Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

National Technical University of Athens

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

<u>Διπλωματική Εργασία</u>

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΤΑ HADAMARD

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΑΛΕΒΙΖΟΠΟΥΛΟΣ

Επιβλέπων: Παναγιώτης Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2020

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
National Technical University of Athens

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΤΑ HADAMARD

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΑΛΕΒΙΖΟΠΟΥΛΟΣ

Τριμελής Επιτροπή: Ν. Γιαννακάκης, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Π. Στεφανέας, Επίκ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Π. Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Αθήνα, Ιούνιος 2020

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με βάση τις μελέτες, τόσο τις παλαιότερες, όσο και τις σύγχρονες, που έχουν εστιάσει το ενδιαφέρον τους στη θεωρία πινάκων, και ειδικότερα, στις πράξεις μεταξύ αυτών, προκύπτει το γινόμενο Hadamard. Το γινόμενο αυτό είναι ένα γινόμενο πινάκων, το οποίο από τη μια είναι πολύ πιο απλό από το σύνηθες (συμβατικό) γινόμενο, όμως από την άλλη, είναι λιγότερο κατανοητό. Παρόλα αυτά, το γινόμενο Hadamard χρησιμοποιείται με ποικίλους τρόπους και έχει πολλές εφαρμογές όπως οι τριγωνομετρικές ροπές συνελίξεων περιοδικών συναρτήσεων, τα γινόμενα πυρήνων ολοκληρωτικών εξισώσεων, η ασθενής αρχή ελαχίστου σε μερικές διαφορικές εξισώσεις και οι χαρακτηριστικές εξισώσεις στην θεωρία πιθανοτήτων, θεωρία τελεστών κ.α.

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να αναφερθούν και να μελετηθούν μερικά επιπλέον παραδείγματα για τον τρόπο που προκύπτει το γινόμενο Hadamard καθώς και ιδιότητές του. Πιο συγκεκριμένα, παρακάτω αναφέρονται περιληπτικά τα κεφάλαια που περιλαμβάνονται.

Στο πρώτο κεφάλαιο, αναφέρουμε ορισμένες βασικές αλγεβρικές ιδιότητες, οι οποίες είναι χρήσιμες στην ανάλυση του γινομένου Hadamard.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, μελετάμε ένα από τα σημαντικότερα λήμματα που δημοσιεύθηκαν για το γινόμενο Handamard, πάνω στο οποίο στηρίχτηκαν πολλά άλλα θεωρήματα και γενικεύσεις σχετικά με τους θετικά ημι-ορισμένους ερμιτιανούς πίνακες. Επιπλέον, θα δούμε και μια πιο εκτενή αλγεβρική μελέτη αυτών των πινάκων.

Στο τρίτο κεφάλαιο, γίνεται μια εκτενή μελέτη για τους ειδικούς πίνακες $A \circ \left(A^{-1}\right)^T$ και $A \circ A^{-1}$ που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον κατά την εφαρμογή τους.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, που είναι αφιερωμένο στην κύρια οικογένεια ανισοτήτων, μελετάμε ανισότητες για γενικούς πίνακες από το M_n και το $M_{m,n}$. Εξετάζουμε επίσης κλασικές αλλά και πιο πρόσφατες ανισότητες για το γινόμενο Hadamard, πολλές από τις οποίες συνδέονται ως ειδικές περιπτώσεις μιας νέας βασικής οικογένειας ανισοτήτων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, μελετάμε τις ιδιάζουσες τιμές του γινομένου Hadamard και αποδεικνύουμε μια γενικότερη οικογένεια ανισοτήτων που περιλαμβάνει τις ανισότητες του προηγούμενου κεφαλαίου.

Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο, εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας σε ιδιότητες του γινομένου Hadamard που αφορούν τις στενά συνδεδεμένες μεταξύ τους κατηγορίες των μη αρνητικών πινάκων.

ABSTRACT

Based on the studies, both the older ones and the modern ones, which have focused their interest on the theory of matrices and more specifically, in the operations between them, the Hadamard product emerges. This product is a matrix product, which on one hand is much simpler than the usual (conventional) product, but on the other hand, is less understandable. However, the Hadamard product is used in a variety of ways and has many applications such as the trigonometric torques of periodic sequence convergences, the nuclei of integral equations, the weak principle at least in some differential equations and the characteristic equations in probability theory, operator theory and more.

The aim of this dissertation is to provide some examples of how the Hadamard product works and properties of this product. More specifically, we now summarize the chapters included.

In the first chapter, we mention some basic algebraic properties, which are useful in the analysis of the Hadamard product.

In the second chapter, we study one of the most important Lemma published for the Hadamard product, on which many other theorems and generalizations were based on the positive semi-definite Hermitian matrices. In addition, we will have a look at a more extensive algebraic study of these matrices.

In the third chapter an extensive study is made for the special matrices $A \circ \left(A^{-1}\right)^T$ and $A \circ A^{-1}$ which are of particular interest in their application.

In the fourth chapter, which is devoted to the main family of inequalities, we study inequalities for general matrices from M_n and $M_{m,n}$. We also have a look at classic and more recent inequalities in the Hadamard product, many of which are linked to specific cases of a new basic family of inequalities.

In the fifth chapter we study the singular values of the Hadamard product and prove a more general family of inequalities that includes the inequalities of the previous chapter.

Finally, in the sixth chapter we focus our attention on the properties of the Hadamard product that relate to the closely related categories of the non-negative matrices.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας θα ήταν αδύνατη χωρίς τη συμβολή και τη συμπαράσταση πολλών ανθρώπων. Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να τους εκφράσω τις ευχαριστίες μου.

Αισθάνομαι πρωτίστως την ανάγκη να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα κ. Ψαρράκο Παναγιώτη, Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε), του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (Ε.Μ.Π), για την άψογη συνεργασία που είχαμε, το ειλικρινές ενδιαφέρον του, τη συνεχή επιστημονική καθοδήγησή του, την άμεση βιβλιογραφική ενημέρωση που μου παρείχε και τις ξεκάθαρες κατευθυντήριες γραμμές που μου έδινε.

Θερμές ευχαριστίες επίσης οφείλω στους πολύ καλούς μου φίλους τη Μαρία, τον Μάνο, τη Δημούλα καθώς και τη Δήμητρα για τη διαρκή ηθική και ψυχολογική υποστήριξή τους σε όλο το διάστημα των προπτυχιακών μου σπουδών αλλά και καθ' όλη τη διάρκεια συγγραφής της εν λόγω διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την οικογένειά μου, για την αμέριστη ηθική συμπαράσταση, την οικονομική υποστήριξη και την αδιάκοπη ενθάρρυνσή τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Κεφάλαιο 0.

Εισαγωγή στο Γινόμενο Hadamard

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε το κατά Hadamard γινόμενο πινάκων, το οποίο αφενός είναι πολύ πιο απλό από το σύνηθες (συμβατικό) γινόμενο πινάκων, αφετέρου όμως είναι λιγότερο κατανοητό σε γενικότερο επίπεδο. Το εν λόγω γινόμενο μπορεί να διεξαχθεί με αρκετούς τρόπους, καθώς επίσης είναι και πολύ πλούσιο σε δομή. Ακόμη, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι το γινόμενο Hadamard σε αντίθεση με το συμβατικό γινόμενο έχει την ιδιότητα να μπορεί να αντιμετατεθεί.

Το γινόμενο Hadamard, για να το ξεχωρίζουμε από το συμβατικό γινόμενο πινάκων, περιέχει ανάμεσα στα σύμβολα των δυο πινάκων το σύμβολο "$\circ$". Όπου, αν έχουμε δυο πίνακες A και B το γινόμενο τους κατά Hadamard γράφεται ως $A \circ B$.

Συμβολισμός. Με $M_{m,n}$ συμβολίζουμε το σύνολό των $m \times n$ μιγαδικών πινάκων και με M_n το σύνολό των $n \times n$ μιγαδικών πινάκων.

0.1. Ορισμός. Ο πολλαπλασιασμός κατά Hadamard του πίνακα $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ και του πίνακα $B = [b_{ij}] \in M_{m,n}$ ορίζεται ως $A \circ B = [a_{ij} b_{ij}] \in M_{m,n}$ και παράγει έναν πίνακα $C = \left[c_{ij} \right] = \left[a_{ij} b_{ij} \right] \in M_{m,n}$.

Η συνθήκη για να μπορεί να παραχθεί ένα γινόμενο Hadamard είναι απλά το γεγονός οι δύο πίνακες πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις και ο πολλαπλασιασμός εκτελείται στοιχείο με στοιχείο, όπως η συμβατική πράξη της πρόσθεσης στους πίνακες. Δηλαδή, είναι απλώς η αντιστοίχιση του ενός στοιχείου του ενός πίνακα με το στοιχείο που βρίσκεται στην αντίστοιχη θέση στον άλλο πίνακα, με έναν απλό κλιμακωτό πολλαπλασιασμό.

0.2. Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -7i \\ -3 & \pi & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} -1 & 14 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Τότε

$$A \circ B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 7i \\ 0 & 3\pi & 8 \end{bmatrix}.$$

Στη θεωρία πινάκων το γινόμενο Hadamard είναι γνωστό και ως γινόμενο πινάκων κατά στοιχείο (element-wise ή entrywise) ή “Schur γινόμενο”, λόγω προγενέστερων και βασικών αποτελεσμάτων του γινομένου, που έχουν αποδειχτεί από τον Issai Schur. Το βασικότερο σημείο των παραπάνω είναι η κλειστότητα του κώνου που ορίζουν οι θετικά ημι-ορισμένοι πίνακες υπό του γινομένου Hadamard.

Το γινόμενο Hadamard εμφανίζεται με ποικίλους τρόπους σε πολλές εφαρμογές, όπως οι τριγωνομετρικές ροπές συνελίξεων περιοδικών συναρτήσεων, τα γινόμενα πυρήνων ολοκληρωτικών εξισώσεων, η ασθενής αρχή ελαχίστου σε μερικές διαφορικές εξισώσεις και οι χαρακτηριστικές εξισώσεις στην θεωρία πιθανοτήτων (Θεώρημα Buchner, [HJ90]). Στη θεωρία τελεστών, το γινόμενο Hadamard για απειροδιάστατους πίνακες και σχετικά με αυτό αποτελέσματα, έχουν μελετηθεί με αναλυτικές τεχνικές, με ιδιαίτερη έμφαση στις ιδιότητες των γραμμικών μετασχηματισμών που παράγονται από το γινόμενο Hadamard με σταθερό πίνακα. Μερικά επιπλέον παραδείγματα για τον τρόπο που προκύπτει το γινόμενο Hadamard δίνονται στα ακόλουθα κεφάλαια.

0.3. Ο πίνακας $A \circ \left(A^{-1}\right)^T$ και σχέση μεταξύ διαγώνιων στοιχείων και ιδιοτιμών ενός διαγωνοποιήσιμου πινάκα. Υποθέτουμε ότι ο $B = \left[b_{i,j}\right] \in M_n$ είναι ένας διαγωνοποιήσιμος πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Οπότε, υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in M_n$ τέτοιος ώστε:

$$B = A \, diag\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right) A^{-1}.$$

Με απλές πράξεις προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \circ \left(A^{-1}\right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Επομένως, το διάνυσμα των διαγώνιων στοιχείων του B προκύπτει από το γινόμενο του διανύσματος των ιδιοτιμών του B με τον πίνακα $A \circ \left(A^{-1}\right)^T$.

Στην περίπτωση που ο A είναι ορθομοναδιαίος πίνακας (δηλαδή, $A^* A = I \Leftrightarrow A^* = A^{-1}$), όποτε ο B είναι κανονικός (δηλαδή, $A^* A = AA^*$), ο πίνακας $A \circ \left(A^{-1}\right)^T = A \circ \overline{A}$ είναι διπλά στοχαστικός (δηλαδή, το άθροισμα των στοιχείων οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης ισούται με τη μονάδα). Εάν επίσης οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι πραγματικές, ο B είναι Ερμιτιανός), έπεται ότι τα διαγώνια στοιχεία είναι κυρτοί συνδυασμοί των ιδιοτιμών.

0.4. Το γινόμενο Hadamard και η εξίσωση Lyapunov $GA + A^* G = H$. Έστω $A \in M_n$ με φάσμα $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.4.6 του [HJ91], η εξίσωση Lyapunov

$$GA + A^* G = H.$$

έχει μια μοναδική λύση $G = G_A(H)$ για κάθε Ερμιτιανό πινάκα H αν και μόνο αν $\bar{\lambda}_i + \lambda_j \neq 0$ για όλα τα $i, j = 1, \ldots, n$. Έστω ότι ισχύει αυτή η υπόθεση σχετικά με το φάσμα του A. Ειδικότερα, αυτή η συνθήκη ικανοποιείται αν ισχύει η ισχυρότερη υπόθεση ότι ο A είναι θετικά ευσταθής [HJ91]. Αν, επιπλέον ο A είναι διαγωνοποιήσιμος με μετασχηματισμό ομοιότητας $A = S \Lambda S^{-1}$ και $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, τότε υπάρχει μια απλή σχέση για την εξίσωση $G_A(H)$ που περιλαμβάνει το γινόμενο Hadamard. Ειδικότερα, γράφουμε:

$$GA + A^* G = GS\Lambda S^{-1} + \left(S^{-1}\right)^* \overline{\Lambda} S^* G = H,$$

ή ισοδύναμα,

$$\left(S^*GS\right)\Lambda+\overline{\Lambda}\left(S^*GS\right)=S^*HS.$$

Για κάθε πίνακα $B=\left[b_{i,j}\right]\in M_n$, έχουμε $B\Lambda+\overline{\Lambda}B=\left[b_{i,j}\lambda_j\right]+\left[\overline{\lambda_i}b_{ij}\right]=\left[\left(\overline{\lambda_i}+\lambda_j\right)b_{ij}\right]$, που είναι ένα γινόμενο Hadamard. Αν επικαλεστούμε την υπόθεση ότι $\overline{\lambda_i}+\lambda_j\neq 0$ και ορίσουμε $L(A)\equiv\left[\left(\overline{\lambda_i}+\lambda_j\right)^{-1}\right]$, τότε ισχύει $S^*GS=L(A)\circ\left(S^*HS\right)$ απ' όπου προκύπτει ότι

$$G_A(H)=\left(S^{-1}\right)^*\left[L(A)\circ\left(S^*HS\right)\right]S^{-1},\quad A=S\Lambda S^{-1}$$

για τη λύση της εξίσωσης Lyapunov $GA+A^*G=H$ όταν ο A είναι διαγωποιήσιμος και $\overline{\lambda_i}+\lambda_j\neq 0$ για όλα τα $\lambda_i,\lambda_j\in\sigma(A)$.

0.5. Πίνακες συνδιακύμανσης και γινόμενα Hadamard. Έστω $X=\left[X_1,\dots,X_n\right]^T$ και $Y=\left[Y_1,\dots,Y_n\right]^T$ πραγματικά ή μιγαδικά διανύσματα με τυχαίες μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή, δηλαδή $E(X)=\left[E(X_i)\right]=0$ και $E(Y)=\left[E(Y_i)\right]=0$. Η συνδιακύμανση του πίνακα X έχει τη γενική μορφή:

$$Cov(X)\equiv E\left(\left[X-E(X)\right]\left[X-E(X)\right]^*\right),$$

όπου παίρνει την ειδική μορφή $Cov(X)=E\left(XX^*\right)=\left[E\left(X_i\overline{X_j}\right)\right]$ στην περίπτωσή μας, αφού $E(X)=0$. Εάν τα X και Y είναι ανεξάρτητα, το διάνυσμα τυχαίας μεταβλητής $Z\equiv X\circ Y$ έχει μηδενική μέση τιμή και πίνακα συνδιακύμανσης ο οποίος μπορεί να εξαχθεί από τους πίνακες συνδιακύμανσης των X και Y ως γινόμενο Hadamard:

$$Cov(Z)=E\left(ZZ^*\right)=\left[E\left(X_iY_i\overline{X_j}\,\overline{Y_j}\right)\right]=\left[E\left(X_i\overline{X_j}Y_i\overline{Y_j}\right)\right]$$

$$=\left[E\left(X_i\overline{X_j}\right)E\left(Y_i\overline{Y_j}\right)\right]=Cov(X)\circ Cov(Y).$$

Μια χρήσιμη ιδιότητα ενός πίνακα συνδιακύμανσης είναι ότι είναι εύκολο να αποδειχθεί το γεγονός ότι είναι θετικά ημι-ορισμένος:

$$\xi * Cov(X)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} E\left(X_i \overline{X}_j\right)\overline{\xi}_i \xi_i = \sum_{i,j=1}^{n} E\left(\overline{\xi}_i X_i \xi_j \overline{X}_j\right)$$

$$= E\left(\sum_{i,j=1}^{n} \overline{\xi}_i X_i \xi_j \overline{X}_j\right) = E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} \overline{\xi}_i X_i\right|^2\right) \geq 0$$

για κάθε $\xi = [\xi_i] \in \mathbb{C}^{n}$. Σημειώνεται ότι, εφόσον το γινόμενο Hadamard δύο πινάκων συνδιακύμανσης ταυτίζεται με έναν πίνακα συνδιακύμανσης, μπορούμε να συμπεράνουμε αμέσως ότι το γινόμενο Hadamard δύο πινάκων συνδιακύμανσης είναι θετικά ημι-ορισμένο.

Κεφάλαιο 1.

Βασικές Ιδιότητες του Γινομένου Hadamard

Στο κεφάλαιο αυτό καταγράφουμε στοιχειώδεις αλγεβρικές ιδιότητες, οι οποίες είναι χρήσιμες στην ανάλυση του γινομένου Hadamard. Προφανώς, το γινόμενο Hadamard μιγαδικών πινάκων, σε αντίθεση με το συμβατικό γινόμενο πίνακα, ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα.

Η πρώτη μας παρατήρηση συνδέει το γινόμενο Hadamard με το γινόμενο Kronecker ταυτίζοντας το $A \circ B$ ως έναν υποπίνακα του

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in M_{m^2,n^2}.$$

Συμβολισμός. Για τα σύνολα δεικτών $\alpha \subseteq \{1,2,\ldots,m\}$ και $\beta \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$, συμβολίζουμε τον υποπίνακα $C \in M_{m,n}$ που βρίσκεται στις σειρές που υποδεικνύονται από το σύνολο α και στις στήλες που υποδεικνύονται από το σύνολο β με $C(\alpha,\beta)$, και όταν $m=n$ και $\beta=\alpha$, τότε γραφούμε εν συντομία τον $C(\alpha,\alpha)$ ως $C(\alpha)$ [HJ90].

1.1. Λήμμα. Αν A, $B \in M_{m,n}$, τότε

$$A \circ B = (A \otimes B)(\alpha,\beta),$$

όπου $\alpha=\{1,m+2,2m+3,\ldots,m^2\}$ και $\beta=\{1,n+2,2n+3,\ldots,n^2\}$, δηλαδή αν $m=n$, τότε ο $A \circ B$ είναι ένας κύριος υποπίνακας του $A \otimes B$.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα με έλεγχο των θέσεων που υποδεικνύονται για τον υποπίνακα. □

1.2. Λήμμα. Αν $A, B \in M_{m,n}$ και αν $D \in M_m$ και $E \in M_n$ είναι διαγώνιοι, τότε

$$D(A \circ B)E = (DAE) \circ B = (DA) \circ (BE) = (AE) \circ (DB) = A \circ (DBE).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα με κατάλληλες αριθμητικές πράξεις. □

1.3. Λήμμα. Έστω $A, B \in M_{m,n}$ και έστω το $x \in \mathbb{C}^n$. Τότε, το i διαγώνιο στοιχείο του πίνακα AD_xB^T ταυτίζεται με το i στοιχείο του διανύσματος $(A \circ B)x,\ i = 1, \ldots, m.$

Απόδειξη. Αν $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ και $x = [x_j]$, τότε

$$\left(AD_xB^T\right)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_jb_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}x_j = \left[(A \circ B)x\right]_i$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m.$ □

Η επόμενη παρατήρηση περιέχει ένα τριπλό μικτό γινόμενο.

1.4. Λήμμα. Έστω $A, B, C \in M_{m,n}$. Το i διαγώνιο στοιχείο του πίνακα $(A \circ B)C^T$ ισούται με το i διαγώνιο στοιχείο του πίνακα: $(A \circ C)B^T$, για κάθε $i = 1, \ldots, m.$

1.5. Λήμμα. Για $A, B \in M_{m,n}$, $y \in \mathbb{C}^m$ και $x \in \mathbb{C}^n$, έχουμε

$$y^*(A \circ B)x = tr\left(D_y^* AD_xB^T\right),$$

όπου D_x και D_y είναι οι διαγώνιοι πίνακες με διαγώνια στοιχεία τα στοιχεία των διανυσμάτων x και y, αντίστοιχα.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$y^*(A \circ B)x = e^T D_y^*(A \circ B)x = e^T\left[D_y^*(A \circ B)x\right] = tr\left(D_y^* AD_xB^T\right),$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 1.2 και η τρίτη από το Λήμμα 1.3 με D_y^*A στη θέση του A. □

Η επόμενη παρατήρησή μας δεν ασχολείται άμεσα με το γινόμενο Hadamard, όμως είναι χρήσιμη σε υπολογισμούς με ανισότητες που περιλαμβάνουν το γινόμενο Hadamard.

1.6. Λήμμα. Ας υποθέσουμε ότι $A \in M_n$ είναι θετικά ημι-ορισμένος και έστω $B \equiv A^{-1}$. Για κάθε διαμέριση,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} \end{bmatrix}, \qquad \text{με } A_{11}, B_{11} \in M_k,$$

ο πίνακας

$$A - \begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - B_{11}^{-1} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ημι-ορισμένος και έχει βαθμό $n-k$.

