ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Εφαρμογή ιξωδοελαστικών μοντέλων κλασματικής παραγώγου για την περιγραφή των χρονοεξαρτώμενων ιδιοτήτων των πολυμερικών υλικών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Άλκηστις Α. Ρενιέρη

Επιβλέπουσα:

Κοντού Ευαγγελία, Καθηγήτρια

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΙΟΣ 2020

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μελέτη της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς των υλικών είναι ο κύριος άξονας γύρω από τον οποίο αναπτύσσεται η παρούσα διπλωματική εργασία. Τα υλικά που εμφανίζουν αυτή την συμπεριφορά χρησιμοποιούνται ευρέως στις κατασκευές αλλά και σε πολλές άλλες εφαρμογές, συνεπώς η ανάλυση των χαρακτηριστικών τους έχει γίνει επιτακτική ανάγκη.

Τα περισσότερα υλικά εμφανίζουν γραμμική, ή σχεδόν γραμμική, συμπεριφορά σε μικρά επίπεδα τάσεων, ενώ τα ίδια υλικά μπορούν να εμφανίσουν μη γραμμική συμπεριφορά σε υψηλά επίπεδα τάσης. Οι δυναμικές φορτίσεις και τα πειράματα του ερπυσμού και της χαλάρωσης αποτελούν βασικά στάδια της μελέτης από τα οποία προκύπτουν διάφορα ιξωδοελαστικά μεγέθη και σχέσεις μεταξύ αυτών.

Με σκοπό να προσεγγιστούν ο ερπυσμός και η χαλάρωση, έχουν αναπτυχθεί μοντέλα τα οποία παρουσιάζονται εκτενώς στην εργασία αυτή. Τα μοντέλα αυτά αποτελούνται από συνδυασμούς των βασικών στοιχείων, δηλαδή του ελατηρίου και του απορροφητήρα, τα οποία αντικατοπτρίζουν την ελαστική και την ιξώδη συμπεριφορά των υλικών. Τα πιο απλά κλασικά μοντέλα είναι το Maxwell και το Kelvin-Voigt αλλά η λεπτομερής ανάλυσή τους επεκτείνεται και σε πιο πολύπλοκα μοντέλα όπως το κλασικό μοντέλο Zener.

Όπως αποδεικνύεται στην ανάλυσή μας, τα κλασικά μοντέλα δεν μπορούν να περιγράψουν με ακρίβεια τη δυναμική συμπεριφορά των πραγματικών υλικών. Για τον λόγο αυτό εντάσσουμε στην μελέτη τον κλασματικό λογισμό και συνεπώς τα μοντέλα κλασματικής παραγώγου (fractional) Maxwell, Kelvin-Voigt και Zener. Με αυτή την προσέγγιση, η ικανότητα των νέων μοντέλων να περιγράψουν την ιξωδοελαστική απόκριση διευρύνεται και οι περιορισμοί που υπήρχαν αίρονται.

Επιπλέον, παρουσιάζεται η εφαρμογή όλης αυτής της μελέτης σε συγκεκριμένα ιξωδοελαστικά υλικά. Πιο συγκεκριμένα, για την Θερμοσκληρυνόμενη Εποξειδική Ρητίνη (Thermosetting Epoxy Resin), το Βιοδιασπώμενο Πολυμερές Ecovio® (Biodegradable Polymer Ecovio®) και το Πολυγαλακτικό Οξύ PLA (Polylactic Acid PLA) λαμβάνονται πειραματικά δεδομένα από μελέτες που αναφέρονται στην βιβλιογραφία. Με βάση αυτά αλλά και τις σχέσεις που έχουν προκύψει από τα μοντέλα κλασματικής παραγώγου που τα περιγράφουν, παρουσιάζεται μια σειρά από διαγράμματα. Σύμφωνα με τα διαγράμματα αυτά που αφορούν χαρακτηριστικά μεγέθη και συναρτήσεις των υλικών, προκύπτει μεν η

ιξωδοελαστική απόκριση των υλικών αλλά επιβεβαιώνεται κιόλας δε το γεγονός κατά το οποίο τα μοντέλα κλασματικής παραγώγου είναι ικανά να περιγράψουν σε πολύ καλό βαθμό την μηχανική συμπεριφορά τέτοιων υλικών.

Στο τέλος της εργασίας, υπάρχουν ορισμένα παραρτήματα που αποτελούν μαθηματικό συμπλήρωμα στην ανάλυση καθώς και η βιβλιογραφία. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι οι μαθηματικοί υπολογισμοί καθώς και η δημιουργία των διαγραμμάτων έγινε με την βοήθεια του Wolfram Mathematica 9.

ABSTRACT

The study of the viscoelastic behavior of the materials is the main axis around which the present work is developed. The materials that exhibit this kind of behavior are widely used in construction and many other applications and therefore the analysis of their characteristics has become an imperative need.

A variety of materials exhibit linear viscoelastic behavior under small strains, when at the same time they show signs of nonlinear behavior under large strains. The dynamic forces as well as the creep and relaxation experiments are the basic key stages of the study from which many viscoelastic figures, as well as the relation between them, arise.

In order to approach creep and relaxation, some models have been developed and they are presented extensively in this dissertation. These models consist of combinations of the basic elements representing the elastic and the viscous behavior of the materials respectively called spring and dashpot. The simplest classic models are the Maxwell and Kelvin-Voigt models, but their detailed analysis leads to more complex ones like the classic Zener model.

According to our analysis, the classic models lack accuracy as regards the description of the dynamic response of real time materials. For that reason, we include to the study the fractional calculus and therefore the fractional Maxwell, Kelvin-Voigt and Zener models. By taking this approach, the capacity of the new models to describe the viscoelastic reaction improves as the limitations of the classic models no longer exist.

In addition to the above, there is also a part of this dissertation that presents the application of the previous study to certain viscoelastic materials. More precisely, for the Thermosetting Epoxy Resin, as well as for Biodegradable Polymer Ecovio® and Polylactic Acid PLA, experimental data were collected by various researching studies which are all stated at the bibliography. According to them but also to the equations from the theoretical analysis of the fractional models which describe the materials, a series of figures is presented. These figures refer to characteristic material functions and therefore make the understanding of the material behavior easier, but they also confirm the fact that a satisfactory description of viscoelastic response can be obtained by the fractional models.

In the end of the present work, there are some annexes as a Mathematical addendum to the analysis as well as the bibliography. The source code used for the calculations but also for the plotting of the figures, was created in Wolfram Mathematica 9.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Μηχανική Συμπεριφορά Υλικών

Για την μελέτη της συμπεριφοράς τον υλικών βασικό ρόλο παίζει το πείραμα του απλού εφελκυσμού, με μικρό ρυθμό φόρτισης και σε θερμοκρασία δωματίου, από το οποίο προκύπτει η σχέση τάσης - παραμόρφωσης. Κατά την μελέτη αυτή παρατηρείται ότι η μηχανική συμπεριφορά των διαφόρων υλικών ποικίλλει και αυτό οφείλεται στη μικροδομή τους αλλά και σε εξωγενείς παράγοντες που επιβάλλονται όπως η θερμοκρασία, ο χρόνος, ο ρυθμός φόρτισης κλπ.

Δύο βασικοί και ιδανικοί τύποι υλικών είναι τα τέλεια ελαστικά και τα τέλεια πλαστικά. Τέλεια ελαστικά ονομάζονται τα υλικά που κατά την αποφόρτισή τους στο πείραμα του εφελκυσμού, επιστρέφουν στην αρχική τους γεωμετρία ακολουθώντας την αρχική καμπύλη φόρτισης. Για κάποια υλικά όμως υπάρχει μια τάση από την οποία αν αποφορτιστεί το υλικό δεν ανακτά την αρχική του γεωμετρία και αυτή ονομάζεται όριο ελαστικότητας. Συνεπώς αν αποφορτιστεί ένα υλικό μετά το όριο ελαστικότητας, ακολουθηθεί μια διαφορετική καμπύλη και με μηδενισμό της τάσης υπάρχει παραμένουσα παραμόρφωση, τότε το υλικό λέμε ότι συμπεριφέρεται πλαστικά. Υπάρχει και μια κατηγορία υλικών τα οποία εμφανίζουν εξάρτηση των μακροσκοπικών ιδιοτήτων τους από τον χρόνο. Η συμπεριφορά αυτή λέγεται ιξωδοελαστική διότι συνδυάζει την ελαστική και την ιξώδη (υγρή) συμπεριφορά. Αποτελεί μια μορφή ανελαστικότητας.

Η πληθώρα των τύπων των υλικών από τα οποία αποτελούνται οι διάφορες κατασκευές και τα οποία δεν υπακούν σε έναν ενιαίο καταστατικό νόμο, αλλά αντίθετα έχουν εξάρτηση από τον χρόνο, μας οδηγεί στην ανάγκη για μελέτη πιο σύνθετων μορφών μηχανικής συμπεριφοράς. Η μελέτη αυτή θα γίνει με την χρήση κάποιων μηχανικών μοντέλων.

Βασικά Στοιχεία: Ελατήριο και Απορροφητήρας

Για την μοντελοποίηση της ελαστικής συμπεριφοράς χρησιμοποιείται ένα ελατήριο. Αν στο ελατήριο ασκηθεί μια τάση σ τότε θα υπάρξει μια παραμόρφωση και η σχέση μεταξύ των δύο μεγεθών εκφράζεται με βάση το νόμο του Hooke:

$$\sigma_S = E\varepsilon_S$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Αναφορικά με την ενέργειά τους έχει αποδειχθεί ότι όλη η ενέργεια παραμόρφωσής τους αποθηκεύεται και αποδίδεται πλήρως στο σύστημα κατά την επαναφορά του υλικού στην αρχική του κατάσταση.

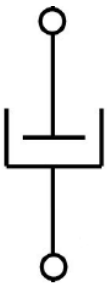
Σχήμα 1.0.1 Γραφική Αναπαράσταση Ελατηρίου (Spring)

Υπάρχει όμως και η περίπτωση κατά την οποία εμφανίζεται εξάρτηση του ρυθμού της παραμόρφωσης από την επιβαλλόμενη τάση. Πιο συγκεκριμένα, η τάση είναι ανάλογη με την ταχύτητα της παραμόρφωσης. Το υλικό τότε ονομάζεται ιξώδες, έχει ανάλογη συμπεριφορά με υγρά και ακολουθεί το νόμο του Νεύτωνα:

$$\sigma_D = \eta \frac{d\varepsilon_D}{dt} = \eta \dot{\varepsilon}_D$$

όπου η σταθερά αναλογίας η λέγεται συντελεστής ιξώδους.
Στα ιξώδη υγρά όλη η ενέργεια χάνεται ή μεταπίπτει σε θερμική ενέργεια κατά την αναντιστρεπτή παραμόρφωσή τους.

Για αυτή την περίπτωση εισάγουμε στη μελέτη τον απορροφητήρα, ένα στοιχείο που αποτελείται από ένα έμβολο το οποίο κινείται μέσα σε έναν κύλινδρο γεμάτο με ένα ιξώδες νευτώνειο υγρό.



Σχήμα 1.0.2 Γραφική Αναπαράσταση Απορροφητήρα (Dashpot)

Γραμμική Ιξωδοελαστικότητα

Ο ρυθμός επιβολής του φορτίου επηρεάζει τη μηχανική συμπεριφορά μιας ευρείας κατηγορίας υλικών, ειδικά όταν η θερμοκρασία είναι υψηλή. Η θεωρία της ιξωδοελαστικότητας περιγράφει τα υλικά που εμφανίζουν αυτή την απόκριση και που ονομάζονται χρονικά εξαρτώμενα. Αναλυτικότερα, η ιξωδοελαστικότητα είναι η ιδιότητα των υλικών που παρουσιάζουν και ιξώδη και ελαστικά χαρακτηριστικά όταν παραμορφώνονται.

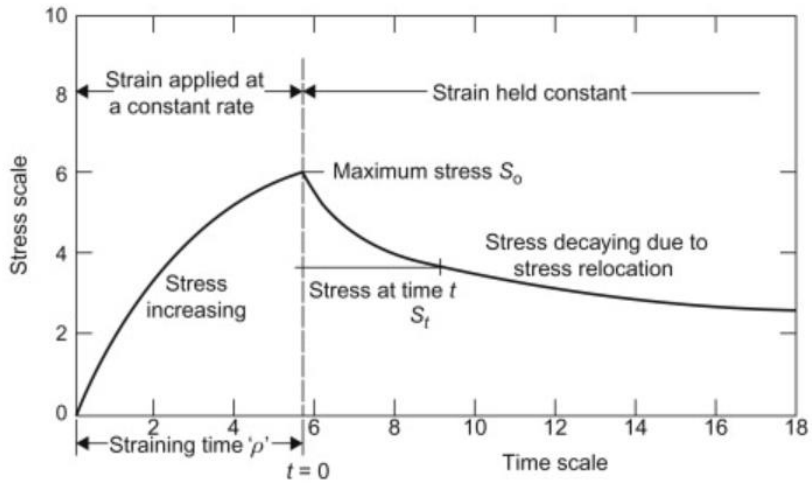
Ένα ιξώδες υλικό παρουσιάζει χρονικά εξαρτώμενη συμπεριφορά όταν του εφαρμόζεται μια σταθερή τάση και παραμορφώνεται με ένα σταθερό ρυθμό και όταν το φορτίο αφαιρείται, το υλικό έχει "ξεχάσει" την αρχική του διάταξη, παραμένοντας στην παραμορφωμένη του κατάσταση. Από την άλλη πλευρά, ένα ελαστικό υλικό παραμορφώνεται ακαριαία όταν του εφαρμοστεί τάση και "θυμάται" την αρχική του κατάσταση, στην οποία ακαριαία επιστρέφει όταν τα φορτία αφαιρεθούν.

Τα ιξωδοελαστικά υλικά έχουν στοιχεία και από τις δύο αυτές ιδιότητες και συνεπώς παρουσιάζουν μια εξάρτηση από το χρόνο κατά την παραμόρφωσή τους εμφανίζοντας παράλληλα μια "εξασθενημένη" μνήμη. Κατά την διαδικασία αυτή που μπορεί να είναι είτε

γραμμική είτε και μη-γραμμική, υπάρχει απώλεια ενέργειας στο υλικό. Ουσιαστικά μόνο ένα μέρος της ενέργειας παραμόρφωσης αποθηκεύεται ως μηχανική ενέργεια, το δε υπόλοιπο χάνεται υπό την μορφή θερμότητας λόγω της ιξώδους ροής.

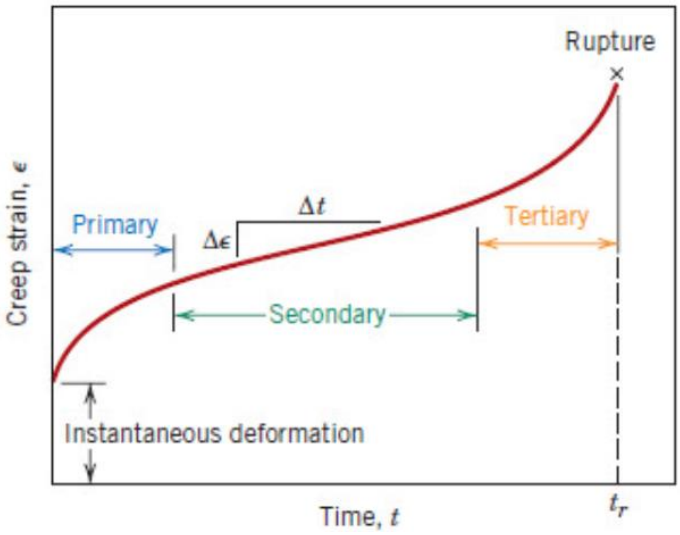
Η μελέτη της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς των υλικών και των μεγεθών που τα χαρακτηρίζουν είναι αναγκαία τώρα πια καθώς το μεγαλύτερο μέρος των κατασκευών αποτελείται από υλικά που μπορεί να εμφανίσουν αυτή την συμπεριφορά σε μικρό ή μεγάλο βαθμό. Ωστόσο, ακόμα και η μικρότερη ιξωδοελαστική απόκριση μπορεί να έχει σημαντικό αντίκτυπο στην ακεραιότητα των κατασκευών. Τα μέταλλα, όπως το ατσάλι και το αλουμίνιο και κάτω από ιδανικές συνθήκες, δηλαδή σε θερμοκρασία δωματίου και για μικρές παραμορφώσεις, δεν αποκλίνουν από το νόμο της γραμμικής ελαστικότητας. Σε υψηλές θερμοκρασίες όμως, ακόμα και τα μέταλλα παρουσιάζουν έντονη ιξωδοελαστική συμπεριφορά. Κάποια υλικά που περιγράφονται κατ' εξοχήν από τη θεωρία της ιξωδοελαστικότητας είναι τα πολυμερή, απλά ή σύνθετα, το ξύλο, τα κεραμικά και ο ανθρώπινος ιστός.

Τα πρότυπα πειράματα της ιξωδοελαστικότητας είναι ο ερπυσμός, η χαλάρωση και οι δυναμικές μηχανικές μετρήσεις. Στην μελέτη των υλικών, με την χαλάρωση της τάσης, μελετάται η μεταβολή της τάσης με το χρόνο, για σταθερή παραμόρφωση. Στο τυπικό διάγραμμα της τάσης ως προς το χρόνο (Σχήμα 1.0.3), εμφανίζονται δύο περιοχές. Στην πρώτη περιοχή εφαρμόζεται με σταθερό ρυθμό η παραμόρφωση μέχρι την θεμιτή επιμήκυνση και από το σημείο $t = 0$ και μετά η παραμόρφωση παραμένει σταθερή και η μείωση της τάσης λόγω χαλάρωσης παρατηρείται σαν συνάρτηση του χρόνου.



Σχήμα 1.0.3 Καμπύλη Χαλάρωσης [14]

Σε αντίθεση με την χαλάρωση, από το απλό πείραμα του ερπυσμού προκύπτει η μεταβολή της παραμόρφωσης με το χρόνο όταν εφαρμόζεται ένα σταθερό φορτίο. Στο χαρακτηριστικό διάγραμμα της παραμόρφωσης λόγω ερπυσμού σε συνάρτηση με το χρόνο (Σχήμα 1.0.4), εμφανίζονται κάποιες χαρακτηριστικές περιοχές.



Σχήμα 1.0.4 Καμπύλη Ερπυσμού [1]

1. *Αρχική Ελαστική Απόκριση (Instantaneous Deformation):* Μια ακαριαία ελαστική παραμόρφωση εμφανίζεται με την ακαριαία επιβολή του φορτίου.

2. *Πρωτογενής Ερπυσμός (Primary):* Η περιοχή αυτή είναι σημαντική μόνο για πειράματα που διαρκούν για μικρό χρονικό διάστημα, καθώς σε μεγάλους χρόνους η συνεισφορά της θεωρείται αμελητέα. Στον πρωτογενή ερπυσμό παρατηρείται μια συνεχής μείωση της ταχύτητας παραμόρφωσης.

3. *Δευτερογενής Ερπυσμός (Secondary):* Η καθοριστικής σημασίας περιοχή του δευτερογενή ερπυσμού μπορεί να προσεγγιστεί σαν μια ευθεία γραμμή καθώς η ταχύτητα του ερπυσμού είναι σχεδόν σταθερή.

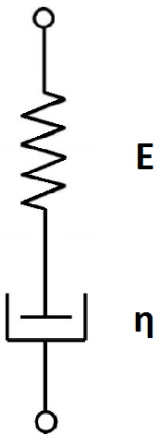
4. *Τριτογενής Ερπυσμός (Tertiary):* Η τελευταία περιοχή της καμπύλης που οδηγεί τελικά στο σημείο αστοχίας (Rupture), παρουσιάζει μια συνεχώς αυξανόμενη ταχύτητα ερπυσμού.

Η δυναμική μηχανική συμπεριφορά θα παρουσιαστεί σε επόμενες παραγράφους.

Για την περιγραφή και μελέτη αυτών των υλικών έχουν αναπτυχθεί μοντέλα που προσομοιάζουν την συμπεριφορά τους. Με αυτά τα μοντέλα μπορούν να υπολογιστούν μεγέθη που με τις πειραματικές διαδικασίες δεν είναι δυνατή η απόκτησή τους. Η ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών μπορεί να περιγραφεί και να μοντελοποιηθεί με συνδυασμούς ελατηρίων και απορροφητήρων.

Μοντέλο Maxwell

Το μοντέλο Maxwell αποτελείται από ένα γραμμικό ελατήριο συνδεδεμένο σε σειρά με έναν ιξώδη απορροφητήρα.



