



**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής &  
Βελτιστοποίησης

**Ανάπτυξη Εφαρμογής σε Excel για a Posteriori/a Priori Χρήση  
των Τεχνικών MCDM Promethee και AHP σε Προβλήματα  
Πολυκριτηριακής Βελτιστοποίησης με Εξελικτικούς  
Αλγορίθμους**

Διπλωματική Εργασία

**Έλενα Ζαννέτου**

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2020



## Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας αυτή την διπλωματική εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω καρδιάς τους ανθρώπους που με βοήθησαν κατά την διάρκεια αυτής και των σπουδών μου.

Αρχικά ευχαριστώ κι εκτιμώ τον επιβλέποντα καθηγητή, κύριο Κυριάκο Χ. Γιαννάκογλου για τον χρόνο, την καθοδήγηση, την υποστήριξη, την οργάνωση και την διάθεση του για βοήθεια κάθε στιγμή από την αρχή της εργασίας μέχρι το τέλος της. Είμαι ευγνώμων για την τεράστια μεταδिकότητα του και κυρίως τη διάθεση του να μου ενστερνίσει καινούριες γνώσεις και σκέψεις που ήταν το εφιαλτήριο της εργασίας αυτής αλλά και της ανάπτυξης εμπιστοσύνης καθ'ολη την διάρκεια της.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Δρ. Βαρβάρα Ασουτή για τον χρόνο και την ενέργεια που διέθεσε καθ'ολη την διάρκεια της εργασίας. Παρά το επιβαρυσμένο πρόγραμμα σε κάθε δυσκολία υπήρχε άμεση επικοινωνία και καθοδήγηση με υπομονή στα λάθη κι επιμονή για λύση σε κάθε πρόβλημα.

Θα ήθελα ακόμα να αναγνωρίσω την κρίσιμη συμβολή του Δρ. Δημήτρη Καψούλη, για την ώθηση που μου έδωσε στην αρχή της εργασίας και την προθυμία για βοήθεια κάθε φορά που τον χρειαζόμουν. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Κωνσταντίνος Καραγκούνης που απαντούσε άμεσα σε απορίες μου, επεξηγώντας με μεταδοτικότητα και ειλικρινές ενδιαφέρον.

Δεν θα μπορούσα να παραλείψω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην μητέρα μου Δήμα, τον πατέρα μου Νίκο και τον αδερφό μου Κυριάκο για την υποστήριξη και την δύναμη που μου έδιναν σε όλη την σταδιοδρομία μου. Όπως και τα ξαδέρφια μου Γιάννη κι Ορέστη για την ώθηση και στήριξη κατά την διάρκεια της εργασίας αυτής την δύσκολη περίοδο της καραντίνας. Ένα τεράστιο ευχαριστώ επίσης στις φίλες μου που ήταν πάντα εκεί για μένα.





**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**  
**Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών**  
**Τομέας Ρευστών**  
**Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής &**  
**Βελτιστοποίησης**

## **Ανάπτυξη Εφαρμογής σε Excel για a Posteriori/a Priori Χρήση των Τεχνικών MCDM Promethee και AHP σε Προβλήματα Πολυκριτηριακής Βελτιστοποίησης με Εξελικτικούς Αλγορίθμους**

Διπλωματική Εργασία

**Έλενα Ζαννέτου**

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2020

### **Περίληψη**

Στόχος αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η αποτελεσματική ένταξη των τεχνικών Promethee (Preference Ranking Organization METHod for Enrichment of Evaluations) κι AHP (Analytic Hierarchy Process) που σχετίζονται με διαδικασίες λήψης αποφάσεων, MCDM (Multi-Criteria Decision Making), σε προβλήματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης (Multi-Objective Optimization). Τα προβλήματα αυτά επιλύονται χρησιμοποιώντας εξελικτικούς αλγορίθμους (EA) με τη βοήθεια του λογισμικού EASY (Evolutionary Algorithm SYstem). Οι δύο τεχνικές εφαρμόζονται στα προβλήματα MOO εκ των υστέρων, 'a posteriori', και η τεχνική Promethee II και εκ των προτέρων, 'a priori'. Για την πρώτη περίπτωση, αναπτύχθηκε η εφαρμογή Promexcel στο εργαλείο Microsoft Excel, όπου ο λήπτης απόφασης εισάγει τις λύσεις του προβλήματος MOO, που προέκυψαν από τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, και τις προτιμήσεις του και υπολογίζεται η συνιστώμενη λύση κατ' αυτόν. Η εφαρμογή Promexcel παρουσιάζεται εκτενώς και χρησιμοποιείται για 'a posteriori' εφαρμογή των τεχνικών Promethee κι AHP σε μαθηματικά προβλήματα. Στη συνέχεια, οι τεχνικές εφαρμόζονται 'a posteriori' κι 'a priori' σε αεροδυναμικά προβλήματα που επιλύεται η βελτιστοποίηση της μορφής μιας μεμονωμένης αεροτομής. Για την 'a priori' εφαρμογή της Promethee II οι προτιμήσεις του λήπτη απόφασης ενσωματώνονται στη διαδικασία βελτιστοποίησης και υπολογίζεται ένα μέτωπο Pareto καθοδηγούμενο από αυτές.



**National Technical University of Athens**  
**School of Mechanical Engineering**  
**Fluids Department**  
**Parallel CFD & Optimization Unit**

## **Development of an Excel Application for the a Posteriori/A priori Implementation of the Multi-Criteria Decision Making Techniques Promethee and AHP in Evolutionary Algorithm Based Optimization**

Diploma Thesis by

**Elena Zannetou**

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, September 2020

### **Abstract**

The aim of this thesis is the effective integration of the Promethee (Preference Ranking Organization METHod for Enrichment of Evaluations) techniques and AHP (Analytical Hierarchy Process) related to decision-making processes, MCDM (Multi-Criterion Decision Making), in multi-objective optimization problems. These problems are solved using evolutionary algorithms (EA) by means of software EASY (Evolutionary Algorithm SYstem). The two techniques are applied to MOO problems in retrospect, 'a posteriori', and the Promethee II technique is also applied in advance, 'a priori'. For the first case, the Promexcel application was developed in the Microsoft Excel tool. The decision maker introduces the solutions of the MOO problem, resulting from the optimization process, and his preferences and Promexcel calculates the optimal solution for him. The Promexcel application is presented in detail and is used for the 'a posteriori' application of Promethee and AHP techniques in mathematical problems. Then, the Promethee techniques are applied 'a posteriori' and 'a priori' to aerodynamic problems that concern the optimization of the shape of an isolated airfoil. For the 'a priori' implementation of Promethee II, the decision maker's preferences are integrated into the optimization process and a Pareto front is calculated guided by them.

# Περιεχόμενα

<b>Βελτιστοποίηση με Εξελικτικούς Αλγόριθμους</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1 Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση</b> .....	<b>1</b>
<b>1.2 Εξελικτικοί Αλγόριθμοι</b> .....	<b>2</b>
1.2.1 Περιγραφή ενός Εξελικτικού Αλγόριθμου .....	2
<b>1.3 Λογισμικό EASY (Evolutionary Algorithm SYstem)</b> .....	<b>4</b>
<b>Τεχνικές MCDM</b> .....	<b>5</b>
<b>2.1 ‘A posteriori’ και ‘a priori’ εφαρμογή</b> .....	<b>5</b>
<b>2.2 Περιγραφή των τεχνικών MCDM</b> .....	<b>6</b>
<b>2.2 Οικογένεια Μεθόδων Promethee</b> .....	<b>7</b>
2.2.1 Περιγραφή της τεχνικής Promethee .....	8
2.2.2 Promethee I .....	14
2.2.3 Promethee II.....	15
2.2.4 Promethee III .....	15
2.2.5 Promethee IV .....	16
2.2.6 Promethee V.....	17
2.2.7 Το επίπεδο GAIA.....	18
2.2.8 Promethee VI .....	20
<b>2.3 Μέθοδος AHP</b> .....	<b>22</b>
2.3.1 Περιγραφή της τεχνικής AHP .....	22
2.3.2 Έλεγχος συνέπειας δεδομένων.....	24
<b>2.4 Αριθμητικό παράδειγμα των μεθόδων Promethee και AHP</b> .....	<b>25</b>
<b>Ανάπτυξη εφαρμογής σε Microsoft Excel για την ‘a posteriori’ εφαρμογή</b> .....	<b>33</b>
<b>3.1 Περιγραφή της εφαρμογής</b> .....	<b>33</b>
3.1.1 Εισαγωγή Δεδομένων .....	33
3.1.2 Αποτελέσματα.....	36
Περιλαμβάνει έναν πίνακα διαστάσεων $n \times n$ , του οποίου κάθε στοιχείο δείχνει αν η εναλλακτική λύση $i$ είναι καλύτερη, χειρότερη ή μη συγκρίσιμη σε σχέση με την εναλλακτική λύση $j$ σύμφωνα με τις σχέσεις 2.20,2.21 και 2.22 της.....	38
<b>3.2 ‘A posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών Promethee I, II και III σε μαθηματικά προβλήματα με τη χρήση του Promexcel</b> .....	<b>39</b>
3.2.1 Κυρτό μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων.....	40
3.2.2 Μη-Κυρτό μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων.....	46

<b>‘A posteriori’ και ‘a priori’ εφαρμογή των τεχνικών Promethee σε αεροδυναμικά προβλήματα .....</b>	<b>50</b>
<b>4.1 Διαδικασία της ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II .....</b>	<b>50</b>
<b>4.2 Βελτιστοποίηση της Μορφής μια Μεμονωμένης Αεροτομής.....</b>	<b>53</b>
4.2.1 A posteriori εφαρμογή των τεχνικών Promethee .....	55
4.2.2 ‘A priori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II.....	63
<b>Συμπεράσματα – Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη .....</b>	<b>73</b>
<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>75</b>



# Κεφάλαιο 1

## Βελτιστοποίηση με Εξελικτικούς Αλγόριθμους

### 1.1 Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση

Η βελτιστοποίηση είναι μια επιστήμη που απασχολεί πολλούς κλάδους όπως την οικονομία, την επιστημονική έρευνα κι έχει ιδιαίτερα ευρύ φάσμα εφαρμογών στη μηχανολογία. Αφορά την ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση ενός ή περισσότερων μεγεθών με ή χωρίς περιορισμούς. Τα προβλήματα βελτιστοποίησης μπορούν να διακριθούν σε προβλήματα ενός στόχου, SOO (Single Objective Optimization), και σε προβλήματα πολλών στόχων, MOO (Multi-Objective Optimization). Στην πρώτη κατηγορία, προκύπτει άμεσα η βέλτιστη λύση που είναι η καλύτερη τιμή της συνάρτησης κόστους αν πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή της συνάρτησης καταλληλότητας αν πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης. Αντίθετα, η δεύτερη κατηγορία προβλημάτων, που ανήκουν στην πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση, δίνουν αποτέλεσμα ένα σύνολο μη-κυριαρχούμενων λύσεων που συνθέτουν το μέτωπο Pareto.

Πιο συγκεκριμένα, ένα πρόβλημα MOO [1] περιλαμβάνει ένα σύνολο  $N$  παραμέτρων (μεταβλητές σχεδιασμού), ένα σύνολο  $k$  συναρτήσεων στόχων κι ένα σύνολο  $m$  περιορισμών. Οι συναρτήσεις στόχοι κι οι περιορισμοί είναι συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης. Στόχος του προβλήματος είναι:

$$\text{η ελαχιστοποίηση του } \vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x}))$$

$$\text{υπό τον περιορισμό } \vec{e}(\vec{x}) = e_1(\vec{x}), e_2(\vec{x}), \dots, e_m(\vec{x}) \leq \vec{0}$$

$$\text{όπου } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in X$$

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in Y$$

Καθεμία από τις  $N$  μεταβλητές σχεδιασμού μπορεί να έχουν κάτω  $x_{low}^i$  και άνω  $x_{upper}^i$  όρια, τα οποία καθορίζουν το πεδίο ορισμού τους. Σε προβλήματα όπου ο στόχος είναι η μεγιστοποίηση κάποιας ποσότητας  $q$  μπορεί να μετατραπεί σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης θεωρώντας  $f = -q$ .

Μια άλλη σημαντική διάκριση είναι μεταξύ των μεθόδων βελτιστοποίησης σε αιτιοκρατικές και στοχαστικές [2]. Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι χρησιμοποιούν παραγώγους των συναρτήσεων στόχων με βασικό πλεονέκτημα τη μεγάλη ταχύτητα σύγκλισης. Εγκλωβίζονται, όμως, εύκολα σε τοπικά ακρότατα, ανάλογα με την αρχική τους λύση, μη-οδηγώντας τελικά στο βέλτιστο αποτέλεσμα. Από την άλλη, οι στοχαστικές μέθοδοι, αν κι η σύγκλιση είναι πιο αργή, μπορούν να αντιμετωπίσουν το καθολικό ακρότατο ανεξάρτητα της αρχικοποίησης.

## 1.2 Εξελικτικοί Αλγόριθμοι

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (Evolutionary Algorithms – EA) [3] είναι ο βασικός εκπρόσωπος των στοχαστικών μεθόδων. Μιμούνται τη βιολογική εξέλιξη των ειδών που παρατηρήθηκε από τον Δαρβίνο [4]. Σύμφωνα με τη θεωρία του, τα καλύτερα άτομα ενός πληθυσμού έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα για αναπαραγωγή και διαίωσιση. Τα γονίδια αυτών των ατόμων μεταφέρονται στις επόμενες γενιές και ο συνδυασμός καλών χαρακτηριστικών από διαφορετικούς επιτυχημένους γονείς ενδέχεται να οδηγήσει στη δημιουργία απογόνων με καλύτερα χαρακτηριστικά από αυτά των γονέων. Με αυτόν τον τρόπο, οι φυσικοί πληθυσμοί εξελίσσονται και προσαρμόζονται στο εκάστοτε περιβάλλον.

Αντίστοιχα, ένας EA παράγει πληθυσμούς υποψήφιων λύσεων, ελέγχεται η καταλληλότητα τους μέσω κατάλληλης συνάρτησης στόχου και οι λύσεις που έχουν τις χαμηλότερες ή τις υψηλότερες τιμές (ανάλογα με το αν τα προβλήματα είναι ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης) συμμετέχουν περισσότερο στην εξέλιξη που πραγματοποιείται μέσω εξελικτικών τελεστών όπως η μετάλλαξη, η αναπαραγωγή, η γονιδιακή διασταύρωση και η φυσική επιλογή.

### 1.2.1 Περιγραφή ενός Εξελικτικού Αλγόριθμου

Οι EA χρησιμοποιούν τρεις πληθυσμούς σε κάθε γενιά  $g$ :

- το σύνολο γονέων  $S^{g,\mu}$  αντιπροσωπεύει τον πληθυσμό  $\mu$  γονέων της γενιάς  $g$  που διασταυρώνεται για να δώσει τους απογόνους της επόμενης γενιάς  $g + 1$ ,
- το σύνολο απογόνων  $S^{g,\lambda}$  αντιπροσωπεύει τον πληθυσμό απογόνων της γενιάς  $g$  από τους οποίους επιλέγονται οι  $\mu$  κατάλληλες υποψήφιες λύσεις για το σύνολο γονέων της ίδιας γενιάς, και
- το σύνολο επίλεκτων ή elite  $S^{g,\varepsilon}$ , αντιπροσωπεύει τον πληθυσμό  $\varepsilon$  επίλεκτων που αποτελούν τις καλύτερες λύσεις που έχουν προκύψει κατά τη διαδικασία της εξέλιξης μέχρι και τη γενιά  $g$ . Αυτοί χρησιμοποιούνται για την ενίσχυση των καλών χαρακτηριστικών των μελών της νέας γενιάς  $g + 1$  και παρέχουν τις βέλτιστες λύσεις όποια στιγμή σταματήσει ο εξελικτικός αλγόριθμος.

Η διαδικασία ενός εξελικτικού αλγορίθμου παρουσιάζεται στα ακόλουθα βήματα [5]:

**Βήμα 1 - Αρχικοποίηση:** Για την μηδενική γενιά  $g=0$ , γίνεται επιλογή των μεγεθών  $\mu$ ,  $\lambda$  των πληθυσμών των γονέων και των απογόνων αντίστοιχα και γίνεται τυχαία αρχικοποίηση του πληθυσμού  $\lambda$  της μηδενικής γενιάς εντός των ορίων μέσα στα οποία πρέπει να βρίσκονται οι μεταβλητές σχεδιασμού που συνθέτουν κάθε πιθανή λύση. Επίσης επιλέγεται η κωδικοποίηση των μεταβλητών σχεδιασμού (binary coding ή real coding) και ο τύπος των εξελικτικών τελεστών που θα εφαρμοστεί.

**Βήμα 2 - Αξιολόγηση:** Το σύνολο των απογόνων  $S^{g,\lambda}$  αξιολογείται με το κατάλληλο λογισμικό αξιολόγησης και για κάθε άτομο του αποδίδεται μία βαθμωτή τιμή  $\Phi$ .

Για κάθε διάνυσμα μεταβλητών σχεδιασμού εκτελείται το πρόγραμμα αξιολόγησης, που έχει οριστεί από τον χρήστη, και δίνεται ως αποτέλεσμα το διάνυσμα τιμών των συναρτήσεων στόχων. Στην περίπτωση προβλήματος με περιορισμούς, αυτοί πρέπει να υπολογισθούν και να συμπεριληφθούν στις συναρτήσεις-στόχων.

Το διάνυσμα τιμών των συναρτήσεων στόχων μετασχηματίζεται σε ένα βαθμωτό κόστος  $\Phi$ . Σε ένα πρόβλημα SOO, η τιμή  $\Phi$  ταυτίζεται με την τιμή της συνάρτησης. Στην περίπτωση προβλήματος MOO χρησιμοποιούνται τεχνικές με κριτήρια κυριαρχίας όπως η SPEA κι η NSGA.

**Βήμα 3 - Ανανέωση πληθυσμού επίλεκτων:** Ανανεώνεται το σύνολο των επίλεκτων  $S^{g,\varepsilon}$  με όσα μέλη του πληθυσμού απογόνων  $S^{g,\lambda}$  έχουν καλύτερες τιμές  $\Phi$ , με κριτήριο το χαμηλότερο βαθμωτό κόστος.

**Βήμα 4 - Ελιτισμός:** Επιλέγονται άτομα από τον πληθυσμό επίλεκτων  $S^{g,\varepsilon}$  για την αντικατάσταση μερικών ατόμων από τον πληθυσμό απογόνων  $S^{g,\lambda}$ . Είναι επικρατέστερο να αντικαθίστανται απόγονοι με κακές αποδόσεις έτσι ώστε να μην υπάρχει περίπτωση στη νέα γενιά να βρεθούν χειρότερες λύσεις από ότι στην προηγούμενη.

**Βήμα 5 - Επιλογή γονέων:** Εφαρμόζοντας τον τελεστή επιλογής γονέων, σχηματίζεται ο νέος πληθυσμός γονέων  $S^{g+1,\mu}$ . Στη διαδικασία αυτή συμμετέχουν το σύνολο απογόνων  $S^{g,\lambda}$  και το σύνολο γονέων  $S^{g,\mu}$ , με το τελευταίο σε κάποιες διατυπώσεις να παραλείπεται.

**Βήμα 6 - Αναπαραγωγή:** Η διαδικασία της αναπαραγωγής δημιουργεί την επόμενη γενιά απογόνων  $S^{g+1,\lambda}$ . Επιλέγονται δύο ή παραπάνω γονείς από το σύνολο  $S^{g+1,\mu}$ , οι οποίοι μέσω των τελεστών διασταύρωσης και μετάλλαξης παράγουν ένα νέο απόγονο.

**Βήμα 7 - Έλεγχος Σύγκλισης:** Ελέγχεται αν πληρούται το κριτήριο τερματισμού, δηλαδή αν οι αξιολογήσεις έχουν φτάσει στο μέγιστο αριθμό ή αν η διαδικασία έχει συγκλίνει αδυνατώντας να παράξει καλύτερες λύσεις από τις τρέχουσες, για έναν λογικό αριθμό τελευταίων γενεών. Αν πληρούται, η διαδικασία σταματά, αλλιώς επιστρέφει στο βήμα 2 με τους απόγονους της νέας γενιάς  $g + 1$ .

### **1.3 Λογισμικό EASY (Evolutionary Algorithm SYstem)**

Στη διπλωματική εργασία, η βελτιστοποίηση με χρήση EA υλοποιήθηκε με τη χρήση του λογισμικού EASY[6]. Το λογισμικό EASY είναι ένα γενικής χρήσης λογισμικό βελτιστοποίησης το οποίο αναπτύχθηκε στη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής & Βελτιστοποίησης του Τομέα Ρευστών του Ε.Μ.Π. και μπορεί να επιλύσει προβλήματα ενός ή πολλών στόχων με ή χωρίς περιορισμούς. Το λογισμικό EASY μπορεί να υποστηρίξει τόσο στοχαστικές όσο και αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης και το συνδυασμό τους. Χρησιμοποιεί πραγματική, δυαδική ή δυαδική Gray κωδικοποίηση και τις μεθόδους SPEA και NSGA. Επιπλέον, παρέχει εργαλεία για τη μείωση χρόνου και κόστους βελτιστοποίησης. Επιτρέπει την πολυεπίπεδη βελτιστοποίηση, την παράλληλη επεξεργασία, τη χρήση κατανεμημένων EA (Distributed Evolutionary Algorithms, DEA) και τη χρήση μεταπροτύπων αξιολόγησης (Metamodel-assisted EAs, MAEAs) που εκπαιδεύονται κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης.

## Κεφάλαιο 2

### Τεχνικές MCDM

Για τη διαδικασία λήψης αποφάσεων στην πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση έχει αναπτυχθεί ο κλάδος MCDM (Multiple Criteria Decision Making) με πολλές και διαφορετικές μεταξύ τους τεχνικές. Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται η 'a priori' κι η 'a posteriori' εφαρμογή τους κι αναλύονται η οικογένεια τεχνικών Promethee κι η τεχνική AHP που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια.

#### 2.1 'A posteriori' και 'a priori' εφαρμογή

Ένα πρόβλημα MOO αποτελείται από διαφορετικούς κι αντικρουόμενους στόχους-κριτήρια. Κάθε κριτήριο όμως έχει διαφορετική βαρύτητα για τον DM (Decision Maker) και, συνεπώς, κάθε υποψήφια λύση του μετώπου Pareto διαφορετική καταλληλότητα. Με την εφαρμογή των τεχνικών MCDM μπορεί να επιλεγεί η βέλτιστη λύση ή ένα σύνολο βέλτιστων λύσεων που να ανταποκρίνονται στις προτιμήσεις του.

Δύο τρόποι που μπορούν να εφαρμοστούν οι τεχνικές MCDM είναι 'εκ των υστέρων' ('a posteriori') και 'εκ των προτέρων' ('a priori') [7]. Για την 'a posteriori' εφαρμογή οι προτιμήσεις του DM λαμβάνονται υπόψη μετά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Χρησιμοποιώντας EAs αποκτάται το μέτωπο Pareto. Γνωρίζοντας πλέον τις προτιμήσεις του DM, χρησιμοποιείται η τεχνική MCDM 'εκ των υστέρων' για την ανάδειξη της κατ' αυτόν βέλτιστης λύσης. Για την 'a priori' εφαρμογή, οι προτιμήσεις του DM είναι γνωστές πριν τη διαδικασία της βελτιστοποίησης κι ενσωματώνονται σε αυτήν. Χρησιμοποιούνται πάλι EAs για τον υπολογισμό του Pareto. Όμως, η τιμή  $\Phi$ , με την οποία βαθμολογούνται τα άτομα όπως αναφέρθηκε στο βήμα 2 των EA, υπολογίζεται με την τεχνική MCDM, αντί λ.χ. της SPEA. Επομένως, η τεχνική MCDM επηρεάζει την επιλογή γονέων και καθοδηγεί το μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων στις περιοχές προτίμησης του DM.

## 2.2 Περιγραφή των τεχνικών MCDM

Οι τεχνικές MCDM χρησιμοποιούν ως δεδομένα τον **πίνακα απόφασης** και τις προτιμήσεις του DM. Πίνακας απόφασης (decision matrix) ονομάζεται ένας πίνακας **A** διαστάσεων  $n \times k$ , όπου  $n$  ο αριθμός των πιθανών εναλλακτικών λύσεων του προβλήματος και  $k$  ο αριθμός των εμπλεκόμενων στο πρόβλημα συναρτήσεων στόχων-κριτηρίων. Κάθε στοιχείο του δείχνει την επίδοση του σεναρίου  $i$  για κάθε κριτήριο  $j$ ,

$$A = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_k(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & \cdots & f_k(x_n) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Οι προτιμήσεις του DM ως προς τα διάφορα κριτήρια συνήθως ποσοτικοποιούνται με **βάρη**. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή ενός βάρους, τόσο μεγαλύτερη σημασία έχει για τον DM το αντίστοιχο κριτήριο. Όπως ήδη αναφέρθηκε, στην περίπτωση εφαρμογής των τεχνικών ‘a posteriori’ σε προβλήματα MOO, επιλέγεται η μία βέλτιστη, κατά τον DM, λύση. Αντίθετα, στην περίπτωση της εφαρμογής των τεχνικών ‘a priori’, κατά την εξέλιξη, προωθούνται διαρκώς λύσεις που ταιριάζουν περισσότερο στις προτιμήσεις του DM, ώστε τελικά να προκύψει ένα πιο εξειδικευμένο μέτωπο Pareto. Στην πρώτη περίπτωση, ο πίνακας απόφασης αποτελείται από τις επιδόσεις των λύσεων του μετώπου Pareto ενώ, στη δεύτερη, ο πίνακας απόφασης είναι οι επιδόσεις των λύσεων κάθε γενιάς του EA. Παρακάτω παρουσιάζονται οχτώ από τις πολλές τεχνικές MCDM που έχουν αναπτυχθεί για να αναδείξουν τη λύση ή το σύνολο των λύσεων που ανταποκρίνεται καλύτερα στις προτιμήσεις του DM:

- COPRAS (multi-criteria COmplex PROportional ASsessment method) [8]: Κάθε εναλλακτική λύση βαθμολογείται αντιστρόφως ανάλογα του αθροίσματος των επιδόσεων της στα κριτήρια που την αφορούν. Προτεραιότητα δίνεται στις λύσεις με τις μεγαλύτερες τιμές.
- TOPSIS [9]: Χρησιμοποιεί δύο σημεία αναφοράς στο χώρο των συναρτήσεων στόχων, αυτό που έχει ως συντεταγμένες τις καλύτερες τιμές του πίνακα απόφασης πολλαπλασιασμένου με τα βάρη και αυτό που έχει ως συντεταγμένες τις χειρότερες. Η Ευκλείδεια απόσταση των σημείων των πιθανών λύσεων από τα σημεία αυτά καθορίζει την κατάταξη των λύσεων του προβλήματος MOO.

- VIKOR (ViseKriterijuska Optimizacija I Komoromisno Resenje) [10]: Οι εναλλακτικές λύσεις κατατάσσονται με βάση την απόστασή τους από την ιδανική λύση. Ιδανική ονομάζεται η υποθετική λύση που συνδυάζει τις βέλτιστες τιμές κάθε κριτηρίου. Υπολογίζονται τρεις διαφορετικοί δείκτες που σχετίζονται με την απόσταση κάθε λύσης από την ιδανική. Προτεραιότητα δίνεται στις λύσεις με τις μικρότερες τιμές των τριών δεικτών.
- PROMETHEE (Preference Ranking Organization METHod for Enrichment of Evaluations) [11]: Η μέθοδος θα περιγραφεί αναλυτικά σε επόμενη ενότητα.
- ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisant la REalité I) [12] Μέθοδος σχέσης υπεροχής που οι λύσεις εξετάζονται μέσω ενός πίνακα συμφωνίας κι ενός πίνακα διαφωνίας.
- AHP (Analytic Hierarchy Process) [13]: Η μέθοδος θα περιγραφεί αναλυτικά σε επόμενη ενότητα.
- UTA (Utilité Additive) [14]: Σκοπός της είναι να εκτιμά μία συνάρτηση χρηστικότητας για κάθε κριτήριο με χρήση γραμμικού προγραμματισμού. Με τον μέσο όρο αυτών εκτιμάται επιπλέον η καθολική συνάρτηση συνάρτηση χρηστικότητας.

Οι μέθοδοι TOPSIS και ELECTRE έχουν εξεταστεί εκτενώς σε προηγούμενη διπλωματική εργασία[15] και τώρα θα εξεταστούν οι μέθοδοι Promethee και AHP.

## 2.2 Οικογένεια Μεθόδων Promethee

Η οικογένεια των μεθόδων PROMETHEE (Preference Ranking Organization METHod for Enrichment of Evaluations) προτάθηκε πρώτα από τους Brans και Vincke το 1982 και εξελίχθηκε έπειτα από τους Brans και Mareschal [16]. Ανήκει στην κατηγορία **μεθόδων σχέσεων υπεροχής** (outranking value methods). Συγκρίνει ανά ζεύγος τις εναλλακτικές λύσεις για κάθε κριτήριο του πολυκριτηρίου προβλήματος. Περιέχει δύο στάδια:

- εκτίμηση μιας σχέσης υπεροχής
- εκμετάλλευση της σχέσης υπεροχής.

Στο πρώτο στάδιο μέσω της συνάρτησης προτίμησης υπολογίζεται, για κάθε ζεύγος λύσεων, ένας **βαθμός προτίμησης** για κάθε κριτήριο κι έπειτα ένας **ολικός βαθμός προτίμησης** για όλα τα κριτήρια. Στο δεύτερο στάδιο υπολογίζονται τόσο θετικές, όσο και αρνητικές ροές προτίμησης για κάθε εναλλακτική λύση. Η θετική ροή εκφράζει τον βαθμό στον οποίο μία εναλλακτική λύση κυριαρχεί επί άλλων, ενώ η αρνητική το βαθμό στον οποίο κυριαρχείται. Για το δεύτερο στάδιο, αρχικά προτάθηκαν οι Promethee I (μερική κατάταξη λύσεων) και Promethee II (ολική κατάταξη λύσεων) το 1982. Το 1984 διατυπώθηκαν οι Promethee III

(ολική κατάταξη λύσεων μέσω διαστημάτων) και Promethee IV (για συνεχή εναλλακτικά σύνολα λύσεων). Η οικογένεια εμπλουτίστηκε με την Promethee V [17] (με περιορισμούς τμηματοποίησης), την Promethee VI (εργαλείο ανάλυσης ευαισθησίας) [18] και την γραφική απεικόνιση GAIA.

