σχετικά μεγάλη τιμή του Δt



Μικρότερη τιμή του Δt



Η πραγματική διαδικασία προκύπτει όταν Δt→0

Σχήμα 2.1: *Πώς προκύπτει μια διαδικασία Wiener όταν Δt→0 στην εξίσωση (1)*

Παράδειγμα 1

Ας υποθέσουμε ότι η αξία, z, μιας μεταβλητής που ακολουθεί μια διαδικασία Wiener είναι αρχικά 25 και ότι ο χρόνος μετριέται σε χρόνια. Στο τέλος του έτους 1, η τιμή της μεταβλητής ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 25 και τυπική απόκλιση 1,0. Στο τέλος των 5 ετών, ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 25 και τυπική απόκλιση $\sqrt{5}$ ή 2,236. Η αβεβαιότητά μας σχετικά με την τιμή της μεταβλητής σε μια συγκεκριμένη στιγμή στο μέλλον, όπως μετράται με την τυπική απόκλισή της, αυξάνεται όπως και η τετραγωνική ρίζα καθώς κοιτάμε μακριά στο μέλλον.

Στο συνηθισμένο υπολογισμό, είναι σύνηθες να προχωρά κανείς από μικρές αλλαγές στο όριο καθώς οι μικρές αλλαγές πλησιάζουν στο μηδέν. Έτσι, η έκφραση $dx = \alpha \cdot dt$ αποτελεί το συμβολισμό που χρησιμοποιείται για να δείξει ότι $\Delta x = \alpha \cdot \Delta t$ στο όριο καθώς $\Delta t \rightarrow 0$. Χρησιμοποιούμε παρόμοιες συμβολικές συμβάσεις στο στοχαστικό υπολογισμό. Έτσι όταν αναφερόμαστε στο dz ως διαδικασία Wiener, εννοούμε ότι έχει τις ιδιότητες για το Δz που αναφέρεται πιο πάνω όταν στο όριο καθώς $\Delta t \rightarrow 0$.

Το σχήμα 2.1 απεικονίζει τι συμβαίνει στη διαδρομή που ακολούθησε το z καθώς προσεγγίζεται το όριο του $\Delta t \rightarrow 0$. Προσέξτε ότι η διαδρομή είναι αρκετά «ακανόνιστη». Αυτό συμβαίνει διότι το μέγεθος της μετακίνησης του z σε χρόνο Δt είναι ανάλογο του $\sqrt{\Delta t}$ και, όταν το Δt είναι μικρό, το $\sqrt{\Delta t}$ είναι πολύ μεγαλύτερο του Δt. Δύο ενδιαφέρουσες ιδιότητες των διαδικασιών Wiener, σχετικά με αυτή την ιδιότητα του $\sqrt{\Delta t}$, είναι αυτές που ακολουθούν:

1) Το αναμενόμενο μήκος της διαδρομής που ακολουθεί το z σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα είναι άπειρο.
2) Ο αναμενόμενος αριθμός των φορών που το z ισούται με κάποια συγκεκριμένη τιμή σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα είναι άπειρος.

Γενικευμένη Διαδικασία Wiener

Η μέση μεταβολή ανά μονάδα χρόνου για μια στοχαστική διαδικασία είναι γνωστή ως *ρυθμός εκτροπής* (ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζει ο μέσος όρος) και η διακύμανση ανά μονάδα χρόνου είναι γνωστή ως *ρυθμός διακύμανσης*. Η βασική διαδικασία Wiener, dz, που αναπτύχθηκε μέχρι τώρα έχει ρυθμό εκτροπής μηδέν και ρυθμό διακύμανσης 1,0. Ο μηδενικός ρυθμός εκτροπής σημαίνει ότι η αναμενόμενη τιμή του z σε οποιαδήποτε μελλοντική στιγμή ισούται με την τρέχουσα τιμή του. Ο ρυθμός διακύμανσης 1,0 σημαίνει ότι η διακύμανση της αλλαγής του z σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα μήκους T ισούται με T. Μια *γενικευμένη διαδικασία Wiener* για μια μεταβλητή x μπορεί να οριστεί υπό το πρίσμα του dz ως εξής

$$dx = a \cdot dt + b \cdot dz \qquad (3)$$

όπου τα a και b είναι σταθερές.

Για να καταλάβουμε την εξίσωση (3) είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε τις δύο συνιστώσες στη δεξιά πλευρά χωριστά. Ο όρος $a \cdot dt$ υποδηλώνει ότι το x έχει έναν αναμενόμενο ρυθμό εκτροπής a ανά μονάδα χρόνου. Χωρίς τον όρο $b \cdot dz$, η εξίσωση θα ήταν $dx = a \cdot dt$, γεγονός που συνεπάγεται ότι $dx/dt = a$. Ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο θα έχουμε

$$x = x_0 + a \cdot t$$

όπου x_0 είναι η τιμή του x τη χρονική στιγμή 0. Σε μια χρονική περίοδο μήκους T, η μεταβλητή x αυξάνεται κατά μια ποσότητα $a \cdot T$. Ο όρος $b \cdot dz$ στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης (3) μπορεί να θεωρηθεί ως προσθήκη μεταβλητότητας στην πορεία που ακολουθεί το x. Το ποσό αυτής της μεταβλητότητας είναι b φορές μιας διαδικασίας

Wiener. Μια διαδικασία Wiener έχει τυπική απόκλιση 1,0. Επομένως οι b φορές της διαδικασίας Wiener έχουν μια τυπική απόκλιση b. Σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt, η μεταβολή Δx στην τιμή του x δίνεται από τις εξισώσεις (1) και (3) ως εξής

$$\Delta x = a \cdot \Delta t + b \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}$$

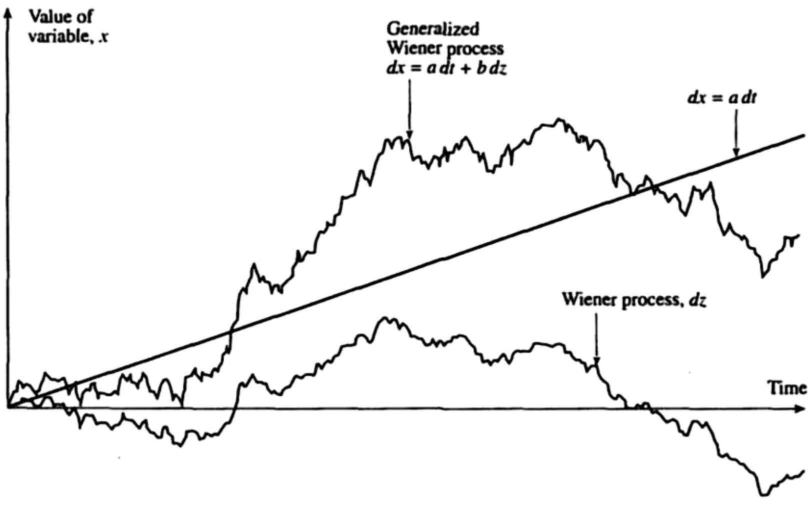
όπου, όπως και πριν, το ε ακολουθεί μια τυποποιημένη κανονική κατανομή. Έτσι το Δx έχει μια κανονική κατανομή με

Μέση τιμή του $\Delta x = a \cdot \Delta t$
Τυπική απόκλιση του $\Delta x = b \cdot \sqrt{\Delta t}$
Διακύμανση του $\Delta x = b^2 \Delta t$

Παρόμοιες συζητήσεις με εκείνες που γίνονται για μια διαδικασία Wiener δείχνουν ότι η μεταβολή στη τιμή του x σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα T ακολουθεί κανονική κατανομή με

Μέση τιμή του $x = a \cdot T$
Τυπική απόκλιση του $x = b \cdot \sqrt{T}$
Διακύμανση του $x = b^2 T$

Έτσι, η γενικευμένη διαδικασία Wiener που δίνεται στην εξίσωση (3) έχει αναμενόμενο ρυθμό εκτροπής a και ένα ρυθμό διακύμανσης b^2. Αυτό παρουσιάζεται στο σχήμα 2.2



Σχήμα 2.2: *Γενικευμένη διαδικασία Wiener με α = 0,3 και b = 1,5*

Παράδειγμα 3

Θεωρήστε μια περίπτωση όπου η κατάσταση των μετρητών μιας εταιρείας, που μετράται σε χιλιάδες ευρώ, ακολουθεί μια γενικευμένη διαδικασία Wiener με μια τάση της τάξης του 20 ανά χρόνο και ρυθμό διακύμανσης της τάξης του 900 ανά χρόνο. Αρχικά, η κατάσταση των μετρητών είναι 50. Στο τέλος του ενός έτους η κατάσταση των μετρητών θα έχει κανονική κατανομή με μέση τιμή 70 και μια τυπική απόκλιση $\sqrt{900}$ ή 30. Στο τέλος 6 μηνών θα έχει κανονική κατανομή με μέση τιμή 60 και τυπική απόκλιση $30\sqrt{0{,}5} = 21, 21$. Η αβεβαιότητά μας για την κατάσταση των μετρητών σε κάποια στιγμή στο μέλλον, όπως αυτή μετράται από την τυπική απόκλιση, αυξάνει μαζί με την τετραγωνική ρίζα για τη μελλοντική στιγμή που μας ενδιαφέρει. Προσέξτε ότι η κατάσταση των μετρητών μπορεί να γίνει ακόμη και αρνητική. (Μπορούμε να το ερμηνεύσουμε αυτό ως μια κατάσταση όπου η εταιρεία δανείζεται ομόλογα.)

Διαδικασία Itô

Μπορεί να οριστεί ένα ακόμη είδος στοχαστικής διαδικασίας, αυτό που είναι γνωστό ως *διαδικασία Itô*. Αυτή είναι μια γενικευμένη διαδικασία Wiener στην οποία οι παράμετροι a και b είναι συναρτήσεις της τιμής της βασικής μεταβλητής x και του χρόνου t. Μια διαδικασία Itô μπορεί να γραφεί αλγεβρικά ως εξής

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \qquad (4)$$

Και ο αναμενόμενος ρυθμός εκτροπής και ο ρυθμός διακύμανσης μια διαδικασίας Itô είναι ικανές να αλλάξουν με την πάροδο του χρόνου. Σε ένα μικρό χρονικό διάστημα μεταξύ t και t+Δt, η μεταβλητή αλλάζει από x σε x+Δx, όπου

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

Η σχέση αυτή περιλαμβάνει μια μικρή προσέγγιση. Υποθέτει ότι οι ρυθμοί εκτροπής και διακύμανσης του x παραμένουν σταθεροί, ίσοι με a(x,t) και $b(x,t)^2$ αντίστοιχα, κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος t και t+Δt.

2.3 Η διαδικασία για μια τιμή μετοχής

Σε αυτήν την ενότητα θα συζητήσουμε τη στοχαστική διαδικασία που συνήθως χρησιμοποιείται για την τιμή μιας μετοχής που δεν καταβάλει μερίσματα.

Είναι δελεαστικό να προτείνουμε ότι μια τιμή μετοχής ακολουθεί μια γενικευμένη διαδικασία Wiener. Αυτό σημαίνει πως έχει ένα σταθερό αναμενόμενο ρυθμό εκτροπής και ένα σταθερό ρυθμό διακύμανσης. Ωστόσο, αυτό το μοντέλο αδυνατεί να συλλάβει μια βασική πτυχή των τιμών των μετοχών. Αυτή είναι πως η αναμενόμενη ποσοστιαία επιστροφή που απαιτείται από τους επενδυτές από μια μετοχή είναι ανεξάρτητη από την τιμή της μετοχής. Αν οι επενδυτές απαιτούν ένα ποσοστό 14% ετησίως για επιστροφή όταν η τιμή της μετοχής είναι 10 ευρώ, τότε, τηρουμένων των αναλογιών, αυτοί θα απαιτήσουν επίσης ένα 14% ετησίως αναμενόμενη επιστροφή όταν η τιμή της μετοχής είναι 50 ευρώ.

Σαφώς, η παραδοχή περί σταθερού αναμενόμενου ρυθμού εκτροπής είναι ακατάλληλη και πρέπει να αντικατασταθεί από την παραδοχή ότι η αναμενόμενη επιστροφή (δηλ. η αναμενόμενη τάση διαιρεμένη από την τιμή της μετοχής) είναι σταθερή. Αν είναι S η τιμή της μετοχής τη στιγμή t, τότε ο αναμενόμενος ρυθμός εκτροπής στην S θα πρέπει να υποτεθεί ότι είναι μS για κάποια σταθερή παράμετρο μ. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt, η αναμενόμενη αύξηση στην τιμή S είναι $\mu \cdot S \cdot \Delta t$. Η παράμετρος μ είναι το αναμενόμενο ποσοστό επιστροφής για τη μετοχή, εκφρασμένο σε δεκαδική μορφή.

Αν η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής είναι πάντοτε μηδέν, τότε αυτό το μοντέλο υποδηλώνει ότι

$$\Delta S = \mu \cdot S \cdot \Delta t$$

Στο όριο, καθώς το $\Delta t \rightarrow 0$ έχουμε

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt$$

ή

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt$$

Ολοκληρώνοντας ανάμεσα στη χρονική στιγμή 0 και τη χρονική στιγμή T παίρνουμε

$$S_T = S_0 \cdot e^{\mu T} \tag{5}$$

όπου S_0 και S_T είναι οι τιμές της μετοχής τη χρονική στιγμή 0 και τη χρονική στιγμή T. Η εξίσωση (5) δείχνει ότι, όταν ο ρυθμός διακύμανσης είναι μηδέν, η τιμή της μετοχής αυξάνεται με ένα συνεχώς αυξανόμενο ρυθμό της τάξης του μ ανά μονάδα χρόνου.

Στην πράξη, φυσικά, μια τιμή μετοχής εκθέτει τη μεταβλητότητα. Μια λογική υπόθεση είναι ότι η μεταβλητότητα της ποσοστιαίας επιστροφής σε μια μικρή χρονική περίοδο Δt είναι η ίδια ανεξάρτητα από την τιμή της μετοχής. Με άλλα λόγια, ένας επενδυτής είναι εξίσου αβέβαιος για την ποσοστιαία επιστροφή όταν η τιμή της μετοχής είναι 50 ευρώ, όσο και όταν είναι 10 ευρώ. Αυτό σημαίνει ότι η τυπική απόκλιση της μεταβολής σε μια μικρή χρονική περίοδο Δt θα πρέπει να είναι ανάλογη με την τιμή της μετοχής και οδηγεί στο μοντέλο

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dz$$

ή

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz \tag{6}$$

Η εξίσωση (6) αποτελεί το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο για τη συμπεριφορά της τιμής μιας μετοχής. Η μεταβλητή σ είναι μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής. Η μεταβλητή μ είναι το αναμενόμενο ποσοστό επιστροφής.

Μοντέλο Διακριτού Χρόνου

Το μοντέλο της συμπεριφοράς της τιμής μιας μετοχής που έχουμε αναπτύξει είναι γνωστό ως γεωμετρική κίνηση του Brown. Η έκδοση του μοντέλου αυτού που αφορά το διακριτό χρόνο είναι

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t} \tag{7}$$

ή

$$\Delta S = \mu \cdot S \cdot \Delta t + \sigma \cdot S \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t} \tag{8}$$

Η μεταβλητή ΔS είναι η μεταβολή στην τιμή της μετοχής S σε μια μικρή χρονική περίοδο Δt και το ε ακολουθεί κανονική κατανομή (δηλ. μια κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση 1,0). Η παράμετρος μ είναι το αναμενόμενο ποσοστό επιστροφής ανά μονάδα χρόνου από τη μετοχή και η παράμετρος σ είναι η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής. Σε αυτό το κεφάλαιο θα υποθέσουμε ότι αυτές οι παράμετροι είναι σταθερές.

Η αριστερή πλευρά της εξίσωσης (7) είναι η επιστροφή που παρέχεται από τη μετοχή σε μια μικρή χρονική περίοδο Δt. Ο όρος $\mu \cdot \Delta t$ είναι η αναμενόμενη τιμή της επιστροφής αυτής και ο όρος $\sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}$ είναι η στοχαστική συνιστώσα της επιστροφής. Η διακύμανση της στοχαστικής συνιστώσας (και, επομένως, ολόκληρης της επιστροφής) είναι $\sigma^2 \Delta t$.

Η εξίσωση (7) δείχνει ότι ο λόγος ΔS/S ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu \cdot \Delta t$ και τυπική απόκλιση $\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}$. Με άλλα λόγια,

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi(\mu \cdot \Delta t,\ \sigma^2 \Delta t) \tag{9}$$

Παράδειγμα 3

Θεωρήστε ότι μια μετοχή που δεν πληρώνει μερίσματα έχει μια μεταβλητότητα 30% ετησίως και παρέχει μια αναμενόμενη επιστροφή 15% ετησίως με συνεχή ανατοκισμό. Σε αυτήν την περίπτωση μ = 0,15 και σ = 0,30. Η διαδικασία για την τιμή της μετοχής είναι

$$\frac{dS}{S} = 0{,}15 \cdot dt + 0{,}30 \cdot dz$$

Αν είναι S η τιμή της μετοχής σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή και ΔS είναι η αύξηση στην τιμή της μετοχή στο επόμενο μικρό χρονικό διάστημα,

$$\frac{\Delta S}{S} = 0{,}15 \cdot \Delta t + 0{,}30 \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}$$

όπου το ε ακολουθεί κανονική κατανομή. Θεωρήστε ένα χρονικό διάστημα 1 εβδομάδας ή 0,0192 χρόνων και έτσι Δt = 0,0192. Τότε

$$\frac{\Delta S}{S} = 0{,}00288 + 0{,}0416 \cdot \varepsilon$$

ή

$$\Delta S = 0{,}00288 \cdot S + 0{,}0416 \cdot S \cdot \varepsilon$$

Προσομοίωση Monte Carlo

Μια προσομοίωση Monte Carlo μια στοχαστικής διαδικασίας είναι μια διαδικασία για τη δειγματοληψία τυχαίων αποτελεσμάτων μια τη διαδικασία αυτή. Θα τη χρησιμοποιήσουμε ως μέσο για την ανάπτυξη κάποιας κατανόησης για τη φύση της διαδικασίας για την τιμή μετοχής στην εξίσωση (6).

Θεωρήστε την κατάσταση στο Παράδειγμα 3 όπου η αναμενόμενη επιστροφή από μια μετοχή είναι 15% ετησίως και η μεταβλητότητα είναι 30% ετησίως. Η μεταβολή της τιμής της μετοχής για 1 εβδομάδα αποδείχθηκε ότι είναι

$$\Delta S = 0{,}00288 \cdot S + 0{,}0416 \cdot S \cdot \varepsilon \qquad (10)$$

Μια διαδρομή για την τιμή της μετοχής για μια περίοδο 10 εβδομάδων μπορεί να προσομοιωθεί με δειγματοληψία κατ' επανάληψη για το ε από τη φ(0,1) και αντικαθιστώντας το στην εξίσωση (10). Η έκφραση = RAND( ) στο Excel παράγει ένα τυχαίο δείγμα ανάμεσα στο 0 και το 1. Η αντίστροφη αθροιστική κανονική κατανομή είναι η NORMSINV. Η εντολή για την παραγωγή ενός τυχαίου δείγματος από μια τυπική κατανομή στο Excel είναι συνεπώς = NORMSINV(RAND( )). Ο Πίνακας 1 δείχνει μια διαδρομή για μια τιμή μετοχής που συμπεριλήφθηκε στο δείγμα κατ' αυτόν τον τρόπο. Η αρχική τιμή της μετοχής θεωρείται ότι είναι 100 ευρώ. Για την πρώτη περίοδο, το ε πήρε τυχαία την τιμή 0,52. Από την εξίσωση (10), η μεταβολή κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου είναι

$$\Delta S = 0{,}00288 \text{ x } 100 + 0{,}0416 \text{ x } 100 \text{ x } 0{,}52 = 2{,}45$$

Επομένως, στην αρχή της δεύτερης περιόδου, η τιμή της μετοχής είναι 102,45 ευρώ. Η τιμή για το ε που επιλέχθηκε τυχαία για την επόμενη περίοδο είναι 1,44. Από την εξίσωση (1), η μεταβολή κατά τη διάρκεια της δεύτερης περιόδου είναι

$$\Delta S = 0{,}00288 \text{ x } 102{,}45 + 0{,}0416 \text{ x } 102{,}45 \text{ x } 1{,}44 = 6{,}43$$

Πίνακας 2.1: *Προσομοίωση της τιμής της μετοχής όταν μ = 0,15 και σ = 0,30 κατά τη διάρκεια περιόδου 1 εβδομάδας*

Τιμή της μετοχής στην αρχή της περιόδου	**Τυχαία τιμή για το ε**	**Μεταβολή στην τιμή της μετοχής κατά τη διάρκεια της περιόδου**
100,00	0,52	2,45
102,45	1,44	6,43
108,88	-0,86	-3,58
105,30	1,46	6,70
112,00	-0,69	-2,89
109,11	-0,74	-3,04
106,06	0,21	1,23
107,30	-1,10	-4,60
102,69	0,73	3,41
106,11	1,16	5,43
111,54	2,56	12,20

Έτσι, κατά τη διάρκεια της επόμενης περιόδου, η τιμή της μετοχής είναι 108,88 ευρώ και ούτω καθεξής. Προσέξτε ότι, επειδή η διαδικασία που προσομοιώνουμε είναι Markov, οι τυχαίες τιμές για το ε θα πρέπει να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Ο Πίνακας 1 υποθέτει ότι οι τιμές των μετοχών πρέπει να μετρώνται προς το πλησιέστερο σεντ. Είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε ότι ο πίνακας δείχνει μόνο μία πιθανή διάρθρωση των κινήσεων των τιμών των μετοχών. Διαφορετικά τυχαία δείγματα θα οδηγούσαν σε διαφορετική εξέλιξη των τιμών. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε μικρό χρονικό διάστημα Δt σε αυτήν την προσομοίωση. Στο όριο καθώς το $\Delta t \to 0$, επιτυγχάνεται μια τέλεια περιγραφή της στοχαστικής διαδικασίας. Η τελική τιμή της μετοχής 111,54 του Πίνακα 1 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή των τιμών των μετοχών στο τέλος 10 εβδομάδων. Με την κατ' επανάληψη προσομοίωση των κινήσεων της τιμής της μετοχής, επιτυγχάνεται η πλήρης κατανομή πιθανότητας της τιμής της μετοχής στο τέλος αυτού του χρόνου.

2.4 Οι παράμετροι

Η διαδικασία για την τιμή μιας μετοχής που αναπτύχθηκε σε αυτό το κεφάλαιο περιλαμβάνει δύο παραμέτρους, το μ και το σ. Η παράμετρος μ είναι η αναμενόμενη επιστροφή (σε ετήσια βάση) που εισπράττεται από τον επενδυτή σε μια σύντομο χρονικό διάστημα. Οι περισσότεροι επενδυτές απαιτούν υψηλότερες αναμενόμενες επιστροφές για να παρακινηθούν να πάρουν υψηλότερα ρίσκα. Επομένως, η τιμή του μ πρέπει να εξαρτάται από το ρίσκο της επιστροφής από τη μετοχή. Θα πρέπει επίσης να εξαρτάται από το επίπεδο των επιτοκίων στην οικονομία. Όσο υψηλότερο είναι το επίπεδο των επιτοκίων, τόσο υψηλότερη είναι η αναμενόμενη επιστροφή που απαιτείται για οποιαδήποτε μετοχή.

Ευτυχώς, δεν έχουμε να ασχοληθούμε με τον καθοριστικό παράγοντα μ περισσότερο λεπτομερώς επειδή η τιμή μιας συμφωνίας που εξαρτάται από τη μετοχή είναι, γενικά, ανεξάρτητη του μ. Η παράμετρος σ, η αστάθεια της τιμής της μετοχής, είναι αντιθέτως εξαιρετικά σημαντική για τον προσδιορισμό της τιμής πολλών συμφωνιών. Τυπικές τιμές για το σ για μια μετοχή είναι μεταξύ του 0,15 και του 0,60 (δηλ. 15% και 60%).

Η τυπική απόκλιση της ποσοστιαίας μεταβολής στην τιμή της μετοχής σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt είναι $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Με μια κατά προσέγγιση εκτίμηση, η τυπική απόκλιση της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής της μετοχής για μια σχετικά μακρά περίοδο T είναι $\sigma\sqrt{T}$. Αυτό σημαίνει ότι, κατά προσέγγιση, η αστάθεια μπορεί να ερμηνευθεί ως η τυπική απόκλιση της μεταβολής της τιμής της μετοχής σε 1 χρόνο.

2.5 Λήμμα του Itô

Η τιμή μιας option μετοχής είναι συνάρτηση της τιμής και του χρόνου της υποκείμενης μετοχής. Γενικότερα, μπορούμε να πούμε ότι η τιμή οποιασδήποτε συμφωνίας είναι μια συνάρτηση των στοχαστικών μεταβλητών που υποστηρίζουν τη συμφωνία και το χρόνο. Ένας σοβαρός φοιτητής που ασχολείται με αυτές τις συμφωνίες πρέπει επομένως να αποκτήσει κάποια κατανόηση για τη συμπεριφοράς των συναρτήσεων των στοχαστικών μεταβλητών. Ένα σημαντικό αποτέλεσμα στον τομέα αυτό επιτεύχθηκε από τον μαθηματικό K. Itô το 1951 και είναι γνωστό ως *λήμμα του Itô*.

Ας υποθέσουμε ότι η τιμή μιας μεταβλητής x ακολουθεί τη διαδικασία Itô

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{11}$$

όπου το dz είναι μια διαδικασία Wiener και τα a και b είναι συναρτήσεις του x και του t. Η μεταβλητή x έχει ρυθμό εκτροπής a και ρυθμό διακύμανσης b^2. Το λήμμα του Itô δείχνει ότι μια συνάρτηση G του x και του t ακολουθεί τη διαδικασία

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}b \cdot dz \tag{12}$$

όπου το dz είναι η ίδια διαδικασία Wiener όπως στην εξίσωση (11). Έτσι, η συνάρτηση G ακολουθεί μια διαδικασία Itô, με ρυθμό εκτροπής

$$\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$$

και ρυθμό διακύμανσης

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2$$

Νωρίτερα υποστηρίξαμε ότι η έκφραση

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dz \tag{13}$$

με τα μ και σ να είναι σταθερές, αποτελεί ένα λογικό μοντέλο για τις κινήσεις της τιμής μια μετοχής.. Από το λήμμα του Itô προκύπτει ότι η διαδικασία που ακολουθείται από μια συνάρτηση G για το S και t είναι

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \cdot \mu \cdot S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 \cdot S^2 \right) \cdot dt + \frac{\partial G}{\partial S} \cdot \sigma \cdot S \cdot dz \qquad (14)$$

Προσέξτε ότι και το S και το G επηρεάζονται από την ίδια υποκείμενη πηγή αβεβαιότητας dz. Αυτό αποδεικνύεται ότι είναι πολύ σημαντικό για την παραγωγή των αποτελεσμάτων Black-Scholes.

Εφαρμογή σε προθεσμιακά συμβόλαια

Για να παρουσιάσουμε το λήμμα του Itô, θεωρήστε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο σε μια μετοχή που δεν πληρώνει μέρισμα. Υποθέστε ότι το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο είναι σταθερό και ίσο με r για όλες τις ημερομηνίες λήξης (ωριμάνσεις). Γνωρίζουμε ότι

$$F_0 = S_0 \cdot e^{rT}$$

όπου το F_0 είναι η προθεσμιακή τιμή τη χρονική στιγμή μηδέν, το S_0 είναι η τιμή τοις μετρητοίς τη χρονική στιγμή μηδέν και T είναι ο χρόνος ωρίμανσης του προθεσμιακού συμβολαίου.

Ενδιαφερόμαστε για το τι συμβαίνει στην προθεσμιακή τιμή καθώς ο χρόνος περνά. Ορίζουμε ως F την προθεσμιακή τιμή για μια γενική στιγμή t και ως S την τιμή της μετοχής στη χρονική στιγμή t, με $t < T$. Η σχέση για το F και το S δίνεται από την εξίσωση

$$F = S \cdot e^{r(T-t)} \qquad (15)$$

Υποθέτοντας ότι η διαδικασία για το S δίνεται από την εξίσωση (13), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα του Itô για να καθορίσουμε τη διαδικασία για το F. Από την εξίσωση (15) έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = -r \cdot S \cdot e^{r(T-t)}$$

Από την εξίσωση (14), η διαδικασία για το F δίνεται από τη σχέση

$$dF = \left[e^{r(T-t)} \mu \cdot S - r \cdot S \cdot e^{r(T-t)} \right] \cdot dt + e^{r(T-t)} \cdot \sigma \cdot S \cdot dz$$

Αφαιρώντας το F από το $S \cdot e^{r(T-t)}$ παίρνουμε

$$dF = (\mu - r) \cdot F \cdot dt + \sigma F \cdot dz \qquad (16)$$

Όπως και με το S, η προθεσμιακή τιμή F ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση του Brown. Έχει έναν αναμενόμενο ρυθμό αύξησης του μ – r παρά του μ. Ο ρυθμός αύξησης της F είναι η υπερβάλλουσα απόδοση του S με το άνευ ρίσκου επιτόκιο.

2.6 Η λογαριθμική ιδιότητα

Τώρα χρησιμοποιούμε το λήμμα του Itô για να εντοπίσουμε τη διαδικασία που ακολουθείται από το lnS όταν το S ακολουθεί τη διαδικασία στην εξίσωση (13). Ορίζουμε

$$G = lnS$$

Δεδομένου ότι

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

προκύπτει από την εξίσωση (14) ότι η διαδικασία που ακολουθείται από το G είναι η

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot dt + \sigma \cdot dz \tag{17}$$

Από τη στιγμή που το μ και το σ είναι σταθερά, η παραπάνω σχέση δείχνει ότι η εξίσωση G = lnS ακολουθεί μια γενικευμένη διαδικασία Wiener. Έχει σταθερό ρυθμό εκτροπής $\mu - \sigma^2/2$ και σταθερό ρυθμό διακύμανσης σ^2. Η μεταβολή στο lnS μεταξύ της χρονικής στιγμής 0 και κάποιας μελλοντικής στιγμής T αποτελεί επομένως κανονική κατανομή, με μέση τιμή $(\mu - \sigma^2/2)T$ και διακύμανση $\sigma^2 T$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right] \tag{18}$$

ή

$$\ln S_T \sim \varphi\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right] \tag{19}$$

όπου το S_T είναι η τιμή της μετοχής σε μια μελλοντική χρονική στιγμή T, S_0 είναι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή 0 και όπως και πριν το φ(m, υ) υποδηλώνει μια κανονική κατανομή με μέση τιμή m και διακύμανση υ.

Η εξίσωση (19) δείχνει ότι η $\ln S_T$ έχει κανονική κατανομή. Μια μεταβλητή έχει λογαριθμική κατανομή αν ο φυσικός λογάριθμος της μεταβλητής έχει κανονική κατανομή. Το μοντέλο για τη συμπεριφορά της τιμής της μετοχής που αναπτύξαμε σε αυτό το κεφάλαιο συνεπάγεται επομένως ότι η τιμή μια μετοχής σε μια χρονική στιγμή T, δοθείσης της σημερινής τιμής, έχει λογαριθμική κατανομή. Η τυπική απόκλιση του λογαρίθμου της τιμής της μετοχής είναι $\sigma\sqrt{T}$. Είναι ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα του πόσο μακριά (χρονικά) ενδιαφερόμαστε να ασχοληθούμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το μοντέλο των Black, Scholes και Merton

Στις αρχές της δεκαετίας του 1970, ο Fisher Black, ο Myron Scholes και ο Robert Merton πέτυχαν μια μεγάλη ανακάλυψη στην τιμολόγηση των options των μετοχών. Αυτή αφορούσε την ανάπτυξη αυτού που έχει γίνει γνωστό ως το μοντέλο των Black, Scholes και Merton. Το μοντέλο είχε τεράστια επιρροή στον τρόπο που οι συναλλασσόμενοι τιμολογούν και αντισταθμίζουν τις options. Είχε επίσης καθοριστική σημασία στην ανάπτυξη και επιτυχία της χρηματοοικονομικής μηχανικής τα τελευταία 30 χρόνια. Το 1997, η σημασία του μοντέλου αναγνωρίστηκε όταν ο Robert Merton και ο Myron Scholes τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ για την οικονομία. Δυστυχώς, ο Fisher Black πέθανε το 1965, διαφορετικά θα ήταν αναμφίβολα και αυτός ένας από τους αποδέκτες αυτού του βραβείου.

Το κεφάλαιο αυτό δείχνει πώς παράγεται το μοντέλο Black-Scholes για την αποτίμηση των options πώλησης και αγοράς σε μια μετοχή που δε πληρώνει μερίσματα. Εξηγεί πώς η αστάθεια μπορεί είτε να υπολογιστεί από ιστορικά δεδομένα είτε να υπαινιχθεί από τις τιμές των options χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο. Δείχνει πώς το μοντέλο Black-Scholes μπορεί να επεκταθεί ώστε να ασχοληθεί με τις ευρωπαϊκές options πώλησης και αγοράς για τις μετοχές που πληρώνουν μερίσματα και παρουσιάζει ορισμένα αποτελέσματα για την τιμολόγηση των αμερικάνικων options πώλησης σε μετοχές που πληρώνουν μερίσματα.

3.1 Λογαριθμική ιδιότητα των τιμών των μετοχών

Το μοντέλο της συμπεριφοράς της τιμής μιας μετοχής που χρησιμοποιήθηκε από τους Black, Scholes και Merton είναι το μοντέλο που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Υποθέτει ότι οι ποσοστιαίες μεταβολές στην τιμή της μετοχής σε μια μικρή χρονική περίοδο ακολουθούν κανονική κατανομή. Ορίζουμε

μ: αναμενόμενη επιστροφή για τη μετοχή ανά χρόνο
σ: μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής ανά χρόνο

Η μέση τιμή της επιστροφής σε χρόνο Δt είναι μ˙Δt και η τυπική απόκλιση της επιστροφής είναι σ $\sqrt{\Delta t}$, έτσι ώστε

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi(\mu \cdot \Delta \mathrm{t}, \sigma^2 \cdot \Delta t) \tag{1}$$

όπου το ΔS είναι η μεταβολή της τιμής της μετοχής S στο διάστημα Δt και φ(m,υ) σημαίνει μια κανονική κατανομή με μέση τιμή m και διακύμανση υ.

Όπως παρουσιάστηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, το μοντέλο συνεπάγεται ότι

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{T}, \sigma^2 \mathrm{T}\right]$$

Από αυτό ακολουθεί ότι

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right] \tag{2}$$

και

$$\ln S_T \sim \varphi\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right] \tag{3}$$

όπου το S_T είναι η τιμή της μετοχής σε μια μελλοντική στιγμή T και S_0 είναι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή 0. Η εξίσωση (3) δείχνει ότι η $\ln S_T$ ακολουθεί κανονική κατανομή και έτσι η S_T ακολουθεί λογαριθμική κατανομή. Η μέση τιμή του $\ln S_T$ είναι $\ln S_0 + (\mu - \sigma^2/2)T$ και η τυπική απόκλιση είναι $\sigma\sqrt{T}$.

Παράδειγμα 1

Θεωρήστε μια μετοχή με αρχική τιμή 40 ευρώ, αναμενόμενη επιστροφή 16% ετησίως και μεταβλητότητα 20% ετησίως. Από την εξίσωση (3), η κατανομή της πιθανότητας της μετοχής με τιμή S_T για περίοδο 6 μηνών δίνεται ως εξής

$$\ln S_T \sim \varphi\left[\ln 40 + \left(0{,}16 - \frac{0{,}2^2}{2}\right) x\, 0{,}5,\ 0{,}2^2\, x\, 0{,}5\right]$$

$$\ln S_T \sim \varphi(3{,}759,\ 0{,}02)$$

Υπάρχει μια πιθανότητα 95% πως μια μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή έχει μια τιμή με απόκλιση 1,96 από τη μέση τιμή της. Σε αυτήν την περίπτωση, η τυπική απόκλιση είναι $\sqrt{2} = 0{,}141$. Έτσι, με βεβαιότητα 95%,

$$3{,}759 - 1{,}96 \text{ x } 0{,}141 < \ln S_T < 3{,}759 + 1{,}96 \text{ x } 0{,}141$$

Αυτό μπορεί να γραφεί ως

$$e^{3{,}759 - 1{,}96 \text{ x } 0{,}141} < S_T < e^{3{,}759 + 1{,}96 \text{ x } 0{,}141}$$

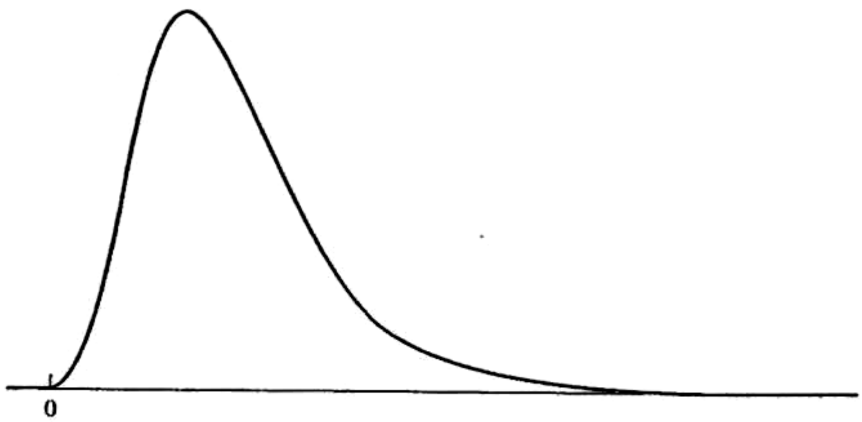
ή

$$32{,}55 < S_T < 56{,}56$$

Έτσι, υπάρχει 95% βεβαιότητα ότι η τιμή της μετοχή σε διάστημα 6 μηνών θα βρίσκεται μεταξύ των τιμών 32,55 και 56,56.

Μια μεταβλητή που έχει λογαριθμική κατανομή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ του μηδενός και του απείρου. Το επόμενο σχήμα παρουσιάζει τη μορφή μιας λογαριθμικής κατανομής. Σε αντίθεση με την κανονική κατανομή, είναι ασύμμετρη έτσι ώστε η μέση τιμή, η διάμεσος και η πιο συχνά εμφανιζόμενη τιμή είναι όλες διαφορετικές. Από την εξίσωση (3) και τις ιδιότητες της λογαριθμικής κατανομής μπορεί να αποδειχτεί ότι η αναμενόμενη τιμή $E(S_T)$ του S_T δίνεται από τη σχέση

$$E(S_T) = S_0 \cdot e^{\mu T} \tag{4}$$



Σχήμα 3.1: *Λογαριθμική κατανομή*

Αυτό επιβεβαιώνεται από τον ορισμό του μ ως αναμενόμενου ποσοστού επιστροφής. Η διακύμανση $\text{var}(S_T)$ του S_T μπορεί να αποδειχτεί πως δίνεται από τη σχέση

$$\text{var}(S_T) = S_0^2 \cdot e^{2 \cdot \mu \cdot T} \cdot (e^{\sigma^2 T} - 1) \tag{5}$$

Παράδειγμα 2

Θεωρήστε μια μετοχή με τρέχουσα τιμή 20 ευρώ, αναμενόμενη επιστροφή 20% ετησίως και μεταβλητότητα 40% ετησίως. Η αναμενόμενη τιμή της μετοχής, $E(S_T)$ και η διακύμανση της τιμής της μετοχής, $\text{var}(S_T)$ για 1 χρόνο δίνονται ως

$$E(S_T) = 20 \cdot e^{0,2 \times 1} = 24,43$$

και

$$\text{var}(S_T) = 400 \cdot e^{2 \cdot 0,2 \cdot 1} \cdot (e^{0,4^2 x 1} - 1) = 103,54$$

Η τυπική απόκλιση της τιμής της μετοχής για 1 χρόνο είναι $\sqrt{103,54}$ ή 10,18.

3.2 Η κατανομή του ποσοστού επιστροφής

Η λογαριθμική ιδιότητα των τιμών των μετοχών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παρέχει πληροφορίες σχετικά με την κατανομή πιθανοτήτων ενός συνεχώς ανατοκιζόμενου ποσοστού επιστροφής που κερδίζεται από μια μετοχή μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 και T. Αν ορίσουμε το συνεχώς ανατοκιζόμενο ποσοστό επιστροφής ανά έτος που διαπιστώνεται μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 και T ως x, τότε

$$S_T = S_0 \cdot e^{xT}$$

και έτσι

$$x = \frac{1}{T} \ln \frac{S_T}{S_0} \tag{6}$$

Από την εξίσωση (2) συνεπάγεται ότι

$$x \sim \varphi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right) \tag{7}$$

Έτσι, ένα συνεχώς ανατοκιζόμενο ποσοστό επιστροφής ανά έτος ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu - \sigma^2/2$ και τυπική απόκλιση $\sigma/\sqrt{T}$. Καθώς αυξάνεται το T, η τυπική απόκλιση του x μειώνεται. Για να κατανοήσουμε το λόγο που συμβαίνει αυτό, θεωρήστε δύο περιπτώσεις: T = 1 και T = 20. Είμαστε περισσότερο σίγουροι για την κατά μέσο όρο ετήσια επιστροφή για τα 20 χρόνια απ' ό,τι είμαστε για την επιστροφή σε ένα χρόνο.

Παράδειγμα 3

Θεωρήστε μια μετοχή με αναμενόμενη επιστροφή 17% ετησίως και μια μεταβλητότητα 20% ετησίως. Η κατανομή πιθανότητας για το μέσο ποσοστό επιστροφής (συνεχώς ανατοκιζόμενου) που διαπιστώνεται για 3 χρόνια είναι κανονική, με μέση τιμή

$$0{,}17 - \frac{0{,}2^2}{2} = 0{,}15$$

ή 15% ετησίως και έχει τυπική απόκλιση

$$\sqrt{\frac{0{,}2^2}{3}} = 0{,}1155$$

ή 11,55% ετησίως. Επειδή υπάρχει 95% πιθανότητα ότι μια μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή θα βρίσκεται με απόκλιση 1,96 από τη μέση τιμή της, μπορούμε να είμαστε 95% σίγουροι ότι η μέση επιστροφή που διαπιστώνεται στα 3 χρόνια θα είναι μεταξύ -7,6% και +37,6% ετησίως.

3.3 Η αναμενόμενη επιστροφή

Η αναμενόμενη επιστροφή μ που απαιτείται από τους επενδυτές από μια μετοχή εξαρτάται από το βαθμό επικινδυνότητας της μετοχής. Όσο υψηλότερος είναι ο κίνδυνος, τόσο υψηλότερη είναι και η αναμενόμενη επιστροφή. Εξαρτάται επίσης από το επίπεδο των επιτοκίων στην οικονομία. Όσο υψηλότερα είναι τα επιτόκια, τόσο υψηλότερη είναι η αναμενόμενη επιστροφή που απαιτείται σε οποιαδήποτε δεδομένη μετοχή. Ευτυχώς, δε χρειάζεται να ασχοληθούμε με τον καθοριστικό παράγοντα μ περισσότερο λεπτομερώς. Αποδεικνύεται ότι η αξία μιας option μετοχής, όταν εκφράζεται υπό το πρίσμα της αξίας της υποκείμενης μετοχής, δεν εξαρτάται καθόλου από το μ. Παρόλα αυτά, υπάρχει μια πτυχή της αναμενόμενης επιστροφής από μια μετοχή που συχνά προκαλεί σύγχυση και θα πρέπει να εξηγηθεί.

Η εξίσωση (1) δείχνει ότι το $\mu \cdot \Delta t$ είναι η αναμενόμενη ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή της μετοχής σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt. Είναι φυσικό να υποθέσουμε από αυτό ότι το μ είναι η αναμενόμενη, συνεχώς ανατοκιζόμενη επιστροφή της μετοχής. Ωστόσο, δεν είναι αυτό το θέμα. Η συνεχώς ανατοκιζόμενη επιστροφή x που πραγματικά διαπιστώθηκε σε μια χρονική περίοδο μήκους T δίνεται από την εξίσωση (6) ως

$$x = \frac{1}{T} \ln \frac{S_T}{S_0}$$

και, όπως αναφέρεται στην εξίσωση (7), η αναμενόμενη τιμή E(x) για το x είναι $\mu - \sigma^2/2$.

Ο λόγος για τον οποίο η αναμενόμενη, συνεχώς ανατοκιζόμενη επιστροφή είναι διαφορετική του μ είναι λεπτός, αλλά σημαντικός. Ας υποθέσουμε πως θεωρούμε έναν πολύ μεγάλο αριθμό μικρών χρονικών περιόδων μήκους Δt. Ορίζουμε S_i ως την τιμή της μετοχής στο τέλος του χρονικού διαστήματος i και ΔS_I τη διαφορά $S_{i+1} - S_i$. Σύμφωνα με τις υποθέσεις που κάνουμε για τη συμπεριφορά της τιμής της μετοχής, ο μέσος όρος των επιστροφών από τη μετοχή σε κάθε χρονικό διάστημα είναι κοντά στο μ. Με άλλα λόγια, το $\mu \cdot \Delta t$ είναι κοντά στον αριθμητικό μέσο όρο του $\Delta S_i/S_i$. Ωστόσο, η αναμενόμενη επιστροφή για ολόκληρη την περίοδο που καλύπτεται από τα δεδομένα που εκφράζεται με ένα σύνολο μικρών χρονικών διαστημάτων Δt, είναι κοντά στο $\mu - \sigma^2/2$ και όχι στο μ[3]. Για να έχουμε μια μαθηματική εξήγηση περί του τι συμβαίνει, ξεκινάμε με την εξίσωση (4):

$$E(S_T) = S_0 \cdot e^{\mu T}$$

Χρησιμοποιώντας λογαρίθμους, παίρνουμε:

$$\ln[E(S_T)] = \ln(S_0) + \mu \cdot T$$

Είναι τώρα δελεαστικό να θέσουμε $\ln[E(S_T)] = E[\ln(S_T)]$, έτσι ώστε $E[\ln(S_T)] - \ln(S_0) = \mu \cdot T$, ή $E[\ln(S_T/S_0)] = \mu \cdot T$, το οποίο οδηγεί στο $E(x) = \mu$. Ωστόσο, δε μπορούμε να το κάνουμε αυτό επειδή η ln είναι μη γραμμική συνάρτηση. Στην πραγματικότητα, $\ln[E(S_T)] > E[\ln(S_T)]$, έτσι ώστε $E[\ln(S_T/S_0)] < \mu \cdot T$, το οποίο οδηγεί στο $E(x) < \mu$. (Όπως επισημάνθηκε πιο πάνω, $E(x) = \mu - \sigma^2/2$.)

3.4 Μεταβλητότητα

Η μεταβλητότητα σ μιας μετοχής είναι ένα μέτρο για την αβεβαιότητά μας σχετικά με τις επιστροφές που παρέχονται από μια μετοχή. Οι μετοχές έχουν τυπικά μια μεταβλητότητα μεταξύ 15% και 60%.

Από την εξίσωση (7), η μεταβλητότητα της τιμής μιας μετοχής μπορεί να οριστεί ως η τυπική απόκλιση της επιστροφής που παρέχεται από μια μετοχή σε 1 χρόνο όταν η επιστροφή εκφράζεται χρησιμοποιώντας συνεχή ανατοκισμό.

Όταν το Δt είναι μικρό, η εξίσωση (1) δείχνει ότι το $\sigma^2 \cdot \Delta t$ είναι περίπου ίσο με τη διακύμανση της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής της μετοχής στο χρόνο Δt. Αυτό σημαίνει ότι το $\sigma\sqrt{\Delta t}$ είναι περίπου ίσο με την τυπική απόκλιση της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής της μετοχής σε χρόνο Δt. Υποθέστε ότι σ = 0,3 ή 30% ετησίως και η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι 50 ευρώ. Η τυπική απόκλιση της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής της μετοχής σε 1 εβδομάδα είναι περίπου

$$30 \times \sqrt{\frac{1}{52}} = 4{,}16\%$$

Μια μετατόπιση κατά μία τυπική απόκλιση στην τιμή της μετοχής σε 1 εβδομάδα είναι επομένως 50 x 0,0416 ή 2,08 ευρώ.

Η αβεβαιότητα σχετικά με μια μελλοντική τιμή μιας μετοχής, όπως μετράται από την τυπική της απόκλιση, αυξάνεται – τουλάχιστον κατά προσέγγιση – με την τετραγωνική ρίζα του πόσο μακριά (χρονικά) ενδιαφερόμαστε. Για παράδειγμα, η τυπική απόκλιση της τιμής μιας μετοχής σε 4 εβδομάδες είναι περίπου δύο φορές η τυπική απόκλιση 1 εβδομάδας.

Εκτίμηση της μεταβλητότητας από τα ιστορικά δεδομένα

Για να εκτιμήσουμε εμπειρικά τη μεταβλητότητα μιας τιμής μετοχής, παρατηρούμε συνήθως την τιμή της μετοχής ανά τακτά χρονικά διαστήματα (π.χ. κάθε μέρα, εβδομάδα ή μήνα). Ορίζουμε

n + 1: αριθμός παρατηρήσεων

S_i : τιμή της μετοχής στο τέλος του i-στου χρονικού διαστήματος, με i = 0,1,….,n

τ : μήκος χρονικού διαστήματος σε έτη

και ας είναι

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \text{ για } i = 1,2,\ldots,n$$

Η συνήθης εκτίμηση s της τυπικής απόκλισης του u_i δίνεται από τη σχέση

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$$

ή

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^{\,2}-\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2}$$

όπου $\bar{u}$ είναι η μέση τιμή του u_i.

Από την εξίσωση (2), η τυπική απόκλιση του u_i είναι σ$\sqrt{T}$. Η μεταβλητή s είναι τότε μια προσέγγισης του σ$\sqrt{\tau}$. Επομένως η σ από μόνη της μπορεί να υπολογιστεί ως $\hat{\sigma}$, όπου

$$\hat{\sigma}=\frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης αυτής μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι περίπου $\hat{\sigma}/\sqrt{2n}$.

Το να επιλέξει κανείς την κατάλληλη τιμή για το n δεν είναι εύκολο. Περισσότερα δεδομένα γενικά οδηγούν σε περισσότερη ακρίβεια, αλλά το σ αλλάζει με το χρόνο και τα δεδομένα τα οποία είναι πολύ παλιά μπορεί να μην είναι τα κατάλληλα για την πρόβλεψη της μελλοντικής μεταβλητότητας. Ένας συμβιβασμός που φαίνεται να λειτουργεί αρκετά καλά είναι η χρήση τιμών κλεισίματος από τα καθημερινά στοιχεία για τις πιο πρόσφατες 90 με 180 ημέρες. Εναλλακτικά, ως γενικός κανόνας, το n μπορεί να τεθεί ίσο με τον αριθμό των ημερών στις οποίες πρόκειται να εφαρμοστεί η μεταβλητότητα. Επομένως, αν η εκτίμηση της μεταβλητότητας πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για να αποτιμήσει μια option δύο χρόνων, χρησιμοποιούνται τα καθημερινά στοιχεία των τελευταίων 2 χρόνων.

Παράδειγμα 4

Ο Πίνακας 1 δείχνει μια πιθανή ακολουθία τιμών μετοχών κατά τη διάρκεια 21 συνεχόμενων ημερών διαπραγμάτευσης. Σε αυτήν την περίπτωση

$$\sum u_i=0{,}09531 \text{ και } \sum u_i^2=0{,}00326$$

και η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης για την ημερήσια επιστροφή είναι

$$\sqrt{\frac{0{,}00326}{19}-\frac{0{,}09531^2}{380}}=0{,}01216 \text{ ή } 1{,}216\%$$

Πίνακας 3.1: *Υπολογισμός της μεταβλητότητας.*

Ημέρα	Τιμή κλεισίματος μετοχής (ευρώ)	Σχετικότητα τιμής S_i/S_{i-1}	Ημερήσια επιστροφή $u_i = \ln(S_i/S_{i-1})$
0	20,00		
1	20,10	1,00500	0,00499
2	19,90	0,99005	-0,01000
3	20,00	1,00503	0,00501
4	20,50	1,02500	0,02469
5	20,25	0,98780	-0,01227
6	20,90	1,03210	0,03159
7	20,90	1,00000	0,00000
8	20,90	1,00000	0,00000
9	20,75	0,99282	-0,00720
10	20,75	1,00000	0,00000
11	21,00	1,01205	0,01198
12	21,10	1,00476	0,00475
13	20,90	0,99052	-0,00952
14	20,90	1,00000	0,00000
15	21,25	1,01675	0,01661
16	21,40	1,00706	0,00703
17	21,40	1,00000	0,00000
18	21,25	0,99299	-0,00703
19	21,75	1,02353	0,02326
20	22,00	1,01149	0,01143

Υποθέτουμε πως υπάρχουν 252 ημέρες διαπραγμάτευσης το χρόνο, τ = 1/252 και ότι τα στοιχεία δίνουν μια εκτίμηση για τη μεταβλητότητα ετησίως $0{,}01216\sqrt{252}$ =0,193 ή 19,3%. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης αυτής είναι

$$\frac{0{,}193}{\sqrt{2\cdot 20}} = 0{,}031$$

ή 3,1% ετησίως.

Η ανωτέρω ανάλυση λαμβάνει υπόψη ότι η μετοχή δεν πληρώνει μερίσματα, αλλά μπορεί να προσαρμοστεί ώστε να περιλαμβάνει μετοχές που πληρώνουν μερίσματα. Η επιστροφή u_i κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος το οποίο περιλαμβάνει μια μέρα άνευ μερίσματος δίνεται από τη σχέση

$$u_i = \ln \frac{S_i + D}{S_{i-1}}$$

όπου το D είναι το ποσό του μερίσματος. Η επιστροφή σε άλλα χρονικά διαστήματα είναι ακόμη

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$$

Ωστόσο, καθώς οι φορολογικοί παράγοντες παίζουν ρόλο στον καθορισμό των επιστροφών γύρω από μια ημέρα άνευ μερίσματος, είναι μάλλον καλύτερο να απορρίψουμε εξ ολοκλήρου τα στοιχεία για τα χρονικά διαστήματα που περιλαμβάνουν και τις ημερομηνίες άνευ μερισμάτων.

Ημέρες διαπραγμάτευσης εναντίον ημερολογιακών ημερών

Ένα σημαντικό ζήτημα είναι αν ο χρόνος θα πρέπει να μετράται σε ημερολογιακές ημέρες ή ημέρες διαπραγμάτευσης όταν υπολογίζονται και χρησιμοποιούνται οι παράμετροι μεταβλητότητας. Η έρευνα δείχνει ότι η μεταβλητότητα είναι πολύ υψηλότερη όταν η ανταλλαγή είναι ανοιχτή για διαπραγμάτευση απ' ό,τι όταν είναι κλειστή. Ως αποτέλεσμα, οι επαγγελματίες τείνουν να αγνοούν ημέρες όταν η ανταλλαγή έχει κλείσει όταν εκτιμούν τη μεταβλητότητα από τα ιστορικά δεδομένα και όταν υπολογίσουν τη ζωή μιας option. Η μεταβλητότητα ανά έτος υπολογίζεται από τη μεταβλητότητα ανά ημέρα διαπραγμάτευσης χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$\text{Μεταβλητότητα ανά έτος} = \text{Μεταβλητότητα ανά ημέρα διαπραγμάτευσης} \times \sqrt{\text{Αριθμός ημερών διαπράτευσης ανά έτος}}$$

Αυτό είναι ό,τι κάναμε στο Παράδειγμα 4 κατά τον υπολογισμό της μεταβλητότητας από τα στοιχεία του Πίνακα 1. Ως αριθμός των ημερών διαπραγμάτευσης σε ένα χρόνο συνήθως λαμβάνεται ο 252 για τις μετοχές.

Η ζωή μιας option συνήθως μετράται κι εκείνη χρησιμοποιώντας τις ημέρες διαπραγμάτευσης παρά τις ημερολογιακές ημέρες. Υπολογίζεται επί T χρόνων, όπου

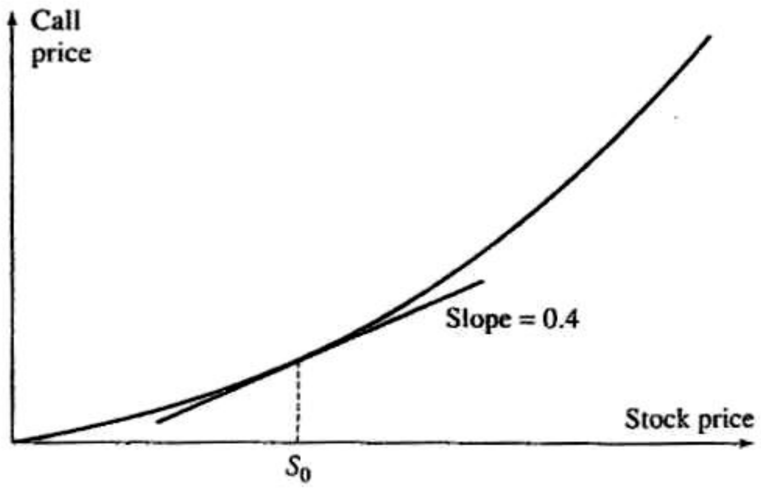
$$T = \frac{\text{Αριθμός των ημερών διαπραγμάτευσης μέχρι την ωρίμανση της option}}{252}$$

3.5 Η ιδέα στην οποία βασίζεται η διαφορική εξίσωση των Black, Scholes και Merton

Η διαφορική εξίσωση των Black, Scholes και Merton είναι μια εξίσωση που πρέπει να ικανοποιείται από την τιμή οποιουδήποτε derivative που εξαρτάται από μια μετοχή που δεν πληρώνει μερίσματα. Η εξίσωση προέρχεται από την επόμενη ενότητα.

Υπάρχουν επιχειρήματα που χρησιμοποιούμε για να αποτιμήσουμε τις options των μετοχών για την περίπτωση όπου οι μετακινήσεις της τιμή της μετοχής είναι διώνυμες. Αφορούν τη δημιουργία ενός μηδενικού κινδύνου χαρτοφυλακίου που αποτελείται από μια θέση στο derivative και μια θέση στη μετοχή. Ελλείψει των ευκαιριών διαιτησίας, η επιστροφή από το χαρτοφυλάκιο πρέπει να είναι το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο r. Αυτό οδηγεί στη διαφορική εξίσωση των Black, Scholes και Merton.

Ο λόγος που μπορεί να δημιουργηθεί ένα μηδενικού κινδύνου χαρτοφυλάκιο είναι ότι η τιμή της μετοχής και της τιμής του derivative επηρεάζονται και οι δύο από την ίδια υποκείμενη πηγή αβεβαιότητας: τις μετακινήσεις των τιμών των μετοχών. Σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα, η τιμή του derivative σχετίζεται τέλεια με την τιμή της υποκείμενης μετοχής. Όταν εγκαθίσταται ένας κατάλληλος χαρτοφύλακας μετοχών και derivatives, το κέδρος ή η ζημία από τη θέση μιας μετοχής πάντοτε αντισταθμίζει το κέρδος ή τη ζημία της θέσης ενός derivative έτσι ώστε η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου στο τέλος μιας μικρής χρονικής περιόδου να είναι γνωστή με βεβαιότητα.



Σχήμα 3.2: *Σχέση μεταξύ τιμής εξαγοράς και τιμής μετοχής. Η τωρινή τιμή μετοχής είναι S_0.*

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή η σχέση μεταξύ μιας μικρής αλλαγής ΔS στην τιμή της μετοχής και της συνακόλουθης μικρής αλλαγής Δc στην τιμή της εξαγοράς της ευρωπαϊκής option δίνεται από τη σχέση

$$\Delta c = 0{,}4 \cdot \Delta S$$

Αυτό σημαίνει ότι η κλίση της γραμμής που αντιπροσωπεύει τη σχέση μεταξύ c και S είναι 0,4, όπως παρουσιάζεται και στη σχήμα 2. Το μηδενικού κινδύνου χαρτοφυλάκιο θα αποτελείται από:

1. Μια θετική θέση σε 0,4 μερίδια
2. Μια αρνητική θέση σε μια option εξαγοράς

Υποθέστε, για παράδειγμα, ότι η τιμή της μετοχής αυξάνεται κατά 10 σεντς. Η τιμή της option θα αυξηθεί κατά 4 σεντς και το 40 x 0,10 = 4 ευρώ κέρδος επί των μεριδίων είναι ίσο με την 100 x 0,4 = 4 ευρώ ζημία στην αρνητική θέση της option.
Υπάρχει μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στην ανάλυση των Black, Scholes και Merton και της ανάλυσης με χρήση διωνυμικού μοντέλου. Στην ανάλυση των Black, Scholes και Merton, η θέση στη μετοχή και στο derivative είναι μηδενικού κινδύνου για μόνο μια πολύ μικρή χρονική περίοδο. (Θεωρητικά, παραμένει μηδενικού κινδύνου για ένα στιγμιαία μικρό χρονικό διάστημα.) Για να παραμείνει μηδενικού κινδύνου, πρέπει να (ανα)προσαρμόζεται συχνά. Για παράδειγμα, η σχέση μεταξύ Δc και ΔS στο παράδειγμά μας μπορεί να αλλάξει από $\Delta c = 0{,}4 \cdot \Delta S$ σήμερα σε $\Delta c = 0{,}5 \cdot \Delta S$ σε δύο εβδομάδες. Αυτό θα σήμαινε ότι, προκειμένου να διατηρηθεί η μηδενικού κινδύνου θέση, θα έπρεπε να αγοραστεί ένα επιπλέον μερίδιο 0,1 για κάθε option εξαγοράς που πωλείται. Ωστόσο, είναι αλήθεια ότι η επιστροφή από το μηδενικού κινδύνου χαρτοφυλάκιο σε μια πολύ μικρή χρονική περίοδο πρέπει να είναι το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο. Αυτό είναι το βασικό στοιχείο στην ανάλυση των Black, Scholes και Merton και οδηγεί στις μεθόδους τιμολόγησης.

Παραδοχές

Οι παραδοχές που χρησιμοποιούμε για να εξάγουμε τη διαφορική εξίσωση Black, Scholes και Merton είναι οι επόμενες:

1. Η τιμή της μετοχής ακολουθεί τη διαδικασία που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο με τα μ και σ σταθερά.
2. Επιτρέπεται η ακάλυπτη πώληση τίτλων, μη πλήρη χρήση των εσόδων.
3. Δεν υπάρχουν έξοδα συναλλαγών ή φόροι. Όλοι οι τίτλοι είναι τέλεια διαιρετοί.
4. Δεν υπάρχουν μερίσματα κατά τη διάρκεια της ζωής του derivative.
5. Δεν υπάρχουν μηδενικού κινδύνου ευκαιρίες διαιτησίας.
6. Η ασφάλεια των συναλλαγών είναι συνεχής.
7. Το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο r είναι σταθερό και ίδιο για όλες τις ωριμάνσεις.

Όπως θα πούμε και αργότερα, κάποιες από τις παραδοχές μπορούν να γίνουν ελαστικότερες. Για παράδειγμα, το σ και το r μπορούν να είναι συναρτήσεις του t. Μπορούμε ακόμη να επιτρέψουμε τα επιτόκια να είναι στοχαστικά υπό την προϋπόθεση ότι η κατανομή της τιμής της μετοχής στην ωρίμανση της option είναι ακόμη λογαριθμική.

3.6 Παραγωγή της διαφορικής εξίσωσης Black, Scholes και Merton

Η διαδικασία για την τιμή της μετοχής που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτή που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο στην ενότητα 3.

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dz \qquad (8)$$

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι η τιμή μιας option εξαγοράς ή άλλου derivative που εξαρτάται από το S. Η μεταβλητή f πρέπει να είναι συνάρτηση των S και t. Έτσι, από την εξίσωση (14) του προηγούμενου κεφαλαίου έχουμε

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \mu \cdot S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 \cdot S^2 \right) \cdot dt + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \sigma \cdot S \cdot dz \qquad (9)$$

Οι διακριτές εκδοχές των εξισώσεων (8) και (9) είναι:

$$\Delta S = \mu \cdot S \cdot \Delta t + \sigma \cdot S \cdot \Delta z \qquad (10)$$

και

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \mu \cdot S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 \cdot S^2 \right) \cdot \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \sigma \cdot S \cdot \Delta z \qquad (11)$$

όπου Δf και ΔS είναι οι μεταβολές στο f και το S σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt. Θα ξαναθυμηθούμε από τη συζήτηση για το Λήμμα του Itô της ενότητας 5 του προηγούμενου κεφαλαίου ότι οι διαδικασίες Wiener που βρίσκονται κάτω από το f και το S είναι ίδιες. Με άλλα λόγια, τα Δz (=$\varepsilon\sqrt{\Delta t}$) στις εξισώσεις (10) και (11) είναι τα ίδια. Επομένως ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών και derivatives μπορεί να κατασκευαστεί έτσι ώστε να εξαλείφεται η διαδικασία Wiener.

Το χαρτοφυλάκιο είναι
-1: derivative
$+\partial f / \partial S$: μερίδια

Ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου είναι μειωμένος κατά ένα derivative και επαυξημένος κατά ένα ποσό $\partial f / \partial S$ των μεριδίων. Ορίζουμε Π την αξία ενός χαρτοφυλακίου. Εξ ορισμού έχουμε

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \qquad (12)$$

Η μεταβολή $\Delta\Pi$ στην αξία του χαρτοφυλακίου στο χρονικό διάστημα Δt δίνεται ως

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \qquad (13)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (10) και (11) στην εξίσωση (13) έχουμε

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\cdot\sigma^2\cdot S^2 \right)\cdot\Delta t \tag{14}$$

Επειδή αυτή η εξίσωση δεν περιλαμβάνει το Δz, το χαρτοφυλάκιο πρέπει να είναι μηδενικού κινδύνου στο χρονικό διάστημα Δt. Οι παραδοχές που αναφέρονται στην προηγούμενη παράγραφο συνεπάγονται ότι το χαρτοφυλάκιο πρέπει να κερδίσει αμέσως το ίδιο ποσοστό επιστροφής όπως οι άλλοι βραχυπρόθεσμοι, μηδενικού κινδύνου τίτλοι. Αν κέρδιζε περισσότερα από την επιστροφή του, οι διαιτητές θα μπορούσαν να έχουν ένα μηδενικού κινδύνου κέρδος από το δανεισμό χρημάτων για την αγορά του χαρτοφυλακίου. Αν κέρδιζε λιγότερα, θα μπορούσαν να έχουν μηδενικού κινδύνου κέρδος αν μίκρυναν το χαρτοφυλάκιο και αν αγόραζαν μηδενικού κινδύνου τίτλους. Ακολουθεί ότι

$$\Delta\Pi = r \cdot \Pi \cdot \Delta t \tag{15}$$

όπου το r είναι το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο. Αντικαθιστώντας από τις εξισώσεις (12) και (14) στην εξίσωση (15) έχουμε

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\cdot\sigma^2\cdot S^2 \right)\cdot\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}\cdot S \right)\cdot\Delta t$$

και έτσι

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r\cdot S\cdot\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot S^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r\cdot f \tag{16}$$

Η εξίσωση (16) είναι η διαφορική εξίσωση Black, Scholes και Merton. Έχει πολλές λύσεις που αντιστοιχούν σε όλα τα διαφορετικά derivatives που μπορούν να οριστούν με το S ως τη βασική μεταβλητή. Η ορισμένη παράγωγος που επιτυγχάνεται όταν επιλύεται η εξίσωση εξαρτάται από τις οριακές συνθήκες που χρησιμοποιούνται. Αυτές καθορίζουν τις τιμές των derivatives στα όρια των δυνατών τιμών των S και t. Στην περίπτωση της εξαγοράς ευρωπαϊκής option, η βασική οριακή συνθήκη είναι

f = max(S – K, 0) όταν t = T

Στην περίπτωση της πώλησης ευρωπαϊκής option, η συνθήκη είναι

f = max(K – S, 0) όταν t = T

Ένα σημείο που πρέπει να τονιστεί σχετικά με το χαρτοφυλάκιο που χρησιμοποιείται για την παραγωγή της εξίσωσης (16) είναι ότι δεν είναι μονίμως μηδενικού κινδύνου. Είναι μηδενικού κινδύνου μόνο για ένα απειροστά σύντομο χρονικό διάστημα. Καθώς το S και το t αλλάζουν, αλλάζει επίσης το $\partial f / \partial S$. Για να κρατηθεί το χαρτοφυλάκιο ως μηδενικού κινδύνου, είναι επομένως απαραίτητο να αλλάζουν συχνά οι σχετικές αναλογίες των derivatives και των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο.

Παράδειγμα 5

Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο για μια μετοχή που δε διανέμει μερίδια είναι ένα derivative που εξαρτάται από τη μετοχή. Ως εκ τούτου, θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση (16). Η αξία ενός προθεσμιακού συμβολαίου f σε μια γενική χρονική στιγμή t, υπό το πρίσμα της τιμής της μετοχής την ίδια χρονική στιγμή δίνεται από τη σχέση

$$f = S - Ke^{-r(T-t)}$$

όπου το K είναι η τιμή παράδοσης. Αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -r \cdot K \cdot e^{r(T-t)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial S} = 1, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0$$

Όταν αυτά αντικαθίστανται στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης (16), παίρνουμε

$$-r \cdot K \cdot e^{r(T-t)} + r \cdot S$$

Αυτό ισούται με r·f και δείχνει ότι όντως ικανοποιείται η εξίσωση (16).

Οι τιμές των διαπραγματεύσιμων derivatives

Κάθε συνάρτηση f(S,t) που είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης (16) είναι η θεωρητική τιμή ενός derivative που θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο εμπορίας. Εάν υπήρχε derivative με αυτήν την τιμή, δε θα δημιουργούσε ευκαιρίες διαιτησίας. Αντιστρόφως, αν μια συνάρτηση f(S,t) δεν ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (16), δε μπορεί να αποτελεί την τιμή του derivative χωρίς να δημιουργεί ευκαιρίες διαιτησίας για τους συναλλασσόμενους.

Για να διασαφηνίσουμε αυτό το σημείο, θεωρήστε αρχική τη συνάρτηση e^S. Αυτή δεν ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (16). Επομένως δεν είναι υποψήφια για να είναι η τιμή ενός derivative που εξαρτάται από την τιμή της μετοχής. Αν υπήρχε ένα αξιόγραφο του οποίου η τιμή ήταν e^S, θα υπήρχε μια ευκαιρία διαιτησίας. Ως δεύτερο παράδειγμα, θεωρήστε τη συνάρτηση

$$\frac{e^{(\sigma^2 - 2\cdot r)\cdot(T-t)}}{S}$$

Αυτή δεν ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση και έτσι, θεωρητικά, αποτελεί την τιμή ενός εμπορεύσιμου χρεογράφου. (Είναι η τιμή ενός derivative που αποπληρώνει $1/S_T$ σε χρόνο T.)

3.7 Η αξιολόγηση ουδέτερου κινδύνου

Η ουδέτερου κινδύνου αξιολόγηση είναι χωρίς αμφιβολία το πιο σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση των derivatives. Προκύπτει από μια βασική ιδιότητα τη διαφορικής εξίσωσης (16) των Black, Scholes και Merton. Αυτή η ιδιότητα είναι ότι η εξίσωση δεν περιλαμβάνει μεταβλητές που επηρεάζονται από τις προτιμήσεις κινδύνου των επενδυτών. Οι μεταβλητές που εμφανίζονται στην εξίσωση είναι η τρέχουσα τιμή μετοχής, ο χρόνος, η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής και ο μηδενικού κινδύνου επιτόκιο. Όλες είναι ανεξάρτητες από τις προτιμήσεις κινδύνου.

Η διαφορική εξίσωση των Black, Scholes και Merton δε θα ήταν ανεξάρτητη των προτιμήσεων κινδύνου αν περιελάμβανε την αναμενόμενη επιστροφή μ για τη μετοχή. Αυτό συμβαίνει επειδή η τιμή του μ εξαρτάται από τις προτιμήσεις κινδύνου. Όσο υψηλότερο είναι το επίπεδο αποστροφής κινδύνου από τους επενδυτές, τόσο υψηλότερο θα είναι το μ για μια δεδομένη μετοχή. Είναι ευτυχές ότι το μ τυχαίνει να εξαλείφεται στην εξαγωγή της διαφορικής εξίσωσης.

Επειδή η διαφορική εξίσωση των Black, Scholes και Merton είναι ανεξάρτητη των προτιμήσεων κινδύνου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα μεγαλοφυές επιχείρημα. Αν οι προτιμήσεις κινδύνου δεν εισέρχονται στην εξίσωση, δε μπορούν να επηρεάσουν τη λύση της. Οποιοδήποτε σύνολο από προτιμήσεις κινδύνου μπορεί επομένως να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό της f. Ειδικότερα, μπορεί να γίνει η πολύ απλή παραδοχή ότι όλοι οι επενδυτές είναι ουδετέρου κινδύνου.

Σε έναν κόσμο όπου οι επενδυτές είναι ουδετέρου κινδύνου, η αναμενόμενη επιστροφή για το σύνολο του ενεργητικού είναι το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο r. Ο λόγος είναι ότι αυτοί οι επενδυτές δεν απαιτούν ένα ασφάλιστρο για να τους ωθήσει προς το να αναλάβουν κινδύνους Είναι επίσης αληθές ότι η παρούσα αξία οποιασδήποτε ταμειακής ροής σε έναν ουδετέρου κινδύνου κόσμο μπορεί να αποκτηθεί με προεξόφληση της αναμενόμενης αξίας των μηδενικού κινδύνου επιτοκίων. Η παραδοχή ότι ο κόσμος είναι ουδετέρου κινδύνου απλουστεύει επομένως σημαντικά την ανάλυση των derivatives.

Θεωρήστε ένα derivative που παρέχει μια πληρωμή σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Μπορεί να αποτιμηθεί χρησιμοποιώντας ουδετέρου κινδύνου αξιολόγηση, με την ακόλουθη διαδικασία:

1. Υποθέτουμε ότι η αναμενόμενη επιστροφή από το υποκείμενο κεφάλαιο είναι το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο (δηλ. υποθέτουμε μ = r).
2. Υπολογίζουμε την αναμενόμενη πληρωμή από το derivative
3. Αφαιρούμε την αναμενόμενη πληρωμή στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Είναι σημαντικό να εκτιμήσουμε ότι η αξιολόγηση ουδετέρου κινδύνου (ή την παραδοχή ότι όλοι οι επενδυτές είναι ουδετέρου κινδύνου) αποτελεί απλώς μια τεχνητή συσκευή για την απόκτηση λύσεων για τη διαφορική εξίσωση των Black, Scholes και Merton. Οι λύσεις που προκύπτουν ισχύουν για όλον τους κόσμους, όχι μόνο εκείνους όπου οι επενδυτές είναι ουδετέρου κινδύνου. Όταν μετακινούμαστε από έναν κόσμο ουδετέρου κινδύνου σε έναν κόσμο όπου απεχθάνονται τον κίνδυνο, δύο πράγματα συμβαίνουν. Ο αναμενόμενος ρυθμός ανάπτυξης των τιμών των μετοχών μεταβάλλεται και το προεξοφλητικό επιτόκιο που πρέπει να χρησιμοποιηθεί στις αποπληρωμές από τα derivatives μεταβάλλεται κι αυτό επίσης. Συμβαίνει ότι αυτές οι δύο μεταβολές να αντισταθμίζουν πάντοτε η μια την άλλη ακριβώς.

Εφαρμογή σε προθεσμιακά συμβόλαια στο χρηματιστήριο

Στο παράδειγμα 5 αυτού του κεφαλαίου, επαληθεύσαμε ότι ό τύπος για την τιμολόγηση ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση των Black, Scholes και Merton. Σε αυτήν την ενότητα θα εξάγουμε τον τύπο για την τιμολόγηση από την αξιολόγηση ουδετέρου κινδύνου. Κάνουμε την παραδοχή ότι τα επιτόκια είναι σταθερά και ίσα με r.

Θεωρήστε ένα μακρά προθεσμιακό συμβόλαιο που ωριμάζει σε χρόνο T με τιμή παράδοσης K. Η τιμή του συμβολαίου στη ωρίμανση είναι

$$S_T - K$$

όπου S_T είναι η τιμή της μετοχής τη στιγμή T. Από τη συζήτηση για την αξιολόγηση ουδετέρου κινδύνου, η τιμή του προθεσμιακού συμβολαίου τη χρονική στιγμή 0 είναι η αναμενόμενη τιμή του τη χρονική στιγμή T σε έναν κόσμο ουδετέρου κινδύνου, έχοντας αφαιρέσει το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο. Δηλώνοντας την αξία του προθεσμιακού συμβολαίου τη χρονική στιγμή μέσω της συνάρτησης f, αυτό σημαίνει ότι

$$f = e^{-rT}\,\hat{E}\,(S_T - K)$$

όπου το $\hat{E}$ δηλώνει την αναμενόμενη αξία σε έναν κόσμου ουδετέρου κινδύνου. Δεδομένου ότι το K είναι μια σταθερά, αυτή η εξίσωση γίνεται

$$f = e^{-r\cdot T}\hat{E}(S_T) - K\cdot e^{-r\cdot T} \tag{17}$$

Η αναμενόμενη επιστροφή μ για τη μετοχή γίνεται r σε έναν κόσμο ουδετέρου κινδύνου. Έτσι, από την εξίσωση (4) έχουμε

$$\hat{\mathrm{E}}(S_T) = S_0\cdot e^{r\cdot T} \tag{18}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (18) στην εξίσωση (17) παίρνουμε

$$f = S_0 - K\cdot e^{-r\cdot T} \tag{19}$$

3.8 Τύποι τιμολόγησης των Black και Scholes

Οι τύποι των Black και Scholes για τις τιμές τη χρονική στιγμή 0 μιας ευρωπαϊκής option αγοράς για μια μετοχή που δεν πληρώνει μερίσματα και μιας ευρωπαϊκής option πώλησης για μια μετοχή που και πάλι δεν πληρώνει μερίσματα είναι

$$c = S_0 \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(d_2) \tag{20}$$

και

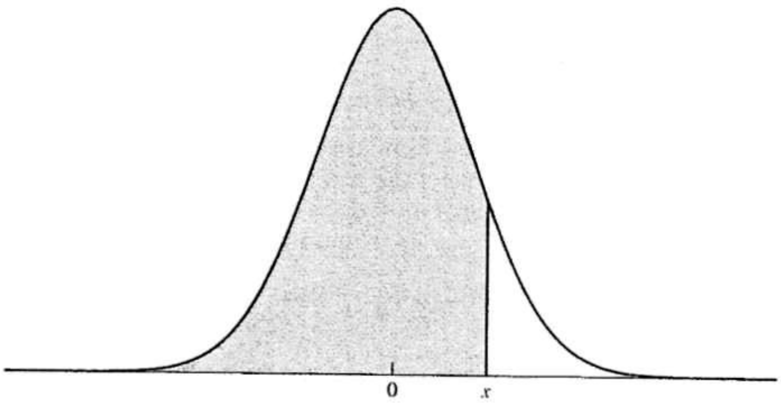
$$p = K \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(-d_2) - S_0 \cdot N(-d_1) \tag{21}$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}} = d_1 - \sigma\sqrt{\mathrm{T}}$$

Η συνάρτηση N(x) είναι η αθροιστική συνάρτησης κατανομής πιθανοτήτων για μια τυποποιημένη κανονική κατανομή. Με άλλα λόγια, είναι η πιθανότητα για μια μεταβλητή με τυποποιημένη κατανομή φ(0,1) να είμαι μικρότερη του x. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι υπόλοιπες μεταβλητές θα πρέπει να είναι γνωστές. Οι μεταβλητές c και p είναι οι ευρωπαϊκές τιμές αγοράς και πώλησης, η S_0 είναι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή μηδέν, το K είναι η τιμή διάθεσης (η τιμή όπου μπορούν να αγοραστούν/πωληθούν τα χρεόγραφα), το r είναι το συνεχώς ανατοκιζόμενο μηδενικού κινδύνου επιτόκιο, σ είναι η μεταβλητότητα της τιμή της μετοχής και T είναι ο χρόνος για την ωρίμανση της option.



Σχήμα 3.3: *Η σκιασμένη περιοχή αντιπροσωπεύει το N(x)*

Ένας τρόπος για την εξαγωγή των τύπων των Black και Scholes είναι επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση (16) υπό την προϋπόθεση των οριακών συνθηκών που αναφέρονται στην ενότητα 6 του παρόντος κεφαλαίου. Μια άλλη προσέγγιση είναι να χρησιμοποιήσουμε την αξιολόγηση ουδετέρου κινδύνου. Θεωρήστε μια ευρωπαϊκή option αγοράς. Η αναμενόμενη αξία της option στην ωρίμανση σε έναν κόσμο ουδετέρου κινδύνου είναι

$$\hat{E}[\max(S_T - K,0)]$$

όπου, όπως και πριν, το $\hat{E}$ δηλώνει την αναμενόμενη αξία σε έναν κόσμου ουδετέρου κινδύνου. Από τη συζήτηση για την αξιολόγηση ουδετέρου κινδύνου, η τιμή της ευρωπαϊκής option αγοράς c είναι αυτή η αναμενόμενη τιμή χωρίς το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο, που είναι

$$c = e^{-rT}\hat{E}[\max(S_T - K,0)] \tag{22}$$

Για να δώσουμε μια ερμηνεία υπό το πρίσμα της εξίσωσης (20), προσέχουμε ότι μπορεί να γραφεί και ως

$$c = e^{-r\cdot T}[S_0 \cdot N(d_1)\cdot e^{r\cdot T} - K\cdot N(d_2)] \tag{23}$$

Η έκφραση $N(d_2)$ είναι η πιθανότητα ότι η option θα ασκηθεί σε έναν κόσμο ουδετέρου κινδύνου, έτσι ώστε ο όρος $KN(d_2)$ να είναι η τιμή διάθεσης επί την πιθανότητα ότι η τιμή διάθεσης θα πληρωθεί. Η έκφραση $S_0 \cdot N(d_1) \cdot e^{rT}$ είναι η αναμενόμενη αξία σε έναν κόσμο ουδετέρου κινδύνου μιας μεταβλητής που ισούται με S_T αν $S_T > K$ και με μηδέν διαφορετικά.

Δεδομένου ότι ποτέ δεν αποτελεί τη βέλτιστη επιλογή να ασκήσει κανείς πρόωρα μια αμερικανική option αγοράς σε μια μετοχή που δεν πληρώνει μερίσματα, η εξίσωση (2) είναι η αξία μιας αμερικανικής option αγοράς για μια μετοχή που δεν πληρώνει μερίσματα. Δυστυχώς, δεν υπάρχει κάποιος ακριβής αναλυτικός τύπος για την αξία μιας αμερικανικής option πώλησης για μια μετοχή που δεν πληρώνει μερίσματα.

Όποτε χρησιμοποιείται στην πράξη ο τύπος των Black και Scholes, το επιτόκιο r τίθεται ίσο με το μηδενικού τοκομεριδίου και μηδενικού κινδύνου επιτόκιο για μια περίοδο ωρίμανσης T. Αυτό είναι θεωρητικά σωστό όταν το r είναι συνάρτηση του χρόνου. Είναι επίσης θεωρητικά σωστό όταν το επιτόκιο είναι στοχαστική μεταβλητή υπό την προϋπόθεση ότι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή T ακολουθεί κανονική λογαριθμική κατανομή και ότι η παράμετρος μεταβλητότητα επιλέγεται κατάλληλα. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ως χρόνος συνήθως μετράται ο αριθμός των ημερών διαπραγμάτευσης που απομένουν στη ζωή της option διαιρεμένος με τον αριθμό των ημερών διαπραγμάτευσης σε 1 έτος.

Ιδιότητες των τύπων των Black και Scholes

Τώρα θα δείξουμε ότι οι τύποι των Black και Scholes έχουν τις σωστές γενικές ιδιότητες εξετάζοντας τι συμβαίνει όταν ορισμένες από τις παραμέτρους παίρνουν ακραίες τιμές.

Όταν η τιμή της μετοχής S_0 γίνεται πολύ μεγάλη, είναι σχεδόν σίγουρο ότι θα ασκηθεί option αγοράς. Τότε γίνεται αρκετά παρόμοιο με ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με τιμή παράδοσης K. Αναμένουμε ότι η τιμή αγοράς θα είναι

$$S_0 - Ke^{-rT}$$

Αυτή είναι στην πραγματικότητα η τιμή αγοράς που δίνεται από την εξίσωση (20) επειδή όταν η S_0 γίνεται πολύ μεγάλη, τότε τόσο το $N(d_1)$ όσο και το $N(d_2)$ πλησιάζουν πολύ το 1,0. Όταν η τιμή της μετοχής γίνεται πολύ μεγάλη, η τιμή της ευρωπαϊκής option πώλησης p πλησιάζει το μηδέν. Αυτό είναι συνεπές με την εξίσωση (21) επειδή το $N(-d_1)$ και το $N(-d_2)$ είναι και τα δύο κοντά στο μηδέν σε αυτήν την περίπτωση.

Σκεφτείτε στη συνέχεια τι συμβαίνει όταν η μεταβλητότητα σ πλησιάζει το μηδέν. Επειδή η μετοχή είναι σχεδόν ακίνδυνη, η τιμή της θα αυξηθεί με ρυθμό r στην τιμή $S_0 \cdot e^{rT}$ τη χρονική στιγμή T και η αποπληρωμή από μια option αγοράς είναι

$$max(S_0 \cdot e^{rT} - K, 0)$$

Αφαιρώντας με ρυθμό r, η τιμή αγοράς σήμερα είναι

$$e^{-rT} \cdot max(S_0 e^{rT} - K, 0) = max(S_0 - K \cdot e^{-rT}, 0)$$

Για να δείξουμε ότι αυτό είναι συνεπές με την εξίσωση (20), θεωρήστε πρώτα την περίπτωση όπου $S_0 > K \cdot e^{-rT}$. Αυτό υποδηλώνει ότι $\ln(S_0/K) + r \cdot T > 0$. Καθώς το σ τείνει στο μηδέν, τα d_1 και d_2 τείνουν στο $+\infty$ και έτσι τα $N(d_1)$ και $N(d_2)$ τείνουν στο 1,0 ενώ η εξίσωση (20) γίνεται

$$C = S_0 - K \cdot e^{-rT}$$

Όταν είναι $S_0 < K \cdot e^{-rT}$ προκύπτει ότι $\ln(S_0/K) + r \cdot T < 0$. Καθώς το σ τείνει στο μηδέν, τα d_1 και d_2 τείνουν στο $-\infty$ και έτσι τα $N(d_1)$ και $N(d_2)$ τείνουν στο 0 ενώ η εξίσωση (20) δίνει μια τιμή αγοράς μηδενική. Η τιμή αγοράς είναι επομένως πάντοτε $max(S_0 - K \cdot e^{-rT}, 0)$ καθώς το σ τείνει στο μηδέν. Ομοίως, μπορεί να αποδειχτεί ότι η τιμή πώλησης πρέπει να είναι πάντοτε $max(K \cdot e^{-rT} - S_0, 0)$ καθώς το σ τείνει στο μηδέν.

3.9 Η Συνάρτηση Αθροιστικής Κανονικής Κατανομής

Το μόνο πρόβλημα στην εφαρμογή των εξισώσεων (20) και (21) είναι στον υπολογισμό των συναρτήσεων των αθροιστικών κατανομών N(x). Η συνάρτηση NORMSDIST υπολογίζει τη N(x) στο Excel. Μια πολυωνυμική προσέγγιση που δίνει μια ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων είναι

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(\alpha_1 k + \alpha_2 k^2 + \alpha_3 k^3 + \alpha_4 k^4 + \alpha_5 k^5) & \text{όταν } x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

Όπου

$$k = \frac{1}{1 + \gamma \cdot x}, \; \gamma = 0{,}2316419$$

$$\alpha_1 = 0{,}319381530, \qquad \alpha_2 = -\,0{,}356563782$$
$$\alpha_3 = 1{,}781477937, \qquad \alpha_4 = -\,1.821255978, \qquad \alpha_5 = 1.330274429$$

και

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$$

Παράδειγμα 6

Η τιμή μιας μετοχής 6 μήνες πριν τη λήξη μιας option είναι 42 ευρώ, η τιμή διάθεσης της option είναι 40 ευρώ, το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο είναι 10% ετησίως και η μεταβλητότητα είναι 20% ετησίως. Αυτό σημαίνει ότι $S_0 = 42$, $K = 40$, $r = 0{,}1$, $\sigma = 0{,}2$ και $T = 0{,}5$.

$$d_1 = \frac{\ln(42/40) + (0{,}1 + 0{,}2^2/2)x0{,}5}{0{,}2\sqrt{0{,}5}} = 0{,}7693$$

$$d_2 = \frac{\ln(42/40) + (0{,}1 - 0{,}2^2/2)x0{,}5}{0{,}2\sqrt{0{,}5}} = 0{,}6278$$

και

$$K \cdot e^{-rT} = 40 \cdot e^{-0{,}05} = 38{,}049$$

Έτσι, αν η option είναι μια ευρωπαϊκή αγορά, η τιμής της c δίνεται ως

$$c = 42 \cdot N(0{,}7693) - 38{,}049 \cdot N(0{,}6278)$$

Αν η option είναι μια ευρωπαϊκή πώληση, η τιμής της p δίνεται ως

$$p = 38{,}049 \cdot N(-0{,}7693) - 42 \cdot N(-0{,}6278)$$

Χρησιμοποιώντας την πολυωνυμική προσέγγιση που μόλις δόθηκε ή τη συνάρτηση NORMSDIST στο Excel,

$$N(0{,}7693) = 0{,}7791, \qquad N(-0{,}7693) = 0{,}2209$$
$$N(0{,}6278) = 0{,}7349, \qquad N(-0{,}6278) = 0{,}2651$$

και έτσι

$$c = 4{,}76 \qquad p = 0{,}81$$

Αγνοώντας τη διαχρονική αξία των χρημάτων, η τιμή της μετοχής έχει αυξηθεί κατά 2,76 ευρώ για την αγορά. Ομοίως, η τιμή της μετοχής έχει πέσει κατά 2,81 ευρώ για την πώληση.

3.10 Options Ενταλμάτων και Αγοράς Μετοχών

Η διάθεση μιας τακτικής option αγοράς σε μια εταιρεία δεν έχει καμία επίδραση στον αριθμό των μερισμάτων που κυκλοφορούν στην εταιρεία. Αν ο συντάκτης της option δεν κατέχει τις μετοχές της εταιρείας, πρέπει να τις αγοράσει με το συνήθη τρόπο και τότε να τις πωλήσει σε κάποιον που διατηρεί options για κάποια τιμή διάθεσης.

Πώς θα μπορούσε η πιθανή αποδυνάμωση να επηρεάσει τον τρόπο που αξιολογούμε τις σημαντικές options ενταλμάτων και αγοράς μετοχών; Η απάντηση είναι πως δε θα μπορούσε! Υποθέτοντας ότι οι αγορές είναι αποτελεσματικές, η τιμή της μετοχής θα αντανακλά τη δυνητική μείωση από όλες τις σημαντικές options ενταλμάτων και αγοράς μετοχών.

Θεωρήστε στη συνέχεια την κατάσταση στην οποία βρίσκεται μια εταιρεία όταν περιμένει μια νέα έκδοση από options ενταλμάτων και αγοράς μετοχών. Υποθέτουμε ότι η εταιρεία ενδιαφέρεται για τον υπολογισμό του κόστους αυτής της έκδοσης υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν παράγωγα οφέλη. Υποθέτουμε ότι η εταιρεία έχει N μετοχές αξίας S_0 το καθένα και ότι ο αριθμός των νέων options που αναμένονται είναι M, με καθεμιά από τις options να δίνει το δικαίωμα στον κάτοχό της να αγοράζει ένα μέρισμα για K. Η αξία της εταιρείας είναι σήμερα $N \cdot S_0$. Αυτή η τιμή δεν αλλάζει ως αποτέλεσμα της έκδοσης option ενταλμάτων. Υποθέστε ότι χωρίς την έκδοση option ενταλμάτων η τιμή του μερίσματος θα είναι S_T στην ωρίμανση των option ενταλμάτων. Αυτό σημαίνει ότι (με ή χωρίς την έκδοση ενταλμάτων) η συνολική αξία των ιδίων κεφαλαίων και των ενταλμάτων τη χρονική στιγμή T θα είναι $N \cdot S_T$. Αν διατίθενται τα εντάλματα, υπάρχει μια εισροή μετρητών από την τιμή διάθεσης αυξάνοντας τα χρήματα σε $N \cdot S_T + M \cdot K$. Αυτή η τιμή κατανέμεται μεταξύ N + M μερισμάτων και έτσι η τιμή του μερίσματος αμέσως μετά τη διάθεση γίνεται

$$\frac{N \cdot S_T + M \cdot K}{N + M}$$

Επομένως η αποπληρωμή σε ένα κάτοχο option όταν διατίθεται αυτή η option είναι

$$\frac{N \cdot S_T + M \cdot K}{N + M} - K$$

ή

$$\frac{N}{N + M}(S_T - K)$$

Αυτό δείχνει ότι η αξία της κάθε option είναι η αξία των

$$\frac{N}{N+M}$$

κανονικών option αγοράς στη μετοχή της εταιρείας. Συνεπώς το συνολικό κόστος των options αυτών είναι Μ φορές αυτό.

Παράδειγμα 7

Μια εταιρεία με 1 εκατομμύριο μετοχές αξίας 40 ευρώ η καθεμιά σκέφτεται την έκδοση 200.000 ενταλμάτων καθένα από τα οποία δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να αγοράσει μια μετοχή με τιμή διάθεση 60 ευρώ για 5 χρόνια. Θέλει να γνωρίζει το κόστος αυτής της κίνησης. Το επιτόκιο είναι 3% ετησίως και η μεταβλητότητα είναι 30% ετησίως. Η εταιρεία δεν πληρώνει μερίσματα. Από την εξίσωση (20), η αξία μιας 5-ετούς ευρωπαϊκής option αγοράς είναι 7,04 ευρώ. Σε αυτήν την περίπτωση, N = 1.000.000 και M = 200.000 και έτσι η αξία του εντάλματος είναι

$$\frac{1.000.000}{1.000.000+200.000}\times 7{,}04 = 5{,}87$$

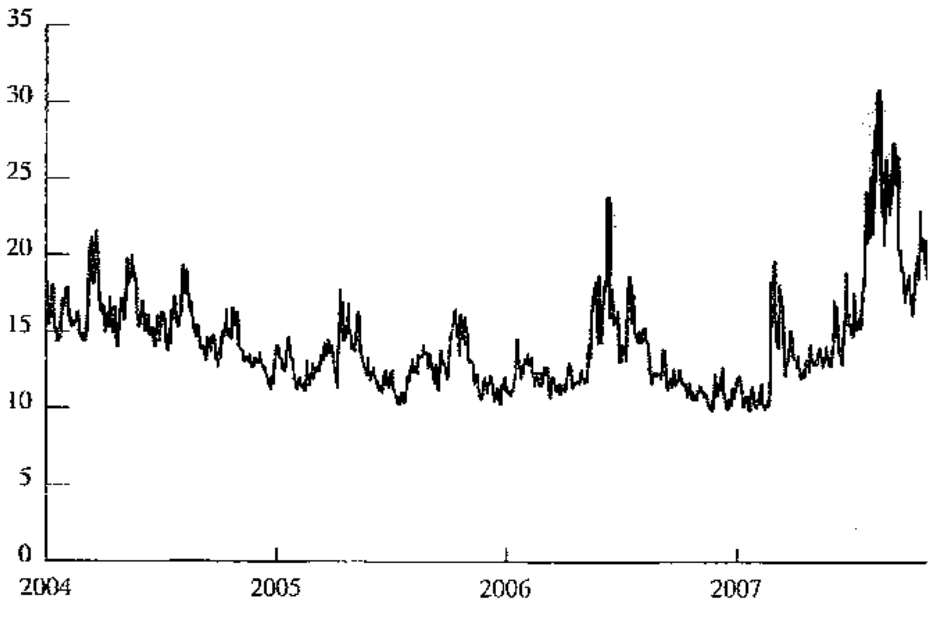
ή 5,87 ευρώ. Το συνολικό κόστος της έκδοσης ενταλμάτων είναι 200.000 x 5,87 = 1,17 εκατομμύρια ευρώ. Υποθέτοντας ότι η αγορά δεν επωφελείται από την έκδοση ενταλμάτων, αναμένουμε την τιμή της μετοχής να πέσει κατά 1,17 ευρώ στα 38,83 ευρώ.

3.11 Εκτιμώμενες μεταβλητότητες

Η μια παράμετρος στους τύπους αξιολόγησης των Black και Scholes που δε μπορεί να παρατηρηθεί άμεσα είναι η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής. Στην ενότητα 4 του κεφαλαίου αυτού, συζητήσαμε για το πώς μπορεί να εκτιμηθεί αυτή από την ιστορία της τιμής της μετοχής. Στην πράξη, οι επιχειρηματίες συνήθως λειτουργούν με αυτές που είναι γνωστές ως *εκτιμώμενες μεταβλητότητες*. Αυτές είναι οι μεταβλητότητες που συνεπάγονται από τις τιμές των options που παρατηρούνται στην αγορά.

Για να δείξουμε πώς υπολογίζονται οι εκτιμώμενες μεταβλητότητες, ας υποθέσουμε ότι η αξία μιας ευρωπαϊκής option αγοράς σε μια μετοχή που δεν πληρώνει μερίσματα είναι 1,875 όταν S_0 = 21, K = 20, r = 0,1 και T + 0,25. Η εκτιμώμενη μεταβλητότητα είναι η τιμή του σ που όταν αντικατασταθεί στην εξίσωση (20) δίνει c = 1,875. Δυστυχώς, δεν είναι δυνατόν να αντιστραφεί η εξίσωση (20) ώστε το σ να εκφραστεί ως συνάρτηση των S_0, K, r, T και c. Ωστόσο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια επαναληπτική διαδικασία για να βρεθεί το εκτιμώμενο σ. Για παράδειγμα, μπορούμε να ξεκινήσουμε δοκιμάζοντας σ = 0,20. Αυτό δίνει μια τιμή στο c ίση με 1,76, η οποία είναι χαμηλή. Επειδή το c είναι μια αύξουσα συνάρτηση του σ, χρειάζεται μεγαλύτερη τιμή του σ. Μπορούμε στην συνέχεια να δοκιμάσουμε την τιμή 0,30 για το σ. Αυτό δίνει ένα c ίσο με 2,10, το οποίο είναι πολύ μεγάλο και σημαίνει ότι το σ είναι μεταξύ του 0,20 και του 0,30. Στη συνέχεια, δοκιμάζουμε την τιμή 0,25 για το σ. Αυτό επίσης αποδεικνύεται πολύ μεγάλο, δείχνοντας ότι το σ βρίσκεται μεταξύ του 0,20 και του 0,25. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να μειώσουμε κατά το ήμισυ το εύρος για το σ σε κάθε επανάληψη και η σωστή τιμή του σ μπορεί να υπολογιστεί με οποιαδήποτε ακρίβεια επιθυμούμε. Σε αυτό το παράδειγμα, η εκτιμώμενη μεταβλητότητα είναι 0,235 ή 23,5% ετησίως. Παρόμοια διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με τα διωνυμικά δέντρα για να βρεθούν οι εκτιμώμενες μεταβλητότητες στις αμερικανικές options.

Οι εκτιμώμενες μεταβλητότητες χρησιμοποιούνται για την καταγραφή της γνώμης της αγοράς για τη μεταβλητότητα μιας συγκεκριμένης μετοχής. Ενώ οι ιστορικές μεταβλητότητες (βλ. Ενότητα 4 του παρόντος Κεφαλαίου) είναι οπισθοδρομικές, οι εκτιμώμενες μεταβλητότητες κοιτούν προς τα εμπρός. Οι επιχειρηματίες συχνά χρησιμοποιούν την εκτιμώμενη μεταβλητότητα μιας option παρά την τιμή της. Αυτό είναι βολικό επειδή η εκτιμώμενη μεταβλητότητα τείνει να είναι λιγότερο μεταβλητή από την τιμή της option.



Σχήμα 3.4: *Ο δείκτης Vix από Ιανουάριο του 2004 ως τον Οκτώβριο του 2007*

Ο Δείκτης VIX

Το CBOE (Chicago Board Options Exchange – Συμβούλιο ανταλλαγής options του Σικάγο) δημοσιεύει δείκτες εκτιμώμενης μεταβλητότητας. Ο πιο γνωστός δείκτης, ο SPX VIX, είναι ένας δείκτης για την εκτιμώμενη μεταβλητότητα των options διάρκειας 30 ημερών στο S&P 500 (Standard and Poor's) που υπολογίζεται από ένα ευρύ φάσμα αγορών και πωλήσεων. Οι συναλλαγές στα futures στο VIX άρχισαν το 2004 και οι συναλλαγές στις options στο VIX άρχισαν το 2006. Μια εμπορική συναλλαγή που περιλαμβάνει futures ή options στο S&P 500 αποτελεί ένα στοίχημα τόσο για το επίπεδο των futures στο S+P 500 όσο και στη μεταβλητότητα του S&P 500. Αντιθέτως, ένα συμβόλαιο futures ή options στο VIX είναι ένα στοίχημα μόνο για τη μεταβλητότητα. Ένα συμβόλαιο είναι για 1.000 φορές το δείκτη. Το παραπάνω σχήμα δείχνει το δείκτη VIX μεταξύ του 2004 και του 2007.

Παράδειγμα 8

Υποθέστε ότι ένας επιχειρηματίας αγοράζει τον Απρίλιο συμβόλαιο futures στο VIX όταν η τιμή του futures είναι 18,5 (κάτι που αντιστοιχεί σε μεταβλητότητα 30 ημερών του S&P 500 της τάξης του 18,5%) και κλείνει τη σύμβαση όταν η τιμή του futures είναι 19,3 (κάτι που αντιστοιχεί σε μεταβλητότητα του S&P 500 της τάξης του 19,3%). Ο επιχειρηματίας κερδίζει 800 ευρώ.

3.12 Μερίσματα

Μέχρι τώρα έχουμε υποθέσει ότι η μετοχή στην οποία γράφεται η option δεν πληρώνει μερίσματα. Σε αυτήν την ενότητα, θα τροποποιήσουμε το μοντέλο των Black και Scholes ώστε να λάβει υπόψη και τα μερίσματα. Υποθέτουμε ότι το ποσό και το χρονοδιάγραμμα των μερισμάτων κατά τη διάρκεια της ζωής μιας option μπορούν να προβλεφθούν με βεβαιότητα. Για τις options βραχείας διάρκειας ζωής αυτή δεν αποτελεί παράλογη παραδοχή. (Για options μακράς διάρκειας ζωής είναι σύνηθες να υποθέτουμε ότι είναι περισσότερο γνωστή η μερισματική απόδοση παρά οι πληρωμές μερισμάτων σε μετρητά. Οι options μπορούν κατόπιν να αξιολογηθούν.) Η ημέρα κατά την οποία καταβάλλεται το μέρισμα θα πρέπει να θεωρείται ημέρα άνευ μερίσματος. Σε αυτήν την ημέρα η τιμή της μετοχής μειώνεται κατά το ποσό του μερίσματος.

Ευρωπαϊκές options

Οι ευρωπαϊκές options μπορούν να αναλυθούν υπό την παραδοχή ότι η τιμή της μετοχής είναι το άθροισμα δύο στοιχείων: ενός ακίνδυνου στοιχείου που αντιστοιχεί στα γνωστά μερίσματα κατά τη διάρκεια της ζωής της option και ένα ριψοκίνδυνο στοιχείο. Το ριψοκίνδυνο στοιχείο, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, είναι η παρούσα αξία όλων των μερισμάτων κατά τη διάρκεια της ζωής της option μειωμένο από τις ημέρες άνευ μερίσματος προς το τρέχον μηδενικού κινδύνου επιτόκιο. Μέχρι τη στιγμή που ωριμάζει η option, τα μερίσματα θα έχουν πληρωθεί και το ακίνδυνο στοιχείο δε θα υπάρχει πλέον. Ο τύπος των Black και Scholes είναι επομένως σωστό αν το S_0 είναι ίσο με το ριψοκίνδυνο στοιχείο της τιμής της μετοχής και σ είναι η μεταβλητότητα της διαδικασίας που ακολουθείται από το ριψοκίνδυνο στοιχείο. Από λειτουργική άποψη, αυτό σημαίνει ότι ο τύπος των Black και Scholes μπορεί να χρησιμοποιηθεί υπό την προϋπόθεση ότι η τιμή της μετοχής μειώνεται από την παρούσα αξία όλων των μερισμάτων κατά τη διάρκεια της ζωής μιας option, δηλαδή αφαιρώντας τις ημέρες άνευ μερίσματος στο μηδενικού κινδύνου επιτόκιο. Όπως ήδη αναφέρθηκε, ένα μέρισμα μετράται ως η διάρκεια ζωής της option μόνο αν εμφανίζεται η ημέρα του άνευ μερίσματος κατά τη διάρκεια ζωής της option.

Παράδειγμα 9

Θεωρήστε μια ευρωπαϊκή option σε μια μετοχή όταν υπάρχουν ημέρες άνευ μερίσματος σε δύο και πέντε μήνες. Το μέρισμα σε κάθε ημέρα άνευ μερίσματος αναμένεται να είναι 0,50 ευρώ. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι 40 ευρώ, η τιμή διάθεση είναι 40 ευρώ επίσης, η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής είναι 30%, το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο είναι 9% ετησίως και ο χρόνος ωρίμανσης είναι έξι μήνες. Η παρούσα αξία των μερισμάτων είναι

$$0{,}5e^{-0{,}1667x0{,}09} + 0{,}5e^{-0{,}4167x0{,}099} = 0{,}9741$$

Η τιμή της option μπορεί επομένως να υπολογιστεί από τον τύπο των Black και Scholes με $S_0 = 40 - 0{,}9741 = 39{,}0259$, K = 40, r = 0,09, σ = 0,3 και T = 0,5:

$$d_1 = \frac{\ln(39{,}0259/40) + (0{,}09 + 0{,}3^2/2)x0{,}5}{0{,}3\sqrt{0{,}5}} = 0{,}2017$$

$$d_1 = \frac{\ln(39{,}0259/40) + (0{,}09 - 0{,}3^2/2)x0{,}5}{0{,}3\sqrt{0{,}5}} = -0{,}0104$$

Χρησιμοποιώντας τη πολυωνυμική προσέγγιση που παρουσιάστηκε στην ενότητα 9 αυτού του κεφαλαίου ή τη συνάρτηση NORMSDIST του Excel έχουμε

$$N(d_1) = 0{,}5800, \qquad N(d_2) = 0{,}4959$$

και από την εξίσωση (20) η τιμή αγοράς είναι

$$c = S_0 \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(d_2) = 39{,}0259 \times 0{,}5800 - 40e^{-0{,}09 \times 0{,}5} \times 0{,}4959 = 3{,}67$$

ή 3,67 ευρώ.

Αμερικανικές options

Θεωρήστε στη συνέχεια τις αμερικανικές options αγοράς. Όπου υπάρχουν μερίσματα, μόνο ως βέλτιστη λύση μπορεί να θεωρηθεί το να διατεθούν κάποια χρονική στιγμή αμέσως πριν η μετοχή σταματήσει να δίνει μερίσματα. Υποθέτουμε ότι αναμένονται n ημέρες άνευ μερίσματος και ότι αυτές είναι στις χρονικές στιγμές, $t_1, t_2, \ldots, t_n$, με $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Τα μερίσματα που αντιστοιχούν σε αυτές τις χρονικές στιγμές θα συμβολίζονται με $D_1, D_2, \ldots, D_n$ αντίστοιχα.

Ξεκινούμε θεωρώντας την πιθανότητα πρόωρης διάθεσης λίγο πριν την τελική ημέρα άνευ μερίσματος (δηλ. τη χρονική στιγμή t_n). Αν η option διατεθεί τη στιγμή t_n, ο επενδυτής λαμβάνει

$$S(t_n) - K$$

όπου με S(t) συμβολίζεται η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t. Αν η option δε διατεθεί, η τιμή της μετοχής πέφτει σε $S(t_n) - D_n$. Η τιμή της option είναι τότε μεγαλύτερη από

$$S(t_n) - D_n - Ke^{-r(T-t_n)}$$

Επομένως, αν

$$S(t_n) - D_n - Ke^{-r(T-t_n)} \geq S(t_n) - K$$

ή

$$D_n \leq K[1 - e^{-r(T-t_n)}] \tag{24}$$

δε θα ήταν η βέλτιστη λύση να διατεθεί τη χρονική στιγμή t_n. Από την άλλη, αν

$$D_n > K[1 - e^{-r(T-t_n)}] \tag{25}$$

για οποιαδήποτε εύλογη παραδοχή για τη στοχαστική διαδικασία που ακολουθείται από την τιμή της μετοχής, μπορεί να αποδειχτεί ότι είναι πάντοτε βέλτιστη λύση να διατεθεί τη χρονική στιγμή t_n για μια αρκετά υψηλή τιμή της $S(t_n)$. Η ανισότητα στη σχέση (25) θα τείνει να ικανοποιηθεί όταν η τελική ημέρα άνευ μερίσματος είναι αρκετά κοντά στην ωρίμανση της option (δηλ. όταν το $T - t_n$ είναι μικρό) και το μέρισμα είναι μεγάλο.

Θεωρήστε την επόμενη χρονική στιγμή t_{n-1}, την προτελευταία ημέρα άνευ μερίσματος. Αν η option διατεθεί αμέσως πριν τη χρονική στιγμή t_{n-1}, ο επενδυτής λαμβάνει $S(t_{n-1}) - K$. Αν η option δε διατεθεί στη χρονική στιγμή t_{n-1}, η τιμή της μετοχής πέφτει σε $S(t_{n-1}) - D_{n-1}$ και η πρώτη μεταγενέστερη χρονική στιγμή στην οποία θα πραγματοποιηθεί η διάθεση είναι η t_n. Έτσι, ένα κατώτερο όριο για την τιμή της option αν δε διατεθεί τη χρονική στιγμή t_{n-1} είναι

$$S(t_{n-1}) - D_{n-1} - Ke^{-r(t_n - t_{n-1})}$$

Επομένως, αν

$$S(t_{n-1}) - D_{n-1} - Ke^{-r(t_n - t_{n-1})} \geq S(t_{n-1}) - K$$

ή

$$D_{n-1} \leq K[1 - e^{-r(t_n - t_{n-1})}]$$

δε θα ήταν η βέλτιστη λύση να διατεθεί αμέσως πριν τη χρονική στιγμή t_{n-1}. Ομοίως, για κάθε $i < n$, αν

$$D_i \leq K[1 - e^{-r(t_{i+1} - t_i)}] \tag{26}$$

δε θα ήταν η βέλτιστη λύση να διατεθεί αμέσως πριν τη χρονική στιγμή t_i..

Η ανισότητα στη σχέση (26) είναι περίπου ισοδύναμη με τη

$$D_i \leq K \cdot r \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

Υποθέτοντας ότι το K είναι αρκετά κοντά στην τρέχουσα αξία της μετοχή, αυτή η ανισότητα ικανοποιείται όταν η μερισματική απόδοση για τη μετοχή είναι μικρότερη από το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο. Αυτό συμβαίνει συχνά.

Μπορούμε να συμπεράνουμε από αυτήν την ανάλυση ότι, σε πολλές περιπτώσεις, η πιο πιθανή χρονική στιγμή για την πρόωρη διάθεση μια αμερικανικής option αγοράς είναι αμέσως πριν από την τελική ημέρα άνευ μερίσματος t_n. Επιπλέον, αν η ανισότητα της σχέσης (26) ισχύει για i = 1,2,…., n-1 και η ανισότητα της σχέσης (24) ισχύει γενικά, μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι η πρόωρη διάθεση δεν αποτελεί ποτέ τη βέλτιστη λύση.

Η προσέγγιση του Black

Ο Black προτείνει μια προσεγγιστική διαδικασία που θα έχει υπόψη της την πρόωρη διάθεση των options αγοράς. Αυτή περιλαμβάνει τον υπολογισμό, όπως περιγράφθηκε νωρίτερα σε αυτήν την ενότητα, τις τιμές των ευρωπαϊκών options που ωριμάζουν στις χρονικές στιγμές T και t_n και στη συνέχεια τον καθορισμό της αμερικανικής τιμής ως ίσης με τη μεγαλύτερη από τις δύο τιμές. Αυτή η προσέγγιση φαίνεται να λειτουργεί καλά στις περισσότερες περιπτώσεις.

Παράδειγμα 10

Θεωρήστε την κατάσταση του Παραδείγματος 9, αλλά υποθέστε ότι η option είναι αμερικανική παρά ευρωπαϊκή. Σε αυτήν την περίπτωση είναι $D_1 = D_2 = 0,5$, $S_0 = 40$, K = 40, r = 0,09, $t_1 = 2/12$ και $t_2 = 5/12$. Δεδομένου ότι η παράσταση

$$K[1 - e^{-r(t_2 - t_1)}] = 40(1 - e^{-0,09 \times 0,25}) = 0,89$$

είναι μεγαλύτερη του 0,5, επόμενο είναι (δείτε την ανισότητα στη σχέση (26)) ότι η option δε θα πρέπει ποτέ να διατεθεί αμέσως πριν την πρώτη ημέρα άνευ μερίσματος. Επιπλέον, δεδομένου ότι η παράσταση

$$K[1 - e^{-r(T - t_2)}] = 40(1 - e^{-0,09 \times 0,0833}) = 0,30$$

είναι μικρότερη του 0,5, επόμενο είναι (δείτε την ανισότητα στη σχέση (25)) ότι, όταν είναι αρκετά πιο κάτω από την τιμή στις αγορές, η option θα πρέπει να διατεθεί αμέσως πριν τη δεύτερη ημέρα άνευ μερίσματος.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση του Black για να αξιολογήσουμε την option. Η παρούσα αξία του πρώτου μερίσματος είναι

$$0{,}5e^{-0{,}1667x0{,}09} = 0{,}4926$$

και έτσι η αξία της option, με την παραδοχή ότι λήγει ακριβώς πριν την τελική ημέρα άνευ μερίσματος, μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον τύπο των Black και Scholes με S_0 = 40 – 0,4926 = 39,5074, K = 40, r = 0,09, σ = 0,30 και T = 0,4167. Αυτή προκύπτει 3,52 ευρώ. Η προσέγγιση του Black περιλαμβάνει να πάρουμε τη μεγαλύτερη από αυτήν την τιμή και την τιμή της option όταν αυτή μπορεί μόνο να διατεθεί στο τέλος των 6 μηνών. Από το Παράδειγμα 8, ξέρουμε ότι η τελευταία είναι 3,67 ευρώ. Η προσέγγιση του Black, επομένως, δίνει την αξία της αμερικανικής option αγοράς ως 3,67 ευρώ.

