



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ & ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Διπλωματική Εργασία

**ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΚΛΙΜΕΝΩΝ ΤΥΡΒΩΔΩΝ
ΦΛΕΒΩΝ ΑΡΝΗΤΙΚΗΣ ΑΝΩΣΗΣ**

ΘΑΝΑΣΗΣ Γ. ΜΑΝΤΣΗΣ

Επιβλέπων: Η. Παπακωνσταντής, Λέκτορας ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2020



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ & ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Διπλωματική Εργασία

**ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΚΛΙΜΕΝΩΝ ΤΥΡΒΩΔΩΝ
ΦΛΕΒΩΝ ΑΡΝΗΤΙΚΗΣ ΑΝΩΣΗΣ**

ΘΑΝΑΣΗΣ Γ. ΜΑΝΤΣΗΣ

Επιβλέπων: Η. Παπακωνσταντής, Λέκτορας ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2020

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος σπουδών της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του ΕΜΠ, στον Τομέα Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος και αντικείμενο αυτής είναι η μοντελοποίηση κεκλιμένων φλεβών αρνητικής άνωσης. Αποτελεί την κατάληξη μιας κοπιαστικής και δημιουργικής περιόδου, γεμάτη από προσπάθεια, γνώσεις και μικρές νίκες και την αρχή μιας νέας άγνωστης και ελκυστικής.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα κ. Ηλία Παπακωνσταντή, Λέκτορα ΕΜΠ, που με τις εξειδικευμένες στο αντικείμενο γνώσεις του, την μεθοδικότητά και την αναλυτική του σκέψη, αφιέρωσε πολύτιμο χρόνο μέσω τηλεδιασκέψεων σε κάθε στάδιο υλοποίησης της παρούσας διπλωματικής σε μια πρωτοφανή με πολλές δυσκολίες περίοδο.

Ακόμη θα ήθελα να αφιερώσω την παρούσα στην μνήμη της Αλεξάνδρας, ο χαμός της οποίας μας ξαναθύμισε τα πραγματικά νοήματα της ζωής, να ευχαριστήσω την οικογένεια μου Τζούλια, Αφροδίτη και Σάσα που αγωνιστικά μεγαλώνουμε μαζί, την Υβόννη μου καθώς και τους φίλους μου για την ηθική και ψυχολογική στήριξη τους.

Θανάσης Γ. Μάντσης
Αθήνα, Οκτώβριος 2020

*Κι όμως είχα φωτογραφίσει
με Ρώσικη κάμερα, στ'ορκίζομαι
τη δική μου διαδικασία βυθισμού*

Χωρίς Περιδέραιο - Άνωση

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	i
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	iii
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	v
ABSTRACT.....	vii
ΚΥΡΙΟΤΕΡΟΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ.....	ix
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1.1 Γενικά.....	1
1.2 Τυρβώδεις Ανωστικές Φλέβες.....	5
1.3 Βασικές Παράμετροι Ροής Ανωστικών Φλεβών.....	7
1.3.1 Βασικές Παράμετροι Κυκλικών Ανωστικών Φλεβών.....	8
1.3.2 Βασικές Παράμετροι Διδιάστατων Ανωστικών Φλεβών.....	9
2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ.....	11
2.1 Γενικά.....	11
2.2 Κυκλικές Φλέβες Αρνητικής Άνωσης.....	12
2.2.1 Κατακόρυφες Φλέβες.....	12
2.2.2 Κεκλιμένες Φλέβες Αρνητικής Άνωσης.....	13
2.3 Διδιάστατες Φλέβες Αρνητικής Άνωσης.....	18
2.4 Αντικείμενο και Στόχοι Παρούσας.....	21
3. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.....	23
3.1 Το Υπό Μελέτη Πρόβλημα.....	23
3.2 Διαστατική Ανάλυση.....	24
3.3 Αναλυτικές Λύσεις των Kikkert <i>et al.</i> (2007).....	26
3.4 Ολοκληρωματικό Μοντέλο.....	27
3.4.1 Περιγραφή Ολοκληρωματικού Μοντέλου Κυκλικών Φλεβών Αρνητικής Άνωσης.....	27
3.4.2 Περιγραφή Ολοκληρωματικού Μοντέλου Διδιάστατων Φλεβών Αρνητικής Άνωσης.....	32
4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	39
4.1 Γενικά.....	39
4.2 Μοντελοποίηση Ροής Κυκλικών Φλεβών.....	39
4.3 Μοντελοποίηση Ροής Διδιάστατων Φλεβών.....	56
5. ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	73
5.1 Ανακεφαλαίωση.....	73
5.2 Συμπεράσματα.....	74
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	77
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	83

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μελέτη ροής φλεβών αρνητικής άνωσης έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, ειδικά τα τελευταία χρόνια. Τέτοιες ροές συναντώνται στην πράξη κατά την διάθεση προς τα πάνω υγρών αποβλήτων βαρύτερων από το υγρό του αποδέκτη στον οποίο καταλήγουν, όπως είναι τα υγρά απόβλητα από μονάδες αφαλάτωσης (αλμόλοιπο). Ο όγκος τέτοιου είδους υγρών αποβλήτων έχει αυξητική τάση, με αποτέλεσμα να είναι σκόπιμη η διάθεσή τους, με τέτοιο τρόπο ώστε να μειώνονται οι περιβαλλοντικές επιπτώσεις. Το αλμόλοιπο διατίθεται στη θάλασσα και παροχετεύεται από τον πυθμένα προς την ελεύθερη επιφάνεια μέσω απλού κυκλικού στομίου ή διαχυτήρα που αποτελείται από πολλά κυκλικά στόμια. Η φλέβα έχει αρχικά ανοδική τροχιά, φτάνει σε ένα μέγιστο τερματικό ύψος και στην συνέχεια κατέρχεται και προσκρούει στον πυθμένα σε κάποια απόσταση από την εκροή. Η παροχέτευση γίνεται υπό γωνία, με σκοπό την επίτευξη μεγαλύτερης τροχιάς και κατά συνέπεια μεγαλύτερης αραιώσης. Έτσι η επίπτωση στο θαλάσσιο περιβάλλον είναι μικρότερη δεδομένου ότι το αλμόλοιπο έχει περίπου διπλάσια αλατότητα από τη θάλασσα. Οι ροές που σχηματίζονται λέγονται κεκλιμένες φλέβες αρνητικής άνωσης (η συνισταμένη άνωσης και βάρους αντισταθμίζεται στην κατακόρυφη συνιστώσα της ορμής). Ανάλογα με την γεωμετρία του στομίου παροχέτευσης της φλέβας, αυτές διαχωρίζονται σε κυκλικές (κυκλικό στόμιο) και διδιάστατες (στόμιο μορφής σχισμής). Οι εκροές πολλών κυκλικών στομίων σε σειρά (διαχυτήρας) ενώνονται σε μία ενιαία ροή, μικρού πάχους σε σχέση με το μήκος της η οποία επίσης προσομοιάζει ροή που εκρέει από στόμιο μορφής σχισμής.

Από την βιβλιογραφική ανασκόπηση που πραγματοποιείται, προκύπτει ότι ενώ υπάρχουν πολλές πειραματικές μελέτες κυκλικών φλεβών, οι πειραματικές μελέτες διδιάστατων φλεβών είναι πολύ περιορισμένες και σε κάποιες περιπτώσεις παρουσιάζουν μεταξύ τους ασυμφωνίες. Η ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων ή αναλυτικών λύσεων με σκοπό την προσομοίωση της ροής κεκλιμένων φλεβών αρνητικής άνωσης συναντάται κυρίως στην περίπτωση των κυκλικών φλεβών, ενώ για τις διδιάστατες φλέβες τα μοντέλα είναι πιο περιορισμένα.

Παρουσιάζονται τα κύρια χαρακτηριστικά που περιγράφουν την ροή φλεβών και αφορούν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της τροχιάς που διαγράφει η φλέβα καθώς και την αραιώση που επιτυγχάνεται σε χαρακτηριστικές θέσεις της τροχιάς αυτής, όπως το τερματικό ύψος ανόδου και η περιοχή επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης. Συνοψίζονται σχέσεις αδιαστατοποίησης των χαρακτηριστικών αυτών που έχουν προκύψει από τη διαστατική ανάλυση. Παρουσιάζονται ένα ολοκληρωματικό μοντέλο (integral model) και αναλυτικές λύσεις από προηγούμενες εργασίες για τη μοντελοποίηση της ροής κεκλιμένων κυκλικών φλεβών σε ακίνητο ομογενή αποδέκτη. Επιπλέον παρουσιάζεται ένα νέο ολοκληρωματικό μοντέλο για τη μοντελοποίηση της ροής διδιάστατων φλεβών σε ακίνητο ομογενή αποδέκτη που θεωρεί κατανομές ταχύτητας και συγκέντρωσης Gauss. Τα ολοκληρωματικά μοντέλα καταστρώνονται σε περιβάλλον MATLAB.

