

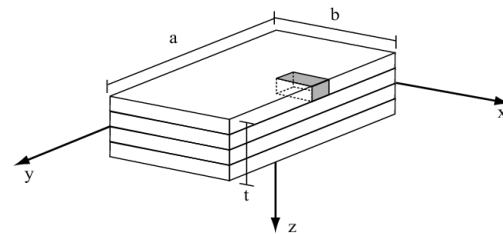
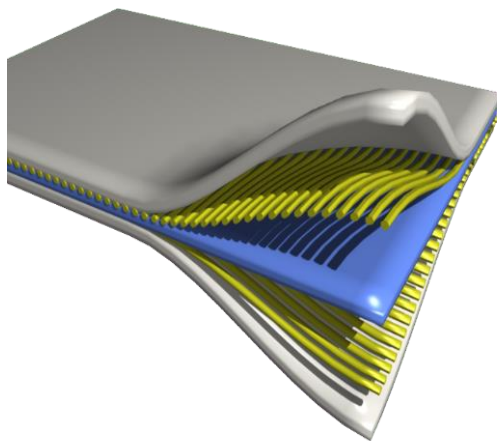


# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

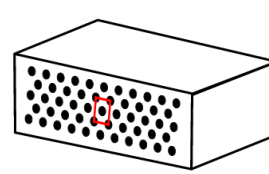
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών

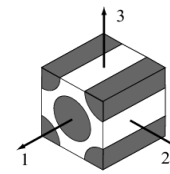
## ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΚΛΙΜΑΚΕΣ



(a) Plate



(b) Detail of fibres arrangement



(c) RVE

### ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παναγιωτόπουλος Αντώνιος-Μορφέας

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

Σηλιόπουλος Κωνσταντίνος

Αθήνα, Οκτώβριος 2020

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη παρούσα εργασία πραγματοποιείται μια διερεύνηση σχετικά με την ελαστοπλαστική συμπεριφορά σύνθετων υλικών. Σύνθετα υλικά που συναντούμε στην καθημερινή μας ζωή είναι για παράδειγμα το οπλισμένο σκυρόδεμα, που είναι ενισχυμένο με χαλύβδινες ράβδους, όπως επίσης και το fiberglass, όπου ίνες υάλου είναι εμφυτευμένες σε ρητίνη.

Πιο συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε σύνθετα υλικά σε επίπεδο μικροκλίμακας ορίζοντας έναν αντιπροσωπευτικό όγκο στοιχείου (RVE), δηλαδή το μικρότερο δυνατό όγκο μέσω του οποίου μπορεί να γίνει μία μέτρηση η οποία θα δώσει τιμές αντιπροσωπευτικές του συνόλου.

Απομονώνοντας έναν όγκο στοιχείου από το σύνολο ενός μέλους ή μίας κατασκευής αυτομάτως γεννάται ένα πρόβλημα συνοριακών συνθηκών. Θα εφαρμόσουμε τρεις διαφορετικούς τύπους συνοριακών συνθηκών, (α) γραμμικές – μετατοπίσεις, (β) σταθερές ελκτικές τάσεις, (γ) περιοδικές παραμορφώσεις και αντιπεριοδικές ελκτικές τάσεις. Στόχος μας είναι να εξετάσουμε και να συγκρίνουμε τους τρεις διαφορετικούς τύπους συνοριακών συνθηκών και να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα για το ποιος από αυτούς περιγράφει με τον πιο αξιόπιστο και αντιπροσωπευτικό τρόπο τη συμπεριφορά ενός μέλους ή μίας κατασκευής σε επίπεδο μακροκλίμακας. Για το σκοπό αυτό, θα πρέπει να εισάγουμε τη μέθοδο της ομογενοποίησης, η οποία αποτελεί μία αριθμητική προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων, συχνά αποκαλούμενη ως μετάβαση από τη μικρο-στη-μάκρο, και παρέχει μία εκτίμηση των ενεργών ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού στη μακρο-κλίμακα.

Ο αντιπροσωπευτικός όγκος που επιλέγεται για ένα συγκεκριμένο σύνθετο υλικό είναι μία πολύπλοκη και σύνθετη διαδικασία. Ωστόσο, σε κάθε περίπτωση, επιλέγεται μία βάση από υλικό που καλείται μήτρα και τρύπες (χωρίς υλικό) ή ίνες, ενσωματώνονται πάνω σε αυτή, παράγοντας έτσι ένα ενιαίο σύνθετο υλικό με χαρακτηριστικά διαφορετικά από εκείνα των συστατικών του. Στη παρούσα εργασία υιοθετούμε απλές γεωμετρίες ενός επίπεδου RVE, ενώ θα εξετάσουμε το πως επηρεάζονται οι μηχανικές ιδιότητές του, με τη μεταβολή διαφόρων χαρακτηριστικών των συστατικών του, όπως για παράδειγμα της διαμέτρου της τρύπας ή της ίνας στη διατομή, του λόγου του μέτρου ελαστικότητας των ινών ως προς του αντίστοιχου της μήτρας.

Τέλος, θα εξετασθεί η συμπεριφορά των σύνθετων υλικών τόσο σε μονοτονική όσο και σε ανακυκλιζόμενη φόρτιση. Τα τελευταία χρόνια, έχουν γίνει πολλές έρευνες σχετικά με το φαινόμενο της επαυξητικής κατάρρευσης (ratcheting), σύμφωνα με το οποίο αστοχίες αυξάνονται από κύκλο σε κύκλο φόρτισης λόγω της συσσώρευσης πλαστικών παραμορφώσεων. Το φαινόμενο αυτό θα εξετασθεί σε επίπεδο μικροκλίμακας και εν συνεχεία, μέσω της μεθόδου της ομογενοποίησης θα εκτιμηθεί το επίπεδο ασφαλές χωρίο των μακροτάσεων.

## ABSTRACT

In the present work, an investigation is carried out on the elastoplastic behavior of composite materials. Composites that we encounter in our daily lives are for example reinforced concrete, which is reinforced with steel bars, as well as fiberglass, where glass fibers are incorporated into resin.

More specifically, we will examine composites at the micro-scale level by defining a representative element volume (RVE), i.e. the smallest volume over which a measurement can be made that yields a value representative of the whole.

Partitioning a Volume Element from the whole of a member or a structure automatically creates a boundary condition problem. We will apply three different types of boundary conditions, (a) linear-displacements, (b) constant tractions, (c) periodic deformations and anti-periodic tractions. The main aspect is to investigate and compare the three different types of boundary conditions and to extract safe conclusions about which of them describes in the most reliable and representative way the behavior of a member or a structure at the macro level. For this purpose, we introduce the homogenization method, often denoted as micro-to-macro-transition, which is a finite element-based numerical approach and provides an estimate of the effective elastic properties of a material in macro-scale.

The choice of representative volume in order to simulate a composite material can be quite a complicated process. However, in each case, a matrix is selected as the continuous phase and holes (without material) or fibers are incorporated into it, thus producing a composite material with characteristics different from the individual components. In the present work we will examine simple geometries of a plane RVE. We focus on how its mechanical properties are affected, by changing various characteristics of its components, such as the diameter of the holes or the fibers in the cross section and the ratio of the young modulus of fibers over the counterpart of the matrix.

Finally, the behavior of composites in both monotonic (limit load) and cyclic (shakedown) loadings will be investigated. In recent years, there has been a lot of research on the phenomenon of ratcheting, according to which incremental collapse by the accumulation of plastic strain is obtained. This phenomenon will be examined at the micro-scale level and then, through the method of homogenization, we will construct the plain domains of safe macroscopic tractions.

## Πρόλογος

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια της λήψης του διπλώματος Μεταπτυχιακού τίτλου σπουδών του τμήματος Δομοστατικού Σχεδιασμού και Ανάλυσης των Κατασκευών. Το θέμα που διερευνά η εργασία είναι η ελαστοπλαστική συμπεριφορά σύνθετων υλικών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε πολλαπλές κλίμακες.

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κύριο Σπηλιόπουλο Κωνσταντίνο, επιβλέπων αυτής της εργασίας, για τη στήριξη και τη βοήθεια που μου προσέφερε καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας με τις πολύτιμες συμβουλές και γνώσεις του καθώς και για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε μέσω της ανάθεσης της συγκεκριμένης διατριβής.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Σοϊμίρη Γιώργο που με βοήθησε, με τις πολύτιμες εξειδικευμένες γνώσεις του πάνω στις μη-γραμμικές αναλύσεις, καθ' όλη τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας καθώς και για την εξαιρετική μας συνεργασία.

*Παναγιωτόπουλος Αντόνιος-Μορφέας*

*Αθήνα, Οκτώβριος 2020*

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	i
ABSTRACT.....	ii
ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	iii
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	iv
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ.....	vi
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ.....	ix
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	xi
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.....	xi
1. ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ.....	1
1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ-ΟΡΙΣΜΟΣ.....	1
1.2. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ.....	2
1.3. ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	3
1.3.1. Τρες.....	5
1.3.2. Μήτρα.....	7
2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ.....	9
2.1. ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗ.....	10
2.2 ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΟΣ ΟΓΚΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ (RVE).....	11
3. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΔΙΑΡΡΟΗΣ.....	13
3.1. ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	13
3.2. ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΤΑΣΕΩΣ CAUCHY - ΚΥΡΙΕΣ ΤΑΣΕΙΣ - ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΝΑΛΟΙΩΤΕΣ ΤΗΣ ΤΑΣΕΩΣ - ΑΠΟΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΗΣ ΤΑΣΕΩΣ.....	14
3.3. ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗΣ ΔΙΑΡΡΟΗΣ ΣΕ ΤΡΙΑΞΟΝΙΚΗ.....	15
3.4. ΚΡΙΤΗΡΙΟ VON-MISSES.....	16
3.4.1. Πολυαξονική ένταση.....	17
3.4.2. Επίπεδη ένταση.....	18
3.4.3. Μονοαξονική ένταση.....	18
3.4.4. Καθαρή διάτμηση.....	18
4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΗ ΜΙΚΡΟ-ΣΤΗ- ΜΑΚΡΟ ΚΛΙΜΑΚΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΜΙΚΡΟΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ.....	19
4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	19
4.2. ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΚΑΤΑΣΤΕΥΗΣ ΓΙΑ ΜΙΚΡΕΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ.....	21
4.3. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΚΡΟΪΣΟΡΡΟΠΙΑΣ.....	21
4.4. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ.....	22
4.5. ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΙΚΡΟΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ.....	23
4.5.1. Γραμμικές μετατοπίσεις στο σύνορο του RV.....	23
4.5.2. Σταθερές ελκτικές τάσεις στο σύνορο του RV.....	23
4.5.3. Περιοδικές παραμορφώσεις και αντι-περιοδικές ελκτικές τάσεις στο σύνορο του RV.....	24
4.6. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΜΙΚΡΟΪΣΟΡΡΟΠΙΑΣ.....	25
4.6.1. Διαίρεση των αλγεβρικών μη-γραμμικών εξισώσεων.....	25
4.6.2. Γραμμικές μετατοπίσεις στο σύνορο του RV.....	26
4.6.3. Σταθερές ελκτικές τάσεις στο σύνορο του RV.....	27

4.6.4. Περιοδικές παραμορφώσεις και αντι-περιοδικές ελκτικές τάσεις στο σύνορο του RV.....	28
5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΗ ΜΙΚΡΟ-ΣΤΗ-ΜΑΚΡΟ ΚΛΙΜΑΚΑ.....	30
5.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΘΑΡΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ .....	31
5.1.1. Συνοριακές συνθήκες.....	31
5.1.2. Ελαστική ανάλυση.....	33
5.1.3. Μη-γραμμική ανάλυση.....	36
5.2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΘΑΡΗΣ ΔΙΑΤΜΗΣΗ.....	41
5.2.1. Συνοριακές συνθήκες.....	41
5.2.2. Ελαστική ανάλυση.....	43
5.2.3. Μη-γραμμική ανάλυση.....	44
5.3. ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΠΛΑΣΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΩΣΕΩΝ.....	48
5.4. ΕΠΙΡΡΟΗ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ ΤΗΣ ΤΡΥΠΑΣ.....	49
5.5. ΕΣΩΜΑΤΩΣΗ ΔΥΣΚΑΜΠΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΤΗΝ ΤΡΥΠΑ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ.....	51
6. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΠΟΥ ΥΠΟΚΕΙΝΤΑΙ ΣΕ ΜΟΝΟΤΟΝΙΚΗ – ΑΝΑΚΥΚΛΙΖΟΜΕΝΗ ΦΟΡΤΙΣΗ.....	54
6.1. ΟΡΙΑΚΟ ΦΟΡΤΙΟ Ή ΦΟΡΤΙΟ ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗΣ – ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.....	54
6.2. ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΕΠΑΥΞΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗΣ.....	55
6.3. ΦΟΡΤΙΟ ΔΙΑΡΡΟΗΣ.....	59
6.4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ RVE ΜΕ ΤΡΥΠΑ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ.....	60
6.4.1. Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων.....	60
6.4.2. Συνοριακές συνθήκες.....	61
6.4.3. Ανάλυση - Εύρεση επιφάνειας φορτίου καταρρεύσεως.....	62
6.4.3.1. Συγκρίσεις ανάμεσα σε επίπεδη ένταση και επίπεδη παραμόρφωση....	65
6.4.4. Ανάλυση – Εύρεση επιφάνειας φορτίου επαυξητικής κατάρρευσης.....	70
6.4.5. Ανάλυση – Εύρεση επιφάνειας φορτίου διαρροής.....	75
6.4.6. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα.....	78
6.4.7. Διερεύνηση επιρροής διαμέτρου της τρύπας στο φαινόμενο της επαυξητικής κατάρρευσης.....	80
6.4.8. Σύγκριση των αποτελεσμάτων της επαυξητικής κατάρρευσης με παλαιότερες μετρήσεις.....	83
6.5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ RVE ΜΕ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΟ ΥΛΙΚΟ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ.....	85
6.5.1. Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων.....	85
6.5.2. Συνοριακές συνθήκες.....	86
6.5.3. Ανάλυση – Εύρεση επιφάνειας φορτίου καταρρεύσεως.....	87
6.5.3.1. Συγκρίσεις ανάμεσα σε επίπεδη-ένταση και επίπεδη-παραμόρφωση.....	90
6.5.4. Ανάλυση – Εύρεση επιφάνειας φορτίου επαυξητικής κατάρρευσης .....	92
6.5.5. Ανάλυση - Εύρεση επιφάνειας φορτίου διαρροής.....	98

6.5.6. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα.....	101
6.5.7. Σύγκριση των αποτελεσμάτων της επαυξητικής κατάρρευσης με Παλαιότερες καταγραφές.....	102
7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	103
8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	105

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

<b>Εικόνα 1.1</b> Κατηγορίες σύνθετων υλικών.....	1
<b>Εικόνα 1.2</b> Γενικοί τύποι ινωδών σύνθετων υλικών.....	2
<b>Εικόνα 1.3</b> Συνεχείς (long) και ασυνεχείς (short) ίνες ενσωματωμένες σε μήτρα για την παρασκευή ενός σύνθετου υλικού.....	3
<b>Εικόνα 1.4</b> Διακριτοποίηση πολυδιευθυντικών σύνθετων υλικών.....	4
<b>Εικόνα 1.5</b> Γενική ταξινόμηση των σύνθετων υλικών.....	4
<b>Εικόνα 1.6</b> Θερμοκρασία όρια χρήσης υλικών.....	7
<b>Εικόνα 2.1</b> Τετραγωνικό και εξαγωνικό μοτίβο περιοδικότητας σε συνεχές ινοπλισμένο σύνθετο υλικό.....	9
<b>Εικόνα 2.2</b> Μεταπήδηση από την micro κλίμακα σε μεγαλύτερες κλίμακες μέσω της ομογενοποίησης.....	10
<b>Εικόνα 2.3</b> Μεταπήδηση από την καθαρή διάτμηση της μικροκλίμακας στην αντίστοιχη της μακροκλίμακας μέσω περιοδικών συνοριακών συνθηκών σε περιοδικό σύνθετο υλικό.....	12
<b>Εικόνα 3.1</b> (a) Μονοαξονική καμπύλη φορτίου-μετατόπισης ραβδωτού στοιχείου, (b) επιρροή του ρυθμού μεταβολής του φορτίου.....	13
<b>Εικόνα 3.2</b> Διγραμμικό μοντέλο ελαπλοσταστικής συμπεριφοράς.....	13
<b>Εικόνα 3.3</b> Συνιστώσες του τανυστή τάσεως Cauchy.....	14
<b>Εικόνα 3.4</b> Μη- μοναδικότητα της απεικόνισης των Καρτεσινών συνιστωσών των τάσεων στο χώρο των κυρίων τάσεων.....	15
<b>Εικόνα 3.5</b> (a) Η επιφάνεια διαρροής του Von-Misses αναπαρίσταται από έναν κύλινδρο με ακτίνα $\sqrt{2} k$ , ή $\sqrt{2/3} \sigma_y$ γύρω από τον υδροστατικό άξονα και (b) επιφάνεια διαρροής του Von-Misses στην ειδική περίπτωση επίπεδης έντασης.....	17
<b>Εικόνα 4.1</b> Συσχέτιση μακροσυνεχούς με μικροκατασκευή.....	19
<b>Εικόνα 4.2</b> Συμπεριφορά της διακριτοποιημένης μικροκατασκευής στην επιβολή παραμορφώσεων.....	19
<b>Εικόνα 4.3</b> Διαίρεση των κόμβων και καθορισμός των επιβαλλόμενων μετακινήσεων στο σύνορο της διακριτοποιημένης κατασκευής (a) γραμμικών μετατοπίσεων, (b) σταθερών ελκτικών τάσεων , (c) περιοδικών μετατοπίσεων και αντιπεριοδικών ελκτικών τάσεων.....	20
<b>Εικόνα 5.1</b> Δύο εναλλακτικές μικροκατασκευές $V_1$ και $V_2$ για ένα υλικό με περιοδικές τρύπες.....	31
<b>Εικόνα 5.2</b> Συνοριακές συνθήκες ομογενοποίησης για την περίπτωση του καθαρού εφελκυσμού (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων (c,d) Σταθερές ελκτικές-τάσεις (e,f) περιοδικές παραμορφώσεις και αντι-περιοδικές ελκτικές τάσεις.....	32
<b>Εικόνα 5.3</b> Παραμορφωσιακή-εντατική κατάσταση ελαστικής ανάλυσης για την περίπτωση του καθαρού εφελκυσμού (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων, (c,d) σταθερών	

ελκτικών-τάσεων, (e,f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών - τάσεων.....	33
<b>Εικόνα 5.4</b> Κατανομή των μικροτάσεων $\sigma_{11}$ και $\sigma_{12}$ της ελαστικής ανάλυσης για την περίπτωση του καθαρού εφελκυσμού (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων, (c,d) σταθερών ελκτικών-τάσεων (e,f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών - τάσεων.....	35
<b>Εικόνα 5.5</b> Παραμορφωσιακή- εντατική κατάσταση μη-γραμμικής ανάλυσης για την περίπτωση του καθαρού εφελκυσμού (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων (c,d) σταθερών ελκτικών-τάσεων (e,f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών - τάσεων.....	36
<b>Εικόνα 5.6</b> Ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση μη-γραμμικής ανάλυσης για την περίπτωση καθαρού εφελκυσμού (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων, (c,d) σταθερών ελκτικών -τάσεων, (e,f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών - τάσεων.....	40
<b>Εικόνα 5.7</b> Συνοριακές συνθήκες ομογενοποίησης για την περίπτωση της καθαρής διάτμησης (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων, (c,d) σταθερών ελκτικών -τάσεων, (e-f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών τάσεων.....	42
<b>Εικόνα 5.8</b> Παραμορφωσιακή- εντατική κατάσταση ελαστικής ανάλυσης για την περίπτωση της καθαρής διάτμησης (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων, (c,d) σταθερών ελκτικών -τάσεων, (e,f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών - τάσεων.....	43
<b>Εικόνα 5.9</b> Παραμορφωσιακή- εντατική κατάσταση μη γραμμικής ανάλυσης για την περίπτωση της καθαρής διάτμησης (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων, (c,d) σταθερών ελκτικών -τάσεων (e,f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών τάσεων.....	45
<b>Εικόνα 5.10</b> Γεωμετρία μικροκαταστευής (α) $V_1$ και (b) $V_2$ .....	48
<b>Εικόνα 5.11</b> Κατανομή ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης για τις μικροκατασκευές $V_1$ και $V_2$ σε επίπεδο μεσοκλίμακας για την περίπτωση καθαρής-διάτμησης.....	49
<b>Εικόνα 5.12</b> Εντατική-παραμορφωσιακή κατάσταση της μικροκατασκευής $V_1$ σε καθαρή διάτμηση για διάφορες τιμές της διαμέτρου της τρύπας. (α) $D=0.0$ , (b) $D=0.1$ , (c) $D=0.2$ , (d) $D=0.3$ , (e) $D=0.4$ , (f) $D=0.5$ , (g) $D=0.6$ , (h) $D=0.7$ , (i) $D=0.8$ .....	50
<b>Εικόνα 5.13</b> Εντατική-παραμορφωσιακή κατάσταση της μικροκατασκευής $V_3$ σε καθαρή διάτμηση για την περίπτωση όπου $E_\phi/E_K = 40$ και (a) $D_\phi=0.2$ , (b) $D_\phi=0.3$ , (c) $D_\phi=0.4$ , (d) $D_\phi=0.5$ , (e) $D_\phi=0.6$ , (f) $D_\phi=0.7$ , (g) $D_\phi=0.8$ .....	53
<b>Εικόνα 6.1.</b> Σχηματισμός κρίσιμης ζώνης σε επίπεδο στοιχείο, που υπόκεινται σε επίπεδη – μονοτονική – διαξονική ένταση.....	54
<b>Εικόνα 6.2.</b> Δρόμος φόρτισης για την εύρεση του φορτίου σταθεροποίησης.....	56
<b>Εικόνα 6.3.</b> (α) Τετραγωνικό Μοτίβο Περιοδοκότητας (b) Αντιπροσωπευτικός όγκος στοιχείου (RVE) (c) απομόνωση και διερεύνηση μονάδα του ενός τετάρτου του RVE λόγω συμμετρίας .....	58
<b>Εικόνα 6.4.</b> Τάση Von-Misses σε ένα πεπερασμένο στοιχείο ίση με την τάση διαρροής του υλικού.....	59

Παράδειγμα τετραγωνικού RVE με τρύπα στο κέντρο του (Παρ.6.4)



<b>Εικόνα 6.5.</b> (a) Τετραγωνικό μοτίβο περιοδικότητας , (b) γεωμετρία του RVE.....	60
<b>Εικόνα 6.6.</b> Διακριτοποίηση του RVE σε 888 επίπεδα τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία τα οποία θα εξετασθούν τόσο για την περίπτωση που υπόκεινται σε επίπεδη ένταση όσο και σε επίπεδη παραμόρφωση .....	60
<b>Εικόνα 6.7.</b> Συνοριακές συνθήκες .....	61
<b>Εικόνα 6.8.</b> Δρόμοι φόρτισης για την εύρεση (a)της επιφάνειας του φορτίου σταθεροποίησεως και (b) της επιφάνειας διαρροής και του φορτίου καταρρεύσεως..	61
<b>Εικόνα 6.9.</b> Εντατική κατάσταση τη στιγμή επιβολής του φορτίου κατάρρευσης για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης.....	62
<b>Εικόνα 6.10.</b> Υπό εξέταση στοιχείο του RVE για συγκρίσεις ανάμεσα σε επίπεδη ένταση και επίπεδη παραμόρφωση.....	65
<b>Εικόνα 6.11.</b> Εντατική-Παραμορφωσιακή κατάσταση της μικροκατασκευής για $u_1=u_2 = 10 \cdot u_0$ για την περίπτωση (a) επίπεδης-έντασης (increment 200) ,(b) επίπεδης παραμόρφωσης (increment 100).....	65
<b>Εικόνα 6.12</b> Εντατική κατάσταση τη στιγμή έναρξης της επαυξητικής κατάρρευσης (ratcheting) για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης .....	70
<b>Εικόνα 6.13</b> Εντατική κατάσταση τη στιγμή λήξης του 1 <sup>ου</sup> κύκλου φόρτισης-αποφόρτισης της επαυξητικής κατάρρευσης.....	50
<b>Εικόνα 6.14</b> Εντατική κατάσταση τη στιγμή επιβολής του φορτίου διαρροής για τους δρόμους φόρτισης (α) $U_1/U_2=1$ , (β) $U_1/U_2=2$ , (γ) $U_1/U_2= -1$ , (δ) $U_1/U_2=0$ .....	75
<b>Εικόνα 6.15.</b> Εντατική κατάσταση τη στιγμή έναρξης της επαυξητικής κατάρρευσης για διάφορες τιμές της διαμέτρου της τρύπας.....	82

Παράδειγμα τετραγωνικού RVE με ενσωματωμένο υλικό στο κέντρο του (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) (Παρ.6.5)

<b>Εικόνα 6.16</b> (a) Τετραγωνικό μοτίβο περιοδικότητας , (b) γεωμετρία του RVE.....	85
<b>Εικόνα 6.17.</b> Διακριτοποίηση του RVE σε 896 επίπεδα τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία τα οποία θα εξετασθούν τόσο για την περίπτωση που υπόκεινται σε επίπεδη ένταση όσο και σε επίπεδη παραμόρφωση.....	85
<b>Εικόνα 6.18.</b> Συνοριακές συνθήκες .....	86
<b>Εικόνα 6.19.</b> Δρόμοι φόρτισης για την εύρεση της επιφάνειας (a) του φορτίου σταθεροποίησεως και (β) του φορτίου καταρρεύσεως και διαρροής.....	86
<b>Εικόνα 6.20</b> Εντατική κατάσταση τη στιγμή επιβολής του φορτίου κατάρρευσης για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης.....	87
<b>Εικόνα 6.21</b> Εντατική κατάσταση τη στιγμή επιβολής του φορτίου κατάρρευσης για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης.....	88
<b>Εικόνα 6.22</b> Εντατική κατάσταση τη στιγμή επιβολής του φορτίου κατάρρευσης για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης.....	92
<b>Εικόνα 6.23</b> Εντατική κατάσταση τη στιγμή επιβολής του φορτίου διαρροής για τους δρόμους φόρτισης (α) $U_1/U_2=1$ , (β) $U_1/U_2=2$ , (γ) $U_1/U_2= -1$ , (δ) $U_1/U_2=0$ .....	93
<b>Εικόνα 6.24</b> Εντατική κατάσταση τη στιγμή επιβολής του φορτίου διαρροής για τους δρόμους φόρτισης (α) $U_1/U_2=1$ , (β) $U_1/U_2=2$ , (γ) $U_1/U_2= -1$ , (δ) $U_1/U_2=0$ .....	98

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

<b>Διάγραμμα 5.1</b> Σχέση Τάσεων-Παραμορφώσεων της μικροκατασκευής $V_1$ στην μακροκλίμακα για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης – καθαρός εφελκυσμός.....	37
<b>Διάγραμμα 5.2</b> Σχέση Τάσεων-Παραμορφώσεων της μικροκατασκευής $V_2$ στην μακροκλίμακα για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης – καθαρός εφελκυσμός.....	38
<b>Διάγραμμα 5.3</b> Σχέση Τάσεων-Παραμορφώσεων των μικροκατασκευών $V_1$ και $V_2$ στην μακροκλίμακα για την περίπτωση καθαρού εφελκυσμού (a) Γραμμικών Μετακινήσεων (b) Ελκτικών- Τάσεων (c) Περιοδικότητας.....	39
<b>Διάγραμμα 5.4</b> Σχέση Τάσεων-Παραμορφώσεων της μικροκατασκευής $V_1$ στην μακροκλίμακα για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης – καθαρή διάτμηση.....	46
<b>Διάγραμμα 5.5</b> Σχέση Τάσεων-Παραμορφώσεων της μικροκατασκευής $V_1$ στην μακροκλίμακα για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης – καθαρή διάτμηση.....	46
<b>Διάγραμμα 5.6</b> Σχέση Τάσεων-Παραμορφώσεων των μικροκατασκευών $V_1$ και $V_2$ στην μακροκλίμακα για την περίπτωση καθαρής διάτμησης (a) Γραμμικών Μετακινήσεων (b) Ελκτικών- Τάσεων (c) Περιοδικότητας.....	48
<b>Διάγραμμα 5.7.</b> Σχέση ολικών μακροσκοπικών τάσεων $\bar{\sigma}_{12}$ – διάμετρος της τρύπας της μικροκατασκευής $V_1$ .....	50
<b>Διάγραμμα 5.8</b> Μεταβολή των μακροτάσεων $\sigma_{12}$ με τη σταδιακή αύξηση του λόγου $E_\phi/E_K$ για τις τιμές της διαμέτρου $D_\phi = [0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8]$ .....	52

Παράδειγμα τετραγωνικού RVE με τρύπα στο κέντρο του (Παρ.6.4)

<b>Διάγραμμα 6.1</b> Ασφαλές χωρίο επιβαλλόμενων μετακινήσεων, κανονικοποιημένων ως προς την μετακίνηση $U_0=0.0001\mu\text{m}$ , έναντι οριακού φορτίου για (a) επίπεδη ένταση, (b) επίπεδη παραμόρφωση.....	63
<b>Διάγραμμα 6.2</b> Ασφαλές χωρίο μακροσκοπικών τάσεων $\Sigma_{11}$ και $\Sigma_{22}$ , κανονικοποιημένων ως προς την τάση διαρροής $\sigma_y = 200\text{MPa}$ , έναντι οριακού φορτίου για (a) επίπεδη ένταση, (b) επίπεδη παραμόρφωση.....	64
<b>Διάγραμμα 6.3</b> Σχέση μικροτάσεων $\sigma_{22}$ , $\sigma_{33}$ , $\sigma_{12}$ , $\sigma_{\text{Misses}}$ του υπό εξέταση στοιχείου 79 σε συνάρτηση με το χρόνο φόρτισης για την περίπτωση επίπεδης-έντασης.....	66
<b>Διάγραμμα 6.4</b> Σχέση αντίδρασης-στήριξης του κόμβου (του συνόρου) του υπό εξέταση στοιχείου 79 σε συνάρτηση με το χρόνο φόρτισης για την περίπτωση επίπεδης-έντασης.....	66
<b>Διάγραμμα 6.5</b> Σχέση μικροτάσεων $\sigma_{22}$ , $\sigma_{33}$ , $\sigma_{12}$ , $\sigma_{\text{Misses}}$ του πεπερασμένου στοιχείου 79 σε συνάρτηση με το χρόνο φόρτισης για την περίπτωση επίπεδης-παραμόρφωσης.....	67
<b>Διάγραμμα 6.6</b> Σχέση αντίδρασης-στήριξης του κόμβου του συνόρου του πεπερασμένου στοιχείου 79 σε συνάρτηση με το χρόνο φόρτισης για την περίπτωση επίπεδης-παραμόρφωσης.....	68
<b>Διάγραμμα 6.7</b> Σχέση ομογενοποιημένων τάσεων $\Sigma_{11}$ – χρόνου φόρτισης για τις περιπτώσεις επίπεδης-παραμόρφωσης και επίπεδης έντασης.....	68
<b>Διάγραμμα 6.8.</b> Ασφαλές χωρίο επίπεδης έντασης και παραμόρφωσης για την οριακή ανάλυση (a) επιβαλλόμενων μετακινήσεων, (b) ομογενοποιημένων τάσεων.....	69

<b>Διάγραμμα 6.9</b> Επιτρεπόμενη επιφάνεια επιβαλλόμενων μετακινήσεων, κανονικοποιημένων ως προς την μετακίνηση $U_0=0.0001\mu\text{m}$ έναντι επαυξητικής κατάρρευσης.....	72
<b>Διάγραμμα 6.10</b> Ασφαλές χωρίο μακροσκοπικών τάσεων $\Sigma_{11}$ και $\Sigma_{22}$ , κανονικοποιημένων ως προς την τάση διαρροής $\sigma_y = 200\text{MPa}$ , έναντι επαυξητικής κατάρρευσης για (a) επίπεδη ένταση, (b) επίπεδη παραμόρφωση.....	73
<b>Διάγραμμα 6.11</b> Σχέση Ίσοδύναμης Πλαστικής Παραμόρφωσης – Χρόνου φόρτισης για το κρίσιμο πεπερασμένο στοιχείο της κατασκευής στην έναρξη της επαυξητικής κατάρρευσης.....	74
<b>Διάγραμμα 6.12</b> Ασφαλές χωρίο (a) επιβαλλόμενων μετακινήσεων και (b) ομογενοποιημένων τάσεων για την περίπτωση επίπεδης έντασης και παραμόρφωσης.....	74
<b>Διάγραμμα 6.13</b> Ασφαλές χωρίο επιβαλλόμενων μετακινήσεων, κανονικοποιημένων ως προς την μετακίνηση $U_0=0.0001\mu\text{m}$ έναντι φορτίου διαρροής για (a) επίπεδη-ένταση και (b) επίπεδης-παραμόρφωσης.....	76
<b>Διάγραμμα 6.14</b> Ασφαλές χωρίο μακροσκοπικών τάσεων $\Sigma_{11}$ και $\Sigma_{22}$ , κανονικοποιημένων ως προς την τάση διαρροής $\sigma_y = 200\text{MPa}$ , έναντι επαυξητικής κατάρρευσης για (a) επίπεδη ένταση, (b) επίπεδη παραμόρφωση.....	77
<b>Διάγραμμα 6.15</b> Ασφαλές χωρίο (a) επιβαλλόμενων μετατοπίσεων και (b) ομογενοποιημένων τάσεων $\Sigma_{11}$ και $\Sigma_{22}$ , έναντι φορτίου διαρροής.....	77
<b>Διάγραμμα 6.16</b> Επιτρεπόμενη επιφάνεια επιβαλλόμενων μετακινήσεων για (α) επιφάνεια διαρροής, (β) επαυξητικής κατάρρευσης, (γ) οριακού φορτίου.....	78
<b>Διάγραμμα 6.17</b> Επιτρεπόμενη επιφάνεια ομογενοποιημένων τάσεων $\Sigma_{11}$ - $\Sigma_{22}$ για φορτίο διαρροής, φορτίο επαυξητικής κατάρρευσης, οριακό φορτίο στην περίπτωση (a) επίπεδης έντασης και (b) επίπεδης παραμόρφωσης.....	79
<b>Διάγραμμα 6.18</b> Μεταβολή των ομογενοποιημένων τάσεων $\Sigma_{11}$ επαυξητικής κατάρρευσης σε σχέση με τη διάμετρο της τρύπας για την περίπτωση (α) επίπεδης παραμόρφωσης, (b) επίπεδης έντασης.....	80
<b>Διάγραμμα 6.19</b> Ασφαλές χωρίο ομογενοποιημένων τάσεων έναντι φορτίου επαυξητικής κατάρρευσης με την παρούσα μέθοδο (αναλογική φόρτιση) και την iRBF.....	83
<b>Διάγραμμα 6.20</b> Ασφαλές χωρίο ομογενοποιημένων τάσεων έναντι φορτίου επαυξητικής κατάρρευσης με την παρούσα μέθοδο (ανεξάρτητα φορτία) και την iRBF.....	84

Παράδειγμα τετραγωνικού RVE με ενσωματωμένο υλικό στο κέντρο του ( $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ ) (Παρ.6.5)

<b>Διάγραμμα 6.21</b> Ασφαλές χωρίο μακροσκοπικών τάσεων $\Sigma_{11}$ και $\Sigma_{22}$ , κανονικοποιημένων ως προς την τάση διαρροής $\sigma_y = 80\text{MPa}$ , έναντι οριακού φορτίου για (a) επίπεδη ένταση, (b) επίπεδη παραμόρφωση.....	89
<b>Διάγραμμα 6.22</b> Σχέση ομογενοποιημένων τάσεων $\Sigma_{11}$ – μετακίνησης $U_0$ για τις περιπτώσεις επίπεδης-παραμόρφωσης και επίπεδης έντασης.....	90
<b>Διάγραμμα 6.23</b> Ασφαλές χωρίο ομογενοποιημένων τάσεων $\Sigma_{11}$ και $\Sigma_{22}$ έναντι οριακού φορτίου, για την περίπτωση επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωσης.....	91

<b>Διάγραμμα 6.24</b> Επιτρεπόμενη επιφάνεια επιβαλλόμενων μετακινήσεων, κανονικοποιημένων ως προς την μετακίνηση $U_0=0.0001\mu\text{m}$ έναντι επαυξητικής κατάρρευσης.....	94
<b>Διάγραμμα 6.25</b> Ασφαλές χωρίο μακροσκοπικών τάσεων $\Sigma_{11}$ και $\Sigma_{22}$ , κανονικοποιημένων ως προς την τάση διαρροής $\sigma_y = 200\text{MPa}$ , έναντι επαυξητικής κατάρρευσης για (a) επίπεδη ένταση, (b) επίπεδη παραμόρφωση.....	95
<b>Διάγραμμα 6.26</b> Καταστάσεις φόρτισης A,B,C,D, για τον προσδιορισμό της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης.....	95
<b>Διάγραμμα 6.27</b> Ισοδύναμη Πλαστική Παραμόρφωση-Χρόνος φόρτισης του κρίσιμου πεπερασμένου στοιχείου της κατασκευής για τις καταστάσεις φόρτισης A,B,C.....	96
<b>Διάγραμμα 6.28</b> Ασφαλές χωρίο (a) επιβαλλόμενων μετακινήσεων και (b) ομογενοποιημένων τάσεων για την περίπτωση επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωσης.....	97
<b>Διάγραμμα 6.29</b> Ασφαλές χωρίο επιβαλλόμενων μετακινήσεων, κανονικοποιημένων ως προς την μετακίνηση $U_0=0.0001\mu\text{m}$ έναντι φορτίου διαρροής για (a) επίπεδη-ένταση και (b) επίπεδης-παραμόρφωσης.....	99
<b>Διάγραμμα 6.30</b> Ασφαλές χωρίο μακροσκοπικών τάσεων $\Sigma_{11}$ και $\Sigma_{22}$ , κανονικοποιημένων ως προς την τάση διαρροής $\sigma_y = 80\text{MPa}$ , έναντι επαυξητικής κατάρρευσης για (a) επίπεδη ένταση, (b) επίπεδη παραμόρφωση.....	100
<b>Διάγραμμα 6.31</b> Ασφαλές χωρίο (a) επιβαλλόμενων μετατοπίσεων και (b) ομογενοποιημένων τάσεων $\Sigma_{11}$ και $\Sigma_{22}$ , έναντι φορτίου διαρροής.....	100
<b>Διάγραμμα 6.32</b> Επιτρεπόμενη επιφάνεια ομογενοποιημένων τάσεων $\Sigma_{11}$ - $\Sigma_{22}$ για φορτίο διαρροής, φορτίο επαυξητικής κατάρρευσης, οριακού φορτίου στην περίπτωση (a) επίπεδης έντασης και (b) επίπεδης παραμόρφωση.....	101
<b>Διάγραμμα 6.33</b> Ασφαλές χωρίο ομογενοποιημένων τάσεων $\Sigma_{11}$ - $\Sigma_{22}$ έναντι επαυξητικής κατάρρευσης με την παρούσα μέθοδο την αριθμητική επίλυση του D.Weichert, A.Hachemi, F.Schwabe.....	102

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

<b>Πίνακας 5.1</b> Ομογενοποιημένες τάσεις καθαρού εφελκυσμού ελαστικής ανάλυσης.....	34
<b>Πίνακας 5.2</b> Ομογενοποιημένες τάσεις καθαρού εφελκυσμού μη-γραμμικής ανάλυσης.....	37
<b>Πίνακας 5.3</b> Ομογενοποιημένες τάσεις καθαρής διάτμησης ελαστικής ανάλυσης.....	44
<b>Πίνακας 5.4</b> Ομογενοποιημένες τάσεις καθαρής διάτμησης μη γραμμικής ανάλυσης.....	45
<b>Πίνακας 5.5</b> Ομογενοποιημένες τάσεις καθαρής διάτμησης για μεταβολές της διαμέτρου και του λόγου των μέτρων ελαστικότητας του ενσωματωμένου υλικού και της μήτρας.....	51
Παράδειγμα τετραγωνικού RVE με τρύπα στο κέντρο του (Παρ.6.4)	
<b>Πίνακας 6.1</b> Χαρακτηριστικά υλικού της μήτρας.....	60
<b>Πίνακας 6.2</b> Δρόμοι φόρτισης.....	61

Παράδειγμα τετραγωνικού RVE με ενσωματωμένο υλικό στο κέντρο του (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)  
(Παρ.6.5)

Πίνακας 6.3 Χαρακτηριστικά υλικού μήτρας και ενσωματωμένου υλικού.....85

Πίνακας 6.4 Δρόμοι φόρτισης.....86

Πίνακας 6.5 Τιμές των μετακινήσεων U<sub>1</sub> για τις καταστάσεις φόρτισης A,B,C,D....95

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Εξίσωση 3.1 .....	14
Εξίσωση 3.2 .....	14
Εξίσωση 3.3 .....	14
Εξίσωση 3.4 .....	14
Εξίσωση 3.5 .....	14
Εξίσωση 3.6 .....	14
Εξίσωση 3.7 .....	14
Εξίσωση 3.8 .....	14
Εξίσωση 3.9 .....	16
Εξίσωση 3.10 .....	16
Εξίσωση 3.11 .....	16
Εξίσωση 3.12 .....	16
Εξίσωση 3.13 .....	16
Εξίσωση 3.14 .....	17
Εξίσωση 3.15 .....	17
Εξίσωση 3.16 .....	18
Εξίσωση 3.17 .....	18
Εξίσωση 3.18 .....	18
Εξίσωση 3.19 .....	18
Εξίσωση 4.1.....	21
Εξίσωση 4.2.....	22
Εξίσωση 4.3.....	22
Εξίσωση 4.4.....	22
Εξίσωση 4.5.....	22
Εξίσωση 4.6.....	22
Εξίσωση 4.7.....	22
Εξίσωση 4.8.....	22
Εξίσωση 4.9.....	23
Εξίσωση 4.10.....	23
Εξίσωση 4.11.....	23
Εξίσωση 4.12.....	24
Εξίσωση 4.13.....	24
Εξίσωση 4.14.....	24
Εξίσωση 4.15.....	24
Εξίσωση 4.16.....	24
Εξίσωση 4.17.....	24
Εξίσωση 4.18.....	25

<b>Εξίσωση 4.19</b> .....	25
<b>Εξίσωση 4.20</b> .....	25
<b>Εξίσωση 4.21</b> .....	25
<b>Εξίσωση 4.22</b> .....	26
<b>Εξίσωση 4.23</b> .....	26
<b>Εξίσωση 4.24</b> .....	26
<b>Εξίσωση 4.25</b> .....	26
<b>Εξίσωση 4.26</b> .....	26
<b>Εξίσωση 4.27</b> .....	26
<b>Εξίσωση 4.28</b> .....	27
<b>Εξίσωση 4.29</b> .....	27
<b>Εξίσωση 4.30</b> .....	27
<b>Εξίσωση 4.31</b> .....	27
<b>Εξίσωση 4.32</b> .....	27
<b>Εξίσωση 4.33</b> .....	27
<b>Εξίσωση 4.34</b> .....	28
<b>Εξίσωση 4.35</b> .....	28
<b>Εξίσωση 4.36</b> .....	28
<b>Εξίσωση 4.37</b> .....	28
<b>Εξίσωση 4.38</b> .....	28
<b>Εξίσωση 4.39</b> .....	28
<b>Εξίσωση 4.40</b> .....	29
<b>Εξίσωση 4.41</b> .....	29
<b>Εξίσωση 4.42</b> .....	29
<b>Εξίσωση 4.43</b> .....	29
<b>Εξίσωση 4.44</b> .....	29
<b>Εξίσωση 4.45</b> .....	29
<b>Εξίσωση 5.1</b> .....	30
<b>Εξίσωση 6.1</b> .....	56

# 1. ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ (COMPOSITES MATERIALS)

## 1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ-ΟΡΙΣΜΟΣ

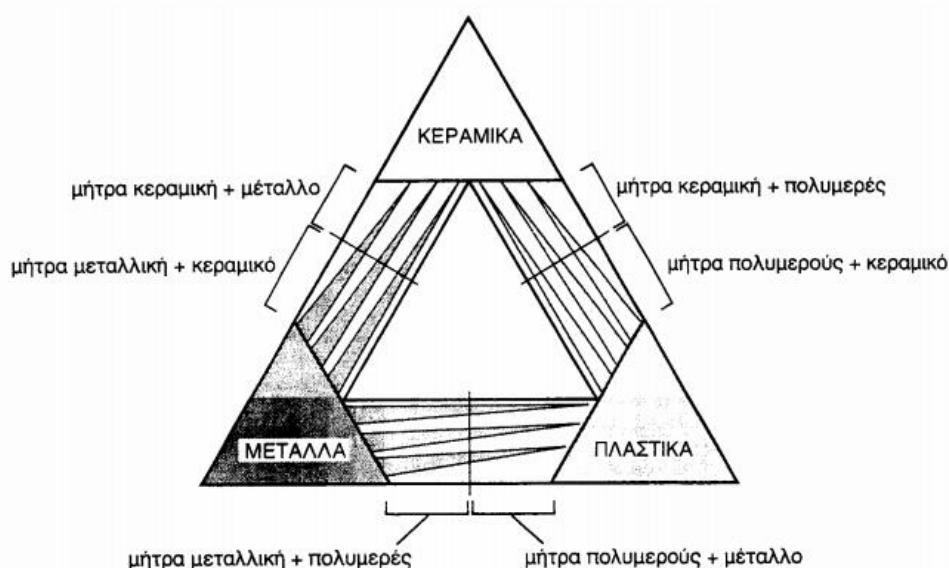
Η ραγδαία πρόοδος που έχει σημειωθεί στον τομέα της τεχνολογίας των δομικών υλικών τα τελευταία χρόνια, είχε ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη πληθώρας νέων προϊόντων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πολλές εφαρμογές της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού, όπου η αποκλειστική χρήση συμβατικών υλικών αποτυγχάνει να παρέχει μία ικανοποιητική λύση. Μεταξύ των προϊόντων αυτών σημαντική θέση κατέχουν τα σύνθετα υλικά.

Σύνθετο υλικό ονομάζεται εκείνο το υλικό το οποίο παράγεται από δύο ή περισσότερα συστατικά-υλικά τα οποία διαθέτουν διαφορετικές φυσικές ή χημικές ιδιότητες και όταν συνδυαστούν παράγουν ένα υλικό με χαρακτηριστικά διαφορετικά από εκείνα των συστατικών του. Τα μεμονωμένα συστατικά παραμένουν διαχωρισμένα και διακριτά εντός της τελικής κατασκευής, διαφοροποιώντας τα συστατικά των σύνθετων υλικών από τη μείξη.

Για να καταταχθεί ένα υλικό στην κατηγορία των συνθέτων, θα ακολουθείται ο εξής κανόνας : Το υλικό πρέπει να προκύπτει ως ο συνδυασμός συστατικών μερών, στα οποία οι ιδιότητες του ενός από τα μέρη αυτά να είναι σημαντικά μεγαλύτερες από του άλλου (τουλάχιστον 5πλάσιες) και η κατ' όγκο περιεκτικότητα του ενός να μην είναι πολύ μικρή (> 10%).

Το ένα, από τα συστατικά μέρη, χαρακτηρίζεται ως συστατικό ενίσχυσης και προσδίδει στο σύνθετο βελτιωμένες μηχανικές, κυρίως, ιδιότητες. Το δεύτερο συστατικό καλείται μήτρα, είναι συνήθως χαμηλής πυκνότητας και η συμμετοχή του στο σύνθετο εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση ιδιοτήτων της ενίσχυσης.

Στην Εικόνα 1.1 παρουσιάζεται ο συνδυασμός ανά δύο των βασικών οικογενειών υλικών (μεταλλικά, πολυμερικά και κεραμικά υλικά) και οι ομάδες συνθέτων που προκύπτουν.



**Εικόνα 1.1** Κατηγορίες σύνθετων υλικών

## 1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Τα σύνθετα υλικά χρησιμοποιούνται ευρύτατα από τον άνθρωπο από αρχαιοτάτων χρόνων. Υλικά που εύκολα βρίσκουμε στη φύση (ξύλο, πέτρα, πηλός, κόκαλα) χρησιμοποιήθηκαν ευρύτατα από τον άνθρωπο, ο οποίος σύντομα έμαθε να βελτιώνει τις ιδιότητες τους ενισχύοντας τα υλικά αυτά με πρόσθετα συστατικά.

Για παράδειγμα, οι Αιγύπτιοι (5000 π.Χ.) χρησιμοποιούσαν την τεχνική της ενίσχυσης τούβλων πηλού με πλέγμα άχρωων, με αποτέλεσμα τη μείωση των τάσεων συστολής που αναπτύσσονταν κατά την ξήρανση του πηλού. Επίσης, παρατήρησαν ότι οι πλάκες από πολύσρωτες βέργες ξύλου, παρουσίαζαν πολύ μεγαλύτερη αντοχή από το φυσικό ξύλο έναντι στρέβλωσης που οφειλόταν στην απορρόφηση υγρασίας.

Στη Μεσοποταμία (1000 π.Χ.) εφαρμόστηκε η τεχνική του βερνικόματος των τούβλων και των πλακιδίων με σκοπό τον περιορισμό της επιφανειακής φθοράς, ενώ, κατά τους Ρωμαϊκούς χρόνους, η οδοποιία στηρίχθηκε στην ενίσχυση του οδοστρώματος με τρίμματα κεραμιδιών.

Η χρήση της σιδερόβεργας για προεντεταμένο σκυρόδεμα, που χρησιμοποιείται στις οικοδομές της σύγχρονης εποχής, δεν είναι παρά η μετεξέλιξη της τεχνικής της ανάμιξης γύψου με ζωικό τρίχωμα, η οποία ήταν μία πρακτική μέθοδος ενίσχυσης εύθραυστων υλικών κατασκευής στους αναπτυσσόμενους πολιτισμούς.

Το πρώτο σύνθετο υλικό βασισμένο σε μήτρα πλαστικού εμφανίστηκε τη δεκαετία του 1920 και επρόκειτο για μίγμα ινιδίων ξύλου με φαινολική φορμαλδεΰδη, γνωστό αργότερα ως βακελίτης προς τιμή του Βέλγου επιστήμονα Leo Baekeland.

Η ανάπτυξη των σύνθετων υλικών με ενίσχυση ινών κατά την διάρκεια των τελευταίων 30 ετών υπήρξε ραγδαία και συνδυάστηκε με την προ ηγηθείσα ανάπτυξη των υψηλής αντοχής ινών γυαλιού και των υψηλής δυσκαμψίας ινών βορίου (1960) και την έντονη τάση της αεροδιαστημικής βιομηχανίας για μμεγαλύτερη απόδοση με παράλληλη μείωση βάρους αεροσκαφών και διαστημοπλοίων.

Το 1964 διατέθηκαν στην αγορά, αρχικά σε μικρές ποσότητες, οι ίνες άνθρακα (carbon fibers), οι οποίες τελευταία αποτελούν τις ευρύτερα χρησιμοποιούμενες ενισχύσεις στις αεροδιαστημικές κατασκευαστικές εφαρμογές.

Το 1971 διατέθηκαν στο εμπόριο οι ίνες αραμιδίου, οι οποίες τώρα χρησιμοποιούνται ευρύτατα στα ελαστικά αυτοκινήτων, καθώς και σε αρκετές αεροδιαστημικές και ναυπηγικές κατασκευές. Η ειδική αντοχή (λόγος αντοχής προς πυκνότητα) και η ειδική δυσκαμψία (λόγος δυσκαμψίας προς πυκνότητα) των ενισχυτικών ινών βαίνουν συνεχώς αυξανόμενες τα τελευταία 30 χρόνια, π.χ. η ειδική αντοχή και η ειδική δυσκαμψία των ινών γυαλιού, άνθρακα, αραμιδίου και βορίου έχουν φθάσει στο 10-14πλάσιο των αντίστοιχων τιμών του αλουμινίου (ελαφρό μέταλλο).

Τα σύνθετα υλικά καλύπτουν μεγάλο μέρος των εφαρμογών των νέων τεχνολογιών αιχμής στις κατασκευές και έχουν μεταβάλει σημαντικά τις ακολουθούμενες διαδικασίες σχεδίασης, παραγωγής, ελέγχου και συντήρησης.

Το μικρό βάρος, η υψηλή αντοχή, η εξαιρετική αντοχή σε διάβρωση, η πολύ καλή συμπεριφορά σε κόπωση, σε κρούση και στη διάδοση ρωγών, οι σχετικά εύκολες διαδικασίες παραγωγής και το μικρό κόστος συντήρησης είναι μερικοί από τους παράγοντες εκείνους που έχουν οδηγήσει τα σύνθετα υλικά στην πρώτη θέση μεταξύ των κατασκευαστικών υλικών για μεγάλο πλήθος εφαρμογών.



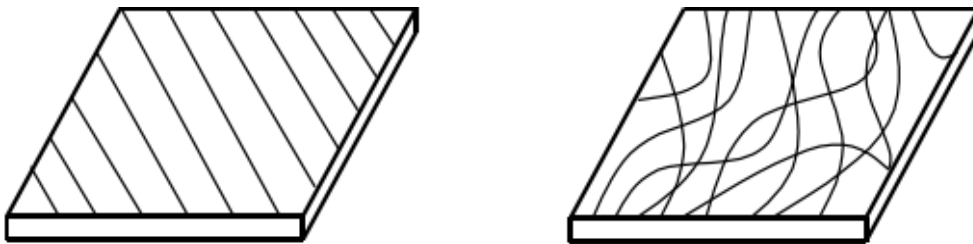
### 1.3 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Ανάλογα με τη μορφή του συστατικού ενίσχυσης, τα σύνθετα κατατάσσονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες :

- **Ινώδη σύνθετα** (fibrous composites) : Με ενίσχυση ινών εμποτισμένων σε υλικό μήτρας
- **Στρωματικά σύνθετα** (laminated composites) : Με επάλληλες στρώσεις διαφόρων υλικών
- **Κοκκώδη σύνθετα** (particulate composites) : Με ενίσχυση σωματιδίων διαφόρων υλικών διασκορπισμένων στο υλικό της μήτρας

Τα ινώδη σύνθετα διακρίνονται περαιτέρω ανάλογα με τον προσανατολισμό και τη διάταξη των ινών μέσα στη μήτρα. Σύμφωνα με την ταξινόμηση αυτή τα ινώδη σύνθετα διακρίνονται σε :

- **Μονοδιευθυντικά σύνθετα** , στα οποία οι ίνες έχουν όλες την ίδια διεύθυνση (Εικόνα 1.1a)
- **Πολυδιευθυντικά σύνθετα**, στα οποία οι ίνες έχουν διαφορετικές και τυχαίες διευθύνσεις (Εικόνα 1.1b)



(a) Μονοδιευθυντικό σύνθετο υλικό

(b) Πολυδιευθυντικό σύνθετο υλικό

**Εικόνα 1.2** Γενικοί τύποι ινωδών σύνθετων υλικών

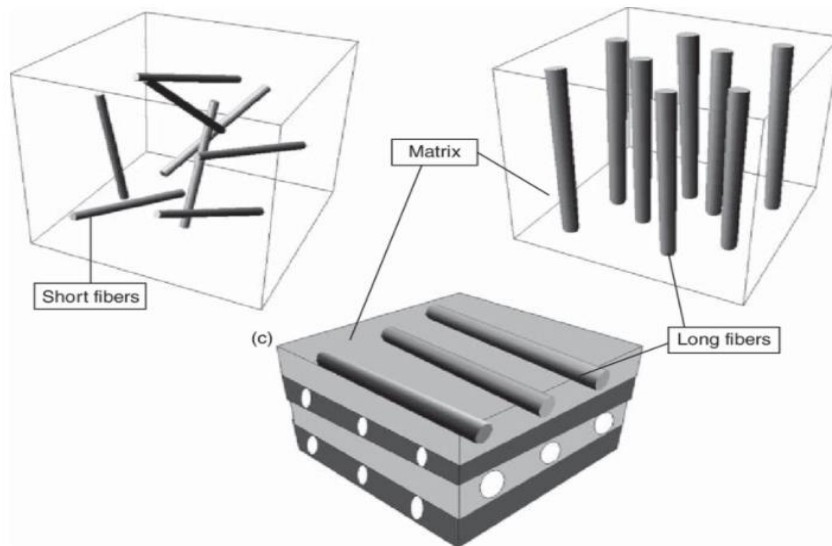
Ένας επιπλέον διαχωρισμός των ινωδών υλικών βασίζεται στο λόγο μήκους προς διάμετρο ( $l/d$ ) των ινών και παρατηρούνται οι ακόλουθες κατηγορίες :

- **Συνεχείς ή μεγάλου μήκους ίνες** (continuous fibers) , στις οποίες ισχύει ότι  $l/d$  θα πρέπει να έχει τιμή μεγαλύτερη ή ίση από 100 (Εικόνα 1.2).
- **Ασυνεχείς ή κοντές ίνες** (discontinuous fibers), στις οποίες ισχύει ότι  $l/d$  θα πρέπει να είναι μικρότερος από 100 (Εικόνα 1.2).
- **Νηματίδια ή τριχίτες** (whiskers), στις οποίες η διάμετρος θα πρέπει να είναι μικρότερη από 1 μικρόμετρο και το μήκος περίπου ίσο με 100 μικρόμετρα.

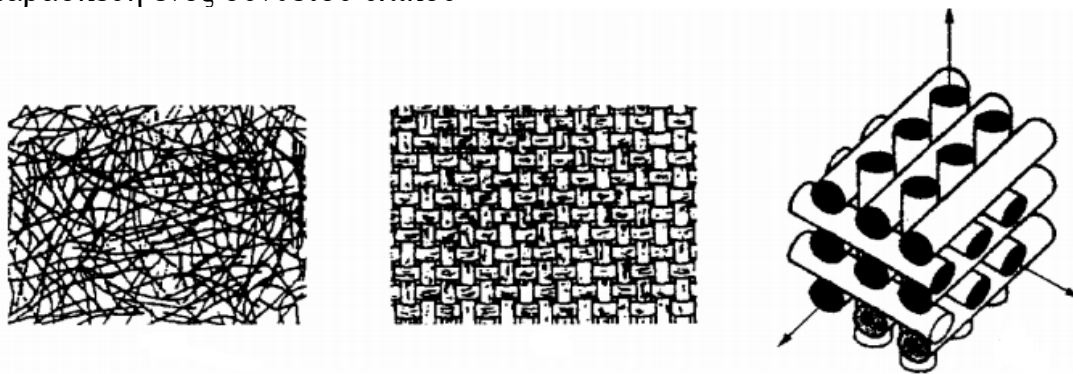
Τα πολυδιευθυντικά σύνθετα υλικά διακρίνονται περαιτέρω στις ακόλουθες κατηγορίες:

- **Σύνθετα με ίνες τυχαίας διεύθυνσης** (Εικόνα 1.3a)
- **Σύνθετα με ίνες σε πλέξη ύφανσης** (Εικόνα 1.3b)
- **Σύνθετα με ίνες σε τρισσορθογώνια/τριασδιάσταση ύφανση** (Εικόνα 1.3c)

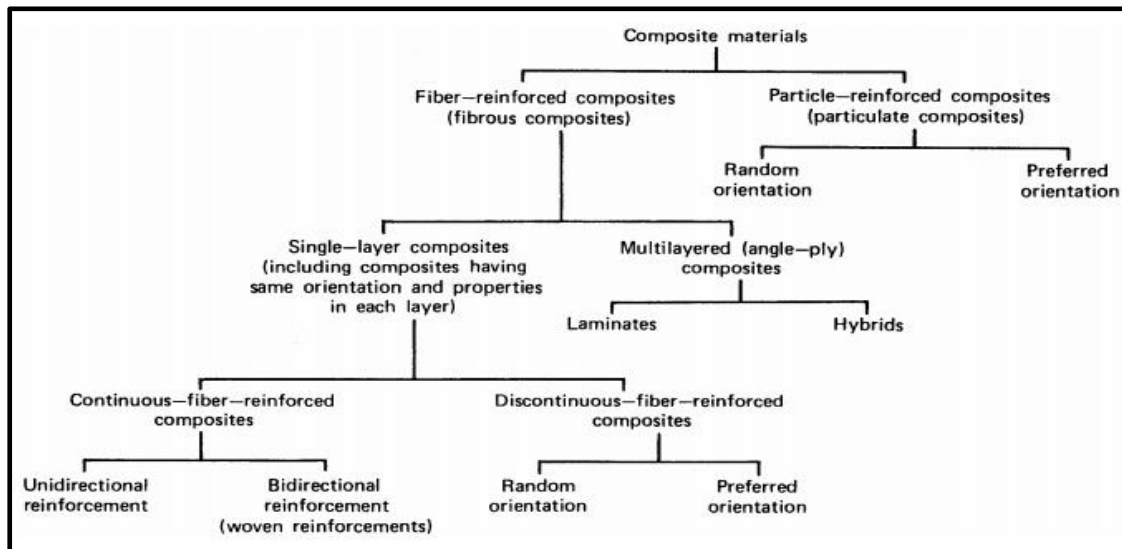
Τέλος, παρουσιάζεται στην Εικόνα 1.4 συγκεντρωτικά, η γενική ταξινόμηση των συνθετών υλικών.



**Εικόνα 1.3** Συνεχείς (long) και ασυνεχείς (short) ίνες ενσωματωμένες σε μήτρα για την παρασκευή ενός σύνθετου υλικού



(a) τυχαίας διεύθυνσης (b) σε πλέξη ύφανσης (c) σε τρισσορθογώνια ύφανση  
**Εικόνα 1.4** Διακριτοποίηση πολυδιευθυντικών σύνθετων υλικών



**Εικόνα 1.5** Γενική ταξινόμηση των σύνθετων υλικών

### 1.3.1 Ίνες

Προκειμένου οι ίνες να προσφέρουν ικανοποιητική ενίσχυση των μηχανικών ιδιοτήτων της μήτρας, το υλικό κατασκευής τους επιλέγεται, έτσι ώστε να παρουσιάζει υψηλό μέτρο ελαστικότητας (E), υψηλή τάση θραύσης σε εφελκυσμό (UTS), μεγάλη ακαμψία (stiffness), χαμηλή δυσθραυστότητα (toughness) και επιπλέον να έχει μικρή πυκνότητα ( $\rho$ ).

Τα περισσότερα ενισχυτικά υλικά βασίζονται κυρίως σε στοιχεία που βρίσκονται στη 2η και 3η περίοδο του Περιοδικού Συστήματος. Στα προηγμένα σύνθετα υλικά, οι ενισχυτικές ίνες είναι κατασκευασμένες είτε από ανόργανα υλικά (γυαλί, άνθρακας, μέταλλα, κεραμικά) είτε από οργανικά υλικά (πολυμερή).

#### Ίνες Γυαλιού (Glass fibers)

Οι ίνες γυαλιού χρησιμοποιήθηκαν στα σύνθετα πρώτης γενιάς (1940) και η χρήση τους συνεχίζεται επιτυχώς μέχρι σήμερα. Είναι από τους πλέον διαδεδομένους τύπους ενισχυτικών ινών στα σύνθετα πολυμερικής μήτρας. Η δομική τους βάση είναι τα οξείδια πυριτίου, ασβεστίου, βορίου, αλουμινίου, κ.ά.. Θεωρούνται από τα πιο φθηνά ενισχυτικά υλικά. Ανάλογα με τη χημική τους σύσταση οι ίνες γυαλιού χαρακτηρίζονται ως τύπου E, C και S.

- **E-glass (E=electrical)**: Πρόκειται για τα συχνότερα χρησιμοποιούμενα υαλονήματα με καλές ηλεκτρικές ιδιότητες, αντοχή και δυσκαμψία, καθώς και πολύ καλή συμπεριφορά στην αλλαγή των καιρικών συνθηκών, αλλά με μέτρια αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια.

- **C-glass (C=corrosion)**: Υαλονήματα με υψηλή αντίσταση στη χημική διάβρωση, αλλά και με καλύτερες μηχανικές ιδιότητες από τις ίνες τύπου E, από τις οποίες όμως είναι ακριβότερες.

- **S-glass (S=stiffness)**: Ακριβότερο υλικό από το E-glass, αλλά με υψηλότερη δυσκαμψία και θερμική αντοχή. Χρησιμοποιείται κυρίως στην αεροπορική βιομηχανία.

Τα βασικά πλεονεκτήματα των υαλονημάτων είναι το χαμηλό κόστος και η υψηλή αντοχή, ενώ στα κύρια μειονεκτήματα τους εντάσσονται το χαμηλό μέτρο ελαστικότητας και η μικρή αντοχή τους έναντι φθοράς εκτριβής (λύση της συνέχειας της επιφάνειάς τους). Εγγαράξεις και εκδορές δημιουργούν περιοχές συγκέντρωσης τάσεων στην επιφάνεια της ίνας, με αποτέλεσμα την ταχεία υποβάθμιση των μηχανικών τους ιδιοτήτων και της ικανότητας πρόσφυσης τους στην πολυμερική μήτρα.

#### Ίνες Άνθρακα (Carbon fibers)

Οι ίνες γραφίτη είναι η επικρατέστερη ενίσχυση υψηλής αντοχής και υψηλού μέτρου ελαστικότητας, η οποία χρησιμοποιείται για την παρασκευή υψηλών επιδόσεων σύνθετων υλικών ρητινικής μήτρας. Γενικά, όταν απαιτείται ο βέλτιστος συνδυασμός μηχανικής συμπεριφοράς και ελάττωσης του βάρους, οι χρησιμοποιούμενες ίνες είναι, συνήθως, ίνες άνθρακα.

Ο γραφίτης αποτελείται από ανισότροπους πολυκρυσταλλίτες, των οποίων η ανισοτροπία εξαρτάται από τις συνθήκες παρασκευής τους. Αποτέλεσμα του ισχυρού προσανατολισμού των κρυσταλλιτών παράλληλα στο διαμήκη άξονα των ανθρακονημάτων είναι η υψηλή στιβαρότητα και αντοχή σε θραύση και ο χαμηλός συντελεστής θερμικής διαστολής κατά τη διεύθυνση αυτή.

### Ίνες Πολυμερούς (Polymer fibers)

Οι πιο διαδεδομένες ίνες πολυμερούς είναι οι ίνες από Nylon, πολυαιθυλένιο και Kevlar. Παρόλο που από μηχανικής άποψης δεν κατατάσσονται στις 10 ίνες υψηλής απόδοσης, εντούτοις το χαμηλό κόστος παραγωγής τους τις καθιστά δημοφιλείς στην αγορά. Η πρώτη υψηλής απόδοσης οργανική ίνα γραϊδίου παρασκευάστηκε από την DuPont και έγινε γνωστή με την εμπορική ονομασία Kevlar και παράγεται στους τύπους Kevlar-29, Kevlar-49, Kevlar-149.

### Μεταλλικές Ίνες

Διάφορα μέταλλα όπως το βόριο (B), το βηρύλλιο (Be) και το βολφράμιο (W) θα μπορούσαν να αποτελέσουν εξαιρετικά ενισχυτικά συνθέτων υλικών, αφού παρουσιάζουν υψηλή τιμή ακαμψίας σε σχέση με το ειδικό βάρος τους (ειδική ακαμψία). Το βόριο είναι το περισσότερο υποσχόμενο υλικό για την κατασκευή ινών ενίσχυσης, ωστόσο οι τεχνικές παραγωγής μεταλλικών ινών ενίσχυσης εξακολουθούν να παραμένουν πολύ δαπανηρές.