Η αξία της option που δίνεται από το DerivaGem χρησιμοποιώντας τη “Binomial Americal” με 500 χρονικά βήματα είναι 3,72 ευρώ. (Προσέξτε ότι το DerivaGem απαιτεί τα μερίσματα να εισάγονται με χρονολογική σειρά στον πίνακα. Ο χρόνος για ένα μέρισμα είναι στην πρώτη στήλη και το ποσό του μερίσματος στη δεύτερη στήλη.) Υπάρχουν δύο λόγοι για τις διαφορές ανάμεσα στο Διωνυμικό Μοντέλο (Binomial Model – BM) και την προσέγγιση του Black (Black’s approximation – BA). Το πρώτο αφορά το χρονοδιάγραμμα της απόφασης για την πρόωρη διάθεση, ενώ η δεύτερη αφορά τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζεται η μεταβλητότητα. Το χρονοδιάγραμμα για την απόφαση της πρόωρης διάθεσης τείνει να κάνει το BM πιο σπουδαίο από τη BA. Στη BA, η παραδοχή είναι ότι ο κάτοχος πρέπει να αποφασίσει σήμερα αν η option θα διατεθεί μετά από πέντε ή έξι μήνες. Το BM επιτρέπει στην απόφαση για την πρόωρη διάθεση στο χρονικό σημείο των πέντε μηνών να εξαρτάται από την τιμή της μετοχής εκείνη τη χρονική στιγμή. Ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζεται η μεταβλητότητα τείνει να κάνει τη BA σπουδαιότερη του BM. Στη BA, όταν υποθέτουμε ότι η διάθεση γίνεται μετά από πέντε μήνες, η μεταβλητότητα εφαρμόζεται στην τιμή της μετοχής μειωμένη κατά την παρούσα αξία του πρώτου μερίσματος. Όταν υποθέτουμε ότι η διάθεση γίνεται μετά από έξι μήνες, η μεταβλητότητα εφαρμόζεται στην τιμή της μετοχής μειωμένη κατά την παρούσα αξία και των δύο μερισμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Βασικές αριθμητικές διαδικασίες

Το κεφάλαιο αυτό εξετάζει τρεις αριθμητικές διαδικασίας για την αποτίμηση των derivatives όταν δεν είναι διαθέσιμες οι ακριβείς τύποι. Η πρώτη περιλαμβάνει την εκπροσώπηση των τιμών του κεφαλαίου σε τύπο δέντρου, η δεύτερη την προσομοίωση Monte Carlo και η τρίτη μεθόδους πεπερασμένων διαφορών.

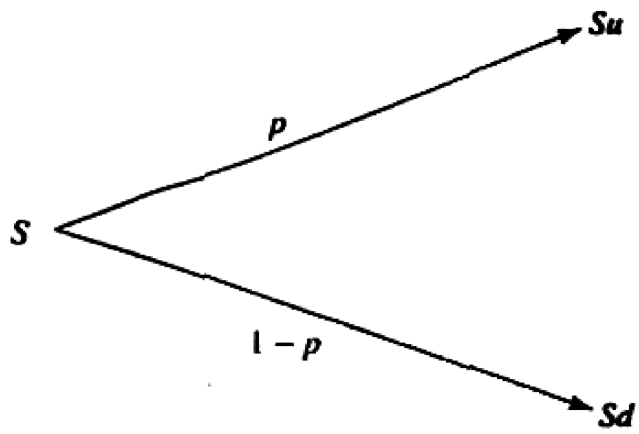
Η προσομοίωση Monte Carlo χρησιμοποιείται συνήθως για derivatives όπου η αποπληρωμή εξαρτάται από την ιστορία της βασικής μεταβλητής ή από την ιστορία των βασικών μεταβλητών όταν είναι περισσότερες. Τα δέντρα και οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών συνήθως χρησιμοποιούνται για τις αμερικανικές options και derivatives όπου ο κάτοχος πρέπει να πάρει κάποιες αποφάσεις πριν την ωρίμανση. Εκτός από την αποτίμηση του derivative, όλες οι διαδικασίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των ελληνικών γραμμάτων όπως το δέλτα, το γάμμα και το ωμέγα.

Οι βασικές διαδικασίες που αναφέρονται σε αυτό το κεφάλαιο μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το χειρισμό των περισσοτέρων προβλημάτων αποτίμησης derivatives που αντιμετωπίζονται στην πράξη, αν και μερικές φορές θα πρέπει να προσαρμόζονται ώστε να αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες καταστάσεις.

4.1 Διωνυμικά δέντρα

Τα διωνυμικά δέντρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποτιμήσουν είτε τις ευρωπαϊκές είτε τις αμερικανικές options. Οι τύποι των Black και Scholes καθώς και οι προεκτάσεις τους παρέχουν αναλυτικές εκτιμήσεις για τις ευρωπαϊκές options. Δεν υπάρχουν αναλυτικές εκτιμήσεις για τις αμερικανικές options. Τα διωνυμικά δέντρα είναι επομένως πιο χρήσιμα για την αποτίμηση τέτοιου είδους options.

Η προσέγγιση για την αξιολόγηση μέσω του διωνυμικού δέντρου περιλαμβάνει τη διαίρεση της ζωής της option σε ένα μεγάλο αριθμό μικρών χρονικών διαστημάτων μήκους Δt. Υποθέτει ότι σε κάθε μικρό χρονικό διάστημα η τιμή του βασικού κεφαλαίου κινείται από την αρχική της τιμή S σε κάποια από τις δύο νέες τιμές $S \cdot u$ και $S \cdot d$. Η προσέγγιση αυτή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Γενικά, είναι $u > 1$ και $d < 1$. Η μετακίνηση από το S στο $S \cdot u$ είναι επομένως μια «ανοδική» κίνηση και η μετακίνηση από το S στο $S \cdot d$ είναι μια «καθοδική» κίνηση. Η πιθανότητα για μια ανοδική κίνηση θα συμβολίζεται με p. Ενώ η πιθανότητα για μια καθοδική κίνηση είναι $1 – p$.



Σχήμα 4.1: *Κινήσεις των τιμών κεφαλαίων σε χρόνο Δt υπό το διωνυμικό μοντέλο*

Αξιολόγηση ουδετέρου κινδύνου

Η αρχή της αξιολόγησης ουδετέρου κινδύνου δηλώνει ότι μια option (ή ένα derivative) μπορεί να αποτιμηθεί υπό την προϋπόθεση ότι ο κόσμος είναι ουδετέρου κινδύνου. Αυτό σημαίνει ότι, για τους σκοπούς της αξιολόγησης, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

1. Υποθέτουμε ότι η αναμενόμενη επιστροφή από όλα στοιχεία που τίθενται προς συναλλαγή είναι στο μηδενικού κινδύνου επιτόκιο.
2. Αποτιμούμε τις αποπληρωμές από ένα derivative με τον υπολογισμό των αναμενόμενων τιμών και μειώνοντάς τις κατά το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο.

Αυτή η αρχή διέπει τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα δέντρα.

Προσδιορισμός των p, u και d

Οι παράμετροι p, u και d πρέπει να δώσουν σωστές τιμές για τη μέση τιμή και τη διακύμανση των μεταβολών στις τιμές του κεφαλαίου κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος μήκους Δt. Επειδή εργαζόμαστε σε έναν κόσμου ουδετέρου κινδύνου, η αναμενόμενη επιστροφή από το κεφάλαιο είναι το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο r. Υποθέστε ότι το κεφάλαιο παρέχει μια απόδοση q. Η αναμενόμενη επιστροφή με τη μορφή υπεραξίας πρέπει να είναι r – q. Αυτό σημαίνει ότι η αναμενόμενη αξία της τιμής του κεφαλαίου στο τέλος ενός χρονικού διαστήματος Δt πρέπει να είναι $S \cdot e^{(r-q)\Delta t}$, όπου το S είναι η τιμή του κεφαλαίου στην αρχική του χρονικού διαστήματος. Για να ταιριάξουμε τη μέση επιστροφή με το δέντρο, χρειαζόμαστε επομένως

$$S \cdot e^{(r-q)\Delta t} = p \cdot Su + (1-p) \cdot Sd$$

ή

$$e^{(r-q)\Delta t} = p \cdot u + (1-p) \cdot d \qquad (1)$$

Όπως εξηγήθηκε στην ενότητα 4 του προηγούμενου κεφαλαίου, η διακύμανση της ποσοστιαίας μεταβολής R στην τιμή του κεφαλαίου σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt είναι $\sigma^2 \cdot \Delta t$, όπου το σ είναι η μεταβλητότητα της τιμής του κεφαλαίου. Αυτή αποτελεί επίσης και τη διακύμανση του 1 + R. (Το να προσθέτουμε ένα σταθερό όρο σε μια μεταβλητή δεν προκαλεί κάποια διαφορά στη διακύμανσή της.) Η διακύμανση της μεταβλητής Q ορίζεται ως $E(Q^2) - [E(Q)]^2$. Υπάρχει μια πιθανότητα p ότι το 1 + R είναι το u και μια πιθανότητα 1 – p ότι είναι το d. Επόμενο είναι ότι

$$pu^2 + (1 - p)d^2 - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2 \Delta t$$

Από την εξίσωση (1) έχουμε

$$e^{(r-q)\Delta t}(u + d) = p \cdot u^2 + (1 - p) \cdot d^2 + u \cdot d$$

και έτσι

$$e^{(r-q)\Delta t}(u + d) - u \cdot d - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2 \Delta t \tag{2}$$

Οι εξισώσεις (1) και (2) επιβάλλουν δύο όρους για τα p, u και d. Ο τρίτος όρος που χρησιμοποιείται από τους Cox, Ross και Rubinstein (1979) είναι

$$u = \frac{1}{d} \tag{3}$$

Μια λύση για τις εξισώσεις (1) μέχρι (3), όταν αγνοούνται οι όροι μεγαλύτερης τάξης από το Δt, είναι

$$p = \frac{\alpha - d}{u - d} \tag{4}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{5}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{6}$$

όπου

$$\alpha = e^{(r-q)\sqrt{\Delta t}} \tag{7}$$

Η μεταβλητή α μερικές φορές αναφέρεται ως *παράγοντας ανάπτυξης*.

Δέντρο των τιμών του κεφαλαίου

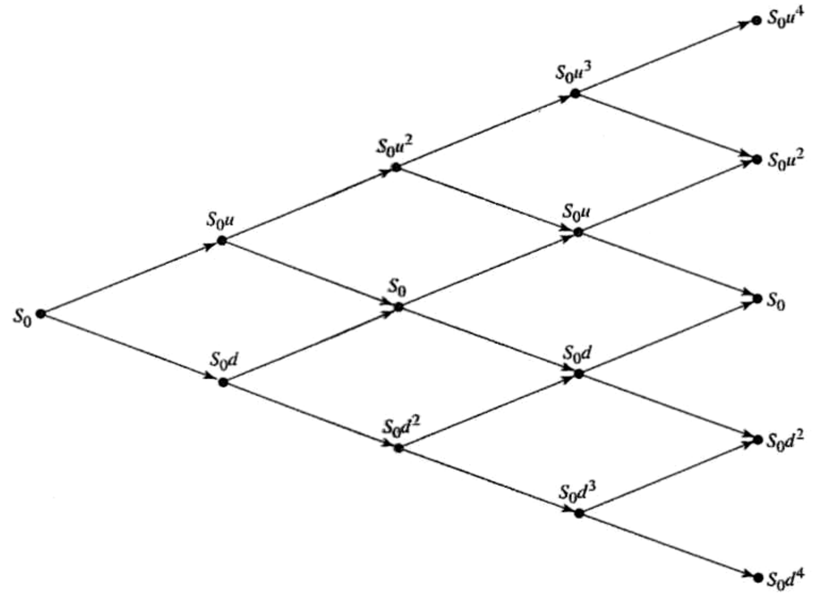
Το σχήμα 4.2 δείχνει το πλήρες δέντρο των τιμών του κεφαλαίου που λαμβάνεται υπόψη όταν χρησιμοποιείται το διωνυμικό μοντέλο. Τη χρονική στιγμή μηδέν, η τιμή κεφαλαίου S_0 είναι γνωστή. Τη χρονική στιγμή Δt, υπάρχουν δύο πιθανές τιμές κεφαλαίου, η $S_0 \cdot u$ και η $S_0 \cdot d$. Τη χρονική στιγμή $2 \cdot \Delta t$ υπάρχουν τρεις πιθανές τιμές κεφαλαίου, $S_0 \cdot u^2$, S_0 και $S_0 \cdot d^2$ και ούτω καθεξής. Γενικά, τη χρονική στιγμή $i \cdot \Delta t$ θεωρούμε $i + 1$τιμές κεφαλαίου. Αυτές είναι

$$S_0 u^j d^{i-j}, \quad j = 0,1,\ldots\ldots\ldots.i$$

Προσέξτε ότι η σχέση $u = 1/d$ χρησιμοποιείται στον υπολογισμό της τιμής του κεφαλαίου σε κάθε κόμβο του δέντρου του παρακάτω σχήματος. Για παράδειγμα, $S_0 \cdot u^2 d = S_0 \cdot u$. Προσέξτε επίσης ότι το δέντρο ανασυνδυάζεται με την έννοια ότι ανοδική κίνηση ακολουθούμενη από μια καθοδική κίνηση οδηγεί στην ίδια τιμή του κεφαλαίου όπως και η καθοδική κίνηση ακολουθούμενη όταν ακολουθείται από μια ανοδική κίνηση.

Εργαζόμενοι προς τα πίσω μέσω του δέντρου

Οι options αξιολογούνται ξεκινώντας από το τέλος του δέντρου (χρονική στιγμή T) και εργαζόμενοι προς τα πίσω. Η αξία της option είναι γνωστή τη χρονική στιγμή T. Για παράδειγμα, μια option πώλησης αξίζει το $\max(K - S_T, 0)$ και μια option αγοράς αξίζει το $\max(S_T - K, 0)$, όπου το S_T είναι η τιμή του κεφαλαίου τη χρονική στιγμή T και K είναι η τιμή διάθεσης. Επειδή υποθέτουμε έναν κόσμο ουδετέρου κινδύνου, η αξία σε κάθε κόμβο τη χρονική στιγμή $T - \Delta t$ μπορεί να υπολογιστεί ως η αναμενόμενη αξία τη χρονική στιγμή T μειωμένη κατά το επιτόκιο r για μια χρονική περίοδο Δt. Ομοίως, η αξία σε κάθε κόμβο τη χρονική στιγμή $T - 2\Delta t$ μπορεί να υπολογιστεί ας η αναμενόμενη αξία τη χρονική στιγμή $T - \Delta t$ μειωμένη κατά το επιτόκιο r για μια χρονική περίοδο Δt και ούτω καθεξής. Αν η option είναι αμερικανική, είναι αναγκαίο να ελέγξουμε σε κάθε κόμβο για να δούμε αν προτιμάται η πρόωρη διάθεση από την εκμετάλλευση της option για μια επιπλέον χρονική περίοδο Δt. Τελικά, εργαζόμενοι προς τα πίσω μέσω όλων των κόμβων, είμαστε σε θέση να αποκτήσουμε την αξία της option τη χρονική στιγμή μηδέν.



Σχήμα 4.2: *Δέντρο που χρησιμοποιήθηκε για την αποτίμηση μιας option*

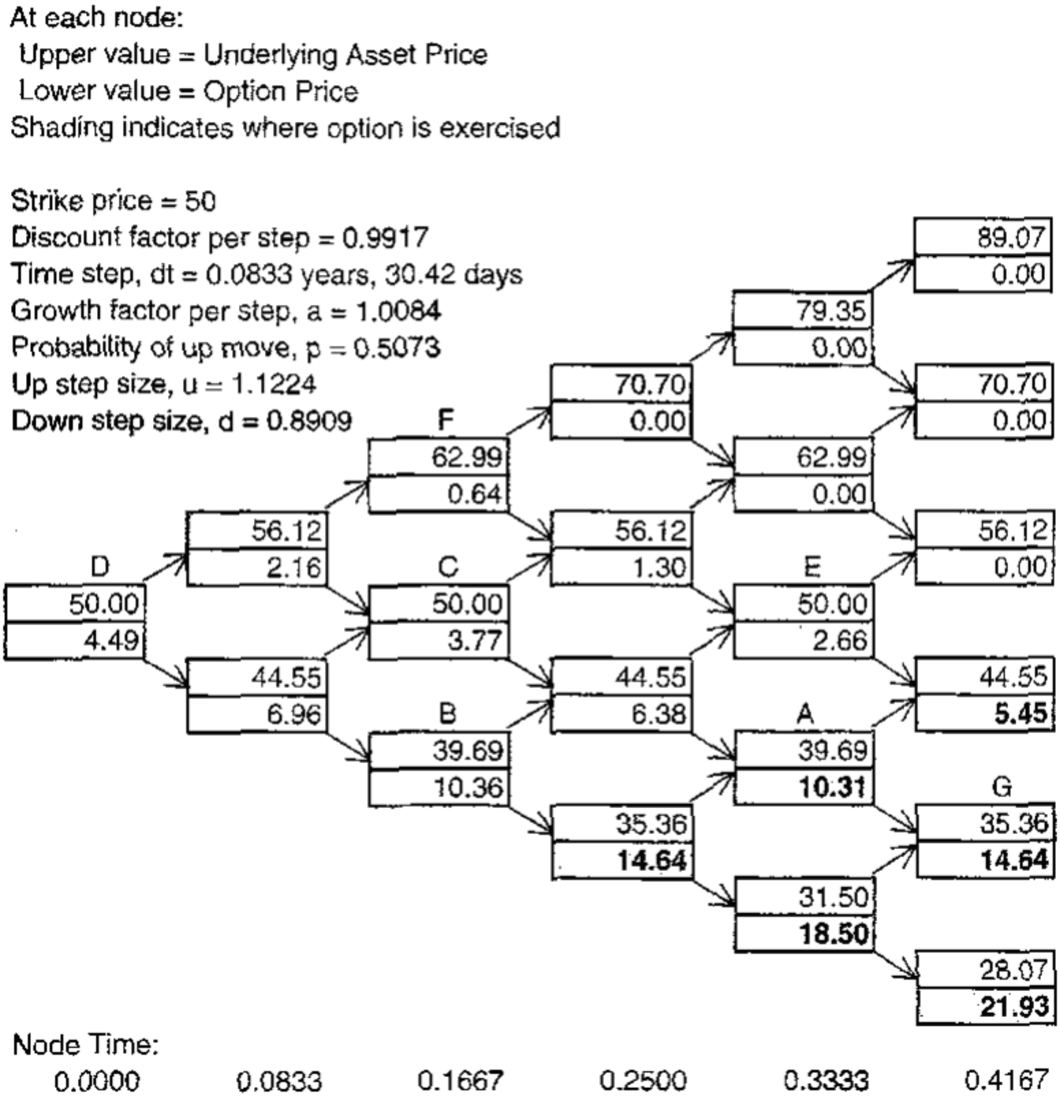
Παράδειγμα 1

Θεωρήστε μια 5-μηνη αμερικανική option πώλησης σε μια μετοχή που δεν πληρώνει μερίσματα όταν η τιμή της μετοχής είναι 50 ευρώ, η τιμή διάθεσης 50 ευρώ, το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο 10% ετησίως και η μεταβλητότητα 40% ετησίως. Με το συνηθισμένο μας συμβολισμό, αυτό σημαίνει ότι $S_0 = 50$, K = 50, r = 0,10, σ = 0,40, T = 0,4167 και q = 0. Υποθέστε ότι έχουμε διαιρέσει τη ζωή της option σε πέντε χρονικά διαστήματα μήκους 1 μήνα (= 0,0833 έτη) για τους σκοπούς της κατασκευής ενός διωνυμικού δέντρου. Τότε Δt = 0,0833 και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4) έως (7) έχουμε

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1{,}1224, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0{,}8909, \qquad \alpha = e^{(r-q)\sqrt{\Delta t}} = 1{,}0084$$

$$p = \frac{\alpha - d}{u - d} = 0{,}5073, \qquad 1 - p = 0{,}4927$$

Το επόμενο σχήμα δείχνει το διωνυμικό δέντρο που παράγει από το DerivaGem. Σε κάθε κόμβο υπάρχουν δύο αριθμοί. Ο πάνω αριθμός δείχνει την τιμή της μετοχής σε κάθε κόμβο, ενώ ο κάτω αριθμός δείχνει την αξία της option σε κάθε κόμβο. Η πιθανότητα για μια ανοδική κίνηση είναι πάντοτε 0,5073, ενώ η πιθανότητα για μια καθοδική κίνηση είναι πάντοτε 0,4927.



Σχήμα 4.3: *Διωνυμικό δέντρο από το DerivaGem για μια αμερικανική option πώλησης που δεν πληρώνει μερίδιο*

Η τιμή της μετοχής στο j-στο κόμβο (j = 0,1,….,i) τη χρονική στιγμή i·Δt (i = 0,1,….,5) υπολογίζεται ως $S_0 u^j d^{i-j}$. Για παράδειγμα, η τιμή της μετοχής στον κόμβο A (i = 4, j = 1) (δηλ. στο δεύτερο κόμβο στο τέλος του τέταρτου χρονικού βήματος) είναι 50 x 1,1224 x $0{,}8909^3$ = 39,69 ευρώ. Η τιμής της option στους τελευταίους κόμβους υπολογίζεται ως το max(K – S_T, 0). Για παράδειγμα, η τιμή της option στον κόμβο G είναι 50,00 – 35,36 = 14,64. Οι τιμές της option στους προτελευταίους κόμβους υπολογίζονται από τις τιμές της option στους τελευταίους κόμβους. Πρώτα, υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει διάθεση της option σε κανέναν κόμβο. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της option υπολογίζεται ως η παρούσα αξία της αναμενόμενης τιμής της option ένα χρονικό βήμα αργότερα. Για παράδειγμα, στον κόμβο E, η τιμή της option υπολογίζεται ως

$$(0{,}5073 \times 0 + 0{,}4927 \times 5{,}45)e^{-0{,}10 \times 0{,}0833} = 2{,}66$$

ενώ στον κόμβο A υπολογίζεται ως

$$(0{,}5073 \times 5{,}45 + 0{,}4927 \times 14{,}64)e^{-0{,}10 \times 0{,}0833} = 9{,}90$$

Στη συνέχεια ελέγχουμε για να δούμε αν η πρόωρη διάθεση προτιμάται από την αναμονή. Στον κόμβο E, η πρόωρη διάθεση θα δώσει μια μηδενική αξία για την option επειδή τόσο η τιμή της μετοχής όσο και η τιμή διάθεσης είναι 50 ευρώ. Σαφώς είναι προτιμότερο να περιμένουμε. Η σωστή τιμή για την option στον κόμβο E είναι επομένως 2,66 ευρώ. Στον κόμβο A, είναι μια διαφορετική ιστορία. Αν διατεθεί η option, αξίζει 50,00 – 39,69 = 10,31 ευρώ. Αυτό είναι μεγαλύτερο των 9,90 ευρώ. Αν φτάσουμε στον κόμβο A, τότε η option θα πρέπει να διατεθεί και η σωστή τιμή για την option στον κόμβο A είναι τα 10,31 ευρώ.

Οι τιμές της option σε προηγούμενους κόμβους υπολογίζονται με παρόμοιο τρόπο. Προσέξτε ότι δεν είναι πάντοτε η καλύτερη επιλογή να διατεθεί η option πρόωρα όταν μπορεί να αποφέρει περισσότερα χρήματα. Θεωρήστε τον κόμβο B. Αν διατεθεί η option, αξίζει 50,00 – 39,69 = 10,31 ευρώ. Ωστόσο, αν δε διατεθεί, αξίζει

$$(0{,}5073 \times 6{,}38 + 0{,}4927 \times 14{,}64)e^{-0{,}10 \times 0{,}0833} = 10{,}36 \text{ ευρώ}$$

Η option λοιπόν δε θα έπρεπε να διατεθεί επομένως σε αυτόν τον κόμβο και η σωστή τιμή της στον κόμβο αυτό είναι 10,36 ευρώ.

Εργαζόμενοι προς τα πίσω μέσω του δέντρου, η αξία της option στον αρχικό κόμβο είναι 4,49 ευρώ. Αυτή είναι η αριθμητική μας εκτίμηση για την τρέχουσα τιμή της option. Στην πράξη, θα χρησιμοποιούνταν μια μικρότερη τιμή του Δt και πολλοί περισσότεροι κόμβοι. Το DerivaGem δείχνει ότι με 30, 50, 100 και 500 χρονικά βήματα παίρνουμε τιμές για την option 4,263, 4,272, 4,278 και 4,283 αντίστοιχα.

Εκφράζοντας την προσέγγιση αλγεβρικά

Υποθέστε ότι η ζωή μιας αμερικανικής option πώλησης σε μια μετοχή που δεν πληρώνει μερίσματα χωρίζεται σε N υποδιαστήματα μήκους Δt. Θα αναφερόμαστε στο j-στο κόμβο σε μια χρονική στιγμή $i \cdot \Delta t$ ως (i, j) κόμβος, όπου $0 \leq i \leq N$ και $0 \leq j \leq i$. Ορίζουμε $f_{i,j}$ ως την αξία της option στον (i, j) κόμβο. Η τιμή της μετοχής στον (i, j) κόμβο είναι $S_0 u^j d^{i-j}$. Δεδομένου ότι η αξία μιας αμερικανικής option πώλησης στην ημερομηνία λήξης της είναι το $\max(K - S_T, 0)$, ξέρουμε ότι

$$f_{N,j} = \max(K - S_0 u^j d^{i-j}, 0), \quad j = 0,1,\ldots, N$$

Υπάρχει μια πιθανότητα p μετακίνησης από τον (i, j) κόμβο τη χρονική στιγμή $i \cdot \Delta t$ στον (i+1, j+1) κόμβο τη χρονική στιγμή $(i+1) \cdot \Delta t$ και μια πιθανότητα 1 – p μετακίνησης από τον (i, j) κόμβο τη χρονική στιγμή $i \cdot \Delta t$ στον (i+1, j) κόμβο τη χρονική στιγμή $(i+1) \cdot \Delta t$. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει πρόωρη διάθεση, η αξιολόγηση ουδετέρου κινδύνου δίνει

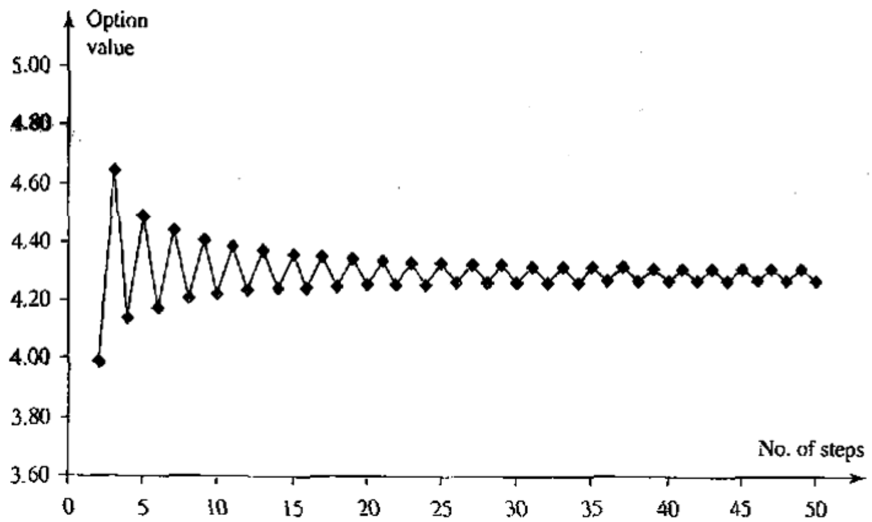
$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t}[p \cdot f_{i+1,j+1} + (1 - p) \cdot f_{i+1,j}]$$

για $0 \leq i \leq N-1$ και $0 \leq j \leq i$. Όταν ληφθεί υπόψη η πρόωρη διάθεση, αυτή η τιμή για το $f_{i,j}$ πρέπει να συγκριθεί με την εγγενή τιμή της option, έτσι ώστε

$$f_{i,j} = max\{K - S_0 u^j d^{i-j}, e^{-r\Delta t}[p \cdot f_{i+1,j+1} + (1-p) \cdot f_{i+1,j}]\}$$

Προσέξτε ότι, επειδή οι υπολογισμοί ξεκινούν τη χρονική στιγμή T και δουλεύουμε προς τα πίσω πάνω στο δέντρο, η τιμή τη χρονική στιγμή $i \cdot \Delta t$ συλλαμβάνει όχι μόνο τις επιπτώσεις των πιθανοτήτων της πρόωρης διάθεσης τη χρονική στιγμή $i \cdot \Delta t$, αλλά επίσης και τις επιπτώσεις της πρόωρης διάθεσης σε μεταγενέστερες περιόδους.

Στο όριο καθώς το Δt τείνει στο μηδέν, αποκτάται μια ακριβής τιμή για την αμερικανική option πώλησης. Στην πράξη, για N = 30 έχουμε συνήθως λογικά αποτελέσματα. Η επόμενη εικόνα δείχνει τη σύγκλιση της τιμής της option στο παράδειγμα με το οποίο ασχολούμαστε. Αυτή η εικόνα υπολογίσθηκε χρησιμοποιώντας της συναρτήσεις του λογισμικού Application Builder που παρέχεται μαζί με το λογισμικό DerivaGem.



Σχήμα 4.4: *Σύγκλιση της τιμής της option του παραδείγματος 1, υπολογισμένης από το DerivaGem*

Υπολογίζοντας το Δέλτα και άλλα ελληνικά γράμματα

Υπενθυμίζεται ότι το Δέλτα (Δ) σε μια option συμβολίζει το ρυθμό μεταβολής της τιμής της σε σχέση με τη βασική τιμή της μετοχής. Μπορεί να υπολογιστεί ως

$$\frac{\Delta f}{\Delta S}$$

όπου το ΔS είναι μια μικρή μεταβολή στην τιμή της μετοχής και το Δf είναι η αντίστοιχη μικρή μεταβολή στην τιμή της option. Τη χρονική στιγμή Δt, έχουμε μια εκτίμηση $f_{1,1}$ για την τιμή της option όταν η τιμή της μετοχής είναι $S_0 \cdot u$ και μια εκτίμηση $f_{1,0}$ για την τιμή της option όταν η τιμή της μετοχής είναι $S_0 \cdot d$. Με άλλα λόγια, όταν $\Delta S = S_0 \cdot u - S_0 \cdot d$ το $\Delta f = f_{1,1} - f_{1,0}$. Επομένως, μια εκτίμηση για το δέλτα σε χρόνο Δt είναι

$$\Delta = \frac{f_{1,1} - f_{1,0}}{S_0 u - S_0 d} \tag{8}$$

Για να καθορίσουμε το γάμμα (Γ), προσέξτε ότι έχουμε δύο υπολογισμούς για το Δ τη χρονική στιγμή $2 \cdot \Delta t$. Όταν $S = (S_0 \cdot u^2 - S_0)/2$ (στη μέση ανάμεσα στο δεύτερο και τρίτο κόμβο), το δέλτα είναι $(f_{2,2} - f_{2,1})/(S_0 \cdot u^2 - S_0)$. Όταν $S = (S_0 - S_0 \cdot d^2)/2$ (στη μέση ανάμεσα στον πρώτο και δεύτερο κόμβο), το δέλτα είναι $(f_{2,1} - f_{2,0})/(S_0 - S_0 \cdot d^2)$. Η διαφορά μεταξύ των τιμών S είναι h, όπου

$$h = 0{,}5 \cdot (S_0 \cdot u^2 - S_0 \cdot d^2)$$

Το γάμμα είναι η μεταβολή στο δέλτα, διαιρεμένη με το h:

$$\Gamma = \frac{[(f_{2,2} - f_{2,1})/(S_0 u^2 - S_0)] - [(f_{2,1} - f_{2,0})/(S_0 - S_0 d^2)]}{h} \tag{9}$$

Αυτές οι διαδικασίες παρέχουν εκτιμήσεις για το δέλτα τη χρονική στιγμή Δt και το γάμμα τη χρονική στιγμή $2 \cdot \Delta t$. Στην πράξη, αυτές συνήθως χρησιμοποιούνται επίσης και ως εκτιμήσεις για το δέλτα και το γάμμα τη χρονική στιγμή μηδέν.

Μια επιπλέον παράμετρος αντιστάθμισης που μπορεί να αποκτηθεί άμεσα από το δέντρο είναι το θήτα (Θ). Αυτό είναι ο ρυθμός μεταβολής της τιμής της option με χρόνο όταν όλα τα υπόλοιπα διατηρούνται σταθερά. Αν το δέντρο ξεκινά τη χρονική στιγμή μηδέν, μια εκτίμηση του θήτα είναι

$$\Theta = \frac{f_{2,1} - f_{0,0}}{2\Delta t} \tag{10}$$

Το ωμέγα μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας μια μικρή μεταβολή $\Delta\sigma$ στη μεταβλητότητα και κατασκευάζοντας ένα νέο δέντρο ώστε να αποκτήσουμε μια νέα τιμή για την option. (Το χρονικό βήμα Δt θα πρέπει να διατηρηθεί το ίδιο.) Η εκτίμηση για το ωμέγα είναι

$$\Omega = \frac{f^* - f}{\Delta\sigma}$$

όπου τα f και f^* είναι οι εκτιμήσεις της τιμής της option από το αρχικό και το νέο δέντρο αντίστοιχα. Το ρο (P) μπορεί να υπολογιστεί παρομοίως.

Παράδειγμα 2

Θεωρήστε και πάλι το Παράδειγμα 1. Από το σχήμα 19.3 βρίσκουμε ότι $f_{1,0}$ = 6,96 και $f_{1,1}$ = 2,16. Η εξίσωση (8) δίνει μια εκτίμηση για το δέλτα

$$\frac{2{,}16-6{,}96}{56{,}12-44{,}55}=-0{,}41$$

Από την εξίσωση (9), μπορεί να αποκτηθεί μια εκτίμηση για το γάμμα της μετοχής από τις τιμές στους κόμβους B, C και F

$$\frac{[(0{,}64-3{,}77)/(62{,}99-50{,}00)]-[(3{,}77-10{,}36)/(50{,}00-39{,}69)]}{11{,}65}=0{,}03$$

Από την εξίσωση (10), μπορεί να γίνει μια εκτίμηση για το θήτα της μετοχής από τις τιμές των κόμβων D και C

$$\frac{3{,}77-4{,}49}{0{,}1667}=-4{,}3 \text{ ανά χρόνο}$$

ή – 0,012 ανά ημερολογιακή ημέρα. Αυτές είναι μόνο πρόχειρες εκτιμήσεις. Γίνονται σταδιακά καλύτερες όταν ο αριθμός των χρονικών βημάτων στο δέντρο αυξάνεται. Χρησιμοποιώντας 50 βήματα, το DerivaGem παρέχει εκτιμήσεις της τάξης του – 0,415, 0,034 και – 0,0117 για το δέλτα, το γάμμα και το θήτα αντίστοιχα. Κάνοντας μικρές μεταβολές στις παραμέτρους και επαναϋπολογίζοντας τις τιμές, το ωμέγα και το ρο υπολογίζονται σε 0,123 και – 0,072 αντίστοιχα.

4.2 Χρήση του διωνυμικού δέντρου για options επί δεικτών, ισοτιμιών και futures συμβολαίων

Οι δείκτες μετοχών, ισοτιμιών και futures συμβολαίων μπορούν, για τους σκοπούς της αποτίμησης της option, να θεωρηθούν ως κεφάλαιο που παρέχει γνωστές αποδόσεις. Για ένα δείκτη μετοχής, η σχετική απόδοση είναι η μερισματική απόδοση για το χαρτοφυλάκιο μετοχών στις οποίες βασίζεται ο δείκτης. Στην περίπτωση της ισοτιμίας είναι το συναλλαγματικό μηδενικού κινδύνου επιτόκιο. Στην περίπτωση των futures συμβολαίων είναι το εγχώριο μηδενικού κινδύνου επιτόκιο. Η προσέγγιση με διωνυμικό δέντρο μπορεί επομένως να χρησιμοποιηθεί για να αξιολογήσει τις options με βάση τους δείκτες μετοχών, ισοτιμίες και futures συμβόλαια υπό την προϋπόθεση ότι το q στην εξίσωση (7) ερμηνεύεται σωστά.

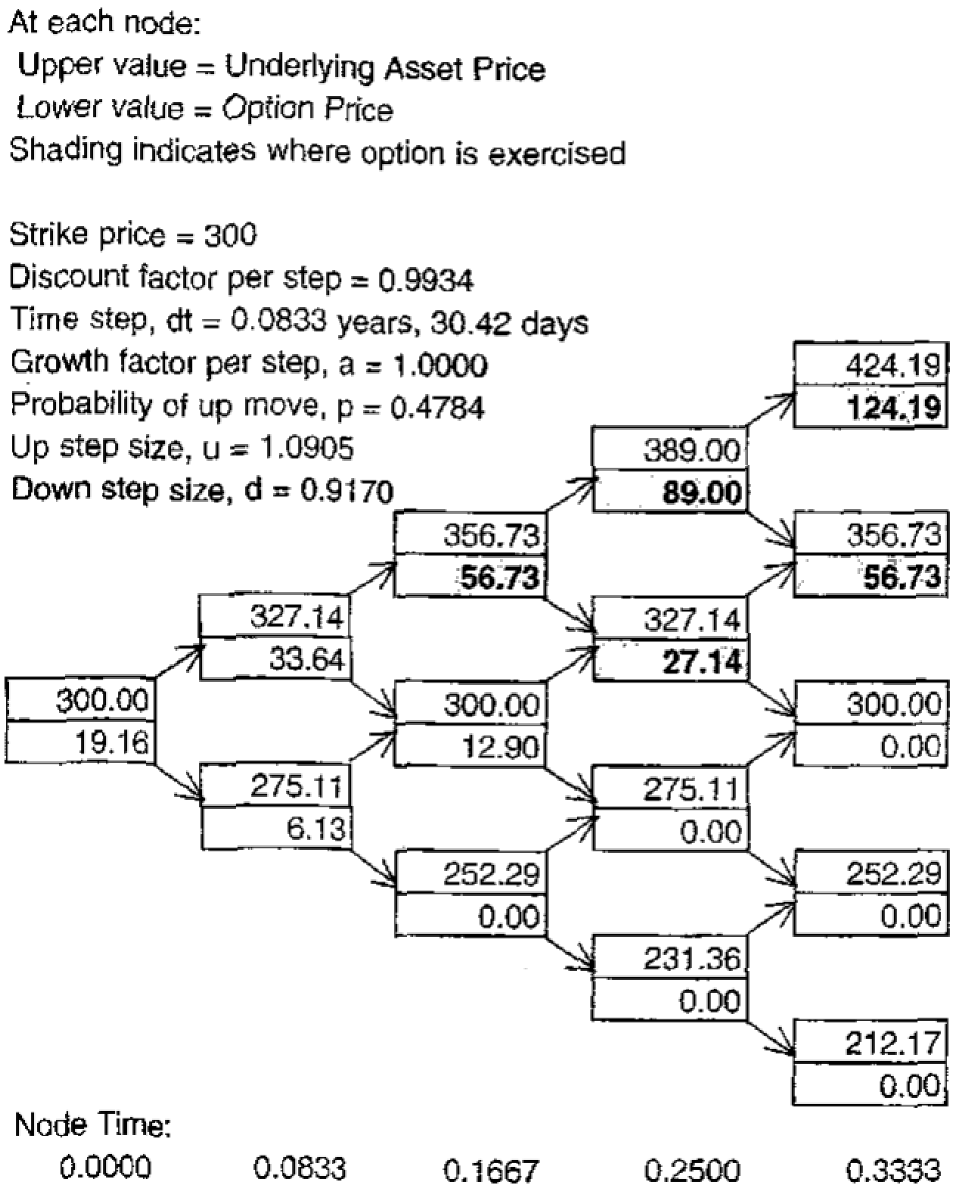
Παράδειγμα 3

Θεωρήστε μια 4-μηνη αμερικανική option αγοράς σε δείκτη futures όπου η τρέχουσα τιμή του futures είναι 300, η τιμή διάθεσης 300, το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο 8% ετησίως, και η μεταβλητότητα του δείκτη 30% ετησίως. Η ζωή της option χωρίζεται σε 4 περιόδους μήκους του 1 μήνα για τους σκοπούς της κατασκευής του δέντρου. Σε αυτήν την περίπτωση, F_0 = 300, K = 300, r = 0,08, σ = 0,3, T = 0,03333 και Δt = 0,0833. Επειδή ένα συμβόλαιο futures είναι ανάλογο μιας μετοχής που καταβάλει μερίσματα σε επιτόκιο r, το q θα έπρεπε να είναι ίσο με το r στην εξίσωση (7). Αυτό δίνει α = 1. Οι άλλες παράμετροι που είναι απαραίτητες για να κατασκευαστεί το δέντρο είναι

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1{,}0905, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0{,}9170$$

$$p = \frac{\alpha - d}{u - d} = 0{,}4784, \qquad 1 - p = 0{,}5216$$

Το δέντρο, όπως παράγεται από το DerivaGem φαίνεται στο σχήμα 19.5. (Ο πάνω αριθμός είναι η τιμή του futures, ενώ ο κάτω αριθμός είναι η τιμή της option.) Η εκτιμώμενη αξία της option είναι 19,16. Περισσότερη ακρίβεια αποκτάται χρησιμοποιώντας περισσότερα βήματα. Με 50 χρονικά βήματα, το DerivaGem δίνει μια τιμή 20,18, ενώ με 100 χρονικά βήματα δίνει 20,22.



Σχήμα 4.5: *Διωνυμικό δέντρο που παρήχθη από τη DerivaGem για μια αμερικανική option αγοράς (παράδειγμα 3)*

Παράδειγμα 4

Θεωρήστε μια αμερικανική option πώλησης 1 χρόνου επί της βρετανικής λίρας. Η τρέχουσα συναλλαγματική ισοτιμία είναι 1,6100, η τιμή διάθεσης 1,6000, το αμερικανικό μηδενικού κινδύνου επιτόκιο είναι 8% ετησίως, το μηδενικού κινδύνου μηδενικό επιτόκιο για τη στερλίνα είναι 9% ετησίως και η μεταβλητότητα της συναλλαγματικής αξίας της στερλίνας είναι 12% ετησίως. Σε αυτήν την περίπτωση, S_0 = 1,61, K = 1,60, r = 0,08, r_f = 0,09, σ = 0,12 και T = 1,0. Η διάρκεια της option χωρίζεται σε 4 τριμηνιαίες περιόδους για τους σκοπούς της κατασκευής του δέντρου και έτσι $\Delta t = 0,25$. Σε αυτήν την περίπτωση, $q = r_f$ και η εξίσωση (7) δίνει

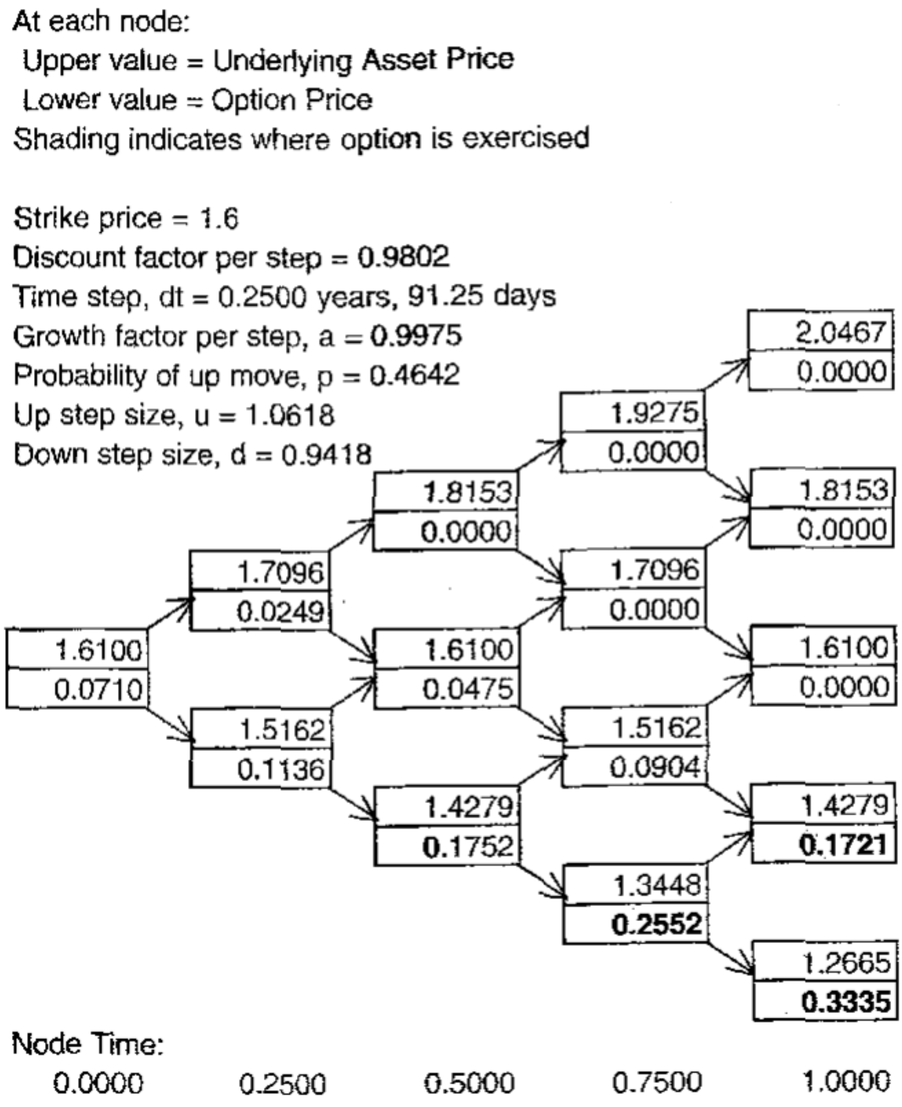
$$\alpha = e^{(0,08-0,09)x0,25} = 0,9975$$

Οι άλλες παράμετροι που είναι απαραίτητες για να κατασκευαστεί το δέντρο είναι

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1,0618, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0,9418$$

$$p = \frac{\alpha - d}{u - d} = 0,4642, \qquad 1 - p = 0,5358$$

Το δέντρο, όπως παράγεται από το DerivaGem φαίνεται στο σχήμα 19.6. (Ο πάνω αριθμός είναι η συναλλαγματική ισοτιμία, ενώ ο κάτω αριθμός είναι η τιμή της option.) Η εκτιμώμενη αξία της option είναι 0,0710 ευρώ. Περισσότερη ακρίβεια αποκτάται χρησιμοποιώντας περισσότερα βήματα. Με 50 χρονικά βήματα, το DerivaGem δίνει μια τιμή για την option 0,0738, ενώ με 100 χρονικά βήματα δίνει επίσης 0,0738.



Σχήμα 4.6: *Διωνυμικό δέντρο που παρήχθη από τη DerivaGem για μια αμερικανική option πώλησης (παράδειγμα 3)*

4.3 Διωνυμικό μοντέλο για μια μετοχή που πληρώνει μερίσματα

Θα προχωρήσουμε τώρα στο πιο δύσκολο θέμα για το πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί το διωνυμικό μοντέλο για μια μετοχή που πληρώνει μερίσματα. Όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο όρος *μέρισμα* θα χρησιμοποιηθεί για τους σκοπούς της συζήτησής μας για να δηλώσουμε τη μείωση στην τιμή της μετοχής κατά την ημέρα άνευ μερίσματος, ως αποτέλεσμα του μερίσματος.

Όταν είναι γνωστή η μερισματική απόδοση

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα ενιαίο μέρισμα και η μερισματική απόδοση (δηλ. το μέρισμα ως ποσοστό της τιμής της μετοχής) είναι γνωστή, το δέντρο παίρνει τη μορφή που φαίνεται στο επόμενο σχήμα και μπορεί να αναλυθεί με παρόμοιο τρόπο με το δέντρο που μόλις περιγράψαμε πιο πάνω. Αν η χρονική στιγμή i·Δt είναι προτού η μετοχή γίνει χωρίς μέρισμα, οι κόμβοι στο δέντρο αντιστοιχούν στις τιμές μετοχής

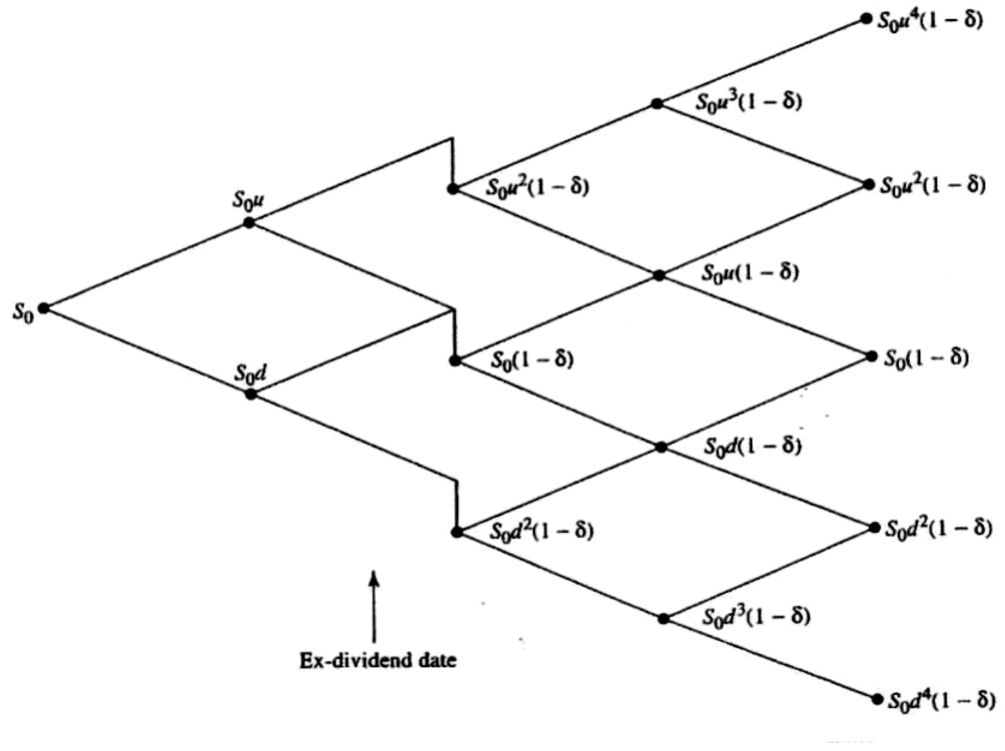
$$S_0 u^j d^{i-j}, \quad j = 0,1,\ldots\ldots\ldots.i$$

όπου το u και το d ορίζονται από τις εξισώσεις (5) και (6). Αν η χρονική στιγμή i·Δt είναι αφότου η μετοχή γίνει χωρίς μέρισμα, οι κόμβοι στο δέντρο αντιστοιχούν στις τιμές μετοχής

$$S_0(1-\delta)u^j d^{i-j}, \quad j = 0,1,\ldots\ldots\ldots.i$$

όπου το δ είναι η μερισματική απόδοση. Αρκετές γνωστές μερισματικές αποδόσεις κατά τη διάρκεια ζωής μιας option μπορούν να αντιμετωπιστούν με τον ίδιο τρόπο. Αν είναι δ_i η συνολική μερισματική απόδοση που συνδέεται με όλες τις ημερομηνίες άνευ μερίσματος μεταξύ της χρονικής στιγμής μηδέν και της χρονικής στιγμής i·Δt, οι κόμβοι κατά τη χρονική στιγμή i·Δt αντιστοιχούν σε τιμές μετοχών

$$S_0(1-\delta_i)u^j d^{i-j},$$



Σχήμα 4.7: *Δέντρο όταν η μετοχή πληρώνει ένα γνωστό μερίδιο απόδοσης κάποια συγκεκριμένη στιγμή*

Όταν είναι γνωστό το μέρισμα σε ευρώ

Σε ορισμένες περιπτώσεις, η πιο ρεαλιστική υπόθεση είναι ότι είναι γνωστό εκ των προτέρων το ποσό σε ευρώ για ένα μέρισμα παρά η μερισματική απόδοση. Αν η μεταβλητότητα σ της μετοχής υποτίθεται πως είναι σταθερή, το δέντρο παίρνει τότε τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 19.8. Δεν ανασυνδυάζεται, πράγμα που σημαίνει ότι ο αριθμός των κόμβων που έχουν υπολογισθεί, ειδικά αν υπάρχουν αρκετά μερίσματα, μπορεί να γίνει πολύ μεγάλος. Υποθέστε ότι υπάρχει μόνο ένα μέρισμα, ότι η ημερομηνία άνευ μερίσματος τ βρίσκεται μεταξύ των χρονικών στιγμών $k \cdot \Delta t$ και $(k + 1) \cdot \Delta t$ και ότι το ποσό ευρώ από το μέρισμα είναι D. Όταν είναι $i \leq k$, οι κόμβοι στο δέντρο κατά τη χρονική στιγμή $i \cdot \Delta t$ αντιστοιχούν σε τιμές μετοχής

$$S_0 u^j d^{i-j}, \quad j = 0,1,\ldots\ldots\ldots i$$

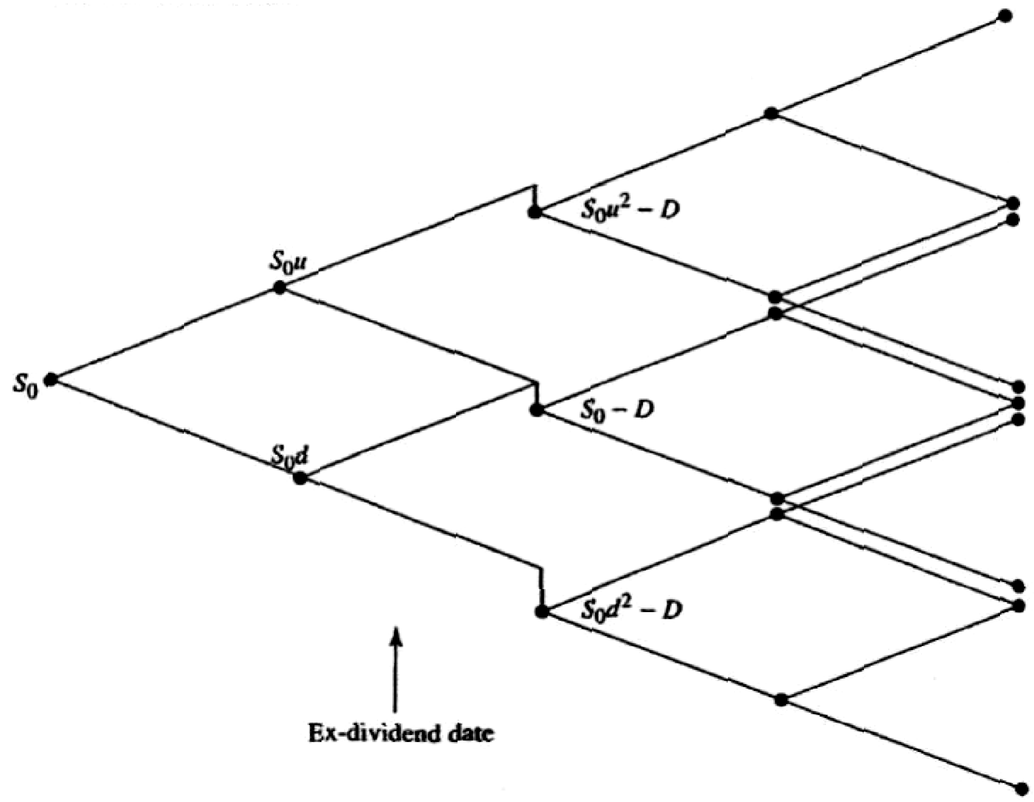
όπως και πριν. Όταν $i = k + 1$, οι κόμβοι στο δέντρο αντιστοιχούν σε τιμές μετοχής

$$S_0 u^j d^{i-j} - D, \quad j = 0,1,\ldots\ldots\ldots i$$

Όταν είναι $i = k + 2$, οι κόμβοι στο δέντρο αντιστοιχούν σε τιμές μετοχής

$$(S_0 u^j d^{i-1-j} - D)u, \quad \textit{και } (S_0 u^j d^{i-j} - D)d$$

για $j = 0,1,\ldots\ldots\ldots i - 1$ και έτσι υπάρχουν $2 \cdot i$ και όχι $i + 1$ κόμβοι. Όταν $i = k + m$, υπάρχουν $m(k+2)$ παρά $k+m+1$ κόμβοι.



Σχήμα 4.8: *Δέντρο όταν το ποσό δολαρίων του μερίσματος υποτίθεται πως είναι γνωστό και η μεταβλητότητα σταθερή*

Το πρόβλημα μπορεί να απλοποιηθεί με την υπόθεση, όπως και με την ανάλυση των ευρωπαϊκών options στην ενότητα 12 του προηγούμενου κεφαλαίου, ότι η τιμή της μετοχής έχει δύο στοιχεία: ένα τμήμα που είναι αβέβαιο και ένα τμήμα που είναι η παρούσα αξία όλων των μελλοντικών μερισμάτων κατά τη διάρκεια της ζωής της option. Υποθέστε, όπως και πριν, ότι υπάρχει μόνο μια ημερομηνία χωρίς μέρισμα τ κατά τη διάρκεια της ζωής της option και ότι $k \cdot \Delta t \leq \tau \leq (k + 1) \cdot \Delta t$. Η αξία του αβέβαιου στοιχείου S^* σε μια χρονική στιγμή $i \cdot \Delta t$ δίνεται από τη σχέση

$$S^* = S \text{ όταν } i \cdot \Delta t > \tau$$

και

$$S^* = S - De^{-r(\tau - i\Delta t)} \text{ όταν } i \cdot \Delta t \leq \tau$$

όπου το D είναι το μέρισμα. Ορίζουμε σ^* τη μεταβλητότητα του S^* και υποθέτουμε ότι η σ^* είναι σταθερή. Οι παράμετροι p, u και d μπορούν να υπολογιστούν από τις εξισώσεις (4), (5), (6) και (7) με το σ να αντικαθίσταται από το σ^* και μπορεί να κατασκευαστεί ένα δέντρο με το συνήθη τρόπο για το μοντέλο S^*. Προσθέτοντας στην τιμή της μετοχής σε κάθε κόμβο την παρούσα αξία των μελλοντικών μερισμάτων (αν υπάρχουν), το δέντρο μπορεί να μετατραπεί σε ένα άλλο δέντρο που μοντελοποιεί το S. Υποθέστε ότι S_0^* είναι η τιμή του S^* τη χρονική στιγμή μηδέν. Τη χρονική στιγμή $i \cdot \Delta t$ οι κόμβοι σε αυτό το δέντρο αντιστοιχούν στις τιμές μετοχής

$$S_0^* u^j d^{i-j} + De^{-r(\tau - i\Delta t)}, j = 0,1,....,i$$

όταν $i \cdot \Delta t < \tau$ και

$$S_0^* u^j d^{i-j}, j = 0,1,...,i$$

όταν $i \cdot \Delta t > \tau$. Αυτή η προσέγγιση, η οποία έχει το πλεονέκτημα να είναι σύμφωνη με την προσέγγιση για τις ευρωπαϊκές options της ενότητας 12 του προηγούμενου κεφαλαίου, καταφέρνει να επιτύχει μια κατάσταση όπου το δέντρο ανασυνδυάζεται και έτσι υπάρχουν i + 1 κόμβοι τη χρονική στιγμή $i \cdot \Delta t$. Μπορεί να γενικευθεί με έναν ευθύ τρόπο ώστε να αντιμετωπίσει την κατάσταση όπου υπάρχουν πολλά μερίσματα.

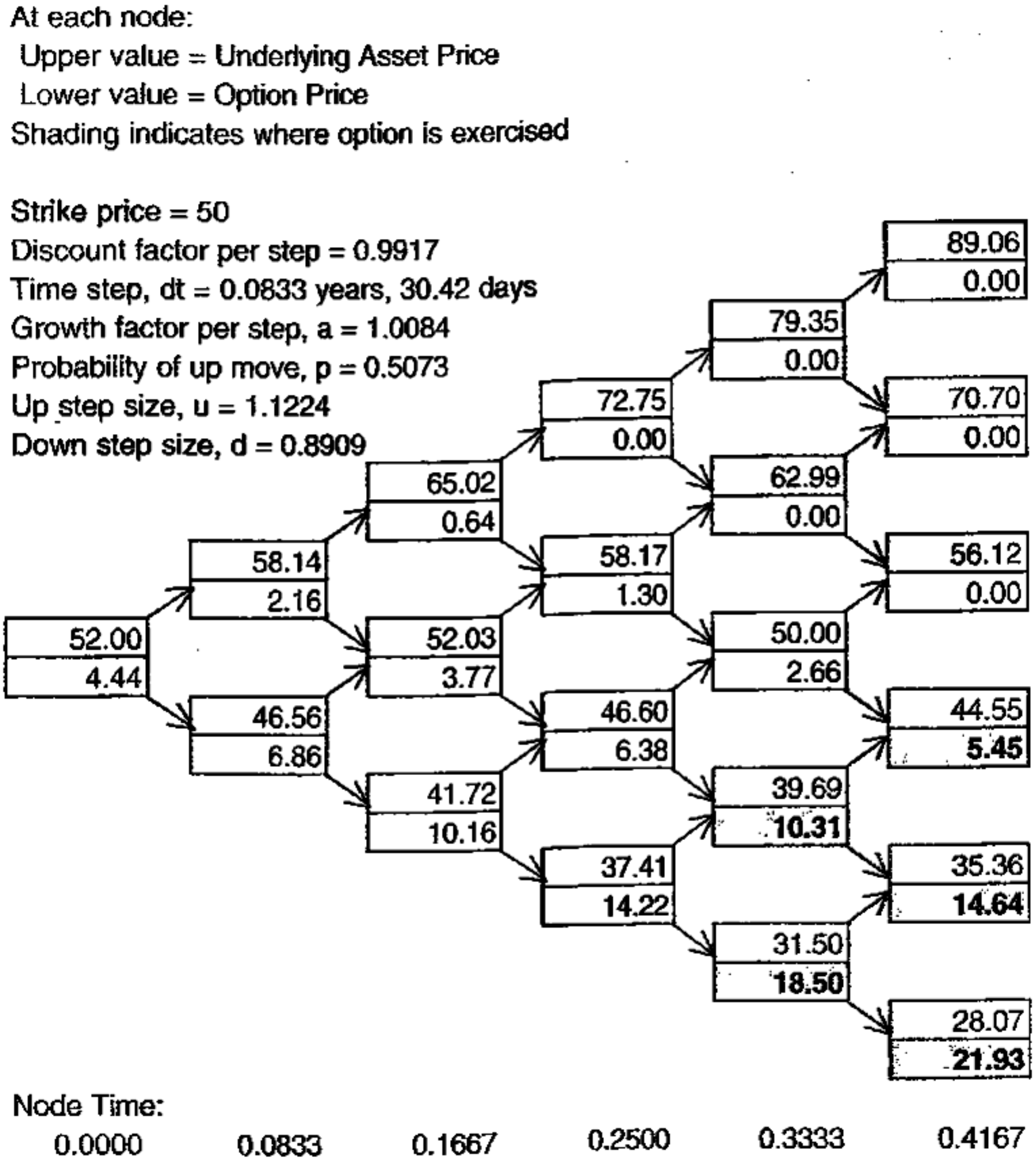
Παράδειγμα 5

Θεωρήστε μια 5-μηνη αμερικανική option πώλησης για μια μετοχή που αναμένεται πως θα καταβάλλει ένα ενιαίο μέρισμα 2,06 ευρώ κατά τη διάρκεια της ζωής της option. Η αρχική τιμή της μετοχή είναι 52 ευρώ, η τιμή διάθεσης 50 ευρώ, το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο 10% ετησίως, η μεταβλητότητα 40% ετησίως και η ημερομηνία άνευ μερισμάτων είναι σε 3,5 μήνες.

Πρώτα κατασκευάζουμε το δέντρο για να μοντελοποιήσουμε το S^*, την τιμή της μετοχής μείον την παρούσα αξία των μελλοντικών μερισμάτων κατά τη διάρκεια της ζωής της option. Τη χρονική στιγμή μηδέν η παρούσα αξία του μερίσματος είναι

$$2{,}06 \cdot e^{-0{,}2917 x 0{,}1} = 2{,}00$$

Η αρχική τιμή του S^* είναι επομένως 50.00. Αν υποθέσουμε ότι η μεταβλητότητα 40% ανά έτος αναφέρεται στο S^*, τότε το σχήμα 4.3 παρέχει ένα διωνυμικό δέντρο για το S^*. (Αυτό συμβαίνει γιατί το S^* έχει την ίδια αρχική τιμή και μεταβλητότητα όπως η τιμή της μετοχή στο σχήμα 4.3 που βασιστήκαμε.) Η πρόσθεση της παρούσης αξίας του μερίσματος σε κάθε κόμβο οδηγεί στο σχήμα 19.9, το οποίο είναι ένα διωνυμικό μοντέλο για το S. Οι πιθανότητες σε κάθε κόμβο είναι – όπως και στο σχήμα 4.3 – 0,5073 για μια ανοδική κίνηση και 0,4927 για μια καθοδική κίνηση. Εργαζόμενοι προς τα πίσω μέσω του δέντρου κατά το συνήθη τρόπο βρίσκουμε την τιμή της option ως 4,44 ευρώ. (Χρησιμοποιώντας 50 χρονικά βήματα, το DerivaGem δίνει μια τιμή για την option 4,202, ενώ χρησιμοποιώντας 100 χρονικά βήματα δίνει 4,212.)



Σχήμα 4.9: *Δέντρο που παράγεται από τη DerivaGem για το παράδειγμα 5*

Όταν η option διαρκεί αρκετά (π.χ. 3 ή περισσότερα χρόνια) είναι συνήθως πιο κατάλληλο να σκεφτούμε μια γνωστή μερισματική απόδοση παρά μια γνωστή διανομή μερίσματος επειδή το τελευταίο δε μπορεί λογικά να υποτεθεί πως είναι το ίδιο για όλες τις τιμές της μετοχής που μπορεί να υπάρξουν στο μέλλον. Συχνά και για ευκολία κάνουμε την παραδοχή ότι η μερισματική απόδοση καταβάλλεται συνεχώς. Η αποτίμηση τότε μιας option για μια μετοχή που πληρώνει μέρισμα είναι όμοια με την αποτίμηση μιας option για ένα χρηματιστηριακό δείκτη.

Τεχνική ελέγχου μεταβλητής

Μια τεχνική γνωστή ως τεχνική ελέγχου μεταβλητής μπορεί να βελτιώσει την ακρίβεια των τιμών μιας αμερικανικής option. Αυτή προϋποθέτει την αξιοποίηση του ίδιου δέντρου για τον υπολογισμό τόσο της τιμής της αμερικανικής option f_A, όσο και την τιμή της αντίστοιχης ευρωπαϊκής option f_E. Επίσης υπολογίζουμε της τιμή της ευρωπαϊκής option f_{BS} από τον τύπο των Black και Scholes. Το σφάλμα που δίνεται από το δέντρο για την τιμή της ευρωπαϊκής option θεωρείται ίσο με αυτό που δίνεται από το δέντρο για την τιμή της αμερικανικής option. Αυτό δίνει μια εκτίμηση για την τιμή της αμερικανικής option ως

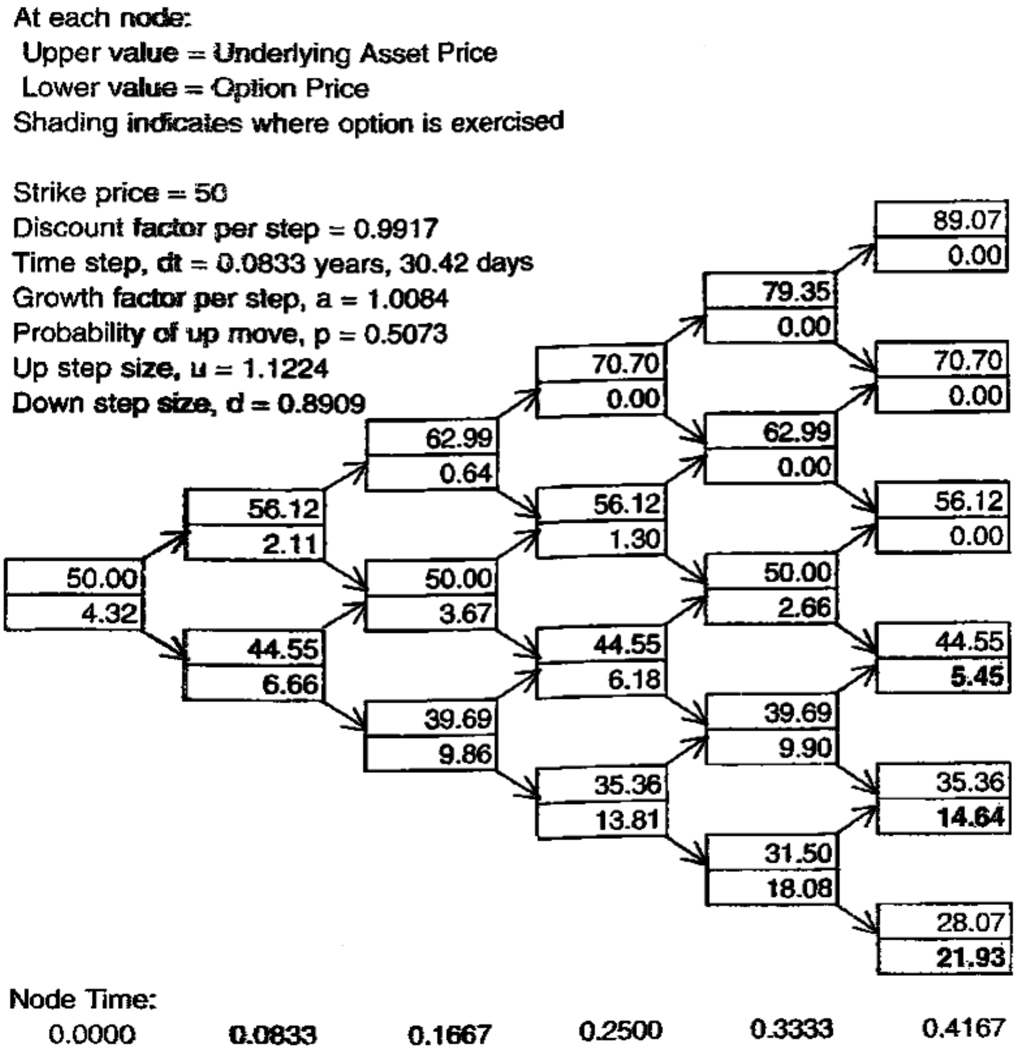
$$f_A + f_{BS} - f_E$$

Για να φανεί αυτή η προσέγγιση, το σχήμα 19.10 αποτιμά την option στο σχήμα 19.3 με την παραδοχή ότι πρόκειται για ευρωπαϊκή option. Η τιμή που προκύπτει είναι 4,32 ευρώ. Από τον τύπο των Black και Scholes, η πραγματική ευρωπαϊκή τιμή της option είναι 4,08 ευρώ. Η εκτίμηση για την τιμή της αμερικανικής option στο σχήμα 19.3 είναι 4,49 ευρώ. Η εκτίμηση ελέγχου μεταβλητής για την τιμή της αμερικανικής option είναι επομένως

$$4{,}49 + 4{,}08 - 4{,}32 = 4{,}25$$

Μια καλή εκτίμηση για την αμερικανική τιμή, υπολογισμένη με τη χρήση 100 χρονικών βημάτων, είναι 4,278. Η προσέγγιση για τον έλεγχο της μεταβλητής επομένως προκαλεί μια σημαντική βελτίωση στην εκτίμηση της τάξης του 4,49 στο βασικό δέντρο σε αυτήν την περίπτωση.

Η τεχνική ελέγχου μεταβλητής ουσιαστικά περιλαμβάνει τη χρησιμοποίηση του δέντρου για τον υπολογισμό της διαφοράς μεταξύ της ευρωπαϊκής και της αμερικανικής τιμής και όχι της ίδιας της αμερικανικής τιμής. Δίνουμε μια επιπλέον εφαρμογή για την τεχνική ελέγχου μεταβλητής όταν θα συζητήσουμε την προσομοίωση Monte Carlo αργότερα σε αυτό το κεφάλαιο.



Σχήμα 4.10: *Δέντρο που παράγεται από τη DerivaGem για την ευρωπαϊκή έκδοση της option στο σχήμα 4.3. Σε κάθε κόμβο, ο πάνω αριθμός είναι η τιμή της μετοχής και ο κάτω αριθμός είναι η τιμής της option.*

4.4 Εναλλακτικές διαδικασίες για την κατασκευή των δέντρων

Η προσέγγιση των Cox, Ross και Rubinstein δεν είναι ο μόνος τρόπος για την κατασκευή διωνυμικού δέντρου. Αντί να εισάγουμε την παραδοχή ότι u = 1/d στις εξισώσεις (1) και (2), μπορούμε να θέσουμε p = 0,5. Μια λύση στις εξισώσεις, όταν αγνοούνται οι όροι μεγαλύτερης τάξης από το Δt, είναι

$$u = e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Αυτό επιτρέπει να κατασκευαστούν δέντρα για option με p = 0,5 για μετοχές, δείκτες, συνάλλαγμα και futures.

Αυτή η εναλλακτική διαδικασία κατασκευής δέντρου έχει ένα πλεονέκτημα σε σχέση με την προσέγγιση των Cox, Ross και Rubinstein ότι οι πιθανότητες είναι πάντοτε 0,5 ανεξάρτητα από την τιμή του σ ή του αριθμού των χρονικών βημάτων. Το μειονέκτημά της είναι ότι δεν είναι τόσο απλή στον υπολογισμό των δέλτα, γάμμα και ρο από το δέντρο επειδή το δέντρο δεν επικεντρώνεται πλέον στην αρχική τιμή της μετοχής.

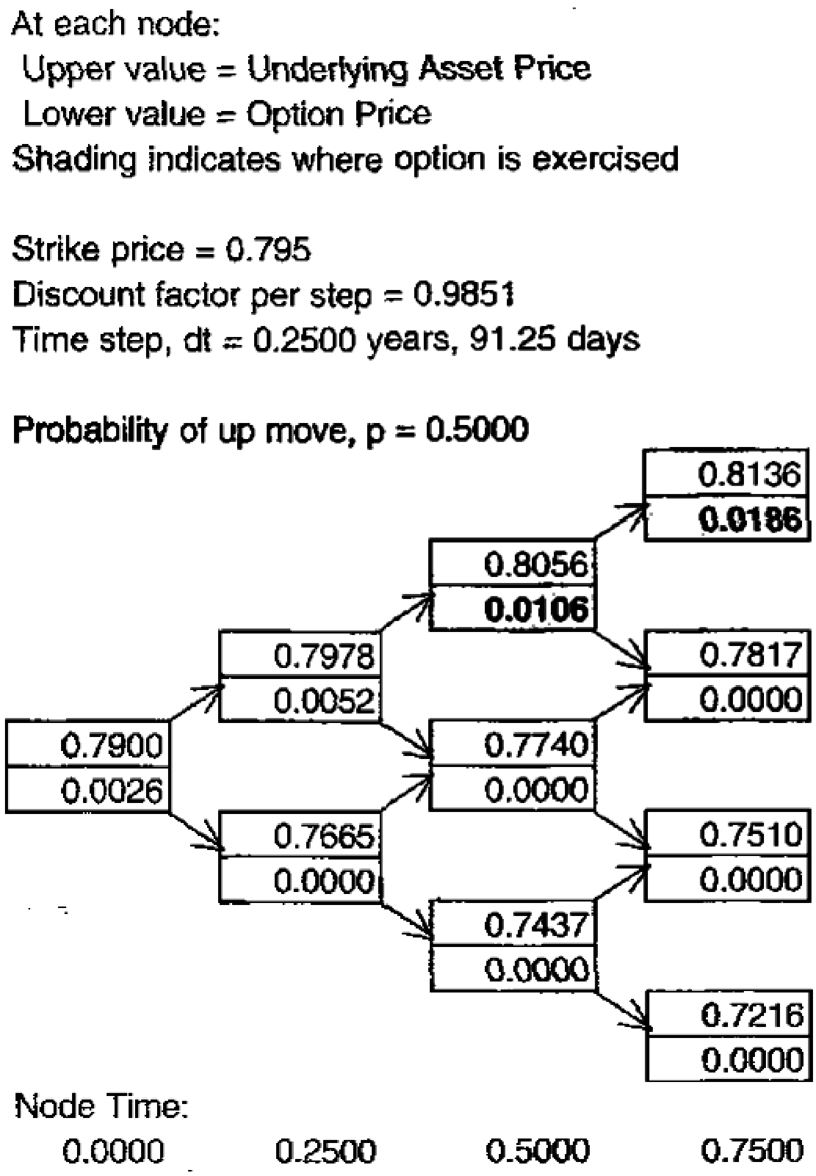
Παράδειγμα 6

Θεωρήστε μια 9-μηνη αμερικανική option αγοράς σε καναδικό ευρώ. Η τρέχουσα συναλλαγματική ισοτιμία είναι 0,7900, η τιμή διάθεσης είναι 0,7950, το αμερικανικό μηδενικού κινδύνου επιτόκιο είναι 6% ετησίως, το καναδικό μηδενικού κινδύνου επιτόκιο είναι 10% ετησίως και η μεταβλητότητα της συναλλαγματικής ισοτιμίας είναι 4% ετησίως. Σε αυτήν την περίπτωση, S_0 = 0,79, K = 0,795, r = 0,06, r_f = 0,10, σ = 0,04 και T = 0,75. Χωρίζουμε τη διάρκεια ζωής της option σε 3-μηνιαίες περιόδους για τους σκοπούς της κατασκευής του δέντρου και έτσι Δt = 0,25. Θέτουμε τις πιθανότητες σε κάθε κλάδο 0,5 και

$$u = e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{(0{,}06-0{,}10-0{,}0016/2)0{,}25+0{,}04\sqrt{0{,}25}} = 1{,}0098$$

$$d = e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{(0{,}06-0{,}10-0{,}0016/2)0{,}25-0{,}04\sqrt{0{,}25}} = 0{,}9703$$

Το δέντρο για τη συναλλαγματική ισοτιμία παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα. Το δέντρο δίνει την τιμή για την option ως 0,0026 ευρώ.



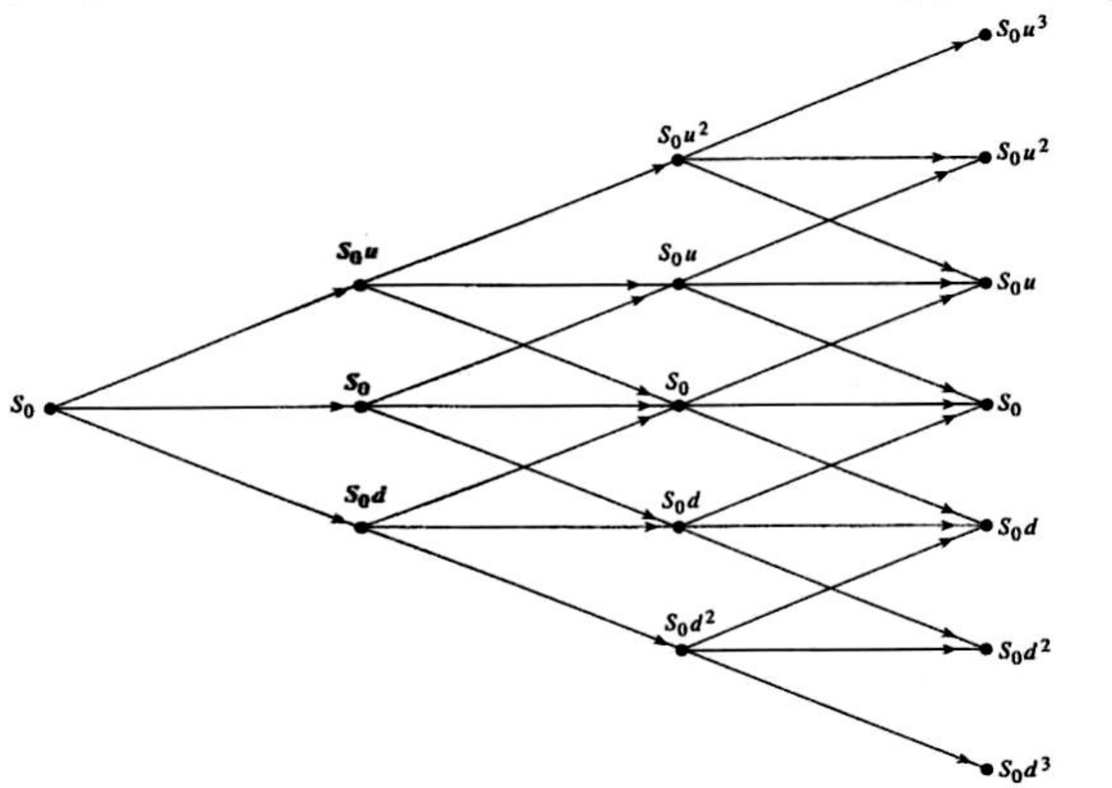
Σχήμα 4.11: *Διωνυμικό δέντρο για αμερικανική option αγοράς σε καναδικό ευρώ. Σε κάθε κόμβο, ο πάνω αριθμός είναι η τρέχουσα συναλλαγματική ισοτιμία και ο κάτω αριθμός είναι η τιμή της option. Όλες οι πιθανότητες είναι 0,5.*

Τριώνυμα δέντρα

Τα τριώνυμα δέντρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν μια εναλλακτική επιλογή για τα διωνυμικά δέντρα. Η γενική μορφή του δέντρου παρουσιάζεται στο σχήμα 4.12. Υποθέστε ότι είναι p_u, p_m και p_d οι πιθανότητες για την πάνω (up), μέση (middle) και κάτω (down) κίνηση σε κάθε κόμβο και ότι το Δt είναι το μήκος του χρονικού βήματος. Για ένα κεφάλαιο που καταβάλλει μερίσματα σε επιτόκιο q, οι παραμετρικές αξίες που ταιριάζουν με τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των μεταβολών των τιμών όταν αγνοούνται οι όροι υψηλότερης τάξης από το Δt είναι

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}, \qquad d = \frac{1}{u}$$

$$p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\cdot\sigma^2}}\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{6}, \qquad p_m = \frac{2}{3}, \qquad p_u = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\cdot\sigma^2}}\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{6}$$



Σχήμα 4.12: *Τριώνυμο δέντρο για την τιμή της μετοχή*

Οι υπολογισμοί για ένα τριώνυμο δέντρο είναι ανάλογοι με αυτές ενός διωνυμικού δέντρου. Εργαζόμαστε από το τέλος του δέντρου προς την αρχή. Σε κάθε κόμβο υπολογίζουμε την αξία της διάθεσης και την αξία για τη συνέχιση. Η αξία της συνέχισης είναι

$$e^{-r\Delta t}(p_u f_u + p_m f_m + p_d f_d)$$

όπου f_u, f_m και f_d είναι οι αξίες της option στους ακόλουθους πάνω, μεσαίο και κάτω κόμβους αντίστοιχα. Η προσέγγιση του τριώνυμου δέντρου αποδεικνύεται ισοδύναμη με τη σαφή μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, που θα περιγραφεί στην ενότητα 8 αυτού του κεφαλαίου.

Ο Figlewski και ο Gao έχουν προτείνει μια ενίσχυση για τη μέθοδο του τριώνυμου δέντρου, την οποία αποκαλούν *μοντέλο προσαρμοστικού κόμβου*. Σε αυτήν, ένα υψηλής ανάλυσης (άρα με μικρό Δt) δέντρο εμβολίζεται μέσα σε ένα χαμηλής ανάλυσης δέντρο (με μεγάλο Δt). Κατά την αποτίμηση μιας κανονικής αμερικανικής option, η υψηλή ανάλυση είναι περισσότερο χρήσιμη για τα τμήματα του δέντρου που είναι κοντά στην τιμή διάθεσης στο τέλος της ζωής της option.

4.5 Παράμετροι που εξαρτώνται από το χρόνο

Μέχρι τώρα έχουμε υποθέσει ότι τα r, q, r_f και σ είναι σταθερά. Στην πράξη, συνήθως εκλαμβάνονται ως εξαρτώμενα από το χρόνο. Οι τιμές αυτών των μεταβλητών μεταξύ των χρονικών στιγμών t και t + Δt εκλαμβάνονται ως ίσες με τις προθεσμιακές τιμές.

Για να κάνουμε το r και το q (ή το r_f) μια συνάρτηση του χρόνο σε διωνυμικό δέντρο των Cox, Ross και Rubinstein, θέτουμε

$$A = e^{[f(t)-g(t)]\Delta t} \tag{11}$$

για τους κόμβους τη χρονική στιγμή t, όπου το f(t) είναι το προθεσμιακό επιτόκιο μεταξύ των χρονικών στιγμών t και t + Δt και το g(t) είναι η προθεσμιακή τιμή του q μεταξύ αυτών των χρονικών στιγμών. Αυτό δεν αλλάζει τη γεωμετρία του δέντρου επειδή τα u και d δεν εξαρτώνται από το α. Οι πιθανότητες για τους κλάδους που προέρχονται από τους κόμβους στη χρονική στιγμή t είναι:

$$p = \frac{e^{[f(t)=g(t)\Delta t} - d}{u-d} \tag{12}$$

$$1-p = \frac{u - e^{[f(t)=g(t)\Delta t}}{u-d}$$

Ο υπόλοιπος τρόπος που χρησιμοποιούμε για το δέντρο είναι ο ίδιος με πριν, εκτός από το ότι όταν αφαιρούμε μεταξύ των χρονικών στιγμών t και t + Δt χρησιμοποιούμε την f(t).

Το να κάνει κάποιος το σ μια συνάρτηση του χρόνου σε ένα διωνυμικό δέντρο είναι κάτι πιο δύσκολο. Μια προσέγγιση είναι να κάνουμε τα μήκη των χρονικών βημάτων αντιστρόφως ανάλογα με το ρυθμό διακύμανσης. Οι τιμές των u και d είναι πάντοτε οι ίδιες και το δέντρο ανασυνδυάζεται. Ας υποθέσουμε ότι η σ(t) είναι η μεταβλητότητα για μια ωρίμανση t και έτσι $\sigma(t)^2 t$ είναι η αθροιστική διακύμανση μέχρι τη χρονική στιγμή t. Ορίζουμε $V = \sigma(T)^2T$, όπου το T είναι η ζωή του δέντρου και ας είναι t_i το τέλος του i-στου χρονικού βήματος. Αν υπάρχει ένα σύνολο N χρονικών βημάτων, επιλέγουμε το t_i για να ικανοποιήσουμε τη σχέση $\sigma(t_i)^2 t_i = iV/N$. Η διακύμανση μεταξύ των χρονικών στιγμών t_{i-1} και t_i είναι επομένως V/N για όλα τα i.

Με τα τριώνυμα δέντρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια γενικευμένη διαδικασία κατασκευής δέντρου για να ταιριάζει με τα επιτόκια που εξαρτώνται από το χρόνο και τις μεταβλητότητες.

4.6 Προσομοίωση Monte Carlo

Τώρα θα εξηγήσουμε την προσομοίωση Monte Carlo, μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση για την αποτίμηση των derivatives από τα διωνυμικά δέντρα.

Όταν χρησιμοποιείται για να αποτιμήσει μια option, η προσομοίωση Monte Carlo χρησιμοποιεί το αποτέλεσμα της ουδετέρου κινδύνου αξιολόγησης. Χρησιμοποιούμε τυχαίο δείγμα για να αποκτήσουμε την αναμενόμενη αποπληρωμή σε ουδετέρου κινδύνου κόσμο και τότε ελαττώνουμε αυτήν την αποπληρωμή κατά το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο. Σκεφτείτε ένα derivative που εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή αγοράς S που παρέχει αποπληρωμή σε χρόνο T. Υποθέτοντας ότι τα επιτόκια είναι σταθερά, μπορούμε να αποτιμήσουμε το derivative ως εξής:

1. Παίρνουμε τυχαίες τιμές για το S σε έναν ουδετέρου κινδύνου κόσμο.
2. Υπολογίζουμε την αποπληρωμή από το derivative.
3. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 και 2 για να πάρουμε πολλές τυχαίες τιμές της αποπληρωμής από το derivative σε έναν ουδετέρου κινδύνου κόσμο.
4. Υπολογίζουμε τη μέση τιμή των τυχαίων αποπληρωμών για να έχουμε μια εκτίμηση για την αναμενόμενη αποπληρωμή σε έναν ουδετέρου κινδύνου κόσμο.
5. Μειώνουμε την αναμενόμενη αποπληρωμή κατά το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο για να έχουμε μια εκτίμηση της αξίας του derivative.

Ας υποθέσουμε ότι η διαδικασία που ακολουθείται από τη βασική μεταβλητή της αγοράς σε έναν ουδετέρου κινδύνου κόσμο είναι

$$dS = \hat{\mu}Sdt + \sigma Sdz \tag{13}$$

όπου το dz είναι μια διαδικασία Wiener, το $\hat{\mu}$ είναι η αναμενόμενη επιστροφή σε έναν ουδετέρου κινδύνου κόσμο και το σ είναι η μεταβλητότητα. Για να προσομοιώσουμε τη διαδρομή που ακολουθείται από το S, μπορούμε να χωρίσουμε τη ζωή του derivative σε N μικρά χρονικά διαστήματα μήκους Δt και προσεγγίσουμε την εξίσωση (13) ως

$$S(t+\Delta t) - S(t) = \hat{\mu}S(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{14}$$

όπου το S(t) είναι η τιμή του S τη χρονική στιγμή t και το ε είναι ένα τυχαίο δείγμα από μια κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση 1,0. Αυτό επιτρέπει στην τιμή του S τη χρονική στιγμή Δt να υπολογιστεί από την αρχική τιμή του S, την τιμή στη χρονική στιγμή 2Δt να υπολογιστεί από την τιμή της χρονικής στιγμής Δt και ούτω καθεξής. Μια απεικόνιση της διαδικασίας παρουσιάζεται στο πιο προηγούμενο κεφάλαιο και στην ενότητα 3. Μια δοκιμή προσομοίωσης περιλαμβάνει την κατασκευή μιας πλήρους διαδρομής για το S χρησιμοποιώντας N τυχαία δείγματα από μια κανονική κατανομή.

Στην πράξη, είναι συνήθως πιο ακριβής η προσομοίωση του lnS παρά του S. Από το Λήμμα του Itô η διαδικασία που ακολουθείται από το lnS είναι

$$d \ln S = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \tag{15}$$

και έτσι

$$\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

ή ισοδύναμα

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp\left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \right] \tag{16}$$

Αυτή η εξίσωση χρησιμοποιείται για να κατασκευαστεί μια διαδρομή για το S.

Εργαζόμενοι με το lnS παρά με το S δίνει περισσότερη ακρίβεια. Επίσης, αν το $\hat{\mu}$ και το σ είναι σταθερά, τότε η παράσταση

$$\ln S(T) - \ln S(0) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{T}$$

είναι αληθής για όλα τα T. Έπεται ότι

$$S(T) = S(0) \exp\left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \right] \tag{17}$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποτιμήσει τα derivatives που παρέχουν μια μη συνηθισμένη αποπληρωμή σε χρόνο T. Η ίδια η σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον έλεγχο των τύπων των Black και Scholes.

Το βασικό πλεονέκτημα της προσομοίωσης Monte Carlo είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν η αποπληρωμή εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθείται από τη βασική μεταβλητή S καθώς επίσης και όταν εξαρτάται μόνο από την τελική τιμή του S. (Για παράδειγμα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν οι αποπληρωμές εξαρτώνται από τη μέση τιμή του S.) Οι αποπληρωμές μπορούν να συμβούν αρκετές φορές κατά τη διάρκεια της ζωής του derivative παρά να συμβούν όλες στο τέλος. Κάθε στοχαστική διαδικασία για το S μπορεί να γίνει αποδεκτή. Όπως θα αποδειχτεί σύντομα, η διαδικασία μπορεί επίσης να επεκταθεί ώστε να περιλαμβάνει καταστάσεις όπου η αποπληρωμή από ένα derivative εξαρτάται από αρκετές βασικές μεταβλητές της αγοράς. Τα μειονεκτήματα της προσομοίωσης Monte Carlo είναι ότι υπολογιστικά είναι πολύ χρονοβόρα διαδικασία και δε μπορεί να χειριστεί εύκολα καταστάσεις όπου υπάρχουν πρόωρες ευκαιρίες διάθεσης options.

Derivatives που εξαρτώνται σε περισσότερες από μία μεταβλητές αγοράς

Θεωρήστε την κατάσταση όπου η αποπληρωμή από ένα derivative εξαρτάται σε n μεταβλητές θ_i ($1 \leq i \leq n$). Ορίζουμε το S ως τη μεταβλητότητα των θ_i, ως $\hat{m}_i$ ορίζουμε τον αναμενόμενο ρυθμό ανάπτυξης του θ_i σε έναν ουδετέρου κινδύνου κόσμο και ως ρ_{ik} ως το στιγμαίο συσχετισμό μεταξύ του θ_i και θ_k. Όπως στην περίπτωση της μίας μεταβλητής, η ζωή του derivative πρέπει να χωριστεί σε N υποδιαστήματα μήκους Δt. Η διακριτή μορφή της διαδικασίας για το θ_i είναι τότε

$$\theta_i(t+\Delta t)-\theta_i(t)=\hat{m}_i\theta_i(t)\Delta t+s_i\theta_i(t)\varepsilon_i\sqrt{\Delta t} \quad (18)$$

όπου το ε_i είναι ένα τυχαίο δείγμα από μια τυπική κανονική κατανομή. Ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των ε_i και ε_k είναι ρ_{ik} ($1 \leq i;k \leq n$). Μια δοκιμή προσομοίωσης περιλαμβάνει την απόκτηση N δειγμάτων για το ε_i ($1 \leq i \leq n$) από μια πολυπαραγοντική τυποποιημένη κανονική κατανομή. Αυτά αντικαθίστανται στην εξίσωση (18) για να παράγουν προσομοιωμένες διαδρομές για κάθε θ_i, επιτρέποντας έτσι να υπολογιστεί μία τυχαία τιμή για το derivative.

Παραγωγή τυχαίων δειγμάτων από κανονικές κατανομές

Ένα κατά προσέγγιση τυχαίο δείγμα από μια τυπική κανονική κατανομή μιας μεταβλητής μπορεί να αποκτηθεί από τον τύπο

$$\varepsilon=\sum_{i=1}^{12}R_i-6$$

όπου τα R_i ($1 \leq i \leq 12$) είναι ανεξάρτητοι τυχαίοι αριθμοί μεταξύ του 0 και του 1 και το ε είναι το απαιτούμενο δείγμα για τη φ(0,1). Αυτή η προσέγγιση είναι ικανοποιητική για τους περισσότερους σκοπούς. Μια εναλλακτική προσέγγιση στο Excel είναι η χρήση της =NORMSINV(RAND()).

Όταν απαιτούνται δύο συσχετιζόμενα δείγματα ε_1 και ε_2 από τυπικές κανονικές κατανομές, η κατάλληλη διαδικασία είναι η εξής. Τα ανεξάρτητα δείγματα x_1 και x_2 προκύπτουν από μια τυπική κανονική κατανομή μιας μεταβλητής όπως μόλις περιγράψαμε. Τα απαιτούμενα δείγματα ε_1 και ε_2 υπολογίζονται τότε ως εξής:

$$\varepsilon_1=x_1$$
$$\varepsilon_2=\rho x_1+x_2\sqrt{1-\rho^2}$$

όπου το ρ είναι ο συντελεστής συσχέτισης.

Πιο γενικά, θεωρήστε μια κατάσταση όπου απαιτούμε n συσχετιζόμενα δείγματα από κανονικές κατανομές με τη συσχέτιση ανάμεσα στο δείγμα i και το δείγμα j να είναι το ρ_{ij}. Πρώτα παίρνουμε δείγματα για n ανεξάρτητες μεταβλητές x_i ($1 \leq i \leq n$) από τυπικές κανονικές κατανομές μιας μεταβλητής. Τα απαιτούμενα δείγματα ε_i ($1 \leq i \leq n$) ορίζονται τότε ως εξής:

$$\varepsilon_1 = \alpha_{11}x_1$$
$$\varepsilon_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2$$

$$\varepsilon_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3$$

και ούτω καθεξής. Επιλέγουμε τους συντελεστές α_{ij} έτσι ώστε οι συσχετίσεις και οι διακυμάνσεις να είναι σωστές. Αυτό μπορεί να γίνει βήμα-βήμα ως εξής. Θέτουμε $\alpha_{11} = 1$, επιλέγουμε το α_{21} έτσι ώστε να ισχύει $\alpha_{21}\alpha_{11} = \rho_{21}$, επιλέγουμε το α_{22} έτσι ώστε να ισχύει $a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1$, επιλέγουμε το α_{31} έτσι ώστε να ισχύει $\alpha_{31}\alpha_{21} + \alpha_{32}\alpha_{22} = \rho_{32}$, επιλέγουμε το α_{33} ώστε να ισχύει $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$ και ούτω καθεξής. Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή ως *αποσύνθεση του Cholesky*.

Αριθμός των δοκιμών

Η ακρίβεια του αποτελέσματος που δίνεται από την προσομοίωση Monte Carlo εξαρτάται από τον αριθμό των δοκιμών. Είναι σύνηθες να υπολογίζεται η τυπική απόκλιση καθώς και ο μέσος όρος των μειωμένων (κατά το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο) αποπληρωμών που δίνονται μέσω των δοκιμών προσομοίωσης. Συμβολίζουμε τη μέση τιμή με το γράμμα μ και την τυπική απόκλιση με ω. Η μεταβλητή μ είναι η εκτίμηση της προσομοίωσης για την αξία του derivative. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης είναι

$$\frac{\omega}{\sqrt{\mathrm{M}}}$$

όπου M είναι ο αριθμός των δοκιμών. Το διάστημα εμπιστοσύνης 95% για την τιμή f του derivative δίνεται επομένως από τη σχέση

$$\mu - \frac{1{,}96 \cdot \omega}{\sqrt{\mathrm{M}}} < f < \mu + \frac{1{,}96 \cdot \omega}{\sqrt{\mathrm{M}}}$$

Αυτό δείχνει ότι η αβεβαιότητα όσο αφορά την αξία του derivative είναι αντιστρόφως ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα του αριθμού των δοκιμών. Για να διπλασιάσουμε την ακρίβεια της προσομοίωσης, θα πρέπει να τετραπλασιάσουμε τον αριθμό των δοκιμών. Για να αυξήσουμε την ακρίβεια κατά ένα συντελεστή 100, ο αριθμός των δοκιμών πρέπει να αυξηθεί κατά ένα συντελεστή 100 και ούτω καθεξής.

Εφαρμογές

Η προσομοίωση Monte Carlo τείνει να είναι αριθμητικά πιο αποτελεσματική από άλλες διαδικασίες όταν υπάρχουν τρεις ή περισσότερες στοχαστικές μεταβλητές. Αυτό συμβαίνει επειδή ο χρόνος που απαιτείται για την πραγματοποίηση της προσομοίωσης Monte Carlo αυξάνεται περίπου γραμμικά με τον αριθμό των μεταβλητών, ενώ ο χρόνος που απαιτείται για τις περισσότερες διαδικασίες αυξάνεται εκθετικά με τον αριθμό των μεταβλητών. Ένα πλεονέκτημα της προσομοίωσης Monte Carlo είναι ότι μπορεί να παρέχει ένα τυπικό σφάλμα για τις εκτιμήσεις που κάνει. Ένα άλλο είναι ότι είναι μια προσέγγιση που μπορεί να συμπεριλάβει πολύπλοκες αποπληρωμές και πολύπλοκες στοχαστικές διαδικασίες. Επίσης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν η αποπληρωμή εξαρτάται από κάποια συνάρτηση ολόκληρης της διαδρομής που ακολουθείται από μια μεταβλητή, όχι απλά την τελική της τιμή.

Υπολογισμός των ελληνικών γραμμάτων

Τα ελληνικά γράμματα μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας την προσομοίωση Monte Carlo. Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει η μερική παράγωγος της f ως προς το x, όπου η f είναι η τιμή του derivative και x είναι η τιμή μιας βασικής μεταβλητής ή παραμέτρου. Πρώτα, η προσομοίωση Monte Carlo χρησιμοποιείται κατά το συνήθη τρόπο ώστε να υπολογίσει μια εκτίμηση για την $\hat{f}$ για την αξία του derivative. Στη συνέχεια γίνεται μια μικρή αύξηση Δx στην αξία της x και υπολογίζεται μια νέα τιμή για το derivative $\hat{f}^*$, με τον ίδιο τρόπο όπως με την $\hat{f}$. Μια εκτίμηση για την παράμετρο αντιστάθμισης δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\hat{f}^* - \hat{f}}{\Delta x}$$

Προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης, ο αριθμός των χρονικών διαστημάτων N, ο τυχαίος αριθμός ρευμάτων και ο αριθμός των δοκιμών M θα πρέπει να είναι ίδια κατά τον υπολογισμό τόσο του $\hat{f}$ όσο και του $\hat{f}^*$.

Δειγματοληψία από ένα δέντρο

Αντί της εφαρμογής της προσομοίωσης Monte Carlo με τυχαία δειγματοληψία από τη στοχαστική διαδικασία για μια βασική μεταβλητή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα διωνυμικό δέντρο N βημάτων και να πάρουμε δείγματα από τις 2^N διαδρομές που είναι δυνατές. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα διωνυμικό δέντρο όπου η πιθανότητα για μια κίνηση προς τα πάνω είναι 0,6. Η διαδικασία για τη δειγματοληψία μιας τυχαίας διαδρομής μέσω του δέντρου έχει ως εξής. Σε κάθε κόμβο, παίρνουμε ως δείγμα έναν τυχαίο αριθμό μεταξύ του 0 και του 1. Αν ο αριθμός είναι μικρότερος από 0,4, παίρνουμε τον κάτω κλάδο. Αν είναι μεγαλύτερος από 0,4, παίρνουμε τον πάνω κλάδο. Μόλις έχουμε μια πλήρη διαδρομή από τον αρχικό κόμβο μέχρι το τέλος του δέντρου, μπορούμε να υπολογίσουμε μια αποπληρωμή. Αυτό ολοκληρώνει την πρώτη δοκιμή. Παρόμοια διαδικασία χρησιμοποιείται για να ολοκληρωθούν περισσότερες δοκιμές. Η μέση τιμή των αποπληρωμών μειώνεται κατά το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο για να έχουμε μια εκτίμηση για την τιμή του derivative.

Παράδειγμα 9

Ας υποθέσουμε ότι το δέντρο στο σχήμα 19.3 χρησιμοποιείται για να αποτιμήσει μια option που αποπληρώνει το $\max(S_{ave} - 50,0)$, όπου S_{ave} είναι η μέση τιμή της μετοχής κατά τη διάρκεια των 5 μηνών (με την πρώτη και τελευταία τιμή της μετοχής να περιλαμβάνονται στη μέση τιμή). Αυτή είναι γνωστή ως ασιατική option. Όταν χρησιμοποιούνται 10 δοκιμές προσομοίωσης, ένα πιθανό αποτέλεσμα παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 4.3: *Προσομοίωση Monte Carlo για την αποτίμηση ασιατικής option από το δέντρο του σχήματος 19.3 Η αποπληρωμή είναι το ποσό κατά το οποίο η μέση τιμή της μετοχής υπερβαίνει τα 50 ευρώ. U = κίνηση της τα πάνω (up movement) και D = κίνηση της τα κάτω (down movement).*

Δοκιμή	Διαδρομή	Μέση τιμή μετοχής	Αποπληρωμή option
1	UUUUD	64.98	14.98
2	UUUDD	59.82	9.82
3	DDDUU	42.31	0.00
4	UUUUU	68.04	18.04
5	UUDDU	55.22	5.22
6	UDUUD	55.22	5.22
7	DDUDD	42.31	0.00
8	UUDDU	55.22	5.22
9	UUUDU	62.25	12.25
10	DDUUD	45.56	0.00
Μέσος όρος			7.08

Η τιμή της option υπολογίζεται ως η μέση εξόφλησης μειωμένη κατά το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο. Σε αυτήν την περίπτωση, η μέση εξόφληση είναι 7,08 ευρώ και το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο είναι 10% και έτσι η υπολογισθείσα τιμή είναι $7{,}08e^{-0{,}1x5/12} = 6{,}79$ (Αυτό καταδεικνύει τη μεθοδολογία. Στην πράξη, θα έπρεπε να χρησιμοποιούσαμε περισσότερα χρονικά βήματα στο δέντρο και πολύ περισσότερες δοκιμές προσομοίωσης για να πάρουμε μια ακριβή απάντηση.)

4.7 Διαδικασίες μείωσης της διακύμανσης

Αν η προσομοίωση διενεργείται όπως ακριβώς περιγράφεται μέχρι εδώ, είναι απαραίτητος ένας μεγάλος αριθμός δοκιμών για την εκτίμηση της f με μια λογική ακρίβεια. Αυτό είναι πολύ ακριβό όσο αφορά το χρόνο των υπολογισμών. Σε αυτήν την ενότητα, εξετάζουμε έναν αριθμό διαδικασιών μείωσης της διακύμανσης που μπορεί να οδηγήσουν σε δραματική εξοικονόμηση του χρόνου για τους υπολογισμούς.

Η τεχνική της αντιθετικής μεταβλητής

Στην τεχνική της αντιθετικής μεταβλητής, μια δοκιμή προσομοίωσης περιλαμβάνει τον υπολογισμό δύο τιμών του derivative. Η πρώτη τιμή f_1 υπολογίζεται κατά το συνήθη τρόπο. Η δεύτερη τιμή f_2 υπολογίζεται αλλάζοντας το πρόσημο όλων των τυχαίων δειγμάτων από τις τυπικές κανονικές κατανομές. (Αν είναι ε ένα δείγμα που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της f_1, τότε το –ε είναι το αντίστοιχο δείγμα που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της f_2. Η τυχαία τιμή του derivative που υπολογίζεται από τη δοκιμή προσομοίωσης είναι η μέση τιμή των f_1 και f_2. Αυτό λειτουργεί καλά επειδή όταν μια τιμή είναι πάνω από την πραγματική τιμή, η άλλη τείνει να είναι χαμηλότερη και αντιστρόφως.

Συμβολίζουμε με $\bar{f}$ τη μέση τιμή των f_1 και f_2:

$$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} \tag{19}$$

Η τελική εκτίμηση για την τιμή του derivative είναι η μέση τιμή όλων των $\bar{f}$. Αν είναι $\overline{\omega}$ η τυπική απόκλιση όλων των $\bar{f}$ και M ο αριθμός των δοκιμών προσομοίωσης (δηλ. ο αριθμός των ζευγών των τιμών που υπολογίζονται), τότε το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης είναι

$$\overline{\omega} / \sqrt{\mathrm{M}}$$

Αυτό είναι συνήθως πολύ μικρότερο από το τυπικό σφάλμα που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας 2M τυχαίες δοκιμές.

Τεχνική ελέγχου της μεταβλητής

Έχουμε ήδη δώσει ένα παράδειγμα για την τεχνική ελέγχου της μεταβλητής σε συνδυασμό με τη χρήση των δέντρων για την αξιολόγηση των αμερικανικών options (βλ. ενότητα 3 του ιδίου κεφαλαίου). Η τεχνική ελέγχου της μεταβλητής μπορεί να εφαρμοστεί όταν υπάρχουν δύο παρόμοια derivatives, A και B. Το derivative A είναι αυτή που αποτιμάται ενώ το derivative B είναι παρόμοια με την A και έχει διαθέσιμη μια αναλυτική λύση. Διεξάγονται παράλληλα δύο προσομοιώσεις χρησιμοποιώντας τον ίδιο τυχαίο αριθμό ρευμάτων και το ίδιο Δt. Η πρώτη χρησιμοποιείται για να αποκτήσουμε μια εκτίμηση f_A^* για την τιμή της A, ενώ η δεύτερη χρησιμοποιείται για να αποκτήσουμε μια εκτίμηση f_B^* για την τιμή της B. Μια καλύτερη εκτίμηση f_A της τιμής της A προκύπτει τότε χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$f_A = f_A^* - f_B^* + f_B \tag{20}$$

όπου f_B είναι η γνωστή πραγματική τιμή της B που υπολογίστηκε αναλυτικά. Ο Hull και ο White δίνουν ένα παράδειγμα για τη χρήση της τεχνικής ελέγχου της μεταβλητής κατά την αξιολόγηση της επίδρασης της στοχαστικής μεταβλητότητας στην τιμή μιας ευρωπαϊκής option αγοράς. Σε αυτήν την περίπτωση, ως A έχουμε η option για την οποία υποθέτουμε στοχαστική μεταβλητότητα και ως B είναι η option με σταθερή μεταβλητότητα.

Η δειγματοληψία των σημαντικών διαδρομών

Η δειγματοληψία των σημαντικών διαδρομών θα εξηγηθεί καλύτερα με ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι επιθυμούμε να υπολογίσουμε την τιμή μιας ευρωπαϊκής option αγοράς με τιμή διάθεσης K και ωρίμανση T. Αν πάρουμε τυχαίες τιμές για την αξία του βασικού κεφαλαίου τη χρονική στιγμή T κατά το συνήθη τρόπο, οι περισσότερες διαδρομές θα οδηγήσουν σε μηδενική αποπληρωμή. Αυτό είναι χάσιμο υπολογιστικού χρόνου γιατί οι διαδρομές που οδηγούν σε μηδενική αποπληρωμή συμβάλλουν πολύ λίγο στον προσδιορισμό της αξίας της option. Επομένως δοκιμάζουμε μόνο τις σημαντικές διαδρομές, οι οποίες είναι οι διαδρομές όπου η τιμή της μετοχής είναι πάνω από την τιμή K στην ωρίμανση.

Ας υποθέσουμε ότι η F είναι η απόλυτη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας για την τιμή της μετοχής σε χρόνο T και ότι η q πιθανότητα για την τιμή της μετοχής να γίνει μεγαλύτερη από K στην ωρίμανση είναι γνωστή με αναλυτικό τρόπο. Τότε η G = F/q είναι η κατανομή πιθανότητας για την τιμή της μετοχή υπό τον όρο ότι η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη από K. Για την εφαρμογή της δειγματοληψίας των σημαντικών διαδρομών, παίρνουμε δείγματα από τη G παρά από την F. Η εκτίμηση για την τιμή της option είναι η μέση, μειωμένη κατά το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο, εξόφληση πολλαπλασιασμένη με το q.

Στρωματοποιημένη δειγματοληψία

Το να κάνει κανείς δειγματοληψία σε αντιπροσωπευτικές τιμές παρά σε τυχαίες τιμές από μια κατανομή πιθανότητας δίνει συνήθως μεγαλύτερη ακρίβεια. Η στρωματοποιημένη δειγματοληψία είναι ένας τρόπος για να γίνει αυτό. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να πάρουμε 1000 δείγματα από μια κατανομή πιθανότητας. Θα χωρίζαμε την κατανομή σε 1000 εξίσου πιθανά διαστήματα και θα διαλέγαμε μια αντιπροσωπευτική τιμή (συνήθως τη μέση τιμή ή τη διάμεσο) για κάθε διάστημα.

Στην περίπτωση της τυπικής κανονικής κατανομής όπου υπάρχουν n διαστήματα, μπορούμε να υπολογίσουμε την αντιπροσωπευτική τιμή για το i-στο διάστημα ως

$$N^{-1}\left(\frac{i-0,5}{n}\right)$$

όπου το N^{-1} είναι η αντίστροφη αθροιστική κατανομή πιθανότητας. Για παράδειγμα, όταν n = 4 οι αντιπροσωπευτικές τιμές που αντιστοιχούν στα τέσσερα διαστήματα είναι $N^{-1}(0,125)$, $N^{-1}(0,375)$, $N^{-1}(0,625)$, $N^{-1}(0,875)$. Η συνάρτηση N^{-1} μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση NORMSINV του Excel.

Αντιπαραβολή στιγμών

Η αντιπαραβολή στιγμών περιλαμβάνει την προσαρμογή των δειγμάτων που λαμβάνονται από μια τυποποιημένη κανονική κατανομή έτσι ώστε η πρώτη, η δεύτερη και πιθανότητα και μεγαλύτερες στιγμές να αντιπαραβάλλονται. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δείγμα από μια κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1,0 για να υπολογίσουμε τη μεταβολή της τιμής μιας συγκεκριμένης μεταβλητής σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Ας υποθέσουμε ότι τα δείγματα είναι ε_i ($1 \le i \le n$). Για να ταιριάξουν οι πρώτες δύο στιγμές, υπολογίζουμε τη μέση τιμή των δειγμάτων m και την τυπική απόκλιση των δειγμάτων s. Τότε ορίζουμε τα προσαρμοζόμενα δείγματα ε_i^* ($1 \le i \le n$) ως

$$\varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i - m}{s}$$

Αυτά τα προσαρμοζόμενα δείγματα έχουν τη σωστή μέση τιμή μηδέν και τη σωστή τυπική απόκλιση 1,0. Χρησιμοποιούμε προσαρμοζόμενα δείγματα σε όλους τους υπολογισμούς.

Η αντιπαραβολή στιγμών εξοικονομεί υπολογιστικό χρόνο, αλλά μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα με τη μνήμη επειδή κάθε αριθμός που επιλέγεται τυχαία πρέπει να αποθηκευτεί μέχρι και το τέλος της προσομοίωσης. Η αντιπαραβολή στιγμών ονομάζεται μερικές φορές *τετραγωνική επαναδειγματοληψία*. Συχνά χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με την τεχνική αντιθετικής μεταβλητής. Επειδή η τελευταία ταιριάζει αυτόματα με όλες τις περίεργες στιγμές, ο σκοπός της αντιπαραβολής στιγμών γίνεται τότε ως το ταίριασμα της δεύτερης και πιθανώς την τέταρτης στιγμής.

Χρήση τυχαίων ακολουθιών

Μια κατά κάποιον τρόπο τυχαία ακολουθία (ονομάζεται επίσης *ακολουθία χαμηλής απόκλισης*) είναι μια ακολουθία αντιπροσωπευτικών δειγμάτων από μια κατανομή πιθανότητας. Οι περιγραφές της χρήσης των οιονεί τυχαίων ακολουθιών εμφανίζονται στο Brotherton-Ratcliffe και στο Press et al. Οι ακολουθίες αυτές μπορούν να έχουν την επιθυμητή ιδιότητα ότι οδηγούν στο τυπικό σφάλμα μιας εκτίμησης που είναι ανάλογο με το 1/M παρά με το $1/\sqrt{M}$, όπου το M είναι το μέγεθος του δείγματος.

