Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Fredholm τελεστές και εφαρμογές

Όνομα:
Δεβεζόγλου Δημήτρης

Επιβλέπων:
Γιαννακάκης Νίκος

Ηρ. Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου 157 73

Ιούνιος 2020

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Διανυσματικοί χώροι και χώροι με νόρμα

1.1 Γραμμικοί υπόχωροι

Για κάθε $\boldsymbol{S}$ και κάθε $\boldsymbol{S}'$, υποσύνολα του διανυσματικού χώρου $\boldsymbol{X}$ ο συμβολισμός $\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}'$ δηλώνει το (γραμμικό) άθροισμα του $\boldsymbol{S}$ και $\boldsymbol{S}'$ που είναι το σύνολο της μορφής $u+u', u \in \boldsymbol{S}, u' \in \boldsymbol{S}'$. Αν το $\boldsymbol{S}$ περιέχει μονάχα το διάνυσμα u, τότε το $\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}'$ γράφεται σαν $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{S}'$. Αν $\boldsymbol{M}$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος, ο $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{M}$ καλείται *ανομοιογενής γραμμικός υπόχωρος* από το u παράλληλος στο $\boldsymbol{M}$. Το σύνολο των ανομοιογενών γραμμικών υπόχωρων $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{M}$ με συγκεκριμένο $\boldsymbol{M}$, γίνεται διανυσματικός χώρος σύμφωνα με την γραμμική πράξη :

$$\alpha(u+\boldsymbol{M})+\beta(v+\boldsymbol{M})=(\alpha u+\beta v)+\boldsymbol{M} \tag{1.1}$$

Ο διανυσματικός χώρος καλείται *χώρος πηλίκο* του $\boldsymbol{X}$ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{M}$. Τα στοιχεία του $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{M}$ καλούνται *συμπλέγματα* του $\boldsymbol{M}$. Το μηδενικό διάνυσμα του $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{M}$ είναι το σύνολο $\boldsymbol{M}$, και έχουμε $u+\boldsymbol{M}=v+\boldsymbol{M}$ αν και μόνο αν $u-v \in \boldsymbol{M}$. Η διάσταση του $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{M}$ καλείται *συνδιάσταση ή έλλειψη* του $\boldsymbol{M}$ και συμβολίζεται με $\operatorname{codim} M$. Έχουμε ότι:

$$\dim \boldsymbol{M}+\operatorname{codim} \boldsymbol{M}=\dim \boldsymbol{X} \tag{1.2}$$

Αν $\boldsymbol{M_1}$ και $\boldsymbol{M_2}$ είναι γραμμικοί υπόχωροι τότε $\boldsymbol{M_1}+\boldsymbol{M_2}$ και $\boldsymbol{M_1}\cap\boldsymbol{M_2}$ είναι επίσης γραμμικοί υπόχωροι και:

$$\dim(\boldsymbol{M_1}+\boldsymbol{M_2})+\dim(\boldsymbol{M_1}\cap\boldsymbol{M_2})=\dim\boldsymbol{M_1}+\dim\boldsymbol{M_2} \tag{1.3}$$

Η πράξη $\boldsymbol{M_1}+\boldsymbol{M_2}$ για γραμμικούς υπόχωρους(ή για οποιαδήποτε υποσύνολα του $\boldsymbol{X}$) έχει την έννοια του: $(\boldsymbol{M_1}+\boldsymbol{M_2})+\boldsymbol{M_3}=\boldsymbol{M_1}+(\boldsymbol{M_2}+\boldsymbol{M_3})$ που γράφεται πιο απλά ως: $\boldsymbol{M_1} + \boldsymbol{M_2} + \boldsymbol{M_3}$. Ακριβώς όμοια ορίζουμε και $\boldsymbol{M_1} + \boldsymbol{M_2} + \ldots + \boldsymbol{M_s}$ για s γραμμικούς υπόχωρους.

Ο χώρος $\boldsymbol{X}$ είναι το ευθύ άθροισμα των γραμμικών υπόχωρων $\boldsymbol{M_1}, \boldsymbol{M_2}, \ldots \boldsymbol{M_s}$ αν $\mathbf{X} = \boldsymbol{M_1} + \boldsymbol{M_2} + \ldots + \boldsymbol{M_s}$, και $\sum\limits_j u_j = 0$ $(u_j \in \boldsymbol{M_j})$ συνεπάγεται ότι όλα τα $u_j = 0$. Τότε γράφουμε:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M_1} \oplus \boldsymbol{M_2} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{M_s} \tag{1.4}$$

Σε αυτή την περίπτωση κάθε $u \in \boldsymbol{X}$ έχει μοναδική έκφραση της μορφής

$$u = \sum_j u_j, \ u_j \in \boldsymbol{M_j}, \ j = 1, \ldots, s \tag{1.5}$$

Ακόμα έχουμε:

$$\dim \boldsymbol{X} = \sum_j \dim \boldsymbol{M_j} \tag{1.6}$$

Παρατήρηση 1.1.1. *Αν* $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M_1} \oplus \boldsymbol{M_2}$*, τότε* $\dim \boldsymbol{M_2} = \operatorname{codim} \boldsymbol{M_1}$

Απόδειξη. $X = M_1 \oplus M_2 \implies X = M_1 + M_2$ και $u_1 + u_2 = 0 \implies u_1 = -u_2, u_1 \in M_1, u_2 \in M_2, \dim M_2 = \operatorname{codim} M_1$ □

1.2 Χώρος πηλίκο

Αν $\boldsymbol{M}$ γραμμικός υπόχωρος του $\boldsymbol{X}$, ο χώρος πηλίκο $\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}/\boldsymbol{M}$ ορίζεται από το σύνολο των συμπλεγμάτων $\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{M} \mod M$ (ή όλων των ανομοιογενών γραμμικών υπόχωρων που είναι παράλληλοι στο $\boldsymbol{M}$) με τις γνωστές γραμμικές πράξεις. Αν $\mathbf{X}$ είναι χώρος με νόρμα και $\boldsymbol{M}$ είναι κλειστός τότε ο $\tilde{\boldsymbol{X}}$ γίνεται χώρος με νόρμα με την βοήθεια της :

$$\|\tilde{u}\| = \inf_{v \in \tilde{\boldsymbol{u}}} \|v\| = \inf_{z \in \boldsymbol{M}} \|u - z\| = \operatorname{dist}(u, \boldsymbol{M}) \tag{1.7}$$

Είναι νόρμα και ακόμα $\tilde{u} = \tilde{u}'$ αν και μόνο αν $u - u' \in \boldsymbol{M}$

Πρόταση 1.2.1. *Ο* $\tilde{\boldsymbol{X}}$ *είναι χώρος Banach αν και μόνο αν ο* $\boldsymbol{X}$ *είναι.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν ο X είναι Banach, τότε και ο $\tilde{X}$ είναι Banach. Έστω $\{\tilde{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy ακολουθία στον $\tilde{X}$. Έστω ένα $n(k) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|\tilde{u_n} - \tilde{u_m}\| \leq 2^{-k} \text{ για } n, m \geq n(k)$$

Υποθέτουμε ότι $n(1) \leq n(2) \leq \dots$, και θέτουμε

$$\tilde{u_k} = \tilde{u}_{n(k+1)} - \tilde{u}_{n(k)}, k = 1, 2, \dots$$

Τότε $\|\tilde{u}_k\| \leq 2^{-k}$, και μπορούμε να επιλέξουμε ένα $u_k \in \tilde{u}_k, \forall k$ με τέτοιο τρόπο ώστε

$$\|u_k\| \leq \tilde{u}_k + 2^{-k} \leq 2^{1-k}$$

Θέτουμε

$$u = u_{n(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

και η σειρά συγκλίνει απόλυτα και ορίζει ένα διάνυσμα στον X, αφού ειναι πλήρης. Παίρνοντας τα μερικά αθροίσματα της σειράς αυτής και ορίζοντας τα με w_k, θα έχουμε ότι $\tilde{w_k} = \tilde{u}_{n(k+1)}$ και αφού $\|\tilde{w_k} - \tilde{u}\| \leq \|w_k - u\| \to 0$ καθώς το $k \to \infty$, τότε θα έχουμε ότι $\|\tilde{u}_{n(k)} - \tilde{u}\| \to 0$. Επιλέγουμε k τέτοιο ώστε $\|\tilde{u}_{n(k)} - \tilde{u}\| < \varepsilon$ καθώς επίσης και $2^{-k} < \varepsilon$, τότε $\|\tilde{u}_n - \tilde{u}\| \leq \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_{n(k)}\| + \|\tilde{u}_{n(k)} - \tilde{u}\| < 2\varepsilon$ για $n \geq n(k)$. Η ακολουθία $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έχει όριο $\tilde{u} \in \tilde{X}$ και επομένως ο $\tilde{X}$ είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 1.2.2. *Η συνδιάσταση* ($\operatorname{codim} \boldsymbol{M}$) *με* $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{X}$ *ορίζεται ως:* $\operatorname{codim} \boldsymbol{M} = \dim \boldsymbol{X}/\boldsymbol{M}$ *όπως και προηγουμένως.*

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω* $\boldsymbol{M}$ *κλειστός γραμμικός υπόχωρος του* $\boldsymbol{X}$ *και έστω* $u_0 \in \boldsymbol{X}, u_0 \notin \boldsymbol{M}$*.Τότε υπάρχει ένα συναρτησιακό* $f \in \boldsymbol{X}^*$ *τέτοιο ώστε* $(f, u_0) = 1, (f, u) = 0$ *για* $u \in \boldsymbol{M}$ *και* $\|f\| = 1/\operatorname{dist}(u_0, \boldsymbol{M})$.

Απόδειξη. Έστω M' να παράγεται από τον Μ και u_0. Κάθε $u \in M'$ γράφεται στην μορφή $u = \xi u_0 + v,\ v \in M$ και επειδή το ξ καθορίζεται από το u μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $f[u] = \bar{\xi}$ στον M'. Η f γραμμική και φραγμένη με $\|f\| \leq 1/d,\ d = \operatorname{dist}(u_0, M)$. Πιο συγκεκριμένα, $\|f\| = 1/d$ και υπάρχει $u \in M'$, για το οποίο $\|u\| = 1,\ \operatorname{dist}(u, M) > 1 - \varepsilon$ (Λήμμα Riesz) και για αυτό το u έχουμε

$$1 - \varepsilon < \operatorname{dist}(u, M) = \operatorname{dist}(\xi u_0 + v, M) = |\xi| \operatorname{dist}(u_0, M) = |\xi| d$$

ή

$$|f[u]| > (1 - \varepsilon)\|u\|/d$$

Η f μπορεί να επεκταθεί (Θεώρημα Hanh Banach) στον Χ με το ίδιο φράγμα και συμβολίζεται πάλι με f επομένως οι ισχυρισμοί του θεωρήματος ικανοποιούνται. □

1.3 Συζυγείς τελεστές

1.3.1 Συζυγείς Χώροι

Ορισμός 1. *Έστω $\boldsymbol{M}$ υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου $\boldsymbol{X}$. Ένα συναρτησιακό $f \in \boldsymbol{X}^*$ καλείται μηδενιστής εάν*

$$f(x) = 0, x \in \boldsymbol{M}$$

Το σύνολο των μηδενιστών του $\boldsymbol{M}$ συμβολίζεται με $\boldsymbol{M}^{\perp}$. Ακόμα για κάθε $\boldsymbol{T}$ υποσύνολο του $\boldsymbol{X}^*$, καλούμε το $x \in \boldsymbol{X}$ μηδενιστή του $\boldsymbol{T}$ αν

$$f(x) = 0, f \in \boldsymbol{T}$$

Συμβολίζουμε το σύνολο των μηδενιστών του $\boldsymbol{T}$ με ${}^{\perp}\boldsymbol{T}$.

Έστω $\boldsymbol{S}$ υποσύνολο του χώρου Banach $\boldsymbol{X}$.

Λήμμα 1.3.1. *Ο $\boldsymbol{S}^{\perp}(\subset \boldsymbol{X}^*)$ είναι κλειστός υπόχωρος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S^{\perp}$ και $f_n \to f \in X^*$. Τότε $f_n(x) \to f(x)$, $x \in X$ Ειδικά, αυτό συμβαίνει για όλα τα $x \in S$ άρα $f \in S^{\perp}$ □

Ο μηδενιστής $\boldsymbol{S}^{\perp\perp}$ του $\boldsymbol{S}^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\boldsymbol{X}^{**}$ αλλά όχι απαραίτητα υποσύνολο του $\boldsymbol{X}$.

Λήμμα 1.3.2. *Αν $f_1, \dots, f_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\boldsymbol{X}^*$, τότε υπάρχουν διανύσματα $x_1, \dots, x_m$ στον $\boldsymbol{X}$ τέτοια ώστε :*

$$f_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad 1 \leq j, k \leq m \tag{1.8}$$

Ακόμα αν $x_1, \dots, x_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $\boldsymbol{X}$, τότε υπάρχουν $f_1, \dots, f_m \in \boldsymbol{X}^*$ που να ικανοποιούν την σχέση (1.8).

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το λήμμα είναι αληθές για $m = l-1 \geq 1$.Έστω $f_1, \dots, f_l \in X^*$ γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε για κάθε $x \in X$,

$$f_j(x - \sum_{1}^{l-1} f_k(x)x_k) = f_j(x) - f_j(x) = 0, \quad 1 \leq j < l \tag{1.9}$$

Αν το f_l μηδενίζεται στο ${}^{\perp}[f_1, \dots, f_{l-1}]$ (το σύνολο των μηδενιστών των $f_1, \dots, f_{l-1}$) τότε και στο

$$x - \sum_{1}^{l-1} f_k(x)x_k$$

για κάθε $x \in X$. Αυτό σημαίνει ότι

$$f_l(x) = \sum_{1}^{l-1} f_k(x) f_l(x_k), \quad x \in X$$

ή

$$f_l = \sum_{1}^{l-1} f_l(x_k) f_k$$

Όμως αυτό είναι αδύνατο αφού $f_1, \ldots, f_l$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως το f_l δεν μηδενίζεται σε ολόκληρο το ${}^{\perp}[\, f_1, \ldots, f_{l-1}]$. Θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα x_l σε αυτό το σύνολο που να μην μηδενίζει το f_l. Επομένως διαλέγουμε ένα x_l τέτοιο ώστε

$$f_j(x_l) = 0, \quad 1 \leq j < l, f_l(x_l) = 1$$

Τώρα για κάθε $k \neq l$ μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά των συναρτησιακών ώστε το f_k να αντικαταστήσει το f_l ως το τελευταίο στο σύνολο των $(f_1, \ldots, f_l)$. Αφού τα f_j με $j \neq k$ δημιουργούν ένα $l-1$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων συναρτησιακών μπορούμε να ξαναχρησιμοποιήσουμε την επαγωγική υπόθεση και το παραπάνω επιχείρημα έτσι ώστε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι υπάρχει $x_k \in X$ τέτοιο ώστε

$$f_j(x_k) = 0, \quad j \neq k, \; f_k(x_k) = 1$$

Αυτό μας δινει ότι η (1.8) ισχύει για $m = l$ και αφού για $m = 1$ τετριμμένα, έχουμε το πρώτο μέρος. Εάν τώρα, M_j το υποσύνολο του X που παράγεται από τα $x_1, \ldots, x_m$ χωρίς το x_j και αν χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω επιχείρημα, θα έχουμε ότι $x_j \notin M_j$ και επομένως $\operatorname{dist}(x_j, M_j) > 0$. Δηλαδή υπάρχει ένα $f_j \in M_j^{\perp} : f_j(x_j) = 1$. Αυτό μας δίνει και το δεύτερο μέρος του θεωρήματος. □

Λήμμα 1.3.3. *Αν* $\boldsymbol{M}$ *είναι κλειστός, τότε* $\operatorname{codim} \boldsymbol{M} = \dim \boldsymbol{M}^{\perp}$ *και* $\operatorname{codim} \boldsymbol{M}^{\perp} = \dim \boldsymbol{M}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\operatorname{codim} M = m < \infty$. Τότε υπάρχει μια πεπερασμένη βάση $\{\tilde{x}_j\}_{j=1,\ldots,m} \subseteq \tilde{X} = X/M$. Έστω $x_j \in \tilde{x}_j$. Για κάθε $u \in X$, το $\tilde{u}$ μπορεί να γραφτεί μοναδικά στην μορφή $\tilde{u} = \xi_1 \tilde{x}_1 + \ldots + \xi_m \tilde{x}_m$. Επομένως το u έχει μοναδική γραφη

$$u = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_m x_m + v \;, \; v \in M \tag{1.10}$$

Έστω M_j να παράγεται από τον Μ και $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m$. Ο M_j είναι κλειστός[1] και επομένως, υπάρχει $f_j \in X^*$ τέτοιο ώστε $f_j \in M_j^{\perp}$ και $(f_j, x_j) = 1$ από

[1]Εκμεταλευόμαστε γνωστό λήμμα με την την εξής διατύπωση : Αν M' είναι υπόχωρος που παράγεται από κλειστό γραμμικό υπόχωρο M και πεπερασμένα διανύσματα $u_1, \ldots, u_m$, τότε M' κλειστός.

το θεώρημα (1.2.3). Δηλαδή, $f_j \in M^\perp, (f_j, x_k) = \delta_{jk}$. Ακόμα τα f_j είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
Έστω $f \in M^\perp$ και $\alpha_j = (f, x_j)$. Τότε η ποσότητα $f - \alpha_1 f_1 - \ldots - \alpha_m f_m$ έχει βαθμωτό γινόμενο 0 με όλα τα $x_k, v \in M$. Άρα, και με όλα τα $u \in X$, που γράφονται σύμφωνα με την σχέση (1.10) και άρα θα είναι $f = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_m f_m$. Επομένως ο $M^\perp$ παράγεται απο τα $f_1, \ldots, f_m$, άρα $\dim M^\perp = m$.
Αν $\operatorname{codim} M = \infty$,τότε υπάρχει μια απειροδιάστατη ακολουθία $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ κλειστών γραμμικών υπόχωρων, τέτοιοι ώστε $M \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots$, και επομένως έχουμε $M^\perp \supset M_1^\perp \supset M_2^\perp \supset \ldots$. Έτσι $\dim M^\perp = \infty$.
Αν $\dim M = m < \infty$,έστω $\{x_1, \ldots, x_m\}$ να είναι μια βάση του M. Όπως και προηγουμένως μπορούμε να κατασκευάσουμε $f_j \in X^*, j = 1, \ldots, m$ με $(f_j, x_k) = \delta_{jk}$. Κάθε $f \in X^*$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$f = \sum_{k=1}^{m} (f, x_k) f_k + f'$$

με $(f', x_j) = 0, j = 1, \ldots, m$ με τα $f' \in M^\perp$. Επομένως $\tilde{f}$ είναι ένας γραμμικός συνδιασμός όλων των $\tilde{f}_k$, όπου $\tilde{f}, \tilde{f}_k \in X^*/M^\perp$. Αφού, τα $\tilde{f}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αυτό δείχνει ότι $\operatorname{codim} M^\perp = m$.
Αν $\dim M = \infty$, υπάρχει μια άπειρη ακολουθία $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ γραμμικών υπόχωρων πεπερασμένης διάστασης ώστε $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M$, επομένως $M_1^\perp \supset M_2^\perp \supset \ldots \supset M^\perp$ και αυτό αποδεικνύει ότι $\operatorname{codim} M^\perp = \infty$. □

Κλείνουμε τη ενότητα με ένα λήμμα το οποίο αν και μας είναι ήδη γνωστό, είναι μείζωνος σημασίας για την μελέτη των γραμμικών υπόχωρων.

Λήμμα 1.3.4. *Έστω $\boldsymbol{N}$ να είναι υπόχωρος του $\boldsymbol{X}$.Τότε υπάρχει ένας κλειστός υπόχωρος $\boldsymbol{X_0}$ του $\boldsymbol{X}$ τέτοιος ώστε:*

(i). $\boldsymbol{X_0} \cap \boldsymbol{N} = \{0\}$

(ii). Για κάθε $x \in \boldsymbol{X}$ υπάρχει ένα $x_0 \in \boldsymbol{X_0}$ και ένα $x_1 \in \boldsymbol{N}$ τέτοιο ώστε $x = x_0 + x_1$, και η γραφή αυτή είναι μοναδική.

Απόδειξη. Έστω $x_1, \ldots, x_n$ να είναι μια βάση του N. Τότε από λήμμα (1.3.2) υπάρχουν συναρτησιακά $f_1 \ldots, f_n$ στον X^* τέτοια ώστε:

$$f_j(x_k) = \delta_{jk} \ 1 \le j, k \le n$$

Έστω X_0 να είναι το σύνολο των $x \in X$ τέτοια ώστε $f_j(x) = 0$ για κάθε j. Τότε ο X_0 είναι υπόχωρος του X και επίσης είναι κλειστός, γιατί αν $\{z_n\}_{n\ge 1} \subseteq X_0$ και

$z_n \to z \in X$ τότε $0 = f_j(z_n) \to f_j(z)$ για κάθε j, και άρα $z \in X_0$. Ακόμα $X_0 \cap N = \{0\}$. Πράγματι, αν $x \in N$ τότε

$$x = \sum_1^n a_k x_k$$

και επομένως $f_j(x) = a_j$, $\forall j$. Αν το x ανήκει και στον X_0 θα πρέπει να έχουμε $a_j = 0$. Τελικά, θα πρέπει να δείξουμε ότι κάθε $x \in X$ γράφεται στην μορφή $x = x_0 + z$, $x_0 \in X_0$ και $z \in N$. Έστω $x \in X$ και θέτουμε

$$z = \sum_1^n f_k(x) x_k$$

Το z ανήκει στο N και ακόμα $f_j(x - z) = f_j(x) - f_j(x) = 0$ για κάθε j. Επομένως $x - z \in X_0$. Η μοναδικότητα είναι προφανής, και ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

1.3.2 Συζυγείς Τελεστές σε χώρους Banach

Έστω τελεστής $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ τότε γνωρίζουμε ότι $A^* \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}^*, \boldsymbol{X}^*)$ και $\|A\| = \|A^*\|$. Ισχύει γενικά ότι:

$$\boldsymbol{R}(A) \subset {}^{\perp}\boldsymbol{N}(A^*) \tag{1.11}$$

Θέλουμε να μελετήσουμε πότε τα δύο σύνολα ταυτίζονται.

Λήμμα 1.3.5. *Αν $\boldsymbol{M}$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\boldsymbol{X}$, τότε και ${}^{\perp}(\boldsymbol{M}^{\perp}) = \boldsymbol{M}$.*

Απόδειξη. $M \subset {}^{\perp}(M^{\perp})$, αφού $x \in {}^{\perp}(M^{\perp})$ αν και μόνο αν, $f(x) = 0, \forall f \in M^{\perp}$ όμως αυτό ισχύει για όλα τα $x \in M$. Υποθέτουμε $x_1 \in X, x_1 \notin M$. Αφού ο M είναι κλειστός

$$\mathrm{dist}(x_1, M) = \inf_{z \in M} \|x_1 - z\| > 0$$

τότε από τα συμπεράσματα του Θεωρήματος Hahn Banach υπάρχει $f_1 \in X^*$ τέτοιο ώστε $f_1(x_1) = \mathrm{dist}(x_1, M)$, $\|f_1\| = 1$, $f_1(x) = 0$, $\forall x \in M$. Εφόσον το x_1 δεν μηδενίζει το f_1, δεν ανήκει στο ${}^{\perp}(M^{\perp})$. Ως εκ τούτου ${}^{\perp}(M^{\perp}) \subset M$ □

Λήμμα 1.3.6. *Αν $\boldsymbol{S}$ υποσύνολο του χώρου $\boldsymbol{X}$, και $\boldsymbol{M}$ είναι ο κλειστός υπόχωρος που παράγεται από το $\boldsymbol{S}$, τότε $\boldsymbol{M}^{\perp} = \boldsymbol{S}^{\perp}$ και $\boldsymbol{M} = {}^{\perp}(\boldsymbol{S}^{\perp})$.*

Απόδειξη. Από το λήμμα (1.3.5) έχουμε ότι $M = {}^{\perp}(M^{\perp}) = {}^{\perp}(S^{\perp})$. Για το πρώτο σκέλος του λήμματος, αφού $S \subset M$, έχουμε και ότι $M^{\perp} \subset S^{\perp}$. Ακόμα, αν $x_j \in S, f \in S^*$ τότε:

$$f(\sum_{j=1}^n a_j x_j) = \sum_{j=1}^n a_j f(x_j) = 0 \tag{1.12}$$

που δείχνει ότι το f μηδενίζει τον υπόχωρο που παράγεται από το S. Ακόμα, εάν $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ και $z_n \to z \in X$ τότε

$$f(z_n) \to f(z)$$

Ως εκ τούτου, το f μηδενίζει τον M και η απόδειξη έλαβε τέλος. $\square$

Για τον τελεστή $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, σημειώνουμε ότι :

$$\boldsymbol{R}(A)^{\perp} = \boldsymbol{N}(A^*) \tag{1.13}$$

Έχουμε ότι $y^* \in \boldsymbol{R}(A)^{\perp}$ αν και μόνο αν $y^*(Ax) = 0 \ \forall\ x \in X$. Αυτό είναι αληθές αν και μόνο αν $A^*y^*(x) = 0 \ \forall\ x$, δηλαδή αν $A^*y^* = 0$. Εφαρμόζοντας το λήμμα (1.3.6) θα έχουμε ότι

$$\overline{\boldsymbol{R}(A)} = \ ^{\perp}[\,\boldsymbol{R}(A)^{\perp}] = \ ^{\perp}\boldsymbol{N}(A^*) \tag{1.14}$$

και έχουμε το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 1.3.7. *Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε*

$$\boldsymbol{R}(A) = \ ^{\perp}\boldsymbol{N}(A^*), \tag{1.15}$$

είναι η $\boldsymbol{R}(A)$ κλειστή στον Y.

Θεώρημα 1.3.8. *Έστω $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ Banach χώροι και $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Αν $\boldsymbol{R}(A)$ κλειστή στον $\boldsymbol{Y}$ τότε*

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^*) = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})^{\perp} \tag{1.16}$$

και ως εκ τούτου, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^*)$ κλειστή στον $\boldsymbol{X}^*$

Απόδειξη. Αν $x^* \in \boldsymbol{R}(A^*), \exists\ y^* \in Y^* \ :\ A^*y^* = x^*$. Για $x \in \boldsymbol{N}(A)$,

$$x^*(x) = A^*y^*(x) = y^*(Ax) = 0$$

Ως εκ τούτου, $x^* \in \boldsymbol{N}(A)^{\perp}$. Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι $x^* \in \boldsymbol{N}(A)^{\perp}$. Έστω y να είναι ένα στοιχείο της $\boldsymbol{R}(A)$ και έστω $x \in X$ τέτοιο ώστε $Ax = y$. Θέτουμε:

$$f(y) = x^*(x)$$

το οποίο είναι συναρτησιακό στην $\boldsymbol{R}(A)$. Διότι αν, $x_1 \in X \ : Ax_1 = y$, τότε $x_1 - x \in \boldsymbol{N}(A)$ και επομένως

$$x^*(x_1) = x^*(x)$$

που δείχνει ότι το f εξαρτάται από το y και όχι από το x που επιλέχθηκε, άρα είναι γραμμικό συναρτησιακό. Ακόμα είναι φραγμένο διότι αν, $z \in \boldsymbol{N}(A)$,

$$f(y) = x^*(x - z)$$

και ως εκ τούτου,

$$|f(y)| \leq \|x^*\| \cdot \|x - z\|$$

Άρα

$$|f(y)| \leq \|x^*\| \operatorname{dist}(x, \boldsymbol{N}(A)) \leq C\|x^*\| \cdot \|y\|$$

(επειδή $\boldsymbol{R}(A)$ κλειστή στον Y) Από το Θεώρημα Hahn Banach το f μπορεί να επεκταθεί σε όλο τον Y και επομένως υπάρχει ένα $y^* \in Y^*$ τέτοιο ώστε

$$f(y) = y^*(y), \quad y \in Y$$

Ειδικά αυτό ισχύει και για $y \in \boldsymbol{R}(A)$. Άρα

$$x^*(x) = y^*(Ax), \quad x \in X$$

Τότε από τον ορισμό του A^*

$$x^*(x) = A^*y^*(x), \quad x \in X$$

Και αφού ισχύει για όλα τα $x \in X$ έχουμε

$$x^* = A^*y^*$$

Έτσι, $x^* \in \boldsymbol{R}(A)^*$, και η απόδειξη έλαβε τέλος. □

1.4 Προβολές

Έστω $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ συμπληρωματικοί γραμμικοί υπόχωροι ενός χώρου Banach και:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} \oplus \boldsymbol{N} \tag{1.17}$$

Έτσι κάθε $u \in \boldsymbol{X}$ μπορεί να γραφτεί μοναδικά στην μορφή $u = u' + u''$, $u' \in \boldsymbol{M}, u'' \in \boldsymbol{N}$. Το u' καλείται *προβολή του u στον $\boldsymbol{M}$ κατά μήκος του $\boldsymbol{N}$*. Αν θέσουμε $v = v' + v''$, η ποσότητα, $\alpha u + \beta v$ έχει προβολή $\alpha u' + \beta v'$ στον $\boldsymbol{M}$ κατά μήκος του $\boldsymbol{N}$. Αν θέσουμε $u' = Pu$ τότε ο P είναι γραμμικός τελεστής από τον $\boldsymbol{X}$ στον εαυτό του. Ο P καλείται *τελεστής προβολή (ή απλά προβολή)* στον $\boldsymbol{M}$ κατά μήκος του $\mathbf{N}$. Η $I - P$ είναι η προβολή στον $\boldsymbol{N}$ κατά μήκος του $\boldsymbol{M}$. Έχουμε λοιπόν, $Pu = u$ αν και μόνο αν $u \in M$ και $Pu = 0$ αν και μόνο αν $u \in N$. Παρατηρούμε ότι η εικόνα της P είναι ο $\boldsymbol{M}$ και ο πυρήνας της P είναι ο $\boldsymbol{N}$. Γράφουμε $\dim P$ αν $\dim \boldsymbol{M} = \dim \boldsymbol{R}(P)$. Ακόμα $Pu \in \boldsymbol{M}$, $\forall u \in \boldsymbol{X}$ άρα $PPu = Pu$ και επομένως έχει την ιδιότητα :

$$P^2 = P \tag{1.18}$$

Αντίστροφα, κάθε τελεστής με την παραπάνω ιδιότητα είναι προβολή. Αν θέσουμε $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}(P)$, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{R}(I-P)$, τότε το $u' \in \boldsymbol{M}$ δίνει $u' = Pu$ για κάποιο u και ακόμα $Pu' = P^2u = Pu = u'$. Όμοια $u'' \in \boldsymbol{N}$ δίνει $Pu'' = 0$. Έτσι $u \in \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N} \implies u = Pu = 0$ δηλαδή, $\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N} = 0$. Κάθε $u \in X$ έχει γραφή $u = u' + u''$ με $u' = Pu \in \boldsymbol{M}$ και $u'' = (I-P)u \in \boldsymbol{N}$. Αυτό δείχνει ότι P είναι η προβολή στον $\boldsymbol{M}$ κατά μήκος του $\boldsymbol{N}$. Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα μπορούν να επεκταθούν και για περισσότερους γραμμικούς υπόχωρους $\boldsymbol{M_1}, \boldsymbol{M_2}, \ldots, \boldsymbol{M_s}$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M_1} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{M_s}. \tag{1.19}$$

Κάθε $u \in \boldsymbol{X}$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_s$, $u_j \in M_j$ με $j = 1, \ldots, s$. κατά μοναδικό τρόπο. Ο τελεστής P_j που ορίζεται από την σχέση $P_j u = u_j$ είναι η προβολή στον $\boldsymbol{M_j}$ κατά μήκος του $\boldsymbol{N_j} = \boldsymbol{M_1} \oplus \boldsymbol{M_{j-1}} \oplus \boldsymbol{M_{j+1}} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{M_s}$ Ακόμα έχουμε:

$$\sum_j P_j = 1 \tag{1.20}$$

$$P_k P_j = \delta_{jk} P_j \tag{1.21}$$

Αντίστροφα, έστω $P_1, \ldots, P_s$ τελεστές που ικανοποιούν τις σχέσεις (1.20) και (1.21). Αν $M_j = \boldsymbol{R}(P_j)$ τότε βλέπουμε ότι η σχέση (1.19) ικανοποιείται και οι P_j είναι προβολές όπως ορίστηκαν και προηγουμένως.

1.4.1 Προβολές σε χώρους Banach

Ένας τελεστής $P \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ με την ιδιότητα $P^2 = P$ καλείται προβολή.Έχουμε πάλι την γραφή:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} \oplus \boldsymbol{N} \tag{1.22}$$

όπου $\boldsymbol{M} = P\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{N} = (I-P)\boldsymbol{X}$. Πρέπει να προστεθεί ακόμα ότι $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ είναι κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι του $\boldsymbol{X}$. Αυτό συμβαίνει διότι $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ είναι ακριβώς οι πυρήνες των $I-P$ και P αντίστοιχα.

Αντίστροφα, μια γραφή ενός χώρου Banach στην μορφή (1.22), δύο κλειστών γραμμικών υπόχωρων, ορίζει μια προβολή P (στον $\boldsymbol{M}$ κατά μήκος του $\boldsymbol{N}$). Η P είναι γραμμικός και φραγμένος τελεστής. Η απόδειξη ότι είναι φραγμένος είναι εφαρμογή του Θεωρήματος Κλειστού Γραφήματος.
Για δοσμένο κλειστό γραμμικό υπόχωρο $\boldsymbol{M}$ του $\boldsymbol{X}$, δεν είναι πάντα εφικτό να βρούμε συμπληρωματικό υπόχωρο $\boldsymbol{N}$ όπως στην (1.22).Δηλαδή ο $\boldsymbol{M}$ δεν χρειάζεται να έχει προβολή, και μπορεί να έχει παραπάνω από μια προβολές. Παρόμοια τα αποτελέσματα και για περισσότερους από δύο γραμμικούς υπόχωρους όπως παρουσιάστηκαν παραπάνω.
Αν P είναι προβολή στον $\boldsymbol{X}$, P^* είναι προβολή στον $\boldsymbol{X}^*$. Ξανά έχουμε ότι $\boldsymbol{M}^* = P^*\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{N}(I-P)^* = \boldsymbol{R}(I-P)^\perp = \boldsymbol{N}^\perp$ και όμοια $\boldsymbol{N}^* = (I-P^*)\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{M}^\perp$.

1.5 Κλειστοί τελεστές

Θεωρούμε έναν τελεστή T ο οποίος ορίζεται από τον $\boldsymbol{X}$ στον $\boldsymbol{Y}$. Μια ακολουθία $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ θα λέγεται ότι είναι *T-συγκλίνουσα* (στο $u \in \boldsymbol{X}$) αν τόσο η $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, όσο και η $\{Tu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ακολουθίες και $u_n \to u$. Τότε γράφουμε ότι $u_n \underset{T}{\to} u$ για να δηλώσουμε ότι $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι *T-συγκλίνουσα* στο u. Ο τελεστής T θα λέγεται *κλειστός* αν $u_n \underset{T}{\to} u \implies u \in \boldsymbol{D}(T)$ και $Tu = \lim\limits_n Tu_n$. Δηλαδή αν για κάθε ακολουθία $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{D}(T)$ τέτοια ώστε $u_n \to u$ και $Tu_n \to v$, $u \in \boldsymbol{D}(T)$ και $Tu = v$. Αρχικά φαίνεται η κλειστότητα να μοιάζει με την συνέχεια όμως οι δύο έννοιες είναι διαφορετικές.

Το σύνολο των κλειστών τελεστών από το $\boldsymbol{X}$ στο $\boldsymbol{Y}$ θα συμβολίζεται με $\mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ καθώς επίσης και $\mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = \mathscr{C}(\boldsymbol{X})$.

Ένας φραγμενος τελεστής T είναι κλειστός αν και μόνο αν $\boldsymbol{D}(T)$ είναι κλειστό. Πράγματι, $u_n \to u$ με $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{D}(T) \implies \lim\limits_n Tu_n = v$. Επομένως η κλειστότητα του T είναι ισοδύναμη με το ότι $u_n \to u$, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{D}(T) \implies u \in \boldsymbol{D}(T)$

Ειδικά, κάθε $T \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ είναι κλειστός : $\mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \subset \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

Παρατήρηση 1.5.1. *Αν ο T είναι κλειστός και ο A είναι φραγμένος με $\boldsymbol{D}(A) \supset \boldsymbol{D}(T)$ τότε ο $T + A$ είναι κλειστός.*

Θεωρούμε το γράφημα ενός τελεστή. Ο χώρος γινόμενο $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ περιέχει όλα τα (διατεταγμένα) ζεύγη της μορφής $\{u, v\}$ $, u \in X, v \in Y$. Ο $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ είναι διανυσματικός χώρος αν οι γραμμικές πράξεις ορίζονται ως εξής :

$$a_1\{u_1, v_1\} + a_2\{u_2, v_2\} = \{a_1u_1 + a_2u_2, a_1v_1 + a_2v_2\}. \tag{1.23}$$

Ακόμα, ο $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ γίνεται χώρος με νόρμα αν η νόρμα ορίζεται :

$$\|\{u, v\}\| = (\|u\|^2 + \|v\|^2)^{1/2} \tag{1.24}$$

Ο $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ είναι πλήρης και επιπλέον είναι Banach .

Το γράφημα $\boldsymbol{G}(T)$ ενός τελεστή T που ορίζεται στον $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ είναι εξ'ορισμού υποσύνολο του $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ και περιέχει όλα τα στοιχεία της μορφής $\{u, Tu\}$ $u \in \boldsymbol{D}(T)$. Το $\boldsymbol{G}(T)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$. Επομένως $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία διανυσμάτων του **X** *T-συγκλίνουσα*, αν και μόνο αν $\{u_n, Tu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ακολουθία στον $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$. Άρα *ο T είναι κλειστός αν και μόνο αν το $\boldsymbol{G}(T)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$.*

Παρατήρηση 1.5.2. *(i). $S \subset T$ είναι ισοδύναμο με το $\boldsymbol{G}(S) \subset \boldsymbol{G}(T)$*

(ii). Αν $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, ο πυρήνας $\boldsymbol{N}(T)$ του T είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\boldsymbol{X}$.

Αν S είναι ένας τελεστής από τον $\boldsymbol{Y}$ στο $\boldsymbol{X}$, το γράφημα $\boldsymbol{G}(S)$ είναι υποσύνολο του $\boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{X}$. Κάποιες φορές το θεωρούμε και υποσύνολο του $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$. Έστω $\boldsymbol{G}'(S) \subset \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ να περιέχει τα στοιχεία της μορφής $\{Sv, v\}$, $v \in \boldsymbol{D}(S)$. Καλούμε το $\boldsymbol{G}'(S)$ το *αντίστροφο γράφημα του S*. Όπως και πριν το $\boldsymbol{G}'(S)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος αν και μόνο αν S είναι κλειστός.

Αν ένας τελεστής από το $\mathbf{X}$ στο $\mathbf{Y}$ είναι αντιστρέψιμος τότε

$$\boldsymbol{G}(T) = \boldsymbol{G}'(T^{-1}). \tag{1.25}$$

Ως εκ τούτου T^{-1} *κλειστός αν και μόνο αν ο T είναι κλειστός.*

Παρατήρηση 1.5.3. *(i). Ένας γραμμικός υπόχωρος $\boldsymbol{M}$ του $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ είναι αντίστροφο γράφημα αν και μόνο αν ο $\boldsymbol{M}$ δεν περιέχει στοιχεία της μορφής $\{u, 0\}$, $u \neq 0$.*

(ii). Ο T είναι κλειστός αν $\boldsymbol{R}(T)$ είναι κλειστή και υπάρχει $m > 0$: $\|Tu\| \geq m\|u\|$ $\forall u \in \boldsymbol{D}(T)$

1.5.1 Τελεστές με κλειστή επέκταση

Ένας τελεστής T από τον $\boldsymbol{X}$ στον $\boldsymbol{Y}$ έχει την δυνατότητα να γίνει κλειστός εάν έχει κλειστή επέκταση. Ο Τ έχει την δυνατότητα να επεκταθεί σε κλειστό αν και μόνο εάν η κλειστότητα $\overline{\boldsymbol{G}(T)}$ του $\boldsymbol{G}(T)$ είναι γράφημα. Οδηγούμαστε στο κριτήριο : ο Τ έχει την δυνατότητα να επεκταθεί σε κλειστό τελεστή αν και μόνο εάν τα στοιχεία της μορφής $\{0, v\}$, $v \neq 0$ δεν είναι όριο των στοιχείων της μορφής $\{u, Tu\}$. Με άλλα λόγια, ο Τ επεκτείνεται σε κλειστό αν και μόνο αν :

$$u_n \subseteq \boldsymbol{D}(T),\ u_n \to 0 \text{ και } Tu_n \to v \implies v = 0 \tag{1.26}$$

Όταν ο Τ μπορεί να έχει κλειστή επέκταση υπάρχει ένας τελεστής $\tilde{T}$ με $\boldsymbol{G}(\tilde{T}) = \overline{\boldsymbol{G}(T)}$. Ο $\tilde{T}$ καλείται κλειστότητα του Τ . Προφανώς ο $\tilde{T}$ είναι η *μικρότερη κλειστή επέκταση* του Τ, με την έννοια ότι κάθε κλειστή επέκταση του Τ είναι επίσης επέκταση του $\tilde{T}$. Επειδή $u \in \boldsymbol{D}(\tilde{T})$ είναι ισοδύναμο με το ότι $\{u, \tilde{T}u\} \in \overline{\boldsymbol{G}(T)}$, το $u \in \boldsymbol{X}$ ανήκει επίσης στο $\boldsymbol{D}(\tilde{T})$ αν και μόνο αν υπάρχει $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Τ-συγκλίνουσα στο u. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι $\tilde{T}u = \lim Tu_n$.

Έστω Τ να είναι ένας κλειστός τελεστής. Για κάθε τελεστή S που μπορεί να επεκταθεί σε κλειστό, τέτοιο ώστε $\tilde{S} = T$, το $\boldsymbol{D}(S)$ θα καλείται πυρήνας του Τ. Με άλλα λόγια ένας γραμμικός υπόχωρος $\boldsymbol{D}$ του $\boldsymbol{D}(T)$ είναι πυρήνας του Τ εάν το σύνολο των στοιχείων $\{u, Tu\}$, $u \in \boldsymbol{D}$ είναι πυκνό στο $\boldsymbol{G}(T)$. Για αυτό είναι απαραίτητο αλλά όχι αναγκαίο το $\boldsymbol{D}$ να είναι πυκνό στο $\boldsymbol{D}(T)$.

Παρατήρηση 1.5.4. *(i). Αν ο T είναι φραγμένος και κλειστός, κάθε $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{D}(T)$ πυκνό στο $\boldsymbol{D}(T)$ είναι πυρήνας του T.*

(ii). Κάθε φραγμένος τελεστής μπορεί να επεκταθεί σε κλειστό.

(iii). Κάθε τελεστής με κλειστή επέκταση και πεπερασμένος είναι φραγμένος.