**Πίνακας 2-1.** Η οικογένεια μεθόδων Promethee

Promethee I	Δίνει μια μερική κατάταξη των εναλλακτικών λύσεων, κρίνοντας τα ζεύγη ως προτεινόμενα, αδιάφορα και ασύγκριτα.
Promethee II	Δίνει μία ολική κατάταξη των εναλλακτικών λύσεων από την πιο αποδοτική στη λιγότερο.
Promethee III	Δίνει μία ολική κατάταξη των εναλλακτικών λύσεων, επεκτείνοντας την έννοια της αδιαφορίας με ένα διάστημα προτίμησης.
Promethee IV	Δίνει μία μερική ή ολική κατάταξη για συνεχή σύνολα εναλλακτικών λύσεων.
Promethee V	Δίνει ένα σύνολο εναλλακτικών με την επιλογή εισαγωγής περιορισμών μετά την εφαρμογή της Promethee II/IV.
Promethee VI	Είναι ένα εργαλείο ανάλυσης ευαισθησίας του προβλήματος
GAIA	Γραφική απεικόνιση του προβλήματος απόφασης

### 2.2.1 Περιγραφή της τεχνικής Promethee

Με δεδομένο έναν πίνακα απόφασης θα παρουσιαστούν τα βήματα που ακολουθεί η μέθοδος PROMETHEE. Από τον DM ζητούνται τα βάρη για την προτίμηση κάθε κριτηρίου και η επιλογή ενός τύπου συνάρτησης προτίμησης από τις προτεινόμενες της μεθόδου που αναλύονται στο Βήμα 2. Για τα βάρη ισχύει:

$$\sum_{j=1}^k w_j = 1 \quad (2.2)$$

**Βήμα 1:** Δημιουργία του πίνακα διαφορών  $D_j$  διαστάσεων  $n \times n$  για κάθε κριτήριο  $j$ . Έστω ότι μία λύση  $\alpha$  κι μία λύση  $\beta$  είναι ένα ζεύγος λύσεων από τα πιθανά σενάρια-λύσεις τα οποία συγκρίνονται. Τα στοιχεία του κάθε πίνακα δείχνουν τη διαφορά  $d_j^{a,b}$  των λύσεων  $\alpha, \beta$  για κάθε κριτήριο  $j$ :



$$d_j^{a,b} = f_j(\alpha) - f_j(\beta) \quad (2.3)$$

Οπότε προκύπτουν  $j$  πίνακες διαφορών:

$$D_j = \begin{bmatrix} 0 & d_{1,2} & \cdots & d_{1,n} \\ d_{2,1} & 0 & \cdots & d_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n,1} & d_{n,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

**Βήμα 2:** Δημιουργία του πίνακα  $P_j$  διαστάσεων  $n \times n$  για κάθε κριτήριο  $j$ , του οποίου τα στοιχεία δείχνουν τις τιμές της συνάρτησης προτίμησης  $P$ . Πρόκειται για την αναγωγή των διαφορών  $d_j^{a,b}$  σε μια κοινή κλίμακα μέτρησης. Συγκρίνοντας τις δύο εναλλακτικές λύσεις  $\alpha, \beta$ , για κάθε κριτήριο  $j$ , ορίζεται η **συνάρτηση προτίμησης  $P$**  ως εξής:

$$P(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{αν } f(\alpha) \leq f(\beta), \\ p[f(\alpha), f(\beta)] & \text{αν } f(\alpha) > f(\beta) \end{cases} \quad (2.5)$$

$$0 \leq P(\alpha, \beta) \leq 1 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} p[f(\alpha), f(\beta)] &= d_j^{a,b}, & \text{για πρόβλημα μεγιστοποίησης} \\ p[f(\alpha), f(\beta)] &= -d_j^{a,b}, & \text{για πρόβλημα ελαχιστοποίησης} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Εκφράζει τον βαθμό προτίμησης του DM για τη λύση  $\alpha$  έναντι της λύσης  $\beta$  για κάθε κριτήριο. Όσο πιο μικρός είναι ο αριθμός που λαμβάνει η συνάρτηση, τόσο πιο αδιάφορη είναι η λύση κι όσο πιο πολύ πλησιάζει στο 1 τόσο προτιμάται. Ο αριθμός 0 δείχνει **αδιαφορία** κι ο αριθμός 1 αυστηρή-σαφή προτίμηση.

Ορίστηκαν 6 τύποι γενικευμένου κριτηρίου για τον υπολογισμό της. Για κάθε κριτήριο ορίζονται το πολύ δύο παράμετροι από τον DM από τους παρακάτω:

**-Κατώφλι αδιαφορίας  $q_j$ :** Η μεγαλύτερη τιμή της διαφοράς  $d$  κάτω από την οποία υπάρχει αδιαφορία για το κριτήριο  $j$ .

**-Κατώφλι προτίμησης  $p_j$ :** Η μικρότερη τιμή της διαφοράς  $d$  πάνω από την οποία υπάρχει αυστηρή προτίμηση για το κριτήριο  $j$ .

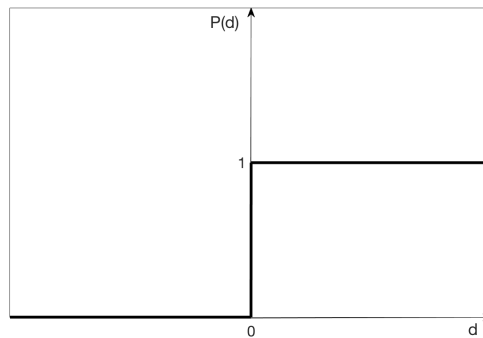
**-Παράμετρος  $\sigma$ :** Η τυπική απόκλιση για τον τύπο 6-το κριτήριο Gauss.

Παρακάτω δίνονται οι 6 προτεινόμενοι τύποι γενικευμένου κριτηρίου:

*Τύπος 1: Το σύνηθες κριτήριο (Usual Criterion)*

Στην περίπτωση αυτή:

$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0 \\ 1, & d > 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

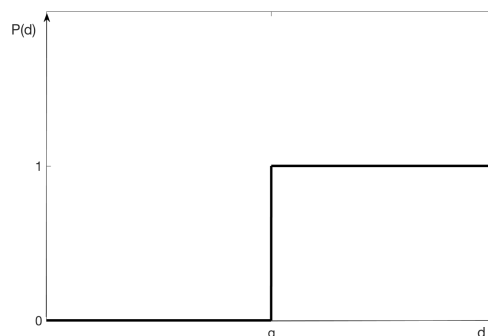


**Σχήμα 2.1** Τύπος 1: Σύνηθες κριτήριο

Δεν ζητείται καμία παράμετρος. Το σύνηθες κριτήριο για δύο λύσεις με ίδιες τιμές δίνει αδιαφορία και για διαφορετικές τιμές δίνει αυστηρή προτίμηση στη λύση με τη μεγαλύτερη τιμή. Είναι το πιο απλό και απόλυτο (ανελαστικό) από τα κριτήρια. Ωστόσο πρέπει να χρησιμοποιείται με προσοχή, αφού πολύ μικρές διαφορές εως ασήμαντες δεν ξεχωρίζουν από πολύ μεγαλύτερες.

*Τύπος 2: Το προσεγγιστικό κριτήριο (Quasi-Criterion)*

$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq q \\ 1, & d > q \end{cases} \quad (2.9)$$

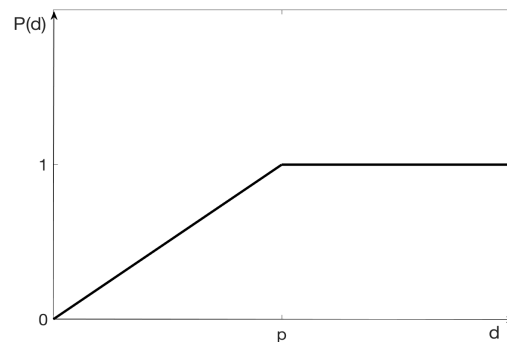


**Σχήμα 2.2** Τύπος 2: Το προσεγγιστικό κριτήριο

Ζητείται να οριστεί ένα κατώφλι αδιαφορίας  $q_j$ . Το προσεγγιστικό κριτήριο για τιμές διαφοράς μικρότερες από αυτό δίνει αδιαφορία και για μεγαλύτερες από αυτό αυστηρή προτίμηση. Είναι δηλαδή επέκταση του σύνηθες κριτηρίου με την δυνατότητα εισαγωγής του κατωφλιού αδιαφορίας από τον DM. Για κατώφλι αδιαφορίας  $q_j = 0$  ταυτίζεται με το σύνηθες κριτήριο.

*Τύπος 3: Κριτήριο γραμμικής προτίμησης (Criterion with linear preference)*

$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0 \\ \frac{d}{p}, & 0 < d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases} \quad (2.10)$$

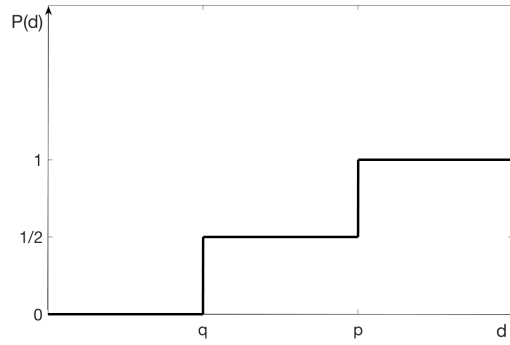


**Σχήμα 2.3** Τύπος 3:Κριτήριο Γραμμικής προτίμησης

Ζητείται να οριστεί ένα κατώφλι προτίμησης  $p_j$ . Για θετική διαφορά μικρότερη από αυτό ο βαθμός προτίμησης αυξάνεται γραμμικά μέχρι την αυστηρή προτίμηση.

*Τύπος 4: Κριτήριο επιπέδων (Level-Criterion)*

$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq q \\ \frac{1}{2}, & q < d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases} \quad (2.11)$$

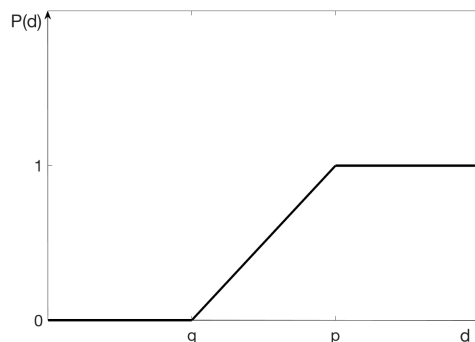


**Σχήμα 2.4** Τύπος 4: Κριτήριο επιπέδου

Ζητείται να οριστούν ένα κατώφλι αδιαφορίας  $q_j$  κι ένα κατώφλι προτίμησης  $p_j$ . Για διαφορά ανάμεσα σε  $q_j$  και  $p_j$  δίνεται ο βαθμός προτίμησης  $P=0.5$ . Για διαφορά μικρότερη από το κατώφλι προτίμησης  $q_j$  δίνεται ο βαθμός προτίμησης  $P=0$  και για διαφορά μεγαλύτερη από το κατώφλι προτίμησης  $p_j$  δίνεται ο βαθμός προτίμησης  $P=1$ .

*Τύπος 5: Κριτήριο γραμμικής προτίμησης και περιοχής αδιαφορίας (Criterion with linear preference and indifference area)*

$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq q \\ \frac{d - q}{p - q}, & q < d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases} \quad (2.12)$$

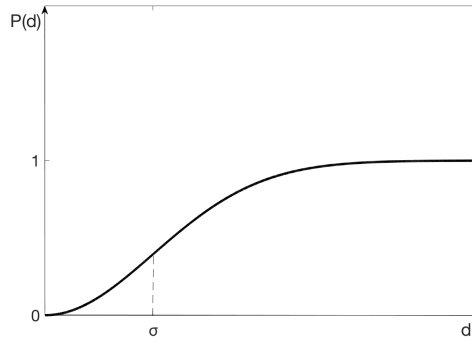


**Σχήμα 2.5** Τύπος 5: Κριτήριο γραμμικής προτίμησης και περιοχής αδιαφορίας

Ζητείται να οριστούν ένα κατώφλι αδιαφορίας  $q_j$  κι ένα κατώφλι προτίμησης  $p_j$ . Για διαφορά ανάμεσα σε  $q_j$  και  $p_j$  ο βαθμός προτίμησης του DM αυξάνεται γραμμικά από την αδιαφορία ως την αυστηρή προτίμηση. Για κατώφλι αδιαφορίας  $q_j = 0$  ταυτίζεται με το κριτήριο γραμμικής προτίμησης.

Τύπος 6: Κριτήριο Gauss (Gaussian Criterion)

$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2/2\sigma^2}, & d > 0 \end{cases} \quad (2.13)$$



Σχήμα 2.6 Τύπος 6:Κριτήριο Gauss

Ζητείται να οριστεί η παράμετρος  $\sigma$ . Η παράμετρος δίνει την τιμή που αλλάζει η κυρτότητα της καμπύλης. Ο βαθμός προτίμησης αυξάνεται εκθετικά και χωρίς ασυνέχειες. Ωστόσο, ο προσδιορισμός του  $\sigma$  κι η χρήση του ίσως είναι πιο δυσνόητα από τον DM.

Οπότε προκύπτουν  $k$  πίνακες συνάρτησης προτίμησης  $P_j$ , ένας για κάθε  $j$  συνάρτηση στόχου:

$$P_j = \begin{bmatrix} 0 & P_{1,2} & \cdots & P_{1,n} \\ P_{2,1} & 0 & \cdots & P_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n,1} & P_{n,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

**Βήμα 3:** Δημιουργία του πίνακα  $\Pi(n \times n)$ , του οποίου τα στοιχεία δείχνουν τους δείκτες προτίμησης  $\pi$ . Ο **δείκτης προτίμησης**  $\pi(\alpha, \beta)$  εκφράζει τον βαθμό υπεροχής της λύσης  $\alpha$  έναντι της λύσης  $\beta$  για το σύνολο των συναρτήσεων στόχου κι ορίζεται ως εξής:

$$\pi(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^k w_j P_j(\alpha, \beta), \quad (2.15)$$

όπου  $w_j$  το βάρος προτίμησης του DM για κάθε συνάρτηση στόχο  $j$ .

Αντίστοιχα, ο βαθμός υπεροχής της λύσης  $\beta$  έναντι της  $\alpha$  δίνεται από τη σχέση:

$$\pi(\beta, \alpha) = \sum_{j=1}^k w_j P_j(\beta, \alpha) \quad (2.16)$$

Οπότε, προκύπτει ο πίνακας προτίμησης:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \pi_{1,2} & \cdots & \pi_{1,n} \\ \pi_{2,1} & 0 & \cdots & \pi_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{n,1} & \pi_{n,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

**Βήμα 4:** Υπολογισμός της θετικής ροής  $\Phi^+$  και της αρνητικής ροής  $\Phi^-$ . Η θετική ροή  $\Phi^+$  εκφράζει το μέτρο υπεροχής του λύσης  $\alpha_i$  έναντι όλων των υπόλοιπων εναλλακτικών λύσεων του προβλήματος κι υπολογίζεται ως εξής:

$$\Phi^+(\alpha_i) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \pi(\alpha_i, \alpha_m) \quad (2.18)$$

Αντίστοιχα, η αρνητική ροή  $\Phi^-$  δηλώνει το μέτρο υπεροχής των υπόλοιπων εναλλακτικών λύσεων έναντι της  $\alpha_i$  κι υπολογίζεται ως εξής:

$$\Phi^-(\alpha_i) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \pi(\alpha_m, \alpha_i) \quad (2.19)$$

Οπότε από την ανά ζεύγους σύγκριση των λύσεων των προηγούμενων βημάτων, μέσω αυτών των ροών προκύπτει η σύγκριση μίας λύσης έναντι όλων των υπολοίπων. Η θετική ροή  $\Phi^+(\alpha_i)$  αποτελεί το μέτρο υπεροχής της λύσης  $\alpha_i$ . Όσο μεγαλύτερη είναι η θετική ροή τόσο καλύτερη είναι η λύση  $\alpha_i$ . Αντίθετα η αρνητική  $\Phi^-(\alpha_i)$  αποτελεί το μέτρο αδυναμίας της λύσης  $\alpha_i$ . Όσο μικρότερη είναι η αρνητική ροή τόσο καλύτερη είναι η λύση  $\alpha_i$ .

### 2.2.2 Promethee I

Η Promethee I δίνει μία μερική κατάταξη των εναλλακτικών λύσεων με τη χρήση των θετικών κι αρνητικών ροών από τις εξισώσεις 2.18 και 2.19 σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\alpha P^I \beta \text{ (}\alpha \text{ υπερέχει του } \beta \text{),} \quad \text{αν} \begin{cases} \Phi^+(\alpha) > \Phi^+(\beta) \text{ και } \Phi^-(\alpha) < \Phi^-(\beta) \\ \Phi^+(\alpha) = \Phi^+(\beta) \text{ και } \Phi^-(\alpha) < \Phi^-(\beta) \\ \Phi^+(\alpha) > \Phi^+(\beta) \text{ και } \Phi^-(\alpha) = \Phi^-(\beta) \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\alpha I^I \beta \text{ (αδιαφορία μεταξύ } \alpha, \beta \text{),} \quad \text{αν } \Phi^+(\alpha) = \Phi^+(\beta) \text{ και } \Phi^-(\alpha) = \Phi^-(\beta) \quad (2.21)$$

$$\alpha R^I \beta \text{ (}\alpha, \beta \text{ μη συγκρίσιμα),} \quad \text{αλλιώς} \quad (2.22)$$

Με τις σχέσεις αυτές προκύπτει ένας πίνακας με την ανά ζεύγους σύγκριση των λύσεων, όπου ο DM μπορεί να διακρίνει ποια λύση υπερέχει έναντι μίας άλλης. Μέσω αυτών των ανά ζεύγων υπεροχών υπάρχει η δυνατότητα μερικής κατάταξη των λύσεων μέσω ενός δενδροδιαγράμματος με την ανάδειξη της καλύτερης λύσης ως αυτή που υπερέχει στις περισσότερες συγκρίσεις.

### 2.2.3 Promethee II

Η Promethee II δίνει μια πλήρη κατάταξη των λύσεων χρησιμοποιώντας την καθαρή ροή  $\Phi^{net}$  σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\Phi^{net}(a_i) = \Phi^+(a_i) - \Phi^-(a_i) \quad (2.23)$$

$$\alpha P^{II} \beta \text{ (}\alpha \text{ υπερέχει του } \beta \text{),} \quad \text{αν } \Phi^{net}(\alpha) > \Phi^{net}(\beta), \quad (2.24)$$

$$\alpha I^{II} \beta \text{ (αδιαφορία μεταξύ } \alpha, \beta \text{),} \quad \text{αν } \Phi^{net}(\alpha) = \Phi^{net}(\beta) \quad (2.25)$$

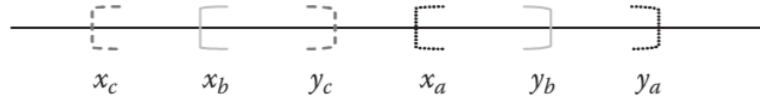
Η μέθοδος, δηλαδή, προτείνει την καλύτερη λύση σύμφωνα με τις προτιμήσεις του DM κατατάσσοντας τις λύσεις με καλύτερη αυτή με την μεγαλύτερη καθαρή ροή  $\Phi^{net}$ .

### 2.2.4 Promethee III

Στις Promethee I και II, η αδιαφορία μεταξύ των λύσεων προκύπτει μόνο όταν οι δείκτες ροής είναι αυστηρά ίσες. Η Promethee III επιτρέπει σε λύσεις με δείκτες ροών που έχουν πολύ μικρή διαφορά να είναι αδιάφορες μεταξύ τους. Δίνοντας σε κάθε λύση ένα διάστημα  $[x_\alpha, y_\alpha]$  προκύπτει μια πλήρης κατάταξη σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\alpha P^{III} \beta \text{ (}\alpha \text{ υπερέχει της } \beta \text{),} \quad \text{αν } x_\alpha > y_\beta, \quad (2.26)$$

$$\alpha I^{III} \beta \text{ (αδιαφορία μεταξύ } \alpha, \beta \text{),} \quad \text{αν } x_\alpha \leq y_\beta \text{ και αν } x_\beta \leq y_\alpha \quad (2.27)$$



**Σχήμα 2.7:**  $\alpha I^{III}b, bI^{III}c, \alpha P^{III}c$ , (Tzeng και Huang 2001)

Το διάστημα  $[x_\alpha, y_\alpha]$  ορίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} x_\alpha = \bar{\varphi}(\alpha) - \alpha\sigma_\alpha \\ y_\alpha = \bar{\varphi}(\alpha) + \alpha\sigma_\alpha \end{cases} \quad (2.28)$$

όπου:

$$\bar{\varphi}(\alpha_i) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (\pi(\alpha_i, \alpha_m) - \pi(\alpha_m, \alpha_i)), \quad (2.29)$$

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (\pi(\alpha_i, \alpha_m) - \pi(\alpha_m, \alpha_i) - \bar{\varphi}(\alpha_i))^2, \quad (2.30)$$

$$\alpha > 0 \quad (2.31)$$

Το  $[x_\alpha, y_\alpha]$ , λοιπόν, είναι ένα διάστημα με κέντρο την καθαρή μέση ροή  $\bar{\varphi}(\alpha_i)$  και μήκος ανάλογο του τυπικού σφάλματος της κατανομής των αριθμών  $(\pi(\alpha_i, \alpha_m) - \pi(\alpha_m, \alpha_i))$ . Όσο μικρότερη είναι η τιμή του  $\alpha$ , τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός της αυστηρής κατάταξης. Για  $\alpha = 0$  η μέθοδος συμπίπτει με την Promethee II. Μία τυπική τιμή του  $\alpha$  είναι 0.15.

Η μέθοδος, δηλαδή, προτείνει την καλύτερη λύση σύμφωνα με τις προτιμήσεις του DM κατατάσσοντας τις λύσεις με καλύτερη αυτή με την μεγαλύτερη καθαρή ροή  $\Phi^{net}$ , όπως η Promethee II. Με την διαφορά ότι λύσεις με μικρή διαφορά στις καθαρές ροές του θεωρούνται αδιάφορες μεταξύ τους κι ίσες στην κατάταξη.

## 2.2.5 Promethee IV

Είναι μια επέκταση της Promethee II ακολουθώντας την ίδια παραπάνω διαδικασία αλλά λαμβάνοντας υπόψη όλες τις πιθανές λύσεις στο εναλλακτικό σύνολο  $A$ . Προτείνεται για προβλήματα των οποίων τα σύνολα των εναλλακτικών λύσεων είναι συνεχή. Η ροή εισόδου, η ροή εξόδου κι η καθαρή ροή υπολογίζονται ως εξής:



$$\Phi^+(\alpha_i) = \int_A \pi(\alpha_i, \alpha_m) d\alpha_m = \int_A w_j P_j(\alpha_i, \alpha_m) d\alpha_m, \quad (2.32)$$

$$\Phi^-(\alpha_i) = \int_A \pi(\alpha_m, \alpha_i) d\alpha_m = \int_A w_j P_j(\alpha_m, \alpha_i) d\alpha_m, \quad (2.33)$$

$$\Phi(\alpha) = \Phi^+(\alpha_i) - \Phi^-(\alpha_i) \quad (2.34)$$

Η φυσική σημασία των όρων είναι ίδια με των μεθόδων Promethee I και Promethee II. Τώρα όμως η θετική κι αρνητική ροή αντί να υπολογίζεται ως ο μέσος όρος των βαθμών προτίμησης ενός συνόλου ξεχωριστών λύσεων, υπολογίζεται ως το ολοκλήρωμα όλων των πιθανών λύσεων του συνεχούς συνόλου A. Με τη χρήση της θετικής κι αρνητικής ροής των εξισώσεων 2.32 και 2.33 μπορεί να δώσει μερική κατάταξη με την λογική της Promethee I και με την διαφορά τους, εξίσωση 2.34, μπορεί να δώσει ολική κατάταξη με την λογική της Promethee II.

## 2.2.6 Promethee V

Σε αντίθεση με τις άλλες μεθόδους της οικογένειας Promethee, η Promethee V είναι ένα εργαλείο για μετεπεξεργασία του προβλήματος, αφού έχει εφαρμοστεί η Promethee II ή IV, για την ανάδειξη ενός συνόλου βέλτιστων λύσεων υπό περιορισμούς. Προτείνεται για προβλήματα των οποίων το σύνολο των λύσεων αποτελείται από επιμέρους κατηγοριοποιημένα σύνολα λύσεων:

$$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_R = \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.35)$$

Ο DM μπορεί να εισάγει περιορισμούς που αφορούν ένα συγκεκριμένο σύνολο λύσεων ή όλες τις λύσεις. Για παράδειγμα, αν ο DM θέλει να επενδύσει για δέκα ανεμογεννήτριες σε τρεις περιοχές οι λύσεις κατηγοριοποιούνται σε τρία σύνολα, πρώτος καθολικός περιορισμός είναι η επιλογή δέκα ανεμογεννητριών από τις προτεινόμενες κι ένας περιορισμός για μια περιοχή μπορεί να είναι το οικονομικό ποσό που θα διαθέσει για το συγκεκριμένο σύνολο ανεμογεννητριών  $S_1$  της περιοχής.

Για την διαδικασία της Promethee V, αφού εφαρμοστεί η Promethee II ή IV εφαρμόζεται ένα 0-1 γραμμικό πρόγραμμα :

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν διαλέγεται το } \alpha_i, \\ 0, & \text{αν όχι} \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n \Phi(\alpha_i) x_i \right\} \quad (2.37)$$

Σε περίπτωση που δεν υπάρχουν περιορισμοί επιλέγονται όλες οι λύσεις με θετική καθαρή ροή.

Οποιοσδήποτε περιορισμός μπορεί να προστεθεί στο πρόγραμμα ως εξής:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{p,i} x_i \sim \beta_p, \quad (2.38)$$

όπου  $\lambda_{p,i}$  οι συντελεστές των περιορισμών κι όπου “ $\sim$ ” αντικαθιστάται από τον DM με  $=, \leq$  ή  $\geq$ . Ο στόχος του γραμμικού προγράμματος είναι να διαλέξει εναλλακτικές μεγιστοποιώντας την καθαρή ροή υπό τους δοθέντες περιορισμούς.

Αν πρέπει να επιλεγεί, για παράδειγμα,  $m$  αριθμός λύσεων προστίθεται στο πρόγραμμα ο εξής περιορισμός:

$$\sum_{i=1}^n x_i = m \quad (2.39)$$

### 2.2.7 Το επίπεδο GAIA

Για προβλήματα με παραπάνω από δύο κριτήρια είναι δύσκολο να υπάρξει σαφής εικόνα της σχετικής θέσης των εναλλακτικών λύσεων σε σχέση με τα κριτήρια. Το επίπεδο GAIA [19], σχήμα 2.8, αναπτύχθηκε για την προβολή αυτών των σημείων. Με αυτό το επίπεδο μπορεί να δοθεί μια γραφική απεικόνιση του προβλήματος απόφασης με τις εναλλακτικές λύσεις να αντιπροσωπεύονται από σημεία και τα κριτήρια να ορίζουν τους άξονες.

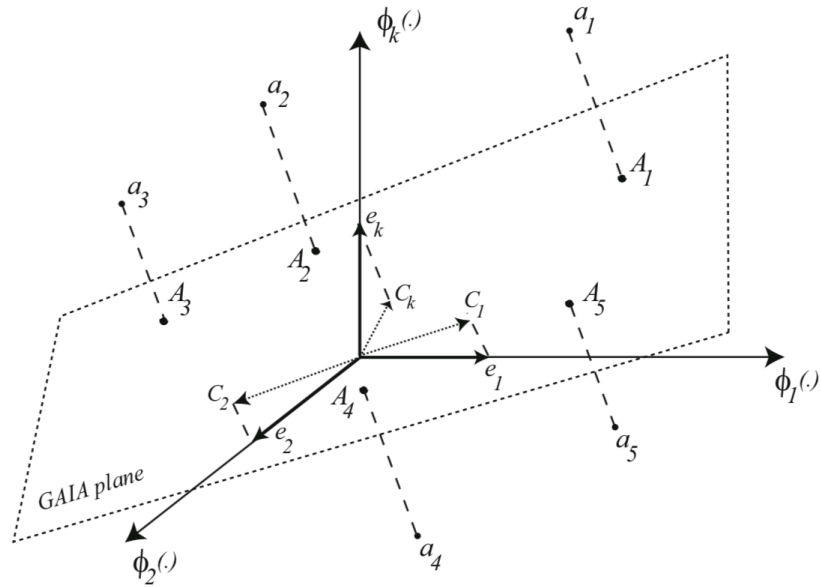
Για την αναπαράσταση των σημείων στο επίπεδο GAIA χρησιμοποιείται ένας πίνακας  $\Phi$ , διαστάσεων  $n \times k$ . Κάθε στοιχείο του δείχνει την επίδοση της λύσης  $i$  για κάθε κριτήριο  $j$ .

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(\alpha_1) & \varphi_2(\alpha_1) & \cdots & \varphi_k(\alpha_1) \\ \varphi_1(\alpha_2) & \vdots & \cdots & \varphi_k(\alpha_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(\alpha_n) & \varphi_2(\alpha_n) & \cdots & \varphi_k(\alpha_n) \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

όπου  $\varphi_j(\alpha_i)$  είναι η μονοκριτήρια καθαρή ροή της λύσης  $\alpha_i$  για κάθε κριτήριο  $j$  κι υπολογίζεται ως εξής:

$$\varphi_j(\alpha_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^n [P_j(\alpha_i, \alpha_m) - P_j(\alpha_m, \alpha_i)] \quad (2.41)$$

Η μονοκριτήρια καθαρή ροή  $\varphi_j(\alpha_i)$  προκύπτει, δηλαδή, από τους βαθμούς προτίμησης των πινάκων  $P_j$  από το βήμα 3 της κοινής διαδικασίας των μεθόδων. Κάθε λύση δηλαδή έχει  $k$  μονοκριτήριες καθαρές ροές που επιδεικνύουν την υπεροχή ή την αδυναμία της λύσης  $\alpha_i$  έναντι των υπολοίπων για κάθε κριτήριο  $j$ , σε αντίθεση με την καθαρή ροή  $\Phi^{net}(\alpha_i)$  που αποτελεί το μέτρο υπεροχής της λύσης  $\alpha_i$  έναντι των υπολοίπων για όλα τα κριτήρια.



**Σχήμα 2.8:** Προβολή στο επίπεδο GAIA των λύσεων  $\alpha_n$  με άξονες τα κριτήρια  $C_k$

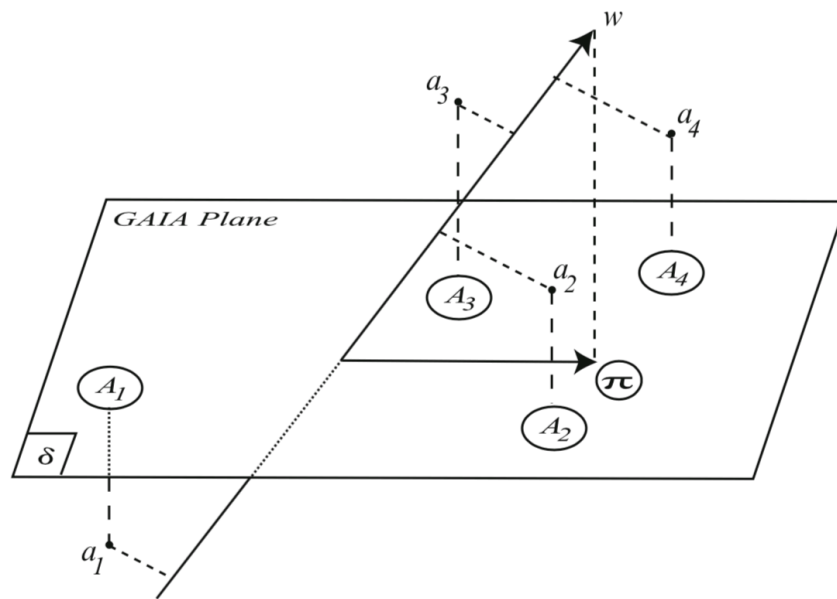
Η καθαρή ροή μίας λύσης  $\alpha_i$  με τις  $k$  μονοκριτήριες καθαρές ροές συνδέονται με την εξής σχέση:

$$\Phi(\alpha_i) = \sum_{j=1}^k \varphi_j(\alpha_i) w_j \quad (2.42)$$

Έχοντας το διάνυσμα βάρους  $w=(w_1, w_2 \dots w_k)$ , η καθαρή ροή  $\Phi$  της λύσης  $a_i$  είναι η προβολή της μονοκριτήριας καθαρής ροής της  $a_i$  στο  $w$ . Επομένως η σχετική θέση των προβολών των εναλλακτικών λύσεων στο  $w$  δίνει την ταξινόμηση κατά Promethee II.

Η προβολή  $\pi$  του διανύσματος βάρους  $w = (w_1, w_2 \dots w_k)$  στο επίπεδο GAIA ονομάζεται **άξονας απόφασης**. Εάν η προβολή  $\pi$  είναι μεγάλη, σημαίνει ότι η προτίμηση του DM είναι ισχυρή. Εάν όμως η προβολή  $\pi$  είναι μικρή, σημαίνει, σύμφωνα με τα βάρη, ότι τα κριτήρια είναι έντονα αντικρουόμενα και ότι η επιλογή της κατάλληλης βέλτιστης λύσης θα είναι δυσκολότερη.

Όταν τροποποιούνται τα βάρη, οι θέσεις των εναλλακτικών και των κριτηρίων παραμένουν αμετάβλητες στο επίπεδο GAIA. Οπότε το διάνυσμα βάρους εμφανίζεται ως βέλος αποφάσεων που ο DM μπορεί να κινεί σύμφωνα με τις προτιμήσεις του υπέρ συγκεκριμένων κριτηρίων, σχήμα 2.9.