Σχήμα 1.0.5 Γραφική Αναπαράσταση Μοντέλου Maxwell

Στην συνδεσμολογία αυτή, η εφαρμοζόμενη τάση είναι κοινή και για τα δύο στοιχεία, ισχύει δηλαδή:

$$\sigma = \sigma_s = \sigma_D$$

Για τις παραμορφώσεις όμως, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η συνολική παραμόρφωση του μοντέλου είναι το άθροισμα της παραμόρφωσης του κάθε στοιχείου, δηλαδή:

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_D$$

Οι δείκτες s και D προέρχονται από τις αγγλικές λέξεις Spring και Dashpot που σημαίνουν ελατήριο και Απορροφητήρας αντίστοιχα.

Παραγωγίζοντας την σχέση για τις παραμορφώσεις ως προς τον χρόνο παίρνουμε:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon_S} + \dot{\varepsilon_D}$$

Από τα βασικά στοιχεία όμως γνωρίζουμε ότι:

Ελατήριο: $\sigma_S = E\varepsilon_S \Leftrightarrow \varepsilon_S = \frac{\sigma_S}{E}$ και παραγωγίζοντας: $\dot{\varepsilon_S} = \frac{1}{E}\dot{\sigma}_S$

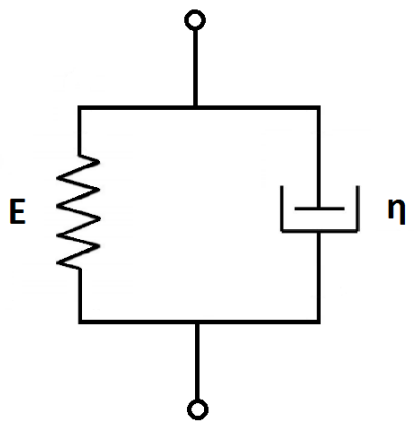
Απορροφητήρας: $\sigma_D = \eta\dot{\varepsilon_D} \Leftrightarrow \dot{\varepsilon_D} = \frac{1}{\eta}\sigma_D$

Συνεπώς, αν συνδυάσουμε τις παραπάνω σχέσεις, για το στοιχείο Maxwell η καταστατική εξίσωση, η εξίσωση δηλαδή που αποτυπώνει τη σχέση της τάσης και της παραμόρφωσης, είναι:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}\sigma$$

Μοντέλο Kelvin - Voigt

Η παράλληλη σύνδεση ενός ελατηρίου και ενός απορροφητήρα δημιουργεί το μοντέλο Kelvin-Voigt. Για απλοποίηση των συμβολισμών και της μελέτης θα το αναφέρουμε ως μοντέλο Kelvin.



Σχήμα 1.0.6 Γραφική Αναπαράσταση Μοντέλου Kelvin

Αντίθετα με το μοντέλο Maxwell, από την παράλληλη σύνδεση των στοιχείων προκύπτει ίση παραμόρφωση και για τα δύο και άθροιση των επιμέρους τάσεων, δηλαδή:

$$\varepsilon = \varepsilon_S = \varepsilon_D$$

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_D$$

Για την εύρεση της καταστατικής εξίσωσης του μοντέλου, εντάσσουμε στην σχέση για τις τάσεις αυτή τη φορά τις επιμέρους σχέσεις για τις τάσεις των στοιχείων και παίρνουμε:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$$

Απόκριση των μοντέλων σε πρότυπες φορτίσεις

Για την κατανόηση της φυσικής συμπεριφοράς των μοντέλων που παρουσιάσαμε, θα τα υποβάλλουμε σε πρότυπες μονοαξονικές φορτίσεις. Στα πλαίσια της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας, θα ορίσουμε κάποιες φυσικές οντότητες χρήσιμες για την κατανόηση της συμπεριφοράς των υλικών και θα εξάγουμε γραφικές αναπαραστάσεις τάσης παραμόρφωσης στο χρόνο.

Πείραμα Ερπυσμού (Creep)

Κατά τον ερπυσμό μελετάται η μεταβολή της παραμόρφωσης με το χρόνο $\varepsilon(t)$, υπό την επίδραση σταθερού φορτίου. Επιβάλλεται δηλαδή ακαριαία τάση σ_0 τη χρονική στιγμή $t = 0$ με βηματική μεταβολή φορτίου στο χρόνο. Η συνάρτηση βήματος $u(t)$ περιγράφεται αναλυτικότερο στο Μαθηματικό Συμπλήρωμα Ι.

$$\sigma(t) = \sigma_0 u(t)$$

Για το μοντέλο Maxwell, αντικαθιστούμε στην καταστατική του εξίσωση και έχουμε:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E}\frac{d}{\mathrm{dt}}\mathrm{u(t)} + \frac{\sigma_0}{\eta}u(t)$$

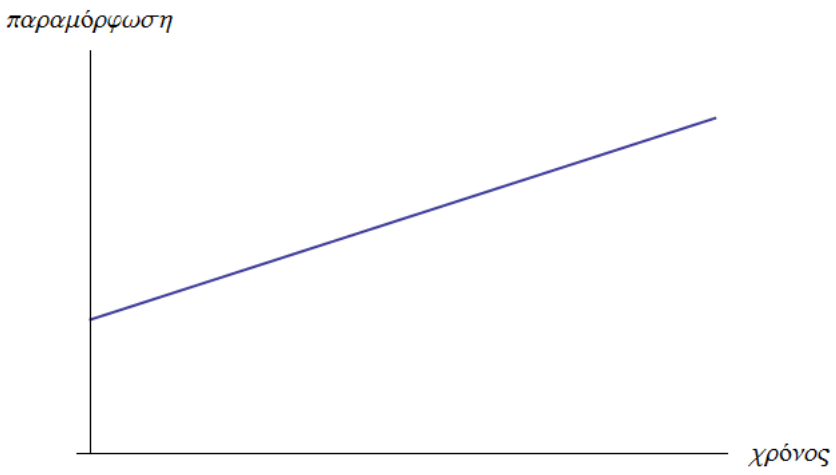
και συνεπώς:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E}\,\delta(\mathrm{t}) + \frac{\sigma_0}{\eta}u(t)$$

όπου $\delta(t)$ είναι η συνάρτηση Δέλτα (Dirac).

Με όρια $t = 0^-$ και θεωρώντας $\varepsilon(0^-) = 0$, ολοκληρώνουμε τον προηγούμενη σχέση και καταλήγουμε στον ακόλουθη σχέση για την παραμόρφωση στο μοντέλο Maxwell:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0\left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}\right)u(t)$$



Σχήμα 1.0.7 Καμπύλη Ερπυσμού Maxwell

Μελετώντας την καμπύλη που προκύπτει, παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το μοντέλο Maxwell έχει παραμόρφωση ίση με $\frac{\sigma_0}{E}$ και συμπεριφέρεται σαν ελαστικό στερεό. Καθώς $t \to \infty$, η συμπεριφορά του προσεγγίζει αυτή ενός ιξώδους υγρού.

Αντίστοιχη μελέτη θα κάνουμε τώρα και για το μοντέλο Kelvin.

Η καταστατική του εξίσωση με την ένταση της σχέσης για την βηματική τάση, θα γίνει:

$$\frac{\sigma_0}{\eta}u(t) = \frac{E}{\eta}\varepsilon + \dot{\varepsilon}$$

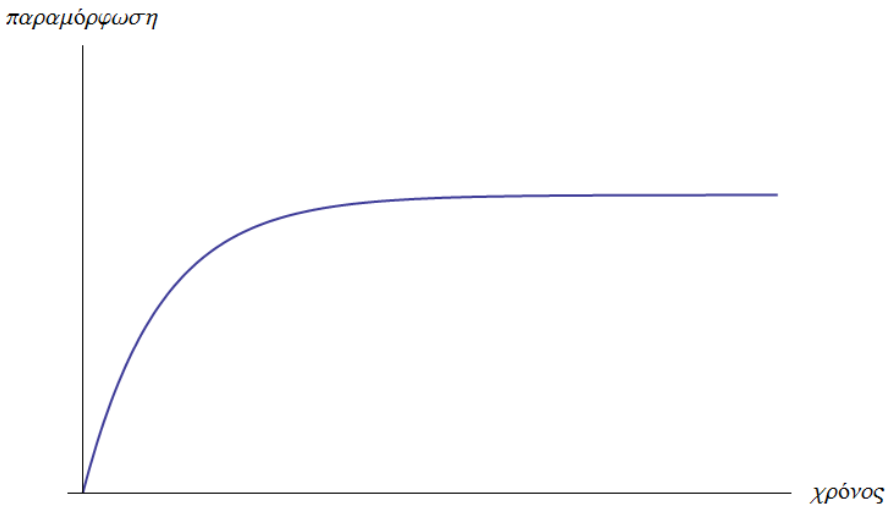
Παρατηρώντας τη μορφή της εξίσωσης αυτής, μπορούμε να την κατατάξουμε στην κατηγορία των διαφορικών και μη-ομογενών γραμμικών εξισώσεων και συνεπώς να επιλυθεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t}\frac{d}{dt}\left(\varepsilon e^{\left(\frac{E}{\eta}\right)t}\right)=\frac{\sigma_0}{\eta}u(t)\Rightarrow$$

$$d\left(\varepsilon e^{\left(\frac{E}{\eta}\right)t}\right)=\frac{\sigma_0}{\eta}e^{\left(\frac{E}{\eta}\right)t}u(t)dt$$

Ολοκληρώνοντας για $t=0^-$ και $\varepsilon(0^-)=0$, παίρνουμε την λύση:

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma_0}{E}\left(1-e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t}\right)u(t)$$



Σχήμα 1.0.8 Καμπύλη Ερπυσμού Kelvin

Στη γραφική απεικόνισης της συμπεριφοράς του μοντέλου Kelvin στον ερπυσμό, βλέπουμε ότι όσο $t\to\infty$ η παραμόρφωση τείνει να πάρει την τιμή $\frac{\sigma_0}{E}$ και το υλικό τείνει να ακολουθήσει την συμπεριφορά ενός γραμμικού ελαστικού στερεού.

Ένα σημαντικό φυσικό μέτρο που αξίζει να σημειωθεί εδώ είναι ο λόγος $\frac{\eta}{E}$ ο οποίος έχει διαστάσεις χρόνου. Ο χαρακτηριστικός αυτός χρόνος καλείται χρόνος καθυστέρησης (retardation time) και συμβολίζεται ως $\tau_R=\frac{\eta}{E}$. Αποτυπώνει την καθυστερημένη απόκριση των ιξωδοελαστικών υλικών στην εφαρμοζόμενη τάση και μπορεί να αναφερθεί και ως "καθυστέρηση της ελαστικότητας", αφού τα ιδανικά ελαστικά υλικά ανταποκρίνονται αμέσως στην ακαριαία εφαρμογή ή αφαίρεση τάσης.

Μέτρο Ένδοσης (Creep Compliance)

Από το πείραμα του ερπυσμού μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι η εξάρτηση της παραμόρφωσης από το χρόνο, έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \, J(t) \, u(t)$$

όπου $J(t)$ ονομάζεται ενδοτικότητα ή συνάρτηση μέτρου ένδοσης και αποτελεί ένα ακόμα χαρακτηριστικό ενός υλικού.

Υλικά που εμφανίζουν σημαντικό ερπυσμό δεν είναι κατάλληλα για εφαρμογής που απαιτούν διαστατική σταθερότητα. Στην γραμμική ιξωδοελαστικότητα, η ενδοτικότητα είναι ανεξάρτητη του μεγέθους της επιβαλλόμενης τάσης. Αυτό συμβαίνει για πολλά πλαστικά και για σχετικά μικρές φορτίσεις. Ωστόσο για υψηλά φορτία, υπάρχει εξάρτηση της ενδοτικότητας και από το φορτίο.

Για το μοντέλο Maxwell, η σύγκριση των δύο σχέσεων, δίνει:

$$J_M(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}$$

και αντίστοιχα για το μοντέλο Kelvin:

$$J_K(t) = \frac{1}{E}\left(1 - e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t}\right)$$

Πείραμα Χαλάρωσης (Stress Relaxation)

Στο πείραμα αυτό επιβάλλεται στιγμιαία μια ορισμένη παραμόρφωση ε_0 και μελετάται η μεταβολή της τάσης με το χρόνο $\sigma(t)$ που απαιτείται για να διατηρηθεί η επιβληθείσα παραμόρφωση. Στα ιξωδοελαστικά υλικά, παρατηρείται μια βαθμιαία μείωση της τάσης με το χρόνο εξού και ονομάζεται πείραμα χαλάρωσης τάσης.

Για τον ορισμό της συνάρτησης της παραμόρφωσης σαν συνάρτηση του χρόνου, χρησιμοποιούμε την συνάρτηση βήματος, ως εξής:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 u(t)$$

Για το μοντέλο Maxwell, εντάσσουμε την συνάρτηση στην καταστατική του εξίσωση και παίρνουμε:

$$\varepsilon_0 \frac{d}{dt} u(t) = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \Rightarrow$$

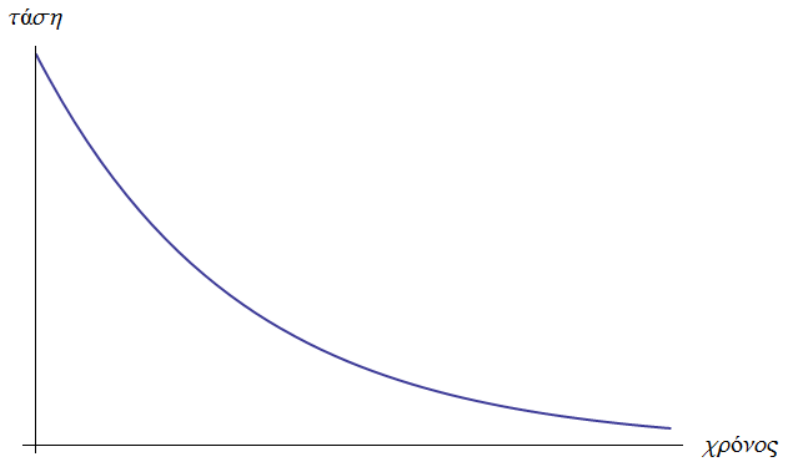
$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta}\sigma = \varepsilon_0 E \delta(t)$$

Αναγνωρίζουμε την μορφή της διαφορικής μη-γραμμικής εξίσωσης, και λύνουμε:

$$d\left(\sigma e^{\left(\frac{E}{\eta}\right)t}\right) = \varepsilon_0 E e^{\left(\frac{E}{\eta}\right)t} \delta(t) dt$$

Ολοκληρώνουμε την τελευταία, και παίρνουμε την ακόλουθη μορφή της συμπεριφοράς του μοντέλου στην χαλάρωση:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t} u(t)$$

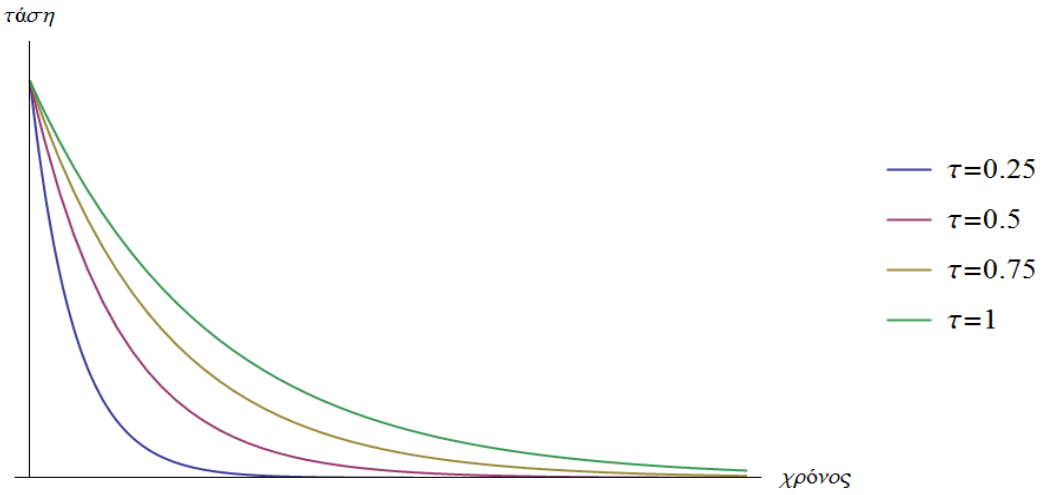


Σχήμα 1.0.9 Καμπύλη Χαλάρωσης Maxwell

Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι για $t = 0$, η τάση έχει αρχική τιμή $\varepsilon_0 E$ και καθώς $t \to \infty$ υπάρχει εκθετική μείωσή της που τείνει στο 0. Στο πείραμα αυτό, ο λόγος $\tau = \frac{\eta}{E}$ είναι άλλη μια σταθερά που χαρακτηρίζει ένα υλικό και ονομάζεται χρόνος χαλάρωσης.

Στο ακόλουθο διάγραμμα παρουσιάζονται καμπύλες για διάφορες τιμές του χρόνου χαλάρωσης. Παρατηρούμε ότι όσο μικρότερος είναι ο χρόνος χαλάρωσης τόσο ταχύτερη

είναι η χαλάρωση της τάσης. Σαν αντανάκλαση στις ιδιότητες του υλικού, αυτό σημαίνει ότι όσο μικρότερος ο χρόνος χαλάρωσης, τόσο εντονότερος είναι ο χαρακτήρας του ιξωδοελαστικού ρευστού στο υλικό.



Σχήμα 1.0.10 Καμπύλη Χαλάρωσης Maxwell για διάφορες τιμές του χρόνου χαλάρωσης

Για το μοντέλο Kelvin ακολουθούμε την ίδια διαδικασία. Η καταστατική του εξίσωση γίνεται:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E u(t) + \varepsilon_0 \eta \frac{d}{dt} u(t) \Rightarrow$$

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 [E u(t) + \eta \delta(t)]$$

Η ταυτόχρονη ύπαρξη της συνάρτησης βήματος και της συνάρτησης Δέλτα (Dirac) στην εξίσωση, αναδεικνύει την αδυναμία του μοντέλου Kelvin να μελετηθεί σε πείραμα χαλάρωσης. Σύμφωνα με την εξίσωση, μια αύξηση της παραμόρφωσης κατά ένα βήμα ε_0 οδηγεί σε μια ακαριαία αύξηση της τάσης λόγω της συνάρτησης Δέλτα, ενώ στη συνέχεια ακολουθεί μια σταθερή τιμή τάσης. Για την συνέχεια λοιπόν της μελέτης και κατανόησης της μηχανικής συμπεριφοράς των ιξωδοελαστικών υλικών χρειάζεται να επιστρατεύσουμε πιο σύνθετα μοντέλα.

Μέτρο Χαλάρωσης (Relaxation Modulus)

Αντίστοιχα με το πείραμα του ερπυσμού και την ενδοτικότητα, από το πείραμα της χαλάρωσης μπορούμε να εξάγουμε το μέτρο χαλάρωσης $Y(t)$. Ο γενικευμένος τύπος της μεταβολής της τάσης ως προς το χρόνο, έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \, Y(t) \, u(t)$$

Καθώς η μελέτη του συγκεκριμένου μέτρου περιορίζεται στο μοντέλο Maxwell, παίρνουμε μετά από την σύγκριση των δύο τύπων:

$$Y_M(t) = Ee^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t}$$

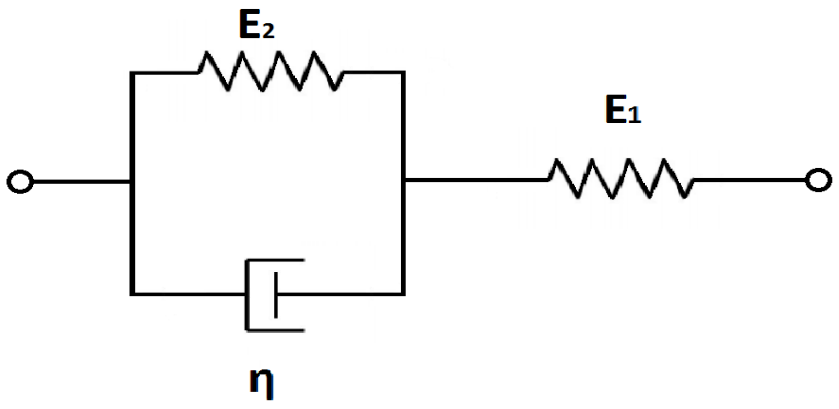
Η συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης, σε αντιστοιχία με τα προηγούμενα, είναι ανεξάρτητη του μεγέθους της επιβαλλόμενης παραμόρφωσης και εξαρτάται μόνο από το χρόνο.