### Κεραμικές Ίνες

Οι κεραμικές ίνες χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές υψηλών θερμοκρασιών. Χαρακτηρίζονται από υψηλή αντοχή, στιβαρότητα και θερμική ευστάθεια. Οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες κεραμικές ίνες είναι οι ίνες καρβιδίου του πυριτίου (SiC) και αλούμινας (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), ενώ σπανιότερα συναντώνται και ίνες Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>, BeO, B<sub>4</sub>C και ZrO<sub>2</sub>. Το καρβίδιο του πυριτίου (SiC) είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ως ενισχυτικό υλικό είτε με τη μορφή ινών είτε με τη μορφή φυλλιδίων. Οι ίνες SiC παρουσιάζουν υψηλές τιμές αντοχής και ανώτερες μηχανικές ιδιότητες από τα φυλλίδια.

### Τριχίτες

Οι τριχίτες είναι νηματικοί μονοκρυσταλλοί που παράγονται με αποσύνθεση άλατος μετάλλου σε αναγωγική ατμόσφαιρα, κάτω από αυστηρά ελεγχόμενες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας. Οι εξωτερικές τους επιφάνειες είναι λείες και δεν παρουσιάζουν ζώνες συγκέντρωσης τάσεων.

Οι ευρύτερα χρησιμοποιούμενοι τριχίτες είναι από αλούμινα, γραφίτη, καρβίδιο του πυριτίου, βηρυλλία και νιτρίδιο του πυριτίου.

### Ίνες φυσικών ορυκτών

Αρκετά ορυκτά που βρίσκονται σε ινώδη ή φυλλώδη μορφή, μπορούν να αποτελέσουν φθινό ενισχυτικό υλικό, αλλά χαμηλών προδιαγραφών. Ευρύτερα χρησιμοποιούμενα τέτοια ορυκτά είναι ο αμίαντος και η μαρμαρυγία (mica).

Ο αμίαντος λόγω του χαμηλού του κόστους χρησιμοποιείται ευρύτατα. Οι μαρμαρυγίες ανήκουν στην κατηγορία των φυλλοπυριτικών ορυκτών, χαρακτηρίζονται από τέλειο σχισμό και αποχωρίζονται εύκολα από το πέτρωμά με μορφή φυλλιδίων, τα οποία χρησιμοποιούνται ως συστατικό ενίσχυσης του συνθέτου υλικού

### 1.3.2 Μήτρες

Ο ρόλος της μήτρας συνίσταται σε :

1. Συγκράτηση των ινών μεταξύ τους.
2. Προστασία των ινών από περιβαλλοντικές φθορές και προσβολές.
3. Μεταβίβαση των μηχανικών τάσεων που ασκούνται συνολικά στο σύνθετο υλικό προς τις ίνες
4. Ανακοπή της διάδοσης των ρωγμών, που ξεκινούν από θραύση των ινών

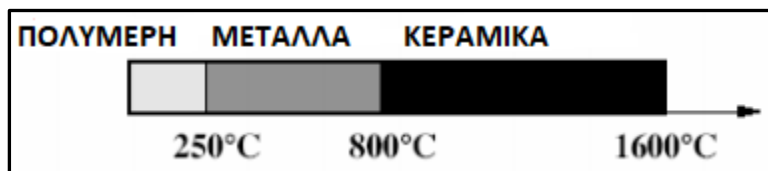
Για να ικανοποιεί το ρόλο, με τον οποίο είναι επιφορτισμένη η μήτρα, πρέπει να χαρακτηρίζεται από :

1. Ολκιμότητα
2. Ανθεκτικότητα
3. Σχετική ευκαμψία
4. Σημείο τήξης μεγαλύτερο από τη μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας του σύνθετου υλικού

Οι ιδιότητες αυτές πρέπει επίσης να παρουσιάζουν «συμβατότητα» με τις αντίστοιχες ιδιότητες των ενισχυτικών ινών. Συνήθως, το υλικό της μήτρας έχει χαμηλότερη πυκνότητα, αντοχή και δυσκαμψία από τις ίνες. Τέλος, για τη σωστή λειτουργία του σύνθετου υλικού, καθοριστικός παράγοντας είναι η καλή πρόσφυση ίνας-μήτρας. Ανάλογα με το υλικό της μήτρας διακρίνουμε τις ακόλουθες ομάδες υλικών μήτρας για σύνθετα υλικά :

1. Οργανικές
2. Μεταλλικές
3. Κεραμικές

Η επιλογή κατάλληλης μήτρας εξαρτάται από τη θερμοκρασία και το περιβάλλον χρήσης του συνθέτου. Μια γενική οδηγία αναφορικά με τα θερμοκρασία όρια για κάθε ομάδα υλικών παρουσιάζεται στην Εικόνα 1.5.



Εικόνα 1.6 Θερμοκρασία όρια χρήσης υλικών

Τα αντίστοιχα σύνθετα υλικά χαρακτηρίζονται με τις ακόλουθες συντμήσεις :

- **PMC** : Polymer Matrix Composite
- **MMC** : Metal Matrix Composite
- **CMC** : Ceramic Matrix Composite

### Οργανικές Μήτρες

Οι οργανικές μήτρες διακρίνονται σε:

(α) **Θερμοπλαστικές:** Πρόκειται για πολυμερή με γραμμικές αλυσίδες. Παρουσιάζουν δομή, όπου οι μοριακές αλυσίδες διασυνδέονται με ασθενείς δυνάμεις Van der Waals, καθιστώντας το υλικό μαλακότερο σε υψηλές θερμοκρασίες. Λόγω του χαμηλού τους κόστους, χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές ευρείας κατανάλωσης. Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα αποτελούν οι μήτρες πολυαιθυλενίου (PE) και πολυστυρενίου (PS). Ως ενισχυτικά υλικά θερμοπλαστικών μητρών χρησιμοποιούνται φθηνά υλικά (αμιάντος, μαρμαρυγίες, κ.α.), ώστε και το τελικό προϊόν να είναι χαμηλής τιμής.

(β) **Θερμοσκληρυνόμενες:** Χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις όπου απαιτούνται καλύτερες μηχανικές ιδιότητες. Τα θερμοσκληρυνόμενα πολυμερή παρουσιάζουν τρισδιάστατη δομή πλέγματος από πρωτογενείς ισχυρούς δεσμούς μεταξύ των μοριακών αλυσίδων. Αύξηση της θερμοκρασίας αυξάνει το πλήθος των διαμοριακών δεσμών καθιστώντας τα υλικά αυτά σκληρότερα και ψαθυρότερα. Τέτοιες μήτρες είναι:

- **Πολυεστερικές ρητίνες** που ενισχύονται με ίνες γυαλιού.
- **Εποξυδικές ρητίνες** με μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους 200 °C, καλύτερες μηχανικές ιδιότητες από τις προηγούμενες και χρήση στη αεροναυπηγική.
- **Φαινολικές ρητίνες**, οι οποίες έχουν χαμηλή πλαστικότητα και μέτριες μηχανικές ιδιότητες. Η μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους φτάνει τους 400 °C.

### Μεταλλικές μήτρες

Μέταλλα, όπως το αλουμίνιο, το τιτάνιο και το νικέλιο, χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο ως υλικά μήτρας προσφέροντας σημαντικά πλεονεκτήματα. Για εφαρμογές υψηλών θερμοκρασιών επιβάλλεται η χρήση μεταλλικών ή κεραμικών μήτρων, αφού η μέγιστη επιτρεπτή θερμοκρασία χρησιμοποίησης οργανικών μητρών είναι πολύ χαμηλή (~300°C), ενώ οι ανθρακούχες μήτρες οξειδώνονται σε θερμοκρασία μεγαλύτερη από 500°C.

### Κεραμικές μήτρες

Τα κεραμικά υλικά είναι σκληρά, δύστηκτα, μεγάλης στιβαρότητας και μεγάλης αντοχής στη διάβρωση και την χημική προσβολή. Στην περίπτωση της κεραμικής μήτρας, οι ίνες αποβλέπουν αφενός στη βελτίωση της αντοχής του κεραμικού στους θερμικούς αιφνιδιασμούς και αφετέρου στην αύξηση της μηχανικής του αντοχής. Η ολκιμότητα και το ποσοστό των ινών επιδρούν ευνοϊκά στη βελτίωση της αντοχής της μήτρας.

Το σημαντικότερο πρόβλημα στη χρήση κεραμικών μητρών εντοπίζεται στη συνάφεια ινών-μήτρας και οφείλεται στη μεγάλη διαφορά μεταξύ των συντελεστών γραμμικής διαστολής της κεραμικής μήτρας και των συνήθων ενισχυτικών ινών. Μεγάλη εφαρμογή βρίσκουν, επίσης, οι μήτρες άνθρακα, ενώ ειδική περίπτωση κεραμικής μήτρας αποτελεί το τσιμέντο. Είναι γνωστές οι οικοδομικές κατασκευές τσιμέντου με ενίσχυση χάλυβα (οπλισμένο σκυρόδεμα), ινών αμιάντου (ελενίτ), ινών γυαλιού, καθώς επίσης και οι κατασκευές από γύψο με ενίσχυση ινών γυαλιού ή αμιάντου.

## 2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ (MULTI SCALE ANALYSIS)

Ένα πολύ σημαντικό βήμα για την προσομοίωση οποιουδήποτε στατικού προβλήματος αποτελεί ο προσδιορισμός των υλικών από τα οποία αποτελείται ο υπό-μελέτη φορέας. Με μία γρήγορη ματιά θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως τα σύνθετα υλικά σε μακροσκοπικό επίπεδο χαρακτηρίζονται ως ομοιογενή. Όμως σε μικροσκοπικό επίπεδο παρατηρούμε ότι χαρακτηρίζονται από ανομοιογένεια ως προς τη δομή τους (μήτρα, ίνες), χαρακτηριστικό που δηλώνει τη μη ομοιόμορφη μηχανική τους συμπεριφορά.

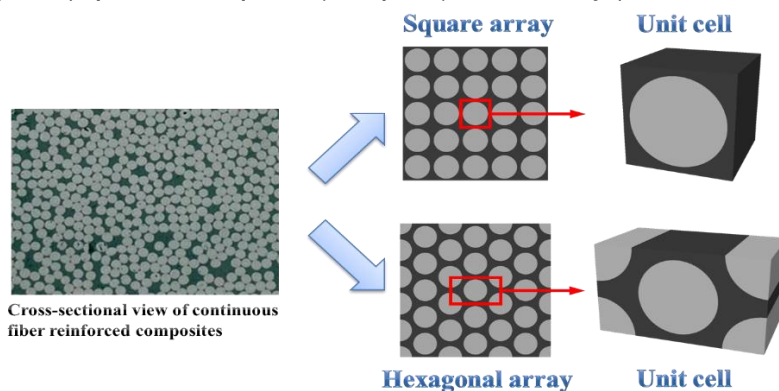
Για τη σωστή προσομοίωσή τους απαιτείται η θεώρηση της περιοδικότητας της μικροδομής (Εικόνα 2.1) τους είτε κατά μονάδες είτε κατά ομάδες, έως τη δημιουργία του μακροσκοπικού προβλήματος. Όμως μία τέτοια προσομοίωση απαιτεί σύγχρονες μεθόδους ανάλυσης. Πριν την ανάπτυξη των πεπερασμένων στοιχείων, τα χαρακτηριστικά αυτών των υλικών υπολογίζονταν σύμφωνα με στατιστικά μοντέλα, δεδομένα των οποίων αποτελούσε πληθώρα εργαστηριακών αποτελεσμάτων.

Η στρατηγική αυτή υπάρχει ακόμα για τα «κλασσικά» υλικά (βλ. σκυρόδεμα) αλλά για τα σύγχρονα σύνθετα υλικά, η μελέτη της μακροκλίμακας των κατασκευών και της μικροκλίμακας των υλικών πραγματοποιείται στον ίδιο χρόνο, χάριν της *Ανάλυσης Πολλαπλών Κλιμάκων*.

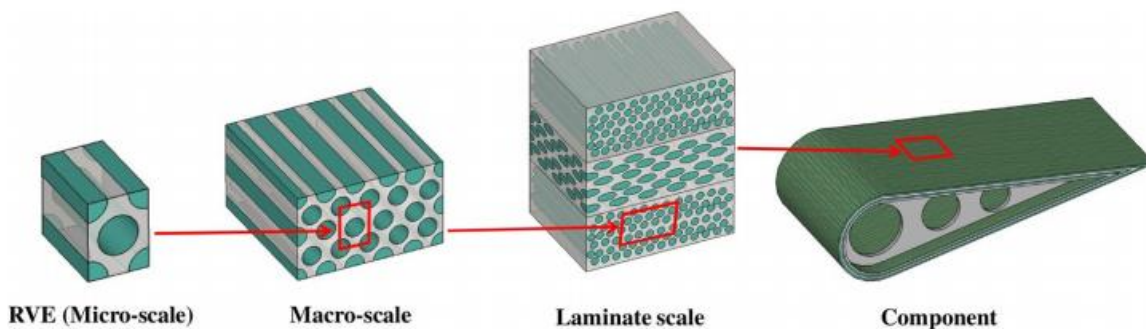
Η βασική ιδέα για την μεθοδολογία των πολλαπλών κλιμάκων ανάλυσης, είναι η γεφύρωση των δεδομένων των χαρακτηριστικών των ετερογενών υλικών τα οποία ανήκουν σε διαφορετικές κλίμακες μεγέθους. Οι μεθοδολογίες που ακολουθούνται είναι ο συνδυασμός τεχνικών και μεθόδων αναλύσεων ανάλογα με το είδος των εφαρμογών και των υλικών τα οποία και θα προσομοιωθούν και η μεταφορά δεδομένων στις κλίμακες μεγέθους έχοντας επιλέξει συγκεκριμένη μέθοδο μοντελοποίησης.

Ανάλογα επίσης με το είδος των υλικών, έχουν δοθεί μεθοδολογίες όπου με συνδυαστικό κρίκο την αξιοποίηση των αποτελεσμάτων των αναλύσεων, σε κάθε κλίμακα ανάλυσης, εφαρμόζονται οι σχέσεις ομογενοποίησης. Με την ομογενοποίηση οι υπολογιζόμενες μηχανικές ιδιότητες καταλήγουν σε μακροσκοπικά ισοδύναμες μηχανικές ιδιότητες.

Ξεκινώντας με αφετηρία τη νανο-κλίμακα, η μεθοδολογία καταλήγει στη μάκρο-κλίμακα και την κλίμακα μεγάλου μεγέθους. Κάθε στάδιο ανάλυσης περιλαμβάνει την ανάπτυξη κατάλληλων μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων (ΠΣ), τα οποία χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των ισοδύναμων μηχανικών ιδιοτήτων οι οποίες μεταφέρονται στην επόμενη κλίμακα, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.2.



**Εικόνα 2.1** Τετραγωνικό και εξαγωνικό μοτίβο περιοδικότητας σε συνεχές ινοπλισμένο σύνθετο υλικό



**Εικόνα 2.2** Μεταπήδηση από την micro κλίμακα σε μεγαλύτερες κλίμακες μέσω της ομογενοποίησης

## 2.1 ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗ

Η μηχανική των σύνθετων υλικών είναι πιο πολύπλοκη από την αντίστοιχη των μετάλλων, καθώς ιδιότητες των πρώτων προέρχονται από τη σύσταση των υλικών που χρησιμοποιούνται και εξαρτώνται από τον τρόπο κατασκευής τους, τις ιδιότητες των συστατικών, τη γεωμετρική τους σύνθεση, κ.α. , τα οποία οδηγούν σε αβεβαιότητες σε διαφορετικές κλίμακες.

Μία συνήθης προσέγγιση στο σχεδιασμό των μελών με σύνθετα υλικά είναι να ομογενοποιήσουμε τις ελαστικές ιδιότητες μεταξύ των κλιμάκων, οι οποίες παρέχουν μία εκτίμηση για τις ενεργές ελαστικές ιδιότητες. Αρκετές θεωρητικές μέθοδοι ομογενοποίησης είναι διαθέσιμες, ωστόσο, αδυνατούν να ικανοποιήσουν την επίδραση της μεταβλητότητας της γεωμετρίας των συστατικών υλικών σε επίπεδο μικροκλίμακας.

Για το λόγο αυτό, η χρήση μίας αριθμητικής προσέγγισης πεπερασμένων στοιχείων, όπως είναι η μέθοδος ομογενοποίησης Αντιπροσωπευτικού Όγκου Στοιχείου (RVE), είναι πιο ακριβής, ευρέως προτεινόμενη στην πρόβλεψη των ενεργών ελαστικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών.

Ειδικότερα με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι δυνατό από την κλίμακα μεγέθους της στρώσης του σύνθετου υλικού, με ανάπτυξη αριθμητικού μοντέλου που θα υπακούει σε εξισώσεις της μικρομηχανικής, να υπολογιστούν οι μηχανικές ή και οι θερμικές ιδιότητες. Οι ιδιότητες αυτές θα εξαρτώνται από παραμέτρους όπως η αναλογία όγκου των ινών ενίσχυσης ή ακόμα και την πληροφορία της διασποράς τους στο μητρικό υλικό.

Οι παραπάνω παράμετροι είναι σημαντικοί καθώς είναι συνδεδεμένοι με την τεχνολογία παρασκευής του υλικού. Συνηθίζεται δε, σε αυτές τις κλίμακες μεγέθους, η μηχανική συμπεριφορά της μικροδομής του υλικού να μελετάται μέσω της ανάπτυξης ενός μοντέλου αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου (RVE).



## 2.2 ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΟΙ ΟΓΚΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ (REPRESENTATIVE VOLUME ELEMENTS)

Για τη μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς αυτών των υλικών με πολύπλοκη δομή μέσω αριθμητικών προσομοιώσεων και χρήση των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιούνται δυο τύποι μοντελοποίησης: α) το μοντέλο του αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου (RVE) και β) το μοντέλο της αντιπροσωπευτικής κυψελίδας (RUC).

Οι ορισμοί των δυο τύπων μοντελοποίησης χαρακτηρίζουν τα μοντέλα RVEs ως όγκους υλικού που τοποθετούνται στη νανο-κλίμακα (nm) ή τη μικρο-κλίμακα (μm) με δομή αντιπροσωπευτική του υλικού και τα μοντέλα RUCs ως όγκους με δομή αντιπροσωπευτική ενός τμήματος του υλικού.

Χαρακτηριστικός επίσης είναι ο ορισμός που δίνεται από την εργασία [137] όπου ως RVE χαρακτηρίζεται το δείγμα που αντιπροσωπεύει μια τυπική δομή όλου του υλικού και περιέχει κατάλληλο αριθμό εγκλεισμάτων ώστε το μέτρο ελαστικότητας που υπολογίζεται να είναι ανεξάρτητο από τις τιμές των μετακινήσεων στις επιφάνειες του μοντέλου RVE αρκεί αυτές να είναι μακροσκοπικά ομοιόμορφες. Εντούτοις συχνά στη βιβλιογραφία ο παραπάνω διαχωρισμός των δυο τύπων μοντελοποίησης δεν είναι ευδιάκριτος.

### *Επιλογή του RVE*

Η επιλογή του RVE μπορεί να είναι μια πολύπλοκη διαδικασία. Η ύπαρξη του RVE υιοθετεί ότι είναι δυνατό να αντικατασταθεί ένα ανομοιογενές υλικό με ένα ισοδύναμο ομοιογενές. Με την παραδοχή αυτή ισχυριζόμαστε ότι ο όγκος πρέπει να είναι αρκετά μεγάλος ώστε να αναπαραστήσει τη μικροκατασκευή χωρίς να εισάγουμε μακροσκοπικές ιδιότητες οι οποίες δεν υπάρχουν (όπως για παράδειγμα η ανισοτροπία σε ένα μακροσκοπικά ισοτροπικό υλικό). Από την άλλη μεριά, το δείγμα πρέπει να είναι αρκετά μικρό ώστε να μπορεί να αναλυθεί αναλυτικώς ή αριθμητικώς.

Η ανάλυση των σύνθετων ή ανομοιογενών υλικών στην κλίμακα των ατομικών συστατικών που τα απαρτίζουν ονομάζεται μικρομηχανική ανάλυση.

Δεν υπάρχει ένα συγκεκριμένο μέγεθος για το RVE. Εξαρτώμενο από τη μελέτη των μηχανικών ιδιοτήτων, το μέγεθος του RVE μπορεί να μεταβάλλεται σημαντικά. Για το λόγο αυτό εισάγονται εναλλακτικές λύσεις για το RVE οι οποίες είναι οι εξής :

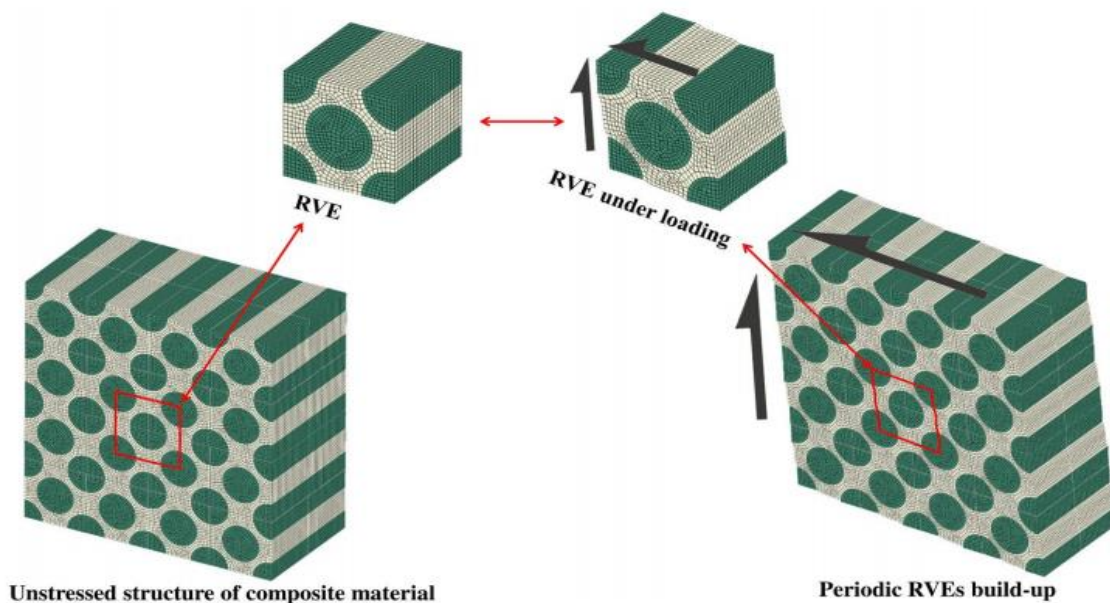
- Στατιστικός Όγκος Στοιχείου (Statistical Volume Element), ο οποίος συχνά αναφέρεται σε έναν στοχαστικό όγκο στοιχείου στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Ο στατιστικός όγκος στοιχείου λαμβάνει υπόψη τη μεταβλητότητα στη μικροκατασκευή. Σε αντίθεση με το RVE, στην περίπτωση του οποίου λαμβάνονται μέσες τιμές σε όλες τις υλοποιήσεις, το SVE παρουσιάζει διαφορετικές τιμές από την μία υλοποίηση στην άλλη. Χαρακτηριστικά ιών, όπως για παράδειγμα ο προσανατολισμός, ο αποπροσανατολισμός, το μέγεθος των ιών, το σχήμα, η αναλογία, περιλαμβάνονται σε SVE μοντέλα. Σε σύγκριση με τα RVE, τα SVE μπορούν να παρέχουν μία πιο ολοκληρωμένη αναπαράσταση των μικροκατασκευών των υλικών.

- Αυσχέτιστος Όγκος Στοιχείου (Uncorrelated Volume Element), οι οποίοι αποτελούν μία επέκταση των SVE οι οποίοι επίσης θεωρούν τη συνδιακύμανση των γειτονικών μικροκατασκευών, ώστε να προβλέψουν ένα ακριβές μέγεθος κλίμακας για στοχαστικά μοντέλα.

Μέσω της επιβολής των κατάλληλων περιοδικών συνοριακών συνθηκών (Periodic Boundary Conditions) στα μοντέλα RVEs και RUCs, είναι δυνατή η προσομοίωση της μακροσκοπικής συμπεριφοράς ενός ομογενούς υλικού σε μικρούς χρόνους επίλυσης. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της διαδικασίας της ομογενοποίησης, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, υπολογίζοντας τις ενεργές ελαστικές ιδιότητες του Αντιπροσωπευτικού Όγκου και μεταπηδώντας κατ' αυτόν τον τρόπο στην επόμενη κλίμακα, κ.ο.κ.

Οι περιοδικές συνοριακές συνθήκες που θα επιβάλλουμε στο RVE θα εξασφαλίσουν ότι οι εξωτερικές επιφάνειες του RVE θα παραμείνουν περιοδικές και μετά την παραμόρφωση, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.3.

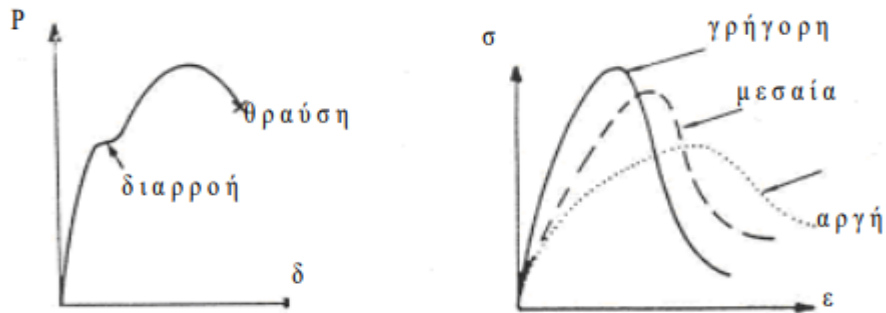
Στο επόμενο κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε διάφορους τύπους συνοριακών συνθηκών, πέραν των περιοδικών. Σκοπός μας είναι να εξετάσουμε το τρόπο με τον οποίο επιβάλλονται μετατοπίσεις, κινηματικές δεσμεύσεις, ή τάσεις σε επίπεδο μικροκλίμακας. Θα εκτιμήσουμε για κάθε έναν τύπο τις ενεργές ελαστικές ιδιότητες καθώς και το αν ικανοποιούνται οι συνθήκες περιοδικότητας στα RVE. Στόχος μας είναι να εντοπίσουμε έναν τύπο συνοριακών συνθηκών, ο οποίος θα αντιπροσωπεύει με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια τις μακροσκοπικές καταστατικές σχέσεις σε επίπεδο μικροκλίμακας περιοδικών σύνθετων υλικών.



**Εικόνα 2.3** Μεταπήδηση από την καθαρή διάτμηση της μικροκλίμακας στην αντίστοιχη της μακροκλίμακας μέσω περιοδικών συνοριακών συνθηκών σε περιοδικό σύνθετο υλικό

### 3. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΔΙΑΡΡΟΗΣ

Η συμπεριφορά του υλικού, είναι γνωστό, ότι πέραν του ελαστικού ορίου παρουσιάζει διάφορα φαινόμενα όπως κράτυνση, πτωτικό κλάδο, διαρροή και θραύση (βλ. Εικόνα 3.1.a) τα οποία αποτυπώνονται σε κατάλληλα πειράματα μονοαξονικής έντασης. Επίσης, επηρεάζεται και από την ταχύτητα επιβολής του φορτίου ή της παραμόρφωσης (βλ. Εικόνα 3.1.b).



(a)

(b)

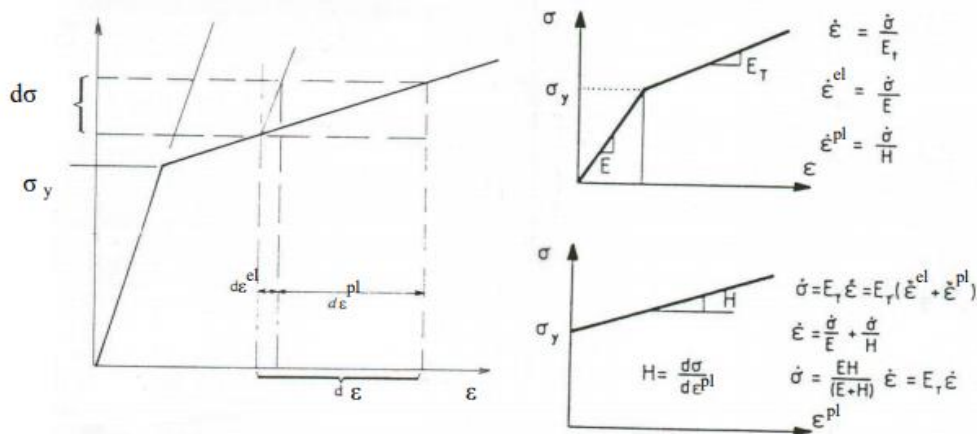
**Εικόνα 3.1** (a) Μοναξονική καμπύλη φορτίου-μετατόπισης ραβδωτού στοιχείου , (b) επηρροή του ρυθμού μεταβολής του φορτίου

#### 3.1 ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Η ανελαστική ανάλυση με τη θεωρία της πλαστικότητας απαιτεί (i) ένα κριτήριο διαρροής, (ii) ένα νόμο κράτυνσης-χαλάρωσης για την περιγραφή της επιφανείας διαρροής κατά την ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων, και (iii) ένα νόμο πλαστικής ροής για τη συσχέτιση της πλαστικής παραμόρφωσης με τις τάσεις.

Όταν η τάση υπερβαίνει μία κρίσιμη τιμή, τότε θεωρούμε ότι το υλικό διαρρέει και από εκεί και πέρα εισέρχεται στο πλαστικό (μη-αναστρέψιμο) μέρος, στο οποίο οι τάσεις και οι παραμορφώσεις συνδέονται με μια ελαστοπλαστική καταστατική σχέση.

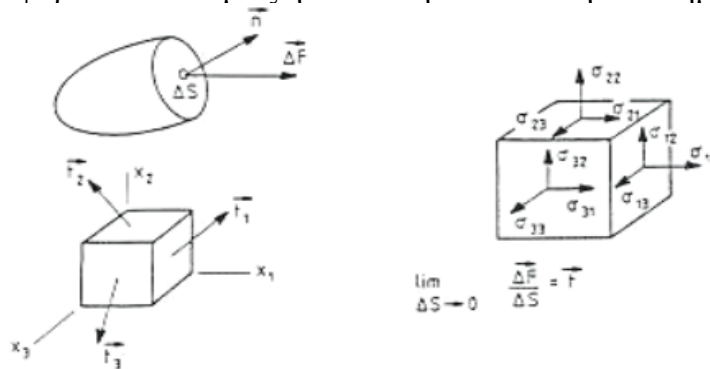
Η θεμελιώδης παραδοχή συνίσταται στο διαχωρισμό της παραμόρφωσης, στο ελαστικό (αναστρέψιμο) και πλαστικό (μη-αναστρέψιμο) μέρος του υλικού. Σχηματική αναπαράσταση του ελαστοπλαστικού μοντέλου φαίνεται στο Σχήμα 3.2 για ένα διγραμμικό μοντέλο. Το μοντέλο αυτό υιοθετούμε για τις αναλύσεις που θα πραγματοποιηθούν στην παρούσα Εργασία.



**Εικόνα 3.2** Διγραμμικό μοντέλο ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς

### 3.2 ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΤΑΣΕΩΣ CAUCHY - ΚΥΡΙΕΣ ΤΑΣΕΙΣ - ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΝΑΛΟΙΩΤΕΣ ΤΗΣ ΤΑΣΕΩΣ - ΑΠΟΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΗΣ ΤΑΣΕΩΣ

Η εντατική κατάσταση σε ένα σημείο ενός σώματος προσδιορίζεται ως γνωστόν από τον τανυστή της τάσεως Cauchy που ορίζεται από τις συνιστώσες του όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.3. Οι τιμές των συνιστωσών του τανυστή της τάσεως εξαρτώνται από το σύστημα των συντεταγμένων στο οποίο αναφέρονται. Με την αλλαγή του συστήματος των συντεταγμένων αλλάζουν οι τιμές των συνιστωσών του τανυστή χωρίς να διαφοροποιείται όμως η εντατική κατάσταση στο σημείο του σώματος που εξετάζουμε.



**Εικόνα 3.3** Συνιστώσες του τανυστή τάσεως Cauchy

Οι κύριες τάσεις  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , οι οποίες περιγράφουν την εντατική κατάσταση ενός σημείου ως προς τα τρία κύρια επίπεδα, ορίζουν τις τρεις βασικές αναλλοίωτες (invariant) της τάσεως :

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (3.1)$$

$$J_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \quad (3.2)$$

$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (3.3)$$

Η εντατική κατάσταση μπορεί επίσης να οριστεί ως προς τη συνιστώσα όγκου (σφαιρική ή υδροστατική) και τις αποκλίνουσες (deviatoric) συνιστώσες. Η υδροστατική συνιστώσα της τάσεως δίνεται από τη σχέση :

$$\Sigma_m = J_1 / 3 \quad (3.4)$$

και οι αποκλίνουσες συνιστώσες από τις σχέσεις :

$$\Sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\Sigma_m \quad (3.5)$$

όπου  $\delta_{ij}$  είναι το δέλτα του Kronecker. Οι κύριες διευθύνσεις του αποκλίνοντος τανυστή της τάσεως συμπίπτουν με τις κύριες διευθύνσεις των τάσεων. Οι κύριες αποκλίνουσες τάσεις  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$  ορίζουν τη δεύτερη αναλλοίωτη του αποκλίνοντος τανυστή της τάσεως από τη σχέση :

$$J'_2 = \frac{1}{2} (\sigma'_1)^2 + (\sigma'_2)^2 + (\sigma'_3)^2 \quad \text{ή} \quad (3.6)$$

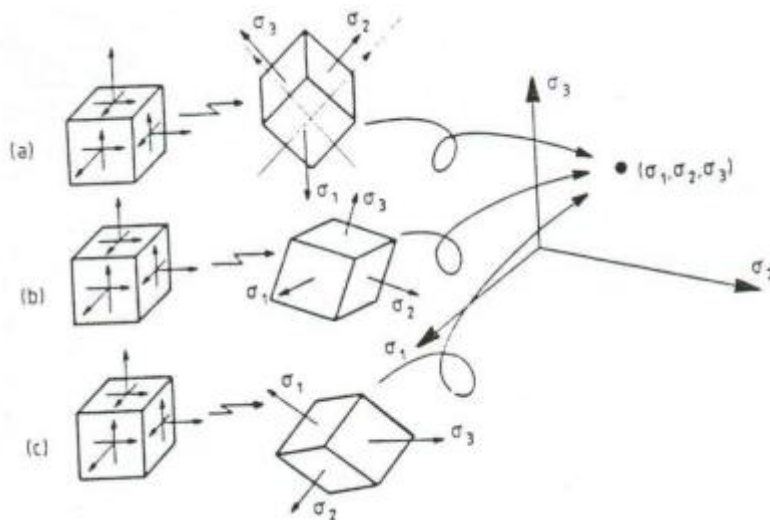
$$J'_2 = \frac{1}{6} [ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 ], \text{ σε όρους κύριων τάσεων ή} \quad (3.7)$$

$$J'_2 = \frac{1}{6} [ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 ] + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2, \quad (3.8)$$

σε όρους τανυστή τάσεων Cauchy

Για ισότροπα υλικά, τα οποία έχουν την ίδια συμπεριφορά προς όλες τις διευθύνσεις, οι τρεις κύριες τάσεις είναι επαρκείς για την περιγραφή της εντατικής κατάστασης σε ένα σημείο στον χώρο των κύριων τάσεων (βλ. Εικόνα 3.4). Σε κάθε τέτοιο σημείο μπορεί να αντιστοιχούν περισσότερες της μιας εντατικές καταστάσεις καθώς οι κύριες διευθύνσεις που συνδέονται με τις διαφορετικές καταστάσεις δεν αντιπροσωπεύονται στο χώρο των κυρίων τάσεων.

Με άλλα λόγια η απεικόνιση των τάσεων του Καρτεσιανού χώρου στο χώρο των κυρίων τάσεων δεν είναι μοναδική. Αυτό οφείλεται στην ισοτροπία του υλικού που επιτρέπει τη μείωση των συνιστωσών των τάσεων από έξι σε τρεις. Κατά συνέπεια η διαρροή του υλικού εξαρτάται μόνο από τον συνδυασμό των τιμών και όχι από τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων.



**Εικόνα 3.4** Μη μοναδικότητα της απεικόνισης των Καρτεσιανών συνιστωσών των τάσεων στο χώρο των κύριων τάσεων

### 3.3 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗΣ ΔΙΑΡΡΟΗΣ ΣΕ ΤΡΙΑΞΟΝΙΚΗ

Η συνθήκη διαρροής ενός ελαστοπλαστικού υλικού σε μονοαξονική ένταση καθορίζεται από το σημείο διαρροής της καμπύλης  $\sigma$ - $\epsilon$  πέραν του οποίου το υλικό παύει να συμπεριφέρεται ελαστικά. Στην περίπτωση όμως ενός υλικού καταπονούμενου σε τριαξονική ένταση η διαρροή επέρχεται όταν υπάρξει ένας συνδυασμός των τιμών των συνιστωσών του τανυστή της τάσεως. Απαιτείται επομένως μία σειρά πειραμάτων με διάφορους συνδυασμούς των συνιστωσών του τανυστή της τάσεως προκειμένου να περιγραφεί πλήρως η επιφάνεια διαρροής του υλικού.

Σε ισότροπα υλικά η επιφάνεια διαρροής μπορεί να περιγραφεί πλήρως ως προς οποιαδήποτε τριάδα αναλλοίωτων (invariant) της τάσεως. Κλασικές θεωρίες διαρροής είναι του Rankine της μέγιστης εφελκυστικής αντοχής, του Tresca της μέγιστης διατμητικής αντοχής, του Mohr/Coulomb της μέγιστης τριβής, του Von-Mises της μέγιστης ενέργειας στρέβλωσης.

Τα δύο ευρέως χρησιμοποιούμενα κριτήρια διαρροής για μέταλλα είναι τα κριτήρια Von-Mises και Tresca. Στην παρούσα εργασία θα υιοθετήσουμε το κριτήριο διαρροής Von-Mises για τις αναλύσεις που ακολουθούν.

### 3.4 ΚΡΙΤΗΡΙΟ VON-MISSES

Το κριτήριο Von-Misses θεωρεί ότι η διαρροή ενός όλκιμου υλικού ξεκινάει όταν η δεύτερη αναλλοίωτη του αποκλίνοντος τανυστή της τάσεως  $J_2$  ξεπερνάει μία κρίσιμη τιμή. Αποτελεί ένα τμήμα της θεωρίας της πλαστικότητας η οποία εφαρμόζεται κυρίως σε όλκιμα υλικά όπως για παράδειγμα είναι τα περισσότερα μέταλλα.

Στην επιστήμη των υλικών το κριτήριο von-Misses μπορεί να εκφραστεί σε όρους τάσεων von-Misses ή ισοδύναμων εφελκυστικών τάσεων  $\sigma_v$ . Ο όρος αυτός είναι ένα βαθμωτό μέγεθος της τάσης, το οποίο μπορεί να υπολογισθεί από τις τάσεις Cauchy-tensor. Στην περίπτωση αυτή, το υλικό θεωρούμε ότι ξεκινάει να διαρρέει όταν η τάση von-Misses ξεπερνάει μία τιμή γνωστή και ως τάση διαρροής,  $\sigma_y$ .

Η τάση von-Misses χρησιμοποιείται για να προβλέψει τη διαρροή υλικών που υπόκεινται σε ακανόνιστες φορτίσεις από τα αποτελέσματα πειραμάτων σε μονοαξονικό εφελκυσμό.

#### Μαθηματική διατύπωση

Το κριτήριο von-Misses εκφράζεται σύμφωνα με τη μαθηματική έκφραση :

$$J_2 = k^2, \quad (3.9)$$

όπου το  $k$  είναι η τάση διαρροής του υλικού σε καθαρή διάτμηση. Κατά την έναρξη της διαρροής η τιμή της τάσης διαρροής σε καθαρή διάτμηση είναι  $\sqrt{3}$  φορές μικρότερη της τάσης διαρροής στην περίπτωση του καθαρού εφελκυσμού. Για το λόγο αυτό προκύπτει ότι :

$$k = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}, \quad (3.10)$$

όπου  $\sigma_y$  η εφελκυστική τάση διαρροής του υλικού. Αν θέσουμε την τάση von-Misses ίση με την τάση διαρροής και συνδυάζοντας της εξισώσεις (3.9) και (3.10) το κριτήριο von-Misses μπορεί να εκφρασθεί :

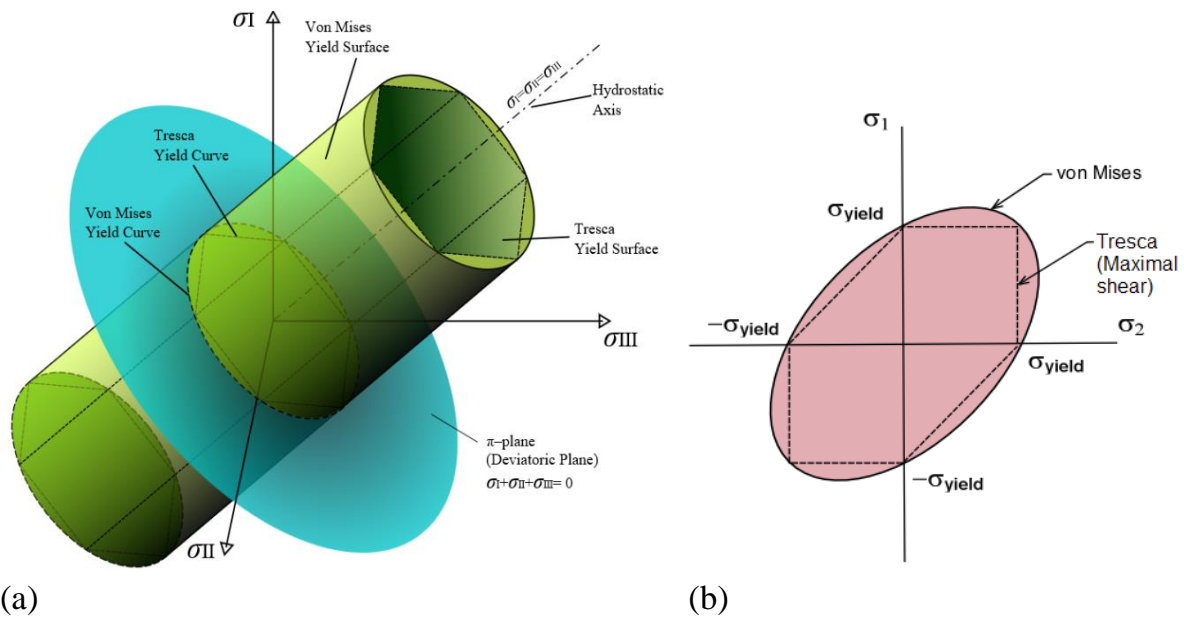
$$\sigma_v = \sigma_y = \sqrt{3J_2}, \quad \text{ή} \quad (3.11)$$

$$\sigma_v^2 = 3J_2 = 3k^2 \quad (3.12)$$

Αντικαθιστώντας το  $J_2$  σε όρους τανυστή τάσεων Cauchy έχουμε :

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{2} [ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2) ] \quad (3.13)$$

Η εξίσωση αυτή ορίζει την επιφάνεια διαρροής ως έναν κύλινδρο, όπως απεικονίζεται στην Εικόνα 3.5, του οποίου η καμπύλη διαρροής, ή αλλιώς η τομή σε ένα αποκλίνον επίπεδο, είναι ένας κύκλος με ακτίνα  $\sqrt{2} k$ , ή  $\sqrt{2/3} \sigma_y$ . Αυτό συνεπάγεται ότι οι συνθήκες διαρροής είναι ανεξάρτητες από την υδροστατική συνιστώσα της τάσεως.



**Εικόνα 3.5** (a) Η επιφάνεια διαρροής του Von-Misses αναπαρίσταται από έναν κύλινδρο με ακτίνα  $\sqrt{2} k$ , ή  $\sqrt{2/3} \sigma_y$  γύρω από τον υδροστατικό άξονα και (b) επιφάνεια διαρροής του Von-Misses στην ειδική περίπτωση επίπεδης - έντασης

### 3.4.1 Πολυαξονική ένταση

Η *ισοδύναμη εφελκυστική τάση* ή *τάση von-Misses*,  $\sigma_v$ , χρησιμοποιείται για να προβλέψει τη διαρροή υλικών που υπόκεινται σε πολυαξονικές εντατικές καταστάσεις χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του απλού μονοαξονικού εφελκυσμού. Συνεπώς, ορίζουμε :

$$\sigma_v = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2)}{2}} \quad (3.14)$$

$$= \sqrt{\frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2}{2}} \quad (3.15)$$

Στην περίπτωση αυτή, η διαρροή συμβαίνει όταν η ισοδύναμη τάση,  $\sigma_v$ , φτάσει την τάση διαρροής του υλικού σε καθαρό μονοαξονικό εφελκυσμό,  $\sigma_y$ . Για παράδειγμα, η εντατική κατάσταση μιας μεταλλικής δοκού σε θλίψη διαφέρει από την εντατική κατάσταση ενός μεταλλικού άξονα σε στρέψη παρόλο που τα δύο δείγματα είναι από το ίδιο υλικό. Εξετάζοντας τον τανυστή των τάσεων ο οποίος περιγράφει πλήρως την εντατική κατάσταση, βλέπουμε τη διαφορά αυτή να εκδηλώνεται σε έξι βαθμούς ελευθερίας, επειδή ο τανυστής των τάσεων αποτελείται από έξι ανεξάρτητα στοιχεία.

Συνεπώς, είναι δύσκολο να αποφανθούμε ποιο από τα δύο δείγματα είναι πιο κοντά στο σημείο διαρροής ή αν το έχει ξεπεράσει. Ωστόσο, μέσω του κριτηρίου von-Misses, το οποίο εξαρτάται αποκλειστικά από την τιμή της βαθμωτής *τάσης von-Misses*, δηλαδή από ένα βαθμό ελευθερίας, η σύγκριση αυτή είναι σαφής : μεγαλύτερη τιμή της *τάσης von-Misses* σηματοδοτεί ότι το υλικό βρίσκεται πιο κοντά στην τάση διαρροής.

### 3.4.2 Επίπεδη ένταση

Στην περίπτωση της γενικευμένης επίπεδης έντασης, όπου  $\sigma_3=0$  και  $\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$ , το κριτήριο Von-Misses απλοποιείται σε :

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2}, \quad (3.16)$$

ενώ στην περίπτωση της κύριας επίπεδης έντασης, όπου  $\sigma_{23}=0$  και  $\sigma_{12}=\sigma_{31}=\sigma_{23}=0$ , απλοποιείται σε :

$$= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (3.17)$$

Στην Εικόνα 3.5b βλέπουμε την επιφάνεια διαρροής του κριτηρίου Von-Misses για την ειδική περίπτωση επίπεδης- έντασης (2D). Αν η τάση στην τρίτη διεύθυνση είναι ίση με το μηδέν ( $\sigma_3=0$ ), δεν προβλέπεται να συμβεί διαρροή για συνδυασμούς των  $\sigma_1, \sigma_2$  εντός της κόκκινης γραμμής.

### 3.4.3 Μονοαξονική ένταση

Στην περίπτωση μονοαξονικής τάσης ή τάσης εφελκυσμού,  $\sigma_3=\sigma_2=0$ , και  $\sigma_{12}=\sigma_{31}=\sigma_{23}=0$  το κριτήριο Von-Misses απλοποιείται σε :

$$\sigma_1 = \sigma_y, \quad (3.18)$$

το οποίο σημαίνει ότι το υλικό ξεκινάει να διαρρέει όταν η τάση  $\sigma_1$  φτάσει την τάση διαρροής του υλικού  $\sigma_y$ , σε συμφωνία με τον ορισμό της εφελκυστικής (ή θλιπτικής) τάσης διαρροής.

### 3.4.4 Καθαρή διάτμηση

Στην περίπτωση της καθαρής διάτμησης,  $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=0$ , και  $\sigma_{31}=\sigma_{23}=0$ , το κριτήριο von-Misses γίνεται :

$$\sigma_v = \sqrt{3} \cdot |\sigma_{12}| \quad (3.19)$$

Στην παρούσα εργασία, εστιάζουμε την προσοχή μας σε προβλήματα επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωσης. Στην πρώτη περίπτωση, το κριτήριο διαρροής που λαμβάνουμε, σύμφωνα με το όσα αναφέραμε, είναι αυτό της εξίσωσης 3.16 και 3.17. Στην περίπτωση της επίπεδης-παραμόρφωσης επειδή οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλουμε στην κατασκευή μας είναι σε όρους παραμορφώσεων και όχι και σε όρους τάσεων, δε μπορούμε να υιοθετήσουμε κάποια ειδική περίπτωση του κριτηρίου Von-Misses. Για το λόγο αυτό λαμβάνουμε την γενική περίπτωση της πολυαξονικής έντασης.



#### 4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΗ ΜΙΚΡΟ-ΣΤΗ-ΜΑΚΡΟ ΚΛΙΜΑΚΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΜΙΚΡΟΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

Σε αυτή την παράγραφο θα διερευνήσουμε αλγορίθμους για τον υπολογισμό των ομογενοποιημένων τάσεων και του ολικού μέτρου ελαστικότητας μικροκατασκευών που υπόκεινται σε μικρές παραμορφώσεις. Όπως προαναφέραμε στην Ενότητα 2, οι μικροκατασκευές αυτές ορίζουν αντιπροσωπευτικούς όγκους στοιχείων (RVE). Στόχος μας είναι η δημιουργία μιας οικογένειας αλγορίθμων και πινάκων-μητρώων που αντιπροσωπεύουν τις ολικές ιδιότητες (τάσεις, μέτρο ελαστικότητας) σε επίπεδο μακροκλίμακας. Δείχνεται ότι οι ομογενοποιημένες τάσεις και το ολικό μέτρο ελαστικότητας μίας τυπικής μικροκατασκευής μπορούν να ορισθούν, αποκλειστικά, σε όρους διακριτών δυνάμεων και ιδιοτήτων ακαμψίας στο σύνορο του RVE.

Επικεντρωνόμαστε σε μικροκατασκευές που τους επιβάλλουμε παραμορφώσεις, ελέγχοντας την ολική μακροσκοπική παραμόρφωση. Στην αυτήν την παράγραφο θα εξεταστούν τρία τυπικά είδη συνοριακών συνθηκών.

(i) Γραμμικές μετατοπίσεις

(ii) Σταθερές ελκτικές-τάσεις

(iii) Περιοδικές παραμορφώσεις και αντι-περιοδικές ελκτικές τάσεις.

Οι ανωτέρω περιορισμοί παράγουν τρεις κατηγορίες αλγορίθμων για τον υπολογισμό της κατάστασης ισορροπίας και των ολικών ιδιοτήτων της μικροκατασκευής.

##### 4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο ορισμός της ολικής μακροσκοπικής απόκρισης ενός ανομοιογενούς υλικού με περίπλοκη μικροκατασκευή, ορίζεται συχνά ως micro-to-macro transition (MTMT) και αποτελεί ένα σημαντικό στοιχείο στην αλληλουχία των μικρομηχανισμών. Οι αναλυτικές προσεγγίσεις περιορίζονται σε πολλές περιπτώσεις, ειδικά όταν αναφερόμαστε στη γεωμετρία της αντιπροσωπευτικής μικροκατασκευής της απόκρισής της, η οποία συχνά εικάζεται ότι είναι γραμμική-ελαστική. Αρκετές αριθμητικές μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια, οι οποίες διακριτοποιούν τα απειροστής-κλίμακας πεδία σε αντιπροσωπευτική μικροκατασκευή (RVE). Αυτές οι μέθοδοι επιτρέπουν την ανάλυση ολικών γεωμετριών και μη-γραμμικοτήτων σύνθετων μορίων και παρέχουν λεπτομερή πληροφορίες για μηχανισμούς σε απειροστή-κλίμακα.

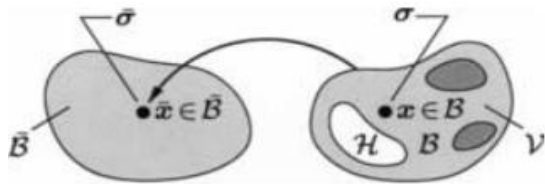
Αριθμητικές φόρμες για την ανάλυση των RVE από περιοδικά σύνθετα υλικά υποκείμενα σε μικρές-παραμορφώσεις έχουν πρόσφατα δημοσιευθεί, βασιζόμενες στη διακριτοποίηση των μικροκατασκευών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) ή μετασχηματισμών Fourier.

Στην παράγραφο αυτή θα αναπτύξουμε υπολογιστικούς τρόπους MTMTs, οι οποίοι βελτιώνουν και συμπληρώνουν τη διαδικασία που αναφέρθηκε ανωτέρω. Η κύρια συνεισφορά μας είναι η περιγραφή μιας οικογένειας αλγορίθμων και πινάκων-μητρώων που αντιπροσωπεύουν τις ολικές ιδιότητες (τάσεις, μέτρο ελαστικότητας) της διακριτοποιημένης μικροκατασκευής για ανομοιογενή υλικά, υποκείμενα σε μικρές παραμορφώσεις.

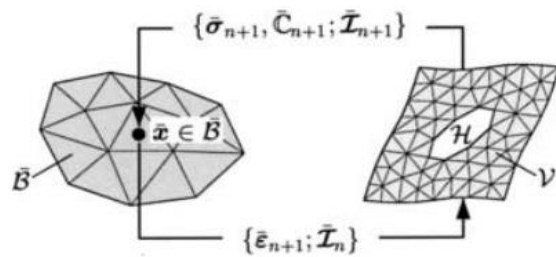
Θεωρούμε μία μικροκατασκευή  $B \subset R^3$ , η οποία αντιστοιχεί σε ένα τυπικό σημείο  $\bar{x} \in \bar{B}$  ενός ομογενοποιημένου μακροσυνεχούς  $\bar{B} \subset R^3$ , όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.1. Ο αντιπροσωπευτικός όγκος  $V \subset R^3$  ο οποίος χαρακτηρίζει ένα αντιπροσωπευτικό μέρος του ανομοιογενούς υλικού, περιλαμβάνει ένα στερεό μέρος  $B$  και ένα μέρος τρύπας  $H$ ,

δηλαδή  $V = B \cup H$ , τα  $\bar{\sigma}$  και  $\sigma$  συμβολίζουν το μακροσκοπικό και μικροσκοπικό πεδίο των τάσεων Cauchy στο σημείο  $\bar{x} \in \bar{B}$  και  $x \in B$  αντίστοιχα.

Στην Εικόνα 3.2 βλέπουμε σε ένα τυπικό επαυξητικό βήμα πώς επιβάλλονται οι μακροσκοπικές παραμορφώσεις  $\bar{\varepsilon}_{n+1}$  σε μία διακριτοποιημένη μικροκατασκευή  $V$ . Η εφαρμογή μιας επαυξητικής (δυναμικής) κατάστασης ισορροπίας στην μικροκατασκευή μας επιτρέπει την εκτίμηση, στο σημείο  $\bar{x} \in \bar{B}$ , των ομογενοποιημένων τιμών των μακροσκοπικών τάσεων  $\bar{\sigma}_{n+1}$  και του μακροσκοπικού μέτρου ελαστικότητας  $\bar{C}_{n+1}$ .



**Εικόνα 4.1** Συσχέτιση μακροσυνεχούς με μικροκατασκευή



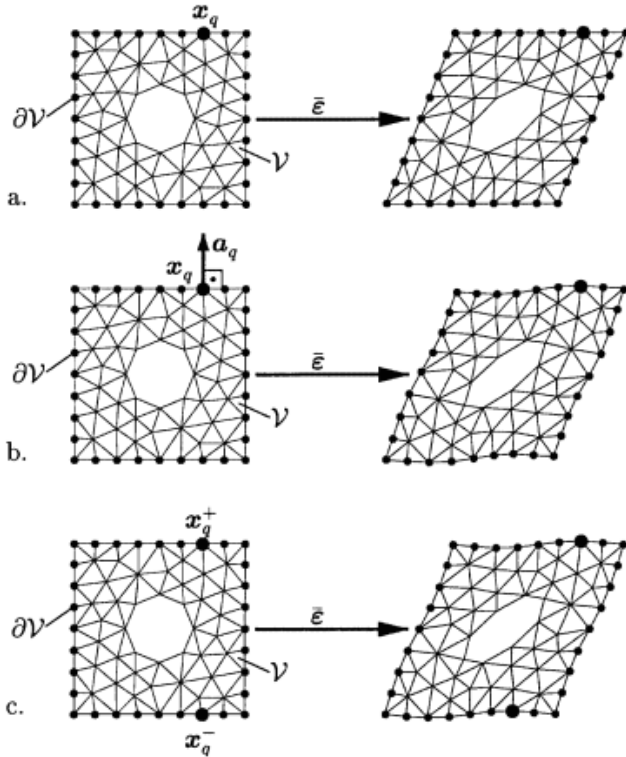
**Εικόνα 4.2** Συμπεριφορά της διακριτοποιημένης μικροκατασκευής στην επιβολή παραμορφώσεων

Η βασική προσέγγιση της μεθοδολογίας είναι ο διαχωρισμός των μετατοπίσεων της διακριτοποιημένης κατασκευής σε αυτούς που βρίσκονται στο εσωτερικό και σε αυτούς που βρίσκονται στο σύνορο της μικροκατασκευής, όπως βλέπουμε στην Εικόνα 4.3. Στη συνέχεια, θα δούμε ότι οι ολικές τάσεις και το μέτρο ελαστικότητας μίας τυπικής μικροκατασκευής μπορούν να ορισθούν σε όρους διακριτών δυνάμεων και ιδιοτήτων δυσκαμψίας ανάλογα με τις μετατοπίσεις του συνόρου του  $RV$ .

Όπως προαναφέραμε, επικεντρωνόμαστε σε μικροκατασκευές που τους επιβάλλουμε παραμορφώσεις, ελέγχοντας την ολική μακροσκοπική παραμόρφωση 'ε', όπως φαίνεται στις Εικόνας 4.2 και 4.3. Στο πλαίσιο αυτό, τρεις κλασσικοί τύποι συνοριακών συνθηκών εξετάζονται :

(i) Γραμμικές μετατοπίσεις (ii) Σταθερές ελκτικές-τάσεις (iii) Περιοδικές παραμορφώσεις και αντι-περιοδικές ελκτικές τάσεις

Στην Εικόνα 4.3 βλέπουμε ποιοτικά τους τρεις τύπους συνοριακών συνθηκών που θα εξετάσουμε στη συνέχεια. (α) επιβαλλόμενων γραμμικών μετατοπίσεων  $u_q = \bar{\varepsilon} x_q$  για  $q=1 \dots M$  κόμβους στο σύνορο, (β) επιβαλλόμενων ελκτικών τάσεων με τον ασθενή περιορισμό  $\sum_{q=1}^M \text{sym}[u_q \otimes a_q] = \bar{\varepsilon}$  στο σύνορο, (γ) περιοδικών μετατοπίσεων  $u_q^+ - u_q^- = \bar{\varepsilon}(x_q^+ - x_q^-)$  που ανταποκρίνονται σε  $q=1 \dots P$  ζεύγη κόμβων στο σύνορο.



**Εικόνα 4.3** Διαίρεση των κόμβων και καθορισμός των επιβαλλόμενων μετακινήσεων στο σύνορο της διακριτοποιημένης κατασκευής (a) γραμμικών μετατοπίσεων, (b) σταθερών ελκτικών τάσεων, (c) περιοδικών μετατοπίσεων και αντιπεριοδικών ελκτικών τάσεων

Εμείς λοιπόν, παρουσιάζουμε τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης ξεκινώντας αρχικά από την Παράγραφο 4.2 όπου προσδιορίζουμε τις συνοριακές συνθήκες και τις ολικές ιδιότητες, με αναφορά στοιχείων που βρίσκονται στο σύνορο της μικροκατασκευής. Στο δεύτερο βήμα, Παράγραφος 4.3, διακριτοποιούμε τη μικροκατασκευή και αναπτύσσουμε επαναληπτικούς αλγορίθμους επίλυσης για τον υπολογισμό μιας κατάστασης ισορροπίας μέσω ενός σταθερού αυξανόμενου βήματος (increment), περιλαμβάνοντας τα χαρακτηριστικά του καινούριου κάθε φορά αντιπροσωπευτικού μητρώου των μακροσκοπικών τάσεων και του μέτρου ελαστικότητας. Σαν τελευταίο βήμα, στην Παράγραφο 5, παρουσιάζονται κάποια μοντελοποιημένα προβλήματα, περιλαμβάνοντας παραμορφώσεις ελαστικών-πλαστικών σύνθετων υλικών.

#### 4.2 ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΚΑΤΑΣΤΕΥΗΣ ΓΙΑ ΜΙΚΡΕΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Ορίζουμε  $\{ \mathbf{u} : B \times R \rightarrow R^3 \}$  το πεδίο των μετατοπίσεων σε ένα σημείο του υλικού  $x \in B$  και μία χρονική στιγμή  $t \in R$  της μικροκατασκευής  $B \subset R^3$ , και  $\boldsymbol{\varepsilon} := \text{sym}[\nabla \mathbf{u}]$  οι μικροσκοπικές παραμορφώσεις. Επιπροσθέτως, εισάγουμε το πεδίο ταχυτήτων  $\dot{\mathbf{u}} := \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  και το πεδίο των επιταχύνσεων  $\ddot{\mathbf{u}} := \partial^2_{tt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  της μικροκατασκευής.

#### 4.3. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΚΡΟΪΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Υποθέτουμε μία δυναμική κατάσταση ισορροπίας :

$$\blacklozenge \text{Div } \boldsymbol{\sigma} - \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = 0 \text{ στο } \mathcal{R}, \quad (4.1)$$

όπου οι συμμετρικές τάσεις συσχετίζονται με τις παραμορφώσεις, για ένα στερεό υλικό για παράδειγμα, μέσω μίας ελαστικής καταστατικής εξίσωσης :

$$\diamond \sigma = \partial_\varepsilon \psi(\varepsilon, \mathbf{x}) \text{ στο } \mathcal{R}, \quad (4.2)$$

όπου  $\psi$  μία συνάρτηση ενέργειας-παραμορφώσεων. Ολοκληρώνοντας τις συνθήκες (4.1) στο χωρίο  $B$  και εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss, προκύπτουν οι ολικές συνθήκες της ισορροπίας :

$$\int_{\partial B} \mathbf{t} dA - \int_B \mathbf{p}_0 \ddot{\mathbf{u}} dV \quad \text{και} \quad \int_{\partial B} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dA - \int_B \mathbf{x} \times \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} dV = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

$$\text{όπου, } \mathbf{t} := \sigma \mathbf{n} \text{ σε όλο το } \partial B, \quad (4.4)$$

και δηλώνει το πεδίο έλξεων σε ένα διάνυσμα  $\mathbf{n}$  κάθετο στην εξωτερική επιφάνεια σε κάθε  $\mathbf{x} \in \partial B$ . Η κατάσταση ισορροπίας της μικροκατασκευής  $B$  υποθέτουμε να είναι σε συμφωνία με συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες για τη μετατόπιση  $\mathbf{u}$ , η οποία συσχετίζει την παραμόρφωση της μικροκατασκευής με μία μακροσκοπική παραμόρφωση  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{t})$ . Οι συνοριακές αυτές συνθήκες κατασκευάζονται σύμφωνα με ένα θεώρημα μέσου όρου όπως περιγράφεται στην ενότητα 4.2.3.

#### 4.4 ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

Ας ορίσουμε ένα σύνολο  $V \subset \mathbb{R}^3$  το οποίο δηλώνει τον αντιπροσωπευτικό όγκο (RV) που συσχετίζεται με την μικροκατασκευή  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ . Υποθέτουμε ότι ο όγκος αυτός αποτελείται από ένα στερεό μέρος  $\mathcal{B}$  και από ένα μέλος τρύπας  $H$ . Συνεπώς, αποσυνθέτοντας από τον αντιπροσωπευτικό όγκο (RV) την εξωτερική επιφάνεια του στερεού μέρους έχουμε :

$$V = \mathcal{B} \cup \mathcal{H} \quad \text{και} \quad \partial \mathcal{B} = \partial V \cup \partial \mathcal{H}, \quad (\text{βλέπε Εικόνα 4.1}) \quad (4.5)$$

Βασιζόμενοι σε αυτή την αποσύνθεση, καθορίζουμε τις ολικές μακροσκοπικές τάσεις  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{t})$  και τις ολικές μακροσκοπικές παραμορφώσεις  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{t})$  της μικροκατασκευής  $B$  :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} := \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \mathbf{sym}[\mathbf{t} \otimes \mathbf{x}] dA, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} := \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \mathbf{sym}[\mathbf{u} \otimes \mathbf{n}] dA, \quad (4.6)$$

σε όρους έλξεων  $\mathbf{t}$  και μετακινήσεων  $\mathbf{u}$  σε κάθε  $\mathbf{x} \in \partial V$  στην εξωτερική επιφάνεια του αντιπροσωπευτικού όγκου (RV). Το θεώρημα του μέσου όρου, όπως αυτό διατυπώθηκε από τον Hill, [1], απαιτεί ο μέσος όρος της ισχύς των μικροσκοπικών τάσεων να είναι ίσος με την ισχύ που προκαλούν οι μακροσκοπικές τάσεις στο στοιχείο. Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές της εξίσωσης (4.6) μπορούμε να γράψουμε ότι :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} := \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} dA \quad (4.7)$$

Η ευαισθησία των μακροσκοπικών τάσεων  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{t})$  με αναφορά ως προς τις μακροσκοπικές παραμορφώσεις  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{t})$  καθορίζεται ως το ολικό εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας  $\bar{\mathbb{C}}(\mathbf{t})$ . Στη θεωρία ελαστικότητας μπορούμε να γράψουμε ότι :

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \bar{\mathbb{C}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \quad \text{με } \bar{\mathbb{C}} = \partial_\varepsilon \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.8)$$

#### 4.5 ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΙΚΡΟΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

Οι συνοριακές συνθήκες για τη μετατόπιση  $\mathbf{u}$  και τις τάσεις  $\mathbf{t}$  στη μικροκατασκευή έχουν επιλεχθεί έτσι ώστε η συνθήκη (4.7) να ικανοποιείται. Αρχικά υποθέτουμε ότι οι ορθές τάσεις γύρω από την τρύπα του RV μηδενίζονται έτσι ώστε :

$$\mathbf{t}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0} \text{ σε κάθε } \mathbf{x} \in \partial \mathcal{K} \quad (4.9)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του υπόλοιπου μέρους  $\partial V$ , δηλαδή της εξωτερικής επιφάνειας του RV, πρέπει να συσχετισθούν με τις δοσμένες μακροσκοπικές ολικές μεταβλητές. Εξετάζουμε τρία κλασσικά ενδεχόμενα:

(i) Γραμμικές μετατοπίσεις (ii) Σταθερές ορθές τάσεις (iii) Περιοδικές μετατοπίσεις και μη-περιοδικές ορθές τάσεις.

Όπως έχουμε ήδη προαναφέρει στόχος μας είναι να επιβάλλουμε μετακινήσεις στην μικροκατασκευή, ελέγχοντας την ολική μακροσκοπική παραμόρφωση  $\bar{\mathbf{E}}(t)$  και υπολογίζοντας κατά συνέπεια τις ολικές μακροσκοπικές τάσεις  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ . Για το λόγο αυτό, όλες οι συνοριακές συνθήκες που αναφέρθηκαν ανωτέρω θα πρέπει να διατυπωθούν σε όρους μετατοπίσεων  $\mathbf{u}$  και δεδομένων μακροσκοπικών παραμορφώσεων  $\bar{\mathbf{E}}(t)$ .

##### 4.5.1 Γραμμικές μετατοπίσεις στο σύνορο του RVE

Για να προσδιορίσουμε τους περιορισμούς των παραμορφώσεων στο σύνορο  $\partial V$  του RVE, σε συνάρτηση με τις μακροσκοπικές παραμορφώσεις  $\bar{\mathbf{E}}(t)$  υιοθετούμε την παρακάτω φόρμα :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \bar{\mathbf{E}}(t) \text{ σε κάθε } \mathbf{x} \in \partial V . \quad (4.10)$$

Η συνθήκη αυτή ορίζει μία γραμμική παραμόρφωση στο σύνορο  $\partial V$  του RV. Με την εισαγωγή της εξίσωσης (4.10) στην (4.7) επιβεβαιώνεται ότι το θεώρημα του μέσου όρου ικανοποιείται.