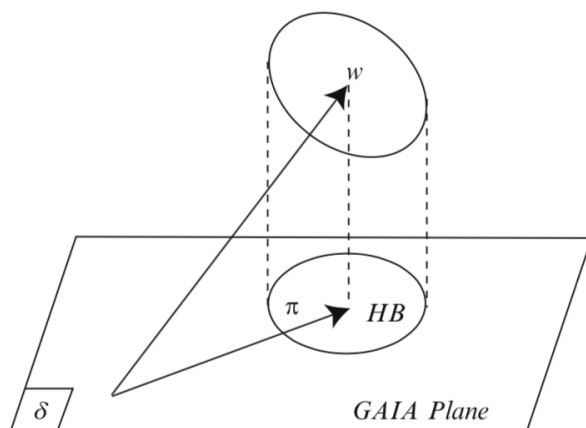
**Σχήμα 2.9:** Άξονας απόφασης και ταξινόμηση των λύσεων με την Promethee II

### 2.2.8 Promethee VI

Είναι ένα εργαλείο ευαισθησίας για την κατανομή του βάρους. Ο DM μπορεί να μην ξέρει τον ακριβή συντελεστή βάρους που θέλει να δώσει ανά κριτήριο. Μπορεί να δώσει όμως ένα διάστημα επιτρεπόμενων τιμών βάρους για κάθε κριτήριο που θεωρεί ότι τον ικανοποιούν:

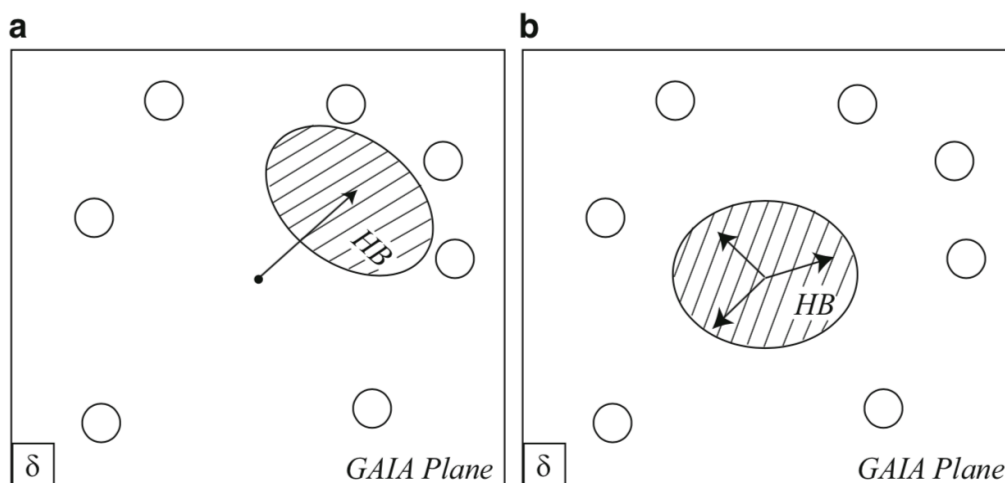
$$w_j^- \leq w_j \leq w_j^+ \quad (2.43)$$

Υποθέτοντας το σύνολο των ακραίων σημείων-κορυφών των διανυσμάτων που συνδέονται με όλα τα επιτρεπόμενα βάρη, παίρνουμε μια επιφάνεια ως αυτή του σχήματος 2.10. Η προβολή της στο επίπεδο GAIA ονομάζεται **Ανθρώπινος νους** “HB” (“Human Brain”) και περιλαμβάνει όλα τα ακραία σημεία του άξονα απόφασης  $\pi$  για όλα τα επιτρεπόμενα βάρη του διαστήματος που όρισε ο DM. Προκύπτουν δύο περιπτώσεις:



**Σχήμα 2.10:** “Ανθρώπινος νους”

Π1- Η επιφάνεια HB δεν περιλαμβάνει την αρχή των αξόνων του επιπέδου GAIA. Σε αυτήν την περίπτωση, με την τροποποίηση των βαρών, ο άξονας απόφασης παραμένει προσανατολισμένος προς την ίδια κατεύθυνση κι όλες οι εναλλακτικές λύσεις που βρίσκονται προς αυτήν θεωρούνται καλές. Το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως “soft problem”.  
 Π2- Η επιφάνεια HB περιλαμβάνει την αρχή των αξόνων του επιπέδου GAIA. Ο άξονας απόφασης μπορεί να πάρει οποιοδήποτε προσανατολισμό. Η ανάδειξη της βέλτιστης λύσης είναι δυσκολότερη και το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως “hard problem”.



**Σχήμα 2.11: a)** “Soft problem” (Π1) , **b)** “Hard problem” (Π2)

## 2.3 Μέθοδος AHP

Η μέθοδος AHP [13] (Analytic Hierarchy Process) προτάθηκε από τον Thomas Saaty (1980). Χρησιμοποιείται συγκεκριμένη κλίμακα τιμών για τη βαθμολόγηση της προτεραιότητας που έχει για τον DM κάθε κριτήριο σε σχέση με κάποιο άλλο κι αντίστοιχα μια εναλλακτική λύση σε σχέση με κάποια άλλη για κάθε κριτήριο.

### 2.3.1 Περιγραφή της τεχνικής AHP

Η διαδικασία μπορεί να χωριστεί σε τρία διαφορετικά στάδια:

- 1.Υπολογισμός διανύσματος βάρους των διαφόρων κριτηρίων.
- 2.Δημιουργία πίνακα για τις επιδόσεις των εναλλακτικών λύσεων.
- 3.Κατάταξη των εναλλακτικών λύσεων.

*Στάδιο 1: Υπολογισμός διανύσματος βάρους των διαφόρων κριτηρίων*

**Βήμα 1:** Δημιουργία του πίνακα σύγκρισης σημασίας  $A$  διαστάσεων  $k \times k$ . Κάθε  $\alpha_{jt}$  στοιχείο του πίνακα αντιπροσωπεύει την σημασία του κριτηρίου  $j$  έναντι του κριτηρίου  $t$ . Τα στοιχεία  $\alpha_{jk}$  και  $\alpha_{kj}$  πρέπει να ικανοποιούν τον περιορισμό:

$$\alpha_{jt}\alpha_{tj} = 1 \quad (2.44)$$

Προφανώς, για τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα ισχύει  $\alpha_{jj} = 1$ . Η σχετική σημασία μεταξύ δύο κριτηρίων μετράται σύμφωνα με μια κλίμακα προτίμησης, από το 1 έως το 9, όπως φαίνεται στον Πίνακα 2-2.

**Πίνακας 2-2.** Θεμελιώδης κλίμακας προτίμησης κατά Saaty

Τιμή του $\alpha_{jt}$	Ορισμός	Ερμηνεία
1	Ίση σημασία	Τα $j$ και $k$ είναι ίσης σημασίας
3	Μέτρια σημασία	Το $j$ ελαφρά πιο σημαντικό από το $k$
5	Δυνατή σημασία	Το $j$ πολύ πιο σημαντικό από το $k$
7	Πολύ δυνατή σημασία	Το $j$ πάρα πολύ πιο σημαντικό από το $k$
9	Απόλυτη σημασία	Το $j$ απόλυτα πιο σημαντικό από το $k$
2, 4, 6, 8	Ενδιάμεσες τιμές	Οι τιμές αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για ενδιάμεσες καταστάσεις προτίμησης

**Βήμα 2:** Δημιουργία του κανονικοποιημένου πίνακα σύγκρισης  $A_{norm}$  διαστάσεων  $m \times m$ . Κάθε στοιχείο  $\bar{\alpha}_{jk}$  του πίνακα υπολογίζεται ως εξής:

$$\bar{\alpha}_{jk} = \frac{\alpha_{jk}}{\sum_{l=1}^m \alpha_{jl}}, \quad (2.45)$$

όπου  $\sum_{l=1}^m \alpha_{jl}$ , το άθροισμα κάθε στήλης του πίνακα  $A$ .

**Βήμα 3:** Υπολογισμός του διανύσματος βάρους  $w$  από τον μέσο όρο των στοιχείων κάθε σειράς του κανονικοποιημένου πίνακα σύγκρισης  $A_{norm}$ :

$$w_j = \frac{\sum_{l=1}^m \bar{\alpha}_{jl}}{m} \quad (2.46)$$

*Στάδιο 2: Δημιουργία πίνακα επιδόσεων των εναλλακτικών λύσεων*

**Βήμα 1:** Δημιουργία πίνακα ανά ζεύγους σύγκρισης  $B$  διαστάσεων  $n \times n$  για κάθε κριτήριο  $j$ . Κάθε  $b_{i,m}$  στοιχείο του πίνακα αντιπροσωπεύει την αξιολόγηση της εναλλακτικής  $i$  έναντι της εναλλακτικής  $m$  για το κριτήριο  $j$ . Τα στοιχεία  $b_{i,m}$  και  $b_{m,i}$  πρέπει να ικανοποιούν τον περιορισμό:

$$b_{i,m}b_{m,i} = 1 \quad (2.47)$$

Προφανώς για τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα ισχύει  $a_{ii} = 1$ . Η αξιολόγηση μπορεί να γίνει σύμφωνα με την κλίμακα προτίμησης Saaty από τον Πίνακα 2-2.

**Βήμα 2:** Δημιουργία του κανονικοποιημένου πίνακα σύγκρισης  $B_{norm}$  διαστάσεων  $m \times m$ , όπως περιγράφηκε παραπάνω για τον πίνακα  $A$ .

**Βήμα 3:** Υπολογισμός του διανύσματος επιδόσεων  $s^j$  για κάθε κριτήριο  $j$ , όπως περιγράφηκε στο στάδιο 1 για το διάνυσμα βάρους  $w$ .

**Βήμα 4:** Δημιουργία του πίνακα επιδόσεων  $S$  διαστάσεων  $n \times k$ . Αφού πραγματοποιηθεί η παραπάνω διαδικασία για κάθε κριτήριο  $j$ , προκύπτουν  $k$  διανύσματα επιδόσεων  $s$  και δημιουργείται ο πίνακας επιδόσεων ως εξής:

$$S = [s^1 \dots s^k] \quad (2.48)$$

*Στάδιο 3: Κατάταξη των εναλλακτικών λύσεων*

Υπολογίζεται το διάνυσμα συνολικών επιδόσεων  $v$  διαστάσεων  $n$ . Κάθε  $v_i$  στοιχείο του δείχνει τη συνολική επίδοση της εναλλακτικής λύσης  $i$  που υπολογίζεται ως εξής:

$$v = Sw \quad (2.49)$$

Η τελική κατάταξη δίνεται κατατάσσοντας τις τελικές επιδόσεις των εναλλακτικών λύσεων από τη μεγαλύτερη στην μικρότερη.

### 2.3.2 Έλεγχος συνέπειας δεδομένων

Με την εφαρμογή των πολλών ανά ζεύγη συγκρίσεων, δύναται να παρουσιαστούν κάποιες ασυνέπειες-ασυμβατότητες. Υποθέτοντας την σύγκριση τριών κριτηρίων, ο DM θέτει το πρώτο κριτήριο ελαφρά πιο σημαντικό από το δεύτερο και το δεύτερο ελαφρά πιο σημαντικό από το τρίτο. Αν οριστεί ότι το τρίτο κριτήριο είναι ίσης σημασίας με το πρώτο παρουσιάζεται ασυνέπεια. Σε περίπτωση ασυνέπειας ο DM χρειάζεται να αναθεωρήσει την εισαγωγή των δεδομένων του για ικανοποιητικά αποτελέσματα της μεθόδου.

Η AHP συμπεριλαμβάνει μία τεχνική για τον έλεγχο της συνέπειας των αξιολογήσεων του DM. Στη συνέχεια, περιγράφεται η διαδικασία για τον έλεγχο συνέπειας του πίνακα σύγκρισης  $A$ . Η ίδια διαδικασία ισχύει για τους πίνακες  $B$  αν όπου  $A$ ,  $w$ ,  $k$  χρησιμοποιηθούν  $B$ ,  $s$ ,  $n$  αντίστοιχα.

**Βήμα 1:** Υπολογισμός του δείκτη συνέπειας (Consistency Index)  $CI$ . Εκφράζει την **απόκλιση της συνέπειας** κι υπολογίζεται ως εξής:

$$CI = \frac{x - k}{k - 1} \quad (2.50)$$



Για τον υπολογισμό του  $x$  πολλαπλασιάζεται ο πίνακας σημασίας  $A$  με το διάνυσμα βάρους  $w$  και κάθε  $j$  στοιχείο του πίνακα  $Aw$  διαιρείται με το βάρος  $w_j$ . Το  $x$  είναι ο μέσος όρος των στοιχείων του διανύσματος που προκύπτει. Αν  $CI = 0$  υπάρχει απόλυτη συνέπεια.

**Βήμα 2:** Υπολογισμός του λόγου συνέπειας  $CR$  (*Consistency Ratio*):

$$CR = \frac{CI}{RI} \quad (2.51)$$

όπου  $RI$  (Random Index) ο τυχαίος δείκτης συνέπειας, δηλαδή ο δείκτης συνέπειας  $CI$  όταν τα στοιχεία του  $A$  είναι τελείως τυχαία. Για προβλήματα μέχρι 10 κριτήρια ο τυχαίος δείκτης συνέπειας  $RI$  δίνεται από τον πίνακα 2-3.

**Πίνακας 2-3.** Τυχαίος δείκτης συνέπειας  $RI$

$m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$RI$	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.51

Οι ασυνέπειες θεωρούνται αμελητέες και μη ικανές να επηρεάσουν αισθητά το αποτέλεσμα όταν:

$$CR < 0.1 \quad (2.52)$$

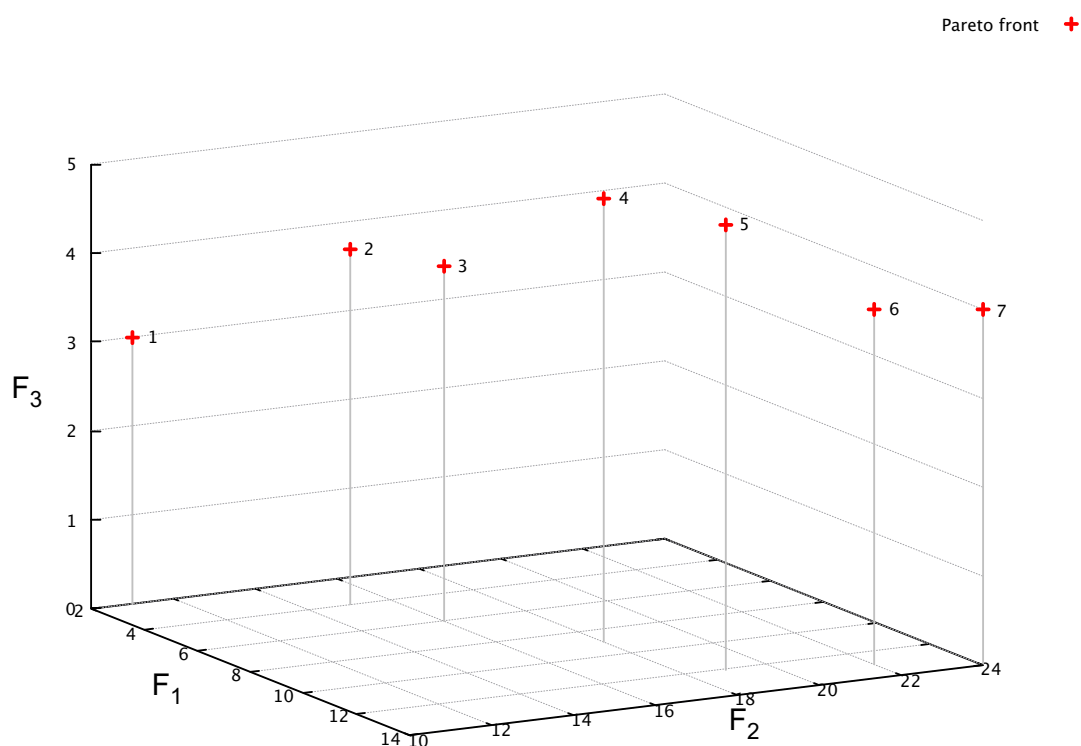
Με αυτό το κριτήριο το πρόβλημα χαρακτηρίζεται συνεπές (Consistent) ή ασυνεπές (Inconsistent), ενημερώνοντας τον DM για την ορθότητα εισαγωγής των δεδομένων του στον πίνακα σημασίας.

## 2.4 Αριθμητικό παράδειγμα των μεθόδων Promethee και AHP

Στην εργασία αυτή χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι Promethee I, Promethee II και Promethee III κι η μέθοδος AHP για τον υπολογισμό βαρών πριν την εφαρμογή των μεθόδων. Για την καλύτερη κατανόηση της διαδικασίας δίνεται ένα αναλυτικό αριθμητικό παράδειγμα. Το πρόβλημα αποτελείται από 3 στόχους, δύο προς ελαχιστοποίηση κι έναν προς μεγιστοποίηση, και 7 λύσεις που παρασιάζονται στον πίνακα απόφασης 2-4:

**Πίνακας 2-4.** Πίνακας απόφασης εικονικού παραδείγματος Pareto

	$f_1$	$f_2$	$f_3$
	min	max	min
<b>1</b>	2	11	3
<b>2</b>	4	15	4
<b>3</b>	6	16	4
<b>4</b>	9	18	5
<b>5</b>	12	19	5
<b>6</b>	13	22	4
<b>7</b>	14	24	4



**Σχήμα 2.15:** Εικονικό παράδειγμα μετώπου Pareto με 7 άτομα

### Εφαρμογή της τεχνικής ΑΗΡ

Εφαρμόζεται αρχικά η μέθοδος ΑΗΡ για τον προσδιορισμό συντελεστών βάρους, όποτε το στάδιο 2 της τεχνικής παραλείπεται. Συμπληρώνεται ο πίνακας σύγκρισης A κατά Saaty κι υπολογίζεται το διάνυσμα βάρους μέσω του κανονικοποιημένου πίνακα σύγκρισης όπως φαίνεται στον Πίνακα 2-6.

**Πίνακας 2-5.** Πίνακας σύγκρισης σημασίας  $A$  σύμφωνα με την θεμελιώδη κλίμακας προτίμησης κατά Saaty μετά την εφαρμογή της σχέσης 2.46 και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης

$A$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$f_1$	1	1/2	5
$f_2$	2	1	6
$f_3$	1/5	1/6	1
<b>Συνολικό άθροισμα</b>	<b>3.2</b>	<b>1.67</b>	<b>12</b>

**Πίνακας 2-6.** Κανονικοποιημένος πίνακας σύγκρισης  $A_{norm}$  και υπολογισμός του διανύσματος βάρους με την εφαρμογή της σχέσης 2.47

$A_{norm}$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$w$
$f_1$	$(1+2+1/5)/3.2=0.31$	0.30	0.42	<b><math>(0.31+0.30+0.42)/3=0.34</math></b>
$f_2$	0.63	0.60	0.50	<b>0.58</b>
$f_3$	0.06	0.10	0.08	<b>0.08</b>

Μετά τον υπολογισμό του διανύσματος βάρους ακολουθούν οι υπολογισμοί για τον έλεγχο συνέπειας:

$$x = \frac{\frac{1.04}{0.34} + \frac{1.75}{0.58} + \frac{0.25}{0.08}}{3} = 3.03$$

$$CI = \frac{x - k}{k - 1} = \frac{3.03 - 3}{3 - 1} = 0.15$$

$$RI(k = 3) = 0.58 \quad CR = \frac{CI}{RI} = 0.03$$

Με  $CR < 0.1$  ο πίνακας σύγκρισης είναι συνεπής και δεν χρειάζεται αναθεώρηση των δεδομένων που συμπληρώθηκαν στον πίνακα σημασίας.

### Εφαρμογή τεχνικών Promethee I-II-III

Με τα βάρη που υπολογίστηκαν από την AHP θα εφαρμοστεί η τεχνική Promethee με τους εξής τύπους συνάρτησης προτίμησης, κατωφλιών αδιαφορίας  $q$  και προτίμησης  $p$  για κάθε συνάρτηση στόχο-κριτήριο:

**Πίνακας 2-7:** Παράμετροι της Promethee για κάθε συνάρτηση στόχο.

	$f_1$	$f_2$	$f_3$
	min	max	min
<b>Type</b>	I	V	IV
<b>q</b>	-	2	0
<b>p</b>	-	6	2

Ακολουθούν πρώτα τα κοινά βήματα της τεχνικής και στην συνέχεια η αξιολόγηση μέσω των τεχνικών αξιολόγησης Promethee I, Promethee II και Promethee III.

### Βήματα κοινής διαδικασίας των τεχνικών Promethee

Υπολογίζεται ο πίνακας διαφορών  $D$  και ο πίνακα κλίμακας προτίμησης  $P$  για τον στόχο  $f_1$  που προκύπτει από τον πρώτο σύμφωνα με την σχέση για τον τύπο 1 συνάρτησης προτίμησης:

$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0 \\ 1, & d > 0 \end{cases}$$

**Πίνακας 2-8:** Πίνακας διαφορών  $D$  του στόχου  $f_1$

$f_1$	2	4	6	9	12	13	14
2	0	2	4	7	10	11	12
4	-2	0	2	5	8	9	10
6	-4	-2	0	3	6	7	8
9	-7	-5	-3	0	3	4	5
12	-10	-8	-6	-3	0	1	2
13	-11	-9	-7	-4	-1	0	1
14	-12	-10	-8	-5	-2	-1	0

**Πίνακας 2-9:** Πίνακας κλίμακας προτίμησης  $P$  του στόχου  $f_1$

$f_1$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1	1
4	0	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0

Υπολογίζεται ο πίνακας διαφορών  $D$  και ο πίνακα κλίμακας προτίμησης  $P$  για τον στόχο  $f_2$  που προκύπτει από τον πρώτο σύμφωνα με τη σχέση για τον τύπο 5 συνάρτησης προτίμησης:

$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 2 \\ \frac{d-2}{6-2}, & 2 < d \leq 6 \\ 1, & d > 6 \end{cases}$$

**Πίνακας 2-10:** Πίνακας διαφορών **D** του στόχου  $f_2$

$f_2$	11	15	16	18	19	22	24
11	0	-4	-5	-7	-8	-11	-13
15	4	0	-1	-3	-4	-7	-9
16	5	1	0	-2	-3	-6	-8
18	7	3	2	0	-1	-4	-6
19	8	4	3	1	0	-3	-5
22	11	7	6	4	3	0	2
24	13	9	8	6	5	2	0

**Πίνακας 2-11:** Πίνακας κλίμακας προτίμησης **P** του στόχου  $f_3$

$f_2$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0.5	0	0	0	0	0	0
3	0.75	0	0	0	0	0	0
4	1	0.25	0	0	0	0	0
5	1	0.5	0.25	0	0	0	0
6	1	1	1	0.5	0.25	0	0
7	1	1	1	1	0.75	0	0

Υπολογίζεται ο πίνακας διαφορών **D** και ο πίνακας κλίμακας προτίμησης **P** για τον στόχο  $f_3$  που προκύπτει από τον πρώτο σύμφωνα με την σχέση για τον τύπο 4 συνάρτησης προτίμησης:

$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < d \leq 2 \\ 1, & d > 2 \end{cases}$$

**Πίνακας 2-12:** Πίνακας διαφορών **D** του στόχου  $f_2$

$f_3$	3	4	4	5	5	4	4
3	0	1	1	2	2	1	1
4	-1	0	0	1	1	0	0
4	-1	0	0	1	1	0	0
5	-2	-1	-1	0	0	-1	-1
5	-2	-1	-1	0	0	-1	-1
4	-1	0	0	1	1	0	0
4	-1	0	0	1	1	0	0

**Πίνακας 2-13:** Πίνακας κλίμακας προτίμησης **P** του στόχου  $f_3$

$f_3$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0.5	0.5	1	1	0.5	0.5
2	0	0	0	0.5	0.5	0	0
3	0	0	0	0.5	0.5	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0.5	0.5	0	0
7	0	0	0	0.5	0.5	0	0

**Πίνακας 2-14:** Πίνακας προτίμησης  $\Pi$  κι υπολογισμός των δεικτών θετικής ροής  $\Phi^+$  κι αρνητικής ροής  $\Phi^-$

$\pi$	1	2	3	4	5	6	7	$\Phi^+$
1	0	0.38	0.38	0.42	0.42	0.38	0.38	0.3371
2	0.29	0	0.34	0.38	0.38	0.34	0.34	0.2957
3	0.435	0	0	0.38	0.38	0.34	0.34	0.2679
4	0.58	0.145	0	0	0.34	0.34	0.34	0.2493
5	0.58	0.29	0.145	0	0	0.34	0.34	0.2421
6	0.58	0.58	0.58	0.33	0.185	0	0.34	0.3707
7	0.58	0.58	0.58	0.62	0.475	0	0	0.4050
$\Phi^-$	0.4350	0.2821	0.2893	0.3043	0.3114	0.2486	0.2971	

### Αποτελέσματα Promethee I

Αξιολογούνται οι λύσεις με την τεχνική Promethee I σύμφωνα με τον Πίνακα 2-14 και των σχέσεων 2.20-2.21:

**Πίνακας 2-15:** Δείκτες θετικής ροής  $\Phi^+$  κι αρνητικής ροής  $\Phi^-$

Λύση	1	2	3	4	5	6	7
$\Phi^+$	0.3257	0.2957	0.2679	0.2493	0.2421	<b>0.3707</b>	0.4050
$\Phi^-$	0.4350	0.2821	0.2893	0.2986	0.3057	<b>0.2486</b>	0.2971

**Πίνακας 2-16:** Πίνακας ανά ζεύγους σύγκρισης

**1 R 2** αφού  
 $\Phi^+(1) > \Phi^+(2)$  και  
 $\Phi^-(1) > \Phi^-(2)$

**2 P 3** αφού  
 $\Phi^+(2) > \Phi^+(3)$  και  
 $\Phi^-(2) < \Phi^-(3)$

PROMETHEE I							
	1	2	3	4	5	6	7
1	-	R	R	R	R	P <sup>-1</sup>	P <sup>-1</sup>
2	R	-	P	P	P	P <sup>-1</sup>	R
3	R	P <sup>-1</sup>	-	P	P	P <sup>-1</sup>	R
4	R	P <sup>-1</sup>	P <sup>-1</sup>	-	P	P <sup>-1</sup>	P <sup>-1</sup>
5	R	P <sup>-1</sup>	P <sup>-1</sup>	P <sup>-1</sup>	-	P <sup>-1</sup>	P <sup>-1</sup>
6	P	P	P	P	P	-	R
7	P	R	R	P	P	R	-

## Αποτελέσματα Promethee II

Ακολουθεί ολική κατάταξη των λύσεων με την Promethee II σύμφωνα με τον δείκτη  $\Phi_{net}$  που προκύπτει από την αφαίρεση της αρνητικής ροής  $\Phi^-$  από την θετική ροή  $\Phi^+$ .

**Πίνακας 2-17:** Ολική κατάταξη των λύσεων με τον δείκτη  $\Phi_{net}$  της Promethee II

PROMETHEE II	
Λύση	$\Phi_{net}$
6	$0.3707-0.2486=0.12214$
7	0.10786
2	0.01357
3	-0.02143
4	-0.05500
5	-0.06929
1	-0.09786

## Αποτελέσματα Promethee III

Αξιολογούνται οι λύσεις με την Promethee III σύμφωνα με τα διαστήματα του Πίνακα 2-18 και των σχέσεων 2.26-2.27:

**Πίνακας 2-18:** Όρια διαστημάτων της Promethee III

PROMETHEE III		
Λύση	Κάτω όριο x	Άνω όριο y
1	-0.13115	-0.06457
2	0.00895	0.01819
3	-0.02872	-0.01414
4	-0.07371	-0.03629
5	-0.09285	-0.04572
6	0.08059	0.16369
7	0.07117	0.14455

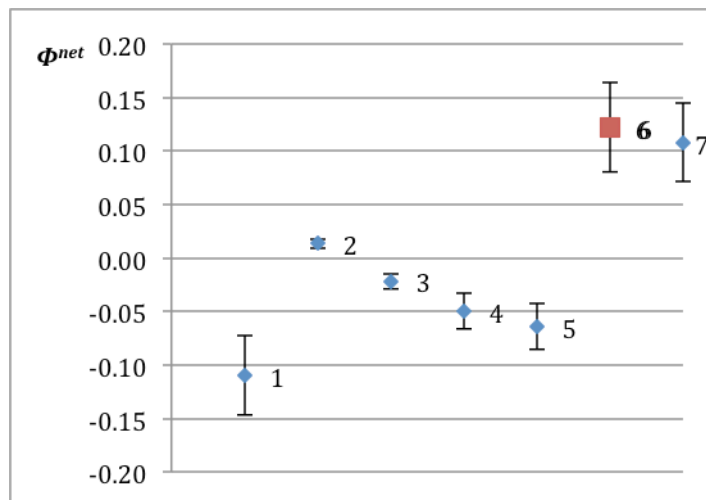
2 P 1 αφού  $x(2) > y(1)$  και

1 I 5 αφού  $x(5) < y(3)$  και  
 $x(3) < y(5)$

**Πίνακας 2-19:** Πίνακας ανά ζεύγους σύγκρισης

PROMETHEE III							
Λύση	1	2	3	4	5	6	7
1	-	P-1	P-1	I	I	P-1	P-1
2	P	-	P	P	P	P-1	P-1
3	P	P-1	-	P	P	P-1	R
4	I	P-1	P-1	-	P	P-1	P-1
5	I	P-1	P-1	P-1	-	P-1	P-1
6	P	P	P	P	P	-	I
7	P	P	R	P	P	I	-

Συνδυαστικά η Promethee II με την Promethee III μπορούν να δώσουν μία ολική κατάταξη με τον δείκτη  $\Phi^{net}$  με τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης του.



**Σχήμα 2.16:** Διάγραμμα κατάταξης των λύσεων σύμφωνα με τον δείκτη  $\Phi^{net}$  της Promethee II και τα αντίστοιχα διαστήματα της Promethee III



## Κεφάλαιο 3

### Ανάπτυξη εφαρμογής σε Microsoft Excel για την ‘a posteriori’ εφαρμογή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η εφαρμογή Promexcel που αναπτύχθηκε με την βοήθεια της γλώσσας προγραμματισμού VBA (Visual Basic for Applications) στο Microsoft Excel για την ‘a posteriori’ εφαρμογή τεχνικών από την οικογένεια Promethee. Η εφαρμογή πραγματοποιεί μερική κατάταξη με την Promethee I, πλήρης κατάταξη με την Promethee II και τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης με την Promethee III. Επιπλέον, για τον προσδιορισμό βαρών δίνεται στον χρήστη η δυνατότητα εφαρμογής της AHP. Στη συνέχεια, ακολουθούν μαθηματικά προβλήματα ΜΟΟ με διαφορετικές μορφές μετώπων μη-κυριαρχούμενων λύσεων, για την μελέτη της συμπεριφοράς των τεχνικών Promethee με τη βοήθεια της Promexcel.

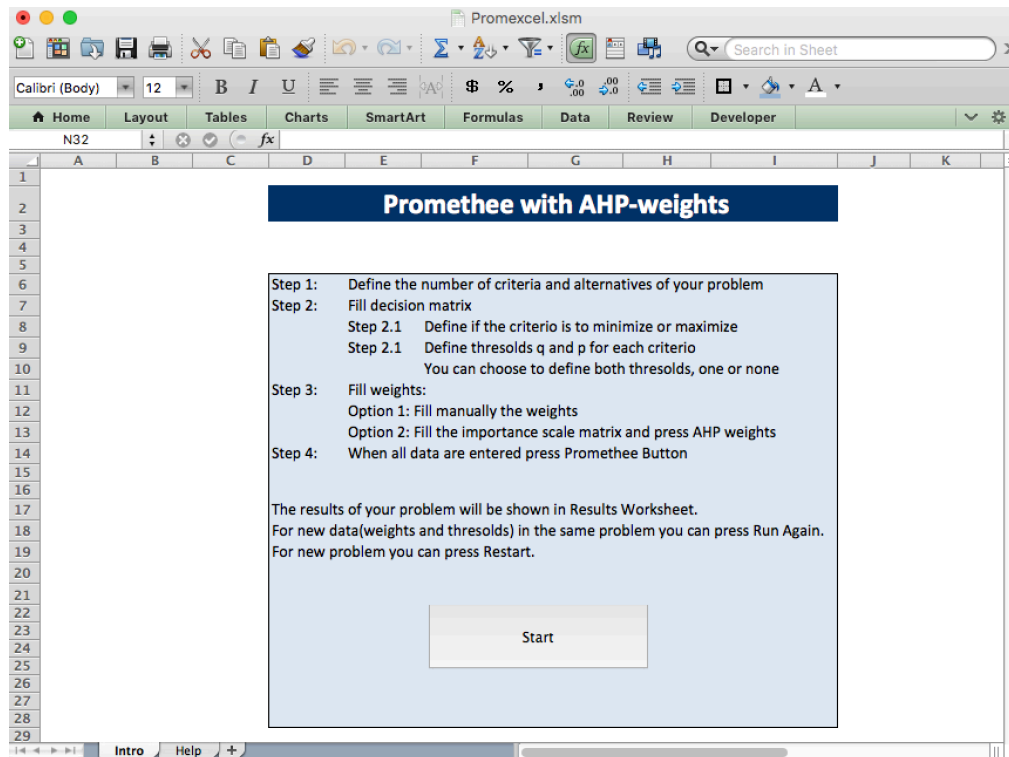
#### 3.1 Περιγραφή της εφαρμογής

Σκοπός της εφαρμογής Promexcel είναι να διευκολύνει τον χρήστη στη διαδικασία λήψης μιας απόφασης με τη βοήθεια των μεθόδων Promethee I, II και III, αναλαμβάνοντας να κάνει όλους τους περίπλοκους κι επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς, ζητώντας από τον χρήστη μόνο τον ορισμό του προβλήματος και τον καθορισμό των περιορισμών που επιθυμεί να θέσει.