Σύνθετα Μονοδιάστατα Ιξωδοελαστικά Πρότυπα

Η ανορθόδοξη συμπεριφορά του μοντέλου Kelvinστο πείραμα της χαλάρωσης, αναδεικνύει το πόσο σύνθετη είναι η ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών. Κανένα από τα δύο μοντέλα δεν είναι αρκετό για την περιγραφή της γενικής συμπεριφοράς ενός ιξωδοελαστικού στερεού καθώς αυτά μελετούν εξιδανικευμένες συμπεριφορές. Για τον λόγο αυτό εντάσσουμε στην μελέτη μας ένα πιο πολύπλοκο μοντέλο, βασιζόμενο πάντα τις αρχές που έχουμε ήδη παρουσιάσει.

Μοντέλο Zener

Το τριπαραμετρικό μοντέλο Zener αποτελείται από ένα μοντέλο Kelvin συνδεδεμένο σε σειρά με ένα απλό γραμμικό ελατήριο.



Σχήμα 1.0.11 Γραφική Αναπαράσταση Μοντέλου Zener

Η συνδεσμολογία αυτή μοιάζει με αυτή του απλού μοντέλου Maxwell, μόνο που στη θέση του απλού απορροφητήρα έχουμε τώρα ένα μοντέλο Kelvin. Έχουμε δηλαδή κοινή τάση για τα δύο μέλη και άθροιση των επιμέρους παραμορφώσεων.

$$\sigma = \sigma_K = \sigma_S$$

$$\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon_S$$

Στις σχέσεις αυτές, ο δείκτης S υποδηλώνει την αναφορά στο ελατήριο (Spring) και ο δείκτης K το μοντέλο Kelvin.

Για το ελατήριο έχουμε:

$$\sigma_S = E\varepsilon_S$$

όπου με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace:

$$\overline{\sigma}(s) = E_1\,\overline{\varepsilon_S}$$

Για το στοιχείο Kelvin παίρνουμε μετά από μια απλή μετάθεση των όρων:

$$\dot{\varepsilon}_\kappa + \frac{E_2}{\eta}\varepsilon_K = \frac{\sigma_K}{\eta}$$

και όταν στην σχέση αυτή εφαρμόσουμε μετασχηματισμό Laplace γίνεται:

$$\left(s + \frac{E_2}{\eta}\right)\overline{\varepsilon}_K(s) = \frac{\overline{\sigma}(s)}{\eta}$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στην αρχική συνθήκη για την παραμόρφωση του μοντέλου, έχουμε:

$$\bar{\varepsilon}(s) = \bar{\varepsilon}_K(s) + \bar{\varepsilon}_S(s)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις και εφαρμόζοντας και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, προκύπτει η τελική έκφραση της καταστατικής εξίσωσης του μοντέλου Zener, η οποία έχει την ακόλουθη μορφή.

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2}\dot{\sigma} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}\varepsilon + \frac{E_1 \eta}{E_1 + E_2}\dot{\varepsilon}$$

Πείραμα Ερπυσμού και Μέτρο Ένδοσης

Όπως και για τα απλά μοντέλα, έτσι και στο τριπαραμετρικό μοντέλο Zener θα μελετήσουμε την συμπεριφορά του στο πείραμα του ερπυσμού.

Επιβάλλουμε ακαριαία τάση σ_0 τη χρονική στιγμή $t = 0$. Στην καταστατική εξίσωση του μοντέλου ενσωματώνουμε τη σχέση για την τάση:

$$\sigma(t) = \sigma_0 u(t)$$

Από την επίλυση που έχει γίνει με την βοήθεια του Mathematica, προκύπτει το μέτρο ένδοσης:

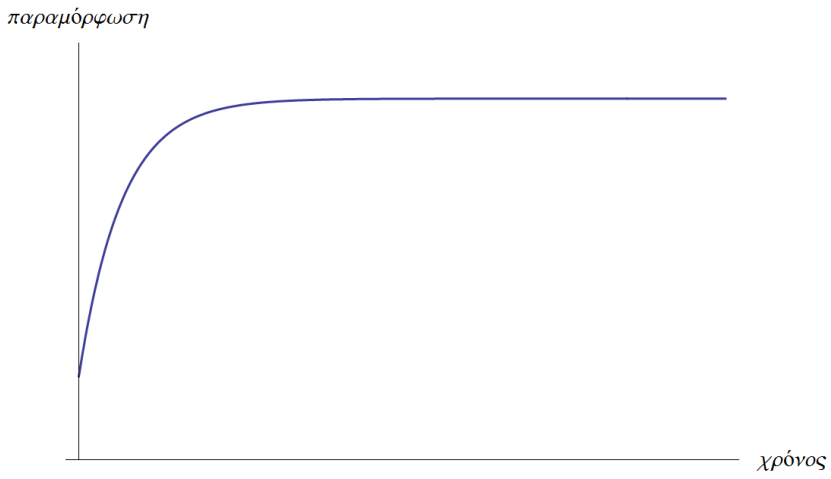
$$J_Z(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1 - e^{-t\frac{E_2}{\eta}}}{E_2}$$

Από την καμπύλη του ερπυσμού που προκύπτει από την γραφική αναπαράσταση της σχέσης,

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) u(t)$$

φαίνεται ότι για $t = 0$, δηλαδή στην ακαριαία επιβολή της τάσης, το μοντέλο αποκτά πεπερασμένη παραμόρφωση $\frac{\sigma_0}{E_2}$, ενώ όταν ο χρόνος $t \to \infty$ η παραμόρφωση τείνει στην τιμή

$\frac{E_1+E_2}{E_1E_2}\sigma_0$. Παρατηρούμε δηλαδή, ότι οι τιμές για $t \to 0, \infty$ της παραμόρφωσης είναι ανεξάρτητες από το ιξώδες του υλικού και εξαρτώνται μόνο από τις ελαστικές σταθερές του.



Σχήμα 1.0.12 Καμπύλη Ερπυσμού Zener

Πείραμα και Μέτρο Χαλάρωσης

Για την μελέτη της συμπεριφοράς του μοντέλου στο πείραμα της χαλάρωσης, όπως έχει εφαρμοστεί και στα προηγούμενα μοντέλα σημαντικό μέρος έχει η εύρεση του μέτρου χαλάρωσης που το χαρακτηρίζει. Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο πως υπάρχει και δεύτερος τρόπος υπολογισμού του εφόσον γνωρίζουμε ήδη το αντίστοιχο μέτρο ένδοσης του μοντέλου.

Η σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη είναι η ακόλουθη:

$$s\bar{J}(s) = \frac{1}{s\bar{Y}(s)}$$

και εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace μπορούμε να υπολογίσουμε το άγνωστο από τα δύο μεγέθη.

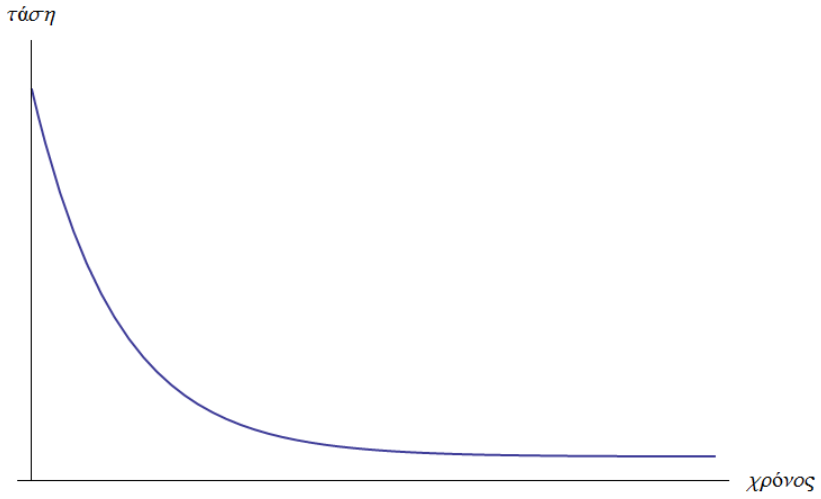
Στη συγκεκριμένη περίπτωση, μετά από τους υπολογισμούς που αντίστοιχα έγιναν στο Mathematica, προκύπτει για το μοντέλο Zener:

$$Y_Z(t) = \frac{E_1\left(E_2 + e^{-t\frac{(E_1+E_2)}{\eta}}E_1\right)}{E_1 + E_2}$$

Για την καλύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς του μοντέλου, σχεδιάζουμε την καμπύλη χαλάρωσης με βάση την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 Y(t) u(t)$$

Για $t = 0$ το μοντέλο αποκτά πεπερασμένη τάση $\varepsilon_0 E_1$ ενώ όταν ο χρόνος $t \to \infty$ η τάση τείνει στην τιμή $\varepsilon_0 \frac{E_1 E_2}{E_1+E_2}$. Παρατηρούμε δηλαδή, ότι όπως και στο πείραμα του ερπυσμού, έτσι και στο πείραμα της χαλάρωσης, οι τιμές για $t \to 0, \infty$ της παραμόρφωσης είναι ανεξάρτητες από το ιξώδες του υλικού και εξαρτώνται μόνο από τις ελαστικές σταθερές του.



Σχήμα 1.0.13 Καμπύλη Χαλάρωσης Zener

Δυναμική Μηχανική Συμπεριφορά

Η συμπεριφορά των ιξωδοελαστικών υλικών μπορεί να μελετηθεί και με μια εναλλακτική πειραματική μέθοδο. Η τρίτη κατά σειρά δοκιμασία που θα επιβάλλουμε στα μοντέλα της μελέτης αυτής ονομάζεται δυναμική μηχανική δοκιμή (Dynamic Mechanical Test).

Στο πείραμα αυτό, εφαρμόζουμε μια δυναμική φόρτιση σε μια ράβδο ιξωδοελαστικού υλικού. Επιβάλλουμε δηλαδή μια περιοδικά μεταβαλλόμενη τάση ή παραμόρφωση, για παράδειγμα μια ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενη, και μελετούμε την απόκριση του υλικού.

Στην περίπτωση της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας, τόσο η επιβαλλόμενη τάση όσο και η αποκρινόμενη παραμόρφωση, θα μεταβάλλονται ημιτονοειδώς αλλά θα έχουν μια διαφορά φάσης μεταξύ τους. Η ίδια μελέτη μπορεί να γίνει και αντιστρόφως και να φέρει τα ίδια αντίστοιχα αποτελέσματα, δηλαδή να επιβληθεί παραμόρφωση και να ακολουθεί η αποκρινόμενη τάση.

Επιλέγουμε και εφαρμόζουμε μια ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενη παραμόρφωση της μορφής:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

με απόκριση του υλικού μια τάση της μορφής:

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta)$$

όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα και δ η διαφορά φάσης.

Την εξίσωση της τάσης την εξελίσσουμε ως:

$$\sigma = (\sigma_0 \cos \delta) \sin \omega t + (\sigma_0 \sin \delta) \cos \omega t$$

και έτσι μπορούμε να πούμε ότι αποκαλύπτονται οι δύο συνιστώσες της τάσης. Η πρώτη που είναι σε φάση με την παραμόρφωση και έχει μέτρο $\sigma_0 \cos \delta$ και η δεύτερη που έχει διαφορά φάσης $90°$ με την παραμόρφωση και μέτρο $\sigma_0 \sin \delta$.

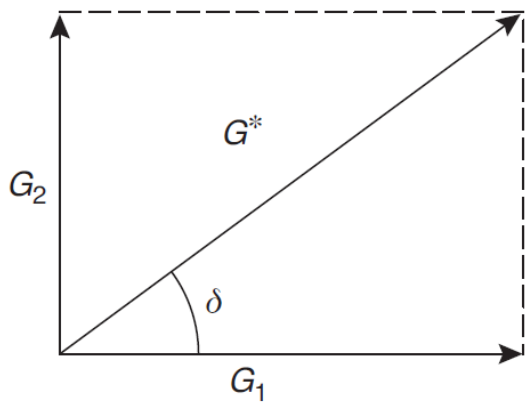
Η τάση εκφράζεται και ως:

$$\sigma = \varepsilon_0 G_1 \sin \omega t + \varepsilon_0 G_2 \cos \omega t$$

όπου

$$G_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos \delta \qquad \text{και} \qquad G_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \delta$$

Τα μέτρα αυτά ορίζουν ένα μιγαδικό μέτρο G^* (Complex Modulus) και η σχέση τους αναπαρίσταται από το ακόλουθο διάγραμμα.



*Σχήμα 1.0.14 Αναπαράσταση του Μιγαδικού Μέτρου G**

Αν θεωρούσαμε

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t} = \varepsilon_0 (\cos \omega t + \mathrm{i} \sin \omega t)$$

και

$$\sigma = \sigma_0 e^{i(\omega t + \delta)}$$

έτσι ώστε

$$G^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} (\cos \delta + i \sin \delta) = G_1 + iG_2$$

τότε το G_1, δηλαδή το πραγματικό μέρος του G^*, είναι σε φάση με την παραμόρφωση και ονομάζεται μέτρο αποθήκευσης (Storage Modulus). Αυτό καθορίζει την ενέργεια που αποθηκεύεται ως ελαστική ενέργεια στο υλικό λόγω της επιβαλλόμενης παραμόρφωσης. Το G_2, δηλαδή το φανταστικό μέρος του G^*, είναι σε φάση $90°$ με την παραμόρφωση και ονομάζεται μέτρο απωλειών (Loss Modulus), συμβολίζοντας την απώλεια της μηχανικής ενέργειας και την παράλληλη μετατροπή της σε θερμική.

Για την καλύτερη κατανόηση της απώλειας της ενέργειας, θα την υπολογίσουμε για ένα πλήρη κύκλο:

$$\Delta E = \oint \sigma \, \Delta\varepsilon = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma \frac{d\varepsilon}{dt} dt$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση $\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta)$ και αφού γίνει παραγώγιση στην σχέση για την παραμόρφωση ως προς τον χρόνο και αντικατάσταση το $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0 \omega \cos \omega t$.

Χρήσιμες για τους υπολογισμούς σε αυτό το στάδιο είναι η ταυτότητες

$$\cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\,\omega t \qquad \text{και} \qquad \cos^2 \omega t = \frac{1+\cos 2\omega t}{2}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει:

$$\Delta E = {\varepsilon_0}^2 \omega \left[\frac{G_1}{2} \int_0^{2\pi/\omega} \sin 2\omega t \, dt + \frac{G_2}{2} \int_0^{2\pi/\omega} (1 + \cos 2\omega t) dt \right]$$

δηλαδή

$$\Delta E = \pi \, {\varepsilon_0}^2 G_2$$

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι η απώλεια της ενέργειας είναι συνάρτηση μόνο του G_2 και ανεξάρτητη της κυκλικής συχνότητας ω.

Για τα τέλεια ελαστικά υλικά, όλη η μηχανική ενέργεια που αποθηκεύεται κατά την παραμόρφωση αποδίδεται κατά την επαναφορά του στην αρχική κατάσταση. Αν δηλαδή εφαρμόσουμε μια ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενη παραμόρφωση, στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο του κύκλου αποθηκεύεται η ενέργεια και στο δεύτερο και τέταρτο ανακτάται εξ ’ολοκλήρου. Αντίθετα στα ιξώδη υγρά, όλη η μηχανική ενέργεια που απαιτείται για την παραμόρφωσή τους χάνεται σε θερμική. Σε ένα ιξωδοελαστικό υλικό που εξ ’ορισμού

συνδυάζει την ελαστική και την ιξώδη συμπεριφορά, θεωρούμε ότι το μέτρο G_1 αντιπροσωπεύει το ελαστικό μέρος του υλικού και το G_2 το ιξώδες.

Με βάση αυτά υπολογίζουμε την μέγιστη ελαστική ενέργεια αποθήκευσης στο υλικό:

$$E = \int_0^{T/4} \sigma d\varepsilon$$

Αν ακολουθήσουμε την αντίστοιχη διαδικασία με πριν, προκύπτει:

$$E = \frac{1}{2}\, {\varepsilon_0}^2 G_1$$

η οποία είναι συνάρτηση μόνο του G_1 και ανεξάρτητη της κυκλικής συχνότητας ω.

Συνεπώς, για τα μέτρα αποθήκευσης και απωλειών μπορούμε να πούμε ότι γράφονται και ως εξής:

$$G_1 = \frac{2E}{{\varepsilon_0}^2} \qquad \text{και} \qquad G_2 = \frac{\Delta E}{\pi\, {\varepsilon_0}^2}$$

και ακόμα

$$\frac{G_2}{G_1} = \tan\delta = \frac{\Delta E}{2\pi E}$$

όπου $\tan\delta$ η εφαπτομένη απωλειών (loss tangent).

Τέλος, ο λόγος $\frac{\Delta E}{E} = 2\pi \tan\delta$ ονομάζεται ειδική απώλεια.

Για ένα πολυμερές, τυπικές τιμές για τα παραπάνω μεγέθη είναι $G_1 = 1GPa$, $G_2 = 10MPa$, και η διαφορά φάσης $\tan\delta = 0.01$. Παρατηρούμε ότι για τα πολυμερή το G_2 είναι σχεδόν πάντα πολύ μικρό σε σχέση με το G_1 και έτσι μπορούμε να πούμε ότι το μέτρο του G^*είναι προσεγγιστικά ίσο με το G_1.

Σε κάποιες περιπτώσεις είναι πιο εύχρηστες οι μιγαδικές ενδοτικότητες J και όχι τα μέτρα διάτμησης G. Για την εύρεση αυτών, ακολουθούμε την ίδια ακριβώς διαδικασία με μόνο αλλαγή την εφαρμογή ημιτονοειδούς τάσης

$$\sigma = \sigma_0 \sin\omega t$$

με απόκριση του υλικού μια παραμόρφωση της μορφής:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t + \delta)$$

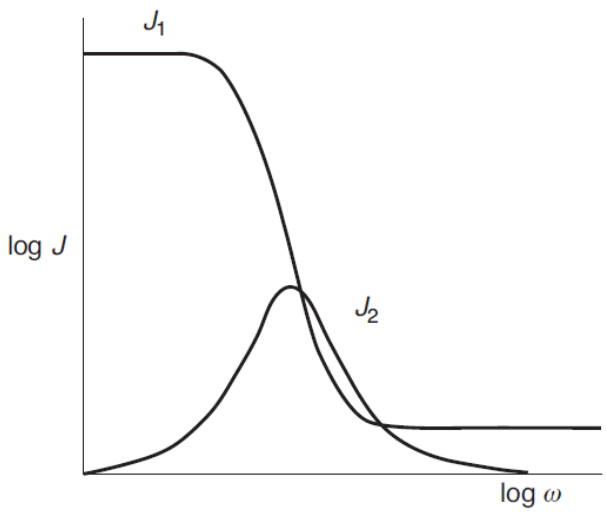
Αντίστοιχα λοιπόν θα προκύπτει το μιγαδικό μέτρο ένδοσης (Complex Compliance):

$$J^* = \frac{\varepsilon}{\sigma} = J_1 - i\, J_2$$

με J_1 την ενδοτικότητα αποθήκευσης και J_2 την ενδοτικότητα απώλειας.

Το μέτρο αυτό, συνδέεται με το πρώτο μέρος της μελέτης με την ακόλουθη σχέση:

$$G^* = \frac{1}{J^*}$$



Σχήμα 1.0.15 Καμπύλες J_1 και J_2 λογαριθμικά ως προς τη συχνότητα

Με την ακόλουθη ανάλυση θα δείξουμε και το λόγο της ύπαρξης του "-" στην σχέση.

Αντίστοιχα με πριν:

$$\varepsilon = (\varepsilon_0 \cos\delta) \sin\omega t + (\varepsilon_0 \sin\delta) \cos\omega t \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \sigma_0 J_1 \sin\omega t + \sigma_0 J_2 \cos\omega t$$

όπου

$$J_1 = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0}\cos\delta \qquad \text{και} \qquad J_2 = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0}\sin\delta$$

Η ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα υπολογίζεται ως:

$$\Delta E = \oint \sigma \, \Delta\varepsilon = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma \frac{d\varepsilon}{dt} dt$$

και προκύπτει μετά από τους αντίστοιχους υπολογισμούς:

$$\Delta E = -\pi J_2 \sigma_0$$

Όμως

$$\Delta E > 0 \Leftrightarrow J_2 < 0$$

γι' αυτό και εξαρχής τοποθετούμε "-" στην σχέση του J^*.