Στην συνέχεια γίνεται εφαρμογή των παραπάνω μοντέλων για την περίπτωση κυκλικών και διδιάστατων κεκλιμένων φλεβών αρνητικής άνωσης που παροχετεύονται σε ακίνητο ομογενή αποδέκτη. Για τις κυκλικές φλέβες εξετάστηκαν

οι γωνίες παροχέτευσης 30°, 45°, 60°, 75°, 80°, 85°, και 90°, ενώ για τις διδιάστατες φλέβες εξετάστηκαν οι γωνίες παροχέτευσης 15°, 30°, 45°, 50°, 60°, 75°, 80°, 85° και 90°. Κατά την αριθμητική επίλυση έγιναν διάφορες θεωρήσεις (σενάρια) σχετικά με την σχέση υπολογισμού του συντελεστή συμπαράσυρσης που χρησιμοποιείται στα ολοκληρωματικά μοντέλα. Οι προβλέψεις που προέκυψαν για τα διάφορα σενάρια επίλυσης συγκρίνονται διαγραμματικά σε αδιάστατη μορφή με πειραματικά αποτελέσματα προηγούμενων εργασιών, με σκοπό την αξιολόγησή τους. Έτσι εξάγονται τα κύρια συμπεράσματα και αναδεικνύονται τα σενάρια επίλυσης που προσεγγίζουν με μικρότερη απόκλιση τα πειραματικά δεδομένα για την περίπτωση κυκλικών και διδιάστατων φλεβών. Για κυκλικές φλέβες, προέκυψε ότι για χρήση μειωμένου συντελεστή συμπαράσυρσης, οι προβλέψεις του μοντέλου προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα πειραματικά δεδομένα. Για διδιάστατες φλέβες και χρήση σταθερού συντελεστή συμπαράσυρσης το μοντέλο προβλέπει ικανοποιητικά τα περισσότερα χαρακτηριστικά της φλέβας, ωστόσο για γωνίες άνω των 45° το τερματικό ύψος υπερεκτιμάται και η αραίωση στη θέση επιστροφής υποεκτιμάται, ακόμα και από την μέση στη διατομή αραίωση. Τα περιορισμένα πειραματικά δεδομένα ωστόσο δυσχεραίνουν την αξιολόγηση των προβλέψεων του μοντέλου.

ABSTRACT

The research of inclined negatively buoyant jets is of particular interest, notably in recent years. Such jets are practically related to the disposal of liquid effluents that are denser than the ambient fluid. Such is the case of brine effluents from desalination plants. The increasing volume of desalination effluents makes crucial the disposal in a way that minimizes the environmental impact. The brine usually ends up into the seawater where it is discharged upwards from the seafloor towards the free surface through single ports or through diffusers of several round ports. At steady state, the brine jet rises up to a terminal height and then it flows downwards and impacts on the bottom at a distance from the source. The jet is discharged at an angle to the horizontal in order to elongate the trajectory and thus achieving higher dilution rates. On the basis of the nozzle geometry of the diffuser, buoyant jets are distinguished between round and plane jets. The jets discharged through a multiport diffuser of round nozzles merge and form a flow which resembles that of a planar two-dimensional flow.

From the literature review on inclined negatively buoyant jets, it was obtained that a large number of experimental studies has been conducted for round jets, whereas experimental studies regarding plane jets are very limited and present discrepancies. Also, the development of integral models and analytical solutions for the flow of inclined negatively buoyant jets concerns mostly round jets, whereas few models have been developed for the case of plane jets.

The principal characteristics that describe the flow of buoyant jets are presented. These are the geometrical characteristics and the dilution at specific locations of the jet trajectory, i.e. the terminal height of rise and the return region of the flow. Equations obtained from dimensional analysis, for the normalization of the principal characteristics, are summarized. An integral model and analytical solutions from previous studies are presented for the modelling of inclined round negatively buoyant jets in a stagnant homogeneous ambient. Furthermore, a new model was developed in this thesis regarding the modelling of inclined plane negatively buoyant jets in a stagnant homogeneous ambient, based on Gaussian distributions for velocity and concentration.

The models described above are applied in round or plane inclined negatively buoyant jets discharged in a homogenous stationary ambient. For the case of round jets the discharge angles of 30°, 45°, 60°, 75°, 80°, 85° and 90° were studied, whereas for the plane jet the angles of 15°, 30°, 45°, 50°, 60°, 75°, 80°, 85° and 90° were considered. Several scenarios were examined for the entrainment coefficient which is used in the integral models. The model results for the scenarios considered were compared with experimental results of previous studies in dimensionless graphs. Finally, the evaluation of the model predictions led to the main conclusions of this thesis and highlighted the scenarios which provide the best predictions compared to the experimental data for round and plane negatively buoyant jets. For the case of round jets, when a reduced value of the entrainment coefficient is used, the predictions of the model approximate satisfactorily the measured values of previous studies. For the case of plane jets, the use of a fixed entrainment coefficient led to predictions that agree well with the measured values of previous studies, for the majority of the jet characteristics, though for angles greater than 45° the terminal height of rise is overestimated and the dilution at the

return point is underestimated. However, the limited availability of experimental data for plane jets makes difficult the evaluation of the model predictions.

ΚΥΡΙΟΤΕΡΟΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Λατινικά Σύμβολα

b	πλάτος κατανομής μέσης χρονικά ταχύτητας
b_c	πλάτος κατανομής μέσης χρονικά συγκέντρωσης
b_{visual}	οπτικό πλάτος της φλέβας
B	ειδική άνωση (κυκλικές φλέβες)
C	συγκέντρωση (αλατότητα)
D	διάμετρος στομίου παροχέτευσης (κυκλικές φλέβες)
F_o	αρχικός πυκνομετρικός αριθμός Froude
g	επιτάχυνση της βαρύτητας
g'	φαινόμενη επιτάχυνση της βαρύτητας
L_D	μήκος σχισμής εκροής (διδιάστατες φλέβες)
l_M	χαρακτηριστική κλίμακα μήκους πλουμίου
l_Q	χαρακτηριστική κλίμακα μήκους απλής φλέβας
M	ειδική ορμή (κυκλικές φλέβες)
m	ειδική ορμή ανά μονάδα μήκους (διδιάστατες φλέβες)
Q	ογκομετρική παροχή (κυκλικές φλέβες)
q	παροχή ανά μονάδα μήκους (διδιάστατες φλέβες)
r	ακτινική απόσταση σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων
Re_o	αρχικός αριθμός Reynolds
Ri	αριθμός Richardson
Ri_o	αρχικός αριθμός Richardson
Ri_p	αριθμός Richardson της ροής πλουμίου
s	άξονας φλέβας
s_o	απόσταση από την πηγή κατά μήκος του άξονα όπου εφαρμόζονται οι αρχικές συνθήκες
S	αραίωση
S_{ave}	μέση στη διατομή αραίωση
S_i	αξονική αραίωση στη θέση επιστροφής της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης
S_t	αξονική αραίωση στο τερματικό ύψος ανόδου της φλέβας
U_o	αρχική ταχύτητα φλέβας

u	ταχύτητα κατά τη διεύθυνση του άξονα της φλέβας
w	πλάτος σχισμής εκροής (διδιάστατες φλέβες)
X	οριζόντιος άξονας συστήματος συντεταγμένων με αρχή στο κέντρο του στομίου παροχέτευσης της φλέβας
X_z	οριζόντια απόσταση από το στόμιο παροχέτευσης μέχρι τη θέση του τερματικού ύψους της φλέβας
X_i	οριζόντια απόσταση από το στόμιο παροχέτευσης μέχρι το εξωτερικό όριο της φλέβας (περιοχή επιστροφής φλέβας)
X_{ic}	οριζόντια απόσταση από το στόμιο παροχέτευσης μέχρι τον άξονα της φλέβας (περιοχή επιστροφής φλέβας)
Z	κατακόρυφος άξονας συστήματος συντεταγμένων με αρχή στο κέντρο του στομίου παροχέτευσης της φλέβας
Z_c	μέγιστο ύψος άξονα φλέβας
Z_f	τελικό τερματικό ύψος άνω ή εξωτερικού ορίου φλέβας

Ελληνικά Σύμβολα

α	συντελεστής συμπαράσυρσης
α_j	συντελεστής συμπαράσυρσης για τη ροή απλής φλέβας
α_p	συντελεστής συμπαράσυρσης για τη ροή πλουμίου
β	ειδική άνωση ανά μονάδα μήκους (διδιάστατες φλέβες)
$\Delta\rho$	πυκνομετρική διαφορά ρευστού αποδέκτη και εκροής
θ	γωνία άξονα φλέβας με το οριζόντιο επίπεδο
λ	$(\lambda = b_c/b)$ λόγος πλατών κατανομής μέσης συγκέντρωσης και ταχύτητας
ν	κινηματική συνεκτικότητα
ρ	πυκνότητα υγρού
ρ_s	πυκνότητα θαλασσινού νερού
ρ_w	πυκνότητα καθαρού νερού
ρ_a	πυκνότητα ρευστού αποδέκτη
ρ_o	πυκνότητα ρευστού εκροής

Δείκτες

c	ποσότητες στον άξονα της φλέβας
o	αρχικές ποσότητες (ποσότητες στη θέση παροχέτευσης)

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικά

Πολλές ανθρώπινες δραστηριότητες οδηγούν στην παραγωγή υγρών αποβλήτων, τα οποία καταλήγουν προς διάθεση σε υδάτινους αποδέκτες όπως ποταμούς, λίμνες, θάλασσα. Τα απόβλητα αυτά, χωρίς επεξεργασία και κατάλληλη διάθεση, επηρεάζουν την ποιότητα των νερών του αποδέκτη, τους φυτικούς και ζωικούς οργανισμούς και εν γένει υποβαθμίζουν το περιβάλλον της ευρύτερης περιοχής. Κάτι τέτοιο έρχεται σε αντίθεση με την αειφόρο ανάπτυξη που προβλέπει μια ευαίσθητη στάση απέναντι στο φυσικό περιβάλλον. Η παραγωγή αποβλήτων είναι αυξητική με αποτέλεσμα να είναι σκόπιμη η διάθεσή τους στα επιφανειακά νερά, με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται σημαντική αραίωση και να μειώνονται οι περιβαλλοντικές επιπτώσεις.