Για τον σκοπό αυτό κρίθηκε κατάλληλο το διαδεδομένο εργαλείο Microsoft Excel με περιβάλλον φιλικό προς τον χρήστη για την διαχείριση δεδομένων κι η χρήση του κώδικα VBA για τις υπολογιστικές διαδικασίες. Η εφαρμογή είναι σε μορφή αρχείου .xslm, δηλαδή ένα βιβλίο εργασίας Excel με ενσωματωμένες μακροεντολές της γλώσσας VBA. Επιτρέπει, δηλαδή, στον χρήστη να χρησιμοποιήσει τις ιδιότητες του Excel για την εισαγωγή, επεξεργασία και αποθήκευση δεδομένων με την επιπλέον δυνατότητα ενεργοποίησης των αυτοματοποιημένων διαδικασιών για τη δημιουργία των κατάλληλων μορφοποιημένων φύλλων εργασίας και την εφαρμογή των μεθόδων Promethee κι AHP. Αποτελείται συνολικά από έξι φύλλα εργασίας και πέντε υπορουτίνες - διαδικασίες συνδεδεμένες με πέντε αντίστοιχους κόμβους ελέγχου για την ενεργοποίηση τους.

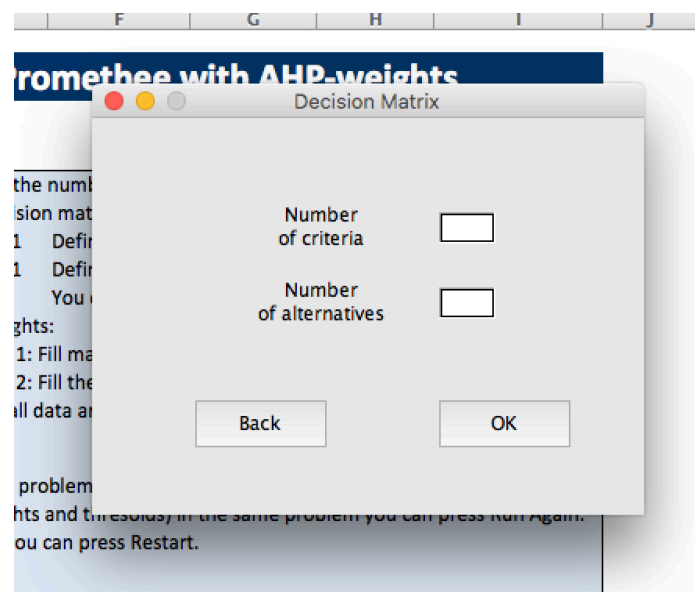
##### 3.1.1 Εισαγωγή Δεδομένων

Η αρχική μορφή με το άνοιγμα της εφαρμογής περιλαμβάνει τα φύλλα εργασίας Intro και Help. Στον χρήστη παρουσιάζεται το φύλλο εργασίας **Intro**, που περιέχει τα βήματα που χρειάζεται να ακολουθήσει και τον κόμβο ελέγχου *Start*.



Σχήμα 3.1: Φύλλο Εργασίας Intro

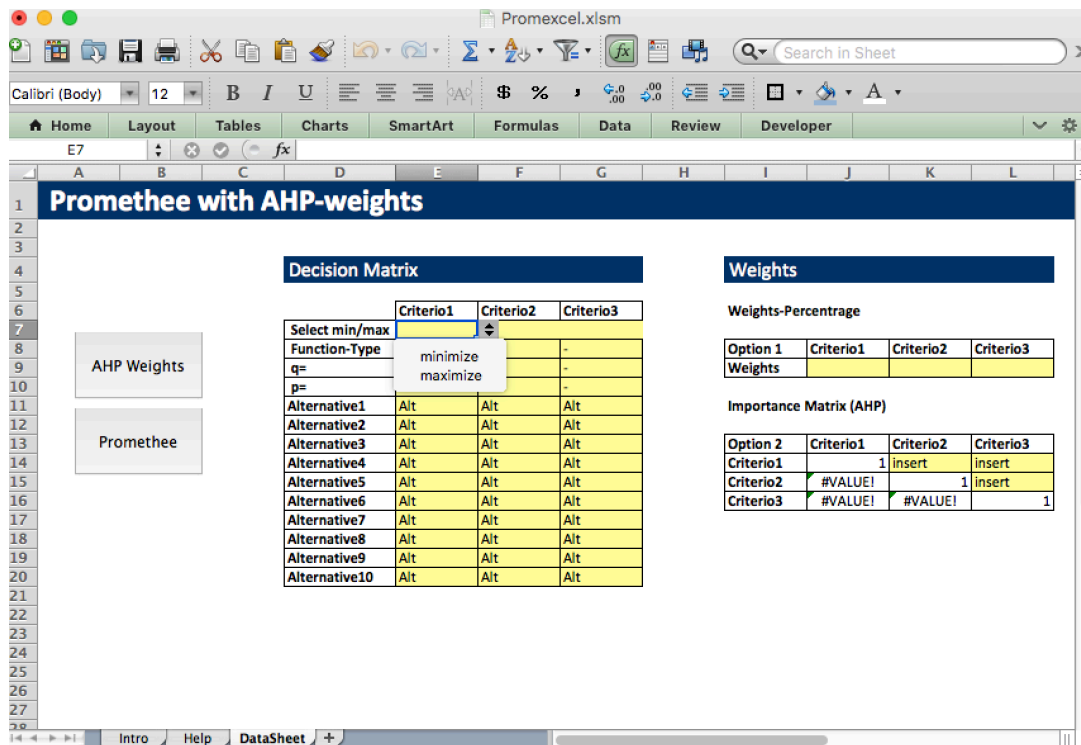
Με την επιλογή του Start, εμφανίζεται μία Φόρμα Χρήστη (UserForm) ζητώντας από αυτόν να ορίσει τον αριθμό κριτηρίων - συναρτήσεων στόχων και τον αριθμό εναλλακτικών λύσεων.



Σχήμα 3.2: Φόρμα Χρήστη Data

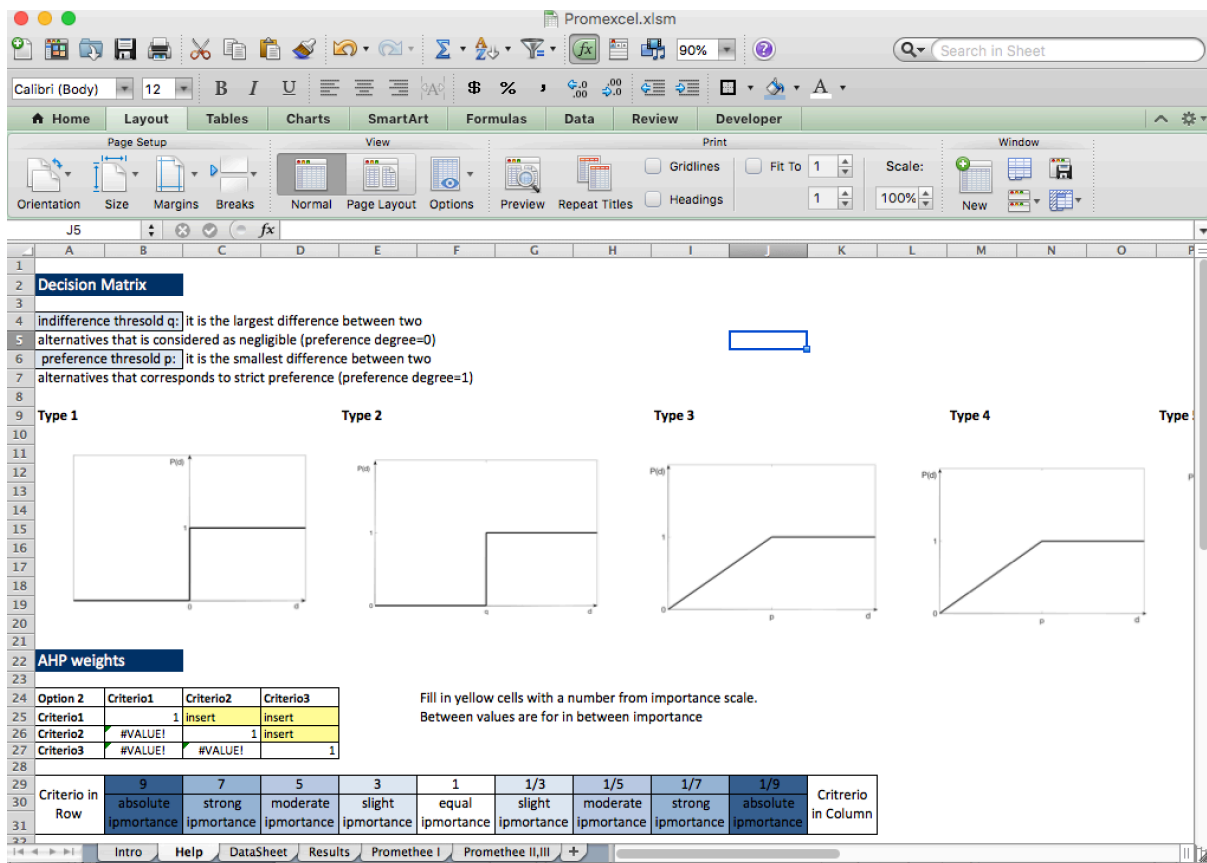
Συμπληρώνοντας τα ζητούμενα και πατώντας OK δημιουργείται το φύλλο εργασίας **DataSheet**, που περιλαμβάνει τα εξής στοιχεία:

- Τον Πίνακα Απόφασης. Ο χρήστης χρειάζεται να ορίσει για κάθε κριτήριο αν πρόκειται για στόχο ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης, τις επιδόσεις των εναλλακτικών λύσεων για κάθε κριτήριο και την συνάρτηση προτίμησης κριτηρίου της Promethee με τις αντίστοιχες παραμέτρους q, p.
- Τον Πίνακα Ποσοστών Βάρους. Ο χρήστης μπορεί να εισάγει απευθείας τα ποσοστά βάρους κάθε κριτηρίου ή να χρησιμοποιήσει την εφαρμογή της μεθόδου AHP για την συμπλήρωση του.
- Τον Πίνακα Σημαντικότητας. Συμπληρώνεται στην περίπτωση που ο χρήστης προτιμάει να εισάγει τον βαθμό σημασίας ενός κριτηρίου έναντι του άλλου και να εφαρμόσει την AHP επιλέγοντας τον κόμβο ελέγχου AHP-weights.
- Τον Κόμβο Ελέγχου AHP-weights. Ενεργοποιεί την υπορουτίνα AHP για τον υπολογισμό ποσοστών βάρους των κριτηρίων.
- Τον Κόμβο Ελέγχου Promethee. Μετά την συμπλήρωση του πίνακα απόφασης και του πίνακα ποσοστών βάρους, με την επιλογή του ο χρήστης ενεργοποιεί την υπορουτίνα Promethee.



Σχήμα 3.3: Φύλλο εργασίας Datasheet

Για τη συμπλήρωση των στοιχείων ο χρήστης μπορεί να συμβουλευτεί το φύλλο εργασίας **Help**. Πληροφορεί τον χρήστη για τις συναρτήσεις προτίμησης και τις παραμέτρους  $q$  και  $p$  της μεθόδου Promethee. Επιπλέον, εξηγεί τη διαδικασία συμπλήρωσης του πίνακα σημασίας σύμφωνα με τη μέθοδο AHP.



Σχήμα 3.4: Φύλλο εργασίας Help

### 3.1.2 Αποτελέσματα

Με την επιλογή του κόμβου ελέγχου Promethee ενεργοποιείται η υπορουτίνα Promethee για την εφαρμογή των μεθόδων και την δημιουργία τριών φύλλων εργασίας για την ανάλυση των αποτελεσμάτων με κύριο το φύλλο εργασίας **Results** και για περισσότερη ανάλυση τα φύλλα εργασίας **Promethee I**, **Promethee II,III**.

#### Φύλλο εργασίας Results

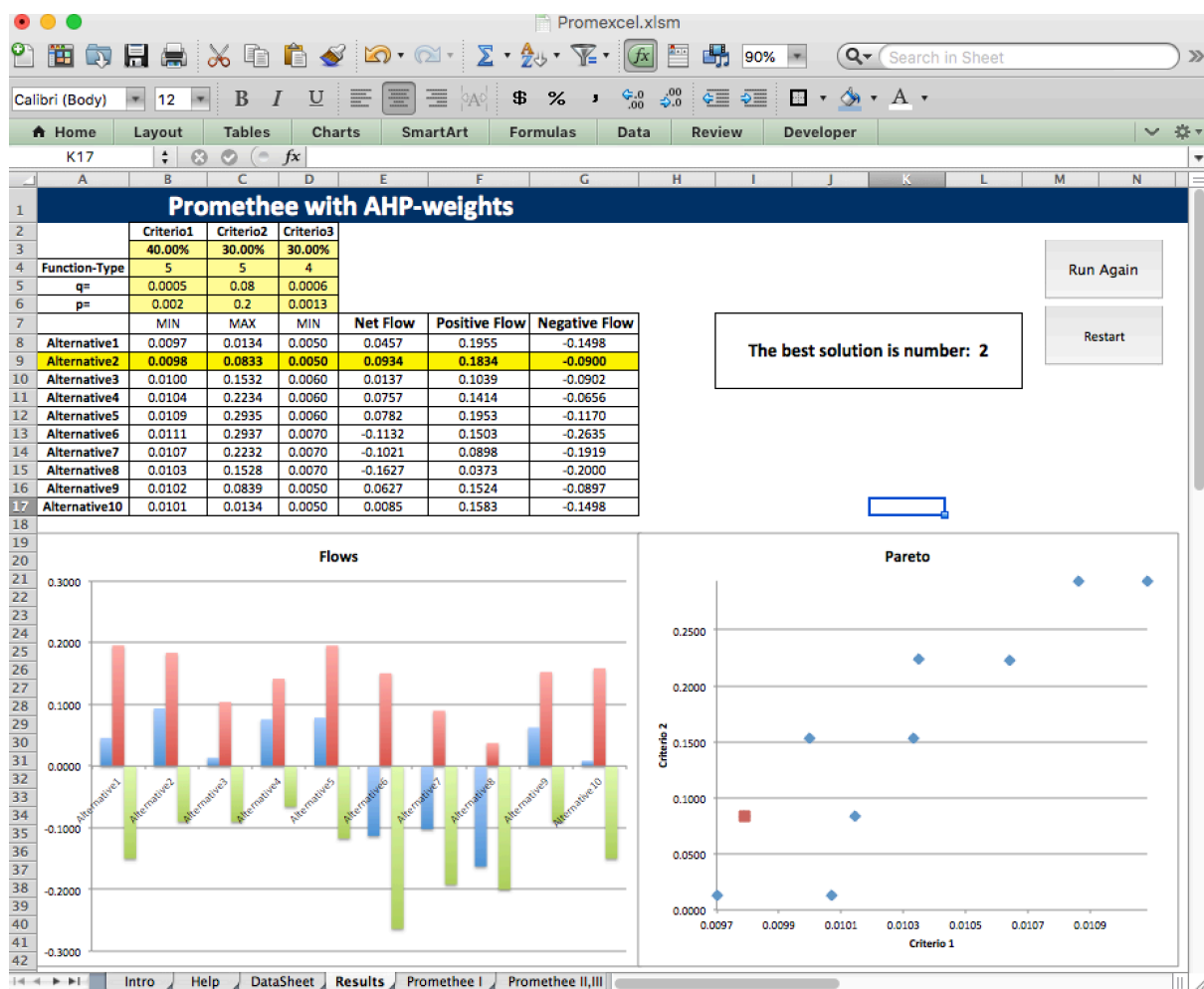
Περιλαμβάνει τα δεδομένα του προβλήματος και την προτεινόμενη καλύτερη λύση. Πιο συγκεκριμένα περιέχει:

-έναν πίνακα με τα δεδομένα του προβλήματος, τους δείκτες net Flow, positive Flow και Negative Flow κι ένα διάγραμμα των δεικτών αυτών.

- γραφική παράσταση των τιμών συναρτήσεων στόχων των υποψήφιων λύσεων και με κόκκινο χρώμα της προτεινόμενης καλύτερης λύσης

- Έναν κόμβο ελέγχου *Run Again*. Ο χρήστης έχει την δυνατότητα να αλλάξει τα κελιά με απόχρωση ελαφρού κίτρινου που αποτελούν τις παραμέτρους της Promethee και το βάρος κάθε κριτηρίου. Με την επιλογή του κόμβου ανανεώνονται τα αποτελέσματα για τα καινούρια δεδομένα.

-Έναν κόμβο ελέγχου *Restart*. Δίνει τη δυνατότητα για τον ορισμό καινούριου προβλήματος. Με την επιλογή του διαγράφονται τα φύλλα εργασίας των αποτελεσμάτων και ενεργοποιείται το φύλλο εργασίας Intro για την εισαγωγή των καινούριων δεδομένων. Σε περίπτωση που ο χρήστης επιθυμεί να μην διαγραφούν τα φύλλα εργασίας των αποτελεσμάτων μπορεί να τα μετονομάσει.



Σχήμα 3.5: Φύλλο εργασίας Results

## Φύλλο εργασίας Promethee I

Περιλαμβάνει έναν πίνακα διαστάσεων  $n \times n$ , του οποίου κάθε στοιχείο δείχνει αν η εναλλακτική λύση  $i$  είναι καλύτερη, χειρότερη ή μη συγκρίσιμη σε σχέση με την εναλλακτική λύση  $j$  σύμφωνα με τις σχέσεις 2.20, 2.21 και 2.22 της

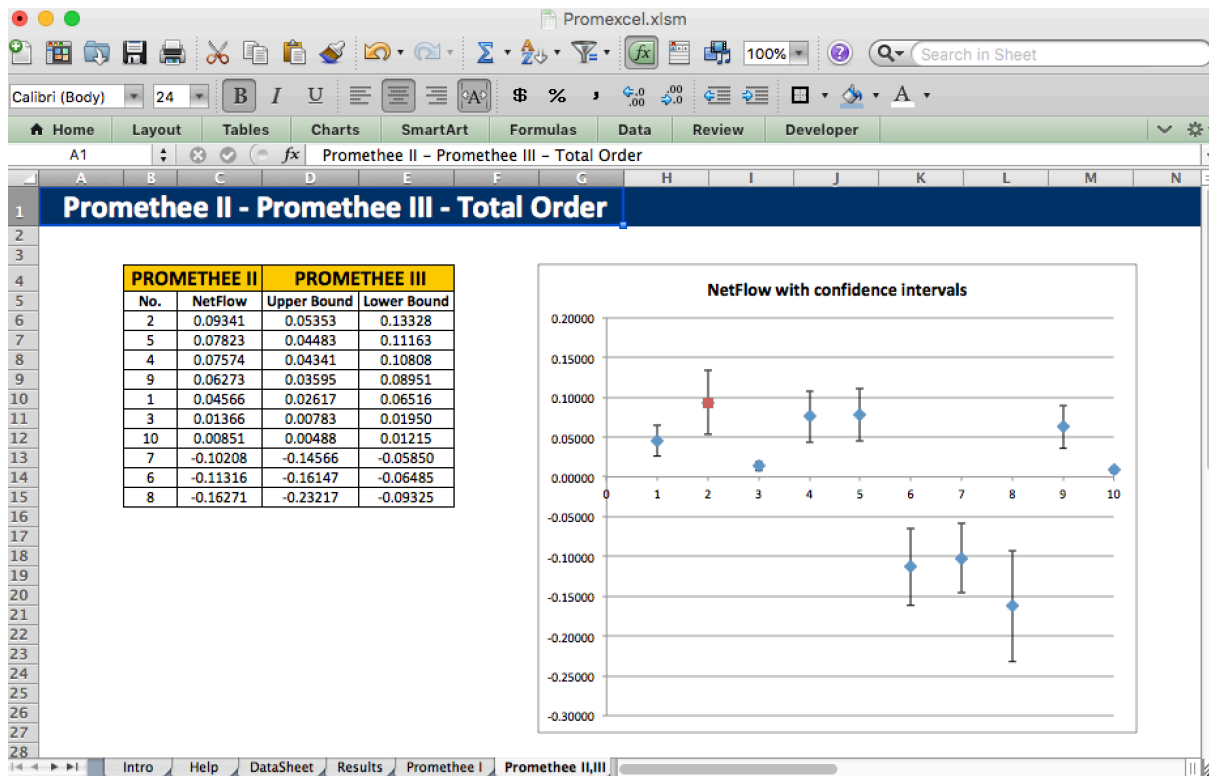
2.2.2 Promethee I. Επιπλέον υπάρχουν δύο στήλες, η μία δείχνει το πλήθος λύσεων που η εναλλακτική λύση  $i$  είναι καλύτερη και η δεύτερη το πλήθος λύσεων που η εναλλακτική λύση  $i$  είναι χειρότερη.

PROMETHEE I												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Better	Worse
1	-	NR	NR	NR	NR	Better	Better	Better	NR	NR	3	0
2	NR	-	Better	NR	NR	Better	Better	Better	NR	Better	5	0
3	NR	Worse	-	Worse	NR	NR	Better	Better	Worse	NR	2	3
4	NR	NR	Better	-	NR	NR	Better	Better	NR	NR	3	0
5	NR	NR	NR	NR	-	Better	Better	Better	NR	Better	4	0
6	Worse	Worse	NR	NR	Worse	-	NR	NR	Worse	Worse	0	5
7	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	NR	-	Better	Worse	Worse	1	7
8	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	NR	Worse	-	Worse	Worse	0	8
9	NR	NR	Better	NR	NR	Better	Better	Better	-	NR	4	0
10	NR	Worse	NR	NR	Worse	Better	Better	Better	NR	-	3	2

Σχήμα 3.6: Φύλλο εργασίας Promethee I

## Φύλλο εργασίας Promethee II, III

Περιλαμβάνει έναν πίνακα με την κατάταξη των λύσεων, σύμφωνα με τον δείκτη net Flow της μεθόδου Promethee II και τα διαστήματα εμπιστοσύνης της Promethee III, και την απεικόνισή τους στο αντίστοιχο διάγραμμα.



Σχήμα 3.7: Φύλλο εργασίας Promethee II, III

### 3.2 'A posteriori' εφαρμογή των τεχνικών Promethee I, II και III σε μαθηματικά προβλήματα με τη χρήση του Promexcel

Στην ενότητα αυτή, θα επιλυθούν δύο μαθηματικά προβλήματα με διαφορετικές μορφές μετώπων μη-κυριαρχούμενων λύσεων:

- ZDT1 – Κυρτό μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων
- ZDT2 – Μη κυρτό μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων

Επιλύονται με την χρήση απλού ΕΑ με τη χρήση του λογισμικού EASY και τα αποτελέσματα εισάγονται στο Promexcel για 'a posteriori' εφαρμογή των τεχνικών Promethee I, II και III.

#### Επιλογή παραμέτρων Promethee

Ένα πλεονέκτημα των τεχνικών Promethee είναι η ευελιξία κι οι διάφοροι συνδυασμοί για την έκφραση των προτιμήσεων του DM μέσω των βαρών, των τύπων συνάρτησης προτίμησης και των αντίστοιχων κατωφλιών προτίμησης κι αδιαφορίας. Για τη φύση των παραπάνω προβλημάτων, χρησιμοποιούνται ο Τύπος 3 (Κριτήριο Γραμμικής προτίμησης) και ο Τύπος 6

(Κριτήριο Gauss) συνάρτησης προτίμησης και για τις δύο συναρτήσεις-στόχους για διάφορους συνδυασμούς βαρών. Για τον Τύπο 3 θα χρησιμοποιηθεί κατώφλι προτίμησης  $p$  η μέγιστη διαφορά των τιμών των λύσεων κάθε στόχου αντίστοιχα, με σκοπό την κανονικοποίηση των τιμών. Για τον Τύπο 6 θα χρησιμοποιηθεί ο μέσος όρος της διαφοράς των τιμών ως η παράμετρος  $\sigma$ .

### 3.2.1 Κυρτό μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων

Το πρώτο μαθηματικό πρόβλημα προς επίλυση είναι το πρόβλημα ZDT1 που δίνει ως αποτέλεσμα ένα κυρτό μέτωπο κυριαρχούμενων λύσεων κι ορίζεται ως εξής:

$$f_1 = x_1$$

$$f_2 = g \times \left( 1 - \sqrt{\frac{f_1}{g}} \right)$$

Η συνάρτηση  $g$  βάσει της οποίας υπολογίζεται η συνάρτηση κόστους  $f_2$  ορίζεται ως εξής:

$$g(x_2, \dots, x_N) = 1 + \frac{9}{N-1} \sum_{i=2}^N x_i$$

Το πρόβλημα αποτελείται από 30 μεταβλητές σχεδιασμού ( $N=30$ ) για τις οποίες ισχύει  $0 \leq x_i \leq 1$ . Χρησιμοποιείται ένας EA (10,20) με κριτήριο τερματισμού τις 500 αξιολογήσεις και 15 λύσεις στο σύνολο των επιλέκτων. Οι τεχνικές Promethee εφαρμόστουν για τους συνδυασμούς βαρών του πίνακα 3-1.

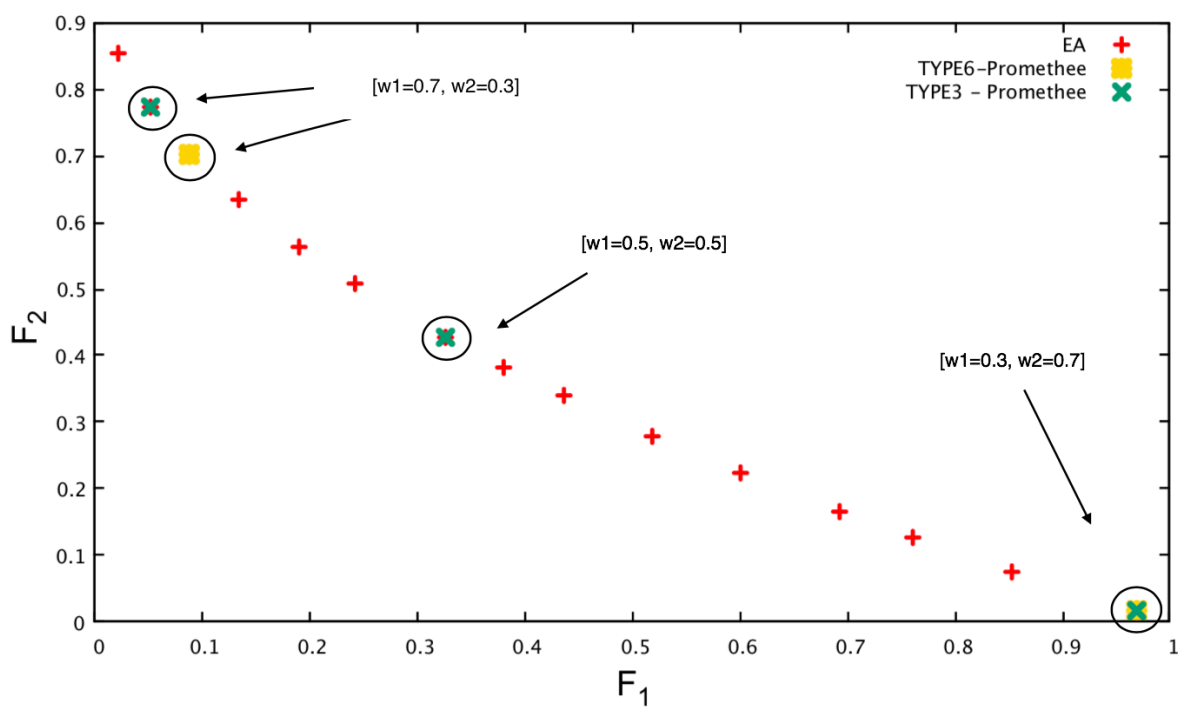
**Πίνακας 3-1:** Συνδυασμοί βαρών για την ‘a posteriori’ εφαρμογή των τεχνικών Promethee

$w_1$	$w_2$
0.5	0.5
0.7	0.3
0.3	0.7

Για βάρη  $w_1=0.5$  και  $w_2=0.5$  και οι δύο τεχνικές Promethee I και Promethee II δίνουν την ίδια κεντρική λύση, την λύση 7. Λόγω της συμμετρίας του μαθηματικού προβλήματος διακρίνεται η προτίμηση των κεντρικών λύσεων έναντι των ακραίων, όπως φαίνεται στα σχήματα 3.9 και 3.10. Για βάρη  $w_1=0.7$  και  $w_2=0.3$  και το κριτήριο γραμμικής προτίμησης προκύπτει η λύση 2 με



την δεύτερη μικρότερη τιμή για την συνάρτηση κόστους  $f_1$  και με τις δύο μεθόδους Promethee I και II, όπως φαίνεται στα σχήματα 3.11 και 3.13. Με το κριτήριο Gauss προκύπτει η λύση 3 με την τρίτη μικρότερη τιμή για την συνάρτηση κόστους  $f_1$ . Όπως διακρίνεται κι από τα σχήματα 3.12 και 3.14, το κριτήριο Gauss διαχειρίζεται με περισσότερη ομαλότητα τα ποσοστά βάρους, κάτι που φαίνεται στους δείκτες netFlow της Promethee II των λύσεων. Η ολική κατάταξη παραμένει, όμως, ίδια με μόνη διαφορά τις δύο πρώτες λύσεις 2 και 3. Μεγαλύτερη διαφορά έχουν τα αποτελέσματα της Promethee I για τα δύο κριτήρια. Στον πίνακα του σχήματος 3.12 φαίνεται ότι για το κριτήριο Gauss υπάρχουν ασύγκριτες λύσεις και η καλύτερη λύση σύμφωνα με τους δείκτες Positive Flow και Negative Flow είναι η λύση 6. Για βάρη  $w_1=0.3$  και  $w_2=0.7$ , και με τα δύο κριτήρια η ολική κατάταξη της Promethee II παρουσιάζει ως βέλτιστη λύση τη λύση 15 με τη μικρότερη τιμή της συνάρτησης κόστους  $f_2$  και τη μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης κόστους  $f_1$  όπως φαίνεται στα σχήματα 3.17 και 3.18. Παρατηρώντας όμως τα σχήματα 3.15 και 3.16, η μέθοδος Promethee I για το κριτήριο γραμμικής προτίμησης βέλτιστη λύση είναι η 15, ενώ για το κριτήριο Gauss εμφανίζονται πάλι ασύγκριτα ζεύγη λύσεων και βέλτιστες αναδεικνύονται οι κεντρικές τιμές 9 και 10.

