



# **Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Τομέας Μηχανολογικών Κατασκευών & Αυτομάτου Ελέγχου

**Ανάλυση μηχανικής και ακουστικής απόκρισης τυμπάνου  
σε κρουστικές διεγέρσεις με πεπερασμένα στοιχεία και  
αναλυτικές εξισώσεις**

**Διπλωματική Εργασία**

Αρβανιτίδης Αναστάσιος

Επιβλέπων καθηγητής: Χριστόφορος Προβατίδης

Αθήνα, Οκτώβριος 2020

Copyright © Αρβανιτίδης Αναστάσιος, 2020.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## Ευχαριστίες

Για την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω πρώτα απ' όλα τους φίλους μου, διότι έπαιξαν καθοριστικό ρόλο ενθαρρύνοντας με αλλά και ωθώντας με, όποτε χρειαζόταν, ώστε να την ολοκληρώσω. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Ανδρέα Μαυρίδη-Τουργέλη για την πολύτιμη βοήθειά του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας και, φυσικά, τον καθηγητή μου, Χριστόφορο Προβατίδη, που μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με το θέμα αυτό.

## Περίληψη

Το θέμα της διπλωματικής εργασίας είναι η συσχέτιση της δύναμης κρούσης χτυπήματος σε ένα τύμπανο και της θέσης που γίνεται το χτύπημα με την κυματομορφή της ταλάντωσης της μεμβράνης. Η μελέτη και η ανάλυση γίνεται με υπολογιστικές μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων στο λογισμικό COMSOL Multiphysics.

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται αναφορά σε γενικά στοιχεία σχετικά με τα κρουστά όργανα και πιο συγκεκριμένα σχετικά με τα ντραμς. Περιγράφονται τα όργανα που τα αποτελούν και καταγράφεται η ιστορική τους εξέλιξη.

Στο Κεφάλαιο 2 δίνεται βαρύτητα σε θέματα φυσικής και παρατίθενται οι βασικές εξισώσεις της ταλάντωσης μεμβρανών. Επίσης, περιγράφεται η ταλάντωση των κελυφών και δίνονται βασικά στοιχεία σχετικά με την φυσική του ήχου.

Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφεται με αναλυτικό τρόπο το υπολογιστικό κομμάτι της διπλωματικής εργασίας. Καταγράφονται οι προδιαγραφές και τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν κι επίσης γίνεται εκτενής περιγραφή των διαδικασιών και των αποτελεσμάτων του υπολογιστικού μέρους.

## **Abstract**

The subject of this dissertation is the correlation of the impact force of a blow on a drum and the position of the blow with the waveform of the oscillation of the membrane. The study and analysis is done with finite element computational methods in the COMSOL Multiphysics software.

Chapter 1 provides general information on percussion instruments and more specifically on drums. The instruments that make them up are described and their historical development is recorded.

Chapter 2 focuses on physics and presents the basic equations of membrane oscillation. The oscillation of the shells is also described and basic information about the physics of sound is given.

Chapter 3 describes in detail the computer part of the dissertation. The specifications and data used are recorded and an extensive description of the procedures and results of the computer part is given.

## Περιεχόμενα

Ευχαριστίες.....	2
Περίληψη.....	3
Abstract .....	4
Περιεχόμενα.....	5
Λίστα Εικόνων .....	7
Λίστα Πινάκων.....	7
Κεφάλαιο 1 <sup>ο</sup> .....	8
1.1    Εισαγωγή.....	8
1.1.1    Ιστορική Αναδρομή.....	8
1.1.2    Τα είδη των κρουστών .....	8
1.2    Κατασκευαστικά στοιχεία .....	9
1.2.1    Τα κύρια μέρη ενός τυμπάνου .....	9
1.2.2    Κεφαλές.....	10
1.2.3    Κέλυφος.....	10
1.3    Ακουστικό σετ τυμπάνων (Drum set).....	10
1.3.1    Βασικά όργανα .....	10
1.3.2    Ιστορία των ντραμς.....	12
1.4    Ηλεκτρονικά Τύμπανα.....	14
1.5    Ο ρόλος του τεχνίτη .....	14
Κεφάλαιο 2 <sup>ο</sup> .....	15
2.1    Ταλαντούμενα Συστήματα.....	15
2.1.1    Κυματική εξίσωση τετραγωνικής μεμβράνης .....	15
2.1.2    Κυματική εξίσωση κυκλικής μεμβράνης.....	19
2.1.2.1    Συζευγμένες Μεμβράνες .....	21
2.1.3    Δονούμενα κελύφη .....	22
2.1.3.1    Κυλινδρικό κέλυφος.....	23
2.2    Βασικές Αρχές Ακουστικής .....	24
2.2.1    Ηχητική Πίεση.....	24
2.2.2    Ηχητική Ισχύς .....	24
2.3    Αντικείμενο Μελέτης της Διπλωματικής Εργασίας .....	25
Κεφάλαιο 3 <sup>ο</sup> .....	26
3.1    Περιγραφή του υπολογιστικού μέρους .....	26

3.2	Προδιαγραφές των προσομοιώσεων .....	26
3.3	Υπολογισμός ιδιοσυχνοτήτων.....	27
3.3.1	Μεμβράνη .....	27
3.3.2	Κέλυφος.....	33
3.4	Υπολογισμός ταλάντωσης μεμβράνης.....	38
3.4.1	Κατασκευή Μοντέλου.....	39
3.4.2	Αποτελέσματα .....	40
3.5	Συσχέτιση παραμέτρων .....	57
3.5.1	Συσχέτιση με δύναμη.....	58
3.5.2	Συσχέτιση με θέση .....	59
3.6	Τυχαία περίπτωση.....	61
	Συμπεράσματα .....	63
	Μελλοντικές Μελέτες.....	64
	Βιβλιογραφία .....	65

## Λίστα Εικόνων

Εικόνα 1: Τα κύρια μέρη του τυμπάνου.....	9
Εικόνα 2: Σύγχρονο σετ ντραμς .....	12
Εικόνα 3: Σετ ντραμς στα τέλη του 19 <sup>ου</sup> αι.....	13
Εικόνα 4: Σύγχρονο low-hat.....	13
Εικόνα 5: Δυνάμεις σε απειροστό τμήμα τετραγωνικής μεμβράνης.....	15
Εικόνα 6: Τρόποι δόνησης ορθογωνικής μεμβράνης .....	18
Εικόνα 7: Οι πρώτοι 14 τρόποι δόνησης κυκλικής μεμβράνης σε 2-Δ.....	20
Εικόνα 8: Τρόποι δόνηση κυκλικής μεμβράνης σε 3-Δ.....	21
Εικόνα 9: Συζευγμένες μεμβράνες.....	22
Εικόνα 10: Οι 10 πρώτοι τρόποι δόνησης της μεμβράνης του τυμπάνου.....	32
Εικόνα 11: Οι 10 πρώτοι τρόποι δόνησης του κελύφους του τυμπάνου .....	38
Εικόνα 12: Μοντέλο τυμπάνου στο περιβάλλον του COMSOL Multiphysics .....	39
Εικόνα 13: Πλέγμα τριγωνικών στοιχείων του μοντέλου.....	40
Εικόνα 14: Παραδείγματα γραφημάτων συντελεστών σε σχέση με θέση κρούσης.....	60
Εικόνα 15: Σύγκριση υπολογιστικής και αναλυτικής απόκρισης τυχαίας περίπτωσης .....	62

## Λίστα Πινάκων

Πίνακας 1: Συντελεστές πολλαπλασιασμού της ηχητικής ισχύος σε σχέση με την αύξηση στην κλίμακα dB .....	25
Πίνακας 2: Γεωμετρικά μεγέθη τυμπάνου προσομοίωσης.....	26
Πίνακας 3: Μηχανικές ιδιότητες του υλικού Mylar.....	26
Πίνακας 4: Κούρδισμα τυμπάνου τομ.....	27
Πίνακας 5: Ιδιοσυχνότητες μεμβράνης τυμπάνου .....	27
Πίνακας 6: Οι 10 πρώτες ιδιοσυχνότητες του κελύφους του τυμπάνου .....	33
Πίνακας 7: Χαρακτηριστικά παλμού Gauss.....	38
Πίνακας 8: Συντελεστές συνάρτησης ανά σημείο κρούσης $xf$ .....	59
Πίνακας 9: Συντελεστές συσχετισμένοι με την θέση κρούσης του τυμπάνου .....	61



# Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>

## 1.1 Εισαγωγή

### 1.1.1 Ιστορική Αναδρομή

Τα τύμπανα είναι πρακτικά τόσο παλιά όσο η ανθρώπινη φυλή. Με εξαίρεση την ανθρώπινη φωνή, είναι τα παλαιότερα μουσικά μας όργανα. Τα πρώτα τύμπανα ήταν πιθανώς κομμάτια από ξύλο ή πέτρα τοποθετημένα πάνω από τρύπες στη γη. Στη συνέχεια, ανακαλύφθηκε ότι περισσότερος ήχος θα μπορούσε να ληφθεί από κοίλους κορμούς δέντρων, τους προγόνους των σύγχρονων τυμπάνων μας.

Κανείς δεν ξέρει πού κατασκευάστηκε το πρώτο τύμπανο μεμβράνης, αλλά μερικά αρχαία τύμπανα είναι τουλάχιστον 5000 ετών. Δέρματα ζώων ή ψαριών απλώνονταν σε κοίλους κορμούς δέντρων και πιθανότατα κρούονταν με γυμνά χέρια. Μεταγενέστερη πρόοδος στα τύμπανα με δέρμα οδήγησε στη χρήση μπολ ή κελυφών με ειδικά σχήματα και διαφόρων μέσων για την εφαρμογή τάσης στις κεφαλές (μεμβράνες) του τυμπάνου. Τα τύμπανα απέκτησαν θρησκευτική και μουσική σημασία και η κατασκευή τους έγινε ένα σημαντικό τελετουργικό σε αρκετούς πολιτισμούς. [6], [20]

### 1.1.2 Τα είδη των κρουστών

Τα μοντέρνα ντραμς μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες: αυτά που προσφέρουν μια ισχυρή αίσθηση του τόνου, δηλαδή της νότας, και εκείνα που δεν το κάνουν. Στην πρώτη ομάδα είναι τα τυμπάνια (kettledrums), η Ινδική Τάμπλα και τα μπούμπας (boobams). Στην δεύτερη ομάδα είναι το μπάσο τύμπανο, το ταμπούρο (snare drum), τα τομ-τομ, τα μπόνκο, τα κόνγκα και αμέτρητα άλλα είδη τυμπάνων, κυρίως αφρικανικής και ανατολικής προέλευσης.

Ως δονητικά συστήματα, τα τύμπανα μπορούν να χωριστούν σε τρεις κατηγορίες:

1. αυτά που αποτελούνται από μία μεμβράνη που συνδέεται με μια κλειστή κοιλότητα αέρα (π.χ. ορχηστρικά τυμπάνια).
2. εκείνα που αποτελούνται από μία μεμβράνη ανοιχτή στον αέρα και στις δύο πλευρές (π.χ., τομ-τομ, κόνγκα) και
3. εκείνα που αποτελούνται από δύο μεμβράνες που συνδέονται με μια κλειστή κοιλότητα αέρα (π.χ. μπάσο τύμπανο, ταμπούρο).

Άλλοι τρόποι κατηγοριοποίησης των ντραμς είναι ανάλογα με την εθνική τους προέλευση (π.χ. Ανατολίτικη, Αφρικανική, Λατιναμερικανική) ή σύμφωνα με τον τύπο μουσικής παράστασης με την οποίες συνδέονται (π.χ. συμφωνικά, στρατιωτικά, τζαζ, έθνικ χορών και μπάντας). [1], [20]

## 1.2 Κατασκευαστικά στοιχεία

### 1.2.1 Τα κύρια μέρη ενός τυμπάνου

- **Επιφάνεια ή κεφαλή κρούσης (battering head):** Είναι η μεμβράνη που χτυπά ο ντράμερ. Είναι το στοιχείο που πρέπει να αντικαθίσταται συχνότερα σε ένα τύμπανο.
- **Επιφάνεια ή κεφαλή αντήχησης (resonant head):** Πρόκειται για μια προαιρετική μεμβράνη στο κάτω μέρος του τυμπάνου, συνήθως λεπτότερη από την κεφαλή κρούσης. Είναι κουρδισμένη είτε ψηλότερα είτε χαμηλότερα σε σχέση με την κεφαλή κρούσης.
- **Στεφάνι (Rim):** Αυτά τα εξαρτήματα συγκρατούν τις κεφαλές του τυμπάνου στη θέση τους. Σφίγγονται χρησιμοποιώντας τις βίδες κουρδίσματος, για να κουρδίσουν το τύμπανο. Μερικοί ντράμερ χτυπούν το στεφάνι για να παράξουν ήχο<sup>1</sup>.
- **Κέλυφος ή κώθρος ή σώμα (shell):** Το σώμα του τυμπάνου μπορεί να είναι κατασκευασμένο από διάφορα διαφορετικά υλικά, με το πιο συνηθισμένο να είναι υαλοβάμβακα ή ξύλο (για παράδειγμα σφένδαμνος). Το ξύλο είναι συχνά σε 5 έως 10 στρώσεις. Ο υαλοβάμβακας δίνει έναν σκληρότερο ήχο από το ξύλο λόγω του ότι τείνει να απορροφά περισσότερες υψηλές συχνότητες.
- **Βίδες κουρδίσματος (Tuning ή Tension Bolts):** Χρησιμοποιούνται για να σφίξουν τις κεφαλές για να δώσουν το επιθυμητό τονικό ύψος. Συνήθως υπάρχουν 6 ή 8 βίδες ομοιόμορφα κατανεμημένες γύρω από το στεφάνι. Για να κουρδιστεί ένα τύμπανο, είναι απαραίτητο να επιτευχθεί ομοιόμορφη τάση της μεμβράνης, έτσι ώστε το τύμπανο να παράγει σχετικά όμοιο ήχο, όταν κρούεται σε μια κοινή ακτίνα από το κέντρο. [7]



Εικόνα 1: Τα κύρια μέρη του τυμπάνου

<sup>1</sup> Η τεχνική αυτή ονομάζεται χτύπημα rimshot. [4]

### 1.2.2 Κεφαλές

Οι κεφαλές για ροκ ντραμς είναι κατασκευασμένες από διάφορα πολυμερή με κυριότερο το Mylar (τερεφθαλικό πολυαιθυλένιο). Οι κεφαλές των συναυλιακών τυμπάνων είναι μερικές φορές από δέρμα ζώου όπως μόσχου, κάτι που τείνει να γίνει σπάνιο καθώς αποτελεί περιττή πολυτέλεια. Οι κεφαλές τυμπάνων Mylar διατίθενται σε διάφορες παραλλαγές:

- *Κεφαλές μονής στρώσης:* είναι γενικά «διαυγείς» ή σε απόχρωση «απαλού λευκού», οι λευκές κεφαλές έχουν μια τραχιά επιφάνεια κατάλληλη για παίξιμο με «σκούπα»<sup>2</sup>.
- *Κεφαλές διπλής στρώσης:* διαχωρίζονται με λεπτό στρώμα λαδιού και έχουν λιγότερο φωτεινό ήχο από τις κεφαλές μονής στρώσης.
- *Κεφαλές αντήχησης:* είναι γενικά λεπτότερες και λιγότερο ανθεκτικές, καθώς δεν τις χτυπά ο ντράμερ.

Οι κεφαλές κρούσης γενικά έχουν πάχος από 0.25 έως 0.5 mm και πυκνότητα μεταξύ 0.2 έως 0.5 kg/m<sup>2</sup>. Το Mylar έχει Μέτρο Ελαστικότητας  $E = 3.5 \text{ GPa}$ . [4], [7]

### 1.2.3 Κέλυφος

Το μέγεθος του κελύφους διαφέρει για κάθε είδος τυμπάνου αλλά και στο ίδιο είδος υπάρχουν πολλές διαστάσεις. Η επίδραση του μεγέθους και του υλικού του κελύφους στον ήχο του τυμπάνου οδηγεί σε μια τεράστια ποικιλία διαφορετικών μοντέλων τυμπάνου, ώστε να ικανοποιούνται οι προτιμήσεις κάθε ντράμερ. [1] Το κέλυφος είναι κατασκευασμένο, μεταξύ άλλων, από ξύλο, ίνες γυαλιού ή plexiglass. Το ξύλο είναι ένα ορθοτροπικό υλικό με ιδιότητες που ποικίλλουν ακόμη και στο ίδιο δέντρο. Ωστόσο, τα κέλυφη των τυμπάνων είναι γενικά κατασκευασμένα από πολλές στρώσεις που δίνουν μια πιο ισοτροπική συμπεριφορά. Ο λόγος Poisson ενός ορθοτροπικού υλικού περιγράφεται από έναν τανυστή, αλλά ως πρώτη προσέγγιση της μοντελοποίησης των κυμάτων ακαμψίας στο κέλυφος, ο λόγος μπορεί προσεγγιστικά να ληφθεί ως σταθερά. Αυτό συμβαίνει, επειδή οι διαφορετικές στρώσεις ξύλου προσανατολίζονται κάθετα μεταξύ τους, για να δώσουν στο υλικό ομοιόμορφες ιδιότητες προς όλες τις κατευθύνσεις. [7]

## 1.3 Ακουστικό σετ τυμπάνων (Drum set)

### 1.3.1 Βασικά όργανα

Το βασικό σετ ροκ ντραμς αποτελείται από τα ακόλουθα κρουστά όργανα:

- **Μπάσο τύμπανο ή μπότα ή κάσα:** Αυτό το μεγάλο τύμπανο παίζεται με ένα πεντάλ συνδεδεμένο με ένα σφυρί. Η μπότα έχει συνήθως διάμετρο μεταξύ 18 και 26 in.

---

<sup>2</sup> Οι σκούπες είναι εργαλεία για το παίξιμο των κρουστών ως εναλλακτική των μπαγκετών. Αποτελούνται ένα σύνολο τριχών που συνδέονται με μια λαβή έτσι ώστε οι τρίχες να σχημα βεντάλιας. Χρησιμοποιούνται συχνά σε μουσική τζαζ ή μπλουζ, αλλά και σε άλλα είδη όπως ροκ, κάουντρι και ποπ.

- **Τύμπανα τομ-τομ:** Ένα drum set περιέχει συχνά πολλά τομ διαφορετικών μεγεθών, από 8 έως 18 in, είτε τοποθετημένα πάνω από τη μπότα είτε όρθια στο πάτωμα.
- **Ταμπούρο (snare drum):** Ένα τυπικό ταμπούρο έχει διάμετρο 13 ή 14 in και βάθος μεταξύ 5 και 8 in. Το ταμπούρο είναι λιγότερο βαθύ από το τομ-τομ, αλλά το κύριο χαρακτηριστικό του είναι η χορδιέρα<sup>3</sup> (snare) που είναι τοποθετημένη στην κεφαλή αντήχησης. Υπάρχει δυνατότητα ρύθμισης της σύσφιξης μεταξύ της κεφαλής και της χορδιέρας καθώς και απομάκρυνσής της μέσω βοηθητικού μηχανισμού.
- **Κύμβαλα ή πιατίνια:** Υπάρχουν πολλά διαφορετικά κύμβαλα με διαφορετικούς σκοπούς:
  - Το κύμβαλο *ride*, που συχνά παίζεται διαρκώς στο ρυθμό, έχει συνήθως διάμετρο 18, 20 ή 22 in. Έχει πιο διαπεραστικό ήχο από τον κύμβαλο *crash*.
  - Το κύμβαλο *crash* χρησιμοποιείται κυρίως σε γεμίσματα και έχει τυπική διάμετρο 14, 16 ή 18 in.
  - *Κύμβαλα για εφέ*, όπως κουδούνια, πιατίνι τύπου china ή το γκονγκ, χρησιμοποιούνται για να προσθέσουν ιδιαίτερο χαρακτήρα στο ρυθμό και ποικίλλουν σε μεγάλο βαθμό στον ήχο και το μέγεθος.
  - *Κύμβαλα hi-hat:* Ένα hi-hat είναι δύο κύμβαλα τοποθετημένα το ένα απέναντι στο άλλο σε έναν άξονα. Μπορεί να ανοίξει ή να κλείσει χρησιμοποιώντας ένα πεντάλ και παίζεται με αυτόν τον τρόπο ή σε συνδυασμό με μπαγκέτες. Ένα κύμβαλο hi-hat έχει διάμετρο 13, 14 ή 15 in. [7]

Εκτός από τα βασικά μέρη του drum set, ο ντράμερ χρησιμοποιεί πληθώρα από άλλα κρουστά τα οποία είναι ενσωματωμένα γύρω και πάνω από την κάσα τα οποία δίνουν την δυνατότητα για θορυβώδεις και εντυπωσιακούς ήχους. Αυτά τα κρουστά ονομάζονται «contraption» ή «traps». [37]

---

<sup>3</sup> Πλέγμα χορδών φτιαγμένο από μεταλλικό σύρμα ή καλώδιο, πλαστικό καλώδιο ή χορδή βιολιού. Τεντώνεται κατά μήκος της κάτω μεμβράνης. Όταν τίθεται σε ταλάντωση η άνω κεφαλή (κρούσης), και λόγω της αύξησης της πίεσης στο εσωτερικό του οργάνου, ταλαντώνεται συμπαθητικά τόσο η κάτω μεμβράνη όσο και οι εφαπτόμενες σ' αυτήν χορδές. Ο ήχος που παράγεται καθ' αυτόν τον τρόπο είναι τραχύς και σύντομος.



Εικόνα 2: Σύγχρονο σετ ντραμς

### 1.3.2 Ιστορία των ντραμς

Η ιστορία των ντραμς εντοπίζεται σε μια περίοδο όπου ένας ντράμερ ξεκινά να εξυπηρετεί την λειτουργία που είχαν δύο ή τρεις κρουστοί στο παρελθόν. Κατά την διάρκεια του εμφυλίου πολέμου της Αμερικής 1861-1865 μουσικοί από την περιοχή της Νέας Ορλεάνης δημιουργούν γκρουπ για να παίζουν σε μπάντες του στρατού. Η πιο συχνή εμφάνισή τους ήταν στις παρελάσεις και στις πομπές κηδειών. Τα όργανα που χρησιμοποιούσαν στα σύνολα ήταν κλαρινέτα, τρομπόνα, κάσες, ταμπούρα, κορνέτες και πιάτα.

Στην πορεία αυτά τα όργανα διαχωρίστηκαν από τον πόλεμο και ενσωματώθηκαν στο ύφος του ντίξιλαντ<sup>4</sup>. Εκείνη την εποχή στις μπάντες των παρελάσεων παρουσιαζόταν τουλάχιστον δύο κρουστοί, όπου ο ένας παίζει την μεγάλη κάσα, στην οποία υπήρχε ένα ενσωματωμένο πιατίνι επάνω της, και ο δεύτερος το ταμπούρο.

Στα τέλη του 19<sup>ου</sup> αι. οι μπάντες αυτές αρχίζουν να εμφανίζονται σε κλειστούς χώρους συμμετέχοντας με αυτό τον τρόπο σε χορούς, πάρτι και ποικίλες εκδηλώσεις. Οικονομικοί και χωροταξικοί λόγοι ήταν αυτοί που μείωσαν τα μέλη της ορχήστρας, με αποτέλεσμα να μην υπάρχουν πλέον δύο κρουστοί. Επομένως, προκύπτει ένας ντράμερ ο οποίος εφευρίσκει τρόπους και τεχνικές για να έχει πρωτοπορία στο παίξιμό καθώς και στο άκουσμα του σε σχέση με την

<sup>4</sup> Το ντίξιλαντ (dixieland) είναι είδος της τζαζ μουσικής που αναπτύχθηκε στις αρχές του 20ού αιώνα, στην Αμερική και κυρίως στη Νέα Ορλεάνη. Έχει χαρακτηριστεί ως το πρώτο είδος της τζαζ που εμφανίστηκε και σήμερα αποτελεί τύπο της παραδοσιακής τζαζ, όπου αυτοσχεδιάζουν μικρά συγκροτήματα και χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει την παραδοσιακή τζαζ που παίζεται όμως κυρίως από λευκούς μουσικούς. [12]

αρχική μορφή. Για να μπορεί όμως να παίξει ένα άτομο προκύπτει το εξής στήσιμο του οργάνου με την κάσα στο πάτωμα και το ταμπούρο τοποθετημένο πάνω σε μια καρέκλα.



*Εικόνα 3: Σετ ντραμς στα τέλη του 19<sup>ου</sup> αι.*

Την δεκαετία του 1920 «οι ντράμερ της τζαζ και των ορχηστρών χορού πειραματίστηκαν με έναν μεγάλο αριθμό καινοτόμων οργάνων όπως κόρνες αυτοκινήτων, μαστίγια, κενά πιστόλια, σειρήνες, νιπτήρες και πολλά άλλα που αντανακλούσαν τον ενδιαφέρον τους στο να επεκτείνουν την ηχηρότητα της μουσικής». Βέβαια, τίποτα από τα παραπάνω δεν υπάρχει στα σημερινά σετ τυμπάνων. Λόγω μετανάστευσης εισέρχονται όργανα στην Αμερική από άλλες τοπικές παραδόσεις της Ευρώπης και της Ασίας, όπως τα τούρκικα πιατίνια ή cymbal Zildjian καθώς και τα τομ-τομ προερχόμενα από την Κίνα.



*Εικόνα 4: Σύγχρονο low-hat*

Στη συνέχεια μεσολαβεί το low-hat το οποίο αποτελούνταν από ένα μικρό σωλήνα, ο οποίος καταλήγει σε μια βάση με πεντάλ, όπου πάνω ήταν στερεωμένο ένα πιατίι, το οποίο χτυπούσε ένα δεύτερο πιατίι πάνω στο πρώτο με ένα μεταλλικό μοχλό (Εικόνα 4). Στα τέλη της δεκαετίας μακραίνουν το σωλήνα, ώστε να μπορεί να χτυπηθεί το low-hat και με το χέρι, και έτσι καταλήγουν στο hi-hat. Την δεκαετία του 1920 το hi-hat εμφανίζεται ως μέρος του drum set. Από τα μέσα της δεκαετίας του 1940 τα τύμπανα φτάνουν στην κλασική τους μορφή την οποία διατηρούν μέχρι και σήμερα. [37]

## 1.4 Ηλεκτρονικά Τύμπανα

Το ηλεκτρονικό τύμπανο είναι ένα σύγχρονο ηλεκτρονικό μουσικό όργανο, σχεδιασμένο κυρίως για να χρησιμεύσει ως εναλλακτική ενός ακουστικού τυμπάνου ή άλλου κρουστού. Ένα ηλεκτρονικό τύμπανο αποτελείται από μια ηλεκτρονική ή ψηφιακή μονάδα ήχου που παράγει ηχογραφημένους (sampled) ή ηλεκτρονικά παραγόμενους (synthesized) ήχους κρουστών και έναν ή περισσότερους ηλεκτρικούς αισθητήρες ή pads εξοπλισμένα με αισθητήρα για να ενεργοποιούν τους ήχους. Όπως τα κανονικά τύμπανα, οι αισθητήρες ή τα pads χτυπιούνται με μπαγκέτες ή με τα χέρια (ανάλογα με τον τύπο του τυμπάνου) και παίζονται με παρόμοιο τρόπο με ένα ακουστικό τύμπανο ή γενικότερα ένα κρουστό όργανο.

## 1.5 Ο ρόλος του τεχνίτη

Ο σχεδιασμός των ντραμς, όπως και πολλών οργάνων, έχει περιγραφεί ως «μαύρη τέχνη». Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η επιλογή του μεγέθους, του σχήματος και του τύπου του υλικού γίνεται από τον τεχνίτη βάσει της (συνήθως κληρονομημένης) γνώσης του σχετικά με το τι λειτουργεί και τι όχι. Στόχος του είναι να παράγει ένα όργανο που ακούγεται «καλά», ειδικά υπό συγκεκριμένες συνθήκες παιξίματος και περιβάλλοντος. Μια τεχνική μοντελοποίησης οργάνων θα ήταν πολύ χρήσιμη για γρήγορη δημιουργία πρωτοτύπων νέων ιδεών και θα μπορούσε να βοηθήσει στον προσδιορισμό του τι είναι ένας καλός ήχος.

Αλλά αντί να αντικαθιστά τον ρόλο του τεχνίτη, μια τέτοια τεχνική μοντελοποίησης θα πρέπει να συνεργαστεί μαζί του. Άλλωστε, ο τεχνίτης γεφυρώνει το χάσμα μεταξύ των διαφόρων ιδεών και της πραγμάτωσής τους, γιατί ξέρει με ποιους τρόπους μπορεί να χειριστεί ορισμένα υλικά. Για παράδειγμα, δεν θα έχει νόημα να σχεδιάσουμε ένα όργανο με λογισμικό Computer Aided Design (CAD) εάν θα ήταν πραγματικά αδύνατο να κατασκευαστεί. [13]

## Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>

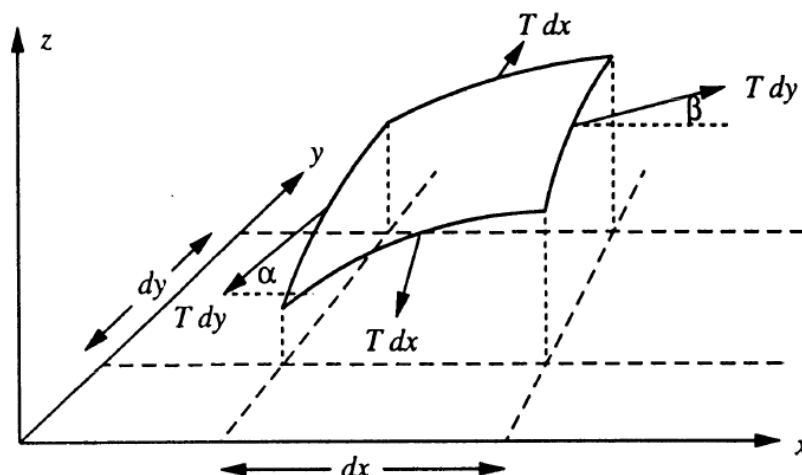
### 2.1 Ταλαντούμενα Συστήματα

Σε αυτή την ενότητα θα περιγραφεί με αναλυτικό τρόπο η φυσική γύρω από τις ταλαντώσεις διαφόρων ειδών σωμάτων, με κυριότερες αυτές των μεμβρανών και των κελύφων.