##### 4.5.2 Σταθερές ελκτικές τάσεις στο σύνορο του RVE

Για να περιγράψουμε τις ορθές τάσεις στο σύνορο του RV σε όρους μακροσκοπικών τάσεων  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$  χρησιμοποιούμε τη φόρμα :

$$\mathbf{t}(\mathbf{x},t) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) \text{ σε κάθε } \mathbf{x} \in \partial V \quad (4.11)$$

Η ανωτέρω συνθήκη ορίζει σταθερές τάσεις σε τμήματα του συνόρου του RV, σε καθ' ένα από τα οποία παρουσιάζεται ένα σταθερό κάθετο και προς τα έξω διάνυσμα  $\mathbf{n}$ . Εισάγοντας την εξίσωση (4.11) στην (4.7) επιβεβαιώνεται ότι το θεώρημα του μέσου όρου ικανοποιείται. Ωστόσο, η εξίσωση (4.11) δεν είναι εκφρασμένη σε επιβαλλόμενες-παραμορφώσεις, όπως και θα έπρεπε. Για να καταφέρουμε να εκφράσουμε μία συνθήκη ισοδύναμη με την (4.11) αλλά σε όρους επιβαλλόμενων-παραμορφώσεων  $\bar{\mathbf{E}}$ , βασιζόμενοι στην εξίσωση (4.6)<sub>2</sub>, θεωρούμε έναν 'ασθενή' περιορισμό:

$$\frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \text{sym}[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{n}] dA = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \quad (4.12)$$

στο σύνορο του RV. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (12) με τις μακροσκοπικές τάσεις  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$  και φέρνοντας το δεξί μέλος στα αριστερά έχουμε την έκφραση:

$$\frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \mathbf{n}] dA - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = 0, \quad (4.13)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με το θεώρημα του μέσου όρου. Ο πρώτος όρος της εξίσωσης (4.13) αντικατοπτρίζει ενδεχομένως της ορθές τάσεις  $t = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}$  στο σύνορο του RV. Ο ‘ασθενής’ περιορισμός (4.12) ενισχύει, όταν υφίσταται επεξεργασία μέσω της μεθόδου του πολλαπλασιαστή Lagrange, τις συνοριακές ορθές-τάσεις στο RV για μία επιβαλλόμενη παραμόρφωση  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ . Η παρατήρηση αυτή μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις ορθές τάσεις (4.11) στο σύνορο του RV για την επιβαλλόμενη παραμόρφωση  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$  όπου ο πολλαπλασιαστής  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  εμφανίζεται ως μεταβλητή.

### 4.5.3 Περιοδικές παραμορφώσεις και μη-περιοδικές ορθές έλξεις στο σύνορο του RVE

Ένας τρίτος τρόπος με τον οποίο δύναται να ικανοποιείται το θεώρημα του μέσου όρου είναι οι συνθήκες περιοδικότητας :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^+, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^-, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \text{ και } \mathbf{t}(\mathbf{x}^+, t) + \mathbf{t}(\mathbf{x}^-, t) = 0 \quad (4.14)$$

οι οποίες αντιπροσωπεύουν περιοδικές μετατοπίσεις και μη-περιοδικές τάσεις στο σύνορο του RV. Εδώ, το σύνορο του RV διαχωρίζεται σε δύο τμήματα  $\partial V = \partial V^- \cup \partial V^+$  με τα κάθετα προς τα έξω στην επιφάνεια διανύσματα  $\mathbf{n}^- = -\mathbf{n}^+$  στους σχετιζόμενους κόμβους  $\mathbf{x}^- \in \partial V^-$  και  $\mathbf{x}^+ \in \partial V^+$  αντίστοιχα. Για να αποδείξουμε ότι η συνθήκη (4.14) ικανοποιεί το θεώρημα του μέσου όρου, θα πρέπει αρχικά να λάβουμε υπόψιν μας τις αντιπεριοδικές συνθήκες ορθών τάσεων (4.14)<sub>2</sub> και να τροποποιήσουμε τους ορισμούς (4.16) και (4.17) στις ειδικές φόρμες :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} := \frac{1}{4|V|} \int_{\partial V} \text{sym}[[\mathbf{t}] \otimes [\mathbf{x}]] dA, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} := \frac{1}{4|V|} \int_{\partial V} \text{sym}[[\mathbf{u}] \otimes [\mathbf{n}]] dA, \quad (4.15)$$

και

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{4|V|} \int_{\partial V} [[\mathbf{t}]] \otimes [[\mathbf{x}]] dA, \quad (4.16)$$

αντίστοιχα. Εδώ,  $[[\bullet]](\mathbf{x}, t) := (\bullet)^+ - (\bullet)^-$  και ορίζεται σε κάθε σημείο  $\mathbf{x} \in \partial V$  στο σύνορο της μικροκατασκευής και σηματοδοτεί τη μετάβαση μεταξύ των δύο σχετιζόμενων κόμβων  $\mathbf{x}^- \in \partial V^-$  και  $\mathbf{x}^+ \in \partial V^+$ . Με τον ορισμό αυτόν, οι συνθήκες περιοδικών παραμορφώσεων (14)<sub>1</sub> μπορούν να τροποποιηθούν σε μία πιο σύντομη έκφραση :

$$[[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)[[\mathbf{x}]] \text{ σε κάθε } \mathbf{x} \in \partial V, \quad (4.17)$$

η οποία είναι ανάλογη της (4.10). Εισάγοντάς την στην σχέση (4.16) μπορούμε να διακρίνομαι ότι το θεώρημα του μέσου όρου ικανοποιείται.

## 4.6 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΜΙΚΡΟΪΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Όπως έχουμε ήδη προαναφέρει, στόχος μας είναι να αναπτύξουμε μεθοδολογίες για τον υπολογισμό των ολικών τάσεων  $\bar{\sigma}(t)$  και του καταστατικού μητρώου  $\bar{C}(t)$  της μικροκατασκευής. Θεωρώντας δύο- και τριών- διαστάσεων μικροκατασκευές με  $n_{\text{dim}}=2$  και  $n_{\text{dim}}=3$  αντίστοιχα, διακριτοποιούμε το χωρίο  $B \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ , σε  $N$  κομβικά σημεία, όπως φαίνεται στις Εικόνες 4.2 και 4.3.

Εν συνεχεία, θεωρούμε μία διακριτοποίηση ως προς τον χρόνο στον οποίο θα μεταβάλλονται οι τοπικές καταστατικές εξισώσεις. Τότε, το αντίστοιχο διακριτό πρόβλημα της ‘συνεχούς μορφής’ της εξίσωσης (4.1), ως προς το υπό εξέταση βήμα του χρόνου απεικονίζεται σε όρους μη-γραμμικούς :

$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad \text{με } \mathbf{u}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N \cdot n_{\text{dim}}}, \quad (4.18)$$

του καθολικού επικόμβιου διανύσματος μετατοπίσεων  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N \cdot n_{\text{dim}}}$  ως προς το καθολικό επικόμβιο διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N \cdot n_{\text{dim}}}$  στο τρέχον διακριτό χρόνο  $t \in \mathbb{R}$ . Η μη-γραμμική συναρτησιακή εξάρτηση των τρεχόντων κομβικών δυνάμεων με τις τρέχουσες κομβικές μετατοπίσεις του πεπερασμένου στοιχείου αντικατοπτρίζει μία συγκεκριμένη μορφή της διακριτοποίησης σε χώρο και χρόνο. Η ευαισθησία των εσωτερικών δυνάμεων ως προς της μεταβολή των κομβικών μετατοπίσεων υποθέτουμε ότι διέπεται από την απεικόνιση :

$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{K}(\mathbf{u}) := \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad \text{όπου } \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N \cdot n_{\text{dim}}} \times \mathbb{R}^{N \cdot n_{\text{dim}}}, \quad (4.19)$$

Εδώ, το  $\mathbf{K}$  συμβολίζει το εφαπτομενικό μητρώο που συσχετίζεται με τις εσωτερικές δυνάμεις του διακριτοποιημένου κτιριακού μοντέλου. Να σημειωθεί, ότι το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων  $\mathbf{f}$  και το εφαπτομενικό μητρώο  $\mathbf{K}$  θεωρούνται βασικά στοιχεία για τους υπολογισμούς μας σε κτιριακά μοντέλα.

### 4.6.1 Διαιρέση των αλγεβρικών μη-γραμμικών εξισώσεων

Σύμφωνα με όσα έχουμε ήδη προαναφέρει στην Παράγραφο 4.5, οι κόμβοι τις διακριτοποιημένης κατασκευής διαχωρίζονται σε εκείνους που βρίσκονται στο σύνορο  $\partial V$  του  $R_V$  και σε εκείνους που βρίσκονται στο εσωτερικό του στοιχείου  $V$ . Θεωρούμε ότι για τους κόμβους  $M$  στο σύνορο  $\partial V$  του  $R_V$  ισχύει  $M < N$ . Κατά αυτόν τον τρόπο γίνονται οι διαχωρισμοί των τρεχόντων θέσεων των κόμβων και των εσωτερικών επικόμβιων δυνάμεων :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbb{P}_a \mathbf{u} \\ \mathbb{P}_b \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbb{P}_a \mathbf{f} \\ \mathbb{P}_b \mathbf{f} \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

όπου  $\mathbb{P}_a \in \mathbb{R}^{(N-M) \cdot n_{\text{dim}}} \times \mathbb{R}^{N \cdot n_{\text{dim}}}$  και  $\mathbb{P}_b \in \mathbb{R}^{M \cdot n_{\text{dim}}} \times \mathbb{R}^{N \cdot n_{\text{dim}}}$  είναι αντιπροσωπευτικοί πίνακες οι οποίοι καθορίζουν τη συνεισφορά του εσωτερικού και του εξωτερικού του στοιχείου αντίστοιχα. Κατά αντιστοιχία με την (4.20), το εφαπτομενικό μητρώο που ορίστηκε στην (4.19) διαχωρίζεται:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbb{P}_a \mathbf{K} \mathbb{P}_a^T & \mathbb{P}_a \mathbf{K} \mathbb{P}_b^T \\ \mathbb{P}_b \mathbf{K} \mathbb{P}_a^T & \mathbb{P}_b \mathbf{K} \mathbb{P}_b^T \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

ως προς τη συνεισφορά του σχετικά με τους κόμβους που βρίσκονται στο σύνορο και στο εσωτερικό του RV. Στην επόμενη παράγραφο, θα εξετάσουμε την εφαρμογή των τριών τύπων συνοριακών συνθηκών που ορίστηκαν στην παράγραφο 4.5 στο διακριτοποιημένο πλέον κτιριακό μοντέλο.

#### 4.6.2 Γραμμικές μετατοπίσεις στο σύνορο του RV

Ξεκινάμε με την πιο απλή περίπτωση όπου επιβάλλουμε γραμμικές μετατοπίσεις στο σύνορο  $\partial V$  του RV. Σε κάθε κόμβο  $q$  του συνόρου, η συνθήκη (4.10) επιφέρει το διακριτοποιημένο περιορισμό :

$$\mathbf{u}_q = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{x}_q, \quad q = 1 \dots M \quad (4.22)$$

σε όρους επιβαλλόμενων μακροσκοπικών παραμορφώσεων  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Εισάγοντας ένα μητρώο το οποίο αντιπροσωπεύει τα  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathbb{R}^3$  και  $\mathbf{u}_q \in \mathbb{R}^2$ , για παράδειγμα :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} := [\bar{\varepsilon}_{11} \quad \bar{\varepsilon}_{22} \quad 2\bar{\varepsilon}_{12}]^T \quad \text{και} \quad \mathbf{u}_q := [u_1 \quad u_2]^T_q \quad (4.23)$$

για  $n_{\text{dim}} = 2$ , μπορούμε να αναπαραστήσουμε την (4.22) με τη σχέση :

$$\mathbf{u}_q = \mathbb{D}_q^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad q = 1 \dots M \quad (4.24)$$

όπου  $\mathbb{D}_q \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$  είναι ένα μητρώο το οποίο εξαρτάται από τις συντεταγμένες του κομβικού σημείου  $q$  το οποίο βρίσκεται υπό εξέταση, για παράδειγμα

$$\mathbb{D}_q := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}_q \quad (4.25)$$

για την περίπτωση όπου  $n_{\text{dim}}=2$ . Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε το καθολικό μητρώο συντεταγμένων  $\mathbb{D}_q \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{2 \cdot M}$  το οποίο συνδέει όλους τους  $M$  κόμβους στο σύνορο της διακριτοποιημένης μικροκατασκευής με τον εξής τρόπο :

$$\mathbb{D} := [\mathbb{D}_1 \quad \mathbb{D}_2 \quad \dots \quad \mathbb{D}_M] \quad (4.26)$$

Τέλος, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τον περιορισμό (4.10) για τις γραμμικές μετατοπίσεις στο σύνορο του RV στην συμπιεσμένη γενική μορφή :

$$\mathbf{d}(\mathbf{u}_b; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \mathbf{u}_b - \mathbb{D}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad (4.27)$$

από την οποία γνωρίζοντας το καθολικό μητρώο συντεταγμένων  $\mathbb{D}^T$  μπορούμε να υπολογίσουμε ποιες είναι οι μετακινήσεις  $\mathbf{u}_b$  που θα πρέπει να επιβάλλω στους κόμβους του συνόρου της μικροκατασκευής έτσι ώστε να επιτύχω μία στοχευόμενη μακροσκοπική παραμόρφωση  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ .

Εισάγοντας τις συνοριακές συνθήκες όπως αυτές ορίστηκαν ανωτέρω σε ένα πρόγραμμα το οποίο επιλύει με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων υπολογίζουμε τις εξωτερικές δυνάμεις  $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^{M \cdot n_{\text{dim}}}$  που ασκούνται στους κόμβους του συνόρου  $\partial V$  του



RV. Για λεπτομέρειες σχετικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων μπορούμε να ανατρέξουμε στα συγγράμματα [11], [20].

Με άλλα λόγια, μεταβαίνουμε από το περιβάλλον ενός διακριτοποιημένου στοιχείου επιφάνειας  $dA$  στο οποίο ασκούνται απειροελάχιστες δυνάμεις  $tdA$  σε ένα άλλο στο οποίο ασκούνται πεπερασμένες δυνάμεις  $\delta_q$  σε έναν συγκεκριμένο κόμβο  $q$  με καθολικές συντεταγμένες  $\mathbf{x}_q$ . Με τη λογική αυτή από τη σχέση (4.16) παράγεται το διακριτό άθροισμα :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{|V|} \sum_{q=1}^M \text{sym}[\delta_q \otimes \mathbf{x}_q] \quad (4.28)$$

Εισάγοντας έναν αντιπροσωπευτικό πίνακα για τις τάσεις  $\bar{\sigma} \in \mathbb{R}^3$  και έναν για τις επικόμβιες δυνάμεις  $\delta_q \in \mathbb{R}^2$  για  $n_{\text{dim}}=2$ ,

$$\bar{\sigma} := [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}]^T \quad \text{και} \quad \delta_q := [\delta_1 \quad \delta_2]^T_q \quad (4.29)$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε την (4.28) ως :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{|V|} \sum_{q=1}^M D_q \delta_q \quad (4.30)$$

με το μητρώο  $D_q$  να έχει ορισθεί στην (4.25). Χρησιμοποιώντας το καθολικό μητρώο συντεταγμένων  $D$  όπως αυτό ορίστηκε στην (4.26), παίρνουμε τελικά, τις μακροσκοπικές τάσεις στη γενική έκφραση :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{|V|} D \delta \quad (4.31)$$

### 4.6.3 Σταθερές ελκτικές τάσεις στο σύνορο του RV

Στη συνοριακή συνθήκη σταθερών ελκτικών τάσεων (4.11) έχει ενσωματωθεί ο ‘ασθενής’ περιορισμός (4.12) ο οποίος ελέγχει τις παραμορφώσεις στο σύνορο  $\partial V$  του RV. Η αριθμητική εφαρμογή απαιτεί διακριτοποίηση ολόκληρης της εξωτερικής επιφάνειας (4.12). Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε το όριο  $ndA \rightarrow \mathbf{a}_q$  ενός συνεχούς διανύσματος σε ένα διακριτό επιφανειακό διάνυσμα στον κόμβο  $q$ . Για τις περιπτώσεις δύο-διαστάσεων  $n_{\text{dim}}=2$ , το επικόμβιο διάνυσμα έλξης μπορεί να ορισθεί ως :

$$\mathbf{a}_q := \frac{1}{2} [x_{q+1} - x_{q-1}] \times \mathbf{e}_3, \quad (4.32)$$

συναρτήσει των κομβικών συντεταγμένων  $x_{q-1}$  και  $x_{q+1}$  των γειτονικών κόμβων  $q-1$  και  $q+1$  του κόμβου  $q$  αντίστοιχα, όπως βλέπουμε στην Εικόνα 4.3. Εδώ, οι γειτονικοί κόμβοι  $q-1$ ,  $q$ ,  $q+1$  πρέπει να είναι προσανατολισμένοι με τέτοιο τρόπο ούτως ώστε από το εξωτερικό τους γινόμενο με το Καρτεσιανά, εκτός επιπέδου, βασικό διάνυσμα  $\mathbf{e}_3$  να προκύπτει το διάνυσμα  $\mathbf{a}_q$  το οποίο με τη σειρά του θα πρέπει να είναι κάθετο και με φορά προς τα έξω στον κόμβο  $q$ . Αφού λοιπόν ορίσαμε το επικόμβιο διάνυσμα (4.32) μπορούμε να προσεγγίσουμε τη σχέση (4.12) με το διακριτό άθροισμα :

$$\frac{1}{|V|} \sum_{q=1}^M \text{sym}[u_q \otimes \mathbf{a}_q] = \bar{\epsilon}. \quad (4.33)$$

Το οποίο μπορεί να ανακατασκευαστεί σε μητρική μορφή :

$$\sum_{q=1}^M \mathbb{S}_q \mathbf{u}_q = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (4.34)$$

όπου  $\mathbb{S}_q \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$  είναι ένα μητρώο το οποίο εξαρτάται από τον το δiάνυσμα  $\mathbf{a}_q$  του κόμβου  $q$  και παίρνει τη μορφή κατά αναλογία με την (4.25) :

$$\mathbb{S}_q := \frac{1}{2|V|} \begin{bmatrix} 2\alpha_1 & 0 \\ 0 & 2\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix}_q, \quad (4.35)$$

για  $n_{\text{dim}}=2$ . Αναλογικά με την (4.26), ορίζουμε ένα καθολικό μητρώο συντεταγμένων  $\mathbb{S} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{2 \cdot M}$  το οποίο συσχετίζει τους  $M$  κόμβους στο σύνορο του  $RV$  με την έκφραση :

$$\mathbb{S} := [ \mathbb{S}_1 \quad \mathbb{S}_2 \quad \dots \quad \mathbb{S}_M ] \quad (4.36)$$

Τότε ο ‘ασθενής’ περιορισμός (4.12) παίρνει τη συμπιεσμένη μορφή :

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}_b; \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) = \mathbb{S}\mathbf{u}_b - \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = 0 \quad (4.37)$$

Το μητρώο  $\mathbb{S} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{2 \cdot M}$  καθορίζει, μέσω των στοιχείων  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$ , τη διεύθυνση και το μέτρο των σταθερών έλξεων που ασκούνται στο σύνορο  $\partial V$  του  $RV$ . Εισάγοντας λοιπόν τις συνοριακές συνθήκες που μόλις αναφέραμε σε ένα πρόγραμμα το οποίο επιλύει με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων υπολογίζουμε τις μετατοπίσεις  $\mathbf{u}_b$  που προκαλούνται στους κόμβους του συνόρου  $\partial V$  του  $RV$ . Γνωρίζοντας τις μετατοπίσεις  $\mathbf{u}_b$  καθώς και το μητρώο  $\mathbb{S}$  μπορούμε μέσω των σχέσεων (4.34) ή (4.37) να εκτιμήσουμε ποια είναι η αντίστοιχη μακροσκοπική παραμόρφωση  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  που επιτεύχθηκε. Σε περίπτωση όπου η παραμόρφωση αυτή δεν ταυτίζεται με την αρχική τιμή στόχο, τροποποιούμε κατά μέτρο τη φόρτιση που επιβάλλαμε και επαναπροσδιορίζουμε το  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ . Τη στιγμή που επιτυγχάνεται η τιμή στόχος των παραμορφώσεων  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  αυτόματα οι επιβαλλόμενες τάσεις ταυτοποιούνται ως οι μακροσκοπικές-ομογενοποιημένες τάσεις  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda$  (4.38), όπου  $\lambda$  είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange της εν λόγω μεθοδολογίας.

#### 4.6.4 Περιοδικές μετατοπίσεις και αντιπεριοδικές έλξεις στο σύνορο του $RV$

Η εφαρμογή των περιοδικών συνοριακών συνθηκών απαιτεί μία διακριτοποίηση των περιορισμών σε ζευγάρια κόμβων με συντεταγμένες  $\mathbf{x}_q^+$  και  $\mathbf{x}_q^-$  στα τμήματα του συνόρου  $\partial V^+$  και  $\partial V^-$  του  $RV$  αντιστοίχως, όπως βλέπουμε στην Εικόνα 4.3. Έστω λοιπόν, ότι διακριτοποιούμε το σύνορο της μικροκατασκευής μας σε  $P$  κόμβους. Για την τετραγωνική σε σχήμα μικροκατασκευή που απεικονίζεται στην Εικόνα 4.3 έχουμε  $P = M/2 + 2$  ζευγάρια από κόμβους. Για κάθε ένα ζευγάρι κόμβων  $q = 1 \dots P$ , θεωρούμε τις περιοδικές συνθήκες (4.17) η οποίες ξαναδιατυπώνονται

$$[[\mathbf{u}_q]] = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} [[\mathbf{x}]], \quad q = 1 \dots P \quad (4.39)$$

όπου  $[\mathbf{x}_q] := x_q^+ - x_q^-$  η μετάβαση μεταξύ των δύο σχετιζόμενων κόμβων  $\mathbf{x}^- \in \partial V^-$  και  $\mathbf{x}^+ \in \partial V^+$ . Χρησιμοποιώντας του ορισμούς των μητρώων από τις σχέσεις (4.23) και (4.25) ανακατασκευάζουμε τον ανωτέρω περιορισμό

$$\mathbf{u}_q^+ - \mathbf{u}_q^- = (\mathbb{D}_q^{+T} - \mathbb{D}_q^{-T})\bar{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad q = 1 \dots P \quad (4.40)$$

ή σε μία ακόμα πιο συμπιεσμένη μορφή,

$$\mathbb{P}_q \mathbf{u}_b = \mathbb{Q}_q^T \bar{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad q = 1 \dots P \quad (4.41)$$

Ορίζουμε λοιπόν, ένα μητρώο  $\mathbb{P}_q$  το οποίο είναι υπεύθυνο για τη συνδεσμολογία μεταξύ των κόμβων κάθε ζευγαριού  $q$ . Οι τιμές που θα εμπεριέχονται σε αυτό το μητρώο θα είναι αποκλειστικά οι  $\{0, 1, -1\}$ . Όλοι οι  $P$  περιορισμοί μπορούν να ενσωματωθούν σε ένα καθολικό μητρώο

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}; \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) = \mathbb{P} \mathbf{u}_b - \mathbb{Q}^T \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{0}, \quad (4.42)$$

με το μητρώο συντεταγμένων  $\mathbb{Q} := \mathbb{D}^+ - \mathbb{D}^- \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{P \cdot \text{ndim}}$  για την περίπτωση όπου  $\text{ndim}=2$  και κατασκευάζεται κατά αναλογία με την (4.26). Το μητρώο  $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{P \cdot \text{ndim}} \times \mathbb{R}^{M \cdot \text{ndim}}$  αποθηκεύεται ως ένας πίνακας τοπολογίας στην ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων.

Γνωρίζοντας λοιπόν τόσο το μητρώο συντεταγμένων  $\mathbb{Q}^T$  όσο και το μητρώο τοπολογίας  $\mathbb{P}$  μπορούμε να υπολογίσουμε από την σχέση (4.39) ή (4.41) ποιες είναι οι κινηματικές δεσμεύσεις  $\mathbf{u}_b$  που θα πρέπει να επιβάλλω στα ζευγάρια των κόμβων του συνόρου της μικροκατασκευής έτσι ώστε να επιτύχω μία στοχευόμενη μακροσκοπική παραμόρφωση  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ .

Εισάγοντας τις συνοριακές συνθήκες όπως αυτές ορίστηκαν ανωτέρω σε ένα πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων υπολογίζουμε τις εξωτερικές δυνάμεις  $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^{M \cdot \text{ndim}}$  που ασκούνται στους κόμβους του συνόρου  $\partial V$  του  $RV$ . Με άλλα λόγια, μεταβαίνουμε από το περιβάλλον ενός διακριτοποιημένου στοιχείου επιφάνειας  $dA$  στο οποίο ασκούνται απειροελάχιστες δυνάμεις  $\mathbf{t}dA$  σε ένα άλλο στο οποίο ασκούνται πεπερασμένες δυνάμεις  $\boldsymbol{\pi}_q$  σε ένα ζευγάρι  $q$  από κόμβους με καθολικές συντεταγμένες  $\mathbf{x}_q^+$  και  $\mathbf{x}_q^-$ . Με τη λογική αυτή από τη σχέση (4.16) παράγεται το διακριτό άθροισμα :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{|V|} \sum_{q=1}^P \text{sym}[\boldsymbol{\pi}_q \otimes (\mathbf{x}_q^+ - \mathbf{x}_q^-)] \quad (4.43)$$

Εισάγοντας έναν αντιπροσωπευτικό πίνακα για τις τάσεις  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathbb{R}^3$  και έναν για τις επικόμβιες δυνάμεις  $\boldsymbol{\pi}_q \in \mathbb{R}^2$  για  $\text{ndim}=2$ , κατά αναλογία με την (4.29) μπορούμε να ξαναγράψουμε την (4.40)

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{|V|} \sum_{q=1}^P \mathbb{Q}_q \boldsymbol{\pi}_q \quad (4.44)$$

με το μητρώο  $\mathbb{Q}_q$  να έχει οριστεί παραπάνω. Χρησιμοποιώντας το καθολικό μητρώο συντεταγμένων  $\mathbb{Q}$  όπως αυτό ορίστηκε στην (4.39), παίρνουμε τελικά, τις μακροσκοπικές τάσεις στη γενική έκφραση :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{|V|} \mathbb{Q} \boldsymbol{\pi} \quad (4.45)$$

## 5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΗ ΜΙΚΡΟ-ΣΤΗ-ΜΑΚΡΟ ΚΛΙΜΑΚΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μερικά αντιπροσωπευτικά αριθμητικά παραδείγματα με τη χρήση του λογισμικού ABAQUS2006 για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης, που συζητήθηκαν στην Παράγραφο 4 για μικροκατασκευές οι οποίες υπόκεινται σε μικρές παραμορφώσεις.

Στη συνέχεια, θα διερευνηθούν μερικά από τα γεωμετρικά και μηχανικά χαρακτηριστικά αυτών των μικροκατασκευών. Θεωρούμε σκοπίμως, μικροκατασκευές με απλή στοιχειώδη γεωμετρία, για να τονίσουμε τις διαφορές μεταξύ των τριών διαφορετικών ειδών συντοριακών συνθηκών και να διερευνήσουμε με ασφάλεια χαρακτηριστικά των ιδιοτήτων τους. Επικεντρωνόμαστε σε μία απλή καταστατική απόκριση των στοιχείων της μικροκατασκευής, η οποία θεωρούμε ότι περιγράφεται από ένα ισοτροπικό ελαστοπλαστικό μοντέλο von Mises-type σύμφωνα με τα όσα έχουμε προαναφέρει στην Παράγραφο 3.

Στα τέσσερα πρώτα παραδείγματα επικεντρωνόμαστε σε μικροκατασκευές που αποτελούνται από ένα μαλακό υλικό που ονομάζεται μήτρα και διαθέτει τρύπες οι οποίες έχουν συγκεκριμένες συντεταγμένες και διάμετρο. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο παράδειγμα εξετάζονται τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης για την περίπτωση του καθαρού εφελκυσμού ενώ στο δεύτερο για την περίπτωση της καθαρής διάτμησης. Στο τρίτο παράδειγμα αναπαρίσταται η κατανομή των ισοδύναμων πλαστικών παραμορφώσεων σε μία μέση κλίμακα, ενώ στο τέταρτο, διερευνάται το πόσο και το πώς επηρεάζει η διάμετρος της τρύπας τη δυσκαμψία μίας μικροκατασκευής.

Στο τελευταίο παράδειγμα ενσωματώνουμε ένα πρόσθετο υλικό στην τρύπα της μήτρας και εξετάζουμε πώς διάφορα χαρακτηριστικά του, μέτρο ελαστικότητας και διάμετρος, επηρεάζουν και πάλι τη δυσκαμψία της μικροκατασκευής.

Πριν προχωρήσουμε στα αριθμητικά παραδείγματα οφείλουμε να ορίσουμε κάποιες ελαστικές παραμέτρους του υλικού. Το  $K_{ER+}$  συμβολίζει το μέτρο διόγκωσης, το  $G_{ER+}$  το μέτρο διάτμησης, το  $\eta_{ER+}$  το μέτρο κράτνυσης και το  $\nu_0$  την τάση διαρροής σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Οι σχέσεις που συσχετίζουν τα ανωτέρω χαρακτηριστικά των υλικών είναι οι εξής :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (5.1)$$

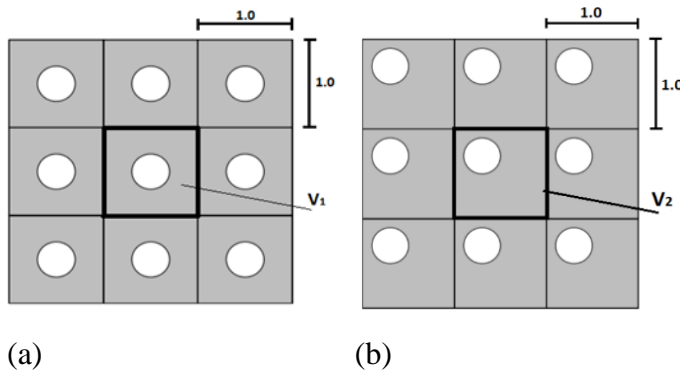
όπου  $\nu$  ο λόγος poisson και  $E$  το μέτρο ελαστικότητας.

Η σχέσεις (5.1) είναι ενσωματωμένες στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων – ABAQUS2006.

Οι ελαστικές παράμετροι του υλικού του matrix είναι οι ίδιες για όλα τα παραδείγματα. Επιλέγουμε μέτρο διόγκωσης  $K_M=21,0$ , μέτρο διάτμησης  $G_M=8,0$  και λόγο poisson  $\nu_G=0,3$ . Η επιλογή των πλαστικών παραμέτρων  $\nu_0$  και  $\eta$  αναγράφεται στα ακόλουθα παραδείγματα. Εκεί, αριθμητικά τεστ, με την παραδοχή επίπεδης παραμόρφωσης, αναλύονται.

## 5.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΘΑΡΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ

Στο πρώτο παράδειγμα επικεντρωνόμαστε σε ένα σύνθετο υλικό με κυλινδρικές τρύπες (χωρίς υλικό) ενσωματωμένες σε ένα μαλακό υλικό που αποκαλέσαμε μήτρα. Το μήκος του τατραγωνικού RVE είναι  $L=1,0$ , ενώ η διάμετρος της τρύπας είναι  $d=0,4$ . Όπως φαίνεται στην εικόνα 5.1 εξετάζουμε δύο μικροκατασκευές  $V_1$  και  $V_2$ . Στην πρώτη, η τρύπα είναι κεντραρισμένη στο  $(0,0,0,0)$ , ενώ στη δεύτερη είναι έκκεντρη στη θέση  $(-0,2,0,2)$  στην πάνω αριστερά γωνία της μικροκατασκευής.



**Εικόνα 5.1.a,b** Δύο εναλλακτικές μικροκατασκευές για ένα υλικό με περιοδικές τρύπες. Οι δύο μικροκατασκευές  $V_1$  και  $V_2$  με κεντραρισμένες και έκκεντρες τρύπες αντίστοιχα, είναι ισοδύναμες όταν οι τρύπες κατανέμονται με περιοδικό τρόπο μέσα στο υλικό.

Η διερεύνηση θα πραγματοποιηθεί τόσο για καθαρά ελαστική απόκριση ( $y_0 \rightarrow \infty$ ) όσο και για μη-γραμμική ( $y_0 \rightarrow 0,4$ ;  $\eta=0,1$ ) του υλικού της μήτρας. Υποθέτουμε ότι οι μικροκατασκευές αυτές 'ελέγχονται' από μία μακροσκοπική επίπεδη-εφελκυστική παραμόρφωση  $\bar{\epsilon}=[\bar{\epsilon}_{11}; \bar{\epsilon}_{22}; 2\bar{\epsilon}_{12}]=[\bar{c}; 0; 0]$ , με τη μέγιστη τιμή να είναι  $\bar{c}=0,4$  για την περίπτωση της ελαστικής ανάλυσης και  $\bar{c}=0,2$  για την μη-γραμμική.

Εφαρμόζουμε διαδοχικά τα τρία διαφορετικά προβλήματα ομογενοποίησης, όπως αυτά παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 4. Για το σκοπό αυτό διακριτοποιούμε και τις δύο μικροκατασκευές σε 136 ορθογωνικά πεπερασμένα στοιχεία (CPE4: A 4-node bilinear plane strain quadrilateral) για την περίπτωση όπου η τρύπα είναι κεντραρισμένη και σε 133 για την περίπτωση που η τρύπα είναι έκκεντρη. Η μη-γραμμική ανάλυση θα πραγματοποιηθεί σε 20 επαυξητικά βήματα.

### 5.1.1 Συνοριακές συνθήκες

Στην Εικόνα 5.2a-f αναπαρίστανται σχηματικά οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλουμε στις μικροκατασκευές μας, στην περίπτωση της ελαστικής ανάλυσης. Για τις μη γραμμικές αναλύσεις οι συνοριακές συνθήκες ταυτίζονται με της ελαστικής με τη διαφορά ότι η σταθερή παράμετρος  $\bar{\epsilon}=0,4$  μετατρέπεται σε  $\bar{\epsilon}=0,2$ .

(i) Για την περίπτωση-γραμμικών μετατοπίσεων :

$$-u_{CD} = 0,4x_{CD}, v_{CD} = 0,4y_{CD} = 0$$

$$-u_{AB} = 0,4x_{AB}, v_{AB} = 0,4y_{AB} = 0$$

$$-u_{AD} = 0,4x_{AD}, v_{AD} = 0,4y_{AD} = 0$$

$$-u_{BC} = 0,4x_{BC}, v_{BC} = 0,4y_{BC} = 0$$

(ii) Για την περίπτωση σταθερών ελκτικών-τάσεων :

- για τους κόμβους A,B,C,D :  $a_q = \frac{1}{2} (x_{q+1} - x_{q-1}) = 0,05$

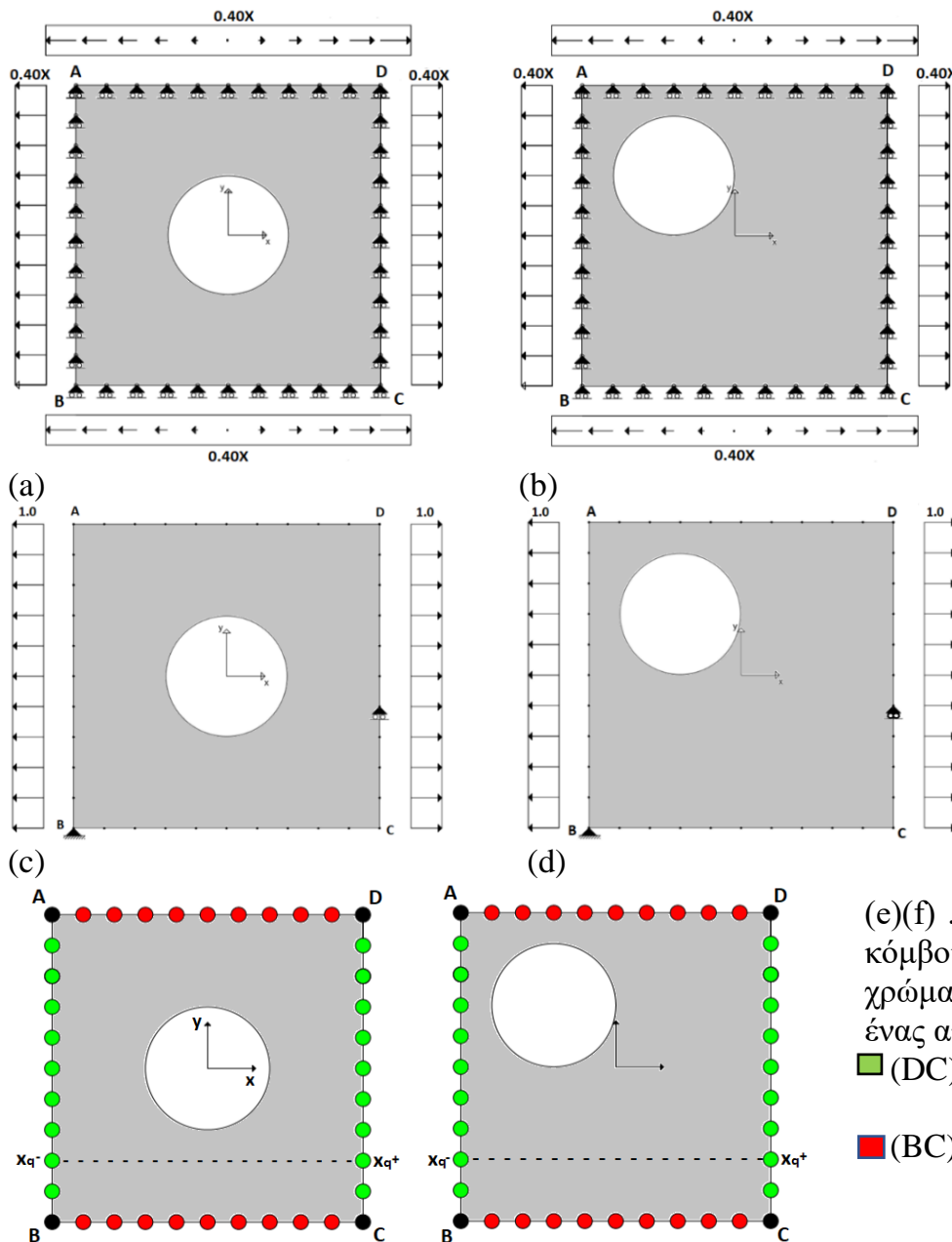
- για όλους του υπόλοιπους κόμβους των τμημάτων AB, DC :  $a_q = \frac{1}{2} (x_{q+1} - x_{q-1}) = 0,1$

-  $u_A = v_A = 0$  ,  $u_{32} = 0$  (για να αποφύγουμε την κίνηση στερεού σώματος )

(iii) Για την περίπτωση περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών -τάσεων :

-  $u_{DC} - u_{AB} = 0,4$  ,  $v_{DC} - v_{AB} = 0$  (κινηματικές δεσμεύσεις)

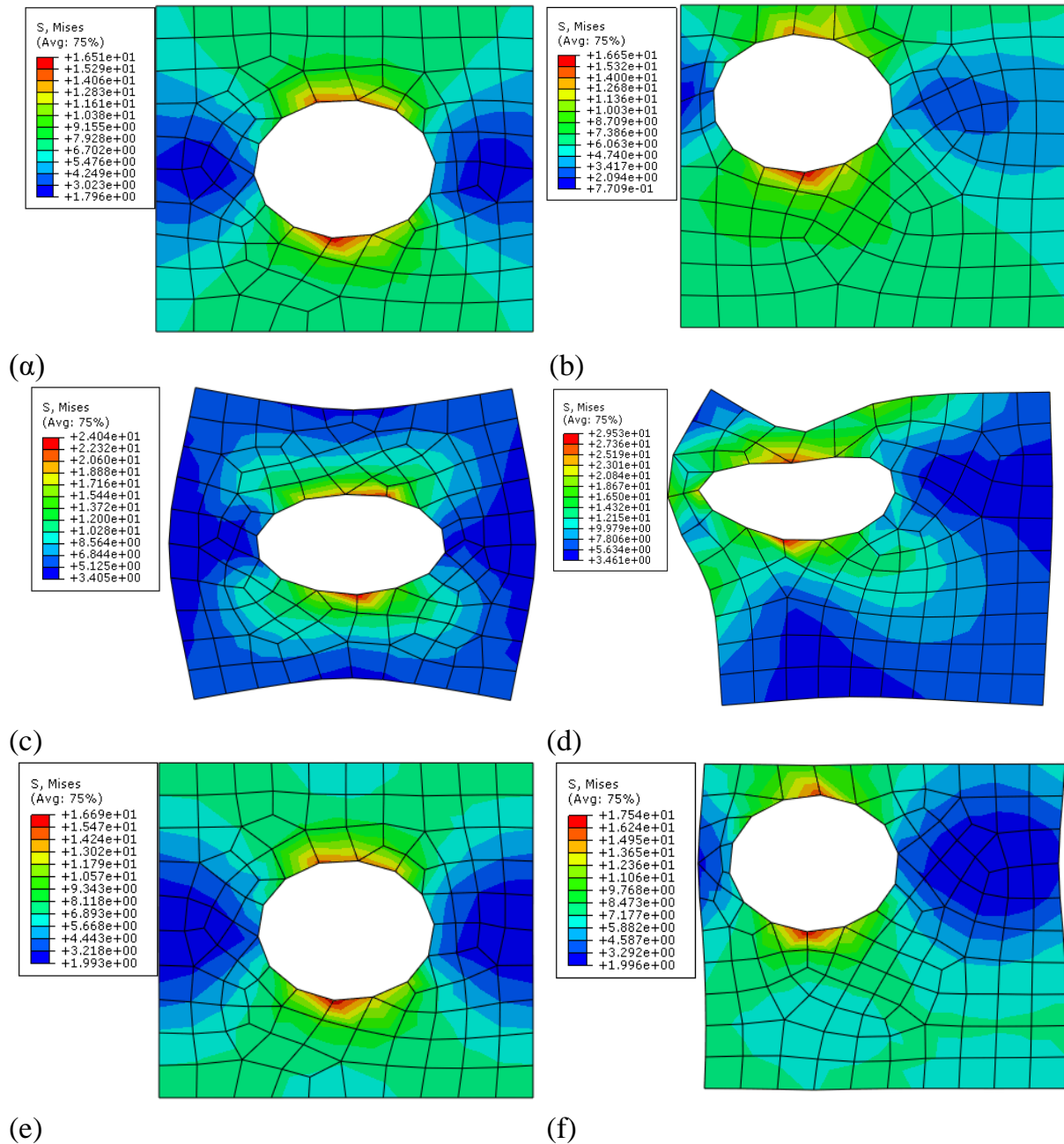
-  $u_{BC} - u_{AD} = 0$  ,  $v_{BC} - v_{AD} = 0$  (κινηματικές δεσμεύσεις)



**Εικόνα 5.2** Συνοριακές συνθήκες ομογενοποίησης για την περίπτωση του καθαρού εφελκυσμού (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων (c,d) σταθερών ελκτικών-τάσεων (e,f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών τάσεων

### 5.1.2 Ελαστική ανάλυση

Η Εικόνα 5.3 απεικονίζει την παραμορφωσιακή και εντατική κατάσταση των δύο μικροκατασκευών για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης. Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη καταπόνηση εμφανίζεται σε στοιχεία τα οποία βρίσκονται κοντά στην τρύπα της κατασκευής, ενώ το παραμορφωμένο σχήμα μεταβάλλεται σε κάθε περίπτωση.



**Εικόνα 5.3** Παραμορφωσιακή - εντατική κατάσταση ελαστικής ανάλυσης για την περίπτωση του καθαρού εφελκυσμού (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων, (c,d) σταθερών ελκτικών-τάσεων, (e,f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών - τάσεων

Για την περίπτωση (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων παρατηρούμε ότι οι ακμές τις μικροκατασκευής παραμένουν γραμμικές και μετά την επιβολή των φορτίων. Κάτι που αναμέναμε. Προχωρώντας στην περίπτωση (c,d) σταθερών ελκτικών τάσεων βλέπουμε ότι οι ακμές του στοιχείου παραμορφώνονται με μη-γραμμικό τρόπο και για τους δύο όγκους  $V_1$  και  $V_2$ . Τέλος, στην περίπτωση (e,f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών-τάσεων, παρατηρούμε ότι για τον όγκο  $V_1$  οι μετακινήσεις είναι γραμμικές ενώ για τον όγκο  $V_2$  είναι μη-γραμμικές.

Ο Πίνακας 5.1 συνοψίζει τις υπολογισμένες ομογενοποιημένες τάσεις  $\bar{\sigma} = [\sigma_{11}; \sigma_{22}; \sigma_{12}]$ , οι οποίες υπολογίστηκαν με τις σχέσεις (4.31),(4.38),(4.45) για τα έξι διαφορετικά τεστ με ελαστική ανάλυση. Είναι εμφανές από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων για τις κατασκευές  $V_1$  και  $V_2$ , ότι οι συνοριακές συνθήκες ‘σταθερών ελκτικών-τάσεων’ και ‘γραμμικών μετατοπίσεων’, λόγω των μεγάλων αποκλίσεων,  $(7,433-6,57)/6,574=13\%$  και  $(8,239-7,967)/7,967=3,4\%$  αντίστοιχα, δεν είναι ικανές να μοντελοποιήσουν περιοδικά σύνθετα υλικά. Σε αντίθεση με τις συνθήκες περιοδικότητας όπου οι δύο διαφορετικές αναλύσεις παρουσιάζουν σχεδόν ίδιες τιμές, με μόλις  $(7,925-7,917)/7,917=0.1\%$  απόκλιση. Επίσης, παρατηρούμε από τις τιμές που αναγράφονται στον Πίνακα 5.1 ότι οι συνοριακές συνθήκες ‘σταθερών ελκτικών-τάσεων’ προσδίδουν την πιο εύκαμπτη συμπεριφορά στην κατασκευή. Οι συνθήκες ‘γραμμικών μετατοπίσεων’ την πιο δύσκαμπτη, ενώ η συνθήκη ‘περιοδικότητας’ κυμαίνεται ανάμεσά τους.

<b>Πίνακας 5.1 ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΘΑΡΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ- ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ</b>						
	Σ.Σ. ΜΕΤΑΚΚΙΝΗΣΕΩΝ.		Σ.Σ.ΕΛΚΤΙΚΩΝ-ΤΑΣΕΩΝ		Σ.Σ.ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑΣ	
	$V_1$	$V_2$	$V_1$	$V_2$	$V_1$	$V_2$
$\sigma_{11}$	7,967	8,239	7,433	6,574	7,917	7,925
$\sigma_{22}$	3,012	3,135	3,400	3,080	3,015	3,015
$\sigma_{12}$	0,001	0,060	0,003	0,001	0,001	0,001

Ένας άλλος τρόπος ελέγχου της περιοδικότητας των τριών προβλημάτων ομογενοποίησης είναι ο έλεγχος των μικροτάσεων  $\sigma_{11}$  και  $\sigma_{12}$  για την περίπτωση της μικροκατασκευής  $V_1$ . Στην Εικόνα 5.4 απεικονίζεται η εντατική κατάσταση της μικροκατασκευής  $V_1$  ως προς τις τάσεις  $\sigma_{11}$  και  $\sigma_{12}$  για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης :

#### 1. Γραμμικών μετατοπίσεων :

Από την Εικόνα 5.4a παρατηρούμε ότι η κατανομή των τάσεων  $\sigma_{11}$  ικανοποιεί τις συνθήκες περιοδικότητας αφού οι τάσεις που ασκούνται στις απέναντι ανά δύο ακμές του ταυτίζονται. Όμως από την Εικόνα 5.4b βλέπουμε ότι η κατανομή των τάσεων  $\sigma_{12}$  δεν ικανοποιεί τις συνθήκες περιοδικότητας αφού οι τάσεις που ασκούνται στις απέναντι ανά δύο ακμές του δεν ταυτίζονται.

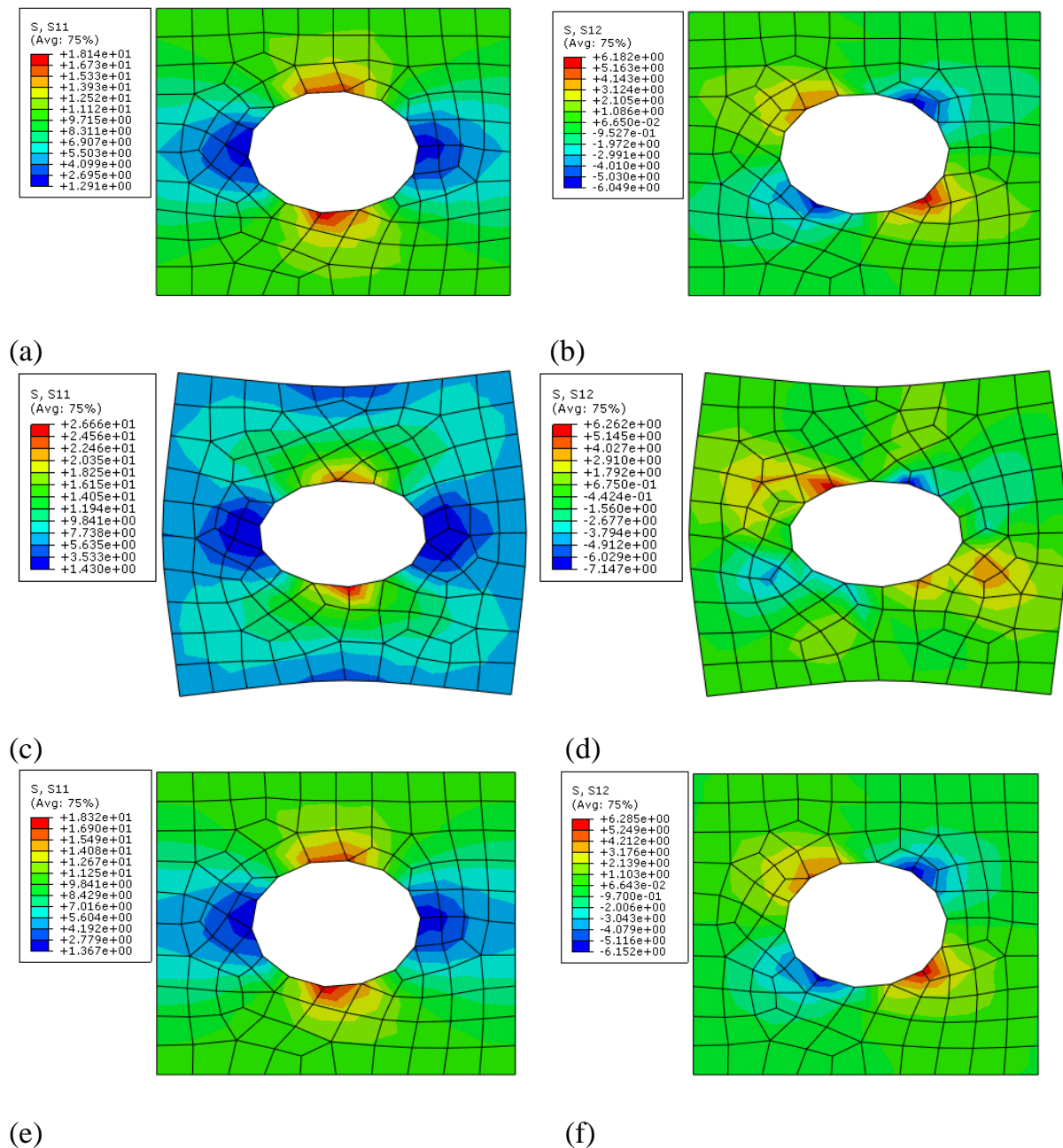
#### 2. Σταθερών ελκτικών-τάσεων :

Από την Εικόνα 5.4c,d παρατηρούμε ότι οι κατανομές των τάσεων  $\sigma_{11}$  και  $\sigma_{12}$  παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά με την προαναφερθέντα ανάλυση. Επομένως, και σε αυτή την περίπτωση παραβιάζονται οι συνθήκες περιοδικότητας.



### 3. Περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών τάσεων :

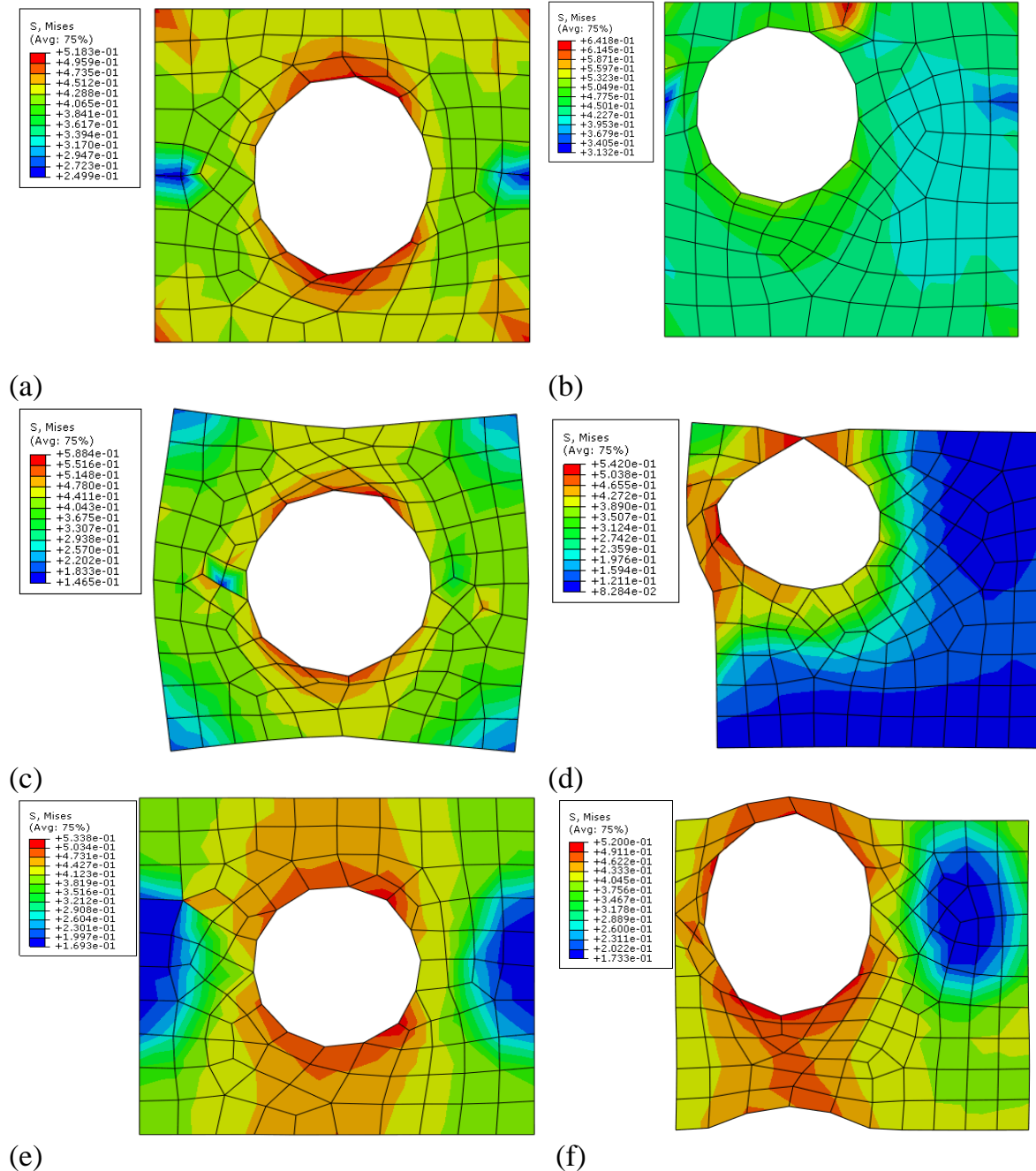
Από την Εικόνα 5.4e,f παρατηρούμε ότι τόσο η κατανομή των τάσεων  $\sigma_{11}$  όσο και των  $\sigma_{12}$  ικανοποιεί τις συνθήκες περιοδικότητας αφού οι τάσεις που ασκούνται στις απέναντι ανά δύο ακμές του στοιχείου ταυτίζονται.



**Εικόνα 5.4** Κατανομή των μικροτάσεων  $\sigma_{11}$  και  $\sigma_{12}$  της ελαστικής ανάλυσης για την περίπτωση του καθαρού εφελκυσμού (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων, (c,d) σταθερών ελκτικών-τάσεων (e,f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών - τάσεων

### 5.1.3 Μη-γραμμική ανάλυση

Η Εικόνα 5.5 απεικονίζει την παραμορφωσιακή και εντατική κατάσταση των δύο μικροκατασκευών για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης. Παρατηρούμε στην περίπτωση των περιοδικών συνθηκών ότι έχουν σχηματιστεί ζώνες συγκέντρωσης τάσεων.



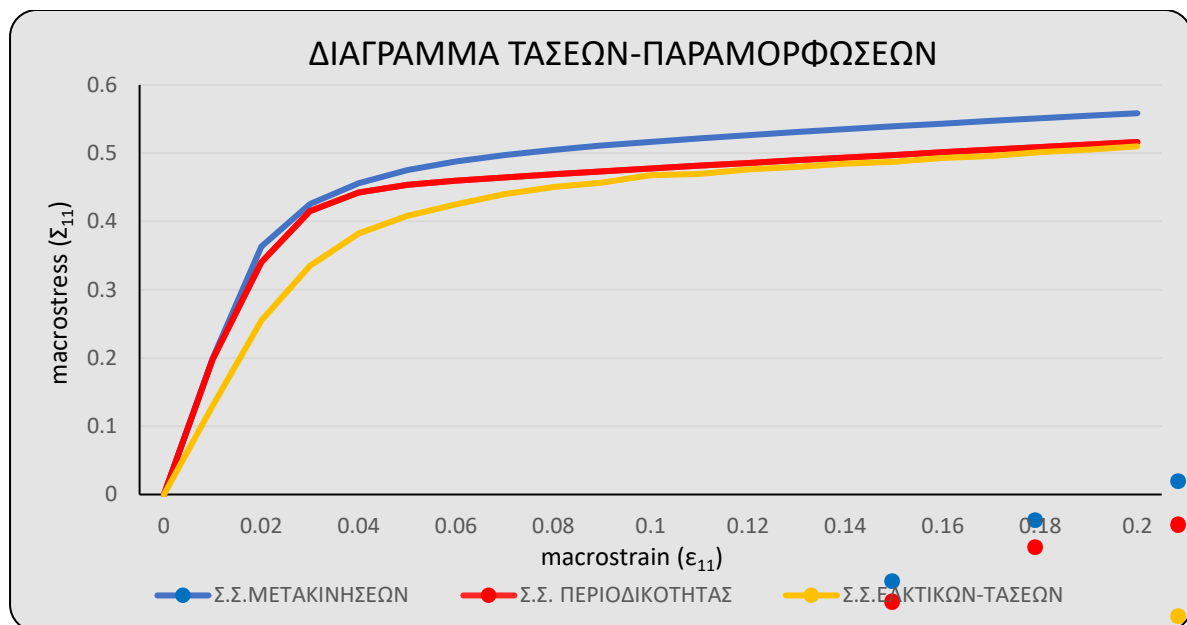
Εικόνα 5.5 Παραμορφωσιακή - εντατική κατάσταση μη-γραμμικής ανάλυσης για την περίπτωση του καθαρού εφελκυσμού (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων, (c,d) Σταθερών ελκτικών-τάσεων, (e,f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών - τάσεων

Η συμπεριφορά των μικροκατασκευών  $V_1$  και  $V_2$  σε μη-γραμμικές αναλύσεις είναι παρόμοια με αυτή της γραμμικής-ελαστικής ανάλυσης της Παραγράφου 5.1.2. Δηλαδή, για την περίπτωση (a,b) επιβαλλόμενων μετακινήσεων παρατηρούμε ότι οι ακμές τις μικροκατασκευής παραμένουν γραμμικές και μετά την επιβολή των φορτίων. Στην περίπτωση (c,d) σταθερών ελκτικών τάσεων βλέπουμε ότι οι ακμές του στοιχείου παραμορφώνονται με μη-γραμμικό τρόπο και για τους δύο όγκους  $V_1$  και  $V_2$ , ενώ για (e,f) συνθήκες περιοδικότητας, παρατηρούμε ότι για τον όγκο  $V_1$  η μετακινήσεις είναι γραμμικές ενώ για τον όγκο  $V_2$  είναι μη-γραμμικές.

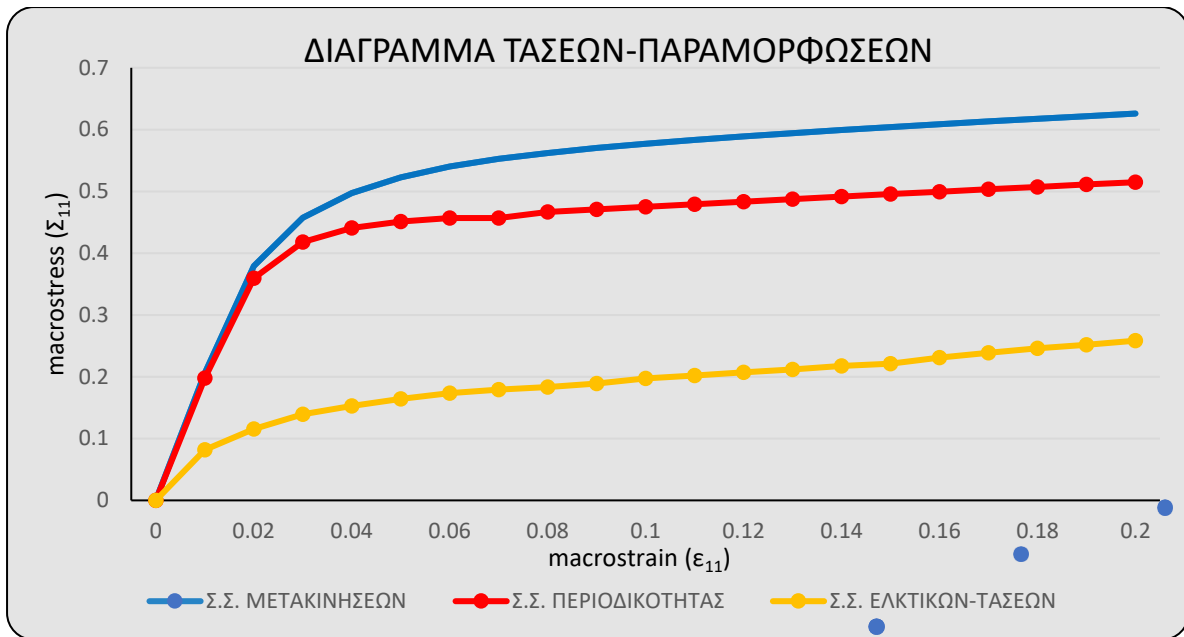
Ο Πίνακας 5.2 συνοψίζει τις υπολογισμένες ομογενοποιημένες τάσεις  $\bar{\sigma} = [\sigma_{11}; \sigma_{22}; \sigma_{12}]$ , οι οποίες υπολογίστηκαν με τις σχέσεις (4.31),(4.38),(4.45) για τα έξι διαφορετικά τεστ με μη-γραμμική ανάλυση. Είναι εμφανές από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων για τις κατασκευές  $V_1$  και  $V_2$ , ότι ικανοποιούνται οι ίδιες συνθήκες με τις αντίστοιχες της γραμμικής ελαστικής συμπεριφοράς. Για την περίπτωση ‘σταθερών ελκτικών - τάσεων’ και ‘γραμμικών μετατοπίσεων’, λόγω των μεγάλων αποκλίσεων,  $(0,510-0,258)/0,258=97,6\%$  και  $(0,626-0,558)/0,558=12,18\%$  αντίστοιχα, δεν είναι ικανές να μοντελοποιήσουν περιοδικά σύνθετα υλικά. Αντιθέτως, με τις συνθήκες περιοδικότητας οι δύο διαφορετικές αναλύσεις παρουσιάζουν τιμές ομογενοποιημένων τάσεων, με μόλις  $(0,516-0,515)/0,515=0,19\%$  απόκλιση.

Επίσης, παρατηρούμε από τις τιμές που αναγράφονται στον Πίνακα 5.2 ότι οι συνοριακές συνθήκες ‘σταθερών ελκτικών-τάσεων’ προσδίδουν την πιο εύκαμπτη συμπεριφορά στην κατασκευή. Οι συνθήκες ‘γραμμικών μετατοπίσεων’, την πιο δύσκαμπτη, ενώ η συνθήκη ‘περιοδικότητας’ κυμαίνεται ανάμεσά τους.

