



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΤΟΜΕΑΣ ΝΑΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑΣ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ**

**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**«ΝΑΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ»**

**Εφαρμογή μοντέλου εξισώσεων BOUSSINESQ στη  
διάδοση πολυχρωματικών υδάτινων κυματισμών  
σε περιοχές μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας**



Όνοματεπώνυμο Φοιτητή: **Παπαϊωάννου Ορφέας**

Επιβλέπων Καθηγητής: Κ. Α. Μπελιμπασάκης, Καθηγητής ΕΜΠ

Επιτροπή: Γ. Παπαδάκης, Επικ.Καθηγητής ΕΜΠ

Τ. Σουκισιάν, Δ/της Ερευνών ΕΛΚΕΘΕ

ΑΘΗΝΑ, Οκτώβριος 2020

## **Ευχαριστίες**

Ευχαριστώ θερμά τον Επιβλέποντα Καθηγητή Κώστα Μπελιμπασάκη, η καθοδήγηση και οι παρατηρήσεις του οποίου, ήταν καθοριστικές για την περάτωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Τον ευχαριστώ θερμά, τόσο για την αμέριστη βοήθειά του, όσο και για τα πολλαπλά επιστημονικά μονοπάτια σκέψης που μου άνοιξε μέσω της διδασκαλίας του.

## Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται σύστημα εξισώσεων τύπου Boussinesq και οι προϋποθέσεις ως προς τα χαρακτηριστικά των κυματισμών όπως ρηχότητα, ή μη γραμμικότητα κατά τις οποίες μπορούν αυτές να εφαρμοστούν, αρχικά σε οριζόντια βαθυμετρία και ακολούθως με εφαρμογή σε περιοχές ήπιας αλλά μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας και με βελτιωμένη σχέση διασποράς, ώστε να είναι εφαρμόσιμες κατά τη διάδοση κυματισμών από νερό ενδιάμεσου βάρους (που μπορεί να φτάσει και στα όρια όπου θεωρείται βαθύ) σε σχετικά ρηχό νερό. Στη συνέχεια παρουσιάζεται αριθμητικό σχήμα επίλυσης, το οποίο βασίζεται στη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών και κατάλληλη ολοκλήρωση στο χρόνο για την αριθμητική σύγκλιση και ευστάθειά του. Τέλος το μοντέλο επεκτείνεται για διάδοση πολυχρωματικών κυματισμών που περιγράφονται από φάσμα JONSWAP και υπολογίζονται τα χαρακτηριστικά του κυματισμού σε περιοχές μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με πειραματικές μετρήσεις για επαλήθευση του αριθμητικού μοντέλου οι οποίες πραγματοποιήθηκαν από τους Beji και Battjes (1994) σε τραπεζοειδή βαθυμετρία και μονοδιάστατη διάδοση τόσο μονοχρωματικών όσο και πολυχρωματικών κυματισμών.

## **Abstract**

In this thesis, a system of Boussinesq equations is presented and the conditions regarding the characteristics of the ocean waves such as shallowness or non-linearity in which they can be applied, first in horizontal bathymetry and then by application in areas of mild slope but variable bathymetry with improved dispersion characteristics, in order to be applicable for ocean waves propagating from intermediate to deep water in relatively shallow water. Then a numerical solution scheme is presented, which is based on the method of finite differences and appropriate integration in time for its numerical convergence and stability. Finally, the model is extended to irregular waves described by a JONSWAP wave spectrum and the wave characteristics are calculated in areas of varying depth. The results are compared with experimental measurements to verify the numerical model performed by Beji and Battjes in 1994 on a trapezoidal bar and one-dimensional propagation of both regular and irregular waves.

## Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή	6
1.1 Βασικές εξισώσεις κίνησης ρευστού με ελεύθερη επιφάνεια.....	6
1.2 Συνοριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας.....	8
1.3 Σύνοψη του προβλήματος διάδοσης των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας.....	11
1.4 Μια σύντομη ιστορική αναδρομή.....	14
2. Το μοντέλο εξισ. Boussinesq για διάδοση υδάτινων κυματισμών	17
2.1 Χαρακτηρισμός των υδάτινων κυματισμών και όρια ισχύος κυματικών θεωριών.....	17
2.2 Εξισώσεις Boussinesq σε σταθερή βαθυμετρία.....	21
2.3 Εξισώσεις Boussinesq σε μεταβαλλόμενη βαθυμετρία.....	26
2.4 Σχέσεις διασποράς των διάφορων μοντέλων εξισώσεων Boussinesq.....	35
2.5 Εξισώσεις Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς.....	39
3. Αριθμητικό σχήμα επίλυσης των εξισώσεων Boussinesq σε γενική βαθυμετρία με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς	49
3.1 Διατύπωση εξισώσεων και αρχικών τιμών του προβλήματος.....	49
3.2 Το αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών.....	52
3.3 Ευστάθεια της αριθμητικής λύσης.....	61
4. Εφαρμογές	67
4.1 Διάδοση μονοχρωματικών κυματισμών πάνω από τραπεζοειδή πυθμένα.....	67
4.2 Κατασκευή δεδομένων πολυχρωματικών κυματισμών σε σταθερό βάθος.....	71
4.3 Μελέτη της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για φάσμα JONSWAP και στατιστικά χαρακτηριστικά.....	81
4.4 Διάδοση πολυχρωματικών κυματισμών πάνω από τραπεζοειδή πυθμένα.....	86
4.5 Διαμόρφωση στατιστικών χαρακτηριστικών κύματος πάνω από βαθυμετρία.....	91
5. Σύνοψη της εργασίας – Συμπεράσματα.....	93

Παράρτημα Α	Περιοδικοί βραχείς κυματισμοί σε σταθερή βαθυμετρία.....	94
Παράρτημα Β	Μη κανονικοί κυματισμοί σε σταθερό βάθος νερού.....	113
Παράρτημα Γ	Διακριτός μετασχηματισμός Fourier.....	128
Βιβλιογραφία	.....	131

# 1. Εισαγωγή

Οι βασικές παραδοχές, οι οποίες καθορίζουν τη μορφή των εξισώσεων κίνησης του ρευστού είναι ότι το ρευστό θεωρείται υγρό, και άρα μπορεί να έχει ελεύθερη επιφάνεια, ασυμπίεστο, και μάλιστα έχει σταθερή πυκνότητα, μη συνεκτικό, οπότε οι εσωτερικές δυνάμεις οφείλονται μόνο σε ορθές τάσεις, δηλαδή  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ , όπου  $\delta_{ij}$  είναι το δέλτα του Kronecker.

## 1.1 Βασικές εξισώσεις κίνησης ρευστού με ελεύθερη επιφάνεια

Οι θεμελιώδεις νόμοι που διέπουν την κίνηση του ασυμπίεστου, με σταθερή πυκνότητα, μη-συνεκτικού ρευστού είναι: ο ισολογισμός της ορμής (εξισώσεις Euler), και ο ισολογισμός της μάζας (εξίσωση συνέχειας).

### Εξισώσεις Euler

Οι εξισώσεις Euler προκύπτουν με εφαρμογή του νόμου του Newton σε κάθε υλικό στοιχείο του υγρού. Για ομογενές υγρό σταθερής πυκνότητας  $\rho$  σε ομογενές πεδίο βαρύτητας σταθερής έντασης  $-g\hat{\mathbf{k}}$ , οι εξισώσεις Euler που εκφράζουν τη διατήρηση της ορμής γράφονται στην μορφή:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla U^2 - \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) = -\frac{\nabla(p + \rho gz)}{\rho}, \quad (1.1.1)$$

όπου  $\mathbf{U} = (u, v, w)$  το πεδίο της ταχύτητας και  $p$  το πεδίο πίεσης, αντίστοιχα. Στην ανωτέρω εξίσωση, έχει χρησιμοποιηθεί σύστημα συντεταγμένων με αρχή σε κάποιο σημείο πάνω στη στάθμη ηρεμίας του νερού και τον z-άξονα προσανατολισμένο προς τα άνω. Η μορφή (1.1.1) των εξισώσεων Euler είναι αρκετά βολική για την παραγωγή του θεωρήματος του Bernoulli.

### Εξίσωση συνέχειας

Κάτω από τις ίδιες ως ανωτέρω προϋποθέσεις η εξίσωση διατήρησης της μάζας λαμβάνει τη μορφή της εξίσωσης συνέχειας του πεδίου ταχύτητας:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (1.1.2)$$

### Αστρόβιλη ροή, εξίσωση Laplace

Ένα πεδίο ροής, λέγεται αστρόβιλο αν ισχύει η σχέση:

$$\nabla \times \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.1.3)$$

παντού μέσα στο πεδίο, όπου  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ .

Η χαρακτηριστική ιδιότητα κάθε αστρόβιλου πεδίου  $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$  είναι ότι μπορεί να αναπαρασταθεί ως κλίση (gradient) ενός κατάλληλου βαθμωτού πεδίου  $\Phi(\mathbf{r},t)$ , που ονομάζεται δυναμικό ταχύτητας (velocity potential), ώστε

$$U(\mathbf{r},t) = \nabla\Phi(\mathbf{r},t) . \quad (1.1.4)$$

Σε αυτή τη περίπτωση η εξίσωση συνέχειας (1.1.2) λαμβάνει τη μορφή της εξ. Laplace

$$\nabla(\nabla\Phi(\mathbf{r},t)) \equiv \nabla^2\Phi(\mathbf{r},t) \equiv \Delta\Phi(\mathbf{r},t) = 0 \quad \text{ή}$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi(\mathbf{r},t) = 0 . \quad (1.1.5)$$

### Θεώρημα Bernoulli

Οι εξισώσεις Euler περιέχουν την κλίση  $\nabla p(\mathbf{r},t)$  του πεδίου της πίεσης, και άρα είναι μερικές διαφορικές εξισώσεις ως προς αυτό. Εν τούτοις, στην περίπτωση αστρόβιλης ροής, οι εξισώσεις Euler μπορούν να ολοκληρωθούν ως προς την πίεση, οδηγώντας σε μια κλειστή έκφραση της τελευταίας συναρτήσεως του δυναμικού ταχύτητας. Το αποτέλεσμα αυτό αναφέρεται ως θεώρημα Bernoulli.

Εισάγουμε την αναπαράσταση (1.1.4) του πεδίου ταχύτητας στη σχέση (1.1.1) και παίρνουμε:

$$\nabla \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\nabla\Phi)^2 + \frac{\nabla(p + \rho gz)}{\rho} = 0$$

ή

$$\nabla \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{(p + \rho gz)}{\rho} \right) = 0 . \quad (1.1.6)$$

Η τελευταία, ολοκληρωμένη κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης μέσα στο πεδίο ροής, μας δίνει:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{(p + \rho gz)}{\rho} = C(t) . \quad (1.1.7)$$

Το δυναμικό ταχύτητας μπορεί πάντοτε να οριστεί ξανά έτσι ώστε να απορροφήσει μια οποιαδήποτε συνάρτηση εξαρτώμενη από το χρόνο. Πράγματι, αν θέσουμε

$$\Phi_1(\mathbf{r},t) = \Phi(\mathbf{r},t) + \int_0^t C(\tau) d\tau,$$

τότε η σχέση (1.1.7) γράφεται στη μορφή:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_1)^2 + \frac{(p + \rho gz)}{\rho} = 0 , \quad (1.1.8)$$



το δε δυναμικό  $\Phi_1(r, t)$  είναι ισοδύναμο, από φυσική άποψη, με το αρχικό δυναμικό  $\Phi(r, t)$ , δεδομένου ότι

$$\nabla\Phi = \mathbf{U}, \quad (1.1.9)$$

και ομοίως για τις άλλες συνιστώσες της ταχύτητας.

Η εξίσωση (1.1.8) (το θεώρημα ή νόμος του Bernoulli) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το πεδίο της πίεσης, αν γνωρίζουμε το πεδίο του δυναμικού ταχύτητας:

$$-\frac{p}{\rho} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + gz. \quad (1.1.10)$$

Το σετ των εξισώσεων  $\{(1.1.3), (1.1.4), (1.1.10)\}$  περιγράφουν την κίνηση ενός αστρόβιλου, ασυμπίεστου, σταθερής πυκνότητας μη-συνεκτικού ρευστού που κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας. Για να καταστεί το πρόβλημα καλώς ορισμένο (well posed problem), θα πρέπει το σετ των εξισώσεων  $\{(1.1.3), (1.1.4), (1.1.10)\}$  να συνοδευτεί από κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Επειδή το ρευστό που εξετάζουμε θεωρείται υγρό, μπορεί να έχει ελεύθερη επιφάνεια. Παρακάτω εξετάζεται οι συνοριακές συνθήκες που εισάγει η ύπαρξη ελεύθερης επιφάνειας.

## 1.2 Συνοριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας

Τα θεμελιώδη φυσικά χαρακτηριστικά της ελεύθερης επιφάνειας είναι τα εξής:

- i) Η ελεύθερη επιφάνεια είναι μια υλική επιφάνεια, δηλαδή αποτελείται διαρκώς από τα ίδια υλικά στοιχεία του υγρού. Η ελεύθερη επιφάνεια μετακινείται στο χώρο ακριβώς λόγω της μετακίνησης των υλικών στοιχείων που την αποτελούν
- ii) Τα υλικά στοιχεία της ελεύθερης επιφάνειας υφίστανται την επίδραση της επιφανειακής τάσης (surface tension), η οποία είναι συνέπεια της μικροσκοπικής ασυμμετρίας που υπάρχει λόγω της ασυνέχειας της πυκνότητας. Αποδεικνύεται (βλ. π.χ., Landau and Lifshitz 1969, Κεφ.7) ότι η διαφορά της τιμής της πίεσης στις δυο πλευρές της ελεύθερης επιφάνειας θα πρέπει να εξισορροπεί την επίδραση της επιφανειακής τάσης. Στις περιπτώσεις που η επίδραση της επιφανειακής τάσης είναι αμελητέα, η πίεση στις δυο πλευρές της ελεύθερης επιφάνειας πρέπει να είναι ίδια. Δηλαδή, αν η επίδραση της επιφανειακής τάσης είναι αμελητέα, έχουμε συνέχεια της πίεσης σε κάθε σημείο της ελεύθερης επιφάνειας.

Οι ανωτέρω δυο ιδιότητες μεταφράζονται σε αντίστοιχες μαθηματικές συνθήκες, οι οποίες αποτελούν τις οριακές συνθήκες (ή διεπιφάνειας). Η φυσική συνθήκη *i*) καθώς και η εξ αυτής επαγόμενη μαθηματική συνθήκη, αναφέρεται ως κινηματική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας. Αντίστοιχα, η φυσική συνθήκη *ii*), καθώς και η

εξ αυτής επαγόμενη μαθηματική συνθήκη, αναφέρεται ως δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας.

### Κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας

Η ελεύθερη επιφάνεια θα συμβολίζεται γεωμετρικά με  $\partial D_F$  ή, όταν θέλουμε να τονίσουμε ότι μεταβάλλεται με το χρόνο  $\partial D_F(t)$ . Η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας θα γράφεται είτε στην πεπλεγμένη μορφή

$$F(r,t) = 0 \quad \text{ή} \quad F(x, y, z, t) = 0, \quad (1.1.11a)$$

είτε στη λυμένη μορφή,

$$z = \eta(x, y, t), \quad (1.1.11b)$$

όπου  $\eta(x, y, t)$  είναι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας ως προς την αδιατάρακτη θέση της.

Επιλέγουμε για την αναπαράσταση της ελεύθερης επιφάνειας, τη σχέση (1.1.11b). Η ελεύθερη επιφάνεια, έχει δύο καθορισμούς. Ένα γεωμετρικό καθορισμό μέσω της εξίσωσης (1.1.11b), και έναν υλικό καθορισμό μέσω των υλικών στοιχείων της. Η κινηματική συνθήκη ταυτοποιεί αυτές τις δυο υποστάσεις, και η συνθήκη εκφράζεται με την απαίτηση η υλική παράγωγος της εξίσωσης της ελεύθερης επιφάνειας είναι ίση με μηδέν:

$$\frac{D(z - \eta(x, y, t))}{Dt} = 0, \quad (1.1.12a)$$

ή

$$\eta_t + u\eta_x + v\eta_y - w = 0. \quad (1.1.12b)$$

Η συνθήκη αυτή αποδίδει μαθηματικά το γεγονός ότι η ελεύθερη επιφάνεια είναι μια υλική επιφάνεια.

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται στην εξίσωση (1.1.12b) όσον αφορά τα ορίσματα των πεδιακών ταχυτήτων  $u, v, w$ . Δεδομένου ότι η (1.1.12b) ισχύει πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, \eta(x, y, t), t) \\ v &= v(x, y, \eta(x, y, t), t) \\ w &= w(x, y, \eta(x, y, t), t) \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

Κατά συνέπεια, η συνθήκη (1.1.12b) είναι μια πεπλεγμένη, μη-γραμμική συνθήκη, η οποία συνδέει την άγνωστη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας  $\eta(x, y, t)$  με το επίσης άγνωστο πεδίο ταχύτητας  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, y, \eta(x, y, t), t)$  πάνω σε αυτήν.

Στην περίπτωση αστρόβιλης ροής, όπου το πεδίο ταχύτητας παράγεται από ένα δυναμικό ταχύτητας, δηλαδή αν  $\mathbf{U} = \nabla\Phi$ , τότε η σχέση (1.1.12b) γράφεται στη μορφή:

$$\eta_t + \Phi_x \eta_x + \Phi_y \eta_y - \Phi_z = 0 , \quad (1.1.14)$$

όπου και πάλι

$$\Phi = \Phi(x, y, \eta(x, y, t), t) . \quad (1.1.15)$$

### Δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας

Αν συμβολίσουμε με  $\tau$  το συντελεστή της επιφανειακής τάσης και με  $\kappa = \kappa(r, t)$  τη μέση καμπυλότητα της ελεύθερης επιφάνειας η οποία ορίζεται από τη σχέση:

$$\kappa = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) , \quad (1.1.16)$$

όπου  $R_1$  και  $R_2$  οι δυο ακτίνες καμπυλότητας της ελεύθερης επιφάνειας. Αποδεικνύεται τότε (βλ. π.χ., Landau and Lifshitz 1969, Κεφάλαιο 7), ότι η επιφανειακή τάση έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη κάθετης δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας (δηλαδή πίεσης) ίσης με:

$$p_\tau(r, t) = 2\tau\kappa(r, t) . \quad (1.1.17)$$

Αν συμβολίσουμε με  $\bar{p} = \bar{p}(x, y, \eta(x, y, t), t)$  την εξωτερική πίεση που εφαρμόζεται πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, και με  $p_F = p_F(r, t)$  την πίεση που επάγεται από το πεδίο ροής στο σημείο  $r$  της ελεύθερης επιφάνειας  $\partial D_F(t)$ . Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Bernoulli έχουμε:

$$p_F(r, t) = -\rho\Phi_t - \frac{1}{2}\rho(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) - \rho g\eta . \quad (1.1.18)$$

Άλλωστε, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω (ιδιότητα ii) έχουμε:

$$p_F(r, t) - \bar{p}(r, t) = \bar{p}_\tau(r, t) , \quad (1.1.19)$$

σε κάθε σημείο της ελεύθερης επιφάνειας  $\partial D_F(t)$ . Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.1.18) και (1.1.19) στην (1.1.10) βρίσκουμε:

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) + g\eta + 2\tilde{\tau}\kappa = -\frac{\bar{p}}{\rho} , \quad (1.1.20)$$

όπου  $\tilde{\tau} = \frac{\tau}{\rho}$ . Υπενθυμίζεται ότι, και πάλι, τα ορίσματα του δυναμικού  $\Phi$  και των παραγώγων του περιέχουν την άγνωστη συνάρτηση  $\eta = \eta(x, y, t)$ , όπως και στη σχέση (1.1.14).

Αν η επιφανειακή τάση είναι αμελητέα (δηλαδή  $2\tau \cong 0$ ), τότε η συνθήκη (1.1.20) απλουστεύεται στην μορφή

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) + g\eta = 0 . \quad (1.1.21)$$

Συνεπώς, η δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας είναι μια δεύτερη πεπλεγμένη και μη-γραμμική συνθήκη που συνδέει τα άγνωστα πεδία  $\Phi(x, y, \eta(x, y, t), t)$  και  $\eta(x, y, t)$ .

Στην ελεύθερη επιφάνεια, μη-συνεκτικού υγρού, της οποίας την κίνηση δεν γνωρίζουμε εξ' αρχής, εφαρμόζονται δυο οριακές συνθήκες, μια κινηματική και μια δυναμική. Οι συνθήκες αυτές, στη γενική τους μορφή (1.1.14) και (1.1.20), είναι πεπλεγμένες και μη γραμμικές, πράγμα το οποίο καθιστά τα προβλήματα ελεύθερης επιφάνειας ιδιαίτερα περίπλοκα.

### Κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης πυθμένα

Αυτή η συνθήκη απαιτεί τη μη εισχώρηση σωματιδίων ρευστού στον πυθμένα. Αυτό εκφράζεται μαθηματικά με την απαίτηση η κάθετη στον πυθμένα ταχύτητα, του τυχαίου σωματιδίου του ρευστού να είναι μηδενική. Αν θεωρήσουμε ότι ο πυθμένας περιγράφεται γεωμετρικά από τη σχέση  $z = -h(x, y)$ , ή ισοδύναμα  $F(x, y) = z + h(x, y) = 0$ ,

$$(1.1.22)$$

και  $\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$ , το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του πυθμένα, τότε απαιτούμε:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = 0 , \quad (1.1.23a)$$

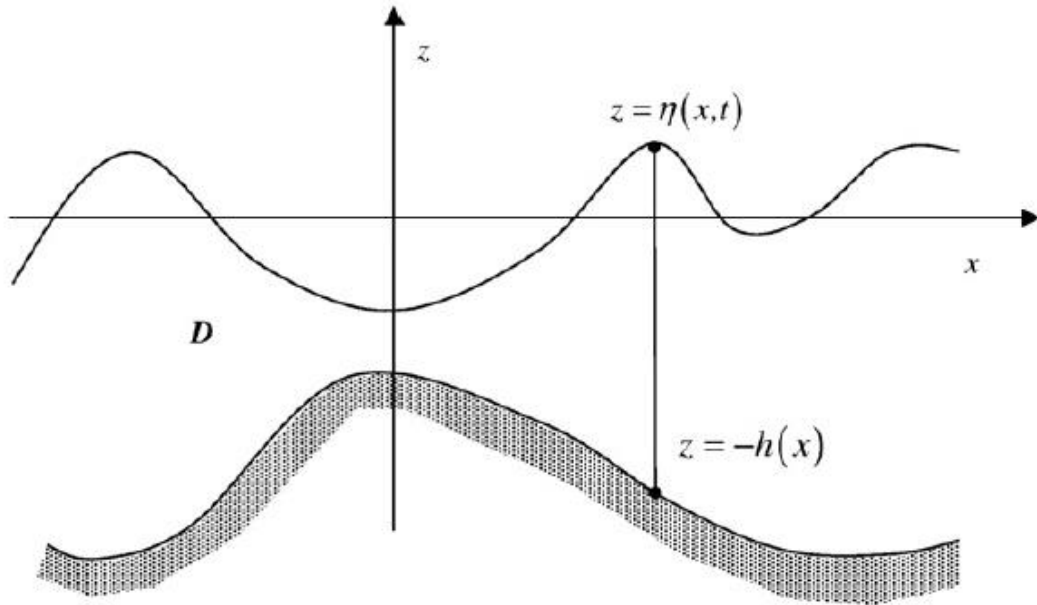
ή ισοδύναμα

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w = 0, \quad \text{στο } z = -h(x, y) \quad (1.1.23b)$$

### 1.3 Σύνοψη προβλήματος διάδοσης των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας

Συνοψίζοντας, το πρόβλημα διάδοσης των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας, για ασυμπίεστο υγρό, σταθερής πυκνότητας, μη συνεκτικό, θεωρώντας αμελητέα την επιφανειακή τάση, στην περίπτωση αστρόβιλης ροής, όπου το πεδίο ταχύτητας παράγεται από ένα δυναμικό ταχύτητας, δηλαδή αν  $\mathbf{U} = \nabla \Phi$ , το οποίο υπόκειται στην κινηματική και δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας και στην συνθήκη μη εισχώρησης του πυθμένα, διέπεται από το σετ των εξισώσεων,

$\{(1.1.3), (1.1.4), (1.1.10)\}$ , και οριοθετείται από το σετ των εξισώσεων  $\{(1.1.14), (1.1.21), (1.1.23b)\}$ .



Σχήμα 1.1 Το χωρίο ροής στη περίπτωση διάδοσης υδάτινων κυματισμών σε περιοχές μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας, στην απλή περίπτωση του δισδιάστατου προβλήματος.

Χρησιμοποιώντας την ανάλυση ως προς το δυναμικό της ταχύτητας  $\Phi$  το πρόβλημα διάδοσης των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας στο χωρίο ροής  $D$  (βλ Σχ. 1.1) γράφεται ως εξής:

Εξίσωση Laplace,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \Leftrightarrow \Delta \Phi = 0, \quad (1.3.1)$$

στο  $D(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -h(x, y) \leq z \leq \eta(x, y, t)\}$

Κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{στο } z = \eta(x, y, t) \quad (1.3.2)$$

Δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + gz = 0, \quad \text{στο } z = \eta(x, y, t) \quad (1.3.3)$$

Κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης πυθμένα,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \text{ στο } z = -h(x, y) \quad (1.3.4)$$

Το αντίστοιχο πρόβλημα, αν αναλυθεί για τις συνιστώσες-πεδία των ταχυτήτων του (αστρόβιλου) πεδίου ροής,  $u, v, w$  γράφεται ως εξής:

$$\text{Στο } D(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -h(x, y) \leq z \leq \eta(x, y, t)\}$$

Εξίσωση συνέχειας,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.3.5)$$

Αστρόβιλη ροή,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (1.3.6)$$

Εξίσωση Euler κατά  $x$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.3.7)$$

Εξίσωση Euler κατά  $y$ ,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (1.3.8)$$

Εξίσωση Euler κατά  $z$ ,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (1.3.9)$$

Με συνοριακές συνθήκες τις:

Κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w = 0, \text{ στο } z = \eta(x, y, t). \quad (1.3.10)$$

Δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας,

$$p = 0, \text{ στο } z = \eta(x, y, t). \quad (1.3.11)$$

Κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης πυθμένα,

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w = 0, \text{ στο } z = -h(x, y). \quad (1.3.12)$$

## 1.4 Μια σύντομη ιστορική αναδρομή

Όπως δείχτηκε αναλυτικά στα προηγούμενα εδάφια, οι οριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιηθούν είναι πεπλεγμένες και μη-γραμμικές, η επιφάνεια στην οποία πρέπει να ικανοποιηθούν είναι επίσης άγνωστη και πρέπει να προκύψει από την επίλυση του προβλήματος, συνεπώς το πρόβλημα διάδοσης επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας δεν επιδέχεται κλειστή λύση. Επομένως, η απλούστευση των ανωτέρω εξισώσεων είναι απολύτως απαραίτητη, προκειμένου να βρούμε αναλυτικές λύσεις σε ορισμένα προβλήματα ελεύθερης επιφάνειας. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της γραμμικοποίησης των συνθηκών γύρω από μια γνωστή ροή.

Ο Stokes το 1847 προσπάθησε να επιλύσει το σετ των εξισώσεων  $\{(1.1.3), (1.1.4), (1.1.10)\}$ , αναπτύσσοντας το δυναμικό και την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας με μια μέθοδο διαταραχών παραμέτρου  $\varepsilon = ka = k \frac{H}{2}$ , αναζητώντας περιοδικές λύσεις, και με την απαίτηση ότι  $\varepsilon \ll 1$ , όπου  $k$  ο κυματαριθμός ενός συγκεκριμένου μήκους κύματος  $\lambda$  που συνδέονται μέσω της σχέσης  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $a$  το πλάτος της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας, και  $H$  το ύψος κύματος, μετρούμενο από την κορυφή έως της κοιλία. Χρησιμοποιώντας εκφράσεις για το δυναμικό της ταχύτητας  $\Phi$ , και την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας της μορφής,

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^2 \varepsilon^n \Phi^{(n)}(x, y, z, t) + O(\varepsilon^3) , \quad (1.4.1)$$

$$\eta(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^2 \varepsilon^n \eta^{(n)}(x, y, z, t) + O(\varepsilon^3) , \quad (1.4.2)$$

και για να αποφύγει την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών στο άγνωστο όριο  $z = \eta(x, y, t)$ , ανέπτυξε το δυναμικό εκεί και τις παραγώγους του, σε σειρές Taylor περί το  $z = 0$ , με την θεώρηση ότι τα άγνωστα πεδία  $\Phi, \eta$  είναι μικρά:

$$\Phi|_{z=\eta} = \Phi|_{z=0} + \eta \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \dots , \quad (1.4.3a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{z=0} + \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \Big|_{z=0} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial z^2} \Big|_{z=0} + \dots , \quad (1.4.3b)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{z=0} + \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \Big|_{z=0} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} \Big|_{z=0} + \dots , \quad (1.4.3c)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} + \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} \Big|_{z=0} + \dots , \quad (1.4.3d)$$

Ο Stokes, βρήκες λύσεις πρώτης τάξης στο γραμμικοποιημένο πρόβλημα στην περίπτωση μονοδιάστατης διάδοσης,

$$\Phi^{(1)}(x, z, t) = \frac{ga}{\omega} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t), \quad \varepsilon\eta^{(1)} = \alpha \cos(kx - \omega t), \quad (1.4.4)$$

και μέσω αυτών υπολόγισε τις ασθενώς μη γραμμικές εξισώσεις δεύτερης τάξης οι οποίες δίνονται παρακάτω και η αναλυτική εξαγωγή τους, καθώς και διάφορες περιπτώσεις μελέτης οι οποίες οριοθετούν το εύρος της εφαρμογής της θεωρίας Stokes παρουσιάζεται στο παράρτημα Α:

$$\Phi(x, z, t) = \frac{ga}{\omega} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t) + \frac{3a^2\omega}{8} \frac{\cosh[(2k(z+h))]}{\sinh^4(kh)} \sin[(2(kx - \omega t))], \quad (1.4.5)$$

$$\eta = a \cos(kx - \omega t) + \frac{a^2\omega^2}{g} \left( 3 - \frac{1}{\tanh^2(kh)} + 3 \frac{\cosh(2kh)}{\sinh^4(kh)} \right) \cos[(2(kx - \omega t))]. \quad (1.4.6)$$

Για κυματισμούς που διαδίδονται στο βαθύ νερό, τα παραπάνω αναπτύγματα για το δυναμικό και την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, αποτελούν μια πολύ καλή προσέγγιση, ωστόσο όσο πλησιάζουμε προς το ρηχό νερό, οι λύσεις αποκλίνουν.

Στην περίπτωση ρηχού νερού, για μακρούς κυματισμούς με ασθενή μη γραμμικότητα η θεωρία Boussinesq είναι κατάλληλη για να προσεγγίσει το πρόβλημα. Οι εξισώσεις Boussinesq εξήχθησαν για πρώτη φορά το 1872 ως απάντηση, στην παρατήρηση του Βρετανού επιστήμονα Scott Russell το 1834, όπου παρακολούθησε για σχεδόν ένα μίλι ένα μηχανικό κύμα να διαδίδεται μέχρι να χαθεί. Ο Boussinesq το 1872 εξήγαγε το σετ των παρακάτω εξισώσεων το οποίο κατάφερε να εξηγήσει το φαινόμενο

$$\eta_t + [(\eta + h)u]_x = \frac{h^3}{6} u_{xxx}, \quad (1.4.7)$$

$$u_t - \frac{h^2}{2} u_{xxt} + uu_x + g\eta_x = 0. \quad (1.4.8)$$

Οι Korteweg και de Vries, αναζητώντας λύσεις που αντιστοιχούν σε κύματα που προελαύνουν με σταθερή ταχύτητα, έφτασαν το 1895 στην παραγωγή εξίσωσης η οποία φέρει τα ονόματά τους και σε λύσεις μοναχικού κύματος, που ονομάστηκαν σολιτονικές λύσεις, καθώς και σε περιοδικές λύσεις που φέρουν την ονομασία Cnoidal waves. Η αναλυτική εξαγωγή των εξισώσεων Boussinesq, όπως αυτές εξήχθησαν από τον ίδιο το 1872 παρατίθενται αναλυτικά στο κεφάλαιο 2. Οι εξισώσεις Boussinesq βρίσκουν εφαρμογή στη μοντελοποίηση κυματικών φαινομένων κοντά στην ακτή. Το μειονέκτημα τους σχετίζεται με το ότι αποτυγχάνουν να περιγράψουν επαρκώς κυματισμούς σε βάθη μεγαλύτερα περίπου του 20% του μήκους τους (Beji & Battjes, 1994). Η ανάγκη επέκτασης των δυνατοτήτων περιγραφής των εν λόγω εξισώσεων, οδήγησε τους ερευνητές στην βελτίωση των εν λόγω εξισώσεων ως προς τα χαρακτηριστικά διασποράς, ώστε να



είναι εφαρμόσιμες κατά τη διάδοση κυματισμών από νερό ενδιάμεσου βάθους (που μπορεί να φτάσει και στα όρια όπου θεωρείται βαθύ) σε σχετικά ρηχό νερό.

## **2. Το μοντέλο εξισώσεων Boussinesq για τη διάδοση υδάτινων κυματισμών**

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά θα αναφερθούμε στην κατάταξη των κυματισμών και στη σημασία των εξισώσεων Boussinesq ως προς το εύρος των φαινομένων που καλύπτουν. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι εξισώσεις Boussinesq, στην περίπτωση σταθερής βαθυμετρίας όπως παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά από τον Boussinesq το 1872 όπου θεώρησε σταθερή οριζόντια ταχύτητα στη στήλη του νερού. Η βασική ιδέα πίσω από τις εξισώσεις Boussinesq είναι η εξάλειψη της κατακόρυφης συντεταγμένης από τις εξισώσεις ροής διατηρώντας παράλληλα κάποιες από τις επιδράσεις της κατακόρυφης δομής της ροής κάτω από τα κύματα, δεδομένου ότι βρισκόμαστε σε ρηχό νερό. Αυτό είναι χρήσιμο επειδή τα κύματα διαδίδονται στο οριζόντιο επίπεδο και έχουν διαφορετική (όχι κυματική) συμπεριφορά στην κατακόρυφη κατεύθυνση. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η μέθοδος διαταραχών που χρησιμοποίησε ο Peregrine το 1967, για να τις καταστήσει εφαρμόσιμες με περιοχές μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας, και βλέπουμε ότι η διαφορετική επιλογή της οριζόντιας ταχύτητας μας οδηγεί σε διαφορετικές εξισώσεις τύπου Boussinesq. Επιπλέον παρουσιάζονται οι σχέσεις διασποράς των τριών αυτών μοντέλων, όπου καθίσταται σαφές ότι οι εξισώσεις αυτές απαιτούν την προσθήκη συμπληρωματικού όρου έτσι ώστε να καταστούν εφαρμόσιμες σε περιοχές ενδιάμεσου προς βαθιού νερού. Τέλος, παρουσιάζονται οι εξισώσεις Boussinesq με βελτιωμένο όρο διασποράς, όπως αυτές εξήχθησαν από τους Madsen et.al το 1991 και εφαρμόστηκαν από τους Beji και Batjjes το 1994 προσαρμοσμένες στα μοντέλα τύπου Boussinesq που εξήγαγε ο Peregrine για ήπιες κλίσεις πυθμένα.

### **2.1 Χαρακτηρισμός των υδάτινων κυματισμών και όρια ισχύος κυματικών θεωριών**

Η επιφάνεια της θάλασσας συντίθεται από μια τεράστια ποικιλία κυματισμών που επελαύνουν σε διαφορετικές κατευθύνσεις και με διαφορετικά πλάτη, συχνότητες και φάσεις. Όπως είναι γνωστό, η κύρια γεννεσιουργός αιτία των θαλάσσιων κυματισμών είναι οι σχεδόν πάντα τυχαίες, διατμητικές και εγκάρσιες τάσεις που επιβάλλει ο άνεμος στην επιφάνεια του νερού. Για να απλοποιήσουμε κάπως αυτή τη χαοτική εικόνα, είναι απαραίτητο να εξεταστεί το κυματικό πεδίο ως προς τα φασματικά και στατιστικά χαρακτηριστικά του. Η ευκολότερη προσέγγιση που μπορούμε να κάνουμε είναι να προσδιορίσουμε τη μέση τιμή του κυματικού ύψους, περιόδου και μήκους κύματος, και να θεωρήσουμε ότι το κυματικό πεδίο χαρακτηρίζεται μόνο από ένα μονοχρωματικό κυματισμό (κύμα μιας συχνότητας). Έτσι, η συχνότητα αυτής της αρμονικής αντιστοιχεί συνήθως σε κάποια χαρακτηριστική συχνότητα (για παράδειγμα, στην κύρια συχνότητα – συχνότητα κορυφής κάποιου κυματικού φασματικού μοντέλου).

Παρότι απλοποιήσαμε το πρόβλημα σημαντικά, το πρόβλημα συνοριακών τιμών για τη μετάδοση υδάτινων επιφανειακών κυματισμών παραμένει πολύ δύσκολο να λυθεί εξαιτίας των μη γραμμικών συνοριακών συνθηκών στην ελεύθερη επιφάνεια. Συνεπώς δεν είναι δυνατό να βρεθεί γενική λύση του προβλήματος που να ισχύει για

αυθαίρετη βαθυμετρία, από το βαθύ έως το ρηχό νερό με δεδομένη την πεπλεγμένη και ρητή μη γραμμικότητα που εμφανίζεται στις συνοριακές συνθήκες.

Στη συνέχεια, με σκοπό να κατατάξουμε τους μονοχρωματικούς κυματισμούς ως προς το είδος του νερού και ως προς τη γραμμικότητα ή μη του κυματικού προφίλ, θεωρούμε ότι οι κυματισμοί είναι περιοδικοί και ότι διαδίδονται σε σταθερό βάθος νερού  $h$ . Παράλληλα εισάγονται το ύψος κύματος  $H$ , το μήκος κύματος  $\lambda$ , η φασική ταχύτητα μετάδοσης  $c$ , και ο κυματαριθμός  $k = 2\pi / \lambda$ .

Με βάση αυτές τις παραμέτρους μπορούμε να εισάγουμε την παράμετρο του σχετικού βάθους ως προς το μήκος κύματος,  $\frac{h}{\lambda}$  και να διαχωρίσουμε τους κυματισμούς σε τρεις βασικές κατηγορίες:

- 1) Κύματα ρηχού νερού:  $\frac{h}{\lambda} < \frac{1}{20}$
- 2) Κύματα ενδιάμεσου βάθους:  $\frac{1}{20} < \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{2}$
- 3) Κύματα σε βαθύ νερό:  $\frac{h}{\lambda} > \frac{1}{2}$

Στους κυματισμούς ρηχού νερού το μήκος κύματος είναι σημαντικά μεγαλύτερο από το βάθος του νερού και οι συγκεκριμένοι κυματισμοί χαρακτηρίζονται ως μακροί κυματισμοί (long waves). Στις άλλες κατηγορίες οι κυματισμοί χαρακτηρίζονται ως βραχείς κυματισμοί (short waves).

Μια άλλη ιδιαίτερα σημαντική παράμετρος κυματισμών ορίζεται ως ο λόγος του ύψους κύματος ως προς το μήκος κύματος  $\frac{H}{\lambda}$ , όπου έχουμε:

- 1) Κυματισμούς μικρής κλίσης:  $\frac{H}{\lambda} \ll 1$
- 2) Κυματισμούς ενδιάμεσης κλίσης:  $\frac{H}{\lambda} \sim 0.05 - 0.08$
- 3) Κυματισμούς μεγάλης κλίσης:  $H \sim h$

Στο παράρτημα Α θα δούμε ότι για κυματισμούς στα βαθιά προσεγγίζουμε ασυμπτωτικά περιοδικές λύσεις (κύματα Stokes) με τη μέθοδο διαταραχών παραμέτρου  $\varepsilon = \frac{\kappa H}{2} = \frac{\pi H}{\lambda}$ , όπου  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  ο κυματαριθμός. Όσο μικρότερος είναι ο λόγος  $\frac{H}{\lambda}$  τόσο λιγότερες τάξεις απαιτούνται να ληφθούν υπόψιν κατά την προσέγγιση της λύσης του δυναμικού ( $\Phi = \varepsilon \Phi_0^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi_0^{(2)} + \dots$ ) και έτσι στην

περίπτωση κυματισμών μικρής κλίσης, η θεωρία πρώτης τάξης – γραμμική θεωρία αρκεί για να περιγράψει με ικανοποιητική ακρίβεια τους κυματισμούς. Ωστόσο όσο ο λόγος  $\frac{H}{\lambda}$  αυξάνει, αυξάνει η μη γραμμικότητα και συνεπώς, απαιτούνται όλο και περισσότερες τάξεις (μη γραμμικές διορθώσεις για την καλύτερη αναπαράσταση της λύσης).

Ο Goda (1983) έδειξε ότι οι παράμετροι που αναφέρονται παραπάνω μπορούν να συνοψιστούν μέσω της αδιάστατης παραμέτρου  $\Pi$  ως εξής:

$$\Pi = \frac{H}{\lambda} \coth^3 \left( \frac{2\pi h}{\lambda} \right) = \frac{H}{\lambda} \coth^3(kh) . \quad (2.1.1)$$

Αν  $h/\lambda > 1/2$  (κύματα σε βαθύ νερό), τότε από την (2.1.1) λαμβάνουμε:

$$\Pi = \frac{H}{\lambda} . \quad (2.1.2)$$

Παρατηρούμε ότι για κύματα σε βαθύ νερό, η παράμετρος  $\Pi$  ταυτίζεται με την κλίση του κύματος.

Αντίθετα αν  $h/\lambda < 1/20$  δηλαδή για κύματα σε ρηχό νερό, η παράμετρος  $\Pi$  παίρνει τη μορφή:

$$\Pi = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \left( \frac{H}{\lambda} \right) \left( \frac{\lambda}{h} \right)^2 . \quad (2.1.3)$$

Και είναι ανάλογη της καλούμενης ως Ursell παραμέτρου  $U$  :

$$\Pi = (2\pi)^{-3} U, \quad \text{όπου} \quad U = \left( \frac{H}{h} \right) \left( \frac{\lambda}{h} \right)^2 , \quad (2.1.4)$$

ή αλλιώς,  $U = \frac{H/h}{(h/\lambda)^2}$  παράμετρος που χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει

κυματισμούς. Αυτοί με μεγάλο αριθμό Ursell, είναι γενικά μακροί ψηλοί κυματισμοί και η θεωρία Cnoidal είναι η κατάλληλη, ενώ σε αυτούς με μικρό αριθμό Ursell (βαθιά νερά), η θεωρία Stokes είναι πιο εφαρμόσιμη.

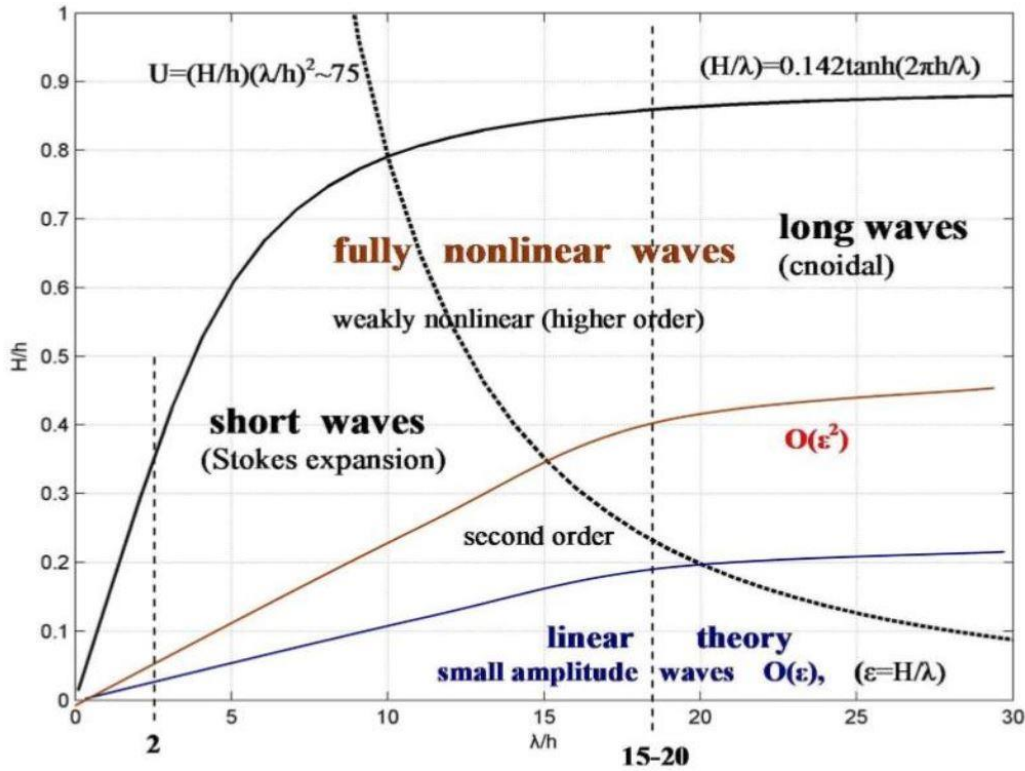
Επιπλέον οι κυματισμοί ως προς το ύψος τους γίνονται μεγάλοι με το  $H \sim h$ . Συνεπώς η μέθοδος διαταραχών που αναφέρθηκε παραπάνω παύει να παράγει σωστά αποτελέσματα, γεγονός που μας αναγκάζει σε άλλου τύπου προσεγγίσεις για τους μακρούς κυματισμούς. Τέτοιο παράδειγμα προσέγγισης είναι οι εξισώσεις τύπου Boussinesq στις οποίες όπως θα φανεί σε αυτό το κεφάλαιο, προσεγγίζουμε ασυμπτωτικά το πρόβλημα διάδοσης επιφανειακών κυματισμών για να εξάγουμε (προσεγγιστικές) εξισώσεις υπό την παραδοχή ότι  $\varepsilon = \frac{A}{h} \approx \mu^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \ll 1$ , όπου  $A$ , το πλάτος του κυματισμού. Την ίδια απαίτηση έχουν και τα Cnoidal waves. Όταν  $U = O(1)$  ή  $\Pi = O((2\pi)^{-3})$ , η γραμμική θεωρία πάλι μπορεί να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα παρότι η απαίτηση για μικρό  $\frac{\kappa H}{2}$  παραβιάζεται. Ωστόσο όταν η παράμετρος  $\Pi$  αρχίζει και αυξάνει, η γραμμική θεωρία παύει να δίνει καλά αποτελέσματα και απαιτούνται θεωρίες ανώτερης τάξης (πχ, Stokes), όπως αναφέρθηκε και παραπάνω.

Ο Hedges (1995) παρέχει περαιτέρω στοιχεία που καταδεικνύουν ότι ένα κατάλληλο όριο του αριθμού Ursell μεταξύ γραμμικής και μη γραμμικής θεωρίας για μακρούς κυματισμούς είναι το  $U = 40$ . Την ίδια τιμή προτείνει και ο Fenton (1990), για να διαχωρίσει τους κυματισμούς σε βραχείς ή μακρούς. Η θεωρία Stokes ανώτερης τάξης είναι πιο κατάλληλη από τη γραμμική θεωρία όταν  $U < 40$ , αλλά  $H/\lambda > 0.04$ .

Παράλληλα ως όριο θραύσης των κυματισμών, ορίζεται ο κάτωθι τύπος συναρτήσεως του λόγου  $\lambda/d$ , ο οποίος αποτελεί αριθμητική προσέγγιση των πειραματικών αποτελεσμάτων που πραγματοποίησε ο Williams (1981):

$$\frac{H_{\max}}{h} = \frac{0.141063(\lambda/d) + 0.0095721(\lambda/d)^2 + 0.0077829(\lambda/d)^3}{1 + 0.0788340(\lambda/d) + 0.0317567(\lambda/d)^2 + 0.0093407(\lambda/d)^3} \quad (2.1.5)$$

Στο κάτωθι Σχ.2.1, απεικονίζεται ότι συζητήθηκε πιο πάνω, όπου ως άνω όριο κάθε θεωρίας είναι το κριτήριο θραύσης κυματισμών ενώ μεταξύ τους διαχωρίζονται από τον αριθμό Ursell. Ως τιμή διαχωρισμού των δυο θεωριών, Stokes – Cnoidal στη συγκεκριμένη υπόθεση έχει ληφθεί η τιμή  $U = 75$ .