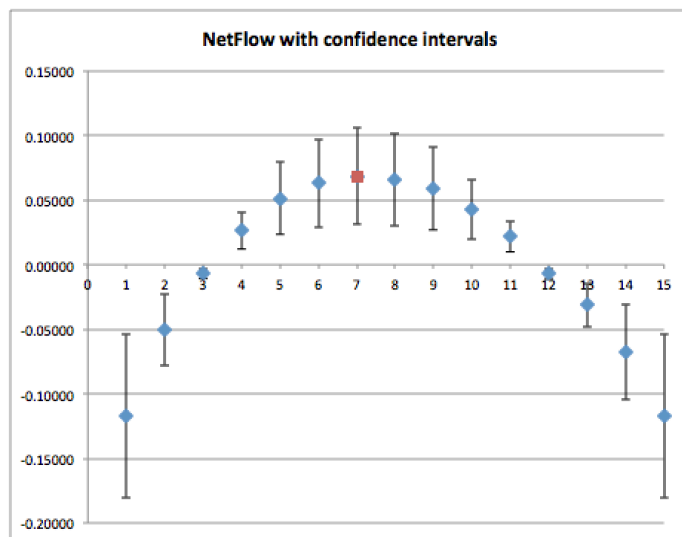


**Σχήμα 3.8:** Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT 1: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II στο αποτελούμενο από 15 άτομα μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη.

PROMETHEE I																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Better	Worse
1	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	0	14
2	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Better	Better	3	11
3	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Better	Better	Better	Better	6	8
4	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	8	6
5	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	10	4
6	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	Better	12	2
7	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	14	0
8	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	13	1
9	Better	Better	Better	Better	Better	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	11	3
10	Better	Better	Better	Better	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	9	5
11	Better	Better	Better	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Better	7	7
12	Better	Better	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	5	9
13	Better	Better	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	4	10
14	Better	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	2	12
15	Better	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	1	13

Σχήμα 3.9: Πρόβλημα ZDT1: Πίνακας ανά ζεύγους σύγκρισης από το φύλλο εργασίας Promethee I για βάρη  $w_1=0.5$  και  $w_2=0.5$  για το κριτήριο γραμμικής προτίμισης.

PROMETHEE II		PROMETHEE III	
No.	NetFlow	Upper Bound	Lower Bound
7	0.06851	0.03136	0.10565
8	0.06560	0.03003	0.10116
6	0.06296	0.02882	0.09709
9	0.05884	0.02694	0.09074
5	0.05133	0.02350	0.07916
10	0.04298	0.01968	0.06628
4	0.02645	0.01211	0.04080
11	0.02172	0.00994	0.03350
3	-0.00699	-0.01079	-0.00320
12	-0.00726	-0.01120	-0.00332
13	-0.03119	-0.04810	-0.01428
2	-0.05072	-0.07822	-0.02322
14	-0.06771	-0.10442	-0.03100
15	-0.11725	-0.18083	-0.05368
1	-0.11725	-0.18083	-0.05368



Σχήμα 3.10: Πρόβλημα ZDT1: Πίνακας κατάταξης των λύσεων της Promethee II και αντίστοιχο διάγραμμα με τα διαστήματα εμπιστοσύνης της Promethee III από το φύλλο εργασίας Promethee II, III για βάρη  $w_1=0.5$  και  $w_2=0.5$  για το κριτήριο γραμμικής προτίμισης

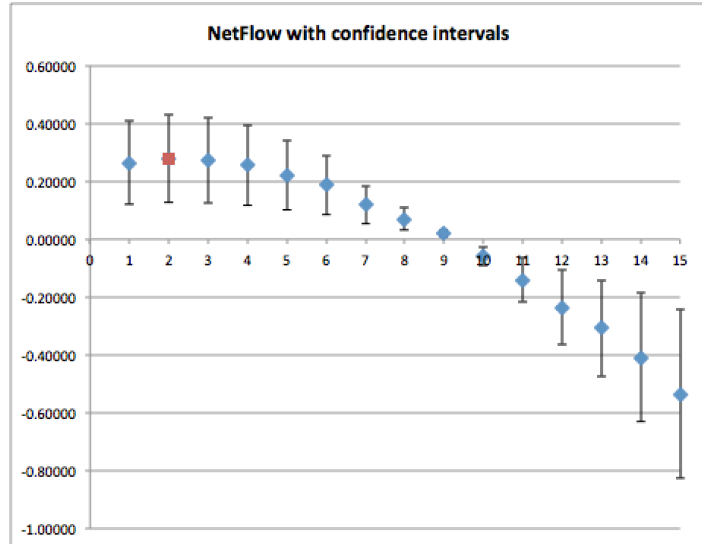
PROMETHEE I																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Better	Worse
1	-	Worse	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	12	2
2	Better	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	14	0
3	Better	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	13	1
4	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	11	3
5	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	10	4
6	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	9	5
7	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	8	6
8	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	7	7
9	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	6	8
10	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	5	9
11	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Better	4	10
12	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	3	11
13	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	2	12
14	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	1	13
15	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	0	14

Σχήμα 3.11: Πρόβλημα ZDT1: Πίνακας ανά ζεύγους σύγκρισης από το φύλλο εργασίας Promethee I για βάρη  $w_1=0.7$  και  $w_2=0.3$  για το κριτήριο γραμμικής προτίμησης

PROMETHEE I																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Better	Worse
1	-	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	Better	Better	Better	Better	4	0
2	NR	-	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	Better	Better	Better	Better	Better	5	0
3	NR	NR	-	NR	NR	NR	NR	NR	NR	Better	Better	Better	Better	Better	Better	6	0
4	NR	NR	NR	-	NR	NR	NR	NR	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	7	0
5	NR	NR	NR	NR	-	NR	NR	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	8	0
6	NR	NR	NR	NR	NR	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	9	0
7	NR	NR	NR	NR	NR	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	8	1
8	NR	NR	NR	NR	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	NR	6	3
9	NR	NR	NR	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Better	NR	NR	4	5
10	NR	NR	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	NR	NR	NR	2	7
11	NR	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	NR	NR	NR	NR	0	9
12	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	NR	-	NR	NR	NR	0	10
13	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	NR	NR	NR	-	NR	NR	0	9
14	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	NR	NR	NR	NR	NR	-	NR	0	8
15	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	-	0	7

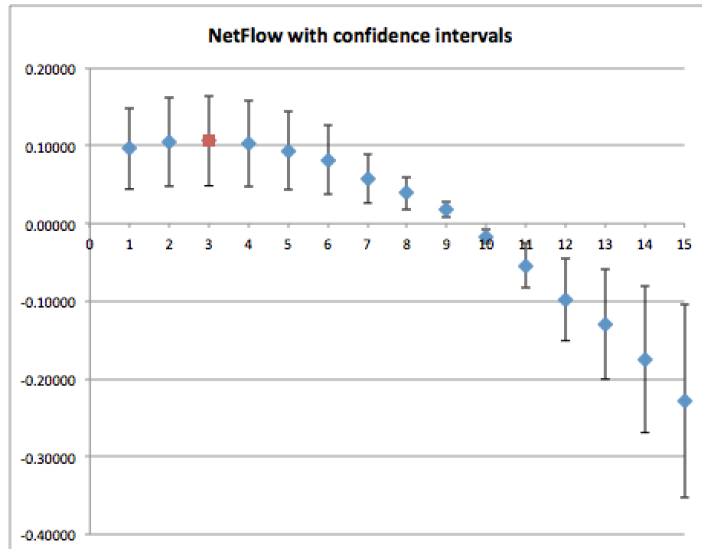
Σχήμα 3.12: Πρόβλημα ZDT1: Πίνακας ανά ζεύγους σύγκρισης από το φύλλο εργασίας Promethee I για βάρη  $w_1=0.7$  και  $w_2=0.3$  για το κριτήριο Gauss

PROMETHEE II		PROMETHEE III	
No.	NetFlow	Upper Bound	Lower Bound
2	0.27827	0.12739	0.42916
3	0.27407	0.12546	0.42268
1	0.26464	0.12115	0.40814
4	0.25624	0.11730	0.39518
5	0.22246	0.10184	0.34308
6	0.18639	0.08533	0.28746
7	0.11792	0.05398	0.18186
8	0.07011	0.03209	0.10812
9	0.01969	0.00901	0.03036
10	-0.05944	-0.09168	-0.02721
11	-0.14163	-0.21842	-0.06483
12	-0.23689	-0.36533	-0.10844
13	-0.30795	-0.47492	-0.14097
14	-0.40854	-0.63006	-0.18702
15	-0.53536	-0.82564	-0.24508



**Σχήμα 3.13:** Πρόβλημα ZDT1: Πίνακας κατάταξης των λύσεων της Promethee II κι αντίστοιχο διάγραμμα με τα διαστήματα εμπιστοσύνης της Promethee III από το φύλλο εργασίας Promethee II, III για βάρη  $w_1=0.7$  και  $w_2=0.3$  για το κριτήριο γραμμικής προτίμισης

PROMETHEE II		PROMETHEE III	
No.	NetFlow	Upper Bound	Lower Bound
3	0.10617	0.04860	0.16374
2	0.10483	0.04799	0.16167
4	0.10279	0.04705	0.15852
1	0.09672	0.04427	0.14916
5	0.09362	0.04286	0.14438
6	0.08224	0.03765	0.12683
7	0.05768	0.02641	0.08896
8	0.03900	0.01785	0.06015
9	0.01816	0.00831	0.02801
10	-0.01653	-0.02549	-0.00757
11	-0.05398	-0.08325	-0.02471
12	-0.09776	-0.15077	-0.04475
13	-0.12989	-0.20031	-0.05946
14	-0.17445	-0.26905	-0.07986
15	-0.22860	-0.35255	-0.10465



**Σχήμα 3.14:** Πρόβλημα zdt1: Πίνακας κατάταξης των λύσεων της Promethee II κι αντίστοιχο διάγραμμα με τα διαστήματα εμπιστοσύνης της Promethee III από το φύλλο εργασίας Promethee II, III για βάρη  $w_1=0.7$  και  $w_2=0.3$  για το κριτήριο Gauss.

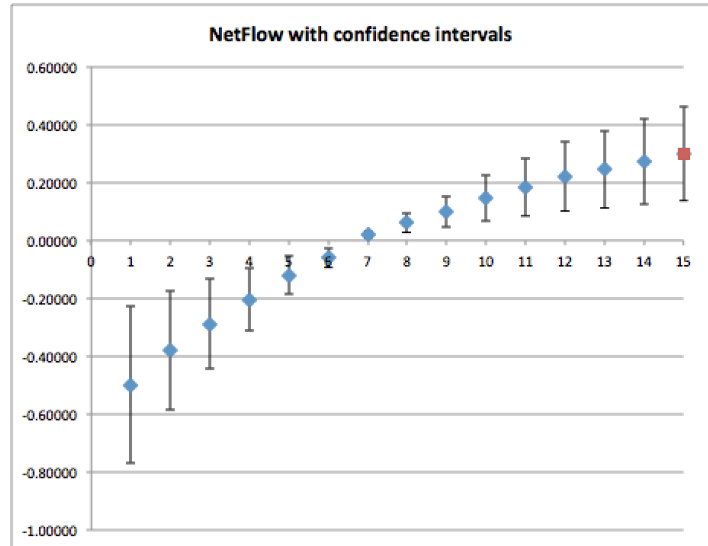
PROMETHEE I																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Better	Worse
1	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	0	14
2	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	1	13
3	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	2	12
4	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	3	11
5	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	4	10
6	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	5	9
7	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	6	8
8	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	7	7
9	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	8	6
10	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	9	5
11	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	10	4
12	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	11	3
13	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	12	2
14	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	13	1
15	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	14	0

Σχήμα 3.15: Πρόβλημα ZDT1: Πίνακας ανά ζεύγους σύγκρισης από το φύλλο εργασίας Promethee I για βάρη  $w_1=0.3$  και  $w_2=0.7$  για το κριτήριο γραμμικής προτίμησης

PROMETHEE I																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Better	Worse
1	-	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	0	7
2	NR	-	NR	NR	NR	NR	NR	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	0	8
3	NR	NR	-	NR	NR	NR	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	0	9
4	NR	NR	NR	-	NR	NR	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	0	9
5	NR	NR	NR	NR	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	NR	0	9
6	NR	NR	NR	NR	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	NR	NR	1	7
7	NR	NR	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	NR	NR	NR	NR	4	4
8	NR	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	NR	NR	NR	NR	NR	6	2
9	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	NR	NR	NR	NR	NR	NR	8	0
10	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	NR	-	NR	NR	NR	NR	NR	8	0
11	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	NR	NR	NR	-	NR	NR	NR	NR	7	0
12	Better	Better	Better	Better	Better	Better	NR	NR	NR	NR	NR	-	NR	NR	NR	6	0
13	Better	Better	Better	Better	Better	Better	NR	NR	NR	NR	NR	NR	-	NR	NR	6	0
14	Better	Better	Better	Better	Better	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	-	NR	5	0
15	Better	Better	Better	Better	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	-	4	0

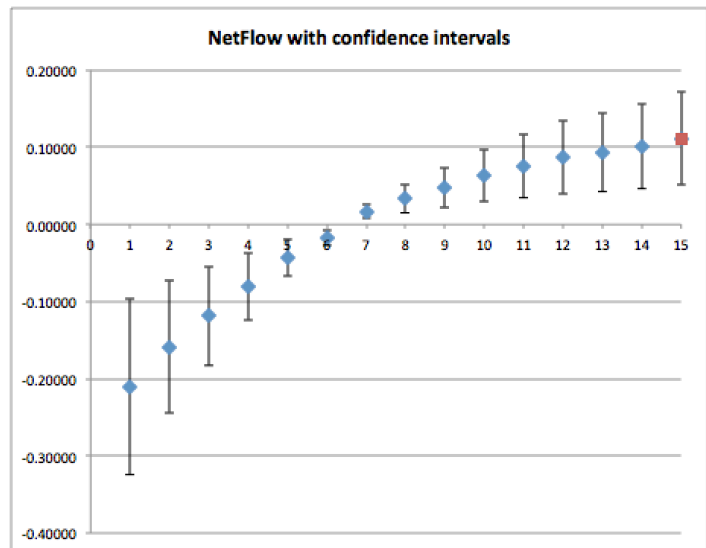
Σχήμα 3.16: Πρόβλημα ZDT1: Πίνακας ανά ζεύγους σύγκρισης από το φύλλο εργασίας Promethee I για βάρη  $w_1=0.3$  και  $w_2=0.7$  για το κριτήριο Gauss

PROMETHEE II		PROMETHEE III	
No.	NetFlow	Upper Bound	Lower Bound
15	0.30085	0.13772	0.46398
14	0.27313	0.12503	0.42122
13	0.24556	0.11242	0.37871
12	0.22236	0.10179	0.34293
11	0.18507	0.08472	0.28541
10	0.14540	0.06656	0.22424
9	0.09799	0.04486	0.15113
8	0.06108	0.02796	0.09420
7	0.01909	0.00874	0.02944
6	-0.06048	-0.09327	-0.02769
5	-0.11980	-0.18476	-0.05484
4	-0.20334	-0.31359	-0.09308
3	-0.28806	-0.44425	-0.13187
2	-0.37971	-0.58559	-0.17382
1	-0.49915	-0.76979	-0.22850



Σχήμα 3.17: Πρόβλημα zdt1: Πίνακας κατάταξης των λύσεων της Promethee II κι αντίστοιχο διάγραμμα με τα διαστήματα εμπιστοσύνης της Promethee III από το φύλλο εργασίας Promethee II, III για βάρη  $w_1=0.3$  και  $w_2=0.7$  για το κριτήριο γραμμικής προτίμησης

PROMETHEE II		PROMETHEE III	
No.	NetFlow	Upper Bound	Lower Bound
15	0.11161	0.05109	0.17213
14	0.10172	0.04657	0.15687
13	0.09339	0.04275	0.14403
12	0.08675	0.03971	0.13379
11	0.07589	0.03474	0.11703
10	0.06342	0.02903	0.09781
9	0.04699	0.02151	0.07247
8	0.03316	0.01518	0.05114
7	0.01642	0.00752	0.02532
6	-0.01754	-0.02705	-0.00803
5	-0.04370	-0.06739	-0.02000
4	-0.08094	-0.12483	-0.03705
3	-0.11845	-0.18268	-0.05423
2	-0.15852	-0.24447	-0.07257
1	-0.21020	-0.32417	-0.09623



Σχήμα 3.18: Πρόβλημα zdt1: Πίνακας κατάταξης των λύσεων της Promethee II κι αντίστοιχο διάγραμμα με τα διαστήματα εμπιστοσύνης της Promethee III από το φύλλο εργασίας Promethee II, III για βάρη  $w_1=0.3$  και  $w_2=0.7$  για το κριτήριο Gauss

### 3.2.2 Μη-Κυρτό μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων

Το μαθηματικό πρόβλημα προς επίλυση για μη-κυρτό μέτωπο κυριαρχούμενων λύσεων είναι το πρόβλημα ZDT2:

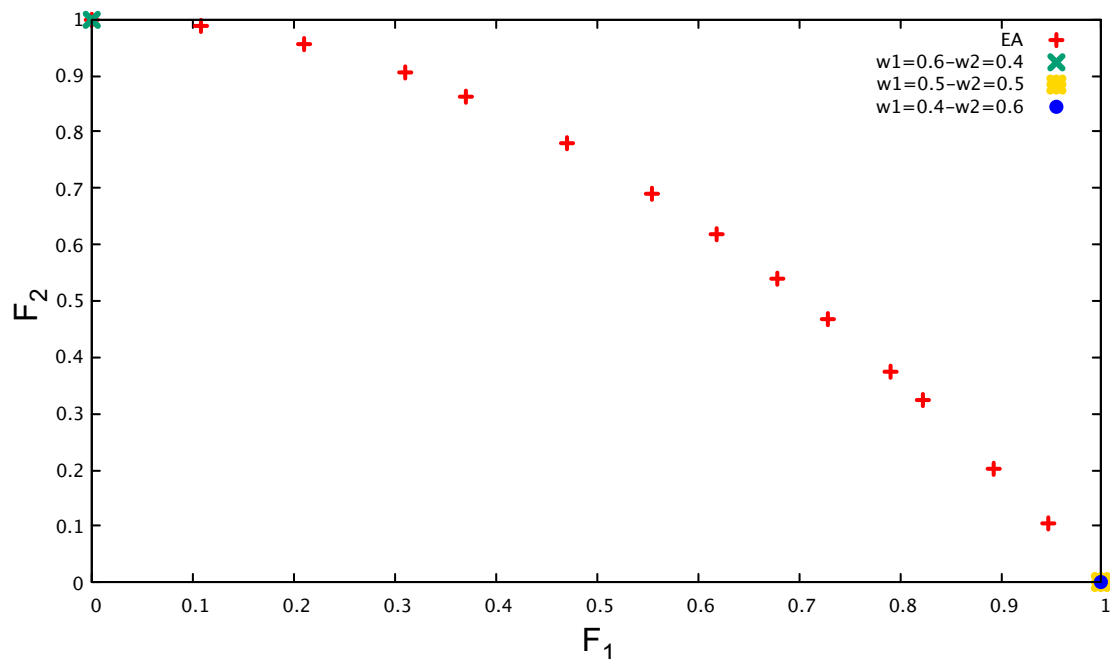
$$f_1 = x_1$$

$$f_2 = g \times \left( 1 - \left( \sqrt{\frac{f_1}{g}} \right)^2 \right)$$

Η συνάρτηση  $g$  ορίζεται όπως πριν:

$$g(x_2, \dots, x_N) = 1 + \frac{9}{N-1} \sum_{i=2}^N x_i$$

Το πρόβλημα αποτελείται από 30 μεταβλητές σχεδιασμού ( $N=30$ ) για τις οποίες ισχύει  $0 \leq x_i \leq 1$ . Χρησιμοποιείται ένας EA (10,20) με κριτήριο τερματισμού τις 500 αξιολογήσεις και 15 λύσεις στο σύνολο των επιλέκτων.



**Σχήμα 3.19:** Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT 2: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II στο αποτελούμενο από 15 άτομα μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη.

Με την ολική κατάταξη της Promethee II για κάθε συνδυασμό βαρών και για κάθε τύπο συνάρτησης προτίμησης παρατηρείται πως οι μόνες λύσεις που εντοπίζονται είναι οι δύο ακραίες, δηλαδή αυτές με τη μικρότερη τιμή της μίας συνάρτησης κόστους και την μεγαλύτερη

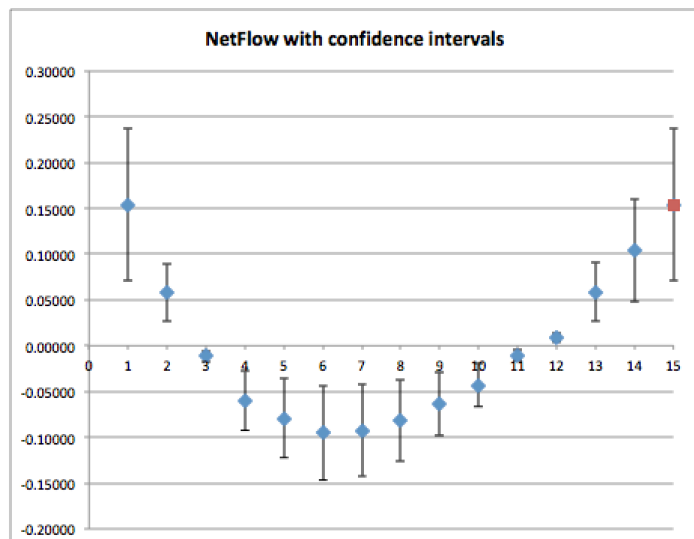
της άλλης. Πιο συγκεκριμένα για  $w_1=0.5$  και  $w_2=0.5$  δίνεται η λύση 15, με την μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης  $f_1$  και την μικρότερη τιμή της  $f_2$ . Με την παραμικρή προτίμηση του στόχου  $f_1$  ή  $f_2$  δίνεται ως βέλτιστη η αντίστοιχη ακραία λύση.

Αυτή η συμπεριφορά επιβεβαιώνεται παρατηρώντας τα σχήματα 3.20, 3.21. Για βάρη  $w_1=0.5$  και  $w_2=0.5$  κι ο πίνακας ανά ζεύγους σύγκρισης της Promethee I και το διάγραμμα της Promethee II και Promethee III αναδεικνύουν ως βέλτιστες τις ακραίες λύσεις και χειρότερες τις μεσαίες που ανταποκρίνονται στις προτιμήσεις του DM.

PROMETHEE I																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Better	Worse
1	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Worse	13	1
2	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Worse	Worse	Worse	10	4
3	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Worse	Worse	Worse	Worse	7	7
4	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	5	9
5	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	Better	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	3	11
6	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	0	14
7	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	1	13
8	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	2	12
9	Worse	Worse	Worse	Worse	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	4	10
10	Worse	Worse	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	6	8
11	Worse	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	Worse	8	6
12	Worse	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	Worse	9	5
13	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	Worse	11	3
14	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	Worse	12	2
15	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	-	14	0

Σχήμα 3.20: Πρόβλημα ZDT2: Πίνακας ανά ζεύγους σύγκρισης από το φύλλο εργασίας Promethee I για βάρη  $w_1=0.5$  και  $w_2=0.5$  για το κριτήριο γραμμικής προτίμησης.

PROMETHEE II		PROMETHEE III	
No.	NetFlow	Upper Bound	Lower Bound
15	0.15403	0.07051	0.23755
1	0.15403	0.07051	0.23755
14	0.10398	0.04760	0.16037
13	0.05875	0.02690	0.09061
2	0.05798	0.02654	0.08942
12	0.00892	0.00409	0.01376
11	-0.01038	-0.01600	-0.00475
3	-0.01152	-0.01776	-0.00527
10	-0.04310	-0.06647	-0.01973
4	-0.05994	-0.09244	-0.02744
9	-0.06356	-0.09802	-0.02910
5	-0.07929	-0.12228	-0.03630
8	-0.08195	-0.12639	-0.03752
7	-0.09286	-0.14321	-0.04251
6	-0.09511	-0.14668	-0.04354



Σχήμα 3.21: Πρόβλημα ZDT2: Πίνακας κατάταξης των λύσεων της Promethee II κι αντίστοιχο διάγραμμα με τα διαστήματα εμπιστοσύνης της Promethee III από το φύλλο εργασίας Promethee II, III για βάρη  $w_1=0.5$  και  $w_2=0.5$  για το κριτήριο γραμμικής προτίμησης



Η διαφοροποίηση των μη-κυρτών από τα κυρτά μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων γίνεται αισθητή από τα παραπάνω αποτελέσματα. Σε μη-κυρτά μέτωπα οι βέλτιστες λύσεις προσκολλώνται στα άκρα με αδυναμία να ανταποκριθούν στις προτιμήσεις του DM.

## Κεφάλαιο 4

### ‘A posteriori’ και ‘a priori’ εφαρμογή των τεχνικών Promethee σε αεροδυναμικά προβλήματα

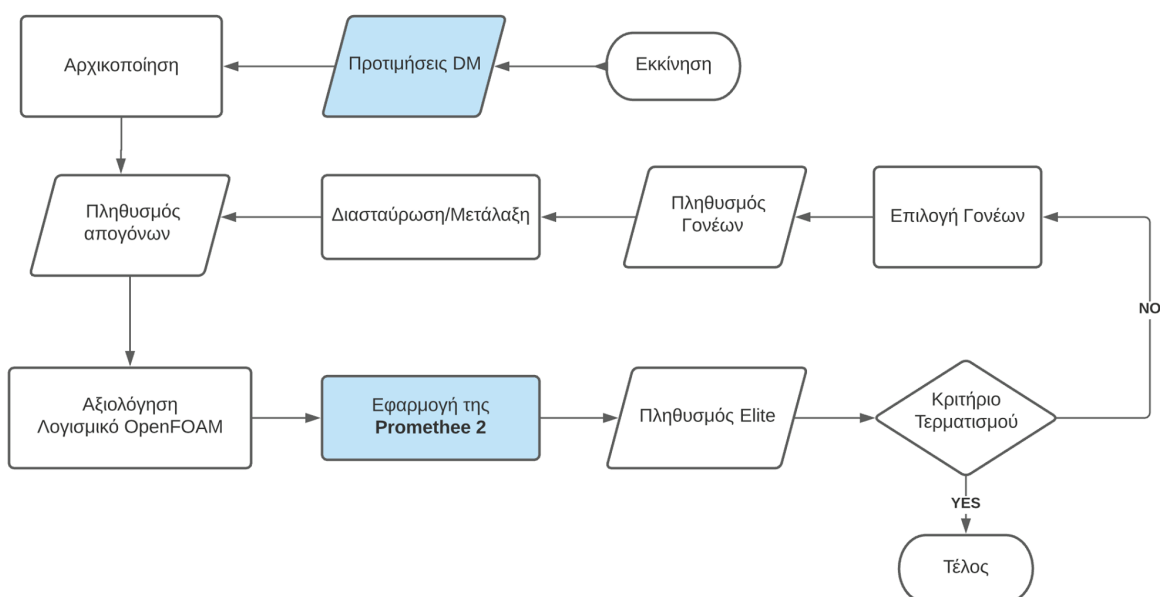
Γίνεται ‘a posteriori’ και ‘a priori’ εφαρμογή σε πρόβλημα βελτιστοποίησης αεροδυναμικής μορφής για τρεις στόχους. Για την ‘a posteriori’ εφαρμογή χρησιμοποιούνται οι τεχνικές Promethee I, Promethee II και Promethee III με τη βοήθεια της εφαρμογής Promexcel και για την ‘a priori’ εφαρμογή επιλέχθηκε η τεχνική Promethee II. Στην πρώτη ενότητα παρουσιάζεται η διαδικασία ενσωμάτωσης της Promethee II στη διαδικασία της βελτιστοποίησης.

#### 4.1 Διαδικασία της ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II

Για την ‘a priori’ εφαρμογή επιλέχθηκε η Promethee II αφού προσφέρει ολική κατάταξη των λύσεων. Όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 2, η Promethee II κατατάσσει τις λύσεις με κριτήριο καταλληλότητας τον μεγαλύτερο δείκτη  $\Phi^{net}$  σε αντίθεση με τη θεωρία των EA, οπότε θα χρησιμοποιηθεί η εξίσωση:

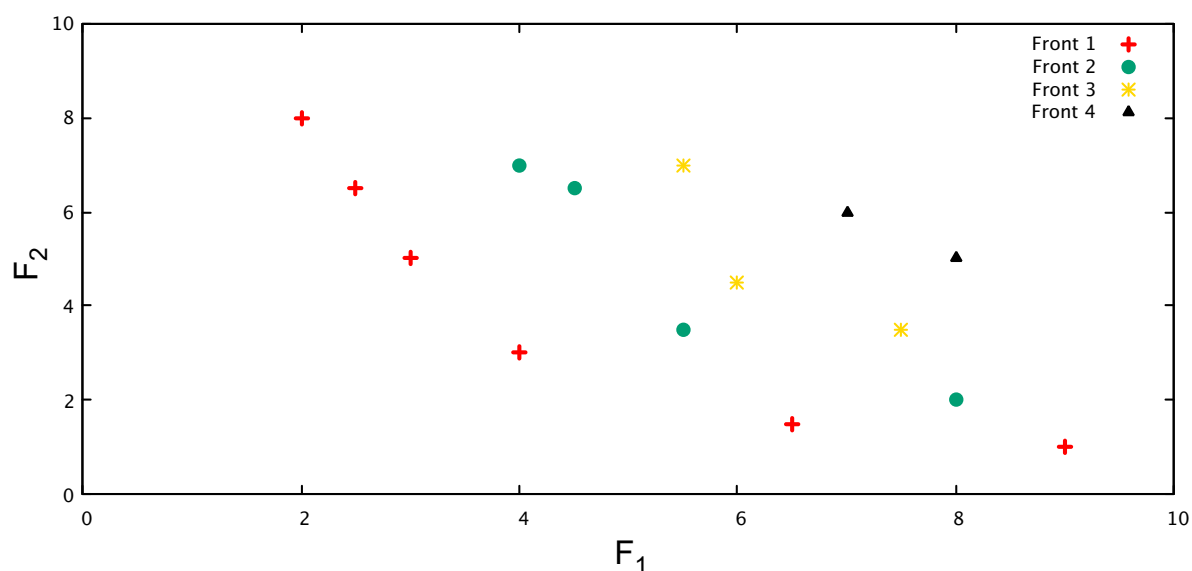
$$\Phi = -\Phi^{net},$$

όπου  $\Phi$  είναι το βαθμωτό κόστος του EA που περιγράφηκε στο βήμα 2 στην ενότητα 1.2.1.



**Σχήμα 4.1:** Διάγραμμα ροής EA με ενσωμάτωση της Promethee II για την ‘a priori’ εφαρμογή

Επιπλέον, οι τεχνικές Promethee βαθμολογούν τους επίλεκτους σύμφωνα με τις προτιμήσεις του DM. Σε αντίθεση με άλλες τεχνικές, όπως η Topsis κι η Vikor που χρησιμοποιούν σχέσεις απόστασης για τη βαθμολόγηση των ατόμων, η μέθοδος Promethee δεν διακρίνει μία κυριαρχούμενη λύση από μία μη-κυριαρχούμενη και πιθανώς να αποδώσει σε κυριαρχούμενη λύση μικρότερη τιμή  $\Phi$  από την μεγαλύτερη τιμή  $\Phi$  των μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Για να αντιμετωπιστεί αυτή η αδυναμία, χρησιμοποιείται αλγόριθμος για την ταξινόμηση των λύσεων κάθε γενιάς σε επιμέρους μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1 και καλείται η Promethee II για καθένα από αυτά με τιμή ποινής ανάλογης της τάξης του μετώπου.