1.5.2 Θεώρημα κλειστού γραφήματος

Προηγουμένως, είδαμε ότι ένας φραγμένος τελεστής ορισμένος στον χώρο $\boldsymbol{X}$ είναι κλειστός. Θα αποδείξουμε και το αντίστροφο.

Θεώρημα 1.5.5. *Ένας κλειστός τελεστής T από το $\boldsymbol{X}$ στο $\boldsymbol{Y}$ με πεδίο ορισμού τον $\boldsymbol{X}$ είναι φραγμένος. Δηλαδή, $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ και $\boldsymbol{D}(T) = \boldsymbol{X}$ συνεπάγεται ότι $T \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$.*

Απόδειξη. Έστω S να είναι η αντίστροφη εικόνα της μοναδιαίας μπάλας κάτω από τον T στον χώρο Y(χωρίς να ξέρουμε εάν S ανοικτό ή όχι). Αφόυ, $\boldsymbol{D}(T) = X$ τότε ο X είναι ίσος με την ένωση των $S, 2S, 3S, \ldots$. Η κλειστότητα του $S(=\overline{S})$ περιέχει μια μπάλα, έστω K με κέντρο u_0 και ακτίνα r.

Κάθε $u \in X$ με $\|u\| < 2r$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή $u = u' - u''$, $u', u'' \in K$. Εφόσον $K \subset \overline{S}$ υπάρχουν ακολουθίες $\{u'_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{u''_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ τέτοιες ώστε

$$u'_n \to u',\ u''_n \to u''$$

Επιπλέον $\|T(u'_n - u''_n)\| \leq \|Tu'_n\| + \|Tu''_n\| < 2$, δείχνει ότι $u'_n - u''_n \in 2S$. Έτσι $u = \lim{(u'_n - u''_n)} \in \overline{2S}$. Δηλαδή, για κάθε $\lambda > 0$, η μπάλα $\|u\| < \lambda r$ του X είναι υποσύνολο του $\overline{\lambda S}$.

Έστω τώρα αυθαίρετο $u \in X$ με $\|u\| < r$ και ένα αυθαίρετο ε, με $0 < \varepsilon < 1$. Αφού $u \in \overline{S}$ τότε $\exists\ u_1 \in S$ με απόσταση μικρότερη του εr από το u. Δηλαδή, $\|u - u_1\| < \varepsilon r$ και $\|Tu_1\| < 1$. Επομένως, $u - u_1 \in \overline{\varepsilon S}$ και ακόμα υπάρχει $u_2 \in S$ με απόσταση μικρότερη του $\varepsilon^2 r$ από το $u - u_1$, δηλαδή

$$\|u - u_1 - u_2\| < \varepsilon^2 r,\ \|Tu_2\| < \varepsilon$$

Προχωρώντας την διαδικασία αυτή κατασκευάζουμε μία ακολουθία $\{u_n\}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\|u - u_1 - \ldots - u_n\| < \varepsilon^n r\ ,\ \|Tu_n\| < \varepsilon^{n-1},\ n = 1, 2, \ldots$$

Αν τώρα θέσουμε $w_n = u_1 + \ldots + u_n$, θα έχουμε ότι $\|u - w_n\| < \varepsilon^n r \to 0, n \to \infty$ και $\|Tw_n - Tw_{n+p}\| \leq \sum\limits_{h=n+1}^{n+p} \|Tu_h\| < \varepsilon^n + \varepsilon^{n+1} + \ldots \leq (1-\varepsilon)^{-1}\varepsilon^n \to 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι $w_n \underset{T}{\to} u$. Αφού ο T είναι κλειστός θα έχουμε $Tu = \lim Tw_n$. Όμως αφού $\|Tw_n\| < 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots = (1-\varepsilon)^{-1}$, καταλήγουμε στο ότι

$$\|Tu\| \leq (1-\varepsilon)^{-1}$$

Αυτό ισχύει για κάθε $u \in X$ με $\|u\| < r$, άρα ο T είναι φραγμένος και

$$\|T\| \leq (1-\varepsilon)^{-1} r^{-1}$$

και αφού το ε είναι αυθαίρετο τότε $\|T\| \leq 1/r$. $\square$

Μια εφαρμογή του θεωρήματος είναι ότι η προβολή P στον $\boldsymbol{M}$ κατά μήκος του $\boldsymbol{N}$ είναι φραγμένη. Μένει να δείξουμε ότι P κλειστή, για P ορισμένη στον $\boldsymbol{X}$ και γραμμική. Έστω $\{u_n\}$ να είναι μια P-συγκλίνουσα ακολουθία τέτοια ώστε

$$u_n \to u, Pu_n \to v$$

Αφού $Pu_n \in \boldsymbol{M}$ και $\boldsymbol{M}$ κλειστός θα έχουμε ότι $v \in \boldsymbol{M}$. Αφού ακόμα, $(I-P)u_n \in \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}$ κλειστός, $u - v = \lim u_n - Pu_n \in \boldsymbol{N}$. Επομένως $Pu = v$ και επομένως από τον ορισμό ο P είναι κλειστός.

1.5.3 Συζυγείς Τελεστές

Θεωρούμε έναν τελεστή Τ από τον $\boldsymbol{X}$ στον $\boldsymbol{Y}$ και έναν τελεστή S από τον $\boldsymbol{Y}^*$ στον $\boldsymbol{X}^*$. Οι T και S λέγονται συζυγείς ο ένας στον άλλον εάν:

$$(g, Tu) = (Sg, u), \quad u \in \boldsymbol{D}(T), \ g \in \boldsymbol{D}(S) \tag{1.27}$$

Για κάθε τελεστή T από τον $\boldsymbol{X}$ στον $\boldsymbol{Y}$, υπάρχουν αρκετοί τελεστές από τον $\boldsymbol{Y}^*$ στον $\boldsymbol{X}^*$ που να είναι συζυγείς με τον T. Αν ο τελεστής T είναι *πυκνά ορισμένος* τότε υπάρχει μοναδικός μεγιστικός τελεστής T^* συζυγής στον T. Αυτό σημαίνει ότι ο T^* είναι συζυγής στον T, ενώ κάθε άλλος τελεστής S συζυγής στον T, είναι περιορισμός στον T^* .Ο T^* καλείται *συζυγής* του T.

Ο T^* κατασκευάζεται ως εξής. Το $\boldsymbol{D}(T^*)$ περιέχει όπως είδαμε, όλα τα $g \in \boldsymbol{Y}^*$ τέτοια ώστε να υπάρχει ένα $f \in \boldsymbol{X}^*$ με την παρακάτω ιδιότητα:

$$(g, Tu) = (f, u) \ \ \forall \ u \in \boldsymbol{D}(T) \tag{1.28}$$

Το $f \in \boldsymbol{X}^*$ προσδιορίζεται από το g, δηλαδή $(f, u) = (f', u)$, $\forall u \in \boldsymbol{D}(T) \implies f = f'$, γιατί $\boldsymbol{D}(T)$ είναι πυκνό στον $\boldsymbol{X}$ από υπόθεση. Επιπλέον ένας τελεστής T^* από τον $\boldsymbol{Y}^*$ στον $\boldsymbol{X}^*$ ορίζεται θέτοντας $T^*g = f$. Προφανώς ο T^* είναι γραμμικός και οι σχέσεις (1.27),(1.28) δείχνουν ότι $S \subset T^*$ για οποιονδήποτε S συζυγή στον T ενώ T^* είναι συζυγής στον T.

Σε ότι αφορά τα γραφήματα από την (1.27) γράφουμε $(-Sg, u) + (g, Tu) = 0 \implies \{u, Tu\} \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ μηδενίζεται από το $\{-Sg, g\} \in \boldsymbol{X}^* \times \boldsymbol{Y}^* = (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y})^*$. Με άλλα λόγια *οι S, T είναι συζυγείς ο ένας στον άλλον αν και μόνο αν το γράφημα του T και το αντίστροφο γράφημα του $-S$ μηδενίζουν το ένα το άλλο : $\boldsymbol{G}(T) \perp \boldsymbol{G}'(-S)$*

Ακριβώς όμοια η (1.28) δείχνει ότι το αντίστροφο γράφημα του $-T^*$ είναι ο μηδενιστής του γραφήματος του T:

$$\boldsymbol{G}'(-T^*) = \boldsymbol{G}(T)^{\perp} \tag{1.29}$$

Η υπόθεση ότι ο T είναι πυκνά ορισμένος μας εξασφαλίζει ότι πράγματι το $\boldsymbol{G}(T)^{\perp}$ είναι αντίστροφο γράφημα. Επειδή ένας μηδενιστής είναι κλειστός, τότε ο T^* είναι *κλειστός τελεστής.*

Παρατήρηση 1.5.6. *(i). Αυτό μπορεί να συμβεί ακόμα και αν ο T δεν είναι κλειστός ή να έχει κλειστή επέκταση, αλλά ο T^* μπορεί τότε να είναι ο τετριμμένος (να έχει πεδίο ορισμού το 0).*

(ii). Για κάθε πυκνά ορισμένο τελεστής T .

$$\boldsymbol{N}(T^*) = \boldsymbol{R}(T)^{\perp} \tag{1.30}$$

Θεώρημα 1.5.7. *Έστω T από τον $\boldsymbol{X}$ στον $\boldsymbol{Y}$ και S από τον $\boldsymbol{Y}^*$ στον $\boldsymbol{X}^*$ να είναι συζυγείς ο ένας στον άλλον. Αν κάποιος από τους T, S είναι πυκνά ορισμένος, ο άλλος μπορεί να επεκταθεί σε κλειστό.*

Απόδειξη. Έστω ο T είναι πυκνά ορισμένος τότε ο T^* υπάρχει, είναι κλειστός και $T^* \supset S$. Ως εκ τούτου ο S επεκτείνεται σε κλειστό. Αν ο S είναι πυκνά ορισμένος, τότε το $\boldsymbol{G}'(-S)^{\perp}$ είναι κλειστό γράφημα στον $X^{**} \times Y^{**}$ (όπως το $\boldsymbol{G}(T)^{\perp}$ είναι αντίστροφο γράφημα στον $X^* \times Y^*$, αν ο T είναι πυκνά ορισμένος). Επιπλέον το $\boldsymbol{G}(T)$ μηδενίζει το $\boldsymbol{G}'(-S)$, άρα είναι υποσύνολο του $\boldsymbol{G}'(-S)^{\perp}$ και το ίδιο ισχύει και για την κλειστότητά του $\overline{\boldsymbol{G}(T)}(\subset X^{**} \times Y^{**})$. Επομένως το $\overline{\boldsymbol{G}(T)}$ είναι γράφημα και ο T επεκτείνεται σε κλειστό. □

Θεώρημα 1.5.8. *Έστω οι $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ να είναι ανακλαστικοί. Αν ένας τελεστής από τον $\boldsymbol{X}$ στον $\boldsymbol{Y}$ είναι πυκνά ορισμένος και επεκτείνεται σε κλειστό, τότε ο T^* είναι κλειστός και πυκνά ορισμένος. Ακόμα $T^{**} = \tilde{T}$.*

Απόδειξη. Επειδή X, Y ανακλαστικοί τότε έχουμε $\boldsymbol{G}(T)^{\perp\perp} = \overline{\boldsymbol{G}(T)} = \boldsymbol{G}(\tilde{T})$ (ταυτίζουμε X^{**}, Y^{**} με X, Y αντίστοιχα). Επομένως $\boldsymbol{G}(\tilde{T}) = \boldsymbol{G}'(-T^*)^{\perp} \implies T^*$ είναι πυκνά ορισμένος, γιατί διαφορετικά θα υπήρχε $v \in Y$, με $0 \neq v \perp \boldsymbol{D}(T^*)$ και άρα $\{0, v\} \in \boldsymbol{G}'(-T^*)^{\perp} = \boldsymbol{G}(\tilde{T})$, που αντιβαίνει στο γεγονός ότι $\boldsymbol{G}(\tilde{T})$ είναι γράφημα. Έτσι ο T^{**} ορίζεται από τον $X^{**} = X$ στον $Y^{**} = Y$ και $\boldsymbol{G}(T^{**}) = \boldsymbol{G}'(-T^*)^{\perp} = \boldsymbol{G}(\tilde{T}) \implies T^{**} = \tilde{T}$. □

Θεώρημα 1.5.9. *Έστω $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ να είναι πυκνά ορισμένος. Αν ο T^{-1} υπάρχει και ανήκει στο $\mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$, τότε T^{*-1} υπάρχει και ανήκει στο $\mathscr{B}(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}^*)$,με*

$$T^{*-1} = (T^{-1})^* \tag{1.31}$$

Αντίστροφα , αν ο T^{*-1} υπάρχει και ανήκει στο $\mathscr{B}(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}^*)$, τότε ο T^{-1} υπάρχει και ανήκει στο $\mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ και η (1.31) ισχύει.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $T^{-1} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$. Τότε $(T^{-1})^* \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}^*)$. Για κάθε $g \in \boldsymbol{D}(T^*) \subset Y^*$ και $v \in Y$, έχουμε ότι $((T^{-1})^* T^* g, v) = (T^* g, T^{-1} v) = (g, TT^{-1}v) = (g, v)$ άρα $(T^{-1})^* T^* g = g$. Από την άλλη για κάθε $f \in X^*$ και $u \in \boldsymbol{D}(T) \subset X$ έχουμε $((T^{-1})^* f, Tu) = (f, T^{-1}Tu) = (f, u)$ άρα $(T^{-1})^* f \in \boldsymbol{D}(T^*)$ και $T^*(T^{-1})^* f = f$ από τον ορισμό του T^*. Οι δύο αυτές σχέσεις μας δίνουν την ζητούμενη ισότητα.

Αντίστροφα, υποθέτουμε $T^{*-1} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}^*)$. Για κάθε $f \in X^*$ και $u \in \boldsymbol{D}(T)$ έχουμε ότι $(T^{*-1} f, Tu) = (T^* T^{*-1} f, u) = (f, u)$. Για κάθε $u \in X$ υπάρχει ένα $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|f\| = 1$ και $(f, u) = \|u\|$ (συνέπεια Hahn-Banach). Για αυτό το f έχουμε $\|u\| = (T^{*-1} f, Tu) \leq \|T^{*-1}\| \|Tu\| \implies T$ αντιστρέφεται με $\|T^{-1}\| \leq \|T^{*-1}\|$.Επειδή ο T^{-1} είναι φραγμένος και κλειστός η $\boldsymbol{R}(T)$ είναι κλειστή. Μένει να δείξουμε ότι η εικόνα είναι όλος ο χώρος Y, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει $g \neq 0$ στον Y^* που να μηδενίζει τον $\boldsymbol{R}(T)$. Όμως αυτό φαίνεται από την παρατήρηση (1.5.6) (ii) αφού $T^* g = 0 \implies g = 0$ από την αντιστρεψιμότητα του T^*. □

Κεφάλαιο 2

Θεωρήματα Σταθερότητας

2.1 Σταθερότητα και κλειστότητα με σχετικά φραγμένη διαταραχή

Έστω $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, όπου $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ είναι χώροι Banach. Ξέρουμε ήδη ότι αν T κλειστός και $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ τότε ο $T + A$ είναι επίσης κλειστός. Αυτό εκφράζει την *σταθερότητα* της κλειστότητας για μία φραγμένη διαταραχή A. Θα προσπαθήσουμε να επεκτείνουμε αυτό το θεώρημα σταθερότητας σε μία διαταραχή όχι απαραίτητα φραγμένη.

Μια τέτοια επέκταση μπορεί να γίνει απ'ευθείας στην περίπτωση της *σχετικά φραγμένης διαταραχής*.Έστω T, A να είναι τελεστές ορισμένοι (αλλά όχι απαραίτητα την ίδια εικόνα) στον $\boldsymbol{X}$ τέτοιοι ώστε $\boldsymbol{D}(T) \subset \boldsymbol{D}(A)$ και:

$$\|Au\| \leq a\|u\| + b\|Tu\| \ , \quad u \in \boldsymbol{D}(T) \tag{2.1}$$

όπου τα a, b είναι μη αρνητικές σταθερές. Τότε λέμε ότι ο A είναι *σχετικά φραγμένος σε σχέση με τον T* ή απλούστερα *T-φραγμένος*. Το μεγαλύτερο κάτω φράγμα b_0 όλων των πιθανών σταθερών b στην (2.1) θα καλείται *σχετικό φράγμα* του A σε σχέση με τον T ή *T-φράγμα* του A. Αν το b επιλέγεται πολύ κοντά στο b_0 , η άλλη σταθερά a θα πρέπει να επιλεχθεί πολύ μεγάλη , αλλά γενικά είναι αδύνατον να θέσουμε $b = b_0$ στην (2.1).

Προφανώς ένας φραγμένος τελεστής A είναι T-φραγμένος για κάθε T με $\boldsymbol{D}(T) \subset \boldsymbol{D}(A)$, και με το T-φράγμα να είναι ίσο με 0.

Η επέκταση του θεωρήματος σταθερότητας για την κλειστότητα δίνεται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.1.1. *Έστω T και A να είναι τελεστές από τον $\boldsymbol{X}$ στον $\boldsymbol{Y}$, και έστω ο A να είναι T-φραγμένος με T-φράγμα μικρότερο του 1. Τότε ο $S = T + A$ μπορεί να επεκταθεί σε κλειστό αν και μόνο αν ο T επεκτείνεται σε κλειστό. Σε αυτή την* *περίπτωση οι κλειστότητες των T και S έχουν τα ίδια πεδία ορισμού. Ειδικότερα, ο S είναι κλειστός αν και μόνο αν ο T είναι κλειστός.*

Απόδειξη. Από την (2.1) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $b < 1$ και άρα για $S = T + A$ έχουμε :

$$-a\|u\| + (1-b)\|Tu\| \leq \|Su\| \leq a\|u\| + (1+b)\|Tu\| \quad u \in \boldsymbol{D}(T) \tag{2.2}$$

Αντικαθιστώντας στην δεύτερη ανισότητα της (2.2) όπου u με $u_n - u_m$, τότε θα δούμε ότι για μια $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{D}(T)$ με $u_n \underset{T}{\to} u$ ($u_n \to u$, Tu_n συγκλίνουσα) είναι $u_n \underset{S}{\to} u$. Ακριβώς όμοια στην αριστερή αν $u_n \underset{S}{\to} u \implies u_n \underset{T}{\to} u$. Αν λοιπόν, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ S-συγκλίνουσα στο 0 είναι και T-συγκλίνουσα στο 0, επομένως $Tu_n \to 0$, αν ο T επεκτείνεται σε κλειστό. Επιπλέον από την δεύτερη ανισότητα της (2.2) $Su_n \to 0$ που δείχνει ότι ο S επεκτείνεται σε κλειστό. Όμοια, ο T επεκτείνεται σε κλειστό αν ο S επεκτείνεται σε κλειστό.

Έστω τώρα $\tilde{T}, \tilde{S}$ να είναι οι κλειστότητα των T, S αντίστοιχα. Για κάθε $u \in \boldsymbol{D}(\tilde{S})$, υπάρχει μια ακολουθία $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ S-συγκλίνουσα στο u. Όπως είδαμε προηγουμένως η ακολουθία είναι T-συγκλίνουσα στο u, άρα $u \in \boldsymbol{D}(\tilde{T})$ και έτσι $\boldsymbol{D}(\tilde{S}) \subset \boldsymbol{D}(\tilde{T})$. Το αντίστροφο συμπέρασμα προκύπτει ακριβώς όμοια. $\square$

Παρατήρηση 2.1.2. *Με $b < 1$ στην (2.1) έχουμε ότι :*

$$\|Au\| \leq a\|u\| + b\|Tu\| \leq (1-b)^{-1}(a\|u\| + b\|Su\|) \tag{2.3}$$

ο A είναι S-φραγμένος με το S-φράγμα να μην ξεπερνάει το $b(1-b)^{-1}$. Γενικότερα ένας T-φραγμένος τελεστής με T-φράγμα β είναι επίσης S-φραγμένος με το S-φράγμα $\leq \beta(1-b)^{-1}$.

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω $T, S : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ τέτοιοι ώστε:*

$$\|Su - Tu\| \leq a\|u\| + b'\|Tu\| + b''\|Su\|, \quad u \in \boldsymbol{D}(T) = \boldsymbol{D}(S) \tag{2.4}$$

και οι a, b', b'' είναι μη αρνητικές σταθερές με $b' < 1, b'' < 1$. Τότε τα συμπεράσματα του θεωρήματος (2.1.1) ισχύουν.

Απόδειξη. Θέτουμε $A = S - T$, $T(\kappa) = T + \kappa A$, $0 \leq \kappa \leq 1$. Ο $T(\kappa)$ ορίζεται στο $\boldsymbol{D}(T)$ και $T(0) = T$, $T(1) = S$. $Tu = T(\kappa)u - \kappa Au$ και $Su = T(\kappa)u + (1-\kappa)Au$ άρα η (2.4) δίνει ότι $\|Au\| \leq a\|u\| + (b' + b'')\|T(\kappa)u\| + b\|Au\|$, όπου $b = \max(b', b'')$ Έτσι:

$$\|Au\| \leq \frac{1}{1-b}(a\|u\| + (b' + b'')\|T(\kappa)u\|) \tag{2.5}$$

Αυτό δείχνει ότι ο A είναι $T(\kappa)$-φραγμένος με το $T(\kappa)$-φράγμα να μην ξεπερνάει το $\beta = (1-b)^{-1}(b' + b'')$. Επομένως ο $(\kappa' - \kappa)A$ είναι $T(\kappa)$-φραγμένος με $T(\kappa)$-φράγμα μικρότερο του 1 από την $|\kappa' - \kappa| < 1/\beta$, και από το θεώρημα 2.1.1 ο $T(\kappa')$ μπορεί να επεκταθεί σε κλειστό αν και μόνο αν ο $T(\kappa)$ μπορεί να επεκταθεί σε κλειστό. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στην απόδειξη του θεωρήματος. $\square$

Παρατήρηση 2.1.4. *Έστω $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και $|||u||| = \|u\| + \|Tu\|$, $u \in \boldsymbol{D}(T)$. Τότε ο $\boldsymbol{D}(T)$ γίνεται Banach χώρος $\hat{\boldsymbol{X}}$ αν η $|||\cdot|||$ επιλεχθεί ως νόρμα. Η πληρότητα του $\hat{\boldsymbol{X}}$ είναι άμεση συνέπεια της κλειστότητας του T. Αν $A : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}'$ με $\boldsymbol{D}(A) \supset \boldsymbol{D}(T)$ τότε $A|_{\boldsymbol{D}(T)} = \hat{A} : \hat{\boldsymbol{X}} \to \boldsymbol{Y}'$.Ο A είναι T-φραγμένος $\iff$ $\hat{A}$ φραγμένος.*

Παρατήρηση 2.1.5. *Αν T είναι κλειστός και A μπορεί να επεκταθεί σε κλειστό η υπόθεση $\boldsymbol{D}(T) \subset \boldsymbol{D}(A) \implies A$ είναι T-φραγμένος*

Απόδειξη. Ορίζουμε $\hat{\boldsymbol{X}}$ και $\hat{A}$ όπως στην προηγούμενη παρατήρηση (2.1.4). Τότε ο $\hat{A}$ μπορεί να επεκταθεί σε κλειστό γιατί μια $\hat{A}$-συγκλίνουσα ακολουθία στον $\hat{\boldsymbol{X}}$ είναι A-συγκλίνουσα στον $\boldsymbol{X}$. Επιπλέον αφού, ο $\hat{A}$ ορίζεται στον $\hat{\boldsymbol{X}}$, είναι κλειστός και άρα φραγμένος, από το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος. Ακόμα από την προηγούμενη παρατήρηση (2.1.4) ο A είναι T-φραγμένος. □

2.2 Σχετική συμπάγεια και ένα θεώρημα σταθερότητας

Ανάλογα με την έννοια του σχετικά φραγμένου ορίζεται και η έννοια της σχετικής συμπάγειας. Έστω T, A τελεστές με το ίδιο πεδίο ορισμού $\boldsymbol{X}$ (αλλά όχι απαραίτητα με την ίδια εικόνα). Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{D}(T) \subset \boldsymbol{D}(A)$ και για κάθε $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{D}(T)$ οι $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Tu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένες, και η $\{Au_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Τότε ο A λέγεται *σχετικά συμπαγής σε σχέση με τον T* ή απλώς *T-συμπαγής*.

Αν A είναι T-συμπαγής, τότε είναι και T-φραγμένος. Αν A δεν είναι T-φραγμένος υπάρχει $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{D}(T)$ τέτοια ώστε $\|u_n\| + \|Tu_n\| = 1$ αλλά $\|Au_n\| \geq n$, $n = 1, 2, \ldots$. Τότε προφανώς η $\{Au_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω $T, A : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ και έστω ο A να είναι T-συμπαγής . Αν ο T μπορεί να επεκταθεί σε κλειστό, ο $S = T + A$ μπορεί επίσης να επεκταθεί σε κλειστό, οι κλειστότητες των T και S έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και ο A είναι S-συμπαγής. Ειδικότερα, ο S είναι κλειστός αν ο T είναι κλειστός.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι ο A είναι S-συμπαγής αν ο T μπορεί να επεκταθεί σε κλειστό (ο A είναι T-συμπαγής και $S = T + A$). Έστω$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Su_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένες, θα δείξουμε ότι η $\{Au_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Αφού ο A είναι T-συμπαγής αρκεί να δείξουμε ότι η $\{Tu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει φραγμένη υπακολουθία. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει, δηλαδή $\|Tu_n\| \to \infty$. Θέτουμε $u'_n = u_n/\|Tu_n\|$. Τότε $u'_n \to 0, Su'_n \to 0$ και $\{Tu'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη. Επομένως η $\{Au'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω $Au'_n \to w \implies Tu'_n = Su'_n - Au'_n \to -w$ και αφού $u'_n \to 0$ και T μπορεί να επεκταθεί σε κλειστό, θα πρέπει να έχουμε ότι $w = 0$.

Όμως τότε αυτό αντιβαίνει το γεγονός ότι $-w$ είναι το όριο της $\{Tu'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $\|Tu'_n\| = 1$.

Αποδεικνύουμε τώρα, ότι ο $S = T + A$ μπορεί να επεκταθεί σε κλειστό. Έστω $u_n \to 0$ και $Su_n \to v$, θα πρέπει να δείξουμε ότι $v = 0$. Αφού ο A είναι S-συμπαγής, η $\{Au_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Ξανά υποθέτουμε ότι $Au_n \to w$. Τότε $Tu_n = Su_n - Au_n \to v - w$ και επειδή $u_n \to 0$ και ο T μπορεί να επεκταθεί σε κλειστό θα έχουμε ότι $Tu_n \to v - w = 0$. Ο A είναι T-φραγμένος, άρα $Au_n \to 0$ και επομένως $v = w = 0$.

Δείχνουμε τώρα ότι T, S έχουν ίδιες κλειστότητες. Έστω $\tilde{T}, \tilde{S}$ να είναι οι κλειστότητες των T, S αντίστοιχα. Αν $u \in \boldsymbol{D}(\tilde{T})$ υπάρχει μια ακολουθία $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία είναι T-συγκλίνουσα στο u ($u_n \underset{T}{\to} u$). Εφόσον ο S όπως και ο A είναι T-φραγμένοι η $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι και S-συγκλίνουσα στο u, έτσι ώστε $u \in \boldsymbol{D}(\tilde{S})$ (Θεώρημα 2.1.1). Αντίστροφα τώρα αν $u \in \boldsymbol{D}(\tilde{S})$ υπάρχει ακολουθία $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{D}(\tilde{S})$ με $u_n \underset{S}{\to} u \implies \{Tu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη. Αυτό μπορεί να δειχθεί με τον ίδιο τρόπο όπως και στο πρώτο μέρος της απόδειξης. Ως εκ τούτου, μπορούμε να υποθέσουμε όπως και πριν ότι $Au_n \to w$ και $Tu_n = Su_n - Au_n \to v - w$. Άρα $u_n \underset{T}{\to} u,\ u \in \boldsymbol{D}(\tilde{T}) \implies \boldsymbol{D}(\tilde{T}) = \boldsymbol{D}(\tilde{S})$. □

Παρατήρηση 2.2.2. *Έστω T κλειστός και $\boldsymbol{D}(A) \supset \boldsymbol{D}(T)$. Ορίζουμε $\hat{\boldsymbol{X}}, \hat{A}$ όπως στην Παρατήρηση 2.1.4. Τότε ο A είναι T-συμπαγής αν και μόνο αν $\hat{A}$ είναι συμπαγής.*

Παρατήρηση 2.2.3. *Μπορούμε να ορίσουμε κατ'αντιστοιχία, σαν ειδική περίπτωση των σχετικά συμπαγών τελεστών, τους σχετικά εκφυλισμένους τελεστές .* Ο A λέγεται T-εκφυλισμένος, αν είναι T-φραγμένος και η $\boldsymbol{R}(A)$ είναι πεπερασμένη. Εύκολα βλέπουμε ότι ένας T -εκφυλισμένος τελεστής είναι και T-συμπαγής.

2.3 Σταθερότητα της φραγμένης αντιστρεψιμότητας

Έστω $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Θα δείξουμε ότι η ιδιότητα $T^{-1} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ παραμένει σταθερή σε μικρές διαταραχές.

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω $T, A : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$. Έστω T^{-1} να υπάρχει και να ανήκει στο $\mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ (ώστε ο T να είναι κλειστός). Έστω ο A να είναι T-φραγμένος με σταθερές a, b από την σχέση (2.1) και να ικανοποιούν την ανισότητα:*

$$a\|T^{-1}\| + b < 1. \tag{2.6}$$

Τότε ο $S = T + A$ είναι κλειστός και αντιστρέψιμος, με $S^{-1} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ και:

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1 - a\|T^{-1}\| - b}\ , \quad \|S^{-1} - T^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|(a\|T^{-1}\| + b)}{1 - a\|T^{-1}\| - b} \tag{2.7}$$

Αν ακόμα ο T^{-1} είναι συμπαγής, τότε είναι και ο S^{-1}.

Απόδειξη. Από την $a\|T^{-1}\| + b < 1 \implies b < 1$ άρα ο S είναι κλειστός αφού ο T είναι κλειστός (Θεώρημα 2.1.1). Πρώτα θεωρούμε:

$$S = T + A = (1 + AT^{-1})T, \quad AT^{-1} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}) \tag{2.8}$$

και ο AT^{-1} είναι φραγμένος αφού $\|AT^{-1}v\| \leq a\|T^{-1}v\| + b\|v\| \leq (a\|T^{-1}\| + b)\|v\|$. Άρα:

$$\|AT^{-1}\| \leq a\|T^{-1}\| + b < 1 \tag{2.9}$$

και ο $1 + AT^{-1} : Y \to Y$ και είναι ένα προς ένα, επομένως ο S είναι αντιστρέψιμος (εδώ αντί για την συνήθη εκτιμήτρια $\|AT^{-1}\| \leq \|A\|\|T^{-1}\|$ χρησιμοποιήσαμε την (2.9)). Αν τώρα ο T^{-1} είναι συμπαγής έχουμε $S^{-1} = T^{-1}(1 + AT^{-1})^{-1}$ συμπαγής . □

Παρατήρηση 2.3.2. *Αν ο A είναι φραγμένος τότε στο προηγούμενο θεώρημα (2.3.1) μπορούμε να πάρουμε σαν $a = \|A\|, b = 0$.*

Κεφάλαιο 3

Γενικευμένη σύγκλιση κλειστών τελεστών

3.1 Το κενό μεταξύ υπόχωρων

Όταν θεωρούμε προβλήματα διαταραχών για τους κλειστούς τελεστές, θα πρέπει να να είμαστε ακριβείς με τον όρο μικρή διαταραχή. Στην προηγούμενη ενότητα θεωρήσαμε την σχετικά φραγμένη διαταραχή, ωστόσο αυτή η έννοια είναι περιορισμένη. Χρειαζόμαστε έναν πιο γενικό ορισμό για το πόσο μικρή είναι η διαταραχή στην περίπτωση των κλειστών τελεστών.

Αυτό μπορεί να γίνει εφοδιάζοντας με μια μετρική το σύνολο των $\mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, όλων των κλειστών τελεστών από το $\boldsymbol{X}$ στο $\boldsymbol{Y}$. Αν $T, S \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, τα γραφήματά τους $\boldsymbol{G}(T), \boldsymbol{G}(S)$ είναι κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι του $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ (χώρος γινόμενο). Έτσι η απόσταση μεταξύ των τελεστών T, S μπορεί να μετρηθεί από το κενό μεταξύ των γραμμικών υπόχωρων $\boldsymbol{G}(T), \boldsymbol{G}(S)$. Επομένως οδηγούμαστε στο πρόβλημα υπολογισμού του κενού μεταξύ δύο γραμμικών υπόχωρων ενός Banach χώρου.

Από εδώ και πέρα θα θεωρούμε κλειστούς γραμμικούς υπόχωρους $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}, \ldots$ ενός χώρου Banach $\boldsymbol{Z}$.

Θεωρούμε την $\boldsymbol{S_M} = \{u \in \boldsymbol{M} : \|u\| = 1\}$ (μοναδιαία σφαίρα στον $\boldsymbol{M}$). Για κάθε δύο κλειστούς γραμμικούς υπόχωρους $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ του $\boldsymbol{Z}$ θέτουμε :

$$\delta(M, N) = \sup_{u \in S_M} \operatorname{dist}(u, N) \tag{3.1}$$

$$\hat{\delta}(M, N) = \max\left(\delta(M, N), \delta(N, M)\right) \tag{3.2}$$

Η (3.1) δεν έχει νόημα εάν $\boldsymbol{M} = 0$ και σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε $\boldsymbol{\delta}(0, \boldsymbol{N}) = 0$, για κάθε $\boldsymbol{N}$. Από την άλλη, $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{M}, 0) = 1, \boldsymbol{M} \neq 0$, από τον ορισμό.

Η $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ μπορεί να χαρακτηριστεί ως ο μικρότερος αριθμός δ τέτοιος ώστε :

$$\operatorname{dist}(u, N) \leq \delta\|u\| \quad \forall u \in M \tag{3.3}$$

Η $\hat{\boldsymbol{\delta}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ θα καλείται *κενό* μεταξύ των $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$.

Οι παρακάτω σχέσεις είναι άμεσες από τον ορισμό

$$\delta(M,N)=0 \iff M\subset N \tag{3.4}$$

$$\hat{\delta}(M,N)=0 \iff M=N \tag{3.5}$$

$$\hat{\delta}(M,N)=\hat{\delta}(N,M) \tag{3.6}$$

$$0\le\delta(M,N)\le 1,\ \ 0\le\hat{\delta}(M,N)\le 1 \tag{3.7}$$

Άρα οι (3.5) και οι (3.6) δείχνουν ότι η $\hat{\boldsymbol{\delta}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως απόσταση μεταξύ των $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$. Όμως η $\hat{\delta}$ δεν ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα που απαιτεί η συνάρτηση της απόστασης.

Αλλάζοντας ελαφρώς τις (3.1),(3.2) έχουμε:

$$d(M,N)=\sup_{u\in S_M}\operatorname{dist}(u,S_N), \tag{3.8}$$

$$\hat{d}(M,N)=\max\left(d(M,N),d(N,M)\right) \tag{3.9}$$

Η (3.8) δεν έχει νόημα εάν κάποιος εκ των $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$ είναι 0. Τότε θέτουμε:

$$d(0,N)=0 \text{ για κάθε N } \ d(M,0)=2,\ M\neq 0 \tag{3.10}$$

Τότε όλες οι σχέσεις (3.2-3.7) που ικανοποιούνται από τις $\boldsymbol{\delta},\hat{\boldsymbol{\delta}}$ έχουν αντικατασταθεί από $\boldsymbol{d},\hat{\boldsymbol{d}}$ αν στην (3.7) αντί για 1 βάλουμε 2. Ακόμα βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις $\boldsymbol{d},\hat{\boldsymbol{d}}$ ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα:

$$d(L,N)\le d(L,M)+d(M,N)\ ,\ \hat{d}(L,N)\le\hat{d}(L,M)+\hat{d}(M,N). \tag{3.11}$$

Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από την πρώτη λόγω του ορισμού. Η ξεχωριστή περίπτωση που κάποιος εκ των $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{L}$ είναι 0 δίνεται από την σχέση (3.10).

Το σύνολο όλων των κλειστών γραμμικών υπόχωρων του $\boldsymbol{Z}$ γίνεται *μετρικός χώρος* αν η απόσταση μεταξύ των $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$ ορίζεται από την συνάρτηση $\hat{d}(M,N)$. Μια ακολουθία $\{\boldsymbol{M_n}\}_{n\ge1}\subseteq\boldsymbol{Z}$ κλειστών γραμμικών υπόχωρων *συγκλίνει* στο $\boldsymbol{M}$ εάν $\hat{d}(\boldsymbol{M_n},\boldsymbol{M})\to 0,\ n\to\infty$. Τότε γράφουμε $\boldsymbol{M_n}\to\boldsymbol{M}$ ή $\lim\boldsymbol{M_n}=\boldsymbol{M}$.

Παρόλο που το κενό μεταξύ υποχώρων $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ δεν είναι η κατάλληλη συνάρτηση απόστασης, είναι πιο βολική από την συνάρτηση $\hat{\boldsymbol{d}}$ για τις εφαρμογές, και είναι πιο απλή. Επιπλέον σε ότι αφορά την *τοπολογία* του συνόλου των κλειστών γραμμικών υπόχωρων οι δύο συναρτήσεις δίνουν τα ίδια αποτελέσματα. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας των παρακάτω σχέσεων:

$$\begin{aligned}\delta(M,N)\le d(M,N)\le 2\delta(M,N)\ ,\\ \hat{\delta}(M,N)\le\hat{d}(M,N)\le 2\hat{\delta}(M,N)\ .\end{aligned} \tag{3.12}$$

Η δεύτερη σχέση ανισοτήτων της (3.12) προκύπτει από την πρώτη. Επιπλέον η $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}) \leq \boldsymbol{d}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ είναι τετριμμένη. Για να δείξουμε τώρα ότι $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}) \leq 2\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ αρκεί να υποθέσουμε ότι $\boldsymbol{N} \neq 0$ και να δείξουμε ότι :

$$\operatorname{dist}(u, S_N) \leq 2\operatorname{dist}(u, N) \;\; \text{για οποιοδήποτε } u \in Z : \|u\| = 1 \tag{3.13}$$

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $v \in N$ τέτοιο ώστε $\|u - v\| < \operatorname{dist}(u, N) + \varepsilon$. Ακόμα υποθέτουμε ότι $v \neq 0$, γιατί διαφορετικά δεν επηρεάζει την ανισότητα. Τότε $v_0 = v/\|v\| \in S_N$ και $\operatorname{dist}(u, S_N) \leq \|u - v_0\| \leq \|u - v\| + \|v - v_0\|$. Όμως $\|v - v_0\| = |\,\|v\|-1| = |\,\|v\|-\|u\|\,| \leq \|v-u\|$ και άρα $\operatorname{dist}(u, S_N) \leq 2\|u-v\| < 2\operatorname{dist}(u,N)+2\varepsilon$. Αφού ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε παίρνουμε την (3.13).

Η (3.12) δείχνει ότι $\hat{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{M_n},\boldsymbol{M}) \to 0$ είναι ισοδύναμο με το $\hat{\boldsymbol{\delta}}(\boldsymbol{M_n},\boldsymbol{M}) \to 0$. Έτσι η σύγκλιση $\boldsymbol{M_n} \to \boldsymbol{M}$ μπορεί να οριστεί από την $\hat{\boldsymbol{\delta}}(\boldsymbol{M_n},\boldsymbol{M}) \to 0$ χωρίς κάποια αναφορά στην συνάρτηση $\hat{\boldsymbol{d}}$. Επομένως θα χρησιμοποιούμε αποκλειστικά την $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ αντί για την απόσταση $\hat{\boldsymbol{d}}$.

Παρατήρηση 3.1.1. *Ο μετρικός χώρος όλων των κλειστών γραμμικών υπόχωρων του $\boldsymbol{Z}$ όπως ορίστηκε παραπάνω είναι πλήρης .* Αν $\{\boldsymbol{M_n}\}_{n\geq 1}$ είναι Cauchy ακολουθία ($\hat{\boldsymbol{\delta}}(\boldsymbol{M_n},\boldsymbol{M_m}) \to 0,\ m,n \to \infty$) τότε υπάρχει κλειστός, γραμμικός $\boldsymbol{M}$ τέτοιος ώστε $\hat{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{M_n},\boldsymbol{M}) \to 0$. Δεν θα χρειαστούμε όμως την πληρότητα του $\boldsymbol{Z}$ και δεν την αποδεικνύουμε.

Λήμμα 3.1.2. *Για $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$ κλειστούς (γραμμικούς) και για κάθε $u \in \boldsymbol{Z}$, έχουμε ότι :*

$$(1 + \delta(M,N))\operatorname{dist}(u,M) \geq \operatorname{dist}(u,N) - \|u\|\delta(M,N) \tag{3.14}$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και $v \in M$ τέτοιο ώστε $\|u - v\| < \operatorname{dist}(u, M) + \varepsilon$, και για το ίδιο v, υπάρχει $w \in N$ τέτοιο ώστε $\|v - w\| < \operatorname{dist}(v, N) + \varepsilon$. Έχουμε ότι $\operatorname{dist}(u,N) \leq \|u-w\| \leq \operatorname{dist}(u,M)+\operatorname{dist}(v,N)+2\varepsilon \leq \operatorname{dist}(u,M)+\|v\|\delta(M,N)+2\varepsilon$. Όμως $\|v\| \leq \|u\| + \|u - v\| \leq \|u\| + \operatorname{dist}(u,M) + \varepsilon$. Επομένως

$$\operatorname{dist}(u,N) \leq (1 + \delta(M,N))\operatorname{dist}(u,M) + \|u\|\delta(M,N) + 2\varepsilon + \varepsilon\delta(M,N)$$

Για $\varepsilon \to 0$ έχουμε την ζητούμενη (3.14). □

3.2 Το κενό και η διάσταση

Παρατήρηση 3.2.1. *Αν $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$ κλειστός (γραμμικός) με $\dim \boldsymbol{N} < \infty$ και θεωρήσουμε τον χώρο πηλίκο $\tilde{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{Z}/\boldsymbol{N}$ τότε μπορούμε να γράψουμε:*

$$\|\tilde{u}\| = \|u\| > 0 \tag{3.15}$$

Το παρακάτω λήμμα είναι βασικό για την μελέτη του κενού μεταξύ κλειστών γραμμικών υπόχωρων.

Λήμμα 3.2.2. *Έστω $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ γραμμικοί υπόχωροι στον Banach χώρο $\boldsymbol{Z}$. Αν $\dim M > \dim N$, τότε υπάρχει $u \in M$ τέτοιο ώστε*

$$\operatorname{dist}(u, N) = \|u\| > 0 \tag{3.16}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\dim N, \dim M < \infty$ και μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον M με κάποιον από τους πεπερασμένους υπόχωρους του με διάσταση ίση με $dimN + 1$. Επομένως ο Z μπορεί να θεωρηθεί πεπερασμένος και αρκεί να θεωρήσουμε το πρόβλημα στον υπόχωρο $M + N$.