Σχήμα 2.1: Περιοχές ισχύος θεωρίας Airy, Stokes, Cnoidal όπου κάθε θεωρία οριοθετείται από το κριτήριο θραύσης, ενώ οι θεωρίες Stokes – Cnoidal διαχωρίζονται από τον αριθμό Ursell.

## 2.2 Εξισώσεις Boussinesq σε σταθερή βαθυμετρία

Θεωρούμε το υδροδυναμικό πρόβλημα με ελεύθερη επιφάνεια στο  $(x,z)$  επίπεδο και θεωρούμε σταθερή βαθυμετρία πυθμένα  $h(x) = h$

Εξίσωση Laplace

$$\Delta\Phi = 0, \text{ στο } D(t) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < \infty, -h < z < \eta(x, t)\} . \quad (2.2.1)$$

Κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \text{ στο } z = \eta(x, t) . \quad (2.2.2)$$

Δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + gz = 0, \text{ στο } z = \eta(x, t) . \quad (2.2.3)$$

Συνθήκη μη εισχώρησης στον οριζόντιο πυθμένα:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \text{ στο } z = -h . \quad (2.2.4)$$

Εξετάζουμε το πρόβλημα σε περιοχή ρηχού νερού όπου  $\mu = \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{20}$  και με την απαίτηση ότι:

$$\varepsilon = \frac{A}{h} \approx \mu^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \ll 1 .$$

Επιπλέον, δεδομένου ότι βρισκόμαστε στο ρηχό νερό, κάνουμε την παραδοχή ότι η οριζόντια ταχύτητα στον πυθμένα είναι περίπου ίση με αυτή στην ελεύθερη επιφάνεια, και συνεπώς σταθερή σε όλη την κατακόρυφη στήλη του νερού. Δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$\Phi_x(x, z, t) = \Phi_x(x, -h, t), \quad -h < z < \eta(x, t) . \quad (2.2.5)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση Laplace (2.2.1) δύο φορές ως προς  $z$ , και εφαρμόζοντας παράλληλα την κινηματική συνθήκη πυθμένα (Σχ.2.2.4), προκύπτει:

$$\Phi(x, z, t) = \Phi^b(x, t) - \int_{-h}^z dz' \int_{-h}^{z'} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dz , \quad (2.2.6)$$

όπου  $\Phi^b = \Phi(x, -h, t)$  είναι η τιμή του δυναμικού στον πυθμένα. Παράλληλα θεωρώντας ότι η τιμή της οριζόντιας επιτάχυνσης είναι περίπου ίση με αυτή του πυθμένα, η (2.2.6) γίνεται:

$$\Phi(x, z, t) = \Phi^b(x, t) - \frac{(z+h)^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi^b}{\partial x^2} + HOT . \quad (2.2.7)$$

Εισάγοντας τη σχέση (2.2.7) στη (2.2.6) προκύπτει ανώτερης τάξης προσέγγιση για το δυναμικό ταχύτητας:

$$\Phi(x, z, t) = \Phi^b(x, t) - \frac{(z+h)^2}{2!} \Phi^b_{xx} + \frac{(z+h)^4}{4!} \Phi^b_{xxxx} + HOT . \quad (2.2.8)$$

Ανώτερης τάξεως προσεγγίσεις μπορούν να προκύψουν αναδρομικά, εισάγοντας τη σχέση (2.2.8) στη (2.2.6). Καταφέραμε να εκφράσουμε το δυναμικό κατά τρόπο ώστε να μην έχει πεπλεγμένη εξάρτηση από την κατακόρυφη συνιστώσα  $z$  διατηρώντας ωστόσο κάποια επιρροή από αυτή.

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι μερικές παράγωγοι της (2.2.8) στην ελεύθερη επιφάνεια  $z = \eta(x, t)$  οι οποίες εμφανίζονται κατά την αντικατάσταση της (2.2.8) στην κινηματική και δυναμική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας. Έτσι έχουμε:

$$\Phi_t(x, \eta(x, t), t) = \Phi^b_t - \frac{(\eta+h)^2}{2} \Phi^b_{xtt} + \frac{(\eta+h)^4}{4!} \Phi^b_{xtxtt} + HOT , \quad (2.2.9)$$

$$\Phi_x(x, \eta(x, t), t) = \Phi^b_x - \frac{(\eta+h)^2}{2} \Phi^b_{xxx} + \frac{(\eta+h)^4}{4!} \Phi^b_{xxxxx} + HOT , \quad (2.2.10)$$

$$\Phi_z(x, \eta(x, t), t) = -(\eta+h) \Phi^b_{xx} + \frac{(\eta+h)^3}{6} \Phi^b_{xxxx} + HOT . \quad (2.2.11)$$

Στη συνέχεια προχωράμε αντικαθιστώντας τη σχέση (2.2.8) στην κινηματική και δυναμική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας (2.2.2) – (2.2.3). Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.2.8) στην Κ.Σ.Ε.Ε (2.2.2) παίρνουμε:

$$\eta_t + \eta_x \left( \Phi_x^b - \frac{(\eta+h)^2}{2} \Phi_{xxx}^b + \frac{(\eta+h)^4}{4!} \Phi_{xxxx}^b \right) + (\eta+h) \Phi_{xx}^b - \frac{(\eta+h)^3}{6} \Phi_{xxxx}^b = 0. \quad (2.2.12)$$

Κρατώντας στην (2.2.12) μέχρι όρους δευτέρας τάξεως ως προς  $\eta$  και  $\Phi^b$  και παράλληλα θέτοντας ως  $u = \Phi_x^b$  προκύπτει:

$$\eta_t + \eta_x u - \frac{h^2}{2} \eta_x u_{xx} + \frac{h^4}{24} \eta_x u_{xxxx} + \eta u_x + h u_x - \frac{h^3}{6} u_{xxx} - \frac{h^2}{2} \eta u_{xxx} = 0. \quad (2.2.13)$$

Αντίστοιχα, αντικαθιστώντας τη σχέση (2.2.8) στη Δ.Σ.Ε.Ε (2.2.3) παίρνουμε:

$$\Phi_t^b - \frac{(\eta+h)^2}{2} \Phi_{xxt}^b + \frac{(\eta+h)^3}{3!} \Phi_{xxx}^b + \frac{1}{2} \left\{ \left( \Phi_x^b - \frac{(\eta+h)^2}{2} \Phi_{xxx}^b + \frac{(\eta+h)^3}{3!} \Phi_{xxxx}^b \right)^2 + \left( -(\eta+h) \Phi_{xx}^b + \frac{(\eta+h)^3}{6} \Phi_{xxxx}^b \right)^2 \right\} + g\eta = 0. \quad (2.2.14)$$

Κρατώντας στην (2.2.14) μέχρι όρους δευτέρας τάξεως ως προς  $\eta$  και  $\Phi^b$  και αμελώντας τους όρους ανώτερης τάξης προκύπτει:

$$\Phi_t^b - (h\eta) \Phi_{xxt}^b - \frac{h^2}{2} \Phi_{xxt}^b + \frac{1}{2} \left\{ \left( \Phi_x^b \right)^2 - 2\Phi_x^b \frac{h^2}{2} \Phi_{xxx}^b + \left( \frac{h^2}{2} \Phi_{xxx}^b \right)^2 + \left( -h\Phi_{xx}^b \right)^2 \right\} + g\eta = 0. \quad (2.2.15)$$

Στη συνέχεια, παραγωγίζοντας ως προς  $x$  και θέτοντας  $u = \Phi_x^b$  προκύπτει:

$$u_t - h\eta_x u_{xt} - h\eta u_{xxt} - \frac{h^2}{2} u_{xxt} + uu_x + \frac{h^2}{2} u_x u_{xx} - \frac{h^2}{2} uu_{xxx} + g\eta_x = 0. \quad (2.2.16)$$

### Αδιαστατοποίηση

Για να εκτιμήσουμε τη συνεισφορά κάθε όρου των εξισώσεων (2.2.13) και (2.2.16), προχωράμε σε αδιαστατοποίηση των όρων με βάση τη γραμμική θεωρία στην περίπτωση ρηχού νερού, όπου τελικά θα κρατήσουμε μόνο εκείνους τους όρους οι οποίοι ικανοποιούν την απαίτηση του τέθηκε στην αρχή της ανάλυσης, δηλαδή  $\varepsilon \approx O(\mu^2)$  και  $\varepsilon, \mu^2 \ll 1$  με  $\mu < 1/20$  (ρηχό νερό).

Η φασική ταχύτητα μετάδοσης στο ρηχό νερό ( $kd \rightarrow 0$ ) δίνεται με βάση τη γραμμική θεωρία από τη σχέση  $c = \sqrt{gh}$  όπου εξ' ορισμού ισχύει  $c = \omega/k$ , με  $\lambda = 2\pi/k$  το



χαρακτηριστικό μήκος κύματος στο ρηχό νερό. Επιπλέον θεωρούμε ως  $A$  το πλάτος του διαδιδόμενου κυματισμού. Έτσι, οι ανεξάρτητες μεταβλητές αδιαστατοποιούνται ως:

$\tilde{x} = \frac{x}{\lambda}, \tilde{t} = \frac{ct}{\lambda}$  ενώ οι εξαρτημένες ως  $\tilde{u} = \frac{u}{c}, \tilde{\eta} = \frac{\eta}{A}$  όπου με  $\sim$  συμβολίζουμε τις αδιάστατες μεταβλητές.

Κάνοντας χρήση της γενικής σχέσης που συσχετίζει το διαφορικό της αρχικής μεταβλητής με την αδιάστατη,  $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}$  προχωράμε ώστε να εκφράσουμε το σετ των εξισώσεων (2.2.13) και (2.2.16) με βάση τις αδιάστατες μεταβλητές.

Έτσι, για την κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (2.2.13), βλέπουμε τη συνεισφορά καθενός από τους οχτώ όρους που την αποτελούν στον παρακάτω πίνακα 2.1. Από τους παραπάνω οχτώ όρους κρατάμε όσους είναι δεύτερης τάξης ως προς  $\varepsilon$  και τέταρτης τάξης ως προς  $\mu$ , δεδομένης της απαίτησης  $\varepsilon \approx O(\mu^2)$ . Επομένως απομένουν οι όροι:

$$\eta_t + \eta_x u + \eta u_x + hu_x - \frac{h^3}{6} u_{xxx} = 0,$$

ή ισοδύναμα:

$$\eta_t + [(\eta + h)u]_x = \frac{h^3}{6} u_{xxx}. \quad (2.2.17)$$

Όρος	Αρχικός όρος	Αδιάστατος όρος	Συνεισφορά
1 <sup>ος</sup>	$\eta_t$	$\frac{cA}{\lambda} \tilde{\eta}_t = c\varepsilon\mu\tilde{\eta}_t$	$\varepsilon\mu$
2 <sup>ος</sup>	$\eta_x u$	$\frac{cA}{\lambda} \tilde{\eta}_x \tilde{u} = c\varepsilon\mu\tilde{\eta}_x \tilde{u}$	$\varepsilon\mu$
3 <sup>ος</sup>	$\frac{h^2}{2} \eta_x u_{xx}$	$\frac{ch^2 A}{2\lambda^3} \tilde{\eta}_x \tilde{u}_{xx} = \frac{c}{2} \varepsilon\mu^3 \tilde{\eta}_x \tilde{u}_{xx}$	$\varepsilon\mu^3$
4 <sup>ος</sup>	$\frac{h^4}{24} \eta_x u_{xxx}$	$\frac{ch^4 A}{24\lambda^5} \tilde{\eta}_x \tilde{u}_{xxx} = \frac{c}{24} \varepsilon\mu^5 \tilde{\eta}_x \tilde{u}_{xxx}$	$\varepsilon\mu^5$
5 <sup>ος</sup>	$\eta u_x$	$\frac{cA}{\lambda} \tilde{\eta} \tilde{u}_x = c\varepsilon\mu\tilde{\eta} \tilde{u}_x$	$\varepsilon\mu$
6 <sup>ος</sup>	$hu_x$	$\frac{hc}{\lambda} \tilde{u}_x = c\mu\tilde{u}_x$	$\mu$
7 <sup>ος</sup>	$\frac{h^3}{6} u_{xxx}$	$\frac{ch^3 A}{6\lambda^3} \tilde{u}_{xxx} = \frac{c}{6} \mu^3 \tilde{u}_{xxx}$	$\mu^3$
8 <sup>ος</sup>	$\frac{h^2}{2} \eta u_{xx}$	$\frac{ch^2 A}{2\lambda^3} \tilde{\eta} \tilde{u}_{xx} = \frac{c}{2} \varepsilon\mu^3 \tilde{\eta} \tilde{u}_{xx}$	$\varepsilon\mu^3$

Πίνακας 2.1

Όρος	Αρχικός όρος	Αδιάστατος όρος	Συνεισφορά
1 <sup>ος</sup>	$u_t$	$\frac{c^2}{\lambda} \tilde{u}_t = g \mu \tilde{u}_t$	$\mu$
2 <sup>ος</sup>	$h \eta_x u_{xt}$	$\frac{cAgh}{\lambda^3} \tilde{\eta}_x \tilde{u}_{xt} = g \varepsilon \mu^3 \tilde{\eta}_x \tilde{u}_{xt}$	$\varepsilon \mu^3$
3 <sup>ος</sup>	$h \eta u_{xxt}$	$\frac{h^2 Ag}{\lambda^3} \tilde{\eta} \tilde{u}_{xxt} = g \varepsilon \mu^3 \tilde{\eta} \tilde{u}_{xxt}$	$\varepsilon \mu^3$
4 <sup>ος</sup>	$\frac{h^2}{2} u_{xxt}$	$\frac{gh^3}{2\lambda^3} \tilde{u}_{xxt} = \frac{g}{2} \mu^3 \tilde{u}_{xxt}$	$\mu^3$
5 <sup>ος</sup>	$uu_x$	$\frac{c^2}{\lambda} \tilde{u} \tilde{u}_x = g \mu \tilde{u} \tilde{u}_x$	$\mu$
6 <sup>ος</sup>	$\frac{h^2}{2} u_x u_{xx}$	$\frac{gh^3}{2\lambda^3} \tilde{u}_x \tilde{u}_{xx} = \frac{g}{2} \mu^3 \tilde{u}_x \tilde{u}_{xx}$	$\mu^3$
7 <sup>ος</sup>	$\frac{h^2}{2} uu_{xxx}$	$\frac{gh^3}{2\lambda^3} \tilde{u}_{xxx} = \frac{g}{2} \mu^3 \tilde{u}_{xxx}$	$\mu^3$
8 <sup>ος</sup>	$g \eta_x$	$\frac{gA}{\lambda} \tilde{\eta}_x = g \varepsilon \mu \tilde{\eta}_x$	$\varepsilon \mu$

Πίνακας 2.2

Αντίστοιχα, για τη δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (2.2.16), βλέπουμε τη συνεισφορά καθενός από τους οχτώ όρους που την αποτελούν στον παραπάνω πίνακα 2.2. Από τους παραπάνω οχτώ όρους κρατάμε όσους είναι δεύτερης τάξης ως προς  $\varepsilon$  και τέταρτης τάξης ως προς  $\mu$ , δεδομένης της απαίτησης  $\varepsilon \approx O(\mu^2)$ . Επομένως απομένουν οι όροι:

$$u_t - \frac{h^2}{2} u_{xxt} + uu_x + \frac{h^2}{2} u_x u_{xx} - \frac{h^2}{2} uu_{xxx} + g \eta_x = 0 . \quad (2.2.17)$$

Στην (2.2.17) συμπεριλαμβάνονται τρεις μη γραμμικοί όροι, ο  $uu_x$  πρώτης τάξης ως προς  $\mu$  και οι  $\left\{ \frac{h^2}{2} u_x u_{xx}, \frac{h^2}{2} uu_{xxx} \right\}$ , τρίτης τάξης ως προς  $\mu$ . Επειδή δε θέλουμε να συμπεριλάβουμε μεγάλης τάξεως μη γραμμικότητα, θα κρατήσουμε μη γραμμικότητα μέχρι πρώτης τάξης ως προς  $\mu$ .

Άρα καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$u_t - \frac{h^2}{2} u_{xxt} + uu_x + g \eta_x = 0 . \quad (2.2.18)$$

Συνεπώς, το σετ των εξισώσεων (2.2.17), (2.2.18) το οποίο παραθέτουμε παρακάτω αποτελεί το σετ των εξισώσεων Boussinesq που εξήγαγε ο ίδιος το 1872 στην περίπτωση σταθερής βαθυμετρίας, όπως συνοψίζονται κατωτέρω

$$\eta_t + [(\eta + h)u]_x = \frac{h^3}{6} u_{xxx} , \quad (2.2.17)$$

$$u_t - \frac{h^2}{2} u_{xxt} + uu_x + g\eta_x = 0 . \quad (2.2.18)$$

### 2.3 Εξισώσεις Boussinesq σε μεταβαλλόμενη βαθυμετρία

Στην παράγραφο παρουσιάζεται η διαδικασία εξαγωγής των εξισώσεων τύπου Boussinesq που πραγματοποιήθηκε από τον Peregrine το 1967 μέσω της μεθόδου διαταραχών ξεκινώντας από την αδιατάρακτη ελεύθερη επιφάνεια  $\eta=0$ . Οι παραγόμενες εξισώσεις επεκτείνονται βέβαια όσον αφορά τη βαθυμετρία σε σχέση με τις αρχικές εξισώσεις που εξήχθησαν από τον Boussinesq το 1872 όπου αναπτύχθηκαν όπως είδαμε με τη θεώρηση σταθερής βαθυμετρία  $h(x)=h$  αλλά με περιορισμό στην κλίση του πυθμένα καθώς γίνεται η θεώρηση ήπιας κλίσης πυθμένα  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=0$ . Παράλληλα, όπως θα καταστεί σαφές στη συνέχεια οι διαφορετικές προσεγγίσεις της οριζόντιας ταχύτητας οδηγούν σε διαφορετικές εξισώσεις τύπου Boussinesq.

Θεωρούμε το υδροδυναμικό πρόβλημα επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας με ελεύθερη επιφάνεια στο  $(x,z)$  επίπεδο και τις βασικές εξισώσεις της κίνησης ρευστού με ελεύθερη επιφάνεια που το περιγράφουν, το οποίο έχοντας απορροφήσει την κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας γράφεται ως:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad -h(x) \leq z \leq \eta(x,t) , \quad (2.3.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad -h(x) \leq z \leq \eta(x,t) , \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad -h(x) \leq z \leq \eta(x,t) , \quad (2.3.3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad -h(x) \leq z \leq \eta(x,t) , \quad (2.3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad -h(x) \leq z \leq \eta(x,t) , \quad (2.3.5)$$

$$p=0, \quad z=\eta(x,t) , \quad (2.3.6)$$

$$u \frac{dh}{dx} + w = 0, \quad z=-h(x) . \quad (2.3.7)$$

Εφαρμόζοντας τη θεωρία διαταραχών στο παραπάνω σύστημα εξισώσεων (2.3.1) – (2.3.7) λαμβάνουμε μια ασυμπτωτική προσέγγιση των εξισώσεων στο ρηχό νερό. Προκειμένου όμως αυτή η διαδικασία να συγκλίνει, θα πρέπει το πρόβλημα να είναι καλώς οριοθετημένο στην περιοχή του ρηχού νερού και να εκτιμηθεί η συνεισφορά του κάθε όρου ανάλογα με την τάξη προσέγγισης.

Εξετάζουμε το πρόβλημα σε περιοχή ρηχού νερού όπου  $\mu = \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{20}$  και με την απαίτηση ότι:

$$\varepsilon = \frac{A}{h_0} \approx \mu^2 = \left(\frac{h_0}{\lambda}\right)^2 \ll 1 ,$$

όπου  $h_0$  θεωρούμε το μέσο βάθος νερού στην περιοχή μελέτης. Από τη γραμμική θεωρία στην περίπτωση ρηχού νερού έχουν παραχθεί οι παρακάτω λύσεις:

$$\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \text{ και}$$

$$u(x, z, t) = \frac{A}{h} \sqrt{gh_0} \cos(kx - \omega t), \quad w(x, z, t) = \frac{A}{h} \sqrt{gh_0} k (z + h) \sin(kx - \omega t) ,$$

όπου η φασική ταχύτητα μετάδοσης στο ρηχό νερό δίνεται από τη  $c = \sqrt{gh_0}$

### Αδιαστατοποίηση

Περνάμε τώρα στην αδιαστατοποίηση των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών.

Δεδομένου ότι στην ελεύθερη επιφάνεια το  $w$  παίρνει τη μέγιστη τιμή του, θα έχουμε την ακόλουθη σχέση  $|u/w| = \frac{1}{kh_0} \gg 1$ . Από αυτό γίνεται ξεκάθαρο ότι τα  $u, w$  πρέπει

να αδιαστατοποιηθούν υπό διαφορετικές κλίμακες. Με βάση αυτό, εφαρμόζεται η ακόλουθη αδιαστατοποίηση:

$$\tilde{x} = \frac{x}{\lambda} , \quad \tilde{z} = \frac{z}{h_0} , \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{h_0}$$

$$\tilde{t} = \frac{ct}{\lambda} , \quad \tilde{h} = \frac{h}{h_0} , \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho gh_0}$$

$$\tilde{u} = \frac{u}{c} , \quad \tilde{w} = \frac{\lambda w}{h_0 c}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στο σετ εξισώσεων (2.3.1) – (2.3.7) καταλήγουμε στο αδιαστατοποιημένο πρόβλημα:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, -h(x) \leq z \leq \eta(x,t), \text{ εξίσωση Euler} \quad (2.3.8)$$

$$\mu^2 \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial p}{\partial z} + 1 = 0, -h(x) \leq z \leq \eta(x,t), \text{ εξίσωση Euler} \quad (2.3.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, -h(x) \leq z \leq \eta(x,t), \text{ εξίσωση συνέχειας} \quad (2.3.10)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, -h(x) \leq z \leq \eta(x,t), \quad (2.3.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \mu^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0, -h(x) \leq z \leq \eta(x,t), \text{ αστρόβιλη ροή} \quad (2.3.12)$$

$$p = 0 \text{ στο } z = \eta(x,t), \text{ δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας} \quad (2.3.13)$$

$$u \frac{dh}{dx} + w = 0 \text{ στο } z = -h(x), \text{ συνθήκη μη εισχώρησης πυθμένα,} \quad (2.3.14)$$

όπου  $Q$  δηλώνει τη παροχή,

$$Q = \int_{-h}^{\eta} u dz \quad \text{και} \quad \mu = h_o / \lambda$$

Θεωρούμε αναπτύγματα για τα μεγέθη  $\eta, u, w, p$  και  $Q$  της μορφής:

$$f(x, z, t, \varepsilon) = f_0(x, z, t) + \varepsilon f_1(x, z, t) + \varepsilon^2 f_2(x, z, t) + \dots,$$

με την απαίτηση  $\varepsilon \approx O(\mu^2)$  και όλα τα  $f_i = O(1)$ .

### Ανάπτυγμα μηδενικής τάξης

Για τη μηδενική τάξη ως προς  $\varepsilon$  έχουμε το ρευστό σε ηρεμία, δηλαδή  $\eta_0 = u_0 = w_0 = Q_0 = 0$  και η πίεση λαμβάνεται από τις εξισώσεις (2.3.9) και (2.3.13) ως:  $p_0(x, z, t) = -z$ , δηλαδή η υδροστατική πίεση.

### Ανάπτυγμα πρώτης τάξης

Για την πρώτη τάξη ως προς  $\varepsilon$ , έχουμε  $p = p_0 + \varepsilon p_1$  και από την εξίσωση κατακόρυφης ορμής (2.3.9) προκύπτει ότι  $\partial p_1 / \partial z = 0$  έτσι ώστε,

$$p_1 = c_1(x, t).$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης  $c_1$  βρίσκεται από τη δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (2.3.13)  $p = 0$  στο  $z = \eta(x, t)$ . Σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$p_0 + \varepsilon p_1 = 0 \text{ στο } z = \eta_1(x, t) \text{ και έτσι } -z|_{z=\eta_1} + \varepsilon c_1 = 0 \text{ που οδηγεί στο:}$$

$$p_1(x, z, t) = \eta_1(x, t) . \quad (2.3.15)$$

Από τη σχέση της αστρόβιλης ροής (2.3.12) βρίσκουμε  $\varepsilon \partial u_1 / \partial z = 0$  και έτσι

$$u_1 = U_1(x, t) , \quad (2.3.16)$$

όπου  $U_1(x, t)$  μια σταθερά ολοκλήρωσης. Στην προσέγγιση πρώτης τάξης ως προς  $\varepsilon$ , η οριζόντια ταχύτητα  $u_1$  βλέπουμε ότι είναι ομοιόμορφη στη στήλη του νερού. Αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση της συνέχειας (2.3.10) από το  $-h(x)$  έως το  $z$  λαμβάνουμε:

$$\int_{-h}^z \frac{\partial U_1}{\partial x} dz + w_1(x, z, t) - w_1(x, -h, t) = 0 . \quad (2.3.17)$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη μη εισχώρησης του πυθμένα (2.3.14) για την πρώτη τάξη λαμβάνουμε:

$$w_1(x, z, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [(h+z)U_1] . \quad (2.3.18)$$

Οι εξισώσεις πρώτης τάξης ως προς  $\varepsilon$  προκύπτουν από την εξίσωση οριζόντιας ορμής (2.3.8) και την ολοκληρωμένη εξίσωση ορμής (2.3.11) ως:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial \eta_1}{\partial x} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 0 . \quad (2.3.19)$$

### Ανάπτυγμα δεύτερης τάξης

Από την κατακόρυφη εξίσωση της ορμής (2.3.9) προκύπτει:

$$\varepsilon \frac{\partial p_2}{\partial z} = -\mu^2 \frac{\partial w_1}{\partial t} . \quad (2.3.20)$$

Εισάγοντας την παράμετρο  $\nu = \mu^2 / \varepsilon$  και δεδομένου του  $w_1$  που δίνεται από τη σχέση (2.3.18), τότε ολοκληρώνοντας τη σχέση (2.3.20) ως προς  $z$  παίρνουμε:

$$p_2 - c_2(x, t) = \nu z \frac{\partial^2 (hU_1)}{\partial t \partial x} + \frac{1}{2} \nu z^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial x} , \quad (2.3.21)$$

όπου  $c_2(x, t)$  μια σταθερά ολοκλήρωσης η οποία βρίσκεται από τη δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας  $p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 = 0$  στο  $z = \eta_2(x, t)$  ως  $c_2 = \eta_2(x, t)$ . Έτσι το  $p_2(x, z, t)$  δίνεται από τη σχέση

$$p_2(x, z, t) = \eta_2(x, t) + \nu z \frac{\partial^2 (hU_1)}{\partial t \partial x} + \frac{1}{2} \nu z^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial x} . \quad (2.3.22)$$

Από τη σχέση της αστρόβιλης ροής (2.3.12) βρίσκουμε:

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{\nu \partial w_1}{\partial x} , \quad (2.3.23)$$

και ολοκληρώνοντας κατά  $z$  καταλήγουμε:

$$u_2(x, z, t) = U_2(x, t) - \nu z \frac{\partial^2 (hU_1)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \nu z^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}, \quad (2.3.24)$$

όπου  $U_2(x, t)$  μια σταθερά ολοκλήρωσης.

Αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση της συνέχειας (2.3.10) από το  $-h(x)$  έως το  $z$  λαμβάνουμε:

$$\int_{-h}^z \frac{\partial u_2}{\partial x} dz + w_2(x, z, t) - w_2(x, -h, t) = 0. \quad (2.3.25)$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη μη εισχώρησης του πυθμένα (2.3.14) για τη δεύτερη τάξη,  $\frac{dh}{dx} u_2|_{z=-h} + w_2|_{z=-h} = 0$  λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} w_2(x, z, t) = & -\frac{\partial}{\partial x} [(h+z)U_2] - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 (hU_1)}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \right] \\ & + \frac{1}{2} \nu z^2 \frac{\partial^3 (hU_1)}{\partial x^3} + \frac{1}{6} \nu z^3 \frac{\partial^3 U_1}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Οι εξισώσεις δεύτερης τάξης ως προς  $\varepsilon$  προκύπτουν από την εξίσωση οριζόντιας ορμής (2.3.8) και την ολοκληρωμένη εξίσωση συνέχειας (2.3.11) ως:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0, \quad (2.3.27)$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0. \quad (2.3.28)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.3.22) και (2.3.24) για τα  $u_2, p_2$  στη σχέση (2.3.27), προκύπτει:

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = 0, \quad (2.3.29)$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0. \quad (2.3.30)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις για τα  $u_2, p_2$  βλέπουμε ότι η χρονική τους εξέλιξη είναι ανεξάρτητη της κατακόρυφης συντεταγμένης. Αυτή η ανεξαρτησία των όρων από τη μεταβλητή  $z$  γίνεται ξεκάθαρη από τις εξισώσεις δεύτερης τάξης

$$\frac{\partial p_2}{\partial z} = -\nu \frac{\partial w_1}{\partial t} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} = \nu \frac{\partial w_1}{\partial x} \quad \text{για τις οποίες} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial t} \right] = 0.$$

Συνεχίζοντας, οι εκφράσεις για τα  $Q_1, Q_2$  μπορούν να βρεθούν από τον ορισμό της παροχής  $Q$ :

$$Q_1 + \varepsilon Q_2 = \int_{-h}^{\eta} [u_1(x, z, t) + \varepsilon u_2(x, z, t)] dz . \quad (2.3.31)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (2.3.16) και (2.3.24) για τα  $u_1, u_2$  βρίσκουμε:

$$Q_1 = hU_1 , \quad (2.3.32)$$

$$Q_2 = hU_2 + \eta_1 U_1 + \frac{1}{2} \nu h^2 \frac{\partial^2 (hU_1)}{\partial x^2} - \frac{1}{6} \nu h^3 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} . \quad (2.3.33)$$

Μετά από αντικατάσταση της σχέσης (2.3.32) στις εξισώσεις πρώτης τάξης (2.3.19) και της σχέσης (2.3.33) στην ολοκληρωμένη εξίσωση συνέχειας (2.3.30) βρίσκουμε τελικά ότι το σύστημα εξισώσεων για την πρώτη και δεύτερη τάξη αντίστοιχα δίνεται από τις σχέσεις παρακάτω.

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial \eta_1}{\partial x} = 0 , \quad (2.3.34a)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \frac{\partial (hU_1)}{\partial x} = 0 . \quad (2.3.34b)$$

Οι σχέσεις (2.3.34a) και (2.3.34b) αποτελούν τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις ρηχού νερού.

Αντίστοιχα, για τη δεύτερη τάξη έχουμε

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = -U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} , \quad (2.3.35a)$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\partial (hU_2)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (\eta_1 U_1) - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 (hU_2)}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \right] . \quad (2.3.35b)$$

Η κλασική διαδικασία που ακολουθείται στην προσέγγιση μέσω σειράς διαταραχών είναι να βρεθεί μια λύση για τα  $U_1, \eta_1$  από τις εξισώσεις πρώτης τάξης (2.3.34a), (2.3.34b) αφού πρώτα οριστούν οι απαραίτητες αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Στη συνέχεια αυτές οι λύσεις αντικαθίστανται στο δεξί μέλος των εξισώσεων δεύτερης τάξης (2.3.35a), (2.3.35b) όπου μια λύση για τα  $U_2, \eta_2$  μπορεί να βρεθεί. Ωστόσο εδώ ακολουθούμε τη διαδικασία που εφάρμοσε ο Peregrine (1967), ο οποίος παρατήρησε ότι τα αριστερά μέλη των εξισώσεων πρώτης και δεύτερης τάξης έχουν την ίδια δομή και το δεξί μέλος των (2.3.35a) και (2.3.35b) αποτελεί μια διαταραχή της ομογενούς (2.3.34a), (2.3.34b). Άρα, με βάση αυτή την παρατήρηση, οι εξισώσεις πρώτης και δεύτερης τάξης συνδυάζονται προσθέτοντας  $\varepsilon$  φορές τις εξισώσεις δεύτερης τάξης στις αντίστοιχες εξισώσεις πρώτης τάξης.

Έτσι καταλήγουμε στο σύστημα εξισώσεων:



$$\frac{\partial(U_1 + \varepsilon U_2)}{\partial t} + \varepsilon U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta_1 + \varepsilon \eta_2) = 0, \quad (2.3.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\eta_1 + \varepsilon \eta_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hU_1 + \varepsilon hU_2) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}(\eta_1 U_1) = \\ = \nu \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 (hU_1)}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

Η (2.3.37) μπορεί να ξαναγραφεί μέσω των όρων  $Q_1, Q_2$  ως:

$$\frac{\partial(\eta_1 + \varepsilon \eta_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Q_1 + \varepsilon Q_2) = 0. \quad (2.3.38)$$

Για να καταλήξουμε σε εξισώσεις τύπου Boussinesq θα πρέπει να εκφράσουμε τα  $U_1 + \varepsilon U_2$  και  $\eta_1 + \varepsilon \eta_2$  στο παραπάνω σύστημα (2.3.36), (2.3.37) από προσεγγίσεις αυτών σύμφωνα με τη διαδικασία διαταραχών που ακολουθήθηκε.

Για τη μεταβλητή της ελεύθερης επιφάνειας ήδη έχουμε θεωρήσει  $\eta = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2$  όπου επιπλέον ορίζουμε  $\varepsilon \zeta = \eta = \varepsilon(\eta_1 + \varepsilon \eta_2)$ . Για τη μεταβλητή της οριζόντιας ταχύτητας υπάρχουν αρκετές επιλογές που μπορούμε να κάνουμε. Κάποιες από αυτές είναι η μέση οριζόντια ταχύτητα ως προς το στιγμιαίο βάθος, η οριζόντια ταχύτητα στη στάθμη ηρεμίας της ελεύθερης επιφάνειας  $z = 0$ , στον πυθμένα  $z = -h$ , και:

$$\varepsilon \tilde{u}(x, t) = u(x, 0, t), \quad \varepsilon u^b(x, t) = u(x, -h, t), \quad \varepsilon \hat{u} = \bar{u}(x, t) = \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} u(x, z, t) dz.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα  $\eta, \tilde{u}, u^b, \hat{u}$  είναι πρώτης τάξης ως προς  $\varepsilon$

Στην παρούσα εργασία επιλέγεται να παρουσιαστούν η οριζόντια ταχύτητα στη στάθμη ηρεμίας της ελεύθερης επιφάνειας, η μέση οριζόντια ταχύτητα ως προς το στιγμιαίο βάθος και η οριζόντια ταχύτητα στον πυθμένα.

### Μέση οριζόντια ταχύτητα ως προς το στιγμιαίο βάθος.

για τη μέση ταχύτητα  $\hat{u}$  έχουμε, εξ' ορισμού:

$$Q_1 + \varepsilon Q_2 = (h + \varepsilon \eta) \hat{u}, \quad (2.3.39)$$

$$\text{όπου } \varepsilon \hat{u} = \bar{u}(x, t) = \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} u(x, z, t) dz = \frac{1}{h + \eta} Q.$$

Αυτή η έκφραση χρησιμοποιείται στην (2.3.38). Στην (2.3.36) εμφανίζονται όροι της μορφής  $U_1 + \varepsilon U_2$  και  $\varepsilon U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}$ . Αυτοί οι όροι πρέπει να ξαναγραφούν ως όροι της  $\hat{u}$ . Έτσι έχουμε:

$$h\hat{u} = \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{\eta}{h}} (Q_1 + \varepsilon Q_2) = Q_1 - \varepsilon \eta U_1 + \varepsilon Q_2 + O(\varepsilon^2),$$

όπου χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.3.32) και (2.3.33) για τα  $Q_1$  και  $Q_2$  καταλήγουμε:

$$\hat{u} = U_1 + \varepsilon U_2 + \frac{1}{2} \mu^2 h \frac{\partial^2 (hU_1)}{\partial x^2} - \frac{1}{6} \mu^2 h^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}. \quad (2.3.40)$$

Πλέον γίνεται ξεκάθαρο ότι  $U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + O(\varepsilon^2)$

Με αντικατάσταση των (2.3.39) και (2.3.40) στο σύστημα εξισώσεων (2.3.36), (2.3.38) καταλήγουμε στο αδιαστατοποιημένο σύστημα εξισώσεων τύπου Boussinesq εκφρασμένο ως προς τη μέση οριζόντια ταχύτητα.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \varepsilon \zeta) \hat{u}] = 0, \quad (2.3.41)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \varepsilon \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \mu^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} h \frac{\partial^2 (h\hat{u})}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right] + O(\varepsilon \mu^2, \mu^4). \quad (2.3.42)$$

Επιστρέφοντας στις κανονικές διαστάσεις του προβλήματος προκύπτει:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta) \hat{u}] = 0, \quad (2.3.43a)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ h \frac{\partial^2 (h\hat{u})}{\partial x^2} - \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right]. \quad (2.3.43b)$$

### Οριζόντια ταχύτητα στη στάθμη ηρεμίας της ελεύθερης επιφάνειας $z = 0$

Για να καταλήξουμε σε εξισώσεις τύπου Boussinesq εκφρασμένες ως προς την οριζόντια ταχύτητα  $\tilde{u}$  υπολογισμένη στη στάθμη  $z = 0$ , θεωρούμε την έκφραση για την οριζόντια ταχύτητα  $u(x, z, t)$  που έχει ληφθεί μέχρι τώρα. Από τις σχέσεις (2.3.16) και (2.3.24) για τα  $u_1, u_2$  που υπολογίστηκαν κατά τη μέθοδο διαταραχών γύρω από το  $z = 0$  προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} u(x, z, t) &= u_1(x, z, t) + \varepsilon u_2(x, z, t) = \\ &= U_1(x, t) + \varepsilon U_2(x, t) - \mu^2 z \frac{\partial^2 (hU_1)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \mu^2 z^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

Αντικαθιστώντας με  $z = 0$  προκύπτει για τη  $\tilde{u}$ ,

$$\tilde{u} = U_1(x,t) + \varepsilon U_2(x,t) . \quad (2.3.45)$$

Δεδομένου ότι  $U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + O(\varepsilon^2)$ , η (2.3.36) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \varepsilon \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = O(\varepsilon \mu^2, \mu^4) , \quad (2.3.46)$$

και αντίστοιχα

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \varepsilon \eta) \tilde{u}] = -\mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 (h \tilde{u})}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \right] + O(\varepsilon \mu^2, \mu^4) . \quad (2.3.47)$$

Επιστρέφοντας στις κανονικές διαστάσεις του προβλήματος προκύπτει:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 , \quad (2.3.48a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta) \tilde{u}] = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ h^2 \frac{\partial^2 (h \tilde{u})}{\partial x^2} - \frac{1}{3} h^3 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \right] . \quad (2.3.48b)$$

Το σύστημα εξισώσεων (2.3.48a), (2.3.48b) αποτελεί το διαστατοποιημένο σύστημα τύπου Boussinesq εκφρασμένο ως προς την οριζόντια ταχύτητα στη στάθμη ηρεμίας  $z = 0$

### Οριζόντια ταχύτητα στον πυθμένα $z = -h$

Αντικαθιστώντας με  $z = -h$  στη σχέση (2.3.44) προκύπτει για την οριζόντια ταχύτητα στον πυθμένα  $u^b$  :

$$u^b = U_1(x,t) + \varepsilon U_2(x,t) + \mu^2 h \frac{\partial^2 (h U_1)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \mu^2 h^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} . \quad (2.3.49)$$

Τελικά, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πάνω, καταλήγουμε στο σετ εξισώσεων τύπου Boussinesq εκφρασμένο ως προς την οριζόντια ταχύτητα στον πυθμένα:

$$\frac{\partial u^b}{\partial t} + \varepsilon u^b \frac{\partial u^b}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ h \frac{\partial^2 (h u^b)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u^b}{\partial x^2} \right] + O(\varepsilon \mu^2, \mu^4) , \quad (2.3.50)$$

και αντίστοιχα

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \varepsilon \eta) u^b] = \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 (h u^b)}{\partial x^2} - \frac{1}{3} h^3 \frac{\partial^2 u^b}{\partial x^2} \right] + O(\varepsilon \mu^2, \mu^4) . \quad (2.3.51)$$

Επιστρέφοντας στις κανονικές διαστάσεις του προβλήματος προκύπτει:

$$\frac{\partial u^b}{\partial t} + u^b \frac{\partial u^b}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ h \frac{\partial^2 (hu^b)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u^b}{\partial x^2} \right], \quad (2.3.52a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta)u^b] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 (hu^b)}{\partial x^2} - \frac{1}{3} h^3 \frac{\partial^2 u^b}{\partial x^2} \right]. \quad (2.3.52b)$$

## 2.4 Σχέσεις διασποράς των διάφορων μοντέλων εξισ. Boussinesq

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζονται οι σχέσεις διασποράς που διέπουν τα διάφορα μοντέλα τύπου Boussinesq που μελετήθηκαν στα προηγούμενα εδάφια και συγκρίνονται ως προς τη εξίσωση διασποράς που προβλέπεται από τη γραμμική θεωρία, έτσι ώστε να διαπιστωθεί το εύρος εφαρμογής των εξισώσεων αυτών. Κατά τη διαδικασία εξαγωγής των εξισώσεων διασποράς, θεωρούμε σταθερό βάθος πυθμένα  $h$ , και επιπλέον αμελούμε τη συμβολή των μη γραμμικών όρων στις παραγόμενες σχέσεις διασποράς.

Η σύγκριση των σχέσεων διασποράς γίνεται βάση του όρου της φασικής ταχύτητας στο τετράγωνο  $c^2$  που αντιστοιχεί σε κάθε ένα από τα σετ εξισώσεων που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα εδάφια, όπου εξ' ορισμού ισχύει  $c = \omega / k$

Η εξαγωγή των σχέσεων διασποράς θα γίνει θεωρώντας ότι η οριζόντια ταχύτητα έχει τη μορφή απλού αρμονικού κυματισμού με κατεύθυνση διάδοσης προς το θετικό ημιάξονα:

$$u(x, t) = u_0 \cos(kx - \omega t) . \quad (2.4.1)$$

Η φασική ταχύτητα στο τετράγωνο στη γραμμική θεωρία δίνεται από τη σχέση:

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh \frac{\tanh(kh)}{kh} . \quad (2.4.2)$$

Στη συνέχεια προχωράμε στην εξαγωγή των σχέσεων διασποράς για κάθε ένα από τα σετ εξισώσεων  $\{(2.2.17), (2.2.18)\}, \{(2.3.43a), (2.3.43b)\}, \{(2.3.48a), (2.3.48b)\}$  που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα εδάφια.

Ξεκινώντας από το σετ εξισώσεων  $\{(2.2.17), (2.2.18)\}$  και αμελώντας τους μη γραμμικούς όρους προκύπτει το γραμμικοποιημένο σετ εξισώσεων Boussinesq:

$$\eta_t + hu_x = \frac{h^3}{6} u_{xxx} , \quad (2.4.3)$$

$$u_t + g\eta_x = \frac{h^2}{2} u_{xxt} . \quad (2.4.4)$$

Παραγωγίζοντας την (2.4.3) ως προς  $x$  και την (2.4.4) ως προς  $t$  έχουμε:

$$\eta_{xt} + hu_{xx} = \frac{h^3}{6} u_{xxx} , \quad (2.4.5)$$

$$u_{tt} + g\eta_{xt} = \frac{h^2}{2} u_{xxt} . \quad (2.4.6)$$

Αντικαθιστώντας την (2.4.5) στην (2.4.6) προκύπτει:

$$u_{tt} + g \frac{h^3}{6} u_{xxx} - gh u_{xx} = \frac{h^2}{2} u_{xxt} . \quad (2.4.7)$$

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω υποθέτουμε λύση για την οριζόντια ταχύτητα όπως αυτή που δίνεται στη σχέση (2.4.1). Έτσι έχουμε:

$$-\omega^2 + g \frac{h^3}{6} k^4 + ghk^2 = \frac{h^2}{2} k^2 \omega^2 ,$$

από όπου λαμβάνουμε

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh \frac{1 + \frac{1}{6}(kh)^2}{1 + \frac{1}{2}(kh)^2} . \quad (2.4.8)$$

Η σχέση (2.4.8) αποτελεί τη σχέση διασποράς εκφρασμένη ως προς τη φασική ταχύτητα μετάδοσης, του σετ εξισώσεων Boussinesq 1872 όπως παρουσιάστηκε στο δεύτερο εδάφιο.

Συνεχίζουμε με το σετ εξισώσεων τύπου Boussinesq  $\{(2.3.43a), (2.3.43b)\}$  όπως παρουσιάστηκε από τον Peregrine (1967), για επιλογή μέσης οριζόντιας ταχύτητας στη στήλη του ρευστού,  $\hat{u}$  και για σταθερό βάθος πυθμένα  $h$ .

Αμελώντας τους μη γραμμικούς όρους προκύπτει το γραμμικοποιημένο σετ εξισώσεων εκφρασμένο ως προς  $\hat{u}$ .

$$\eta_t + h\hat{u}_x = 0 , \quad (2.4.9)$$

$$\hat{u}_t + g\eta_x = \frac{1}{3}\hat{u}_{xxt} . \quad (2.4.10)$$

Παραγωγίζοντας την (2.4.9) ως προς  $x$  και την (2.4.10) ως προς  $t$  έχουμε:

$$\eta_{xt} + h\hat{u}_{xx} = 0 , \quad (2.4.11)$$

$$\hat{u}_{tt} + g\eta_{xt} = \frac{1}{3}\hat{u}_{xxtt} . \quad (2.4.12)$$

Αντικαθιστώντας την (2.4.11) στην (2.4.12) προκύπτει:

$$\hat{u}_t - gh\hat{u}_{xx} = \frac{1}{3}\hat{u}_{xxx} . \quad (2.4.13)$$

Υποθέτοντας λύση για την οριζόντια ταχύτητα όπως αυτή που δίνεται στη σχέση (2.4.1) και έπειτα από πράξεις καταλήγουμε στη σχέση:

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh \frac{1}{\left(1 + \frac{(kh)^2}{3}\right)} , \quad (2.4.14)$$

η οποία αποτελεί την εξίσωση διασποράς εκφρασμένη ως προς τη φασική ταχύτητα μετάδοσης για το σετ εξισώσεων  $\{(2.3.43a), (2.3.43b)\}$  στην περίπτωση επιλογής μέσης οριζόντιας ταχύτητας καθ' ύψος της στήλης του ρευστού.

Αντίστοιχα για το σετ εξισώσεων τύπου Boussinesq  $\{(2.3.48a), (2.3.48b)\}$  όπως παρουσιάστηκε από τον Peregrine (1967), για επιλογή οριζόντιας ταχύτητας στη στάθμη ηρεμίας  $z = 0$ ,  $\tilde{u}$  αμελώντας τους μη γραμμικούς όρους έπεται:

$$\tilde{u}_t + g\eta_x = 0 , \quad (2.4.15)$$

$$\eta_t + h\tilde{u}_x = -\frac{h^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}_{xxx} . \quad (2.4.16)$$

Παραγωγίζοντας την (2.4.15) ως προς  $x$  και την (2.4.16) ως προς  $t$  έχουμε:

$$\tilde{u}_{xt} + g\eta_{xx} = 0 , \quad (2.4.17)$$

$$\eta_{tt} + h\tilde{u}_{xt} + \frac{h^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}_{xxx} = 0 . \quad (2.4.18)$$

Αντικαθιστώντας την (2.4.17) στην (2.4.18) προκύπτει:

$$\tilde{u}_{tt} - gh\tilde{u}_{xx} - g \frac{h^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}_{xxx} = 0 . \quad (2.4.19)$$

Υποθέτοντας λύση για την οριζόντια ταχύτητα όπως αυτή που δίνεται στη σχέση (2.4.1) και έπειτα από πράξεις καταλήγουμε:

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh \left(1 - \frac{(kh)^2}{3}\right) , \quad (2.4.20)$$

η οποία αποτελεί τη σχέση διασποράς εκφρασμένη ως προς τη φασική ταχύτητα μετάδοσης για το σετ εξισώσεων  $\{(2.3.48a), (2.3.48b)\}$  στην περίπτωση επιλογής οριζόντιας ταχύτητας στη στάθμη ηρεμίας  $z = 0$ .