**Σχήμα 4.2:** Εικονικό σύνολο γενιάς EA: Ταξινόμηση του πλήθους των λύσεων κάθε γενιάς EA σε επιμέρους Pareto για την βαθμολόγηση τους με τη χρήση της Promethee II

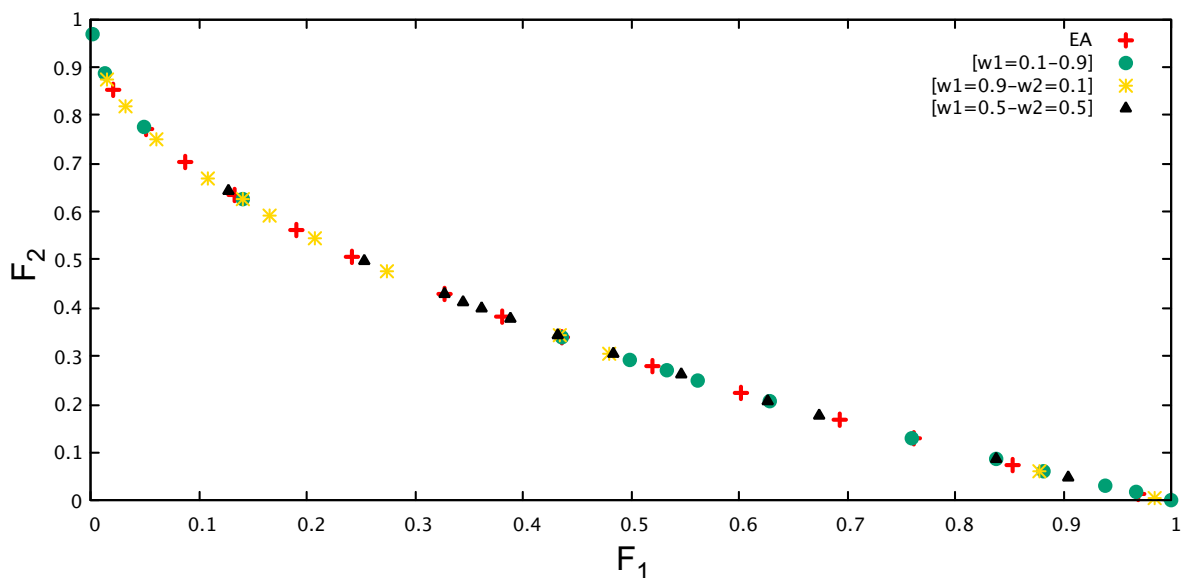
Λαμβάνοντας υπόψη τις αλλαγές που αναφέρθηκαν, για την ενσωμάτωση της Promethee II στον Easy αναπτύχθηκε κώδικας σε Fortran, με δύο αρχεία εισαγωγής δεδομένων, ένα για τα βάρη των συναρτήσεων-στόχων και ένα για τις παραμέτρους της Promethee (τύπος συνάρτησης προτίμησης, κατώφλια αδιαφορίας και προτίμησης για κάθε συνάρτηση-στόχο). Στα παραδείγματα που ακολουθούν χρησιμοποιείται ο τύπος συνάρτησης προτίμησης 3 για κάθε συνάρτηση-στόχο με κατώφλι προτίμησης την μέγιστη διαφορά των λύσεων, ώστε να κανονικοποιείται κάθε φορά το σύνολο τιμών, για διάφορα βάρη.

Παρουσιάζεται περιληπτικά η ‘a priori’ εφαρμογή για τους συνδυασμούς βάρων του πίνακα 4-1 στα μαθηματικά προβλήματα ZDT1, ZDT2 που περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 3. Για κάθε μέτωπο χρησιμοποιήθηκε EA με τα ίδια χαρακτηριστικά του απλού.

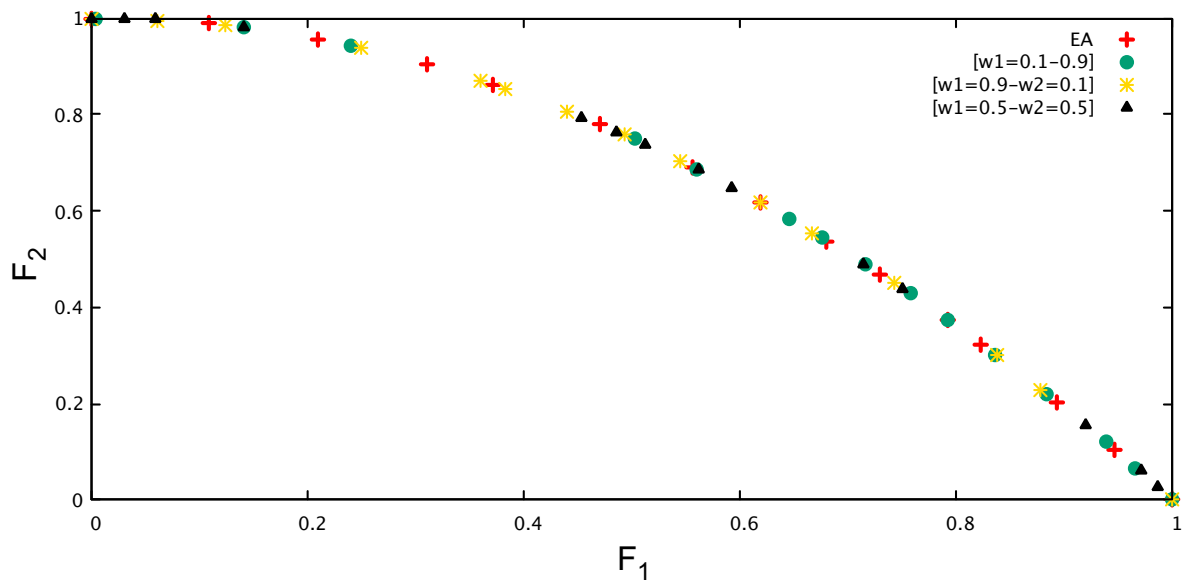
**Πίνακας 4-1:** Συνδυασμοί βάρων για την ‘a priori’ εφαρμογή της Promethee II στα μαθηματικά προβλήματα ZDT1, ZDT2

$w_1$	$w_2$
0.5	0.5
0.9	0.1
0.1	0.9

Από τα σχήματα 4.3 και 4.4 διακρίνεται ότι οι λύσεις των μετώπων από την ‘a priori’ εφαρμογή της Promethee είναι μη-κυριαρχούμενες και προσεγγίζουν το μέτωπο του απλού EA, εστιάζοντας όμως στις περιοχές προτιμήσεων του DM σύμφωνα με τον συνδυασμό βάρους. Πιο συγκεκριμένα, για βάρη  $w_1 = 0.1$ ,  $w_2 = 0.9$ , τα περισσότερα άτομα που υπολογίζονται χαρακτηρίζονται από μεγάλες τιμές της συνάρτησης κόστους  $F_1$  και μικρές τιμές της συνάρτησης κόστους  $F_2$ . Για βάρη  $w_1 = 0.9$ ,  $w_2 = 0.1$  τα περισσότερα άτομα που υπολογίζονται χαρακτηρίζονται από μεγάλες τιμές της συνάρτησης κόστους  $F_2$  και μικρές τιμές της συνάρτησης κόστους  $F_1$ . Για βάρη  $w_1 = 0.5$ ,  $w_2 = 0.5$  οι λύσεις εστιάζονται στα τμήματα του χώρου με ενδιάμεσες τιμές των συναρτήσεων κόστους.



**Σχήμα 4.3:** Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT 1: Μέτωπα Pareto από την ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.



**Σχήμα 4.4:** Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT 2: Μέτωπα Pareto από την ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.

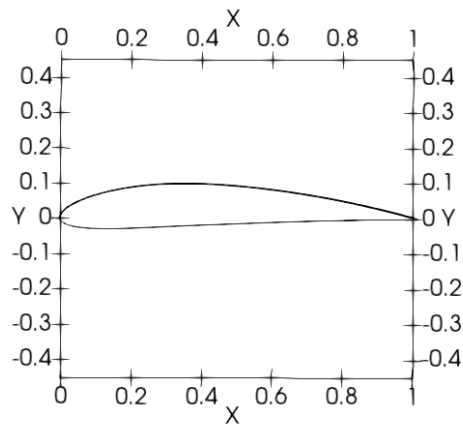
Επίσης συγκρίνοντας τα δύο προβλήματα φαίνεται ότι η επιρροή των προτιμήσεων του DM είναι πιο αισθητή στο κυρτό μέτωπο του ZDT1 σε σχέση με το πρόβλημα ZDT2 που οι λύσεις εκτείνονται σε περισσότερες περιοχές χωρίς όμως να παραλείπεται η εστίαση στις περιοχές ενδιαφέροντος. Διακρίνεται, λοιπόν, ότι η ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II καταφέρνει επιτυχώς να καθοδηγήσει το μέτωπο των λύσεων στις περιοχές προτίμησης του DM.

## 4.2 Βελτιστοποίηση της Μορφής μια Μεμονωμένης Αεροτομής

Το πρόβλημα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής αποτελείται από τρεις στόχους, την ελαχιστοποίηση της αντίστασης, τη μεγιστοποίηση της άνωσης και την ελαχιστοποίηση της ροπής πρόνευσης (pitching moment) στο αεροδυναμικό κέντρο. Με δεδομένο ότι ο EASY χειρίζεται αποκλειστικά προβλήματα ελαχιστοποίησης, οι συναρτήσεις κόστους που ελαχιστοποιούνται ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= C_D \\
 F_2 &= -C_L \\
 F_3 &= C_M
 \end{aligned}$$

Η βελτιστοποίηση γίνεται με το λογισμικό EASY σε ασυμπίεστη και στρωτή ροή για  $U_\infty = 1 \frac{m}{s}$ ,  $\alpha_\infty = 5^\circ$  και  $Re = 10^6$  με λογισμικό αξιολόγησης το OpenFOAM[20] και η αρχική αεροτομή είναι η NACA4412.



**Σχήμα 4.5:** Προβολή της αρχικής αεροτομής προς βελτιστοποίηση NACA4412 στο  $xy$  επίπεδο

Η παραμετροποίηση της επιφάνειας της αεροτομής γίνεται χρησιμοποιώντας ογκομετρικό πλέγμα μορφοποίησης βασισμένο στη μέθοδο NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines). Χρησιμοποιούνται 120 σημεία ελέγχου με τα 18 από αυτά ενεργά. Το καθένα από τα 18 ενεργά σημεία ελέγχου έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, έναν κατά  $x$  κι έναν κατά  $y$  κατεύθυνση. Οπότε το πρόβλημα έχει 36 μεταβλητές σχεδιασμού όπου:

$$-0.05 \leq \Delta x \leq 0.05$$

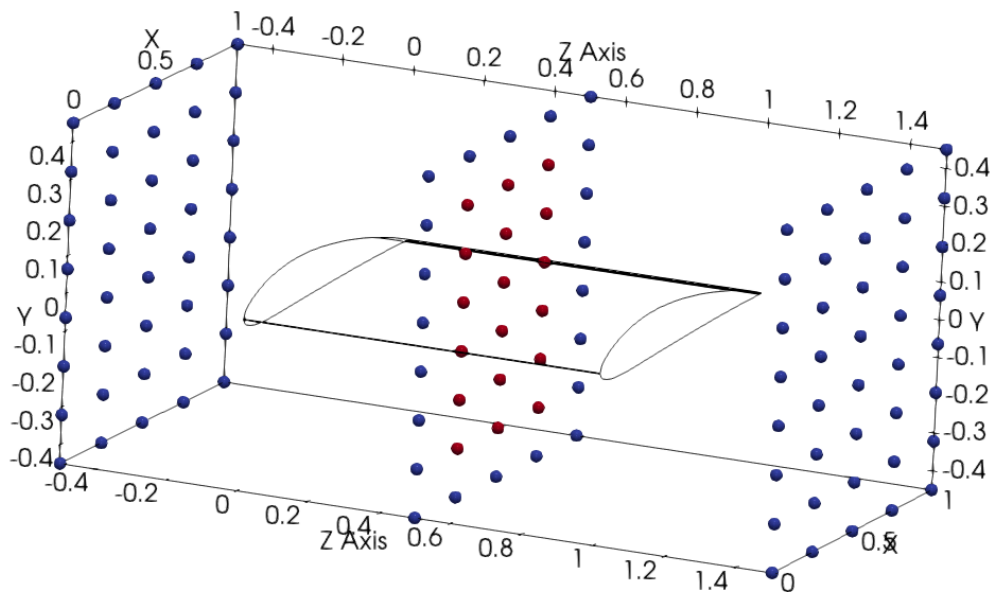
$$-0.15 \leq \Delta y \leq 0.15$$

Μέσω των 36 αυτών μεταβλητών σχεδιασμού παραμορφώνεται το πλέγμα της αρχικής αεροτομής και επιλύεται η ροή γύρω από τη νέα γεωμετρία της αεροτομής με τη βοήθεια του λογισμικού OpenFOAM.

Πρώτα επιλύεται η ροή για την αρχική γεωμετρία της αεροτομής NACA4412 για τις δεδομένες συνθήκες ώστε να συγκριθούν με τις προκύπτουσες γεωμετρίες από τη βελτιστοποίηση.

**Πίνακας 4-2:** Συντελεστής αντίστασης, συντελεστής άνωσης, συντελεστής ροπής της αεροτομής NACA4412 για  $U_\infty = 1 \frac{m}{s}$ ,  $\alpha_\infty = 5^\circ$  και  $Re = 10^6$ .

$C_D$	$C_L$	$C_M$
0.06730	0.14652	0.05122



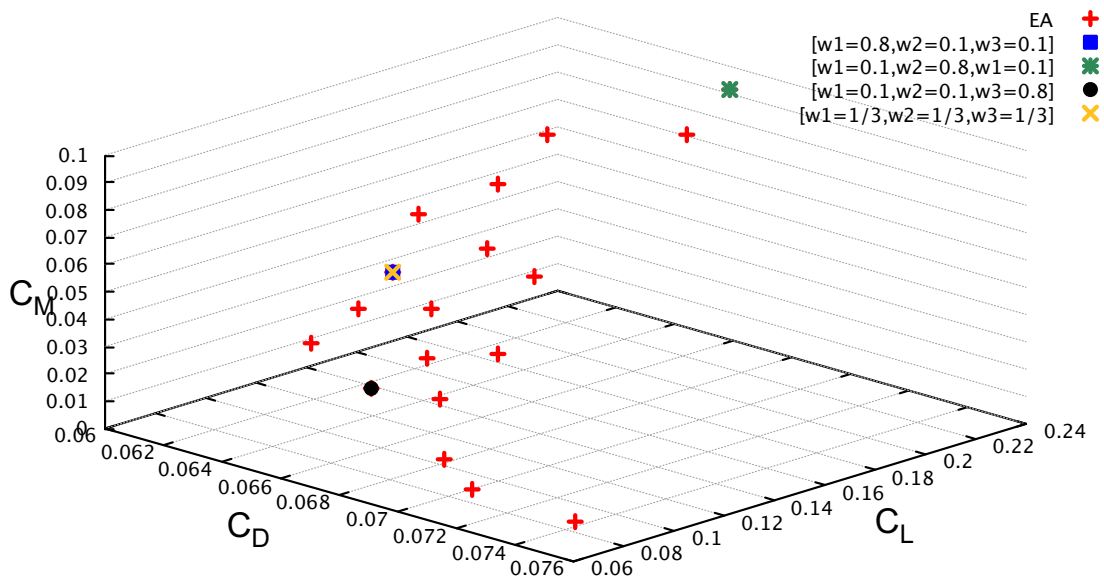
**Σχήμα 4.6:** Παραμετροποίηση της αεροτομής NACA4412 χρησιμοποιώντας NURBS. Με κόκκινο χρώμα απεικονίζονται τα 18 ενεργά σημεία ελέγχου που επιτρέπεται να κινούνται και με μπλε αυτά που παραμένουν σταθερά.

#### 4.2.1 A posteriori εφαρμογή των τεχνικών Promethee

Για τη διαδικασία της βελτιστοποίησης χρησιμοποιήθηκε ένας EA(12,20) με ως και 18 άτομα στο σύνολο των επίλεκτων και κριτήριο τερματισμού τις 300 αξιολογήσεις. Η τεχνική Promethee εφαρμόζεται για τους συνδυασμούς συντελεστών βαρύτητας του Πίνακα 4-3. Οι συνδυασμοί που επιλέχθηκαν είναι 4, οι 3 είναι για ισχυρή προτίμηση ενός στόχου έναντι των άλλων δύο και ο τελευταίος για ίση προτίμηση μεταξύ των στόχων.

**Πίνακας 4-3:** Συνδυασμοί βάρων για την ‘a posteriori’ εφαρμογή της Promethee

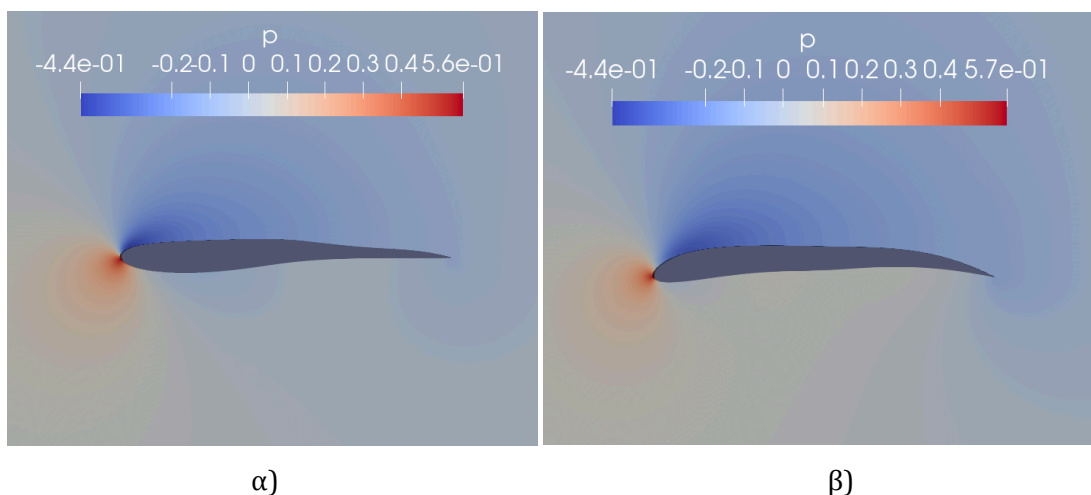
$C_D$	$C_L$	$C_M$
0.8	0.1	0.1
0.1	0.8	0.1
0.1	0.1	0.8
1/3	1/3	1/3



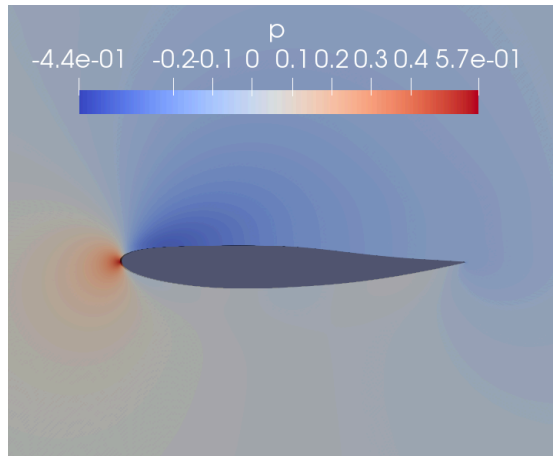
**Σχήμα 4.7:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Βέλτιστες λύσεις από την ‘a posteriori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II στο αποτελούμενο από 18 άτομα μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη.

**Πίνακας 4-4:** Συντελεστής αντίστασης, συντελεστής άνωσης, συντελεστής ροπής των βέλτιστων λύσεων από την ‘a posteriori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II

Συνδυασμοί βαρών	Λύση	$C_D$	$C_L$	$C_M$
$w_1=0.3, w_2=0.3, w_3=0.3$	2	0.06173	0.15446	0.03624
$w_1=0.8, w_2=0.1, w_3=0.1$	2	0.06173	0.15446	0.03624
$w_1=0.1, w_2=0.8, w_3=0.1$	9	0.06457	0.11222	0.01432
$w_1=0.1, w_2=0.1, w_3=0.8$	12	0.06621	0.23576	0.09358



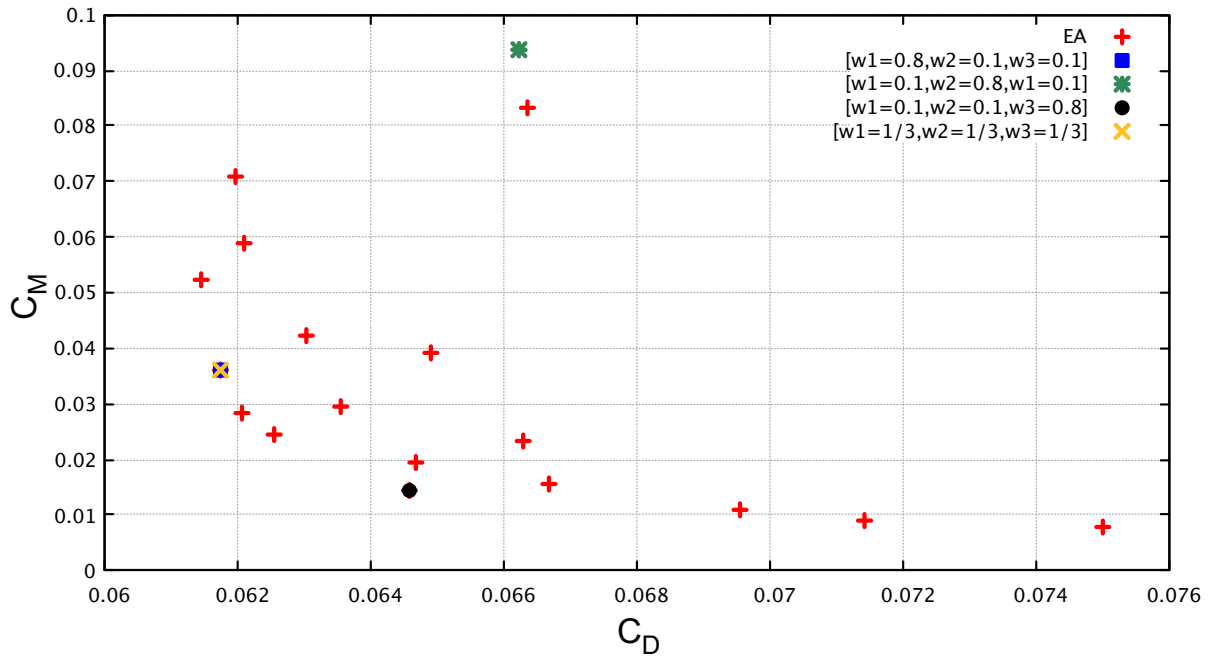




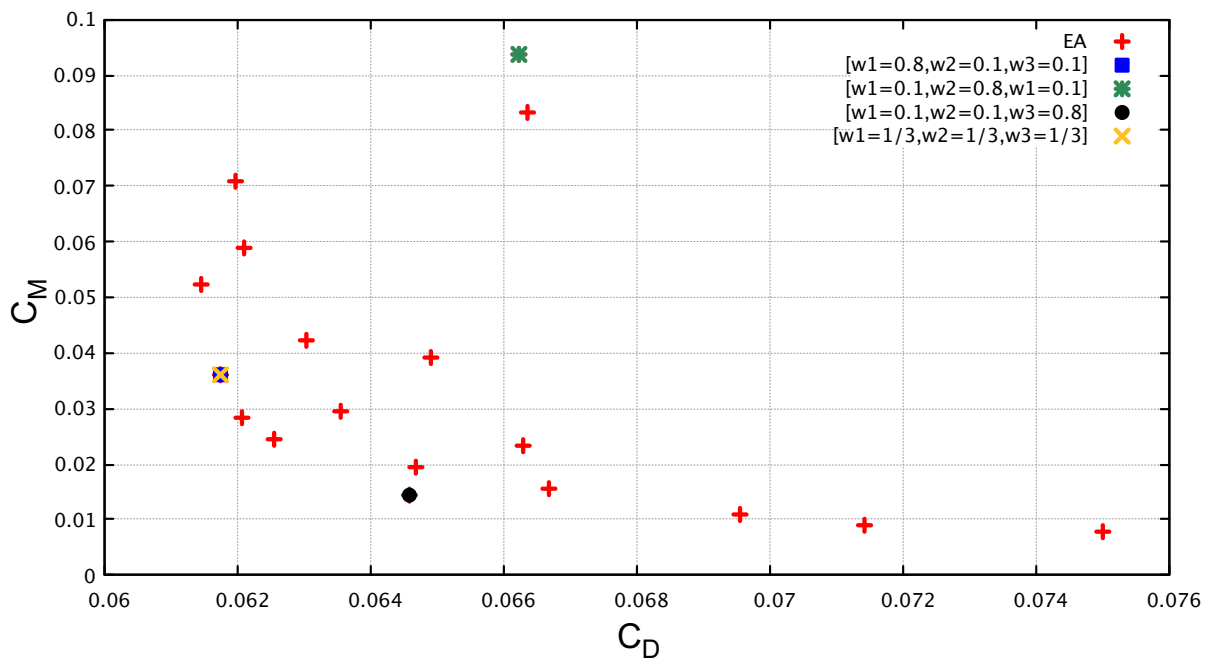
γ)

**Σχήμα 4.8:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Κατανομή πίεσης γύρω από την αεροτομή α) στην περίπτωση προτίμησης ελάχιστης αντίστασης (λύση 2 του μετώπου Pareto) β) στην περίπτωση μέγιστης άνωσης (λύση 12 του μετώπου Pareto) και γ) στην περίπτωση προτίμησης ελάχιστης ροπής (λύση 9 του μετώπου Pareto)

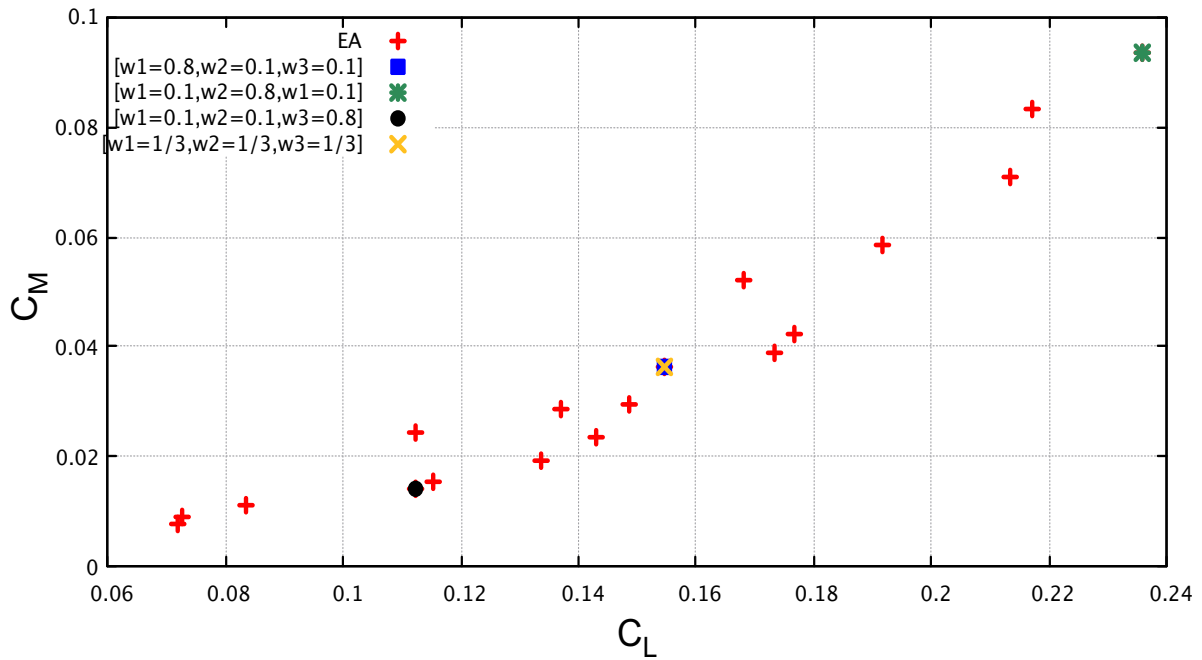
Ακολουθούν οι 2D απεικονίσεις για την καλύτερη κατανόηση του μετώπου. Για βάρη  $w_1=0.8$ ,  $w_2=0.1$  και  $w_3=0.1$  επιλέγεται η δεύτερη ακραία λύση με την μικρότερη τιμή του συντελεστή αντίστασης με μείωση 8.3 % από την αρχική, με αυξημένη τιμή του συντελεστή άνωσης από την αρχική κατά 5.4 % και μειωμένη τιμή του συντελεστή αντίστασης κατά 29%. Αυτή η λύση επλέχθηκε και για βάρη  $w_1=1/3$ ,  $w_2=1/3$  και  $w_3=1/3$ . Για βάρη  $w_1=0.1$ ,  $w_2=0.8$  και  $w_3=0.1$  επιλέγεται η ακραία λύση με την μεγαλύτερη τιμή του συντελεστή άνωσης με αύξηση 60% με αυξημένες όμως και τις τιμές των συντελεστών αντίστασης και ροπής κατά 2% και 83% αντίστοιχα. Για βάρη  $w_1=0.1$ ,  $w_2=0.1$  και  $w_3=0.8$  επιλέγεται η λύση με αρκετά μικρότερη τιμή του συντελεστή ροπής κατά 72%, μικρότερη τιμή συντελεστή αντίστασης κατά 4% αλλά και μικρότερη τιμή συντελεστή άνωσης κατά 23%.



**Σχήμα 4.9:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Προβολές των λύσεων από την 'a posteriori' εφαρμογή της τεχνικής Promethee II μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη στο επίπεδο  $C_D C_L$ .



**Σχήμα 4.10:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Προβολές των λύσεων από την 'a posteriori' εφαρμογή της τεχνικής Promethee II στο μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη στο επίπεδο  $C_D C_M$ .

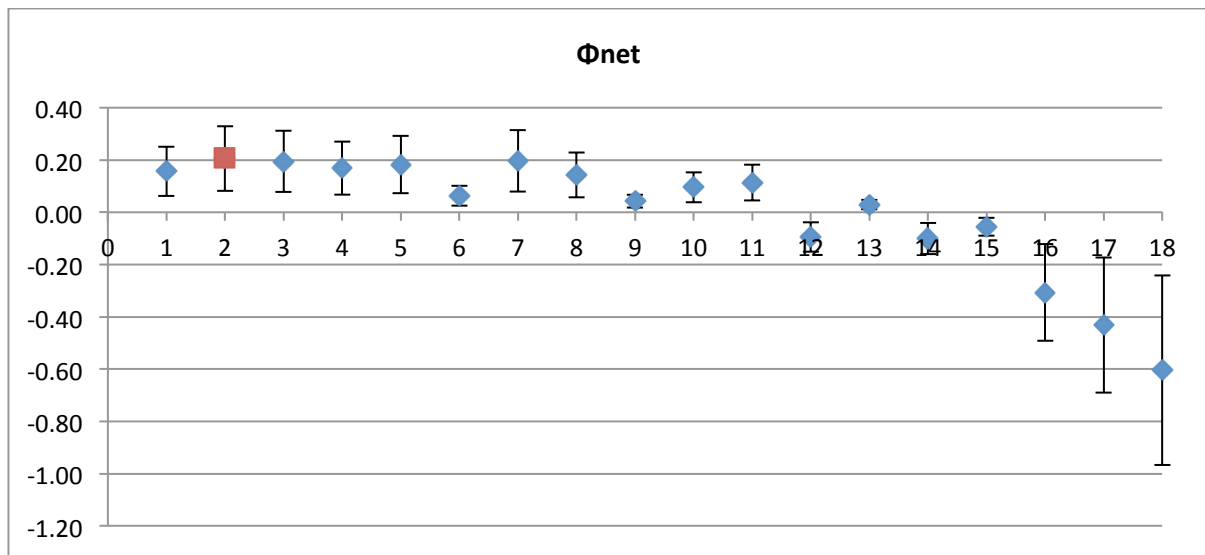


**Σχήμα 4.11:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Προβολές των λύσεων από την ‘a posteriori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II στο μέτωπο Pareto για τα αναγραφόμενα βάρη στο επίπεδο  $C_L C_M$ .

Λόγω των τριών στόχων ακόμα και με ισχυρή προτίμηση βάρους 80% ενός στόχου δεν δίνεται πάντα η αντίστοιχη ακραία λύση γιατί ακόμα και το 10% επηρεάζει την επιλογή της βέλτιστης λύσης. Αξιοσημείωτη είναι επίσης η επιλογή της λύσης 2 για βάρη ισχυρής προτίμησης της ελαχιστοποίησης της αντίστασης αλλά και για ίση πρότιμηση των στόχων που δικαιολογείται αφού ικανοποιεί και τους τρεις στόχους. Σε περίπτωση που ο DM έχοντας ίση προτίμηση για τους στόχους θέλει μεγαλύτερη αύξηση του συντελεστή άνωσης από 5% μπορεί να διατρέξει στα διαγράμματα του Promexcel και να επιλέξει την λύση που τον ικανοποιεί. Όπως φαίνεται από τα σχήματα 4.12, 4.13 η αμέσως επόμενη καλύτερη λύση είναι η λύση 7 με μεγαλύτερη αύξηση του συντελεστή άνωσης και μικρότερη αλλά ικανοποιητική αύξηση των άλλων δύο συντελεστών που παρουσιάζονται στον Πίνακα 4-5.