Η σύσταση των διαφόρων υγρών αποβλήτων ποικίλει, με αποτέλεσμα να έχουμε απόβλητα διαφορετικής πυκνότητας (μικρότερης ή μεγαλύτερης) από αυτής του αποδέκτη. Αυτό καθορίζεται από την προέλευση των αποβλήτων. Απόβλητα μικρότερης πυκνότητας από αυτήν του αποδέκτη είναι τα αστικά λύματα, το νερό ψύξης υδροηλεκτρικών σταθμών κ.α. Μεγαλύτερη πυκνότητα εμφανίζεται σε βιομηχανικά απόβλητα, νερά που παρασύρουν φερτά υλικά καθώς και στα απόβλητα εγκαταστάσεων αφαλάτωσης.

Τα τελευταία χρόνια, ο όγκος υγρών αποβλήτων βαρύτερων από το νερό του αποδέκτη είναι όλο και πιο μεγάλος. Μια βασική δραστηριότητα που παράγει τέτοιου είδους απόβλητα είναι η αφαλάτωση. Οι ανάγκες υδροδότησης περιοχών με έντονο πρόβλημα λειψυδρίας όπως τα νησιά, έχει οδηγήσει στην αύξηση μονάδων αφαλάτωσης, οι οποίες ανακτούν πόσιμο νερό από θαλασσινό ή υφάλμυρο νερό συνήθως μέσω της διαδικασίας της αντίστροφης ώσμωσης (Ανδρεαδάκης, 2008).

Το θαλασσινό νερό περνάει υπό μεγάλη πίεση μέσα από ημιπερατές μεμβράνες όπου κατακρατούνται τα άλατα. Το οικολογικό "αποτύπωμα" της αφαλάτωσης είναι η διάθεση του διαλύματος των αλάτων που κατακρατούνται, δηλαδή του αλμόλοιπου. Το αλμόλοιπο έχει συγκέντρωση σε αλάτι περίπου διπλάσια από αυτή του θαλασσινού νερού, κατά συνέπεια επαναδιάθεσή του στην θάλασσα χωρίς κατάλληλο σχεδιασμό που θα επιτυγχάνει σημαντική αραίωση μπορεί να διαταράξει το υδάτινο περιβάλλον της περιοχής.



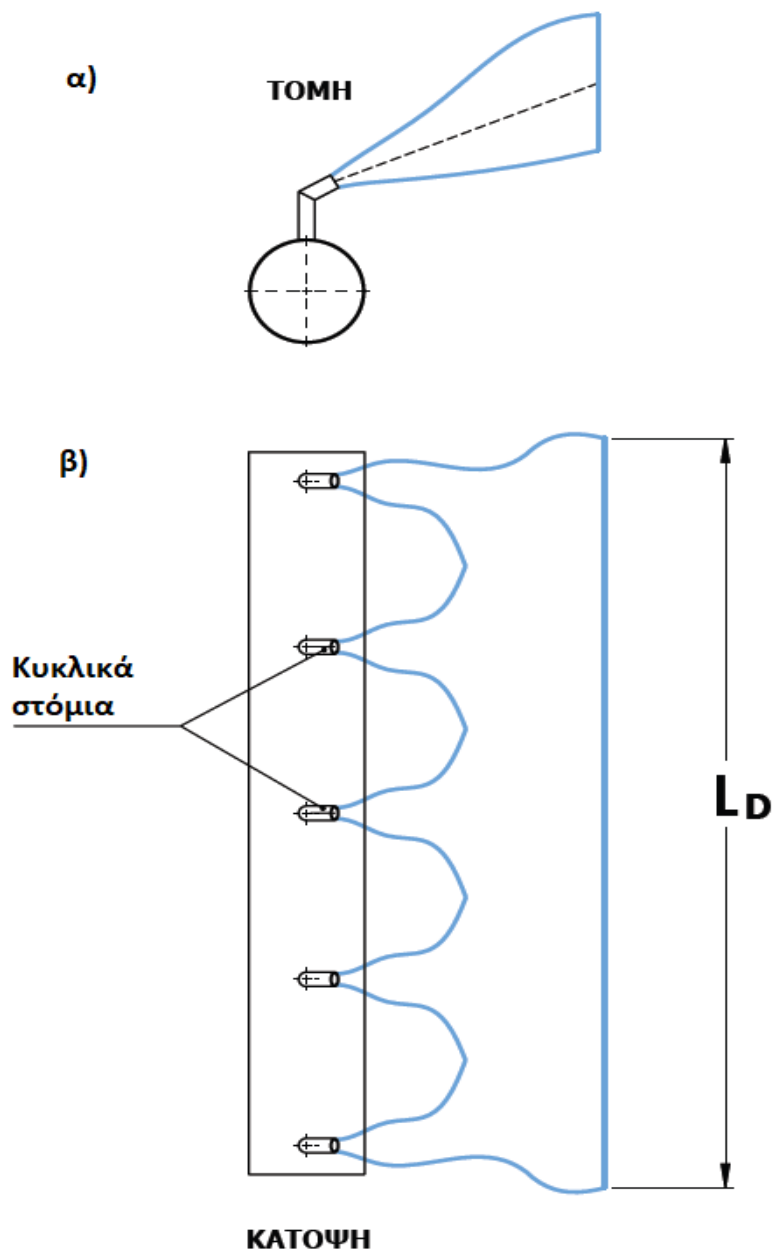
Σχήμα 1-1: Μονάδα αφαλάτωσης στο Perth της Αυστραλίας. (Πηγή: <https://www.suezwaterhandbook.com/case-studies/desalination/Perth-reverse-osmosis-desalination-plant-Australia>)

Το αλμόλοιπο μεταφέρεται από τη μονάδα αφαλάτωσης μέσω υποθαλάσσιου αγωγού στην προβλεπόμενη απόσταση από την ακτή. Για την αντίσταση του αγωγού στον πυθμένα σε μετατόπιση διατάσσονται έρματα από οπλισμένο σκυρόδεμα σε καθορισμένες αποστάσεις. Η διάθεση γίνεται μέσω απλών στομίων ή διαχυτήρων που αποτελούνται από πολλά στόμια τα οποία είναι συνήθως κυκλικά. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζονται τυρβώδεις φλέβες δηλαδή ροές στις οποίες συμπαρασύρονται ποσότητες νερού από τον αποδέκτη στη ροή και επιτυγχάνεται αραίωση (Fischer *et al.* 1979).

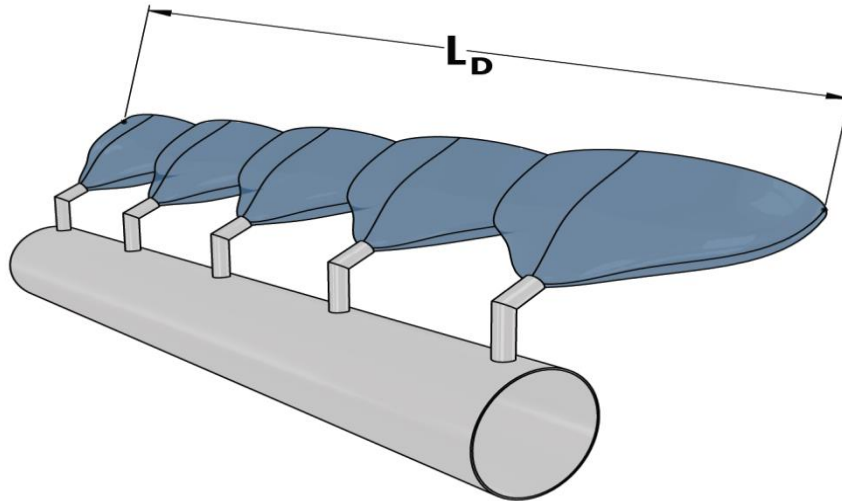


Σχήμα 1-2: Διαχυτήρες με κυκλικά στόμια, λίμνη Cayuga, USA (Πηγή: Mixing Processes and Mixing Zone Analysis G.H. Jirka)

Η γεωμετρία του συστήματος διάθεσης επηρεάζει διάφορες παραμέτρους της ροής και κατά συνέπεια την επιτυγχανόμενη αραίωση. Η εκροή από κυκλικό στόμιο οδηγεί στο σχηματισμό κυκλικών τυρβωδών φλεβών (τριδιάστατων αξονοσυμμετρικών ροών), ενώ η εκροή από πολλαπλά στόμια (multiport diffusers (mpd)), οδηγεί στη δημιουργία πολλών κυκλικών φλεβών που ενώνονται σε κάποια απόσταση από την εκροή σχηματίζοντας μια επίπεδη τυρβώδη φλέβα (διδιάστατη ροή), όπως φαίνεται στα Σχήματα 1-3 και 1-4. Η παραπάνω ροή, προσομοιάζει τη ροή από σχισμή (slot) μήκους L_D και πλάτους w με $L_D \gg w$ (Jirka, 2006). Αυτή είναι και η συνήθης πρακτική διάθεση αστικών λυμάτων.