Απόδειξη. Εφόσον ο πίνακας B_{11}^{-1} μπορεί να γραφτεί ως συμπλήρωμα κατά Schur $B_{11}^{-1} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^*$ (Ορισμός 0.7.3 του [HJ90]), έχουμε ότι

$$A - \begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^* & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12}\left(A_{22}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \left(A_{22}\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12}\left(A_{22}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \left(A_{22}\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}^*$$

και προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Το $(A_{22})^{\frac{1}{2}}$ δηλώνει τη μοναδικά θετικά ορισμένη Ερμιτιανή τετραγωνική ρίζα του A_{22} και το $(A_{22})^{-\frac{1}{2}}$ δηλώνει τον αντίστροφο της. □

Η τελευταία παρατήρηση του κεφαλαίου αφορά την υπο-πολλαπλασιαστική ιδιότητα του βαθμού του πίνακα.

1.7. Θεώρημα. Έστω $A, B \in M_{m,n}$. Τότε:

$$rank(A \circ B) \le \left(rankA\right)\left(rankB\right).$$

Απόδειξη. Οποιοσδήποτε πίνακας βαθμού r μπορεί να γραφεί ως άθροισμα r πινάκων βαθμού 1, κάθε ένα από τα οποία είναι ένα εξωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων.

Επομένως, εάν ο βαθμός του πίνακα A είναι r_1 και ο βαθμός του πίνακα B είναι r_2, τότε έχουμε

$$A=\sum_{i=1}^{r_1} x_i y_i^* \quad \text{και} \quad B=\sum_{j=1}^{r_2} u_j \upsilon_j^*,$$

όπου $x_i, u_j \in \mathbb{C}^m$ και $y_i, \upsilon_j \in \mathbb{C}^n$, $i=1,....,r_1$ και $j=1,....,r_2$. Τότε ισχύει

$$A\circ B=\sum_{i=1}^{r_1}\sum_{j=1}^{r_2}\left(x_i\circ u_j\right)\left(y_i\circ \upsilon_j\right)^*,$$

το οποίο δείχνει ότι το γινόμενο $A\circ B$ είναι ένα άθροισμα το πολύ $r_1 r_2$ πινάκων βαθμού 1. Επομένως,

$$rank(A\circ B)\leq r_1 r_2=\left(rankA\right)\left(rankB\right). \qquad \square$$

Κεφάλαιο 2.

Θεώρημα Γινομένου Schur και Γενικεύσεις του

Το γεγονός ότι το σύνολο των θετικά (ημι)ορισμένων Ερμιτιανών πινάκων ιδίου μεγέθους είναι κλειστό υπό το γινόμενο Hadamard είναι θεμελιώδες για διάφορους λόγους. Είναι ένα χρήσιμο γεγονός από μόνο του, και είναι ένα πολύ χρήσιμο λήμμα για την απόδειξη άλλων αποτελεσμάτων για το γινόμενο Hadamard. Ήταν ίσως το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα που δημοσιεύθηκε για το γινόμενο Hadamard. Πολλά αποτελέσματα μπορεί να θεωρηθούν ως γενικεύσεις ή ανάλογα του και είναι ένα καλό παράδειγμα για να το μελετήσουμε από αλγεβρική σκοπιά. Το γινόμενο Hadamard μπορεί να είναι ένα πιο "φυσικό" γινόμενο σε μερικές περιπτώσεις, από το συνηθισμένο γινόμενο πίνακα – για παράδειγμα, το σύνολο των θετικά ορισμένων πινάκων είναι κλειστό υπό τον πολλαπλασιασμό Hadamard αλλά όχι με το συνήθη πολλαπλασιασμό πινάκων.

Το βασικό σημείο της γενίκευσης αυτής προκύπτει από το ακόλουθο θεώρημα. Επισημαίνουμε ότι το γινόμενο Hadamard δύο Ερμιτιανών πινάκων είναι Ερμιτιανός πίνακας και ένας θετικά ημι-ορισμένος πίνακας είναι οπωσδήποτε Ερμιτιανός.

2.1. Θεώρημα. (Θεώρημα Γινομένου Schur) Αν $A, B \in M_n$ είναι δύο θετικά ημι-ορισμένοι πίνακες, τότε και ο $A \circ B$ είναι θετικά ημι-ορισμένος. Αν επιπλέον, ο B είναι θετικά ορισμένος και ο A δεν έχει κανένα διαγώνιο στοιχείο ίσο με 0, τότε ο $A \circ B$ είναι θετικά ορισμένος. Ειδικότερα, αν ο A και ο B είναι θετικά ορισμένοι, τότε και ο $A \circ B$ είναι θετικά ορισμένος.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το Λήμμα 1.5 για να γράψουμε

$$x^*(A \circ B)x = \operatorname{tr}(D_x^* A D_x B^T) \qquad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.6.3 του [HJ90], το πλήθος των αρνητικών, μηδενικών και θετικών ιδιοτιμών του γινομένου ενός Ερμιτιανού πίνακα και ενός θετικά ορισμένου πίνακα είναι το ίδιο με εκείνο του Ερμιτιανού πίνακα, αντίστοιχα. Έτσι, για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$, ο πίνακας $D_\chi^* A D_\chi$ είναι θετικά ημι-ορισμένος. Αν $x \neq 0$ και κανένα διαγώνιο στοιχείο του A δεν είναι μηδενικό, τότε $D_\chi^* A D_\chi \neq 0$ και συνεπώς έχει τουλάχιστον μία θετική ιδιοτιμή. Αν ο B είναι θετικά ορισμένος τότε είναι και ο B^{T}. Επομένως, όλες οι ιδιοτιμές του $\left(D_\chi^* A D_\chi\right) B^T$ είναι μη αρνητικές και τουλάχιστον μια από αυτές είναι θετική, από όπου προκύπτει ότι $D_\chi^* A D_\chi B^T$ >0. Από τη σχέση (*) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το γινόμενο $A \circ B$ είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας. Ο πρώτος ισχυρισμός τώρα προέρχεται από την εφαρμογή του δεύτερου στους διαταραγμένους πίνακες $A_\varepsilon \equiv A + \varepsilon I$ και $B_\varepsilon \equiv B + \varepsilon I$, $\varepsilon > 0$, και για $\varepsilon \to 0$. Ο τρίτος (και τελευταίος) ισχυρισμός του θεωρήματος απορρέει από την παρατήρηση ότι αν ο πίνακας $A = [a_{i,j}]$ είναι θετικά ορισμένος, τότε $e_i^* A e_i = a_{ii} > 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n.$ □

Το Θεώρημα 2.1 εξασφαλίζει την κλειστότητα των συνόλων των θετικά ορισμένων και θετικά ημι-ορισμένων πινάκων υπό το γινόμενο Hadamard. Στη συνέχεια του κεφαλαίου, ενδιαφερόμαστε κυρίως για ποσοτικές βελτιώσεις αυτών των θεωρητικών αποτελεσμάτων.

Συμβολισμός. Όταν ένας πίνακας $X \in M_n$ έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές, τότε με $\lambda_{\min}(X)$ και $\lambda_{\max}(X)$ συμβολίζουμε την ελάχιστη και τη μέγιστη ιδιοτιμή του, αντίστοιχα. Επιπλέον, κατατάσσουμε τις ιδιοτιμές του ως εξής:

$$\lambda_{\min}(X) = \lambda_1(X) \leq \lambda_2(X) \leq \cdots \leq \lambda_n(X) = \lambda_{\max}(X).$$

Μια σχετικά αδύναμη ποσοτική ιδιότητα προκύπτει άμεσα, αναγνωρίζοντας ότι το γινόμενο Hadamard δύο θετικά ημι-ορισμένων πινάκων $A, B \in M_n$ είναι κύριος υποπίνακας του γινομένου Kronecker $A \otimes B$ (Λήμμα 1.1). Δεδομένου ότι οι ιδιοτιμές του $A \otimes B$ είναι γινόμενα ζευγών των ιδιοτιμών του A και B, οι ελάχιστες και μέγιστες ιδιοτιμές του $A \otimes B$ είναι $\lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B)$ και $\lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B)$. Όμως οι ιδιοτιμές οποιουδήποτε κύριου Ερμιτιανού πίνακα βρίσκονται μεταξύ της ελάχιστης και μέγιστης ιδιοτιμής (Θεώρημα 4.3.15 του [HJ90]), έτσι έχουμε το άνω και κάτω φράγμα:

$$\lambda_{\min}(A \circ B) \geq \lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B)$$

και

$$\lambda_{\max}(A \circ B) \geq \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B),$$

όπου οι πίνακες $A, B \in M_n$ είναι θετικά ημι-ορισμένοι. Αυτές οι εκτιμήσεις μπορεί να είναι αρκετά χρήσιμες, όμως για πολλούς λόγους δεν είναι αρκετά ακριβείς. Για παράδειγμα, εάν ο A είναι θετικά ημι-ορισμένος και $B = J$, ο πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία ισούνται με τη μονάδα (και του οποίου οι ιδιοτιμές είναι n και 0), οι παραπάνω εκτιμήσεις οδηγούν στο τετριμμένο κάτω φράγμα $\lambda_{\min}(A) = \lambda_{\min}(A \circ J) \geq \lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(J) = \lambda_{\min}(A)0 = 0$. Επίσης, αν ο A είναι θετικά ορισμένος και $B = A^{-1}$, τότε συμφώνα με αυτές τις εκτιμήσεις, ισχύει $\lambda_{\min}(A \circ A^{-1}) \geq \lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(A^{-1}) = \lambda_{\min}(A)/\lambda_{\max}(A),$ όπου κι εδώ επίσης το κάτω φράγμα που προέκυψε δεν είναι πολύ ικανοποιητικό. Αναμένεται λοιπόν να δούμε μια καλύτερη εκτίμηση για το κάτω φράγμα.

Παρουσιάζουμε πρώτα ένα ζεύγος ανισοτήτων που δείχνουν ότι η αναστροφή πίνακα μπορεί να εμφανιστεί με φυσικό τρόπο, όπως στο Λήμμα 1.5, όπου κάποιες φορές μπορεί και να αφαιρεθεί. Σημειώνουμε ότι αν ένας πίνακας $B \in M_n(\mathbb{C})$ είναι Ερμιτιανός, τότε $B^T = \overline{B} \neq B$, αν ο B έχει και μη πραγματικά στοιχεία.

2.2. Θεώρημα. Έστω $A, B \in M_n$, (Ερμιτιανοί) θετικά ημι-ορισμένοι πίνακες. Τότε ισχύει

$$(\alpha)\ \lambda_{\min}(A \circ B) \geq \lambda_{\min}(AB^T)$$

και

$$(\beta)\ \lambda_{\min}(A \circ B) \geq \lambda_{\min}(AB).$$

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.2 χρειαζόμαστε το ακόλουθο λήμμα, το οποίο είναι ανάλογο του γνωστού γεγονότος ότι το άθροισμα των τετραγώνων των απόλυτων τιμών των ιδιοτιμών ενός τετραγωνικού πίνακα είναι μικρότερο ή ίσο από την Frobenius νόρμα του πίνακα [HJ90]. Έστω $\|A\|_2 \equiv \left[tr\left(A^* A\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ η Frobenius νόρμα ενός πίνακα $A \in M_{m,n}$.

2.3. Λήμμα. Έστω δύο πίνακες $C, E \in M_n$ με E συμμετρικό $\left(E = E^T\right)$ και C αντιστρέψιμο και κανονικό. Τότε $\| C^{-1}EC^T \|_2 \geq \| E \|_2$.

Απόδειξη. Έστω $C = U^* DU$ είναι μια ορθομοναδιαία διαγωνοποίηση του C. Τότε

$$\| C^{-1}EC^T \|_2 = \| U^* D^{-1}UEU^T D\overline{U} \|_2 = \| D^{-1}UEU^T D \|_2$$

$$\geq \| UEU^T \|_2 = \| E \|_2,$$

όπου η δεύτερη και η τελευταία ισότητα προκύπτουν από το ότι η Frobenius νόρμα είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη (Κεφάλαιο 5 του [HJ90]), ενώ η ανισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι ο πίνακας UEU^T είναι συμμετρικός και $|t|^{-1} + |t| \geq 2$ για όλους του μη μηδενικούς αριθμούς $t \in \mathbb{C}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2. Αρκεί να θεωρήσουμε μόνο θετικά ορισμένους πίνακες A, B, καθώς η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε είναι τετριμμένη αν κάποιος από τους δύο πίνακες είναι μη αντιστρέψιμος.

Έστω $||| \cdot |||_2 \equiv \left(\lambda_{\max}\left(A^* A\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ η φασματική νόρμα στο M_n (η οποία επάγεται από τη νόρμα-2 των διανυσμάτων). Πρώτα αποδεικνύουμε το (β) ως εξής:

$$\lambda_{\min}(A \circ B) = \min_{\|x\|_2 = 1} x^* (A \circ B) x = \min_{\|D_X\|_2 = 1} tr(D_X^* A D_X B^T)$$

$$= \min_{\|D_X\|_2 = 1} tr(B^{\frac{1}{2}T} D A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} D_X B^{\frac{1}{2}T})$$

$$= \min_{\|D_X\|_2 = 1} tr([A^{\frac{1}{2}} D_X B^{\frac{1}{2}T}]^* [A^{\frac{1}{2}} D_X B^{\frac{1}{2}T}])$$

$$= \min_{\|D_X\|_2 = 1} \| A^{\frac{1}{2}} D_X B^{\frac{1}{2}T} \|_2^2 = \min_{\|D_X\|_2 = 1} \| A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} B^{-\frac{1}{2}} D_x B^{\frac{1}{2}T} \|_2^2$$

$$\geq ||| (A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}})^{-1} |||_2^{-2} \min_{\|D_X\|_2 = 1} \| B^{-\frac{1}{2}} D_x B^{\frac{1}{2}T} \|_2^2$$

$$\geq ||| (B^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}})^{-1} |||_2^{-2} \cdot 1$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\lambda_{\max}([B^{-\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}]^{*}[B^{-\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}])\right)^{-1} = \left(\lambda_{\max}(A^{-\frac{1}{2}}B^{-1}A^{-\frac{1}{2}})\right)^{-1} \\
&= \left(\lambda_{\max}(A^{\frac{1}{2}}[A^{-\frac{1}{2}}B^{-1}A^{-\frac{1}{2}}]A^{-\frac{1}{2}})\right)^{-1} = [\lambda_{\max}(B^{-1}A^{-1})]^{-1} \\
&= \lambda_{\min}(AB).
\end{aligned}
$$

Η δεύτερη ανισότητα προέρχεται από το Λήμμα 2.3, ενώ η πρώτη χρησιμοποιεί το δεδομένο ότι $\|RS\|_2 \leq |||R|||_2 \|S\|_2$ για κάθε $R, S \in M_n$.

Η σχέση (α) αποδεικνύεται εισάγοντας τον παράγοντα $B^{\frac{1}{2}T}\ B^{-\frac{1}{2}T}$:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\min}(A \circ B) &= \min_{\|D_X\|_2=1} \|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{2}T}D_x B^{\frac{1}{2}T}\|_2^2 \\
&\geq |||(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}})^{-1}|||_2^{-2} \min_{\|D_X\|_2=1} \|B^{-\frac{1}{2}T}D_x B^{\frac{1}{2}T}\|_2^2 \\
&\geq |||(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}T})^{-1}|||_2^{-2} \cdot 1 \\
&= [\lambda_{\max}(B^{-1T}A^{-1})]^{-1} \\
&= \lambda_{\min}(AB^{T}),
\end{aligned}
$$

όπου η δεύτερη ανισότητα οφείλεται στο γνωστό γεγονός ότι το άθροισμα των τετράγωνων των απόλυτων τιμών των ιδιοτιμών οποιουδήποτε πίνακα δεν είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο της νόρμας Frobenius. □

2.4. Παράδειγμα. Εάν A ή $B \in M_n(\mathbb{R})$, οι σχέσεις (α) και (β) του Θεωρήματος 2.2 συμπίπτουν. Σε γενικές γραμμές, όταν και οι δύο πίνακες A και B έχουν μιγαδικά στοιχεία, τότε το φάσμα των AB και AB^T μπορεί να διαφέρει και οι σχέσεις (α) και (β) του Θεωρήματος 2.2 μπορούν να εξάγουν διαφορετικές εκτιμήσεις. Για παράδειγμα, αν

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2i \\ 2i & 2 \end{bmatrix},
$$

τότε $\sigma(AB)=\{2\pm\sqrt{2}\}$, $\sigma(AB^T)=\{6\pm\sqrt{34}\}$ και $\sigma(A\circ B)=\{4\pm\sqrt{8}\}$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\lambda_{\min}(A\circ B)=4-\sqrt{8}>\lambda_{\min}(AB)=2-\sqrt{2}>\lambda_{\min}(AB^{\mathrm{T}})=6-\sqrt{34}$$
$$>\lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B)=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right).$$

Για θετικά ορισμένους $A, B\in M_n$, το Θεώρημα 2.2 (β) δηλώνει ότι

$$\lambda_1(AB)\le\lambda_1(A\circ B)$$

και η ανισότητα Oppenheim $(\det A)(\det B)\le\det(A\circ B)$ (Θεώρημα 7.8.6 του [HJ90]) συνεπάγεται ότι

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i(AB)\ \le\ \prod_{i=1}^{n}\lambda_i(A\circ B).$$

Οι παραπάνω δύο ανισότητες οδηγούν σε μια σειρά ανισοτικών σχέσεων των ιδιοτιμών

$$\prod_{i=1}^{k}\lambda_i(AB)\ \le\ \prod_{i=1}^{k}\lambda_i(A\circ B),\quad k=2,\dots,n-1.$$

και

$$\prod_{i=1}^{k}\lambda_i(A)\lambda_i(B)\ \le\ \prod_{i=1}^{k}\lambda_i(A\circ B),\quad k=1,2,\dots,n$$

οι οποίες γενικεύουν το Θεώρημα 2.2 (β).

Τώρα δίνουμε μια γενίκευση του Θεωρήματος 2.1 που τονίζει τον ρόλο των διαγώνιων τιμών ενός εκ των παραγόντων. Η απόδειξη μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: Ο πρώτος δείχνει ότι ένα χρήσιμο ποσοτικό αποτέλεσμα προέρχεται άμεσα από την ποιοτική σχέση στο Θεώρημα 2.1, ενώ ο δεύτερος χρησιμοποιεί ιδιότητες των τετραγωνικών μορφών που είναι ζωτικής σημασίας για την απόκτηση σχέσεων με περισσότερη ακρίβεια σχετικά με τις ιδιοτιμές ενός γινομένου Hadamard.

2.5. Θεώρημα. Έστω $A, B \in M_n$ Ερμιτιανοί πίνακες με $A=[a_{ij}]$ θετικά ημι-ορισμένο. Οποιαδήποτε ιδιοτιμή $\lambda(A\circ B)$ του $A\circ B$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B) \le \left(\min_{1\le i\le n}\alpha_{ii}\right)\lambda_{\min}(B)$$

$$\le \lambda(A\circ B)$$

$$\le \left(\min_{1\le i\le n}\alpha_{ii}\right)\lambda_{\max}(B) \le \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B).$$

Απόδειξη 1. Αφού οι πίνακες $B-\lambda_{\min}(B)I$ και A είναι θετικά ημι-ορισμένοι, τότε είναι και ο $A\circ(B-\lambda_{\min}(B)I)$. Έστω $x=[x_i]$ είναι ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του $A\circ B$ που αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή $\lambda(A\circ B)$. Τότε

$$0\le x^*[A\circ(B-\lambda_{\min}(B)I)]x = x^*(A\circ B)x-\lambda_{\min}(B)x^*(A\circ I)x$$

$$=\lambda(A\circ B)-\lambda_{\min}(B)\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 a_{ii}$$

$$\le \lambda(A\circ B)-\lambda_{\min}(B)\left(\min_{1\le i\le n}\alpha_{ii}\right)$$

που δίνει το κάτω φράγμα. Ο υπολογισμός για το άνω φράγμα είναι παρόμοιος. □

Απόδειξη 2. Έστω $x=[x_i] \in \mathbb{C}^n$ είναι ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A\circ B$ που αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή $\lambda(A\circ B)$. Εφόσον ο A είναι θετικά ημι-ορισμένος, υπάρχει $C \in M_n$ τέτοιος ώστε $A=CC^*$ (π.χ. $C=A^{\frac{1}{2}}$). Χωρίζουμε τον C σύμφωνα με τις στήλες του ως $C=\left[C_1\ C_2\ \cdots\ C_n\right]$ έτσι ώστε

$$A=\sum_{k=1}^{n}C_kC_k^*$$

Επίσης, έστω $C=\left[c_{ik}\right]$ ώστε το c_{ik} να υποδηλώνει το i στοιχείο της στήλης C_k. Τότε

$$\lambda(A\circ B)=x^*(A\circ B)x=tr(D_x^*AD_X B^T)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}tr(D_x^*C_kC_k^*D_xB^T)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (C_k^* D_x) B^T (D_x^* C_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\bar{x} \circ C_k)^* B^T (\bar{x} \circ C_k).$$

κι επομένως,

$$\lambda(A \circ B) \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_{\min}(B^T) \| \bar{x} \circ C_k \|_2^2$$

$$= \lambda_{\min}(B) \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \bar{x}_i c_{ik} \right|^2$$

$$= \lambda_{\min}(B) \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \sum_{k=1}^{n} |c_{ik}|^2$$

$$= \lambda_{\min}(B) \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 a_{ii}$$

$$\geq \lambda_{\min}(B) \left(\min_{1 \leq i \leq n} \alpha_{ii} \right).$$

Ο υπολογισμός για το άνω φράγμα είναι παρόμοιος. Οι εξωτερικές ανισότητες προέρχονται από το γεγονός ότι $\lambda_{\min}(A) \leq a_{ii} \leq \lambda_{\max}(A)$. □

Θα παρουσιάσουμε τώρα μια γενίκευση των ποιοτικών ισχυρισμών του Θεωρήματος 2.1 σε μια κατάσταση κατά την οποία οι πίνακες παρουσιάζονται σε σύνθετη μορφή. Η βασική παρατήρηση σχετικά με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.1 είναι ότι ένας θετικά ορισμένος πίνακας B δεν έχει κανένα διαγώνιο μηδενικό στοιχείο αν και μόνο αν $B = C^2$ για κάποιο Ερμιτιανό πίνακα C χωρίς μηδενικές στήλες.