PROMETHEE I																				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Better	Worse
1	-	Worse	Worse	Worse	Worse	Better	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	12	5
2	Better	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	17	0
3	Better	Worse	-	Better	Better	Better	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	15	2
4	Better	Worse	Worse	-	Worse	Better	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	13	4
5	Better	Worse	Worse	Better	-	Better	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	14	3
6	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Worse	Worse	Better	Worse	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	8	9
7	Better	Worse	Better	Better	Better	Better	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	16	1
8	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Better	Worse	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	11	6
9	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Worse	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	7	10
10	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Better	Worse	Worse	Better	-	Worse	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	9	8
11	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Better	Worse	Worse	Better	Better	-	Better	Better	Better	Better	Better	Better	Better	10	7
12	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Worse	Worse	Worse	Better	Better	Better	4	13
13	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Better	-	Better	Better	Better	Better	Better	6	11
14	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Worse	Better	Better	Better	3	14
15	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Better	-	Better	Better	Better	5	12
16	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	Better	2	15
17	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	Better	1	16
18	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	Worse	-	0	17

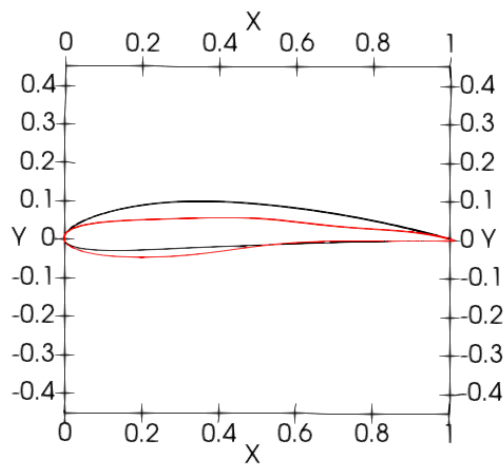
**Σχήμα 4.12:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Πίνακας ανά ζεύγους σύγκρισης από το φύλλο εργασίας Promethee I για βάρη  $w_1=1/3$ ,  $w_2=1/3$  και  $w_3=1/3$ .



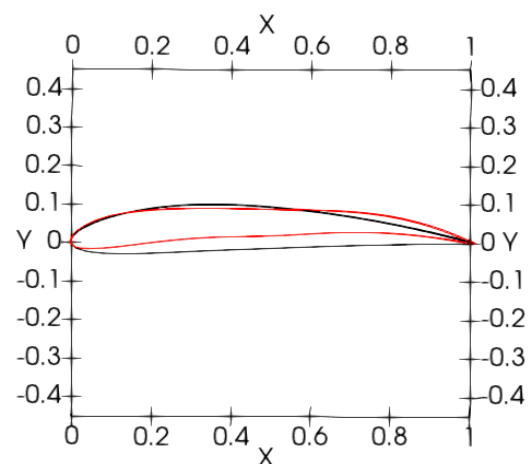
**Σχήμα 4.13:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Διάγραμμα των δεικτών  $\Phi^{net}$  της Promethee II με τα διαστήματα εμπιστοσύνης της Promethee III, από το φύλλο εργασίας Promethee II, III, για βάρη  $w_1=1/3$ ,  $w_2=1/3$  και  $w_3=1/3$ .

**Πίνακας 4-5:** Σύγκριση των συντελεστών αντίστασης, άνωσης και ροπής των βέλτιστων λύσεων 2 και 7 από την ‘a posteriori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II με την αεροτομή αναφοράς NACA4412

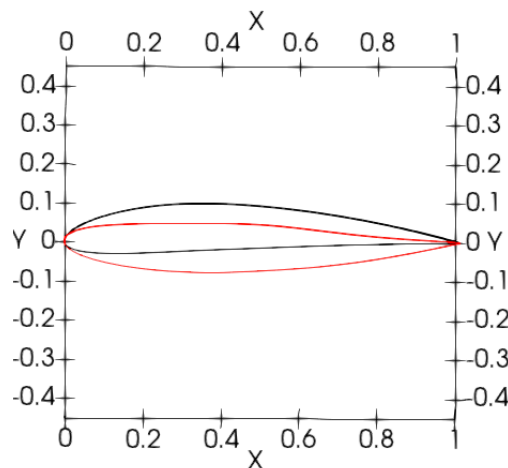
	$C_D$	$C_L$	$C_M$
NACA4412	0.06730	0.14652	0.05122
2	0.06173 (-8.3%)	0.15446(+5.4%)	0.03624(-29%)
7	0.06303(-6.3%)	0.17646(+20.4%)	0.04220(-18%)



α) Ισχυρή προτίμηση ελάχιστης αντίστασης



β) Ισχυρή προτίμηση μέγιστης άνωσης

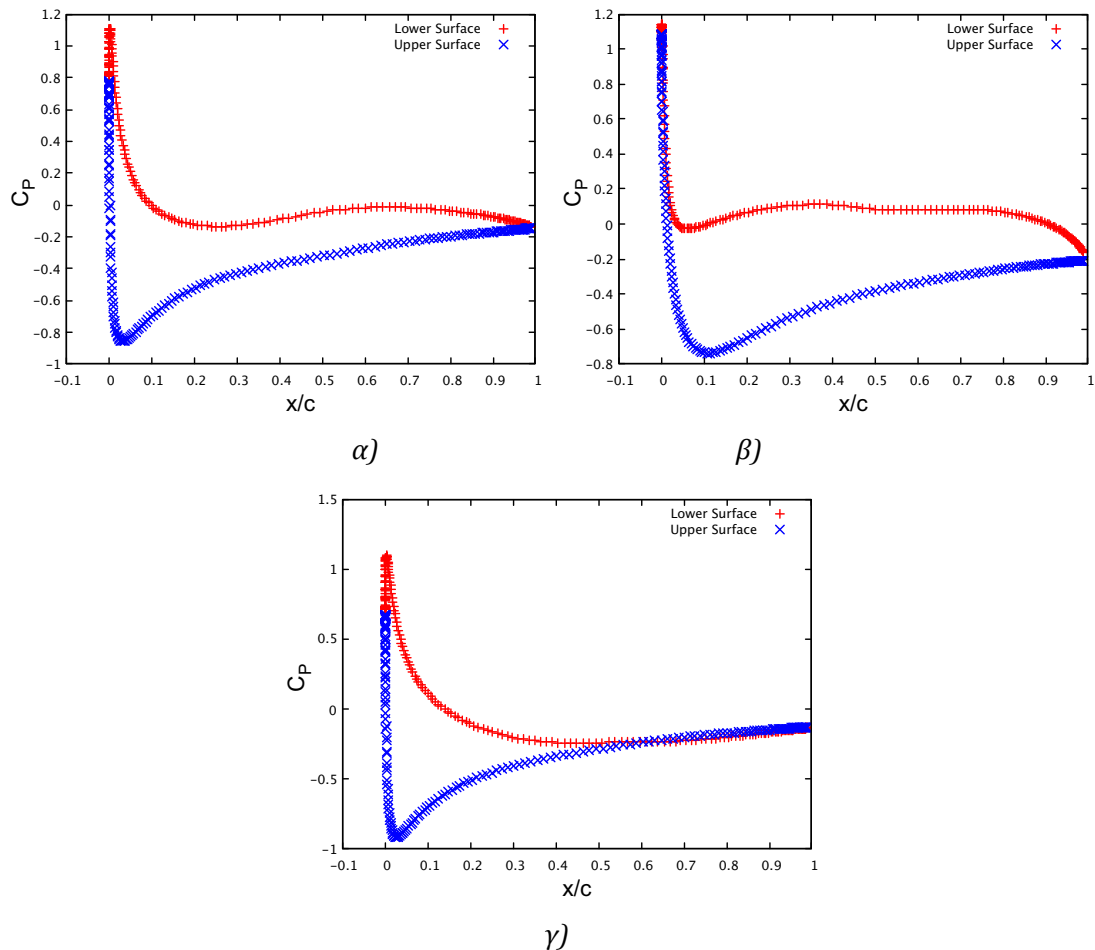


γ) Ισχυρή προτίμηση ελάχιστης ροπής

**Σχήμα 4.14:** Νέα αεροτομή (κόκκινο χρώμα) σε σύγκριση με την αεροτομή NACA4412 (μαύρο χρώμα) ύπο κλίμακα α) στην περίπτωση προτίμησης ελάχιστης αντίστασης (λύση 2 του μετώπου Pareto) β) στην περίπτωση μέγιστης άνωσης (λύση 12 του μετώπου Pareto) και γ) στην περίπτωση προτίμησης ελάχιστης ροπής (λύση 9 του μετώπου Pareto)

Για τις 3 λύσεις που προτάθηκαν αρχικά με την ‘a posteriori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II για τους συνδυασμούς βαρών του πίνακα 4-2, αντιστοιχούν οι αεροτομές των σχημάτων 4.14-4.15. Για βάρη  $w_1=0.8$ ,  $w_2=0.1$  και  $w_3=0.1$ , την περίπτωση ισχυρής προτίμησης για την ελαχιστοποίηση της αντίστασης, η αεροτομή είναι πιο λεπτή από την αρχική, με αρκετά μικρότερη καμπυλότητα στην επιφάνεια υποπίεσης και με το πάχος στο τμήμα προσβολής να μειώνεται για την επίτευξη της ελάχιστης αντίστασης. Για βάρη  $w_1=0.1$ ,  $w_2=0.8$  και  $w_3=0.1$ , την περίπτωση μέγιστης άνωσης η αεροτομή παραμένει λεπτή συγκριτικά αλλά με πολύ μεγαλύτερη καμπυλότητα. Είναι εμφανές ότι έχει την μεγαλύτερη διαφορά πίεσης μεταξύ των

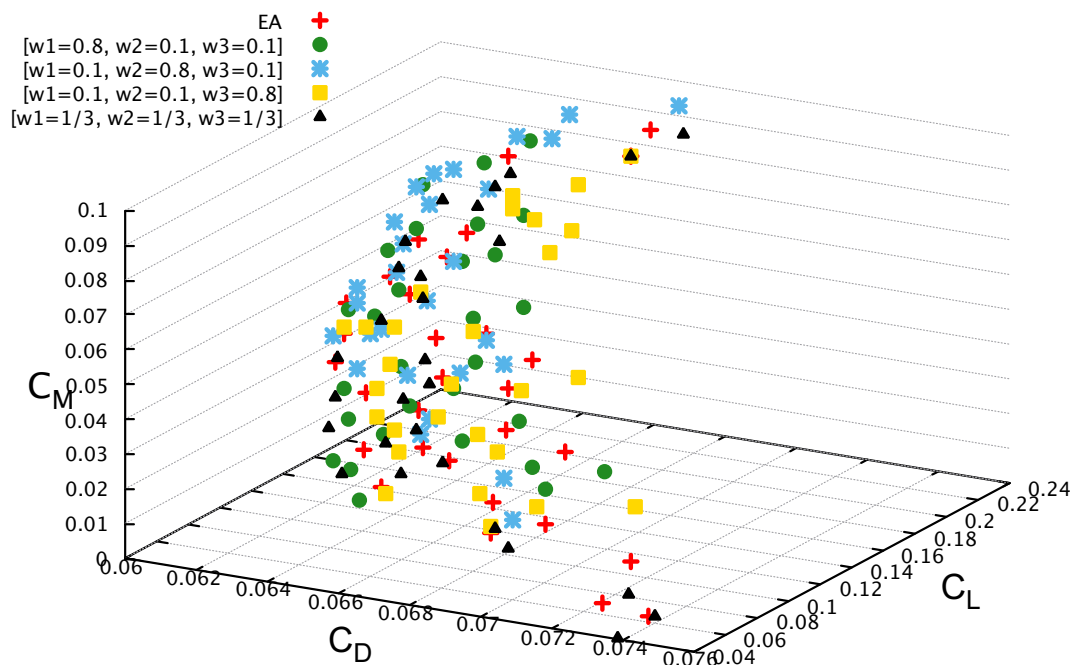
πλευρών υποπίεσης και υπερπίεσης για την επίτευξη της μέγιστης άνωσης όπως επιβεβαιώνεται κι από τα διαγράμματα κατανομής πίεσης των αεροτομών στο σχήμα 4.9. Για βάρη  $w_1=0.1$ ,  $w_2=0.1$  και  $w_3=0.8$ , το πάχος αυξάνεται κι η καμπυλότητα μειώνεται για την επίτευξη της ελάχιστης ροπής. Η έλλειψη καμπυλότητας, όμως, οδηγεί σε πολυ μικρή τιμή συντελεστή άνωσης.



**Σχήμα 4.15:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Διάγραμμα συντελεστή πίεσης γύρω από την αεροτομή α) στην περίπτωση προτίμησης ελάχιστης αντίστασης (λύση 2 του μετώπου Pareto) β) στην περίπτωση προτίμησης μέγιστης άνωσης (λύση 12 του μετώπου Pareto) γ) στην περίπτωση προτίμησης ελάχιστης ροπής (λύση 9 του μετώπου Pareto)

## 4.2.2 'Α priori' εφαρμογή της τεχνικής Promethee II

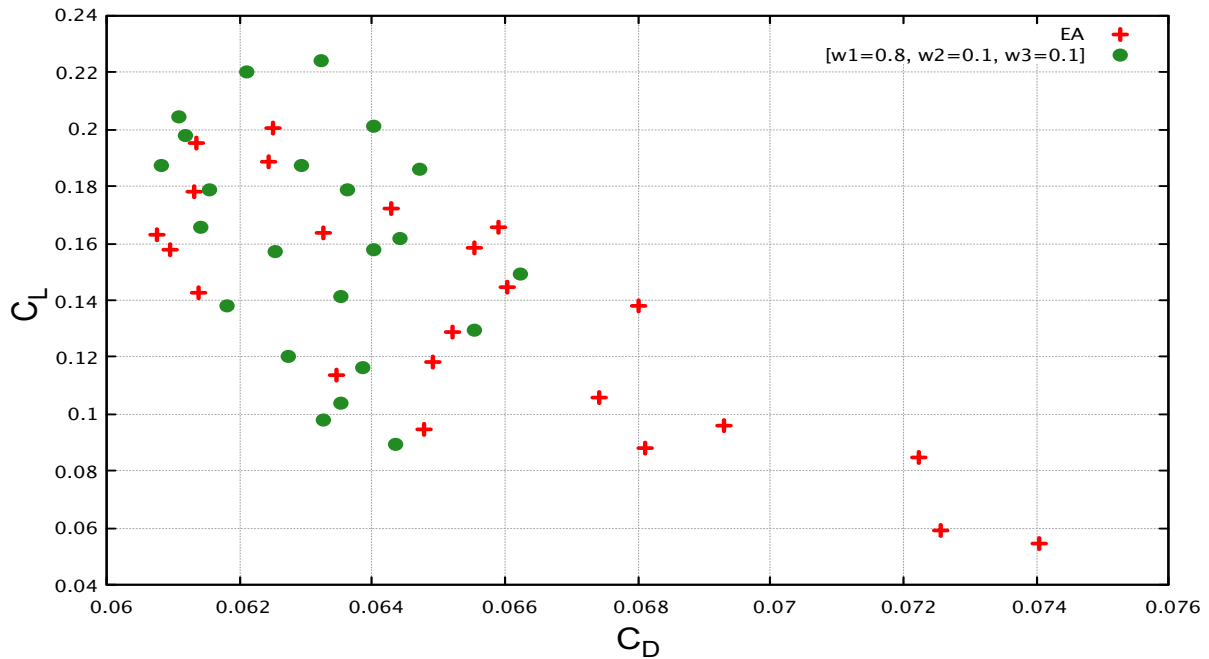
Στη συνέχεια, εφαρμόζεται η τεχνική Promethee II 'α priori', με τον τρόπο που αναφέρθηκε, για το πρόβλημα βελτιστοποίησης της ίδιας μεμονωμένης αεροτομής για τους ίδιους τρεις στόχους. Χρησιμοποιείται EA(12,20) με μέχρι 30 άτομα στο σύνολο των επίλεκτων και κριτήριο τερματισμού τις 300 αξιολογήσεις. Οι προτιμήσεις του DM ποσοτικοποιούνται με τα βάρη του πίνακα 4.1 και τα μέτωπα Pareto που υπολογίζονται συγκρίνονται με αυτό που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA με ίδια χαρακτηριστικά πληθυσμών και ίδιο κριτήριο τερματισμού.



**Σχήμα 4.15:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Μέτωπα Pareto από την 'α priori' εφαρμογή της τεχνικής Promethee για τα αναγραφόμενα βάρη. Σύγκριση με το μέτωπο Pareto που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας απλό EA.

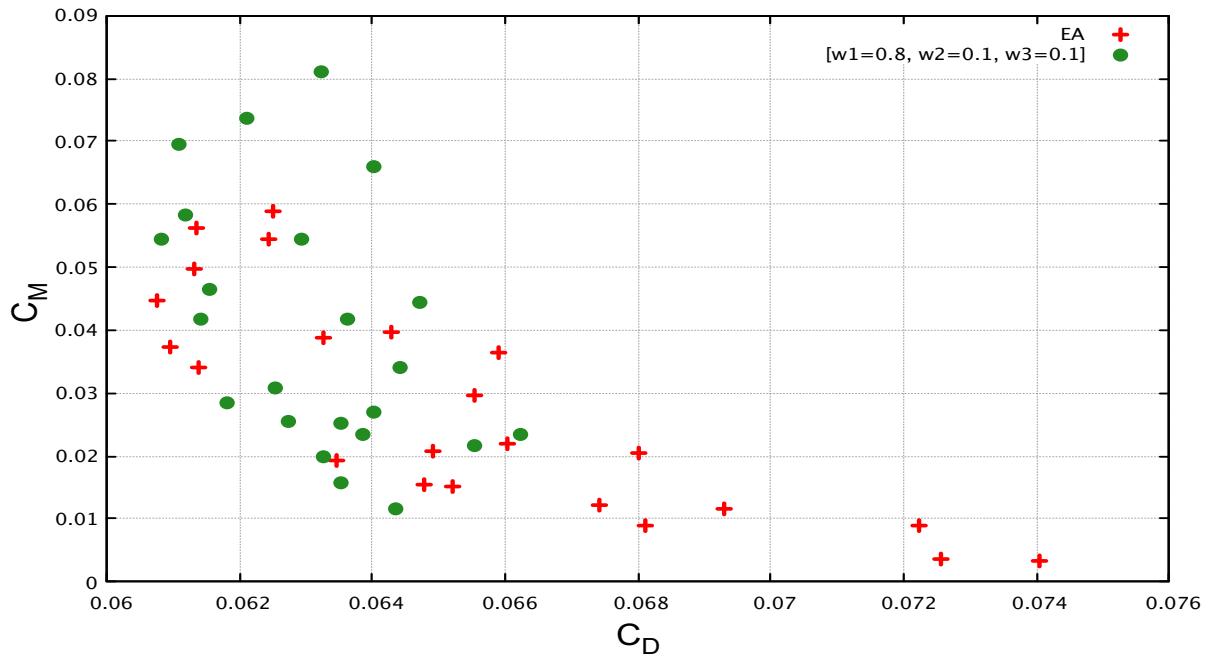
Στο σχήμα 4.15 φαίνεται η συμπεριφορά κάθε μετώπου και η περιοχή εστίασης του σύμφωνα με τα βάρη προτίμησης. Για καλύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς των 'α priori' εφαρμογών ακολουθούν οι 2D απεικονίσεις του μετώπου που προκύπτει από κάθε συνδυασμό βάρων σε σύγκριση με του απλού EA κρατώντας τις μη κυριαρχούμενες λύσεις. Για βάρη  $w_1=0.8$ ,  $w_2=0.1$  και  $w_3=0.1$ , αντίστοιχα από τα σχήματα 4.17, 4.18 διακρίνονται αρκετές μη-κυριαρχούμενες λύσεις με μικρότερες τιμές για τον συντελεστή αντίστασης. Για βάρη  $w_1=0.1$ ,  $w_2=0.8$  και  $w_3=0.1$ , διακρίνεται από τα σχήματα 4.20, 4.23 πως οι περισσότερες λύσεις εντοπίζονται σε

περιοχές με μεγαλύτερες τιμές άνωσης, με μικρές τιμές για τον συντελεστή αντίστασης αλλά προς μεγαλύτερες τιμές του συντελεστή ροπής. Για βάρη  $w_1=0.1$ ,  $w_2=0.1$  και  $w_3=0.8$ , όπως φαίνεται από το σχήμα 4.15 και 4.18 έχουν προκύψει αρκετές λύσεις με μικρότερες τιμές  $C_M$ , αλλά με τις περισσότερες να είναι κυριαρχούμενες όπως βλέπουμε τα σχήματα 4.23. Για βάρη  $w_1=1/3$ ,  $w_2=1/3$  και  $w_3=1/3$ , οι λύσεις προσανατολίζονται σε πιο κεντρικές περιοχές τιμών κάθε στόχου όπως ο απλός EA με αρκετές μη-κυριαρχούμενες λύσεις.

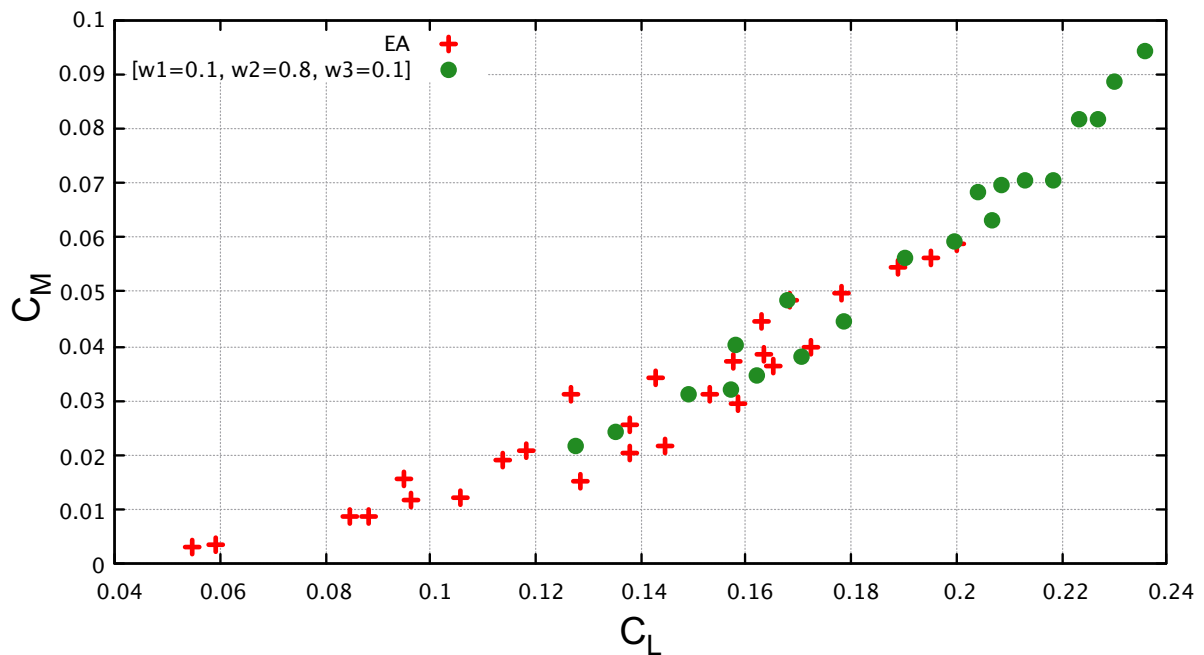


**Σχήμα 4.17:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Προβολές των λύσεων από την ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής *Promethee II* στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο *Pareto* για βάρη  $w_1=0.8$ ,  $w_2=0.1$  και  $w_3=0.1$  στο επίπεδο  $C_D C_L$ .

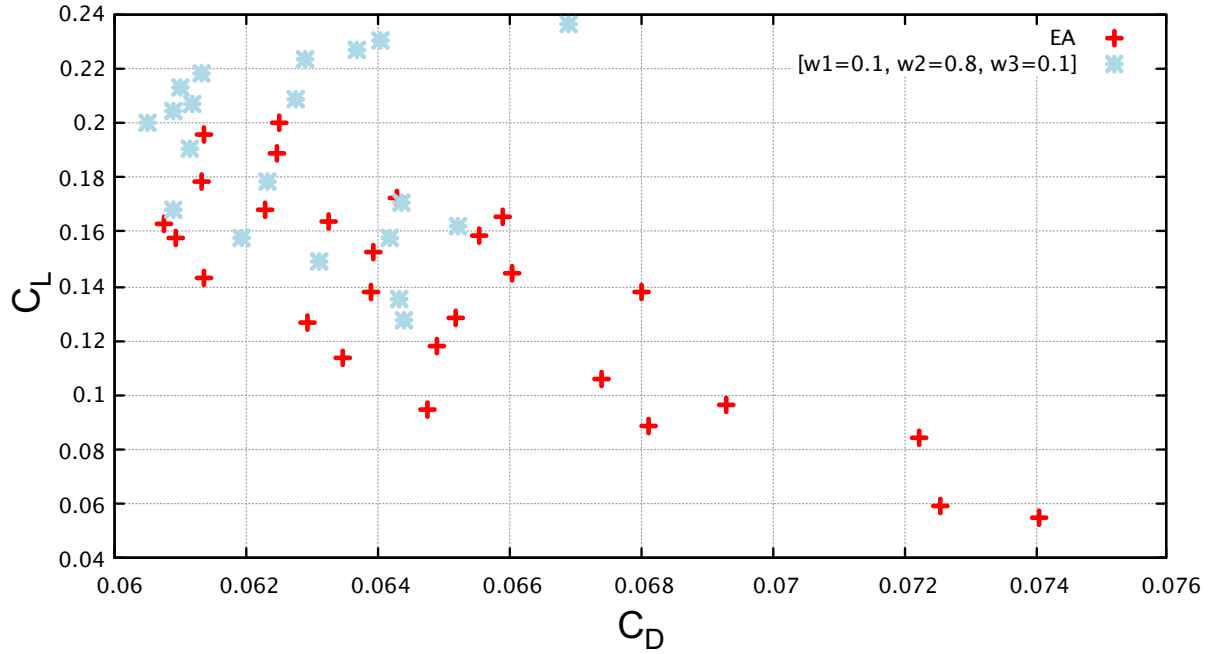




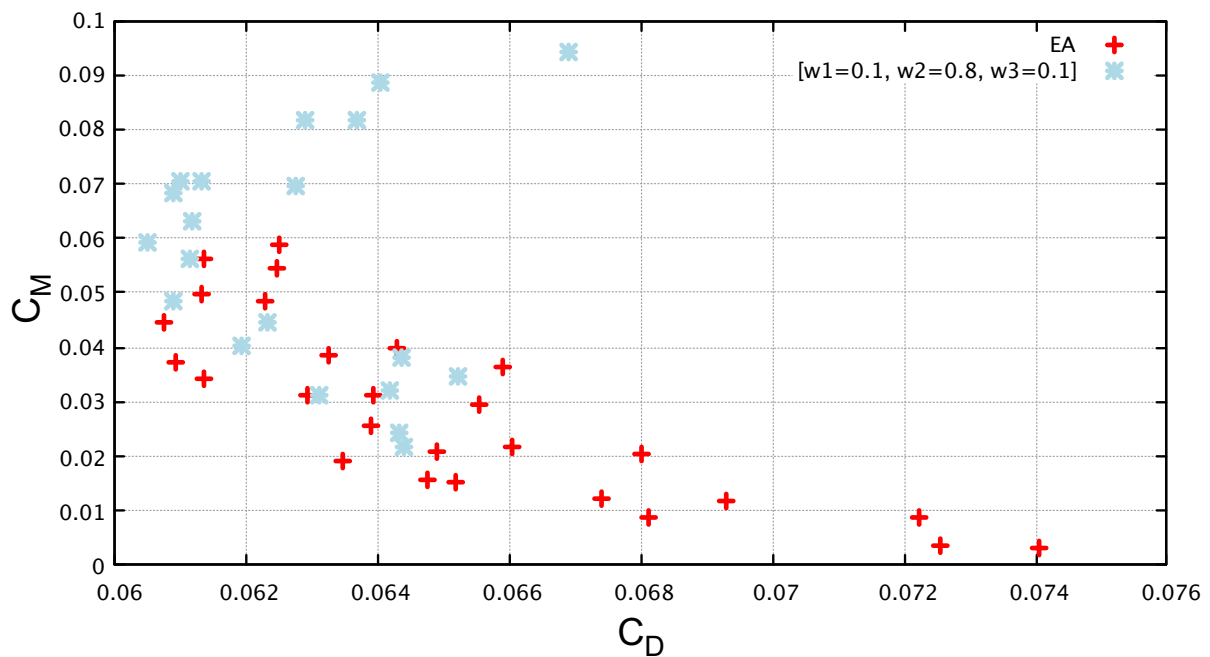
**Σχήμα 4.18:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Προβολές των λύσεων από την 'a priori' εφαρμογή της τεχνικής *Promethee II* στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για βάρη  $w_1=0.8$ ,  $w_2=0.1$  και  $w_3=0.1$  στο επίπεδο  $C_D C_M$ .



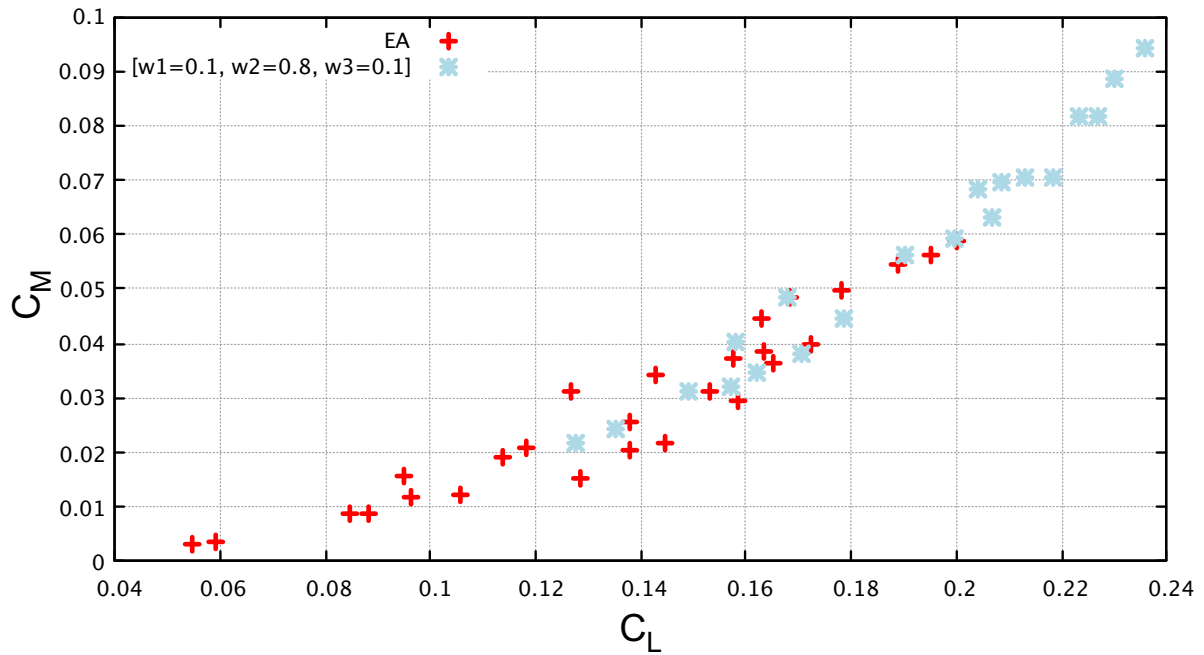
**Σχήμα 4.19:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Προβολές των λύσεων από την 'a priori' εφαρμογή της τεχνικής *Promethee II* στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για βάρη  $w_1=0.8$ ,  $w_2=0.1$  και  $w_3=0.1$  στο επίπεδο  $C_L C_M$ .