Η οιονεί τυχαία δειγματοληψία είναι παρόμοια με τη στρωματοποιημένη δειγματοληψία. Ο στόχος είναι να δώσει επιλέξει τυχαία αντιπροσωπευτικές τιμές για τις βασικές μεταβλητές. Στη στρωματοποιημένη δειγματοληψία, γίνεται η παραδοχή ότι γνωρίζουμε εκ των προτέρων πόσα δείγματα θα ληφθούν. Μια οιονεί τυχαία δειγματοληψία είναι πιο ευέλικτη. Τα δείγματα παίρνονται με τέτοιο τρόπο ώστε να συμπληρώνουν πάντοτε τα κενά μεταξύ των υφισταμένων δειγμάτων. Σε κάθε στάδιο της προσομοίωσης, τα σημεία δειγματοληψίας είναι σχεδόν ομοιόμορφα κατανεμημένα σε όλο το χώρο της πιθανότητας.

Το παρακάτω σχήμα (4.14) δείχνει τα σημεία που παράγονται σε δύο διαστάσεις χρησιμοποιώντας μιας διαδικασία που προτείνει από τον Sobol. Μπορεί να διαπιστωθεί ότι τα διαδοχικά σημεία τείνουν να καλύψουν τα κενά που αφήνονται από τα προηγούμενα σημεία.

4.8 Μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών

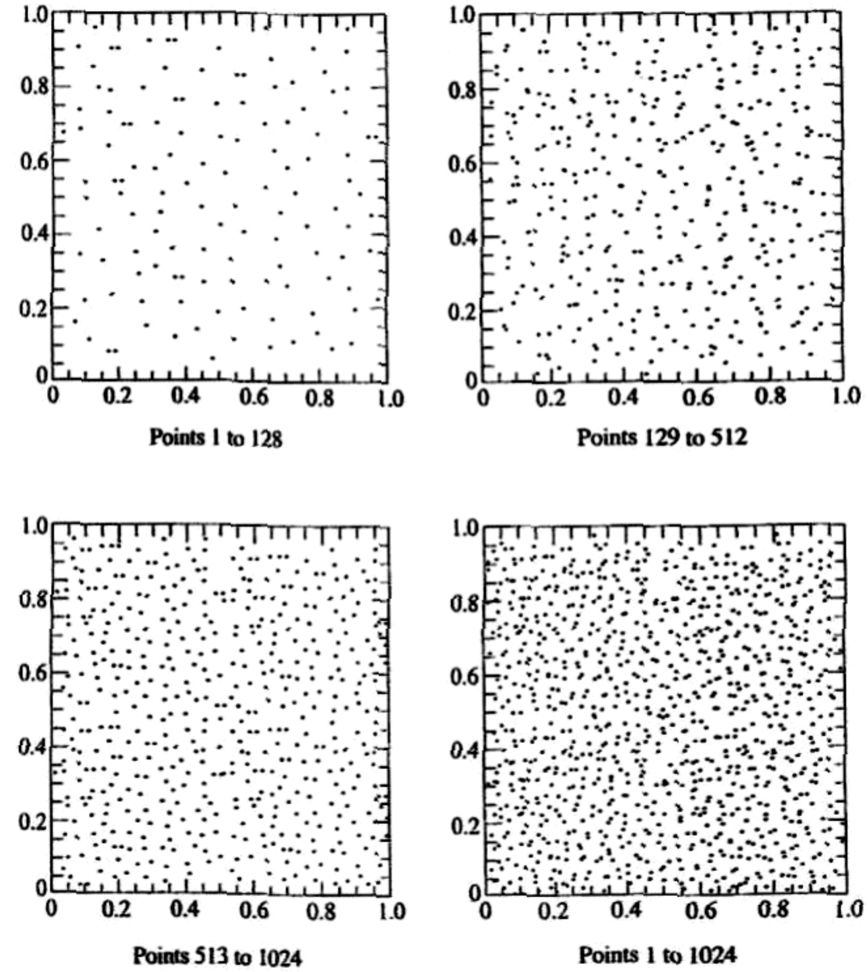
Οι μέθοδοι των πεπερασμένων διαφορών αποτιμούν ένα derivative επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση που το derivative ικανοποιεί. Η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε ένα σύνολο εξισώσεων διαφορών και οι εξισώσεις διαφορών λύνονται με επαναληπτική μέθοδο.

Για να δείξουμε αυτήν την προσέγγιση, σκεφτόμαστε πώς θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος αυτή για να αποτιμηθεί μια αμερικανική option πώλησης για μια μετοχή που πληρώνει μια μερισματική απόδοση q. Η διαφορική εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί η option είναι

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(r-q)S\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf \qquad (21)$$

Ας υποθέσουμε ότι η διάρκεια ζωής της option είναι T. Χωρίζουμε αυτήν σε N ισαπέχοντα διαστήματα μήκους $\Delta t = T/N$. Θεωρείται ως εκ τούτου ότι υπάρχει ένα σύνολο N+1 χρονικών στιγμών.

$$0, \Delta t, 2\,\Delta t, \ldots, T$$



Σχήμα 4.14: *Τα πρώτα 1024 σημεία μιας ακολουθίας Sobol*

Ας υποθέσουμε ότι η S_{max} είναι μια τιμή της μετοχής αρκετά υψηλή ώστε, όταν επιτευχθεί, η πώληση δεν έχει ουσιαστικά καμία αξία. Ορίζουμε $\Delta S = S_{max}/M$ και θεωρούμε ένα σύνολο M+1 ισαπεχόντων τιμών μετοχής:

$$0, \Delta S, 2\Delta S, \ldots\ldots\ldots, S_{max}$$

Το επίπεδο S_{max} είναι αυτό που επιλέγεται και έτσι μια από αυτές είναι τρέχουσα τιμή της μετοχής.

Τα χρονικά σημεία και τα σημεία με τις τιμές της μετοχής ορίζουν ένα πλέγμα που αποτελείται από ένα σύνολο (M+1)(N+1) σημείων, όπως παρουσιάζεται και στην εικόνα 19.15. Το (i,j) σημείο του πλέγματος είναι το σημείο που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $i \cdot \Delta t$ και στην τιμή μετοχής $j \cdot \Delta S$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μεταβλητή $f_{i,j}$ για να συμβολίσουμε την τιμή της option στο (i,j) σημείο.

Απεριόριστη μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών

Για ένα εσωτερικό σημείο (i,j) στο πλέγμα, η $\partial f / \partial S$ μπορεί να προσεγγιστεί ως

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S} \tag{22}$$

ή ως

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S} \tag{23}$$

Η εξίσωση (22) είναι γνωστή ως προσέγγιση εμπρός διαφοράς, ενώ η εξίσωση (23) είναι γνωστή ως προσέγγιση πίσω διαφοράς. Χρησιμοποιούμε μια πιο συμμετρική προσέγγιση από το μέσο όρο των δύο:

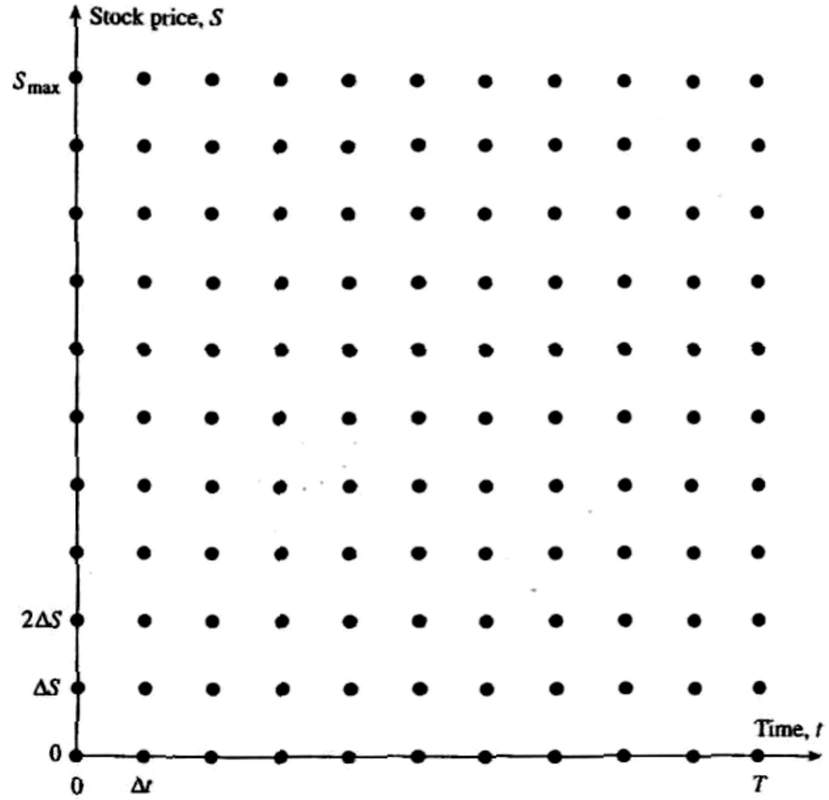
$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2 \cdot \Delta S} \tag{24}$$

Για το $\partial f / \partial t$, θα χρησιμοποιήσουμε μια προσέγγιση εμπρός διαφοράς και έτσι η τιμή στη χρονική στιγμή i·Δt σχετίζεται με την τιμή στη χρονική στιγμή (i+1)·Δt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} \tag{25}$$

Η προσέγγιση πίσω διαφοράς για το $\partial f / \partial S$ στο σημείο (i,j) δίνεται από την εξίσωση (23). Η πίσω διαφορά στο σημείο (i, j+1) είναι

$$\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S}$$



Σχήμα 4.15: *Πλέγμα για προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών*

Έτσι μια προσέγγιση με πεπερασμένη διαφορά για τη $\partial^2 f / \partial S^2$ στο σημείο (i,j) είναι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S} - \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S} \right) \Big/ \Delta S$$

ή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2 f_{i,j}}{\Delta S^2} \qquad (26)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (24), (25) και (26) στη διαφορική εξίσωση (21) και προσέχοντας ότι S = j·ΔS παίρνουμε

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r - q) \cdot j \cdot \Delta S \, \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2 \cdot \Delta S} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2 f_{i,j}}{\Delta S^2} = r \cdot f_{i,j}$$

για j = 1,2,…., M – 1 και i = 0,1,........ N – 1. Αναδιατάσσοντας τους όρους, παίρνουμε

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \tag{27}$$

όπου

$$a_j = \frac{1}{2}(r-q) j\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

$$b_j = 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t$$

$$c_j = -\frac{1}{2}(r-q) j\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

Η αξία της πώλησης τη χρονική στιγμή Τ είναι το max(K – S_T, 0), όπου η S_T είναι η τιμή της μετοχής τη στιγμή Τ.
Έτσι,

$$f_{N,j} = \max(K - j\Delta S, 0), \qquad j = 0, 1, \ldots\ldots\ldots, M \tag{28}$$

Η αξία της option πώλησης όταν η τιμή της μετοχής είναι μηδέν είναι K. Έτσι,

$$f_{i,0} = K,\ i = 0,\ 1, \ldots\ldots\ldots, N \tag{29}$$

Ας υποθέσουμε ότι η option πώλησης είναι μηδέν όταν S = S_{max} και έτσι

$$f_{i,M} = 0,\ i = 0,\ 1, \ldots\ldots\ldots, N \tag{30}$$

Οι εξισώσεις (28), (29) και (30) καθορίζουν την αξία της option πώλησης, μαζί με τις τρεις κορυφές του πλέγματος στο Σχήμα 19.15, όπου S = 0, S = S_{max} και t = T. Μένει να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (27) για να φτάσουμε στην τιμή της f σε όλα τα άλλα σημεία. Πρώτα αντιμετωπίζονται τα σημεία που αντιστοιχούν σε χρόνο T – Δt. Η εξίσωση (27) με i = N – 1 δίνει

$$a_j f_{N-1,j-1} + b_j f_{N-1,j} + c_j f_{N-1,j+1} = f_{N,j} \tag{31}$$

για j = 1,2,….., M – 1. Η δεξιά πλευρά των εξισώσεων αυτών είναι γνωστή από την εξίσωση (28). Επιπλέον από τις εξισώσεις (29) και (30),

$$f_{N-1,0} = K \tag{32}$$
$$f_{N-1,M} = 0 \tag{33}$$

Οι εξισώσεις (31) είναι επομένως M – 1 ταυτόχρονες εξισώσεις που μπορούν να επιλυθούν για M – 1 αγνώστους: $f_{N-1,1}$, $f_{N-1,2}$,…..,$f_{N-1,M-1}$. Αφού γίνει αυτό, κάθε τιμή του $f_{N-1,j}$ συγκρίνεται με το K – jΔS. Αν $f_{N-1,j}$ < K – jΔS, είναι βέλτιστο να γίνει πρόωρη διάθεση τη χρονική στιγμή T – Δt και θέτουμε τη $f_{N-1,j}$ ίση με K – jΔS. Οι κόμβοι που αντιστοιχούν στο χρόνο T – 2Δt χειρίζονται με παρόμοιο τρόπο και ούτω καθεξής. Τελικά προκύπτουν τα $f_{0,1}$, $f_{0,2}$, $f_{0,3}$, …., $f_{0,M-1}$. Ένα από αυτά είναι η τιμή της option που μας ενδιαφέρει.

Η τεχνική ελέγχου της μεταβλητής μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με τις μεθόδους των πεπερασμένων διαφορών. Το ίδιο πλέγμα χρησιμοποιείται για να αποτιμήσεις μια option παρόμοια με αυτή με την οποία ασχολούμαστε αλλά για την οποία είναι διαθέσιμη μια αναλυτική αποτίμηση. Τότε χρησιμοποιείται η εξίσωση (20).

Πίνακας 4.4: *Πλέγμα για την αξιολόγηση της αμερικανικής option του Παραδείγματος 1 με τη χρήση μεθόδου απεριόριστων πεπερασμένων διαφορών*

Τιμή μετοχής (€)	Χρόνος για την ωρίμανση (σε μήνες)										
	5	4,5	4	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0
100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
95	0,02	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
90	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
85	0,09	0,07	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
80	0,16	0,12	0,09	0,07	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
75	0,27	0,22	0,17	0,13	0,09	0,06	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00
70	0,47	0,39	0,32	0,25	0,18	0,13	0,08	0,04	0,02	0,00	0,00
65	0,82	0,71	0,60	0,49	0,38	0,28	0,19	0,11	0,05	0,02	0,00
60	1,42	1,27	1,11	0,95	0,78	0,62	0,45	0,30	0,16	0,05	0,00
55	2,43	2,24	2,05	1,83	1,61	1,36	1,09	0,81	0,51	0,22	0,00
50	4,07	3,88	3,67	3,45	3,19	2,91	2,57	2,17	1,66	0,99	0,00
45	6,58	6,44	6,29	6,13	5,96	5,77	5,57	5,36	5,17	5,02	5,00
40	10,15	10,1	10,05	10,01	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00
35	15,00	15,0	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00
30	20,00	20,0	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00
25	25,00	25,0	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00
20	30,00	30,0	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00
15	35,00	35,0	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00
10	40,00	40,0	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00
5	45,00	45,0	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00
0	50,00	50,0	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00

Παράδειγμα 10

Ο Πίνακας 4 δείχνει το αποτέλεσμα της χρήσης μιας μεθόδου σιωπηρών πεπερασμένων διαφορών ακριβώς όπως περιγράψαμε μόλις για την τιμολόγηση μιας αμερικανικής option πώλησης στο Παράδειγμα 1. Επιλέχθηκαν οι τιμές 20, 10 και 5 για τα M, N και ΔS αντίστοιχα. Έτσι, η τιμή της option εκτιμάται σε διαστήματα τιμών μετοχών μήκους 5 ευρώ ανάμεσα στα 0 και τα 100 ευρώ και σε χρονικά διαστήματα μήκους μισού μήνα καθ’ όλη τη διάρκεια της ζωής της option. Η τιμή της option που δίνεται από το πλέγμα είναι 4,07 ευρώ. Το ίδιο πλέγμα δίνει τη τιμή της αντίστοιχης ευρωπαϊκής option ως 3,91 ευρώ. Η πραγματική ευρωπαϊκή τιμή δίνεται από τον τύπο των Black και Scholes είναι 4,08 ευρώ. Η εκτίμηση ελέγχου της μεταβλητής για την αμερικανική τιμή είναι επομένως

4,07 + 4,08 – 3,91 = 4,24 ευρώ

Ρητή μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών

Η μέθοδος της σιωπηρής πεπερασμένης διαφοράς έχει το πλεονέκτημα να είναι πολύ δυνατή. Πάντοτε συγκλίνει στη λύση τη διαφορικής εξίσωσης καθώς το ΔS και το Δt πλησιάζουν το μηδέν. Ένα από τα μειονεκτήματα της μεθόδου της σιωπηρής πεπερασμένης διαφοράς είναι ότι πρέπει να λυθούν M – 1 εξισώσεις ταυτόχρονα προκειμένου να υπολογίσουμε το $f_{i,j}$ από το $f_{i+1,j}$. Η μέθοδος μπορεί να απλουστευθεί αν οι τιμές των $\partial f/\partial S$ και $\partial^2 f/\partial S^2$ στο σημείο (i,j) του πλέγματος θεωρηθούν αν είναι ίδιες με του σημείου (i+1,j). Οι εξισώσει (24) και (25) τότε γίνονται

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2 \cdot \Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2 f_{i+1,j}}{\Delta S^2}$$

Η διαφορική εξίσωση είναι τότε

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r-q) \cdot j \cdot \Delta S \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2 \cdot \Delta S} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2 f_{i+1,j}}{\Delta S^2} = r \cdot f_{i,j}$$

ή

$$f_{i,j} = a_j^* f_{i+1,j-1} + b_j^* f_{i+1,j} + c_j^* f_{i+1,j+1} \tag{34}$$

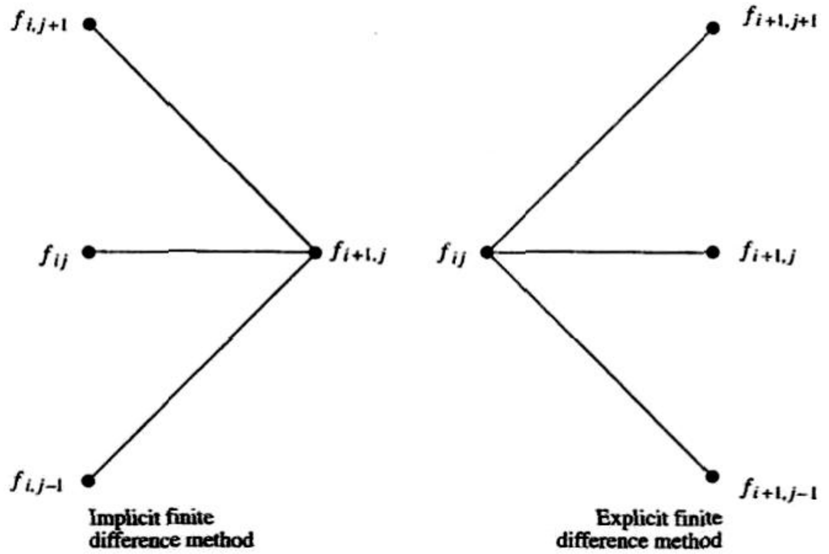
όπου

$$a_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(-\frac{1}{2}(r-q) j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right)$$

$$b_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(1 - \sigma^2 j^2 \Delta t\right)$$

$$c_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(\frac{1}{2}(r-q) j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right)$$

Αυτό δημιουργεί αυτή που είναι γνωστή ως *ρητή μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών*. Το σχήμα 19.16 δείχνει τη διαφορά ανάμεσα στις μεθόδους σιωπηρών διαφορών και ρητών διαφορών. Η σιωπηρή μέθοδος οδηγεί στην εξίσωση (27), η οποία δίνει μια σχέση ανάμεσα σε τρεις διαφορετικές τιμές της option τη χρονική στιγμή $i \cdot \Delta t$ (δηλ. $f_{i,j-1}$, $f_{i,j}$, και $f_{i,j+1}$) και μια τιμή για την option τη χρονική στιγμή $(i+1) \cdot \Delta t$ (δηλ. $f_{i+1,j}$). Η ρητή μέθοδος οδηγεί στην εξίσωση (34), η οποία δίνει μια σχέση μεταξύ μια τιμή για την option τη χρονική στιγμή $i \cdot \Delta t$ ($f_{i,j}$) και τρεις διαφορετικές τιμές της option τη χρονική στιγμή $(i+1) \cdot \Delta t$ (δηλ. $f_{i+1,j-1}$, $f_{i+1,j}$, και $f_{i+1,j+1}$).



Σχήμα 4.16: *Διαφορά μεταξύ σιωπηρών και ρητών μεθόδων πεπερασμένων διαφορών*

Παράδειγμα 11

Ο πίνακας 5 δείχνει το αποτέλεσμα της χρήσης της μεθόδου ρητών πεπερασμένων διαφορών για την τιμολόγηση της αμερικανικής option πώλησης του περιγράφεται στο Παράδειγμα 1. Όπως και στο Παράδειγμα 10, επιλέγονται οι τιμές 20, 10 και 5 για τα M, N και ΔS αντίστοιχα. Η τιμή της option που δίνεται από το πλέγμα είναι 4,26 ευρώ.

Αλλαγή της μεταβλητής

Είναι υπολογιστικά πιο αποτελεσματική η χρήση μεθόδων πεπερασμένων διαφορών με την lnS παρά με την S ως βασική μεταβλητή. Ορίζουμε Z = lnS. Η εξίσωση (21) γίνεται

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial Z}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}=rf$$

Πίνακας 4.5: *Πλέγμα για την αξιολόγηση της αμερικανικής* option *του Παραδείγματος 1 με τη χρήση μεθόδου ρητών πεπερασμένων διαφορών.*

Τιμή μετοχής (€)	Χρόνος για την ωρίμανση (σε μήνες)										
	5	4,5	4	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0
100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
95	0,02	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
90	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
85	0,09	0,07	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
80	0,16	0,12	0,09	0,07	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
75	0,27	0,22	0,17	0,13	0,09	0,06	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00
70	0,47	0,39	0,32	0,25	0,18	0,13	0,08	0,04	0,02	0,00	0,00
65	0,82	0,71	0,60	0,49	0,38	0,28	0,19	0,11	0,05	0,02	0,00
60	1,42	1,27	1,11	0,95	0,78	0,62	0,45	0,30	0,16	0,05	0,00
55	2,43	2,24	2,05	1,83	1,61	1,36	1,09	0,81	0,51	0,22	0,00
50	4,07	3,88	3,67	3,45	3,19	2,91	2,57	2,17	1,66	0,99	0,00
45	6,58	6,44	6,29	6,13	5,96	5,77	5,57	5,36	5,17	5,02	5,00
40	10,15	10,1	10,05	10,01	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00
35	15,00	15,0	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00
30	20,00	20,0	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00
25	25,00	25,0	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00
20	30,00	30,0	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00
15	35,00	35,0	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00
10	40,00	40,0	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00
5	45,00	45,0	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00
0	50,00	50,0	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00

Το πλέγμα τότε αξιολογεί το derivative για ισαπέχουσες τιμές για το S. Η διαφορική εξίσωση για την απεριόριστη μέθοδο γίνεται

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t}+(r-q-\sigma^2/2)\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\cdot\Delta Z}+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\frac{f_{i,j+1}+f_{i,j-1}-2f_{i,j}}{\Delta Z^2}=r\cdot f_{i,j}$$

ή

$$a_j f_{i,j-1}+\beta_j f_{i,j}+\gamma_j f_{i,j+1}=f_{i+1,j} \tag{35}$$

όπου

$$a_j=\frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r-q-\sigma^2/2)-\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

$$\beta_j=1+\frac{\Delta t}{\Delta Z^2}\sigma^2+r\Delta t$$

$$\gamma_j=-\frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r-q-\sigma^2/2)-\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

Η διαφορική εξίσωση για τη ρητή μέθοδο γίνεται

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t}+(r-q-\sigma^2/2)\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}}{2\cdot\Delta Z}+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\frac{f_{i+1,j+1}+f_{i+1,j-1}-2f_{i+1,j}}{\Delta Z^2}=r\cdot f_{i,j}$$

ή

$$a_j^* f_{i+1,j-1}+\beta_j^* f_{i+1,j}+\gamma_j^* f_{i+1,j+1}=f_{i,j} \tag{36}$$

όπου

$$a_j^*=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(-\frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r-q-\sigma^2/2)+\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2\right) \tag{37}$$

$$\beta_j^*=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(1-\frac{\Delta t}{\Delta Z^2}\sigma^2\right) \tag{38}$$

$$\gamma_j^*=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(\frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r-q-\sigma^2/2)+\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2\right) \tag{39}$$

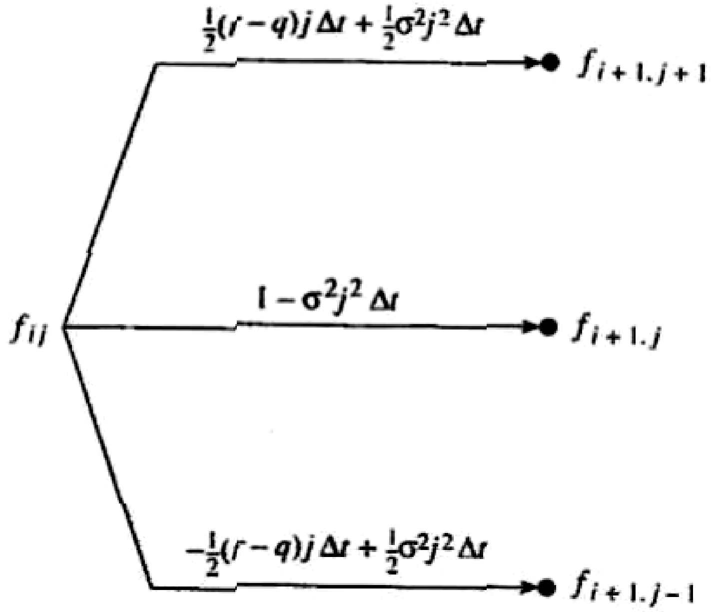
Η προσέγγιση για την αλλαγή της μεταβλητής έχει την ιδιότητα ότι τα α_j, β_j, γ_j, καθώς επίσης και τα a_j^*, β_j^*, γ_j^* είναι ανεξάρτητα του j… Στις περισσότερες περιπτώσεις, μια καλή επιλογή για το ΔZ είναι $\sigma\sqrt{3\Delta t}$.

Προσεγγίσεις σε σχέση με το τριώνυμο δέντρο

Η ρητή μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών είναι ισοδύναμη με την προσέγγιση για το τριώνυμο δέντρο. Στις εκφράζεις a_j^*, β_j^* και γ_j^* στην εξίσωση (34), μπορούμε να ερμηνεύσουμε τους όρους ως εξής:

$-\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t$:	Πιθανότητα της τιμής της μετοχής να μειωθεί από jΔS σε (j – 1)ΔS στη χρονική στιγμή Δt.
$1-\sigma^2 j^2\Delta t$:	Πιθανότητα για την τιμής της μετοχής να μείνει αμετάβλητη στην τιμή jΔS στη χρονική στιγμή Δt.
$\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t$:	Πιθανότητα της τιμής της μετοχής να αυξηθεί από jΔS σε (j + 1)ΔS στη χρονική στιγμή Δt.

Αυτή η ερμηνεία φαίνεται στο σχήμα 19.17. Οι τρεις πιθανότητες έχουν ως άθροισμα τη μονάδα. Δίνουν την αναμενόμενη αύξηση στην τιμή της μετοχής στη χρονική στιγμή Δt ως $(r-q)\cdot j\cdot\Delta S\cdot\Delta t = (r-q)\cdot\Delta S\cdot\Delta t$. Αυτό είναι η αναμενόμενη αύξηση σε έναν ουδετέρου κινδύνου κόσμο. Για μικρές τιμές του Δt, δίνουν επίσης τη διακύμανση της μεταβολής της τιμής της μετοχής σε χρόνο Δt ως $\sigma^2\cdot j^2\cdot\Delta S^2\cdot\Delta t = \sigma^2\cdot\Delta S^2\cdot\Delta t$. Αυτό αντιστοιχεί στη στοχαστική διαδικασία που ακολουθείται από το S. Η τιμή της f στη χρονική στιγμή $i\cdot\Delta t$ υπολογίζεται ως η αναμενόμενη τιμή της f στη χρονική στιγμή $(i+1)\cdot\Delta t$ σε έναν ουδετέρου κινδύνου κόσμου, μειωμένη κατά το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο.



Σχήμα 4.17: *Ερμηνεία της ρητής μεθόδου πεπερασμένων διαφορών ως τριωνυμικό δέντρο*

Για να λειτουργήσει σωστά η ρητή έκδοση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, οι τρεις «πιθανότητες»

$$-\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

$$1-\sigma^2 j^2 \Delta t$$

$$\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

θα πρέπει να είναι όλες θετικές. Στο παράδειγμα 11, το $1 - \sigma^2 j^2 \Delta t$ είναι αρνητικό όταν $j \geq 13$ (δηλ. όταν $S \geq 65$). Αυτό εξηγεί τις αρνητικές τιμές στην option και άλλες ασυνέπειες στο πάνω και αριστερά τμήμα του Πίνακα 5. Αυτό το παράδειγμα δείχνει το κύριο πρόβλημα που συνδέεται με τη μέθοδο των ρητών πεπερασμένων διαφορών. Επειδή οι πιθανότητες στο συναφές δέντρο μπορεί να είναι αρνητικές, δεν παρουσιάζει απαραιτήτως αποτελέσματα που συγκλίνουν στη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Όταν χρησιμοποιείται η προσέγγιση αλλαγή της μεταβλητής (βλ. εξισώσεις (36) έως (39)), η πιθανότητα ότι το $Z = \ln S$ να μειωθεί κατά ΔZ και να αυξηθεί κατά ΔZ είναι

$$-\frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r-q-\sigma^2/2) + \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

$$1-\frac{\Delta t}{\Delta Z^2}\sigma^2$$

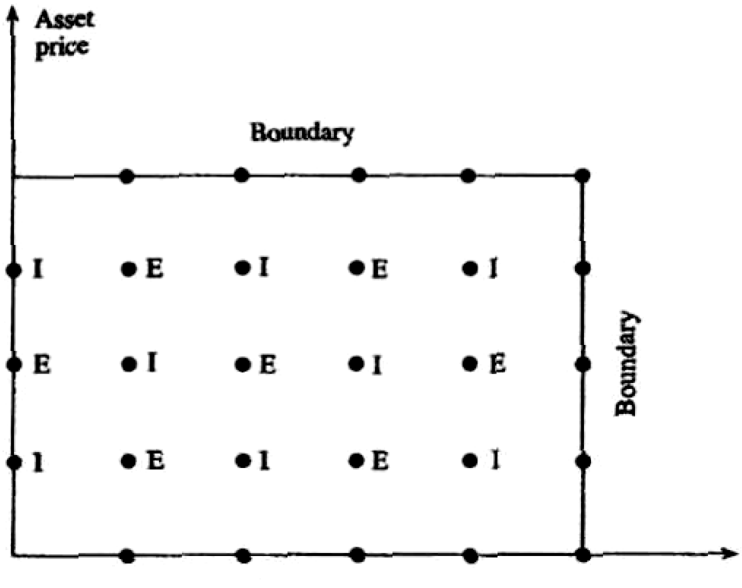
$$\frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r - q - \sigma^2/2) + \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

αντίστοιχα. Αυτές οι κινήσεις στο Z αντιστοιχούν στην τιμή της μετοχής που μεταβάλλεται από S σε $Se^{-\Delta Z}$, S και $Se^{\Delta Z}$ αντίστοιχα. Αν θέσουμε $\Delta Z = \sigma\sqrt{3\Delta t}$, τότε το δέντρο και οι πιθανότητες είναι ίδιες με εκείνες για την προσέγγιση μέσω τριώνυμου δέντρου στην ενότητα 4 του ιδίου κεφαλαίου.

Άλλες μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών

Πολλές από τις άλλες μεθόδους πεπερασμένων διαφορών που έχουν προταθεί έχουν μερικά χαρακτηριστικά της ρητής μεθόδου πεπερασμένων διαφορών και μερικά χαρακτηριστικά της σιωπηρής μεθόδου πεπερασμένων διαφορών.

Σε αυτήν που είναι γνωστή ως *μέθοδος «κουτσού»* (hopscotch method), εναλλάσσονται στους υπολογισμούς μας η ρητή και η σιωπηρή μέθοδος καθώς προχωρούμε από κόμβο σε κόμβο. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 4.18. Κάθε φορά, κάνουμε πρώτα όλους τους υπολογισμούς στους «ρητούς» κόμβους (συμβολίζονται με γράμμα Ε) κατά το συνήθη τρόπο. Οι «σιωπηροί» κόμβοι (συμβολίζονται με το γράμμα Ι) μπορούν να αντιμετωπισθούν χωρίς την επίλυση μιας σειράς εξισώσεων επειδή οι τιμές στους παρακείμενους κόμβους έχουν ήδη υπολογιστεί.



Σχήμα 4.18: *Η μέθοδος αλμάτων. Το Ι υποδηλώνει τον κόμβο στον οποίο γίνονται οι απεριόριστοι υπολογισμοί. Το Ε υποδηλώνει τον κόμβο στον οποίο γίνονται οι ρητοί υπολογισμοί*

Η μέθοδος των Crank – Nicolson είναι ο μέσος όρος των ρητών και σιωπηρών μεθόδων. Για τη σιωπηρή μέθοδο η εξίσωση (27) δίνει

$$f_{i,j} = a_j f_{i-1,j-1} + b_j f_{i-1,j} + c_j f_{i-1,j+1}$$

Για τη ρητή μέθοδο η εξίσωση (34) δίνει

$$f_{i-1,j} = a_j^* f_{i,j-1} + b_j^* f_{i,j} + c_j^* f_{i,j+1}$$

Η μέθοδος των Crank – Nicolson δίνει το μέσο όρο των δύο εξισώσεων και έτσι παίρνουμε

$$f_{i,j} + f_{i-1,j} = a_j f_{i-1,j-1} + b_j f_{i-1,j} + c_j f_{i-1,j+1} + a_j^* f_{i,j-1} + b_j^* f_{i,j} + c_j^* f_{i,j+1}$$

Θέτοντας

$$g_{i,j} = f_{i,j} - a_j^* f_{i,j-1} - b_j^* f_{i,j} - c_j^* f_{i,j+1}$$

παίρνουμε

$$g_{i,j} = a_j f_{i-1,j-1} + b_j f_{i-1,j} + c_j f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j}$$

Αυτό δείχνει ότι η εφαρμογή της μεθόδου των Crank – Nicolson είναι παρόμοια με την εφαρμογή της σιωπηρής μεθόδου πεπερασμένων διαφορών. Το πλεονέκτημα της μεθόδου των Crank – Nicolson είναι ότι έχει ταχύτερη σύγκλιση είτε από τη ρητή είτε από τη σιωπηρή μέθοδο.

Εφαρμογές των μεθόδων πεπερασμένων διαφορών

Οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τους ίδιους τύπους προβλημάτων τιμολόγησης derivatives καθώς επίσης και για προσεγγίσεις των δέντρων. Μπορούν να χειριστούν derivative αμερικανικού αλλά και ευρωπαϊκού τύπου αλλά δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν εύκολα σε καταστάσεις όπου η αποπληρωμή από ένα derivative εξαρτάται από το προηγούμενο ιστορικό της βασικής μεταβλητής. Οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών μπορούν να χρησιμοποιηθούν, σε βάρος μιας σημαντικής αύξησης του υπολογιστικού χρόνου, όταν υπάρχουν πολλές μεταβλητές κατάστασης. Το πλέγμα στο σχήμα 19.15 γίνεται τότε πολυδιάστατο.
Η μέθοδος για τον υπολογισμό των ελληνικών γραμμάτων είναι παρόμοια με εκείνη που χρησιμοποιείται για τα δέντρα. Τα γράμματα δέλτα, γάμμα και θήτα μπορούν να υπολογιστούν άμεσα από τις τιμές $f_{i,j}$ του πλέγματος. Για το ωμέγα, είναι απαραίτητο να γίνει μια μικρή αλλαγή στη μεταβλητότητα και επαναϋπολογίσουμε την αξία του derivative χρησιμοποιώντας το ίδιο πλέγμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Θεωρία πιθανοτήτων και μέτρα

5.1 Derivatives καιρού

Πολλές εταιρείες είναι σε θέση όπου η απόδοσή τους μπορεί να επηρεαστεί αρνητικά από τον καιρό. Έχει νόημα για αυτές τις εταιρείες να εξετάσουν την αντιστάθμιση του κινδύνου του καιρού με τον ίδιο τρόπο που αντισταθμίζουν το συνάλλαγμα ή τους κινδύνους του επιτοκίου.

Τα πρώτα derivatives καιρού εισήχθησαν το 1997. Για να καταλάβουμε πώς λειτουργούν, εξηγούμε δύο μεταβλητής:

HDD: βαθμοημέρες θέρμανσης (heating degree days)
CDD: βαθμοημέρες ψύξης (cooling degree days)

Η HDD μιας ημέρας ορίζεται ως

$$HDD = \max(0, 65 - A)$$

Η CDD μιας ημέρας ορίζεται ως

$$CDD = \max(0, A - 65)$$

όπου A είναι ο μέσος όρος της υψηλότερης και χαμηλότερης θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια της ημέρας σε ένα συγκεκριμένο μετεωρολογικό σταθμό, μετρημένο σε βαθμούς Fahrenheit. Για παράδειγμα, αν η μέγιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (μεσάνυχτα μέχρι μεσάνυχτα) είναι 68^{o} Fahrenheit και η ελάχιστη θερμοκρασία είναι 44^{o} Fahrenheit, τότε A = 56. Η ημερήσια HDD είναι τότε 9 και η ημερήσια CDD είναι 0.

Ένα τυπικό εξωχρηματιστηριακό προϊόν είναι ένα forward ή ένα συμβόλαιο option που παρέχει αποπληρωμή που εξαρτάται από τις σωρευτικές HDD ή CDD κατά τη διάρκεια ενός μήνα (δηλ. το σύνολο των HDD και CDD για κάθε μέρα στο μήνα). Για παράδειγμα, ένας έμπορος derivatives θα μπορούσε τον Ιανουάριο του 2008 να πουλήσει σε έναν πελάτη του μια option αγοράς για τη σωρευτική HDD κατά τη διάρκεια του Φεβρουαρίου του 2009 στο μετεωρολογικό σταθμό του αεροδρομίου του O'Hare στο Σικάγο με τιμή διάθεσης τα 700 ευρώ και ρυθμό πληρωμής 10.000 ευρώ ανά βαθμοημέρα. Αν η πραγματική σωρευτική HDD είναι 820, η αποπληρωμή είναι 1,2 εκατομμύρια ευρώ. Τα συμβόλαια συνήθως περιλαμβάνουν ένα ανώτατο όριο πληρωμών. Αν το ανώτατο όριο πληρωμών στο παράδειγμά μας είναι 1,5 εκατομμύρια ευρώ, το συμβόλαιο είναι ισοδύναμο με bull spread (= το να κάνει κανείς πολλά χρήματα εάν αυξάνεται μια μετοχή. Αν δεν αυξηθεί, τα χάνει όλα. Είναι ένας από τους ελιγμούς που περιλαμβάνουν πάρα πολύ μεγάλο κίνδυνο και πάρα πολύ άγχος). Ο πελάτης έχει μακρά option αγοράς στη σωρευτική HDD με τιμή διάθεσης τα 700 ευρώ και μια σύντομη option αγοράς με τιμή διάθεσης τα 850 ευρώ.

Η HDD μιας ημέρας είναι ένα μέτρο για τον όγκο της ενέργειας που απαιτείται για τη θέρμανση κατά τη διάρκεια της ημέρας. Η CDD μιας ημέρας είναι ένα μέτρο για τον όγκο της ενέργειας που απαιτείται για την ψύξη κατά τη διάρκεια της ημέρας. Τα περισσότερα συμβόλαια derivatives καιρού συνάπτονται από παραγωγούς και καταναλωτές ενέργειας. Αλλά οι λιανοπωλητές, οι αλυσίδες σούπερ μάρκετ, οι κατασκευαστές φαγητών και ποτών, οι εταιρείες παροχής υπηρεσιών υγείας, οι γεωργικές επιχειρήσεις καθώς και οι εταιρείες του κλάδου αναψυχής είναι επίσης δυνητικοί χρήστες των derivatives καιρού. Ο Όμιλος Διαχείρισης των Κινδύνων του Καιρού (Weather Risk Management Association – www.wrma.org) έχει συσταθεί προκειμένου να εξυπηρετήσει τα συμφέροντα της βιομηχανίας της διαχείρισης των κινδύνων των καιρικών συνθηκών.

Το Σεπτέμβριο του 1999, το Chicago Mercantile Exchange (Εμπορική Συναλλαγή του Σικάγο) ξεκίνησε τις συναλλαγές με τα futures σχετικά με τις καιρικές συνθήκες και τις ευρωπαϊκές options για τα futures σχετικά με τον καιρό. Το συμβόλαια που είναι πάνω στις σωρευτικές HDD και CDD για ένα μήνα, παρατηρούνται σε έναν μετεωρολογικό σταθμό. Τα συμβόλαια τίθενται σε χρηματικό διακανονισμό ακριβώς στο τέλος του μήνα, δεδομένου ότι οι HDD και οι CDD είναι γνωστές. Ένα συμβόλαιο futures είναι 100 ευρώ επί τις σωρευτικές HDD ή CDD. Οι HDD και οι CDD υπολογίζονται από μια εταιρεία, την Earth Satelite Corporation, χρησιμοποιώντας εξοπλισμό αυτοματοποιημένης συλλογής δεδομένων.

Η θερμοκρασία σε μια συγκεκριμένη τοποθεσία μπορεί να θεωρηθεί εύλογα ότι έχει μηδενικό συστηματικό κίνδυνο. Επίσης, θεωρείται δεδομένο ότι τα derivatives του καιρού μπορούν να τιμολογηθούν χρησιμοποιώντας την προσέγγιση μέσω ιστορικών δεδομένων. Θεωρήστε, για παράδειγμα, την option αγοράς στις HDD του Φεβρουαρίου του 2009 στο αεροδρόμιο του O'Hare στο Σικάγο στο οποίο αναφερθήκαμε νωρίτερα. Συλλέγοντας ας πούμε δεδομένα για 50 χρόνια, μπορεί να υπολογιστεί μια κατανομή πιθανότητας για την option. Αυτό με τη σειρά του μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παρέχει για κατανομή πιθανότητας για την αποπληρωμή της option. Μια εκτίμηση για την αξία της option είναι η μέση τιμή αυτής της κατανομής, μειωμένης κατά το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο. Θα ήταν επιθυμητό να προσαρμοστεί η κατανομή της πιθανότητας για τις τάσεις της θερμοκρασίας. Για παράδειγμα, μια γραμμική παλινδρόμηση θα έδειχνε ότι (ίσως εξαιτίας της υπερθέρμανσης του πλανήτη) η HDD στο Φεβρουάριο μειώνεται με ρυθμό 4 κάθε χρόνο κατά μέσο όρο. Αν είναι έτσι, το αποτέλεσμα για την παλινδρόμηση θα μπορούσε για να υπολογίσει τη νέα κατανομή πιθανότητας όπως έχει προσαρμοστεί με την προσθήκη τάσης για την HDD του Φεβρουαρίου 2009.

5.2 Derivatives ενέργειας

Οι εταιρείες ενέργειας είναι μεταξύ των πιο δραστήριων και εξελιγμένων χρηστών των derivatives. Πολλά προϊόντα ενέργειας εμπορεύονται τόσο στις εξωχρηματιστηριακές αγορές όσο και στις συναλλαγές. Σε αυτήν την ενότητα, εξετάζονται τα derivatives του αργού πετρελαίου, του φυσικού αερίου και της ηλεκτρικής ενέργειας.

Αργό πετρέλαιο

Το αργό πετρέλαιο είναι από τα πιο σημαντικά προϊόντα στον κόσμο, με παγκόσμια ζήτηση που ανέρχεται σε περίπου 80 εκατομμύρια βαρέλια ημερησίως. Τα δεκαετή συμβόλαια προσφοράς σταθερής τιμής ήταν κάτι το κοινό στην εξωχρηματιστηριακή αγορά για πολλά χρόνια. Αυτές είναι οι ανταλλαγές όπου ανταλλάσσεται το πετρέλαιο σε μια σταθερή τιμή με πετρέλαιο σε κυμαινόμενη τιμή.

Στη δεκαετία του 1970 η τιμή του πετρελαίου ήταν πολύ ασταθής. Ο πόλεμος στη Μέση Ανατολή το 1973 οδήγησε σε τριπλασιασμό των τιμών του πετρελαίου. Η πτώση του Σάχη του Ιράν στα τέλη της δεκαετίας του 1970 αύξησε πάλι τις τιμές. Τα γεγονότα αυτά οδήγησαν τους παραγωγούς και χρήστες του πετρελαίου σε μια διαπίστωση ότι χρειάζονταν περισσότερο εξελιγμένα εργαλεία για τη διαχείριση του κινδύνου της τιμής του πετρελαίου. Στη δεκαετία του 1980 τόσο οι εξωχρηματιστηριακές αγορές όσο και οι αγορές συναλλάγματος ανέπτυξαν προϊόντα για να καλύψουν αυτήν την ανάγκη.

Στην εξωχρηματιστηριακή αγορά, σχεδόν κάθε derivative που είναι διαθέσιμο στις κοινές μετοχές ή στους χρηματιστηριακούς δείκτες είναι τώρα διαθέσιμο με το πετρέλαιο να αποτελεί το βασικό κεφάλαιο. Οι ανταλλαγές, οι προθεσμιακές συμβάσεις και οι options είναι δημοφιλείς. Τα συμβόλαια μερικές φορές απαιτούν χρηματικό διακανονισμό και μερικές φορές απαιτούν διακανονισμό κατά τη φυσική παράδοση (δηλ. κατά την παράδοση του πετρελαίου).

Οι συμβάσεις που διαπραγματεύονται ανταλλαγές είναι επίσης δημοφιλείς. Το New York Mercantile Exchange (NYMEX) και το International Petroleum Exchange (IPE) εμπορεύονται έναν αριθμό futures πετρελαίου και προθεσμιακά συμβόλαια options. Μερικά από τα προθεσμιακά συμβόλαια διακανονίζονται σε μετρητά. Άλλα διευθετούνται με φυσική παράδοση. Για παράδειγμα, τα προθεσμιακά συμβόλαια αργού πετρελαίου της εταιρείας Brent που εμπορεύονται στο IPE έχουν χρηματικό διακανονισμό που βασίζεται στην τιμή του δείκτη της Brent. Το ελαφρύ αργό πετρέλαιο που εμπορεύονται στο NYMEX απαιτεί φυσική παράδοση. Το NYMEX επίσης εμπορεύεται δημοφιλείς συμβάσεις σε δύο προϊόντα διύλισης: το πετρέλαιο θέρμανσης και τη βενζίνη. Και στις δύο περιπτώσεις, ένα συμβόλαιο είναι για παράδοση 42.000 γαλονιών.

Φυσικό αέριο

Η βιομηχανία του φυσικού αερίου σε όλον τον κόσμο διέρχεται από μια περίοδο απελευθέρωσης και της κατάργησης των κυβερνητικών μονοπωλίων. Ο προμηθευτής του φυσικού αερίου δεν είναι τώρα απαραιτήτως η ίδια εταιρεία με τον παραγωγό του φυσικού αερίου. Οι προμηθευτές είναι αντιμέτωποι με το πρόβλημα της αντιμετώπισης της ημερήσιας ζήτησης.

Ένα τυπικό εξωχρηματιστηριακό συμβόλαιο είναι για την παράδοση ενός συγκεκριμένου ποσού φυσικού αερίου σε ένα περίπου ενιαίο ποσοστό για τη διάρκεια ενός μήνα. Τα προθεσμιακά συμβόλαια, οι options και οι ανταλλαγές είναι διαθέσιμες στην εξωχρηματιστηριακή αγορά. Ο πωλητής του φυσικού αερίου είναι συνήθως υπεύθυνος για τη μετακίνηση του φυσικού αερίου μέσω των αγωγών μέχρι την ορισμένη τοποθεσία.

Το NYMEX εμπορεύεται ένα συμβόλαιο για την παράδοση 10.000 εκατομμυρίων BTU (British thermal units) φυσικού αερίου. Το συμβόλαιο, αν δεν είναι κλειστό, απαιτεί να γίνει φυσική παράδοση κατά το μήνα της παράδοσης σε περίπου ενιαίο συντελεστή σε ένα συγκεκριμένο κόμβο στη Λουιζιάνα. ΤΟ IPE εμπορεύεται ένα παρόμοιο συμβόλαιο στο Λονδίνο.

Ηλεκτρική ενέργεια

Η ηλεκτρική ενέργεια είναι ένα ασυνήθιστο εμπόρευμα επειδή δε μπορεί εύκολα να αποθηκευτεί. Η μέγιστη προμήθεια ηλεκτρικής ενέργειας σε μια περιφέρεια καθορίζεται ανά πάσα στιγμή από τη μέγιστη χωρητικότητα του συνόλου της ηλεκτρικής ενέργειας που παράγουν τα εργοστάσια της περιοχής. Στις Ηνωμένες Πολιτείες υπάρχουν 140 περιοχές γνωστές ως περιοχές ελέγχου. Η ζήτηση και προσφορά συνταιριάζονται πρώτα εντός της περιοχής ελέγχου και τυχόν περίσσεια ενέργειας πωλείται στις άλλες περιοχές ελέγχου. Είναι αυτή η περίσσεια ισχύος που αποτελεί ολόκληρη την αγορά της ηλεκτρικής ενέργειας. Η ικανότητα μιας περιοχής ελέγχου να πουλά ισχύ σε άλλη περιοχή εξαρτάται από την ικανότητα μετάδοσης των γραμμών μεταξύ των δύο περιοχών. Η μετάδοση από μια περιοχή σε μια άλλη περιλαμβάνει το κόστος μετάδοσης, που χρεώνεται από τον κάτοχο της γραμμής και υπάρχουν γενικά πολλές μεταδόσεις ή απώλειες ενέργειας.

Μια σημαντική χρήση της ηλεκτρικής ενέργειας είναι για τα συστήματα κλιματισμού. Ως αποτέλεσμα, η ζήτηση για ηλεκτρική ενέργεια, και επομένως και η τιμή της, είναι πολύ μεγαλύτερη τους καλοκαιρινούς μήνες παρά στους χειμερινούς. Η μη δυνατότητα αποθήκευσης της ηλεκτρικής ενέργειας προκαλεί περιστασιακά μεγάλες μετακινήσεις στην τιμή τοις μετρητοίς. Οι καύσωνες είναι γνωστό ότι αυξάνουν τη τιμή τοις μετρητοίς περίπου 1000% για μικρές χρονικές περιόδους.

Όπως το φυσικό αέριο, η ηλεκτρική ενέργεια έχει διέλθει από μια περίοδο απελευθέρωσης και της κατάργησης των κρατικών μονοπωλίων. Αυτό συνοδεύτηκε από την ανάπτυξη μιας αγοράς derivatives ηλεκτρικής ενέργειας. Το NYMEX τώρα εμπορεύεται ένα προθεσμιακό συμβόλαιο στην τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας και υπάρχει μια δραστήρια εξωχρηματιστηριακή αγορά στα προθεσμιακά συμβόλαια, τις options και τις ανταλλαγές. Μια τυπική σύμβαση (χρηματιστηριακή ή εξωχρηματιστηριακή) επιτρέπει στη μια πλευρά να λάβει ένα συγκεκριμένο αριθμό μεγαβατώρων για μια καθορισμένη τιμή και σε μια καθορισμένη θέση κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου μήνα. Σε ένα συμβόλαιο 5 x 8, η ισχύς λαμβάνεται για 5 ημέρες την εβδομάδα (Δευτέρα μέχρι Παρασκευή) κατά τη διάρκεια της περιόδου εκτός αιχμής (11 μ.μ. μέχρι 7 π.μ.) για το συγκεκριμένο μήνα. Σε ένα συμβόλαιο 5 x 16, η ισχύς λαμβάνεται για 5 ημέρες την εβδομάδα κατά τη διάρκεια της περιόδου αιχμής (7 π.μ. μέχρι 11 μ.μ.) για το συγκεκριμένο μήνα. Σε ένα συμβόλαιο 7 x 24, η ισχύς λαμβάνεται όλο το 24ωρο για όλες τις ημέρες του μήνα. Τα συμβόλαια για τις options έχουν είτε ημερήσια είτε μηνιαία διάθεση. Στην περίπτωση της καθημερινής διάθεσης, ο κάτοχος της option μπορεί να επιλέξει να λαμβάνει σε κάθε ημέρα του μήνα το ορισμένο ποσό της ισχύος στην ορισμένη τιμή διάθεσης. Όταν υπάρχει μηνιαία διάθεση, παίρνεται μια απλή απόφαση για το αν θα λάβει ισχύ για ολόκληρο το μήνα στην τιμή διάθεσης που υπάρχει στην αρχή του μήνα.

Ένα ενδιαφέρον συμβόλαιο για τις αγορές ηλεκτρικής ενέργειας και το φυσικού αερίου είναι αυτό που είναι γνωστό ως ταλαντευόμενη option ή option λήψης-και-πληρωμής. Σε αυτό το συμβόλαιο καθορίζεται από τον κάτοχο της option ένα ελάχιστο και ένα μέγιστο ποσό ισχύος που πρέπει να αγοραστεί σε μια ορισμένη τιμή για κάθε ημέρα κατά τη διάρκεια ενός μήνα και για το μήνα ως σύνολο. Ο κάτοχος της option μπορεί να αλλάξει το ρυθμό με τον οποίο αγοράζεται η ισχύς κατά τη διάρκεια του μήνα, αλλά συνήθως υπάρχει ένα όριο στο συνολικό αριθμό των αλλαγών που μπορούν να γίνουν.

Μοντελοποίηση των τιμών ενέργειας

Ένα λογικό μοντέλο για τις τιμές της ενέργειας και άλλο προϊόντων πρέπει να περιλαμβάνει τόσο τη μέση επαναφορά όσο και τη μεταβλητότητα. Ένα πιθανό μοντέλο είναι:

$$dlnS = [\theta(t) - \alpha lnS]dt + \sigma dz \qquad (1)$$

όπου το S είναι η τιμή της ενέργειας και τα α και σ είναι σταθερές παράμετροι. Η παράμετρος σ είναι η μεταβλητότητα του S και το α μετρά την ταχύτητα με την οποία αυτή επανέρχεται σε ένα μακροπρόθεσμο μέσο επίπεδο. Ο όρος θ(t) καλύπτει την εποχικότητα και τις τάσεις. Οι παράμετροι α και σ μπορούν να υπολογιστούν από ιστορικά δεδομένα ή να αντληθούν από τις τιμές των derivatives.

Οι παράμετροι α και σ είναι διαφορετικοί για διαφορετικές πηγές ενέργειας. Για το αργό πετρέλαιο, η παράμετρος α του ρυθμού αντιστροφής στην εξίσωση (1) είναι περίπου 0,5 και ο παράμετρος μεταβλητότητας σ είναι περίπου 20%. Για το φυσικό αέριο, το α είναι περίπου 1,0 και το σ περίπου 40%. Για τον ηλεκτρισμό, το α είναι συνήθως μεταξύ του 10 και 20, ενώ το σ είναι από 100 μέχρι 200%. Η εποχικότητα των τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας είναι επίσης μεγαλύτερη.

Πώς ένας παραγωγός ενέργειας μπορεί να αντισταθμίσει τους κινδύνους

Υπάρχουν δύο στοιχεία για τους κινδύνους που αντιμετωπίζει ένας παραγωγός ενέργειας. Το ένα είναι ο κίνδυνος της τιμής, ενώ ο άλλος είναι ο κίνδυνος του όγκου. Αν και οι τιμές προσαρμόζονται ώστε να αντανακλούν τους όγκους, υπάρχει μια όχι και τέλεια σχέση μεταξύ των δύο και οι παραγωγοί ενέργειας πρέπει να λάβουν υπόψη και τα δύο στοιχεία κατά την ανάπτυξη της στρατηγικής αντιστάθμισης. Ο κίνδυνος της τιμής μπορεί να αντισταθμιστεί με τη χρήση των συμβολαίων για τα derivatives ενέργειας που συζητήσαμε σε αυτήν την ενότητα. Οι κίνδυνοι του όγκου μπορεί να αντισταθμιστούν χρησιμοποιώντας τα derivatives των καιρικών συνθηκών που συζητήσαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Ορίζουμε

Y: Το κέρδος για ένα μήνα
P: Οι μέσες τιμές της ενέργειας για το μήνα
T: Σχετική μεταβλητή θερμοκρασίας (HDD ή CDD) για το μήνα

Ένας παραγωγός ενέργειας μπορεί να χρησιμοποιήσει ιστορικά δεδομένα για να αποκτήσει μια βέλτιστη γραμμική σχέση παλινδρόμησης της μορφής

$$Y = \alpha + bP + cT + \varepsilon$$

όπου το ε είναι ο όρος του σφάλματος. Ο παραγωγός ενέργειας μπορεί τότε να αντισταθμίσει τους κινδύνους για το μήνα παίρνοντας μια θέση –b στα προθεσμιακά συμβόλαια ή futures ενέργειας και μια θέση –c στα προθεσμιακά συμβόλαια ή futures των καιρικών φαινομένων. Η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης για την ανάλυση της αποτελεσματικότητας των εναλλακτικών στρατηγικών της option.

5.3 Derivatives Ασφάλισης

Όταν χρησιμοποιούνται συμβόλαια derivatives για λόγους αντιστάθμισης κινδύνων, αυτά έχουν πολλά ίδια χαρακτηριστικά με τις ασφαλιστικές συμβάσεις. Και τα δύο είδη συμβολαίων έχουν σχεδιαστεί για να παρέχουν προστασία από ανεπιθύμητα συμβάντα. Δεν αποτελεί έκπληξη ότι πολλές ασφαλιστικές εταιρείες έχουν θυγατρικές που εμπορεύονται derivatives και που πολλές δραστηριότητες των ασφαλιστικών εταιρειών γίνονται πολύ παρόμοιες με εκείνες των επενδυτικών τραπεζών.

Παραδοσιακά, η ασφαλιστική βιομηχανία έχει αντισταθμίσει την έκθεσή της σε καταστροφικούς (catastrophic – CAT στο εξής) κινδύνους όπως οι τυφώνες και οι σεισμοί χρησιμοποιώντας μια πρακτική που είναι γνωστή ως αντασφάλιση. Οι ασφαλιστικές συμβάσεις μπορούν να πάρουν διάφορες μορφές. Ας υποθέσουμε ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει ένα άνοιγμα ύψους 100 εκατομμυρίων ευρώ για τους σεισμούς στην Καλιφόρνια και θέλει να το περιορίσει στα 30 εκατομμύρια ευρώ. Μια εναλλακτική λύση είναι να συνάψει ετήσια συμβόλαια αντασφάλισης που καλύπτει ένα ποσοστό 70% της έκθεσής της. Αν ο σεισμός στην Καλιφόρνια για ένα συγκεκριμένο έτος χρειάζεται συνολικά 50 εκατομμύρια ευρώ, το κόστος για την εταιρεία θα είναι τότε μόνο 0,3 x 50 ή 15 εκατομμύρια ευρώ. Μια άλλη πιο δημοφιλής εναλλακτική λύση, με τη συμμετοχή χαμηλότερων ασφαλίστρων από αντασφάλισης, είναι να αγοράσει μια σειρά από αντασφαλιστικές συμβάσεις που θα καλύπτουν αυτά που είναι γνωστά ως ανώτατα επίπεδα κόστους. Το πρώτο επίπεδο μπορεί να παρέχει αποζημίωση για ζημιές μεταξύ 30 και 40 εκατομμυρίων ευρώ. Το επόμενο επίπεδο μπορεί να παρέχει αποζημίωση για ζημιές μεταξύ 40 και 50 εκατομμυρίων ευρώ και ούτω καθεξής. Κάθε αντασφαλιστικό συμβόλαιο είναι γνωστό ως αντασφαλιστικό συμβόλαιο υπέρβασης της ζημίας. Ο αντασφαλιστής έχει γράψει ένα bull spread (αναλύθηκε και παραπάνω ο όρος αυτός: (= το να κάνει κανείς πολλά χρήματα εάν αυξάνεται μια μετοχή. Αν δεν αυξηθεί, τα χάνει όλα. Είναι ένας από τους ελιγμούς που περιλαμβάνουν πάρα πολύ μεγάλο κίνδυνο και πάρα πολύ άγχος) για τις συνολικές ζημιές. Είναι μια option αγοράς με τιμή διάθεσης ίση με το χαμηλότερο άκρο του επιπέδου και μια option πώλησης με τιμή διάθεσης είσαι με το άνω άκρο του επιπέδου.

Οι βασικοί φορείς της CAT αντασφάλισης είναι παραδοσιακά οι εταιρείες αντασφάλισης και τα συνδικάτα των Lloyds (τα οποία είναι συνδικάτα των πλουσίων ατόμων απεριόριστης ευθύνης). Τα τελευταία χρόνια η βιομηχανία έχει καταλήξει στο συμπέρασμα ότι οι ανάγκες των αντασφαλίσεων ξεπέρασαν αυτά που μπορούν να παρασχεθούν από αυτές τις παραδοσιακές πηγές. Έχει αναζητήσει για νέους τρόπους με τους οποίους οι κεφαλαιαγορές μπορούν να παρέχουν αντασφάλιση. Ένα από τα γεγονότα που ανάγκασαν τη βιομηχανία να ξανασκεφτεί τις πρακτικές της ήταν ο τυφώνας Andrew το 1992, ο οποίος προκάλεσε περίπου 15 δισεκατομμύρια ασφαλιστικά κόστη στη Φλόριντα. Αυτό ξεπέρασε το σύνολο των ασφαλίστρων που λήφθηκαν στη Φλόριντα κατά τη διάρκεια των προηγούμενων 7 χρόνων. Αν ο τυφώνας Andrew είχε χτυπήσει το Μαϊάμι, υπολογίζεται ότι οι ασφαλιστικές απώλειες θα είχαν ξεπεράσει τα 40 δισεκατομμύρια ευρώ. Ο τυφώνας Andrew και άλλες καταστροφές έχουν οδηγήσει σε αυξήσεις των ασφαλίστρων/αντασφαλίστρων.

Τα χρηματιστηριακά προθεσμιακά συμβόλαια ασφάλισης έχουν αναπτυχθεί από το CBOT (= Chicago Board Of Trade), αλλά δεν έχουν αποδειχθεί ιδιαίτερα επιτυχή. Η εξωχρηματιστηριακή αγορά έχει καταλήξει σε μια σειρά προϊόντων που είναι οι εναλλακτικές λύσεις στην παραδοσιακή αντασφάλιση. Το πιο δημοφιλές είναι ένα ομόλογο CAT. Πρόκειται για ένα ομόλογο που έχει εκδοθεί από μια θυγατρική μιας ασφαλιστικής εταιρείας που καταβάλλει υψηλότερα από το κανονικό επιτόκιο. Σε αντάλλαγμα για τον επιπλέον τόκο, ο κάτοχος του ομολόγου συμφωνεί να δώσει ένα αντασφαλιστικό συμβόλαιο υπέρβασης της ζημίας. Ανάλογα με τους όρους του ομολόγου CAT, ο τόκος ή το κεφάλαιο (ή και τα δύο) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κάλυψη των απαιτήσεων. Στο παράδειγμα που αναφέραμε πιο πάνω όπου μια ασφαλιστική εταιρεία χρειάζεται προστασία για τις ζημίες από το σεισμό της Καλιφόρνια ύψους από 30 μέχρι 40 εκατομμυρίων ευρώ, η ασφαλιστική εταιρεία θα μπορούσε να εκδώσει ομόλογα CAT με συνολικό κεφάλαιο 10 εκατομμυρίων ευρώ. Σε περίπτωση που οι ζημίες της ασφαλιστικής εταιρείας εξαιτίας του σεισμού της Καλιφόρνια υπερέβαιναν τα 30 εκατομμύρια ευρώ, οι κάτοχοι του ομολόγου θα έχαναν το σύνολο ή μέρος του κεφαλαίου τους. Ως εναλλακτική λύση η ασφαλιστική εταιρεία θα κάλυπτε αυτό το επιπλέον επίπεδο κόστους κάνοντας μια πολύ μεγαλύτερη έκδοση ομολογιακού δανείου, όπου μόνο ο τόκος των ομολογιούχων είναι σε κίνδυνο.

Τα ομόλογα CAT δίνουν συνήθως μια μεγάλη πιθανότητα για την ύπαρξη ενός επιτοκίου πάνω από το κανονικό και μια μικρή πιθανότητα για μεγάλη ζημία. Γιατί λοιπόν να ενδιαφέρονται οι επενδυτές γι' αυτά; Η απάντηση είναι ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ των κινδύνων CAT και των αποδόσεων της αγοράς. Τα ομόλογα CAT είναι επομένως μια ελκυστική προσθήκη στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή. Δεν έχουν συστηματικό κίνδυνο και έτσι ο συνολικός κίνδυνος μπορεί να διαφοροποιηθεί τελείως σε ένα μεγάλο χαρτοφυλάκιο. Αν η αναμενόμενη επιστροφή ενός ομολόγου CAT είναι μεγαλύτερη από το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο (και τυπικά έτσι είναι), έχει τη δυνατότητα να βελτιώσει τους συμβιβασμούς για τους κινδύνους των επιστροφών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Πραγματικές options

Μέχρι τώρα έχουμε σχεδόν αποκλειστικά ασχοληθεί με την αποτίμηση των χρηματοοικονομικών κεφαλαίων. Σε αυτό το κεφάλαιο διερευνούμε πώς οι σκέψεις που έχουμε αναπτύξει μπορούν να επεκταθούν στην αξιολόγηση των ευκαιριών επένδυσης κεφαλαίου σε πραγματικά περιουσιακά στοιχεία όπως η γη, τα κτίρια, οι εγκαταστάσεις και οι εξοπλισμοί. Συχνά υπάρχουν options ενσωματωμένες σε αυτές τις επενδυτικές ευκαιρίες (option για την επέκταση των επενδύσεων, option για την εγκατάλειψη μιας επένδυσης, option για την αναβολή της επένδυσης και ούτω καθεξής). Αυτές οι options είναι πολύ δύσκολο να αξιολογηθούν χρησιμοποιώντας τις παραδοσιακές τεχνικές αξιολόγησης επενδυτικών κεφαλαίων. Η προσέγγιση που είναι γνωστή ως πραγματικές options προσπαθεί να ασχοληθεί με αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη θεωρία τιμολόγησης των options.

Το κεφάλαιο ξεκινά εξηγώντας την παραδοσιακή προσέγγιση για την αποτίμηση των επενδύσεων σε πραγματικά περιουσιακά στοιχεία και δείχνει πόσο δύσκολο είναι να αξιολογεί κανείς σωστά τις ενσωματωμένες options όταν χρησιμοποιείται αυτή η προσέγγιση. Στη συνέχεια εξηγεί πώς η προσέγγιση για τη μηδενικού κινδύνου αποτίμηση μπορεί να επεκταθεί για να χειριστεί την αποτίμηση των πραγματικών κεφαλαίων και παρουσιάζει μια σειρά από παραδείγματα που επεξηγούν την εφαρμογή της προσέγγισης σε διαφορετικές καταστάσεις.

6.1 Αξιολόγηση επενδυτικού κεφαλαίου

Η παραδοσιακή προσέγγιση για την αξιολόγηση έργου με πιθανή επένδυση κεφαλαίου είναι γνωστή ως προσέγγιση της «καθαρής παρούσης αξίας» (net present value – NPV). Η καθαρή παρούσα αξία ενός έργου είναι η παρούσα αξία των μελλοντικών αναμενόμενων στοιχειωδών χρηματοροών. Το αναγωγικό επιτόκιο που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της παρούσης αξίας είναι ένα «σταθμισμένο» αναγωγικό επιτόκιο, που επιλέγεται ανάλογα με τον κίνδυνο του έργου. Καθώς η επικινδυνότητα του έργου αυξάνεται, το αναγωγικό επιτόκιο αυξάνεται επίσης.

Για παράδειγμα, θεωρήστε μια επένδυση που κοστίζει 100 εκατομμύρια ευρώ και θα διαρκέσει 5 χρόνια. Οι αναμενόμενες ταμειακές εισροές για κάθε έτος (στον πραγματικό κόσμο) εκτιμάται σε 25 εκατομμύρια ευρώ. Σε περίπτωση που το σταθμισμένο αναγωγικό επιτόκιο είναι 12% (με συνεχή ανατοκισμό), η καθαρή παρούσα αξία της επένδυσης είναι (σε εκατομμύρια ευρώ)

$$-100 + 25e^{-0{,}12x1} + 25e^{-0{,}058x2} + 25e^{-0{,}12x3} + 25e^{-0{,}12x4} + 25\,e^{-0{,}12x5} = -11{,}53$$

Μια αρνητική παρούσα αξία, όπως αυτή που μόλις υπολογίστηκε, δείχνει ότι το έργο θα μειώσει την αξία της εταιρείας προς τους μετόχους της και δε θα πρέπει να αναληφθεί. Μια θετική παρούσα αξία δείχνει ότι το έργο θα πρέπει να αναληφθεί, διότι θα αυξήσει τον πλούτο των μετόχων.

Το σταθμισμένο αναγωγικό επιτόκιο θα έπρεπε να είναι η επιστροφή που απαιτείται από την εταιρεία ή τους μετόχους της εταιρείας σχετικά με την επένδυση. Αυτό μπορεί να υπολογισθεί με πολλούς τρόπους. Μια προσέγγιση που συνιστάται συχνά περιλαμβάνει το μοντέλο της τιμολόγησης του ενεργητικού κεφαλαίου. Τα βήματα είναι τα εξής:

1. Παίρνουμε ένα δείγμα εταιρειών των οποίων η κύρια επιχειρηματική γραμμή είναι η ίδια με εκείνη του έργου που μελετάται.
2. Υπολογίζουμε τους συντελεστές βήτα των εταιρειών και βρίσκουμε το μέσο όρο τους ώστε να έχουμε ένα αντιπροσωπευτικό βήτα για το έργο.
3. Ρυθμίζουμε τον απαιτούμενο συντελεστή απόδοσης ώστε να είναι ίσος με το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο συν το αντιπροσωπευτικό βήτα επί την παραπανίσια απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς κατά τη διάρκεια του μηδενικού κινδύνου επιτοκίου.

Ένα πρόβλημα με την παραδοσιακή προσέγγιση για την καθαρή παρούσα αξία είναι ότι πολλά έργα περιέχουν ενσωματωμένες options. Θεωρήστε για παράδειγμα μια εταιρεία που μελετά την κατασκευή εγκαταστάσεων για την παραγωγή ενός νέου προϊόντος. Συχνά η εταιρεία έχει τη δυνατότητα να εγκαταλείψει το έργο, αν τα πράγματα δε λειτουργούν καλά. Μπορεί επίσης να έχει τη δυνατότητα να επεκτείνει τις εγκαταστάσεις εάν η ζήτηση για την παραγωγή υπερβαίνει τις προσδοκίες. Οι options αυτές έχουν συνήθως αρκετά διαφορετικά χαρακτηριστικά κινδύνου από το βασικό έργο και απαιτούν αναγωγικά επιτόκια.

Για την κατανόηση του προβλήματος, ας δούμε ένα παράδειγμα. Έχουμε ένα υλικό του οποίου η τρέχουσα τιμή είναι 20 ευρώ. Σε τρεις μήνες η τιμή του θα είναι είτε 22 είτε 18 ευρώ. Η αποτίμηση ουδετέρου κινδύνου δείχνει ότι η αξία μιας τρίμηνης option αγοράς στο χρηματιστήριο με τιμή διάθεσης τα 21 ευρώ είναι 0,633. Αν η αναμενόμενη απόδοση που απαιτείται από τους επενδυτές στο χρηματιστήριο στον πραγματικό κόσμο είναι 16%, τότε η αναμενόμενη επιστροφή της option αγοράς είναι 42,6%. Μια παρόμοια ανάλυση δείχνει ότι αν η option αφορά πώληση παρά αγορά, η αναμενόμενη επιστροφή είναι –52,5%. Οι αναλύσεις αυτές σημαίνουν ότι εάν χρησιμοποιούταν η παραδοσιακή προσέγγιση της καθαρή παρούσας αξίας για την αποτίμηση μιας option αγοράς, το σωστό αναγωγικό επιτόκιο θα ήταν 42,6% και αν χρησιμοποιούταν για την αποτίμηση μιας option πώλησης, το αναγωγικό επιτόκιο θα ήταν –52,5%. Δεν υπάρχει εύκολος τρόπος εκτίμησης αυτών των αναγωγικών επιτοκίων. (Τα γνωρίζουμε μόνο και μόνο επειδή είμαστε σε θέση να αποτιμούμε τις options με άλλο τρόπο.) Παρομοίως, δεν υπάρχει εύκολος τρόπος για την εκτίμηση των σταθμισμένων κατά τον κίνδυνο αναγωγικών επιτοκίων που να είναι κατάλληλος για τις χρηματοροές όταν προκύπτουν από τις options που αφορούν την εγκατάλειψη, την επέκταση κ.α.. Αυτό είναι το κίνητρο για την εξερεύνηση εάν το κεφάλαιο που προκύπτει από η ουδετέρου κινδύνου αρχή αποτίμησης μπορεί να εφαρμοστεί για τις options σε πραγματικά κεφάλαια, καθώς και στις options για τα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία.

Ένα άλλο πρόβλημα με την παραδοσιακή προσέγγιση για την καθαρή παρούσα αξία έγκειται στην εκτίμηση του σταθμισμένου κατά τον κίνδυνο αναγωγικό επιτοκίου για το κυρίως έργο (δηλ. του έργου χωρίς τις ενσωματωμένες options). Οι εταιρείες που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση του αντιπροσωπευτικού συντελεστή βήτα του έργου στην παραπάνω διαδικασία των τριών βημάτων που παρουσιάσαμε πιο πάνω έχουν δικές τους options επέκτασης και options εγκατάλειψης. Οι συντελεστές βήτα των εταιρειών αυτών αντανακλούν αυτές τις options και επομένως δεν είναι κατάλληλοι για την εκτίμηση ενός συντελεστή βήτα για το κυρίως έργο.

6.2 Επέκταση του πλαισίου για την αποτίμηση ουδετέρου κινδύνου

Η εμπορεύσιμη τιμή ενός κινδύνου για μια μεταβλητή θ ορίζεται ως

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \tag{1}$$

όπου r είναι το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο, μ είναι η επιστροφή ενός διαπραγματεύσιμου χρεογράφου που εξαρτάται μόνο από το θ και σ είναι η μεταβλητότητά του. Η εμπορεύσιμη τιμή ενός κινδύνου λ δεν εξαρτάται από το συγκεκριμένο διαπραγματεύσιμο χρεόγραφο που επιλέχθηκε.

Υποθέστε ότι ένα πραγματικό περιουσιακό στοιχείο εξαρτάται από πολλές μεταβλητές θ_i (i = 1,2,….). Ας είναι τα m_i και s_i ο αναμενόμενος ρυθμός αύξησης του θ_i, έτσι ώστε

$$\frac{d\theta_i}{\theta_i} = m_i dt + s_i dz_i$$

όπου το z_i είναι μια διαδικασία Wiener. Ορίζουμε το λ_i ας την εμπορεύσιμη τιμή ενός κινδύνου θ_i. Η εκτίμηση ουδετέρου κινδύνου μπορεί να επεκταθεί για να δείξει πως κάθε περιουσιακό στοιχείο που εξαρτάται από το θ_i μπορεί να αξιολογηθεί με

1. Τη μείωση του αναμενόμενου ρυθμού ανάπτυξης του κάθε θ_i από m_i σε $m_i - \lambda_i \cdot s_i$
2. Την αναγωγή των χρηματοροών στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Παράδειγμα 1

Το κόστος ενοικίασης εμπορικών ακινήτων σε μια συγκεκριμένη πόλη είναι το ποσό που θα καταβάλλεται ανά τετραγωνικό πόδι ανά έτος σε μια νέα 5-ετή συμφωνία μίσθωσης. Το τρέχον κόστος είναι 30 ευρώ ανά τετραγωνικό πόδι. Το αναμενόμενο ποσοστό αύξησης των δαπανών είναι 12% ετησίως, η μεταβλητότητά του είναι 20% ετησίως και η εμπορεύσιμη τιμή του κινδύνου είναι 0,3. Μια εταιρεία έχει τη δυνατότητα να πληρώσει τώρα 1 εκατομμύριο ευρώ για την option ενοικίασης 100.000 τετραγωνικών ποδιών σε τιμή 35 ευρώ ανά τετραγωνικό πόδι για μια περίοδο 5 ετών που ξεκινά σε 2 χρόνια. Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι 5% ετησίως (θεωρείται σταθερό). Ορίζουμε V το κόστος ανά τετραγωνικό πόδι του χώρου των γραφείων σε δύο χρόνια. Υποθέτουμε ότι το μίσθωμα καταβάλλεται ετησίως εκ των προτέρων. Η αποπληρωμή από αυτήν την option είναι

$$100.000 \cdot A \cdot max(V - 35, 0)$$

όπου το A είναι ένα παράγοντας που αφορά τα κέρδη και γίνεται από τη σχέση

$$A = 1 + 1 \times e^{-0,05\times 1} + 1 \times e^{-0,05\times 2} + 1 \times e^{-0,05\times 3} + 1 \times e^{-0,05\times 4} = 4,5355$$

Η αναμενόμενη επιστροφή σε έναν κόσμο άνευ κινδύνων είναι επομένως

$$100.000 \times 4,5355 \times \hat{E}[\max(V - 35,0)] = 453.550 \times \hat{E}[\max(V - 35,0)]$$

όπου το $\hat{E}$ αφορά τις προσδοκίες σε έναν άνευ κινδύνων κόσμο. Το παραπάνω μπορεί να γραφεί και ως:

$$453.550[\hat{E}(V)N(d_1) - 35N(d_2)]$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln[\hat{E}(V)/35] + 0{,}2^2 \times 2/2}{0{,}2\sqrt{2}}$$

$$d_1 = \frac{\ln[\hat{E}(V)/35] - 0{,}2^2 \times 2/2}{0{,}2\sqrt{2}}$$

Το αναμενόμενο ποσοστό αύξησης του κόστους των εμπορικών ακινήτων σε έναν μηδενικού κινδύνου κόσμου είναι m – λ·s, όπου m είναι ο ρυθμός ανάπτυξης στον πραγματικό κόσμο, s είναι η μεταβλητότητα και λ η εμπορεύσιμη τιμή του κινδύνου. Σε αυτήν την περίπτωση είναι m = 0,12, s = 0,2 και λ = 0,3 και έτσι το αναμενόμενο μηδενικού κινδύνου ποσοστό αύξησης είναι 0,06 ή 6% ετησίως. Επομένως $\hat{E}(V) = 30e^{0{,}06\times 2} = 33{,}82$. Αντικαθιστώντας αυτό στην παραπάνω έκφραση δίνει την αναμενόμενη αποπληρωμή σε έναν άνευ κινδύνων κόσμο να είναι 1,5015 εκατομμύρια ευρώ. Αναγάγοντάς το με το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο, η αξία της option είναι $1{,}5015e^{-0{,}05x2}$ = 1,3586 εκατομμύρια ευρώ. Αυτό δείχνει ότι αξίζει να πληρωθούν 1 εκατομμύριο ευρώ για την option.

6.3 Εκτίμηση της εμπορεύσιμης τιμής του κινδύνου

Η προσέγγιση μέσω πραγματικών options για την αξιολόγηση μιας επένδυσης αποφεύγει την ανάγκη της εκτίμησης των σταθμισμένων κατά τον κίνδυνο αναγωγικών επιτοκίων κατά τον τρόπο που περιγράφεται στο πρώτο τμήμα του κεφαλαίου αυτού, αλλά απαιτεί εμπορεύσιμη τιμή των παραμέτρων των κινδύνων για όλες τις στοχαστικές μεταβλητές. Όταν υπάρχουν διαθέσιμα κάποια ιστορικά στοιχεία για μια συγκεκριμένη μεταβλητή, η εμπορεύσιμη τιμή του κινδύνου μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το μοντέλο τιμολόγησης ενεργητικού κεφαλαίου. Για να δείξουμε πώς γίνεται αυτό, θεωρούμε ένα περιουσιακό στοιχείο που εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή και ορίζουμε:

μ : αναμενόμενη απόδοση του περιουσιακού στοιχείου της επένδυσης
σ : μεταβλητότητα της απόδοσης του περιουσιακού στοιχείου της επένδυσης
λ : εμπορεύσιμη τιμή του κινδύνου της μεταβλητής
ρ : στιγμιαία συσχέτιση μεταξύ των ποσοστιαίων μεταβολών της μεταβλητής και των αποδόσεων σε έναν ευρύ δείκτη τιμών του χρηματιστηρίου
μ_m : αναμενόμενη απόδοση του γενικού δείκτη τιμών του χρηματιστηρίου
σ_m : μεταβλητότητα της απόδοσης για το γενικό δείκτη τιμών του χρηματιστηρίου
r : βραχυπρόθεσμο, μηδενικού κινδύνου επιτόκιο

Επειδή το περιουσιακό στοιχείο της επένδυσης εξαρτάται αποκλειστικά από τη μεταβλητή της αγοράς, η στιγμιαία συσχέτιση μεταξύ της απόδοσης και του ευρύ δείκτη τιμών του χρηματιστηρίου είναι επίσης ρ. Από τη συνεχούς χρόνου εκδοχή του μοντέλου τιμολόγησης ενεργητικού κεφαλαίου,

$$\mu - r = \frac{\rho\sigma}{\sigma_m}(\mu_m - r)$$

Από την εξίσωση (1), μια άλλη έκφραση για το μ – r είναι

$$\mu - r = \lambda\sigma$$

Επομένως

$$\lambda = \frac{\rho}{\sigma_m}(\mu_m - r) \tag{2}$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μια εκτίμηση του λ.

Παράδειγμα 2

Μια ιστορική ανάλυση των πωλήσεων μιας εταιρείας ανά τρίμηνο δείχνει ότι οι ποσοστιαίες μεταβολές των πωλήσεων έχουν μια συσχέτιση 0,3 με αποδόσεις στο δείκτη S&P 500. Η μεταβλητότητα του S&P 500 είναι 20% ετησίως και με βάση τα ιστορικά δεδομένα η υπερβάλλουσα απόδοση του S&P 500 κατά το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο είναι 5%. Η εξίσωση (2) δίνει μια εκτίμηση για την εμπορεύσιμη τιμή του κινδύνου για τις πωλήσεις της εταιρείας που είναι ίση με

$$\frac{0{,}3}{0{,}2} \times 0{,}05 = 0{,}075$$

Όταν δεν υπάρχουν ιστορικά δεδομένα για τη συγκεκριμένη μεταβλητή που εξετάζουμε, μπορούν να χρησιμοποιηθούν άλλες παρόμοιες μεταβλητές ως αντιπροσωπευτικές. Για παράδειγμα, αν χτίζεται ένα εργοστάσιο που θα κατασκευάζει ένα νέο προϊόν, μπορούν να συλλεχθούν δεδομένα για τις πωλήσεις άλλων παρόμοιων προϊόντων. Η συσχέτιση του νέου προϊόντος με το δείκτη αγοράς μπορεί τότε να υποτεθεί ότι είναι ίδια με εκείνη των παρόμοιων προϊόντων. Σε μερικές περιπτώσεις, η εκτίμηση για το ρ στην εξίσωση (2) πρέπει να βασίζεται σε υποκειμενική κρίση. Αν ένας αναλυτής πεισθεί ότι μια συγκεκριμένη μεταβλητή είναι άσχετη με την απόδοση ενός δείκτη αγοράς, η εμπορεύσιμη τιμή του κινδύνου θα πρέπει να τεθεί ίση με μηδέν.

Για ορισμένες μεταβλητές, δεν είναι απαραίτητη η εκτίμηση της εμπορεύσιμης τιμής του κινδύνου επειδή η διαδικασία που ακολουθείται σε έναν ουδετέρου κινδύνου κόσμο μπορεί να εκτιμηθεί άμεσα. Για παράδειγμα, αν η μεταβλητή είναι η τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου επένδυσης, η συνολική απόδοση σε έναν ουδετέρου κινδύνου κόσμου είναι το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο. Αργότερο στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε πώς η ουδετέρου κινδύνου διαδικασία για ένα προϊόν μπορεί να υπολογιστεί από τις τιμές των futures.

6.4 Εφαρμογή στην αξιολόγηση μιας επιχείρησης

Οι παραδοσιακές μέθοδοι αξιολόγησης των επιχειρήσεων, όπως η εφαρμογή ενός πολλαπλασιαστή τιμής/εσόδων στα τρέχοντα έσοδα, δε λειτουργούν καλά για τις νέες επιχειρήσεις. Συνήθως τα κέρδη μιας εταιρείας είναι αρνητικά κατά τα πρώτα χρόνια της καθώς προσπαθεί να κερδίσει μερίδιο της αγοράς και να δημιουργήσει σχέσεις με τους πελάτες. Η εταιρεία θα πρέπει να αξιολογηθεί με την εκτίμηση των μελλοντικών κερδών και ταμειακών ροών σύμφωνα με διάφορα σενάρια.

Η προσέγγιση πραγματικών options μπορεί να αποβεί χρήσιμη γι' αυτήν την κατάσταση. Έχει αναπτυχθεί ένα μοντέλο που αφορά τις μελλοντικές ταμειακές ροές της εταιρείας με μεταβλητές όπως οι ρυθμοί αύξησης των πωλήσεων, τα μεταβλητά κόστη κλπ.. Για τις βασικές μεταβλητές, η στοχαστική διαδικασία ουδετέρου κινδύνου υπολογίζεται όπως περιγράφεται στις δύο προηγούμενες ενότητες. Στη συνέχεια διενεργείται μια προσομοίωση Monte Carlo για τη δημιουργία εναλλακτικών σεναρίων για τις καθαρές ταμειακές ροές ανά έτος σε έναν κόσμο ουδετέρου κινδύνου. Είναι πιθανό ότι σε ορισμένα από αυτά τα σενάρια η επιχείρηση τα πηγαίνει πολύ καλά και σε κάποια άλλα σενάρια πτωχεύει και διακόπτει τη λειτουργία της. (Η προσομοίωση πρέπει να διαθέτει έναν ενσωματωμένο κανόνα για τον προσδιορισμό του πότε θα συμβεί η πτώχευση.) Η αξία της εταιρείας είναι η παρούσα αξία των αναμενόμενων ταμειακών ροών για κάθε έτος χρησιμοποιώντας το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου για την αναγωγή.

6.5 Τιμές των βασικών εμπορευμάτων

Πολλές επενδύσεις περιλαμβάνουν αβεβαιότητες που σχετίζονται με τις μελλοντικές τιμές των βασικών εμπορευμάτων. Συχνά μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι τιμές futures για την εκτίμηση της στοχαστικής διαδικασίας ουδετέρου κινδύνου για μια τιμή ενός βασικού προϊόντος άμεσα. Αυτό παρακάμπτει την ανάγκη για τη ρητή εκτίμηση μιας εμπορεύσιμης τιμής κινδύνου για το εμπόρευμα.

Η αναμενόμενη μελλοντική τιμή για ένα προϊόν στον παραδοσιακό κόσμο ουδετέρου κινδύνου είναι η τιμή futures. Εάν ο αναμενόμενος ρυθμός αύξησης της τιμής του προϊόντος εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από το χρόνο και ότι η μεταβλητότητα της τιμής του προϊόντος είναι σταθερή, τότε η διαδικασία ουδετέρου κινδύνου για την τιμή S του προϊόντος έχει τη μορφή

$$\frac{dS}{S} = \mu(t)dt + \sigma dz \tag{3}$$

και

$$F(t) = \hat{E}[S(t)] = S(0)e^{\int_0^1 \mu(\tau)d\tau}$$

όπου η F(t) είναι η τιμή futures για ένα συμβόλαιο με ωριμότητα t και το $\hat{E}$ υποδηλώνει την αναμενόμενη τιμή σε έναν ουδετέρου κινδύνου κόσμο. Επομένως

$$\ln F(t) = \ln S(0) + \int_0^1 \mu(\tau)d\tau$$

Διαφορίζοντας και τα δύο μέλη ως προς το χρόνο παίρνουμε

$$\mu(t) = \frac{\partial}{\partial t}[\ln F(t)]$$

Παράδειγμα 3

Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές futures των ζώντων βοοειδών στα τέλη του Ιουλίου 2008 είναι (σε σεντ ανά κιλό) ως εξής:

Αύγουστος 2008	62,20
Οκτώβριος 2008	60,60
Δεκέμβριος 2008	62,70
Φεβρουάριος 2009	63,37
Απρίλιος 2009	64,42
Ιούνιος 2009	64,40

Αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση του ρυθμού της αναμενόμενης αύξησης στις τιμές των ζώντων βοοειδών σε έναν κόσμο ουδετέρου κινδύνου. Για παράδειγμα, όταν χρησιμοποιείται το μοντέλο στην εξίσωση (3), ο αναμενόμενος ρυθμός αύξησης στις τιμές των ζώντων βοοειδών μεταξύ του Οκτωβρίου και του Δεκεμβρίου του 2008 σε έναν κόσμο ουδετέρου κινδύνου είναι

$$\ln\left(\frac{62{,}70}{60{,}60}\right) = 0{,}037$$

ή 3,4% ανά δύο μήνες με συνεχή ανατοκισμό. Σε ετήσια βάση, αυτό είναι 20,4% ετησίως.

Παράδειγμα 4

Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές futures των ζώντων βοοειδών είναι οι ίδιες με του προηγούμενου παραδείγματος. Μια ορισμένη απόφαση για αναπαραγωγή περιλαμβάνει μια επένδυση 100.000 ευρώ τώρα και έξοδα της τάξης των 20.000 ευρώ σε 3, 6 και μήνες. Το αποτέλεσμα θα είναι να υπάρχει διαθέσιμο ένα ακόμη βοοειδές για πώληση στο τέλος του έτους. Υπάρχουν δύο σημαντικές αβεβαιότητες: ο αριθμός των κιλών του επιπλέον βοοειδούς που θα είναι διαθέσιμος για πώληση και η τιμή ανά κιλό. Ο αναμενόμενος αριθμός κιλών είναι 300.000. Η αναμενόμενη τιμή του βοοειδούς σε 1 χρόνο σε έναν κόσμο ουδετέρου κινδύνου είναι, σύμφωνα με το παραπάνω παράδειγμα, 64,40 σεντ ανά κιλό. Υποθέτοντας ότι το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο είναι 10% ανά έτος, η αξία της επένδυσης (σε χιλιάδες ευρώ) είναι

$-100 - 20e^{-0,1x0,25} - 20e^{-0,1x0,50} - 20e^{-0,1x0,75} + 300 \text{ x } 0,644e^{-0,1x1} = 17,729$ ευρώ

Από αυτό συνάγεται ότι κάθε αβεβαιότητα που αφορά την επιπλέον ποσότητα των βοοειδών που θα είναι διαθέσιμα για πώληση έχει μηδενικό συστηματικό κίνδυνο και ότι δεν υπάρχει καμία συσχέτιση μεταξύ της ποσότητας των βοοειδών που είναι διαθέσιμα για πώληση και της τιμής.

Μέση επαναφορά

Μπορεί να υποστηριχθεί ότι η διαδικασία στην εξίσωση (3) για τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι πολύ απλοϊκή. Στην πράξη, οι περισσότερες τιμές των εμπορευμάτων ακολουθούν διαδικασίες μέση επαναφοράς. Τείνουν να ελχθούν προς μια κεντρική τιμή. Μια πιο ρεαλιστική διαδικασία απ' ό,τι η εξίσωση (3) για τη διαδικασία ουδετέρου κινδύνου που ακολουθείται από την τιμή S του βασικού προϊόντος είναι

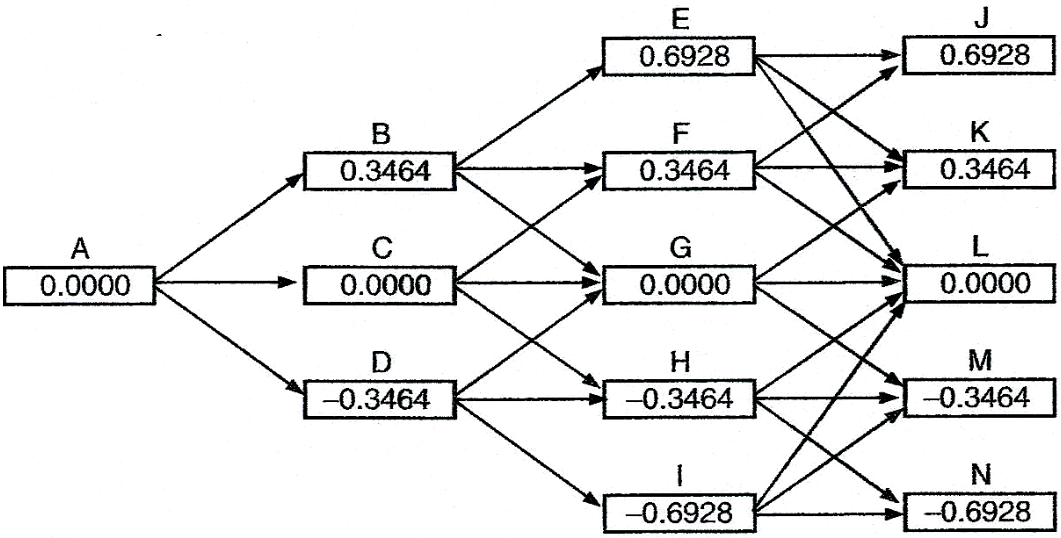
$$d\ln S = [\theta(t) - a\ln S]dt + \sigma dz \tag{4}$$

Αυτή ενσωματωμένη τη μέση επαναφορά και είναι ανάλογη με τη λογαριθμική διαδικασία που ακολουθείται για τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια. Μπορεί να υιοθετηθεί η μεθοδολογία του τριώνυμου δέντρου για την κατασκευή ενός δέντρου για το S και τον καθορισμό της τιμής του θ(t) έτσι ώστε $F(t) = \hat{E}[S(t)]$.

Θα καταδείξουμε αυτή τη διαδικασία με την κατασκευή ενός δέντρου για την τιμή των βασικών προϊόντων σε τρία στάδια. Ας υποθέσουμε ότι η τρέχουσα τιμή διάθεσης είναι 20 ευρώ και οι τιμές futures 1, 2 και 3 χρόνων είναι αντίστοιχα 22, 23 και 24 ευρώ. Ας υποθέσουμε ότι α = 0,1 και σ = 0,2 στην εξίσωση (4). Πρώτα ορίζουμε τη μεταβλητή X που αρχικά είναι μηδέν και ακολουθεί τη διαδικασία

$$dX = -adt + \sigma dz \tag{5}$$

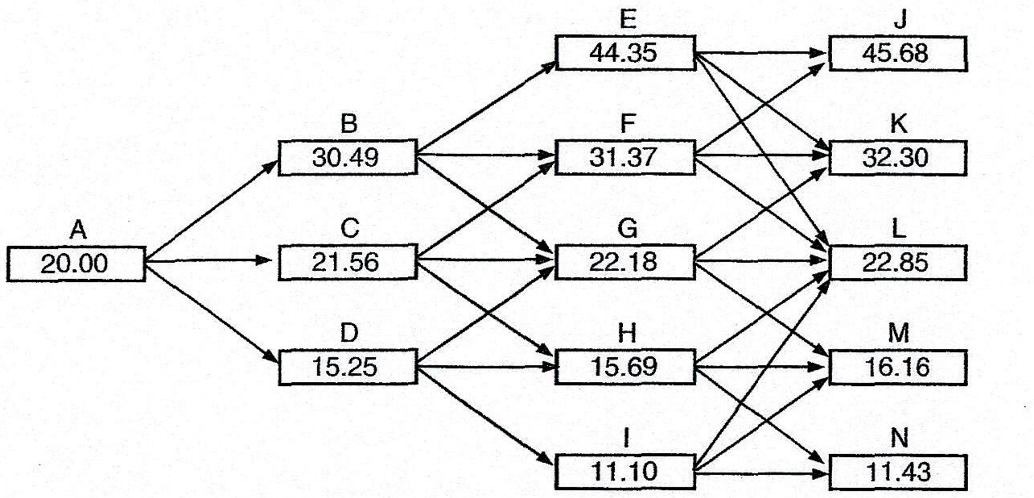
Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τριώνυμο δέντρο για το X λοιπόν. Αυτό παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα.



Node:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
p_u:	0.1667	0.1217	0.1667	0.2217	0.8867	0.1217	0.1667	0.2217	0.0867
p_m:	0.6666	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266
p_d:	0.1667	0.2217	0.1667	0.1217	0.0867	0.2217	0.1667	0.1217	0.8867

Σχήμα 6.1: *Δέντρο για το X. Η κατασκευή του δέντρου αυτού είναι το πρώτο στάδιο για την κατασκευή του δέντρου για την τιμή S της διάθεσης του προϊόντος. Εδώ τα p_u, p_m και p_d είναι οι πιθανότητες για κινήσεις προς τα πάνω, ενδιάμεσα και κάτω σε κάθε κόμβο.*

Η μεταβλητή lnS ακολουθεί την ίδια διαδικασία με τη μεταβλητή X εκτός από το ότι έχουν διαφορετική εξάρτηση από το χρόνο, άρα και κλίση. Το δέντρο για τη μεταβλητή X μπορεί να μετατραπεί σε δέντρο για τη μεταβλητή lnS μετατοπίζοντας τη θέση των κόμβων. Αυτό το δέντρο παρουσιάζεται στη δεύτερη εικόνα. Ο αρχικός κόμβος αντιστοιχεί στην τιμή 20 και έτσι η μετατόπιση γι' αυτόν τον κόμβο είναι ln20.



Node:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
p_u:	0.1667	0.1217	0.1667	0.2217	0.8867	0.1217	0.1667	0.2217	0.0867
p_m:	0.6666	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266
p_d:	0.1667	0.2217	0.1667	0.1217	0.0867	0.2217	0.1667	0.1217	0.8867

Σχήμα 6.2: *Δέντρο για την τιμή S της διάθεσης του προϊόντος. Τα p_u, p_m και p_d είναι οι πιθανότητες για κινήσεις προς τα πάνω, ενδιάμεσα και κάτω σε κάθε κόμβο.*

Ας υποθέσουμε ότι η μετατόπιση των κόμβων στο έτος 1 είναι α_1. Οι τιμές της μεταβλητής X στους τρεις κόμβους που αφορούν το σημείο του έτους 1 είναι +0,3464, 0 και – 0,3464. Οι αντίστοιχες τιμές του lnS είναι +0,3464 + α_1, α_1 και – 0,3464 + α_1. Οι τιμές του S λοιπόν είναι $e^{0,3464+\alpha_1}, e^{\alpha_1}$ *και* $e^{-0,3464+\alpha_1}$ αντίστοιχα. Απαιτούμε η αναμενόμενη τιμή του S να είναι ίση με την τιμή futures. Αυτό σημαίνει ότι

$$0,1667e^{0,3464+a_1} + 0,6666e^{a_1} + 0,1667e^{-0,3464+a_1} = 22$$

Η λύση σε αυτό είναι α_1 = 3,071. Οι τιμές των S στο σημείο που αφορά το έτος 1 είναι επομένως 30,49, 21,56 και 15,25.

Στο σημείο για το έτος 2, πρώτα υπολογίζουμε τις πιθανότητες των κόμβων E, F, G, H και I ώστε να είναι προσβάσιμες από τις πιθανότητες των κόμβων B, C και D. Η πιθανότητα επίτευξης του κόμβου F είναι η πιθανότητα επίτευξης του κόμβου B επί την πιθανότητα μεταβάσεως από τον κόμβο B στον F συν την πιθανότητα επίτευξης στον κόμβο C επί την πιθανότητα μεταβάσεως από τον κόμβο C στον F. Αυτή είναι

$$0,1667 \text{ x } 0,6566 \text{ x } 0,6666 \text{ x } 0,1667 = 0,2206$$

Ομοίως οι πιθανότητες επίτευξης των κόμβων E, G, H και I είναι 0,0203, 0,5183, 0,2206 και 0,0203 αντίστοιχα. Η ποσότητα α_2 με την οποία οι κόμβοι μετακινούνται στη χρονική στιγμή των 2 χρόνων πρέπει να ικανοποιούν

$$0{,}0203e^{0{,}6928+a_2} + 0{,}22066e^{0{,}3464+a_2} + 0{,}5183e^{a_2} + 0{,}22066e^{-0{,}3464+a_2} + 0{,}0203e^{-0{,}6928+a_2} = 23$$

Η λύση σε αυτό είναι $α_2$ = 3,099. Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές των S για το σημείο που αφορά τα 2 χρόνια είναι 44,35, 31,37, 22,18, 15,69 και 11,10 αντίστοιχα.

Ανάλογος υπολογισμός μπορεί να γίνει για το σημείο που αφορά τα 3 χρόνια. Η παραπάνω εικόνα δείχνει το καταληκτικό δέντρο για τα S. Η επόμενη ενότητα δείχνει πώς το δέντρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποτίμηση μιας πραγματικής option.

6.6 Αξιολόγηση των options σε μια επενδυτική ευκαιρία

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα περισσότερα επενδυτικά έργα περιλαμβάνουν options. Αυτές οι options μπορούν να προσθέσουν ιδιαίτερη αξία στο έργο και συχνά είτε αγνοούνται είτε αξιολογούνται λανθασμένα. Κάποια παραδείγματα options που είναι ενσωματωμένες σε έργα είναι:

1. *Options εγκατάλειψης.* Αυτή είναι μια option για πώληση ή κλείσιμο του έργου. Πρόκειται για αμερικανική option πώλησης στην αξία του έργου. Η τιμή διάθεσης της option είναι η τιμή εκκαθάρισης (ή μεταπώλησης) του έργου μειωμένη κατά το τυχόν κόστος για το κλείσιμο. Όταν η τιμή εκκαθάρισης είναι χαμηλή, η τιμή διάθεσης μπορεί να είναι αρνητική. Οι options εγκατάλειψης μετριάζουν τον αντίκτυπο της πολύ άσχημης παραγωγής και αυξάνουν την αρχική αποτίμηση του έργου.
2. *Options εξάπλωσης.* Αυτή είναι η option για την πραγματοποίηση περαιτέρω επενδύσεων και την αύξηση της παραγωγής αν οι συνθήκες είναι ευνοϊκές. Πρόκειται για αμερικανική option αγοράς στην αξία της πρόσθετης παραγωγικής ικανότητας. Η τιμή διάθεσης της option αγοράς είναι το κόστος της δημιουργίας αυτής της πρόσθετης παραγωγικής ικανότητας, ανηγμένης στη χρονική στιγμή που διατίθεται η option. Η τιμή διάθεσης συχνά εξαρτάται από αρχική επένδυση. Αν η διοίκηση επιλέξει αρχικά να χτίσει μια παραγωγή που θα υπερβαίνει το αναμενόμενο επίπεδο παραγωγής, η τιμή διάθεσης μπορεί να είναι σχετικά μικρή.
3. *Options συρρίκνωσης.* Αυτή είναι μια option για τη μείωση του μεγέθους λειτουργίας ενός έργου. Πρόκειται για αμερικανική option πώλησης στην αξία της χαμένης παραγωγικής ικανότητας. Η τιμή διάθεσης είναι η παρούσα αξία των μελλοντικών δαπανών που εξοικονομήθηκαν όπως αυτά φαίνονται τη χρονική στιγμή της διάθεσης της option.
4. *Options για αναβολή.* Μια από τις πιο σημαντικές options που μπορεί να έχει ένας διευθυντής είναι η option για την αναβολή ενός έργου. Πρόκειται για αμερικανική option αγοράς στην αξία του έργου.
5. *Options παράτασης.* Μερικές φορές είναι πιθανό να παραταθεί η διάρκεια ζωής ενός κεφαλαίου καταβάλλοντας ένα ορισμένο ποσό. Πρόκειται για ευρωπαϊκή option αγοράς στη μελλοντική αξία του κεφαλαίου αυτού.

Ως ένα απλό παράδειγμα για την αποτίμηση μιας επένδυσης με ενσωματωμένη option, ας θεωρήσουμε μια εταιρεία που πρέπει να αποφασίσει κατά πόσο είναι συμφέρουσα ή όχι μια επένδυση 15 εκατομμυρίων ευρώ για την εξαγωγή 6 εκατομμυρίων μονάδων ενός βασικού προϊόντος από μια ορισμένη πηγή με ρυθμό 2 εκατομμυρίων μονάδων ανά χρόνο για 3 χρόνια. Τα σταθερά κόστη λειτουργίας του εξοπλισμού είναι 6 εκατομμύρια ευρώ ανά χρόνο και τα μεταβλητά κόστη είναι 17 ευρώ ανά μονάδα του βασικού προϊόντος που εξάγεται. Υποθέτουμε ότι το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο είναι 10% ανά έτος για όλες τις διάρκειες, ότι η τιμή αγοράς τοις μετρητοίς του προϊόντος αυτού είναι 20 ευρώ και ότι οι τιμές futures του πρώτου, δεύτερου και τρίτου χρόνου είναι αντίστοιχα 22, 23 και 24 ευρώ αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι η στοχαστική διαδικασία για την τιμή του προϊόντος έχει υπολογιστεί από την εξίσωση (4) με α = 0,1 και σ = 0,2. Αυτό σημαίνει ότι το δέντρο στο πιο πάνω σχήμα περιγράφει τη συμπεριφορά των τιμών των βασικών προϊόντων σε έναν ουδετέρου κινδύνου κόσμο.

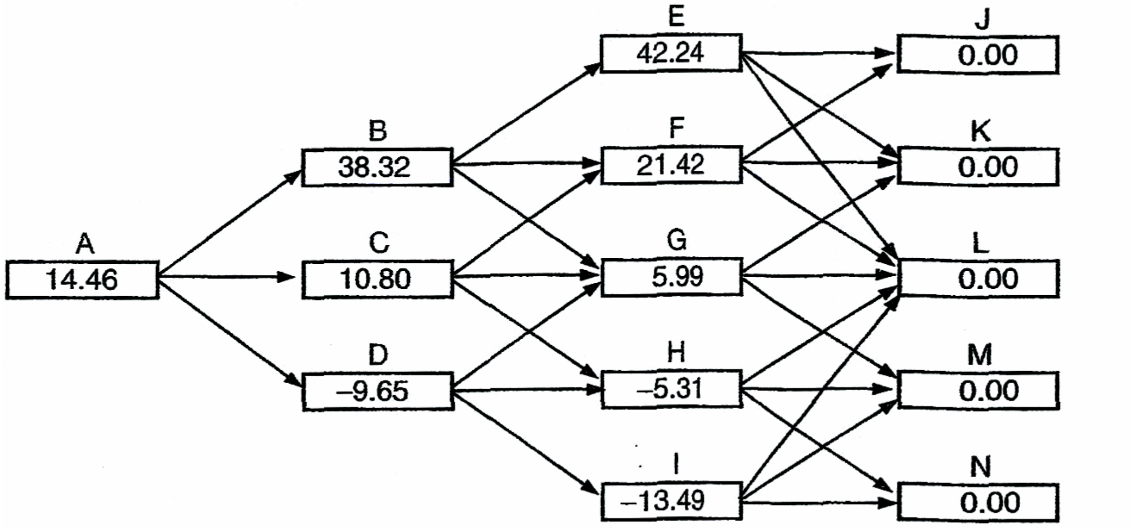
Πρώτα υποθέτουμε ότι το έργο δεν έχει ενσωματωμένες options. Οι αναμενόμενες τιμές του προϊόντος στη χρονική στιγμή του ενός, δύο και τριών ετών σε έναν ουδετέρου κινδύνου κόσμου είναι 22, 23 και 24 ευρώ αντίστοιχα. Η αναμενόμενη εξόφληση από το έργο (σε εκατομμύρια ευρώ) σε έναν κόσμο ουδετέρου κινδύνου μπορεί να υπολογιστεί από τα στοιχεία κόστους ως 4,0, 6,0 και 8,0 στα έτη 1, 2 και 3 αντίστοιχα. Η αξία του έργου είναι ως εκ τούτου

$$-15{,}0 + 4{,}0e^{-0{,}1\times 1} + 6{,}0e^{-0{,}1\times 2} + 8{,}0e^{0{,}1\times 3} = -0{,}54$$

Η ανάλυση αυτή δείχνει ότι το έργο δε θα πρέπει να αναληφθεί, επειδή θα μειώσει τον πλούτο των μετόχων κατά 0,54 εκατομμύρια.

Η παρακάτω εικόνα δείχνει την αξία του έργου σε κάθε κόμβο της εικόνας 2 πιο πάνω. Αυτή υπολογίζεται από την εικόνα 2. Θεωρήστε για παράδειγμα τον κόμβο Η. Υπάρχει μια πιθανότητα 0,2217 ότι η τιμή του προϊόντος στο τέλος του τρίτου χρόνου θα είναι 22,85, έτσι ώστε τα κέρδη του τρίτου έτους να είναι 2 x 22,85 – 2 x 17 – 6 = 5,70. Ομοίως, υπάρχει μια πιθανότητα 0,6566 ότι η τιμή του προϊόντος στο τέλος του τρίτου χρόνου θα είναι 16,16, έτσι ώστε τα κέρδη να είναι –7,68 και υπάρχει μια πιθανότητα 0,1217 ότι η τιμή του προϊόντος στο τέλος του τρίτου χρόνου θα είναι 11,43, έτσι ώστε τα κέρδη να είναι –17,14. Η αξία του έργου στον κόμβο Η στην εικόνα 3 είναι επομένως

$$[0{,}2217 \times 5{,}70 + 0{,}6566 \times (-7{,}68) + 0{,}1217 \times (-17{,}14)]e^{-0{,}1\times 1} = -5{,}31$$



Node:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
p_u:	0.1667	0.1217	0.1667	0.2217	0.8867	0.1217	0.1667	0.2217	0.0867
p_m:	0.6666	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266
p_d:	0.1667	0.2217	0.1667	0.1217	0.0867	0.2217	0.1667	0.1217	0.8867

Σχήμα 6.3: *Αξιολόγηση του βασικού έργου με μη ενσωματωμένες options. Τα p_u, p_m και p_d είναι οι πιθανότητες για κινήσεις προς τα πάνω, ενδιάμεσα και κάτω σε κάθε κόμβο.*

Ως ένα άλλο παράδειγμα, θεωρήστε τον κόμβο C. Υπάρχει 0,1667 πιθανότητα μετάβασης στον κόμβο F όπου η τιμή του προϊόντος είναι 31,37. Οι ταμειακές ροές του δεύτερου έτους είναι τότε 2 x 31,37 – 2 x 17 – 6 = 22,74. Η αξία των μεταγενέστερων ταμειακών ροών στον κόμβο F είναι επομένως 21,42 + 22,74 = 44,16. Ομοίως η συνολική αξία του έργου αν μετακινηθούμε στους κόμβους G και H είναι 10,35 και –13,93 αντίστοιχα. Η αξία του έργου στον κόμβο G είναι επομένως:

$$[0{,}1667\times 44{,}16+0{,}6666\times 10{,}35+0{,}1667\times(-13{,}93)]e^{-0{,}1\times 1}=10.80$$

Η παραπάνω εικόνα δείχνει ότι η αξία του έργου στον αρχικό κόμβο A είναι 14,46. Όταν η αρχική επένδυση ληφθεί υπόψη, η αξία του έργου γίνεται –0,54. Αυτό είναι σε συμφωνία με τους προηγούμενους υπολογισμούς.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η εταιρεία έχει την option εγκατάλειψης του έργου ανά πάσα στιγμή. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει υπολειμματική αξία και δεν απαιτούνται περαιτέρω πληρωμές μιας και το έργο έχει εγκαταλειφθεί. Η εγκατάλειψη είναι αμερικανική option πώλησης με μηδενική τιμή διάθεσης και αποτιμάται στην παρακάτω εικόνα. Η option πώλησης δε θα πρέπει να εξασκηθεί στους κόμβους E, F και G επειδή η αξία του έργου είναι θετική σε αυτούς τους κόμβους. Θα πρέπει να ασκηθεί στους κόμβους H και I. Η αξία της option είναι 5,31 και 13,49 στους κόμβους H και I αντίστοιχα. Πηγαίνοντας προς τα πίσω μέσω του δέντρου, η αξία της option εγκατάλειψης στον κόμβο D που είναι option πώλησης αν δεν ασκηθεί θα είναι

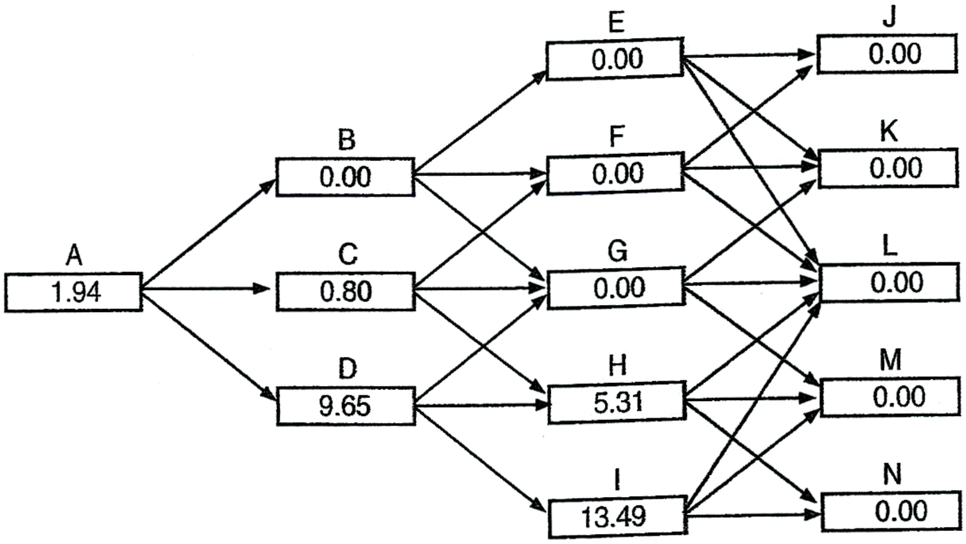
$$(0{,}1217\times 13{,}49+0{,}6566\times 5{,}31+0{,}2217\times 0)e^{-0{,}1\times 1}=4{,}64$$

Η τιμή διάθεσης της option πώλησης στον κόμβο D είναι 9,65. Αυτή είναι μεγαλύτερη του 4,64 και έτσι η πώληση θα πρέπει να ασκηθεί στον κόμβο D. Η τιμή της option πώλησης στον κόμβο C είναι

$$(0{,}1667\times 0+0{,}6666\times 0+0{,}1667\times 5{,}31)e^{-0{,}1\times 1}=0{,}80$$

και η αξία στον κόμβο A είναι

$$(0{,}1667\times 0+0{,}6666\times 0{,}80+0{,}1667\times 9{,}65)e^{-0{,}1\times 1}=1{,}94$$



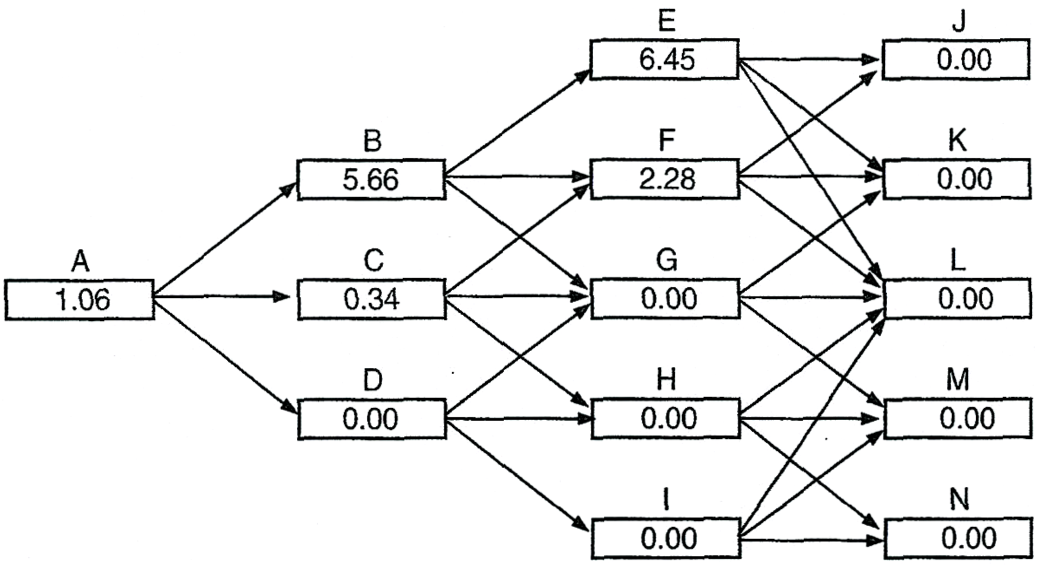
Node:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
p_u:	0.1667	0.1217	0.1667	0.2217	0.8867	0.1217	0.1667	0.2217	0.0867
p_m:	0.6666	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266
p_d:	0.1667	0.2217	0.1667	0.1217	0.0867	0.2217	0.1667	0.1217	0.8867

Σχήμα 6.4: *Αξιολόγηση της option εγκατάλειψης του έργου. Τα p_u, p_m και p_d είναι οι πιθανότητες για κινήσεις προς τα πάνω, ενδιάμεσα και κάτω σε κάθε κόμβο.*

Η option εγκατάλειψης λοιπόν αξίζει 1,94 εκατομμύρια ευρώ. Αυξάνει την αξία του έργου από – 0,54 εκατομμύρια ευρώ σε +1,40 εκατομμύρια ευρώ. Ένα έργο το οποίο προηγουμένως ήταν μη ελκυστικό, τώρα έχει θετική αξία στους μετόχους.