#### 2.1.1 Κυματική εξίσωση τετραγωνικής μεμβράνης

Μια μεμβράνη είναι μία τέλεια εύκαμπτη λεπτή πλάκα ή έλασμα που υπόκειται σε ένταση. Έχει αμελητέα αντίσταση στις δυνάμεις διάτμησης ή κάμψης, και οι δυνάμεις επαναφοράς προκύπτουν αποκλειστικά από τις δυνάμεις προέντασης ή παραμόρφωσης εντός του επιπέδου (in-plane stretching). Οι κεφαλές τυμπάνων και τα διαφράγματα των πυκνωτικών μικροφώνων είναι παραδείγματα μεμβρανών. [17]

Η διάσταση  $z$  της μεμβράνης, δηλαδή το πάχος της, θεωρείται αμελητέο σε σχέση με τις άλλες δύο διαστάσεις, μήκος και πλάτος, και γι' αυτό η μεμβράνη εξετάζεται ως διδιάστατη οντότητα σε τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο.



Εικόνα 5: Δυνάμεις σε απειροστό τμήμα τετραγωνικής μεμβράνης

Έστω η προεντεταμένη τετραγωνική μεμβράνη με διαστάσεις  $L_x$  και  $L_y$  πακτωμένη σε όλες τις πλευρές της, με προένταση  $T$  ομοιόμορφη σε όλη την επιφάνεια της μεμβράνης.

Θεωρούμε απειροστό τμήμα της μεμβράνης με επιφανειακή πυκνότητα  $\sigma$ , όπως αυτό απεικονίζεται στην Εικόνα 5. Δημιουργούμε μικρή κατακόρυφη μετατόπιση  $dz$ , με αποτέλεσμα η προένταση  $T$  να δρα έτσι, ώστε να επαναφέρει την μεμβράνη σε κατάσταση ισορροπίας.

Υπολογίζουμε, αρχικά, την ασκούμενη δύναμη στις ακμές του τμήματος κατά την διεύθυνση  $z$ .

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στις ακμές  $dx$  είναι:

$$|F_{edge}| = T dx$$



ενώ οι κατακόρυφες συνιστώσες των δύο ακμών είναι:

$$F_{y1} = -T \sin \alpha \, dx$$

$$F_{y2} = -T \sin \beta \, dx$$

Για τις μικρές γωνίες  $\alpha$  και  $\beta$  ισχύει:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y = \tan \alpha \cong \sin \alpha \quad \text{και} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+dy} = \tan \beta \cong \sin \beta$$

Επομένως, η δύναμη στην ακμή  $dx$  κατά την διεύθυνση  $z$  είναι:

$$\begin{aligned} F_y &= F_{y2} - F_{y1} \\ F_y &= T \, dx \left[ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+dy} - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y \right] \\ F_y &= T \, dx \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \, dy \end{aligned} \quad (1)$$

Ομοίως, προκύπτει και η δύναμη στην ακμή  $dy$  κατά την διεύθυνση  $z$  ως:

$$F_x = T \, dy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \, dx \quad (2)$$

Έτσι, προκύπτει η συνολική δύναμη που ασκείται στο στοιχείο  $dx \, dy$  κατά την διεύθυνση  $z$ :

$$\begin{aligned} F_x + F_y &= F \\ T \, dx \, dy \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) &= \sigma \, dx \, dy \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{T}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = c^2 \nabla^2 z \end{aligned} \quad (3)$$

όπου  $c = \sqrt{T/\sigma}$ : είναι η ταχύτητα των εγκάρσιων κυμάτων που περιγράφει η εξίσωση (3).

Για την επίλυση της κυματικής εξίσωσης χρησιμοποιούμε την μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών, οπότε η παραμόρφωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$z(x, y, t) = X(x)Y(y)\Phi(t) \quad (4)$$

και οι δευτερες μερικές παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y \Phi, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} X \Phi, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} XY$$

Με χρήση των παραπάνω στοιχείων η εξίσωση (3) γίνεται:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{c^2}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \quad (5)$$

Για να ισχύει η εξίσωση (5) θα πρέπει και τα δύο μέλη της να είναι σταθερά. Οπότε ορίζουμε την σταθερά  $\omega^2$  και την εξισώνουμε με κάθε μέλος κι έτσι προκύπτουν δύο εξισώσεις. Η πρώτη είναι:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \omega^2\Phi = 0$$

η οποία έχει λύση

$$\Phi(t) = E \sin \omega t + F \cos \omega t . \quad (6)$$

Η δεύτερη εξίσωση είναι:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = - \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} . \quad (7)$$

Όπως και πριν, η εξίσωση (7) ισχύει μόνο αν και τα δύο μέλη ισούνται με μία σταθερά την οποία ορίζουμε ως  $k^2$ . Προκύπτουν, λοιπόν, δύο εξισώσεις:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) X = 0$$

με λύση

$$X(x) = A \sin \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} x \right) + B \cos \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} x \right) \quad (8)$$

και η εξίσωση

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 Y = 0$$

με λύση

$$Y(y) = C \sin ky + D \cos ky \quad (9)$$

Για την συγκεκριμένη γεωμετρία μεμβράνης και για πάκτωση σε όλες τις ακμές, οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$z = 0 \text{ για } x = 0, x = L_x, y = 0 \text{ και } y = L_y$$

Από την πρώτη και δεύτερη συνθήκη, βγαίνουν τα εξής συμπεράσματα για την εξίσωση (8):

$$B = 0$$

και

$$A \sin \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} L_x \right) = 0, \text{ οπότε } \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} L_x = m\pi$$

Έτσι, η εξίσωση (8) παίρνει την μορφή:

$$X(x) = A \sin \frac{m\pi x}{L_x}, \text{ με } m = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Αντίστοιχα, από την τρίτη και τέταρτη συνθήκη προκύπτει:

$$D = 0$$

και

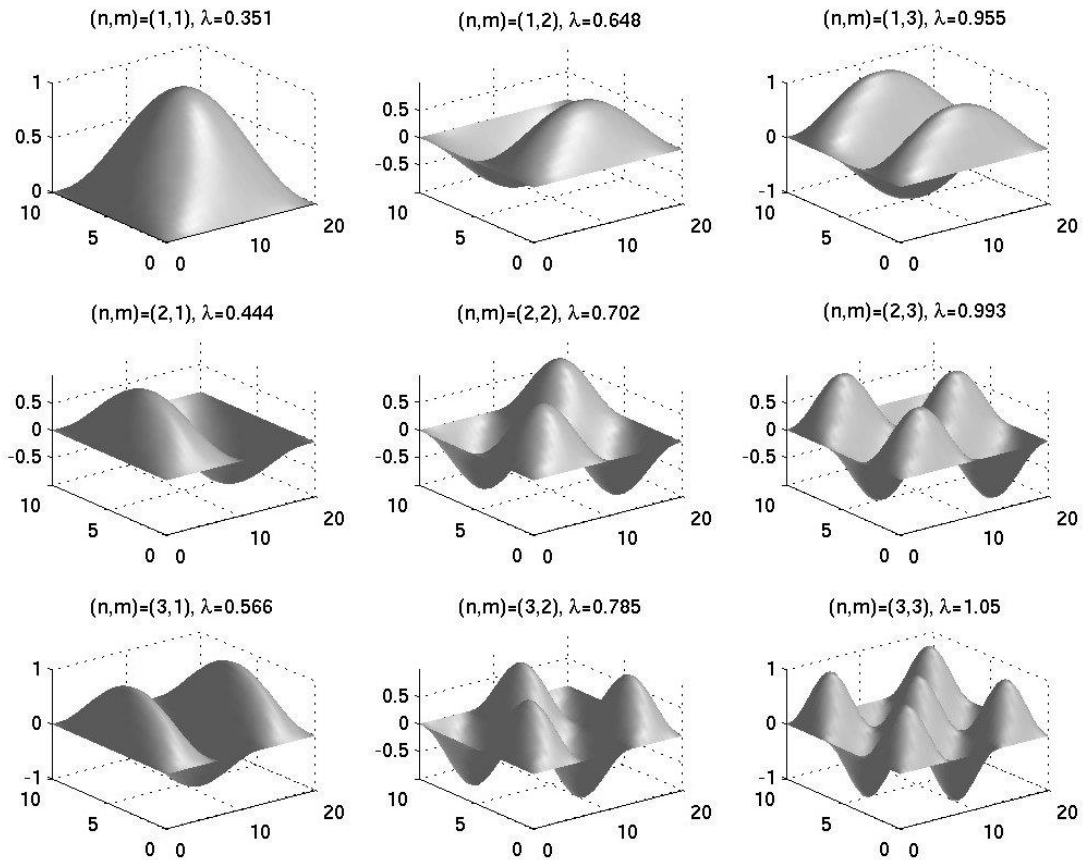
$$C \sin kL_y = 0, \text{ οπότε } kL_y = n\pi$$

Η εξίσωση (9) παίρνει, τελικά, την μορφή:

$$Y(y) = C \sin \frac{n\pi y}{L_y}, \text{ με } n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Με χρήση των τις εξισώσεων (6), (10) και (11) η εξίσωση (4) μας δίνει την λύση της κυματικής εξίσωσης:

$$\begin{aligned} z_{mn} &= A \sin \frac{m\pi x}{L_x} C \sin \frac{n\pi y}{L_y} (E \sin \omega t + F \cos \omega t) \\ &= \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y} (M \sin \omega t + N \cos \omega t), \text{ με } m, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (12)$$



Εικόνα 6: Τρόποι δόνησης ορθογωνικής μεμβράνης

Για την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων (modal frequencies) επιλύουμε την παρακάτω εξίσωση ως προς το  $\omega$ :

$$\sqrt{\omega^2/c^2 - k^2} = \frac{m\pi}{L_x}$$

$$\omega^2 = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 c^2 + k^2 c^2 = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 c^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 c^2$$

οπότε, αφού το  $\omega$  αποτελεί την κυκλική συχνότητα και  $\omega = 2\pi f$ , καταλήγουμε στον τύπο:

$$f_{mn} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}, \quad \mu\epsilon \ m, n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Κάθε ιδιοσυχνότητα αντιστοιχεί σε έναν τρόπο δόνησης (vibrating mode) της μεμβράνης. Οι τρόποι αυτοί φαίνονται στην Εικόνα 6. [6]

### 2.1.2 Κυματική εξίσωση κυκλικής μεμβράνης

Για μία κυκλική μεμβράνη η εξίσωση (3) θα γραφεί με τη μορφή κυλινδρικών συντεταγμένων ως εξής:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \right) \quad (14)$$

Για την επίλυση της κυματικής εξίσωσης χρησιμοποιούμε και πάλι την μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών, οπότε θεωρούμε λύση της μορφής:

$$z(r, \varphi, t) = R(r)\Phi(\varphi)e^{j\omega t} \quad (15)$$

η οποία με την προϋπόθεση ότι το κάθε μέλος της εξίσωσης είναι ίσο με σταθερά  $m$ , οδηγεί στις παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (16)$$

και

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (17)$$

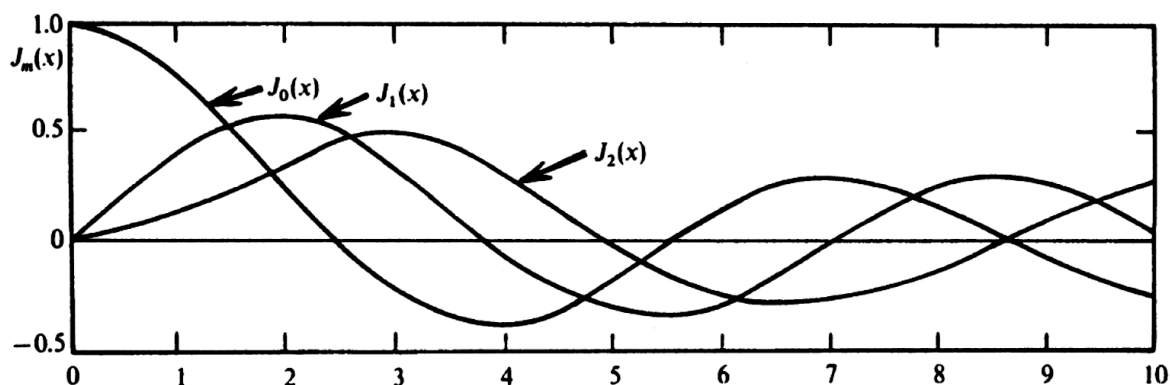
Η λύση της εξίσωσης (17) είναι:

$$\Phi(\varphi) = Ae^{\pm jm\varphi} \quad (18)$$

Η πρώτη εξίσωση είναι μια μορφή εξίσωσης Bessel:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0$$

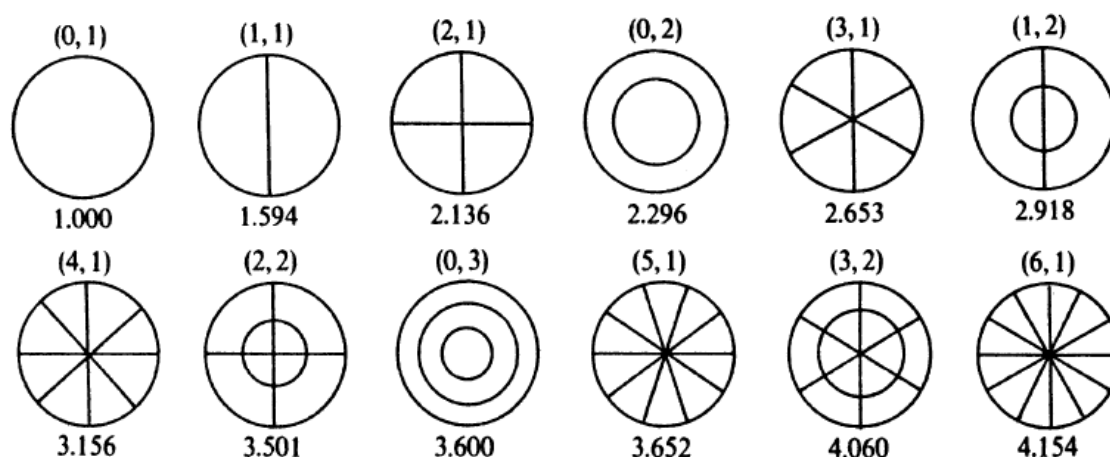
όπου  $y = R$  και  $x = kr = (\omega/c) r$



Διάγραμμα 1: Οι πρώτες τρεις συναρτήσεις Bessel

Οι λύσεις είναι συναρτήσεις Bessel<sup>5</sup> της τάξης  $m$ . Κάθε μία από αυτές τις συναρτήσεις  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$ , ...,  $J_m(x)$  μηδενίζεται για διάφορες τιμές  $x$ , όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 1.

Στην συνάρτηση  $J_m(kr)$  η  $n$ -οστή ρίζα δίνει την συχνότητα του τρόπου  $(m, n)$ , ο οποίος έχει  $m$  κομβικές διαμέτρους και  $n$  κομβικούς κύκλους (συμπεριλαμβανομένου κι ενός στο σύνορο). Στον θεμελιώδη τρόπο  $(0,1)$  ολόκληρη η μεμβράνη δονείται σε φάση. Στην Εικόνα 7 και Εικόνα 8 μπορούμε να δούμε κάποιους από τους αρχικούς τρόπους δόνησης μιας κυκλικής μεμβράνης.



Εικόνα 7: Οι πρώτοι 14 τρόποι δόνησης κυκλικής μεμβράνης σε 2-Δ

Οι συχνότητες του φυσικού τρόπου των πραγματικών μεμβρανών μπορεί να είναι αρκετά διαφορετικές από αυτές μιας ιδανικής μεμβράνης. Οι κύριοι λόγοι που ασκούν επιρροή στη μεμβράνη για να αλλάξουν τις συχνότητες των τρόπων δόνησης είναι το φορτίο αέρα, η στιβαρότητα στην κάμψη και η στιβαρότητα στη διάτμηση. Γενικά, το φορτίο αέρα μειώνει τις τροπικές συχνότητες, ενώ τα άλλα δύο τείνουν να τις αυξάνουν.

Σε λεπτές μεμβράνες, το φορτίο αέρα ασκεί συνήθως την μεγαλύτερη επιρροή. Η επίδραση στη συχνότητα του φορτίου αέρα εξαρτάται από τις ταχύτητες του κύματος στη μεμβράνη και στον αέρα, και επίσης από το εάν ο αέρας περιορίζεται με οποιονδήποτε τρόπο. Ένας περιορισμένος όγκος αέρα (όπως για παράδειγμα σε ένα ταμπούρο) θα αυξήσει τη συχνότητα των

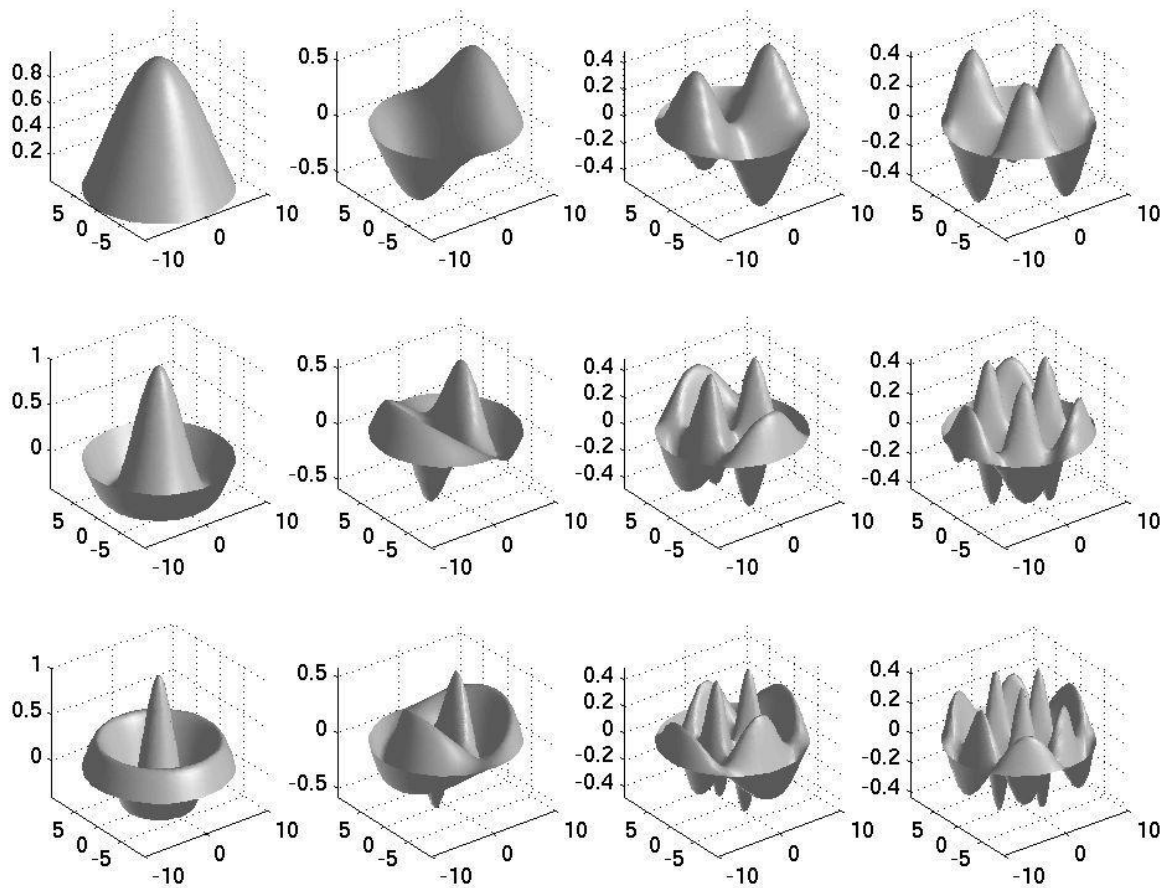
<sup>5</sup> Μορφή συναρτήσεων Bessel:  $J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(m\tau - x \sin \tau) d\tau$

αξονοσυμμετρικών τρόπων, ειδικά του τρόπου (0,1). Όταν μια μεμβράνη δονείται σε ανεμπόδιτο αέρα, ωστόσο, όλες οι τροπικές συχνότητες μειώνονται, ενώ οι τρόποι της χαμηλότερης συχνότητας μειώνονται περισσότερο.

Μια προσεγγιστική σχέση δύναμης-μετατόπισης μπορεί να δοθεί θεωρώντας τα εξής. Έστω δύναμη  $F$  που ασκείται σε κυκλική περιοχή ακτίνας  $r$  στο κέντρο κυκλικής μεμβράνης ακτίνας  $a$ . Η σχέση που προκύπτει είναι:

$$z = \frac{2F}{T} \ln \frac{a}{r} \quad (19)$$

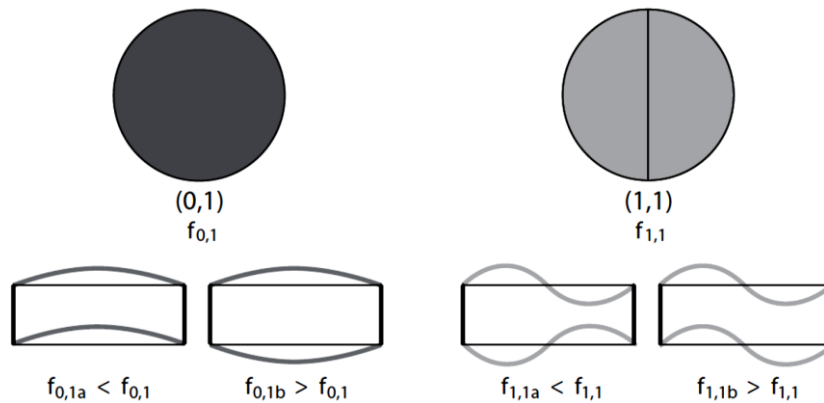
Καθώς η ακτίνα  $r$  μικραίνει, η μετατόπιση  $z$  τείνει στο άπειρο. [6]



Εικόνα 8: Τρόποι δόνηση κυκλικής μεμβράνης σε 3-Δ

### 2.1.2.1 Συζευγμένες Μεμβράνες

Σε τύμπανα με δύο κεφαλές, και οι δύο μεμβράνες αλληλεπιδρούν μέσω του κελύφους ή του κλειστού όγκου αέρα μεταξύ τους. Αυτή η αλληλεπίδραση, ή σύζευξη, οδηγεί στο σχηματισμό ζευγών τρόπων όπως απεικονίζεται στην Εικόνα 9. Η μία μεμβράνη εμφανίζει έναν απλό τρόπο τάξης (0,1) με συχνότητα  $f_{0,1}$ . Όταν δύο μεμβράνες τεντώνονται πάνω από ένα κέλυφος τυμπάνου, παράγουν μαζί δύο τρόπους τάξης (0,1) σε συχνότητες  $f_{0,1a}$  και  $f_{0,1b}$ . Στην περίπτωση του  $f_{0,1a}$ , οι κινήσεις των δύο κεφαλών τυμπάνου είναι σε φάση ενώ για το  $f_{0,1b}$ , οι μεμβράνες κινούνται με αντίθετη φάση. [26]



Εικόνα 9: Συζευγμένες μεμβράνες

### 2.1.3 Δονούμενα κελύφη

Ένα κέλυφος είναι μια δομή στην οποία μια διάσταση του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένο είναι πολύ μικρότερη από τις άλλες διαστάσεις του. Τα απλά κελύφη μπορούν επομένως να είναι κοίλοι κύλινδροι, κοίλες σφαίρες ή τμήματα από αυτά, ή μπορεί να έχουν μια ποικιλία περίπλοκων μορφών. Ακόμη και τμήματα επίπεδων πλακών μπορούν να ενωθούν μεταξύ τους για να σχηματίσουν κελύφη. Τα κελύφη έχουν σαφώς μεγάλη πρακτική σημασία στην αρχιτεκτονική και τη μηχανική και έχει δοθεί μεγάλη προσοχή στις στατικές και δονητικές τους ιδιότητες. Πολλά μουσικά όργανα ενσωματώνουν επίσης κελύφη ως βασικά ακουστικά στοιχεία, π.χ. η καμπύλη πλάκα ενός βιολιού ή ακόμα και ολόκληρο το σώμα του βιολιού.

Εντοπίζονται δύο τύποι τρόπων δόνησης των κελυφών, οι οποίοι ονομάζονται επεκτατικός και μη επεκτατικός, αντίστοιχα. Σε έναν επεκτατικό τρόπο, υπάρχει μια αλλαγή πρώτης τάξης στο μήκος μιας γραμμής που σχεδιάζεται στην επιφάνεια του κελύφους, και οι ελαστικές δυνάμεις που συνδέονται με αυτήν την επέκταση παρέχουν μια σημαντική δύναμη επαναφοράς - πράγματι, για ένα πολύ λεπτό κέλυφος, ουσιαστικά είναι η μόνη δύναμη επαναφοράς. Σε έναν μη επεκτατικό τρόπο δεν υπάρχει αλλαγή πρώτης τάξης στο μήκος των γραμμών που σχεδιάζονται στην επιφάνεια του κελύφους και οι δυνάμεις επαναφοράς παρέχονται από την αντοχή στην κάμψη του κελύφους.

Οι συχνότητες των καθαρά επεκτατικών τρόπων ενός λεπτού κελύφους είναι ανεξάρτητες από το πάχος του κελύφους, καθώς και η μάζα και η ακαμψία είναι ανάλογες του πάχους. Αντίθετα, σε έναν μη επεκτατικό τρόπο η μάζα είναι ανάλογη με το πάχος του κελύφους και την ελαστική δυσκαμψία προς τον κύβο αυτής της ποσότητας, έτσι ώστε η συχνότητα να είναι ανάλογη με το πάχος του κελύφους. Οι τρόποι δόνησης μπορούν να ταξινομηθούν με αυτόν τον τρόπο μόνο για σχετικά απλές γεωμετρίες κελύφους. Για μια πιο γενική γεωμετρία, εάν το κέλυφος έχει πάχος  $h$ , τότε οι συχνότητες λειτουργίας θα έχουν τη μορφή:

$$f_{m,n} = (A_{m,n} + B_{m,n}h^2)^{\frac{1}{2}}$$

όπου  $A_{m,n}$  και  $B_{m,n}$  είναι σταθερές.

Για ένα αρκετά λεπτό κέλυφος, οι τρόποι χαμηλότερης συχνότητας είναι μη επεκτατικοί, υπονοώντας ότι  $A_{m,n} = 0$ .

### 2.1.3.1 Κυλινδρικό κέλυφος

Από μουσικής άποψης, τα κυλινδρικά κελύφη εμφανίζονται κυρίως ως οι σχετικά άκαμπτες υποστηρικτικές δομές για ελαφρές μεμβράνες σε τύμπανα ή ως σωλήνες με μήκος πολύ πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα του κελύφους σε ορχηστρικά καμπανάκια.

Στην πρώτη περίπτωση, υπάρχουν δύο τρόποι παραμόρφωσης πρωταρχικού ενδιαφέροντος. Η πρώτη είναι ο χαμηλότερος επεκτατικός τρόπος, ο οποίος αποτελείται από μια ομοιόμορφη ακτινική μετατόπιση των τοιχωμάτων του κελύφους. Η καμπυλότητα του κελύφους το καθιστά εξαιρετικά δύσκαμπτο έναντι αυτού του είδους της παραμόρφωσης, έτσι ώστε να μπορεί να στηρίξει την εσωτερική τάση των δύο κεφαλών τυμπάνων. Εάν η ακτίνα του τυμπάνου είναι  $r$  και η τάση του τυμπάνου είναι  $T$ , τότε η εφαπτομενική θλιπτική δύναμη στα τοιχώματα του κελύφους είναι απλώς  $r \cdot T$ . Η θλιπτική τάση στο κέλυφος ενός μικρού τυμπάνου με βαθιά και μετρίως παχιά τοιχώματα δεν είναι, επομένως, μεγάλη.

Οι μη επεκτατικοί τρόποι παραμόρφωσης μπορούν να εισαχθούν με δύο διαδικασίες. Η πρώτη είναι στατική - το τύμπανο μπορεί να παραμορφωθεί από μια εξωτερική δύναμη και δεν είναι αρκετά στιβαρό, ώστε να αντισταθεί. Η κύρια σταθεροποιητική επίδραση έναντι αυτού του είδους παραμόρφωσης προέρχεται από την προένταση της μεμβράνης του τυμπάνου. Το πιο σημαντικό, από ακουστικής άποψης, είναι το ότι συνηθίζεται να κρούεται ένα τύμπανο σε ένα σημείο μακριά από το κέντρο του για να διεγείρονται υψηλότερες αρμονικές και μη συχνότητες καθώς και οι αντίστοιχοι τρόποι τους. Αυτό ασκεί ορθές τάσεις με γωνιακή εξάρτηση, όπως  $\cos n\varphi$ , στο κέλυφος και αυτές μπορούν να διεγείρουν μη επεκτατικούς τρόπους με το ίδιο γωνιακό μοτίβο. Είναι απίθανο αυτές οι δονήσεις των τοιχωμάτων να συμβάλλουν αισθητά στον παραγόμενο ήχο σε ένα κανονικό τύμπανο. Η κατάσταση είναι διαφορετική, ωστόσο, σε τύμπανα χωρίς μεμβράνη στα οποία το κέλυφος ενθουσιάζεται άμεσα χτυπώντας το με ξύλινα χτυπητήρια.

Στις υψηλότερες ιδιοσυχνότητες ενός κυλινδρικού κελύφους, η ορθή μετατόπιση έχει μορφή τύπου

$$\cos(k_n z + \beta) \cos m\varphi$$

όπου  $z$  είναι η αξονική συντεταγμένη και  $\varphi$  είναι η γωνιακή συντεταγμένη. Η σταθερά φάσης  $\beta$  εξαρτάται από τις οριακές συνθήκες. Για μεγαλύτερη ακρίβεια, θα πρέπει να συμπεριληφθούν υπερβολικές συναρτήσεις στην αξονική διεύθυνση και να εντοπίσουμε ότι οι ορθές μετατοπίσεις συνοδεύονται από εφαπτομενικές μετατοπίσεις και στις δύο κατευθύνσεις  $z$  και  $\varphi$ . Ο αξονοσυμμετρικός επεκτατικός τρόπος με  $m = 0$  έχει υψηλή συχνότητα και γενικά δεν διεγείρεται. Οι μη επεκτατικοί τρόποι έχουν δομή πολλαπλών πόλων, με τμήματα της επιφάνειας



να κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις Δεν παράγουν ήχο πολύ αποτελεσματικά, εκτός από κάποιες περιπτώσεις για μικρές τιμές  $m$ . [6]

## 2.2 Βασικές Αρχές Ακουστικής

### 2.2.1 Ηχητική Πίεση

Όταν ακούμε μουσική, η αντιληπτή τονική εντύπωση προκαλείται από τον ήχο που μεταφέρεται στα αυτιά μας από τον αέρα. Συναφείς σε αυτό το πλαίσιο είναι οι μικροσκοπικές διακυμάνσεις της πίεσης που υπερτίθενται στην σταθερή πίεση του αέρα που μας περιβάλλει. Οι διακυμάνσεις πίεσης διαδίδονται ως κύματα στο χώρο. Αυτές οι περισσότερο ή λιγότερο περιοδικές αποκλίσεις από τη σταθερή μέση τιμή, συνιστούν τις λεγόμενες διακυμάνσεις ηχητικής πίεσης, για τις οποίες στην πράξη χρησιμοποιείται ο σύντομος όρος «ηχητική πίεση».