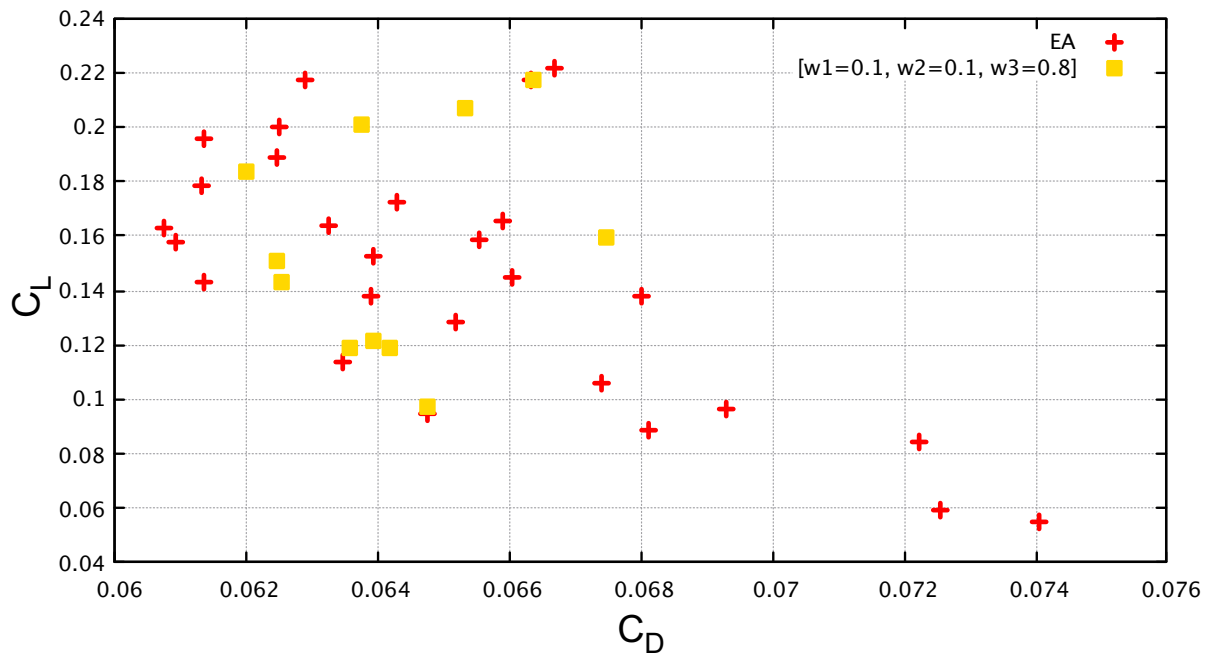
**Σχήμα 4.20:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Προβολές των λύσεων από την 'a priori' εφαρμογή της τεχνικής Promethee II στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για βάρη  $w_1=0.1, w_2=0.8$  και  $w_3=0.1$  στο επίπεδο  $C_D C_L$ .



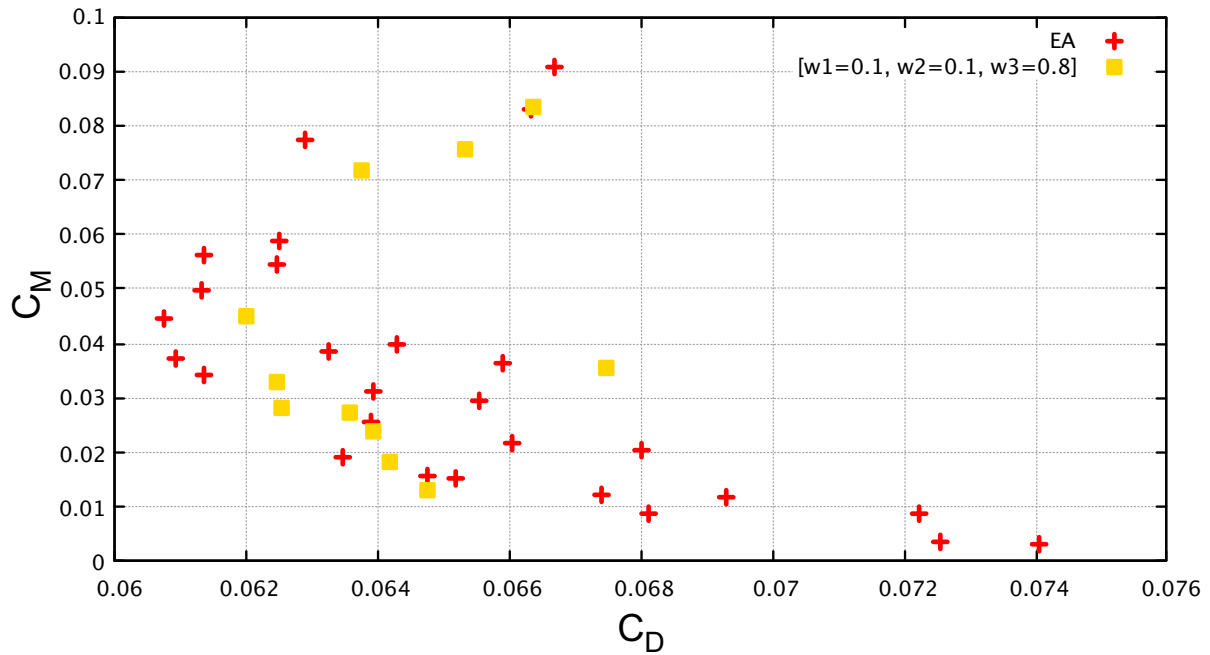
**Σχήμα 4.21:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Προβολές των λύσεων από την 'a priori' εφαρμογή της τεχνικής Promethee II στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για βάρη  $w_1=0.1, w_2=0.8$  και  $w_3=0.1$  στο επίπεδο  $C_D C_M$ .



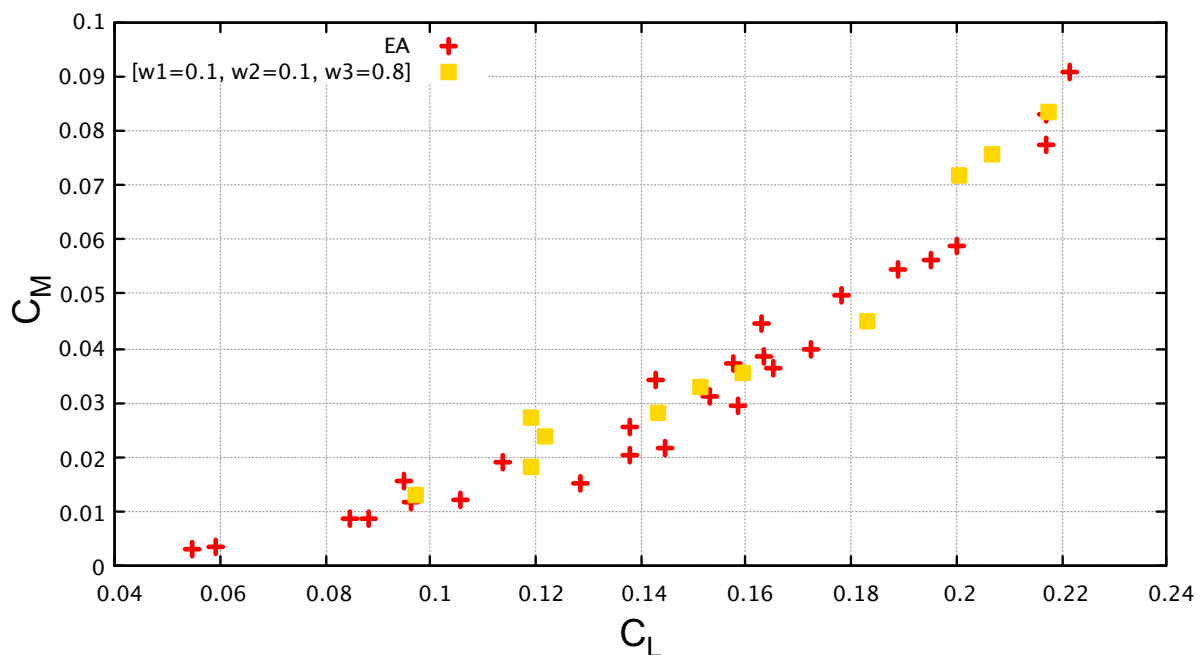
**Σχήμα 4.22:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Προβολές των λύσεων από την 'a priori' εφαρμογή της τεχνικής Promethee II στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για βάρη  $w_1=0.1$ ,  $w_2=0.8$  και  $w_3=0.1$  στο επίπεδο  $CLCM$ .



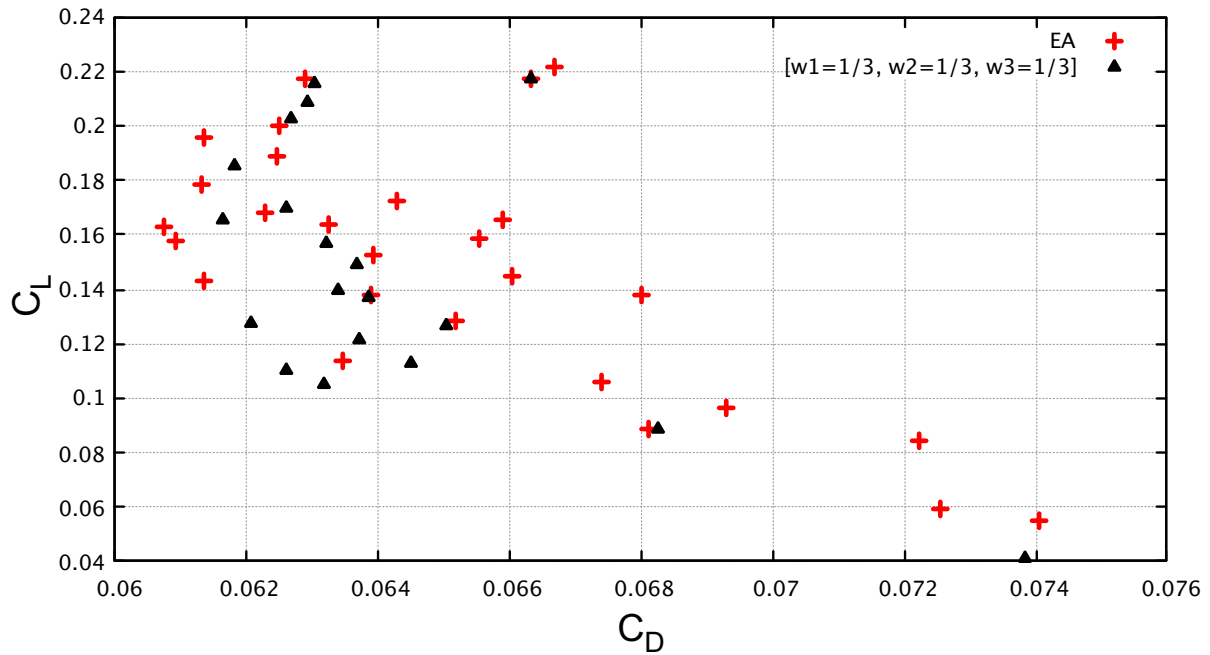
**Σχήμα 4.23:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Προβολές των λύσεων από την 'a priori' εφαρμογή της τεχνικής Promethee II στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για βάρη  $w_1=0.1$ ,  $w_2=0.1$  και  $w_3=0.8$  στο επίπεδο  $CDCL$ .



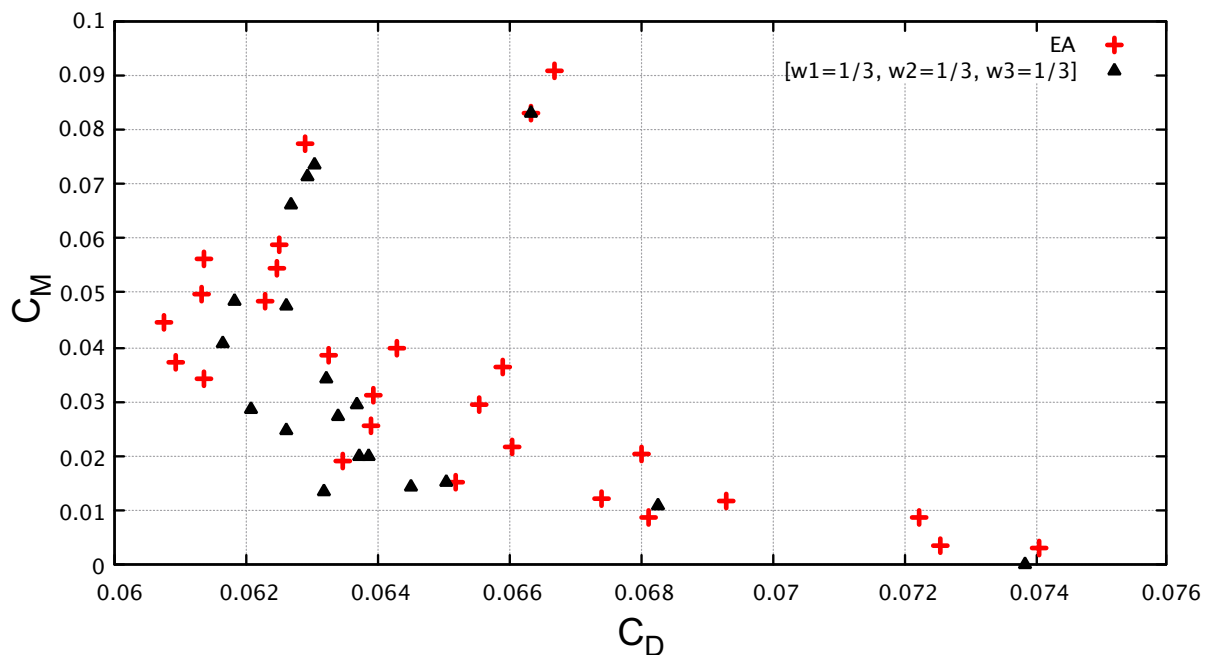
**Σχήμα 4.24:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Προβολές των λύσεων από την 'a priori' εφαρμογή της τεχνικής Promethee II στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για βάρη  $w_1=0.1$ ,  $w_2=0.1$  και  $w_3=0.8$  στο επίπεδο  $C_D C_M$ .



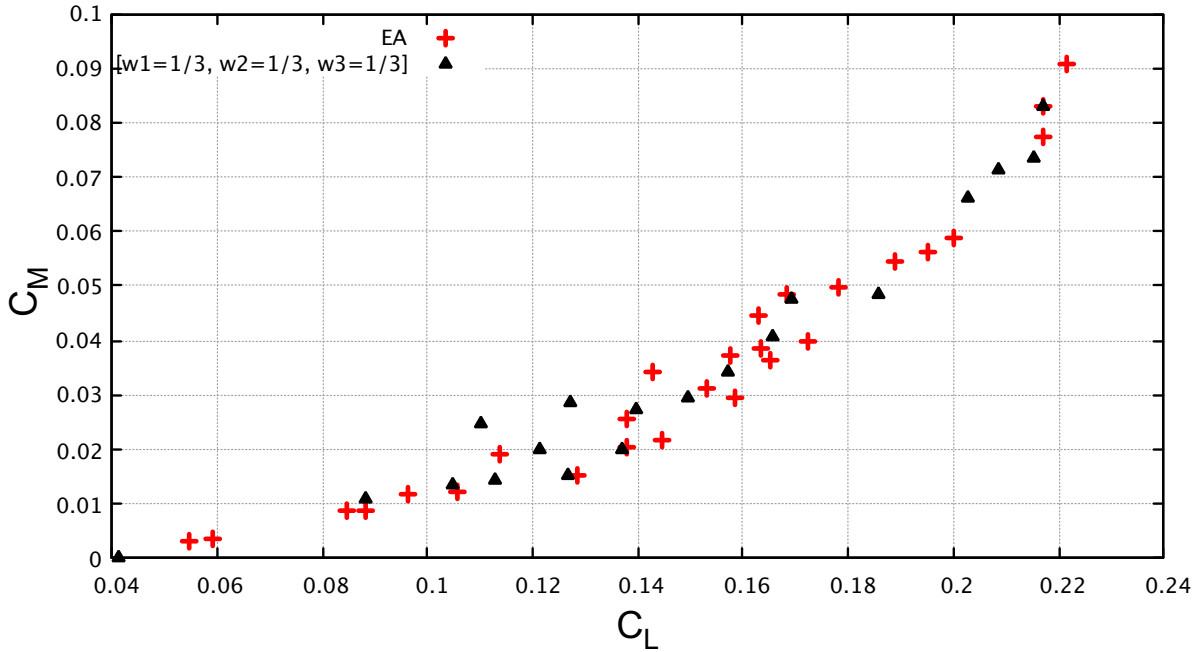
**Σχήμα 4.25:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Προβολές των λύσεων από την 'a priori' εφαρμογή της τεχνικής Promethee II στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για βάρη  $w_1=0.1$ ,  $w_2=0.1$  και  $w_3=0.8$  στο επίπεδο  $C_L C_M$ .



**Σχήμα 4.26:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Προβολές των λύσεων από την 'a priori' εφαρμογή της τεχνικής Promethee II στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για βάρη  $w_1=0.4$ ,  $w_2=0.3$  και  $w_3=0.3$  στο επίπεδο  $C_D C_L$ .



**Σχήμα 4.27:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Προβολές των λύσεων από την 'a priori' εφαρμογή της τεχνικής Promethee II στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για βάρη  $w_1=0.4$ ,  $w_2=0.3$  και  $w_3=0.3$  στο επίπεδο  $C_D C_M$ .



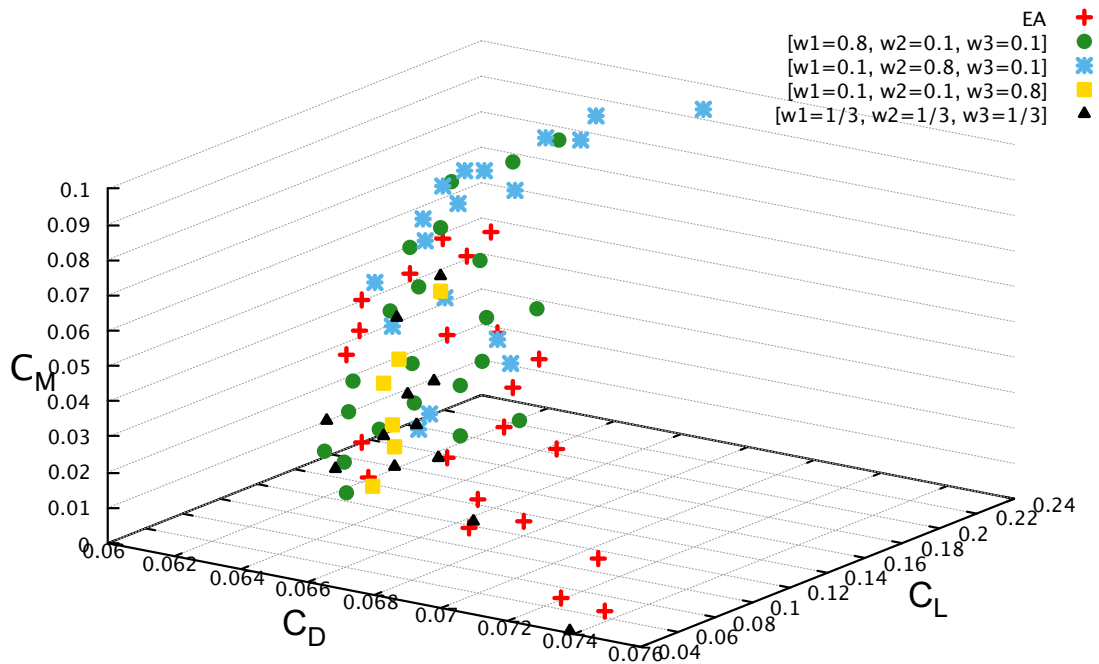
**Σχήμα 4.28:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Προβολές των λύσεων από την ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II στο αποτελούμενο από 30 άτομα μέτωπο Pareto για βάρη  $w_1=0.4$ ,  $w_2=0.3$  και  $w_3=0.3$  στο επίπεδο  $C_L C_M$ .

Η a priori εφαρμογή της Promethee II καθοδήγησε τα μέτωπα Pareto επιτυχώς προς τις περιοχές προτίμησης του DM με λιγότερη επιτυχία για την ισχυρή προτίμηση του στόχου ελαχιστοποίησης της ροπής.

Δημιουργώντας το μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων από τα μέτωπα Pareto που υπολογίστηκαν, προκύπτει ένα “Pareto των Pareto” αποτελούμενο από 80 άτομα. Στον πίνακα 4-3 φαίνεται η συνεισφορά του κάθε μετώπου στο τελικό.

**Πίνακας 4-3:** Πλήθος μη-κυριαρχούμενων λύσεων κάθε μετώπου

Μέτωπο	Πλήθος μη-κυριαρχούμενων λύσεων
EA	22
$w_1=0.8 - w_2=0.1 - w_3=0.1$	19
$w_1=0.1 - w_2=0.8 - w_3=0.1$	18
$w_1=0.1 - w_2=0.1 - w_3=0.8$	7
$w_1=1/3 - w_2=1/3 - w_3=1/3$	14



**Σχήμα 4.28:** Βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τρεις στόχους: Μη-κυριαρχούμενα άτομα των μετώπων Pareto από τη χρήση απλού EA και από την ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II για τα αναγραφόμενα βάρη.

Συγκρίνοντας το μέτωπο Pareto του απλού EA σε σχέση με το τελικό μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων, όπως φαίνεται κι άπο τον πίνακα, 8 άτομα από τα 30 κυριαρχήθηκαν από τα μέτωπα της a Priori εφαρμογή της Promethee II. Όμως εμφανίστηκαν 50 νέες μη-κυριαρχούμενες λύσεις σε καινούριες περιοχές που ο απλός EA δεν είχε προσεγγίσει. Πιο συγκεκριμένα για βάρη  $w_1=0.8, w_2=0.1$  και  $w_3=0.1$  βρέθηκαν 19 μη-κυριαρχούμενες λύσεις από τις 30 του αρχικού μετώπου με όλες τις λύσεις να έχουν μικρές τιμές για τον συντελεστή αντίστασης. Για βάρη  $w_1=0.1, w_2=0.8$  και  $w_3=0.1$  βρέθηκαν 18 μη-κυριαρχούμενες λύσεις με τις περισσότερες λύσεις να έχουν τις μεγαλύτερες τιμές του συντελεστή αντίστασης. Για βάρη  $w_1=0.1, w_2=0.1$  και  $w_3=0.8$  βρέθηκαν μόνο 7 μη-κυριαρχούμενες λύσεις με κεντρικές τιμές για τους συντελεστές άνωσης και αντίστασης και μικρότερες για τον συντελεστή ροπής. Για βάρη  $w_1=1/3, w_2=1/3$  και  $w_3=1/3$  βρέθηκαν 14 μη-κυριαρχούμενες λύσεις με κεντρικές τιμές για τους τρεις συντελεστές.

Η ‘a priori’ εφαρμογή της Promethee II, λοιπόν, μπορεί, πέρα από εργαλείο για την προσέγγιση συγκεκριμένης περιοχής του μετώπου για τις προτιμήσεις του DM, να χρησιμοποιηθεί ως

τρόπος επέκτασης του αρχικού μετώπου για την προσφορά καινούριων μη-κυριαρχούμενων λύσεων.



## Κεφάλαιο 5

### Συμπεράσματα – Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη

Η διπλωματική εργασία αφορά τεχνικές που σχετίζονται με διαδικασίες λήψης αποφάσεων σε προβλήματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, MCDM (Multiple Criteria Decision Making). Πιο συγκεκριμένα, διερευνήθηκε η αποτελεσματικότητα της ‘a posteriori’ εφαρμογής των τεχνικών Promethee I, II και III και της τεχνικής AHP για τον προσδιορισμό συντελεστών βάρους κι η ‘a priori’ εφαρμογή της τεχνικής Promethee II. Για την ‘a posteriori’ εφαρμογή αναπτύχθηκε το εργαλείο Promexcel για διευκόλυνση του DM. Η εφαρμογή έγινε σε προβλήματα MOO, μαθηματικά κι αεροδυναμικά, που επιλύθηκαν με την βοήθεια των EA. Στη συνέχεια παρουσιάζονται συμπεράσματα σε σχέση με τους δύο τρόπους εφαρμογής και προτάσεις για μελλοντική μελέτη.

#### Συμπεράσματα

Για την ‘a posteriori’ εφαρμογή στα μαθηματικά προβλήματα η αποτελεσματικότητα των τεχνικών Promethee κρίνεται από τη μορφή μετώπου. Όπως σχολιάστηκε, για κυρτό μέτωπο οι τεχνικές ανταποκρίθηκαν στις προτιμήσεις του DM, ενώ σε μη-κυρτό μέτωπο προσκολλήθηκαν στις ακραίες λύσεις. Επίσης διακρίθηκε η ευελιξία των μεθόδων Promethee μέσω των τύπων συναρτήσεων προτίμησης και των παραμέτρων τους, για την ανταπόκριση στην φύση των προβλημάτων και στην έκφραση των προτιμήσεων του DM. Όσον αφορά την εφαρμογή Promexcel αποδεικνύεται άμεση και εύκολη στο χειρισμό καθώς δεν απαιτεί παρά βασική επαφή με το περιβάλλον των φύλλων υπολογισμού, όπως το MS Excel. Ο DM μπορεί να συμπληρώσει τα δεδομένα του προβλήματος να εκφράσει τις προτιμήσεις του μέσω της τεχνικής AHP και να εφαρμόσει τις τεχνικές Promethee χωρίς να χρειαστεί να κάνει τους επαβαλαμβανόμενους υπολογισμούς. Το Promexcel πέρα από την ανάδειξη της βέλτιστης λύσης από την τεχνική Promethee II, δίνει στον DM τη δυνατότητα να συγκρίνει και να αξιολογήσει την αντιστοίχιση των λύσεων με τις προτιμήσεις του μέσω των διαγραμμάτων και των πινάκων των μεθόδων Promethee I και III.

Για την ‘a priori’ εφαρμογή, η τεχνική Promethee II μπόρεσε να καθοδηγήσει τα μέτωπα στις προτιμήσεις του DM με επιτυχία. Στο παράδειγμα των μαθηματικών προβλημάτων, τα μέτωπα προέκυψαν με τον ίδιο αριθμό αξιολογήσεων με του απλού EA δίνοντας μόνο μη-κυριαρχούμενες λύσεις εστιασμένες στις προτιμήσεις του DM. Επιπλέον φάνηκε ότι η μορφή

του μετώπου επηρέασε πάλι τη συμπεριφορά της τεχνικής, χωρίς όμως να την εμποδίσει να ανταποκριθεί στις προτιμήσεις του DM όπως στην 'a posteriori' εφαρμογή. Στο αεροδυναμικό πρόβλημα τριών στόχων, η 'a priori' εφαρμογή της τεχνικής έδωσε πολλές μη-κυριαρχούμενες λύσεις επεκτείνοντας το μέτωπο Pareto του απλού EA σε καινούριες περιοχές που δεν είχε προσεγγίσει. Συνεπώς, με γνωστές τις προτιμήσεις του DM πριν τη βελτιστοποίηση υπάρχει όφελος από την 'a priori' εφαρμογή της τεχνικής Promethee II, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο καθοδήγησης του μετώπου σε στοχευμένες περιοχές.

### **Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη**

Εχοντας μελετήσει ήδη την εφαρμογή των τεχνικών Promethee I, Promethee II, Promethee III και AHP σε προβλήματα MOO, η μελέτη θα μπορούσε να επεκταθεί και στις υπόλοιπες τεχνικές της οικογένειας Promethee αλλά και στην περαιτέρω εφαρμογή της μεθόδου AHP. Επιπλέον μπορούν να μελετηθούν άλλες τεχνικές MCDM, όπως λ.χ. σε κάποιες που περιγράφηκαν επιγραμματικά στο δεύτερο κεφάλαιο. Με αυτόν τον τρόπο περισσότερες τεχνικές MCDM θα μπορούσαν ανάλογα με το πρόβλημα στο οποίο εφαρμόζονται να οδηγήσουν σε καλύτερα αποτελέσματα.

Το εργαλείο Promexcel μπορεί να υιοθετήσει κι άλλα ενδιαφέροντα εργαλεία της οικογένειας τεχνικών Promethee για τη δυνατότητα περισσότερης ανάλυσης των αποτελεσμάτων από τον DM, όπως π.χ. τον δείκτη μονοκριτηριακής ροής  $\varphi$  της μεθόδου GAIA ή την εκ των υστέρων εφαρμογή της Promethee V για περιορισμούς. Επιπλέον εύκολα μπορούν να προστεθούν οι αλγόριθμοι κι άλλων τεχνικών, δίνοντας στον DM την ευχέρεια επιλογής ανάλογα τη φύση του προβλημάτος ή τη δυνατότητα σύγκρισης των αποτελεσμάτων με διαφορετικές τεχνικές.

## Βιβλιογραφία

- [1] E. Zitzler, "Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods and Applications," p. 134.
- [2] R. Salomon, "Evolutionary algorithms and gradient search: similarities and differences," *IEEE Trans. Evol. Computat.*, vol. 2, no. 2, pp. 45–55, Jul. 1998, doi: 10.1109/4235.728207.
- [3] D. E. Goldberg, *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. Reading, Mass: Addison-Wesley Pub. Co, 1989.
- [4] C. Darwin, *On the origin of species by means of natural selection, or, The preservation of favoured races in the struggle for life*, Dover giant thrift ed. Mineola, NY: Dover Publications, 2006.
- [5] K. X. Γιαννάκογλου, *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2005.
- [6] EASY, The Evolutionary Algorithm SYstem, <http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/EASY>.
- [7] D. Kapsoulis, K. Tsiakas, X. Trompoukis, V. Asouti, and K. Giannakoglou, "Evolutionary multi-objective optimization assisted by metamodels, kernel PCA and multi-criteria decision making techniques with applications in aerodynamics," *Applied Soft Computing*, vol. 64, pp. 1–13, Mar. 2018, doi: 10.1016/j.asoc.2017.11.046.
- [8] E. Zavadskas and A. Kaklauskas, *Multiple Criteria evaluation of buildings*. Vilnius, 1996.
- [9] C.-L. Hwang and K. Yoon, *Multiple Attribute Decision Making*, vol. 186. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1981.
- [10] S. Opricovic, "Multicriteria Optimization of Civil Engineering Systems.," Belgrade, 1998.
- [11] J. P. Brans and International Federation of Operational Research Societies, Eds., *Operational research '84: proceedings of the Tenth IFORS International Conference on Operational Research: actes de la Dixième Conférence internationale de recherche opérationnelle de l'IFORS, Washington, D.C., U.S.A., August 6-10, 1984*. Amsterdam ; New York : New York, N.Y., U.S.A: North-Holland ; Sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier Science Pub. Co, 1984.
- [12] B. Roy, *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*, vol. 12. Boston, MA: Springer US, 1996.
- [13] T. L. Saaty, *The analytic hierarchy process: planning, priority setting, resource allocation*. New York ; London: McGraw-Hill International Book Co, 1980.
- [14] E. Jacquet-Lagrange and J. Siskos, "Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the UTA method," *European Journal of Operational Research*, vol. 10, no. 2, pp. 151–164, Jun. 1982, doi: 10.1016/0377-2217(82)90155-2.
- [15] Μ. Βουγιουκαλάκη, "Α Posteriori και Α Priori Χρήση των Τεχνικών Λήψη Απόφασης TOPSIS και ELECTRE Ι σε Προβλήματα Πολυκριτηριακής Βελτιστοποίησης με Εξελκτικούς Αλγορίθμους," Ε.Μ.Π.
- [16] J.-P. Brans and B. Mareschal, "Promethee Methods," in *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, vol. 78, New York: Springer-Verlag, 2005, pp. 163–186.
- [17] J. P. Brans and B. Mareschal, "Promethee V: Mcdm Problems With Segmentation Constraints," *INFOR: Information Systems and Operational Research*, vol. 30, no. 2, pp. 85–96, May 1992, doi: 10.1080/03155986.1992.11732186.
- [18] J.-P. Brans and B. Mareschal, "The PROMETHEE VI procedure: how to differentiate hard from soft multicriteria problems," *Journal of Decision Systems*, vol. 4, no. 3, pp. 213–223, Jan. 1995, doi: 10.1080/12460125.1995.10511652.
- [19] J.-P. Brans and B. Mareschal, "The PROMCALC & GAIA decision support system for multicriteria decision aid," *Decision Support Systems*, vol. 12, no. 4–5, pp. 297–310, Nov. 1994, doi: 10.1016/0167-9236(94)90048-5.
- [20] "The OpenFOAM Foundation." [openfoam.org](http://openfoam.org).