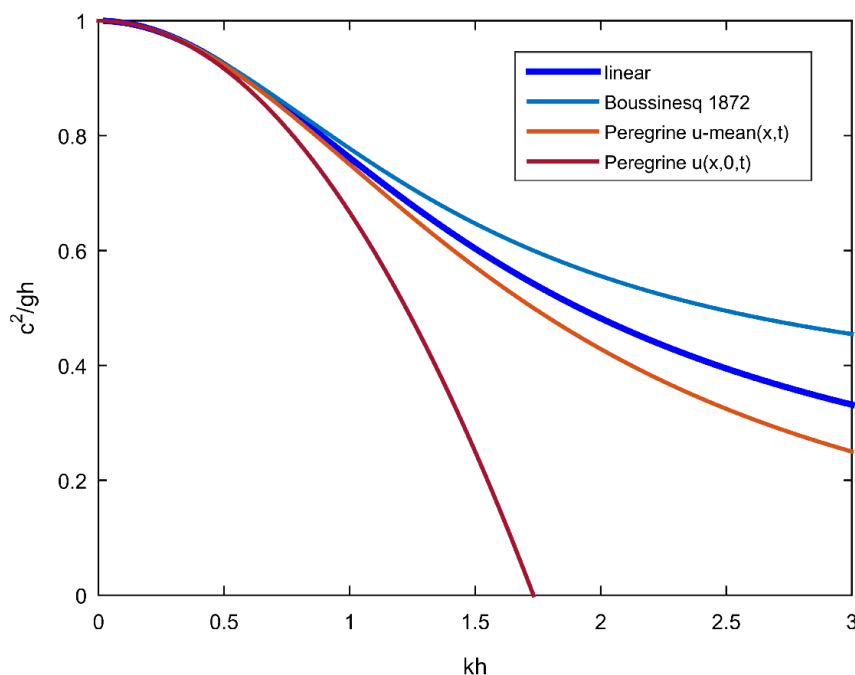
Παρακάτω στο Σχ.2.2 απεικονίζονται οι σχέσεις διασποράς που υπολογίστηκαν για κάθε ένα σετ εξισώσεων Boussinesq μαζί με τη σχέση διασποράς που προβλέπει η γραμμική θεωρία.

Όπως φαίνεται και στο Σχ.2.2, για πολύ μικρή τιμή του κυματαριθμού επί το βάθος  $kh \approx 0.3-0.4$ , οι σχέσεις διασποράς των τριών μοντέλων που περιγράφηκαν στα προηγούμενα εδάφια σχεδόν ταυτίζονται με αυτή της γραμμικής θεωρίας. Από κει και πέρα αρχίζουν και εμφανίζονται οι αποκλίσεις από τη σχέση διασποράς της γραμμικής θεωρίας, όπου η καλύτερη συμπεριφορά ως προς αυτήν συναντάται από το σετ εξισώσεων Boussinesq το οποίο είναι εκφρασμένο ως προς τη μέση ως προς το βάθος οριζόντια ταχύτητα.

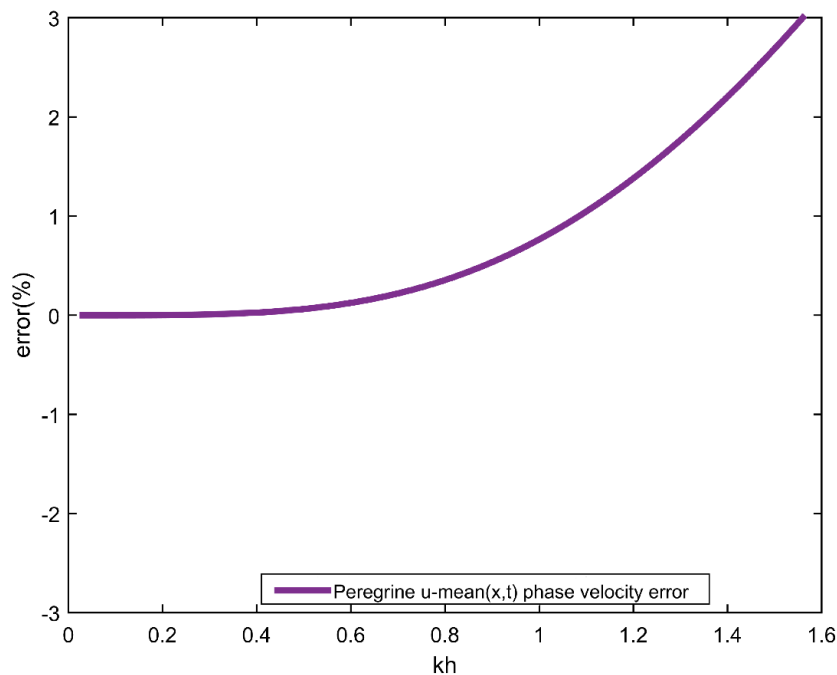
Στη συνέχεια, για να δούμε την τάξη των σφαλμάτων του μοντέλου ως προς τη γραμμική θεωρία, ποσοτικοποιούμε το σφάλμα βάση της σχέσης:

$error(\%) = \frac{c - c_{linear}}{c_{linear}}$ , όπου  $c$  η τετραγωνική ρίζα της (2.4.14) και  $c_{linear}$  η αντίστοιχη της γραμμικής θεωρίας Εξ.(2.4.2)

Στο Σχ.2.3 βλέπουμε ότι για ποσοστό σφάλματος 3%, όπου θεωρούμε αυθαίρετα ως ανοχή στο σφάλμα, το  $kh \approx 1.55 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{h} \approx 4.05$ . Τέλος, το σφάλμα αυξάνεται όσο το  $kh$  μεγαλώνει.



Σχήμα 2.2: Σύγκριση σχέσεων διασποράς των μοντέλων τύπου Boussinesq με τη γραμμική σχέση διασποράς. Με μπλέ γραμμή εικονίζεται η σχέση διασποράς από τη γραμμική θεωρία κυματισμών.



Σχήμα 2.3: Ποσοστιαίο σφάλμα της φασικής ταχύτητας από τη σχέση διασποράς των εξίσ. Boussinesq ως προς τη γραμμική θεωρία κυματισμών.

## 2.5 Εξισώσεις Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς

Για πολλά χρόνια οι αρχικές εξισώσεις Boussinesq χρησιμοποιήθηκαν επιτυχώς για μοντελοποίηση κυματικών φαινομένων στη ζώνη κοντινά στην ακτή, όπως ρήχωση, διάθλαση, περίθλαση, αρμονική γένεση κ.λπ. Ωστόσο, τα μη ικανοποιητικά χαρακτηριστικά διασπορά τους (ακόμα και σε γραμμική διασπορά) σε βάθη μεγαλύτερα από περίπου το 20 – 30 % του μήκους κύματος (Beji & Battjes, 1994) υπήρξαν σημαντικό εμπόδιο ιδίως στην αντιμετώπιση κυμάτων που πλησιάζουν υπεράκτια. Αρκετές προσπάθειες έχουν γίνει για τη βελτίωση των χαρακτηριστικών διασποράς των εξισώσεων τύπου Boussinesq έτσι ώστε οι εξαιρετικές τους ιδιότητες στη ζώνη κοντινά στην ακτή να μπορούν να επεκταθούν σε βαθύτερα νερά. Ο Witting (1984) εξέφρασε την μέση οριζόντια ταχύτητα καθ' ύψος και την ταχύτητα στην ελεύθερη επιφάνεια σε όρους ψευδό - ταχύτητας τις οποίες ανέπτυξε σε σειρά Taylor με συντελεστές διαφορετικούς από τους συνήθεις συντελεστές Taylor. Αυτοί οι συντελεστές με τη σειρά τους, προσδιορίστηκαν σε αντιστοιχία με την Επέκταση Pade της φασικής ταχύτητας που προβλέπει η γραμμική θεωρία. Εμπνευσμένοι από τη διατύπωση του Witting, οι Madsen et al. (1991a) έδωσαν μια διατύπωση για τον οριζόντιο πυθμένα όπου πρόσθεσαν όρους παραγώγων τρίτης τάξης με ρυθμιζόμενο συντελεστή αναλογικότητας (calibration factor)  $b$ . Αυτό αποδείχθηκε ότι δίνει μια πολύ αποτελεσματική βελτίωση των χαρακτηριστικών γραμμικής διασποράς. Οι Battjes και Beji (1991), Madsen και Sorensen (1992) εφάρμοσαν την τεχνική των



Madsen et al. (1991a) στις εξισώσεις τύπου Boussinesq όπως αυτές διατυπώθηκαν από τον Peregrine (1967) για ήπιες κλίσεις πυθμένα.

Στη συγκεκριμένη εργασία θα παρουσιάσουμε τις εξισώσεις για μεταβαλλόμενη βαθυμετρία όπως τις εξήγαγαν οι Beji και Nadaoka (1966) οι οποίες αποτελούν μια βελτιωμένη έκδοση των Madsen και Sorensen (1992) ως προς τα χαρακτηριστικά της γραμμικής ρήχωσης.

Θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων τύπου Boussinesq  $\{(2.3.43a), (2.3.43b)\}$  το οποίο είναι εκφρασμένο ως προς τη μέση οριζόντια ταχύτητα καθ' ύψος,  $\hat{u}$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta) \hat{u}] = 0, \quad (2.5.1)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ h \frac{\partial^2 (h \hat{u})}{\partial x^2} - \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right]. \quad (2.5.2)$$

Στο δεξί μέλος της εξίσωσης (2.5.2), προσθαφαιρούμε τους όρους της με ένα συντελεστή καλιμπραρίσματος  $b$ , η τιμή του οποίου διερευνάται στη συνέχεια και έτσι προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = (b+1) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ h \frac{\partial^2 (h \hat{u})}{\partial x^2} - \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right] + \\ - b \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ h \frac{\partial^2 (h \hat{u})}{\partial x^2} - \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Έπειτα ξαναγράφουμε την (2.5.3) σε μορφή τέτοια, ώστε να αντικαταστήσουμε τους αντίστοιχους όρους των γραμμικοποιημένων εξισώσεων ρηχού νερού (2.3.34a) και (2.3.34b):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = (b+1) \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial (h \hat{u})}{\partial t} \right) - b \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial (h \hat{u})}{\partial t} \right) + \\ - (b+1) \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + b \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις ρηχού νερού (2.3.34a) και (2.3.34b), εκφρασμένες ως προς τη μέση οριζόντια ταχύτητα καθ' ύψος  $\hat{u}$ , μπορούν να γραφούν ως:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (2.5.5a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (h \hat{u})}{\partial x} = 0. \quad (2.5.5b)$$

Αν αντικαταστήσουμε την (2.5.5b) στο δεξί μέλος της (2.5.4) στους όρους που πολλαπλασιάζονται με  $b$  για λόγους που φαίνονται παρακάτω προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = (b+1) \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial(h\hat{u})}{\partial t} \right) + bg \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \\ - (b+1) \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - bg \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} . \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (2.5.5a) και (2.5.6) το οποίο ξαναγράφουμε παρακάτω για πλήρη εποπτεία, αποτελεί το σετ των εξισώσεων που εξήγαγαν οι Beji και Nadaoka (1996) με βελτιωμένες σχέσεις διασποράς ως προς τη γραμμική ρήχωση, σε σχέση με εκείνες των Madsen και Sorensen (1992).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h+\eta)\hat{u}] = 0 , \quad (2.5.7BN)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = (b+1) \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial(h\hat{u})}{\partial t} \right) + bg \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - (b+1) \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \\ - bg \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} . \end{aligned} \quad (2.5.8BN)$$

Στη σχέση (2.5.8BN) αν θέσουμε όπου  $b=0$ , επιστρέφουμε στο αρχικό σετ εξισώσεων  $\{(2.3.43a), (2.3.43b)\}$ , ενώ για  $b=-1$  αντικαθίσταται στο αρχικό μας σύστημα η σχέση (2.5.5a).

Υποθέτοντας ήπια κλίση πυθμένα, τέτοια ώστε  $\partial^2 h / \partial x^2 = 0$ , τότε η (2.5.8BN) τροποποιείται ως:

$$\hat{u}_t + \hat{u} \hat{u}_x + g \eta_x = (b+1) \frac{h^2}{3} \hat{u}_{xxt} + (b+1) h h_x \hat{u}_{xt} + b g h h_x \eta_{xx} + b g \frac{h^2}{3} \eta_{xxx} . \quad (2.5.9BN)$$

Παραθέτουμε στη συνέχεια την αντίστοιχη εξίσωση συνέχειας (η οποία είναι κοινή) και την εξίσωση ορμής που εξήχθη από τους Madsen και Sorensen (1992) και χρησιμοποιήθηκε από τους Beji και Battjes (1994) υποθέτοντας ήπια κλίση πυθμένα, τέτοια ώστε  $\partial^2 h / \partial x^2 = 0$ :

$$\eta_t + (h+\eta)\hat{u}_x = 0 , \quad (2.5.10MS)$$

$$\hat{u}_t + \hat{u} \hat{u}_x + g \eta_x = \left( b + \frac{1}{3} \right) h^2 \hat{u}_{xxt} + h h_x \hat{u}_{xt} + b g h^2 \eta_{xxx} . \quad (2.5.11MS)$$

Παρατηρώντας τις δύο εξισώσεις (2.5.9BN), (2.5.11MS) βλέπουμε ότι η διαφορά τους αφορά τους επιπλέον όρους ρήχωσης που εισήχθησαν από τους Beji και Nadaoka (1996) και τον σταθερό όρο  $1/3$  ο οποίος μεταβάλλει την επιλογή της του διορθωτικού όρου  $b$

### Σχέση διασποράς των βελτιωμένων εξισώσεων Boussinesq

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το εδάφιο 2.4, θεωρούμε σταθερό βάθος πυθμένα  $h$ , και επιπλέον αμελούμε τη συμβολή των μη γραμμικών όρων στο σετ

εξισώσεων τύπου Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς  $\{(2.5.7BN), (2.5.9BN)\}$ . Με αυτό τον τρόπο προκύπτει:

$$\eta_t + h\hat{u}_x = 0, \quad (2.5.12)$$

$$\hat{u}_t + g\eta_x = (b+1)\frac{h^2}{3}\hat{u}_{xxt} + bg\frac{h^2}{3}\eta_{xxx}. \quad (2.5.13)$$

Παραγωγίζοντας την (2.5.12) ως προς  $x$  και την (2.5.13) ως προς  $t$  έχουμε:

$$\eta_{xt} + h\hat{u}_{xx} = 0, \quad (2.5.14)$$

$$\hat{u}_{tt} + g\eta_{xt} = (b+1)\frac{h^2}{3}\hat{u}_{xxtt} + bg\frac{h^2}{3}\eta_{xxx}. \quad (2.5.15)$$

Αντικαθιστώντας την (2.5.14) στην (2.5.15) προκύπτει:

$$\tilde{u}_{tt} - gh\tilde{u}_{xx} = (b+1)\frac{h^2}{3}\hat{u}_{xxtt} - bg\frac{h^3}{3}\hat{u}_{xxx} = 0. \quad (2.5.16)$$

Υποθέτοντας λύση για την οριζόντια ταχύτητα όπως αυτή που δίνεται στη σχέση (2.4.1) και έπειτα από πράξεις καταλήγουμε:

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh \frac{1 + b \frac{(kh)^2}{3}}{1 + (1+b) \frac{(kh)^2}{3}}, \quad (2.5.17)$$

η οποία αποτελεί τη βελτιωμένη σχέση διασποράς εκφρασμένη ως προς τη φασική ταχύτητα μετάδοσης για το σετ εξισώσεων  $\{(2.5.7BN), (2.5.9BN)\}$ , η οποία σε αδιάστατη μορφή γράφεται ως:

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{1 + b \frac{(kh)^2}{3}}{1 + (1+b) \frac{(kh)^2}{3}}. \quad (2.5.18)$$

Προχωράμε τώρα στον προσδιορισμό της παραμέτρου  $b$ . Αυτό επιτυγχάνεται απαιτώντας η φασική ταχύτητα στο τετράγωνο (2.5.17) να ταυτίζεται με τη φασική ταχύτητα μετάδοσης στο τετράγωνο που προβλέπει η γραμμική θεωρία Εξ.(2.4.2).

Η σχέση (2.5.18) αποτελεί πολυωνυμικό πηλίκο το οποίο μπορεί να γραφτεί ως ανάπτυγμα Pade  $[1/1]$  ως εξής:

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{1 + p(kh)^2}{1 + q(kh)^2}. \quad (2.5.19)$$

Η σχέση (2.4.2) μπορεί να αναπτυχθεί ως πολυώνυμο Taylor ως εξής:

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{\tanh kh}{kh} = 1 - \frac{1}{3}(kh)^2 + \frac{2}{15}(kh)^4 + O(x^6) . \quad (2.5.20)$$

Η σύγκριση μεταξύ των εξισώσεων (2.5.19) και (2.5.20) δείχνει ότι οι τιμές των παραμέτρων  $p, q$  του αναπτύγματος Pade  $[1/1]$  δίνονται από:

$$p = \frac{1}{15} \quad \text{και} \quad q = \frac{2}{5}$$

Έτσι, η (2.5.19) γράφεται ως:

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{1 + \frac{1}{15}(kh)^2}{1 + \frac{2}{15}(kh)^2} . \quad (2.5.21)$$

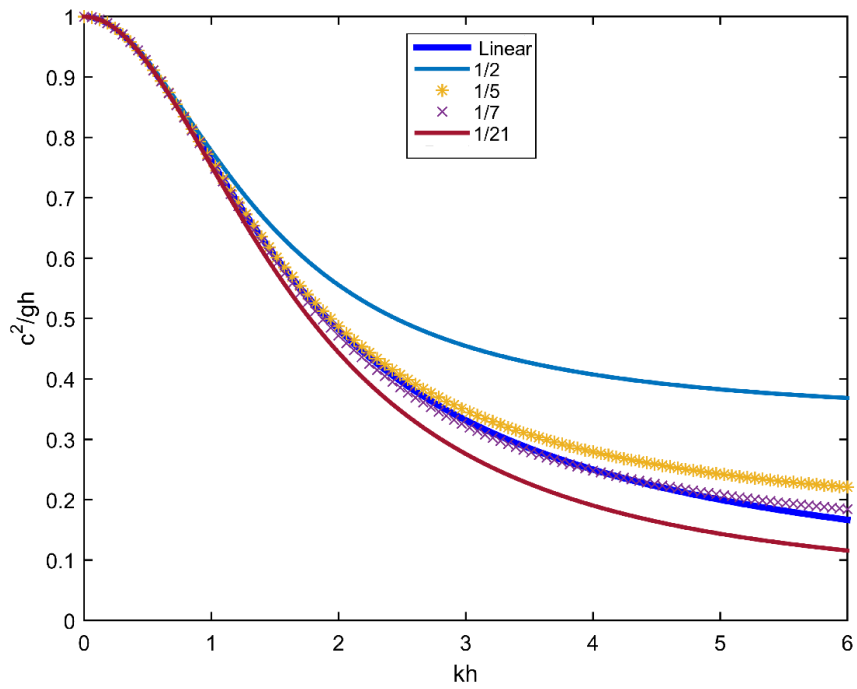
Αν συγκρίνουμε τις (2.5.18) και (2.5.21) προκύπτει ότι η βέλτιστη τιμή για το  $b = \frac{1}{5}$  .

Παρακάτω στο Σχ.2.4, γίνεται σύγκριση μεταξύ της βελτιωμένης σχέσης διασποράς των εξισώσεων τύπου Boussinesq των Beji και Nadaoka (1996) για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $b$  με την εξίσωση διασποράς της γραμμικής θεωρίας, όπου φαίνεται πως η τιμή  $b = \frac{1}{5}$  αποτελεί όντως μια καλή επιλογή παραμέτρου αλλά όχι τη βέλτιστη.

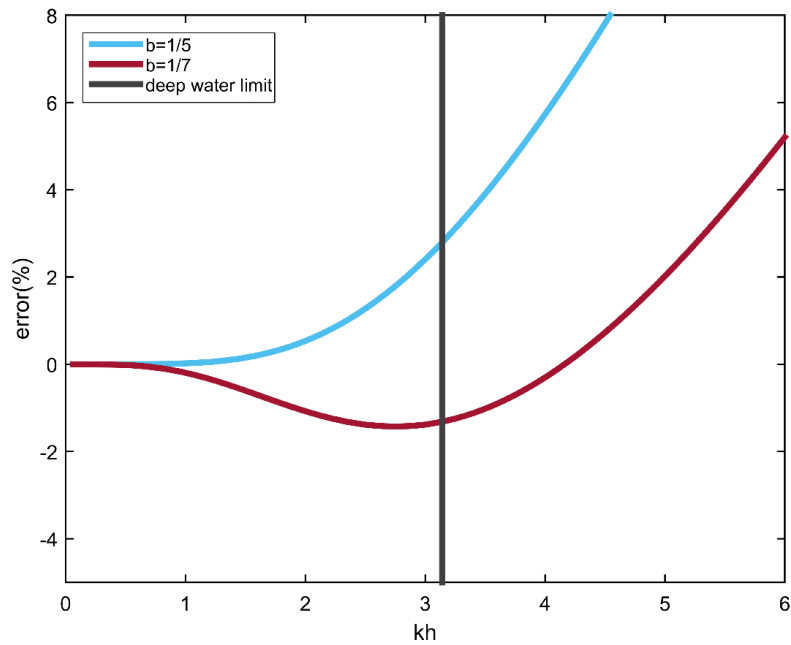
Στο Σχ.2.5 όπου απεικονίζεται το ποσοστιαίο σφάλμα των διαφορών των δυο προαναφερθέντων εξισώσεων διασποράς, βλέπουμε ότι τελικά η τιμή  $b = \frac{1}{5}$  δίνει περίπου τα ίδια σφάλματα στην περιοχή του ρηχού και ενδιάμεσου νερού με την αντίστοιχη εξίσωση διασποράς παραμέτρου  $b = \frac{1}{7}$  να δίνει αρκετά μικρότερα σφάλματα για τιμές του  $kh$  κοντά στο όριο του βαθιού νερού  $kh = \pi$  και σε όλο το εύρος του βαθιού νερού  $kh > \pi$  . Συγκεκριμένα, και θεωρώντας πάλι ως ανέχεια σε σφάλμα 3%, βλέπουμε ότι στην εξίσωση διασποράς με  $b = \frac{1}{5}$  αυτό συμβαίνει για

$$kh \approx 3.21 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{h} \approx 1.95, \quad \text{ενώ} \quad \text{αντίστοιχα} \quad \text{για} \quad b = \frac{1}{7} \quad \text{αυτό} \quad \text{συμβαίνει}$$

$$\text{για} \quad kh \approx 5.33 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{h} \approx 1.17$$



Σχήμα 2.4: Σύγκριση βελτιωμένων σχέσεων διασποράς των εξισώσεων τύπου Boussinesq των Beji - Nadaoka (1996) για διάφορες τιμές του  $b$  με τη σχέση διασποράς της γραμμικής θεωρίας



Σχήμα 2.5: Ποσοστιαίο σφάλμα της εξίσωσης διασποράς των εξισώσεων τύπου Boussinesq των Beji - Nadaoka για  $b=1/5$  και  $b=1/7$  σε σύγκριση με τη σχέση διασποράς της γραμμικής θεωρίας

### Σχέση διασποράς των εξισώσεων των Madsen και Sorensen (1992)

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το εδάφιο 2.4, θεωρούμε σταθερό βάθος πυθμένα  $h$ , και επιπλέον αμελούμε τη συμβολή των μη γραμμικών όρων στο σετ εξισώσεων τύπου Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς  $\{(2.5.10MS), (2.5.11MS)\}$ . Με αυτό τον τρόπο προκύπτει:

$$\eta_t + h\hat{u}_x = 0, \quad (2.5.22)$$

$$\hat{u}_t + g\eta_x = \left(b + \frac{1}{3}\right)h^2\hat{u}_{xxt} + bgh^2\eta_{xxx}. \quad (2.5.23)$$

Παραγωγίζοντας την (2.5.22) ως προς  $x$  και την (2.5.23) ως προς  $t$  έχουμε:

$$\eta_{xt} + h\hat{u}_{xx} = 0, \quad (2.5.24)$$

$$\hat{u}_{tt} + g\eta_{xt} = \left(b + \frac{1}{3}\right)h^2\hat{u}_{xxtt} + bgh^2\eta_{xxx}. \quad (2.5.25)$$

Αντικαθιστώντας την (2.5.24) στην (2.5.25) προκύπτει:

$$\tilde{u}_{tt} - gh\tilde{u}_{xx} = \left(b + \frac{1}{3}\right)\frac{h^2}{3}\hat{u}_{xxtt} - bgh^3\hat{u}_{xxx} = 0. \quad (2.5.26)$$

Υποθέτοντας λύση για την οριζόντια ταχύτητα όπως αυτή που δίνεται στη σχέση (2.4.1) και έπειτα από πράξεις καταλήγουμε:

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh \frac{1 + b(kh)^2}{1 + \left(\frac{1}{3} + b\right)(kh)^2}, \quad (2.5.27)$$

η οποία αποτελεί τη βελτιωμένη σχέση διασποράς εκφρασμένη ως προς τη φασική ταχύτητα μετάδοσης για το σετ εξισώσεων  $\{(2.5.10MS), (2.5.11MS)\}$ , η οποία σε αδιάστατη μορφή γράφεται ως:

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{1 + b(kh)^2}{1 + \left(\frac{1}{3} + b\right)(kh)^2}. \quad (2.5.28)$$

Προχωράμε τώρα στον προσδιορισμό της παραμέτρου  $b$ . Αυτό επιτυγχάνεται απαιτώντας η φασική ταχύτητα στο τετράγωνο (2.5.27) να ταυτίζεται με τη φασική ταχύτητα μετάδοσης στο τετράγωνο που προβλέπει η γραμμική θεωρία.

Η σχέση (2.5.28) αποτελεί πολυωνυμικό πηλίκο το οποίο μπορεί να γραφτεί ως ανάπτυγμα Pade  $[1/1]$  ως εξής:

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{1 + p(kh)^2}{1 + q(kh)^2}. \quad (2.5.29)$$

Η σχέση (2.4.2) μπορεί να αναπτυχθεί ως πολυώνυμο Taylor ως εξής:

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{\tanh kh}{kh} = 1 - \frac{1}{3}(kh)^2 + \frac{2}{15}(kh)^4 + O(x^6) . \quad (2.5.30)$$

Η σύγκριση μεταξύ των εξισώσεων (2.5.29) και (2.5.30) δείχνει ότι οι τιμές των παραμέτρων  $p, q$  του αναπτύγματος Pade  $[1/1]$  δίνονται από:

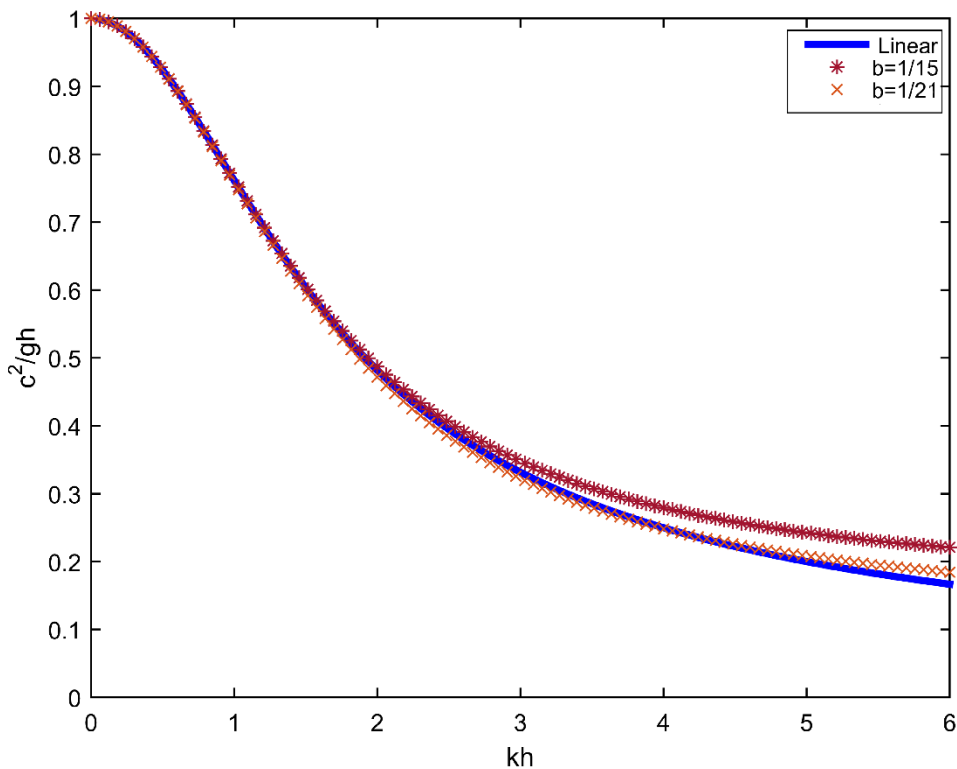
$$p = \frac{1}{15} \quad \text{και} \quad q = \frac{6}{15}$$

Έτσι, η (2.5.29) γράφεται ως:

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{1 + \frac{1}{15}(kh)^2}{1 + \frac{6}{15}(kh)^2} . \quad (2.5.31)$$

Αν συγκρίνουμε τις (2.5.29) και (2.5.31) προκύπτει ότι η βέλτιστη τιμή για το  $b = \frac{1}{15}$

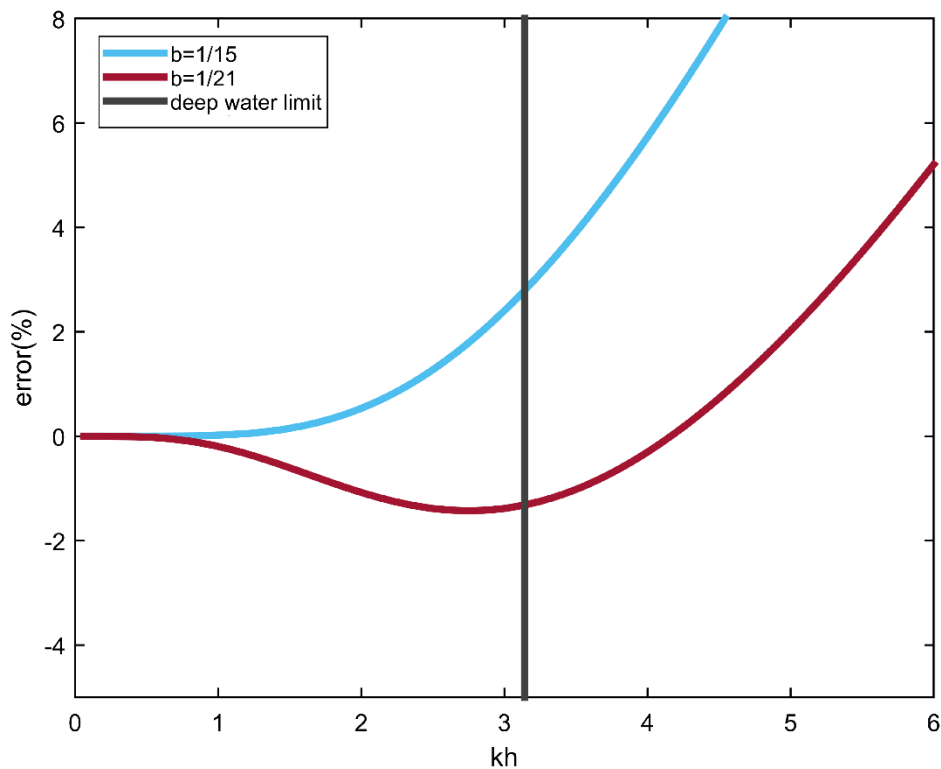
Παρακάτω στο Σχ.2.6 γίνεται σύγκριση μεταξύ της βελτιωμένης σχέσης διασποράς των εξισώσεων τύπου Boussinesq των Madsen και Sorensen για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $b$  με την εξίσωση διασποράς της γραμμικής θεωρίας, όπου φαίνεται πως η τιμή  $b = \frac{1}{15}$  αποτελεί όντως μια καλή επιλογή παραμέτρου αλλά όχι τη βέλτιστη.



Σχήμα 2.6: Σύγκριση βελτιωμένων σχέσεων διασποράς των εξισώσεων τύπου Boussinesq των Madsen – Sorensen (1992) για διάφορες τιμές του b με τη σχέση διασποράς της γραμμικής θεωρίας

Στο Σχ.2.7 όπου απεικονίζεται το ποσοστιαίο σφάλμα των διαφορών των δυο προαναφερθέντων εξισώσεων διασποράς υπολογισμένο βάσει της σχέσης που αναφέρθηκε στο εδάφιο 2.4, βλέπουμε ότι τελικά η τιμή  $b = \frac{1}{15}$  δίνει περίπου τα ίδια σφάλματα στην περιοχή του ρηχού και ενδιάμεσου νερού με την αντίστοιχη εξίσωση διασποράς παραμέτρου  $b = \frac{1}{21}$  να δίνει αρκετά μικρότερα σφάλματα για τιμές του  $kh$  κοντά στο όριο του βαθιού νερού  $kh = \pi$  και σε όλο το εύρος του βαθιού νερού  $kh > \pi$ . Συγκεκριμένα, και θεωρώντας πάλι ως ανέχεια σε σφάλμα 3%, βλέπουμε ότι στην εξίσωση διασποράς με  $b = \frac{1}{15}$  αυτό συμβαίνει για  $kh \approx 3.21 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{h} \approx 1.95$ , ενώ αντίστοιχα για  $b = \frac{1}{21}$  αυτό συμβαίνει για  $kh \approx 5.33 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{h} \approx 1.17$





Σχήμα 2.7: Ποσοστιαίο σφάλμα της εξίσωσης διασποράς των εξισώσεων τύπου Boussinesq των Madsen – Sorensen (1992) για  $b=1/15$  και  $b=1/21$  σε σύγκριση με τη σχέση διασποράς της γραμμικής θεωρίας

Η τιμή του παράγοντα  $b$  δεν είναι ωστόσο αυστηρά καθορισμένη. Είναι ανοιχτή να πάρει οποιαδήποτε τιμή που τείνει να εξαλείψει την απόκλιση της φασικής ταχύτητας μετάδοσης σε σχέση με αυτή της γραμμικής θεωρίας. Οι Madsen et.al (1991a)

προτείνουν την τιμή  $b = \frac{1}{15}$  σαν αυτή που οδηγεί σε τιμές απόκλισης της φασικής

ταχύτητας από τη γραμμική μικρότερες του 3% για λόγους  $\frac{\lambda}{h} \approx 1.33$ . Οι Beji –

Battjes (1994) στο πείραμα που διεξήγαγαν και θα δούμε αναλυτικά αποτελέσματα των πειραμάτων τους στο κεφάλαιο 4, προτείνουν ως βέλτιστη τιμή που να

ανταποκρίνεται στα πειραματικά αποτελέσματα την τιμή  $b = \frac{1}{21}$ . Σε μια αργότερη

τους δημοσίευση, οι Madsen et.al (1991b) επίσης πρότεινα εν τέλει την τιμή  $b = \frac{1}{21}$

αντί της τιμής  $b = \frac{1}{15}$ .

### 3. Αριθμητικό σχήμα επίλυσης των εξισ. Boussinesq σε γενική βαθυμετρία

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ένα παραμετρικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών που αφορά την αριθμητική επίλυση των 1D εξισώσεων τύπου Boussinesq με βελτιωμένο όρο διασποράς, όπως παρουσιάστηκε από τους Beji & Battjes, 1994. Κύριο χαρακτηριστικό αυτών των εξισώσεων είναι ότι θεωρούν ήπια κλίση βαθυμετρίας πυθμένα, με  $\partial^2 h / \partial x^2 = 0$ , όπου  $h = h(x)$  η βαθυμετρία του πυθμένα.

#### 3.1 Διατύπωση εξισώσεων και αρχικών τιμών που ορίζουν το πρόβλημα.

Οι εξισώσεις κίνησης που περιγράφουν κυματισμούς σχετικά μεγάλου μήκους κύματος και μικρού ύψους για μονοδιάστατη διάδοση κυματισμών σε ήπιας κλίσης βαθυμετρία πυθμένα όπως δόθηκαν από τους Beji & Battjes (1994) είναι οι εξής:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta) u] = 0, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \tilde{b} h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + g b h^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}, \quad (3.1.2)$$

όπου θεωρούμε ότι  $x \in \Omega$  με  $\Omega = [L_0 < x < L_1]$  και  $t > 0$ . Επίσης  $\tilde{b} = \frac{1}{3} + b$ , όπου  $b$  ένας συντελεστής καλιμπραρίσματος. Κατάλληλες τιμές επιλογής για το  $b$  όπως είδαμε αποτελούν οι τιμές  $b = \frac{1}{15}$  και  $b = \frac{1}{21}$ , με βέλτιστη τιμή ωστόσο, η οποία να ανταποκρίνεται στα πειραματικά που εξήχθησαν από τους Beji & Battjes (1994) να θεωρείται το  $b = \frac{1}{21}$ .

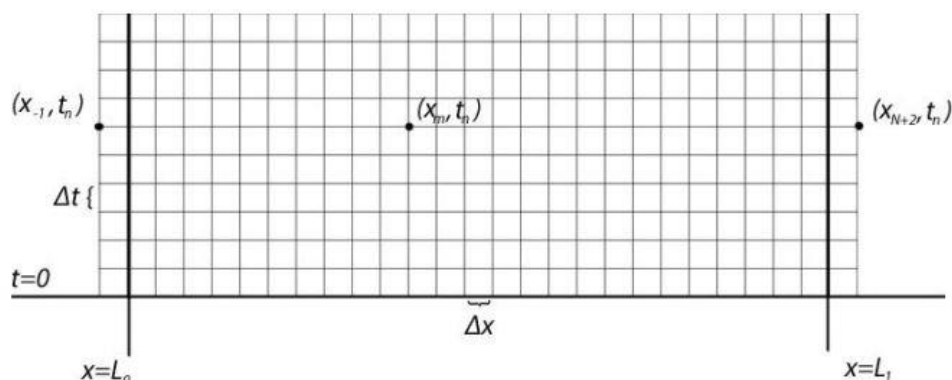
Ως αρχικές τιμές για το πρόβλημα θεωρούμε το ρευστό σε ηρεμία τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , δηλαδή:

$$\eta(x, 0) = u(x, 0) = 0 \quad (3.1.3)$$

#### Περιγραφή του πλέγματος και του αριθμητικού σχήματος.

Για την εξαγωγή αριθμητικών λύσεων, το χωροχρονικό χωρίο  $R = \Omega \times [t > 0]$  μαζί με το σύνορο του  $\partial R$  που αποτελείται από τις ευθείες  $x = L_0$ ,  $x = L_1$  και  $t = 0$  θα καλυφθεί με ορθογωνικό πλέγμα  $G$ , του οποίου τα σημεία έχουν συντεταγμένες  $(x, t) = (x_m, t_n) = (L_0 + m \Delta x, n \Delta t)$  με  $m = 0, 1, \dots, N+1$  και  $n = 0, 1, \dots$ , όπου  $\Delta x = (L_1 - L_0) / (N+1)$  αναπαριστά την ομοιόμορφη διαμέριση του χωρικού άξονα  $x$  σε  $N+1$  διαστήματα μήκους  $\Delta x$ , ενώ ως  $\Delta t$  ορίζεται η αντίστοιχη διαμέριση του χρονικού άξονα  $t$ . Στο Σχήμα 3.1 φαίνεται το πλέγμα  $G$  με τα σημεία του  $(x_m, t_n)$ , το χωρίο  $R$  μαζί με το σύνορο του και τα σημεία εκτός του πλέγματος  $(x_{-1}, t_n), (x_{N+2}, t_n)$

όπου θα διαπιστώσουμε παρακάτω πως απαιτούνται για τον υπολογισμό των εξισώσεων διαφορών.



Σχήμα 3.1: Το χωρίο  $R$  με το σύνορο του, το πλέγμα  $G$  και τα σημεία που ανήκουν σε αυτό και κάποια σημεία εκτός αυτού.

Οι αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων (3.1.1), (3.1.2),  $\eta, u$  θα προσεγγιστούν στα σημεία  $\eta(x_m, t_n)$  και  $u(x_m, t_n)$  του πλέγματος  $G$  τα οποία θα συμβολίζουμε με  $\eta_m^n$  και  $u_m^n$  αντίστοιχα. Σκοπός μας είναι η κατασκευή διανυσμάτων – λύσεων του  $\mathbb{R}^{n+1}$  έτσι ώστε για κάθε χρονικό βήμα  $n=0,1,\dots$ , να προσεγγίζουμε τη λύση μέσω του αριθμητικού σχήματος θα περιγραφεί παρακάτω. Τα διανύσματα – λύσεις δίνονται από:

$$\eta^n = [\eta_1^n, \eta_2^n, \dots, \eta_{N+1}^n]^T, \quad (3.1.4)$$

$$u^n = [u_1^n, u_2^n, \dots, u_{N+1}^n]^T. \quad (3.1.5)$$

Στη συνέχεια προσεγγίζονται οι μερικοί παράγωγοι που εμφανίζονται στις εξισώσεις (3.1.1) και (3.1.2) από τις αντίστοιχες διαφορές τους. Οι προσεγγίσεις αυτές προκύπτουν από το θεώρημα Taylor ως εξής:

$$u(x, t + \Delta t) \approx u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t^2) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} [u(x, t + \Delta t) - u(x, t)] = \frac{1}{\Delta t} [u_m^{n+1} - u_m^n]. \quad (3.1.6)$$

Για τη χωρική μερική παράγωγο εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor στα σημεία  $x + \Delta x$  και  $x - \Delta x$  έχουμε:

$$u(x + \Delta x, t) \approx u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^3), \quad (3.1.7a)$$

$$u(x - \Delta x, t) \approx u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^3) . \quad (3.1.7b)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3.1.7a), (3.1.7b) προκύπτει η προσέγγιση για  $m = 2, \dots, N$  μέσω κεντρικής διαφοράς:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{2\Delta x} [u(x + \Delta t, t) - u(x - \Delta t, t)] = \frac{1}{2\Delta x} [u_{m+1}^n - u_{m-1}^n] , \quad (3.1.8a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \approx \frac{1}{2\Delta x} [\eta(x + \Delta t, t) - \eta(x - \Delta t, t)] = \frac{1}{2\Delta x} [\eta_{m+1}^n - \eta_{m-1}^n] . \quad (3.1.8b)$$

Για  $m = 1$ , προσεγγίζεται η χωρική παράγωγος μέσω της προς τα εμπρός διαφοράς από τη σχέση (3.1.7.a) ως εξής:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} [u(x + \Delta t, t) - u(x, t)] = \frac{1}{\Delta x} [u_{m+1}^n - u_m^n] , \quad (3.1.9a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} [\eta(x + \Delta t, t) - \eta(x, t)] = \frac{1}{\Delta x} [\eta_{m+1}^n - \eta_m^n] . \quad (3.1.9b)$$

Τέλος για  $m = N + 1$ , προσεγγίζεται η χωρική παράγωγος μέσω της προς τα πίσω διαφοράς από τη σχέση (3.1.7.b) ως εξής:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} [u(x, t) - u(x - \Delta t, t)] = \frac{1}{\Delta x} [u_m^n - u_{m-1}^n] , \quad (3.1.10a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} [\eta(x, t) - \eta(x - \Delta t, t)] = \frac{1}{\Delta x} [\eta_m^n - \eta_{m-1}^n] . \quad (3.1.10b)$$

Για να υπολογίσουμε την δεύτερης τάξης χωρική παράγωγο, προσθέτουμε τις σχέσεις (3.1.7a) και (3.1.7b). Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{\Delta x^2} [u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)] \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} [u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n] . \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Η μεικτή παράγωγος υπολογίζεται από τις σχέσεις (3.1.6) και (3.1.8a) ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2\Delta x} [u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)] \right) \\ &= \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} u(x + \Delta x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x - \Delta x, t) \right\} \\ &\approx \frac{1}{2\Delta x \Delta t} (u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t + \Delta t) + u(x - \Delta x, t)) \\ &= \frac{1}{2\Delta x \Delta t} [u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^n + u_{m-1}^n] . \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Η χωρική παράγωγος τρίτης τάξης υπολογίζεται από τις σχέσεις (3.1.8a) και (3.1.11) ως:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \approx \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\Delta x^2} [u(x+\Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x-\Delta x, t)] \right) \\ &\approx \frac{1}{2\Delta x^3} [u(x+2\Delta x, t) - 2u(x+\Delta x, t) + 2u(x-\Delta x, t) - u(x-2\Delta x, t)] \\ &= \frac{1}{2\Delta x^3} [-u_{m-2}^n + 2u_{m-1}^n - 2u_{m+1}^n + u_{m+2}^n],\end{aligned}\quad (3.1.13)$$

Αντίστοιχα προκύπτει:

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \approx \frac{1}{2\Delta x^3} [-\eta_{m-2}^n + \eta_{m-1}^n - 2\eta_{m+1}^n + \eta_{m+2}^n]. \quad (3.1.14)$$

Οι σχέσεις (3.1.6) – (3.1.13) αποτελούν τις προσεγγίσεις των παραγώγων που εμφανίζονται στις εξισώσεις (3.1.1), (3.1.2) τόσο ως προς τη μέση οριζόντια ταχύτητα  $u$  όσο και ως προς την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας  $\eta$ . Τέλος η σχέση (3.1.13), (3.1.14) που προσεγγίζει την χωρική παράγωγο τρίτης τάξης εξηγεί γιατί έπρεπε να ληφθούν σημεία εκτός του χωρίου  $R$  όπως φαίνεται και στο Σχ.3.1.

### 3.2 Το αριθμητικό σχήμα

Το αριθμητικό σχήμα που θα χρησιμοποιήσουμε για  $m=1, 2, \dots, N$  αποτελείται από τρία βασικά βήματα τα οποία περιγράφονται στον κάτωθι αλγόριθμο:

Για  $n=0, 1, \dots$

1. Πρόβλεψη του διανύσματος  $\eta^{n+1}$  από τη διακριτοποιημένη (3.1.1) με την άμεση μέθοδο Euler
2. Υπολογισμός του διανύσματος  $u^{n+1}$  από τη διακριτοποιημένη (3.1.2) με τη μέθοδο  $\theta$
3. Διόρθωση του διανύσματος  $\eta^{n+1}$  από τη νέα διακριτοποίηση της (3.1.1) με τη μέθοδο  $\theta$

Τα βήματα 2 και 3 μπορούν να επαναληφθούν πάνω από μια φορά μια αύξηση της ακρίβειας του αριθμητικού σχήματος

Οι περιπτώσεις  $m=0$  και  $m=N+1$  αφορούν τις συνοριακές συνθήκες του αριθμητικού σχήματος

### Η μέθοδος $\theta$

Στη μέθοδο  $\theta$  υποθέτουμε ότι οι εξισώσεις (3.1.1) και (3.1.2) ικανοποιούνται στα σημεία  $(m\Delta x, (n+\theta)\Delta t)$  του κανάβου  $G$ , όπου  $\theta \in [0, 1]$ . Υπό αυτή την υπόθεση, όλες οι μερικές παράγωγοι αντικαθίστανται από τις προσεγγίσεις τους μέσω

πεπερασμένων διαφορών στα βήματα  $n$  και  $n+1$ . Έτσι, αυτή η μέθοδος μέσω της (3.1.8a) για τον όρο  $\partial u / \partial x$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^{n+\theta} &= \theta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^{n+1} + (1-\theta) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n \\ &= \frac{1}{2\Delta x} \left[ \theta(u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) + (1-\theta)(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) \right], \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

ενώ για τον όρο  $\partial^3 u / \partial x^3$  χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.1.12) έχουμε:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_m^{n+\theta} &= \theta \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_m^{n+1} + (1-\theta) \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_m^n = \frac{1}{2\Delta x^3} \left[ \theta(-\eta_{m-2}^{n+1} + 2\eta_{m-1}^{n+1} - 2\eta_{m+1}^{n+1} + \eta_{m+2}^{n+1}) \right. \\ &\quad \left. + (1-\theta)(-\eta_{m-2}^n + 2\eta_{m-1}^n - 2\eta_{m+1}^n + \eta_{m+2}^n) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Η παραπάνω μέθοδος είναι μια μέθοδος που μας δίνει τη δυνατότητα να εξάγουμε πολλαπλά αριθμητικά σχήματα ανάλογα με την επιλογή του  $\theta \in [0,1]$ . Για  $\theta = 1/2$  οδηγούμαστε στη μέθοδο Crank – Nicolson που χρησιμοποίησαν και οι Beji & Battjes 1994.