Ακόμα μια υπόθεση είναι ότι ο Z θεωρείται *αυστηρά κυρτός* ($\|u+v\| < \|u\|+\|v\|$ όταν u, v είναι γραμμικά ανεξάρτητα). Τότε κάθε $u \in Z$ έχει μοναδικό κοντινότερο σημείο $v = Au$ στον N και η απεικόνιση $u \to Au$ είναι συνεχής (Η ύπαρξη του $v \in N$ κοντινότερου σημείου του u προκύπτει από την τοπική συμπάγεια του N. Η μοναδικότητα του v και της συνεχής εξάρτησής του, από την αυστηρή κυρτότητα του Z). Ο A είναι γενικά μη γραμμικός, όμως με την ιδιότητα $A(-u) = -Au$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Borsuk(σελ.99), υπάρχει ένα $u \in M$ τέτοιο ώστε $\|u\| = 1$ και $Au = 0$. Αυτό το u ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του λήμματος.

Στη γενική περίπτωση ο Z είναι Banach χώρος, με σώμα τους πραγματικούς αριθμούς και διαλέγουμε μια βάση $f_1, \ldots, f_m$ του συζυγή Z^*. Τότε

$$\|u\|_n = \left\{\|u\|^2 + 1/n[(u, f_1)^2 + \ldots + (u, f_m)^2]\right\}^{1/2}$$

ορίζει μια νέα νόρμα στον Z και τον κάνει αυστηρά κυρτό. Για κάθε $n = 1, 2, \ldots,$ $\exists \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$: $\operatorname{dist}_n(u_n, N) = \|u_n\|_n = 1$, όπου dist_n συμβολίζει την απόσταση με την έννοια της νόρμας $\|\cdot\|_n$. Τότε $\|u_n\| \leq \|u_n\|_n = 1$ και η $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Το όριο u της υπακολουθίας ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του λήμματος. □

Πρόταση 3.2.3. *Έστω $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι. Αν $\delta(M, N) < 1 \implies \dim M \leq \dim N$ και αν $\hat{\delta}(M, N) < 1 \implies \dim M = \dim N$.*

Απόδειξη. Αν $\dim N = \infty$ τότε το πρώτο συμπέρασμα είναι άμεσο. Υποθέτουμε ότι $\delta(M, N) < 1, \dim N < \infty$ και $\dim M > \dim N$. Διαλέγουμε ένα $M_0 \subset M$ με $\dim M_0 = \dim N + 1$. Από το λήμμα (3.2.2) για το πεπερασμένο χώρο $M_0 + N$ υπάρχει ένα $u \in M_0 \subset M$ με $\|u\| = 1 = \operatorname{dist}(u, N)$, το οποίο αντιβαίνει την υπόθεση ότι $\delta(M, N) < 1$. Το δεύτερο συμπέρασμα προκύπτει από το πρώτο. □

Παρατήρηση 3.2.4. *Η παραπάνω πρόταση (3.2.3) δείχνει ότι ο χώρος $\boldsymbol{Z}$ των κλειστών γραμμικών υπόχωρων είναι η ένωση όλων των ανοικτών συνόλων, όπου κάθε ένα από αυτά αποτελεί τους κλειστούς γραμμικούς υπόχωρους με συγκεκριμένη διάσταση.*

3.3 Δυϊκότητα

Υπάρχει μια απλή σχέση, μέσω της συνάρτησης του κενού, μεταξύ του Banach χώρου $\boldsymbol{Z}$ και του δυϊκού του $\boldsymbol{Z}^*$. Για κάθε κλειστό γραμμικό υπόχωρο $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{Z}$, ο $\boldsymbol{M}^{\perp}$ συμβολίζει τον μηδενιστή του $\boldsymbol{M}$. Ο $\boldsymbol{M}^{\perp} \subset \boldsymbol{Z}^*$ είναι κλειστός και περιέχει όλα τα συναρτησιακά $f \in \boldsymbol{Z}^*$: $f \perp \boldsymbol{M}$ $(f(u) = 0\ \forall f \in \boldsymbol{Z}^*)$

Λήμμα 3.3.1. *Έστω* $\boldsymbol{M}$ *κλειστός γραμμικός υπόχωρος του* $\boldsymbol{Z}$: $0 \neq \boldsymbol{M} \neq \boldsymbol{Z}$. *Τότε:*

$$\operatorname{dist}(f, M^{\perp}) = \sup_{u \in S_M} |(u, f)| = \|f_M\|, \quad f \in Z^* , \tag{3.17}$$

$$\operatorname{dist}(u, M) = \sup_{f \in S_{M^{\perp}}} |(u, f)|, \quad u \in Z , \tag{3.18}$$

όπου $f_M = f|_M$ *, ο περιορισμός του* f *στον* M.

Απόδειξη. Έστω $f \in Z^*$. Τότε από το Θεώρημα Hahn-Banach $\exists\ g \in Z^*$: $\|g\| = \|f_M\| \implies h = f - g \in M^{\perp}$ αφού $(u, f) = (u, g)$ για $u \in M$. Επομένως $\operatorname{dist}(f, M^{\perp}) \leq \|f - h\| = \|g\| = \|f_M\| = \sup_{u \in S_M} (u, f)$.

Από την άλλη για κάθε $h \in M^{\perp}$ έχουμε ότι $|(u, f)| = |(u, f - h)| \leq \|f - h\|$, αν $u \in S_M$. Επομένως $|(u, f)| \leq \operatorname{dist}(f, M^{\perp})$ και παίρνουμε την (3.17)

Έστω τώρα $u \in Z$. Για κάθε $f \in S_{M^{\perp}}$ θα έχουμε

$$|(u, f)| = |(u - v, f)| \leq \|u - v\|\ \forall v \in M$$

και επομένως

$$|(u, f)| \leq \operatorname{dist}(u, M) \implies \sup_{f \in S_{M^{\perp}}} |(u, f)| \leq \operatorname{dist}(u, M)$$

Για την ανάποδη ανισότητα υπάρχει $f \in S_{M^{\perp}}$: $|(u, f)| = \operatorname{dist}(u, M)$ από συνέπεια του Θεωρήματος Hahn-Banach. □

Θεώρημα 3.3.2. *Για* $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$ *έχουμε ότι:*

$$\delta(M, N) = \delta(N^{\perp}, M^{\perp}), \quad \hat{\delta}(M, N) = \hat{\delta}(M^{\perp}, N^{\perp}). \tag{3.19}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την πρώτη.

$$\delta(M, N) = \sup_{u \in S_M} \operatorname{dist}(u, N) = \sup_{u \in S_M} \sup_{g \in S_{N^{\perp}}} |(u, g)| =$$
$$= \sup_{g \in S_{N^{\perp}}} \sup_{u \in S_M} |(u, g)| = \sup_{g \in S_{N^{\perp}}} \operatorname{dist}(g, M^{\perp}) = \delta(N^{\perp}, M^{\perp})$$

Η απόδειξη για $M \neq 0,\ N \neq Z$. Αν $M = 0$ τότε έχουμε ότι $M^{\perp} = Z^*$ άρα $\delta(M, N) = 0 = \delta(N^{\perp}, M^{\perp})$. Αν $N = Z \implies N^{\perp} = 0 \implies \delta(M, N) = 0 = \delta(N^{\perp}, M^{\perp})$. □

3.4 Το κενό μεταξύ κλειστών τελεστών

Έστω $T, S \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και τα γραφήματά τους $\boldsymbol{G}(T), \boldsymbol{G}(S)$ είναι κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι του χώρου γινομένου $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$. Θέτουμε:

$$\begin{aligned} \delta(T, S) = \delta(\boldsymbol{G}(T), \boldsymbol{G}(S)), \ \hat{\delta}(T, S) = \hat{\delta}(\boldsymbol{G}(T), \boldsymbol{G}(S)) = \\ = \max(\delta(T, S), \delta(S, T)). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Η συνάρτηση $\hat{\delta}(T, S)$ θα καλείται κενό μεταξύ των τελεστών T και S.

Ακριβώς όμοια μπορούμε να ορίσουμε και την *απόσταση* $\hat{d}(T, S)$ μεταξύ των τελεστών T, S να είναι ίση με $\hat{d}(\boldsymbol{G}(T), \boldsymbol{G}(S))$. Το σύνολο $\mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ με την απόσταση όπως την ορίσαμε γίνεται μετρικός χώρος. Η σύγκλιση μιας ακολουθίας $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ σε έναν $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ ορίζεται από : $\hat{d}(T_n, T) \to 0$. Όμως λόγω της (3.12) έχουμε $\hat{\delta}(T, S) \leq \hat{d}(T, S) \leq 2\hat{\delta}(T, S)$, το οποίο ισχύει αν και μόνο εάν $\hat{\delta}(T_n, T) \to 0$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο τελεστής T_n συγκλίνει στον T, ($T_n \to T$) με την *γενικευμένη έννοια*. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η γενικευμένη σύγκλιση όπως ορίστηκε αφορά τους κλειστούς τελεστές και είναι μια γενίκευση της σύγκλισης τελεστών με νόρμα στο σύνολο $\mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

Παρατήρηση 3.4.1. *Αν ένας τελεστής T ποικίλλει στο σύνολο $\mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, το $\boldsymbol{G}(T)$ ποικίλλει στο σύνολο των κλειστών υπόχωρων του $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$. Το υποσύνολο αυτό δεν είναι κλειστό και ο ως εκ τούτου ο $\mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος (υποθέτοντας βέβαια ότι $\dim X, \dim Y \geq 1$). Αν $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}$ και $\{nI\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{X}$, όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής ,τότε $\boldsymbol{G}(nI) \subset \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}$ και περιέχει τα στοιχεία εκείνα της μορφής $\{n^{-1}u, u\}, u \in \boldsymbol{X}$ και το $\lim \boldsymbol{G}(nI)$ υπάρχει και είναι ίσο με το σύνολο που περιέχει στοιχεία της μορφής $\{0, u\}, u \in \boldsymbol{X}$. Όμως το σύνολο αυτό δεν είναι γράφημα, έτσι η $\{nI\}_{n \geq 1}$ είναι Cauchy ακολουθία στο $\mathscr{C}(\boldsymbol{X}) = \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})$ χωρίς όριο.*

Λήμμα 3.4.2. *Έστω $T \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Αν $S \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και*

$$\delta(S, T) < (1 + \|T\|^2)^{-1/2}$$

τότε ο S είναι φραγμένος ($\boldsymbol{D}(S)$ κλειστό).

Απόδειξη. Έστω ϕ να είναι ένα στοιχείο της μοναδιαίας σφαίρας του $\boldsymbol{G}(S)$: $\phi = \{u, Su\} \in \boldsymbol{G}(S), u \in \boldsymbol{D}(S)$ και :

$$\|u\|^2 + \|Su\|^2 = \|\phi\|^2 = 1 \tag{3.21}$$

Έστω δ' να είναι ο αριθμός τέτοιος ώστε : $\delta(S, T) < \delta' < (1 + \|T\|^2)^{-1/2}$. Τότε το ϕ έχει απόσταση από το $\boldsymbol{G}(T)$ μικρότερη του δ', ώστε να υπάρχει $\psi = \{v, Tv\} \in \boldsymbol{G}(T)$ τέτοιο ώστε $\|\phi - \psi\| < \delta'$:

$$\|u - v\|^2 + \|Su - Tv\|^2 = \|\phi - \psi\|^2 < (\delta')^2 \tag{3.22}$$

Θέτουμε $A = S - T$ και έχουμε ότι

$$\|Au\|^2 = \|Su - Tv - T(u - v)\|^2 \leq (\|Su - Tv\| + \|T\|\|u - v\|)^2 \leq (\delta')^2(1 + \|T\|^2)$$

από την ανισότητα Schwarz και την (3.22). Εφόσον

$$1 = \|u\|^2 + \|Tu + Au\|^2 \leq (1 + \|T\|^2)\|u\|^2 + 2\|T\|\|u\|\|Au\| + \|Au\|^2$$

από την (3.21), τότε έχουμε :

$$\|Au\|^2 \leq (\delta')^2(1 + \|T\|^2)[(1 + \|T\|^2)\|u\|^2 + 2\|T\|\|u\|\|Au\| + \|Au\|^2]$$

και λύνοντας την ανισότητα ως προς $\|Au\|$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned} \|Au\| = \frac{\delta'(1 + \|T\|^2)[(1 - (\delta')^2)^{1/2} + \delta'\|T\|]}{1 - (\delta')^2(1 + \|T\|^2)}\|u\| \leq \\ \leq \frac{\delta'(1 + \|T\|^2)}{1 - \delta'(1 + \|T\|^2)^{1/2}}\|u\| \end{aligned} \tag{3.23}$$

και αφού η (3.23) ισχύει για κάθε $u \in \boldsymbol{D}(S)$ τότε ο A είναι φραγμένος και άρα ο $S = T + A$ είναι φραγμένος. □

Θα αποδείξουμε τώρα κάτι πιο ισχυρό από το προηγούμενο λήμμα

Λήμμα 3.4.3. *Έστω $T \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Αν $S \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και*

$$\delta(T, S) < (1 + \|T\|^2)^{-1/2}$$

τότε ο S είναι πυκνά ορισμένος.

Απόδειξη. Έστω $v \in X$ και $\psi = \{v, Tv\}$:

$$\|v\|^2 + \|Tv\|^2 = \|\psi\|^2 = 1 \tag{3.24}$$

Έστω $\delta' : \delta(T, S) < \delta' < (1 + \|T\|^2)^{-1/2}$, τότε υπάρχει $\phi = \{u, Su\}$ που να ικανοποιεί την (3.22) από το λήμμα (3.4.2) [αλλά όχι απαραίτητα την (3.21)]. Ως εκ τούτου, $\|v - u\| < \delta'$ και $\mathrm{dist}(v, M) < \delta'$ όπου $M = \overline{\boldsymbol{D}(S)}$ (η κλειστότητα του $\boldsymbol{D}(S)$). Αλλά επειδή $1 \leq (1 + \|T\|^2)\|v\|^2$ από την (3.24), $\mathrm{dist}(v, M) < \delta'(1 + \|T\|^2)^{1/2}\|v\|$ $\forall v \in X$. Επιπλέον $\delta'(1 + \|T\|^2)^{1/2} < 1 \implies M = X$, γιατί διαφορετικά θα υπήρχε $v \neq 0$: $\mathrm{dist}(v, M) > \delta'(1 + \|T\|^2)^{1/2}\|v\|$ (από λήμμα Riesz). Επομένως $\boldsymbol{D}(S)$ πυκνό στον X. □

Θεώρημα 3.4.4. *Έστω $T \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Αν $S \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ είναι πολύ κοντά στον T, ώστε $\hat{\delta}(S,T) < (1+\|T\|^2)^{-1/2}$, τότε $S \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και :*

$$\|S-T\| \leq \frac{(1+\|T\|^2)\delta(S,T)}{1-(1+\|T\|^2)^{1/2}\delta(S,T)} \tag{3.25}$$

Απόδειξη. Από τα λήμματα (3.4.2),(3.4.3) ο S είναι φραγμένος το $\boldsymbol{D}(S)$ είναι κλειστό και πυκνό στον X και έτσι $\boldsymbol{D}(S) = X$ και $S \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.Η σχέση (3.25) προκύπτει από την (3.23) αφού το δ' μπορεί να επιλεχθεί αυθαίρετα κοντά στο $\delta(S,T)$. □

Θεώρημα 3.4.5. *Έστω $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και A να είναι T-φραγμένος με σχετικό φράγμα μικρότερο του 1, ώστε να έχουμε την (2.1) σχέση με $b < 1$. Τότε $S = T + A \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και*

$$\hat{\delta}(S,T) \leq (1-b)^{-1}(a^2+b^2)^{1/2} \tag{3.26}$$

Ακόμα αν $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ τότε

$$\hat{\delta}(T+A,T) \leq \|A\| \tag{3.27}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα (2.1) $S \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Για να δείξουμε την ανισότητα (3.26) έστω $\phi = \{u, Su\} \in \boldsymbol{G}(S)$ με $\|\phi\| = 1$ και άρα παίρνουμε την (3.21).Θέτουμε $\psi = \{u, Tu\} \in \boldsymbol{G}(T)$ και έχουμε

$$\|\phi - \psi\| = \|(S-T)u\| = \|Au\| \leq (1-b)^{-1}(a\|u\| + b\|Su\|)$$

από την σχέση (2.3). Από την ανισότητα Schwarz και την σχέση (3.21) προκύπτει $\|\phi-\psi\| \leq (1-b)^{-1}(a^2+b^2)^{1/2}$. Επομένως $\operatorname{dist}(\phi, \boldsymbol{G}(T)) \leq (1-b)^{-1}(a^2+b^2)^{1/2}$ και αφού το ϕ είναι αυθαίρετο στοιχείο της μοναδιαίας σφαίρας του $\boldsymbol{G}(S) \implies \delta(S,T) = \delta(\boldsymbol{G}(S), \boldsymbol{G}(T)) \leq (1-b)^{-1}(a^2+b^2)^{1/2}$.

Το $\delta(T,S)$ μπορεί να εκτιμηθεί παρόμοια με χρήση της (2.1) αντί για την (2.3) και το αποτέλεσμα θα είναι : $\delta(T,S) \leq (a^2+b^2)^{1/2}$. Επομένως παίρνουμε την εκτιμήτρια (3.26) για $\hat{\delta}(S,T) = \max(\delta(S,T), \delta(T,S))$. □

Παρατήρηση 3.4.6. *Στην (2.4) αν υποθέσουμε ότι $b = \max(b', b'') < 1$, τότε*

$$\hat{\delta}(S,T) \leq (1-b)^{-1}[a^2 + (b'+b'')^2]^{1/2}. \tag{3.28}$$

Παρατήρηση 3.4.7. *Το θεώρημα (3.4.4) μας δείχνει ότι το $\mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Οι σχέσεις (3.25),(3.27) δείχνουν ότι στο $\mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ η τοπολογία που ορίζεται από την συνάρτηση της απόστασης $\hat{d}$ (ή ισοδύναμα από την $\hat{\delta}$) είναι ταυτόσημη με την τοπολογία που ορίζεται με την νόρμα.*

Θεώρημα 3.4.8. *Έστω $T, S \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Τότε:*

$$\hat{\delta}(S+A, T+A) \leq 2(1+\|A\|^2)\hat{\delta}(S,T) \tag{3.29}$$

Απόδειξη. Ο τελεστής $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \implies T + A \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ με $\boldsymbol{D}(T+A) = \boldsymbol{D}(T)$. Όμοια $S + A \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

Έστω $\phi \in \boldsymbol{G}(S+A)$ με $\|\phi\| = 1$. Τότε υπάρχει $u \in \boldsymbol{D}(S)$ τέτοιο ώστε $\phi = \{u, (S+A)u\}$ και

$$\|u\| + \|(S+A)u\|^2 = \|\phi\|^2 = 1 \tag{3.30}$$

Θέτουμε $\|u\| + \|Su\|^2 = r^2,\ r > 0$. Το $r^{-1}\{u, Su\}$ είναι στοιχείο της μοναδιαίας σφαίρας του $\boldsymbol{G}(S)$. Για κάθε $\delta' > \hat{\delta}(S,T) = \hat{\delta}(\boldsymbol{G}(S), \boldsymbol{G}(T))$ το $r^{-1}\{u, Su\}$ έχει απόσταση μικρότερη του δ' από το $\boldsymbol{G}(T)$. Έτσι υπάρχει $v \in \boldsymbol{D}(T)$ τέτοιο ώστε $\|u-v\|^2 + \|Su - Tv\|^2 < r^2(\delta')^2$. Τότε θέτοντας με $\psi = \{v, (T+A)v\}$ έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} \|\phi - \psi\| = \|u-v\|^2 + \|(S+A)u - (T+A)v\|^2 \leq \\ \leq \|u-v\|^2 + 2\|Su - Tv\|^2 + 2\|A\|^2\|u-v\|^2 \leq \\ \leq 2(1+\|A\|^2)r^2(\delta')^2 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Από την άλλη,

$$\begin{aligned} r^2 = \|u\|^2 + \|Su\|^2 = \|u\|^2 + \|(S+A)u - Au\|^2 \leq \\ \|u\|^2 + 2\|(S+A)u\|^2 + 2\|A\|^2\|u\|^2 \leq 2 + 2\|A\|^2\|u\|^2 \leq 2 + 2\|A\|^2 \end{aligned}$$

από την (3.30). Επομένως $\|\phi - \psi\|^2 \leq 4(1+\|A\|^2)^2(\delta')^2$. Αφού το $\psi \in \boldsymbol{G}(T+A) \implies \operatorname{dist}(\phi, \boldsymbol{G}(T+A)) \leq 2(1+\|A\|^2)\delta'$ και αφού το ϕ αυθαίρετο στοιχείο της μοναδιαίας σφαίρας του $\boldsymbol{G}(S+A)$, έχουμε

$$\delta(S+A, T+A) = \delta(\boldsymbol{G}(S+A), \boldsymbol{G}(T+A)) \leq 2(1+\|A\|^2)\delta'$$

Επιπλεόν τα S, T μπορούν να αλλάξουν στο παραπάνω επιχείρημα και αφού το δ' είναι αυθαίρετα κοντά στο $\hat{\delta}(S,T)$ παίρνουμε την ζητούμενη (3.29). □

Θεώρημα 3.4.9. *Έστω $T, S \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ να είναι πυκνά ορισμένοι. Τότε $\delta(T,S) = \delta(S^*, T^*)$ και $\hat{\delta}(T,S) = \hat{\delta}(T^*, S^*)$.*

Απόδειξη. Θα έχουμε ότι : $\delta(S^*, T^*) = \delta(\boldsymbol{G}(S^*), \boldsymbol{G}(T^*)) = \delta(\boldsymbol{G}'(S^*), \boldsymbol{G}'(T^*)) = = \delta(\boldsymbol{G}(-S^\perp), \boldsymbol{G}(-T^\perp)) = \delta(\boldsymbol{G}(-T), \boldsymbol{G}(-S)) = \delta(\boldsymbol{G}(T), \boldsymbol{G}(S)) = \delta(T,S)$ όπου $\boldsymbol{G}(T) \subset X \times Y$ είναι το γράφημα του T και $\boldsymbol{G}'(T^*) \subset X^* \times Y^*$ είναι το αντίστροφο γράφημα του $T^* \in \mathscr{C}(\boldsymbol{Y}^*, \boldsymbol{X}^*)$. Επιπλέον, ξέρουμε ότι $\boldsymbol{G}'(T^*) = \boldsymbol{G}(-T)^\perp$ καθώς και $\delta(N^\perp, M^\perp) = \delta(M, N)$. Τέλος $\delta(\boldsymbol{G}(S^*), \boldsymbol{G}(T^*)) = \delta(\boldsymbol{G}'(S^*), \boldsymbol{G}'(T^*))$ ισχύει λόγω της επιλογής της νόρμας στον χώρο γινόμενο. □

Παρατήρηση 3.4.10. *Έστω $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν $\delta(T, 0) < 1$. $T \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ αν και μόνο αν $\hat{\delta}(T, 0) < 1$.*[1]

[1] προκύπτει άμεσα από τον ορισμό και την πρόταση (3.2.3)

3.5 Επιπλέον αποτελέσματα στην σταθερότητα και την φραγμένη αντιστρεψιμότητα

Το γράφημα $\boldsymbol{G}(T)$ ενός τελεστή $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{X}$ και το αντίστροφο γράφημα $\boldsymbol{G}'(T)$ του T είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$, ως εικόνα του $\boldsymbol{G}(T)$ σύμφωνα με την απεικόνιση $\{y, x\} \to \{x, y\}$. Η απεικόνιση αυτή διατηρεί την νόρμα και ως επομένως και το κενό μεταξύ δύο κλειστών γραμμικών υπόχωρων, $\delta(T_1, T_2) = \delta(\boldsymbol{G}(T_1), \boldsymbol{G}(T_2)) = \delta(\boldsymbol{G}'(T_1), \boldsymbol{G}'(T_2))$ και το ίδιο θα ισχύει αν αντικαταστήσουμε την συνάρτηση δ με την $\hat{\delta}, d, \hat{d}$. Επομένως μπορούμε σε ότι αφορά την απόσταση ή το κενό μεταξύ τελεστών στο σύνολο $\mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα γραφήματά τους με τα αντίστροφα γραφήματά τους.

Αν $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ είναι αντιστρέψιμος, $T^{-1} \in \mathscr{C}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ και $\boldsymbol{G}'(T^{-1}) = \boldsymbol{G}(T)$ [σχέση(1.24)]. Το επόμενο θεώρημα είναι άμεση συνέπεια των προηγούμενων παρατηρήσεων.

Θεώρημα 3.5.1. *Αν οι $T, S \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ είναι αντιστρέψιμοι τότε:*

$$\delta(S^{-1}, T^{-1}) = \delta(S, T), \quad \hat{\delta}(S^{-1}, T^{-1}) = \hat{\delta}(S, T) \tag{3.32}$$

Απόδειξη. Άμεσα αφού, $\delta(S, T) = \delta(\boldsymbol{G}(S), \boldsymbol{G}(T)) = \delta(\boldsymbol{G}'(S^{-1}), \boldsymbol{G}'(T^{-1})) =$
$= \delta(\boldsymbol{G}(S^{-1}), \boldsymbol{G}(T^{-1})) = \delta(S^{-1}, T^{-1})$ και η δεύτερη σχέση προκύπτει από την πρώτη. □

Αν θεωρήσουμε με $\mathscr{C}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \subset \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ να περιέχει όλους τους αντιστρέψιμους τελεστές, το θεώρημα (3.5.1) δείχνει ότι η $T \to T^{-1}$ είναι ισομμετρική απεικόνιση από το σύνολο $\mathscr{C}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ στο $\mathscr{C}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$. Γενικά η κατασκευή του $\mathscr{C}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ στο $\mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ είναι περίπλοκη διαδικασία. Ωστόσο θα πρέπει να δείξουμε ότι το σύνολο των τελεστών $T \in \mathscr{C}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ τέτοιοι ώστε $T^{-1} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$, είναι ανοικτό στο $\mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Αυτή είναι η *αρχή της σταθερότητας της φραγμένης αντιστρεψιμότητας,* στην πιο γενική της μορφή.

Θεώρημα 3.5.2. *Έστω $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ αντιστρέψιμος με $T^{-1} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$. Αν $S \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ με $\hat{\delta}(S, T) < (1 + \|T^{-1}\|^2)^{-1/2}$, τότε ο S είναι αντιστρέψιμος και $S^{-1} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Αν ο S είναι αντιστρέψιμος,τότε $\hat{\delta}(S^{-1}, T^{-1}) = \hat{\delta}(S, T) < (1+\|T^{-1}\|^2)^{-1/2}$ και επομένως $S^{-1} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ από το θεώρημα (3.4.4) εφαρμοσμένο για το ζεύγος S^{-1}, T^{-1}. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι S αντιστρέψιμος. Υποθέτουμε ότι $Su = 0, \|u\| = 1$. Τότε το $\{u, 0\}$ είναι στοιχείο της μοναδιαίας σφαίρας του $\boldsymbol{G}(S)$ και άρα υπάρχει ένα $\{v, Tv\} \in \boldsymbol{G}(T)$ τέτοιο ώστε: $\|u - v\|^2 + \|Tv\|^2 < (\delta')^2$. Τότε $1 = \|u\|^2 \leq (\|u - v\| + \|v\|)^2 \leq (\|u - v\| + \|T^{-1}\|\|Tv\|)^2 \leq (1 + \|T^{-1}\|)^2(\delta')^2 < 1$, άτοπο. □

Παρατήρηση 3.5.3. *Τα θεωρήματα (3.4.5) και (3.5.2) μας δίνουν το εξής αποτέλεσμα :* $(T+A)^{-1} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ *υπάρχει εάν* $\|A\| < (1 + \|T^{-1}\|^2)^{-1/2}$. *Όμως η συνθήκη αυτή είναι αχρείαστα ισχυρή. Αρκεί να υποθέσουμε ότι :*$\|A\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ *[ειδική περίπτωση του θεωρήματος (2.3.1)]. Μπορούμε να βελτιώσουμε το αποτέλεσμα αν εφαρμόσουμε το συμπέρασμα για το ζεύγος τελεστών* $\alpha T, \alpha A,\ \alpha > 0$. *Τότε ο* $\alpha(A+T)$ *έχει αντίστροφο στο* $\mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ *εάν* $\alpha\|A\| < (1 + \alpha^{-2}\|T^{-1}\|^2)^{-1/2}$ *το οποίο συμβαίνει αν* $\|A\| < (\alpha^2 + \|T^{-1}\|^2)^{-1/2}$, *και αφού* α *οσοδήποτε μικρό τότε* $(T+A)^{-1} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ *αν* $\|A\| < \|T^{-1}\|$.

3.6 Γενικευμένη σύγκλιση

Ξέρουμε ότι η ακολουθία $\{T_n\}_{n\geq 1}$ συγκλίνει στον T ($T_n \to T$) με την γενικευμένη έννοια εάν $\hat{\delta}(T_n, T) \to 0$. Το επόμενο θεώρημα είναι άμεση συνέπεια της παρατήρησης (3.4.7) και των θεωρημάτων (3.4.8),(3.4.9) και (3.5.1)

Θεώρημα 3.6.1. *Έστω* $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *και* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$

(α΄). Αν $T \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, $T_n \to T$ *με την γενικευμένη έννοια αν και μόνο αν* $T_n \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *για αρκούντως μεγάλα n και* $\|T_n - T\| \to 0$.

(β΄). Αν ο T^{-1} *υπάρχει και ανήκει στο* $\mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$, $T_n \to T$ *με την γενικευμένη έννοια αν και μόνο εάν* T_n^{-1} *υπάρχει και ανήκει στο* $\mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ *για αρκούντως μεγάλα n και* $\|T_n^{-1} - T^{-1}\| \to 0$.

(γ΄). Αν $T_n \to T$ *με την γενικευμένη έννοια και αν* $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, *τότε* $T_n + A \to T + A$ *με την γενικευμένη έννοια.*

(δ΄). Αν $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *πυκνά ορισμένη και T πυκνά ορισμένος,* $T_n \to T$ *με την γενικευμένη έννοια αν και μόνο εάν* $T_n^* \to T^*$ *με την γενικευμένη έννοια.*

Από το θεώρημα (3.4.5) παίρνουμε άλλη μια ικανή συνθήκη για την γενικευμένη σύγκλιση

Θεώρημα 3.6.2. *Έστω* $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. *Έστω* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *μια T-φραγμένη ακολουθία τέτοια ώστε* $\|A_n u\| \leq a_n\|u\| + b_n\|Tu\|$ *για* $u \in \boldsymbol{D}(T) \subset \boldsymbol{D}(A_n)$. *Εάν* $a_n \to 0,\ b_n \to 0$, *τότε* $T_n = T + A_n \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *για αρκούντως μεγάλα n και* $T_n \to T$ *με την γενικευμένη έννοια*

Μια ακόμα ικανή συνθήκη για την γενικευμένη σύγκλιση αποτελεί το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.6.3. *Έστω* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. *Έστω και ένας τρίτος χώρος Banach* $\boldsymbol{Z}$ *και* $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{B}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X})$, $U \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X})$ *και* $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq$

$\mathscr{B}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Y})$, $V \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Y})$ τέτοιοι ώστε U_n, U απεικονίζουν τον $\boldsymbol{Z}$ στο $\boldsymbol{D}(T_n), \boldsymbol{D}(T)$ αντίστοιχα, ένα προς ένα, και $T_nU_n = V_n$, $TU = V$. Αν $\|U_n - U\| \to 0$ και $\|V_n - V\| \to 0$, $n \to \infty$, τότε $T_n \to T$ με την γενικευμένη έννοια.

Απόδειξη. Η απεικόνιση $z \to \phi = \{Uz, Vz\} = \{Uz, TUz\}$ είναι ένα προς ένα,φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον Z στο $\boldsymbol{G}(T)$. Αφού το $\boldsymbol{G}(T)$ είναι κλειστό ο τελεστής έχει φραγμένο αντίστροφο:

$$\|z\|^2 \leq c^2\|\phi\|^2 = c^2(\|Uz\|^2 + \|Vz\|^2) \tag{3.33}$$

Έστω $\phi = \{Uz, Vz\}$ να είναι αυθαίρετο στοιχείο του $\boldsymbol{G}(T)$ και $\phi_n = \{U_nz, V_nz\} \in \boldsymbol{G}(T_n)$ και

$$\|\phi - \phi_n\|^2 \leq (\|U - U_n\|^2 + \|V - V_n\|^2)\|z\|^2 \leq c^2\delta_n^2\|\phi\|^2 \tag{3.34}$$

όπου $\delta_n^2 = \|U - U_n\|^2 + \|V - V_n\|^2$. Έχουμε, $\mathrm{dist}(\phi, \boldsymbol{G}(T_n)) \leq c\delta_n\|\phi\|$ και ως εκ τούτου $\delta(T, T_n) = \delta(\boldsymbol{G}(T), \boldsymbol{G}(T_n)) \leq c\delta_n \to 0$, $n \to \infty$. Όμοια θα έχουμε $\delta(T_n, T) \leq c_n\delta_n$, όπου c_n είναι το c της σχέσης (3.34) όπου το U, V έχουν αντικατασταθεί από U_n, V_n. Όμως η $\{c_n\}_{n\geq 1}$ είναι φραγμένη άρα η (3.35) δίνει : $\|\phi\| \leq \|\phi_n\| + \|\phi - \phi_n\| \leq \|\phi_n\| + c\delta_n\|\phi\| \implies \|\phi\| \leq (1 - c\delta_n)^{-1}\|\phi_n\|$ και $\|z\| \leq c\|\phi\| \leq (1 - c\delta_n)^{-1}\|\phi_n\|$ από την (3.34). Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να πάρουμε $c_n = c(1 - c\delta_n)^{-1} \implies \delta(T_n, T) \to 0$ άρα και $\hat{\delta}(T_n, T) \to 0$. $\square$

Κεφάλαιο 4

Ζεύγη κλειστών γραμμικών υπόχωρων

4.1 Ορισμοί

Έστω $\boldsymbol{Z}$ χώρος Banach και έστω $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι του $\boldsymbol{Z}$. Τότε η $\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N}$ είναι επίσης κλειστός υπόχωρος. Ορίζουμε για το ζεύγος $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$:

$$\mathrm{nul}(M,N) = \dim\left(M \cap N\right) \tag{4.1}$$

Ο $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$ είναι γραμμικός υπόχωρος (όχι απαραίτητα κλειστός) και ορίζουμε για το ζεύγος $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$:

$$\mathrm{def}(M,N) = \mathrm{codim}(M+N) = \dim Z/(M+N) \tag{4.2}$$

Ο δείκτης του ζεύγους $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ συμβολίζεται με $\mathrm{ind}(M,N)$ και ορίζεται ως εξής :

$$\mathrm{ind}(M,N) = \mathrm{nul}(M,N) - \mathrm{def}(M,N) \tag{4.3}$$

αν τουλάχιστον ένα εκ των $\mathrm{nul}(M,N)$ και $\mathrm{def}(M,N)$ είναι πεπερασμένο.

Το ζεύγος $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ θα λέγεται Fredhom [αντ. Semi-Fredholm] αν $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος και οι δύο ποσότητες [μία εξ' αυτών] $\mathrm{nul}(M,N)$ και $\mathrm{def}(M,N)$ είναι πεπερασμένες [πεπερασμένη].

Ορίζουμε:

$$\gamma(M,N) = \inf_{u \in M, u \notin N} \frac{\mathrm{dist}(u,N)}{\mathrm{dist}(u, M \cap N)} \; (\leq 1) \tag{4.4}$$

Η $\gamma(M,N)$ ορίζεται μόνο όταν $M \not\subset N$. Αν $M \subset N$ θέτουμε $\gamma(M,N) = 1$. Ακόμα $\gamma(M,N) = 1$ αν $M \supset N$. Η $\gamma(M,N)$ δεν είναι συμμετρική . Επιπλέον θέτουμε:

$$\hat{\gamma}(M,N) = \min\left(\gamma(M,N), \gamma(N,M)\right) \tag{4.5}$$

και την καλούμε *ελάχιστο κενό* μεταξύ των $\boldsymbol{M}$ και $\boldsymbol{N}$.

Παρατήρηση 4.1.1. $\gamma(M,N) \leq \delta(M,N)$ *εκτός από την περίπτωση όπου* $M \subset N$

Παρόλο που $\gamma(M,N)$ και $\gamma(N,M)$ δεν είναι γενικά ίσες, δεν είναι και τελείως ανεξάρτητες. Έχουμε:

$$\gamma(N,M) \geq \frac{\gamma(M,N)}{1+\gamma(M,N)} \tag{4.6}$$

Θεώρημα 4.1.2. *Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ο* $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ *να είναι κλειστός είναι:* $\gamma(M,N) > 0$.

Απόδειξη. Πρώτα θεωρούμε την περίπτωση όπου $M \cap N = 0$. Αν $M+N = Z_0$ τότε είναι κλειστός, ο Z_0 είναι Banach και κάθε $u \in Z_0$ έχει μοναδική έκφραση $u = v + w,\ v \in M, w \in N$. Η $Pu = v$ ορίζει μια προβολή P του Z_0 στον M κατά μήκος του N. Η P είναι φραγμένη λόγω του θεωρήματος κλειστού γραφήματος όπως έχουμε αναφέρει και στα προηγούμενα. Έχουμε

$$\|P\| = \sup_{u \in Z_0} \|Pu\|/\|u\| = \sup_{v \in M, w \in N} \|v\|/\|v+w\| = \sup_{v \in M} \|v\|/\operatorname{dist}(v,N) = 1/\gamma(M,N)$$

αφού $\operatorname{dist}(v, M\cap N) = \|v\|$ διότι $M \cap N = 0$. Επομένως

$$\gamma(M,N) = 1/\|P\| > 0 \tag{4.7}$$

Το παραπάνω επιχείρημα δεν είναι σωστό εάν $M = 0$. Σε αυτή την περίπτωση $\gamma(M,N) = 1 > 0$ από ορισμό αλλά δεν είναι ίσο με $\|P\|^{-1} = \infty$.

Υποθέτουμε, αντίστροφα ότι $\gamma(M,N) > 0$ και θα δείξουμε ότι $M+N$ είναι κλειστός. Ακόμα υποθέτουμε ότι $M \neq 0$. Έστω $v_n + w_n \to u,\ \{v_n\}_{n\geq 1} \subseteq M, \{w_n\}_{n\geq 1} \subseteq N$. Τότε

$$\|v_n - v_m\| \leq \operatorname{dist}(v_n - v_m, N)/\gamma(M,N) \leq \|v_n - v_m + w_n - w_m\|/\gamma(M,N) \to 0$$

Επομένως το $\lim v_n = v$ υπάρχει και $w_n = (v_n + w_n) - v_n \to u - v$. Επειδή M,N είναι κλειστοί, $v \in M, u - v \in N$ και άρα $u \in M+N$.

Σε αυτή την περίπτωση η σχέση (4.6) προκύπτει από την (4.7) καθώς και την ισότητα $\gamma(N,M) = 1/\|1-P\|$ (σημειώνουμε ότι : $\|1-P\| \leq 1 + \|P\|$). Αν $M = 0$ ή $N = 0$ τότε η απόδειξη δεν είναι έγκυρη όμως ακόμα και τότε η (4.6) ισχύει.

Στην γενική περίπτωση $M \cap N \neq 0$ θέτουμε $L = M \cap N$ και $\tilde{Z} = Z/L$ ο γνωστός μας χώρος πηλίκο. Ο L είναι κλειστός και ο $\tilde{Z}$ είναι Banach. Θέτουμε $\tilde{M}$ να είναι το σύνολο όλων των $\tilde{u} \in \tilde{Z}$ τέτοια ώστε $\tilde{u} \subset M$. Παρατηρούμε ότι το σύμπλοκο $\tilde{u}$ περιέχεται στον M αν υπάρχει u του $\tilde{u}$ που να περιέχεται στον M. Παρόμοια ορίζουμε $\tilde{N}$ και βλέπουμε εύκολα ότι $\tilde{M}, \tilde{N}$ είναι κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι του $\tilde{Z}$ με $\tilde{M} \cap \tilde{N} = 0$. Ακόμα , $\tilde{M} + \tilde{N}$ κλειστός στον $\tilde{Z}$ αν και μόνο αν $M+N$

κλειστός στον Z. Επομένως η απόδειξη της γενικής περίπτωσης περιορίζεται στην ειδική περίπτωση που θεωρήθηκε παραπάνω αν δείξουμε ότι :

$$\gamma(\tilde{M},\tilde{N})=\gamma(M,N) \tag{4.8}$$

Όμως αυτό συμβαίνει λόγω της :

$$\operatorname{dist}(\tilde{u},\tilde{M})=\operatorname{dist}(u,M) \tag{4.9}$$

και όμοιες ταυτότητες όπου το M έχει αντικατασταθεί από τα N, L. Για να δείξουμε την σχέση (4.9) αρκεί να επισημάνουμε ότι:

$$\operatorname{dist}(\tilde{u},\tilde{M})=\inf_{\tilde{v}\in\tilde{M}}\|\tilde{u}-\tilde{v}\|=\inf_{v\in M}\inf_{z\in L}\|u-v-z\|=\inf_{v\in M}\|u-v\|=\operatorname{dist}(u,M)$$

Ξανά, η ξεχωριστή περίπτωση όπου $M\subset N$ στην (4.8) πρέπει να εξεταστεί ξεχωριστά, αλλά η απόδειξη είναι τετριμμένη. □

Παρατήρηση 4.1.3. *Η (4.7) μέσω της (4.8) ισχύει ακόμα και στην γενική περίπτωση αν $\tilde{M}\neq 0$ και P είναι η προβολή του $\tilde{M}+\tilde{N}$ στον $\tilde{M}$ κατά μήκος του $\tilde{N}$.Ακόμα σημειώνουμε ότι η (4.6) ισχύει και στην γενικότερη περίπτωση όπου $M+N$ κλειστός, αλλά και όταν δεν είναι κλειστός και τότε θα έχουμε ότι $\gamma(M,N)=\gamma(N,M)=0$ από το θεώρημα (4.1.2)*

Λήμμα 4.1.4. *Έστω $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ κλειστός. Τότε για οποιοδήποτε $u\in\boldsymbol{Z}$ έχουμε:*

$$\operatorname{dist}(u,M)+\operatorname{dist}(u,N)\geq\frac{1}{2}\gamma(M,N)\operatorname{dist}(u,M\cap N) \tag{4.10}$$

Απόδειξη. Μέσω των σχέσεων (4.8) και (4.9) αρκεί να αποδείξουμε την (4.10) όπου τα u, M, N αντικαθίστανται από τα $\tilde{u},\tilde{M},\tilde{N}$, αντίστοιχα. Υποθέτουμε $M\cap N=0$ έτσι ώστε $\operatorname{dist}(u,M\cap N)=\|u\|$.

Έστω $\varepsilon>0$ και υπάρχει $v\in M$ και $w\in N$ τέτοια ώστε $\operatorname{dist}(u,M)>\|u-v\|-\varepsilon$ και $\operatorname{dist}(u,N)>\|u-w\|-\varepsilon$.

