



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Εκτίμηση μετοχικών δεικτών με χρήση χρηματοοικονομικών παραγώγων

Διπλωματική Εργασία

Επιμέλεια: Χάρης Κυρίτσης

Αριθμός Μητρώου: ge13100

Επιβλέπων Καθηγητής: Μιχαήλ Ανθρωπέλος

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Μιχάηλ Ανθρωπέλος

Αντώνιος Παπαπαντολέων

Χρυσής Καρώνη

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κο Ανθρωπέλο Μιχάλη για την πολύτιμη βοήθειά του στην υλοποίηση της διπλωματικής μου εργασίας. Η καθοδήγηση που μου παρείχε τον τελευταίο χρόνο με βοήθησε να αναπτύξω τις γνώσεις μου και να κατανοήσω σύνθετες μαθηματικές και οικονομικές έννοιες. Θα ήθελα να τον ευχαριστήσω ιδιαίτερα για τον χρόνο που μου αφιέρωσε και τη στήριξή του.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, κο Παπαπαντολέων Αντώνη και κα Καρώνη Χρύσα, οι οποίοι διάβασαν και ασχολήθηκαν με τη διπλωματική μου εργασία.

Contents

Aknowledgments	
Abstract	
1 Προαπαιτούμενη γνώση	1
1.1 Βασικές έννοιες από τα Χρηματοοικονομικά	1
1.2 Κατηγορίες Παραγώγων Προϊόντων	4
1.3 Βασικές έννοιες από τις πιθανότητες	8
1.4 Βασικές έννοιες από τις Στοχαστικές Διαδικασίες	9
2 Κατασκευή του μοντέλου	12
2.1 Εύρεση μεταβολής του προεξοφλημένου μερίσματος	13
2.2 Εύρεση σχέσης μεταξύ σημερινής αξίας μερισμάτων και παραγώγων	15
2.3 Μοντελοποίηση της μεταβλητής Π_{t+i}	15
2.4 Εξισώσεις κατάστασης (state equations)	17
2.5 Εξισώσεις μέτρησης (measurement equations)	19
2.6 Μέθοδος Kalman Filter	20
3 Εμπειρικά Αποτελέσματα	24
3.1 Περιγραφή δεδομένων	24
3.2 Αποτελέσματα της εκτίμησης των παραμέτρων	26
3.3 Εκτίμηση τιμής μετοχής	32
3.4 Η κίνηση του μερίσματος στον χρόνο	34

3.5	Σύγκριση με την αγορά μετοχών	35
3.6	Παλινδρόμηση	37
3.7	Εφαρμογές	39

Πρόλογος

Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε τη βιβλιογραφία πάνω στην εκτίμηση των μετοχικών δεικτών, η τιμή των οποίων θεωρείται ίση με την παρούσα αξία όλων των αναμενόμενων προεξοφλημένων μερισμάτων που πληρώνονται σε βάθος χρόνου, με τη βοήθεια χρηματοοικονομικών παραγώγων. Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με τη μελέτη των Jac. Kragt, Frank de Jong και Joost Driessen με τίτλο “The Dividend Term Structure”, η οποία δημοσιεύτηκε πρόσφατα στο επιστημονικό περιοδικό “Journal of Financial and Quantitative Analysis” (Kragt, et. al. 2019). Στη συγκεκριμένη μελέτη, οι ερευνητές έλαβαν υπόψιν ότι οι τιμές των δεικτών αυτών περιέχουν τη μεταβολή του προεξοφλημένου μερίσματος στον χρόνο και κατασκεύασαν δύο μοντέλα που περιγράφουν την κίνηση αυτή.

Το πρώτο μοντέλο είναι δύο μεταβλητών και οι τιμές των παραγώγων, τα οποία έχουν ως υποκείμενο τίτλο τα μερίσματα, προέρχονται από τέσσερις μεγάλες αγορές, τις Eurostoxx 50, Nikkei 225, FTSE 100 και S&P 500. Τα παράγωγα αυτά έχουν τη μορφή είτε συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης (futures), τα δεδομένα των οποίων αντλούνται από τα χρηματιστήρια, είτε συμβολαίων ανταλλαγής, η συναλλαγή των οποίων γίνεται εξωχρηματιστηριακά (OTC Swaps). Έπειτα, έκαναν μια παλινδρόμηση για ακόμα καλύτερη και ακριβή εκτίμηση της σχέσης της τιμής του δείκτη μιας μετοχής με τις τιμές των παραγώγων καθώς και των επιτοκίων και προχώρησαν στη σύγκριση με το δεύτερο μοντέλο, το οποίο αποτελείται από μία μεταβλητή. Το αποτέλεσμα της παλινδρόμησης ήταν ότι οι τιμές των μετοχικών δεικτών εκτιμήθηκαν κατά 55% περίπου. Τέλος, έκαναν την ίδια διαδικασία για το αντίστοιχο μοντέλο μιας μεταβλητής και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μετοχικοί δείκτες εκτιμήθηκαν με μεγαλύτερη ακρίβεια για το μοντέλο δύο μεταβλητών, οπότε προτιμήθηκε αυτό.

Εισαγωγή

Το άρθρο που μελετάμε, του οποίου συγγραφείς είναι οι Jac Kragt, Frank de Jong και Joost Driessen, οι οποίοι ασχολήθηκαν με την εκτίμηση δύο μοντέλων που εκτιμούν τη μεταβολή του προεξοφλημένου μερίσματος, και όχι των τιμών των μετοχών, χρησιμοποιώντας τιμές των παραγώγων βασισμένων στα μερίσματα από τέσσερις μεγάλες αγορές μετοχών, τις FTSE 100, Nikkei 225, S&P500 και Eurostoxx 50. Προσπάθησαν να δουν πως η δομή της κίνησης των μερισμάτων θα μειώσει το σφάλμα στην δυναμική ανάλυση της αξίας των μετοχών. Κύρια μεταβλητή είναι τα παράγωγα μερισμάτων και όχι τα παράγωγα των μετοχών.

Διαπίστωσαν, λοιπόν, ότι χρησιμοποιώντας ένα υπόδειγμα μίας και μόνο μεταβλητής, αρκεί για να περιγράψουν τη δομή της κίνησης των τιμών των παραγώγων σε μερίσματα και άρα να τιμολογήσουν σωστά τους μετοχικούς δείκτες. Η μεταβλητή αυτή ισούται με τη διαφορά μεταξύ της μεταβολής του μερίσματος και το άθροισμα του επιτοκίου χωρίς ρίσκο και του πριμ κινδύνου και καλείται μεταβολή του προεξοφλημένου μερίσματος και δεν απαιτεί τον προσδιορισμό των μερισμάτων από μία ειδική και αυστηρά προσδιορισμένη αγορά μερισμάτων. Συνεπώς, δεν χρειάστηκε να θεωρήσουν ξεχωριστές διαδικασίες για τις ερμηνευτικές μεταβλητές, καθώς αυτές συσχετίζονται μεταξύ τους, γεγονός που αποτελεί πλεονέκτημα της μελέτης τους.

Οι ίδιοι βασίστηκαν στο υπόδειγμα των Jegadeesh και Penacchi (1996), οι οποίοι κατασκεύασαν ένα μοντέλο δύο μεταβλητών για να περιγράψουν τη δομή της κίνησης των επιτοκίων στο χρόνο επιβάλλοντας μία κατάτμηση των χρονισμών σε ανεξάρτητες κατηγορίες βραχυχρόνιας και μακροχρόνιας επίδρασης. Το πρώτο μοντέλο των Kragt, Frank de Jong και Driessen, τους οποίους θα αναφέρουμε ως KFD, διατηρεί την βάση του προηγούμενου παραμένοντας δύο μεταβλητών, όπου η μία μεταβλητή έχει μικρή διάρκεια, έως ένα χρόνο, και η άλλη μεσαία διάρκεια, από ένα έως τέσσερα χρόνια. Επίσης, η βραχυπρόθεσμη μεταβλητή ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία με

mean reversion και καταλήγει σε βάθος χρόνου στη μεσοπρόθεσμη μεταβλητή, η οποία ακολουθεί με τη σειρά της μια στοχαστική διαδικασία με mean reversion.

Στην οικονομετρία, για να προβλέψουμε μία τυχαία μεταβλητή, φτιάχνουμε ένα σύστημα εξισώσεων, την εξίσωση μέτρησης (measurement equation) και την εξίσωση κατάστασης (state equation). Η εξίσωση κατάστασης είναι ουσιαστικά μια αναδρομική σχέση που μας δείχνει την εξέλιξη της τυχαίας μεταβλητής στο χρόνο. Η εξίσωση μέτρησης μας δείχνει τη σχέση της τυχαίας μεταβλητής με μία άλλη μεταβλητή, η οποία περιέχει ένα σύνολο από παρατηρούμενες τιμές ή αλλιώς ιστορικά δεδομένα για τη μεταβλητή που θέλουμε να προβλέψουμε. Οι παράμετροι του μοντέλου εκτιμήθηκαν με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας, και συγκεκριμένα με την τεχνική Kalman Filter. Το φίλτρο αυτό χρησιμοποιήθηκε καθώς είναι ειδικό στο φιλτράρισμα και στην απομάκρυνση του θορύβου ενός συστήματος εξισώσεων, και επομένως των σφαλμάτων. Τα αποτελέσματα της εκτίμησης έδειξαν ότι το mean reversion του μοντέλου είναι αρκετά ισχυρό, που σημαίνει ότι αφού η δεύτερη μεταβλητή καταλήξει στη μακροχρόνια σταθερά, το οποίο γίνεται σε τρία με τέσσερα χρόνια, δηλαδή όσο διαρκεί ένας κύκλος μιας επιχείρησης, διατηρεί την τιμή αυτή για πολλά χρόνια μετά. Αυτό σημαίνει ότι οι επενδυτές θα εκτιμήσουν μόνο μέχρι το τέλος του κύκλου αυτού τα μερίσματα, διότι μετά δεν θα μεταβάλλονται. Τα αποτελέσματα αυτά έρχονται σε αντίθεση με τα αποτελέσματα πολλών εκτιμήσεων αντίστοιχων μοντέλων, όπως αυτό των Bansal και Yaron (2004). Στο μοντέλο αυτό, οι διαταραχές στην αναμενόμενη μεταβολή των μερισμάτων είναι αρκετά έντονες, σε αντίθεση με το μοντέλο των Kragt, Frank de Jong και Driessen, όπου παρατηρείται ισχυρό mean reversion και επομένως η μεταβολή των μερισμάτων είναι σχεδόν σταθερή από ένα σημείο και μετά.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση των παραμέτρων ήταν τιμές παραγώγων με βάση τα μερίσματα από τέσσερις αγορές, τις S&P500, FTSE 100, Nikkei 225 και Eurostoxx 50. Όσον αφορά τις αγορές S&P500 και FTSE 100, τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν Over The Counter (OTC), καθώς η συναλλαγή τους δεν

γίνεται υπό την επίβλεψη κάποιου χρηματιστηρίου. Συνεπώς, τα δεδομένα αυτά ήταν συμβόλαια ανταλλαγής μερισμάτων (dividend swaps), ενώ για τις άλλες δύο αγορές χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης μερισμάτων (dividend futures). Τα δεδομένα αυτά είχαν ληκτότητες έως δέκα χρόνια. Επίσης, οι εξισώσεις μέτρησης (measurement equations) περιέχουν τιμές των παραγώγων με ετήσιες ληκτότητες, ενώ οι εξισώσεις κατάστασης (state equations) περιέχουν καθημερινές αυξήσεις του προεξοφλημένου μερίσματος. Ακόμη, οι Kragt, Frank de Jong και Driessen παρατήρησαν ότι η κατανομή των μερισμάτων που πληρώνονται κάθε χρόνο δεν είναι ομαλή, καθώς, για παράδειγμα, στην αγορά Eurostoxx 50 το 60% των μερισμάτων που επρόκειτο να δοθούν μέχρι το τέλος του χρόνου είχαν δοθεί μόλις μέχρι την άνοιξη για τα δεδομένα του 2005-2013. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποίησαν τιμές παραγώγων με σταθερή λήξη, φτιάχνοντας ένα σχήμα που να ομαλοποιεί την κατανομή των μερισμάτων, το οποίο φαίνεται παρακάτω:

$$F_{CM}(i) = (1 - w_i)F_{t,n} + w_iF_{t,n+1}, \text{ όπου:}$$

$F_{t,n}$ η τιμή του παραγώγου που λήγει n -οστό στη σειρά από την παρατηρούμενη ημέρα i
 $F_{t,n+1}$ η τιμή του παραγώγου που λήγει ένα χρόνο μετά το $F_{t,n}$

Στη συνέχεια έδειξαν ότι το μοντέλο αυτό είναι ισχυρότερο από το αντίστοιχο μοντέλο μίας μεταβλητής, μικρής διάρκειας. Αυτό το έκαναν εκτιμώντας εκ νέου τις παραμέτρους του μοντέλου μίας μεταβλητής, όπου παρατήρησαν ότι τα σφάλματα ήταν μεγαλύτερα καθώς επίσης ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων που σχετίζονται με το mean reversion του μοντέλου ήταν χειρότερες. Η διαφορά των Kragt, Frank de Jong και Driessen από τους Binsbergen, Brandt και Koijen είναι ότι μελέτησαν περισσότερες αγορές, και συγκεκριμένα τις S&P500, Nikkei 225, FTSE 100 και Eurostoxx 50. Επίσης, χρησιμοποίησαν μία ακόμη μεταβλητή μέσης διάρκειας, έτσι ώστε να χωρίσουν το χρονικό διάστημα που μελετάνε σε βραχυπρόθεσμο, το οποίο φτάνει μέχρι ένα χρόνο, μεσοπρόθεσμο, το οποίο φτάνει μέχρι τα τέσσερα χρόνια, και μακροπρόθεσμο. Συνεπώς,

χρησιμοποίησαν ένα μοντέλο δύο μεταβλητών για να μοντελοποιήσουν τη μεταβολή του προεξοφλημένου μερίσματος στο χρόνο.

Τώρα, έχοντας τις εκτιμήσεις αυτές μπόρεσαν πλέον να περιγράψουν τη μεταβολή του προεξοφλημένου μερίσματος στον χρόνο και άρα να εκτιμήσουν τους μετοχικούς δείκτες, καθώς η μεταβολή αυτή εμπεριέχεται στην παρούσα αξία των αναμενόμενων προεξοφλημένων μερισμάτων, η οποία μας δίνει την τιμή της μετοχής.

Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μετοχικοί δείκτες υπερεκτιμήθηκαν για τα δεδομένα της αγοράς Eurostoxx 50, ενώ υποεκτιμήθηκαν για τα δεδομένα της αγοράς Nikkei 225.

Έπειτα έκαναν μια παλινδρόμηση. Στην απλή γραμμική παλινδρόμηση έχουμε ένα σύνολο με δείγματα τιμών x, y . Σκοπός είναι να βρούμε ένα απλό μαθηματικό μοντέλο, το οποίο να περιγράφει την σχέση αυτών των δύο μεταβλητών, την x και την y . Το απλό μαθηματικό μοντέλο που αναζητούμε είναι μια ευθεία γραμμή της μορφής $f(x) = y = \alpha x + \beta$, η οποία ταιριάζει καλύτερα στο σύνολο των δειγμάτων. Έχοντας το μοντέλο μπορούμε να προβλέψουμε τις τιμές του y για νέες τιμές του x . Για να βρεθεί αυτή η ευθεία, δηλαδή οι παράμετροι α και β , μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων, κατά την οποία προσπαθούμε να βρούμε μια ευθεία όπου η απόσταση κάθε σημείου x_i, y_i είναι ελάχιστη. Η παλινδρόμηση αυτή, λοιπόν, που εφάρμοσαν ήταν της παρακάτω μορφής:

$$\Delta \ln(S_t) = \alpha + \beta \Delta \ln(F_t) + \beta \Delta \psi_t + \beta \Delta \ln(PD_t) + \varepsilon, \text{ όπου:}$$

S_t οι μετοχικοί δείκτες για τις αγορές Eurostoxx 50, Nikkei 225, S&P500 και FTSE 100

F_t οι τιμές των παραγώγων με σταθερή ληκτότητα που λήγουν πρώτα σε σειρά από την παρατηρούμενη ημέρα

ψ_t το επιτόκιο άνευ ρίσκου

PD_t το άθροισμα των σημερινών τιμών όλων των αναμενόμενων μερισμάτων του μοντέλου

Τα αποτελέσματα της παλινδρόμησης έδειξαν ότι οι μετοχικοί δείκτες και των τεσσάρων αγορών μπορούν να εκτιμηθούν με αρκετά καλή ακρίβεια, της τάξης του 55% περίπου για κάθε αγορά.

Τέλος, έκαναν την ίδια διαδικασία χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο μοντέλο μιας μεταβλητής. Παρατήρησαν ότι το μοντέλο δύο μεταβλητών μπορούσε να περιγράψει καλύτερα τη μεταβολή του προεξοφλημένου μερίσματος στον χρόνο, και άρα να εκτιμήσει καλύτερα τους μετοχικούς δείκτες. Αυτό φαίνεται τόσο από τα σφάλματα της εκτίμησης των παραμέτρων, όπου είναι εμφανώς μικρότερα, αλλά και από την παλινδρόμηση, όπου το μοντέλο αυτό περιγράφει σε μεγαλύτερο βαθμό τη σχέση των μετοχικών δεικτών με τις υπόλοιπες μεταβλητές.

Η δομή της εργασίας, είναι η ακόλουθη. Στο κεφάλαιο 1 θα αναφέρουμε κάποιες βασικές έννοιες και ορισμούς από τα χρηματοοικονομικά, τις στοχαστικές διαδικασίες και τις πιθανότητες, για να είναι όσο το δυνατόν πιο κατανοητά στο μέσο αναγνώστη τα όσα θα περιγράψουμε στα επόμενα κεφάλαια.

Στο κεφάλαιο 2 θα δείξουμε πως υπολογίστηκε από τους συγγραφείς η παρούσα αξία όλων των αναμενόμενων μερισμάτων, όπου προέκυψε η μεταβλητή που μοντελοποίησαν, δηλαδή η μεταβολή του προεξοφλημένου μερίσματος. Η μοντελοποίηση αυτή έγινε θεωρώντας ένα σύστημα δύο στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, όπου η πρώτη μεταβλητή είναι η μέση τιμή της μεταβολής του προεξοφλημένου μερίσματος, η οποία ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία με mean reversion και καταλήγει σε βάθος χρόνου σε μία άλλη μεταβλητή, η οποία με τη σειρά της ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία με mean reversion και καταλήγει σε μια μακροχρόνια σταθερά. Από τη λύση του συστήματος αυτού προέκυψαν οι εξισώσεις κατάστασης, οι οποίες με κατάλληλη επεξεργασία οδήγησαν στις εξισώσεις μέτρησης. Στο σύστημα των εξισώσεων κατάστασης και μέτρησης εφαρμόστηκε η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας και συγκεκριμένα η τεχνική Kalman Filter για την εκτίμηση των παραμέτρων. Στη συνέχεια γίνεται η ίδια διαδικασία για το μοντέλο μιας μεταβλητής, για να γίνει σύγκριση των δύο αυτών μοντέλων. Το

αποτέλεσμα ήταν ότι το μοντέλο δύο μεταβλητών είχε μικρότερο σφάλμα στην εκτίμηση των παραμέτρων, συνεπώς ήταν προτιμότερο.

Στο κεφάλαιο 3 δείχνουμε πως οι KFD χρησιμοποίησαν τα αποτελέσματα της εκτίμησης των παραμέτρων, όπως επίσης τις τιμές των παραγώγων μερισμάτων από τις 4 μεγάλες αγορές, για να εκτιμήσουν τους μετοχικούς δείκτες. Το αποτέλεσμα της εκτίμησης ήταν ότι οι μετοχικοί δείκτες υπερεκτιμήθηκαν για τα δεδομένα της αγοράς Eurostoxx 50, ενώ υποεκτιμήθηκαν για τα δεδομένα της αγοράς Nikkei 225. Για το λόγο αυτό, αποφάσισαν να κάνουν μια παλινδρόμηση. Το αποτέλεσμα της παλινδρόμησης ήταν ότι οι τιμές των μετοχικών δεικτών εκτιμήθηκαν κατά 55% περίπου. Τέλος, έκαναν την ίδια διαδικασία για το αντίστοιχο μοντέλο μιας μεταβλητής και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μετοχικοί δείκτες εκτιμήθηκαν με μεγαλύτερη ακρίβεια για το μοντέλο δύο μεταβλητών, οπότε προτιμήθηκε ξανά αυτό.

Chapter 1

Προαπαιτούμενη γνώση

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε κάποιες βασικές έννοιες από τα χρηματοοικονομικά, τις πιθανότητες και τις στοχαστικές διαδικασίες, έτσι ώστε να είναι κατανοητά από τον μέσο αναγνώστη τα όσα θα αναλύσουμε στη συνέχεια της εργασίας.