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι η εταιρεία δεν έχει option εγκατάλειψης. Αντ' αυτής έχει την option να αυξήσει ανά πάσα στιγμή την κλίμακα του έργου κατά 20%. Το κόστος για να γίνει αυτό είναι 2 εκατομμύρια ευρώ. Η παραγωγή αυξάνεται από 2,0 σε 2,4 εκατομμύρια μονάδες ανά χρόνο. Τα μεταβλητά κόστη παραμένουν 17 ευρώ ανά μονάδα και τα σταθερά κόστη αυξάνονται κατά 20% από 6,0 εκατομμύρια ευρώ σε 7,2 εκατομμύρια ευρώ. Πρόκειται για αμερικανική option αγοράς για αγορά 20% του βασικού έργου στην εικόνα 3 για 2 εκατομμύρια ευρώ. Η option αποτιμάται στην εικόνα 5. Στον κόμβο E, η option θα πρέπει να διατεθεί. Η αποπληρωμή είναι 0,2 x 42,44 – 2 = 6,45. Στον κόμβο F, θα πρέπει να διατεθεί για μια αποπληρωμή 0,2 x 21,42 – 2 = 2,28. Στους κόμβους G, H και I η option δε θα πρέπει να διατεθεί. Στον κόμβο B, η διάθεση αξίζει περισσότερο από την αναμονή και η option αξίζει 0,2 x 38,32 – 2 = 5,66. Στον κόμβο C, αν η option δε διατεθεί, αξίζει

$$(0{,}1667 \times 2{,}28 + 0{,}6666 \times 0{,}00 + 0{,}1667 \times 0{,}00)e^{-0{,}1 \times 1} = 0{,}34$$



Node:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
p_u:	0.1667	0.1217	0.1667	0.2217	0.8867	0.1217	0.1667	0.2217	0.0867
p_m:	0.6666	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266
p_d:	0.1667	0.2217	0.1667	0.1217	0.0867	0.2217	0.1667	0.1217	0.8867

Σχήμα 6.5: *Αξιολόγηση της option επέκτασης του έργου. Τα p_u, p_m και p_d είναι οι πιθανότητες για κινήσεις προς τα πάνω, ενδιάμεσα και κάτω σε κάθε κόμβο.*

Αν η option διατεθεί, αξίζει 0,2 x 10,80 – 2 = 0,16. Η option επομένως δε θα πρέπει να διατεθεί στον κόμβο C. Στον κόμβο A, αν δε διατεθεί, η option αξίζει

$$(0{,}1667 \times 5{,}66 + 0{,}6666 \times 0{,}34 + 0{,}1667 \times 0{,}00)e^{-0{,}1 \times 1} = 1{,}06$$

Αν η option διατεθεί, αξίζει 0,2 x 14,46 – 2 = 0,89. Η πρόωρη διάθεση δεν είναι επομένως η βέλτιστη επιλογή για τον κόμβο A. Σε αυτήν την περίπτωση, η option αυξάνει την αξία του έργου από –0,54 σε +0,52. Και πάλι διαπιστώνουμε πως ένα έργο το οποίο προηγουμένως είχε αρνητική αξία, τώρα έχει θετική αξία.

Η option επέκτασης στην εικόνα 5 είναι σχετικά εύκολο να αποτιμηθεί επειδή, όταν διατεθεί η option, όλες οι επόμενες ταμειακές εισροές και εκροές αυξάνονται κατά 20%. Σε περίπτωση που τα πάγια έξοδα παραμένουν τα ίδια ή αυξηθούν κατά λιγότερο από 20%, είναι απαραίτητο να παρακολουθούνται περισσότερες πληροφορίες στους κόμβους της εικόνας 3. Συγκεκριμένα θα πρέπει να καταγράφονται τα ακόλουθα:

1. Η παρούσα αξία των επόμενων πάγιων εξόδων
2. Η παρούσα αξία των επόμενων εσόδων μετά την αφαίρεση των μεταβλητών εξόδων.

Τότε η εξόφληση από τη διάθεση της option μπορεί να υπολογιστεί.

Όταν ένα έργο έχει δύο ή περισσότερες options, αυτές συνήθως δεν είναι ανεξάρτητες. Η αξία του να έχει κανείς και την option A και την option B δεν είναι συνήθως το άθροισμα των αξιών των δύο options. Για να φανεί αυτό, ας υποθέσουμε ότι η εταιρεία με την οποία ασχολούμαστε έχει και option εγκατάλειψης και option επέκτασης. Το έργο δε μπορεί να επεκταθεί αν έχει ήδη εγκαταλειφθεί. Επιπλέον, η αξία της option πώλησης για την εγκατάλειψη εξαρτάται από το αν το έργο έχει επεκταθεί.

Αυτές οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των options στο παράδειγμά μας μπορούν να αντιμετωπισθούν με τον ορισμό τεσσάρων καταστάσεων σε κάθε κόμβο:

1. Δεν έχει εγκαταλειφθεί – δεν έχει επεκταθεί
2. Δεν έχει εγκαταλειφθεί – έχει επεκταθεί
3. Έχει εγκαταλειφθεί – δεν έχει επεκταθεί
4. Έχει εγκαταλειφθεί – έχει επεκταθεί

Όταν πηγαίνουμε προς τα πίσω στο δέντρο υπολογίζουμε τη συνδυασμένη αξία των options σε κάθε κόμβο για όλες τις τέσσερις εναλλακτικές λύσεις.

Όταν υπάρχουν αρκετές στοχαστικές μεταβλητές, η αξία του βασικού έργου συνήθως προσδιορίζεται με την προσομοίωση Monte Carlo. Η αποτίμηση των ενσωματωμένων στο έργο options είναι τότε πιο δύσκολη επειδή η προσομοίωση Monte Carlo λειτουργεί από την αρχή ως το τέλος του έργου. Όταν φτάνουμε σε ένα ορισμένο σημείο, δεν έχουμε πληροφορίες για την παρούσα αξία των μελλοντικών ταμειακών ροών του έργου.

ΜΕΡΟΣ Γ΄

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΙΜΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Τιμές αναγωγής και κεφαλαίου

Τιμές αναγωγής και κεφαλαίου

Στις μέρες μας, σχεδόν κάθε διδακτικό βιβλίο που αφορά την οικονομολογία περιέχει ύλη σχετικά με την προεξόφληση. Το πρόβλημα είναι ότι πολλά από αυτά τα βιβλία δεν περιέχουν αρκετή ύλη και παραλείπονται κάποιες πολύ σημαντικές λεπτομέρειες. Για παράδειγμα, δεν ξοδεύουν αρκετό χρόνο σε σημαντικές θεωρητικές έννοιες που λειτουργούν σαν υπόβαθρο για τις σταθερές προεξοφλητικές τεχνικές. Από την άλλη πλευρά, δεν αρνείται κανείς πως πολλά ενεργειακά κεφάλαια συναλλάσσονται σταθερά με αξίες αγοράς που είναι πολύ διαφορετικές απ' ό,τι εκείνες που μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας αυτές τις τεχνικές, χωρίς να εξαιρούμε ότι οι κανονισμοί – τηρουμένων των αναλογιών – που οι επενδυτές θέτουν αναπόφευκτα σε εφαρμογή στα προεξοφλητικά γυμνάσια πηγάζουν αρκετά εκτός του σκοπού της συνήθους θεωρίας.

Για περισσότερα για το θέμα αυτό, ο αναγνώστης ας παραπεμφθεί στο Davis (1996), αν και ενόσω θα εξετάζει λεπτομερώς την παρούσα έκθεση, θα πρέπει να κρατήσει στη μνήμη του μια παρατήρηση του Καθηγητή Darwin C. Hall: «Η θεωρία βελτιώνεται με τον καιρό, δεδομένων των ενεργητικών προσπαθειών για να την εφαρμόσουν και των επαναλαμβανόμενων ανακαλύψεων των σοβαρών μικροεσόδων.

1.1 Πρώτες αρχές

Κατά την εργασία σε αυτό το κεφάλαιο, οι αναγνώστες θα ασχοληθούν με μια απλή διαδικασία, η οποία ξεκινά με την απόκτησε της *καθαρής παρούσης αξίας* (net present value – NPV) μιας επένδυσης. Αυτό συμπεριλαμβάνει τον υπολογισμό της παρούσης αξίας (present value – PV) των εσόδων που μια επένδυση θα έχει με το χρόνο, και αφαιρώντας απ' αυτήν την παρούσα αξία *όλων* των (αναμενόμενων) δαπανών ή κοστών που απαιτούνται για να εκτελεστεί το έργο. Αυτός ο υπολογισμός μας δίνει την καθαρή παρούσα αξία (NPV). Τώρα, αν η NPV είναι μεγαλύτερη του μηδενός (NPV > 0), τότε η επένδυση κρίνεται βιώσιμη.

Υπέθεσε ότι βάζεις χίλια ευρώ σε μία τράπεζα και ότι το επιτόκιο είναι 10% (0,10). Στο τέλος του χρόνου έχεις 1.000(1 + 0,10) = 1.100 ευρώ, αν η άθροιση γίνεται μια φορά το χρόνο (στο τέλος του χρόνου). Τώρα βάλε τα χρήματα στην τράπεζα για 2 χρόνια. Αν η άθροιση γίνεται πάλι μια φορά το χρόνο, στο τέλος του χρόνου, θα έχεις στο τέλος των δύο χρόνων $1.000(1 + 0,1)(1 + 0,1) = 1.000(1 + 0,1)^2$ =1.210 ευρώ. Δες κάτι που είναι διαφορετικό εδώ! Στο πρώτο παράδειγμα, τα 1.000 ευρώ είναι η παρούσα αξία (present value – PV) των 1.100 ευρώ – ή με παρόμοιο τεκμήριο, τα 1.100 ευρώ είναι η τελική αξία (final value – F) των 1.000 ευρώ. Στο δεύτερο παράδειγμα τα 1.000 ευρώ είναι η παρούσα αξία (PV) των 1.210 ευρώ που εισπράττονται στο τέλος του δεύτερου έτους. Αυτό σημαίνει, $PV = 1210/(1 + 0,1)^2 =$ 1.000 ευρώ. Αυτή η εργασία θα πρέπει να γίνει τέλεια κατανοητή πριν συνεχίσεις παρακάτω.

Μπορούμε να συνεχίσουμε ρωτώντας ποια είναι η παρούσα αξία των 5.000 ευρώ, που εισπράττονται στο τέλος 4 χρόνων, αν το επιτόκιο είναι 12%, και η άθροιση γίνεται μια φορά το χρόνο (στο τέλος του χρόνου); Η απάντηση είναι $5000/(1 + 0,12)^4 = 2.542$ ευρώ. Ποια είναι η μελλοντική αξία 1.200 ευρώ μετά από 10 χρόνια, αν το επιτόκιο (r) είναι 6%; Αυτή είναι $1200(1 + r)^{10} = 1200(1+0,06)^{10} = 2.149$ ευρώ. Ο αναγνώστης θα πρέπει να κάνει αυτές τις ασκήσεις με επιτόκιο της τάξης του 10%.

Τώρα υπέθεσε ότι βάζουμε 1.000 ευρώ σε μια τράπεζα και η άθροιση γίνεται δυο φορές το χρόνο: πρώτα στο τέλος του εξαμήνου και κατόπιν στο τέλος του χρόνου. Αν το επιτόκιο είναι 10%, η τελική αξία (final value – F) στο τέλος του χρόνου θα είναι $1000(1 + 0,10/2)^2 = 1000\ (1 + 0,05)^2 = 1.102,5$ ευρώ. Υποπτευόμαστε έτσι πως καθώς αυξάνουμε τον αριθμό των συγκεντρώσεων, η τελική αξία (F) αυξάνεται. Αλλά πριν προχωρήσουμε στο τελευταίο με ένα «απεριόριστο αριθμό» συγκεντρώσεων για κάθε χρόνο, ας ασχοληθούμε με μια κατάσταση 2 χρόνων με 3 αθροίσεις ανά χρόνο (π.χ. κάθε 4 μήνες) και με επιτόκιο r = 10% (0,10). Τώρα έχουμε $F = 1000(1 + 0,10/3))^{3x2} = 1000(1 + 0,10/3))^6 = 1.217,4$ ευρώ. Σύγκρινε την τιμή αυτή της F στο τέλος των 2 χρόνων, αλλά με την τιμή της F που βρήκαμε για μία μόνο άθροιση ανά χρόνο και για άλλη μια φορά θα διαπιστώσεις το αποτέλεσμα των πολλαπλών συγκεντρώσεων. (Παρατήρηση: Ένας όρος που εμφανίζεται συχνά είναι «το αποτελεσματικό ετήσιο επιτόκιο» ή r_e. Για μια κατάσταση ενός χρόνου (T = 1), r = 10% και για 2 αθροίσεις ανά χρόνο το αποτελεσματικό επιτόκιο είναι $r_e = (1 + 0,10/2)^2 – 1 = 0,1025 = 10,25\%$.)

Διαγράφοντας την έκφραση παρούσα αξία από εδώ και στο εξής και θεωρώντας μια ποσότητα χρημάτων τη στιγμή «μηδέν» να είναι ίση με P, τότε με επιτόκιο r μπορούμε να γράψουμε:

1 έτος, 1 άθροιση /έτος	$F = P(1 + r)$
T έτη, 1 άθροιση /έτος	$F = P(1 + r)^T$
T έτη, n αθροίσεις/έτος	$F = P(1 + r/n)^{nT}$
1 έτος, n αθροίσεις/έτος	$F = P(1 + r/n)^n$

Ορίστε τι γίνεται με την τιμή της F όταν έχουμε έναν απεριόριστο αριθμό συγκεντρώσεων:

$$F = P[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n] \tag{1}$$

Εδώ το ‘lim’ σημαίνει όριο, γιατί εφόσον το άπειρο (∞) είναι πιο πολύ μια κατεύθυνση παρά ένας αριθμός, δε μπορεί να εισαχθεί στην πιο πάνω σχέση και χρειάζεται να καταφύγουμε σε κάτι πιο ειδικό, όπως η προσέγγιση του απείρου αλλά ποτέ δε θα φτάσουμε εκεί. Ωστόσο, η απάντηση είναι αρκετά απλή: $F = Pe^r$, όπου e είναι η βάση του φυσικού λογαριθμικού συστήματος και μπορεί να υπολογιστεί σχεδόν σε κάθε υπολογιστή τσέπης. Αριθμητικά είναι περίπου 2,7183. Τώρα ας υποθέσουμε ότι βάλαμε 1.000 ευρώ σε μια τράπεζα που κατέβαλε 10% τόκους και τα κρατήσαμε εκεί για ένα χρόνο, ενώ αυτά συγκεντρώνονται άπειρες φορές το χρόνο (π.χ. συνεχόμενα). Τότε έχουμε $F = Pe^r = 1.000e^{0.10} = 1.105,2$ ευρώ. Αυτό θα έπρεπε να συγκριθεί με τις τιμές της F που βρήκαμε πιο πάνω, εκεί που έχουμε έναν απεριόριστο αριθμό συγκεντρώσεων ανά χρόνο, αλλά για T χρόνια: $F = Pe^{rT}$.

Για παράδειγμα, ας πάρουμε T = 2, r = 10% και P = 1.000. Τότε παίρνουμε $F = Pe^{rT} = 1000e^{0,10x2} = 1.221,4$. Αυτό θα έπρεπε επίσης να συγκριθεί με τα προηγούμενα αποτελέσματα. Κάτι που είναι ενδιαφέρον εδώ είναι το ότι φαίνεται πως ο όρος e^{rT} θα μπορούσε να λειτουργεί σα μια προσέγγιση του όρου $(1+r)^T$. Ας το δοκιμάσουμε αυτό για χρονικό ορίζοντα ενός χρόνου (T = 1), με δύο τιμές του r: r = 5% (= 0,05) και r = 50% (= 0,5) και με P = 1.000. Προχωρώντας τη διαδικασία, υπολογίζουμε δύο τιμές της F:

r = 5%	F = 1000(1 + 0,05) = 1.050	$F = 1000e^{0,05} = 1.051,3$
r = 50%	F = 1000(1 + 0,5) = 1.500	$F = 1000e^{0,50} = 1.648,7$

Στην πρώτη περίπτωση η διαφορά επί τοις εκατό είναι (1051,3-1050)/1050 = 0,0012 = 0,12%. Στη δεύτερη περίπτωση η διαφορά είναι (1648-1500)/1500 = 0,0987 = 9,87%. Αυτό μας λέει κάτι: $e^{rT} \approx (1+r)^T$, όταν το rT είναι μικρό. Οι επόμενες ασκήσεις είναι εύκολες, αλλά θα πρέπει να γίνουν οπωσδήποτε.

1.2 Ένα πολύ μικρό πηγάδι πετρελαίου

Υποθέστε η δεσποινίς Bibi Sally βλέπει μια λακκούβα με πετρέλαιο στην πίσω αυλή της μια μέρα και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι πρόκειται να κάνει κάποια μεθοδική γεώτρηση. Πηγαίνει στην τράπεζα και ζητά ένα δάνειο 1.000 ευρώ για να αγοράσει ένα μικρό γεωτρύπανο. Της προσφέρουν ένα δάνειο με «επιτόκιο της αγοράς» το οποίο είναι για παράδειγμα 10%. (Θα αφήσουμε για αργότερα τον τρόπο με τον οποίο θα αποπληρωθεί το δάνειο.) Το σχέδιό της είναι απλό. Θα αγοράσει ένα τρυπάνι και θα προσλάβει το φίλο της, Βασίλη, για να το χειριστεί για 2 χρόνια. Ο Bill έμαθε κάποτε οικονομικά στο Stockholm College of Economic Knowledge και σύμφωνα με το αφεντικό αυτού του ευγενούς ιδρύματος είναι κυρίως τσαρλατάνος. Αλλά ακόμη κι έτσι, η Bibi συμφωνεί να τον πληρώνει 300 ευρώ το χρόνο, ειδικά αφού αυτός την ενημέρωσε ότι εκείνη έχει καλό πράγμα και μπορεί να προσδοκά να εξάγει 33 βαρέλια πετρελαίου κάθε χρόνο, τα οποία μπορούν να πωληθούν για 22 ευρώ/βαρέλι. Στο Bill αρέσουν οι αριθμοί 33 και 22, γιατί αυτοί ήταν ο σειριακός του αριθμός στο στρατό. (Επιπλέον, στην ακόλουθη συζήτηση, ποτέ μην ξεχάσετε ότι το 33 και το 22 είναι οι προσδοκώμενες τιμές!)

Αλλά ως συνήθως, σε ό,τι αφορά τα οικονομικά, ο Bill έκανε λάθος. 33 βαρέλια πετρελαίου όταν τα πουλάς για 22 ευρώ το καθένα, δίνουν 726 ευρώ το χρόνο και αυτά συλλέγονται στο τέλος κάθε χρόνου. Παρόλα αυτά, αυτά είναι τα ακαθάριστα έσοδα της Bibi. Τα καθαρά έσοδά της κάθε χρόνο (π.χ. τα κέρδη της) γίνονται 726-300 = 426 ευρώ, μιας και πρέπει να ληφθεί υπόψη και ο μισθός του Bill. Ας ονομάζουμε τα 426 ευρώ ως καθαρό κέρδος, υποθέτοντας πως δεν υπάρχουν φόροι, επιδόματα για την απόσβεση και την εξάντληση κλπ προς το παρόν. Η παρούσα αξία των δύο παραλαβών των 426 ευρώ είναι:

$$PV = \frac{V_1}{(1+r)} + \frac{V_2}{(1+r)^2} = \frac{426}{1,1} + \frac{426}{1,1^2} = 387 + 352 = 739\, δολλάρια$$

Η παρούσα αξία των καθαρών παραλαβών της Bibi είναι μόνο 739 ευρώ και εφόσον η παρούσα αξία του δανείου είναι 1000 ευρώ, η επένδυση είναι απολύτως χαμένη. Η καθαρή παρούσα αξία της NPV (=739-1000) είναι μικρότερη του μηδενός. Αν δανειζόταν τα χρήματα, δε θα μπορούσε να ξεπληρώσει το χρέος της στο τέλος των 2 χρόνων. Ή, για εκείνο το ζήτημα, αν αγόραζε το τρυπάνι με δικά της χρήματα (1000 ευρώ), η περιουσία της θα μειωνόταν στο τέλος του δεύτερου χρόνου – ή στην τρέχουσα αξία, η περιουσία της θα μειωνόταν κατά 1000-739= 261 ευρώ.

Αλλά υποθέστε ότι εξάγονται 33 βαρέλια/χρόνο αλλά για 4 χρόνια και ότι πουλιούνται για 22 ευρώ/βαρέλι και ότι ο Bill όχι μόνο θα πληρωνόταν 300 ευρώ/χρόνο, αλλά θα ίδρωνε και θα ήταν σε ένταση με το τρυπάνι, νύχτα και μέρα, για να το διατηρεί σε τέλεια εργασιακή λειτουργία σε όλη την περίοδο αυτή. Η παρούσα αξία των χρηματοροών του έργου θα είναι τώρα:

$$PV = \frac{426}{1{,}1} + \frac{426}{1{,}1^2} + \frac{426}{1{,}1^3} + \frac{426}{1{,}1^4} = 1.350{,}36\ \delta o \lambda \lambda \acute{\alpha} \rho \iota \alpha$$

Η παρούσα αξία είναι τώρα περισσότερη από το κόστος της επένδυσης και έτσι NPV>0: Αν δανειστεί λοιπόν 1000 ευρώ, θα μπορεί να ξεπληρώσει το δάνειο στο τέλος του $4^{ου}$ χρόνου, ή αν είναι αγοράσει το τρυπάνι με δικά της χρήματα, η περιουσία της θα αυξανόταν. Για να δούμε τι συμβαίνει εδώ, θα ήταν χρήσιμο να εξετάσουμε το παρακάτω διάγραμμα.

Αν η Bibi βάλει τις εισοδηματικές της ροές (τα V=426 ευρώ) στην τράπεζα αμέσως μόλις τα πάρει και λαμβάνει 10% επιτόκιο, τότε θα έχει πολλά παραπάνω χρήματα για να ξεπληρώσει το δάνειό της, το οποίο θα απαιτεί $1000(1 + 0{,}1)^4 = 1.464$ ευρώ. Για να είμαστε ακριβείς, εκείνη θα έχει 1.977 ευρώ (κάτι που πρέπει να επιβεβαιώσει ο αναγνώστης) και έτσι – μετρώντας στο t_0 της τρέχουσα αξία ή μετρώντας στο t_4 με όρους F – αυτή η δραστηριότητα πληρώνει καλά. Ο Bill σίγουρα αξίζει ένα μπόνους για την εργασία του με το τρυπάνι.

Δύο ακόμη πράγματα μπορεί να φανούν χρήσιμα εδώ. Το κέρδος από την άποψη της τελικής τιμής ήταν 1.977-1.464 = 513 ευρώ. Το κέρδος από την άποψη των παρουσών τιμών ήταν 1.350-1.000 = 350 ευρώ. Παρατηρείστε ότι $513 \approx 350(1+0{,}1)^4$. Ας εισάγουμε επίσης μια λίγο εξελιγμένη σημείωση. Για παράδειγμα, υποθέστε πως έχουμε $G = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. Αυτό μπορεί να γραφεί:

$$G = \sum_{i=1}^{4} X_i = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \qquad (2)$$

Σε αυτήν την έκφραση, το Σ υποδηλώνει άθροισμα, και λέμε ότι τα όρια ‘i’ παίρνουν τιμές από ένα έως 4. Τώρα υποθέτουμε πως έχουμε $Y= I + cI + c^2I + c^3I$. Αυτό μπορούμε να το γράψουμε ως εξής:

$$Y = I + cI + c^2 I + c^3 I = I(1 + c + c^2 + c^3) = \sum_{i=0}^{3} c^i I = I \sum_{i=0}^{3} c^i$$

Εδώ ας θυμηθούμε ότι κάθε αριθμός που υψώνεται στο 0 δίνει 1 και έτσι $c^0 = 1$. Στη συνέχεια, ας εισάγουμε ένα σήμα άθροισης στο παράδειγμα στο οποίου εργαζόμασταν προηγουμένως.

$$PV = \frac{V_1}{(1+r)} + \frac{V_2}{(1+r)^2} + \frac{V_3}{(1+r)^3} + \frac{V_4}{(1+r)^4} = \sum_{i=1}^{4} \frac{V_i}{(1+r)^i} = \sum_{i=1}^{4} \frac{426}{(1+0{,}1)^i} \qquad (3)$$

Τελικά, υποθέτουμε ότι η Bibi και ο Bill φτάνουν στο συμπέρασμα πως το πετρέλαιο που αντλούν θα διαρκέσει για πάντα, ότι η τιμή του δε θα αλλάξει ποτέ, ότι η ποσότητα επίσης δε θα αλλάξει και ότι θα ζουν για πάντα προκειμένου να δουλεύουν με το τρυπάνι – το οποίο επίσης θα δουλεύει για πάντα – και θα αποκομίζουν το κέρδος. Η παρούσα αξία της δραστηριότητας αυτής είναι τώρα:

$$PV = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{V_i}{(1+r)^i} = \frac{V_1}{(1+r)} + \frac{V_2}{(1+r)^2} + \ldots.. + \frac{V_x}{(1+r)^x} + \ldots.$$

Με άλλα λόγια, η παραπάνω σχέση είναι μια άπειρη σειρά. Ερώτηση: ποια είναι η παρούσα αξία PV αυτή της σειράς, υποθέτοντας ότι $V_1 = V_2 = \ldots = V_x = \ldots. =$ V; Για να ξεκινήσουμε, ας ονομάσουμε τον όρο 1/(1+r) = θ. Τότε έχουμε:

$$PV = \sum_{i=1}^{\infty} \theta^i V_i = \theta V_1 + \theta V_2 + \theta V_3 + \ldots. = \theta V + \theta^2 V + \theta^3 V + \ldots.$$

Στη συνέχεια, θα κάνουμε ένα χειρισμό στον παραπάνω τύπο, παρατηρώντας ότι η παρούσα αξία PV γράφεται σαν (PV) προκειμένου να σιγουρευτούμε ότι διακρίνεται απ’ τα V. Έτσι, ξεκινώντας με $PV = \theta V + \theta^2 V + \theta^3 V + \ldots\ldots$, όπου η δεξιά πλευρά της τελευταίας έκφρασης περιέχει έναν απεριόριστο αριθμό όρων, πολλαπλασιάζουμε και τις δύο πλευρές με υ και έχουμε $\theta(PV) = \theta^2 V + \theta^3 V + \theta^4 V + \ldots.$ Αφαιρώντας την τελευταία απ’ τις εκφράσεις αυτές από την αρχική παίρνουμε PV – θ(PV) = θV, ή PV(1 – θ) = θV, το οποίο μπορεί να γραφεί (PV) = θV/(1-θ). Τελικά, κάνοντας το θ = 1/(1+r) για μια ακόμη φορά, παίρνουμε το πολύ απλό αποτέλεσμα που φαίνεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$PV = \frac{\frac{1}{(1+r)}}{1 - \frac{1}{1+r}} V = \frac{V}{r} \qquad (4)$$

Αν βάλουμε τους γνωστούς μας αριθμούς στην παραπάνω σχέση, παίρνουμε PV = V/r = 426/0,1 = 4.260 ευρώ. Έχοντας λάβει τα πάντα υπόψη, 4.260 ευρώ δε φαίνονται και κάτι το ιδιαίτερο, αλλά αν σταματήσεις και το σκεφτείς, 426 ευρώ που λαμβάνονται σε 50 χρόνια και αναγάγονται με επιτόκιο 10% δεν είναι επίσης κάτι το ιδιαίτερο, όπως εύκολα διαπιστώνετε. Φυσικά, 50 χρόνια δεν είναι μεγάλο χρονικό διάστημα στον ιστορικό χρόνο και μερικοί οικονομολόγοι συμφωνούν πως οι κυβερνήσεις θα πρέπει να έχουν υπόψη τους το εξής: για να είμαι συγκεκριμένος, όταν οι κυβερνήσεις σκέφτονται τα μελλοντικά οφέλη, θα πρέπει να χρησιμοποιούν πολύ χαμηλές τιμές αναγωγής, ανεξάρτητα από το τι τιμές αναγωγής χρησιμοποιούνται στον ιδιωτικό τομέα. Κατ’ αυτόν τον τρόπο, συγκεκριμένα έργα τα οποία μπορεί να απορριφθούν από τον ιδιωτικό τομέα όταν λαμβάνονται υπόψη οι παρούσες τιμές (όπως π.χ. η υγειονομική περίθαλψη), μπορεί να είναι αποδεκτά όταν εξετάζονται λεπτομερέστατα με τη μεσολάβηση εξαιρετικά χαμηλών τιμών αναγωγής. Στην πραγματικότητα, ο μακαρίτης Frank Ramsey του Πανεπιστημίου του Cambridge ήταν επιρρεπής να υποστηρίξει πως εφόσον οι χώρες έχουν άπειρες ζωές θεωρητικά, οι κυβερνήσεις θα έπρεπε να χρησιμοποιούν ένα μηδενικό αναγωγικό επιτόκιο.

Προσέξτε κάτι άλλο! Η πιο πάνω αναγωγή έγινε χρησιμοποιώντας επιτόκια. Η τράπεζα πρόσφερε στη Bibi ένα δάνειο με συγκεκριμένο επιτόκιο – ίσως το επιτόκιο δανεισμού της αγοράς που είναι για μικρούς δανειολήπτες (το οποίο μπορεί να είναι διπλάσιο του επιτοκίου για τις καταθέσεις ή και περισσότερο). Αλλά δεν εξαναγκάστηκε να αναγάγει τις μελλοντικές χρηματοροές σε αυτό το επιτόκιο, ειδικά όταν αυτές οι χρηματοροές δεν είναι βέβαιες. Αυτή η πτυχή της συμπεριφοράς της δεν είναι ένα θέμα που σχετίζεται με την αγορά. Μπορεί να είχε διαλέξει να αναγάγει αυτές τις χρηματοροές σε πολύ μεγαλύτερο αναγωγικό επιτόκιο. Θα μπορούσε να είχε πει στο Bill: «Τα επιτόκια αναγωγής είναι υποκειμενικά. Μου λες ότι θα παίρνω 426 ευρώ το χρόνο, αλλά δεν είμαι σίγουρη. Θα εξετάσω το έργο εάν πάρω NPV>0, χρησιμοποιώντας ένα αναγωγικό επιτόκιο του 15%. Βλέπεις, αν ήμουν σίγουρη ότι θα έπαιρνα 426 ευρώ κάθε χρόνο για τα επόμενα τέσσερα χρόνια, δε θα υπήρχε πρόβλημα. Αλλά με αναγωγικό επιτόκιο 10%, τα αβέβαια 426 ευρώ ανά χρόνο για 4 χρόνια δε μου δίνουν τόση ικανοποίηση όση για παράδειγμα τα 1000 ευρώ μου όταν τα επενδύω για διακοπές μιας εβδομάδας στο Παρίσι.»

Θα μπορούσε επίσης να αναφέρει ότι αν ο Bill είχε μελετήσει κεφαλαιακό προϋπολογισμό, τότε θα ήξερε ότι το σωστό αναγωγικό επιτόκιο για φυσικές επενδύσεις είναι το ευκαιριακό κόστος του κεφαλαίου για ένα συγκεκριμένο έργο. Σε απλή γλώσσα, αυτό είναι το αναμενόμενο επιτόκιο της απόδοσης το οποίο θα μπορούσε να εισπραχθεί από μια επένδυση που έχει ένα συγκρίσιμο ρίσκο (π.χ. από μια επένδυση που είναι στο ίδιο επίπεδο ρίσκου). Ο πραγματικός υπολογισμός εδώ μειώνεται συνήθως μέχρι ένα σταθμισμένο μέσο όρο της αναμενόμενης απόδοσης πάνω σε μετοχές μιας εταιρείας και το επιτόκιο πληρώνει το χρέος – υποθέτοντας πως η εν λόγω επένδυση είναι μια τυπική επένδυση για την επιχείρηση ως σύνολο. (Ωστόσο, δεν είναι σίγουρο αν αυτές οι παρατηρήσεις εφαρμόζονται για το μη πολύ-επιβλητικό έργο που κουβεντιάζουμε σε αυτό το κομμάτι.

Επιπρόσθετα, θα πρέπει να σημειωθεί ότι ένα χαμηλό αναγωγικό επιτόκιο δίνει περισσότερη βαρύτητα στις χρηματοροές που κερδίζονται στο μακρινό μέλλον, ενώ ένα υψηλό αναγωγικό επιτόκιο δίνει μακρινά κέρδη πολύ λιγότερης βαρύτητας και μπορούν να κάνουν το μάνατζερ να εμφανίζεται μυωπικός στην αξιολόγησή του/της στα δυνητικά σχέδια των επενδυτικών οργανισμών.

Και τελικά, όπως υπαινίχθηκε και στην αρχή της παραπάνω συζήτησης, τα περισσότερα έσοδα και κόστη στον πραγματικό κόσμο είναι τα *αναμενόμενα* έσοδα και κόστη. Αν πάρουμε το παράδειγμα με το οποίο εργαζόμαστε, εκτός κι αν η αναμενόμενη τιμή του πετρελαίου αντισταθμίζεται π.χ. με ένα μακροπρόθεσμο συμβόλαιο, αυτό δεν είναι τελείως βέβαιο. Μπορεί να υπάρχει διαφορετική ποσότητα πετρελαίου στην ιδιοκτησία της απ' ό,τι η Bibi νομίζει. Και ο Bill μπορεί να αλλάξει γνώμη στο να δουλεύει με 300 ευρώ το χρόνο. Έτσι, υπολογίζοντας και χρησιμοποιώντας παρούσες αξίες (PVs) είναι περισσότερο τέχνη παρά επιστήμη και αυτό είναι αλήθεια ακόμα κι αν τέτοια πράγματα όπως η πραγματική θεωρία επιλογής φέρνεται στο προσκήνιο.

1.3 Ετήσιες καταθέσεις

Το επόμενο προφανές βήμα είναι να υπολογίσουμε την αριθμητική PV για μια πεπερασμένη – συγκρινόμενη με την άπειρη – νομισματική ροή που δείχνει μια ορισμένη αξία της V σε κάθε περίοδο. Αυτή τη στοιχειώδη υποχρέωση θα πρέπει να την αναλάβει ο αναγνώστης, ο οποίος έχει μόνο να αναπαράγει τους χειρισμούς που οδηγούν στην πιο κάτω εξίσωση, αν και με περιορισμένη ροή πληρωμών.

$$PV = \frac{\frac{1}{(1+r)}}{1-\frac{1}{1+r}}V = \frac{V}{r}$$

Σε περίπτωση που χρειάζεστε λίγη βοήθεια, θα παρουσιάσουμε αμέσως πιο κάτω μια παρόμοια άσκηση σε αυτό το κομμάτι.

Στο προηγούμενο κομμάτι εξετάσαμε τα κέρδη της δεσποινίδας Sally στη χρονική στιγμή t_o συγκρίνοντας την παρούσα αξία PV της επένδυσής της με το κόστος της επένδυσης. Το κέρδος της στην τρέχουσα αξία ήταν 350 ευρώ. Κάναμε ξανά το ίδιο στη χρονική στιγμή t_4 συγκρίνοντας την τελική αξία των κερδών που συγκέντρωσε, κατάλληλα επενδεδυμένων, με το ποσό των χρημάτων που χρειάστηκαν για να ξεπληρώσει το χρέος στην τράπεζα, συμπεριλαμβανομένου και του συσσωρευμένου επιτοκίου ($=1000(1+0,1)^4$). Το κέρδος της μετρήθηκε στο t_4 και ήταν 513 ευρώ.

Λίγη ορολογία θα ήταν ενδιαφέρουσα σε αυτό το σημείο. Η ρευστοποίηση ενός θετικού κέρδους ισοδυναμεί με αύξηση του πλούτου, όταν οι νομισματικές ροές αναγάγονται στο επικρατούν επιτόκιο. Θυμηθείτε το σενάριο στο προηγούμενο κομμάτι. Η δεσποινίς Sally βλέπει τη λακκουβίτσα πετρελαίου στην πίσω αυλή της και φτάνει στο συμπέρασμα πως προερχόταν από μεγαλύτερο κοίτασμα. Αλλά αυτό δεν είναι βέβαιο. Λαμβάνοντας υπόψη τις προσδοκίες της, αν είχε αγοράσει ένα τρυπάνι και μπορούσε να τρυπάει για δύο περιόδους, κερδίζοντας (με τη μορφή απολαβών) 426 ευρώ ανά περίοδο, η περιουσία της θα μειωνόταν, επειδή δε θα είχε κερδίσει αρκετά για να ξεπληρώσει το δάνειο. Αλλά όπως είδαμε, με εργασία 4 χρόνων θα μπορούσε να κερδίσει αρκετά για να πληρώσει όλα της τα έξοδα, να ξεπληρώσει το δάνειο και να της μείνει και κάτι. Έτσι, έχουμε το δικαίωμα να πούμε ότι η περιουσία της έχει αυξηθεί. Στην πραγματικότητα, ήταν η γεωλογία μια ακριβής επιστήμη και ένας γεωλόγος που επιβεβαίωσαν το μέγεθος του κοιτάσματος, τότε για τον κόσμο που επικρατεί σε ένα βιβλίο θα γιόρταζε την καλή της τύχη με την πώληση των περιουσιακών της στοιχείων (π.χ. του κοιτάσματος) επί τόπου και θα αναχωρούσε για το Παρίσι ή το Courchevel ή το Are για να κάνει λίγο σκι.

Πάμε τώρα στην κύρια δραστηριότητα του τμήματος αυτού. Υποθέστε ότι η δεσποινίς Sally δανείστηκε μια ποσότητα χρημάτων PV τη στιγμή t_0. Τηρουμένων των αναλογιών, σε χρόνο T θα οφειλόταν μια ποσότητα χρημάτων $PV(1+r)^T$ στην τράπεζα. Τώρα, υποθέστε ότι εξοφλούσε το χρέος της με μια ποσότητα χρημάτων A κάθε χρόνο. Τι ακριβώς έκανε ο κ. Διευθυντής της τράπεζας με τα χρήματά του (π.χ. την ποσότητα A) είναι ένα καλά κρυμμένο μυστικό, αλλά για το σκοπό του υπολογισμού των ετησίων εισοδημάτων η υπόθεση είναι πως όταν λαμβανόταν κάθε ποσότητα A, αυτή επενδυόταν από το κ. Διευθυντή στο επικρατούν επιτόκιο, το οποίο εκλαμβάνεται ως r στη θεωρητική έννοια. (Θεωρητική: σημαίνει το ποσό ή την αξία που ισχύει για μια συγκεκριμένη συναλλαγή, ανεξάρτητα των περιστάσεων. Για παράδειγμα, θα μπορούσατε να εξοφλείτε το δάνειο του σπιτιού ή του αυτοκινήτου σας με θεωρητικό επιτόκιο 8%, αν και το επικρατούν επιτόκιο για καταναλωτικά δάνεια είναι 6,5%.)

Ας συνεχίσουμε εξετάζοντας την περίπτωση των τεσσάρων περιόδων που διαπραγματευτήκαμε στο προηγούμενο κομμάτι, χρησιμοποιώντας τους ίδιους αριθμούς και πιθανώς αναφερόμενοι στη σχέση:

$$F = P[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n]$$

Ετήσιο εισόδημα είναι η ποσότητα που πληρώνεται κάθε περίοδο έτσι ώστε αν αυτό είχε επενδυθεί απ' τον λήπτη σε θεωρητικό επιτόκιο, να ήταν ικανοποιητικό ώστε να αποπληρώσει το χρέος $PV(1+r)^5 = 1000(1+0,1)^4$ στο τέλος της περιόδου απόσβεσης. (Απόσβεση ενός χρέος σημαίνει την εξόφληση του δανείου, το οποίο στην περίπτωσή μας είναι 1.000 ευρώ, με περίοδο απόσβεσης να είναι τα 4 χρόνια.) Τα μαθηματικά που σχετίζονται με αυτήν την ιδιαίτερη ρύθμιση είναι:

$$PV(1+r)^4 = A + A(1+r) + A(1+r)^2 + A(1+r)^3$$

Σε αυτήν την έκφραση παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος A, αναφέρεται στη χρονική στιγμή t_4. Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με (1+r) παίρνουμε:

$$(1+r)[PV(1+r)^4] = A(1+r) + A(1+r)^2 + A(1+r)^3 + A(1+r)^4$$

Αφαιρώντας τις 2 παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$(1+r)^4PV[1-(1+r)] = A - A(1+r)^4 \qquad (5)$$

Και λύνοντας ως προς A καταλήγουμε ότι:

$$A = \frac{r(1+r)^4}{(1+r)^4-1}PV \qquad (6)$$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους αριθμούς του προηγούμενου κομματιού για να βρούμε $A = [0{,}1(1+0{,}1)^4]1000/[(1+0{,}1)^4 - 1]$ και αυτό μας κάνει 315,4 ευρώ. Με άλλα λόγια, η δεσποινίς Sally μπορεί να αποπληρώσει το δάνειο των 1.000 ευρώ στην τράπεζα πληρώνοντάς της με 315 ευρώ το χρόνο (στο τέλος του κάθε χρόνου για τέσσερα χρόνια), αντί για 1.464 ευρώ στο τέλος των 4 χρόνων.

Αυτές οι ετήσιες πληρωμές θα μπορούσαν επίσης να κατανεμηθούν στην πληρωμή του κεφαλαίου, το οποίο ήταν αρχικά 1.000 ευρώ, και στην πληρωμή του τόκου. Αυτό το θέμα θα αποσαφηνιστεί ακριβώς πιο κάτω με ένα απλό παράδειγμα. Αν θυμηθούμε πως πουλώντας 33 βαρέλια ανά χρόνο με 22 ευρώ το βαρέλι, η Bibi κέρδισε 426 ευρώ μετά τις δαπάνες, τότε το κέρδος της ανά χρόνο (πριν τους φόρους) είναι 426 – 315 = 111 ευρώ. Σε περίπτωση που ο αναγνώστης δεν το υπέθεσε, αυτό το θετικό κέρδος από μόνο του, υπολογιζόμενο σε 10% επιτόκιο, δείχνει ότι η εσοδεία (ή η απόδοση) της επένδυσής της είναι περισσότερη από 10%.

Κάτι άλλο που πρέπει να καταστήσουμε σαφές είναι πως αν η δεσποινίς Sally είχε αγοράσει τον εξοπλισμό για τη γεώτρηση με δικά της χρήματα αντί να τα δανειστεί, θα χρησιμοποιούσαμε ακριβώς τον ίδιο τύπο υπολογισμού. Κι αυτό γιατί το 'r' είναι ευκαιριακό κόστος, δεδομένου ότι κάθε φορά που μια επένδυση εξετάζεται κατά την οποία το αποτέλεσμα είναι αβέβαιο, μια εναλλακτική λύση είναι ένα «ασφαλές» χρηματοοικονομικό κεφάλαιο, όπως μια τραπεζική κατάθεση ή τα κρατικά ομόλογα. (Φυσικά, η εσοδεία από ένα παρόμοιο έργο θα μπορούσε να θεωρηθεί από έναν ειδικό σε κεφαλαιακό προϋπολογισμό σαν καλύτερη εκτίμηση του ευκαιριακού κόστους, αν και για ένα μικρό οικονόμο ή επενδυτή, αυτό δεν είναι ιδιαίτερα σχετικό.) Αγνοώντας τον πληθωρισμό, το να επενδύει σε ένα πηγάδι πετρελαίου αντί σε κάποια τραπεζική κατάθεση, δίνει στη Bibi ένα βέβαιο ποσό 1.464 ευρώ στο τέλος 4 χρόνων. Αλλά καθώς τα πράγματα εξελίχθηκαν ευχάριστα, τα 1.000 της ευρώ αυξήθηκαν σε 1.977 ευρώ, υποθέτοντας πως έβαζε στην τράπεζα το εισόδημά της από την επένδυση στο τέλος κάθε χρόνου, όπως δείξαμε πιο πάνω με τη σχέση:

$$F = P[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n]$$

Κάτι που μπορούμε να προσθέσουμε εδώ είναι ότι αυξήθηκε η περιουσία της: Αυξήθηκε κατά 1.977 – 1464 = 513 ευρώ σε τρέχουσα αξία, ή 350 ευρώ σε παρούσα αξία. (Γιατί;) Γι’ αυτό γίνεται οι επιτυχείς επενδύσεις. Και μια πιο προχωρημένη συζήτηση στην οποία η περιουσία της υπολογίζεται σε μονάδες «ωφέλειας» θα κατέληγε στο συμπέρασμα ότι η περιουσία της αυξήθηκε, ακόμη κι αν εκείνη κατανάλωνε τα κέρδη της αμέσως μόλις αυτά επιτυγχάνονταν.

Η έκφραση $A = \frac{r(1+r)^4}{(1+r)^4 - 1}PV$ αφορά την αξία σε μια ετήσια εισοδήματα 4 περιόδων.

Υποθέστε αντί γι’ αυτό πως έχουμε T περιόδους. Όπως εύκολα μπορούμε να επιβεβαιώσουμε, η έκφρασή μας θα γινόταν:

$$A = \frac{r(1+r)^T}{(1+r)^T - 1}PV$$

Αυτή είναι μια απ’ τις πιο πολύτιμες σχέσεις στην οικονομολογία. Ας τη χρησιμοποιήσουμε ξανά για να αποκτήσουμε επίγνωση στη διαφορά ανάμεσα στην απόσβεση του χρέους και την καταβολή των τόκων ενός κεφαλαίου. Για παράδειγμα, υποθέστε πως αγοράζουμε ένα σπίτι για 1.000 ευρώ με r = 10%. Υποθέτοντας πως αποσβένουμε το χρέος μας σε 2 χρόνια και καλώντας αυτήν την οφειλή PV, έχουμε τις ετήσιες πληρωμές μας ‘A’ (που γίνονται στο τέλος του χρόνου) A = $[0{,}1(1+0{,}1)^2]1000/[(1+0{,}1)^2 - 1]$ = 526 ευρώ και αυτά πληρώνονται στο τέλος του χρόνου και για δύο χρόνια. Εφαρμόζουμε τώρα τον παρακάτω πίνακα στο παράδειγμα αυτό:

Έτος	Αρχικό υπόλοιπο	A	Τόκος	Κεφάλαιο	Υπόλοιπο στο τέλος του χρόνου
1	1000	576	100	476	524 (=1000-476)
2	524	576	52,4	524	0

Ακολουθεί η μηχανική αυτού του υπολογισμού. Κάθε χρόνο γίνεται μια πληρωμή 576 ευρώ. Η κύρια πληρωμή (π.χ. η απόσβεση του δανείου) για το δεύτερο χρόνο είναι 576 – 52,4 = 523,6 (≈ 524) ευρώ, μιας και μπαίνοντας με υπόλοιπο 524 ευρώ στο δεύτερο χρόνο, η πληρωμή των τόκων (γι' αυτό το χρόνο) έπεσε από τα 100 στα 52,4 ευρώ. (Έχουν γίνει κάποιες «στρογγυλοποιήσεις στο παράδειγμά μας.) Τελικά, προσέξτε ιδιαίτερα το άθροισμα των τιμών στη στήλη «Κεφάλαιο». Αθροίζονται στο αρχικό μας κεφάλαιο των 1.000 ευρώ.

Σε αντικατόπτριση με το παράδειγμα εξόρυξης πετρελαίου, θα διακρίναμε πως μια επένδυση είναι επικερδής εάν η ανηγμένη τιμή (PV) των ροών του κέρδους είμαι μεγαλύτερη του κόστους της επένδυσης, η οποία από εδώ και στο εξής θα καλείται 'I'. (Αυτό είναι ακριβώς το ίδιο όπως το να λέμε πως NPV>0.) Με το πετρέλαιο να κυλάει για 4 χρόνια στο παράδειγμά μας, βλέπουμε ότι PV > I (= 1.000 ευρώ), το οποίο μεταφράσαμε επίσης σα να σημαίνει πως η επένδυση απέφερε έσοδα πάνω από 10%. Έτσι, στο υπόλοιπο βιβλίο θα γίνει κάποια προσπάθεια για να ξεχωρίζουμε τη διαφορά ανάμεσα σε PV και I, το οποίο σημαίνει ανάμεσε στην παρούσα αξία των ροών του κέρδους και του κόστους επένδυσης, όπου το τελευταίο δεν είναι το ίδιο πράγμα με το κεφαλαιακό κόστος. Στις πολύ απλές περιπτώσεις που εξετάσαμε πιο πάνω, το 'A' ήταν το κόστος του κεφαλαίου: δηλαδή η περιοδική (π.χ. η ετήσια) πληρωμή κύριου κεφαλαίου (δηλ. του γεωτρύπανου).

Ας δώσουμε προσοχή και σε κάτι ακόμα: Στη διαφορά ανάμεσα σε *πραγματικές* και *ονομαστικές* (δηλ. χρηματικές) αξίες και στο πώς η διαφορά αυτή ταιριάζει στην προηγούμενη συζήτηση. Υποθέστε ότι βάζετε 100 ευρώ σε μια τράπεζα και τώρα με αυτά τα χρήματα αγοράζει κάνει 100 σάντουιτς με αγγούρι – το οποίο είναι το μόνο είδος που παράγεται στη χώρα που ζείτε. (Προφανώς έχουμε για την τιμή των σάντουιτς αγγουριών ότι P_c = 1 ευρώ/σάντουιτς.) Αν το ονομαστικό επιτόκιο είναι 10%, τότε στο τέλος του χρόνου έχετε 110 ευρώ και αν το επίπεδο τιμής δεν έχει αλλάξει, μπορείτε να αγοράσετε 110 σάντουιτς αγγουριών. Εδώ μπορούμε να πούμε ότι το πραγματικό επιτόκιο – το οποίο είναι ένα χρήσιμο επιτόκιο – είναι το ίδιο με το ονομαστικό επιτόκιο. Και τα δύο είναι 10%!

Αλλά υποθέστε πως υπάρχει πληθωρισμός και η τιμή των σάντουιτς αυξάνεται κατά 5%. Υπό αυτές τις συνθήκες με τα 110 ευρώ θα μπορούν να αγοραστούν μόνο 110/1,05 = 104,76 (≈ 105) σάντουιτς. Τα χρήματα του επιτοκίου είναι 10%, αλλά με τον πληθωρισμό το πραγματικό επιτόκιο είναι 5% (= (105-100/100). Αν η τιμή του επιτοκίου είχε αυξηθεί κατά 10%, τότε ο πραγματικός τόκος θα ήταν μηδέν. Επίσημα – αλλά όχι ακριβώς – έχουμε: πραγματικό επιτόκιο = ονομαστικό επιτόκιο *μείον* ποσοστό πληθωρισμού. Αυτή η ιδέα ισχύει και για άλλα πράγματα, όπως το εισόδημα και οι μισθοί. Αν το εισόδημά σας αυξάνεται κατά 8%, αλλά ο πληθωρισμός είναι στο 8%, ο πραγματικός σας μισθός δεν αυξάνεται καθόλου.

Αυτό μας φέρνει στην ουσία της συζήτησης. Αν οι χρηματοροές στην άσκησή μας που αφορά την αναγωγή είναι σε πραγματικούς όρους, τότε το ανηγμένο κόστος θα είναι επίσης σε πραγματικούς όρους. Ο λόγος γι' αυτό είναι πως το ανηγμένο κόστος είναι το (υποκειμενικό) ευκαιριακό κόστος της επένδυσης και αν ο πληθωρισμός δε συμπεριλαμβάνεται στις χρηματοροές που απορρέουν από την επένδυση, θα έπρεπε επίσης να αποκλείεται από το ευκαιριακό κόστος. Αντίστοιχα, αν οι χρηματοροές είναι ονομαστικές, τότε το ίδιο θα προέκυπτε πως είναι αληθές για τα ανηγμένα κόστη. Οι περισσότερες από τις χρονικές χρηματοροές είναι σε ονομαστικούς όρους.

1.4 Μερικά σχόλια στις κεφαλαιουχικές αξίες

Θα ήταν περιττό να πούμε ότι υπάρχουν πολλά περισσότερα για τον υπολογισμό των επενδύσεων απ' ό,τι αυτές οι απλές τεχνικές αναγωγής που περιγράφτηκαν πιο πάνω. Συχνά έρχεται η αβεβαιότητα στο προσκήνιο με έναν ουσιαστικό τρόπο και κάποια πράγματα όπως η αντιστρεψιμότητα των επενδύσεων θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη. Αλλά η μελέτη αυτών των περιπτώσεων θα πρέπει να ξεκινήσει με στερεά κατανόηση των στοιχειωδών διαδικασιών αναγωγής.

Ας συνεχίσουμε την προηγούμενη συζήτησή μας σε μια ελαφρώς υψηλότερη βάση. Θα έπρεπε να είχαμε αρχίσει να καταλαβαίνουμε πως η τιμή πολλών φυσικών και οικονομικών κεφαλαίων καθορίζεται από προσδοκίες για τα μελλοντικά αποτελέσματα και κόστη. Επιπρόσθετα, οι αναγνώστες θα έπρεπε να είχαν αρχίσει να ρίχνουν γρήγορες ματιές στην πτυχή «ο χρόνος είναι χρήμα» της εργασίας μας. Αν η Bibi αγοράζει ένα τρυπάνι και το πουλάει τέσσερα χρόνια μετά για 1.000 ευρώ, τότε αυτό πραγματικά έχει ένα κόστος. Η παρούσα αξία των 1.000 ευρώ μετά από 4 χρόνια είναι $1000(1+0,10)^4 = 683$ ευρώ, χρησιμοποιώντας 10% επιτόκιο σε μια κατάθεση ή ομόλογο. Αυτό το κόστος είναι επομένως 1000 – 683 = 317 ευρώ, το οποίο είναι η παρούσα αξία του των εσόδων από τόκους που χάνει αν μία φυσική ή οικονομική επένδυση είναι διαθέσιμη με απόδοση (ή εσοδεία) του 10% ανά χρόνο.

Αλλά προσέξτε το παρακάτω: Καθ' όλη την έκταση της παραπάνω συζήτησης, για απλότητα, η υπόθεση είναι ότι τα επιτόκια των δανείων και των καταθέσεων είναι τα ίδιο, αν και αυτό είναι σαφώς και δεν είναι αλήθεια στον πραγματικό κόσμο. Αν η εναλλακτική λύση για την αγορά ενός τρυπανιού είναι ένα επιτόκιο 10% στα έσοδα (π.χ. από ομόλογα), ή αν εκείνη δανείζεται χρήματα στο 10%, τότε εφαρμόζεται ο παραπάνω υπολογισμός. Αλλά αν παίρνει τα χρήματα από έναν τραπεζικό λογαριασμό πληρώνοντας 5% προκειμένου να αγοράσει το τρυπάνι ή αν κερδίσει 1.000 ευρώ παίζοντας λόττο και χρησιμοποιεί αυτά τα χρήματα για να αγοράσει το τρυπάνι αντί να τα βάλει στην τράπεζα ώστε να συλλέξει τον τόκο του 5%, τότε ο παραπάνω υπολογισμός είναι λανθασμένος. Αν συνεχίσουμε να υποθέτουμε ότι σε 4 χρόνια εκείνη θα πουλήσει το γεωτρύπανο για 1.000 ευρώ, τότε η απώλειά της είναι $[1000(1+0,05)^4 – 1000/(1,05)^4 = 177$ ευρώ.

Στη συνέχεια ερχόμαστε στην απόσβεση, που μπορεί να σημαίνει αρκετά πράγματα. Ανάμεσα σε αυτά είναι η απαξίωση (ή αλλοίωση) όπου μία μηχανή φθείρεται και/ή η παραγωγικότητά της πέφτει – είτε ξαφνικά είτε σταδιακά. Πολύ συχνά ωστόσο, η αλλοίωση – ή καλύτερα το επιτρεπόμενο όριο – παραπέμπει σε κυβερνητικό κανόνα ή οδηγία για υπολογισμό ή για φορολογικούς λόγους, το τεκμαρτό ποσό κατά το οποίο η αξία ενός περιουσιακού στοιχείου μειώνεται κάθε χρόνο και το οποίο συχνά δεν έχει τίποτα να κάνει με τη φυσική αλλοίωση. Όλο αυτό γίνεται για να καταστήσουμε εφικτό για τον αγοραστή ενός φυσικού περιουσιακού στοιχείου που χρησιμοποιείται σε μια επιχείρηση να αντικαταστήσει αυτό το περιουσιακό στοιχείο εφόσον η χρήσιμη ζωή του τελειώσει. Μπορεί να συμβεί, βέβαια, να υπάρχει πρόβλεψη για την αντικατάσταση του κάποιου περιουσιακού στοιχείου κατά τη διάρκεια μιας περιόδου απόσβεσης 10 χρόνων, ενώ το στοιχείο αυτό να είναι ακόμη σε παραγωγική χρήση μετά από 100 χρόνια, αλλά αυτό είναι ένα εξ ολοκλήρου διαφορετικό ζήτημα. Για τον ιδιοκτήτη του περιουσιακού στοιχείου, όσο μικρότερη είναι η περίοδος απόσβεσης τόσο το καλύτερο, μιας και μια μικρή περίοδος απόσβεσης σημαίνει υψηλό περιθώριο απόσβεσης, το οποίο με τη σειρά του μειώνει το φορολογούμενο εισόδημα. Στα παραδείγματα με τα οποία ασχοληθήκαμε παραπάνω ο φόρος ανά περίοδο είναι απλά t [pq – μισθός Bill – D), όπου t είναι ο φορολογικός συντελεστής, pq τα ακαθάριστα έσοδα και το D σχεδόν πάντα αφορά το «επιτρεπτό όριο» απαξίωσης, παρά το κόστος απόσβεσης.

Εδώ θα ήταν η καλύτερη θέση για ένα ακόμη αριθμητικό παράδειγμα. Υποθέστε πως η δεσποινίς Sally χρησιμοποιεί 1.000 δικά της ευρώ για να αγοράσει ένα γεωτρύπανο το οποίο χειροτερεύει με ρυθμό 10% κάθε χρόνο. Αν αυτό αντανακλάται στην παραγωγή, τότε τηρουμένων των αναλογιών η παραγωγή κατά το δεύτερο χρόνο θα ήταν μόνο 33 x 0,9 = 29,6 βαρέλια (τα οποία μπορούν να πωληθούν για 22 ευρώ ανά βαρέλι). Η αξία του τρυπανιού στο τέλος του πρώτου χρόνου θα ήταν 900 ευρώ και αν χειροτερέψει για 10% ακόμη το δεύτερο χρόνο, η αξία του στο τέλος του χρόνου θα είναι 810 ευρώ. (Προσοχή! Αυτές είναι οι υποθέσεις για το σκοπό αυτής της άσκησης. Η αξία του τρυπανιού είναι φυσικά η εμπορική του αξία. Αν υπάρχει έλλειψη τρυπανιών λόγω έκρηξης γεωτρήσεων, τότε ακόμα κι αν αυτό το τρυπάνι έχει φυσικώς χειροτερέψει, θα μπορούσε να πωληθεί για αρκετές χιλιάδες ευρώ μετά από 2 χρόνια. Παρατηρείστε επίσης ότι αυτού του είδους η αλλοίωση είναι εκθετική. Οι αποσβέσεις από την άλλη είναι συνήθως γραμμική αλλαγή.) Ας βάλουμε αυτούς τους αριθμούς σε μια άσκηση με παρούσα αξία, του είδους με εκείνες με τις οποίες ξεκινήσαμε αυτό το κεφάλαιο.

$$PV = \frac{33x22 - 300}{1{,}1} + \frac{29{,}7x22 - 300}{1{,}1^2} + \frac{810}{1{,}1^2} = 1.347\ \delta o\lambda\lambda\acute{\alpha}\rho\iota\alpha$$

Σε αυτό το σχεδιάγραμμα των 2 χρόνων έχουμε PV > I (δηλ. 1.347 ευρώ > 1.000 ευρώ). Η επένδυση είναι επικερδής υποθέτοντας ότι όντως επιτυγχάνουμε τον αριθμό βαρελιών ανά χρόνο που προβλέψαμε, ότι τα πουλάμε στην τιμή που προσχεδιάσαμε, ότι ο Bill συνεχίζει να δουλεύει με μεγάλη αποδοτικότητα (και για τον ίδιο μισθό των 300 ευρώ ανά χρόνο) και ότι η εμπορική αξία του γεωτρύπανου δεν πέφτει πολύ πιο χαμηλά από την αναμενόμενη αξία του τεμαχίου που χρησιμοποιείται στον υπολογισμό (810 ευρώ).

Μπορούν επίσης να εισαχθούν στο παράδειγμα οι φόροι και η απόσβεση για φορολογικούς σκοπούς. Κανονικά, η Bibi θα έπρεπε να πληρώσει φόρο σε κάθε κέρδος που μπορεί να είχε. Στο παραπάνω παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ο φορολογικός συντελεστής είναι 20% και έτσι τον πρώτο χρόνο θα έπρεπε να πλήρωνε 20% των 426 ευρώ. Αλλά αν υπάρχει μια ανοχή για την απόσβεση, τότε πριν εκείνη υπολογίσει το φόρο της θα της επιτρεπόταν να εκπέσει ένα ποσό από τα 426 ευρώ πριν υπολογίσει το φόρο. Για παράδειγμα, οι φορολογικές αρχές προσδιορίζουν μια περίοδο απόσβεσης 5 χρόνων και ευθείας γραμμής σχεδιάγραμμα για την απόσβεση, τότε η Bibi θα απολάμβανε μια έκπτωση από τους φορολογικούς σκοπούς των 200 ευρώ ανά χρόνο. Το φορολογήσιμο εισόδημά της για τον πρώτο χρόνο θα ήταν τώρα 226 αντί για 426 ευρώ.

Στο δεύτερο χρόνο έχουμε ένα ασήμαντο πρόβλημα γιατί οι φορολογικοί κανόνες δεν είναι ίδιοι σε κάθε χώρα. Αλλά θα μπορούσε να είναι έτσι ώστε το ακαθάριστο εισόδημά της κατά το έτος αυτό να ήταν το ποσό που έλαβε από την πώληση του πετρελαίου (pq) καθώς και τη συνολική αξία μεταπώλησης του γεωτρύπανου. Για να πάρει το φορολογητέο εισόδημά της, ο μισθός του bill και η ανοχή για την απόσβεση για εκείνη την περίοδο θα εξαγόταν από εκείνο το ποσό. Το κέρδος της ανά χρόνο θα ήταν τότε (pq – μισθός Bill – φόροι + αξία μεταπώλησης του εξοπλισμού).

Πριν πάμε σε καινούριο θέμα, χρειάζεται να επισημανθεί ότι τώρα γίνονται εντυπωσιακές πρόοδοι στην τεχνολογία εξερεύνησης πετρελαίου και αερίου, αλλά ακόμη κι έτσι φαίνεται ότι αυτές οι βελτιώσεις είχαν λιγότερο αντίκτυπο στο καθαρό κόστος της γεώτρησης απ' ό,τι η αλληλεπίδραση μεταξύ προσφοράς και ζήτησης στην αγορά εξοπλισμού γεωτρήσεων. Όταν οι τιμές του πετρελαίου κατρακύλησαν το 1998, μερικοί τέτοιοι εξοπλισμοί που είχαν νοικιαστεί για 160.000 ευρώ την ημέρα ήταν σε προσφορά για 30.000 ευρώ την ημέρα. Ένα από τα μαθήματα εδώ φαινόταν να είναι πως θα μπορούσαν να υλοποιηθούν μεγάλες εξοικονομήσεις στο κόστος διάτρησης εξερευνώντας και/ή αναπτύσσοντας όταν τα κόστη ενοικίασης εξοπλισμού εξόρυξης είναι χαμηλά, αντί να ακολουθούμε τη συνήθη πρακτική του να περιμένουμε τις υψηλές τιμές πετρελαίου ώστε να ξεκινήσουμε τέτοιες δραστηριότητες.

1.5 Εξάντληση αποθεμάτων

Ένα από τα πράγματα τα οποία πρέπει να κάνει ένα καλό βιβλίο πάνω στην ενεργειακή οικονομία είναι να καταστήσει βέβαιο ότι οι αναγνώστες του αποκτούν ένα περιεκτικό λεξιλόγιο έτσι ώστε να μην εμφανιστούν εκτός τόπου στον όμιλο των επαγγελματιών στην ενέργεια.

Η απόσβεση είναι ένας όρος γνωστός στην οικονομολογία, αλλά όχι και η εξάντληση. Και στον υπέροχο κόσμο του πετρελαίου του Τέξας και της Οκλαχόμα (στις ΗΠΑ), η εξάντληση φαίνεται να είναι τόσο σημαντική όσο οι φόροι, οι επιδοτήσεις και η απόσβεση – ειδικά για πολιτικούς που εύχονταν να συνεχίσουν σε αυτήν την καριέρα τους. Η εξάντληση προβλέπει την ανάκτηση των χρημάτων που επενδύονται σε περιουσιακό στοιχείο–σπατάλη με τον ίδιο τρόπο που οι ανοχές αποσβέσεων σκοπεύουν να κάνουν το ίδιο για ένα φυσικό περιουσιακό στοιχείο. Η σωστή έκφραση είναι φυσική «ανοχή-περιθώριο απόσβεσης», αλλά στην καθομιλουμένη χρησιμοποιούμε τον όρο «απόσβεση». Η ουσία όλου αυτού είναι ότι επιπλέον άλλων εκπτώσεων, μια ετήσια απόσβεση αφαιρείται από τα ακαθάριστα έσοδα πριν υπολογιστεί το φορολογήσιμο εισόδημα. Μια συνηθισμένη μέθοδος καλείται «εξάντληση από το κόστος» (DE_t) για την ποσότητα q_t του χρόνου t. Εδώ έχουμε:

$$DE_t = \left[\frac{Cost\ of\ property}{total\ units\ in\ property}\right] q_t \tag{7}$$

Μια άλλη προσέγγιση για να βρούμε την ετήσια εξάντληση για φορολογικούς σκοπούς για πετρέλαιο, αέριο και για ιδιοκτησίες ορυκτών που δεν είναι όμως καύσιμα είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα ποσοστό του ακαθάριστου εισοδήματος. Στην Αμερική για παράδειγμα, αυτό είναι 22% για αέριο και πετρέλαιο και 10% για άνθρακα. Ένας επιπλέον όρος είναι ότι η ποσότητα που επιτρέπεται για εξάντληση είναι λιγότερα απ' το 50% του φορολογητέου εισοδήματος της περιουσίας πριν την εξάντληση.

Αν οι παραγωγοί έχουν μια επιλογή, είναι κατανοητό πως θα διαλέξουν τη συμφωνία που θα καταλήξει στο να πληρώσουν όσο το δυνατό λιγότερο φόρο. Προκειμένου να εξηγήσουμε το θέμα, ας χρησιμοποιήσουμε εκείνη τη άσκηση που κουβεντιάσαμε νωρίτερα στο κεφάλαιο, αν και θα κάνουμε κάποιες τροποποιήσεις προκειμένου να κρατήσουμε τα πάντα όσο πιο απλά μπορούμε.

Η υπόθεση τώρα είναι ότι υπάρχουν μόνο 66 μονάδες (δηλ. βαρέλια) πετρελαίου στην περιουσία και ότι το κόστος της περιουσίας είναι μόνο 500 ευρώ. Όπως και πριν, η παραγωγή είναι 33 βαρέλια το χρόνο που μπορούν να πωληθούν προς 22 ευρώ το κάθε βαρέλι. Ο εξοπλισμός για να αποκτήσουμε αυτό το πετρέλαιο κοστίζει 500 ευρώ και η δεσποινίς Sally το αντιμετωπίζει σαν να έχει αισθητή την υπολειμματική του αξία. Οι φοροεισπράκτορες φυσικά δεν ενδιαφέρονται με προβλέψεις για την υπολειμματική αξία και σύμφωνα με τους κανονισμούς τους, ο εξοπλισμός μπορεί να αποσβεσθεί σε μια ευθείας γραμμής βάση 5 χρόνων. Ο φίλος της δεσποινίδας Sally, Bill Lather θα χειριστεί τον εξοπλισμό όπως πριν και θα πληρώνεται για 300 ευρώ το χρόνο και για τα δύο χρόνια. Ο φορολογικός συντελεστής είναι 20%.

Τα ετήσια έσοδα και στα δύο έτη είναι pq = 22 x 33 = 726 ευρώ. Η απόσβεση είναι 100 ευρώ και όσο αφορά την εξάντληση έχουμε για τον πρώτο χρόνο: DE_1 = (500/66) x 33 = 250 ευρώ. Έχουμε επομένως για τα κόστη και τα κέρδη (π.χ. έσοδα) αυτού του χρόνου:

	Κόστη	Έσοδα
Ακαθάριστο εισόδημα		+726
Μεταβλητά έξοδα	-300	
Απόσβεση	-100	
Εξάντληση	-250	
[ΣCosts, ΣRevenues]	-650	+726
Φορολογητέο εισόδημα		76 ευρώ
Φόροι	0,2 x 76 = 15,2 ευρώ	

Ας ερευνήσουμε τώρα τον κανόνα εξάντλησης του 22%:

	Κόστη	Έσοδα
Ακαθάριστο εισόδημα		+726
Μεταβλητά έξοδα	-300	
Απόσβεση	-100	
[ΣCosts, ΣRevenues]	-400	+726
Φορολογητέο εισόδημα πριν την εξάντληση		326 ευρώ
Εξάντληση	0,22 x 726 = 159 ευρώ	

Αυτό είναι το 22% του ακαθάριστου εισοδήματος, όπως αναφέρεται παραπάνω και μιας και είναι μικρότερο του 50% του φορολογητέου εισοδήματος πριν την εξάντληση, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σε έναν υπολογισμό του φορολογητέου εισοδήματος – αν και θα ήταν παράλογο στο παρόν παράδειγμα, μιας και η εξάντληση-μείωση από το κόστος μας παρέχει μια πιο ευνοϊκή φορολογική κατάσταση.

Θα ήταν χρήσιμο να δούμε τι κάνει η πρόσθεση της εξάντλησης στην ελκυστικότητα του δίχρονου έργου. Για την (αναμενόμενη) PV έχουμε:

$$PV = \frac{(726-300-15{,}2)}{(1+r)} + \frac{(726-300-15{,}2)}{(1+r)^2} + \frac{\textit{τελική}\ \text{αξία εξοπλισμού}}{(1+r)^2}$$

Η υπόθεση εδώ είναι ότι η γη (και η αξία της) φεύγουν από τη μελέτη μας όταν το έργο τελειώσει, ενώ το γεωτρύπανο έχει μια τελική αξία. Για φορολογικούς σκοπούς το τρυπάνι έχασε τα 2/5 της αξίας του, αλλά σε ό,τι αφορά την αγορά η αξία του είναι 350 ευρώ. Μπορεί να συμβεί να πρέπει να πληρωθεί φόρος για την πώληση αυτού του εξοπλισμού, αλλά αυτή τη στιγμή υποθέτουμε ότι ο εκείνος ο φόρος είναι μηδέν. Με r = 10%, η PV αυτής της επένδυσης είναι 1.001, 25 ευρώ, το οποίο θα πρέπει να ελέγξει και ο αναγνώστης.

Με άλλα λόγια, αν I = 1.000 ευρώ (= κόστος γης + κόστος εξοπλισμού), τότε η επένδυση είναι μετά βίας επικερδής: PV = 1.001,25 > 1.000 = I. Αυτό είναι το είδος του έργου που χρειάζεται πολύ προσεκτικό έλεγχο από κάποιον ειδικό πριν εγκριθεί. Το να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση μέσω NPV, δε φαίνεται να υπόσχεται πολλά.

Αλλά προσέξτε, η πραγματική θεωρία επιλογής εισηγείται πως η ανάλυση NPV μπορεί να αποτύχει να συλλάβει όλες τις πηγές των τιμών που σχετίζονται με διάφορους τύπους επενδυτικών ευκαιριών – π.χ. όταν η αντιστρεψιμότητα και συγκεκριμένοι τύποι αβεβαιότητας είναι παρόντες. Διενεργώντας το παραπάνω έργο μπορεί να οδηγήσει σε πληροφόρηση ή γνώση του είδους που μπορεί να διευρύνει την αξία του περιουσιακού στοιχείου με το οποίο ασχολούμαστε ή παρόμοιων περιουσιακών στοιχείων του ίδιου θέματος. Μπορεί επίσης να αυξήσει τη διαχειριστική ευελιξία, η οποία έχει θεωρητικά υπολογίσιμη αξία. Για παράδειγμα, απ' τη στιγμή που οι τιμές του πετρελαίου είναι εξαιρετικά μεταβλητές, τότε αν αυτό το έργο αναληφθεί και η τιμή του πετρελαίου ξαφνικά κλιμακωθεί, θα ήταν πιθανόν να υπογράψουμε μακροπρόθεσμη σύμβαση για όλα ή για ένα μέρος της μελλοντικής παραγωγής στην ή κοντά στην υψηλότερη τιμή.

Μπορούμε να περατώσουμε αυτό το κεφάλαιο με μερικές παρατηρήσεις που θα είναι χρήσιμες σε πολλούς αναγνώστες. Στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, κοιτάξαμε εκφράσεις όπως $p_1 = p_0\ (1+r)$: αν βάλετε p_0 ευρώ σε μια τράπεζα και το επιτόκιο των χρημάτων ήταν r, τότε στο τέλος του χρόνου θα είχατε p_1 ευρώ. Υποθέστε πως αντί για χρήματα είχατε ένα κομμάτι πολύτιμου μετάλλου, με τιμή p_0 σήμερα, αλλά το οποίο – με βεβαιότητα – θα έχει τιμή p_1 σε ένα χρόνο. Μπορούμε τότε να ορίσουμε το $(p_1/p_0)–1$ ως ιδικό μας επιτόκιο γι' αυτό το προϊόν κατά το διάστημα (0,1). Αν υποθέσουμε ότι $r > [(p_1/p_0)–1]$, τότε αν έχετε το προϊόν μπορείτε να το πουλήσετε για p_0, να επενδύσετε αυτά τα χρήματα σε ομόλογο ή σε τραπεζικό λογαριασμό με επιτόκιο r και μετά από μια περίοδο μπορείτε να αγοράσετε πάλι το προϊόν και να έχετε και κάτι στην άκρη. Αλλά προσέξτε: πρέπει να είστε σίγουρη για το p_1!

Αυτού του είδους η δραστηριότητα είναι ένα παράδειγμα διαιτησίας (ίσως πολύ απλό) και συνεπάγεται ένα ακίνδυνο κέρδος. Πιθανώς, θα διεξαγόταν μέχρι $r > [(p_1/p_0)–1]$, το οποίο ονομάζεται κατάσταση μη-διαιτησίας. (Και γιατί να έπρεπε να επιτευχθεί αυτή η ισορροπία; Η απάντηση σε αυτό είναι πως με την πιθανότητα να κάνουμε τη διαιτησία που αναφέρθηκε πιο πάνω, όλοι οι παραγωγοί αυτού του προϊόντος θα το παρήγαγαν και θα το πουλούσαν όσο πιο γρήγορα μπορούσαν, έτσι ακριβώς όπως όλοι οι κάτοχοι αποθεμάτων θα μείωναν τα στοκ τους όσο πιο σύντομα μπορούσαν. Τέτοιες ενέργειες θα έπρεπε να αναμένονται ώστε να συμπιέσουν το p_0 και τηρουμένων των αναλογιών αυτό θα αποκαθιστούσε την κατάσταση της μη-διαιτησίας.)

Προσέξτε επίσης πως αν ξαναγράψουμε τον όρο μη-διαιτησίας ως $r > [(p_1/p_0)–1] = \Delta p/p$, παίρνουμε την επονομαζόμενη "pathbreaking" σχέση του Harold Hotelling (1931). Στην εργασία του Hotelling θα αναφερθούμε αργότερα, αλλά οι αναγνώστες θα πρέπει ήδη να έχουν καταλάβει ότι αυτό δεν είναι ιδιαίτερα διαφωτιστικό. Σε αυτό το σημείο, ο Roncaglia (1994) έχει κάνει μερικές αδιάσειστες παρατηρήσεις.

1.6 Συμπεράσματα

Αυτό το κεφάλαιο είναι αρκετά απλό και ευθές, αλλά μόνο ένα πράγμα πρέπει να έχετε κατά νου. Οι υπολογισμοί που βασίζονται σε αναμενόμενα μελλοντικά έσοδα και κόστη συχνά μπορούν να προδιαγράφουν μια ψευδή εικόνα για την κερδοφορία των επενδύσεων. Ένας από τους τρόπους που οι εταιρείες ενέργεια προσπαθούν να μειώσουν λίγη από αυτήν την αβεβαιότητα είναι μέσω μακροπρόθεσμων συμβολαίων, τα οποία σε κάποιο βαθμό εγγυώνται τις ροές εσόδων τους. Αλλά ακόμη κι έτσι, στον ενεργειακό τομέα (και ειδικά με πετρέλαιο και αέριο) τα στελέχη μπορεί να βρεθούν προ δυσάρεστων εκπλήξεων σε ό,τι αφορά τα κόστη.

Η πραγματική (ή διαχειριστική ή στρατηγική) θεωρία επιλογών περιλαμβάνει την προσπάθεια να φέρει κάποια εκλέπτυνση στις τεχνικές NPV στις οποίες και δίνεται έμφαση σε αυτό το κεφάλαιο.

Διαβάζοντας προσεκτικά τα παραδείγματα αυτού του κεφαλαίου, μερικοί σχολαστική για την ακρίβεια μπορεί να ήθελαν να μάθουν τι συνέβη στο ευκαιριακό κόστος της δεσποινίδας Sally και στο χρόνο του Bill Lather, όπου με τον όρο ευκαιριακό κόστος εννοούν το εισόδημα ή την ωφέλεια που θυσίασαν προκειμένου να διαχειριστούν την πετρελαϊκή επιχείρησή της. Μέσω της αποφυγής μου σε αυτό το θέμα, το οποίο οι προσγειωμένοι αναγνώστες θα το βρουν πολύ εσωτερικό για τα γούστα τους, υποθέτω ότι η καριέρα του Bill στο Stockholm College of Economic Knowledge τελείωσε απότομα – αν και δεν το ευχόταν ο ίδιος. Αντιλαμβανόμενη η δεσποινίς Sally την πτώση του από την ακαδημαϊκή χάρη, αμέσως διέκοψε την επιχειρηματική σχέση της με αυτόν τον κύριο, παραθέτοντας ένα μεγάλο αριθμό ψυχιατρικών διαταραχών που τείνουν να χαρακτηριστούν από ανάρμοστες κοινωνικές και επαγγελματικές προσδέσεις. Εκτός αυτού, ήταν η τυχερή δικαιούχος ενός ταμείου που συστάθηκε γι' αυτήν από έναν πλούσιο θείο της, ο οποίος ήθελε να έχει εκείνη την άνεση να βελτιώσει τη γνώση της στην ενεργειακή οικονομία. Σύμφωνα με εκείνον τον κύριο, ο βραβευμένος με Νόμπελ χημικός Frederick Soddy πάντοτε επέμενε πως «η ροή της ενέργειας θα έπρεπε να είναι το πρωταρχικό μέλημα της οικονομολογίας» και στον 21^{o} αιώνα αυτό μπορεί κάλλιστα να συμβεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η παγκόσμια αγορά πετρελαίου

Αν και μερικοί οικονομολόγοι εξακολουθούν να επιμένουν ότι το πετρέλαιο είναι ανεξάντλητο, οι γεωλογικές αρχές όλο και περισσότερο εκφράζουν την πεποίθηση ότι αυτός ο πόρος είναι οδυνηρά πεπερασμένος από οικονομική άποψη, γιατί σε κάποια μέρη του κόσμου μπορεί να καταστεί υπερβολικά δαπανηρός για την παραγωγή των ποσοτήτων που εφοδίαζε νωρίτερα.

Για παράδειγμα, σε πολλές παραδοσιακές περιοχές παραγωγής, μία (μεγάλη) μονάδα πετρελαίου τείνει τώρα να είναι πιο δύσκολο να βρεθεί και περισσότερο δαπανηρό για να εξαχθεί απ' ό,τι οι προηγούμενες μονάδες. Αν το θέσουμε διαφορετικά, όσο πιο μεγάλο είναι το πεδίο του πετρελαίου τόσο πιο πιθανό είναι να ανακαλυφθεί νωρίτερα. Και απ' τη στιγμή που αυτά τα μεγάλα πεδία πετρελαίου, που συχνά τα ονομάζουμε «ελέφαντες», περιέχουν δυσανάλογη ποσότητα του παγκοσμίου πετρελαίου, ο ρυθμός ανακάλυψης έχει δείξει μια τάση για ύφεση και το περιεκτικότητα των πεδίων-χωραφιών αυτών έχει αρχίσει να μειώνεται με το χρόνο, τηρουμένων των αναλογιών. Στην τελευταία δεκαετία αυτή η ύφεση έχει γίνει εξαιρετικά ορατή και όπως το Cleveland και το Kaufman (1993) έχουν δείξει, τα κόστη γεωτρήσεων αυξάνονται ραγδαία σε πολλά μέρη του κόσμου.

Αλλά γιατί *«τηρουμένων των αναλογιών»*; Η απάντηση είναι το παγκόσμιο σκηνικό του πετρελαίου χωρίζεται σε δύο αρένες: τη Μέση Ανατολή και τον υπόλοιπο κόσμο. Η σχεδίαση της περίπτωσης στην οποία αναφερόμαστε της US Energy Information Administration (EIA – Ενεργειακή Διαχείριση Πληροφοριών των ΗΠΑ) τώρα διαθέτει τον Περσικό Κόλπο για τη διαχείριση των 2/3 (ή και περισσότερο) του εξαγώγιμου πετρελαίου μέχρι το έτος 2005, με τις Ηνωμένες Πολιτείες να εισάγουν το 60% της κατανάλωσής του για ένα κόστος 100 δισεκατομμυρίων ευρώ για κάθε χρόνο. Πιο σημαντικό, αν και το κόστος για την ανακάλυψη και εκμετάλλευση των πετρελαιοπηγών έξω από τη Μέση Ανατολή μπορεί να είναι κλιμακούμενο με δυσμενή ρυθμό, θα πρέπει να υπάρχει ακόμη αφθονία πετρελαίου χαμηλού κόστους στη Μέση Ανατολή, αν και οι ιδιοκτήτες του πιθανώς δε θα το θέσουν σε διάθεση σε χαμηλές τιμές ευκαιρίας.

Το 1995 η Κολομβία ξεπέρασε τη μάχη εξεύρεσης αποθεματικού έχοντας προσθέσει 755 Mb (όπως αναφέρεται από την εταιρεία πετρελαιοσυμβούλων – Mb = millions of barrels = εκατομμύρια βαρέλια). Οι ΗΠΑ ήρθαν δεύτερες με 666 Mb και η Αλγερία Τρίτη (504 Mb). Αλλά ακόμη κι έτσι, ήταν ο πρώτος χρόνος στη σύγχρονη εποχή που τα αποθέματα δε μπόρεσαν να υπερβούν τα 10 Gb σε παγκόσμια βάση. Και το έτος 1995 ήταν προφανώς η δέκατη χρονιά στη σειρά όπου μειώθηκαν τα παγκόσμια αποθέματα πετρελαίου. Τον επόμενο χρόνο η αύξηση στην κατανάλωση πετρελαίου έφτασε στο υψηλότερο ποσοστό της δεκαετίας, αλλά η πίεση που εφαρμόζεται στην τιμή του πετρελαίου μετριάζεται σε κάποιο βαθμό από την αυξημένη παραγωγή σε Νορβηγία και Καναδά. Το πρόβλημα είναι πως μέχρι το 2005 ή νωρίτερα, αυτές οι δύο χώρες – μεταξύ άλλων – δε μπορούσαν να αυξήσουν την παραγωγή του σε τέτοιο βαθμό που θα ήταν ικανές να γεμίσουν τεράστια πιθανά κενά ανάμεσα στην παγκόσμια ζήτηση πετρελαίου και το «στοχευμένο» ανεφοδιασμό. (Λέμε «στοχευμένο» γιατί ο OPEC – Organization of the Petroleum Exporting Countries – προσπαθεί να ορίσει ένα ανώτατο όριο στην παραγωγή.) Με αυτές τις δραματικές περιπτώσεις, θα υπάρχει μια ακαταμάχητη πρόσκληση στον OPEC για

περισσότερο πετρέλαιο. Η απάντησή τους θα είναι ζωτικής σημασίας για την παγκόσμια οικονομία.
Παρακάτω δίνονται κάποιες προγνώσεις ζήτησης πετρελαίου. Δε δίνονται προγνώσεις τιμών γιατί, όπως και ο παρών συγγραφέας, οι οργανισμοί που έχουν αναφερθεί έχουν έρθει σε φοβερή αμηχανία εξαιτίας της πραγματικής τιμής του πετρελαίου που παρεκκλίνει πάρα πολύ απ' αυτήν που προβλέφθηκε. Αλλά προσέξτε την κατάσταση για το χρόνο 2010. Η Βόρεια θάλασσα θα δίνει ελάχιστο πετρέλαιο, οι εισαγωγές των ΗΠΑ θα είναι τεράστιες, η κατανάλωση πετρελαίου σε Ασία θα αυξάνεται κατά ένα μεγάλο ποσό, οι κλάδοι πετρελαίου σε Αυστραλία και Καναδά είναι πολύ μακριά απ' τις καλές τους μέρες και σύμφωνα με το Leo Drollas – επικεφαλής οικονομολόγο στο Centre for Global Energy Studies (Λονδίνο) – το ίδιο θα συμβαίνει και με το Κατάρ, Λιβύη, Αλγερία, Γκαμπόν, Νιγηρία και Ινδονησία. Εδώ είναι το καλύτερο σημείο για να παρατηρήσουμε πως η πρόγνωση του Διεθνούς Οργανισμού Ενέργειας (International Energy Agency – IEA) του OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) που παρουσιάστηκε το 1999 σε διεθνή σύνοδο του International Association for Energy Economics (IAEE) δήλωση ότι η μη-OPEC παραγωγή θα κορυφωθεί πριν το 2010 και ότι η παγκόσμια παραγωγή θα κορυφωθεί πριν το 2020. Οι μονάδες στον παρακάτω πίνακα είναι σε εκατομμύρια βαρέλια την ημέρα (Mb/d).

Προβλέπων	**Έτος βάσης (1994)**	**2000**	**2010**
IEA	68,3	76,5	93,5
OPEC	65,7	72,3	–
US DEPARTMENT OF ENERGY POLL OF FORECASTERS	68,6	76,4	86,3
US DEPARTMENT OF ENERGY	68,6	78,6	88,7
Average	**67,8**	**75,9**	**87,2**

Πηγή: IEPE (Institute of Energy Policy and Economics – Γκρενόμπλ)
Σημείωση: εκτιμητή παγκόσμια παραγωγή για το 2020 από την IEA: 100 Mb/d.

Αν η ιδιωτική ιδιοκτησία αυτοκινήτων στην Κεντρική και Ανατολική Ευρώπη και την Ανατολική Ασία συνεχίζει να προηγείται έναντι των χαμηλότερων Δυτικοευρωπαϊκών επιπέδων, τότε μέχρι το 2010 η παγκόσμια ζήτηση πετρελαίου θα μπορούσε να αυξηθεί από ένα πολύ μεγαλύτερο ποσό απ' αυτό που δόθηκε προηγουμένως. Εκείνη η πιθανότητα με αναγκάζει να θυμηθώ το 1973-74, όταν ο γραφικός Armand Hammer της Occidental Oil επέμενε ανοιχτά πως μέχρι το τέλος του 20^{ου} αιώνα, το πετρέλαιο θα πωλείται για 100 ευρώ/βαρέλι – μια τιμή που αν πραγματοποιηθεί το 2010 ή ακόμη και το 2020, θα ήταν ένα τεράστιο σοκ για ένα μεγάλο κομμάτι του κόσμου που εισάγει πετρέλαιο. Περιττό να πούμε ότι λαμβανομένων υπόψη των πληροφοριών που διαθέτουμε αυτή τη στιγμή, αυτό το είδος των τιμών φαίνεται εξαιρετικά απίθανο – αλλά όχι πιο απίθανο από την κατάρρευση των τιμών του πετρελαίου την οποία συγκεκριμένοι Νομπελίστες οικονομολόγοι είχαν προβλέψει.

Την ίδια στιγμή, όταν αρχίσουμε να μιλάμε για εναλλακτικά καύσιμα μηχανών, πρέπει να υπενθυμιστεί πως μια ενέργεια για κάποιες από αυτές τις εναλλακτικές λύσεις, το φυσικό αέριο μπορεί να μην είναι τόσο άφθονο όπως ελπίζουμε ότι θα είναι για ακόμη 20-25 χρόνια, λόγω της επιτάχυνσης της χρήσης του στην παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας. (Επιπρόσθετα, στις αρχές του 21^{ου} αιώνα, οι τεχνολογίες αέριο-σε-πετρέλαιο υποτίθεται πως είναι στο στάδιο «απογείωσης».) Κατ' αντιδιαστολή, θα μπορούσε να είναι δυνατή η παραγωγή κάποιας έκδοσης «ηλεκτρικού» ή «βασιζόμενου σε υδρογόνο» αυτοκινήτου σε αρκετά μεγάλη κλίμακα και σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα, αλλά δυστυχώς το «αρκετά μεγάλη» δεν είναι αρκετά καλό.

Ο Teitelbaum (1992) αναφέρει τον «παγκόσμιο επενδυτή» Marvin Davis σα να λέει «δε χρειάζεται να είστε παράλογη-γελοία ιδιοφυία για να το δείτε να έρχεται». Μπορεί να προσθέσει «δεν έχει καμία διαφορά το πότε θα έρθει – όποτε και να έρθει, θα είναι πολύ σύντομα». Το πετρέλαιο είναι το πιο σημαντικό αγαθό στον κόσμο και θα παραμείνει έτσι στο αόριστο μέλλον. Ως εκ τούτου, υποστηρίζω ότι ακόμη και μια λανθασμένη άποψη, όταν είναι στην υψηλή πλευρά, θα πρέπει να αντιμετωπίζεται με το μεγαλύτερο σεβασμό. Αυτό, για μένα, είναι ό,τι αφορά την αποστροφή κινδύνου.

2.1 Λίγο υπόβαθρο για τη μελέτη της πορείας προς το φινάλε της αγοράς πετρελαίου

Η σύνοδος του World Energy Council (WEC) το 1996 τόνισε μια κατάσταση την οποία πολλοί από εμάς έχουμε συνειδητοποιήσει από καιρό: η ζήτηση ενέργειας και ιδιαίτερα πετρελαίου θα συνδέεται όλο και πιο πολύ με το μέγεθος του συνολικού πληθυσμού ενώ η προμήθεια πετρελαίου θα στραφεί τελικά στη στρατηγική που υιοθετήθηκε από τους παραγωγούς της Μέσης Ανατολής. Η υπενθύμιση αυτή μπορεί επίσης να βρεθεί σε ένα εξαιρετικά διορατικό και σύντομο (και μη τεχνικό) άρθρο των Howell, Bird και Gautier (1993). Η θέση τους είναι ότι υπάρχει μία πολύ περιορισμένη ποσότητα συμβατικού πετρελαίου στο φλοιό της γης και δεν είναι ιδιαίτερα συνετό να υποτεθεί ότι ο πόρος αυτός μπορεί να αυξηθεί από οριακές αυξήσεις στην τιμή του πετρελαίου. Με άλλα λόγια, οι αυξήσεις της τιμής του πετρελαίου θα μπορούσαν να προωθήσουν, πιθανώς σε μεγάλο βαθμό, την έρευνα για πετρέλαιο, αλλά δυστυχώς οι ερευνητές δε μπορούν να βρουν κάτι που δεν υπάρχει. Η τεχνολογική πρόοδος πρέπει με κάποιον τρόπο να φτάσει στη διάσωση και ένας μεγάλος αριθμός οικονομολόγων λέει ότι θα φτάσει. Αυτό που δε λένε ωστόσο είναι πότε και πώς – όχι ότι θα πρέπει να περιμένουμε να έχουν γνώση τέτοιων πληροφοριών. Δυστυχώς, δεν υπάρχει τέτοιο πράγμα όπως μια αξιόπιστη μικροοικονομική θεωρία της τεχνολογικής προόδου.

Αυτή θα μπορούσε επίσης να είναι μια καλή στιγμή να υπενθυμίσουμε που ο μεγάλος φιλόσοφος Kart Popper είδε το μέλλον της γνώσης. Είπε ότι είναι αδύνατο να προβλέψουμε τις μελλοντικές εξελίξεις στην κατάσταση της γνώσης, δεδομένου ότι τέτοιες προβλέψεις ενεργοποιούν τη δυνατότητα να περιγράψουν διάφορα σχετικά χαρακτηριστικά αυτής της γνώσης – η οποία είναι δυνατή μόνο αν κάποιος κατέχει αυτή τη γνώση που έχουν ήδη. Γνωρίζουμε από την εμπειρία του παρελθόντος, για παράδειγμα, ότι η επιστήμη είναι σε θέση να μας παρουσιάσει θαύματα και είναι λογικό να αναμένει κανείς πως θα συνεχίσει να το κάνει αυτό σε όλο τον 21^{o} αιώνα.

Αλλά εξίσου σημαντικό είναι πως δε μπορούμε να πούμε πολλά για τη μορφή αυτών των θαυμάτων, ούτε εάν θα εμφανίζονται όταν τα χρειαζόμαστε περισσότερο.

Πολλοί οικονομολόγοι πιστεύουν πως οικονομικοί και, σε μικρότερο βαθμό, πολιτικοί παράγοντες, έχουν καθοριστική σημασία για τον προσδιορισμό του ανεφοδιασμού με πετρέλαιο και κατά συνέπεια με την τιμή του. (Αυτό περιλαμβάνει υψηλού προφίλ ενεργειακούς οικονομολόγους όπως ο Morris Adelman και ο Peter Odell.) Αυτά τα στοιχεία είναι πράγματι σημαντικά αλλά ένα από τα πράγματα στο οποίο θα δοθεί μεγάλη έμφαση σε αυτό το κεφάλαιο είναι η πρωταρχική σημασία της γεωλογίας, η οποία είναι μια πραγματικότητα που για το μεγαλύτερο μέρος της δεν της έχει δοθεί η έμφαση που πρέπει στην οικονομική βιβλιογραφία. Η αλήθεια του ισχυρισμού αυτού θα γίνει αναμφίβολα σαφής σε μια δεκαετία ή δύο σε όλους όσους ενδιαφέρονται για το μεγάλο κόσμο του πετρελαίου, αν και θα ήταν ίσως καλύτερα για όλους τους ενδιαφερομένους εάν θα μπορούσε να αφομοιωθεί το συντομότερο δυνατόν. Θα πρέπει να εκτιμηθεί ωστόσο πως από τη στιγμή που έχει κορυφωθεί η μη-OPEC παραγωγή πετρελαίου, οι πολιτικοί παράγοντες θα αναλάβουν πράγματι πρωταρχική σημασία.

Μερικά από τα θέματα με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια έχουν αρχίσει να λαμβάνουν μεγάλη προσοχή στον επιχειρηματικό και οικονομικό Τύπο, ενώ ταυτόχρονα πρόσφατα έγγραφα όπως π.χ. του Criqui (1991) και του καθηγητή Paul Stevens (1995) δείχνουν ότι η ακαδημαϊκή κοινότητα θα έκανα καλά να εξετάσει το ενδεχόμενο εξοικονόμησης ενέργειας σε μια πιο εξέχουσα θέση στο σχέδιο των πραγμάτων. Όπως είναι φυσικό, δεν υπάρχει καμία έλλειψη οικονομολόγων οι οποίοι θα συνεχίσουν να επιμένουν ότι η τιμή του πετρελαίου θα διαπομπεύει ουσιαστικά το παρελθόν, με την τιμή αυτή να αναπηδά σε ένα επίπεδο που είναι κοντά σε αυτό το επίπεδο που βιώθηκε στα μέσα του 1990, αλλά με περιστασιακές κρίσεις και «φούσκες», όπου η φούσκα είναι η αποχώρηση της οικονομικής μεταβλητής, όπως η τιμή, από την τιμή που φαινομενικά δικαιολογείται από τις βασικές αρχές (ζήτησης-προσφοράς).

Ωστόσο, όπως έχει ήδη εκφραστεί, η γνώμη εδώ είναι πως η εικόνα της παραγωγής και των αποθεμάτων που έχουμε δει στις ΗΠΑ κατά την τελευταία δεκαετία θα πρέπει τελικά να αντιγραφεί από τις υπόλοιπες χώρες που δεν ανήκουν στην OPEC, καθώς και από μερικά μέρη αυτής της οργάνωσης και όταν αυτό γίνει ο κόσμος που καταναλώνει πετρέλαιο θα αντιμετωπίσει μια εντελώς νέα εικόνα εφοδιασμού με πετρέλαιο. Ανάμεσα στους πολλούς σοβαρούς παρατηρητές που μοιράζονται τώρα αυτήν την άποψη είναι ο Daniel Yergin και οι πρώην γραμματείς της US Energy Donald Hodel και James Schlesinger.

Εδώ είναι και μερικά άλλα πράγματα που οι αναγνώστες πρέπει να θυμάστε. Υπήρχαν περίπου 50 εκατομμύρια περισσότερα αυτοκίνητα στους δρόμους των ΗΠΑ το 1995 απ' ό,τι το 1975 και 750 εκατομμύρια περισσότερα μίλια είχαν οδηγήθηκαν ετησίως. Η ιδιοκτησία αυτοκινήτων και μοτοσυκλετών εκτινάσσονται σε κάποια μέρη του αναπτυσσόμενου κόσμου (π.χ. σε Κίνα και Ινδία). Επιπλέον, κάποια πράγματα όπως η επιτάχυνση της αστικοποίησης θα τονώσουν την κατά κεφαλή κατανάλωση ενέργειας. (Το 2000 το 43% του παγκόσμιου πληθυσμού ήταν «αστικοποιημένο», ενώ το 2015 από ένα πολύ μεγαλύτερο πληθυσμό, οι εκτιμήσεις είναι πως το ποσοστό αυτό θα αυξηθεί στο 55%.) Εδώ θα μπορούσε να είναι ένα καλό μέρος για να αναφέρω πως μεταξύ 1970 και 1995, η κατανάλωση της εμπορικής ενέργειας στις αναπτυσσόμενες χώρες υπερτριπλασιάστηκε και έφθασε σχεδόν το 30% του παγκοσμίου συνόλου. Σύμφωνα με τον Παγκόσμια Τράπεζα, η χρήση ενέργειας σε αναπτυσσόμενες χώρες θα κυριαρχήσει στο παγκόσμιο πανόραμα της ενέργειας στις πρώτες δεκαετίες του 21^{ου} αιώνα.

Πολλοί αναγνώστες αυτού του βιβλίου πιθανώς θα γνωρίζουν ότι έχουν συμβεί πολλές εκπλήξεις στις διεθνείς αγορές πετρελαίου και αυτό πιθανότατα θα ισχύει και στο μέλλον. Αλλά είναι σαφές πως μία από τις πιο ευχάριστες εκπλήξεις για τους καταναλωτές πετρελαίου είναι η επίδοση των παραγωγών της Βόρειας Θάλασσας – τόσο στο Ηνωμένο Βασίλειο όσο και στις Νορβηγικές περιοχές.

Κάποια στιγμή στις αρχές του 21ου αιώνα, ίσως πολύ νωρίς, η παραγωγή στη Βόρεια Θάλασσα θα αρχίσει να γλιστρά και αν η τιμή του πετρελαίου δεν κινείται προς τα πάνω, τότε η υπεράκτια παραγωγή μπορεί να μειωθεί με ταχύ ρυθμό. (Μια αύξηση της τιμή του πετρελαίου θα προωθήσει τις επενδύσεις στα περιθωριακά πεδία.) Η ανακάλυψη στη Νορβηγική Βόρεια Θάλασσα κορυφώθηκε το 1981 και φαίνεται απίθανο για μια τέτοια κορύφωση παραγωγής να καθυστερήσει για πολύ μετά το 2000. Στο Ηνωμένο Βασίλειο η πιο μοντέρνα, «αυτόνομη» πλατφόρμα παραγωγής που κατασκευάστηκε ποτέ, έχει επιπλεύσει από το ναυπηγείο Barmac (Σκωτία), ξεκινώντας μια 22χρονη παραμονή στην περιοχή της κεντρικής Graben στη Βόρεια Θάλασσα. Το κόστος της είναι 2, 33 δισεκατομμύρια ευρώ και θα εκμεταλλεύεται περίπου 700 Mb (=millions of barrels) πετρελαίου. Ήδη έχει λεχθεί, ωστόσο, αυτές οι λίγες νέες ανακαλύψεις έχουν γίνει για να δικαιολογήσουν την κατασκευή των νέων αυτόνομων πλατφόρμων. Στην πραγματικότητα, αυτό που συμβαίνει στη Βόρεια Θάλασσα στις αρχές του 21ου αιώνα θα πρέπει να καταστήσει σαφές πως τα πάντα σχετικά με το πετρελαϊκό σκηνικό εξαρτώνται τελικά από την παρουσία των βασικών εμπορευμάτων. Η τεχνολογία έχει βελτιωθεί σε σημείο που να είναι επικερδές να εκμεταλλευτεί κανείς ακόμα και τους τομείς με πολύ χαμηλή ποσότητα, αλλά ακόμη κι αυτοί οι τομείς πρέπει να περιέχουν μια ελάχιστη ποσότητα πετρελαίου, η οποία δεν πρέπει θα υφίσταται για πολύ ακόμα στη Βόρεια Θάλασσα.

Αν κα η επίπτωση σε αυτό που ακολουθεί είναι πως το πετρέλαιο θα αναγνωριστεί ως ένα σπάνιο αγαθό από το 2015 ή το 2020 κι έπειτα, η όχι και τόσο αντιληπτή αλήθεια είναι πως είναι σπάνιο σήμερα αλλά είναι ασύμφορο να πάρει αυτή τη θέση. Αντ' αυτού, ο πραγματικός βαθμός σπανιότητας πρέπει να έχει συγκαλυφθεί με αυτό που ο Paul Tempest (1996) έχει ονομάσει «παράδοξο»: η μεγάλη πλειοψηφία των επενδυτικών δαπανών για το πετρέλαιο λαμβάνει χώρα σε υψηλού κόστους, σχετικά φτωχές σε πετρέλαιο περιοχές του βιομηχανικού κόσμου, των οποίων τα αποθέματα εξαντλούνται έτσι πολύ πιο γρήγορα απ' ό,τι αλλού. Όπως ο Tempest ξεκαθαρίζει, συνέπεια αυτής της συμπεριφοράς είναι ότι ακόμη και εξελιγμένοι παρατηρητές «θαμπώνονται από την έντονη αύξηση της ποσότητας παραγωγής σε μη-OPEC παραγωγούς. Πηγαίνοντας ένα βήμα πιο πέρα, το είδος της οικονομίας που διδάσκουν συνήθως π.χ. στις σκανδιναβικές τάξεις προτείνει πως με βάση τα στοιχεία που τώρα έχουμε σχετικά με την προσφορά και ζήτηση πετρελαίου, μια σταθερά ανοδική πορεία της τιμής του πετρελαίου δε θα ήταν δυσανάλογη σε σχέση με τη συμβατική, νεοκλασική, οικονομική σκέψη. Θα περιόριζε την αύξηση της κατανάλωσης, θα προωθούσε τις επενδύσεις σε εγκαταστάσεις παραγωγής πετρελαίου, θα αναθέρμαινε το ενδιαφέρον για τη διατήρηση και την υποκατάσταση και θα επιτάχυνε την ανάπτυξη νέων τεχνολογιών. Ταυτόχρονα θα πρέπει να παραδεχτούμε πως υπερβολικές αυξήσεις στην τιμή του πετρελαίου θα μπορούσαν να έχουν εκτεταμένες αρνητικές μακροοικονομικές συνέπειες. Αυτό είναι συχνά ένα σημαντικό στοιχείο για τι προτάσεις διαλόγου μεταξύ χωρών που παράγουν και εισάγουν πετρέλαιο – ενός διαλόγου που προτάθηκε αρχικά αλλά απορρίφθηκε αργότερα.

Το επόμενο τμήμα του κεφαλαίου αυτού θα ασχοληθεί με την αναλογία αποθεματικό-παραγωγής και όσο απλή ακούγεται αυτή η έννοια, τόσο ζωτικής σημασίας είναι. Δεν είναι «ζωτικής σημασίας» επειδή λέει όλη την αλήθεια για την αγορά πετρελαίου, ή ακόμη κι ενός μέρους του, αλλά επειδή είναι από τις λίγες εφαρμόσιμες αναλυτικές προσεγγίσεις γι' αυτήν την πολύ ειδική αγορά. Για το λόγο αυτό η συζήτηση έχει διεξαχθεί με ένα ελάχιστο άλγεβρας, δεδομένου ότι υπάρχει ένα ισχυρό μάθημα: όταν ο λόγος αποθεματικό-παραγωγής (=R/Q) των κύριων πετρελαιοπαραγωγικών χωρών εκτός της Μέσης Ανατολής ξεκινά να προσεγγίζει το 10 περίπου, η εποχή του ανέξοδου πετρελαίου θα μπορούσε να έχει τελειώσει και αυτό είναι αλήθεια ανεξάρτητα από το τι βλέπουμε ή ακούμε για τη «ζωή» των αποθεμάτων πετρελαίου, τα οποία έχουν καθοριστεί (λανθασμένα) στα λαϊκά έντυπα ως το σύνολο των αποθεματικών που χωρίζονται με την ετήσια πετρελαϊκή παραγωγή (R/Q). Αυτό συμβαίνει διότι η παραγωγή ενός τυπικού τομέα πετρελαίου θα αρχίσει να μειώνεται όταν περίπου το ήμισυ των αποθεμάτων που περιέχουν έχουν εξαχθεί και η παραγωγή δε μπορεί να διατηρηθεί εκτός κι αν βρεθεί περισσότερο πετρέλαιο στο χώρο και/ή κάποια νέα τεχνολογία καθιστά δυνατή μια πιο εντατική εκμετάλλευση.

Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό στοιχείο και το ίδιο ισχύει και γι' αυτό που ακολουθεί! Το 1956 ο M. King Hubbert άρχισε να δημοσιεύει μια έρευνα η οποία ανέφερε πως η παραγωγή στα 48 χαμηλότερα κράτη (των ΗΠΑ) αναμενόταν να κορυφωθεί κάποια στιγμή μεταξύ 1965 και 1970, αν και θα εξακολουθούσε να υπάρχει μια τεράστια ποσότητα πετρελαίου στο έδαφος. (Η εμπειρική δουλειά του επικεντρώθηκε γύρω από τη χρήση μιας λογιστικής εξίσωσης της μορφής $Q_t = Q/(1+\alpha e^{-\beta t})$, όπου Q_t είναι οι αθροιστικές ανακαλύψεις ή αθροιστικές παραγωγές (σε χρόνο t) και το Q σηματοδοτεί τα τελικά ανακτήσιμα αποθεματικά. "t" είναι ο χρόνος που μετριέται σε σχέση με κάποια αρχή t_0 και τα α και β είναι παράμετροι. Ένας απλός μαθηματικός χειρισμός της λογιστικής εξίσωσης αφού έχουν υπολογιστεί τα α και β, θα αποφέρει μια καμπανοειδή γραφική παράσταση της οποίας η κορυφή θα φαίνεται εύκολα. Η πραγματική κορύφωση της παραγωγής για τις χαμηλότερες 48 χώρες ήρθε το 1970 και από τότε η παραγωγή σε εκείνες τις περιοχές άρχισε να πέφτει σταθερά.

Οι οικονομολόγοι έχουν σχεδόν ομοιόμορφα αγνοήσει αυτό το προφανές κατόρθωμα επειδή ο Hubbert δεν ανέπτυξε ένα επίσημο θεωρητικό πλαίσιο που να περιέχει οικονομικές και/ή πολιτικές μεταβλητές. Ο Hubbert με τη σειρά του ισχυρίστηκε ότι αυτές οι μεταβλητές αντανακλούσαν στα ιστορικά δεδομένα που χρησιμοποίησε. Και επιπλέον, προκάλεσε τους οικονομολόγους να παράγουν ένα δικό τους μοντέλο το οποίο να είναι τόσο επιτυχημένο εργαλείο πρόβλεψης όσο η κατασκευή του – το οποίο φυσικά δεν κατάφεραν. Επίσης, η δουλειά του Hubbert περιείχε ένα κομμάτι κακών νέων για το οποίο οι οικονομολόγοι κάνουν σήμερα ένα ειδικό σημείο αποδοκιμασίας: ακόμη κι αν οι τεχνικές αλλαγές είναι ικανές να δημιουργήσουν τον αντίστοιχο τομέα πετρελαίου του είδους του υπέρ-γίγαντα που οι καλύτεροι γεωλόγοι που απασχολούνται απ' τις πλουσιότερες πετρελαϊκές εταιρείες δε μπορούν να βρουν, δε θα σημαίνει και πολλά πράγματα όσο αφορά την καθυστέρηση της κορύφωσης – δεδομένου ότι η παραγωγή πετρελαίου είναι τόσο μεγάλη όσο σήμερα και ότι αυξάνεται με το σημερινό ρυθμό.

Αν τους οικονομολόγους ως ομάδα δεν τους ενδιαφέρει η αναλογία R/Q ούτε η δουλειά του Hubbert, τότε το έργο ποιων τους ενδιαφέρει; Πριν από την πρώτη πετρελαϊκή κρίση το 1973, το πιο σημαντικό όνομα στην ενεργειακή οικονομία ήταν του Καθηγητού Morris Adelman του MIT, του οποίου η εργασία σχετικά με το πετρέλαιο προσέλκυσε τη διεθνή προσοχή. Μετά την κρίση ο καθηγητής Morris Adelman έγινε πιο σημαντικός από ποτέ, αλλά ο οικονομολόγος του οποίου η έρευνα προσέλκυσε την περισσότερη προσοχή (όπως μετράται σύμφωνα με αναφορές και επεκτάσεις του έργου του σε γνωστά περιοδικά) είναι ο πρόσφατος Harold Hotelling

(1931). Μία από τις αξιώσεις αυτού του βιβλίου είναι πως σπάνια στην ιστορία της ακαδημαϊκής οικονομίας έχει αποδοθεί τόση επεξηγηματική ισχύς σε μια προσέγγιση που έχει τόσα δυστυχώς λίγα να προσφέρει από επιστημονική άποψη. (Βλέπε επίσης το Roncaglia (1994) και τις αναφορές που παρατίθενται εκεί.)

Δυστυχώς, ωστόσο, η μόδα Hotelling διατηρήθηκε μέχρι τα τελευταία χρόνια του 20^{ου} αιώνα και έτσι δεν πρέπει να αποκλείουμε τη δυνατότητα λίγων πολύτιμων ψηγμάτων αλήθειας στο έργο του καθηγητή Hotelling και των μαθητών του. Για παράδειγμα, σε ένα πολύτιμο άρθρο, ο Nordhaus (1973) είχε προτείνει ότι αν η (καθαρή) τιμή του πετρελαίου εξακολουθεί να παραμένει κάτω από την αντίστοιχη του Hotelling – όπου όπως σημειώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα πρέπει να αυξάνεται σε ποσοστό ίσο με το επιτόκιο (ή $\Delta p/r = r$) – τότε σε κάποια στιγμή θα πεταχτεί προς τα πάνω. Η δήλωση αυτή είναι σε κάποιο βαθμό ανάλογη με τον ισχυρισμό του Laherrere (1995) πως αν οι προσπάθειες για να καθυστερήσουν την πτώση της παγκόσμιας παραγωγής πετρελαίου «από το 2000 περίπου» είναι επιτυχείς, η μείωση θα γίνει «γκρεμός» (αντί για ομαλή πτώση). Όπως είναι η περίπτωση, θα ήταν ανούσιο να αποκλείσουμε τελείως την εργασία του καθηγητή Hotelling από αυτό το βιβλίο. Η καλύτερη μη τεχνική συζήτηση μπορεί να βρεθεί στο Salant (1995), τον οποίο προτιμώ να το σκέφτομαι ως τον πιο διορατικό οικονομολόγο που ασχολείται με αυτά τα θέματα – αν και δε συμφωνώ με τη δήλωσή του πως το «πλαίσιο» του μοντέλου του Hotelling θα πρέπει να έχει σημασία για αυτούς που χαράσσουν την πολιτική και τους αναλυτές.