Η σχέση μιας συγκεκριμένης ηχητικής πίεσης με μια τιμή αναφοράς δίνεται σε «ντεσιμπέλ» (dB), και όταν γίνεται αναφορά στο επίπεδο ηχητικής πίεσης, η έννοια «επίπεδο» αναφέρεται πάντα σε λογαριθμική κλίμακα.

Οι επονομαζόμενες «απόλυτες» τιμές dB για τα επίπεδα ηχητικής πίεσης λαμβάνονται όταν χρησιμοποιείται μια τιμή αναφοράς  $2 \times 10^{-5} Pa$  (*Pascal*). Αυτή η τιμή επιλέχθηκε με διεθνή συμφωνία. Αντιστοιχεί περίπου στο κατώφλι της ακοής στην περιοχή συχνότητας όπου το αυτί είναι πιο ευαίσθητο. (Η εκτίμηση της τιμής αναφοράς καθώς και οι λογαριθμικοί υπολογισμοί πραγματοποιούνται από το όργανο μέτρησης.)

Ωστόσο, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί κάποια άλλη, αυθαίρετη τιμή ηχητικής πίεσης ως αναφορά. Σε αυτήν την περίπτωση αποκτάται μια «σχετική» τιμή dB, ιδιαίτερα χρήσιμη για τον χαρακτηρισμό της διαφοράς μεταξύ δύο επιπέδων ήχου. Μια τιμή 0 dB, θα έδειχνε ότι οι δύο διαδικασίες που συγκρίνονται έχουν την ίδια ηχητική πίεση, όχι όμως ότι βρίσκονται στο χαμηλότερο όριο ακοής. [15]

### 2.2.2 Ηχητική Ισχύς

Το μετρούμενο επίπεδο ήχου εξαρτάται από την ισχύ της ηχητικής πηγής. Είναι επομένως ενδιαφέρον να προσδιορίσουμε έναν χαρακτηρισμό της ηχητικής πηγής, ο οποίος περιγράφει τη δύναμή της ανεξάρτητα από χωρικές παραμέτρους και την απόσταση από τον ακροατή. Αυτός ο χαρακτηρισμός σχετίζεται αποκλειστικά με την ίδια την ηχητική πηγή. Μια τέτοια ποσότητα αντιπροσωπεύει την ηχητική ενέργεια που εκπέμπεται από μια πηγή προς όλες τις κατευθύνσεις κατά τη διάρκεια μιας μονάδας χρόνου. Αυτή η ποσότητα ορίζεται ως η ηχητική ισχύς της πηγής.

Η μονάδα μέτρησης της ισχύος είναι το *Watt*. Ωστόσο, δεδομένου ότι οι τιμές ακουστικής ισχύος που εμφανίζονται στην πράξη καλύπτουν ένα μεγάλο δυναμικό εύρος, όπως και στην περίπτωση της ηχητικής πίεσης, η ακουστική ισχύς μπορεί να αναπαρασταθεί στην πιο προσιτή κλίμακα dB. Ταυτόχρονα, αυτό απλοποιεί τη σύνδεση μεταξύ της ισχύος μιας ηχητικής πηγής και της προκύπτουσας ηχητικής πίεσης. Η ισχύς των  $10^{-12} Watt$  χρησιμεύει ως τιμή αναφοράς για την κλίμακα dB της ηχητικής ισχύος. Αυτή η τιμή είναι αποτέλεσμα της τιμής αναφοράς για την ηχητική πίεση και της χαρακτηριστικής εμπέδισης πεδίου για τον αέρα. Αριθμητικά, το επίπεδο

ηχητικής ισχύος που δίνεται σε  $dB$  αντιστοιχεί στο επίπεδο ηχητικής πίεσης στην επιφάνεια μιας σφαίρας με επιφάνεια  $1\text{ m}^2$ , που περιβάλλει το κέντρο της ηχητικής πηγής, δηλαδή, ίσο με το επίπεδο ηχητικής πίεσης σε απόσταση περίπου  $28\text{ cm}$  από το κέντρο της πηγής.

Καθώς η κλίμακα  $dB$  βασίζεται σε λογαριθμική βάση, οι τιμές  $dB$  για την ισχύ μεμονωμένων ηχητικών πηγών δεν μπορούν απλά να προστεθούν για τον προσδιορισμό της συνδυασμένης ισχύος κατά τη διάρκεια της ταυτόχρονης διέγερσης πολλών πηγών. Αντίθετα, ανάλογα με τον συντελεστή με τον οποίο η συνολική ισχύς υπερβαίνει εκείνη των μεμονωμένων πηγών, μια τιμή πρέπει να προστεθεί στην τιμή  $dB$  των μεμονωμένων πηγών ήχου.

Ο Πίνακας 1 δείχνει μερικά ζεύγη τιμών που απαιτούνται για αυτόν τον υπολογισμό. Για παράδειγμα, εάν η ηχητική ισχύς διπλασιαστεί - πιθανώς διπλασιάζοντας τον αριθμό των οργανοπαικτών - η συνολική εκπεμπόμενη ισχύς αυξάνεται κατά  $3\text{ dB}$ . Ωστόσο, από την άλλη πλευρά, εάν ο αριθμός των οργανοπαικτών αυξάνεται από 4 σε 5, αυτό σημαίνει αύξηση μόνο  $1\text{ dB}$  στην εκπεμπόμενη ισχύ του ήχου. [15]

Power multiplier	Increase in dB
1.25	1
1.6	2
2.0	3
3.3	5
5.0	7
10.0	10

Πίνακας 1: Συντελεστές πολλαπλασιασμού της ηχητικής ισχύος σε σχέση με την αύξηση στην κλίμακα  $dB$

### 2.3 Αντικείμενο Μελέτης της Διπλωματικής Εργασίας

Έχοντας αναφέρει όλα τα παραπάνω είναι απαραίτητο να διευκρινιστεί το αντικείμενο μελέτης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Θα γίνει μία απλοποιημένη μελέτη της μεμβράνης και του κελύφους ενός τυμπάνου, το οποίο είναι μονής κεφαλής. Θα υπολογιστούν οι ταλαντώσεις της μεμβράνης για διάφορες δυνάμεις, οι οποίες εφαρμόζονται σε διάφορα σημεία μίας ακτίνας της μεμβράνης. Κύριος στόχος της εργασίας είναι η εύρεση αναλυτικής συνάρτησης η οποία θα δίνει την κυματομορφή της ταλάντωσης οποιουδήποτε σημείου της μεμβράνης με βασικές παραμέτρους την δύναμη και την θέση κρούσης.

## Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>

### 3.1 Περιγραφή του υπολογιστικού μέρους

Σκοπός των προσομοιώσεων που ακολουθούν είναι η εύρεση των εξής συσχετισμών:

- θέσης όπου κρούεται η μεμβράνη του τυμπάνου και
- δύναμης κρούσης

σε σχέση με:

- παραμόρφωση της μεμβράνης και ταλαντωτική απόκρισή της.

Επί της ουσίας, θέλουμε να κατασκευάσουμε αναλυτική έκφραση με παραμέτρους την θέση και δύναμη κρούσης η οποία θα δίνει την χρονική απόκριση της μεμβράνης του τυμπάνου.

Για την επίτευξη των παραπάνω χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό COMSOL Multiphysics και συγκεκριμένα τα στοιχεία του Structural Module.

### 3.2 Προδιαγραφές των προσομοιώσεων

Επιλέχθηκε να μελετηθεί τύμπανο τύπου τομ-τομ με τα εξής χαρακτηριστικά σύμφωνα με τις τυπικές τιμές των τυμπάνων του εμπορίου:

<b>Διάμετρος</b>	14 in.
<b>Πάχος μεμβράνης</b>	0.3 mm
<b>Βάθος κελύφους</b>	10 in.
<b>Πάχος κελύφους</b>	7.5 mm

Πίνακας 2: Γεωμετρικά μεγέθη τυμπάνου προσομοίωσης

Για την προσομοίωση απαιτούνταν επίσης η επιλογή υλικού των μεμβρανών και του σώματος του τυμπάνου. Για τις μεμβράνες επιλέχθηκε το υλικό Mylar με τα εξής χαρακτηριστικά, όπως αυτά προκύπτουν από την βιβλιογραφία [4], [7]:

<b>Μέτρο ελαστικότητας</b>	$E = 3.5 \text{ GPa}$
<b>Λόγος Poisson</b>	$\nu = 0.4$
<b>Πυκνότητα</b>	$\rho = 1400 \text{ kg/m}^3$

Πίνακας 3: Μηχανικές ιδιότητες του υλικού Mylar

Για το κέλυφος το υλικό που επιλέχθηκε είναι το μαόνι, το οποίο είναι πολύ διαδεδομένο στην κατασκευή κελύφων για ντραμς [27]. Οι ιδιότητες του υλικού παραλείπονται, καθότι το υλικό είναι προεγκατεστημένο στην βιβλιοθήκη του λογισμικού COMSOL.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 2, η μεμβράνη δεν εμφανίζει κάποιου είδους ενδοτικότητα ή αντίσταση σε διατμητική παραμόρφωση. Γι' αυτό έπρεπε να επιλεγεί μια τιμή προέντασης, η οποία αντιστοιχεί με το κούρδισμα ενός πραγματικού τυμπάνου. Η τιμή αυτή επιλέχθηκε μετά από δοκιμές, ώστε η πρώτη ιδιοσυχνότητα της μεμβράνης να αντιστοιχεί στην συνήθη συχνότητα που έχουν τα τύμπανα τομ σε ένα σετ ντραμς [18]. Έτσι, καταλήξαμε στην τιμή:

Tom Size (inches)	Frequency Range (Hz)	Note Range (note/octave)
8	165–235	E3–A#3
10	120–175	B3–F3
12	100–145	G#2–D3
13	85–125	F2–B2
14	75–110	D#2–A2
16	65–95	C2–F#2
18	55–75	A1–D2

Πίνακας 4: Κούρδισμα τυμπάνου τομ

$$T_0 = 3 \text{ [MPa]} * \text{thickness} = 900 \text{ N/m}$$

όπου *thickness*: είναι το πάχος της μεμβράνης του τυμπάνου.

Η τιμή αυτή δίνει πρώτη ιδιοσυχνότητα  $f_1 \cong 100 \text{ Hz}$  η οποία βρίσκεται εντός του προβλεπόμενου εύρους για ένα τύμπανο τομ με τα συγκεκριμένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά.

### 3.3 Υπολογισμός ιδιοσυχνοτήτων

#### 3.3.1 Μεμβράνη

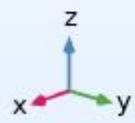
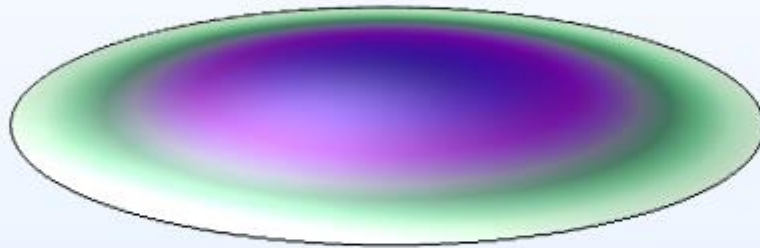
Σε πρώτη φάση γίνεται ο υπολογισμός των 10 πρώτων ιδιοσυχνοτήτων της κεφαλής κρούσης ο οποίος δίνει τα εξής αποτελέσματα.

Αρχικά, στον Πίνακα 5 παρουσιάζονται οι υπολογισμένες ιδιοσυχνότητες, καθώς και οι αντίστοιχες κυκλικές συχνότητες που προκύπτουν και, στη συνέχεια, δίνονται τα σχήματα με τους αντίστοιχους τρόπους δόνησης της μεμβράνης.

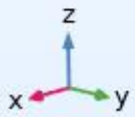
Eigenfrequency (Hz)	Angular frequency (rad/s)
<b>99.651</b>	626.13
<b>158.80</b>	997.78
<b>158.80</b>	997.78
<b>212.90</b>	1337.7
<b>212.91</b>	1337.7
<b>228.93</b>	1438.4
<b>264.65</b>	1662.8
<b>264.65</b>	1662.8
<b>291.22</b>	1829.8
<b>291.22</b>	1829.8

Πίνακας 5: Ιδιοσυχνότητες μεμβράνης τυμπάνου

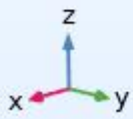
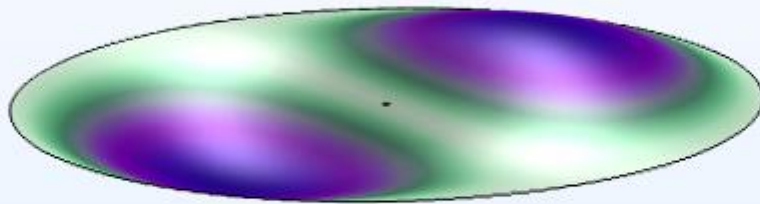
Eigenfrequency=99.651 Hz



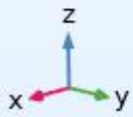
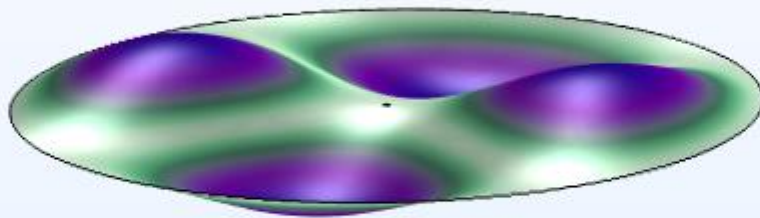
Eigenfrequency=158.8 Hz



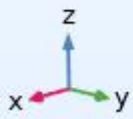
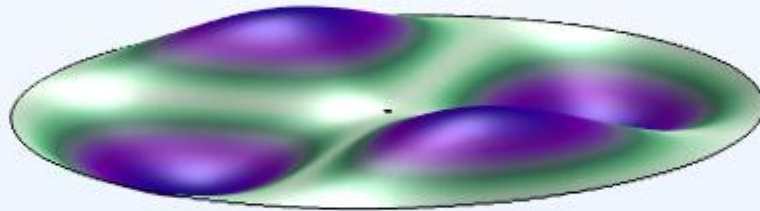
Eigenfrequency=158.8 Hz



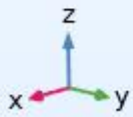
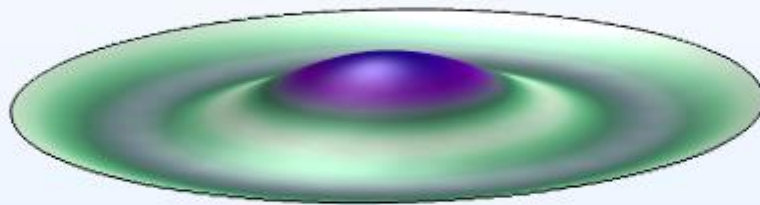
Eigenfrequency=212.9 Hz



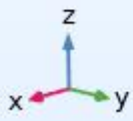
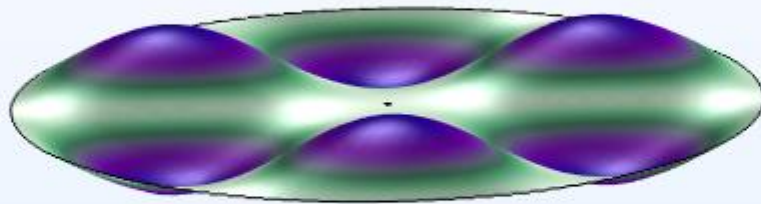
Eigenfrequency=212.91 Hz



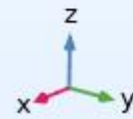
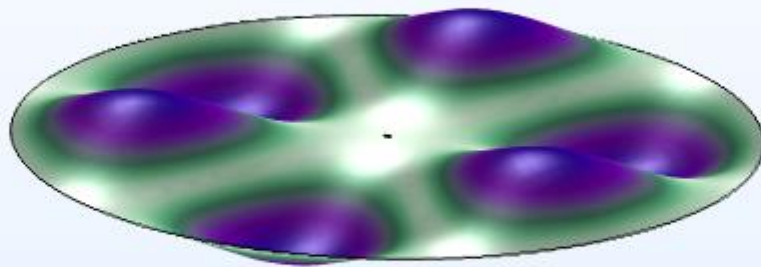
Eigenfrequency=228.93 Hz



Eigenfrequency=264.65 Hz

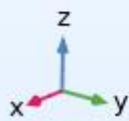
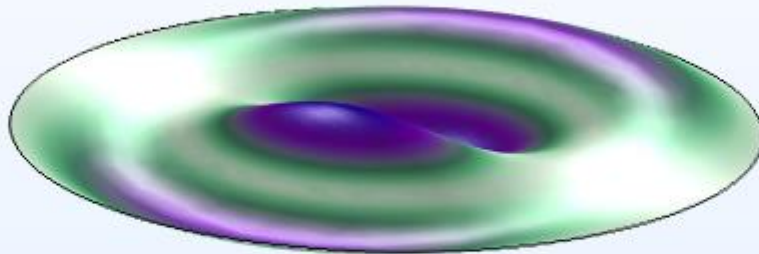


Eigenfrequency=264.65 Hz

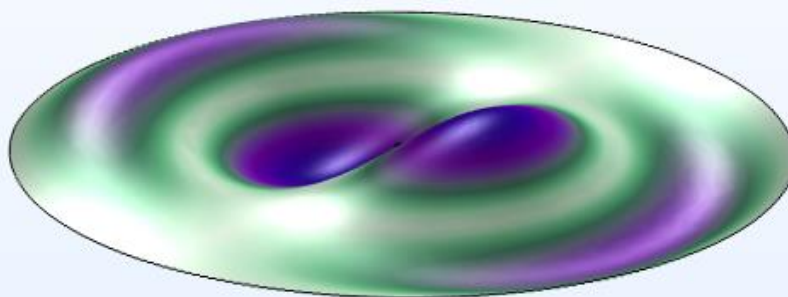




Eigenfrequency=291.22 Hz



Eigenfrequency=291.22 Hz



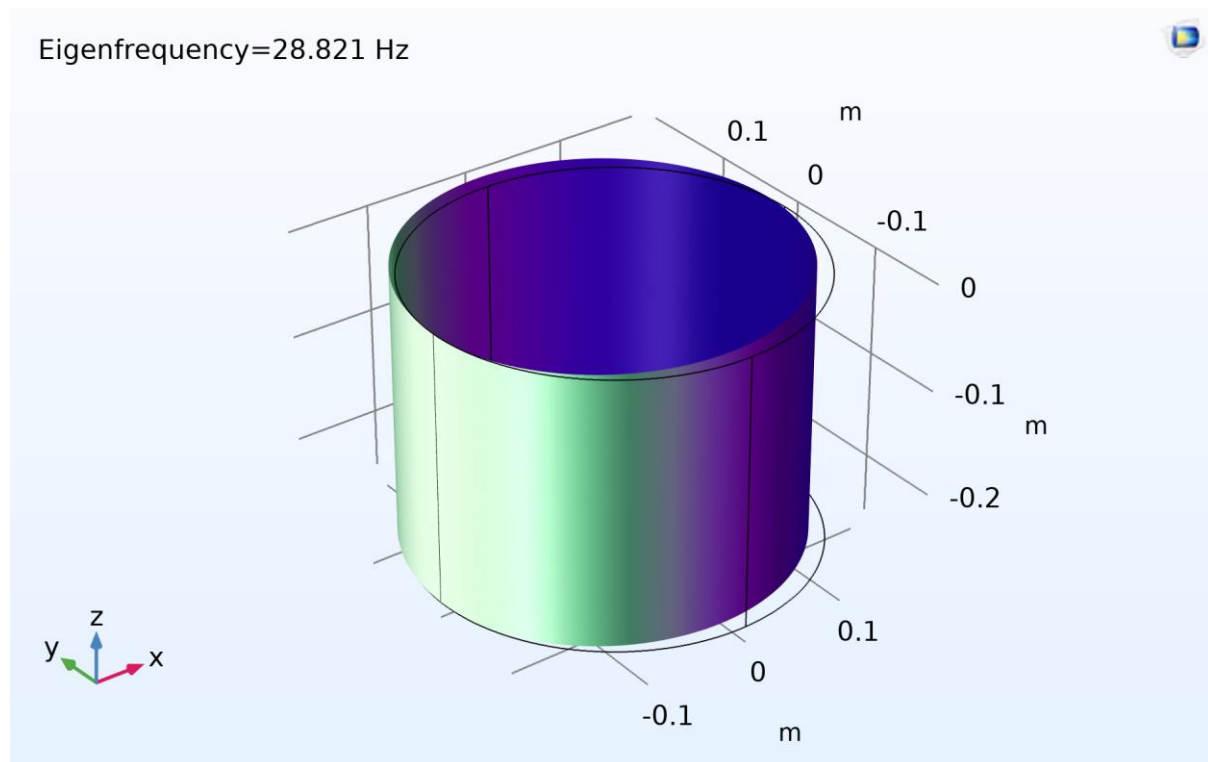
Εικόνα 10: Οι 10 πρώτοι τρόποι δόνησης της μεμβράνης του τυμπάνου

### 3.3.2 Κέλυφος

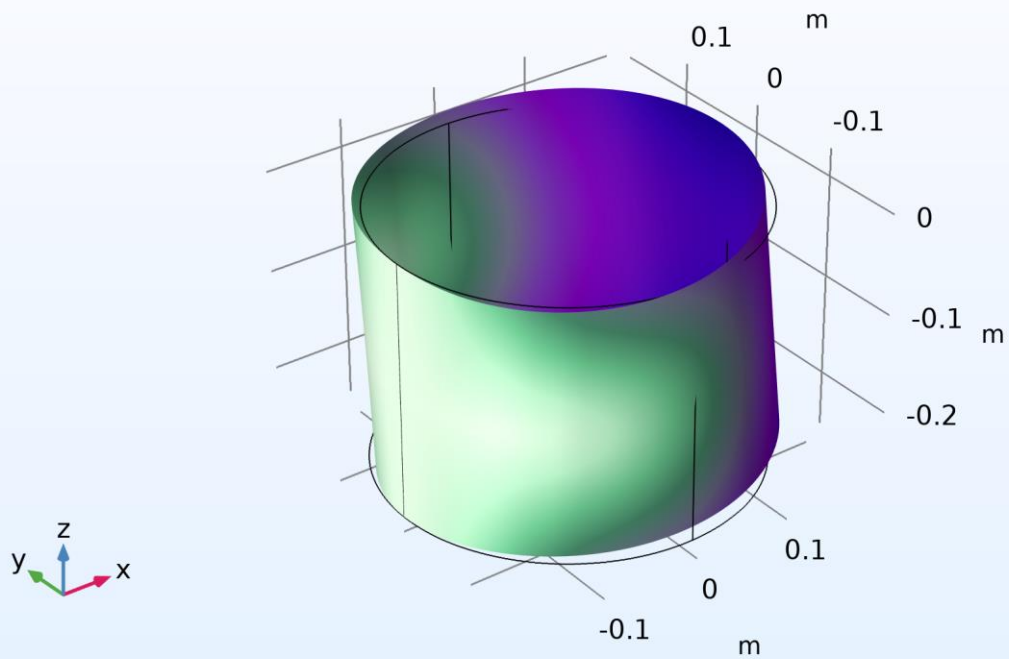
Υπολογίζονται επίσης οι 10 πρώτες ιδιοσυχνότητες του κελύφους του τυμπάνου. Το σώμα έχει πακτωθεί σε μια ευθεία γραμμή επάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου, ως προσεγγιστική αναλογία της στήριξης των τυμπάνων τομ σε ένα σετ κρουστών. Στον Πίνακα 6 δίνονται, όπως και στην περίπτωση της μεμβράνης, οι ιδιοσυχνότητες και οι κυκλικές συχνότητες του κελύφους και ακολουθούν τα σχήματα με τους αντίστοιχους τρόπους δόνησης.

Eigenfrequency (Hz)	Angular frequency (rad/s)
28.821	181.09
55.391	348.03
80.957	508.67
165.31	1038.7
171.39	1076.9
290.72	1826.6
316.92	1991.3
437.86	2751.2
490.90	3084.4
609.56	3830.0

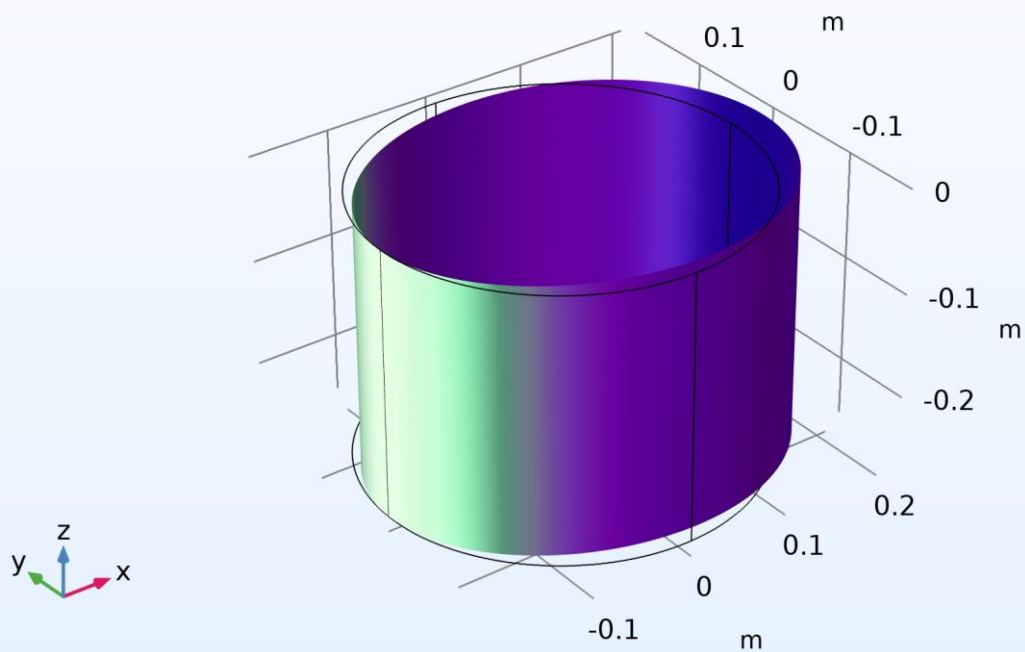
Πίνακας 6: Οι 10 πρώτες ιδιοσυχνότητες του κελύφους του τυμπάνου