1.1 Βασικές έννοιες από τα Χρηματοοικονομικά

Ορισμός 1.1.1 Χρεόγραφο (asset) είναι ένα επενδυτικό διαπραγματεύσιμο προϊόν που εκδίδεται από μια κυβέρνηση, μια εταιρία ή κάποιο άλλο οργανισμό, αντιπροσωπεύει οικονομική αξία και αποτελεί αποδεικτικό χρέους ή δικαίωμα σε διανεμόμενα κέρδη.

Το νομικό πρόσωπο που εκδίδει χρεόγραφα ονομάζεται εκδότης (issuer) ενώ σε αυτά περιλαμβάνονται:

- 1) Ομόλογα (Bonds)
- 2) Μετοχές (Shares)
- 3) Έντοκα γραμμάτια Δημοσίου
- 4) Μέρηδια αμοιβαίων κεφαλαίων
- 5) Προθεσμιακά συμβόλαια (Forwards)
- 6) Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (Futures)
- 7) Συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης (Options)

8) Παραστατικά απόκτησης μετοχών (Warrants)

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε κάποια βασικά στοιχεία των χρεογράφων που θα ασχοληθούμε κυρίως.

Ορισμός 1.1.2 Ομόλογο είναι ένα χρεόγραφο, και πιο συγκεκριμένα ένα δάνειο, για το οποίο ο εκδότης έχει την υποχρέωση να καταβάλει, στη λήξη της σύμβασης, την ονομαστική αξία αυτού και στην περίπτωση των ομολόγων με κουπόνι, σε τακτά προκαθορισμένα διαστήματα ποσό χρημάτων/τόκους (το κουπόνι).

Ορισμός 1.1.3 Ονομαστική Αξία (Face Value) είναι το αρχικό ποσό έκδοσης του χρεογράφου το οποίο ο εκδότης υπόσχεται να αποπληρώσει στην ημερομηνία λήξης του ομολόγου.

Ορισμός 1.1.4 Το κουπόνι ομολόγου είναι το τμήμα του ομολόγου, το οποίο αποκόβεται και προσκομίζεται στον εκδότη, σε συγκεκριμένη ημερομηνία, προκειμένου να εισπραχθεί ο τόκος που αναγράφεται πάνω σε αυτό. Γενικότερα, το κουπόνι εκφράζει το ποσό ή το επιτόκιο επί της ονομαστικής αξίας που αποφέρει σε τακτά χρονικά διαστήματα ένας ομολογιακός τίτλος, έστω και αν αυτός είναι άυλος.

Ορισμός 1.1.5 Μετοχές είναι τα μερίδια ιδιοκτησίας σε μια επιχείρηση.

Είναι απαιτήσεις πάνω στα εισοδήματά της, και προσφέρουν τη δυνατότητα όχι μόνο της συμμετοχής του επενδυτικού κοινού στο κεφάλαιο της, αλλά και τη δυνατότητα στην επιχείρηση να αντλεί τα απαιτούμενα για επενδύσεις κεφάλαια. Οι μετοχές θεωρούνται μακροπρόθεσμα προϊόντα επειδή δεν έχουν συγκεκριμένη ημερομηνία λήξεως, και περιοδικά οι επιχειρήσεις διανέμουν μέρος ή το σύνολο των κερδών τους (εάν υπάρχουν) στους μετόχους υπό μορφή μερίσματος. Όσο υψηλότερο είναι το καθαρό εισόδημα της επιχείρησης, τόσο μεγαλύτερη η απόδοση για τους μετόχους. Το βασικό πλεονέκτημα των μετοχών είναι ότι οι κάτοχοι τους συμμετέχουν πλήρως στην αύξηση της κερδοφορίας ή του ενεργητικού της επιχείρησης, ενώ έχουν και περιορισμένη ευθύνη (limited liability).

Ορισμός 1.1.6 Μέρισμα είναι το μερίδιο ανά μετοχή των καθαρών κερδών μιας εταιρείας που διανέμεται στους μετόχους της.

Τα μερίσματα συνήθως δίνονται σε μετρητά αλλά μπορούν να δοθούν και με την μορφή μετοχών ή άλλων περιουσιακών στοιχείων. Τα μερίσματα παρέχουν ένα κίνητρο στους επενδυτές να κατέχουν μετοχές από μεγάλες εταιρίες ακόμα και αν δεν αναμένεται μεγάλη ανάπτυξη από αυτές. Το μέρισμα συνήθως αναφέρεται με όρους χρηματικής αξίας, δηλαδή πόσα ευρώ θα αποδώσει κάθε μετοχή, αλλά μπορεί να αναφέρεται επίσης ως ποσοστό επί της αγοραίας αξίας της μετοχής, όρος γνωστός και ως μερισματική απόδοση. Οι εταιρίες δεν είναι υποχρεωμένες να αποδώσουν μέρισμα. Οι εταιρίες που προσφέρουν μέρισμα είναι συνήθως εταιρίες που έχουν περάσει το στάδιο της ανάπτυξης και δεν χρειάζεται πλέον να επανεπενδύουν συνεχώς τα κέρδη τους, έτσι επιλέγουν να πληρώσουν τους μετόχους τους. Αντιθέτως, οι εταιρίες υψηλής ανάπτυξης σπάνια προσφέρουν μέρισμα, γιατί όλα τα κέρδη τους επανεπενδύονται για να διατηρηθεί αυτή η ανάπτυξη.

Ορισμός 1.1.7 Παράγωγο (derivative) είναι ένα χρηματοοικονομικό προϊόν του οποίου η αξία εξαρτάται / παράγεται από την τιμή ενός ή περισσότερων αγαθών (underlyings) (Παπαπαντολέων, 2019).

Ουσιαστικά, δηλαδή, πρόκειται για ένα αξιόγραφο, η τιμή του οποίου καθορίζεται με άμεσο τρόπο από την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Σε κάθε τέτοιο συμβόλαιο υπάρχουν δύο αντισυμβαλλόμενοι. Ο ένας έχει τη θέση του αγοραστή (long position) ενώ ο άλλος έχει τη θέση του πωλητή (short position). Τα υποκείμενα προϊόντα από τα οποία προέρχεται ένα παράγωγο μπορεί να είναι είτε προϊόντα που τίθενται υπό διαπράγματευση σε μία οργανωμένη αγορά, όπως ένα χρηματιστήριο, είτε προϊόντα που δεν τίθενται υπό διαπράγματευση σε οργανωμένες αγορές. Σε γενικές γραμμές, τα υποκείμενα προϊόντα μπορεί να είναι σχεδόν οτιδήποτε από εμπορεύσιμες μετοχές και ομόλογα μέχρι αγροτικά προϊόντα (π.χ. σιτάρι) και μέταλλα (π.χ. χρυσός).

1.2 Κατηγορίες Παραγώγων Προϊόντων

Τα πιο γνωστά παράγωγα προϊόντα είναι τα παρακάτω:

α) Προθεσμιακά Συμβόλαια (Forward Contracts)

Προθεσμιακό συμβόλαιο (forward contract) είναι μία σημερινή συμφωνία και υποχρέωση για μία αγοραπωλησία σε προκαθορισμένη μελλοντική χρονική στιγμή (maturity) και σε προκαθορισμένη τιμή (delivery price). Η συμφωνία κλείνεται συνήθως μεταξύ χρηματοπιστωτικών οργανισμών, ή μεταξύ χρηματοπιστωτικών οργανισμών και των πελατών τους.

β) Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts)

Ενα Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ), όπως και στη περίπτωση των Προθεσμιακών Συμβολαίων, αποτελεί μία συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων. Από τους αντισυμβαλλομένους, ο ένας οφείλει να αγοράσει (long position) και ο άλλος να πουλήσει (short position), μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον (ημερομηνία λήξης του συμβολαίου), σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής (Binsbergen, 2013). Το μέρος που έχει θέση long αναμένει άνοδο της τιμής του αγαθού ενώ αντίθετα το μέρος που έχει θέση short αναμένει πτώση στη τιμή του αγαθού. Εμείς θα ασχοληθούμε με τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης μερισμάτων, τα οποία ήταν ιδέα του Michael Brennan (Brennan, 1998) και εισήχθησαν στην αγορά τις αρχές της δεκαετίας του 2000. Σε ένα τέτοιο συμβόλαιο, ο αγοραστής του πληρώνει ένα ποσό που έχει συμφωνηθεί με τον πωλητή στην αρχή του συμβολαίου, και ο πωλητής πληρώνει όλα τα μερίσματα μιας εταιρίας που πληρώθηκαν κατά το έτος που λαμβάνει μέρος η συμφωνία (Binsbergen, 2012). Για παράδειγμα, μια εταιρία πλήρωσε το 2018 μέρισμα ύψους 100 ευρώ ανά μετοχή. Τότε, αν ένας επενδυτής αγόρασε ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης μερισμάτων για το 2018 στην τιμή των 95 ευρώ, τότε κέρδισε 5 ευρώ για κάθε συμβόλαιο.

Στα μέσα του 2008, το Χρηματιστήριο της Ευρώπης (Eurex Exchange) εισήγαγε τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης μερισμάτων στην αγορά Euro Stoxx 50, η οποία

είναι η πιο ενεργή σε εμπορικές συναλλαγές (tradings) στην Ευρώπη (Willkens, 2010). Τα ΣΜΕ συναλλάσσονται καθημερινά σε κάποιο οργανωμένο χρηματιστήριο όπως για παράδειγμα στο Χρηματιστήριο Παραγωγών Αθηνών. Κατά συνέπεια τέτοια προϊόντα θεωρούνται τυποποιημένα εξαιτίας των προκαθορισμένων χαρακτηριστικών που έχει ορίσει το εκάστοτε Χρηματιστήριο. Επιπλέον υπάρχει εγγύηση του χρηματιστηρίου για την εκπλήρωση των συμβολαίων. Αντίθετα, η διαπραγμάτευση των προθεσμιακών συμβολαίων γίνεται κυρίως στην εξωχρηματιστηριακή αγορά (Over The Counter). Οι δύο αντισυμβαλλόμενοι σε ένα ΣΜΕ οφείλουν να καταθέσουν ένα ποσό σε μορφή εγγύησης σε ένα συγκεκριμένο λογαριασμό περιθωρίου που τους ανοίγει η Χρηματιστηριακή τους. Ο λογαριασμός αυτός ονομάζεται margin account και το ποσοστό της εγγύησης αποτελεί ένα μέρος της αξίας της συναλλαγής. Το ύψος της εγγύησης χωρίζεται σε δύο μέρη, το Maintenance Margin και το Variation Margin. Το πρώτο αποτελεί το ελάχιστο ποσό χρημάτων που πρέπει να βρίσκεται ανα πάσα στιγμή στο λογαριασμό εγγύησης, ενώ το δεύτερο αποτελεί την ασφάλεια μέχρι κάποιος να πέσει στο Maintenance margin. Σε περίπτωση που ο λογαριασμός margin πέσει κάτω από το επίπεδο του Maintenance τότε αντισυμβαλλόμενος δέχεται το λεγόμενο "margin call". Επικοινωνεί δηλαδή η Χρηματιστηριακή μαζί του και του ζητά να καταθέσει επιπλέον χρήματα προκειμένου να φθάσει πάλι στο επίπεδο πάνω από το maintenance margin.

γ) Δικαιώματα Προαίρεσης

Συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης είναι συμβόλαια για μελλοντικές αγοροπωλησίες χρεογράφων, παρόμοια με τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ). Η βασική τους διαφορά με τα ΣΜΕ είναι ότι δίνουν στον αγοραστή το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να ζητήσει την εκπλήρωση της συμφωνίας. Στα συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης δηλαδή, ο αγοραστής (holder) αποκτά το δικαίωμα να αγοράσει ή να πουλήσει έναν υποκείμενο τίτλο σε μία συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή και για προκαθορισμένη τιμή (τιμή εξάσκησης), πληρώνοντας την τιμή του δικαιώματος (option premium) χωρίς να έχει καμία άλλη υποχρέωση. Εάν θέλει μπορεί να μην εξασκήσει αυτό το δικαίωμα οπότε

απλά χάνει το κεφάλαιο που έδωσε για την αγορά του δικαιώματος. Ο πωλητής (εκδότης / writer) πουλάει το δικαίωμα και λαμβάνει την τιμή του δικαιώματος, ενώ αποκτά την υποχρέωση να αγοράσει ή να πουλήσει τα υποκείμενα μέσα στην συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή και για την προκαθορισμένη τιμή, εάν αυτό απαιτηθεί από τον αγοραστή.

δ) Swaps

Swap ή Σύμβαση Ανταλλαγής αποτελεί μια συμφωνία μεταξύ δύο συμβαλλομένων για ανταλλαγή μελλοντικών χρηματοροών (legs) με τρόπο που έχουν προκαθορίσει μεταξύ τους. Τα χρηματικά ποσά που ανταλλάσσονται μπορεί να αναφέρονται σε διαφορετικά νομίσματα και σταθερά ποσά. Αλλιώς μπορεί ένα σταθερό ποσό να ανταλλάσσεται με ένα μεταβαλλόμενο, αβέβαιο ποσό ή το ποσό πληρωμής στο ένα νόμισμα να είναι σταθερό ενώ στο άλλο μεταβαλλόμενο. Οι βασικότερες κατηγορίες swap είναι οι εξής:

- 1) **Συμβάσεις Ανταλλαγής Επιτοκίων (interest rates swap)**
- 2) **Συμβάσεις Ανταλλαγής Νομισμάτων (currency swap)**
- 3) **Συμβάσεις Ανταλλαγής Εμπορευμάτων (commodities swap)**
- 4) **Συμβάσεις Ανταλλαγής Μετοχών (equity swap)**
- 5) **Συμβάσεις Ανταλλαγής Μερισμάτων (dividend swap)**

Εμείς θα ασχοληθούμε με τις συμβάσεις ανταλλαγής μερισμάτων. Μια τέτοια σύμβαση είναι μία διαπραγμάτευση που γίνεται κυρίως στην εξωχρηματιστηριακή αγορά (Over The Counter) μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων (Manly, 2008). Ο αγοραστής του συμβολαίου οφείλει να πληρώσει τον κάτοχό του ένα προκαθορισμένο χρηματικό ποσό σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον (ημερομηνία λήξης του συμβολαίου) και να πάρει από τον ίδιο τα μερίσματα που πληρώθηκαν κατά τη διάρκεια του έτους που λαμβάνει χώρα η συμφωνία. Πιο συγκεκριμένα, τα μερίσματα που πληρώνονται σε ένα έτος αφορούν την περίοδο μεταξύ της επόμενης ημέρας από την τρίτη Παρασκευή του Δεκεμβρίου του προηγούμενου έτους και της τρίτης Παρασκευής του Δεκεμβρίου του τρέχοντος έτους (Cejnek, 2015). Τα μερίσματα μπορεί να αφορούν μια επιχείρηση ή

ένα σύνολο επιχειρήσεων. Δηλαδή, η τιμή του swap είναι ουσιαστικά το προεξοφλημένο αναμενόμενο μέρισμα τη στιγμή της λήξης.

Επίσης θα ασχοληθούμε με τα Συμβολαία Μελλοντικής Εκπλήρωσης, τα οποία αποτελούν προθεσμιακά συμβόλαια, που σημαίνει ότι είναι δεσμευτικές υποχρεώσεις και συμφωνίες για αγορές και πωλήσεις περιουσιακών στοιχείων, μεταξύ ενός πωλητή και ενός αγοραστή, σε μία προκαθορισμένη τιμή (delivery price) και σε μια προκαθορισμένη χρονική στιγμή στο άμεσο μέλλον (maturity). Μιλώντας για περιουσιακά στοιχεία, σε αυτά συμπεριλαμβάνονται χρηματοοικονομικοί τίτλοι, όπως χρηματιστηριακοί δείκτες (FTSE, LIBOR), ομόλογα, επιτόκια, τιμές συναλλάγματος ή ακόμα και προϊόντα, όπως αγροτικά προϊόντα, ορυκτά, και προϊόντα που αφορούν την ενέργεια. Ένα ενδεικτικό παράδειγμα Συμβολαίου Μελλοντικής Εκπλήρωσης είναι η αγορά 1000 βαρελιών αργού πετρελαίου, σε τιμή 55\$ ανά βαρέλι (159 Lt) στις 31/10/2019, με την συμφωνία για παράδοσή τους σε έναν συγκεκριμένο χώρο, στις 10/05/2019. Επίσης, ένας επενδυτής ο οποίος αγοράζει ένα Συμβολαίο Μελλοντικής Εκπλήρωσης χρηματιστηριακού δείκτη, στην ουσία αναλαμβάνει την υποχρέωση να αγοράσει στην προκαθορισμένη τιμή (τιμή πράξης) το δείκτη, την ημέρα λήξης του συμβολαίου, καθώς αναμένει την ενδεχόμενη άνοδο της τιμής του στο άμεσο μέλλον. Από την άλλη μεριά, ο πωλητής ενός Συμβολαίου Μελλοντικής Εκπλήρωσης, από τη στιγμή που κλείνει τη συμφωνία, στην ουσία αναλαμβάνει την υποχρέωση να πουλήσει στη συμφωνημένη τιμή το δείκτη την ημέρα λήξης του συμβολαίου, καθώς προσδοκά μία ενδεχόμενη πτώση του δείκτη. Στην πραγματικότητα, ένας επενδυτής Συμβολαίου Μελλοντικής Εκπλήρωσης, δεν είναι απαραίτητο να αναμένει την ημέρα λήξης για να λάβει το αποτέλεσμα είτε αυτό είναι ζημία είτε είναι κέρδος, καθώς κάθε ημέρα πληρώνει τη ζημία ή εισπράττει το κέρδος του, κάτι που εξαρτάται από την κίνηση της τιμής του Συμβολαίου Μελλοντικής Εκπλήρωσης σε σχέση με την προηγούμενη ημέρα. Ένας επενδυτής ενός Συμβολαίου Μελλοντικής Εκπλήρωσης, είτε είναι πωλητής είτε είναι αγοραστής, δεν εισπράττει ή καταβάλλει την αξία του Συμβολαίου Μελλοντικής Εκπλήρωσης κατά την πράξη πώλησης ή αγοράς του, παρά

μόνο υποχρεούται να παρέχει ως ενέχυρο, ένα περιθώριο ασφάλισης (margin). Ένα άλλο παράδειγμα Συμβολαίου Μελλοντικής Εκπλήρωσης είναι το εξής. Έστω ότι ένας πωλητής που προβλέποντας μια πτώση των τιμών των μετοχών που κατέχει, πωλεί ένα Συμβολαίου Μελλοντικής Εκπλήρωσης στην τρέχουσα τιμή του δείκτη που είναι 5.500 μονάδες. Αν ο δείκτης μειωθεί στις 4.500 μονάδες μέχρι τη συμφωνημένη ημερομηνία λήξης, τότε ο πωλητής θα κερδίσει $5.500 - 4.500 = 1.000$ μονάδες, ενώ εάν το κόστος της κάθε μονάδας του δείκτη αξιολογείται στα 3 ευρώ τότε έχει ένα κέρδος $1.000 * 3 = 3.000$ ευρώ. Ωστόσο, στην περίπτωση που οι εκτιμήσεις του δεν επαληθευθούν και ο δείκτης διαμορφωθεί στις 7.000 μονάδες τότε θα χάσει 1.500 μονάδες ή 4.500 ευρώ τα οποία θα τα κερδίσει ο αντισυμβαλλόμενος αγοραστής.

1.3 Βασικές έννοιες από τις πιθανότητες

Ορισμός 1.3.1 Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Μια κλάση F υποσυνόλων του Ω ονομάζεται σ -άλγεβρα αν ικανοποιεί τα παρακάτω:

- 1) $\Omega \in F$
- 2) αν $A \in F \Rightarrow A^c \in F$
- 3) αν $A_n \in F \forall n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

Θεώρημα 1.3.1 Radon–Nikodym

Έστω (Ω, F) μετρήσιμος χώρος στον οποίο ορίζονται δύο μέτρα μ και ν . Αν $\nu \ll \mu$, τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$, τέτοια ώστε για κάθε $A \in F$ να ισχύει $\nu(A) = \int_A f d\mu$ (Κουτσιμπέλα, 2018)

Θεώρημα 1.3.2 Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και τυχαία μεταβλητή $X \in L^1$. Έστω G μια υπο- σ -άλγεβρα της F . Τότε υπάρχει τυχαία μεταβλητή Y τέτοια ώστε:

- 1) Y να είναι G -μετρήσιμη
- 2) $E(|Y|) < \infty$
- 3) $\int_g Y dP = \int_g X dP, \forall g \in G$

Η παραπάνω τ.μ. Y είναι μοναδική με την έννοια ότι αν και μια άλλη τ.μ. Y' ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες, τότε $Y = Y'$ σ.β.