### Συνοριακές συνθήκες

Η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας  $\eta$  στο ευθύγραμμο τμήμα  $x = L_0$  που θεωρείται ως συνθήκη εισόδου δίνεται από τη σχέση:

$$\eta(L_0, t) = f(t), \quad t > 0, \quad (3.2.3a)$$

όπου  $f(t)$  μια κατάλληλη συνάρτηση η οποία σε αυτή την εργασία παράγει είτε τυχαίους γραμμικούς φασματικούς κυματισμούς με περίοδο κορυφής  $T_p$  και σημαντικό ύψος κύματος  $H_s$  σύμφωνα με το φάσμα JONSWAP, είτε απλούς αρμονικούς κυματισμούς. Με βάση το πλέγμα  $G$ , η (3.2.3a) παίρνει τη μορφή:

$$\eta_0^n = f(n\Delta t). \quad (3.2.3b)$$

Στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα  $x = L_0$  καθορίζεται και η μέση ως προς το βάθος οριζόντια ταχύτητα  $u_0$ , η οποία μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση συνέχειας (3.1.1) για ένα κυματισμό που προελαύνει ως:

$$u_0(L_0, t) = \frac{\tilde{c}_0 \eta(L_0, t)}{h_0 + \eta(L_0, t)}, \quad t > 0, \quad (3.2.4)$$

όπου για φασματικούς κυματισμούς  $\tilde{c}_0$  είναι η φασική ταχύτητα μετάδοσης της αρμονικής συνιστώσας του φασματικού κυματισμού που αντιστοιχεί στη συχνότητα κορυφής  $f_p$ , η οποία υπολογίζεται μέσω της σχέσης διασποράς των (3.1.1) και (3.1.2), ενώ  $h_0$  η βαθυμετρία στο  $x = L_0$ .

Βάση του πλέγματος G, η σχέση (3.2.4) γράφεται στη μορφή:

$$u_0^{n+1} = \frac{\tilde{c}_0 \eta_0^{n+1}}{h_0 + \eta_0^{n+1}}. \quad (3.2.5)$$

Στο ευθύγραμμο τμήμα  $x = L_1$  που θεωρείται ως συνθήκη εξόδου του κυματισμού, εφόσον οι εξισώσεις (3.1.1), (3.1.2) επιτρέπουν τη διάδοση κυματισμών και προς τις δύο κατευθύνσεις διάδοσης, για την αποφυγή φαινομένων ανάκλασης, θα πρέπει να απαιτήσουμε συνθήκης που το απαγορεύουν, οι οποίες είναι οι παρακάτω:

$$\frac{\partial \eta(L_1, t)}{\partial t} + \tilde{c}_{N+1} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L_1} = 0, \quad t > 0, \quad (3.2.6a)$$

$$\frac{\partial u(L_1, t)}{\partial t} + \tilde{c}_{N+1} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L_1} = 0, \quad t > 0, \quad (3.2.6b)$$

όπου  $\tilde{c}_{N+1}$  είναι η φασική ταχύτητα μετάδοσης της αρμονικής συνιστώσας του προσπίπτοντος φασματικού κυματισμού που αντιστοιχεί στη συχνότητα κορυφής  $f_p$ , ενώ  $h_N$  είναι η τοπική βαθυμετρία. Οι εξισώσεις (3.2.6a) και (3.2.6b) αποτελούν μονοκατευθυντικές εξισώσεις και έτσι αποκλείουν την ύπαρξη φαινομένου ανάκλασης του προσπίπτοντος κυματισμού στην έξοδο.

Οι εξισώσεις (3.2.6a), (3.2.6b), αφού διακριτοποιηθούν βάση των εξισώσεων διαφορών και κάνοντας χρήση της μεθόδου  $\theta$  τόσο για τις χωρικές, όσο και για τις χρονικές παραγώγους γράφονται στη μορφή:

$$\theta \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{N+1}^{n+1} + (1-\theta) \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_N^{n+1} = -\tilde{c}_{N+1} \left[ \theta \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{N+1}^{n+1} + (1-\theta) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{N+1}^n \right], \quad (3.2.7a)$$

$$\theta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{N+1}^{n+1} + (1-\theta) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_N^{n+1} = -\tilde{c}_{N+1} \left[ \theta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{N+1}^{n+1} + (1-\theta) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{N+1}^n \right], \quad (3.2.7b)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των διαφορών (3.1.6), (3.1.10a) και (3.1.10b) έχουμε:

$$\begin{aligned} & \theta(\eta_{N+1}^{n+1} - \eta_{N+1}^n) + (1-\theta)(\eta_N^{n+1} - \eta_N^n) \\ & = -r\tilde{c}_{N+1}[\theta(\eta_{N+1}^{n+1} - \eta_N^{n+1}) + (1-\theta)(\eta_{N+1}^n - \eta_N^n)], \end{aligned} \quad (3.2.8a)$$

$$\begin{aligned} & \theta(u_{N+1}^{n+1} - u_{N+1}^n) + (1-\theta)(u_N^{n+1} - u_N^n) \\ & = -r\tilde{c}_{N+1}[\theta(u_{N+1}^{n+1} - u_N^{n+1}) + (1-\theta)(u_{N+1}^n - u_N^n)], \end{aligned} \quad (3.2.8b)$$

όπου  $r = \Delta t / \Delta x$ . Ξαναγράφοντας τις εξισώσεις (3.2.8a) και (3.2.8b) στη μορφή με την οποία θα χρησιμοποιηθούν στο αριθμητικό σχήμα και με  $\theta \in (0, 1]$  λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} & \theta(1 + r\tilde{c}_{N+1})\eta_{N+1}^{n+1} + [1 - \theta(1 + r\tilde{c}_{N+1})]\eta_N^{n+1} \\ & = [\theta - r\tilde{c}_{N+1}(1-\theta)]\eta_{N+1}^n + (1-\theta)(1 + r\tilde{c}_{N+1})\eta_N^n, \end{aligned} \quad (3.2.9a)$$

$$\begin{aligned} & \theta(1+r\tilde{c}_{N+1})u_{N+1}^{n+1} + [1-\theta(1+r\tilde{c}_{N+1})]u_N^{n+1} \\ & = [\theta - r\tilde{c}_{N+1}(1-\theta)]u_{N+1}^n + (1-\theta)(1+r\tilde{c}_{N+1})u_N^n . \end{aligned} \quad (3.2.10b)$$

Στην περίπτωση όπου  $\theta = 0$ , από τις σχέσεις (3.2.6a) και (3.2.6b) προκύπτει:

$$\eta_{N+1}^{n+1} = \eta_{N+1}^n - r\tilde{c}_{N+1}(\eta_{N+1}^n - \eta_N^n) , \quad (3.2.11a)$$

$$u_{N+1}^{n+1} = u_{N+1}^n - r\tilde{c}_{N+1}(u_{N+1}^n - u_N^n) . \quad (3.2.11b)$$

## Τα σημεία εκτός του χωρίου R

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω η σχέση (3.1.13) που προσεγγίζει την χωρική παράγωγο τρίτης τάξης της ελεύθερης επιφάνειας  $\partial^3\eta/\partial x^3$  που εμφανίζεται στην εξίσωση της ορμής (3.1.2), εξηγεί γιατί πρέπει να ληφθούν σημεία εκτός του χωρίου R και συγκεκριμένα τα σημεία με συντεταγμένες  $x=L_0-\Delta x$  και  $x=L_1+\Delta x$  τα οποία επεκτείνοντας το πλέγμα G μπορούν να θεωρηθούν ως τα σημεία  $x_{-1}$  και  $x_{N+2}$ . Στα σημεία αυτά, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας υπολογίζεται προσεγγιστικά χρησιμοποιώντας γραμμική παλινδρόμηση. Έτσι έχουμε:

$$\eta(L_0-\Delta x, t) \approx 2\eta(L_0, t) - \eta(L_0+\Delta x, t), \quad t > 0 , \quad (3.2.12)$$

$$\eta(L_1+\Delta x, t) \approx 2\eta(L_1, t) - \eta(L_1-\Delta x, t), \quad t > 0 . \quad (3.2.13)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του πλέγματος G, οι σχέσεις (3.2.12) και (3.2.13) γράφονται στη μορφή:

$$\eta_{-1}^n = 2\eta_0^n - \eta_1^n , \quad (3.2.14)$$

$$\eta_{N+2}^n = 2\eta_{N+1}^n - \eta_N^n . \quad (3.2.15)$$

## Αναλυτική περιγραφή του αριθμητικού σχήματος

Περνάμε τώρα στην αναλυτική περιγραφή του αριθμητικού σχήματος, όπως αυτή έχει σκιαγραφεί στην αρχή του κεφαλαίου.

Για να διαχειριστούμε καλύτερα τις εκφράσεις που θα προκύψουν παρακάτω θέτουμε:

$$r = \Delta t / \Delta x, \quad p = \frac{1}{\Delta x^2}, \quad q = \frac{\beta g \Delta t}{4\Delta x^3}$$

Στις εκφράσεις που θα ακολουθήσουν οι άγνωστοι προς υπολογισμό όροι θα βρίσκονται μετά από πράξεις στο αριστερό μέλος, ενώ οι όροι στο δεξί μέλος θα θεωρούνται γνωστοί.



**Βήμα 1:** Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις διαφορών που υπολογίστηκαν αναλυτικά πιο πάνω περνάμε στην άμεση διακριτοποίηση της εξίσωσης της συνέχειας (3.1.1) για τον υπολογισμό του άγνωστου διανύσματος  $\eta^{n+1}$ .

Για  $m=1,2,\dots,N$  έχουμε:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(h+\eta)u] = 0 \Rightarrow$$

$$\eta_m^{n+1} = \eta_m^n - \frac{r}{2}[(h_{m+1} + \eta_{m+1}^n)u_{m+1}^n - (h_{m-1} + \eta_{m-1}^n)u_{m-1}^n]. \quad (3.2.16)$$

Ενώ για  $m=N+1$  έχουμε βάση της συνοριακής συνθήκης (3.2.9a) και για  $\theta \in (0,1]$

$$\eta_{N+1}^{n+1} = \frac{1}{\theta(1+r\tilde{c}_{N+1})} \{-[1-\theta(1+r\tilde{c}_{N+1})]\eta_N^{n+1} + [\theta-r\tilde{c}_{N+1}(1-\theta)]\eta_{N+1}^n$$

$$+(1-\theta)(1+r\tilde{c}_{N+1})\eta_N^n\}. \quad (3.2.17)$$

Στην περίπτωση όπου  $\theta=0$  έχουμε από την σχέση (3.2.11a) έχουμε ότι

$$\eta_{N+1}^{n+1} = \eta_{N+1}^n - r\tilde{c}_{N+1}(\eta_{N+1}^n - \eta_N^n). \quad (3.2.18)$$

Ο όρος  $\eta_N^{n+1}$  στο δεξί μέλος της (3.2.17) θεωρείται γνωστός αφού προκύπτει από τη σχέση (3.2.17) για  $m=N$ .

**Βήμα 2:** Αφού υπολογίσαμε το  $\eta^{n+1}$  προχωράμε στον υπολογισμό του διανύσματος  $u^{n+1}$  ο οποίος θα προκύψει από τη διακριτοποίηση της εξίσωσης της ορμής (3.1.2) βάση της μεθόδου  $\theta$  και με βάση τις συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \tilde{b}h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^3} + h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + gbh^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\Delta t} [u_m^{n+1} - u_m^n] + g \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_m^{n+\theta} + u_m^{n+\theta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^{n+\theta} =$$

$$= \tilde{b}h_m^2 \frac{1}{\Delta x^2 \Delta t} [u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n - 2u_m^{n+1} + 2u_m^n + u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^n]$$

$$+ h_m \frac{h_{m+1} - h_{m-1}}{2\Delta x} \frac{1}{2\Delta x \Delta t} [u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^n + u_{m-1}^n]$$

$$+ gbh_m^2 \frac{1}{2\Delta x^3} [\theta(-\eta_{m-2}^{n+1} + 2\eta_{m-1}^{n+1} - 2\eta_{m+1}^{n+1} + \eta_{m+2}^{n+1})$$

$$+(1-\theta)(-\eta_{m-2}^n + 2\eta_{m-1}^n - 2\eta_{m+1}^n + \eta_{m+2}^n)]. \quad (3.2.19)$$

Ο μη γραμμικός όρος  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  έχει προσεγγιστεί από την έκφραση  $u_m^{n+\theta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^{n+\theta}$ . Η προσέγγιση του όρου  $u_m^{n+\theta}$  θα παρουσιαστεί μετά την παρουσίαση του σχήματος. Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.2.1) που παρουσιάστηκε στη μέθοδο  $\theta$ , και κάνοντας λίγο καλύτερη παραγοντοποίηση καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left[ u_m^{n+1} - u_m^n \right] + u_m^{n+\theta} \frac{1}{2\Delta x} \left[ \theta(u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) + (1-\theta)(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) \right] + \\
& + g \frac{1}{2\Delta x} \left[ \theta(\eta_{m+1}^{n+1} - \eta_{m-1}^{n+1}) + (1-\theta)(\eta_{m+1}^n - \eta_{m-1}^n) \right] \\
& = \tilde{\beta} h_m^2 \frac{1}{\Delta x^2 \Delta t} \left[ u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n - 2u_m^{n+1} + 2u_m^n + u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^n \right] \\
& + h_m \frac{h_{m+1} - h_{m-1}}{2\Delta x} \frac{1}{2\Delta x \Delta t} \left[ u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^n + u_{m-1}^n \right] \\
& + g \beta h_m^2 \frac{1}{2\Delta x^3} \theta (-\eta_{m-2}^{n+1} + 2\eta_{m-1}^{n+1} - 2\eta_{m+1}^{n+1} + \eta_{m+2}^{n+1}) \\
& + g \beta h_m^2 \frac{1}{2\Delta x^3} (1-\theta) (-\eta_{m-2}^n + 2\eta_{m-1}^n - 2\eta_{m+1}^n + \eta_{m+2}^n) .
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Για  $\theta=1/2$  οδηγούμαστε στη μέθοδο Crank – Nickolson (βλ. π.χ. Smith 1985) που χρησιμοποίησαν και οι Beji & Battjes (1994):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left[ u_m^{n+1} - u_m^n \right] + u_m^{n+\theta} \frac{1}{4\Delta x} \left[ (u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) + (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) \right] \\
& + g \frac{1}{4\Delta x} \left[ (\eta_{m+1}^{n+1} - \eta_{m-1}^{n+1}) + (\eta_{m+1}^n - \eta_{m-1}^n) \right] \\
& = \frac{2}{5} h_m^2 \frac{1}{\Delta x^2 \Delta t} \left[ u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^n + 2u_m^n - u_{m-1}^n \right] \\
& + h_m \frac{h_{m+1} - h_{m-1}}{2\Delta x} \frac{1}{2\Delta x \Delta t} \left[ u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^n + u_{m-1}^n \right] \\
& + g \frac{1}{15} h_m^2 \frac{1}{4\Delta x^3} (-\eta_{m-2}^{n+1} + 2\eta_{m-1}^{n+1} - 2\eta_{m+1}^{n+1} + \eta_{m+2}^{n+1}) \\
& + g \frac{1}{15} h_m^2 \frac{1}{4\Delta x^3} (-\eta_{m-2}^n + 2\eta_{m-1}^n - 2\eta_{m+1}^n + \eta_{m+2}^n) .
\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Στη γενική περίπτωση όπου  $\theta \in (0,1]$ , τότε:

Για  $m=1$  και με χρήση της σχέσης (3.2.14) για το σημείο εκτός του χωρίου  $R$  η (3.2.20) γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{r}{2} \theta u_1^{n+\theta} - \tilde{\beta} h_1^2 p - \frac{1}{4} p h_1 (h_2 - h_0) \right) u_2^{n+1} + (1 + 2\tilde{\beta} h_1^2 p) u_1^{n+1} \\
& = - \left( -\frac{r}{2} \theta u_1^{n+\theta} - \tilde{\beta} h_1^2 p + \frac{1}{4} p h_1 (h_2 - h_0) \right) u_0^{n+1} \\
& + \left( -\frac{r}{2} (1-\theta) u_1^{n+\theta} - \tilde{\beta} h_1^2 p - \frac{1}{4} p h_1 (h_2 - h_0) \right) u_2^n \\
& + (1 + 2\tilde{\beta} h_1^2 p) u_1^n \\
& + \left( \frac{r}{2} (1-\theta) u_1^{n+\theta} - \tilde{\beta} h_1^2 p + \frac{1}{4} p h_1 (h_2 - h_0) \right) u_0^n \\
& + 2q h_1^2 \left[ \theta (\eta_3^{n+1} + \eta_1^{n+1} - 2\eta_0^{n+1}) + (1-\theta) (\eta_3^n + \eta_1^n - 2\eta_0^n) \right] \\
& - (4q h_1^2 + \frac{r}{2} g) \left[ \theta (\eta_2^{n+1} - \eta_0^{n+1}) + (1-\theta) (\eta_2^n - \eta_0^n) \right], \tag{3.2.22}
\end{aligned}$$

όπου ο όρος  $u_0^{n+1}$  στο δεξί μέλος της (3.2.22) είναι η συνοριακή συνθήκη εισόδου, σχέση (3.2.5).

Για  $m = 2, 3, \dots, N-1$  η σχέση (3.2.20) γράφεται:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{r}{2} \theta u_m^{n+\theta} - \tilde{\beta} h_m^2 p - \frac{1}{4} p h_m (h_{m+1} - h_{m-1}) \right) u_{m+1}^{n+1} + (1 + 2\tilde{\beta} h_m^2 p) u_m^{n+1} \\
& + \left( -\frac{r}{2} \theta u_m^{n+\theta} - \tilde{\beta} h_m^2 p + \frac{1}{4} p h_m (h_{m+1} - h_{m-1}) \right) u_{m-1}^{n+1} = \\
& = \left( -\frac{r}{2} (1-\theta) u_m^{n+\theta} - \tilde{\beta} h_m^2 p - \frac{1}{4} p h_m (h_{m+1} - h_{m-1}) \right) u_{m+1}^n \\
& + (1 + 2\tilde{\beta} h_m^2 p) u_m^n \\
& + \left( \frac{r}{2} (1-\theta) u_m^{n+\theta} - \tilde{\beta} h_m^2 p + \frac{1}{4} p h_m (h_{m+1} - h_{m-1}) \right) u_{m-1}^n \\
& + 2q h_m^2 \left[ \theta (\eta_{m+2}^{n+1} - \eta_{m-2}^{n+1}) + (1-\theta) (\eta_{m+2}^n - \eta_{m-2}^n) \right] \\
& - (4q h_m^2 + \frac{r}{2} g) \left[ \theta (\eta_{m+1}^{n+1} - \eta_{m-1}^{n+1}) + (1-\theta) (\eta_{m+1}^n - \eta_{m-1}^n) \right]. \tag{3.2.23}
\end{aligned}$$

Για  $m = N$  και χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.2.15) για το σημείο εκτός του χωρίου  $\mathbb{R}$ , η (3.2.20) γράφεται:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{r}{2} \theta u_N^{n+\theta} - \tilde{\beta} h_N^2 p - \frac{1}{4} p h_N (h_{N+1} - h_{N-1}) \right) u_{N+1}^{n+1} + (1 + 2\tilde{\beta} h_N^2 p) u_N^{n+1} \\
& + \left( -\frac{r}{2} \theta u_N^{n+\theta} - \tilde{\beta} h_N^2 p + \frac{1}{4} p h_N (h_{N+1} - h_{N-1}) \right) u_{N-1}^{n+1} \\
& = \left( -\frac{r}{2} (1-\theta) u_N^{n+\theta} - \tilde{\beta} h_N^2 p - \frac{1}{4} p h_N (h_{N+1} - h_{N-1}) \right) u_{N+1}^n \\
& + (1 + 2\tilde{\beta} h_N^2 p) u_N^n \\
& + \left( \frac{r}{2} (1-\theta) u_N^{n+\theta} - \tilde{\beta} h_N^2 p + \frac{1}{4} p h_N (h_{N+1} - h_{N-1}) \right) u_{N-1}^n \\
& + 2q h_N^2 \left[ \theta (2\eta_{N+1}^{n+1} - \eta_N^{n+1} - \eta_{N-2}^{n+1}) + (1-\theta) (2\eta_{N+1}^n - \eta_N^n - \eta_{N-2}^n) \right] \\
& - (4q h_N^2 + \frac{r}{2} g) \left[ \theta (\eta_{N+1}^{n+1} - \eta_{N-1}^{n+1}) + (1-\theta) (\eta_{N+1}^n - \eta_{N-1}^n) \right] . \tag{3.2.24}
\end{aligned}$$

Τέλος για  $m = N + 1$  από τη συνοριακή συνθήκη (3.2.10b) και για  $\theta \in (0, 1]$  έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \theta (1 + r\tilde{c}_{N+1}) u_{N+1}^{n+1} + [1 - \theta (1 + r\tilde{c}_{N+1})] u_N^{n+1} \\
& = [\theta - r\tilde{c}_{N+1} (1 - \theta)] u_{N+1}^n + (1 - \theta) (1 + r\tilde{c}_{N+1}) u_N^n , \tag{3.2.25}
\end{aligned}$$

ενώ για  $\theta = 0$  από την (3.2.11b)

$$u_{N+1}^{n+1} = u_{N+1}^n - r\tilde{c}_{N+1} (u_{N+1}^n - u_N^n) . \tag{3.2.26}$$

Ο όρος  $u_m^{n+\theta}$  που εμφανίζεται στις σχέσεις (3.2.22) – (3.2.24) προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας σειρά ανάπτυγμα σειράς Taylor γύρω από το  $(x, t)$  ως εξής:

$$u(x, t + \theta \Delta t) = u(x, t) + \theta \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O(\Delta t^2) . \tag{3.2.27}$$

Στην (3.2.27) ο όρος  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$  μπορεί να υπολογιστεί μέσω της εξίσωσης της ορμής στο ρηχό νερό η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 . \tag{3.2.28}$$

Από τις (3.2.27) και (3.2.28) προκύπτει:

$$u(x, t + \theta \Delta t) \approx u(x, t) - \theta \Delta t \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \text{ καθώς } \Delta t \rightarrow 0 . \tag{3.2.29}$$

Αν διακριτοποιήσουμε την (3.2.29) με βάση ορθογωνικό πλέγμα  $G$  τότε για  $m = 1, 2, \dots, N$  προκύπτει:

$$u_m^{n+\theta} = u_m^n - \frac{r}{2} \theta \left[ u_m^n (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + g (\eta_{m+1}^n - \eta_{m-1}^n) \right] , \tag{3.2.30}$$



### Βήμα 3:

Αφού υπολογίστηκαν οι τιμές του διανύσματος  $u^{n+1}$  στο **Βήμα 2**, ακολουθεί η διόρθωση του διανύσματος  $\eta^{n+1}$  που υπολογίστηκε στο **Βήμα 1**, με τη μέθοδο  $\theta$ . Η διακριτοποιημένη με βάση το πλέγμα  $G$  εξίσωση της συνέχειας (3.1.1) στο χρονικό βήμα  $n+\theta$  γράφεται ως:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h+\eta)u] = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{1}{\Delta t} [u_m^{n+1} - u_m^n] + \left( \frac{\partial}{\partial x} (h+\eta)u \right)_m^{n+\theta}. \quad (3.2.34)$$

Η (3.2.34), με βάση το πλέγμα  $G$  και τη μέθοδο  $\theta$  γράφεται ως:

Για  $m=1,2,\dots,N$

$$\eta_m^{n+1} = \eta_m^n - \frac{r}{2} \left\{ \theta [(h_{m+1} + \eta_{m+1}^n) u_{m+1}^n - (h_{m-1} + \eta_{m-1}^n) u_{m-1}^n] \right\}$$
$$+ (1-\theta) [(h_{m+1} + \eta_{m+1}^n) u_{m+1}^n - (h_{m-1} + \eta_{m-1}^n) u_{m-1}^n]. \quad (3.2.35)$$

Για  $m=N+1$

$$\eta_{N+1}^{n+1} = \frac{1}{\theta(1+r\tilde{c}_{N+1})} \{ -[1-\theta(1+r\tilde{c}_{N+1})] \eta_N^{n+1} + [\theta - r\tilde{c}_{N+1}(1-\theta)] \eta_{N+1}^n$$
$$+ (1-\theta)(1+r\tilde{c}_{N+1}) \eta_N^n \}, \theta \in (0,1], \quad (3.2.36)$$

$$\eta_{N+1}^{n+1} = \eta_{N+1}^n - r\tilde{c}_{N+1} (\eta_{N+1}^n - \eta_N^n), \theta = 0. \quad (3.2.37)$$

### 3.3 Ευστάθεια αριθμητικής λύσης

Σε αυτό το εδάφιο θα εξετάσουμε την ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος που περιγράφηκε πιο πάνω μέσω της μεθόδου Von Neumann. Το κριτήριο αυτής της μεθόδου μας προμηθεύει με τη δυνατότητα ελέγχου αριθμητικής ευστάθειας ενός αλγορίθμου. Η μέθοδος αυτή δίνει μια ποσοτικοποίηση του σφάλματος για τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις. Το σφάλμα, θεωρούμε ότι ικανοποιεί και αυτό τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις των σχημάτων που εξάγαμε στα τρία βήματα. Αγνοώντας λοιπόν τη μη γραμμικότητα, και θεωρώντας περιοδικότητα στις λύσεις, περιοδικές αρχικές συνθήκες που εισάγονται στο σύνορο και σταθερή βαθμμετρία, μπορούμε να ελέγξουμε την ευστάθεια της λύσης. Θεωρούμε ότι το σφάλμα μπορεί να αναπαρασταθεί σαν σειρά Fourier, κοινού κυματαριθμού  $k$  με την απαίτηση ο τυχαίος συντελεστής της σειράς, να παραμένει φραγμένος.

Συμβολίζοντας με  $\tilde{\eta}_m^n$  και  $\tilde{u}_m^n$  τις αριθμητικές λύσεις που προκύπτουν από τα βήματα 1 έως 3 που περιγράφηκαν στο αριθμητικό σχήμα, τα οποία εμπεριέχουν τα

σφάλματα που προκύπτουν λόγω της αριθμητικής μεθόδου, και με  $\eta_m^n, u_m^n$  τις ακριβείς λύσεις των αντίστοιχων βημάτων, χρησιμοποιούμε μια αναπαράσταση των σφαλμάτων της μορφής:

$$H_m^n = \eta_m^n - \tilde{\eta}_m^n = e^{na\Delta t} e^{im\beta_\eta \Delta x} , \quad (3.3.1)$$

$$U_m^n = u_m^n - \tilde{u}_m^n = e^{na\Delta t} e^{im\beta_u \Delta x} \quad \text{με } i = \sqrt{-1}; \alpha \in \mathbb{C}, b_\eta, b_u \in \mathfrak{R} , \quad (3.3.2)$$

και έπειτα το απαραίτητο κριτήριο ευστάθειας της μεθόδου Von Neumann δίνεται από:

$$|e^{na\Delta t}| \leq 1 . \quad (3.3.3)$$

Έστω  $h_0$  να είναι μια τυπική σταθερή τιμή της βαθυμετρίας,

$$h_m, m = 0, 1, \dots, N+1 , \quad (3.3.4a)$$

και

$$\tilde{\eta}_0 = \max_{m=0,1,\dots,N+1} (h_m + \eta_m^n) , \quad (3.3.4b)$$

$$u_0 = \max_{m=0,1,\dots,N+1} u_m^n , \quad (3.3.4c)$$

$$\tilde{u}_0 = \max_{m=0,1,\dots,N+1} u_m^{n+\theta} , \quad (3.3.4d)$$

Η εξίσωση (3.2.16) χρησιμοποιώντας τη γραμμικοποίηση (3.3.4c) γράφεται ως:

$$\eta_m^{n+1} = \eta_m^n - u_0 \frac{r}{2} [\eta_{m+1}^n - \eta_{m-1}^n] . \quad (3.3.5)$$

Υποθέτοντας ότι το σφάλμα που δίνεται από τις (3.3.1) και ικανοποιεί την (3.3.5) και διαιρώντας με τον όρο  $e^{na\Delta t} e^{im\beta_\eta \Delta x}$  προκύπτει,

$$e^{a\Delta t} + iru_0 e \sin(\beta_\eta \Delta x) - 1 = 0 . \quad (3.3.6)$$

Η σχέση (3.3.6) αποτελεί την εξίσωση ευστάθειας του σχήματος (3.2.16), ή αλλιώς του πρώτου βήματος.

Από το κριτήριο (3.3.3) για την εξίσωση ευστάθειας (3.2.16) χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού προκύπτει:

$$|e^{a\Delta t}| \leq 1 + u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} . \quad (3.3.7)$$

Από την (3.3.7) βλέπουμε ότι το κριτήριο ευστάθειας ικανοποιείται πάντα, όταν:

$$u_0 = 0 . \quad (3.3.8)$$

Αν  $u_0 = \max_{m=0,1,\dots,N+1} u_m^0$ , τότε η συνθήκη (3.3.8) βρίσκεται σε συμφωνία με τη την αρχική συνθήκη  $u(x,0) = \eta(x,0) = 0$  και έτσι η συγκεκριμένη επιλογή εξασφαλίζει ευστάθεια στο βήμα 1.

Συνεχίζουμε τώρα, στη μελέτη ευστάθειας του δεύτερου βήματος. Η εξίσωση συνέχειας (3.2.16) με χρήση της γραμμικοποίησης (3.3.4b) γράφεται,

$$\eta_m^{n+1} - \eta_m^n = -\frac{r}{2} \tilde{\eta}_0 (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n). \quad (3.3.9)$$

Από την εξίσωση (3.2.23), με βάση τις γραμμικοποιήσεις (3.3.4a) - (3.3.4d) προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \frac{r}{2} \theta \tilde{u}_0 (u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) - \tilde{\beta} h_0^2 p (u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}) + u_m^{n+1} \\ &= -\frac{r}{2} (1-\theta) \tilde{u}_0 (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) - \tilde{\beta} h_0^2 p (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + u_m^n \\ & \quad + 2qh_0^2 \tilde{\eta}_0 \left[ \theta (\eta_{m+2}^{n+1} - \eta_{m-2}^n) - \theta (\eta_{m-2}^{n+1} - \eta_{m-2}^n) + (\eta_{m+2}^n - \eta_{m-2}^n) \right] \\ & \quad - (4qh_0^2 + \frac{r}{2} g) \left[ \theta (\eta_{m+1}^{n+1} - \eta_{m+1}^n) - \theta (\eta_{m-1}^{n+1} - \eta_{m-1}^n) + (\eta_{m+1}^n - \eta_{m-1}^n) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Η (3.3.10) με χρήση της (3.3.9) ξαναγράφεται ως:

$$\begin{aligned} & \frac{r}{2} \theta \tilde{u}_0 (u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) - \tilde{\beta} h_0^2 p (u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}) + u_m^{n+1} \\ &= -\frac{r}{2} (1-\theta) \tilde{u}_0 (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) - \tilde{\beta} h_0^2 p (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + u_m^n \\ & \quad + qrh_0^2 \tilde{\eta}_0 \theta (-u_{m+3}^n + u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_{m-3}^n) \\ & \quad - (4qh_0^2 + \frac{r}{2} g) \left[ \theta (\eta_{m+1}^{n+1} - \eta_{m+1}^n) - \theta (\eta_{m-1}^{n+1} - \eta_{m-1}^n) + (\eta_{m+1}^n - \eta_{m-1}^n) \right] \\ & \quad + \frac{r}{2} \tilde{\eta}_0 \theta (4qh_0^2 + \frac{r}{2} g) (u_{m+2}^n - 2u_m^n + u_{m-2}^n) \\ & \quad + 2qh_0^2 (\eta_{m+2}^n - \eta_{m-2}^n) - (4qh_0^2 + \frac{r}{2} g) (\eta_{m+1}^n - \eta_{m-1}^n). \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Για να υπολογίσουμε τους δύο τελευταίους όρους στο δεξί μέρος της εξίσωσης (3.3.11) θα χρησιμοποιήσουμε τη γραμμικοποιημένη εξίσωση της ορμής για το ρηχό νερό,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (3.3.12)$$



η οποία διακριτοποιείται ως εξής:

$$\eta_{m+1}^{n+1} - \eta_{m-1}^n = -\frac{2}{8} \frac{\Delta x}{\Delta t} (u_m^{n+1} - u_m^n), \quad (3.3.13a)$$

και

$$\eta_{m+2}^n - \eta_{m-2}^n = -\frac{4}{g} \frac{\Delta x}{\Delta t} (u_m^{n+1} - u_m^n). \quad (3.3.13b)$$

Με αυτό τον τρόπο, καταφέρνουμε να εκφράσουμε την εξίσωση (3.3.11) με όρους  $u_m^n$  ώστε να μελετηθεί η συμπεριφορά της ως προς το σφάλμα  $U_m^n$  που δίνεται από τη σχέση (3.3.2). Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.3.13a), (3.3.13b) στην (3.3.11), και παράλληλα υποθέτοντας ότι το σφάλμα που δίνεται από την (3.3.2) ικανοποιεί επίσης τη σχέση (3.3.11), προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \frac{r}{2} \theta \tilde{u}_0 (U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}) - \tilde{\beta} h_0^2 p (U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}) \\ &= -\frac{r}{2} (1-\theta) \tilde{u}_0 (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) - \tilde{\beta} h_0^2 p (U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n) \\ & \quad + q r h_0^2 \tilde{\eta}_0 \theta (-U_{m+3}^n + U_{m+1}^n + U_{m-1}^n - U_{m-3}^n) \\ & \quad + \frac{r}{2} \tilde{\eta}_0 \theta (4q h_0^2 + \frac{r}{2} g) (U_{m+2}^n - 2U_m^n + U_{m-2}^n). \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Διαιρώντας με  $e^{na\Delta t} e^{im\beta_u \Delta x}$  οδηγούμαστε στην ακόλουθη εξίσωση, η οποία αποτελεί την εξίσωση ευστάθειας για το βήμα 2,

$$\begin{aligned} & \left[ i r \theta \tilde{u}_0 \sin(\beta_u \Delta x) + 4 \tilde{\beta} h_0^2 p \sin^2 \left( \frac{\beta_u \Delta x}{2} \right) \right] \xi \\ &= -\frac{r}{2} (1-\theta) \tilde{u}_0 \sin(\beta_u \Delta x) + 4 \tilde{\beta} h_0^2 \sin^2 \left( \frac{\beta_u \Delta x}{2} \right) \\ & \quad + 2 q r h_0^2 \tilde{\eta}_0 \theta [\cos(\beta_u \Delta x) - \cos(3\beta_u \Delta x)] - 2 r \tilde{\eta}_0 \theta (4q h_0^2 + \frac{r}{2} g) \sin^2(\beta_u \Delta x), \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

όπου  $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  και  $\xi = e^{\alpha \Delta t}$ . Η εξίσωση (3.3.15) είναι της μορφής  $A\xi = B$ , με

$A, B \in \mathbb{C}$  και  $A \neq 0$ . Έτσι  $\xi = \frac{B}{A}$ , συνεπώς το κριτήριο (3.3.3) θα ικανοποιηθεί για,

$$\left| \frac{B}{A} \right| \leq 1. \quad (3.3.16)$$

Η ανίσωση (3.3.16), μετά από εφαρμογή γνωστών ιδιοτήτων μιγαδικών αριθμών, οδηγεί σε

$$8g\theta\tilde{\eta}_0 \sin^2\left(\frac{\beta_u \Delta x}{2}\right) \left[ 1 + 4\tilde{b}p h_0^2 \sin^2\left(\frac{\beta_u \Delta x}{2}\right) \right] \left\{ gr^2\theta\tilde{\eta}_0 (\cos^2\left(\frac{\beta_u \Delta x}{2}\right) + bph_0^2 \sin^2(\beta_u \Delta x)) - 2\tilde{b}p h_0^2 \right\} \leq (2\theta - 1)\tilde{u}_0^2 . \quad (3.3.17)$$

Θέτοντας  $\kappa = bph_0^2$ ,  $\mu = \tilde{b}h_0^2 p$  έχουμε ότι

Για  $\theta > \frac{1}{2}$  παίρνουμε τον παρακάτω περιορισμό για το  $r$  :

$$\left[ \frac{2\mu}{g\theta\tilde{\eta}_0(1+\kappa)} \right]^{1/2} < r \leq \left\{ [g\theta\tilde{\eta}_0(1+\kappa)]^{-1} \left[ \frac{(2\theta-1)\tilde{u}_0^2}{8g\theta\tilde{\eta}_0(1+4\kappa)} + 2\mu \right] \right\}^{1/2} . \quad (3.3.18)$$

Για  $\theta = \frac{1}{2}$ , έχουμε

$$r \leq 2 \left[ \frac{\mu}{g\tilde{\eta}_0(1+\kappa)} \right]^{1/2} , \quad (3.3.19)$$

και τελικά, για  $\theta < 0.5$ ,

$$\left\{ [g\theta\tilde{\eta}_0(1+\kappa)]^{-1} \left[ \frac{(1-2\theta)\tilde{u}_0^2}{8g\theta\tilde{\eta}_0(1+4\kappa)} + 2\mu \right] \right\}^{1/2} \leq r < \left[ \frac{2\mu}{g\theta\tilde{\eta}_0(1+\kappa)} \right]^{1/2} . \quad (3.3.20)$$

Ανάλογα την τιμή του  $\theta$ , η ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος που αφορά στο βήμα 2, καθορίζεται από την επιλογή του  $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  που δίνεται από τις σχέσεις (3.3.18) – (3.3.20).

Τέλος, προχωράμε στον καθορισμό της εξίσωσης ευστάθειας του σχήματος (3.2.35), ή αλλιώς του τρίτου βήματος. Από τις σχέσεις (3.3.4a) – (3.3.4c), η σχέση (3.2.35) γράφεται ως:

$$\eta_m^{n+1} = \eta_m^n - \frac{r}{2} u_0 \left\{ \theta(\eta_{m+1}^{n+1} - \eta_{m-1}^{n+1}) + (1-\theta)(\eta_{m+1}^n - \eta_{m-1}^n) \right\} . \quad (3.3.21)$$

Υποθέτοντας ότι το σφάλμα  $H_m^n$  ικανοποιεί τη σχέση (3.3.21), αντικαθιστώντας και διαιρώντας με  $e^{na\Delta t} e^{im\beta_\eta \Delta x}$  προκύπτει η κάτωθι σχέση, η οποία αποτελεί την εξίσωση ευστάθειας για το βήμα 3:

$$e^{a\Delta t} = 1 + ru_0 \left[ \theta i \sin(b_\eta \Delta x) e^{a\Delta t} + (1-\theta) i \sin(b_\eta \Delta x) \right] . \quad (3.3.22)$$

Από το κριτήριο ευστάθειας της μεθόδου Von Neumann  $|e^{na\Delta t}| \leq 1$ , προκύπτει ότι το αριθμητικό σχήμα είναι ευσταθές για  $\theta \geq \frac{1}{2}$  χωρίς επιπλέον απαίτηση, και ασταθές για  $\theta < \frac{1}{2}$ .

## 4. Εφαρμογές

### 4.1 Διάδοση μονοχρωματικών κυματισμών πάνω από τραπεζοειδή πυθμένα

Σε αυτό το εδάφιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την αριθμητική προσομοίωση των εξισώσεων Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς που παρουσιάστηκαν αναλυτικά στα κεφάλαια 2 και 3 για την πειραματική διάταξη υφάλου τραπεζοειδούς μορφής που χρησιμοποίησαν οι Beji & Battjes (1994) και συγκρίνονται με πειραματικές μετρήσεις που ελήφθησαν σε επτά σταθμούς. Η διάταξη απεικονίζεται παρακάτω στο Σχ.4.1 μαζί με τις θέσεις των επτά μετρητικών σταθμών. Η διαδικασία αφορά τόσο πολυχρωματικούς, όσο και μονοχρωματικούς κυματισμούς. Αρχικά παρουσιάζεται η περίπτωση αρμονικών κυματισμών.

Για λόγους εποπτείας οι εξισώσεις Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς που χρησιμοποιήθηκαν ξαναγράφονται παρακάτω καθώς και η αντίστοιχη σχέση διασποράς, όπου ως τιμή του συντελεστή καλιμπραρίσματος  $b$ , έχει ληφθεί η

$$\text{τιμή } b = \frac{1}{21}, \text{ όπου } \tilde{b} = \frac{1}{3} + b,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta)u] = 0, \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \tilde{b} h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + g b h^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}, \quad (4.1.2)$$

$$c^2 = g h \frac{1 + b(kh)^2}{1 + \left(\frac{1}{3} + b\right)(kh)^2}. \quad (4.1.3)$$

Στο Σχ.4.2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στους χωροχρονικούς άξονες  $x, t$  όπου στην είσοδο έχουμε θεωρήσει μονοχρωματικό κυματισμό με ύψος κύματος  $H = 2cm$  και περίοδο  $T = 2sec$ . Η παράμετρος  $\theta$ , ελήφθηκε με τιμή  $\theta = \frac{1}{2}$ , συνεπώς αναφερόμαστε σε αριθμητικό σχήμα επίλυσης τύπου Crank – Nicolson (βλ. π.χ., Smith 1985).

Για να αποφύγουμε τυχόν αριθμητικές αστάθειες που σχετίζονται με την απότομη επιβολή των οριακών συνθηκών, χρησιμοποιείται η ακόλουθη συνάρτηση φίλτρου για την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας στην είσοδο με τη συνάρτηση:

$$f(t) = 1 - \exp\left(1 - \left(\frac{t}{T}\right)^2\right), \quad (4.1.4)$$

και τα συνοριακά δεδομένα στο όριο εισόδου  $x = x_a$  διαμορφώνονται ως ακολούθως

$$\eta(x = x_a, t) = 0.5H \cos(kx - \omega t) f(t) , \quad (4.1.5)$$

και για την αντίστοιχη πεδιακή ταχύτητα στη θέση εισόδου από τη Εξ.(3.2.5)

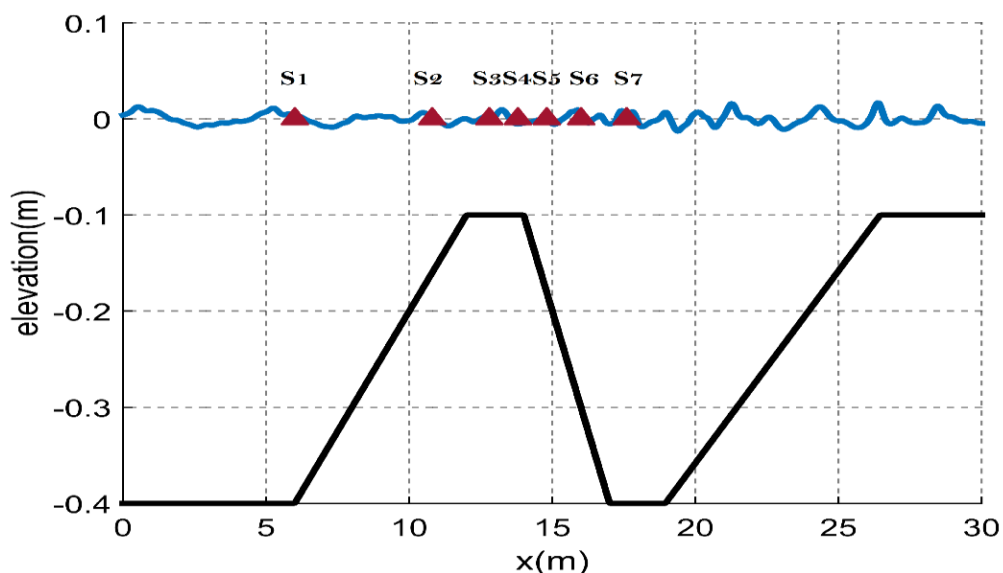
$$u(x = x_a, t) = \frac{c(x_a)\eta(x = x_a, t)}{h_0 + \eta(x = x_a, t)} . \quad (4.1.6)$$

Για τη κατασκευή του χωροχρονικού πλέγματος ελήφθησαν,  $N_x = 1203$  με  $\Delta x = 0.0258m$  και  $N_t = 4500$  με  $\Delta t = \frac{T}{300} = 0.0067 \text{ sec}$ .

Ο αριθμός Courant ισούται με  $c \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) = 0.477$ , όπου το  $c$  υπολογίζεται στην είσοδο μέσω της σχέσης (4.1.3).

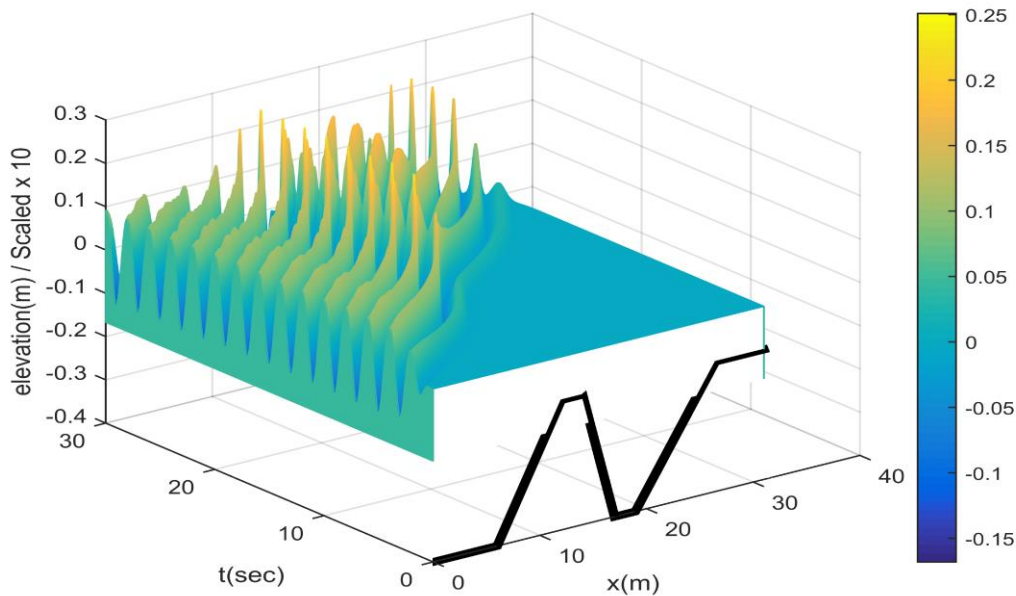
Στο Σχ.4.1, παρουσιάζεται η βαθυμετρία στην οποία πραγματοποιήθηκαν τα πειράματα όπου φαίνονται οι θέσεις των επτά σταθμών.

Στο Σχ.4.2, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος στο χωροχρονικό πλέγμα, όπου στη θέση  $x = 0$ , φαίνεται η δημιουργία του μονοχρωματικού κυματισμού που δίνεται ως συνθήκη εισόδου.

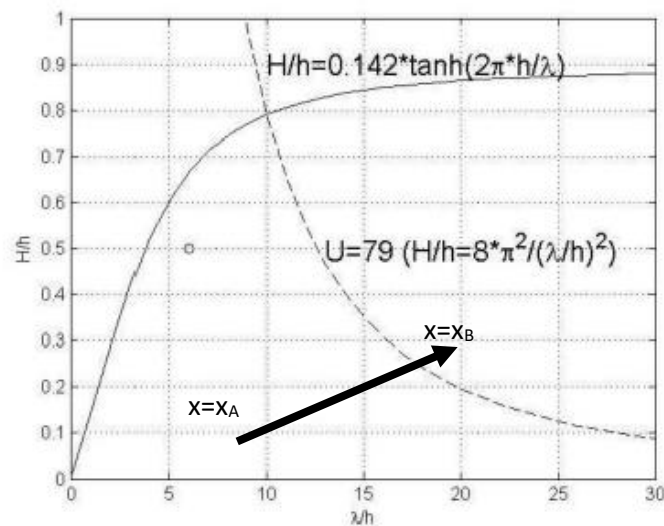


Σχήμα 4.1: Βαθυμετρία στην οποία πραγματοποιήθηκαν τα πειράματα όπου φαίνονται οι θέσεις των επτά μετρητικών σταθμών

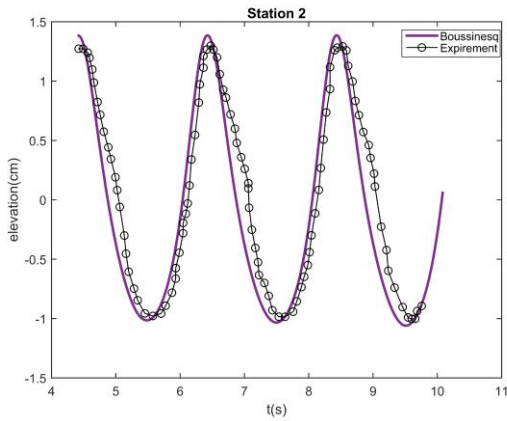
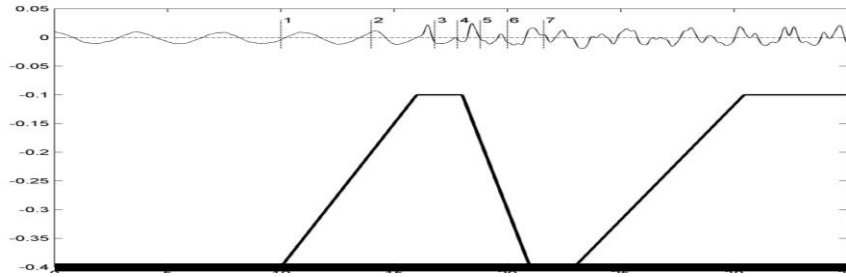
Σε βάθος  $h_1 = 0.4m$  στην είσοδο, τα κυματικά χαρακτηριστικά του κυματισμού είναι  $\{\lambda/h, H/h\} = \{9.23, 0.05\}$ , ενώ στην έξοδο σε βάθος  $h_1 = 0.1m$  ανέρχονται σε  $\{\lambda/h, H/h\} = \{19.47, 0.28\}$  και έτσι έχουμε μια κατάσταση μετασχηματισμού κυματικών συνθηκών όπως ενδεικτικά παρουσιάζεται στο Σχ.4.3 πάνω στο διάγραμμα των παραμέτρων ρηχότητας - μη γραμμικότητας.