Αν $\|v\|\leq\|u\|/2$ θα έχουμε ότι $\operatorname{dist}(u,M)>\|u\|-\|v\|-\varepsilon\geq\|u\|/2-\varepsilon$. Αν $\|v\|\geq\|u\|/2$ έχουμε

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(u,M)+\operatorname{dist}(u,N)&\geq\|u-v\|+\|u-w\|-2\varepsilon\geq\|v-w\|-2\varepsilon\geq\\ &\operatorname{dist}(v,N)-2\varepsilon\geq\|v\|\gamma(M,N)-2\varepsilon\geq\frac{1}{2}\|u\|\gamma(M,N)-2\varepsilon\end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση το αριστερό μέλος της (4.10) δεν είναι μικρότερο από το $\frac{1}{2}\|u\|\gamma(M,N)-2\varepsilon$. Η σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon>0$ άρα έχουμε την (4.10) □

Παρατήρηση 4.1.5. $\operatorname{ind}(M,0)=-\operatorname{codim}(M)$, $\operatorname{ind}(M,Z)=\dim M$

Παρατήρηση 4.1.6. *Έστω $M'\supset M$ με $\dim M'/M=m<\infty$. Τότε,* $\operatorname{ind}(M',N)$ $=\dim(M'\cap N)+\operatorname{codim}(M'+N)=\dim(M'\cap N)=\dim Z/(M'+N)=$ $=\dim Z/(M+N)+m\implies\operatorname{ind}(M',N)=\operatorname{ind}(M,N)+m.$

4.2 Δυϊκότητα

Για κάθε $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{Z}$ ο μηδενιστής $\boldsymbol{S}^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\boldsymbol{Z}^*$ και περιέχει τα $f \in \boldsymbol{Z}^*$ τέτοια ώστε $f \perp \boldsymbol{S}$. Για κάθε κλειστό υπόχωρο $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ του $\boldsymbol{Z}$ είναι εύκολο να δούμε ότι :

$$(M+N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp} \tag{4.11}$$

Η σχέση $\boldsymbol{M}^{\perp} + \boldsymbol{N}^{\perp} = (\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N})^{\perp}$ δεν ισχύει πάντοτε για τον απλούστατο λόγο ότι $(\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N})^{\perp}$ είναι πάντοτε κλειστός, όμως $\boldsymbol{M}^{\perp}+\boldsymbol{N}^{\perp}$ δεν χρειάζεται να είναι κλειστός. Θα δείξουμε, ωστόσο, ότι αυτό αληθεύει αν και μόνο αν $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ είναι κλειστός.

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ κλεστοί υπόχωροι (γραμμικοί) του χώρου $\boldsymbol{Z}$. Τότε $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ είναι κλειστός στον $\boldsymbol{Z}$ αν και μόνο αν $\boldsymbol{M}^{\perp}+\boldsymbol{N}^{\perp}$ είναι κλειστός στον $\boldsymbol{Z}^*$. Σε αυτή την περίπτωση εκτός από την (4.11) έχουμε και τις σχέσεις:*

$$M^{\perp} + N^{\perp} = (M \cap N)^{\perp} \tag{4.12}$$

$$\operatorname{nul}(M^{\perp}, N^{\perp}) = \operatorname{def}(M, N), \quad \operatorname{def}(M^{\perp}, N^{\perp}) = \operatorname{nul}(M, N) \tag{4.13}$$

$$\gamma(M^{\perp}, N^{\perp}) = \gamma(N, M), \quad \hat{\gamma}(M^{\perp}, N^{\perp}) = \hat{\gamma}(M, N) \tag{4.14}$$

[Η (4.14) είναι αληθής ακόμα και αν $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ δεν είναι κλειστός.]

Η απόδειξη του θεωρήματος δίνεται σε βήματα.

Λήμμα 4.2.2. *Αν ο $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ είναι κλειστός τότε η (4.12) είναι αληθής. Συγκεκριμένα $\boldsymbol{M}^{\perp}+\boldsymbol{N}^{\perp}$ είναι κλειστός.*

Απόδειξη. Είναι απλό να δούμε ότι $M^{\perp} + N^{\perp} \subset (M \cap N)^{\perp}$. Άρα, αρκεί να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό.

Έστω $f \in (M \cap N)^{\perp}$ και θεωρούμε (f, u) για $u \in M+N$. Το u είναι της μορφής $u = v + w$, $v \in M, w \in N$ αλλά αυτή η έκφραση δεν μπορεί να είναι μοναδική. Αν $u = v' + w'$ μια άλλη μορφή, θα έχουμε ότι $v - v' = w' - w \in M \cap N$ ώστε $(f, v - v') = (f, w - w') = 0$. Έτσι $(f, v) = (f, v')$ και αυτό σημαίνει ότι το (f, v) καθορίζεται μοναδικά από το u. Το συναρτησιακό $g[u] = (f, v)$ ορίζεται για $u \in M+N$ και είναι γραμμικό. Παρόμοια ορίζουμε $h[u] = (f, w)$ και:

$$g[u] = 0 \text{ για } u \in N \text{ και } h[u] = 0 \text{ για } u \in M. \tag{4.15}$$

Τα g, h είναι φραγμένα και θα έχουμε $|g[u]| = |(f, v)| \leq \|f\| \|v\|$, όπου το v μπορεί να αντικατασταθεί από το $v - z$, $\forall\, z \in L = M \cap N$. Επομένως $|g[u]| \leq \|f\| \operatorname{dist}(v, L)$. Αφού ισχύει ότι $\|u\| = \|v + w\| \geq \operatorname{dist}(v, N) \geq \gamma(M, N) \operatorname{dist}(v, L)$ τότε έχουμε ότι $|g[u]| \leq \|f\| \|u\| / \gamma(M, N)$. Δηλαδή το g είναι φραγμένο με:

$$\|g\| \leq \|f\| / \gamma(M, N) \tag{4.16}$$

Το g μπορεί να επεκταθεί σε φραγμένο συναρτησιακό του Z^* από το Hahn-Banach θεώρημα διατηρώντας το φράγμα της (4.16). Συμβολίζουμε την επέκταση με g ως έχει. Ακριβώς όμοια και η επέκταση του h στον Z^* και την συμβολίζουμε με h. Τότε η (4.15) δείχνει ότι

$$g \in N^{\perp}, \quad h \in M^{\perp} \tag{4.17}$$

Αφού $(f,u) = (f,v)+(f,w) = g[u]+h[u] = (g,u)+(h,u)$ για $u \in M+N$, οι μορφές των $f,\ g+h$ συμπίπτουν στον $M+N$. Άρα $f-g-h = k \in (M+N)^{\perp} \subset M^{\perp}$. Ως εκ τούτου $h+k \in M^{\perp}$ και $f = g+(h+k) \in M^{\perp}+N^{\perp}$,το οποίο αποδεικνύει το λήμμα □

Λήμμα 4.2.3. *Αν ο* $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ *είναι κλειστός, τότε* $\gamma(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}) \le \gamma(\boldsymbol{N}^{\perp},\boldsymbol{M}^{\perp})$.

Απόδειξη. Για κάθε $g_0 \in N^{\perp}$ και $h_0 \in M^{\perp}$ θέτουμε $f = g_0+h_0$. Τότε $f \in M^{\perp}+N^{\perp} = (M\cap N)^{\perp}$ από το λήμμα (4.2.2). Σύμφωνα με την απόδειξη του λήμματος αυτού λοιπόν, το f μπορεί να γραφτεί στην μορφή $f = g+h,\ g \in N^{\perp}, h \in M^{\perp}$ με τέτοιο τρόπο ώστε η σχέση (4.16) να ισχύει. Αλλά εφόσον, $g-g_0 = h_0-h \in M^{\perp}\cap N^{\perp}$, θα έχουμε ότι $\|g\| = \|g_0+g-g_0\| \ge \operatorname{dist}(g_0, M^{\perp}\cap N^{\perp})$.Άρα, η (4.16) δίνει $\operatorname{dist}(g_0, M^{\perp}\cap N^{\perp}) \le \|g_0+h_0\|/\gamma(M,N)$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε $h_0 \in M^{\perp}$, έχουμε ότι $\operatorname{dist}(g_0, M^{\perp}\cap N^{\perp}) \le \operatorname{dist}(g_0, M^{\perp})/\gamma(M,N)$, και αφού αυτό ισχύει για κάθε $g_0 \in N^{\perp}$ παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. (Η περίπτωση όπου $M \subset N$ εξετάζεται ξεχωριστά αλλά είναι τετριμμένη). □

Λήμμα 4.2.4. *Αν ο* $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ *είναι κλειστός, τότε* $\gamma(\boldsymbol{N}^{\perp},\boldsymbol{M}^{\perp}) \le \gamma(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$.

Απόδειξη. Πάλι η ειδική περίπτωση είναι τετριμμένη άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M \not\subset N$. Για απλότητα γράφουμε $\gamma(M,N) = \gamma$ και $M\cap N = L$

Από τον ορισμό έστω $\varepsilon > 0$ και τότε $\exists\ v \in M$:

$$0 < \operatorname{dist}(v,N) < (\gamma+\varepsilon)\operatorname{dist}(v,L) \tag{4.18}$$

Για αυτό το v, $\exists\ f \in Z^* : 0 < (f,v) = \|f\|\operatorname{dist}(v,L)$ (θεώρημα (1.2.3)). Επιπλέον, $L^{\perp} = M^{\perp}+N^{\perp}$ από το λήμμα (4.2.2) και το f γράφεται, $f = g+h,\ g \in N^{\perp}, h \in M^{\perp}$. Άρα,

$$\begin{aligned} \|f\|\operatorname{dist}(v,L) = (f,v) = (g+h,v) = (g,v) = (g,v-w) \\ = (g-k,v-w) \le \|g-k\|\|v-w\| \end{aligned}$$

όπου $w \in N, k \in M^{\perp}\cap N^{\perp}$ είναι αυθαίρετα. Επομένως

$$0 < \|f\|\operatorname{dist}(v,L) \le \operatorname{dist}(g, M^{\perp}\cap N^{\perp})\operatorname{dist}(v,N)$$

Αλλά αφού, $\operatorname{dist}(g, M^{\perp}) \le \|g+h\| = \|f\|$ παίρνουμε:

$$\operatorname{dist}(g, M^{\perp})\operatorname{dist}(v,L) \le \operatorname{dist}(v,N)\operatorname{dist}(g, M^{\perp}\cap N^{\perp}) \tag{4.19}$$

Από τις (4.18) και (4.19) προκύπτει ότι $\operatorname{dist}(g, M^{\perp}) \leq (\gamma + \varepsilon) \operatorname{dist}(g, M^{\perp} \cap N^{\perp})$ και αφού $g \in N^{\perp}$ καταλήγουμε στο ότι $\gamma(N^{\perp}, M^{\perp}) \leq \gamma + \varepsilon$. Το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο άρα καταλήγουμε στο ζητούμενο. $\square$

Λήμμα 4.2.5. *Αν ο $\boldsymbol{M}^{\perp} + \boldsymbol{N}^{\perp}$ είναι κλειστός, τότε ο $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$ είναι κλειστός.*

Απόδειξη. Έστω Z_0 να είναι η κλειστότητα του $M + N$. Έστω B_M, B_N να είναι οι μοναδιαίες μπάλες των M, N αντίστοιχα. Θα δείξουμε πρώτα ότι η κλειστότητα $\overline{S}$ του συνόλου $S = B_M + B_N$ περιέχει μια μπάλα του Z_0.

Έστω $u_0 \in Z_0$, έξω από το $\overline{S}$, το οποίο $\overline{S}$ είναι κλειστό και κυρτό σύνολο, και υπάρχει $f_0 \in Z_0^*$ τέτοιο ώστε:[1]

$$\operatorname{Re}(f_0, v + w) < \operatorname{Re}(f_0, u_0) \;\; \forall \;\; v \in B_M, \; w \in B_N \tag{4.20}$$

Το f_0 μπορεί να επεκταθεί σε ένα στοιχείο του Z^* που συμβολίζεται πάλι με f_0 και διατηρεί το φράγμα του.

Στην (4.20) τα v, w μπορούν να πολλαπλασιαστούν με αυθαίρετους συντελεστές (μιγαδικούς αριθμούς με απόλυτη τιμή 1) και επομένως το αριστερό μέλος μπορεί να αντικατασταθεί με $|(f_0, v)| + |(f_0, w)|$. Όμως $\sup\limits_{v \in B_M} |(f_0, v)| = \operatorname{dist}(f_0, M^{\perp})$ από την σχέση (3.17) και όμοια για το $|(f_0, w)|$. Επομένως :

$$\operatorname{dist}(f_0, M^{\perp}) + \operatorname{dist}(f_0, N^{\perp}) \leq \operatorname{Re}(f_0, u_0) \leq \|u_0\| \|f_0\| \tag{4.21}$$

Αλλά το αριστερό μέλος της (4.21) δεν μπορεί να είναι μικρότερο από την ποσότητα $\gamma' \operatorname{dist}(f_0, M^{\perp} \cap N^{\perp})$ από το λήμμα (4.1.4) όπου $\gamma' = \gamma(M^{\perp}, N^{\perp})/2 > 0$. Ακόμα, θα έχουμε ότι $\operatorname{dist}(f_0, M^{\perp} \cap N^{\perp}) = \operatorname{dist}(f_0, (M + N)^{\perp}) = \operatorname{dist}(f_0, Z_0^{\perp}) = \|f_0\|$ (το φράγμα του f_0 περιορισμένο στον Z_0). Άρα παίρνουμε ότι $\|u_0\| \geq \gamma'$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $u \in Z_0$ με $\|u\| < \gamma'$ ανήκει στο $\overline{S}$. Δηλαδή το $\overline{S}$ περιέχει την μπάλα του Z_0 με κέντρο 0 και ακτίνα γ'. Παρόμοιο επιχείρημα με αυτό που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του θεωρήματος Κλειστού Γραφήματος μπορεί να εφαρμοστεί και τώρα έτσι ώστε να δείξουμε ότι το S περιέχει μια μπάλα του Z_0. Αφού λοιπόν, το $M + N$ περιέχει το S, θα πρέπει να είναι ταυτόσημο με το Z_0 (η κλειστότητα του $M + N$) και ως εκ τούτου να είναι κλειστό. $\square$

Τα λήμματα (4.2.2)-(4.2.5) αποδεικνύουν το Θεώρημα (4.2.1). Ακόμα σημειώνουμε ότι η σχέση (4.13) προκύπτει από τις (4.11) και (4.12) σύμφωνα με το λήμμα (1.3.3) .

[1]Έστω $d = \operatorname{dist}(u_0, S) > 0$ και έστω S' να είναι το σύνολο των $u \in Z_0$ τέτοια ώστε: $\operatorname{dist}(u, S) < d/2$. Το S' είναι ανοικτό, κυρτό σύνολο και δεν περιέχει το u_0. Η ύπαρξη του f_0 προκύπτει από το θεώρημα Hahn-Banach (γεωμετρική μορφή) σελ.100

Πρόταση 4.2.6. *Ένα ζεύγος M, N κλειστών γραμμικών υπόχωρων είναι Fredholm [semi-Fredholm] αν και μόνο αν το ζεύγος $M^\perp, N^\perp$ είναι Fredholm [semi-Fredholm]. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε*

$$\operatorname{ind}(M, N) = -\operatorname{ind}(M^\perp, N^\perp) \tag{4.22}$$

4.3 Κατά προσέγγιση έννοιες στα ζεύγη γραμμικών υπόχωρων

Έχουμε σημειώσει και παραπάνω ότι, γενικά $\gamma(M, N) \neq \gamma(N, M)$ παρόλου που οι δύο αυτές ποσότητες είναι ίσες με μηδέν ή διάφορες του μηδέν. Αν $\gamma(M, N) = \gamma(N, M)$ τότε λέμε ότι το ζεύγος των $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ είναι *κανονικό*.

Κάθε ζεύγος σε χώρο Hilbert είναι κανονικό διότι $\|1 - P\| = \|P\|$ για κάθε προβολή P, $0 \neq P \neq 1$. Άλλο ένα παράδειγμα, για το ζεύγος $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ στον χώρο γινόμενο $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$. Εδώ, ο $\boldsymbol{X}$ περιέχει τα στοιχεία της μορφής $\{u, 0\}$, $u \in \boldsymbol{X}$ και όμοια για τον $\boldsymbol{Y}$. Παρατηρούμε ότι $\gamma(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \gamma(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$.

Έστω $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ είναι κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι ενός Banach χώρου $\boldsymbol{Z}$. Ορίζουμε τις ποσότητες για το ζεύγος των $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$, $\operatorname{nul}'(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$, να είναι το μικρότερο άνω φράγμα (στην πραγματικότητα ο μεγαλυτερος αριθμός όπως θα δούμε παρακάτω) του συνόλου των $m \in \mathbb{N}$ (μπορει και $m = \infty$) με την ιδιότητα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας m-διαστάτος κλειστός γραμμικός υπόχωρος $\boldsymbol{M}_\varepsilon \subset \boldsymbol{M}$ με $\delta(\boldsymbol{M}_\varepsilon, \boldsymbol{N}) < \varepsilon$.

Παρατήρηση 4.3.1. $\operatorname{nul}'(M, N) \geq \operatorname{nul}(M, N)$

Και την ποσότητα $\operatorname{def}'(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ για το ζεύγος των $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ τέτοια ώστε

$$\operatorname{def}'(M, N) = \operatorname{nul}'(M^\perp, N^\perp) \tag{4.23}$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι ποσότητες $\operatorname{nul}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ και $\operatorname{def}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ έχουν οριστεί αλγεβρικά χωρίς καμία αναφορά σε καμία τοπολογία. Ο ορισμός των $\operatorname{nul}'(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ και $\operatorname{def}'(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ εξαρτάται από την τοπολογία του χώρου.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως η ποσότητα $\operatorname{nul}'(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ δεν είναι μόνο το μικρότερο άνω φράγμα αλλά και ο μεγαλύτερος αριθμός m με τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν. Αυτό είναι προφανές έαν $\operatorname{nul}'(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ πεπερασμένο. Όταν $\operatorname{nul}'(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) = \infty$ έχουμε ισοδύναμα το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 4.3.2. *Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $m < \infty$, υπάρχει ενας m-διάστατος χώρος $\boldsymbol{M}_\varepsilon \subset \boldsymbol{M}$ με $\delta(\boldsymbol{M}_\varepsilon, \boldsymbol{N}) < \varepsilon$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας ∞-διάστατος χώρος $\boldsymbol{M}_\varepsilon \subset \boldsymbol{M}$ με $\delta(\boldsymbol{M}_\varepsilon, \boldsymbol{N}) < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Για κάθε κλειστό γραμμικό υπόχωρο $M' \subset M$ με $\dim M/M' < \infty$, υπάρχει ένας $M_\varepsilon \subset M$ με $\dim M_\varepsilon > \dim M/M'$ και $\delta(M_\varepsilon, N) < \varepsilon$. Τότε θα έχουμε ότι $\dim (M' \cap M_\varepsilon) > 0$, και υπάρχει $u \neq 0$ στον M' τέτοιο ώστε $\mathrm{dist}(u, N) < \varepsilon\|u\|$. $\square$

Το λήμμα (4.3.2) είναι άμεση συνέπεια του παρακάτω:

Λήμμα 4.3.3. *Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε κλειστό γραμμικό υπόχωρο $\boldsymbol{M'} \subset \boldsymbol{M}$ με $\dim \boldsymbol{M}/\boldsymbol{M'} < \infty$, υπάρχει ένα $u \neq 0$ στον $\boldsymbol{M'}$ τέτοιο ώστε $\mathrm{dist}(u, N) < \varepsilon\|u\|$. Τότε υπάρχει για κάθε $\varepsilon > 0$ ένας ∞-διάστατος $\boldsymbol{M_\varepsilon} \subset \boldsymbol{M}$ τέτοιος ώστε $\delta(\boldsymbol{M_\varepsilon}, \boldsymbol{N}) < \varepsilon$. Ειδικά, $\mathrm{nul}'(M, N) = \infty$.*

Απόδειξη. Κατασκευάζουμε δύο ακολουθίες $\{u_n, f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με τις παρακάτω ιδιότητες

$$\begin{aligned}\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq M, \quad \{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq Z^*, \quad \|u_n\| = 1, \quad \|f_n\| = 1\\ (u_n, f_n) = 1, \quad (u_n, f_k) = 0 \ \text{ για } \ k < n\\ \mathrm{dist}(u_n, N) \leq 3^{-n}\varepsilon\end{aligned} \tag{4.24}$$

Υποθέτοντας ότι έχουν κατασκευαστεί για $k = 1, 2, \ldots, n-1$ τα u_n, f_n μπορούν να βρεθούν με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω M' να είναι το σύνολο των $u \in M$ τέτοιο ώστε $(u, f_k) = 0$ για $k = 1, \ldots, n-1$. Το M' είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος με $\dim M/M' \leq n-1$, οπότε υπάρχει $u_n \in M'$ με $\|u_n\| = 1$ και $\mathrm{dist}(u_n, N) \leq 3^{-n}\varepsilon$. Για αυτό το u_n υπάρχει $f_n \in Z^*$ τέτοιο ώστε από συνέπεια Hahn-Banach $\|f_n\| = 1$ και $(u_n, f_n) = 1$.

Από την σχέση (4.24) προκύπτει ότι τα u_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα και η γραμμική τους θήκη (span) M'_ε είναι άπειρης διάστασης. Κάθε $u \in M'_\varepsilon$ έχει μορφή

$$u = \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.25}$$

Θα δείξουμε ότι τα ξ_k ικανοποιούν τις ανισότητες:

$$|\xi_k| \leq 2^{k-1}\|u\| \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{4.26}$$

Για να το αποδείξουμε, από τις (4.24) και (4.25) :

$$(u, f_j) = \xi_1(u_1, f_j) + \ldots + \xi_{j-1}(u_{j-1}, f_j) + \xi_j \tag{4.27}$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η (4.26) έχει αποδειχθεί για $k < j$ η (4.27) δίνει

$$\begin{aligned}|\xi_j| &\leq |(u, f_j)| + |\xi_1||(u_1, f_j)| + \ldots + |\xi_{j-1}||(u_{j-1}, f_j)|\\ &\leq \|u\| + \|u\| + \ldots + 2^{j-2}\|u\| = 2^{j-1}\|u\|\end{aligned}$$

ολοκληρόνωντας την απόδειξη της (4.26) επαγωγικά.

Από τις (4.24-4.26) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(u,N) &\leq |\xi_1|\operatorname{dist}(u_1,N)+\ldots+|\xi_n|\operatorname{dist}(u_n,N)\leq\\ &\leq(3^{-1}+2(3^{-2})+\ldots+2^{n-1}3^{-n})\varepsilon\|u\|\leq\varepsilon\|u\|\end{aligned}$$

Η ίδια ανισότητα ισχύει για ο'λα τα u στην κλειστότητα $M_\varepsilon \subset M$ του M'_ε. Ως εκ τούτου $\delta(M_\varepsilon, N)\leq\varepsilon$. □

Θεώρημα 4.3.4. *Αν ο* $\boldsymbol{M+N}$ *είναι κλειστός,τότε*

$$\operatorname{nul}'(M,N)=\operatorname{nul}(M,N)\ ,\quad \operatorname{def}'(M,N)=\operatorname{def}(M,N) \tag{4.28}$$

Απόδειξη. Ο $M^\perp + N^\perp$ είναι κλειστός αν και μόνο αν ο $M+N$ είναι κλειστός από το θεώρημα (4.2.1).Σύμφωνα με τις σχέσεις (4.13) και (4.23) αρκεί να δείξουμε το πρώτη ισότητα της (4.28).
Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M_\varepsilon\subset M$ τέτοιος ώστε $\dim M_\varepsilon > \operatorname{nul}(M,N)=\dim M\cap N$ και $\delta(M_\varepsilon,N)<\varepsilon$. Τότε υπάρχει ένα $u\in M_\varepsilon$ τέτοιο ώστε $\operatorname{dist}(u,M\cap N)=\|u\|=1$ (από λήμμα 3.2.2). Τότε $\operatorname{dist}(u,N)\geq\gamma\operatorname{dist}(u,M\cap N)=\gamma$,όπου $\gamma=\gamma(M,N)>0$ από το θεώρημα (4.1.2). Από την άλλη, $\operatorname{dist}(u,N)\leq\|u\|\delta(M_\varepsilon,N)<\varepsilon$. Άρα το ε δεν μπορεί να είναι μικρότερο του γ. Αυτό δείχνει ότι $\operatorname{nul}'(M,N)\leq\operatorname{nul}(M,N)$. Η αντίστροφη ανισότητα ισχύει από την παρατήρηση (4.3.1), επομένως έχουμε την ζητούμενη ισότητα. □

Θεώρημα 4.3.5. *Αν ο* $\boldsymbol{M+N}$ *δεν είναι κλειστός, τότε*

$$\operatorname{nul}'(M,N)=\operatorname{def}'(M,N)=\infty \tag{4.29}$$

Απόδειξη. Αρκεί και πάλι να δείξουμε ότι $\operatorname{nul}'(M,N)=\infty$. Για κάθε $M'\subset M$ με $\dim M/M'<\infty$, ο $M'+N$ δεν είναι κλειστός (γιατί διαφορετικά ο$M+N$ θα ήταν κλειστός).[2] Επομένως $\gamma(M',N)=0$ από το θεώρημα (4.1.2), και άρα για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει ένα μη μηδενικό $u\in M'$ με $\operatorname{dist}(u,N)\leq\varepsilon\operatorname{dist}(u,M'\cap N)\leq\varepsilon\|u\|$. Οι υποθέσεις του λημματος (4.3.3) ικανοποιούνται και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Παρατήρηση 4.3.6. *(i). Οι ποσότητες* $\operatorname{nul}'(M,N)$,$\operatorname{def}'(M,N)$ *είναι συμμετρικές ως προς M,N*

(ii). $\operatorname{def}'(M,N)\geq\operatorname{def}(M,N)$

(iii). $\operatorname{nul}'(M,N)=\operatorname{def}'(M^\perp,N^\perp)$

[2]Εκμεταλευόμαστε γνωστό λήμμα με την την εξής διατύπωση : Αν M' είναι υπόχωρος που παράγεται από κλειστό γραμμικό υπόχωρο M και πεπερασμένα διανύσματα $u_1,\ldots,u_m$,τότε M' κλειστός.

Παραθέτουμε ένα ακόμα κριτήριο για το $\mathrm{nul}'(M,N) = \infty$, τελειώνοντας την ενότητα

Θεώρημα 4.3.7. *Έχουμε* $\mathrm{nul}'(M,N) = \infty$ *αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ *με* $\|u_n\| = 1$ *και* $\mathrm{dist}(u_n, N) \to 0$ *η οποία δεν περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{nul}'(M,N) = \infty$. Θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\|u_n\| = 1$, $\mathrm{dist}(u_n, N) \leq 1/n$ και $\|u_n - u_m\| \geq 1$ για $n \neq m$. Υποθέτουμε ότι $u_1, \ldots, u_n$ έχουν ήδη κατασκευαστεί και έστω M_n να είναι η γραμμική τους θήκη (span). Εφόσον $\mathrm{nul}'(M,N) = \infty$ υπάρχει ένας $(n+1)$-διάστατος γραμμικός υπόχωρος $M' \subset M$ τέτοιος ώστε $\delta(M', N) \leq 1/(n+1)$. Ακόμα, $\dim M' > \dim M_n$ και άρα υπάρχει $u \in M'$ τέτοιο ώστε $\mathrm{dist}(u, M_n) = \|u\| = 1$ από το λήμμα (3.2.2). Το $u = u_{n+1}$ ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις του u_{n+1}.

Αντίστροφα, έστω $\mathrm{nul}'(M,N) < \infty$ και $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία με $\|u_n\| = 1$ και $\mathrm{dist}(u_n, N) \to 0$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Αφού ο $M + N$ είναι κλειστός από το θεώρημα (4.3.5) $\gamma(M,N) = \gamma > 0$ από το θεώρημα (4.1.2) , και $\mathrm{nul}(M,N) < \infty$ από το θεώρημα (4.3.4). Επομένως $\mathrm{dist}(u_n, M\cap N) \leq \gamma^{-1}\,\mathrm{dist}(u_n, N) \to 0$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \cap N$ τέτοια ώστε $u_n - z_n \to 0$. Η $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και $\dim M\cap N = \mathrm{nul}(M,N) < \infty$ άρα περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Το ίδιο θα ισχύει και για την $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αφού $u_n - z_n \to 0$ □

4.4 Θεωρήματα Σταθερότητας

Θα δείξουμε ότι οι ποσότητες $\mathrm{nul}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}), \mathrm{def}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}), \mathrm{ind}\,(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ και η κλειστότητα του $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ έχουν συγκεκριμένη σταθερότητα όταν ο $\boldsymbol{M}$ υπόκειται σε μικρές διαταραχές.

Θεώρημα 4.4.1. *Έστω* $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{M}'$ *να είναι κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι του* $\boldsymbol{Z}$ *και έστω* $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ *να είναι κλειστός. Τότε:*

$$\delta(M', M) < \gamma(N, M) \implies \mathrm{nul}'(M', N) \leq \mathrm{nul}(M, N) \tag{4.30}$$

και

$$\delta(M, M') < \gamma(M, N) \implies \mathrm{def}'(M', N) \leq \mathrm{def}(M, N) \tag{4.31}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\delta(M', M) < \gamma(N, M)$. Έστω υπάρχει κλειστός γραμμικός υπόχωρος $N_\varepsilon \subset N$ τέτοιος ώστε $\dim N_\varepsilon > \mathrm{nul}(M,N) = \dim\,(M\cap N)$ και θα δείξουμε ότι $\delta(N_\varepsilon, M')$ δεν μπορεί να είναι πολύ μικρο. Τότε θα έχουμε ότι $\mathrm{nul}'(M', N) = \mathrm{nul}'(N, M') \leq \mathrm{nul}(M,N)$ [παρατήρηση 4.3.6(i)].

Επιπλεόν $\dim N_\varepsilon > \dim (M \cap N) \implies \exists\, u \in N_\varepsilon \subset N : \operatorname{dist}(u, M \cap N) = \|u\| = 1$ από λήμμα (3.2.2). Ως εκ τούτου $\operatorname{dist}(u, M) \geq \gamma(N, M)$ από σχέση (4.4). Αν τώρα αλλάξουμε στην σχέση (3.14) όπου $N \to M$ και όπου $M \to M'$ παίρνουμε ότι $\operatorname{dist}(u, M') \geq [1+\delta(M', M)]^{-1}[\gamma(N, M) - \delta(M', M)]$. Αυτό δείχνει ότι η $\operatorname{dist}(u, M')$ και η επομένως η $\delta(N_\varepsilon, M')$ δεν μπορούν να είναι αυθαίρετα μικρές.

Η σχέση (4.31) του θεωρήματος προκύπτει από την πρώτη αν θεωρήσουμε $M^\perp, N^\perp$, $M'^\perp$ και λάβουμε υπόψην τις σχέσεις (3.19),(4.13),(4.14) και (4.23) □

Πρόταση 4.4.2. *Έστω $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ να είναι Fredholm[semi-Fredholm] ζεύγος. Τότε το ίδιο ισχύει και για το ζεύγος $\boldsymbol{M}', \boldsymbol{N}$ εάν $\hat{\delta}(\boldsymbol{M}', \boldsymbol{M}) < \hat{\gamma}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ και έχουμε:*

$$\operatorname{nul}(M', N) \leq \operatorname{nul}(M, N)\ ,\ \operatorname{def}(M', N) \leq \operatorname{def}(M, N) \tag{4.32}$$

Απόδειξη. Οι υποθέσεις μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι προϋποθέσεις του θεωρήματος (4.4.1) ικανοποιούνται. Επομένως και τα δύο συμπεράσματα αληθεύουν. Αν M, N είναι semi-Fredholm ζεύγος τότε τουλάχιστον ένα εκ των $\operatorname{nul}(M, N)$ και $\operatorname{def}(M, N)$ είναι πεπερασμένο. Άρα τουλάχιστον ένα εκ των $\operatorname{nul}'(M', N)$ και $\operatorname{def}'(M', N)$ είναι πεπερασμένο. Τότε από το θεώρημα (4.3.5) ο $M' + N$ είναι κλειστός και τουλάχιστον ένα εκ των $\operatorname{nul}(M', N) = \operatorname{nul}'(M', N)$ και $\operatorname{def}(M', N) = \operatorname{def}'(M', N)$ είναι πεπερασμένο [θεώρημα (4.3.4)]. Ως εκ τούτου M', N είναι semi-Fredholm ζεύγος. Αν M, N είναι Fredholm τότε τόσο η $\operatorname{nul}(M, N)$ όσο και η $\operatorname{def}(M, N)$ είναι πεπερασμένες και άρα και οι $\operatorname{nul}'(M', N), \operatorname{def}'(M', N)$ είναι πεπερασμένες. □

Παρατήρηση 4.4.3. *Στο θεώρημα (4.4.1) ο $M' + N$ δεν χρειάζεται να είναι κλειστός εάν $\operatorname{nul}(M, N) = \operatorname{def}(M, N) = \infty$. Υπάρχει ένα ζεύγος M, N για το οποίο υπάρχει M' με αυθέρετα μικρό $\hat{\delta}(M', M)$ τέτοιο ώστε $M' + N$ δεν είναι κλειστός.*

Παρατήρηση 4.4.4. *Στην πρόταση (4.4.2) η $\hat{\gamma}(M', N) > 0$ αφού M', N είναι semi-Fredholm ζεύγος. Αλλά γενικά, είναι δύσκολο να εκτιμήσουμε την $\hat{\gamma}(M', N)$ σε σχέση με τις $\hat{\gamma}(M, N)$ και $\hat{\delta}(M', M)$. Δηλαδή η $\hat{\gamma}(M, N)$ μπορεί να αλλάξει ασυνεχώς έαν το M αλλάξει ελαφρώς. Αυτό οφείλεται στην ασυνέχεια του $M \cap N$ που εμφανίζεται στον ορισμό της $\gamma(M, N)$. Τα επόμενα λήμματα δείχνουν την συμπεριφορά της $\gamma(M, N)$ όταν $M \cap N = 0$ ή $M + N = Z$.*

Λήμμα 4.4.5. *Έστω $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ να είναι κλειστοί με $\operatorname{nul}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) = 0$. Αν*

$$\hat{\delta}(\boldsymbol{M}', \boldsymbol{M}) < \gamma(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{M})/[2 + \gamma(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{M})]$$

τότε ο $\boldsymbol{M}' + \boldsymbol{N}$ κλειστός, $\operatorname{nul}(\boldsymbol{M}', \boldsymbol{N}) = 0$ και $\operatorname{def}(\boldsymbol{M}', \boldsymbol{N}) = \operatorname{def}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την (4.6), $\hat{\delta}(M', M) < \min[\gamma(M, N), \gamma(N, M)] = \hat{\gamma}(M, N)$. Επομένως ο $M' + N$ είναι κλειστός και $\mathrm{nul}(M', N) = 0$, $\mathrm{def}(M', N) \leq \mathrm{def}(M, N)$ από την πρόταση (4.4.2). Μένει να δείξουμε ότι $\mathrm{def}(M, N) \leq \mathrm{def}(M', N)$. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι $\delta(M', M) < \gamma(M', N)$ και τότε θα εφαρμόσουμε την σχέση (4.31) του θεωρήματος (4.4.1) έχοντας αλλάξει τα M και M',στην σχέση (4.31).

Έστω $u \in N$.Τότε $\mathrm{dist}(u, M) \geq \gamma(N, M)\,\mathrm{dist}(u, M \cap N) = \gamma(N, M)\|u\|$ αφού $M \cap N = 0$. Από την σχέση (3.14) και όπου $N \to M$ και $M \to M'$ έχουμε ότι $\mathrm{dist}(u, M') \geq [1 + \delta(M', M)]^{-1}[\gamma(N, M) - \delta(M', M)]\|u\|$. Αυτό ισχύει για κάθε $u \in N$ και άρα

$$\gamma(N, M') \geq \frac{\gamma(N, M) - \delta(M', M)}{1 + \delta(M', M)} \tag{4.33}$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν, την (4.6) ανισότητα θα πάρουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα

$$\gamma(M', N) \geq \frac{\gamma(N, M')}{1 + \gamma(N, M')} = \frac{\gamma(N, M) - \delta(M', M)}{1 + \gamma(N, M)} > \delta(M', M) \tag{4.34}$$

Αφού, $\delta(M', M) < \gamma(N, M)/[2 + \gamma(N, M)]$ από την υπόθεση. □

Λήμμα 4.4.6. *Έστω* $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N} = \boldsymbol{Z}$ *(ώστε* $\mathrm{def}\,(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) = 0$*). Αν*

$$\hat{\delta}(\boldsymbol{M}', \boldsymbol{M}) < \gamma(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})/[2 + \gamma(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})]$$

τότε $\boldsymbol{M}' + \boldsymbol{N} = \boldsymbol{Z}$ *(ώστε* $\mathrm{def}(\boldsymbol{M}', \boldsymbol{N}) = 0$*) και* $\mathrm{nul}\,(\boldsymbol{M}', \boldsymbol{N}) = \mathrm{nul}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$

Απόδειξη. Από το λήμμα (4.4.5) για M, N, M' να έχουν αντικατασταθεί από τους μηδενιστές τους καθώς και με την βοήθεια των θεωρημάτων (3.3.2) και (4.2.1) έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.4.7. *Έστω* $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ *να είναι Fredholm [semi-Fredholm] ζεύγος. Τότε υπάρχει ένα* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε* $\hat{\delta}(\boldsymbol{M}', \boldsymbol{M}) < \delta \implies \boldsymbol{M}', \boldsymbol{N}$ *είναι Fredholm [semi-Fredholm] ζεύγος και* $\mathrm{ind}(\boldsymbol{M}', \boldsymbol{N}) = \mathrm{ind}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$.

Απόδειξη. Αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση του semi-Fredholm ζεύγους, και τότε $\mathrm{ind}(M', N) = \mathrm{ind}(M, N) \implies M', N$ είναι Fredholm αν και μόνο αν είνα το ζεύγος M, N. Ακόμα θα υποθέσουμε ότι $\mathrm{def}(M, N) < \infty$. Η περίπτωση όπου $\mathrm{nul}(M, N) < \infty$ μπορεί να περιοριστεί στο semi-Fredholm ζεύγος θεωρόντας απλώς τους μηδενιστές.

Αν $\mathrm{def}(M, N) = m < \infty$ μπορούμε να βρούμε έναν $N_0 \supset N$ τέτοιο ώστε $\dim N_0/N = m$, $N_0 \cap M = N \cap M$ και $M + N_0 = Z$. Σύμφωνα με το λήμμα (4.4.6), υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\hat{\delta}(M', M) < \delta \implies \mathrm{def}(M', N_0) = 0$ και $\mathrm{nul}(M', N_0) = \mathrm{nul}(M, N_0) = \mathrm{nul}(M, N)$. Επομένως $\mathrm{ind}(M', N_0) = \mathrm{nul}(M, N)$ και $\mathrm{ind}(M', N) = \mathrm{ind}(M', N_0) - m = \mathrm{nul}(M', N_0) - m = \mathrm{nul}(M, N) - \mathrm{def}(M, N) = \mathrm{ind}(M, N)$ □

Παρατήρηση 4.4.8. *Το παραπάνω θεώρημα μας δείχνει ότι ο δείκτης ενός ζεύγους semi-Fredholm παραμένει σταθερός όταν ο M υπόκειται σε μικρές διαταραχές. Θα μπορούσε να δειχθεί το ίδιο και για ταυτόχρονες διαταραχές των M και N αλλά η απόδειξη είναι αρκετά πολύπλοκη. Στο παραπάνω θεώρημα είναι αρκετά δύσκολο να εκτιμήσουμε την δ. Συγκεκριμένα, δεν γνωρίζουμε πότε ο $\mathrm{ind}(M', N)$ είναι σταθερός, για όλα τα M' που θεωρήθηκαν στην πρόταση (4.4.2), εκτός και αν ο Z είναι χώρος Hilbert, οπότε και ο δείκτης είναι σταθερός.*

Κεφάλαιο 5

Θεωρήματα σταθερότητας για semi-Fredholm τελεστές

5.1 Ορισμοί

Έστω τελεστής $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Ορίζουμε την ποσότητα $\mathrm{nul}(T)$ να είναι η διάσταση του πυρήνα του T, $\dim \boldsymbol{N}(T) = \mathrm{nul}(T)$. Επιπλέον, $\mathrm{def}(T)$ του T να είναι η συνδιάσταση της εικόνας, $\boldsymbol{R}(T)$ στον $\boldsymbol{Y}$, δηλαδή $\mathrm{def}(T) = \dim Y/\boldsymbol{R}(T) = \mathrm{codim}\, R(T)$. Κάθε μια από τις ποσότητες $\mathrm{nul}(T), \mathrm{def}(T)$ παίρνει τιμές $0, 1, 2, \ldots$ ή ∞ και ορίζουμε ακόμα τον δείκτη του T να είναι :

$$\mathrm{ind}(T) = \mathrm{nul}(T) - \mathrm{def}(T) \tag{5.1}$$

αν τουλάχιστον εάν εκ των $\mathrm{nul}(T), \mathrm{def}(T)$ είναι πεπερασμε΄νο.

Οι παραπάνω έννοιες όπως τις ορίσαμε έχουν μια αυθαιρεσία. Ένας τελεστής T από τον χώρο $\boldsymbol{X}$ στον $\boldsymbol{Y}$ μπορεί να θεωρηθεί και ως τελεστης από τον $\boldsymbol{X}$ στον $\boldsymbol{Y}'$ όπου $\boldsymbol{Y}' \supset \boldsymbol{Y}$ και τότε η $\mathrm{def}(T)$ θα αυξηθεί κατά $\dim \boldsymbol{Y}'/\boldsymbol{Y}$, Επιπλέον ο T μπορεί να θεωρηθεί ως τελεστής από τον $\boldsymbol{X}'$ στον $\boldsymbol{Y}$, όπου $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X_o}$, δηλαδή ο $\boldsymbol{X}'$ είναι ευθύ άθροισμα του $\boldsymbol{X}$ και ενός χώρου $\boldsymbol{X_o}$ με τον όρο ότι $Tu = 0, u \in \boldsymbol{X_o}$. Τότε η $\mathrm{nul}(T)$ θα αυξηθεί κατά $\dim \boldsymbol{X_o}$. Όταν λοιπόν, το πεδίο ορισμού καθώς και η εικόνα τυ τελεστή σταθεροποιηθούν τότε οι $\mathrm{nul}(T), \mathrm{def}(T)$ είναι καλά ορισμένες ποσότητες με τις ιδιότητες που θα μελετήσουμε παρακάτω.

Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ είναι χώροι Banach . Η σταθερότητα της φραγμένης αντιστρεψιμότητας,θεώρημα (3.5.2), είναι η σταθερότητα της ιδιότητας του $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathrm{nul}(T) = \mathrm{def}(T) = 0$ Θα γενικεύσουμε το θεώρημα και σε άλλες τιμές των $\mathrm{def}(T)$ και $\mathrm{nul}(T)$ μαζί με κάποιες επιπλέον συνθήκες.