2.2 Η αναλογία αποθεματικών-παραγωγής

Ένα σημαντικό μέρος της ιστορίας για το μέλλον του πετρελαίου μπορεί να καθορίζεται από την εξέταση του ιστορικού του πετρελαίου στις Ηνωμένες Πολιτείες, διατηρώντας κατά νου το έργο του Hubbert που περιγράφεται πιο πάνω. Όλως περιέργως, σε μια εποχή πριν το Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο, όταν η προμήθεια πετρελαίου στις ΗΠΑ θεωρήθηκε απεριόριστη, ο Spencer Tracy, σε μια ταινία της οποίας το όνομα έχω ξεχάσει, είπε στον Told Gable πως του είχε πάρει εκατομμύρια χρόνια για να συγκεντρώσει το πετρέλαιο που είχε βρει στο Τέξας και στην Οκλαχόμα και γι' αυτό δε θα πρέπει να σπαταλείται από αμέλεια. Αυτή τη στιγμή η ποσότητα πετρελαίου που παραμένει στα κράτη αυτά είναι αμυδρά κατανοητό πως είναι περιορισμένη, αλλά δυστυχώς δεν υπάρχουν Spencer Tracys διαθέσιμοι να ενημερώνουν περιοδικά το τηλεοπτικό κοινό γι' αυτό το θλιβερό γεγονός.

Αυτή η ενότητα εισάγει κάποια στοιχειώδη υλικά από το λόγο αποθεματικού-παραγωγή (R/Q). Αυτός ο λόγος θεωρείται μερικές φορές ως η βασική αριθμητική ένδειξη της παραγωγικής ικανότητας ενός κοιτάσματος ή μιας περιοχής πετρελαίου, είτε ακόμη και μιας συλλογής περιοχών. Είναι ο λόγος των υπολοίπων αποθεματικών σε ετήσια παραγωγή και ένας χρήσιμος κανόνας είναι πως αν ο λόγος R/Q μειωθεί σε λιγότερο από 10, τότε το κοίτασμα καταστρέφεται με τον ίδιο σχεδόν τρόπο που ένα πολύ δυνατό ρούφηγμα με ένα καλαμάκι καταστρέφει τη σόδα ενός παγωτού ή όπως η πολύ γρήγορη οδήγηση ενός οχήματος προκαλεί τη γρήγορη φθορά του. (Κάποιοι ειδικοί λένε πως όταν ο λόγος R/Q πέσει κάτω από το 10 – ή σε ένα αριθμό κοντά στο 10 – τότε η περιοχή «απομυζείται πολύ έντονα».) Έχει συμβεί ότι στις ΗΠΑ, για το συμφέρον της διατήρησης, να έχουν ψηφιστεί νόμοι που απαγορεύουν τις παραγωγές που προξενούν τη μείωση του λόγου R/Q σε αριθμό μικρότερο του 9 ή του 10. Οι αναγνώστες θα πρέπει επίσης να παρατηρήσετε τα ακόλουθα: στη θεωρητική οικονομολογία, οι παραγωγοί που μεγιστοποιούν τα κέρδη τους αναμένεται να συμπεριφέρονται με τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρήσουν τα περιουσιακά τους στοιχεία από το να φθαρούν πάρα πολύ σύντομα και έτσι ο λόγος R/Q αξίζει να θεωρηθεί τόσο ως οικονομικός όσο και ως γεωλογικός παράγοντας.

Πριν ξεκινήσουμε, ωστόσο, πρέπει κάτι ακόμα να γίνει σαφές. Για τον τρόπο σκέψης μου, ο καλύτερος – και ίσως ο μοναδικός – τρόπος για να αρχίσουμε να σκεφτόμαστε την προμήθεια πετρελαίου είμαι μέσω του έργου του M. King Hubbert, καθώς επίσης και της ευρύτερης σημασίας του λόγου R/Q. Αλλά αυτό δεν είναι όλη η ιστορία: υπάρχουν κι άλλοι παράγοντες που πρέπει να εξεταστούν. Το πρόβλημα είναι πως αντίθετα με τα μοντέλα της επικρατούσας οικονομικής θεωρίας, αυτοί οι άλλοι παράγοντες δε λήφθηκαν σωστά στη συστηματοποίηση και έτσι δεν κατέστη δυνατή η αξιοποίηση του συνολικού θεωρητικού ή εμπειρικού μοντέλου που θα πρέπει να περιγράφει λεπτομερώς τη λειτουργία αυτής του πιο σημαντικής από όλες τις αγορές πρώτων υλών, ούτε είναι ένα μοντέλο που να ενδέχεται να εμφανιστεί στο εγγύς ή απώτερο μέλλον. Αυτό νομίζω πως έχει αναγνωριστεί εδώ και πολύ καιρό. Αλλά επειδή θα ήθελα ειλικρινά να έχουμε ένα μοντέλο, προήχθη το μοντέλο του Hotelling (ή, στην πραγματικότητα, υπέρ-προήχθη). Δυστυχώς, συμβαίνει επίσης να είναι αλήθεια ότι τα περισσότερα από τα πρόσωπα που πραγματικά εργάζονται με το πετρέλαιο – από τους ενοίκους σουιτών διευθυντικών στελεχών επιχειρήσεων με έσοδα τόσα μεγάλα όσο το ΑΕΠ πολλών χωρών, μέχρι τους εργάτες που ετοιμάζονται για νέες απεργίες – θα ήταν αδύνατο να κρατήσουν ένα ευθύ μέτωπο αν αντιμετώπιζαν το κήρυγμα των οικονομολόγων για θέματα όπως η θεωρία Hotelling της εξάντλησης ή των απεριόριστων δυνατοτήτων των παράγωγων αγορών.

Προς το τέλος της δεκαετίας του 1980 φάνηκε πως οι ΗΠΑ ήταν η μόνη σημαντική περιοχή παραγωγής πετρελαίου στον κόσμο όπου ο λόγος R/Q ήταν κάτω από 10 και η γνώμη πολλών από εμάς ήταν ότι αργά ή γρήγορα η μείωση του λόγου αυτού θα αναχαιτιζόταν από απότομη πτώση στην παραγωγή λαδιού. Αυτό συνέβη το 1989 με τη μορφή μιας από τις μεγαλύτερες μειώσεις της παραγωγής στην εν λόγω χώρα στη σύγχρονη εποχή. (Αλλά να θυμάστε από την προηγούμενη ενότητα ότι η παραγωγή άρχισε να μειώνεται στα χαμηλότερα 48 κράτη των ΗΠΑ το 1970, όταν ο συνολικός λόγος R/Q για τα κράτη αυτά ήταν μεγαλύτερος από 10.)

Το ερώτημα είναι πότε θα συμβεί το ίδιο με το παραπάνω στο σύνολο των χωρών έξω από το κέντρο του Κόλπου του OPEC. Ο παγκόσμιος λόγος R/Q φαίνεται να είναι περίπου 41, ανάλογα με το πώς τα αποθεματικά ορίζονται και μετρώνται. Αλλά στις χώρες του Κόλπου είναι κοντά στο 85. Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1980, ο OPEC αύξησε την παραγωγή κατά 20% και τα αποθεματικά κατά 75%. Αυξήσεις αποθεματικών τέτοιου είδους δεν είχαν παρατηρηθεί στη δεκαετία του 1990, αλλά προφανώς αυτό συνέβη γιατί η αναζήτηση στη Μέση Ανατολή είχε μειωθεί.

Πριν επεκτείνουμε τη συζήτηση αυτή με κάποιους αριθμούς, υποθέστε πως εξετάζουμε αυτό που φαίνεται να αποτελεί την εξαίρεση του παραπάνω κανόνα. Σύμφωνα με την αναφορά του BP-Amoco για την παγκόσμια ενέργεια για το 1999, ο λόγος R/Q στη Βόρεια Θάλασσα του Ηνωμένου Βασιλείου είναι 5,2. Πώς εξηγείται αυτό;

Πιθανώς ο πιο σημαντικός επεξηγηματικός παράγοντας είναι το επίπεδο της παραγωγής που είναι αναγκαίο προκειμένου να δικαιολογήσει το εξαιρετικά μεγάλο ποσό της εξερεύνησης και της ανάπτυξης των δαπανών που έχουν λάβει και θα λάβουν χώρα στην εν λόγω περιοχή. Χωρίς αυτήν την παραγωγή, έχει κριθεί ότι τα υπάρχοντα περιουσιακά στοιχεία – τα οποία στην περίπτωση αυτή σημαίνουν αποθεματικά συν εγκαταστάσεις παραγωγής (όπως οι πλατφόρμες, οι αγωγοί κλπ.) – δε θα είχαν το βέλτιστο τρόπο εκμετάλλευσης. Όταν το πρόβλημα εξετάζεται από την άποψη της βραχυπρόθεσμης βελτιστοποίησης των κερδών και λαμβάνονται υπόψη η παρούσα τιμή και προσδοκίες για την τιμή, θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι σε ορισμένες περιπτώσεις μια «υπερφόρτωση» των υπεράκτιων κοιτασμάτων που αποτέλεσαν το αντικείμενο των πολύ μεγάλων επενδυτικών δαπανών έχει οικονομική νόημα για τις επιχειρήσεις και τους μετόχους που ενδιαφέρονται άμεσα. Υπάρχουν επίσης κάποια μακροοικονομικά θέματα που είναι σημαντικά εδώ. Αυτά περιλαμβάνουν τη σημασία της απασχόλησης στη Βόρεια Θάλασσα και ειδικά στη Σκωτία, τη σημασία του πετρελαίου για το εμπορικό ισοζύγιο του Ηνωμένου Βασιλείου και τη σημασία για τη βρετανική κυβέρνηση των φορολογικών εσόδων από το πετρέλαιο της Βόρειας Θάλασσας.

Ας κάνουμε μια απλή αριθμητική άσκηση. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια περιοχή που περιέχει 225 μονάδες πετρελαίου και θέλουμε να άρουμε 15 μονάδες/έτος. Μιας και οι 15 μονάδες είναι λιγότερες του 1/10 των αποθεμάτων της περιοχής, μπορούμε να αφαιρούμε 15 μονάδες κάθε χρόνο για 5 χρόνια (μετρουμένων στο τέλος του κάθε χρόνου), χωρίς να παραβιάζουμε το παραπάνω κριτήριο. Κατά την περίοδο αυτή ο λόγος R/Q (= θ) μειώνεται από 14 (στο τέλος του πρώτου χρόνου) σε 10. (αυτό μπορεί να δηλωθεί με την ακολουθία 210/15, 195/15,....., 150/15). Αλλά μετά τον πέμπτο χρόνο, αν συνεχίσουμε να αφαιρούμε 15 μονάδες κάθε χρόνο, τότε θα αφαιρούμε περισσότερο από το 1/10 του κοιτάσματος κάθε χρόνο. (Σημειώστε ότι ορίζοντας το λόγο R/Q με 10 ως τον *κρίσιμο* λόγο R/Q (= θ), λέμε ότι δε θα πρέπει να αφαιρεθεί περισσότερο του 10% του κοιτάσματος για ένα χρόνο.)

Μετά το πέμπτο έτος, το θ* καθορίζει την παραγωγή. Προκειμένου να μην πέσει το θ κάτω του 10, η παραγωγή τον έκτο χρόνο δε θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη του 13,64. Αυτό μπορεί να μην είναι εντελώς προφανές, συνεπώς θεωρήστε την κατάσταση κατά τη διάρκεια της 6ης περιόδου (δηλ. του 6ου χρόνου). Ο λόγος R/Q περιορίζεται από έναν κρίσιμο λόγο του 10 και έτσι $(R_5 – Q_6)/Q_6 = 10$. Με το R_5 (αποθέματα στο τέλος της πέμπτης περιόδου) να είναι ίσο με 150, παίρνουμε ότι $Q_6 = 13{,}6364 = 13{,}64$. Αυτή η συζήτηση μπορεί εύκολα να γενικευθεί σε:

$$\theta^* \leq \frac{R_t}{Q_t} = \frac{\text{Αποθέματαστοτέλοςτηςπεριόδου (t - 1) - Qt}}{Q_t} \qquad (1)$$

Αντικαθιστώντας τα αποθέματα με R παίρνουμε:

$$Q_t \leq \frac{R_{t-1}}{(\theta^* + 1)} \qquad (2)$$

Στο παράδειγμα που δώσαμε εδώ μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέγιστη παραγωγή για τον «επόμενο» χρόνο, ή αλλιώς το Q_7. Το R_6 είναι 150 – 13,64 = 136,36 και έτσι με θ* = 10 παίρνουμε $Q_7 = 136{,}36/11 = 12{,}4$ μονάδες.

Τώρα ας στραφούμε σε ένα άλλο παράδειγμα, ή, πιο σωστά, σε ένα αντιπαράδειγμα. Αυτή τη φορά ας εξετάσουμε μια περιοχή, ή για εκείνο το θέμα δύο περιοχές, ή δύο τομείς που έχουν διαφορετικά μεγέθη που περιέχουν κάποια στιγμή αποθέματα R_1 και R_2. Ας υποθέσουμε τώρα ότι στον πρώτο τομέα τα αποθεματικά εξαντλούνται σε μια τιμή Q_t μονάδων ανά χρόνο και ότι μετά από t περιόδους φτάνουμε στον κρίσιμο λόγο R/Q αυτού του τομέα. Δηλαδή σε χρόνο t = t΄, η παραγωγή Q_t αυτού του τομέα (ή του κοιτάσματος) αρχίζει να πέφτει. Έτσι:

$$\frac{R_1 - t'Q_1}{Q_1} = \theta_1 = \theta_1^* \qquad \text{με} \qquad t > t' \Rightarrow Q_1 \downarrow$$

Πηγαίνοντας στο δεύτερο πεδίο που περιέχει R_2 αποθεματικά τη στιγμή t_0 και με παραγωγή $Q = Q_2$ μονάδες το χρόνο, θέλουμε να βρούμε την αξία του θ_2 σε χρόνο t΄ υποθέτοντας πως η Q_2 δεν έχει ξεκινήσει να πέφτει: σε χρόνο t΄ θα πάρουμε $\theta_2 = \theta_2'$ και διευκρινίζουμε ότι $\theta_2 > \theta_2^*$ (= θ_1^*). Εξ ορισμού ο λόγος R/Q του πεδίου σε χρόνο t΄ είναι:

$$\frac{R_2 - t'Q_2}{Q_2} = \theta_2 = \theta_2' \tag{3}$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε ως το σύνολο του λόγου R/Q ($\bar{\theta}$)για τα δύο πεδία σε χρόνο t΄ την ακόλουθη έκφραση:

$$\bar{\theta} = \frac{(R_1 + R_2) - t'(Q_1 + Q_2)}{Q_1 + Q_2} = \frac{(R_1 - t'Q_1) + (R_2 - t'Q_2)}{Q_1 + Q_2} \tag{4}$$

Η παραπάνω σχέση, μαζί με τις δύο πιο πάνω σχέσεις, μας επιτρέπει να γράψουμε:

$$\bar{\theta} = \frac{\theta_1^* Q_1}{Q_1 + Q_2} + \frac{\theta_2' Q_2}{Q_1 + Q_2} = \beta_1 \theta_1^* + \beta_2 \theta_2^* \qquad \text{με } \beta_i = \frac{Q_i}{Q_1 + Q_2}$$

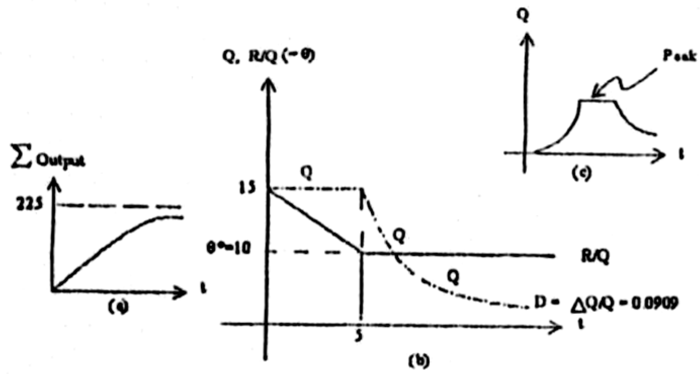
Οι συντελεστές β_1 και β_2 προφανώς προστίθενται στην ενότητα και από τη στιγμή που ένας όρος είναι πως $\theta_2' > \theta_1^*$, τότε όταν η παραγωγή ξεκινά να μειώνεται πρέπει να έχουμε ότι:

$$\theta_1^* < \bar{\theta} < \theta_2'$$

Με άλλα λόγια, ο συνολικός λόγος αποθεματικών-παραγωγής ($\bar{\theta}$), όταν η συνολική παραγωγή αρχίζει να πέφτει, λόγω της μείωσης της παραγωγής Q_1, είναι μεγαλύτερη από τον κρίσιμο λόγο θ_s (= θ_1^*, θ_2^*) των επιμέρους κοιτασμάτων. (Αυτό το αποτέλεσμα δε βασίζεται στο $\theta_1^* = \theta_2^*$)

Για παράδειγμα, όπως στο πρώτο αριθμητική παράδειγμα που δόθηκε πιο πάνω, πάρτε $\theta_1^* = 10$, με $R_1 = 150$. Έτσι, το Q_1 ξεκινά να πέφτει από μια τιμή του 15. Τώρα πάρτε $\theta_2^* = 10$, $Q_2 = 15$ και $R_2 = 210$, το οποίο σημαίνει πως η Q_2 μπορεί να συνεχίσει στο 15. Επιπλέον, έχουμε $\bar{\theta}$ = 12, ή (150+210)/30. Αλλά ακόμη κι έτσι η παραγωγή θα αρχίσει να πέφτει (από το 30) εξαιτίας της μείωσης του Q_1. Αλγεβρικά, αυτό δεν είναι ένα βαθυστόχαστο αποτέλεσμα, αλλά θα οδηγούσε σε χρήσιμες σκέψεις για το μέγεθος του κριτικού λόγου R/Q (= θ*) σε μια κατάσταση πολλών πεδίων (ή πολλών κοιτασμάτων). Σε ένα σημαντικό και ισχυρό άρθρο, ο Flower (1978) ισχυρίστηκε ότι οι παγκόσμιοι υπολογισμοί πρέπει να χρησιμοποιήσουν μια κριτική αναλογία R/Q του 15 προκειμένου να ληφθούν υπόψη τα διαφορετικά μεγέθη και στάδια της ανάπτυξης της παραγωγής των πεδίων.

Το συμπέρασμα που συνάγεται από όλα αυτά είναι ότι το ίδιο το φαινόμενο προέβλεψε και ο Hubbert για τις χαμηλότερες 48 χώρες των ΗΠΑ και αργότερα συνειδητοποίησε πως θα μπορούσε να συμβεί και στις χώρες εκτός OPEC – ή σε κάποιο υποσύνολο των χωρών αυτών – πριν ο λόγος R/Q φτάσει το 10. (Για παράδειγμα, η πτώση στις ΗΠΑ (από τα 50 κράτη) άρχισε το 1985 με R/Q > 10.) Η παρούσα αξία του R/Q σε αυτές τις χώρες που δεν ανήκουν στον OPEC είναι κάπου ανάμεσα σε 17 και 18 και ενώ πολλοί παρατηρητές εστιάζουν στο χρόνο που απομένει πριν την άφιξη του μαγικού αριθμού 10, θα ήταν ίσως χρήσιμο να σκέφτονται υπό όρους έναν κάπως υψηλότερο αριθμό. Επίσης αναφέρθηκε προηγουμένως ότι οι περισσότεροι τομείς του πετρελαίου αρχίζουν την «παρακμή» τους πριν εξαντληθεί το ήμισυ των γνωστών αποθεμάτων τους, αλλά στο απλό παράδειγμα που δίνεται παραπάνω η πτώση ξεκίνησε μετά από 5 χρόνια, η οποία είναι πολύ πριν το δεύτερο εξάμηνο. (Σημειώστε πως η «διάρκεια ζωής» αυτών των αποθεματικών δεν ήταν 10 χρόνια (= 150/10), κάτι που θα είχε μια σύμβαση, αλλά απεριόριστη – ενθυμούμενοι ότι το άπειρο δεν είναι ένας αριθμός, αλλά μια κατεύθυνση. Αυτός θα ήταν και ο λόγος που ο καθηγητής Adelman παρατήρησε κάποτε ότι το πετρέλαιο θα είναι διαθέσιμο όταν ξεμείνουμε από πόσιμο νερό ή καθαρό αέρα.) Η παρακάτω εικόνα σχετίζεται με το παράδειγμά μας.



Σχήμα 2.1

Το σχήμα 2.1α παρουσιάζει σωρευτική παραγωγή και δε χρειάζεται κάποιο σχόλιο. Αλλά θα πρέπει να γίνει κατανοητό ότι η μορφή της Q στο σχήμα 2.1b δεν είναι πολύ ρεαλιστική. Τα πραγματικά πεδία γενικά επιδεικνύουν μια μορφή της Q παρόμοιας με του σχήματος 2.1c. O Laherrere καθορίζει ένα ποσοστό μείωσης για την Q αφότου επιτευχθεί η θ* το οποίο μπορεί να επιλυθεί από μια έκφραση της μορφής θ* = (1 – D)/D, αλλά αντί να εξηγηθεί η προέλευση αυτής της εξίσωσης, θα δοθεί κάτι παράγωγο που θα αξιοποιεί τη συζήτηση σε αυτό το κομμάτι. Λαμβάνοντας δύο γειτονικές περιόδους, t και t+1, θα έχουμε αν χρησιμοποιήσουμε και τη σχέση

$$Q_t = \frac{R_{t-1}}{(\theta^*+1)} : \ Q_{t+1} = \frac{R_t}{1+\theta^*} = \frac{R_{t-1} - Q_1}{1+\theta^*}$$

Επεξεργαζόμενοι λίγο την παραπάνω σχέση έχουμε ότι:

$$Q_{t+1} = \frac{Q_t(1+\theta^*) - Q_t}{1+\theta^*} = \frac{\theta^* Q_t}{1+\theta^*}$$

Διαιρώντας και τις δύο πλευρές με το Q_t και αφαιρώντας τη μονάδα και από τις δύο πλευρές μας δίνει:

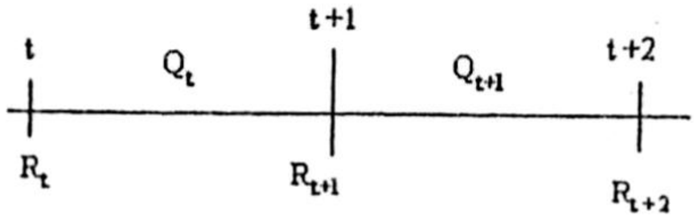
$$\frac{Q_{t+1} - Q_t}{Q_t} \left(= \frac{\Delta Q}{Q}\right) = -\frac{1}{1+\theta^*} = D \qquad (5)$$

Παρατηρήστε τη χρήση του σημείου Δ: σχεδόν σίγουρα το είδατε πριν στον υπολογισμό των ελαστικοτήτων στη βασική σειρά μαθημάτων σας. Εδώ αντιπροσωπεύει το ($Q_{t+1} - Q_t$) και σημαίνει «μεταβολή του Q».

Η δεξιά πλευρά της παραπάνω σχέσης είναι αρνητική κι έτσι θα έπρεπε να είναι γιατί η μεταβολή ΔQ εκφράζει ποσό μείωσης. Αλλά η έκφραση του Laherrere μπορεί να υπολογιστεί λαμβάνοντας την απόλυτη τιμή. Στο πρώτο αριθμητικό παράδειγμα που αναφέρθηκε πιο πάνω, D = 1/(1+θ*) = 0,0909 = 9,09%. Αυτό μπορεί εύκολα να ελεγχθεί από τις τιμές Q_6, Q_7 κλπ. που έχουν υπολογιστεί.

2.3 Προμήθεια και ζήτηση πετρελαίου και ο λόγος αποθεματικών-παραγωγής

Αυτό που σκοπεύω να κάνω τώρα είναι παρουσιάσω μια απλή παραγωγή που οδηγεί σε ένα καταπληκτικό αποτέλεσμα για το λόγο R/Q. Θεωρήστε τη συμφωνία που υπάρχει στην παρακάτω εικόνα που είναι ένα πλάνο παραγωγής/αποθεματικών δύο (υποθετικών) περιόδων, με g (%/χρόνο) ετήσιο ρυθμό ανάπτυξης του αποθεματικού.



Σχήμα 2.2

Ενθυμούμενοι ότι ο ρυθμός ανάπτυξης των αποθεματικών είναι g, μπορούμε να γράψουμε $R_t - Q_t + gR_t = R_{t+1}$ ή $R_t(1+g) - Q_{t+1} = R_{t+2}$. Η πρώτη από τις πιο πάνω σχέσεις μπορεί να γραφεί και ως:

$$\frac{R_t(1+g)-Q_t}{Q_t}=\frac{R_{t+1}}{Q_t}\frac{Q_{t+1}}{Q_t}=\theta_{t+1}\frac{Q_{t+1}}{Q_t} \tag{6}$$

Αυτό που θα υποτεθεί στη συνέχεια είναι ότι η παραγωγή (που καθοδηγείται από τη ζήτηση) αυξάνεται κατά n τοις εκατό ανά χρόνο (n%/χρόνο). Εισάγοντας το $Q_{t+1} = Q_t(1+n)$ και με $R/Q = \theta$, παίρνουμε:

$$\theta_t\,(1 + g) - 1 = \theta_{t+1}\,(1 + n) \tag{7}$$

Αυτή είναι μια απλή διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, αλλά για τους αναγνώστες που δεν τους αρέσουν οι διαφορικές εξισώσεις – απλές ή όχι – το αριθμητικό παράδειγμα στην επόμενη παράγραφο θα πρέπει να είναι διαφωτιστικό. Αφού εξετάσουμε λεπτομερώς την άσκηση, θα λύσουμε την εξίσωση και θα παρουσιάσουμε ένα αποτέλεσμα από το λογισμό. Στη συνέχεια, αφού συζητήσουμε σύντομα το αποτέλεσμα, θα εξάγουμε κάτι παρόμοιο με το αποτέλεσμα αυτό – μια προσέγγιση αν θέλετε – χρησιμοποιώντας απλή άλγεβρα, όπου ο μόνος εξεζητημένος συμβολισμός είναι η διαφορά Δ: π.χ. μπορεί να έχουμε $\Delta Q_t = Q_t - Q_{t+1}$. Επομένως θα αισθάνεσθε ελεύθεροι να παρακάμψετε την εισβολή του διαφορικού λογισμού.

Ας υποθέσουμε πως στην αρχή μιας συγκεκριμένης περιόδου έχουμε g = 5%, θ = 10, Q_t = 15 και R_t = 150. Τώρα παίρνουμε n = 0. Με τα αποθεματικά να αυξάνονται, αλλά την παραγωγή σταθερή, θα μπορούσαμε να φτάσουμε στο συμπέρασμα ότι ο λόγος αποθεματικών/παραγωγής αυξάνεται, αλλά δεν είναι εκεί το θέμα μας. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις που δόθηκαν πιο πάνω και με αυτούς τους αριθμούς, βλέπουμε αμέσως πως R_{t+1} = 150 + 7,5 – 15 = 142,5, όπου το 7,5 είναι η απόλυτη τιμή της αύξησης των αποθεμάτων κατά την εν λόγω περίοδο. Αλλά αν η παραγωγή Q παραμένει σταθερή στο 15 (= Q_{t+1}) καταλήγουμε με θ_{t+1} = 9,5. Αυτό που συνέβη εδώ είναι ότι η παραγωγή είναι ιδιαίτερα σημαντική σε σχέση με το επίπεδο των αποθεμάτων, παρά τα όσα θα μπορούσαμε να σκεφτούμε αν παίρναμε τις τιμές της παραγωγής και των αποθεμάτων στην ονομαστική τους τιμή και ξεχνούσαμε συγκεκριμένες τεχνικές/αλγεβρικές πραγματικότητες. Συνεχίζοντας, ας λύσουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση (αν και μερικοί αναγνώστες θα προτιμούσαν, σε αυτό το σημείο, να μεταβούν κατευθείαν στην τελική εξίσωση και στη συζήτηση που σχετίζεται με εκείνη την τελική έκφραση). Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$\theta_t = A\left(\frac{1+g}{1+n}\right)^t + \frac{1}{g=n} \tag{8}$$

Στην παραπάνω σχέση το Α είναι μια σταθερά, με θ = θ(Τ) με το χρόνο να είναι Τ τη στιγμή που ξεκινάμε τον έλεγχο της θ. Αυτή η σταθερά μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί θέτοντας t = T = 0. Αλλά πριν κάνουμε αυτό, προτιμώ μια συνεχή έκθεση της παραπάνω εξίσωσης. Αυτό επιτυγχάνεται εύκολα αναγνωρίζοντας απλά ότι $(1+g) \approx e^g$ και $(1+n) \approx e^n$. Έτσι λοιπόν παίρνουμε ως έκφραση του θ (αντί για του θ_t):

$$\theta = \left[\theta(\mathrm{T}) - \frac{1}{g-n}\right]e^{(g-n)i} + \frac{1}{g-n} \tag{9}$$

Ένα από τα πλεονεκτήματα του παραπάνω μετασχηματισμού σε συνεχή διατύπωση που θα παρουσιαστεί αμέσως από κάτω είναι ότι απλοποιεί τη διαφορικότητα εκείνης της έκφρασης. Μόλις το κάνουμε αυτό, φροντίζοντας να θυμηθούμε ότι μας ενδιαφέρει το θ όταν t = T = 0, καταλήγουμε ότι:

$$\frac{d\theta}{dt} = (g-n)\left[\theta(\mathrm{T}) - \frac{1}{g-n}\right] = (g-n)\theta(\mathrm{T}) - 1 \qquad (10)$$

Μια προσέγγιση για την παραπάνω σχέση θα προκύψει αμέσως πιο κάτω και οι αναγνώστες που βρίσκουν πως η παραπάνω σχέση ή όλη η διαδικασία οδηγεί σε κάτι το μυστηριώδες ας πάνε κατευθείαν στα υλικά. Αλλά αν έχετε μάθει ότι το dθ/dt σημαίνει τη μεταβολή του θ σε σχέση με τη μεταβολή του t (χρόνου), τότε ξέρετε όλα όσα χρειάζεται για να ερμηνεύσετε την παραπάνω εξίσωση. Βλέπουμε αμέσως πως για να αυξηθεί το θ δηλ. για dθ/dt > 0), πρέπει να έχουμε θ(T) > 1/(g – n), το οποίο στο παράδειγμά μας είναι 1/(0,05 – 0) = 20. Με άλλα λόγια, αν θ(T) = 10 στο παράδειγμά μας, τότε για να αυξηθεί το θ, τα αποθέματα πρέπει να αυξηθούν για περισσότερο από το 10%: αυτό σημαίνει ότι πρέπει να έχουμε 10 > 1(g – 0) ή g > 1/10 = 0,1 = 10%.

Ώρα για την εκπληκτικά απλή προσέγγιση. Υπενθυμίζοντας ότι μπορούμε να γράψουμε $\theta_{t+1} = \theta_t + \Delta\theta_t$, παίρνουμε:

$$\theta_t (1 + g) - 1 = (\theta_t + \Delta\theta_t)(1 + n)$$

ή:

$$\theta_t (1 + g) - 1 = \theta_t + \Delta\theta_t + n\Delta\theta_t + n\theta_t$$

Η προσέγγιση αποτελείται από το ακόλουθο: από την απαλοιφή του nΔθ από την παραπάνω σχέση υπό το σκεπτικό ότι είναι πολύ μικρό, το οποίο όντως ισχύει αν το $\Delta\theta_t$ είναι μικρό. Αυτό φυσικά είναι μια πρότυπη διαδικασία χειρισμού του διαφορικού λογισμού, όπου εκείνη η έκφραση επιτρέπεται να πλησιάσει το μηδέν. Τώρα έχουμε:

$$\theta_t [(1 + g) - (1 + n)] = \theta_t (g - n) - 1 = \Delta\theta_t \qquad (11)$$

Για πρακτικούς λόγους, αυτό είναι το ίδιο αποτέλεσμα με την πιο σχέση που αντιγράφουμε κι εδώ:

$$\frac{d\theta}{dt} = (g-n)\left[\theta(\mathrm{T}) - \frac{1}{g-n}\right] = (g-n)\theta(\mathrm{T}) - 1 \qquad (12)$$

Το $\Delta\theta_t > 0$ ή το θ_t αυξάνει αν $\theta_t(g - n) - 1 > 0$. Τώρα ας στραφούμε προς τον πραγματικό κόσμο εκτός OPEC όπου το R/Q (= θ) είναι περίπου 17,5, ενώ το n ≈ 1,7. Αν ο λόγος αποθεματικών-παραγωγής θα πρέπει να αυξηθεί, πρέπει να έχουμε 17,5 > 1/(g – 0,017) ή g > 7,4% κάθε χρόνο. Αυτό μπορεί να συμβεί από στιγμή σε στιγμή στο μέλλον, αλλά είναι εξαιρετικά απίθανο ότι ένα ποσοστό αύξησης των αποθεματικών αυτού του μεγέθους θα μπορούσε να διατηρηθεί σε οποιοδήποτε μέρος στις περιοχές σημαντικής παραγωγής πετρελαίου έξω από τη Μέση Ανατολή – με την πιθανή εξαίρεση της FSU (και με έμφαση στο «πιθανή»). Αυτά και άλλα θέματα εξετάζονται σε σχέση με τις ΗΠΑ από τους Ilerade και Pulsipher (1999).

2.4 Μια μη τεχνική επισκόπηση της προθεσμιακής αγοράς

Τώρα που έχουμε μια ιδέα για το τι πρόκειται να συμβεί στην αγορά πετρελαίου σε δέκα ή είκοσι χρόνια, είναι καιρός να αρχίσουμε να σκεφτόμαστε το τι πρόκειται να συμβεί αύριο ή την επόμενη εβδομάδα. Περιττό να πω ότι οι κυρίες και κύριοι συνάδελφοι, που είναι σε θέση να εμφανίζονται με τις σωστές απαντήσει μέσα σε αυτό το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, έχουν πολύ λαμπρές προοπτικές επαγγελματικής σταδιοδρομίας. Επιπλέον, αν κατέχετε τους βασικούς άξονες των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης του πετρελαίου (και δικαιωμάτων αγοραπωλησίας και ανταλλαγών), είστε επίσης έτοιμοι να αντιμετωπίσετε άλλες φορές – φυσικού αερίου, ηλεκτρικής ενέργειας, χαλκού κλπ. Αλλά πρέπει να σας προειδοποιήσουμε επίσης. Η έκφραση «επιστήμονος-πύραυλος» προέρχεται από τη χρηματοοικονομική και όχι τη φυσική επιστήμη, αν και τα πρόσωπα που προσδιορίζονται έτσι, προτιμούν να αποκαλούνται «ποσοτικοί» επειδή είναι ποσοτικοί αναλυτές. Αυτοί και οι αρθρογράφοι τους, ειδικά οι τελευταίοι, πιστεύουν πως τα πρόσωπα με ανώτερα διπλώματα στα μαθηματικά και τη φυσική είναι καλύτερα προετοιμασμένα για να αντιμετωπίσουν την υψηλή ταχύτητα των χρηματοπιστωτικών αγορών απ’ ό,τι εμείς οι υπόλοιποι. Στην περίπτωσή μου αυτό είναι αναμφίβολα αλήθεια, αλλά στην περίπτωσή σας δε χρειάζεται να είναι αληθές. Και στην πραγματικότητα τα στοιχεία, αν εξεταστούν προσεκτικά, θα δείξουν ότι αυτό δεν είναι αλήθεια. Αυτό που χρειάζεστε για να επιτύχετε σε αυτήν την επιχείρηση είναι η συγκέντρωση σιδήρου. Καλή γνώση των θεμελιωδών αρχών στις αγορές παραγώγων προϊόντων για να μη μένετε με το στόμα ανοιχτό όταν ακούτε εκφράσεις όπως marking-to-the-market και τον τύπο του Black-Scholes. Και μια ειλικρινή πεποίθηση ότι περισσότερα χρήματα είναι πάντα καλύτερα από τα λιγότερα. Μπορείτε επίσης να έχετε κατά νου τη συμβουλή του John Kenneth Galbraith: «Μια ιδιοφυία στα χρηματοοικονομικά είναι μια ανερχόμενη αγορά».

Τώρα που τελείωσαν τα προκαταρκτικά, θα κάνουμε ένα απλό παράδειγμα. Υποθέστε ότι σας τηλεφωνεί ο θείος σας ο Pogue από τη Ρώμη για να σας πει πως όλα τα πληρώματα των πετρελαιοφόρων στον Κόλπο θα κάνουν απεργία, αλλά κανένας (εκτός από το θείο Pogue) δεν το γνωρίζει ακόμα. Δεδομένου ότι έχετε σπουδάσει οικονομικά είστε σε θέση να εξάγετε αμέσως το ακόλουθο συμπέρασμα. Η προμήθεια πετρελαίου για τις χώρες εισαγωγής πετρελαίου πρόκειται να πέσει και ως αποτέλεσμα η τιμή του πετρελαίου θα αυξηθεί φυσικά. Έτσι σηκώνετε το τηλέφωνο που είναι δίπλα στην κουνιστή πολυθρόνα σας και τηλεφωνείται στη θεία Minnie (η οποία είναι μεσίτης σε κοινά προϊόντα).

Λέτε σε αυτήν την καλή γυναίκα ότι θέλετε να αγοράσετε μερικά συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης του αργού πετρελαίου. Σε κάποιους κύκλους αυτό θα ονομαζόταν αγορά «χάρτινων βαρελιών», συγκρινόμενο με τα φυσικά βαρέλια (ή «υγρά βαρέλια») επί τον πετρελαιοφόρων που σύντομα θα βρίσκονται σε αδράνεια. «Πόσα;» θα ρωτήσει η θεία Minnie κι έτσι θα της πείτε όσα σας είπε ο θείος Pogue και κατόπιν θα της πείτε να χρησιμοποιήσει την κρίση της. Εκείνη σας απαντά αμέσως ότι πρόκειται να αγοράσει 100.000 βαρέλια για σας – τα οποία είναι ουσιαστικά 100 συμβόλαια, δεδομένου ότι μια σύμβαση είναι για 1.000 βαρέλια. Αναφέρει επίσης ότι πρόκειται να αγοράσει μερικά συμβόλαια για τον εαυτό της. Κοιτάτε στα Χρονικά της Wall Street και βλέπετε ότι η τιμή του φυσικού πετρελαίου είναι 15 ευρώ το βαρέλι, που σημαίνει ότι η θεία Minnie θα κάνει μια παραγγελία πετρελαίου στο όνομά σας, αξίας κάπου γύρω στο 1,5 εκατομμύριο ευρώ. Η διαδικασία είναι συνήθως πως εκείνη θα ζητήσει για μια κατάθεση – από 5 έως 10%, η οποία λέγεται προκαταβολή – αλλά από τη στιγμή που ξέρει και είναι εξοικειωμένη με το μέγεθος του τραπεζικού λογαριασμούς, δεν την απασχολεί αυτή η προκαταβολή. Ένας άλλος λόγος που δεν την ενοχλεί αυτό είναι γιατί είναι πάρα πολύ απασχολημένη για να αγοράσει ένα βαγόνι γεμάτο με συμβόλαια για τον εαυτό της. Σε ό,τι αφορά την ίδια τη θεία Minnie, μια ευκαιρία που προκύπτει από τέτοιου είδους εμπιστευτικές πληροφορίες, είναι η ευκαιρία μιας ζωής.

Κάτι που πρέπει να γίνει κατανοητό σε αυτό το σημείο είναι πως εσείς αγοράζετε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και όχι προθεσμιακά συμβόλαια. Πραγματικά, ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης δεν είναι και προθεσμιακό συμβόλαιο, δεδομένου ότι καθορίζεται παράδοση εμπορεύματος στο προθεσμιακό συμβόλαιο. Αλλά η παράδοση δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει, όπως θα δείτε και παρακάτω. Αντ' αυτού, η σύμβαση μπορεί να αντισταθμιστεί (αντιστραφεί δηλ.). Οι προθεσμιακές συμβάσεις είναι πολύ σημαντικές στις πετρελαϊκές επιχειρήσεις, αλλά το πιο σημαντικό πράγμα γι' αυτές κι εμάς είναι ότι μπορούμε συχνά – αλλά όχι πάντοτε – να μιλήσουμε για συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης σα να ήταν προθεσμιακά συμβόλαια, ειδικά μέσα στην αίθουσα. Θα ήταν επίσης χρήσιμο να ξέρουμε ότι τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης είναι τυποποιημένες συμβάσεις για συγκεκριμένη ποσότητα ενός προϊόντος και θα πρέπει να πραγματοποιηθεί η παράδοση γιατί ο κάτοχος του συμβολαίου το διατηρεί μέχρι την ημερομηνία λήξης και τότε η παράδοση γίνεται μόνο σε μερικές συγκεκριμένες τοποθεσίες. Στο παράδειγμά μας όλα τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης για το πετρέλαιο είναι για 1.000 βαρέλια, ενώ οι προθεσμιακές συμβάσεις μπορεί να είναι για οποιοδήποτε ποσό. Επιπλέον, εάν πάνω στην παρακίνηση της στιγμής αποφασίσετε να περάσετε μερικούς μήνες κάνοντας σκι στο Are ή στο Courchevel και ξεχάσετε να αντισταθμίσετε το συμβόλαιό σας, τότε τα 100.000 βαρέλια πετρελαίου δε θα παραδοθούν στον κήπο του φτωχικού σας στο Bel Air (Los Angeles), αλλά στο Δυτικό Τέξας ή στο Λιμάνι της Νέας Υόρκης, τα οποία είναι τα νομικά προδιαγεγραμμένα σημεία παράδοσης.

Συνεχίζοντας, εκείνο το απόγευμα που επιστρέφετε στο σπίτι από τη δουλειά σας, ανοίγετε την τηλεόραση και ακούτε ότι τα πληρώματα των πετρελαιοφόρων του Κόλπου πρόκειται πράγματι να κάνουν απεργία και ήδη η τιμή του φυσικού πετρελαίου στη Rotterdam Spot Market έχει ήδη σκαρφαλώσει μερικά ευρώ και το ίδιο είναι αλήθεια και για τη Brent Market (Αγγλία). Παντού δίνεται στην τιμή των 17,5 ευρώ ανά βαρέλι, αλλά οι εκπρόσωποι των εταιρειών ισχυρίζονται πως έγινε ό,τι ήταν ανθρωπίνως δυνατόν για να επιτευχθεί κάποια συμφωνία με τα πληρώματα των δεξαμενοπλοίων. (Παρεμπιπτόντως οι τιμές πετρελαίου και σε φυσικές και «χάρτινες» αγορές είναι εξαιρετικά ευμετάβλητες, το οποίο είναι και ένας λόγος γιατί η διαχείριση κινδύνου (χρησιμοποιώντας π.χ. συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και δικαιώματα αγοραπωλησίας) είναι εξαιρετικά σημαντική.)

Έτσι σηκώνετε το τηλέφωνο πάλι και τηλεφωνείται στη θεία Minnie. Της λέτε ότι η τιμή του φυσικού πετρελαίου έχει ανεβεί και της το λέτε γιατί αυτόν τον καιρό διαβάζετε ένα καταπληκτικό βιβλίο για το πετρέλαιο από έναν σπουδαίο καθηγητή που ισχυρίζεται ότι όταν η τιμή του φυσικού πετρελαίου ανεβαίνει, είναι πολύ πιθανό να ανεβεί και η τιμή του πετρελαίου στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης – π.χ. το πετρέλαιο στα χαρτιά – θα αυξηθεί επίσης.

Ναι, επιβεβαιώνει αυτή, γνωρίζω το βιβλίο και ο κύριος εκείνος είχε δίκιο. Η τιμή των «χάρτινων» βαρελιών έχει αυξηθεί κατά δύο ευρώ, αλλά υπάρχει μια άσχημη φήμη που κυκλοφορεί και λέει ότι η απεργία θα διευθετηθεί σύντομα. Επιπρόσθετα, το γεγονός ότι η τιμή στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης είναι παρακάτω από την τιμή του φυσικού πετρελαίου δεν είναι καλό σημάδι αυτή τη στιγμή, γιατί αν είστε (αδιάφορος) οπαδός της Υπόθεσης των Αποτελεσματικών Αγορών, τότε θα υποστηρίζατε ότι η τιμή συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης μπορεί να αποτελέσει μια χρήσιμη εκτίμηση της τιμής της κηλίδας στο μέλλον. (Παρατηρήστε την έκφραση «χρήσιμη». Αυτό που εννοεί είναι ότι υπάρχουν θεωρητικοί λόγοι για να μην παίρνουμε την τιμή των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης ως τον τέλειο εκτιμητή της τιμή της κηλίδας στο μέλλον). Ίσως, θα έπρεπε εκείνη να «κλείσει τη θέση σας» με την πώληση 100 συμβολαίων; (τα οποία όπως θα παρατηρήσατε είναι ακριβώς ο ίδιος αριθμός με τον οποίο και άνοιξε η θέση σας).

«Πούλησε τώρα», της λέτε. «Άδειασέ τα όλα». Λαμβανομένων υπόψη όλων αυτών, ήταν μια ωραία βόλτα και παρόλο που τελείωσε, έχετε μόλις αυξήσει την περιουσία σας (χωρίς τους φόρους) κατά περίπου 200.000 ευρώ. (Αν π.χ. η τιμή στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης ήταν τώρα 17 ευρώ το βαρέλι, κερδίζετε (17-15) x 100.000 = 200.000 ευρώ, υποθέτοντας ότι ανοιχτήκατε με την πώληση του πετρελαίου με συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης στην τιμή των 15 ευρώ το βαρέλι. Παρατηρήστε επίσης ότι η τιμή του φυσικού πετρελαίου δε χρειαζόταν να είναι ίσως με την τιμή του «χάρτινου» πετρελαίου όταν ξεκίνησε αυτή η συναλλαγή κι έτσι όταν η Minnie έφερε τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, μπορεί να πλήρωσε λιγότερο ή περισσότερο από 15 ευρώ. Είναι πιθανό να μην τη ρωτήσετε ωστόσο, γιατί με τις πληροφορίες που έχετε, η τιμή ήταν άνευ σημασίας. Αυτό που ήταν σημαντικό ήταν ότι η τιμή ήταν σχεδόν σίγουρο ότι θα αυξηθεί.

Πού είναι το πετρέλαιο; Η πρώτη φορά που έκανα διάλεξη σε προπτυχιακούς φοιτητές σχετικά με τις αγορές των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, αυτή ήταν η ερώτηση της ημέρας. Η απάντηση τώρα, όπως και τότε, είναι ότι κανείς στο Ber Air δε γνωρίζει πού βρίσκεται το πετρέλαιο και δεν είναι και σημαντικό. Για έναν κερδοσκόπο το θέμα δεν είναι το πετρέλαιο, αλλά το να επωφεληθεί από τις αλλαγές στην τιμή του πετρελαίου.

Σηκώσατε το τηλέφωνο, ανοίξατε μια θέση αγοράζοντας μερικά συμβόλαια και αργότερα κλείσατε αυτή τη θέση πουλώντας τον ίδιο αριθμό συμβολαίων. Δεν ανησυχείτε για το πού βρίσκεται το φυσικό πετρέλαιο ή τι πρόκειται να απογίνει με αυτό – εκτός κι αν αποφασίσετε να κρατήσει τα συμβόλαια μέχρι την ημερομηνία λήξης τους. Και γιατί να το κάνετε αυτό; Απάντηση: γιατί πιστεύετε πως ενδέχεται να βγάλετε σοβαρά χρήματα από την κατοχή φυσικού πετρελαίου.

Τώρα ας γυρίσουμε αυτήν την ευχάριστη ιστορία πίσω. Ο θείος Pogue σας καλεί από τη Ρώμη και σας λέει ότι μόλις ανακαλύφθηκαν τεράστια κοιτάσματα πετρελαίου στην Αίγυπτο, δίπλα στα υπάρχοντα κοιτάσματα. Με άλλα λόγια, για να δώσουν το πετρέλαιο στην αγορά δε χρειάζεται να κατασκευαστούν νέοι αγωγοί. Και δεδομένου ότι η Αίγυπτος έχει μερικά σοβαρά οικονομικά προβλήματα και δε χρειάζεται να τηρήσουν τις ποσοστώσεις της OPEC, αυτό το πετρέλαιο θα βγει στην αγορά πολύ σύντομα.

Η προμήθεια αυξάνεται και, τηρουμένων των αναλογιών, η τιμή πέφτει! Αυτό το μαθαίνετε στο πρώτο μάθημα στα οικονομικά και έτσι για άλλη μια φορά τηλεφωνείτε στη θεία Minnie να της πείτε τι σας είπε ο θείος Pogue. Αυτή προβαίνει στο να σας πληροφορήσει ότι πρόκειται να πουλήσει 100 συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης στο όνομά σας – τα οποία έρχονται μαζί με 100.000 βαρέλια – και αυτή επίσης θα κάνει μια σημαντική επένδυση για τον εαυτό της. Λίγη ορολογία θα είναι χρήσιμη εδώ. Στο προηγούμενο σενάριο, όταν αυτή αγόρασε, αγόρασε μια μετοχή. Τώρα που πουλάει, λέγεται δανείζεται μια μετοχή.

Πού είναι το πετρέλαιο; Πώς μπορείς να πουλήσεις κάτι που δεν έχεις;

Αν πουλήσετε ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης και δεν το αντισταθμίσετε πριν την ημερομηνία λήξης – αγοράζοντας τον ίδιο αριθμό συμβολαίων (για το ίδιο προϊόν και να έχουν την ίδια ημερομηνία λήξης) – τότε (τυπικά) πρέπει να αγοράσετε 100.000 βαρέλια πετρελαίου από κάπου και να τα παραδώσετε στο καθορισμένο σημείο παράδοσης. Για να επαναλάβω: όπως ακριβώς ανοίξατε μια θέση πουλώντας ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης, μπορείτε να κλείσετε τη θέση σας αγοράζοντας ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης και μπορούν όλα αυτά να γίνουν από το άνετο σαλόνι σας ενώ απολαμβάνετε το τονωτικό, πνευματώδες πείραγμα του J.R. και της Sue Ellen Ewing σχετικά με τις προοπτικές και τις προσωπικότητες του ενεργειακού τομέα του Τέξας. Αφού κλείσετε τη θέση σας, η συμμετοχή σας στην αγορά συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης σταματάει – τουλάχιστον για την ώρα.

Είπαμε τόσα για τις «εικασίες», αλλά τι γίνεται με την αντιστάθμιση – δηλ. ένα είδος ασφάλισης έναντι δυσάρεστων διακυμάνσεων των τιμών προς τα πάνω ή προς τα κάτω. Υποθέστε ότι πριν μια εβδομάδα καταλήξατε στο συμπέρασμα πως η τιμή του πετρελαίου επρόκειτο να αυξηθεί κατά ένα μεγάλο ποσό και έτσι πήγατε στο τοπικό 7–11 (= αλυσίδα καταστημάτων που λειτουργούν υπό τη Seven-Eleven Japan Co. Ltd) και αγοράσατε 2.000 βαρέλια με πετρέλαιο, τα οποία είχατε μεταφέρει στην τοπική αποθήκη για φύλαξη μέχρις ότου η τιμή ανεβεί. Αλλά τώρα δεν είστε τόσο σίγουροι για τη μελλοντική τιμή του πετρελαίου όπως ήσασταν αρχικά και νιώθετε μια έντονη επιθυμία να αντισταθμίσετε την επένδυσή σας. Πώς θα ξεκινούσατε αυτήν την άσκηση για τη διαχείριση του συγκεκριμένου κινδύνου;

Υπάρχουν πολλές δυνατότητες, αλλά η μία είναι να σηκώσετε το τηλέφωνο πάλι και να καλέσετε τη θεία Minnie. Όταν απαντήσει, πείτε της να πουλήσει δύο συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (= 2.000 «χάρτινα» βαρέλια). Τώρα, αν η τιμή του (φυσικού) πετρελαίου πέσει, χάνετε στα «υγρά βαρέλια» που έχετε αγοράσει, αλλά από τη στιγμή που η τιμή των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης πέφτει επίσης, έχετε κέρδος όταν κλείσετε τη θέση σας στο χαρτί με το να αντιστρέφετε την αρχική σας δραστηριότητα – τη μικρή – με μια μεγάλη (η οποία συνεπάγεται την αγορά 2 συμβολαίων). Το κέδρος είναι ίσο με την τιμή πώλησης μείον την τιμή αγοράς. Υποθέτοντας ότι ξεφορτώνεστε το φυσικό σας πετρέλαιο περίπου την ίδια στιγμή, η απώλεια στα «υπαρκτά» λίγο πολύ αντισταθμίζετε από το κέρδος σας στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης.

Ακούγεται εύκολο, έτσι δεν είναι; Και σε κάποιο βαθμό είναι όντως εύκολο. Αλλά ποτέ μην ξεχάσετε ότι η Metallgesellschaft – η 14^{η} μεγαλύτερη βιομηχανική επιχείρηση στη Γερμανία – έχασε 1,5 δισεκατομμύριο ευρώ στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και στις αγορές ανταλλαγών μέσα σε λίγους μήνες. (Το ενδιαφέρον είναι πως όταν βγήκε αυτή η είδηση, η διαπραγμάτευση ανταλλαγών με τη Metallgesellschaft (MG) ήταν εντελώς αγνοημένη.) Επιπλέον, όταν παρουσιάστηκε μια ομάδα ξεκαθαρισμού αποτελούμενο από αρκετούς επιχειρηματίες παγκόσμιας κλάσης από την Αμερική για να βάλει τα πράγματα στη σωστή τους θέση, αυτοί έκαναν εμφανώς τόσα πολλά λάθη όσα οι άνθρωποι μου έβαλαν την MG σε αυτό το μεγάλο πρόβλημα. Ξαφνικά ένας θυμάται μια πολύ σημαντική ρωσική παροιμία: ο σοφός άνδρας μαθαίνει από τα λάθη των άλλων. Ο ανόητος πρέπει να μάθε για τον εαυτό του.

2.5 Τα αποθέματα και οι τιμές του πετρελαίου

Για τα περισσότερα εννοιολογικά πλαίσια, οι διακυμάνσεις της τιμής του πετρελαίου μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως μακροπρόθεσμες και βραχυπρόθεσμες. Κανονικά, όταν πρόκειται για εμπορεύματα όπως ο χαλκός και το κακάο, το μακροπρόθεσμο περιλαμβάνει ευδιάκριτους κύκλους, των οποίων οι μεγαλύτερες και οι μικρότερες τιμές χωρίζονται με τα χρόνια ή ακόμα και τις δεκαετίες. Αλλά αυτή η κατάσταση δε μας αφορά εδώ για λόγους που είναι προφανείς σε όλους όσους έχουν σοβαρό ενδιαφέρον στην οικονομία του πετρελαίου. Θεωρητικά, ολόκληρη η σύγχρονη εμπορική ιστορία του πετρελαίου δεν περιλαμβάνει περισσότερους από μόλις λίγους τέτοιους κύκλους. Αντιθέτως, θα συγκεντρωθούμε σε βραχυπρόθεσμες διακυμάνσεις όπου, αντί να χρησιμοποιούμε τον όρο «κύκλοι» με όρους κραδασμών τιμών ή ταλαντευτικές κινήσεις, των οποίων οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές χωρίζονται σε εβδομάδες ή μήνες.

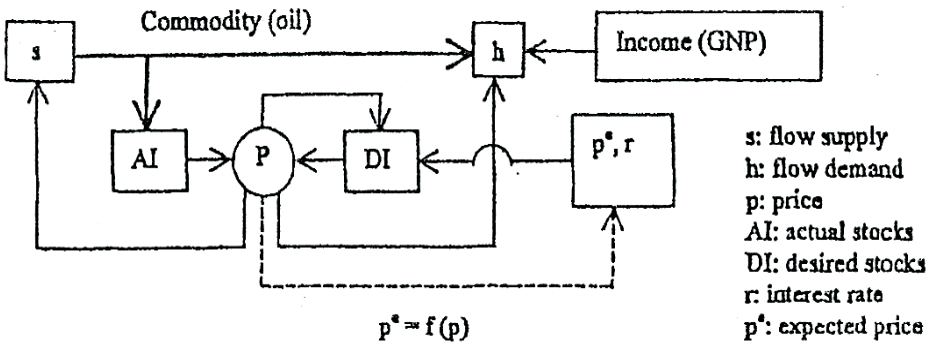
Αυτές οι διακυμάνσεις είναι το αποτέλεσμα των θεωρητικών διακυμάνσεων ανάμεσα στην αισιοδοξία και απαισιοδοξία που έχουν την προέλευσή του σε πράγματα όπως οι προγνώσεις καιρού, το αποτέλεσμα των συναντήσεων των χωρών του OPEC και οι οικονομικές προγνώσεις. Σε πολλούς παρατηρητές οι τιμές του πετρελαίου φαίνονται μάλλον σταθερές, αλλά στην πραγματικότητα, ακόμα και σε αρκετά ήρεμα χρόνια, συμβαίνουν πολλές αυξομειώσεις στις τιμές. Στις αρχές της δεκαετίας του 1990, μια διακύμανση τιμών (μέγιστο μέχρι ελάχιστο) της τάξης των (τουλάχιστον) 3 ευρώ ανά βαρέλι ήταν κάτι το σύνηθες και το 1996 αυτές οι διακυμάνσεις αυξήθηκαν σε περίπου 5 ευρώ ανά βαρέλι.

Τώρα ας εξετάσουμε το μηχανισμό πίσω από αυτές τις αυξομειώσεις. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι κάποιες σχετικά μικρές ανοδικές ή πτωτικές αλλαγές στην αντιληπτή προσφορά ή ζήτηση συχνά θα δουλεύουν για να επιταχύνουν τις μεταβολές στις τιμές. Έχοντας εδραιώσει μια ανοδική ή καθοδική τάση στα διαγράμματα τιμών πετρελαίου – τα οποία πλέον μπορούν να βρεθούν στις σελίδες πολλών εφημερίδων που αφορούν επιχειρήσεις και με το οικονομικό υπόβαθρο να χαρακτηρίζεται από ασυνήθιστο βαθμό αβεβαιότητας, τυχόν απρόβλεπτες νέες πληροφορίες παίρνουν γρήγορα μεγάλη δημοσιότητα, οι βασικές αρχές (δηλ. η προσφορά και η ζήτηση) αναπροσαρμόζονται βιαστικά και οι μακροπρόθεσμες επιπτώσεις των τιμών τείνουν συχνά να είναι υπερβολικές. Σε πολλές περιπτώσεις, αυτό οδηγεί στο είδος της αγοράς και της πώλησης που εγγυάται μια απότομη αντιστροφή στην υπάρχουσα τάση.

Εδώ μπορούμε να εισάγουμε μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση από το Κέντρο για τις Μελέτες της Παγκόσμιας Ενέργειας (Centre for Global Energy Studies) που δημοσιεύτηκε στα μέσα του 1993: «Η συναινετική άποψη είναι ότι οι τιμές θα αυξηθούν κατά το τέταρτο τρίμηνο λόγω της αυξημένης ζήτησης για το πετρέλαιο του OPEC (= Organization of the Petroleum Exporting Countries), αλλά αυτή η άποψη είναι υπερβολικά απλοϊκή: η αγορά θα συνεχίσει να κατευθύνεται, όπως πάντα, από τη θέληση των επιχειρήσεων να διατηρούν αποθέματα.» Μεταξύ άλλων, αυτό σημαίνει ότι δε χρειάζεται να ανησυχούμε υπερβολικά με την ψυχολογία των συναλλασσομένων με ανεξάρτητες αγορές και μπορούμε να συγκεντρωθούμε στην υπόθεση ότι οι τιμές του πετρελαίου έχουν άμεση σχέση με το επίπεδο των αποθεμάτων που μεταφέρονται, το οποίο είναι ουσιαστικά ό,τι και η θεωρία προσφοράς αποθήκευσης. Τόσο σε θεωρητικό όσο και εμπειρικό επίπεδο παρατηρούμε ότι τα επίπεδα αποθεμάτων μπορούν να συνδεθούν με τα spreads (δηλ. με τη διαφορά) ανάμεσα στις τιμές των κηλίδων πετρελαίου και των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης. (Ως παράδειγμα των διαφόρων προθεσμιών λήξης θα μπορούσαμε να έχουμε συμβόλαια 30 ημερών, 60 ημερών, 90 ημερών κλπ.. Δυστυχώς δεν υπάρχει συνέχεια στις τιμές των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, το οποίο τείνει να κάνει τις πραγματικές παγκόσμιες αγορές συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης πολύ πιο διαφορετικές από εκείνες που συναντάμε στα πολυμαθή περιοδικά, αν θέλουμε να υποστηρίξουμε την αποτελεσματικότητα του συστήματος τιμών υπό συνθήκες αβεβαιότητας. Ωστόσο μπορεί να βρεθεί μια ενδιαφέρουσα χρήση των πραγματικών αγορών συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης για τον υπολογισμό της αξιολόγησης των ιδιοτήτων του πετρελαίου στον Pickles (1994).)

Μερικούς μήνες αργότερα η αγορά για άμεσο αργού πετρελαίου ήταν ακόμα σχετικά αδύνατη, αλλά όχι τόσο αδύνατη όσο στα μέσα του έτους. Αυτό που συνέβη ήταν πως στα τέλη του καλοκαιριού του 1993 η αγορά πωλήθηκε σε θετικότατη τιμή, που σημαίνει πως η άμεση τιμή του πετρελαίου ήταν μικρότερη από την προκαθορισμένη τιμή (το οποίο στις περισσότερες αγορές θεωρείται ως κάτι το φυσιολογικό) σε τέτοιο ποσό που υπερέβαινε το κόστος αποθήκευσης. Αυτό το κατέστησε πιο ελκυστικό για τους κατόχους φυσικού πετρελαίου ώστε να αγοράσουν τοις μετρητοίς και να το πουλήσουν εκ των προτέρων, γιατί ο κίνδυνος επιδείνωσης είχε εξαλειφθεί. Επιπλέον, οι αντισταθμιστικές συναλλαγές ήταν εφικτές όλο το χρόνο κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου που αφορούσε την αγορά αργού πετρελαίου (όπως στην προηγούμενη ενότητα) καθώς τη μείωση των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης: αν η τιμή του αργού πετρελαίου έπεφτε, θα ανακαλυπτόταν ένα παράγωγο κέρδος στη συναλλαγή της αντιστάθμισης των συμβολαίων. Περιττό να λεχθεί πως μια κατάσταση όπου το πετρέλαιο μπορεί να αποθηκευτεί χωρίς κίνδυνο, ακόμα και σε αγορά με πτωτική τάση, αυξάνει πάρα πολύ το κίνητρο να διατηρούνται αποθέματα. (Αλλά θυμηθείτε ότι πολλά αποθέματα δεν αντισταθμίζονται με συμβόλαια γιατί οι ιδιοκτήτες τους πιστεύουν ότι θα υπάρξουν μεγαλύτερα κέρδη αν αυτά μείνουν χωρίς αντιστάθμιση.)

Αρκετούς μήνες αργότερα, το contango (= μια κατάσταση στην οποία οι άμεσες τιμές είναι μικρότερες από εκείνες που αναμέναμε) μειώθηκε σταδιακά και με την τιμή στα συμβόλαια να πέφτει επίσης, η ζήτηση για όλες τις κατηγορίες αποθεμάτων μειώθηκε δραστικά. Ένα σημαντικό μέρος της νέας παραγωγής, σε συνδυασμό με ένα μεγάλο ποσό υφιστάμενων αποθεμάτων, κατευθύνθηκαν τότε στην άμεση αγορά για περίπου 14,75 ευρώ ανά βαρέλι. Αλλά ως αποτέλεσμα της συνάντησης του OPEC από 25 έως 29 Σεπτεμβρίου που καθόρισε το συνολικό ανώτατο όριο παραγωγής του OPEC στα 24,5 Mb την ημέρα (Mb = millions of barrels = εκατομμύρια βαρέλια), ανακτήθηκαν οι άμεσες και μεταγενέστερες τιμές με τέτοιο τρόπο ώστε σταμάτησε η μη ζήτηση αποθεμάτων. Μαζί με την αυξανόμενη αλληλεγγύη του OPEC, το οποίο σημαίνει μια αυξανόμενη απροθυμία να αντιμετωπίσει το πρόβλημα της «απειθαρχίας για την παραγωγή» και λαμβανομένων των προσδοκιών μιας ικανοποιητικής μακροοικονομικής ανάπτυξης στο μεγαλύτερο μέρος του κόσμου και ιδιαίτερα στην Ασία, οι προβλέψεις ήταν για αποδεκτό επίπεδο τιμών. Αυτό μας φέρνει στην παρακάτω εικόνα.



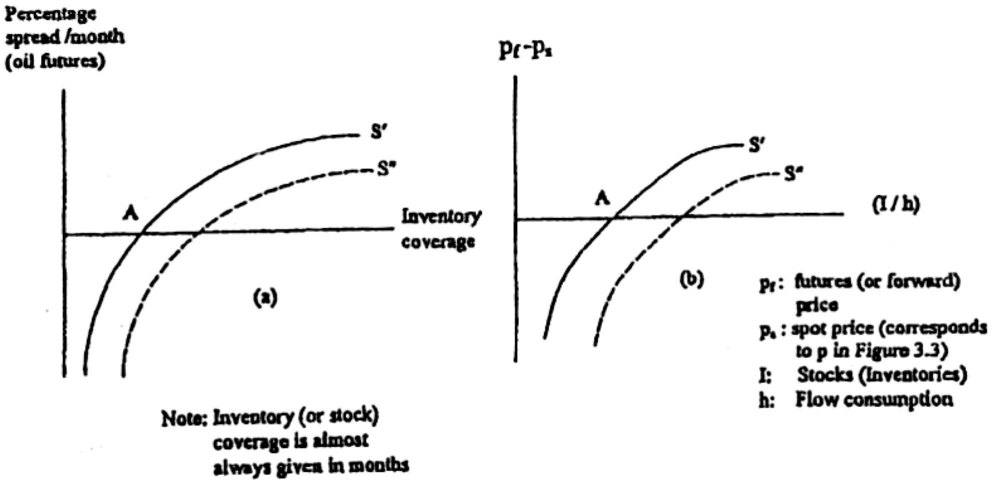
Σχήμα 2.3

Η παραπάνω εικόνα είναι ένα μοντέλο ροής αποθεμάτων μιας αγοράς προϊόντων. Εφαρμόζεται σε κάθε αγορά στην οποία τα εμπορεύματα (δηλ. τα αποθέματα) είναι το σημείο κλειδί για τον καθορισμό των βραχυπρόθεσμων τιμών, πράγμα που συμβαίνει στην αγορά του αργού πετρελαίου. Αυτή η κατασκευή προϋποθέτει την εγγενή αστάθεια των τιμών πετρελαίου – μια αστάθεια που την έχει κάνει παράδεισο για τους κερδοσκόπους. Και αναφέρεται ρητά στο μοντέλο, καθώς επίσης και στην προηγούμενη συζήτηση, πως η συμπεριφορά για την απογραφή επηρεάζεται πάρα πολύ από τις αλλαγές στις προσδοκίες. Οι αναγνώστες επομένως θα πρέπει να γνωρίζουν ιδιαίτερα ότι εφόσον οι τιμές στις προθεσμιακές αγορές συχνά θεωρούνται ως η καλύτερη εκτίμηση των τιμών για το μέλλον, οι αγορές αυτές ενθαρρύνουν τη συχνή αναθεώρηση των προσδοκιών. Αυτό βοηθάει στο να προωθείται η αστάθεια. (Θα αναφέρω επίσης για άλλη μια φορά ότι υπάρχουν θεωρητικά επιχειρήματα τα οποία δείχνουν ότι η τιμή των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης δεν αποτελούν μια απόλυτη, ικανοποιητική εκτίμηση για τις τιμές στο μέλλον.)

Επίσης σημειώστε ότι η διευθέτηση που φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα είναι ανάλογη ενός σερβομηχανισμού, σκοπός του οποίου είναι να ρυθμίζει το AI υπό το φως του DI, συγκρίνοντας αυτά τα δύο και μεταφράζοντας την απόκλιση (αν υπάρχει) σε «λάθος» σήμα (DI – AI), το οποίο με τη σειρά του ενεργείται στη ροή της προσφοράς και της ζήτησης για την εξάλειψη της εν λόγω απόκλισης.

Εάν οι μαθηματικές εξισώσεις (π.χ. οι διαφορικές εξισώσεις) αυτού του συστήματος ήταν ολογράφως και περιελάμβαναν την περίπτωση στην οποία το p^e ήταν συνάρτηση του p, όπως φαίνεται στη διακεκομμένη γραμμή στο παραπάνω σχήμα, τότε όταν θα λύνονταν θα βρίσκαμε ένα πολύ διευρυμένο πεδίο εφαρμογής για την αστάθεια, σε σύγκριση με την περίπτωση όπου το p^e είναι ανεξάρτητο του p. Τελικά, κάποιοι αναγνώστες μπορεί να το βρείτε δύσκολο να αναλάβετε αυτό το έργο.

Αυτό μας φέρνει στο επόμενο επίπεδο δυσκολίας που αφορούν τα αποθέματα με την τιμή του πετρελαίου, με τα θέματά μας εδώ να είναι η εξαιρετικά σημαντική προσφορά αποθήκευσης και άνεση απόδοσης. Πρώτα θα στραφούμε στην παρακάτω εικόνα (στο α) το οποίο μας δείχνει την κάλυψη των αποθεμάτων του αργού πετρελαίου (σε μήνες) που επικρατεί σε συγκεκριμένο χρόνο, συναρτήσει του ποσοστού της τιμής του spread ανά μήνα, ανάμεσα στον παρόντα και ένα μελλοντικό μήνα (π.χ. Φεβρουάριο του 2000 και Μάιο του 2000). Για να κυριολεκτήσουμε, αυτή είναι η σωστή εκπροσώπηση, ενώ η διευθέτηση που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα (στο β) είναι μια προσέγγιση. Αλλά είναι μία από τις προσεγγίσεις που μερικές φορές μπορούν να μας βοηθήσουν στην κατανόηση κάποιου πολυσύνθετου θέματος.



Σχήμα 2.4

Αυτό που δείχνουν οι καμπύλες αυτές είναι πως αριστερά του σημείου Α έχουμε την κατάσταση που είναι γνωστή ως backwardation (μια κατάσταση όπου η τιμή μιας futures είναι χαμηλότερη στους μακρινούς παρά στους κοντινούς μήνες παράδοσης), με την τιμή των εγγύς συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης να είναι μεγαλύτερη από εκείνη του «αμέσως επόμενου» συμβολαίου ή, για το ζήτημα εκείνο, των συμβολαίων μεγαλύτερης διάρκειας. (Ένα ακόμη πιο εύκολο παράδειγμα θα περιλαμβάνει την άμεση τιμή ενός προϊόντος κατά το χρόνο t να είναι μεγαλύτερη από την τιμή στο μέλλον για χρόνο (t+1.) Παίρνουμε αυτό το αποτέλεσμα όταν η κάλυψη αποθεμάτων είναι σχετικά χαμηλή και οι χρήστες και οι έμποροι πετρελαίου πιστεύουν ότι μπορούν να βγάλουν κέρδος από την έλλειψη πετρελαίου διατηρώντας αποθέματα ή τίτλους σε αποθέματα απ' ό,τι άλλα περιουσιακά στοιχεία. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, μια ευκολία εσοδείας που υλοποιείται εδώ η οποία έρχεται σε αντίθεση με την πώληση των εμπορευμάτων (πετρέλαιο) και την αντικαθιστά με συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (στα οποία θα μπορούσε να γίνει παράδοση). Επιπλέον, το κόστος παραγγελίας και μεταφοράς των εμπορευμάτων από το ένα μέρος στο άλλο και η ανάγκη να διατηρηθούν τα προγράμματα παραγωγής δικαιολογούν τη διατήρηση κάποιου αποθέματος για την αντιμετώπιση μιας ισχυρότερης υπανάπτυξης.

Έχοντας λάβει υπόψη την υπανάπτυξη μπορούμε να εξετάσουμε την κατάσταση στα δεξιά του σημείου Α, όπου η κάλυψη αποθεμάτων είναι υπεραρκετή και τα πρόσθετα αποθέματα έχουν μια σχετικά μικρή άνεση εσοδείας ή στην οριακή περίπτωση δεν έχουν καθόλου (οριακό) περιθώριο εσοδείας. (Προσέξτε τη χρήση του όρου «οριακός». Προφανώς, όταν είμαστε πολύ μακριά στα δεξιά του Α, δεν υπάρχει καμία πρόσθεση στο περιθώριο εσοδείας εξαιτίας της πρόσθεσης μιας παραπάνω μονάδας στα αποθέματα – το οριακό περιθώριο εσοδείας πλησιάζει το μηδέν. Αλλά το μέσο ή ολικό περιθώριο εσοδεία θα πρέπει να παραμένει το ίδιο.) Συνεπώς, όταν είμαστε μακριά από τα δεξιά του Α, θα πραγματοποιηθούν επιπλέον αποθέματα από τους συναλλασσόμενους που θέλουν να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους, αλλά μόνο αν περιμένουν να ανακτήσουν τα κόστη αποθήκευσης και συναλλαγής μέσω της επικείμενης αύξησης της τιμής του πετρελαίου ή μέσω του να είναι σε θέση να αντισταθμίσουν τα αποθέματα με την πώληση συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης. Διαφορετικά, αυτά τα (υπερβολικά) αποθέματα θα διατεθούν στην αγορά και στη βάση της παραπάνω εικόνας (στο διάγραμμα β), μπορούμε να πούμε ότι τηρουμένων των αναλογιών αυτό θα συμπιέσει την τιμή p_s. Αυτό θα δημιουργούσε θετικές αυξήσεις ανάμεσα στην παρούσες τιμές και στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης με τη χαμηλότερη ημερομηνία λήξης – και πιθανώς ανάμεσα σε διαδοχικά συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης με υψηλότερες ημερομηνίες λήξης – τα οποία είναι μεγαλύτερα των κοστών μεταφοράς, τα οποία με τη σειρά τους θα οδηγούσαν τους κατόχους αποθεμάτων να μεταφέρουν το εναπομείναν απόθεμα. Προσέξτε επίσης ότι στα δεξιά του A έχουμε τον όρο που καλείται contango.

Τα αποθέματα σχεδόν πάντα παρέχουν «ευκολία», η οποία συχνά επισημαίνεται ως ευκολία εσοδείας. Ωστόσο η οριακή (δηλ. επιπρόσθετη) ευκολία εσοδείας πλησιάζει το μηδέν για πολύ υψηλά επίπεδα αποθεμάτων. Παρομοίως, μια υψηλή οριακή ευκολία εσοδείας θεωρείται πως χαρακτηρίζει μια κατάσταση όπου τα αποθέματα είναι σημαντικά κάτω των επαρκών ή φυσιολογικών επιπέδων. Επίσης, στις τελευταίες περιπτώσεις, μια μεγάλη οριακή ευκολία εσοδείας μπορεί να προκαλέσει την τιμή των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης να είναι χαμηλότερη από την παρούσα τιμή. Όπως ξεκαθαρίζει και η άλγεβρά μας, η οριακή ευκολία εσοδείας είναι αρνητικό κόστος και εκφράζει την αυξημένη χρησιμότητα στον κάτοχο αποθεμάτων για μια πρόσθετη μονάδα εμπορευμάτων που μπορεί να πωληθεί η συναλλαχθεί αργότερα ή να συμπεριληφθεί στην παραγωγική διαδικασία. Προφανώς, υπάρχει διαμάχη σχετικά με την ευκολία εσοδείας γενικότερα, με κάποιους επενδυτές να ισχυρίζονται ότι είναι μια ουτοπία. Αυτό μπορεί όντως να ισχύει για κάποια εμπορεύματα, αλλά το πετρέλαιο σίγουρα δεν είναι ένα από αυτά.

Όπως συνηθίζεται στα οικονομικά, θα πρέπει να ορίσουμε μια ισορροπία – δεδομένου ότι τα οικονομικά μας είναι, ιδιαίτερα, οικονομικά ισορροπίας: μελετούμε τις ισορροπίες και μόνο πολύ σπάνια τη διακύμανση των ισορροπιών. Ο πιο γενικός ορισμός της ισορροπίας (στα οικονομικά) είναι μια κατάσταση όπου οι προσδοκίες είναι σωστές και εκπληρωμένες – ή για να είμαι πιο ακριβής , όπου τα αποτελέσματα των προσπαθειών των συναλλασσομένων καταλήγουν να είναι συνεπείς με τις προθέσεις τους. Από την έποψη της πιο προηγούμενης εικόνας για παράδειγμα, η ισορροπία μας θα ήταν αν είχαμε AI – DI και οι συναλλασσόμενοι δε θα προσπαθούσαν πλέον να αλλάξουν το AI. Ο ορισμός της ισορροπίας που χρησιμοποιείται μερικές φορές στη φυσική θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και εδώ επίσης: μια κατάσταση ηρεμίας. (Και, αναγνώστη, κάνε την επιχείρησή σου να έχει τον έλεγχο των διαγραμμάτων σε αυτό το κομμάτι. Είναι εξαιρετικά σημαντικά!)

Αυτό οδηγεί αμέσως σε μια θεώρηση σεναρίων που καταλήγουν σε καταστάσεις ανισορροπίας. Μία από αυτές μπορεί να είναι όταν οι κάτοχοι μη αντισταθμισμένων ή μερικώς αντισταθμισμένων αποθεμάτων αναθεωρήσουν τις προσδοκίες τους και πουλήσουν τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης προκειμένου να αντισταθμίσουν τα αποθέματά τους. Αυτό θα μειώσει την τιμή αυτών των συμβολαίων (δεδομένου ότι αυξάνει την προσφορά τους) και επομένως θα μειώσει την ελκυστικότητα της κατοχής αποθεμάτων για τους υπάρχοντες αντισταθμιστές, οι οποίοι πρέπει περιοδικά να ανανεώσουν τα συμβόλαια. (Για λόγους που δε μπορούν να αναπτυχθούν λεπτομερώς αυτή τη στιγμή, οι βραχυπρόθεσμες συμβάσεις μελλοντικής εκπλήρωσης που «μεταφέρονται» συνεχώς μπορούν να είναι πιο ελκυστικές από αρκετές μακροπρόθεσμες συμβάσεις. Αυτή ήταν η στρατηγική αντιστάθμισης της Metallgesellschaft, αν και στην περίπτωσή της, αυτό της έφερε πολλή θλίψη. Η λογική εδώ στρέφεται στη συγκριτική έλλειψη ρευστότητας για ορισμένες συμβάσεις: π.χ. συμβόλαια πετρελαίου των οποίων η ημερομηνία λήξης είναι περισσότερη του ενός έτους και μερικές φορές λιγότερη.

Όπως συζητήθηκε πιο πάνω, τώρα έχουμε αξιοσημείωτη πώληση αποθεμάτων, το οποίο οδηγεί σε ισχυρή καθοδική πίεση στην τιμή του φυσικού πετρελαίου. Υποθέτοντας πως δεν υπάρχει περαιτέρω αλλαγή στις προσδοκίες που αφορούν το φυσικό πετρέλαιο, θα επέλθει μια διαφορά μεταξύ άμεσης και μελλοντικής τιμής η οποία θα έκανε τους κατόχους αποθεμάτων να σταματήσουν την πώληση των αποθεμάτων αυτών.

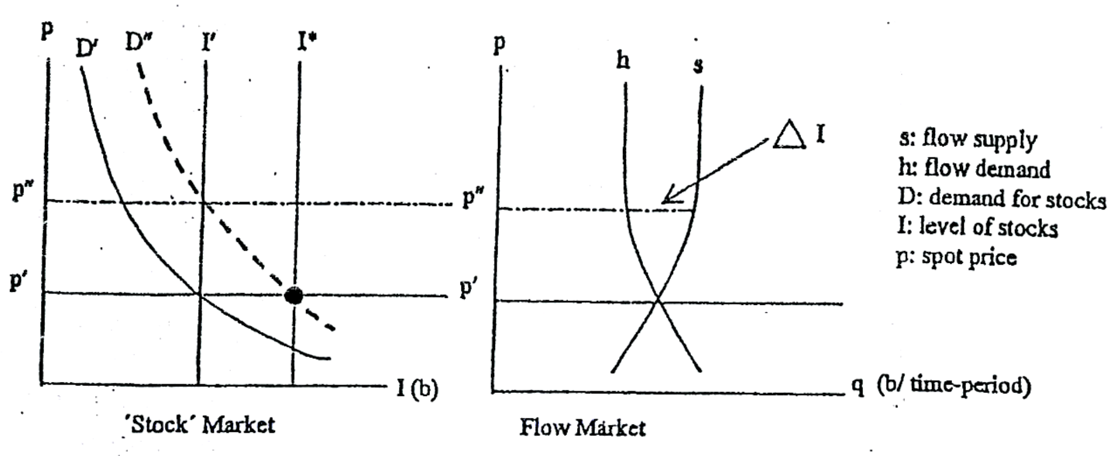
Το πιο σημαντικό σημείο απ' όλα είναι ότι κατά τη διάρκεια μιας σύντομης χρονικής περιόδου τα αποθέματα δεν καθορίζονται από την οικονομία, αλλά από τη φυσική της παραγωγής και της κατανάλωσης. Στα βραχυπρόθεσμα αποθέματα είναι αυτά που είναι, αλλά όταν οι ιδιοκτήτες τους έρχονται στο συμπέρασμα ότι είναι πολύ μεγάλα, η μόνη ευνοϊκή ρύθμιση που είναι δυνατή – υποθέτοντας ότι η χρήση τους στις παρούσες καταναλωτικές και παραγωγικές δραστηριότητες δε μπορεί να αυξηθεί σε σημαντικό ποσό – είναι ότι η τιμή των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης αλλάζει με τέτοιο τρόπο ώστε να παρέχει την αποζημίωση για την κατοχή αυτών που έχουν καταλήξει να θεωρούνται ως υπερβολικά αποθέματα. Αυτό ζητάει πάρα πολλά, δεδομένου ότι η τιμή αγοράς του πετρελαίου είναι σχεδόν βέβαιο ότι μειώνεται όσο τα υπερβολικά αποθέματα δεν αδειάζουν (δηλ. δε μοιράζονται) και/ή η προσπάθεια να αντισταθμιστούν αυτά που θεωρούμε ως υπερβολικά αποθέματα θα οδηγούσαν σε πτώση της τιμής του πετρελαίου στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης. Όσο για τη στρατηγική του να κερδίσει κανείς χρήματα από αυτό, το πιο σημαντικό πράγμα για έναν κερδοσκόπο είναι να ξεκινήσει να πουλάει αυτά τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης ακριβώς λίγο πριν κάποιοι άλλοι ανακαλύψουν ότι τα αποθέματα είναι πολύ υψηλά. Για παράδειγμα, δε χρειαζόταν να είσαι μετεωρολόγος για να ξέρεις προς τα πού επρόκειτο να φυσήξει ο αέρας τότε, όπως στα τέλη της δεκαετίας του 1990, που ο OPEC έθεσε απροσδόκητα τις ποσοστώσεις/αναλογίες. Σε εκείνη την περίπτωση μόνο ένα πράγμα θα μπορούσε να συμβεί και συνέβη: η τιμή του πετρελαίου άρχισε να κινείται νότια και συνέχισε έτσι μέχρι που οι παραγωγή πετρελαίου ανέκτησαν τη λογική τους. (Και οι πετρελαιοπαραγωγοί εδώ συμπεριέλαβαν εκείνες τις χώρες που δεν ανήκουν στον OPEC και οι οποίοι αποφάσισαν όμως να συνεργαστούν με τον OPEC.)

Όπως κάποιοι αναγνώστες θα μαντέψατε πιθανώς, μία πτώση στη ζήτηση αποθεμάτων θα μπορούσε να συνδεθεί με μια μετατόπιση προς τα πάνω στην προσφορά καμπυλών αποθήκευσης όπως φαίνεται και στην παραπάνω εικόνα. Ο αναγνώστης θα πρέπει να αφεθεί να συλλογιστεί πάνω σε αυτό, αν και το αντίθετο καθεστώς – μια εξωπραγματική αύξηση στη ζήτηση αποθεμάτων – θα συζητηθεί παρακάτω. Αλλά πρώτα, ας πούμε κάτι για το σχήμα των καμπυλών αυτών. Η δεξιά πλευρά της καμπύλης θα πρέπει να είναι σχετικά επίπεδη, γιατί με επαρκή αποθέματα και περισσότερα ή λιγότερα σταθερά κόστη μεταφοράς, οι διαφορές δε χρειάζεται να αυξηθούν έτσι ώστε να είναι κατά πολύ μεγαλύτερες του συνήθους κόστους μεταφοράς. Σε αυτήν την περίπτωση η οριακή ευκολία εσοδείας πλησιάζει το μηδέν. Ομοίως, όταν το I/h είναι χαμηλό, η οριακή ευκολία εσοδείας είναι υψηλή, το οποίο ανάμεσα και σε άλλα πράγματα αντανακλά μια ραγδαίως αυξανόμενη οικονομική τιμωρία για τη μη πώληση του πετρελαίου και την αντικατάστασή του από συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (στα οποία η παράδοση δε θα μπορούσε να γίνει σε ευνοϊκή τοποθεσία). Γεωμετρικά, αυτό συνεπάγεται ένα πολύ απότομο μέρος γι' αυτήν τη φάση της προσφοράς της καμπύλης αποθήκευσης.

Τώρα ας εξετάσουμε μια κατάσταση όπου οι συναλλασσόμενοι καταλήγουν στο ότι τα υπάρχοντα αποθέματα είναι ανεπαρκή, το οποίο στην παραπάνω εικόνα δηλώνεται με αλλαγή προς τα κάτω της καμπύλης της προσφοράς αποθήκευσης από το S΄ στο S΄΄. Για άλλη μια φορά υπενθυμίζουμε ότι στιγμιαίες προσθήκες στα αποθέματα δε μπορούν να γίνουν και πριν αυξηθεί η παραγωγή οι συναλλασσόμενοι πλειοδοτούν για τα υπάρχοντα αποθέματα, αυξάνοντας την τιμή πώλησης του πετρελαίου κατ' αυτόν τον τρόπο. Αυτή η ρύθμιση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. (Προσέξτε τις μονάδες: βαρέλια (= barrels – b) για τα αποθέματα όπως π.χ. πετρέλαιο και b/time-period (= βαρέλια ανά χρονική περίοδο) για τις ροές.)

Η ιστορία εδώ έχει ως εξής: Η αύξηση της ζήτησης αποθεμάτων δείχνεται με την κίνηση από το D΄ στο D΄΄ στη αγορά αποθεμάτων, που προκαλεί την αύξηση της τιμής σε p΄΄. Στη ροϊκή αγορά, όταν η τιμή αυξάνεται σε p΄΄, η προσφορά της ροής υπερβαίνει τη ζήτησή της, ή s > h : παράγονται περισσότερα απ' όσα καταναλώνονται εκείνη την περίοδο. Αυτό προκαλεί μια αύξηση του επιπέδου των αποθεμάτων για εκείνη την περίοδο και στο διάγραμμα στα αριστερά, η καμπύλη «παροχής» αποθεμάτων I΄ μετακινείται στα δεξιά ισόποσα.

Στην επόμενη περίοδο, αν τα αποθέματα (I) δεν είχαν φτάσει το I* (κάτι που συμβαίνει στο διάγραμμα), τότε ακόμη θα είχαμε p > p΄ και για άλλη μια φορά s > h. Υπάρχει μια περαιτέρω αύξηση των αποθεμάτων η οποία, κρίνοντας από τις καμπύλες που έχουν σχεδιαστεί, είναι μικρότερη από την αρχική ΔΙ. Καθώς το επίπεδο των αποθεμάτων μεγαλώνει, η ζήτηση για νέα αποθέματα χαλαρώνει, το οποίο εξηγεί την πτώση της τιμής από το p΄΄ περί του - και τελικά στο – p΄, όπου και πάλι s = h.
Αυτή η ιστορία μπορεί να λεχθεί και με την πιο προηγούμενη εικόνα. Όταν τα αποθέματα I αυξάνονται από I΄ σε I* στο παρακάτω σχήμα, έχουμε DI > AI. Αυτό επηρεάζει το p με τέτοιο τρόπο ώστε αυξάνεται το s και μειώνεται το h. Καθώς το DI πέφτει, πέφτει και το p και έτσι όπως και πιο πάνω παίρνουμε τελικά ότι AI = DI και s = h. Αυτό που πρέπει να προσέξουμε εδώ είναι ότι το επίκεντρο αυτών των μοντέλων είναι το η αγορά αποθεμάτων και όχι – όπως στο πρώτο μάθημά σας στα οικονομικά – η ροϊκή αγορά. Φυσική, αυτή η ομαλή αλυσίδα γεγονότων θα μπορούσε να διαταραχθεί αν το p και η μεταβολή του p ως προς το χρόνο t (Δp/Δt) επηρέαζε το DI κατά το λάθος τρόπο, προκαλώντας τη νέα ισορροπία – παρόλο που είναι προσδιορίσιμη – να είναι ανέφικτη.



Σχήμα 2.5

2.6 Συμπεράσματα

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να δώσει σε όλους τους αναγνώστες κάποια εικόνα για το πώς λειτουργεί η παγκόσμια αγορά πετρελαίου. Παρακαλώ επιτρέψτε μου να τονίσω, ωστόσο, ότι – ανεξάρτητα από τα φαινόμενα – δεν περιλαμβάνει ένα μοντέλο της αγοράς αυτής. Περιέχει μέρη ενός μοντέλου. Το πλήρως μοντέλο – που έχει προσδιοριστεί σωστά και είναι έτοιμο να μας πει αυτά που θέλουμε να ξέρουμε – πιθανώς δε θα δημιουργηθεί ποτέ.

Ακόμα, υπάρχουν πολλά άλλα μέρη ή συστατικά που θα ήθελα να αναλάβω. Για παράδειγμα, την ικανότητα των τιμών της αγοράς να διαβιβάσει το είδος των πληροφοριών που λέμε στους μαθητές μας ότι μπορούν να εκπέμπουν. Δείτε την περίπτωση του Cerro Azul Number 4 που βρίσκεται κοντά στο Ταμπίκο, στο Μεξικό. Όταν έφτασε ξαφνικά στις 10 Φεβρουαρίου 1916, μια στήλη πετρελαίου υψώθηκε στα 600 πόδια στον αέρα. Ο αρχικός της ρυθμός παραγωγής ήταν περίπου 260.000 βαρέλια την ημέρα, καθιστώντας την πιο παραγωγική πηγή πετρελαίου στην ιστορία – για λίγο.

Μετά την παραγωγή 60 εκατομμυρίων βαρελιών, ξαφνικά σταμάτησε να παράγει κάτι παρά μόνο θαλασσινό νερό. Το είδος των συστημάτων τιμών τα οποία συζητούμε με ευχαρίστηση στη μικροοικονομική θεωρία, σε οποιοδήποτε επίπεδο, δε μπορεί να αντιμετωπίσει τέτοιου είδους φαινόμενα – εκτός από τα ύψη των Άλπεων της πιο καθαρής θεωρίας, αλλά πολύ μακριά από το πού ζουν οι πραγματικοί άνθρωποι τις ζωές τους. Φυσικά, πουθενά στο πρώτο μάθημα των οικονομικών (ούτε καν κοντά σε αυτό) δεν ήρθαν οι αναγνώστες πρόσωπο με πρόσωπο με κάποια δραστηριότητα υψηλής παραγωγής που να κατέληξε σε «έκρηξη» κι όχι σε «κλαψούρισμα». Στη λογιστική οικονομία λέμε ότι κανένα μεμονωμένο άτομο δεν είναι μεγαλύτερο από την αγορά ολόκληρη, αλλά στην ενεργειακή οικονομία η αγορά πρέπει μερικές φορές να υποχωρήσει μπρος στη γεωλογία.

Σχεδόν κάθε χρόνο μας λένε για νέες πετρελαϊκές επιχειρήσεις που υπόσχονται ακαταμέτρητα πλούτη. Καθώς γράφω αυτές τις γραμμές, ο νέος El-Dorado υποτίθεται πως είναι η κεντρική Ασία. Το 1997 ήταν η περιοχή της Hibernia (= το νησί της Ιρλανδίας), περίπου 310 χιλιόμετρα ανατολικά του St. John, το Newfoundland (στον Καναδά) σε ένα μέρος του Βόρειου Ατλαντικού γνωστό ως «δρομάκι από παγόβουνο» (iceberg ally). 4,2 δισεκατομμύρια ευρώ προορίζονταν αρχικά για το έργο αυτό, δεδομένου ότι φαινομενικά οι δύο δεξαμενές της Hibernia περιέχουν ένα ελάχιστο ποσό των 615 Mb (= millions of barrels, δηλ. εκατομμύρια βαρελιών) πετρελαίου, με ίσως ένα ακόμη δισεκατομμύριο βαρέλια στις άλλες διπλανές περιοχές. Η βαθιά εκμετάλλευση του νερού και οι γεωτρήσεις προφανώς διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο στο διεθνές σκηνικό πετρελαίου του 21^{ου} αιώνα, αν και ένα «τεράστιο παιχνίδι πετρελαίου» έχει εξαγγελθεί στις Ιταλικές Άλπεις από τον τωρινό διευθυντή του ιταλικού πετρελαϊκού κολοσσού ENI, που ιδρύθηκε το 1953 από το θρυλικό Enrico Mattei, του οποίου το στίγμα του οικονομικού εθνικισμού μπορεί να οδήγησε σε μια τιμή που μπήκε στο κεφάλι του από ορισμένους ανταγωνιστές αλλά και αντιτιθέμενους.

Αυτό που αμελείται εδώ είναι ότι έργα του τύπου της Hibernia θα μπορούσαν μόνο να δικαιολογηθούν οικονομικά αν συγκεκριμένα πρόσωπα σε συγκεκριμένες σουίτες για διευθυντές αναμένουν το πετρέλαιο να πάρει μια οριστική ανοδική πορεία στην κλίμακα τιμών στο μη-άμεσο μέλλον, ενώ η συζήτηση για την πλούσια φλέβα πετρελαίου κάπου κάτω από τις διαδρομές σκι στις Άλπεις κατευθύνεται κυρίως στην

Ιταλική αγορά, όπου η αλήθεια ορίζεται μερικές φορές ως κάτι το οποίο δε μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι ψέμα.

Κανείς αναγνώστης δε θα βρει την ιστορία που λέγεται σε αυτό το συμπέρασμα ευχάριστη. Για αυτούς που θέλουν άλλες απόψεις, προτείνω τις σημαντικές μη-τεχνικές συζητήσεις που συχνά δημοσιεύονται στο (τριμηνιαίο) ενημερωτικό δελτίο της IAEE (= International Association for Energy Economics).

2.7 Παράρτημα: Η εγχώρια βιομηχανοποίηση των υδρογονανθράκων

«Η εγχώρια βιομηχανοποίηση των υδρογονανθράκων» είναι μια φράση που χρησιμοποιείται από τον Alvaro Silva, τον αναπληρωτή υπουργό ενέργειας της Βενεζουέλας. Αυτό που εννοεί είναι πως για τη Βενεζουέλα και άλλα κράτη που είναι πλούσια σε υδρογονάνθρακες, μια διευρυμένη πετροχημική (και δυλιστική) βιομηχανία μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση της απασχόλησης, ελκυστικές αποδόσεις για τους επενδυτές και σημαντικά φορολογικά έσοδα. Προχωρώντας λίγο περισσότερο, είναι μια ιδανική βιομηχανία για να χρησιμεύσει ως μια από τις κινητήριες δυνάμεις της οικονομικής ανάπτυξης.

Η Βενεζουέλα είναι μια χώρα με άφθονα αποθέματα φθηνού φυσικού αερίου που μπορεί να χρησιμεύσει ως ενέργεια για τη βιομηχανία πετροχημικών και το ίδιο ισχύει για την επαυξημένη και διευρυμένη ροή των προϊόντων διύλισης που εξετάζονται. Αυτού του είδους η κατάσταση διπλασιάζεται στο μεγαλύτερο μέρος της Μέσης Ανατολής, δεδομένου ότι η Σαουδική Αραβία, τα Ηνωμένα Αραβικά Εμιράτα, το Κατάρ και ειδικά το Ιράν έχουν τα περισσότερα επιβεβαιωμένα αποθέματα φυσικού αερίου απ’ ό,τι ολόκληρη η Νότια και Κεντρική Αμερική, ώστε να συμπεριλάβουμε και την περιοχή της Καραϊβικής. Το Ιράν, φυσικά, αποτελεί έναν πιθανό «γίγαντα» φυσικού αερίου.

Είναι επίσης ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι μια βελτιωμένη τεχνολογία μετατροπής αερίου σε υγρό θα είναι τελικά ικανή να παράγει τεράστιες ποσότητες σχετικά καθαρών υγρών καυσίμων που θα έχουν χαμηλότερη περιεκτικότητα σε θείο και άλλους ρύπους σε σχέση με τα συμβατικά καύσιμα.

Τα βασικά προϊόντα της πετροχημικής βιομηχανίας είναι αρωματικές ενώσεις, η αμμωνία, η μεθανόλη και οι ολεφίνες. Τα προϊόντα που προέρχονται από αυτά είναι οι κύριες ύλες για δραστηριότητες που παράγουν πλαστικά, βαφές, ίνες/κλωστοϋφαντουργικά προϊόντα, φυτοφάρμακα, λιπάσματα, φαρμακευτικά προϊόντα κλπ. Δεν υπάρχει λόγος να κάνει κάποιος μεγαλειώδεις προβλέψεις για έναν τομέα όπου ο ανταγωνισμός είναι τόσο σκληρός και η τεχνολογία τόσο σημαντική, όσο σε αυτήν τη βιομηχανία, αλλά εάν το «συγκριτικό πλεονέκτημα» έχει ακόμα κάποια σημασία, τότε η Μέση Ανατολή βρίσκεται σε πολύ καλή θέση.

Για να ολοκληρώσουμε, πρέπει να πούμε κάτι και για τη διύλιση. Ο John D. Rockefeller – ο ιδρυτής της Standard Oil – ήταν της γνώμης πως η άντληση αργού πετρελαίου ήταν χάσιμο χρόνου: τα πραγματικά χρήματα βρίσκονταν στη διύλιση. Ένα σύνηθες διυλιστήριο λειτουργεί όπως εξής: Το αργό πετρέλαιο αντλείται σε έναν πύργο απόσταξης όπου συμπιέζεται και τότε γίνεται πιο θερμό στο κάτω μέρος απ’ ό,τι στην κορυφή. Τα διάφορα προϊόντα πετρελαίου έχουν διαφορετικά σημεία βρασμού, με αυτά που είναι τα πιο ελαφριά να έχουν το χαμηλότερο σημείο βρασμού. Όταν το αργό πετρέλαιο μπαίνει στον πύργο, τα πιο βαριά μέρη του παραμένουν σε υγρή μορφή και πέφτουν κάτω. Τα υπόλοιπα εξατμίζονται, αλλά τα διάφορα συστατικά προϊόντα επιστρέφουν στην υγρή μορφή καθώς φτάνουν σε χαμηλότερες θερμοκρασίες όπως ανεβαίνουν τη στήλη. Σαν αποτέλεσμα, μπορούν να οδηγηθούν μακριά.

Τα προϊόντα διυλιστηρίου χωρίζονται συχνά σε τρία μέρη ή κλάσματα: σε αερίου και βενζίνης ή ελαφριά προϊόντα, σε μεσαία κλάσματα και σε μαζούτ και εναπομείναντα κλάσματα. Τον περισσότερο καιρό – αλλά όχι όλον – το πιο πολύτιμο άκρο του βαρελιού είναι το πάνω άκρο, το οποίο παρέχει τα λεγόμενα λευκά προϊόντα: διάφορα αέρια για οικιακή χρήση, καύσιμα για την κίνηση αεροσκαφών, καύσιμα για αυτοκίνητα καθώς και ορισμένες πρώτες ύλες για την πετροχημική βιομηχανία. Η νάφθα, η οποία είναι σημαντική για τη βελτίωση της ποιότητας της βενζίνης και είναι επίσης πολύτιμος πετροχημικός συντελεστής, εξάγεται τόσο από τις ελαφριές και μεσαίες σειρές των κλασμάτων αποστάγματος. Τα άλλα μεσαία κλάσματα είναι η κηροζίνη, η παραφίνη και το ελαφρύ πετρέλαιο εσωτερικής καύσης. Η υπόλοιπη παραγωγή του διυλιστηρίου αποτελείται από βαριά λάδια λίπανσης και κατάλοιπα.

Αυτό το μικρό σχόλιο μπορεί να συναφθεί διαβεβαιώνοντας τον αναγνώστη ότι η βιομηχανία διύλισης είναι μια από τις πιο ανταγωνιστικές που υπάρχουν και τα πολλά ανεξάρτητα διυλιστήρια σε ολόκληρο τον κόσμο – δηλ. εκείνα που δεν έχουν εξασφαλισμένη πηγή αργού πετρελαίου – έχουν συνηθίσει να σκέφτονται τους εαυτούς τους σαν ένα είδος που απειλείται με εξαφάνιση. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, τα διυλιστήρια αποτελούν μια σημαντική πηγή αρχικών υλών για τα πετροχημικά, για να συμπεριλάβουμε τα καύσιμο για τη λειτουργία των πετροχημικών εγκαταστάσεων και εξετάζοντας ολόκληρο το πακέτο, γίνεται ακόμη πιο προφανές ότι το παγκόσμιο κέντρο της βαρύτητας των εκβιομηχανισμένων υδρογονανθράκων θα μπορούσε ενδεχομένως να βρίσκεται στον Κόλπο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ένα καύσιμο του μέλλοντος: Το φυσικό αέριο

Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει μια σύντομη, ενημερωμένη ανάλυση της παγκόσμιας αγοράς φυσικού αερίου. Μαζί με ένα σχεδιάγραμμα για την προσφορά και ζήτηση των τιμών, θα γίνει λίγη μελέτη για την συζήτηση για την απορρύθμιση-ιδιωτικοποίηση. Το πιο εντυπωσιακό πράγμα για το θέμα αυτό είναι ότι δεν ασχολείται με την απορρύθμιση ως τέτοια, αλλά με την επαναρύθμιση: την αλλαγή των κανόνων. Ομοίως, το ζήτημα δεν είναι η ιδιωτικοποίηση, δεδομένου ότι οι περισσότερες εταιρείες φυσικού αερίου είναι ήδη σε χέρια ιδιωτών, αλλά ο «θρυμματισμός».

Δυστυχώς, είναι σχεδόν αδύνατο να ανταποκριθούμε στις πολλές πτυχές του φυσικού αερίου σε ένα μόνο κεφάλαιο, ιδιαίτερα όταν βλέπουμε ότι το φυσικό αέριο είναι η ταχύτερη αναπτυσσόμενη κύρια πηγή ενέργειας και αυτό συμβαίνει από το 1995. Αλλά απ' την άλλη πλευρά, η αγορά του φυσικού αερίου μπορεί να μην απαιτήσει το ίδιο είδος προσοχής όπως η αγορά πετρελαίου, όπου η ταχεία κλιμάκωση των τιμών θα μπορούσε επίσης να έχει εξαιρετικά μεγάλες μακροοικονομικές συνέπειες. Η εκτιμώμενη συνολική κατανάλωση ήταν περίπου 80 Tcf (= trillion cubic feet, δηλ. τρισεκατομμύρια κυβικά πόδια) το 1999, το οποίο σημαίνει ένα 8% ποσοστό συνολικής ανάπτυξης κατά τα 3 προηγούμενα χρόνια. Αλλά με την κατανάλωση να αυξάνεται για όλα τα καύσιμα, το μερίδιο στην παγκόσμια αγορά φυσικού αερίου θα παραμείνει στην περιοχή του 23%.

3.1 Γεωλογία, μονάδες και λίγα οικονομικά

Το φυσικό αέριο βρίσκεται συνήθως σε περιβάλλον όμοιο με το αργό πετρέλαιο και για ένα διάστημα το αποκαλούσαν συχνά αέριο πετρέλαιο. Οι υδρογονάνθρακες του φυσικού αερίου είναι ελαφρύτεροι και λιγότερο πολύπλοκοι από εκείνους του αργού πετρελαίου και το φυσικό αέριο περιστασιακά περιέχει νερό και ουσίες που δεν είναι υδρογονάνθρακες. Όπως το πετρέλαιο, το φυσικό αέριο βρίσκεται μέσα σε πορώδη μέρη σε πετρώματα επικαλυμμένα με νερό – ως επί το πλείστον ιζηματογενή πετρώματα που χαρακτηρίζονται ως βιολογικοί σχιστόλιθοι. Αυτός ο σχιστόλιθος ξεκίνησε ως υπόλειμμα προϊστορικών φυτών και ζώων και «μετατράπηκε» σε πετρέλαιο και φυσικό αέριο εξαιτίας της θερμότητας, της πίεσης της γης που ενεργεί εδώ και εκατομμύρια χρόνια και πολλών χημικών αντιδράσεων.

Μερικά κοιτάσματα υδρογονανθράκων περιέχουν πετρέλαιο αλλά όχι φυσικό αέριο, ενώ κάποια άλλα – όπου η μετατροπή στην οποία μιλήσαμε πιο πάνω θα συνεχιστεί μέχρι να μειωθούν οι υδρογονάνθρακες από υγρό πετρέλαιο σε μόρια αερίου – περιέχουν φυσικό αέριο αλλά όχι πετρέλαιο. Αυτή η τελευταία κατηγορία λέγεται non-associated gas. Μια κοινή ρύθμιση είναι η παρουσία αερίου και πετρελαίου στο ίδιο κοίτασμα και σε αυτήν την κατάσταση το αέριο λέγεται associated gas. Δεδομένου ότι το non-associated gas μπορεί να ήρθε σε επαφή με το νερό, αλλά όχι το πετρέλαιο, η παραγωγή του είναι διακριτική: μπορεί να παραμείνει μέσα (δηλ. να μείνει ανεκμετάλλευτο) μέχρι οι συνθήκες της αγοράς να εγγυηθούν την εκμετάλλευσή του. Κατ' αντιδιαστολή, το associated gas δεν είναι διακριτικό γιατί γίνεται διαθέσιμο όποτε παράγεται και το associated αργό πετρέλαιο και έτσι αν δεν εξαχθεί ώστε να πωληθεί, μπορεί να φλεχθεί (δηλ. να καεί στον αέρα) ή να εγχυθεί εκ νέου, οπότε συμβάλλει στη διατήρηση της πίεσης στην αποθήκη. Η Νιγηρία κάποτε ανέφλεξε 1,5 Gcf/d (= billions cubic feet), ίσο με το 3% της ζήτησης της Αμερικής αυτήν τη στιγμή.

Το 1983 περίπου 6% της παγκόσμιας παραγωγής φυσικού αερίου αναφλέχθηκε, το οποίο ήταν περίπου 106 δισεκατομμύρια κυβικά μέτρα (= 106 Gcm) και αυτό ήταν πιθανώς το μεγαλύτερο ποσοστό αερίου που απορρίπτεται με αυτόν τον τρόπο. Οι περισσότερες από τις καύσεις έγιναν στη Μέση Ανατολή και την Αφρική, όπου βρίσκεται και η μεγαλύτερη ποσότητα associated gas. Αλλά από εκείνη την περίοδο έχουν κατασκευαστεί μεγάλα συστήματα αιχμαλώτισης του φυσικού αερίου για να συλλέγουν αυτό το associated gas και οι καύσεις έχουν μειωθεί μέχρι περίπου το μισό του παραπάνω ποσοστού.

Μια μεγάλη πηγή ζημιών μπορεί να είναι οι μεταποιητικές δραστηριότητες που σχετίζονται με την υγροποίηση. Ομοίως, η επανέγχυση έρχεται σε ποσοστό περίπου 5% της ακαθάριστης παραγωγής, αλλά εδώ θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι η επανέγχυση συχνά επιτρέπει στους παραγωγούς φυσικού αερίου να καθυστερήσουν την απόφασή τους για τη χρήση σχετικού αερίου, δεδομένου ότι μέχρι το 80% αυτού του επανεγχυμένου αερίου μπορεί να ανακτηθεί μετά τη διακοπή της παραγωγής πετρελαίου, ανάλογα με τη φύση των κοιτασμάτων. Πιστεύεται ότι το φυσικό αέριο μπορεί να βρεθεί σε πολύ μεγαλύτερα βάθη απ’ ό,τι το πετρέλαιο και αναπτύσσονται νέες τεχνολογίες γεωτρήσεων που θα επιτρέψουν μια λεπτομερή εξέταση κάτω από τα 30.000 πόδια. Έχει προταθεί ότι από τη στιγμή που η εξερεύνηση είναι πλήρως σε εξέλιξη σε αυτά τα βάθη, τα παγκόσμια αποθέματα φυσικού αερίου μπορεί να δείξουν μια αρκετά μεγάλη αύξηση. Μια παρόμοια παρατήρηση ισχύει και για το υπεράκτιο φυσικό αέριο, ειδικά σε πολύ βαθιά νερά.

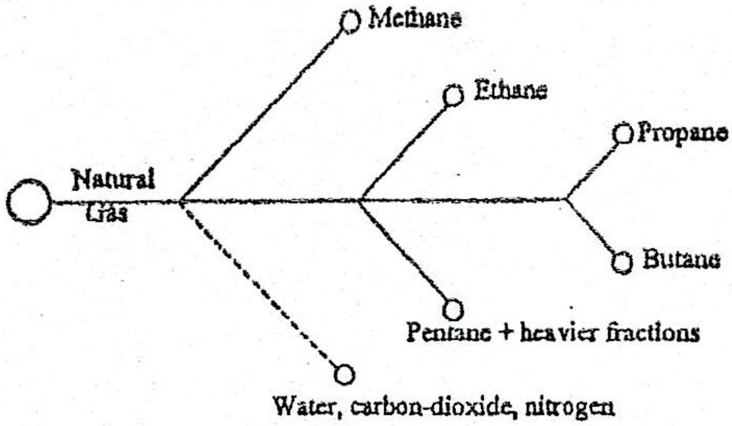
Πριν συνεχίσετε, πρέπει να ειπωθούν μερικά πράγματα για τις μονάδες ή τις ισοδυναμίες. Θερμικά, με όρους τιμών θερμότητας, 1.000 κυβικά πόδια (= 1.000 cf) φυσικού αερίου είναι ισοδύναμο με 0,178 βαρέλια αργού πετρελαίου κατά μέσο όρο. Επιπλέον, 1.000 κυβικά πόδια είναι ίσα με 28,3 κυβικά μέτρα (28,3 cm) ή 1 κυβικό μέτρο = 35 κυβικά πόδια. Έτσι 1.000 κυβικά μέτρα φυσικού αερίου είναι περίπου το ισοδύναμο των (1000/28,3) x 0,178 = 6,3 βαρελιών αργού πετρελαίου. Είναι επίσης χρήσιμο να γνωρίζετε ότι ένα κυβικό πόδι φυσικού αερίου ένα μια μέση θερμαντική ικανότητα των 1.035 Btu (= British Thermal Unit), το οποίο με τη σειρά του είναι ίσο με 1,055 εκατομμύρια joules. Συνήθως εισαγάγουμε μια προσέγγιση εδώ, ωστόσο, με τα 1.000 κυβικά πόδια φυσικού αερίου να αντιστοιχούν σε θερμαντική ικανότητα 1 εκατομμυρίου Btu. (Προσέξτε την προσέγγιση εδώ: 1 cf = 1.000 Btu αντί για το σωστό 1 cf = 1.035 Btu.)

Η τιμή συχνά αναφέρεται με όρους εκατομμυρίων Btu – για παράδειγμα, 2,50 ευρώ/Mbtu. Το 1979-80 αυτή ήταν η μέση τιμή του φυσικού αερίου στις Ηνωμένες Πολιτείες, η οποία όσο αφορά το πετρέλαιο είναι ισοδύναμη με 14,5 ευρώ/βαρέλι και δεδομένου ότι κατά μέση τιμή το πετρέλαιο είχε μια τιμή 30 ευρώ/βαρέλι, καταλαβαίνουμε ότι το φυσικό αέριο ήταν πολύ δημοφιλές μέσο. Το 1979, λίγο πριν τη δεύτερη κρίση στην τιμή του πετρελαίου, η Φιλανδία αγόρασε 993 Mcm (= 993 millions cubic meters, δηλ. 993 εκατομμύρια κυβικά μέτρα) φυσικού αερίου από την FSU για 61 εκατομμύρια ευρώ. Αλλά το 1980 οι εισαγωγές μειώθηκαν στα 925 Mcm, αν και η συνολική τιμή ήταν 111 εκατομμύρια (= 111M) ευρώ. Οι Φιλανδοί δεν ήταν ευχαριστημένοι με αυτήν την αύξηση της τιμής, αν και σε σχέση με την παγκόσμια τιμή ενέργειας δεν ήταν και τόσο άσχημη. 925 Mcm για 111 M δίνει μια τιμή των 0,12 ευρώ/m^3 φυσικού αερίου. Πολλαπλασιάζοντας αυτό με το 28,3 (m^3/χιλιάδες ft^3) δίνει μια τιμή 3,396 ευρώ/χίλια κυβικά πόδια ή, περίπου, 3,396 ευρώ/Mbtu.

Δεδομένου ότι 1.000 κυβικά πόδια φυσικού αερίου είναι ισοδύναμα με 0,178 βαρέλια πετρελαίου, κατά μέσο όρο, η ισοδύναμη τιμή πετρελαίου τότε είναι 3,396/0,178 = 19 ευρώ/βαρέλι. Αυτό είναι μεγαλύτερο από την προηγούμενη τιμή, αλλά εκείνη τη στιγμή ήταν ακόμη κάτω από τη θερμική ισοτιμία (με το πετρέλαιο).

Τώρα μπορούμε να επιστρέψουμε στο κύριο θέμα μας. Το συμβατικό non-associated gas από μία πηγή αποτελείται κυρίως από μεθάνιο, κατά μέσο όρο σε ποσοστό 85% περίπου, από άλλους υδρογονάνθρακες γνωστούς ως τα υγρά κλάσματα του φυσικού αερίου (που παράγονται μαζί με το φυσικό αέριο, αλλά υγροποιούνται υπό κανονικές συνθήκες), από νερό, διοξείδιο του άνθρακα, άζωτο και ορισμένους άλλους μη-υδρογονάνθρακες. Από την άλλη πλευρά, το associated gas μπορεί να περιέχει ανάμεσα σε 20 και 50% απαέρια του φυσικού αερίου, εκτός από μεθάνιο. Το μεθάνιο μπορεί να θεωρηθεί ως καθαρό φυσικό αέριο, ενώ τα υπόλοιπα απαέρια του φυσικού αερίου είναι τα πλέον κατάλληλα για τον εφοδιασμό των πετροχημικών βιομηχανιών και ως καύσιμα και ως πρώτες ύλες στις διαδικασίες διύλισης. Η παρακάτω εικόνα δείχνει τα συστατικά του φυσικού αερίου πολύ καλά.