Ακόμη,

$$E = \int_0^{T/4} \sigma d\varepsilon = \frac{1}{2} {\sigma_0}^2 (J_1 - \frac{\pi}{2} J_2)$$

και

$$\frac{J_2}{J_1} = \tan\delta = \frac{2\Delta E}{\pi \Delta E - 4\pi E}$$

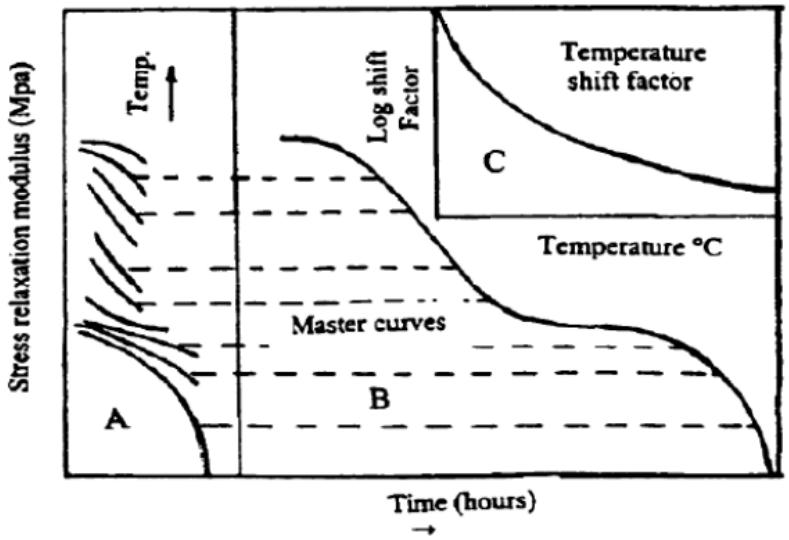
Αρχή Ισοδυναμίας Χρόνου – Θερμοκρασίας

Στα ιξωδοελαστικά υλικά ισχύει μια πολύ βασική αρχή η οποία εξυπηρετεί στο σχηματισμό μιας και μοναδικής, συνεχής καμπύλης (master curve) για πειραματικά δεδομένα χαλάρωσης τάσης αλλά και δυναμικών μηχανικών μεγεθών. Σύμφωνα με τον Leaderman, ο χρόνος και η θερμοκρασία είναι «ισοδύναμα», σε σημείο που πειραματικά δεδομένα χαλάρωσης τάσης δύο διαφορετικών θερμοκρασιών μπορούν να συμπέσουν με απλή μετατόπιση των καμπυλών. Η μελέτη για την μεταφορά των καμπυλών διαφορετικών θερμοκρασιών σε μια κύρια καμπύλη με θερμοκρασία αναφοράς που να καλύπτει μια ευρεία περιοχή χρόνου έγινε από τους Tobolsky και Ferry. Κύριος άξονας της μελέτης είναι η διόρθωση των πειραματικών καμπυλών ως προς την θερμοκρασία και την πυκνότητα και στη συνέχεια η μετατόπιση των καμπυλών χαλάρωσης κατά μήκος του λογαριθμικού άξονα του χρόνου $logt$, μέχρι το σημείο που τμήματά τους θα συμπέσουν.

Η διόρθωση της χρονικής πειραματικής καμπύλης της χαλάρωσης τάσης E_r που προηγείται την μετατόπισης, αφορά την θερμοκρασία αναφοράς T_0 (K) και την αντίστοιχη πυκνότητα ρ_0 του υλικού σε αυτή και γίνεται με βάση την εξίσωση [23]:

$$E_r(t)_{\delta\iota o\rho\theta\omega\mu\acute{\varepsilon}\nu o} = \left(\frac{T_0\rho_0}{T\rho}\right) E_r(t)_{\pi\varepsilon\iota\rho\alpha\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}}$$

με T (K), ρ μια άλλη τιμή θερμοκρασίας και αντίστοιχης πυκνότητας.



Σχήμα 1.0.16 Η Αρχή Ισοδυναμίας Χρόνου-Θερμοκρασίας [13]

Η μετατόπιση της κάθε καμπύλης (Μέρος Α / Σχήμα 1.0.16) γίνεται κατά ένα διάστημα $\log t - \log t_0 = \log a_T$ ώστε να συνυπάρξουν και να σχηματίσουν την μητρική καμπύλη (Μέρος Β / Σχήμα 1.0.16). Ο παράγοντας $a_T = \frac{t}{t_0}$ ονομάζεται συντελεστής μετατόπισης (shift factor) και απεικονίζεται στο (Μέρος Γ / Σχήμα 1.0.16). Ωστόσο, ένα ακόμα πολύ σημαντικό γεγονός, στο οποίο στηρίζεται η μελέτη αυτή και από το οποίο παίρνει και την ονομασία της η Αρχή Ισοδυναμίας ή Επαλληλίας, είναι το γεγονός ότι το άξονας x είναι διπλός, απεικονίζει δηλαδή και την θερμοκρασία και τον χρόνο [23].

Εφαρμογή στα Μοντέλα

Θα υποβάλλουμε στη δυναμική μηχανική δοκιμή τα ιξωδοελαστικά μοντέλα με στόχο την εύρεση των χαρακτηριστικών μεγεθών τους $G_1, G_2, J_1, J_2, \tan\delta$.

Μοντέλο Maxwell

Στην καταστατική εξίσωση

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}\sigma$$

ενσωματώνουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\tau_R = \frac{\eta}{E}$$

και

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t} = \varepsilon G^* \Rightarrow \sigma = \varepsilon(G_1 + iG_2)$$

Μετά από μία σειρά πράξεων προκύπτει:

$$G_1 + iG_2 = \frac{\omega^2 {\tau_R}^2 E}{1 + \omega^2 {\tau_R}^2} + i\frac{E\tau_R\omega}{1 + \omega^2 {\tau_R}^2}$$

που με μια αντιστοίχιση των όρων, παίρνουμε:

$$G_1 = \frac{\omega^2 {\tau_R}^2 E}{1 + \omega^2 {\tau_R}^2}\ ,\quad G_2 = \frac{E\tau_R\omega}{1 + \omega^2 {\tau_R}^2}$$

καθώς επίσης:

$$\tan\delta = \frac{G_2}{G_1} = \frac{1}{\omega\tau_R}$$

Για την εύρεση των υπόλοιπων μεγεθών, αντικαθιστώ στην καταστατική εξίσωση του μοντέλου, πέρα από την σχέση για τον χρόνο καθυστέρησης και:

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t} = \frac{\varepsilon}{J^*} \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \sigma_0 e^{i\omega t}(J_1 - iJ_2)$$

Μετά από τις απαραίτητες πράξεις:

$$J_1 - iJ_2 = \frac{1}{E} - i\frac{1}{E\omega\tau_R}$$

δηλαδή:

$$J_1 = \frac{1}{E} \ , \qquad J_2 = \frac{1}{E\omega\tau_R}$$

Αν υπολογίσω την εφαπτομένη απωλειών, καταλήγω όπως ήταν αναμενόμενο στην ίδια σχέση που βρήκα και πριν.

$$\tan\delta = \frac{J_2}{J_1} = \frac{1}{\omega\tau_R}$$

Μοντέλο Kelvin

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, αντικαθιστώ στην καταστατική εξίσωση του μοντέλου:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$$

και προκύπτουν:

$$G_1 = E \ , \ G_2 = E\tau_R\omega$$

$$J_1 = \frac{1}{E(1+\omega^2{\tau_R}^2)} \ , \ J_2 = \frac{\tau_R\omega}{E(1+\omega^2{\tau_R}^2)}$$

και συνεπώς η εφαπτομένη:

$$\tan\delta = \tau_R\omega$$

την οποία αν παρατηρήσουμε βλέπουμε ότι είναι αντιστρόφως ανάλογη της αντίστοιχης του μοντέλου Maxwell.

Μοντέλο Zener

Την ίδια ακριβώς διαδικασία ακολουθώ και για το τριπαραμετρικό μοντέλο Zener.

Από την καταστατική εξίσωση του μοντέλου και για χρόνο χαλάρωσης $\tau_R = \frac{\eta}{E_2}$

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2}\dot{\sigma} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}\varepsilon + \frac{E_1 \eta}{E_1 + E_2}\dot{\varepsilon}$$

μετά από τις απαραίτητες πράξεις, βρίσκουμε:

$$G_1 = \frac{E_1 E_2(E_1 + E_2) + E_1 {E_2}^2 \omega^2 {\tau_R}^2}{(E_1 + E_2)^2 + {E_2}^2 \omega^2 {\tau_R}^2} \quad , \qquad G_2 = \frac{{E_1}^2 E_2 \omega \tau_R}{(E_1 + E_2)^2 + {E_2}^2 \omega^2 {\tau_R}^2}$$

$$J_1 = \frac{(E_1 + E_2) + E_2 \omega^2 {\tau_R}^2}{E_1 E_2 (1 + \omega^2 {\tau_R}^2)} \quad , \qquad J_2 = \frac{E_1 \omega \tau_R}{E_1 E_2 (1 + \omega^2 {\tau_R}^2)}$$

από τις οποίες προκύπτει:

$$\tan \delta = \frac{E_1 \omega \tau_R}{E_1 + E_2 + E_2 \omega^2 {\tau_R}^2}$$

που είναι βέβαια σαφώς πολυπλοκότερα από τα αντίστοιχα των απλών μοντέλων, αλλά παραμένουν απλές σχέσεις που αποτελούνται από τα χαρακτηριστικά μέτρα των στοιχείων που αποτελούν τα μοντέλα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Για τον έλεγχο του θορύβου σε πολλές μηχανικές δραστηριότητες όπως η αεροναυτική και η αυτοκινητοβιομηχανία, χρησιμοποιούνται ευρέως πορώδη υλικά όπως ο πολυμερικός αφρός και ο υαλοβάμβακας. Ο διττός χαρακτήρας των υλικών αυτών, τόσο στην απορρόφηση του ήχου καθώς και στην απόσβεσή του στην κατασκευή καθιστά την μελέτη τους ιδιαίτερα σημαντική.

Τα μοντέλα που μελετήσαμε στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας δεν μπορούν να περιγράψουν ποιοτικά και με ακρίβεια τη δυναμική συμπεριφορά των πραγματικών υλικών. Η ιξωδοελαστική συμπεριφορά τους είχε μοντελοποιηθεί από ιδανικά ελατήρια και απορροφητήρες που παρουσίαζαν την απόκριση των υλικών στην παραμόρφωση. Ο λόγος για τον οποίον προκύπτει η ανακρίβεια στην συμπεριφορά των ιδανικών μοντέλων που αποτελούνται από ελατήρια και απορροφητήρες μπορεί να προσδιοριστεί στις σχέσεις τάσης-παραμόρφωσης που προκύπτουν. Οι συγκεκριμένες σχέσεις ορίζονται ως προς το χρόνο από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ακέραιης τάξης.

Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να γενικευτούν αν αντικαταστήσουμε τις παραγώγους ακέραιης τάξης με αντίστοιχες κλασματικής τάξης. Με αυτόν τον τρόπο, τα μοντέλα θα γενικευτούν και θα δίνουν αποτελέσματα σε καμπύλες ως προς τη συχνότητα, με μικρότερη κλίση από τα κλασικά μοντέλα. Τα γενικευμένα αυτά μοντέλα θα τα ονομάζουμε μοντέλα κλασματικής παραγώγου (Fractional Models) και θα μελετηθούν αναλυτικά στο κεφάλαιο αυτό.

Μοντέλα Κλασματικής Παραγώγου (Fractional Models)

Για να εισάγουμε τις κλασματικές παραγώγους στην γραμμική ελαστικότητα, αντικαθιστούμε το Νευτώνειο απορροφητήρα με ένα στοιχείο Scott-Blair. Αντικαθιστούμε δηλαδή την πρώτη παράγωγο με μία κλασματική παράγωγο τάξης $\nu \in (0,1)$.

Δηλαδή για το στοιχείο Scott-Blair ισχύει:

$$\sigma = \eta \frac{d^{\nu}\varepsilon}{dt^{\nu}}$$

Στην μελέτη αυτή που συναντάται και στην ρεολογία της Γης καθώς και στην σεισμολογία, είναι πολύ σύνηθες την σχέση της τάσης-παραμόρφωσης να την γράφουμε συνάρτηση ενός σύνθετου μέτρου διάτμησης $\hat{\mu}(s)$ ως:

$$\bar{\sigma}(s) = 2\hat{\mu}(s)\bar{\varepsilon}(s)$$

Η γενικευμένη αυτή σχέση προκύπτει αν εφαρμόσουμε μετασχηματισμό Laplace στη σχέση για το ιδανικό ελαστικό στερεό του Hooke:

$$\sigma(t) = 2\mu_0\varepsilon(t)$$

όπου το μ_0 υποδηλώνει το μέτρο διάτμησης.

Από τους μετασχηματισμούς Laplace ισχύουν και οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\bar{\sigma}(s) = s\bar{G}(s)\bar{\varepsilon}(s) \quad , \qquad \bar{\varepsilon}(s) = s\,\bar{J}(s)\bar{\sigma}(s)$$

καθώς και ο συνδυασμός των δύο, που δίνει την γνωστή και από το προηγούμενο κεφάλαιο σχέση:

$$s\,\bar{J}(s) = \frac{1}{s\bar{G}(s)}$$

Μετά από συνδυασμό των ανωτέρων σχέσεων, θα γράψουμε τις σχέσεις για τα $\bar{J}(s), \bar{G}(s)$ συναρτήση του μέτρου διάτμησης, ως:

$$\bar{J}(s) = \frac{1}{2s\hat{\mu}(s)} \quad , \qquad \bar{G}(s) = \frac{2\hat{\mu}(s)}{s}$$

Για το στοιχείο Hooke (ελατήριο) ξέρουμε ότι:

$$\sigma(t) = m\varepsilon(t)$$

$$\sigma(t) = 2\mu_0 \varepsilon(t)$$

από τις οποίες προκύπτει:

$$\widehat{\mu}_H(s) = \frac{m}{2} = \frac{E}{2} = \mu$$

Για το στοιχείο Scott-Blair (SB), ισχύει:

$$\sigma(t) = \eta \frac{d^\nu \varepsilon(t)}{dt^\nu}$$

η οποία μετά από μετασχηματισμό Laplace, μετατρέπεται σε:

$$\overline{\sigma}(s) = \eta\, s^\nu \overline{\varepsilon}(s)$$

Εισάγουμε κάποιες μεταβλητές για την διευκόλυνση της μελέτης, δηλαδή $\eta = b_1$ και $\tau^\nu = \frac{b_1}{2\mu}$

Άρα:

$$\overline{\sigma}(s) = \tau^\nu 2\mu s^\nu \overline{\varepsilon}(s)$$

και σε σύγκριση με:

$$\overline{\sigma}(s) = 2\widehat{\mu}(s)\overline{\varepsilon}(s)$$

Προκύπτει:

$$\widehat{\mu}_{SB}(s) = \tau^\nu \mu\, s^\nu = \mu(\tau s)^\nu$$

Σε περίπτωση που έχουμε δύο μοντέλα ή στοιχεία και θέλουμε τα υπολογίσουμε το μέτρο διάτμησης του συνόλου, θα χρησιμοποιήσουμε τους ακόλουθους κανόνες σύνθεσης.

Αν τα στοιχεία είναι συνδεδεμένα σε σειρά, τότε:

$$\frac{1}{\widehat{\mu}(s)} = \frac{1}{\widehat{\mu_1}(s)} + \frac{1}{\widehat{\mu_2}(s)}$$

ενώ αν βρίσκονται σε παράλληλη σύνδεση:

$$\widehat{\mu}(s) = \widehat{\mu_1}(s) + \widehat{\mu_2}(s)$$

Ένα ακόμα σημαντικό κομμάτι της ανάλυσης των μοντέλων της κλασματικής παραγώγου είναι, όπως και στα κλασικά μοντέλα, τα δυναμικά μέτρα.

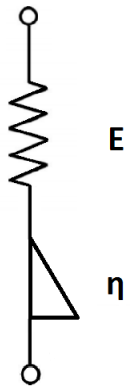
Για την εύρεση των μέτρων αποθήκευσης και απωλειών, εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός Fourier στην καταστατική εξίσωση του κάθε μοντέλου, και με πράξεις έρχεται στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon(\omega)} = E^*(i\omega) = E^{'} + i\,E^{''}$$

Το μέτρο αποθήκευσης $E^{'}$, αποτελεί το ελαστικό μέρος της σχέσης τάσης-παραμόρφωσης και το μέτρο απωλειών $E^{''}$ αντιπροσωπεύει το ιξώδες μέρος της σχέσης.

Όλη η παραπάνω μελέτη θα φανεί ιδιαιτέρως χρήσιμη για την ανάλυση των αντίστοιχων με το πρώτο κεφάλαιο μοντέλων. Η μελέτη αυτή θα συνεισφέρει στην βαθύτερη κατανόηση της μηχανικής συμπεριφοράς των μοντέλων και κατά συνέπεια των υλικών που περιγράφονται από την γραμμική ιξωδοελαστικότητα.

Μοντέλο Maxwell Κλασματικής Παραγώγου (Fractional Maxwell Model)



Σχήμα 2.0.1 Γραφική Αναπαράσταση Fractional Maxwell Model

Ένα στοιχείο Scott-Blair συνδεδεμένο σε σειρά με ένα ιδανικό ελατήριο αποτελεί το μοντέλο Maxwell.

Η καταστατική εξίσωση από: $\sigma + \frac{\eta}{E}\dot{\sigma} = \eta\dot{\varepsilon}$

Μετατρέπεται σε: $\sigma(t) + \frac{\eta}{E}\frac{d^{\nu}\sigma}{dt^{\nu}} = \eta\frac{d^{\nu}\varepsilon}{dt^{\nu}} \Rightarrow \sigma(t) + \alpha_1\frac{d^{\nu}\sigma}{dt^{\nu}} = b_1\frac{d^{\nu}\varepsilon}{dt^{\nu}}$

με $\alpha_1 = \frac{\eta}{E}$ και $b_1 = \eta$.

Για τον υπολογισμό των συναρτήσεων ένδοσης και χαλάρωσης θα ξεκινήσουμε από τους τύπους:

$$\bar{J}_M(s) = \frac{1}{2s\widehat{\mu_M}(s)} \quad , \qquad \bar{G}_M(s) = \frac{2\widehat{\mu_M}(s)}{s}$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε το μέτρο διάτμησης $\widehat{\mu_M}(s)$ για το μοντέλο Maxwell σύμφωνα με τους κανόνες σύνθεσης που αναφέραμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Παίρνουμε δηλαδή:

$$\frac{1}{\widehat{\mu_M}(s)} = \frac{1}{\widehat{\mu}_H(s)} + \frac{1}{\widehat{\mu}_{SB}(s)}$$

όπου:

$$\widehat{\mu}_H(s) = \mu \quad , \quad \widehat{\mu}_{SB}(s) = \mu(\tau s)^{\nu}$$

δηλαδή προκύπτει:

$$\widehat{\mu_M}(s) = \frac{\mu(s\tau)^{\nu}}{(s\tau)^{\nu} + 1}$$

Με απλή αντικατάσταση, έχουμε:

$$\bar{J}_M(s) = \frac{1}{2\mu s}\left[1 + \frac{1}{(s\tau)^{\nu}}\right] \ , \qquad \bar{G}_M(s) = \frac{2\mu}{s}\frac{(s\tau)^{\nu}}{(s\tau)^{\nu} + 1}$$

Θα πρέπει στις σχέσεις αυτές να εφαρμόσω τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, για $t \geq 0$. Απαραίτητες σε αυτό το σημείο είναι οι σχέσεις αντιστοιχίας των ζευγών των μετασχηματισμών Laplace που παρουσιάζονται στο Μαθηματικό Συμπλήρωμα ΙΙ, στο πίσω μέρος της εργασίας. Επίσης, απαραίτητη είναι και η γνώση ενός από τα βασικά ζεύγη συναρτήσεων που καθορίζονται από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace.

$$L^{-1}\left\{\frac{\alpha}{s}\right\} = \alpha$$

Με την χρήση των σχέσεων αυτών, καταλήγουμε στη συνάρτηση ένδοσης για το μοντέλο Maxwell:

$$J_M(t) = \frac{1}{2\mu}\left[1 + \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\nu}}{\Gamma(1+\nu)}\right]$$

όπου το Γ υποδηλώνει τη συνάρτηση Γάμμα.