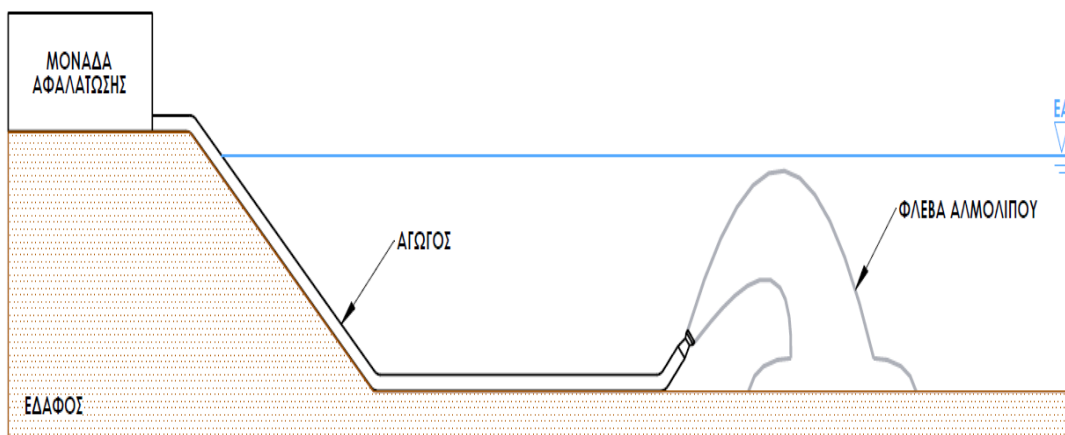


Σχήμα 1-3: (α) Τομή κυκλικού στομίου και (β) συνένωση ροής από κυκλικά στόμια, μετά από κάποια απόσταση σε μία ενιαία διδιάστατη ροή μήκους L_D .

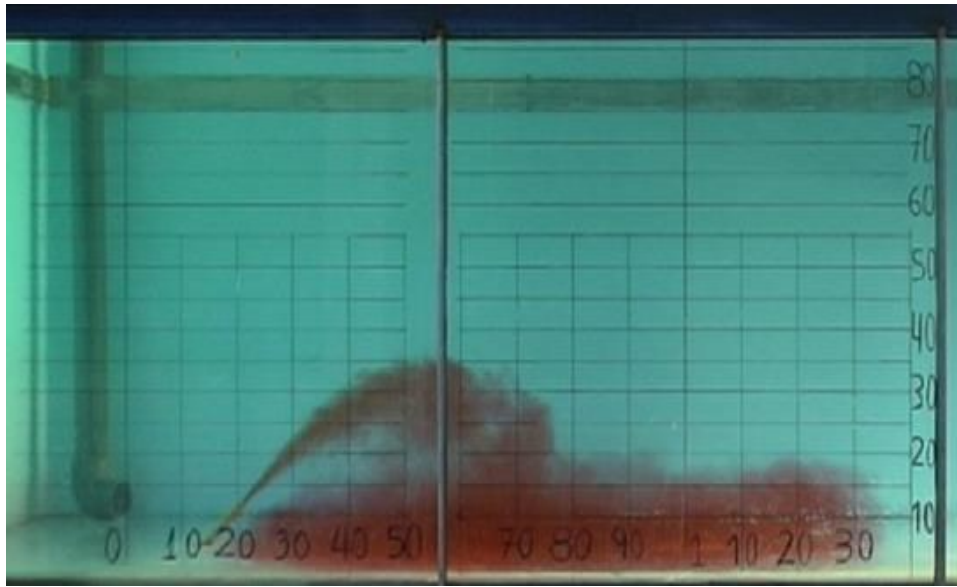


Σχήμα 1-4: Προοπτικό σκαρίφημα όπου φαίνεται η συγχώνευση της ροής των κυκλικών φλεβών σε μία ενιαία ροή μήκους L_D .

Η χρήση διαχυτήρων κατά μήκος του αγωγού υπό γωνία, αποσκοπεί στην επίτευξη μεγαλύτερης τροχιάς της φλέβας των αποβλήτων. Η εκροή γίνεται από τον πυθμένα προς την ελεύθερη επιφάνεια. Επειδή έχουμε αρχική ταχύτητα (ορμή) στην εκροή και διαφορά πυκνότητας (άνωση) μεταξύ του υγρού εκροής και του αποδέκτη η φλέβα ορίζεται ως τυρβώδης ανωστική. Στην περίπτωση των βαρύτερων αποβλήτων η συνολική ανωστική δύναμη είναι προς τα κάτω και αντιτίθεται στην κατακόρυφη συνιστώσα της ορμής. Η ροή λέγεται φλέβα αρνητικής άνωσης. Προτιμάται η εκροή υπό γωνία οπότε σχηματίζονται κεκλιμένες φλέβες αρνητικής άνωσης. Η ροή διαγράφει ανοδική τροχιά μέχρι να φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος (τερματικό ύψος ανόδου) και στη συνέχεια επιστρέφει στον πυθμένα, όπου εξαπλώνεται ως ρεύμα πυκνότητας (βλ. Σχήμα 1-5, Σχήμα 1-6).



Σχήμα 1-5: Αναπαράσταση ροής φλέβας αρνητικής άνωσης που παροχετεύεται υπό γωνία.



Σχήμα 1-6: Πειραματική διάταξη όπου αποτυπώνεται η ροή φλέβας αρνητικής άνωσης (Πηγή: Παπακωνσταντής, 2009)

Στη συνέχεια παρουσιάζονται βασικά στοιχεία θεωρίας τυρβωδών ανωστικών φλεβών.

1.2 Τυρβώδεις Ανωστικές Φλέβες

Η εκροή ρευστού από ένα στόμιο σε έναν αποδέκτη με ρευστό ίδιας πυκνότητας ονομάζεται απλή φλέβα (jet) και χαρακτηρίζεται στην εκροή από ορμή (ποσότητα κίνησης) και μηδενική διαφορά πυκνότητας. Ως πλούμιο (plume) χαρακτηρίζεται η εκροή ρευστού από στόμιο σε αποδέκτη με ρευστό διαφορετικής πυκνότητας και μηδενικής ορμής στην εκροή, άρα η ροή οφείλεται στην διαφορά πυκνότητας η οποία προκαλεί άνωση. Ανωστική φλέβα (buoyant jet) έχουμε όταν στην εκροή υπάρχει αρχική ταχύτητα και διαφορά πυκνότητας, δηλαδή ο συνδυασμός απλής φλέβας και πλουμίου. Ουσιαστικά, στην εκροή τους οι ανωστικές φλέβες συμπεριφέρονται ως απλές φλέβες, ενώ σε μεγάλη απόσταση από την εκροή συμπεριφέρονται ως πλούμια (Fischer *et al.* 1979).

Οι ανωστικές φλέβες κατηγοριοποιούνται περαιτέρω σε θετικής ή αρνητικής άνωσης, ανάλογα με τη φορά της συνισταμένης των δυνάμεων ποσότητας κίνησης (ορμής) και ανωστικών δυνάμεων σε έναν όγκο ελέγχου (Παπακωνσταντής, 2009):

- Θετικής άνωσης ονομάζονται οι φλέβες στις οποίες η συνισταμένη του βάρους της φλέβας και της άνωσης είναι ομόρροπη της κατακόρυφης συνιστώσας της ποσότητας κίνησης (ορμής).
- Αρνητικής άνωσης ονομάζονται οι φλέβες στις οποίες η συνισταμένη του βάρους της φλέβας και της άνωσης είναι αντίρροπη της κατακόρυφης συνιστώσας της ποσότητας κίνησης (ορμής).

Πρακτικά, ρευστά που εκρέουν σε αποδέκτη προς τα πάνω και είναι ελαφρύτερα έχουν θετική άνωση, ενώ βαρύτερα ρευστά από αυτό του αποδέκτη έχουν αρνητική άνωση. Έτσι για εκροή από τον πυθμένα προς τα πάνω υπό γωνία οι φλέβες θετικής άνωσης θα φτάσουν στην ελεύθερη επιφάνεια, ενώ οι φλέβες αρνητικής άνωσης θα έχουν ανοδικό κλάδο ως ένα μέγιστο ύψος και στη συνέχεια έναν καθοδικό κλάδο μέχρι την επιστροφή τους στον πυθμένα.

Η έρευνα έχει επικεντρωθεί σε υγρά απόβλητα ελαφρύτερα από αυτά του αποδέκτη όπως τα αστικά λύματα, παρότι ο όγκος των βαρύτερων λυμάτων λόγω βιομηχανικών δραστηριοτήτων έχει αυξητική τάση. Τέτοια είναι και η περίπτωση του αλμόλοιπου το οποίο έχει μεγαλύτερη πυκνότητα από αυτή του θαλασσινού νερού στο οποίο καταλήγει. Είναι σκόπιμη λοιπόν η περαιτέρω μελέτη φλεβών αρνητικής άνωσης.

Οι παράμετροι που επηρεάζουν την ροή των φλεβών αφορούν κυρίως την αρχική ορμή στο στόμιο εκροής καθώς και την διαφορά πυκνότητας όπως είδαμε παραπάνω. Επίσης γεωμετρικές παράμετροι όπως το σχήμα του στομίου του διαχυτήρα (κυκλικό ή σχισμή) και η γωνία παροχέτευσης του ρευστού επηρεάζουν τη ροή. Ειδικότερα, φλέβες που εκρέουν από κυκλικό στόμιο ονομάζονται κυκλικές, ενώ αυτές που εκρέουν από στόμιο μορφής σχισμής ονομάζονται διδιάστατες. Τέλος, η κίνηση του ρευστού του αποδέκτη και τυχόν στρωμάτωσή του μπορεί επίσης να επηρεάσει τις συνθήκες ροής.