Η ύπαρξη εξασφαλίζεται από το Θεώρημα Radon–Nikodym, καθώς το $g : G \rightarrow [0, 1]$ με $Q(A) = \int_A X dP$ είναι μέτρο πιθανότητας.

Ορισμός 1.3.2 Η τ.μ. Y του θεωρήματος 1.3.2 ονομάζεται υπό συνθήκη (ή δεσμευ-μένη) μέση τιμή της X δεδομένης της G και συμβολίζεται με $Y = E(X|G)$.

1.4 Βασικές έννοιες από τις Στοχαστικές Διαδικασίες

Ορισμός 1.4.1 Μια στοχαστική διαδικασία είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t) : t \in T\}$, όπου t είναι μια παράμετρος που παίρνει τιμές σε ένα κατάλληλα ορισμένο σύνολο T . Το σύνολο των τιμών που λαμβάνουν οι τυχαίες μεταβλητές $\{X(t) : t \in T\}$ καλείται χώρος καταστάσεων (state space) της διαδικασίας.

Ορισμός 1.4.2 Μια στοχαστική διαδικασία $X : [0, +\infty) \times \Omega \rightarrow R$ λέγεται μετρήσιμη αν είναι μετρήσιμη ως προς τη σ -άλγεβρα $B([0, +\infty)) \otimes F$.

Ορισμός 1.4.3 Η στοχαστική διαδικασία $X = X_{t \geq 0}$ ονομάζεται προσαρμοσμένη ως προς τη διήθηση $F_{t \geq 0}$ αν X_t είναι F_t -μετρήσιμη για κάθε $t \geq 0$.

Ορισμός 1.4.4 Μια στοχαστική διαδικασία $\{W(t) : t \geq 0\}$ λέγεται διαδικασία Wiener εάν:

- (i) η $\{W(t) : t \geq 0\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δηλαδή οι τυχαίες μεταβλητές $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες, για $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$
- (ii) για κάθε $0 \leq s < t$ η προσαύξηση $W_t - W_s$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διασπορά $t - s$, δηλαδή $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$
- (iii) με πιθανότητα 1 η W_t είναι συνεχής συνάρτηση του t

Ορισμός 1.4.5 Στοχαστική διαφορική εξίσωση λέγεται η διαφορική εξίσωση στην οποία ένας ή περισσότεροι όροι είναι στοχαστικές διαδικασίες, που σημαίνει ότι η λύση είναι και η ίδια στοχαστική διαδικασία.

Για παράδειγμα η εξίσωση $dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$, όπου W_t μια διαδικασία Wiener, αποτελεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση. Ο πρώτος όρος είναι ένας όρος τάσης και αποτελεί το ντετερμινιστικό μέρος της εξίσωσης και το δεύτερο άθροισμα αποτελεί τον όρο διάχυσης και είναι μια στοχαστική διαδικασία.

Ορισμός 1.4.6 Στοχαστικές διαδικασίες με mean reversion ονομάζονται οι διαδικασίες οι οποίες σε βάθος χρόνου τείνουν να καταλήγουν στη μέση τιμή τους.

Για παράδειγμα, το μοντέλο Vasicek αποτελεί μια στοχαστική διαδικασία με mean reversion, το οποίο περιγράφεται από την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dr_t = a_1(b_1 - r_t) dt + \sigma dW_t, \text{ όπου:}$$

r_t το επιτόκιο δανεισμού

b_1 η μέση τιμή στις στοχαστικής διαδικασίας

a_1 η ταχύτητα του mean reversion, δηλαδή πόσο γρήγορα θα καταλήξει η διαδικασία στη μέση τιμή b_1 σε βάθος χρόνου

σ η μεταβλητότητα (volatility)

W_t διαδικασία Wiener

Ορισμός 1.4.7 Εστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας ως προς τον οποίο η B είναι d -διάστατη διαδικασία Wiener και $F_t = F_t^B$, η διήθηση που παράγει η B . Κάθε ανέλιξη $X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R$ ονομάζεται ανέλιξη Itô αν γράφεται ως:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dW_s, \text{ όπου:}$$

1) η X_0 είναι F_0 -προσαρμοσμένη

2) οι $u : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R$, $v = (v^i)_{1 \leq i \leq d} : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R^d$ μετρήσιμες και προσαρμοσμένες

3) για κάθε $t > 0$ με πιθανότητα 1 ισχύει ότι: $\int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty$ και $\int_0^t v^i(s, \omega)^2 ds < \infty$
 $\forall i = 1, \dots, d$

Θεώρημα 1.4.1 Ο τύπος του Itô

Εστω $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(s) ds + \int_0^t \beta(s) dW_s$, $t \geq 0$ ανέλιξη Itô και $f \in C^{1,2}([0, \infty) \times R)$.

Τότε για όλα τα $t \geq 0$ ισχύει:

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + a(s) \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} \beta^2(s) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) \right] ds + \int_0^t \beta(s) \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dW_s$$

(Σπηλιώτης, 2004)

Μια στοχαστική διαφορική εξίσωση έχει λύση αν υπάρχει διαδικασία *Itô* X_t που την ικανοποιεί. Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση συστημάτων που περιέχουν κάποιου είδους τυχαιότητα. Τέτοια προβλήματα προκύπτουν, μεταξύ άλλων, σε πολλά θέματα οικονομικών (μοντελοποίηση μετοχών, μοντέλα επιτοκίων στα χρηματοοικονομικά)

Chapter 2

Κατασκευή του μοντέλου

Σκοπός των ερευνητών του άρθρου που μελετάμε είναι η εκτίμηση του δείκτη μιας μετοχής, ο οποίος ισούται με το άθροισμα της παρούσας αξίας όλων των προεξοφλημένων αναμενόμενων μερισμάτων που πρόκειται να δοθούν σε βάθος n ετών, όπου $n \rightarrow \infty$ (Cochrane, 2011). Έλαβαν υπόψιν τους ότι τα μερίσματα είναι εκείνα που επηρεάζουν κυρίως τις τιμές των μετοχών (Campbell and Shiller, 1988). Εκτός από αυτά, αλλαγές στις τιμές των μετοχών μπορούν να επιφέρουν και τα επιτόκια καθώς και τα risk premia (Campbell and Shiller, 1988). Η τιμή αυτή, όπως θα δούμε, εμπεριέχει τη μεταβολή του προεξοφλημένου μερίσματος στο χρόνο, συνεπώς είναι απαραίτητο ένα μοντέλο που να περιγράφει την κίνησή του. Το μοντέλο των KFD, το οποίο θα περιγράψουμε, μοιάζει με το μοντέλο κίνησης των επιτοκίων, το οποίο έφτιαξαν οι Jegadeesh και Penacchi. Οι ίδιοι χρησιμοποίησαν ένα μοντέλο δύο μεταβλητών, όπου η πρώτη μεταβλητή ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία με mean reversion και καταλήγει σε μια άλλη μεταβλητή, η οποία επίσης ακολουθεί μια διαδικασία με mean reversion και καταλήγει σε μια σταθερά. (Jegadeesh and Penacchi, 1996). Στο κεφάλαιο αυτό, λοιπόν, θα περιγράψουμε αναλυτικά τη διαδικασία αυτή.

2.1 Εύρεση μεταβολής του προεξοφλημένου μερίσματος

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας στον οποίο ορίζεται η στοχαστική διαδικασία D_t , η οποία είναι το μέρισμα που πληρώνεται τη χρονιά t . Επίσης, ορίζουμε τη διύλιση $F = (F_t)_{t \geq 0}$, όπου $F_t = \sigma((D_u)_{0 \leq u \leq t})$ η σ -άλγεβρα που παράγεται από τις D_u . Τότε θα ισχύει ότι:

$$D_{t+n} = D_t e^{\sum_{i=1}^n g_{t+i}}, \text{ όπου:}$$

g_{t+1} ο ρυθμός μεταβολής του μερίσματος στο χρόνο $[t, t + 1]$

Η σημερινή αξία όλων των αναμενόμενων μερισμάτων, λοιπόν, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$R_{t,n} = E_t \left[D_t e^{\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i}} \right] \quad (2.1)$$

, όπου:

$$R_{t,n} \text{ η σημερινή αξία μερισμάτων που πληρώνονται μέχρι το έτος } n \text{ και } E_t \left[D_t e^{\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i}} \right] =$$

$$E_t \left[D_t e^{\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i}} | F_t \right]$$

$\Pi_{t+1} = g_{t+1} + m_{t+1} = g_{t+1} - y_t - \theta_{t+1}$ η μεταβολή του προεξοφλημένου μερίσματος στο διάστημα $[t, t + 1]$

y_t το επιτόκιο μιας περιόδου χωρίς ρίσκο (Risk-free rate)

θ_{t+1} το πριμ Κινδύνου (Risk premium)

Ακίνδυνο επιτόκιο ή επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι το επιτόκιο το οποίο μπορεί να επιτευχθεί επενδύοντας σε οικονομικά προϊόντα που δεν ενσωματώνουν κίνδυνο. Παράδειγμα αποτελούν τα κυβερνητικά ομόλογα, τα οποία θεωρούνται ως ακίνδυνες επενδύσεις, επειδή η πιθανότητα να πτωχεύσει μία χώρα είναι πολύ μικρή. Επίσης, εκφράζει την μακροοικονομική πορεία της οικονομίας.

Στα χρηματοοικονομικά, πριμ κινδύνου (Risk premium) ονομάζεται η ελάχιστη χρηματική αμοιβή η οποία αναμένεται ότι θα αποδοθεί από μια επένδυση με ρίσκο. Στόχος είναι να πεισθεί οποιοσδήποτε επενδυτής να προτιμήσει την επένδυση αυτή από μία άλλη επένδυση χωρίς ρίσκο. Πρόκειται, ουσιαστικά για την ελάχιστη αποζημίωση που επιθυμεί να έχει ο επενδυτής για το ρίσκο που ενδέχεται να πάρει.

Η (2.1) μπορεί να γραφτεί ως:

$$R_{t,n} = E_t \left[D_t e^{\sum_{i=1}^n g_{t+i} + m_{t+i}} \right] \quad (2.2)$$

, όπου:

$$m_{t+1} = -(y_t + \theta_{t+1}) \text{ στο } [t, t + 1]$$

Καθώς η D_t είναι μετρήσιμη ως προς τη σ-άλγεβρα F_t , η (2.1) \Rightarrow

$$\Rightarrow R_{t,n} = D_t E_t \left[e^{\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i}} \right] \quad (2.3)$$

$$(2.3) \Rightarrow \ln R_{t,n} = \ln \left\{ D_t E_t \left[e^{\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i}} \right] \right\} \Rightarrow \ln R_{t,n} = \ln D_t + \ln \left[E_t \left[e^{\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i}} \right] \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln R_{t,n} - \ln D_t = \ln \left[E_t \left[e^{\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i}} \right] \right]$$

Έστω ότι $\Pi_t \sim N(\mu, \sigma^2)$

Συνεπώς,

$$\ln R_{t,n} - \ln D_t \approx \ln \left[E_t \left[e^{\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i}} \right] \right] \approx E_t \left[\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i} \right] + \frac{1}{2} \text{Var}_t \left[\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i} \right] \quad (2.4)$$

Η παραπάνω σχέση απαιτεί τον υπολογισμό δύο εκ των τριών μεταβλητών, και συγκεκριμένα των $R_{t,n}$, Π_{t+i} και D_t . Επίσης, η ποσότητα $-\frac{(\ln R_{t,n} - \ln D_t)}{n}$ είναι γνωστή ως “μετοχική απόδοση” (equity yield) (Binsbergen, 2013).

2.2 Εύρεση σχέσης μεταξύ σημερινής αξίας μερισμάτων και παραγώγων

Όσον αφορά την πρώτη μεταβλητή, θα δείξουμε τη σχέση που συνδέει τη σημερινή αξία όλων των αναμενόμενων μερισμάτων με τις τιμές των παραγώγων, και συγκεκριμένα των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης μερισμάτων. Στη λήξη ενός τέτοιου συμβολαίου, ο αγοραστής του πληρώνει την τιμή του συμβολαίου, η οποία καθορίζεται στην αρχή του, και ο πωλητής πληρώνει τα μερίσματα ολόκληρου του χρόνου που έγινε η διαπραγμάτευση του συμβολαίου. Η εν λόγω σχέση που μας ενδιαφέρει, λοιπόν, εκτιμάται όπως φαίνεται παρακάτω:

$$R_{t,n} \approx F_{t,n} e^{-ny_{t,n}}, \text{ όπου:}$$

$y_{t,n}$ το επιτόκιο n -περιόδου χωρίς ρίσκο (n-period Risk-free rate)

$F_{t,n}$ η τιμή του παραγώγου που λήγει σε n χρόνια από τη σημερινή ημέρα t

Επομένως, η σημερινή αξία των μερισμάτων $R_{t,n}$ μπορεί να εκτιμηθεί κατευθείαν από τα $y_{t,n}$, $F_{t,n}$, τα οποία είναι δεδομένα της αγοράς. Η παραπάνω σχέση δεν εκφράζει το μέρισμα που πραγματικά θα δοθεί, αλλά είναι μόνο η παρούσα αξία της τιμής του παραγώγου που έχει συμφωνηθεί στην αγορά των παραγώγων. Συνεπώς, αυτή η σχέση δεν είναι μια καλή εκτιμήση.

2.3 Μοντελοποίηση της μεταβλητής Π_{t+i}

Στο σημείο να τονίσουμε ότι θα μοντελοποιήσουμε τη μεταβλητή Π_{t+1} , δηλαδή θα δούμε πως αυτή εξελίσσεται μαθηματικά στο χρόνο, αντί των τριών μεταβλητών που αποτελείται, δηλαδή των $g_{t+1}, y_t, \theta_{t+1}$, καθώς οι τρεις αυτές ποσότητες σχετίζονται μεταξύ τους, γεγονός που αποτελεί πλεονέκτημα της μελέτης μας. Επίσης, το μοντέλο παρουσιάστηκε σε διακριτό χρόνο, ακολουθώντας την προσέγγιση των Campbell, Lo και MacKinley (Campbell, 1997).

Στην οικονομετρία, για να κάνουμε πρόβλεψη μιας μεταβλητής, όπως για παράδειγμα την τιμή μιας μετοχής, χρησιμοποιούμε ένα σύστημα εξισώσεων, που αποτελείται από την εξίσωση κατάστασης (state equation) και την εξίσωση μέτρησης (measurement equation). Η εξίσωση κατάστασης είναι της μορφής:

$$X_{t+1} = FX_t + G\varepsilon_{t+1}, \text{ όπου:}$$

X_t διάνυσμα κατάστασης τη χρονική στιγμή t , διάστασης $n \times 1$

F πίνακας μετάβασης κατάστασης, μεγέθους $n \times n$

G πίνακας μετάβασης εισόδου

ε_{t+1} θόρυβος στην κατάσταση τη χρονική στιγμή $t+1$, μεγέθους $n \times 1$, $\varepsilon_{t+1} \sim N(0, Q_{t+1}(t))$

Δηλαδή, η εξίσωση κατάστασης πρόκειται για μια αναδρομική σχέση που μας δείχνει την εξέλιξη της τυχαίας μεταβλητής X_t στον χρόνο, συνεπώς περιέχει και μια μορφή θορύβου ή αλλιώς τυχειότητας, δηλαδή τον όρο ε_{t+1} .

Η εξίσωση μέτρησης είναι της μορφής:

$$Z_t = HX_t + \eta_t, \text{ όπου:}$$

Z_t διάνυσμα μετρήσεων τη χρονική στιγμή t , μεγέθους $m \times 1$

H πίνακας εξόδου, μεγέθους $m \times n$

η_t θόρυβος στις μετρήσεις τη χρονική στιγμή t , μεγέθους $m \times 1$, $\eta_t \sim N(0, R_t(t))$

Δηλαδή, η εξίσωση μέτρησης μας δείχνει τη σχέση της τυχαίας μεταβλητής X_t με τη μεταβλητή Z_t , η οποία περιέχει ένα σύνολο από παρατηρηθείσες τιμές ή αλλιώς ιστορικά δεδομένα που αφορούν τη μεταβλητή X_t .

Θα προσπαθήσουμε να φτιάξουμε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων, μοντελοποιώντας αρχικά τη μεταβλητή Π_{t+1} , ως εξής:

$$\Pi_{t+1} = P_t + V_{t+1}, \text{ όπου:}$$

P_t μέση τιμή

V_{t+1} στοχαστικός όρος, $V_{t+1} \sim N(0, \sigma^2)$

Ο παράγοντας P_t ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία με mean reversion, δηλαδή μια διαδικασία που καταλήγει σε βάθος χρόνου στη μέση τιμή της. Άρα, ο παράγοντας

P_t καταλήγει σε έναν άλλο παράγοντα \tilde{P}_t , ο οποίος ακολουθεί επίσης μια στοχαστική διαδικασία με mean reversion και καταλήγει σε μια σταθερά \bar{p} . Οι διαδικασίες των P_t , \tilde{P}_t γράφονται με βάση τις παρακάτω στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} dP_t = \varphi(\tilde{P}_t - P_t)dt + \sigma_p dW_p \\ d\tilde{P}_t = \psi(\bar{p} - \tilde{P}_t)dt + \sigma_{\bar{p}} dW_{\bar{p}} \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

όπου:

φ, ψ = παράμετροι του μοντέλου που δείχνουν πόσο γρήγορα γίνεται το mean reversion των P_t, \tilde{P}_t αντίστοιχα (Jegadeesh, 1996)

$W_p, W_{\bar{p}}$ = ανεξάρτητες διαδικασίες Wiener

P_t = παράγοντας μικρής διάρκειας, περίπου 6 μήνες έως 1 χρόνο (short-term factor)

\tilde{P}_t = παράγοντας μεσαίας διάρκειας, περίπου 3-4 χρόνια (medium-term factor)

$\sigma_p, \sigma_{\bar{p}}$ = μεταβλητότητα του παράγοντα P_t και \tilde{P}_t αντίστοιχα

Τώρα, προκειμένου να περιγράψουμε πλήρως την κίνηση του προεξοφλημένου μερίσματος στον χρόνο, θα πρέπει να λύσουμε το παραπάνω σύστημα και στη συνέχεια να φτιάξουμε τις εξισώσεις κατάστασης και μέτρησης.

2.4 Εξισώσεις κατάστασης (state equations)

Γράφοντας το σύστημα (2.5) σε μορφή πινάκων έχουμε:

$$dQ_t = C[Q_t - \bar{Q}]dt + \Sigma dW \quad (2.6)$$

όπου:

$$Q_t = \begin{bmatrix} P_t \\ \tilde{P}_t \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -\varphi & \varphi \\ 0 & -\psi \end{bmatrix}, \bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_p & 0 \\ 0 & \sigma_{\bar{p}} \end{bmatrix}, dW = \begin{bmatrix} dW_p \\ dW_{\bar{p}} \end{bmatrix}$$

Το σύστημα (2.5) έχει γενική λύση:

$$Q_{t+1} = \bar{Q} + \Phi (Q_t - \bar{Q} + \varepsilon_{t+1}) \quad (2.7)$$

όπου:

$$\Phi = \begin{bmatrix} e^{-\varphi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi}) \\ 0 & e^{-\psi} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$(2.7) \stackrel{(2.8)}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} P_{t+1} \\ \tilde{P}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-\varphi} & \frac{-\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi}) \\ 0 & 1 - e^{-\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-\varphi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi}) \\ 0 & e^{-\psi} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} P_t \\ \tilde{P}_t \end{bmatrix} + \varepsilon_{t+1} \right) \quad (2.9)$$

Επομένως, οι εξισώσεις (2.9) αποτελούν τις εξισώσεις κατάστασης (state equations).

Όσο για τον στοχαστικό όρο V_{t+1} , η σχέση του με το σφάλμα ε_{t+1} είναι της μορφής: $V_{t+1} = \beta' \varepsilon_{t+1}$, όπου $\beta = [\beta_p, \beta_{\tilde{p}}]'$, β είναι ο πίνακας συνδιασποράς σφάλματος για τους δύο παράγοντες (Error Covariance Matrix). Γενικά, για μια μεταβλητή x , ο πίνακας συνδιασποράς σφάλματος δίνεται από τη σχέση $E[(x - E[x])(x - E[x])^T]$, όπου x είναι διάνυσμα.