Σύμφωνα με το Μαθηματικό Συμπλήρωμα ΙΙΙ που περιέχει περισσότερες πληροφορίες για την συνάρτηση Γάμμα,

$$\Gamma(1+\nu) = \int_0^\infty x^\nu e^{-x} dx$$

Αντίστοιχα, για τη συνάρτηση χαλάρωσης του μοντέλου Maxwell, έχουμε:

$$G_M(t) = 2\mu\, E_\nu[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\nu]$$

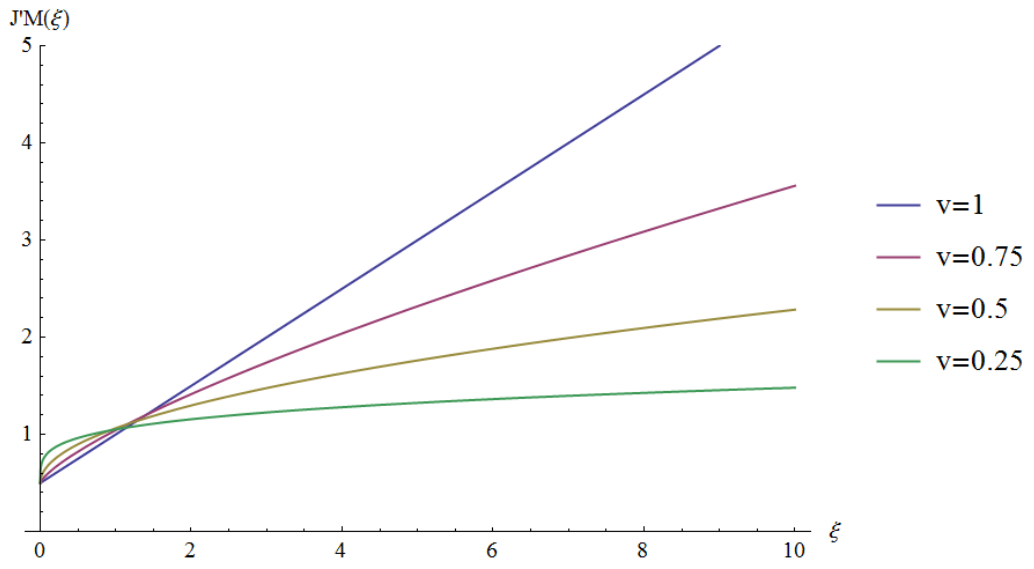
όπου ο συμβολισμός E_ν αναφέρεται στην συνάρτηση Mittag-Leffler τάξης ν.

Σύμφωνα με το Μαθηματικό Συμπλήρωμα III που περιέχει περισσότερες πληροφορίες για την συνάρτηση:

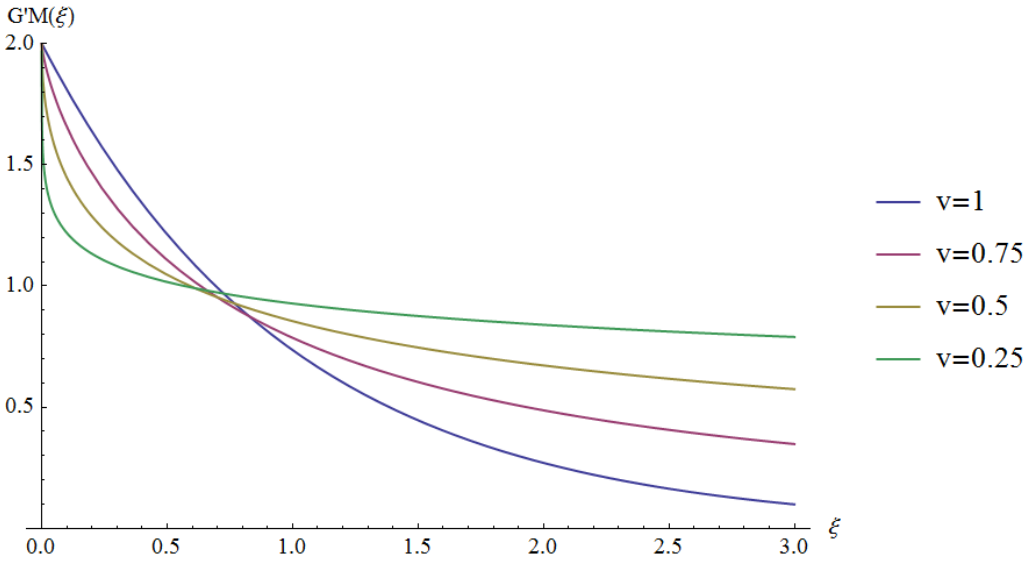
$$E_\nu\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\nu\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\nu n}}{\Gamma(\nu n+1)}, \qquad 0 < \nu \leq 1, \quad \tau > 0$$

Για τη δημιουργία διαγραμμάτων για τις συναρτήσεις ένδοσης και χαλάρωσης, είναι πιο βολικό να χρησιμοποιούμε τύπους χωρίς διαστάσεις. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε εντάσσοντας στην μελέτη έναν αδιάστατο χρόνο $\xi = \frac{t}{\tau}$, έτσι ώστε:

$$J'_M(\xi) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(\xi)^\nu}{\Gamma(1+\nu)}\right], \qquad G'_M(\xi) = 2\, E_\nu[-\xi^\nu]$$



Σχήμα 2.0.2 Καμπύλη Απόκρισης Συνάρτησης Ένδοσης Μοντέλου Fractional Maxwell



Σχήμα 2.0.3 Καμπύλη Απόκρισης Συνάρτησης Χαλάρωσης Μοντέλου Fractional Maxwell

Για διάφορες τιμές του ν στα όρια του ορισμού του, παρουσιάζονται τα διαγράμματα για τις δύο χαρακτηριστικές συναρτήσεις του μοντέλου Maxwell.

Όσο το $\nu \to 1$, η απόκριση του μοντέλου Maxwell κλασματικής παραγώγου τείνει να προσεγγίσει την συμπεριφορά του κλασικού μοντέλου. Ειδικά στην καμπύλη για $\nu = 1$, παρουσιάζεται η καμπύλη του αντίστοιχου κλασικού μοντέλου.

Για το μέτρο ένδοσης παρατηρούμε ότι όσο μικρότερο είναι το ν, τόσο μικρότερη είναι τελικά και η τιμή στην οποία τείνει το μέτρο. Αντίθετα, στις μικρότερες τιμές του ν, το μέτρο χαλάρωσης με την πάροδο του χρόνου, τείνει προς μεγαλύτερες τιμές. Ωστόσο και στα δύο διαγράμματα, όσο μικρότερο είναι το ν, τα μέτρα τείνουν στην τιμή "ισορροπίας" πιο γρήγορα.

Για την εύρεση των δυναμικών μέτρων, εφαρμόζουμε στην καταστατική εξίσωση του μοντέλου Maxwell, τον μετασχηματισμό Fourier.

$$\sigma(t) + \frac{\eta}{E}\frac{d^{\nu}\sigma}{dt^{\nu}} = \eta\frac{d^{\nu}\varepsilon}{dt^{\nu}} \Rightarrow$$

$$\sigma(\omega) + \frac{\eta}{E}(i\omega)^{\nu}\sigma(\omega) = \eta(i\omega)^{\nu}\varepsilon(\omega)$$

Στις πράξεις που απαιτούνται για τα ακόλουθα βήματα, πολύ χρήσιμη είναι η ακόλουθη ταυτότητα:

$$i^{\nu} = \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + i\sin(\nu\frac{\pi}{2})$$

Στόχος να υπολογίσουμε τον λόγο $\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon(\omega)}$ στην ακόλουθη μορφή:

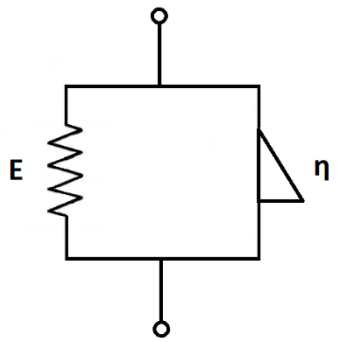
$$\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon(\omega)} = E^{*}(i\omega) = E^{'} + i\,E^{''}$$

Τελικά το μέτρο αποθήκευσης και το μέτρο απωλειών του μοντέλου είναι αντίστοιχα,

$$E^{'}{}_{M} = E\eta\omega^{\nu}\frac{E\cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \eta\omega^{\nu}}{\left[E + \eta\omega^{\nu}\cos(\nu\frac{\pi}{2})\right]^{2} + \left[\eta\omega^{\nu}\sin(\nu\frac{\pi}{2})\right]^{2}}$$

$$E^{''}{}_{M} = E\eta\omega^{\nu}\frac{E\,sin(\nu\frac{\pi}{2})}{\left[E + \eta\omega^{\nu}\cos(\nu\frac{\pi}{2})\right]^{2} + \left[\eta\omega^{\nu}\sin(\nu\frac{\pi}{2})\right]^{2}}$$

Μοντέλο Kelvin Κλασματικής Παραγώγου (Fractional Kelvin Model)



Σχήμα 2.0.4 Γραφική Αναπαράσταση Fractional Kelvin Model

Στο μοντέλο Kelvin κλασματικής παραγώγου, έχουμε ένα στοιχείο Scott-Blair συνδεδεμένο παράλληλα με ένα ιδανικό ελατήριο.

Η καταστατική εξίσωση του μοντέλου μετατρέπεται:

$$\sigma = E\varepsilon \quad + \eta\dot{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\frac{d^{\nu}\varepsilon}{dt^{\nu}}$$

Για την εύρεση του μέτρου διάτμησης για το μοντέλο Kelvin, θα ακολουθήσουμε τον ακόλουθο κανόνα, εφόσον έχουμε παράλληλη σύνδεση των στοιχείων:

$$\widehat{\mu}_{K}(s) = \widehat{\mu_{H}}(s) + \widehat{\mu_{SB}}(s)$$

δηλαδή,

$$\widehat{\mu}_{K}(s) = \mu + \mu(s\tau)^{\nu} = \mu\left[1 + (s\tau)^{\nu}\right]$$

Σύμφωνα με την ανάλυση που έχει προηγηθεί, το μέτρο διάτμησης είναι απαραίτητο για την εύρεση των συναρτήσεων ενδοτικότητας και χαλάρωσης.

$$\bar{J}_K(s) = \frac{1}{2s\widehat{\mu_K}(s)} \quad , \qquad \bar{G}_K(s) = \frac{2\widehat{\mu_K}(s)}{s}$$

Με απλή αντικατάσταση, προκύπτουν:

$$\bar{J}_K(s) = \frac{1}{2s\mu}\left[1 - \frac{(s\tau)^v}{1 + (s\tau)^v}\right]$$

$$\bar{G}_K(s) = \frac{2\mu}{s}\left[1 + (s\tau)^v\right]$$

Για να μετατραπούν οι σχέσεις αυτές, σε συναρτήσεις ως προς τον χρόνο, απαραίτητη είναι η εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace για $t \geq 0$. Για την εφαρμογή του, χρησιμοποιούνται οι σχέσεις που υπάρχουν στο Μαθηματικό συμπλήρωμα ΙΙ, καθώς και:

$$L^{-1}\left\{\frac{\alpha}{s}\right\} = \alpha$$

Καταλήγουμε για την συνάρτηση ένδοσης:

$$J_K(t) = \frac{1}{2\mu}\left[1 - E_\nu[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\nu]\right]$$

όπου και εδώ η συνάρτηση Mittag-Leffler ισοδυναμεί με:

$$E_\nu\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\nu\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\nu n}}{\Gamma(\nu n + 1)} \ , \qquad 0 < \nu \leq 1, \quad \tau > 0$$

και Γ η συνάρτηση Γάμμα. Περισσότερα για αυτές τις συναρτήσεις υπάρχουν στο Μαθηματικό συμπλήρωμα ΙΙΙ.

Αντίστοιχα, η συνάρτηση χαλάρωσης του μοντέλου:

$$G_K(t) = 2\mu\left[1 + \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}\right]$$

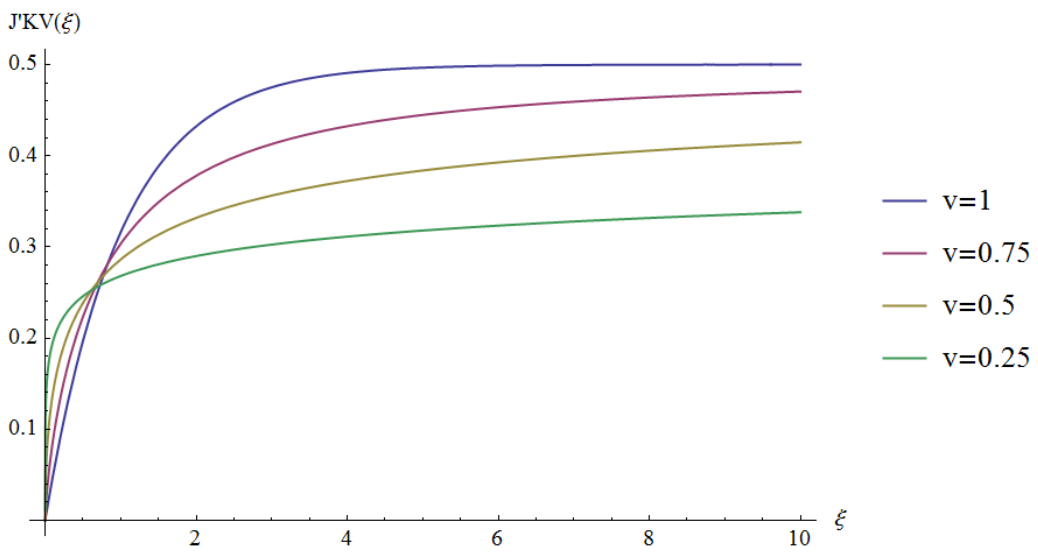
όπου η συνάρτηση Γάμμα:

$$\Gamma(1-\nu) = \int_0^\infty x^\nu e^{-x} dx$$

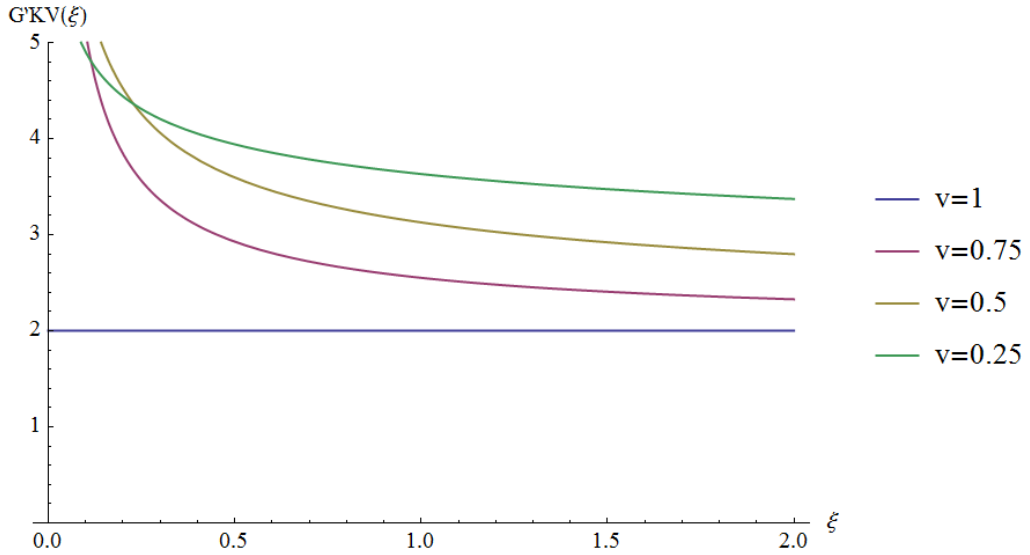
Για να μπορέσουμε να δημιουργήσουμε τα διαγράμματα των δύο συναρτήσεων, κι έτσι να μπορέσουμε να αποτυπώσουμε την συμπεριφορά τους, όπως και στο μοντέλο Maxwell έτσι και στο μοντέλο Kelvin, θα χρησιμοποιήσουμε τις τροποποιημένες εξισώσεις που περιλαμβάνουν τον αδιάστατο χρόνο ξ.

$$J_K{}'(\xi) = \frac{1}{2}\left[1 - E_\nu(-\xi^\nu)\right] \ , \qquad G_K{}'(\xi) = 2\left[1 + \frac{\xi^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}\right] \ , \qquad \xi = \frac{t}{\tau}$$

Για διάφορες τιμές του ν μέσα στα πλαίσια του ορισμού του, παρουσιάζονται τα διαγράμματα για τις δύο χαρακτηριστικές συναρτήσεις του μοντέλου Kelvin. Για $\nu = 1$, αποτυπώνεται η συμπεριφορά του κλασικού μοντέλου Kelvin.



Σχήμα 2.0.5 Καμπύλη Απόκρισης Συνάρτησης Ένδοσης Μοντέλου Fractional Kelvin



Σχήμα 2.0.6 Καμπύλη Απόκρισης Συνάρτησης Χαλάρωσης Μοντέλου Fractional Kelvin

Είναι εμφανές ότι και στο διάγραμμα της συνάρτησης ένδοσης, όσο το $\nu \to 1$, η συμπεριφορά του μοντέλου της κλασματικής παραγώγου προσεγγίζει την συμπεριφορά του κλασικού μοντέλου. Στην καμπύλη απόκρισης της συνάρτησης χαλάρωσης, για $\nu = 1$, βλέπουμε μια οριζόντια γραμμή, η οποία απεικονίζει την αδυναμία του κλασικού μοντέλου να ανταποκριθεί στο πείραμα της χαλάρωσης. Ακόμη, για πιο μικρές τιμές του ν, η απόκριση και των δύο συναρτήσεων είναι πιο άμεση, δηλαδή, καταλήγουν στην τελική τιμή πιο γρήγορα.

Για την εύρεση των σχέσεων για τα δυναμικά μέτρα στο μοντέλο Kelvin κλασματικής παραγώγου, θα εφαρμόσουμε την καταστατική εξίσωση τον μετασχηματισμό Fourier, και θα ακολουθήσουμε την αντίστοιχη διαδικασία με το μοντέλο Maxwell.

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta \frac{d^\nu \varepsilon}{dt^\nu} \Rightarrow$$

$$\sigma(\omega) = \varepsilon(\omega)E + \eta(i\omega)^\nu \varepsilon(\omega) \Rightarrow$$

$$\sigma(\omega) = \varepsilon(\omega)[E + \eta(i\omega)^\nu]$$

Σύμφωνα με:

$$\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon(\omega)} = E^{*}(i\omega) = E^{'} + i\,E^{''}$$

και την ταυτότητα:

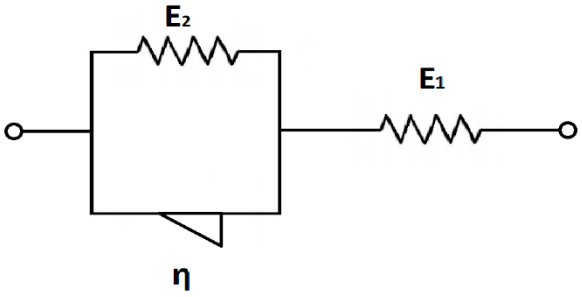
$$i^{\nu} = \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + i\sin(\nu\frac{\pi}{2})$$

παίρνουμε το μέτρο αποθήκευσης και μέτρο απωλειών αντίστοιχα:

$$E^{'}{}_{K} = E + \eta\omega^{\nu}\cos(\nu\frac{\pi}{2})$$

$$E^{''}{}_{K} = \eta\omega^{\nu}\sin(\nu\frac{\pi}{2})$$

Μοντέλο Zener Κλασματικής Παραγώγου (Fractional Zener Model)



Σχήμα 2.0.7 Γραφική Αναπαράσταση Fractional Zener Model

Ένα μοντέλο Kelvin κλασματικής παραγώγου συνδεδεμένο με ένα ιδανικό ελατήριο, αποτελούν το μοντέλο κλασματικής παραγώγου Zener.