	Σ.Σ. ΜΕΤΑΚΚΙΝΗΣΕΩΝ		Σ.Σ. ΕΛΚΤΙΚΩΝ -ΤΑΣΕΩΝ		Σ.Σ.ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑΣ	
	$V_1$	$V_2$	$V_1$	$V_2$	$V_1$	$V_2$
$\sigma_{11}$	0,558	0,626	0,510	0,258	0,516	0,515
$\sigma_{22}$	0,458	0,530	0,420	0,190	0,315	0,313
$\sigma_{12}$	0,000	0,038	0,000	0,000	0,000	0,000

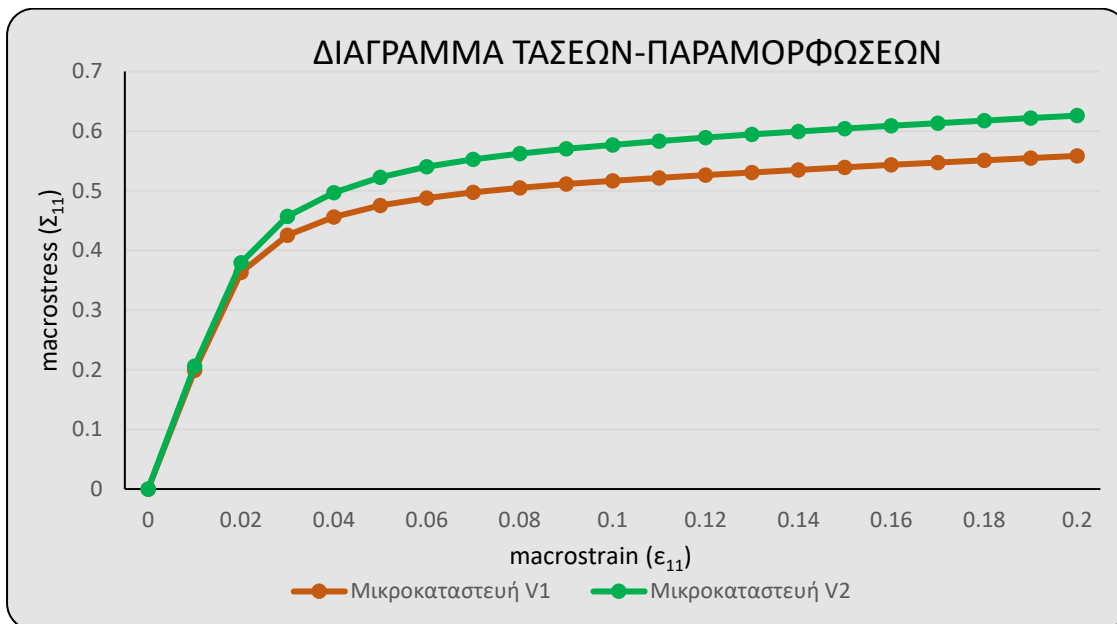


**Διάγραμμα 5.1** Σχέση Τάσεων-Παραμορφώσεων της μικροκατασκευής  $V_1$  στην μακροκλίμακα για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης – καθαρός εφελκυσμός

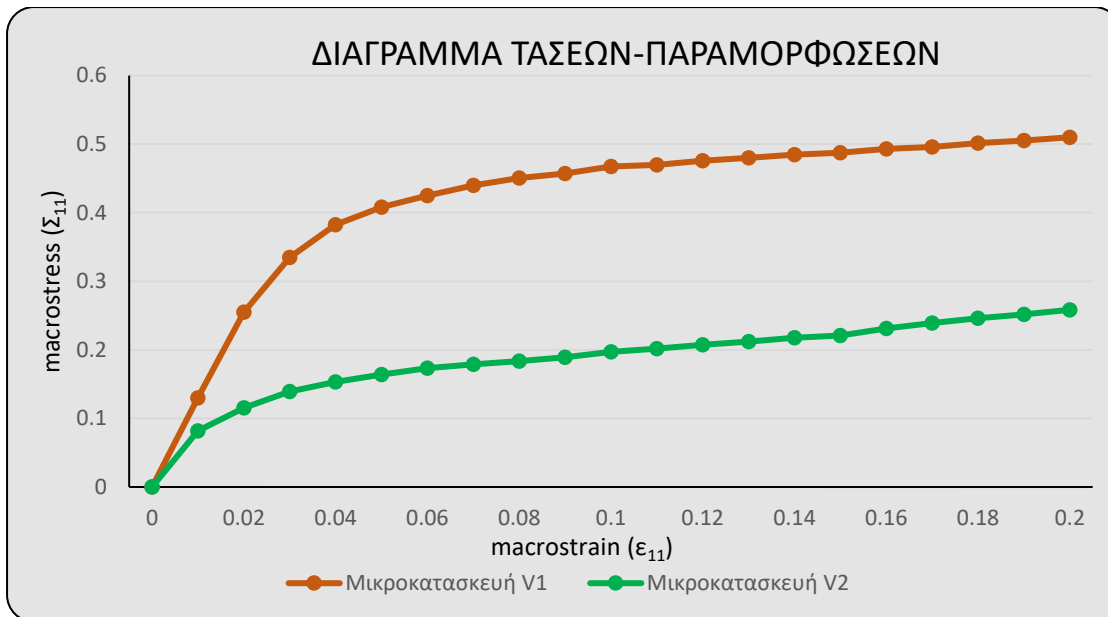


**Διάγραμμα 5.2** Σχέση Τάσεων-Παραμορφώσεων της μικροκατασκευής  $V_2$  στην μακροκλίμακα για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης – καθαρός εφελκυσμός

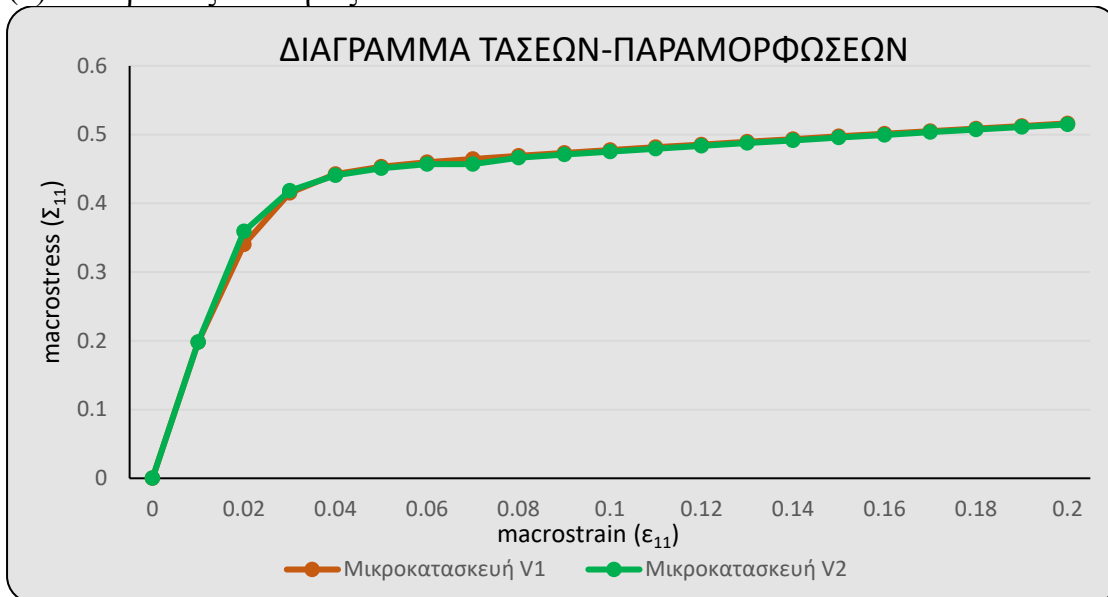
Για μία καλύτερη εποπτεία των αποτελεσμάτων κατασκευάζουμε στο ίδιο διάγραμμα τη σχέση μακροτάσεων-μακροπαραμορφώσεων για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης. Στο Διάγραμμα 5.1, 5.2 βλέπουμε τη σχέση τάσεων παραμορφώσεων για τη μικροκατασκευή  $V_1$  και  $V_2$  αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι και για τις δύο περιπτώσεις, καθ' όλη τη διάρκεια επιβολής της φόρτισης, η ανάλυση με συνθήκες 'περιοδικότητας' κυμαίνεται ανάμεσα στις υπόλοιπες δύο. Επίσης, στην περίπτωση  $V_1$  οι αποκλίσεις μεταξύ των τιμών των τριών αναλύσεων για  $\epsilon > 0,1$  είναι αρκετά μικρές ενώ στην περίπτωση της μικροκατασκευής  $V_2$  η διασπορά αυξάνεται.



(a) Συνοριακές συνθήκες Γραμμικών Μετακινήσεων



(b) Συνοριακές συνθήκες Ελκτικών-Τάσεων

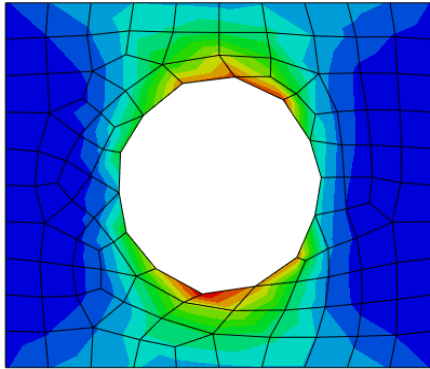
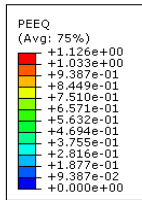


(c) Συνοριακές συνθήκες Περιοδικότητας

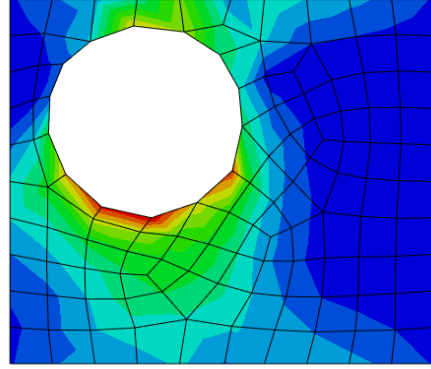
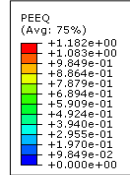
**Διάγραμμα 5.3** Σχέση Τάσεων-Παραμορφώσεων των μικροκατασκευών  $V_1$  και  $V_2$  στην μακροκλίμακα για την περίπτωση καθαρού εφελκυσμού (a) Γραμμικών Μετακινήσεων (b) Ελκτικών- Τάσεων (c) Περιοδικότητας

Στο Διάγραμμα 5.3a-c αναπαρίσταται η σχέση Τάσεων-Παραμορφώσεων των μικροκατασκευών  $V_1$  και  $V_2$  στην μακροκλίμακα για τις Σ.Σ (a) Γραμμικών Μετακινήσεων (β) Ελκτικών- Τάσεων (c) Περιοδικότητας. Βλέπουμε ότι στην περίπτωση (a) για γραμμική ελαστική συμπεριφορά υλικού οι δύο μικροκατασκευές εμφανίζουν μικρές αποκλίσεις, οι οποίες ωστόσο αυξάνονται αισθητά μετά τη διαρροή του υλικού. Στην περίπτωση (b) παρατηρούμε ότι οι αποκλίσεις ανάμεσα στις μικροκατασκευές είναι πολύ μεγάλες από το πρώτο κι' όλας increment. Τέλος, όσον αφορά την περίπτωση (c) βλέπουμε ότι οι δύο καμπύλες τάσης-παραμόρφωσης σχεδόν ταυτίζονται, δημιουργώντας έτσι ιδανικές προϋποθέσεις προσομοίωσης περιοδικών σύνθετων υλικών.

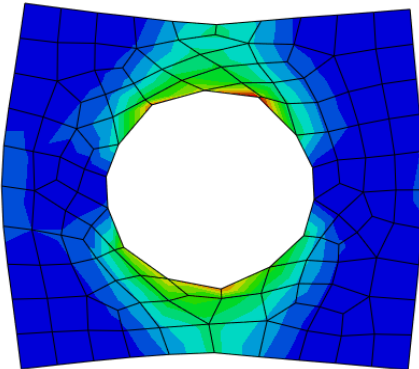
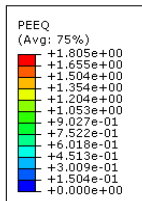
Τέλος, στην Εικόνα 5.6a-f βλέπουμε την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση που αναπτύσσεται σε κάθε μικροκατασκευή  $V_1$  και  $V_2$  για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης. Σε κάθε περίπτωση παρατηρούμε ότι οι πλαστικές παραμορφώσεις συσσωρεύονται γύρω από την τρύπα της μικροκατασκευής. Ειδικά στην περίπτωση e,f περιοδικότητας βλέπουμε να σχηματίζεται μία κατακόρυφη ζώνη από πλαστικές παραμορφώσεις.



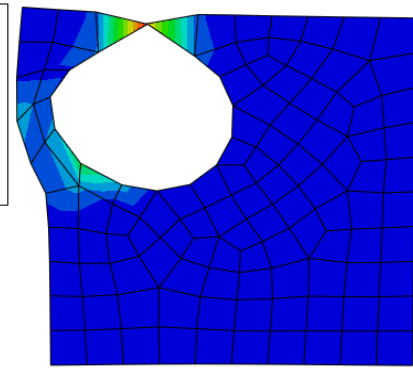
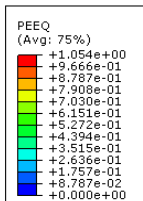
(a)



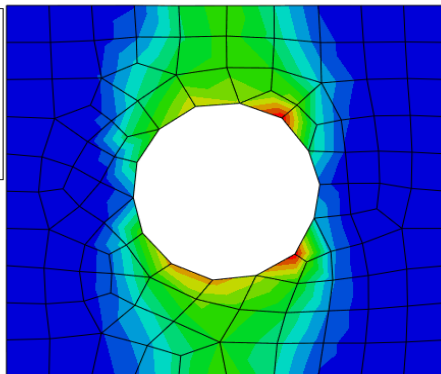
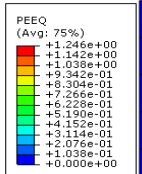
(b)



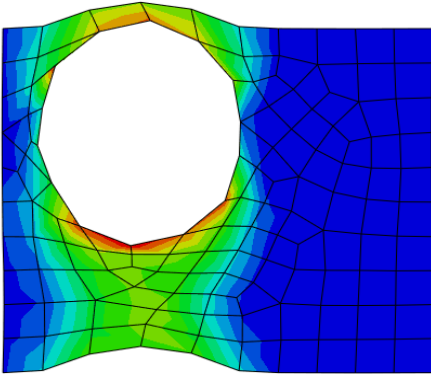
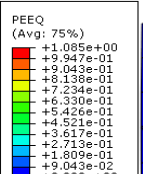
(c)



(d)



(e)



(f)

**Εικόνα 5.6** Ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση μη-γραμμικής ανάλυσης για την περίπτωση καθαρού εφελκυσμού (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων (c,d) Σταθερών ελκτικών -τάσεων (e,f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών -τάσεων

## 5.2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΘΑΡΗΣ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ

Το δεύτερο παράδειγμα αναλύει τις ίδιες ακριβώς μικροκατασκευές  $V_1$  και  $V_2$  (βλ.Εικόνα 5.1a,b) με το προηγούμενο, με τη διαφορά ότι τώρα υπόκεινται σε καθαρή διάτμηση. Ξανά, η ανάλυση πραγματοποιείται τόσο για καθαρά ελαστική απόκριση ( $y_0 \rightarrow \infty$ ) όσο και για μη-γραμμική ( $y_0 \rightarrow 0,4$ ,  $\eta = 0,1$ ) του υλικού τη μήτρας. Οι μικροκατασκευές υποθέτουμε ότι ελέγχονται από μία μακροσκοπική διατμητική παραμόρφωση  $\bar{\epsilon} = [\bar{\epsilon}_{11}; \bar{\epsilon}_{22}; 2\bar{\epsilon}_{12}] = [0; 0; \bar{\gamma}]$ , με  $\gamma = 0,4$  για την περίπτωση γραμμικής-ελαστικής συμπεριφοράς του υλικού και  $\gamma = 0,2$  για την περίπτωση της μη-γραμμικής. Η μη-γραμμική ανάλυση θα εκτελεστεί σε 20 επαυξητικά βήματα ενώ η διακριτοποίηση των μικροκατασκευών ταυτίζεται με αυτή του προηγούμενου παραδείγματος, δηλαδή, 136 ορθογωνικά πεπερασμένα στοιχεία (CPE4: A 4-node bilinear plane strain quadrilateral) για την περίπτωση όπου η τρύπα είναι κεντραρισμένη και σε 133 για την περίπτωση που η τρύπα είναι έκκεντρη.

### 5.2.1 Συνοριακές συνθήκες

Στην Εικόνα 5.7a-f αναπαρίστανται σχηματικά οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλουμε στις μικροκατασκευές μας, στην περίπτωση της ελαστικής ανάλυσης. Για τις μη γραμμικές αναλύσεις οι συνοριακές συνθήκες ταυτίζονται με της ελαστικής με τη διαφορά ότι η σταθερή παράμετρος  $\bar{\gamma} = 0,4$  μετατρέπεται σε  $\bar{\gamma} = 0,2$ .

(i) Για την περίπτωση-γραμμικών μετακινήσεων :

$$-u_{CD} = 0,2y_{CD}, v_{CD} = 0,2x_{CD} = 0$$

$$-u_{AB} = 0,2y_{AB}, v_{AB} = 0,2x_{AB} = 0$$

$$-u_{AD} = 0,2y_{AD}, v_{AD} = 0,2x_{AD} = 0$$

$$-u_{BC} = 0,2y_{BC}, v_{BC} = 0,2x_{BC} = 0$$

(ii) Για την περίπτωση- σταθερών ελκτικών -τάσεων :

$$- \text{τμήμα (AH), (DG), (ED), (FC)} : a_q = \frac{1}{2} (x_{q+1} - x_{q-1}) = 0,1$$

$$- \text{τμήμα (HB), (GC), (AE), (BF)} : a_q = \frac{1}{2} (x_{q+1} - x_{q-1}) = -0,1$$

4. Επίσης, για την μικροκατασκευή  $V_1$  :

$$- u_E = v_E = 0, u_F = v_F = 0, u_G = v_G = 0, u_H = v_H = 0 \text{ (για να αποφύγουμε την κίνηση στερεού σώματος και να διατηρήσουμε τη συμμετρία)}$$

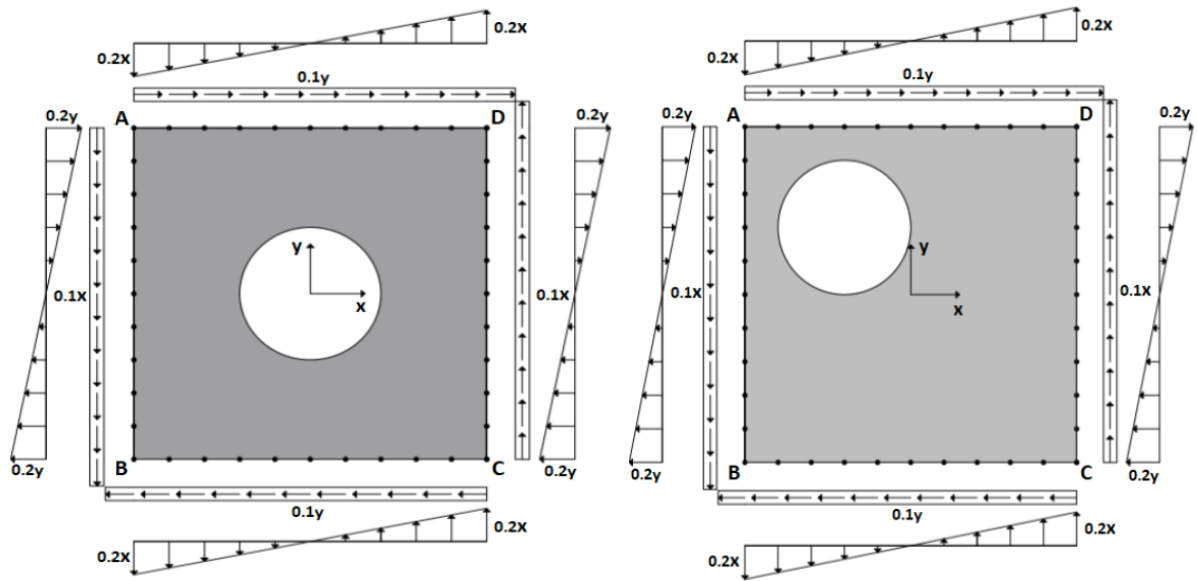
5. Επίσης, για την μικροκατασκευή  $V_2$  :

$$- u_c = v_c = 0 \text{ (για να αποφύγουμε την κίνηση στερεού σώματος και να διατηρήσουμε τη συμμετρία)}$$

(iii) Για την περίπτωση περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών -τάσεων :

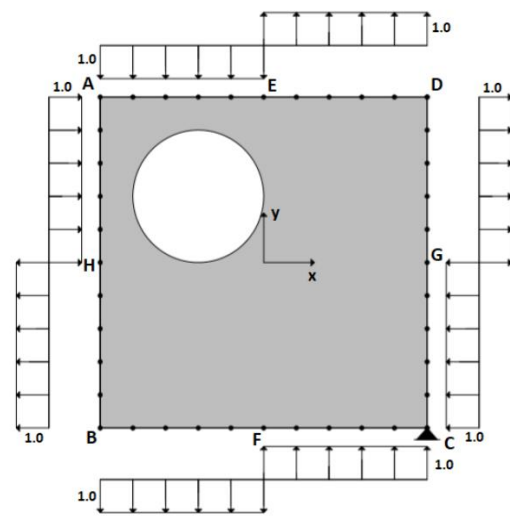
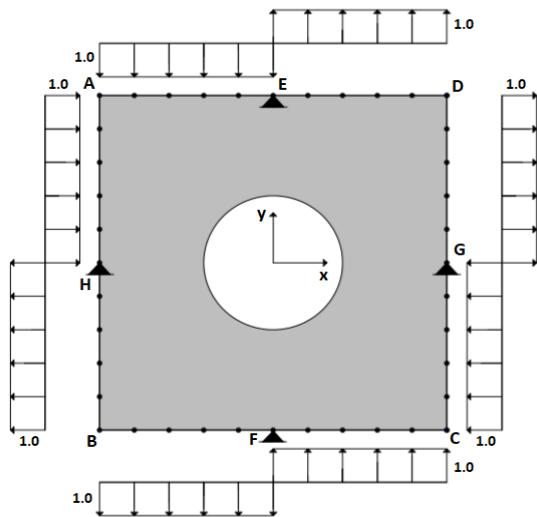
$$- u_{DC} - u_{AB} = 0, v_{DC} - v_{AB} = 0,2 \text{ (κινηματικές δεσμεύσεις)}$$

$$- u_{BC} - u_{AD} = 0,2, v_{BC} - v_{AD} = 0 \text{ (κινηματικές δεσμεύσεις)}$$



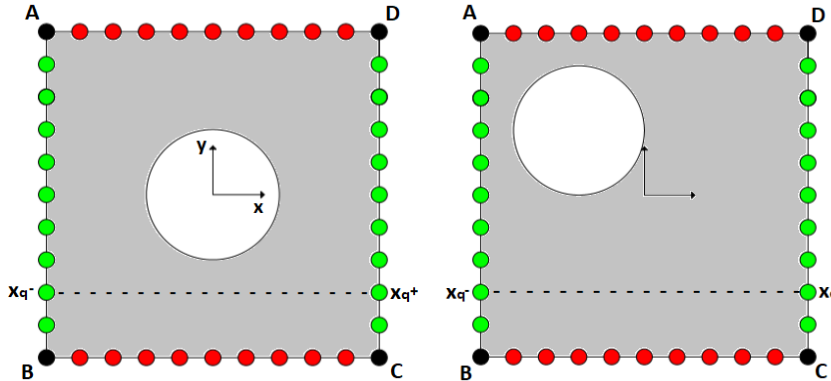
(a)

(b)



(c)

(d)



(e)(f) . Ζευγάρι κόμβων: Δύο κόμβοι που έχουν το ίδιο χρώμα και παρατάσσονται ο ένας απέναντι από τον άλλον.

■ (DC),(AB) :  $u_{DC} - u_{AB} = 0$

$v_{DC} - v_{AB} = 0.2$

■ (BC),(AD) :  $u_{BC} - u_{AD} = 0.2$

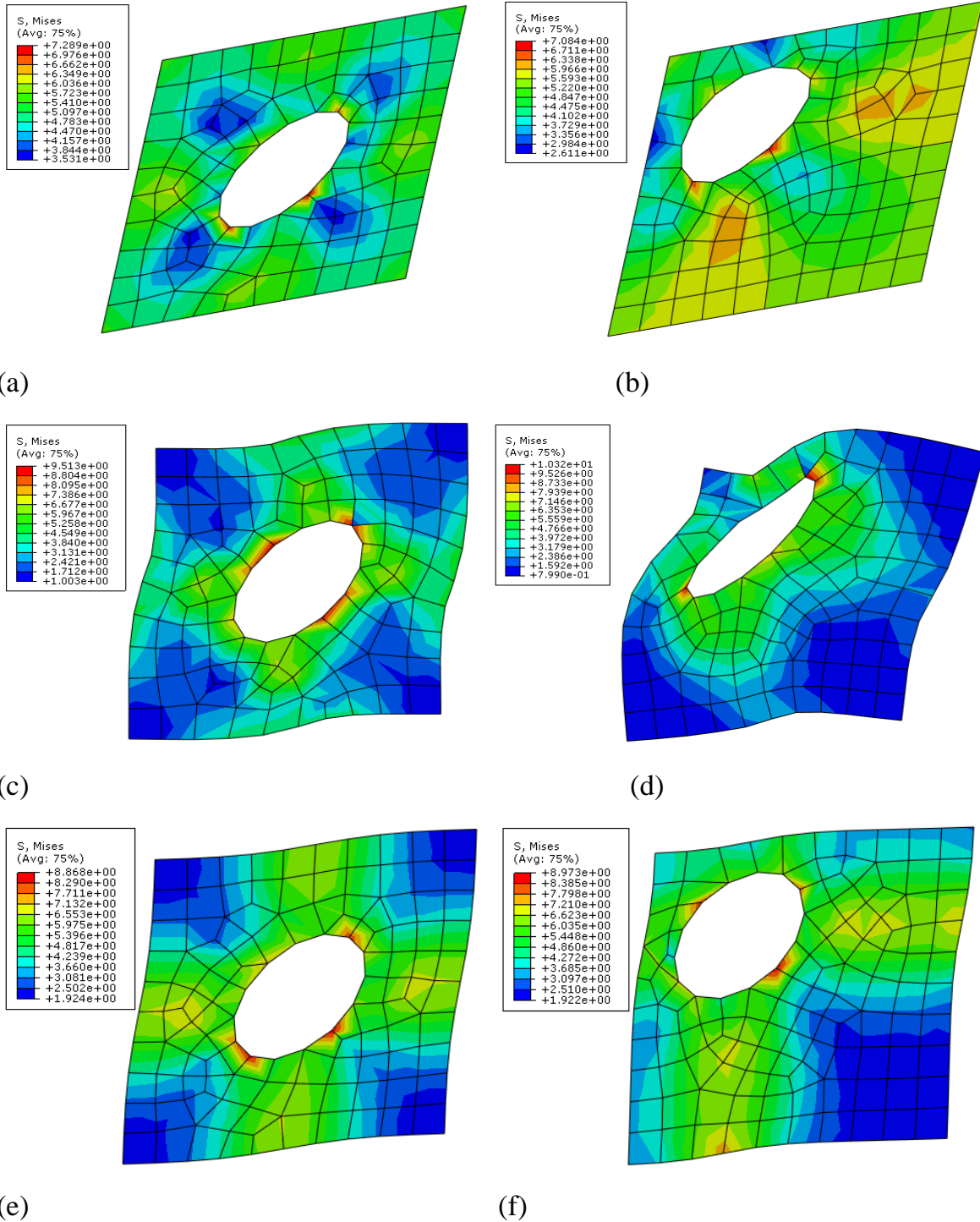
$v_{BC} - v_{AD} = 0$

**Εικόνα 5.7** Συνοριακές συνθήκες ομογενοποίησης για την περίπτωση της καθαρής διάτμησης (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων (c,d) σταθερών ελκτικών-τάσεων (e,f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών τάσεων



## 5.2.2 Ελαστική ανάλυση

Η Εικόνα 5.8 απεικονίζει την παραμορφωσιακή και εντατική κατάσταση των δύο μικροκατασκευών για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης για ελαστική ανάλυση.



**Εικόνα 5.8** Παραμορφωσιακή - εντατική κατάσταση ελαστικής ανάλυσης για την περίπτωση της καθαρής διάτμησης (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων, (c,d) Σταθερών ελκτικών-τάσεων, (e,f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών - τάσεων

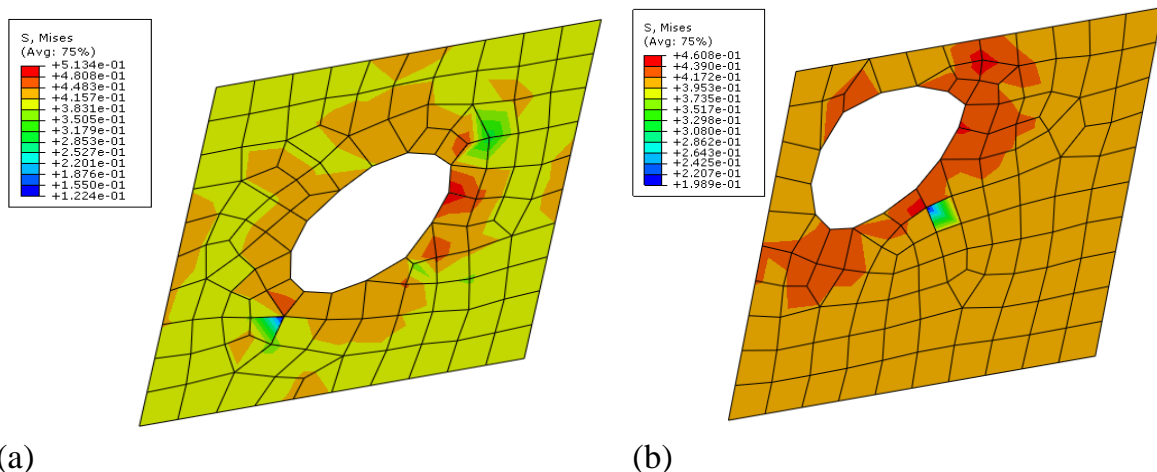
Για την περίπτωση (a,b) γραμμικών - μετατοπίσεων παρατηρούμε ότι οι ακμές τις μικροκατασκευής παραμένουν γραμμικές και μετά την επιβολή των φορτίων. Προχωρώντας στην περίπτωση (c,d) σταθερών ελκτικών τάσεων βλέπουμε ότι οι ακμές του στοιχείου παραμορφώνονται με μη-γραμμικό τρόπο και για τους δύο όγκους  $V_1$  και  $V_2$ . Παρόμοια με την τελευταία είναι η συμπεριφορά και για την περίπτωση (e,f) όπου συνθήκες περιοδικότητας επιβάλλονται.

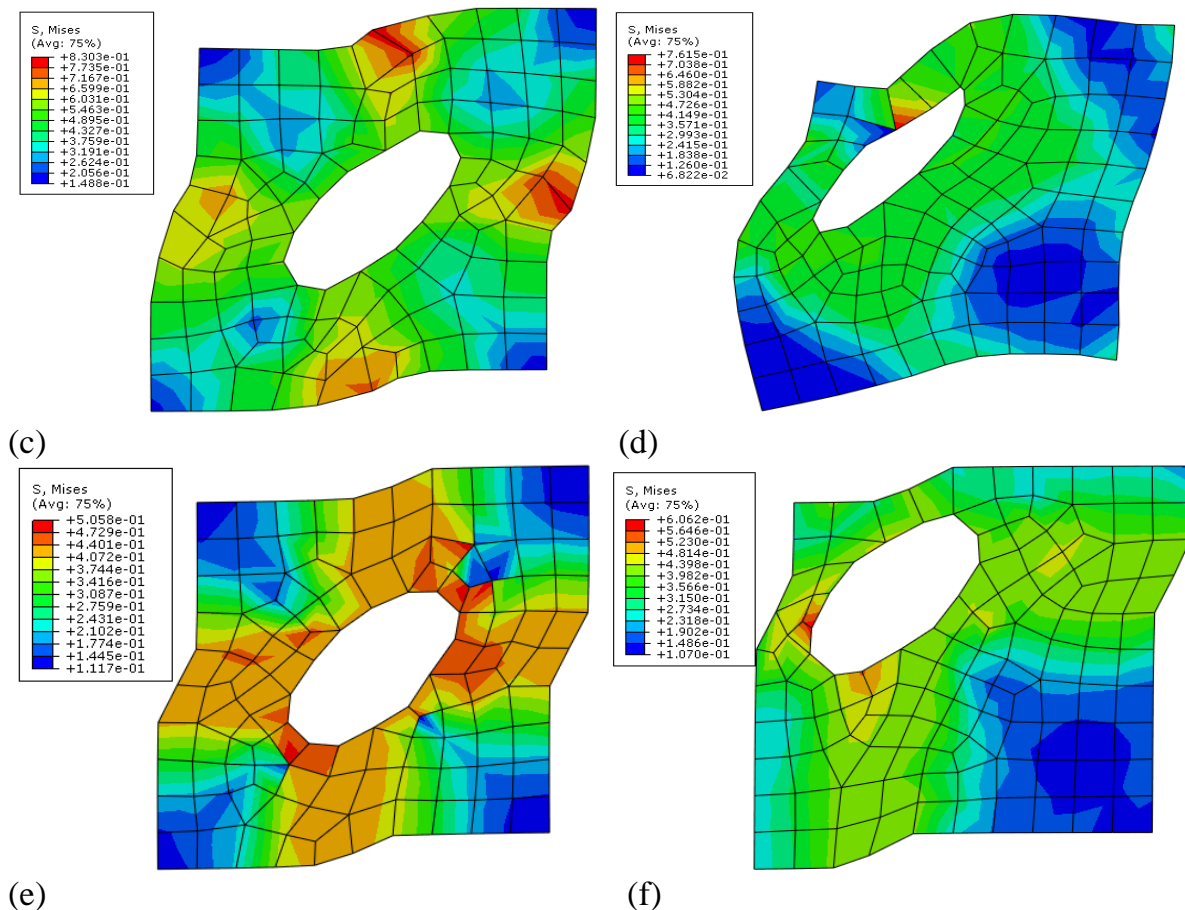
Ο Πίνακας 5.3 συνοψίζει τις υπολογισμένες ομογενοποιημένες τάσεις  $\bar{\sigma} = [\sigma_{11}; \sigma_{22}; \sigma_{12}]$ , οι οποίες υπολογίστηκαν με τις σχέσεις (4.31),(4.38),(4.45) για τα έξι διαφορετικά τεστ με ελαστική ανάλυση. Είναι εμφανές και σε αυτό το παράδειγμα ότι οι συνοριακές συνθήκες ‘ελκτικών -τάσεων’ και ‘γραμμικών μετατοπίσεων’, λόγω των μεγάλων αποκλίσεων,  $(2,134-1,876)/1,876=13,7\%$  και  $(2,546-2,446)/2,446=4\%$  αντίστοιχα, δεν είναι ικανές να μοντελοποιήσουν περιοδικά σύνθετα υλικά. Σε αντίθεση με τις συνθήκες περιοδικότητας όπου η απόκλιση ανάμεσα στις δύο αναλύσεις των μικροκατασκευών  $V_1$  και  $V_2$  υπολογίζεται μόλις  $(2,230-2,228)/2,228=0,09\%$ . Τέλος, παρατηρούμε από τις τιμές που αναγράφονται στον Πίνακα 5.3 ότι οι συνοριακές συνθήκες ‘σταθερών ελκτικών-τάσεων’ προσδίδουν και πάλι την πιο εύκαμπτη συμπεριφορά στην κατασκευή, οι συνθήκες ‘γραμμικών μετατοπίσεων’, την πιο δύσκαμπτη, ενώ οι συνθήκες ‘περιοδικότητας’ κυμαίνονται ανάμεσά τους.

Πίνακας 5.3 ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΘΑΡΗΣ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ- ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ						
	Σ.Σ. ΜΕΤΑΚΚΙΝΗΣΕΩΝ.		Σ.Σ.ΕΛΚΤΙΚΩΝ-ΤΑΣΕΩΝ		Σ.Σ.ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑΣ	
	$V_1$	$V_2$	$V_1$	$V_2$	$V_1$	$V_2$
$\sigma_{11}$	0,000	0,057	0,007	0,000	0,000	0,000
$\sigma_{22}$	0,002	0,056	0,018	0,000	0,000	0,000
$\sigma_{12}$	2,446	2,546	2,134	1,876	2,230	2,228

### 5.2.3 Μη-γραμμική ανάλυση

Η Εικόνα 5.9 απεικονίζει την παραμορφωσιακή και εντατική κατάσταση των δύο μικροκατασκευών για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης. Παρατηρούμε, όπως και στην περίπτωση του καθαρού ελφεκυσμού (Παράγραφος 5.1.3), ότι στην περίπτωση των περιοδικών συνθηκών ότι έχουν σχηματιστεί ζώνες συγκέντρωσης τάσεων.





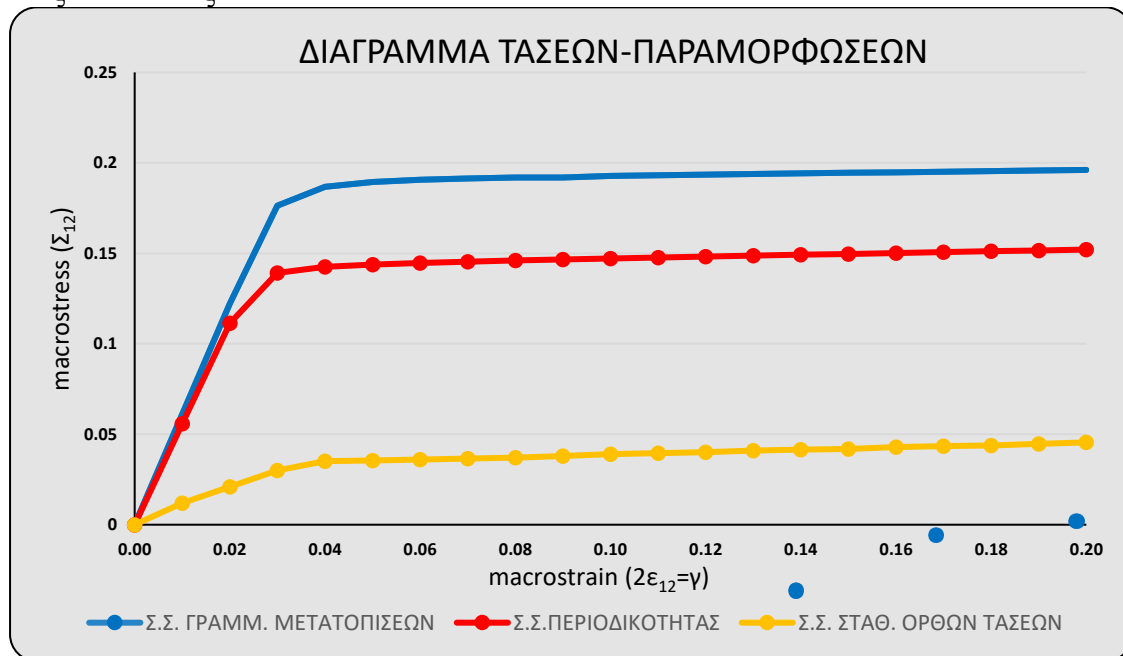
**Εικόνα 5.9** Παραμορφωσιακή - εντατική κατάσταση μη-γραμμικής ανάλυσης για την περίπτωση της καθαρής διάτμησης (a,b) γραμμικών μετατοπίσεων, (c,d) Σταθερών ελκτικών-τάσεων, (e,f) περιοδικών παραμορφώσεων και αντι-περιοδικών ελκτικών - τάσεων

Η συμπεριφορά των μικροκατασκευών  $V_1$  και  $V_2$  σε μη-γραμμικές αναλύσεις είναι παρόμοια με αυτή της γραμμικής-ελαστικής ανάλυσης της Παραγράφου 5.2.2. Στον Πίνακα 5.4 συνοψίζονται οι υπολογισμένες ομογενοποιημένες τάσεις  $\bar{\sigma} = [\sigma_{11}; \sigma_{22}; \sigma_{12}]$ , που υπολογίστηκαν με τις σχέσεις (4.31),(4.38),(4.45) για τα έξι διαφορετικά τεστ με μη-γραμμική ανάλυση. Είναι εμφανές από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων για τις κατασκευές  $V_1$  και  $V_2$ , ότι ισχύουν όλα τα συμπεράσματα που προαναφέρθηκαν στις Παραγράφους 5.1.2 ,5.1.3,5.2.2.

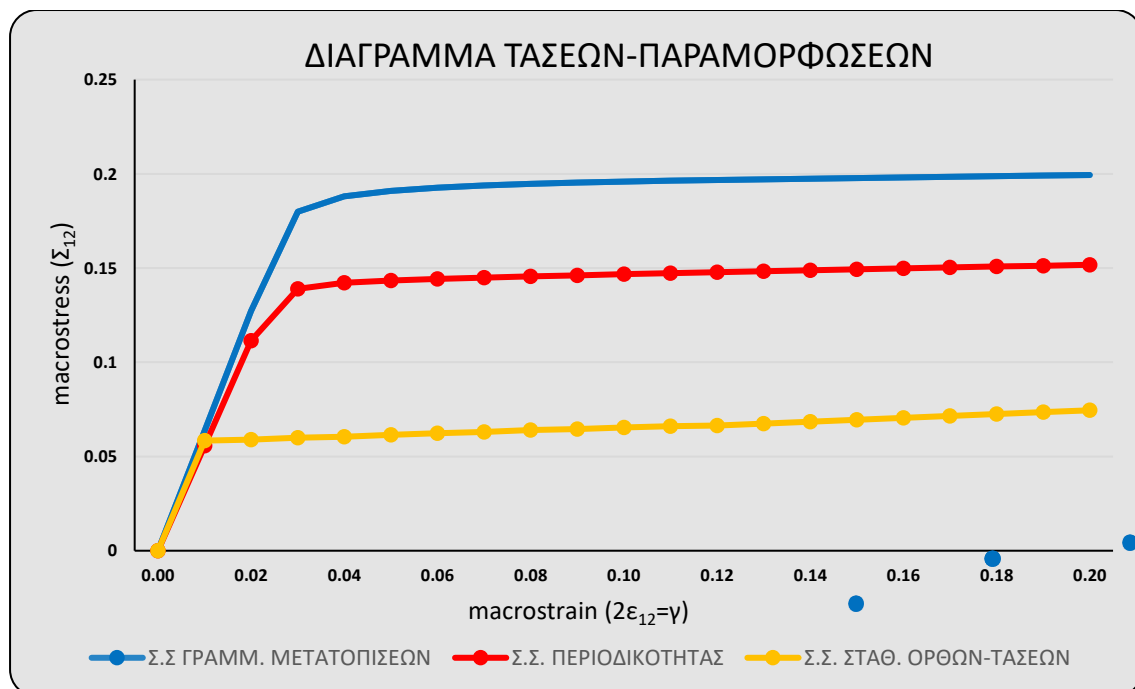
Οι αποκλίσεις για την περίπτωση των ‘σταθερών ελκτικών-τάσεων’ και ‘γραμμικών μετατοπίσεων’, ανάμεσα στις δύο αναλύσεις υπολογίζονται,  $(0,074-0,045)/0,045=64,4\%$  και  $(0,199-0,196)/0,196=1,53\%$  αντίστοιχα, ενώ για τις συνθήκες περιοδικότητας  $(0,152-0,152)/0,152=0\%$ .

Πίνακας 5.4 ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΘΑΡΗΣ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ- ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ						
	Σ.Σ. ΓΡΑΜΜ.ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ		Σ.Σ. ΣΤΑΘ. ΟΡΘΩΝ-ΤΑΣΕΩΝ		Σ.Σ.ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑΣ	
	$V_1$	$V_2$	$V_1$	$V_2$	$V_1$	$V_2$
$\sigma_{11}$	0.000	-0.004	0.000	0.000	0.000	0.000
$\sigma_{22}$	0.000	-0.005	0.002	0.000	0.000	0.000
$\sigma_{12}$	0.196	0.199	0.045	0.074	0.152	0.152

Κατασκευάζουμε στο ίδιο διάγραμμα τη σχέση μακροτάσεων-μακροπαραμορφώσεων για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης. Στο Διάγραμμα 5.4, 5.5 βλέπουμε τη σχέση τάσεων παραμορφώσεων για τη μικροκατασκευή  $V_1$  και  $V_2$  αντίστοιχα. Παρατηρούμε και για τις περιπτώσεις γεωμετριών καθ' όλη τη διάρκεια επιβολής της φόρτισης οι ανάλυση με συνθήκες 'περιοδικότητας' κυμαίνεται ανάμεσα στις υπόλοιπες δύο.

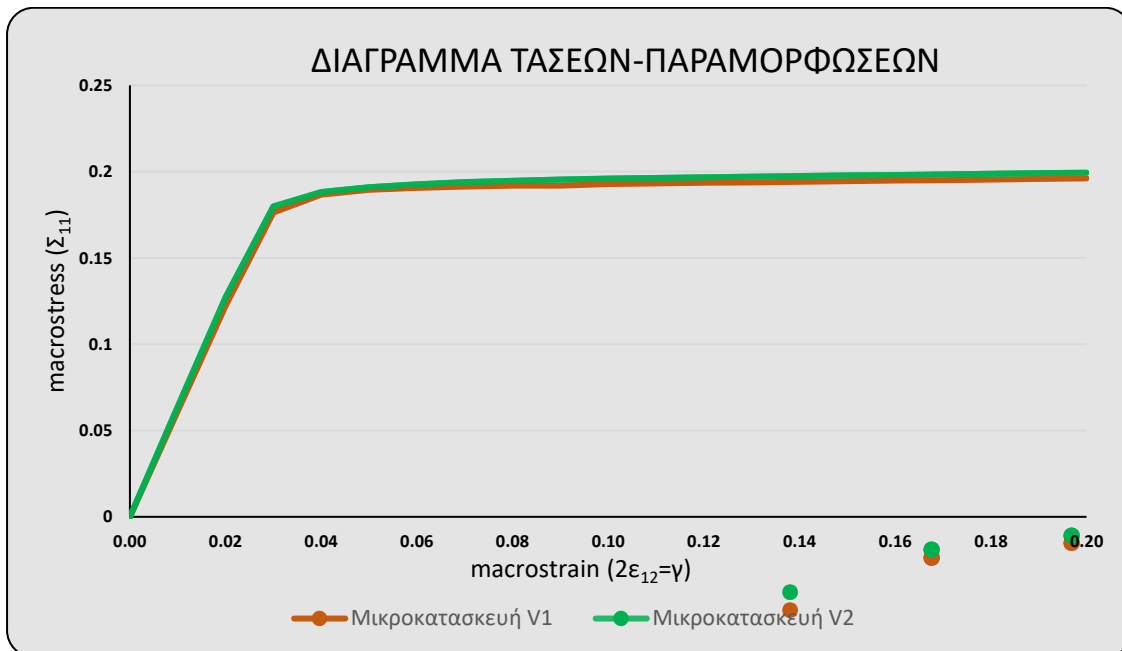


**Διάγραμμα 5.4** Σχέση Τάσεων-Παραμορφώσεων της μικροκατασκευής  $V_1$  στην μακροκλίμακα για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης – καθαρή διάτμηση

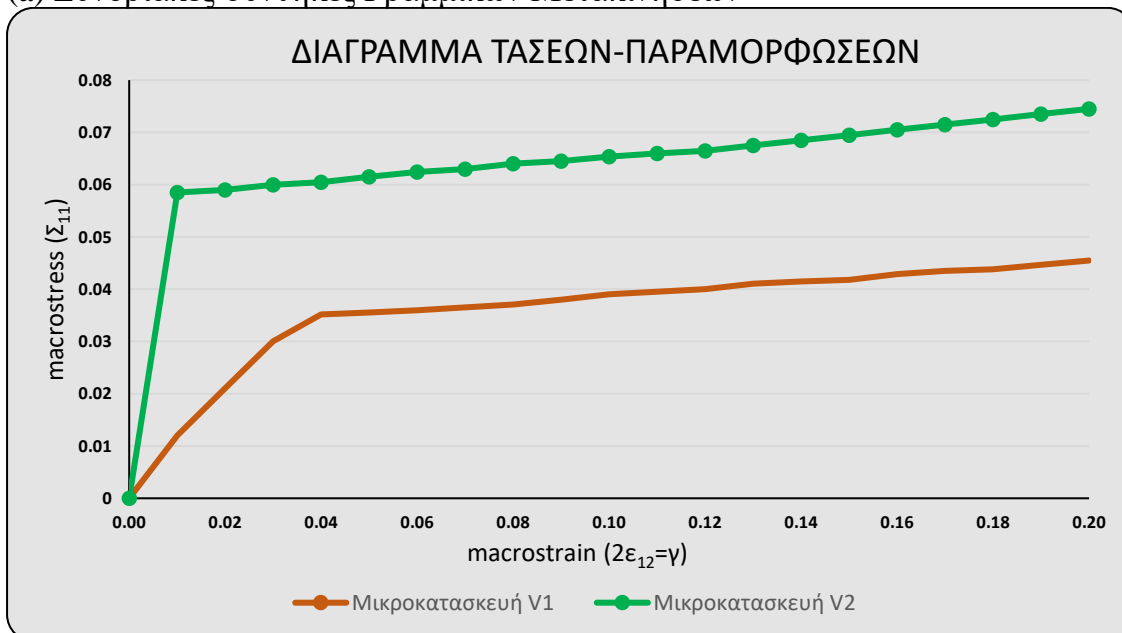


**Διάγραμμα 5.5** Σχέση Τάσεων-Παραμορφώσεων της μικροκατασκευής  $V_1$  στην μακροκλίμακα για τα τρία προβλήματα ομογενοποίησης – καθαρή διάτμηση

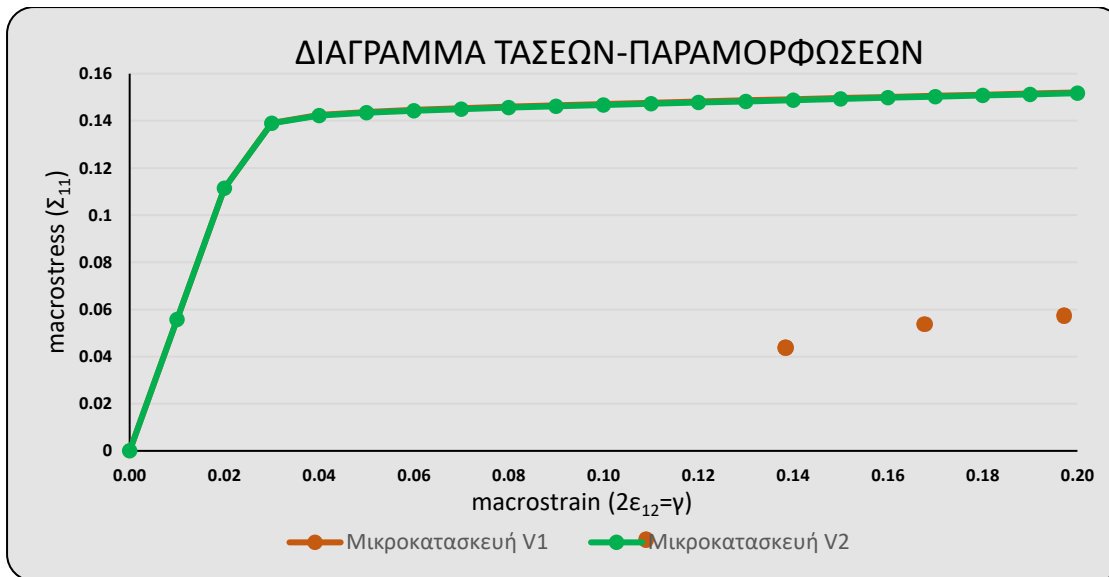
Στο Διάγραμμα 5.6a-c αναπαρίσταται η σχέση Τάσεων-Παραμορφώσεων των μικροκατασκευών  $V_1$  και  $V_2$  στην μακροκλίμακα για τις Σ.Σ (α) Γραμμικών Μετακινήσεων (β) Ελκτικών- Τάσεων (c) Περιοδικότητας. Βλέπουμε ότι στην περίπτωση (α) οι δύο μικροκατασκευές εμφανίζουν μικρές αποκλίσεις, καθ' όλη τη διάρκεια της φόρτισης, πράγμα που δηλώνει ότι οι γραμμικές μετατιπίσης στην περίπτωση της καθαρής διάτμησης είναι ικανές να προσομοιώσουν περιοδικά υλικά.. Στην περίπτωση (b) παρατηρούμε ότι οι αποκλίσεις ανάμεσα στις μικροκατασκευές είναι πολύ μεγάλες από το πρώτο κι' όλας increment. Τέλος, όσον αφορά την περίπτωση (c) βλέπουμε ότι οι δύο καμπύλες τάσης-παραμόρφωσης σχεδόν ταυτίζονται, δημιουργώντας έτσι ιδανικές προϋποθέσεις προσομοίωσης περιοδικών σύνθετων υλικών.



(a) Συνοριακές συνθήκες Γραμμικών Μετακινήσεων



(a) Συνοριακές συνθήκες Ελκτικών-Τάσεων



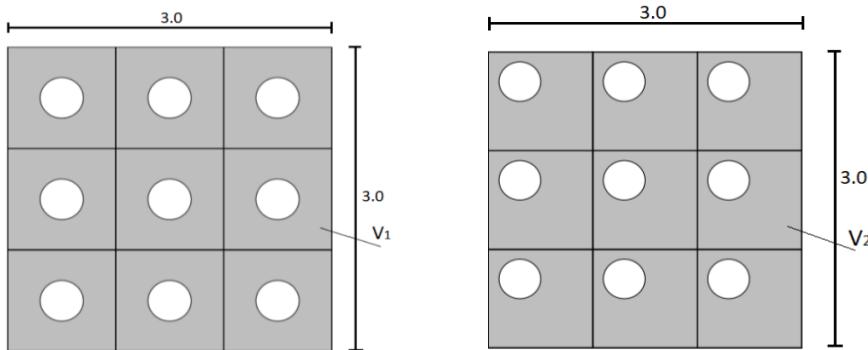
(a) Συνοριακές συνθήκες Περιοδικότητας

**Διάγραμμα 5.6** Σχέση Τάσεων-Παραμορφώσεων των μικροκατασκευών  $V_1$  και  $V_2$  στην μακροκλίμακα για την περίπτωση καθαρής διάτμησης (a) Γραμμικών Μετακινήσεων (b) Ελκτικών- Τάσεων (c) Περιοδικότητας

### 5.3 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΠΛΑΣΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

Είδαμε στην Εικόνα 5.1a,b της Παραγράφου 5.1 τις δύο εναλλακτικές μικροκατασκευές  $V_1$  και  $V_2$  (βλ. ξανά Εικόνα 5.10) για τις οποίες υπολογίστηκαν οι ομογενοποιημένες τάσεις για τα τρία είδη των συνοριακών συνθηκών. Επίσης, έγινε το σχόλιο ότι οι δύο αυτές μικροκατασκευές είναι ισοδύναμες αν οι τρύπες κατανεμηθούν με περιοδικό τρόπο μέσα στο υλικό.

Στην παράγραφο αυτή θα εξακριβώσουμε αν πράγματι σε επίπεδο μεσαίας κλίμακας η καταπόνηση των δύο κατασκευών είναι ισοδύναμη. Η διερεύνηση θα πραγματοποιηθεί μόνο για την περίπτωση συνοριακών συνθηκών περιοδικότητας μιας και καταλήξαμε ότι είναι το καταλληλότερο για περιοδικά υλικά, ενώ η φόρτιση που θα επιβάλλουμε θα είναι αυτή της καθαρής διάτμησης. Η συμπεριφορά του υλικού θα θεωρηθεί μη-γραμμική ( $\gamma_0 \rightarrow 0,4$ ,  $\eta=0,1$ ) καθώς η παράμετρος που αναζητούμε για τη σύγκριση, είναι η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση  $\alpha$ . Οι συνοριακές συνθήκες περιοδικότητας έχουν αναλυθεί και αναπαρασταθεί με ιδιαίτερη λεπτομέρεια στις Παραγράφους 5.2.1 γι'αυτό και παραλείπονται από την ενότητα αυτή.

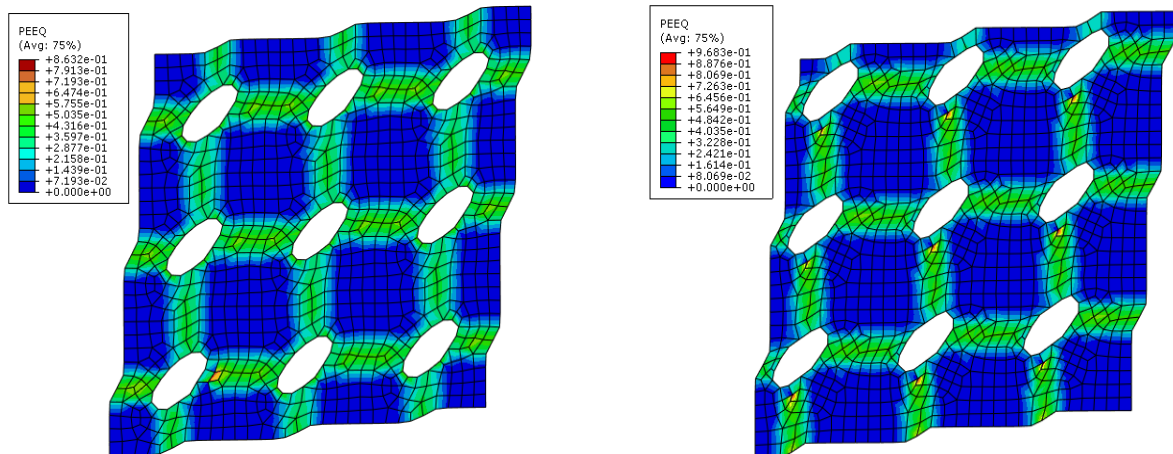


(a)

(b)

**Εικόνα 5.10** Γεωμετρία μικροκατασκευής (a)  $V_1$  και (b)  $V_2$

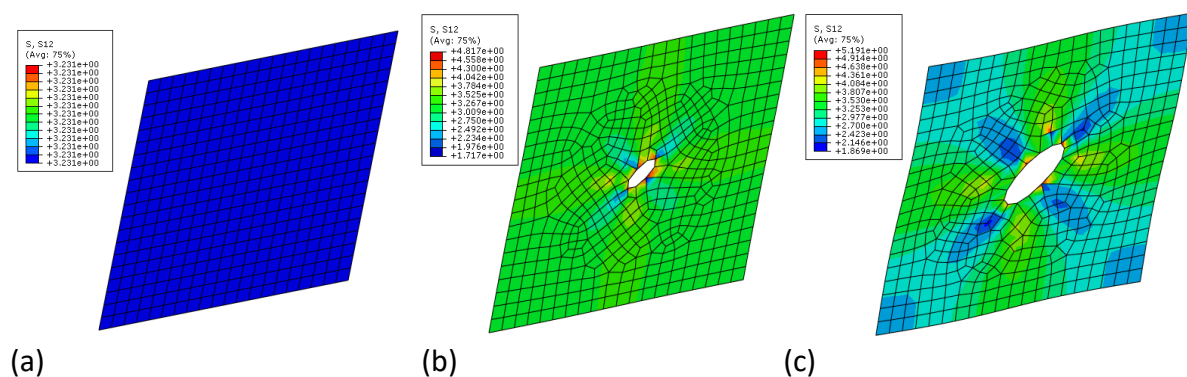
Από την εικόνα 5.11a,b παρατηρούμε ότι πράγματι οι κατανομές των ισοδύναμων πλαστικών παραμορφώσεων για τις δύο μικροκατασκευές  $V_1$  και  $V_2$  οι οποίες υπόκεινται σε καθαρή διάτμηση είναι σχεδόν πανομοιότυπες. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι συνοριακές συνθήκες περιοδικότητας είναι οι καταλληλότερες για την προσομοίωση περιοδικών υλικών.



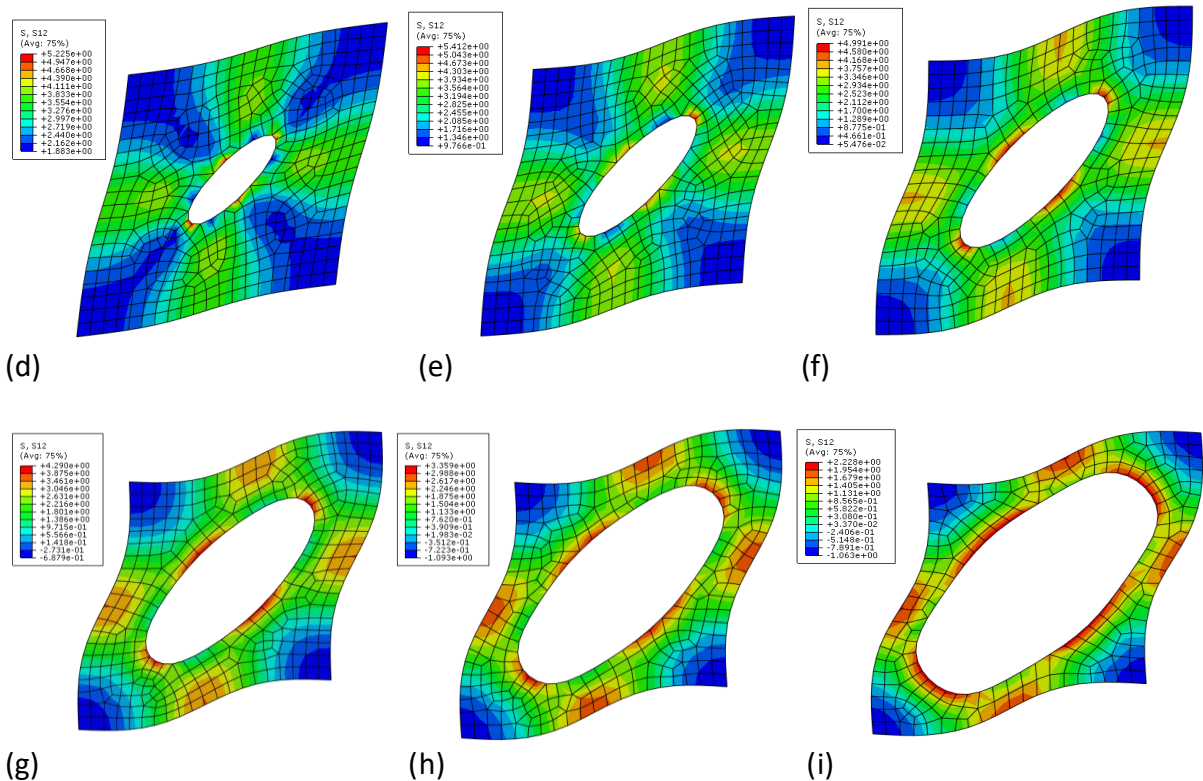
(a) (b)  
**Εικόνα 5.11** Κατανομή ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης για τις μικροκατασκευές  $V_1$  και  $V_2$  σε επίπεδο μεσοκλίμακας για την περίπτωση καθαρής-διάτμησης.

#### 5.4 ΕΠΙΡΡΟΗ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ ΤΗΣ ΤΡΥΠΑΣ

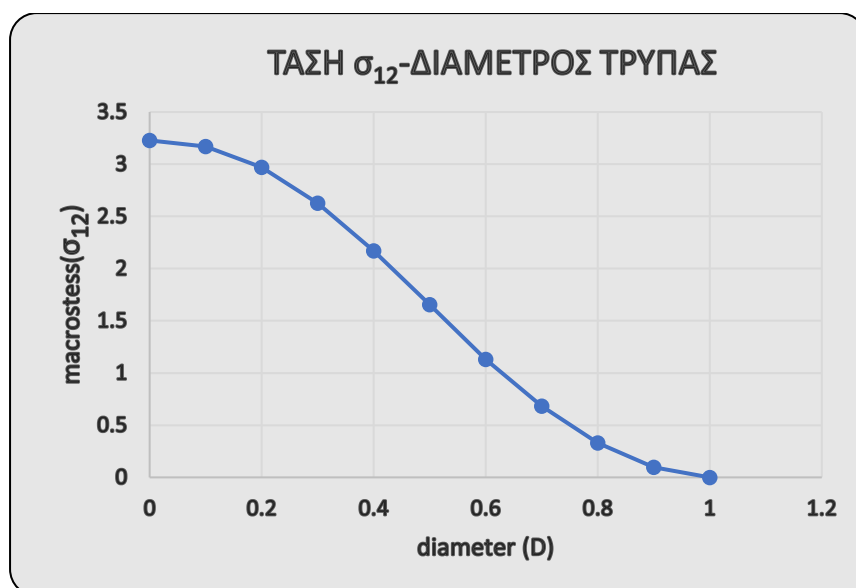
Στην παράγραφο αυτή θα διερευνήσουμε την επιρροή της διαμέτρου της τρύπας ως προς τον υπολογισμό των ολικών-μακροσκοπικών τάσεων  $\bar{\sigma}_{12}$ . Για το σκοπό αυτό, εξετάζουμε τη μικροκατασκευή,  $V_1$ , η οποία υπόκειται σε καθαρή διάτμηση με συνοριακές συνθήκες περιοδικότητας. Η συμπεριφορά του υλικού της μήτρας θεωρείται γραμμική ελαστική ( $y_0 \rightarrow \infty$ ) ενώ η διάμετρος της τρύπας λαμβάνει τις ακόλουθες τιμές  $D = [0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1]$ . Στην Εικόνα 5.12a-i, βλέπουμε την εντατική-παραμορφωσιακή κατάσταση της μικροκατασκευής  $V_1$  για τις διάφορες τιμές της διαμέτρου της τρύπας  $D$ . Παρατηρούμε ότι όσο πιο μικρή είναι η διάμετρος τόσο πιο ομοιόμορφη είναι η ένταση, στην περίπτωση  $D=0$  γίνεται εντελώς ομοιόμορφη, ενώ οι ακμές της μικροκατασκευής παραμορφώνονται γραμμικά. Όσο αυξάνεται η διάμετρος τόσο πιο ανομοιόμορφη γίνεται η ένταση και τόσο οι ακμές τις μικροκατασκευής συμπεριφέρονται μη-γραμμικά.



(a) (b) (c)



**Εικόνα 5.12a-i.** Εντατική-παραμορφωσιακή κατάσταση της μικροκατασκευής  $V_1$  σε καθαρή διάτμηση για διάφορες τιμές της διαμέτρου της τρύπας. (α)  $D=0.0$ , (β)  $D=0.1$ , (γ)  $D=0.2$ , (δ)  $D=0.3$ , (ε)  $D=0.4$ , (ς)  $D=0.5$ , (ζ)  $D=0.6$ , (η)  $D=0.7$ , (θ)  $D=0.8$ . Από το Διάγραμμα 4.5 παρατηρούμε ότι όταν δεν ενσωματώνεται καθόλου τρύπα στη μικροκατασκευή η τάση  $\sigma_{12}$  ισούται με τη γνωστή του νόμου Hooke  $\bar{\sigma}_{12} = \gamma \cdot G = 0,4 \cdot 8,0 = 3,2$  GPa. Όσο αυξάνεται η διάμετρος της τρύπας τόσο μικραίνει η  $\bar{\sigma}_{12}$ , δηλαδή η κατασκευή μας γίνεται πιο εύκαμπτη, με μη-γραμμικό τρόπο. Η  $\bar{\sigma}_{12}$  παίρνει την τιμή μηδέν για τιμή διαμέτρου ίση με τη διάσταση του τετραγωνικού RVE.



**Διάγραμμα 5.7** Σχέση ολικών μακροσκοπικών τάσεων  $\bar{\sigma}_{12}$  – διάμετρος της τρύπας της μικροκατασκευής  $V_1$



## 5.5 ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ ΔΥΣΚΑΜΠΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΤΗΝ ΤΡΥΠΑ ΤΗΣ ΜΗΤΡΑΣ

Στην Ενότητα αυτή θα εξετάσουμε το πως επηρεάζει τον υπολογισμό των μακροσκοπικών τάσεων  $\sigma_{12}$  της μικροκατασκευής  $V_1$  η ενσωμάτωση πρόσθετου υλικού στην τρύπα του. Τη νέα αυτή μικροκατασκευή θα την αποκαλούμε  $V_3$  ενώ ο δεσμός (πρόσφυση) ανάμεσα στα δύο συστατικά θα θεωρηθεί ιδανικός.

Πιο συγκεκριμένα, οι παράμετροι που θα εξετάσουμε θα είναι το μέτρο ελαστικότητας  $E_\phi$  και η διάμετρος  $D_\phi$  του ενσωματωμένου υλικού ενώ η συμπεριφορά του θα θεωρηθεί γραμμική ελαστική ( $y_o \rightarrow \infty$ ), με σταθερό λόγο poisson  $\nu_\phi = 0.3$ . Τα χαρακτηριστικά του υλικού της μήτρας είναι τα ίδια με τα προηγούμενα παραδείγματα ( $E_K = 21.0$ ,  $\nu_K = 0.3$ ,  $h_K = 1.0$ ) υιοθετώντας γραμμικό-ελαστικό μοντέλο.

Η μικροκατασκευή  $V_3$  υπόκειται σε καθαρή διάτμηση με συνοριακές συνθήκες περιοδικότητας, οι οποίες έχουν αναλυθεί και αναπαρασταθεί με ιδιαίτερη λεπτομέρεια στην Παράγραφο 4.6.4, γι' αυτό και παραλείπονται στην ενότητα αυτή. Για την μακροσκοπική παραμόρφωση,  $\bar{\epsilon} = [\bar{\epsilon}_{11}; \bar{\epsilon}_{22}; 2\bar{\epsilon}_{12}] = [0; 0; \bar{\gamma}]$ , ισχύει  $\bar{\gamma} = 0.4$ . Η διερεύνηση πραγματοποιείται για τιμές της διαμέτρου  $D_\phi = [0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8]$  και για τιμές του μέτρου ελαστικότητας  $E_\phi = [0 \cdot E_K; 0.5 \cdot E_K; 1.0 \cdot E_K; 10 \cdot E_K; 20 \cdot E_K; 30 \cdot E_K; 40 \cdot E_K] = [0; 10.5; 21; 210; 420; 630; 840]$ .