Η μοντελοποίηση της μεταβλητής Π_{t+1} θυμίζει αρκετά την τεχνική που χρησιμοποίησαν οι Campbell, Lo και MacKinley, οι οποίοι μοντελοποίησαν, σε διακριτό χρόνο, τη μεταβλητή $m_{t+1} = -(y_t + \theta_{t+1})$ (Campbell, 1997). Η διαφορά με το μοντέλο των Jac. Kragt, Frank de Jong και Joost Driessen είναι ότι μοντελοποιούν ταυτόχρονα και τη μεταβολή του μερίσματος, g_{t+1} , και τη μεταβλητή m_{t+1} . Αυτό είναι σημαντικό για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων, καθώς οι πρώτοι μοντελοποιώντας τα επιτόκια δείχνουν ότι ο πίνακας β αντιπροσωπεύει τα πριμ κινδύνου στα μακροπρόθεσμα ομόλογα (Campbell, 1997), ενώ οι δεύτεροι δείχνουν ότι ο πίνακας β αντιπροσωπεύει τα πριμ κινδύνου των

μερισμάτων, όπως επίσης τη σχέση της τωρινής με της μελλοντικής μεταβολής των μερισμάτων.

2.5 Εξισώσεις μέτρησης (measurement equations)

Τώρα, για να μπορέσουμε να αντικαταστήσουμε το δεξί μέλος των εξισώσεων (2.4), που είναι οι εξισώσεις μέτρησης, θα πρέπει να βρούμε την τιμή της τυχαίας μεταβλητής Π_{t+i} σε κάθε χρονική στιγμή, δηλαδή για $i = 1, \dots, n$ ενώ εμείς την ξέρουμε μόνο για $i = 1$.

Αναδρομικά, λοιπόν, έχουμε ότι:

$$\Pi_{t+n} = \alpha' [\bar{Q} + \Phi^{n-1}(Q_t - \bar{Q})] + \alpha' \sum_{i=1}^{n-1} \Phi^{n-i} \varepsilon_{t+i} + \beta' \varepsilon_{t+n}, \text{ όπου } \alpha' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ξαναγράφουμε τη σχέση (2.4):

$$\begin{aligned} \ln R_{t,n} - \ln D_t &= E_t \left[\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i} \right] + \frac{1}{2} \text{Var}_t \left[\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i} \right] \\ E_t \left[\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i} \right] + \frac{1}{2} \text{Var}_t \left[\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i} \right] &= \alpha' (n\bar{Q} + B_n (Q_t - \bar{Q})) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\beta' + \alpha' B_i) \Sigma (\beta + B_i' \alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln R_{t,n} - \ln D_t &= \alpha' (n\bar{Q} + B_n (Q_t - \bar{Q})) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\beta' + \alpha' B_i) \Sigma (\beta + B_i' \alpha) \quad (2.10) \end{aligned}$$

Τώρα θα γράψουμε τον πίνακα B_n που ορίσαμε παραπάνω ως:

$$B_n = (I + \Phi + \dots + \Phi^{n-1}) = (I - \Phi)^{-1} (I - \Phi^n)$$

Θα υπολογίσουμε τον πίνακα B_n . Έχουμε:

$$(I - \Phi)^{-1} \stackrel{(2.7)}{=} \frac{1}{(1-e^{-\varphi})(1-e^{-\psi})} \begin{bmatrix} 1 - e^{-\psi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi}) \\ 0 & 1 - e^{-\varphi} \end{bmatrix}$$

$$(I - \Phi^n) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-n\varphi} & \frac{-\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-n\psi} - e^{-n\varphi}) \\ 0 & 1 - e^{-n\psi} \end{bmatrix}. \text{ Τελικά για τον πίνακα } B_n \text{ έχουμε}$$

ότι:

$$B_n = (I - \Phi)^{-1} (I - \Phi^n) = \begin{bmatrix} \varphi_n & \frac{\varphi}{\varphi-\psi} (\psi_n - \varphi_n) \\ 0 & \psi_n \end{bmatrix}, \text{ όπου:}$$

$$\varphi_n = \frac{1-e^{-n\varphi}}{1-e^{-\varphi}}, \quad \psi_n = \frac{1-e^{-n\psi}}{1-e^{-\psi}}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην εξίσωση (2.10) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \ln R_{t,n} - \ln D_t &= n\bar{p} + \varphi_n (P_t - \bar{p}) + \frac{\varphi}{\varphi - \psi} (\psi_n - \varphi_n) (\tilde{P}_t - \bar{p}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\sigma_p^2 (\beta_p + \varphi_i)^2 + \sigma_{\bar{p}}^2 \left(\beta_{\bar{p}} + \frac{\varphi}{\varphi - \psi} (\psi_i - \varphi_i) \right)^2 \right] + \eta_{t,n} \end{aligned} \quad (2.11)$$

όπου $\eta_{t,n}$ το σφάλμα μέτρησης.

Καθώς δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τα μερίσματα τη χρονική στιγμή t , δηλαδή την ποσότητα D_t , θα την αφαιρέσουμε από την εξίσωση (2.11), η οποία τελικά παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \ln R_{t,n} - \ln R_{t,1} &= n\bar{p} + \varphi_n (P_t - \bar{p}) + \frac{\varphi}{\varphi - \psi} (\psi_n - \varphi_n) (\tilde{P}_t - \bar{p}) - P_t + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \left[\sigma_p^2 (\beta_p + \varphi_i)^2 + \sigma_{\bar{p}}^2 \left(\beta_{\bar{p}} + \frac{\varphi}{\varphi - \psi} (\psi_i - \varphi_i) \right)^2 \right] + \eta_{t,n} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Οι εξισώσεις (2.9) και (2.12) αποτελούν το τελικό μας σύστημα και οι παράμετροί του, δηλαδή οι \bar{p} , φ , ψ , β_p , $\beta_{\bar{p}}$, σ_p , $\sigma_{\bar{p}}$, σ_η^1 , σ_η εκτιμούνται με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας, και πιο συγκεκριμένα με τη μέθοδο Kalman Filter, την οποία χρησιμοποίησαν και οι Jegadeesh και Penacchi (Jegadeesh, 1996) και θα εξηγήσουμε αναλυτικά παρακάτω. Τα σ_η^1 και σ_η αντιπροσωπεύουν τη διασπορά του σφάλματος του παραγώγου που λήγει πρώτο στη σειρά από την παρατηρούμενη μέρα και τη διασπορά των σφαλμάτων των υπόλοιπων παραγώγων, η οποία θεωρείται ίδια για όλα, των εξισώσεων μέτρησης αντίστοιχα.

2.6 Μέθοδος Kalman Filter

Το φίλτρο Kalman είναι ένα σύνολο μαθηματικών εξισώσεων που παρέχει ένα αποτελεσματικό (αναδρομικό) μέσο για την εκτίμηση της κατάστασης μιας διαδικασίας, με τέτοιο τρόπο ώστε να μιμείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Το φίλτρο είναι πολύ ισχυρό

από πολλές απόψεις: υποστηρίζει εκτιμήσεις προηγούμενων, παρόντων και μελλοντικών καταστάσεων και μπορεί να το κάνει ακόμα και όταν η ακριβής φύση του μοντέλου συστήματος είναι άγνωστη (Welch & Bishop, 2006).

Το φίλτρο Kalman έγινε ένα θεμελιώδες εργαλείο για την ανάλυση και λύση μιας ευρείας τάξης προβλημάτων εκτίμησης. Η πρώτη γνωστή εφαρμογή έγινε στο κέντρο ερευνών της NASA στη δεκαετία του 1960, όπου χρησιμοποιήθηκε στην πλοήγηση και στον έλεγχο διαστημόπλοιων. Το φίλτρο Kalman όμως είναι χρήσιμο σε πολλές εφαρμογές. Κυρίως χρησιμοποιείται στην εκτίμηση καταστάσεων συστημάτων που μπορούν μόνο να παρατηρηθούν με ανακρίβεια. Το φιλτράρισμα είναι επιθυμητό σε πολλές καταστάσεις στη μηχανική και στα ενσωματωμένα συστήματα. Για παράδειγμα, τα σήματα ραδιοεπικοινωνιών είναι παραμορφωμένα από θόρυβο. Ένας καλός αλγόριθμος φιλτραρίσματος μπορεί να απομακρύνει το θόρυβο από τα ηλεκτρομαγνητικά σήματα, ενώ κρατάει τη χρήσιμη πληροφορία. Ένα άλλο παράδειγμα είναι οι τάσεις τροφοδοσίας. Τα αδιάλειπτα τροφοδοτικά ισχύος είναι συσκευές που φιλτράρουν τις τάσεις γραμμής έτσι ώστε να λειάνουν ανεπιθύμητες διακυμάνσεις που αλλιώς μπορεί να μικρύνουν τη διάρκεια ζωής των ηλεκτρικών συσκευών, όπως των υπολογιστών και των εκτυπωτών. Στη μηχανική το φίλτρο Kalman εφαρμόζεται εκτός από τη διαστημική και την αεροναυπηγική, στη ρομποτική και στην αυτοκινητοβιομηχανία. Επίσης, στην επιστήμη των υπολογιστών εφαρμόζεται στην όραση υπολογιστή και στα γραφικά πραγματικού χρόνου (Αθάνατου Αφροδίτη-Γρηγορία, 2015). Τέλος, μπορεί να εφαρμοστεί στα οικονομικά για την πρόβλεψη οικονομικών δεικτών, όπως ο δείκτης μιας μετοχής, εφαρμογή την οποία θα μελετήσουμε στην εργασία μας.

Το μαθηματικό μοντέλο, τις παραμέτρους του οποίου θα εκτιμήσουμε με βάση τη μέθοδο αυτή, είναι το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$X_{t+1} = FX_t + G\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+1} \sim N(0, \sigma^2 = Q(t))$$

$$Z_t = HX_t + \eta_t, \eta_t \sim N(0, \sigma^2 = U(t))$$

που περιγράφει ένα διακριτού χρόνου γραμμικό δυναμικό σύστημα. Το πρόβλημα έγκειται

στο να χρησιμοποιήσουμε την παρατηρούμενη πληροφορία, δηλαδή τα διανύσματα Z_1, Z_2, \dots, Z_t ώστε να αποκτήσουμε για κάθε $i = 1, \dots, t$ τις εκτιμήσεις των στοιχείων του διανύσματος κατάστασης. Σε σχέση με τη μετρούμενη πληροφορία το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως:

- α) Filtering, αν $i = t$,
- β) Prediction, αν $i > t$
- γ) Smoothing, αν $1 < i < t$

Το πρόβλημα προς επίλυση είναι η συνεχής εκτίμηση ενός συνόλου παραμέτρων οι τιμές των οποίων αλλάζουν με το χρόνο t . Η ανανέωση επιτυγχάνεται με το συνδυασμό μίας ομάδας παρατηρήσεων ή μετρήσεων Z_t , οι οποίες περιέχουν δεδομένα σχετικά με την κατάσταση X_t . Θα περιγράψουμε αναλυτικά τη διαδικασία αυτή για το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου οι πίνακες F, H, Q, U είναι ανεξάρτητοι του χρόνου t και άρα σταθεροί. Τότε το φίλτρο Kalman δίνεται από τις ακόλουθες εξισώσεις, για $X_{0|0} = x_0$, $P_{0|0} = p_0$, $t = 1, 2, \dots$

$X_{t|t-1} = FX_{t-1|t-1}$, όπου $X_{t|t-1}$ μια (a priori) εκτίμηση της μεταβλητής X στο χρόνο t δοθέντος της πληροφορίας στο χρόνο $t - 1$

$P_{t|t-1} = FP_{t-1|t-1}F^T + Q$, όπου $P_{t|t-1}$ ο πίνακας συνδιασποράς σφάλματος εκτίμησης, μεγέθους $n \times n$

$y_t = Z_t - HX_{t|t-1}$, όπου y_t η διαφορά της (a priori) εκτίμησης $X_{t|t-1}$ από την παρατηρηθείσα τιμή Z_t (innovation)

$L_t = HP_{t|t-1}H^T + U$, όπου L_t η συνδιασπορά των y_t (innovation covariance)

$K_t = P_{t|t-1}H^T L_t^{-1}$, όπου K_t ο πίνακας κέρδους

$\hat{X}_{t|t} = X_{t|t-1} + K_t y_t$, όπου $\hat{X}_{t|t}$ μια (a posteriori) εκτίμηση της μεταβλητής X , δηλαδή μια βελτιωμένη εκτίμηση

$\hat{P}_{t|t} = [I - K_t H]P_{t|t-1}$, όπου $\hat{P}_{t|t}$ μια βελτιωμένη εκτίμηση του πίνακα συνδιασποράς σφάλματος εκτίμησης, όπου $\hat{P}_{t|t} = cov(X_t - \hat{X}_{t|t})$

$\hat{y}_{t|t} = Z_t - H\hat{X}_{t|t}$, όπου y_t η βελτιωμένη διαφορά της (a priori) εκτίμησης $X_{t|t-1}$ από την παρατηρηθείσα τιμή Z_t (measurement residual)

Θα περιγράψουμε τώρα την ίδια διαδικασία αλλά με ένα μοντέλο ενός παράγοντα, δηλαδή τώρα η μεταβλητή P_t , που ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία με mean reversion, καταλήγει στη σταθερά \bar{p} . Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε τα δύο μοντέλα, δηλαδή του ενός και των δύο παραγόντων, και θα καταλήξουμε στο βέλτιστο, εκείνο δηλαδή που με βάση τη μέθοδο Kalman Filter παράγει καλύτερα αποτελέσματα. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται μαθηματικά από την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dP_t = \varphi(\bar{p} - P_t)dt + \sigma_p dW_p$$

Έτσι, όμοια με πριν, προκύπτει ότι η λύση δίνεται από τη σχέση:

$$P_{t+1} = \bar{p} + (P_t - \bar{p})e^{-\varphi} + \varepsilon_{t+1}$$

Επίσης, ξέρουμε ότι: $\Pi_{t+1} = P_t + V_{t+1}$. Τελικά, αντικαθιστώντας στην (2.3) έχουμε:

$$\ln R_{t,n} - \ln D_t = n\bar{p} + \varphi_n(P_t - \bar{p}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\beta + \varphi_i)^2 \sigma^2 + \eta_{t,n}$$

Chapter 3

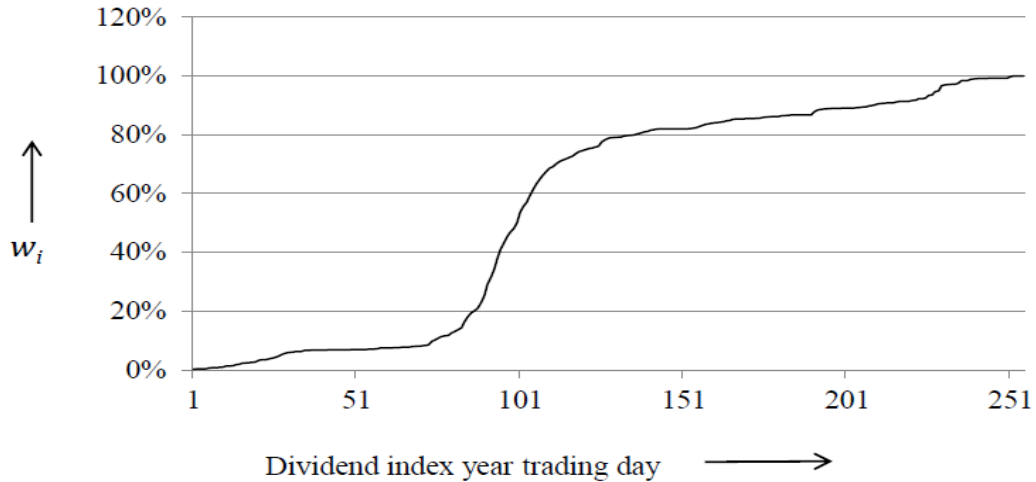
Εμπειρικά Αποτελέσματα

3.1 Περιγραφή δεδομένων

Οι τιμές των παραγώγων μερισμάτων προέρχονται από 4 μεγάλες αγορές μετοχών, τις Eurostoxx 50, Nikkei 225, S&P500 και FTSE 100. Οι ληκτότητες των παραγώγων είναι ένας χρόνος. Χρησιμοποιήθηκαν καθημερινά δεδομένα για τις αγορές Eurostoxx 50 και Nikkei 225, ενώ μηνιαία για τις άλλες δύο, γιατί αυτές δεν έχουν τόσο μεγάλη ρευστότητα (Mixon, 2014).

Επίσης, οι εξισώσεις μέτρησης (measurement equations) περιέχουν τιμές των παραγώγων με ετήσιες ληκτότητες, ενώ οι εξισώσεις κατάστασης (state equations) περιέχουν καθημερινές αυξήσεις του προεξοφλημένου μερίσματος. Εμείς χρειαζόμαστε σταθερό ορίζοντα λήξης για την εφαρμογή μας στο σύστημα εξισώσεων που θα εκτιμήσουμε, οπότε σε πρώτη φάση θα χρησιμοποιήσουμε παράγωγα με κοντινές ημερομηνίες λήξης. Επίσης, πρέπει να βρούμε ένα σχήμα που να ομαλοποιεί την κατανομή των μερισμάτων που πληρώνονται κατά τη διάρκεια του χρόνου. Για παράδειγμα, στην αγορά Eurostoxx 50, το 60% των μερισμάτων που πρόκειται να δωθούν μέχρι το τέλος του χρόνου είχαν δωθεί μόλις μέχρι την άνοιξη, το οποίο φαίνεται πιο ξεκάθαρα στο παρακάτω διάγραμμα, το οποίο αφορά τον μέσο όρο των μερισμάτων που πληρώνονται κάθε χρόνο για τα έτη

2005-2013:



Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)

Όπου w_i είναι το ετήσιο ποσοστό των μερισμάτων που πληρώνονται μέχρι τη μέρα i .

Τα παράγωγα με σταθερή λήξη, τα οποία επιθυμούμε, υπολογίζονται με βάση τις τιμές των παραγώγων της αγοράς, σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο:

$$F_{t,n}^{CM}(i) = (1 - w_i)F_{t,n} + w_i F_{t,n+1}, \text{ όπου:}$$

$F_{t,n}$ είναι η τιμή του παραγώγου που λήγει n - οστό στη σειρά από την παρατηρούμενη ημέρα

$F_{t,n+1}$ είναι η τιμή του παραγώγου που λήγει ένα χρόνο μετά το $F_{t,n}$

Ο τύπος αυτός που αναφέραμε ισχύει για όλα τα παράγωγα με σταθερή ληκτότητα εκτός από αυτό που λήγει πρώτο, καθώς αντιμετωπίζουμε προβλήματα μετρησιμότητας με το συγκεκριμένο παράγωγο. Για το λόγο αυτό, θα υπολογίσουμε την αντίστοιχη τιμή του παραγώγου αυτού με σταθερή λήξη, σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο:

$$F_{t,1}^{CM} = F_{t,1} - DI_t + \frac{DI_t}{D_1} F_{t,2}, \text{ όπου:}$$

$F_{t,1}$ η τιμή του παραγώγου που λήγει πρώτο στη σειρά από την παρατηρούμενη μέρα t

$F_{t,2}$ η τιμή του παραγώγου που λήγει ένα χρόνο μετά το $F_{t,1}$

DI_t το ετήσιο ποσοστό του μερίσματος που πληρώθηκε μέχρι τη μέρα t μετρημένο σε μονάδες δείκτη

Όσον αφορά την ποσότητα D_1 , η οποία είναι άγνωστη καθώς δεν μπορούμε να ξέρουμε

το μέρισμα που πληρώθηκε την $t = 1$, εκτιμάται από την τιμή του παραγώγου που λήγει πρώτο από την παρατηρούμενη μέρα, την οποία προεξοφλούμε με το επιτόκιο άνευ ρίσκου. Δηλαδή, έχουμε ότι:

$$D_1 = F_{t,1}e^{-y_{t,1}}$$

3.2 Αποτελέσματα της εκτίμησης των παραμέτρων

Τα δεδομένα των παραγώγων, και συγκεκριμένα των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης (futures) για την αγορά Eurostoxx 50 είναι από τις 4 Αυγούστου 2008 έως τις 16 Φεβρουαρίου 2015 και για την αγορά Nikkei 225 από τις 17 Ιουνίου 2010 έως τις 16 Φεβρουαρίου 2015. Τα αποτελέσματα της μεθόδου Kalman Filter φαίνονται στους παρακάτω πίνακες:

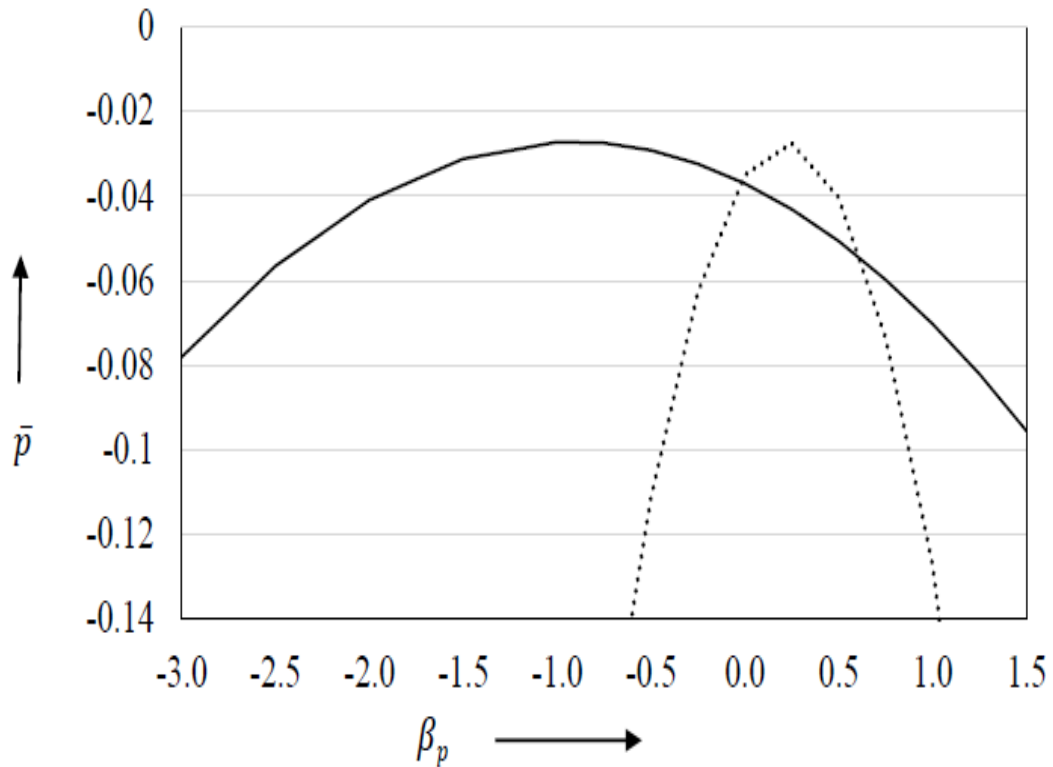
	Two-state		Single-state	
	$\begin{aligned} dp_t &= \varphi(\tilde{p}_t - p_t)dt + \sigma_p dW_p \\ d\tilde{p}_t &= \psi(\bar{p} - \tilde{p}_t)dt + \sigma_{\tilde{p}} dW_{\tilde{p}} \end{aligned}$		$dp_t = \varphi(\bar{p} - p_t)dt + \sigma_p dW_p$	
\bar{p}	-0.0586 (9.5339)	-0.0404 (0.0197)	-0.2067 (28.777)	-0.0435 (0.0144)
φ	1.5130 (0.3160)	1.5132 (0.3158)	1.7297 (0.4894)	1.7292 (0.4894)
ψ	0.2433 (0.1089)	0.2434 (0.1088)		
β_p	0.1553 (67.007)	Set to 0	0.6246 (69.2935)	Set to 0
$\beta_{\tilde{p}}$	-2.6695 (6.2539)	-2.6693 (6.2523)		
σ_p	0.5701 (0.7876)	0.5704 (0.7870)	0.7033 (1.2245)	0.7033 (1.2245)
$\sigma_{\tilde{p}}$	0.0437 (0.0947)	0.0437 (0.0946)		
σ_{η}^1	0.0219 (0.0295)	0.0219 (0.0294)	0.0177 (0.0071)	0.0177 (0.0071)
σ_{η}	0.0063 (0.0025)	0.0063 (0.0025)	0.0441 (0.0806)	0.0441 (0.0806)
Log Likelihood per contribution	24.57	24.57	18.35	18.35

Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)

	Two-state		Single-state	
	$\begin{aligned} dp_t &= \varphi(\tilde{p}_t - p_t)dt + \sigma_p dW_p \\ d\tilde{p}_t &= \psi(\bar{p} - \tilde{p}_t)dt + \sigma_{\tilde{p}} dW_{\tilde{p}} \end{aligned}$		$dp_t = \varphi(\bar{p} - p_t)dt + \sigma_p dW_p$	
\bar{p}	-0.0320 (1.3833)	-0.0371 (0.0264)	-0.0719 (3.8264)	-0.0487 (0.0304)
φ	0.7381 (0.2360)	0.7381 (0.2345)	0.2837 (0.0306)	0.2837 (0.0306)
ψ	0.1784 (0.0539)	0.1784 (0.0537)		
β_p	-1.5513 (92.822)	<i>Set to 0</i>	-7.6306 (211.137)	<i>Set to 0</i>
$\beta_{\tilde{p}}$	-3.4234 (16.191)	-3.4229 (16.1862)		
σ_p	0.1531 (0.2193)	0.1531 (0.2193)	0.0630 (0.1189)	0.0630 (0.1186)
$\sigma_{\tilde{p}}$	0.0251 (0.0731)	0.0251 (0.0730)		
σ_{η}^1	0.0147 (0.0197)	0.0147 (0.0197)	0.0137 (0.0041)	0.0137 (0.0041)
σ_{η}	0.0040 (0.0015)	0.0040 (0.0015)	0.0170 (0.0285)	0.0170 (0.0285)
Log Likelihood per contribution	29.37	29.36	22.04	22.04

Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)

Ο πρώτος πίνακας αφορά την αγορά Eurostoxx 50, ενώ ο δεύτερος την αγορά Nikkei 225. Τα σ_{η}^1 και σ_{η} αντιπροσωπεύουν τη διασπορά του σφάλματος του παραγώγου που λήγει πρώτο στη σειρά από την παρατηρούμενη μέρα και τη διασπορά των σφαλμάτων των υπόλοιπων παραγώγων, η οποία θεωρείται ίδια για όλα, των εξισώσεων μέτρησης αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι έχουν γίνει δύο εκτιμήσεις για κάθε μοντέλο, διότι στην δεύτερη εκτίμηση έχουμε θέσει $\beta_p = 0$, καθώς το σφάλμα εκτίμησης της σταθεράς \bar{p} ήταν αρκετά μεγάλο και θέλαμε να το μειώσουμε. Επιλέξαμε να μηδενίσουμε τη σταθερά αυτή, γιατί στις εξισώσεις μέτρησης ο παράγοντας $\sigma_{\tilde{p}}^2$ είναι μικρός, με βάση τα αποτελέσματα της εκτίμησής μας, συνεπώς η ποσότητα $\sigma_p^2(\beta_p + \varphi_i)^2$ έχει τη μεγαλύτερη επίπτωση. Επίσης, στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε τις τιμές της σταθεράς \bar{p} για διάφορες τιμές του β_p :



Nikkei 225 ————— DJ Eurostoxx 50

Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)

Παρατηρούμε ότι η βέλτιστη τιμή του \bar{p} προκύπτει κοντά στην τιμή $\beta_p = 0$, πράγμα που αποτυπώνεται και στα αποτελέσματά μας, και συγκεκριμένα στους δύο πίνακες παραπάνω.

Όσον αφορά τις παραμέτρους ϕ, ψ , οι εκτιμήσεις τους είναι ικανοποιητικές, που σημαίνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του μερίσματος είναι σταθερός και καταλήγει, όπως έχουμε πει, στη σταθερά \bar{p} , η οποία συνδέεται άμεσα με την μερισματική απόδοση. Καθώς η παράμετρος ψ έχει μακρά διάρκεια, περίπου 3-4 χρόνια, έτσι οι επενδυτές αλλάζουν γνώμη για την μεταβολή του μερίσματος μόνο μέχρι το διάστημα αυτό, λόγω του mean reversion που καταλήγει στη σταθερά \bar{p} (Bansal, 2004). Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση της παραμέτρου ϕ για την αγορά Eurostoxx 50 είναι περίπου 1.51, διπλάσια από την αντίστοιχη για την αγορά Nikkei 225, η οποία είναι περίπου 0.74, και αυτό συμβαίνει λόγω της παγκόσμιας χρηματοοικονομικής κρίσης του 2008/2009, όπου αποτυπώνεται

μόνο στα δεδομένα της αγοράς Eurostoxx 50, καθώς τα δεδομένα της αγοράς Nikkei 225 ξεκινούν από το 2010. Στους δύο παρακάτω πίνακες φαίνονται οι αντίστοιχες εκτιμήσεις των παραμέτρων για το μοντέλο δύο παραγόντων όπως και για το μοντέλο ενός παράγοντα, χρησιμοποιώντας τις τιμές των παραγώγων (dividend swaps) των αγορών S&P500 και FTSE100:

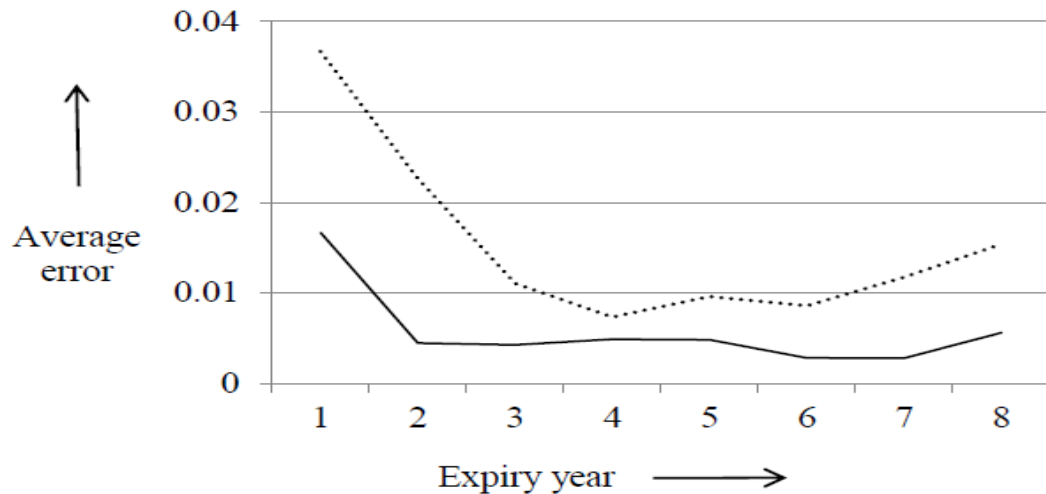
Sample period	Two-state		Single-state	
	$\begin{aligned} dp_t &= \varphi(\bar{p}_t - p_t)dt + \sigma_p dW_p \\ d\bar{p}_t &= \psi(\bar{p} - \bar{p}_t)dt + \sigma_{\bar{p}} dW_{\bar{p}} \end{aligned}$		$dp_t = \varphi(\bar{p} - p_t)dt + \sigma_p dW_p$	
	S&P 500	FTSE 100	S&P 500	FTSE 100
	Dec 2005 – June 2014	Dec 2005 – June 2014	Dec 2005 – June 2014	Dec 2005 – June 2014
\bar{p}	-0.0188 (0.0231)	-0.0841 (0.1513)	-0.0186 (0.0108)	-0.0430 (0.0093)
φ	1.0651 (0.7296)	1.6347 (0.5865)	0.3537 (0.0583)	1.7702 (0.5828)
ψ	0.1809 (0.1431)	0.0371 (0.1422)		
β_p	<i>Set to 0</i>	<i>Set to 0</i>	<i>Set to 0</i>	<i>Set to 0</i>
$\beta_{\bar{p}}$	-2.5935 (10.4524)	-2.1624 (8.5798)		
σ_p	0.1756 (0.2975)	0.5865 (0.9707)	0.0584 (0.0674)	0.6770 (1.1518)
$\sigma_{\bar{p}}$	0.0293 (0.0642)	0.0173 (0.035)		
σ_{η}^1	0.0167 (0.0072)	0.0199 (0.0326)	0.0138 (0.0044)	0.0141 (0.0056)
σ_{η}	0.0078 (0.0021)	0.0054 (0.0026)	0.0261 (0.0167)	0.0298 (0.0687)
Log Likelihood per contribution	22.62	23.79	19.79	19.29

Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)

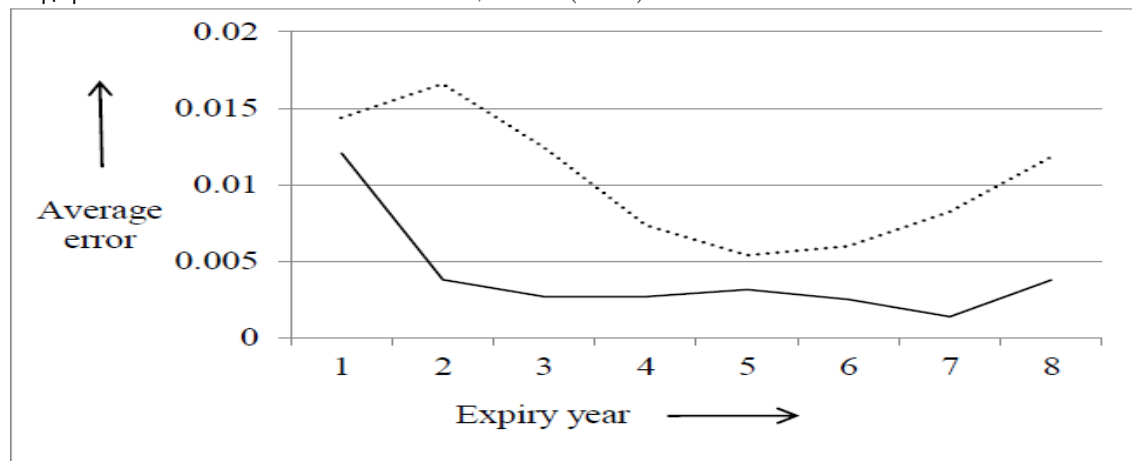
Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα δεν διαφέρουν σημαντικά από αυτά των αγορών Eurostoxx 50 και Nikkei 225.

Στα παρακάτω γραφήματα, όπου το πρώτο αφορά την αγορά Eurostoxx 50 ενώ το δεύτερο την Nikkei 225, φαίνονται τα μέσα σφάλματα των εξισώσεων μέτρησης συναρτήσεως της ληκτότητας των παραγώγων που αφορούν και τα δύο μοντέλα, δηλαδή του ενός και των δύο παραγόντων. Τα σφάλματα είναι αρκετά μικρά, που σημαίνει ότι υπάρχει καλή προσαρμογή του μοντέλου μας στα δεδομένα της αγοράς. Επίσης, παρατηρούμε ότι

για μεγαλύτερες ληκτότητες τα σφάλματα αυτά μειώνονται ακόμα περισσότερο. Τέλος, παρατηρούμε ότι τα σφάλματα των εξισώσεων μέτρησης του μοντέλου ενός παράγοντα, αν και μικρά, είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα του μοντέλου δύο παραγόντων, γεγονός που καθιστά το μοντέλο αυτό ισχυρότερο και άρα προτιμότερο από αυτό του ενός παράγοντα.



Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)

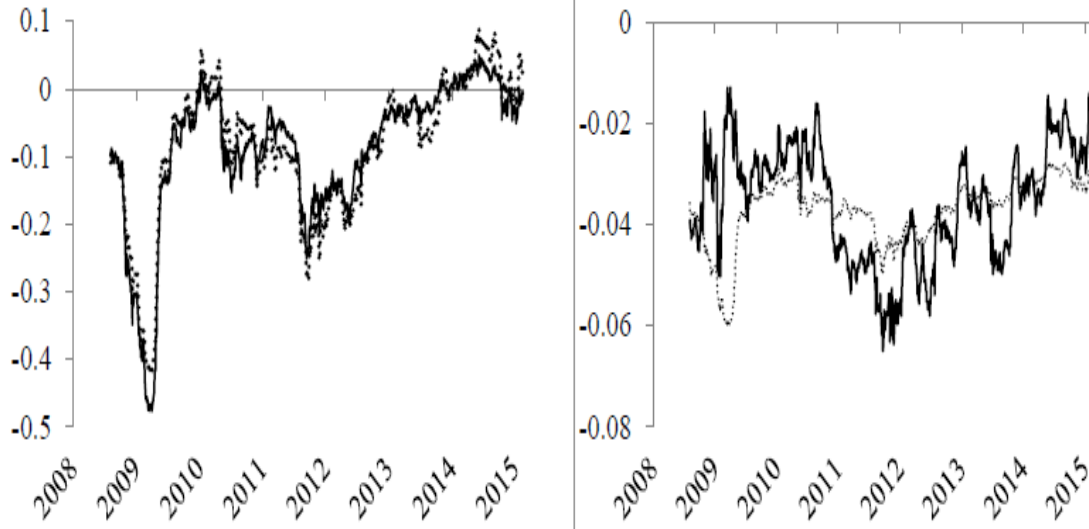


Two-state model ——— Single state model ······

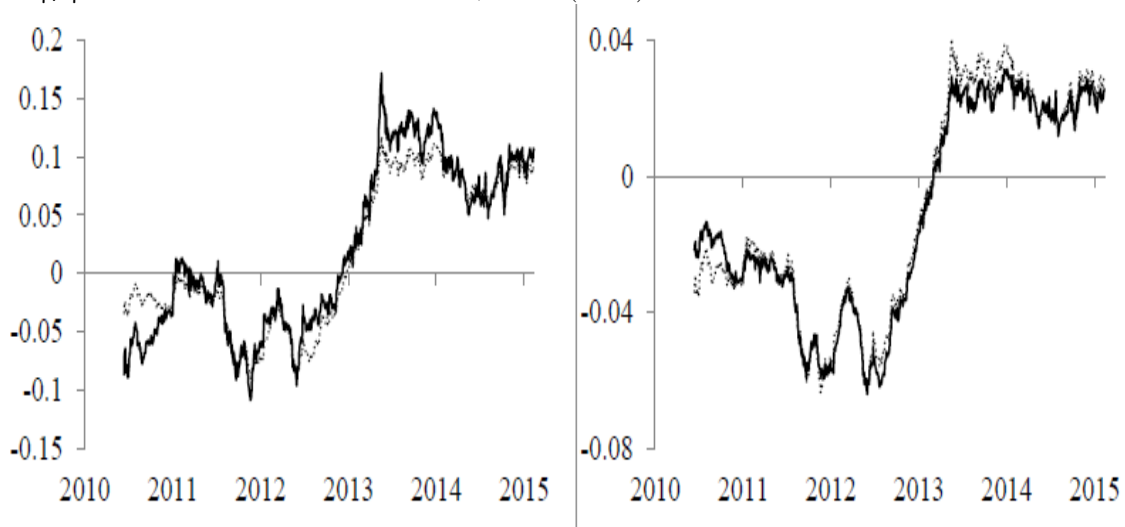
Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)

Παρακάτω θα δούμε τέσσερις γραφικές παραστάσεις. Οι δύο πρώτες κάθετα μας δείχνουν την αναμενόμενη μεταβολή του προεξοφλημένου μερίσματος και περιέχουν ετήσιο ρυθμό

μεταβολής, δηλαδή αφορούν τον παράγοντα P_t , για τα δεδομένα του Eurostoxx 50 και Nikkei 225 αντίστοιχα, ενώ οι δύο επόμενες γραφικές παραστάσεις κάθετα μας δείχνουν την μεταβολή του προεξοφλημένου μερίσματος και περιέχουν ρυθμούς μεταβολής έως 4 χρόνια μετά τον πρώτο χρόνο, δηλαδή αφορούν τον παράγοντα \tilde{P}_t .



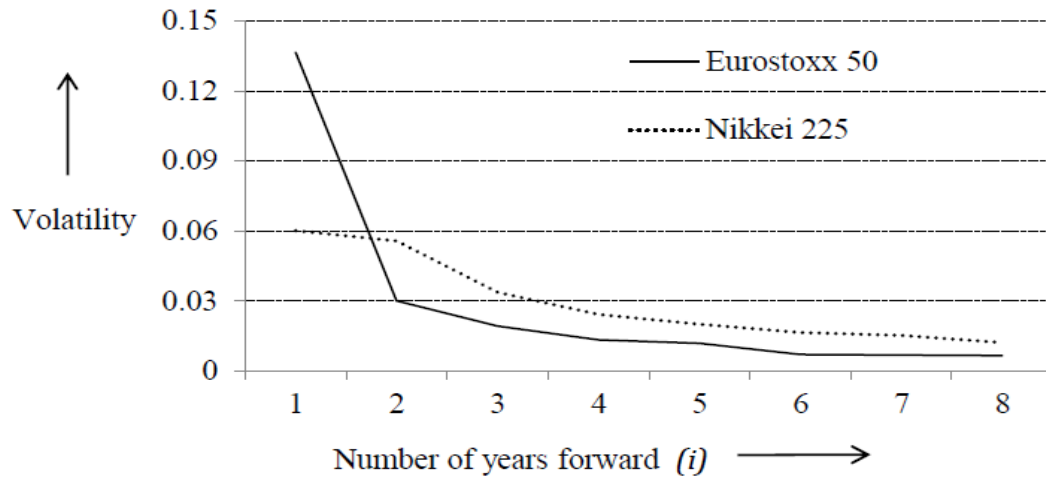
Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)



Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)

Παρατηρούμε ότι η παγκόσμια χρηματοοικονομική κρίση του 2008/2009 αποτυπώνεται στο πρώτο εκ των τεσσάρων γράφημα, και συγκεκριμένα στα δεδομένα του Eurostoxx 50, όπου τα μερίσματα είχαν κατακόρυφη πτώση. Επίσης, έντονη πτώση των μερισμάτων είχαμε και κατά τη διάρκεια της οικονομικής κρίσης του 2011, όπου η πτώση βέβαια ήταν

μικρότερη. Κατά τα άλλα οι αυξομειώσεις των μερισμάτων κινούνται σε λογικά πλαίσια. Στην παρακάτω γραφική παράσταση θα δούμε πως μεταβάλλεται η μεταβλητότητα του προεξοφλημένου μερίσματος στην πάροδο του χρόνου, για να διαπιστώσουμε αν τελικά το μοντέλο μας έχει ισχυρό mean reversion ή όχι.



Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)

Παρατηρούμε ότι η μεταβλητότητα παρουσιάζει σημαντική μείωση χρόνο με το χρόνο για τα δεδομένα και των 2 αγορών, γεγονός που επιβεβαιώνει το ισχυρό mean reversion του μοντέλου μας.

3.3 Εκτίμηση τιμής μετοχής

Τώρα θα ασχοληθούμε με την εκτίμηση της τιμής της μετοχής, τη μακροχρόνια μεταβολή των μερισμάτων και τις αποδόσεις τους. Η τιμή της μετοχής, όπως έχουμε αναφέρει, ισούται με τη σημερινή αξία όλων των προεξοφλημένων μερισμάτων που πρόκειται να δοθούν (Binsbergen, 2013). Δηλαδή,

$$S_t = \sum_{n=1}^{\infty} P_{t,n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\ln P_{t,n}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\ln P_{t,n} - \frac{D_t}{e^{\ln D_t}}} = D_t \sum_{n=1}^{\infty} e^{\ln P_{t,n} - \ln D_t} = D_t \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{n(\ln P_{t,n} - \ln D_t)}{n}} =$$

$$= D_t \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\Pi_{t,n}} \quad (3.1)$$

όπου $\Pi_{t,n}$ η ετήσια προεξοφλημένη μεταβολή των μερισμάτων που πληρώνονται στη λήξη n .

Η παραπάνω σχέση γράφεται ως:

$$\frac{D_t}{S_t} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{n\Pi_{t,n}}}$$

Αν οι δύο παράγοντες του μοντέλου μας είναι ίσοι με τη μέση τιμή, τότε προφανώς η ποσότητα $\Pi_{t,n}$ είναι σταθερά, οπότε έχουμε:

$\frac{D_t}{S_t} = \bar{p}^*$. Σε ετήσια βάση έχουμε ότι:

$$\bar{p}^* = \bar{p} + \frac{1}{2} \left[\sigma_p^2 (\beta_p + \varphi_{i \rightarrow \infty})^2 + \sigma_{\bar{p}}^2 \left(\beta_{\bar{p}} + \frac{\varphi}{\varphi - \psi} (\varphi_{i \rightarrow \infty} - \psi_{i \rightarrow \infty}) \right)^2 \right]$$

Άρα, ο παράγοντας \bar{p}^* εκφράζει το άθροισμα του παράγοντα \bar{p} και του όρου κυρτότητας (convexity term), ο οποίος δείχνει τη σχέση τιμής-απόδοσης ενός παραγώγου. Για παράδειγμα, αν ένα παράγωγο έχει μεγαλύτερη κυρτότητα από ένα άλλο, αυτό σημαίνει ότι η απόδοσή του θα επηρεαστεί λιγότερο από μια αλλαγή στο επιτόκιο. Γενικότερα, η έννοια της κυρτότητας μας βοηθάει στη μοναδικότητα των προβλημάτων βελτιστοποίησης, όπως η μέθοδος Kalman Filter που χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία.

Όμοια με πριν, καθώς ο παράγοντας $\sigma_{\bar{p}}^2$ είναι μικρός, με βάση τα αποτελέσματα της εκτίμησής μας, τότε η ποσότητα $\sigma_p^2 (\beta_p + \varphi_{i \rightarrow \infty})^2$ έχει τη μεγαλύτερη επίπτωση. Συνεπώς, για να βρούμε μια ικανοποιητική τιμή για τον παράγοντα \bar{p}^* , πρέπει να βρούμε τη βέλτιστη τιμή του β_p .

Ο παραπάνω πίνακας περιέχει κάποιες συγκεντρωτικές μετρήσεις:

		Eurostoxx 50	Nikkei 225
Sample period		4 August 2008 – 16 Feb 2015	17 June 2010 – 16 Feb 2015
Estimated LT growth ($\beta_p = 0$)	\bar{p}	- 4.0 %	- 3.7 %
Estimated convexity term for $i \rightarrow \infty$ ¹⁾		1.4%	1.1%
Estimated LT growth plus convexity term ¹⁾	\bar{p}^*	- 2.6%	- 2.6%
Average dividend yield	$\frac{D_t}{S_t}$	4.3 %	1.9 %
Average estimated 1 year growth	p_t	- 9.8 %	1.1 %
Average estimated 1 year forward 4 year growth	\tilde{p}_t	- 3.7 %	- 1.6 %
Average calibrated first dividend point	$\frac{\hat{P}_{t,1}}{\sum_1^{\infty} \hat{P}_{t,n}}$	3.1 %	2.1 %

Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)

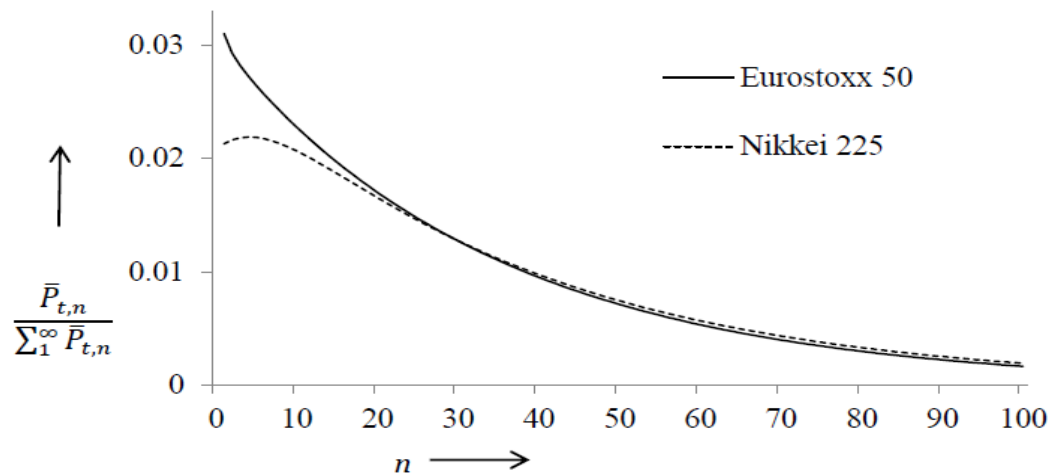
Παρατηρούμε ότι η μέση απόδοση μερισμάτων στην Ευρώπη, δηλαδή όσον αφορά την αγορά Eurostoxx 50, είναι της τάξης του 4.3%, ενώ στην Ιαπωνία, δηλαδή στην αγορά Nikkei 225, της τάξης του 1.9%.

3.4 Η κίνηση του μερίσματος στον χρόνο

Χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις των παραμέτρων μας, μπορούμε πλέον να μιλήσουμε για την κίνηση του μερίσματος στον χρόνο, δηλαδή τις σημερινές τιμές που χρησιμοποιούν

οι επενδυτές για τα αναμενόμενα μερίσματα που πληρώνονται σε n χρόνια ως προς το άθροισμα των σημερινών τους τιμών, δηλαδή για κάθε τιμή του n . Με άλλα λόγια έχουμε ότι:

$DTS_n = \frac{\hat{P}_{t,n}}{\sum_{n=1}^{\infty} \hat{P}_{t,n}}$. Η ποσότητα $\hat{P}_{t,1}$ είναι η προεξοφλημένη τιμή του παραγώγου με ημερομηνία λήξης 1 χρόνο από τη χρονική στιγμή t . Οι υπόλοιπες τιμές, δηλαδή οι τιμές για $n \geq 2$, προκύπτουν από τις εκτιμήσεις των παραμέτρων μας, δηλαδή από τις εξισώσεις μέτρησης.



Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)

Η παραπάνω γραφική παράσταση μας δείχνει τη μέση προεξοφλημένη απόδοση των μερισμάτων για κάθε χρόνο n για τις δύο αγορές. Παρατηρούμε ότι στην αγορά Nikkei 225 έχουμε μια μικρή αύξηση στην αρχή και μετά πτώση. Η μετάβαση στη σταθερά είναι αργή, λόγω των χαμηλών τιμών των παραμέτρων φ και ψ . Αντίθετα, στην αγορά Eurostoxx 50, παρατηρούμε πτώση από την αρχή, αλλά η μετάβαση στη σταθερά γίνεται πιο γρήγορα, λόγω υψηλότερων τιμών των φ και ψ .

3.5 Σύγκριση με την αγορά μετοχών

Τώρα θα συγκρίνουμε τις εκτιμημένες τιμές των μερισμάτων με τιμές των μετοχών. Αρχικά, θα εκτιμήσουμε την τιμή της μετοχής, ως εξής:

$$\hat{S}_t = D_t \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\hat{\Pi}_{t,n}} = D_t \widehat{PD}_t \quad (3.2)$$

, όπου:

$$\begin{aligned} n\hat{\Pi}_{t,n} &\stackrel{(3.1)}{=} \frac{n(\ln P_{t,n} - \ln D_t)}{n} = \ln R_{t,n} - \ln D_t = n\bar{p} + \varphi_n(P_t - \bar{p}) - \frac{\varphi}{\varphi - \psi}(\psi_n - \varphi_n)(\tilde{P}_t - \bar{p}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\sigma_p^2(\beta_p + \varphi_i)^2 + \sigma_{\tilde{p}}^2(\beta_{\tilde{p}} + \frac{\varphi}{\varphi - \psi}(\varphi_i - \psi_i))^2] \Rightarrow \\ &\Rightarrow n\hat{\Pi}_{t,n} - \hat{\Pi}_{t,1} = n\bar{p} + \varphi_n(P_t - \bar{p}) + \frac{\varphi}{\varphi - \psi}(\psi_n - \varphi_n)(\tilde{P}_t - \bar{p}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n [\sigma_p^2(\beta_p + \varphi_i)^2 + \sigma_{\tilde{p}}^2(\beta_{\tilde{p}} + \frac{\varphi}{\varphi - \psi}(\varphi_i - \psi_i))^2] \end{aligned}$$

Επίσης, μπορούμε να εκτιμήσουμε τα τωρινά μερίσματα ως εξής:

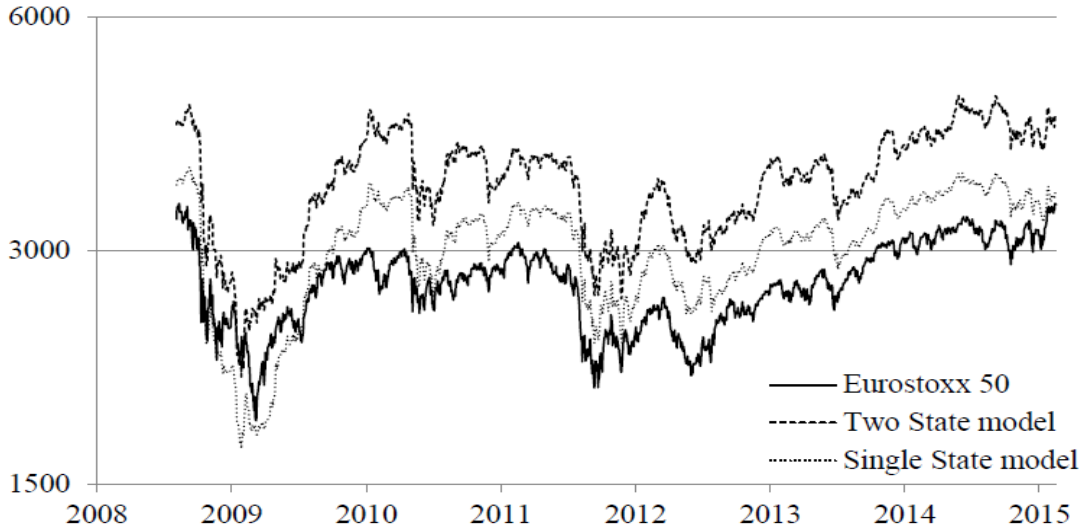
$D_t = F_{t,1}e^{-y_{t,1}}$ και επομένως η σχέση (3.2) γράφεται ως:

$$\hat{S}_t = F_{t,1}e^{-y_{t,1}}(1 + \sum_{n=2}^{\infty} e^{n\hat{\Pi}_{t,n} - \hat{\Pi}_{t,1}}) = F_{t,1}e^{-y_{t,1}}(1 + \widehat{PD}_t^1) \quad (3.3)$$

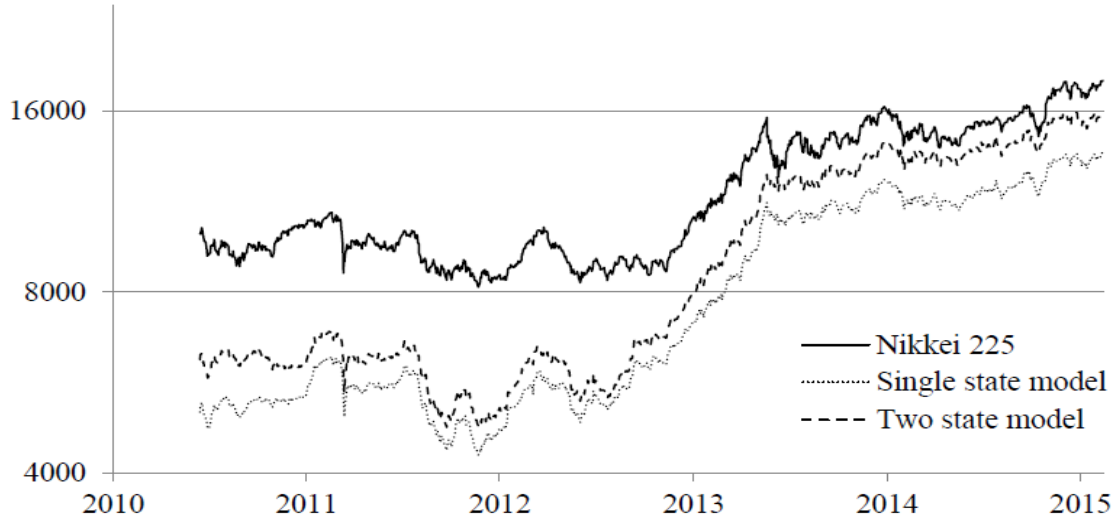
, όπου η διαφορά $n\hat{\Pi}_{t,n} - \hat{\Pi}_{t,1}$ υπολογίζεται από τις τιμές των μεταβλητών των εξισώσεων μέτρησης (2.11). Έτσι, μπορούμε να εκτιμήσουμε αριθμητικά την τιμή μιας μετοχής ως:

$$\hat{S}_t \approx F_{t,1}^{CM} e^{-y_{t,1}} \left[1 + \sum_{n=2}^{\bar{n}} e^{n\hat{\Pi}_{t,n} - \hat{\Pi}_{t,1}} + \frac{e^{\bar{n}\hat{\Pi}_{t,\bar{n}}}}{-\bar{p}^*} \right], \text{ όπου } \bar{n} = 50 \text{ χρόνια. Τα αποτελέσματα}$$

της εκτίμησής μας φαίνονται στους δύο παρακάτω πίνακες, έναν για κάθε αγορά:



Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)



Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)

Παρατηρούμε ότι στην αγορά Eurostoxx 50 οι εκτιμήσεις μας από τα δύο μοντέλα ενός και δύο παραγόντων φαίνεται να υπερεκτιμούν την πραγματική τιμή της μετοχής, ενώ αντίθετα στην αγορά Nikkei 225 οι εκτιμήσεις μας φαίνεται να υποεκτιμούν την πραγματική τιμή της μετοχής, αλλά η διαφορά μειώνεται σημαντικά από το έτος 2012.

3.6 Παλινδρόμηση

Για να πετύχουμε καλύτερα και πιο ακριβή αποτελέσματα, γράφουμε την εξίσωση (3.3) ως μια παλινδρόμηση, ως εξής:

$$\Delta \ln(S_t) = \alpha + \beta_F \Delta \ln(F_t) + \beta_y \Delta y_t + \beta_{\widehat{PD}} \Delta \ln(\widehat{PD}_t^1) + \varepsilon_t, \text{ όπου:}$$

S_t οι τιμές του δείκτη μετοχών πάνω στις αγορές Eurostoxx 50, Nikkei 225, S&P500 και FTSE 100

F_t οι τιμές των παραγώγων με σταθερή ληκτότητα που λήγουν πρώτα στη σειρά από την παρατηρούμενη μέρα, δηλαδή:

$$F_t = F_{t,1}^{CM} = F_{t,1} - DI_t + \frac{DI_t}{F_{t,1} e^{-y_{t,1}}} F_{t,2}$$

y_t το ετήσιο επιτόκιο άνευ ρίσκου

$$\widehat{PD}_t^1 = \sum_{n=2}^{\infty} e^{n\hat{\Pi}_{t,n} - \hat{\Pi}_{t,1}}, \text{ όπου:}$$

$$n\hat{\Pi}_{t,n} - \hat{\Pi}_{t,1} = n\bar{p} + \varphi_n(P_t - \bar{p}) - \frac{\varphi}{\varphi - \psi}(\psi_n - \varphi_n)(\tilde{P}_t - \bar{p}) +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{i=2}^n [\sigma_p^2(\beta_p + \varphi_i)^2 + \sigma_{\bar{p}}^2(\beta_{\bar{p}} + \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(\varphi_i - \psi_i))^2]$$

Η παλινδρόμηση γίνεται με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	Eurostoxx 50				Nikkei 225			
<i>Constant</i>	0.0005 (0.0003)	0.0002 (0.0003)	0.0006 (0.0004)	-0.0001 (0.0003)	-0.0002 (0.0003)	0.0002 (0.0004)	0.0005 (0.0004)	0.0002 (0.0003)
$\Delta \ln F_t$	0.8978 (0.0337)	1.0009 (0.0426)			0.8488 (0.0508)	0.6582 (0.0719)		
Δy_t	0.1446 (0.0127)		0.2022 (0.0178)		0.0751 (0.0619)		-0.0081 (0.0912)	
$\Delta \ln(\widehat{PD})_t$	0.6587 (0.0216)			0.6893 (0.027)	0.8619 (0.0251)			0.8156 (0.0278)
<i>Adj. R²</i>	0.540	0.248	0.071	0.280	0.540	0.068	0.000	0.429

Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής συσχέτισής μας, R^2 , είναι 54% και για τις δύο αγορές, που σημαίνει ότι η προσαρμογή του μοντέλου είναι καλή. Επίσης παρατηρούμε ότι και οι δύο αγορές είναι αρκετά ευαίσθητες σε μια αλλαγή της τιμής του παραγώγου που λήγει πρώτο στη σειρά από την παρατηρούμενη ημέρα, καθώς οι τιμές τους για την ποσότητα $\Delta \ln(F_t)$ είναι 0.8978 και 0.8488 αντίστοιχα, δηλαδή υψηλές.

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τις αγορές S&P500 και FTSE 100 φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	S&P 500				FTSE 100			
<i>Constant</i>	-0.0019 (0.0029)	-0.0016 (0.0028)	0.0065 (0.0042)	0.0038 (0.0040)	0.0005 (0.0034)	0.0005 (0.0035)	0.0032 (0.0040)	0.0016 (0.0039)
$\Delta \ln F_t$	1.1677 (0.1118)	1.1901 (0.1073)			0.5812 (0.1111)	0.6273 (0.1033)		
Δy_t	-0.0041 (0.0158)		0.0514 (0.0221)		0.0047 (0.0163)		0.0320 (0.0173)	
$\Delta \ln(\widehat{PD})_t$	0.1869 (0.0600)			0.2561 (0.0881)	0.1190 (0.0410)			0.1428 (0.0459)
<i>Adj. R²</i>	0.582	0.552	0.051	0.078	0.307	0.269	0.033	0.088

Πηγή: The Dividend Term Structure, KFD (2019)

Εδώ παρατηρούμε μεγαλύτερη τιμή του συντελεστή συσχέτισης R^2 , και συγκεκριμένα 58%, που σημαίνει ότι η προσαρμογή του μοντέλου μας στα δεδομένα της αγοράς S&P500 είναι η καλύτερη δυνατή. Από την άλλη μεριά, ο συντελεστής συσχέτισης για τα δεδομένα της αγοράς FTSE 100 είναι της τάξης του 30%, δηλαδή η μικρότερη από όλες, που σημαίνει ότι το μοντέλο μας δεν προσαρμόζεται καλά στα δεδομένα αυτά.