Η καταστατική εξίσωσή του σύμφωνα με όσα έχουμε συζητήσει προηγουμένως μετατρέπεται:

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2}\dot{\sigma} = \frac{E_1\,E_2}{E_1 + E_2}\varepsilon + \frac{E_1\,\eta}{E_1 + E_2}\dot{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\sigma(t) + \frac{\eta}{E_1 + E_2}\frac{d^{\nu}\sigma}{dt^{\nu}} = \frac{E_1\,E_2}{E_1 + E_2}\varepsilon(t) + \frac{E_1\,\eta}{E_1 + E_2}\frac{d^{\nu}\varepsilon}{dt^{\nu}}$$

Για να μπορέσουμε να αναλύσουμε το μοντέλο χωρίς να μπλέξουμε με τους συμβολισμούς, ορίζουμε:

$$\alpha_1 = \frac{\eta}{E_1 + E_2} \ , \ m = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \ , \ b_1 = \frac{E_1 \eta}{E_1 + E_2}$$

Άρα, η καταστατική εξίσωση μπορεί να γραφεί:

$$\sigma(t) + \alpha_1 \frac{d^\nu \sigma}{dt^\nu} = m\, \varepsilon(t) + b_1 \frac{d^\nu \varepsilon}{dt^\nu}$$

Για την εύρεση του μέτρου διάτμησης:

$$\frac{1}{\widehat{\mu_Z}(s)} = \frac{1}{\widehat{\mu}_H(s)} + \frac{1}{\widehat{\mu}_K(s)}$$

με:

$$\widehat{\mu}_H(s) = \mu_1 \ , \ \widehat{\mu}_K(s) = \mu_2[1 + (s\tau_2)^\nu]$$

δηλαδή,

$$\widehat{\mu_Z}(s) = \frac{\mu_1 \mu_2 [1 + (s\tau_2)^\nu]}{\mu_2[1 + (s\tau_2)^\nu] + \mu_1}$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης ενδοτικότητας:

$$\bar{J}_Z(s) = \frac{1}{2s\widehat{\mu_Z}(s)} \Rightarrow$$

$$\bar{J}_Z(s) = \frac{1}{2s}\left[\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right) - \frac{1}{\mu_2}\frac{(s\tau_2)^\nu}{1 + (s\tau_2)^\nu}\right]$$

Σύμφωνα με τους κανόνες που έχουμε αναφέρει στο στάδιο αυτό της μελέτης και των δύο προηγούμενων μοντέλων, εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace για $t \geq 0$, και παίρνουμε:

$$J_Z(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\left(1 - E_\nu[-\left(\frac{t}{\tau_2}\right)^\nu]\right)\right]$$

Για την συνάρτηση χαλάρωσης του μοντέλου, θα ορίσουμε:

$$\mu^* = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

και έναν ακόμα χαρακτηριστικό χρόνο:

$$\tau_\alpha{}^\nu = \frac{1}{1 + r_\mu} \tau_2{}^\nu \quad , \quad r_\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Από την γνωστή πια σχέση:

$$\overline{G}_Z(s) = \frac{2\widehat{\mu_Z}(s)}{s}$$

και με βάση τους προηγούμενους ορισμούς παραμέτρων:

$$\overline{G}_Z(s) = 2\mu^* \left(\frac{\tau_2}{\tau_\alpha}\right)^\nu \frac{1}{s} \frac{s^\nu + \frac{1}{\tau_2{}^\nu}}{s^\nu + \frac{1}{\tau_\alpha{}^\nu}}$$

Με μερική παραγωγική ανάπτυξη, η συνάρτηση χαλάρωσης ως προς το χρόνο:

$$G_Z(t) = 2\mu^* \left(\frac{\tau_2}{\tau_\alpha}\right)^\nu \left[E_\nu\left[-\left(\frac{t}{\tau_a}\right)^\nu\right] + \left(\frac{t}{\tau_2}\right)^\nu E_{\nu,\nu+1}\left[-\left(\frac{t}{\tau_a}\right)^\nu\right]\right] \Rightarrow$$

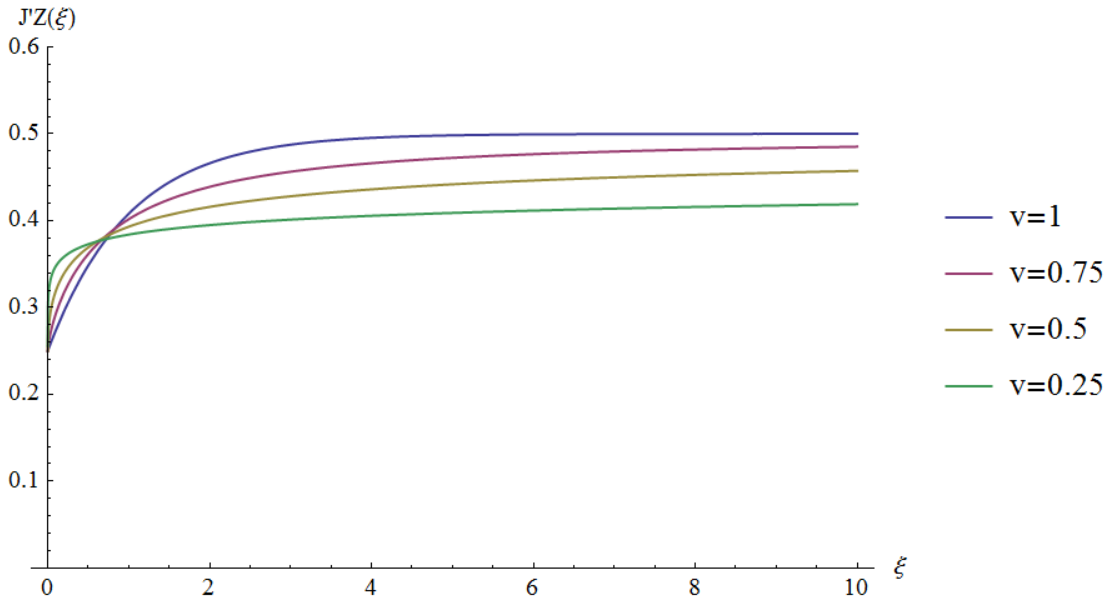
$$G_Z(t) = 2\mu^* \left[1 + r_\mu E_\nu\left[-\left(\frac{t}{\tau_a}\right)^\nu\right]\right]$$

Για την δημιουργία των διαγραμμάτων, οι συναρτήσεις μπορούν να γραφούν σε αδιάστατη μορφή, ως:

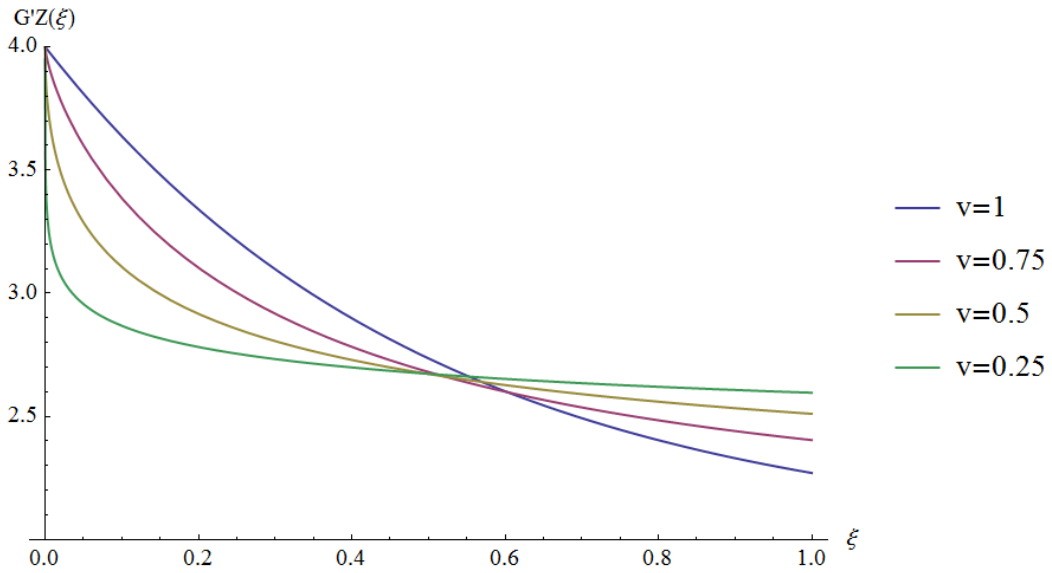
$$J_Z(t) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{h_1}{h_2} E_\nu(-\xi^\nu)\right] \quad , \quad G_Z(t) = 2\left[1 + h_1 E_\nu(-h_2 \xi^\nu)\right] \quad , \quad \xi = \frac{t}{\tau_2}$$

με $h_1 = r_\mu$, $h_2 = 1 + r_\mu$.

Όπως και για τα προηγούμενα μοντέλα, για διάφορες τιμές του ν στο πεδίο ορισμού του κατασκευάζουμε τα διαγράμματα, και συγκρίνουμε τις καμπύλες με αυτή του κλασικού μοντέλου που παίρνουμε για $\nu = 1$. Η σχεδόν άμεση απόκριση των συναρτήσεων για μικρό ν είναι το κύριο χαρακτηριστικό που παρατηρούμε και σε αυτό το σετ των διαγραμμάτων. Όσο το ν μεγαλώνει το μοντέλο πλησιάζει σε χαρακτηριστικά την κλασική του έκδοση που αναλύθηκε στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας.



Σχήμα 2.0.8 Καμπύλη Απόκρισης Συνάρτησης Ενδοτικότητας Μοντέλου Fractional Zener



Σχήμα 2.0.9 Καμπύλη Απόκρισης Συνάρτησης Χαλάρωσης Μοντέλου Fractional Zener

Τέλος για τον υπολογισμό των δυναμικών μέτρων του μοντέλου, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με τα προηγούμενα μοντέλα ξεκινώντας από την εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier στην καταστατική εξίσωση.

$$\sigma(t) + \alpha_1 \frac{d^\nu \sigma}{dt^\nu} = m\,\varepsilon(t) + b_1 \frac{d^\nu \varepsilon}{dt^\nu} \Rightarrow$$

$$\sigma(\omega) + \alpha_1 (i\omega)^\nu \sigma(\omega) = m\,\varepsilon(\omega) + b_1 (i\omega)^\nu \varepsilon(\omega)$$

Με τις αναγκαίες πράξεις, μετατρέπουμε την εξίσωση στη μορφή:

$$\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon(\omega)} = E^*(i\omega) = E^{'} + i\,E^{''}$$

και τελικά παίρνουμε το μέτρο αποθήκευσης και το μέτρο απωλειών αντίστοιχα:

$$E^{'}{}_Z = \frac{m + (m\alpha_1\omega^\nu + b_1\omega^\nu)\cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \alpha_1 b_1 \omega^{2\nu}}{1 + 2\alpha_1\omega^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \alpha_1{}^2\omega^{2\nu}}$$

$$E^{''}{}_Z = \frac{(b_1 - m\alpha_1)\omega^\nu \sin(\nu\frac{\pi}{2})}{1 + 2\alpha_1\omega^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \alpha_1{}^2\omega^{2\nu}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Το αντικείμενο του Κεφαλαίου αυτού είναι η εφαρμογή σε συγκεκριμένα υλικά της μελέτης που έχει προηγηθεί. Αναλυτικότερα, να εξεταστεί η ικανότητα του μοντέλου Zener κλασματικής παραγώγου να περιγράψει την ιξωδοελαστική συμπεριφορά των πολυμερικών υλικών, και συνεπώς την εξάρτηση της συμπεριφοράς τους από τον χρόνο αλλά και από την συχνότητα. Θα μελετηθούν πολυμερικά υλικά με διαφορετικές δομές, τα δεδομένα για τα χαρακτηριστικά μέτρα των οποίων έχουν ληφθεί από μελέτες που αναφέρονται στην βιβλιογραφία.

Τα δεδομένα που έχουμε για τα υλικά μας αναγκάζουν να κάνουμε μικρές τροποποιήσεις στις σχέσεις των χαρακτηριστικών μεγεθών που έχουμε αποδείξει στο 2ο Κεφάλαιο. Για την γραφική τους αναπαράσταση, θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

Μέτρο Αποθήκευσης:

$$E'(\omega) = G_0 \frac{1 + (d+1)\cos(\alpha\frac{\pi}{2})\omega_n^{\alpha} + d\omega_n^{2\alpha}}{1 + 2\cos(a\frac{\pi}{2})\omega_n^{\alpha} + \omega_n^{2\alpha}}$$

Μέτρο Απωλειών:

$$E''(\omega) = G_0 \frac{(d-1)\sin(\alpha\frac{\pi}{2})\omega_n^{\alpha}}{1 + 2\cos(a\frac{\pi}{2})\omega_n^{\alpha} + \omega_n^{2\alpha}}$$

Συνάρτηση Ενδοτικότητας:

$$J(t) = \frac{1}{G_\infty} + \frac{1}{G_0}\left(1 - E_\alpha(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha})\right)$$

Συνάρτηση Χαλάρωσης:

$$Y(t) = \frac{G_0 G_\infty}{G_0 + G_\infty}\left[1 + \frac{G_\infty}{G_0} E_\alpha(-\left(\frac{t}{\tau_2}\right)^{\alpha})\right]$$

όπου E_α είναι η συνάρτηση Mittag-Leffler, και:

$$d = \frac{G_\infty}{G_0}\ , \qquad \tau_2 = \frac{G_0}{G_\infty + G_0}\tau^{\alpha}$$

Η αποτίμηση των παραμέτρων G_0, G_∞, τ του μοντέλου έχει γίνει με βάση την φυσική τους έννοια. Η παράμετρος G_0 είναι το μέτρο που σχετίζεται με τις χαμηλές συχνότητες, ενώ το G_∞ το αντίστοιχο μέτρο για τις υψηλές συχνότητες. Μετά από ανάλυση της σχέσης για το μέτρο απωλειών, μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η παράμετρος τ αποτελεί την αντίστροφη συχνότητα του μέγιστου στην κορυφή του διαγράμματος του μέτρου απωλειών. Τέλος, η παράμετρος α δεν έχει κάποια φυσική έννοια αλλά είναι μια σταθερά η οποία επηρεάζει την κλίση της περιοχής μετάβασης στα διαγράμματα.

Προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων των ιξωδοελαστικών συναρτήσεων διαφόρων πολυμερικών υλικών

Θερμοσκληρυνόμενη Εποξειδική Ρητίνη (Thermosetting Epoxy Resin)

Το πρώτο υλικό στην μελέτη είναι η εποξειδική ρητίνη του διγλυκιδυλικού αιθέρα της δισφαινόλης A (diglycidyl-ether of bisphenol A epoxy resin). Το μοριακό της ρητίνης αυτής είναι μεταξύ 370 και 384 και το ιξώδες της 15×10^3cp στους 25℃ . Επεξεργάστηκε με τριαιθυλενοτετραμίνη κατά 8% wt της ρητίνης και στη συνέχεια στους 100℃ για 48 ώρες. Οι δυναμικές μηχανικές μετρήσεις έγιναν για ένα εύρος συχνοτήτων μεταξύ 0.1 με 100 Hz σε θερμοκρασία 80 με 145℃.

Κύριο χαρακτηριστικό των θερμοσκληρυνόμενων εποξικών πολυμερών είναι ο εξαιρετικός συνδυασμός των μηχανικών τους ιδιοτήτων και της αντίστασής τους στην διάβρωση. Παραμένουν σταθερά στις διαστάσεις τους, έχουν καλή συγκολλητική ικανότητα αλλά και καλές ηλεκτρικές ιδιότητες, και παρόλα αυτά είναι και σχετικά φθηνά. Κάποιες από τις κύριες εφαρμογές τους είναι σε καλούπια για ηλεκτρικές εφαρμογές, συγκολλητικά μέσα αλλά και σαν προστατευτικά επιχρίσματα, όπως για παράδειγμα σε ξύλινα πατώματα.

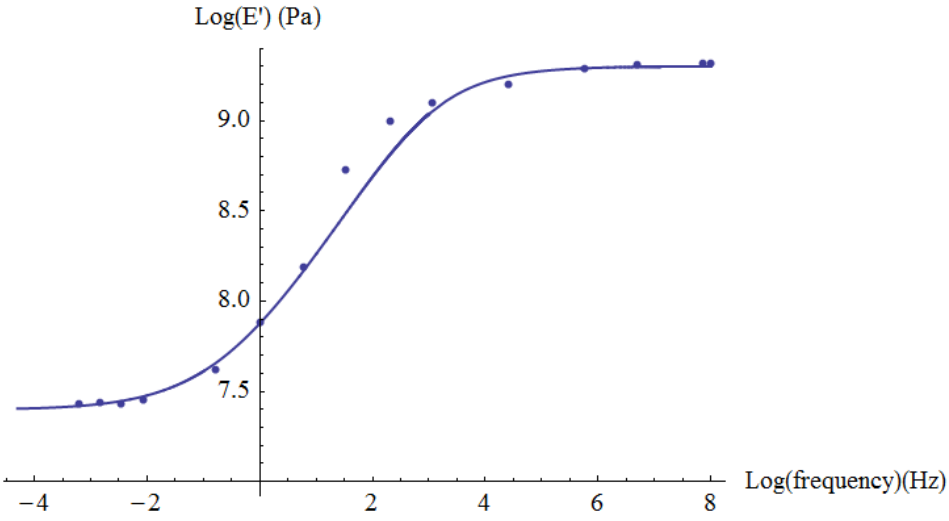
Τα διαγράμματα του μέτρου αποθήκευσης και του μέτρου απωλειών της εποξειδικής ρητίνης μέσω πειραμάτων δυναμικής μηχανικής ανάλυσης και εφαρμογής της αρχής της ισοδυναμίας χρόνου - θερμοκρασίας, υπό την μορφή σύνθετης καμπύλης (master curve) παρουσιάζονται σε λογαριθμική κλίμακα στα σχήματα 3.0.1 και 3.0.2 αντίστοιχα [4]. Στο Σχήμα 3.0.1 φαίνεται με ευκρίνεια η τιμή του μέτρου στις μεγάλες συχνότητες που

αντιστοιχεί στο G_∞ του μοντέλου, και η τιμή στις μικρές συχνότητες $2.5 * 10^7$ που αντιστοιχεί στο G_0 του μοντέλου. Συνεπώς οι χαρακτηριστικοί παράμετροι που προκύπτουν μετά από πειραματική διαδικασία, για την συγκεκριμένη εποξειδική ρητίνη, είναι:

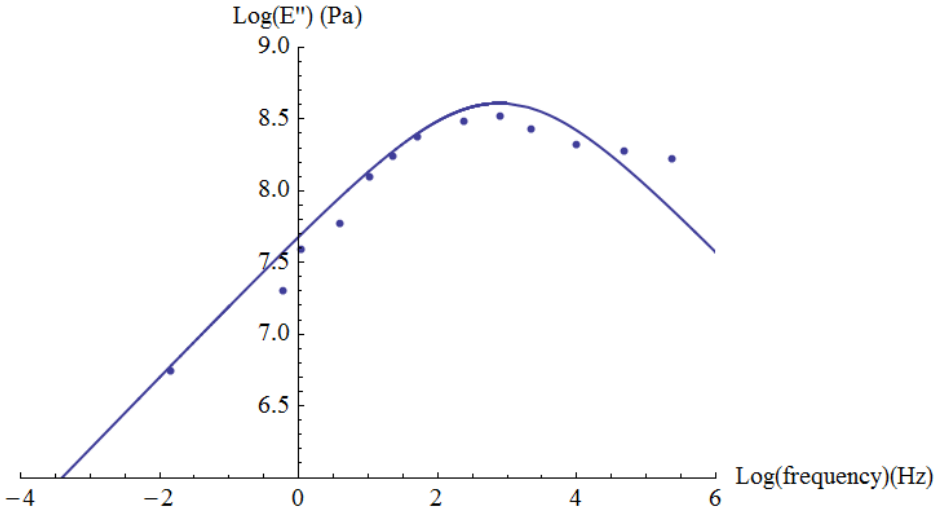
$$G_0 = 2.5 \times 10^7\ Pa$$
$$G_\infty = 2.0 \times 10^9\ Pa$$
$$\tau = 0.0013\ s$$
$$\alpha = 0.5$$

Η τιμή της παραμέτρου α είναι αποτέλεσμα της προσαρμογής των πειραματικών δεδομένων.

Με βάση αυτές κατασκευάστηκαν τα ακόλουθα διαγράμματα σε λογαριθμική κλίμακα για τα μέτρα αποθήκευσης και απωλειών για θερμοκρασία αναφοράς 110°C. Στα διαγράμματα αυτά πέρα από την συνεχή γραμμή που αναπαριστά την απόκριση του μοντέλου Zener κλασματικής παραγώγου για τις παραπάνω συναρτήσεις και παραμέτρους, παρουσιάζονται και σημεία (κουκκίδες) τα οποία είναι πειραματικά δεδομένα που έχουν ληφθεί από την έρευνα [7].