Μια από αυτές τις συνθήκες θα είναι η εικόνα, $\boldsymbol{R}(T)$, να είναι κλειστή. Η συνθήκη αυτή ικανοποιεί αυτόματα το γεγονός ότι $\mathrm{def}(T) < \infty$. Ένας τελεστής $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ θα λέγεται Fredhom αν η $\boldsymbol{R}(T)$ είναι κλειστή και $\mathrm{nul}(T), \mathrm{def}(T)$ είναι πεπερασμένες. Θα λέγεται semi-Fredholm εάν $\boldsymbol{R}(T)$ κλειστή και τουλάχιστον ένα εκ των $\mathrm{nul}(T), \mathrm{def}(T)$ είναι πεπερασμένο. Ο δείκτης έχει ορισθεί από την σχέση (5.1) για semi-Fredholm τελεστή T. Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας,που θα αποδείξουμε, είναι ότι η ιδιότητα ενός τελεστή να είναι Fredholm[semi-Fredholm] παραμένει σταθερή όταν ο τελεστής υπόκειται σε μικρές διαταραχές.

Για τον σκοπό αυτό είναι απαραίτητο να μελετήσουμε τους κλειστούς τελεστές με κλειστή εικίονα. Για κάθε $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, ο πυρήνας $\boldsymbol{N}(T) = \boldsymbol{N}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\boldsymbol{X}$. Επομένως ο χώρος πηλίκο $\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}/\boldsymbol{N}$ είναι χώρος Banach και η νόρμα ορίζεται :

$$\|\tilde{u}\| = \inf_{u\in\tilde{u}} \|u\| = \inf_{z\in N} \|u - z\| = \mathrm{dist}(u, N), \quad u \in \tilde{u} \tag{5.2}$$

Αν $u \in \boldsymbol{D}(T)$, τα $u' \in \tilde{u}$ ανήκουν στον $\boldsymbol{D}(T)$ αφού $u' - u \in \boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{D}(T)$. Ακόμα έχουμε ότι $Tu = Tu'$ αφού ο $\boldsymbol{N}$ είναι ο πυρήνας του T. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε έναν τελεστή T από τον $\tilde{\boldsymbol{X}}$ στον $\boldsymbol{Y}$ με:

$$\tilde{T}\tilde{u} = Tu \tag{5.3}$$

Το $\boldsymbol{D}(\tilde{T})$ του $\tilde{T}$ είναι το σύνολο των $\tilde{u} \in \tilde{\boldsymbol{X}}$ τέτοιο ώστε, κάθε $u \in \tilde{u}$ ανήκει στον $\boldsymbol{D}(T)$.

Προφανώς ο $\tilde{T}$ είναι γραμμικός. Θα δείξουμε ότι είναι και κλειστός. Έστω $\{\tilde{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{D}(\tilde{T})$ τέτοια ώστε $\tilde{u_n} \to \tilde{u} \in \tilde{\boldsymbol{X}}$ και $\tilde{T}\tilde{u_n} \to v \in \boldsymbol{Y}$ ($\tilde{T}$-συγκλίνουσα). Έστω $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tilde{u_n}, u \in \tilde{u}$. Τότε $\tilde{u_n} \to \tilde{u} \implies \mathrm{dist}(u_n - u, \boldsymbol{N}) \to 0$. Άρα υπάρχει $\{z_n\}_{n\geq 1} \subseteq \boldsymbol{N}$ τέτοια ώστε $u_n - u - z_n \to 0$ και αφού $T(u_n - z_n) = Tu_n = \tilde{T}\tilde{u_n} \to v$, η $\{u_n - z_n\}_{n\geq 1}$ είναι T-συγκλίνουσα στο u. Από την κλειστότητα του T προκύπτει ότι $u \in \boldsymbol{D}(T)$ και $Tu = v$. Επομένως $\tilde{u} \in \boldsymbol{D}(\tilde{T})$ και $\tilde{T}\tilde{u} = Tu = v$. Άρα ο $\tilde{T}$ είναι κλειστός .

Επιπλέον ο $\tilde{T}$ είναι αντιστρέψιμος. Πιο συγκεκριμένα, $\tilde{T}\tilde{u} = 0 \implies Tu = 0$ άρα $u \in \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}(T)$ και $\tilde{u} = \boldsymbol{N}$ όμως ο $\boldsymbol{N}$ είναι το μηδενικό στοιχείο του $\tilde{\boldsymbol{X}}$.

Ορίζουμε τώρα τον αριθμό $\gamma(T)$ ως εξής : $\gamma(T) = 1/\|\tilde{T}^{-1}\|$ και θα έχουμε ότι $\gamma(T) = 0$ εάν $\tilde{T}^{-1}$ είναι μη φραγμένος, και $\gamma(T) = \infty$ αν $\tilde{T}^{-1} = 0$.Από την σχέση (5.3) προκύπτει ότι ο $\gamma(T)$ είναι ο μεγαλύτερος αριθμός τέτοιος ώστε :

$$\|Tu\| \geq \gamma\|\tilde{u}\| = \gamma\,\mathrm{dist}(u, N), \text{ για όλα τα } u \in \boldsymbol{D}(T) \tag{5.4}$$

Επιπλεόν σημειώνουμε ότι $\gamma(T) = \infty$ αν και μόνο εάν ο $\tilde{T}$ είναι ο τετριμένος τελεστής με $\boldsymbol{D}(\tilde{T}), \boldsymbol{R}(\tilde{T})$ μηδενικής διάστασης, και αυτή είναι η περίπτωση αν και μόνο αν $T \subset 0[Tu = 0, \ \forall\, u \in \boldsymbol{D}(T)]$. Για να κανουμε σωστή την (5.4) θα πρέπει $\infty \times 0 = 0$.

Καλούμε το $\gamma(T)$ *reduced minimum modulus* του T . Αν $\boldsymbol{N}(T) = 0$, το $\gamma(T)$ είναι ίσο με το *minimum modulus* του T το οποίο ορίζεται ως $\inf\limits_{0\neq u\in\boldsymbol{D}(T)} \frac{\|Tu\|}{\|u\|}$.

Παρατήρηση 5.1.1. *Ισχύει ότι* $\gamma(\tilde{T}) = \gamma(T)$.

Θεώρημα 5.1.2. *Ο τελεστής $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ έχει κλειστή εικόνα αν και μόνο αν $\gamma(T) > 0$*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του $\gamma(T) > 0$ αν και μόνο αν $\tilde{T}^{-1}$ φραγμένος, και αυτό ισχύει αν και μόνο εάν $\boldsymbol{D}(\tilde{T}^{-1}) = \boldsymbol{R}(\tilde{T}) = \boldsymbol{R}(T)$ κλειστή. (θεώρημα Κλειστού Γραφήματος) □

5.2 Το γενικό Θεώρημα Σταθερότητας

Τα μεγέθη που ορίστηκαν προηγουμένως μπορούν να εκφραστούν σε σχέση με τα γραφήματα των τελεστών. Τέτοιες εκφράσεις είναι σημαντικές στην θεωρία των διαταραχών, αφού μια μικρή αλλαγή ενός κλειστού τελεστή εκφράζεται στο γράφημά του.

Θεωρούμε τον χώρο γινόμενο $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$. Για ευκολία, ταυτίζουμε κάθε $u \in \boldsymbol{X}$ με το $\{u, 0\} \in \boldsymbol{Z}$ και κάθε $v \in \boldsymbol{Y}$ με $\{0, v\} \in \boldsymbol{Z}$. Τότε ο $\boldsymbol{X}$ είναι ταυτόσημος με το $\boldsymbol{X} \times 0 \subset \boldsymbol{Z}$ και όμοια ο $\boldsymbol{Y}$.Ο χώρος $\boldsymbol{Z}$ είναι ταυτόσημος τότε με το ευθύ άθροισμα $\boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$ και επιπλέον κάθε υποσύνολο του $\boldsymbol{X}$ ή του $\boldsymbol{Y}$ ταυτίζεται με ένα υποσύνολο του $\boldsymbol{Z}$.

Έστω $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$. Το γράφημα $\boldsymbol{G}(T)$ του T είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\boldsymbol{Z}$ και περέχει όλα τα στοιχεία της μορφής $\{u, Tu\}, u \in \boldsymbol{D}(T)$. Το $u \in \boldsymbol{X}$ ανήκει στον $\boldsymbol{N}(T)$ αν και μόνο αν $\{u, 0\} \in \boldsymbol{G}(T)$. Αυτό σημαίνει ότι :

$$\boldsymbol{N}(T) = \boldsymbol{G}(T) \cap X \tag{5.5}$$

Και ακόμα έχουμε:

$$\boldsymbol{R}(T) + X = \boldsymbol{G}(T) + X \tag{5.6}$$

Πιο συγκεκριμένα,το $\boldsymbol{R}(T) + \boldsymbol{X}$ είναι το σύνολο των στοιχείων $\{v, Tu\}$ με $u \in \boldsymbol{D}(T)$ και $v \in \boldsymbol{X}$, ενώ $\boldsymbol{G}(T) + \boldsymbol{X}$ είναι το σύνολο τως στοιχείων $\{u+v, Tu\}$ με $u \in \boldsymbol{D}(T)$ και $v \in \boldsymbol{X}$. Τα δύο σύνολο είναι ίδια και άρα από τις σχέσεις (5.5) και (5.6) και με βάση τις σχέσεις (4.1),(4.2) προκύπτουν:

$$\begin{aligned} \operatorname{nul} T &= \dim(\boldsymbol{G}(T) \cap X) = \operatorname{nul}(\boldsymbol{G}(T), X)\ , \\ \operatorname{def} T &= \operatorname{codim}(\boldsymbol{G}(T) + X) = \operatorname{def}(\boldsymbol{G}(T), X) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Επομένως $\operatorname{nul} T, \operatorname{def} T$ είναι ίσα με τις αντίστοιχες ποσότητες για το ζεύγος $\boldsymbol{G}(T)$, $\boldsymbol{X}$ των κλειστών υπόχωρων του $\boldsymbol{Z}$.

Ακόμα είναι εύκολο να δούμε ότι η $\boldsymbol{R}(T) \subset \boldsymbol{Y}$ κλειστή αν και μόνο εάν ο $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{R}(T)$ είναι κλειστός στον $\boldsymbol{Z}$. Σύμφωνα με την σχέση (5.6), η $\boldsymbol{R}(T)$ *είναι κλειστή στον $\boldsymbol{Y}$ αν και μόνο εάν ο $\boldsymbol{G}(T) + \boldsymbol{X}$ είναι κλειστός.*

Ο αριθμός $\gamma(T)$ του T είναι επίσης σχετικός με το ελάχιστο κενό $\gamma(\boldsymbol{G}(T), \boldsymbol{X})$ του ζεύγους $\boldsymbol{G}(T), \boldsymbol{X}$. Από την σχέση (5.4) το $\gamma(T) = \inf\limits_{u \in \boldsymbol{D}(T)} \|Tu\|/\|\tilde{u}\| =$

$\inf\limits_{(u,v)\in \boldsymbol{G}(T)} \|v\|/\|\tilde{u}\|$ όπου $\tilde{u} \in \tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}/\,\boldsymbol{N}(T)$. Τότε αν θεωρήσουμε $\boldsymbol{M}$ κλειστό υπόχωρο του $\boldsymbol{Z}(= \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y})$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{X}$ και υπολογίσουμε το $\gamma(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X})$ με $u = \{x, y\} \in \boldsymbol{M}$ έχουμε $\operatorname{dist}(u, \boldsymbol{X})^2 = \inf\limits_{x'\in X} (\|x - x'\|^2 + \|y\|^2) = \|y\|^2$, και $\operatorname{dist}(u, L)^2 = \inf\limits_{x'\in L} (\|x - x'\|^2 + \|y\|^2) = \|\tilde{x}\|^2 + \|y\|^2$ όπου $\tilde{x} \in \tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}/\boldsymbol{L}$ Άρα

$$\gamma(M, X) = \inf_{\{x,y\}\in M} \frac{\|y\|}{(\|\tilde{x}\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}} = \frac{\gamma}{(1 + \gamma^2)^{1/2}}$$

όπου

$$\gamma = \inf_{\{x,y\}\in M} \|y\|/\|\tilde{x}\|$$

Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με το παραπάνω και από την (5.5) οι δύο ποσότητες είναι ίσες με $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{G}(T)$ και επιπλεόν αν υπολογίσουμε το $\gamma(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{M})$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\gamma(X, M) &= \inf_{x\in X} \frac{\operatorname{dist}(x, M)}{\operatorname{dist}(x, L)} = \inf_{x\in X} \frac{\inf\limits_{\{x',y'\}\in M} (\|x - x'\|^2 + \|y'\|^2)^{1/2}}{\|\tilde{x}\|} \\ &= \inf_{\substack{\{x',y'\}\in M \\ x''\in X}} \frac{(\|x''\|^2 + \|y'\|^2)^{1/2}}{\|\tilde{x}' + \tilde{x}''\|} = \inf_{\substack{\{x',y'\}\in M \\ \tilde{x}''\in \tilde{X}}} \frac{(\|\tilde{x}''\|^2 + \|y'\|^2)^{1/2}}{\|\tilde{x}' + \tilde{x}''\|}\end{aligned}$$

Για δοσμένο $\{x', y'\} \in \boldsymbol{M}$, υπάρχει $\tilde{x}'' \in \tilde{\boldsymbol{X}}$ με $\|\tilde{x}' + \tilde{x}''\| = \|\tilde{x}'\| + \|\tilde{x}''\|$ και με αυθάιρετο $\|\tilde{x}''\|$ έχουμε :

$$\begin{aligned}\gamma(X, M) &= \inf_{\substack{\{x',y'\}\in M \\ \tilde{x}''\in \tilde{X}}} \frac{(\|\tilde{x}''\|^2 + \|y'\|^2)^{1/2}}{\|\tilde{x}'\| + \|\tilde{x}''\|} = \\ &= \inf_{\{x',y'\}\in M} \left(1 + \frac{\|\tilde{x}'\|^2}{\|y'\|^2}\right)^{-1/2} = \gamma/(1 + \gamma^2)^{1/2}\end{aligned}$$

όπου έγινε χρήση της ανισότητας Schwarz (παρατηρούμε ότι και $\gamma(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X}) = \gamma(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{M})$ και δεν θα είχε νόμα εάν $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{M}$ γιατί τότε $\gamma(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X}) = \gamma(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{M}) = 1$).

Κάνοντας τους παραπάνω υπολογισμούς καταλήγουμε στο ότι:

$$\gamma(\boldsymbol{G}(T), X) = \gamma(X, \boldsymbol{G}(T)) = \frac{\gamma(T)}{[1 + \gamma(T)^2]^{1/2}} \tag{5.8}$$

και βλέπουμε ότι όλες οι χρήσιμες ποσότητες που παρουσιάστηκαν για τον T εκφράζονται για το ζεύγος $\boldsymbol{G}(T), \boldsymbol{X}$ κλειστών υποχώρων του $\boldsymbol{Z}$. Ακόμα έχουμε:

$$\operatorname{nul}' T = \operatorname{nul}'(\boldsymbol{G}(T), X)\ , \quad \operatorname{def}' T = \operatorname{def}'(\boldsymbol{G}(T), X) \tag{5.9}$$

Παρατήρηση 5.2.1. *Κατά αντιστοιχία με την παρατήρηση (4.1.6), εάν* T_1 *είναι μια επέκταση του* T *τάξης* $m < \infty$ *έχουμε* $\operatorname{ind} T_1 = \operatorname{ind} T + m$.

Τα επόμενα αποτελέσματα είναι συνέπειες των όσων αποδείχθηκαν στις προηγούμενες ενότητες

Θεώρημα 5.2.2. *Η ποσόσητα* $\operatorname{nul}' T$ *είναι ο μεγαλύτερος αριθμός* $m \leq \infty$ *με την ακόλουθη ιδιότητα : Για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει ένας* m*-διάστατος κλειστός υπόχωρος* $N_\varepsilon \subset \boldsymbol{D}(T)$ *τέτοιος ώστε* $\|Tu\| \leq \varepsilon \|u\| \ \forall \ u \in N_\varepsilon$.

Θεώρημα 5.2.3. *Για κάθε* $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *έχουμε ότι* $\operatorname{nul}' T \geq \operatorname{nul} T$ *και επιπλέον* $\operatorname{def}' T \geq \operatorname{def} T$. *Οι ισότητες ισχύουν αν* $\boldsymbol{R}(T)$ *κλειστή. Αν η* $\boldsymbol{R}(T)$ *δεν είναι κλειστή,τότε* $\operatorname{nul}' T = \operatorname{def}' T = \infty$.

Θεώρημα 5.2.4. $\operatorname{nul}' T = \infty$ *αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία* $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq \boldsymbol{D}(T)$ *με* $\|u_n\| = 1$ *και* $Tu_n \to 0$, *η οποία δεν περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Παρατήρηση 5.2.5. $\operatorname{nul}'(\alpha T) = \operatorname{nul}' T$, $\operatorname{def}'(\alpha T) = \operatorname{def}' T$ *για* $\alpha \neq 0$

Υποθέτουμε τώρα ότι ο τελεστής T είναι πυκνά ορισμένος και επομένως ο συζυγής του, T^* υπάρχει και ανήκει στο $\mathscr{C}(\boldsymbol{Y}^*, \boldsymbol{X}^*)$. Για ευκολία θεωρούμε το αντίστροφο γράφημα $\boldsymbol{G}'(T^*)$ του T^* αντί για το $\boldsymbol{G}(T^*)$. Το $\boldsymbol{G}'(T^*)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\boldsymbol{X}^* \times \boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{Z}^*$ και περιέχει τα στοιχεία της μορφής $\{T^*g, g\}$ όπου $g \in \boldsymbol{D}(T^*) \subset \boldsymbol{Y}^*$. Από σχέση (1.24) προκύπτει η βασική σχέση:

$$\boldsymbol{G}'(-T^*) = \boldsymbol{G}(T)^{\perp} \tag{5.10}$$

Το $\boldsymbol{G}'(T^*)$ είναι η εικόνα του $\boldsymbol{G}(T^*)$ σύμφωνα με την απεικόνιση $\{g, f\} \to \{f, g\}$ του $\boldsymbol{Y}^* \times \boldsymbol{X}^*$ στον $\boldsymbol{X}^* \times \boldsymbol{Y}^*$. Σύμφωνα με τις (5.7)-(5.9) έχουμε :

$$\boldsymbol{N}(T^*) = \boldsymbol{N}(-T^*) = \boldsymbol{G}'(-T^*) \cap Y^* = \boldsymbol{G}(T)^{\perp} \cap X^{\perp} \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{R}(T^*) + Y^* = \boldsymbol{R}(-T^*) + Y^* = \boldsymbol{G}'(-T^*) + Y^* = \boldsymbol{G}(T)^{\perp} + X^{\perp} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{nul} T^* &= \dim(\boldsymbol{G}(T)^{\perp} \cap X^{\perp}) = \operatorname{nul}(\boldsymbol{G}(T)^{\perp}, X^{\perp}) \\ \operatorname{def} T^* &= \operatorname{codim}(\boldsymbol{G}(T)^{\perp} + X^{\perp}) = \operatorname{def}(\boldsymbol{G}(T)^{\perp}, X^{\perp}) \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\gamma(\boldsymbol{G}(T)^{\perp}, X^{\perp}) = \gamma(X^{\perp}, \boldsymbol{G}(T)^{\perp}) = \frac{\gamma(T^*)}{[1 + \gamma(T^*)^2]^{1/2}} \tag{5.14}$$

$$\operatorname{nul}' T^* = \operatorname{nul}'(\boldsymbol{G}(T)^{\perp}, X^{\perp}) \ , \quad \operatorname{def}' T^* = \operatorname{def}'(\boldsymbol{G}(T)^{\perp}, X^{\perp}) \tag{5.15}$$

Όπου $\boldsymbol{G}(T)^{\perp}$ και $\boldsymbol{X}^{\perp} = \boldsymbol{Y}^*$ θεωρούνται γραμμικοί υπόχωροι του $\boldsymbol{Z}^* = \boldsymbol{X}^* \times \boldsymbol{Y}^*$. Επιπλέον το θεώρημα (4.2.1) δίνει:

Θεώρημα 5.2.6. [1] *Υποθέτουμε ότι ο T^* υπάρχει. Η $\boldsymbol{R}(T)$ είναι κλειστή αν και μόνο αν η $\boldsymbol{R}(T^*)$ είναι κλειστή. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε*[2]*:*

$$\boldsymbol{R}(T)^{\perp} = \boldsymbol{N}(T^*) \ , \ \boldsymbol{N}(T)^{\perp} = \boldsymbol{R}(T^*) \tag{5.16}$$

$$\operatorname{nul} T^* = \operatorname{def} T \ , \ \operatorname{def} T^* = \operatorname{nul} T \tag{5.17}$$

$$\gamma(T^*) = \gamma(T) \tag{5.18}$$

Η (5.18) είναι αληθής ακόμα και όταν η $\boldsymbol{R}(T)$ δεν είναι κλειστή.

Πρόταση 5.2.7. *Υποθέτουμε ότι ο T^* υπάρχει. Ο τελεστής T είναι Fredholm[semi-Fredholm] αν και μόνο αν ο T^* είναι. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε:*

$$\operatorname{ind} T^* = -\operatorname{ind} T \tag{5.19}$$

Παρατήρηση 5.2.8. $\operatorname{nul}' T^* = \operatorname{def}' T \ , \ \operatorname{def}' T^* = \operatorname{nul}' T$.

Τελικά, τα θεώρημα σταθερότητας που αποδείχθηκαν για τους κλειστούς γραμμικούς υπόχωρους στα προηγούμενα δίνουν κατευθείαν τα θεωρήματα για τους τελεστές [θεωρήματα (4.4.1),(4.4.7) και πρόταση (4.4.2)]

Θεώρημα 5.2.9. *Έστω $T, S \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και έστω $\boldsymbol{R}(T)$ κλειστη (έτσι ώστε $\gamma(T) = \gamma > 0$). Τότε το $\delta(S,T) < \gamma(1+\gamma^2)^{-1/2} \implies \operatorname{nul}' S \leq \operatorname{nul} T$ και το $\delta(T,S) < \gamma(1+\gamma^2)^{-1/2} \implies \operatorname{def}' S \leq \operatorname{def} T$.*

Θεώρημα 5.2.10. *Έστω $T, S \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και έστω ο T να είναι Fredholm[semi-Fredholm]. Αν $\hat{\delta}(S,T) < \gamma(1+\gamma^2)^{-1/2}$ όπου $\gamma = \gamma(T)$ τότε ο S είναι Fredholm[semi-Fredholm] και $\operatorname{nul} S \leq \operatorname{nul} T, \operatorname{def} S \leq \operatorname{def} T$. Ακόμα υπάρχει $\delta > 0$*[3] *τέτοιο ώστε $\hat{\delta}(S,T) < \delta \implies \operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$*[4]

5.3 Άλλα θεωρήματα σταθερότητας

Το θεώρημα (5.2.10) καλείται και *γενικό θεώρημα σταθερότητας* αφού η μοναδική υπόθεση είναι η ποσότητα $\hat{\delta}(S,T)$ να είναι μικρή, και δεν υπάρχει υπόθεση για την σχέση μεταξυ των S, T. Αν λοιπόν προσθέσουμε μια τέτοια υπόθεση μπορούμε να εξάγουμε ένα πιο ισχυρό αποτέλεσμα.

---

[1] Το θεώρημα αφορά φραγμένους τελεστές σε χώρο Banach . Σύμφωνα με την (5.16) ένας πυκνά ορισμένος $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ με κλειστή εικόνα λέγεται και *κανονικά επιλύσιμος*

[2] Εδώ θεωρούμε τα $\boldsymbol{N}(T), \boldsymbol{R}(T), \boldsymbol{N}(T^*), \boldsymbol{R}(T^*)$ υποσύνολα των $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}^*, \boldsymbol{X}^*$ αντίστοιχα.

[3] Διαλέγουμε $\delta = \gamma(1+\gamma^2)^{-1/2}$ αν $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ είναι Hilbert χώροι. Γενικά είναι δύσκολο να δώσουμε μια απλή εκτίμηση για το δ

[4] Το θεώρημα σταθερότητας για τον δείκτη είναι πολύ σημαντικό. Ειδικότερα είναι μια από τις πιο ισχυρές μεθόδους στην απόδειξη ύπαρξης λύσεων στις διαφορικές εξισώσεις.

Θεώρημα 5.3.1. *Έστω ο $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ να είναι semi-Fredholm (έτσι ώστε $\gamma = \gamma(T) > 0$). Έστω A να είναι ένας T-φραγμένος τελεστής από το $\boldsymbol{X}$ στο $\boldsymbol{Y}$ έτσι να έχουμε την ανισότητα (2.1), όπου*

$$a < (1-b)\gamma \tag{5.20}$$

Τότε ο $S = T + A$ ανήκει στο $\mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, είναι semi-Fredholm και:

$$\operatorname{nul} S \leq \operatorname{nul} T \ , \ \operatorname{def} S \leq \operatorname{def} T \ , \ \operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T \tag{5.21}$$

Απόδειξη. Από την σχέση (5.20) έχουμε ότι $a/\gamma < (1-b) \implies b < 1 - a/\gamma \implies b < 1$ και επομένως ο $S \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ από το θεώρημα (2.1.1). Θα πρέπει να δείξουμε ότι το πρόβλημα μπορεί να περιοριστεί στην περίπτωση όπου οι T, A τελεστές είναι φραγμένοι. Ορίζουμε μια νεά νόρμα στον $\boldsymbol{D}(T)$ από την σχέση:

$$|||u||| = (a+\varepsilon)\|u\| + (b+\varepsilon)\|Tu\| \geq \varepsilon\|u\| \tag{5.22}$$

για κάποιο $\varepsilon > 0$, και με αυτή την νόρμα ο χώρος $\boldsymbol{D}(T)$ γίνεται Banach ,τον οποίο και συμβολιίζουμε με $\hat{X}$, όπως έχουμε επισημάνει και στην παρατήρηση (2.1.4). Μπορούμε να θεωρήσουμε T, A τελεστές (ή $\hat{A} = A|_{\boldsymbol{D}(T)}$), από τον $\hat{X}$ στον Y και επομένως έχουμε τους $\hat{T}, \hat{A}$ αντίστοιχα (ο T κλειστός και ο A μπορεί να επεκταθεί σε κλειστό με $\boldsymbol{D}(T) \subset \boldsymbol{D}(A) \implies$ ο A είναι T-φραγμένος). Επομένως $\hat{T}, \hat{A} \in \mathscr{B}(\hat{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{Y})$ και :

$$\|\hat{T}\| \leq (b+\varepsilon)^{-1}, \quad \|\hat{A}\| \leq 1 \tag{5.23}$$

που προκύπτει από την σχέσεις (2.1) και (5.22).

Αφού $\boldsymbol{R}(\hat{T}) = \boldsymbol{R}(T)$, ο T έχει κλειστή εικόνα και ακόμα έχουμε τις προφανείς σχέσεις :

$$\begin{gathered} \operatorname{nul} \hat{T} = \operatorname{nul} T \ , \ \operatorname{def} \hat{T} = \operatorname{def} T \ , \ \operatorname{nul} \hat{S} = \operatorname{nul} S \\ \operatorname{def} \hat{S} = \operatorname{def} S \ , \ \boldsymbol{R}(\hat{S}) = \boldsymbol{R}(S) \text{ με } \ \hat{S} = \hat{T} + \hat{A} \end{gathered} \tag{5.24}$$

Επομένως ο $\hat{T}$ είναι semi-Fredholm και αρκεί να δείξουμε ότι ο $\hat{S}$ είναι semi-Fredholm και η (5.21) ισχύει για S, T να έχουν αντικατασταθεί από τους $\hat{S}$ και $\hat{T}$.

Επιπλεόν εκφράζουμε την ποσότητα $\gamma(\hat{T})$ σύμφωνα με την $\gamma = \gamma(T)$. Από τον ορισμό της $\gamma(\hat{T}) = \inf \|\hat{T}u\|/|||\tilde{u}||| = \inf \|Tu\|/|||\tilde{u}|||$, όπου $\tilde{u} \in \hat{X}/N, N = \boldsymbol{N}(\hat{T}) = \boldsymbol{N}(T)$ (ο N είναι κλειστός και στον X και στον $\hat{X}$). Αλλά:

$$\begin{aligned} |||\tilde{u}||| = \inf_{z \in N} |||u - z||| = \inf_{z \in N} [(a+\varepsilon)\|u-z\| + (b+\varepsilon)\|T(u-z)\|] = \\ = (a+\varepsilon)\|\tilde{u}\| + (b+\varepsilon)\|Tu\| \end{aligned} \tag{5.25}$$

από το ότι $Tz = 0$ και επομένως:

$$\gamma(\hat{T}) = \inf_{u \in \boldsymbol{D}(T)} \frac{\|Tu\|}{(a+\varepsilon)\|\tilde{u}\| + (b+\varepsilon)\|Tu\|} = \frac{\gamma}{(a+\varepsilon)+(b+\varepsilon)\gamma} \tag{5.26}$$

από τον ορισμό του $\gamma = \inf \|Tu\|/\|\tilde{u}\|$. Από τις σχέσεις (5.20) και (5.26) , μπορούμε να φτιάξουμε το $\gamma(\hat{T}) > 1$ διαλέγοντας ένα ε αρκούντως μικρό. Επιπλεόν, αφού $\|\hat{A}\| \leq 1$ από την σχέση (5.23), έχουμε $\|\hat{A}\| < \gamma(\hat{T})$. Ξαναγράφοντας τα $\hat{T}, \hat{A}, \hat{S}$ ως T, A, S αντίστοιχα, βλέπουμε ότι απομένει να αποδείξουμε το θεώρημα στην ειδική περίπτωση όπου $T, A, S \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και $\|A\| < \gamma(T) = \gamma$.

Τότε από το γενικό θεώρημα σταθερότητας (5.2.10) με $a > 0$ αρκούντως μικρό έτσι ώστε $\|A\| < \gamma/(1+a^2\gamma^2)^{1/2}$ έπεται ότι $\|aA\| = a\|A\| < \gamma(aT)(1+\gamma(aT)^2)^{1/2}$ αφόυ $a\gamma(T) = \gamma(aT)$, και με $\hat{\delta}(aS, aT) < a\|A\|$ από την σχέση (3.27), βλέπουμε ότι οι υποθέσεις του γενικού θεωρήματος σταθερότητας ικανοποιούνται από το ζεύγος S, T αν το αντικαταστήσουμε με aS, aT , και επομένως ο S είναι semi-Fredholm και $\operatorname{nul} S = \operatorname{nul} aS \leq \operatorname{nul} aT = \operatorname{nul} T$ και όμοια για την ποσότητα $\operatorname{def} S$.

Μένει να δείξουμε ότι $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$. Από το γενικό θεώρημα σταθερότητας αυτό συμβαίνει όταν τουλάχιστον η $\|A\|$ είναι αρκετά μικρή. Συνδέουμε τους S, T ως εξής: $T(\kappa) = T + \kappa A$, $0 \leq \kappa \leq 1$ και με $\|\kappa A\| \leq \|A\| < \gamma$ ο $T(\kappa)$ είναι semi-Fredholm για κάθε κ. Τότε το θεώρημα δίνει ότι ο $\operatorname{ind} T(\kappa)$ είναι συνεχής στο $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,άρα θα πρέπει να είναι σταθερός για $0 \leq \kappa \leq 1$ άρα $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$. □

Το θεώρημα (5.3.1) [ή το γενικό θεώρημα σταθερότητα (5.2.10)] καλείται και *πρώτο θεώρημα σταθερότητας*. Το *δεύτερο θεώρημα σταθερότητας* λογίζεται με μια διαταραχή η οποία δεν χρειάζεται να είναι περιορισμένη όπως στην σχέση (5.20) αλλά η διαταραχή αυτή υποθέτουμε ότι είναι σχετικά συμπαγής.

Θεώρημα 5.3.2. *Έστω $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ να είναι semi-Fredholm. Αν ο A είναι T-συμπαγής τελεστής από τον χώρο $\boldsymbol{X}$ στον $\boldsymbol{Y}$, τότε ο $S = T + A \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ είναι επίσης semi-Fredholm με $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα (2.2.1) $S \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και το θεώρημα μπορεί να περιοριστεί στην ειδική περίπτωση όπου $T, A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και ο A είναι συμπαγής. Αρκεί λοιπόν να εισάγουμε τον χώρο $\hat{X}$ και τους τελεστές $\hat{T}, \hat{A}, \hat{S}$ όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος (5.3.1), όμως εδώ θα θεωρήσουμε $a = b = 1, \varepsilon > 0$ στην σχέση (5.22). Τότε η T-συμπάγεια του τελεστή A δίνει ότι ο $\hat{A}$ είναι συμπαγής .

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $T, A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, ο A είναι συμπαγής, $\operatorname{nul} T < \infty$ και θα δείξουμε ότι $\operatorname{nul}' S < \infty$. Τότε από το θεώρημα (5.2.3) ο S θα είναι semi-Fredholm, και θα εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα του θεωρήματος (5.2.4). Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$ τέτοια ώστε $\|u_n\| = 1$ και $Su_n \to 0$. Θα δείξουμε ότι η $\{u_n\}_{n\geq 1}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Ο τελεστής A είναι συμπαγής επομένως υπάρχει υπακολουθία $\{v_n\}_{n\geq 1} \subseteq \{u_n\}_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε $Av_n \to w \in Y$. Τότε $Tv_n = (S-A)v_n \to -w$. Η $\boldsymbol{R}(T)$ είναι κλειστή άρα το $-w \in \boldsymbol{R}(T)$. Επομένως υπάρχει ένα $u \in X$ τέτοιο ώστε $-w = Tu$, και $T(v_n - u) \to 0$. Η $\operatorname{nul}' T < \infty$ και άρα από το θεώρημα (5.2.4) η $\{v_n - u\}_{n\geq 1}$ περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα το ίδιο θα ισχύει και για την $\{u_n\}_{n\geq 1}$.

Υποθέτουμε ακόμα, ότι $\operatorname{def} T < \infty$. Τότε $\operatorname{nul} T^* < \infty$ και αφού ο T^* είναι semi-Fredholm και ο A^* είναι συμπαγής, το οποίο σημαίνει ότι ο $S^* = T^* + A^*$ είναι semi-Fredholm. Το ίδιο θα ισχύει και για τον S.

Αν τώρα ο S είναι semi-Fredholm, εύκολα δείχνουμε ότι $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$. Πάλι, $T(\kappa) = T + \kappa A,\ 0 \leq \kappa \leq 1$. Αφού ο κA είναι συμπαγής τότε $A, T(\kappa)$ είναι semi-Fredholm για κάθε κ. Επομένως ο $\operatorname{ind} T(\kappa)$ είναι συνεχής από το πρώτο θεώρημα σταθερότητας, θα πρέπει να είναι σταθερά και άρα $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} S$. □

Σύμφωνα με το θεώρημα (5.2.10) οι ποσότητες $\operatorname{nul} T, \operatorname{def} T$ ενός semi-Fredholm τελεστή T δεν αυξάνονται όταν υπόκεινται σε μικρές διαταραχές. Γενικά, δεν είναι εύκολο να δούμε αν αυτές οι ποσότητες διατηρούνται. Αλλά παίρνουμε ένα πιο ισχυρό αποτέλεσμα όταν αυτές οι διαταραχές είναι περιορισμένες να έχουν την μορφή κA, με συγκεκριμένο A.

Λήμμα 5.3.3. *Έστω $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ με κλειστή εικόνα και $\operatorname{nul} T < \infty$. Τότε ο TM είναι κλειστός για κάθε κλειστό γραμμικό υπόχωρο M του $\boldsymbol{X}$*

Απόδειξη. Ορίζουμε $\tilde{X} = X/N, N = \boldsymbol{N}(T)$ και $\tilde{T}$ όπως στην σχέση (5.3). Τότε $TM = \tilde{T}\tilde{M}$ όπου $\tilde{M}$ είναι το σύνολο όλων των $\tilde{u} \in \tilde{X}$ τέτοιο ώστε το σύμπλεγμα $\tilde{u}$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του M. Τότε από το θεώρημα (5.1.2) ο $\tilde{T}$ έχει φραγμένο αντίστροφο και αρκεί να δείξουμε ότι $\tilde{M}$ κλειστός στον $\tilde{X}$.

Υποθέτουμε ότι $\{\tilde{u}_n\}_{n\geq 1} \subseteq \tilde{M}$, $\tilde{u}_n \to \tilde{u} \in \tilde{X} \implies \operatorname{dist}(u_n - u, N) \to 0$ και τότε υπάρχει $\{z_n\}_{n\geq 1} \subseteq N$ με $u_n - u - z_n \to 0$. Τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u_n \in M$ και $M + N$ κλειστός αφού $\dim N < \infty$ (υποσημείωση σελίδα 44), τότε $u \in M + N$ ή $\tilde{u} \in \tilde{M}$ και αυτό αποδεικνύει ότι ο $\tilde{M}$ είναι κλειστός . □

Θεώρημα 5.3.4. *Έστω $T \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ να είναι semi-Fredholm και έστω A να είναι ένας T-φραγμένος τελεστής από τον χώρος $\boldsymbol{X}$ στον $\boldsymbol{Y}$. Τότε ο $T + \kappa A$ είναι semi-Fredholm και $\operatorname{nul}(T+\kappa A), \operatorname{def}(T+\kappa A)$ είναι σταθερές για αρκετά μικρό $|\kappa| > 0$.*

Απόδειξη. Αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου οι $T, A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Η γενική περίπτωση μπορεί να περιοριστεί σε αυτήν όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος (5.3.1)

Πρώτα υποθέτουμε ότι $\operatorname{nul} T < \infty$. Ορίζουμε τις ακολουθίες $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ και $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ ως εξής[5]:

$$M_0 = X,\ R_0 = Y,\ M_n = A^{-1}R_n,\ R_{n+1} = TM_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.27}$$

[5]Όταν $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}$ και $A = 1,\ M_n = R_n$ είναι ίσο με $\boldsymbol{R}(T^n)$

Έχουμε:

$$M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \ , \ R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots, \tag{5.28}$$

από την υπόθεση.Όλα τα M_n, R_n είναι κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι. Αυτό είναι εύκολο να δειθχεί επαγωγικά : αν R_n είναι κλειστος, ο M_n είναι κλειστός ως η αντίστροφη εικόνα της απεικόνησης A του κλειστού συνόλου R_n και τότε $R_{n+1} = TM_n$ είναι κλειστό από το λήμμα (5.3.3).

Έστω $X' = \bigcap_n M_n$ και $Y' = \bigcap_n R_n$ και X', Y' κλειστοί. Έστω T' να είναι ο περιορισμός του T με πεδίο ορισμού τον X'. Αν $u' \in X'$, τότε $u' \in M_n$ και $T'u' = Tu' \in TM_n = R_{n+1} \ \forall \ n$, οπότε $\boldsymbol{R}(T') \subset Y'$. Θα δείξουμε ότι $\boldsymbol{R}(T') = Y'$.

Έστω $v' \in Y'$. Αφού $v' \in R_{n+1} = TM_n$ για κάθε ν, η αντίστροφη εικόνα $T^{-1}\{v'\}$ έχει ένα κοινό στοιχείο με τον M_n. Όμως $T^{-1}\{v'\}$ είναι υπόχωρος της μορφής $u + \boldsymbol{N}(T)$ και εφόσον $\dim \boldsymbol{N}(T) = \operatorname{nul} T < \infty$, $T^{-1}\{v'\} \cap M_n$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία πεπερασμένων υπόχωρων διάφορη του κενού. Άρα για αρκετά μεγάλα $n, T^{-1}\{v'\} \cap X' \neq 0$. Έστω u' να είναι ένα στοιχείο αυτής της τομής, δηλαδή $u' \in X'$ και $T'u' = Tu' = v'$. Αυτό δείχνει ότι $\boldsymbol{R}(T') = Y'$.

Ο τελεστής T' μπορεί να θεωρηθεί φραγμένος, $T' \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}')$. Εάν A' είναι ο περιορισμός του A με πεδίο ορισμού τον X' και αφού $u' \in X' \implies u' \in M_n = A^{-1}R_n \ \forall \ n, Au' \in R_n$ και επομένως $Au' \in Y'$.Έτσι, και ο A' μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι φραγμένος και $A' \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}')$. Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα (5.2.10) στο ζεύγος $T', \kappa A'$ έχουμε $\operatorname{def}(T' + \kappa A') = \operatorname{def} T' = 0$, $\operatorname{nul}(T' + \kappa A') = \operatorname{ind}(T' + \kappa A') = \operatorname{ind} T' = \operatorname{nul} T'$ για αρκετά μικρά $|\kappa|$ και $\operatorname{def} T' = 0$. Άρα $\operatorname{nul}(T' + \kappa A'), \operatorname{def}(T' + \kappa A')$ είναι σταθερές για αρκετά μικρά $|\kappa|$.

Από την άλλη

$$\boldsymbol{N}(T + \kappa A) = \boldsymbol{N}(T' + \kappa A'), \text{ για } \kappa \neq 0 \tag{5.29}$$

Συγκεκριμένα, έστω $u \in \boldsymbol{N}(T + \kappa A)$, Τότε $Tu = -\kappa Au$, και επαγωγικά έχουμε $u \in M_n \ \forall n$ και επομένως $u \in X'$.

Η (5.29) δίνει ότι $\operatorname{nul}(T + \kappa A) = \operatorname{nul}(T' + \kappa A')$ είναι σταθερά για μικρά $|\kappa| > 0$, και αφού $\operatorname{ind}(T + \kappa A))$ σταθερός τότε $\operatorname{def}(T + \kappa A)$ είναι επίσης σταθερό.

Η περίπτωση όπου $\operatorname{def} T < \infty$ μπορεί να περιοριστεί στην προηγούμενη περίπτωση εάν θεωρήσουμε τους συζυγής T^*, A^* και να κάνουμε χρήση του θεωρήματος (5.2.6)

□

Κεφάλαιο 6

Φραγμένοι Fredholm τελεστές

6.1 Ορισμοί

Αν ο $\boldsymbol{X}$ είναι χώρος Banach και $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$[1] τότε ο $A = I - K$ έχει κλειστή εικόνα και $\boldsymbol{N}(A), \boldsymbol{N}(A^*)$ είναι πεπερασμένα. Τελεστές που έχουν αυτές τις ιδιότητες χρησιμοποιούνται συχνά σε εφαρμογές. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις ιδιότητές τους.

Στο κεφάλαιο 5 ορίσαμε για τους τελεστές στο $\mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ ορίσαμε τις ποσότητες που δίνουν την διάσταση του πυρήνα του τελεστή, την διάσταση της εικόνας του τελεστή καθώς και τον δείκτη του τελεστή ως τη διαφορά των δύο προηγούμενων. Στην περίπτωση των φραγμένων τελεστών για λόγους ευκολίας, αλλάζουμε ελαφρώς τους ορισμούς.

Έστω $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ Banach χώροι. Ένας τελεστής $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ καλείται Fredholm από τον $\boldsymbol{X}$ στον $\boldsymbol{Y}$ εάν:

(i). Η $\dim N(A) = \operatorname{nul} A = a(A)$ είναι πεπερασμένη.

(ii). Η $\boldsymbol{R}(A)$ είναι κλειστή στον Y

(iii). Η $\operatorname{codim} \boldsymbol{R}(A) = \operatorname{def} A = \beta(A) = \dim \boldsymbol{N}(A^*)$ είναι πεπερασμένη

Συμβολίζουμε τους Fredholm τελεστές από το $\boldsymbol{X}$ στο $\boldsymbol{Y}$ με $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Αν $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$ και $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ τότε ο $I - K$ είναι Fredholm τελεστής . Ο δείκτης του Fredholm τελεστή συμβολίζεται όπως και πριν με

$$\operatorname{ind}(A) = a(A) - \beta(A) \tag{6.1}$$

Για $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ τότε $\operatorname{ind}(I - K) = 0$ αφού κατά τα γνωστά $\dim (I - K) = \dim (I - K)^* < \infty$.