Η ροή των ανωστικών φλεβών στην εκροή μπορεί να είναι στρωτή ή τυρβώδης ανάλογα με τον αριθμό Reynolds. Ο αδιάστατος αριθμός Reynolds εκφράζει τον λόγο των αδρανειακών δυνάμεων προς τις δυνάμεις συνεκτικότητας. Ως τυρβώδης ορίζεται η ροή για $Re_o > 2000$ για εκροή από κυκλικό στόμιο. Ο αριθμός Reynolds έχει τις παρακάτω εκφράσεις για κυκλικές και διδιάστατες φλέβες αντίστοιχα:

- Κυκλικές φλέβες, διαμέτρου στομίου D , με αρχική ταχύτητα εκροής ρευστού U_o και κινηματική συνεκτικότητα ρευστού ν :

$$Re_o = \frac{U_o D}{\nu} \quad (1-1)$$

- Διδιάστατες φλέβες, στομίου μήκους L_D και πλάτους w , με αρχική ταχύτητα εκροής ρευστού U_o και κινηματική συνεκτικότητα ρευστού ν (Μυλωνάκου 2018, Βούστρου 2014):

$$Re_o = \frac{U_o^4 R_h}{\nu} = \frac{U_o^2 (L_D w)}{(L_D + w)\nu} \quad (1-2)$$

όπου: $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (για υδάτινες φλέβες) και R_h η υδραυλική ακτίνα.

Στα παρακάτω κεφάλαια θα μελετηθούν κυκλικές και διδιάστατες τυρβώδεις φλέβες αρνητικής άνωσης.

1.3 Βασικές Παράμετροι Ροής Ανωστικών Φλεβών

Οι κυριότερες παράμετροι που επηρεάζουν την ροή μίας φλέβας είναι η ογκομετρική παροχή, η ειδική ορμή και η ειδική άνωση και ορίζονται με την σειρά ως εξής (Fischer *et al.* 1979):

$$Q = \int_A U dA \quad (1-3)$$

$$M = \int_A U^2 dA \quad (1-4)$$

$$B = \int_A \frac{g \Delta \rho}{\rho \alpha} U dA \quad (1-5)$$

όπου:

- A : Η εγκάρσια διατομή της φλέβας
- U : Η μέση χρονικά ταχύτητα κατά τη διεύθυνση του άξονα της φλέβας
- g : Η επιτάχυνση της βαρύτητας
- Δρ : Η διαφορά πυκνότητας μεταξύ ρευστού αποδέκτη και ρευστού φλέβας, Δρ = ρ_α - ρ

Τα παραπάνω μεγέθη περιγράφουν όλη τη ροή μιας φλέβας. Οι ορισμοί των παραπάνω μεγεθών διαφοροποιούνται για κυκλικές και διδιάστατες φλέβες. Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για κυκλικές φλέβες ενώ σε διδιάστατες τα ίδια μεγέθη ορίζονται ανά μονάδα μήκους της σχισμής.

Η μελέτη των φλεβών επιτυγχάνεται με χρήση των αρχικών παραμέτρων της ροής (τιμές στην εκροή) και της διαστατικής ανάλυσης. Η διαστατική ανάλυση είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την υδραυλική και μας δίνει μια καλή εποπτεία στην περιγραφή ενός φαινομένου. Μέσω της διαστατικής ανάλυσης εξάγεται μια συνάρτηση που περιγράφει ένα φυσικό φαινόμενο, αν γνωρίζουμε τις μεταβλητές από τις οποίες αυτό εξαρτάται. Η συνάρτηση αυτή πρέπει να είναι διαστατικά ομογενής. Σε κάποιες περιπτώσεις, οι πολλές μεταβλητές που μπορεί να διέπουν ένα φαινόμενο οδηγούν στην δημιουργία πολύπλοκων σχέσεων. Σε τέτοιες περιπτώσεις για την απλοποίηση των σχέσεων επιλέγονται νέες μεταβλητές συνήθως αδιάστατες, επαναδιατυπώνοντας τη μορφή της εξίσωσης. Τέλος, στις συναρτήσεις που προκύπτουν εμφανίζονται και άγνωστες σταθερές. Οι σταθερές αυτές προσεγγίζονται μέσω πειραματικών δεδομένων (Χριστοδούλου 1985, Κωτσοβίνος 2003).

1.3.1 Βασικές Παράμετροι Κυκλικών Ανωστικών Φλεβών

Στην εκροή κυκλικών φλεβών, από οπή διαμέτρου D , με αρχική ταχύτητα U_o , πυκνότητα ρευστού φλέβας ρ_o και πυκνότητα ρευστού αποδέκτη ρ_α , ορίζονται οι παρακάτω αρχικές τιμές (Fischer *et al.* 1979):

$$\text{Παροχή:} \quad Q_o = \frac{\pi D^2}{4} U_o \quad (1-6)$$

$$\text{Ειδική ορμή:} \quad M_o = Q_o U_o \quad (1-7)$$

$$\text{Ειδική άνωση:} \quad B_o = g \frac{\Delta \rho_o \pi D^2}{\rho_\alpha 4} U_o = g'_{o} Q_o, \quad (1-8)$$

$$\text{Όπου:} \quad \Delta \rho_o = \rho_\alpha - \rho_o$$

$$g'_{o} = \frac{\Delta \rho_o}{\rho_\alpha}, \text{ η φαινόμενη επιτάχυνση της βαρύτητας}$$

Από τη διαστατική ανάλυση για κυκλικές ανωστικές φλέβες, γνωρίζοντας ότι η ροή εξαρτάται από τα: Q_o , M_o , B_o και από την απόσταση s από την πηγή κατά μήκος του άξονα της τροχιάς, ορίζονται δύο χαρακτηριστικές κλίμακες μήκους (Fischer *et al.* 1979):

$$l_Q = \frac{Q_o}{M_o^{1/2}}, \quad l_M = \frac{M_o^{3/4}}{|B_o|^{1/2}} \quad (1-9)$$

- Για μήκη πολύ μεγαλύτερα από l_Q η παροχή λόγω συμπαράσυρσης είναι κατά πολύ μεγαλύτερη της αρχικής παροχής Q_o , ενώ για μικρότερα μήκη από l_Q η παροχή λόγω συμπαράσυρσης είναι αμελητέα και η αρχική παροχή είναι σημαντική.
- Για μήκη πολύ μεγαλύτερα από l_M , η φλέβα συμπεριφέρεται ως πλούμιο (plume), δηλαδή η ροή χαρακτηρίζεται από ανωστικές δυνάμεις, ενώ για μήκη μικρότερα από l_M , η φλέβα συμπεριφέρεται ως απλή φλέβα (jet) και άρα η ροή χαρακτηρίζεται από τις δυνάμεις αρχικής ποσότητας κίνησης.

Ακόμη ορίζονται οι αδιάστατοι αριθμοί Richardson και Froude οι οποίοι εκφράζουν τον λόγο των αδρανειακών δυνάμεων ως προς τις ανωστικές. Μεγάλες τιμές Froude ή μικρές τιμές Richardson υποδηλώνουν ροή που προσεγγίζει την απλή φλέβα (jet), ενώ μικρές τιμές Froude ή μεγάλες τιμές Richardson υποδηλώνουν ροή που προσεγγίζει το πλούμιο (plume).

$$Ri_o = \frac{l_Q}{l_M} = \frac{Q_o |B_o|^{1/2}}{M_o^{5/4}} \quad (1-10)$$

$$F_o = \frac{U_o}{\sqrt{|g'_{o}| D}} \quad (1-11)$$

$$\text{Ισχύει: } Ri_o = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{F_o} \quad (1-12)$$

Ισχύουν επίσης οι παρακάτω ανισώσεις:

$$F_p \leq F_o$$

$$Ri_p \geq Ri_o$$

Όπου F_p και Ri_p οι τιμές των Froude και Richardson αντίστοιχα για πλούμιο.

Οι ανωστικές φλέβες λειτουργούν ως μηχανισμοί αραίωσης (διάλυσης). Η αραίωση S σε μία θέση της φλέβας με πυκνότητα ρ ορίζεται ως:

$$S = \frac{g'_o}{g'} = \frac{\rho_\alpha - \rho_o}{\rho_\alpha - \rho} \quad (1-13)$$

Ως ελάχιστη αραίωση ορίζεται η αραίωση κατά τον άξονα της φλέβας με $\rho = \rho_c$, όπου ο δείκτης c δηλώνει τον άξονα της φλέβας. Τέλος, ορίζεται η μέση στη διατομή αραίωση S_{ave} ως ο λόγος της παροχής σε μία θέση προς την αρχική παροχή.

$$S_{ave} = \frac{Q}{Q_o} \quad (1-14)$$

1.3.2 Βασικές Παράμετροι Διδιάστατων Ανωστικών Φλεβών

Στην εκροή διδιάστατων φλεβών από σχισμή μήκους L_D και πλάτους w , με αρχική ταχύτητα U_o , με πυκνότητα ρευστού φλέβας ρ_o και πυκνότητα ρευστού αποδέκτη ρ_α , ορίζονται οι παρακάτω αρχικές τιμές (Fischer *et al.* 1979):

$$\text{Παροχή (ανά μονάδα μήκους): } q_o = w U_o \quad (1-15)$$

$$\text{Ειδική ορμή: } m_o = w U_o^2 \quad (1-16)$$

$$\text{Ειδική άνωση: } \beta_o = w U_o g \frac{\Delta\rho_o}{\rho_\alpha} \quad (1-17)$$

$$\text{Όπου: } \Delta\rho_o = \rho_\alpha - \rho_o$$

Από την διαστατική ανάλυση για διδιάστατες ανωστικές φλέβες, ορίζονται οι χαρακτηριστικές κλίμακες μήκους l_Q , l_M ως εξής (Fischer *et al.* 1979):

$$l_Q = w \quad (1-18)$$

$$l_M = w F_o^{\frac{4}{3}} \quad (1-19)$$

Οι αριθμοί Richardson και Froude ορίζονται ως εξής (Kotsovinos & List 1977, Angelidis, 2002, Jirka, 2006):

$$Ri_o = \frac{q_o^3 |\beta_o|}{m_o^3} \quad (1-20)$$

$$F_o = \frac{U_o}{\sqrt{g \frac{|\Delta\rho_o|}{\rho_\alpha} w}} \quad (1-21)$$

Η αραίωση S σε μία θέση της φλέβας με πυκνότητα ρ ορίζεται ως:

$$S = \frac{g'_o}{g'} = \frac{\rho_\alpha - \rho_o}{\rho_\alpha - \rho} \quad (1-22)$$

Ως ελάχιστη αραίωση ορίζεται η αραίωση κατά τον άξονα της φλέβας με $\rho = \rho_c$, όπου ο δείκτης c δηλώνει τον άξονα της φλέβας.