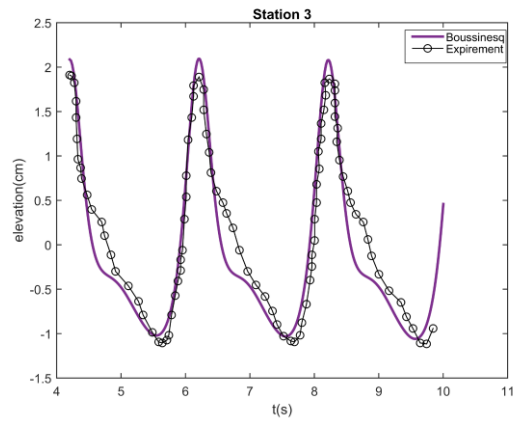
Σχήμα 4.2: Επίλυση των εξισώσεων στο χωροχρονικό χωρίο. Στην είσοδο έχουμε αρμονικό κυματισμό προερχόμενο από  $H=2cm$  και  $T=2 sec$



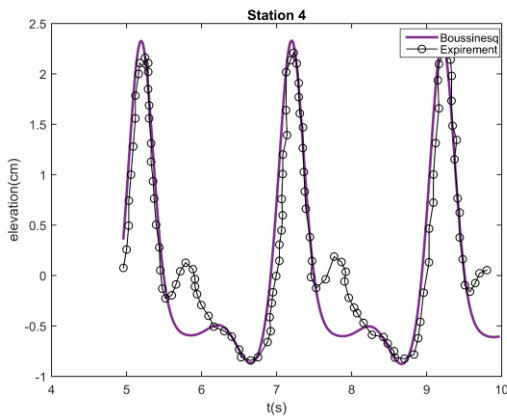
Σχήμα 4.3: Μετάβαση κυματικών συνθηκών στο εξεταζόμενο παράδειγμα εφαρμογής πάνω στο διάγραμμα των παραμέτρων ρηχότητας - μη γραμμικότητας



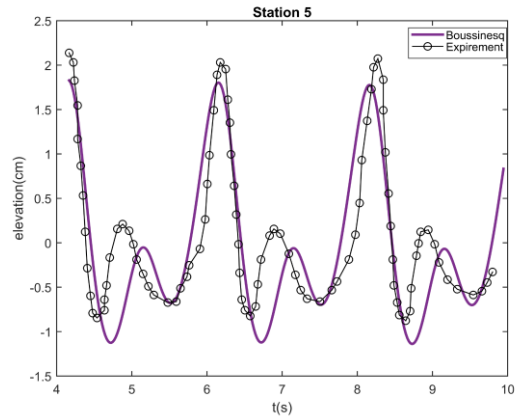
Σχήμα 4.4: 2ο Μετρητικό –  $x=10.8m$



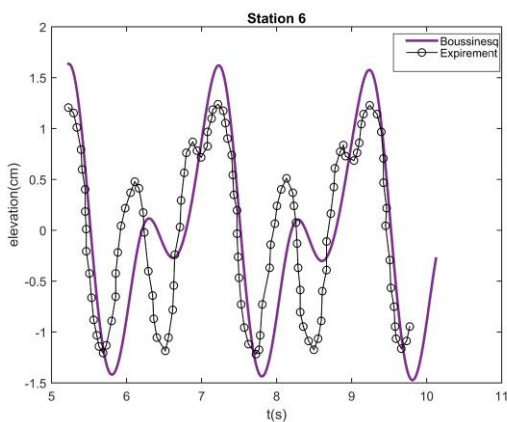
Σχήμα 4.5: 3ο Μετρητικό –  $x=12.8m$



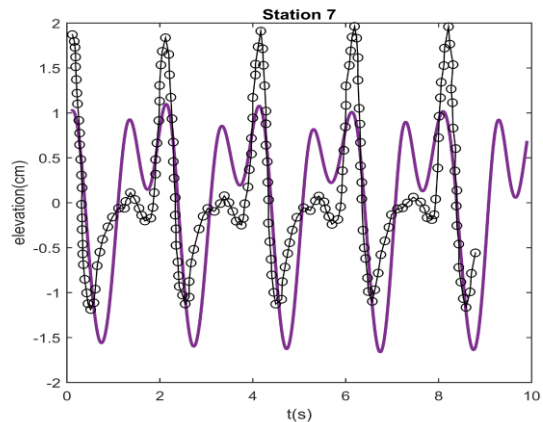
Σχήμα 4.6: 4ο Μετρητικό –  $x=13.8m$



Σχήμα 4.7: 5ο Μετρητικό –  $x=14.8m$



Σχήμα 4.8: 6ο Μετρητικό –  $x=16m$



Σχήμα 4.9: 7ο Μετρητικό –  $x=17.6m$

Τέλος, στα Σχ.4.4-4.9 συγκρίνονται τα αριθμητικά αποτελέσματα που εξάγαμε μέσω της αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων Boussinesq με βελτιωμένη διασπορά και των πειραματικών αποτελεσμάτων που εξήγαγαν πειραματικά οι Beji & Battjes (1994).

Παρατηρούμε ότι παρά τη σχετική απλότητα του το εξεταζόμενο μοντέλο παρέχει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε όλους τους σταθμούς πριν και πάνω από την κατασκευή, ενώ καθώς πλησιάζουμε προς τη θέση του τελευταίου σταθμού η σύγκριση χειροτερεύει, πράγμα που οφείλεται σε διάφορους παράγοντες, και κυρίως στην επίδραση της ανάκλασης από την ακτή στο δεξί άκρο της δεξαμενής, όπου στην εργαστηριακή πράξη χρησιμοποιείται κατάλληλο υλικό (συνήθως χαλίκι) για την απόσβεση του διαδιδόμενου κύματος. Καλύτερη προσέγγιση των αποτελεσμάτων του παρόντος αριθμητικού μοντέλου θα μπορούσε να προκύψει με τη θεώρηση κατάλληλου συντελεστή ανάκλασης, στοιχείο που αποτελεί διερεύνηση για μελλοντική εργασία.

## 4.2 Αναπαράσταση πολυχρωματικών κυματισμών σε σταθερό βάθος νερού

Σε αυτό το εδάφιο, μελετάμε δυο διαφορετικές αναπαραστάσεις πολυχρωματικών κυματισμών που προέρχονται από φάσμα JONSWAP (Massel 1989, 1996) με σκοπό η μέθοδος να χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια για τη μελέτη του μετασχηματισμού των κυματικών χαρακτηριστικών πάνω από μεταβαλλόμενη βαθυμετρία, και ειδικότερα στην περίπτωση μη θραυόμενων διαδιδόμενων πολυχρωματικών κυματισμών πάνω από το τραπεζοειδή πυθμένα του προηγούμενου πειράματος. Εν τούτοις τα παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια αναφέρονται σε κυματικές συνθήκες που απαντώνται σε φυσικό περιβάλλον.

Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στον ισομερισμό της μπάντας των συχνοτήτων. Θεωρούμε διαδιδόμενους κυματισμούς σημαντικού ύψους κύματος  $H_s = 1m$ , περιόδου κορυφής  $T_e = 5 \text{ sec}$ , σε σταθερό βάθος νερού  $h = 7m$ . Ο πρώτος προέρχεται από το φασματικό μοντέλο JONSWAP, όπου η πυκνότητα ενέργειας κάθε αρμονικής συνιστώσας του κυματισμού είναι μεταβλητή και αντιστοιχεί σε σταθερή μπάντα συχνοτήτων  $d\omega = \left[ \omega_i - \frac{d\omega}{2}, \omega_i + \frac{d\omega}{2} \right]$  γύρω από την κεντρική συχνότητα  $\omega_i$ .

Η πυκνότητα ενέργειας της κάθε αρμονικής συνιστώσας (ανηγμένη ως προς το ειδικό βάρος του νερού  $\rho g$ ) η οποία αντιστοιχεί σε σταθερό  $d\omega$  δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\bar{E}_i}{\rho g} = \frac{1}{2} a_i^2 . \quad (4.2.1)$$



Η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας υπό την παραδοχή της γραμμικότητας, όπως αποδεικνύεται αναλυτικά στο Παράρτημα Β, δίνεται από τη σχέση:

$$\eta(x,t) = \sum_i^N \sqrt{2S(\omega_i)} d\omega \cos(\omega_i t - k_i x + \varphi_i) , \quad (4.2.2)$$

όπου  $a_i$  το πλάτος της  $i$ -συνιστώσας, και  $k_i$  ο αντίστοιχος κυματαριθμός από τη σχέση διασποράς στο συγκεκριμένο βάθος νερού

$$\omega_i^2 = gk_i \tanh(k_i h) , \quad (4.2.3)$$

όπως προβλέπεται από τη γραμμική θεωρία κυματισμών. Τέλος  $\varphi_i$  η τυχαία φάση της  $i$ -συνιστώσας η οποία θεωρείται ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

Το φάσμα JONSWAP, το οποίο αναφέρεται σε αναπτυσσόμενη θαλάσσια διαταραχή σε συνθήκες περιορισμένου αναπτύγματος πελάγους (fetch-limited), δίνεται συνάρτησε της γωνιακής συχνότητας (βλ. π.χ., Massel 1996), ως εξής:

$$S(\omega) = A_\gamma \frac{1.25}{4} H_s^2 \frac{\omega_p^4}{\omega^5} \exp \left[ -1.25 \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^{-4} \gamma \exp \left( -0.5 \left( \frac{\omega - \omega_p}{\varepsilon \omega_p} \right)^2 \right) \right] , \quad (4.2.4)$$

όπου  $A_\gamma$  ένας παράγοντας σταθεροποίησης που ισούται με  $A_\gamma = 1 - 0.287 \ln(\gamma)$ ,  $\gamma$  είναι η αδιάστατη παράμετρος σχήματος κορυφής του φάσματος με μέση τιμή 3,3 ( $1 \leq \gamma \leq 7$ ) και  $\varepsilon$  η παράμετρος εύρους του φάσματος με τιμές:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_a = 0.07, \omega \leq \omega_p \\ \varepsilon_b = 0.09, \omega > \omega_p \end{pmatrix} , \quad (4.2.5)$$

όπου  $\omega_p$  η συχνότητα κορυφής.

Η δεύτερη μέθοδος βασίζεται στον ισομερισμό της ενέργειας και στην θεώρηση κυματικών συνιστωσών σταθερού πλάτους. Στη περίπτωση πολυχρωματικού κυματισμού προερχόμενου από το ίδιο όπως και προηγουμένως φάσμα JONSWAP σημαντικού ύψους κύματος  $H_s = 1m$ , περιόδου κορυφής  $T_e = 5 \text{ sec}$ , σε σταθερό βάθος νερού θεωρούμε ότι η συνολική ενέργεια του φάσματος ισομοιράζεται μεταξύ των αρμονικών που συντεθούνε το φάσμα, όποτε το πλάτος κάθε αρμονικής συνιστώσας σε αυτή την περίπτωση διατηρείται σταθερό ενώ η γωνιακή συχνότητα  $\omega$  μεταβάλλεται ως συνάρτηση του φάσματος  $\omega = \omega(S)$

Η συνολική ενέργεια του φάσματος υπολογίζεται ως:

$$E = m_o = \int_0^\infty S(\omega) d\omega , \quad (4.2.6)$$

και συνδέεται με το σημαντικό ύψος κύματος μέσω της σχέσης:

$$H_s = 4\sqrt{m_0} . \quad (4.2.7)$$

Συνεπώς, για τη θεώρηση σταθερής πυκνότητας ενέργειας μεταξύ των αρμονικών, έστω  $N$  στο πλήθος έχουμε:

$$\frac{1}{2}A^2 = \frac{m_0}{N} = \frac{H_s^2}{16N}, \text{ από όπου προκύπτει } A = \frac{H_s}{2\sqrt{2N}} , \quad (4.2.8)$$

και η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας υπολογίζεται πλέον από τη σχέση:

$$\eta(x,t) = A \sum_{i=1}^N \cos(k(\omega_i)x - \omega_i t + \varepsilon_i) . \quad (4.2.9)$$

Για τον προσδιορισμό της αντίστροφης συνάρτησης  $\omega = \omega(S)$ , ακολουθείται η εξής διαδικασία:

(i) Αρχικά κανονικοποιούμε τη συνάρτηση του φάσματος διαιρώντας τη με τη ροπή μηδενικής τάξης :

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{S(\omega)}{m_0}, \quad (4.2.10)$$

όπου η ροπή μηδενικής τάξης  $m_0$  ισούται με την διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας

$$m_0 = \sigma_\eta^2 = \int_0^\infty S(\omega) d\omega = E . \quad (4.2.11)$$

(ii) Στη συνέχεια ολοκληρώνοντας την  $\tilde{S}(\omega)$  προκύπτει η αθροιστική συνάρτηση  $F(\omega)$  με πεδίο τιμών το σύνολο τιμών  $F(A_\omega) = [0,1]$ , όπου  $A_\omega$  το κοινό πεδίο ορισμού των  $S, \tilde{S}, F$  .

(iii) Διατρέχοντας το πεδίο τιμών της  $F, F(A)$  με σταθερό βήμα  $dF = [1-0]/N$ , προσδιορίζεται η κεντρική τιμή κάθε υποδιαστήματος  $F_i = (i-0.5)/N, i = 1, 2, \dots, N$  , και υπολογίζεται η αντίστοιχη συχνότητα  $\omega_i$  έτσι ώστε:

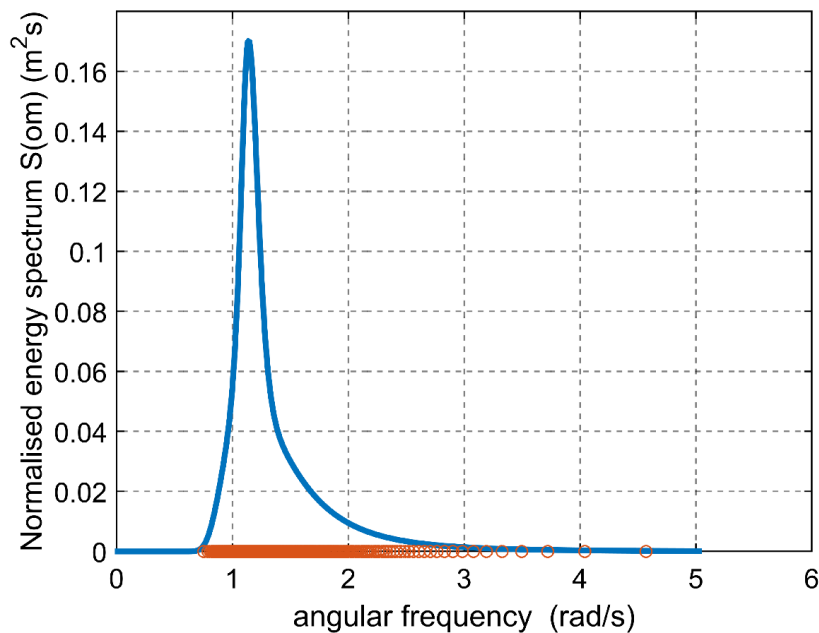
$$F(\omega_i) = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N . \quad (4.2.12)$$

Αυτό που πετυχαίνουμε με αυτή τη διαδικασία είναι να πυκνώσουμε τις τιμές των  $\omega_i$  που βρίσκονται κοντά στη θέση της μέγιστης κλίσης της συνάρτησης  $F(\omega)$ , η οποία αντιστοιχεί στη συχνότητα κορυφής  $\omega_p$  και να αραιώσουμε τα  $\omega_i$  που βρίσκονται στις πολύ χαμηλές και πολύ υψηλές αρμονικές οι οποίες είναι αρμονικές πολύ χαμηλής ενέργειας. Με τον τρόπο αυτό ομαλοποιείται η παραγόμενη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας στην περίπτωση πεπερασμένου αριθμού αρμονικών  $N$ . Στη γενική περίπτωση όπου  $N \rightarrow \infty$  και σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, οι

δύο θεωρήσεις αναμένεται να συγκλίνουν στο ίδιο αποτέλεσμα σε ότι αφορά την αναπαράσταση του πολυχρωματικού κύματος.

Στο Σχ.4.10 παρακάτω, απεικονίζονται σε κοινό διάγραμμα το αρχικό φάσμα JONSWAP με  $H_s = 1m$  και  $T_e = 5sec$  συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας  $\omega$ , και το νέο φάσμα του προήλθε από αρχικό που έχει τη μορφή ορθογωνικού παλμού, όπου πλέον η τετμημένη  $\omega$  είναι μεταβλητή και πυκνά κατανομημένη γύρω από την κεντρική συχνότητα, ενώ η τετμημένη που αντιστοιχεί σε κάθε γωνιακή συχνότητα είναι σταθερή και δίνεται από τη σχέση (4.2.8) και έχει τιμή  $A = \frac{H_s}{2\sqrt{2N}} = 0.0158m$ .

Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται μόνη η τετμημένη  $\omega$  του νέου φάσματος. Η τιμή της ενέργειας των δύο φασμάτων είναι κοινή.



Σχήμα 4.10: Απεικόνιση του αρχικού φάσματος JONSWAP με  $H_s=1m$ ,  $T_e=5sec$  με  $d\omega$  σταθερό και του φάσματος με μεταβλητό  $d\omega$  και σταθερή τεταγμένη  $A$  (ορθογωνικός παλμός).

Στο Σχ.4.11, απεικονίζεται η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας καθώς και οι κλίσεις των κυματισμών συναρτήσει του χρόνου προερχόμενο όπως ήδη αναφέραμε για σημαντικό ύψος κύματος  $H_s = 1m$ , περιόδου κορυφής  $T_e = 5sec$ , για σταθερό  $d\omega$  με  $\delta t = 0.01sec$  γύρω από τη θέση  $x=0$ , σε βάθος νερού  $h = 7m$ , όπου για την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας ελήφθησαν  $N = 500$  αρμονικές (γωνιακές συχνότητες) με γωνιακή συχνότητα κορυφής  $\omega_p = \frac{2\pi}{5} rad / sec$ .

Παράλληλα στο Σχ.4.12, απεικονίζεται ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας, ο οποίος υπολογίζεται μέσω της σχέσης

$$H(f_n) = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N}, \quad (4.2.13)$$

όπου  $\Delta = \delta t = 0.01 \text{sec}$  το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μετρήσεων,  $f_s = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{0.01} \text{Hz}$  ο ρυθμός δειγματοληψίας (sampling rate) που δείχνει τον αριθμό των δειγμάτων που λαμβάνεται ανά δευτερόλεπτο. Το φάσμα συχνοτήτων που προκύπτει μέσω του μετασχηματισμού, συγκρίνεται με το αρχικό φάσμα JONSWAP από το οποίο προήλθε σε πρώτο βαθμό μέσω της σχέσης (4.2.2) η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας.

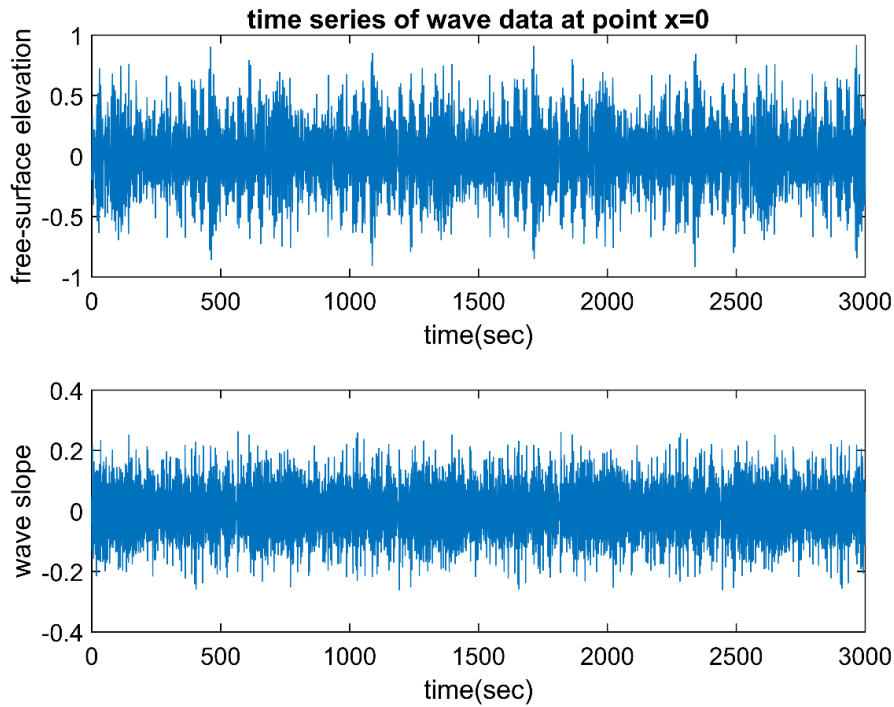
Στο Σχ.4.13, απεικονίζονται οι ισοδυναμικές γραμμές του δυναμικού της ταχύτητας  $\Phi$ , τα πεδία των ταχυτήτων  $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ,  $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$  και η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορες χρονικές στιγμές πολλαπλάσιες του  $T/4$ .

Η σχέση υπολογισμού του δυναμικού  $\Phi$  στην περίπτωση πολυχρωματικών κυματισμών προκύπτει όπως και στην σχέση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας, από γραμμική επαλληλία του δυναμικού που αντιστοιχεί σε κάθε έναν από τους επιμέρους αρμονικούς κυματισμούς, σχέση που αποτελεί λύση του πρωτοτάξιου προβλήματος διαταραχών Stokes:

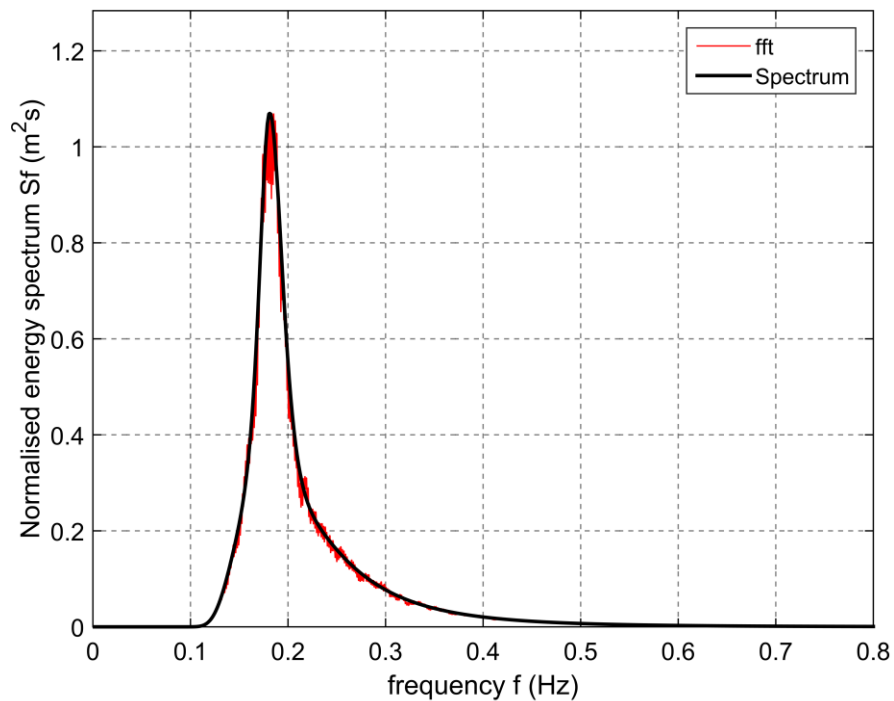
$$\Phi(x, z, t) = \sum_{i=1}^N \frac{gA_i}{\omega_i} \frac{\cosh[k_i(z+h)]}{\cosh(k_i h)} \sin(k_i x - \omega_i t + \varphi_i). \quad (4.2.14)$$

Τέλος, υπολογίζουμε τη μέση οριζόντια ταχύτητα στη στήλη του νερού, η οποία απαιτείται για τη περιγραφή της αντίστοιχης συνοριακής συνθήκης στο εξεταζόμενο μοντέλο εξισ. Boussinesq, από την ακόλουθη σχέση

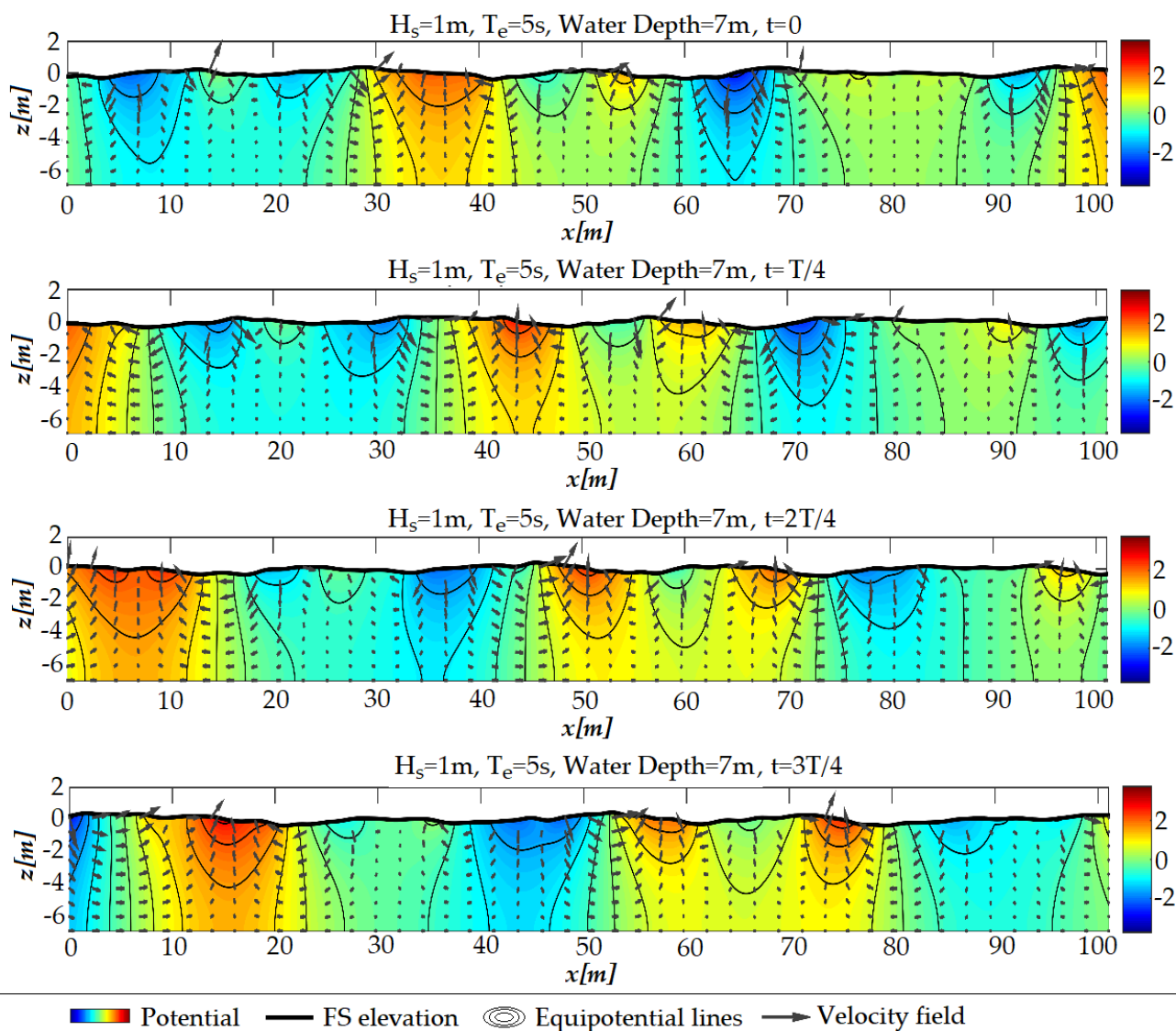
$$u(x, t) = \frac{1}{h} \int_{z=-h}^{z=0} \partial_x \Phi(x, z, t) dz \quad . \quad (4.2.15)$$



Σχήμα 4.11: Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και των κλίσεων των κυματισμών που την απαρτίζουν συναρτήσει του χρόνου στη θέση  $x=0$ , για φάσμα JONSWAP με  $H_s=1\text{m}$ ,  $T_e=5\text{sec}$  και  $d\omega$  σταθερό.



Σχήμα 4.12: Σύγκριση του φάσματος συχνοτήτων JONSWAP με  $H_s=1\text{m}$ ,  $T_e=5\text{sec}$  και  $d\omega$  σταθερό, με το φάσμα συχνοτήτων που ελήφθησε μέσω dft στο σήμα της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας



Σχήμα 4.13: Απεικόνιση ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας δυναμικού και πεδίου ταχυτήτων φασματικών κυματισμών προερχόμενοι από φάσμα JONSWAP με  $H_s=1\text{m}$ ,  $T_e=5\text{sec}$  και  $d_w$  σταθερό, σε βάθος νερού 7 μέτρα για διάφορες χρονικές στιγμές πολλαπλάσιες του  $T/4$

Στη συνέχεια, και στην περίπτωση αναπαράστασης πολυχρωματικού κυματισμού προερχόμενου από φάσμα της μορφής του Σχ.4.10, με τη μέθοδο ισομερισμού της ενέργειας ακολουθούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία. Σε αυτή την περίπτωση η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\eta(x,t) = A \sum_{i=1}^N \cos(k(\omega_i)x - \omega_i t + \varepsilon_i), \quad (4.16)$$

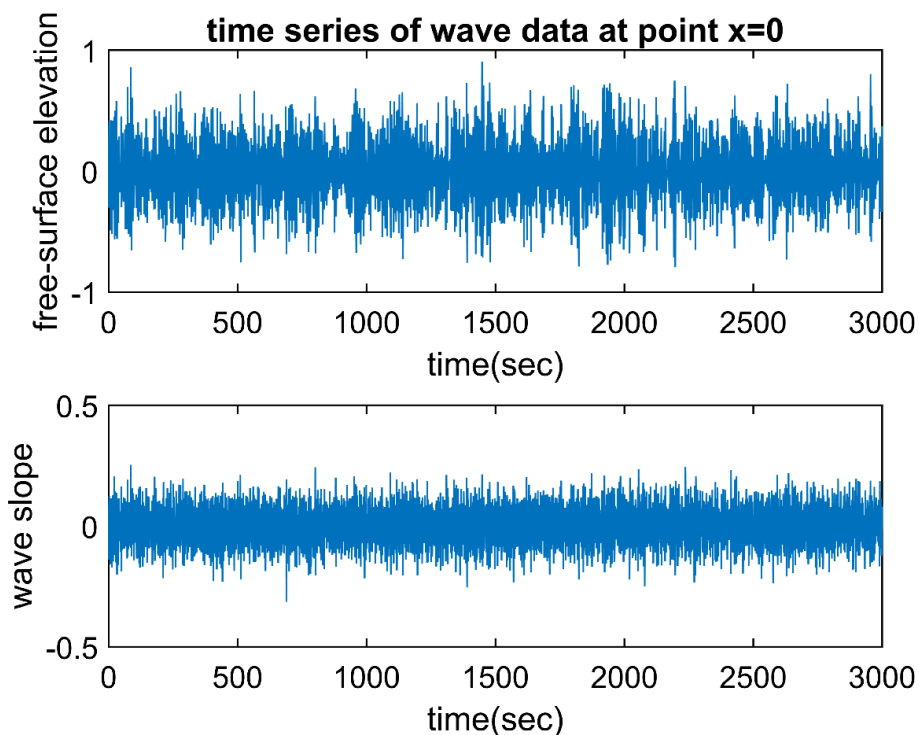
και απεικονίζεται συναρτήσει του χρόνου καθώς και οι κλίσεις των κυματισμών στο Σχ.4.14. Παράλληλα στο Σχ.4.15, γίνεται σύγκριση μεταξύ του αρχικού φάσματος συχνοτήτων JONSWAP με  $H_s = 1m, T_e = 5sec$  και  $d\omega$  σταθερό και του φάσματος συχνοτήτων που προκύπτει μετά από διακριτό μετασχηματισμό Fourier της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας του Σχ.4.14.

Στη περίπτωση αυτή η σχέση υπολογισμού του δυναμικού  $\Phi$  στην περίπτωση αυτή δίδεται από:

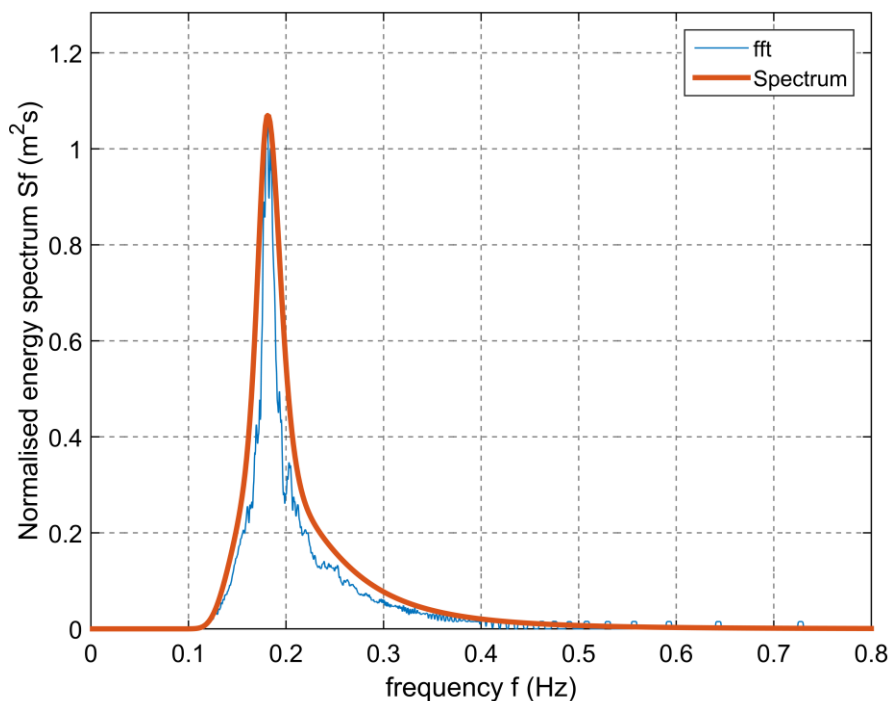
$$\Phi(x,z,t) = A \sum_{i=1}^N \frac{g}{\omega_i} \frac{\cosh[k_i(z+h)]}{\cosh(k_i h)} \sin(k_i x - \omega_i t + \varphi_i), \quad (4.2.17)$$

και η μέση οριζόντια ταχύτητα στη στήλη του υγρού από την σχέση (4.2.15).

Στο Σχ.4.16, απεικονίζονται οι ισοδυναμικές γραμμές του δυναμικού της ταχύτητας  $\Phi$ , τα πεδία των ταχυτήτων  $u, w$  και η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορες χρονικές στιγμές πολλαπλάσιες του  $T/4$ .

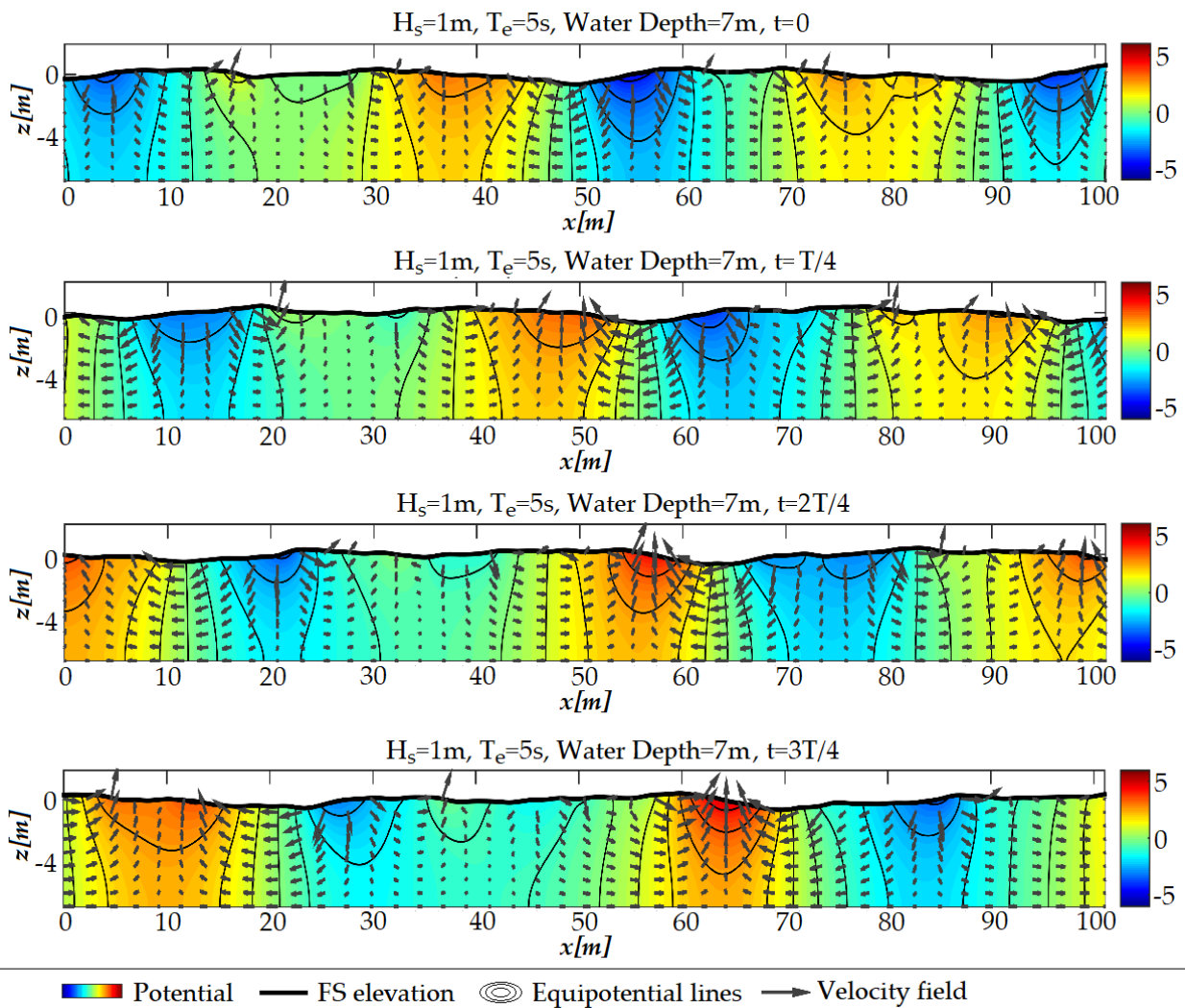


Σχήμα 4.14: Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και των κλίσεων των κυματισμών που την απαρτίζουν συναρτήσει του χρόνου στη θέση  $x=0$ , για φάσμα JONSWAP με  $H_s=1\text{m}$ ,  $T_e=5\text{sec}$  και  $d\omega$  μεταβλητό.



Σχήμα 4.15: Σύγκριση του αρχικού φάσματος συχνοτήτων JONSWAP με  $H_s=1\text{m}$ ,  $T_e=5\text{sec}$  και  $d\omega$  σταθερό, με το φάσμα συχνοτήτων που ελήφθησε μέσω dft στο σήμα της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας η οποία προήλθε από φάσμα ορθογωνικού παλμού.





Σχήμα 4.16: Απεικόνιση δυναμικού και πεδίου ταχυτήτων φασματικών κυματισμών προερχόμενοι από φάσμα ορθογωνικού παλμού, σε βάθος νερού 7 μέτρα για διάφορες χρονικές στιγμές πολλαπλάσιες του  $T/4$

### 4.3 Μελέτη της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για φάσμα

#### JONSWAP και στατιστικά χαρακτηριστικά

Οι ανά  $\Delta t$  χρονικές στιγμές τιμές της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας  $\eta_i$  αποτελούν ένα στοχαστικό μέγεθος του οποίου η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f(\eta)$  ακολουθεί την κανονική κατανομή (Gaussian) με μέση τιμή μηδέν. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) της τυχαίας συνεχούς μεταβλητής  $\eta(t)$  εκφράζει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή  $\eta(t)$  να βρίσκεται μέσα σε ένα εύρος τιμών  $\Delta\eta$  και δίνεται από τη σχέση:

$$f(\eta) = \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\eta} P(\eta \leq \eta(t) \leq \eta + \Delta\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma_\eta^2}\right), \text{ για } \bar{\eta} = 0$$

και σε κανονικοποιημένη μορφή:

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} \exp\left(-\frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{2\sigma_\eta^2}\right), \quad (4.3.1)$$

όπου

$$\sigma_\eta = \frac{H_s}{4}. \quad (4.3.2)$$

Τα ύψη κύματος  $H_i$  της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας αποτελούν επίσης ένα στοχαστικό μέγεθος του οποίου η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) ακολουθεί την κατανομή Rayleigh όπως αυτή αποδείχτηκε από τους Longuet – Higgins (1952) για φάσματα κυματισμών μικρού εύρους, δηλαδή για φάσματα στα οποία η κυματική ενέργεια είναι συγκεντρωμένη γύρω από μια κύρια συχνότητα (συχνότητα κορυφής).

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) της μεταβλητής  $H$  των υψών κύματος για γραμμικούς κυματισμούς ( $H = 2a$ ) δίνεται από τη σχέση:

$$f(H) = \frac{H}{4\sigma_\eta^2} \exp\left(-\frac{H^2}{8\sigma_\eta^2}\right). \quad (4.3.3)$$

Ο προσδιορισμός των υψών κύματος στην κυματική καταγραφή του Σχ.4.11 πραγματοποιείται με τη μέθοδο του προς τα κάτω μηδενισμού (Zero down crossing), όπου κάθε κύμα της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας, ορίζεται μεταξύ γειτονικών σημείων μηδενικής και προς τα κάτω διάβασης και ως ύψος κύματος  $H_i$  και ως περίοδος  $T_i$  του συγκεκριμένου κύματος, το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο ορίζεται αυτό το κύμα. Ως ύψος κύματος  $H_i$  ορίζεται η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ της κορυφής και της κοιλίας του κύματος στην περίοδο αυτή.

Αφού ταξινομήσουμε σε φθίνουσα σειρά τα διάφορα ύψη κύματος  $N$  της καταγραφής του Σχ.4.11 που προσδιορίστηκαν με τη μέθοδο Zero down crossing, μπορούμε να επαληθεύσουμε την τιμή του σημαντικού ύψους κύματος  $H_s = 1m$ , που δώσαμε ως παράμετρο στο φάσμα JONSWAP μέσω του οποίου προσδιορίστηκε η εν λόγω κυματική καταγραφή, μέσω της σχέσης:

$$H_s = \frac{N}{3} \sum_{i=1}^{N/3} H_i , \quad (4.3.4)$$

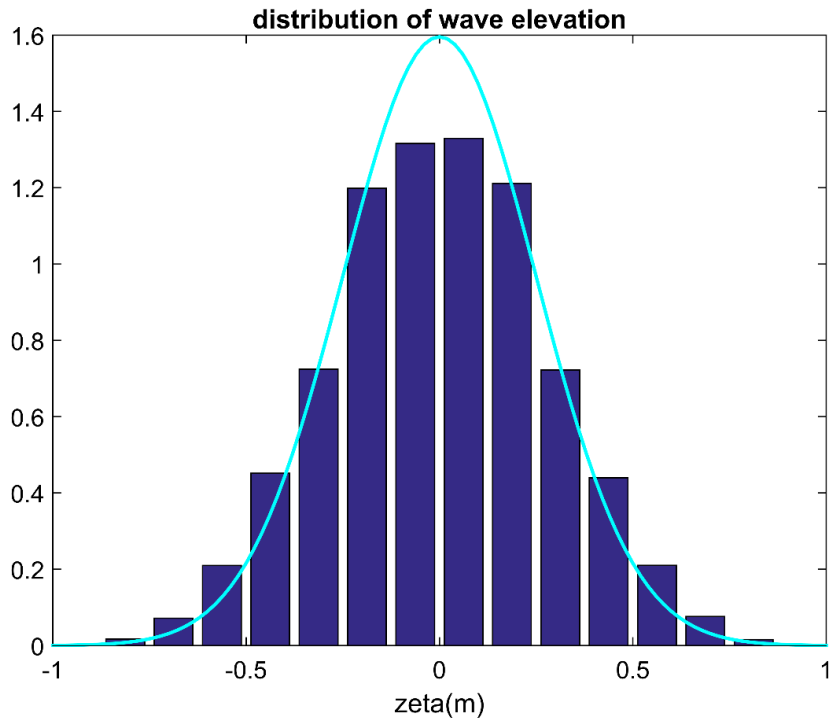
που ορίζεται ως ο μέσος όρος του 33% των μεγαλύτερων υψών κύματος και αποτελεί τον ορισμό του σημαντικού ύψους κύματος.

Στη συνέχεια, οι ανά  $\Delta t$  χρονικές στιγμές τιμές της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας  $\eta_i$  της καταγραφής του Σχ.4.11 τοποθετούνται σε ομοιόμορφες κλάσεις στο εύρος  $[-H_s, H_s]$  με βήμα  $0.125H_s$  σε μορφή ιστογράμματος σχετικών συχνοτήτων, όπου η σχετική συχνότητα που αντιστοιχεί σε κάθε κλάση διαιρείται με το πλάτος κάθε κλάσης ώστε να προκύψει η τεταγμένη που αντιστοιχεί στην κεντρική τιμή κάθε κλάσης. Παράλληλα υπολογίζεται η θεωρητική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) της μεταβλητής της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας  $\eta$  στο ίδιο εύρος τιμών  $[-H_s, H_s]$  μέσω της σχέσης (4.3.1) και βλέπουμε κατά πόσο υπάρχει σύγκλιση της θεωρητικής Gaussian κατανομής και των τιμών της ανύψωσης της καταγραφής που κατατάσσονται σε κλάσεις. Τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας απεικονίζονται από κοινού στο παρακάτω Σχ.4.17, όπου παρατηρείται σχετική σύγκλιση

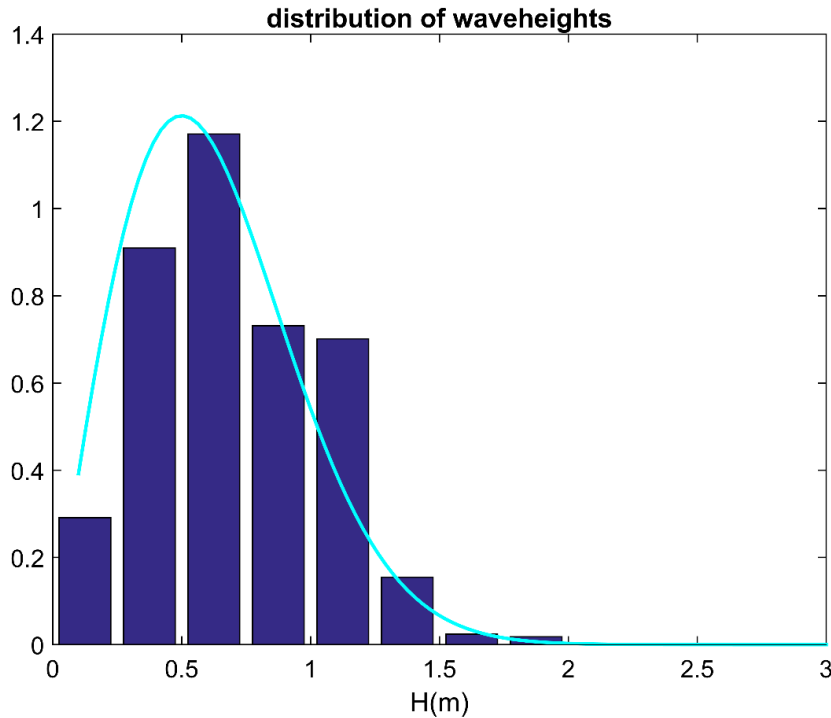
Η ίδια διαδικασία πραγματοποιείται και στην περίπτωση των υψών κύματος της καταγραφής του Σχ.4.11, τα οποία αρχικά προσδιορίζονται με τη μέθοδο Zero down crossing και στη συνέχεια τοποθετούνται σε ομοιόμορφες κλάσεις στο εύρος  $[0, 3H_s]$  με βήμα  $0.25H_s$ . Αντίστοιχα υπολογίζεται η θεωρητική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) της μεταβλητής των υψών κύματος  $H$  στο ίδιο εύρος τιμών  $[0, 3H_s]$  μέσω της σχέσης (4.3.3) και βλέπουμε κατά πόσο υπάρχει σύγκλιση της θεωρητικής κατανομής Rayleigh και των τιμών των υψών κύματος της καταγραφής που κατατάσσονται σε κλάσεις. Τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας απεικονίζονται από κοινού στο παρακάτω Σχ.4.18, όπου βλέπουμε πως υπάρχει σχετική σύγκλιση.