Σχήμα 3.0.1 Καμπύλη Μέτρου Αποθήκευσης Εποξειδικής Ρητίνης



Σχήμα 3.0.2 Καμπύλη Μέτρου Απωλειών Εποξειδικής Ρητίνης

Η περιγραφή του μέτρου αποθήκευσης είναι αρκετά ικανοποιητική. Πέρα από την περιοχή μετάβασης, διαφαίνεται και ένα μεγάλο κομμάτι της ελαστικής περιοχής αλλά και της υαλώδους κατάστασης η οποία αναπαριστάνεται στο σχεδόν οριζόντιο μέρος της καμπύλης για υψηλές συχνότητες. Σε αντίθεση με την αναλυτική αναπαράσταση του μέτρου αποθήκευσης, το μοντέλο κλασματικής παραγώγου Zener φαίνεται να μην μπορεί να περιγράψει επαρκώς την συμπεριφορά του μέτρου απωλειών για την εποξειδική ρητίνη. Για τις μεγαλύτερες συχνότητες υπάρχει με βάση τα πειραματικά δεδομένα μια ασσυμετρία η οποία δεν μπορεί να αποτυπωθεί από το τριπαραμετρικό μοντέλο Zener. Η αδυναμία αυτή του μοντέλου οδήγησε στην τροποποίησή του σε μοντέλο με 5 παραμέτρους το οποίο μπορεί να προσεγγίσει καλύτερα και την εν λόγω ασσυμετρία [7].

Βιοδιασπώμενο Πολυμερές Ecovio® (Biodegradable Polymer Ecovio®)

Ένας διαφορετικός τύπος υλικού, με διαφορετική δομή από την ρητίνη που μελετήθηκε προηγουμένως, είναι το βιοδιασπώμενο πολυμερές με εμπορικό τίτλο Ecovio® της εταιρείας BASF SE (Ludwigshafen, Germany). Για το πείραμα επιλέχθηκε το Ecovio® LBX 8145, που για συντομία θα υποδεικνύεται ως EC, το οποίο είναι ουσιαστικά μια μίξη από Ecoflex®της ίδιας εταιρείας και PLA της εταιρείας Nature Works LLC. Δηλαδή είναι

μείγμα ενός αλειφατικού αρωματικού συμπολυεστέρα που έχει μονομερή το αδιπικό και το τερεφθαλικό οξύ και την 1,4-βουτανοδιόλη (Ecoflex® FBX 7011) και ενός πολυγαλακτικού οξέος (PLA) που προσφέρει στο Ecovio®τον χαρακτήρα της ανανεώσιμης πηγής κατά 45%.

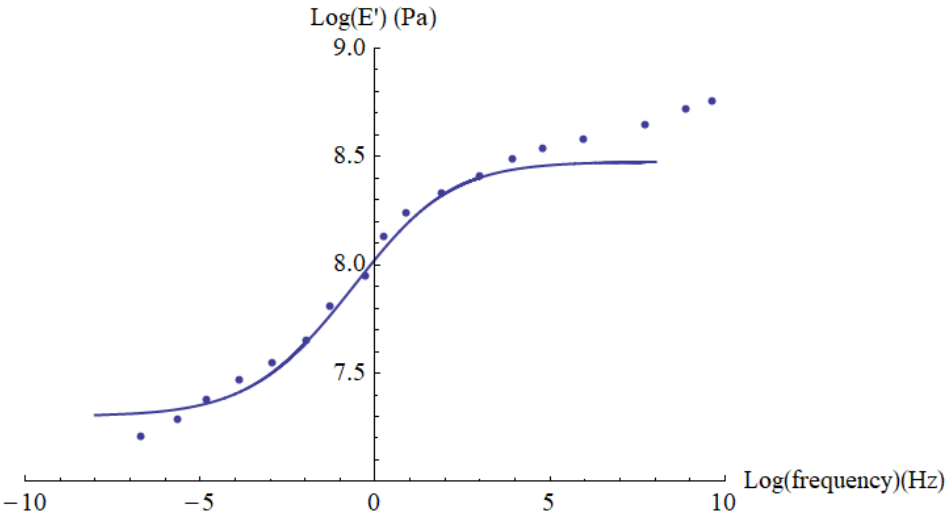
Ως πιστοποιημένο βιοπλαστικό πολλαπλών χρήσεων, το Ecovio® χρησιμοποιείται κυρίως σε πλαστικές μεμβράνες όπως οι οργανικές σακούλες απορριμμάτων, οι τσάντες διπλής χρήσης (αγορά και απόρριψη οργανικών αποβλήτων) για φρούτα και λαχανικά, ακόμα και για μεμβράνες που χρησιμοποιούνται στις καλλιέργειες. Σε αντίθεση με τα απλά βιοπλαστικά με βάση με το άμυλο, το Ecovio® έχει μεγαλύτερη αντοχή στη μηχανική τάση αλλά και στην υγρασία, αντίστοιχη με αυτή των κλασικών πλαστικών.

Από τα πειραματικά δεδομένα που παρουσιάζονται στα σχήματα 3.0.3 και 3.0.4, προκύπτουν με ανάλογο τρόπο όπως και προηγουμένως οι τιμές των χαρακτηριστικών παραμέτρων για το υλικό Ecovio® (EC) είναι οι ακόλουθοι:

$$G_0 = 2.0 \times 10^7\ Pa$$
$$G_\infty = 3.0 \times 10^8\ Pa$$
$$\tau = 0.1\ s$$
$$\alpha = 0.33$$

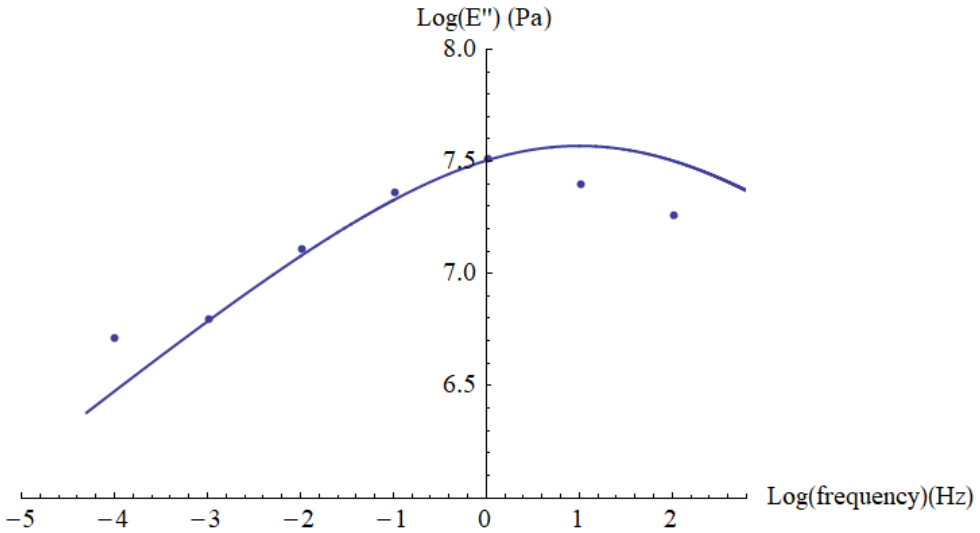
Για θερμοκρασία αναφοράς 65°C, σχεδιάστηκαν τα διαγράμματα ως προς τη λογαριθμική συχνότητα για τα μέτρα αποθήκευσης και απωλειών. Τα πειραματικά δεδομένα που αποτυπώνονται στα διαγράμματα έχουν προκύψει από την έρευνα [7] της βιβλιογραφίας.

Η απόκριση στην συχνότητα του μέτρου αποθήκευσης μπορεί να περιγραφεί επαρκώς από το κλασματικό μοντέλο Zener αλλά για ένα περιορισμένο εύρος συχνοτήτων. Αυτό οφείλεται κυρίως στο ανώτατο όριο του μέτρου αποθήκευσης για υψηλές συχνότητες που αντιπροσωπεύεται από το G_∞. Παρατηρείται ότι για το υλικό αυτό δεν είναι σταθερή η τιμή του μέτρου αποθήκευσης στις μεγάλες συχνότητες, αλλά εμφανίζεται αυξανόμενο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το υλικό αυτό δεν έχει σταυροδεσμούς όπως η εποξειδική ρητίνη, μέσω των οποίων αποκαλύπτεται μια «ελαστική» συμπεριφορά στην υαλώδη περιοχή. Για το λόγο αυτό έγινε μια προσέγγιση αναφορικά με την τιμή του G_∞ και δεν περιγράφηκε με ακρίβεια η περιοχή των μεγάλων συχνοτήτων, για την οποία προβλέπεται πλατό στις μεγάλες συχνότητες.



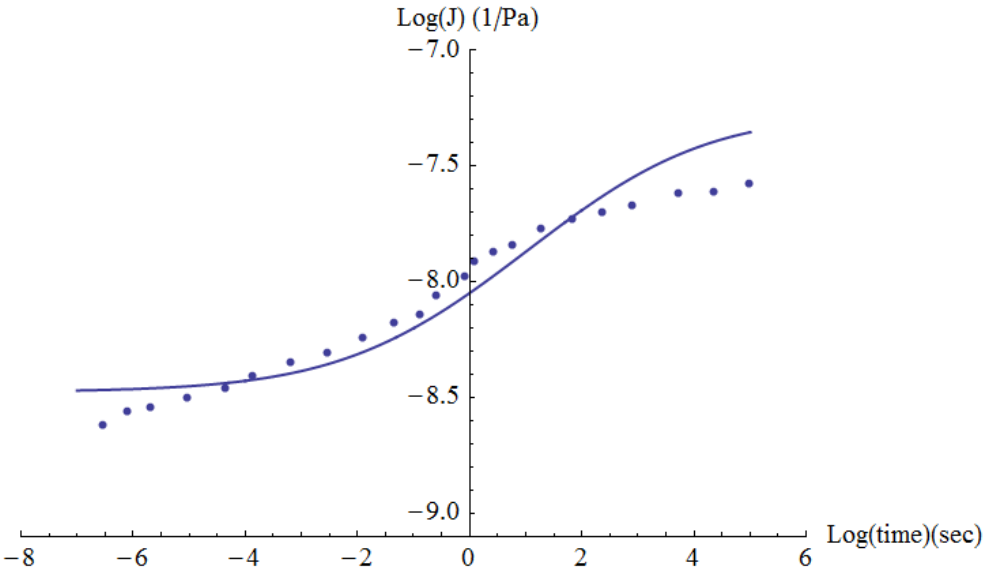
Σχήμα 3.0.3 Γραφική Αναπαράσταση του Μέτρου Αποθήκευσης για το EC

Αναφορικά με το μέτρο απωλειών του EC, το μοντέλο κλασματικής παραγώγου Zener περιγράφει και αυτό το μέτρο επαρκώς για το εύρος των συχνοτήτων που μπορεί να το αναπαραστήσει. Για συχνότητες μεγαλύτερες των $100\ Hz$, με άλλες πειραματικές μεθόδους εμφανίζεται μια οριζοντίωση του διαγράμματος του μέτρου απωλειών, γεγονός που δεν μπορεί να καταγραφεί με το τριπαραμετρικό μοντέλο Zener. Η ασσυμετρία που εμφανίζεται στην κορυφή είναι χαρακτηριστική για πολλά πολυμερή και μπορεί να περιγραφεί με μεγαλύτερη ακρίβεια από το μοντέλο Zener με 5 παραμέτρους [7].

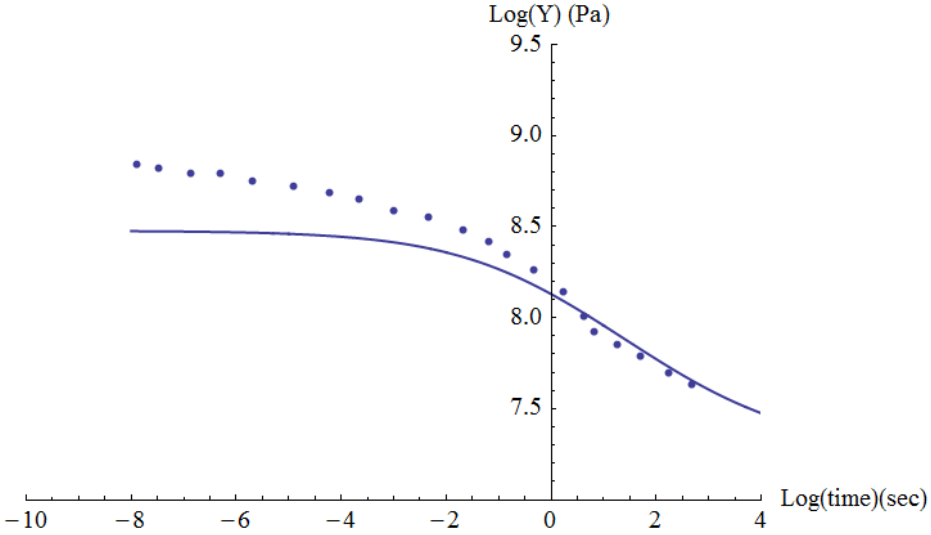


Σχήμα 3.0.4 Γραφική Αναπαράσταση του Μέτρου Απωλειών για το EC

Για τις χρονικά εξαρτώμενες συναρτήσεις ενδοτικότητας και χαλάρωσης του υλικού Ecovio®, χρησιμοποιήθηκε θερμοκρασία αναφοράς πάλι 65°C για να υπάρχει συνοχή στη μελέτη. Μπορεί το τριπαραμετρικό μοντέλο κλασματικής παραγώγου Zener να περιγράφει με αρκετή ακρίβεια τα μέτρα αποθήκευσης και απωλειών, ωστόσο για περιορισμένο εύρος συχνότητας. Για τις χρονοεξαρτώμενες συναρτήσεις του υλικού, τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι αρκετά κοντά στα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα.



Σχήμα 3.0.5 Γραφική Αναπαράσταση της Συνάρτησης Ενδοτικότητας για το EC



Σχήμα 3.0.6 Γραφική Αναπαράσταση της Συνάρτησης Χαλάρωσης για το EC

Παρά την συμφωνία που υπάρχει μεταξύ των καμπυλών που προέκυψαν για τη μοντελοποίηση του υλικού με βάση το μοντέλο Zener και τα πειραματικά δεδομένα που υπάρχουν στην βιβλιογραφία, πρέπει να σημειωθεί ότι η χρονική περιοχή για την οποία ανταποκρίνεται το μοντέλο είναι αρκετά πιο στενή.

Οι χαρακτηριστικές παράμετροι είναι ίδιες με εκείνες που χρησιμοποιήθηκαν στην δυναμική ανάλυση του μοντέλου και αυτό αποτελεί ένα από τα πλεονεκτήματα του μοντέλου Zener κλασματικής παραγώγου. Με τα μοντέλα ακέραιης παραγώγου δεν μπορεί να γίνει τέτοιου τύπου προσέγγιση.

Πολυγαλακτικό Οξύ PLA (Polylactic Acid PLA)

Ένας νέος τύπος βιοαποικοδομήσιμου υλικού, παραγόμενος από πρώτες ύλες αμύλου προερχόμενες από ανανεώσιμους φυτικούς πόρους όπως το καλαμπόκι, είναι το πολυγαλακτικό οξύ PLA, ένας βιοδιασπάσιμος και βιοδραστικός θερμοπλαστικός αλειφατικός πολυεστέρας. Έχει χαρακτηριστεί ως φιλικό προς το περιβάλλον υλικό καθώς λόγω της βιοδιασπασιμότητάς του μπορεί να αποδομηθεί εντελώς από μικροοργανισμούς στη φύσης και από αυτό να προκύψει τελικά διοξείδιο του άνθρακα και νερό. Αποτελεί ένα ευρέως διαδεδομένο υλικό καθώς από αυτό αποτελούνται σχεδόν τα μισά βιοαποικοδομήσιμα πλαστικά που υπάρχουν.

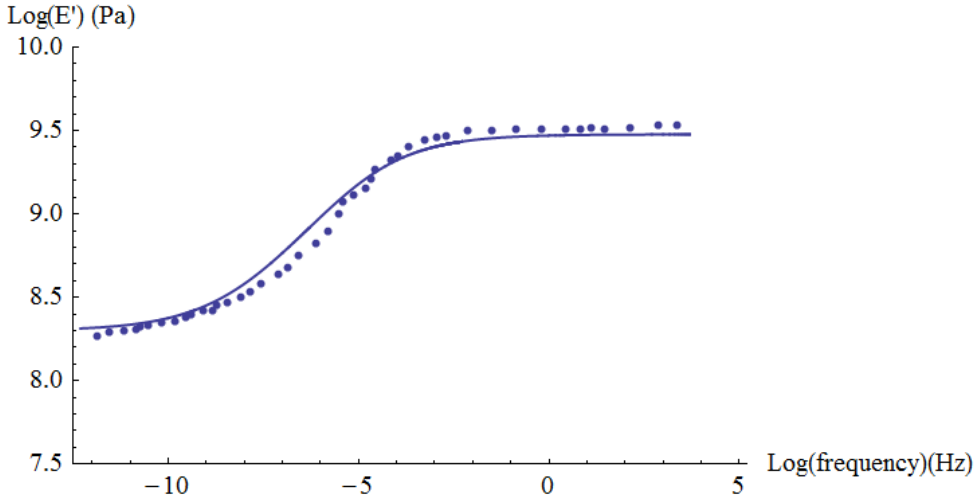
Από τα πειραματικά δεδομένα που έχουν ληφθεί αυτή τη φορά από τη μελέτη [6] της βιβλιογραφίας, προκύπτουν για το υλικό PLA οι ακόλουθες χαρακτηριστικές παράμετροι:

$$G_0 = 2.0 \times 10^8\ Pa$$
$$G_\infty = 3.0 \times 10^9\ Pa$$
$$\tau = 71428.6\ s$$
$$\alpha = 0.35$$

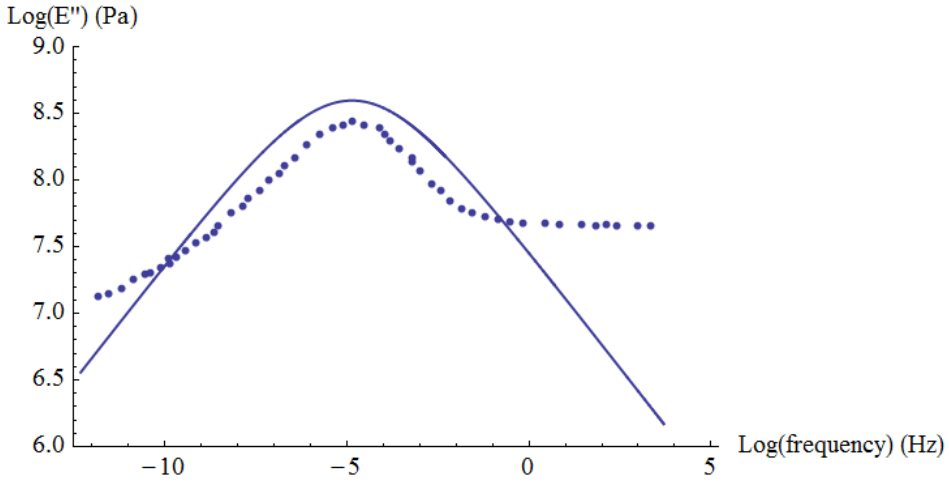
Η τιμή της παραμέτρου α είναι και πάλι η βέλτιστη για την καλύτερη προσαρμογή των πειραματικών αποτελεσμάτων.

Το διάγραμμα του μέτρου αποθήκευσης ακολουθεί πιστά την πορεία των πειραματικών σημείων σε όλο το εύρος της συχνότητας με κάποιες μικρές αποκλίσεις που είναι αποδεκτές. Σε αντίθεση όμως με αυτό, το διάγραμμα του μέτρου απωλειών συμφωνεί

σε ένα συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων. Όπως παρατηρήθηκε και στα προηγούμενα υλικά, το τριπαραμετρικό μοντέλο Zener, αδυνατεί να αποτυπώσει την χαρακτηριστική ασσυμετρία στο διάγραμμα του μέτρου απωλειών που εμφανίζεται μετά την κορυφή.