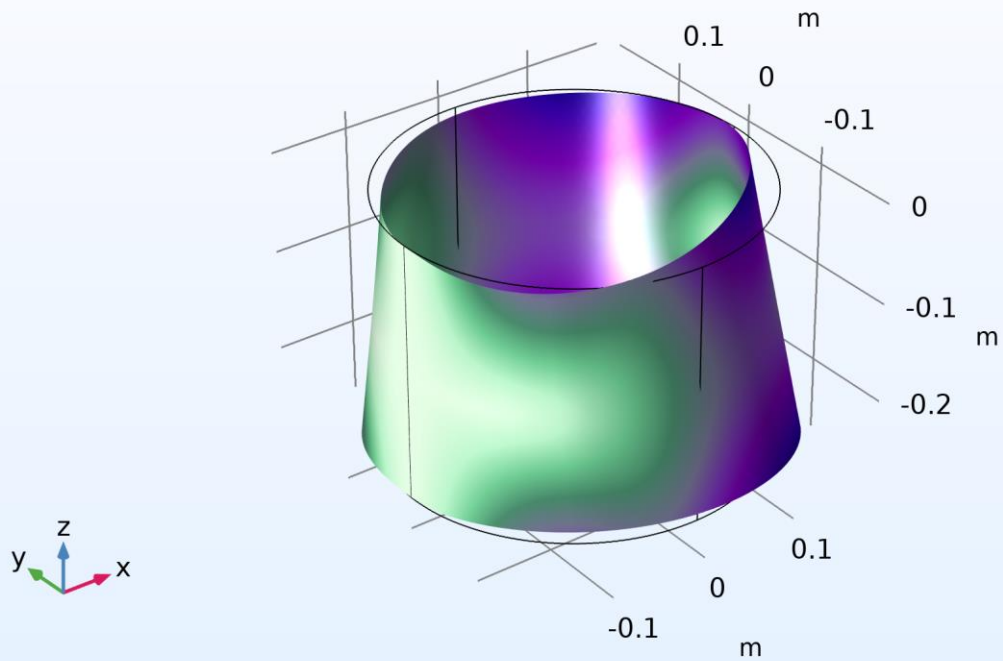
Eigenfrequency=55.391 Hz



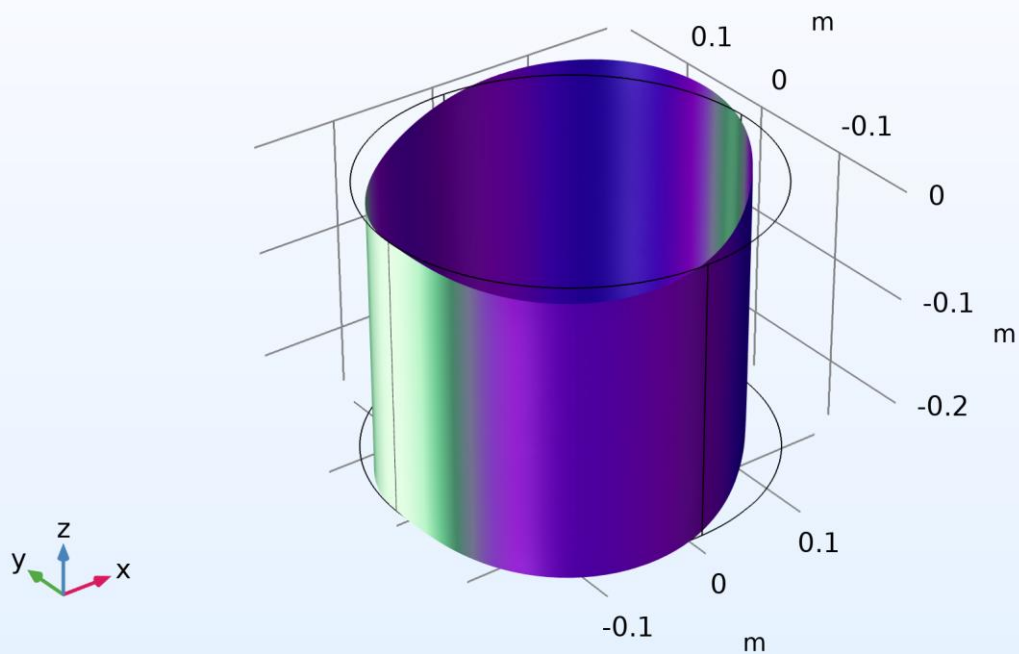
Eigenfrequency=80.957 Hz



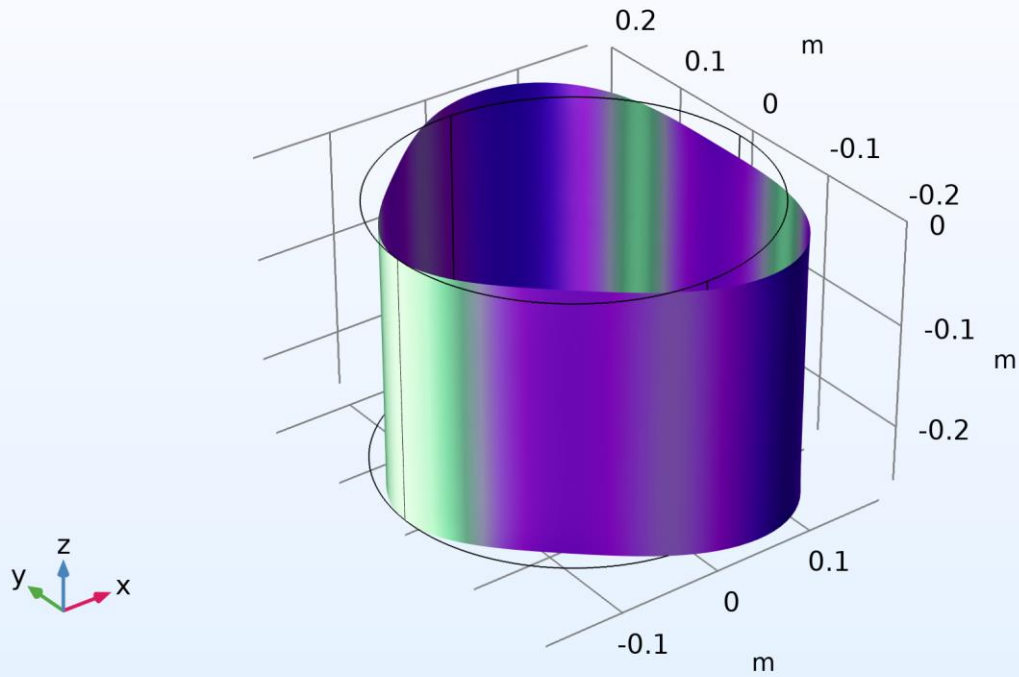
Eigenfrequency=165.31 Hz



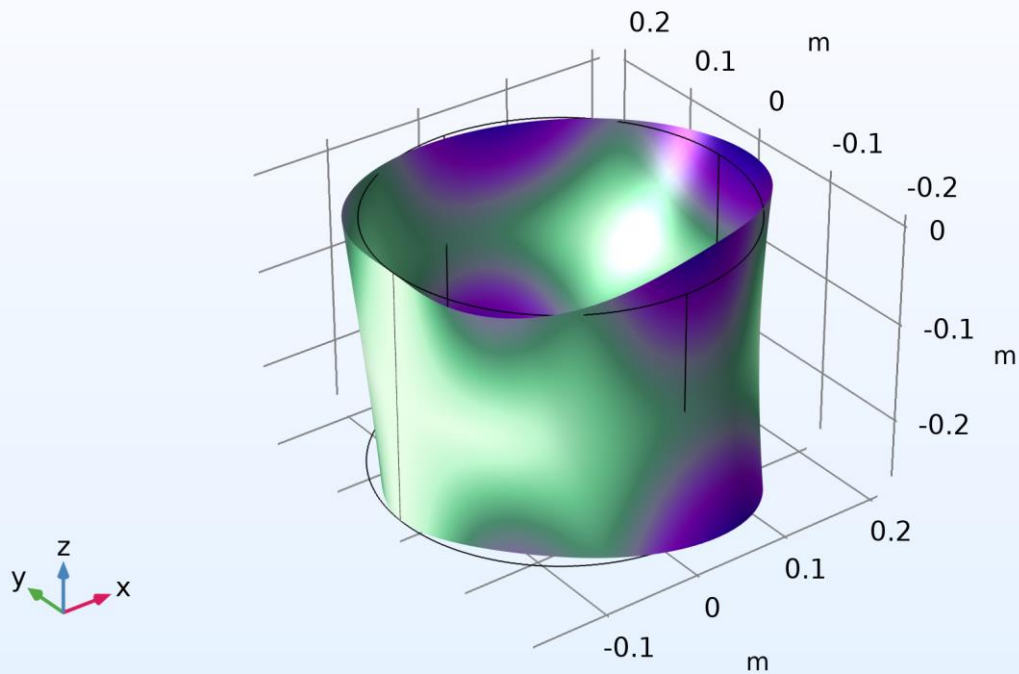
Eigenfrequency=171.39 Hz



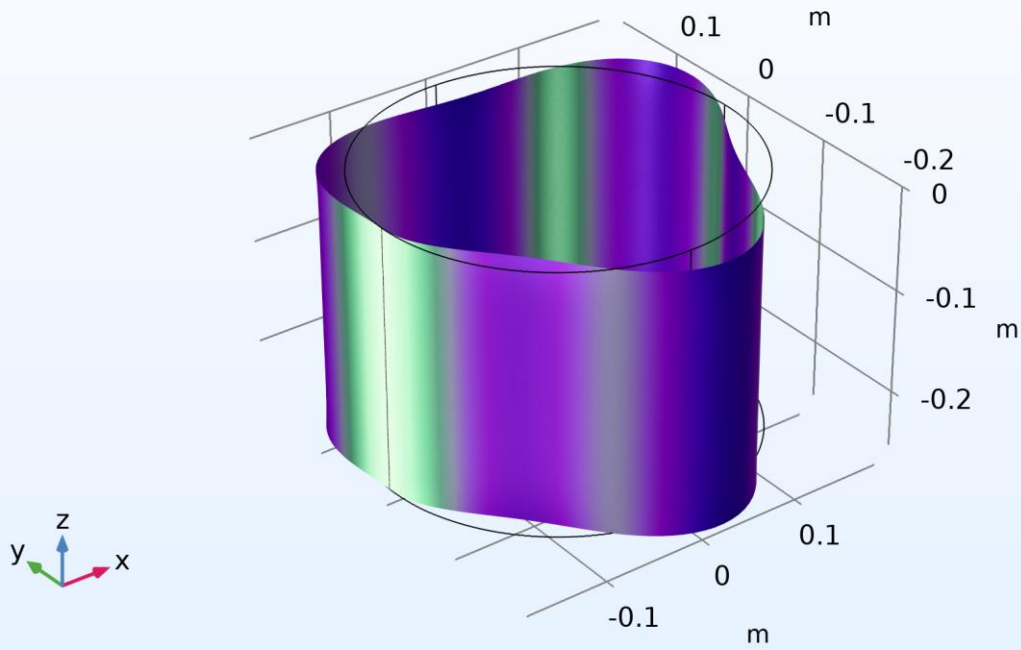
Eigenfrequency=290.72 Hz



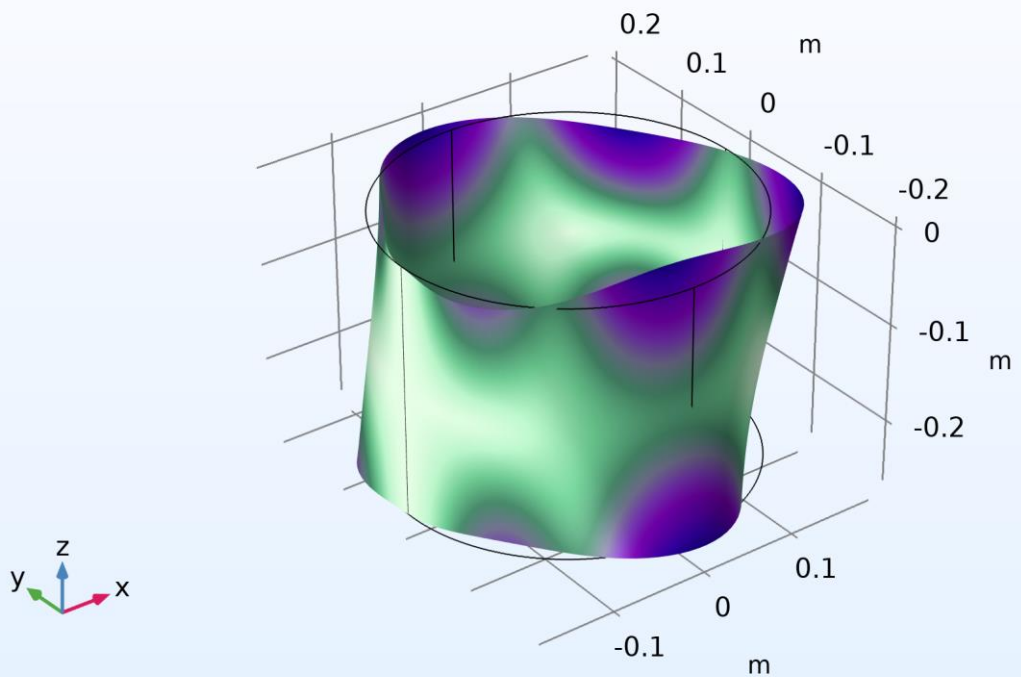
Eigenfrequency=316.92 Hz



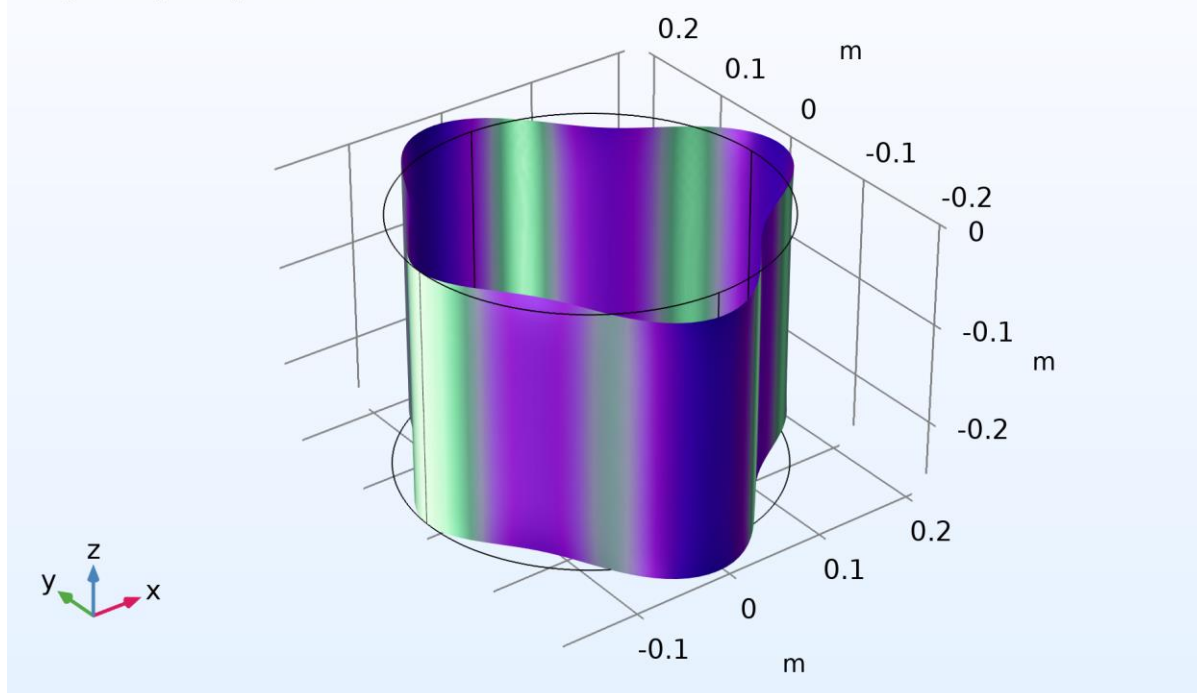
Eigenfrequency=437.86 Hz



Eigenfrequency=490.9 Hz



Eigenfrequency=609.56 Hz



Εικόνα 11: Οι 10 πρώτοι τρόποι δόνησης του κελύφους του τυμπάνου

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοσυχνότητες του κελύφους και της μεμβράνης δεν είναι κοντινές. Αυτό σημαίνει ότι η επίδραση του κελύφους στον τρόπο ταλάντωσης της μεμβράνης δεν είναι ισχυρή. Φυσικά, υπάρχουν ιδιοσυχνότητες με πολύ υψηλές τιμές οι οποίες είναι κοντινές στα δύο στοιχεία, οπότε εκεί υπάρχει αλληλεπίδραση. Στα πλαίσια όμως της μελέτης της ταλάντωσης της μεμβράνης, οι πολύ υψηλές ιδιοσυχνότητες έχουν αμελητέα επίδραση στο συνολικό φαινόμενο.

### 3.4 Υπολογισμός ταλάντωσης μεμβράνης

Για τον υπολογισμό της ταλάντωσης της μεμβράνης χρησιμοποιήθηκε κρουστικός παλμός τύπου Gauss με χαρακτηριστικά που αντιστοιχούν στο χτύπημα της κεφαλής από μία μπαγκέτα. Τα χαρακτηριστικά αυτά λήφθηκαν από σχετική βιβλιογραφία [26] και παρουσιάζονται στον Πίνακα 7. Με βάση τα δεδομένα αυτά επιτυγχάνεται διάρκεια επαφής της «φανταστικής» μπαγκέτας με την μεμβράνη περίπου 5 ms.

Απαιτείται, επίσης, να προσομοιωθεί και η απόσβεση της μεμβράνης, η οποία έγινε με την προσθήκη ενός Spring Foundation με ολικό συντελεστή απόσβεσης  $2 \text{ N s/m}$ .

<b>Μέση τιμή</b>	0.1
<b>Τυπική απόκλιση</b>	0.001

Πίνακας 7: Χαρακτηριστικά παλμού Gauss

Διενεργήθηκαν 12 προσομοιώσεις για 3 διαφορετικές δυνάμεις ( $F = 20, 60$  και  $100\text{ N}$ ) σε 4 σημεία της μεμβράνης επάνω σε μία ακτίνα, ένα σημείο στο κέντρο της μεμβράνης ( $x_f = 0$ ), δύο ενδιάμεσα σημεία της ακτίνας ( $x_f = 2\text{ in}$  και  $x_f = 4\text{ in}$ ) και ένα κοντά στο στεφάνι ( $x_f = 6\text{ in}$ ).

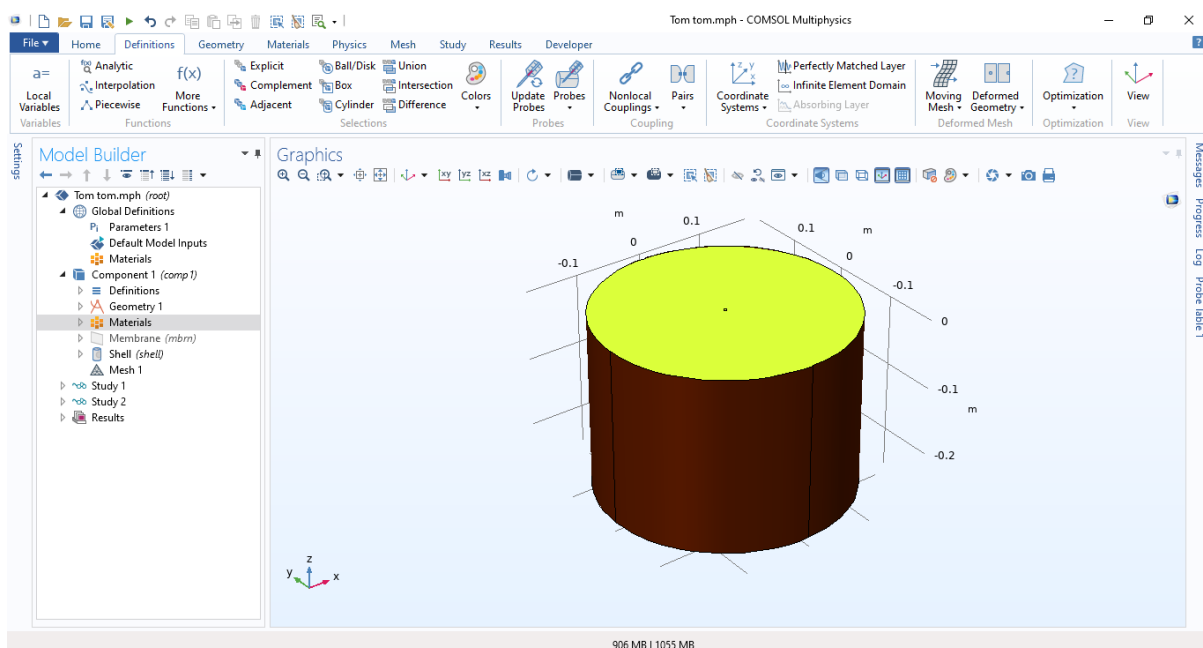
### 3.4.1 Κατασκευή Μοντέλου

Για την κατασκευή του μοντέλου χρησιμοποιήθηκε το Structural Module του λογισμικού COMSOL Multiphysics και, πιο συγκεκριμένα οι κόμβοι φυσικής Membrane και Shell για την προσομοίωση της μεμβράνης και του κελύφους του τυμπάνου, αντίστοιχα.

Σχεδιάστηκε κύλινδρος με τις κατάλληλες διαστάσεις και ορίστηκε η μία βάση του να λειτουργεί ως Membrane και οι υπόλοιπες επιφάνειες ως Shell (Εικόνα 12).

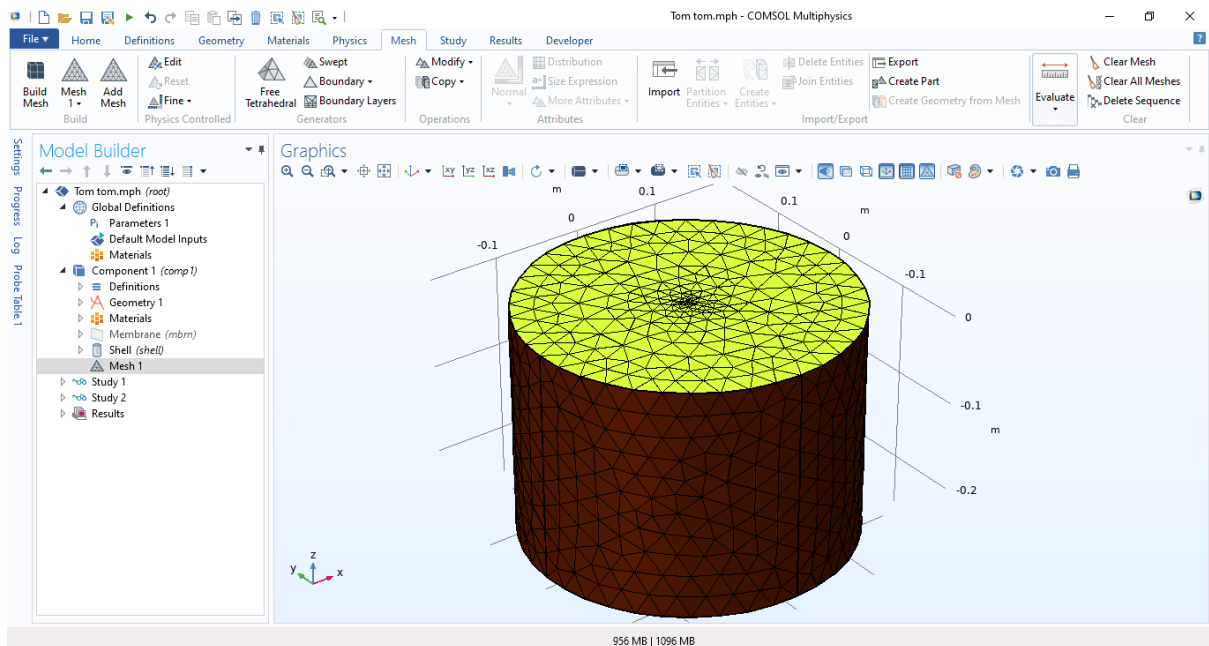
Επίσης, σχεδιάστηκε μικρότερος κύκλος επάνω στην μεμβράνη ακτίνας  $2\text{ mm}$  ο οποίος είναι η επιφάνεια στην οποία κρούεται το τύμπανο, δηλαδή, η επιφάνεια επαφής κεφαλής τυμπάνου και μαπακέτας.

Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από Τριγωνικά Πεπερασμένα Στοιχεία τα οποία ορίστηκαν μεγέθους *Finer*, από τις αυτόματες επιλογές του προγράμματος (Εικόνα 13).



Εικόνα 12: Μοντέλο τυμπάνου στο περιβάλλον του COMSOL Multiphysics





Εικόνα 13: Πλέγμα τριγωνικών στοιχείων του μοντέλου

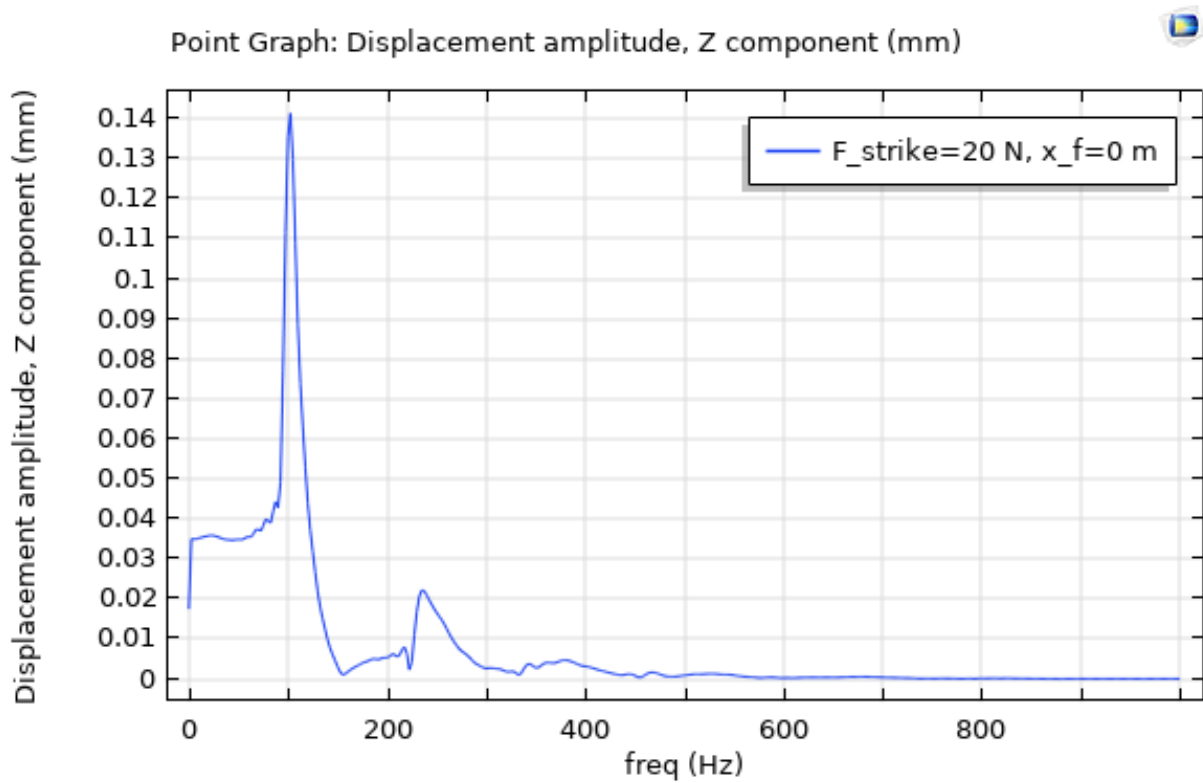
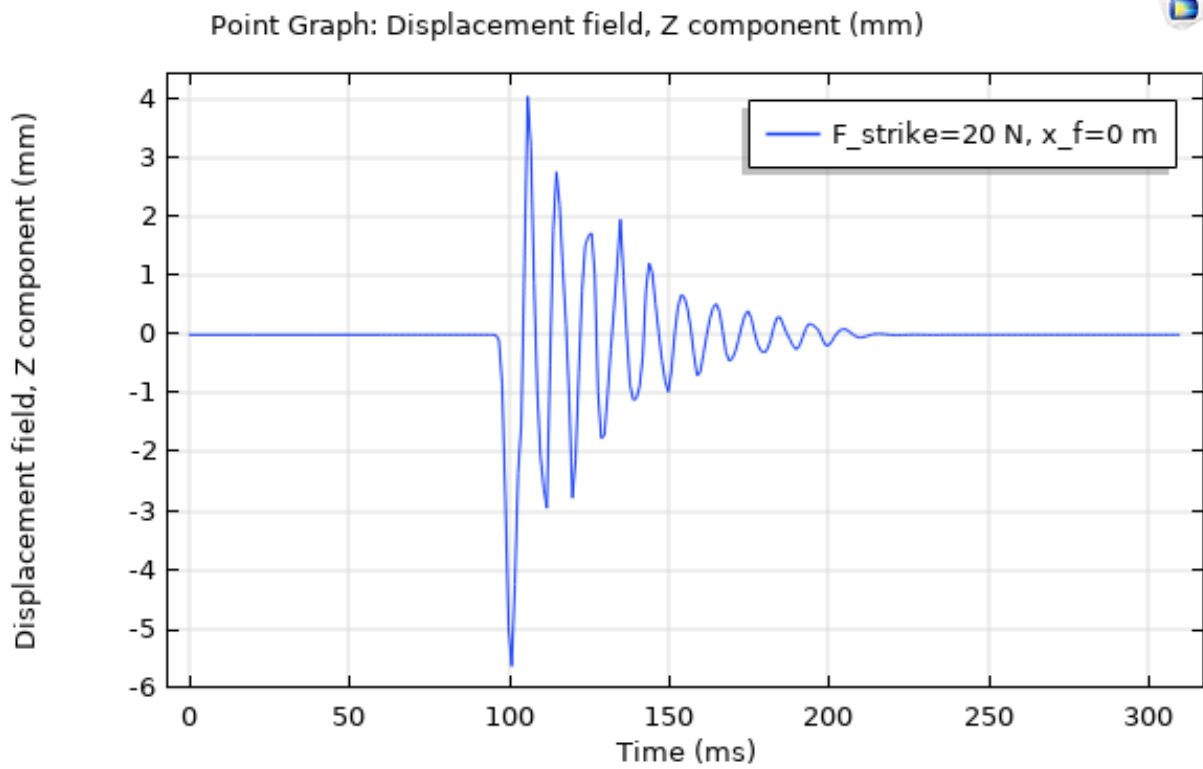
Για τον υπολογισμό της ταλάντωσης της μεμβράνης έγινε μελέτη στο πεδίο του χρόνου (Time-Dependent Study), από την οποία προκύπτει όλη η συμπεριφορά της μεμβράνης κατά τη διάρκεια του χρόνου, όπως οι μετατοπίσεις των σημείων της αλλά και οι τάσεις που δημιουργούνται σε όλη της την επιφάνεια.

Έπειτα, χρησιμοποιήθηκε ειδικό βήμα στην χρονική μελέτη το οποία έκανε μετατροπή από το φάσμα του χρόνου στο φάσμα της συχνότητας μέσω Μετασχηματισμού Fourier (Time to Frequency FFT Step). Με αυτόν τον τρόπο προέκυψαν τα δεδομένα των συχνοτήτων που διεγείρονται μετά τον κρουστικό παλμό.

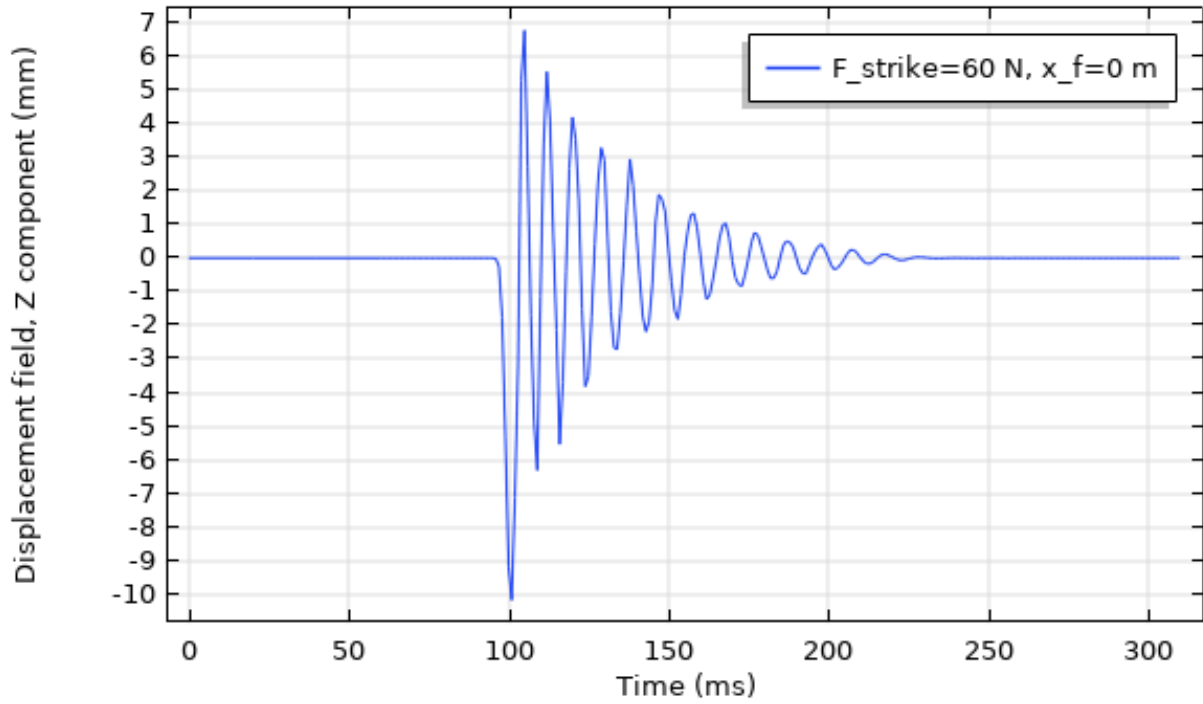
### 3.4.2 Αποτελέσματα

Στη συνέχεια, παρατίθενται τα διαγράμματα που προέκυψαν από τις παραπάνω υπολογιστικές διαδικασίες ανά σημείο εφαρμογής της κρούσης. Στα διαγράμματα αναγράφεται η εκάστοτε εφαρμοζόμενη δύναμη.