Πολλοί λάτρεις της ενέργειας εργάζονται τώρα υπερωρίες με τις κρυστάλλινες σφαίρες τους και άλλο εξοπλισμό σε μια προσπάθεια να προσδιορίσουν ακριβώς τι εκπλήξεις μας περιμένουν στον 21^{o} αιώνα. Από τη θετική πλευρά, η ιδέα για μια κοινωνία που θα ανακυκλώνει φαίνεται πως έχει επικρατήσει. Στην εικόνα παρακάτω μπορούμε να δούμε ότι όταν μιλάμε για το φυσικό αέριο, μιλάμε κυρίως για το μεθάνιο. Έτσι, μπορούμε να ζητήσουμε άμεσα αν δεν υπάρχουν χρησιμοποιήσιμες πηγές μεθανίου εκτός από εκείνες που φαίνονται στο διάγραμμα. Η Business Week (Ιούλιος 1999) πιστεύει ότι ένα μεγάλο μέρος της ενέργειας που χρησιμοποιήθηκε στο σπίτι θα δημιουργηθεί μέσα στο σπίτι. Οι ιδιοκτήτες σπιτιών, για παράδειγμα, θα μπορούν να ανακυκλώνουν τα σκουπίδια, τα ανθρώπινα απόβλητα, τα υπολείμματα για να αποκτήσουν φυσικό αέριο πλούσιο σε μεθάνιο, το οποίο θα χρησιμοποιείται σαν ενέργεια στην παραγωγή ηλεκτρισμού και θερμότητας. Και όχι μόνο αυτό, αλλά κάποια από αυτήν την ηλεκτρική ενέργεια που θα δημιουργείται στα σπίτια, θα μπορεί να πωληθεί σε επιχειρήσεις.



	Liquified at
Butane (normal)	-0.5°C
Butane (Iso)	-12.0°C
Propane	- 42.0°C
Ethane	- 88.0°C
Methane	- 161.0°C

Definitions
NGL: Natural gas liquids
LPG: Liquified petroleum
LNG: Liquified natural gas
SNG: Synthetic (substitute) natural gas

Note: Natural gas = methane + NGL + (water, nitrogen, CO_2).

NGL = ethane + LPG + (pentane and heavier fractions).

Lpg = propane + butane + mixtures of propane and butane

Σχήμα 3.1

Πριν το στεγνό φυσικό αέριο διανεμηθεί στους καταναλωτές, αφαιρούνται τα ανεπιθύμητα συστατικά και γίνεται μια προσπάθεια να αποκτηθεί μια ομοιογενής ποιότητα με τη μείωση το ποσοστό των υδρογονανθράκων. Τα υγρά κλάσματα του φυσικού αερίου διαχωρίζονται και όπου υπάρχει αγορά πωλούνται τα πιο πολύτιμα συστατικά – βουτάνιο και προπάνιο (δηλ. LPG = Liquified Petroleum Gas) – συνήθως υπό την ονομασία Gasol ή γκάζι. Σε εκείνες τις χώρες όπου η διαθεσιμότητα του φυσικού αερίου είναι μεγαλύτερη από την ικανότητα απορρόφησης των τοπικών αγορών και όπου δεν είναι δυνατή η μεταφορά του φυσικού αερίου σε ξένες αγορές στην αρχική του μορφή, λίγη απλή περαιτέρω επεξεργασία του φυσικού αερίου μπορεί να είναι μια πολύτιμη εμπορική δραστηριότητα.

Αρχικά η βιομηχανία φυσικού αερίου βασίστηκε στο φωταέριο (ή βιομηχανικά παραγόμενο φυσικό αέριο) το οποίο δεν είναι φυσικό αέριο αλλά ένα αέριο που κατασκευάζεται από καρβονισμό άνθρακα. Αυτό το καύσιμο εισήχθη για πρώτη φορά στις μεγάλες πόλεις του κόσμου το 1812 (στην Αγγλία) και ακόμη χρησιμοποιείται στη Γερμανική Ruhr. Οι Ηνωμένες Πολιτείες χρησιμοποίησαν πρώτες το φωταέριο το 1816 και 5 χρόνια αργότερα καταγράφτηκε η πρώτη χρήση φυσικού αερίου στη Fredonia της Νέας Υόρκης. Ο πρώτος αγωγός για μεγάλες αποστάσεις που ήταν όλως συγκολλητός (από 14 έως 18 ίντσες και 217 μίλια μακρύς) τέθηκε σε λειτουργία μεταξύ της Λουϊζιάνας και του Τέξας το 1925 και αυτό μπορεί πιθανώς να ληφθεί ως η απαρχή της σύγχρονης βιομηχανίας φυσικού αερίου. Ωστόσο ο Carr (1978) θεωρεί ότι «η εποχή του φυσικού αερίου» υπήρξε περίπου το 1935, όταν ένας λεπτότοιχος σωλήνας μπορούσε να συγκολληθεί επιτυχώς ώστε να δημιουργήσει μακρύς αγωγούς ικανοποιητικής δύναμης για να μεταφέρουν το φυσικό αέριο κάτω από πολύ υψηλές πιέσεις.

Ο πιο «φυσικός» τρόπος μετακίνησης του φυσικού αερίου είναι μέσω αγωγών, τουλάχιστον μέχρι αποστάσεις περίπου 8.000 χιλιομέτρων. Στη Βόρεια Αμερική και τη Δυτική Ευρώπη, οι αγωγοί μπορούν να διαμοιράζουν το φυσικό αέριο σχεδόν με την ίδια αποτελεσματικότητα και ευελιξία όπως τα εθνικά και τοπικά δίκτυα που διανέμουν την ηλεκτρική ενέργεια. Στις ΗΠΑ αυτό μερικές φορές οδηγεί σε έντονο ανταγωνισμό μεταξύ φυσικού αερίου και ηλεκτρισμού σε πολλές αγορές με τελικούς καταναλωτές. Όπως και στον ηλεκτρισμό, το φυσικό αέριο μπορεί επίσης να διανέμεται συνεχώς και να παραδίδεται σε ακριβείς τιμές στα νοικοκυριά και τις βιομηχανίες.

Οι αγωγοί φυσικού αερίου δεν είναι φθηνοί, ωστόσο. Στον 21^{ο} αιώνα οι χώρες της Μαύρης Θάλασσας (π.χ. η Τουρκία και η Ουκρανία) φαίνεται πως προορίζονται για να λειτουργήσουν ως γέφυρα ανάμεσα στα τεράστια αποθέματα φυσικού αερίου στη Μέση Ανατολή (συμπεριλαμβάνεται και το Τουρκμενιστάν) και την τεράστια Ευρωπαϊκή αγορά. Ένας προτεινόμενος αγωγός είναι από μια κοινοπραξία μεταξύ της Gazprom της Ρωσίας και της ENI της Ιταλίας, που ονομάστηκε Blue Stream και που θα είναι ο πιο «βαθύς» αγωγός του κόσμου: όπως προβλέφθηκε, θα βυθιζόταν σε βάθος 2.150 μέτρων στη Μαύρη Θάλασσα. (Φυσικά, μπορεί να αποδειχθεί ένα άπιαστο όνειρο.) Το αναμενόμενο συνολικό κόστος από τέτοιας φύσης έργο έχει τοποθετηθεί στα 4 δισεκατομμύρια ευρώ.

Μια άλλη επιλογή είναι να κρυώνουμε φυσικό αέριο στους -160 βαθμούς Κελσίου με κρυογονική διαδικασία ψύξης. Αυτό μειώνει τον όγκο του φυσικού αερίου με συντελεστή 600 και από το εργοστάσιο υγροποίησης το υγροποιημένο φυσικό αέριο (= LNG, δηλ. Liquefied natural gas) μεταβιβάζεται σε κρυογονικό μεταφορέα και μεταφέρεται στη χώρα που θα το καταναλώσει, όπου και γίνεται και πάλι αέριο. Μερικά από αυτά τα πλοία μπορούν να κουβαλούν ποσότητες φυσικού αερίου ισοδύναμες με 450.000 βαρέλια πετρελαίου. Μερικές φορές ισχυρίζονται κάποιοι ότι το εμπόριο LNG είναι πιο ευέλικτο από το φυσικό αέριο που μεταφέρεται μέσω αγωγών, επειδή οι μεταφορείς LNG μπορούν να αλλάξουν δρομολόγιο, ενώ οι αγωγοί είναι σταθεροί. Κατά την εξέταση των μακροπρόθεσμων συμβάσεων με βάση τις οποίες πωλείται το περισσότερο φυσικό αέριο, μαζί με τα ολοκληρωμένα δίκτυα αγορών που μπορούν να βρεθούν σε Ευρώπη και Βόρεια Αμερική, αμφιβάλλω αν ο ισχυρισμός αυτός είναι έγκυρος. Ένα πράγμα που πρέπει να γίνει κατανοητό είναι ότι η μεταφορά φυσικού αερίου οποιασδήποτε μορφής είναι πιο ακριβή από τη μεταφορά μιας ισοδύναμης ποσότητας πετρελαίου (μετρημένου σε θερμαντική αξία) από έναν συγκρίσιμο μεταφορέα. Κάτι άλλο που αξίζει να κρατηθεί κατά νου είναι ότι η τιμή του LNG σε ευρώ/Mbtu είναι σχεδόν πάντα αισθητά υψηλότερη από το φυσικό αέριο των αγωγών.

Η παραγωγή φυσικού αερίου λαμβάνει χώρα τόσο εντός όσο και υπεράκτια. Η υπεράκτια παραγωγή έχει αυξηθεί ραγδαία από το 1980 και μέχρι το τέλος του 20^{ου} αιώνα ανήλθε σε τουλάχιστον 20% όλης της εμπορικής παραγωγής. Οι Ηνωμένες Πολιτείες αντιπροσωπεύουν σχεδόν το 50% της παγκόσμιας υπεράκτιας παραγωγής και περίπου το 20% των γνωστών αποθεμάτων φυσικού αερίου στις ΗΠΑ είναι υπεράκτια. Η Δυτική Ευρώπη επίσης έχει μετρήσιμη υπεράκτια παραγωγή, κυρίως στη Νορβηγική και την Αγγλική Βόρεια Θάλασσα. Πιστεύεται ότι τα υπεράκτια Αρκτικά νερά της Νορβηγίας και της FSU (= Friends Stand United, δηλ. οι άνθρωποι που είναι γύρω από τις ΗΠΑ) περιέχουν μεγάλες ποσότητες φυσικού αερίου, αλλά αυτό το φυσικό αέριο θα είναι σίγουρα πολύ δαπανηρό. Επίσης, φαίνεται πολύ απίθανο πως οι ιδιωτικές εταιρείες θα είναι πρόθυμες να αναζητήσουν και παράγουν αυτό το φυσικό αέριο εκτός κι μπορούσαν να «αντισταθμίσουν» την τιμή της αβεβαιότητάς τους με μακροχρόνια "take-or-pay" συμβόλαια. Υπάρχουν πάρα πολλά να χάσουν και στην παραγωγή και στην πλευρά του μάρκετινγκ ώστε να είναι πρόθυμοι να εναποθέσουν τις τύχες τους σε βραχυπρόθεσμες συμφωνίες. Έχω την ίδια άποψη για την αγορά ηλεκτρικής ενέργειας, όπου ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό προσφάτως παραγγελμένων σταθμών παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας υποτίθεται ότι υπάγεται στην κατηγορία της λεγόμενης «εμπορικής μονάδας», των οποίων ολόκληρη η παραγωγή προορίζεται για αγορά τοις μετρητοίς. Εκ των υστέρων, ωστόσο, μπορεί να επικρατήσει μια εντελώς διαφορετική ρύθμιση.

Αυτό θα μπορούσε να είναι ένα καλό σημείο για να πω κάτι σχετικά με τη μεγάλη και εξαιρετικά σημαντική πετροχημική βιομηχανία. Περίπου τα δύο τρία της ενέργειας που καταναλώνονται σε αυτήν τη βιομηχανία είναι στη μορφή πρώτων υλών για τα πολλά προϊόντα που παράγει, ενώ το άλλο ένα τρίτο προμηθεύει τις άμεσες ανάγκες για ενέργεια που χρειάζονται για διάφορες διεργασίες. Η τελευταία πρόταση εξηγεί το λόγο που οι πετροχημικές βιομηχανίες που κατασκευάζονται στη Μέση Ανατολή τα πηγαίνουν τόσο καλά: πολύ χαμηλό κόστος φυσικού αερίου, και ίσως και λίγο πετρέλαιο, παρέχουν τα καύσιμα που χρειάζονται για να κινηθούν οι παραγωγικές τους δραστηριότητες, ενώ τα διυλισμένα προϊόντα (όπως η νάφθα και η αμμωνία) κατασκευάζονται από πετρέλαιο χαμηλού κόστους και φυσικό αέριο που λειτουργούν ως πρώτες ύλες.

Μεταξύ των προϊόντων που ενδιαφέρουν εδώ είναι πράγματα όπως τα πλαστικά, νάιλον, παρασιτοκτόνα, φαρμακευτικά προϊόντα και απολυμαντικά. Η χρήση φυσικού αερίου ως πρώτης ύλης στην παραγωγή αμμωνίας είναι σημαντικής σημασίας, δεδομένου ότι η αμμωνία αποτελεί βασικό συστατικό των αζωτούχων λιπασμάτων. Αν η εγχώρια παραγωγή αμμωνίας είναι αρκετά μεγάλη ώστε να συνειδητοποιηθούν οι σημαντικές κλίμακες οικονομίας, οι αναπτυσσόμενες χώρες με αποθέματα φυσικού αερίου θα μπορούσαν να παράγουν μεγάλες ποσότητες λιπασμάτων κι έτσι να αποφύγουν τις δαπανηρές εισαγωγές. Δυστυχώς, πολύ λίγα άτομα φαίνεται να έχουν συνειδητοποιήσει τη σημασία των γεωργικών χημικών ουσιών και τι θα μπορούσε να σημαίνει μια μεγάλη αύξηση στις τιμές του για το βιοτικό επίπεδο των πολλών εκατοντάδων εκατομμυρίων ανθρώπων – ειδικά του Τρίτου Κόσμου.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μια σημαντική αύξηση στην τιμή του πετρελαίου και/ή του φυσικού αερίου θα αυξήσει το κόστος των πρώτων υλών στα διυλιστήρια και συνεπώς να μειώσει την ανταγωνιστικότητα των διυλιστηρίων (και των πετροχημικών εγκαταστάσεων). Νωρίτερα στη δεκαετία του 1980 η Ταϊβανέζικη πετροχημική βιομηχανία βρισκόταν σε σοβαρές δυσχέρειες εξαιτίας της αύξησης των τιμών την ενέργειας. Όταν αυτές οι τιμές έπεσαν, οι διαχειριστές της βιομηχανίας ανάσαναν με ανακούφιση, αλλά ενέτειναν και το ενδιαφέρον τους για πυρηνική ενέργεια και σε κάποιο βαθμό και για άνθρακα, δεδομένου ότι άνθρακας θεωρείται ως το ορυκτό καύσιμο που θα μπορούσε να είναι το λιγότερο δαπανηρό σε βάθος χρόνου. Η πυρηνική ενέργεια θα χρησιμοποιούνταν για συστατικό μη πρώτης ύλης στις εισαγωγές ενέργειας, όπως θα μπορούσε να γίνει με τον άνθρακα, αν και αναγνωρίστηκε ότι θα μπορούσε τελικά να έρθει μια μέρα όπου τα προϊόντα εφοδιασμού που τώρα κατασκευάζονται από πετρέλαιο και φυσικό αέριο, θα κατασκευάζονταν από άνθρακα.

Ο μέσος ρυθμός αύξησης του παγκόσμιου εμπορίου που αφορά το φυσικό αέριο είχε μια ελαφριά άνοδο του 4% κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1990. Η μεγαλύτερη αύξηση ήταν στο εμπόριο LNG (= Liquefied natural gas, υγροποιημένο φυσικό αέριο), αν και ο μεγαλύτερος εξαγωγέας ήταν η FSU, οι εξαγωγές της οποίας μεταφέρονται αποκλειστικά στους μεγάλων διαμέτρων αγωγούς της. Αυτοί οι αγωγοί, παρεμπιπτόντως, θα έπρεπε να είναι ακόμα μεγαλύτεροι και θα ήταν αν δεν υπήρχε η προσπάθεια της κυβέρνησης του πρώην προέδρου των ΗΠΑ Ronald Reagan να μποϊκοτάρει το φυσικό αέριο από την FSU.

Ο μεγαλύτερος εξαγωγέας LNG είναι η Ινδονησία, με το μεγαλύτερο μέρος των εξαγωγών της να διοχετεύεται στην Ιαπωνία και τη Νότια Κορέα. Άλλοι μεγάλοι εξαγωγείς LNG είναι η Μαλαισία, το Μπρουνέι, η Αυστραλία, το Αμπού Ντάμπι και η Λιβύη. Οι Ηνωμένες Πολιτείες είναι αρκετά μεγάλος εξαγωγέας φυσικού αερίου, ιδιαίτερα με το φυσικό αέριο που οδηγείται μέσω αγωγών μέχρι τον Καναδά και το Μεξικό και με το LNG να εξάγεται μέχρι την Ιαπωνία. Αλλά ταυτόχρονα αυτή η χώρα είναι και πολύ μεγάλος αγοραστής και φυσικού αερίου αλλά και LNG.

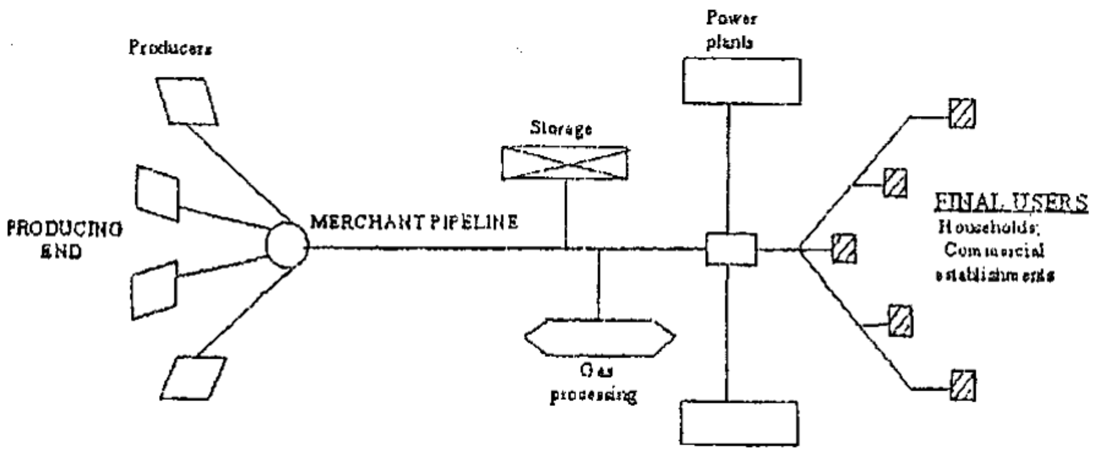
Ένα από τα πιο εντυπωσιακά πράγματα για τη βιομηχανία φυσικού αερίου είναι ότι έχει εξαιρετικά πολύτιμα μαθήματα για τη διδασκαλία τόση τους ενεργειακούς όσο και τους αναπτυξιακούς οικονομολόγους. Το ευρύτερο άνοιγμα των συνόρων υποτίθεται πως θα ήταν κάτι το καλό για όλους, αλλά άλλη εικόνα προκύπτει όταν εξετάζουμε το εμπόριο φυσικού αερίου ανάμεσα σε ΗΠΑ και Καναδά. . Οι τιμές φυσικού αερίου στον Καναδά έχουν γίνει 30-50% χαμηλότερες από εκείνες των ΗΠΑ, λόγω του έντονου ανταγωνισμού στην αγορά του Καναδά. Αλλά οι νέοι αγωγοί πρόσθεσαν 1,1 δισεκατομμύριο κυβικά πόδια (= 1,1 Gcf) – ή περίπου 15% - στη δυνατότητα εξαγωγών του Καναδά καθώς έφτανε το τέλος του 20ου αιώνα, το οποίο αύξησε τις τιμές μετρητοίς στον Καναδά κατά περίπου 30-40% σε ένα χρόνο και μείωσε την παραδοσιακή διαφορά στις τιμές φυσικού αερίου ανάμεσα σε Καναδά και ΗΠΑ κατά περίπου 75%. Τα μακροπρόθεσμα συμβόλαια για το χειμώνα του 2000 πωλούσαν σε κάποιες περιπτώσει για 2,00 ευρώ το κάθε Mbtu, το οποίο οδήγησε σε αύξηση της παραγωγής φυσικού αερίου, αλλά επίσης αύξησε τα αποθέματα για μελλοντικές παραδόσεις. Όπως και με το μοντέλο εκροής αποθεμάτων του προηγούμενου κεφαλαίου, οι αυξημένες τιμές στον Καναδά ήταν κάτι το αναπόφευκτο.

Από την άλλη πλευρά, αν και κατέχει μόλις το 0,3% των παγκοσμίων επιβεβαιωμένων αποθεμάτων σε φυσικό αέριο, η μικρή Καραϊβική πολιτεία του Τρινιδάδ και Τομπάγκο φαίνεται έτοιμη να γίνει σημαντικός παίκτης στην παγκόσμια αγορά LNG (υγροποιημένου φυσικού αερίου). Η κυβέρνηση αυτής της χώρας αποφάσισε τελικά να αξιοποιήσει στο έπακρο τα αποθέματα ενέργειας που έχει και έχει υπογράψει μακροπρόθεσμα «take-or-pay» συμβόλαια μέχρι 20 χρόνων για την επέκταση της παραγωγής των εγκαταστάσεών της LNG. Υπάρχουν επίσης σχέδια για την αύξηση της ήδη σημαντικής παραγωγής αζωτούχων λιπασμάτων και μεθανόλης και ίσως ξεκινήσει και η κατασκευή ενός συγκροτήματος αιθυλενίου. Αυτές οι δραστηριότητες που εντείνουν το κεφάλαιο και βασίζονται στην ενέργεια, σε συνδυασμό με εκτεταμένο τουρισμό, είναι σε θέση να αναζωογονήσουν την οικονομία του Τρινιδάδ και Τομπάγκο.

Τελικά, μια παρατήρηση για τις τιμές του φυσικού αερίου. Στην Ευρωπαϊκή Ένωση, κατά το πρώτο μέρος της δεκαετίας του 1990, η τιμή του LNG ήταν κατά μέσο όρο 2,5 ευρώ ανά Mbtu, συγκρινόμενο με τα 1,75 ευρώ ανά Mbtu στις ΗΠΑ. Χονδρικά, κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1985-95 η τιμή του LNG ήταν ένα ευρώ περισσότερη ανά Mbtu απ' ό,τι του φυσικού αερίου.

3.2 Οικονομική Θεωρία και Φυσικό Αέριο: Μια εισαγωγή

Αυτό η πολύ μεγάλη ενότητα θα ασχοληθεί με 3 πτυχές της οικονομίας του φυσικού αερίου: παραγωγή, μεταφορά και αποθήκευση. Κάποια ιδέα από αυτήν την πολυπλοκότητα μπορεί να αποκτηθεί από την παρακάτω εικόνα.



Σχήμα 3.2

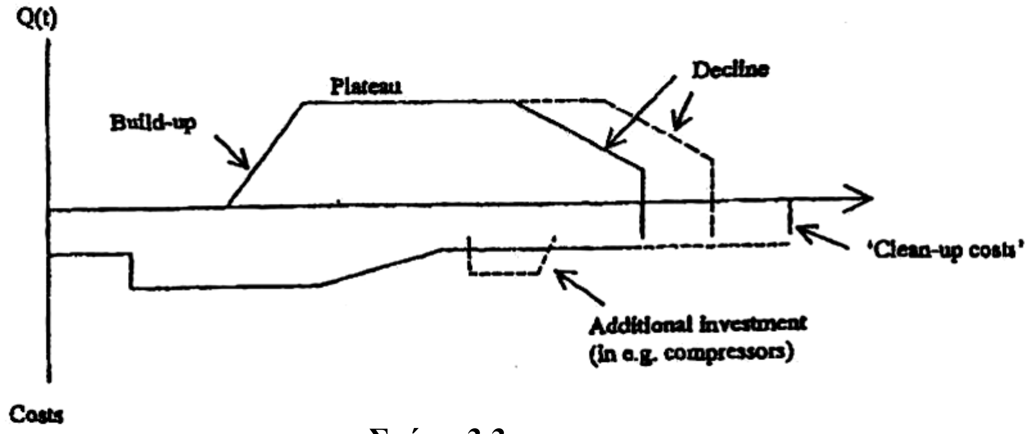
Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες πτυχές της σύγχρονης ιστορίας φυσικού αερίου είναι άμορφη φύση της διαδικασίας ανακάλυψης φυσικού αερίου, που ξεκινά με την ανακάλυψη 5 τεραστίων περιοχών τη δεκαετία του 1920 στο Τέξας και το Νέο Μεξικό. Η επόμενη σπουδαία περίοδος ανακαλύψεων ξεκίνησε τη δεκαετία του 1950 και κορυφώθηκε τη δεκαετία του 1970. Εκτός των πολλών ευρημάτων που ξεσκέπασε ήταν και το χωράφι του Hassi R’ Mel στην Αλγερία, το οποίο έγινε τόσο σημαντικό στην Ευρώπη εξαιτίας ενός υποθαλάσσιου αγωγού από τις ακτές της Βόρειας Αφρικής μέχρι την Ιταλία. Υπήρχαν επίσης εξαιρετικά πλούσιες επιτυχίες στη Λιβύη, στο Αμπού Ντάμπι, στη Σαουδική Αραβία, στη Νιγηρία και στη Γαλλία (στο πεδίο Lacq).

Για την Ευρώπη ωστόσο, το μεγαλύτερο εύρημα ήταν το πεδίο Slochteren στην Επαρχία Groningen στην Ολλανδία το 1959. Αυτό βοήθησε στην αναζωογόνηση που οδήγησε στις εξαιρετικά πολύτιμες ανακαλύψεις στη Βόρεια Θάλασσα, αρχής γενομένης από το 1965 με το West Sole στην αγγλική Βόρεια Θάλασσα και τελικά προχωρώντας μέχρι το πεδίο Troll της Νορβηγίας, το οποίο φαινομενικά θα εξακολουθεί να βρίσκεται σε πλήρη λειτουργία μέχρι το πρώτο τέταρτο του 21ου αιώνα και μπορεί να παράγει σημαντικές ποσότητες μετά το 2025.

Εφόσον η επέκταση του δικτύου φυσικού αερίου στη Δυτική Ευρώπη άρχισε να επιταχύνει, στάθηκε αδύνατο να αγνοηθούν τα τεράστια αποθέματα της FSU, η οποία είναι η πιο πλούσια περιοχή σε φυσικό αέριο στον κόσμο. Είναι χρήσιμο να σημειωθεί ότι ενώ ο τομέας πετρελαίου της FSU έπεσε στις άσχημες στιγμές, ο τομέας του φυσικού αερίου σε αυτές τις χώρες της FSU φαίνεται να λειτουργεί αρκετά ομαλά. Επιπλέον, έχει προταθεί ότι η κατασκευή του αγωγού Urengoy από τη Δυτική Ρωσία μέχρι τη Δυτική Ευρώπη έδειξε πως υπάρχουν περιπτώσεις όπου το εμπόριο μπορεί να είναι ισχυρότερο της πολιτικής, καθώς, αν και ο ψυχρός πόλεμος μαινόταν στη μεγαλύτερή του ένταση, οι κομμουνιστές εκπλήρωσαν από την πλευρά τους μια περίπλοκη συμφωνία με τους καπιταλιστές κατά γράμμα.

Ακριβώς όπως η Ρωσία κατέχει τη μερίδα του λέοντος στα αποθέματα φυσικού αερίου στην Ευρώπη, το Ιράν καταλαμβάνει αυτή τη θέση στη Μέση Ανατολή και τελικά μπορεί να αποδειχθεί σημαντικός προμηθευτής για την Ευρώπη. Ταυτόχρονα, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι υπάρχει σημαντική αγορά για το φυσικό αέριο στη Μέση Ανατολή την ίδια. Αυτό συνεπάγεται τη χρήση φυσικού αερίου για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, την αφαλάτωση του νερού, τις οικιακές χρήσεις καθώς και τη χρήση του ως καύσιμο και πρώτη ύλη για βασικές βιομηχανίες μετάλλων, διυλιστήρια, πετροχημικά κλπ.. Το φυσικό αέριο θα μπορούσε επίσης να αποδειχθεί ένα πολύτιμο υλικό για την κατασκευή καυσίμων για οχήματα και αεροπλάνα, καθώς φαίνεται ότι είναι πλέον δυνατό να μετατραπεί σε υγρό που παράγει «καθαρή» βενζίνη, καύσιμο ντίζελ ή να μετατραπεί σε οποιοδήποτε από τα προϊόντα ενός διυλιστηρίου που παράγονται από αργό πετρέλαιο.

Συχνά αναφέρεται ότι η Νορβηγική περιοχή του Troll θα είναι σε «πλήρη» λειτουργία από το πρώτο τέταρτο του 21^{ου} αιώνα, ωστόσο κάποιοι παρατηρητές έχουν την τάση να ισχυρίζονται ότι θα μπορούσε να προσφέρει σημαντικές ποσότητες φυσικού αερίου για 80 χρόνια. Αυτό υποδηλώνει ένα προφίλ παραγωγής του είδους που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, το οποίο επίσης δείχνει το περίγραμμα του κόστους που συνδέεται με την παραγωγή φυσικού αερίου. (Το διάγραμμα ισχύει και για την παραγωγή πετρελαίου). Αυτό που έχουμε είναι επενδυτικές δαπάνες κατ' αρχάς, ενώ αργότερα η δομή του κόστους κατά κύριο λόγο κυριαρχείται από μεταβλητά κόστη (π.χ. εργάτες) και κόστη συντήρησης.



Σχήμα 3.3

Κάποια σχόλια είναι απαραίτητα εδώ. Αφού το κοίτασμα έχει «εξαντληθεί» ή έχει σχεδόν εξαντληθεί, θα είναι συνήθως απαραίτητο ένα μέτρο καθαρισμού του έργου. Μερικοί περιβαλλοντολόγοι έχουν αρχίσει να λένε ότι τα κόστη για όλο αυτό το περιεκτικότατο συγύρισμα-καθαρισμός είναι τόσο μεγάλα που οι επιχειρήσεις εκμετάλλευσης αυτών των εγκαταστάσεων θα κάνουν τα αδύνατα δυνατά για να αποφύγουν τα κόστη αυτά, ανεξάρτητα της περιβαλλοντικής ζημιάς που θα προκύψει. (Στην περίπτωση της πυρηνικής ενέργειας, όπως μπορεί να θυμάστε, η διαδικασία καθαρισμού μπορεί να αποδειχθεί τόσο ακριβή που, σε ορισμένες χώρες, η πυρηνική ενέργεια είναι στην πραγματικότητα μια πολύ ακριβή μορφή ηλεκτρικής ενέργειας.)

Το πράγμα που ο καθένας περιμένει με ενδιαφέρον, φυσικά, είναι μια μεγάλη περίοδος με αυξημένη παραγωγή, όταν το φυσικό αέριο ανέρχεται και τα χρήματα καταφθάνουν. Κατά το μεγαλύτερο μέρος της περιόδου αυτής, η πλειονότητα των δαπανών θα είναι τα μεταβλητά έξοδα (π.χ. η εργασία), για να συμπεριλάβουμε τα κόστη συντήρησης με την απόσβεση του εξοπλισμού.

Τα πεδία με φυσικό αέριο μερικές φορές περιγράφονται ως να έχουν π.χ. 15ετή περίοδο εξάντλησης αν η ετήσια παραγωγή είναι το ένα δέκατο πέμπτο (1/15) του συνόλου των ανακτήσιμων αποθεμάτων. Αυτή η παραγωγή στο επίπεδο οροπεδίου μπορεί να κρατηθεί για λιγότερα από 15 χρόνια, αν και το φυσικό αέριο μπορεί να υπάρχει για περισσότερα από 15 χρόνια, λαμβάνοντας υπόψη τόσο την περίοδο οικοδόμησης όσο και την περίοδο εξάντλησης. Το πλεονέκτημα του να εξετάζουμε το πρόβλημα με αυτόν τον τρόπο είναι ότι επιτρέπει να εστιαστεί η προσοχή μας σε δύο σημαντικές μεταβλητές: το ύψος του οροπεδίου και το μήκος του. Το ίδιο ισχύει και για το πετρέλαιο.

Η ποσότητα φυσικού αερίου που θεωρείται ως ανακτήσιμη είναι εκείνη που μπορεί να κατευθυνθεί από ένα κοίτασμα μέσω αγωγών. Το μεγαλύτερο μέρος της ροής αυτής έχει δημιουργηθεί πιθανώς από διαφορές πιέσεων μεταξύ του φυσικού αερίου στη δεξαμενή (ή παγιδευμένου, όπως λέγεται μερικές φορές) και της εισόδου του αγωγού που προκύπτει από πιέσεις στη δεξαμενή μέχρι 10.000 λιβρών ανά τετραγωνική ίντσα ($\#/in^2$). Μια δεξαμενή φυσικού αερίου μπορεί συχνά να αδειάζεται για περισσότερο του 80% του περιεχομένου της (συγκρινόμενου με το μέσο ποσοστό του 32% του πετρελαίου) με το 50% αυτής της αποδοτέας επέκτασης φυσικού αερίου. Για παράδειγμα, το φυσικό αέριο της Αλγερίας βγήκε κάποτε από τις πηγές του σε τόσο υψηλές πιέσεις ώστε δε χρειάζονταν σταθμοί συμπίεσης για να το μεταφέρουν σε περισσότερα από 400 μίλια στα σύνορα της Τυνησίας. Ο κανόνας είναι ότι η παράδοση μπορεί να πραγματοποιηθεί εφόσον διατηρείται μια κατάλληλη διαφορά πίεσης μεταξύ της εισόδου του αγωγού και του σημείου παράδοσης. (Αυτό θα πρέπει να κρατηθεί κατά νου κατά την εξέταση της συζήτησης παρακάτω για τους αγωγούς). Γενικά, τα δίκτυα αγωγών αποτελούνται από υψηλής πίεσης αγωγούς μεταφοράς και χαμηλής πίεσης συστήματα διανομής.

Αν λάβουμε υπόψη τα χερσαία κοιτάσματα φυσικού αερίου (όπου το κοίτασμα μπορεί να ως να αποτελείται από έναν αριθμό ταμιευτήρων, ενώ όλα μαζί τα κοιτάσματα σε μια έκταση από 1.000 έως 10.000 τετραγωνικά μίλια αποτελούν ένα Κόλπο), το πρώτο βήμα για την εγκαθίδρυση ενός συστήματος το οποίο μπορεί να παραδώσει μεγάλες ποσότητες φυσικού αερίου για μεγάλο χρονικό διάστημα είναι να σκάψουμε έναν αριθμό πηγών στην περιοχή που υπολογίζουμε ότι υπάρχει κοίτασμα, έτσι ώστε να έχουμε μια εκτίμηση για τα ανακτήσιμα αποθέματα του κοιτάσματος. Με διαθέσιμη την εκτίμηση αυτή, το φυσικό αέριο της περιοχής αυτής μπορεί να πωληθεί (συνήθως σε πολύ μακροπρόθεσμα συμβόλαια) και μπορούν να ξεκινήσουν οι διαγωνισμοί για τη γεώτρηση. Εάν χρειάζεται, μπορεί να εγκατασταθεί και ο εξοπλισμός συμπίεσης για να ενισχύσει τις πιέσεις στην περιοχή των πηγών. Ο αριθμός των πηγών που θα σκαφτεί και το πρόγραμμα γεώτρησης εξαρτώνται από το επιθυμητό προφίλ παραγωγής που θέλουμε, το οποίο με τη σειρά του είναι συνάρτηση της συμφωνίας μεταξύ των ιδιοκτητών του κοιτάσματος και των αγοραστών του φυσικού αερίου και σχεδόν πάντα απαιτεί ένα ομοιόμορφο ή αυξανόμενο ποσοστό παραδόσεων σε μια σχετικά μακρά περίοδο πριν ξεκινήσει η εξάντληση.

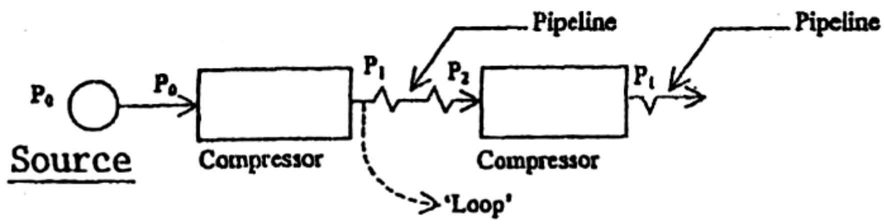
Ένα προγραμματισμένο επίπεδο πωλήσεων από τους παραγωγούς είναι κάτι το δεδομένο που δε γίνεται όμως πάντα πραγματικότητα. Το 1972, στις ΗΠΑ, μια απρόβλεπτη εξάντληση στην παραγωγή από τα υπάρχοντα κοιτάσματα οδήγησε τους αγοραστές του βιομηχανικού τομέα στην προσωρινή απόλυση πολλών εργαζομένων εξαιτίας της εκτροπής του συνήθους εφοδιασμού με φυσικό αέριο των κορυφαίων σε προτεραιότητα οικιακών χρηστών. Αλλά ακόμη κι έτσι πολλές κοινότητες ήταν στα όρια να ξεμείνουν από φυσικό αέριο, κάτι που θα άφηνε δεκάδες χιλιάδες σπίτια στο κρύο. Αργότερα υπήρξε μια περίοδος όπου μεγάλοι καταναλωτές φυσικού αερίου – π.χ. διανομείς και βιομηχανίες – αρνήθηκαν να παραλάβουν το φυσικό αέριο παρά το γεγονός ότι είχαν υπογράψει συμβόλαια. Αυτό που συνέβη τότε ήταν ότι οι αγοραστές του φυσικού αερίου είχαν μηνυθεί για παραβίαση του συμβολαίου, αλλά μπόρεσαν να υποστηρίξουν με επιτυχία στο δικαστήριο πως θα πρέπει να είναι ελεύθεροι να αγοράζουν το φθηνότερο φυσικό αέριο – φυσικό αέριο που, στην πραγματικότητα, έγινε διαθέσιμο μόνο και μόνο γιατί κάποιοι πωλητές φυσικού αερίου έκαναν πολύ ακριβές επενδύσεις οι οποίες δεν απέδωσαν τα αναμενόμενα.

Ορισμένοι παρατηρητές υποστηρίζουν οι περισσότεροι ευεργετημένοι από όλο αυτό ήταν οι δικηγόροι που βρέθηκαν να χειρίζονται δισεκατομμύρια ευρώ σε δικαστικό αγώνα είσπραξης ή πληρωμής. Εν πάση περιπτώσει, αυτή τη φορά ήταν η απελευθέρωση του φυσικού αερίου στις ΗΠΑ που επιτάχυνε τη χρήση ατμού και τελικά εξαπλώθηκε στην Ευρώπη όπου η απελευθέρωση που έχει προταθεί είναι τόσο περίπλοκη ώστε θα πρέπει να αστυνομεύεται από άλλου κανονισμούς που είναι, προφανώς, εξίσου περίπλοκοι.

Ιδιαίτερης σημασίας σε κάθε συζήτηση παροχής φυσικού αερίου σε οποιαδήποτε επαρχία ώριμου φυσικού αερίου είναι η μείωση της παραγωγικότητας των νέων πηγών φυσικού αερίου, η οποία σημαίνει μεγαλύτερο αριθμό πηγών και ότι απαιτούνται κατακόρυφα αυξανόμενες δαπάνες για την εξασφάλιση ίσων αυξήσεων παραγωγής από την εκμετάλλευση των υπαρχόντων αλλά και των νέων περιοχών φυσικού αερίου. Αυτό δεν οφείλεται μόνο σε πράγματα όπως το φράξιμο της πηγής, στην πτώση της διαφοράς της εσωτερικής πίεσης της πηγής και την αυξημένη πυκνότητα των πηγών σε ένα συγκεκριμένο πεδίο φυσικού αερίου (το οποίο σημαίνει ότι με ένα προκαθορισμένο ποσό φυσικού αερίου στο πεδίο αυτό, οι νέες πηγές θα τείνουν να χαρακτηρίσουν μια μείωση στην παραγωγή), αλλά στην πραγματική έλλειψη φυσικού αερίου κάτω χαμηλά στο μεγαλύτερο βάθος στο οποίο βρίσκεται τώρα το φυσικό αέριο στους περισσότερους γνωστούς κόλπους φυσικού αερίου.

Στις Ηνωμένες Πολιτείες ο αριθμός των πηγών που είχαν σκαφτεί αυξήθηκε από τις 9.850 το 1977 σε περισσότερες από 16.000 το 1982 και κατά τη διάρκεια της ίδιας περιόδου η μέση παραγωγικότητα μιας πηγής της τάξης των 115 Mcf/y (= millions cubic feet/year, δηλ. εκατομμύρια κυβικά πόδια ανά έτος) μπορεί να μειώθηκε σχεδόν στο μισό. Η κατάσταση αυτή υποδηλώνει πως η διατήρηση ενός σταθερού επιπέδου παραγωγής περιλαμβάνει εύρεση και έναρξη παραγωγής για μεγαλύτερο αριθμό πηγών. Σε μακροπρόθεσμη βάση, προφανώς, αυτό είναι πάρα πολύ και είναι ένας από τους λόγους γιατί ο χαμηλότερος ρυθμός ανάπτυξης στον κόσμο της παραγωγής φυσικού αερίου βρίσκεται στη Βόρεια Αμερική, όπου η παραγωγή το 1994 ήταν μεγαλύτερη για 3,4 Tcf (ή 16%) από το επίπεδο του 1984. Το μεγαλύτερο μέρος αυτής της ανάπτυξης, παρεμπιπτόντως, ήταν στον Καναδά, ο οποίος αύξησε σταθερά τις εξαγωγές τους στις ΗΠΑ την τελευταία δεκαετία του 20^{ου} αιώνα και έχει μεγάλες ελπίδες για ένα ακόμη ευνοϊκότερο κλίμα πωλήσεων τον 21^{ο} αιώνα. Για να δείτε ακριβώς πόσο σοβαρή είναι η κατάσταση στις ΙΠΑ, οι αναγνώστες θα πρέπει να γνωρίζεται ότι το φυσικό αέριο έχει γίνει ο πρωταρχικός στόχος για τις γεωτρήσεις στις ΗΠΑ, με περισσότερο από το 50% των γεωτρήσεων να γίνεται σε πηγές φυσικού αερίου. Το 1996 ο λόγος αποθεματικών-παραγωγής είχε ήδη μειωθεί σε 7 χρόνια. Με όλο το σεβασμό, η κατάσταση της ενέργειας σε εκείνη τη χώρα δε θα πρέπει να οδηγήσει σε μια πολύ ανάλαφρη στάση εκ μέρους των πολιτών της, ούτε θα πρέπει να έχουν μεγάλη πίστη σε πράγματα όπως οι παράγωγες αγορές για να εξασφαλίσουν για αυτούς τους ενεργειακούς πόρους που είναι απαραίτητοι τόσο για την οικονομική όσο και για την κοινωνική πρόοδο.

Αυτό μας φέρνει στο επόμενο βήμα στην αλυσίδα εφοδιασμού: τους αγωγούς. Ίσως ο καλύτερος τρόπο για να ξεκινήσουμε εδώ είναι να ρωτήσουμε ποια είναι η καλύτερη κατάσταση για να φέρνουμε το φυσικό αέριο από τους παραγωγούς στους καταναλωτές; Η πιο απλή απάντηση είναι να έχουμε τεράστια κοιτάσματα φυσικού αερίου που να συνδέονται με την καταναλωτική περιοχή με αγωγούς μεγάλης διαμέτρου. Οι μεγάλοι αγωγοί επιτρέπουν τη μέγιστη αξιοποίηση των οικονομιών κλίμακας στη μεταφορά, ενώ τα μεγάλα κοιτάσματα σημαίνουν ότι ο αγωγός και ο εξοπλισμός συμπίεσης δεν πρέπει να εγκαταλειφθούν στις αρχές της «ζωής» τους.
Η παρακάτω εικόνα δείχνει ένα τμήμα αγωγού. Από μηχανικής άποψης η κατασκευή του είναι μια εντελώς συνηθισμένη διαδικασία, αλλά με αφετηρία τη δεκαετία του 1980 η πολιτική και η οικονομία τέτοιων συστημάτων έχει γίνει πολύ περίπλοκη. Πρώτα υπήρχε το πρόβλημα που είχε ο Πρόεδρος Ronald Reagan με διάφορες ευρωπαϊκές επιχειρήσεις και κυβερνήσεις για την ποσότητα αερίου που μπορούσε να αγοραστεί από την FSU, το οποίο σε τεχνικό επίπεδο μειώθηκε σε μια διαφωνία πάνω στο μέγεθος των αγωγών και του εξοπλισμού συμπίεσης, καθώς επίσης και στο ποιος θα παρείχε τον εξοπλισμό, ενώ κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1990 η συζήτηση για την απελευθέρωση μετακινήθηκε στο προσκήνιο.



Σχήμα 3.4

Σε αυτήν την εικόνα η πίεση στην πηγή είναι P_0. Ο συμπιεστής αυξάνει την πίεση σε P_1 αλλά εξαιτίας κάποιων πραγμάτων όπως οι απώλειες λόγω τριβών στον αγωγό, η πίεση πέφτει τελικά σε P_2 και ένας άλλος συμπιεστής την αυξάνει πάλι σε π.χ. P_1. Ως παράδειγμα αυτού του είδους, μπορώ να αναφέρω τον αγωγό από τη Βορειοδυτική υφαλοκρηπίδα της Αυστραλίας στο Περθ, την πρωτεύουσα της Δυτικής Αυστραλίας. Αυτός ο αγωγός είναι 26 ίντσες σε διάμετρο και 949 μίλια σε μήκος. Υπάρχουν πέντε σταθμοί συμπιεστών μέσω των οποίων διέρχεται ο αγωγός, καθώς επίσης και 590 κύριες βαλβίδες. Τόσο οι σταθμοί συμπιεστών όσο και οι βαλβίδες ελέγχονται από υπολογιστή από το Περθ. Όσο για το «θηλιά» στο διάγραμμα, αυτός αποτελεί ένα «παράλληλο» τμήμα σωλήνα που προστίθεται μερικές φορές προκειμένου να αυξήσει τη χωρητικότητα. Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να είναι προτιμότερο για να αυξήσει το μέγεθος του σωλήνα.

Η Κίνα έχει μεγάλες προμήθειες φυσικού αερίου και το σύστημα αγωγών επεκτείνεται γρήγορα. Ο πρώτος αγωγός μεγάλης διαμέτρου κατασκευάστηκε στην επαρχία Sichuan το 1963 και αυτή τη στιγμή υπάρχουν περίπου 12.000 χιλιόμετρα γραμμών μεταφοράς φυσικού αερίου διαφόρων μεγεθών σε λειτουργία στη χώρα.

(Σημείωση: μια «γραμμή μεταφοράς» θα πρέπει να διακρίνεται από μια «γραμμή διανομής», όπου η τελευταία συνήθως μεταφέρει το φυσικό αέριο – ή την ηλεκτρική ενέργεια – στους τελικούς καταναλωτές.) Προς το παρόν το 43% του φυσικού αερίου της Κίνας χρησιμοποιείται για την παραγωγή λιπασμάτων, το 32% στον τομέα των διυλιστηρίων ή καταναλώνεται με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο στον τομέα φυσικού αερίου και πετρελαίου, το 14% χρησιμοποιείται ως καύσιμο στο βιομηχανικό τομέα, το 8,5% καταναλώνεται από τον αστικό τομέα – κυρίως από νοικοκυριά και μικρές επιχειρήσεις – και το υπόλοιπο πηγαίνει σε χρήσεις δευτερεύουσας σημασίας.

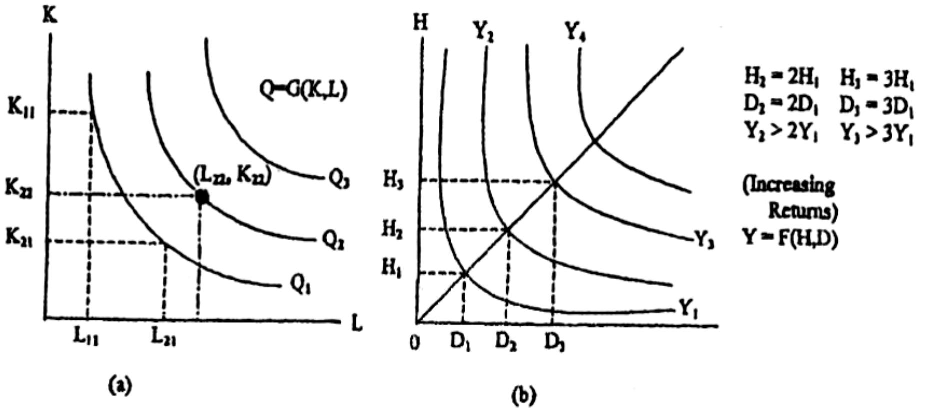
Κατά τη διαμόρφωση μιας παραδοσιακής λειτουργίας παραγωγής με το παραπάνω σύστημα, οι βασικές εισροές (στην ανάλυσή μας) θα είναι η πίεση της γραμμής, η οποία είναι συνάρτηση του μεγέθους των συμπιεστών και η διάμετρος του αγωγού. Όπως συμβαίνει, οι οικονομίες κλίμακας είναι δυνατές και για τους συμπιεστές και για τον αγωγό. Με δεδομένη την πίεση της γραμμής, για παράδειγμα, αυξάνοντας την ποσότητα του φυσικού αερίου που μεταφέρεται θα χρειαστεί αύξηση τη διαμέτρου του αγωγού. Ωστόσο η αύξηση στο κόστος των υλικών για μια μεγαλύτερη διάμετρο θα αυξήσει την ποσότητα του φυσικού αερίου που μεταφέρεται σε τέτοιο βαθμό ώστε το ανά μονάδα κόστος της μεταφοράς φυσικού αερίου θα πέσει.

Ο λόγος γι' αυτό είναι ότι η χωρητικότητα ενός αγωγού φυσικού αερίου είναι ανάλογη με την εσωτερική διατομή (= πr^2). Από την άλλη πλευρά, η ποσότητα των υλικών του αγωγού (π.χ. χάλυβας) που χρησιμοποιείται είναι ανάλογη με την περιφέρεια του σωλήνας (η οποία είναι $2\pi r$). Αν η είσοδος του αγωγού διπλασιαστεί, τότε η χωρητικότητά του υπερδιπλασιάζεται – τουλάχιστον μέχρι ενός σημείου. Ο εξοπλισμός του συμπιεστή επίσης εμφανίζει αυξητικές αποδόσεις κλίμακας, αν και δεν είναι επ' αόριστον. Με αυτόν τον εξοπλισμό μπορούμε να περιμένουμε να εφαρμοστεί το σχήμα U στις καμπύλες κόστους – ή καμπύλες αλλοιωμένου U – που έχουμε δει στα σχολικά βιβλία μας.

Έχει γίνει πρόσφατα της μόδας να ισχυρίζονται διάφοροι ότι οι αποδόσεις κλίμακας σε συστήματα φυσικού αερίου είναι υπερτιμημένες ή αμελητέες και ότι ακόμη και η διάσπαση των υπαρχόντων συστημάτων, συμπεριλαμβανομένης και της υιοθέτησης των μικρότερων αγωγών και των σταθμών των συμπιεστών, δε θα αντανακλά αρνητικά στο κόστος. Αυτό είναι ένας μύθος και αντικατοπτρίζει μια βασική περιφρόνηση για τους νόμους τόσο της φυσικής όσο και την οικονομίας.

Τώρα θα μιλήσουμε για μερικά τεχνικά ζητήματα. Όπως διαπιστώσατε στο πρώτο σας μάθημα στα οικονομικά, μια συνάρτηση παραγωγής συνδυάζει τις εισροές με τις εκροές: με απλά λόγια, χρειάζονται κάποιες εισροές για να βγάλει αποτελέσματα. Συνήθως τα αποτελέσματα τα λέμε Q και τις εισόδους K και L, τα οποία αντιπροσωπεύουν το κεφάλαιο (capital) και την εργασία (labor). Συμβολικά έχουμε $Q = G (K, L)$. Κάτι που πρέπει να τονιστεί εδώ είναι ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι συμβατικά *προστιθέμενης αξίας* συναρτήσεις παραγωγής, με τις συνιστώσες (στο δεξί μέλος) αυτής της σχέσης να περιορίζονται στο κεφάλαιο, την εργασία και τη γη – αν και η γη συνήθως δε λαμβάνεται υπόψη. Ενδιάμεσα προϊόντα όπως η απόδοση άλλων επιχειρήσεων στην οικονομία, συμπεριλαμβανομένων των φυσικών πόρων, δεν περιλαμβάνονται ρητά μεταξύ αυτών των συντελεστών – αν και, φυσικά, η παραγωγή μιας εταιρείας (Q) μπορεί να είναι ένας φυσικός πόρος όπως το αργό πετρέλαιο, ο άνθρακας κλπ..

Μια από τις συνέπειες της παραπάνω συζήτησης είναι ότι μια γραφική παρουσίαση μιας συνάρτησης παραγωγής απαιτεί περισσότερες από δύο διαστάσεις, αλλά το προσπερνάμε αυτό χρησιμοποιώντας αυτό που οι μαθηματικοί αποκαλούν καμπύλες επιπέδου και οι οικονομολόγοι αποκαλούν ισόποσα. Παίρνουμε μια δοσμένη τιμή για το Q, π.χ. Q_1 και δείχνουμε όλες τις τιμές του K και του L που δημιουργούν το Q_1. Αυτή η διευθέτηση φαίνεται στην παρακάτω εικόνα (στο α) όπου $Q_1 = G(K_{11}, L_{11}) = G(K_{21}, L_{21}) = ...$



Σχήμα 3.5

Θέλουμε να κάνουμε το ίδιο πράγμα για το φυσικό αέριο. Στα βασικά σας μαθήματα στα οικονομικά, ο συγγραφέας του βιβλίου που χρησιμοποιήσατε δε θα είχε ενδοιασμούς σχετικά με τη χρήση του K και του L ως εισόδων, αλλά δυστυχώς πρέπει να είμαστε περισσότερο λεπτολόγοι. Το να είναι κανείς περισσότερος λεπτολόγος σε αυτήν την περίπτωση σημαίνει ότι ψάχνει την προχωρημένη λογοτεχνία μέχρι να βρούμε ότι μπορεί να απλουστευθεί ώστε να ταιριάζει στη συζήτησή μας.

Αυτό το «κάτι» που χρειαζόμαστε εδώ μας παρέχεται από το Hollis Chenery (1949, 1952). Το σύστημά του αποτελείται από μια πηγή φυσικού αερίου μαζί με την είσοδο του αγωγού και λίγο πιο κάτω τους συμπιεστές και μετά πάλι αγωγό. Το σύστημα προφανώς ολοκληρώνεται στην αρχή της φάσης διανομής. Όπου μας αφορά η ροή, Y, για δεδομένο μήκος του αγωγού, μπορούμε να γράψουμε:

$$Y = F_1(D, P_1, P_2)$$

Όπου D είναι η εσωτερική διάμετρος του αγωγού, ενώ P_1 είναι η πίεση στην είσοδο αμέσως μετά τη συμπίεση και P_2 είναι η πίεση στην έξοδο όπως δείχνεται και στην πιο προηγούμενη εικόνα. Ο Chenery επίσης διατυπώνει μια έκφραση για τη συμπίεση, η οποία είναι:

$$H = F_2(P_1, P_0)$$

Όπου P_0 είναι η πίεση στην είσοδο του *πρώτου* συμπιεστή, ενώ το H είναι η βαθμολόγηση του συμπιεστή (π.χ. η ιπποδύναμη). Προφανώς, τηρουμένων των αναλογιών, ο συμπιεστής παίρνει μια συγκεκριμένη ιπποδύναμη (δηλ. «έργο») για να το αυξήσει από P_0 σε P_1. Στη συνέχεια ο Smith (1961), στην ερμηνεία του πάνω στην εργασία του Chenery, μας λέει ότι είναι δεκτό το ότι $P_0 = P_2$: η πίεση εισόδου στον πρώτο συμπιεστή είναι ίση με την πίεση στην έξοδο του αγωγού πριν το φυσικό αέριο εισέλθει στο δεύτερο συμπιεστή (ή, ίσως, πριν εισέλθει στο χαμηλής πίεσης σύστημα διανομής).

Αυτό φαίνεται απόλυτα απλό μέχρι να εξετάσουμε την πιο προηγούμενη εικόνα. Τότε θα δούμε ότι δεν υπάρχει κανείς «μηχανικός» λόγος για να είναι η P_0 ίση με την P_2. Αντ' αυτού θα ήταν καλύτερα να ξεχάσουμε την P_0 για την ώρα και να υποθέσουμε για τους σκοπούς αυτής της άσκησης ότι ο αγωγός είχε διαμορφωθεί με τέτοιο τρόπο ώστε λογικά $H = F_2 (P_1, P_2)$ και ότι αυτό ισχύει για όλους τους σταθμούς συμπιεστών εκτός από τον πρώτο: ο πρώτος σταθμός αύξησε την P_0 σε P_1. Γιατί δεν έγινε αυτό; Η απάντηση είναι ότι με την παραδοχή $P_0 = P_2$, απλουστεύουμε πάρα πολύ τη δουλειά μας, για να το θέσω επιεικώς...

Ο Chenery παρουσιάζει επίσης μια «βοηθητική» σχέση ανάμεσα στο P_1 και το πάχος του αγωγού που μπορεί να αγνοηθεί προς το παρόν. Τώρα ας κοιτάξουμε το σύστημα εξισώσεων, διασφαλίζοντας ότι καταλαβαίνουμε πως ο πρωταρχικός μας στόχος εδώ είναι μια συνηθισμένη άσκηση βιβλίου σε μέσο επίπεδο μικροοικονομικής θεωρίας, που αποτυπώνει τουλάχιστον ορισμένα από τα χαρακτηριστικά των συστημάτων αγωγών του πραγματικού κόσμου. Περιττό να πούμε ότι η προσέγγιση που γίνεται με την παρούσα ανάλυση εφαρμόζεται τόσο στο πετρέλαιο όσο και στο φυσικό αέριο.

$$Y = F_1 (D, P_1, P_2) \quad (1)$$

$$H = F_2 (P_1, P_0) \quad (2)$$

$$P_2 = P_0 \quad (3)$$

$$p_0 = \overline{p_0} \quad \text{(μια γεωλογική σταθερά)} \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας τις 2 τελευταίες σχέσεις, οι δύο πρώτες μετασχηματίζονται στις:

$$Y = F_1 (D, P_1, \overline{p_0}) = F_3 (D, P_1) \quad (5)$$

$$H = F_2 (P_1, P_0) \Rightarrow P_1 = F_4 (H) \quad (6)$$

Προσέξτε τι έγινε πιο πάνω. Η $\overline{p_0}$ αντικαταστάθηκε με την P_2 στην πρώτη σχέση. Δεδομένου ότι η $\overline{p_0}$ είναι μια σταθερά, δε χρειάζεται να τεθεί στις πολλές σχέσεις με τις οποίες ασχολούμαστε εδώ. Στη συνέχεια, η δεύτερη σχέση για δοσμένη τιμή του P_1, υποθέτοντας ότι στην παρούσα περίπτωση αυτός ο χειρισμός ήταν δυνατόν, κάτι που φαίνεται αρκετά λογικό. Και από τη στιγμή που για μια ακόμη φορά η P_0 είναι σταθερή, μπορεί να παραλειφθεί. Η σχέση της με την P_1 αποτυπώνεται στη συνάρτηση F_4. Τώρα, η P_1 από την 6η σχέση μπαίνει στην 5η σχέση κι έχουμε:

$$Y = F_3 (D, P_1) = F_3 (D, F_4(H)) = F (D, H) \quad (7)$$

Η σχέση αυτή «φαίνεται» σωστή τόσο από μηχανική όσο και από οικονομική άποψη. Ταυτόχρονα, ωστόσο, έχω ορισμένες επιφυλάξεις γι' αυτή τη διαδικασία. Εξετάζοντας την πιο προηγούμενη εικόνα (σχήμα 4.4), θα είχα μπει στον πειρασμό να ξεκινήσω την ανάλυση με $P_1 = G_1(H, P_2)$ και $Y = G_2(D, P_2)$ και τότε θα προσπαθούσα να φτάσω στην 7η εξίσωση. Ωστόσο, πρέπει να παραδεχτούμε ότι το ανωτέρω σχεδιάγραμμα είναι σύμφωνο με τις περισσότερες σχέσεις μηχανικής που διέπουν τη ροή του φυσικού αερίου στον αγωγό. (Δείτε το βιβλίο του C.H.Paulette με τίτλο “The Pipeline Engineer”, Μάρτιος 1968.)

Παρατηρήστε επίσης πώς οι ονομασίες των συναρτήσεων, τα F δηλ., αλλάζουν όσο κάνουμε τις αντικαταστάσεις μας. Η $7^{η}$ εξίσωση είναι μια συνάρτηση παραγωγής του γνωστού τύπου που θα θυμάστε από το βασικό σας μάθημα και αντιστοιχεί στην πιο πάνω εικόνα. Σε αυτό το σημείο, ωστόσο, είναι δικαιολογημένη μια προειδοποίηση. Τα πασίγνωστα άρθρα του Chenery ήταν λαμπρά παραδείγματα για την εφαρμοσμένη μικροοικονομία, όπως είναι και το βιβλίο του Smith, και έχουμε κάθε δίκιο να είμαστε εντυπωσιασμένοι από τη δουλειά τους. Αλλά όχι και τόσο εντυπωσιασμένοι ώστε να τα μπερδέψουμε με την εφαρμοσμένη μηχανική. Αυτό στο οποίο καταλήγουν να κάνουν είναι να προτείνουν μια σχέση μεταξύ εισόδων και εξόδων (δηλ. μια συνάρτηση παραγωγής) η οποία, ίσως, θα μπορούσε να είναι το αντικείμενο κάποιας εμπειρικής ή και πειραματικής εργασίας στα οικονομικά ή στη μηχανική. Ο Chenery, για παράδειγμα, μετατρέπει την έμμεση έκφραση Y = F (D, H) – ή αν προτιμάτε την Y-F(D,H) = 0 ή ακόμα την F(Y, D, H) = 0 – σε μια μάλλον αδέξια αλλά ρητή έκφραση:

$$F(Y,H,D) = \frac{D}{k_1} + \frac{k_2}{k_1}Y - K_1 H^{5/3}\left[\left(\frac{D}{k_1 Y} + \frac{k_2}{K_2}\right)^2 - 1\right]^{1/2} = 0 \qquad (8)$$

Τα k στην παραπάνω σχέση είναι σταθερές, όπως είναι και τα K, αν και στην εργασία του Chenery το πάχος του αγωγού (το οποίο δίνεται) είναι μέσα στην εξίσωση, ενώ εδώ βρίσκεται ενσωματωμένο στο K_1. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε τώρα είναι να πάρουμε κάποιες διαφορετικές τιμές για το Y και να βρούμε τις τιμές των H, D που μας δίνουν αυτό το Y. Αυτή η μάλλον βαριά εργασία θα μας δώσει ένα ισόποσο σύστημα του είδους που φαίνεται στην παραπάνω εικόνα (στο β).

Το σύστημα, όπως θα παρατηρήσατε, χαρακτηρίζεται από αύξουσες αποδόσεις κλίμακας: αν διπλασιάσουμε τις εισροές, υπερδιπλασιάζουμε τις εκροές. Αν τριπλασιάσουμε τις εισροές, υπετριπλασιάζουμε τις εκροές κλπ.. Το ίδιο ισχύει και για ένα ισόποσο σύστημα που κατασκευάζεται από την παραπάνω εξίσωση, αν και δε θα είναι εύκολο να αποδειχθεί.

Το να πάρει κανείς αυξανόμενες αποδόσεις με ένα μικρό αγωγό δεν περιλαμβάνει πλέον τίποτε άλλο πλην της αύξηση της διαμέτρου του αγωγού, τουλάχιστον για να ξεκινήσουμε... Το να πάρει αυξανόμενες αποδόσεις με ένα σύστημα αγωγών αποτελούμενο ίσως από πολλές χιλιάδες χιλιομέτρων, όπου οι απώλειες τριβών είναι σημαντικές και όπου πρέπει να χρησιμοποιηθούν υποχρεωτικά ακριβοί συμπιεστές για να διατηρήσουν την πίεση, είναι ένα εντελώς διαφορετικό θέμα. Φαίνεται ότι υπάρχει ομοφωνία, ωστόσο, πως αν υπάρχει ένα πολύ μεγάλο κοίτασμα φυσικού αερίου και μια πολύ μεγάλη βάση καταναλωτών, όσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρος του αγωγού, τόσο το καλύτερο – μέχρι ενός σημείο. Αυτό το σημείο φαίνεται να είναι οι 65 ίντσες (= 165 εκατοστά) όταν γράφεται το παρόν, αν και έχει ειπωθεί ότι τα νέα υλικά και οι νέες τεχνολογίες μπορούν να ανεβάσουν αυτόν τον αριθμό. Εδώ είναι το κατάλληλο σημείο να υπενθυμίσουμε στον αναγνώστη ότι «αύξηση των αποδόσεων» σημαίνει αύξηση των αποδόσεων κλίμακας ή, είναι το ίδιο πράγμα, μείωση του ανά μονάδα κόστους. Οι συμπιεστές θα περίμενε κανείς να έχουν τη μορφή U της καμπύλης κόστους που συναντήσατε στα βασικά οικονομικά σας μαθήματα και έτσι όταν αποτελούν στοιχείο ενός αγωγού πολύ μεγάλης διαμέτρου, είναι δυνατό να λειτουργούν στην «ανοδική πλευρά» της καμπύλης κόστους, όπου μπορεί να υπάρξει κατακόρυφη αύξηση του κόστους. Τι σημαίνει αυτό για ολόκληρο το σύστημα είναι δύσκολο να ειπωθεί.

Στην παραπάνω συζήτηση φάνηκε χρήσιμο να παραλείψουμε μια από τις εξισώσεις του Chenery: $P_1 = 2ST/D$. Αυτό που κάνει αυτή η έκφραση είναι να μας δώσει τη μέγιστη πίεση που μπορούμε να έχουμε σε έναν αγωγό πάχους T και διαμέτρου D. Αυτό είναι σημαντικό γιατί ο κανόνας είναι πως για να μεταφέρουμε ένα ισοδύναμο ποσό ενέργειας, ο αγωγός φυσικού αερίου πρέπει να είναι και μεγαλύτερος (σε διάμετρο) και δυνατότερος από έναν αγωγό πετρελαίου. Ο λόγος είναι πως ακόμα και κάτω από μεγάλη πίεση, το φυσικό αέριο περιέχει λιγότερη ενέργεια απ' ό,τι το αργό πετρέλαιο σε ίδιο όγκο και έτσι τα υψηλά ποσοστά ροής είναι ουσιαστικής σημασίας. Αλλά τα υψηλά ποσοστά ροής συνεπάγονται και υψηλές πιέσεις αλλά και μεγάλες διαμέτρους, τα οποία υπό το πρίσμα της ανωτέρω εξίσωσης σημαίνουν μεγάλο T και συνεπώς πολύ βαρείς αγωγούς. Για άλλη μια φορά βρισκόμαστε σε μια κατάσταση όπου τα μειονεκτήματα για το κόστος των πολύ βαριών/χοντρών σωλήνων ενδέχεται να υπερκαλύψουν τα πλεονεκτήματα που συνδέονται με μια πολύ μεγάλη διάμετρο και θα βοηθούσε στο να λογοδοτήσουν για τον τερματισμό της αύξησης της απόδοσης.

Ένα πράγμα παραμένει εδώ κι έχει να κάνει με τη «θηλιά» που φαίνεται στο σχήμα 4.4. Αυτό που είναι όλο κι όλο έχει να κάνει με την επέκταση του υπάρχοντος συστήματος. Οι συμπιεστές μπορεί να υπερφορτωθούν και προστίθενται παράλληλα τμήματα στην υπάρχουσα γραμμή. Έχει προταθεί πως υπό ορισμένες συνθήκες, μια επέκταση αυτού του είδους μπορεί να καταλήξει σε απώλεια οικονομιών κλίμακας, ανάλογα με το μήκος των βρόχων, τις πρόσθετες επενδύσεις για συμπιεστή και την αυξημένη ποσότητα φυσικού αερίου που δαπανάται σε συνδυασμό με την αυξημένη συμπίεση, δεδομένου ότι το φυσικό αέριο από τον αγωγό προβλέπει την απορρόφηση ενέργειας που χρησιμοποιείται για τη λειτουργία των συμπιεστών. Δυστυχώς αυτό το θέμα μπορεί να διευθετηθεί μόνο για κάθε περίπτωση χωριστά, αφού σε πολλές περιπτώσεις η δημιουργία βρόχων έχει πολλά να προσφέρει.

Το τμήμα αυτό θα ολοκληρωθεί λέγοντας κάτι για την αποθήκευση – για να είμαστε ακριβείς, για την κύρια αποθήκευση που λαμβάνει χώρα έξω από τους αγωγούς.

Ενίοτε η αποθήκευση θα διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο στις συζητήσεις σχετικά με αμετάβλητες και διακοπτόμενες υπηρεσίες, ειδικά όταν πρόκειται για βιομηχανικές πωλήσεις. Το σταθερό φυσικό αέριο παρέχεται όλο το χρόνο με ένα λίγο-πολύ σταθερό ρυθμό ροής, ενώ το διακοπτόμενο φυσικό αέριο είναι πρωτίστως διαθέσιμο κατά τη διάρκεια περιόδων εκτός αιχμής (όταν υπάρχει πλεονάζουσα παραγωγική ικανότητα). Προφανώς, αν υπάρχει φυσικό αέριο στην αποθήκη, τότε μπορεί να αφαιρεθεί από αυτήν ώστε να ικανοποιήσει την «έξτρα» ζήτηση σχεδόν σε οποιαδήποτε στιγμή και ως εκ τούτου η αποθήκευση (εντός κάποιων ορίων) είναι ένα υποκατάστατο για την παραγωγική ικανότητα.

Η έκφραση «εκτός αιχμής» χρησιμοποιήθηκε πιο πάνω και έτσι αυτή είναι η κατάλληλη στιγμή για να γίνει διάκριση μεταξύ δύο τύπων καταστάσεων για φορτία αιχμής: σταθερή κορυφή και μετακινούμενη κορυφή, εκ των οποίων και οι δύο εφαρμόζονται για συστήματα φυσικού αερίου (και ηλεκτρικής ενέργειας) όπου η πλήρης ικανότητα δεν χρησιμοποιείται κατά τη διάρκεια ορισμένων περιόδων λειτουργίας. Μια σταθερή κορυφή υφίσταται όταν η κορυφή (φορτίο) δεν αλλάζει ως αποτέλεσμα της αλλαγής της τιμής του φυσικού αερίου που είναι εκτός αιχμής σε κανένα επίπεδο: το φυσικό αέριο εκτός αιχμής σε αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι υποκατάστατο του φυσικού αερίου σταθερής αιχμής. Κατ' αντιδιαστολή, μια μετακινούμενη αιχμή σημαίνει ότι μια μείωση μόνο του μεταβλητού κόστους στους εκτός αιχμής πελάτες θα τους κάνει να μειώσουν κατακόρυφα την ποσότητα φυσικού αερίου που απαιτούνται κατά τις περιόδους αιχμής. Το σχέδιο για το φορτίο αλλάζει και ίσως σε μεγάλο βαθμό. Ένας άλλος σημαντικός όρος είναι το *«ξύρισμα» της κορυφής*. Αυτό μπορεί να περιλαμβάνει την εισφορά συμπληρωματικών προμηθειών φυσικού αερίου από την υπόγεια αποθήκη (ή ακόμα και από τις εγκαταστάσεις LNG) στο σύστημα αγωγών με τέτοιο τρόπο ώστε να αποφεύγεται η επέκταση του συστήματος (μέσω της επένδυσης κεφαλαίων) όταν εμφανίζεται η μέγιστη δυνητική ζήτηση. Με άλλα λόγια, η κορυφή μπορεί να παραμείνει, αλλά θα ήταν πιο «πεπλατυσμένη» και ίσως διευρυμένη πέρα από όμορες περιόδους και δε θα γινόταν εντονότερη..

Η λογική πίσω από την αποθήκευση φυσικού αερίου είναι απλή. Η ζήτηση δεν είναι σταθερή στη διάρκεια του χρόνου και συνήθως αυξάνεται το χειμώνα. Το να έχει κανείς το φυσικό αέριο διαθέσιμο ώστε να καλύψει αυτή τη ζήτηση σημαίνει σημαντικά κέρδη για τον ιδιοκτήτη της εγκατάστασης αποθήκευσης (όπως αναφέρθηκε στα παραπάνω σχόλια για το εμπόριο αγωγών μεταξύ ΗΠΑ-Καναδά). Φυσικά, η αποθήκευση έχει κόστος και δεδομένων των ποσοτήτων φυσικού αερίου που συνήθως εμπλέκονται, υπάρχει ευρεία ευκαιρία να γίνουν καταστροφικά λάθη εκτίμησης.

Το 1995 η Exxon δαπάνησε 600 εκατομμύρια ευρώ για να αναπτύξει 3 εγκαταστάσεις αποθήκευσης στην Ολλανδία και τη Γερμανία, οι οποίες έδειξαν ότι η αποθήκευση είχε γίνει μια πολύ σημαντική εμπορική στρατηγική. Οι εγκαταστάσεις της Exxon προσφέρουν 120 Gcf αποθήκευσης και 6 Gcf/d εξαγωγική ικανότητα.

Οι εγκαταστάσεις αυτές, μαζί με άλλες που κατασκευάζονται, αποσκοπούν στο να κάνουν την Ολλανδία τον αποκλειστικό προμηθευτή για την Ευρώπη: θα κάνουν το φυσικό αέριο διαθέσιμο όταν η τιμή του υπερβαίνει κάποιο συγκεκριμένο επίπεδο, ακριβώς όπως οι Ηνωμένες Πολιτείες θεωρούνται ως ο αποκλειστικός παραγωγός στην παγκόσμια αγορά άνθρακα και η Σαουδική Αραβία στην παγκόσμια οικονομία πετρελαίου. Έχοντας αυτές τις εγκαταστάσεις στην Ολλανδία θα μπορούσε επίσης να επιτρέψει την αναβολή του μεγάλου κόστους που συνδέεται με την εγκατάσταση συμπίεσης στο Groninger καθώς η πίεση του φυσικού αερίου πέφτει και κατά συνέπεια πέφτει και η παραγωγή.

Μερικώς εξαντλημένα κοιτάσματα φυσικού αερίου είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν ως χώροι αποθήκευσης, αλλά μπορεί να τους παίρνει πολύ χρόνο για να γεμίσουν και να αδειάσουν και έτσι στερούνται ευελιξίας. Οι χώροι αποθήκευσης σε σπήλαια αλατιού που μπορούν να γεμίσουν ή να αδειάσουν σε λιγότερο από ένα μήνα είναι γενικά πιο αποτελεσματικοί, αλλά χρειάζονται μεγαλύτερη χρηματική επένδυση. Δεδομένου ότι η Exxon και ορισμένες άλλες μεγάλες εταιρείες προφανώς ψάχνουν με κάθε τρόπο για μια θέση στον ανταγωνισμό στο φυσικό αέριο που η Energy Directorate της Ευρωπαϊκής Ένωση οραματίζεται ως πρωταρχικό στοιχείο για την οικοδόμηση του μέλλοντος της ενέργειας στην Ευρώπη, η στρατηγική τους είναι να έχουν όσο το δυνατόν περισσότερους αποθηκευτικούς χώρους σε μια περιοχή όσο το δυνατόν μεγαλύτερη. Αυτό είναι σχεδόν σίγουρα μια καλή επιχειρηματική κίνηση βραχυπρόθεσμα, αν και τι θα αποδειχθεί σε βάθος χρόνο – όταν οι προμήθειες από τη Νορβηγία, το Ηνωμένο Βασίλειο και την Ολλανδία θα είναι ολοφάνερα ανίκανες να ανταποκριθούν στη ζήτηση της Ευρώπη και οι εταιρείες όπως η Exxon θα πρέπει να βασίζεται στο φυσικό αέριο και το LNG της Ρωσίας για την εξυπηρέτηση αυτών των αποθηκευτικών χώρων – μένει να αποδειχθεί.

Η αποθήκευση εμφανίζεται συχνά να έχει σπάσει την ικανότητα των βίαιων αλλαγών στον καιρό να αλλάζουν τις τιμές του φυσικού αερίου κατά ένα μεγάλο ποσό, δεδομένου ότι η ικανότητα της ζήτησης για διόγκωση πέραν των χωρητικοτήτων του συστήματος φυσικού αερίου έχει περιοριστεί δραστικά. Αλλά ταυτόχρονα πάντοτε θα υπάρχουν τοπικές «αιχμές» στην τιμή εξαιτίας της δυσκολίας της παράδοσης του φυσικού αερίου. Είναι αυτή η δυσκολία, παρεμπιπτόντως, που δημιουργεί ένα από τα κύρια εμπόδια στη μετατροπή των αγορών του φυσικού αερίου στις ανταγωνιστικές αγορές όπως αυτές παρουσιάζονται στα διδακτικά βιβλία.

Ένα από τα πιο ωραία θέματα στην ενεργειακή οικονομία είναι οι βραχυπρόθεσμες τιμές του πετρελαίου και το ίδιο φαίνεται να ισχύει και για το φυσικό αέριο εφόσον οι άμεσε και οι παράγωγες αγορές φυσικού αερίου λειτουργούσαν με τέτοιο τρόπο ώστε ορισμένα σημαίνοντα πρόσωπα να θεωρούν ότι όντως λειτουργούν. Αυτό το θέμα συνάδει με την αποθήκευση μέσω της έννοιας των κέντρων αγοράς φυσικού αερίου όπου, όπως και με τα καταστήματα 7-11, οι τιμές θα ήταν ορατές για άμεσο φυσικό αέριο, υπηρεσίες μεταφοράς σε διάφορες χρονικές στιγμές, αποθήκευση και σχετικά παράγωγα. Στην πραγματικότητα, σε ιδανικές καταστάσεις, οι αποθηκευτικοί χώροι θα ήταν ένα αναπόσπαστο κομμάτι των κέντρων αγοράς ενώ, φυσικά, τα ίδια τα κέντρα θα αναλάμβαναν την εμφάνιση *κόμβων* στους οποίους θα συνέκλινε ένας αριθμός αγωγών και επιπλέον όπου θα «πάρκαρε» το φυσικό αέριο που δεν μετακινείται ανάμεσα σε αγοραστή και πωλητή.

Η αποθήκευση βελτιώνει την αποτελεσματικότητα των συστημάτων φυσικού αερίου και, τηρουμένων των αναλογιών, μειώνει το κόστος για τους καταναλωτές στο σύνολό τους. Παραμένει ανοιχτό το ερώτημα, ωστόσο, αν η παρουσία μια ακόμη πιο επαρκούς αποθήκευσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένας από τους λόγους που δικαιολογούν την αναδιοργάνωση των αγορών φυσικού αερίου με τον τρόπο που προτείνει η Διεύθυνση Ενέργειας της Ευρωπαϊκής Ένωσης.

Προτού πάμε σε μια άλλη πτυχή αυτού του θέματος, θα ήταν χρήσιμο να εξετάσουμε το σκηνικό του φυσικού αερίου στη Λατινική Αμερική, που είναι αποτελεί τη βασική συνιστώσα της ενοποιημένης ενεργειακής αγοράς που διαμορφώνεται σε εκείνο το μέρος του κόσμου. Το πιο φιλόδοξο πρόγραμμα μέχρι στιγμής φαίνεται να είναι ο αγωγός Βολιβίας-Βραζιλίας, του οποίου οι μέτοχοι συμπεριλαμβάνουν την Enron και τη Shell. Αυτός ο αγωγός κοστίζει λίγο παραπάνω από 2 δισεκατομμύρια ευρώ και είναι 3.2000 χιλιόμετρα μακρύς: από τη Σάντα Κρουζ της Βολιβίας, περνά ανατολική του Σάο Πάολο της Βραζιλίας και πάλι πίσω στη σημαντική πόλη της Βραζιλίας Πόρτο Αλέγκρε. Προσέξτε τους αριθμούς: το έργο ανέρχεται σε 625.000 ευρώ/χιλιόμετρο.

Φαινομενικά, ο αγωγός αυτός θα οδηγήσει στην κατασκευή σταθμών παραγωγής ενέργειας και βιομηχανικών σε ολόκληρη την περιοχή. Ένα άλλο έργο που ανακινείται συχνά αφορά το κοίτασμα φυσικού αερίου στο Camisea, το οποίο είναι το μεγαλύτερο κοίτασμα φυσικού αερίου στη Λατινική Αμερική. Έχουν περάσει 15 χρόνια, ωστόσο, χωρίς κάποια μεγάλη εκμετάλλευση του χώρου, γιατί η τοπική ζήτηση δε δικαιολογεί την κατασκευή ενός αγωγού τόσο δαπανηρού όπως αυτός που αναφέραμε παραπάνω – ούτε έχει κριθεί ότι ένας μικρότερος αγωγός θα είχε νόημα αν πρόκειται να συμβεί πραγματική ανάπτυξη μέσα στις τρεις ή τέσσερις χιλιάδες χιλιόμετρα του χώρου. Η ιδανική εξαγωγική αγορά εκτιμάται ότι είναι η Βραζιλία, όπου η έλλειψη ενέργειας έχει χαρακτηριστεί ως «χρόνια».

Σε αντίθεση π.χ. με την Ευρώπη όπου οι κύριες επενδύσεις στον τομέα του φυσικό αέριο προγραμματίζονται ανεξάρτητα αν η κατάσταση στο ρυθμιστικό τομέα, η απελευθέρωση και/ή η ιδιωτικοποίηση είναι σημαντικές στη Λατινική Αμερική προκειμένου να προσελκύσουν τα δισεκατομμύρια ευρώ σε ξένες επενδύσεις που είναι προφανώς απαραίτητα προκειμένου να βελτιστοποιηθεί η εκμετάλλευση των ενεργειακών πόρων. Στην Αργεντινή και τη Χιλή, η απελευθέρωση της αγοράς έχει αρχίσει εδώ και μια δεκαετία, αλλά μένει να φανεί αν θα ριζώσει στις χώρες του Βορρά.

3.3 Ρύθμιση και Απελευθέρωση

Τα επιχειρήματα υπέρ της απελευθέρωσης είναι σαφή, αλλά το ίδιο ισχύει και για τα επιχειρήματα κατά. Το κύριο επιχείρημα για την απελευθέρωση είναι ότι με τον τρόπο που πηγαίνουν τα πράγματα σήμερα στον κόσμο, οι αγορές φαίνεται να έχουν δίκιο πιο συχνά απ' ότι οι ρυθμίσεις και οι ρυθμιστικές αρχές. Αυτό είναι πιθανότατα αλήθεια σε πολλές περιπτώσεις, αλλά βεβαίως δεν είναι πάντα αληθές. Το βασικό πρόβλημα εδώ είναι πολλές αγορές στην πραγματική ζωή όχι μόνο δε λειτουργούν με την ευελιξία και αποτελεσματικότητα που αυτές δείχνουν στα διδακτικά βιβλία αλλά δε μπορούν κιόλας. Και όταν προκύπτουν τέτοιες καταστάσεις, πρέπει να κληθούν οι ρυθμιστικές αρχές.

Ο σερ Alan Walters – πρώην προσωπικός σύμβουλος της πολύ συντηρητικής Πρωθυπουργού της Βρετανίας, Margater Thatcher – περιλαμβάνει ορισμένες από αυτές τις καταστάσεις στο διάσημο βιβλίο του (που έχει εκδώσει σε συνεργασία με τον Richard Layard). Λέει ότι η κυβερνητική παρέμβαση «προτείνεται συνήθως» όταν υπάρχουν αυξανόμενες αποδόσεις κλίμακας, αδιαιρετότητες, τεχνολογικές εξωτερικές επιπτώσεις και/ή αποτυχία της αγοράς που συνδέεται με την αβεβαιότητα.

Η λέξη κλειδί παραπάνω είναι η λέξη «συνήθως». Αυτό που σημαίνει είναι ότι μπορεί να υπάρχουν καταστάσεις στις οποίες η ρύθμιση είναι επικίνδυνη, ακόμη κι αν όλες οι παραπάνω ενοχλήσεις που αναφέρθηκαν είναι παρούσες σε κάποιο βαθμό. Το πρόβλημα είναι η ανίχνευση, η αναγνώρισης και/ή η εκτίμηση της δύναμης και του σκοπού τους. Αυτός είναι ένας από τους λόγους που ο John Maynard Keynes είπε ότι «η οικονομία είναι ένα εύκολο θέμα που είναι δύσκολο».

Το κύριο ζήτημα με την απελευθέρωση του φυσικού αερίου – και σε κάπως μικρότερο βαθμό της ηλεκτρικής ενέργειας – είναι να διασφαλίσουμε ότι μπορεί να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά εξειδικευμένες και αμετάκλητες επενδύσεις. Ο τρόπος με τον οποίο έγινε αυτό στο παρελθόν είναι η εισαγωγή μακροπρόθεσμων συμβολαίων τα οποία αφαιρούν την αβεβαιότητα που σχετίζεται με αυτές τις επενδύσεις. Μεταξύ των πραγμάτων που αυτό σημαίνει για το φυσικό αέριο ήταν ότι θα μπορούσαν να κατασκευαστούν αγωγοί ενός βέλτιστου μεγέθους γιατί οι αγοραστές είχαν εξασφαλιστεί εκ των προτέρων για την πλήρη δυναμικότητα των εν λόγω αγωγών. Για λόγους που θα αποσαφηνιστούν τώρα, αυτή η ρύθμισης είχε ως αποτέλεσμα την ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής και του κόστους μεταφοράς, κάτι που βοήθησε στη μείωση της τιμής του φυσικού αερίου στους τελικούς καταναλωτές. Το φυσικό αέριο κοστίζει σχεδόν σε ολόκληρο τον κόσμο λιγότερο απ' ό,τι το ισοδύναμο θερμικά πετρέλαιο.

Ο Bill Tilden, ο σπουδαίος Αμερικανός τουρίστας, πρόσφερε στους θαυμαστές και μαθητές του τον ακόλουθο κανόνα: «πάντα να αλλάζετε ένα παιχνίδι που χάνετε. Ποτέ μην αλλάζετε ένα παιχνίδι που το έχετε κερδίσει.» και σε εκείνες τις χώρες και περιοχές όπου η περιεκτική ρύθμιση αποτελεί ένα χαμένο παιχνίδι θα έπρεπε να είχε αλλάξει. Αλλά όπως γίνεται με την κακή τύχη, γίνονται προσπάθειες για να αλλάξει παντού. Για παράδειγμα, οι επιχειρήσεις που έχουν προμηθεύσει για πολλά χρόνια το μεγαλύτερο κομμάτι της Δυτικής Ευρώπης με άφθονες προμήθειες φυσικού αερίου σε χαμηλό κόστος πρόκειται να «κατακερματιστούν». (Το ίδιο ισχύει και σε πολλές περιπτώσεις ηλεκτρικής ενέργειας: στη Σουηδία και τη Νορβηγία, οι οποίες έχουν τα χαμηλότερα κόστη σε ηλεκτρική ενέργεια, η απελευθέρωση – δηλ. «η αλλαγή του παιχνιδιού» - θα σήμαινε τελικά την αύξηση των τιμών ηλεκτρικής ενέργειας για όλους τους τελικούς καταναλωτές του ηλεκτρισμού εκτός από τις μεγαλύτερες εταιρείες. Αυτές οι εταιρείες έχουν σημαντική οικονομική δύναμη που μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν στις διαπραγματεύσεις τους με τους προμηθευτές ενέργειας. Αλλά όπως σημειώθηκε και κάπου αλλού σε αυτό το βιβλίο, η αβεβαιότητα που προκαλείται από το γεγονός ότι δε δίνεται έμφαση στις ρυθμίσεις των μακροπρόθεσμων συμβολαίων θα μπορούσε επίσης να λειτουργήσει εις βάρος των μεγαλύτερων αγοραστών, ειδικά αν οι πωλητές διαθέτουν σημαντικής αγοραστική δύναμη.)

Ο πλέον δηκτικός ακαδημαϊκός παρατηρητής της απελευθέρωσης του φυσικού αερίου είναι πιθανώς ο Καθηγητής David Teece του Πανεπιστημίου της Καλιφόρνια. Σε ένα δημιουργικό έγγραφο (1990) ο Teece ιχνηλατεί την ιστορία της απελευθέρωσης στις Ηνωμένες Πολιτείες. Για τον τρόπο σκέψης του, το αρχικό στάδιο της συνολικής απελευθέρωσης έχει «θέσει σε κίνδυνο τη μακροπρόθεσμη ασφάλεια και δημιούργησε ορισμένες ανεπάρκειες». Ο Teece επίσης αρνείται ότι μια σειρά βραχυπρόθεσμων συμβολαίων (και/ή άμεσων συναλλαγών) θα μπορούσε να υποκαταστήσει την κάθετη ολοκλήρωση.

Το πιο σημαντικό είναι ότι μας προσδιορίζει τι θεώρησε εκείνος πως είναι η μεγαλύτερη γκάφα απελευθέρωσης: *η ελεύθερη πρόσβαση* – η οποία μερικές φορές συγχέεται με την *κοινή μεταφορά*. Η κοινή μεταφορά συνεπάγεται την υποχρέωση του μεταφορέα (π.χ. ενός αγωγού ή μιας γραμμής ηλεκτρικής ενέργειας) να παρέχει πρόσβαση στη χωρητικότητα που διαχειρίζεται ο μεταφορέας σε αναλογική βάση. Αν, για παράδειγμα, ένας νέος συναλλασσόμενος αιτείται μια μεταφορά, αυτή πρέπει να γίνει αποδεκτή, ακόμα κι αν σημαίνει ότι πρέπει να μειωθεί κάποια άλλη μεταφορά για άλλους συναλλασσόμενους. Κατ' αντιδιαστολή, οι μεταφορείς με ελεύθερη πρόσβαση, όπως οι περισσότεροι αγωγοί φυσικού αερίου, παρέχουν πρόσβαση σε μια βάση FCFS (= first come, first serve: ο πρώτος που έρχεται, εξυπηρετείται και πρώτος) για όλους τους πελάτες που είναι πρόθυμοι να πληρώσουν τη μέγιστη ταρίφα του αγωγού. Άπαξ και η χωρητικότητα χρησιμοποιείται πλήρως, ο μεταφορέας πρέπει να αρνηθεί τους νέους πελάτες.

Πριν βυθιστούμε βαθύτερα σε αυτό το θέμα, με νέους ορισμούς και ονόματα, οι αναγνώστες θα πρέπει να σκεφτούν το εξής: τα εκ των υστέρων δυσμενή αποτελέσματα για τον συναλλασσόμενο δεν συνεπάγονται την εκ των προτέρων αναποτελεσματικότητα από την πλευρά των ρυθμιστικών αρχών και/ή των παραγόντων της αγοράς. Αυτό που μπορεί να σημαίνει είναι η αλλαγή στο οικονομικό περιβάλλον που ήταν απρόβλεπτη από τις ρυθμιστικές αρχές και τους συμμετέχοντες ομοίως και η οποία, όταν βιωθεί, δε θα μπορούσε να ενταχθεί σε βραχυχρόνια περίοδο εξαιτίας της ανθεκτικής φύσης των πολύ δαπανηρών δομών και μηχανημάτων που χρησιμοποιούνται στη βιομηχανία φυσικού αερίου.

Χωρίς να το ξέρουν, πολλοί απορρυθμιστές και οι υποστηρικτές τους θέλουν οι εγκαταστάσεις παραγωγής και μεταφοράς φυσικού αερίου να εμφανίζουν τα πιο ελκυστικά χαρακτηριστικά των οικονομικών αγορών. Αυτά περιλαμβάνουν την ταχεία μετάδοση των πληροφοριών, τις μεταφορές χωρίς τριβές των εν λόγω περιουσιακών στοιχείων, τους μεγάλους αριθμούς συναλλασσομένων (αγοραστών, πωλητών, μεσαζόντων κλπ), μαζί με δυναμικές ενδεχόμενες (π.χ. παράγωγες) αγορές που μπορούν να κινήσουν τη ρευστότητα που απαιτείται για να πραγματοποιηθεί η αποτελεσματική αντιστάθμιση (και κερδοσκοπία).

Η παρουσία όλων ή των περισσοτέρων από τα παραπάνω χαρακτηριστικά θα μπορούσε πραγματικά να καταστήσει την προτεινόμενη απελευθέρωση (δηλ. την επαναρύθμιση) μια ελκυστική πρόταση, αλλά δεδομένων των περιορισμών στις πραγματικές αγορές φυσικού αερίου, υπάρχουν αμφιβολίες για το κατά πόσο αυτό το ιδανικό θα μπορούσε να υλοποιηθεί. Σκεφτείτε, για παράδειγμα, την ακόλουθη υπεραπλουστευμένη παρουσίαση ενός από τα πιο ενοχλητικά προβλήματα που οι προτεινόμενες αλλαγές θα μπορούσαν να επιφέρουν.

Κάποιος έρχεται στην πόρτα σας για να σας λίγο φυσικό αέριο, το οποίο μπορεί να κατέχει αλλά και όχι προς το παρόν. Αλλά ανεξάρτητα αν ανήκει σε αυτόν ή όχι, πρέπει σίγουρα να αποκτήσει χώρο στον αγωγό για να σας το φέρει. Ή, εργαζόμενη από άλλη κατεύθυνση, η Κα Πωλήτρια αποκτά τη χωρητικότητα του αγωγού που χρειάζεται για να μεταφέρει Χ μονάδες φυσικού αερίου, αλλά όταν χτυπάει την πόρτα σας, εσείς της λέτε με φιλικό τρόπο ότι έχετε όλο το φυσικό αέριο που χρειάζεστε. Πώς αλήθεια λύνονται τέτοια όμοια προβλήματα; Ένας τρόπος είναι να έχουμε ένα κεντρικό μηχανογραφικό σύστημα που προσδιορίζει ταυτόχρονα τις τιμές του φυσικού αερίου σε όλα τα μέρη, καθώς επίσης και πλήρεις πληροφορίες για την τιμή των μεταφορικών υπηρεσιών. Υπό αυτές τις συνθήκες, τα ενδιαφερόμενα μέρη θα μπορούσαν να πουλήσουν και να αγοράσουν φυσικό αέριο και χώρο στον αγωγό με βάση τις τιμές που εμφανίζονται στις οθόνες των υπολογιστών τους. Σε ένα πλήρως ανεπτυγμένο σύστημα, ιδανικά, θα μπορούσαν να αποκτούν μια ποικιλία από προθεσμιακές και μελλοντικές τιμές καθώς και τιμές αγοραπωλησιών.

Ο Teece, ωστόσο, θέτει ανάγλυφα μερικές από τις πτυχές αυτού του ρόδινου οράματος όταν αναφέρει έναν παίκτη αυτών των αγορών που λέει ότι η διευθέτηση των μεταφορών στις διακρατικές βιομηχανίες φυσικού αερίου στις Ηνωμένες Πολιτείες συνεπάγεται «χαοτικές μηνιαίες υποδείξεις στους ελεγκτές της μεταφοράς μέσω αγωγών». Επιπλέον, με τους κύριους αγωγούς να έχουν σχεδόν 1.000 πελάτες, όταν πριν είχαν 20 με 30, το κόστος της διαχείρισης του συστήματος έχει αυξηθεί έως και το 15%. Πιο σημαντικό είναι το ότι παρά τις υπεράνθρωπες προσπάθειες καθ' όλο το 24ωρο, αποτελεί «ανωμαλία» το να ταιριάξουν οι εντολές αγοράς και πώλησης. Κατά συνέπεια, συμβαίνουν πολύ συχνά τεράστιες ανισορροπίες.

Συμβαίνουν πολύ συχνά και σε μεγάλο βαθμό είναι «ανίατες». Η αναπόφευκτη δυσκολία είναι ότι το φυσικό αέριο δεν είναι πάντοτε ανταλλάξιμο. *Ανταλλαξιμότητα* σημαίνει ότι ορισμένα περιουσιακά στοιχεία μπορούν πάντα ή σχεδόν πάντα να υποκαθιστούν το ένα το άλλο – π.χ. τα νομίσματα των χωρών της Δυτικής Ευρώπης τείνουν να γίνουν ανταλλάξιμα γιατί κάποια πράγματα όπως οι υψηλής ταχύτητας μεταφορές και η διαιτησία που κρατούν τις τιμές στη γραμμή. (Η διαιτησία έχει να κάνει με το νόμο της μίας τιμής: σε μια ενιαία αγορά υπάρχει μόνο μία τιμή για ένα αγαθό ή μια υπηρεσία. Αυτό διαχειρίζεται συνήθως με το να αγοράζει κανείς φθηνά ή πουλώντας «ακριβά».) Δεν έχουμε όμως αυτήν την ευχάριστη κατάσταση με το φυσικό αέριο. Η τιμή του φυσικού αερίου στο Α μπορεί να μην είναι η ίδια με την τιμή του χημικά όμοιου φυσικού αερίου στο Β και η διαιτησία που θα μπορούσε να εξισώσει τις τιμές τους – λαμβάνοντας υπόψη και τις τιμές μεταφοράς – μπορεί να μην είναι σε θέση να λάβει χώρα εξαιτίας της απουσίας αγωγού μεταξύ του Α και του Β ή της απουσίας ικανοποιητικής χωρητικότητας σε κάποιον ήδη υπάρχοντα αγωγό.

Η απελευθέρωση του φυσικού αερίου στις ΗΠΑ εισήχθη και υποστηρίχθηκε άνευ όρων από το ίδιο είδος ατόμων που έχουν αναλάβει την υποστήριξη στην Ευρώπη. Για παράδειγμα, όταν η Αμερικανική Ομοσπονδιακή Επιτροπή για τη Ρύθμιση Ενέργειας (Federal Energy Regulation Commission, FERC) ισχυρίστηκε ότι είχε προβεί σε οικονομική ανάλυση αποδεικνύοντας τις αρετές και την αποτελεσματικότητα της απελευθέρωσης τόσο για τους καταναλωτές φυσικού αερίου όσο και για την εθνική οικονομία, μηνύθηκε αμέσως από ένα λόμπι που είναι κατά της απελευθέρωσης (Citizen Action, δηλ. Δράση Πολιτών) και αναγκάστηκε να παραδεχτεί ότι στην πραγματικότητα καμιά ανάλυση «επιστημονικού» χαρακτήρα» δεν είχε συμβεί.

Ούτε είναι δυνατό μια τέτοια ανάλυση να πραγματοποιηθεί, δεδομένου ότι υπάρχει τεράστια πιθανότητα για λάθος αποτέλεσμα.

3.4 Οριακά κόστη και τιμολόγηση του φορτίου αιχμής

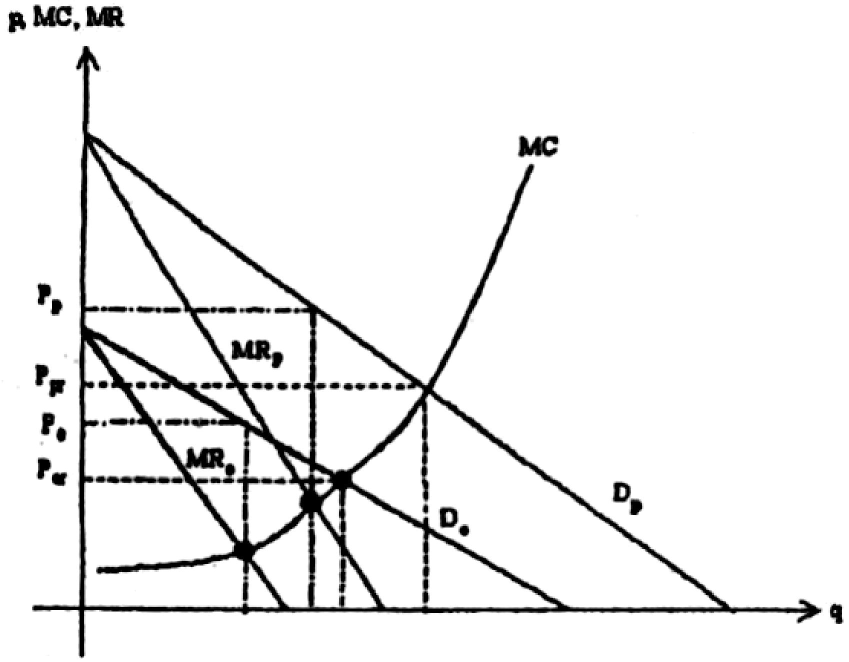
Η τιμολόγηση του φορτίου αιχμής συνήθως συζητείται σε σχέση με την ηλεκτρική ενέργεια και συχνά απασχολεί το είδος του διαγράμματος «ενιαίας τεχνικής» που θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω. Μπορεί να υπάρξουν ορισμένες ερωτήσεις, ωστόσο, ως προς το πόσο αποτελεσματική είναι αυτή η προσέγγιση, δεδομένου ότι σχεδόν όλα τα μεγάλα συστήματα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας χαρακτηρίζονται από πολλαπλές τεχνολογίες. Ο ισχυρισμός εδώ είναι ότι απεικονίζοντας τα συστήματα φυσικού αερίου ως τεχνολογίες απλών τεχνικών μπορεί κατά περίπτωση να αποτελεί ένα χρήσιμο παιδαγωγικό ξεκίνημα.

Το κυριότερο θέμα συζήτησης σε αυτό το κομμάτι αφορά ένα μοντέλο με μακρά ιστορία στη βιβλιογραφία των οικονομικών. Το περίφημο βιβλίο του Ray Ree (1984) βασίζεται σε μεγάλο βαθμό σε αυτό το μοντέλο και οι συνιστώσες του μοντέλου χρησιμοποιούνται ίσως στα πιο γλαφυρά κεφάλαια ενός από τα πιο καλαίσθητα βιβλία στη μικροοικονομία – αυτό των Layard και Walters (1978). Έχω χρησιμοποιήσει πολύ πρόσφατα αυτού του είδους την κατασκευή για να συζητήσουμε την τιμολόγηση της ηλεκτρικής ενέργειας στη Σουηδία, αν και στην πραγματικότητα είναι πιο κατάλληλο για την αίθουσα διδασκαλίας παρά για τον πραγματικό κόσμο. Ωστόσο είναι πολύτιμο για να εισάγει του μαθητές (αλλά και άλλους) σε ορισμένες περίπλοκες θεωρητικές πτυχές των καταστάσεων τιμολόγησης της ηλεκτρικής ενέργειας.

Στο παρακάτω σχήμα γίνεται μια σύντομη εξέταση του προβλήματος του φορτίου αιχμής που αφορά με ιδιωτική επιχείρηση. – π.χ. το Luna Park στο Σύδνεϋ ή το Riverview Park στο Σικάγο. Αλλά η περισσότερη βιβλιογραφία σχετικά με αυτό το θέμα ασχολείται με τις δημόσιες επιχειρήσεις (δηλ. της επιχειρήσεις κοινής ωφέλειας): οι καμπύλες ζήτησης δεν είναι «επίπεδες» ή τέλεια ελαστικές, αλλά σε κάθε περίπτωση η μορφή των καμπυλών ζήτησης αναλύεται στο κεφάλαιο για τα μονοπώλια στα «βασικά» σχολικά σας βιβλία. Δεν υπάρχουν, ωστόσο, οριακές καμπύλες εξόδων. Ο λόγος γι' αυτό είναι ότι οι Layard και Walter καταφεύγουν σε αυτόν που καλούν «κανόνα τιμολόγησης», με τον οποίο εννοούν τον κανόνα καθορισμού των τιμών για την ανάλυση της δημόσιας πολιτικής: «βρείτε την παραγωγή η οποία, για τις υφιστάμενες εγκαταστάσεις, εξισώνει την τιμή ζήτησης με το οριακό κόστος και τότε αλλάξτε το οριακό κόστος (και την τιμή ζήτησης) για την εν λόγω παραγωγή.» Όταν μιλούν για οριακό κόστος σε αυτό το εδάφιο εννοούν το βραχυπρόθεσμο οριακό κόστος.

Αυτό ακούγεται απόλυτα σαφές, ιδιαίτερα αν θυμόμαστε πως τόσο ο Richard Layard όσο και ο Alan Walter είναι σπουδαίοι οικονομολόγοι. Το πρόβλημα, ωστόσο, είναι ότι ο μηχανικός-οικονομολόγος της Electricité de France προτιμά να σκέφτεται υπό την άποψη του μακροπρόθεσμου οριακού κόστους. Το θέμα αυτό θα λάβει περισσότερη προσοχή στη συνέχεια, αλλά ο αναγνώστης καλείται να θυμάται ότι η θεωρητική κριτική που γίνεται εδώ δε μας λέει ολόκληρη την ιστορία.

Υποθέστε ότι ξεκινάμε την αναλυτική εργασία μας εξετάζοντας την τιμολόγηση σε μια ιδιωτική επιχείρηση στην οποία η ζήτηση για παραγωγή ποικίλλει σημαντικά κατά τη διάρκεια μιας δεδομένης χρονικής περιόδου. Πάρτε, για παράδειγμα, μια «κανονική» εβδομάδα σε ένα πάρκο ψυχαγωγίας όπως το Luna Park στο Σύδνεϋ. Τι θα μπορούσαμε να έχουμε εδώ είναι η κατάσταση που παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα. Η καμπύλη ζήτησης για την περίοδο αιχμής είναι D_p και για την περίοδο εκτός αιχμής είναι D_o. Οι αντίστοιχες τιμές είναι p_p και p_o, οι οποίες – μαζί με τις εκροές – υπολογίζονται εκεί όπου MC = MR για την κάθε καμπύλη. Αυτές οι τιμές μεγιστοποιούν τα ιδιωτικά κέρδη, τα οποία μπορεί να αποδειχθούν πολύ μεγάλα, ανάλογα με το μέσο (δηλ. το μοναδιαίο) κόστος στο οποίο πραγματοποιείται η παραγωγή. Ο αναγνώστης θα πρέπει, στην πραγματικότητα, να σχεδιάσει μια καμπύλη μέσου κόστους και να σιγουρευτεί ότι μπορεί να προσδιορίσει το κέρδος και, αν είναι δυνατό, τις «καλές» ζημίες που σχετίζονται με αυτού του είδους την άσκηση.



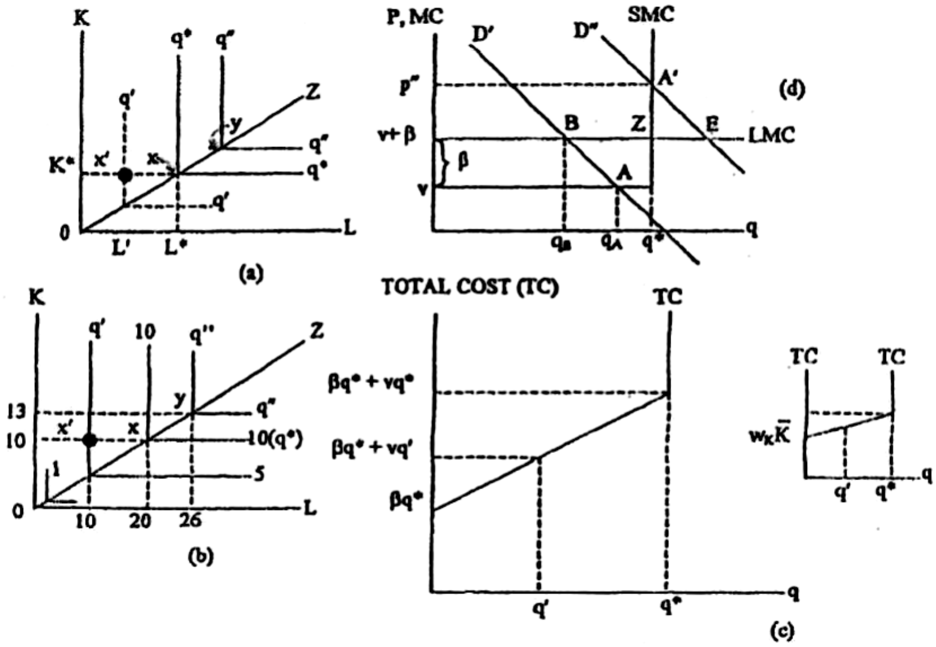
Σχήμα 3.6

Τώρα ας υποθέσουμε ότι η κυβέρνηση της Αυστραλίας αποφασίζει να ρυθμίσει τα πάρκα ψυχαγωγίας. Θα έδειχναν τότε πως οι τιμές στο παραπάνω διάγραμμα θα έπρεπε να καθοριστούν στα p_{pr} και p_{or}. Αυτό μας δίνει την τιμολόγηση του οριακού κόστους και για να κρατήσουμε τα πράγματα απλά δε θα ασχοληθούμε εδώ με το αν το οριακό κόστος σημαίνει SMC (short-run marginal cost) ή LMC (long-run marginal cost). Αν και αν είχαν συμβεί όλες οι «προσαρμογές», θα είχαμε SMC.

Θεωρητικά, αυτή είναι η καλύτερη ρύθμιση για τους καταναλωτές, γιατί συνεπάγεται πως τώρα πληρώνουν για μια μονάδα παραγωγής (τις υπηρεσίας ψυχαγωγίας) την ακριβή αξία των πόρων που χρησιμοποιήθηκαν για να παράγουν αυτό το αποτέλεσμα. Φυσικά, έχουμε υπερβεί τα όρια της πραγματικότητας σε αυτό το παράδειγμα, αφού υποθέτουμε σιωπηρά ένα τελείως ομοιογενές αποτέλεσμα. Ωστόσο, για άλλη μια φορά μπορούμε να θυμηθούμε τι είπε ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς του 20ου αιώνα, ο Bertrand Russel, για τις προσεγγίσεις: «Αν και αυτό μπορεί να φαίνεται παράδοξο, ολόκληρη η επιστήμη κυριαρχείται από την ιδέα της προσέγγισης».

Όσο αφορά τους παραγωγούς/ιδιοκτήτες, αν ληφθούν υπόψη τα κόστη στην τιμή της καλύτερης εναλλακτικής χρήσης των πόρων που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή «q» (δηλ. το ευκαιριακό κόστος), τότε οι τιμές p_{pr} και p_{or} θα περιλαμβάνουν ένα κανονικό κέρδος γιατί, όπως πρέπει πάντα να θυμάστε, στα οικονομικά (εν τούτοις όχι και στη λογιστική) το *κανονικό κέρδος* είναι ένα έξοδο. (Αν οι παραγωγοί/ιδιοκτήτες δε μπορούν να κάνουν ένα εύλογο κέρδος με μια δεδομένη επιχείρηση, τότε θεωρητικά, έχουν πάντα την «ευκαιρία» να εγκαταλείψουν αυτή τη δραστηριότητα και να μεταφέρουν τους πόρους που είχαν ακινητοποιημένους σε «ασφαλή» οικονομικά κεφάλαια, όπως τα κυβερνητικά ομόλογα. Υπάρχουν, βέβαια, κάποια προβλήματα εδώ με την αντιστρεψιμότητα, ωστόσο η επιδείνωση αυτή θα πρέπει να ληφθεί υπόψη πριν ξεκινήσει κάποιο συγκεκριμένο έργο.)

Τώρα ας πάμε στη συνήθη τεχνική της ενιαίας εκπροσώπησης, η οποία χαρακτηρίζει τις «απολύτως συμπληρωματικές» συναρτήσεις ή τις συναρτήσεις παραγωγής του τύπου εισροών-εκροών. Στην παρακάτω εικόνα, στα (a) και (b) έχουμε την τεχνική που εξετάζουμε, με q = F(K, L) = min (K/a, K/b), όπως και η εξίσωση για τη συνάρτηση παραγωγής. Πρώτα απ’ όλα ας κοιτάξουμε στις θέσεις όπως το x και το y, όπου δεν έχουμε πλεονασμό κεφαλαίου ή εργασίας. Σε αυτές τις θέσεις έχουμε K/a = L/b. Στην ίδια εικόνα στο (b), για παράδειγμα, παίρνοντας a=1 και b=2 και με K = 10 = $\overline{K}$ και L = 20 = $\overline{L}$ έχουμε q = min (10/1, 20/2) = min (10, 10) = 10. «Min» φυσικά σημαίνει «ελάχιστο» και οι διαστάσεις του ‘a’ είναι κεφάλαιο ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος και για το ‘b’ εργασία/παραγόμενο προϊόν. Μπορεί επίσης να σημειωθεί ότι το ‘q’ είναι σε μονάδες αν περίοδο χρόνου. Πρόκειται για ροή.



Σχήμα 3.7

Συνεχίζουμε εξετάζοντας την κατάσταση στο x΄, όπου K = L = 10. Από τη συνάρτηση της παραγωγής μας έχουμε ότι q = F (K, L) = min (K/a, L/b) = min (10/1, 10/2) = 5 και σε εκείνη τη θέση μπορούμε να μιλήσουμε για «πλεονασμό» του κεφαλαίου ή όπως τίθεται μερικές φορές «υπερβολική προσφορά κεφαλαίου». (Αν K/a > L/b, τότε q = L/b.)

Όσο αφορά τα κόστη, υποθέστε ότι μια μονάδα κεφαλαίου κοστίζει w_K ευρώ ανά χρονική περίοδο και το κόστος εργασίας w_L ευρώ ανά χρονική περίοδο. Η χρονική περίοδος που συνήθως χρησιμοποιούμε στη μικροοικονομία είναι το έτος, αλλά ακολουθώντας π.χ. το Rees (1984) χρησιμοποιούμε την ημέρα, που για το συγκεκριμένο είδος του προβλήματος αποδεικνύεται ότι απλοποιεί πάρα πολλά πράγματα. Συνεχίζοντας, αν υποθέσουμε μια κατάσταση όπως αυτή με το x, αλλά με q = 1, θα χρειαζόμασταν K=a και αυτό θα κόστιζε aw_K = β. Παρομοίως θα χρειαζόμασταν L=b το οποίο θα κόστιζε bw_L = v. Οι μονάδες του β και v είναι ευρώ ανά παραγόμενο προϊόν ανά χρονική περίοδο. (Άσκηση: Το q = 1 φαίνεται στην παραπάνω εικόνα στο (b). Δείξτε ποια είναι τα a και b!)