Έτσι λοιπόν, στον Πίνακα 5.5 βλέπουμε συγκεντρωμένα τις υπολογισμένες ολικές μακροσκοπικές τάσεις  $\sigma_{12}$ , όπως αυτές υπολογίσθηκαν με τη σχέση (4.45) για τα 91, συνολικά, τεστ με ελαστική ανάλυση. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι για την τιμή του λόγου  $E_\phi/E_K = 0$  (γραμμή με γκρι γέμισμα) οι  $\sigma_{12}$  που προκύπτουν για κάθε διάμετρο  $D_\phi$  είναι ίδιες με τις αντίστοιχες του Παραδείγματος 5.2. Λογικό, αφού μέτρο ελαστικότητας  $E_\phi = 0$  σημαίνει πρακτικά ότι το ενσωματωμένο υλικό δεν παρέχει καθόλου δυσκαμψία στην μικροκατασκευή  $V_3$ , δηλαδή είναι σα να έχουμε τρύπα. Επίσης, παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε διάμετρο  $D_\phi$ , καθώς αυξάνεται ο λόγος  $E_\phi/E_K$  παρατηρείται αύξηση της τάσης  $\sigma_{12}$ , όχι όμως με γραμμικό τρόπο όπως αυτό αναπαρίσταται στο Διάγραμμα 5.8.

$\nu_\phi = 0.3$	$\sigma_{12}$						
$E_\phi/E_K$	$D_\phi = 0.2$	$D_\phi = 0.3$	$D_\phi = 0.4$	$D_\phi = 0.5$	$D_\phi = 0.6$	$D_\phi = 0.7$	$D_\phi = 0.8$
0	2.972	2.628	2.176	1.654	1.13	0.668	0.319
0.5	3.160	3.067	2.940	2.781	2.596	2.396	2.194
1	3.230	3.230	3.230	3.230	3.230	3.230	3.230
2	3.291	3.368	3.479	3.625	3.811	4.050	4.363
3	3.318	3.430	3.590	3.804	4.084	4.456	4.976
4	3.333	3.465	3.653	3.906	4.243	4.700	5.362
6	3.350	3.502	3.722	4.019	4.420	4.976	5.823
8	3.358	3.522	3.759	4.08	4.515	5.130	6.088
10	3.364	3.535	3.782	4.118	4.576	5.228	6.262
15	3.372	3.552	3.814	4.170	4.660	5.365	6.510
20	3.376	3.561	3.830	4.197	4.703	5.437	6.644
30	3.379	3.570	3.847	4.225	4.748	5.512	6.783
40	3.382	3.575	3.855	4.238	4.771	5.55	6.856

**Πίνακας 5.5** Ομογενοποιημένες τάσεις καθαρής διάτμησης για μεταβολές της διαμέτρου και του λόγου των μέτρων ελαστικότητας του ενσωματωμένου υλικού και της μήτρας

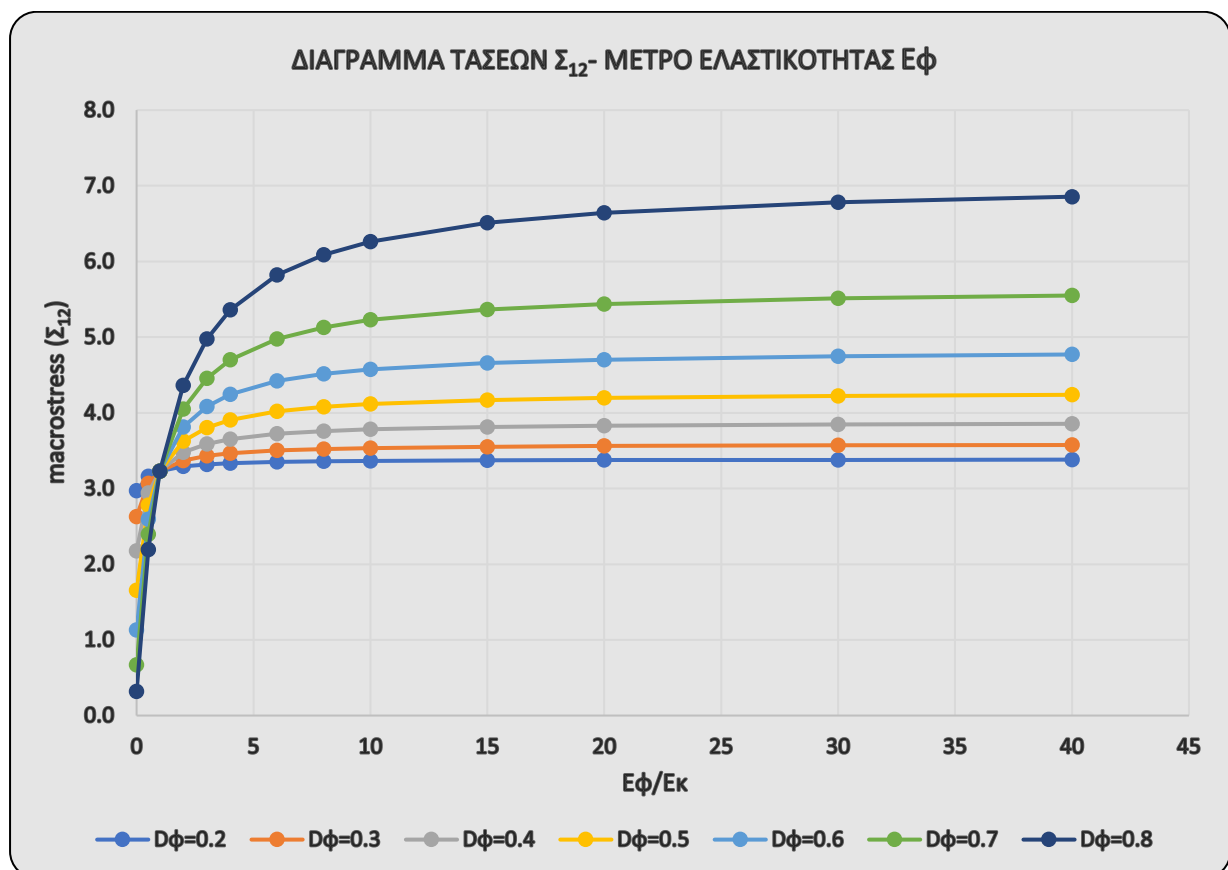
Το Διάγραμμα 5.8 αναπαριστά το πώς μεταβάλλονται οι ολικές μακροσκοπικές τάσεις  $\Sigma_{12}$  με τη σταδιακή αύξηση του λόγου  $E_{\phi}/E_K$  για όλες τις τιμές της διαμέτρου  $D_{\phi}$  που προαναφέραμε.

Καθώς διατηρούμε σταθερή τη διάμετρο  $D_{\phi}$  της ενσωματωμένης διατομής, αυξάνονται οι τάσεις  $\Sigma_{12}$  με την αύξηση του λόγου  $E_{\phi}/E_K$ . Ωστόσο το συμπέρασμα αυτό έχει ισχύ μονάχα για ένα φάσμα τιμών του λόγου  $0 < E_{\phi}/E_K < 10$ , διότι

Με άλλα λόγια, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αν θέλουμε να αυξήσουμε τη δυσκαμψία ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενο από μία ‘μαλακή’ μήτρα, δεν έχει νόημα να ενσωματώσουμε σε αυτή υλικό με μέτρο ελαστικότητας 10 φορές μεγαλύτερο και άνω.

Όσον αφορά τη διάμετρο, υπάρχει σαφώς μία αύξηση καθώς ενσωματώνουμε μεγαλύτερες διαμέτρους δύσκαμπτου υλικού, ωστόσο, και σε αυτήν ακόμα την περίπτωση θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί διότι οικονομικά κριτήρια θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν πριν την διεξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων.

Τέλος, θα πρέπει να αποφεύγονται οπωσδήποτε λόγοι  $E_{\phi}/E_K < 1.0$ , ειδικά για μεγάλες τιμές διαμέτρου ( $D_{\phi}=0.8$ ) ενσωματωμένου υλικού διότι οι μικροκατασκευή γίνεται πολύ εύκαμπτη αδυνατώντας να παραλάβει τάσεις ή φορτία. Για πολύ μικρές τιμές της διαμέτρου ( $D_{\phi}=0.2$ ) τα πράγματα είναι σαφώς ευνοϊκότερα.

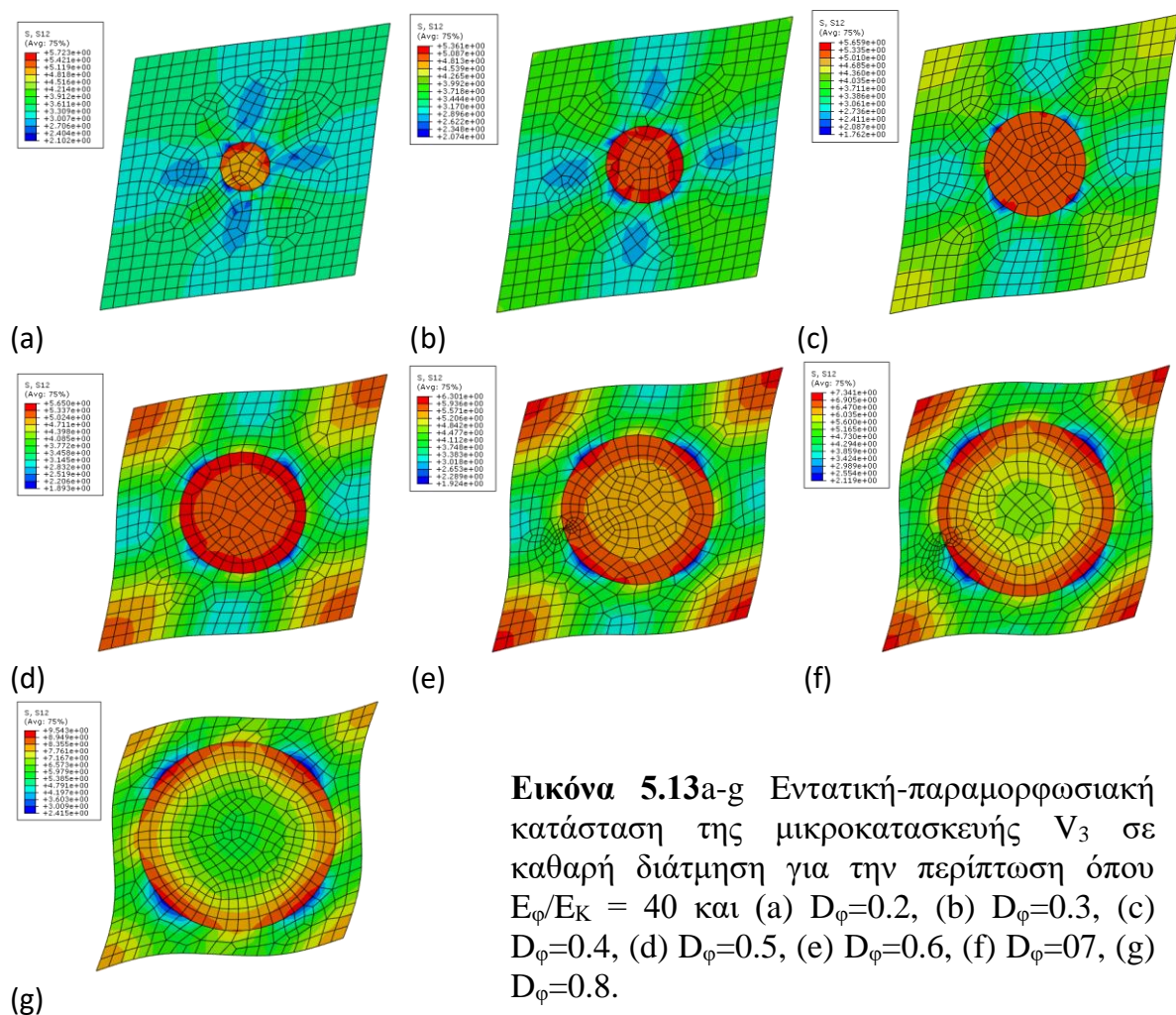


**Διάγραμμα 5.8** Μεταβολή των μακροτάσεων  $\sigma_{12}$  με τη σταδιακή αύξηση του λόγου  $E_{\phi}/E_K$  για τις τιμές της διαμέτρου  $D_{\phi} = [0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8]$

Τέλος, στην Εικόνα 5.13, αναπαρίστανται οι παραμορφωσιακή και εντατική κατάσταση του RVE για όλες τις τιμές της διαμέτρου που εξετάζουμε. Ο λόγος των μέτρων ελαστικότητας διατηρείται σταθερός και ίσος με  $E_{\varphi}/E_K = 40$  ενώ ο λόγος poisson  $\nu_{\varphi}=0.3$ . Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές της διαμέτρου ( $D_{\varphi}=0.2,0.3$ ) οι ακμές του RVE παραμένουν σχεδόν γραμμικές μετά την επιβολή των διατμητικών φορτίων. Οι τάσεις που καταπονούν το ενσωματωμένο υλικό είναι σαφώς πολύ μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες της μήτρας, ενώ σχηματίζονται κάποιες ζώνες ανακούφισης τάσεων σε μορφή σταυρού γύρω από το ενσωματωμένο υλικό του RVE.

Καθώς πηγαίνουμε σε μεγαλύτερες τιμές της διαμέτρου ( $D_{\varphi}=0.3,0.4,0.5$ ) παρατηρούμε ότι οι ακμές της μικροκατασκευής αρχίζουν να καμπυλώνουν αισθητά ενώ οι γωνίες του στοιχείου να καταπονούνται πολύ έντονα.

Το φαινόμενο αυτό εξελίσσεται εντονότερα για ακόμα μεγαλύτερες τιμές της διαμέτρου ( $D_{\varphi}=0.7, 0.8$ ).



**Εικόνα 5.13a-g** Εντατική-παραμορφωσιακή κατάσταση της μικροκατασκευής  $V_3$  σε καθαρή διάτμηση για την περίπτωση όπου  $E_{\varphi}/E_K = 40$  και (a)  $D_{\varphi}=0.2$ , (b)  $D_{\varphi}=0.3$ , (c)  $D_{\varphi}=0.4$ , (d)  $D_{\varphi}=0.5$ , (e)  $D_{\varphi}=0.6$ , (f)  $D_{\varphi}=0.7$ , (g)  $D_{\varphi}=0.8$ .

## 6. ΔΙΕΡΡΕΥΝΗΣΗ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΠΟΥ ΥΠΟΚΕΙΝΤΑΙ ΣΕ ΜΟΝΟΤΟΝΙΚΗ - ΑΝΑΚΥΚΛΙΖΟΜΕΝΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

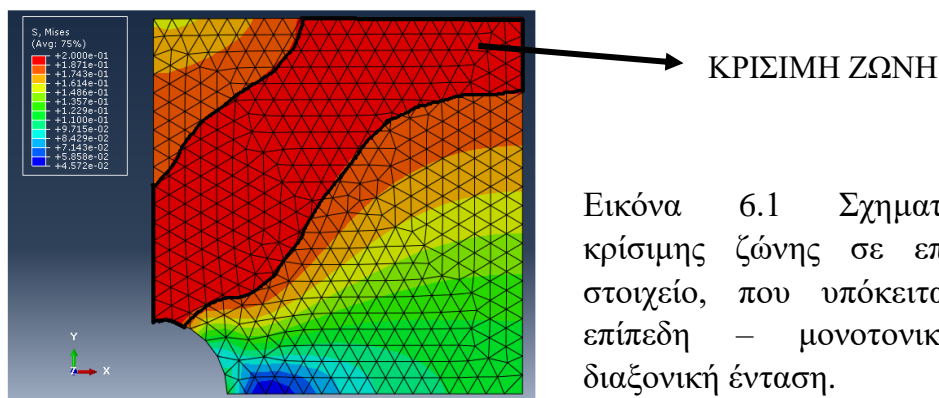
### 6.1 ΟΡΙΑΚΟ ΦΟΡΤΙΟ Ή ΦΟΡΤΙΟ ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗΣ – ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Οι Neal και Symond ήταν οι πρώτοι που ανέπτυξαν τις συστηματικές μεθόδους πλαστικής οριακής ανάλυσης με τη μέθοδο των ανισοτήτων όπως επίσης και με τη μέθοδο επαλληλίας των μηχανισμών.

Η Οριακή Ανάλυση είναι η ανάλυση εκείνη που βρίσκει την αντοχή της κατασκευής, δηλαδή πόσο ικανή είναι μία κατασκευή για να φέρει φορτία. Δεν σχετίζεται καθόλου με παραμορφώσεις της κατασκευής : αφορά δηλαδή κατασκευές που έχουν μέλη που έχουν μεγάλη πλαστιμότητα ή παραμορφωσιμότητα και επίσης που δε γίνονται ασταθείς λόγω πλαστικών παραμόρφωσεων.

Σε μία κατασκευή συμβαίνει πλαστική κατάρρευση όταν η κατασκευή μετατρέπεται σε μηχανισμό με την ανάπτυξη ικανού αριθμού και διάταξης πλαστικών ζωνών. Εάν η συμπεριφορά του υλικού είναι τέλεια πλαστικότητα χωρίς κράτυνση, έχουμε κατάρρευση όταν μια μικρή αλλαγή του σχήματος συμβαίνει χωρίς περαιτέρω αλλαγή του φορτίου με αποτέλεσμα την ανάπτυξη μηχανισμού. Ο μηχανισμός υλοποιείται με την μετατροπή των μελών της κατασκευής λόγω της πλαστικοποίησης σε απόλυτα στερεά σώματα.

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε επίπεδα στοιχεία, τα οποία υπόκεινται σε επίπεδη ένταση ή παραμόρφωση. Στην πλαστική οριακή ανάλυση εντοπίζεται το φορτίο το οποίο θα οδηγήσει σε διαρροή έναν αριθμό από πεπερασμένα στοιχεία ο οποίος κρίνεται ικανός για τη δημιουργία κρίσιμων ζωνών που σηματοδοτούν τη δημιουργία μηχανισμού και κατ' επέκταση την κατάρρευση της κατασκευής. Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί υπολογιστικοί αλγόριθμοι οι οποίοι προσδιορίζουν μαθηματικά το φαινόμενο αυτό μέσω κινηματικών μεθόδων. Στα παραδείγματα που ακολουθούν δε θα γίνει χρήση των αλγορίθμων αυτών, μιας και η χρήση εξεζητημένων λογισμικών κρίνεται αναγκαία. Οι κρίσιμες ζώνες θα εντοπισθούν σχηματικά λαμβάνοντας υπόψιν το όριο διαρροής και την κατανομή των τάσεων στην κατασκευή μας. Στην Εικόνα 4.1 γίνεται αναπαράσταση μίας κρίσιμης ζώνης που αναπτύχθηκε σε ένα επίπεδο στοιχείο μετά από την επιβολή διαξονικής επίπεδης έντασης. Η φόρτιση που επιβάλλουμε, στην παρούσα εργασία, για την εύρεση του οριακού φορτίου είναι μονοτονική και κατά το γενικό κανόνα διαξονική, μέσα στο επίπεδο της κατασκευής.



Εικόνα 6.1 Σχηματισμός κρίσιμης ζώνης σε επίπεδο στοιχείο, που υπόκειται σε επίπεδη – μονοτονική – διαξονική ένταση.

## 6.2 ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΕΠΑΥΞΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗΣ

Η επαυξητική κατάρρευση (rachetting) είναι ένα συμβιβαστό σύστημα  $\Delta u^P$ , στο οποίο δημιουργούνται πλαστικές μετατοπίσεις (ή στροφές) σε διάφορες κρίσιμες διατομές σε διαφορετικές στιγμές μέσα στον κύκλο φόρτισης και οι οποίες εάν παρουσιαζόντουσαν ταυτόχρονα θα αποτελούσαν έναν στιγμιαίο μηχανισμό καταρρεύσεως. Η παρουσία του μηχανισμού αυτού είναι έμμεση και είναι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης, στις ήδη υπάρχουσες πλαστικές μετατοπίσεις (ή στροφές) στις κρίσιμες διατομές από τον προηγούμενο κύκλο, καινούριων πλαστικών μετατοπίσεων (ή στροφών) κατά το επόμενο. Το αποτέλεσμα είναι μετά από πολλούς κύκλους φόρτισης να καταρρεύσει η κατασκευή από μεγάλες παραμορφώσεις που αναπτύσσονται.

Επιπροσθέτως, η επαυξητική κατάρρευση (rachetting) που περιγράφηκε ανωτέρω είναι μια ειδική υποπερίπτωση του shakedown limit, το οποίο περιγράφει εκτός αυτού και ένα άλλο συμβιβαστό σύστημα το οποίο ονομάζεται εναλλασσόμενη πλαστικότητα και συμβαίνει ότι σε κάθε κρίσιμη διατομή ισχύει  $\Delta u_i^P = \Delta u_i^{P+} - \Delta u_i^{P-}$ . Μπορεί να συμβαίνει ότι κατά τη διάρκεια κάποιου κύκλου φόρτισης  $(0, T)$ , αναπτύσσονται ίσες  $\Delta u_i^{P+}$  και  $\Delta u_i^{P-}$  έτσι ώστε η  $\Delta u_i^P$  μετά το τέλος του κύκλου να είναι μηδέν. Καθώς το πρόγραμμα φόρτισης επαναλαμβάνεται και η  $\Delta u_i^{P+}$  και η  $\Delta u_i^{P-}$  αυξάνουν ενώ η  $\Delta u_i^P$  παραμένει μηδέν. Λόγω κόπωσης θα έχουμε αστοχία της κατασκευής από εναλλασσόμενη πλαστικότητα.

Στην παρούσα διερεύνηση θα εξετάσουμε μόνο το φαινόμενο της επαυξητικής κατάρρευσης ελέγχοντας τις μετατοπίσεις, οι οποίες αναπτύσσονται μέσα σε διαδοχικούς κύκλους φόρτισης.

### ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

Εξ' ορισμού, το όριο της επαυξητικής κατάρρευσης είναι η εμφάνιση απεριόριστης διασκορπόμενης ενέργειας λόγω πλαστικών μετακινήσεων (ή στροφών) σε μία οποιαδήποτε θέση του στοιχείου. Η μέθοδος που εφαρμόζεται στην παρούσα εργασία για τον εντοπισμό του φαινομένου αυτού είναι ευρέως γνωστή ως *βήμα προς βήμα*.

Στην εν λόγω μέθοδο εφαρμόζουμε μία εξωτερική φόρτιση, στη συνέχεια αποφορτίζουμε την κατασκευή μας ολοκληρώνοντας έτσι έναν κύκλο φόρτισης και επαναλαμβάνουμε για έναν ικανοποιητικό αριθμό κύκλων. Στην παρούσα εργασία, έπειτα από διερεύνηση, προκύπτει ότι από το δεύτερο μόλις κύκλο φόρτισης το φαινόμενο της επαυξητικής κατάρρευσης γίνεται αισθητό αρκεί βεβαίως τα εφαρμοζόμενα φορτία να είναι ικανά να προκαλέσουν το φαινόμενο αυτό. Για το λόγο αυτό κρίνεται ότι πέντε κύκλοι φόρτισης είναι ικανοποιητικοί.

### ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΝΑΡΞΗΣ ΕΠΑΥΞΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗΣ

Όταν λαμβάνει χώρα η επαυξητική κατάρρευση (rachetting) ελευθερώνεται πλαστική ενέργεια, από ορισμένα πεπερασμένα στοιχεία του αντιπροσωπευτικού όγκου στοιχείου (RVE), η οποία μάλιστα αυξάνεται από κύκλο σε κύκλο φόρτισης. Ποια όμως είναι η τιμή εκείνη της πλαστικής ενέργειας του πεπερασμένου στοιχείου για την οποία κρίνεται ότι σηματοδοτείται η έναρξη της επαυξητικής κατάρρευσης; Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί υπολογιστικοί αλγόριθμοι οι οποίοι προσδιορίζουν

μαθηματικά το φαινόμενο αυτό μέσω προβλημάτων βελτιστοποίησης. Στα παραδείγματα που ακολουθούν δε θα γίνει χρήση των αλγορίθμων αυτών, μιας και η χρήση εξεζητημένων λογισμικών κρίνεται αναγκαία. Το λογισμικό ABAQUS2006 διαθέτει στα OUTPUTS τη μεταβλητή 'ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση' (PEEQ). Η απελευθέρωση πλαστικής ενέργειας από κύκλο σε κύκλο μεταφράζεται σε αύξηση πλαστικών παραμορφώσεων. Κατά συνέπεια, η αύξηση της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης από κύκλο σε κύκλο φόρτισης σηματοδοτεί την έναρξη του φαινομένου. Το φορτίο το οποίο αντιστοιχεί ακριβώς πριν την ανάπτυξη του φαινομένου ονομάζεται φορτίο σταθεροποίησης.

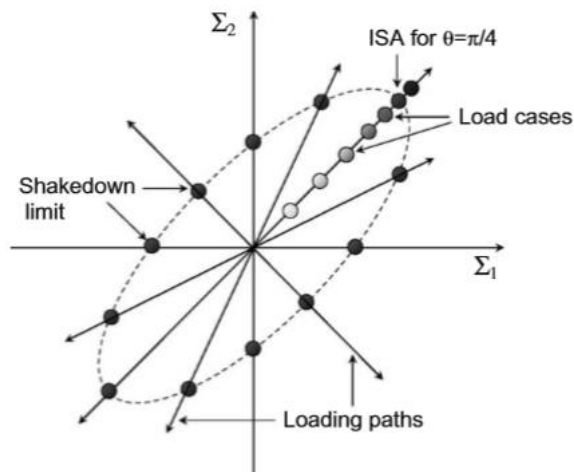
Έτσι λοιπόν, διατυπώνεται το κριτήριο ως ακολούθως : (ΚΡΙΤΗΡΙΟ 1)

- Μετά το πέρας της ανάλυσης εξετάζεται η PEEQ όλων των πεπερασμένων στοιχείων του RVE και στην περίπτωση που έστω και σε ένα παρατηρείται αύξηση αυτής, το φαινόμενο της επαυξητικής κατάρρευσης έχει μόλις ξεκινήσει.

### ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Η υπολογιστική διαδικασία φαίνεται σχηματικά στην Εικόνα 4.2 για μία διαξονική επίπεδη ένταση. Κάθε μία εκ των ακτινικών γραμμών, που διασταυρώνονται στην αρχή των αξόνων, καθορίζει ένα μοναδικό δρόμο φόρτισης. Κάθε δρόμος φόρτισης ορίζεται ως ο λόγος των δύο επιβαλλόμενων τάσεων  $\sigma_{11}$  και  $\sigma_{22}$  και μπορεί να ταυτοποιηθεί ως η εφαπτομένη μίας γωνίας  $\theta$ , η οποία έχει την ακόλουθη έκφραση :

$$\tan(\theta) = \pm \frac{|\sigma_{22}^{\theta}|}{|\sigma_{11}^{\theta}|} \quad (6.1)$$



Εικόνα 4.2 Δρόμοι φόρτισης για την εύρεση του φορτίου σταθεροποίησης

Για κάθε έναν δρόμο φόρτισης υπάρχει ένα μοναδικό όριο του φορτίου σταθεροποίησης. Οι μαύροι κύκλοι που είναι τοποθετημένοι πάνω στη διακεκομμένη ελλειψοειδή γραμμή μας δίνουν τις συντεταγμένες των τάσεων  $\sigma_{11}$  και  $\sigma_{22}$  για τις οποίες ξεπερνούμε το όριο του φορτίου σταθεροποίησης και σηματοδοτείται η έναρξη της επαυξητικής κατάρρευσης (ratcheting). Η περιοχή που εσωκλείεται της διακεκομμένης γραμμής του διαγράμματος παρέχει έναν ασφαλή συνδυασμό φόρτισης ο οποίος όσο

πλησιάζει στα όρια γίνεται ολοένα και πιο κρίσιμος μέχρι τη στιγμή που το στοιχείο εξέρχεται της ασφαλούς περιοχής.

Για να κατορθώσουμε να υπολογίσουμε το όριο του φορτίου σταθεροποίησης χρειάζεται να ορίσουμε ένα πακέτο από συνδυασμούς φορτίσεων (load cases) κατά μήκος ενός αριθμού από δρόμους φόρτισης (load path). Ένας συνδυασμός φόρτισης για να ορισθεί απαιτείται η εφαπτομένη της γωνίας  $\theta$ , όπως ορίστηκε παραπάνω, και η τιμή της μίας εκ των δύο τάσεων  $\Sigma_1^0$  και  $\Sigma_2^0$ . Παραδείγματα από συνδυασμούς φορτίσεων φαίνονται στην Εικόνα 4.2 για ένα συγκεκριμένο δρόμο φόρτισης με  $\theta = \pi/4$  ( $45^\circ$ ). Εν συνεχεία, η μέθοδος ‘βήμα προς βήμα’ πραγματοποιείται για κάθε ένα συνδυασμό φόρτισης κατά μήκος ενός δρόμου φόρτισης μέχρι το κριτήριο της επαυξητικής κατάρρευσης να ικανοποιηθεί.

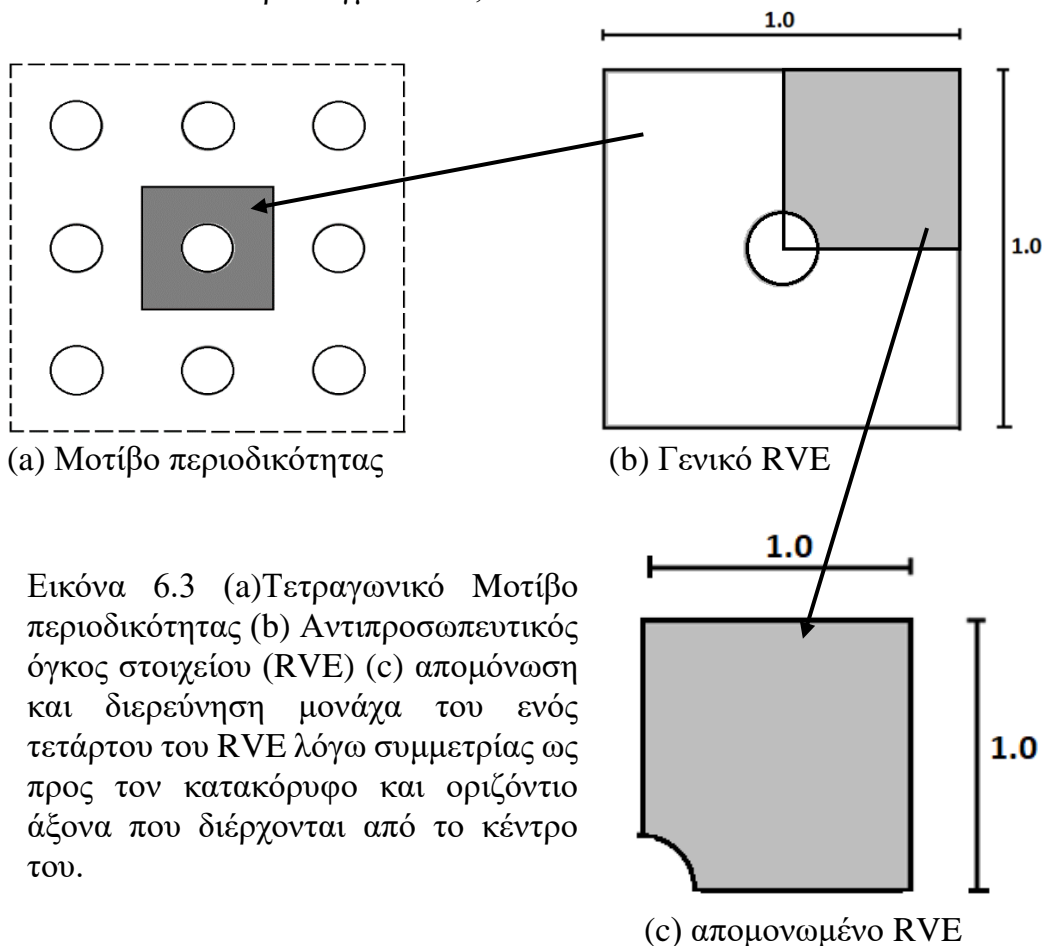
Η υπολογιστική διαδικασία ανακεφαλαιώνεται ακολούθως. Αρχικά, ορίζεται ένας ικανός αριθμός από δρόμους φόρτισης αναλόγως της σχέσης εξάρτησης που επιθυμούμε να δώσουμε ανάμεσα στα  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ . Στο δικό μας παράδειγμα επιλέχθηκαν 8 δρόμοι φόρτισης, οι οποίοι παρουσιάζονται στα παραδείγματα του κεφαλαίου 4. Στη συνέχεια, ένα πακέτο από συνδυασμούς φορτίσεων ορίζεται για κάθε ένα δρόμο φόρτισης. Στη ‘βήμα προς βήμα’ ανάλυση, για ένα δεδομένο δρόμο φόρτισης ‘ $\theta$ ’, εκτιμάται η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση για κάθε ένα συνδυασμό φόρτισης ξεκινώντας από τα μικρότερα  $\Sigma_{11}^0$  και  $\Sigma_{22}^0$ . Αν το κριτήριο 1 δεν ικανοποιείται, αυξάνουμε τις επιβαλλόμενες τάσεις προχωρώντας στον επόμενο συνδυασμό φορτίσεων και ο κύκλος αυτός επαναλαμβάνεται. Αυτή η επαναλαμβανόμενη διαδικασία συνεχίζεται μέχρι το κριτήριο να ικανοποιηθεί. Οι τάσεις  $\sigma_{11}$  και  $\sigma_{22}$  του τελευταίου συνδυασμού φορτίσεων λαμβάνονται ως το όριο του φορτίου σταθεροποίησης για το συγκεκριμένο δρόμο φόρτισης. Η ‘βήμα προς βήμα’ ανάλυση επαναλαμβάνεται για τον επόμενο δρόμο φόρτισης. Με αυτό τον τρόπο καταφέρνουμε να σχεδιάσουμε ένα ‘ασφαλές’ επίπεδο χωρίου συνδυασμού τάσεων  $\sigma_{11}$  και  $\sigma_{22}$  όπου εντός αυτού, τα επιβαλλόμενα φορτία οδηγούν την κατασκευή μας σε μία κατάσταση σταθεροποίησης ενώ εκτός αυτού, λαμβάνει χώρα το φαινόμενο της επαυξητικής κατάρρευσης.

Όπως παρατηρούμε από την Εικόνα 6.2 οι διαδρομές που μπορούν να ακολουθηθούν ώστε να φτάσουμε στην κορυφή των δύο επιβαλλόμενων τάσεων (ή φορτίων ή μετακινήσεων ενδεχομένως) είναι άπειροι. Επίσης, καθώς εμείς μπαίνουμε στην πλαστική περιοχή, κατά τη φόρτιση θα έχουμε παραμένουσες τάσεις. Έτσι λοιπόν, καθίστανται αναγκαίες οι παρακάτω δύο παραδοχές :

- 1) Δύο διαφορετικοί συνδυασμοί φόρτισης που προκαλούν στο στοιχείο μας την ίδια εντατική κατάσταση και ταυτοχρόνως τα μέγιστα φορτία που επιβάλλονται είναι κοινά, τότε έχουν ακριβώς την ίδια επίπτωση στη συμπεριφορά του RVE ως προς το φαινόμενο της επαυξητικής κατάρρευσης.
- 2) Δεν υπάρχει διαφορά ως προς την εκτίμηση του φορτίου σταθεροποίησης ανάμεσα σε κύκλους φόρτισης κατά τους οποίους η κατασκευή οδηγείται σε πλήρη ή μερικώς αποφόρτιση, με την προϋπόθεση ότι τα μέγιστα φορτία που επιβάλλονται και στις δύο περιπτώσεις είναι τα ίδια.

## ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΒΑΛΛΟΜΕΝΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ

Καθώς ο αντιπροσωπευτικός όγκος στοιχείου (RVE) που επιλέγεται για τις αναλύσεις που ακολουθούν είναι τετραγωνικός και συμμετρικός ως προς το κέντρο του είναι εύλογο να απομονώσουμε και να εξετάσουμε μονάχα το ένα τέταρτο αυτού, όπως φαίνεται στο Εικόνα 6.3. Με τη κίνηση αυτή εξασφαλίζουμε αρχικά χρόνο και ακρίβεια ως προς τα αποτελέσματα. Επιπροσθέτως, η φόρτιση που επιβάλλουμε στο εν λόγω μοντέλο είναι ισοδύναμη με εκείνη που επιβάλλαμε στις Παραγράφους 5.1 & 5.2 στην περίπτωση των ‘περιοδικών παραμορφώσεων και αντιπεριοδικών ελκτικώντάσεων’ αν κατά αντιστοιχία απομονωθεί το ένα τέταρτο του μοντέλου. Με άλλα λόγια το φαινόμενο της επαυξητικής κατάρρευσης εξετάζεται για την ειδική περίπτωση της Παραγράφου 5.1 & 5.2 των περιοδικών σύνθετων υλικών. Πιο συγκεκριμένα, επιβάλλουμε μετατοπίσεις στις δύο ακμές του απομονωμένου μοντέλου, ενώ στις υπόλοιπες δύο τοποθετούμε κυλίσεις, όπως αναπαρίσταται στα Παραδείγματα 6.4, 6.5. Οι συνδυασμοί φόρτισης και δρόμοι φόρτισης που επιλέγονται περιγράφονται αναλυτικά στα Παραδείγματα 6.4, 6.5.



Εικόνα 6.3 (a)Τετραγωνικό Μοτίβο περιοδικότητας (b) Αντιπροσωπευτικός όγκος στοιχείου (RVE) (c) απομόνωση και διερεύνηση μονάχα του ενός τετάρτου του RVE λόγω συμμετρίας ως προς τον κατακόρυφο και οριζόντιο άξονα που διέρχονται από το κέντρο του.

Όπως βλέπουμε στην Εικόνα 6.3.c οι εξωτερικές διαστάσεις του RVE παραμένουν 1x1 παρόλο που απομονώσαμε το ένα τέταρτο του γενικού RVE. Κάτι τέτοιο δεν επηρεάζει τα αποτελέσματά μας όταν στόχος μας είναι να εξετάσουμε την απλούστερη γεωμετρία ενός RVE με όγκο  $V=1\mu\text{m}^3$ .

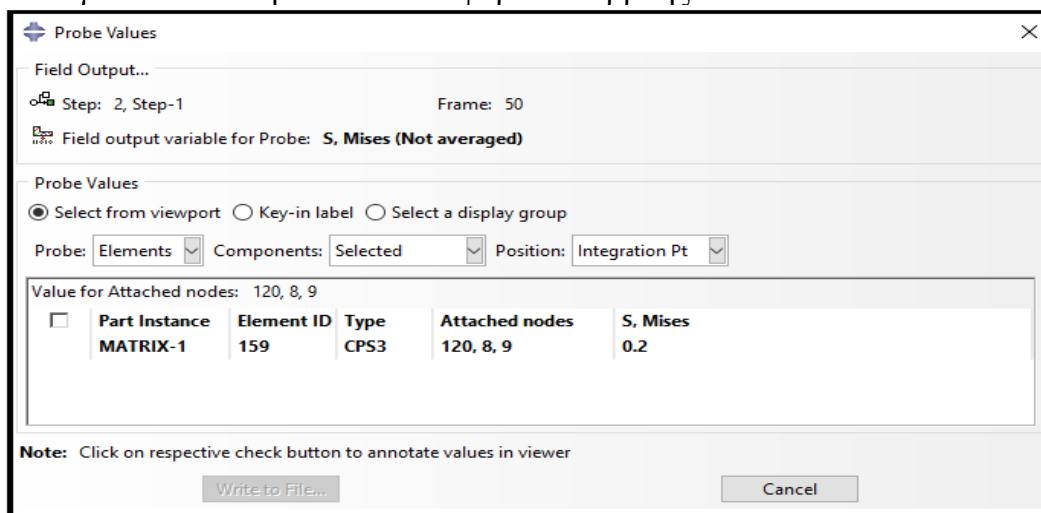


### 6.3 ΦΟΡΤΙΟ ΔΙΑΡΡΟΗΣ

Όριο διαρροής καλείται η κρίσιμη τιμή εφαρμοζόμενης τάσης σε ένα στερεό σώμα πέρα από την οποία μέρος της παραμόρφωσης παύει να είναι ελαστικό και γίνεται πλαστικό. Το όριο διαρροής δεν πρέπει να συγχέεται με το όριο καταστροφικής αστοχίας ενός υλικού. Ορισμένες φορές η υπέρβαση του ορίου διαρροής, τοπικά σε κάποιες θέσεις μιας κατασκευής, μπορεί να είναι αποδεκτή/επιτρεπτή.

Το όριο διαρροής εξαρτάται από τη φύση του υλικού και παίρνει διάφορες τιμές από πολύ μικρές για κάποια πλαστικά έως πολύ μεγάλες για υλικά όπως το τιτάνιο και διάφορα κράματα χάλυβα. Μόνο τα σχετικά όλκιμα υλικά όπως τα μέταλλα, τα κράματα μετάλλων και τα πολυμερή έχουν όριο διαρροής, ενώ αντίθετα, πολλά άλλα υλικά δεν έχουν καθόλου όριο διαρροής. Συγκεκριμένα, τα λεγόμενα ψαθυρά υλικά, όπως τα κεραμικά και τα μεγάλης σκληρότητας κράματα είναι δυνατόν να παρουσιάζουν ταχεία διάδοση ρωγμών και ψαθυρή αστοχία με θραύση αμέσως μόλις η τάση ξεπεράσει την ελαστική περιοχή. Δηλαδή, δεν διαθέτουν καθόλου περιοχή πλαστικής παραμόρφωσης και ως εκ τούτου δεν διαθέτουν όριο διαρροής (που είναι το σημείο μετάβασης από την ελαστική στην πλαστική περιοχή παραμόρφωσης). Τα περιοδικά σύνθετα υλικά που εξετάζουμε στην παρούσα εργασία κάνουμε την παραδοχή ότι συμπεριφέρονται με όλκιμο τρόπο.

Το φορτίο διαρροής είναι εκείνο το φορτίο για το οποίο η κατασκευή μας ξεπερνάει το όριο διαρροής και μπαίνει στην πλαστική περιοχή. Στην περίπτωση αυτή η φόρτιση που επιβάλλεται στην κατασκευή μας είναι μονοτονική. Κατά την ανάλυση στα παραδείγματα που ακολουθούν εξετάζονται όλα τα πεπερασμένα στοιχεία ενός RVE και ελέγχεται αν ικανοποιούν το κριτήριο Von-Misses, όπως αυτό παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 1. Αν έστω και ένα πεπερασμένο στοιχείο κατά τη διάρκεια της φόρτισης δεν ικανοποιήσει το κριτήριο τότε λέμε το RVE διέρρευσε. Το λογισμικό ABAQUS2006 διαθέτει στα OUTPUTS τη μεταβλητή  $S_{Misses}$  για κάθε ένα σημείο αναφοράς (integration point) ενός πεπερασμένου στοιχείου. Στην Εικόνα 6.4 βλέπουμε την τάση Von-Misses ( $S_{Misses}$ ) που έχει αναπτυχθεί στο πεπερασμένο 159 για μία τυχούσα φόρτιση. Καθώς η τάση αυτή ισούται με την τάση διαρροής υλικού  $\sigma_y$ , θεωρούμε ότι όλο το RVE έχει διαρρεύσει και ότι το φορτίο το οποίο αντιστοιχεί στην εν λόγω κατάσταση αποτελεί το φορτίο διαρροής.

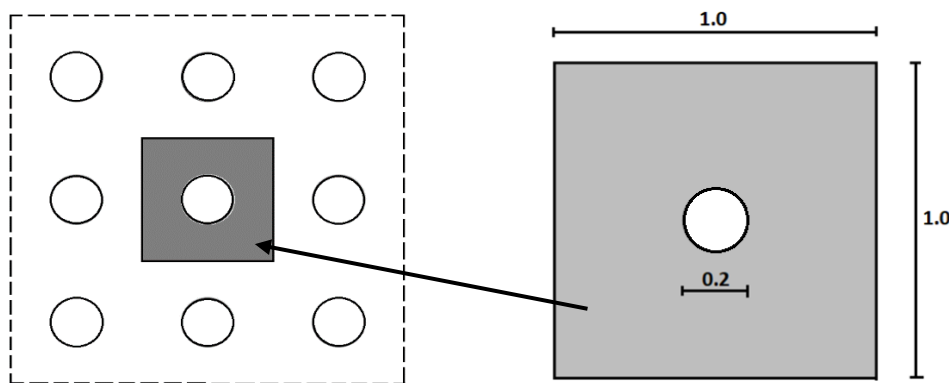


Εικόνα 6.4 Τάση Von-Misses σε ένα πεπερασμένο στοιχείο ίση με την τάση διαρροής του υλικού.

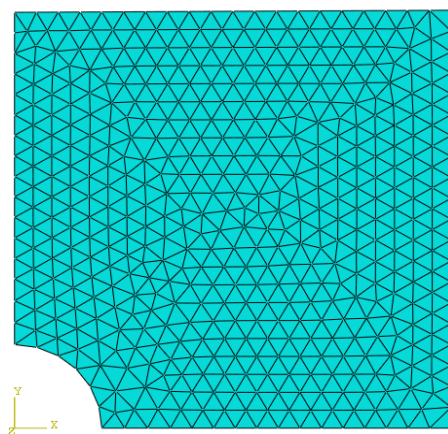
## 6.4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ RVE ΜΕ ΤΡΥΠΑ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ

### 6.4.1 Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων

Στο εν λόγω παράδειγμα θα θεωρήσουμε ένα τετραγωνικό RVE με μία τρύπα στο κέντρο του, όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.5b. Επιλέγεται μήκος πλευράς  $L=1,0\mu\text{m}$ , διάμετρος τρύπας  $D=0,2\mu\text{m}$  και πάχος στοιχείου  $t=1,0\mu\text{m}$ . Τα χαρακτηριστικά του υλικού που χρησιμοποιούμε φαίνονται στον Πίνακα 6.1. Το μοντέλο μας διακριτοποιείται σε 484 κόμβους και 888 επίπεδα τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία τα οποία θα εξετασθούν τόσο στην περίπτωση που υπόκεινται σε επίπεδη ένταση όσο και σε επίπεδη παραμόρφωση, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.6. Λόγω διπλής συμμετρίας επιλέγουμε να λύσουμε μόνο το  $\frac{1}{4}$  του φορέα.



Εικόνα 6.5 (a) Τετραγωνικό μοτίβο περιοδικότητας, (b) τετραγωνικό RVE με τρύπα στο κέντρο του



Εικόνα 6.6 Διακριτοποίηση του RVE σε 888 επίπεδα τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία τα οποία θα εξετασθούν τόσο για την περίπτωση που υπόκεινται σε επίπεδη ένταση όσο και σε επίπεδη παραμόρφωση

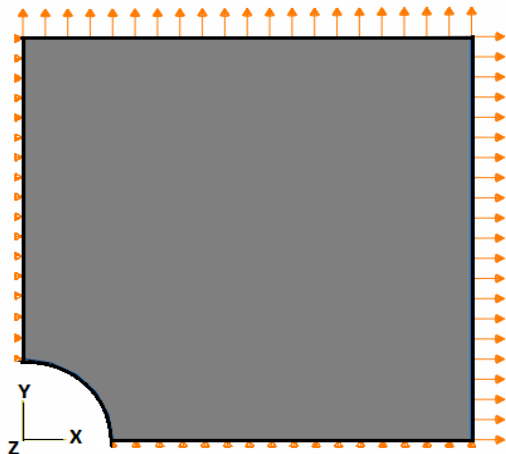
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ	ΤΙΜΗ
μέτρο ελαστικότητας $E$	200GPa
λόγος poisson $\nu$	0,3
τάση διαρροής $\sigma_y$	200MPa
μέτρο κράτυνσης $\eta$	0

Πίνακας 6.1 Χαρακτηριστικά υλικού της μήτρας

### 6.4.2. Συνοριακές συνθήκες

Οι Συνοριακές συνθήκες που επιβάλλουμε στο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων μας απεικονίζονται στην Εικόνα 6.7.

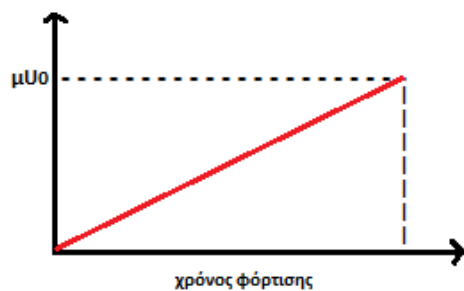
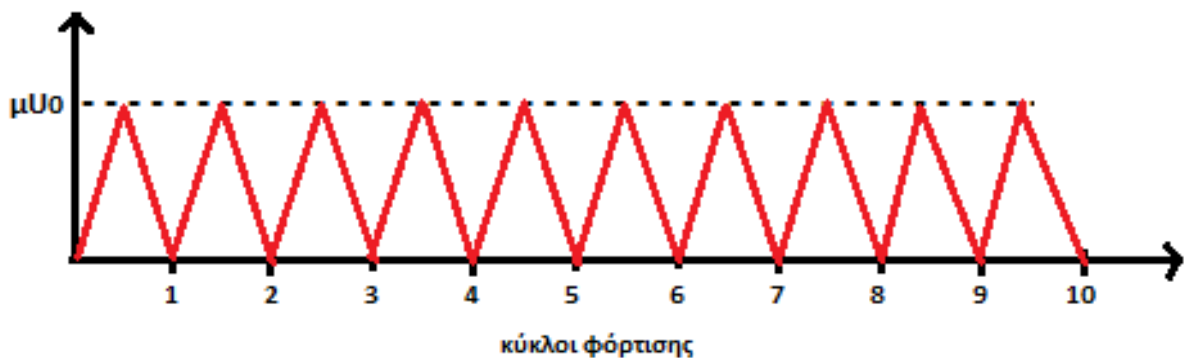
- Συνθήκες στήριξης : λόγω συμμετρίας του αρχικού φορέα επιβάλλουμε κυλίσεις στους κόμβους της κάτω και αριστερής ακμής του στοιχείου μας.
- Επιβαλλόμενα φορτία : επιβάλλουμε ομοιόμορφες μετακινήσεις (με  $U_0 = 0.0001 \mu\text{m}$ ) στους κόμβους της πάνω και δεξιά ακμής του στοιχείου. Επιλέχθηκε αυτός ο τρόπος φόρτισης ('displacement control') της κατασκευής διότι έπειτα από έλεγχο προέκυψε ότι η επιβολή δυνάμεων προκαλούσε αστάθειες στην υπολογιστική διαδικασία. Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε για τους δρόμους φόρτισης οι οποίοι παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον Πίνακα 6.2. Ο δρόμος φόρτισης σε συνάρτηση με το χρόνο απεικονίζεται γραφικά στο Εικόνα 6.8a για την περίπτωση εύρεσης του οριακού φορτίου και του φορτίου διαρροής (μονοτονική φόρτιση) και στο Εικόνα 6.8b για την εύρεση του φορτίου σταθεροποίησης (ανακυκλιζόμενη φόρτιση).



Εικόνα 6.7 Συνοριακές συνθήκες

Γωνία (μοίρες)	Λόγος $U_2/U_1$	Λόγος $U_1/U_2$
-45°	-1	-1
-33,7°	-0,67	-1,5
-26,6°	-0,5	-2
-5,7°	-0,1	-10
0°	0	0
5,7°	0,1	10
26,6°	0,5	2
45°	1	1

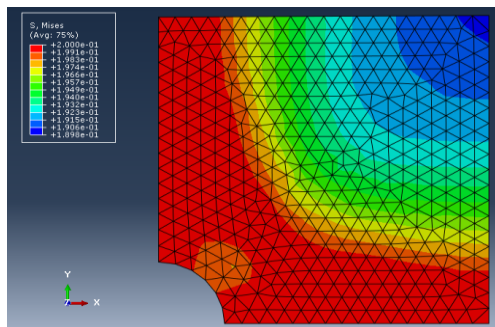
Πίνακας 6.2 Δρόμοι φόρτισης



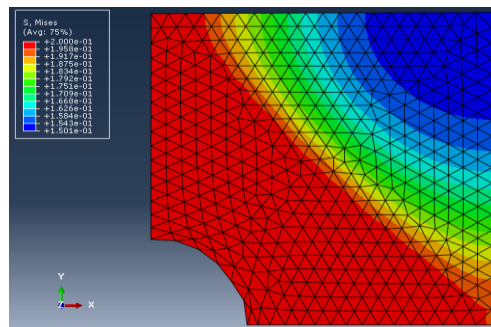
Εικόνα 6.8 Δρόμοι φόρτισης για την εύρεση (a) της επιφάνειας του φορτίου σταθεροποίησης και (b) της επιφάνειας διαρροής και του φορτίου καταρρεύσεως.

### 6.4.3 Επιφάνεια φορτίου καταρρεύσεως

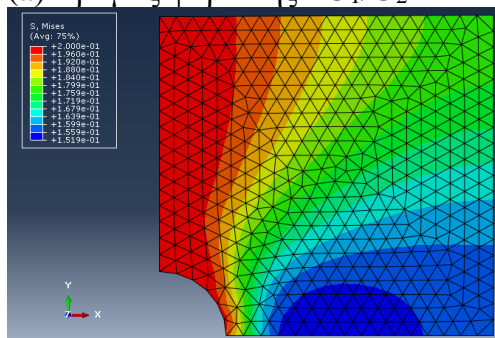
Στην Εικόνα 6.9 παρουσιάζεται η εντατική κατάσταση, για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης, τη στιγμή επιβολής του φορτίου κατάρρευσεως. Τα a,c,e,g (αριστερά) αναφέρονται στην περίπτωση επίπεδης-έντασης ενώ τα b,d,f,h (δεξιά) στην περίπτωση επίπεδης-παραμόρφωσης.



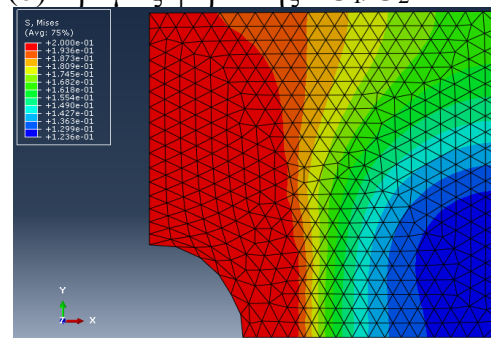
(a) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



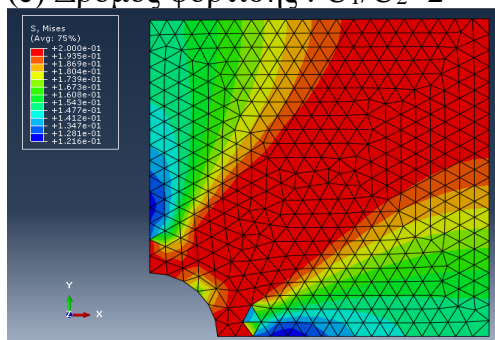
(b) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



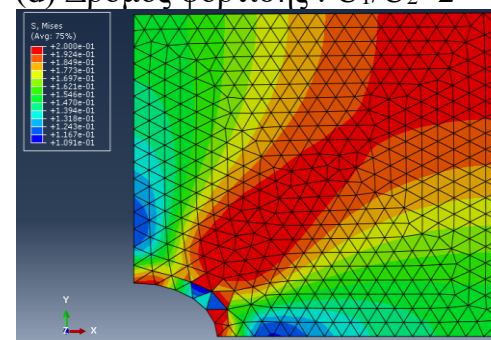
(c) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



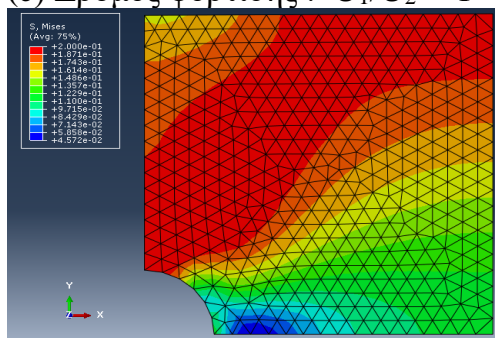
(d) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



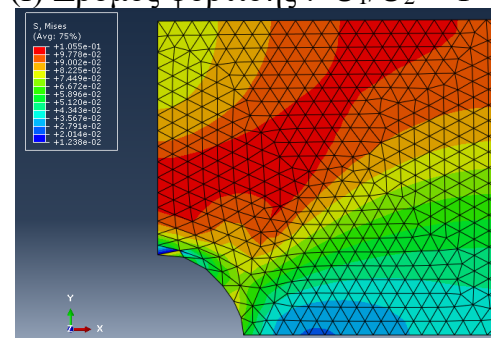
(e) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



(f) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



(g) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$

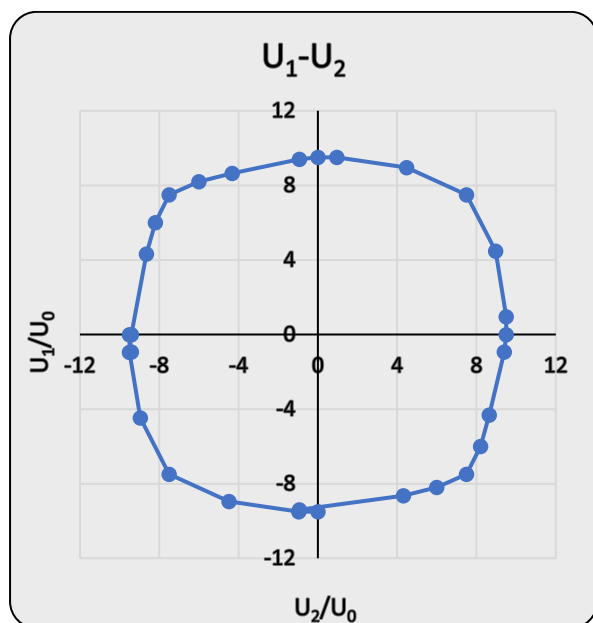


(h) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$

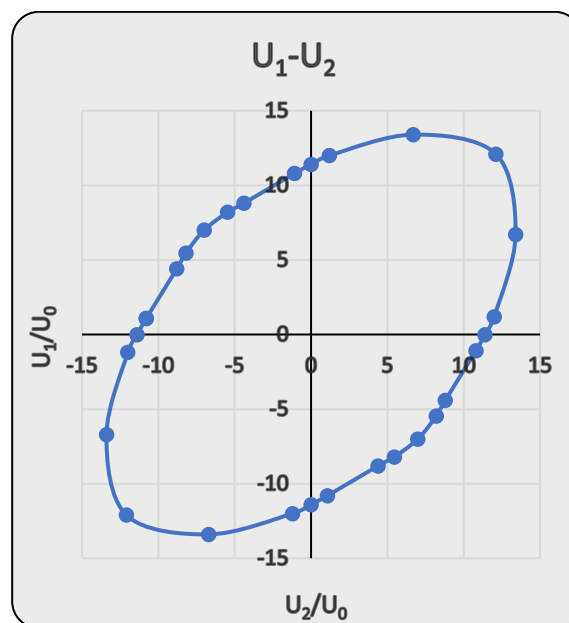
Εικόνα 6.9 Εντατική κατάσταση τη στιγμή επιβολής του φορτίου κατάρρευσεως για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης

Παρατηρούμε από την Εικόνα 6.9 ότι για όλους τους δρόμους φόρτισης σχηματίζονται κρίσιμες ζώνες, ή αλλιώς ζώνες συγκέντρωσης τάσεων. Οι ζώνες αυτές παρουσιάζουν μικρές διαφορές ανάμεσα στις δύο εξεταζόμενες περιπτώσεις, επίπεδης έντασης-παραμόρφωσης. Ανάλογα με το δρόμο φόρτισης παρατηρείται διαφορετική κρίσιμη ζώνη. Όλα τα πεπερασμένα στοιχεία τα οποία βρίσκονται εντός της ζώνης αυτής έχουν διαρρεύσει με αποτέλεσμα να σχηματίζεται ένας μηχανισμός αστοχίας για ολόκληρο το RVE. Το φορτίο που αντιστοιχεί στην εν λόγω εντατική κατάσταση ορίζεται ως το φορτίο κατάρρευσης ή οριακό φορτίο.

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για τους υπόλοιπους συνδυασμούς φόρτισης του Πίνακα 6.2 προκύπτει στο Διάγραμμα 6.1 η επιφάνεια που οριοθετεί τις 'επιτρεπόμενες' επιβαλλόμενες μετατοπίσεις έναντι οριακού φορτίου. Αν ένας συνδυασμός φόρτισης  $U_1, U_2$  που επιβάλλω στην κατασκευή μου βρίσκεται εκτός του χωρίου τότε η κατασκευή μου καταρρέει. Παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά ανάμεσα στις υπό εξέταση περιπτώσεις επίπεδης έντασης-παραμόρφωσης είναι αρκετά διαφορετική. Στην περίπτωση (a) επίπεδης-έντασης, για συνδυασμούς φόρτισης των  $U_1/U_2$  που τείνουν στο 1 ή αντίστοιχα στο -1 τόσο μικρότερες είναι οι επιτρεπόμενες μετακινήσεις που μπορώ να επιβάλλω. Για λόγους φόρτισης που τείνουν προς το μηδέν, δηλαδή ασκείται μοαναξονική δύναμη, τα όρια είναι ασφαλέστερα, περίπου κατά  $(9,5-7,5)/7,5 = 26,7\%$  έναντι του προαναφερθέντος συνδυασμού. Τέλος, παρατηρούμε ότι η περιγραφή συνδυασμού μετακινήσεων σε ένα μονάχα τεταρτημόριο θα ήταν αρκετή ώστε να ορίσει, λόγω συμμετρίας, όλο το χωρίο. Αντιθέτως, στην περίπτωση (b) επίπεδης-παραμόρφωσης, για συνδυασμούς φόρτισης των  $U_1/U_2$  που τείνουν στο 1 τόσο μεγαλύτερες είναι οι επιτρεπόμενες μετακινήσεις που μπορώ να επιβάλλω. Για λόγους φόρτισης που τείνουν προς το -1, τα όρια είναι κρισιμότερα, περίπου κατά  $(12,1-7,0)/7,0 = 72,8\%$  έναντι του προαναφερθέντος συνδυασμού. Τέλος, η συμμετρικότητα εκτείνεται μεταξύ των τεταρτημώριων 1-3 και 2-4.



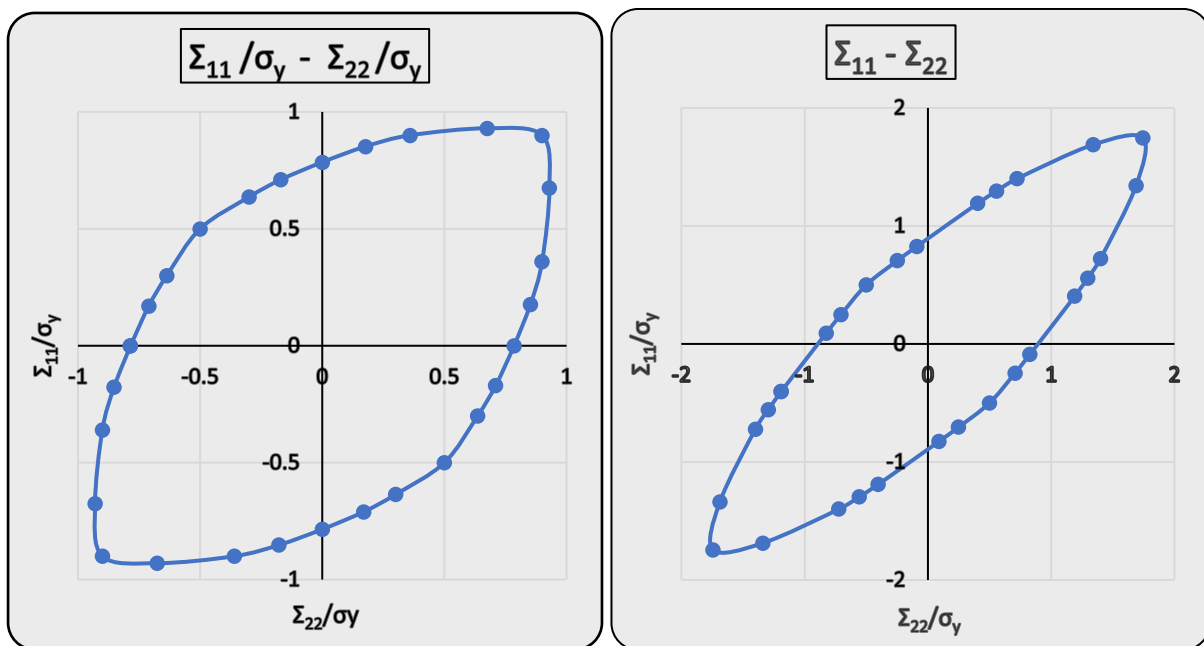
(a) Επίπεδη ένταση



(b) Επίπεδη παραμόρφωση

**Διάγραμμα 6.1** Ασφαλές χωρίο επιβαλλόμενων μετακινήσεων, κανονικοποιημένων ως προς την μετακίνηση  $U_0=0.0001\mu\text{m}$ , έναντι οριακού φορτίου για (a) επίπεδη ένταση, (b) επίπεδη παραμόρφωση

Η παραπάνω διερεύνηση ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς του στοιχείου μας πραγματοποιήθηκε σε επίπεδο μικροκλίμακας, αναφερόμενοι σε RVE. Το ζήτημά μας, ωστόσο, είναι να προσδιορίσουμε το ασφαλές χωρίο σε επίπεδο μακροκλίμακας, αναφερόμενοι σε ολόκληρη την κατασκευή-μέλος. Με άλλα λόγια στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε το ασφαλές χωρίο μακροσκοπικών τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ . Για το σκοπό αυτό απαιτείται η διαδικασία ομογενοποίησης όπως αυτή παρουσιάστηκε σε προγενέστερο κεφάλαιο. Εισάγοντας τα δεδομένα μας στον αλγόριθμο που προγραμματίστηκε με τη βοήθεια του προγράμματος excel προκύπτει το Διάγραμμα 4.2 με τις μακροσκοπικές τάσεις  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$  κανονικοποιημένες ως προς την τάση διαρροής  $\sigma_y$  του στοιχείου. Παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά ανάμεσα στις υπό εξέταση περιπτώσεις επίπεδης έντασης-παραμόρφωσης δεν παρουσιάζει έντονες διαφορές. Για τους συνδυασμούς μακροσκοπικών τάσεων  $\Sigma_{11}/\Sigma_{22}$  που τείνουν προς την τιμή -1 τόσο περιορίζομαστε ως προς την ασφάλεια του RVE με την απόκλιση ανάμεσα στις δύο μεθόδους να είναι ελάχιστη. Για συνδυασμούς  $\Sigma_{11}/\Sigma_{22}$  που τείνουν προς την τιμή 1 λαμβάνουμε την ευμενέστερη κατάσταση με διπλάσια περίπου ικανότητα στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης με αποτέλεσμα το ασφαλές χωρίο να γίνεται πιο ‘στενό’ έναντι του αντιστοίχου της επίπεδης-έντασης.



(a) Επίπεδη ένταση

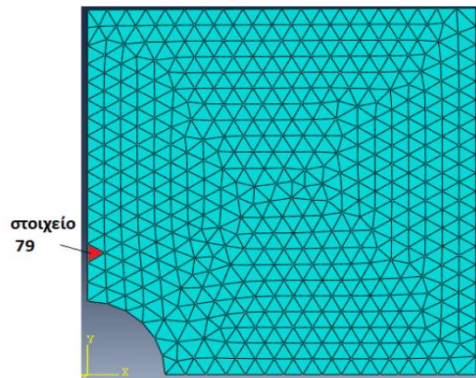
(b) Επίπεδη παραμόρφωση

**Διάγραμμα 6.2** Ασφαλές χωρίο μακροσκοπικών τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ , κανονικοποιημένων ως προς την τάση διαρροής  $\sigma_y = 200\text{MPa}$ , έναντι οριακού φορτίου για (a) επίπεδη ένταση, (b) επίπεδη παραμόρφωση.