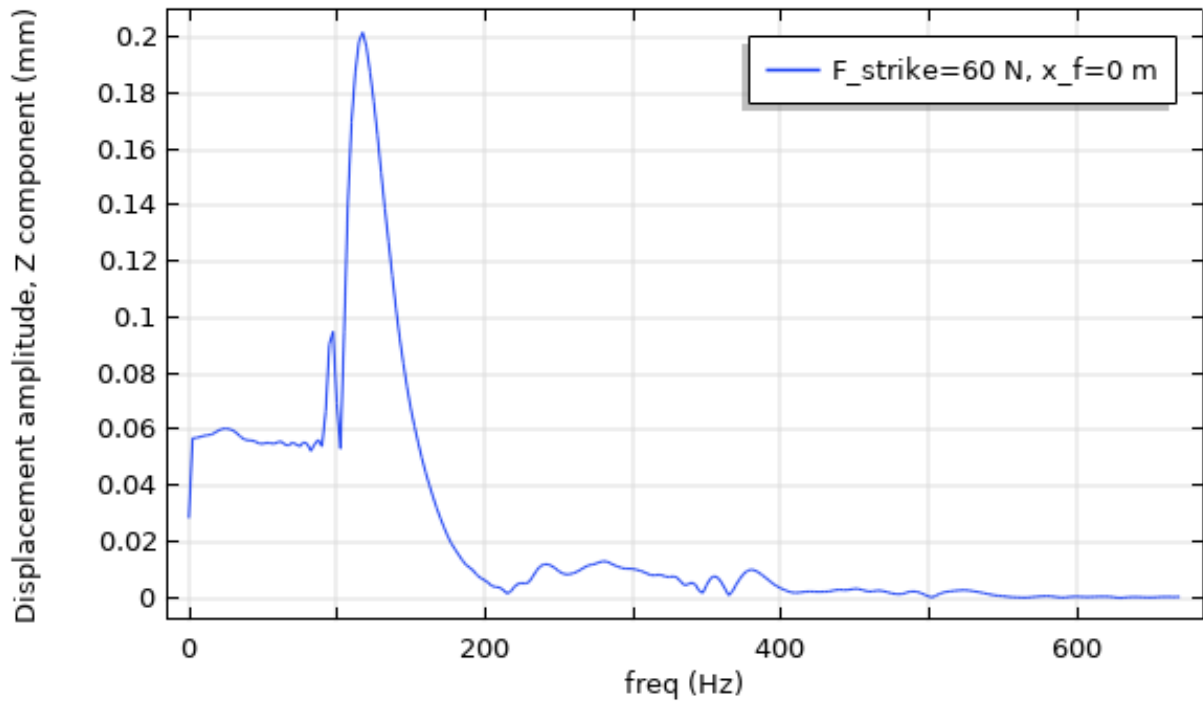
- Για το σημείο  $x_f = 0$  :

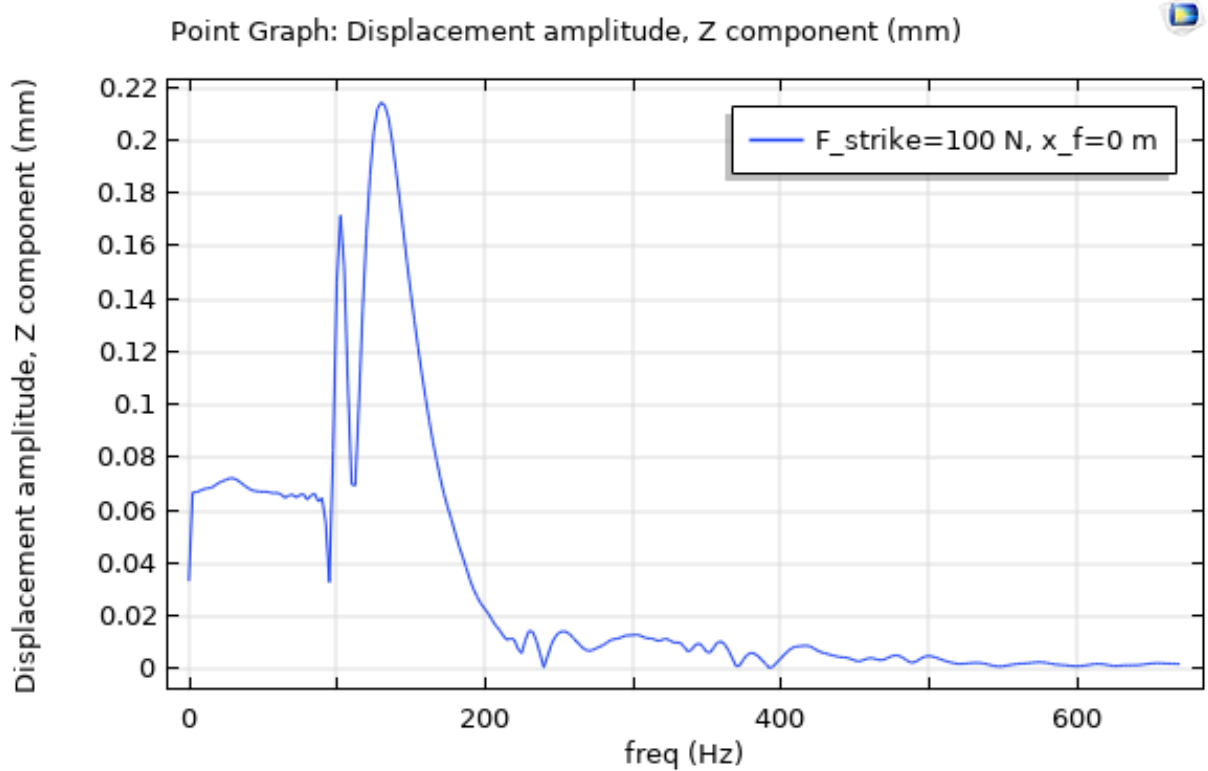
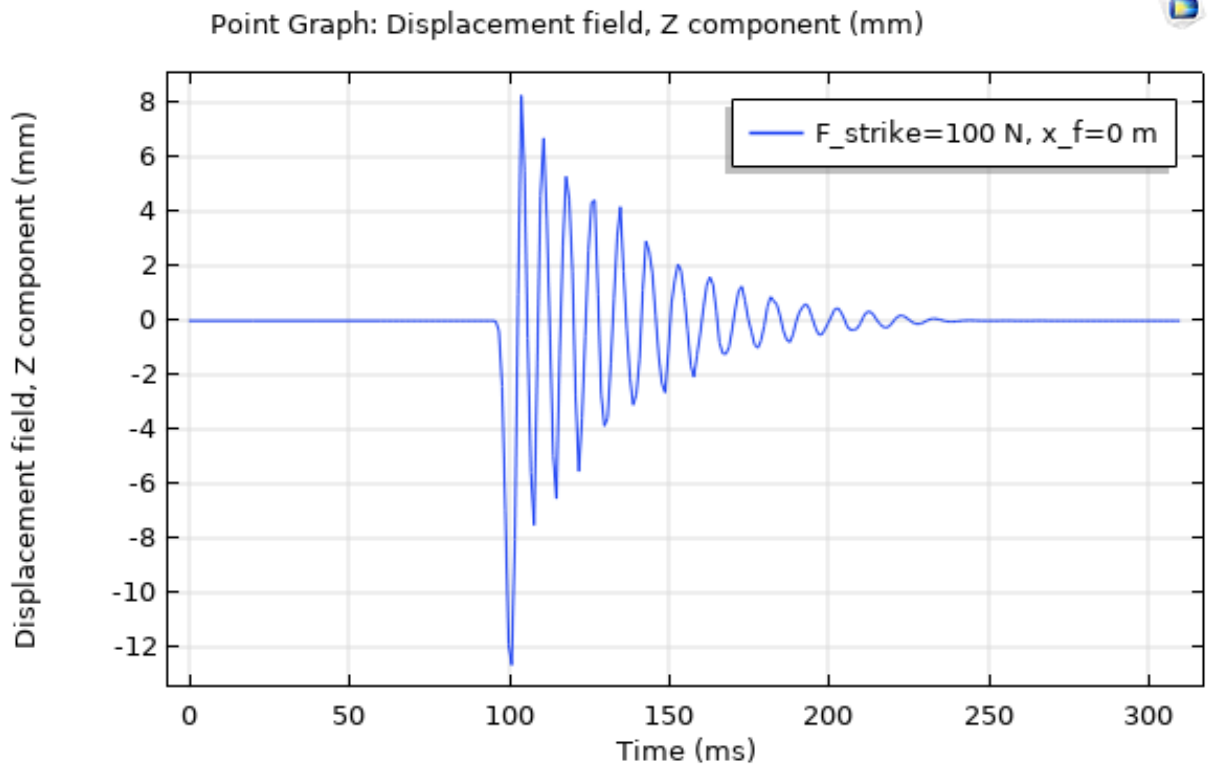


Point Graph: Displacement field, Z component (mm)

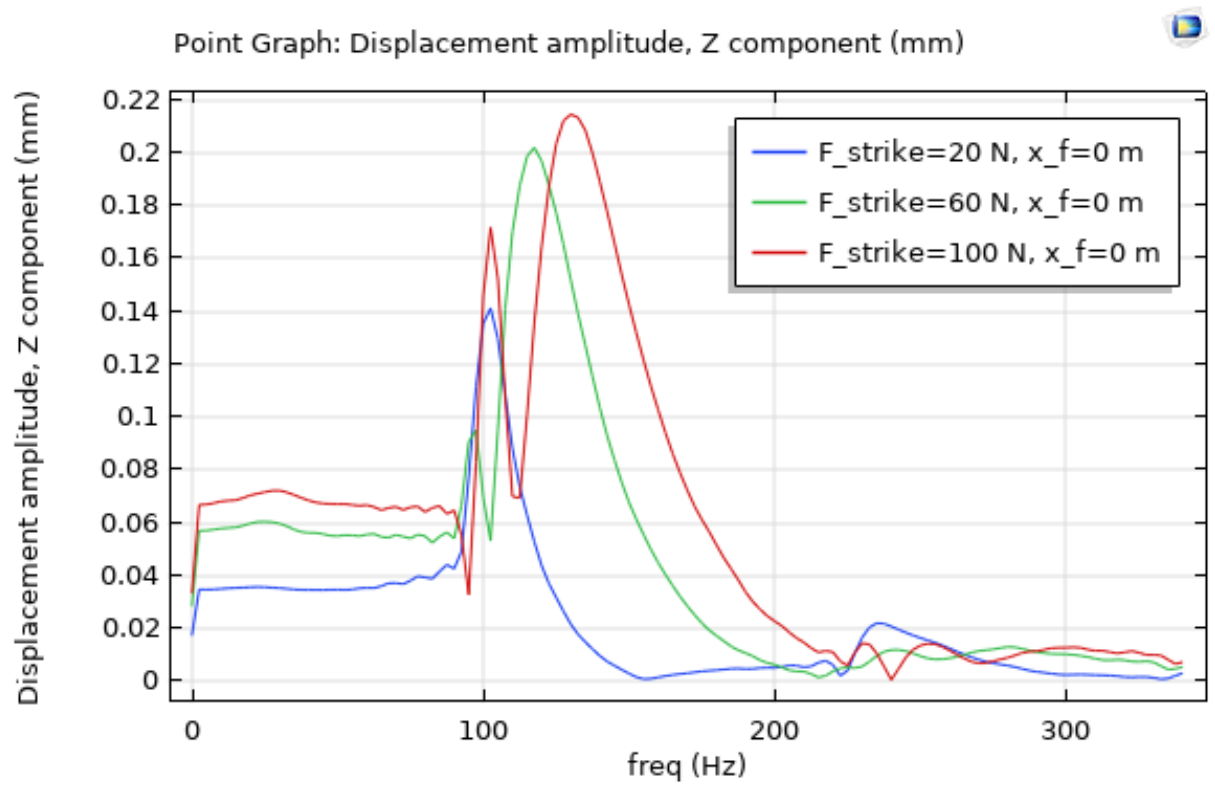
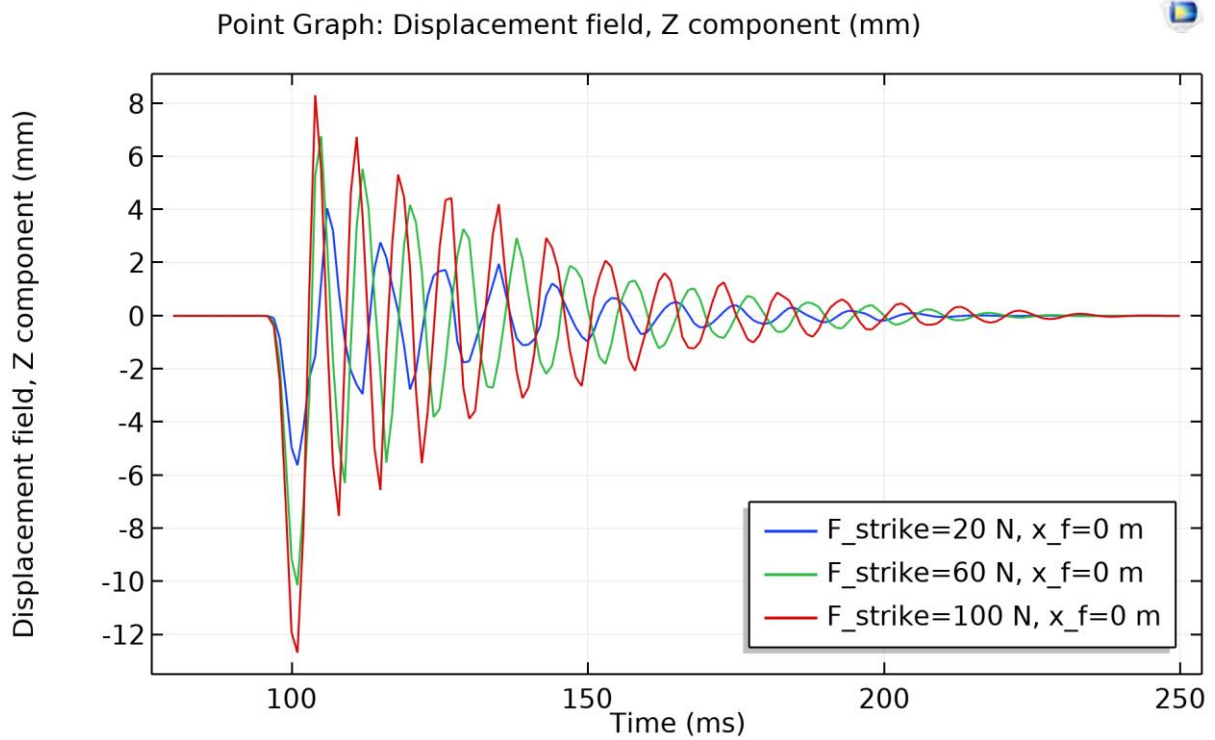


Point Graph: Displacement amplitude, Z component (mm)

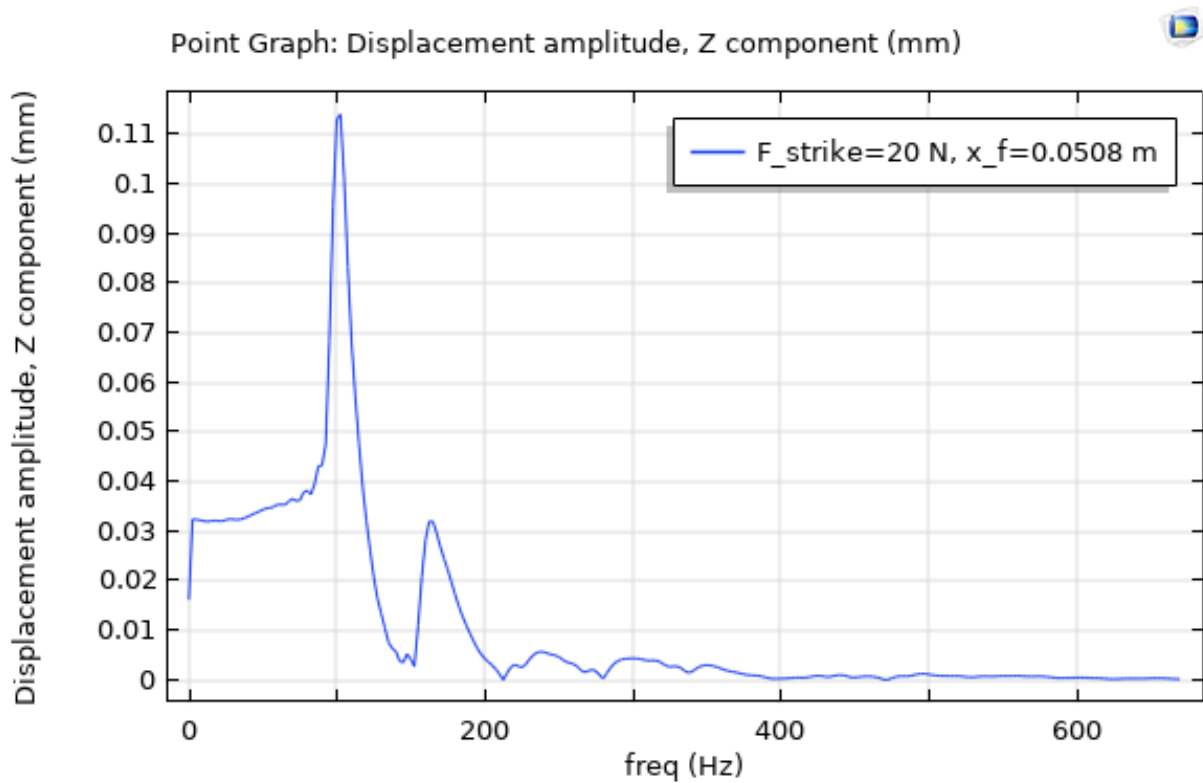
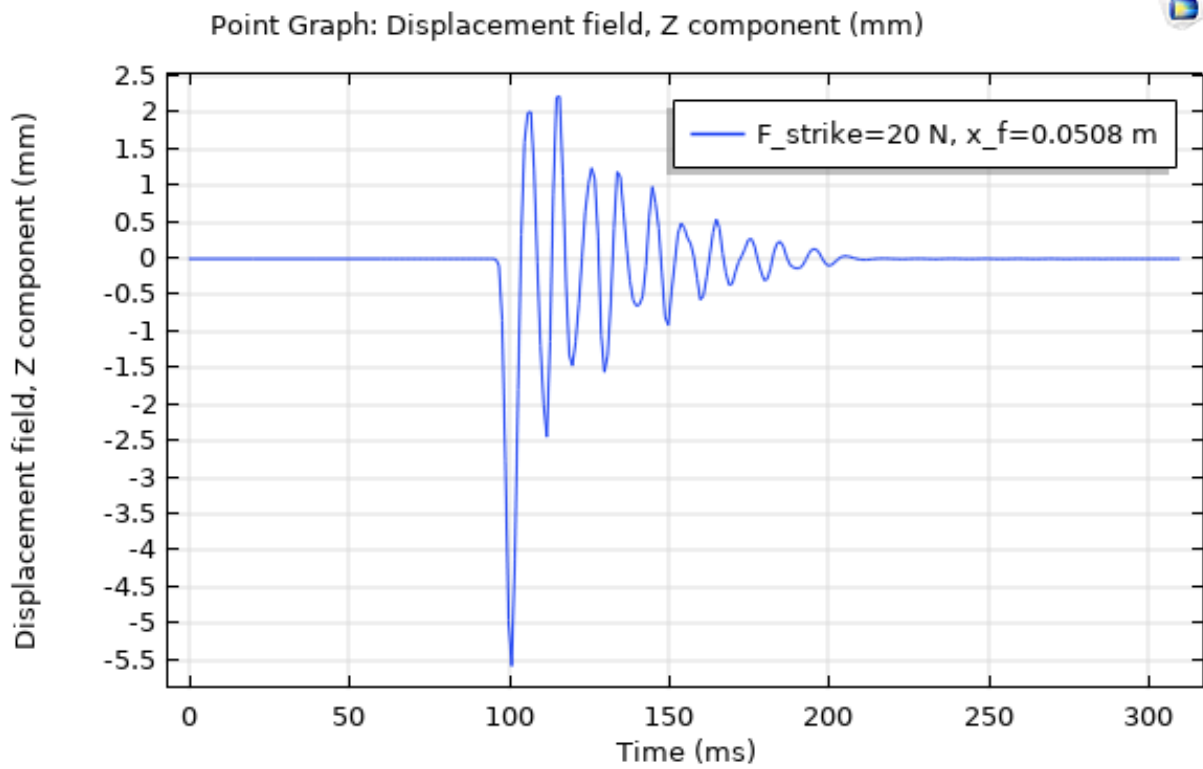




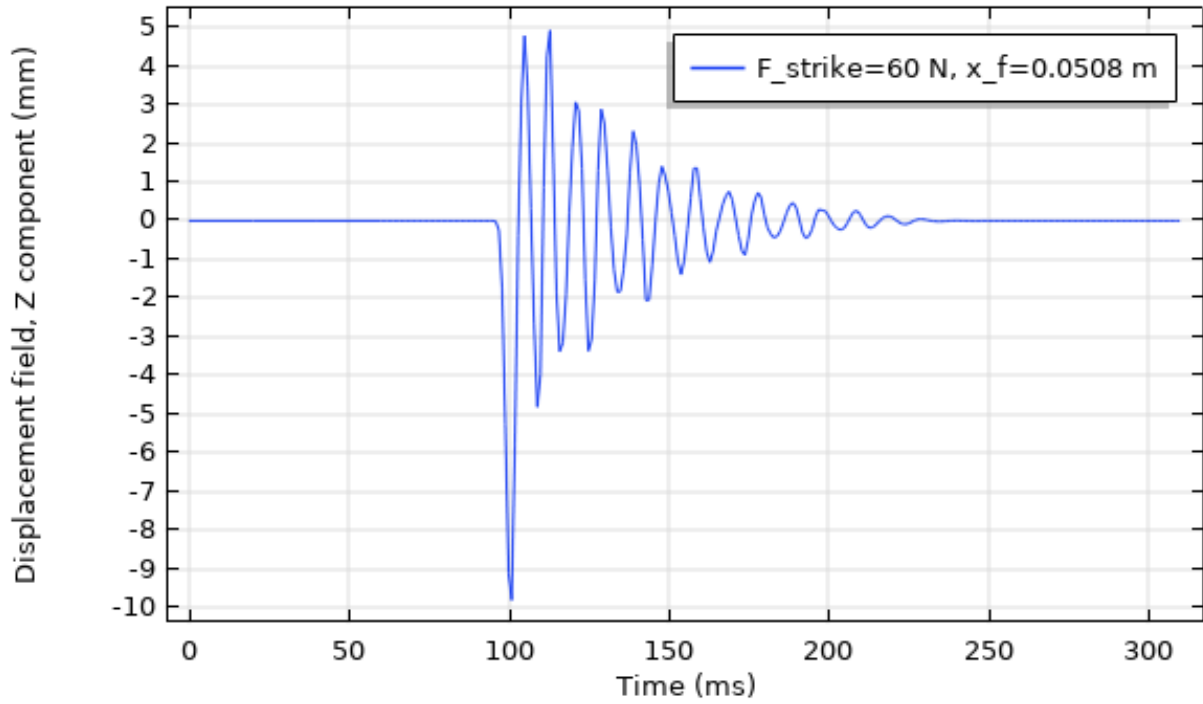
$\psi$



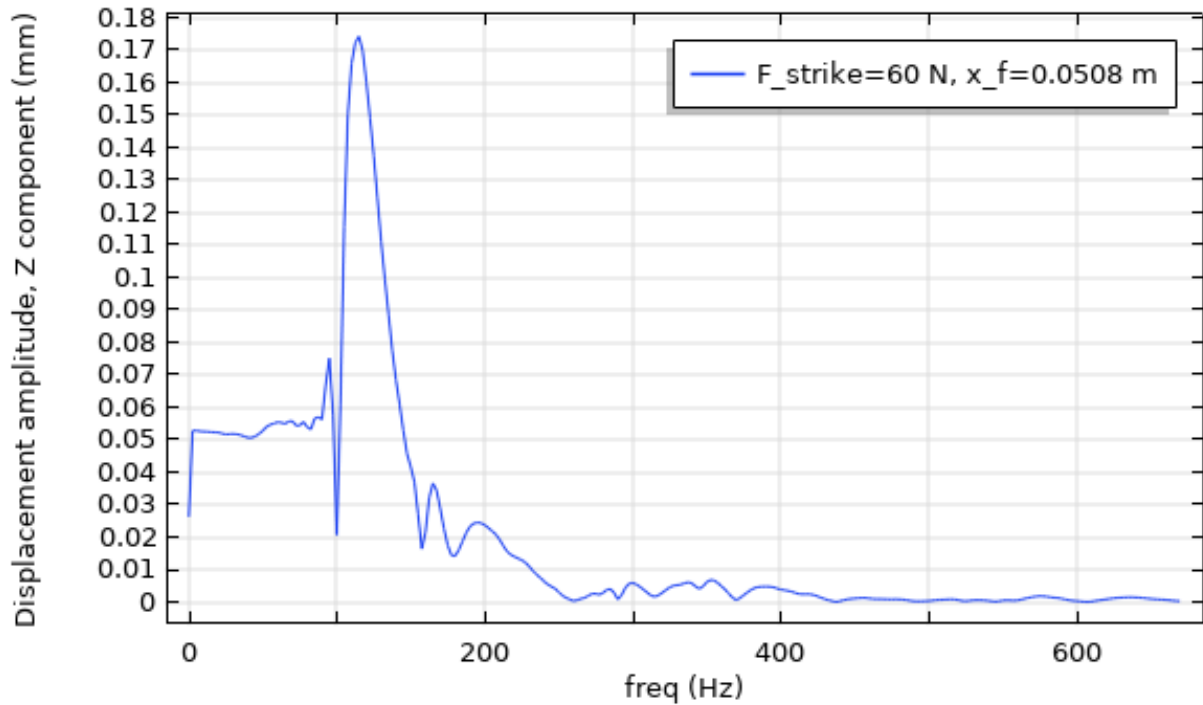
- Για το σημείο  $x_f = 2 \text{ in}$  :



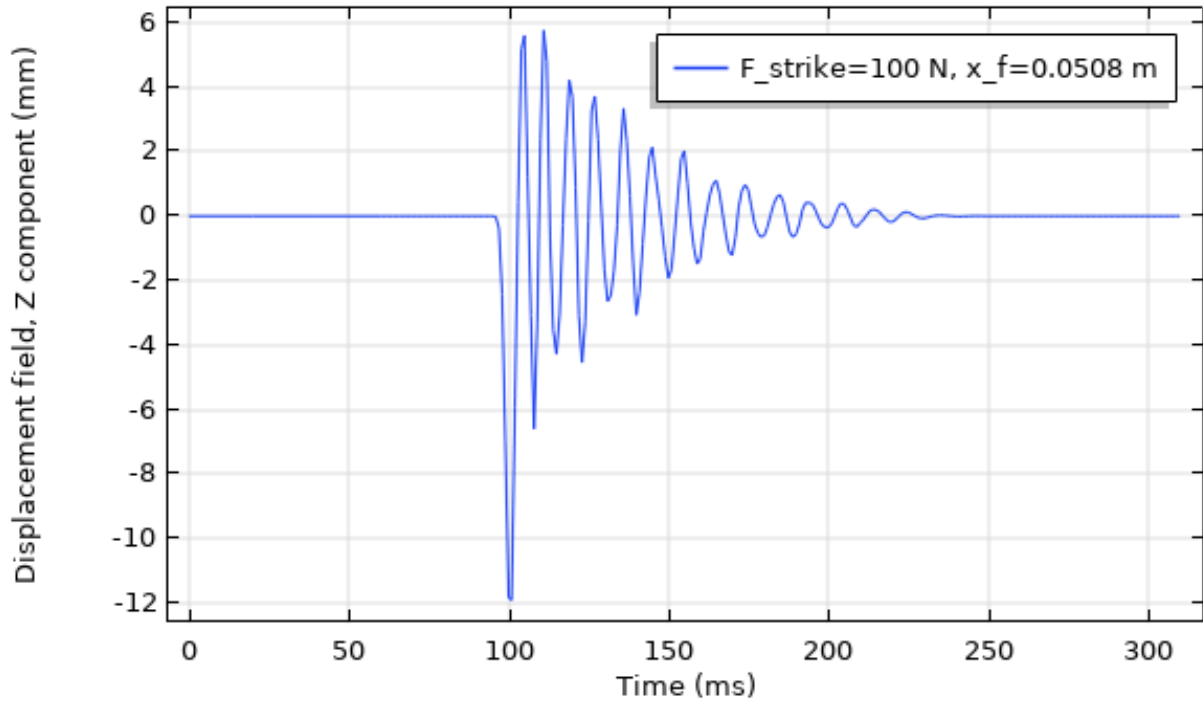
Point Graph: Displacement field, Z component (mm)