[1] Με $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ συμβολίζουμε το σύνολο των συμπαγών τελεστών στον χώρο $\boldsymbol{X}$

Για ευκολία θεωρούμε τους χώρους $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ να είναι Banach. Αν τώρα $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ με $\boldsymbol{N}(A) = \{0\}$ και $\boldsymbol{R}(A) = \boldsymbol{Y}$ τότε ο $A^{-1} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$. Αν ο $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ όμως δεν είναι της μορφής $A = I - K$ και άρα $a(A) \neq \beta(A)$ θέλουμε να εξετάσουμε εάν ορίζεται ο A^{-1}. Αν $a(A) \neq 0$ τότε ο A δεν μπορεί να έχει αντίστροφο. Όμως υπάρχει ένα υποσύνολο $\boldsymbol{X_0}$ του $\boldsymbol{X}$ τέτοιο ώστε ο περιορισμός $A|_{X_0}$ να έχει αντίστροφο (δηλαδή εκεί να είναι ένα προς ένα).

Από το λήμμα (1.3.4) υπάρχει $\boldsymbol{X_0}$ κλειστός υπόχωρος τέτοιος ώστε

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X_0} \oplus \boldsymbol{N}(A) \tag{6.2}$$

Ο A επομένως είναι ένα προς ένα στον $\boldsymbol{X_0}$ και έστω $\hat{A} = A|_{X_0}$. Τότε $\hat{A} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X_0}, \boldsymbol{R(A)})$ και $\boldsymbol{R}(\hat{A}) = \boldsymbol{R}(A)$ αφού, αν $x_0 \in \boldsymbol{X_0}$, $x \in \boldsymbol{X}$, $x_1 \in \boldsymbol{N}(A)$ τότε $Ax = Ax_0 + Ax_1 \implies Ax = Ax_0$ και άρα υπάρχει ο $\hat{A}^{-1} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{R(A)}, \boldsymbol{X_0})$ και η $\boldsymbol{R}(A)$ είναι κλειστή (και χώρος Banach). Αναζητούμε λοιπόν, A_0 με $A_0 = \hat{A}^{-1}$ στην $\boldsymbol{R}(A)$.

Λήμμα 6.1.1. *Έστω $\boldsymbol{X_1}$ κλειστός υπόχωρος του χώρου $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|)$ και έστω $\boldsymbol{M}$ να είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος τέτοιος ώστε $\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{X_1} = \{0\}$.Τότε ο $\boldsymbol{X_2} = \boldsymbol{X_1} \oplus \boldsymbol{M}$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\boldsymbol{X}$ και ακόμα, ο τελεστής P ορίζεται από την σχέση:*

$$Px = \begin{cases} x, & x \in M \\ 0, & x \in X_1 \end{cases} \tag{6.3}$$

και ανήκει στο $\mathscr{B}(\boldsymbol{X_2})$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι :

$$\|Px\| \leq C\|x\| \ , \quad x \in X_2 \tag{6.4}$$

Έστω ότι η (6.4) δεν ισχύει, τότε υπάρχει $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X_2$ τέτοια ώστε $\|Px_n\| = 1$, καθώς $x_n \to 0$ στον X. Εφόσον ο M είναι πεπερασμένος, η $\{Px_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στον M (αφού ο M είναι κλειστός). Υποθέτουμε για ευκολία ότι συγκλίνει όλη η ακολουθία, δηλαδή $Px_n \to z$, $z \in M$ και τότε έχουμε $(I - P)x_n \to -z \in X_1$. Εφόσον M, X_1 κλειστοί έχουμε $z \in M \cap X_1$ και επομένως από την υπόθεση $z = 0$. Όμως $\|z\| = \lim \|Px_n\| = 1$, άτοπο.

Για να αποδείξουμε ότι ο X_2 είναι κλειστός, έστω μια ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X_2$ με $x_n \to x \in X$. Από την σχέση (6.4) η $\{Px_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ακολουθία στον M και συγκλίνει σε ένα $z \in M$. Επομένως η $\{(I-P)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε ένα $w \in X_1$. Άρα η $x_n = Px_n + (I - P)x_n$ συγκλίνει στο $z + w \in X_2$. Αυτό δείχνει ότι $x \in X_2$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Λήμμα 6.1.2. *Έστω $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|)$ και R κλειστός υπόχωρός του, τέτοιος ώστε ο $\boldsymbol{R}^{\perp}$ είναι πεπερασμένης διάστασης n. Τότε υπάρχει ένας n-διάστατος υπόχωρος $\boldsymbol{M}$ του $\boldsymbol{X}$ τέτοιος ώστε:*

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{M} \tag{6.5}$$

Απόδειξη. Έστω $f_1, \ldots, f_n$ να είναι μια βάση του $R^{\perp}$. Από το λήμμα (1.3.5) θα έχουμε $R = {}^{\perp}(R^{\perp})$. Επομένως $x \in R$ αν και μόνο αν $f_j(x) = 0$ για κάθε j. Από το λήμμα (1.3.2) υπάρχουν στοιχεία $x_1, \ldots, x_n$ του X τέτοια ώστε

$$f_j(x_k) = \delta_{jk}\ ,\ 1 \leq j, k \leq n$$

Τα x_k είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, αν

$$\sum_{1}^{n} a_k x_k = 0$$

τότε για κάθε j έχουμε

$$f_j(\sum_{1}^{n} a_k x_k) = a_j = 0$$

Έστω M να είναι n-διάστατος υπόχωρος του X που παράγεται από τα x_k. Τότε $R \cap M = \{0\}$, γιατί αν $x \in M$ τότε το x είναι της μορφής

$$x = \sum_{1}^{n} a_k x_k$$

και επομένως $f_j(x) = a_j$ για κάθε j. Αν το x ανήκει και στον R τότε θα πρέπει $a_j = 0$ για κάθε j. Έστω τώρα το x να είναι ένα στοιχείο του X. Θέτουμε

$$w = \sum_{1}^{n} f_k(x) x_k$$

Τότε $w \in M$ και $f_j(x - w) = 0$ για κάθε j. Επομένως, $x - w \in R$ που μας ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Τώρα μπορούμε να θεωρήσουμε $\boldsymbol{Y_o} \subset \boldsymbol{Y}$ πεπερασμένο και να γράψουμε τον $\boldsymbol{Y}$ στην μορφή:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{R}(A) \oplus \boldsymbol{Y_o} \tag{6.6}$$

και εφαρμόζοντας το λήμμα (6.1.1) βλέπουμε ότι υπάρχει τελεστής $P \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y})$ τέτοιος ώστε

$$Py = \begin{cases} y, & y \in Y_0 \\ 0, & y \in \boldsymbol{R}(A) \end{cases}$$

Τότε ο $I-P$ ανήκει στο $\mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}))$. Ακόμα $A_0 = \hat{A}^{-1}(I-P)$ οπότε οδηγούμαστε στο ζητούμενο, $A_0 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$. Συνοψίζουμε την παραπάνω συλλογιστική πορεία στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 6.1.3. *Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ υπάρχει κλειστός υπόχωρος $\boldsymbol{X_o}$ του $\boldsymbol{X}$ ώστε να ισχύει η σχέση (6.2) και $\boldsymbol{Y_o}$ υπόχωρος του $\boldsymbol{Y}$ με διάσταση $\beta(A)$, ώστε να ισχύει η σχέση (6.6). Ακόμα υπάρχει τελεστής $A_0 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ τέτοιος ώστε:*

(i). $\boldsymbol{N}(A_0) = \boldsymbol{Y_o}$

(ii). $\boldsymbol{R}(A_0) = \boldsymbol{X_o}$

(iii). $A_0 A = I$ *στον* $\boldsymbol{X_o}$

(iv). $AA_0 = I$ *στον* $\boldsymbol{R}(A)$

(v). $A_0 A = I - F_1$ *στον* $\boldsymbol{X}$

(vi). $AA_0 = I - F_2$ *στον* $\boldsymbol{Y}$

όπου $F_1 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ με $\boldsymbol{R}(F_1) = \boldsymbol{N}(A)$ και $F_2 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y})$ με $\boldsymbol{R}(F_2) = Y_0$. Συνεπώς οι τελεστές F_1 και F_2 έχουν πεπερασμένη διάσταση.

Για το παραπάνω (v) του παραπάνω θεωρήματος ο $F_1 = I - A_0 A$ είναι ίσος με I στον $\boldsymbol{N}(A)$ και 0 στον $\boldsymbol{X_o}$. Επομένως από το λήμμα (6.1.1) ανήκει στο $\mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ και το ίδιο ισχύει και για το (vi) .

6.2 Τελεστές με πεπερασμένες αλυσίδες

Θεωρούμε έναν τελεστή A στον χώρο $\boldsymbol{X}$. Οι πυρήνες των A^n του ενδομορφισμού A σχηματίζουν μια αύξουσα ακολουθία $\boldsymbol{N}(A^0) = \{0\} \subset \boldsymbol{N}(A) \subset \boldsymbol{N}(A^2) \subset \ldots$ την οποία καλούμε *αλυσίδα πυρήνα*. Αν για κάποιο $n \geq 0$ έχουμε $\boldsymbol{N}(A^n) = \boldsymbol{N}(A^{n+1})$, τότε θα έχουμε και $\boldsymbol{N}(A^{n+1}) = \boldsymbol{N}(A^{n+2})$ και συνεπώς $\boldsymbol{N}(A^n) = \boldsymbol{N}(A^{n+m})$ για $m = 1, 2, \ldots$, γιατί πράγματι αν $x \in \boldsymbol{N}(A^{n+2})$ τότε $A^{n+1}Ax = 0 \implies Ax \in \boldsymbol{N}(A^{n+1}) = \boldsymbol{N}(A^n)$ και ως εκ τούτου $A^{n+1}x = 0, x \in \boldsymbol{N}(A^{n+1})$. Ο μικρότερος αριθμός $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο συμβαίνει αυτό, καλείται *μήκος της αλυσίδας του πυρήνα* του A και θα συμβολίζεται με $p(A)$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός,δηλαδή, $\boldsymbol{N}(A^n) \neq \boldsymbol{N}(A^{n+1})$ $\forall$ n, τότε θέτουμε $p(A) = \infty$. Η *αλυσίδα της εικόνας* του A είναι μια φθίνουσα ακολουθία από εικόνες $\boldsymbol{R}(A^0) = X \supset \boldsymbol{R}(A) \supset \boldsymbol{R}(A^2) \supset \ldots$. Αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\boldsymbol{R}(A^n) = \boldsymbol{R}(A^{n+1})$, τότε $\boldsymbol{R}(A^n) = \boldsymbol{R}(A^{n+m})$, $m = 1, 2, \ldots$ και ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο συμβαίνει αυτό λέγεται *μήκος της αλυσίδας της εικόνας* του A και συμβολίζεται με $q(A)$. Αν είναι $\boldsymbol{R}(A^n) \neq \boldsymbol{R}(A^{n+1})$ $\forall$ n, τότε θέτουμε $q(A) = \infty$.

Εάν $p(A) = 0$ τότε ο A είναι *ένα προς ένα* και αν $q(A) = 0$ τότε ο A είναι *επί*. Για ενδομορφισμούς $A = I - K$ με πεπερασμένης διάστασης τελεστή K τα μήκη των αλυσίδων είναι και τα δύο πεπερασμένα. Πράγματι,

$$A^n = (I - K)^n = I - \left[nK - \binom{n}{2}K^2 + \ldots + (-1)^{n-1}K^n\right] = I - K_n,\ n \geq 1$$

με $\boldsymbol{N}(A^n) = \boldsymbol{N}(I - K_n) \subset \boldsymbol{R}(K_n) \subset \boldsymbol{R}(K)$, επομένως η αλυσίδα του πυρήνα του A θα τερματιστεί. Αφού λοιπόν, ο K_n είναι πεπερασμένης διάστασης θα έχουμε ότι $a(I - K_n) = \beta(I - K_n) \implies \beta(A^n) = \beta(I - K_n)$, σταθερό και ακριβώς όμοια $a(A^n) = a(I - K_n)$. Άρα έχουμε $q(A) = p(A) < \infty$.

Οι παρακάτω προτάσεις δίνουν συνθήκες για τον τερματισμό των αλυσίδων του πυρήνα και της εικόνας ενός ενδομορφισμού A στον $\boldsymbol{X}$.

Πρόταση 6.2.1. *Έχουμε $p(A) \leq m < \infty$ αν και μόνο αν $\boldsymbol{N}(A^n) \cap \boldsymbol{R}(A^m) = \{0\}$ όπου ο n είναι αυθαίρετος φυσικός αριθμός.*

Απόδειξη. Πραγματι, αν $p(A) \leq m < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ και έστω $y \in \boldsymbol{N}(A) \cap \boldsymbol{R}(A^m)$. Τότε $y = A^m x$ και $A^n y = 0 \implies A^{m+n}x = 0 \implies x \in \boldsymbol{N}(A^{m+n}) = \boldsymbol{N}(A^m) \implies y = A^m x = 0$. Αντίστροφα τώρα έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\boldsymbol{N}(A^n) \cap \boldsymbol{R}(A^m) = \{0\}$. Επειδή, $\boldsymbol{N}(A) \subset \boldsymbol{N}(A^n) \implies \boldsymbol{N}(A) \cap \boldsymbol{R}(A^m) = \{0\}$. Αν $x \in \boldsymbol{N}(A^{m+1}) \implies A^m Ax = 0 \implies A^m x \in \boldsymbol{N}(A) \cap \boldsymbol{R}(A^m) = \{0\}$. Επομένως, $x \in \boldsymbol{N}(A^m)$ άρα $\boldsymbol{N}(A^m) - \boldsymbol{N}(A^{m+1})$ και έτσι $p(A) \leq m$. □

Πρόταση 6.2.2. *Έχουμε $q(A) \leq m < \infty$ αν και μόνο εάν στην $\boldsymbol{R}(A^n)$ υπάρχει ένας συμπληρωματικός υπόχωρος C_n στον $\boldsymbol{X}$, ο οποίος περιέχει τον $\boldsymbol{N}(A^m)$ ($n \in \mathbb{N}$ αυθέρετος).*

Απόδειξη. Για ευκολία $q = q(A) \leq m < \infty$ και έστω $n \in \mathbb{N}$ και C κάποιος συμπληρωματικός υπόχωρος στον $\boldsymbol{R}(A^n)$:

$$X = C \oplus \boldsymbol{R}(A^n) \tag{6.7}$$

Για κάθε στοιχείο x_i της βάσης $\{x_i : i \in I\}$ του C υπάρχει ένα $y_i \in X$ τέτοιο $A^q x_i = A^{q+n}y_i$ (γιατί $A^q(C) \subset \boldsymbol{R}(A^q) = \boldsymbol{R}(A^{q+n})$). Αν θέσουμε $z_i = x_i - A^n y_i$ τότε $A^q z_i = A^q x_i - A^{q+n}y_i = 0$. Η γραμμική θήκη C_n των z_i είναι υποσύνολο του $\boldsymbol{N}(A^q)$ και επομένως του $\boldsymbol{N}(A^m)$. Από την (6.7) έχουμε για κάθε $x \in X$:

$$x = \sum a_i x_i + A^n y = \sum a_i(z_i + A^n y_i) + A^n y = \sum a_i z_i + A^n z$$

και έτσι $X = C_n + \boldsymbol{R}(A^n)$. Το άθροισμα μάλιστα είναι και ευθύ. Πράγματι, για $x \in C_n \cap \boldsymbol{R}(A^n)$ έχουμε $x = \sum \beta_i z_i = A^n v$ άρα:

$$\sum \beta_i x_i = \sum \beta_i A^n y + A^n v \in \boldsymbol{R}(A^n)$$

και λόγω της (6.7) $\beta_i = 0 \ \forall\ i \in I$ επομένως $x = 0$. Άρα λοιπόν, ο C_n είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του $\boldsymbol{R}(A^n)$ και υποσύνολο του $\boldsymbol{N}(A^m)$.Αντίστροφα,τώρα έστω $n \in \mathbb{N}$ και υποθέτουμε ότι ο C_n είναι συμπληρωματικός της $\boldsymbol{R}(A^n)$, και είναι υποσύνολο του $\boldsymbol{N}(A^m)$, δηλαδή $X = C_n \oplus \boldsymbol{R}(A^n) \implies \boldsymbol{R}(A^m) = A^m(C_n) + \boldsymbol{R}(A^{m+n})$ και επομένως $q(A) \leq m$. □

Πρόταση 6.2.3. *Αν και τα δύο μήκη των αλυσίδων είναι πεπερασμένα, τότε είναι και ίσα.*

Απόδειξη. Για ευκολία θέτουμε $p = p(A), q = q(A)$ και υποθέτουμε πρώτα ότι $p \leq q$ έτσι ώστε $\boldsymbol{R}(A^q) \subset \boldsymbol{R}(A^p)$. Ακόμα, έστω $q > 0$ γιατί διαφορετικά δεν έχουμε να αποδείξουμε κάτι. Από την πρόταση (6.2.2) γράφουμε $X = \boldsymbol{N}(A^q) + \boldsymbol{R}(A^q)$ και έτσι για κάθε στοιχείο $y = A^p x$ της $\boldsymbol{R}(A^p)$ έχουμε την γραφή $y = z + A^q w$, με $z \in \boldsymbol{N}(A^q)$. Το στοιχείο $z = A^p x - A^q w$ ανήκει στην $\boldsymbol{R}(A^q)$ και επομένως $z \in \boldsymbol{N}(A^q) \cap \boldsymbol{R}(A^p)$. Σύμφωνα με την πρόταση (6.2.1) αυτή η τομή περιέχει μόνο το 0 έτσι ώστε $y = A^q w$ και $y \in \boldsymbol{R}(A^q)$. Επομένως δείξαμε ότι $\boldsymbol{R}(A^q) = \boldsymbol{R}(A^p)$ από όπου $p \geq q$. Άρα θα έχουμε ότι $p = q$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $q \leq p$ και $p > 0$, έτσι ώστε $\boldsymbol{N}(A^q) \subset \boldsymbol{N}(A^p)$. Από την πρόταση (6.2.2), $X = \boldsymbol{N}(A^q) + \boldsymbol{R}(A^p)$ και για αυθαίρετο $x \in \boldsymbol{N}(A^p)$ θα έχουμε την γραφή $x = u + A^p v$ με $u \in \boldsymbol{N}(A^q)$. Επειδή, $A^p x = A^p u = 0$ θα έχουμε ότι $A^{2p} u = 0$, και έτσι $v \in \boldsymbol{N}(A^{2p}) = \boldsymbol{N}(A^p)$ επομένως $A^p v = 0$ και ως εκ τούτου $x = u \in \boldsymbol{N}(A^q)$. Άρα, $\boldsymbol{N}(A^q) = \boldsymbol{N}(A^p) \implies q \geq p$. Άρα και πάλι θα έχουμε $p = q$. □

Αν και τα δύο μήκη των αλυσίδων ενός ενδομορφισμού A είναι πεπερασμένα, τότε λέμε ότι ο A είναι *πεπερασμένος ως προς τις αλυσίδες* και το κοινό μήκος καλείται *μήκος των αλυσίδων* του A.

Πρόταση 6.2.4. *Αν ο A έχει μήκος αλυσίδων $p < \infty$ τότε η γραφή:*

$$X = \boldsymbol{N}(A^p) \oplus \boldsymbol{R}(A^p) \tag{6.8}$$

ισχύει, και ο $A : \boldsymbol{R}(A^p) \to \boldsymbol{R}(A^p)$ ένα προς ένα και επί. Αντίστροφα, αν για $m \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$X = \boldsymbol{N}(A^m) \oplus \boldsymbol{R}(A^m) \tag{6.9}$$

τότε $p(A) = q(A) \leq m$

Απόδειξη. Αν $p(A) = q(A) = p < \infty$ και υποθέσουμε ότι $p > 0$, γιατί αλλιώς δεν έχουμε κάτι να αποδείξουμε , τότε η (6.8) προκύπτει από τις προτάσεις (6.2.1) και (6.2.2). Αν συμβολίσουμε με $\tilde{A} = A|_{\boldsymbol{R}(A^p)}$, τότε $\boldsymbol{N}(\tilde{A}) \subset \boldsymbol{N}(A) \subset \boldsymbol{N}(A^p)$ αλλά και $\boldsymbol{N}(\tilde{A}) \subset \boldsymbol{R}(A^p)$ και τότε από την (6.8) $\boldsymbol{N}(\tilde{A}) = \{0\}$ και άρα ο $\tilde{A}$ είναι πράγματι ένα προς ένα. Ακόμα επειδή $\boldsymbol{R}(A^p) = A^p(X)$ έχουμε $\tilde{A}(A^p(X)) = A(A^p(X)) = A^{p+1}(X) = A^p(X) = \boldsymbol{R}(A^p)$, δηλαδή ο $\tilde{A} : \boldsymbol{R}(A^p) \to \boldsymbol{R}(A^p)$ Αντίστροφα, αν η (6.9) ισχύει, τότε $p(A), q(A) \leq m$ από τις προτάσεις (6.2.1) και (6.2.2) και επομένως $p(A) = q(A) \leq m$ από την πρόταση (6.2.3) □

6.2.1 Ιδιότητες

Από τον ορισμό, βλέπουμε ότι δεν είναι εύκολο να αναγνωρίσουμε έναν τελεστή Fredholm. Ένα χρήσιμο εργαλείο μας δίνεται στο επόμενο θεώρημα. Προς το παρόν χρειαζόμαστε το παρακάτω,

Λήμμα 6.2.5. *Έστω $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|)$ και υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{N} \oplus \boldsymbol{X_0}$, όπου ο $\boldsymbol{X_0}$ είναι κλειστός και ο $\boldsymbol{N}$ είναι πεπερασμένης διάστασης. Αν ο $\boldsymbol{X_1}$ είναι υπόχωρος του $\boldsymbol{X}$ που περιέχει τον $\boldsymbol{X_0}$, τότε ο $\boldsymbol{X_1}$ είναι κλειστός.*

Απόδειξη. Θέτουμε $M = N \cap X_1$ και τότε $X_1 = X_0 \oplus M$, γιατί αν $x \in X_1$, $x = x_0 + z$, όπου $x_0 \in X_0$ και $z \in N$. Επιπλέον $x_0 \in X_1$ και το ίδιο θα ισχύει και για το z. Επομένως $z \in M$ και από το λήμμα (6.1.1) έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 6.2.6. *Έστω $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και υποθέτουμε ότι υπάρχουν τελεστές $A_1, A_2 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$, $K_1 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$, $K_2 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{Y})$ τέτοιοι ώστε:*

$$A_1 A = I - K_1 \quad \textit{στον } \boldsymbol{X} \tag{6.10}$$

και

$$A A_2 = I - K_2 \quad \textit{στον } \boldsymbol{Y} \tag{6.11}$$

Τότε ο $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

Απόδειξη. Ισχύει γενικά ότι $\boldsymbol{N}(A) \subset \boldsymbol{N}(A_1 A)$ και άρα $a(A) \leq a(I - K_1) < \infty$. Επιπλέον, $\boldsymbol{R}(A) \supset \boldsymbol{R}(AA_2) = \boldsymbol{R}(I - K_2)$. Ως εκ τούτου, $\boldsymbol{N}(A^*) \subset \boldsymbol{N}(I - K_2^*)$ και $\beta(A) \leq a(I - K_2^*) < \infty$.Επιπλέον, υπάρχει ένας πεπερασμένος υπόχωρος Y_1 του Y τέτοιος ώστε $Y = \boldsymbol{R}(I - K_2) \oplus Y_1$ (λήμμα 6.1.2). Ακόμα, $\boldsymbol{R}(A) \supset \boldsymbol{R}(I - K_2)$ και από το λήμμα (6.2.5) η $\boldsymbol{R}(A)$ είναι κλειστή και η απόδειξη έλαβε τέλος. □

Θεώρημα 6.2.7. *Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και $B \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$, τότε $BA \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$ και:*

$$\operatorname{ind}(BA) = \operatorname{ind}(B) + \operatorname{ind}(A) \tag{6.12}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα (6.1.3) υπάρχουν $A_0 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}), B_0 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y}), F_1 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X}), F_2, F_3 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{Y})$ και $F_4 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{Z})$ τέτοιοι ώστε:

$$A_0 A = I - F_1 \text{ στον } X, \quad AA_0 = I - F_2 \text{ στον } Y \tag{6.13}$$

και

$$B_0 B = I - F_3 \text{ στον } Y, \quad BB_0 = I - F_4 \text{ στον } Z \tag{6.14}$$

Επομένως,

$$A_0 B_0 B A = A_0 (I - F_3) A = I - F_1 - A_0 F_3 A = I - F_5 \text{ στον } X$$

και
$$BAA_0B_0 = B(I - F_2)B_0 = I - F_4 - BF_2B_0 = I - F_6 \text{ στον } Z$$

όπου $F_5 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ και $F_6 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{Z})$. Επομένως από το θεώρημα (6.2.6) βλέπουμε ότι $BA \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$.

Για να αποδείξουμε τώρα την (6.12), έστω $Y_1 = \boldsymbol{R}(A) \cap \boldsymbol{N}(B)$. Βρίσκουμε υπόχωρους Y_2, Y_3, Y_4 τέτοιοι ώστε:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}(A) &= Y_1 \oplus Y_2 \\ \boldsymbol{N}(B) &= Y_1 \oplus Y_3 \\ Y &= \boldsymbol{R}(A) \oplus Y_3 \oplus Y_4 \end{aligned}$$

Αυτό μπορεί να γίνει από τα λήμματα (1.3.4) και (6.1.2). Επιπλέον οι Y_1, Y_3, Y_4 είναι πεπερασμένης διάστασης και ο Y_2 είναι κλειστός. Έστω $d_i = \dim Y_i$, $i = 1, 3, 4$

Ακόμα

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}(BA) &= \boldsymbol{N}(A) \oplus X_1 \\ \boldsymbol{R}(B) &= \boldsymbol{R}(BA) \oplus Z_4 \end{aligned}$$

όπου $X_1 \subset X_0$ τέτοιο ώστε $A(X_1) = Y_1$ και $Z_4 = B(Y_4)$. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι

$$\dim X_1 = d_1, \quad \dim Z_4 = d_4 \tag{6.15}$$

Υποθέτοντας αυτό έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} a(BA) &= a(A) + d_1 \\ \beta(BA) &= \beta(B) + d_4 \\ a(B) &= d_1 + d_3 \\ \beta(A) &= d_3 + d_4 \end{aligned}$$

Οι σχέσεις αυτές δίνουν κατευθείαν την (6.12) □

Για να αποδείξουμε την (6.15) χρησιμοποιούμε το παρακάτω λήμμα

Λήμμα 6.2.8. *Έστω $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ να είναι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικοί χώροι και έστω L να είναι γραμμικός τελεστής από το $\boldsymbol{V}$ στο $\boldsymbol{W}$. Τότε ισχύει ότι $\dim \boldsymbol{R}(L) \leq \dim \boldsymbol{D}(L)$. Αν ο L είναι ένα προς ένα τότε $\dim \boldsymbol{R}(L) = \dim \boldsymbol{D}(L)$.*

Απόδειξη. Η δεύτερη σχέση προκύπτει από την πρώτη, αφού ο L^{-1} υπάρχει και

$$\boldsymbol{D}(L^{-1}) = \boldsymbol{R}(L) \ , \ \boldsymbol{R}(L^{-1}) = \boldsymbol{D}(L)$$

Για την πρώτη σχέση υποθέτουμε ότι $\dim \boldsymbol{D}(L) < n$ και έστω $w_1, \ldots, w_n$ να είναι n διανύσματα στην $\boldsymbol{R}(L)$. Έστω $v_1, \ldots, v_n$ να είναι διανύσματα στον $\boldsymbol{D}(L)$ τέτοια ώστε $Lv_i = w_i, \ 1 \leq i \leq n$. Αφού $\dim \boldsymbol{D}(L) < n$ τα v_i είναι γραμμικά εξαρτημένα άρα οι συντελεστές τους $a_1, \ldots, a_n$ όχι όλοι μηδέν,

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$$

Επομένως,

$$L(a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n) = a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n = 0$$

Αυτό δείχνει ότι τα w_i είναι γραμμικά εξαρτημένα και επομένως επειδή είναι διανύσματα της $\boldsymbol{R}(L)$ θα έχουμε ότι $\dim \boldsymbol{R}(L) < n$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε n θα πρέπει $\dim \boldsymbol{R}(L) \leq \dim \boldsymbol{D}(L)$ και η απόδειξη έλαβε τέλος □

Στην περίπτωση του θεωρήματος (6.2.7) ο A είναι ένα προς ένα γραμμικός τελεστής από τον $\boldsymbol{X_1}$ στον $\boldsymbol{Y_1}$. Επομένως, $\dim \boldsymbol{X_1} = \dim \boldsymbol{Y_1}$. Ακριβώς όμοια και για τον B , είναι ένα προς ένα στον $\boldsymbol{Y_4}$ και η εικόνα του στον $\boldsymbol{Z_4}$. Επομένως $\dim \boldsymbol{Z_4} = \dim \boldsymbol{Y_4}$. Επομένως ολοκληρώνεται έτσι και η απόδειξη του θεωρήματος (6.2.7).

Δίνουμε ένα λήμμα το οποίο αποτελεί συνέπεια των θεωρημάτων (6.2.6) και (6.2.7)

Λήμμα 6.2.9. *Υποθέτουμε ότι $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και έστω A_0 να είναι ένας τελεστής που ικανοποιεί τις συνθήκες (v),(vi) του θεωρήματος (6.1.3). Τότε ο $A_0 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ και $\operatorname{ind}(A_0) = -\operatorname{ind}(A)$*

Απόδειξη. Από την υπόθεση για $F_1 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ και $F_2 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{Y})$ θα έχουμε την σχέση (6.13). Επομένως από το θεώρημα (6.2.6), αλλάζοντας τους X, Y μεταξύ τους, βλέπουμε ότι $A_0 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ και ακόμα από το θεώρημα (6.2.7)

$$\operatorname{ind}(A_0) + \operatorname{ind}(A) = \operatorname{ind}(I - F_1) = 0$$

Επομένως $\operatorname{ind}(A_0) = -\operatorname{ind}(A)$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Παραθέτουμε για το κλείσιμο της ενότητας κάποιες σημαντικές προτάσεις για την σχέση των μεγεθών των Fredholm τελεστών με τα μήκη των αλυσίδων τους.

Πρόταση 6.2.10. *(i). Αν $p(A) < \infty$, τότε $a(A) \leq \beta(A)$.*

(ii). Αν $q(A) < \infty$,τότε $\beta(A) \leq a(A)$

Απόδειξη. (i) Έστω $p = p(A) < \infty$. Αν $\beta(A) = \infty$ δεν έχουμε κάτι να αποδείξουμε και υποθέτουμε λοιπόν, ότι $\beta(A) < \infty$. Από την πρόταση (6.2.1) έχουμε $\boldsymbol{N}(A) \cap \boldsymbol{R}(A^p) = \{0\}$ και επειδή $\beta(A)$ και $\beta(A^p)$ είναι πεπερασμένα θα έχουμε ότι $a(A) < \infty$. Επομένως για $n \geq p$ και το θεώρημα (6.2.7), έχουμε την ισότητα:

$$n \cdot \operatorname{ind}(A) = \operatorname{ind}(A^n) = a(A^n) - \beta(A^n) = a(A^p) - \beta(A^p)$$

Αν ακόμα, $q = q(A)$ τότε για όλα τα $n \geq \max(p,q)$ έχουμε την σχέση $n \cdot \mathrm{ind}(A) = a(A^p) - \beta(A^q)$ =σταθερά, και επομένως $\mathrm{ind}(A) = 0$, δηλαδή $a(A) = \beta(A)$. Αν όμως $q = \infty$, δηλαδή, αν $\beta(A^n) \to \infty$ τότε $n \cdot \mathrm{ind}(A)$ γίνεται αρνητικό και επομένως $\mathrm{ind}(A) < 0$ και $a(A) < \beta(A)$.
(ii) Έστω τώρα $q = q(A) < \infty$. Αν $a(A) = \infty$, τότε δεν έχουμε να δείξουμε κάτι και υποθέτουμε λοιπόν, ότι $a(A) < \infty$. Τότε και $a(A^q) < \infty$ και αφού από την πρόταση (6.2.2) έχουμε $X = C \oplus \boldsymbol{R}(A)$ με $C \subset \boldsymbol{N}(A^q)$, τότε $\beta(A) = \dim C \leq a(A^q) < \infty$. Αν λοιπόν, με τις απαραίτητες αλλαγές χρησιμοποιήσουμε την σχέση για τον δείκτη όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, τότε θα έχουμε $\beta(A) = a(A)$, με $p(A) < \infty$ και $\beta(A) < a(A)$ αν $p(A) = \infty$. □

Πρόταση 6.2.11. *(i). Αν τα μήκη των αλυσίδων του A είναι πεπερασμένα, τότε $a(A) = \beta(A)$.*

(ii). Αν $a(A) = \beta(A) < \infty$ και αν κάποιο από τα μήκη των αλυσίδων είναι πεπερασμένο τότε, $p(A) = q(A)$.

Απόδειξη. (i) Από την πρόταση (6.2.10) έχουμε το ζητούμενο.
(ii) Είναι συνέπεια της ισότητας $a(A^n) - \beta(A^n) = \mathrm{ind}(A^n) = n \cdot \mathrm{ind}(A) = 0$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$ □

Για την περίπτωση όπου $a(A) < \infty$ έχουμε τα παρακάτω

Λήμμα 6.2.12. *Ο ενδομορφισμός A του χώρου $\boldsymbol{X}$ απεικονίζει τον $\bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{R}(A^n)$ στον εαυτό του, και σε αυτή την περίπτωση $a(A) < \infty$*

Απόδειξη. Είναι τετριμμένο ότι το $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{R}(A^n)$ απεικονίζεται στον εαυτό του από τον A. Υποθέτουμε τώρα ότι $a(A) < \infty$ για να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο του U είναι η εικόνα ενός στοιχείου του U με την απεικόνιση A. Από την $\boldsymbol{N}(A) \cap \boldsymbol{R}(A^n) \supset \boldsymbol{N}(A) \cap \boldsymbol{R}(A^{n+1})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ και επειδή $a(A) < \infty$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε:

$$D := \boldsymbol{N}(A) \cap \boldsymbol{R}(A^m) = \boldsymbol{N}(A) \cap \boldsymbol{R}(A^{m+k}) \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.16}$$

Προφανώς $D = \boldsymbol{N}(A) \cap U$. Έστω τώρα, $y \in U$, ένα αυθέρετο στοιχείο. Τότε για κάθε $k = 0, 1, 2 \ldots$ υπάρχει ένα $x_k \in X$ τέτοιο ώστε $y = A^{m+k} x_k$. Αν θέσουμε :

$$z_k = A^m x_1 - A^{m+k-1} x_k \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6.17}$$

τότε $z_k \in \boldsymbol{R}(A^m)$ και επειδή $Az_k = A^{m+1}x_1 - A^{m+k}x_k = y - y = 0$ στον $\boldsymbol{N}(A)$ τότε $z_k \in \boldsymbol{N}(A) \cap \boldsymbol{R}(A^m) = D$. Από την (6.16) το $z_k \in \boldsymbol{R}(A^{m+k-1})$ και με την βοήθεια της (6.17) έχουμε:

$$A^m x_1 = z_k + A^{m+k-1}x_k \ \in \boldsymbol{R}(A^{m+k-1}) \ \ k = 1, 2, \dots$$

άρα $A^m x_1 \in U$. Ακόμα επειδή, $A(A^m x_1) = A^{m+1}x_1 = y$, το Y πράγματι είναι η εικόνα ενός στοιχείου του U με την απεικόνιση A. □

Πρόταση 6.2.13. *Για τον ενδομορφισμό A του χώρου $\boldsymbol{X}$ με $a(A) < \infty$, τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

(i). Το μήκος της αλυσίδας του πυρήνα είναι πεπερασμένο

(ii). Σε κάθε υποσύνολο F του $\boldsymbol{X}$ που απεικονίζεται μέσω του A στον εαυτό του, ο A είναι ένα προς ένα.

(iii). Ο A είναι ένα προς ένα στον υπόχωρο $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{R}(A^n)$.

Απόδειξη. $(i) \implies (ii)$: Αν $A(F) = F$ και $\tilde{A} = A|_F$ τότε $q(\tilde{A}) = 0$. Ακόμα $\boldsymbol{N}(\tilde{A}^n) = \boldsymbol{N}(A^n) \cap F$ έχουμε από την (i) ότι $p(\tilde{A}) < \infty$. Από την πρόταση (6.2.3) προκύπτει ότι $p(\tilde{A}) = q(\tilde{A}) = 0$ και ο $\tilde{A}$ είναι ένα προς ένα.
$(ii) \implies (iii)$: Τετριμμένα από το λήμμα (6.2.12)
$(iii) \implies (i)$: Από το (iii) προκύπτει $D = \boldsymbol{N}(A) \cap U = \{0\}$. Ακόμα από την σχέση (6.16) έχουμε $\boldsymbol{N}(A) \cap \boldsymbol{R}(A^m) = \{0\}$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Το (i) είναι τώρα, συνέπεια της πρότασης (6.2.1). □

6.3 Θεωρία Διαταραχών

Αν $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ τότε ο $A = I - K$ είναι Fredholm . Επιπλέον αν προσθέσουμε έναν συμπαγή τελεστή στον A, με αυτή την μορφή τότε θα παραμείνει Fredholm . Θα εξετάσουμε αν αυτό ισχύει για οποιονδήποτε Fredholm τελεστή.

Θεώρημα 6.3.1. *Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ τότε $A + K \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και*

$$\operatorname{ind}(A + K) = \operatorname{ind}(A) \tag{6.18}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα (6.1.3), υπάρχει $A_0 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$,$F_1 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$, $F_2 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{Y})$ τέτοιοι ώστε

$$A_0 A = I - F_1 \text{ στον } X, \quad AA_0 = I - F_2 \text{ στον } Y \tag{6.19}$$

Επομένως
$$A_0(A+K) = I - F_1 + A_0K = I - K_1 \text{ στον } X$$
και
$$(A+K)A_0 = I - F_2 + KA_0 = I - K_2 \text{ στον } Y$$
όπου $K_1 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X}), K_2 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{Y})$. Επομένως $A+K \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, από το θεώρημα (6.2.6). Ακόμα από το θεώρημα (6.2.7) :
$$\operatorname{ind}[A_0(A+K)] = \operatorname{ind}(A_0) + \operatorname{ind}(A+K) = \operatorname{ind}(I-K_1) = 0.$$
Όμως από το λήμμα (6.2.9) έχουμε ότι $\operatorname{ind}(A_0) = -\operatorname{ind}(A)$ και άρα η (6.18) ισχύει οπότε η απόδειξη έλαβε τέλος. □

Θεώρημα 6.3.2. *Υποθέτουμε ότι ο $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$. Τότε υπάρχει ένα $\eta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $T \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ που ικανοποιεί την σχέση $\|T\| < \eta$, έχουμε $A+T \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$,*
$$\operatorname{ind}(A+T) = \operatorname{ind}(A) \tag{6.20}$$
και
$$a(A+T) \leq a(A) \tag{6.21}$$

Απόδειξη. Από την σχέση (6.19) θα έχουμε:
$$A_0(A+T) = I - F_1 + A_0T \text{ στον } X$$
και
$$(A+T)A_0 = I - F_2 + TA_0 \text{ στον } Y$$
Θέτουμε, $\eta = \|A_0\|^{-1}$ και τότε $\|A_0T\| \leq \|A_0\|\|T\| < 1$,και όμοια,$\|TA_0\| < 1$. Επομένως οι τελεστές $I + A_0T$ και $I + TA_0$ έχουν φραγμένους αντιστρόφους. Συνεπώς
$$(I+A_0T)^{-1}A_0(A+T) = I - (I+A_0T)^{-1}F_1 \text{ στον } X \tag{6.22}$$
$$(A+T)A_0(I+TA_0)^{-1} = I - F_2(I+TA_0)^{-1} \text{ στον } Y \tag{6.23}$$
Εφαρμόζουμε τώρα, το θεώρημα (6.2.6) για να καταλήξουμε στο ότι $A+T \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$. Ακόμα από την εφαρμογή του θεωρήματος (6.2.7) στην σχέση (6.22) θα έχουμε
$$\operatorname{ind}[(I+A_0T)^{-1}] + \operatorname{ind}(A_0) + \operatorname{ind}(A+T) = 0$$
Επειδή $\operatorname{ind}[(I+A_0T)^{-1}] = 0$ η σχέση (6.20) ισχύει. Μένει λοιπόν, να δείξουμε την σχέση (6.21). Από το θεώρημα (6.1.3)(iii) έχουμε
$$A_0(A+T) = I + A_0T \text{ στον } X_0$$
και επομένως ο τελεστής είναι ένα προς ένα στον X_0. Έτσι, $\boldsymbol{N}(A+T) \cap X_0 = \{0\}$ και εφόσον, $X = \boldsymbol{N}(A) \oplus X_0$ βλέπουμε ότι $\dim \boldsymbol{N}(A+T) \leq \dim \boldsymbol{N}(A)$, το οποίο συμβαίνει εξαιτίας του επόμενου λήμματος. □

Λήμμα 6.3.3. *Έστω ο $\boldsymbol{X}$ να είναι ένας διανυσματικός χώρος και υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{N} \oplus \boldsymbol{X_0}$ όπου ο $\boldsymbol{N}$ είναι πεπερασμένης διάστασης. Αν $\boldsymbol{M}$ είναι υπόχωρος του $\boldsymbol{X}$ τέτοιος ώστε $\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{X_0} = \{0\}$ τότε $\dim \boldsymbol{M} \leq \dim \boldsymbol{N}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\dim N < n$ και έστω $x_1, \ldots, x_n$ να είναι n διανύσματα στον M. Από την υπόθεση

$$x_k = x_{k0} + x_{k1}, \quad x_{k0} \in X_0, x_{k1} \in N, \ 1 \leq k \leq n$$

Αφού $\dim N < n$, υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n$ όχι όλα μηδέν τέτοια ώστε

$$\sum_1^n a_k x_{k1} = 0$$

Επομένως,

$$\sum_1^n a_k x_k = \sum_1^n a_k x_{k0} \ \in X_0$$

Και αφού τα x_k ανήκουν στον M το παραπάνω μπορεί να συμβεί μόνο εάν

$$\sum_1^n a_k x_k = 0$$

που μας δείχνει ότι τα x_k είναι γραμμικά εξαρτημένα και επομένως θα πρέπει $\dim M \leq \dim N$. □

Θεώρημα 6.3.4. *Υποθέτουμε ότι $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και $B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ τέτοιοι ώστε $BA \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$. Τότε $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ αν και μόνο εάν $B \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$*

Απόδειξη. Πρώτα, υποθέτουμε ότι $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και έστω ο A_0 να είναι ο τελεστής που ικανοποιεί το θεώρημα (6.1.3), άρα

$$BAA_0 = B - BF_2 \text{ στον } Y$$

όπου $F_2 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{Y})$. Ακόμα ο $A_0 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ από το λήμμα (6.2.9), και $BA \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$ από την υπόθεση. Άρα $BAA_0 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$, από το θεώρημα (6.2.7). Επιπλέον $BF_2 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ και επομένως $B \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ από το θεώρημα (6.3.1).