Η μέση στη διατομή αραίωση S_{ave} ορίζεται ως:

$$S_{ave} = \frac{q}{q_o} \quad (1-23)$$

2 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

2.1 Γενικά

Εκτεταμένη έρευνα έχει γίνει στις φλέβες θετικής άνωσης κυρίως επειδή βρίσκουν εφαρμογή στη διάθεση των αστικών λυμάτων σε υδάτινους αποδέκτες. Η διάθεση αστικών λυμάτων αποτελεί ένα διαχρονικό ζήτημα, ειδικά λόγω της συγκέντρωσης ολοένα και μεγαλύτερων πληθυσμών σε αστικά κέντρα με συνέπεια μεγαλύτερες παροχές αστικών λυμάτων. Οι ανωστικές φλέβες έχουν μελετηθεί εντατικά μέσω πειραμάτων, ενώ έχουν παρουσιαστεί ολοκληρωματικά μοντέλα που προσομοιώνουν με επιτυχία τα κύρια χαρακτηριστικά της ροής και χρησιμοποιούνται ευρέως λόγω της απλότητάς τους σε σύγκριση με πολύπλοκους κώδικες CFD (Computational Fluid Dynamics).

Ο Kotsovinos (1975) πραγματοποίησε πειράματα καθώς και θεωρητική ανάλυση πάνω σε διδιάστατες φλέβες θετικής άνωσης. Σχετική είναι η δημοσίευση Kotsovinos & List (1977). Οι Fischer *et al.* (1979) παρουσιάζουν στοιχεία για κυκλικές και διδιάστατες φλέβες θετικής άνωσης. Οι Papanicolaou & List (1988) παρουσίασαν πειραματικά δεδομένα από μετρήσεις χρησιμοποιώντας τις τεχνικές LDA (Laser Doppler Anemometer) και LIF (Laser Induced Fluorescence). Τα περισσότερα ολοκληρωματικά μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί βασίστηκαν στις παραδοχές των Morton *et al.* (1956) όπως το ολοκληρωματικό μοντέλο του Fan (1967). Ο Angelidis (2002) παρουσίασε ολοκληρωματικό μοντέλο για διδιάστατες ανωστικές φλέβες. Οι Agrawal & Prasad (2003) πρότειναν ολοκληρωματικό μοντέλο βασισμένο στη θεωρία της ομοιότητας. Οι Wang & Law (2002) παρουσίασαν μοντέλο 2^{ης} τάξης για κατακόρυφη φλέβα σε ακίνητο ομογενή αποδέκτη. Ο Jirka (2004) παρουσίασε ολοκληρωματικό μοντέλο (Corjet) για διάφορες γωνίες παροχέτευσης, για διάφορες συνθήκες υδάτινου αποδέκτη (στρωματωμένος ή μή, κινούμενος ή στάσιμος). Ο Yannopoulos (2006) πρότεινε ολοκληρωματικό μοντέλο 2^{ης} τάξεως για κυκλικές και επίπεδες (διδιάστατες) ανωστικές φλέβες.

Η έρευνα σε φλέβες αρνητικής άνωσης είναι κατά κύριο λόγο μεταγενέστερη και οφείλεται στην αύξηση υγρών αποβλήτων βαρύτερων από το ρευστό του αποδέκτη, κυρίως λόγω της ανάπτυξης των μονάδων αφαλάτωσης. Οι εργασίες που έχουν πραγματοποιηθεί εξετάζουν την επιρροή της γωνίας παροχέτευσης της φλέβας στη μεταβολή των γεωμετρικών της χαρακτηριστικών καθώς και της αραίωσης.

Για πλήρως τυρβώδη ροή και για περιπτώσεις που ισχύει η παραδοχή Boussinesq, με βάση την οποία οι διαφορές πυκνότητας σε κάθε σημείο της φλέβας είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις απόλυτες τιμές πυκνότητας, οι παράμετροι της ροής μπορούν μέσω αδιαστατοποίησης να περιγραφούν από σταθερές.

- Για κυκλικές φλέβες, που εκρέουν από στόμιο διαμέτρου D , υπό γωνία θ_0 και με αρχικό πυκνομετρικό αριθμό Froude $F_0 \gg 1$ ισχύουν οι σχέσεις

- (Roberts & Toms 1987, Roberts *et al.* 1997, Papakonstantis *et al.* 2011a, b, Papakonstantis & Tsatsara 2018, 2019):

$$\frac{X}{DF_o} = c_1, \quad \frac{Z}{DF_o} = c_2, \quad \frac{S}{F_o} = c_3 \quad (2-1)$$

όπου X, Z οι συντεταγμένες σημείου της τροχιάς της φλέβας, S η αραίωση στο σημείο αυτό και c_1, c_2, c_3 σταθερές που εξαρτώνται από τη γωνία παροχέτευσης ($c_i = c_i(\theta_o)$).

- Για διδιάστατες φλέβες που εκρέουν από σχισμή πλάτους w , μήκους L_D , υπό γωνία θ_o και με αρχικό πυκνομετρικό αριθμό Froude $F_o \gg 1$ ισχύουν οι σχέσεις (Campbell & Turner 1989, Zhang & Baddour 1997, Jirka 2006, Βούστρου 2014, Μυλωνάκου 2018) :

$$\frac{X}{wF_o^{\frac{4}{3}}} = k_1, \quad \frac{Z}{wF_o^{\frac{4}{3}}} = k_2, \quad \frac{S}{F_o^{\frac{2}{3}}} = k_3 \quad (2-2)$$

όπου X, Z οι συντεταγμένες σημείου της τροχιάς της φλέβας, S η αραίωση στο σημείο αυτό και k_1, k_2, k_3 σταθερές, που εξαρτώνται από τη γωνία παροχέτευσης ($k_i = k_i(\theta_o)$).

Στη συνέχεια η βιβλιογραφική ανασκόπηση εστιάζεται σε πειραματικές εργασίες και εργασίες μοντελοποίησης της ροής με χρήση απλών μοντέλων. Τα αποτελέσματα των διάφορων εργασιών που θα εξεταστούν είναι της παραπάνω μορφής (βλ. Σχέσεις 2-1, 2-2). Ειδικότερα, όπως θα αναλυθεί και στο Κεφάλαιο 3, χρησιμοποιούνται οι παρακάτω συμβολισμοί των κύριων παραμέτρων ροής: Z_f είναι το τερματικό ύψος ανόδου του εξωτερικού ορίου της φλέβας (steady-state), Z_c είναι το μέγιστο ύψος ανόδου του άξονα, X_z η οριζόντια θέση εμφάνισης του τερματικού ύψους ανόδου, X_{ic} η θέση επιστροφής του άξονα στο επίπεδο παροχέτευσης, X_i η θέση επιστροφής του εξωτερικού ορίου στο επίπεδο παροχέτευσης, S_t η αξονική (ελάχιστη) αραίωση (διάλυση) στο σημείο του τερματικού ύψους, S_i η αξονική (ελάχιστη) αραίωση στο σημείο επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης. Ακολουθεί βιβλιογραφική ανασκόπηση εργασιών πάνω σε κυκλικές και διδιάστατες φλέβες αρνητικής άνωσης, κατακόρυφες ή κεκλιμένες, σε στάσιμο ομογενή αποδέκτη.

2.2 Κυκλικές Φλέβες Αρνητικής Άνωσης

2.2.1 Κατακόρυφες Φλέβες Αρνητικής Άνωσης

Η πρώτη πειραματική μελέτη φλέβων αρνητικής άνωσης έγινε από τον Turner (1966), που προσδιόρισε το τερματικό ύψος ανόδου για κατακόρυφη παροχέτευση προς την ελεύθερη επιφάνεια σε ακίνητο αποδέκτη. Ο Abraham (1967) προσέγγισε θεωρητικά το τερματικό ύψος ανόδου φλέβας αρνητικής άνωσης σε μόνιμη κατάσταση. Ο Δημητρίου (1978) διερεύνησε πειραματικά κατακόρυφες κυκλικές φλέβες αρνητικής άνωσης προσδιορίζοντας το αρχικό τερματικό ύψος (μέγιστο ύψος ανόδου στην αρχή της ροής) καθώς και το τελικό τερματικό ύψος (μέγιστο ύψος σε μόνιμη κατάσταση), όπως επίσης και κατανομές ταχύτητας και συγκέντρωσης στο πεδίο ροής της φλέβας. Οι

McLellan & Randall (1986) μελέτησαν πειραματικά το τερματικό ύψος και την αραίωση σε κατακόρυφες φλέβες αρνητικής άνωσης.