Η τιμή του σημαντικού ύψους που προέκυψε μετά την εύρεση των υψών κύματος υπολογίστηκε μέσω της σχέσης (4.3.4) και ανέρχεται στην τιμή  $H_s = 1.08m$  η οποία προσεγγίζει με καλή ακρίβεια την τιμή  $H_s = 1m$  που δόθηκε ως παράμετρος εισόδου στο φάσμα JONSWAP.

Αξίζει να σημειωθεί ότι όλα όσα ανεφέρθηκαν συνοπτικά σε αυτό το εδάφιο παρουσιάζονται αναλυτικά και αρκετά περιγραφικά στο παράρτημα Γ.



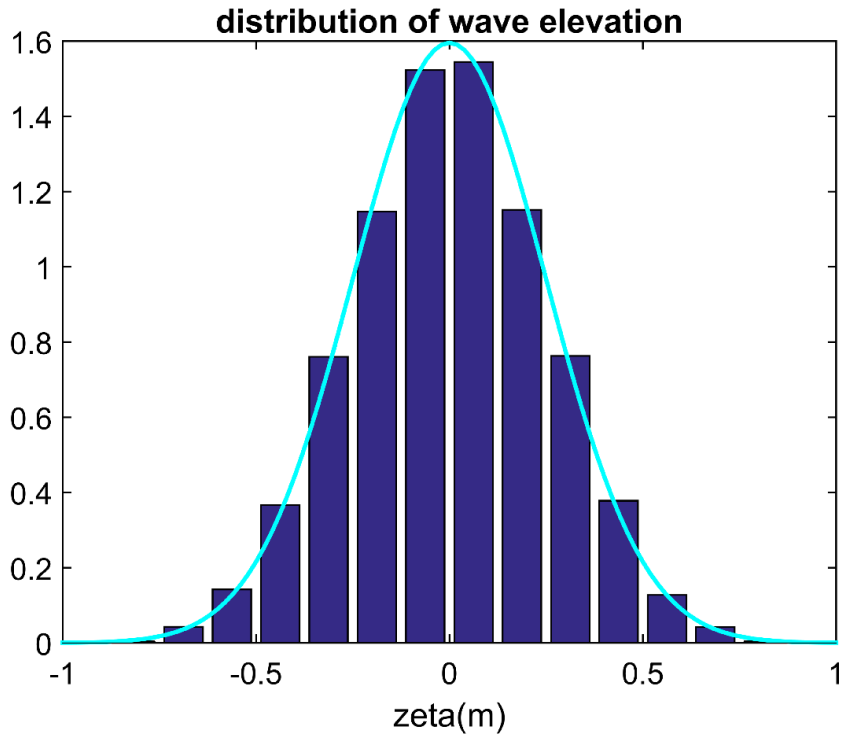
Σχήμα 4.17: Απεικόνιση της θεωρητικής PDF της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας που ακολουθεί την κατανομή Gauss και των τιμών της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας υπό τη μορφή κλάσεων



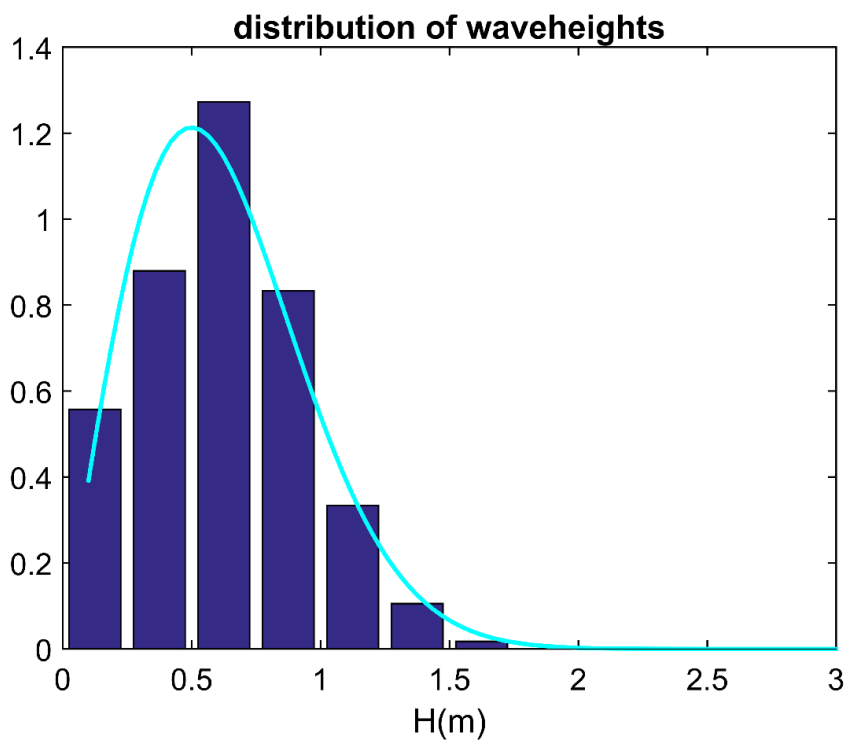
Σχήμα 4.18: Απεικόνιση της θεωρητικής PDF των υψών κύματος που ακολουθεί την κατανομή Rayleigh και των τιμών της υψών κύματος υπό τη μορφή κλάσεων

Τέλος, στα Σχ.4.19-4.20 απεικονίζονται και πάλι οι τιμές της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας και των υψών κύματος για την περίπτωση της ανύψωσης που απεικονίζεται στο Σχ.4.14, και συγκρίνονται πάλι με τις θεωρητικές κατανομές πυκνότητας πιθανότητας Gauss, Rayleigh. Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα είναι σαφώς καλύτερα σε σχέση με την πρώτη περίπτωση μελέτης και αυτό γιατί όπως ειπώθηκε προηγουμένως, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας έχει ομαλοποιηθεί αφού πλέον με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε αποκλείστηκαν πολύ χαμηλές και πολύ υψηλές αρμονικές οι οποίες είναι αρμονικές πολύ χαμηλής ενέργειας και έγινε πύκνωση αρμονικών γύρω από την κύρια συχνότητα του φάσματος.

Σε αυτή την περίπτωση, το σημαντικό ύψος κύματος που προήλθε από την κυματική καταγραφή μέσω της σχέσης (4.3.4), ανέρχεται στην τιμή  $H_s = 0.98m$  που είναι αρκετά πιο κοντά στην τιμή  $H_s = 1m$  σε σχέση με την τιμή  $H_s = 1.08m$ .



Σχήμα 4.19 : Απεικόνιση της θεωρητικής PDF της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας που ακολουθεί την κατανομή Gauss και των τιμών της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας υπό τη μορφή κλάσεων



Σχήμα 4.20: Απεικόνιση της θεωρητικής PDF των υψών κύματος που ακολουθεί την κατανομή Rayleigh και των τιμών της υψών κύματος υπό τη μορφή κλάσεων

#### 4.4 Διάδοση πολυχρωματικών κυματισμών πάνω από τραπεζοειδή πυθμένα

Σε αυτό το εδάφιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την αριθμητική προσομοίωση των εξισώσεων Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς όπως πραγματοποιήθηκε και στο εδάφιο 4.1, αυτή τη φορά όμως στην περίπτωση πολυχρωματικών κυματισμών. Εξετάζεται η διαμόρφωση κυματικού πεδίου πάνω από τραπεζοειδή πυθμένα όπου στην είσοδο έχουμε πολυχρωματικό κυματισμό προερχόμενο από φάσμα JONSWAP, για σημαντικό ύψος κύματος  $H_s = 1.8cm$  και περίοδο κορυφής  $T_e = 2sec$  με τη θεώρηση ισομοιρασμού της ενέργειας. Η περιγραφή του εισερχόμενου πολυχρωματικού κυματισμού γίνεται όπως ακριβώς παρουσιάστηκε στο εδάφιο 4.3. Η αριθμητική επίλυση των εξισ. Boussinesq γίνεται λαμβάνοντας τη παράμετρο  $\theta$  με τιμή  $\theta = \frac{1}{2}$ , συνεπώς αναφερόμαστε σε αριθμητικό σχήμα επίλυσης τύπου Crank – Nicolson.

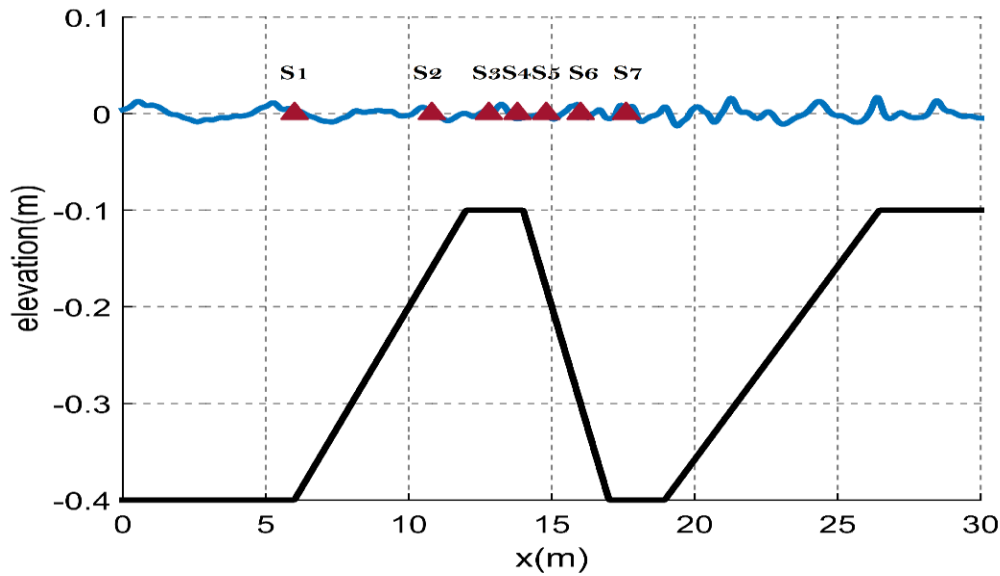
Για να αποφύγουμε τυχόν αριθμητικές αστάθειες που σχετίζονται με την απότομη επιβολή των οριακών συνθηκών, πολλαπλασιάζουμε την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας στην είσοδο με τη συνάρτηση:

$$f(t) = 1 - \exp\left(1 - \left(\frac{t}{T_e}\right)^2\right). \quad (4.4.4)$$

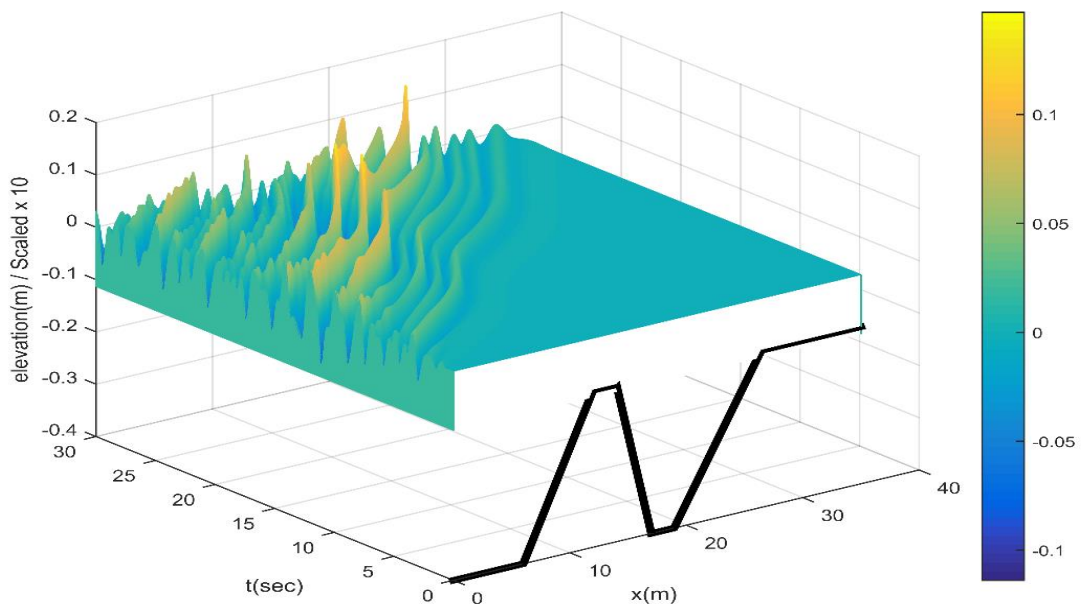
Για τη διακριτοποίηση του χωροχρονικού σχήματος στην παρούσα περίπτωση ελήφθησαν,  $N_x = 1203$  με  $\Delta x = 0.0258$  και  $N_t = 4500$  με  $\Delta t = \frac{T}{300} = 0.0067sec$  και ο αριθμός Courant με βάση τη φασική ταχύτητα της συχνότητας κορυφής στην είσοδο του χωρίου είναι  $c_e \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) = 0.477$ , όπου το  $c_e$  υπολογίζεται για  $\omega_e = 2\pi/T_e$  στην είσοδο όπου το βάθος του νερού είναι  $h=0.4m$  μέσω της σχέσης (4.1.3).

Στο Σχ.4.21, παρουσιάζεται η βαθυμετρία στην οποία πραγματοποιήθηκαν τα πειράματα όπου φαίνονται οι θέσεις των επτά σταθμών.

Στο Σχ.4.22, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος στο χωροχρονικό χωρίο. Στη θέση  $x = 0$ , φαίνεται ο πολυχρωματικός κυματισμός που δίνεται στην εξεταζόμενη περίπτωση ως συνθήκη εισόδου.



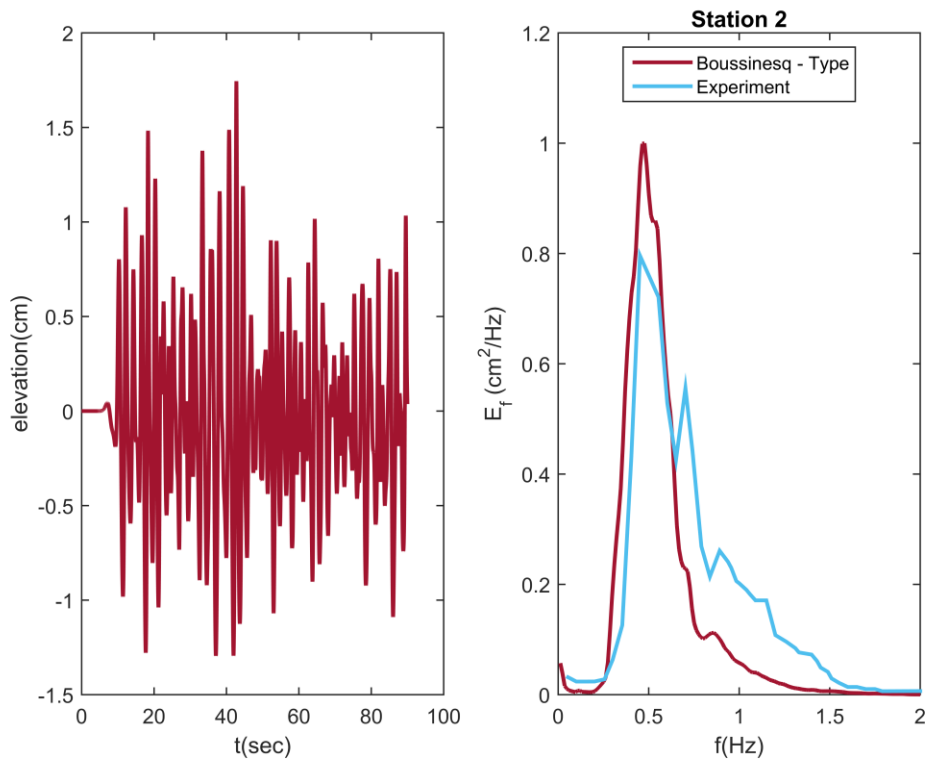
Σχήμα 4.21: Βαθυμετρία στην οποία πραγματοποιήθηκαν τα πειράματα όπου φαίνονται οι θέσεις των επτά μετρητικών σταθμών



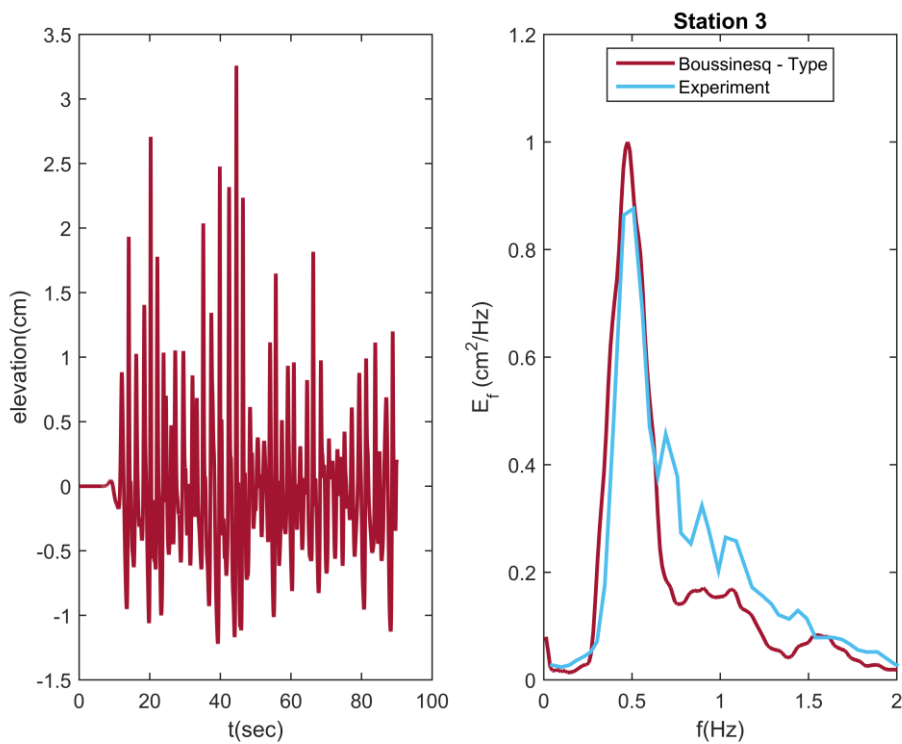
Σχήμα 4.22: Επίλυση των εξισώσεων στο χωροχρονικό χωρίο. Στην είσοδο έχουμε πολυχρωματικό κυματισμό προερχόμενο από φάσμα JONSWAP με  $H_s=1.8\text{cm}$  και  $T_e=2\text{ sec}$

Τέλος, στα σχήματα που ακολουθούν συγκρίνονται τα αριθμητικά αποτελέσματα που εξήχθησαν μέσω της αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων Boussinesq με βελτιωμένη διασπορά και των πειραματικών αποτελεσμάτων που εξήγαγαν πειραματικά οι Beji & Battjes (1994). Στο αριστερό διάγραμμα κάθε σχήματος απεικονίζεται η καταγραφή της ελεύθερης επιφάνειας που ελήφθησε στον εκάστοτε σταθμό τη στιγμή που η διαταραχή φτάνει σε αυτόν και έπειτα.

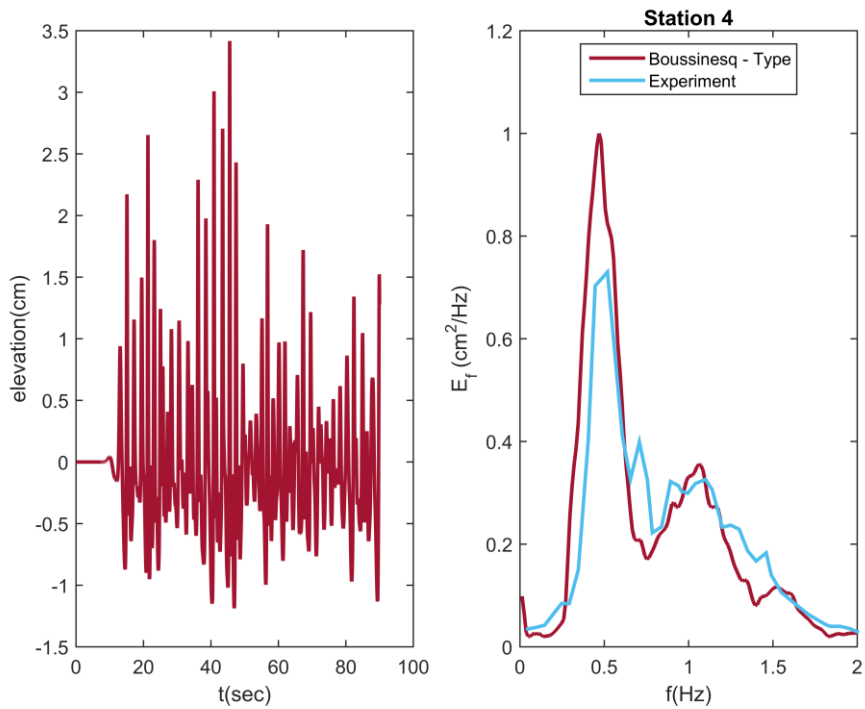




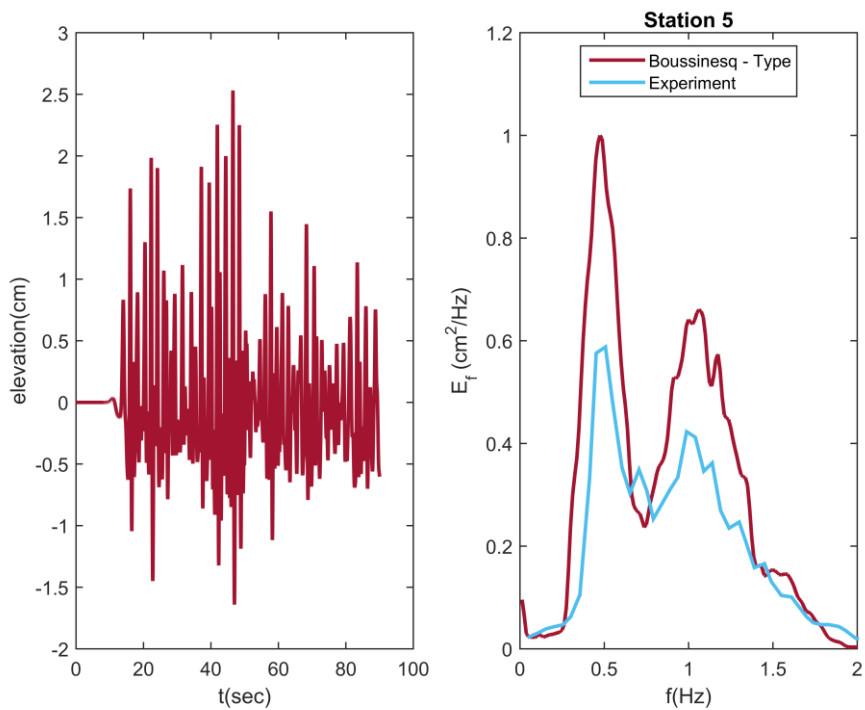
Σχήμα 4.23: 2ο Μετρητικό –  $x=10.8\text{m}$ . Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και φάσμα συχνοτήτων.



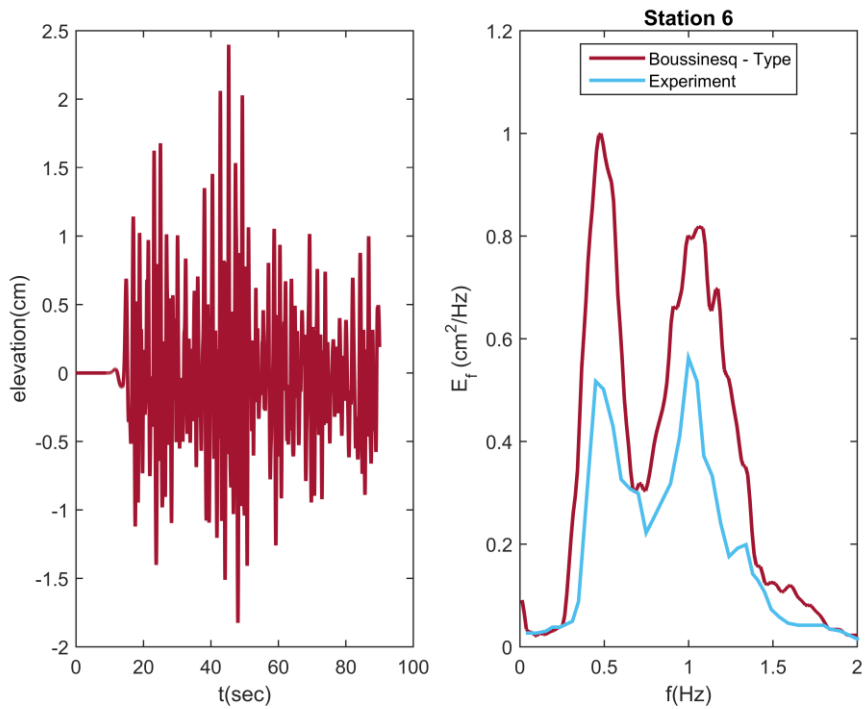
Σχήμα 4.24: 3ο Μετρητικό –  $x=12.8\text{m}$ . Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και φάσμα συχνοτήτων.



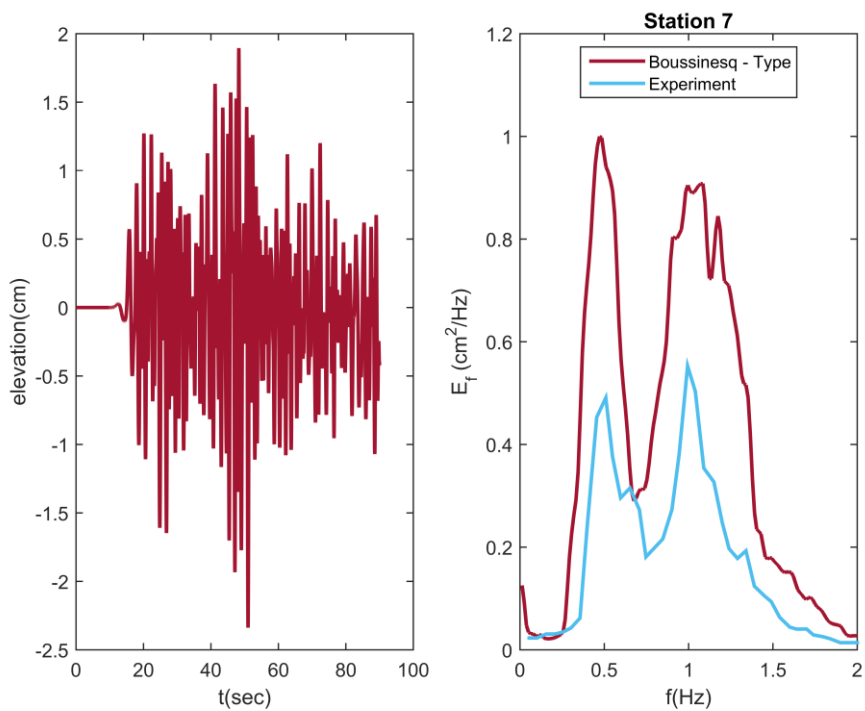
Σχήμα 4.25: 4ο Μετρητικό –  $x=13.8\text{m}$ . Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και φάσμα συχνοτήτων.



Σχήμα 4.26: 5ο Μετρητικό –  $x=14.8\text{m}$ . Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και φάσμα συχνοτήτων.



Σχήμα 4.27: 6ο Μετρητικό –  $x=16\text{m}$ . Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και φάσμα συχνοτήτων.



Σχήμα 4.28: 7ο Μετρητικό –  $x=17.6\text{m}$ . Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και φάσμα συχνοτήτων.

Το συνολικό μήκος των χρονοσειρών αντιστοιχεί σε 45 περίπου περιόδους κορυφής, επειδή όμως υπάρχει καθυστέρηση άφιξης του σήματος στους τελευταίους σταθμούς το πραγματικό μήκος της παραγόμενης χρονοσειράς είναι μικρότερο και πέφτει περίπου στις 35 περιόδους κορυφής, κάτι που αναμένεται να επηρεάσει την σύγκλιση των αποτελεσμάτων στον υπολογισμό της φασματικής πυκνότητας προοδευτικά στα κατάντη της κυματικής ροής.

Από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στα Σχ.4.23-4.28 παρατηρούμε μια σχετικά καλή συσχέτιση των υπολογισμένων φασμάτων συχνότητας για τις θέσεις μέχρι και τον σταθμό 4 μπροστά και πάνω από τη στέψη του τραπεζοειδούς υφάλου (Σχ.4.23-4.25) και προοδευτικές αποκλίσεις στους επόμενους σταθμούς 5-7 (Σχ.4.26-4.28), οι οποίες εκτός της ελάττωσης του μήκους της χρονοσειράς οφείλονται και σε εντονότερες επιδράσεις ανάκλασης στην περιοχή μετά τον ύφαλο όπως παρατηρήθηκε και στην περίπτωση των αρμονικών κυματισμών που εξετάστηκε προηγουμένως.

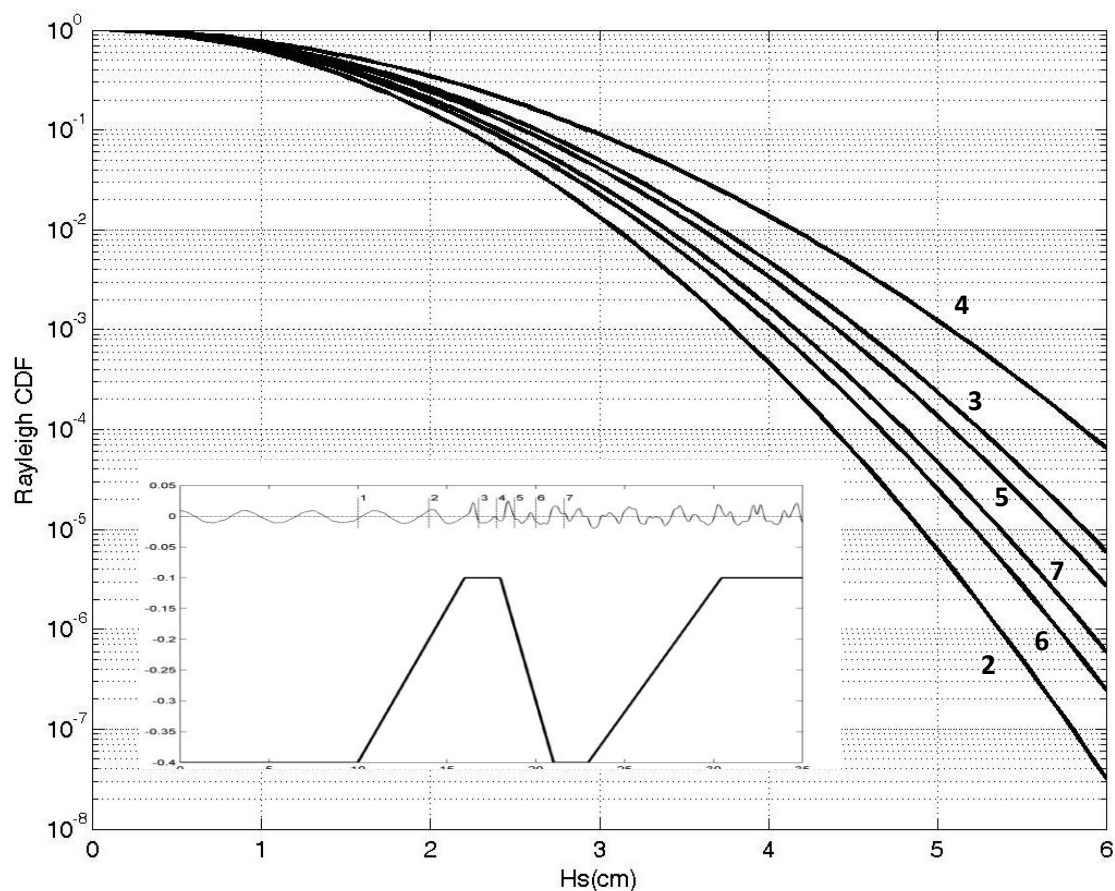
Συμπεραίνουμε γενικά τη καλή προβλεψιμότητα που παρέχει το παρόν μοντέλο μπροστά και πάνω από την κατασκευή, και περαιτέρω βελτίωση των προβλέψεων της φασματικής πυκνότητας, ιδιαίτερα για τους τελευταίους σταθμούς, αναμένεται να προκύψει με επέκταση του συνολικού χρόνου προσομοίωσης.

#### 4.5 Διαμόρφωση στατιστικών χαρακτηριστικών κύματος πάνω από βαθυμετρία

Στον παρακάτω πίνακα 4.1, απεικονίζονται οι τιμές των σημαντικών υψών κύματος στις θέσεις του κάθε σταθμού  $x_s$ , καθώς και σε διπλανές θέσεις που απέχουν απόσταση  $n\Delta x$ , όπου η διακριτοποίηση του χωρικού άξονα που επιλέχτηκε στο αριθμητικό σχήμα διαφορών είναι  $\Delta x = 0.0258m$ .

Stations	$x_s - 4\Delta x$	$x_s - 3\Delta x$	$x_s - 2\Delta x$	$x_s - \Delta x$	$x_s$	$x_s + \Delta x$	$x_s + 2\Delta x$	$x_s + 3\Delta x$	$x_s + 4\Delta x$
2	0.0203	0.0203	0.0203	0.0207	0.0207	0.0204	0.0204	0.0204	0.0204
3	0.0241	0.0241	0.0241	0.0242	0.0239	0.0246	0.0250	0.0252	0.0251
4	0.0273	0.0275	0.0275	0.0276	0.0276	0.0276	0.0269	0.0270	0.0270
5	0.0239	0.0238	0.0239	0.0238	0.0238	0.0238	0.0238	0.0233	0.0233
6	0.0219	0.0219	0.0219	0.0218	0.0218	0.0218	0.0215	0.0215	0.0216
7	0.0222	0.0222	0.0223	0.0224	0.0224	0.0225	0.0224	0.0226	0.0226

Πίνακας 4.1 Υπολογισμένο σημαντικό ύψος κύματος  $H_s$  στην γειτονιά των μετρητικών σταθμών



Σχήμα 4.29: Αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας Rayleigh για το ύψος κύματος σε κάθε σταθμό

Ο υπολογισμός του σημαντικού ύψους κύματος  $H_s$  στην γειτονιά των μετρητικών σταθμών βασίστηκε στη στατιστική ανάλυση της αντίστοιχης κυματικής πληροφορίας σε κάθε χρονοσειρά. Με βάση τα αποτελέσματα αυτά υπολογίστηκε μια μέση χωρική τιμή γύρω από τη θέση του κάθε σταθμού ως αντιπροσωπευτική του τοπικού σημαντικού ύψους κύματος από το οποίο υπολογίστηκε στη συνέχεια η παράμετρος της κατανομής Rayleigh  $\sigma_\eta^2 = m_0 = H_s^2/16$ , βλ. Εξ.(B1.8) και (B2.2.8).

Στο Σχ.4.29 παρατηρούμε την προοδευτική αύξηση της πιθανότητας εμφάνισης μεγαλύτερων υψών κύματος καθώς προχωρούμε από το σταθμό 2 στην εμπρόσθια πλευρά του υφάλου στους σταθμούς 3 και 4 πάνω από τη στέψη του, όπου η πιθανότητα μεγιστοποιείται. Ενδεικτικά παρατηρούμε ότι η πιθανότητα εμφάνισης υψών κύματος μικρότερων-ίσων από 3cm στο σταθμό 2 είναι περίπου  $10^{-2}$  και αυξάνεται σχεδόν 10 φορές περίπου λαμβάνοντας τη τιμή περίπου  $10^{-1}$ .

Ακολούθως κατευθυνόμενοι στο πίσω τμήμα του υφάλου στους σταθμούς 6 και 7, παρατηρούμε ότι η πιθανότητα εμφάνισης υψών κύματος ελαττώνεται λόγω του διασκοπισμού της κυματικής ενέργειας που προξενείται από την σχετικά απότομη αύξηση του βάρους και της εξ αυτού συνεπαγόμενης ανάκλασης μέρους της κυματικής ενέργειας πίσω προς την περιοχή της στέψης του υφάλου.

## 5. Σύνοψη της εργασίας – Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή, αφού αρχικά είδαμε τις βασικές εξισώσεις και συνοριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα διάδοσης επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας και τα όρια – προϋποθέσεις μέσα στα οποία ισχύουν οι διάφορες κυματικές θεωρίες, ασχοληθήκαμε με την εξαγωγή των εξισώσεων Boussinesq αρχικά σε περιβάλλοντα σταθερής βαθυμετρίας, όπως αυτές παρήχθησαν από τον ίδιο, αλλά και την επέκτασή τους σε περιβάλλοντα μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας και ήπιας κλίσης όπως αυτές μελετήθηκαν και παρήχθησαν από τον Peregrine το 1967. Επιπλέον, μελετήθηκαν οι γραμμικές σχέσεις διασποράς των εξισώσεων τύπου Boussinesq για διαφορετικές επιλογές της οριζόντιας καθ' ύψος ταχύτητας, και η σύγκρισή τους με αυτή της γραμμικής θεωρίας. Διαπιστώσαμε ότι οι εξισώσεις τύπου Boussinesq δεν είναι εφαρμόσιμες κατά τη διάδοση κυματισμών από νερό ενδιάμεσου βάθους (το οποίο μπορεί να φτάνει τα όρια του βαθέως νερού) σε σχετικά ρηχό νερό, και παρουσιάστηκαν μοντέλα με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς ώστε να καταστούν εφαρμόσιμες. Στη συνέχεια παρουσιάστηκε το αριθμητικό σχήμα επίλυσης των βελτιωμένων εξισώσεων τύπου Boussinesq οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν από τους Beji & Batjjes (1994). Το σχήμα βασίζεται στη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών και κατάλληλη ολοκλήρωση στο χρόνο για την αριθμητική σύγκλιση και ευστάθεια του. Τέλος παρουσιάστηκαν παραδείγματα εφαρμογής του μοντέλου τόσο σε σταθερή βαθυμετρία, όσο και σε βαθυμετρία που αντιστοιχεί σε αυτή του πειράματος των Beji & Batjjes (1994) τόσο για μονοχρωματικούς, όσο και για πολυχρωματικούς κυματισμούς προερχόμενους από φάσμα JONSWAP. Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων μας με τις μετρήσεις των Beji και Batjjes (1994) διαπιστώθηκε απόκλιση σε κάποιους σταθμούς, γεγονός που αποδίδουμε σε ανάκλαση των κυματισμών στην άκρη της δεξαμενής. Παράλληλα σε ότι αφορά τους φασματικούς κυματισμούς, διαπιστώσαμε ότι το αρχικό φάσμα μιας συχνότητας κορυφής που εισάγουμε ως είσοδο στην αριθμητική επίλυση, μετατρέπεται σε φάσμα δύο κύριων συχνοτήτων στην περιοχή απότομης μείωσης της βαθυμετρίας του τραπεζοειδούς πειραματικού πυθμένα κυρίως λόγω φαινομένων γένεσης αρμονικών.

Θέματα για μελλοντική εργασία αποτελούν η βελτίωση του αριθμητικού σχήματος και η συστηματική μελέτη της σύγκλισης των αποτελεσμάτων που παράγονται, ιδιαίτερα στη περίπτωση της διάδοσης των πολυχρωματικών κυματισμών που απαιτούν πολύ μεγαλύτερη διάρκεια χρονικής προσομοίωσης. Επιπροσθέτως η αναλυτικότητα των εξισώσεων και του αριθμητικού σχήματος επιτρέπει την μοντελοποίηση φαινομένων απόσβεσης της κυματικής ενέργειας λόγω τριβής πυθμένα και θραύσης του κύματος. Τέλος η επέκταση του αριθμητικού σχήματος στις 3 διαστάσεις και η μελέτη διάδοσης πολυχρωματικών και πολυκατευθυντικών κυματισμών πάνω από γενική τοπογραφία πυθμένα αποτελεί σημαντικό θέμα μελλοντικής εργασίας.

## Παράρτημα Α Περιοδικοί βραχείς κυματισμοί σε σταθερή βαθυμετρία

### Α.1. Θεωρία Stokes 2ης τάξης

Ξεκινώντας από την εξίσωση Laplace σε περιοχή σταθερού βάθους νερού

$$\Delta\Phi = 0, \text{ στο χωρίο } D(t) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < \infty, -h < z < \eta(x, t)\}, \quad (\text{A.1.1})$$

σε συνδυασμό με την κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \text{ στο } z = \eta(x, t), \quad (\text{A.1.2})$$

τη δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + gz = 0, \text{ στο } z = \eta(x, t), \quad (\text{A.1.3})$$

τη συνθήκη μη εισχώρησης στον οριζόντιο πυθμένα:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \text{ στο } z = -h, \quad (\text{A.1.4})$$

και την απαίτηση του φραγμένου για το κυματικό πεδίο και τις παραγώγους του στο άπειρο:

$$|\varphi| < C_1, \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right| < C_2, \left| \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right| < C_3, \quad (\text{A.1.5})$$

και αναζητώντας περιοδική λύση με σταθερό μήκος κύματος  $\lambda = 2\pi/k$ , μπορούμε να αναπτύξουμε με βάση τη θεωρία διαταραχών το άγνωστο δυναμικό  $\Phi$  και την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας  $\eta$ , και κρατώντας μέχρι όρους 2ης τάξης έχουμε:

$$\Phi = \varepsilon\Phi^{(1)} + \varepsilon^2\Phi^{(2)} + O(\varepsilon^3), \quad (\text{A.1.6})$$

$$\eta = \varepsilon\eta^{(1)} + \varepsilon^2\eta^{(2)} + O(\varepsilon^3). \quad (\text{A.1.7})$$

Η αδιάστατη παράμετρος είναι  $\varepsilon = ka$  ( $\ll 1$ ), όπου  $k = 2\pi/\lambda$  ο κυματαριθμός και  $a$  το πλάτος του κυματισμού ( $a = H/2$ ). Δηλαδή:

$$\varepsilon = ka = k \frac{H}{2} = \pi \frac{H}{\lambda}. \quad (\text{A.1.8})$$

Λόγω γραμμικότητας της εξ. Laplace και της συνθήκης μη εισχώρησης στον πυθμένα, από τις σχέσεις (A.1.1), (A.1.4), (A.1.6) έχουμε:

$$\Delta\Phi^{(1)} = \Delta\Phi^{(2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial z^2} = 0, \text{ και} \quad (\text{A.1.9a})$$

$$\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z} = 0, \text{ στο } z = -h. \quad (\text{A.1.9b})$$

Για την απαλοιφή της πεπλεγμένης μη γραμμικής εξάρτησης του  $\Phi$  από το  $\eta$ ,  $\Phi = (\Phi(x, \eta(x, z, t), t))$  στις εξίσωσεις (A.1.2), (A.1.3), θεωρώντας ότι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας  $\eta(x, t)$  είναι μικρή, δηλαδή ότι η κυματική κίνηση αντιστοιχεί σε μικρή ταχύτητα, μικρή κλίση και μικρό πλάτος ελεύθερης επιφάνειας γύρω από την αδιατάρακτη θέση της  $z=0$ , αναπτύσσουμε το δυναμικό  $\Phi$  στην ελεύθερη επιφάνεια με βάση το θεώρημα Taylor γύρω από τη θέση  $z=0$ :

$$\varphi(x, t) = \Phi(x, z = \eta, t) = \Phi_0 + \eta \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2} + O(\varepsilon^3), \quad (\text{A.1.10})$$

όπου

$$\Phi_0 = \Phi(x, z = 0, t), \quad (\text{A.1.11})$$

το δυναμικό της ταχύτητας υπολογισμένο στη θέση  $z=0$ , το οποίο επίσης αναπτύσσεται ως εξής:

$$\Phi_0 = \varepsilon\Phi_0^{(1)} + \varepsilon^2\Phi_0^{(2)} + O(\varepsilon^3). \quad (\text{A.1.12})$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τους όρους που εμπλέκονται στην εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας:

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial\Phi_0^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial\Phi_0^{(2)}}{\partial x} + O(\varepsilon^3), \quad (\text{A.1.13})$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial\Phi_0^{(1)}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial\Phi_0^{(2)}}{\partial z} + O(\varepsilon^3), \quad (\text{A.1.14})$$

$$\frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \left( \varepsilon\eta^{(1)} + \varepsilon^2\eta^{(2)} + O(\varepsilon^3) \right)^2 \left( \varepsilon \frac{\partial^2\Phi_0^{(1)}}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2\Phi_0^{(2)}}{\partial z^2} + O(\varepsilon^3) \right) = O(\varepsilon^3). \quad (\text{A.1.15})$$

Έτσι η σχέση (A.1.10) γίνεται:

$$\varphi(x, t) = \varepsilon\Phi_0^{(1)} + \varepsilon^2\Phi_0^{(2)} + \left( \varepsilon\eta^{(1)} + \varepsilon^2\eta^{(2)} \right) \left( \varepsilon \frac{\partial\Phi_0^{(1)}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial\Phi_0^{(2)}}{\partial z} \right) + O(\varepsilon^3). \quad (\text{A.1.16})$$

Αντίστοιχα, υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους του δυναμικού στην ελεύθερη επιφάνεια καταλήγουμε:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_0^{(2)}}{\partial x} + \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial x \partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Phi_0^{(2)}}{\partial x \partial z} \right\} (\varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)}) \\
&\quad + \left( \varepsilon \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_0^{(2)}}{\partial z} \right) \left( \varepsilon \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial x} \right) + O(\varepsilon^3) \\
&= \varepsilon \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_0^{(2)}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial x \partial z} \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} + O(\varepsilon^3) \quad , \tag{A.1.17}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial \Phi_0^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial t \partial z} \eta^{(1)} + \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} \right\} + O(\varepsilon^3) \quad , \tag{A.1.18}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial \Phi_0^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial z^2} \eta^{(1)} \right\} + O(\varepsilon^3) \quad . \tag{A.1.19}$$

Παράλληλα υπολογίζονται και οι όροι:

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + O(\varepsilon^3) \quad , \tag{A.1.20}$$

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + O(\varepsilon^3) \quad , \tag{A.1.21}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial x} + O(\varepsilon^3) \quad , \tag{A.1.22}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} + O(\varepsilon^3) \quad . \tag{A.1.23}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (A.1.18), (A.1.19), (A.1.20), (A.1.21) στη Δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (σχέση A.1.3) και ομοδοποιώντας ως προς του όρους  $\varepsilon, \varepsilon^2$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + gz = 0 &\Leftrightarrow \\
\varepsilon \left( \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial t} + g \eta^{(1)} \right) + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial \Phi_0^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial t \partial z} \eta^{(1)} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] + g \eta^{(2)} \right\} \\
+ O(\varepsilon^3) = 0 \quad . \tag{A.1.24}
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (A.1.17), (A.1.19), (A.1.22), (A.1.23) στην κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (σχέση A.1.2) και ομοδοποιώντας ως προς του όρους  $\varepsilon, \varepsilon^2$  παίρνουμε:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} - \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial \Phi_0^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial z^2} \eta^{(1)} \right\} + O(\varepsilon^3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_0^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial z^2} \eta^{(1)} \right) + O(\varepsilon^3) = 0 . \quad (\text{A.1.25})$$

Συνεπώς για την τάξεως  $O(\varepsilon)$ , προκύπτει το ακόλλουθο γραμμικό πρόβλημα:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} = 0 \text{ στο } D(t) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < \infty, -h < z < 0\} , \quad (\text{A.1.26})$$

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} = 0, \text{ στο } z = -h , \quad (\text{A.1.27})$$

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} + g \eta^{(1)} = 0, \text{ στο } z = 0 , \quad (\text{A.1.28})$$

$$\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} = 0, \text{ στο } z = 0 . \quad (\text{A.1.29})$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση (A.1.28) ως προς  $t$  και αντικαθιστούμε στη σχέση (A.1.29), για να απαλείψουμε τον πρωτοτάξιο όρο της ελεύθερης επιφάνειας  $\eta^{(1)}$ . Έτσι προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} = 0, \text{ στο } z = 0 . \quad (\text{A.1.30})$$

Το πρόβλημα που προκύπτει πλέον από τις εξισώσεις (A.1.26), (A.1.27), (A.1.30) έχει μόνο ένα άγνωστο, τον πρωτοτάξιο όρο του δυναμικού  $\Phi^{(1)}$ , το οποίο επιλύεται με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών κατά τα γνωστά κατά Airy, απαιτώντας αρμονική εξάρτηση με το χρόνο και προκύπτουν λύσεις:

$$\varepsilon \Phi^{(1)}(x, z, t) = \frac{ga}{\omega} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t) , \quad (\text{A.1.31})$$

$$\varepsilon \eta^{(1)} = \alpha \cos(kx - \omega t) . \quad (\text{A.1.32})$$

Τα  $k$  και  $\omega$  ικανοποιούν τη γραμμική σχέση διασποράς:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) . \quad (\text{A.1.32})$$

Για την τάξεως  $O(\varepsilon^2)$  προκύπτει το ακόλλουθο μη γραμμικό πρόβλημα:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial z^2} = 0, \text{ στο } D(t) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < \infty, -h < z < 0\} , \quad (\text{A.1.33})$$

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} + g \eta^{(2)} = -\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t \partial z} \eta^{(1)} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] = D_2(\eta^{(1)}, \Phi^{(1)}), \text{ στο } z = 0 .$$

(A.1.34)

$$\frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \eta^{(1)} = K_2(\eta^{(1)}, \Phi^{(1)}), \text{ στο } z = 0 , \quad (\text{A.1.35})$$

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} = 0, \text{ στο } z = -h . \quad (\text{A.1.36})$$

Τα δεξιά μέλη των σχέσεων (A.1.34), (A.1.35),  $\rightarrow D_2(\eta^{(1)}, \Phi^{(1)}), K_2(\eta^{(1)}, \Phi^{(1)})$  είναι άμεσα υπολογίσιμα χάρη στις λύσεις που υπολογίστηκαν στο πρωτοτάξιο πρόβλημα.