Σε αυτό το σημείο θα ήταν πολύ αξιόλογο να εξετάσουμε τους λόγους για τους οποίους παρουσιάζονται οι εν λόγω διαφορές ανάμεσα στις δύο υπό εξέταση περιπτώσεις (a) επίπεδης-έντασης και (b) επίπεδης-παραμόρφωσης. Για το σκοπό αυτό θα απομονώσουμε ένα ή περισσότερα πεπερασμένα στοιχεία του RVE και θα μελετήσουμε το δρόμο των τάσεων και φορτίων που αναπτύσσονται σε αυτό. Τέλος, θα παρακολουθήσουμε την εξέλιξη των ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ , για ολόκληρο το RVE, με τον χρόνο φόρτισης.

### 6.4.3.1 Συγκρίσεις ανάμεσα σε επίπεδη-ένταση και επίπεδη-παραμόρφωση

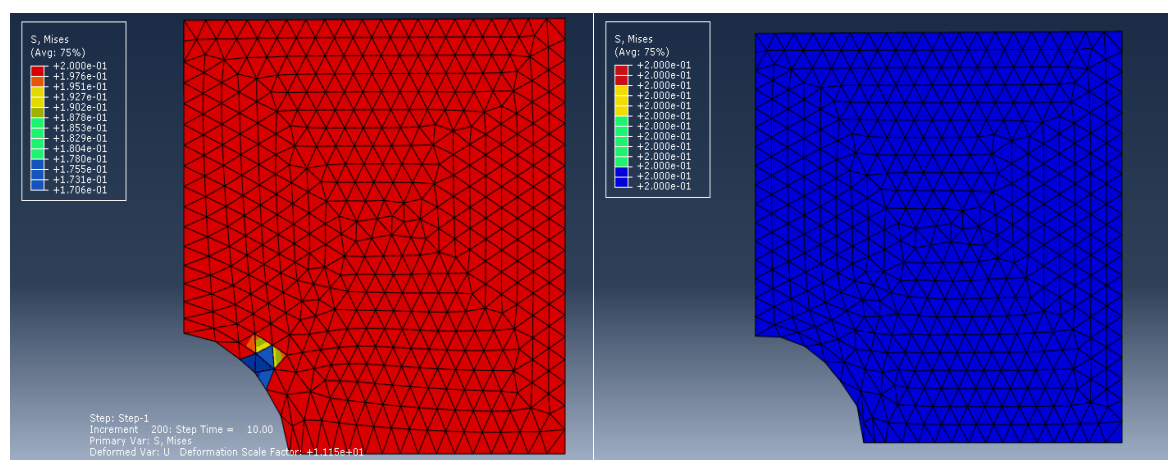
Σε πρώτη φάση θα εξετάσουμε το δρόμο των τάσεων και φορτίων που αναπτύσσονται σε ένα υπό εξέταση πεπερασμένο στοιχείο του RVE. Το εν λόγω στοιχείο είναι το υπ' αριθμόν 79 όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.10. Εν συνεχεία, θα παρακολουθήσουμε την εξέλιξη των ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ , για ολόκληρο το RVE, σε σχέση με τον χρόνο φόρτισης. Ο δρόμος φόρτισης για τον οποίο θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά του RVE είναι  $\theta=1 \mapsto u_1=u_2 \mapsto \Sigma_{11} = \Sigma_{22}$ , σύμφωνα με τον Πίνακα 6.2.



Έπειτά από διερεύνηση προέκυψε ότι τα αποτελέσματα που αποδίδονται στο υπό εξέταση 79 πεπερασμένο στοιχείο είναι αντιπροσωπευτικά για οποιοδήποτε στοιχείο βρίσκεται στο σύνορο του RVE.

Για το λόγο αυτό δε θα πραγματοποιηθεί περαιτέρω διερεύνηση και σε άλλα στοιχεία του συνόρου.

**Εικόνα 6.10** Υπό εξέταση στοιχείο του RVE για συγκρίσεις ανάμεσα σε επίπεδη ένταση και επίπεδη παραμόρφωση



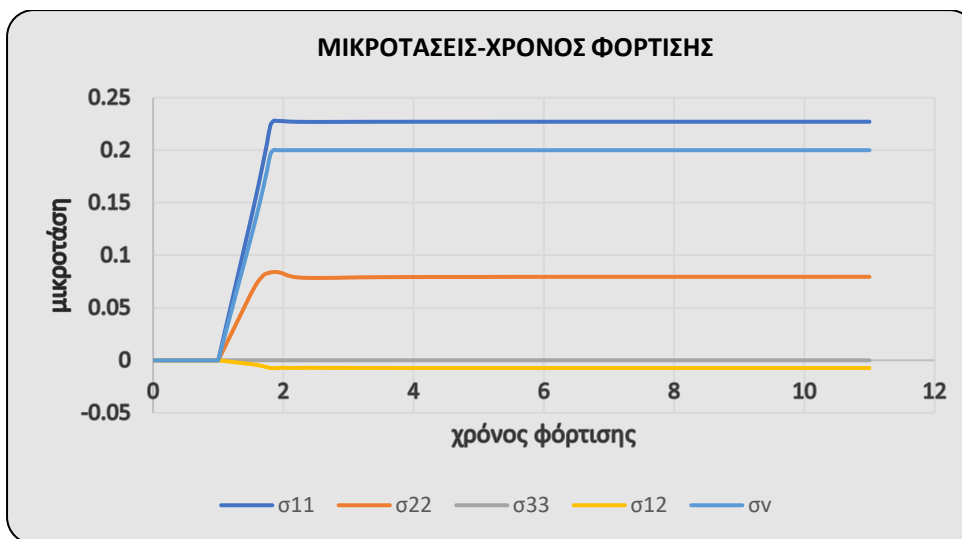
(a)

(b)

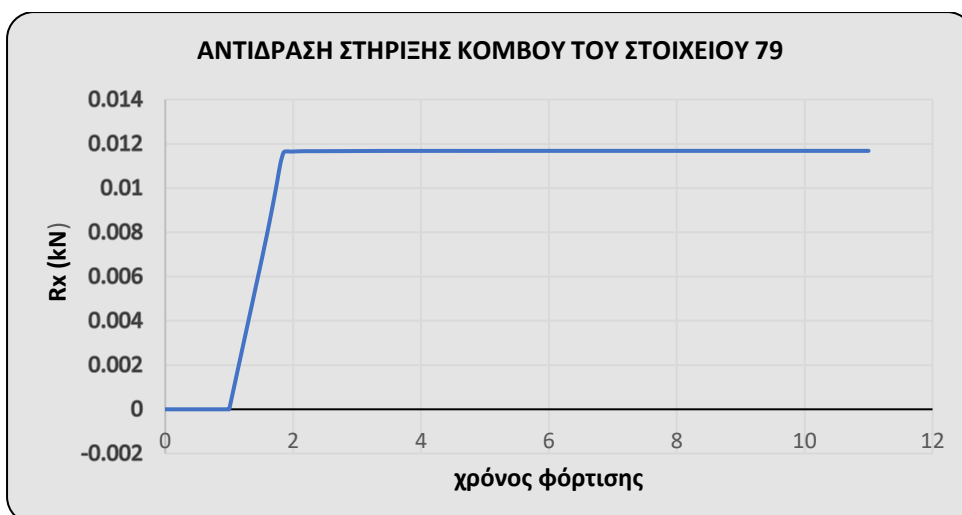
**Εικόνα 6.11** Εντατική-Παραμορφωσιακή κατάσταση της μικροκατασκευής για  $u_1=u_2 = 10 \cdot u_0$  για την περίπτωση (a) επίπεδης-έντασης (increment 200), (b) επίπεδης παραμόρφωσης (increment 100)

### Επίπεδη-ένταση :

Τρέχουμε τη μη-γραμμική ανάλυση σε 200 επαυξητικά βήματα (increments) με τη μέγιστη τιμή των επιβαλλόμενων μετακινήσεων  $u_1=u_2 = 10u_0$ . Για λιγότερα των 200 increments η ανάλυση αδυνατούσε να τρέξει. Στην Εικόνα 6.11a βλέπουμε την εντατική-παραμορφωσιακή κατάσταση της μικροκατασκευής για την εν λόγω φόρτιση. Παρατηρούμε ότι όλα τα πεπερασμένα στοιχεία της μικροκατασκευής έχουν διαρρέυσει με  $\sigma_{\text{MISSES}} = 0.2 \text{ GPa}$ . Πάμε ωστόσο να εξετάσουμε την ανάπτυξη των μικροκάσεων  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{\text{Mises}}$  του υπό εξέταση στοιχείου 79 κατά την επιβολή της φόρτισης. Παρατηρώντας το Διάγραμμα 6.3 βλέπουμε ότι για χρόνο φόρτισης περίπου στο 2, το στοιχείο 79 διαρρέει με  $\sigma_v = 0.2 \text{ GPa}$ . Από εκείνη τη στιγμή και έπειτα όλες οι μικροτάσεις  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  σταθεροποιούνται στην αντίστοιχη μέγιστή τους τιμή.



**Διάγραμμα 6.3** Σχέση μικροτάσεων  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{\text{Mises}}$  του υπό εξέταση στοιχείου 79 σε συνάρτηση με το χρόνο φόρτισης για την περίπτωση επίπεδης-έντασης



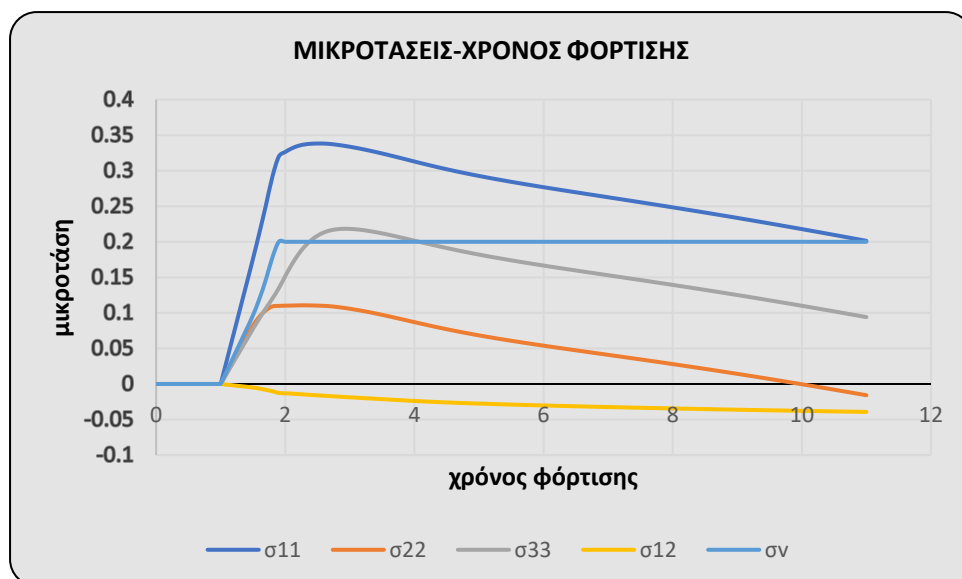
**Διάγραμμα 6.4** Σχέση αντίδρασης-στήριξης του κόμβου (του συνόρου) του υπό εξέταση στοιχείου 79 σε συνάρτηση με το χρόνο φόρτισης για την περίπτωση επίπεδης-έντασης



Κοιτάζοντας το Διάγραμμα 6.4, το οποίο περιγράφει τη δύναμη που παραλαμβάνει ο κόμβος του συνόρου του στοιχείου 79 κατά τη διεύθυνση x σε σχέση με το χρόνο φόρτισης, βλέπουμε ότι από τη στιγμή της διαρροής και έπειτα το φορτίο παραλαβής σταθεροποιείται στη μέγιστή του τιμή, μία τιμή η οποία μπορεί να καθοριστεί ως το φορτίο κατάρρευσης του εν λόγω πεπερασμένου στοιχείου.

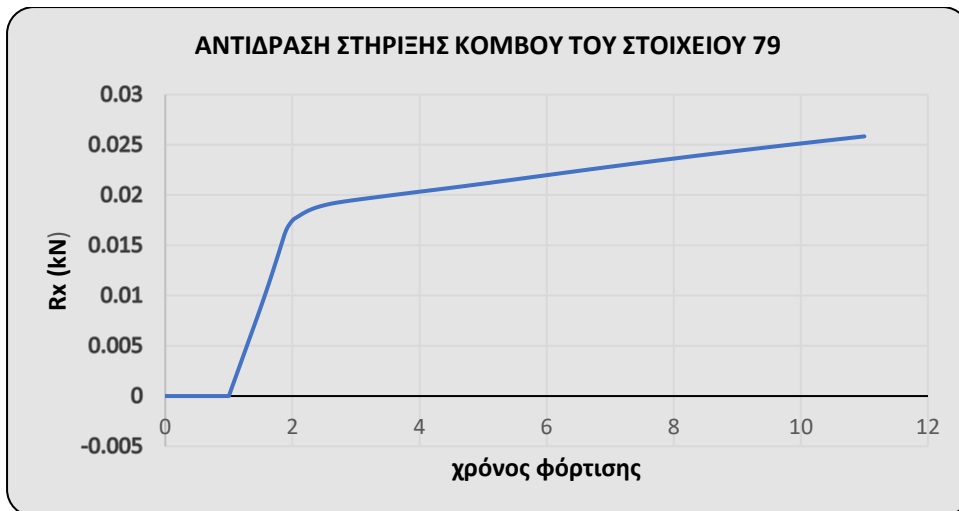
#### Επίπεδη-παραμόρφωση :

Τρέχουμε τη μη-γραμμική ανάλυση σε 100 επαυξητικά βήματα (increments) με τη μέγιστη τιμή των επιβαλλόμενων μετακινήσεων  $u_1=u_2 = 10u_0$ . Στην Εικόνα 6.11b βλέπουμε την εντατική-παραμορφωσιακή κατάσταση της μικροκατασκευής για την εν λόγω φόρτιση. Παρατηρούμε ότι όλα τα στοιχεία της μικροκατασκευής έχουν διαρρεύσει με  $\sigma_{Misses} = 0.2 \text{ Gra}$ . Πάμε να εξετάσουμε και πάλι την ανάπτυξη των μικροτάσεων  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{Misses}$  του υπό εξέταση στοιχείου 79 κατά την επιβολή της φόρτισης. Παρατηρώντας το Διάγραμμα 6.5 βλέπουμε ότι για χρόνο φόρτισης περίπου στο 2, το στοιχείο 79 διαρρέει με  $\sigma_v = 0.2$ , όπως συνέβαινε στην περίπτωση επίπεδης - έντασης. Μετά τη διαρροή του, το στοιχείο βλέπουμε ότι συνεχίζει να αναλαμβάνει τάσεις οι οποίες συνεχώς αυξάνονται μέχρι περίπου χρόνου φόρτισης στο 3. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι η κράτυνση που έχουμε προσδώσει στο υλικό μας είναι μηδέν! Έπειτα, αρχίζει να παρατηρείται πτώση παραλαβής τάσεων η οποία μάλιστα είναι ισόποση ανάμεσα στις μικροτάσεις  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ .



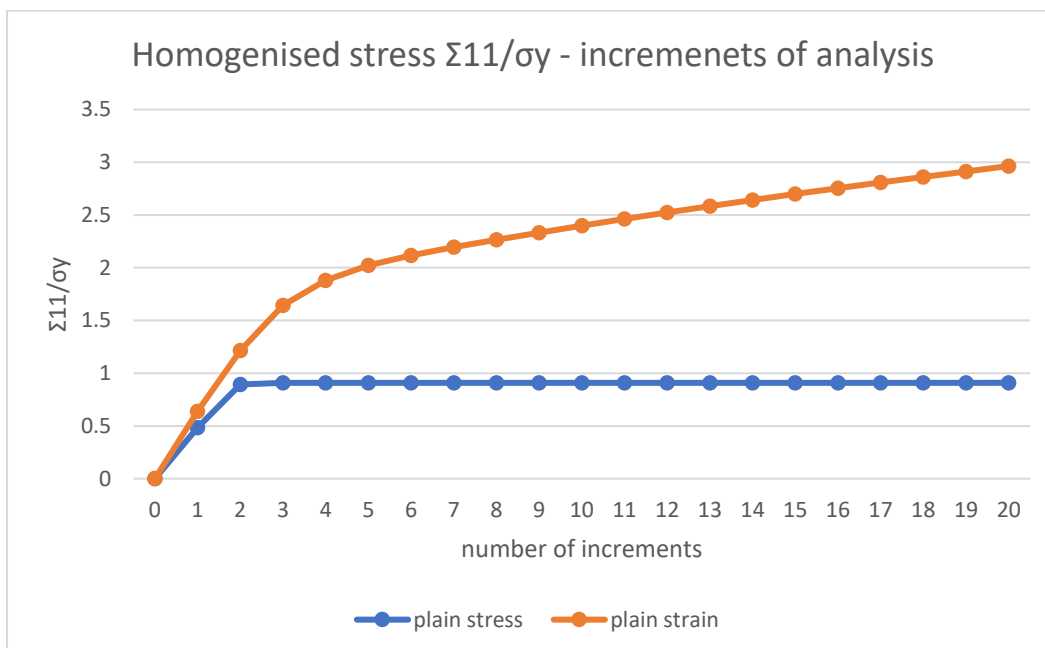
**Διάγραμμα 6.5** Σχέση μικροτάσεων  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{Misses}$  του πεπερασμένου στοιχείου 79 σε συνάρτηση με το χρόνο φόρτισης για την περίπτωση επίπεδης-παραμόρφωσης

Κοιτάζοντας το Διάγραμμα 6.6, το οποίο περιγράφει τη δύναμη που παραλαμβάνει ο κόμβος του συνόρου του στοιχείου 79 κατά τη διεύθυνση x σε σχέση με το χρόνο φόρτισης, βλέπουμε ότι συνεχώς αυξάνεται χωρίς να μας προσδίδεται η δυνατότητα να ορίσουμε ένα οριακό φορτίο πέραν του οποίου το στοιχείο σταματάει να παραλαμβάνει περαιτέρω δύναμη.



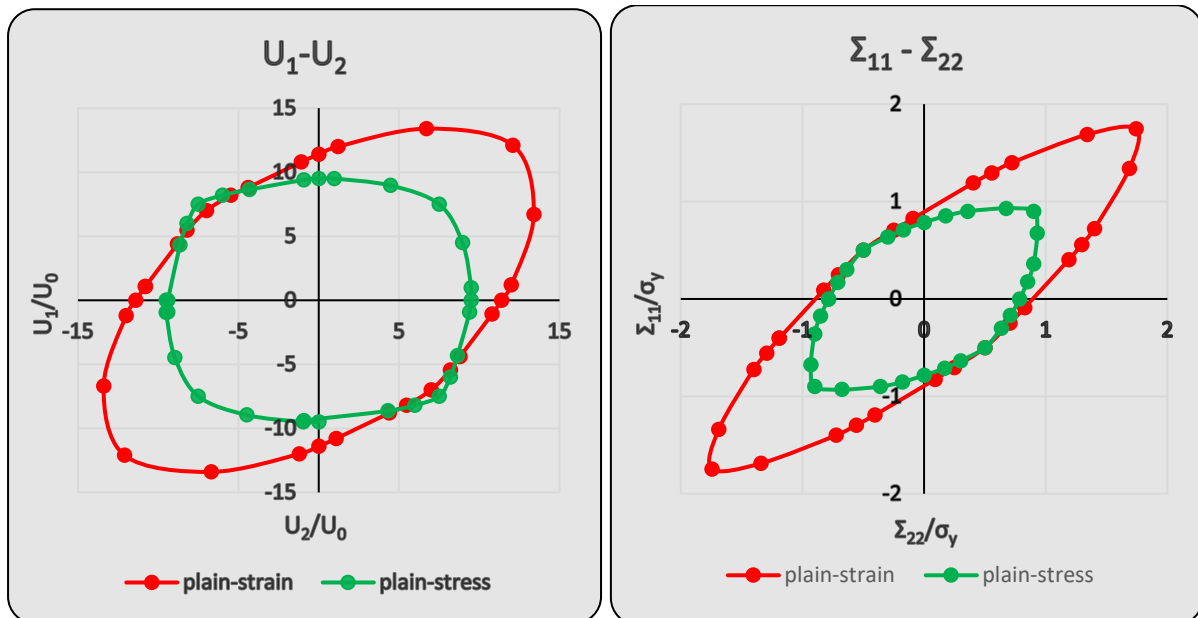
**Διάγραμμα 6.6** Σχέση αντίδρασης-στήριξης του κόμβου του συνόρου του πεπερασμένου στοιχείου 79 σε συνάρτηση με το χρόνο φόρτισης για την περίπτωση επίπεδης-παραμόρφωσης

Στο Διάγραμμα 6.7 απεικονίζονται οι αντίστοιχες ομογενοποιημένες τάσεις  $\Sigma_{11}$ , κανονικοποιημένες ως προς τη τάση διαρροής  $\sigma_y$ , για τις δύο διαφορετικές υπό εξέταση περιπτώσεις. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση επίπεδων-παραμορφώσεων η τάση συνεχώς αυξάνεται χωρίς να διευκρινίζεται ένα ανώτατο οριακό, σε αντίθεση με την περίπτωση της επίπεδης - έντασης όπου εύκολα μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι το φορτίο κατάρρευσης της κατασκευής είναι περίπου ίσο με  $0.91\sigma_y$ . Με άλλο λόγια, συμπεραίνουμε ότι για την περίπτωση επίπεδων-παραμορφώσεων ο μοναδικός 'ασφαλής' τρόπος εύρεσης του οριακού φορτίου είναι μέσω των κρίσιμων ζωνών που αναπαριστούνται σχηματικά στην Εικόνα 4.1,



**Διάγραμμα 6.7** Σχέση ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}$  – χρόνου φόρτισης για τις περιπτώσεις επίπεδης-παραμόρφωσης και επίπεδης έντασης

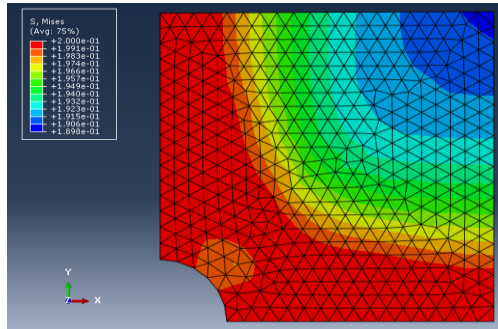
Τέλος, αναπαριστούμε σε ένα Διάγραμμα 6.8, το ασφαλές χωρίο (a) επιβαλλόμενων μετακινήσεων  $U_1, U_2$  και (b) ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ , έναντι οριακού φορτίου, για τις περιπτώσεις επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωσης. Παρατηρούμε ότι το χωρίο των ομογενοποιημένων τάσεων και επιβαλλόμενων μετακινήσεων της επίπεδης παραμόρφωσης εσωκλείει το αντίστοιχο της επίπεδης έντασης.



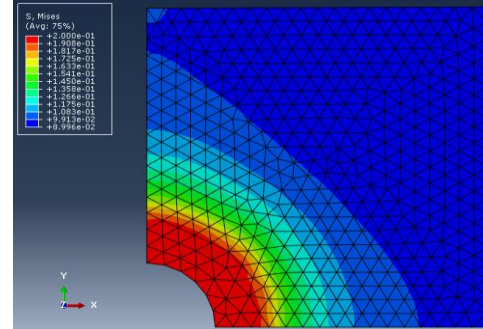
**Διάγραμμα 6.8** Ασφαλές χωρίο επίπεδης έντασης και παραμόρφωσης για την οριακή ανάλυση (a) επιβαλλόμενων μετακινήσεων , (b) ομογενοποιημένων τάσεων

### 6.4.4 Ανάλυση – Εύρεση επιφάνειας φορτίου επαυξητικής κατάρρευσης

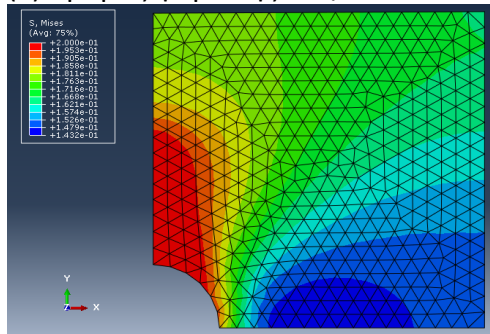
Στην Εικόνα 6.12 παρουσιάζεται η εντατική κατάσταση, για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης, τη στιγμή που παύει το RVE να βρίσκεται σε κατάσταση σταθεροποίησης (elastic shakedown) και σηματοδοτείται η έναρξη της επαυξητικής κατάρρευσης (ratchetting). Τα a,c,e,g (αριστερά) αναφέρονται στην περίπτωση επίπεδης-έντασης ενώ τα b,d,f,h (δεξιά) στην περίπτωση επίπεδης-παραμόρφωσης.



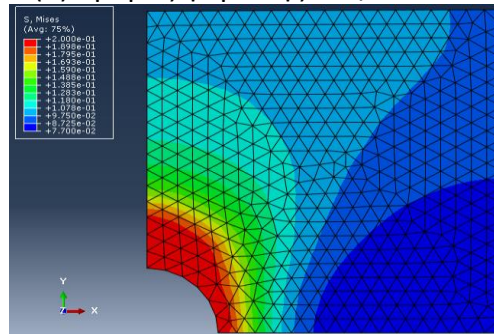
(a) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



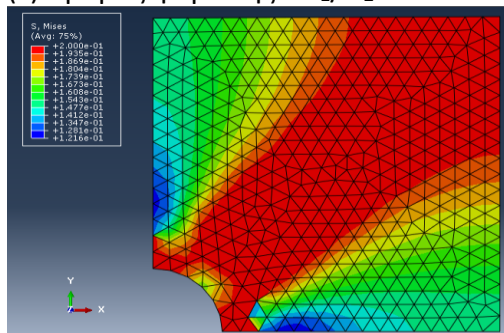
(b) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



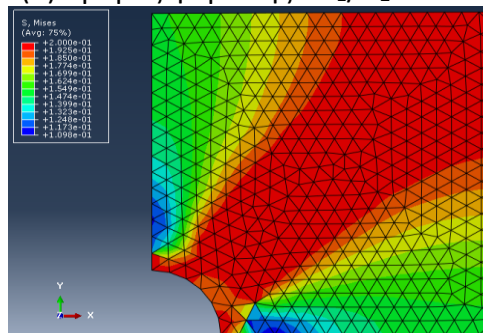
(c) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



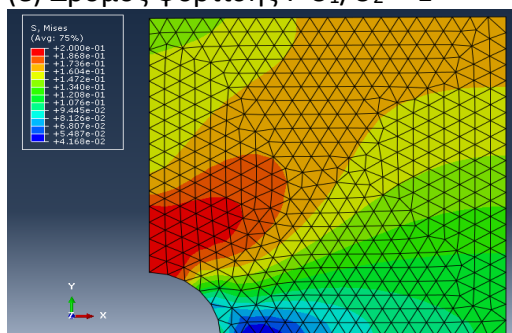
(d) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



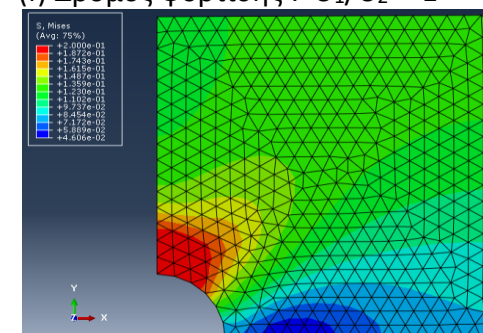
(e) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



(f) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



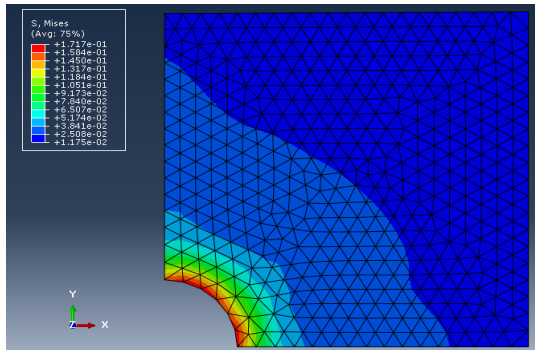
(g) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$



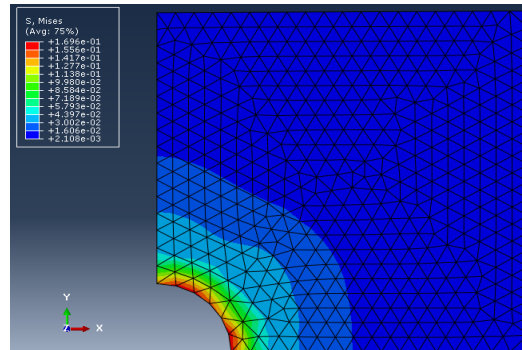
(h) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$

**Εικόνα 6.12** Εντατική κατάσταση τη στιγμή έναρξης της επαυξητικής κατάρρευσης (ratchetting) για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης

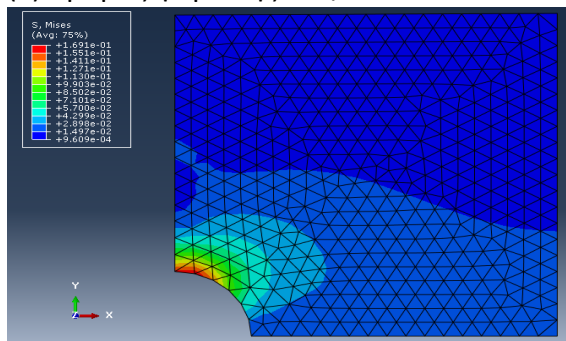
Στην Εικόνα 6.13 παρουσιάζεται η εντατική κατάσταση, για τους τέσσερις ανωτέρω δρόμους φόρτισης, τη στιγμή που τελειώνει ο 1<sup>ος</sup> κύκλος φόρτισης-αποφόρτισης. Τα a,c,e,g (αριστερά) αναφέρονται στην περίπτωση επίπεδης-έντασης ενώ τα b,d,f,h (δεξιά) στην περίπτωση επίπεδης-παραμόρφωσης.



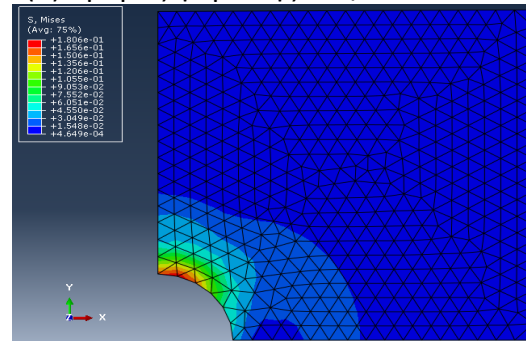
(a) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



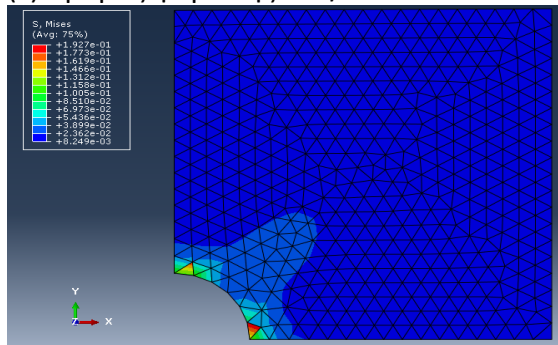
(b) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



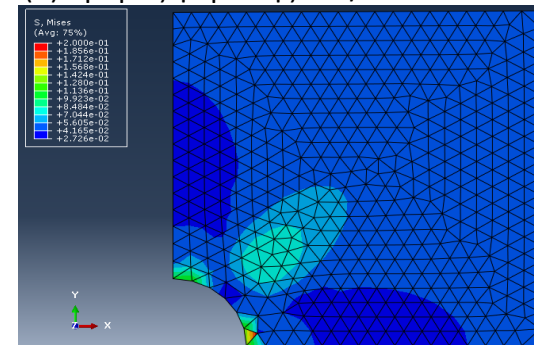
(c) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



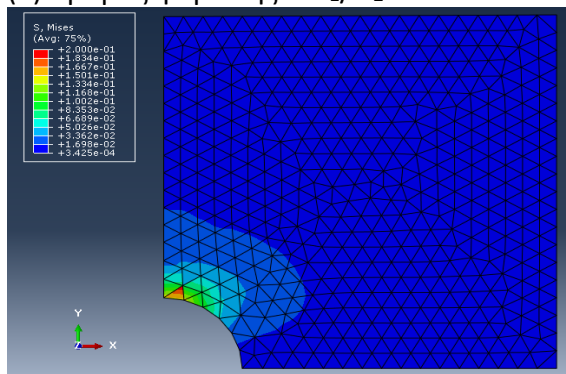
(d) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



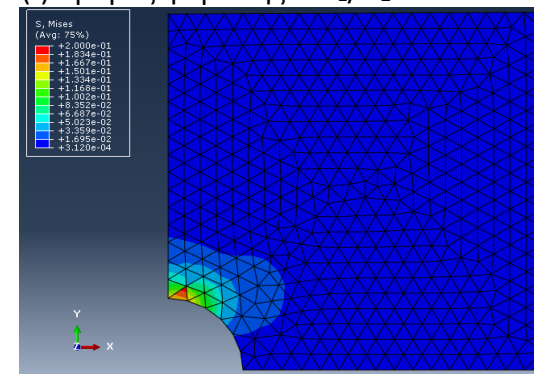
(e) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



(f) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



(g) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$

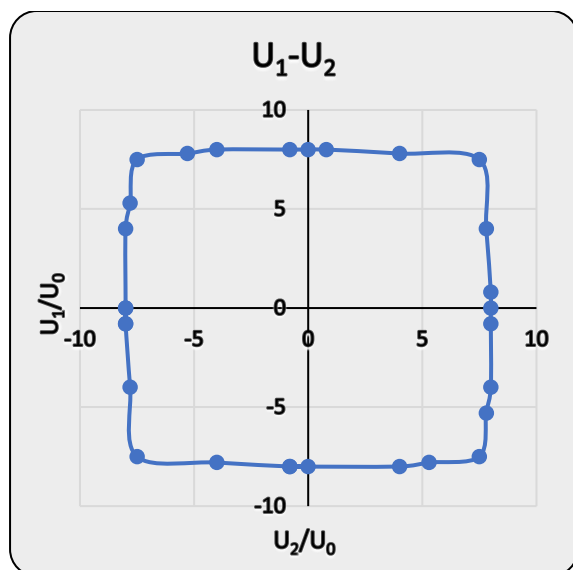


(h) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$

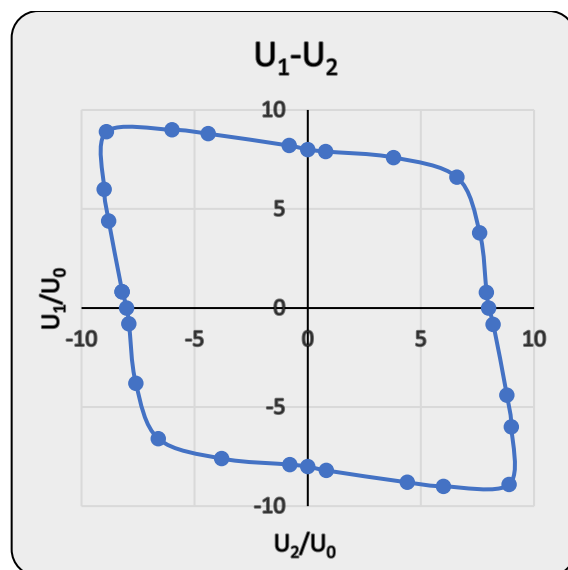
**Εικόνα 6.13** Εντατική κατάσταση τη στιγμή λήξης του 1<sup>ου</sup> κύκλου φόρτισης-αποφόρτισης της επαυξητικής κατάρρευσης

Παρατηρούμε από την Εικόνα 6.12 ότι για όλους τους δρόμους φόρτισης σχηματίζονται οι ζώνες συγκέντρωσης τάσεων. Οι ζώνες αυτές παρουσιάζουν έντονες διαφορές ανάμεσα στις δύο εξεταζόμενες περιπτώσεις, επίπεδης έντασης- παραμόρφωσης, ιδιαίτερα όσο ο δρόμος φόρτισης  $u_1/u_2$  τείνει στη μονάδα. Ανάλογα με το δρόμο φόρτισης παρατηρείται διαφορετική κρίσιμη ζώνη. Όλα τα πεπερασμένα στοιχεία τα οποία βρίσκονται εντός της ζώνης αυτής έχουν διαρρεύσει. Στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης, μηχανισμός αστοχίας παρατηρείται μόνο για δρόμο φόρτισης  $u_1/u_2 = -1$ . Ένα γρήγορο συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι για την περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης, όσο ο δρόμος φόρτισης  $u_1/u_2$  τείνει στο -1 τόσο το RVE 'κινδυνεύει' να αστοχήσει απευθείας λόγω οριακού φορτίου. Όσο ο δρόμος φόρτισης  $u_1/u_2$  τείνει στο 1 τόσο το φαινόμενο της επαυξητικής κατάρρευσης γίνεται κρισιμότερο. Στην περίπτωση επίπεδης έντασης μηχανισμός αστοχίας παρατηρείται για δρόμους φόρτισης  $u_1/u_2 = 1$  και  $u_1/u_2 = -1$ . Για ενδιάμεσους λόγους φόρτισης το φαινόμενο της επαυξητικής κατάρρευσης είναι κρισιμότερο.

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για τους υπόλοιπους συνδυασμούς φόρτισης του Πίνακα 6.2 προκύπτει στο Διάγραμμα 6.9 η επιφάνεια που οριοθετεί τις 'επιτρεπόμενες' επιβαλλόμενες μετατοπίσεις έναντι της επαυξητικής κατάρρευσης. Αν ένας συνδυασμός φόρτισης  $U_1, U_2$  που επιβάλλω στην κατασκευή μου βρίσκεται εκτός του χωρίου τότε το RVE αστοχεί. Παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά ανάμεσα στις υπό εξέταση περιπτώσεις επίπεδης έντασης-παραμόρφωσης δεν είναι πολύ διαφορετική. Στην περίπτωση (a) επίπεδης-έντασης, παρατηρούμε ότι ασφαλές χωρίο προσεγγίζει ένα τετραγωνικό σχήμα με κέντρο την αρχή των αξόνων, δηλαδή, η περιγραφή συνδυασμού μετακινήσεων σε ένα μονάχα τεταρτημόριο θα ήταν αρκετή ώστε να ορίσει, λόγω συμμετρίας, όλο το χωρίο. Στην περίπτωση επίπεδης-παραμόρφωσης η συμπεριφορά είναι λίγο διαφορετική. Πιο συγκεκριμένα, για δρόμους φόρτισης που τείνουν στο -1 τόσο μεγαλύτερες είναι οι επιτρεπόμενες μετακινήσεις που μπορώ να επιβάλλω, ενώ η συμμετρικότητα εκτείνεται μεταξύ των τεταρτημώριων 1-3 και 2-4.



(a) Επίπεδη ένταση

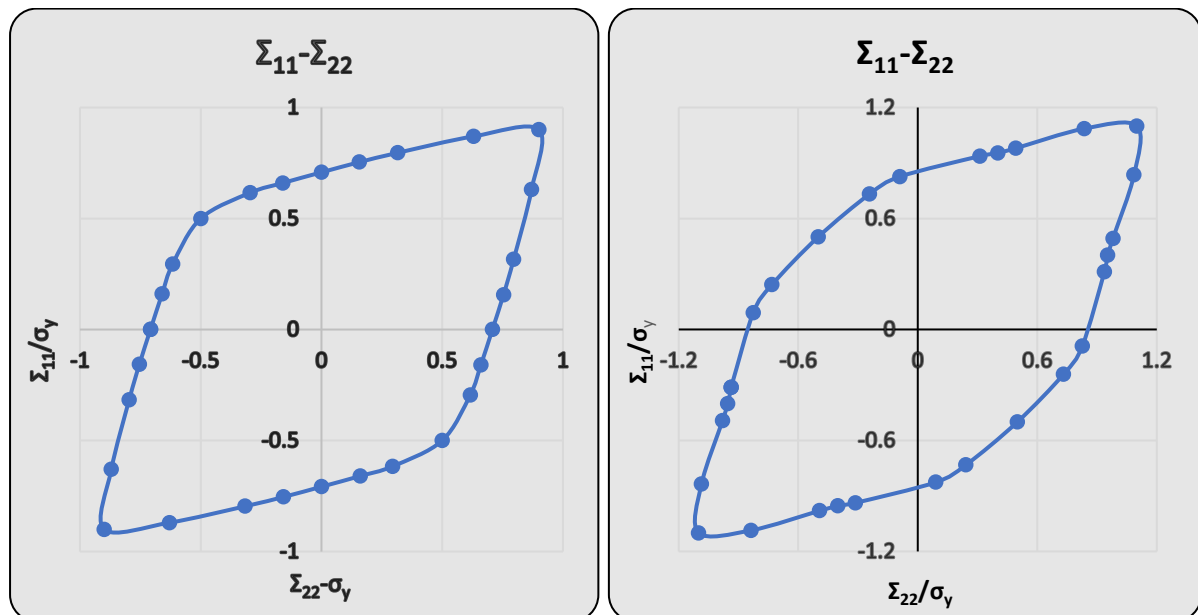


(b) Επίπεδη παραμόρφωση

**Διάγραμμα 6.9** Επιτρεπόμενη επιφάνεια επιβαλλόμενων μετακινήσεων, κανονικοποιημένων ως προς την μετακίνηση  $U_0=0.0001\mu\text{m}$  έναντι επαυξητικής κατάρρευσης

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για τους υπόλοιπους συνδυασμούς φόρτισης προκύπτει στο Διάγραμμα 6.9 η επιφάνεια που οριοθετεί τις ‘επιτρεπόμενες’ επιβαλλόμενες μετατοπίσεις έναντι επαυξητικής κατάρρευσης. Αν ένας συνδυασμός φόρτισης που επιβάλλω στην κατασκευή μου βρίσκεται εκτός του χωρίου τότε η κατασκευή μου καταρρέει.

Στην Παράγραφο 6.1.3 αναφέραμε το γεγονός ότι η παραπάνω διερεύνηση ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς του στοιχείου μας πραγματοποιήθηκε σε επίπεδο μικροκλίμακας. Το ζήτημά μας ωστόσο είναι να προσδιορίσουμε το ασφαλές χωρίο σε επίπεδο μακροκλίμακας, μέσω της διαδικασίας της ομογενοποίησης. Τελικώς, προκύπτει το Διάγραμμα 6.10 με τις μακροσκοπικές τάσεις  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$  κανονικοποιημένες ως προς την τάση διαρροής  $\sigma_y$  του στοιχείου. Παρατηρούμε αρχικά, ότι στην περίπτωση (a) επίπεδης έντασης η καμπύλη που ορίζεται από το ασφαλές χωρίο είναι πιο ομαλή σε σχέση με την αντίστοιχη της (b) επίπεδης παραμόρφωσης. Επίσης, στην 2<sup>η</sup> περίπτωση βλέπουμε ότι για λόγο  $\Sigma_{11}/\Sigma_{22}=1$  τα όρια του χωρίου γίνονται πιο ανεκτά ( $\Sigma_{11}=\Sigma_{22}\approx 1.1\sigma_y$  έναντι του  $\Sigma_{11}=\Sigma_{22}\approx 0.9\sigma_y$ ).

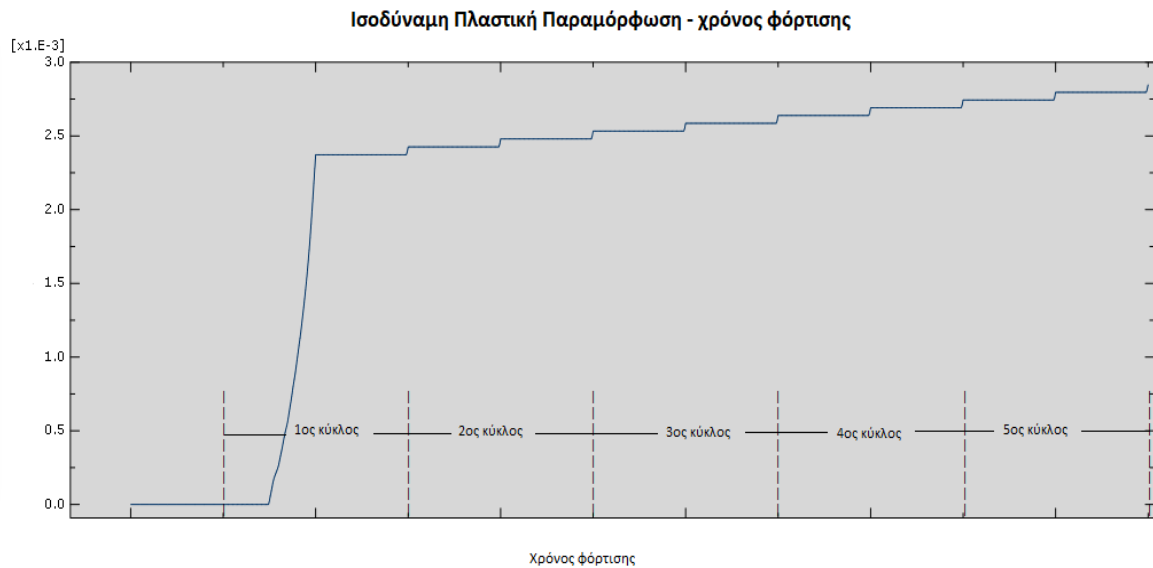


(a) Επίπεδη ένταση

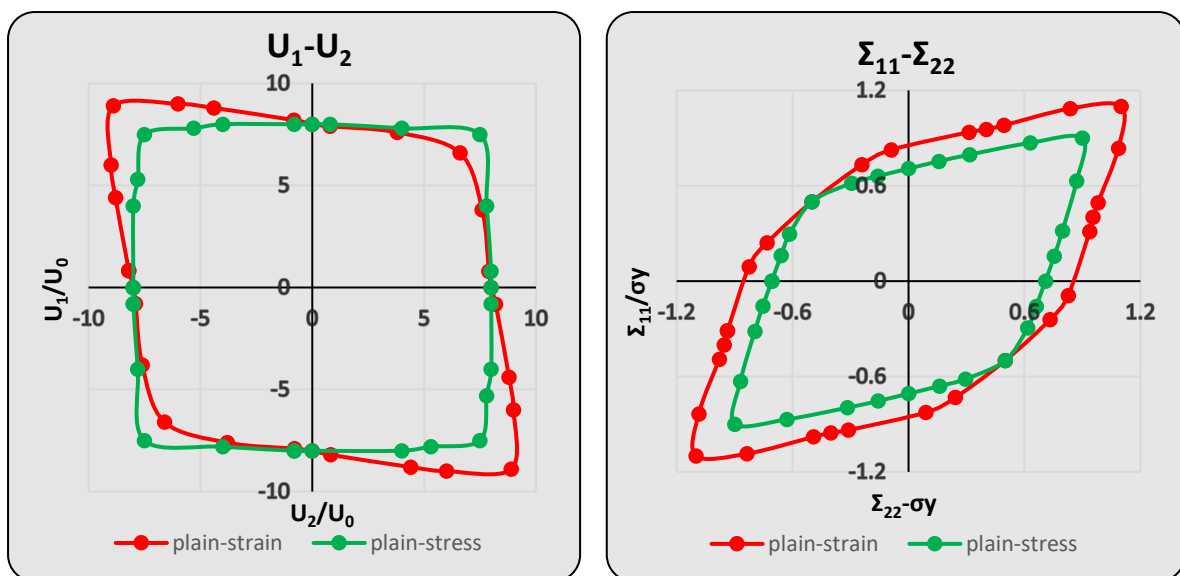
(b) Επίπεδη παραμόρφωση

**Διάγραμμα 6.10** Ασφαλές χωρίο μακροσκοπικών τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ , κανονικοποιημένων ως προς την τάση διαρροής  $\sigma_y = 200\text{MPa}$ , έναντι επαυξητικής κατάρρευσης για (a) επίπεδη ένταση, (b) επίπεδη παραμόρφωση.

Εξετάζοντας έναν δρόμο φόρτισης, τον  $U_1/U_2=1$ , κατασκευάζουμε το Διάγραμμα 6.11 ‘ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης’ σε συνάρτηση με το χρόνο φόρτισης. Παρατηρούμε ότι κατά τη διάρκεια του 1<sup>ου</sup> κύκλου φόρτισης το στοιχείο μας διαρρέει και αποκτά πλαστική παραμόρφωση. Κατά τη διάρκεια αποφόρτισης του 1<sup>ου</sup> κύκλου η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση παραμένει σταθερή. Περνώντας στον 2<sup>ο</sup> κύκλο έχουμε περαιτέρω αύξηση η οποία συνεχίζει από κύκλο σε κύκλο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη συνεχή αύξηση των παραμορφώσεων του πεπερασμένου στοιχείου, το οποίο τελικώς αστοχεί λόγω μεγάλων παραμορφώσεων.



**Διάγραμμα 6.11** Σχέση ‘Ισοδύναμης Πλαστικής Παραμόρφωσης – Χρόνου φόρτισης για το κρίσιμο πεπερασμένο στοιχείο της κατασκευής στην έναρξη της επαυξητικής κατάρρευσης



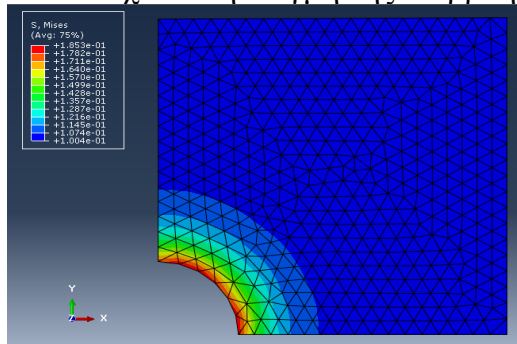
**Διάγραμμα 6.12** Ασφαλές χωρίο (a) επιβαλλόμενων μετακινήσεων και (b) ομογενοποιημένων τάσεων για την περίπτωση επίπεδης έντασης και παραμόρφωσης

Τέλος, στο Διάγραμμα 6.12 βλέπουμε το ασφαλές χωρίο (a) επιβαλλόμενων μετατοπίσεων  $U_1, U_2$  και (b) ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ , έναντι επαυξητικής κατάρρευσης για τις περιπτώσεις επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωσης. Παρατηρούμε ότι το χωρίο των ομογενοποιημένων τάσεων της επίπεδης παραμόρφωσης εσωκλείει το αντίστοιχο της επίπεδης. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει στην περίπτωση των επιβαλλόμενων μετακινήσεων, στην οποία μερικά από τα τμήματα του ασφαλούς χωρίου της επίπεδης έντασης εσωκλείονται από τα αντίστοιχα της επίπεδης έντασης.

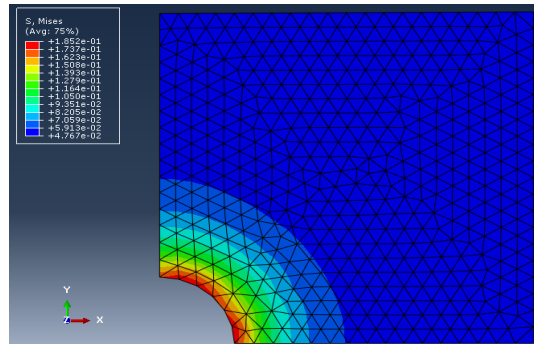


### 6.4.5 Ανάλυση – Εύρεση επιφάνειας φορτίου διαρροής

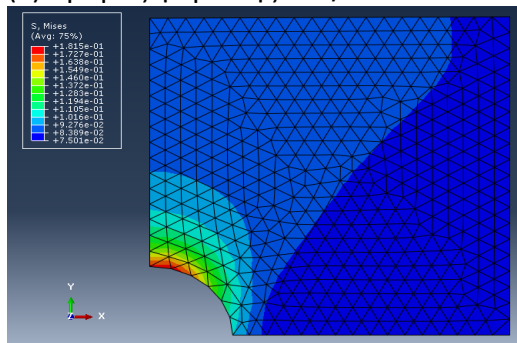
Θα πραγματοποιηθεί για ακόμα μία φορά λεπτομερής ανάλυση για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης. Στην Εικόνα 6.14 φαίνεται η εντατική κατάσταση του στοιχείου τη στιγμή της διαρροής του.



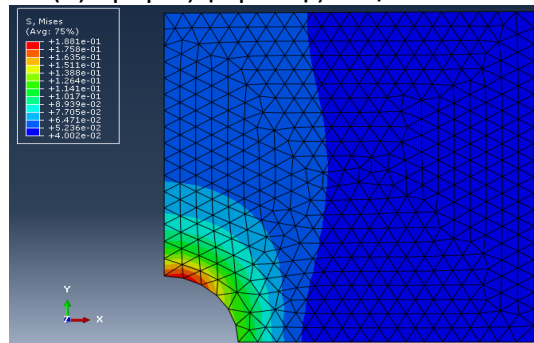
(α) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



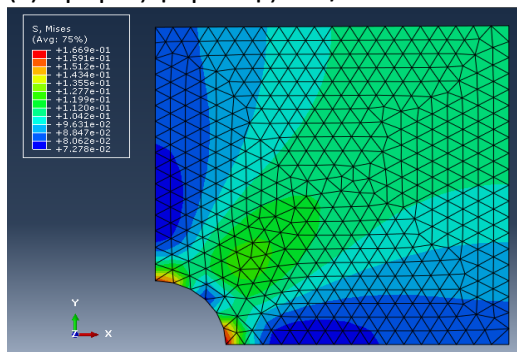
(β) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



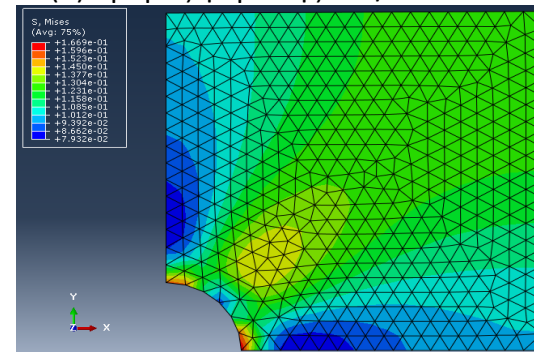
(γ) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



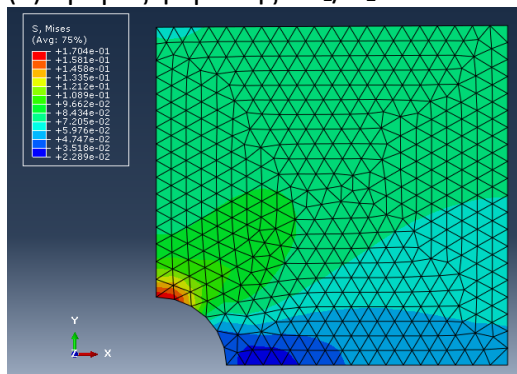
(δ) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



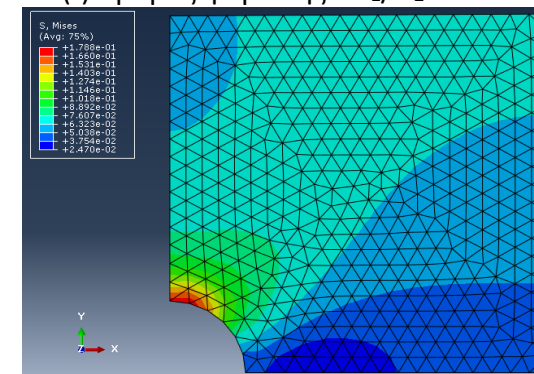
(ε) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



(ς) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



(ζ) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$



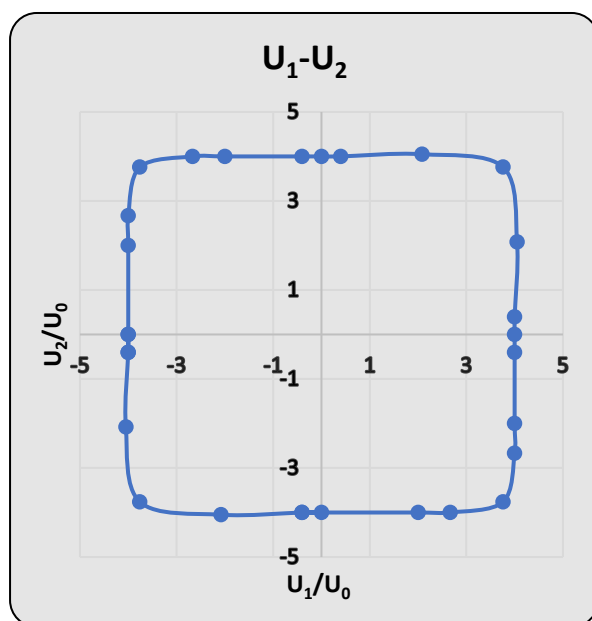
(η) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$

**Εικόνα 6.14** Εντατική κατάσταση τη στιγμή επιβολής του φορτίου διαρροής για τους δρόμους φόρτισης (α)  $U_1/U_2=1$  , (β)  $U_1/U_2=2$  , (γ)  $U_1/U_2=-1$  , (δ)  $U_1/U_2=0$

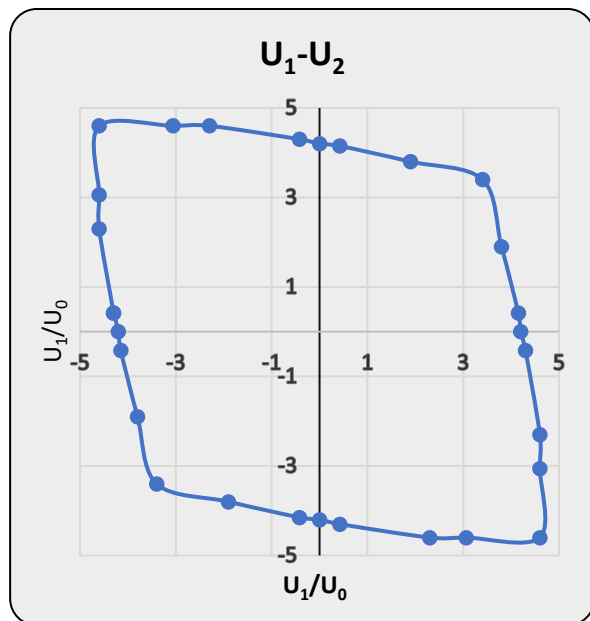
Εδώ θα πρέπει να επισημανθεί ότι η διαρροή του RVE λαμβάνει χώρα τη στιγμή κατά την οποία το 1<sup>ο</sup> πεπερασμένο παύει να βρίσκεται στην ελαστική περιοχή και περνάει στην πλαστική περιοχή. Υπενθυμίζουμε ότι το λογισμικό ABAQUS2006 έχει ενσωματωμένο το κριτήριο Von-Mises, όπως αυτό παρουσιάστηκε στην Ενότητα 1.4.

Από την Εικόνα 6.14 παρατηρούμε (με κόκκινο χρώμα) ποια είναι τα κρίσιμα πεπερασμένα στοιχεία που οδηγούν σε διαρροή την κατασκευή. Ανάλογα με το δρόμο φόρτισης μεταβάλλονται τα στοιχεία αυτά. Για τις περιπτώσεις των δρόμων φόρτισης  $U_1/U_2=2$  και  $U_1/U_2=0$  η συμπεριφορά της κατασκευής είναι παρόμοια ενώ για τις περιπτώσεις όπου  $U_1/U_2=1$  και  $U_1/U_2=-1$  διακρίνουμε συμμετρική καταπόνηση όπως και αναμέναμε.

Στο Διάγραμμα 6.13 βλέπουμε την επιφάνεια που οριοθετεί τις ‘επιτρεπόμενες’ επιβαλλόμενες μετατοπίσεις έναντι διαρροής. Αν ένας συνδυασμός φόρτισης που επιβάλλω στην κατασκευή μου βρίσκεται εκτός του χωρίου τότε η κατασκευή μου διαρρέει. Στην περίπτωση επίπεδης-έντασης παρατηρούμε ότι το ‘ασφαλές’ χωρίο προσεγγίζει το σχήμα του τετραγώνου ενώ στην περίπτωση της επίπεδης - παραμόρφωσης αυξάνονται οι ‘ανοχές’ για δρόμους φόρτισης  $U_1/U_2$  που προσεγγίζουν το -1. Παρόμοια συμπεριφορά είχαμε όταν μελετήσαμε το φαινόμενο της επαυξητικής κατάρρευσης.



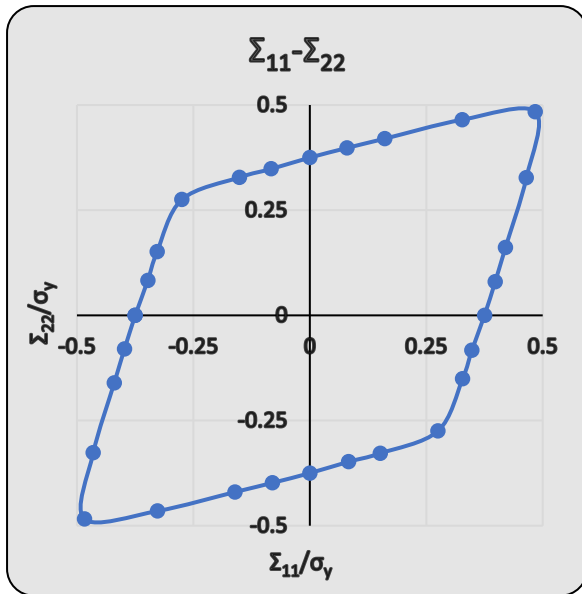
(a) Επίπεδη ένταση



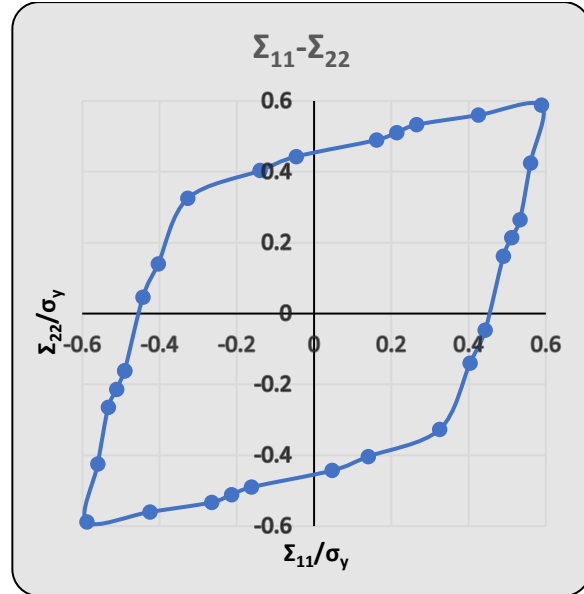
(b) Επίπεδη παραμόρφωση

**Διάγραμμα 6.13** Ασφαλές χωρίο επιβαλλόμενων μετακινήσεων, κανονικοποιημένων ως προς την μετακίνηση  $U_0=0.0001\mu\text{m}$  έναντι φορτίου διαρροής για (a) επίπεδη-ένταση και (b) επίπεδης-παραμόρφωσης

Στο Διάγραμμα 6.14 βλέπουμε το ασφαλές χωρίο για τις ομογενοποιημένες τάσεις  $\Sigma_{11}$ - $\Sigma_{22}$ , οι οποίες προέκυψαν σύμφωνα με τη διαδικασία της ομογενοποίησης, όπως αυτή παρουσιάστηκε στην Ενότητα 1.3. Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τις δύο υπό εξέταση περιπτώσεις είναι πάρα πολύ κοντά. Λίγο πιο ανεκτά είναι τα όρια στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης  $(0.6-0.5)/0.5=20\%$ . Όσο ο λόγος των  $\Sigma_{11}/\Sigma_{22}$  προσεγγίζει τη μονάδα τόσο τα όρια γίνονται πιο ανεκτά και στις δύο περιπτώσεις.

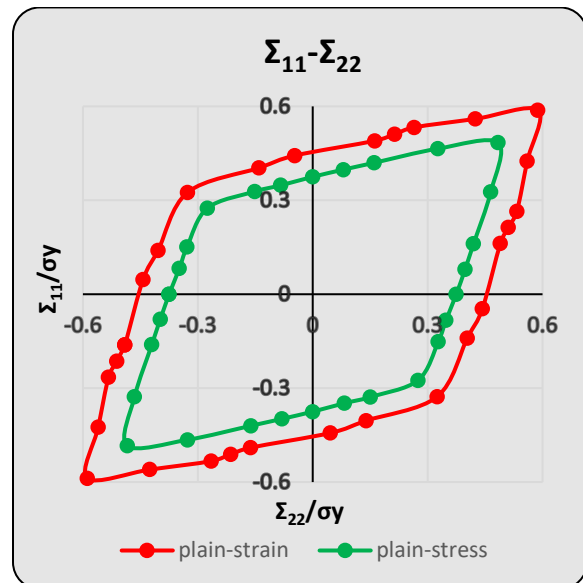
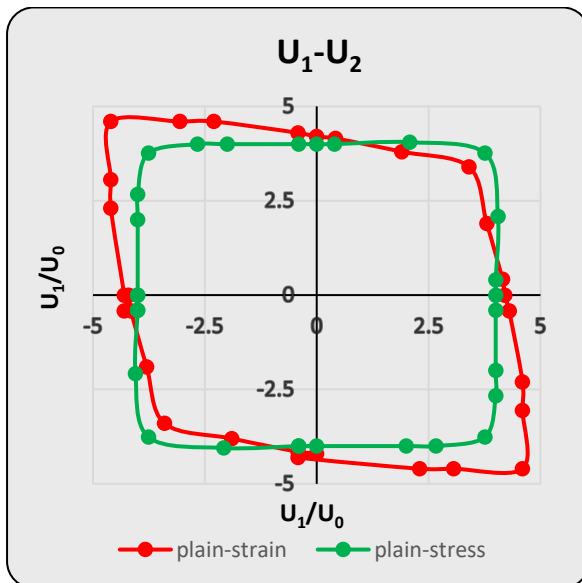


(α) Επίπεδη ένταση



(β) Επίπεδη παραμόρφωση

**Διάγραμμα 6.14** Ασφαλές χωρίο μακροσκοπικών τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ , κανονικοποιημένων ως προς την τάση διαρροής  $\sigma_y = 200\text{MPa}$ , έναντι επαυξητικής κατάρρευσης για (α) επίπεδη ένταση, (β) επίπεδη παραμόρφωση.



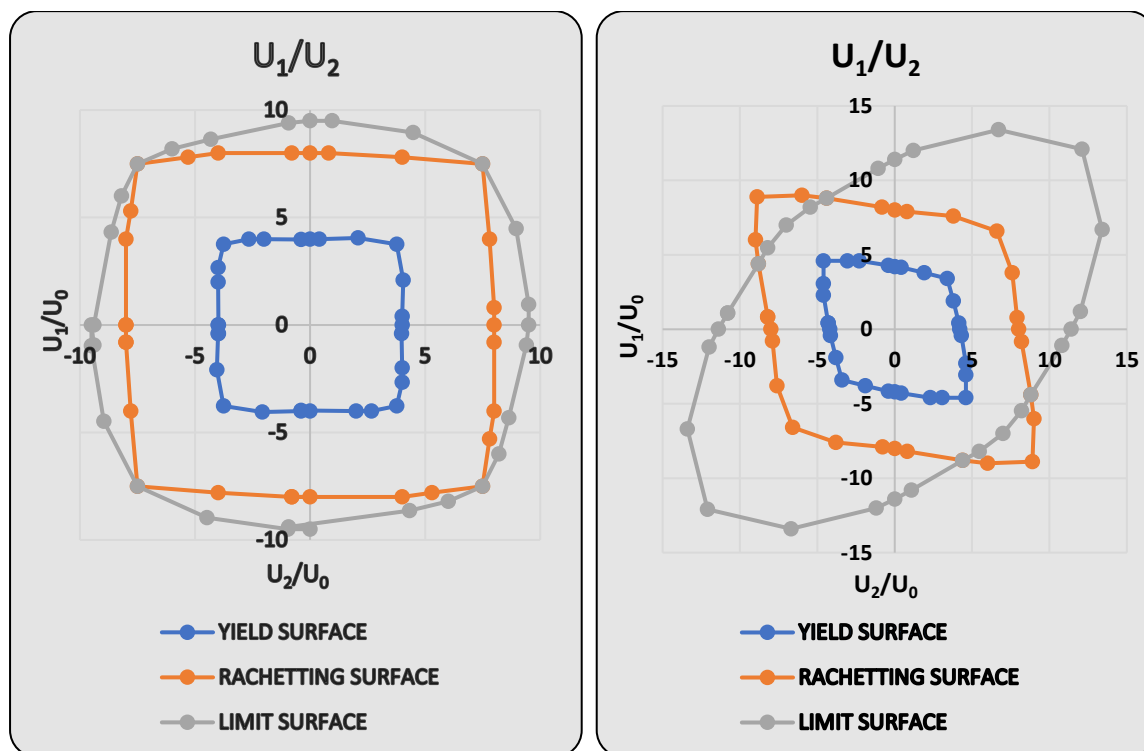
**Διάγραμμα 6.15** Ασφαλές χωρίο (α) επιβαλλόμενων μετατοπίσεων και (β) ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ , έναντι φορτίου διαρροής

Τέλος, στο Διάγραμμα 6.15 βλέπουμε το ασφαλές χωρίο (α) επιβαλλόμενων μετατοπίσεων  $U_1, U_2$  και (β) ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ , έναντι του φορτίου διαρροής για τις περιπτώσεις επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωσης. Παρατηρούμε ότι το χωρίο των ομογενοποιημένων τάσεων της επίπεδης παραμόρφωσης εσωκλείει το αντίστοιχο της επίπεδης έντασης με μία σταθερή απόσταση για οποιοδήποτε δρόμο φόρτισης. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει στην περίπτωση των επιβαλλόμενων μετακινήσεων, στην οποία μερικά από τα τμήματα του ασφαλούς χωρίου της επίπεδης έντασης εσωκλείονται από τα αντίστοιχα της επίπεδης έντασης.