2.6. Λήμμα. Έστω $n, p, n_1, \ldots, n_p$ θετικοί ακέραιοι αριθμοί με $n_1 + \cdots + n_p = n$. Έστω $B, C \in M_n$ Ερμιτιανοί πίνακες που ικανοποιούν τα ακόλουθα:

a) $B = C^2$, και

b) οι B και C είναι κατάλληλα διαμερισμένοι στη μορφή $B = [B_{ij}]_{i,j=1}^{p}$ και $C = [C_{ij}]_{i,j=1}^{p}$ με $B_{ij}, C_{ij} \in M_{n_i, n_j}$, για $i, j = 1, \ldots, p$.

Για δοθέν ακέραιο $i,$ με $1 \le i \le p$, ο B_{ii} είναι θετικά ορισμένος αν και μόνον αν $C_i \equiv \left|C_{ki}\right|_{k=1}^{p}$, τότε η i στήλη μπλοκ του $C,$ έχει πλήρη βαθμό $n_i.$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathbb{C}^{n_i}$, έχουμε

$$x^* B_{ii} x = \sum_{k=1}^{p} x^* (C_{ki})^* C_{ki} x = \sum_{k=1}^{p} \left\| C_{ki} x \right\|_2^2 \ge 0,$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $C_{ki} = 0$ για όλα τα $k = 1, \dots, p.$ Επομένως, $x^* B_{ii} x = 0$ αν και μόνο αν $C_i x = 0$, έτσι ώστε το θετικά ημι-ορισμένο μπλοκ B_{ii} να είναι μη αντιστρέψιμο αν και μόνο αν η στήλη μπλοκ C_i είναι βαθμού μικρότερου του $n_i.$ □

2.7. Θεώρημα. Έστω $n, p, n_1, \dots, n_p$ θετικοί ακέραιοι αριθμοί με $n_1 + \cdots + n_p = n,$ κι έστω A, $B \in M_n$ θετικά ημι-ορισμένοι πίνακες. Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(a) οι A και B είναι κατάλληλα διαμερισμένοι στη μορφή A=$[A_{ij}]_{i,j=1}^{p}$ και B=$[B_{ij}]_{i,j=1}^{p}$ με A_{ij}, $B_{ij} \in M_{n_i, n_j}$ για $i, j = 1, \dots, p,$

(b) $A_{ij} = a_{ij} J_{n_i, n_j}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, \dots, p$, όπου με $J_{r,s}$ συμβολίζουμε τον $r \times s$ πίνακα του οποίου τα στοιχεία ισούνται όλα με τη μονάδα,

(c) ο πίνακας $[a_{ij}]_{i,j=1}^{p} \in M_p$ είναι θετικά ορισμένος, και

(d) ο πίνακας B_{ii} είναι θετικά ορισμένος για κάθε $i = 1, \dots, p.$

Τότε ο πίνακας $A \circ B$ είναι θετικά ορισμένος.

Απόδειξη. Εφόσον $B \ge 0,$ υπάρχει ένας Ερμιτιανός πίνακας C έτσι ώστε $B = C^2$. Διαχωρίζουμε τον C σε A και B ως C=$[C_{ij}]_{i,j=1}^{p}$ και θεωρούμε ότι $C_k \equiv [C_{ik}]_{i=1}^{p}$ υποδηλώνει την k στήλη μπλοκ του C. Εφόσον κάθε διαγώνιο μπλοκ B_{ii} είναι θετικά ορισμένο, το Λήμμα 2.6 βεβαιώνει ότι κάθε στήλη μπλοκ C_i είναι πλήρους βαθμού n_i, $i = 1, \dots, p.$ Διαχωρίζουμε οποιοδήποτε διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ ως $x = [x_i]_{i=1}^{p}$ με $x_i \in \mathbb{C}^{n_i}$, για $i = 1, \dots, p.$ Τότε,

$$x^*(A\circ B)x = x^*(A\circ C^2)x = \sum_{i,j=1}^{p} a_{ij}x_i^*(C_i)^*C_jx_j$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\sum_{i,j=1}^{p} a_{ij}x_i^*(C_{ki})^*C_{kj}x_j$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\left[\mathrm{C}_{ik}{}^*x_i\right]_{i=1}^{p} A\left[\mathrm{C}_{ik}{}^*x_i\right]_{i=1}^{p} \;\geq\; 0.$$

Υποθέτουμε ότι $x^*(A\circ B)x = 0$. Αφού ο A είναι θετικά ορισμένος, έπεται ότι $\left[\mathrm{C}_{ik}{}^*x_i\right]_{i=1}^{p} = 0$ για $k=1,\ldots,p.$ Επομένως, για κάθε $i=1,\ldots,p,$ έχουμε ότι $C_{ik}{}^*x_i = C_{ki}x_i = 0$ για κάθε $k=1,\ldots,p,$ κι επομένως, $C_ix_i = 0$. Εφόσον ο C_i είναι πλήρους βαθμού στηλών (δηλαδή όλες οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες), έπεται ότι $x_i = 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $x=0$ και $A\circ B$ >0. □

2.8. Πόρισμα. Έστω $n, p, n_1,\ldots,n_p$ θετικοί ακέραιοι αριθμοί με $n_1+\cdots+n_p = n,$ κι έστω A, B, $C \in M_n$ Ερμιτιανοί πίνακες που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

(a) οι A, B και C διαμερίζονται κατάλληλα στη μορφή $A=[A_{i,j}]_{i,j=1}^{p}$, B=$[B_{ij}]_{i,j=1}^{p}$ και C=$[C_{ij}]_{i,j=1}^{p}$ με $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in M_{n_i,n_j}$ για $i, j=1,\ldots,p,$

(b) $A_{ij} = a_{ij}J_{n_in_j}$ και $B_{ij} = \beta_{ij}J_{n_in_j}$ με $a_{ij}, \beta_{ij} \in$ □ για $i, j=1,\ldots,p$, όπου με $J_{r,s}$ συμβολίζουμε τον $r\times s$ πίνακα του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με τη μονάδα,

(c) ο πίνακας $[\alpha_{ij}]_{i,j=1}^{p} \in M_p$ είναι θετικά ορισμένος,

(d) $\beta_{ij} \neq 0$ για $i, j=1,\ldots,p,$ και

(e) κάθε στήλη μπλοκ $C_j \equiv [C_{ij}]_{i=1}^{p} \in M_{n,n_j}$ έχει μέγιστο βαθμό n_j, $j=1,\ldots,p.$

Τότε ο $A\circ(B\circ C)^2$ είναι θετικά ορισμένος.

Απόδειξη. Για κάθε $j=1,\ldots,p,$ έστω $B_j \equiv [B_{ij}]_{i=1}^{p}$ δηλώνει την j στήλη μπλοκ του $B.$ Λόγω της ειδικής μπλοκ (σύνθετης) δομής του B και του γεγονότος ότι όλα τα στοιχεία του B είναι μη μηδενικά για κάθε $j=1,\ldots,p,$ οι γραμμές του πίνακα $B_j\circ C_j$ παράγουν τον ίδιο υπόχωρο με τις γραμμές του πίνακα C_j. Επομένως, $\operatorname{rank}(B_j \circ C_j) = \operatorname{rank}(C_j) = n_j$ για $j = 1, 2, \ldots, p$. Το Λήμμα 2.6 εξασφαλίζει ότι κάθε διαγώνιο μπλοκ του $(B \circ C)^2$ είναι θετικά ορισμένο, επομένως το αποτέλεσμα προκύπτει από το Θεώρημα 2.7.

Κεφάλαιο 3.

Οι Πίνακες *Ao(A^-1)^T και AoA^-1*

Όπως αναφέραμε και στο εισαγωγικό Κεφάλαιο 0, οι ειδικοί πίνακες $A\circ\left(A^{-1}\right)^T$ και $A\circ A^{-1}$ προκύπτουν με φυσικό τρόπο και παρουσιάζουν μια ειδική δομή.

3.1. Ορισμός. Αν ένας τετραγωνικός πίνακας $A\in M_n$ είναι αντιστρέψιμος, τότε ορίζουμε

$$\Phi(A)\equiv A\circ A^{-1} \quad \text{και} \quad \Phi_{\mathrm{T}}(A)\equiv A\circ (A^{-1})^T.$$

Καταγράφουμε κάποια αλγεβρικά δεδομένα σχετικά με τους Φ και Φ_T, τα οποία αποδεικνύονται με άμεσους υπολογισμούς, στο ακόλουθο λήμμα.

3.2. Λήμμα. Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $A\in M_n$, ισχύουν τα ακόλουθα:

(a) Τα αθροίσματα όλων των γραμμών και στηλών του $\Phi_T\left(A\right)$ είναι ίσα με τη μονάδα.

(b) Για κάθε αντιστρέψιμους διαγώνιους πίνακες $D,E\in M_n$,

i. $\Phi_T\left(DAE\right)=\Phi_T\left(A\right)$, και

ii. $\Phi\left(DAE\right)=\left(D^{-1}E\right)^{-1}\Phi\left(A\right)\left(D^{-1}E\right)$.

(c) Για κάθε πίνακες μετάθεσης $P\,,Q\in M_n$, ισχύει $\Phi_T(PAQ)=P\Phi_T(A)Q$.

(d) Για κάθε πίνακα μετάθεσης $P\in M_n$, ισχύει $\Phi_T\left(P\right)=P$.

(e) $\Phi(A^{-1})=\Phi(A)$, $\Phi(A^T)=\Phi(A)^T$ και $\Phi_T(A^{-1})=\Phi_T(A^T)$.

3.3. Θεώρημα. Έστω ένας θετικά ορισμένος πίνακας $A\in M_n$. Τότε

$$(\alpha)\ \lambda_{\min}\left(\Phi\left(A\right)\right)\geq 1$$

και

(β) $\lambda_{\min}\left(\Phi_T\left(A\right)\right)=1.$

Απόδειξη. Το (α) προκύπτει από το Θεώρημα 2.2 (β), ενώ το (β) προκύπτει από το Θεώρημα 2.2 (α) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $1 \in \sigma(\Phi_T(A))$ λόγω του Λήμματος 3.2 (a). □

Σύμφωνα και με το Θεώρημα 2.2, οι πίνακες $\Phi\left(A\right)$ και $\Phi_T\left(A\right)$ συμπίπτουν αν ο Ερμιτιανός πίνακας A είναι πραγματικός, όπου ισχύει το ακόλουθο πόρισμα.

3.4. Πόρισμα. Έστω ένας πραγματικός συμμετρικός και θετικά ορισμένος $A \in M_n$. Τότε

(α) ο πίνακας $\Phi\left(A\right)-I$ είναι μη αντιστρέψιμος θετικά ημι-ορισμένος,

το οποίο συμβολίζεται και με $\Phi\left(A\right)\geq I$,

και

(β) ο πίνακας $\Phi_T\left(A\right)-I$ είναι μη αντιστρέψιμος θετικά ημι-ορισμένος,

το οποίο συμβολίζεται και με $\Phi_T\left(A\right)\geq I.$

3.5. Παράδειγμα. Οι πίνακες $\Phi\left(A\right)-I$ και $\Phi_T\left(A\right)-I$ στα (α) και (β) του Πορίσματος 3.4 μπορούν να είναι (αντιστρέψιμοι) θετικά ορισμένοι αν ο πίνακας A έχει μη πραγματικά στοιχεία. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τον (Ερμιτιανό) θετικά ορισμένο πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1-i & -i \\ 1+i & 2 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε ο πίνακας

$$A\circ A^{-1}-I=\begin{bmatrix} 2 & -1+i & 1-i \\ -1-i & 3 & -2-i \\ 1+i & -2+i & 3 \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος με τη μικρότερη ιδιοτιμή του ίση με 0.44746.

Όπως συμβαίνει συχνά με παρόμοια αποτελέσματα της Ανάλυσης Πινάκων, οι ιδιότητες του Πορίσματος 3.4 μπορούν να βελτιωθούν με την εισαγωγή ενδιάμεσων όρων. Επισημαίνεται ότι, στο υπόλοιπο μέρος της εργασίας, διατηρείται ο συμβολισμός των ανισώσεων του Πορίσματος 3.4.

3.6. Θεώρημα. Έστω ένας θετικά ορισμένος πίνακας $A \in M_n$ και ο αντίστροφος του, $B = A^{-1}$, οι οποίοι είναι κατάλληλα διαμερισμένοι στη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} \end{bmatrix}$$

με το μπλοκ A_{11} να είναι τετραγωνικό. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\text{(α)}\ \ \Phi(A) \geq \begin{bmatrix} \Phi(B_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi(A_{22}) \end{bmatrix} \geq I \quad \text{και} \quad \Phi(A) \geq \begin{bmatrix} \Phi(A_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi(B_{22}) \end{bmatrix} \geq I,$$

και

$$\text{β)}\ \ \Phi_T(A) \geq \begin{bmatrix} \Phi_T(B_{11}^{-1}) & 0 \\ 0 & \Phi_T(A_{22}) \end{bmatrix} \geq I \quad \text{και} \quad \Phi_T(A) \geq \begin{bmatrix} \Phi_T(A_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi_T(B_{22}^{-1}) \end{bmatrix} \geq I.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα 1.6, οι πίνακες

$$A_1 \equiv A - \begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B_1 \equiv B - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ημι-ορισμένοι, και από το Θεώρημα 2.1, ο πίνακας $A_1 \circ B_1$ είναι θετικά ημι-ορισμένος. Αυτό σημαίνει ότι

$$A \circ B \geq A \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} + B \circ \begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(B_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi(A_{22}) \end{bmatrix},$$

η οποία είναι η πρώτη ανισότητα που περιλαμβάνει τον πρώτο ενδιάμεσο πίνακα στο (α). Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από την επανειλημμένη εφαρμογή του πρώτου έως ότου κάθε μπλοκ να είναι 1×1, οδηγώντας τελικά στον μοναδιαίο (ταυτοτικό) πίνακα I. Οι ανισότητες που αφορούν τον δεύτερο ενδιάμεσο πίνακα επαληθεύονται με τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιώντας τους πίνακες

$$A_2 \equiv A - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B_2 \equiv B - \begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

στις θέσεις των A_1 και B_1, αντίστοιχα. Οι ανισότητες (β) αποδεικνύονται παρόμοια χρησιμοποιώντας τον πίνακα B_1^T στη θέση του B_1 και τον πίνακα B_2^T στη θέση του B_2. □

3.7. Παράδειγμα. Άλλη μια εικασία για βελτίωση του Πορίσματος 3.4 (α) είναι

$$\Phi(A) \geq \begin{bmatrix} \Phi(A_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi(A_{22}) \end{bmatrix} \geq I$$

χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του Θεωρήματος 3.6. Δυστυχώς, αυτό δεν ισχύει, όπως φαίνεται από το ακόλουθο αντιπαράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 5 \\ 6 & 15 & 9 & 11 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 5 & 11 & 7 & 9 \end{bmatrix} \in M_4,$$

όπου ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος. Για τη διαμέριση με $A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$ και $A_{22} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, έχουμε τον πίνακα

$$\Phi(A) - \begin{bmatrix} \Phi(A_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi(A_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 10 & -8 & -15 \\ 10 & 10 & -9 & -11 \\ -8 & -9 & 7.2 & 9.8 \\ -15 & -11 & 9.8 & 16.2 \end{bmatrix}$$

ο οποίος δεν είναι θετικά ημι-ορισμένος, διότι ο κύριος υποπίνακας $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ -9 & 7.2 \end{bmatrix}$ έχει αρνητική ορίζουσα. Για τις ανισότητες του τύπου που αναφέρεται στο Θεώρημα 3.6, για να είναι σωστοί, πρέπει να επιλέγεται ένα μπλοκ από κάθε ένα από τους A και A^{-1}.

3.8. Παρατήρηση. Εφόσον $I = AA^{-1}$ για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $A \in M_n$, το Πόρισμα 3.4 (α) ερμηνεύεται ως

$$A \circ A^{-1} \geq AA^{-1}$$

για κάθε (Ερμιτιανό) θετικά ορισμένο πίνακα $A \in M_n$, όπου το γινόμενο Hadamard κυριαρχεί επί του συνηθισμένου γινομένου των A και A^{-1} (με την έννοια ότι η διαφορά $A \circ A^{-1} - AA^{-1}$ είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας).

Μπορεί κανείς να διερωτηθεί πόσο γενικό είναι αυτό το φαινόμενο, δηλαδή αν για τα θετικά ορισμένα ζεύγη A, B ισχύει

$$A \circ B \geq AB.$$

Αν θεωρήσουμε ζεύγη πινάκων $A, B \in M_n$ στα οποία $B = f(A)$ για κάποια συνάρτηση f, τότε προκύπτει ότι η συνάρτηση αντιστροφής $f(A) = A^{-1}$ είναι ουσιαστικά το μοναδικό παράδειγμα του φαινομένου $A \circ f(A) \geq A f(A)$.

3.9. Ορισμός. Μια συνάρτηση $f(\cdot)$ που απεικονίζει το σύνολο των $n \times n$ θετικά ημι-ορισμένων πινάκων στο σύνολο M_n καλείται συνήθης συνάρτηση αν υπάρχουν n πραγματικές συναρτήσεις $f_i : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$, τέτοιες ώστε για κάθε ορθομοναδιαία διαγωνοποίηση

$$A = U^* \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, U, \quad \text{με } U \in M_n \text{ ορθομοναδιαίο και } \lambda_i \in \mathbb{R}_+,$$

να έχουμε

$$f(A) = U^* \mathrm{diag}(f_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \ldots, f_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))\, U.$$

Ο παραπάνω ορισμός εξασφαλίζει ότι, ο πίνακας $f(A)$ αντιμετατίθεται (υπό το συνήθη πολλαπλασιασμό) με τον πίνακα A, γεγονός που είναι απαραίτητο προκειμένου ο πίνακας $Af(A)$ να είναι Ερμιτιανός, και ο $f(A)$ εξαρτάται από τον A. Η υπόθεση ότι η συνάρτηση $f(\cdot)$ απεικονίζει τον $\mathbb{R}_+^n$ στον $\mathbb{R}_+$ διασφαλίζει ότι ο πίνακας $f(A)$ είναι θετικά ορισμένος όταν ο A είναι θετικά ορισμένος. Επομένως, μια συνήθης συνάρτηση απεικονίζει το σύνολο των θετικά ορισμένων πινάκων στον εαυτό του.

3.10. Θεώρημα. Έστω $f(\cdot)$ μια συνήθης συνάρτηση στους θετικά ορισμένους πίνακες στο M_n. Τότε $A \circ f(A) \geq Af(A)$ για όλους τους θετικά ορισμένους $A \in M_n$ αν και μόνο αν $f(A)=\mathrm{g}(A)A^{-1}$ για κάθε θετικά ορισμένο $A \in M_n$, όπου η $\mathrm{g}(\cdot)$ είναι μια θετική πραγματική συνάρτηση στους $n \times n$ θετικά ορισμένους πίνακες.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το θεώρημα αυτό, αρκεί να αποδείξουμε την αναγκαιότητα της ισχυριζόμενης ιδιότητας της $f(\cdot)$. Επειδή η ανισότητα αυτή είναι θετικά ομογενής, η επάρκεια προκύπτει από το Πόρισμα 3.4 (α). Έστω $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ οι συναρτήσεις που ορίζουν τη συνήθη συνάρτηση $f(\cdot)$ και έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ οι θετικές ιδιοτιμές. Ισχυριζόμαστε ότι:

$$\lambda_1 f_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_2 f_2\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) = \cdots = \lambda_n f_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Τότε, εφόσον οι αριθμοί αυτοί είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A\, f(A)$, έπεται ότι $Af(A) = \lambda_i f_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) I$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Επομένως, $f(A)=g(A)A^{-1}$ με $g(A)=\lambda_1 f_1(\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_n)$ μια θετική (βαθμωτή) πραγματική συνάρτηση όπως ισχυριστήκαμε.