3.7 Εφαρμογές

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μια εφαρμογή της μεθόδου Kalman Filter στο σύστημα εξισώσεων (2.8) και (2.11). Καθώς τα δεδομένα που χρειάζονται, δηλαδή οι τιμές των παραγώγων δεν είναι διαθέσιμες, θα περιγράψουμε πως ακριβώς θα κάναμε τη διαδικασία χρησιμοποιώντας τυχαία νούμερα. Η εφαρμογή έγινε στο πρόγραμμα Eviews, σύμφωνα με τον παρακάτω κώδικα:

```
@signal 0 = c(1) + c(2)*p1 + |var = c(4)|
@signal r = c(5) + c(6)*p1 + c(7)*p2 + |var = c(8)|
@signal r = c(9) + c(10)*p1 + c(11)*p2 + |var = c(8)|
@signal r = c(12) + c(13)*p1 + c(14)*p2 + |var = c(8)|
@signal r = c(15) + c(16)*p1 + c(17)*p2 + |var = c(8)|
@signal r = c(18) + c(19)*p1 + c(20)*p2 + |var = c(8)|
@signal r = c(21) + c(22)*p1 + c(23)*p2 + |var = c(8)|
@signal r = c(24) + c(25)*p1 + c(26)*p2 + |var = c(8)|
@signal r = c(27) + c(28)*p1 + c(29)*p2 + |var = c(8)|
@state p1 = c(30) + c(31)*p1(-1) + c(32)*p2(-1) + |var = c(33)|
@state p2 = c(34) + c(35)*p2(-1) + |var = c(36)|
@param c(1) 0.52 c(2) 1.22 c(4) 0.00066 c(5) 0.52 c(6) 1.22 c(7) 0.66 c(8) 0.000039 c(9) 0.52 c(10) 1.22 c(11) 0.66 c(12) 0.52 c(13) 1.22 c(14) 0.66 c(15) 0.52 c(16) 1.22 c(17) 0.66 c(18) 0.52 c(19) 1.22 c(20) 0.66 c(21) 0.52 c(22) 1.22 c(23) 0.66 c(24) 0.52 c(25) 1.22 c(26) 0.66 c(27) 0.52 c(28) 1.22 c(29) 0.66 c(30) -0.00444 c(31) 0.22 c(32) 0.67 c(33) 0.000039 c(34) -0.00873 c(35) 0.78 c(36) 0.00066
```

Αρχικά ορίσαμε τις εξισώσεις μέτρησης για $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ με την εντολή signal και στη συνέχεια απαιτήσαμε τα δεδομένα να προέρχονται από το αρχείο r. Οι

άγνωστοι προς εκτίμηση παράμετροι συμβολίζονται με $c()$. Έπειτα ορίσαμε τις δύο εξισώσεις μέτρησης, με την εντολή `state`. Τέλος, δώσαμε κάποιες αρχικές τιμές στις υπό εκτίμηση παραμέτρους. Τα αποτελέσματα της εκτίμησης φαίνονται παρακάτω:

	Coefficient	Std. Error
C(1)	0.001509	0.000689
C(2)	0.000878	0.000250
C(4)	0.000762	0.000234
C(5)	0.522572	0.083869
C(6)	1.252183	0.011266
C(7)	0.658358	0.018135
C(8)	2.99E-12	7.26E-12
C(9)	0.522579	0.145731
C(10)	1.252185	0.029460
C(11)	0.658350	0.030499
C(12)	0.522580	0.177604
C(13)	1.252185	0.020900
C(14)	0.658349	0.021483
C(15)	0.522579	0.197624
C(16)	1.252185	0.014366
C(17)	0.658349	0.024243
C(18)	0.522577	0.134342
C(19)	1.252184	0.015846
C(20)	0.658352	0.022253
C(21)	0.522583	0.150403
C(22)	1.252186	0.016478
C(23)	0.658345	0.019436
C(24)	0.522594	0.043536
C(25)	1.252189	0.002881
C(26)	0.658333	0.005020
C(27)	0.522581	0.061172

Στην δεύτερη στήλη εμφανίζονται οι εκτιμήσεις των παραμέτρων των εξισώσεων μέτρησης, ενώ στην τρίτη το σφάλμα εκτίμησής τους. Παρατηρούμε ότι οι εκτιμήσεις είναι ικανοποιητικές, όπως για παράδειγμα η $c(6)=1.25$, η οποία εκφράζει την εκτίμηση της ποσότητας $\varphi_2 = \frac{1-e^{-2\varphi}}{1-e^{-\varphi}}$, το σφάλμα της οποίας είναι αρκετά μικρό, της τάξης του 0.01.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την εφαρμογή της παλινδρόμησης στην παρακάτω σχέση:

$$\Delta \ln(S_t) = \alpha + \beta_F \Delta \ln(F_t) + \beta_y \Delta y_t + \beta_{\widehat{PD}} \Delta \ln(\widehat{PD}_t^1) + \varepsilon_t$$

Αρχικά πρέπει να κάνουμε έναν έλεγχο στασιμότητας στα δεδομένα μας, για να δούμε αν οι παρατηρήσεις μας είναι στάσιμες ή όχι. Ο έλεγχος στασιμότητας είναι απαραίτητος ώστε η στοχαστική ανάλυση να οδηγεί σε ασφαλή συμπεράσματα.

Ορισμός 3.7.1 Μία στοχαστική διαδικασία X_t ονομάζεται στάσιμη αν ο μέσος και η διακύμανσή της δεν μεταβάλλονται διαχρονικά και η συνδιακύμανση των τιμών της σε δύο χρονικές περιόδους εξαρτάται μόνο από τις χρονικές υστερήσεις και όχι από καθαυτό το χρονικό σημείο στο οποίο υπολογίζεται (δεύτερης τάξης στασιμότητα) (Passalacqua, 2017)

Συνεπώς για μία στάσιμη χρονολογική σειρά ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

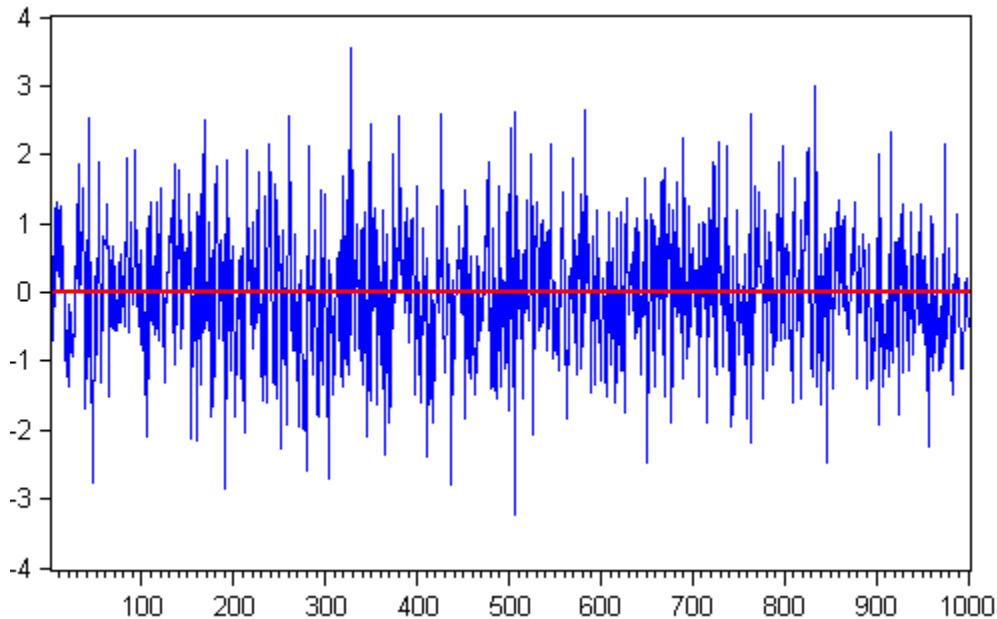
Μέσος: $E[X_t] = \mu$

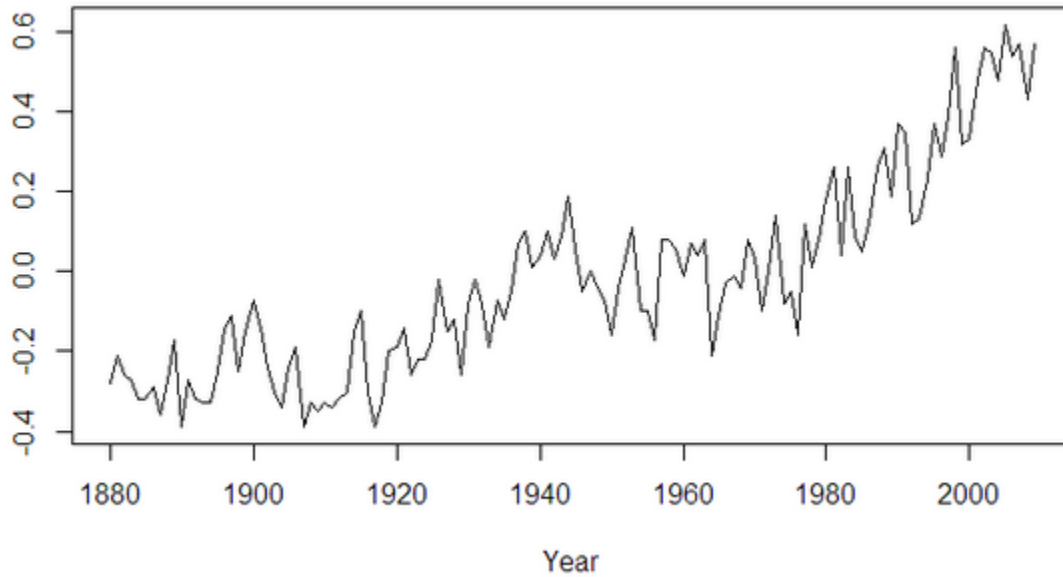
Διακύμανση: $Var[X_t] = \sigma^2$

Συνδιακύμανση: $\gamma_\kappa = E[(X_t - \mu)(X_{t+\kappa} - \mu)]$, όπου:

γ_κ η συνδιακύμανση σε κ χρονικές υστερήσεις, δηλαδή η συνδιακύμανση μεταξύ των τιμών X_t και $X_{t+\kappa}$

Για παράδειγμα, οι δύο γραφικές παραστάσεις παρακάτω απεικονίζουν μία στάσιμη και μία μη στάσιμη χρονολογική σειρά αντίστοιχα:





Μπορούμε να ελέγξουμε την στασιμότητα μίας χρονολογικής σειράς με τους παρακάτω τρόπους:

- α) Μελετώντας την γραφική παράσταση της σειράς, όπως δείξαμε παραπάνω με τις δύο γραφικές παρασατάσεις
- β) Κατασκευάζοντας και μελετώντας την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και την γραφική της παράσταση (correlogram)

Η αυτοσυνδιακύμανση μεταξύ δύο παρατηρήσεων της χρονολογικής σειράς X_t που απέχουν μεταξύ τους s χρονικές περιόδους ορίζεται ως:

$$\rho_s = \frac{cov(X_t, X_{t-s})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t-s})}}$$

Ενώ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του δείγματος είναι η ακόλουθη:

$$r_s = \frac{\sum_{t=s}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-s} - \bar{X})}{\sum_{t=s}^T (X_t - \bar{X})^2}$$

Η σειρά χαρακτηρίζεται ως στάσιμη αν οι αυτοσυσχετίσεις φθίνουν γεωμετρικά και προσεγγίζουν το μηδέν καθώς οι χρονικές υστερήσεις προσεγγίζουν το άπειρο.

- γ) Πραγματοποιώντας στατιστικούς ελέγχους για τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης (Q statistic)

Η στατιστική αυτή χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της συνδυαστικής υπόθεσης ότι όλοι οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης είναι μηδέν:

$$Q = T \sum_{\kappa=1}^m r_{\kappa}^2$$

όπου T το μέγεθος του δείγματος και κ το πλήθος των υστερήσεων. Αν τιμή της στατιστικής που υπολογίζουμε είναι μεγαλύτερη από την κριτική τιμή της X^2 με m βαθμούς ελευθερίας και κάποια στάθμη στατιστικής σημαντικότητας τότε η μηδενική υπόθεση ότι όλοι οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης είναι μηδέν απορρίπτεται και η σειρά δεν είναι στάσιμη.

δ) Πραγματοποιώντας έλεγχο για μοναδιαία ρίζα (Dickey-Fullertest)

Ο έλεγχος αυτός βασίζεται στην εμπειρική τιμή της στατιστικής t από μια απλή παλινδρόμηση, όμως η σύγκριση για την αποδοχή ή όχι της H_0 δεν γίνεται με τιμές από την t κατανομή αλλά με τιμές που έχουν προσδιοριστεί εμπειρικά από τον MacKinnon(1991). Θεωρούμε το παρακάτω μοντέλο:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Για να είναι στάσιμη η σειρά πρέπει να ισχύει ότι $|\alpha| < 1$. Αν $\alpha=1$, τότε η σειρά είναι μη στάσιμη. Με τον έλεγχο Dickey-Fuller γίνεται έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης

$$H_0 : \alpha = 1$$

$$H_1 : \alpha \neq 1$$

Στην περίπτωση που ισχύει $\alpha=1$, η κατανομή του t και του F δεν συμπίπτουν με την γνωστή κατανομή του t και του F . Δηλαδή οι κρίσιμες τιμές των στατιστικών t και F δεν είναι κατάλληλες για τον έγκυρο έλεγχο της παραπάνω υπόθεσης. Για να λυθεί το παραπάνω πρόβλημα, οι Dickey-Fuller επαναπροσδιορίσαν το μοντέλο παίρνοντας πρώτες διαφορές:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (\alpha - 1) Y_{t-1} + \varepsilon_t = \beta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

όπου ελέγχεται η μηδενική υπόθεση

$$H_0 : \alpha - 1 = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

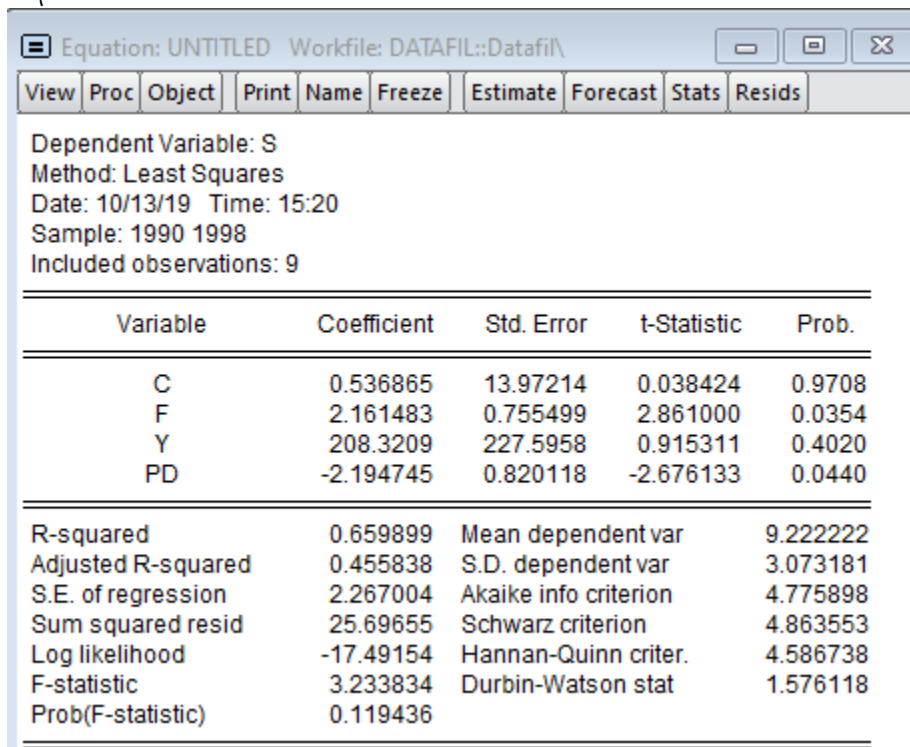
$$H_1 : \alpha - 1 \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$$

Ο έλεγχος της παραπάνω υπόθεσης μπορεί να γίνει με την βοήθεια των πινάκων της κατανομής που κατασκεύασαν οι Dickey-Fuller (τ_1). Η H_0 γίνεται δεκτή αν η t -στατιστική

του συντελεστή β :

$t = \frac{\hat{\beta}}{se(\hat{\beta})}$ είναι μικρότερη από την t-στατιστική των Dickey-Fuller (τιμή του τ_1). Τότε συμπεραίνουμε ότι έχουμε μοναδιαία ρίζα και άρα η σειρά δεν είναι στάσιμη.

Η εφαρμογή που κάναμε έγινε στο πρόγραμμα Eviews. Αρχικά, οι παρατηρήσεις μας βγήκαν στάσιμες, οι οποίες αποτελούνται από τυχαία νούμερα, καθώς οι τιμές των παραγώγων δεν είναι διαθέσιμες. Τα αποτελέσματα της παλινδρόμησης φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:



Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.536865	13.97214	0.038424	0.9708
F	2.161483	0.755499	2.861000	0.0354
Y	208.3209	227.5958	0.915311	0.4020
PD	-2.194745	0.820118	-2.676133	0.0440

R-squared	0.659899	Mean dependent var	9.222222
Adjusted R-squared	0.455838	S.D. dependent var	3.073181
S.E. of regression	2.267004	Akaike info criterion	4.775898
Sum squared resid	25.69655	Schwarz criterion	4.863553
Log likelihood	-17.49154	Hannan-Quinn criter.	4.586738
F-statistic	3.233834	Durbin-Watson stat	1.576118
Prob(F-statistic)	0.119436		

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής συσχέτισης, R^2 , είναι περίπου ίσος με 66%, που σημαίνει ότι η προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα είναι καλή. Επίσης παρατηρούμε μεγάλη ευαισθησία στους μετοχικούς δείκτες σε μια αλλαγή της τιμής του επιτοκίου, καθώς η τιμή του είναι της τάξης του 209, δηλαδή αρκετά υψηλή. Αντίθετα, οι υπόλοιποι συντελεστές φαίνεται να έχουν αρκετά μικρή επίδραση στους δείκτες καθώς επίσης και μικρά σφάλματα.

Appendix

Σε αυτό το παράρτημα θα δείξουμε πως αποδεικνύονται όλες τις μαθηματικές σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν στο κείμενο.