Υποθέτουμε τώρα ότι $B \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ και έστω ο $B_0 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y})$ να ικανοποιεί την σχέση (6.14). Τότε

$$B_0 BA = A - F_3 A \text{ στον } X$$

Από την υπόθεση $BA \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$ με $B_0 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y})$. Επομένως $B_0BA \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και το ίδιο θα ισχύει για τον A. □

Μια συνέπεια του θεωρήματος (6.3.4) είναι το επόμενο.

Θεώρημα 6.3.5. *Υποθέτουμε ότι* $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *και* $B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ *τέτοιοι ώστε* $BA \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$ *.Αν* $a(B) < \infty$ *τότε* $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *και* $B \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$.

Απόδειξη. Εφόσον $\boldsymbol{R}(B) \supset \boldsymbol{R}(BA)$ από το λήμμα (6.2.5) η $\boldsymbol{R}(B)$ είναι κλειστή. Ακόμα $\beta(B) \leq \beta(BA)$ και επομένως $B \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$. Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα (6.3.4) και έχουμε το ζητούμενο. □

Στην επόμενη ενότητα θα δούμε ότι μπορούμε να βάλουμε στην θέση της συνθήκης $a(B) < \infty$ την συνθήκη $\beta(A) < \infty$ στην υπόθεση του θεωρήματος (6.3.5).

6.4 Ο Συζυγής τελεστής

Γνωρίζουμε ότι εάν $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ τότε $A^* \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}^*, \boldsymbol{X}^*)$. Θέλουμε να εξετάσουμε την περίπτωση όπου $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και να δούμε την συμπεριφορά του συζυγή του τελεστή. Από το θεώρημα (6.1.3)(v),(vi) παίρνοντας τους συζυγείς θα έχουμε

$$A^*A_0^* = I - F_1^* \text{ στον } \boldsymbol{X}^*, \quad A_0^*A^* = I - F_2^* \text{ στον } \boldsymbol{Y}^*$$

Αφού λοιπόν, ο $A_0^* \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}^*)$ και F_i^* επίσης πεπερασμένης διάστασης, με την βοήθεια του θεωρήματος (6.2.6) βλέπουμε ότι $A^* \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}^*, \boldsymbol{X}^*)$. Σε ότι αφορά τον δείκτη του A^* ξέρουμε ότι $a(A^*) = \dim \boldsymbol{N}(A^*)$ και $a(A^*) = \beta(A)$. Για να βρούμε την ποσότητα $\beta(A^*)$ θα χρησιμοποιήσουμε τον $A^{**} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}^{**}, \boldsymbol{Y}^{**})$ που ορίζεται ως:

$$A^{**}x^{**}(y^*) = x^{**}(A^*y^*), \quad x^{**} \in X^{**}, y^* \in Y^* \tag{6.24}$$

Το σύνολο των στοιχείων στον $\boldsymbol{X}^{**}$ που μηδενίζουν την $\boldsymbol{R}(A^*)$ ανήκουν στον $\boldsymbol{N}(A^{**})$. Επομένως από το λήμμα (6.1.2) υπάρχει $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{X}^*$ με διάσταση $a(A^{**})$ τέτοιο ώστε:

$$X^* = \boldsymbol{R}(A^*) \oplus W \tag{6.25}$$

Από την άλλη, αν $a(A) = n$ και $x_1, \ldots, x_n$ είναι μια βάση του $\boldsymbol{N}(A)$, τότε υπάρχουν συναρτησιακά $f_1, \ldots, f_n$ τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση (1.8). Έστω $\boldsymbol{Z}$ να είναι ένας n-διάστατος υπόχωρος, που παράγεται από τα f_j. Τότε $\boldsymbol{Z} \cap \boldsymbol{R}(A^*) = \{0\}$ γιατί εάν $z' \in \boldsymbol{Z}$ τότε

$$z' = \sum_1^n a_j f_j$$

και επομένως

$$z'(x_k) = a_k, \quad 1 \leq k \leq n$$

Αν το $z' \in \boldsymbol{R}(A^*)$ τότε και $z'(x_k) = 0$ για κάθε k, επειδή $\boldsymbol{R}(A^*) = \boldsymbol{N}(A)^\perp$. Επομένως, $z' = 0$. Άρα για κάθε $f \in X^*$ θέτουμε :

$$u' = f - \sum_{1}^{n} f(x_j) f_j$$

Τότε $u'(x_k) = 0$ για κάθε k από το λήμμα (1.3.2). Επομένως, $u' \in \boldsymbol{R}(A^*)$. Επειδή, $f - u' \in Z$ θα έχουμε:

$$X^* = \boldsymbol{R}(A^*) \oplus Z \tag{6.26}$$

και $\dim Z = a(A)$. Εφαρμόζουμε τώρα το λήμμα (6.3.3) για να καταλήξουμε στο ότι $\dim Z = \dim W$. Όμως $\dim Z = a(A)$ και $\dim W = a(A^{**}) = \beta(A^*)$. Επομένως συγκεντρωτικά, δείξαμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 6.4.1. *Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, τότε $A^* \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}^*, \boldsymbol{X}^*)$ και:*

$$\operatorname{ind}(A^*) = -\operatorname{ind}(A) \tag{6.27}$$

Επιπλέον δείξαμε ότι:

$$a(A^{**}) = a(A) \tag{6.28}$$

όταν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Γενικά πρέπει να σημειωθεί ότι

$$a(A^{**}) \geq a(A) \tag{6.29}$$

για τυχαίο $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.
Πρέπει να σημειωθεί ότι η (6.28) ισχύει όταν ο $\boldsymbol{X}$ είναι ανακλαστικός, ενώ η (6.29) στην περίπτωση της κανονικής εμφύτευσης του $\boldsymbol{X}$ στον χώρο $\boldsymbol{X}^{**}$ ($\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{X}^{**}$).

Θεώρημα 6.4.2. *Υποθέτουμε ότι $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και $B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ τέτοιοι ώστε $BA \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$. Αν $\beta(A) < \infty$, τότε $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και $B \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$*

Απόδειξη. Παίρνοντας τους συζυγείς τελεστές θα έχουμε ότι $A^*B^* \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Z}^*, \boldsymbol{X}^*)$. Από το θεώρημα (6.4.1). Ακόμα, $a(A^*) = \beta(A) < \infty$. Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε το θεώρημα (6.3.5) και άρα $A^* \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}^*, \boldsymbol{X}^*)$ και $B^* \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Z}^*, \boldsymbol{Y}^*)$. Ειδικότερα, $a(B^{**}) < \infty$. Αλλά από την (6.29) ξέρουμε ότι

$$a(B) \leq a(B^{**}) < \infty$$

Τότε, οι υποθέσεις του θεωρήματος (6.3.5) ικανοποιούνται, και έχουμε το ζητούμενο. □

6.5 Μια ειδική περίπτωση

Στα προηγούμενα, είδαμε ότι αν $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ και $A = I - K$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο τελεστής $A^n \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και $a(A^n) < \infty$. Επιπλέον, $\boldsymbol{N}(A^n) \subset \boldsymbol{N}(A^{n+1})$. Θέλουμε να εξετάσουμε την συμπεριφορά των παρακάτω ποσοτήτων.
Για $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ ορίζουμε

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} a(A^n)\ ,\quad r'(A) = \lim_{n\to\infty} \beta(A^n)$$

Αν ο A έχει την μορφή $A = I - K$ τότε όπως έχουμε δείξει $r(A) < \infty$, και αφού $\operatorname{ind}(A) = 0$ με $\operatorname{ind}(A^n) = n \operatorname{ind}(A) = 0$, τότε $\beta(A^n) = a(A^n)$ το οποίο δείχνει ότι $r'(A) < \infty$.

Το ερώτημα έγκειται στο αν υπάρχουν τελεστές $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ τέτοιοι ώστε $r(A)$ και $r'(A)$ πεπερασμένα. Αν $r(A) < \infty$ τότε υπάρχει $n \geq 1$ τέτοιος ώστε η αλυσίδα του πυρήνα να τερματίζει. Δηλαδή $\boldsymbol{N}(A^n) = \boldsymbol{N}(A^k)$ για όλα τα $k \geq n$, και ακριβώς όμοια αν $r'(A) < \infty$ θα πρέπει να υπάρχει $m > 1$ τέτοιος ώστε $\boldsymbol{N}(A^{*k}) = \boldsymbol{N}(A^{*m})$ για κάθε $k \geq m$. Αν $r(A), r'(A)$ πεπερασμένα τότε θέτουμε με $j = \max[m, n]$ και θα έχουμε ότι $a(A^k) = a(A^j), \beta(A^k) = \beta(A^j)$ για $k > j$. Τότε, $\operatorname{ind}(A^k) = a(A^k) - \beta(A^k) = a(A^j) - \beta(A^j) = \operatorname{ind}(A^j)$ για $k > j$. Όμως $\operatorname{ind}(A^k) = k \operatorname{ind}(A)$ και επομένως $(k - j) \operatorname{ind}(A) = 0$ για όλα τα $k > j$, το οποίο δείχνει ότι θα πρέπει να έχουμε $\operatorname{ind}(A) = 0$. Όμως τότε θα πρέπει και $m = n$. Δηλαδή, αν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ με $r(A), r'(A) < \infty$ τότε $\operatorname{ind}(A) = 0$ και υπάρχει $n \geq 1$ τέτοιος ώστε:

$$a(A^k) - a(A^n),\ \beta(A^k) = \beta(A^n),\quad k \geq n \tag{6.30}$$

Επιπλέον

$$\boldsymbol{N}(A^n) \cap \boldsymbol{R}(A^n) = \{0\} \tag{6.31}$$

και θέτοντας:

$$Vx = \sum_{1}^{n} f_j(x) x_k \tag{6.32}$$

όπου $x_k \in \{x_1, \ldots, x_s\}$ μια βάση του $\boldsymbol{N}(A^n)$ και $f_j \in \{f_1, \ldots, f_s\}$ συναρτησιακά που μηδενίζουν τον $\boldsymbol{R}(A^n)$. Ο τελεστής V είναι πεπερασμένος, και άρα συμπαγής. Άρα $A^n + V \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και $\operatorname{ind}(A^n + V) = 0$ από το θεώρημα (6.3.1). Ακόμα $a(A^n + V) = 0$. Αν $(A^n + V)x = 0$, τότε $Vx \in \boldsymbol{R}(A^n) \cap \boldsymbol{N}(A^n)$ και έτσι $Vx = 0$. Όμως $A^n x = 0$ το οποίο σημαίνει ότι $x \in \boldsymbol{N}(A^n)$. Από την άλλη, $Vx = 0$ και επομένως $f_k(x) = 0$ για κάθε k, και αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν $x = 0$. Επιπλέον ο $A^n + V$ έχει φραγμένο ανάστροφο E και αφού $\boldsymbol{R}(V) \subset \boldsymbol{N}(A^n)$ και $\boldsymbol{R}(A^n) \subset \boldsymbol{N}(V)$ έχουμε $A^n V = V A^n = 0$. Επομένως

$$(A^n + V)V = V(A^n + V) = V^2$$

το οποίο δείχνει ότι:

$$\begin{aligned} V = EV^2 = V^2E \implies \\ VE = EV^2E = EV \implies \\ EA^n = A^nE = I - EV \end{aligned}$$

Και αφού ο E είναι φραγμένος, $EV \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$. Η παραπάνω συλλογιστική πορεία αποδεικνύει το αναγκαίο μέρος του παρακάτω θεωρήματος

Θεώρημα 6.5.1. *Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ο A να ανήκει στο $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ με $r(A) < \infty$ και $r'(A) < \infty$ είναι να υπάρχει $n \geq 1$($n \in \mathbb{N}$) και τελεστές $E \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ και $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ τέτοιοι ώστε:*

$$EA^n = A^nE = I - K \tag{6.33}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη του ικανού μέρους της (6.33), θέτουμε $W = A^n$. Τότε από το θεώρημα (6.2.6) $W \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Επιπλέον υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\boldsymbol{N}[(I-K)^j] = \boldsymbol{N}[(I-K)^m]\ ,\ \boldsymbol{R}[(I-K)^j] = \boldsymbol{R}[(I-K)^m],\ j \geq m$$

Άρα,

$$\boldsymbol{N}(W^j) \subset \boldsymbol{N}(E^jW^j) = \boldsymbol{N}[(EW)^j] = \boldsymbol{N}[(I-K)^j] = \boldsymbol{N}[(I-K)^m]$$

από την σχέση(6.33). Ως εκ τούτου, η $a(W^j)$ φράσεται και $r(A) = r(W) < \infty$. Όμοια,

$$\boldsymbol{R}(W^j) \supset \boldsymbol{R}(W^jE^j) = \boldsymbol{R}[(WE)^j] = \boldsymbol{R}[(I-K)^j] = \boldsymbol{R}[(I-K)^m]$$

δηλαδή,

$$\boldsymbol{N}(W^{*j}) \subset \boldsymbol{N}[(I-K^*)^m]$$

και επομένως η $\beta(W^j)$ φράσεται. Αυτό μας δείχνει ότι $r'(A) = r'(W) < \infty$. □

Ενώ λοιπόν, δείξαμε ότι $W \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$, θα πρέπει να δείξουμε και ότι $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Αυτό δίνεται από το παρακάτω λήμμα

Λήμμα 6.5.2. *Έστω $A_1, \ldots, A_n$ τελεστές στο $\mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ και το γινόμενό τους $A = A_1 \ldots A_n$ στο $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Τότε κάθε $A_k \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι $\boldsymbol{N}(A_K) \subset \boldsymbol{N}(A)$ και $\boldsymbol{R}(A_k) \supset \boldsymbol{R}(A)$. Επομένως, τα $a(A_k)$ και $\beta(A_k)$ είναι πεπερασμένα. Ακόμα από την σχέση (6.6) $X = \boldsymbol{R}(A) \oplus Y_0$ όπου Y_0 είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X. Επειδή λοιπόν, $\boldsymbol{R}(A_k) \supset \boldsymbol{R}(A)$ από το λήμμα (6.2.5) θα έχουμε ότι η $\boldsymbol{R}(A_k)$ είναι κλειστή. □

Παρατήρηση 6.5.3. *Εάν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ με $\operatorname{ind}(A) \geq 0$ και $r(A) < \infty$, τότε με $\operatorname{ind}(A^k) = k \operatorname{ind}(A) \geq 0$ θα έχουμε $a(A^k) \geq \beta(A^k) \implies r'(A) < \infty$ και το θεώρημα (6.5.1) εφαρμόζεται. Ακριβώς όμοια, αν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ με $\operatorname{ind}(A) \leq 0$ και $r'(A) < \infty$ πάλι από την σχέση με τους δείκτες $\beta(A^k) \geq a(A^k) \implies r(A) < \infty$.*

6.6 Semi-Fredholm Τελεστές

Στα προηγούμενα έχουμε δώσει τον ορισμό των semi-Fredholm τελεστών. Για την μελέτη αυτού του κεφαλαίου ορίζουμε τα παρακάτω σύνολα:

$$\boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \{A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) : a(A) < \infty, \boldsymbol{R}(A) \text{ κλειστή}\}$$

και,

$$\boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \{A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) : A^* \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{Y}^*,\boldsymbol{X}^*)\}$$

Η σχέση (6.3) ισχύει, και έστω P να είναι η προβολή που ορίζεται:

$$P = \begin{cases} I, & \text{στον } \boldsymbol{N}(A) \\ 0, & \text{στον } X_0 \end{cases} \tag{6.34}$$

Από το λήμμα (6.1.1), $P \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ και ακόμα έχουμε

Λήμμα 6.6.1. *Υποθέτουμε ότι $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ και έστω $a(A) < \infty$. Έστω, ακόμα η P να είναι η προβολή που ορίζεται από την σχέση (6.34). Τότε η $\boldsymbol{R}(A)$ είναι κλειστή στον Y αν και μόνο αν:*

$$\|(I-P)x\| \leq \|Ax\| \ , \quad x \in X \tag{6.35}$$

Απόδειξη. Αν η $\boldsymbol{R}(A)$ ήταν κλειστή, τότε ο $A|_{X_0}$ είναι ένα προς ένα και έχει κλειστή εικόνα. Επομένως, γνωρίζουμε ότι:

$$\|x\| \leq C\|Ax\| \ , \quad x \in X_0 \tag{6.36}$$

Όμως για κάθε $x \in X$, η $(I-P)x \in X_0$ και $A(I-P)x = Ax$. Αυτό δίνει την ζητούμενη (6.35). Αντίστροφα τώρα, υποθέτουμε ότι η (6.35) ισχύει . Αν $y \in Y$ και $Ax_n \to y$, τότε η $\{Ax_n\}_{n\geq 1}$ είναι Cauchy ακολουθία του Y. Από την (6.35), η $\{(I-P)x_n\}_{n\geq 1}$ είναι Cauchy ακολουθία στον X. Εφόσον ο X είναι πλήρης, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $(I-P)x_n \to x$. Άρα $A(I-P)x_n \to Ax$. Αλλά, $A(I-P)x_n = Ax_n \to y$. Τότε, $Ax = y$ και $y \in \boldsymbol{R}(A)$. Δηλαδή, η $\boldsymbol{R}(A)$ είναι κλειστή στον Y και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Υποθέτουμε τώρα, ότι $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ και από την (6.35):

$$\|x\| \leq C\|Ax\| + \|Px\|$$

Θέτοντας:

$$|x| = \|Px\| \tag{6.37}$$

θα έχουμε:

$$|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x| \tag{6.38}$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{6.39}$$

Όμως δεν έχουμε ότι $|x| = 0$ αν και μόνο εάν $x = 0$. Επομένως η $|x|$ δεν είναι νόρμα. Μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις σχέσεις (6.38) και (6.39) καλείται *ημινόρμα*. Η ημινόρμα που δίνεται από την (6.37) έχει επιπλέον την ιδιότητα της σχετικής συμπάγειας: Αν $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{X}$ τέτοια ώστε $\|x_n\| \leq C$ τότε έχει υπακολουθία που είναι Cauchy ακολουθία με την ημινόρμα $|\cdot|$ (λόγω της συμπάγειας του P). Η ημινόρμα, είναι δηλαδή σχετικά συμπαγής στην νόρμα του $\boldsymbol{X}$. Επομένως δείξαμε ότι, αν $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ υπάρχει μια ημινόρμα σχετικά συμπαγής στην νόρμα του $\boldsymbol{X}$ τέτοια ώστε:

$$\|x\| \leq C\|Ax\| + |x| \ , \quad x \in X \tag{6.40}$$

Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή θα έχουμε το παρακάτω

Θεώρημα 6.6.2. *Υποθέτουμε ότι $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Τότε $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ αν και μόνο εάν υπάρχει ημινόρμα $|\cdot|$ σχετικά συμπαγής στην νόρμα του X σύμφωνα με την σχέση (6.40)*

Απόδειξη. Έχουμε δείξει το ευθύ. Για το αντίστροφο μέρος της απόδειξης, υποθέτουμε ότι η (6.40) ισχύει. Τότε $a(A) < \infty$. Για δούμε ότι αυτό ισχύει, έστω μια ακολουθία $\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq \boldsymbol{N}(A)$ τέτοια ώστε $\|x_n\| = 1$. Τότε υπάρχει μια υπακολουθία (και για ευκολία, υποθέτουμε ότι είναι όλη η ακολουθία) τέτοια ώστε

$$|x_n - x_m| \to 0 \text{ καθώς } m, n \to \infty$$

Επομένως από την (6.40),

$$\|x_n - x_m\| \leq |x_n - x_m| \to 0$$

και η $\{x_n\}_{n\geq 1}$ συγκλίνει . Όμως τότε ο $\boldsymbol{N}(A)$ είναι πεπερασμένος.

Έστω τώρα ,η P όπως έχει ορισθεί από την σχέση (6.34). Ισχυριζόμαστε ότι η (6.35) ισχύει. Αν όχι, τότε θα υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε

$$\|(I-P)x_n\| = 1 \ , \ Ax_n \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty$$

Θέτουμε $z_n = (I-P)x_n$. Τότε $\{z_n\}_{n\geq 1} \subseteq X_0$ και

$$\|z_n\| = 1 \ , \ Az_n \to 0$$

Εφόσον η ακολουθία $\{z_n\}_{n\geq 1}$ είναι φραγμένη, έχει υπακολουθία (που και πάλι υποθέτουμε ότι είναι ολόκληρη η ακολουθία) τέτοια ώστε

$$|z_n - z_m| \to 0 \text{ καθώς } m, n \to \infty$$

και επομένως από την (6.40)

$$\|z_n - z_m\| \leq C\|A(z_n - z_m)\| + |z_n - z_m| \to 0$$

Εφόσον τώρα, ο X_0 είναι κλειστός υπάρχει ένα $z \in X_0$ τέτοιο ώστε $z_n \to z$. Επομένως, $Az_n \to Az$ αλλά $Az_n \to 0$, το οποίο δείχνει ότι $z \in \boldsymbol{N}(A)$. Από την άλλη, $z \in X_0$. Επομένως ο μόνος τρόπος για να ευσταθούν τα δύο επιχειρήματα είναι $z = 0$. Όμως $\|z\| = \lim \|z_n\| = 1$ και έχουμε το άτοπο. Επομένως η σχέση (6.35) ισχύει, και $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. □

Από τα θεωρήματα (6.3.1) και (6.3.2) προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα

Θεώρημα 6.6.3. *Έστω $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, τότε $A + K \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και η σχέση (6.18) ισχύει.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα (6.6.2)

$$\|x\| \leq C\|(A+K)x\| + |x| + C\|Kx\| \ , \ x \in X$$

Θέτουμε

$$|x|_0 = |x| + C\|Kx\|$$

και η $|x|_0$ είναι ημινόρμα σχετικά συμπαγής στην νόρμα του X. Άρα $A + K \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ από το θεώρημα (6.6.2). Αν τώρα, $A + K \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ τότε $A = (A + K) - K \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ από το θεώρημα (6.3.1) και η σχέση (6.18) ισχύει . Αν $A+K \notin \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, δηλαδή αν $\mathrm{ind}(A + K) = -\infty$ τότε το ίδιο ισχύει και για τον A από το θεώρημα (6.3.1). Σε αυτή την περίπτωση και τα δύο μέλη με βάση την σχέση (6.18) είναι ίσα με $-\infty$. □

Θεώρημα 6.6.4. *Υποθέτουμε ότι $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Τότε υπάρχει $\eta > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $T \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ που ικανοποιεί την σχέση $\|T\| < \eta$, έχουμε $A + T \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και*

$$a(A+T) \leq a(A) \ , \quad \beta(A+T) \leq \beta(A) \tag{6.41}$$

και η σχέση (6.20) ισχύει

Απόδειξη. Από το λήμμα (6.6.1) έχουμε :

$$\|x\| \leq C\|(A+T)x\| + C\|Tx\| + \|Px\| \ , \ x \in X$$

Παίρνοντας για $\eta = 1/2C$,

$$\|x\| \leq C\|(A+T)x\| + \|Px\| + \frac{1}{2}\|x\| \implies$$
$$\|x\| \leq 2C\|(A+T)x\| + 2\|Px\|$$

Το οποίο μας δείχνει ότι $A + T \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ από το θεώρημα (6.6.2). Εφόσον $Px = 0$ για $x \in X_0$ τότε

$$\|x\| \leq 2C\|(A+T)x\| \ , \ x \in X_0$$

το οποίο δείχνει ότι $\boldsymbol{N}(A+T) \cap X_0 = \{0\}$ και επειδή $X = X_0 \oplus \boldsymbol{N}(A)$ από το λήμμα (6.3.3) θα έχουμε ότι η πρώτη ανισότητα της (6.41) ισχύει. Αν $\beta(A) = \infty$ τότε, τετριμμένα, ισχύει και η δεύτερη. Διαφορετικά, $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και υπάρχει ένα $\eta > 0$ τέτοιο ώστε $A + T \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και η (6.20) του θεωρήματος (6.3.2) ισχύει. Άρα,

$$\beta(A+T) = a(A+T) - a(A) + \beta(A) \leq \beta(A)$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι η (6.20) ισχύει στην γενική περίπτωση. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\boldsymbol{N}(A) = \{0\}$. Τότε υπάρχει μια σταθερά C_0 τέτοια ώστε:

$$\|x\| \leq C_0 \|Ax\| \ , \ x \in X$$

Παίρνοντας για $\eta < 1/3C_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \|x\| \leq C_0\|Ax + Tx\| + C_0\|T\|\|x\| \implies \\ \|x\| \leq \frac{3}{2} C_0 \|(A+T)x\| \ , \ x \in X \end{aligned}$$

Αυτό μας οδηγεί στο ότι η $\boldsymbol{R}(A+T)$ είναι κλειστή και η σχέση (6.41) ισχύει. (Ειδικότερα $a(A+T) = 0$).
Αντιστρέφοντας την διαδικασία έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \|x\| \leq \frac{3}{2} C_0 (\|(A+T-T)x\| + \|T\|\|x\|) \ , \underset{x \in X}{\implies} \\ \|x\| \leq 3C_0 \|Ax\| \ , \ x \in X \end{aligned}$$

Αυτό μας δείχνει ότι η επιλογή του η μας επιτρέπει να δουλέψουμε από το $A+T$ με τον A. Καταλήγουμε λοιπόν, στο ότι

$$a(A) \leq a(A+T) \ , \ \beta(A) \leq \beta(A+T)$$

όπου με την βοήθεια της (6.41) έχουμε :

$$a(A+T) = a(A) = 0 \ , \ \beta(A+T) = \beta(A)$$

Τότε η σχέση (6.20) ισχύει. Στην γενική περίπτωση μπορούμε να βρούμε ένα κλειστό υπόχωρο X_0 του X τέτοιον ώστε :

$$X = \boldsymbol{N}(A) \oplus X_0$$

και έστω $A_0 = A|_{X_0}$ τότε

$$A_0 \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X_o}, \boldsymbol{Y}) \ , \ \boldsymbol{N}(A_0) = \{0\} \ , \ a(A_0) = 0$$

και

$$\boldsymbol{R}(A_0) = \boldsymbol{R}(A) \ , \ \beta(A_0) = \beta(A) \ , \ \mathrm{ind}(A_0) = \mathrm{ind}(A) - a(A)$$

Αν $T_0 = T|_{X_0}$, τότε

$$a(A_0 + T_0) = 0 \ , \ \operatorname{ind}(A_0 + T_0) = \operatorname{ind}(A_0)$$

Εφόσον τώρα,

$$A(z + x) = Ax \ , \ (A + T)(z + x) = Tz + (A + T)x \ , \ z \in \boldsymbol{N}(A), \ x \in X_0$$

με την βοήθεια του επόμενου λήμματος θα καταλήξουμε ότι:

$$\begin{aligned} a(A + T) \leq a(A_0 + T_0) + a(A) = a(A) \\ \operatorname{ind}(A) = \operatorname{ind}(A_0) + a(A) \\ \operatorname{ind}(A + T) = \operatorname{ind}(A_0 + T_0) + a(A) = \operatorname{ind}(A) \end{aligned}$$

για να ολοκληρωθεί η απόδειξη. □

Λήμμα 6.6.5. *Υποθέτουμε ότι* $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, $\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{N} \oplus \boldsymbol{X}$, $\dim \boldsymbol{N} = n < \infty$ *και* $\tilde{A} \in \mathscr{B}(\tilde{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{Y})$ *να ικανοποιεί*

$$\tilde{A}(z + x) = Cz + Ax \ , \ z \in \boldsymbol{N} \ , x \in \boldsymbol{X}$$

όπου $C \in \mathscr{B}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Y})$. *Τότε* $\tilde{A} \in \boldsymbol{\Phi}_+(\tilde{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{Y})$ *και*

$$a(\tilde{A}) \leq a(A) + n \ , \ \operatorname{ind}(\tilde{A}) = \operatorname{ind}(A) + n$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $n = 1$ και άρα $N = \{z_0\}$ τότε υπάρχουν τρεις περιπτώσεις.
Περίπτωση 1. $Cz_0 = 0$. Τότε θα έχουμε ότι $\boldsymbol{N}(\tilde{A}) = \boldsymbol{N}(A) \oplus \{z_0\}$ $, a(\tilde{A}) = a(A) + 1$ $, \boldsymbol{R}(\tilde{A}) = \boldsymbol{R}(A)$ $, \beta(\tilde{A}) = \beta(A)$ $, \operatorname{ind}(\tilde{A}) = \operatorname{ind}(A) + 1$.
Περίπτωση 2. $Cz_0 \neq 0$ $, Cz_0 \notin \boldsymbol{R}(A)$. Τότε έχουμε $\boldsymbol{N}(\tilde{A}) = \boldsymbol{N}(A)$ $, a(\tilde{A}) = a(A)$ $, \boldsymbol{R}(\tilde{A}) = \boldsymbol{R}(A) \oplus \{Cz_0\}$ $, \beta(\tilde{A}) = \beta(A) - 1$ $, \operatorname{ind}(\tilde{A}) = \operatorname{ind}(A) + 1$.
Περίπτωση 3. $Cz_0 \neq 0$ $, Cz_0 \in \boldsymbol{R}(A)$. Τότε, υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $Ax_0 = Cz_0$. Επομένως,

$$\tilde{A}(\lambda z_0 + x) = \lambda Cz_0 + Ax$$

Συνεπώς, $\boldsymbol{N}(\tilde{A}) = \boldsymbol{N}(A) \oplus \{z_0 - x_0\}$ $, a(\tilde{A}) = a(A) + 1$ $, \boldsymbol{R}(\tilde{A}) = \boldsymbol{R}(A)$ $, \beta(\tilde{A}) = \beta(A)$ $, \operatorname{ind}(\tilde{A}) = \operatorname{ind}(A) + 1$. Βλέπουμε ότι και στις τρεις περιπτώσεις τα συμπεράσματα του λήμματος ισχύουν. □

Ολοκληρώνουμε την ενότητα με κάποια ακόμα χρήσιμα αποτελέσματα.

Πρόταση 6.6.6. $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *αν και μόνο αν* $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *και* $A^* \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{Y}^*, \boldsymbol{X}^*)$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα (6.4.1) $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \implies A^* \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{Y}^*,\boldsymbol{X}^*)$ οπότε το ευθύ είναι άμεσο. Αντίστροφα τώρα, $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ και τότε η $\boldsymbol{R}(A)$ είναι κλειστή στον Y και $a(A) < \infty$. Επιπλέον, $A^* \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{Y}^*,\boldsymbol{X}^*) \implies \beta(A) = a(A^*) < \infty$. Επομένως $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$. □

Θεώρημα 6.6.7. *Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ και $B \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$ τότε $BA \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})$ και επιπλέον ισχύει η (6.12)*

Απόδειξη. Από το θεώρημα (6.6.2):

$$\|x\| \leq C_1\|Ax\| + |x|_1 \ , \ x \in X$$
$$\|y\| \leq C_2\|By\| + |y|_2 \ , \ y \in Y$$

όπου οι ημινόρμες $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ είναι σχετικά συμπαγείς στις νόρμες των X, Y αντίστοιχα. Ακόμα,

$$\|Ax\| \leq C_2\|BAx\| + |Ax|_2 \ , \ x \in X$$

και επομένως,

$$\|x\| \leq C_1C_2\|BAx\| + C_1|Ax|_2 + |x|_1 \ , \ x \in X$$

Επιπλέον η

$$|x|_3 = C_1|Ax|_2 + |x|_1$$

είναι ημινόρμα και σχετικά συμπαγής με την νόρμα του X. Άρα $BA \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})$ από το θεώρημα (6.6.2). Τέλος, $\operatorname{ind}(BA) < \infty$ γιατί αν $BA \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})$ τότε θα πρέπει $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ και $B \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$. Από την άλλη, αν $\operatorname{ind}(BA) = -\infty$ τότε ή $A \notin \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ ή $B \notin \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$ ή και τα δύο ταυτόχρονα. Αυτό σημαίνει ότι είτε $\operatorname{ind}(A) = -\infty$ είτε $\operatorname{ind}(B) = -\infty$, ή και τα δύο. Σε όλες τις περιπτώσεις, και τα δύο μέλη της σχέσης (6.12) είναι ίσα με $-\infty$. □

Θεώρημα 6.6.8. *Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ τότε*

$$\operatorname{ind}(A^*) = a(A^*) - a(A^{**}) = -\operatorname{ind}(A)$$

Ειδικότερα, $\operatorname{ind}(A^*) = \infty$, *αν* $A \notin \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$.

Θεώρημα 6.6.9. *Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ και $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, τότε $A+K \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ και ισχύει η σχέση (6.18)*

Απόδειξη. $A^* \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{Y}^*,\boldsymbol{X}^*)$ από την υπόθεση, και $K^* \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{Y}^*,\boldsymbol{X}^*)$. Επομένως, $A^* + K^* \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{Y}^*,\boldsymbol{X}^*)$ και

$$\operatorname{ind}(A^* + K^*) = \operatorname{ind}(A^*)$$

Επομένως $A + K \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ από τον ορισμό και η σχέση (6.18) ισχύει από το θεώρημα (6.4.1) □

Θεώρημα 6.6.10. *Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, τότε υπάρχει ένα $\eta > 0$ τέτοιο ώστε $\|T\| < \eta$ για $T \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, δίνει ότι $A+T \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, και ισχύουν οι σχέσεις (6.20) και (6.41).*

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι $T^* \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}^*,\boldsymbol{X}^*)$ και $\|T^*\| < \eta$. Επομένως $A^*+T^* \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{Y}^*,\boldsymbol{X}^*)$ για η αρκούντως μικρό και

$$\mathrm{ind}(A^*+T^*) = \mathrm{ind}(A^*)\ ,\ a(A^*+T^*) \le a(A^*)\ ,\ \beta(A^*+T^*) \le \beta(A^*)$$

. Αυτό μας οδηγεί στις ζητούμενες σχέσεις οπότε η απόδειξη έλαβε τέλος. □

Θεώρημα 6.6.11. *Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ και $B \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$, τότε $BA \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})$ και ισχύει η σχέση (6.12)*

Απόδειξη. Από τον ορισμό, $A^* \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y}^*,\boldsymbol{X}^*)$ και $B \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{Z}^*,\boldsymbol{Y}^*)$. Επομένως $(BA)^* = A^*B^* \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{Z}^*,\boldsymbol{X}^*)$ και

$$\mathrm{ind}[(BA)^*] = \mathrm{ind}(A^*) + \mathrm{ind}(B^*)$$

Από το θεώρημα (6.6.7), έχουμε $BA \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})$ και η σχέση (6.12) ισχύει. □

6.7 Γινόμενα τελεστών

Θεώρημα 6.7.1. *Αν $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ και $B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$ και $BA \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})$, τότε $B \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$.*

Απόδειξη. Εφόσον $\dim \boldsymbol{R}(BA)^\perp < \infty$, τότε υπάρχει υπόχωρος Z_0 τέτοιος $\dim Z_0 < \infty$ και $Z = \boldsymbol{R}(BA) \oplus Z_0$ από το λήμμα (6.1.3). Επιπλέον ισχύει $\boldsymbol{R}(B) \supset \boldsymbol{R}(BA)$, η $\boldsymbol{R}(B)$ είναι κλειστή σύμφωνα με το λήμμα (6.2.5) και $\boldsymbol{R}(B)^\perp \subset \boldsymbol{R}(BA)^\perp$. Επομένως $\dim \boldsymbol{R}(B)^\perp < \infty$. Συνεπώς, $B \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$. □

Θεώρημα 6.7.2. *Αν $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}), B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$ και $BA \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})$, τότε $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι $A^*B^* \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{Z}^*,\boldsymbol{X}^*)$, και επομένως από το θεώρημα (6.7.1) $A^* \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{Y}^*,\boldsymbol{X}^*)$ που σημαίνει ότι $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$. □

Για τα παρακάτω χρειάζεται να σημειώσουμε ότι ένας υπόχωρος ενός Banach χώρου λέγεται συμπληρωματικός, εάν έχει συμπληρωματικό. Ένας χώρος Banach μπορεί να περιέχει υπόχωρους που δεν είναι συμπληρωματικοί.

Θεώρημα 6.7.3. *Έστω $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ και η $\boldsymbol{R}(A)$ συμπληρωματική στον $\boldsymbol{Y}$, τότε υπάρχει $A_0 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ τέτοιος ώστε $A_0A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$*

Απόδειξη. Έστω P να είναι η φραγμένη προβολή από το Y στην $\boldsymbol{R}(A)$. Τότε υπάρχει $X_0 \subset X$ τέτοιος ώστε

$$X = X_0 \oplus \boldsymbol{N}(A)$$

Τότε ο A έχει φραγμένο ανάστροφο $\hat{A} : \boldsymbol{R}(A) \to X_0$. Έστω $A_0 = \hat{A}P$. Τότε, $A_0 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ και

$$A_0 A = \begin{cases} I & \text{στον } X_0 \\ 0 & \text{στον } \boldsymbol{N}(A) \end{cases}$$

Επομένως, $A_0 A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. □

Θεώρημα 6.7.4. *Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ με $\boldsymbol{N}(A)$ συμπληρωματική, τότε υπάρχει $A_0 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ τέτοιος ώστε $AA_0 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y})$.*

Απόδειξη. Υπάρχει $Y_0 \subset Y$ τέτοιος ώστε

$$Y = \boldsymbol{R}(A) \oplus Y_0$$

Έστω P να είναι η φραγμένη προβολή στον $\boldsymbol{R}(A)$ κατά μήκος του Y_0 και ο A_0 ορισμένος όπως και στο θεώρημα (6.7.3). Τότε

$$AA_0 = \begin{cases} I & \text{στον } \boldsymbol{R}(A) \\ 0 & \text{στον } Y_0 \end{cases}$$

Επομένως, $AA_0 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y})$ □

Θεώρημα 6.7.5. *Αν $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ και $BA \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$ τότε $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ και $B \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$. Ακόμα, οι $\boldsymbol{R}(A)$ και $\boldsymbol{N}(B)$ είναι συμπληρωματικοί.*

Απόδειξη. Από τα θεωρήματα (6.7.1) και (6.7.2) έχουμε το πρώτο σκέλος του θεωρήματος. Συνεπώς υπάρχει $X_0 \subset X$ τέτοιος ώστε

$$X = X_0 \oplus \boldsymbol{N}(A)$$

Έστω,

$$Y_1 = \boldsymbol{R}(A) \cap \boldsymbol{N}(B)\ , \quad X_1 = A^{-1}(Y_1) \cap X_0$$

Εφόσον $X_1 \subset \boldsymbol{N}(BA)$ τότε $\dim X_1 \le a(BA) < \infty$ και εφόσον ο A είναι ένα προς ένα από τον X_1 στον Y_1 έχουμε $\dim Y_1 = \dim X_1 < \infty$. Επομένως υπάρχουν υπόχωροι $Y_2 \subset \boldsymbol{R}(A)$ και $Y_3 \subset \boldsymbol{N}(B)$ τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{R}(A) = Y_1 \oplus Y_2\ ,\ \boldsymbol{N}(B) = Y_1 \oplus Y_3$$

Επίσης ξέρουμε ότι

$$Z = \boldsymbol{R}(BA) \oplus Z_0$$

όπου $\dim Z_0 < \infty$. Έστω $Z_4 = \boldsymbol{R}(B) \cap Z_0$. Τότε

$$\boldsymbol{R}(B) = \boldsymbol{R}(BA) \oplus Z_4$$

και υπάρχει $Z_5 \subset Z_0$ τέτοιος ώστε $Z_0 = Z_4 \oplus Z_5$. Συνεπώς

$$Z = \boldsymbol{R}(BA) \oplus Z_4 \oplus Z_5 \ , \ \boldsymbol{R}(B) = \boldsymbol{R}(BA) \oplus Z_4$$

Έστω τώρα, $z_1, \ldots, z_n$ να είναι μια βάση του Z_4. Τότε υπάρχουν $y_1, \ldots, y_n \in Y$ τέτοια ώστε

$$By_j = z_j \ , \ 1 \le j \le n$$

Έστω $Y_4 \subset Y$ που παράγεται από τα $y_1, \ldots, y_n$. Τότε $\dim Y_4 \le \dim Z_4 < \infty$. Έχουμε

$$Y_2 \cap \boldsymbol{N}(B) = \{0\} \ , \ Y_4 \cap \boldsymbol{N}(B) = \{0\} \ , \ Y_2 \cap Y_4 = \{0\}$$

Επομένως

$$\boldsymbol{N}(B) \cap [Y_2 \oplus Y_4] = \{0\}$$

Εφόσον $\dim Y_4 < \infty$ ο υπόχωρος $Y_2 \oplus Y_4$ είναι κλειστός σύμφωνα με το λήμμα (6.1.2). Έστω y ένα στοιχείο του Y, τότε $By \in \boldsymbol{R}(B) = \boldsymbol{R}(BA) \oplus Z_4$. Επομένως υπάρχουν $z_2 \in \boldsymbol{R}(BA)$, $z_4 \in Z_4$ τέτοια ώστε $By = z_2 + z_4$. Υπάρχουν $y_2 \in Y_2$, $y_4 \in Y_4$ τέτοια ώστε $By_2 = z_2$, $By_4 = z_4$. Τότε

$$B(y - y_2 - y_4) = By - z_2 - z_4 = 0$$

Επομένως, $y - y_2 - y_4 \in \boldsymbol{N}(B)$ και άρα

$$Y = Y_2 \oplus Y_4 \oplus \boldsymbol{N}(B)$$

Αυτό δείχνει ότι ο $\boldsymbol{N}(B)$ είναι συμπληρωματικός. Ακόμα,

$$Y = Y_2 \oplus Y_4 \oplus Y_1 \oplus Y_3 = Y_3 \oplus Y_4 \oplus \boldsymbol{R}(A)$$

το οποίο δείχνει ότι η $\boldsymbol{R}(A)$ είναι επίσης συμπληρωματική . $\square$

Μια συνέπεια του παραπάνω είναι και το επόμενο

Θεώρημα 6.7.6. *(i). Ένας τελεστής $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ ανήκει στο $\boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ με $\boldsymbol{R}(A)$ συμπληρωματική αν και μόνο αν υπάρχει τελεστής $A_0 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ τέτοιος ώστε $A_0 A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$.*

(ii). Ένας τελεστής $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ ανήκει στο $\boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ με $\boldsymbol{N}(A)$ συμπληρωματικό αν και μόνο αν υπάρχει τελεστής $A_0 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ τέτοιος ώστε $AA_0 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{Y})$.