Στόχος μας λοιπόν είναι να αποδείξουμε ότι $\lambda_k f_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_j f_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ για κάθε ζευγάρι διαφορετικών δεικτών k και j. Χωρίς βλάβη της γενικότητας (η ίδια απόδειξη λειτουργεί για οποιοδήποτε ζευγάρι), δείχνουμε το συγκεκριμένο ισχυρισμό για $k = 1$ και $j = 2$. Έστω

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A_i = U_i^* \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} U_i$$

για $i=1,2.$ Θεωρούμε τους πίνακες $A_i \equiv A_i \oplus diag(\lambda_3,\ldots,\lambda_n)$, $i=1,2.$ Εφόσον

$$A_i \circ f(A_i) - A_i f(A_i) = [(A_i \circ f(A_i)) - A_i f(A_i)] \oplus 0_{n-2},$$

όπου $0_{n-2} \in M_{n-2}$ είναι ο μηδενικός πίνακας, επαρκεί για να θεωρήσουμε τις επιπτώσεις των ανισοτήτων

$$A_i \circ f\left(A_i\right) \geq A_i f\left(A_i\right), \qquad i=1,2,$$

για 2×2 πίνακες. Με απευθείας υπολογισμούς προκύπτει ότι

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1-\lambda_2 \\ \lambda_1-\lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad f(A_1) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} f_1(\lambda)+f_2(\lambda) & f_1(\lambda)-f_2(\lambda) \\ f_1(\lambda)-f_2(\lambda) & f_1(\lambda)+f_2(\lambda) \end{bmatrix}$$

$$\text{και} \quad A_1 f(A_1) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1 f_1(\lambda)+\lambda_2 f_2(\lambda) & \lambda_1 f_1(\lambda)-\lambda_2 f_2(\lambda) \\ \lambda_1 f_1(\lambda)-\lambda_2 f_2(\lambda) & \lambda_1 f_1(\lambda)+\lambda_2 f_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το συμβολισμό $f_i(\lambda)$ για να δηλώσουμε $f_i(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $i=1,2.$ Έπεται ότι

$$A_1 \circ f(A_1) - A_1 f\left(A_1\right) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \lambda_2 f_1(\lambda)+\lambda_1 f_2(\lambda)-\left[\lambda_1 f_1(\lambda)+\lambda_2 f_2(\lambda)\right] & 3\lambda_2 f_2(\lambda)\text{-}\lambda_1 f_1(\lambda)-\lambda_1 f_2(\lambda)-\lambda_2 f_1(\lambda) \\ 3\lambda_2 f_2(\lambda)\text{-}\lambda_1 f_1(\lambda)-\lambda_1 f_2(\lambda)-\lambda_2 f_1(\lambda) & \lambda_2 f_1(\lambda)+\lambda_1 f_2(\lambda)-\left[\lambda_1 f_1(\lambda)+\lambda_2 f_2(\lambda)\right] \end{bmatrix}.$$

Αφού ο πίνακας $A_1 \circ f(A_1) - A_1 f\left(A_1\right)$ είναι θετικά ημι-ορισμένος, είναι αναγκαίο να ισχύει $\lambda_2 f_2\left(\lambda\right) \geq \lambda_1 \mathrm{f}_1\left(\lambda\right)$ διότι ο αριθμός $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\left(A_1 \circ f(A_1) - A_1 f(A_1)\right)\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}$ πρέπει να είναι μη αρνητικός. Παράλληλοι υπολογισμοί που περιλαμβάνουν τον

$$A_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1-\lambda_2 \\ \lambda_1-\lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2 \end{bmatrix},$$

με αντιστροφή των ρόλων των πρώτων και δεύτερων μεταβλητών και συναρτήσεων, οδηγούν στη δεύτερη αναγκαία συνθήκη $\lambda_1 f_1(\lambda) \geq \lambda_2 f_2(\lambda)$. Τελικά, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1 f_1(\lambda) = \lambda_2 f_2(\lambda)$ και γενικότερα, ότι $\lambda_k f_k(\lambda) = \lambda_j f_j(\lambda)$, $k \neq j$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Αν θεωρούμε τις $\Phi(\cdot)$ και $\Phi_T(\cdot)$ ως απεικονίσεις από τους αντιστρέψιμους πίνακες στο M_n στο σύνολο M_n, είναι φυσικό να αναρωτηθούμε τις είδους απεικονίσεις δίνουν οι επαναλήψεις των $\Phi(\cdot)$ και $\Phi_T(\cdot)$. Ορίζουμε την k-οστή επανάληψη του Φ που εφαρμόζεται στον πίνακα A ως $\Phi^{(k)}(A) \equiv \Phi(\Phi^{(k-1)}(A))$ με $\Phi^{(0)}(A) \equiv A$, και ομοίως και για $\Phi_T^{(k)}$. Εδώ, υπάρχει η παραδοχή ότι οι πίνακες που λαμβάνουμε με τις διαδοχικές επαναλήψεις είναι αντιστρέψιμοι έτσι ώστε οι $\Phi(\cdot)$ και $\Phi_T(\cdot)$ να μπορούν να εφαρμοστούν κατ' επανάληψη. Ακολούθως, παρουσιάζουμε κάποια ενδιαφέροντα αποτελέσματα, χωρίς αποδείξεις.

3.11. Θεώρημα. Αν ο πίνακας $A \in M_n$ είναι θετικά ορισμένος, τότε

$$(\alpha) \quad \lim_{k\to\infty} \Phi^{(k)}(A) = I$$

και

$$(\beta) \quad \lim_{k\to\infty} \Phi_T^{(k)}(A) = I.$$

Τα όρια του Θεωρήματος 3.11 αξίζουν να συγκριθούν με τις ανισοτικές σχέσεις του Πορίσματος 3.4, όπου καθίσταται σαφές ότι οι συγκλίσεις του Θεωρήματος 3.11 είναι από πάνω και ότι τα φράγματα του Πορίσματος 3.4 είναι βέλτιστα (δηλαδή, τα "μικρότερα" δυνατά).

Στην Παράγραφο 0.3 αναφέραμε πως η απεικόνιση Φ_T αντιστοιχεί τις ιδιοτιμές ενός διαγωνοποιήσιμου πίνακα στα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του. Το γενικότερο αποτέλεσμα από την άποψη αυτή, την απόδειξη του οποίου επίσης παραλείπουμε, δείχνει ότι η συνθήκη για το ίχνος είναι ο μόνος περιορισμός, με προφανή εξαίρεση.

3.12. Θεώρημα. Έστω πίνακας $A \in M_n$ και n αριθμοί $b_{11}, \ldots, b_{nn} \in \mathbb{C}$. Υποθέτουμε επίσης ότι ο A δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του μοναδιαίου πίνακα, δηλαδή $A \neq aI,\ a \in \mathbb{C}$. Τότε υπάρχει πίνακας $B \in M_n$ που είναι όμοιος με τον A και έχει διαγώνια στοιχεία $b_{11}, \ldots, b_{nn}$ αν και μόνο αν

$$b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{nn} = trA.$$

Κεφάλαιο 4.

Ανισότητες για το Γινόμενο Hadamard

Μέχρι στιγμής, έχουμε επικεντρώσει το ενδιαφέρον μας στα γινόμενα Hadamard σε ειδικές τάξεις πινάκων, κυρίως των (Ερμιτιανών) θετικά ημι-ορισμένων πινάκων. Σε αυτή την ενότητα, μελετάμε ανισότητες για γενικούς πίνακες από το M_n και το $M_{m,n}$, παρόλο που συμπεριλαμβάνουμε και κάποιες ειδικές ανισότητες για Ερμιτιανούς ή θετικά ημι-ορισμένους πίνακες. Εξετάζουμε κλασικές αλλά και πιο πρόσφατες ανισότητες για το γινόμενο Hadamard, πολλές από τις οποίες συνδέονται ως ειδικές περιπτώσεις μιας νέας βασικής οικογένειας ανισοτήτων (βλέπετε το Θεώρημα 5.2 παρακάτω). Το επόμενο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην κύρια οικογένεια ανισοτήτων και πως προκύπτουν ορισμένες από τις ανισότητες του τρέχοντος κεφαλαίου.

Υπενθυμίζουμε ότι οι ιδιάζουσες τιμές $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \cdots \geq \sigma_p(A) \geq 0$ του $A \in M_{m,n}$ είναι οι τετραγωνικές ρίζες των $p = \min\{m,n\}$ ενδεχομένως μη μηδενικών ιδιοτιμών του πίνακα A^*A και του πίνακα AA^*. Για ευκολία, υιοθετούμε τη σύμβαση ότι $\sigma_i(A) \equiv 0$ αν $i > p$. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές των A^*A και AA^* συμπίπτουν. Η μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή $\sigma_1(\cdot)$ είναι μια ορθομοναδιαία αναλλοίωτη συνάρτηση του $A \in M_{m,n}$ (δηλαδή, $\sigma_1(UAV) = \sigma_1(A)$ για όλους τους ορθομοναδιαίους πίνακες $U \in M_m$, και $V \in M_n$) η οποία αποτελεί στην πραγματικότητα μια νόρμα πίνακα στο $M_{m,n}$ που συμβολίζεται με $\|\cdot\|_2$ και ονομάζεται φασματική νόρμα.

Η παλαιότερη και μία από τις απλούστερες ανισότητες που αφορούν το γινόμενο Hadamard και τις ιδιάζουσες τιμές οφείλονται στον Schur. Ισχυρίζεται ότι η φασματική νόρμα είναι υπο-πολλαπλασιαστική σε σχέση με το γινόμενο Hadamard (όπως επίσης και με το σύνηθες γινόμενο πινάκων).

4.1. Θεώρημα. Για κάθε $A, B \in M_{m,n}$, ισχύει

$$\sigma_1(A \circ B) \le \sigma_1(A)\sigma_1(B).$$

Το φράγμα του Θεωρήματος 4.1 μπορεί να βελτιωθεί με διαφόρους τρόπους, και πολλές ανισότητες του γινομένου Hadamard είναι γενικεύσεις αυτού.

4.2. Ορισμός. Για $A = [a_{i,j}] \in M_{m,n}$, θεωρούμε τη φθίνουσα ακολουθία των Ευκλείδιων μέτρων των γραμμών του A

$$r_1(A) \ge r_2(A) \ge \cdots \ge r_m(A)$$

και τη φθίνουσα ακολουθία των Ευκλείδιων μέτρων των στηλών του A

$$c_1(A) \ge c_2(A) \ge \cdots \ge c_n(A),$$

όπου $r_k(A)$ είναι η k-οστή μεγαλύτερη ποσότητα της μορφής $\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $i = 1, \dots, m,$ και $c_k(A)$ είναι η k-οστή μεγαλύτερη ποσότητα της μορφής $\left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $i = 1, \dots, n.$

4.3. Θεώρημα. Για κάθε $A, B \in M_{m,n}$, ισχύει

$$\sigma_1(A \circ B) \le r_1(A)c_1(B) \le \begin{Bmatrix} r_1(A)\sigma_1(B) \\ \sigma_1(A)c_1(B) \end{Bmatrix} \le \sigma_1(A)\sigma_1(B).$$

Απόδειξη. Από το [HJ91], γνωρίζουμε ότι $r_1(A), c_1(A) \le \sigma_1(A)$. Επομένως, αρκεί να επαληθεύσουμε την πρώτη ανισότητα. Εφόσον $\sigma_1(A \circ B) = \max |x^*(A \circ B)y|$ για όλα τα μοναδιαία διανύσματα $x \in \mathbb{C}^m$ και $y \in \mathbb{C}^n$ [HJ90], φράσσουμε την ποσότητα $|x^*(A \circ B)y|$, $x \in \mathbb{C}^m$, $y \in \mathbb{C}^n$, ως εξής:

$$\left|x^*(A\circ B)y\right| = \left|\sum_{i,j} \overline{x_i} a_{ij} b_{ij} y_j\right|$$

$$\leq \left(\sum_{i,j} \left|x_i a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j} \left|b_{ij} y_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_i \left|x_i\right|^2 \sum_j \left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_j \left|y_j\right|^2 \sum_i \left|b_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_i \left|x_i\right|^2 r_i(A)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_j \left|y_j\right|^2 c_j(B)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_i \left|x_i\right|^2 r_1(A)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_j \left|y_j\right|^2 c_1(B)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= r_1(A) c_1(B) \left\|x\right\|_2 \left\|y\right\|_2 ,$$

όπου η πρώτη ανισότητα είναι η ανισότητα Cauchy-Schwarz. □

4.4. Θεώρημα. Για κάθε $A, B \in M_{m,n}$, ισχύει

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A\circ B) \leq \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A)\sigma_i(B), \qquad k = 1,\dots,n.$$

Το θεώρημα αυτό προκύπτει από το Θεώρημα 4.17 παρακάτω.

Η ακολουθία ανισοτήτων στο Θεώρημα 4.4 περιλαμβάνει το Θεώρημα 4.1 για $k=1$ και μια ανισότητα που μοιάζει με την ανισότητα Cauchy-Schwarz στην περίπτωση όπου $k=n$.

Μια εφαρμογή των ανισοτήτων του Θεωρήματος 4.4 είναι ο χαρακτηρισμός των ορθομοναδιαία αναλλοίωτων νορμών πίνακα, όπως τη φασματική νόρμα, που είναι υπο-πολλαπλασιαστικές στο γινόμενο Hadamard. Υπενθυμίζουμε ότι μια νόρμα $N(\cdot)$ στο $M_{m,n}$ καλείται ορθομοναδιαία αναλλοίωτη αν $N(UAV) = N(A)$ για κάθε ορθομοναδιαίους πίνακες $U \in M_m$ και $V \in M_n$.

4.5. Ορισμός. Μια νόρμα $N(\cdot)$ στο $M_{m,n}$ καλείται υπο-πολλαπλασιαστική στο γινόμενο Hadamard αν $N(A \circ B) \le N(A)N(B)$ για κάθε $A, B \in M_{m,n}$.

Το Θεώρημα 4.1 δείχνει ότι η φασματική νόρμα είναι υπο-πολλαπλασιαστική στο γινόμενο Hadamard. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι για να είναι η $N(\cdot)$ μια (διανυσματική) νόρμα στο σύνολο $M_{m,n}$ (σε αντίθεση με μια νόρμα πίνακα), η υπο-πολλαπλασιαστική ιδιότητα $N(AB) \le N(A)N(B)$ δε χρειάζεται να ικανοποιείται για όλους τους πίνακες $A, B \in M_{m,n}$. Αν ικανοποιείται, τότε η νόρμα ονομάζεται νόρμα πίνακα. Η υπο-πολλαπλασιαστικότητα στο γινόμενο Hadamard είναι απλώς η ανάλογη ιδιότητα για το γινόμενο Hadamard, και δε είναι άμεσα σαφές αν συσχετίζονται οι δύο τύποι υπο-πολλαπλασιαστικότητας. Ωστόσο, είναι αξιοσημείωτο ότι είναι ισοδύναμες για ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες. Αυτό είναι ένα ακόμη παράδειγμα της στενής σχέσης μεταξύ του γινομένου Hadamard και του συνήθους γινομένου πινάκων.

4.6. Ορισμός. Μια νόρμα $N(\cdot)$ στο M_n καλείται κυρίαρχη κατά το φάσμα αν $N(A) \ge \rho(A)$, για κάθε $A \in M_n$, όπου $\rho(A)$ είναι η φασματική ακτίνα του A. Μια νόρμα $N(\cdot)$ στο $M_{m,n}$ καλείται κυρίαρχη κατά τις ιδιάζουσες τιμές αν $N(A) \ge \sigma_1(A)$ για κάθε $A \in M_{m,n}$.

Αν μια νόρμα στο M_n είναι είτε συνήθης υπο-πολλαπλασιαστική είτε κυρίαρχη κατά τις ιδιάζουσες τιμές, τότε είναι κυρίαρχη κατά το φάσμα. Το αντίστροφο δεν ισχύει, εκτός αν η νόρμα είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη.

4.7. Θεώρημα. Έστω $N(\cdot)$ μια ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα στο M_n. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) $N(\cdot)$ είναι κυρίαρχη κατά τις ιδιάζουσες τιμές.

(b) $N(\cdot)$ είναι υπο-πολλαπλασιαστική στο σύνηθες γινόμενο πινάκων, δηλαδή η $N(\cdot)$ είναι νόρμα πίνακα.

(c) $N(\cdot)$ είναι υπο-πολλαπλασιαστική στο γινόμενο Hadamard.

(d) $N(\cdot)$ είναι κυρίαρχη κατά το φάσμα.

Απόδειξη. Η απόδειξη περιλαμβάνει την ακόλουθη σειρά:

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a).$$

Έστω $g(\cdot)$ μια συμμετρική συνάρτηση που σχετίζεται με την ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα $N(\cdot)$, σύμφωνα με το Θεώρημα von Neumann [HJ90], δηλαδή η $g(x)$ είναι ένα απόλυτο (και επομένως μονότονο) διάνυσμα νόρμας στον $\mathbb{R}^n$ που αποτελεί συνάρτηση αναλλοίωτη στις μεταθέσεις των στοιχείων του x και $N(A) = g(s_1(A), s(A), \ldots, s_n(A))$ για κάθε $A \in M_n$.

(a) $\Rightarrow$ (b):

$$\begin{aligned} N(AB) &= g\left([\sigma_1(AB), \sigma_2(AB), \ldots, \sigma_n(AB)]^T\right) \\ &\leq g\left(\sigma_1(A)[\sigma_1(B), \sigma_2(B), \ldots, \sigma_n(B)]^T\right) \\ &= \sigma_1(A) g\left([\sigma_1(B), \sigma_2(B), \ldots, \sigma_n(B)]^T\right) \\ &= \sigma_1(A) N(B) \\ &\leq N(A) N(B). \end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα χρησιμοποιεί τις ανισότητες Weyl και τη μονοτονία της συμμετρικής συνάρτησης $g(\cdot)$. Η δεύτερη ισότητα χρησιμοποιεί την ομογενή ιδιότητα της $g(\cdot)$, ενώ η τελευταία ανισότητα χρησιμοποιεί την υπόθεση (a).

(b) $\Rightarrow$ (d): Αυτή η περίπτωση είναι γνωστή από το Θεώρημα 5.6.9 του [HJ90].

(d) $\Rightarrow$ (a): Αν $A = V\Sigma W^*$ είναι μια παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών του πίνακα A με ορθομοναδιαίους πίνακες $V, W \in M_n$ και διαγώνιο πίνακα $\Sigma = diag(\sigma_1(A), \ldots, \sigma_n(A))$, τότε $N(A) = N(V\Sigma W^*) = N(\Sigma) \geq \rho(\Sigma) = \sigma_1(A)$. Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι η νόρμα $N(\cdot)$ είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη και την υπόθεση (d) εφαρμοσμένη στον πίνακα Σ.

(a) $\Rightarrow$ (c): Υπενθυμίζουμε ότι, $G(A) \leq G(B)$ για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα $G(\cdot)$ στο M_n αν και μόνον αν $N_k(A) \leq N_k(B)$ για κάθε $k = 1, \ldots, n,$ όπου $N_k(C) \equiv \sigma_1(C) + \cdots + \sigma_k(A)$ είναι το άθροισμα των k μεγαλύτερων ιδιαζουσών τιμών του πίνακα C. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.4, έχουμε

$$N_k(A\circ B)=\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(A\circ B)\le\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(A)\sigma_i(B)\le\sum_{i=1}^{k}\sigma_1(A)\sigma_i(B)=N_k(\sigma_1(A)B),\qquad k=1,\dots,n.$$

Έπεται ότι $N(A\circ B)\le N(\sigma_1(A)B)$ διότι η νόρμα $N(\cdot)$ είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη. Όμως $N(\sigma_1(A)B)=\sigma_1(A)N(B)\le N(A)N(B)$ λόγω του (a), οπότε προκύπτει το (c).

(c) $\Rightarrow$ (a): Έστω $E_{11}=diag(1,0,0,\dots,0)\in M_n$ και επίσης, έστω $\Sigma=diag(\sigma_1(A),\dots,\sigma_n(A))$. Στη συνέχεια έχουμε $\sigma_1(A)N(E_{11})=N(\Sigma\circ E_{11})\le N(\Sigma)N(E_{11})=N(A)N(E_{11})$. Η πρώτη ισότητα χρησιμοποιεί την ομογενή ιδιότητα της $N(\cdot)$, η ανισότητα χρησιμοποιεί την υπόθεση (c) και η τελευταία ισότητα χρησιμοποιεί την παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών και το γεγονός ότι η νόρμα $N(\cdot)$ είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη. Λόγω του ότι η $N(\cdot)$ είναι θετική, μπορούμε να διαιρέσουμε με $N(E_{11})$ για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος. □

Η φασματική νόρμα είναι το πιο προφανές παράδειγμα μιας νόρμας που χαρακτηρίζεται από το Θεώρημα 4.7. Για το λόγο αυτό το Θεώρημα 4.7 μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση του Θεωρήματος 4.1. Φυσικά, το (a) του Θεωρήματος 4.7 καθιστά σαφές ότι η φασματική νόρμα είναι “minimal” μεταξύ των υπο-πολλαπλασιαστικών στο γινόμενο Hadamard και ορθομοναδιαία αναλλοίωτων νορμών στο M_n.

Είναι ένα σημαντικό (και κλασικό) γεγονός ότι υπάρχει μια ισχυρή εξάρτηση μεταξύ των διαγώνιων στοιχείων ενός Ερμιτιανού πίνακα και των ιδιοτιμών του. Ιδιαιτέρα αν $B=[b_{ij}]\in M_n$ είναι Ερμιτιανός, με φθίνουσα σειρά ιδιοτιμών

$$\lambda_1(B)\ge\lambda_2(B)\ge\cdots\ge\lambda_n(B)$$

και αύξουσα σειρά διαγώνιων τιμών

$$d_1(B)\ge d_2(B)\ge\cdots\ge d_n(B),$$

τότε ισχύει

$$\sum_{i=1}^{k} d_i(B) \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(B), \quad k = 1, \ldots, n,$$

με την ισότητα να ισχύει για $k = n$. Εφόσον οι διαγώνιες τιμές του B είναι ακριβώς οι ιδιοτιμές του $I \circ B$, αυτές οι ανισότητες μπορούν να γραφούν ως

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(I \circ B) \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(B), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Αυτό το κλασικό αποτέλεσμα μπορεί να γενικευθεί με ωραίο τρόπο, αντικαθιστώντας τον μοναδιαίο (ταυτοτικό) πίνακα οποιονδήποτε πίνακα συσχέτισης.

4.8. Ορισμός. Ένας (Ερμιτιανός) θετικά ημι-ορισμένος πίνακας είναι ένας πίνακας συσχέτισης αν κάθε διαγώνιο στοιχείο του είναι ίσο με τη μονάδα.