#### 6.4.6 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Για μία καλύτερη εποπτεία των αποτελεσμάτων αλλά και σύγκριση κατασκευάζουμε τα Διαγράμματα 6.16 και 6.17. Στο διάγραμμα 6.16 βλέπουμε συγκεντρωτικά τις επιβαλλόμενες μετακινήσεις που οδηγούν στην επιφάνεια διαρροής (μπλε χρώμα), την επαυξητική κατάρρευση (πορτοκαλί χρώμα) και την οριακή ανάλυση (γκρι χρώμα) για την περίπτωση (α) επίπεδης έντασης και (β) επίπεδης παραμόρφωσης. Όσον αφορά τις αναλύσεις επίπεδης έντασης παρατηρούμε ότι οι μέγιστες μετακινήσεις επιβάλλονται στις αναλύσεις εύρεσης του οριακού φορτίου για οποιονδήποτε δρόμο φόρτισης. Οι μετακινήσεις επαυξητικής κατάρρευσης εγγράφονται στις προηγούμενες ενώ του οριακού φορτίου δίνουν πολύ μικρότερα σε σύγκριση με τα προηγούμενα αποτελέσματα. Όσον αφορά τις αναλύσεις επίπεδης παραμόρφωσης τα πράγματα είναι λίγο διαφορετικά. Για δρόμους φόρτισης που τείνουν στο 1 το ασφαλές χωρίο έναντι οριακού φορτίου εσωκλείουν το αντίστοιχο της επαυξητικής κατάρρευσης. Για δρόμους φόρτισης που τείνουν στο -1 το ασφαλές χωρίο έναντι οριακού φορτίου καλύπτεται του αντίστοιχου της επαυξητικής κατάρρευσης. Όσον αφορά την επιφάνεια διαρροής, όπως και στην περίπτωση επίπεδης έντασης, δίνει πολύ μικρότερα σε σύγκριση αποτελέσματα.

Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι η κατανομή των μετατοπίσεων σε κάθε μία εκ των δύο περιπτώσεων είναι εντελώς διαφορετική. Στην περίπτωση της επίπεδης έντασης το ασφαλές χωρίο, είναι συμμετρικό ως προς του άξονες  $x, y$  ενώ στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης τα χωρία μεταβάλλονται με συμμετρίες ως προς ευθείες που σχηματίζουν  $45^\circ$  ως προς του άξονες  $x, y$ .



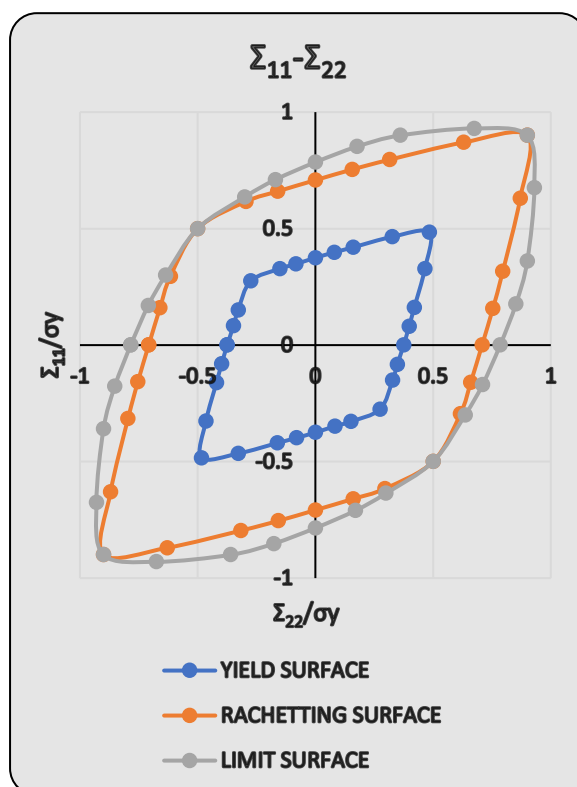
(α) επίπεδη ένταση

(β) επίπεδη παραμόρφωση

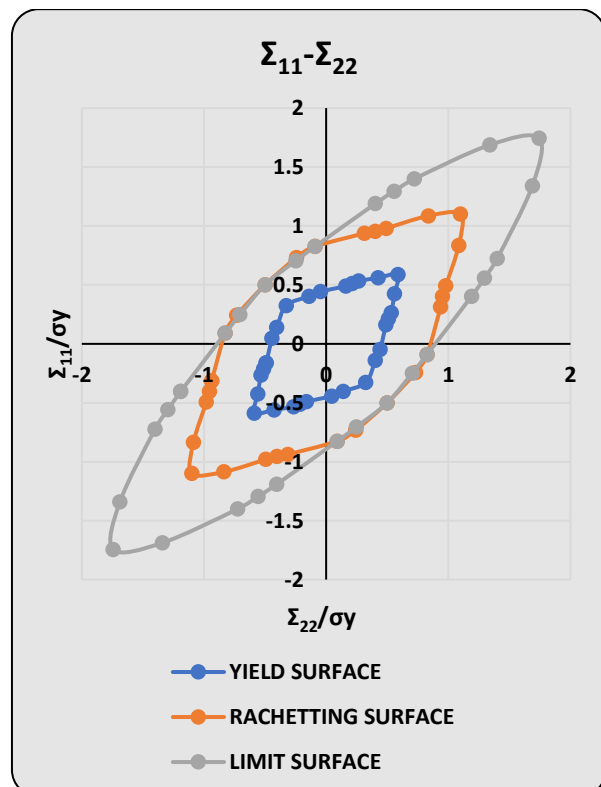
**Διάγραμμα 6.16** Επιτρεπόμενη επιφάνεια επιβαλλόμενων μετακινήσεων για (α) επιφάνεια διαρροής, (β) επαυξητικής κατάρρευσης, (γ) οριακού φορτίου

Στο διάγραμμα 6.17 βλέπουμε συγκεντρωτικά τις ομογενοποιημένες τάσεις, που αντιστοιχούν στην επιφάνεια διαρροής (μπλε χρώμα), την επαυξητική κατάρρευση (πορτοκαλί χρώμα) και την οριακή ανάλυση (γκρι χρώμα) για την περίπτωση (a) επίπεδης έντασης και (b) επίπεδης παραμόρφωσης. Όσον αφορά τις αναλύσεις επίπεδης έντασης παρατηρούμε ότι οι μέγιστες ομογενοποιημένες τάσεις επιβάλλονται στις αναλύσεις εύρεσης του οριακού φορτίου για οποιονδήποτε δρόμο φόρτισης. Οι τάσεις επαυξητικής κατάρρευσης εγγράφονται στις προηγούμενες ενώ του φορτίου διαρροής δίνουν πολύ μικρότερα σε σύγκριση με τα προηγούμενα αποτελέσματα. Όσον αφορά τις αναλύσεις επίπεδης παραμόρφωσης τα πράγματα είναι περίπου τα ίδια με τη διαφορά ότι η επαυξητική κατάρρευση δίνει αρκετά πιο συντηρητικές τάσεις έναντι της οριακής ανάλυσης. Για δρόμους φόρτισης που τείνουν στο 1 οι ομογενοποιημένες τάσεις γίνονται μέγιστες και στις δύο περιπτώσεις. Για δρόμους φόρτισης που τείνουν στο -1 το ασφαλές χωρίο γίνεται ολοένα και κρισιμότερο.

Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι η κατανομή των τάσεων σε κάθε μία εκ των δύο περιπτώσεων είναι η ίδια. Τόσο στην περίπτωση επίπεδης έντασης όσο και παραμόρφωσης τα χωρία μεταβάλλονται με συμμετρίες ως προς ευθείες που σχηματίζουν  $45^\circ$  ως προς του άξονες x,y. Βέβαια θα πρέπει να σημειωθεί η πολύ μεγάλη απόκλιση που εμφανίζουν ως προς τις μέγιστες ομογενοποιημένες τάσεις για το δρόμο φόρτισης  $\Sigma_{11}/\Sigma_{22} = 1$ , δύο φορές περίπου μεγαλύτερες στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης. Ενώ για το δρόμο φόρτισης  $\Sigma_{11}/\Sigma_{22} = -1$  τα αποτελέσματα μεταξύ των δύο αναλύσεων είναι σχεδόν ίδια.



(a) Επίπεδη ένταση

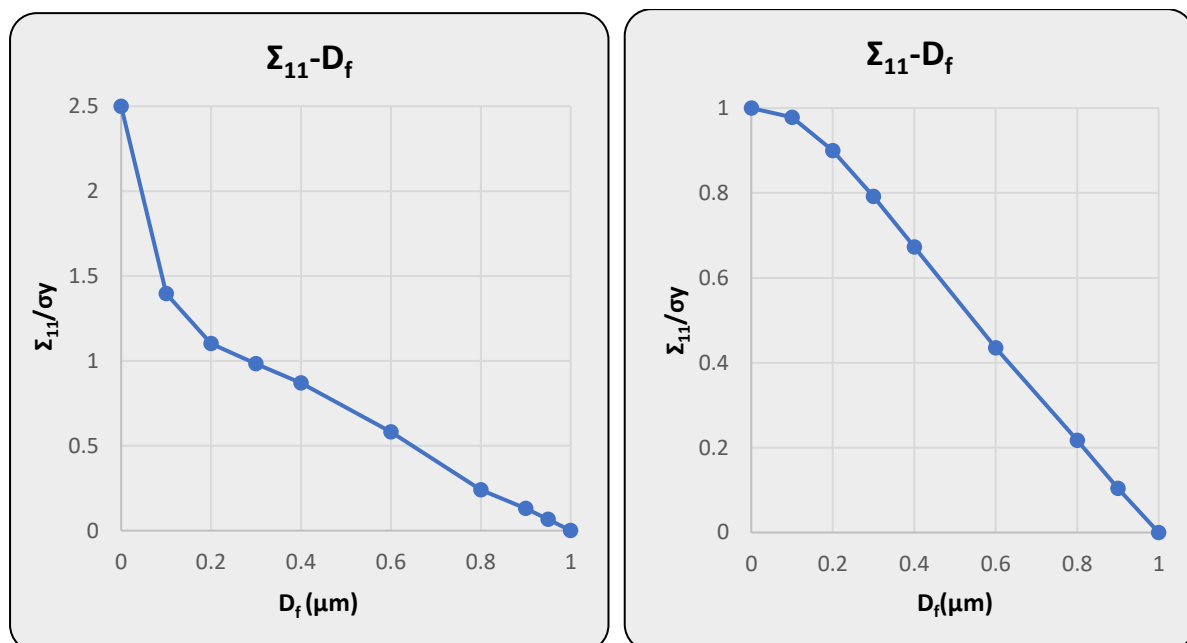


(b) επίπεδη παραμόρφωση

**Διάγραμμα 6.17** Επιτρεπόμενη επιφάνεια ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}-\Sigma_{22}$  για φορτίο διαρροής, φορτίο επαυξητικής κατάρρευσης, οριακό φορτίου στην περίπτωση (a) επίπεδης έντασης και (b) επίπεδης παραμόρφωσης

#### 6.4.7 Διερεύνηση επιρροής διαμέτρου της τρύπας στο φαινόμενο της επαυξητικής κατάρρευσης

Στην παράγραφο αυτή θα διερευνήσουμε την επιρροή της διαμέτρου της τρύπας έναντι του φαινομένου της επαυξητικής κατάρρευσης. Η διερεύνηση αυτή θα πραγματοποιηθεί τόσο για επίπεδη ένταση όσο και για επίπεδη παραμόρφωση. Ο υπό εξέταση δρόμος φόρτισης θα είναι ο  $U_1/U_2=1$ . Στο Διάγραμμα 6.18a,b βλέπουμε ότι η σχέση ανάμεσα στη διάμετρο της τρύπας  $D_f$  και την ομογενοποιημένη τάση  $\Sigma_{11}$  είναι αντιστρόφως ανάλογη. Δηλαδή, αύξηση της διαμέτρου της τρύπας σηματοδοτεί μείωση της επιβαλλόμενης τάσης  $\Sigma_{11}$ . Στην περίπτωση (a) επίπεδων παραμορφώσεων παρατηρείται ταχεία μείωση της τάσης για διαμέτρους τρύπας  $D_f < 0.2\mu\text{m}$ , ενώ για διαμέτρους  $D_f > 0.2\mu\text{m}$  η σχέση εξάρτησης γίνεται περίπου γραμμική. Όσον αφορά την περίπτωση (b) επίπεδης έντασης η σχέση εξάρτησης ανάμεσα στη διάμετρο της τρύπας και την ομογενοποιημένη τάση  $\Sigma_{11}$  είναι περίπου γραμμική για οποιοδήποτε εύρος τιμών της  $D_f$  με εξαίρεση το διάστημα  $0 < D_f < 0.1\mu\text{m}$ .



(a) επίπεδη-παραμόρφωση

(b) επίπεδη-ένταση

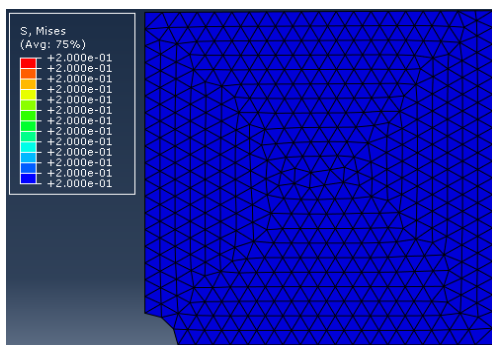
**Διάγραμμα 6.18** Μεταβολή των ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}$  επαυξητικής κατάρρευσης σε σχέση με τη διάμετρο της τρύπας για την περίπτωση (α) επίπεδης παραμόρφωσης, (b) επίπεδης έντασης

Στην Εικόνα 4.15 βλέπουμε την εντατική κατάσταση του RVE για τις διάφορες διαμέτρους της τρύπας που εξετάστηκαν. Παρατηρείται μία συγκέντρωση τάσεων κοντά στην τρύπα του RVE, η οποία καθώς πηγαίνουμε σε μεγαλύτερες διαμέτρους διαχέεται και στα υπόλοιπα τμήματα της μήτρας. Για τις περιπτώσεις επίπεδης έντασης παρατηρείται πιο έντονη καταπόνηση σε σχέση με την επίπεδη παραμόρφωση.

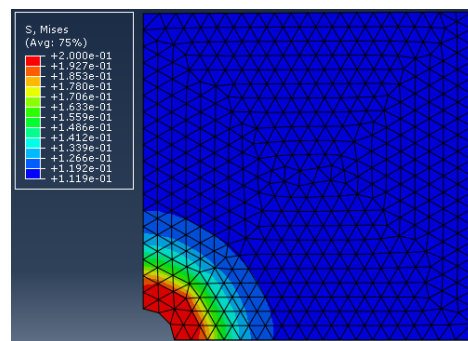
Πιο συγκεκριμένα, για τιμή της διαμέτρου  $D_f=0.1\mu\text{m}$ , στην περίπτωση επίπεδης έντασης παρατηρείται ομοιόμορφη καταπόνηση, ισοδύναμη αυτής που θα είχαμε αν δεν υπήρχε καθόλου η τρύπα στο RVE. Κάτι τέτοιο δεν παρατηρείται στην περίπτωση

της επίπεδης-παραμόρφωσης όπου η τρύπα κάνει αισθητή της παρουσία της από τις μικρές κι' όλες διαμέτρους της.

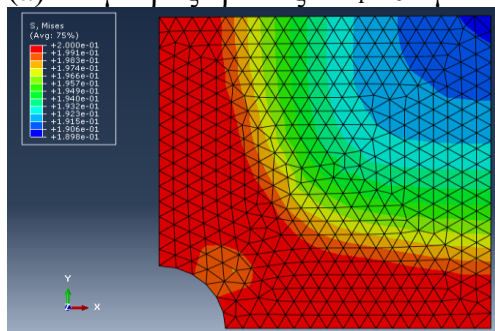
Καθώς προχωρούμε σε μεγαλύτερες διαμέτρους ( $D_f = 0.2\mu\text{m}$ ) βλέπουμε ότι στην περίπτωση επίπεδης-έντασης έχει ήδη σχηματιστεί ζώνη συγκέντρωσης τάσεων κατάλληλη για την δημιουργία μηχανισμού και αστοχία της μικροκατασκευής λόγω οριακού φορτίου και επαυξητικής κατάρρευσης την ίδια στιγμή, όπως ακριβώς είδαμε στην Παράγραφο 6.4.6. Όσον αφορά την επίπεδη παραμόρφωση, βλέπουμε ότι μηχανισμός δεν έχει σχηματιστεί ακόμα, κάτι που μαρτυρά ότι το φαινόμενο της επαυξητικής κατάρρευσης προηγείται του οριακού φορτίου. Το γεγονός αυτό, δείχνει να συμβαίνει και για μεγαλύτερες διαμέτρους  $D_f = 0.3\mu\text{m}$ ,  $D_f = 0.4\mu\text{m}$ ,  $D_f = 0.6\mu\text{m}$ .



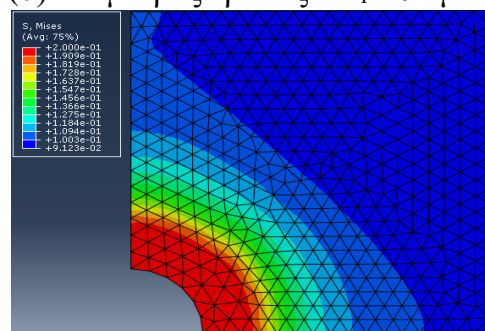
(α) Διάμετρος τρύπας :  $D_f = 0.1\mu\text{m}$



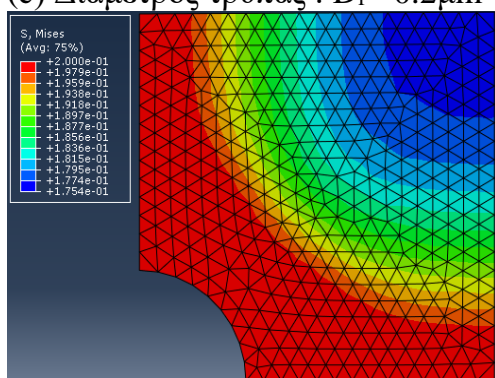
(β) Διάμετρος τρύπας :  $D_f = 0.1\mu\text{m}$



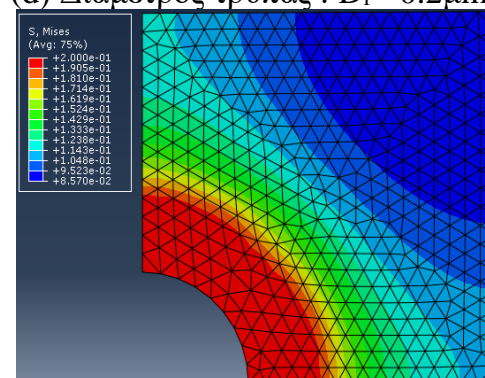
(γ) Διάμετρος τρύπας :  $D_f = 0.2\mu\text{m}$



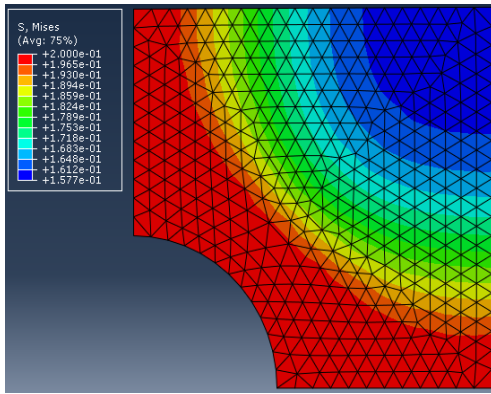
(δ) Διάμετρος τρύπας :  $D_f = 0.2\mu\text{m}$



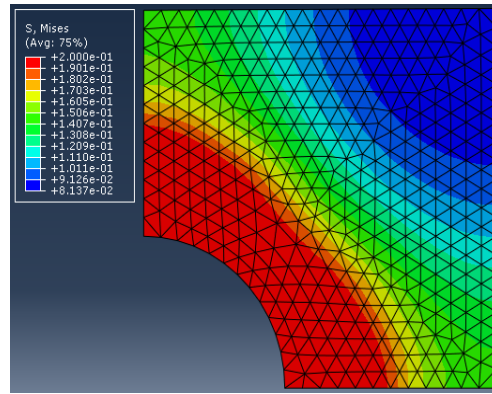
(ε) Διάμετρος τρύπας :  $D_f = 0.3\mu\text{m}$



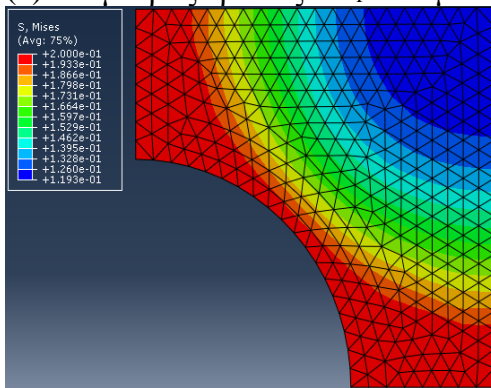
(σ) Διάμετρος τρύπας :  $D_f = 0.3\mu\text{m}$



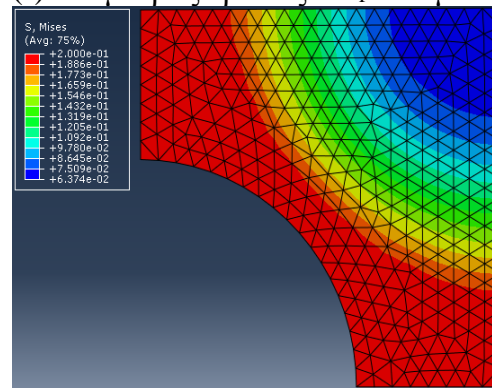
(ε) Διάμετρος τρύπας :  $D_f=0.4\mu\text{m}$



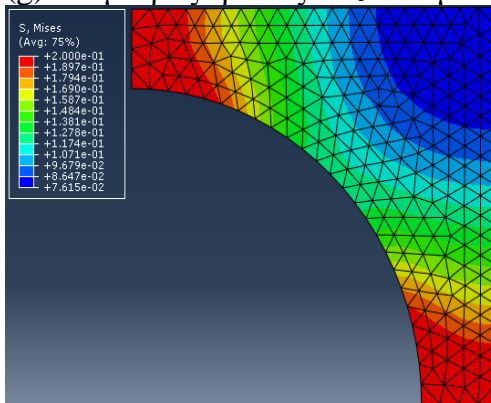
(φ) Διάμετρος τρύπας :  $D_f=0.4\mu\text{m}$



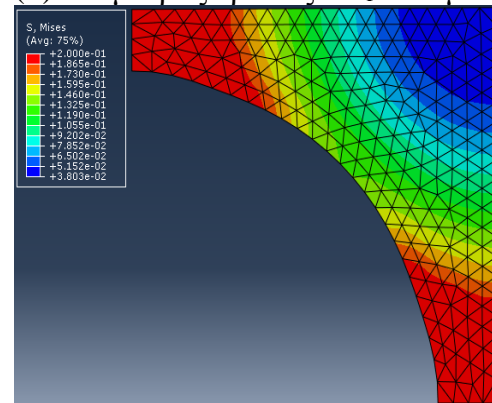
(γ) Διάμετρος τρύπας :  $D_f=0.6\mu\text{m}$



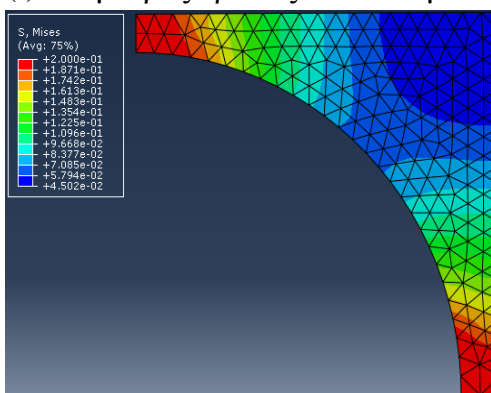
(η) Διάμετρος τρύπας :  $D_f=0.6\mu\text{m}$



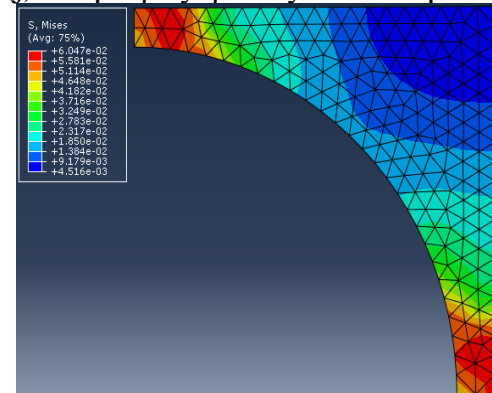
(ι) Διάμετρος τρύπας :  $D_f=0.8\mu\text{m}$



(θ) Διάμετρος τρύπας :  $D_f=0.8\mu\text{m}$



(κ) Διάμετρος τρύπας :  $D_f=0.9\mu\text{m}$



(λ) Διάμετρος τρύπας :  $D_f=0.9\mu\text{m}$

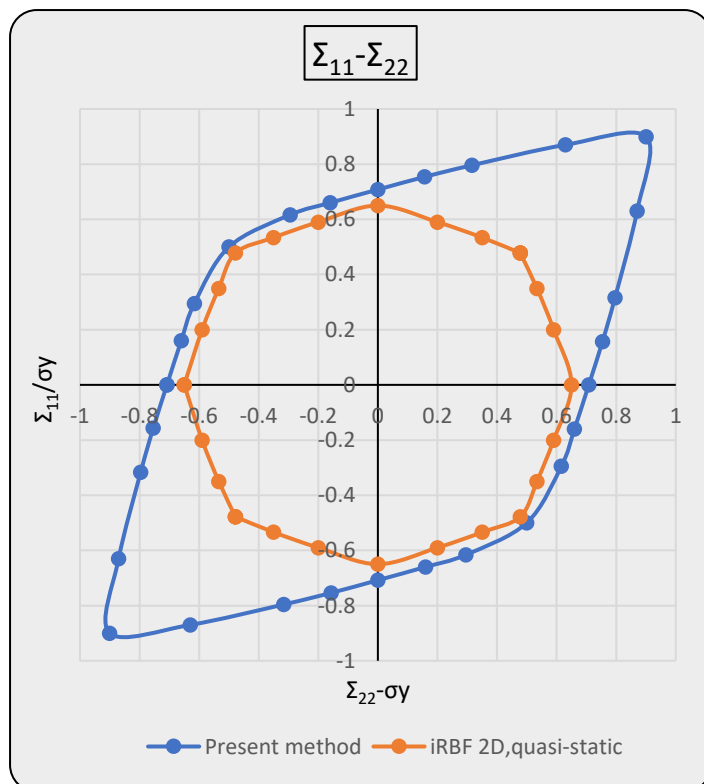
**Εικόνα 6.15** Εντατική κατάσταση τη στιγμή έναρξης της επαυξητικής κατάρρευσης για διάφορες τιμές της διαμέτρου της τρύπας



### 6.4.8. Σύγκριση των αποτελεσμάτων της επαυξητικής κατάρρευσης με παλαιότερες μετρήσεις

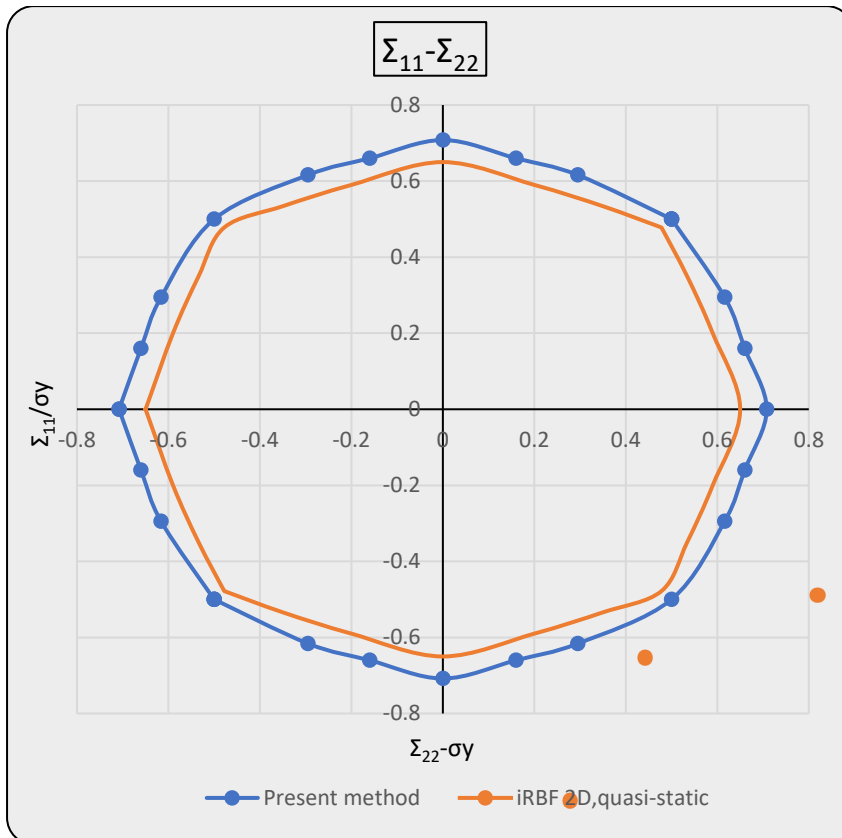
Το παράδειγμα της τετραγωνικής πλάκας με μία τρύπα στο κέντρο της έχει λυθεί και ερευνηθεί στο παρελθόν από πολλούς επιστήμονες. Η γεωμετρία της κατασκευής καθώς επίσης και τα χαρακτηριστικά του υλικού αντλήθηκαν από το δημοσίευμα των Phuc L.H.Ho, Cahn V.le με τίτλο ‘A stabilized iRBF mesh-free method for quasi-lower bound shakedown analysis of structures’ [1]. Στο εν λόγω άρθρο παρουσίασαν μία quasi-static φόρμα, βασισμένη σε μία integrated radial basis function (iRBF) και στον κωνικό προγραμματισμό με απευθείας ανάλυση σε 2D και 3D πρόβλημα. Η iRBF συνάρτηση σχήματος σταθεροποιήθηκε χρησιμοποιώντας μία stabilized conforming nodal integration (SCNI) μέθοδο. Εξισώσεις ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες και κριτήρια διαρροής σχετικά με τις εναπομένουσες τάσεις εφαρμόζονται σε διάσπαρτους κόμβους χωρίς κάποια ιδιαίτερη προσοχή. Οι ασφαλείς πολλαπλασιαστές φορτίου καθορίζονται από την επίλυση του κωνικού προβλήματος βελτιστοποίησης από το στατικό θεώρημα της επαυξητικής κατάρρευσης.

Το Διάγραμμα 6.30 αναπαριστά το ασφαλές χωρίο των ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}, \Sigma_{22}$  έναντι της επαυξητικής κατάρρευσης τόσο με τη παρούσα μέθοδο (μπλε χρώμα) όσο και με τη μέθοδο των ανωτέρω αρθρογράφων (πορτοκαλί χρώμα). Παρατηρούμε εκ πρώτης όψεως ότι οι διαφορές ανάμεσα στα δύο διαγράμματα είναι πολύ μεγάλες. Ωστόσο, θα πρέπει να αναλογιστούμε το γεγονός ότι στην παρούσα μέθοδο τα φορτία ασκούνται με αναλογικό τρόπο στην κατασκευή μας. Εν αντίθεση, τα φορτία στο παράδειγμα των Phuc L.H.Ho, Cahn V.le ασκούνται με τρόπο που δεν υφίσταται κάποια εξάρτηση μεταξύ τους



**Διάγραμμα 6.19** Ασφαλές χωρίο ομογενοποιημένων τάσεων έναντι φορτίου επαυξητικής κατάρρευσης με την παρούσα μέθοδο (αναλογική φόρτιση) και την iRBF

Επομένως, για να είναι αντιπροσωπευτική η σύγκριση ανάμεσα στις δύο μεθόδους κατασκευάζουμε το Διάγραμμα 6.20 στο οποίο έχουμε λάβει υπ' όψη μας το σενάριο της ανεξάρτητων φορτίων επιβολής στην παρούσα μέθοδο. Τώρα, παρατηρούμε ότι οι αποκλίσεις ανάμεσα στις δύο μεθόδους είναι ιδιαίτερα μικρές. Για δρόμο φόρτισης  $U_1/U_2 = 0$  έχουμε  $(0,7-0,65)/0,65 = 7,7\%$  απόκλιση ενώ για  $U_1/U_2 = 1$  έχουμε  $(0,5-0,478)/0,478 = 4,6\%$  απόκλιση. Προφανώς, το ασφαλές χωρίο παρουσιάζει συμμετρία ως προς τους κατακόρυφους άξονες λόγω της ανεξαρτησίας των φορτίων επιβολής.



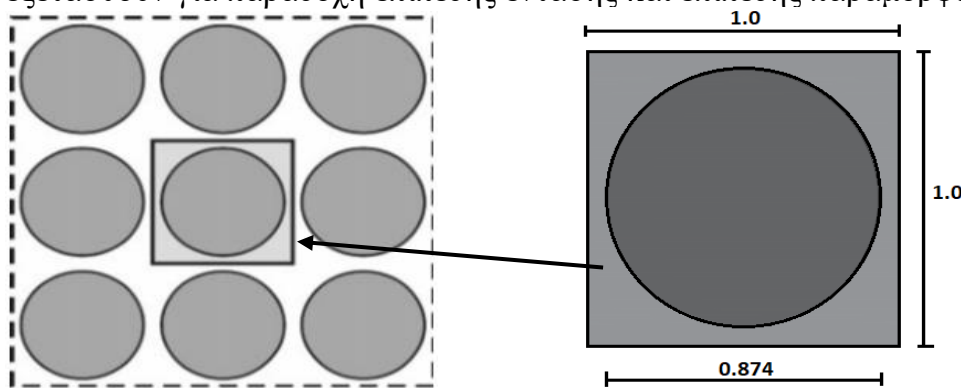
**Διάγραμμα 6.20** Ασφαλές χωρίο ομογενοποιημένων τάσεων έναντι φορτίου επαυξητικής κατάρρευσης με την παρούσα μέθοδο (ανεξάρτητα φορτία) και την iRBF

## 6.5 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ RVE ΜΕ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΟ ΥΛΙΚΟ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)

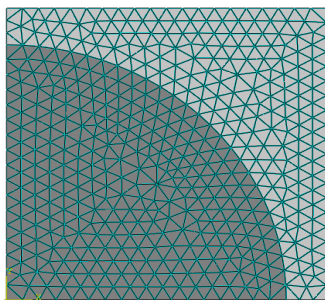
Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την ελαστοπλαστική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού με μεταλλική μήτρα Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. Θα επικεντρωθούμε στην εύρεση του χωρίου διαρροής, καταρρεύσεως και επαυξητικής κατάρρευσης.

### 6.5.1 Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων

Υιοθετούμε ένα τετραγωνικό μοτίβο περιοδικότητας, όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.15a. Έτσι λοιπόν, ορίζουμε για μήτρα ένα τετραγωνικό RVE με μία τρύπα στο κέντρο του, και ενσωματώνουμε ένα υλικό με διαφορετικά χαρακτηριστικά από εκείνο της μήτρας, όπως αυτά επισημαίνονται στον Πίνακα 6.3. Ο δεσμός (πρόσφυση) ανάμεσα στα δύο συστατικά θα θεωρηθεί ιδανικός. Η γεωμετρία του RVE απεικονίζεται στην Εικόνα 6.15. Επιλέγεται μήκος πλευράς  $L=1,0\mu\text{m}$  πάχος στοιχείου  $t=1,0\mu\text{m}$ . Το ενσωματωμένο υλικό έχει κυκλική διατομή η οποία καταλαμβάνει το 60% της συνολικής διατομής του RVE. Λόγω διπλής συμμετρίας επιλέγουμε να λύσουμε μόνο το  $\frac{1}{4}$  του φορέα όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.16. Το μοντέλο μας διακριτοποιείται σε 489 κόμβους και 896 επίπεδα τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία, τα οποία θα εξετασθούν για παραδοχή επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωσης.



Εικόνα 6.16 (a) Τετραγωνικό μοτίβο περιοδικότητας, (b) γεωμετρία του RVE



Εικόνα 6.17 Διακριτοποίηση του RVE σε 896 επίπεδα τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία τα οποία θα εξετασθούν τόσο για την περίπτωση που υπόκεινται σε επίπεδη ένταση όσο και σε επίπεδη παραμόρφωση

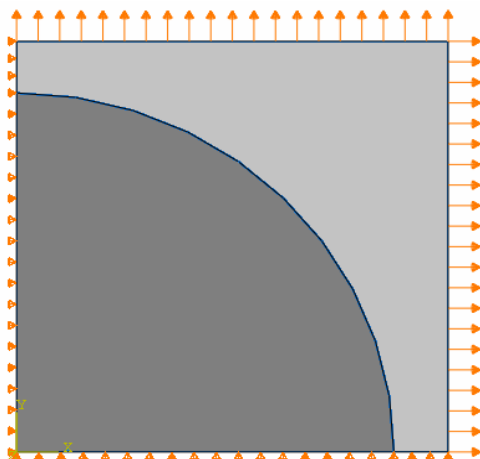
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ	ΜΗΤΡΑ	ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΟ ΥΛΙΚΟ
μέτρο ελαστικότητας E	200GPa	370 GPa
λόγος poisson ν	0,3	0,3
τάση διαρροής $\sigma_y$	200MPa	ελαστική συμπεριφορά
μέτρο κράτυνσης η	0	-

Πίνακας 6.3 Χαρακτηριστικά υλικού μήτρας και ενσωματωμένου υλικού

### 6.5.2. Συνοριακές συνθήκες

Οι Συνοριακές συνθήκες που επιβάλλουμε στο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων μας απεικονίζονται στην Εικόνα 6.17.

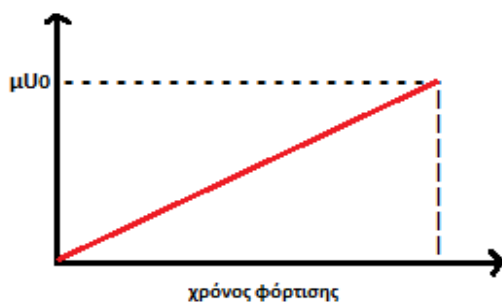
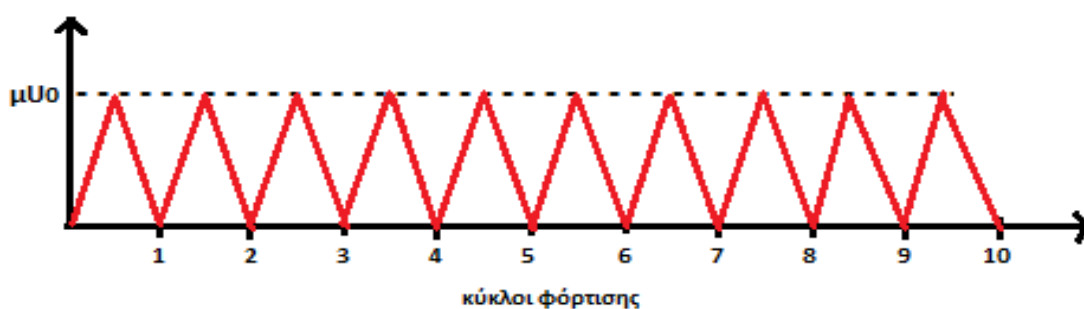
- Συνθήκες στήριξης : λόγω συμμετρίας του αρχικού φορέα επιβάλλουμε κυλίσεις στους κόμβους της κάτω και αριστερής ακμής του στοιχείου μας.
- Επιβαλλόμενα φορτία : επιβάλλουμε ομοιόμορφες μετακινήσεις (με  $U_0 = 0.0001 \mu\text{m}$ ) στους κόμβους της πάνω και δεξιά ακμής του στοιχείου. Επιλέχθηκε αυτός ο τρόπος φόρτισης ('displacement control') της κατασκευής διότι έπειτα από έλεγχο προέκυψε ότι η επιβολή δυνάμεων προκαλούσε αστάθειες στην υπολογιστική διαδικασία. Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε για τους δρόμους φόρτισης οι οποίοι παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον Πίνακα 6.4. Ο δρόμος φόρτισης σε συνάρτηση με το χρόνο απεικονίζεται γραφικά στο Εικόνα 6.18b για την περίπτωση εύρεσης του οριακού φορτίου και του φορτίου διαρροής (μονοτονική φόρτιση) και στο Σχήμα Εικόνα 6.18a για την εύρεση του φορτίου σταθεροποίησης (ανακυκλιζόμενη φόρτιση).



Εικόνα 6.18 Συνοριακές συνθήκες

Γωνία (μοίρες)	Λόγος $U_2/U_1$	Λόγος $U_1/U_2$
-45°	-1	-1
-38,7°	-0,8	-1,25
-33,7°	-0,67	-1,5
-26,6°	-0,5	-2
0°	0	0
5,7°	0,1	10
26,6°	0,5	2
45°	1	1

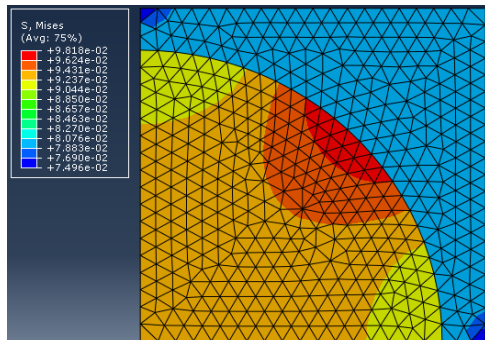
Πίνακας 6.4 Δρόμοι φόρτισης



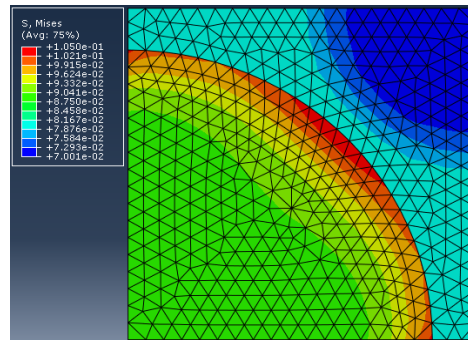
Εικόνα 6.19 Δρόμοι φόρτισης για την εύρεση της επιφάνειας (α) του φορτίου σταθεροποίησης και (β) του φορτίου καταρρεύσεως και διαρροής

### 6.5.3. Ανάλυση – Εύρεση επιφάνειας φορτίου καταρρεύσεως

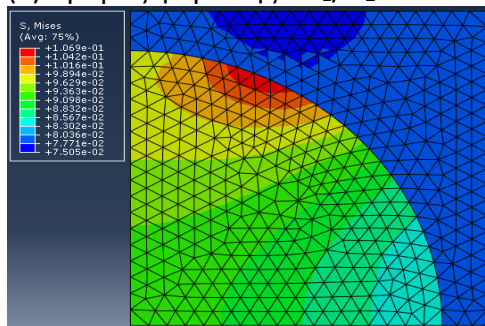
Στην Εικόνα 6.20 παρουσιάζεται η εντατική κατάσταση, για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης, τη στιγμή επιβολής του φορτίου καταρρεύσεως. Τα a,c,e,g (αριστερά) αναφέρονται στην περίπτωση επίπεδης-έντασης ενώ τα b,d,f,h (δεξιά) στην περίπτωση επίπεδης-παραμόρφωσης.



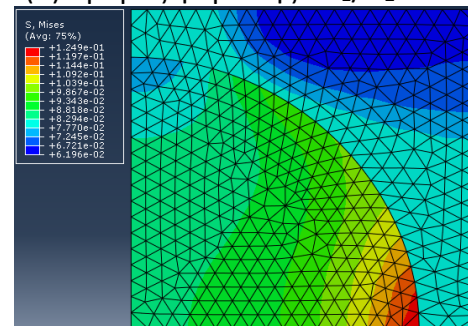
(a) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



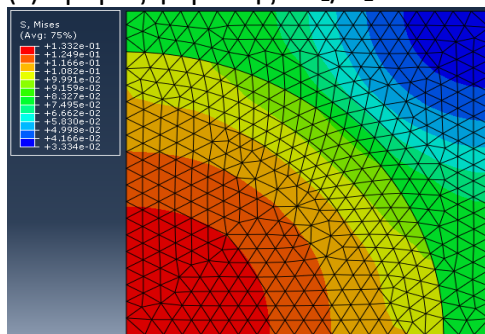
(b) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



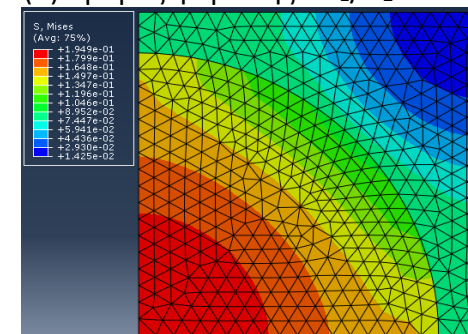
(c) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



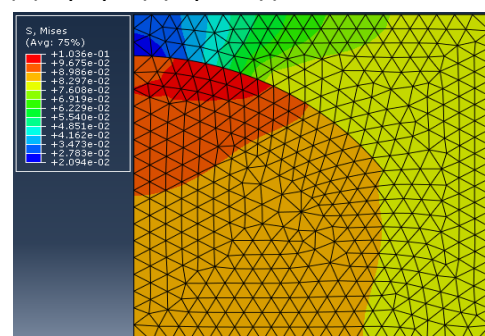
(d) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



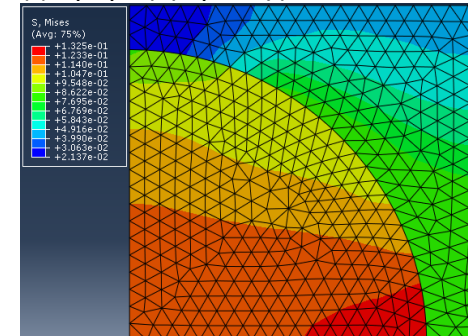
(e) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



(f) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



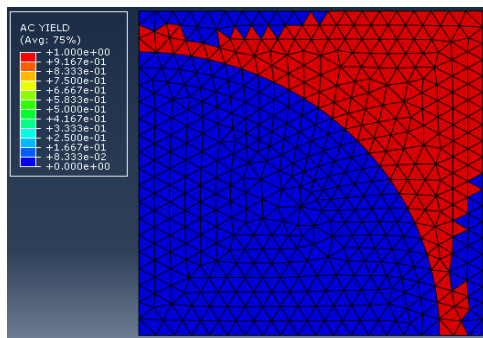
(g) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$



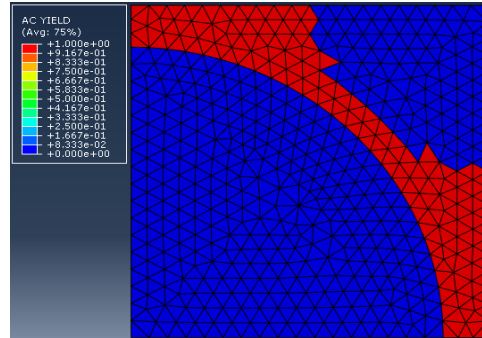
(h) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$

**Εικόνα 6.20** Εντατική κατάσταση τη στιγμή επιβολής του φορτίου κατάρρευσης για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης

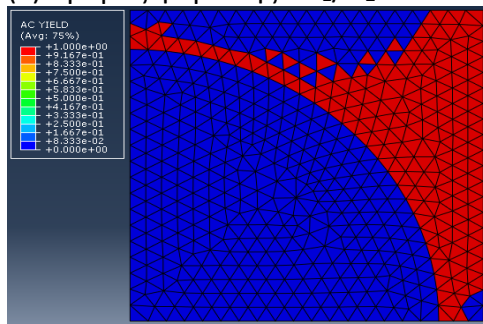
Παρατηρούμε από την Εικόνα 6.21 ότι για όλους τους δρόμους φόρτισης σχηματίζονται κρίσιμες ζώνες, ή αλλιώς ζώνες συγκέντρωσης τάσεων. Οι ζώνες αυτές δεν είναι ευδιάκριτες (σε σύγκριση με το προηγούμενο πρόβλημα 6.1) γι' αυτό και στην Εικόνα 6.20 γίνεται αναπαράσταση των πεπερασμένων στοιχείων τα οποία έχουν διαρρεύσει και σχηματίζουν τις κρίσιμες αυτές ζώνες (κόκκινο χρώμα) για επίπεδη ένταση (a,c,e,g αριστερά) και επίπεδη παραμόρφωση (b,d,f,h δεξιά) αντίστοιχα .



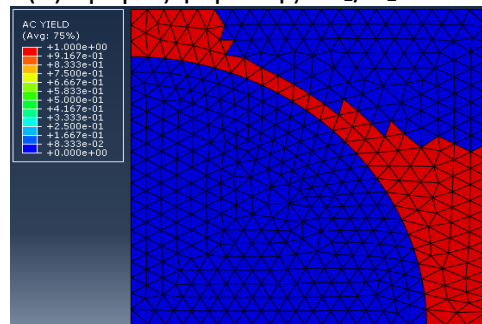
(a) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



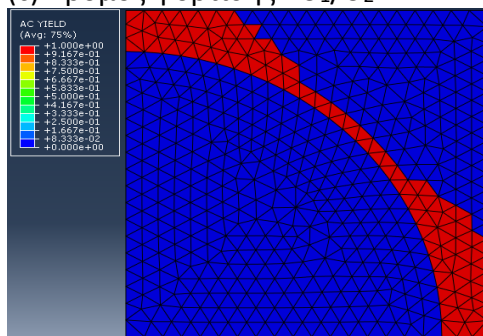
(b) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



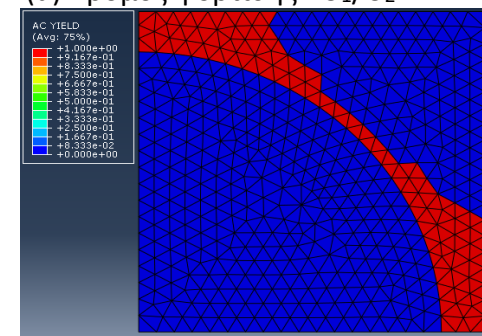
(c) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



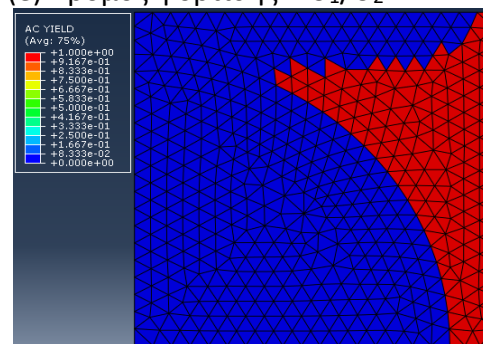
(d) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



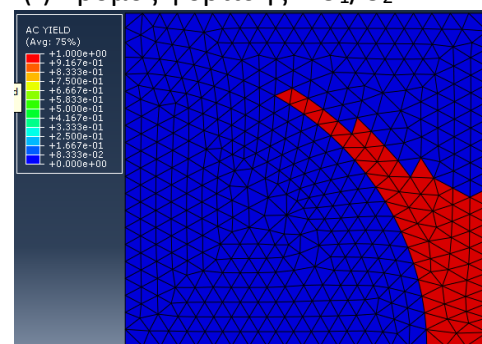
(e) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



(f) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



(g) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$



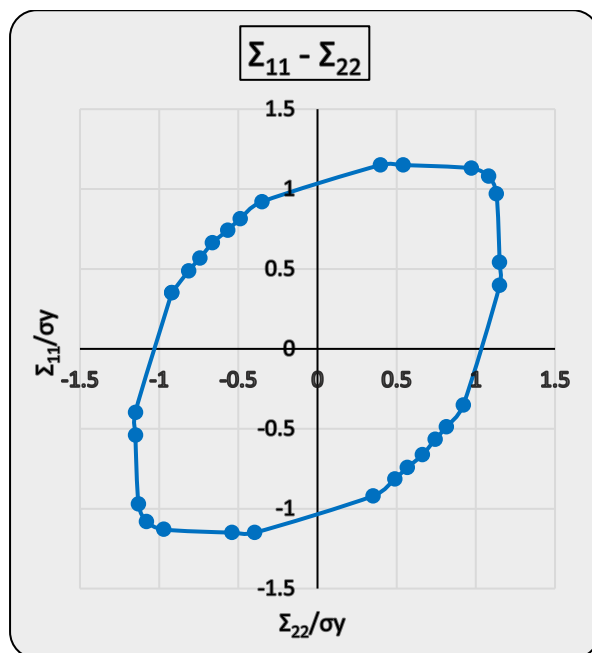
(h) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$

**Εικόνα 6.21** Εντατική κατάσταση τη στιγμή επιβολής του φορτίου κατάρρευσης για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης

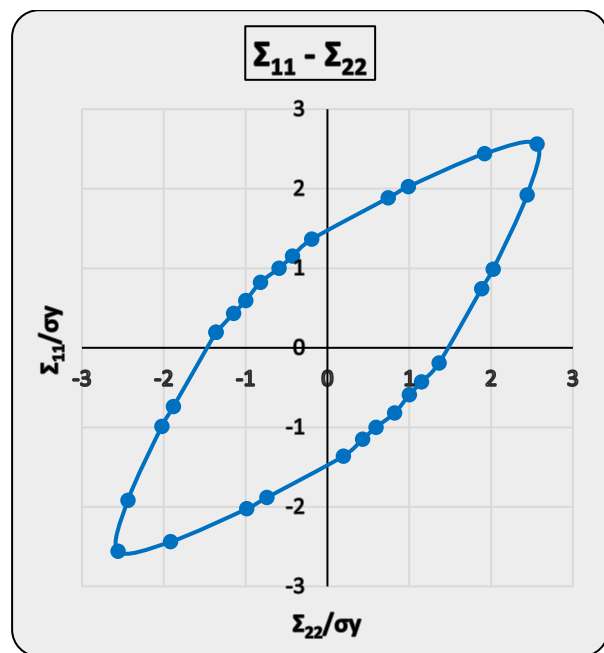
Παρατηρούμε ότι για όλους τους δρόμους φόρτισης υπάρχει μία συσχέτιση μεταξύ επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωση με την πρώτη να δίνει μεγαλύτερη καταπόνηση κατά τη δημιουργία του μηχανισμού. Ειδικά στην περίπτωση όπου ο δρόμος φόρτισης  $U_1/U_2 = -1$  η εντατική κατάσταση ανάμεσα στις δύο αναλύσεις εμφανίζει ελάχιστες αποκλίσεις. Ανάλογα φυσικά με το δρόμο φόρτισης παρατηρείται διαφορετική κρίσιμη ζώνη.

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για τους υπόλοιπους συνδυασμούς φόρτισης και εισάγοντας τα δεδομένα μας στον αλγόριθμο που προγραμματίστηκε με τη βοήθεια του προγράμματος excel προκύπτει το Διάγραμμα 6.2 με τις ομογενοποιημένες τάσεις  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$  κανονικοποιημένες ως προς την τάση διαρροής  $\sigma_y$  του στοιχείου.

Παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά ανάμεσα στις υπό εξέταση περιπτώσεις επίπεδης έντασης-παραμόρφωσης παρουσιάζει έντονες διαφορές. Για τους συνδυασμούς μακροσκοπικών τάσεων  $\Sigma_{11}/\Sigma_{22}$  που τείνουν προς την τιμή -1 τόσο περιοριζόμαστε ως προς την ασφάλεια του RVE με την απόκλιση ανάμεσα στις δύο μεθόδους να είναι ελάχιστη. Για συνδυασμούς  $\Sigma_{11}/\Sigma_{22}$  που τείνουν προς την τιμή 1 λαμβάνουμε την ευμενέστερη κατάσταση με διπλάσια περίπου ικανότητα στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης με αποτέλεσμα το ασφαλές χωρίο να γίνεται πιο ‘στενό’ έναντι του αντιστοίχου της επίπεδης-έντασης.



(a) Επίπεδη ένταση

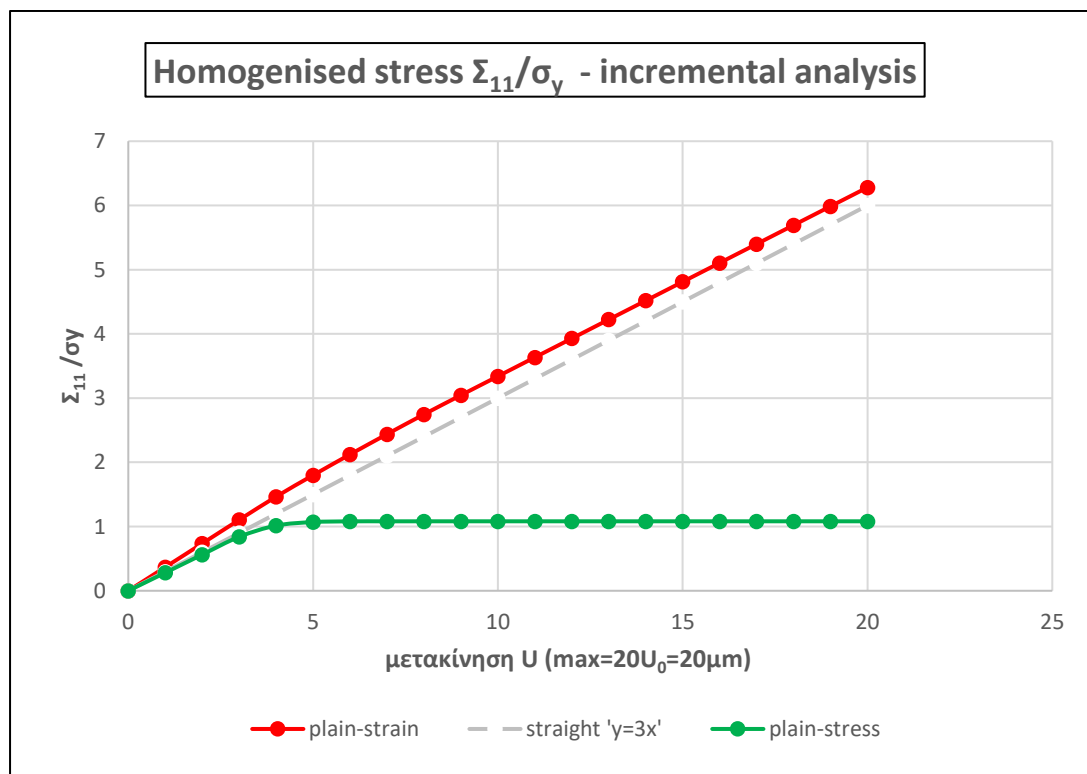


(b) Επίπεδη παραμόρφωση

**Διάγραμμα 6.21** Ασφαλές χωρίο μακροσκοπικών τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ , κανονικοποιημένων ως προς την τάση διαρροής  $\sigma_y = 80\text{MPa}$ , έναντι οριακού φορτίου για (a) επίπεδη ένταση, (b) επίπεδη παραμόρφωση.

### 6.5.3.1. Συγκρίσεις ανάμεσα σε επίπεδη-ένταση και επίπεδη-παραμόρφωσης

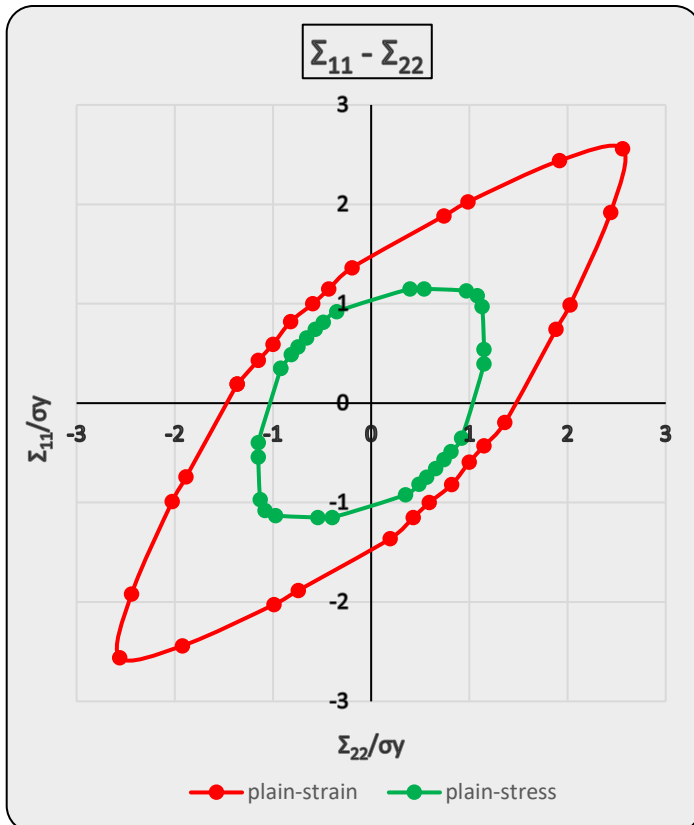
Στο Διάγραμμα 6.22 απεικονίζονται οι ομογενοποιημένες τάσεις  $\Sigma_{11}$ , κανονικοποιημένες ως προς τη τάση διαρροής  $\sigma_y$  σε συνάρτηση με τη μετακίνηση του δρόμου φόρτισης  $U_1/U_2=1$  που επιβάλλεται σε 20 επαυξητικά βήματα με  $\max U = 20U_0 = 20\mu\text{m}$ . Η ανάλυση αυτή πραγματοποιήθηκε για επίπεδη παραμόρφωση και για επίπεδη ένταση. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση επίπεδων-παραμορφώσεων (κόκκινο χρώμα) η τάση συνεχώς αυξάνεται χωρίς να διευκρινίζεται ένα ανώτατο όριο. Με γκρι χρώμα ορίζεται η ευθεία  $y=3x$  η οποία έχει έρθει ως βοηθητική για να τονίσει το γεγονός ότι η κόκκινη γραμμή είναι καμπύλη, επομένως διαθέτει έναν ελαστικό και έναν πλαστικό της κλάδο, ασχέτως αν αυτό δε είναι εύκολα διακριτό. Με πράσινο χρώμα αναπαρίσταται η καμπύλη που έχει προκύψει για την περίπτωση της επίπεδης έντασης. Βλέπουμε ότι μέχρι τη μετακίνηση  $U_0=4\mu\text{m}$  το RVE συμπεριφέρεται γραμμικά ελαστικά, ενώ για μεγαλύτερες μετακινήσεις αρχικά διαρρέει και στη συνέχεια αποκτά ένα ανώτατο όριο στην τιμή  $\Sigma_{11}\approx 1,1\text{MPa}$ . Με άλλο λόγια, συμπεραίνουμε ότι για την περίπτωση επίπεδων-παραμορφώσεων ο μοναδικός 'ασφαλής', ωστόσο 'προσεγγιστικός', τρόπος εύρεσης του οριακού φορτίου είναι μέσω των κρίσιμων ζωνών που αναπαρίστανται σχηματικά στην Εικόνα 6.19.



**Διάγραμμα 6.22** Σχέση ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}$  – μετακίνησης  $U_0$  για τις περιπτώσεις επίπεδης-παραμόρφωσης και επίπεδης έντασης



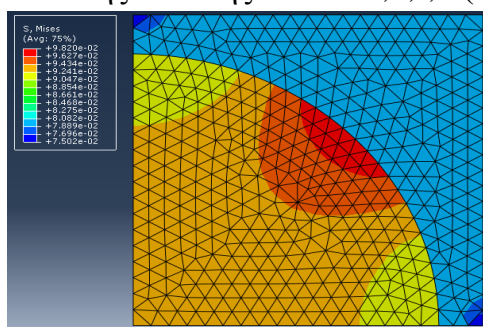
Τέλος, αναπαριστούμε σε ένα Διάγραμμα 6.23, το ασφαλές χωρίο ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}/\sigma_y$  και  $\Sigma_{22}/\sigma_y$  έναντι οριακού φορτίου, για τις περιπτώσεις επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωσης. Παρατηρούμε ότι η περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης εσωκλείει την αντίστοιχη της επίπεδης έντασης. Η απόκλιση μεταξύ των δύο περιπτώσεων είναι πολύ μεγάλη και γίνεται ιδιαίτερα αισθητή για δρόμους φόρτισης  $U_1/U_2$  που τείνουν στο 1,  $[(2,56-1,08)/1,08 = 137\%$  απόκλιση]). Όσο ο δρόμος φόρτισης τείνει προς την τιμή  $U_1/U_2 = -1$  τόσο η απόκλιση μικραίνει, χωρίς όμως να εξαλείφεται  $[(0,82-0,656)/0,656 = 25\%$  απόκλιση].



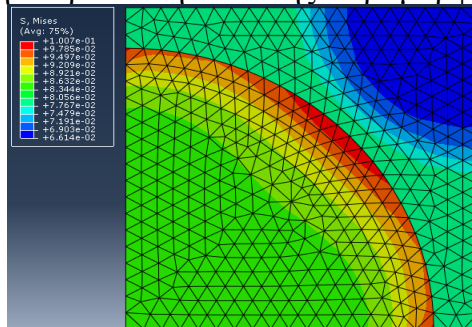
**Διάγραμμα 6.23** Ασφαλές χωρίο ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$  έναντι οριακού φορτίου, για την περίπτωση επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωσης.

### 6.5.4. Ανάλυση – Εύρεση επιφάνειας φορτίου σταθεροποίησης

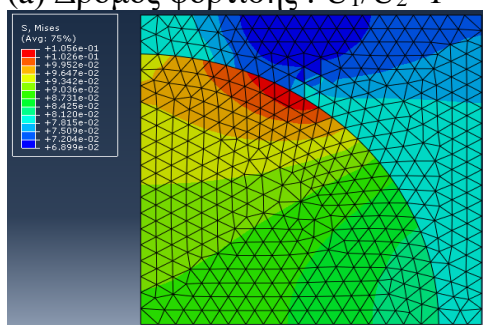
Στην Εικόνα 6.22 παρουσιάζεται η εντατική κατάσταση, για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης, τη στιγμή που παύει το RVE να βρίσκεται σε κατάσταση σταθεροποίησης (elastic shakedown) και σηματοδοτείται η έναρξη της επαυξητικής κατάρρευσης (ratchetting). Τα a,c,e,g (αριστερά) αναφέρονται στην περίπτωση επίπεδης-έντασης ενώ τα b,d,f,h (δεξιά) στην περίπτωση επίπεδης-παραμόρφωσης.