Το συνολικό κόστος οποιασδήποτε ποσότητας των προϊόντων που παράγονται με το ποσό κεφαλαίου K και την ποσότητα εργασίας L είναι $w_KK + w_LL$. Αν, για παράδειγμα, έχουμε K = K* και L = L*, τότε έχουμε (παίρνοντας τις τιμές των w από αυτές που έχουμε λίγο παραπάνω):

$$TC^* = w_K K^* + w_L L^* = (\beta/a)K^* + (v/b)L^* = \beta q^* + vq^* = (\beta + v)q^* \qquad (9)$$

Για οποιοδήποτε q σε ακτίνα OZ έχουμε ως κόστος του q: C = (v + β)q. Αν αυτό είναι σαφές, μπορούμε να στραφούμε στην περίπτωση ενός άλλου σημείου όπως το x΄. Εδώ έχουμε:

$$TC' = w_K K' + w_L L' = (\beta/a)K^* + (v/b)L' = \beta q^* + vq' \qquad (10)$$

Για άλλη μια φορά ο αναγνώστης θα πρέπει να κάνει μια παύση και να σιγουρευτεί ότι καταλαβαίνει αυτήν την άλγεβρα και υπό το πρίσμα του πιο πάνω σχήματος να ξέρει τι ακριβώς σημαίνει. Προσέξτε ότι στην παραπάνω σχέση το αποτέλεσμα είναι q΄ και όχι q* και ως εκ τούτου έχουμε 0 < q΄ < q*. Ένας τρόπος για να πάρουμε το συνολική καμπύλη κόστους και που δείχνεται στο προηγούμενο σχήμα στο (c) είναι να ξεκινήσουμε για K* στο ίδιο σχήμα στο (a) και να προχωρήσουμε στα δεξιά προς το x΄ και κάτω από το x. Αυτό αυξάνει το κόστος από $w_K K^*$ σε $w_K K^* + w_L L^*$ ή από βq* σε (βq* + vq*) καθώς η παραγωγή αυξάνεται από μηδέν σε q*.

Εξετάζοντας στο παραπάνω σχήμα το (c), θα πρέπει να γίνει σαφές ότι το βραχυπρόθεσμο οριακό κόστος είναι το v, αλλά αν δεν είναι σαφές, θα πρότεινα να το βρείτε πώς εξάγεται. Υποθέστε ότι έχουμε μια δεδομένη ποσότητα παραγωγής q και ότι είναι πιθανό να αυξηθεί κατά μία μονάδα (Δq = 1) αποκλειστικά με την αύξηση ενός μόνο μεταβλητού συντελεστή, που εδώ είναι η εργασία. (Θεωρήστε, για παράδειγμα, την περίπτωση στο x΄.) Η αύξησή μας στο κόστος, ΔC, είναι:

$$\Delta C = [v\,(q+1) + \beta q^*] - [vq + \beta q^*] = v = SMC = [TC\,(q + 1) - TC(q)] \qquad (11)$$

Για να επαναλάβω, παίρνουμε το SMC γιατί αλλάξαμε μόνο ένα μεταβλητό συντελεστή και έχουμε Δq = 1. Έτσι, ΔC/Δq = SMC = v. Ή, ο αναγνώστης μπορεί να εργαστεί κατευθείαν με την πιο προηγούμενη εξίσωση. [Αλλά προσέξτε το επόμενο: στην παραπάνω εξίσωση το v(q+1) σημαίνει (q+1) *πολλαπλασιασμένο* με v. Από την άλλη πλευρά το TC(q+1) σημαίνει ότι είναι το συνολικό κόστος σε *συνάρτηση* του (q+1)!]

Τώρα ας πάρουμε το μακροπρόθεσμο οριακό κόστος αλλάζοντας τιμές και στους δύο συντελεστές κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι θα ξεκινήσουμε από κάποιο σημείο όπως το x ή το y. Δε θα ξεκινήσουμε από το x΄ π.χ. γιατί τώρα θα μπορούμε να αυξήσουμε την παραγωγή απλά αυξάνοντας το L, ενώ αν αυξάναμε μόνο το K δε θα αυξάναμε την παραγωγή, απ' τη στιγμή που ήδη έχουμε πολύ μεγάλο K. Ας δούμε όμως τι θα συνέβαινε αν αυξάναμε και το K και το L στο σημείο x΄. Αυτό δε θα είχε κάποιο νόημα, αφού παίρνουμε την ίδια αύξηση στην παραγωγή που θα παίρναμε αν αυξάναμε μόνο το L. Για να το πούμε κάπως πιο επίσημα, αυτή δεν είναι μια βέλτιστη κίνηση: ήταν σπατάλη και ως εκ τούτο δε έχει θέση στη γενική οικονομική θεωρία – αν και οι κινήσεις σπατάλης δεν είναι άγνωστες στον πραγματικό κόσμο. Λαμβάνοντας ως αρχική παραγωγή την q* και αυξάνοντάς την κατά μία μονάδα παίρνουμε:

$$\Delta C = (v + \beta)(q^* + 1) - (v + \beta)q^* = (v + \beta) = LMC \qquad (12)$$

Αυτά τα οριακά κόστη φαίνονται στο παραπάνω σχήμα στο (d) όπου έχουν προστεθεί δύο καμπύλες ζήτησης, D΄ και D΄΄, με σκοπό τη συζήτηση των ακολούθων περιπτώσεων.

1) Τη συνηθισμένη εκδοχή των σχολικών βιβλίων με τιμολόγηση του μακροπρόθεσμου έναντι του βραχυπρόθεσμου οριακού κόστος: δηλ. την κατάσταση (d) του προηγούμενου σχήματος, τιμολογώντας στο B ή στο A πάνω στην καμπύλη ζήτησης D΄.
2) Μια ασυνήθιστη αλλά μη αμφισβητούμενη περίπτωση τιμολόγησης βραχυπρόθεσμου οριακού κόστους στο σημείο A΄ στην καμπύλη ζήτησης D΄΄.
3) Τιμολόγηση του φορτίου αιχμής, όπου – προκειμένου να κρατήσουμε την ανάλυση απλή – έχουμε δύο καμπύλες ζήτησης, π.χ. D΄΄ (αιχμή) και D΄ (μη αιχμή), κάθε μια από τις οποίες είναι έγκυρη για 12 ώρες της ημέρας. Ωστόσο, αυτή η περίπτωση χρειάζεται μια κάπως πιο λεπτομερή εξέταση απ' αυτήν που γίνεται στην παραπάνω εικόνα στο (d). Ορισμένα πράγματα σ' αυτό το διάγραμμα είναι άνευ σημασίας και απλώς παρεισφρύουν στην πορεία, ενώ άλλα είναι εξαιρετικώς σημαντικά και θα πρέπει να τους δοθεί μεγάλη σημασία.

Όπως θα ανακαλύψει πολύ σύντομα ο αναγνώστης, από αλγεβρικής και/ή γραφικής παράστασης έχουμε μια πολύ απλή ιστορία. Τα πράγματα περιπλέκονται όταν πρέπει να καταφύγουμε σε λέξεις. Η τιμολόγηση SMC (σε αυτήν την ανάλυση) σημαίνει το να παράγουμε στο A, με τιμή ν και ποσότητα παραγωγής q_A. Αυτό δεν είναι ιδιαίτερα ελκυστικό από επιχειρηματική άποψη, δεδομένου ότι δεν ανακτούμε κανένα από τα κεφαλαιουχικά κόστη (βq*). Ο τρόπος με τον οποίο προσεγγίζεται συνήθως αυτή η αδυναμία είναι ότι ο καθένας που θέλει πρόσβαση στο q θα πρέπει να πληρώσει ένα τέλος εισόδου. Επιπλέον αυτοί πληρώνουν ν για κάθε μονάδα που καταναλώνουν.

Αυτό που έχουμε εδώ είναι ένα παράδειγμα τιμολόγησης δύο μερών. Πόσο πολλά θα πρέπει να είναι τα (ολικά) τέλη εισόδου; Λοιπόν, τι θα λέγατε για $βq_A$; Αν επιβληθεί αυτό, τότε προφανώς θα είχαμε μια τιμολόγηση του μέσου κόστους από τη στιγμή που $(βq_A + νq_A)/q_A = β + ν$ = LMC = μέσο κόστος, το οποίο είναι και κάτι βολικό. Σημειώστε παρακαλώ, ωστόσο, ότι ακόμα δεν έχουμε ανακτήσει το συνολικό κόστος του μετοχικού κεφαλαίου. Είμαστε «ελλιπείς» κατά ένα ποσό $βq^* – βq_A = β (q^* – q_A)$, το οποίο είναι πολύ πιθανό να προστεθεί στο $βq_A$ προκειμένου να κρατήσει τους μετόχους από το να αφρίσουν.

Ανεξάρτητα από το ποια είναι τα τέλη εισόδου, έχουμε φύγει από το είδος της τιμολόγησης SMC που κάποιοι ακριβολόγοι όπως ο αείμνηστος Καθηγητής Schweppes του MIT επιθυμούσε, όπου τα τέλη εισόδου όλων των ποικιλιών και μεγεθών ήταν αυστηρά ταμπού. Γι' αυτόν, η τιμολόγηση SMC σήμαινε ακριβώς αυτό και τίποτα λιγότερο. Από την άλλη πλευρά, η Anna P. Della Valle κάποτε ενημέρωσε το Ferdinand Banks ότι η εκδοχή της για την τιμολόγηση SMC περιελάμβανε την αναγνώριση «περιορισμών», με την οποία προφανώς εννοούσε να παρέχει τη δυνατότητα στη διοίκηση των εταιρειών που ασχολούνται με την τιμολόγηση του SMC (= short-run marginal cost) για κάθε περιοχή να προσαρμόσουν τους λογαριασμούς του (όπου είναι απολύτως απαραίτητο) προς το συμφέρον της αποφυγής της αφερεγγυότητας. Όλα αυτά είναι ωραία και καλά, αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις τα τερτίπια αυτού του είδους φέρνουν την επιχείρηση πιο κοντά στο μέση απ' ό,τι στη βραχυπρόθεσμη τιμολόγηση του SMC. Πολύ πιο κοντά.

Μια αναφορά σε μια σημαντική σύγχρονη συζήτηση μπορεί να είναι σχετική εδώ. Η δημοτικότητα της τιμολόγησης SMC μεταξύ ορισμένων προσώπων μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι, θεωρητικά, αυτού του είδους η τιμολόγηση σημαίνει πως η τιμή που καταβάλλεται για όλα τις παραγόμενες μονάδες ενός προϊόντος είναι το οριακό κόστος του *τελευταίου* παραγόμενου προϊόντος. Υποθέστε λοιπόν ότι έχουμε μια καμπύλη προσφοράς – που ο αναγνώστης μπορεί να χαράξει αν θέλει – η οποία δείχνει ότι η επιχείρηση έχει τη δυνατότητα να παράγει 100 μονάδες ενός προϊόντος με οριακό κόστος για κάθε μονάδα του ενός ευρώ και 25 μονάδες με οριακό κόστος δύο ευρώ. Αν η ζήτηση είναι 110 μονάδες, τότε με τιμολόγηση SMC οι 110 μονάδες θα πωληθούν με κόστος ανά μονάδα τα 2 ευρώ και συνολικά έσοδα 220 ευρώ. Αν είχε χρησιμοποιηθεί η μέση τιμολόγηση του κόστους , τα συνολικά έσοδα θα ήταν (Σταθερό Κόστος + Συνολικό Μεταβλητό Κόστος/q). Υποθέστε σε αυτό το παράδειγμα ότι το σταθερό κόστος ήταν 50. Τότε τα συνολικά «επιτρεπόμενα» έσοδα θα ήταν 100 + 20 + 50 = 170 και η τιμή της μίας μονάδας που θα είχαμε τότε για 110 μονάδες πάλι, θα ήταν 170/110 = 1,55 ευρώ. Πώς ταιριάζει αυτή η παρατήρηση με την προηγούμενη συζήτηση; Στην εικόνα που έχουμε δείξει πιο πάνω, με τιμολόγηση SMC και χρησιμοποιώντας ως καμπύλη ζήτησης τη D΄΄ η τιμή θα ήταν p΄΄. Με τιμολόγηση μέσου κόστους και καμπύλη ζήτηση της D΄΄ πάλι, η τιμή θα ήταν ν+β. Ποια θα προτιμούσατε;

Η κατάσταση των περιπτώσεων στο B είναι στο ίδιο σχήμα που χαρακτηρίζει την τιμολόγηση LMC. Στη θεωρία, οι καταναλωτές πληρώνουν μια τιμή ανά μονάδα της τάξης του ν+β για την παραγωγή q_B, αλλά για άλλη μια φορά το κόστος του κεφαλαίου δεν έχει ανακτηθεί. Η απόκτησή του θα απαιτήσει τέλη εισόδου της τάξης του $β(q^* – q_B)$. Η Electricité de France (EdF), που φαινομενικά ασχολείται με την τιμολόγηση LMC, μπορεί να συμπεριλάβει το σύνολο ή μέρος του ποσού στην κατηγορία «χρηματοοικονομικές χρεώσεις». Ένα από τα επιχειρήματά τους για την τιμολόγηση LMC είναι ότι αυτή η επιπλέον χρέωση είναι χαμηλότερη της (λεγόμενης) τιμολόγησης LMC απ’ ό,τι η τιμολόγηση SMC. Οι οικονομολόγοι της EdF είναι οι καλύτεροι στον κόσμο σε ό,τι αφορά αυτά τα θέματα, αλλά ακόμη κι έτσι θεωρώ ότι τα αποτελέσματα των προσπαθειών τους τείνουν αναπόφευκτα στην τιμολόγηση μέσου κόστους.

Το δεύτερο σημείο πιο πάνω έχει να κάνει με το σημείο τομής της καμπύλης ζήτησης D΄΄ στο σημείο A΄, όπου το SMC είναι μεγαλύτερο από το LMC και η τιμή που χρεώνεται στους καταναλωτές, η p΄΄, είναι μεγαλύτερη από το ν+β. Δε χρειάζεται να ψάξουμε πολύ βαθιά σε αυτήν τη συζήτηση, αν και αυτό επιφέρει για μερικούς παρατηρητές την ομορφιά του να δημιουργεί κανείς αναλογίες σε ένα σταθερό αποτέλεσμα μέσω του συστήματος της τιμής, δεδομένου ότι μόνο αυτά τα άτομα ή επιχειρήσεις που το «αξίζουν οικονομικά» θα είναι σε θέση να έχουν πρόσβαση στα αγαθά, ή τουλάχιστον σε ένα μεγάλος μέρος τους που θα το επιθυμούν.

Αλλά υπάρχει και μια άλλη πολύτιμη έννοια με την οποία ασχολούμαστε εδώ και η οποία θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω μιας και είναι πολύ σημαντική. Όταν $p > ν + β$, όπως συμβαίνει στο A΄, υπάρχει ζήτηση για *νέα* παραγωγική ικανότητα: η τιμή που αποδίδεται στη νέα παραγωγική ικανότητα είναι μεγαλύτερη από το κόστος της. Η ακριβής ποσότητα της νέας επιθυμητής δυναμικότητας (ή παραγωγικής ικανότητας) είναι εκείνη που θα παρείχε μια αύξηση στην παραγωγή που αντιστοιχεί στο σημείο E. Δεν υπάρχει λόγος να συζητήσουμε διεξοδικά, σε ένα στοιχειώδες βιβλίο, το τεράστιο πρόβλημα της πρόνοησης για νέα παραγωγική ικανότητα σε καιρό αργής ανάπτυξης και των υποβέλτιστων λύσεων που μπορεί να προκαλέσει, αλλά στην πρόσφατα απελευθερωμένη αγορά ηλεκτρικής ενέργειας στο Ηνωμένο Βασίλειο αυτό το θέμα δε μπορεί να αποφευχθεί. Προφανώς, προκειμένου να ενθαρρυνθούν οι ιδιωτικές επιχειρήσεις ώστε να πραγματοποιούν επέκταση της παραγωγικής τους ικανότητας όταν αυτό είναι απαραίτητο, έχει αποφασισθεί ότι η τιμή της «ισορροπίας» – ό,τι και να σημαίνει σε αυτό το πλαίσιο – πρέπει να είναι η τιμή LMC. Αυτό αποτελεί πραγματικά μια έκπληξη, ο κύριος που ήταν υπεύθυνος για την απελευθέρωση/ρύθμιση ήταν, κατά τη διάρκεια της ακαδημαϊκής του καριέρας, ένας σθεναρός υπερασπιστής της SMC τιμολόγησης. Έδωσε μάλιστα και μια περίφημη μαθηματική απόδειξη για το λόγο που αυτή ήταν η μόνη σωστή λειτουργία της τιμολόγησης των αγαθών και/ή των υπηρεσιών των οργανισμών κοινής ωφέλειας.

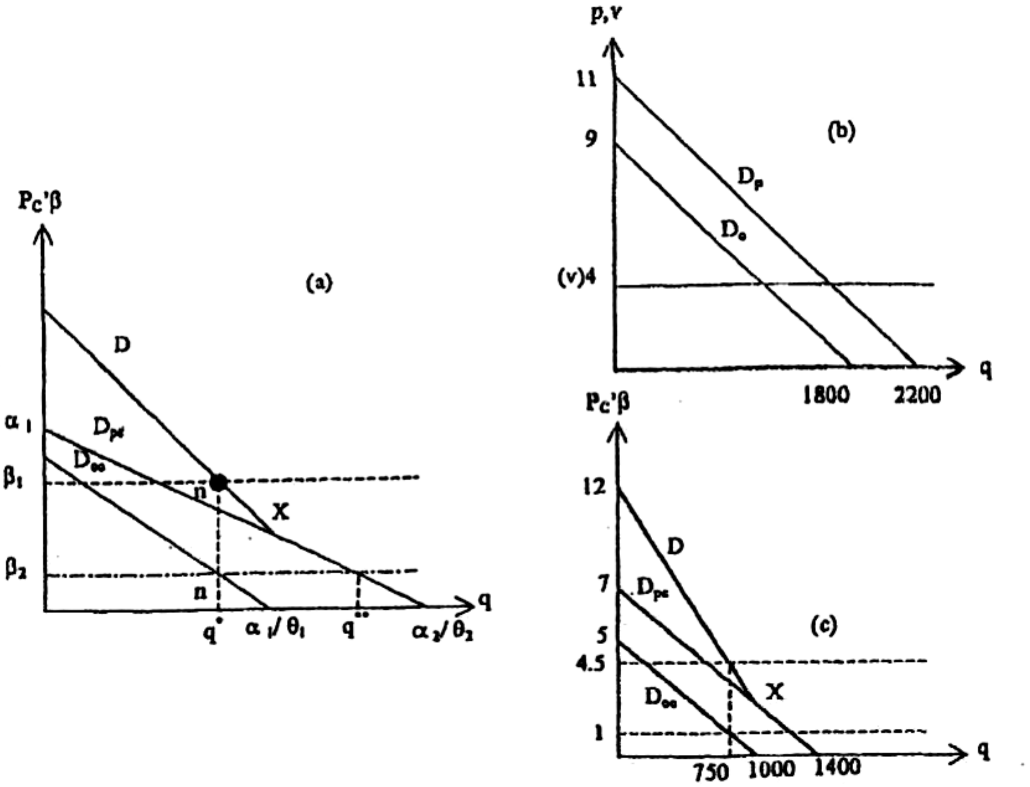
Αυτό μας φέρνει στην επόμενη φάση-πρόκληση της συζήτησής μας για την τιμολόγηση του φορτίου αιχμής. Καταρχάς, ας επαναλάβουμε κάτι που ειπώθηκε πιο πάνω σε συνδυασμό με το σχήμα 4.7: όταν $p > v + \beta$, δηλώνει ότι είναι δικαιολογημένη μια *νέα* παραγωγική ικανότητα, αλλά η ζήτηση για ορισμένη *υπάρχουσα* παραγωγική ικανότητα είναι θετική όταν $p > v$. Αυτό που πρέπει να κατανοήσει κανείς είναι ότι υπάρχει βάσιμη επιχείρημα για την παροχή νέας δυναμικότητας όταν η ποσότητα για την οποία είναι πρόθυμοι να πληρώσουν οι καταναλωτές είναι μεγαλύτερη από την τιμή προσφοράς (ή $p - v > \beta$).

Ως παράδειγμα για αυτό για το οποίο μιλάμε, θεωρήστε την κατάσταση ακριβώς στα αριστερά του q_A στο σχήμα 4.7d, παίρνοντας τη D΄ ως τη σχετική καμπύλη ζήτησης. Εδώ η τιμή που αποδίδεται στην παραγωγική ικανότητα είναι θετική (δηλ. $p > v$) αλλά δεν είναι αρκετά θετική για να την επιθυμούμε ($p - v \geq \beta$). Κατ' αντιδιαστολή, στα αριστερά του q_B, βλέπουμε ότι $(p - v) > \beta$: η τιμή που αποδίδεται στην παραγωγική ικανότητα είναι μεγαλύτερη από το κόστος της. Εγκαθιστούμε λοιπόν τη νέα παραγωγική ικανότητα; Η απάντηση σε αυτήν την περίπτωση είναι *όχι*, επειδή σύμφωνα με το διάγραμμα έχουμε ήδη την παραγωγική ικανότητα που χρειάζεται για να παράγει άλλη μια μονάδα – την οριακή μονάδα – παραγωγής q και αυτό είναι το αντικείμενο της άσκησης. Αλλά στο σημείο A, με τη σχετική καμπύλη ζήτησης D΄΄, η τιμή που αποδίδεται στην παραγωγική ικανότητα είναι μεγαλύτερη από το κόστος της και έχουμε έρθει στο όριο της παραγωγικής ικανότητας, το οποίο αντιστοιχεί σε q*. Κατά συνέπεια, θα πρέπει να προστεθεί παραγωγική ικανότητα.

Στην άσκηση στην οποία εργαζόμαστε τώρα, η υπόθεση θα είναι ότι διαθέτουμε καμπύλες ζήτησης q και ότι θέλουμε να πάρουμε τη βέλτιστη απόφαση σχετικά με τη δυναμικότητα. Τι σημαίνει βέλτιστη απόφαση σε αυτό το πλαίσιο; Αν ξεχάσουμε το δυσάρεστο γεγονός ότι αν ασχολούμασταν με την ηλεκτρική ενέργεια θα χρειαζόμασταν πάντα να έχουμε ορισμένη εφεδρική δυναμικότητα (δεδομένου ότι οι υπερφορτώσεις μπορούν να οδηγήσουν σε διακοπές ρεύματος), τότε στο σχήμα 4.7d η βέλτιστη δυναμικότητα θα σχετιζόταν με το σημείο Z όπου οι καμπύλες SMC και LMC τέμνονται. Επίσης ξέρουμε, φυσικά, το κόστος (ανά μονάδα παραγωγής) του μεταβλητού συντελεστή, ή συντελεστών – ο οποίος είναι ο v – και έτσι από εδώ και πέρα τα πράγματα πηγαίνουν ομαλά. (Προσέξτε: το σημείο Z δεν πρέπει ποτέ να λάβει «ιδιαίτερη» προσοχή σε συζητήσεις αυτού του είδους.)

Υπάρχει λοιπόν ομαλή εξέλιξη των πραγμάτων, αλλά όχι και πολύ ομαλή, επειδή γιατί πλέον δεν έχουμε μία καμπύλη ζήτησης, αλλά δύο: ζήτηση εκτός αιχμής (D_o) και ζήτηση αιχμής (D_p). Πρέπει επίσης να εκτιμηθεί ότι οι καμπύλες ζήτησης που θέλουμε δεν είναι μόνο καμπύλες ζήτησης για το προϊόν, αλλά επίσης και για τη φυσική δυναμικότητα που παράγει αυτό το προϊόν. Για να καταλάβουμε αυτό, θα σώσουμε τους εαυτούς μας από πολύ κόπο αν υποθέσουμε ότι έχουμε 12-ωρες περιόδους για κάθε κατηγορία ζήτησης. Έτσι, αν το (οριακό) κόστος της παραγωγικής ικανότητας στο συνολικό χρονικό διάστημα (των 24 ωρών) που μας ενδιαφέρει είναι β, τότε το κόστος σε κάθε 12-ωρη περίοδο είναι β/2 και η βέλτιστη κατάσταση για την παραγωγική ικανότητα μπορεί να γραφεί ως $(p_o - v) + (p_p - v) = \beta/2 + \beta/2$. Αυτή η έκφραση θα προκύψει με την ακόλουθη συζήτηση.

Η σειρά των αναλύσεων εδώ θα είναι αυτή που ακολουθεί. Πρώτα θα γίνει αλγεβρική ανάλυση την οποία, ελπίζουμε, ότι θα είναι σε θέση να παρακολουθήσουν πολλοί αναγνώστες και της οποίας ο τελικός σκοπός είναι να δείξει ποιοι πληρώνουν για τη δυναμικότητα και πόσο πολύ πληρώνουν. Στη συνέχεια θα ακολουθήσει ένα αριθμητικό (κυρίως) παράδειγμα που θα αναφέρεται στα ίδια με πριν και το οποίο θα καλύψει όλα τα αμφιλεγόμενα στοιχεία. Κάτι στο οποίο θα πρέπει να δώσει ιδιαίτερη προσοχή ο αναγνώστης στη συνέχεια είναι το μεγάλο πλεονέκτημα του να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει γραμμικές καμπύλες ζήτησης: οι καμπύλες της μορφής y = α + θx, όπου το θ είναι η κλίση και η οποία είναι αρνητική, ενώ το α είναι το σημείο τομής στον κάθετο άξονα (y) και το σημείο τομής με τον οριζόντιο άξονα (x) είναι (-α/θ). Κάποιοι αναγνώστες ίσως να ήθελαν να επωφεληθούν της ευκαιρίας αυτής για να ανανεώσουν τις γνώσεις τους γι’ αυτό το θέμα, οπότε πρέπει να δουν τι μπορούν να κάνουν για τον καθορισμό της κλίσης και των σημείων τομής της απλής εξίσωσης p = 11 – (1/200)q και στη συνέχεια να κάνουν μια πρόχειρη γραφική παράσταση για την εξίσωση αυτή. Άλλοι αναγνώστες μπορεί να μη θέλουν να συμμετάσχουν σε αυτό το έργο και τους προτείνω να πάνε κατευθείαν στην επόμενη σειρά ασκήσεων.
Αυτό μας φέρνει στο παρακάτω σχήμα 4.8a και την καμπύλη ζήτησης D, την οποία παίρνουμε αφαιρώντας πρώτα το v από τις καμπύλες ζήτησης αιχμής και μη αιχμής προκειμένου να πάρουμε αυτό που ο καταναλωτής είναι πρόθυμος να πληρώσει για δυναμικότητα q. Στη συνέχεια, προσθέτουμε τις καμπύλες αυτές κάθετα.



Σχήμα 3.8

Η άλγεβρα μπορεί να ξεκινήσει καταγράφοντας τις εξισώσεις των καμπυλών ζήτησης για το q΄ (δηλ. της παραγωγής και όχι της παραγωγικής ικανότητας q). Αυτές φαίνονται στο σχήμα 3.8b.

$$D_o : p_o' = \alpha_1' - \theta_1 q_o' \text{ (12-ωρη, εκτός αιχμής ζήτηση)}$$

$$D_p : p_p' = \alpha_2' - \theta_2 q_p' \text{ (12-ωρη, ζήτηση αιχμής)}$$

Στη συνέχεια πηγαίνουμε στις καμπύλες ζήτησης, οι οποίες φαίνονται στο σχήμα 3.8a. Αυτές προκύπτουν αφαιρώντας το ν από τις παραπάνω σχέσεις.

$$D_{oc} : p_{oc} = \alpha_1 - \theta_1 q_{oc} \qquad (\alpha_1 = \alpha_1' - \nu)$$

$$D_{pc} : p_p = \alpha_2 - \theta_2 q_{pc} \qquad (\alpha_2 = \alpha_2' - \nu)$$

Αυτές οι δύο εκφράσεις προστίθενται κάθετα προκειμένου να πάρουμε τη συνολική ζήτηση και τότε ορίζεται ίση με το κόστος των 24 ωρών της εισροής κεφαλαίου. Στο σχήμα 3.8a, παρατηρήστε την περίπτωση όταν η παραγωγή είναι q* και πώς λαμβάνει χώρα η πρόσθεση: το διάστημα n (= D_{oc}(q*)) προστίθεται στο D_{pc}(q*) για να πάρουμε το D(q*). Τώρα μπορούμε να γράψουμε:

$$(\alpha_1 - \theta_1 q_{oc}) + (\alpha_2 - \theta_2 q_{pc}) = \beta/2 + \beta/2 = \beta \qquad (13)$$

Δεδομένου ότι έχουμε προσθέσει κάθετα, μπορούμε να θέσουμε $q_{oc} = q_{oc} = q$. Έτσι έχουμε για την αριστερή έκταση του D (δηλ. στα αριστερά του X):

$$(\alpha_1 + \alpha_2) - (\theta_1 + \theta_2)q = \beta \qquad (0 \leq q \leq (\alpha_1/\theta_1))$$

Στα δεξιά του D (που είναι το τμήμα του D_{pc} μέχρι τα δεξιά του X) έχουμε:

$$\alpha_2 - \theta_2 q = \beta \qquad (\alpha_1/\theta_1 \leq q \leq (\alpha_2/\theta_2))$$

Από εδώ πάμε σε δύο πιθανές τιμές του β: β_1 και β_2. Η πρώτη από αυτές (β_1) τέμνει το D με τέτοιο τρόπο ώστε να μας δίνει την τιμή του q που είναι ίση με q* (q = q*). Υπό αυτές τις συνθήκες, τόσο οι καταναλωτές αιχμής όσο και οι εκτός αιχμής πληρώνουν για την παραγωγική ικανότητα. Παίρνουμε τα ποσά που πληρώνουν από τις κάθετες αποστάσεις μέχρι τις αντίστοιχες καμπύλες ζήτησης. Αυτή είναι η «μοναδιαία» επιβάρυνση και η συνολική επιβάρυνση προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τη μοναδιαία με το q*. Γι’ αυτό πρέπει να προστεθούν οι πληρωμές στο μεταβλητό συντελεστή, οι οποίες ανέρχονται σε νq*.

Όσο για τη β_2, αυτή τέμνει το D στα δεξιά του X, όπου το D συμπίπτει με το D_{pc}. Με αυτήν τη ρύθμιση, μόνο οι καταναλωτές αιχμής πληρώνουν για τη δυναμικότητα, αν και οι δύο ομάδες πληρώνουν τα κόστη λειτουργίας που είναι v για κάθε μονάδα παραγωγικής ικανότητας που πραγματικά χρησιμοποιούν.

Μερικές παρατηρήσεις στην ορολογία και μεθοδολογία είναι δυστυχώς απαραίτητα σε αυτό το σημείο. Στην παραπάνω έκθεση οι λέξεις παραγωγική ικανότητα (ή δυναμικότητα) και παραγωγή έχουν χρησιμοποιηθεί, σε κάποιο βαθμό, ως συνώνυμες, αν και αυτό που συμβαίνει είναι ότι με δεδομένα τα κόστη ζήτησης και παραγωγικής ικανότητας, η παραγωγική ικανότητα (q) είναι το αντικείμενο της άσκησης. Αλλά πήραμε το κόστος της παραγωγικής ικανότητας (β) από το κόστος (ή ενοικίαση) του κεφαλαίου (w_K) και έτσι μπορεί να το δει κανείς και με έναν άλλο τρόπο. Έχοντας ως δεδομένο το κόστος κεφαλαίου (και το κόστος του μεταβλητού συντελεστή), επιλέγουμε ένα ορισμένο κεφάλαιο – και έτσι και παραγωγική ικανότητα (π.χ. την q*), η οποία με τη σειρά της επιτρέπει μία συγκεκριμένη παραγωγή. Γιατί να πάμε κατ' αυτόν τον τρόπο και όχι με ισόποσα και ίσου κόστους προϊόντα, όπως στο εισαγωγικό μάθημα; Η απάντηση είναι ότι εφόσον ενδιαφερόμαστε εδώ για την τιμολόγηση του φορτίου αιχμής, είναι σκόπιμο να ελαχιστοποιήσουμε το ρόλο των συντελεστών παραγωγής (δηλ. των εισροών). Αυτό δε σημαίνει ότι αγνοούμε το γεγονός ότι (γλωσσικά) η παραγωγική ικανότητα είναι πιο στενά συνδεδεμένη με την εισροή κεφαλαίου απ' ό,τι με την παραγωγή, αλλά ότι θα πρέπει να καθορίσουμε ποιος πρόκειται να πληρώσει για τον εξοπλισμό που παράγει ένα προϊόν (π.χ. φυσικό αέριο). Στην τελευταία πρόταση της προηγούμενης παραγράφου, για παράδειγμα, αυτό που λέμε είναι ότι όταν η παραγωγή στο σχήμα 3.8a είναι η q*, το κεφάλαιο πληρώνεται από τους καταναλωτές αιχμής και σε ό,τι αφορά αυτή τη συγκεκριμένη παραγωγή οι εκτός αιχμής καταναλωτές δεν πληρώνουν κάτι – αν και πρέπει να πληρώσουν τα (μεταβλητά) κόστη λειτουργίας για την παραγωγή που καταναλώνουν. (Και μην ξεχνάτε, η συζήτηση εδώ αφορά την τιμολόγηση οριακού κόστους σε *ιδανική* περίπτωση. Έτσι, αποφέρει κάποιες κατευθυντήριες γραμμές στην τιμολόγηση στον πραγματικό κόσμο, αν και σε ορισμένες περιπτώσεις αυτές θα μπορούσαν να είναι πολύτιμες κατευθυντήριες γραμμές.)

Το τελευταίο βήμα στην παρουσίασή μας είναι ένα αριθμητικό παράδειγμα. Θα πάρουμε v = 4 και β = 4,5. Για τις καμπύλες ζήτησης που αφορούν τη μισή μέρα παίρνουμε $p_p' = 11 - (1/200)q_p'$ για τη D_p και $p_o' = 9 - (1/200)q_o'$ για τη D_o. Θέτοντας τα p ίσα με το μηδέν παίρνουμε ως «περιοχές» για τα q: $0 \leq q_p' \leq 2.200$ και $0 \leq q_o' \leq 1.800$. Αυτές οι τιμές φαίνονται στο σχήμα 3.8b. Μπορούμε να τις θεωρήσουμε ως τη ζήτηση π.χ. φυσικού αερίου ή ηλεκτρικής ενέργειας – δηλ. ένα *προϊόν*.

Στη συνέχεια αφαιρούμε το v (v = 4) από αυτές τις καμπύλες ζήτησης και παίρνουμε τις «καμπύλες» για ζήτηση παραγωγικής ικανότητας που φαίνονται στο σχήμα 4.8c. Αυτές είναι $p_{pc} = 7 - (1/200)q_{pc}$ με $0 \leq q_{pc} \leq 1.400$ και $p_{oc} = 5 - (1/200)q_{oc}$ με $0 \leq q_{oc} \leq 1.000$. Μπορούμε τώρα να πάρουμε την καμπύλη ζήτησης D που φαίνεται στο σχήμα 3.8c προσθέτοντας αυτές τις δύο εξισώσεις (που μας δίνει την περιοχή στα αριστερά του X) με την περιοχή προς τα δεξιά αν το X συμπέσει με το p_{pc}. Όλα αυτά καθίστανται σαφή στις παρακάτω εξισώσεις, όπου δίνονται ακόμη και οι περιοχές τιμών. Επιπλέον, από τη στιγμή που προσθέτουμε κάθετα, θέτουμε $q_{pc} = q_{oc} = q$. Έτσι έχουμε το σύστημα:

$$\beta = 12 - (2/200)q \qquad 0 \leq q \leq 1.000$$

$$\beta = 7 - (1/200)q \qquad 1.000 \leq q \leq 1.400$$

$\beta = 0$ σε κάθε άλλη περίπτωση

Με $\beta = 4,5$ μπορούμε να λύσουμε την πρώτη εξίσωση και να πάρουμε $q = 750$. Υποθέστε να είχαμε προσπαθήσει να λύσει τη δεύτερη εξίσωση. Τότε θα παίρναμε $q = 450$, αλλά αυτή η «λύση» δεν ανταποκρίνεται στον περιορισμό $1.000 \leq q \leq 1.400$. Όσο για τις τιμές των p_{pc} και p_{oc}, έχουμε $p_{pc} = 7 – (1/200)750 = 3,25$ και $p_{oc} = 5 – (1/200)750 = 1,25$.

Αυτό που έχουμε ανακαλύψει εδώ είναι ότι το (οριακό) κόστος της παραγωγικής ικανότητας – που είναι 4,25 (= 3,25 + 1,25) – βρίσκεται μεταξύ των χρήσεων αιχμής και εκτός αιχμής. Το συνολικό κόστος για μια μονάδα παραγωγής είναι επομένως 7,25 για τους χρήστες αιχμής (το οποίο παίρνουμε προσθέτοντας το μεταβλητό κόστος) και 5,25 για τους χρήστες εκτός αιχμής (= 1,25 + 4). Προσέξτε: Οι τιμές 7,25 και 5,25 είναι οι τιμές των *προϊόντων*.

Τώρα ας δούμε τι συμβαίνει όταν $\beta = 1$. Όπως θα επιβεβαιώσει και ο αναγνώστης (αλγεβρικά ή γραφικά), αυτό δε λειτουργεί με την πρώτη εξίσωση, αλλά με τη δεύτερη ο σωστός υπολογισμός αποφέρει $q = 1.200$. Αυτό «χωράει» στον περιορισμό $1.000 \leq q \leq 1.400$. Το κόστος της συνολικής παραγωγικής ικανότητας (= 1) βαραίνει τους καταναλωτές με φορτία αιχμής και αν κάνουμε το σχετικό υπολογισμό βρίσκουμε ότι $p_{oc} = – 1$. Από τη στιγμή που οι αρνητικές τιμές είναι αυστηρά εκτός ορίων, παίρνουμε $p_{oc} = 0$.

Αν και οι εκτός αιχμής καταναλωτές δεν έχουν να πληρώσουν τις επιβαρύνσεις για την παραγωγική ικανότητα, πρέπει να πληρώσουν τα κόστη λειτουργίας $v = 4$. Το ποσό που καταναλώνουν βρίσκεται απλά βάζοντας $p_{oc} = 0$ στην κατάλληλη εξίσωση: $0 = 5 – (1/200)q$, από την οποία παίρνουμε $q = 1.000$. Το συνολικό κόστος επομένως αυτών των 1.000 μονάδων για τους χρήστες εκτός αιχμής είναι 4 x 1.000 = 4.000.

3.5 Συμπεράσματα

Αυτό ήταν ένα μεγάλο κεφάλαιο, ωστόσο ήταν αναπόφευκτο να μην ασχοληθούμε με όσα είπαμε. Το φυσικό αέριο είναι ένα θέμα που πάντα θα είναι στην πρώτη γραμμή καθώς ο κόσμος χρειάζεται μια μεγάλη πηγή από υψηλής ποιότητας ενέργειας. Οι σοβαροί αναγνώστες αυτού του θέματος μπορεί να απαιτήσουν να μάθουν περισσότερα από αυτά που παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο και εδώ μπορεί να προταθεί το βιβλίο του Ferdinand Banks για το φυσικό αέριο που εκδόθηκε το 1987, καθώς και το βιβλίο του Angelier (1994).

Δεν έχουν ειπωθεί εδώ πολλά για τις περιβαλλοντικές πτυχές του φυσικού αερίου. Μπορώ να θυμηθώ ένα συνέδριο στο Χονγκ Κονγκ στο οποίο πολλοί εξήραμε το φυσικό αέριο στους υψηλούς ουρανούς. Αλλά τώρα, στη Σουηδία, που συζητείται η αντικατάσταση της πυρηνικής ενέργειας, το φυσικό αέριο τίθεται μερικές φορές στην ίδια κατηγορία με τον άνθρακα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ηλεκτρική Ενέργεια και Οικονομολογία

Όπως πολλοί αναγνώστες θα ξέρουν ήδη, ανοίχτηκαν πολλά θέματα νωρίτερα που βρίσκουν εφαρμογή, με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο, στην ηλεκτρική ενέργεια. Ο λόγος που εισήχθησαν είναι ότι οι περισσότεροι φοιτητές των οικονομικών δε θέλουν να υποβληθούν σε υπερβολική δόση φρασεολογίας και θεωρίας που έχουν να κάνουν με θέματα όπως η φόρτωση των εργοστασίων παραγωγής ενέργειας και τους παράγοντες που καθορίζουν την παραγωγική ικανότητα.

Όντας φοιτητής του Πολυτεχνείου, ασφαλώς και μπορώ να σεβαστώ αυτήν τη στάση. Ωστόσο υπάρχει κάτι από το οποίο δε μπορεί να ξεφύγει κανείς και αυτό είναι η καθοριστική σημασία της ηλεκτρικής ενέργειας, ή η μεγάλη πιθανότητα ότι πρόκειται να γίνει ακόμα πιο σημαντική. Για παράδειγμα, πριν λίγα χρόνια είχα ενημερωθεί επίσημα όταν σε πολλές περιπτώσεις είναι λάθος να περάσει κανείς από τη διαδικασία της χρήσης ορυκτού καυσίμου για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, αντί να γίνεται άμεση χρήση του καυσίμου. Αυτό συμβαίνει επειδή οι αποδόσεις της μετατροπής δεν είναι και ιδιαίτερα εντυπωσιακές: σε ορισμένες χώρες φαίνεται ότι για κάθε κιλοβατώρα ηλεκτρισμού που παράγεται, χρειάζονται περίπου τρεις ή τέσσερις κιλοβατώρες αρχικού καυσίμου (π.χ. πετρελαίου, άνθρακα ή φυσικού αερίου). Υπό αυτές τις συνθήκες, φαίνεται ότι για όλη αυτήν την ευκολία και παρουσία, το κόστος της ηλεκτρικής ενέργειας είναι πραγματικά πολύ υψηλό.

Δυστυχώς, αυτό είναι το λάθος συμπέρασμα, γιατί αν ρίξουμε μια προσεκτική ματιά στο τι έχει συμβεί σε χώρες όπως η Σουηδία και οι Ηνωμένες Πολιτείες, θα δούμε το σημαντικό ρόλο που έπαιξε η ηλεκτρική ενέργεια στην οικονομική ανάπτυξη. Μίλησα για «προσεκτική ματιά» επειδή οι Σουηδοί οικονομολόγοι έχουν εστιάσει στην αντικατάσταση των μηχανών (δηλ. του κεφαλαίου) για την εργασία, χωρίς να αναγνωρίζουν ότι το είδος της αύξησης της παραγωγής που λαμβάνει χώρα στη Σουηδία χαρακτήρισε την αντικατάσταση των μηχανών *και* της (ηλεκτρικής) ενέργειας για την εργασία. Ο τρόπος με τον οποίο έγινε αυτό έχει ως εξής.

Ενώ η ένταση της ενέργειας δεν αυξήθηκε σταθερά σε σχέση με την παραγωγή στη Σουηδία (και σε πολλές άλλες χώρες), αυξήθηκε σε σχέση με τη χρήση του κεφαλαίου και της εργασίας. Ήταν μια έλλειψη εξοικείωσης με τις λεπτομέρειες αυτού του φαινομένου που οδήγησε ορισμένους παρατηρητές να πιστέψουν, λανθασμένα, ότι η παραγωγή θα μπορούσε να αυξηθεί απεριόριστα ενώ η ενεργειακή ένταση της παραγωγής είτε θα παρέμενε στάσιμη ή θα μειωνόταν. Αυτό που συνέβη ήταν ότι οποιεσδήποτε μειώσεις στην ενεργειακή ένταση της παραγωγής θα μπορούσαν να εξηγηθούν από τις τεχνικές αλλαγές – σε μεγάλο βαθμό ενεργοποιούνται από τις ενεργοβόρες εισροές – αυξάνοντας την παραγωγή κατά τόσο μεγάλο βαθμό, ώστε σε ποσοστό επί τοις εκατό, η συνολική παραγωγή αυξήθηκε περισσότερο απ’ ό,τι η κατανάλωση ενέργειας (Προσέξτε: η ενεργειακή ένταση της παραγωγής = ενέργεια / μονάδες προϊόντος. Παρόμοια έκφραση υπάρχει και για την εισροή ενέργειας.)

Ακόμα πιο σημαντικό είναι το γεγονός ότι οικονομολόγοι όπως ο Sam Schurr του Electric Power Research Institute έχουν δείξει ότι η ηλεκτροδότηση έχει σημάνει μια ευελιξία στις βιομηχανικές επιχειρήσεις που θα ήταν αδύνατη με οποιαδήποτε άλλη μορφή ενέργειας και αυτός ήταν ο κύριος λόγος για την αύξηση της παραγωγικότητας που αναφέρθηκε πιο πάνω. Στο μέλλον θα είναι απαραίτητες οι μεγάλες ποσότητες ηλεκτρικής ενέργειας για τη βέλτιστη λειτουργία των υπολογιστών και της ρομποτικής. Και κάτι που όλοι φαίνεται να έχουν αγνοήσει είναι ότι τεράστιες ποσότητες ενέργειας μπορεί να απαιτηθούν για να μετατραπούν οι βιολογικοί και αντισυμβατικοί πόροι σε καύσιμα κίνησης.

4.1 Κάποιες εισαγωγικές παρατηρήσεις

Έχει ήδη επισημανθεί (στο κεφάλαιο 2) ότι ο τύπος για το ετήσιο εισόδημα είναι ένα εξαιρετικά σημαντικό εργαλείο. Υποθέστε ότι το χρησιμοποιούμε για να πάρουμε κάποια ιδέα για το *κόστος κεφαλαίου* για έναν πυρηνικό αντιδραστήρα, όπου το *κόστος επένδυσης* (I) είναι 2.000 ευρώ/κιλοβατώρα, το προεξοφλητικό επιτόκιο 9% και η περίοδος απόσβεσης – η οποία σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να θεωρηθεί ως «η πραγματική διάρκεια ζωής του εξοπλισμού» - είναι είκοσι χρόνια. Με άλλα λόγια, n = 20. (Παρατηρήστε ότι η περίοδος απόσβεσης είναι ο χρόνος στον οποίο θα πρέπει να πληρωθεί ο εξοπλισμός. Η πραγματική διάρκεια ζωής ενός καλά διατηρημένου εργοστασίου συνήθως θεωρείται ότι είναι περίπου τα 40 χρόνια). Στη συνέχεια έχουμε για το κόστος κεφαλαίου P_c:

$$P_c = \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} I = \frac{0{,}09(1+0{,}09)^{20}}{(1+0{,}09)^{20} - 1} 2.000 = 219\, \textit{δολλάρια / κιλοβατώρα / χρόνο} \quad (1)$$

Φυσικά, αυτό θα μπορούσε να είχε γραφεί σε ευρώ/έτος. Ας προσέξουμε επίσης ότι το προεξοφλητικό επιτόκιο που έχουμε πιο πάνω, το οποίο είναι αρκετά χαμηλό, μπορεί να θεωρηθεί ένα δίκαιο ποσοστό απόδοσης του επενδυμένου κεφαλαίου για τις δημόσιες επιχειρήσεις κοινής ωφέλειας και τις παρεμφερείς επιχειρήσεις που υπόκεινται σε ρύθμιση τιμών. Αυτές οι επιχειρήσεις είναι λιγότερο ή περισσότεροι σίγουρες ότι θα αποκτήσουν αυτό το ποσοστό απόδοσης.

Έχουμε τώρα το κόστος κεφαλαίου μιας μονάδας εξοπλισμού με ονομαστική *ισχύ* ενός κιλοβάτ. Αυτό που θέλουμε είναι το κόστος κεφαλαίου μιας μονάδας *ενέργειας*, που επιτυγχάνεται ως εξής: αν αυτή η μηχανή με την πολύ μικρή ενέργεια του ενός κιλοβάτ που δίνεται εδώ λειτουργούσε για 24 ώρες την ημέρα, κάθε μέρα του χρόνου, τότε θα μιλούσαμε για 365 (μέρες) x 24 (ώρες/ημέρα) = 8.760 ώρες. Τα 219 ευρώ έτσι, θα κατανέμονταν στις 8.760 ώρες και έτσι το κόστος κεφαλαίου θα ήταν 219/8.760 ευρώ ανά κιλοβατώρα το οποίο υπολογίζεται πολύ απλά σε 2,5 cents/kWh. Θυμίζοντας ότι 1 σεντ είναι 10 χιλιοστά, παίρνουμε τελικά 25 χιλιοστά/kWh. (Παρατηρήστε: τα χιλιοστά είναι μια ειδική έκφραση που δε χρησιμοποιείται παγκοσμίως.)

Αλλά δεν περιμένουμε τα μηχανήματα αυτά να είναι τέλεια και να λειτουργούν κάθε ώρα της κάθε ημέρας του έτους. Συνεπώς, ο *συντελεστής δυναμικότητας* – ή ο πραγματικός αριθμός ωρών που ο εξοπλισμός είναι σε λειτουργία σε σχέση με το συνολικό αριθμό των ωρών ενός έτους – είναι ανάγκη να εισαχθεί. (Αυτός ο συντελεστής δυναμικότητας συγχέεται πολλές φορές με τον *συντελεστή φόρτωσης*, αλλά ο συντελεστής φόρτωσης ορίζεται συνήθως ως ο λόγος των μέσων ημερησίων παραδόσεων για μια δοσμένη χρονική περίοδο.) Με συντελεστή δυναμικότητα 0,75, ο αριθμός των ωρών που λειτουργεί το παραπάνω τμήμα του εξοπλισμού μειώνεται σε 0,75 x 8.760 = 6.570 ώρες. Το κόστος κεφαλαίου αυξάνεται έτσι στα 33,3 χιλιοστά/kWh.

Προσέξτε όμως ότι ο ορισμός του συντελεστή δυναμικότητας που χρησιμοποιείται π.χ. από τη US Energy Information Administration (EIA – Διοίκηση Πληροφοριών για την Ενέργεια) λαμβάνει ως χρονική περίοδο το διάστημα του ενός χρόνου *μείον* την περίοδο κάθε χρόνου που χρησιμοποιείται για την «κανονική» συντήρηση, συμπεριλαμβανομένου και του ανεφοδιασμού. Έτσι, με βάση την πρακτική της EIA, οι κορυφαίες δέκα πυρηνικές μονάδες στον κόσμο έχουν συντελεστές δυναμικότητας που είναι πάνω από 98%. Πέντε από αυτές είναι στις ΗΠΑ και τρεις στην Ιαπωνία.

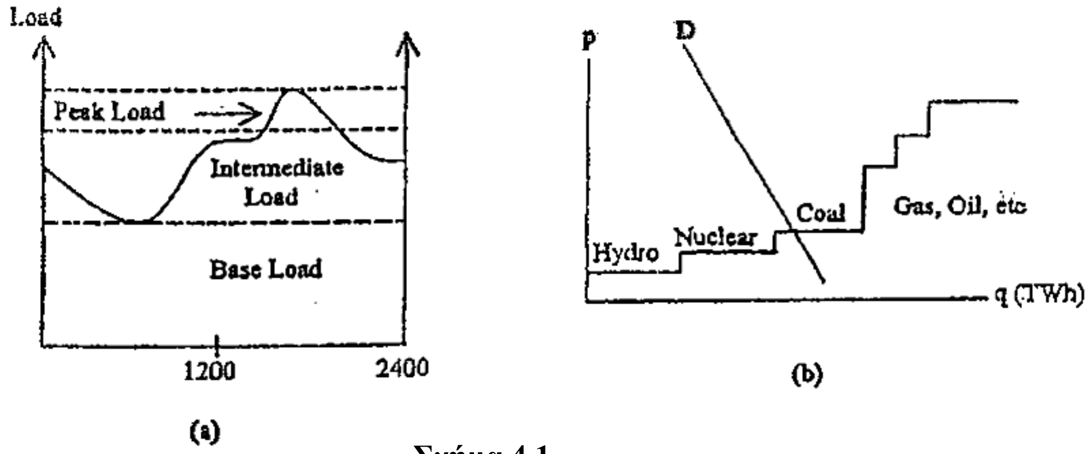
Οι πιθανότητες είναι ότι αυτά τα 33,3 χιλιοστά/kWh δε θα είναι χαμηλά αν συγκριθούν με το κόστος κεφαλαίου π.χ. για πετρέλαιο και άνθρακα – υποθέτοντας, φυσικά, ότι χρησιμοποιούμε το ίδιο προεξοφλητικό επιτόκιο και την ίδια περίοδο απόσβεσης. Από την άλλη όμως, τα κόστη για τα καύσιμα των πυρηνικών εγκαταστάσεων θα πρέπει να είναι χαμηλότερα από εκείνα που είναι για άλλους ενεργειακούς πόρους. Το αν συμφέρει οικονομικά ή όχι να χρησιμοποιηθεί αυτός ο εξοπλισμός θα εξαρτηθεί τότε σε αρκετά πράγματα που δε θα εκπονήσουμε εδώ γιατί αυτά διαφέρουν από χώρα σε χώρα. Αυτά τα πράγματα περιλαμβάνουν κόστη λειτουργίας-συντήρησης, κόστη διάθεσης των «αποβλήτων» και περιβαλλοντικά κόστη ποικίλων περιγραφών. Αλλά επίσης και το μέγεθος του συντελεστή δυναμικότητας: στο παραπάνω παράδειγμα ήταν 0,75, αλλά αν μπορούσε να φτάσει το 0,85–0,90 – όπως συμβαίνει σε εγκαταστάσεις «βέλτιστης πρακτικής» - αυτό θα έκανε την πυρηνική ενέργειας πολύ περισσότερο ελκυστική από πλευράς κόστους.

Αμφιβάλλω, ωστόσο, αν ακόμη μεγαλύτεροι συντελεστές δυναμικότητας θα ενίσχυαν τη δημοτικότητα της πυρηνικής ενέργειας με τους αντιπάλους της – κάτι που είναι καλό. Ο μεγαλύτερος κίνδυνος που τίθεται από την εν λόγω πηγή ενέργειας είναι η επανάπαυση από την πλευρά αυτών που τάσσονται υπέρ της και των επιχειρηματιών. Σε μια εποχή που κλιμακώνεται η ζήτηση για υψηλή κερδοφορία, υπάρχει πραγματική προοπτική ότι – σε μερικές εγκαταστάσεις – η επιθεώρηση, η συντήρηση και η γενικότερη εγρήγορση θα μειωθούν στο ελάχιστο προκειμένου να αυξηθούν οι διαθέσεις των μετόχων και οι μισθοί των διευθυντών.

Ερχόμαστε τώρα σε μια στοιχειώδη παρουσίαση ενός πολύ σημαντικού θέματος: το βέλτιστο μείγμα εγκαταστάσεων. Σε αυτό θα δοθεί αλγεβρική επεξεργασία αργότερα.

Πρώτα απ’ όλα υπήρξε μια διαδεδομένη στάση των οικονομολόγων να αγνοήσουν το βέλτιστο συνδυασμό εργοστασίων. Αυτό είναι ατυχές, γιατί αυτό που πάντα βλέπουμε στον πραγματικό κόσμο είναι η χρησιμοποίηση ενός συνδυασμού τεχνικών παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, έστω κι αν η εφαρμογή των συμβατικών καμπυλών ζήτησης στις λεγόμενες καμπύλες παροχής ηλεκτρικής ενέργειας θα μπορούσε να προτείνει ότι – σε βάθος χρόνου τουλάχιστον – μόνο μία τεχνική παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας απαιτείται. Για παράδειγμα, σε χώρες όπως η Ιαπωνία και η Γαλλία, θα μπορούσε να είναι δυνατό να υποστηριχθεί με βάση την επικρατούσα τάση ανάλυσης της προσφοράς και της ζήτησης ότι όλη η ηλεκτρική ενέργεια θα έπρεπε να παράγεται σε πυρηνικές εγκαταστάσεις, δεδομένου ότι το οριακό κόστος αυτής της ηλεκτρικής ενέργειας είναι αισθητά από εκείνο που προέρχεται από άνθρακα και φυσικό αέριο. Σε γενικές γραμμές αυτό το επιχείρημα είναι λάθος.

Αυτό που πρέπει να καταλάβουμε εδώ είναι η καθοριστική σημασία της διαμόρφωσης της ζήτησης: η ζήτηση για ηλεκτρική ενέργεια κατά κανόνα ποικίλλει κατά τη διάρκεια μιας ημέρας στο κυκλικό σχέδιο που φαίνεται στο σχήμα 4.1a. Αυτό είναι μια πολύ διαφορετική πρόταση σε σχέση με την πολύ σταθερή καμπύλη ζήτησης με την οποία ασχοληθήκαμε στα μαθήματα στη μικροοικονομία, αλλά και πολύ διαφορετική από το σχήμα που βλέπουμε στο 7.1b, το οποίο εμφανίζεται κατά καιρούς σε σημαντικά επίσημα έγγραφα, όπου χρησιμοποιείται για να εξαχθούν συμπεράσματα τα οποία παρουσιάζονται στους πολιτικούς και τους συμβούλους τους ως επιστημονικώς αδιάσειστα.



Σχήμα 4.1

Μαζί με το περίγραμμα της ζήτησης, είναι απαραίτητο να καταλάβουμε τα διαφορετικά χαρακτηριστικά κόστους των διαφόρων τύπων εξοπλισμών παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Για παράδειγμα, ακόμη κι αν το οριακό κόστος λειτουργίας ενός πυρηνικού εξοπλισμού είναι πολύ χαμηλό, ενώ το αντίστοιχο του φυσικού αερίου είναι σχετικά υψηλό, μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι είναι γενικά πιο οικονομικό να χρησιμοποιείται φυσικό αέριο για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας που χρειάζεται κατά τις ώρες φορτίου αιχμής, απ' ό,τι να χρησιμοποιείται η πυρηνική ενέργεια. Τώρα θα μπορούσε να είναι και η κατάλληλη ευκαιρία για να πούμε περισσότερα για το σχήμα 4.1b που δείχνει μια συμβατική καμπύλη ζήτησης καθώς και μια περισσότερο ή λιγότερο συμβατική καμπύλη προσφοράς. Η συνήθης ερμηνείας της διάταξης σε αυτό το διάγραμμα είναι ότι δε θα πρέπει να παραχθεί ηλεκτρική ενέργεια με πετρέλαιο ή φυσικό αέριο, αλλά όπως ήδη έχει προταθεί πιο πάνω και θα αποδειχθεί παρακάτω, μια τέτοια ερμηνεία είναι εξαιρετικά παραπλανητική. Πιο σημαντικό είναι επίσης το γεγονός ότι αυτού του είδους διαγράμματα έχουν μόνο μια ελάχιστη χρησιμότητα σε ό,τι αφορά το παρόν θέμα.

Θα συνεχίσουμε με το αξίωμα ότι ο πυρηνικός εξοπλισμός έχει το μεγαλύτερο σταθερό κόστος, ενώ το φυσικό αέριο έχει το μεγαλύτερο μεταβλητό κόστος. Στην πραγματικότητα, η υδροηλεκτρική ενέργεια έχει το μεγαλύτερο σταθερό κόστος και το μικρότερο μεταβλητό κόστος, ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις οι εξοπλισμοί συνδυασμένου κύκλου μπορεί να έχουν μειώσει αισθητά το μεταβλητό κόστος της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με φυσικό αέριο μέσω της αύξησης της αποτελεσματικότητας της μετατροπής των καυσίμων. Εν πάση περιπτώσει, μέχρι πρόσφατα η κατάσταση σταθερού – μεταβλητού κόστους είχε την εξής μορφή:

Σταθερό κόστος	Μεταβλητό κόστος
Πυρηνική ενέργεια	Φυσικό αέριο
Άνθρακας	Άνθρακας
Φυσικό αέριο	Πυρηνική ενέργεια

Αυτές οι σκάλες κόστους έχουν την ακόλουθη ερμηνεία. Οι πυρηνικές εγκαταστάσεις και οι εγκαταστάσεις άνθρακα είναι δαπανηρές για να κατασκευαστούν και εξοπλιστούν και κατά συνέπεια δε θέλουμε να μένουν σε αδράνεια για μεγάλο χρονικό διάστημα. Συνεπώς, αυτές και οι υδροηλεκτρικές εγκαταστάσεις είναι οι πρωταρχικοί υποψήφιοι για την παροχή του βασικού φορτίου, το οποίο είναι τμήμα του φορτίου που βρίσκεται στη γραμμή για 24 ώρες την ημέρα. Από την άλλη πλευρά, οι συγκριτικά φθηνοί αεριοστρόβιλοι που μπορούν να κατασκευαστούν σε μικρές μονάδες – και οι οποίοι μπορούν να ανοίγουν και να κλείνουν εύκολα, αλλά των οποίων τα κόστη για καύσιμα υνιά συγκριτικά υψηλά – μπορούν να διαδραματίσουν τον ιδανικό ρόλο στην παροχή του φορτίου αιχμής. Όπως βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα στο (a), αυτό το φορτίο είναι στη γραμμή μόνο μερικές ώρες την ημέρα. Σε κάποιο βαθμό το ίδιο ισχύει και για το πετρέλαιο, αλλά στην παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας το πετρέλαιο έχει γίνει η τελευταία λύση για να χρησιμοποιηθεί ως πηγή ενέργειας για το μεγαλύτερο μέρος του βιομηχανικού κόσμου. (Αν και ακόμη και στη Σουηδία για παράδειγμα, σε αυτές τις περιόδους όπου η ζήτηση είναι εξαιρετικά υψηλή, θα ενεργοποιηθεί η δυνατότητα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας από καύση πετρελαίου.)

Μπορούμε επομένως να καταλάβουμε ότι ενώ ένα διάγραμμα παροχής-ζήτησης από αυτά που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία μπορεί να έχει την ίδια εμφάνιση με αυτό του σχήματος 4.1b, το οποίο συνεπάγεται – εσφαλμένα – ότι το φυσικό αέριο και το πετρέλαιο είναι κατώτερες πρώτες ύλες, τα συστήματα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας του πραγματικού κόσμου συμμετέχουν κατά μέσο όρο περίπου στο 60% για παραγωγή ενέργειας, 30% για κάτι ενδιάμεσο και 10% για τα φορτία αιχμής. (Αυτά τα συγκεκριμένα ποσοστά θα πρέπει να θεωρηθούν ως αυτό που στις ΗΠΑ λέγεται «υπολογισμός της πιάτσας» και για ορισμένες χώρες μπορεί να μην είναι εφαρμόσιμος). Ταυτόχρονα θα πρέπει να εκτιμηθεί το γεγονός ότι όσο πιο πολύς εξοπλισμός συνδυασμένου κύκλου εισάγεται και η αποτελεσματικότητά του αυξάνει, θα διαδραματίσει μεγαλύτερο ρόλο στην υλοποίηση του βασικού φορτίου. Στο εργοστάσιο Futsu της Tokyo Power Company (Tepco), συνδυάζονται 14 αεριοστρόβιλοι με 14 ατμοστροβίλους για να παράγουν 2.000 MW ηλεκτρικής ενέργειας με ονομαστική απόδοση της τάξης του 41% και προφανώς ενός μεγάλου μέρους του βασικού φορτίου ηλεκτρικής ενέργειας.

Κάτι άλλο στο οποίο πρέπει να δοθεί έμφαση είναι ότι εξαιτίας της αδυναμίας πρόβλεψης της ζήτησης, όλα τα συστήματα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας του πραγματικού κόσμου θα πρέπει να περιέχουν ένα σημαντικό απόθεμα δυναμικότητας, το οποίο παίρνει συχνά τη μορφή παλαιότερο εξοπλισμού βασισμένου στο πετρέλαιο, με υψηλό κόστος λειτουργίας. Θυμηθείτε πως σε ό,τι αφορά την ηλεκτρική ενέργεια, η παραμικρή υπερφόρτωση – δηλ. η ζήτηση να υπερβαίνει την παροχή – δεν ακολουθείται από αύξηση της τιμής, αλλά από διακοπή ρεύματος ή βύθισμα.

4.2 Καμπύλες καθημερινής φόρτωσης και Καμπύλες διάρκειας φόρτωσης

Η περισσότερη από την ηλεκτρική ενέργεια που παράγεται στο βιομηχανικό κόσμο προέρχεται από μη πυρηνικούς ατμοηλεκτρικούς, υδροηλεκτρικούς και πυρηνικούς σταθμούς. Στις Ηνωμένες Πολιτείες επικρατούν οι μη πυρηνικοί ατμοηλεκτρικοί, ενώ στη Σουηδία οι πυρηνικοί και υδροηλεκτρικοί. Η Αυστραλία δεν έχει εργοστάσια που να λειτουργούν με πυρηνική ενέργεια και εξαρτάται περισσότερο από τα ατμοηλεκτρικά εργοστάσια, ενώ ο άνθρακας αποτελεί τη βασική πρώτη ύλη για την παραγωγή ατμού. Η Ιταλία ακόμα χρησιμοποιεί πετρέλαιο για να παράγει ατμό. Κλπ.

Ως μέσο για να κάνει τη δουλειά που κάνει, ο ατμός εμφανίζεται να έχει εισαχθεί περίπου το έτος 200 π.Χ. Η πρώτη πρακτική ατμομηχανή κατασκευάστηκε από τον Thomas Newcomen το 1705, αλλά ήταν ο James Watt που βελτίωσε αυτήν την εφεύρεση σε τέτοιο σημείο που πραγματικά θα μπορούσαμε να το αποκαλέσουμε ως ένα από τα μεγαλύτερα τεχνολογικά θαύματα όλων των εποχών. Για την αποδοτική λειτουργία των ηλεκτρικών γεννητριών, ωστόσο, ήταν απαραίτητο να γίνει μια ριζική τροποποίηση της ατμομηχανής. Αυτό αποδείχθηκε ότι είναι η τουρμπίνα υψηλών ταχυτήτων, η οποία είναι ανώτερη της ατμομηχανής για τη λειτουργία των ηλεκτρικών γεννητριών.

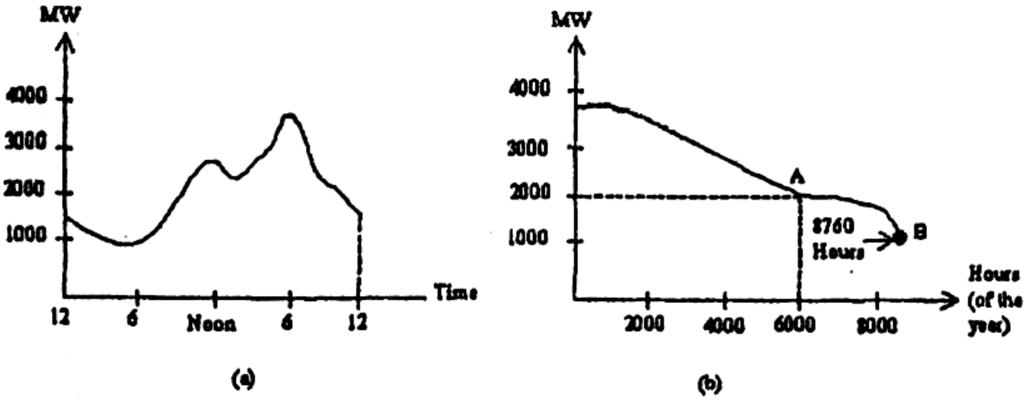
Η ενέργεια των ρεόντων υδάτων μπορεί να αξιοποιήθηκε 5.000 ή 6.000 χρόνια πριν, αλλά ήταν κατά την περίοδο της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας που η δύναμη του νερού αναπτύχθηκε εκτενώς προκειμένου να ελευθερώσει τα άλογα – ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για στρατιωτική χρήση – που χρησιμοποιούνταν για πράγματα όπως η λειτουργία των μύλων καλαμποκιού. Η συσκευή που προέκυψε από αυτήν την κατάσταση ήταν ο τροχός νερού ο οποίος, στην παραδοσιακή του μορφή, είχε μόνο περιορισμένη αποτελεσματικότητα. Μερικές χιλιετίες αργότερα αναπτύχθηκαν υδροστρόβιλοι που μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να λειτουργούν οι γεννήτριες στους σταθμούς υδροηλεκτρικής ενέργειας και μάλιστα με υψηλή απόδοση. Η ενέργεια του νερού που συνηθιζόταν να παράγει ηλεκτρική ενέργεια δεν ήταν επιρρεπής στο είδος των βλαβών που συμβαίνουν στις ατμομηχανές, όπου για λόγους θερμοδυναμικής η θεωρητική μέγιστη απόδοση είναι 60% – αν και στην πράξη η καλύτερη θερμική απόδοση που έχει καταγραφεί ποτέ σε εμπορικές εγκαταστάσεις που δε χρησιμοποιούν σύστημα συνδυασμένου κύκλου είναι περίπου 40%.

Όταν είναι δυνατόν, οι υδροηλεκτρικοί σταθμοί χρησιμοποιούνται γενικά για να παράγουν το βασικό φορτίο, αλλά επειδή η παραγωγή των εγκαταστάσεων αυτών αυξάνεται και μειώνεται πολύ εύκολα, θα μπορούσαν να είναι χρήσιμοι για την παροχή ορισμένου φορτίου στις απαιτήσεις αιχμής. Επιπλέον, ο συνδυασμός εργοστασίων ατμοηλεκτρικής και υδροηλεκτρικής ενέργειας ευνοεί τη χρήση των ευέλικτων προγραμμάτων λειτουργίας τα οποία μπορούν να βελτιώσουν σε μεγάλο βαθμό την απόδοση του συστήματος, δεδομένου πως όταν η ροή ατμού είναι υψηλή, η υδροηλεκτρική συνιστώσα μπορεί να αυξήσει την παραγωγή της, ενώ κατά της περιόδους χαμηλής απορροής οι ατμοηλεκτρικές εγκαταστάσεις μπορούν να παράγουν ένα μεγαλύτερο μέρος του φορτίου.

Το πρώτο μεγάλο πυρηνικό εργοστάσιο άρχισε να λειτουργεί στο Cumberland του Ηνωμένου Βασιλείου τον Οκτώβριο του 1956. Αυτό που γενικά έχουμε γι' αυτού του είδους τις εγκαταστάσεις είναι ένας πυρηνικός αντιδραστήρας ο οποίος παράγει ατμό που κινεί μια τουρμπίνα, η οποία με τη σειράς της παράγει ηλεκτρική ενέργεια με το να θέτει σε λειτουργία μια γεννήτρια. Οι σταθμοί πυρηνικής ενέργειας προορίζονται αποκλειστικά για την παραγωγή του βασικού φορτίου και, ίσως, ένα τμήμα του ενδιάμεσου φορτίου. Τα κόστη κεφαλαίων τους είναι πολύ υψηλά ώστε να μένουν αδρανή (μένουν αδρανή για πολύ μικρό μέρος του χρόνου), ενώ ταυτόχρονα το κόστος λειτουργίας τους τείνει να είναι σχετικά χαμηλό.

Θα γίνουν τώρα μερικές παρατηρήσεις πάνω στο εργοστάσιο παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με αεριοστρόβιλο. Αυτού του είδους ο εξοπλισμός αποτελείται βασικά από ένα συμπιεστή, ο οποίος τραβά τον αέρα και αυξάνει τη θερμοκρασία του, ένα θάλαμο καύσης όπου προστίθεται καύσιμο στο συμπιεσμένο αέρα και αναφλέγονται και μια τουρμπίνα που κινείται από θερμά αέρια της καύσης. Τελικά, η τουρμπίνα θέτει σε λειτουργία μια γεννήτρια. Λόγω της ικανότητάς του για ταχεία έναρξη, ο αεριοστρόβιλος θεωρείται ιδανικός για την παροχή ενέργειας στις ώρες αιχμής.

Τώρα μπορούμε να στραφούμε στο σημαντικό ζήτημα της φόρτωσης του σταθμού ηλεκτροπαραγωγής, αν και θα το κάνουμε σε μη τεχνικό επίπεδο. Όπως φαίνεται στο σχήμα 7.2a παρακάτω, η ζήτηση ενέργειας σε ένα σταθμό ηλεκτροπαραγωγής μπορεί να ποικίλλει σημαντικά κατά τη διάρκεια μιας περιόδου 24 ωρών. Φυσικά, η ζήτηση αυτή εξαρτάται επίσης και από την εποχή του χρόνο, καθώς επίσης και τη δομή του φορτίου: βιομηχανικό, εμπορικό, οικιακό κλπ. Σε χώρες όπως οι ΗΠΑ το ενεργειακό φορτίο μπορεί να είναι εξαιρετικά βαρύ κατά τη διάρκεια του καλοκαιριού, λόγω της ευρύτατα διαδεδομένης χρήσης του κλιματιστικού, ενώ στη Σουηδία, όπου ο κλιματισμός δε χρησιμοποιείται ευρέως, οι βιομηχανικές λειτουργίες μειώνονται πάρα πολύ κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών μηνών και οι απαιτήσεις σε φωτισμό και θέρμανση είναι σχετικά χαμηλές κατά τη διάρκεια της ίδιας περιόδου (τα μικρότερα φορτία συνήθως τα βρίσκουμε κάπου ανάμεσα στην πρώτη εβδομάδα του Ιουνίου και την πρώτη εβδομάδα του Σεπτεμβρίου). Η απεικόνιση στο σχήμα 4.2b δείχνει μια τυπική καμπύλη για τη διάρκεια του φορτίου ηλεκτρικής ενέργειας το οποίο παράγεται από την εικόνα 4.2a. Προσέξτε παρακαλώ, ωστόσο, ότι το σχήμα 4.2b είναι μια προσέγγιση, υπό την έννοια ότι θεωρεί πως η *καθημερινή* καμπύλη του σχήματος 4.2a παραμένει αμετάβλητη για ολόκληρο το έτος, κάτι που είναι πολύ απίθανο.



Σχήμα 4.2

Το σχήμα στην εικόνα 4.2a θα πρέπει να είναι αυτονόητο, αλλά είναι πιθανό ότι η καμπύλη για τη διάρκεια του φορτίου ηλεκτρικής ενέργειας που δείχνεται στην εικόνα 4.2b απαιτεί λίγη κουβέντα. Ο τρόπος που χειρίζομαι αυτό είναι να κατασκευάσω ένα πολύ απλό αριθμητικό παράδειγμα πιο κάτω προκειμένου να δείχνω πώς προκύπτει αυτή η καμπύλη, αν και ακόμη κι εδώ είναι μια εύκολη υπόθεση.

Το διάγραμμα στο σχήμα 4.2b δείχνει ότι πάντα έχουμε ένα φορτίου τουλάχιστον 1.000 MW στο γραμμή. Έτσι, χονδρικά, το βασικό φορτίο είναι 1.000 MW. Ταυτόχρονα, η δυναμικότητα του συστήματος πρέπει να είναι επαρκής να ικανοποιήσει το τεράστιο φορτίο που μπορεί να εμφανιστεί, το οποίο είναι 3.900 MW. Επιπλέον, πρέπει να υπάρχει και κάποιο απόθεμα για την περίπτωση απρογραμμάτιστων διακοπών ρεύματος που οφείλονται, για παράδειγμα, σε αστοχίες του εξοπλισμού και οι οποίες θα μπορούσαν να διπλασιαστούν σε περιόδους συντηρήσεων ρουτίνας.

Αντί της καμπύλης για την ετήσια διάρκεια ζήτησης του φορτίου που φαίνεται στο σχήμα 4.2b, θα μπορούσε να σχεδιαστεί μια καμπύλη με καθημερινή ζήτηση φορτίου (και για παιδαγωγικούς λόγους αυτό θα γίνει αργότερα), αλλά οι καμπύλες ετήσιας διάρκειας της ζήτησης του φορτίου φαίνεται να αποτελούν τον κανόνα. Κατά την ερμηνεία του σχήματος 4.2b, παρατηρούμε και πάλι ότι τουλάχιστον 1.000 MW είναι στη γραμμή κάθε ώρα της ημέρας του έτους, ενώ τουλάχιστον 2.000 MW είναι στη γραμμή για 6.000 ώρες. Αναφέρθηκε ότι το βασικό φορτίο ήταν 1.000 MW το οποίο, συνήθως, θα παραγόταν από τον εξοπλισμό που καθορίζεται από τον εξοπλισμό βασικού φορτίου. Αλλά όπως θα φανεί, ακόμα και αυτό το μέρος του φορτίου που δεν ανήκει στο βασικό φορτίο – για παράδειγμα, το κομμάτι που φαίνεται στην έκταση B-A στο διάγραμμα – μπορεί να παραχθεί από τέτοιο εξοπλισμό, ανάλογα με το μέγεθος του φορτίου και του σχετικού κόστους του εξοπλισμού που θεωρείται κατάλληλος γι’ αυτήν την αποστολή. Γενικά, αυτό σημαίνει όλο τον εξοπλισμό εκτός από αυτόν που διαστασιολογήθηκε ειδικά για να φιλοξενήσει το φορτίο αιχμής.

Στο πλαίσιο της μέχρι τώρα συζήτησης, είναι δυνατό να εξεταστούν αρκετές γνωστές παράμετροι. Η πρώτη είναι ο συντελεστής φορτίου, ο οποίος θα οριστεί εδώ ως ο λόγος του μέσου φορτίου σε μια μονάδα παραγωγής κατά τη διάρκεια μια ορισμένη χρονικής περιόδου προς το φορτίο αιχμής που συμβαίνει κατά τη διάρκεια της ίδια περιόδου. (Προσωπικά, δεν είναι απόλυτα ικανοποιημένος με το μέγιστο φορτίο που ορίζεται εδώ. Σε ορισμένες περιπτώσεις θα ήταν χρήσιμο να χρησιμοποιηθεί το μέσο φορτίο που υπάρχει π.χ. πάνω από το XYZ στο σχήμα 4.1a.) Στο σχήμα 4.2a το συνολικό φορτίο της μονάδας παραγωγής για μια περίοδο 24 ωρών είναι η περιοχή κάτω από την καμπύλη του φορτίου και έτσι στην πραγματικότητα είναι η συνολική ζήτηση ενέργειας, Έτσι, το μέσο φορτίο είναι αυτή η τιμή διαιρεμένη με το 24. Καταγράφοντάς το, παίρνουμε αυτές τις σχέσεις:

Μέσο φορτίο = Συνολικό φορτίο / 24 (= Συνολική ζήτηση ενέργειας / 24) (2)

Συντελεστής φορτίου = Μέσο φορτίο / Φορτίο αιχμής (3)

Μια λιγότερο χρήσιμη και εννοιολογικά λιγότερη ικανοποιητική παράμετρος είναι ο *συντελεστής ζήτησης*, που θα αναφερθεί εδώ μόνο για λόγους πληρότητας. Μπορεί να γραφεί ως:

Συντελεστής ζήτησης = Μέγιστο φορτίο / Συνολικά συνδεδεμένο φορτίο (4)

Περιστασιακά, υπολογίζονται και οι λεγόμενοι καθημερινοί ή ετήσιοι συντελεστές μονάδων παραγωγής. Αυτοί ορίζονται ως ο λόγος της ηλεκτρικής ενέργειας που παράγεται κατά τη διάρκεια της περιόδου που μας ενδιαφέρει προς το γινόμενο του αριθμού των ωρών για την περίοδο αυτή (π.χ. 8.760 ώρες αν η περίοδος είναι το έτος) με τη συνολική ονομαστική ικανότητα παραγωγής του συνόλου της εγκατάστασης.

$$\text{καθημερινός συντελεστής μονάδας παραγωγής} = \frac{\text{ηλεκτρική ενέργεια που παράγεται κάθε μέρα}}{(\text{ώρες ανά ημέρα})(\text{συνολική ονομαστική δυναμικότητα})}$$

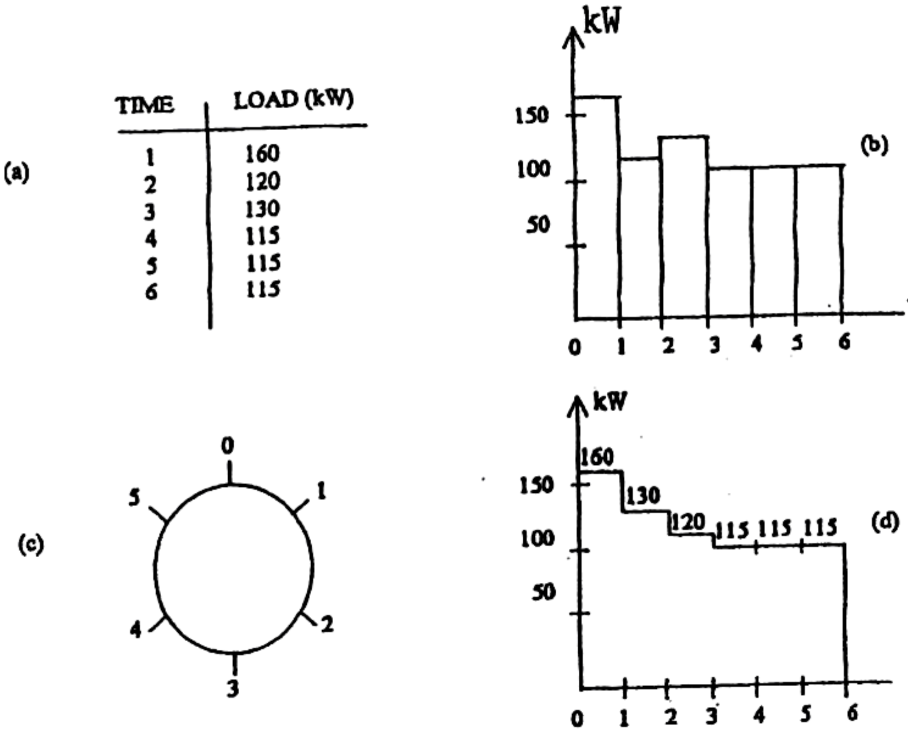
Τώρα ας δούμε ένα απλό αριθμητικό παράδειγμα που επιλέχθηκε επειδή επεξηγεί ορισμένες από αυτές τις έννοιες. Μια μονάδα παραγωγής ενέργειας έχει εγκατεστημένη δυναμικότητα παραγωγής 1.000 MW και ένα συνδεδεμένο φορτίο 900 MW. Μια ορισμένη ημέρα το φορτίο αιχμής είναι 600 MW και η ηλεκτρική ενέργεια που παράγεται κατά τη διάρκεια αυτής της ημέρας (δηλ. στην περιοχή κάτω από την καμπύλη φορτίου του ηλεκτρικού ρεύματος) είναι 7.200 MWh. Βλέπουμε έτσι ότι το Μέσο Φορτίο είναι 7.200/24 = 300 MW, ενώ ο συντελεστής πληρότητας είναι 300/600 = 0,5. Αυτός ο συντελεστής πληρότητας δεν είναι ιδιαίτερα υψηλός. Ένας υψηλός συντελεστής φόρτισης είναι επιθυμητός επειδή καταδεικνύει μια οικονομική χρησιμοποίηση της παραγωγικής ικανότητας. Με άλλα λόγια, πολύ υψηλά φορτία αιχμής μέσα σε μικρές χρονικές περιόδους είναι ανεπιθύμητα. Όσο για το συντελεστή ζήτησης, υποθέτοντας – όπως γίνεται συχνά – ότι το μέγιστο φορτίο = φορτίο αιχμής, έχουμε 600/900 = 0,67 για το συντελεστή ζήτησης.

Ο συντελεστής ζήτησης κυμαίνεται κανονικά μεταξύ 0,4 – 0,6. Τελικά, ο συντελεστής της μονάδας παραγωγής είναι 7.200/(24x1000) = 0,3. Ο υψηλός ημερήσιος συντελεστής μονάδας παραγωγής είναι επιθυμητός επειδή καταδεικνύει την οικονομική χρήση του εξοπλισμού παραγωγής.

Νωρίτερα, εισαγάγαμε μία παράμετρο που ονομάζεται συντελεστής δυναμικότητας, που φαίνεται να είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για τους πυρηνικούς εξοπλισμούς. Ένας πιο πλήρης ορισμός σε σχέση με αυτόν που δίνεται νωρίτερα καθορίζει το συντελεστή δυναμικότητας ως το λόγο της ηλεκτρικής ενέργειας που παράγεται για τη χρονική περίοδο που εξετάζουμε προς την ενέργεια που θα μπορούσε να είχε παραχθεί σε συνεχή λειτουργία πλήρους ισχύος κατά τη διάρκεια της ίδιας περιόδου. Το ζήτημα εδώ είναι να γίνει σαφές αυτή η «χρονική περίοδος που εξετάζουμε». Αυτή λαμβάνεται ως ένα έτος μείον τους συνήθεις χρόνους για συντήρηση και ανεφοδιασμό. Έτσι αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής φόρτισης και ο συντελεστής δυναμικότητας δεν είναι το ίδιο πράγμα.

Η Φινλανδία είναι μια χώρα όπου οι υψηλοί συντελεστές φόρτισης και δυναμικότητας είναι κάτι το κοινό, αλλά αν σκεφτούμε υπό την άποψη της ποσότητας της ηλεκτρικής ενέργειας που παράγεται από την πυρηνική ενέργεια σε σχέση με τη συνολική ηλεκτρική ενέργεια, τότε η Σουηδία έχει ένα πολύ εντυπωσιακό τομέα πυρηνικής. Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι οι ΗΠΑ έχουν πολλές εγκαταστάσεις υψηλής ποιότητας, με συντελεστή δυναμικότητας και/ή φόρτισης που φθάνει ή υπερβαίνει τους καλύτερους στον κόσμο. Αν εξαλείφονταν οι χειρότερες αμερικανικές εγκαταστάσεις και σε ορισμένες από τις υπόλοιπες τους δινόταν το είδος της αναβάθμισης που προτάθηκε κάποτε για τους αντιδραστήρες της Ανατολικής Ευρώπης, τότε θα ήταν πολύ δύσκολο να αποδειχθεί ότι η πυρηνική ενέργεια σε αυτήν τη χώρα ήταν πιο ακριβή από την ηλεκτρική ενέργεια που παράγεται σε εγκαταστάσεις που βασίζονται σε άνθρακα ή φυσικό αέριο. Έχει προταθεί, ωστόσο, ότι από καιρού εις καιρό η «μαστοριά» στον τομέα της πυρηνικής ενέργειας στην Αμερική είναι πολύ μακριά από το επιθυμητό.

Μπορούμε τώρα να ρίξουμε μια πιο προσεκτική ματιά στη χάραξη της καμπύλης διάρκειας του φορτίου και εδώ – για παιδαγωγικούς λόγους – προτείνω ένα νέο είδος ημέρας, την ημέρα με 6 μόνο ώρες. Η πρώτη ώρα είναι 0–1 και η τελευταία ώρα είναι 5–0. Το είδος του ρολογιού γι' αυτήν την παράξενη ημέρα παρουσιάζεται ακριβώς κάτω από τον πίνακα που δίνει τα φορτία (σε κιλοβάτ και *όχι* σε κιλοβατώρες) που ισχύουν για τα δεδομένα χρονικά διαστήματα. Οι καμπύλες του φορτίου της ισχύος και της διάρκειας του φορτίου έχουν επίσης σχεδιαστεί στο σχήμα 4.3/



(a)

TIME	LOAD (kW)
1	160
2	120
3	130
4	115
5	115
6	115

Σχήμα 4.3

Μπορεί να φανεί χρήσιμο ένα σχόλιο για την κατασκευή της καμπύλης ισχύος. Οι αναγνώσεις της καταναλισκόμενης ενέργειας είχαν ίσως ληφθεί ακριβώς στη μισή ώρα (π.χ. στη 1:30) και η τιμή του φορτίου στη γραμμή εκείνη την ώρα (= 120 kW) καταγράφτηκε ως το φορτίο της γραμμής για ολόκληρη την περίοδο (δηλ. την περίοδο 2). Σαφώς, το φορτίο μπορεί να ποικίλλει κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, αλλά απαιτείται πιο ακριβής περιγραφή για την ενέργεια που ζητείται για κατανάλωση, τότε είναι πιθανότατα αναγκαίες οι πιο συχνές αναγνώσεις της καταναλισκόμενης ενέργειας.

Μόλις πάρουμε την καμπύλη του φορτίου ισχύος, είναι απλό θέμα η κατασκευή της καμπύλης διάρκειας του φορτίου που φαίνεται στο σχήμα 4.3d. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, αυτή η κατασκευή καλύπτει συνήθως ένα χρόνο, αλλά η λειτουργία γίνεται, παραδόξως, για περίοδο μιας ημέρας. Ο αναγνώστης δε θα πρέπει να έχει πρόβλημα στο να μεταβαίνει από το σχήμα 4.3b στο σχήμα 4.3d, αν και ίσως παρατηρήσει ότι ένα φορτίο ίσο ή μεγαλύτερο των 120 kW είναι στη γραμμή για 3 ώρες την ημέρα.

Αν έχετε κάποιο πρόβλημα με τα παραπάνω, σκεφτείτε υπό το πρίσμα του σπιτιού ή του διαμερίσματός σας. Υποθέστε ότι έχει 10 λαμπτήρες και καμία άλλη ηλεκτρική συσκευή. Στα μέσα του πρωινού βρίσκετε κατά καιρούς ένα ή δύο λαμπτήρες ανοιχτούς, ενώ το βράδυ – όταν μελετάτε αυτό το βιβλίο – μπορεί να έχετε επτά ή οκτώ ανοιχτούς. Αλλά, προσέξτε, έχουμε μιλήσει για ισχύ, υπό το γεγονός ότι μιλάμε για τα βατ των λαμπτήρων. Για να πάρουμε την ενέργεια είναι απαραίτητη η διάσταση του χρόνου.

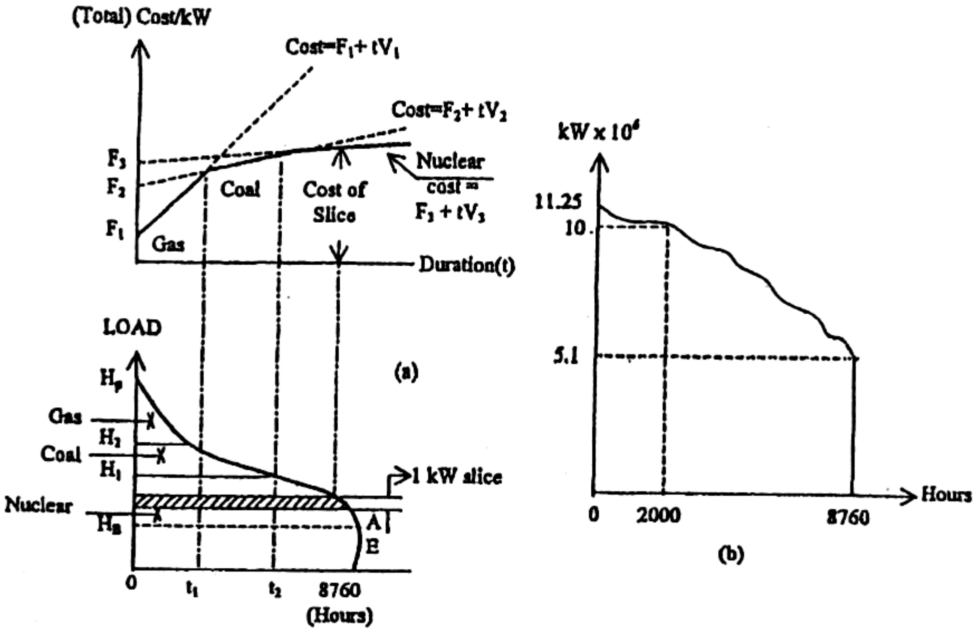
Κατά συνέπεια, το επόμενο βήμα μας είναι να υπολογίσουμε το εμβαδόν κάτω από μία από αυτές τις καμπύλες στο σχήμα 4.3. Για παράδειγμα, αν πάρουμε τις καμπύλες φορτίου ισχύος έχουμε:

$$E = \Sigma t_i(kW)_I = 1 \text{ x } 160 + 1 \text{ x } 130 + 1 \text{ x } 120 + 3\,(1 \text{ x } 115) = 755 \text{ kWh}$$
$$(i = 1,\ldots,6)$$

4.3 Η Οικονομολογία της Διαίρεσης του Φορτίου

Μπορούμε τώρα να στραφούμε στο σημαντικό ζήτημα της επίδειξης πώς το φορτίο κατανέμεται μεταξύ των διαφόρων τύπων εξοπλισμού, χρησιμοποιώντας έννοιες που εισαγάγαμε σε προηγούμενες ενότητες.

Το πρώτο πράγμα που χρειαζόμαστε είναι η καμπύλη ετήσιας διάρκειας του φορτίου. Μια τυπική καμπύλη διάρκειας του φορτίου φαίνεται στο κάτω πλαίσιο του σχήματος 4.4a, ενώ στο σχήμα 4.4b έχω δείξει ένα αντίγραφο μιας από αυτές τις καμπύλες για τη Νορβηγία το 1975. Εξετάζοντας τα στοιχεία αυτά ο αναγνώστης θα πρέπει να επιχειρήσει να θυμηθεί τις αλγεβρικές εκθέσεις των προηγούμενων κεφαλαίων. Στο πάνω σχήμα του 4.4a έχουμε τρεις γραμμικές εξισώσεις: $F_1 + tV_1$, $F_2 + tV_2$ και $F_3 + tV_3$. Όπως θυμόμαστε από μία από αυτές τις εξισώσεις – ή και από την άλγεβρα στο γυμνάσιο – μια έκφραση της μορφής $K = F + tV$ αντιπροσωπεύει μια γραμμική εξίσωση, με το F να είναι το σημείο τομής στον κάθετο άξονα και σε αυτήν την περίπτωση (με το "t" να είναι η μεταβλητή στον οριζόντιο άξονα) το V είναι η κλίση αυτής της έκφρασης. Θεωρήστε επίσης τη δυνατότητα να αποκτήσουμε τις (K,t) συντεταγμένες της τομής π.χ. $K_1 = F_1 + tV_1$ και $K_2 = F_2 + tV_2$. Από αυτές τις εξισώσεις παίρνουμε $t = (K – F_1)/V_1 = (K – F_2)/V_2$ και από αυτές τις δύο τελευταίες εξισώσεις μπορείτε να βρείτε το K. Άπαξ και βρείτε το K, μπορεί να το βάλετε σε όποια έκφραση από τις δύο θέλετε και θα πάρετε το t.



Σχήμα 4.4

Πριν προχωρήσουμε σε λίγη μάλλον απλή άλγεβρα, πρέπει να αποσαφηνιστούν ορισμένα πράγματα γι' αυτό το διάγραμμα. Έχουμε τρία διαφορετικά είδη εξοπλισμού: πυρηνικό, βασιζόμενο σε άνθρακα και βασιζόμενο σε φυσικό αέριο. Θα ήταν πραγματικά πολύ βολικό αν μπορούσαμε να πούμε ότι η πυρηνική ενέργεια παράγει (ή «μεταφέρει») το βασικό φορτίο, ο άνθρακας το ενδιάμεσο και το φυσικό αέριο το φορτίο αιχμής. Αλλά αν παραμείνουμε στην έννοια ότι το βασικό φορτίο βρίσκεται στη γραμμή όλη την ώρα, και μόνο αυτό το φορτίο, τότε ο πυρηνικός εξοπλισμός πιθανώς παράγει πολύ περισσότερο από το βασικό φορτίο. Ίσως, τότε, είναι καλύτερο να το θέσω με τον εξής τρόπο όταν πρόκειται γι' αυτό ή για παρόμοια διαγράμματα. Έχουμε την εγκατάσταση για το βασικό φορτίο (την πυρηνική για παράδειγμα), την εγκατάσταση για το ενδιάμεσο φορτίο (άνθρακας) και την εγκατάσταση για το φορτίο αιχμής (φυσικό αέριο).

Δεν υπάρχει επίσης τίποτα το αναπόφευκτο για τη ρύθμιση αυτή. Υπάρχουν συστήματα στα οποία ο εξοπλισμός του συνδυασμένου κύκλου φυσικού αερίου παράγει το βασικό φορτίο και πιθανώς άλλα συστήματα στα οποία ο εξοπλισμός αυτός παράγει ολόκληρο το φορτίο – βασικό, ενδιάμεσο και αιχμής. Είναι επίσης σύνηθες στη Σουηδία (αλλά και αλλού) να υπάρχουν εγκαταστάσεις που να περιέχουν αρκετές ανεξάρτητες πυρηνικές «μονάδες». Όσο αφορά την παρούσα συζήτησή μας, μία από αυτές μπορεί να έχει συντελεστή δυναμικότητας που να πλησιάζει το 100%, ενώ μια άλλη μονάδα μπορεί να έχει ολοφάνερα χαμηλότερο συντελεστή δυναμικότητας δεδομένου ότι η παραγωγή της θα πέσει κάτω από την ονομαστική δυναμικότητα (πλήρους ισχύος) όταν μειώνεται η ζήτηση.

Στην Αυστραλία, τα εργοστάσια που χαρακτηρίζονται ως μονάδες ενδιάμεσου φορτίου περιλαμβάνουν περίπου το 40-45% της συνολικής εγκατεστημένης ισχύος, σε σύγκριση με το 50% για τις μονάδες του βασικού φορτίου και 5-10% για τις μονάδες για το φορτίο αιχμής. Σε γενικές γραμμές, το φορτίο αιχμής αντιπροσωπεύει ένα πολύ μικρό τμήμα της ζήτησης για ηλεκτρική ενέργεια και συνήθως μόνο ένα μικρό μέρος της δυναμικότητας αυτής χρησιμοποιείται, αλλά δεδομένου του ότι ο διαθέσιμος εξοπλισμός παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας πρέπει να είναι σε θέση να ικανοποιεί τη μέγιστη ζήτηση που μπορεί να εμφανιστεί στο σύστημα, οι συντελεστές δυναμικότητας ή φορτίου για τις εγκαταστάσεις για τα φορτία αιχμής είναι πολύ συχνά κάτω του 5%. Κατά συνέπεια, θα πρέπει να αγοράζεται όσο το δυνατόν περισσότερη ισχύς για το φορτίο αιχμής παρά να παράγεται από το σύστημα και ως αποτέλεσμα πολλές επιχειρήσεις κοινής ωφέλειας καταβάλλουν κάθε δυνατή προσπάθεια ώστε να αγοράσουν τις απαιτήσεις για το φορτίο αιχμής από επιχειρήσεις άλλων πόλεων και κρατών. Αλλά ακόμη κι έτσι, πρέπει να έχουν αποθέματα, δεδομένου ότι μπορεί να υπάρξει ταυτόχρονες κορυφώσεις στη ζήτηση ηλεκτρικής ενέργειας σε γειτονικές περιοχές.

Το πάνω πλαίσιο του σχήματος 4.4a αποσκοπεί στο να παρουσιάσει το συνολικό κόστος (κόστος κεφαλαίο *συν* μεταβλητό κόστος) για τη χρησιμοποίηση ισχύος 1 kW για μια περίοδο t. Προφανώς, αν το t είναι μικρό, τότε έχει νόημα να χρησιμοποιηθεί ο εξοπλισμός που έχει αγοραστεί με μικρό κόστος κεφαλαίου, ακόμη κι αν το κόστος καυσίμου είναι υψηλό. Οι αεριοστρόβιλοι επιλέγονται παραδοσιακά γι' αυτό το ρόλο, όπως αναφέρεται και στο σχήμα 4.4a. Για παράδειγμα, στα αριστερά του t_1, προτιμάται το φυσικό αέριο αντί για τον άνθρακα και την πυρηνική ενέργεια. Αλλά μετά το t_1, το υψηλό κόστος του ίδιου του φυσικού αερίου αντισταθμίζει το χαμηλό κόστος κεφαλαίου (F_1) των αεριοστρόβιλων και από πλευράς κόστους, ο άνθρακας γίνεται το πιο ικανοποιητικό καύσιμο. Παρομοίως, για φορτία που παραμένουν στη γραμμή για περισσότερο από t_2 η πυρηνική ενέργεια είναι η βέλτιστη επιλογή. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα και εμφανίστηκε στο πάνω πλαίσιο του σχήματος 4.4a, η πυρηνική τεχνολογία έχει υψηλό κόστος κεφαλαίου αλλά συγκριτικά χαμηλό κόστος καυσίμου. Τώρα, με F ως κόστος κεφαλαίου και V το μεταβλητό κόστος και διευκρινίζοντας ότι $F_3 > F_2 > F_1$ και $V_1 > V_2 > V_3$, είναι εκπληκτικά εύκολο να υπολογίσουμε τα διασταυρούμενα σημεία.

Κατ' αρχάς, αναγνωρίζουμε ότι το συνολικό κόστος της προμήθειας φορτίου 1 κιλοβάτ για t ώρες ενός χρόνου χρησιμοποιώντας ένα εργοστάσιο τύπου I είναι $F_i + t_iV_i$ όπου οι μονάδες είναι:

$$(\text{Ευρώ/kW}) + \text{ώρες x (ευρώ/kWh)} = \text{Ευρώ/κιλοβάτ} \qquad (5)$$

Όπως προκύπτει από το διάγραμμα 4.4b, ανεξάρτητα από τον αριθμό των κιλοβάτ που είναι στη γραμμή, αν έχουμε σταθερό κόστος ανά μονάδα τότε οι αεριοστρόβιλοι είναι ο πιο οικονομικά αποδοτικός εξοπλισμός για την παροχή φορτίων που έχουν πολύ μικρή διάρκεια. Αλλά τελικά έρχεται η στιγμή που $F_1 + tV_1 = F_2 + tV_2$. Αυτό μπορεί να επιλυθεί αμέσως και να δώσει $t_1 = (F_2 - F_1)/(V_1 - V_2)$. Είναι επίσης η περίπτωση στο σχήμα 4.4 όπου κάποια στιγμή θέλουμε να αποκτήσουμε $F_2 + tV_2 = F_3 + tV_3$. Όπως στην προηγούμενη περίπτωση, αυτή η έκφραση μπορεί να λυθεί και να δώσει $t_2 = (F_3 - F_2)/(V_2 - V_3)$. Συνεχίζοντας, προκειμένου να δούμε πώς λειτουργούν αυτές οι εκφράσεις, ας εξετάσουμε ορισμένα στοιχεία που δόθηκαν από την Tucson Gas and Electric Company το 1975:

Είδος εργοστασίου (εξοπλισμός)	Κόστος κεφαλαίου F	Μεταβλητό κόστος V
Βασικός	100 (F_3)	0,0024 (V_3)
Μέσος	40 (F_2)	0,0200 (V_2)
Αιχμής	20 (F_1)	0,0275 (V_1)

Είναι επομένως δυνατό να υπολογίσουμε ότι t_1 = (40 – 20)/(0,0275 – 0,0200) = 2.666,66 ώρες, ενώ t_2 = (100 – 40)/(0,0200 – 0,0024) = 3.409 ώρες.

Πρέπει επίσης να δείξουμε ότι οι καμπύλες με τα κόστη στο πάνω τμήμα του σχήματος 4.4a τέμνονται στα αριστερά στο t = 8.760. Όπως συνηθίζεται, αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που έχουμε π.χ. $F_3 - F_2 > 8760(V_2 - V_3)$, κάτι που μπορεί εύκολα να αποδειχθεί. Οι ηλεκτρολόγοι μηχανικοί αποκαλούν μερικές φορές αυτές τις καμπύλες ως καμπύλες *διαλογής*.

Εδώ είναι μια καλή στιγμή για να σημειωθεί σε μια χώρα με έντονο πυρηνικό προσανατολισμό, τη Γαλλία, το σημείο διασταύρωσης για τον άνθρακα (t_2) είναι πιθανώς μικρότερο από 3.000 ώρες. Ο αναγνώστης θα πρέπει να θυμηθεί ότι υπάρχει διαφορά ανάμεσα στην κατασκευή ενός συστήματος παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας όσο αφορά τη δυναμικότητα (kW) και όσο αφορά το πραγματικό ποσό ενέργεια που παράγεται. Για παράδειγμα, το 1990 περίπου το 50% των συστημάτων της Γαλλίας ήταν πυρηνικά, αλλά η πυρηνική ενέργεια παρείχε σχεδόν το 75% της συνολικής ενέργειας της χώρα (σε kWh). Ένα άλλο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό του γαλλικού συστήματος είναι η μεγάλη διαφορά μεταξύ του οριακού κόστους στις περιόδους βασικών φορτίων, όταν το περισσότερο φορτίο παράγεται από πυρηνικό εξοπλισμό, και των περιόδων στις οποίες πρέπει να χρησιμοποιηθούν μονάδες για φορτία αιχμής με μεγάλα κόστη λειτουργίας – όπως μονάδες που βασίζονται στο πετρέλαιο. Έχει διατυπωθεί η άποψη ότι τα (βραχυπρόθεσμα) οριακά κόστη γι’ αυτές τις δύο ακραίες καταστάσεις μπορεί να διαφέρουν από μια αναλογία από 20 μέχρι 1.

Η γαλλική γραφειοκρατία για την ηλεκτρική ενέργεια είναι ανεπιφύλακτα μέρος της τιμολόγησης LMC (long-run marginal cost), αλλά στις περισσότερες άλλες χώρες, οι διευθυντές των εταιρειών ενέργειας έχουν «ερωτευθεί τρελά» την τιμολόγηση SMC. Αυτό είχε υπαινιχθεί νωρίτερα, αλλά θα μπορούσε να είναι καλή η ιδέα να πω κάτι παραπάνω γι’ αυτό το θέμα.

Αν εξετάσουμε το είδος του διαγράμματος που πολλοί από εμάς συνήθως χρησιμοποιούν για να συζητήσουμε αυτό το θέμα, το διάγραμμα 4.5a, τότε φαίνεται ότι η τιμολόγηση SMC δεν έχει πολλά να υποδείξει. Αγνοώντας προς το παρόν την ταλαιπωρία για τους σκοπούς της ανάλυσης πολλαπλών τεχνολογιών, βλέπουμε ότι έχουμε ακριβώς το είδος των πραγμάτων που οι μέτοχοι (και οι αγοραστές ομολόγων) δε θα ανέχονταν ποτέ: με τιμή (p) = v, θα υπήρχαν απαράδεκτες απώλειες, αν και ίσως αυτές θα μπορούσαν να μειωθούν με τη χρήση μεγάλων χρεώσεων εισόδου. Η τιμολόγηση LMC θα μπορούσε να είναι μια καλύτερη περίπτωση, αν και πάλι τα τέλη εισόδου είναι συνήθως απαραίτητα.

Είδος εργοστασίου (εξοπλισμός)	Κόστος κεφαλαίου F	Μεταβλητό κόστος V
Βασικός	100 (F_3)	0,0024 (V_3)
Μέσος	40 (F_2)	0,0200 (V_2)
Αιχμής	20 (F_1)	0,0275 (V_1)

Είναι επομένως δυνατό να υπολογίσουμε ότι t_1 = (40 – 20)/(0,0275 – 0,0200) = 2.666,66 ώρες, ενώ t_2 = (100 – 40)/(0,0200 – 0,0024) = 3.409 ώρες.

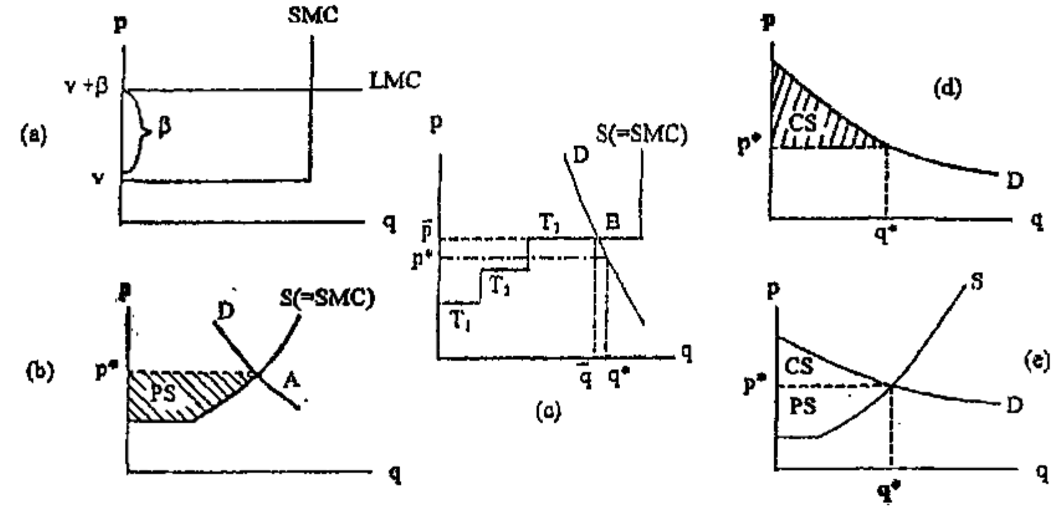
Πρέπει επίσης να δείξουμε ότι οι καμπύλες με τα κόστη στο πάνω τμήμα του σχήματος 4.4a τέμνονται στα αριστερά στο t = 8.760. Όπως συνηθίζεται, αυτό

συμβαίνει στην περίπτωση που έχουμε π.χ. $F_3 – F_2 > 8760(V_2 – V_3)$, κάτι που μπορεί εύκολα να αποδειχθεί. Οι ηλεκτρολόγοι μηχανικοί αποκαλούν μερικές φορές αυτές τις καμπύλες ως καμπύλες *διαλογής*.

Εδώ είναι μια καλή στιγμή για να σημειωθεί σε μια χώρα με έντονο πυρηνικό προσανατολισμό, τη Γαλλία, το σημείο διασταύρωσης για τον άνθρακα (t_2) είναι πιθανώς μικρότερο από 3.000 ώρες. Ο αναγνώστης θα πρέπει να θυμηθεί ότι υπάρχει διαφορά ανάμεσα στην κατασκευή ενός συστήματος παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας όσο αφορά τη δυναμικότητα (kW) και όσο αφορά το πραγματικό ποσό ενέργεια που παράγεται. Για παράδειγμα, το 1990 περίπου το 50% των συστημάτων της Γαλλίας ήταν πυρηνικά, αλλά η πυρηνική ενέργεια παρείχε σχεδόν το 75% της συνολικής ενέργειας της χώρα (σε kWh). Ένα άλλο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό του γαλλικού συστήματος είναι η μεγάλη διαφορά μεταξύ του οριακού κόστους στις περιόδους βασικών φορτίων, όταν το περισσότερο φορτίο παράγεται από πυρηνικό εξοπλισμό, και των περιόδων στις οποίες πρέπει να χρησιμοποιηθούν μονάδες για φορτία αιχμής με μεγάλα κόστη λειτουργίας – όπως μονάδες που βασίζονται στο πετρέλαιο. Έχει διατυπωθεί η άποψη ότι τα (βραχυπρόθεσμα) οριακά κόστη γι’ αυτές τις δύο ακραίες καταστάσεις μπορεί να διαφέρουν από μια αναλογία από 20 μέχρι 1.

Η γαλλική γραφειοκρατία για την ηλεκτρική ενέργεια είναι ανεπιφύλακτα μέρος της τιμολόγησης LMC (long-run marginal cost), αλλά στις περισσότερες άλλες χώρες, οι διευθυντές των εταιρειών ενέργειας έχουν «ερωτευθεί τρελά» την τιμολόγηση SMC. Αυτό είχε υπαινιχθεί νωρίτερα, αλλά θα μπορούσε να είναι καλή η ιδέα να πω κάτι παραπάνω γι’ αυτό το θέμα.

Αν εξετάσουμε το είδος του διαγράμματος που πολλοί από εμάς συνήθως χρησιμοποιούν για να συζητήσουμε αυτό το θέμα, το διάγραμμα 4.5a, τότε φαίνεται ότι η τιμολόγηση SMC δεν έχει πολλά να υποδείξει. Αγνοώντας προς το παρόν την ταλαιπωρία για τους σκοπούς της ανάλυσης πολλαπλών τεχνολογιών, βλέπουμε ότι έχουμε ακριβώς το είδος των πραγμάτων που οι μέτοχοι (και οι αγοραστές ομολόγων) δε θα ανέχονταν ποτέ: με τιμή (p) = v, θα υπήρχαν απαράδεκτες απώλειες, αν και ίσως αυτές θα μπορούσαν να μειωθούν με τη χρήση μεγάλων χρεώσεων εισόδου. Η τιμολόγηση LMC θα μπορούσε να είναι μια καλύτερη περίπτωση, αν και πάλι τα τέλη εισόδου είναι συνήθως απαραίτητα.



Σχήμα 4.5

Αλλά τι θα συμβεί αν έχουμε αν έχουμε το είδος της καμπύλης για SMC με το οποίο ασχοληθήκατε στα πρώτα οικονομικά σας μαθήματα, Σχήμα 4.5b, και η οποία είναι πιθανώς πιο κατάλληλη για αυτήν την ανάλυση; Αυτό που θα προκύψει είναι επίσης μια καμπύλη προμήθειας (αν περιοριστούμε στο τμήμα της καμπύλης SMC με ανοδική κλίση το οποίο βρίσκεται πάνω από την καμπύλη του μέσου μεταβλητού κόστους) και αν διασταυρωθεί π.χ. στο ‘A’ από μια καμπύλη ζήτησης, θα μπορούν να υλοποιηθούν σημαντικά κέρδη. Το συμπέρασμα που πρέπει να εξαχθεί σε αυτό το σημείο είναι ότι αν οι καμπύλες προμήθειας της πραγματικής ζωής λαμβάνουν τη μορφή μιας από τις καμπύλες του σχήματος 4.5b ή 4.5c, τότε η κατασκευή στο σχήμα 4.5 a είναι μια πολύ δυσάρεστη προσέγγιση.

Κοιτάζοντας και πάλι στο σχήμα 4.5b, το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν ορίζεται ως το πλεόνασμα του παραγωγού (= producer’s surplus – PS), το οποίο συνδέεται στενά με το κέρδος. Μπορούμε να γράψουμε Κέρδος = PS – Σταθερό Κόστος και έτσι στις περισσότερες περιπτώσεις το PS μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα είδος για την υποκατάσταση του κέρδους. Η καμπύλη στο σχήμα 4.5b μπορεί επίσης να χρησιμεύσει σαν μια αποδεκτή προσέγγιση της καμπύλης προμήθειας για επιχείρηση πολλαπλών τεχνολογιών, επειδή δε μας παρέχει κάποια συζητήσιμη λεπτομέρεια σχετικά με τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή q, αν και για τους σκοπούς της παρούσας έκθεσης, είναι πιο χρήσιμο το σχήμα 4.5c.