4.9. Θεώρημα. Έστω $A, B \in M_n$ Ερμιτιανοί πίνακες, όπου ο A είναι ένας πίνακας συσχέτισης. Διατάσσουμε τις ιδιοτιμές των πινάκων $A \circ B$ και B σε φθίνουσα σειρά, $\lambda_1(\square) \ge \lambda_2(\square) \ge \cdots \ge \lambda_n(\square)$. Τότε ισχύει

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\left(A \circ B\right) \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\left(B\right), \quad k = 1, \ldots, n.$$

4.10. Θεώρημα. Έστω $A, B \in M_n$ (Ερμιτιανοί) θετικά ημι-ορισμένοι πίνακες. Διατάσσουμε τις ιδιοτιμές των $A \circ B$ και B και τις τιμές της κύριας διαγώνιου $d_i(A)$ του A, κατά φθίνουσα σειρά $\lambda_1(\square) \ge \lambda_2(\square) \ge \cdots \ge \lambda_n(\square)$ και $d_1(A) \ge d_2(A) \ge \cdots \ge d_n(A)$. Τότε ισχύει

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\left(A \circ B\right) \le \sum_{i=1}^{k} d_i\left(A\right) \lambda_i\left(B\right), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από την ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 4.17 στην οποία ο πίνακας A είναι θετικά ημι-ορισμένος, με δεδομένο ότι $\lambda_i(B) = \sigma_i(B)$ όταν ο B είναι θετικά ημι-ορισμένος.

4.11. Ορισμός. Για έναν δεδομένο (σταθεροποιημένο, fixed) πίνακα $A \in M_{m,n}$ το γινόμενο Hadamard με τον A ορίζει μία γραμμική απεικόνιση $\mathrm{N}_A : M_{m,n} \to M_{m,n}$, με τύπο $\mathrm{N}_A(B) \equiv A \circ B.$

Από τη μεριά της Θεωρίας Τελεστών, υπάρχει ενδιαφέρον για τη γραμμική απεικόνιση $\mathrm{N}_A(B)$ και την επαγόμενη νόρμα της, όταν η νόρμα στο διανυσματικό χώρο των πινάκων $M_{m,n}$ είναι η φασματική νόρμα (δηλαδή, είναι η μέγιστη ιδιάζουσα τιμή).

4.12. Ορισμός. Αν $G(\cdot)$ είναι μια νόρμα στον διανυσματικό χώρο $M_{m,n}$, τότε η νόρμα $G^h(\cdot)$ που προκύπτει από τη G μέσω του γινομένου Hadamard ορίζεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} G^h(A) &\equiv \{G(\mathrm{N}_A(B)) : G(B) = 1\} \\ &= \max\{G(A \circ B) : G(B) = 1\}. \end{aligned}$$

Κάποια από τα αποτελέσματα που ακολουθούν σε αυτό το κεφάλαιο γίνονται περισσότερο κατανοητά με τη νόρμα $|||\cdot|||_2^h$. Ένα από αυτά τα αποτελέσματα είναι μια ανισότητα τύπου Cauchy-Schwarz για το γινόμενο Hadamard. Υπενθυμίζεται ότι ο πίνακας $\overline{A}$ είναι κατά στοιχείο (μιγαδικός) συζυγής του $A \in M_{m,n}$, έτσι ώστε ο $A \circ \overline{A}$ να έχει μη αρνητικά στοιχεία.

4.13. Θεώρημα. Για κάθε $A, B \in M_{m,n}$, ισχύει

$$|||A \circ B|||_2 \le |||A \circ \overline{A}|||_2^{\frac{1}{2}} \, |||B \circ \overline{B}|||_2^{\frac{1}{2}} \le |||A|||_2 \, |||B|||_2 .$$

Απόδειξη. Η δεύτερη ανισότητα έπεται από το Θεώρημα 4.1 κι έτσι έχουμε να αποδείξουμε μόνο την πρώτη. Αφού η φασματική νόρμα $|||\cdot|||_2$ προκύπτει από την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2$ στον $\mathbb{C}^n$, θεωρούμε ένα διάνυσμα $x = [x_j] \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε $\|x\|_2 = 1$ και $|||A \circ B|||_2 = \|(A \circ B)x\|_2$. Επίσης, έστω $A = [\alpha_{i,j}]$ και $B = [b_{i,j}]$. Τότε ισχύει

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(A\circ B\right)x\right\|_2^2 &= \sum_i \left|\sum_j a_{ij} b_{ij} x_j\right|^2 \\
&\le \sum_i \left[\sum_j |a_{ij}||x_j|^{\frac{1}{2}} |b_{ij}||x_j|^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\
&\le \sum_i \left[\sum_j |a_{ij}|^2 |x_j|\right]\left[\sum_k |b_{ik}|^2 |x_k|\right] \\
&\le \left[\sum_i \left[\sum_j |a_{ij}|^2 |x_j|\right]^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_i \left[\sum_j |b_{ij}|^2 |x_j|\right]^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left|\left|\left|\left(A\circ \overline{A}\right)|x|\right|\right|\right|_2 \left|\left|\left|\left(B\circ \overline{B}\right)|x|\right|\right|\right|_2 \\
&\le \left|\left|\left|A\circ \overline{A}\right|\right|\right|_2 \|x\|_2 \left|\left|\left|B\circ \overline{B}\right|\right|\right|_2 \|x\|_2 \\
&= \left|\left|\left|A\circ \overline{A}\right|\right|\right|_2 \left|\left|\left|B\circ \overline{B}\right|\right|\right|_2 .
\end{aligned}
$$

Η δεύτερη και η τρίτη ανισότητα είναι εφαρμογές της ανισότητας Cauchy-Schwarz, ενώ η τελευταία ανισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι η $\|\cdot\|_2$ είναι συμβατή με τη $|||\cdot|||_2$. Επίσης, η τελευταία ισότητα ισχύει, επειδή το διάνυσμα x είναι μοναδιαίο. Η επιλογή του x επαληθεύει την ανισότητα κατά τη λήψη τετραγωνικών ριζών. □

4.14. Θεώρημα. Έστω $A \in M_{m,n}$. Οι ακόλουθες τρεις δηλώσεις είναι ισοδύναμες:

(a) $|||A|||_2^h = |||A|||_2$

(b) $\left|\left|\left|A\circ \overline{A}\right|\right|\right|_2 = |||A|||_2^2$

(c) Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $a \ge 0$, δύο πίνακες μετάθεσης $P \in M_m$ και $Q \in M_n$, ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $U \in M_p$, $p \le m,n$ και ένας πίνακας συστολή $C \in M_{m-p,n-p}$ ώστε $A = aA\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}Q$.

Ακόμα ένα χρήσιμο σύνολο αριθμών που σχετίζεται με τον $A \in M_{m,n}$ είναι το παρακάτω.

4.15. Ορισμός. Για τον $A \in M_{m,n}$, δηλώνουμε τη φθίνουσα σειρά των τιμών της κύριας διαγωνίου του $P(A) \equiv \left(AA^*\right)^{\frac{1}{2}}$ ως

$$p_1(A) \geq p_2(A) \geq \cdots \geq p_m(A) \geq 0$$

και τη φθίνουσα σειρά των τιμών της κύριας διαγωνίου του $Q(A) \equiv \left(A^*A\right)^{\frac{1}{2}}$ ως

$$q_1(A) \geq q_2(A) \geq \cdots \geq q_n(A) \geq 0.$$

4.16. Θεώρημα. Για κάθε A, $B \in M_{m,n}$, έχουμε

$$\sigma_1(A \circ B) \leq \left[p_1(A) q_1(A)\right]^{\frac{1}{2}} \sigma_1(B).$$

Ειδικότερα, αν $m = n$ και ο πίνακας $A = [a_{i,j}]$ είναι θετικά ημι-ορισμένος, τότε

$$\sigma_1(A \circ B) \leq \left[\max_i a_{ii}\right] \sigma_1(B).$$

Το Θεώρημα 4.16, το οποίο προτείνει μια σύνδεση μεταξύ του Θεωρήματος 4.4 και 4.10, μπορεί να γενικευτεί με πολλούς τρόπους. Αρχικά, αυτό μπορεί να επεκταθεί σε μια ακολουθία από ανισότητες όπως των Θεωρημάτων 4.1, 4.3 και 4.4.

4.17. Θεώρημα. Για κάθε A, $B \in M_{m,n}$, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A \circ B) \leq \sum_{i=1}^{k} \left[p_i(A) q_i(A)\right]^{\frac{1}{2}} \sigma_i(B), \quad k = 1, \ldots, \min\{m, n\}.$$

Ειδικά, αν $m = n$ και ο πίνακας $A = [a_{i,j}]$ είναι θετικά ημι-ορισμένος, τότε

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A \circ B) \leq \sum_{i=1}^{k} d_i(A) \sigma_i(B), \quad k = 1, \ldots, n,$$

όπου $d_1(A) \geq d_2(A) \geq \cdots \geq d_n(A)$ δηλώνει τη φθίνουσα σειρά των στοιχείων της (κύριας) διαγωνίου του A.

Πριν γενικεύσουμε το Θεώρημα 4.17, θα παρουσιάσουμε κάποιες ανισότητες με παρόμοια μορφή που περιλαμβάνουν τα Ευκλείδεια μέτρα των στηλών c_i και των γραμμών r_i που καθορίζονται στον Ορισμό 4.2. Η πρώτη από αυτές τις ανισότητες επεκτείνει μέρος του Θεωρήματος 4.3, όπως το Θεώρημα 4.4 επεκτείνει το Θεώρημα 4.1.

Παρά το γεγονός ότι οι παρακάτω ισχυρισμοί:

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\left(A \circ B\right) \leq \sum_{i=1}^{k} p_i\left(A\right)\sigma_i\left(B\right), \quad k = 1, \ldots, m,$$

και

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\left(A \circ B\right) \leq \sum_{i=1}^{k} q_i\left(A\right)\sigma_i\left(B\right), \quad k = 1, \ldots, n,$$

δεν είναι γενικώς σωστοί, αντιστοιχούν σε ασθενέστερους ισχυρισμούς που περιλαμβάνουν τις ποσότητες c_i και r_i, και οι οποίοι είναι ορθοί.

4.18. Θεώρημα. Για κάθε $A \in M_{m,n}$, έχουμε

$$(\alpha) \quad \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\left(A \circ B\right) \leq \sum_{i=1}^{k} c_i\left(A\right)\sigma_i\left(B\right), \quad k = 1, \ldots, n$$

και

$$(\beta) \quad \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\left(A \circ B\right) \leq \sum_{i=1}^{k} r_i\left(A\right)\sigma_i\left(B\right), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Αυτές οι ανισότητες προκύπτουν από το Θεώρημα 5.1 παρακάτω, επιλέγοντας $X = I$ και $Y = A,$ ή $X = A^*$ και $Y = I$.

Οι ακόλουθες ανισότητες περιλαμβάνουν επίσης τις ποσότητες c_i και r_i.

4.19. Θεώρημα. Για κάθε $A \in M_{m,n}$, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\left(A \circ B\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \left[c_i\left(A\right) r_i\left(A\right)\right]^{\frac{1}{2}} \sigma_i\left(B\right), \quad k = 1, \ldots, \min\{m, n\}.$$

4.20. Παρατήρηση. Είναι φυσικό να τίθεται το ερώτημα, αν οι ανισότητες της μορφής

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i \left(A \circ B \right) \leq \sum_{i=1}^{k} c_i \left(A \right)^a r_i \left(A \right)^{1-a} \sigma_i \left(B \right)$$

ισχύουν για $0 \leq \alpha \leq 1$ και $k = 1, \ldots, \min\{m, n\}$. Οι μοναδικές τιμές του α για τις οποίες έχουν αποδειχθεί αυτές οι ανισότητες είναι $\alpha = 0,\ \frac{1}{2}$ και 1. Επιπλέον, δεν υπάρχουν γνωστά αντιπαραδείγματα για τις υπόλοιπες τιμές του α.

Κεφάλαιο 5.

Ιδιάζουσες Τιμές του Γινομένου Hadamard

Αρκετά από τα αποτελέσματα που συζητήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι παρόμοια με ανισότητες της μορφής

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\left(A \circ B\right) \leq \sum_{i=1}^{k} f_i\left(A\right)\sigma_i\left(B\right), \quad k = 1,\ldots,\min\{m,n\},$$

στην οποία οι συντελεστές $f_i\left(A\right)$ σχηματίζουν μια φθίνουσα σειρά που εξαρτάται κατά κάποιο τρόπο από το A. Οι ανισότητες των Θεωρημάτων 4.4, 4.9, 4.10, 4.17, 4.18 και 4.19 είναι όλες αυτής της μορφής. Στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να παρουσιάσουμε και να αποδείξουμε μια γενικότερη οικογένεια ανισοτήτων που περιλαμβάνει τις ανισότητες που μόλις αναφέρθηκαν. Έτσι, παρέχονται αποδείξεις για ορισμένες περιπτώσεις που παραλείφθηκαν στο Κεφάλαιο 4. Επιπλέον, η αποδεικτική μεθοδολογία θα χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη κάποιων επιπλέον ανισοτήτων που δεν είναι της παραπάνω μορφής

Το κύριο αποτέλεσμα συνδέει το σύνηθες (συμβατικό) γινόμενο με το γινόμενο Hadamard σε ανισότητες που περιλαμβάνουν τα Ευκλείδια μέτρα των στηλών που ορίζονται στον Ορισμό 4.2.

5.1. Θεώρημα. Έστω $A \in M_{m,n}$ και έστω $A = X^*Y$, η παραγοντοποίηση του A στην οποία $X \in M_{r,m}$ και $Y \in M_{r,n}$. Τότε

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\left(A \circ B\right) \leq \sum_{i=1}^{k} c_i\left(X\right)c_i\left(Y\right)\sigma_i\left(B\right), \quad k = 1,\ldots,\min\{m,n\}.$$

Αρχικά σημειώνουμε ότι η γενική, μη τετραγωνική εκδοχή του θεωρήματος έπεται από την τετραγωνική περίπτωση $m = n$ με αναγωγή των μη τετραγωνικών πινάκων σε τετραγωνικούς μοναδιαίους, με μη τετραγωνικά μηδενικά μπλοκ (μη τετραγωνικούς μηδενικούς υπουπίνακες). Έτσι, χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε για την απόδειξη ότι $m=n$. Για άλλες πιθανές χρήσεις, ωστόσο, καταγράφουμε και επαληθεύουμε ορισμένα από τα επιχειρήματα της απόδειξης στη γενική μη τετραγωνική περίπτωση. Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας $C \in M_{m,n}$ καλείται πίνακας συστολή αν $\sigma_1(C) \le 1$ και ότι το σύνολο των πινάκων συστολών στον διανυσματικό χώρο $M_{m,n}$ (δηλαδή η μοναδιαία μπάλα του $M_{m,n}$ ως προς τη φασματική νόρμα) είναι συμπαγές. Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 5.1, χρειαζόμαστε μία σειρά από λήμματα πέρα των δεδομένων που έχουμε στη διάθεση μας. Το πρώτο είναι το Λήμμα 3.5.12 του [HJ91], το οποίο γράφουμε εδώ για ευκολία.

5.2. Λήμμα. Έστω $L \in M_m$ και $M \in M_n$ δύο (Ερμιτιανοί) θετικά ημι-ορισμένοι πίνακες και έστω $A \in M_{m,n}$. Ο σύνθετος (μπλοκ) πίνακας

$$\begin{bmatrix} L & A \\ A^* & M \end{bmatrix} \in M_{m+n}$$

είναι θετικά ημι-ορισμένος αν και μόνο αν υπάρχει πίνακας συστολή $C \in M_{m,n}$ τέτοιος ώστε $A = L^{\frac{1}{2}} C M^{\frac{1}{2}}$.

5.3. Παρατήρηση. Για δεδομένο πίνακα $A \in M_{m,n}$, υπάρχουν πολλές χρήσιμες επιλογές των πινάκων L και M που κάνουν το σύνθετο (μπλοκ) πίνακα του Λήμματος 5.2 να είναι θετικά ημι-ορισμένος. Για παράδειγμα, αν $A = X^*Y$ για κάποιους $X \in M_{r,m}$ και $Y \in M_{r,n}$, τότε ο

$$\text{(α)} \quad \begin{bmatrix} X^*X & A \\ A^* & Y^*Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^*X & X^*Y \\ Y^*X & Y^*Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}$$

είναι προφανώς θετικά ημι-ορισμένος. Από το Λήμμα 5.2, συνεπάγεται επίσης ότι ο πίνακας

$$\text{(β)} \quad \begin{bmatrix} \sigma_1(A)I & A \\ A^* & \sigma_1(A)I \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ημι-ορισμένος, δεδομένου ότι ο πίνακας $A/\sigma_1(A)$ είναι πάντα μια συστολή.

5.4. Λήμμα. Έστω A, $B \in M_n$. Τότε

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\left(A \circ B\right) \le \sum_{i=1}^{k} c_i\left(X\right) c_i\left(Y\right) \sigma_1\left(B\right), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

για κάθε X, $Y \in M_{r,n}$ τέτοιους ώστε $A = X^* Y$.

Απόδειξη. Έστω ότι οι μπλοκ πίνακες

$$\begin{bmatrix} X^*X & A \\ A^* & Y^*Y \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} \sigma_1(B)I & B \\ B^* & \sigma_1(B)I \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ημι-ορισμένοι, επομένως είναι το Hadamard γινόμενο τους

$$\begin{bmatrix} X^*X & A \\ A^* & Y^*Y \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \sigma_1(B)I & B \\ B^* & \sigma_1(B)I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1(B)I \circ \left(X^*X\right) & A \circ B \\ \left(A \circ B\right)^* & \sigma_1(B)I \circ \left(Y^*Y\right) \end{bmatrix}$$

από το Θεώρημα 2.1. Από το Λήμμα 5.2 υπάρχει μια συστολή $C \in M_n$ τέτοια ώστε

$$A \circ B = \sigma_1\left(B\right)\left[I \circ \left(X^*X\right)\right]^{\frac{1}{2}} C \left[I \circ \left(Y^*Y\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Εφόσον οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα $\left[I \circ \left(X^*X\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ είναι οι τετραγωνικές ρίζες της κύριας διαγώνιου του πίνακα X^*X, οι οποίες είναι τα Ευκλείδεια μέτρα των στηλών του πίνακα X (και ομοίως για τον όρο Y^*Y) και όλες οι ιδιάζουσες τιμές του C είναι κυρίως μονάδες, συμπεραίνουμε από το Θεώρημα 3.3.4 του [HJ] ότι

$$\prod_{i=1}^{k} \sigma_i\left(A \circ B\right) \le \prod_{i=1}^{k} c_i\left(X\right) c_i\left(Y\right) \sigma_1\left(B\right), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Η ανισότητα αυτή και το Πόρισμα 3.3.10 του [HJ91] ολοκληρώνουν την απόδειξη. □

Για να μπορέσει το Λήμμα 5.4 να οδηγήσει στο Θεώρημα 5.1, είναι απαραίτητο να θεωρήσουμε το παρακάτω πόρισμα του Λήμματος 1.4:

5.5. Πόρισμα. Για κάθε $A, B, C \in M_{m,n}$, ισχύει

$$tr\left[\left(A \circ B\right)C\right] = tr\left[\left(A \circ C^T\right)B^{\mathrm{T}}\right].$$

5.6. Λήμμα. Έστω πίνακες $A, K_r, K_s \in M_n$ τέτοιοι ώστε $\sigma_1(K_r) = \cdots = \sigma_r(K_r) = 1,$ $\sigma_1(K_s) = \cdots = \sigma_s(K_s) = 1$ και $\sigma_{r+1}(K_r) = \cdots = \sigma_n(K_r) = \sigma_{s+1}(K_s) = \cdots = \sigma_n(K_s) = 0.$ Τότε ισχύει

$$\left|tr\left[\left(A \circ K_r\right)K_s\right]\right| \le \sum_{i=1}^{\min\{r,s\}} c_i\left(X\right)c_i\left(Y\right)$$

για κάθε $X, Y \in M_{r,n}$ τέτοιους ώστε $X^*Y = A.$

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 5.5, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $s \le r$. Έστω ότι $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του $(A \circ K_r)K_s$. Υπολογίζουμε το ίχνος

$$\begin{aligned}
\left|tr\left[\left(A \circ K_r\right)K_s\right]\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \sigma_i\left[\left(A \circ K_r\right)K_s\right] \le \sum_{i=1}^{n} \sigma_i\left(A \circ K_r\right)\sigma_i(K_s) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \sigma_i\left(A \circ K_r\right) \le \sum_{i=1}^{s} c_i\left(X\right)c_i(Y)\sigma_1\left(K_r\right) \\
&= \sum_{i=1}^{s} c_i\left(X\right)c_i(Y).
\end{aligned}$$

□

5.7. Ορισμός. Ένας πίνακας που έχει r ιδιάζουσες τιμές ίσες με τη μονάδα και όλες τις άλλες ιδιάζουσες τιμές μηδενικές (για παράδειγμα, ο K_r στο Λήμμα 5.6) καλείται πίνακας βαθμού μερικής ισομετρίας r.

Το Θεώρημα 3.1.8 του [HJ] δίνει δύο χρήσιμες αναπαραστάσεις οποιουδήποτε πίνακα ως μη αρνητικό γραμμικό συνδυασμό μερικών ισομετριών. Για ευκολία, εμείς καταγράφουμε το τμήμα του εν λόγω θεωρήματος που χρειαζόμαστε εδώ.

5.8. Λήμμα. Έστω ο πίνακας $B \in M_n$ ο οποίος έχει ταξινομημένες ιδιάζουσες τιμές $\sigma_1(B) \geq \cdots \geq \sigma_n(B) \geq 0$. Τότε ο B μπορεί να γραφεί ως άθροισμα

$$B = \sum_{j=1}^{n} \beta_j K_j,$$

όπου κάθε K_j είναι ένας πίνακας βαθμού μερικής ισομετρίας j, $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, και

$$\sum_{j=k}^{n} \beta_j = \sigma_k(B), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Ένα τελευταίο Λήμμα μας επιτρέπει να συμπληρώσουμε μια απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.