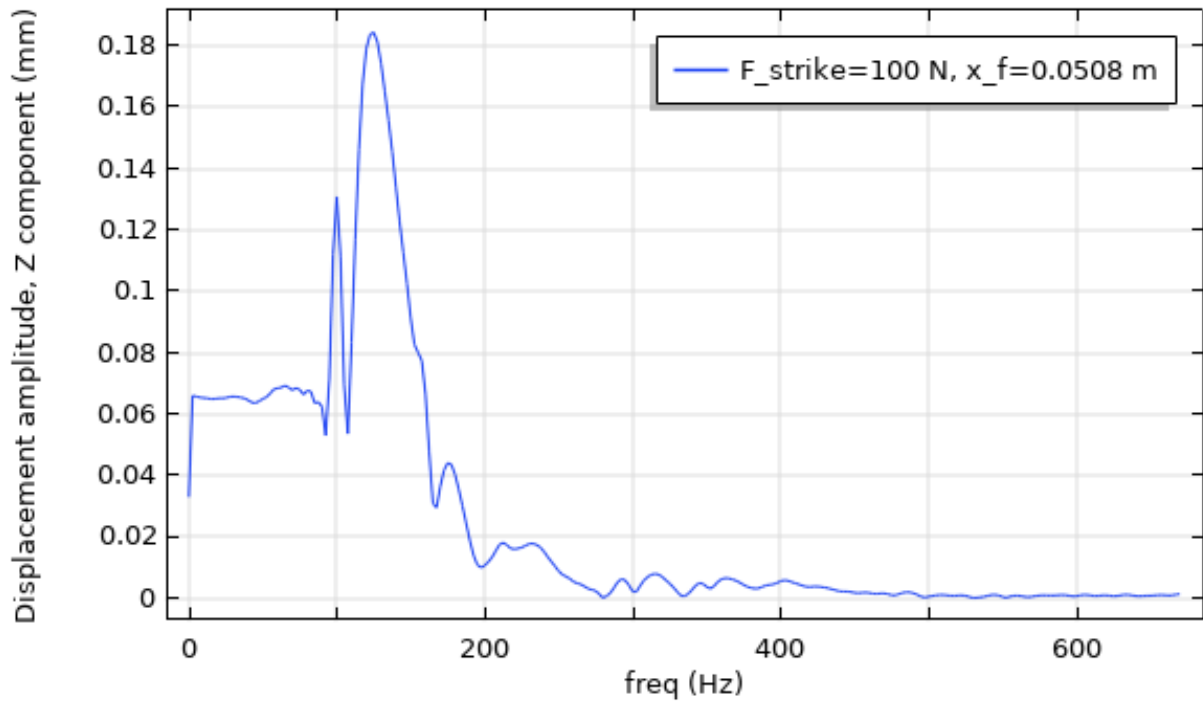
Point Graph: Displacement amplitude, Z component (mm)



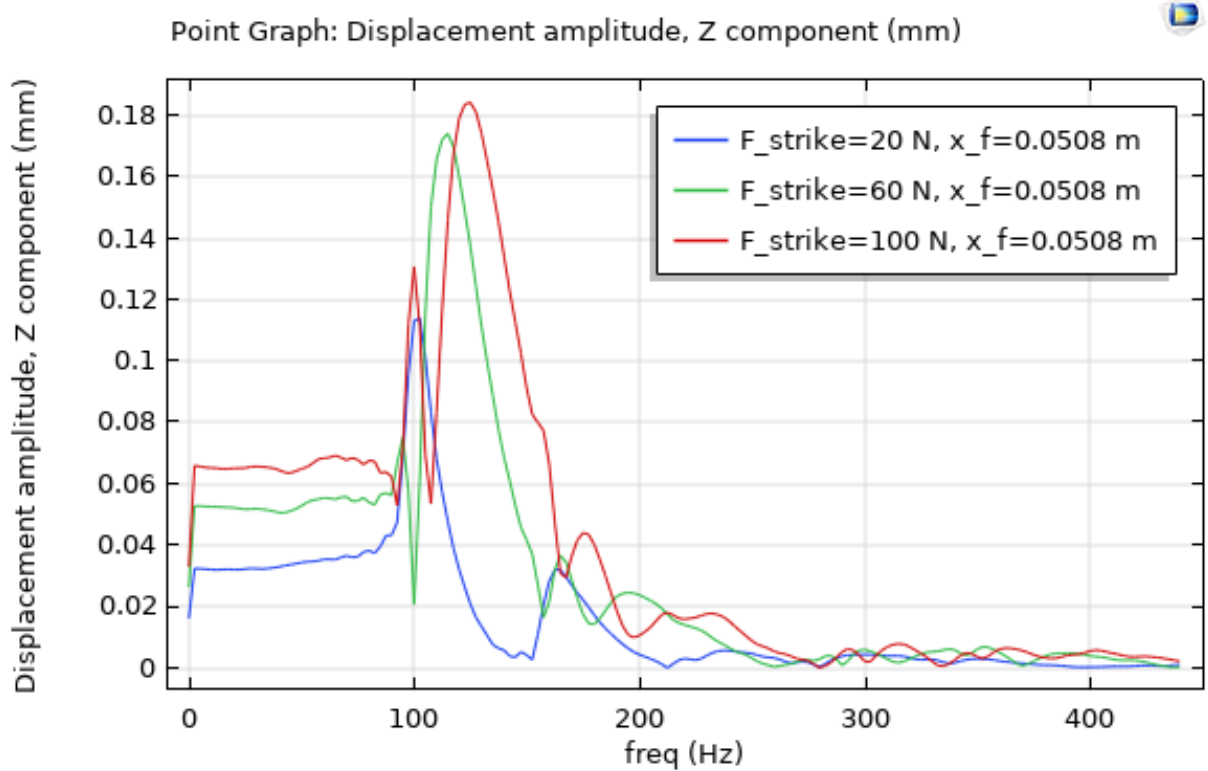
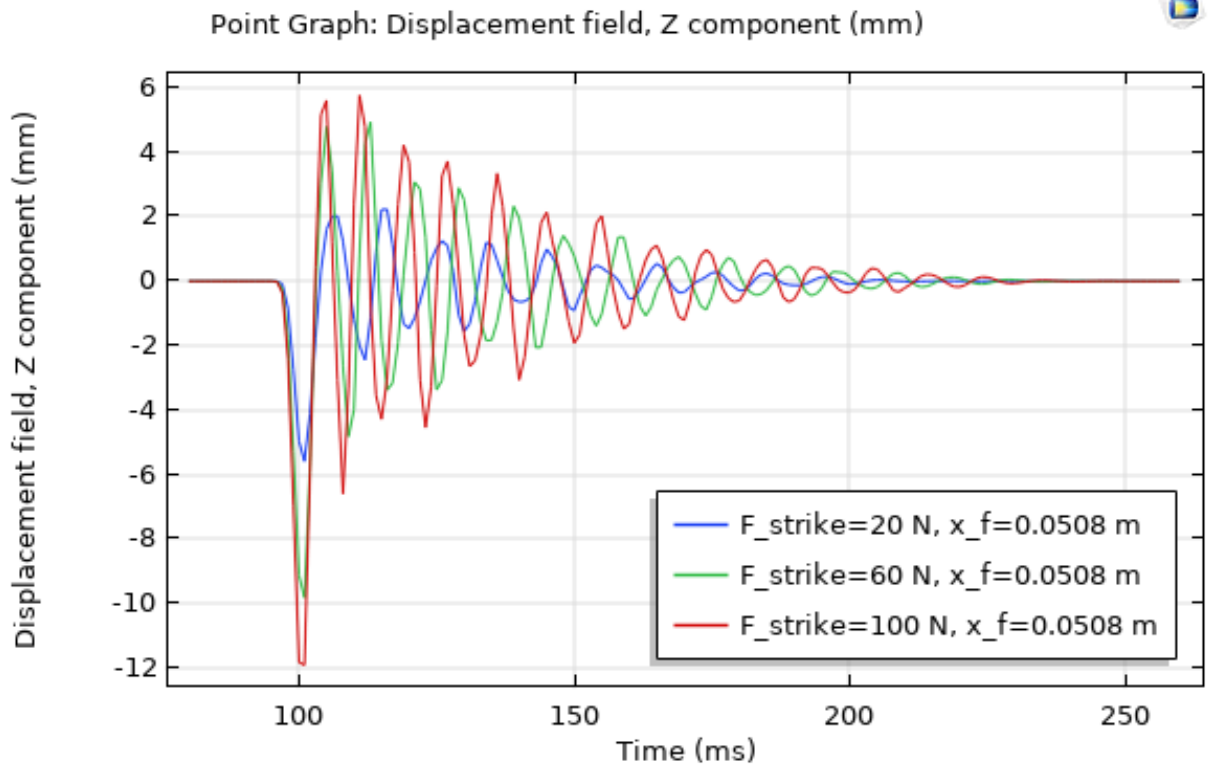
Point Graph: Displacement field, Z component (mm)



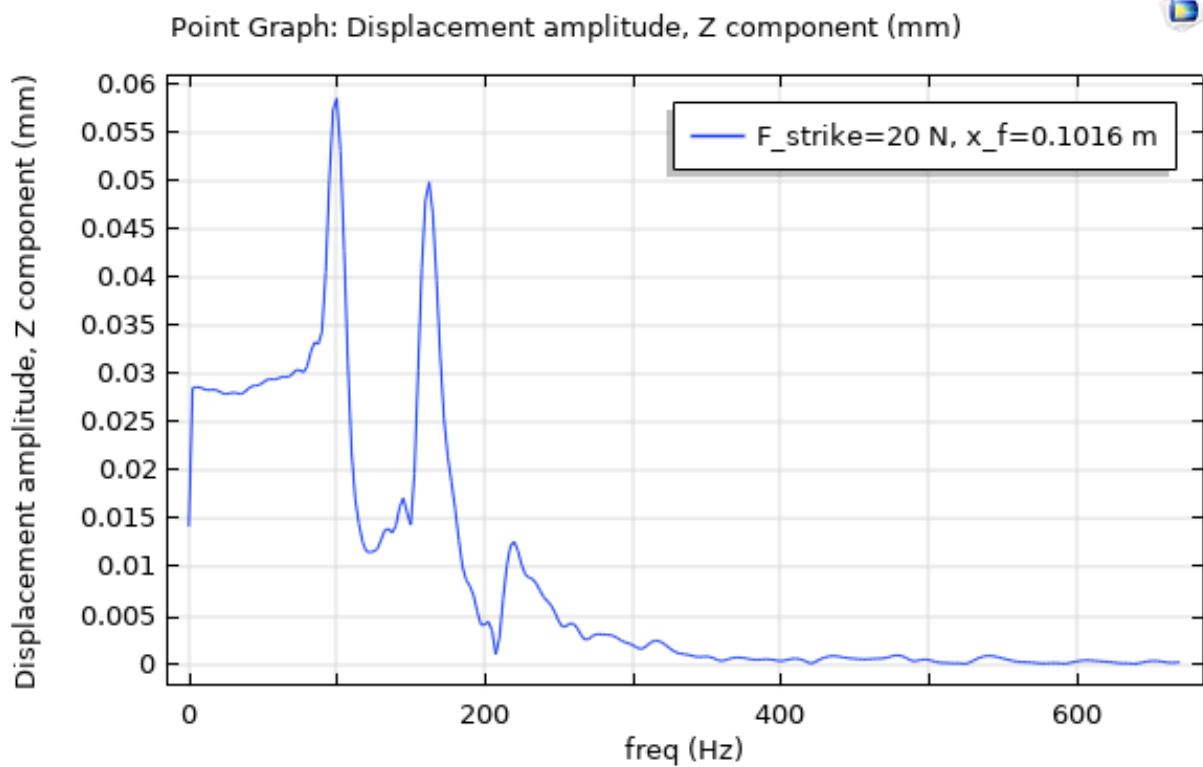
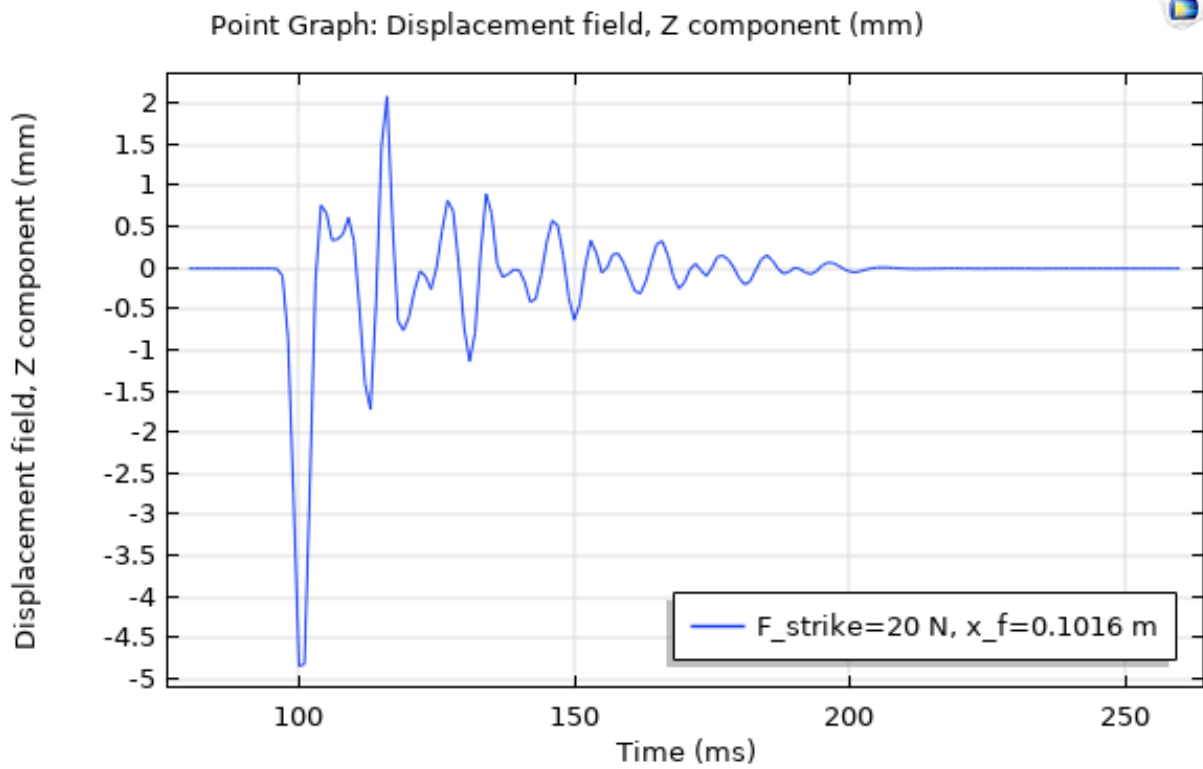
Point Graph: Displacement amplitude, Z component (mm)

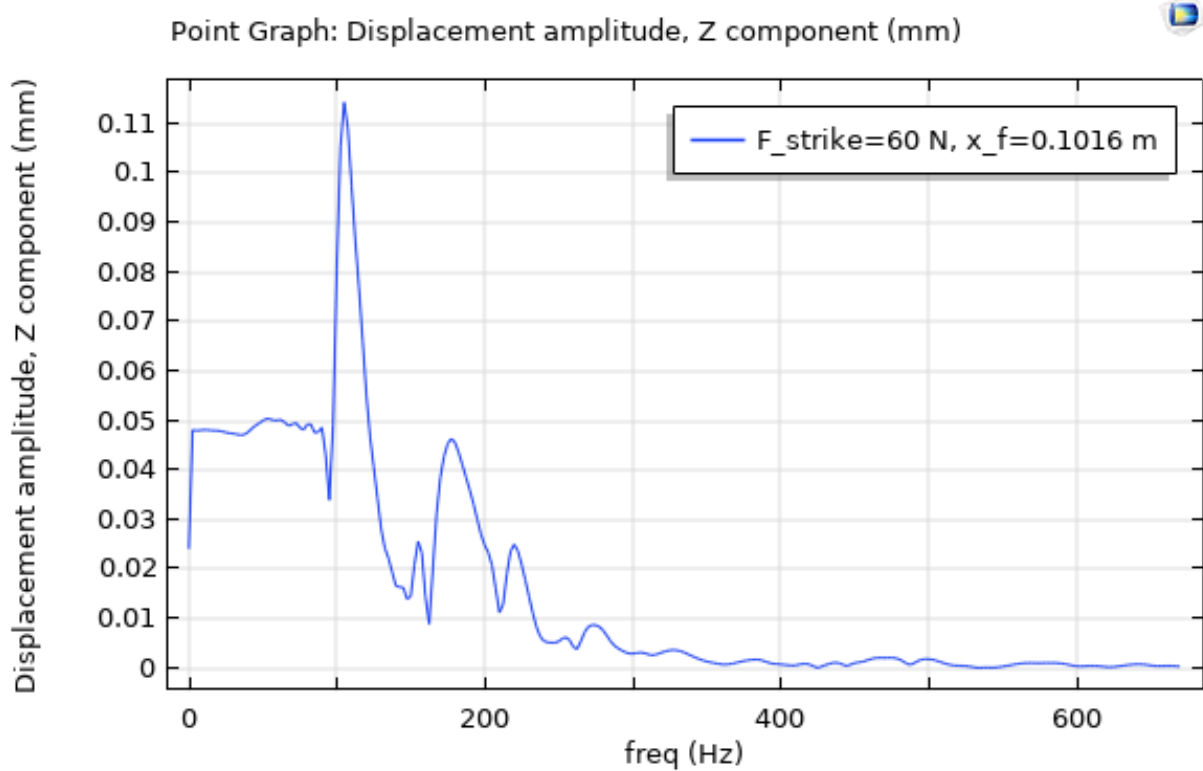
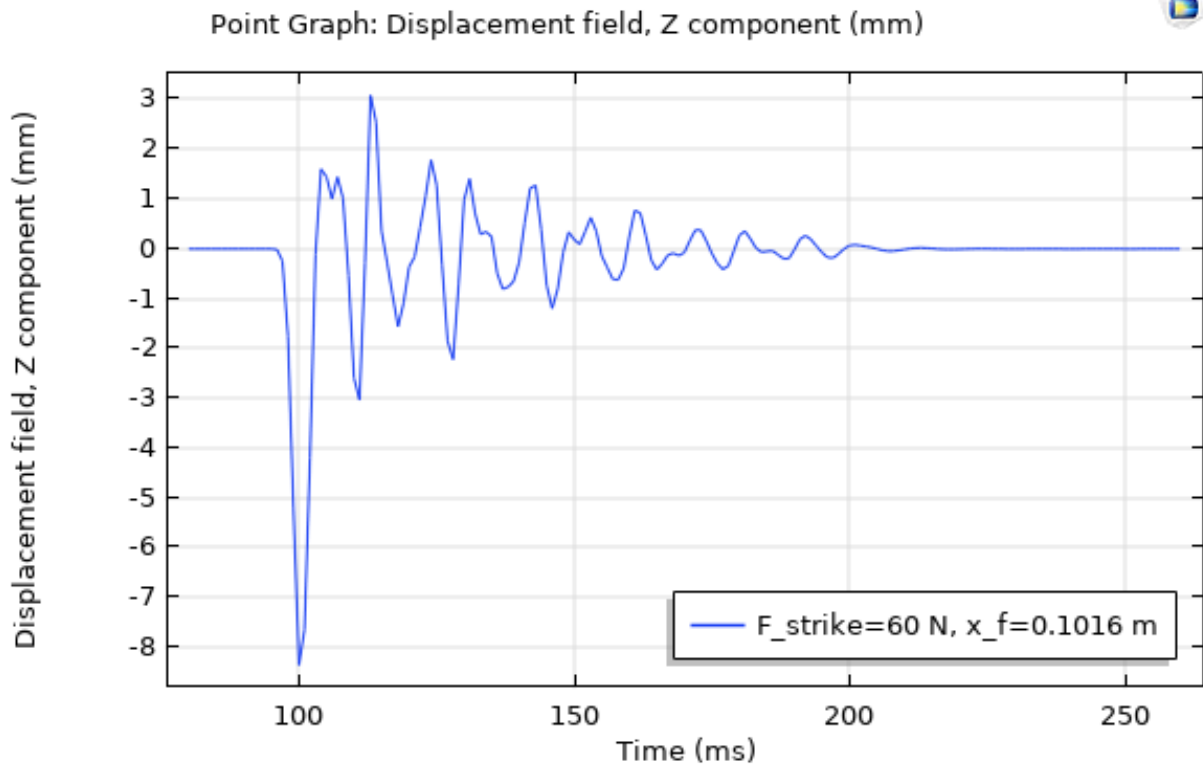


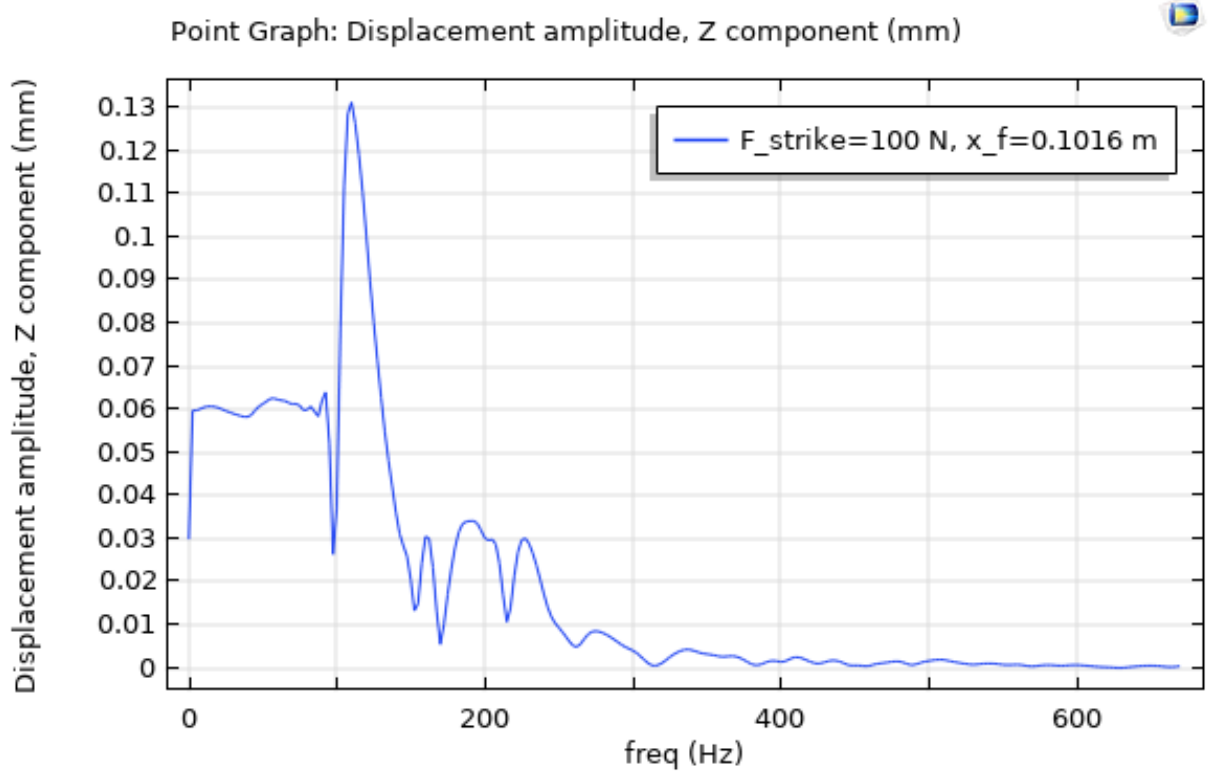
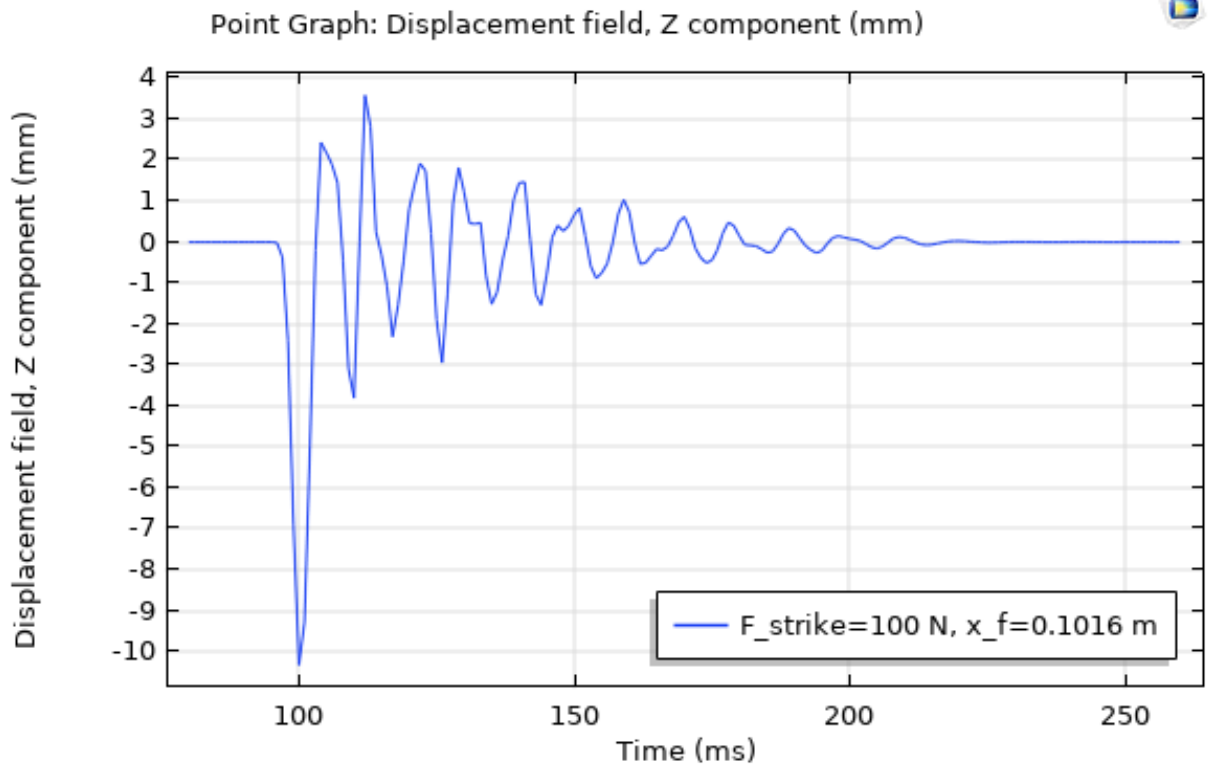


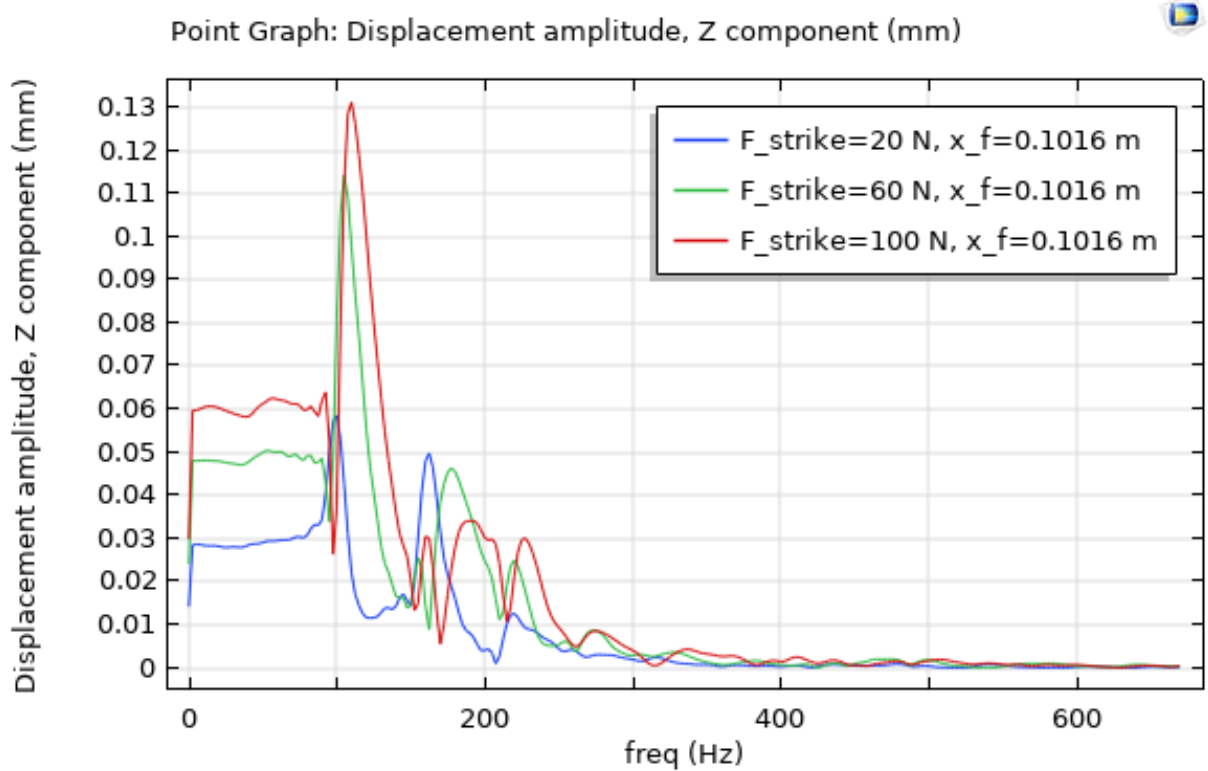
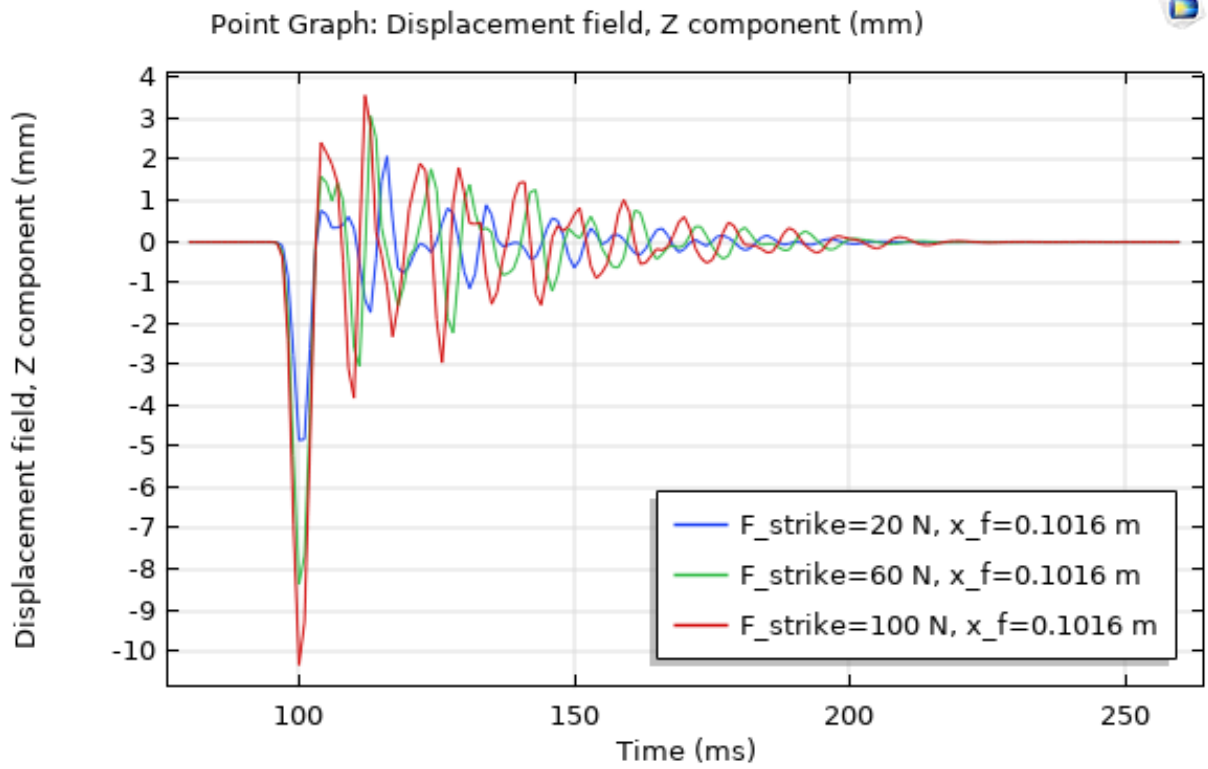