Κεφάλαιο 7

Διαταραχές

7.1 Τελεστές Riesz

Έστω $\boldsymbol{X}$ να είναι ένας χώρος Banach και θεωρούμε την Banach άλγεβρα $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X})$. Γνωρίζουμε ότι $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ είναι το υποσύνολο των συμπαγών τελεστών που είναι κλειστό στην $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X})$. Έστω C να είναι ο χώρος $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X})/\boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ και με $[A]$ ορίζουμε το σύμπλεγμα του C που περιέχει τον A. Αν ορίσουμε

$$[A][B] = [AB] \tag{7.1}$$

τότε βλέπουμε ότι ο C είναι μια Banach άλγεβρα με βαθμωτό γινόμενο (complex Banach algebra) με το ουδέτερο στοιχείο να ορίζεται ως $[I]$. Ένα στοιχείο $[B]$ της C ονομάζεται *κανονικό* εάν υπάρχει στοιχείο $[B_0]$ τέτοιο ώστε

$$[BB_0] = [B_0B] = [I] \tag{7.2}$$

Στα επόμενα $p([A]) = \{\lambda \text{ βαθμωτό} : [A] - \lambda[I] \text{ κανονικό}\}$(resolvent του $[A]$). Επιπλέον, ορίζουμε το σύνολο $\boldsymbol{\Phi_A} = \{\lambda \in K(\subseteq \mathbb{R}) : \lambda I - A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}), A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})\}$.

Θεώρημα 7.1.1. $p([A]) = \boldsymbol{\Phi_A}$

Απόδειξη. Αν στην θέση του A βάλουμε τον $A + \lambda$ ανάγουμε το πρόβλημα στην ισοδυναμία, $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο αν $[A]$ κανονικό στοιχείο της C. Ξεκινάμε με το αντίστροφο, δηλαδή έστω $[A]$ κανονικό στην C, και τότε υπάρχει $[A_0]$ με $A_0 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ τέτοιο ώστε $[AA_0] = [A_0A] = [I]$ και $A_0A = I - K_1$, με $K_1 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ Ακόμα $AA_0 = I - K_2$ με $K_2 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$. Από το θεώρημα (6.2.6), καταλήγουμε στο ότι $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Για το ευθύ, υποθέτουμε ότι $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και τότε υπάρχει $A_0 \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ και $K_1, K_2 \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ τέτοιοι ώστε $A_0A = I - K_1$ και $AA_0 = I - K_2$, άρα $[A_0A] = [AA_0] = [I]$ επομένως είναι κανονικό στοιχείο της C. □

Για έναν χώρο Banach $\boldsymbol{X}$ καλούμε έναν τελεστή $E \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ *τελεστή Riesz* αν $E - \lambda \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ για όλα τα βαθμωτά $\lambda \neq 0$. Συμβολίζουμε το σύνολο των τελεστών Riesz με $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$.

Λήμμα 7.1.2. *$E \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο εάν $I + \lambda E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ για όλα τα βαθμωτά λ.*

Απόδειξη. Αν $E \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$, τότε $I + \lambda E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ ακόμα και για $\lambda = 0$. Διαφορετικά, $E + I/\lambda \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Επομένως, $I + \lambda E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Αντίστροφα, αν $\mu \neq 0$, τότε $\mu(I + E/\mu) \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}) \implies E + \mu \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. □

Από το θεώρημα (7.1.1) προκύπτει το επόμενο

Λήμμα 7.1.3. *$A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο αν $[A]$ αντιστρέψιμο στοιχείο της C*

Λήμμα 7.1.4. *$E \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο εάν $\|[E]^n\|^{1/n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Προκύπτει από το ότι $E \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο αν $\lambda \in \boldsymbol{\Phi_E}$ για όλα τα βαθμωτά $\lambda \neq 0$. Από το θεώρημα (7.1.1) αυτό ισχύει αν και μόνο αν $\lambda \in p([E])$. Από Gelfand[1] έχουμε το ζητούμενο. □

Για δύο τελεστές $A, B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ γράφουμε $A \smile B$ για να συμβολίσουμε το ότι $AB - BA \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$. Τότε $[A][B] = [B][A]$.

Λήμμα 7.1.5. *Αν $E \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ και $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$, τότε $E + K \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$*

Απόδειξη. Έχουμε $[E + K - \lambda] = [E - \lambda]$ □

Λήμμα 7.1.6. *Αν $E \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}), B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ και $B \smile E$, τότε EB και BE ανήκουν στο $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$*

Απόδειξη. Θα έχουμε $\|[EB]^n\|^{1/n} = \|[B]^n[E]^n\|^{1/n} \leq \|[B]\| \cdot \|[E]^n\|^{1/n} \to 0$, καθώς $n \to \infty$. □

Λήμμα 7.1.7. *Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ τότε υπάρχει $A_0 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ τέτοιος ώστε:*

$$[A_0 A] = [A A_0] = [I] \tag{7.3}$$

Απόδειξη. $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο αν $[A]$ κανονικό. Άρα τότε υπάρχει $A_0 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ με $[A_0 A] = [A A_0] = [I]$ □

Λήμμα 7.1.8. *Αν $E \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}), A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και $A \smile E$, τότε $A_0 + E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$.*

---

[1] $r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$, με $r(A) = \lim \|A^n\|^{1/n}$, όπου με $\sigma(A)$ συμβολίζεται το φάσμα του τελεστή A

Απόδειξη. Έχουμε $[A(E+A_0)] = [(E+A_0)A] = [EA+I]$. Εφόσον $EA \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ από το λήμμα (7.1.6), $EA+I \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$, και $[EA+I]$ είναι αντιστρέψιμο στην C. Επομένως το ίδιο ισχύει και για το $[E + A_0]$, το οποίο μας δείχνει ότι $E + A_0 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. $\square$

Λήμμα 7.1.9. *Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}), E \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$, και $A \smile E$, τότε και $A_0 \smile E$.*

Απόδειξη. Έχουμε $[A_0E] = [A_0EAA_0] = [A_0AEA_0] = [EA_0]$ $\square$

Αυτό μας οδηγεί στο παρακάτω,

Θεώρημα 7.1.10. *Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}), E \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ και $A \smile E$, τότε $A + E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι $A_0 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και $A_0 \smile E$ από τα λήμματα (7.1.7) και (7.1.9). Επομένως $A + E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ από το λήμμα (7.1.8). $\square$

Λήμμα 7.1.11. *Υποθέτουμε ότι $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και $E \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$.Τότε $\lambda E + A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ για όλα τα λ αν και μόνο αν $EA_0 \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Αν $\lambda E + A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$, τότε $[(\lambda E + A)A_0] = [A_0(\lambda E + A)] = [\lambda EA_0 + I]$ αντιστρέψιμο στον C. Επομένως $EA_0 \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$. Αντίστροφα, αν $EA_0 \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$, τότε $[\lambda EA_0 + I]$ αντιστρέψιμο για κάθε λ. Άρα και $\lambda E + A$ αντιστρέψιμο. $\square$

Λήμμα 7.1.12. *Υποθέτουμε ότι $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και $E \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$.Τότε $EA \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο εάν $AE \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Αν $EA \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ τότε $\lambda EA + I \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ για όλα τα λ. Επομένως και $\lambda E + A_0 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και $\lambda AE + I \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Άρα $AE \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$. Ακριβώς όμοια προκύπτει και το αντίστροφο. $\square$

Θεώρημα 7.1.13. *Ο τελεστής $E \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ ανήκει στο $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο αν $A + E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ για όλα τα $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ για τα οποία $A \smile E$.*

Απόδειξη. Έστω $E \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ και $A \smile E$, με $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Από το λήμμα (7.1.9) $A_0 \smile E$, και από το λήμμα (7.1.8) έχουμε ότι $A+E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Αντίστροφα, $A+E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ με $A \smile E$. Για $\lambda = A \neq 0$ έχουμε $\lambda + E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}) \implies E \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$. $\square$

Θεώρημα 7.1.14. *Αν $E_1, E_2 \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ και $E_1 \smile E_2$, τότε $E_1 + E_2 \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Αν $\lambda \neq 0$ τότε $\lambda + E_1 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Από το θεώρημα (7.1.10) $\lambda + E_1 + E_2 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ άρα και $E_1 + E_2 \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$. $\square$

7.2 Διαταραχές Fredholm

Θέτουμε με $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \{E \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}) : AE \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}) \ , \forall\ A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})\}$ και σημειώνουμε ότι σε μια Banach άλγεβρα $\boldsymbol{B}$ με ουδέτερο στοιχείο το e το $M \subset \boldsymbol{B}$ λέγεται right ideal αν $x\alpha \in M$ για $x \in M$ και $\alpha \in \boldsymbol{B}$. Λέγεται left ideal αν $\alpha x \in M$, για $x \in M$ και $\alpha \in \boldsymbol{B}$, ενώ two-sided ideal αν είναι και τα δύο.

Λήμμα 7.2.1. *Ο τελεστής $E \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο αν $I + AE \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ για όλα τα $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Το ευθύ προκύπτει αν στο λήμμα (7.1.2) βάλουμε $\lambda = 1$. Αντίστροφα, $I + AE \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$, δίνει ότι $[A_0 + E]$ αντιστρέψιμο και άρα $I + EA \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}) \implies EA \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$. Άρα για κάθε $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$, το $E \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$. □

Ο τελεστής $E \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ καλείται *διαταραχή Fredholm* αν $A + E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ για όλα τα $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$.

Θεώρημα 7.2.2. *$E \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο αν $A+E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ για όλα τα $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Επομένως το $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ συμπίπτει με το σύνολο των διαταραχών Fredholm .*

Απόδειξη. Αν $E \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ και $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$, τότε $A_0E \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ σύμφωνα με το λήμμα (7.1.2). Επομένως, $(I + A_0E) \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και συνεπώς $A(I + A_0E) \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ το οποίο μας δείχνει ότι $[A + E]$ αντιστρέφεται στον C. Άρα, $A + E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $A+E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ για όλα τα $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Έστω τότε, ο A να είναι ένας τελεστής στο $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και έχουμε ότι $\lambda A_0 + E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ για όλα τα $\lambda \neq 0$. Άρα και $A(\lambda A_0 + E) \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ για όλα τα $\lambda \neq 0$. Αυτό μας δείχνει ότι $[\lambda + AE]$ αντιστρέψιμο για κάθε $\lambda \neq 0$. Άρα, $AE \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$. Αφού αυτό ισχύει για όλα τα $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ θα έχουμε ότι $E \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$. □

Πρόταση 7.2.3. *Αν $E_1, E_2 \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, τότε $E_1 + E_2 \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. $E_1 + A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Αυτό δίνει ότι $E_1 + E_2 + A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}) \implies E_1 + E_2 \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$. □

Λήμμα 7.2.4. *Για κάθε $B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ υπάρχουν τελεστές $A_1, A_2 \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ τέτοιοι ώστε $B = A_1 + A_2$.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε λ αρκετά μεγάλο($\lambda > \|B\|$) και τότε $A_1 = \lambda + B$ αντιστρέψιμος και $A_2 = -\lambda I$. Για $B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}), B = A_1 + A_2$. □

Πρόταση 7.2.5. *Αν $E \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, τότε $BE \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ για όλα τα $B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Από το λήμμα (7.2.4), κάθε $B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή $B = A_1 + A_2$, με $A_j \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ $j = 1, 2$. Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ τότε $AA_jE \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$. Επομένως, $A_jE \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ και συνεπώς, $BE = A_1E + A_2E \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ από την πρόταση (7.2.3). □

Πρόταση 7.2.6. *Αν* $E \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$*, τότε* $EA \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ *για όλα τα* $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$*.*

Απόδειξη. Άμεσα προκύπτει από τον ορισμό του $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ και το λήμμα (7.1.12) □

Πρόταση 7.2.7. *Αν* $E \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ *, τότε* $EB \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ *για όλα τα* $B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$*.*

Απόδειξη. $B = A_1 + A_2$ με $A_j \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ $j = 1, 2$. Τότε $EA_1 + EA_2 \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ αφού $EA_j \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ και από την πρόταση (7.2.3) έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 7.2.8. *Αν* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ *με* $E_n \to E$ *και* $E \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ *τότε* $E \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$

Απόδειξη. Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ μπορούμε να επιλέξουμε n αρκετά μεγάλο ώστε $A-(E_n - E) \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ από το θεώρημα (6.3.2). Άρα, $A - (E_n - E) + E_n \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ από το θεώρημα (7.2.2). Καταλήγουμε λοιπόν, στο ότι $E \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$. □

Θεώρημα 7.2.9. *Το σύνολο* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ *είναι κλειστό και two-sided ideal.*

Απόδειξη. Το ότι είναι κλειστό προκύπτει από την πρόταση (7.2.8). Το ότι είναι two-sided ideal προκύπτει από τις προτάσεις (7.2.5) και (7.2.7) □

7.3 Διαταραχές semi-Fredholm

Έστω $\boldsymbol{X}$ να είναι χώρος Banach και το σύνολο $\boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$ να είναι οι semi-Fredholm τελεστές του χώρου $\boldsymbol{X}$.

Λήμμα 7.3.1. *Αν* P *είναι η προβολή στο* $\mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ *τέτοια ώστε* $\dim \boldsymbol{R}(P) < \infty$*, τότε υπάρχει σταθερά* C *τέτοια ώστε*

$$\|x\| \leq C \operatorname{dist}(x, \boldsymbol{R}(P)) \ , \quad x \in \boldsymbol{N}(P)$$

.

Απόδειξη. Σε διαφορετική περίπτωση θα υπάρχει μια ακολουθία $\{x_k\}_{k\geq 1} \subseteq \boldsymbol{N}(P)$ τέτοια ώστε

$$\|x_k\| = 1 \ , \ \operatorname{dist}(x_k, \boldsymbol{R}(P)) \to 0 \text{ καθώς } k \to \infty$$

Άρα υπάρχει ακολουθία $\{z_k\}_{k\geq 1} \subseteq \boldsymbol{R}(P)$ τέτοια ώστε $x_k - z_k \to 0$. Εφόσον, τα x_k είναι φραγμένα, το ίδιο θα ισχύει και για τα z_k. Συνεπώς υπάρχει υπακολουθία(για ευκολία θεωρούμε όλη την ακολουθία) τέτοια ώστε $z_k \to z \in \boldsymbol{R}(P)$. Ως εκ τούτου έχουμε, $x_k \to z$ και $Px_k \to Pz$. Αλλά $Px_k = 0, \forall\ k$, και $Pz = z$. Επομένως, $0 \to Pz = z$ και αυτό σημαίνει ότι $x_k \to 0$. Όμως $\|x_k\| = 1$,άτοπο. □

Θεώρημα 7.3.2. *Ο τελεστής $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ ανήκει στο $\boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο αν υπάρχει προβολή $P \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ με $\dim \boldsymbol{R}(P) < \infty$ και μια σταθερά C τέτοια ώστε:*

$$\operatorname{dist}(x, \boldsymbol{R}(P)) \leq C\|Ax\| \ , \ x \in \boldsymbol{N}(P) \tag{7.4}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$. Από τα λήμματα (1.3.4) και (6.1.1) υπάρχει $P \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ τέτοια ώστε $\boldsymbol{R}(P) = \boldsymbol{N}(A)$. Εφόσον η $\boldsymbol{R}(A)$ είναι κλειστή, υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$\operatorname{dist}(x, \boldsymbol{N}(A)) \leq C\|Ax\| \ , \quad x \in X$$

Επομένως,

$$\operatorname{dist}(x, \boldsymbol{R}(P)) = \operatorname{dist}([I-P]x, \boldsymbol{R}(P)) \leq C\|A(I-P)x\| = C\|Ax\| \ , x \in X$$

Αντίστροφα, αν η σχέση (7.4) ισχύει για $P \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$, τότε $\boldsymbol{N}(A) \subset \boldsymbol{R}(P)$. Συνεπώς, $a(A) < \infty$. Ακόμα,

$$\|(I-P)x\| \leq c \operatorname{dist}([I-P]x, \boldsymbol{R}(P)) \leq C\|A(I-P)x\|, \ x \in X$$

ή

$$\|x\| \leq C\|Ax\| + \|Px\| + C\|APx\| = C\|Ax\| + |x| \ , x \in X$$

όπου η $|\cdot|$ είναι η ημινόρμα η οποία είναι σχετικά συμπαγής με την νόρμα του X. Άρα $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$ από το θεώρημα (6.6.2). □

Θεώρημα 7.3.3. *Αν ο $A \notin \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$, τότε υπάρχουν ακολουθίες $\{x_k\}_{k\geq 1} \subseteq X$ και $\{f_k\}_{k\geq 1} \subseteq X^*$ τέτοιες ώστε:*

$$f_j(x_k) = \delta_{jk} \ , \quad \|f_k\| \cdot \|Ax_k\| < 2^{-k} \tag{7.5}$$

Απόδειξη. Για $k \geq 1$ υποθέτουμε ότι $x_1, \ldots, x_{k-1}, \ f_1, \ldots, f_{k-1}$ έχουν βρεθεί και θέτουμε

$$Px = \sum_{j=1}^{k-1} f_j(x) x_j \ , \quad x \in X$$

όταν $k > 1$ και $P = 0$ διαφορετικά. Τότε η P είναι η προβολή στον $\mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ με $\dim \boldsymbol{R}(P) < \infty$. Από το θεώρημα (7.3.2) υπάρχει ακολουθία $\{z_i\}_{i\geq 1} \subseteq \boldsymbol{N}(P)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\|Az_i\|}{\operatorname{dist}(z_i, \boldsymbol{R}(P))} \to 0 \ , \ \text{καθώς } i \to \infty$$

Επιλέγουμε $x_k \in \boldsymbol{N}(P)$ έτσι ώστε

$$\frac{\|Ax_k\|}{\operatorname{dist}(x_k, \boldsymbol{R}(P))} < 2^{-k}$$

και τότε υπάρχει $\hat{f}_k \in \boldsymbol{R}(P)^\perp$ τέτοιο ώστε

$$\|\hat{f}_k\| = 1 \ , \ \hat{f}_k(x_k) = \operatorname{dist}(x_k, \boldsymbol{R}(P))$$

Παίρνουμε, $f_k = \hat{f}_k / \operatorname{dist}(x_k, \boldsymbol{R}(P))$. Τότε $f_k \in \boldsymbol{R}(P)^\perp$ και

$$f_k(x_k) = 1 \ , \ \|f_k\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(x_k, \boldsymbol{R}(P))} < \frac{1}{2^k \|Ax_k\|}$$

Επαγωγικά παίρνουμε τις πλήρεις ακολουθίες. □

Μπορούμε να αποδείξουμε τώρα το παρακάτω,

Θεώρημα 7.3.4. *Ο τελεστής $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$, ανήκει στο $\boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο εάν $a(A-K) < \infty$ για όλους τους $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$ και $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$,τότε $A - K \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$ από το θεώρημα (6.6.3). Ειδικότερα, $a(A-K) < \infty$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $A \notin \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$. Τότε από το θεώρημα (7.3.3) υπάρχουν ακολουθίες $\{x_k\}_{k\geq 1}, \{f_k\}_{k\geq 1}$ που ικανοποιούν την σχέση (7.5). Ορίζουμε

$$K_n x = \sum_{1}^{n} f_k(x) A x_k \ , \ n = 1, 2, \ldots \tag{7.6}$$

Τότε ο K_n είναι πεπερασμένης διάστασης τελεστής και για $m < n$ έχουμε

$$\|(K_n - K_m)x\| \leq \sum_{m+1}^{n} \|f_k\| \cdot \|Ax_k\| \cdot \|x\| \leq \|x\| \sum_{m+1}^{n} 2^{-k}$$

το οποίο δείχνει ότι

$$\|K_n - K_m\| \to 0 \ , \ \text{καθώς } m, n \to \infty$$

Επομένως ο

$$Kx = \sum_{1}^{\infty} f_k(x) A x_k$$

είναι συμπαγής στον X. Τώρα, $Kx = Ax$ για x να είναι ίσο με οποιοδήποτε από τα x_k και συνεπώς για x ίσο με οποιοδήποτε γραμμικό συνδιασμό των x_k. Αφού τα x_k είναι γραμμικά ανεξάρτητα, προκύπτει ότι $a(A-K) = \infty$. □

Θεώρημα 7.3.5. *Ο τελεστής $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο εάν $a(A-K) < \infty$ και $\beta(A-K) < \infty$ για όλους τους $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$, τότε $A - K \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ για κάθε $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$. Συνεπώς, $a(A-K) < \infty, \beta(A-K) < \infty$ για κάθε $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ από το θεώρημα (6.3.1). Αντίστροφα, αν $a(A-K) < \infty$ για κάθε $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$,τότε $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$ από το θεώρημα (7.3.4). Αν επίσης, $\beta(A) < \infty$ τότε $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. □

Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X}) = \{E \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}) : A + E \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}) \ , \forall \ A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})\}$ να είναι οι semi-Fredholm διαταραχές.

Πρόταση 7.3.6. *Αν $E_1, E_2 \in \boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$, τότε $E_1 + E_2 \in \boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$*

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του $\boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$. □

Θεώρημα 7.3.7. *$E \in \boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο εάν $a(A-E) < \infty$ για όλους τους $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Αν $E \in \boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$ και $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$, τότε $A - E \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$ από τον ορισμό. Επομένως $a(A-E) < \infty$. Αντίστροφα, αν $A \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$ και $A - E \notin \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$, τότε υπάρχει $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ τέτοιος ώστε $a(A - E - K) = \infty$ από το θεώρημα (7.3.4). Θέτουμε τότε, $B = A - K$ και $B \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$, ενώ $a(B-E) = \infty$. Ως εκ τούτου, $E \notin \boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$. □

Θεώρημα 7.3.8. *$E \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο αν $a(A-E) < \infty$ για όλους τους $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Αν $E \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ και $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ τότε $A - E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ από το θεώρημα (7.2.2). Επομένως $a(A-E) < \infty$. Αντίστροφα, υποθέτουμε $a(A-E) < \infty$ για κάθε $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Έστω τότε, A ένας τελεστής στο $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και τότε $(A-K)/\lambda \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ για κάθε $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ και $\lambda \neq 0$.Επομένως $a(A - \lambda E - K) < \infty$ για όλα τα λ και για όλα τα $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$. Από το θεώρημα (7.3.4), $A - \lambda E \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Πιο συγκεκριμένα, αυτό ισχύει για $0 \leq \lambda \geq 1$. Από το θεώρημα (6.6.4) έχουμε, $\operatorname{ind}(A - \lambda E)$ είναι σταθερά για λ σε αυτό το διάστημα. Αν λοιπόν, $\beta(A-E) = \infty$ τότε $\beta(A) = \infty$. Όμως αυτό αντιβαίνει στην υπόθεση και επομένως $A - E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$, προκύπτει το ζητούμενο. □

Πρόταση 7.3.9. *$\boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X}) \subset \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$*

Λήμμα 7.3.10. *Αν $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$ και $E_k \to E$, τότε $E \in \boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα με αυτά στην απόδειξη της πρότασης (7.2.8). Όμως τώρα αντί για το θεώρημα (6.3.2) χρησιμοποιούμε το θεώρημα (6.6.4) □

Λήμμα 7.3.11. *Αν $E \in \boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$, τότε AE και EA ανήκουν στο $\boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$, για όλα τα $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και $C \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$, τότε $E + A_0 C \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$ από το θεώρημα (6.6.7). Επομένως $A(E + A_0 C) \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}) \implies AE + C \in \boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X}) \implies AE \in \boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$. Ακριβώς όμοια και για το γινόμενο EA. □

Λήμμα 7.3.12. *Αν $E \in \boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$, τότε τα BE και EB ανήκουν στο $\boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$ για όλα τα $B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Γράφουμε το $B = A_1 + A_2$, $A_j \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$, $j = 1, 2$. Από το λήμμα (7.3.11) έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 7.3.13. *Το $\boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$ είναι κλειστό two-sided ideal .*

Απόδειξη. Το ότι είναι κλειστό προκύπτει από το λήμμα (7.3.10). Επιπλέον από το λήμμα (7.3.11) το $\boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$ είναι two-sided ideal . □

Μπορούμε να καταλήξουμε σε παρόμοια αποτελέσματα με πριν θεωρώντας το σύνολο $\boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$.

Θεώρημα 7.3.14. *Αν $A \notin \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$, τότε υπάρχουν ακολουθίες $\{x_k\}_{k\geq 1} \subseteq \boldsymbol{X}$ και $\{f_k\}_{k\geq 1} \subseteq X^*$ τέτοιες ώστε:*

$$f_j(x_k) = \delta_{jk}, \|f_k\| = 1, \|x_k\| \leq a_k, \|x_k\| \cdot \|A^* f_k\| < 1/2^k \tag{7.7}$$

όπου τα a_k δίνονται από

$$a_1 = 2 \ , \ a_n = 2(1 + \sum_{1}^{n-1} a_k) \ , \ n = 2, 3, \ldots$$

Απόδειξη. Για $n > 0$ υποθέτουμε ότι $x_1, \ldots, x_{n-1}, \ f_1, \ldots, f_{n-1}$ έχουν βρεθεί και θέτουμε

$$Pf = \sum_{1}^{n-1} f(x_k) f_k$$

Από το θεώρημα (7.3.2) υπάρχει $f_n \in \boldsymbol{N}(P)$ τέτοιο ώστε

$$\|A^* f_n\| \leq \frac{\operatorname{dist}(f_n, \boldsymbol{R}(P))}{2^n a_n C_n}$$

όπου C_n τέτοιο ώστε

$$\operatorname{dist}(f, \boldsymbol{R}(P)) \leq \|f - Pf\| \leq C_n \|f\|$$

Συνεπώς,

$$\|A^* f_n\| \leq \frac{\|f_n\|}{2^n a_n}$$

Παίρνουμε $\|f_n\| = 1$ και υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $f_n(x) = 1,\ \|x\| \leq 2$. Θέτοντας

$$x_n = x - \sum_{1}^{n-1} f_k(x)x_k$$

έχουμε

$$\|x_n\| \leq \|x\|(1 + \sum_{1}^{n-1} \|x_k\| \leq a_n$$

από την υπόθεση. Ακόμα

$$f_n(x_n) = 1\ ,\ f_n(x_k) = 0\ ,\ 1 \leq k < n$$

από τον τρόπο που επιλέχθηκαν τα f_n και x_n. Ακόμα,

$$f_k(x_n) = x_k(x) - x_k(x) = 0\ ,\ 1 \leq k < n$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Το θεώρημα (7.3.14) μας οδηγεί στο παρακάτω

Θεώρημα 7.3.15. *Ο τελεστής $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ ανήκει στο $\boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$, αν και μόνο εάν $\beta(A-K) < \infty$ για όλα τα $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$ και $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$, τότε $A - K \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$ από το θεώρημα (6.6.9). Πιο συγκεκριμένα, $\beta(A-K) < \infty$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $A \notin \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες $\{x_k\}_{k\geq 1}, \{f_k\}_{k\geq 1}$ που ικανοποιούν την σχέση (7.7). Ορίζουμε

$$K_n x = \sum_{1}^{n} A^* f_k(x)x_k\ ,\ n = 1, 2, \ldots$$

Τότε ο K_n είναι πεπερασμένης διάστασης τελεστής και για $m < n$ έχουμε

$$\|(K_n - K_m)x\| \leq \sum_{m+1}^{n} \|A^* f_k\| \cdot \|x_k\| \cdot \|x\| \leq \|x\| \sum_{m+1}^{n} 2^{-k}$$

το οποίο δείχνει ότι

$$\|K_n - K_m\| \to 0 \text{ καθώς } m, n \to \infty$$

Επομένως ο

$$Kx = \sum_{1}^{\infty} A^* f_k(x)x_k$$

είναι συμπαγής τελεστής στον X. Άρα ο

$$K^*f = \sum_1^\infty f(x_k)A^*f_k$$

είναι συμπαγής τελεστής στον X^*. Πιο συγκεκριμένα $K^*f = A^*f$ για f να είναι ίσο με οποιοδήποτε από τα f_k, και οποιοδήποτε από τους γραμμικούς συνδιασμούς αυτών. Αφού τα f_k είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε $a(A^* - K^*) = \infty$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Ορίζουμε $\boldsymbol{F}_-(\boldsymbol{X}) = \{E \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}) : A + E \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})\ ,\forall\ A \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})\}$ για να ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο με κάποια επιπλέον αποτελέσματα.

Πρόταση 7.3.16. *Αν $E_1, E_2 \in \boldsymbol{F}_-(\boldsymbol{X})$ τότε $E_1 + E_2 \in \boldsymbol{F}_-(\boldsymbol{X})$.*

Θεώρημα 7.3.17. *$E \in \boldsymbol{F}_-(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο εάν $\beta(A - E) < \infty$ για όλα τα $A \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$*

Απόδειξη. Αν $E \in \boldsymbol{F}_-(\boldsymbol{X})$ και $A \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$, τότε $A - E \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$ από τον ορισμό, και επομένως $\beta(A-E) < \infty$. Αντίστροφα, έστω $A \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$ και $A - E \notin \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$, τότε υπάρχει $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ τέτοιος ώστε $\beta(A-E-K) = \infty$ από το θεώρημα (7.3.15). Θέτουμε $B = A - K$. Τότε $B \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$ ενώ $\beta(B - E) = \infty$. Άρα, $E \notin \boldsymbol{F}_-(\boldsymbol{X})$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Θεώρημα 7.3.18. *$E \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ να και μόνο εάν $\beta(A - E) < \infty$ για όλα τα $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$*

Απόδειξη. Αν $E \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ και $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$, τότε $A - E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Επομένως έχουμε $\beta(A - E) < \infty$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\beta(A - E) < \infty$ για κάθε $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$. Έστω A να είναι ένας τελεστής στο $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και τότε $(A - K)/\lambda \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ για κάθε $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$ και $\lambda \neq 0$. Άρα $\beta(A - \lambda E - K) < \infty$ για όλα τα λ και όλα τους $K \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{X})$. Από το θεώρημα (7.3.15), $A - \lambda E \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Πιο συγκεκριμένα, αυτό ισχύει για $0 \leq \lambda \leq 1$. Από το θεώρημα (6.6.4), έχουμε ότι ο $\operatorname{ind}(A - \lambda E)$ είναι σταθερά σε αυτό το διάστημα. Αν λοιπόν, $a(A - E) = \infty$ τότε $a(A) = \infty$. Όμως αυτό αντιβαίνει την υπόθεση. Επομένως $A - E \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και αφού αυτό ισχύει για κάθε $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$, έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 7.3.19. *$\boldsymbol{F}_-(\boldsymbol{X}) \subset \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$.*

Λήμμα 7.3.20. *Αν $\{E_k\}_{k\geq 1} \subseteq \boldsymbol{F}_-(\boldsymbol{X})$ και $E_k \to E$,τότε $E \in \boldsymbol{F}_-(\boldsymbol{X})$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα με αυτά στην απόδειξη της πρότασης (7.2.8). Όμως τώρα αντί για το θεώρημα (6.3.2) χρησιμοποιούμε το θεώρημα (6.6.4) $\square$

Λήμμα 7.3.21. *Αν* $E \in \boldsymbol{F}_-(\boldsymbol{X})$, *τότε τα* AE *και* EA *ανήκουν στο* $\boldsymbol{F}_-(\boldsymbol{X})$ *για όλα τα* $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$.

Απόδειξη. Αν $A \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ και $C \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$, τότε $E + A_0C \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$. Τότε, $A(E + A_0C) \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X}) \implies AE + C \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X}) \implies AE \in \boldsymbol{F}_-(\boldsymbol{X})$. Ακριβώς όμοια δείχνουμε και για το EA. □

Λήμμα 7.3.22. *Αν* $E \in \boldsymbol{F}_-(\boldsymbol{X})$, *τότε τα* BE *και* EB *ανήκουν στο* $\boldsymbol{F}_-(\boldsymbol{X})$ *για όλα τα* $B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$.

Απόδειξη. Γράφουμε τον B στην μορφή $B = A_1 + A_2$ με $A_j \in \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$, $j = 1, 2$ και άρα από το λήμμα (7.3.21) έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 7.3.23. *Το* $\boldsymbol{F}_-(\boldsymbol{X})$ *είναι κλειστό two-sided ideal.*

Απόδειξη. Το κλειστό προκύπτει από το λήμμα (7.3.20). Από το λήμμα (7.3.22) έχουμε το two-sided ideal. □

Σημειώνουμε ότι το σύνολο $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ δεν είναι ideal, και από το θεώρημα (7.2.9) το $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ είναι το μεγαλύτερο ideal σύνολο που περιέχει το $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$. Ακόμα οι τελεστές στο $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι κάθε ένας από αυτούς συμπεριφέρεται σαν διαταραχή Fredholm

Το θεώρημα (7.3.4) μας δείχνει ότι οι τελεστές στο $\boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$ δεν συμπίπτουν με τους συμπαγείς τελεστές σε κάποιον απειροδιάστατο υπόχωρο, και αυτή η ιδιότητα χαρακτηρίζει αυτούς τους τελεστές. Το θεώρημα (7.3.7), μας δείχνει ότι ένας τελεστής ανήκει στο $\boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο εάν δεν συμπίπτει με έναν $\boldsymbol{\Phi}_+(\boldsymbol{X})$ τελεστή σε κάποιο απειροδιάστατο υπόχωρο. Το θεώρημα (7.3.8), διατυπώνει ένα παρόμοιο επιχείρημα για το $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$. Τέλος το θεώρημα (7.3.15) δείχνει ότι $A \in \boldsymbol{\Phi}_-(\boldsymbol{X})$ αν και μόνο εάν ο A^* δεν συμπίπτει με τον συζυγή ενός συμπαγούς τελεστή σε κάποιον υπόχωρο άπειρης διάστασης του $\boldsymbol{X}^*$.

Παράρτημα

Ένα αποτέλεσμα της αλγεβρικής τοπολογίας είναι το παρακάτω

Θεώρημα. *(Borsuk antipodal) Έστω $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ να είναι πεπερασμένοι χώροι Banach με $\dim \boldsymbol{M} > \dim \boldsymbol{N}$ και έστω $\boldsymbol{S}_M = \{x \in \boldsymbol{M} : \|x\| = 1\}$ να είναι η μοναδιαία σφαίρα του $\boldsymbol{M}$. Έστω $A : \boldsymbol{S}_M \to \boldsymbol{N}$ να είναι μια συνεχής απεικόνιση που ικανοποιεί $A(-x) = -A(x)$ για κάθε $x \in \boldsymbol{S}_M$. Τότε υπάρχει ένα $x \in \boldsymbol{S}_M$ τέτοιο ώστε $A(x) = 0$.*

Παρακάτω θα αποδείξουμε τη γεωμετρική μορφή του θεωρήματος Hahn-Banach. Χρειαζόμαστε πρώτα, κάποιες έννοιες.Ένα συναρτησιακό $p(x)$ σε έναν διανυσματικό χώρο $\boldsymbol{X}$ λέγεται *υπογραμμικό* εάν ισχύουν τα παρακάτω:

(i). $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad x, y \in \boldsymbol{X}$

(ii). $p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad x \in \boldsymbol{X}, \alpha > 0$

Ξέρουμε ακόμα, ότι το $\boldsymbol{U}$ υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα $\boldsymbol{X}$, λέγεται κυρτό αν $\alpha x + (1-\alpha)y \in \boldsymbol{U}$. Η κλειστότητα του $\boldsymbol{U}$ είναι επίσης κυρτό σύνολο. Υποθέτουμε ότι το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $\boldsymbol{U}$, δηλαδή υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε όλα τα x με $\|x\| < \varepsilon$ ανήκουν στο $\boldsymbol{U}$. Για κάθε $x \in \boldsymbol{X}$ θέτουμε

$$p(x) = \inf_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha x \in U}} \alpha^{-1}$$

το οποίο καλείται *συναρτησιακό Minkowski* στο $\boldsymbol{U}$. Εφόσον το $\alpha x \in \boldsymbol{U}$, τότε για α αρκετά μικρό το $p(x)$ είναι πεπερασμένο. Επιπλεόν έχουμε το παρακάτω,

Λήμμα. *Το $p(x)$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες*

(i). $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad x, y \in X$

(ii). $p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad x \in X, \alpha > 0$

(iii). $p(x) < 1 \implies x \in U$

(iv). $p(x) \leq 1 \ \forall \ x \in U$

Απόδειξη. (i) Υποθέτουμε ότι $\alpha x \in U$ και $\beta y \in U$, όπου $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Εφόσον το U είναι κυρτό,

$$\frac{\alpha^{-1}\alpha x + \beta^{-1}\beta y}{\alpha^{-1} + \beta^{-1}} = \frac{x+y}{\alpha^{-1} + \beta^{-1}} \in U$$

Επομένως

$$p(x+y) \leq \alpha^{-1} + \beta^{-1}$$

Και αφού αυτό ισχύει για όλα τα $\alpha > 0$ τέτοια ώστε $\alpha x \in U$ και όλα τα $\beta > 0$ τέτοια ώστε $\beta y \in U$ έχουμε το ζητούμενο.
(ii) Σημειώνουμε αρχικά ότι $p(0) = 0$. Αν $\alpha > 0$, τότε

$$p(\alpha x) = \inf_{\substack{\beta > 0 \\ \alpha\beta x \in U}} \beta^{-1} = \alpha \inf_{\substack{r > 0 \\ rx \in U}} r^{-1} = \alpha p(x)$$

(iii) Υποθέτουμε ότι $p(x) < 1$. Τότε υπάρχει ένα $\alpha > 1$ τέτοιο ώστε $\alpha x \in U$. Εφόσον το U είναι κυρτό και $0 \in U$, βλέπουμε ότι $x \in U$.
(iv) $x \in U, 1x \in U$ και επομένως, $p(x) \leq 1$. □

Θεώρημα. *(Γεωμετρική μορφή Hahn-Banach) Αν $\boldsymbol{U}$ είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα $\boldsymbol{X}$ και $x_0 \in \boldsymbol{X}$ και $x_0 \notin \boldsymbol{U}$, τότε υπάρχει ένα $f \in \boldsymbol{X}^*$ τέτοιο ώστε:*

$$\operatorname{Re} f(x_0) \geq \operatorname{Re} f(x) \quad x \in \boldsymbol{U} \tag{1}$$

και $\operatorname{Re} f(x_0) \neq \operatorname{Re} f(x_1)$ για κάποια $x_1 \in \boldsymbol{U}$.

Απόδειξη. Εφόσιον το U είναι κλειστό και $x_0 \notin U$, υπάρχει ένα $\eta > 0$ τέτοιο ώστε $\|x - x_0\| < \eta \implies x \notin U$. Έστω $u_0 \in U$, και έστω V να είναι το σύνολο των αθροισμάτων της μορφής

$$v = u + y - u_0$$

όπου $u \in U$ και $\|y\| < \eta$. Το V είναι κυρτό σύνολο και ακόμα περιέχει όλα τα y της μορφής $\|y\| < \eta$. Επομένως το 0 είναι εσωτερικό του σημείο, και τότε το $p(x)$ συναρτησιακό Minkowski ορίζεται για το V.
Υποθέτουμε ότι ο X είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος και θέτουμε $w_0 = x_0 - u_0$. Για όλα τα διανύσματα της μορφής αw_0 ορίζουμε το γραμμικό συναρτησιακό

$$f(\alpha w_0) = \alpha p(w_0)$$

Για $\alpha > 0$, θα έχουμε $f(\alpha w_0) = p(\alpha w_0)$ (από το (ii)του προηγούμενου λήμματος). Για $\alpha < 0$ έχουμε

$$f(\alpha w_0) = \alpha p(w_0) \leq 0 \leq p(\alpha w_0)$$

Επομένως

$$f(\alpha w_0) \leq p(\alpha w_0) \quad \text{όπου } \alpha \text{ πραγματικός}$$

Οι ιδιότητες (i),(iv)του προηγούμενου λήμματος δείχνουν ότι το $p(x)$ είναι υπογραμμικό συναρτησιακό. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Hahn-Banach καταλήγουμε στο ότι υπάρχει συναρτησιακό $F(x)$ στον X τέτοιο ώστε

$$F(\alpha w_0) = \alpha p(w_0) \quad \alpha \text{ πραγματικός}$$

και

$$F(x) \leq p(x) \quad x \in X$$

Το συναρτησιακό $F(x)$ είναι φραγμένο, γιατί αν $x \in X$ τότε $y = \eta x/2\|x\|$ ικανοποιεί το ότι $\|y\| < \eta$ και επομένως ανήκει στο V. Επομένως $p(y) \leq 1$ από το προηγούμενο λήμμα και $F(y) \leq 1$ ή $F(x) \leq 2\eta^{-1}\|x\|$.
Ακόμα, $w_0 \notin V$ και επομένως

$$F(x_0) - F(u_0) = p(w_0) \geq 1 \tag{2}$$

Από την άλλη αν $u \in U$,τότε $u - u_0 \in V$ και επομένως

$$F(u) - F(u_0) \leq p(u - w_0) \leq 1$$

Άρα

$$F(x_0) \geq F(u) \quad u \in U$$

Αυτό μας δείνει τη ζητούμενη σχέση (1) στον πραγματικό διανυσματικό χώρο X. Η περίπτωση του μιγαδικόυ χώρου αντιμετωπίζεται ως εξής. Αρχικά αντιμετωπίζουμε τον X σαν πραγματικό χώρο και βρίσκουμε το $F(x)$ όπως και προηγουμένως. Τότε, θέτουμε

$$G(x) = F(x) - iF(ix)$$

και τότε το $G(x)$ είναι μιγαδικό φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό του X. Το γιατί ισχύει αυτό θα το δούμε στην παρατήρηση που ακολουθεί μετά το θεώρημα. Εφόσον, $\operatorname{Re} G(x) = F(x)$ τότε έχουμε πάλι την σχέση (1). Επιπλέον, από την σχέση (2) θα έχουμε άμεσα και το τελευταίο μέρος του θεωρήματος. □

Παρατήρηση. *Σε έναν μιγαδικό διανυσματικό χώρο υπάρχει σχέση μεταξύ του πραγματικού και του φανταστικού μέρους ενός γραμμικού συναρτησιακού. Ειδικά,*

$$f(ix) = \operatorname{Re} f(ix) = \operatorname{Re} if(x) = -\operatorname{Im} f(x)$$

Επομένως στην περίπτωσή μας, όπου $G(x) = F(x) - iF(ix)$ *για να δούμε ότι το* $G(x)$ *είναι γραμμικό, θα έχουμε*

$$G(ix) = F(ix) - iF(-x) = i[F(u) - iF(ix)] = iF(x)$$

Ακόμα δείχνουμε ότι είναι φραγμένο. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι για κάποιο πραγματικό συναρτησιακό p *στο* V *ισχύει :*

$$|G(x)| \leq p(x) \quad x \in X$$

Έχουμε ότι $p(x) \geq 0$ *για* $x \in X$ *και επιπλέον* $p(0) = 0$, *καθώς και*

$$p(0) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x)$$

Επομένως όταν $G(x) = 0$ *θα έχουμε το ζητούμενο. Αν τώρα,* $G(x) \neq 0$ *από την ταυτότητα* $G(x) = |G(x)|/e^{i\theta}$, *θα έχουμε*

$$|G(x)| = e^{-i\theta} G(x) = G(e^{-i\theta} x) = F(e^{-i\theta} x) \leq p(e^{-i\theta} x) = p(x)$$

Βιβλιογραφία

[1] Harro G. Heuser. *Functional Analysis*. John Wiley and Sons Ltd, 1982. ISBN: 0471280526,9780471280521.

[2] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Vol. 132. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] Vladimir Müller. *Spectral theory of linear operators: and spectral systems in Banach algebras*. Vol. 139. Springer Science & Business Media, 2007.

[4] Martin Schechter. *Principles of functional analysis*. 36. American Mathematical Soc., 2001.