5.9. Λήμμα. Για κάθε πίνακα $C \in M_n$ και κάθε θετικό ακέραιο αριθμό k με $1 \leq k \leq n$, υπάρχει ένας πίνακας $C_k \in M_n$ βαθμού μερικής ισομετρίας k τέτοιος ώστε

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(C) = tr(CC_k).$$

Απόδειξη. Αν $C = Vdiag(\sigma_1(C), ..., \sigma_n(C))W^*$ είναι μια παραγοντοποίηση ιδιάζουσων τιμών του πίνακα C, τότε θεωρούμε τον πίνακα $C_k \equiv W(E_{11} + \cdots + E_{kk})V^*$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1. Έστω $A, B \in M_n$ και $1 \leq k \leq n$. Έστω επίσης $A = X^*Y$ για κάποιους $X, Y \in M_{r,n}$, και C_k ένας πίνακας βαθμού μερικής ισομετρίας k. Από το Λήμμα 5.9, έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A \circ B) &= tr\left[(A \circ B)C_k\right] \\
&= tr\left[\left(A \circ \sum_{j=1}^{n} \beta_j K_j\right)C_k\right] \qquad \text{(από το Λήμμα 5.8)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \beta_j tr\left[\left(A \circ K_j\right)C_k\right] \leq \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left|tr\left[\left(A \circ K_j\right)C_k\right]\right|
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left[\sum_{i=1}^{\min\{j,k\}} c_i(X) c_i(Y) \right] \qquad \text{(από το Λήμμα 5.6)}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_i(X) c_i(Y) \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j \right] = \sum_{i=1}^{k} c_i(X) c_i(Y) \sigma_i(B),$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1. □

Στη συνέχεια, δείχνουμε πως οι ανισότητες του Θεωρήματος 5.1 δίνουν τις ανισότητες των Θεωρημάτων 4.4, 4.9, 4.10, 4.17, 4.18 και 4.19, θεωρώντας κάθε φορά μια συγκεκριμένη παραγοντοποίηση του πίνακα $A = X^*Y$.

Για να δείξουμε ότι το Θεώρημα 4.10 έπεται από το Θεώρημα 5.1, σημειώνουμε ότι $\lambda_i(B) = \sigma_i(B)$, $i = 1, 2, ..., n$, δεδομένου ότι ο πίνακας B είναι θετικά ημι-ορισμένος, και γράφουμε τον πίνακα A στη μορφή $A = A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}$. Φυσικά, το Θεώρημα 4.9 προκύπτει από το Θεώρημα 4.10.

Για να δείξουμε ότι το Θεώρημα 4.17 προκύπτει από το Θεώρημα 5.1, θεωρούμε την παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών του ο A, $A = V\Sigma W^*$, και την παραγοντοποίηση $A = (\Sigma^{\frac{1}{2}} V^*)^* (\Sigma^{\frac{1}{2}} W^*)$.

Το Θεώρημα 4.4 μπορεί τώρα να εξαχθεί από το Θεώρημα 4.17 με μια μικρή διαφοροποίηση. Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφέραμε ότι

$$\sum_{i=1}^{k} p_i(A) \leq \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A) \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{k} q_i(A) \leq \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A), \qquad k = 1, \dots, n.$$

Χρησιμοποιούμε την ανισότητα αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου για να καταλήξουμε

$$\sum_{i=1}^{k} [p_i(A) q_i(A)]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} [p_i(A) + q_i(A)] \leq \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A), \qquad k = 1, \dots, n.$$

5.10. Λήμμα. Έστω $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$, $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n$ και $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_n \geq 0$ πραγματικοί αριθμοί σε φθίνουσα σειρά, με όλα τα $\gamma_i \geq 0$. Αν

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} \beta_i , \qquad k = 1, \ldots, n,$$

τότε

$$\sum_{i=1}^{k} a_i\gamma_i \leq \sum_{i=1}^{k} \beta_i\gamma_i , \qquad k = 1, \ldots, n,$$

Μπορούμε να θέσουμε $\gamma_i \equiv \sigma_i(B)$ και να αντικαταστήσουμε τους αριθμούς $a_i \equiv [p_i(A)q_i(A)]^{\frac{1}{2}}$ στο δεξιό σκέλος της ανισότητας στο Θεώρημα 4.17 με τους αριθμούς $\beta_i \equiv \sigma_i(A),$ για να εξαχθεί το Θεώρημα 4.4.

Το Θεώρημα 4.18 (α) προκύπτει από το Θεώρημα 5.1 γράφοντας $A = I \cdot A,$ δηλαδή $X = I$ και $Y = A,$ και το Θεώρημα 4.18 (α) προκύπτει γράφοντας $A = A \cdot I,$ δηλαδή $X = A^*$ και $Y = I.$

Χρησιμοποιώντας τεχνικές της απόδειξης του Θεωρήματος 5.1, μπορούμε να αποδείξουμε περαιτέρω ανισότητες διαφορετικού τύπου από τις ιδιάζουσες τιμές του $A \circ B.$ Ο στόχος είναι να εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.3 στο γινόμενο Hadamard, άλλων επιλογών θετικά ημι-ορισμένων μπλοκ πινάκων.

5.11. Παρατήρηση. Έστω $A_i \in M_{m,n},$ $i = 1, \ldots, p.$ Υποθέτουμε ότι

$$A_i = X_i^* Y_i , \qquad \text{όπου } X_i \in M_{r,m} \text{ και } Y \in M_{r,n}$$

είναι μια παραγοντοποίηση του A_i, $i = 1, 2, \ldots, p.$ Ορίζουμε τους μπλοκ (σύνθετους) πίνακες

$$\mathcal{A}_i \equiv \begin{bmatrix} X_i^* X_i & A_i \\ A_i^* & Y_i^* Y_i \end{bmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, p,$$

καθένας από τους οποίους είναι θετικά ημι-ορισμένοι σύμφωνα με την Παρατήρηση 5.3.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.1 (Θεώρημα Γινομένου Schur) επανειλημμένα, διαπιστώνουμε ότι το γινόμενο Hadamard $A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_p$ είναι ένας θετικά ημι-ορισμένος πίνακας για τον οποίο ισχύει

$$\prod_{i=1}^{k} \sigma_i\left(A_1 \circ \cdots \circ A_p\right) \leq \prod_{i=1}^{k} \sigma_i\left([X_1^* X_1] \circ \cdots \circ [X_p^* X_p]\right)^{\frac{1}{2}} \sigma_i\left([Y_i^* Y_i] \circ \cdots \circ Y_p^* Y_p]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

5.12. Θεώρημα. Για κάθε $A,B \in M_{m,n}$, έχουμε

$$\prod_{i=1}^{k} \sigma_i\left(A \circ B\right) \leq \prod_{i=1}^{k} c_i(A) r_i(B), \qquad k = 1, \ldots, \min\{m,n\}.$$

Για να αποδείξουμε το θεώρημα αυτό, χρησιμοποιούμε την περίπτωση $p = 2$ της Παρατήρησης 5.11 και την παραγοντοποίηση του πίνακα A της μορφής $A = I \cdot A$. και του πίνακα B της μορφής $B = B \cdot I$.

Μέσω του Πορίσματος 3.3.10 του [HJ91], από τις πολλαπλασιαστικές ανισότητες του Θεωρήματος 5.12, συνεπάγονται το ακόλουθο αποτέλεσμα.

5.13. Θεώρημα. Για κάθε $A,B \in M_{m,n}$, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\left(A \circ B\right) \leq \sum_{i=1}^{k} c_i(A) r_i(B), \qquad k = 1, \ldots, \min\{m,n\}.$$

Γινόμενα Hadamard με Μη-Αρνητικούς και *M*-Πίνακες

Σε αυτήν την εργασία, μέχρι στιγμής, έχουμε μελετήσει Ερμιτιανούς (κυρίως θετικά ημι-ορισμένους) πίνακες και γενικούς πίνακες. Εστιάζουμε τώρα το ενδιαφέρον μας σε ιδιότητες του γινομένου Hadamard που αφορούν τις στενά συνδεδεμένες μεταξύ τους κατηγορίες των μη αρνητικών πινάκων (Κεφάλαιο 8 του [HJ90]), *M*-πίνακες και *H*-πίνακες (Παράγραφος 2.5 του [HJ91]).

Θυμίζουμε ότι, η φασματική ακτίνα ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n$ συμβολίζεται ως $\rho(A)$, και αν όλα τα στοιχεία του A είναι μη αρνητικά $(A \geq 0)$, τότε το Θεώρημα Perron-Frobenius εγγυάται ότι $\rho(A) \in \sigma(A)$. Αν ο πίνακας A είναι πραγματικός και όλα τα μη διαγώνια στοιχεία του είναι μη αρνητικά ($A \in Z_n$), και αν ορίσουμε την ποσότητα $r(A) = \min\left\{\operatorname{Re}\left(\lambda\right) : \lambda \in \sigma(A)\right\}$ (βλέπε το Λήμμα 2.5.2.1 και το Πρόβλημα 19 στην Παράγραφο 2.5 του [HJ91]), τότε γνωρίζουμε ότι $r(A) \in \sigma(A)$ και ότι το $r(A)$ είναι η “ελάχιστη” ιδιοτιμή του *A*, με την έννοια πως βρίσκεται στο μιγαδικό επίπεδο πιο αριστερά από όλες τις ιδιοτιμές του *A*.

Για ευκολία, επεκτείνουμε τον ορισμό της συνάρτησης $r(\cdot)$ στους γενικούς πίνακες $A = \left[a_{ij}\right] \in M_n$ μέσω του πίνακα σύγκρισης

$$M\left(A\right) = \begin{bmatrix} |a_{11}| & -|a_{12}| & \cdots & -|a_{1n}| \\ -|a_{21}| & |a_{22}| & \cdots & -|a_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -|a_{n1}| & -|a_{n2}| & \cdots & |a_{nn}| \end{bmatrix}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο πίνακας *A* καλείται *M*-πίνακας αν είναι πραγματικός και όλα τα μη διαγώνια στοιχεία του είναι μη αρνητικά, και $r(A) > 0$. Στην περίπτωση αυτή, $A = M\left(A\right)$. Επιπλέον, ένας (γενικός) πίνακας $A \in M_n$ καλείται *H*-πίνακας αν ο πίνακας σύγκρισης $M\left(A\right)$ είναι *M*-πίνακας.

6.1. Ορισμός. Για κάθε γενικό πίνακα $A \in M_n$, ορίζουμε $r(A) \equiv r\left(M\left(A\right)\right)$.

Παρατηρούμε ότι ένας πίνακας $A \in M_n$ είναι *H*-πίνακας αν και μόνο αν $r(A) > 0$. Στο πνεύμα του γινομένου Hadamard, θα θέλαμε να συζητήσουμε τις κατά στοιχείο δυνάμεις μη αρνητικών πινάκων: αν $A = \left[a_{ij}\right] \geq 0$ και $a \in \mathbb{R}$, συμβολίζουμε τον πίνακα $\left[a_{ij}^{a}\right]$ (με στοιχεία τις δυνάμεις των αντιστοίχων στοιχείων του *A*) με $A^{(a)}$, χρησιμοποιώντας τη σύμβαση $0^0 \equiv 0$ ώστε να εξασφαλιστεί η συνέχεια ως προς το $a \geq 0$.

Αρχικά, παραθέτουμε ορισμένα βασικά αποτελέσματα και κάποιες στοιχειώδεις παρατηρήσεις. Για λόγους πληρότητας ορίζουμε μια παραλλαγή του γινομένου Hadamard.

6.2. Ορισμός. [F64] Έστω $A = \left[a_{ij}\right]$, $B = \left[b_{ij}\right] \in M_{m,n}$. Το γινόμενο Fan των πινάκων $A, B \in M_{m,n}$ ορίζεται ως

$$A * B \equiv C = \left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & -a_{12}b_{12} & \cdots & -a_{1n}b_{1n} \\ -a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & -a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1}b_{m1} & -a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}.$$

6.3. Παρατήρηση. (α) Αν $A, B \in M_n$ είναι *M*-πίνακες, τότε ο $A * B$ είναι *M*-πίνακας.

(β) Αν $A, B \in M_n$ είναι *H*-πίνακες, τότε ο $A * B$ είναι *H*-πίνακας και ο $A \circ B$ είναι αντιστρέψιμος.

(Επομένως, τα σύνολα των *M*-πινάκων και των *H*-πινάκων είναι κλειστά ως προς το γινόμενο Fan.)

Απόδειξη. (α) Έστω $A, B \in Z_n$ (δηλαδή, πραγματικοί και όλα τα μη διαγώνια στοιχεία τους μη αρνητικά) δοσμένοι *M*-πίνακες. Προφανώς, $A * B \in Z_n$ και η απόδειξη οποιασδήποτε από τις ισοδύναμες συνθήκες του Θεωρήματος 2.5.3 του [HJ91] αρκεί για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι ο $A * B$ είναι ένας *M*-πίνακας. Λαμβάνοντας υπόψη την ισοδύναμη συνθήκη 13 του Θεωρήματος 2.5.3 του [HJ91], θεωρούμε D και E δύο θετικούς διαγώνιους πίνακες, τέτοιους ώστε και οι δύο AD και BE να είναι αυστηρά διαγώνια κυριαρχημένοι κατά γραμμή (δηλαδή, το μέτρο του διαγώνιου στοιχείου κάθε γραμμής είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το άθροισμα των μέτρων των μη διαγώνιων στοιχείων της γραμμής). Εύκολα, μπορεί κανείς να δει ότι ο πίνακας $(AD)*(BE)$ είναι επίσης αυστηρά διαγώνια κυριαρχημένος κατά γραμμή. Δεδομένου ότι $(AD)*(BE)=(A*B)(DE)$, η ισοδύναμη συνθήκη 13 του Θεωρήματος 2.5.3 του [HJ91] δίνει το επιθυμητό συμπέρασμα ότι το γινόμενο Fan $A*B$ είναι ένας *M*-πίνακας.

(β) Αν A και B είναι δύο *H*-πίνακες, τότε οι πίνακες σύγκρισης $M(A)$ και $M(B)$ είναι *M*-πίνακες, οπότε και ο πίνακας $M(A*B)=M(A)*M(B)$ είναι *M*-πίνακας από το (α). Ως εκ τούτου, ο πίνακας $A*B$ είναι *H*-πίνακας. Είδαμε στο (α) ότι, υπάρχει θετικός διαγώνιος πίνακας $F,$ τέτοιος ώστε ο $M(A*B)F$ να είναι αυστηρά διαγώνια κυριαρχημένος κατά γραμμή και κάνει επίσης τον $(A\circ B)F$ αυστηρά διαγώνια κυριαρχημένο κατά γραμμή. Επομένως, ο $(A\circ B)F,$ και ως εκ τούτου και ο $A\circ B,$ είναι αντιστρέψιμοι (Θεώρημα 6.1.10 του [HJ90]). □

6.4. Παρατήρηση. Το σύνολο των μη αρνητικών πινάκων είναι κλειστό υπό του γινομένου Hadamard: Αν $A, B \in M_n$ με $A \geq 0$ και $B \geq 0,$ τότε $A\circ B \geq 0.$

Μία απλή εκτίμηση για τη φασματική ακτίνα $\rho(A\circ B)$ είναι η ακόλουθη:

6.5. Παρατήρηση. Αν $A, B \in M_n$ με $A \geq 0$ και $B \geq 0,$ τότε $\rho(A\circ B) \leq \rho(A)\rho(B)$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.2.12 του [HJ91], γνωρίζουμε ότι $\rho(A\otimes B)=\rho(A)\rho(B).$ Αλλά εφόσον $A\otimes B \geq 0,$ και $A\circ B$ είναι ένας κύριος υποπίνακας του $A\otimes B$ σύμφωνα με το Λήμμα 1.1, έχουμε $\rho(A\circ B)\leq \rho(A\otimes B)=\rho(A)\rho(B)$ λόγω της μονοτονίας της ιδιοτιμής Perron ως προς τους κύριους υποπίνακες (Πόρισμα 8.1.20 του [HJ90]). □

Χρησιμοποιώντας το άνω φράγμα της Παρατήρησης 6.5, μπορούμε να βελτιώσουμε σημαντικά την πληροφορία στο γινόμενο Fan δύο *M*-πινάκων που δίνεται στην Παρατήρηση 6.3.

6.6. Πόρισμα. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ δύο M-πίνακες. Τότε $A^{-1} \circ B^{-1} \geq (A * B)^{-1}$, και συνεπώς, $r(A * B) \geq r(A)r(B)$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τους πίνακες $R \equiv (I \circ A) - A$ και $S \equiv I - (I \circ A)^{-1} A$, έτσι $A = (I \circ A) - R = (I \circ A)[I - S]$, $S = \left[s_{ij}\right] \geq 0$ με $s_{ii} = 0$ ($i, j = 1, \ldots, n$). Τότε, ο πίνακας $\left(I \circ A\right)^{-1} A = I - S \in Z_n$ είναι ένας M-πίνακας με βάση το κριτήριο 12 του Θεωρήματος 2.5.3 του [HJ91]. Επομένως, $\rho\left(S\right) < 1$ από το Λήμμα 2.5.2.1 του [HJ91]. Με τον ίδιο τρόπο, γράφουμε $B = \left(I \circ B\right)\left[I - T\right]$, όπου $T = \left[t_{ij}\right] \geq 0$, με $t_{ii} = 0$ ($i = 1, \ldots, n$), και $\rho\left(T\right) < 1$. Τότε

$$A * B = \left(I \circ A\right)\left(I \circ B\right)\left[I - \left(S \circ T\right)\right] \quad \text{και} \quad \rho\left(S \circ T\right) \leq \rho\left(S\right)\rho\left(T\right) < 1.$$

Έτσι

$$\begin{aligned} \left(A * B\right)^{-1} &= \left(I - S \circ T\right)^{-1}\left(I \circ B\right)^{-1}\left(I \circ A\right)^{-1} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(S \circ T\right)^k\right]\left(I \circ B\right)^{-1}\left(I \circ A\right)^{-1} \\ &\leq \left(\left[\sum_{k=0}^{\infty} S^k\right] \circ \left[\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right]\right)\left(I \circ B\right)^{-1}\left(I \circ A\right)^{-1} \\ &= \left[\left(I - S\right)^{-1} \circ\right]\left(I - T\right)^{-1}\left(I \circ B\right)^{-1}\left(I \circ A\right)^{-1} \\ &= \left[\left(I \circ A\right)\left(I - S\right)\right]^{-1} \circ \left[\left(I \circ B\right)\left(I - T\right)\right]^{-1} \\ &= A^{-1} \circ B^{-1}. \end{aligned}$$

Τέλος, $\rho\left(\left(A * B\right)^{-1}\right) \leq \rho\left(A^{-1} \circ B^{-1}\right) \leq \rho\left(A^{-1}\right)\rho\left(B^{-1}\right)$ από την Παρατήρηση 6.4, κι έτσι $r\left(A * B\right) = \rho\left(\left(A * B\right)^{-1}\right)^{-1} \geq \rho\left(A^{-1}\right)^{-1}\rho\left(B^{-1}\right)^{-1} = r\left(A\right)r\left(B\right)$, όπως ισχυριστήκαμε. □

Ένας από τους στόχους αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση κάποιων αποτελεσμάτων ισχυρότερων από την Παρατήρηση 6.5, με την ανάλυση του γινομένου Hadamard απευθείας και όχι μέσω του γινομένου Kronecker.

Ένα ακόμη αποτέλεσμα κλειστότητας, πιο ασθενές από τις Παρατηρήσεις 6.3 και 6.4 αλλά πιο κοντά στην κλειστότητα των (Ερμιτιανών) θετικά ορισμένων πινάκων υπό του γινομένου Hadamard (Θεώρημα 2.1), είναι το ακόλουθο:

6.7. Θεώρημα. Αν δύο πίνακες $A, B \in M_n$ είναι *M*-πίνακες, τότε και ο $A \circ B^{-1}$ είναι *M*-πίνακας.

Απόδειξη. Το κατά πόσο ένας πίνακας είναι *M*-πίνακας ή όχι δεν επηρεάζεται καθόλου από τον από αριστερά ή/και από δεξιά (συνήθη) πολλαπλασιασμό του πίνακα με ένα θετικό διαγώνιο πίνακα. Εφόσον ο πίνακας $A \in Z_n$ έχει θετική διαγώνιο και $B^{-1} \geq 0$, έπεται ότι ο πίνακας $A \circ B^{-1} \in Z_n$ και έχει θετική διαγώνιο. Αφού ένας διαγώνια κυριαρχημένος πίνακας από το Z_n που έχει θετική διαγώνιο είναι *M*-πίνακας, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 1.2 αντικαθιστώντας τον A με τον $A = AD$ και τον B με τον $B = EB$, όπου D και E είναι θετικοί διαγώνιοι πίνακες, έτσι ώστε ο πίνακας $A \circ B^{-1}$ που προκύπτει να είναι κατά γραμμή διαγώνια κυριαρχημένος πίνακας. Χρησιμοποιούμε τη συνθήκη 13 του Θεωρήματος 2.5.3 του [HJ91] για να επιλέξουμε τον D έτσι ώστε ο A να είναι κατά γραμμή διαγώνια κυριαρχημένος πίνακας και τον E έτσι ώστε ο B να είναι κατά στήλη διαγώνια κυριαρχημένος πίνακας (εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.5.3 στον πίνακα B^T). Τότε, από το Θεώρημα 2.5.12, ο αντίστροφος πίνακας B^{-1} είναι κατά στήλη διαγώνια κυριαρχημένος. Τελικά, με απλές πράξεις επαληθεύεται ότι το γινόμενο Hadamard $A \circ B^{-1}$ είναι ένας κατά γραμμή διαγώνια κυριαρχημένος πίνακας, απ' όπου προκύπτει ότι ο $A \circ B^{-1}$ είναι *M*-πίνακας. □

Αργότερα σε αυτό το κεφάλαιο, θα μελετήσουμε την ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα $A \circ A^{-1}$ για έναν *M*-πίνακα $A \in M_n$.