Παραγωγίζουμε τη σχέση (A.1.34) ως προς  $t$  και αντικαθιστούμε στη σχέση (A.1.35), για να απαλείψουμε το δευτεροτάξιο όρο της ελεύθερης επιφάνειας  $\eta^{(2)}$ .

Άρα:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t \partial z} \eta^{(1)} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\nabla \Phi^{(1)})^2 \right] \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} &= -\frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t \partial z} \eta^{(1)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\nabla \Phi^{(1)})^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.37})$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (A.1.37) στην (A.1.35) και αναδιατάσσοντας τους όρους ως προς τον άγνωστο  $\Phi^{(2)}$  προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t \partial z} \eta^{(1)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\nabla \Phi^{(1)})^2 \right] \right\} - \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} &= -\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \eta^{(1)} \Leftrightarrow \\ \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t \partial z} \eta^{(1)} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi^{(1)})^2 \right\} + g \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \eta^{(1)} \right) = RS \end{aligned}$$

(A.1.38)

Όπου το δεξιό μέλος είναι:

$$\begin{aligned} RS &= -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t \partial z} \eta^{(1)} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi^{(1)})^2 \right\} + g \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \eta^{(1)} \right) \\ &= -\frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial t^2 \partial z} \eta^{(1)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t \partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^{(1)})^2 + g \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} - g \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \eta^{(1)} . \end{aligned} \quad (\text{A.1.39})$$

Από τις σχέσεις (A.1.28), (A.1.29) του πρωτοτάξιου προβλήματος ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} &= -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t \partial x} \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση αυτών των σχέσεων στην (A.1.39) έχουμε:

$$\begin{aligned}
RS &= -\frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial t^2 \partial z} \eta^{(1)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t \partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^{(1)})^2 + g \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} - g \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \eta^{(1)} \\
&= -\frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial t^2 \partial z} \eta^{(1)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t \partial z} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^{(1)})^2 - g \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t \partial x} - g \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \eta^{(1)} \\
&= -\frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial t^2 \partial z} \eta^{(1)} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^{(1)})^2 - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 - g \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \eta^{(1)} \\
&= -\frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial t^2 \partial z} \eta^{(1)} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^{(1)})^2 - g \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \eta^{(1)} \\
&= -\eta^{(1)} \left( \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial t^2 \partial z} + g \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \right) - \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^{(1)})^2 .
\end{aligned} \tag{A.1.40}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (A.1.38) έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} = -\eta^{(1)} \left( \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial t^2 \partial z} + g \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \right) - \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^{(1)})^2 . \tag{A.1.41}$$

Δεδομένου των λύσεων του πρωτοτάξιου προβλήματος:

$$\Phi^{(1)}(x, z, t) = \frac{ga \cosh[k(z+h)]}{\omega \cosh(kh)} \sin(kx - \omega t), \quad \varepsilon \eta^{(1)} = \alpha \cos(kx - \omega t), \text{ και με χρήση της}$$

ταυτότητας  $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$  προκύπτει:

$$(\nabla \Phi^{(1)})^2 = \frac{g^2 k^2 a^2}{\omega^2} \frac{1}{\cosh^2(kh)} \left( \cosh^2[k(z+h)] - \sin^2(kx - \omega t) \right), \tag{A.1.42}$$

$$\frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial t^2 \partial z} = -\frac{gk^3 a}{\omega} \frac{\sinh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t), \tag{A.1.43}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} = \frac{gk^2 a}{\omega} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t). \tag{A.1.44}$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (A.1.32), (A.1.42), (A.1.43), (A.1.44) στη σχέση (A.1.41) καταλήγουμε:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} = B_1 \sin[2(kx - \omega t)], \text{ με } B_1 = 3ka^2 \frac{g\omega}{\sinh(2kh)}. \tag{A.1.45}$$

Συνεπώς το τελικό δευτεροτάξιο πρόβλημα ως προς το άγνωστο δυναμικό  $\Phi^{(2)}$  ανάγεται ως:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial z^2} = 0, \text{ στο } D(t) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < \infty, -h < z < 0\}, \tag{A.1.46}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} = -3ka^2 \frac{g\omega}{\sinh(2kh)} \sin[2(kx - \omega t)], \text{ στο } z = 0, \quad (\text{A.1.47})$$

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} = 0, \text{ στο } z = -h, \quad (\text{A.1.48})$$

Αναζητούμε λύση της μορφής  $\varepsilon^2 \Phi^{(2)}(x, z, t) = A \cosh[2k(z+h)] \sin[2(kx - \omega t)]$

Από τις (A.1.46), (A.1.47), (A.1.48) υπολογίζεται τελικά το δευτεροτάξιο δυναμικό ως:

$$\varepsilon^2 \Phi^{(2)}(x, y, z) = \frac{3a^2 \omega \cosh[2k(z+h)]}{8 \sinh^4(kh)} \sin[2(kx - \omega t)]. \quad (\text{A.1.49})$$

Αντικαθιστώντας τη (A.1.49) στην (A.1.47) προσδιορίζεται η δευτεροτάξια εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας  $\eta^{(2)}$ :

$$\eta^{(2)} = \frac{a^2 \omega^2}{g} \left( 3 - \frac{1}{\tanh^2(kh)} + 3 \frac{\cosh(2kh)}{\sinh^4(kh)} \right) \cos[2(kx - \omega t)]. \quad (\text{A.1.50})$$

Οι τελικές λύσεις της θεωρίας Stokes 2ης τάξης γράφονται:

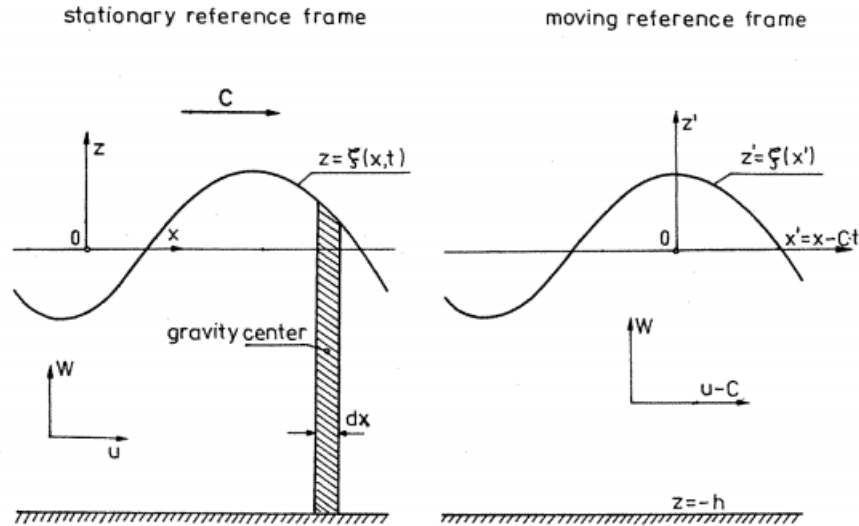
$$\Phi(x, z, t) = \frac{ga}{\omega} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t) + \frac{3a^2 \omega \cosh[2k(z+h)]}{8 \sinh^4(kh)} \sin[2(kx - \omega t)] \quad (\text{A.1.51})$$

$$\eta = a \cos(kx - \omega t) + \frac{a^2 \omega^2}{g} \left( 3 - \frac{1}{\tanh^2(kh)} + 3 \frac{\cosh(2kh)}{\sinh^4(kh)} \right) \cos[2(kx - \omega t)]. \quad (\text{A.1.52})$$

## A.2. Λύσεις 5ης τάξης

Με τον τρόπο που παρουσιάστηκε παραπάνω, θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε λύσεις μεγαλύτερων τάξεων με βάση τη θεωρία των διαταραχών και αναπτύγματα ανώτερων όρων. Ωστόσο κάτι τέτοιο δε θα παρουσιαστεί σε αυτή την εργασία. Αντίθετα θα παρουσιαστεί ένας άλλος τρόπος εξαγωγής των λύσεων που παρουσιάστηκε από τον J.D.Fenton (Fenton 1985).

Αρχικά θεωρούμε ένα δεύτερο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς  $(0, x', z')$  το οποίο κινείται στη θετική  $x$  - κατεύθυνση μαζί με το κύμα με ταχύτητα ίση με τη φασική ταχύτητα διάδοσης του περιοδικού κυματισμού  $C$  όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχ.Α1



Σχήμα Α1: Το ακίνητο  $(0, x, z)$  και το κινούμενο  $(0, x', z')$  σύστημα αναφοράς (από Massel 1989)

Στο κινούμενο σύστημα αναφοράς, η κίνηση είναι ανεξάρτητη του χρόνου,  $t$ . Άρα:

$$x' = x - Ct, \quad z' = z, \quad \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -C \frac{\partial}{\partial x'}. \quad (\text{A.2.1})$$

Το δυναμικό της ταχύτητας,  $\Phi'$ , η ροϊκή συνάρτηση  $\Psi'$ , και οι σωματιδιακές ταχύτητες  $(u', w')$  στο κινούμενο σύστημα αναφοράς συσχετίζονται με τα αντίστοιχα μεγέθη στο ακίνητο σύστημα αναφοράς  $(0, x, z)$  ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} \Phi' &= \Phi - Cx, \quad \Psi' = \Psi - Cz \\ u' &= u - C = \frac{\partial \Phi'}{\partial x'} = \frac{\partial \Psi'}{\partial z'} \\ w' &= w = \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} = -\frac{\partial \Psi'}{\partial x'} \end{aligned} \right\} . (\text{A.2.2})$$

Το δυναμικό της ταχύτητας  $\Phi'$  και η ροϊκή συνάρτηση  $\Psi'$  ικανοποιούν τη γνωστή σχέση Cauchy – Riemann:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x'} = \frac{\partial \Psi'}{\partial z'}, \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} = -\frac{\partial \Psi'}{\partial x'}. \quad (\text{A.2.3})$$

Η εξίσωση (A.2.2) δίνει:

$$(\nabla \Phi') \cdot (\nabla \Psi') = 0, \quad (\text{A.2.4})$$

που σημαίνει ότι οι γραμμές ροής της ροϊκής συνάρτησης  $\Psi'$  είναι κάθετες στις ισοδυναμικές γραμμές του δυναμικού της ταχύτητας  $\Phi'$ . Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (A.2.2), (A.2.3) στην εξίσωση συνέχειας, βλέπουμε ότι τα  $\Phi', \Psi'$  ικανοποιούν αμφότερα την εξίσωση Laplace :

$$\nabla^2 \Phi' = \nabla^2 \Psi' = 0 . \quad (\text{A.2.5})$$

Όστοςο οι συνοριακές συνθήκες εκφράζονται πολύ ευκολότερα μέσω της ροϊκής συνάρτησης  $\Psi'$ . Για αυτό το λόγο θα λυθεί το ισοδύναμο πρόβλημα επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας που περιγράφεται μέσω της ροϊκής συνάρτησης. Δηλαδή:

$$\nabla^2 \Psi' = 0, \text{ στο } D = \{(x', z') \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < \infty, -h < z' < \eta(x')\} , \quad (\text{A.2.6})$$

$$\Psi'(x', -h) = 0 , \quad (\text{A.2.7})$$

$$\Psi'[x', h + \eta(x')] = -Q , \quad (\text{A.2.8})$$

$$\left[ \left( \frac{\partial \Psi'}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi'}{\partial z'} \right)^2 \right] + 2g\eta' = R, \quad z' = \eta'(x') , \quad (\text{A.2.9})$$

όπου στο  $z' = -h$  και  $z' = h + \eta(x')$  έχουμε γραμμές ροής,  $Q$  είναι μια θετική σταθερά που δηλώνει το ρυθμό ροής όγκου ανά μονάδα επιφάνειας, αλλά καθώς το σύστημα συντεταγμένων  $(0, x', z')$  κινείται μαζί με το κύμα η ροή κινείται προς την αρνητική  $-x$  κατεύθυνση εξού και το πρόσημο πλην στη σχέση (8). Τέλος,  $R$  είναι η σταθερά Bernoulli

Θεωρώντας  $\varepsilon = k \frac{H}{2}$  υποθέτουμε το ακόλουθο ανάπτυγμα για τη ροϊκή συνάρτηση

$$\Psi' : \frac{k\Psi'}{C} - k(z' + h) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i A_{ij} \varepsilon^i \sinh[jk(z' + h)] \cos(jkx') , \quad (\text{A.2.10})$$

όπου:  $\bar{C}$  η μέση ταχύτητα του ρευστού στο κινούμενο σύστημα αναφοράς σε ένα μήκος κύματος και  $\bar{C} = C$  υπό την απουσία ρεύματος.

Η εξίσωση (A.2.10) ικανοποιεί την εξίσωση Laplace (A.2.6) και τη συνοριακή συνθήκη στον πυθμένα (A.2.7). Μετά από αντικατάσταση του αναπτύγματος για τη συνάρτηση ροής  $\Psi'$  στις συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας (A.2.8), (A.2.9) λαμβάνουμε:

$$\frac{k\Psi'}{C} - k[h + \eta(x')] + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i A_{ij} \varepsilon^i \sinh jk[h + \eta(x')] \cos(jkx') = 0 , \quad (\text{A.2.11})$$

και:

$$\begin{aligned} & \frac{k\Psi'}{C} - k(z' + h) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i A_{ij} \varepsilon^i \sinh[jk(z' + h)] \cos(jkx'), \\ & \left\{ -1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i j A_{ij} \varepsilon^i \cosh jk[(h + \eta(x'))] \cos(jkx') \right\}^2 + \\ & + \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i j A_{ij} \varepsilon^i \sinh jk[(h + \eta(x'))] \sin(jkx') \right\}^2 + \end{aligned}$$

$$+\frac{2g}{\bar{C}^2}[(h+\eta(x'))]-\frac{2R}{\bar{C}^2}=0 . \quad (\text{A.2.12})$$

Επίσης υποθέτουμε ότι τα  $\bar{C}, Q, R$  και  $\eta$  μπορούν να αναπαρασταθούν ως προς  $\varepsilon$ :

$$\bar{C}\left(\frac{k}{g}\right)^{1/2} = C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \varepsilon^i, \quad (\text{A.2.13})$$

$$Q\left(\frac{k^3}{g}\right)^{1/2} = \bar{C}_h\left(\frac{k^3}{g}\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \varepsilon^i, \quad (\text{A.2.14})$$

$$\frac{Rk}{g} = \frac{1}{2}C_0^2 + kh + \sum_{i=1}^{\infty} E_i \varepsilon^i, \quad (\text{A.2.15})$$

$$k\eta(x') = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i B_{ij} \varepsilon^i \cos(jkx'). \quad (\text{A.2.16})$$

Για να προσδιοριστούν οι συντελεστές  $A_{ij}, B_{ij}, C_0, C_i, D_i$  και  $E_i$ , αντικαθιστούμε τα αναπτύγματα των σχέσεων (A.2.13) - (A.2.16) στις σχέσεις (A.2.11), (A.2.12) και οι υπερβολικές συναρτήσεις στις σχέσεις αυτές επίσης αναπτύσσονται σε δυναμοσειρές. Οι συνοριακές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται για όλες τις τιμές των  $\varepsilon, x'$ . Μετά από πράξεις λαμβάνουμε λύση με ακρίβεια 5ης τάξης (Fenton, 1985):

$$\Phi'(x', z') = -\bar{C}x' + C_0\left(\frac{g}{k^3}\right)^{1/2} \sum_{i=1}^5 \varepsilon^i \sum_{j=1}^i A_{ij} \cosh[jk(z'+h)] \sin(jkx') + O(\varepsilon^6), \quad (\text{A.2.17})$$

όπου:

$$\bar{C}\left(\frac{k}{g}\right)^{1/2} = C_0 + \varepsilon^2 C_2 + \varepsilon^4 C_4 + O(\varepsilon^6), \quad (\text{A.2.18})$$

και

$$\begin{aligned} k\eta(x') = & \varepsilon \cos(kx') + \varepsilon^2 B_{22} \cos(2kx') + \varepsilon^3 B_{31} [\cos(kx') - \cos(3kx')] + \\ & + \varepsilon^4 [B_{42} \cos(2kx') + B_{44} \cos(4kx')] \\ & + \varepsilon^5 [-(B_{53} + B_{55}) \cos(kx') + B_{53} \cos(3kx')] \\ & + \varepsilon^5 B_{55} \cos(5kx') + O(\varepsilon^6), \end{aligned} \quad (\text{A.2.19})$$

επίσης

$$Q\left(\frac{k^3}{g}\right)^{1/2} = C_0 kh + \varepsilon^2 (C_2 kh + D_2) + \varepsilon^4 (C_4 kh + D_4) + O(\varepsilon^6), \quad (\text{A.2.20})$$



$$\frac{Rk}{g} = \frac{1}{2} C_0^2 + kh + \varepsilon^2 E_2 + \varepsilon^4 E_4 + O(\varepsilon^6) . \quad (\text{A.2.21})$$

Coeff.	Expression
$S$	$\cosh^{-1}(2kh)$
$SH$	$\sinh(kh)$
$CTH$	$\coth(kh)$
$TH$	$\tanh(kh)$
$A_{11}$	$SH^{-1}$
$A_{22}$	$\frac{3S^2}{2(1-S)^2}$
$A_{31}$	$\frac{-4-20S+10S^2-13S^3}{8SH(1-S)^3}$
$A_{33}$	$\frac{-2S^2+11S^3}{8SH(1-S)^3}$
$A_{42}$	$\frac{12S-14S^2-264S^3-45S^4-13S^5}{24(1-S)^5}$
$A_{44}$	$\frac{10S^2-174S^4+291S^5+278S^6}{48(3+2S)(1-S)^5}$
$A_{51}$	$\frac{-1184+32S+13232S^2+21712S^3+20940S^4+12554S^5-500S^6-3341S^7-670S^8}{64SH(3+2S)(4+S)(1-S)^6}$
$A_{53}$	$\frac{4S+105S^2+198S^3-1376S^4-1302S^5-117S^6+58S^7}{32SH(3+2S)(1-S)^6}$
$A_{55}$	$\frac{-6S^3+272S^4-1552S^5+852S^6+2029S^7+430S^8}{64SH(3+2S)(4+S)(1-S)^6}$
$B_{22}$	$\frac{CTH(1+2S)}{2(1-S)}$
$B_{31}$	$\frac{-3(1+3S+3S^2+2S^3)}{8(1-S)^3}$
$B_{42}$	$\frac{CTH(6-26S-182S^2-204S^3-25S^4+26S^5)}{6(3+2S)(1-S)^4}$
$B_{44}$	$\frac{CTH(24+92S+122S^2+66S^3+67S^4+34S^5)}{24(3+2S)(1-S)^4}$
$B_{53}$	$\frac{9(132+17S-2216S^2-5897S^3-6292S^4-2687S^5+194S^6+467S^7+82S^8)}{128(3+2S)(4+S)(1-S)^6}$
$B_{55}$	$\frac{5(300+1579S+3176S^2+2949S^3+1188S^4+675S^5+1326S^6+827S^7+130S^8)}{384(3+2S)(4+S)(1-S)^6}$
$C_0$	$TH^{1/2}$
$C_2$	$\frac{TH^{1/2}(2+7S^2)}{4(1-S)^2}$
$C_4$	$\frac{TH^{1/2}(4+32S-116S^2-400S^3-71S^4+146S^5)}{32(1-S)^5}$
$D_2$	$\frac{-CTH^{1/2}}{2}$
$D_4$	$\frac{CTH^{1/2}(2+4S+S^2+2S^3)}{8(1-S)^3}$
$E_2$	$\frac{TH(2+2S+5S^2)}{4(1-S)^2}$
$E_4$	$\frac{TH(8+12S-152S^2-308S^3-42S^4+77S^5)}{32(1-S)^5}$

Πίνακας Α1: Συντελεστές της προσέγγισης Fenton (από Massel 1989)

Οι συντελεστές  $A_{ij}, B_{ij}, C_0, C_i, D_i$  και  $E_i$  μπορούν να παρουσιαστούν ως όροι των υπερβολικών συναρτήσεων  $S = \cosh^{-1}(2kh)$ , οι οποίοι δίνονται παραπάνω στον Πίνακα Α1. (Massel, 1989). Στο ακίνητο σύστημα αναφοράς  $(0, x, z)$ , το δυναμικό της ταχύτητας  $\Phi(x, z, t)$  παίρνει τη μορφή:

$$\Phi(x, z, t) = (C - \bar{C})x + C_0 \left( \frac{g}{k^3} \right)^{1/2} \sum_{i=1}^5 \varepsilon^i \sum_{j=1}^i A_{ij} \cosh[jk(z+h)] \sin[jk(x-Ct)]$$

(A.2.22)

Η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας παίρνει τη μορφή:

$$k\eta(x) = \varepsilon \cos k(x - Ct) + \text{άλλοι όροι της σχέσης (A.2.19)}, \quad (\text{A.2.23})$$

καθώς επίσης για την πίεση έχουμε:

$$\frac{P}{\rho} = R - g(z+h) - \frac{1}{2}[(u-C)^2 + w^2]. \quad (\text{A.2.24})$$

Μέχρι στιγμής, η μέση ταχύτητα του ρευστού  $\bar{C}$  είναι άγνωστη. Για να βρούμε αυτή την τιμή θεωρούμε τρεις περιπτώσεις (Fenton, 1985):

- 1) Αν η ταχύτητα ρεύματος ισούται με 0 (απουσία ρεύματος), τότε  $\bar{C} = C$
- 2) Αν η ταχύτητα ρεύματος είναι  $U$  και είναι στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος, τότε η μέση ταχύτητα του ρευστού κατά Euler δίνεται από:

$$\bar{C} = C - U. \quad (\text{A.2.25})$$

- 3) Σε εργαστηριακά πειράματα, εκτός από τη μέση ταχύτητα του ρευστού, ο όγκος ροής κάτω από τα κύματα είναι γνωστός η υποτίθεται. Σε ένα σύστημα αναφοράς κινούμενο με το κύμα ο ρυθμός ροής όγκου ανά μονάδα επιφάνειας ισούται με  $Q$  (την αρνητική  $-x$  κατεύθυνση). Έτσι, η μέση ταχύτητα μεταφοράς του ρευστού ισούται με  $(-Q/h)$ , και άρα η μέση ταχύτητα μεταφοράς του ρευστού στην κατεύθυνση διάδοσης του κυματισμού ισούται με:

$$C_i = C - \frac{Q}{h}. \quad (\text{A.2.26})$$

### A.1.3. Εφαρμογή και έλεγχος των ορίων της θεωρίας Stokes 1<sup>th</sup> – 5<sup>th</sup> τάξης για διάφορες περιπτώσεις μελέτης

Στη συνέχεια επιλέχθηκαν δύο ζευγάρια τιμών:  $\{\lambda/h, H/h\} = \{(4.3, 0.29), (5.5, 0.55)\}$  σε βάθος οριζόντιου πυθμένα  $h = 7m$  και βαθύ νερό και παρατηρούμε αυτό που περιγράφηκε στη θεωρία, δηλαδή όσο αυξάνει ο λόγος  $H/h$  με πολύ μεγαλύτερη αναλογικά αύξηση (σε σχέση με την κλίμακα) αύξηση του λόγου  $\lambda/h$ , η παράμετρος που χρησιμοποιείται στην ανάπτυξη του δυναμικού ως σειρά διαταραχών  $\varepsilon = \pi H/\lambda$ , αυξάνει από την τιμή 0.21 στην τιμή 0.31 και συνεπώς απαιτούνται όλο και περισσότεροι όροι για να περιγράψουν το πρόβλημα. Αυτό είναι ορατό στα Σχ.Α2 και Α3, όπου απεικονίζεται η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας για κάθε μία από τις 5 τάξεις προσέγγισης Stokes 1  $\rightarrow$  5.

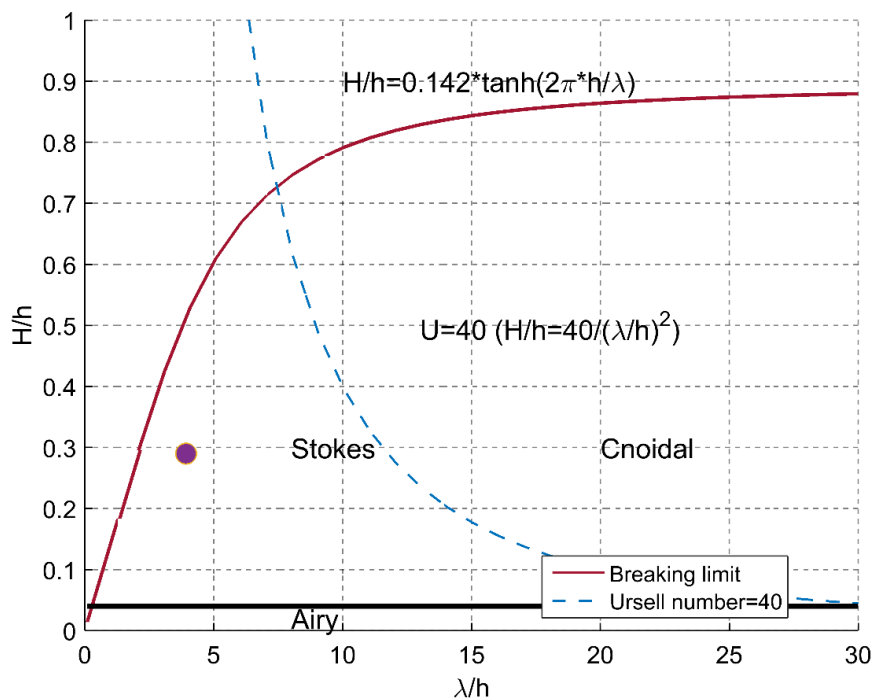
Στην πρώτη περίπτωση  $\{\lambda/h, H/h\} = \{4.3, 0.29\}$  βλέπουμε πλήρη ταύτιση των όρων 3<sup>ης</sup>, 4<sup>ης</sup> και 5<sup>ης</sup> τάξης που σημαίνει ότι η προσέγγιση της συγκεκριμένης περίπτωσης ως ανάπτυγμα διαταραχών τρίτης τάξης μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά το πρόβλημα. Παράλληλα στα Σχ.Α4 απεικονίζεται σε κοινό διάγραμμα η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας ως προσέγγιση 5<sup>ης</sup> τάξης, οι ισοδυναμικές γραμμές και τα πεδία των ταχυτήτων  $u, w$  σε τέσσερις χρονικές στιγμές,  $t = 0, t = T/4, t = 2T/4, t = 3T/4$  ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς  $x-z$  όπου φαίνεται η διάδοση της διαταραχής και η μεταβολή των πεδίων στο χρόνο.

Στη δεύτερη περίπτωση  $\{\lambda/h, H/h\} = (5.5, 0.55)$  βλέπουμε σαφή διαχωρισμό της κάθε τάξης κάτι που είναι αναμενόμενο καθώς η αύξηση της μη γραμμικότητας, δηλαδή του όρου  $H/h$  είναι πολύ μεγάλη, κοντά ακόμα και στο όριο θραύσης του κυματισμού. Από το Σχ.Α6 βλέπουμε ότι η προσέγγιση της συγκεκριμένης περίπτωσης μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά το πρόβλημα μόνο με όρους 5<sup>ης</sup> τάξης.

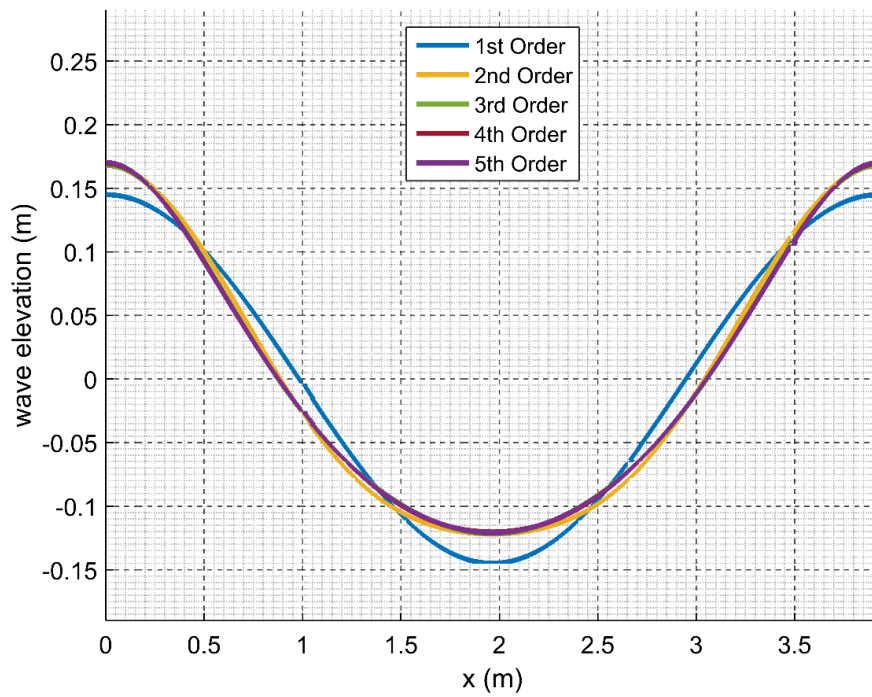
Αυτό που διαπιστώνεται και στις δυο περιπτώσεις και για όλες τις προσεγγίσεις με όρους τάξεων 2  $\rightarrow$  5 με σχέση με γραμμική θεωρία – πρωτοτάξιο πρόβλημα, είναι ότι οι κορυφές του κύματος γίνονται όλο και πιο απότομες και ειδικότερα στον κυματισμού Stokes 5<sup>ης</sup> τάξης όπου η κλίση του κυματισμού στην κορυφή του είναι πολύ μεγαλύτερη συγκριτικά με τις υπόλοιπες προσεγγίσεις, καθώς επίσης ότι οι κοιλίες γίνονται όλο και πιο πλατιές και η επιφάνεια του κύματος καθίσταται πιο ασύμμετρη.

Τέλος μελετήθηκε και μια Τρίτη περίπτωση με  $\{\lambda/h, H/h\} = \{13, 0.45\}$  όπως φαίνεται στο Σχ.Α7 που έχει ως στόχο να δείξει τα όρια της θεωρίας Stokes. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως η θεωρία Stokes δεν έχει καθολική εφαρμογή από το βαθύ έως το ρηχό νερό και διαχωρίζεται από τους κυματισμούς που εμπίπτουν στη θεωρία Cnoidal μέσω του αριθμού Ursell. Στο Σχ.Α8, φαίνεται η αστάθεια της λύσης και η ανάγκη να προσεγγιστεί η λύση μέσω της θεωρίας Cnoidal. Επίσης πρέπει να τονιστεί ότι τα όρια μεταξύ των δύο περιοχών δεν είναι σαφώς διαχωρισμένα, αλλά επιλέχτηκε η τιμή  $U = 40$  που προτείνουν οι Fenton (1990), και Hedges (1995).

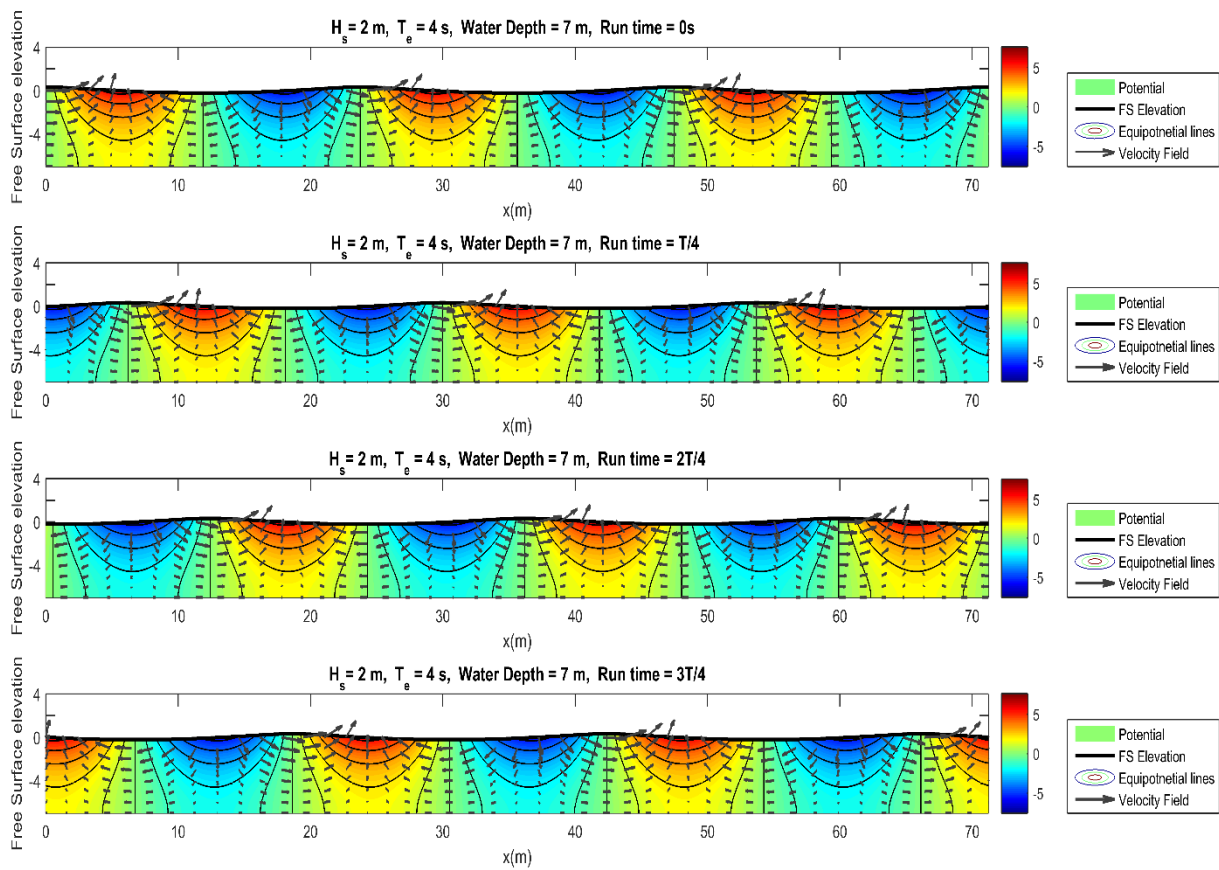
Στα παρακάτω Σχήματα επιλέχτηκε προσεγγιστικά ως άνω φράγμα της γραμμικής θεωρίας (Airy) η τιμή,  $\frac{H}{h} = 0.04$



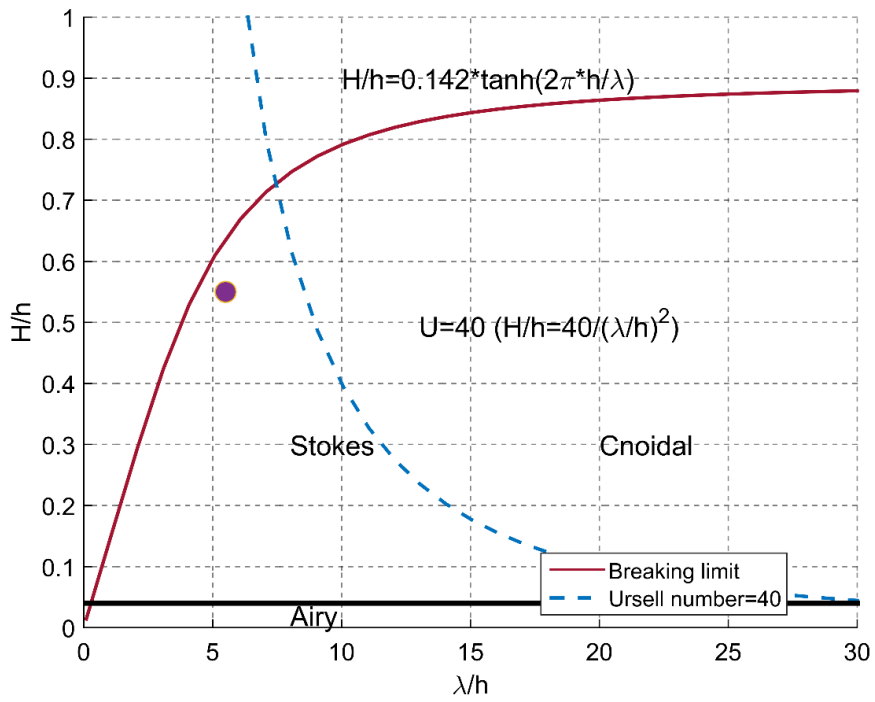
Σχήμα Α2: Απεικόνιση των λόγων  $\lambda/h$ ,  $H/h$  για τη συγκεκριμένη περίπτωση μελέτης



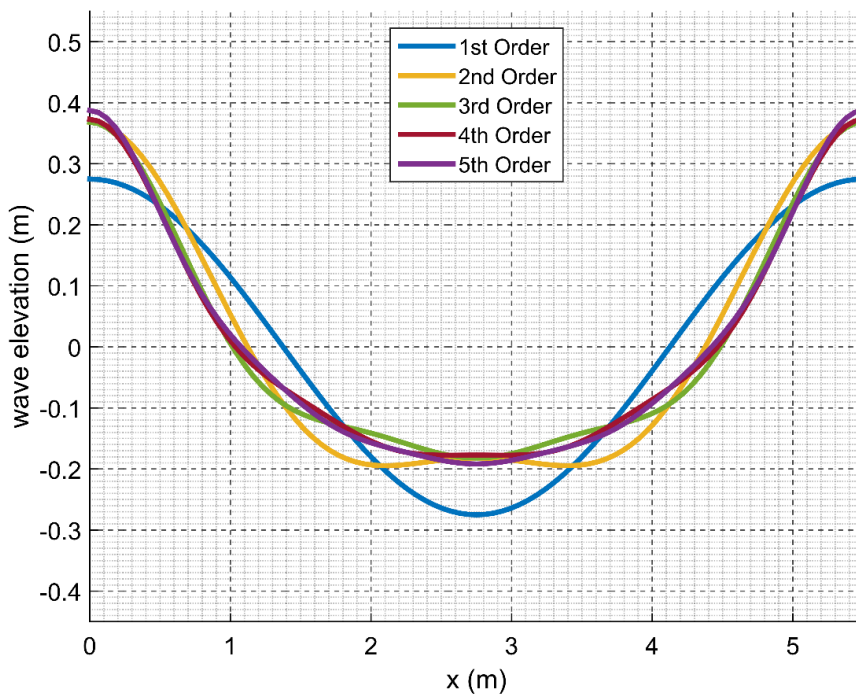
Σχήμα Α3: Απεικόνιση της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορες τάξεις προσέγγισης της θεωρίας Stokes



Σχήμα A4: Απεικόνιση δυναμικού και πεδίου ταχυτήτων με προσέγγιση Stokes πέμπτης τάξης για ύψος κύματος  $H=2\text{m}$  και περίοδο κύματος  $T=4\text{sec}$  σε βάθος οριζόντιου πυθμένα  $h=7\text{m}$ .

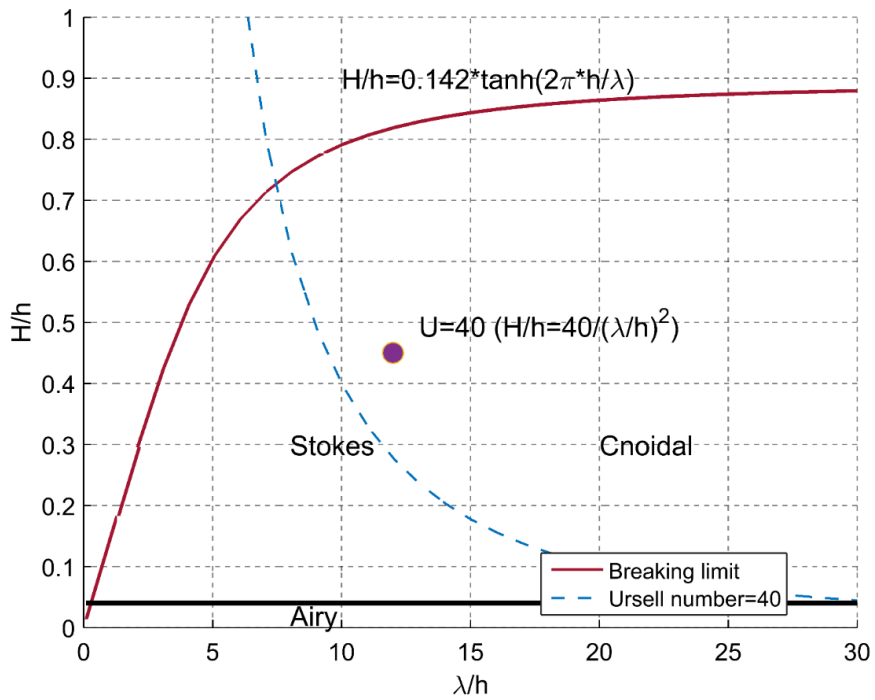


Σχήμα Α5: Απεικόνιση των λόγων  $\lambda/h$ ,  $H/h$  για τη συγκεκριμένη περίπτωση μελέτης

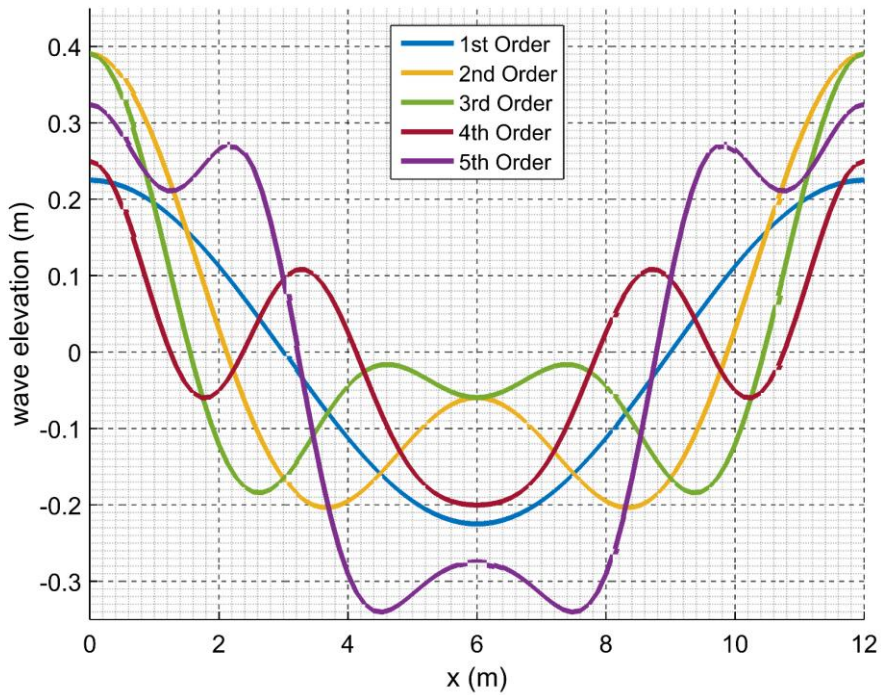


Σχήμα Α6: Απεικόνιση της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορες τάξεις προσέγγισης της θεωρίας Stokes





Σχήμα Α7: Απεικόνιση των λόγων  $\lambda/h$ ,  $H/h$  για τη συγκεκριμένη περίπτωση μελέτης



Σχήμα Α8: Απεικόνιση της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορες τάξεις προσέγγισης της θεωρίας Stokes

## Παράρτημα Β Μη κανονικοί κυματισμοί σε σταθερό βάθος νερού (irregular waves)

Οι κυματισμοί που δημιουργεί η επίδραση του ανέμου στην επιφάνεια της θάλασσας, δεν είναι μονοχρωματικοί (μίας συχνότητας). Η επιφάνεια της θάλασσας μπορεί να προσεγγισθεί με σύνθεση περισσότερων απλών κυματισμών και να αναλυθεί ως στοχαστικό μέγεθος. Οι ανεμογενείς κυματισμοί αποτελούν στοχαστικά μεγέθη των οποίων τα βασικά μεγέθη (ύψος κύματος, περίοδος κύματος) ακολουθούν συγκεκριμένους πιθανολογικούς νόμους κατανομής. Η ανάλυση των καταγραφών των στοχαστικών κυματισμών γίνεται με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο γίνεται στατιστική ανάλυση της κυματικής καταγραφής στο πεδίο του χρόνου. Ο δεύτερος τρόπος ανάλυσης των κυματικών καταγραφών στοχαστικών κυματισμών γίνεται με φασματική ανάλυση της κυματικής καταγραφής στο πεδίο των συχνοτήτων, όπου το φάσμα υπολογίζεται μέσω ανάλυσης Fourier σε πραγματικά δεδομένα που ελήφθησαν απευθείας στο πεδίο της θάλασσας, είτε χρησιμοποιούνται ήδη υπάρχοντα φασματικά μοντέλα. Στην παρούσα διπλωματική έχει επιλεγεί η φασματική ανάλυση της κυματικής καταγραφής μέσω φάσματος JONSWAP.