- Για το σημείο  $x_f = 4 \text{ in}$  :

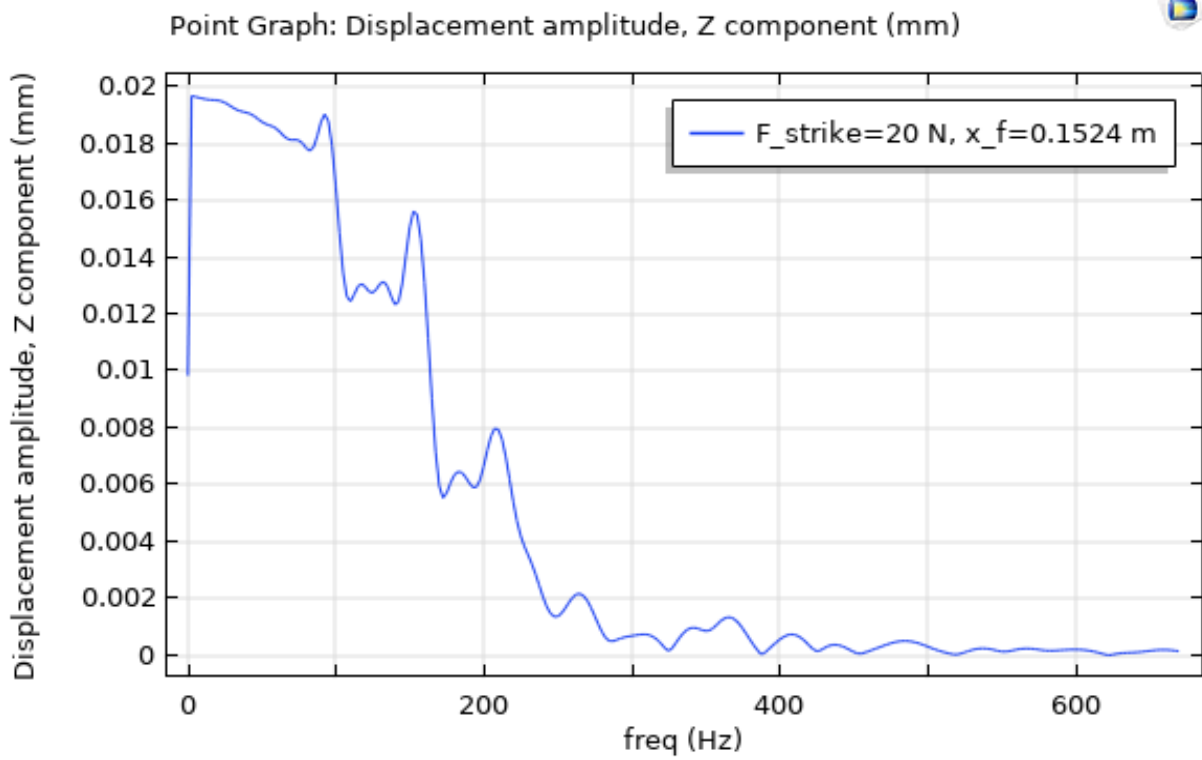
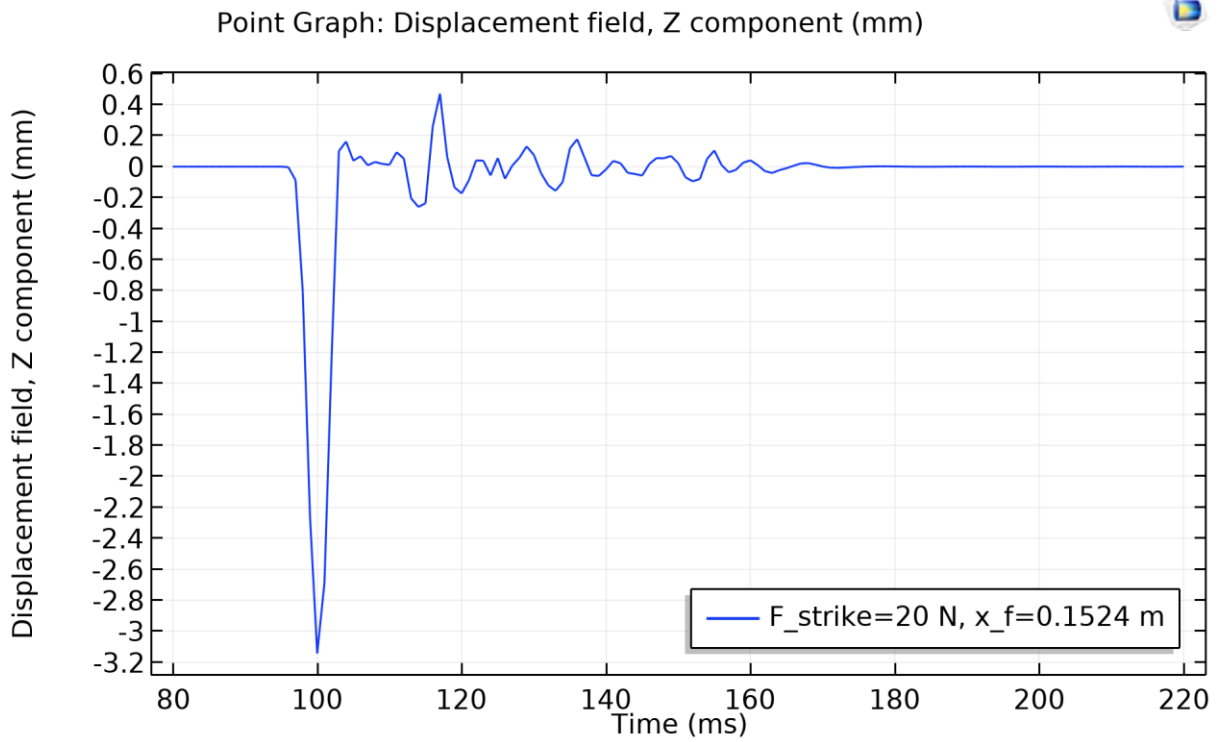




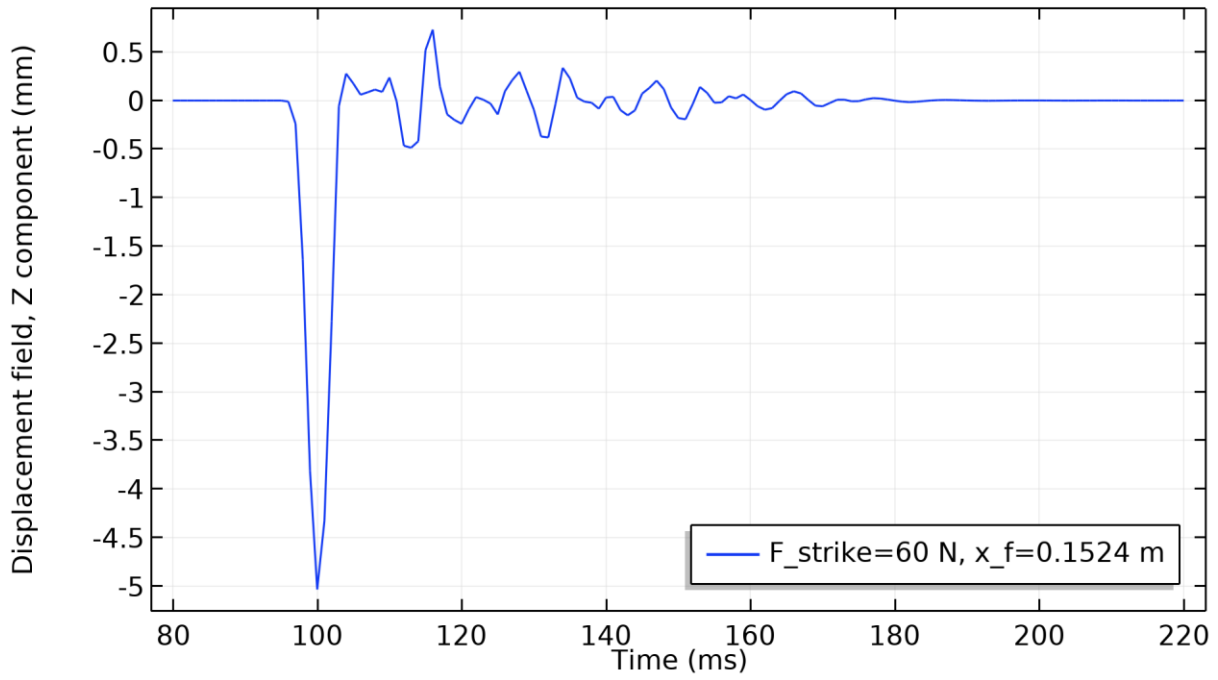




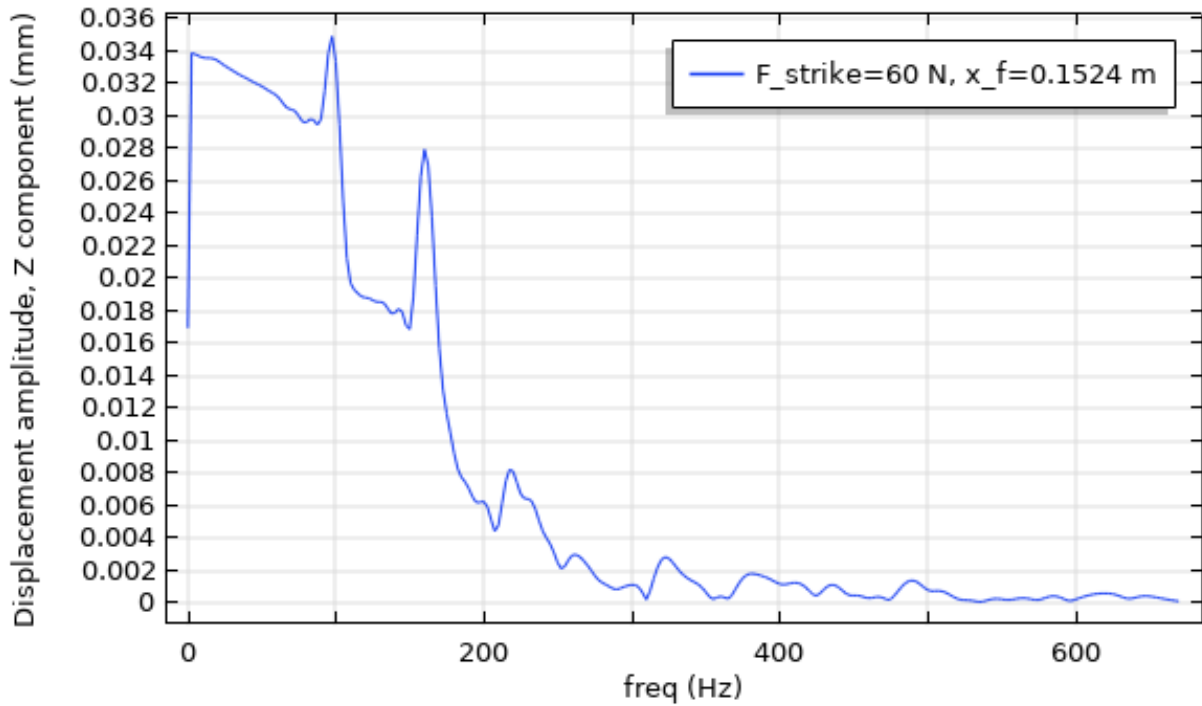
- Για το σημείο  $x_f = 6 \text{ in}$  :



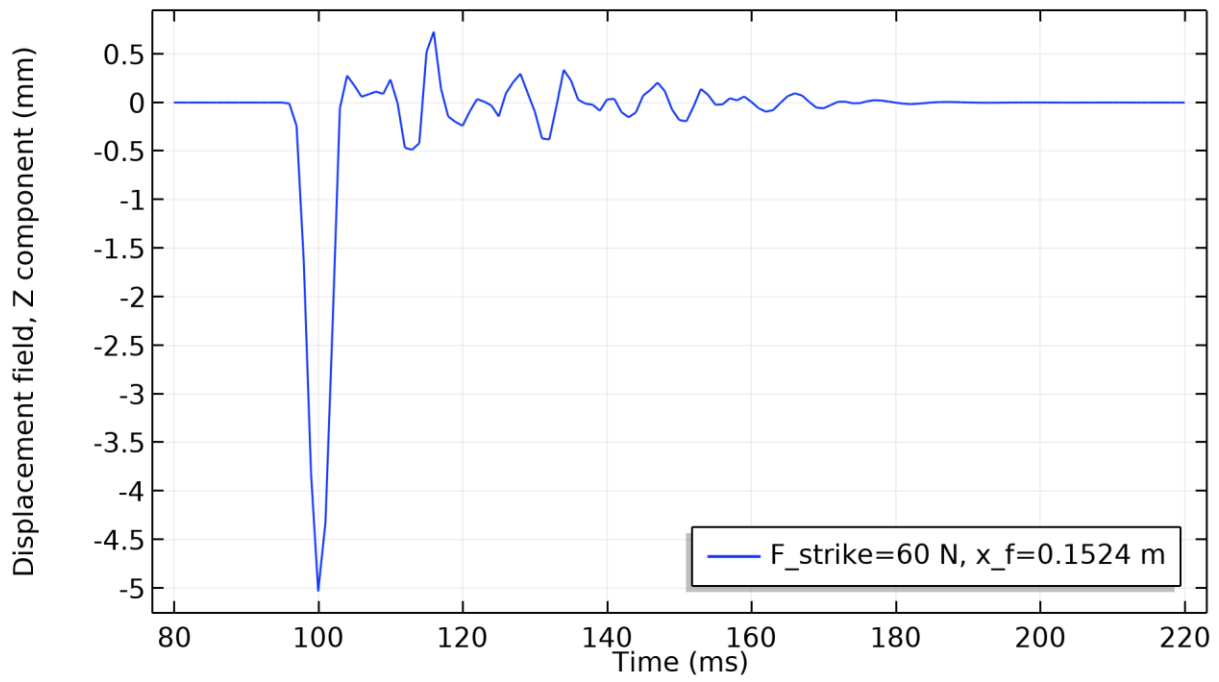
Point Graph: Displacement field, Z component (mm)



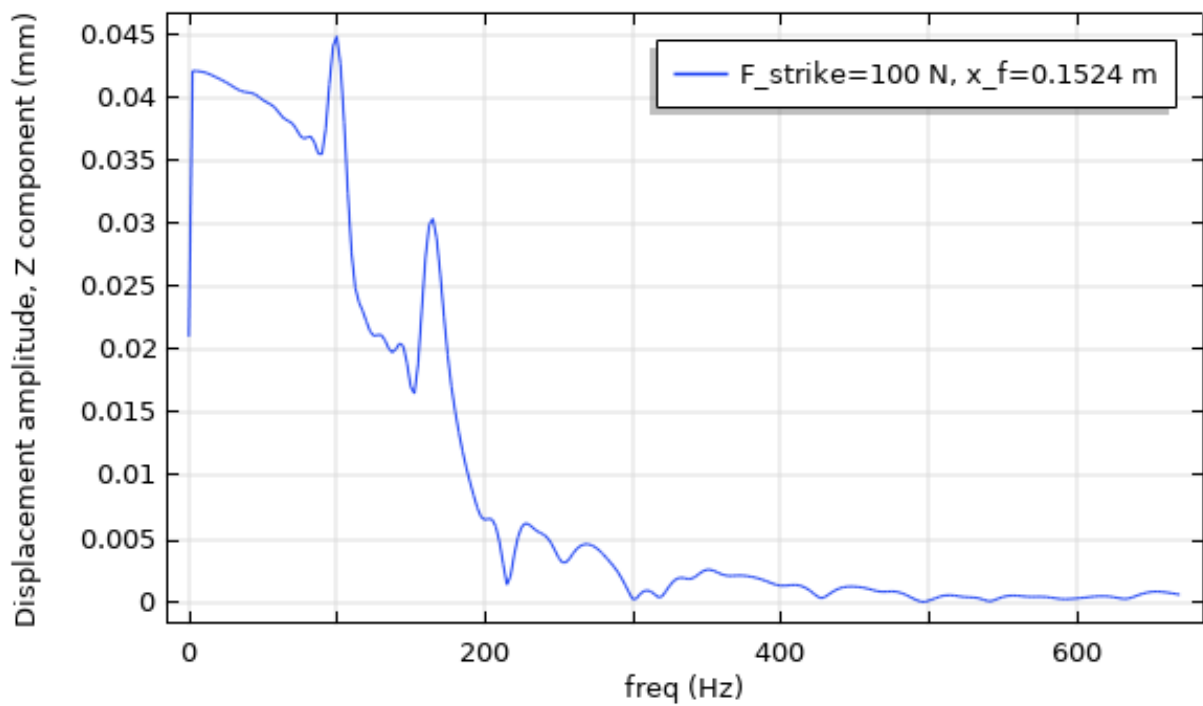
Point Graph: Displacement amplitude, Z component (mm)



Point Graph: Displacement field, Z component (mm)

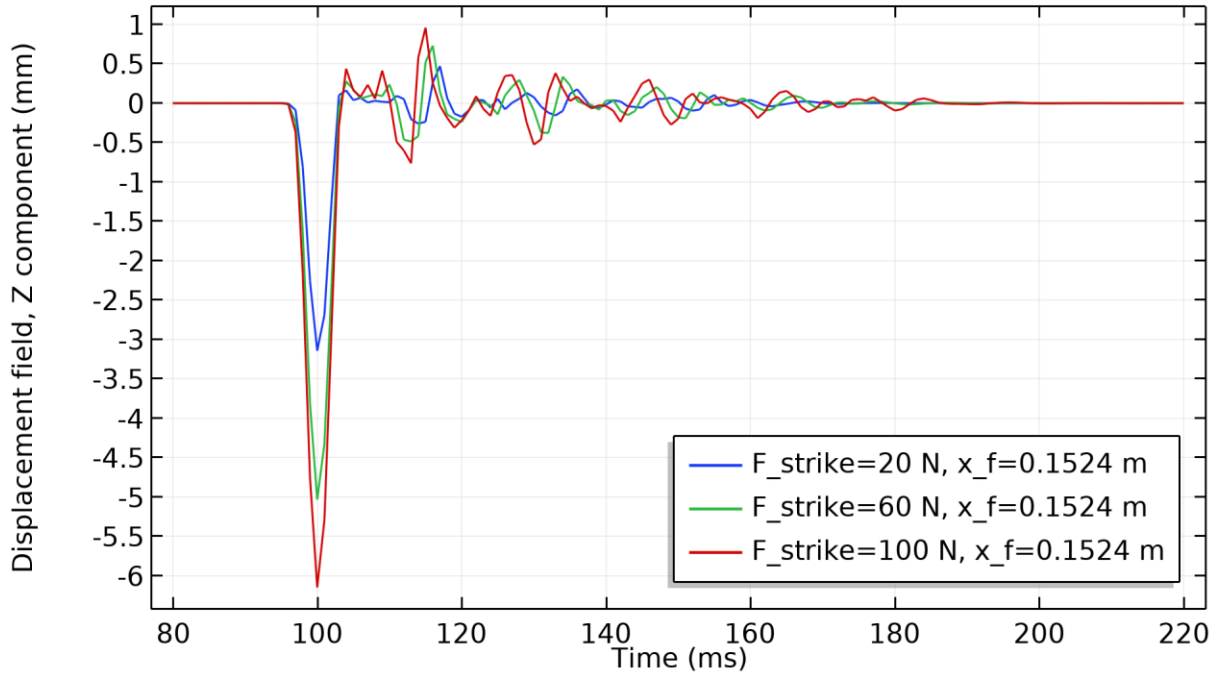


Point Graph: Displacement amplitude, Z component (mm)

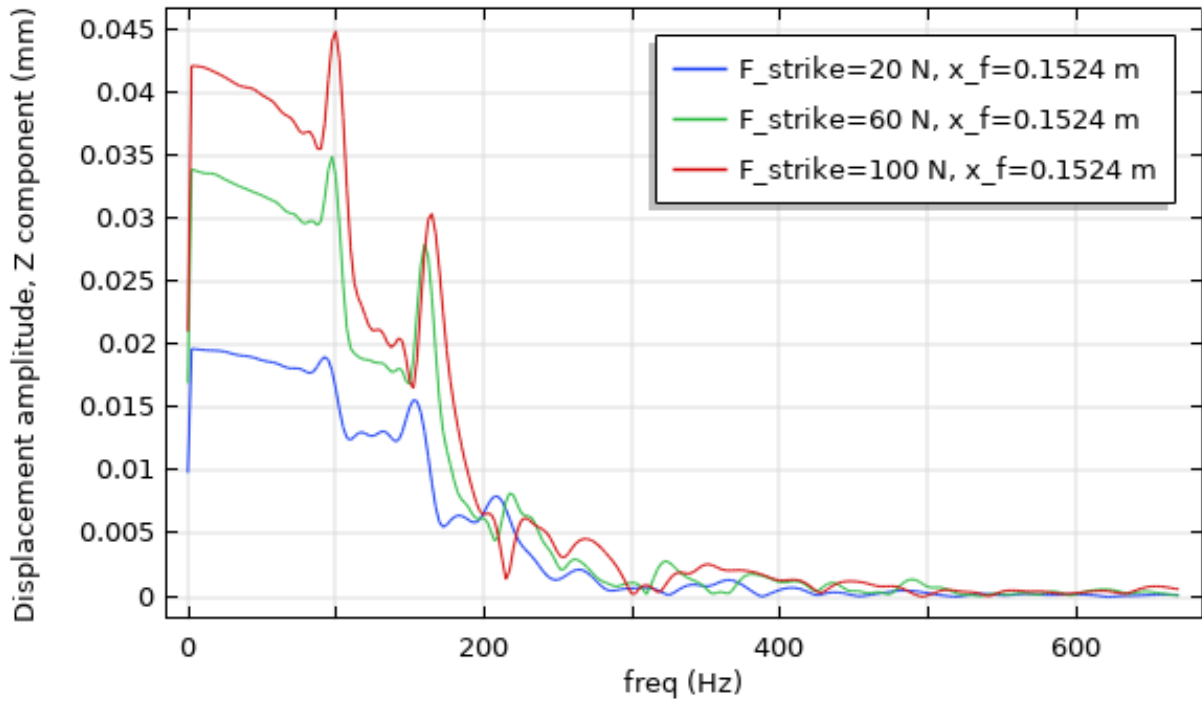




Point Graph: Displacement field, Z component (mm)



Point Graph: Displacement amplitude, Z component (mm)



Παρατηρούμε ότι καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο της μεμβράνης όλο και περισσότερες ιδιοσυχνότητες διεγείρονται με αποτέλεσμα αυτό να έχει επίδραση στον ήχο που παράγεται. Αυτό είναι ιδιαίτερα εμφανές στα διαγράμματα μετατόπισης - χρόνου, τα οποία γίνονται πιο ακανόνιστα όσο πλησιάζουμε στο στεφάνι σε σχέση με αυτά που έχουν ημιτονοειδή (εκθετικά φθίνουσα) μορφή κοντά στο κέντρο.

Παράλληλα, παρατηρούμε μια σχετική μείωση του πλάτους της ταλάντωσης, κάτι που συνεπάγεται σχετική μείωση της έντασης του ήχου. Η μείωση στο πλάτος των ταλαντώσεων είναι αναμενόμενη, διότι καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο της μεμβράνης και πλησιάζουμε προς το στεφάνι, βρισκόμαστε πιο κοντά στην πακτωμένη περιοχή της επιφάνειας.

Για αυξανόμενη δύναμη διέγερσης έχουμε αύξηση της κύριας συχνότητας της ταλάντωσης, κάτι που υποδηλώνει αύξηση στη παραγόμενη ηχητική συχνότητα. Από μουσικής πλευράς, αύξηση στη δύναμη κρούσης της μεμβράνης οδηγεί και σε υψηλότερη «νότα» από το τύμπανο.

### 3.5 Συσχέτιση παραμέτρων

Έχοντας ολοκληρώσει τις προσομοιώσεις στο λογισμικό COMSOL, εξάγουμε τις χρονοσειρές για κάθε μία από τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν. Στη συνέχεια, θα προσπαθήσουμε να κάνουμε προσαρμογή σε καμπύλη κάθε μίας από τις 12 χρονοσειρές που προέκυψαν. Σκοπός είναι να προκύψει μία αναλυτική συνάρτηση του χρόνου η οποία θα περιλαμβάνει τη δύναμη κρούσης και το σημείο στο οποίο αυτή ασκείται ως παραμέτρους. Έτσι, για κάθε ζεύγος  $(F, x_f)$  θα έχουμε την μορφή της ταλάντωσης του εκάστοτε σημείου κρούσης.

Αρχικά, πρέπει να προσδιοριστεί η μορφή της συνάρτησης. Από παρατήρηση των διαγραμμάτων που κατασκευάστηκαν στις προσομοιώσεις αλλά και από την ίδια την φύση του προβλήματος, είναι εμφανές ότι η συνάρτηση θα περιλαμβάνει συνημιτονοειδείς όρους. Μια καλή επιλογή, λοιπόν, είναι η χρήση σειρών Fourier για την αναπαράσταση της συνάρτησης.

Εντούτοις, λόγω της απόσβεσης που έχει προστεθεί στο μοντέλο αλλά και από παρατήρηση των διαγραμμάτων, σε όλες τις κυματομορφές παρατηρείται εκθετική μείωση του πλάτους της ταλάντωσης. Η σειράς Fourier δεν περιλαμβάνουν τους κατάλληλους όρους, ώστε να γίνει η προσαρμογή σε καμπύλη των δεδομένων.

Καταλήγουμε, έτσι, σε μία μορφή συνάρτησης η οποία βασίζεται, πρώτον, στις σειρές Fourier στη μορφή πλάτους - φάσης:

$$s_N(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi nx}{T} - \varphi_n\right)$$

και, δεύτερον, στην συνάρτηση της φθίνουσας ταλάντωσης υλικού σημείου:

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t)$$

Με άλλα λόγια, πολλαπλασιάζουμε κάθε συνημίτονο της σειράς Fourier με έναν εκθετικό όρο. Οι εκθετικοί όροι είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

Με αυτόν τον τρόπο θα έχουμε μία συνάρτηση που υπερθέτει φθίνουσες συνημιτονοειδείς συναρτήσεις, και έτσι καταφέρνει να προσεγγίσει το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Για την εξαγωγή της τελικής συνάρτησης θα ακολουθηθεί η εξής διαδικασία. Αρχικά, σε καθεμία προσομοίωση που διενεργήθηκε σε κάθε θέση κρούσης θα γίνει προσαρμογή σε καμπύλη των δεδομένων. Η πρώτη προσαρμογή θα γίνει με βάση τη δύναμη κρούσης. Αυτό σημαίνει ότι μέσα στην αναλυτική έκφραση, της οποίας ψάχνουμε τους συντελεστές, θα υπάρχει ως παράμετρος η δύναμη κρούσης αλλά όχι το σημείο κρούσης  $x_f$ . Από τον προσδιορισμό των κατάλληλων συντελεστών θα έχουμε έτσι μια αναλυτική συνάρτηση για κάθε σημείο κρούσης με συντελεστές εξαρτώμενους από την δύναμη.

Έπειτα, εξετάζοντας την μεταβολή των συντελεστών κατά μήκος μιας ακτίνας θα γίνει συσχέτιση του κάθε συντελεστή με το σημείο κρούσης  $x_f$ . Τελικά, η προκύπτουσα συνάρτηση θα έχει ως παραμέτρους την δύναμη  $F$  και το σημείο κρούσης  $x_f$ .

### 3.5.1 Συσχέτιση με δύναμη

Τα διαγράμματα μετατόπισης – χρόνου και πλάτους ταλάντωσης – συχνότητας μπορούν να μας βοηθήσουν να προσδιορίσουμε την εξάρτηση των διαφόρων μεγεθών από την δύναμη. Όπως αναφέρθηκε και στο 3.4, η αύξηση της δύναμης προκαλεί αύξηση της κύριας συχνότητας του τυμπάνου αλλά και ενίσχυση υψηλότερων ιδιοσυχνοτήτων του τυμπάνου. Επίσης, προκαλεί αύξηση στο πλάτος της ταλάντωσης. Η δύναμη δεν επηρεάζει τον ρυθμό μείωσης του πλάτους, αφού αυτός εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του συστήματος και τις ιδιότητες των υλικών (στην συγκεκριμένη περίπτωση οι ιδιότητες της απόσβεσης αντιπροσωπεύονται από το Spring Foundation που έχει προστεθεί στη μεμβράνη). Όσοι, λοιπόν, όροι σχετίζονται με την δύναμη κρούσης, θα έχουν στην συνάρτηση μια γραμμική εξάρτηση από αυτήν.