6.8. Παράδειγμα. Έχοντας υπόψη την Παρατήρηση 6.3 και το Θεώρημα 6.7 πάνω στους *M*-πίνακες, αξίζει να σημειωθεί ότι το σύνολο των αντίστροφων *M*-πινάκων (δηλαδή των πινάκων που οι αντίστροφοί τους είναι *M*-πίνακες) δεν είναι κλειστό υπό το γινόμενο Hadamard. Έστω οι *M*-πίνακες

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -1.8 & -1 & -1 & -1.0001 \\ -1 & 6 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 & 0 & 0 & -0.0001 \\ -4 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -\frac{1}{2} & 8 \end{bmatrix},$$

όπου οι A και B να είναι αντίστροφοι M-πίνακες. Ωστόσο, ο $A \circ B$ δεν είναι αντίστροφος M-πίνακας, καθώς κάποια μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα $(A \circ B)^{-1}$ είναι θετικά.

Στρεφόμαστε τώρα στις ανισότητες για τα γινόμενα Hadamard πινάκων που είναι δυνάμεις Hadamard μη αρνητικών πινάκων. Αν $A = \left[a_{ij} \right] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ένας πίνακας με μη αρνητικά στοιχεία ($A_i \geq 0$) και $a \geq 0$, τότε γράφουμε $A^{(a)} \equiv \left[a_{ij}^{a} \right]$ για την Hadamard δύναμη τάξεως a του A.

6.9. Θεώρημα. Έστω πίνακες $A_i \in M_n$, με $A_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,k,$ και πραγματικοί αριθμοί $a_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,k,$ που ικανοποιούν τη σχέση $a_1 + \cdots + a_k \geq 1.$ Τότε

$$\rho\left(A_1^{(a_1)} \circ \cdots \circ A_k^{(a_k)} \right) \leq \rho\left(A_1\right)^{a_1} \cdots \rho\left(A_k\right)^{a_k}.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.9 βασίζεται στα ακόλουθα δύο λήμματα των οποίων οι αποδείξεις απαιτούν αποτελέσματα εκτός της παρούσας εργασίας και για το λόγο αυτό παραλείπονται.

6.10. Λήμμα. Αν $A \in M_n,\ A \geq 0,$ και $a \geq 1,$ τότε $\rho\left(A^{(a)}\right) \leq \rho\left(A\right)^{a}.$

6.11. Λήμμα. Έστω δύο πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ και ένας αριθμός $a \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις συνθήκες $A \geq 0,\ B \geq 0$ και $0 \leq a \leq 1$. Τότε ισχύει

$$\rho\left(A^{(\alpha)} \circ B^{(1-a)}\right) \leq \rho\left(A\right)^{a} \rho\left(B\right)^{1-a}.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.9. Μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 6.9 με μαθηματική επαγωγή. Λόγω του Λήμματος 6.10, αρκεί να ληφθεί υπόψη η περίπτωση στην οποία $a_1+\cdots+a_k=1.$

Σημειώνουμε ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_k<1$ και να ορίσουμε πίνακα $B\geq 0$ τέτοιον ώστε

$$B^{(1-a_k)}=A_1^{(a_1)}\circ\cdots\circ A_{k-1}^{(a_{k-1})}.$$

Αν ορίσουμε $\beta_j\equiv a_j/(1-a_k),\quad j=1,\ldots,k-1,$ τότε $\beta_1+\cdots+\beta_{k-1}=1$ και

$$B=A_1^{(\beta_1)}\circ\cdots\circ A_{k-1}^{(\beta_{k-1})}.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\begin{aligned}\rho\left(A_1^{(a_1)}\circ\cdots\circ A_k^{(a_k)}\right)&=\rho\left(B^{(1-a_k)}\circ A_k^{(a_k)}\right)\\&\leq\rho(B)^{1-a_k}\,\rho(A_k)^{a_k}\\&\leq\left[\rho(A_1)^{\beta_1}\cdots\rho(A_{k-1})^{\beta_{k-1}}\right]^{1-a_k}\rho(A_k)^{a_k}\\&=\rho(A_1)^{\alpha_1}\cdots\rho(A_k)^{\alpha_k},\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ανισότητα προκύπτει από το Λήμμα 6.11 και η δεύτερη βασίζεται στην υπόθεση της μαθηματικής επαγωγής. □

6.12. Παρατήρηση. Από τη θεωρία Perron-Frobenius [HJ90] προκύπτει ότι, αν κανείς από τους πίνακες $A_i,\ i=1,\ldots,k,$ δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπλοκ-τριγωνικό πίνακα (με τετραγωνικά μπλοκ στη διαγώνιο) με κοινή μετάθεση γραμμών και στηλών, και $a_1+\cdots+a_k=1,$ τότε η ισότητα εμφανίζεται στην ανισότητα του Θεωρήματος 6.9 αν και μόνο αν υπάρχουν θετικά διαγώνιοι πίνακες $D_i\in M_n$ και θετικοί αριθμοί $\gamma_i,\ i=2,\ldots,n,$ τέτοιοι ώστε

$$\gamma_i A_i=D_i^{-1}A_1D_i,\qquad i=2,\ldots,k.$$

6.13 Πόρισμα. Αν $A\in M_n$ και $A\geq 0$, τότε

$$\rho\left[A^{\left(\frac{1}{2}\right)} \circ \left(A^T\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right] \le \rho(A)$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.9,

$$\rho\left[A^{\left(\frac{1}{2}\right)} \circ \left(A^T\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right] \le \rho(A)^{\frac{1}{2}} \rho\left(A^T\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Αλλά, δεδομένου ότι $\rho\left(A^T\right) = \rho(A)$, το δεξιό μέρος της ανίσωσης μπορεί να αντικατασταθεί από τη φασματική ακτίνα $\rho(A)$. □

Η περίπτωση της ισότητας στην ανισότητα στο Πόρισμα 6.13 μπορεί να αναλυθεί απευθείας στην μη αναστρέψιμη περίπτωση χρησιμοποιώντας τη Παρατήρηση 6.12. Παρουσιάζει ενδιαφέρον το γεγονός ότι περιλαμβάνει την έννοια της διαγώνιας ομοιότητας.

6.14. Θεώρημα. Αν $A \in M_n$, $A \ge 0$, και ο A δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπλοκ-τριγωνικό πίνακα (με τετραγωνικά μπλοκ στη διαγώνιο) με κοινή μετάθεση γραμμών και στηλών, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) Η ισότητα εμφανίζεται στην ανισότητα του Πορίσματος 6.13.

(b) Ο A^T είναι όμοιος με τον A μέσω διαγώνιου μετασχηματισμού ομοιότητας.

(c) Ο A είναι όμοιος με έναν συμμετρικό πίνακα μέσω διαγώνιου μετασχηματισμού ομοιότητας.

Απόδειξη. Δεδομένου ότι ο A^T δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπλοκ-τριγωνικό πίνακα (με τετραγωνικά μπλοκ στη διαγώνιο) με κοινή μετάθεση γραμμών και στηλών, όταν ο A έχει αυτήν την ιδιότητα, η ισοδυναμία των (a) και (b) έπεται από την Παρατήρηση 6.12.

Η ισοδυναμία των (b) και (c) προκύπτει από το ακολουθία των ισοδύναμων σχέσεων:

$$\begin{aligned} D^{-1}A^T D = A \;&\Leftrightarrow\; A^T D = DA \\ &\Leftrightarrow\; DA \text{ είναι συμμετρικός} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad D^{-\frac{1}{2}}(DA)D^{-\frac{1}{2}} = D^{\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}} \text{ είναι συμμετρικός.}$$

Εδώ, ως συνήθως, ο $D^{\frac{1}{2}}$ είναι ο θετικός διαγώνιος πίνακας του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι οι τετραγωνικές ρίζες των διαγώνιων στοιχείων του D, ενώ $D^{-\frac{1}{2}}$ είναι ο θετικός διαγώνιος πίνακας του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι οι τετραγωνικές ρίζες των διαγώνιων στοιχείων των πινάκων του D^{-1} (δηλαδή, οι αντίστροφες τιμές). □

Για μη αρνητικούς πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ και $0 < a < 1$, η φασματική ακτίνα $\rho\left[aA + (1-a)B\right]$ μπορεί να είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη της ποσότητας $a\rho(A) + (1-a)\rho(B)$. Δηλαδή, η φασματική ακτίνα δεν είναι μια κυρτή συνάρτηση του ιδιοπροβλήματος ενός μη αρνητικού πίνακα.

Ωστόσο, είναι σημαντικό το γεγονός ότι η φασματική ακτίνα, αν θεωρηθεί ως συνάρτηση των διαγώνιων στοιχείων ενός μη αρνητικού πίνακα $A \in M_n$, τότε είναι κυρτή συνάρτηση από το $\mathbb{R}_+^n$ στο $\mathbb{R}_+$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.9 και την τεχνική της γραμμικοποίησης.

6.15. Πόρισμα. Έστω $A = \left[a_{ij}\right], B = \left[b_{ij}\right], D_1, D_2 \in M_n$ μη αρνητικοί πίνακες, και υποθέτουμε ότι οι D_1 και D_2 είναι διαγώνιοι. Ορίζουμε $C(A, B, a) = \left[c_{ij}\right] \in M_n$ ως εξής:

$$c_{ij} = \begin{cases} \left(a_{ij}\right)^{a}\left(b_{ij}\right)^{1-a}, & i \neq j, \\ aa_{ii} + (1-a)b_{ii}, & i = j, \end{cases} \qquad \text{για } a \in [0,1].$$

Οι ακόλουθες ανισότητες ισχύουν για όλα τα $a \in [0,1]$:

(α) $\rho\left(C(A, B, a)\right) \leq a\rho(A) + (1-a)\rho(B)$, και

(β) $\rho\left(\alpha\left[A + D_1\right] + (1-a)\left[A + D_2\right]\right) = \rho\left(A + aD_1 + (1-a)D_2\right)$

$$\leq a\rho\left(A + D_1\right) + (1-a)\rho\left(A + D_2\right).$$

Απόδειξη. Λόγω της συνέχειας, δεν υπάρχει απώλεια της γενικότητας αν υποθέσουμε ότι οι A και B είναι θετικοί πίνακες. Για μικρό $\varepsilon > 0$, απευθείας υπολογισμοί δείχνουν ότι:

$$\left(I+\varepsilon A\right)^{(a)} \circ \left(I+\varepsilon B\right)^{1-a} = I + \varepsilon C\left(A,B,a\right) + \cdots .$$

Για κάθε θετικό $X \in M_n$ και μικρό $\varepsilon > 0$, το Θεώρημα 6.3.12 του [HJ90] δίνει τον τύπο διαταραχής

$$\rho\left(I+\varepsilon X\right) = 1 + \varepsilon\rho\left(X\right) + \cdots .$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τον προηγούμενο τύπο για να υπολογίσουμε

$$\rho\left(\left(I+\varepsilon A\right)^{(a)} \circ \left(I+\varepsilon B\right)^{1-a}\right) = \rho\left(I+\varepsilon C\left(A,B,a\right)+\cdots\right) = 1+\varepsilon\rho\left(C\left(A,B,a\right)\right)+\cdots$$

και

$$\begin{aligned}\rho\left(\left(I+\varepsilon A\right)^{(a)}\right)\rho\left(\left(I+\varepsilon B\right)^{(1-a)}\right) &= \left(1+\varepsilon a\rho(A)+\cdots\right)\left(1+\varepsilon(1-a)\rho\left(B\right)+\cdots\right)\\ &= 1+\varepsilon\left[a\rho(A)+\left(1-a\right)\rho(B)\right]+\cdots .\end{aligned}$$

Η ανισότητα στο Λήμμα 6.11 οδηγεί στον ισχυρισμό (α). Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει από τον πρώτο αν αντικαταστήσουμε τους A και B στο (α) με $A+D_1$ και $A+D_2$, αντίστοιχα. □

Ολοκληρώνουμε αυτή τη συζήτηση για τα αποτέλεσμα που σχετίζονται με το Θεώρημα 6.9 αναφέροντας αποτελέσματα για *H*-πίνακες δυϊκά με το Θεώρημα 6.9 και την παρατήρηση 6.12.

6.16. Θεώρημα. Αν $A_1,\ldots,A_k \in M_n$ είναι *H*-πίνακες και $a_1,\ldots,a_k \geq 0$ ικανοποιούν τη σχέση $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 1$, τότε

$$r\left(A_1^{(a_1)} \circ \cdots \circ A_k^{(a_k)}\right) \geq r\left(A_1\right)^{a_1} \cdots r\left(A_k\right)^{a_k} .$$

Εδώ, ο $A^{(a)}$ ορίζεται και πάλι η κατά στοιχείο δύναμη του πίνακα *A*.

6.17. Παρατήρηση. Αν κανένας πίνακας A_i, $i=1,\dots,k$, δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπλοκ-τριγωνικό πίνακα (με τετραγωνικά μπλοκ στη διαγώνιο) με κοινή μετάθεση γραμμών και στηλών, και $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$, τότε η ισότητα προκύπτει στην ανισότητα του Θεωρήματος 6.16 αν και μόνο αν υπάρχουν θετικοί διαγώνιοι πίνακες $D_i \in M_n$ και θετικοί αριθμοί γ_i, $i=2,\dots,n$, τέτοιοι ώστε

$$\gamma_i |A_i| = D_i^{-1} |A_1| D_i, \quad i=2,\dots,k.$$

Ως συνήθως, το σύμβολο $|\cdot|$ για το κατά στοιχείο μέτρο του πίνακα.

Καθορίζουμε στη συνέχεια κάποιες ποσότητες που συνδέονται άμεσα με ένα (κατά στοιχεία) μη αρνητικό πίνακα. Παρόλο που αυτές οι ποσότητες δείχνουν αρχικά να είναι διαφορετικές, αποδεικνύεται τελικά ότι ταυτίζονται. Για ένα μη αρνητικό πίνακα $A \in M_n$, η ποσότητα $\rho\left(A^{(t)}\right)^{\frac{1}{t}}$ είναι αύξουσα ως προς το t για $t \geq 1$ λόγω του Λήμματος 6.10 και φυσικά, είναι κάτω φραγμένη από το 0.

6.18. Ορισμός. Για ένα μη αρνητικό $A \in M_n$, ορίζουμε

$$h_1(A) \equiv \lim_{t\to\infty} \rho\left(A^{(t)}\right)^{\frac{1}{t}}.$$

Λόγω της προηγούμενης παρατήρησης, αυτό το όριο υπάρχει για κάθε τετραγωνικό μη αρνητικό πίνακα A.

6.19. Ορισμός. Για ένα μη αρνητικό $A \in M_n$, ορίζουμε

$$h_2(A) \equiv \sup\left\{ \frac{\rho(A\circ B)}{\rho(B)} :\ B \geq 0,\ \rho(B) > 0 \right\}$$
$$= \sup\left\{ \rho(A\circ B) :\ B \geq 0,\ \rho(B) \leq 1 \right\}.$$

Αυτά τα δύο suprema υπάρχουν και είναι ίσα, λόγω της Παρατήρησης 6.5 και της ομογενούς ιδιότητας της φασματικής ακτίνας.

Υπενθυμίζουμε ότι η νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ δηλώνει τη μέγιστη απόλυτη τιμή των στοιχείων ενός διανύσματος και την επαγόμενη νόρμα πινάκων.

6.20. Ορισμός. Για ένα μη αρνητικό πίνακα $A \in M_n$, ορίζουμε

$$h_3(A) \equiv \inf\left\{\left\|DAD^{-1}\right\|_\infty : D \in M_n, \text{ θετικός διαγώνιος πίνακας}\right\}.$$

6.21. Ορισμός. Ο μέγιστος (απλός) κυκλικός γεωμετρικός μέσος για έναν μη αρνητικό πίνακα $A \in M_n$ είναι η ποσότητα

$$h_4(A) \equiv \max\left(\prod_{j=1}^{k} a_{i_j i_{j+1}}\right)^{\frac{1}{k}},$$

στην οποία ο δείκτης $k+1$ ταυτίζεται με το δείκτη 1 και το μέγιστο λαμβάνεται πάνω σε όλες τις ακολουθίες διακριτών δεικτών $i_1, \ldots, i_k \le n$ και πάνω σε όλα $k = 1, \ldots, n$.

6.22. Θεώρημα. Για κάθε μη αρνητικό πίνακα $A \in M_n$, ισχύει

$$h_1(A) = h_2(A) = h_3(A) = h_4(A).$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό, επιβεβαιώνοντας τις ακόλουθες τέσσερις ανισότητες για ένα (τυχαίο) μη αρνητικό πίνακα $A \in M_n$:

$$h_1(A) \le h_2(A) \le h_3(A) \le h_4(A) \le h_1(A).$$

$h_1 \le h_2$: Εφόσον $h_2(A) = 0$ αν και μόνο αν $\rho(A) = 0$, στην οποία περίπτωση επίσης $h_1(A) = 0$, υποθέτουμε ότι $\rho(A) > 0$ και $h_2(A) > 0$. Για κάθε μη αρνητικό πίνακα $B \in M_n$, έχουμε $\rho(A \circ B) \le \rho(A)\rho(B) = 0$ αν $\rho(B) = 0$, και $\rho(A \circ B) = \rho\big(A \circ (B/\rho(B))\rho(B)\big)$ αν

$\rho(B)>0$. Έτσι, σε κάθε περίπτωση, έχουμε $\rho(A\circ B)\le h_2(A)\rho(B)$. Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m, έχουμε

$$\rho\left(A^{(m)}\right)=\rho\left(A\circ A^{(m-1)}\right)\le h_2(A)\rho\left(A^{(m-1)}\right)\le\cdots\le h_2(A)^m\left[\rho(A)/h_2(A)\right],$$

κι επομένως,

$$h_1(A)=\lim_{m\to\infty}\rho\left(A^{(m)}\right)^{\frac{1}{m}}\le h_2(A)\lim_{m\to\infty}\left[\rho(A)/h_2(A)\right]^{\frac{1}{m}}=h_2(A).$$

$h_2\le h_3$: Λόγω της κατά στοιχείο μονοτονίας της ιδιοτιμής Perron ενός μη αρνητικού πίνακα (βλέπετε το Θεώρημα 8.1.18 του [HJ90]], έχουμε ότι, για κάθε θετικό διαγώνιο πίνακα $D\in M_n$ και για οποιοδήποτε μη αρνητικό $B\in M_n$, ισχύει

$$\rho(A\circ B)=\rho\left(D[A\circ B]D^{-1}\right)=\rho\left(\left[D^{-1}AD\right]\circ B\right)\le\left\|D^{-1}AD\right\|_\infty\rho(B),$$

κι επομένως $h_2\le h_3$.

$h_3\le h_4$: Αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση που ο πίνακας A δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπλοκ-τριγωνικό πίνακα (με τετραγωνικά μπλοκ στη διαγώνιο) με κοινή μετάθεση γραμμών και στηλών, κάτι που εξασφαλίζει ότι $\rho(A)>0$. Κατασκευάζουμε έναν θετικό διαγώνιο πίνακα $D=diag(d_1,\ldots,d_n)$ τέτοιον ώστε $\left\|DAD^{-1}\right\|_\infty\le h_4(A)$. (Στην πραγματικότητα, το μεγαλύτερο στοιχείο του DAD^{-1} θα είναι ίσο με την τιμή $h_4(A)$.) Με δεδομένο ότι ο ισχυρισμός παρουσιάζει την ομογενή ιδιότητα ως προς τα στοιχεία του ότι A, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $h_4(A)=1$. Έστω $D\equiv diag(d_1,\ldots,d_n)$ και θέτουμε $d\equiv 1$. Τώρα, για κάθε δεδομένο φυσικό αριθμό j με $2\le j\le n$, θεωρούμε όλες τις ακολουθίες των ακεραίων (με κάθε ακέραιο μεταξύ του 1 και του n) $1=i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},i_k=j$ και ορίζουμε

$$d_j\equiv\max a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{k-1}i_k}.$$

Αυτό το μέγιστο είναι καλά ορισμένο και θετικό αφού (i) μόνο ο πεπερασμένος αριθμός των ακολουθιών χωρίς επανάληψη χρειάζεται να ληφθεί υπόψη καθώς $h_4(A)=1$, και (ii) ο πίνακας A δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπλοκ-τριγωνικό πίνακα (με τετραγωνικά μπλοκ στη διαγώνιο) με κοινή μετάθεση γραμμών και στηλών, κι έτσι τουλάχιστον μία ακολουθία δίνει θετικό γινόμενο. Τότε

$$\frac{d_i a_{ij}}{d_j} \leq 1$$

δεδομένου ότι ο αριθμητής είναι το γινόμενο μιας ακολουθίας από το 1 έως το j (μέσω i) ή το 0, ενώ ο παρονομαστής είναι το μέγιστο γινόμενο ακολουθίας από το 1 έως το j. Εφόσον $h_4(A)=1$, έχουμε βρει έναν D με τις επιθυμητές ιδιότητες.