Αν έχουμε τιμολόγηση μέσου κόστους, που είναι μια συνήθης παρέκκλιση από τις παραδοσιακές κανονιστικές πρακτικές, η τιμή στην οποία η παραγωγή $\bar{q}$ μονάδων – ή για να είμαστε πιο ακριβείς, η παραγωγή q* μονάδων – θα πωληθεί είναι p*: σύμφωνα με τον κανονισμό, επιτρέπονται μόνο τα κανονικά κέρδη και έτσι, αλγεβρικά, φαίνεται ότι μέρος της παραγωγής στο διάγραμμα θα πρέπει να πωληθεί με ζημία προκειμένου να εξισορροπηθούν τα (οικονομικά) κέρδη που υπάρχουν λόγω του χαμηλού κόστους παραγωγής όπως παριστάνονται από τις τεχνολογίες T_1 και T_2. (Αλλά προσέξτε τον όρο «αλγεβρικά»! Στον πραγματικό κόσμο, η σκόπιμη πώληση ενός αγαθού με ζημία δε θα έπρεπε κανονικά να αποτελεί τη συνήθη διαδικασία λειτουργίας εκτός κι αν συμμετέχουν κάποιες στρατηγικές εκτιμήσεις.) Ωστόσο, αν είχαμε τιμολόγηση SMC, οι $\bar{q}$ μονάδες θα πωλούνταν για μια τιμή $\bar{p}$ και αυτό περιλαμβάνει τα περισσότερα από τα προϊόντα που παράγονται με χαμηλού κόστους δυναμικότητα. (Λέμε «τα περισσότερα», επειδή ορισμένα προϊόντα κανονικά θα πωληθούν με μακροπρόθεσμα συμβόλαια για λιγότερο από $\overline{p}$ και ίσως και πολύ λιγότερο.)

Τώρα μπορούμε να ρωτήσουμε: Έχουν οι εταιρείες ενέργειας (εκτός Γαλλίας) κάτι εναντίον της τιμολόγησης LMC; Η προφανής απάντηση είναι όχι. Στο Ηνωμένο Βασίλειο, για παράδειγμα, η τιμή ισοζυγίου της ηλεκτρικής ενέργειας υποτίθεται ότι θα συγκλίνει προς το μακροπρόθεσμο οριακό κόστος με σκοπό να ενθαρρύνει την προσφορά νέων εγκαταστάσεων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Ωστόσο το αγαπημένο ζήτημα αυτών των ημερών είναι η ιδιωτικοποίηση και σύμφωνα με θεωρητικούς όπως ο Fred Schweppe του Massachusetts Institute of Technology, η τιμολόγηση SMC αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι του πακέτο ιδιωτικοποίησης.

Όπως είδαμε στο Ηνωμένο Βασίλειο, ωστόσο, το σημαντικό δεν είναι ποια είναι η τιμή του, αλλά τι είναι αυτό που κάνει. Υποτίθεται ότι κάνει τους μετόχους ευτυχισμένους, του καταναλωτές ευλόγως ικανοποιημένους και τους μισθούς καθώς και τα μερίδια των διευθυντών να ανεβαίνουν – ένα φαινόμενο που ορισμένοι παρατηρητές έχουν ορίσει ως «το νέο σοσιαλισμό». Το βασικό στοιχείο στην εξάπλωση τόσης χαράς δε φαίνεται να είναι, τουλάχιστον μέχρι τώρα, το τι συμβαίνει στις τιμές, αλλά στα κόστη. Τα κόστη αναπροσαρμόζονται με το να απαλλάσσονται από όσο το δυνατόν περισσότερους εργαζομένους, ενώ ταυτόχρονα πείθουν εκείνους που απομένουν να αυξήσουν τον όγκο και την αποτελεσματικότητα του έργου τους και αν έχουν οποιοδήποτε πρόβλημα με την όλη στάση πείθονται να το κρατούν μέσα τους ή φροντίζουμε να θεραπευτούν με την πρώτη ευκαιρία.

Λίγα περισσότερα σχόλια για τα παραπάνω θέματα θα πρέπει να συμπληρώσουν αυτό το μέρος της παρουσίασης. Το πλεόνασμα του παραγωγού (producer’s surplus, PS) περιλαμβάνει τη διαφορά μεταξύ της τιμής ενός προϊόντος και του μεταβλητού κόστους για την παραγωγή του. Ενώ το πλεόνασμα του καταναλωτή (consumer’s surplus, CS) έχει να κάνει με τη διαφορά μεταξύ της «τιμής» ενός προϊόντος (όπως μετράται στο σχήμα 4.4d από την απόσταση μεταξύ του οριζόντιου άξονα και της καμπύλης ζήτησης) και της τιμής που καταβάλλεται για το προϊόν αυτό. Αυτή η τιμή είναι η p* στο ίδιο διάγραμμα (αλλά όχι ίδια με την τιμή p* που υπάρχει στο σχήμα 4.4d). Για παράδειγμα, σε μια ζεστή μέρα μπορεί να είστε διατεθειμένοι να πληρώσετε 3 ευρώ για ένα παγωτό, αλλά αν σας έλεγαν ότι έπρεπε να πληρώσετε μόλις 1 ευρώ, το πλεόνασμά σας ως καταναλωτής είναι 2 ευρώ: η διαφορά μεταξύ της αξίας του παγωτού και της τιμής που πληρώνετε τελικά.

Συνήθως τα πλεονάσματα του καταναλωτή και του παραγωγού παρουσιάζονται σε ένα διάγραμμα, όπως στο σχήμα 4.5e. Όπως έχετε ανακαλύψει ή πρόκειται να ανακαλύψετε σε πιο προηγμένα μαθήματα, η νεοκλασική βέλτιστη κατάσταση p = SMC προκύπτει από τη μαθηματική διεργασία της μεγιστοποίησης του CS+PS, όπου αυτό το άθροισμα ορισμένες φορές ονομάζεται «ευημερία του κοινωνικού συνόλου».

Μπορεί αυτή η τιμή να καλύψει το κόστος; Αν όχι, τότε λογικά θα κληθεί ένα κόστος καταχώρησης (ή χρήσης) και συνήθως το κόστος καταχώρησης είναι αυτό στο οποίο καταφεύγουμε ανεξάρτητα από την προοπτική των κερδών. Στην κατάσταση που συζητούμε σε αυτό το βιβλίο, μία στρατηγική είναι να χρεώνεται ένα τέλος καταχώρησης το οποίο εξάγει αρκετό καταναλωτικό πλεόνασμα (μετρούμενο π.χ. σε ευρώ) για να αποτρέψει τυχόν ζημίες που προκύπτουν από το p = SMC *ή* p = LMC. Αυτό είναι εύκολο για την τάξη, αλλά πρακτικά μπορεί να απαιτεί ανέφικτη ακρίβεια.

Τέλος, μπορούμε να πούμε μερικά πράγματα για την τιμολόγηση της ηλεκτρικής ενέργειας στο Ηνωμένο Βασίλειο, διότι ορισμένοι παρατηρητές πιστεύουν ότι οι πρακτικές στο Ηνωμένο Βασίλειο θα πρέπει να χρησιμεύσουν ως πρότυπο για τον υπόλοιπο κόσμο. Όπως αναφέρθηκε, εάν πρόκειται να ικανοποιηθεί η ζήτηση για νέες εγκαταστάσεις, τότε το LMC (μακροπρόθεσμο οριακό κόστος) θα πρέπει να τεθεί στο προσκήνιο με ουσιαστικό τρόπο. Δυστυχώς, πολύ λίγα άτομα φαίνεται να γνωρίζουν πώς πρέπει να γίνει αυτό και η περισσότερη ακαδημαϊκή εργασία γίνεται για την τελειοποίηση του κανόνα του p = SMC, κυρίως στο προτεινόμενο βιβλίο των Crew και Kleindolfer (1979). Στην απλούστερη μορφή του, ο κανόνας p = SMC (για το «χονδρικό εμπόριο» ηλεκτρικής ενέργειας) μετατρέπεται σε:

$$P = SMC(1 - P_R) + V_L P_R \tag{6}$$

Το P_R είναι η ζημία από την πιθανότητα του φορτίου: η πιθανότητα της δυναμικότητας να είναι ανεπαρκής να καλύψει τη ζήτηση. Το V_L είναι η αξία του απολεσθέντος φορτίου: η αξία του ευκαιριακού κόστους των καταναλωτών εξαιτίας των διακοπών ρεύματος, ή τα οφέλη που χάνονται λόγω των διακοπών στην παροχή ηλεκτρικής ενέργειας και αυτά τα οφέλη είναι πιθανό να είναι πολύ μεγαλύτερα από την τιμή μιας περιθωριακής μονάδας ηλεκτρικής ενέργειας. (Μέρος της λογικής εδώ είναι ότι το V_L θα πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να παρέχει μια ανταμοιβή επειδή καθιστά διαθέσιμη την παραγωγή σε σύντομο χρονικό διάστημα, ακόμη κι αν αυτή η δυναμικότητα απαιτείται μόνο σπάνια, ενώ μακροπρόθεσμα θα πρέπει να επηρεάζει την απόφαση για την κατασκευή νέων εγκαταστάσεων ή την αναβάθμιση των παλαιών και ίσως πιο αναποτελεσματικών μονάδων.)

Δεδομένου ότι στην πράξη το P_R δεν είναι σχεδόν ποτέ μηδέν, τότε σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, η σχέση P = SMC εμφανίζεται να είναι περίεργη σε ό,τι αφορά την πώληση χονδρικής της ηλεκτρικής ενέργειας. Ο τύπος της πραγματικά «ανώτατης τιμής» στο Ηνωμένο Βασίλειο, όπως αυτός ονομάζεται, έχει μελετηθεί από τη ρυθμιστική αρχή και τους συμβούλους της και τα συμπεράσματά τους επιβάλλονται στους εταιρείες διανομής ηλεκτρικής ενέργειας. Δεν καθορίζεται (άμεσα) από την αγορά, αν και πιθανώς η επιλογή του επηρεάζεται από τους οιωνούς της αγοράς του ενός ή του άλλου τύπου. Η σχέση είναι:

$$\Delta P/P = RPI - X \tag{7}$$

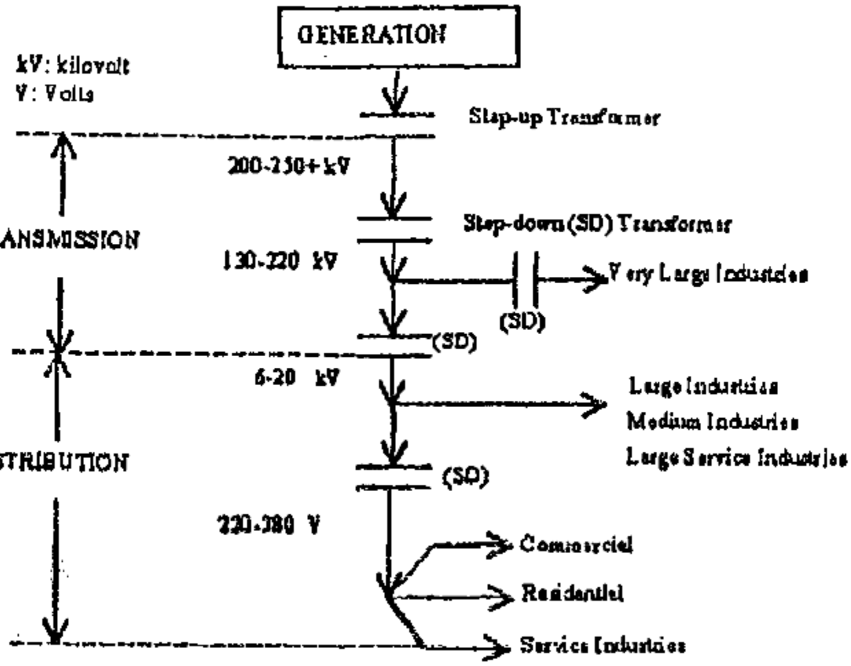
Αυτή η σχέση λέει απλώς ότι οι τιμές της ηλεκτρικής ενέργειας επιτρέπεται να αυξηθούν με ρυθμό (ΔP/P) που είναι ίσο με την αύξηση του ποσοστού του δείκτη τιμών λιανικής (retail price index, RPI) μείον ένα συντελεστή (Χ) ο οποίος, κατά την αντίληψη της ρυθμιστικής αρχής, αντιπροσωπεύει τις βελτιώσεις στην αποτελεσματικότητα του ενός ή του άλλου είδους.

Είναι μάλλον δύσκολο να γίνει μια επιστημονική αξιολόγηση του παραπάνω τύπου, παρά μόνο να λεχθεί πως δεν είναι το ισοδύναμο της οικονομολογίας για τη θεωρία του Αϊνστάιν περί γενικής σχετικότητας. Μπορεί να αναφερθεί, ωστόσο, ότι από τη στιγμή που οι μετοχές για την εισαγωγή ηλεκτρικής ενέργειας – παρά τις αναποδιές – έχουν δείξει μια τάση για καλύτερη απόδοση σε σχέση με το γενικό δείκτη των Financial Times και ενώ η ονομαστική (δηλ. τα χρήματα) τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας έχει αυξηθεί, η πραγματική τιμή μπορεί να έχει μειωθεί κάπως. Η παραγωγικότητα, φυσικά, έχει αυξηθεί σε όλα τα μέτωπα στους πρόσφατα απελευθερωμένους/επαναρυθμισμένους τομείς, αλλά με πολλές δεκάδες άτομα να απολύονται και χιλιάδες άλλα να περιμένουν μια δόση από το ίδιο, το μόνο που αναμενόταν ήταν ότι η παραγωγή ανά κεφαλή θα αυξηθεί.

4.4 Ορισμένες Τελικές Παρατηρήσεις στα Τιμολόγια Ηλεκτρικής Ενέργειας

Για τους οικιακούς καταναλωτές των ΗΠΑ, τα ποσοστά εξαρτώνται συχνά από την ποσότητα της ενέργειας που καταναλώνεται ανά χρονική περίοδο (π.χ. μήνα ή τρίμηνο). Ωστόσο, ακολουθείται μερικές φορές ένα μοτίβο πτωτικών μπλοκ, με τα διαδοχικά μπλοκ της ενέργειας να έχουν χαμηλότερη χρέωση ανά kWh. Η πρόθεση εδώ είναι να ανακτηθούν ορισμένα πάγια έξοδα (όπως εκείνα για τις μετρήσεις) για το πρώτο, ή στο υψηλού τιμολογίου, μπλοκ. Κατ’ αντιδιαστολή, για τους μεγάλους εμπορικούς και βιομηχανικούς καταναλωτές, μπορεί να οριστεί ξεχωριστή χρέωση ειδικά για να καλύψει τα έξοδα που σχετίζονται με τη μάλλον πολύπλοκη και δαπανηρή μέτρηση. Για παράδειγμα, το μηνιαίο τιμολόγιο της Fall River Electric Light Company το 1980 ζητούσε μια επιβάρυνση 70 ευρώ για τα πρώτα 25 kW της παραγωγικής ικανότητας, ή λιγότερα, μια χρέωση της τάξης του 1,70 ευρώ/kW για τια επόμενα 275 kW και ούτω καθεξής. Οι χρεώσεις ενέργειας παρουσίαζαν μια παρόμοια δομή: οι πρώτες 30.000 kWh κόστιζαν 1,04 σεντ/kWh, οι επόμενες 50.000 kWh κόστιζαν 0,64 σεντ/kWh κλπ.

Πριν συνεχίσουμε αυτή τη συζήτηση, ο αναγνώστης θα πρέπει να εξετάσει το σχήμα 4.6, όπου παρουσιάζεται ένα περίγραμμα ενός τυπικού συστήματος παροχής ηλεκτρικής ενέργειας.



Σχήμα 4.6

Τείνει να είναι η περίπτωση όπου οι βιομηχανικοί καταναλωτές της ηλεκτρικής ενέργειας σε πολλές χώρες χρεώνονται λιγότερο γι' αυτήν απ' ό,τι οι υπόλοιποι καταναλωτές. Αυτό συμβαίνει γιατί γενικά οι βιομηχανικοί καταναλωτές έχουν υψηλούς συντελεστές φόρτισης και ως επί το πλείστον καταναλώνουν ηλεκτρικοί ενέργεια σε υψηλότερες τάσεις απ' ό,τι οι εμπορικοί ή οικιακοί καταναλωτές, το οποίο μπορεί να σημαίνει σημαντική εξοικονόμηση κόστους σε πράγματα όπως στους μετασχηματιστές και στον εξοπλισμό που συνδέεται με χαμηλής τάσης γραμμές διανομής. Ένα άλλο σημείο που έχει μεγάλη σημασία γι' αυτήν τη συζήτηση είναι ότι όταν η διάκριση τιμών μπορεί να ασκείται από έναν πωλητή ηλεκτρικής ενέργειας, οι καταναλωτές που έχουν ανελαστική ζήτηση χρεώνονται συνήθως περισσότερο από εκείνους που έχουν ελαστική ζήτηση. Αυτοί που έχουν ιδιαίτερη ελαστική ζήτηση θα είναι, τυπικά, οι επιχειρήσεις με τη δυνατότητα παραγωγής της δικής τους ηλεκτρικής ενέργειας. Για παράδειγμα, η βιομηχανία αλουμινίου στις ΗΠΑ παράγει ίσως περισσότερο από το 30% της ηλεκτρικής ενέργειας που χρησιμοποιεί.

Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι σε μια εποχή μεγάλης απελευθέρωσης, οι μεγάλοι βιομηχανικοί καταναλωτές φαίνεται να ευνοούνται πάρα πολύ σε σχέση με τους μικρότερους καταναλωτές, δεδομένου ότι μπορούν να διαπραγματευτούν την τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας με διάφορους προμηθευτές, καθώς και να επιλέξουν αυτή που θεωρούν ότι είναι η πιο ευνοϊκή. Αλλά ταυτόχρονα αυτό το αξιοθαύμαστο πλεονέκτημα μπορεί να ξινίσει. Η ακόλουθη σύντομη ιστορία αξίζει να εξεταστεί με προσοχή. Βοηθά στην εξήγηση γιατί τα οικονομικά είναι ένα συναρπαστικό, αλλά μερικές φορές μπερδεμένο θέμα.

Οι βιομηχανικοί καταναλωτές στο Ηνωμένο Βασίλειο, και αλλού, είναι μεταξύ των μεγάλων οπαδών της απελευθέρωσης. Εξάλλου, εξακολουθούν να έχουν το δικαίωμα να διαπραγματεύονται με τους προμηθευτές της ηλεκτρικής ενέργειας, αλλά επιπλέον έχουν πρόσβαση στο συνεταιρισμό της ενέργειας, που λειτουργεί ως μια άμεση αγορά και όπου – τους έχει λεχθεί – η απελευθέρωση της αγοράς θα εξασφαλίσει ότι οι τιμές είναι χαμηλότερες από αυτές που θα ήταν κανονικά στις συμβάσεις με καθορισμένες τιμές που συνήθως διαπραγματεύονται με παραγωγούς. Μερικές φορές αυτό αποδείχθηκε αληθές, αλλά κάποιες άλλες φορές τα πράγματα εξελίχθηκαν διαφορετικά. Στα μέσα του 1999, για περίπου 12 ώρες την ημέρα, οι τιμές του συνεταιρισμού ενέργειας ήταν περίπου πέντε φορές μεγαλύτερες απ' ό,τι κατά τη διάρκεια του προηγούμενου μήνα και δεδομένου ότι οι τιμές αυτές χρησιμοποιούνται ως σημείο αναφοράς για τις συμβάσεις με σταθερές τιμές, δεν υπήρχε άμεση ανακούφιση στην «αγορά των σταθερών τιμών». Αντ' αυτού, οι μεγάλοι χρήστες της ενέργειας όπως οι εταιρείες χάλυβα και οι χημικές εταιρείες βρήκαν τα περιθώρια κέρδους τους να συμπιέζονται και την ανταγωνιστικότητά τους να υπονομεύεται. Η ιστορία εδώ ήταν ότι η απελευθέρωση αύξησε ανεξέλεγκτα την αγοραστική δύναμη των ηλεκτροπαραγωγών και όταν παρουσιάστηκε η ευκαιρία αυτοί εκμεταλλεύτηκαν την κατάσταση: σύμφωνα με την Energy Intensive Users Group οι ηλεκτροπαραγωγοί «χειραγώγησαν» τις τιμές. Ο συνεταιρισμός θέτει τιμές χονδρικής πώλησης σε περιόδους με διάρκεια μισής ώρας σε Αγγλία και Ουαλία και σε ορισμένες από αυτές τις περιόδους οι αιχμές τιμών ήταν τόσο σοβαρές ώστε οι πιο ενεργοβόρες επιχειρήσεις δε μπορούσαν να αντέξουν οικονομικά να αγοράσουν ενέργεια και απλά διέκοψαν την παραγωγή τους.

Η επικρατούσα οικονομική θεωρία δε φαίνεται να εγκρίνει τα διαφορετικά τιμολόγια ηλεκτρικής ενέργειας για οικιακούς και βιομηχανικούς καταναλωτές, γεγονός που αποδεικνύει πόσο λάθος μπορεί να είναι μερικές φορές η επικρατούσα οικονομική θεωρία. Στη Σουηδία, τα πολιτικά κόμματα αντιλαμβάνονται την τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας ως μια μακροοικονομική μεταβλητή και πιστεύεται γενικότερα ότι οι μεγάλες εξαγωγικές εταιρείες θα πρέπει να απομονωθούν από κάθε δυσάρεστη αλλαγή στο επίπεδο αυτής της τιμής. Αντ' αυτού, είναι σχεδόν βέβαιο ότι σε αυτές τις αλλαγές θα περιέλθουν τα νοικοκυριά και οι μικρές επιχειρήσεις. Αυτό που έχουμε εδώ είναι ένα σημαντικό παράδειγμα στην οικονομία της θεωρητικής ευημερίας: όποτε επέρχονται σημαντικές αλλαγές, θα υπάρχουν νικητές και ηττημένοι και σε καταστάσεις όπου οι ηττημένοι δε μπορούν να αντισταθμίσουν επαρκώς, είναι η πολιτική παρά η οικονομία που υπαγορεύει την έναρξη και την έκταση των αλλαγών αυτών.

Μια έκφραση που συναντά κανείς αρκετά συχνά αυτές τις ημέρες είναι η *κύλιση*. Από μηχανικής άποψης, κύλιση είναι απλά η μετάδοση της ενέργειας και κυρίως η «χύμα» ενέργεια. Αλλά διοικητικά σημαίνει μια κατάσταση όπου αυτός κάνει τη μετάδοση της κίνησης δεν είναι ούτε ο αγοραστής ούτε ο πωλητής αυτής της ενέργειας, αλλά είναι η πώληση της υπηρεσίας μετάδοσης. Έτσι μια τυπική λειτουργία κύλισης περιλαμβάνει τρεις συναλλασσομένους.

Ίσως το πρώτο ολοκληρωμένο τιμολόγιο που σχεδιάστηκε για να αντιμετωπίσει το πρόβλημα της διακύμανσης της ηλεκτρικής ενέργειας ήταν το λεγόμενο «πράσινο τιμολόγιο» (green tariff στα αγγλικά και tariff vert στα γαλλικά) της Electricité de France (EdF), το οποίο έλαβε το όνομά του από το χρώμα του εξωφύλλου του φυλλαδίου στο οποίο περιγράφεται αναλυτικά η χρέωση του τιμολογίου. Μια δεκαετία μετά την καθιέρωσή του, αυτό το τιμολόγιο έγινε υποχρεωτικό για όλους τους καταναλωτές που χρησιμοποιούν ηλεκτρική ενέργεια υψηλής τάσης και την ίδια στιγμή έγινε διαθέσιμο και για τους οικιακούς καταναλωτές σε μια τροποποιημένη έκδοση. Εννοιολογικά, το υπόβαθρο για το τιμολόγιο αυτό έχει ως εξής.

Δεδομένου ότι η περιοχή του Παρισιού είναι ο μεγαλύτερος καταναλωτής ηλεκτρικής ενέργειας της χώρας, αν και σε κάποια απόσταση από τις περισσότερες πηγές *παραγωγής* της, η τιμή του Παρισιού ήταν η βάση του συστήματος τιμολόγησης. Η πρόθεση ήταν πως σε οποιαδήποτε ώρα της ημέρας το βραχυπρόθεσμο οριακό κόστος (SMC) της ηλεκτρικής ενέργειας που παραδίδεται στην περιοχή του Παρισιού θα πρέπει να θεωρηθεί ως ίσος με το *μεταβλητό κόστος* για μια επιπλέον μονάδα προϊόντος από τη λιγότερο αποτελεσματική μονάδα παραγωγής που προμηθεύει το Παρίσι με την ηλεκτρική ενέργειά της. Η έκφραση «λιγότερη αποτελεσματική» είναι πολύ σημαντική εδώ, διότι αν η παραγωγή της ηλεκτρικής ενέργειας που κατανέμεται μεταξύ των μονάδων παραγωγής με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος, τότε η οριακή κιλοβατώρα ηλεκτρικής ενέργειας θα ληφθεί από το λιγότερο αποδοτικά εργοστάσιο που λειτουργεί.

Σε άλλα μέρη της Γαλλίας τα κόστη μπορεί να είναι χαμηλότερα λόγω της διαθεσιμότητας της υδροηλεκτρικής ενέργειας, αλλά εφόσον το Παρίσι είναι ικανό να απορροφά όλη τη διαθέσιμη υδροηλεκτρική ενέργεια και να εξακολουθεί να χρειάζεται ηλεκτρική ενέργεια που θα παράγεται από άλλη πηγή, το κόστος της υδροηλεκτρικής ενέργειας δε θα μπορούσε να ληφθεί ως το οριακό κόστος ακόμη και στην περιοχή όπου αυτή παράγεται, γιατί το οριακό κόστος σε αυτές τις γειτονιές θα έπρεπε, θεωρητικά, να σχετίζεται με το ευκαιριακό κόστος, το οποίο είναι η τιμή που θα καταβληθεί γι' αυτήν την ενέργεια κάπου αλλού. Αντ' αυτού ορίστηκε ότι οι καταναλωτικές περιοχές που είναι πιο κοντά στις υδροηλεκτρικές εγκαταστάσεις παρά στο Παρίσι θα πρέπει να καταβάλλουν μια τιμή για την ηλεκτρική ενέργεια που θα είναι ίση με το οριακό κόστος στο Παρίσι *μείον* το κόστος μεταφοράς ανάμεσα σε αυτούς και το Παρίσι.

Αυτού του είδους το πράγμα μπορεί να εμφανίσει το Παρίσι να ευνοείται σε σχέση με την υπόλοιπη χώρα, αλλά το αντίθετο από αυτόν τον ισχυρισμό θα ήταν πιο κοντά στην αλήθεια. Η EdF είναι μια από τις πιο δημοφιλείς επιχειρήσεις στη Γαλλία, ειδικά μεταξύ των υπαλλήλων της, με αποδεδειγμένο ρεκόρ για τη δημιουργία θέσεων εργασίας καθώς και τη χρήση εσόδων από π.χ. το Παρίσι ώστε να βεβαιωθεί ότι η ηλεκτρική ενέργεια είναι διαθέσιμη στους καταναλωτές σε μακρινές κοινότητες και σε τιμολόγια σχεδόν ίσα με εκείνα που πληρώνουν οι πολίτες που ζουν μέσα ή κοντά στο "Boul Mich" (Μητρόπολη του Παρισιού). Προσέξτε επίσης ότι η SMC αναφέρθηκε πιο πάνω. Δεν είναι αυτή, ωστόσο, η τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας. Αυτή η τιμή είναι σχεδόν η LMC (= SMC + κάποιες χρεώσεις παραγωγικής ικανότητας) συν, πολύ πιθανόν, κάποια «χρηματοπιστωτικές χρεώσεις».

Αυτό, ωστόσο, δεν κάνει την ηλεκτρική ενέργεια της Γαλλίας πιο ακριβή από αυτήν που πωλείται σε γειτονικές χώρες. Το αντίθετο. Και θα μπορούσε να είναι ακόμα πιο φθηνή βραχυπρόθεσμα αν τα διευθύνοντα στελέχη της EdF άκουγαν τους συναδέλφους τους στην Ευρωπαϊκή Επιτροπή και ξεκινούσαν ένα πρόγραμμα απελευθέρωσης που θα χαρακτηριζόταν από την απόλυση μερικών δεκάδων χιλιάδων εργαζομένων, τουλάχιστον. Προσέξτε την έκφραση «βραχυπρόθεσμα»! Μακροπρόθεσμα η ηλεκτρική ενέργεια της Γαλλίας θα πωληθεί σε περιοχές που συνορεύουν με τη Γαλλία, όπου η τιμή είναι γενικά υψηλότερη και όταν αυτό αρχίσει να συμβαίνει, ουσιαστικά κανείς δε γνωρίζει πόσο υψηλή θα γίνει η τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας για τα γαλλικά νοικοκυριά.

Μπορούμε να κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο με ορισμένες παρατηρήσεις για το ποσοστό της επιστροφής από τη ρύθμιση. Αν ξεχάσουμε τα πάντα για τους φόρους και τις αποσβέσεις, τότε οι ζητούμενες απαιτήσεις εσόδων R μιας ρυθμιζόμενης επιχείρησης μπορούν να γραφούν ως $R = r^*K + V$. Σε αυτήν την έκφραση το r^* είναι το επιτρεπόμενο ποσοστό της επιστροφής για την επιχείρηση, το K είναι η παραγωγική ικανότητα (σε νομισματικές μονάδες) – δηλ. η αξία του κεφαλαίου που χρησιμοποιείται για να παράγει τα προϊόντα q – και V είναι το μεταβλητό κόστος. Τώρα μπορούμε να πάμε στην τιμή (p) που ο παραγωγός επιτρέπεται να χρεώσει για την παραγωγή q, η οποία είναι:

$$P = (r^*K + V)/q \tag{8}$$

Όλα αυτά θα πρέπει να είναι αυτονόητα, εκτός από την περίπτωση στην οποία θα έχουμε την ευκαιρία να αναφερθούμε στο *επιτόκιο βάσης* και το πολυσυζητημένο (στην τεχνική βιβλιογραφία) «Φαινόμενο των Averch-Johnson».

Το επιτόκιο βάσης πιο πάνω είναι K: ουσιαστικά είναι η αξία της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας από ένα εργοστάσιο και κάποια άλλα στοιχεία που εξυπηρετούν *πραγματικά* τους καταναλωτές. Προσέξτε την έμφαση που δόθηκε στη λέξη «πραγματικά», επειδή κατά καιρούς ακούγονται λογικά επιχειρήματα για την τοποθέτηση τουλάχιστον ορισμένης ακριβής ημιτελούς (δηλ. μη παραγωγικής) δυναμικότητας στο επιτόκιο βάσης, ιδίως αν υπάρχει έλλειψη δυναμικότητας. Προφανώς, αυτό θα λειτουργήσει ως κίνητρο για νέες επενδύσεις.

Όσο αφορά το φαινόμενο Averch-Johnson, αυτό προτείνει πως αν το επιτρεπόμενο ποσοστό της επιστροφής (r^*) του κεφαλαίου υπερβαίνει το πραγματικό κόστος κεφαλαίου της επιχείρησης, τότε είναι πολύ επικερδές για την επιχείρηση να αυξήσει το κεφάλαιο περισσότερο από το «βέλτιστο» ποσό – δηλ. το ποσό που χαρακτηρίζεται από την ισόποση-ισόκοστη εφαπτόμενη που ασχοληθήκατε στα βασικά σας μαθήματα. Αυτό υπονοείται άμεσα στην πιο πάνω εξίσωση, όπου είναι δύσκολο να σκεφτούμε μια κατάσταση στην οποία δε θα ήταν προς το συμφέρον των διευθυντών των επιχειρήσεων κοινής ωφέλειας να παρουσιάσουν ρυθμιστικές αρχές με το μεγαλύτερο δυνατό K.

Η γνώμη μου εδώ είναι ότι το φαινόμενο Averch-Johnson εμβαθύνει στις λεπτομέρειες, στην καλύτερη περίπτωση.

4.5 Συμπεράσματα

Μεταξύ των θεμάτων που θα μπορούσαν να συμπεριληφθούν σε αυτό το βιβλίο, αλλά παραλείφθηκαν ή αντιμετωπίστηκαν πολύ τυπικά, η υδροηλεκτρική ενέργεια πιθανότατα αξίζει ειδικής μνείας. Εδώ λαμβάνει χώρα η φραγή των ρεόντων υδάτων, τα οποία στη συνέχεια διοχετεύονται στους στροβίλους υψηλής απόδοσης και χαμηλής ταχύτητας που είναι συνδεδεμένοι με τις γεννήτριες. Η ηλεκτρική ενέργεια που παράγεται σε αυτές τις εγκαταστάσεις είναι χαμηλού κόστους και μια μερική απόδειξη γι’ αυτό είναι ότι στη Νορβηγία, στον Ανατολικό Καναδά και στη Σουηδία έχουν σημαντική υδροηλεκτρική παραγωγική ικανότητα καθώς επίσης και το χαμηλότερο κόστος ηλεκτρικής ενέργειας στον κόσμο. Όπως γενικά συμβαίνει, οι περιβαλλοντολόγοι είναι γενικά αντίθετοι σε νέα φράγματα και τις πλημμύρες που απαιτούν.

Στην περίπτωση σχεδόν όλων των τεχνολογιών παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, ο βασικός μηχανισμός εμφανίζει μια κινητήρια μηχανή τουρμπίνας να οδηγεί μια περιστρεφόμενη ηλεκτρική γεννήτρια. Αυτό ισχύει για την υδροηλεκτρική ενέργεια και ισχύει επίσης και για το άλλο άκρο της τάξης μεγέθους. Εκεί έχουμε το συνδυασμό αεριοστρόβιλου-συμπιεστή που αρχικά αναπτύχθηκαν για τα αεροσκάφη και που τελικά μπορούν να λειτουργήσουν με πολύ υψηλές αποδόσεις. Το πρόβλημα είναι, ωστόσο, ότι ανεξάρτητα από το πόσο αποτελεσματική είναι η μηχανή, δε μπορεί να λειτουργήσει χωρίς πρωτογενείς ενεργειακούς πόρους (συμπεριλαμβανομένου και του νερού στην περίπτωση της υδροηλεκτρικής ενέργειας). Ούτε η εξυπνάδα ούτε ο ιδρώτας από το πρόσωπο ενός ατόμου μπορούν να υποκαταστήσουν την παροχή μιας «πιθανής ενέργειας» (με τη μορφή πετρελαίου, φυσικού αερίου κλπ) που μπορεί να μετατραπεί σε μηχανικό έργο ή κάτι ισοδύναμο.

Πολλά ειπώθηκαν επίσης νωρίτερα στην τελευταία παρατήρηση, αλλά ίσως ένα πράγμα θα πρέπει ακόμη να προστεθεί. Σε μια διάλεξή του ο Nicholas Georgescu-Roegen δήλωσε κατηγορηματικά ότι οι περισσότεροι μεγάλοι πόλεμοι των τελευταίων 150 χρόνων ήταν για τους φυσικούς πόρους, συμπεριλαμβανομένων και των ενεργειακών πόρων. Ο Καθηγητής Georgescu-Roegen μπορεί να μην ήταν απόλυτα σωστός, αλλά η προειδοποίησή του είναι κάτι που δε θα πρέπει να ξεχαστεί ποτέ.

ΜΕΡΟΣ Δ΄

ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΣ: ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΕΣ ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΣΕ ΣΥΜΒΑΤΙΚΗ ΘΕΡΜΟΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΣ ΕΞΕΛΙΣΣΟΜΕΝΩΝ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ ΑΝΑΓΩΓΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μεθοδολογία

1.1 Μοντελοποίηση μιας μελέτης περίπτωσης

Μια τυπική λιγνιτική μονάδα (330 MW_{el} μεικτής ισχύος) που λειτουργεί στην Ελλάδα απαιτείται να αναβαθμιστεί σε μια σύγχρονη, φιλική προς το περιβάλλον και αποδοτική μονάδα, διαφορετικά θα παραμεληθεί. Υποθέτουμε ότι η μονάδα παραγωγής θα μπορεί να λειτουργεί για τουλάχιστον 15 χρόνια. Επίσης, υποθέτουμε ότι ο παραγωγός ηλεκτρικής ενέργειας είναι πρόθυμος να επενδύσει στο ίδιο φάσμα της παραγωγικής ικανότητας, προκειμένου να αποφευχθούν σημαντικές απώλειες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Τα κόστη, οι τεχνικές προδιαγραφές και η αποδοτικότητα της παραγωγής του εργοστασίου των διαφόρων options μετασκευής είναι παρόμοια, αλλά θα θεωρήσουμε μια τεχνολογία CCS (Carbon Capture and Storage) καύσης οξυγόνου και κανονικού καυσίμου στην παρούσα εργασία. Αυτή η option θα συγκριθεί με ένα εντελώς νέο εργοστάσιο NGCC (Natural Gas Combined–Cycle) και εναλλακτικά με ένα NGCC εργοστάσιο εξοπλισμένο με CCS. Οι τιμές διάθεσης της ηλεκτρικής ενέργειας, του καυσίμου και του CO_2, ο πληθωρισμός και τα επιτόκια προκύπτουν από την επίλυση κατάλληλων Σ.Δ.Ε.. Όσο αφορά τα επιτόκια, θα εξεταστούν εννέα διαφορετικά σενάρια:

- Σενάριο Σ.Δ.Ε. – α: εφαρμογή ενός μοντέλου CIR (Cox-Ingersoll-Ross) για την προσομοίωση των επιτοκίων και ένα μοντέλο GBM για την προσομοίωση των ποσοστών πληθωρισμού. Χρησιμοποιείται ένας μέτριος αριθμός δοκιμών Monte Carlo (< 400) που οδηγεί σε υψηλή μεταβλητότητα των επιτοκίων.
- Σενάριο Σ.Δ.Ε. – β: το ίδιο με σενάριο Σ.Δ.Ε. – α, αλλά χρησιμοποιείται ένας μεγάλος αριθμός δοκιμών Monte Carlo (> 5000) που οδηγεί σε ομαλή διαδρομή επιτοκίων με μια τάση επαναφοράς περί τη μέση τιμή.
- Σενάρια 0,1,...,6: εφαρμογή σταθερών επιτοκίων για όλο το διάστημα λειτουργίας. Αυτά τα επιτόκια βασίζονται στην τελευταία προβλεφθείσα τιμή (άστατη πρόβλεψη) πριν αυξηθούν οι εισροές επένδυσης κατά ένα ασφάλιστρο κινδύνου στο εύρος [0, 0,06] με βήμα προσαύξησης ίσο με 0,01. Τα ποσοστά πληθωρισμού προσομοιώνονται με τη χρήση μιας στοχαστικής διαδικασίας GBM όπως και στα σενάρια Σ.Δ.Ε..

Η σύγκριση διαφορετικών δοκιμών Monte Carlo μέσω των Σ.Δ.Ε. – α και Σ.Δ.Ε. – β γίνεται προκειμένου να επικυρωθεί το επιχείρημα των Ingersoll και Ross: «η μεταβλητότητα των επιτοκίων μπορεί να είναι εξίσου σημαντική με το επίπεδό της στην απόφαση για επένδυση». Λαμβάνοντας υπόψη ότι διαφορετικοί αριθμοί δοκιμών παράγουν διαφορετικές μεταβλητότητες των επιτοκίων, το προτεινόμενο μοντέλο πραγματικών options θα μπορούσε να παρέχει κάποια αριθμητική απόδειξη για τον αντίκτυπό τους στις επενδυτικές αποφάσεις. Χρησιμοποιείται ο επιλύτης Euler – μέσα σε μια υπορουτίνα προσομοίωσης Monte Carlo – προκειμένου να παράγει πολλαπλές λύσεις των Σ.Δ.Ε., από τις οποίες προκύπτει η μέση τιμή στη συνέχεια. Οι μέσες λύσεις των Σ.Δ.Ε. αντιπροσωπεύουν τις απαιτούμενες στοχαστικές προβλέψεις. Αυτές είναι οι είσοδοι του αλγορίθμου των πραγματικών options που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της καθαρής παρούσας αξίας της επένδυσης. Ωστόσο ο χρόνος έναρξης της επένδυσης δεν είναι προκαθορισμένος. Ο επενδυτής μπορεί να επιλέξει να περιμένει πριν υλοποιήσει το επιχειρηματικό του σχέδιο και επομένως επαναλαμβάνεται η παραπάνω διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα, ο αριθμητικός υπολογισμός της καθαρής παρούσας αξίας μεταβάλλεται επανειλημμένα κατά βήματα του 1 έτους, που σημαίνει ότι η επένδυση μπορεί να αναβληθεί έως ότου προκύψει η βέλτιστη απόδοση. Η πλήρης διατύπωση παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα.

1.2 Μαθηματική διατύπωση

Στο πλαίσιο επίσης της παρούσας ανάλυσης, λαμβάνονται υπόψη οι ακόλουθοι παράγοντες:

(i) μια υπάρχουσα αγορά ηλεκτρικής ενέργειας στην οποία οι τιμές της ηλεκτρικής ενέργειας, των καυσίμων και οι τιμές ορίου του CO_2 εξελίσσονται σύμφωνα με μια διαδικασία GBM. Η Σ.Δ.Ε. που περιγράφει τη διαδικασία φαίνεται στην εξίσωση (1). Το επιτόκιο πληθωρισμού r_{in} θεωρείται επίσης ότι εξελίσσεται σύμφωνα με μια διαδικασία GBM (εξίσωση 1) ενώ τα άνευ κινδύνου επιτόκια θα ακολουθούν μια διαδικασία Cox-Ingersoll-Ross (CIR) (εξίσωση 2).

$$dX_t = \mu(t) \cdot X_t dt + D(t, X_t) \cdot V(t) dW_t \tag{1}$$

$$dr_t = S(t) \cdot [L(t) - r_t] dt + D(t, r_t^{1/2}) \cdot V(t) dW_t \tag{2}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, το r_t είναι το επιτόκιο, το X_t είναι το διάνυσμα των εναπομεινασών στοχαστικών διαδικασιών (μεταβλητών), το $\mu(t)$ είναι το διάνυσμα της κλίσης ως συνάρτηση του χρόνου (t), το V(t) η διανυσματική συνάρτηση της μεταβολής του χρόνου (t), το $D(t, X_t)$ και το $D(t, r_t^{1/2})$ οι διανυσματικές συναρτήσεις διάχυσης του χρόνου (t), το S(t) η ταχύτητα επαναφοράς περί τη μέση τιμή ως συνάρτηση του χρόνου (t), η L(t) είναι το επίπεδο του μοντέλου CIR και η dW_t είναι η διανυσματική διαφορική της GBM. Οι μεταβλητές της εξίσωσης (1) δίνονται σε διανυσματική μορφή και έτσι αντιστοιχίζονται σε οποιαδήποτε στοχαστική μεταβλητή που μπορεί να αντιπροσωπεύουν. Σημειώνεται ότι τα ποσοστά διάχυσης των μοντέλων CIR είναι συνάρτηση του $r_t^{1/2}$, το οποίο είναι απαραίτητο για την εξαγωγή των θετικών προβλέψεων ώστε να υπάρχει ευθυγράμμιση με τα πραγματικά επιτόκια.

(ii) ένας μεγάλος παραγωγός ενέργειας που είναι πρόθυμος να αντικαταστήσει το υπάρχον εργοστάσιο, ακολουθώντας την πλέον ωφέλιμη στρατηγική επένδυσης. Οι κεφαλαιουχικές δαπάνες θεωρούνται ότι είναι συνάρτηση του χρόνου έναρξης της επένδυσης σύμφωνα με την παγκόσμια εμπειρία σε παρόμοια έργα και συνεπώς θα ακολουθούν ένα χρονοδιάγραμμα που θα καθορίζεται από κατάλληλες καμπύλες γνώσης.

Η επένδυση στην αγορά που αφορά την ηλεκτρική ενέργεια μπορεί να περιλαμβάνει κάποιο κίνδυνο. Ένας ιδανικός υπολογισμός του ασφάλιστρου κινδύνου θα πρέπει να προϋποθέτει χιλιάδες δοκιμές προσομοίωσης προκειμένου να υπολογίσει τις διαφορές μεταξύ βεβαίων και αβέβαιων τιμών της καθαρής παρούσας αξίας. Λόγω των υψηλών υπολογιστικών απαιτήσεων τα ασφάλιστρα κινδύνου υπολογίζονται ορισμένες φορές από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\mu(t) - r(t) = V(t) \cdot r_p(t) \tag{3}$$

όπου το (r) είναι το άνευ κινδύνου επιτόκιο και το (r_p) είναι το απαιτούμενο ασφάλιστρο κινδύνου, ενώ οι συναρτήσεις κλίσης και μεταβλητότητας αναφέρονται στις χρονοσειρές των τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας και άλλων στοχαστικών μεταβλητών όπως τα κόστη καυσίμου, τα επιτρεπτά όρια CO_2, τα μεταβλητά κόστη κλπ. Όταν υλοποιείται ένας αλγόριθμος για μια πραγματική option, οι συνδυασμένες προσομοιώσεις των στοχαστικών διαδικασιών παρέχουν μια πιο ακριβή προσέγγιση της αβεβαιότητας: η κατά μέσο όρο διαφορά της ενέργειας μεταξύ ενός στοχαστικού υπολογισμού της ΚΠΑ με βελτιστοποιημένη έναρξη επένδυσης και μιας παραδοσιακής προσέγγισης DCF (Discounted cash flow) είναι:

$$\text{ΚΠΑ}_{κινδύνου} = \frac{\max(\text{ΚΠΑ}_{αβέβαιης} - \text{ΚΠΑ}_{DCF})}{παραγωγική\ ικανότητα} \tag{4}$$

Το ασφάλιστρο κινδύνου που αντιστοιχεί στην παραπάνω διαφορά ΚΠΑ θα πρέπει να προστεθεί στο σταθερό επιτόκιο που θεωρούμε στην ανάλυση DCF. Ο αναγωγικός παράγοντας προκύπτει από την εξίσωση (5) η οποία αντιπροσωπεύει την προσέγγιση με συνεχή ανατοκισμό μέσω σειράς Taylor πρώτης τάξης σε μορφή ολοκληρώματος που εξαρτάται από το χρόνο:

$$D_F(t) = \exp\left(\int_0^t r(x)dx\right) \tag{5}$$

Αυτός είναι ο συντελεστής με τον οποίο θα πρέπει να πολλαπλασιασθούν οι μελλοντικές αξίες που υπάρχουν τη χρονική στιγμή (t) προκειμένου να πάρουμε την παρούσα αξία τους (ΠΑ). Έτσι, οι μελλοντικές αποδόσεις εξαρτώνται από το χρονικό προφίλ των προβλεπόμενων επιτοκίων τα οποία με τη σειρά τους καθορίζονται από τα ιστορικά δεδομένα των κεντρικών τραπεζών. Με δεδομένο ένα αρχικό κεφάλαιο IC και την τιμή του αντιπροσώπου (του παραγωγού ηλεκτρικής ενέργειας) $V_\alpha(t)$ στο χρονικό σημείο t, η ΚΠΑ του έργου μπορεί να εκφρασθεί από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\text{ΚΠΑ}(t) = V_\alpha(0) + \int_0^t D_F(t) \cdot dV_\alpha(t) \tag{6}$$

με: $C = [C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n]$, $V = [V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n]$ και $V_\alpha(0) = IC$.

Η εξίσωση (6) αποτελεί το άθροισμα των ανηγμένων εσόδων και εξόδων που συμβάλλουν στην τιμή του αντιπροσώπου. Λαμβάνοντας υπόψη μια σειρά από επικίνδυνες δραστηριότητες (C_j), j ϵ [1, 2, …, n] και με την παραδοχή ότι οι τιμές τους ($X_{j,t}$) ακολουθούν μια διαδικασία GBM, είναι πιθανό να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής της τιμής του αντιπροσώπου μεταξύ δύο διακριτών χρονικών σημείων $t - dt$ και t:

$$dV_\alpha(t) = V_\alpha(t) - V_\alpha(t-dt) = \sum_{j=1,2,\ldots,n} C_j dX_{j,t} = \sum_{j=1,2,\ldots,n} C_j \cdot [\mu(t)\cdot X_t dt + D(t,X_t)\cdot V(t) dW_t] \tag{7}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η διαδικασία λήψης αποφάσεων μπορεί να αφορά ένα σύνολο διαφορετικών επενδυτικών ευκαιριών (i) με κόστος $CI_i(t)$, επιβάλλεται ένας μαθηματικός περιορισμός δεδομένου ότι αυτές οι ευκαιρίες θα πρέπει να περιορίζονται από το διαθέσιμο προϋπολογισμό:

$$CI_i(t) \le V_\alpha(t) \quad \forall i,t \tag{8}$$

Τα κόστη κεφαλαίου εξαρτώνται από τις τεχνικές προόδους που προκύπτουν από μακρές περιόδους συσσωρευμένης εμπειρίας για την κατασκευή εργοστασιακών μονάδων παραγωγής. Αυτό μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά, μέσω των παγκόσμιων καμπύλων γνώσης σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση:

$$CI_i(T_e) = CI_{i,2009} \cdot \left[\frac{P_{cum,i,T_e}}{P_{cum,i,2009}}\right]^{\log_2[1-b_i]} \quad \forall i \tag{9}$$

όπου το b_i είναι ένας κατάλληλος συντελεστής γνώσης για την κάθε τεχνολογία i, το $CI_{i,2009}$ είναι το κόστος κεφαλαίου που απαιτείται για την πραγματοποίηση μιας επένδυσης i σήμερα και το $P_{cum,i,t}$ είναι οι παγκοσμίως εγκαθιδρυμένες παραγωγικές ικανότητες που βασίζονται στην τεχνολογία i τη χρονική στιγμή (t). Η ηλεκτρική παραγωγή p(t) (σε MW_{el}) θεωρείται σταθερή – όπως θα συζητηθεί και στις εξισώσεις (13α και 13β). Οι επικίνδυνες δραστηριότητες (j) – που σχετίζονται με την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας – αποτελούνται από την ηλεκτρική ενέργεια που πωλείται στο δίκτυο, την κατανάλωση καυσίμου, τις εκπομπές καυσαερίων που τίθενται υπό διαπραγμάτευση και τη λειτουργία του εργοστασίου. Αυτές χαρακτηρίζονται από αβέβαιες τιμές που εκπροσωπούνται μέσω διαδικασιών GBM. Επιπλέον, συνεισφέρουν στο ρυθμό μεταβολής της τιμής του αντιπροσώπου που μπορεί να εκφραστεί από την ακόλουθη αναλυτική μορφή:

$$\begin{aligned} dV_a(t) = & \left[\left(dx_e(t) - \frac{dx_f(t)}{n} - \frac{e_f}{n} dx_{CO_2}(t) - dX_\upsilon(t)\right)\cdot p(t) - dX_F(t)\right] \\ & \xrightarrow{x_1\ \text{σταθερό στο dt}} \left[\left(x_e(t) - \frac{x_f(t)}{n} - \frac{e_f}{n} x_{CO_2}(t) - X_\upsilon(t)\right)\cdot p(t) - X_F(t)\right]\cdot dt \end{aligned} \tag{10}$$

όπου τα e_f και n ορίζουν τους παράγοντες των εκπομπών και την αποδοτικότητα της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας αντίστοιχα, τα x_e, x_f, x_{CO_2} ορίζουν τις στοχαστικές τιμές της ηλεκτρικής ενέργειας, του καυσίμου και των ορίων CO_2, ενώ τα X_υ και X_F είναι τα μεταβλητά και σταθερά κόστη αντίστοιχα. Οι στοχαστικές τιμές των επικίνδυνων δραστηριοτήτων (j = 1,2,…, n) που ορίστηκαν στο άθροισμα της εξίσωσης (7), επισημαίνονται χωριστά στην εξίσωση (10), ενώ οι υποκείμενες διαφορικές GBM περιλαμβάνονται στα στοχαστικά διαφορικά $dx_e, dx_f, dx_{CO_2}, dX_\upsilon, dX_F$. Η εξίσωση (10) εκφράζει την ισορροπία των διαφόρων συντελεστών εσόδων και εξόδων. Όλα τα κόστη θεωρούνται ότι έχουν τις ίδιες μονάδες (Euros/MW_{el}). Με την ενσωμάτωση της διαφορικής εξίσωσης (10) στην εξίσωση (6) και με αφαίρεση στην συνέχεια των επενδυτικών δαπανών που υπάρχουν τη χρονική στιγμή T_e (που δίνονται στην εξίσωση (9)), μπορεί να καταρτηθεί μια συνάρτηση του χρόνου έναρξης της επένδυσης, που αντιπροσωπεύει την ΚΠΑ του παραγωγού ηλεκτρικής ενέργειας:

$$
\begin{aligned}
\text{ΚΠΑ}_i(T_e) &= V_a(0) + \int_0^{T_e+T_c+T_{op}} D_F(t)\cdot dV_a(t) - CI_i(T_e) \\
&= V_a(0) + \int_0^{T_e+T_c} D_F(t)\cdot[(x_e(t) - \frac{x_f(t)}{n} - \frac{e_f}{n} x_{CO_2}(t) \\
&- X_\upsilon(t))\cdot p(t) - X_F(t)]\cdot dt + [\int_{T_e+T_c}^{T_e+T_c+T_{op}} D'_F(t) \\
&\cdot[(x'_e(t) - \frac{x'_f(t)}{n} - \frac{e'_f}{n} x'_{CO_2}(t) - X'_\upsilon(t))\cdot p'(t) - X'_F(t)]_i \\
&\cdot dt - CI_{i,2009}\cdot\left[\frac{P_{cum,i,T_e}}{P_{cum,i,2009}}\right]^{\log_2[1-b_i]}] \qquad \forall i
\end{aligned}
\tag{11}
$$

όπου το i δηλώνει το υποθετικά επιλεγμένο εργοστάσιο, το T_e είναι ο χρόνος έναρξης της επενδυτικής απόφασης, το T_c είναι ο χρόνος setup και θέσης σε λειτουργία, το T_{op} είναι ο χρόνος λειτουργίας και το $CI_i(T_e)$ δηλώνει τα κόστη επένδυσης για επιλεγμένο εργοστάσιο κατά το έτος (T_e). Η περίοδος T_c και η περίοδος T_{op} θεωρούνται σταθερές. Επομένως η ΚΠΑ εξαρτάται μόνο από τη χρονική στιγμή έναρξης της επένδυσης T_e. Το διαφορικό του χρόνου (dt) ισούται με 24-ωρα χρονικά διαστήματα και έτσι τα αριθμητικά δεδομένα εισόδου δίνονταν σε καθημερινή βάση. Όταν αυτό δεν ήταν δυνατό, χρησιμοποιήθηκαν παρεμβολές B-Spline. Τα σύμβολα με τόνους υποδηλώνουν τις μεταβλητές μετά τη μετασκευή (ή αντικατάσταση) του παλιού εργοστασίου. Τα κανονικά σύμβολα (χωρίς τόνους) δηλώνουν τις μεταβλητές πριν τη μετασκευή/αντικατάσταση και επομένως αντιπροσωπεύουν τις σχετικές διαδικασίες παραγωγής του παλιού εργοστασίου και/ή τις τιμές τους. Η διάρκεια λειτουργίας του παλιού και νέου εργοστασίου αντανακλάται στα όρια ολοκλήρωσης. Τα μεταβλητά και σταθερά κόστη προσεγγίζονται με ανατοκισμό των παρουσών αξιών στο μέλλον χρησιμοποιώντας το στοχαστικά (GBM) εξελισσόμενο ποσοστό πληθωρισμού $r_{in}(t)$:

$$X_{\upsilon}(T)=\left\{\prod_{t=1}^{T}\left[1+r_{in}(t)\right]\right\}\cdot X_{\upsilon}(1) \tag{12α}$$

$$X_{F}(T)=\left\{\prod_{t=1}^{T}\left[1+r_{in}(t)\right]\right\}\cdot X_{F}(1) \tag{12β}$$

Πριν το προσδιορισμό της βέλτιστης ΚΠΑ, απαιτείται μια έρευνα για τη βέλτιστη παραγωγή p(t). Η βέλτιστη παραγωγή υπολογίζεται με το να θέσουμε την πρώτη παράγωγο της τιμής του αντιπροσώπου ίση με το μηδέν. Τότε ισχύει η ακόλουθη διπλή εξίσωση:

$$\frac{\partial V_a(p,t)}{\partial t}=0 \quad \rightarrow \frac{\partial V_a(p,t)}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t}\bigg|_{p=p_0}=0 \quad \overset{\overbrace{\frac{\partial p}{\partial t}\neq 0}}{\Rightarrow} \quad \frac{\partial V_a(p,t)}{\partial p}\bigg|_{p=p_0}=0 \quad \forall t\in\left[0,T_e+T_c+T_{op}\right] \tag{13α}$$

$$\ldots \overset{\overbrace{\frac{\partial V}{\partial p}\neq 0}}{\Rightarrow} \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{t}}=0 \quad \forall t\in\left[0,T_e+T_c+T_{op}\right] \tag{13β}$$

Μόνο ο δεύτερος όρος (η εξίσωση 13β δηλαδή) ισχύει, που σημαίνει ότι η τιμή του αντιπροσώπου (του παραγωγού ηλεκτρικής ενέργειας) μπορεί να μεταβάλλεται με την παραγωγή, αλλά ο ρυθμός παραγωγής θεωρείται σταθερός. Στην πραγματικότητα γίνεται δεκτό ότι ο βέλτιστος ρυθμός παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας προκύπτει αμέσως μετά το setup ή τη συντήρηση. Από αυτό το σημείο κι έπειτα θεωρείται σταθερός. Με την παραπάνω μαθηματική διαδικασία μπορεί να δημιουργηθεί ένας πίνακας που να περιλαμβάνει τις τιμές της ΚΠΑ που αντιστοιχούν σε κάθε χρονική στιγμή έναρξης της επένδυσης και της τεχνολογικής option. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια πλήρης καταμέτρηση για την εξαγωγή της βέλτιστης ΚΠΑ, όσο διάστημα ο αριθμός των υποψηφίων χρονικών στιγμών έναρξης είναι αρκετά μικρός. Ο καθορισμός του βέλτιστου χρόνου έναρξης αποτελεί το βασικό πλεονέκτημα της ανάλυσης των πραγματικών options.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Αριθμητικός αλγόριθμος

Με βάση τον ορισμό της ανάλυσης των πραγματικών options, ο υπολογιστικός αλγόριθμος είναι σε θέση να εξαγάγει τη βέλτιστη ενέργεια για μια εταιρεία παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, προκειμένου να μεταβάλει τη λειτουργία ή την κλίμακα της επένδυσης ως ανταπόκριση στη μεταβολή των μελλοντικών συνθηκών. Το μοντέλο αποτελείται από διακριτά στάδια που μπορούν να συνοψιστούν εξής:

- Στάδιο 1: Έρευνα για τις διαθέσιμες αριθμητικές εισροές (είτε τεχνολογικές, είτε οικονομικές)
- Στάδιο 2: Πρόβλεψη των στοχαστικών μεταβλητών με τη χρήση κατάλληλων μοντέλων Σ.Δ.Ε. που προσομοιώνονται σε επιλύτη Euler – Maruyama. Οι διαφορικές εξισώσεις GBM με κανονική κατανομή εκλέγονται τυχαία μέσω μιας υπορουτίνας Monte Carlo.
- Στάδιο 3: Υπολογισμός της ΚΠΑ του έργου για τα διάφορα σενάρια και τις χρονικές στιγμές έναρξης της επένδυσης.
- Στάδιο 4: Προσδιορισμός της βέλτιστης ΚΠΑ του έργου, της στρατηγικής επένδυσης και της χρονικής στιγμής έναρξης της επένδυσης.

2.1 Τα δεδομένα εισόδου του μοντέλου

Το πλήρες σύνολο εισροών σχετικά με τα χρησιμοποιούμενα τεχνολογικά και οικονομικά δεδομένα παρουσιάζεται στον Πίνακα 1, ο οποίος αντανακλά τις πρόσφατες εξελίξεις στις τεχνολογίες NGCC και CCS της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και του μετριασμού των εκπομπών CO_2.

Τα ιστορικά στοιχεία των πραγματικών φορτίων και οι οριακές τιμές του συστήματος (ΟΤΣ) αποκτήθηκαν από το Διαχειριστή Ελληνικού Συστήματος Μεταφοράς Ηλεκτρικής Ενέργειας (Δ.Ε.Σ.Μ.Η.Ε. Α.Ε.). Σημειώνεται ότι τα στοιχεία ΟΤΣ στην πράξη συνιστούν τις πληρωμές που διαπίστωσε η Δ.Ε.Σ.Μ.Η.Ε. Α.Ε. για τους συμβατικούς παραγωγούς ηλεκτρικής ενέργειας. Τα ιστορικά δεδομένα ήταν διαθέσιμα σε ωριαία βάση για τη χρονική περίοδο 2000 – 2009, αλλά τελικά χρησιμοποιήθηκε ένας ημερήσιος μέσος όρος. Τα ιστορικά στοιχεία του πληθωρισμού και των επιτοκίων των κεντρικών τραπεζών αποκτήθηκαν από την Ελληνική Στατιστική Υπηρεσία.

Πίνακας 2.1: *Είσοδοι του μοντέλου*

Εργοστάσιο και καύσιμο	Κόστη επένδυσης (2009) (€/kW)	Κατώτερη θερμογόνος τιμή καθαρής αποδοτικότητας	Εκπομπές CO_2 (tn/MW h_f)	Σταθερά κόστη (€/kW/χρόνο)	Μεταβλητά κόστη (€/MW h_{el})	Ρυθμός γνώσης
Λιγνιτική μονάδα αναφοράς	0	0,357	0,40	5,5	3	0,01
Μετασκευή με καύση O_2 και καυσίμου CCS	500	0,254	0,06	7,5	3,5	0,05
NGCC	500	0,570	0,21	2,6	2,3	0,01
NGCC με CCS	1200	0,470	0,025	4,3	3,7	0,05

2.2 Πρόβλεψη των στοχαστικών μεταβλητών

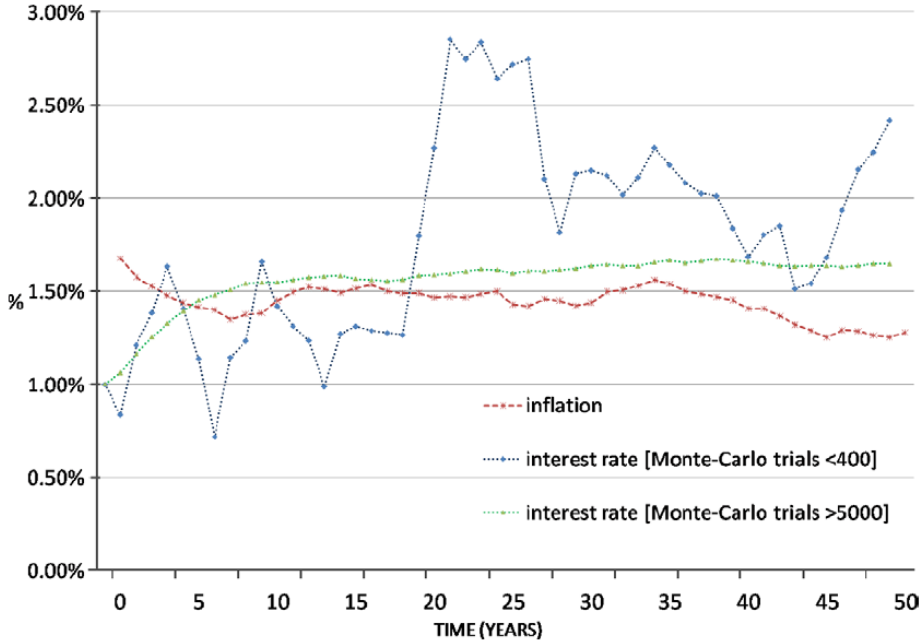
Στην παρούσα εργασία πολλές στοχαστικές μεταβλητές όπως οι τιμές των καυσίμων ή ο πληθωρισμός και τα επιτόκια ενδεχομένως σχετίζονται με βάση τις ιστορικές τους χρονοσειρές. Η συσχέτιση των μεταβλητών διερευνάται σε σχέση με τη συσχέτιση των διαφορικών εξισώσεων GBM. Η προϋπόθεση για να σχετίζονται δύο στοχαστικές μεταβλητές X_1 και X_2 κατά Brown (ο συμβολισμός τους είναι dX_1, dX_2) είναι η ύπαρξη μιας τρίτης στοχαστικής κατά Brown μεταβλητής X_3 ανεξάρτητης της X_2 για την οποία να ισχύει η εξίσωση (14):

$$X_{i,t} = \int_0^t \rho dX_2 + \int_o^t \sqrt{1-\rho^2}\, dX_3 \quad \rho \in (0,1) \tag{14}$$

όπου το ρ δηλώνει το συντελεστή συσχέτισης, που προκύπτει χρησιμοποιώντας τον τύπο του Pearson:

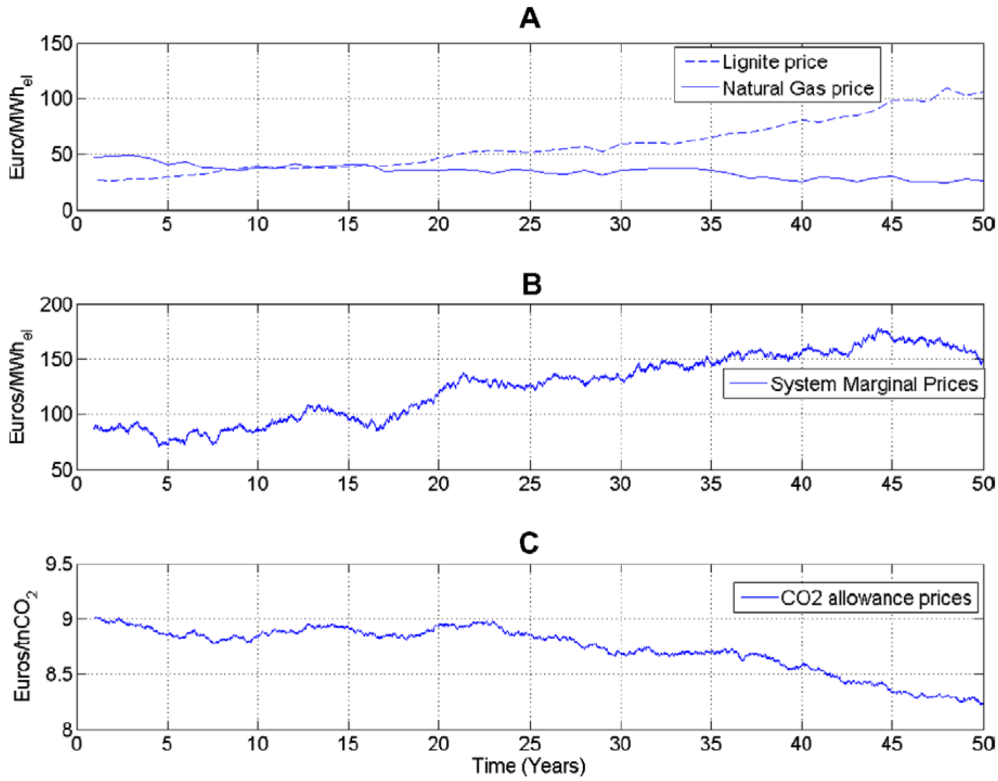
$$\rho = \frac{\sum X_1 X_2 - \dfrac{\sum X_1 X_2}{N}}{\left[\sum X_1^2 - \dfrac{\sum X_1^2}{N}\right]\left[\sum X_2^2 - \dfrac{\sum X_2^2}{N}\right]} \tag{15}$$

Στην παραπάνω εξίσωση (15), το N δηλώνει τον αριθμό των ιστορικών δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του ρ ο οποίος είναι περίπου κοντά στο 0,3 και έτσι υποδεικνύει μια μέτρια συσχέτιση μεταξύ των ιστορικών δεδομένων επιτοκίου και ποσοστού πληθωρισμού. Οι σχετικές προβλέψεις (με τη χρήση CIR και GBM μοντέλων αντίστοιχα) για τα επόμενα 50 χρόνια παρουσιάζονται στο σχήμα 1. Μετά από πολλές δοκιμές προσομοίωσης Monte Carlo, η διαδικασία κατάφερε να παράγει θετικές προβλέψεις επιτοκίων, αποδεικνύοντας έτσι την αξιοπιστία των μοντέλων CIR.



Σχήμα 1: *Προβλέψεις επιτοκίων και πληθωρισμού για τα διαφορετικά σενάρια*

Επίσης, μπορεί να διαπιστωθεί ότι η ομαλότητα των προβλέψεων εξαρτάται από τον αριθμό των δοκιμών Monte Carlo που εφαρμόζονται. Ένας μεγάλος αριθμός δοκιμών (Σενάριο Σ.Δ.Ε. – β) παράγει ομαλότερες και λιγότερο ασταθείς προβλέψεις σε σύγκριση με την περίπτωση των λιγότερων δοκιμών (Σενάριο Σ.Δ.Ε. – α). Και τα δύο επιτόκια των προβλέψεων τείνουν να επανέλθουν σε μια μέση τιμή που είναι περίπου 1,6%. Οι προβλέψεις των υπόλοιπων στοχαστικών μεταβλητών για τα επόμενα 50 χρόνια παρουσιάζονται στο σχήμα 2, που αποτελείται από: το 2A (τιμές καυσίμων), το 2B (τιμές ηλεκτρικής ενέργειας) και το 2C (επιτρεπτά όρια CO_2).



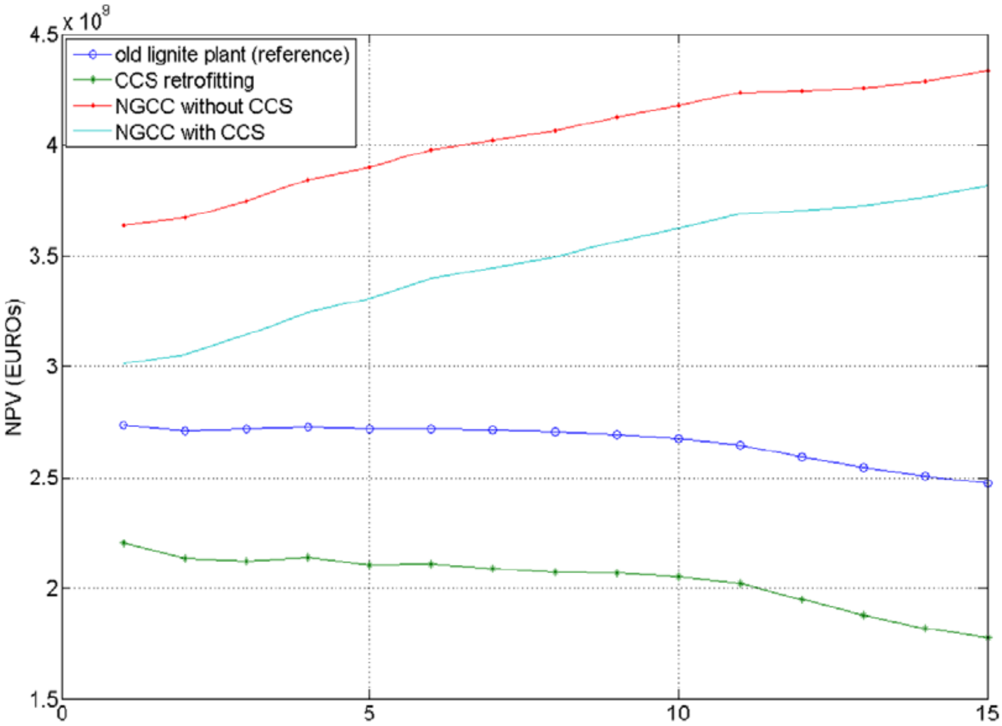
Σχήμα 2: *(A) Πρόβλεψη τιμών καυσίμων, (B) Πρόβλεψη τιμών ηλεκτρικής ενέργειας, (C) Πρόβλεψη τιμών επιτρεπτών ορίων CO_2*

Οι προβλέψεις αυτές χρειάζονται για τον προσδιορισμό των μελλοντικών οικονομικών συνθηκών, οι οποίες εισάγονται στον αλγόριθμο των πραγματικών options ως είσοδοι. Έτσι, οι αναμενόμενες αποδόσεις των υποψήφιων options επένδυσης βασίζονται στις παραπάνω προβλέψεις.

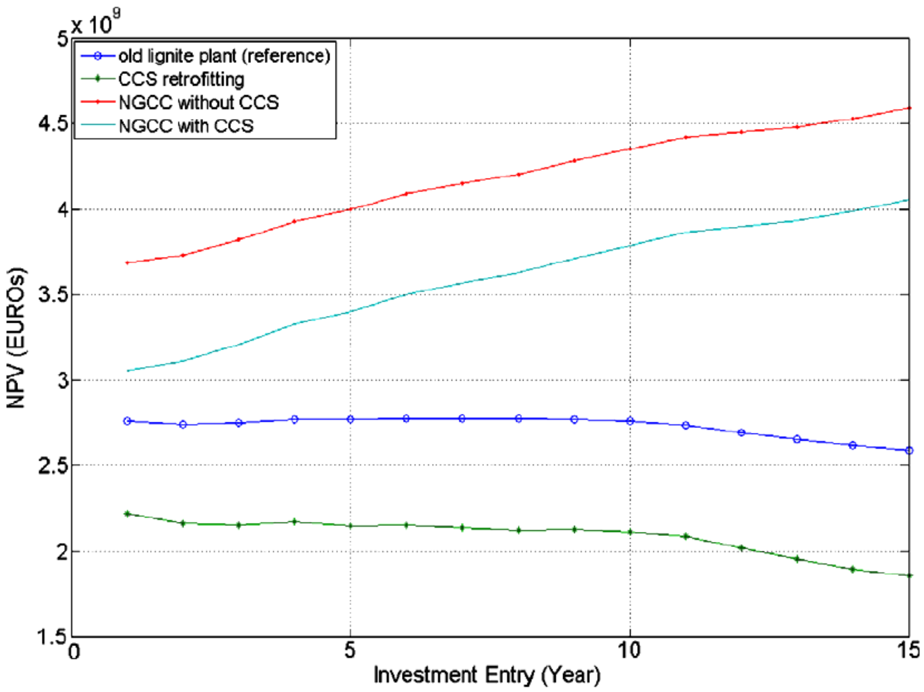
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αποτελέσματα και συζήτηση

Τα αριθμητικά αποτελέσματα αποτελούνται κυρίως από τις ΚΠΑ (για κάθε τεχνολογία), ως συνάρτηση του χρόνου της απόφασης για επένδυση. Στα γραφήματα των παρακάτω σχημάτων 3 – 7, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου για τα επιτόκια των σεναρίων Σ.Δ.Ε. – α, β, 0, 3 και 6 αντίστοιχα. Η επένδυση στην τεχνολογία NGCC φαίνεται να είναι η βέλτιστη στρατηγική από την άποψη της οικονομικής αποτελεσματικότητας, ανεξάρτητα από το σενάριο για το επιτόκιο που θεωρούμε. Το χαμηλό κόστος κεφαλαίου και το χαμηλό κόστος καυσίμων καθώς και η υψηλή απόδοση στην παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας της τεχνολογίας NGCC (χωρίς τη CCS) την καθιστούν την πιο ελπιδοφόρα μέθοδο παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, ενώ η περίπτωση συνδυασμού NGCC και CCS είναι η δεύτερη καλύτερη επιλογή σε όλα σχεδόν τα σενάρια που εξετάσαμε. Όσο αφορά τους λιγνιτικούς σταθμούς, τα modules CCS είναι αναστολείς στον αγώνα για να ακολουθήσουν τις τάσεις της αγοράς ενέργειας για όσο τα μετριοπαθή επιτρεπτά όρια CO_2 (εικόνα 2C) δε μπορούν να οδηγήσουν σε σημαντικές αποδόσεις μείωσης CO_2. Η χαμηλή αποδοτικότητα στην παραγωγή ενέργειας και τα υψηλά κόστη κεφαλαίου καθιστούν την τεχνολογία CCS λιγότερο οικονομική ακόμη και από μια παλιά λιγνιτική μονάδα. Επιπλέον, οι λιγνιτικές μονάδες δεν είναι ανταγωνιστικές λόγω του υψηλότερου κόστους των καυσίμων. Οι προβλέψεις για το κόστος του λιγνίτη (εικόνα 2Α), μπορεί εύλογα να αντικατοπτρίζουν την εξάντληση των ελληνικών λιγνιτικών αποθεμάτων, κάτι που οδηγεί σε πιο δύσκολες προσπάθειες εξόρυξης με αποτέλεσμα τη δικαιολόγηση των αυξημένων τιμών σε μακροπρόθεσμη βάση.

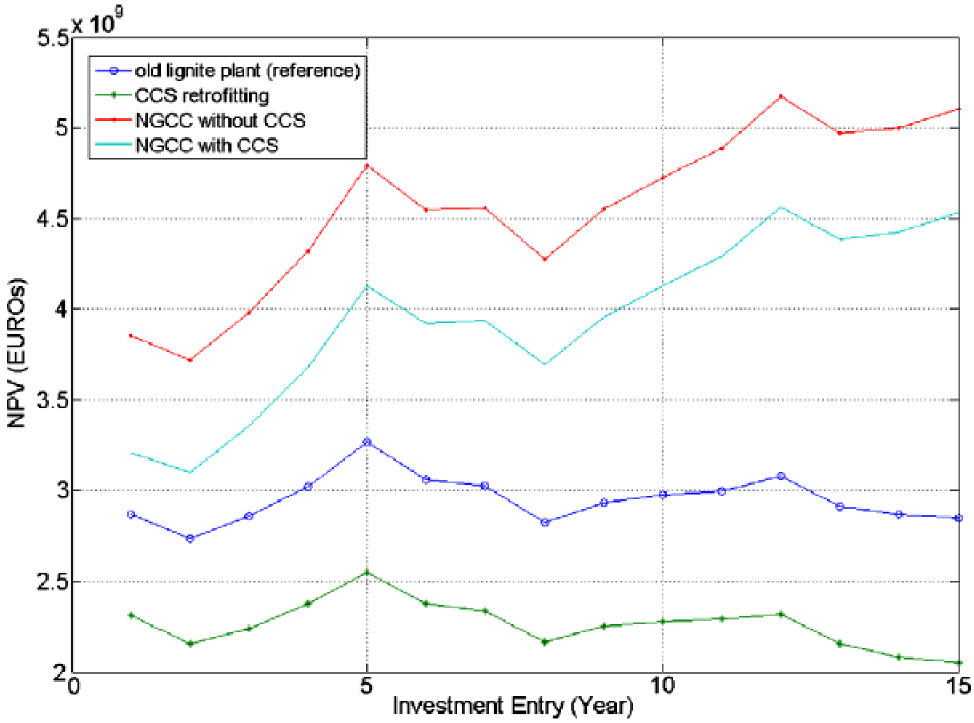


Σχήμα 3: *Στοχαστικά επιτόκια ΚΠΑ και πληθωρισμός – μικρός αριθμός προσομοιώσεων Monte Carlo (Σενάριο Σ.Δ.Ε. – α)*

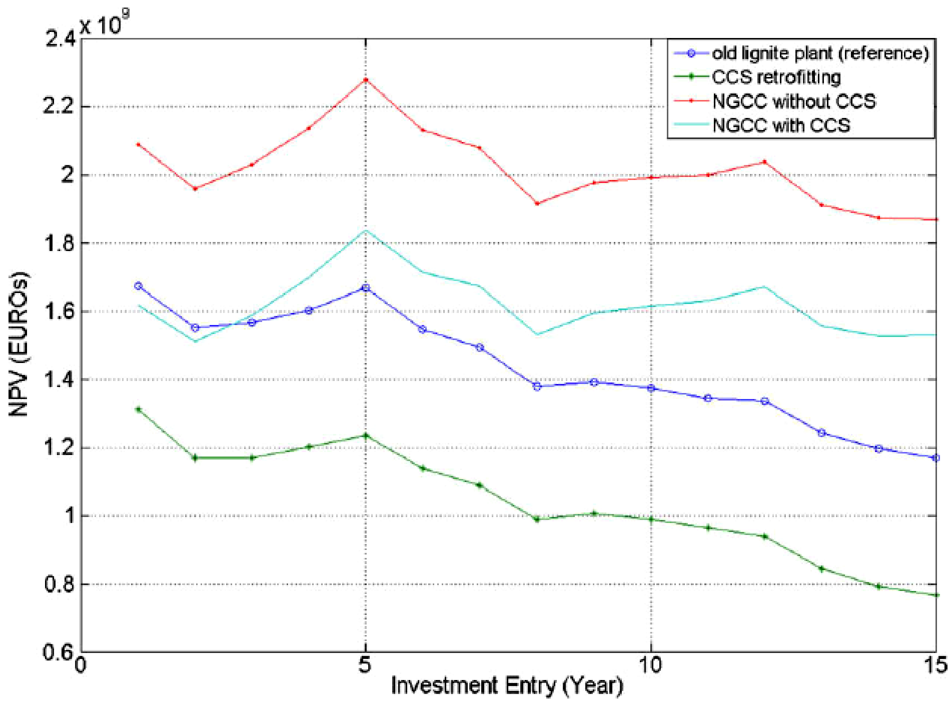


Σχήμα 4: *Στοχαστικά επιτόκια ΚΠΑ και πληθωρισμός – μεγάλος αριθμός προσομοιώσεων Monte Carlo (Σενάριο Σ.Δ.Ε. – β)*

Τα στοχαστικά επιτόκια και ποσοστά πληθωρισμού και των δύο σεναρίων Σ.Δ.Ε. (α, β) κυμαίνονται σε χαμηλότερα επίπεδα σε σχέση με τα σταθερά ποσοστά των σεναρίων 2 – 6, εξαιτίας των προσθηκών ασφαλίστρων κινδύνου στις τελευταίες περιπτώσεις. Τα σχήματα 3 – 7 δείχνουν ότι υψηλότερα επίπεδα κινδύνου οδηγούν σε χαμηλότερες ΚΠΑ και δίνουν το έναυσμα για τις προηγούμενες αποφάσεις επένδυσης. Διεξάγοντας παρόμοιες δοκιμές για όλα τα σενάρια που εξετάζουμε, δημιουργείται μια πλήρης λίστα από ΚΠΑ και χρόνους έναρξης της επένδυσης. Στο σχήμα 8 συγκρίνονται οι βέλτιστες ΚΠΑ με τις ΚΠΑ των επενδύσεων που ξεκινούν άμεσα ($T_e = 1$) και έτσι εντοπίζονται οι διαφορές που οφείλονται στη μοντελοποίηση των πραγματικών options σύμφωνα με τα σχόλια στις εξισώσεις (3) και (4). Οι χρόνοι βέλτιστης απόφασης επένδυσης που προκύπτουν από το μοντέλο αυτό, οδηγούν σε υψηλότερες ΚΠΑ από εκείνες στις οποίες καταλήγαμε από μη βέλτιστες και άμεσες χρονικές στιγμές έναρξης της επένδυσης. Παρατηρούνται μεγαλύτερες διαφορές ΚΠΑ (20%) μεταξύ άμεσης και βέλτιστης έναρξης της επένδυσης όταν λαμβάνονται υπόψη τα στοχαστικά επιτόκια (σενάρια Σ.Δ.Ε. – α , – β).

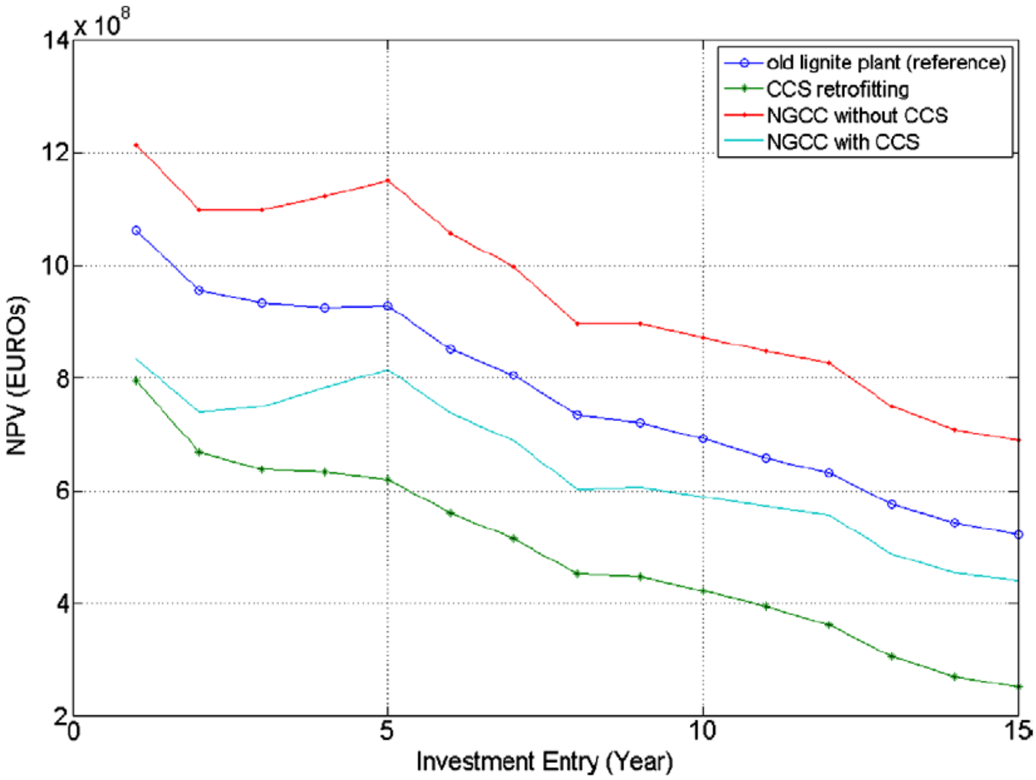


Σχήμα 5: *Η ΚΠΑ υποθέτοντας συνεχές επιτόκιο και πληθωρισμό και 0% ασφάλιστρα κινδύνου (σενάριο 0)*

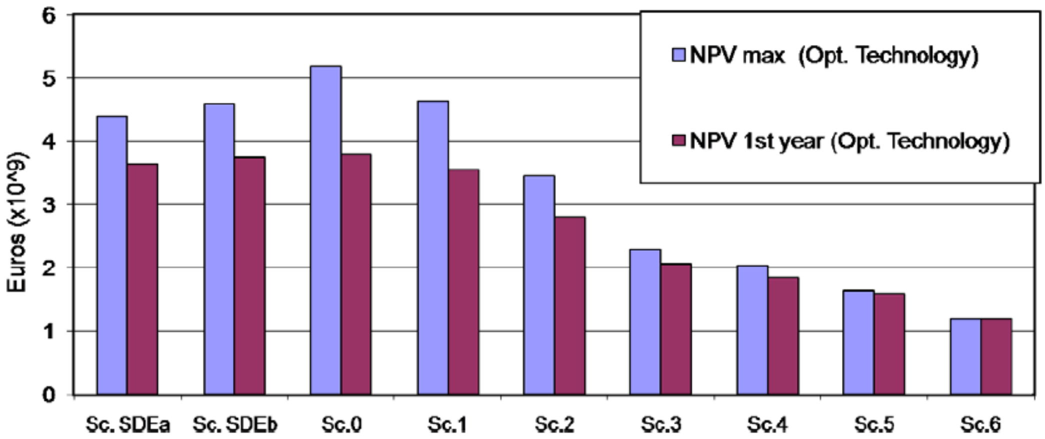


Σχήμα 6: *Η ΚΠΑ υποθέτοντας συνεχές επιτόκιο και πληθωρισμό και 3% ασφάλιστρα κινδύνου (σενάριο 3)*

Ομοίως, μπορούν να παρατηρηθούν μεγάλες διαφορές στις ΚΠΑ όταν λαμβάνονται υπόψη τα σταθερά επιτόκια που ενσωματώνουν χαμηλά ασφάλιστρα κινδύνου (σενάρια 0 – 1). Στην περίπτωση των σταθερών επιτοκίων με υψηλά ασφάλιστρα κινδύνου (σενάρια 2 – 6), οι αντίστοιχες διαφορές στις ΚΠΑ είναι σημαντικά χαμηλότερες (< 5%). Οι υψηλότερες διαφορές στις ΚΠΑ στην πρώτη περίπτωση θα μπορούσαν να αποδοθούν στο μέσο όρο των βασικών στοχαστικών επιτοκίων τα οποία φέρουν ηπιότερες αναγωγικές επιδράσεις με το χρόνο. Γενικά, η option άμεσης έναρξης της επένδυσης μπορεί να παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για ένα δυνητικό επενδυτή και επομένως δε θα πρέπει να απορριφθεί με ευκολία. Αν και οι βέλτιστες ΚΠΑ αντιστοιχούν σε επενδύσεις που μπορεί να αποφασιστούν στο μέλλον, οι ΚΠΑ των άμεσων ενάρξεων επένδυσης δεν αναμένονται να είναι πολύ χαμηλότερες από αυτές των βέλτιστων. Όπως προέκυψε από το μοντέλο και την ανάλυση των αποτελεσμάτων, οι μέγιστες διαφορές (20%) παρατηρούνται μόνο όταν λαμβάνονται υπόψη τα στοχαστικά επιτόκια. Επιχειρηματικές στρατηγικές, τρέχουσες φορολογικές συνθήκες, περιβαλλοντικές οδηγίες και οι παρεμβάσεις των αντίστοιχων κρατών της Ε.Ε. είναι μεταξύ των εξωτερικών παραγόντων που μπορούν να επιταχύνουν την υλοποίηση οποιωνδήποτε σχεδίων έργων. Στην πραγματικότητα θα μπορούσαν να αποδειχθούν οι πιο σημαντικοί παράγοντες της τελικής απόφαση για το χρόνο επένδυσης, σε σύγκριση με τις παραπάνω υπολογισθείσες διαφορές στις ΚΠΑ μεταξύ των άμεσων και βέλτιστων χρόνων επενδύσεων. Παρόλα αυτά, πρέπει να σημειωθεί ότι τα παραπάνω αποτελέσματα βασίζονται στις μελλοντικές προβολές των μεταβλητών εισόδου (που φαίνονται στα σχήματα 1 και 2), οι οποίες ενδέχεται να μη θεωρούνται ως ασφαλείς προβλέψεις. Μάλλον αποτελούν πρότυπες διαδρομές εξέλιξης που αντιπροσωπεύονται από στοχαστικές διαδικασίες, οι οποίες αντανακλούν την προηγούμενη συμπεριφορά τους. Γι’ αυτήν την εργασία χρησιμοποιούνται δείγματα των επαγόμενων αβεβαιοτήτων με κανονική κατανομή που προκύπτουν από τα ιστορικά δεδομένα. Ο παραπάνω συμφυής περιορισμός της στοχαστικής μοντελοποίησης θα πρέπει οπωσδήποτε να ληφθεί υπόψη κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε διαδικασίας λήψης αποφάσεων.



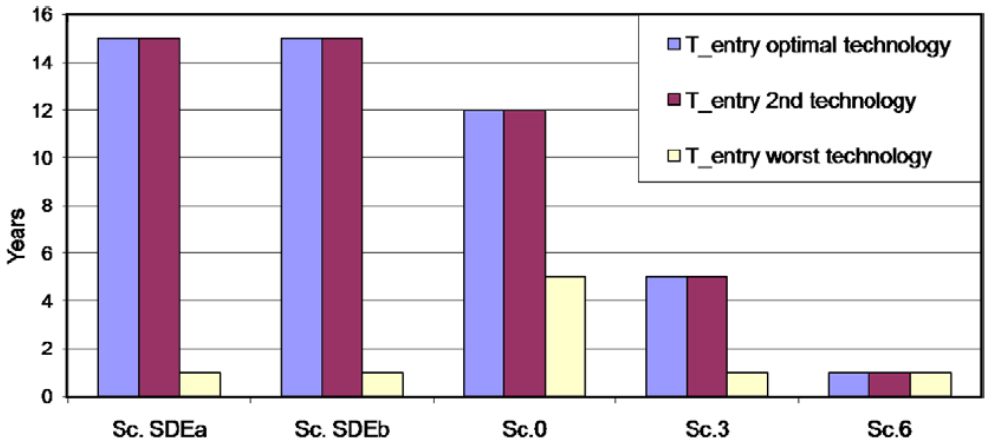
Σχήμα 7: *Η ΚΠΑ υποθέτοντας συνεχές επιτόκιο και πληθωρισμό και 6% ασφάλιστρα κινδύνου (σενάριο 6)*



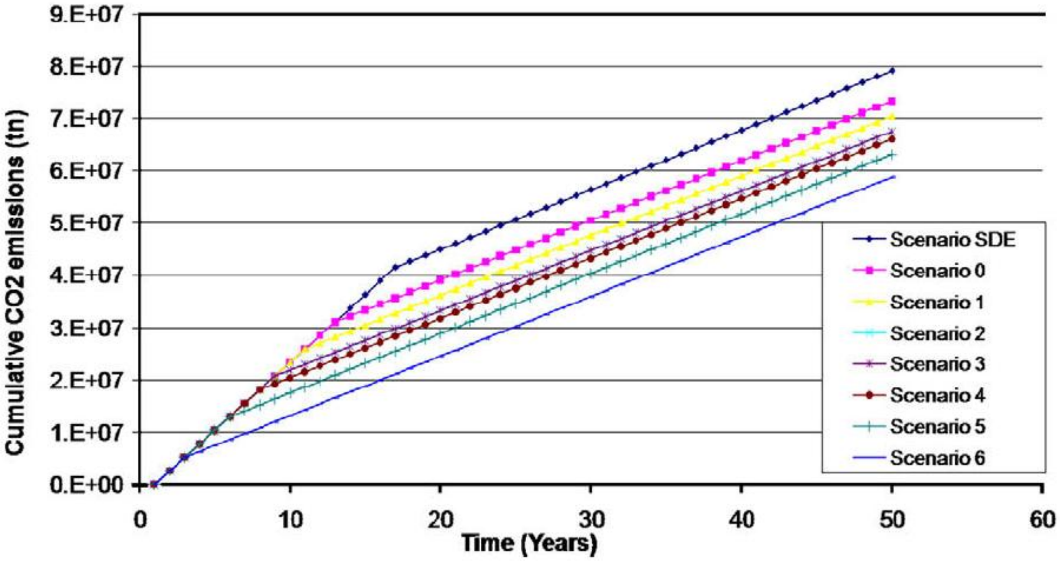
Σχήμα 8: *Η βέλτιστη αναμενόμενη ΚΠΑ για τα διάφορα σενάρια και τεχνολογίες*

Συγκρίνοντας τα δύο στοχαστικά σενάρια (Σ.Δ.Ε. – α, – β), μπορούν να εντοπιστούν ελάχιστες διαφορές στις βέλτιστες χρονικές στιγμές έναρξης της επένδυσης (σχήμα 9). Ωστόσο, παρατηρούνται διαφορές κοντά στο 8% στις αναμενόμενες ΚΠΑ τους και έτσι επιβεβαιώνουν εν μέρει τον ισχυρισμό των

Ingersoll and Ross για τη σημασία της μεταβλητότητας του επιτοκίου στις επενδυτικές αποφάσεις. Στην πράξη, τα μεταβλητά επιτόκια (σενάριο Σ.Δ.Ε. – α) παράγουν χαμηλότερες ΚΠΑ απ' ό,τι το σενάριο (Σ.Δ.Ε. – β) ομαλών επιτοκίων. Αυτό μπορεί να οφείλεται στην ισχυρότερη επίδραση των επιτοκίων αναγωγής με τα μεταβλητά προφίλ του χρόνου. Τα αριθμητικά πειράματα που διεξάγονται για την αξιολόγηση των επιπτώσεων της μεταβλητότητας των επιτοκίων, αναφέρουν ότι παρά την ελάχιστη επίδρασή της στο χρόνο έναρξης της επένδυσης μπορεί να οδηγήσει χωρίς αμφιβολία σε μειωμένες εκτιμήσεις των αναμενόμενων αποδόσεων. Η σύγκριση των αποδόσεων που προκύπτουν από πραγματικές options και μοντέλα DCF (με τη χρήση της εξίσωσης (4)) οδηγούν σε διαφορετικές εκτιμήσεις των ασφαλίστρων κινδύνου για κάθε τεχνολογία. Το ασφάλιστρο κινδύνου που απαιτείται για τη μοντελοποίηση DCF ενός σταθμού παραγωγής ενέργειας που λειτουργεί με λιγνίτη πρέπει να είναι μεγαλύτερο (r_p ~ 10%) συγκρινόμενο με το αντίστοιχο εργοστάσιο NGCC (r_p ~ 5%) εξαιτίας της ταχείας αύξησης του κόστους του λιγνίτη και παρά τη μακρά εμπειρία του παρελθόντος των Ελληνικών εταιρειών στην κατασκευή λιγνιτικών εργοστασίων (που αντανακλάται στα μειούμενα κόστη κεφαλαίου). Στο σχήμα 10 παρουσιάζεται ο χρόνος έναρξης της επένδυσης ως συνάρτηση των θεωρούμενων σεναρίων για τα επιτόκια, για τη βέλτιστη, τη δεύτερη καλύτερη καθώς και τη χειρότερη option επένδυσης.



Σχήμα 9: *Η βέλτιστη στιγμή επένδυσης για τα διάφορα σενάρια και τεχνολογίες*



Σχήμα 10: *Η συγκέντρωση CO_2 εξαιτίας της αναβολής της επένδυσης για τα διάφορα σενάρια*

Γενικά, τα υψηλότερα ποσοστά (λόγω του υψηλότερου κινδύνου που λαμβάνεται υπόψη) προκαλούν ταχείες επενδυτικές αποφάσεις. Αντιθέτως, τα στοχαστικώς υπολογισμένα επιτόκια (Σενάρια Σ.Δ.Ε. – α, – β) κυμαίνονται σε χαμηλότερα επίπεδα και έτσι καθυστερούν οποιαδήποτε απόφαση έναρξης της επένδυσης. Με άλλα λόγια, τα χαμηλά επίπεδα επιτοκίων μπορεί να μειώσουν λίγο τις μελλοντικές αποδόσεις και έτσι να επιτρέχουν την αναβολή των επενδύσεων, υπέρ μιας ασφαλέστερης και περισσότερο κερδοφόρας μελλοντικής υλοποίησης. Είναι ενδιαφέρον ότι οι βέλτιστοι χρόνοι έναρξης των επενδύσεων για τις δύο πιο αποδοτικές τεχνολογίες (NGCC με CCS και NGCC χωρίς CCS) είναι παρόμοιοι. Αυτό είναι άμεσο αποτέλεσμα των ακόλουθων: (α) οι δαπάνες τους εξαρτώνται από το ίδιο καύσιμο και την ίδια εξέλιξη των επιτρεπτών ορίων εκπομπής CO_2, (β) τα έσοδά τους εξαρτώνται από την ίδια εξέλιξη της τιμής της ηλεκτρικής ενέργειας και (γ) τόσο τα έσοδα όσο και τα έξοδα εξαρτώνται από την ίδια εξέλιξη των επιτοκίων. Από την άλλη πλευρά, ο χρόνος έναρξης της επένδυσης για τη χειρότερη τεχνολογία διαφέρει από τις δύο παραπάνω τεχνολογίες εξαιτίας του γεγονότος ότι οι δαπάνες της εξαρτώνται από την εξέλιξη μιας διαφορετικής τιμής καυσίμου, δηλαδή την τιμή του λιγνίτη.

Το προτεινόμενο μοντέλο μπορεί να οδηγήσει σε μερικές ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις σχετικά με τη συσσώρευση των εκπομπών CO_2 με το χρόνο. Στο σχήμα 10, οι συσσωρευμένες εκπομπές CO_2 παρουσιάζονται ως συνάρτηση του χρόνου για τα διαφορετικά σενάρια επιτοκίων. Υποτίθεται ότι έχει επιλεγεί μια βέλτιστη στρατηγική (δηλαδή η δημιουργία μιας νέας μονάδας NGCC) για τη μετασκευή του παλιού εργοστασίου.

Ένα ποσοστό της συσσώρευσης εκπομπών CO_2 διατηρείται σταθερό μέχρι την υλοποίηση της επένδυσης. Από αυτό το σημείο κι έπειτα, το ποσοστό συσσώρευσης CO_2 μειώνεται λόγω του χαμηλότερου συντελεστή εκπομπών της μονάδας NGCC. Από αυτό το διάγραμμα συνάγεται το συμπέρασμα ότι οι αποφάσεις που θα προκύψουν από τις παραδοχές για χαμηλό κίνδυνο μπορεί να προκαλέσουν έναν αρνητικό αντίκτυπο στην αειφορία επειδή μπορεί να οδηγήσουν σε αναβολή των νέων, φιλικών προς το περιβάλλων επενδύσεων μέχρι να βελτιστοποιηθούν οι οικονομικοί όροι (τιμές της ηλεκτρικής ενέργειας, επιτρεπτά όρια CO_2 κλπ). Η επίδραση που περιγράφεται πιο πάνω και αφορά στα στοχαστικά επιτόκια της βιωσιμότητας διατηρείται ανεξάρτητα από την τεχνολογία που έχουμε επιλέξει. Ο συντελεστής εκπομπών (e_f) είναι η βασική παράμετρος που οδηγεί την κλίση της συσσώρευσης εκπομπών CO_2 με το χρόνο. Η βέλτιστη περιβαλλοντική απόδοση επιτυγχάνεται όταν χρησιμοποιηθεί η τεχνολογία NGCC/CCS, λόγω του ελάχιστου ποσοστού εκπομπών (e_f στον πίνακα 1). Στην περίπτωση αυτή, η κλίση των σωρευτικών εκπομπών CO_2 που απελευθερώνονται με την πάροδο του χρόνο είναι ελαφρώς θετική, τονίζοντας έτσι τη φιλική προς το περιβάλλον τεχνολογία NGCC/CCS. Στην υποθετική περίπτωση της μετασκευής του παλιού εργοστασίου λιγνίτη με τη χρήση συστήματος CCS καύσης οξυγόνου με αέριο καύσιμο, τα αναμενόμενα οφέλη για το περιβάλλον δεν είναι ισοδυνάμως ελπιδοφόρα – δεδομένου ότι ο αντίστοιχος παράγοντας εκπομπών είναι σημαντικά υψηλότερος – αλλά εξακολουθούν να είναι πολύ πιο ελπιδοφόρα από εκείνα που αναμένονται από την εφαρμογή των υπόλοιπων συμβατικών τεχνολογιών. Από την άλλη πλευρά, οι CCS options (είτε καύσης οξυγόνου με αέριο καύσιμο/CCS είτε NGCC/CCS) δεν είναι ακόμα ώριμες λύσεις, σε σύγκριση με την παλαιότερη αλλά δοκιμασμένη τεχνολογία NGCC. Επιπλέον, κάτω από τις παραδεχόμενες επιτρεπτές τιμές CO_2, οι τεχνολογίες CCS δε μπορούν να προωθηθούν και ως εκ τούτου οι οικονομικές επιδόσεις τους δε μπορούν να εξασφαλιστούν με το χρόνο. Έτσι, δε μπορούν να αποτελέσουν μια βέλτιστη πρόταση για έναν υποθετικό επενδυτή, εκτός κι αν η συνεχιζόμενη τεχνολογική πρόοδος καθώς και τυχόν περιβαλλοντικές πολιτικές παρεμβάσεις αλλάξουν αυτή την κατάσταση βραχυπρόθεσμα ή μεσοπρόθεσμα.

Ως μια γενική παρατήρηση σχετικά με την αποτελεσματικότητα και την αξιοπιστία των αλγορίθμων των πραγματικών options, θα πρέπει να σημειωθεί ότι ως επί το πλείστον εξαρτώνται από την πολυπλοκότητα των υπό εξέταση περιπτώσεων και από τα διαθέσιμα στοχαστικά σύνολα δεδομένων εισόδου. Η ανάλυση του σχεδιασμού των επενδύσεων εξοικονόμησης ενέργειας μπορεί να είναι αρκετά περίπλοκη λαμβάνοντας υπόψη τις απαιτήσεις για διάφορες εισόδους από διαφορετικές τεχνολογικές options καθώς επίσης και τα επίπεδα υψηλού κινδύνου και τις πολλαπλές αβεβαιότητας που συχνά αντιμετωπίζονται. Οι αλγόριθμοι πραγματικών options μπορεί να είναι αρκετά αποτελεσματικά εργαλεία για την ανάλυση της χρονικής εξάρτησης των ενεργειακών επενδύσεων. Ωστόσο, η ευαισθησία τους για το επίπεδο μεταβλητότητας και τις διακυμάνσεις των στοχαστικών μεταβλητών εισόδου μπορεί να είναι εξαιρετικά υψηλή. Έτσι, η διατύπωση ενός γενικού κανόνα σχετικά με την αναμενόμενη χρονική στιγμή έναρξης της επένδυσης ή των αντίστοιχων αποδόσεων μπορεί μόνο να είναι οριακά πιθανή στις αγορές ενέργειας. Αντίθετα, μια διεξοδική έρευνα μπορεί να είναι αναγκαία σε μια βάση εξέτασης της κάθε περίπτωσης ξεχωριστά, αποτελούμενη από τα προτεινόμενα αριθμητικά πειράματα, με σκοπό τη βελτιστοποίηση των τελικών αποφάσεων και τον εντοπισμό των πολλαπλών επιδράσεων των βασικών στοχαστικών διαδικασιών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Συμπεράσματα

Παρουσιάζεται μια αξιολόγηση του αντίκτυπου της εξέλιξης των στοχαστικών επιτοκίων στην ανάλυση των ενεργειακών επενδύσεων. Έχει δημιουργηθεί ένας αλγόριθμος πραγματικών options με τη χρήση προβλέψεων στοχαστικών επιτοκίων προκειμένου να ερευνήσουμε τις επιπτώσεις τους στην οικονομική και περιβαλλοντική αποτελεσματικότητα των ενεργειακών έργων. Η παραδοσιακή παραδοχή των σταθερών επιτοκίων που περιλαμβάνουν υψηλά ασφάλιστρα κινδύνου μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά μεγαλύτερες χρονικές στιγμές έναρξης των επενδύσεων απ' ό,τι εκείνων που προτείνονται από στοχαστικώς εξελισσόμενες τιμές. Μπορούν να εντοπιστούν ελάχιστες διαφορές στους υπολογιζόμενους βέλτιστους χρόνους έναρξης των επενδύσεων μεταξύ άστατης και ομαλής εξέλιξης των επιτοκίων, που παράγονται από διαφορετικούς αριθμούς δοκιμών Monte Carlo (< 400, > 5000 αντίστοιχα). Στην περίπτωση της άστατης εξέλιξης των επιτοκίων, η βέλτιστη ΚΠΑ υπολογίζεται ώστε να είναι χαμηλότερη (κατά τουλάχιστον 8%) σε σχέση με την περίπτωση της ομαλής εξέλιξης των επιτοκίων. Αυτό είναι ένα άμεσο αποτέλεσμα των χαμηλότερων επιπέδων μέσων αναγωγικών επιτοκίων στην τελευταία περίπτωση. Καθώς μειώνεται το επίπεδο των επιτοκίων, οι αναμενόμενες ΚΠΑ αυξάνονται. Οι παραδοχές για σταθερά επιτόκια περιλαμβανομένων και των επιτοκίων υψηλού κινδύνου μπορεί να σημάνουν τη σύγκλιση των ΚΠΑ μεταξύ του βέλτιστου και του άμεσου χρόνου έναρξης της επένδυσης. Αντιθέτως, στοχαστικά ή μηδενικά επιτόκια μπορεί να οδηγήσουν σε σημαντικά αποκλίνουσες ΚΠΑ. Σε αυτήν την περίπτωση, ο βέλτιστος χρόνος έναρξης της επένδυσης μπορεί να είναι τουλάχιστον 20% πιο επικερδής απ' ό,τι ο αντίστοιχος άμεσος χρόνος έναρξης. Μπορεί να υπάρξουν ορισμένες επιδράσεις στη βιωσιμότητα, ανάλογα με το χρονικό σημείο της αντικατάστασης ή μετασκευής του παλαιού εργοστασίου. Τα ταχύτερα χρονικά σημεία έναρξης της επένδυσης μπορεί να οδηγήσουν σε ταχύτερη μείωση του ποσοστού συσσώρευσης του CO_2, όπως στην περίπτωση των σταθερών επιτοκίων, περιλαμβανομένων και των ασφαλίστρων υψηλού κινδύνου. Όταν λαμβάνονται υπόψη τα στοχαστικώς εξελισσόμενα επιτόκια, η λειτουργία των παλαιών εγκαταστάσεων θα πρέπει να επεκταθεί προς το όφελος των μελλοντικών, πιο αποδοτικών μετασκευών (ή αντικαταστάσεων). Έτσι παρατείνονται τα υψηλά ποσοστά εκπομπών CO_2 μέχρι να πραγματοποιηθούν οι προγραμματισμένες μετατροπές (ή αντικαταστάσεις). Απαιτείται περαιτέρω έρευνα για την αξιολόγηση των επιπτώσεων των αλμάτων τιμών, που εμφανίζονται στις τιμές των καυσίμων και της ηλεκτρικής ενέργειας οι οποίες μπορούν να τροποποιήσουν τα μελλοντικά επιχειρηματικά σχέδια των έργων που σχετίζονται με την ενέργεια. Κάποια προηγμένα μοντέλα πραγματικών options θα μπορούσαν να χειριστούν αυτές τις διαδικασίες, βελτιώνοντας έτσι τις στρατηγικές επένδυσης και λήψης αποφάσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Thollander P, Mardan N, Karlsson M. Optimisation as investment decision support in a Swedish medium-sized iron foundry – a move beyond traditional energy auditing. Appl Energy 2009;86:433–40.

[2] Cai YP, Huang GH, Yang ZF, Tan Q. Identification of optimal strategies for energy management systems planning under multiple uncertainties. Appl Energy 2009;86:480–95.

[3] Brennan MJ, Schwartz E. Evaluating natural resource investments. J Bus 1985;58:135–57.

[4] Dixit A, Pindyck R. Investment under uncertainty. Princeton: Princeton University Press; 1994.

[5] Trigeorgis L. Real-options. Cambridge/Massachusetts: The MIT Press; 1996.

[6] Laurikka H. Option value of gasification technology within an emissions trading scheme. Energy Policy 2006;34:3916–28.

[7] Laurikka H, Koljonen T. Emissions trading and investment decisions in the power sector – a case study in Finland. Energy Policy 2006;34:1063–74.

[8] Keppo J, Lu H. Real-options and a large producer: the case of electricity markets. Energy Econ 2003;25:459–72.

[9] Fuss S, Szolgayova J, Obersteiner M, Gusti M. Investment under market and climate policy uncertainty. Appl Energy 2008;85:708–21.

[10] Krey V, Martinsen D, Wagner HJ. Effects of stochastic energy prices on longterm energy-economic scenarios. Energy 2007;32(12):2340–9.

[11] Buck J, Young D. The potential for energy efficiency gains in the Canadian commercial building sector: a stochastic frontier study. Energy 2007;32(9): 1769–80.

[12] Cai YP, Huang GH, Tan Q. An inexact optimization model for regional energy systems planning in the mixed stochastic and fuzzy environment. Int J Energy Res 2009;33(5):443–68.

[13] Birge JR, Rosa CH. Modeling investment uncertainty in the costs of global CO2 emission policy. Eur J Oper Res 1995;83(3):466–88.

[14] Krey V, Martinsen D, Wagner HJ. Effects of stochastic energy prices on longterm energy-economic scenarios. Energy 2009;32(12):2340–9.

[15] Kim J, Lee Y, Moon I. Optimization of a hydrogen supply chain under demand uncertainty. Int J Hydrog Energy 2008;33(18):4715–29.

[16] Cai YP, Huang GH, Yang ZF, Lin QG, Tan Q. Community-scale renewable energy systems planning under uncertainty – an interval chance-constrained programming approach. Renew Sustain Energy Rev 2009;13(4):721–35.

[17] Svensson E, Berntsson T, Strφmberg AB, Patriksson M. An optimization methodology for identifying robust process integration investments under uncertainty. Energy Policy 2009;37(2):680–5.

[18] Rubin ES. Learning rates and future cost of power plants with CO2 capture. In: IEA international workshop on technology learning and deployment. Paris, France, June 11, 2007.

[19] Junginger M, Faaij A, Turkenburg WC. Global experience curves for wind farms. Energy Policy 2005;33(2):133–50.

[20] Cox JC, Ingersoll JE, Ross SA. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica 1985;3(2):385–407.

[21] Ingersoll JE, Ross SA. Waiting to invest: investment and uncertainty. J Bus 1992;65(1):1–29.

[22] Dias JC, Shackleton MB. Investment hysteresis under stochastic interest rates. In: 9th Annual international conference on real-options, Paris, France, 2005.

[23] Vasicek O. An equilibrium characterisation of the term structure. J Financ Econ 1977;5:177–88.

[24] Mishkin FS. The real interest rate: an empirical investigation. NBER working paper no. 622, 1984.

[25] Darin R, Hetzel RL. An empirical measure of the real rate of interest, Federal Reserve Bank of Richmond. Econ Quart 1995;81:17–47.

[26] Fletcher DJ, Gulley OD. Forecasting the real interest rate. N Am J Econ & Financ 1996;7(1):55–76.

[27] Box G, Jenkins J, Reinsel G. Time Series Analysis: Forecasting and Control. 3rd ed. Upper Saddle River (NJ): Prentice Hall; 1994.

[28] Baillie R, Bollerslev T. Prediction in dynamic models with time-dependent conditional variances. J Econ 1992;52:91–113.

[29] McCullough BD, Renfro C. Benchmarks and software standards: a case study of GARCH procedures. J Econ Soc Meas 1998;25:59–71.

[30] Øksendal B. Stochastic differential equations. Springer-Verlag; 2000.

[31] Shreve R. Stochastic calculus for finance II: continuous-time models. Springer-Verlag; 2004.

[32] Kloeden PE, Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer; 1999.

[33] Glasserman G. Monte-Carlo methods in financial engineering. Springer; 2004.

[34] Doukelis A, Vorrias I, Grammelis P, Kakaras E, Whitehouse M, Riley G. Partial O_2-fired coal power plant with post combustion CO2 capture: A retrofitting option for CO_2 ready plants. In: 7th European conference on coal research & its applications. Wales, UK: Cardiff University.

[35] Kakaras E, Doukelis A, Giannakopoulos D, Koumanakos A. Novel concepts for near-zero emissions IGCC power plants. Therm Sci J 2006;10(3):81–92.

[36] Rhodes JS, Keith DW. Engineering economic analysis of biomass IGCC with carbon capture and storage. Biomass Bioenergy 2005;29:440–50.

[37] Tiratsoo EN. Oilfields of the world, reference in understanding natural gas. Scientific Press; 1973.

[38] Brennard TP. Natural gas, a fuel of choice for China. Norwich: University of East Anglia; 81, 2001.

[39] Yang M, Blyth W, Bradley R, Bunn D, Clarke C, Wilson T. Evaluating the power investment options with uncertainty in climate policy. Energy Econ 2008;30:1933–50.

[40] Agar C. Capital investment & financing; a practical guide to financial evaluation. Elsevier Finance; 2005.

[41] HTSO S.A. Hellenic transmission system operator, statistics for the years 2001-2009. <www.desmie.gr> [19.04.2009].

[42] General Secretariat of National Statistical Service of Greece. <www.statistics.gr> [10.04.2009].

[43] Hull J, Options – Futures and other Derivatives, Prentice Hall

[44] Banks F, Energy Economics: A modern Introduction, Kluwer Academic Publishers