### Β.1. Περιγραφή της θαλάσσιας επιφάνειας στο πεδίο του χρόνου

Έστω  $\eta(t)$  μια τυχαία καταγραφή της ανύψωσης της θαλάσσιας επιφάνειας. Θεωρούμε ότι η χρονοσειρά  $\eta(t)$  προέρχεται από μια τυχαία και στάσιμη διαδικασία που σημαίνει ότι, τα στατιστικά χαρακτηριστικά της όπως η μέση τιμή, η μέση τετραγωνική τιμή, και η διασπορά δεν μεταβάλλονται με το χρόνο.

$$E(\eta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt \quad , \quad (\text{B.1.1})$$

$$E(\eta^2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta^2(t) dt \quad , \quad (\text{B.1.2})$$

$$\sigma_\eta^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{\eta(t) - \mu\}^2 dt \quad . \quad (\text{B.1.3})$$

Οι ανά  $\Delta t$  χρονικές στιγμές τιμές της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας  $\eta_i$  αποτελούν όπως αναφέρθηκε ένα στοχαστικό μέγεθος του οποίου η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f(\eta)$  ακολουθεί την κανονική κατανομή (Gaussian) με μέση τιμή μηδέν. Αυτό αποδεικνύεται από το κεντρικό οριακό θεώρημα, όπου σύμφωνα με αυτό, το άθροισμα ενός μεγάλου πλήθους ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών (θεωρητικά  $n \rightarrow \infty$ ), οι οποίες δεν ακολουθούν απαραίτητα την κατανομή Gauss, ακολουθεί την κατανομή Gauss. Στη γραμμική θεωρία, η επιφάνεια της θάλασσας μπορεί να θεωρηθεί ως ένα άθροισμα πολλών στατιστικά ανεξάρτητων

αρμονικών κυματισμών και επομένως επαληθεύεται το κεντρικό οριακό θεώρημα. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) της τυχαίας συνεχούς μεταβλητής  $\eta(t)$  εκφράζει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή  $\eta(t)$  να βρίσκεται μέσα σε ένα εύρος τιμών  $\Delta\eta$  και δίνεται από τη σχέση:

$$f(\eta) = \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\eta} P(\eta \leq \eta(t) \leq \eta + \Delta\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} \exp\left(-\frac{\eta}{2\sigma_\eta^2}\right), \text{ για } \bar{\eta} = 0,$$

και σε κανονικοποιημένη μορφή:

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} \exp\left(-\frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{2\sigma_\eta^2}\right). \quad (\text{B.1.4})$$

Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, υπό την παραδοχή της γραμμικότητας, η πραγματική μορφή της ελεύθερης επιφάνειας της μπορεί να προσεγγιστεί ως επαλληλία ενός μεγάλου αθροίσματος ανεξαρτήτων αρμονικών κυματισμών. Υποθέτοντας 2D περιγραφή του κυματικού πεδίου, μια ντετερμινιστική λύση της ελεύθερης επιφάνειας σε ένα δεδομένο σημείο  $x_0$  θα δίνεται από τη σχέση:

$$\eta = \text{Re} \left\{ \sum_{j=1}^N a_j \exp(i\omega_j t + i\phi_j) \right\}. \quad (\text{B.1.5})$$

Η στατιστική κατανομή των υψών κύματος, όπως αυτή αποδείχτηκε από τους Longuet – Higgins (1952) ακολουθεί κατανομή Rayleigh υπό τις προϋποθέσεις ότι:

1) Οι τυχαίοι αριθμοί  $a = \sum_{j=1}^N a_j \cos\phi_j, b = \sum_{j=1}^N a_j \sin\phi_j$  είναι στατιστικά ανεξάρτητοι και ακολουθούν την κανονική κατανομή

2) Οι γωνιακές συχνότητες  $\omega_j$  των τυχαίων κυματισμών είναι ομαδοποιημένες σε μία στενή μπάντα συχνοτήτων (narrow frequency band) γύρω από μια κεντρική συχνότητα  $\omega$  έτσι ώστε ο όρος  $|\omega_j - \omega_j'| / \omega \ll 1$  για καθένα από τα  $j, j'$ .

Υπό τη δεύτερη προϋπόθεση που τέθηκε, η σχέση (Γ.1.5) μπορεί να προσεγγιστεί για το χρονικό διάστημα  $[-\pi / \omega < t < \pi / \omega]$  από τη σχέση:

$$\eta \approx \text{Re} \left\{ \exp(i\omega t) \sum_{j=1}^N a_j \exp(i\phi_j) \right\} \equiv \frac{1}{2} H \text{Re}(\exp(i\omega t + i\phi)), \quad (\text{B.1.6})$$

Όπου  $H = 2\sqrt{a^2 + b^2}$

Από τη στατιστική γνωρίζουμε ότι το μήκος  $X = \sqrt{U^2 + V^2}$  ενός δυσδιάστατου διανύσματος έστω  $Y = (U, V)$ , ακολουθεί κατανομή Rayleigh αν οι συνιστώσες του  $(U, V)$  είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κανονική κατανομή με κέντρο το μηδέν.

Δηλαδή:

$$f_U(x, \sigma) = f_V(x, \sigma) = \frac{e^{-x^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \rightarrow f_X(x, \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, \text{ για } \bar{x} = 0 . \quad (\text{B.1.7})$$

Στην περίπτωση μας, το μήκος του διανύσματος  $X$ , είναι το ύψος κύματος  $H$  και οι συνιστώσες του διανύσματος οι τυχαίοι αριθμοί  $2\alpha, 2\beta$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπό τις προϋποθέσεις που αναφέραμε τα ύψη κύματος  $H_i$  αποτελούν ένα στοχαστικό μέγεθος του οποίου η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) ακολουθεί την κατανομή Rayleigh. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής  $H$ , για γραμμικούς κυματισμούς ( $H = 2a$ ) δίνεται από τη σχέση:

$$f(H) = \frac{H}{4\sigma_\eta^2} \exp\left(-\frac{H^2}{8\sigma_\eta^2}\right). \quad (\text{B.1.8})$$

Η πιθανότητα μη υπέρβασης δίνεται από την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (CDF) και δηλώνει την πιθανότητα το τυχαίο ύψος κύματος  $H$ , να είναι μικρότερο από ένα δεδομένο ύψος κύματος  $H_i$  και δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$F(H) = P(H \leq H_i) = 1 - \exp\left(-\frac{H^2}{8\sigma_\eta^2}\right). \quad (\text{B.1.9})$$

### B.1.1. Στατιστικός προσδιορισμός των κυματικών παραμέτρων

Ορίζουμε ορίσουμε τη μέση τετραγωνική τιμή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας ως:

$$H_{rms} = \sqrt{(\bar{\eta}^2)} , \quad (B.1.1.1)$$

τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των υψών κύματος γράφεται ως:

$$f(H) = \frac{2H}{H_{rms}^2} \exp \left[ - \left( \frac{H}{H_{rms}} \right)^2 \right] . \quad (B.1.1.2)$$

Το μέσο στατιστικό ύψος με χρήση της Rayleigh PDF υπολογίζεται από τη ως:

$$\bar{H} = \frac{\int_0^{\infty} Hf(H)dH}{\int_0^{\infty} f(H)dH} = \int_0^{\infty} \frac{2H^2}{H_{rms}^2} \exp \left[ - \left( \frac{H}{H_{rms}} \right)^2 \right] dH = \frac{\sqrt{\pi}}{2} H_{rms} . \quad (B.1.1.3)$$

Το σημαντικό ύψος κύματος  $H_s$  που ορίζεται ως ο μέσος όρος του 33% των μεγαλύτερων υψών κύματος δίνεται από:

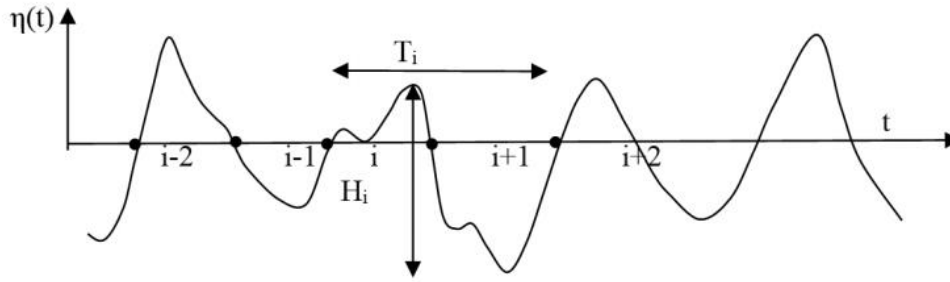
$$H_s = H_{1/3} = \frac{\int_{\hat{H}_{1/3}}^{\infty} Hf(H)dH}{\int_{\hat{H}_{1/3}}^{\infty} f(H)dH} = 1.416H_{rms} . \quad (B.1.1.4)$$

Τέλος, ο μέσος όρος του 10% των μεγαλύτερων υψών κύματος δίνεται από:

$$H_{1/10} = \frac{\int_{\hat{H}_{1/10}}^{\infty} Hf(H)dH}{\int_{\hat{H}_{1/10}}^{\infty} f(H)dH} = 1.80H_{rms} \quad (B.1.1.5)$$

### B.1.2. Προσδιορισμός των κυματικών παραμέτρων με τη μέθοδο zero down – crossing

Για το στατιστικό προσδιορισμό των κυματικών παραμέτρων, η ανάλυση ξεκινάει με τον προσδιορισμό των επιμέρους διαδοχικών κυματισμών. Κάθε «κύμα» της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας ορίζεται μεταξύ γειτονικών σημείων μηδενικής προς τα πάνω διάβασης (zero up - crossing), είτε μηδενικής και προς τα κάτω διάβασης (zero down – crossing) και ως περίοδος  $T_i$  του συγκεκριμένου κύματος, το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο «ορίζεται» αυτό το κύμα. Ως ύψος κύματος  $H_i$  ορίζεται η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ της κορυφής και της κοιλίας του κύματος στην περίοδο αυτή. Σύμφωνα με τη σύσταση της PIANK (Permanent International Association of Navigation Congress) χρησιμοποιείται η μέθοδος του κάτω μηδενισμού



Σχήμα Β1: Προσδιορισμός περιόδων  $T_i$  και υψών κύματος  $H_i$  στη χρονοσειρά  $\eta(t)$  (από Massel 2017)

Τα διάφορα ύψη  $N$  της καταγραφής  $\eta(t)$  που προσδιορίστηκαν με τη μέθοδο Zero down crossing ταξινομούνται σε φθίνουσα σειρά και έτσι προκύπτει το  $H_{\max}, H_{\min}$

Το μέσο στατιστικό ύψος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$H_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_i, \quad (\text{B.1.2.1})$$

ομοίως η μέση στατιστική περίοδος:

$$T_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i. \quad (\text{B.1.2.2})$$

Η σημαντικότερη στατιστική κυματική παράμετρος είναι το σημαντικό ύψος κύματος  $H_s$  που ορίζεται ως ο μέσος όρος του 33% των μεγαλύτερων υψών κύματος:

$$H_s = \frac{N}{3} \sum_{i=1}^{N/3} H_i. \quad (\text{B.1.2.3})$$

Αντίστοιχα η χαρακτηριστική περίοδος δίνεται από τη σχέση:

$$T_s = \frac{N}{3} \sum_{i=1}^{N/3} T_i. \quad (\text{B.1.2.4})$$

## B.2. Περιγραφή της θαλάσσιας επιφάνειας στο πεδίο των συχνοτήτων – Φασματική ανάλυση κυματισμών

Όπως αποδείχτηκε και παραπάνω, στη γραμμική θεωρία, η πραγματική μορφή της ελεύθερης επιφάνειας της όπως αναφέρθηκε μπορεί να προσεγγιστεί ως επαλληλία ανεξάρτητων αρμονικών κυματισμών. Υποθέτοντας 2D περιγραφή του κυματικού πεδίου, μια ντετερμινιστική λύση της ελεύθερης επιφάνειας θα δίνεται από τη Σχέση:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} H \operatorname{Re} \left\{ \exp(i\omega t - kx + i\varphi) \right\} = \sum_i^N a_i \cos(\omega_i t - k_i x + \varphi_i), \quad (\text{B.2.1})$$

όπου:

- $a_i$  : το πλάτος της  $i^{\text{th}}$  συνιστώσας
- $\omega_i^2 = gk_i \tanh(k_i h)$  : η εξίσωση διασποράς που προβλέπεται από τη γραμμική θεωρία κυματισμών
- $\varphi_i$  : η τυχαία φάση της  $i^{\text{th}}$  συνιστώσας ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα  $[0, 2\pi]$

Κάθε χρονοσειρά  $\eta(t)$  της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας μπορεί να περιγραφεί στο πεδίο των συχνοτήτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier (Fourier integral transform):

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) e^{-i\omega t} dt \quad . \quad (\text{B.2.2})$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $R(\tau)$  της χρονοσειράς  $\eta(t)$  δίνει πληροφορίες για τη φύση της στοχαστικής διαδικασίας που περιγράφει την εξέλιξη της χρονοσειράς και μετράει τη συσχέτιση μεταβλητών της  $\{\eta_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$  που βρίσκονται σε χρονική υστέρηση  $\tau$  και ορίζεται ως:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) \eta(t+\tau) dt = \{ \langle \eta(t) \eta(t+\tau) \rangle \},$$

δηλαδή:

$$R(T) = \{ \langle \eta(t) \eta(t+T) \rangle \}, \quad (\text{B.2.3})$$

και επιπλέον δείχνει ποια είναι η μέση τιμή του γινομένου της μετατόπισης της ελεύθερης επιφάνειας στον χρόνο  $t$  και στο χρόνο  $t+T$ . Αυτή η μέση τιμή εξαρτάται από την περίοδο  $T$ , γι' αυτό και συνάρτηση του  $T$

### B.2.1. Η σχέση μεταξύ διακύμανσης της ελεύθερης επιφάνειας και του φάσματος.

Θα αποδείξουμε ότι

$$\langle \eta^2(t) \rangle = \int_0^\infty E(\omega) d\omega .$$

Από τη σχέση (B.2.1) για την  $\eta(t)$  παίρνουμε:

$$\langle \eta^2(t) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) \cos(\omega_j t + \varepsilon_j) \right\rangle ,$$

η οποία ξαναγράφεται ως:

$$\langle \eta^2(t) \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \langle \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) \cos(\omega_j t + \varepsilon_j) \rangle \right\} . \quad (\text{B.2.1.1})$$

Έτσι έχουμε:

$$\langle \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) \cos(\omega_j t + \varepsilon_j) \rangle = \begin{cases} = 1/2, i = j \\ = 0, i \neq j \end{cases} , \quad (\text{B.2.1.2})$$

δεδομένου ότι  $\omega_i \neq \omega_j$  αν  $i \neq j$ . Συνεπώς η σχέση (B.2.1.1) καταλήγει στην:

$$\langle \eta^2(t) \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} a_i^2 \right\} , \quad (\text{B.2.1.3})$$

η οποία ολοκληρώνει την απόδειξη.

### B.2.2. Σχέση μεταξύ συνάρτησης αυτοσυσχέτισης και φάσματος

$$\text{Θα αποδείξουμε ότι } R(T) = \int_0^\infty E(\omega) \cos(\omega T) d\omega$$

Για να φτάσουμε σε αυτή τη σχέση ξεκινάμε από τον ορισμό της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης που δόθηκε στη σχέση (B.2.3), και τη σχέση (B.2.1) για το  $\eta(t)$ . Το αποτέλεσμα είναι:

$$R(T) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \left\{ \langle \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) \cos(\omega_j (t+T) + \varepsilon_j) \rangle \right\} , \quad (\text{B.2.2.1})$$

όπου η σειρά του χρονικού μέσου και του αθροίσματος έχουν αντιστραφεί. Στη συνέχεια αναπτύσσοντας την ταυτότητα του αθροίσματος στο δεύτερο συνημίτονο παίρνουμε

$$R(T) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \left\{ \cos(\omega_j T) \langle \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) \cos(\omega_j t + \varepsilon_j) \rangle \right\}$$



$$-\sin(\omega_j T) \left\{ \langle \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) \sin(\omega_j t + \varepsilon_j) \rangle \right\}. \quad (\text{B.2.2.2})$$

Εδώ ο πρώτος χρονικός μέσος δίνεται από την (B.2.1.3), ενώ ο δεύτερος χρονικός μέσος είναι μηδέν οποιαδήποτε και να είναι τα  $i, j$  και έτσι:

$$R(T) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} a_i^2 \cos(\omega_i T). \quad (\text{B.2.2.3})$$

Στο δεξί μέλος της εξίσωσης (B.2.2.3), η συνεισφορά των όρων των οποίων η συχνότητα  $\omega_i$  είναι μεταξύ του διαστήματος  $\omega - \delta\omega/2 < \omega_i < \omega + \delta\omega/2$  στον όρο

$$\sum_{i=1}^N a_i^2 \cos(\omega_i T) \text{ είναι:}$$

$$\cos(\omega T) \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} a_i^2 = \cos(\omega T) E(\omega) \delta\omega, \quad (\text{B.2.2.4})$$

και έτσι προκύπτει τελικά ότι:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} a_i^2 \cos(\omega_i T) = \int_0^\infty E(\omega) \cos(\omega T) d\omega. \quad (\text{B.2.2.5})$$

Στα πλαίσια των επιφανειακών κυματισμών, ο μετασχηματισμός Fourier (Fourier transform) της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της επιφανειακής ανύψωσης ορίζει τη συνάρτηση φασματικής πυκνότητας (Spectral density function) της διακύμανσης της ελεύθερης επιφάνειας, η απλά το φάσμα συχνοτήτων  $S(\omega)$  (Spectral).

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (\text{B.2.2.6})$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier έχουμε:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (\text{B.2.2.7})$$

όμως:

$$\sigma_\eta^2 = R(\tau=0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega, \quad (\text{B.2.2.8})$$

- Επομένως το φάσμα ορίζει τη διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας στο πεδίο των συχνοτήτων
- Παράλληλα, το  $\sigma_\eta^2$  εξαρτάται από την κυματική ενέργεια και έτσι το φάσμα υποδεικνύει την κατανομή της ενέργειας στις διάφορες συχνοτήτες ( $\omega$ )

Το φάσμα  $S(\omega)$  είναι μια πραγματική και άρτια συνάρτηση του  $(\omega)$ , και επομένως αντιπροσωπεύει ένα φάσμα με δύο πλευρές. Στην πράξη όμως, χρησιμοποιείται ένα φάσμα μιας πλευράς  $G(\omega)$  όπου:

$$\begin{cases} G(\omega) = 2S(\omega), \omega > 0 \\ G(\omega) = 0, \omega < 0 \end{cases}$$

Έτσι έχουμε:

$$\sigma_n^2 = R(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega . \quad (\text{B.2.2.9})$$

### B.2.3. Προσδιορισμός κυματικών παραμέτρων μέσω φασματικής ανάλυσης

Οι διάφορες ροπές  $n$  τάξης του φάσματος ( $m_n$ ) ορίζονται ως:

$$m_n = \int_0^{\infty} \omega^n S(\omega) d\omega \quad (\text{B.2.3.1})$$

Η ροπή μηδενικής τάξης  $m_0$  ισούται με την διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας στο πεδίο των συχνοτήτων – την ολική ενέργεια που υπολογίζεται ως το ολοκλήρωμα του φάσματος

$$E = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = \sigma_n^2 = m_0 . \quad (\text{B.2.3.2})$$

Οι πρώτες φασματικές ροπές είναι εξέχουσας σημασίας για τη φασματική περιγραφή των θαλάσσιων κυματισμών. Συγκεκριμένα, η πρώτη ροπή  $m_1$  ορίζει την κύρια συχνότητα του κυματισμού – την κύρια περίοδο του κυματισμού:

$$\bar{\omega} = \frac{m_1}{m_0} \text{ και } \bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} . \quad (\text{B.2.3.3})$$

Η μέση μετρούμενη περίοδος κύματος υπολογίζεται από:

$$T_Z = \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} . \quad (\text{B.2.3.4})$$

Παράλληλα με τις φασματικές ροπές, χρησιμοποιούνται επίσης οι κεντρικές φασματικές ροπές οι οποίες ορίζονται ως:

$$\tilde{m}_n = \int_0^{\infty} (\omega - \bar{\omega})^n S(\omega) d\omega , \quad (\text{B.2.3.5})$$

έτσι:

$$\tilde{m}_0 = m_0, \tilde{m}_1 = m_1 - \bar{\omega}m_0 = 0, \tilde{m}_2 = m_2 - \frac{m_1^2}{m_0} . \quad (\text{B.2.3.6})$$

Η κεντρική φασματική ροπή  $\tilde{m}_2$  είναι ένα μέγεθος που δείχνει τη συγκέντρωση της φασματικής κυματικής ενέργειας γύρω από της κύρια συχνότητα  $\bar{\omega}$ . Αν κανονικοποιήσουμε τον όρο  $\tilde{m}_2$  με το γινόμενο  $(\bar{\omega}^2 m_0)$ , τότε παίρνουμε την αδιάστατη παράμετρο που ορίζει το εύρος του φάσματος ως:

$$V^2 = \frac{\tilde{m}_2}{\bar{\omega}^2 m_0} = \frac{m_0 m_2}{m_1^2} - 1 . \quad (\text{B.2.3.7})$$

Η εξίσωση (B.2.3.7) δείχνει ότι όταν όλη η κυματική ενέργεια είναι συγκεντρωμένη σε μόνο μία συχνότητα  $\omega = \bar{\omega}$ , τότε  $V^2 \rightarrow 0$ . Αντίθετα, όταν η ενέργεια είναι κατανεμημένη μεταξύ των συχνοτήτων, τότε το  $V^2$  αυξάνει.

Για φάσματα κυματισμών μικρού εύρους τα ύψη των οποίων ακολουθούν κατανομή Rayleigh όπως είδαμε παραπάνω στην εργασία ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

Το σημαντικό ύψος κύματος υπολογίζεται ως:

$$H_s = 4\sqrt{\int_0^\infty S(\omega)d\omega} = 4E^{0.5} = 4\sigma_\eta = 4m_o . \quad (\text{B.2.3.8})$$

Η περίοδος της μέγιστης ενέργειας συναρτήσει της μέσης μετρούμενης είναι:

$$T_p = \left(\frac{5}{4}\pi\right)^{1/3} T_z . \quad (\text{B.2.3.9})$$

#### **B.2.4. Σχέση μεταξύ ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας και φάσματος για σταθερό dω**

Η πυκνότητα ενέργειας της κάθε αρμονικής συνιστώσας (ανηγμένη ως προς  $\rho g$ ) δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\bar{E}_i}{\rho g} = \frac{1}{2} a_i^2 . \quad (\text{B.2.4.1})$$

Θεωρούμε ότι αυτή η ενέργεια αντιστοιχεί σε σταθερή μπάνα συχνοτήτων  $d\omega = \left[ \omega_i - \frac{d\omega}{2}, \omega_i + \frac{d\omega}{2} \right]$  γύρω από την κεντρική συχνότητα  $\omega_i$

Το ποσοστό της συνολικής διακύμανσης σχετιζόμενη σε μια μπάνα συχνοτήτων  $d\omega$  γύρω από την κεντρική συχνότητα  $\omega_i$  ισούται με:

$$\sigma_\eta^2(\omega_i) = \bar{E}_i = S(\omega_i)d\omega = \frac{1}{2} a_i^2 \rightarrow a_i = \sqrt{2S(\omega_i)d\omega} , \quad (\text{B.2.4.2})$$

όπου συμβολίζουμε τελικά ως  $S(\omega)$  το φάσμα μίας πλευράς.

Επομένως:

$$\eta(x,t) = \sum_i^N \sqrt{2S(\omega_i)d\omega} \cos(\omega_i t - k_i x + \varphi_i) . \quad (\text{B.2.4.3})$$

### **B.2.5. Σχέση μεταξύ ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας και φάσματος για σταθερή πυκνότητα ενέργειας**

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι η συνολική ενέργεια του φάσματος ισομοιράζεται μεταξύ των αρμονικών που συντεθούνε το φάσμα, όποτε το πλάτος κάθε αρμονικής συνιστώσας σε αυτή την περίπτωση διατηρείται σταθερό ενώ η γωνιακή συχνότητα  $\omega$  μεταβάλλεται ως συνάρτηση του φάσματος  $\omega = \omega(S)$

Είδαμε ότι η συνολική ενέργεια του φάσματος υπολογίζεται ως:

$$E = m_o = \int_0^\infty S(\omega)d\omega , \quad (\text{B.2.5.1})$$

και συνδέεται με το σημαντικό ύψος κύματος μέσω της σχέσης:

$$H_s = 4\sqrt{m_o} \quad (\text{B.2.5.2})$$

Συνεπώς για τη θεώρηση σταθερής πυκνότητας ενέργειας μεταξύ των αρμονικών έστω  $N$  στο πλήθος έχουμε:

$$\frac{1}{2} A^2 = \frac{m_o}{N} = \frac{H_s^2}{16N} \rightarrow A = \frac{H_s}{2\sqrt{2N}} , \quad (\text{B.2.5.3})$$

και η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\eta(x,t) = A \sum_{i=1}^N \cos(k(\omega_i)x - \omega_i t + \varepsilon_i) . \quad (\text{B.2.5.4})$$

Για τον προσδιορισμό της αντίστροφης συνάρτησης  $\omega = \omega(S)$ , ακολουθείται η εξής διαδικασία:

Αρχικά κανονικοποιούμε τη συνάρτηση του φάσματος διαιρώντας τη με τη συνολική ενέργεια:

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{S(\omega)}{m_o} . \quad (\text{B.2.5.5})$$

Πλέον ολοκληρώνοντας την  $\tilde{S}(\omega)$  προκύπτει η αθροιστική συνάρτηση  $F(\omega)$  με πεδίο τιμών το σύνολο  $F(A) = [0,1]$ , όπου  $A$  το κοινό πεδίο ορισμού των  $S, \tilde{S}, F$

Διατρέχοντας το πεδίο τιμών της  $F$ ,  $F(A)$  με σταθερό βήμα  $dy = [1-0]/N$ , σε κάθε κεντρική τιμή αυτής της κλάσης  $y_i = (i-0.5)/N, i=1,2,\dots,N$  προσδιορίζουμε το  $\omega_i$  έτσι ώστε:

$$F(\omega_i) = y_i, i=1,2,\dots,N$$

### B.2.6. Σειρές Fourier και γραμμικό φάσμα κυματισμών

Αν θεωρήσουμε περιττό αριθμό  $n$  δεδομένων  $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  τα οποία καταγράφηκαν ανά χρονικό διάστημα δειγματοληψίας  $\Delta t_{\text{samp}}$ , δηλαδή τις χρονικές στιγμές:

$$t_1 = 0, t_2 = \Delta t_{\text{samp}} \dots t_n = (n-1)\Delta t_{\text{samp}}$$

Η συνάρτηση

$$\eta_F(t) = \sum_{i=1}^N \left\{ \alpha_i' \cos(\omega_i t) + \alpha_i'' \sin(\omega_i t) \right\}, \quad (\text{B.2.6.1})$$

με

$$N = (n-1)/2, \quad \omega_i = \frac{2\pi}{\Delta t_{\text{samp}}} \frac{i}{n}, \quad \alpha_i' = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \eta_j \cos(\omega_i t_j), \quad \alpha_i'' = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \eta_j \sin(\omega_i t_j),$$

για την οποία ισχύει:

$$\eta_F(t_1) = \eta_1, \quad \eta_F(t_2) = \eta_2, \dots, \quad \eta_F(t_n) = \eta_n,$$

είναι σειρά Fourier, η οποία είναι περιοδική με περίοδο  $T_F = n\Delta t_{\text{samp}}$ :

$$\eta_F(t + T_F) = \eta_F(t).$$

Η σειρά μπορεί επίσης να γραφτεί στη μορφή:

$$\eta_F(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cos(\omega_i t + \varepsilon_i), \quad (\text{B.2.6.2})$$

όπου τα  $a_i, \varepsilon_i$  σχετίζονται με τα  $\alpha_i', \alpha_i''$  μέσω τις τριγωνομετρικής ταυτότητας:

$$\cos(\omega_i t + \varepsilon_i) = \cos(\omega_i t) \cos \varepsilon_i - \sin(\omega_i t) \sin \varepsilon_i.$$

Το φάσμα  $E_F(\omega)$  της συνάρτησης  $\eta_F(t)$  αποτελείται από μια ακολουθία συναρτήσεων δέλτα (Dirac), δηλαδή:

$$E_F(\omega) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \delta(\omega - \omega_i), \quad (\text{B.2.6.3})$$

και είναι ένα γραμμικό φάσμα του οποίου το γράφημα είναι μια ακολουθία κατακόρυφων βελών με ύψος  $(1/2)\alpha_i^2$  στις συχνότητες  $\omega_i$ .

Το γεγονός ότι η  $\eta_F(t)$  είναι περιοδική με περίοδο  $T_F$  δηλώνει ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $R_F(T)$  θα είναι περιοδική με περίοδο  $T_F$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $R_F(T)$  σχετίζεται με των συντελεστών Fourier  $\alpha_i, \omega_i$  από τη σχέση:

$$R_F(T) = \{ \langle \eta_F(t) \eta_F(t+T) \rangle \} = \{ \langle \eta_F(t) \eta_F(t+T+T_F) \rangle \} = R_F(T+T_F). \quad (\text{B.2.6.4})$$

### B.3. Φασματικά μοντέλα ενέργειας

Τα φασματικά μοντέλα είναι εμπειρικές εκφράσεις που χρησιμεύουν στην πρόγνωση πραγματικών κυμάτων όταν δεν υπάρχουν δεδομένα μετρήσεων, ή τροποποιούνται κατάλληλα για να εφαρμοσθούν σε συγκεκριμένα δεδομένα. Στα βαθιά νερά, η επίδραση του πυθμένα στη θαλάσσια επιφάνεια είναι μηδενική και το φάσμα είναι συνάρτηση μόνο των πνεόντων ανέμων και του αναπτύγματος πελάγους.

Το φάσμα Pierson-Moskowitz (P-M) και το φάσμα JONSWAP εφαρμόζονται συχνά για ανεμογενείς κυματισμούς. Το φάσμα P-M αρχικά προτάθηκε για πλήρως αναπτυγμένη θαλάσσια διαταραχή, όπου η διάρκεια πνοής του ανέμου και το μήκος αναπτύγματος πελάγους είναι απεριόριστα. Το φάσμα JONSWAP αποτελεί επέκταση του φάσματος P-M προς τις μερικά αναπτυγμένες θαλάσσιες διαταραχές συμπεριλαμβάνοντας την παράμετρο του αναπτύγματος πελάγους. Και τα δύο φάσματα περιγράφουν κυματικές συνθήκες που συναντώνται συχνά σε δριμύτατες θαλασσοταραχές και εκφράζουν την κατανομή της φασματικής ενέργειας συναρτήσει της συχνότητας. Η μέγιστη πυκνότητα ενέργειας βρίσκεται στη συχνότητα αιχμής ( $f_p$ ) και περιγράφει τη σταθερή κατάσταση διαταραχής, που βρίσκεται στις υψηλότερες συχνότητες σε σχέση με το μέγιστο του φάσματος. Στην περιοχή ισορροπίας το φάσμα είναι πλήρως αναπτυγμένο. Τα φάσματα P-M και JONSWAP υιοθετούν τον εκθέτη  $-5$  ( $\omega^{-5}$ ) στις υψηλές συχνότητες, το οποίο έχει επιβεβαιωθεί από πειραματικά αποτελέσματα και προσεγγίζει τη θεωρητική τιμή  $-4$  του εκθέτη ( $\omega^{-4}$ ).

#### B.3.1. Φάσμα Pierson – Moskowitz

Για το σχήμα και την ενέργεια του φάσματος στα βαθιά νερά, ο Phillips (1958) διατύπωσε ότι υπάρχει μία περιοχή του φάσματος στα βαθιά νερά, στην οποία η ενεργειακή πυκνότητα στην κορυφή οροθετείται από την ακόλουθη έκφραση:

$$S_p(f) = \frac{ag^2}{f^5(2\pi)^4}, \quad (\text{B.3.1.1})$$

όπου  $a = 8,1 \times 10^{-3}$  είναι η σταθερά του Phillips. Το όριο αυτό δείχνει ότι οποιαδήποτε προσθήκη ενέργειας στη συχνότητα αιχμής του φάσματος έχει ως αποτέλεσμα τη θραύση του κυματισμού και την μεταφορά ενέργειας μέσω της διάδοσης των κυμάτων. Οι Pierson - Moskowitz (1964), χρησιμοποιώντας τη διατύπωση του Phillips, πρότειναν μία εξίσωση για τη συνάρτηση πυκνότητας του φάσματος για πλήρως αναπτυγμένη θάλασσα. Δηλαδή, με την παραδοχή ότι ο άνεμος πνέει με σταθερή ταχύτητα σε μία απεριόριστη έκταση για μεγάλο χρονικό διάστημα, οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι η γένεση των κυματισμών έρχεται σε ισορροπία με τον άνεμο. Η εξίσωση των P-M :

$$S_{PM}(f) = S_p(f) \varphi_{PM} \left( \frac{f}{f_p} \right), \quad (\text{B.3.1.2})$$

$$\text{όπου } \varphi_{PM} = \exp \left[ \left( \frac{-5}{4} \right) \left( \frac{f}{f_p} \right)^{-4} \right], \quad (\text{B.3.1.3})$$

και  $f_p$  (Hz) η συχνότητα αιχμής του φάσματος.

Ισοδύναμα, η συνάρτηση πυκνότητας για το φάσμα P – M συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας  $\omega$ , διατυπώνεται ως εξής:

$$S_{PM}(\omega) = \frac{1.25}{4} H_s^2 \frac{\omega_p^4}{\omega^5} \exp \left[ -1.25 \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^{-4} \right], \quad (\text{B.3.1.4})$$

όπου η γωνιακή συχνότητα αιχμής ισούται με  $\omega_p = 2\pi / T_p$ ,

και συναρτήσει της συχνότητας:

$$S_{PM}(f) = 2\pi S_{PM}(\omega). \quad (\text{B.3.1.5})$$

Η περίοδος αιχμής του φάσματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T_p = 0.785 U_{10}, \quad (\text{B.3.1.6})$$

όπου  $U_{10}$  η ταχύτητα του ανέμου σε υψόμετρο 10 μέτρα πάνω από τη στάθμη της θάλασσας για διάρκεια πνοής μία ώρα.

Τέλος, το σημαντικό ύψος κύματος προκύπτει ως:

$$H_s = 4 \left( \int_0^\infty S_{PM}(\omega) d\omega \right)^{0.5} = 2.47 U_{10}^2 10^{-2}. \quad (\text{B.3.1.5})$$

### B.3.2. Φάσμα JONSWAP

Μειονέκτημα του φάσματος P-M είναι ότι για ισχυρότερους ανέμους η ταχύτητα δεν παραμένει σταθερή για μεγάλο χρονικό διάστημα, συνεπώς η παραδοχή των P-M για σταθερή ταχύτητα πνοής ανέμου στην καταρρίπτεται. Επίσης, το ανάπτυγμα πελάγους πολλές φορές δεν είναι αρκετό για να αναπτυχθεί πλήρως η κυματική διαταραχή. Για αυτό το λόγο, το φάσμα JONSWAP το οποίο προτάθηκε από τους Hasselmann et al. 1973 με βάση τα δεδομένα από το Joint North Sea Wave Program (JONSWAP) του 1969 στα δυτικά των ακτών της Δανίας, είναι σήμερα το πιο ευρέως διαδεδομένο και χρησιμοποιούμενο φάσμα στα βαθιά νερά. Σχηματίζεται επεκτείνοντας το φάσμα ενέργειας P-M για αναπτυσσόμενη θαλάσσια διαταραχή σε συνθήκες περιορισμένου αναπτύγματος πελάγους (fetch-limited), σε συνάρτηση με τη γωνιακή συχνότητα, ως εξής:

$$S(\omega) = A_\gamma S_{PM}(\omega) \gamma^{\exp \left( -0.5 \left( \frac{\omega - \omega_p}{\epsilon \omega_p} \right)^2 \right)}, \quad (\text{B.3.2.1})$$

όπου  $A_\gamma$  ένας παράγοντας σταθεροποίησης που ισούται με  $A_\gamma = 1 - 0.287 \ln(\gamma)$ , με  $\gamma$  να είναι η αδιάστατη παράμετρος σχήματος κορυφής του φάσματος με μέση τιμή 3,3 ( $1 \leq \gamma \leq 7$ ) και  $\varepsilon$  η παράμετρος εύρους του φάσματος με τιμές:

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_a = 0.07, \omega \leq \omega_p \\ \varepsilon_b = 0.09, \omega > \omega_p \end{cases}.$$

Σύμφωνα με τη διατύπωση του Phillips η συνάρτηση πυκνότητας για το φάσμα JONSWAP μπορεί να λάβει την ισοδύναμη μορφή:

$$S(f) = S_{PM}(f) \Phi(f, f_p, \gamma, \varepsilon_a, \varepsilon_b), \quad (\text{B.3.2.2})$$

$$\text{όπου } \Phi_f = \gamma^{\exp\left(-0.5\left(\frac{f-f_p}{\varepsilon f_p}\right)^2\right)}$$

Τα χαρακτηριστικά του φάσματος JONSWAP υπολογίζονται συναρτήσει των πνεόντων ανέμων και του αναπτύγματος πελάγους από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$T_p = 0.605 X^{0.33} U_{10}^{0.34}, \quad (\text{B.3.2.3})$$

$$H_s = 2.013 U_{10}^{0.90} X^{0.55} 10^{-2}, \quad (\text{B.3.2.4})$$

όπου,  $X$  είναι το ανάπτυγμα πελάγους μετρούμενο σε χιλιόμετρα (km). Επιπλέον, η μέση μετρούμενη ( $T_z$ ) και η μέση στατιστική περίοδος κύματος ( $T_m$ ) μπορούν να υπολογιστούν συναρτήσει της περιόδου αιχμής ( $T_p$ ) από τις ακόλουθες προσεγγιστικές σχέσεις ( $1 \leq \gamma \leq 7$ ):

$$\frac{T_z}{T_p} = 0.6673 + 0.05037\gamma - 0.006230\gamma^2 + 0.0003341\gamma^3, \quad (\text{B.3.2.5})$$

$$\frac{T_m}{T_p} = 0.7303 + 0.04936\gamma - 0.006556\gamma^2 + 0.0003610\gamma^3, \quad (\text{B.3.2.6})$$

Αν η παράμετρος  $\gamma$  δεν είναι γνωστή, η τιμή της μπορεί να προσδιοριστεί από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\gamma = 5, \text{ αν } \frac{T_p}{\sqrt{H_s}} \leq 3.6$$

$$\gamma = \exp\left(5.75 - \frac{1.15T_p}{\sqrt{H_s}}\right), \text{ αν } 3.6 < \frac{T_p}{\sqrt{H_s}} < 5$$



## Παράρτημα Γ Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform)

Έστω  $h(t)$  μια διακριτή συνάρτηση οι τιμές της οποίας λαμβάνονται δειγματοληπτικά σε ομοιόμορφα χρονικά διαστήματα και έστω ότι συμβολίζουμε με  $\Delta$  το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μετρήσεων. Το κλάσμα  $\frac{1}{\Delta}$  ονομάζεται ρυθμός δειγματοληψίας (sampling rate) και δείχνει τον αριθμό των δειγμάτων που λαμβάνεται ανά δευτερόλεπτο.

Για κάθε χρονικό διάστημα  $\Delta$ , υπάρχει μια ειδική συχνότητα  $f_c$ , η οποία αναφέρεται ως Nyquist critical frequency, και δίνεται από τη σχέση  $f_c = 1/2\Delta$  και έχει την εξής ιδιότητα: Αν σε ένα κύμα ημιτόνου, συχνότητας  $f_c$  γίνει δειγματοληψία σε κορυφή, τότε το επόμενο δείγμα θα είναι σε κοιλία, το επόμενο από αυτό σε κορυφή, και πάει λέγοντας. Η ίδια πρόταση εκφράζεται και ως εξής: Ο κρίσιμος αριθμός δειγματοληψίας ενός ημιτονοειδούς κύματος είναι δύο δείγματα (σημεία) ανά κύκλο.

Με βάση όλα όσα αναφέρθηκαν, στη συνέχεια υπολογίζεται ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης  $h(t)$  μέσω ενός πεπερασμένου αριθμού από τα μετρήσεις που ελήφθησαν δειγματοληπτικά. Υποθέτοντας  $N$  διαδοχικά δειγματικά σημεία,

$$h_k = h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (\Gamma.1)$$

έτσι ώστε το χρονικό διάστημα να είναι  $\Delta$ . Για να κάνουμε τα πράγματα πιο απλά, υποθέτουμε επίσης ότι το  $N$  είναι άρτιος αριθμός. Εάν η συνάρτηση  $h(t)$  είναι μη μηδενική μόνο σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα, τότε ολόκληρο το χρονικό διάστημα υποτίθεται ότι περιέχεται στο εύρος των δεδομένων σημείων  $N$ . Εναλλακτικά, εάν η συνάρτηση  $h(t)$  συνεχίζεται για πάντα, τότε τα σημεία δειγματοληψίας υποτίθεται ότι είναι τουλάχιστον «χαρακτηριστικά» του πως η  $h(t)$  που μοιάζει στις υπόλοιπες χρονικές στιγμές. Με  $N$  σημεία εισόδου, προφανώς θα είμαστε σε θέση να παράγουμε όχι περισσότερο από  $N$  ανεξάρτητα τιμές εξόδου. Έτσι, αντί να προσπαθούμε να εκτιμήσουμε το μετασχηματισμό Fourier της  $h(f)$  σε όλες τις τιμές του  $f$  στο εύρος  $-f_c$  έως  $f_c$ , αναζητούμε μόνο εκτιμήσεις στις διακριτές τιμές

$$f_n = \frac{n}{N\Delta}, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}. \quad (\Gamma.2)$$

Οι ακραίες τιμές του  $n$  στην (Γ.2),  $-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}$  αντιστοιχούν ακριβώς στα κατώτερα και ανώτερα όρια του εύρους κρίσιμων συχνοτήτων Nyquist. Εύκολα παρατηρεί κάποιος ότι υπάρχουν  $N+1$  και όχι  $N$  τιμές της του  $n$  στην (Γ.2). Αποδεικνύεται ότι οι δύο ακραίες τιμές του  $n$  δεν είναι ανεξάρτητες (στην πραγματικότητα είναι ίδιες), αλλά όλες οι άλλες είναι. Αυτό μειώνει τον αριθμό σε  $N$ . Έτσι μπορούμε πλέον να

προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα – μετασχηματισμό Fourier μέσω του διακριτού αθροίσματος:

$$H(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{2\pi i f_n t} dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i f_n t_k} \Delta = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N} . \quad (\Gamma.3)$$

Εδώ οι (Γ.1) και (Γ.2) έχουν χρησιμοποιηθεί στην τελική ισότητα. Το τελικό άθροισμα στη σχέση (Γ.3) αποτελεί το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier transform) των  $N$  σημείων  $h_k$ . Αν ορίσουμε ως  $H_n$  τον όρο:

$$H_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N} . \quad (\Gamma.4)$$

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier αντιστοιχίζει  $N$  μιγαδικούς αριθμούς (τα  $h_k$ ) σε  $N$  μιγαδικούς αριθμούς (τα  $H_n$ ). Δεν εξαρτάται από καμία διαστατική παράμετρο, όπως για παράδειγμα η χρονική κλίμακα  $\Delta$ . Η σχέση (Γ.3) μεταξύ του διακριτού μετασχηματισμού Fourier ενός συνόλου αριθμών και ο συνεχής τους μετασχηματισμός Fourier όταν θεωρούνται ως δείγματα μιας συνεχούς συνάρτησης στην οποία γίνεται δειγματοληψία ανά χρονικό διάστημα  $\Delta$  μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$H(f_n) \approx \Delta H_n \quad (\text{B.5}), \text{ όπου το } f_n \text{ δίνεται από τη } (\Gamma.2)$$

Μέχρι στιγμής έχουμε δει ότι ο δείκτης  $n$  στην (Γ.4) κυμαίνεται από  $-\frac{N}{2}$  έως  $\frac{N}{2}$  (βλέπε Γ.2). Ωστόσο εύκολα μπορεί να δει κάποιος, ότι η (Γ.4) είναι περιοδική ως προς  $n$ , με περίοδο  $N$ . Έτσι,  $H_{-n} = H_{N-n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Με αυτή τη σύμβαση κατά νου, θα μπορούσε κάποιος να αφήσει το  $n$  στο  $H_n$  να κυμανθεί από το 0 έως το  $N-1$  (μια πλήρης περίοδος). Έτσι τα  $k, n$  (στο  $h_k$ ) κυμαίνονται ακριβώς στο ίδιο διάστημα, έτσι η αντιστοίχιση  $N$  αριθμών σε  $N$  αριθμούς γίνεται πλέον προφανής. Όταν ακολουθείται αυτή η σύμβαση τότε η μηδενική συχνότητα αντιστοιχεί στην τιμή  $n = 0$ , οι θετικές συχνότητες  $0 < f < f_c$  αντιστοιχούν στις τιμές  $1 \leq n \leq N/2 - 1$  ενώ οι αρνητικές συχνότητες  $-f_c < f < 0$  αντιστοιχούν στις τιμές  $N/2 + 1 \leq n \leq N - 1$ . Η τιμή  $n = N/2$  αντιστοιχεί ταυτόχρονα στις κρίσιμες συχνότητες  $f = f_c$  και  $f = -f_c$ .

Η σχέση για τον διακριτό αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (Discrete inverse Fourier transform), από την οποία ανακτώνται οι τιμές  $h_k$  ακριβώς από τα  $H_n$  είναι:

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{-2\pi i k n / N} . \quad (\Gamma.6)$$

Παρατηρούμε ότι οι μόνες διαφορές μεταξύ της (Γ.6) και (Γ.4) είναι (i) το διαφορετικό πρόσημο στον εκθετικό όρο, και (ii) η διαίρεση με τον όρο  $N$ . Αυτό δείχνει ότι η ρουτίνα για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

μπορεί επίσης, με ελάχιστη τροποποίηση να υπολογίσει τον αντίστροφο μετασχηματισμό.

## Βιβλιογραφία

Beji S., Battjes J. A., 1994, Numerical Simulation of Nonlinear Wave Propagation over a Bar, Coastal Engineering vol 23, p. 1-16.

Beji S., Nadaoka K., 1996, A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying Depth, Ocean Engineering, vol 23, no 8, p.691-704.

Beji S., Nadaoka K., 1997, A Time-Dependent Nonlinear Mild- Slope Equation for Water Waves, Royal Society Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol 453, No 1957, pp 319 – 332,

Boccotti P., 2000, Wave Mechanics for Ocean Engineering, Elsevier.

Bratsos A.G., Famelis I. T., Prospathopoulo A.M. 2007, A Parametric FDM for Shallow Sea Waves, Int. J. Numer. Meth.Fluids, vol 53:129-147.

Dingenmans, M.W., 1997, Water Wave Propagation Over Uneven Bottoms, Advanced series on coastal engineering World Scientific Volume 13

Fenton J. D., 1990, Nonlinear Wave Theories, in the Sea (Ed. Le Mehaute), New York 1990, vol. 9, p. 2-16.

Hasselmann K. et al. 1973, Measurements of Wind-wave Growth and Swell During the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP), Rep. TU Delft.

Longuet-Higgins, M.S., 1952, On the Statistical Distribution of the Heights of Sea Waves, Journal of Marine Research, vol. 11, no. 3, pp. 245-266.

Massel S. R., 1989, Hydrodynamics of Coastal Zones, Elsevier Tokyo 1989.

Massel S.R., 1996. Ocean surface waves: their physics and prediction, World Scientific.

Nadaoka K., Beji S., Nakagawa Y., 1997, A Fully Dispersive Weakly Nonlinear Model for Water Waves, Proceedings R.Soc: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol.453, No. 1957 pp. 303-318.

Pierson A. Moskowitz, 1964, Proposed Spectral Form for Fully Developed Wind Seas Based on the Similarity Theory of S.A Kitaigorodskii, Journal of Geophysical Research.

Peregrine D. H., 1967, Long Waves on a Beach, J. Fluid Mech.,27, pp 815-827.

Phillips O.M., 1958, The Equilibrium Range in the Spectrum of Wind-generated Waves, Journal of Fluid Mechanics, vol. 4, no. 4, pp. 426-434.

Smith G.D., 1985, Numerical solution of PDEs – The Finite Difference Method, Clarendon Press.

Witting J.M., 1984, A unified Model for the Evolution of Nonlinear Water Waves, Journal of Computation Physics 56, pp. 203-236.

## Ελληνική Βιβλιογραφία

Αθανασούλη Γ.Α., Μπελιμπασάκη, Κ. Α. 2019 Κυματικά Φαινόμενα στο Θαλάσσιο Περιβάλλον, Αθήνα Σημειώσεις Μαθήματος ΣΝΜΜ-ΕΜΠ.

Καλλικούρδης Γ., 2016, Εφαρμογή Μοντέλων τύπου Boussinesq στη διάδοση υδάτινων κυματισμών σε περιοχές ρηχού νερού και με ήπια κλίση πυθμένα, Διπλ.Εργασία ΔΠΜΣ Μαθηματική Προτυποποίηση σε Σύγχρονες Τεχνολογίες και την οικονομία ΕΜΠ.

Τσώνης Σπ., 2015, Εφαρμογή Μοντέλων Εξισώσεων Boussinesq στη Διάδοση Υδάτινων κυματισμών από κινούμενη κατανομή Πίεσης σε περιοχές μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας και νερό μικρού βάθους, Διπλ.Εργασία ΔΠΜΣ Ναυτική και Θαλάσσια Τεχνολογία & Επιστήμη ΕΜΠ.