$h_4 \leq h_1$: Επιλέγουμε μια ακολουθία από δείκτες $i_1, i_2, \ldots, i_k$ για τους οποίους επιτυγχάνεται το μέγιστο στον ορισμό του $h_4(A)$. Ορίζουμε τον πίνακα A_0 αντικαθιστώντας κάθε στοιχείο του A εκτός από τα $a_{i_1 i_2}, a_{i_2 i_3}, \ldots, a_{i_k i_1}$, με 0. Τότε, $A_0 \leq A$ και

$$h_4(A) = \rho(A_0) = \rho\left(A_0^{(t)}\right)^{\frac{1}{t}} \leq \rho\left(A^{(t)}\right)^{\frac{1}{t}}.$$

Η ανισότητα προκύπτει από την μονοτονία της ιδιοτιμής Perron. Παίρνοντας όρια, λαμβάνουμε την επιθυμητή ανισότητα, η οποία συμπληρώνει την απόδειξη. □

Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.7, αν ο πίνακας $A \in M_n$ είναι *M*-πίνακας, τότε και ο $\Phi(A) = A \circ A^{-1}$ είναι *M*-πίνακας. Συγκεκριμένα,

$$r\left(A \circ A^{-1}\right) > 0.$$

Αυτή η παρατήρηση εγείρει με φυσικό τρόπο την ακόλουθη ερώτηση: Υπάρχει ένα θετικό κάτω φράγμα για την ποσότητα $r\left(A \circ A^{-1}\right)$ που να ισχύει για όλους τους *M*-πίνακες A δεδομένου μεγέθους; Η απάντηση είναι ότι υπάρχει, σύμφωνα με το Πόρισμα 6.29 που θα δούμε παρακάτω. Επιπλέον, θα μπορούσε επίσης κανείς να αναρωτηθεί αν το $r\left(A \circ A^{-1}\right)$ μπορεί να έχει ένα ομοιόμορφο άνω φράγμα για όλους τους *M*-πίνακες. Το τελευταίο ερώτημα σχετίζεται με την έννοια της διαγώνιας συμμετρησιμότητας και μια απάντηση δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

6.23. Θεώρημα. Έστω $A \in M_n$ ένας *M*-πίνακας. Τότε ισχύει

$$r\left(A \circ A^{-1}\right) \leq 1.$$

Επιπλέον, αν ο A δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπλοκ-τριγωνικό πίνακα (με τετραγωνικά μπλοκ στη διαγώνιο) με κοινή μετάθεση γραμμών και στηλών, τότε $r\left(A \circ A^{-1}\right) = 1$ αν και μόνο αν υπάρχει ενας θετικός διαγώνιος πίνακας D τέτοιος ώστε ο πίνακας AD να είναι συμμετρικός.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.23 βασίζεται σε μια ενδιαφέρουσα ανισότητα του ίχνους του γινομένου $A^{-1}A^T$ όταν ο $A \in M_n$ είναι *M*-πίνακας.

6.24. Θεώρημα. Έστω $A \in M_n$ ένας *M*-πίνακας. Τότε ισχύει

$$tr\left(A^{-1}A^T\right) \leq n,$$

με ισότητα εάν και μόνο εάν ο A είναι συμμετρικός.

Πριν συζητήσουμε το Θεώρημα 6.24, δείχνουμε πρώτα ότι το Θεώρημα 6.23 μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας Θεώρημα 6.24.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.23. Αν ο πίνακας A μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπλοκ-τριγωνικό πίνακα (με τετραγωνικά μπλοκ στη διαγώνιο) με κοινή μετάθεση γραμμών και στηλών, τότε το ίδιο θα ισχύει και για τους πίνακες A και A^{-1}, κι επομένως, και για τον πίνακα $A \circ A^{-1}$, και μάλιστα με την ίδια ακριβώς δομή. Δεδομένου ότι το $r\left(A \circ A^{-1}\right)$ επιτυγχάνεται σε κάποιο από τα τετραγωνικά μπλοκ της διαγωνίου, χωρίς βλάβη της γενικότητας, αρκεί να θεωρήσουμε ότι ο πίνακας *A* δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπλοκ-τριγωνικό πίνακα (με τετραγωνικά μπλοκ στη διαγώνιο) με κοινή μετάθεση γραμμών και στηλών. Εφόσον, στην περίπτωση αυτή, και ο πίνακας $A \circ A^{-1}$ δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπλοκ-τριγωνικό πίνακα (με τετραγωνικά μπλοκ στη διαγώνιο) με κοινή μετάθεση γραμμών και στηλών, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα x του $A \circ A^{-1}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $r\left(A \circ A^{-1}\right)$. Εστω ότι ο διαγώνιος πίνακας D ορίζεται από τη σχέση $x = De$, όπου το διάνυσμα $e \in \mathbb{R}^n$ έχει όλες τα στοιχεία του ίσα με τη μονάδα. Τότε, το ιδιοπρόβλημα $\left(A \circ A^{-1}\right)x = r\left(A \circ A^{-1}\right)x$ γράφεται στη μορφή $\left[(AD) \circ (AD)^{-1}\right]e = \left[D^{-1}\left(A \circ A^{-1}\right)D\right]e = r\left(A \circ A^{-1}\right)e$. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$e^T \left[(AD) \circ (AD)^{-1}\right]e = nr\left(A \circ A^{-1}\right),$$

ή από το Λήμμα 1.5, ότι

$$tr\left[(AD)^{-1}(AD)^T\right] = nr\left(A \circ A^{-1}\right).$$

Εφόσον ο πίνακας AD είναι ένας *M*-πίνακας, το Θεώρημα 6.24 εξασφαλίζει ότι $nr\left(A \circ A^{-1}\right) \le n$, το οποίο είναι η ανισότητα του Θεωρήματος 6.23.

Τέλος, στην περίπτωση που ο A δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπλοκ-τριγωνικό πίνακα (με τετραγωνικά μπλοκ στη διαγώνιο) με κοινή μετάθεση γραμμών και στηλών, το Θεώρημα 6.24 εξασφαλίζει περαιτέρω ότι $r\left(A \circ A^{-1}\right) = 1$ αν και μόνο αν ο πίνακας AD είναι συμμετρικός, το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Εφόσον $tr\left(A^{-1}A^T\right) = e^T\left(A \circ A^{-1}\right)e$ από το Λήμμα 1.5, η ανισότητα του Θεωρήματος 6.24 είναι ισοδύναμη με την ανισότητα

$$e^T\left(A \circ A^{-1}\right)e \le n$$

για κάθε *M*-πίνακα $A \in M_n$.

6.25. Θεώρημα. Έστω $A \in M_n$ ένας *M*-πίνακας. Τότε ισχύει

$$e^T\left(A \circ A^{-1}\right)e \le 1 + e^T\left(A\left(\{i\}'\right) \circ A\left(\{i\}'\right)^{-1}\right)e,$$

όπου όλα τα στοιχεία του διανύσματος e (οποιουδήποτε μεγέθους) είναι ίσα με τη μονάδα και $\{i\}^{'} \equiv \{j,\ j \in \{1,\ldots,n\},\ j \neq i\}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.24. Οι διαδοχικές εφαρμογές του Θεωρήματος 6.25 δίνουν τις ανισότητες

$$e^T\left(A \circ A^{-1}\right)e \le k + e^T\left(A\left(\{i_1,\ldots,i_k\}^{'}\right) \circ A\left(\{i_1,\ldots,i_k\}^{'}\right)^{-1}\right)e$$

για κάθε k δείκτες $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ και για κάθε M-πίνακα $A \in M_n$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

$$\begin{aligned} e^T\left(A \circ A^{-1}\right)e &\le 1 + e^T\left(A\left(\{1\}^{'}\right) \circ A\left(\{1\}^{'}\right)^{-1}\right)e \\ &\le 2 + e^T\left(A\left(\{1,2\}^{'}\right) \circ A\left(\{1,2\}^{'}\right)^{-1}\right)e \\ &\ \vdots \\ &\le n-1 + e^T\left(A\left(\{n\}\right) \circ A\left(\{n\}\right)^{-1}\right)e = n. \end{aligned}$$

Έτσι καταλήγουμε στην ανισότητα $e^T\left(A \circ A^{-1}\right)e \le n$ κι επομένως στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.24. □

Τώρα θέλουμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 6.25. Για να πετύχουμε αυτό, χρησιμοποιούμε έναν ισχυρισμό για τους μη αρνητικούς πίνακες.

6.26. Λήμμα. Έστω $P = \left[p_{ij}\right] \in M_n$ ένας μη αρνητικός πίνακας που δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπλοκ-τριγωνικό πίνακα (με τετραγωνικά μπλοκ στη διαγώνιο) με κοινή μετάθεση γραμμών και στηλών. Αν έχει δεξιό ιδιοδιάνυσμα Perron $u > 0$ και αριστερό ιδιοδιάνυσμα Perron $u^T > 0,$ τότε $u^T P\upsilon \ge \upsilon^T Pu = \rho(P)\upsilon^T u.$

Απόδειξη. Από την ανισότητα σταθμισμένου αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$\prod_{\substack{i,j=1\\p_{ij}>0}}^{n}\left(\frac{u_i\upsilon_j/u^TP\upsilon}{\upsilon_iu_j/\upsilon^TPu}\right)^{\frac{p_{ij}\upsilon_iu_j}{\upsilon^TPu}}\leq\sum_{\substack{i,j=1\\p_{ij}>0}}^{n}\left(\frac{u_i\upsilon_j/u^TP\upsilon}{\upsilon_iu_j/\upsilon^TPu}\right)\frac{p_{ij}\upsilon_iu_j}{\upsilon^TPu}=1.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\frac{u^TP\upsilon}{\upsilon^TPu}&\geq\prod_{i,j=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\upsilon_i}\right)^{\frac{p_{ij}\upsilon_iu_j}{\upsilon^TPu}}\prod_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\upsilon_j}{u_j}\right)^{\frac{p_{ij}\upsilon_iu_j}{\upsilon^TPu}}\\&=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\upsilon_i}\right)^{\frac{\sum_{j=1}^{n}\upsilon_ip_{ij}u_j}{\upsilon^TPu}}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\upsilon_j}{u_j}\right)^{\frac{\sum_{i=1}^{n}\upsilon_ip_{ij}u_j}{\upsilon^TPu}}\\&=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\upsilon_i}\right)^{\frac{\upsilon_iu_i}{\upsilon^Tu}}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\upsilon_j}{u_j}\right)^{\frac{u_j\upsilon_j}{\upsilon^Tu}}=1.\end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.25. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $i=1$. Θέτουμε $A(\{1\})=A_1$. Στη συνέχεια, η επιθυμητή ανισότητα γράφεται στη μορφή

$$e^T\left[A\circ A^{-1}-\begin{bmatrix}1&0\\0&A_1\circ A_1^{-1}\end{bmatrix}\right]e\leq 0.$$

Ο πίνακας $B\equiv A-\dfrac{\det A}{\det A_1}E_{11}$ είναι ένας μη αντιστρέψιμος *M*-πίνακας και με απλούς υπολογισμούς μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι

$$A\circ A^{-1}-\begin{bmatrix}1&0\\0&A_1\circ A_1^{-1}\end{bmatrix}=\frac{1}{\det A}\left(B\circ adjB\right).$$

Κάνουμε δύο παρατηρήσεις σχετικά με τον μη αντιστρέψιμο *M*-πίνακα B:

Πρώτον, αν $u,\upsilon\geq 0$ είναι μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $Bu=0$ και $\upsilon^TB=0,$ τότε $u^TB\upsilon\leq 0.$ Για να το δούμε αυτό, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι ο B είναι δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπλοκ-τριγωνικό πίνακα (με τετραγωνικά μπλοκ στη διαγώνιο) με κοινή μετάθεση γραμμών και στηλών, και ότι τα u και υ είναι θετικά. Τότε $B=\rho I-P$, με $P\geq 0$ (ο οποίος, επίσης δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπλοκ-τριγωνικό πίνακα, με τετραγωνικά μπλοκ στη διαγώνιο, με κοινή μετάθεση γραμμών και στηλών) και $\rho=\rho(P)$, και υπολογίζουμε την ποσότητα

$$u^T B\upsilon=\rho u^{\mathrm{T}}\upsilon-u^T P\upsilon\leq \rho u^T\upsilon-\upsilon^T Pu=\rho u^T\upsilon-\rho\upsilon^T u=0 .$$

Η ανισότητα είναι μια εφαρμογή του Λήμματος 6.27 που ακολουθεί, καθώς τα u και υ είναι το δεξιό και το αριστερό ιδιοδιάνυσμα Perron του πίνακα P, αντίστοιχα.

Δεύτερον, ο πίνακας B είναι βαθμού $rank(B)=n-1$, και ως εκ τούτου, ο συμπληρωματικός πίνακας $adj(B)$ είναι βαθμού 1. Επομένως ο πίνακας $adj(B)$ είναι της μορφης $cu\upsilon^T$, $c>0$, στην οποία το $u\geq 0$ είναι ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα Perron του B και το $\upsilon\geq 0$ είναι ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα Perron του B.

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη με τον ακόλουθο υπολογισμό

$$\begin{aligned} e^T\left(A\circ A^{-1}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & A_1\circ A_1^{-1}\end{bmatrix}\right)e &= \frac{1}{\det A}e^T\left(B\circ adjB\right)e \\ &= \frac{1}{\det A}e^T\left(B\circ\left[cu\upsilon^T\right]\right)e \\ &= \frac{c}{\det A}u^T B\upsilon\leq 0. \end{aligned}$$ □

Το Θεώρημα 6.23 απαντάει στο ερώτημα ύπαρξης άνω φράγματος για το $r\left(A\circ A^{-1}\right)$ όταν ο πίνακας A είναι *M*-πίνακας. Στη συνέχεια, δίνουμε απάντηση στο ερώτημα ύπαρξης θετικού κάτω φράγματος.

6.27. Παράδειγμα. Θεωρούμε τον πίνακα $A\in M_n$, $n\geq 2$, που ορίζεται από τη σχέση $A\equiv I-t\cdot C$, όπου

$$C \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε ο A είναι ένας *M*-πίνακας για $0 \le t < 1$, και με απλούς υπολογισμούς επαληθεύεται ότι

$$A \circ A^{-1} = \frac{1}{1-t^n}\left[I - t^2 C\right].$$

Επομένως,

$$r\left(A \circ A^{-1}\right) = \frac{1-t^2}{1-t^n} = \frac{1+t}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}.$$

Εφόσον το t μπορεί να πάρει τιμές αυθαίρετα κοντά στο 1, αυτό δείχνει ότι δεν υπάρχει γενική ανισότητα καλύτερη από την

$$r\left(A \circ A^{-1}\right) > \frac{2}{n}$$

που είναι εφικτή για *M*-πίνακες $A \in M_n$, $n \ge 2$.

Στο τελευταίο τμήμα του κεφαλαίου (και της εργασίας) επιδιώκοντας να κατασκευάσουμε ένα κάτω φράγμα για το $r\left(A \circ A^{-1}\right)$, διερευνούμε επίσης κάτω φράγματα για το $r\left(A \circ B^{-1}\right)$ για γραμμικά ανεξάρτητους *M*-πίνακες $A, B \in M_n$. Αυτά τα φράγματα, αν και είναι σχετικά ισχυρά για το επίπεδο γενικότητας τους, δεν φαίνονται αρκετά ισχυρά για να στηρίξουν την εικασία ότι του κάτω φράγματος $\frac{2}{n}$ για το $r\left(A \circ A^{-1}\right)$. Σημειώνουμε ωστόσο, ότι κάθε ένα από αυτά τα κάτω φράγματα γενικεύει το Θεώρημα 6.7, και επίσης, ότι το πρώτο από αυτά είναι ένα ανάλογο για *M*-πίνακες του κάτω φράγματος του Θεωρήματος 2.5.

6.28. Θεώρημα. Έστω $A, B \in M_n$, δύο *M*-πίνακες, κι έστω $B^{-1} \equiv \left[\beta_{ij}\right]$. Τότε ισχύει

$$r\left(A\circ B^{-1}\right)\geq r\left(A\right)\min_{1\leq i\leq n}\beta_{ii}.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τη συνθήκη 14 του Θεωρήματος 2.5.3 του [HJ91] για να επιλέξουμε αντιστρέψιμο διαγώνιο πίνακα D τέτοιον ώστε ο πίνακας $D^{-1}BD$ να είναι κατά γραμμή διαγώνια κυριαρχημένος, και παρατηρούμε ότι τα διαγώνια στοιχεία του $\left(D^{-1}BD\right)^{-1}$ είναι ίδια με τα διαγώνια στοιχεία του B^{-1}. Επιπλέον, ισχύει

$$r\left(A\circ B^{-1}\right)=r\left(D^{-1}\left(A\circ B^{-1}\right)D\right)=r\left(A\circ\left(D^{-1}BD\right)^{-1}\right).$$

Από το Θεώρημα 2.5.12 του [HJ91], ισχύει

$$A\circ\left(D^{-1}BD\right)^{-1}\geq A\cdot diag\left(\beta_{11},\ldots,\beta_{nn}\right),$$

και από το Πρόβλημα 1.2.28 του [HJ91], έχουμε ότι

$$r\left(A\circ B^{-1}\right)\geq r\left(Adiag\left(\beta_{11},...,\beta_{nn}\right)\right).$$

Όμως, από το Πρόβλημα 2.5.29 του [HJ91], ισχύει

$$r\left(Adiag\left(\beta_{11},...,\beta_{nn}\right)\right)\geq r\left(A\right)\min\beta_{ii},$$

το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Το Θεώρημα 6.28 μπορεί τώρα να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ενός απλού κάτω φράγματος του $r\left(A\circ A^{-1}\right)$, όταν ο πίνακας $A\in M_n$ είναι *M*-πίνακας.

6.29. Πόρισμα. Για κάθε M - πίνακα $A\in M_n$, έχουμε

$$r\left(A\circ A^{-1}\right)>\frac{1}{n}.$$

Απόδειξη. Εφόσον τα διαγώνια στοιχεία του A^{-1} είναι θετικά, μπορούμε να επιλέξουμε έναν θετικό διαγώνιο πίνακα D τέτοιον ώστε κάθε διαγώνιο στοιχείο του $(DA)^{-1}$ να είναι ίσο με τη μονάδα. Επειδή ο DA είναι ένας *M*-πίνακας, κάθε ιδιοτιμή του $(DA)^{-1}$ έχει θετικό πραγματικό μέρος. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} r\left(A\circ A^{-1}\right) &= r\left(D\left(A\circ A^{-1}\right)D^{-1}\right) = r\left((DA)\circ(DA)^{-1}\right) \\ &\geq r(DA) = \frac{1}{\rho\left[(DA)^{-1}\right]} > \frac{1}{tr\left[(DA)^{-1}\right]} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα είναι απλή εφαρμογή του Θεωρήματος 6.28 επί του πίνακα DA, ενώ η δεύτερη οφείλεται στο γεγονός ότι $tr\left[(DA)^{-1}\right] > \rho\left[(DA)^{-1}\right]$, όπου η διαφορά $tr\left[(DA)^{-1}\right] - \rho\left[(DA)^{-1}\right]$ ταυτίζεται με το άθροισμα όλων των ιδιοτιμών εκτός της ιδιοτιμής Perron (με τις μη πραγματικές σε συζυγή ζεύγη) κάθε μία από τις οποίες έχει θετικό πραγματικό μέρος. □

Ολοκληρώνουμε τη μελέτη του $r\left(A\circ A^{-1}\right)$ με μια τελευταία ανισότητα για το $r\left(A\circ B^{-1}\right)$.

6.30. Θεώρημα. Έστω $A, B \in M_n$ δύο *M*-πίνακες, όπου ο B δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπλοκ-τριγωνικό πίνακα (με τετραγωνικά μπλοκ στη διαγώνιο) με κοινή μετάθεση γραμμών και στηλών. Υποθέτουμε ότι $u > 0$ και $\upsilon > 0$ είναι αντίστοιχα το δεξιό και το αριστερό ιδιοδιάνυσμα Perron του B. Αν $w \equiv u\circ\upsilon$, τότε ισχύει

$$r\left(A\circ B^{-1}\right) \geq \frac{r(A)\min\{w_1,\ldots,w_n\}}{r(B)\, w_1+\cdots+w_n}.$$

Απόδειξη. Έστω $B^{-1} \equiv \left[\beta_{ij}\right]$. Η στρατηγική είναι απλώς να υπολογίσουμε την τιμή β_{ii} και επομένως το $\min\beta_{ii}$, και στη συνέχεια, να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 6.28.

Έστω $D = diag(\upsilon)$. Εφόσον ο πίνακας DB είναι κατά στήλη διαγώνια κυριαρχημένος *M*-πίνακας, από το Θεώρημα 2.5.12 του [HJ91] προκύπτει ότι, για κάθε ζεύγος (i, j), ισχύει

$$\beta_{ij} \le \beta_{ii} \frac{\upsilon_j}{\upsilon_i}.$$

Από τη σχέση $B^{-1}u = r\left(B\right)^{-1} u,$ έχουμε για κάθε $i = 1,\dots,n,$ ότι

$$r\left(B\right)^{-1} u_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} u_j \le \sum_{j=1}^{n} \beta_{ii} \frac{\upsilon_j u_j}{\upsilon_i}.$$

Έπεται ότι

$$\frac{w_i}{r\left(B\right) e^T w} = \frac{u_i \upsilon_i}{r\left(B\right) u^T \upsilon} \le \beta_{ii}.$$

Δεδομένου ότι ο παρονομαστής σε αυτό το κάτω φράγμα των β_{ii} δεν εξαρτάται από το δείκτη $i,$ η αντικατάσταση στην ανισότητα του Θεωρήματος 6.28 δίνει την επιθυμητή ανισότητα. □

Βιβλιογραφία

[BB94] A. Bernan, R.J Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, SIAM, Philadelphia, 1994.

[F64] Ky Fan, Inequalities for *M*-matrices, *Proc. Koninkl. Nederl. Akademie van Wetenschappen*, *Series A*, vol. 67, pp. 602-610,1964.

[HJ90] R.A Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[HJ91] R.A Horn, and C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[J77] C.R. Johnson, A Hadamard product involving M-matrices, *Linear Multilinear Algebra*, vol. 4, pp. 261-264, 1977.

[KK17] Ν. Καδιανάκης και Σ. Καρανάσιος, *Γραμμική Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές*, Αθήνα, 2017.

[M05] Ι. Μαρουλάς, *Σημειώσεις Ανάλυσης Πινάκων*, Αθήνα, 2005.

[Φ17] Α. Φελλούρης, *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*, Αθήνα, 2017.

[Ψ15] Π. Ψαρράκος, *Σημειώσεις Ανάλυσης Πινάκων*, Αθήνα, 2015.