Γράφοντας το σύστημα (2.4) σε μορφή πινάκων έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} dP_t \\ d\tilde{P}_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi(\tilde{P}_t - P_t) \\ \psi(\bar{p} - \tilde{P}_t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_p & 0 \\ 0 & \sigma_{\bar{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_p \\ dW_{\bar{p}} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} dP_t \\ d\tilde{P}_t \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} -\varphi & \varphi \\ 0 & -\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_t \\ \tilde{P}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \psi\bar{p} \end{bmatrix} \right) dt + \begin{bmatrix} \sigma_p & 0 \\ 0 & \sigma_{\bar{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_p \\ dW_{\bar{p}} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} dP_t \\ d\tilde{P}_t \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} -\varphi & \varphi \\ 0 & -\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_t - \bar{p} \\ \tilde{P}_t - \bar{p} \end{bmatrix} \right) dt + \begin{bmatrix} \sigma_p & 0 \\ 0 & \sigma_{\bar{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_p \\ dW_{\bar{p}} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow dQ_t = C[Q_t - \bar{Q}]dt + \Sigma dW \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

όπου:

$$Q_t = \begin{bmatrix} P_t \\ \tilde{P}_t \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -\varphi & \varphi \\ 0 & -\psi \end{bmatrix}, \bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_p & 0 \\ 0 & \sigma_{\bar{p}} \end{bmatrix}, dW = \begin{bmatrix} dW_p \\ dW_{\bar{p}} \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε την ομογενή εξίσωση της σχέσης (2.5):

$d\Phi_t = C\Phi_t dt$, η οποία έχει λύση την

$$\Phi_t = \begin{bmatrix} e^{-\varphi t} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi t} - e^{-\varphi t}) \\ 0 & e^{-\psi t} \end{bmatrix}, \text{ καθώς:}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi_t}{dt} &= \begin{bmatrix} -\varphi e^{-\varphi t} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(-\psi e^{-\psi t} + \varphi e^{-\varphi t}) \\ 0 & -\psi e^{-\psi t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi & \varphi \\ 0 & -\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\varphi t} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi t} - e^{-\varphi t}) \\ 0 & e^{-\psi t} \end{bmatrix} = \\
 &= C\Phi_t
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θέτουμε $\tilde{Q}_t = \Phi_t^{-1}Q_t$, όπου:

$$\begin{aligned}
 \Phi_t^{-1} &= \begin{bmatrix} e^{-\varphi t} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi t} - e^{-\varphi t}) \\ 0 & e^{-\psi t} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{e^{-\psi t}e^{-\varphi t}} \begin{bmatrix} e^{-\psi t} & \frac{-\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi t} - e^{-\varphi t}) \\ 0 & e^{-\varphi t} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} e^{\varphi t} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{\psi t} - e^{\varphi t}) \\ 0 & e^{\psi t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$d\Phi_t^{-1} = \begin{bmatrix} \varphi e^{\varphi t} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(\psi e^{\psi t} - \varphi e^{\varphi t}) \\ 0 & \psi e^{\psi t} \end{bmatrix} dt = -C\Phi_t^{-1}dt$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα, } d\widetilde{Q}_t &= d\Phi_t^{-1}Q_t + \Phi_t^{-1}dQ_t \stackrel{(2.5)}{=} -C\Phi_t^{-1}Q_tdt + \Phi_t^{-1}C[Q_t - \bar{Q}]dt + \Phi_t^{-1}\Sigma dW = \\ &= -C\Phi_t^{-1}Q_tdt + \Phi_t^{-1}CQ_tdt - \Phi_t^{-1}C\bar{Q}dt + \Phi_t^{-1}\Sigma dW = -\Phi_t^{-1}C\bar{Q}dt + \Phi_t^{-1}\Sigma dW, \text{ διότι:} \\ \Phi_t^{-1}C &= \begin{bmatrix} e^{\varphi t} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{\psi t} - e^{\varphi t}) \\ 0 & e^{\psi t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\varphi & \varphi \\ 0 & -\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi e^{\varphi t} & \varphi e^{\varphi t} + \frac{\varphi\psi}{\varphi-\psi}(e^{\varphi t} - e^{\psi t}) \\ 0 & -\psi e^{\psi t} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\varphi e^{\varphi t} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(\varphi e^{\varphi t} - \psi e^{\psi t}) \\ 0 & -\psi e^{\psi t} \end{bmatrix} = C\Phi_t^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα, } d\widetilde{Q}_t &= -\Phi_t^{-1}C\bar{Q}dt + \Phi_t^{-1}\Sigma dW \Rightarrow \widetilde{Q}_t = \widetilde{Q}_0 - \int_0^t \Phi_u^{-1}C\bar{Q}du + \int_0^t \Phi_u^{-1}\Sigma dW_u \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Phi_t\widetilde{Q}_t = \Phi_t\widetilde{Q}_0 - \Phi_t \int_0^t \Phi_u^{-1}C\bar{Q}du + \Phi_t \int_0^t \Phi_u^{-1}\Sigma dW_u \Rightarrow \\ &\Rightarrow Q_t = \Phi_t\widetilde{Q}_0 + \Phi_t\bar{Q}(\Phi_t^{-1} - \Phi_0^{-1}) + \Phi_t \int_0^t \Phi_u^{-1}\Sigma dW_u \Rightarrow \\ &\Rightarrow Q_t = \Phi_t\widetilde{Q}_0 + \Phi_t\bar{Q}(\Phi_t^{-1} - I) + \Phi_t \int_0^t \Phi_u^{-1}\Sigma dW_u \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Phi Q_t = \Phi\Phi_t\widetilde{Q}_0 + \Phi\bar{Q} - \Phi\Phi_t\bar{Q} + \Phi\Phi_t \int_0^t \Phi_u^{-1}\Sigma dW_u \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} Q_{t+1} &= \Phi_{t+1}\widetilde{Q}_0 + \Phi_{t+1}\bar{Q}(\Phi_{t+1}^{-1} - I) + \Phi_{t+1} \int_0^{t+1} \Phi_u^{-1}\Sigma dW_u = \Phi_{t+1}\widetilde{Q}_0 + \bar{Q} - \Phi_{t+1}\bar{Q} + \\ &+ \Phi_{t+1} \int_0^{t+1} \Phi_u^{-1}\Sigma dW_u = \\ &= \Phi_{t+1}\widetilde{Q}_0 + \bar{Q} - \Phi_{t+1}\bar{Q} + \Phi_{t+1} \int_0^{t+1} \Phi_u^{-1}\Sigma dW_u = \\ &= \Phi\Phi_t\widetilde{Q}_0 + \bar{Q} - \Phi\Phi_t\bar{Q} + \Phi\Phi_t \int_0^t \Phi_u^{-1}\Sigma dW_u + \Phi\Phi_t \int_t^{t+1} \Phi_u^{-1}\Sigma dW_u = \\ &= \bar{Q} + \Phi(Q_t - \bar{Q}) + \Phi\varepsilon_{t+1}, \text{ όπου:} \\ \varepsilon_{t+1} &= \Phi_t \int_t^{t+1} \Phi_u^{-1}\Sigma dW_u \end{aligned}$$

Επομένως, το σύστημα (2.5) έχει γενική λύση:

$$Q_{t+1} = \bar{Q} + \Phi(Q_t - \bar{Q} + \varepsilon_{t+1}) \quad (3.5)$$

όπου:

$$\Phi = \begin{bmatrix} e^{-\varphi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi}) \\ 0 & e^{-\psi} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} (2.6) \stackrel{(2.7)}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} P_{t+1} \\ \tilde{P}_{t+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-\varphi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi}) \\ 0 & e^{-\psi} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} P_t - \bar{p} \\ \tilde{P}_t - \bar{p} \end{bmatrix} + \varepsilon_{t+1} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} P_{t+1} \\ \tilde{P}_{t+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - e^{-\varphi} & \frac{-\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi}) \\ 0 & 1 - e^{-\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-\varphi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi}) \\ 0 & e^{-\psi} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} P_t \\ \tilde{P}_t \end{bmatrix} + \varepsilon_{t+1} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Αναδρομικά, λοιπόν, έχουμε ότι:

$$\Pi_{t+n} = \alpha' [\bar{Q} + \Phi^{n-1}(Q_t - \bar{Q})] + \alpha' \sum_{i=1}^{n-1} \Phi^{n-i} \varepsilon_{t+i} + \beta' \varepsilon_{t+n}, \text{ όπου } \alpha' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Απόδειξη:

για $n = 1$ έχουμε ότι:

$$\Pi_{t+1} = \alpha' [\bar{Q} + \Phi^{1-1}(Q_t - \bar{Q})] + \beta' \varepsilon_{t+1} = \alpha' [\bar{Q} + (Q_t - \bar{Q})] + V_{t+1} = \alpha' Q_t + V_{t+1} = P_t + V_{t+1}, \text{ που ισχύει καθώς έτσι έχουμε ορίσει την } \Pi_{t+1}$$

αν ισχύει για $n = n$, τότε για $n = n + 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \Pi_{t+n+1} &= \Pi_{t+1+n} = \alpha' [\bar{Q} + \Phi^{n-1}(Q_{t+1} - \bar{Q})] + \alpha' \sum_{i=1}^{n-1} \Phi^{n-i} \varepsilon_{t+1+i} + \beta' \varepsilon_{t+1+n} \stackrel{(2.6)}{=} \\ &= \alpha' [\bar{Q} + \Phi^{n-1} (\bar{Q} + \Phi (Q_t - \bar{Q} + \varepsilon_{t+1}) - \bar{Q})] + \alpha' \sum_{i=1}^{n-1} \Phi^{n-i} \varepsilon_{t+1+i} + \beta' \varepsilon_{t+1+n} \stackrel{i+1=j}{=} \\ &= \alpha' [\bar{Q} + \Phi^{n-1} (\bar{Q} + \Phi Q_t - \Phi \bar{Q} + \Phi \varepsilon_{t+1} - \bar{Q})] + \alpha' \sum_{j=2}^{n-1} \Phi^{n-j+1} \varepsilon_{t+j} + \beta' \varepsilon_{t+1+n} = \\ &= \alpha' [\bar{Q} + \Phi^n (Q_t - \bar{Q})] + \alpha' \Phi^n \varepsilon_{t+1} + \alpha' \sum_{j=2}^{n-1} \Phi^{n-j+1} \varepsilon_{t+j} + \beta' \varepsilon_{t+1+n} = \\ &= \alpha' [\bar{Q} + \Phi^n (Q_t - \bar{Q})] + \alpha' \sum_{j=1}^{n-1} \Phi^{n-j+1} \varepsilon_{t+j} + \beta' \varepsilon_{t+1+n} \end{aligned}$$

Ξαναγράφουμε τη σχέση (2.3):

$$\ln R_{t,n} - \ln D_t = E_t \left[\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i} \right] + \frac{1}{2} \text{Var}_t \left[\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i} \right]$$

Θα υπολογίσουμε κάθε όρο στο δεξί μέλος ξεχωριστά και μετά θα αντικαταστήσουμε.

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\begin{aligned}
E_t \left[\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i} \right] &= E_t [\Pi_{t+1} + \dots + \Pi_{t+n}] = \\
&= E_t \left[\alpha' [\bar{Q} + \Phi^{1-1}(Q_t - \bar{Q})] + \beta' \varepsilon_{t+1} + \dots + \alpha' [\bar{Q} + \Phi^{n-1}(Q_t - \bar{Q})] + \alpha' \sum_{i=1}^{n-1} \Phi^{n-i} \varepsilon_{t+i} + \beta' \varepsilon_{t+n} \right] = \\
&\stackrel{E[\varepsilon_{t+i}=0]}{=} E_t [n\alpha' \bar{Q} + \alpha' B_n (Q_t - \bar{Q})] = n\alpha' \bar{Q} + \alpha' B_n (Q_t - \bar{Q}) = \alpha' (n\bar{Q} + B_n (Q_t - \bar{Q})) \\
B_n &= (I + \Phi + \dots + \Phi^{n-1}) \\
Var_t \left[\sum_{i=1}^n \Pi_{t+i} \right] &= Var_t \left[\sum_{i=1}^n \left\{ \alpha' [\bar{Q} + \Phi^{i-1}(Q_t - \bar{Q})] + \alpha' \sum_{j=1}^{i-1} \Phi^{i-j} \varepsilon_{t+j} + \beta' \varepsilon_{t+i} \right\} \right] = \\
&= Var_t \left[\sum_{i=1}^n \left\{ \alpha' \sum_{j=1}^{i-1} \Phi^{i-j} \varepsilon_{t+j} + \beta' \varepsilon_{t+i} \right\} \right] = Var_t \left[\sum_{i=1}^n \left\{ \alpha' \sum_{j=1}^{i-1} \Phi^{i-j} \varepsilon_{t+j} \right\} \right] + Var_t \left[\sum_{i=1}^n \{ \beta' \varepsilon_{t+i} \} \right] = \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\alpha' \sum_{j=1}^{i-1} \Phi^{i-j} \right] \Sigma \left[\left(\sum_{j=1}^{i-1} \Phi^{i-j} \right)' \alpha \right] + \sum_{i=1}^n \beta' \Sigma \beta = \sum_{i=1}^n (\beta' + \alpha' B_i) \Sigma (\beta + B_i \alpha), \text{ όπου:} \\
\Sigma &= \begin{bmatrix} \sigma_p^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\bar{p}}^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Τώρα θα γράψουμε τον πίνακα B_n που ορίσαμε παραπάνω ως:

$$B_n = (I + \Phi + \dots + \Phi^{n-1}) = (I - \Phi)^{-1} (I - \Phi^n)$$

Θα υπολογίσουμε τον πίνακα B_n . Έχουμε:

$$\begin{aligned}
(I - \Phi)^{-1} &\stackrel{(2.7)}{=} \left(I - \begin{bmatrix} e^{-\varphi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi}) \\ 0 & e^{-\psi} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 - e^{-\varphi} & \frac{-\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi}) \\ 0 & 1 - e^{-\psi} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{(1-e^{-\varphi})(1-e^{-\psi})} \begin{bmatrix} 1 - e^{-\psi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi}) \\ 0 & 1 - e^{-\varphi} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Για να βρούμε τον πίνακα $(I - \Phi^n)$, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τον πίνακα Φ^n .

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
\Phi^2 &= \begin{bmatrix} e^{-\varphi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi}) \\ 0 & e^{-\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\varphi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi}) \\ 0 & e^{-\psi} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} e^{-2\varphi} + 0 & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi})(e^{-\varphi} + e^{-\psi}) \\ 0 & e^{-2\psi} + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\varphi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-2\psi} - e^{-2\varphi}) \\ 0 & e^{-2\psi} \end{bmatrix} \\
\Phi^3 &= \Phi^2 \Phi = \begin{bmatrix} e^{-2\varphi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-2\psi} - e^{-2\varphi}) \\ 0 & e^{-2\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\varphi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi}) \\ 0 & e^{-\psi} \end{bmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} e^{-3\varphi} + 0 & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi})e^{-2\varphi} + \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-2\psi} - e^{-2\varphi})e^{-\psi} \\ 0 & e^{-3\psi} + 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} e^{-3\varphi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}[-e^{-3\varphi} + e^{-2\varphi-\psi} - e^{-2\varphi-\psi} + e^{-3\psi}] \\ 0 & e^{-3\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3\varphi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-3\psi} - e^{-3\varphi}) \\ 0 & e^{-3\psi} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Άρα, καταλήγουμε στο ότι:

$$\Phi^n = \begin{bmatrix} e^{-n\varphi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-n\psi} - e^{-n\varphi}) \\ 0 & e^{-n\psi} \end{bmatrix}. \text{ Έχοντας βρει τον πίνακα αυτό, μπορούμε πλέον}$$

να υπολογίσουμε τον πίνακα $(I - \Phi^n)$ ως εξής:

$$(I - \Phi^n) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-n\varphi} & \frac{-\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-n\psi} - e^{-n\varphi}) \\ 0 & 1 - e^{-n\psi} \end{bmatrix}. \text{ Τελικά για τον πίνακα } B_n \text{ έχουμε ότι:}$$

$$\begin{aligned}
B_n &= (I - \Phi)^{-1} (I - \Phi^n) = \\
&= \frac{1}{(1-e^{-\varphi})(1-e^{-\psi})} \begin{bmatrix} 1 - e^{-\psi} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-\psi} - e^{-\varphi}) \\ 0 & 1 - e^{-\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - e^{-n\varphi} & \frac{-\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-n\psi} - e^{-n\varphi}) \\ 0 & 1 - e^{-n\psi} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-e^{-\varphi})} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi} \frac{(e^{-\psi} - e^{-\varphi})}{(1-e^{-\varphi})(1-e^{-\psi})} \\ 0 & \frac{1}{(1-e^{-\psi})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - e^{-n\varphi} & \frac{-\varphi}{\varphi-\psi}(e^{-n\psi} - e^{-n\varphi}) \\ 0 & 1 - e^{-n\psi} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1-e^{-n\varphi}}{1-e^{-\varphi}} & \frac{-\varphi}{\varphi-\psi} \frac{e^{-n\psi} - e^{-n\varphi}}{1-e^{-\varphi}} + \frac{\varphi}{\varphi-\psi} \frac{(e^{-\psi} - e^{-\varphi})(1-e^{-n\psi})}{(1-e^{-\varphi})(1-e^{-\psi})} \\ 0 & \frac{1-e^{-n\psi}}{1-e^{-\psi}} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1-e^{-n\varphi}}{1-e^{-\varphi}} & \frac{-\varphi}{\varphi-\psi} \left[\frac{(e^{-n\psi} - e^{-n\varphi})(1-e^{-\psi}) - (e^{-\psi} - e^{-\varphi})(1-e^{-n\psi})}{(1-e^{-\varphi})(1-e^{-\psi})} \right] \\ 0 & \frac{1-e^{-n\psi}}{1-e^{-\psi}} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1-e^{-n\varphi}}{1-e^{-\varphi}} & \frac{-\varphi}{\varphi-\psi} \left[\frac{e^{-n\psi} - e^{-n\varphi} - e^{-n\psi-\psi} + e^{-n\varphi-\psi} - e^{-\psi} + e^{-\varphi} + e^{-n\psi-\psi} - e^{-n\psi-\varphi} + 1 - 1}{(1-e^{-\varphi})(1-e^{-\psi})} \right] \\ 0 & \frac{1-e^{-n\psi}}{1-e^{-\psi}} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1-e^{-n\varphi}}{1-e^{-\varphi}} & \frac{-\varphi}{\varphi-\psi} \left[-\frac{(1-e^{-\varphi})(1-e^{-n\psi})}{(1-e^{-\varphi})(1-e^{-\psi})} + \frac{(1-e^{-n\varphi})(1-e^{-\psi})}{(1-e^{-\varphi})(1-e^{-\psi})} \right] \\ 0 & \frac{1-e^{-n\psi}}{1-e^{-\psi}} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1-e^{-n\varphi}}{1-e^{-\varphi}} & \frac{\varphi}{\varphi-\psi} \left[\frac{(1-e^{-n\psi})}{(1-e^{-\psi})} - \frac{(1-e^{-n\varphi})}{(1-e^{-\varphi})} \right] \\ 0 & \frac{1-e^{-n\psi}}{1-e^{-\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_n & \frac{\varphi}{\varphi-\psi}(\psi_n - \varphi_n) \\ 0 & \psi_n \end{bmatrix}, \text{ όπου:}
\end{aligned}$$

$$\varphi_n = \frac{1-e^{-n\varphi}}{1-e^{-\varphi}}, \psi_n = \frac{1-e^{-n\psi}}{1-e^{-\psi}}$$

Βιβλιογραφία

Bansal, Ravi and Amir Yaron, 2004, Risks for the long run: a potential resolution of asset pricing puzzles, *Journal of Finance*, 56, 1481-1509

Bekaert, Geert and Eric Engstrom, 2010, Inflation and the stock market: Understanding the “Fed Model”, *Journal of Monetary Economics*, 57, 278-294

Brennan, Michael, 1998, Stripping the S&P 500 Index, *Financial Analysts Journal* 54, 12-22

Campbell, John Y., Andrew W. Lo and A. Craig MacKinlay, 1997, *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press

Campbell, John Y. and Robert J. Shiller, 1988, The dividend-price ratio and expectations of future dividends and discount factors, *The Review of Financial Studies*, 1, 195-228

Cejnek, Georg and Otto Randl, 2015, Risk and return of short-duration equity investments, working paper

Cochrane, John H., 2011, Presidential Address: Discount Rates, *The Journal of Finance*, 66, 4, 1047-88

Giglio, Stefano, Matteo Maggiori and Johannes Stroebe, 2014, Very long-run discount rates, working paper

Golez, Benjamin, 2014, Expected returns and dividend growth rates implied in derivative markets, *The Review of Financial Studies*, 27, 790-822

Jegadeesh, Narasimhan and George G. Pennacchi, 1996, The behavior of interest rates implied by the term structure of eurodollar futures, *Journal of Money, Credit and Banking*, 28(3), 426-46

Kragt, J.; F. de Jong; and Joost Driessen, 2019, The Dividend Term Structure, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*

Manly, Richard and Christian Mueller-Glissmann, 2008, The market for dividends and related investment strategies, *Financial Analysts Journal*, 64, 17-29

- Mehra, R., and E. C. Prescott. "THE EQUITY PREMIUM A Puzzle." *Journal of Monetary Economics*, (1985), 145-150
- Mixon, Scott and Esen Onur, 2014, Dividend swaps and dividend futures: State of play, working paper
- Passalacqua, A. "Time Series Analysis." Harvard University, Section 9
- Shiller, Robert, 1981, Do stock prices move too much to be justified by subsequent changes in dividends?, *The American Economic Review*, 71, 421-36
- Suzuki, Masataka, 2014, Measuring the fundamental value of a stock index through dividend futures prices, working paper
- van Binsbergen, J. H.; W. Hueskes; R. S. Koijen; and E. B. Vrugt "Equity yields." *Journal of Financial Economics*, (2013), 503-519
- van Binsbergen, J. H.; M. Brandt; and R. Koijen "On the timing and pricing of dividends." *American Economic Review*, (2012), 1596-1618
- Welch, G., and G. Bishop "An introduction to the Kalman filter" University of North Carolina at Chapel Hill, (2006), 2-7
- Wilkens, Sascha, and Jens Wimschulte, 2010, The pricing of dividend futures in the european market: a first empirical analysis, *Journal of Derivatives & Hedge Funds* 16, 2, 136-143
- Αθάνατου, Α,-Γ. "Χρήση του φίλτρου Kalman για τον εντοπισμό της θέσης συνδρομητή σε ασύρματο δίκτυο επικοινωνιών." Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, (2015), 41-43
- Κουτσιμπέλα, Α. "Θεωρία Στοχαστικού Χαρτοφυλακίου.", *ΕΜΠ*, (2018), 10
- Παπαπαντολέων, Α. "Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά", *ΕΜΠ*, (2019), 1
- Σπηλιώτης, Ι. "Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά." *ΕΜΠ*, (2004), 100-101