Καθώς, όμως, χρησιμοποιείται σειρά συνημιτονοειδών όρων, θα πρέπει να επιλέξουμε πόσοι όροι θα χρησιμοποιηθούν. Η επιλογή εξαρτάται κυρίως από τον αριθμό των υψηλότερων ιδιοσυχνοτήτων που διεγείρονται μετά την κρούση της μεμβράνης. Από παρατήρηση των διαγραμμάτων πλάτους – συχνότητας και μετά από δοκιμές προσαρμογής σε καμπύλη καταλήξαμε σε μία συνάρτηση με 5 όρους συνημιτόνων, αριθμός με ικανοποιητική προσαρμογή ακόμα και στις πιο πολύπλοκες μορφές κοντά στο στεφάνι. Η συνάρτηση θα έχει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned}
 w(t, F) = & \alpha + \beta_1 F \cdot e^{\gamma_1 t} \cos(\delta F t + \varphi_1) \\
 & + \beta_2 F \cdot e^{\gamma_2 t} \cos(2\delta F t + \varphi_2) \\
 & + \beta_3 F \cdot e^{\gamma_3 t} \cos(3\delta F t + \varphi_3) \\
 & + \beta_4 F \cdot e^{\gamma_4 t} \cos(4\delta F t + \varphi_4) \\
 & + \beta_5 F \cdot e^{\gamma_5 t} \cos(5\delta F t + \varphi_5)
 \end{aligned} \tag{20}$$

Η προσαρμογή έγινε με την χρήση της Μεθόδου των Ελαχίστων Τετραγώνων. Αναλυτικότερα, για κάθε τιμή του  $x_f$  και της δύναμης  $F$  έγινε προσαρμογή σε καμπύλη των δεδομένων της χρονοσειράς της ταλάντωσης. Προέκυψαν έτσι οι συντελεστές της συνάρτησης για κάθε μία προσομοίωση από τις 12 που διενεργήθηκαν. Έπειτα, υπολογίστηκε ο μέσος όρος του κάθε συντελεστή για κοινό  $x_f$ . Στον παρακάτω πίνακα παρατίθενται οι συντελεστές.

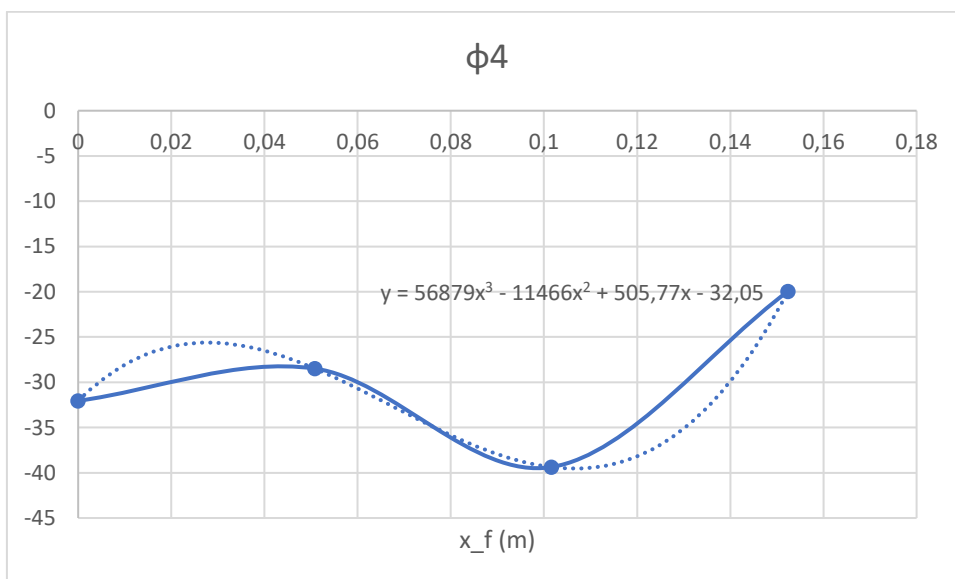
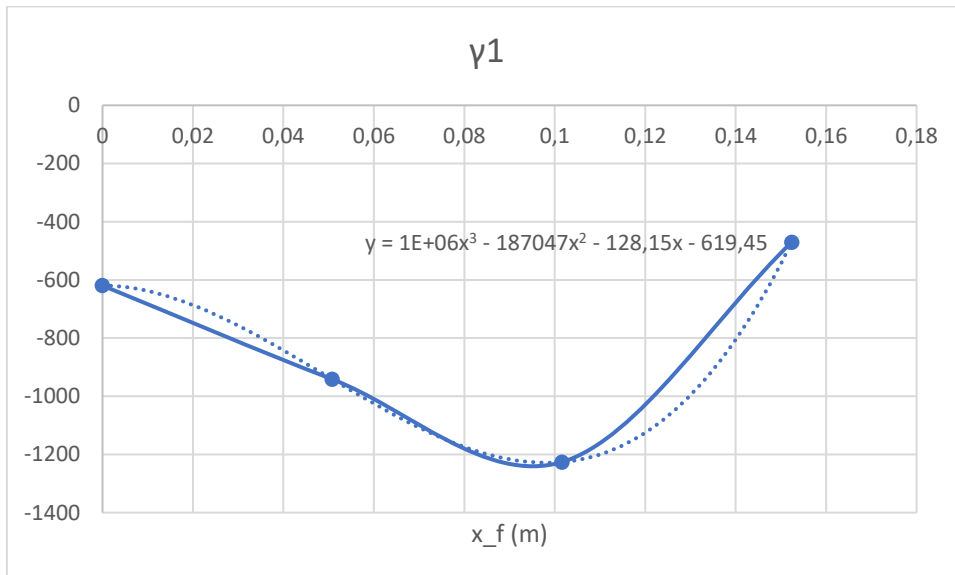
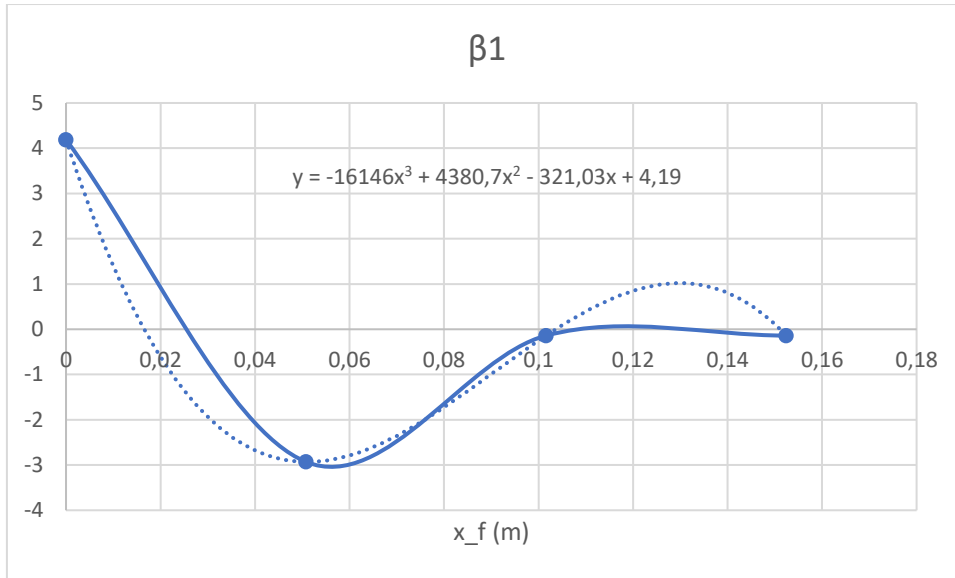
$x_f$	0 in	2 in (0.0508 m)	4 in (0.1016 m)	6 in (0.1524 m)
$\alpha$	-0.007	-0.015	-0.0046	-0.005
$\beta_1$	4.19	-2.93	-0.14	-0.14
$\beta_2$	-0.48	-0.06	-4.56	0.055
$\beta_3$	0.085	-1.15	-0.021	0.014
$\beta_4$	0.42	-1.31	0.35	-0.35
$\beta_5$	-0.60	0.52	-0.086	0.012
$\gamma_1$	-619.45	-941.51	-1226.07	-470.23
$\gamma_2$	-4.67	-34.41	-946	-36.52
$\gamma_3$	-31.02	-333.34	-30.22	-82.56
$\gamma_4$	-179.15	-416.62	-425.16	-802.53
$\gamma_5$	-445.25	-568.34	-115.62	-624.34
$\delta$	-4.67	-6.67	-5.43	-19.77
$\varphi_1$	-16.89	-19.55	-8.04	-4.09
$\varphi_2$	-42.67	-49.04	-50.23	-10.07
$\varphi_3$	-94.04	-96.02	-101.83	-9.85
$\varphi_4$	-32.05	-28.49	-39.37	-19.95
$\varphi_5$	4.48	11.67	-13.88	-14.47

Πίνακας 8: Συντελεστές συνάρτησης ανά σημείο κρούσης  $x_f$

### 3.5.2 Συσχέτιση με θέση

Το τελικό στάδιο κατασκευής της συνάρτησης είναι η συσχέτιση κάθε συντελεστή με τη χωρική μεταβλητή  $x_f$ . Όπως γίνεται αντιληπτό, η αναλυτική συνάρτηση που έχουμε έως τώρα έχει εξάρτηση από την δύναμη  $F$  αλλά όχι από την απόσταση  $x_f$ . Εντούτοις, στον πίνακα των συντελεστών βλέπουμε ότι αυτοί αλλάζουν για κάθε τιμή του  $x_f$ . Θα προσπαθήσουμε, λοιπόν, να βρούμε την εξάρτηση του κάθε συντελεστή από το  $x_f$ , δηλαδή, κάθε συντελεστή πλέον θα είναι ο ίδιος μία συνάρτηση με μεταβλητή το  $x_f$ . Αυτό θα γίνει με χρήση του Microsoft Excel. Σχεδιάζουμε το διάγραμμα κάθε συντελεστή συναρτήσει του  $x_f$  με βάση τα δεδομένα του Πίνακας 8 και στη συνέχεια προσθέτουμε στο κάθε διάγραμμα μια Γραμμή Τάσης. Η Γραμμή μπορεί να είναι πολυώνυμο 1<sup>ου</sup>, 2<sup>ου</sup> ή 3<sup>ου</sup> βαθμού ανάλογα με το πώς μεταβάλλεται ο κάθε συντελεστής. Το Ms. Excel μας δίνει την αναλυτική έκφραση του πολυωνύμου αυτού, το οποίο αποτελεί ικανοποιητική προσέγγιση της μεταβολής του κάθε συντελεστή κατά μήκος μίας ακτίνας.

Δίνονται μερικά παραδείγματα γραφημάτων για τον προσδιορισμό της συσχέτισης των συντελεστών με την θέση κρούσης.



Εικόνα 14: Παραδείγματα γραφημάτων συντελεστών σε σχέση με θέση κρούσης

Στον Πίνακα 9 παρουσιάζονται τα τελικά αποτελέσματα για τον κάθε συντελεστή.

Αντικαθιστώντας, στην εξίσωση (20) τις παρακάτω εκφράσεις για τον κάθε συντελεστή έχουμε καταφέρει να διατυπώσουμε μία εξίσωση η οποία συσχετίζει την δύναμη κρούσης του τυμπάνου και την θέση αυτής με την κυματομορφή που θα προκύψει στο συγκεκριμένο σημείο. Κάτι τέτοιο δίνει τη δυνατότητα να γνωρίζουμε πώς θα ταλαντωθεί η μεμβράνη του τυμπάνου οπουδήποτε κι αν την χτυπήσουμε. Η κυκλική συμμετρία του τυμπάνου απλοποιεί σημαντικά όλη την παραπάνω διαδικασία, αφού η μελέτη έγινε κατά μήκος μίας μόνο ακτίνας.

Συντελεστής	Τύπος σε σχέση με $x_f$ [m]
$\alpha$	$= -37.123x^3 + 9.2225x^2 - 0.5302x - 0.007$
$\beta_1$	$= -16146x^3 + 4380.7x^2 - 321.03x + 4.19$
$\beta_2$	$= 17843x^3 - 3672.5x^2 + 148.79x - 0.48$
$\beta_3$	$= -4396.3x^3 + 1128x^2 - 70.269x + 0.085$
$\beta_4$	$= -7310.1x^3 + 1770.9x^2 - 105.15x + 0.42$
$\beta_5$	$= 3089.3x^3 - 805.23x^2 + 54.98x - 0.6$
$\gamma_1$	$= 1E + 06 x^3 - 187047x^2 - 128.15x - 619.45$
$\gamma_2$	$= 3E + 06 x^3 - 694551x^2 + 25830x - 4.67$
$\gamma_3$	$= -1E + 06 x^3 + 303479x^2 - 18215x - 31.02$
$\gamma_4$	$= -759949x^3 + 160172x^2 - 10850x - 179.15$
$\gamma_5$	$= -2E + 06 x^3 + 409406x^2 - 18177x - 445.25$
$\delta$	$= -23926x^3 + 4274.1x^2 - 194.75x - 4.67$
$\varphi_1$	$= -27626x^3 + 6955.6x^2 - 334.42x - 16.89$
$\varphi_2$	$= 4507.6x^2 - 496.78x - 40.862$
$\varphi_3$	$= 9102.4x^2 - 901.46x - 88.959$
$\varphi_4$	$= 56879x^3 - 11466x^2 + 505.77x - 32.05$
$\varphi_5$	$= 73356x^3 - 17523x^2 + 842.39x + 4.48$

Πίνακας 9: Συντελεστές συσχετισμένοι με την θέση κρούσης του τυμπάνου

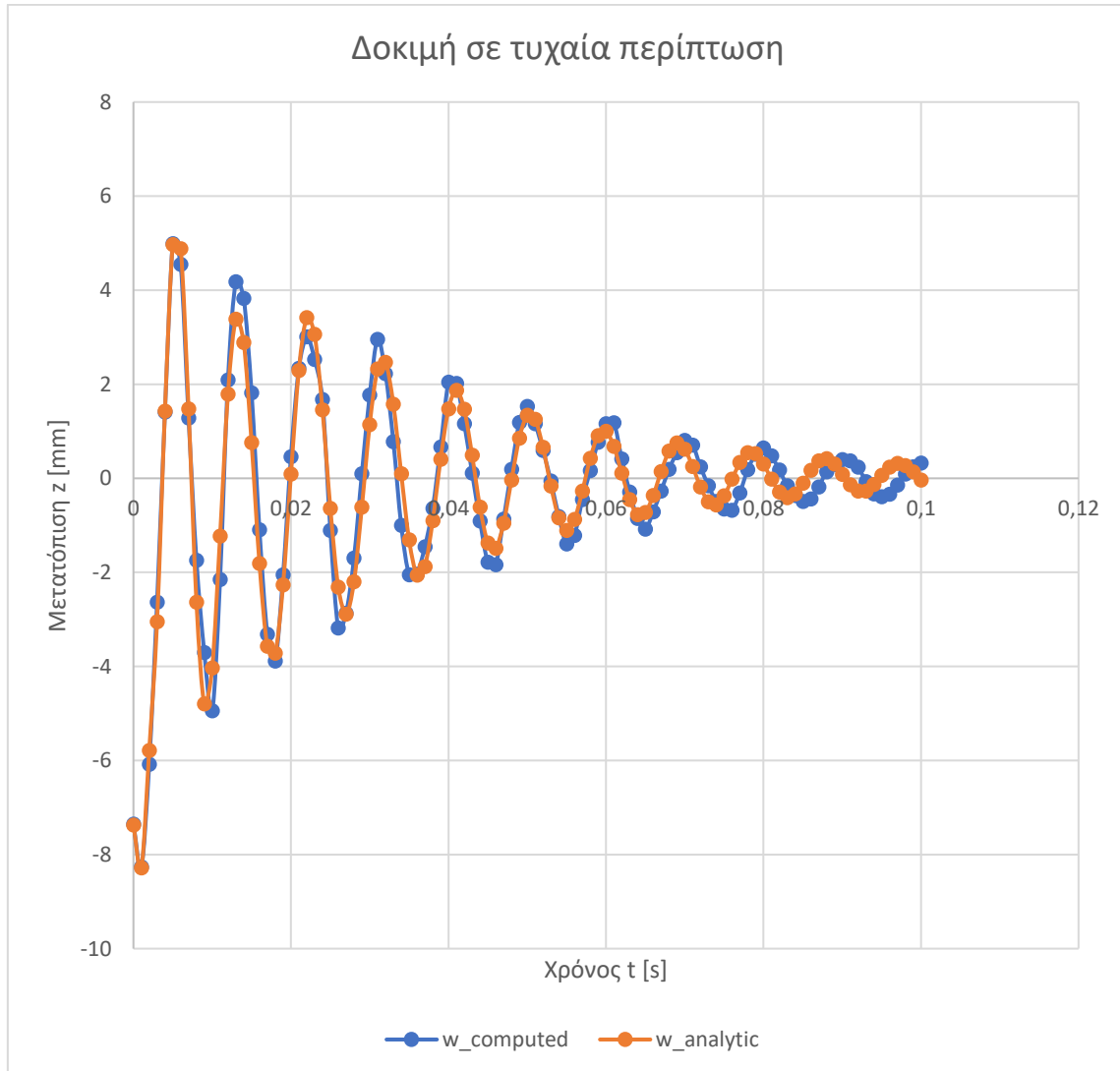
### 3.6 Τυχαία περίπτωση

Για επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων μας εκτελούμε την προσομοίωση για μια τυχαία περίπτωση, όπου παίρνουμε:

- $F = 40 N$
- $x_f = 1 in = 0.0254 m$

Εκτελούμε την προσομοίωση στο COMSOL Multiphysics και, επίσης, υπολογίζουμε την αναλυτική εξίσωση μέσω της συνάρτησης που κατασκευάσαμε με όλη την προηγούμενη διαδικασία. Παρακάτω βλέπουμε το σχετικό διάγραμμα μετατόπισης - χρόνου με την υπολογισμένη ( $w_{computed}$ ) και την αναλυτική λύση ( $w_{analytic}$ ). Είναι εμφανές ότι υπάρχει αρκετά καλή σύγκλιση των δύο λύσεων. Το σφάλμα φαίνεται να μεγαλώνει προς το τέλος της απόκρισης, όπου η περίοδος της ταλάντωσης στο σημείο κρούσης μεγαλώνει, κάτι που δεν

προβλέπει η αναλυτική συνάρτησή μας. Ακόμα κι έτσι, όμως, το αρχικό τμήμα των δύο λύσεων, το οποίο μας ενδιαφέρει περισσότερο, μιας και αυτό είναι που δίνει την ηχητική αίσθηση του τυμπάνου (συχνότητα και ένταση), έχει μικρό σφάλμα.



Εικόνα 15: Σύγκριση υπολογιστικής και αναλυτικής απόκρισης τυχαίας περίπτωσης

## Συμπεράσματα

Παρατηρούμε ότι η συσχέτιση των προαναφερθέντων μεγεθών αποτελεί ένα πολύπλοκο πρόβλημα, καθώς πολλοί είναι οι παράγοντες οι οποίοι συνεισφέρουν στην παραγωγή του ήχου κυρίως με μη-γραμμικό τρόπο. Εντούτοις, έγινε μία πρώτη προσέγγιση στα πλαίσια της συγκεκριμένης διπλωματικής, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και να επεκταθεί σε μελλοντικές μελέτες. Στη συνέχεια, θα δούμε πιο συγκεκριμένα την επίδραση καθενός από αυτούς τους παράγοντες.

Η δύναμη ανάλογα με το μέτρο της συνεισφέρει και στην παραγόμενη συχνότητα και στην ένταση του ήχου. Αύξουσα δύναμη ανεβάζει την κύρια συχνότητα ταλάντωσης ενώ παράλληλα διεγείρει ανώτερες ιδιοσυχνότητες της μεμβράνης. Όσο για την ένταση του ήχου είναι αναμενόμενο μεγαλύτερη δύναμη να προκαλεί μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης και άρα ισχυρότερο ήχο.

Το σημείο κρούσης καθορίζει, επίσης, τα χαρακτηριστικά της ταλάντωσης και κατ' επέκταση του ήχου. Η ιδανική περίπτωση είναι όταν αυτό βρίσκεται στο κέντρο της μεμβράνης. Εκεί, ταλάντωση του σημείου τείνει στην «καθαρή» περίπτωση μιας αποσβενύμενης ταλάντωσης υλικού σημείου. Καθώς όμως το σημείο μετατοπίζεται προς την περιφέρεια, διεγείρονται όλο και περισσότερες υψηλότερες ιδιοσυχνότητες, με αποτέλεσμα το φάσμα του ήχου να γίνεται πιο πλούσιο και η συχνότητα να ακούγεται ελαφρώς ανεβασμένη. Βέβαια, όσο πλησιάζουμε το στεφάνι του τυμπάνου το πλάτος της ταλάντωσης, άρα και η ένταση του ήχου, γίνονται μικρότερα. Στη συνέχεια, θα καταγραφεί συνοπτικά η επίδραση άλλως παραμέτρων που δεν αναλύθηκαν στην παρούσα εργασία, τα αποτελέσματά τους, όμως, διαπιστώθηκαν κατά την έρευνα στην βιβλιογραφία και τις δοκιμές των προσομοιώσεων στο COMSOL Multiphysics.

Η γεωμετρία του τυμπάνου παίζει καθοριστικό ρόλο. Η διάμετρος της μεμβράνης και το πάχος της είναι παράγοντες που επηρεάζουν τις διεγείρομενες συχνότητες αλλά και τον αριθμό των υψηλότερων αρμονικών συχνοτήτων που προκύπτουν. Για αύξουσα διάμετρο έχουμε μετατόπιση των συχνοτήτων προς τα κάτω, όπως και με αυξανόμενο πάχος. Το βάθος του τυμπάνου επίσης παίζει ρόλο, καθώς το εσωτερικό του τυμπάνου λειτουργεί σαν αντηχείο. Έτσι, βαθύτερα τύμπανα παράγουν ισχυρότερους ήχους. Επίσης, το πάχος του κελύφους παίζει το ρόλο του στις συχνότητες που προκύπτουν, όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 2.

Το υλικό των διαφόρων τμημάτων καθορίζει σε σημαντικό βαθμό τον ήχο του τυμπάνου. Αν και στις μεμβράνες η ποικιλία δεν είναι μεγάλη, το κέλυφος μπορεί να φτιαχτεί από μία πληθώρα υλικών και μεθόδων παραγωγής [27].

Ένας άλλος σημαντικός παράγοντας είναι η προένταση της μεμβράνης, δηλαδή, το κούρδισμα του τυμπάνου. Υψηλότερη προένταση, δίνει υψηλότερες συχνότητες. Επίσης, η απόσβεση της ταλάντωσης επηρεάζει σε έναν βαθμό τον παραγόμενο ήχο, αν και η κύρια συνεισφορά της είναι στη διάρκειά του.

Φυσικά, αν και η παρούσα εργασία αποτελεί περισσότερο μια Μελέτη Περίπτωσης (Case Study) ενός τυμπάνου τομ-τομ, είναι ένα πρώτο βήμα στην περαιτέρω συσχέτιση των διαφόρων παραμέτρων των τυμπάνων, με πολλές χρήσεις στη μουσική βιομηχανία και όχι μόνο.



## Μελλοντικές Μελέτες

Η αναλυτική εξίσωση που κατασκευάστηκε είναι ένα πρώτο βήμα στην μοντελοποίηση των μεμβρανών ενός τυμπάνου. Το επόμενο στάδιο είναι η εξίσωση αυτή να συσχετιστεί με την Εξίσωση της Ελαστικής Γραμμής μιας μονοδιάστατης ράβδου, όπου η ράβδος πλέον αντικαθίσταται από μια οποιαδήποτε χορδή της κυκλικής μεμβράνης.

Τα οφέλη από κάτι τέτοιο είναι η άμεση και εύκολη εύρεση της παραμορφωσιακής κατάστασης μιας ελαστικής μεμβράνης με είσοδο το μέγιστο βέλος κάμψης σε ένα συγκεκριμένο σημείο της μεμβράνης.

Οι περεταίρω εφαρμογές από κάτι τέτοιο είναι ποικίλες. Σε αρχική φάση, η βελτίωση της ποιότητας του ήχου στα ηλεκτρονικά σετ ντραμς και αργότερα η χρήση οπτικών ινών ως αισθητήρες των  $\text{rads}$ . Γνωρίζοντας την παραμόρφωση μιας ή και παραπάνω οπτικών ινών στο σημείο που εφαρμόζεται το χτύπημα θα είναι αρκετό για να γνωρίζουμε ολόκληρη την παραμορφωσιακή και ταλαντωτική κατάσταση της «φυσικής» μεμβράνης του ακουστικού τυμπάνου. Έτσι, θα επιτυγχάνεται πολύ πιο ρεαλιστικός ήχος με ευκολότερη δειγματοληψία.

## Βιβλιογραφία

- [1] R. Bader, Ed., *Springer Handbook of Systematic Musicology*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2018.
- [2] F. P. Beer, E. R. Johnston, Jr., J. T. DeWolf, and D. F. Mazurek, *Μηχανική των Υλικών*, Έκδοση 6η. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2015.
- [3] S. Bilbao and C. Webb, "Physical Modeling of Timpani Drums in 3D on GPGPUs," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 61, no. 10, pp. 737–748, 2013.
- [4] DuPont Teijin Films, "Mylar® - Product Information - Physical-Thermal Properties," Hopewell, Virginia, 2003. [Online]. Available: [http://usa.dupontteijinfilms.com/wp-content/uploads/2017/01/Mylar\\_Physical\\_Properties.pdf](http://usa.dupontteijinfilms.com/wp-content/uploads/2017/01/Mylar_Physical_Properties.pdf).
- [5] F. A. Everest, *The Master Handbook of Acoustics*, 4th ed. McGraw-Hill, 2001.
- [6] N. H. Fletcher and T. D. Rossing, *The Physics of Musical Instruments*, 2nd ed. New York, NY: Springer New York, 1998.
- [7] A. Gärder, "Physical modeling of percussion instruments," Chalmers University of Technology, 2005.
- [8] P. Guillaume, *Music and Acoustics*, 1st ed. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2006.
- [9] J. Hagues, "Modelling the Indian Drum," University of Durham, 2010.
- [10] R. Hartenberger, Ed., *The Cambridge Companion to Percussion*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- [11] W. M. Hartmann, *Principles of Musical Acoustics*. New York, NY: Springer New York, 2013.
- [12] L. Henderson and L. Stacey, *Encyclopedia of Music in the 20th Century*. Routledge, 2014.
- [13] J. A. Laird, "The Physical Modelling of Drums using Digital Waveguides," University of Bristol, 2001.
- [14] P. G. MacGillivray Richardson, "Acoustic Analysis and Tuning of Cylindrical Membranophones," Anglia Ruskin University, 2010.
- [15] J. Meyer, *Acoustics and the Performance of Music*, 5th ed. New York, NY: Springer New York, 2009.
- [16] K. Ogata, *Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου*, Έκδοση 5η. Αθήνα: Fountas Books, 2013.
- [17] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2006.
- [18] D. Ribner, "Get the Sound You Want From Your Drums! Part 2: Drumset Tuning," *Modern Drummer*. <https://www.moderndrummer.com/article/february-2015-get-the-sound-you-want-from-your-drums-part-2-drumset-tuning/> (accessed Aug. 03, 2020).
- [19] T. D. Rossing, *Springer Handbook of Acoustics*, 2nd Editio. New York, NY: Springer New York, 2014.

- [20] T. D. Rossing, "Acoustics of percussion instruments: Recent progress.," *Acoust. Sci. Technol.*, vol. 22, no. 3, pp. 177–188, 2001, doi: 10.1250/ast.22.177.
- [21] H. Sönnerlind, "How to Model Different Types of Damping in COMSOL Multiphysics®," *COMSOL Blog*, 2019. <https://www.comsol.com/blogs/how-to-model-different-types-of-damping-in-comsol-multiphysics/> (accessed Jul. 20, 2020).
- [22] H. Sönnerlind, "Damping in Structural Dynamics: Theory and Sources," *COMSOL Blog*, 2019. <https://www.comsol.com/blogs/damping-in-structural-dynamics-theory-and-sources/> (accessed Jul. 28, 2020).
- [23] H. Sönnerlind, "Frequency Response of Mechanical Systems," *COMSOL Blog*, 2019. <https://www.comsol.com/blogs/frequency-response-of-mechanical-systems/> (accessed Jul. 28, 2020).
- [24] J. R. Taylor, "Designing a Computer Model of Drumming: The Biomechanics of Percussive Performance," *Hum. Technol.*, vol. 13, no. 1, pp. 109–141, May 2017, doi: 10.17011/ht/urn.201705272520.
- [25] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed. McGraw-Hill, 1959.
- [26] A. Wagner, "Analysis of Drumbeats – Interaction between Drummer, Drumstick and Instrument," KTH Royal Institute of Technology, 2006.
- [27] WikiAudio, "Drum Shells: Everything You Need to Know," *WikiAudio.org*, 2019. <https://www.wikiaudio.org/drum-shells/> (accessed Aug. 03, 2020).
- [28] R. Worland, "Drum tuning: an experimental analysis of membrane modes under non-uniform tension," 2009, doi: 10.1121/1.3138888.
- [29] R. Worland and W. Miyahira, "Physics of musical drum head damping using externally applied products," 2018, doi: 10.1121/2.0001011.
- [30] Κ. Βασιλακάκης, "Λογισμικά πεπερασμένων στοιχείων (FEA) με ελεύθερη άδεια χρήσης," Α.Τ.Ε.Ι. Κρήτης, 2017.
- [31] Ε. Κοκκινάκης, "Προσομοίωση Συμπεριφοράς & Δονητικών Χαρακτηριστικών Τυμπάνου," Τ.Ε.Ι. Κρήτης, 2013.
- [32] Ν. Ι. Κρικέλης, *Μοντελοποίηση και Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων*, Έκδοση 3η. Αθήνα: Fountas Books, 2003.
- [33] Ν. Ι. Κρικέλης, *Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο*, Έκδοση 4η. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία, 2014.
- [34] Σ. Νατσιάβας, *Ταλαντώσεις Μηχανικών Συστημάτων*, Έκδοση 1η. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, 2001.
- [35] Χ. Ι. Προβατίδης, *Πεπερασμένα Στοιχεία στην Ανάλυση Κατασκευών*, Έκδοση 1η. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2016.

[36] Χ. Ι. Προβατίδης, *Βελτιστοποίηση & Λογισμικό Κατασκευών: Πεπερασμένα Στοιχεία, Ισογεωμετρικά Στοιχεία, Συνοριακά Στοιχεία*, Έκδοση 1η. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2017.

[37] Ε. Σαγάνης, "Μέθοδοι Τυμπάνων," Τ.Ε.Ι. Ηπείρου, 2019.