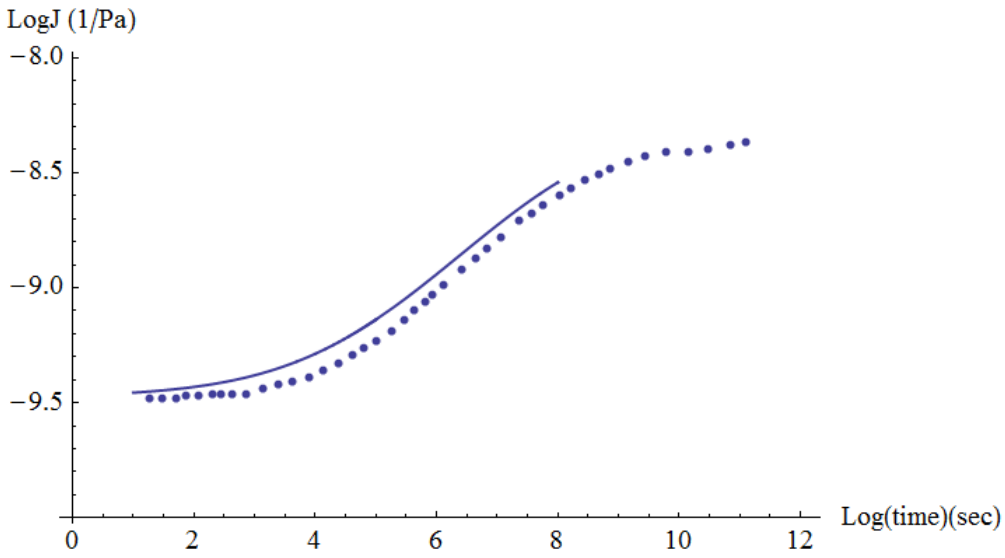
Σχήμα 3.0.7 Γραφική Αναπαράσταση του Μέτρου Αποθήκευσης για το PLA



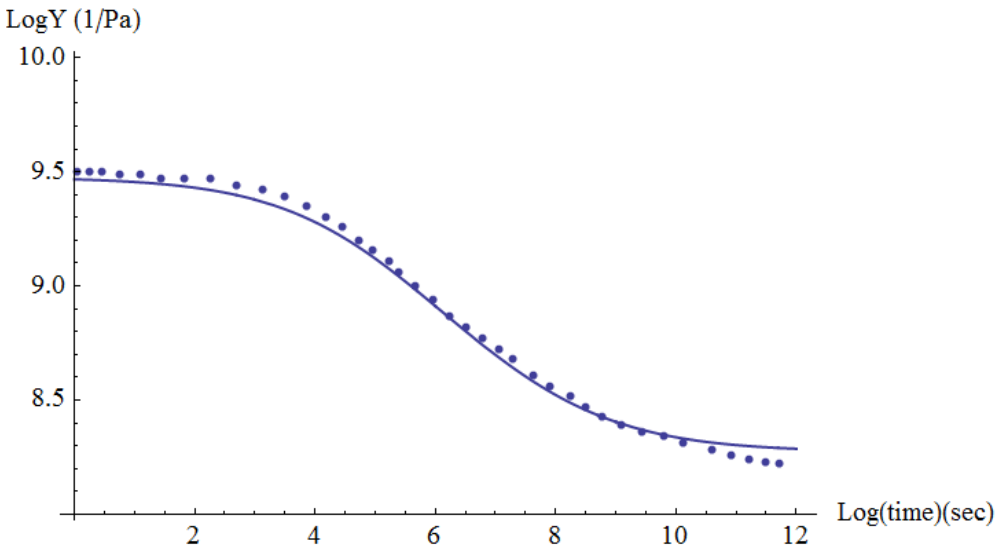
Σχήμα 3.0.8 Γραφική Αναπαράσταση του Μέτρου Απωλειών για το PLA

Τα διαγράμματα των χρονικά εξαρτώμενων συναρτήσεων ενδοτικότητας και χαλάρωσης εμφανίζουν πολύ καλή απόκριση. Σε σύγκριση και με το Ecovio®, οι καμπύλες που προκύπτουν από την αναπαράσταση της συμπεριφοράς του μοντέλου για το PLA είναι

πιο κοντά στα πειραματικά δεδομένα και ακολουθούν την ίδια πορεία. Ιδιαίτερα το διάγραμμα της συνάρτησης χαλάρωσης για το PLA είναι σχεδόν σε απόλυτη συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα σε όλο το εύρος των μετρήσεων.



Σχήμα 3.0.9 Γραφική Αναπαράσταση της Συνάρτησης Ενδοτικότητας για το PLA



Σχήμα 3.0.10 Γραφική Αναπαράσταση της Συνάρτησης Χαλάρωσης για το PLA

Σύμφωνα με τα προηγούμενα διαγράμματα που είναι τα αποτελέσματα της ανάλυση, μπορεί κανείς να πει ότι η αποδοτικότητα του μοντέλου κλασματικής παραγώγου Zener να περιγράψει τις ιξωδοελαστικές συναρτήσεις, βασίζεται στην ιξωδοελαστική απόκριση του

κάθε υλικού καθώς και στο εύρος των μετρήσεων, είτε στο χρόνο είτε στη συχνότητα. Μελέτες έχουν αποδείξει ότι τα προβλήματα που αντιμετωπίζει το μοντέλο ως προς την περιγραφή συγκεκριμένων συμπεριφορών καθώς και ως προς την ακρίβεια στην περιγραφή της απόκρισης, μπορούν να ξεπεραστούν με τη χρήση περισσότερων παραμέτρων στο μοντέλο όπως και με την εισαγωγή ενός διορθωτικού παράγοντα στις σχέσεις.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια παρουσίαση των βασικών εννοιών και γραμμικών μηχανικών προτύπων της ιξωδοελαστικότητας. Με καταγεγραμμένη στην βιβλιογραφία της αδυναμίας αυτών των μοντέλων να περιγράψουν με πληρότητα τις χρονοεξαρτώμενες ιδιότητες των πραγματικών υλικών, παρουσιάζονται τα μοντέλα κλασματικής παραγώγου. Αυτά προκύπτουν με την εισαγωγή του μη-γραμμικού απορροφητήρα Scott-Blair. Παρουσιάζεται αναλυτικά το μοντέλο Zener και οι βασικές συναρτήσεις του μέτρου χαλάρωσης, του μέτρου ένδοσης και των δυναμικών μέτρων.

Στη συνέχεια, με βάση τα πειραματικά αποτελέσματα μέτρου χαλάρωσης, ενδοτικότητας και δυναμικών μέτρων, σε μεγάλη κλίμακα χρόνου και συχνοτήτων αντίστοιχα, για τρία διαφορετικά πολυμερικά υλικά, έγινε εφαρμογή του κλασματικού μοντέλου Zener.

Προέκυψαν τα εξής:

Για την εποξειδική ρητίνη η οποία περιέχει στη δομή της σταυροδεσμούς, εμφανίζονται τα δύο χαρακτηριστικά πλατό, το «ελαστομερικό» και το «υαλώδες» στις πολύ μικρές και μεγάλες συχνότητες αντίστοιχα, όταν αναφερόμαστε στις καμπύλες μέτρου αποθήκευσης. Για το λόγο αυτό το κλασματικό μοντέλο Zener περιγράφει με πολύ καλή προσέγγιση τις καμπύλες αυτές. Πρέπει να σημειωθεί ότι η μόνη παράμετρος που χρειάζεται να υπολογιστεί για την βέλτιστη προσαρμογή των πειραματικών αποτελεσμάτων είναι η παράμετρος α του βαθμού της κλασματικής παραγώγου.

Για το ημικρυσταλλικό πολυμερές Ecovio® ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία, ενώ τώρα είναι διαθέσιμα επιπλέον και πειραματικά δεδομένα για το μέτρο χαλάρωσης και την

ενδοτικότητα. Διαπιστώθηκε ότι για το σύνολο των συναρτήσεων, σε λογαριθμική κλίμακα χρόνου/συχνοτήτων, μπορούμε να έχουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση όλων των πειραματικών καμπύλων, με το ίδιο πακέτο παραμέτρων.

Σχετικά με το πολυγαλακτικό οξύ (PLA) η προσαρμογή που επιτεύχθηκε για το σύνολο των καμπυλών ήταν ακόμη πιο επιτυχής, δεδομένης και της διαφορετικής του συμπεριφοράς σε σχέση με το Ecovio®.

Γενικά, όπως έχει πολλές φορές αναφερθεί και στη βιβλιογραφία, είναι ανέφικτη τέτοιου τύπου περιγραφή με τα απλά γραμμικά ιξωδοελαστικά μοντέλα, ενώ μπορεί να γίνει καλύτερη προσαρμογή με τα μοντέλα κλασματικής παραγώγου. Οι λόγοι της μη απόλυτης προσαρμογής, μπορούν να αποδοθούν τόσο στην ιδιαίτερη δομή του πολυμερικού υλικού, όταν για παράδειγμα δεν εμφανίζει τα πλατό στο μέτρο αποθήκευσης, όσο και σε πηγή σφάλματος που μπορεί να προκύψει από την χάραξη των συνθέτων καμπυλών (master curves).

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, συντείνουν στο συμπέρασμα ότι τα μοντέλα κλασματικής παραγώγου μπορούν με καλή προσέγγιση να περιγράψουν τις χρονοεξαρτώμενες ιδιότητες των υλικών.

Ως μελλοντική έρευνα μπορεί να προταθεί η μελέτη του μοντέλου Zener με πέντε παραμέτρους ή και άλλου τύπου μη-γραμμικού μοντέλου.

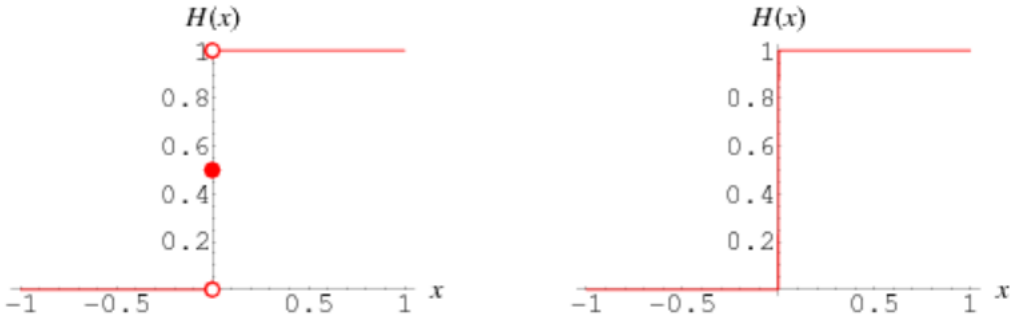
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Μαθηματικό Συμπλήρωμα Ι

Η συνάρτηση Heaviside (Heaviside Step Function) $H(x)$, γνωστή πολλές φορές και σαν συνάρτηση βήματος $u(x)$, είναι μια ασυνεχής συνάρτηση η οποία ορίζεται ως:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Τα γραφήματα που ακολουθούν απεικονίζουν την συνάρτηση βάση ορισμού (αριστερά) και πως θα έδειχνε η συνάρτηση μέσα από ένα ταλαντοσκόπιο (δεξιά).



Σχήμα Ι.0.1 Γραφική Αναπαράσταση της συνάρτησης Heaviside

Στο Mathematica, η συνάρτηση Heaviside εισάγεται με την εντολή $UniStep[x]$, η οποία έχει διπλό ρόλο, τόσο σαν γενική συνάρτηση όσο και σαν συνάρτηση με κλάδους. Στη δεύτερη περίπτωση, η σύμβαση $H(0) = 1$ χρησιμοποιείται αντί για $H(0) = \frac{1}{2}$.

Η παράγωγος της συνάρτησης βήματος δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x)$$

όπου $\delta(x)$η συνάρτηση Δέλτα (Dirac).

Μαθηματικό Συμπλήρωμα ΙΙ

Στην ιξωδοελαστικότητα που περιγράφεται από μοντέλα κλασματικής παραγώγου, οι σχέσεις για τις συναρτήσεις που αφορούν τα διάφορα μέτρα που χαρακτηρίζουν τα υλικά, προκύπτουν χρησιμοποιώντας κανόνες σύνθεσης που ισχύουν και για τα κλασικά μηχανικά μοντέλα. Ο καθορισμός των σχέσεων αυτών διευκολύνεται με την χρήση της ακόλουθης αρχής που αντιστοιχεί τα κλασικά και τα κλασματικά μηχανικά μοντέλα. Η αντιστοιχία αυτή περιγράφηκε το 1971 από τους Caputo και Mainardi [8].

Για $0 < \nu \leq 1$ και ορίζοντας $\tau > 0$ τον χαρακτηριστικό χρόνο για την ιξώδη συμπεριφορά, η αρχή της αντιστοιχίας μπορεί να οριστεί από τις ακόλουθες τρεις εξισώσεις, όπου εμφανίζονται και τα ζεύγη του μετασχηματισμού Laplace.

$$\delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \div \tau \Rightarrow \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \div \frac{1}{s}(s\tau)^{\nu}$$

$$\frac{t}{\tau} \div \frac{1}{s}\frac{1}{(s\tau)} \Rightarrow \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\nu}}{\Gamma(1+\nu)} \div \frac{1}{s}\frac{1}{(s\tau)^{\nu}}$$

$$e^{-t/\tau} \div \frac{\tau}{1+s\tau} \Rightarrow E_{\nu}\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\nu}\right] \div \frac{1}{s}\frac{(s\tau)^{\nu}}{1+(s\tau)^{\nu}}$$

Μαθηματικό Συμπλήρωμα ΙΙΙ

Συνάρτηση Γάμμα

Για έναν θετικό ακέραιο αριθμό n, το παραγοντικό του $n!$ ορίζεται ως:

$n! = 1\ x\ 2\ x\ 3\ x \ldots x\ (n-1)\ x\ n$. Για παράδειγμα, $5! = 1\ x\ 2\ x\ 3\ x\ 4\ x\ 5 = 120$

Αλλά αυτός ο τύπος δεν έχει κανένα νόημα αν το n δεν είναι ακέραιος αριθμός.

Σαν επέκταση του παραγοντικού για κάθε πραγματικό αριθμό $x > 0$, η συνάρτηση Γάμμα, ορίζεται ως:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Αφού ικανοποιεί τη συναρτησιακή σχέση:

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$$

και

$$\Gamma(1) = 1$$

η συνάρτηση Γάμμα θεωρείται επέκταση του παραγοντικού με βάση τον ακόλουθο τύπο:

$$\Gamma(n+1) = n!\,, \qquad n \in N$$

Συνάρτηση Mittag-Leffler

Οι ορισμοί για τις σύνθετες συναρτήσεις Mittag-Leffler για μια και δύο παραμέτρους, προέρχονται από τις δυναμικές σειρές Taylor γύρω από το $z = 0$, ως:

$$E_\nu(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\nu n + 1)}, \quad E_{\nu,\mu}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\nu n + \mu)}, \qquad \nu, \mu > 0$$

Οι σχέσεις αυτές σχετίζονται μεταξύ τους από τις ακόλουθες:

$$E_\nu(z) = E_{\nu,1}(z)\,, \quad E_\nu(z) = 1 + zE_{\nu,1+\nu}(z)$$

$$\frac{d}{dz} E_\nu(z^\nu) = z^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(z^\nu)$$

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας, οι συναρτήσεις Mittag-Leffler που θα χρησιμοποιηθούν στην μελέτη για την κατανόηση της μηχανικής συμπεριφοράς των υλικών, είναι όλες τάξης $\nu \in (0,1]$ και της μορφής:

$$E_\nu\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\nu\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\nu n}}{\Gamma(\nu n+1)}, \qquad 0 < \nu \leq 1, \quad \tau > 0$$

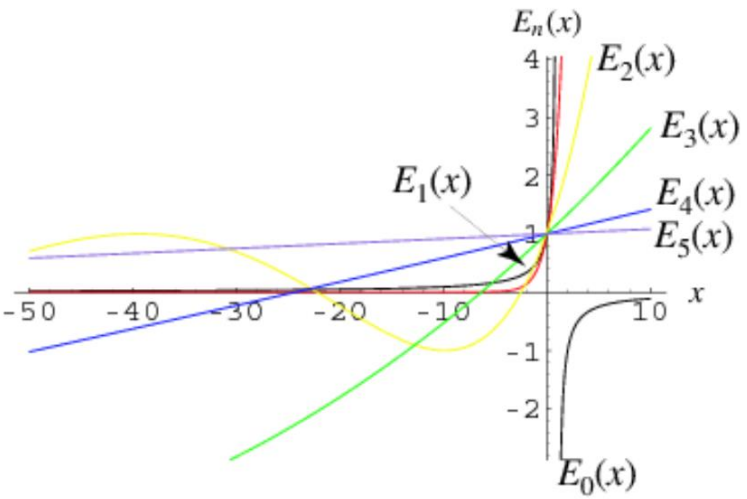
Για διάφορες τιμές του ν, το $E_\nu(z)$ παίρνει κάποιες ενδεικτικές τιμές:

$$E_0(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$E_1(z) = e^z$$

$$E_2(z) = \cosh(\sqrt{z})$$

τις οποίες αν τις εντάξουμε στο ίδιο διάγραμμα, παίρνουμε:



Σχήμα ΙΙΙ.1 Γραφική Αναπαράσταση συνάρτησης Mittag-Leffler[18]

[1]ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] "Creep and Stress Rupture Properties." *Creep and Stress Rupture Properties: Total Materia Article*, Dec. 2010, www.totalmateria.com/page.aspx?ID=CheckArticle&site=kts&NM=296.

[2] Callister, William D. *Επιστήμη και Τεχνολογία των Υλικών*. 5η έκδοση., Τζιόλα, 2016.

[3] Charitos, Ilias, et al. "Comparing the Rheological and Reinforcing Effects of Graphene Oxide on Glassy and Semicrystalline Polymers." *Polymer Engineering & Science*, vol. 59, no. 9, 2019, pp. 1933–1947., doi:10.1002/pen.25195.

[4] G. Spathis, E.Kontou, P.S.Theocaris, Journal of Rheology, 28(2), 161-175 (1984)

[5] G.C. Papanicolaou, S.P. Zaoutsos, in Creep and Fatigue in Polymer Matrix Composites, 2011.

[6] Katsourinis, Stelios, and Evagelia Kontou. "Fractional Viscoelastic Models for Interconverting Linear Viscoelastic Functions of Various Polymeric Structures." *Rheologica Acta*, vol. 58, no. 5, 2019, pp. 307–320., doi:10.1007/s00397-019-01146-y.

[7] Kontou, E., and S. Katsourinis. "Application of a Fractional Model for Simulation of the Viscoelastic Functions of Polymers." *Journal of Applied Polymer Science*, vol. 133, no. 23, 2016, doi:10.1002/app.43505.

[8] M. Caputo, F. Mainardi, Riv. Nuovo Cimento (Ser. II) 1, 161 (1971b)

[9] Mainardi, F., and G. Spada. "Creep, Relaxation and Viscosity Properties for Basic Fractional Models in Rheology." *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 193, no. 1, 2011, pp. 133–160., doi:10.1140/epjst/e2011-01387-1.

[10] Pritz, T. "Five-Parameter Fractional Derivative Model for Polymeric Damping Materials." *Journal of Sound and Vibration*, vol. 265, no. 5, 2003, pp. 935–952., doi:10.1016/s0022-460x(02)01530-4.

[11] Sahraoui, Sohbi, and Nouredine Zekri. “On Fractional Modeling of Viscoelastic Foams.” *Mechanics Research Communications*, vol. 96, 2019, pp. 62–66., doi:10.1016/j.mechrescom.2019.03.004.

[12] Shames, Irving H., and Francis A. Cozzarelli. *Elastic and Inelastic Stress Analysis*. Taylor & Francis, 1997.

[13] Sojiphan, Kittichai. “Finite Element Modeling of Residual Stress Formation in Polycarbonate Welds.” *The Ohio State University*, 2008.

[14] Syed Ali Ashter, in Thermoforming of Single and Multilayer Laminates, 2014

[15] Trenton E. Gould, Scott G. Piland, in Materials in Sports Equipment (Second Edition), 2019.

[16] Ward, Ian I., and John Sweeney. *Mechanical Properties of Solid Polymers, 3rd Edition*., John Wiley & Sons, 2013.

[17] Weisstein, Eric W. "Heaviside Step Function." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/HeavisideStepFunction.html

[18] Weisstein, Eric W. "Mittag-Leffler Function." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Mittag-LefflerFunction.html

[19] Zhang, Qingzhe, et al. “Dynamic Mechanical Properties of Soil Based on Fractional-Order Differential Theory.” *Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 2019, pp. 366–373., doi:10.1007/s11204-019-09550-5.

[20] Κατσουρίνης, Σ. “Θεωρητική Μελέτη των Θεμελιωδών Ιξωδοελαστικών Συναρτήσεων και της Αλληλεπίδρασής τους.” Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, ΕΜΠ.

[21] Κοντού Ε., και Γ. Σπαθής. Ανελαστική Συμπεριφορά των Υλικών. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2001.

[22] Μανωλόπουλος, Βασίλειος Μ. “Εφαρμογή Ιξωδοελαστικών Μοντέλων σε Μικρές και Μεγάλες Παραμορφώσεις.” Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2006.

[23] Παναγιώτου, Κωνσταντίνος. Επιστήμη και Τεχνολογία Πολυμερών. 3η έκδοση, Πήγασος, 2006.