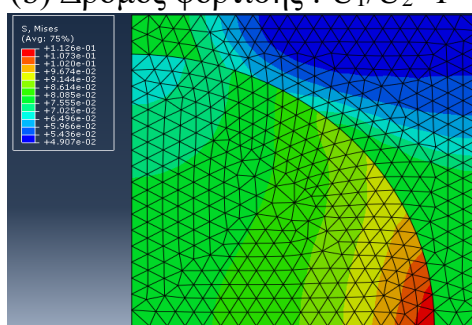
(a) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



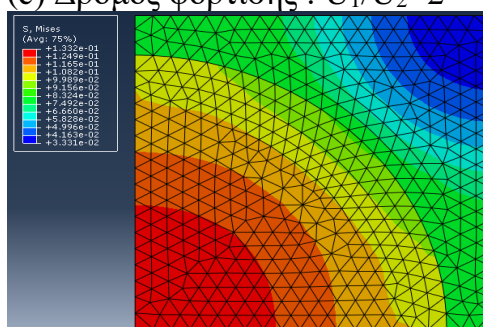
(b) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



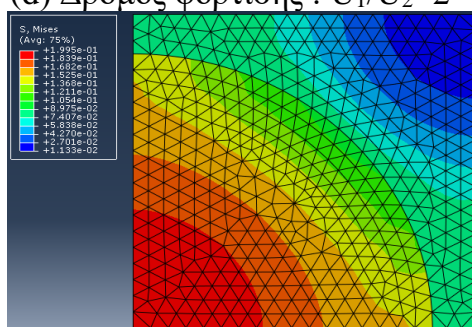
(c) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



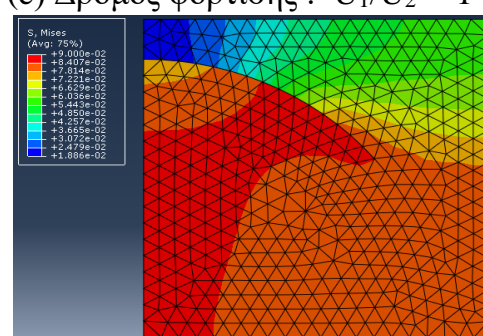
(d) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



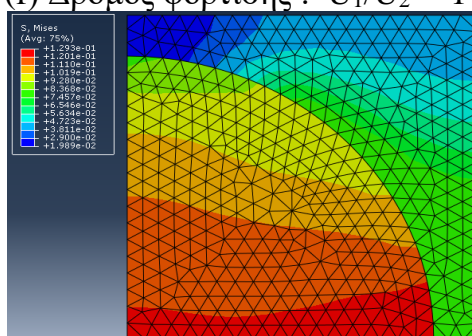
(e) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



(f) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



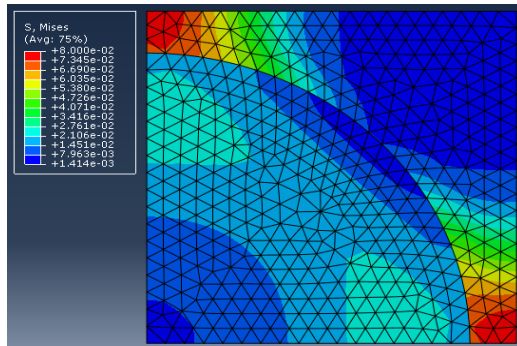
(g) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$



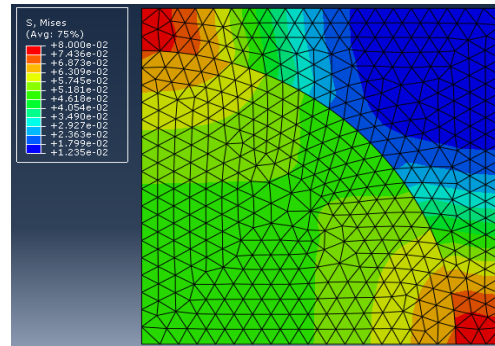
(h) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$

**Εικόνα 6.22** Εντατική κατάσταση τη στιγμή επιβολής του φορτίου κατάρρευσης για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης

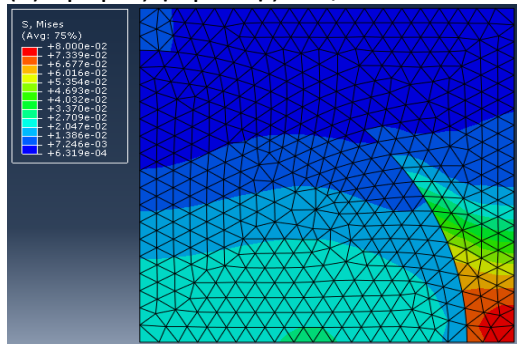
Στην Εικόνα 6.23 παρουσιάζεται η εντατική κατάσταση, για τους τέσσερις ανωτέρω δρόμους φόρτισης, τη στιγμή που τελειώνει ο 1<sup>ος</sup> κύκλος φόρτισης-αποφόρτισης. Τα a,c,e,g (αριστερά) αναφέρονται στην περίπτωση επίπεδης-έντασης ενώ τα b,d,f,h (δεξιά) στην περίπτωση επίπεδης-παραμόρφωσης.



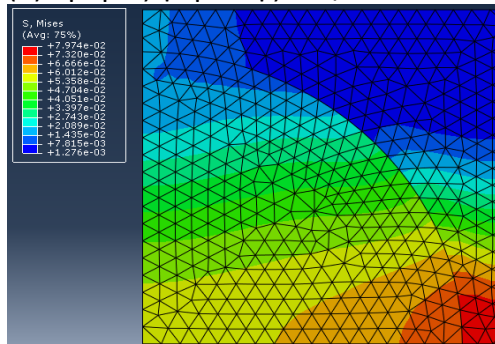
(α) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



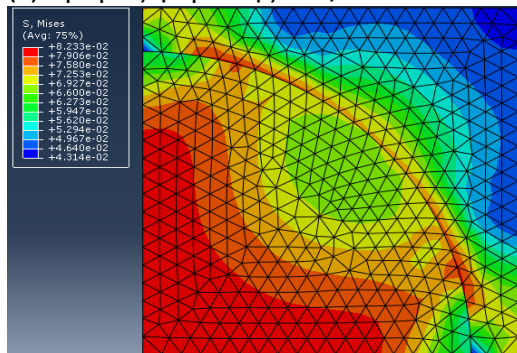
(β) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



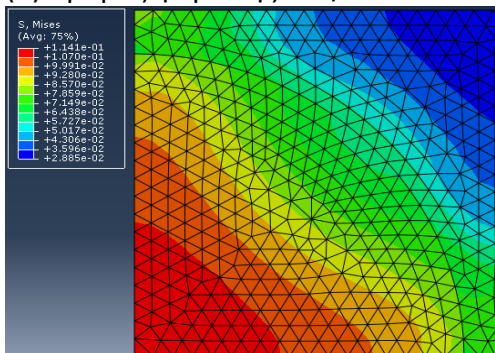
(γ) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



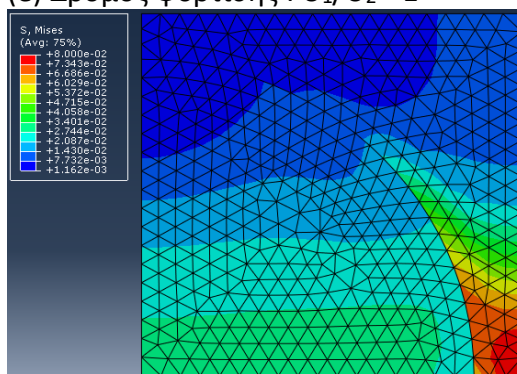
(δ) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



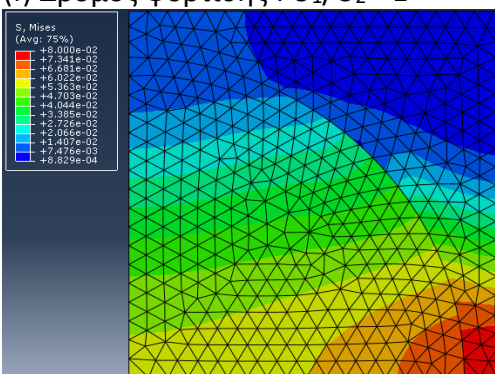
(ε) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



(ς) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



(ζ) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$

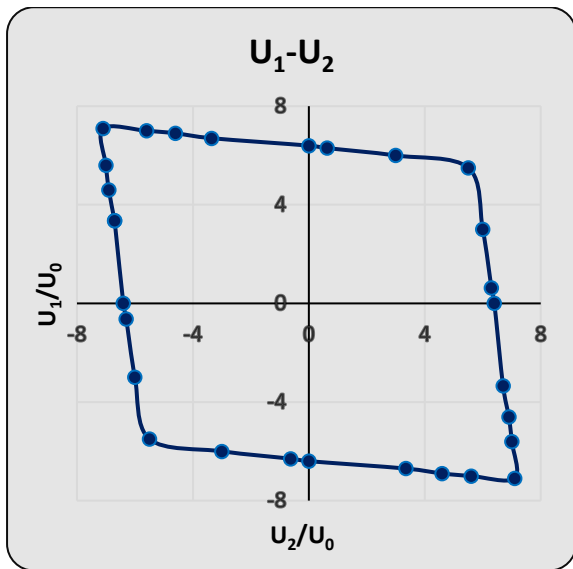


(η) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$

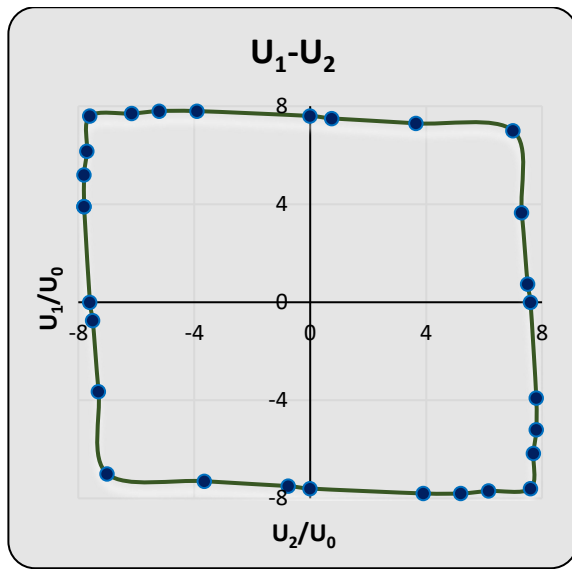
**Εικόνα 6.23** Εντατική κατάσταση τη στιγμή επιβολής του φορτίου διαρροής για τους δρόμους φόρτισης (α)  $U_1/U_2=1$  , (β)  $U_1/U_2=2$  , (γ)  $U_1/U_2=-1$  , (δ)  $U_1/U_2=0$

Παρατηρούμε από την Εικόνα 6.23 ότι για όλους τους δρόμους φόρτισης σχηματίζονται οι ζώνες συγκέντρωσης τάσεων. Οι ζώνες αυτές παρουσιάζουν έντονες διαφορές ανάμεσα στις δύο εξεταζόμενες περιπτώσεις, επίπεδης έντασης-παραμόρφωσης όσο ο δρόμος φόρτισης  $U_1/U_2$  τείνει στη μονάδα. Για δρόμους φόρτισης που τείνουν στο -1 η κρίσιμες αυτές ζώνες παρουσιάζουν παρόμοιες συμπεριφορές. Ανάλογα με το δρόμο φόρτισης παρατηρείται διαφορετική κρίσιμη ζώνη. Εδώ, θα πρέπει να σημειωθεί, ότι η τάσεις που καταπονούν το ενσωματωμένο υλικό ξεπερνούν σε ορισμένα πεπερασμένα στοιχεία την τάση διαρροής της μήτρας ( $\sigma_y=80\text{MPa}$ ). Πράγμα λογικό καθόσον η συμπεριφορά του ενσωματωμένου υλικού είναι γραμμική ελαστική.

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για τους υπόλοιπους συνδυασμούς φόρτισης του Πίνακα 6.4 προκύπτει στο Διάγραμμα 6.24 η επιφάνεια που οριοθετεί τις 'επιτρεπόμενες' επιβαλλόμενες μετατοπίσεις έναντι της επαυξητικής κατάρρευσης. Αν ένας συνδυασμός φόρτισης  $U_1, U_2$  που επιβάλλω στην κατασκευή μου βρίσκεται εκτός του χωρίου τότε το RVE αστοχεί. Παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά ανάμεσα στις υπό εξέταση περιπτώσεις επίπεδης έντασης-παραμόρφωσης δεν είναι πολύ διαφορετική. Στην περίπτωση (b) επίπεδης-παραμόρφωσης, παρατηρούμε ότι ασφαλές χωρίο προσεγγίζει ένα τετραγωνικό σχήμα με κέντρο την αρχή των αξόνων. Στην περίπτωση (a) επίπεδης-έντασης η συμπεριφορά είναι λίγο διαφορετική. Πιο συγκεκριμένα, για δρόμους φόρτισης που τείνουν στο -1 τόσο μεγαλύτερες είναι οι επιτρεπόμενες μετακινήσεις που μπορώ να επιβάλλω, ενώ η συμμετρικότητα εκτείνεται μεταξύ των τεταρτημόριων 1-3 και 2-4. Εδώ, θα πρέπει να σημειωθεί ότι ανάστροφη συμπεριφορά εντοπίστηκε και στο προηγούμενο πρόβλημα (Παράδειγμα 4.1).



(a) Επίπεδη ένταση

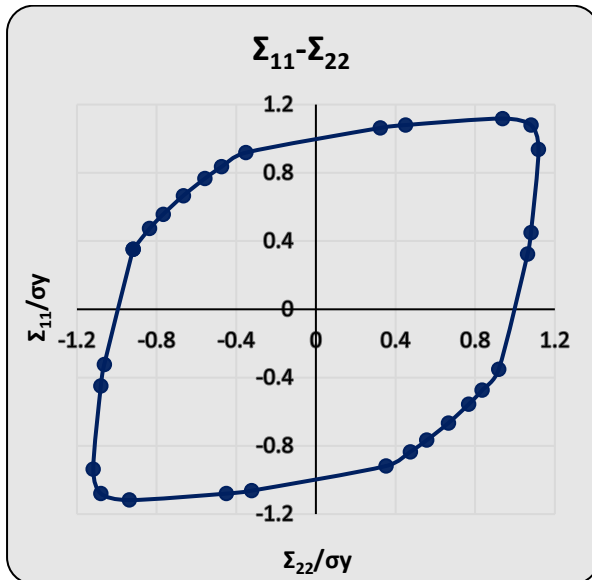


(b) Επίπεδη παραμόρφωση

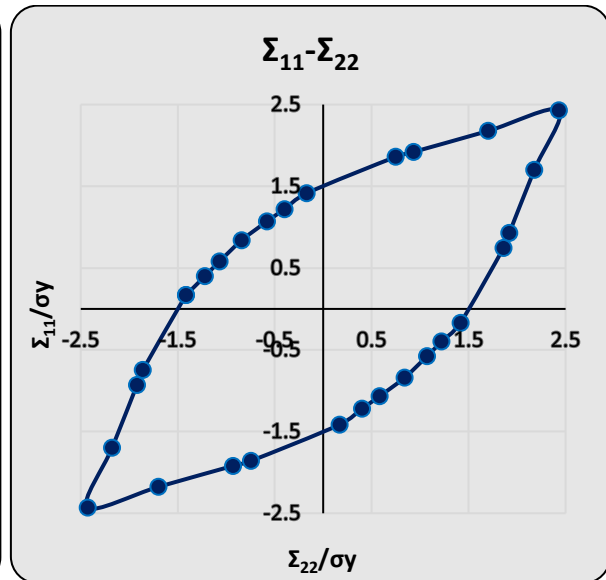
**Διάγραμμα 6.24** Επιτρεπόμενη επιφάνεια επιβαλλόμενων μετακινήσεων, κανονικοποιημένων ως προς την μετακίνηση  $U_0=0.0001\mu\text{m}$  έναντι επαυξητικής κατάρρευσης

Στην Παράγραφο 4.1.3 αναφέραμε το γεγονός ότι η παραπάνω διερεύνηση ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς του στοιχείου μας πραγματοποιήθηκε σε επίπεδο μικροκλίμακας. Το ζήτημά μας ωστόσο είναι να προσδιορίσουμε το ασφαλές χωρίο σε

επίπεδο μακροκλίμακας, μέσω της διαδικασίας της ομογενοποίησης. Τελικώς, προκύπτει το Διάγραμμα 6.25 με τις μακροσκοπικές τάσεις  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$  κανονικοποιημένες ως προς την τάση διαρροής  $\sigma_y$  του στοιχείου. Παρατηρούμε αρχικά, ότι στην περίπτωση (a) επίπεδης έντασης η καμπύλη που ορίζεται από το ασφαλές χωρίο είναι πιο ομαλή σε σχέση με την αντίστοιχη της (b) επίπεδης παραμόρφωσης. Επίσης, στην 2<sup>η</sup> περίπτωση βλέπουμε ότι για λόγο  $\Sigma_{11}/\Sigma_{22}=1$  τα όρια του χωρίου γίνονται πολύ ευμενέστερα ( $\Sigma_{11}=\Sigma_{22}\approx 2.4\sigma_y$  έναντι του  $\Sigma_{11}=\Sigma_{22}\approx 1.10\sigma_y$ ).



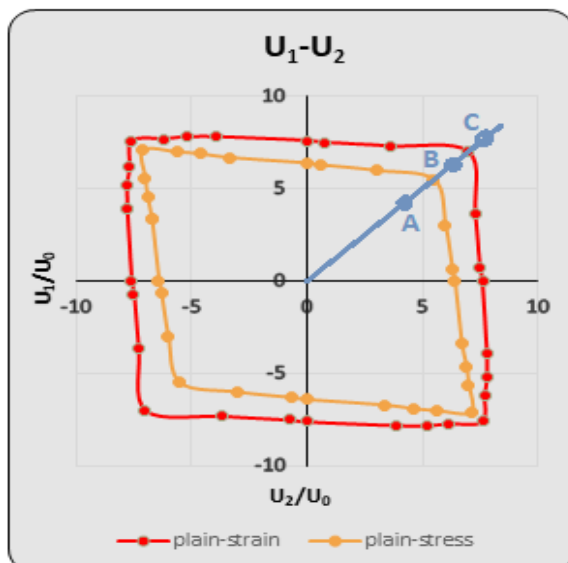
(a) Επίπεδη ένταση



(b) Επίπεδη παραμόρφωση

**Διάγραμμα 6.25** Ασφαλές χωρίο μακροσκοπικών τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ , κανονικοποιημένων ως προς την τάση διαρροής  $\sigma_y = 200\text{MPa}$ , έναντι επαυξητικής κατάρρευσης για (a) επίπεδη ένταση, (b) επίπεδη παραμόρφωση.

Στο Διάγραμμα 6.26 απεικονίζονται τα σημεία A, B, C εντός – εκτός του ασφαλούς χωρίου επιβαλλόμενων μετακινήσεων για την περίπτωση επίπεδης έντασης. Στόχος μας είναι να εξετάσουμε την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση που αναπτύσσεται σε κάθε μία εκ των καταστάσεων φόρτισης.

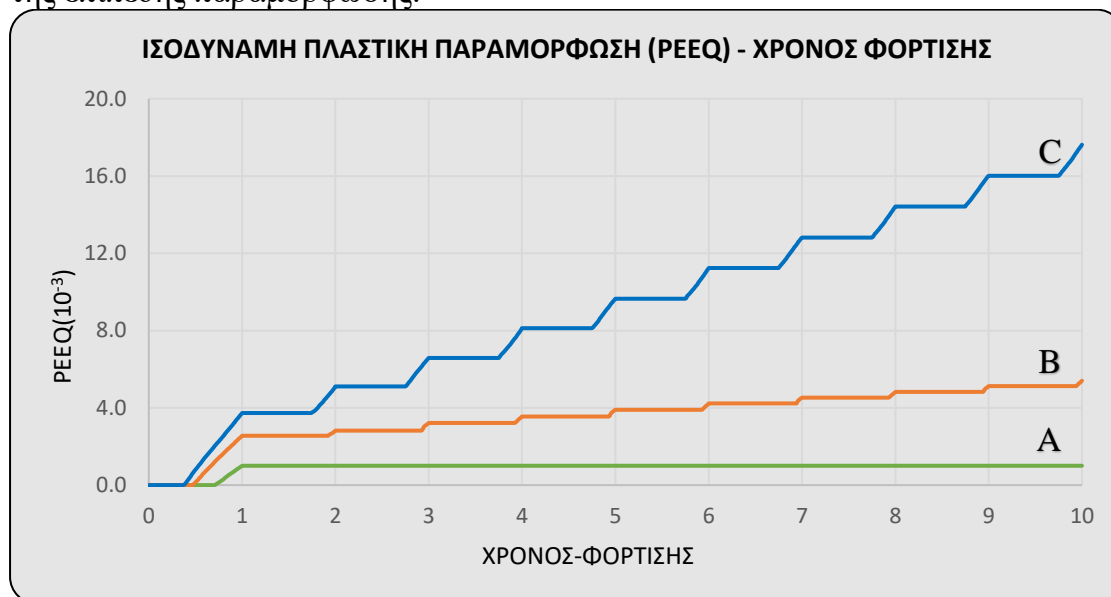


Κατάσταση φόρτισης	Λόγος $U_1/U_2$	Τιμή $U_1$
A	1,00	$4,00U_0$
B	1,00	$6,00U_0$
C	1,00	$7,50U_0$

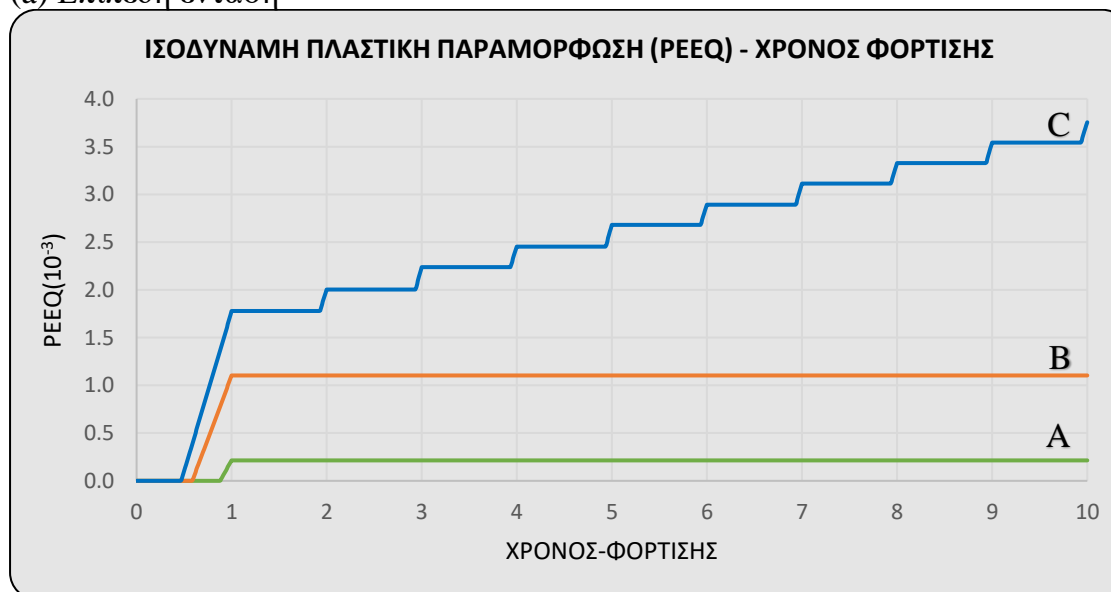
**Πίνακας 6.5** Τιμές των μετακινήσεων  $U_1$  για τις καταστάσεις φόρτισης A,B,C,D,

**Διάγραμμα 6.26** Καταστάσεις φόρτισης A,B,C,D, για τον προσδιορισμό της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης

Στα Διαγράμματα 6.27 a,b απεικονίζεται η σχέση ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης - χρόνου φόρτισης του πιο 'κρίσιμου' πεπερασμένου στοιχείου του RVE, για τις καταστάσεις φόρτισης A,B,C. Παρατηρούμε ότι για την κατάσταση φόρτισης A δεν λαμβάνει χώρα η επαυξητική κατάρρευση για καμία εκ των δύο υπό εξέταση περιπτώσεων. Για την κατάσταση φόρτισης B, βρισκόμαστε στα πρώτα στάδια της επαυξητικής κατάρρευσης, στην περίπτωση επίπεδης έντασης, ενώ στην περίπτωση επίπεδης-παραμορφωσης δεν έχει σηματοδοτηθεί ακόμα η έναρξή της, Για την κατάσταση φόρτισης C, παρατηρούμε ότι λόγω της επαυξητικής κατάρρευσης αναπτύσσονται έντονες προσαυξήσεις στις πλαστικές παραμορφώσεις και στις δύο περιπτώσεις. Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση επίπεδης έντασης, οι πλαστικές παραμορφώσεις είναι περίπου 4-5 φορές μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες της επίπεδης παραμόρφωσης.



(a) Επίπεδη ένταση



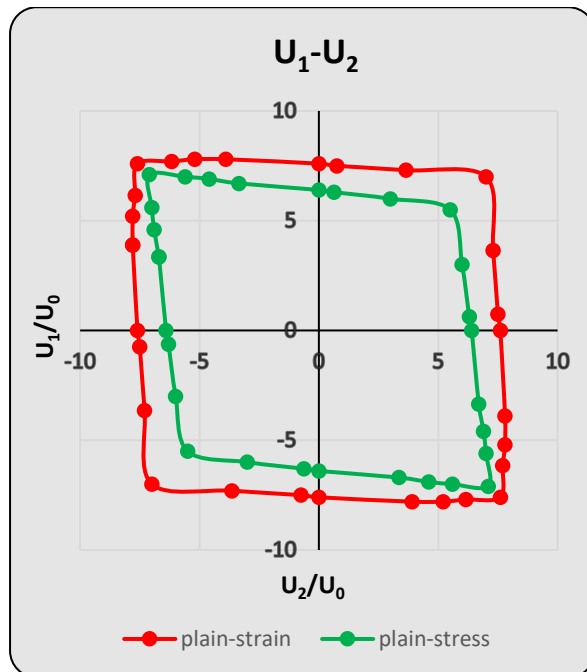
(b) Επίπεδη παραμόρφωση

**Διάγραμμα 6.27** Ισοδύναμη Πλαστική Παραμόρφωση – Χρόνος φόρτισης για το κρίσιμο πεπερασμένο στοιχείο της κατασκευής για τις καταστάσεις φόρτισης A,B,C

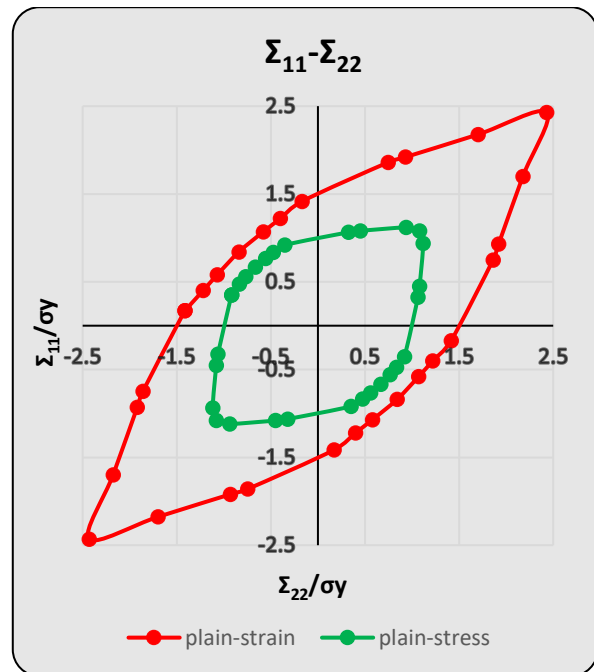
Τέλος, στο Διάγραμμα 6.28 αναπαρίσταται η σχέση (a) επιβαλλόμενων μετακινήσεων  $U_1, U_2$  και (b) ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}/\sigma_y, \Sigma_{22}/\sigma_y$  τόσο για την περίπτωση επίπεδης έντασης όσο και επίπεδης παραμόρφωσης. Παρατηρούμε ότι η περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης εσωκλείει την αντίστοιχη της επίπεδης έντασης τόσο σε επίπεδο ‘επιβαλλόμενων μετακινήσεων’ όσο και σε επίπεδο ομογενοποιημένων τάσεων.

Εξετάζοντας το Διάγραμμα 6.28 (a) βλέπουμε μικρή απόκλιση ανάμεσα στις δύο μεθόδους ειδικά στις περιπτώσεις όπου ο δρόμος φόρτισης  $U_1/U_2$  πλησιάζει την τιμή -1. Για τιμές του δρόμου φόρτισης  $U_1/U_2$  κοντά στο 1 η απόκλιση ολοένα και μεγαλώνει χωρίς ωστόσο να γίνεται ιδιαίτερα αισθητή.

Όσον αφορά το Διάγραμμα 6.28 (b) τα πράγματα είναι τελείως διαφορετικά. Η απόκλιση είναι σαφώς μεγαλύτερη και ιδιαίτερα αισθητή. Με άλλα λόγια τα ασφαλή όρια για την περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης είναι σαφώς ευνοϊκότερα. Ειδικά για το δρόμο φόρτισης  $U_1/U_2 = 1$  έχουμε  $(2,43 - 1,08) / 1,08 = 125\%$  απόκλιση. Όσο ο δρόμος φόρτισης τείνει προς την τιμή  $U_1/U_2 = -1$  τόσο η απόκλιση μικραίνει, χωρίς όμως να εξαλείφεται.



(a)

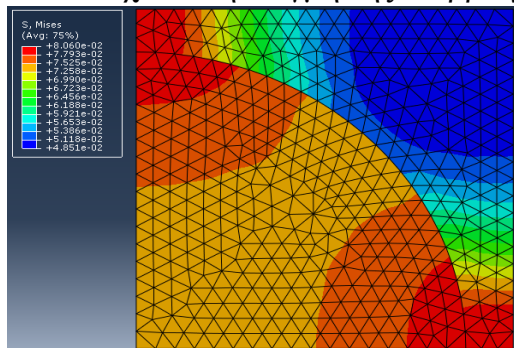


(b)

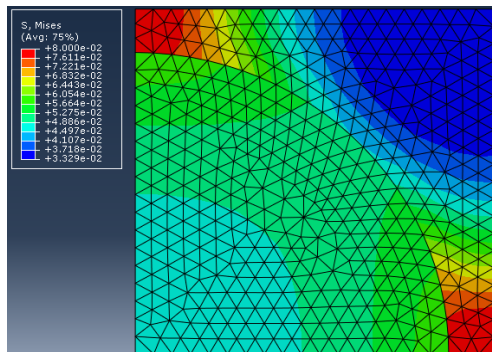
**Διάγραμμα 6.28** Ασφαλές χωρίο (a) επιβαλλόμενων μετακινήσεων και (b) ομογενοποιημένων τάσεων για την περίπτωση επίπεδης έντασης και παραμόρφωσης

### 6.5.5. Ανάλυση - Εύρεση επιφάνειας φορτίου διαρροής

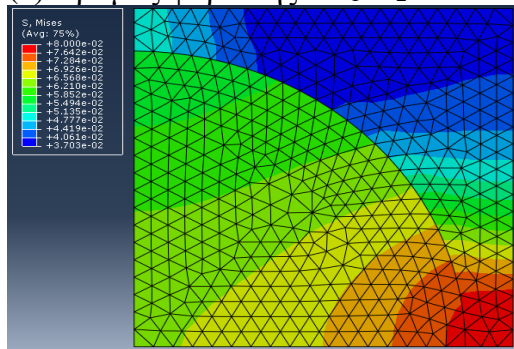
Θα πραγματοποιηθεί για ακόμα μία φορά λεπτομερής ανάλυση για τέσσερις διαφορετικούς δρόμους φόρτισης. Στην Εικόνα 6.24 φαίνεται η εντατική κατάσταση του στοιχείου τη στιγμή της διαρροής του.



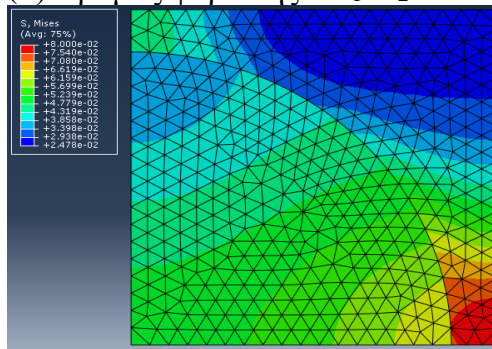
(α) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



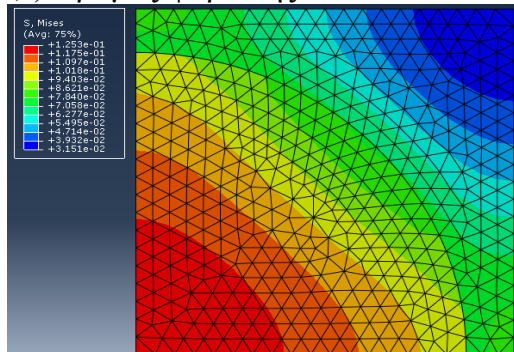
(β) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=1$



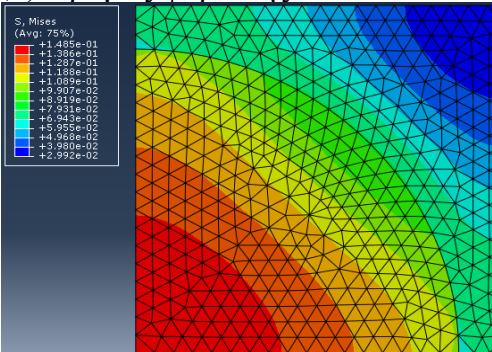
(γ) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



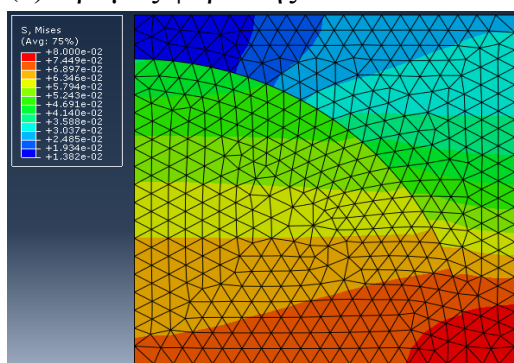
(δ) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=2$



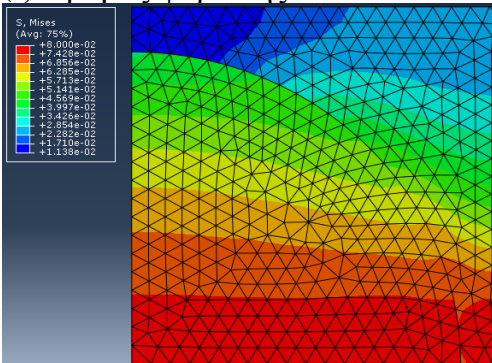
(ε) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



(ς) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=-1$



(ζ) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$



(η) Δρόμος φόρτισης :  $U_1/U_2=0$

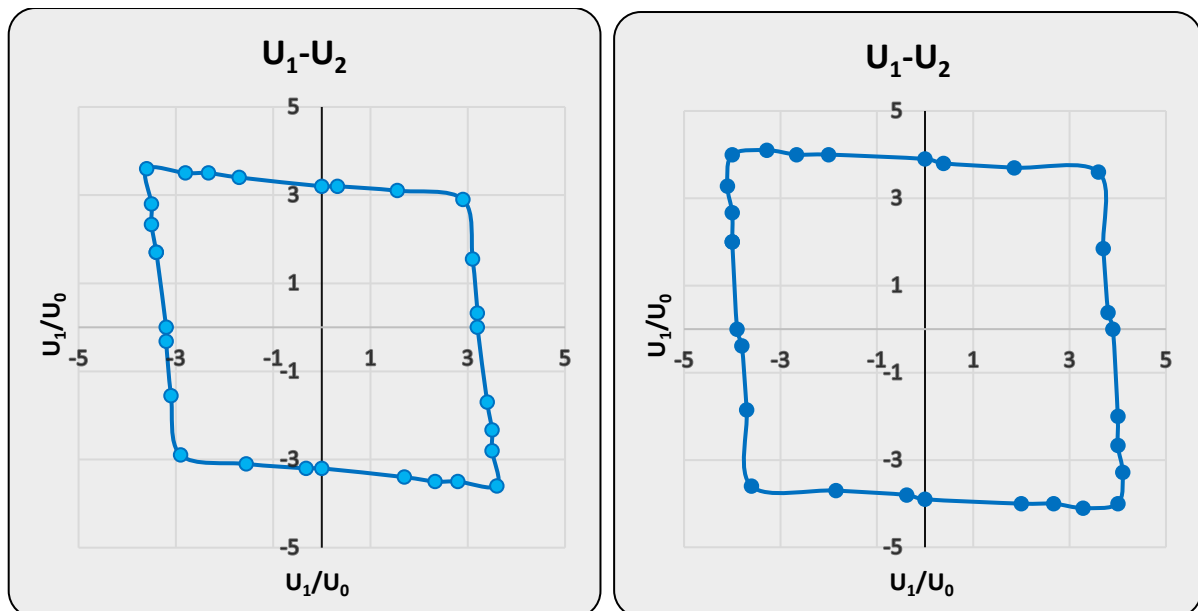
**Εικόνα 6.24** Εντατική κατάσταση τη στιγμή επιβολής του φορτίου διαρροής για τους δρόμους φόρτισης (α)  $U_1/U_2=1$  , (β)  $U_1/U_2=2$  , (γ)  $U_1/U_2=-1$  , (δ)  $U_1/U_2=0$



Εδώ θα πρέπει να επισημανθεί ότι η διαρροή του RVE λαμβάνει χώρα τη στιγμή κατά την οποία το 1<sup>ο</sup> πεπερασμένο παύει να βρίσκεται στην ελαστική περιοχή και περνάει στην πλαστική. Υπενθυμίζουμε ότι το λογισμικό ABAQUS2006 έχει ενσωματωμένο το κριτήριο Von-Mises, όπως αυτό παρουσιάστηκε στην Ενότητα 1.4.

Από την Εικόνα 4.24 παρατηρούμε ποια είναι τα κρίσιμα πεπερασμένα στοιχεία που οδηγούν σε διαρροή την κατασκευή. Ανάλογα με το δρόμο φόρτισης μεταβάλλονται τα στοιχεία αυτά. Για τις περιπτώσεις των δρόμων φόρτισης  $U_1/U_2=1$  και  $U_1/U_2=-1$  διακρίνουμε συμμετρική καταπόνηση όπως και αναμέναμε.

Στο Διάγραμμα 6.29 βλέπουμε την επιφάνεια που οριοθετεί τις ‘επιτρεπόμενες’ επιβαλλόμενες μετατοπίσεις έναντι διαρροής. Αν ένας συνδυασμός φόρτισης που επιβάλλω στην κατασκευή μου βρίσκεται εκτός του χωρίου τότε η κατασκευή μου διαρρέει. Στην περίπτωση (b) επίπεδης-παραμόρφωσης παρατηρούμε ότι το ‘ασφαλές’ χωρίο προσεγγίζει το σχήμα του τετραγώνου ενώ στην περίπτωση (a) της επίπεδης - έντασης αυξάνονται οι ‘ανοχές’ για δρόμους φόρτισης  $U_1/U_2$  που προσεγγίζουν το -1. Παρόμοια συμπεριφορά είχαμε όταν μελετήσαμε το φαινόμενο της επαυξητικής κατάρρευσης.

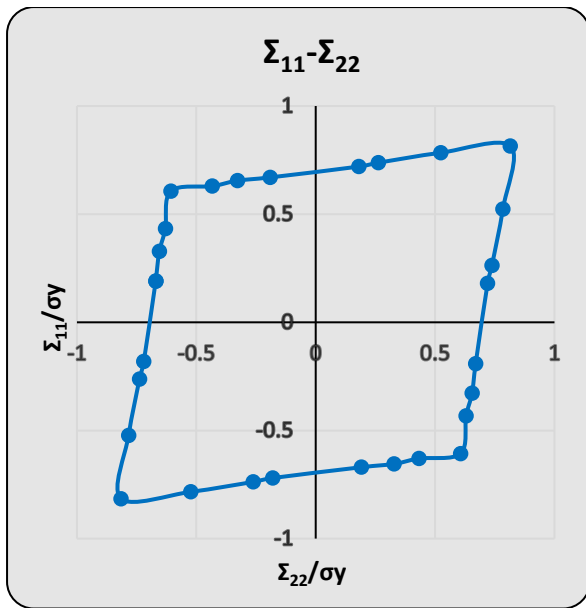


(a) Επίπεδη ένταση

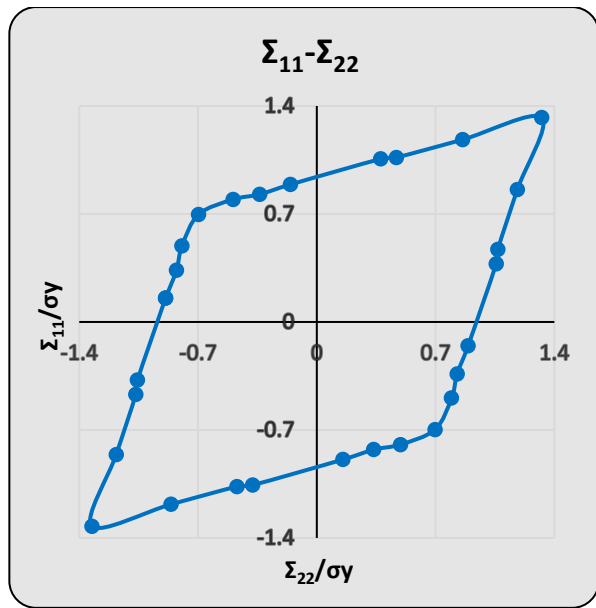
(b) Επίπεδη παραμόρφωση

**Διάγραμμα 6.29** Ασφαλές χωρίο επιβαλλόμενων μετακινήσεων, κανονικοποιημένων ως προς την μετακίνηση  $U_0=0.0001\mu\text{m}$  έναντι φορτίου διαρροής για (a) επίπεδη-ένταση και (b) επίπεδης-παραμόρφωσης

Τέλος, στο Διάγραμμα 6.30 βλέπουμε το ασφαλές χωρίο για τις ομογενοποιημένες τάσεις  $\Sigma_{11}-\Sigma_{22}$ , οι οποίες προέκυψαν σύμφωνα με τη διαδικασία της ομογενοποίησης, όπως αυτή παρουσιάστηκε στην Ενότητα 1.3. Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τις δύο υπό εξέταση περιπτώσεις έχουν αρκετές αποκλίσεις. Πιο ανεκτά είναι τα όρια στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης  $(1,325-0,815)/0,815=62,5\%$  απόκλιση (για δρόμο φόρτισης  $\Sigma_{11}/\Sigma_{22}=1$ ) και  $(0,697-0,607)/0,607=14,8\%$  απόκλιση (για δρόμο φόρτισης  $\Sigma_{11}/\Sigma_{22}=-1$ ). Όσο ο λόγος των  $\Sigma_{11}/\Sigma_{22}$  προσεγγίζει τη μονάδα τόσο τα όρια γίνονται πιο ανεκτά και στις δύο περιπτώσεις.

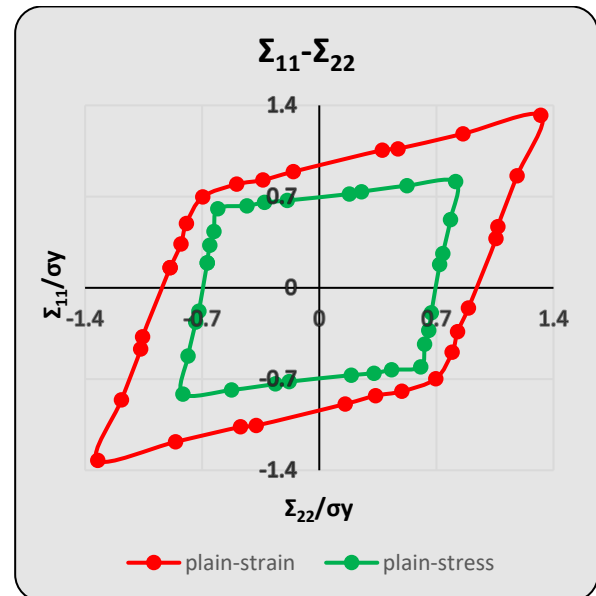
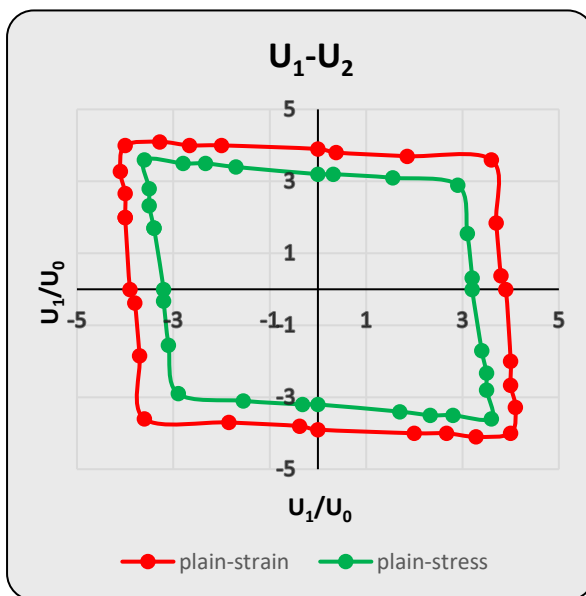


(a) Επίπεδη ένταση



(b) Επίπεδη παραμόρφωση

**Διάγραμμα 6.30** Ασφαλές χωρίο μακροσκοπικών τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ , κανονικοποιημένων ως προς την τάση διαρροής  $\sigma_y = 80\text{MPa}$ , έναντι επαυξητικής κατάρρευσης για (a) επίπεδη ένταση, (b) επίπεδη παραμόρφωση.



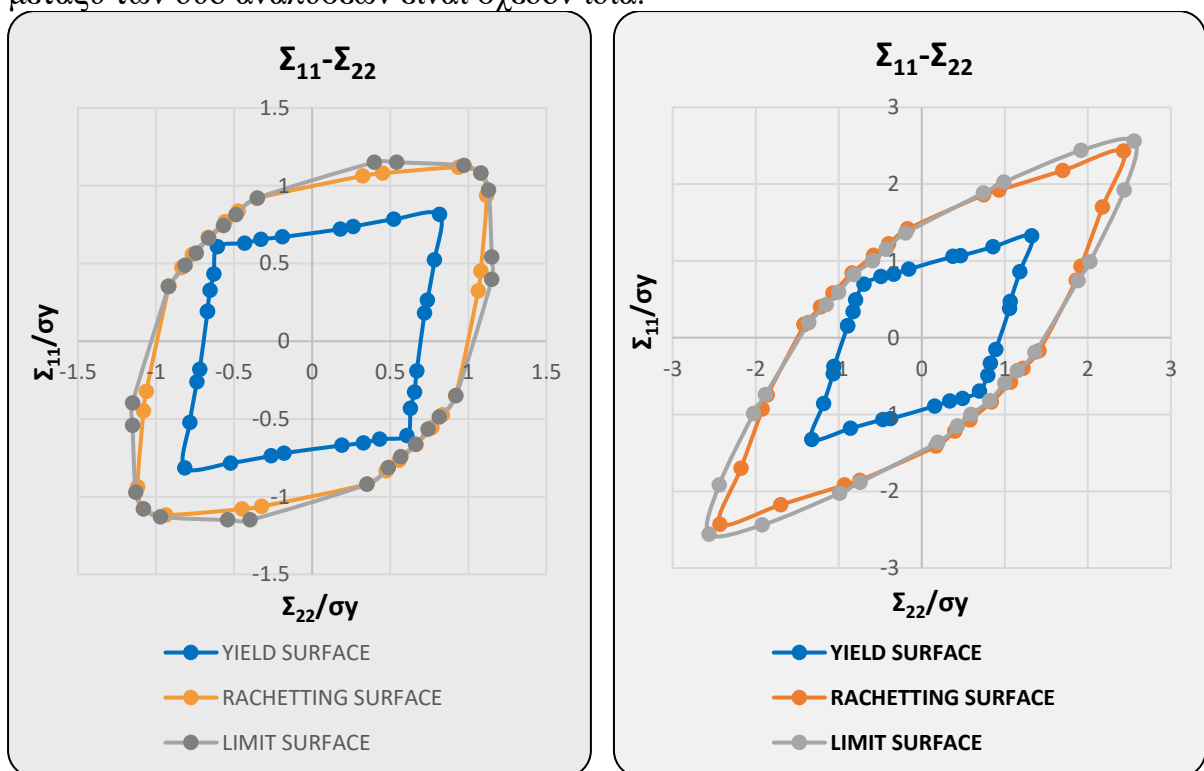
**Διάγραμμα 6.31** Ασφαλές χωρίο (a) επιβαλλόμενων μετατοπίσεων και (b) ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ , έναντι φορτίου διαρροής

Τέλος, στο Διάγραμμα 6.31 βλέπουμε το ασφαλές χωρίο (a) επιβαλλόμενων μετατοπίσεων  $U_1, U_2$  και (b) ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}$  και  $\Sigma_{22}$ , έναντι του φορτίου διαρροής για τις περιπτώσεις επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωσης. Παρατηρούμε ότι η περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης εσωκλείει την αντίστοιχη της επίπεδης έντασης, όπως ακριβώς συνέβαινε και στα ασφαλή χωρία έναντι επαυξητικής κατάρρευσης.

### 6.5.6. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Στο Διάγραμμα 6.32 βλέπουμε συγκεντρωτικά τις ομογενοποιημένες τάσεις, που αντιστοιχούν στην επιφάνεια διαρροής (μπλε χρώμα), την επαυξητική κατάρρευση (πορτοκαλί χρώμα) και την οριακή ανάλυση (γκρι χρώμα) για την περίπτωση (a) επίπεδης έντασης και (b) επίπεδης παραμόρφωσης. Όσον αφορά τις αναλύσεις επίπεδης έντασης παρατηρούμε ότι οι μέγιστες ομογενοποιημένες τάσεις επιβάλλονται στις αναλύσεις εύρεσης του οριακού φορτίου για οποιονδήποτε δρόμο φόρτισης. Οι τάσεις επαυξητικής κατάρρευσης εγγράφονται στις προηγούμενες ενώ του φορτίου διαρροής δίνουν πολύ μικρότερα σε σύγκριση με τα προηγούμενα αποτελέσματα. Όσον αφορά τις αναλύσεις επίπεδης παραμόρφωσης τα πράγματα είναι περίπου τα ίδια με τη διαφορά ότι η επαυξητική κατάρρευση δίνει πιο συντηρητικές τάσεις έναντι της οριακής ανάλυσης. Για δρόμους φόρτισης που τείνουν στο 1 οι ομογενοποιημένες τάσεις γίνονται μέγιστες και στις δύο περιπτώσεις. Για δρόμους φόρτισης που τείνουν στο -1 το ασφαλές χωρίο γίνεται ολοένα και κρισιμότερο.

Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα ασφαλή χωρία των τάσεων σε κάθε μία εκ των δύο περιπτώσεων έχουν παρόμοιο σχήμα. Τόσο στην περίπτωση επίπεδης έντασης όσο και παραμόρφωσης τα χωρία μεταβάλλονται με συμμετρίες ως προς ευθείες που σχηματίζουν  $45^\circ$  ως προς του άξονες x,y. Βέβαια θα πρέπει να σημειωθεί η πολύ μεγάλη απόκλιση που εμφανίζουν ως προς τις μέγιστες ομογενοποιημένες τάσεις για το δρόμο φόρτισης  $\Sigma_{11}/\Sigma_{22} = 1$ , δύο φορές περίπου μεγαλύτερες στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης. Ενώ για το δρόμο φόρτισης  $\Sigma_{11}/\Sigma_{22} = -1$  τα αποτελέσματα μεταξύ των δύο αναλύσεων είναι σχεδόν ίδια.



(a) Επίπεδη ένταση

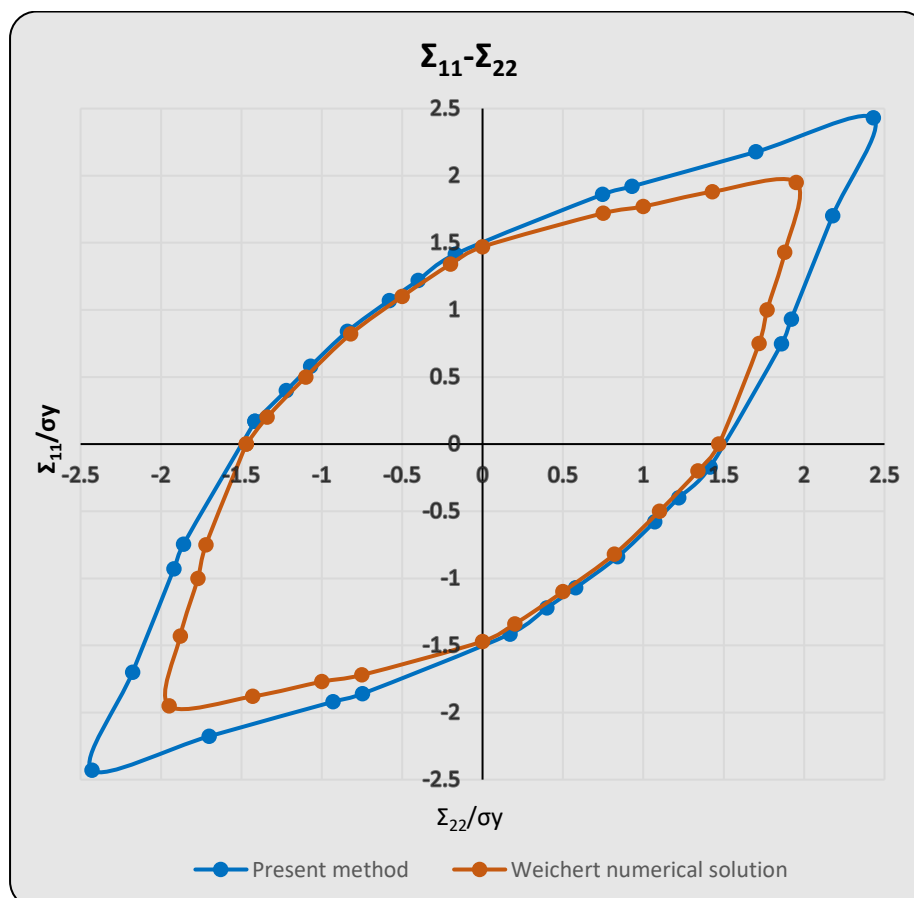
(b) επίπεδη παραμόρφωση

**Διάγραμμα 6.32** Επιτρεπόμενη επιφάνεια ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}-\Sigma_{22}$  για φορτίο διαρροής, φορτίο επαυξητικής κατάρρευσης, οριακού φορτίου στην περίπτωση (a) επίπεδης έντασης και (b) επίπεδης παραμόρφωσης

### 6.5.7. Σύγκριση των αποτελεσμάτων της επαυξητικής κατάρρευσης με Παλαιότερες καταγραφές

Το ίδιο ακριβώς παράδειγμα έχει αναλυθεί στο παρελθόν από τους D.Weichert , A.Hachemi , F.Schwabe [3]. Όσον αφορά τη γεωμετρία και τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν είναι ακριβώς τα ίδια με αυτά του Παραδείγματος 4.2. Η διαφορά υπόκειται στην ανάλυση, η οποία προσεγγίζεται με αριθμητικές μεθόδους και προβλημάτων βελτιστοποίησης και πραγματοποιείται μόνο για την περίπτωση των επίπεδων παραμορφώσεων. Κατασκευάζουμε λοιπόν το Διάγραμμα 6.33 το οποίο αναπαριστά το ασφαλές χωρίο των ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}, \Sigma_{22}$  έναντι της επαυξητικής κατάρρευσης τόσο με τη παρούσα μέθοδο (μπλε χρώμα) όσο και με τη μέθοδο των ανωτέρω αρθρογράφων (πορτοκαλί χρώμα). Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη απόκλιση εμφανίζεται για δρόμους φόρτισης  $U_1/U_2$  που τείνουν στη μονάδα  $(2,43-1,95)/1,95 = 24,6\%$ . Για δρόμους φόρτισης  $U_1/U_2$  που τείνουν στο -1 οι διαφορές ανάμεσα στα δύο διαγράμματα εξαλείφονται.

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για δρόμους φόρτισης  $U_1/U_2$  που τείνουν στο ένα γίνεται πιο σημαντική η συνεισφορά της κάθετης στο επίπεδο συνιστώσα τάσης,  $S_{33}$  στο κριτήριο του Von-Mises. Εδώ υπενθυμίζουμε ότι στο Παράδειγμα 6.4.3.1. είδαμε ότι η συνεισφορά της  $S_{33}$  ήταν ο κύριος λόγος για τον οποία οι αναλύσεις επίπεδης-παραμόρφωσης δίνουν πολύ πιο ευμενή αποτελέσματα έναντι της επίπεδης έντασης.



**Διάγραμμα 6.33** Ασφαλές χωρίο ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}-\Sigma_{22}$  έναντι επαυξητικής κατάρρευσης με την παρούσα μέθοδο την αριθμητική επίλυση του D.Weichert , A.Hachemi , F.Schwabe

## 7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τις αναλύσεις προέκυψαν κάποια συμπεράσματα, τα οποία παρουσιάζονται συνοπτικά παρακάτω :

1. Αναπτύξαμε υπολογιστικούς αλγορίθμους με τη βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων για μετάβαση από τη μικρο-στη-μακρο κλίμακα υπολογίζοντας τις ομογενοποιημένες τάσεις
2. Οι συνοριακές συνθήκες “σταθερών ελκτικών τάσεων” προσδίδουν την πιο εύκαμπτη συμπεριφορά στη μικροκατασκευή. Οι συνθήκες “γραμμικών μετατοπίσεων” την πιο δύσκαμπτη, ενώ οι συνθήκες “περιοδικότητας” κυμαίνονται ανάμεσά τους. Το συμπέρασμα αυτό προέκυψε για όλα τεστ που πραγματοποιήθηκαν (Παράδειγμα 5.1,5.2)
3. Οι συνθήκες “περιοδικότητας” είναι οι καταλληλότερες για την προσομοίωση περιδικών υλικών εν αντιθέσει με τις συνθήκες “γραμμικών μετατοπίσεων” και “σταθερών ελκτικών τάσεων” όπου προσδίδουν έντονες αποκλίσεις. Το συμπέρασμα αυτό προέκυψε για όλα τα τεστ που πραγματοποιήθηκαν (Παράδειγμα 5.1,5.2)
4. Επιβάλλοντας περιοδικές συνοριακές συνθήκες σε δύο κατασκευές μεσοκλίμακας καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι οι κατανομές των ισοδύναμων πλαστικών παραμορφώσεων ήταν σχεδόν πανομοιότυπες, πράγμα που επιβεβαιώνει την καταλληλότητα προσομοίωσης περιδικών υλικών με συνοριακές συνθήκες περιοδικότητας.
5. Όσο αυξάνεται η διάμετρος της τρύπας που ενσωματώνουμε σε μία μήτρα υλικού, τόσο το σύνθετο πλέον υλικό γίνεται πιο εύκαμπτο, δηλαδή μειώνονται οι ομογενοποιημένες τάσεις στη μικροκατασκευή και μάλιστα με τρόπο μη-γραμμικό.
6. Για ένα φάσμα τιμών  $0 < E_{\varphi} / E_{\kappa} < 10$ , όπου  $E_{\varphi}$  και  $E_{\kappa}$  συμβολίζουμε το μέτρο ελαστικότητας των ινών και του υλικού της μήτρας αντίστοιχα, παρατηρήθηκε ότι η αύξηση του λόγου οδηγούσε σε αύξηση των ομογενοποιημένων τάσεων. Ωστόσο, για τιμές του λόγου  $E_{\varphi} / E_{\kappa} > 10$  δεν παρατηρήθηκε αισθητή μεταβολή της ομογενοποιημένης τάσης.
7. Καθώς αυξάνεται η διάμετρος ενός δύσκαμπτου υλικού που ενσωματώνεται σε μια μαλακή μήτρα, τόσο αυξάνεται η δυσκαμψία στο σύνολο της μικροκατασκευής και επομένως οι ομογενοποιημένες τάσεις.

8. Αναπτύξαμε μία υπολογιστική διαδικασία προσδιορισμού του ασφαλούς χωρίου επιβαλλόμενων μετακινήσεων και ομογενοποιημένων τάσεων έναντι οριακού φορτίου, επαυξητικής κατάρρευσης και φορτίου διαρροής.
9. Οι αναλύσεις επίπεδης έντασης δίνουν πιο συντηρητικά αποτελέσματα από την επίπεδη παραμόρφωση για την εύρεση του ασφαλούς χωρίου έναντι οριακού φορτίου, φορτίου επαυξητικής κατάρρευσης και φορτίου διαρροής. Ο σημαντικότερος λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό, είναι η ύπαρξη του όρου  $S_{33}$  στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης, η οποία προσδίδει στο στοιχείο μας μια εικονική κράτυνση βελτιώνοντας έτσι της μηχανικές του ιδιότητες.
10. Καταφέραμε να εκτιμήσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια το ασφαλές χωρίο έναντι οριακού φορτίου παρόλο που κάτι τέτοιο επιτεύχθηκε από οπτική παρατήρηση των ζωνών συγκέντρωσης τάσεως.
11. Από τις αναλύσεις με παραδοχές επίπεδης-έντασης προέκυψαν ασφαλή χωρία ομογενοποιημένων τάσεων έναντι οριακού φορτίου και επαυξητικής κατάρρευσης με μικρές αποκλίσεις
12. Από τις αναλύσεις με παραδοχές επίπεδης-παραμόρφωσης προέκυψαν ασφαλή χωρία ομογενοποιημένων τάσεων έναντι οριακού φορτίου και επαυξητικής κατάρρευσης με έντονες αποκλίσεις για δρόμους φόρτισης  $U_1/U_2=1$  , ενώ για δρόμους που τείνανε στην τιμή  $U_1/U_2=-1$  οι αποκλίσεις εκμηδενίζονταν.
13. Η αύξηση της διαμέτρου της τρύπας  $D_f$  προκαλεί τη μείωση της ομογενοποιημένης τάση  $\Sigma_{11}$  έναντι του φαινομένου της επαυξητικής κατάρρευσης.
14. Όσον αφορά το Παράδειγμα 5.1, όπου διερευνήσαμε ένα τετραγωνικό RVE με μία τρύπα στο κέντρο προέκυψε ότι οι αποκλίσεις από παλαιότερες μετρήσεις ήταν ιδιαίτερα μικρές, ωστόσο θα έπρεπε να μεριμνήσουμε ότι τα επιβαλλόμενα φορτία (μετακινήσεις) ασκούνταν με τρόπο ανεξάρτητο και όχι αναλογικό.
15. Κατασκευάσαμε το διάγραμμα ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης – χρόνος φόρτισης και παρατηρήσαμε τη σταδιακή αύξηση των πλαστικών παραμορφώσεων με το πέρασμα των κύκλων όταν το φαινόμενο της επαυξητικής κατάρρευσης λαμβάνει χώρα.
16. Το ασφαλές χωρίο ομογενοποιημένων τάσεων  $\Sigma_{11}$ - $\Sigma_{22}$  έναντι επαυξητικής κατάρρευσης με την παρούσα μέθοδο και την αριθμητική επίλυση του D.Weichert , A.Hachemi , F.Schwabe παρουσίασε σημαντικές αποκλίσεις ιδιαίτερα όσο οι δρόμοι φόρτισης  $U_1/U_2$  τείνανε προς τη τιμή 1 ενώ εξαλείφθηκαν για δρόμους φόρτισης  $U_1/U_2$  που τείνανε προς τη τιμή -1.

## 8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Phuc L.H.Ho, Canh V.Le** «A stabilized iRBF mesh-free method for quasi-lower bound shakedown analysis of structures». *Computers and Structures* 228 (2020) 106157
2. **C. Mieche, A. Koch** «Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains». *Archive of Applied Mechanics* 72 (2002) 300-317
3. **D. Weichert, A.Hachemi, F.Schwabe** «Application of shakedown analysis to the plastic design of composites». *Archive of Applied Mechanics* 69 (1999) 623-633
4. **J.-H. You, B.Y. Kim, M. Miskiewics** «Shakedown analysis of fibre-reinforced copper matrix composites by direct and incremental analysis». *Mechanics and Materials* 41 (2009) 857-867
5. **Song Huang, Hu Hui, Zhiping Chen** «Numerical limit and shakedown analysis method for kinematic hardening structure of arbitrary inhomogeneous material». *Composites Structures* 234 (2020) 111641
6. **A. Javili, S.Saeb, P.Steinmann** «Aspects of implementing constant traction boundary conditions on computational homogenization via semi-Dirichlet boundary conditions». *Comput Mech* (2017) 59: 21-35
7. **Christian Mieche** «Strain-driven homogenization of inelastic microstructures and composites based on an incremental variational formulation». *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2002; 55: 1285-1322
8. **Klaus-Jürgen, Bathe** (2014) «Finite Element Procedures, 2<sup>nd</sup> edition»
9. **Hill, R.** (1963), «Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11 (5): 357–372
10. **Sadik L. Omairey , Peter D.Dunning, Srinivas Sriramula** « Development of an ABAQUS plugin tool for periodic RVE homogenisation». *Engineering with Computers* (2019) 35:567-577
11. **Μ. Παπαδρακάκης** Δεκεμβριος 2002 «Μη-γραμμικά Πεπερασμένα Στοιχεία»
12. **Αγαπούλα Παπακωνσταντίνου** «Ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων με πεπερασμένα στοιχεία». Διπλωματική εργασία (2019), Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα
13. **Αγγελική Χαντέλη** «Αριθμητική μεθοδολογία πολλαπλών κλιμάκων ανάλυσης για την παραμετρική εκτίμηση των μηχανικών ιδιοτήτων πολυμερών και σύνθετων υλικών ενισχυμένων με νανοσωλήνες άνθρακα». Διδακτορική Διατριβή (2016) , Πάτρα.
14. **Καϊφάς Νίκος & Τσαμόπουλος Νίκος** «Αντισεισμικές ενισχύσεις κτιρίων με σύνθετα υλικά». Πτυχιακή Εργασία (2006), Τ.Ε.Ι. Πειραιά , Αθήνα

15. Γκοτσοπούλου Ιωάννα & Κρεμαστιώτη Αικατερίνη «Σύνθετα υλικά σε νέες κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα». Πτυχιακή Εργασία (2008), Α.Τ.Ε.Ι Πειραιά, Αθήνα
16. [http://courseware.mech.ntua.gr/ml00001/mathimata/C1\\_Sintheta\\_ilika.pdf](http://courseware.mech.ntua.gr/ml00001/mathimata/C1_Sintheta_ilika.pdf)  
(Δ. Μανωλάκος, Εκπαιδευτικό Υλικό για το μάθημα Εφαρμογές Προηγμένων Υλικών/ Ε.Μ.Π., τελευταία πρόσβαση: 06.10.20)
17. [https://en.wikipedia.org/wiki/Composite\\_material](https://en.wikipedia.org/wiki/Composite_material) (wikipedia, τελευταία πρόσβαση : 06/10/2020)
18. [https://en.wikipedia.org/wiki/Representative\\_elementary\\_volume](https://en.wikipedia.org/wiki/Representative_elementary_volume) (wikipedia, τελευταία πρόσβαση : 06/10/2020)
19. [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/13/Composite\\_3d.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/13/Composite_3d.png)  
(wikipedia τελευταία πρόσβαση : 06/10/2020)
20. Παπαδρακάκης, Μ.2001 « Ανάλυση φορέων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Αθήνα : Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2001.