Οι Baines *et al.* (1990) έκαναν πειράματα σε κυκλικές και διδιάστατες φλέβες αρνητικής άνωσης. Οι Zhang & Baddour (1998) επίσης μελέτησαν κατακόρυφες κυκλικές φλέβες αρνητικής άνωσης ακόμη και για μικρούς πυκνομετρικούς αριθμούς Froude. Οι Bloomfield & Kerr (1998) διερεύνησαν πειραματικά το αρχικό και τελικό τερματικό ύψος κατακόρυφων φλεβών αρνητικής άνωσης σε ομογενή και στρωματωμένο υδάτινο αποδέκτη. Οι Friedman & Katz (2000) πραγματοποίησαν πειραματική μελέτη σε ομογενή και στρωματωμένο αποδέκτη. Οι Bloomfield & Kerr (2000), παρουσίασαν θεωρητικό μοντέλο που εκτιμά το αρχικό και τελικό τερματικό ύψος σε κατακόρυφες φλέβες αρνητικής άνωσης.

Οι Papanicolaou & Kokkalis (2008) μελέτησαν πειραματικά κατακόρυφες φλέβες αρνητικής άνωσης που διοχετεύονται προς τα κάτω σε ομογενή αποδέκτη. Ειδικότερα, μελέτησαν φλέβες νερού σε αλατόνερο και θερμές φλέβες σε κρύο νερό. Επίσης μέσω ολοκληρωματικού μοντέλου προσομοίωσης της ροής της φλέβας έγινε η διαπίστωση ότι ο συντελεστής συμπαράσυρσης πρέπει να μειωθεί για να προσεγγιστούν τα πειραματικά δεδομένα του τερματικού βάθους. Πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζονται και σε εργασίες που μελετούν εκροή υπό διάφορες γωνίες, όπως οι εργασίες των Roberts & Toms (1987), του Lindberg (1994) και των Papakonstantis *et al.* (2011a).

2.2.2 Κεκλιμένες Φλέβες Αρνητικής Άνωσης

Η πρώτη πειραματική μελέτη κεκλιμένων φλεβών αρνητικής άνωσης έγινε από τους Zeitoun *et al.* (1970) για αρχικές γωνίες παροχέτευσης 30°, 45°, 60°. Προέκυψαν αποτελέσματα για το τερματικό ύψος ανόδου και την αραίωση στη θέση αυτή, ενώ ακόμη προσδιορίστηκε η οριζόντια απόσταση από το στόμιο ως τη θέση επιστροφής του άνω ορίου της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης. Προέκυψε ότι για γωνία 60° ως προς το οριζόντιο επίπεδο, διαγράφεται το μέγιστο μήκος τροχιάς με συνέπεια τη μέγιστη αραίωση. Οι Roberts & Toms (1987) βασιζόμενοι στο ότι η μέγιστη αραίωση προκύπτει για γωνία παροχέτευσης 60°, μελέτησαν για την γωνία αυτή τη ροή φλέβας αρνητικής άνωσης προσδιορίζοντας διάφορες γεωμετρικές παραμέτρους της φλέβας και την αραίωση. Οι Roberts *et al.* (1997) μέτρησαν το τερματικό ύψος ανόδου και την θέση επιστροφής στον πυθμένα μέσω τεχνικής LIF (Laser Induced Fluorescence) και την αντίστοιχη αραίωση με αγωγιμόμετρα.

Ο Lindberg (1994) μελέτησε πειραματικά τροχιές φλεβών αρνητικής άνωσης για γωνίες παροχέτευσης 30°, 45°, 60° σε ήρεμο και με εγκάρσια ροή αποδέκτη. Οι Bloomfield & Kerr (2002) διενήργησαν πειράματα σε φλέβες αρνητικής άνωσης για μεγάλο εύρος γωνιών εκτόξευσης μεταξύ 30° και 90°. Στην εργασία τους γίνεται διάκριση μεταξύ του αρχικού και τελικού τερματικού ύψους και προέκυψε ότι το μέγιστο αρχικό τερματικό ύψος παρατηρείται στην κατακόρυφη παροχέτευση ενώ το μέγιστο τελικό για γωνία παροχέτευσης 80°. Δεδομένου ότι χρησιμοποιήθηκε μικρή δεξαμενή για τα πειράματα (επιδράσεις ορίων) καθώς και το γεγονός ότι χρησιμοποιήθηκε πλέγμα στην εκροή για

επίτευξη τυρβώδους ροής, πιθανώς να έχουν επηρεάσει τα αποτελέσματα. Οι Cipollina *et al.* (2005) μελέτησαν πειραματικά φλέβες αρνητικής άνωσης για γωνίες παροχέτευσης 30°, 45°, 60° και προέκυψαν αποτελέσματα σχετικά με το τελικό τερματικό ύψος του εξωτερικού ορίου και του άξονα της φλέβας, την οριζόντια απόσταση από την εκροή μέχρι το τερματικό ύψος και την οριζόντια απόσταση μέχρι τη θέση επιστροφής της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης. Η μεγάλη διαφορά πυκνότητας μεταξύ ρευστού φλέβας και αποδέκτη, της τάξης 5-18 %, ενδέχεται να επηρεάζει τα πειραματικά τους αποτελέσματα.

Η διδακτορική διατριβή του Kikkert (2006) και η εργασία των Kikkert *et al.* (2007), συνοψίζουν αποτελέσματα γεωμετρικών χαρακτηριστικών καθώς και κατανομές συγκεντρώσεων για κυκλικές φλέβες αρνητικής άνωσης σε ομογενή στάσιμο αποδέκτη, σε ένα εύρος γωνιών 0° – 75° ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Για τις μετρήσεις χρησιμοποιήθηκαν οι τεχνικές LA (Light Attenuation) και LIF (Laser Induced Fluorescence). Τα αποτελέσματα της αραίωσης, αφορούν την ολοκληρωμένη αραίωση στο πλάτος της φλέβας, γεγονός το οποίο πρέπει να ληφθεί υπόψη για τυχόν συγκρίσεις αποτελεσμάτων. Οι Nemlioglu & Roberts (2006) μελέτησαν φλέβες αρνητικής άνωσης για γωνίες εκτόξευσης 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°. Τα αποτελέσματα προέκυψαν μέσω τεχνικής 3D-LIF και αφορούν το τελικό τερματικό ύψος της φλέβας, την οριζόντια απόσταση μέχρι τη θέση επιστροφής της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης και την αντίστοιχη αραίωση.

Ο Παπακωνσταντής (2009) πραγματοποίησε ολοκληρωμένη διερεύνηση ροής φλεβών αρνητικής άνωσης, θεωρητικής, πειραματικής και υπολογιστικής φύσεως, μέσω της διδακτορικής του διατριβής, αποτελέσματα της οποίας δημοσιεύτηκαν στις εργασίες Papakonstantis *et al.* (2007), (2011a) και (2011b). Εκτελέστηκε πλήθος πειραμάτων για γωνίες παροχέτευσης 45°, 60°, 75°, 80°, 85° και 90° από τα οποία προέκυψαν αποτελέσματα για το αρχικό και τελικό τερματικό ύψος του άνω ορίου της φλέβας, την οριζόντια απόσταση του τερματικού ύψους από το στόμιο παροχέτευσης, όπως επίσης και για την οριζόντια απόσταση του εξωτερικού (άνω) ορίου από το στόμιο μέχρι την περιοχή επιστροφής της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης. Ακόμη, για γωνίες 45°, 60° και 75° πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις συγκέντρωσης στις θέσεις του τελικού τερματικού ύψους και στη θέση επιστροφής της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης και προέκυψαν αποτελέσματα για την ελάχιστη αραίωση, το μέγιστο ύψος του άξονα και την οριζόντια θέση του άξονα στην περιοχή επιστροφής της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης.

Οι Shao & Law (2010) μελέτησαν πειραματικά φλέβες αρνητικής άνωσης, σε στάσιμο αποδέκτη, για γωνίες παροχέτευσης 30° και 45°. Χρησιμοποιήθηκαν οι τεχνικές PIV (Particle Image Velocimetry) και PLIF (Planar Laser Induced Fluorescence) και εξετάστηκε η επίδραση της απόστασης από τον πυθμένα στα χαρακτηριστικά της ροής. Προέκυψαν αποτελέσματα για το τελικό τερματικό ύψος της φλέβας και την οριζόντια θέση του, καθώς και για την οριζόντια απόσταση μεταξύ του σημείου επιστροφής της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης και του στομίου παροχέτευσης. Επίσης μετρήθηκε η αξονική αραίωση. Οι Lai & Lee (2012) έκαναν πειράματα σε φλέβες αρνητικής άνωσης για ένα εύρος γωνιών 15° – 60° και παρουσίασαν αποτελέσματα για τα κύρια

γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τις αραιώσεις της φλέβας στο σημείο τελικού τερματικού ύψους και στο σημείο επιστροφής της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης. Ο Oliver (2012) διενήργησε πειράματα για ένα εύρος γωνιών 15°–75° προσδιορίζοντας τα κύρια γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τις αραιώσεις για φλέβες αρνητικής άνωσης. Συσχέτισε τις διακυμάνσεις των αραιώσεων προγενέστερων εργασιών στη θέση επιστροφής με την επίδραση του πυθμένα. Οι Abessi & Roberts (2015) δημοσίευσαν αποτελέσματα σχετικά με εκροή φλεβών αρνητικής άνωσης σε βαθιά νερά, ενώ συμπέραναν ότι για γωνίες 45°–65° οι αραιώσεις δεν μεταβάλλονται σημαντικά. Ο Nikiforakis (2015) πραγματοποίησε πειραματική και αριθμητική μελέτη κεκλιμένων φλεβών αρνητικής άνωσης. Εκτέλεσε πειράματα φλεβών αρνητικής άνωσης σε ακίνητο ομογενή αποδέκτη, για γωνίες παροχέτευσης 30°, 45° και 60° οι οποίες επιστρέφουν σε κεκλιμένο πυθμένα ($\varphi=5^\circ$ και 10°). Οι Crowe *et al.* (2016) μελέτησαν πειραματικά φλέβες με την τεχνική Particle Image Velocimetry (PIV) για γωνίες 15°, 45°, 60°, 70° και 75°. Τέλος, σε πρόσφατη δημοσίευση οι Parakonstantis & Tsatsara (2018) από πειράματα οπτικοποίησης της ροής για γωνίες 15°, 30°, 35°, 50° και 70° παρουσίασαν αποτελέσματα για χαρακτηριστικά της τροχιάς του εξωτερικού ορίου της φλέβας. Οι ίδιοι συγγραφείς ύστερα από μετρήσεις συγκέντρωσης σε χαρακτηριστικές θέσεις της ροής για γωνίες 35°, 50° και 70° παρουσίασαν αποτελέσματα για γεωμετρικά χαρακτηριστικά του άξονα και την ελάχιστη αραιώση (Parakonstantis & Tsatsara 2019).

Σχετικά με τα ολοκληρωματικά μοντέλα προσομοίωσης, οι Cipollina *et al.* (2004) παρουσίασαν μοντέλο με κατανομές ταχύτητας και συγκέντρωσης Gauss, ενώ χρησιμοποίησαν σταθερό συντελεστή συμπαράσυρσης. Ο Jirka (2004) παρουσίασε το μαθηματικό μοντέλο προσομοίωσης Corjet για την εκτίμηση των κύριων χαρακτηριστικών ροής (γεωμετρικών και διάλυσης) σε ομογενή ή στρωματωμένο, ακίνητο ή μη αποδέκτη για την εκάστοτε αρχική γωνία παροχέτευσης. Το μοντέλο Corjet εφαρμόζονταν ευρέως σε φλέβες θετικής άνωσης. Ωστόσο, το μοντέλο δεν προβλέπει ικανοποιητικά το σύνολο των χαρακτηριστικών ροής φλεβών αρνητικής άνωσης, τα οποία και υποεκτιμά (Palomar *et al.* 2012). Οι Vafeiadou *et al.* (2005) παρουσίασαν αποτελέσματα αριθμητικών προσομοιώσεων με το μοντέλο CFX. Στις εργασίες των Kikkert (2006) και Kikkert *et al.* (2007) δόθηκαν αναλυτικές λύσεις για την εκτίμηση των βασικών χαρακτηριστικών ροής κεκλιμένων φλεβών αρνητικής άνωσης σε στάσιμο ομογενή αποδέκτη. Οι αναλυτικές λύσεις δίνονται στο Κεφάλαιο 3. Τα γεωμετρικά αποτελέσματα για γωνίες μέχρι 60° είναι σχετικά ικανοποιητικά. Τα αποτελέσματα υποεκτιμούν την διάλυση στο τερματικό ύψος και στη θέση επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης.

Οι Paranicolaou *et al.* (2008) παρουσίασαν ολοκληρωματικό μοντέλο προσομοίωσης της ροής φλεβών αρνητικής άνωσης, στο οποίο γίνεται θεώρηση κατονομής τύπου (Gauss) και ομοιόμορφης κατανομής (Top-Hat). Προτείνεται η χρήση μειωμένου συντελεστή συμπαράσυρσης για την ικανοποιητική προσομοίωση των χαρακτηριστικών φλεβών αρνητικής άνωσης. Στην διδακτορική διατριβή του ο Παπακωνσταντής (2009), έκανε προσομοίωση ροής κεκλιμένων φλεβών αρνητικής άνωσης μέσω ολοκληρωματικού μοντέλου σε ομογενή στάσιμο αποδέκτη, τα αποτελέσματα της οποίας προσέγγισαν

ικανοποιητικά τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα που αφορούσαν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της ροής. Στο ολοκληρωματικό μοντέλο έγινε χρήση μειωμένου συντελεστή συμπαράσυρσης, συμπέρασμα στο οποίο είχαν οδηγηθεί οι Papanicolaou *et al.* (2008). Θεωρήθηκε κατανομή ταχύτητας και συγκέντρωσης τύπου Gauss (Gaussian Model - GM) και ομοιόμορφης κατανομής (Top-Hat Model - THM).

Οι Yannopoulos & Bloutsos (2012) παρουσίασαν μοντέλο στο οποίο γίνεται η θεώρηση ότι από την κύρια ροή μίας κεκλιμένης φλέβας αρνητικής άνωσης διαφεύγει ρευστό (Escaping Mass Approach-EMA model). Τα αποτελέσματα προσέγγιζαν ικανοποιητικά πειραματικά αποτελέσματα. Οι Lai & Lee (2012) παρουσίασαν το μοντέλο Visjet χρησιμοποιώντας μια εναλλακτική εκτίμηση του συντελεστή συμπαράσυρσης. Οι προβλέψεις του μοντέλου προσέγγιζαν με απόκλιση 10-15% τα πειραματικά αποτελέσματα των γεωμετρικών χαρακτηριστικών και με απόκλιση 30% την αραίωση για γωνίες μέχρι 60°. Σε εργασία τους οι Oliver *et al.* (2013) παρουσίασαν ένα τροποποιημένο ολοκληρωματικό μοντέλο (Reduced Buoyancy Flux-RBF model) για την εκτίμηση των κύριων χαρακτηριστικών ροής φλεβών αρνητικής άνωσης.

Οι Christodoulou *et al.* (2014) πραγματοποίησαν σύγκριση των παρακάτω ολοκληρωματικών μοντέλων για την προσομοίωση κυκλικών φλεβών αρνητικής άνωσης: Reduced Jet Entrainment Model (Papanicolaou *et al.* 2008), Visjet (Lai & Lee, 2012), Escaping Mass Approach (Yannopoulos & Bloutsos, 2012), Reduced Buoyancy Flux Model (Oliver *et al.* 2013). Ο Nikiforakis (2015) πραγματοποίησε πειραματική και αριθμητική μελέτη κεκλιμένων φλεβών αρνητικής άνωσης. Ανέπτυξε ένα τροποποιημένο μοντέλο Corjet, στο οποίο λαμβάνεται υπόψη η διαφυγή ρευστού από την κύρια ροή της φλέβας. Μέρος των αποτελεσμάτων δημοσιεύθηκε στην εργασία Nikiforakis & Stamou (2014). Ο Κιουλέπογλου (2018) πραγματοποίησε αριθμητικές προσομοιώσεις με χρήση του λογισμικού Ansys CFX και σύγκριση των αποτελεσμάτων με τις προβλέψεις άλλων μοντέλων.

Στους παρακάτω Πίνακες 2-1, 2-2, συνοψίζονται τα κυριότερα πειραματικά αποτελέσματα κεκλιμένων κυκλικών φλεβών αρνητικής άνωσης:

Πίνακας 2-1: Διάφορα πειραματικά αποτελέσματα για τα Z_f , X_z , X_i

	θ_0	Papakonstantis & Tsatsara (2018)	Oliver (2012)	Lai & Lee (2012)	Papakonstantis <i>et al.</i> (2011a)	Kikkert (2006) [LIF]	Kikkert (2006) [LA]	Cipollina <i>et al.</i> (2005)
$\frac{Z_f}{DF_0}$	30	1,12	1,15	0,95		1,2	1,06	1,08
	35	1,22						
	38			1,2		1,51		
	45		1,65	1,58	1,58	1,77	1,71	1,61
	50	1,83						
	52			1,69		2,28		
	60		2,21	2,08	2,14	2,45	2,28	2,32
	65					2,5		
	70	2,35	2,44					
	75		2,53		2,48		2,57	
	80				2,6			
85				2,53				
90				1,91				
$\frac{X_z}{DF_0}$	30	1,83	1,75	1,95		1,84	1,78	1,95
	35	1,9						
	38			1,95		2,01		
	45		1,75	2,09	2,03	2	1,85	1,8
	50	1,94						
	52			1,87		2,09		
	60		1,53	1,78	1,83	1,79	1,65	1,42
	65					1,5		
	70	1,22	1,13					
	75		0,97		1,15		1	
	80				0,88			
85				0,64				
$\frac{X_i}{DF_0}$	30	4,01						
	35	3,98						
	38							
	45				3,78			
	50	4,04						
	52							
	60				3,57			
	65							
	70	3,05						
	75				2,42			
	80				2,08			
85				1,63				

Πίνακας 2-2: Διάφορα πειραματικά αποτελέσματα για τα Z_c , X_{ic} , S_t , S_i

	θ_0	Papakonstantis & Tsatsara (2019)	Oliver (2012)	Lai & Lee (2012)	Papakonstantis <i>et al.</i> (2011b)	Kikkert (2006) [LIF]	Kikkert (2006) [LA]	Cipollina <i>et al.</i> (2005)
$\frac{Z_c}{DF_0}$	30		0,66	0,65		0,68	0,54	0,79
	35	0,79						
	38			0,87				
	45		1,09	1,19	1,17		1,07	1,17
	50	1,28						
	52			1,34		1,54		
	60		1,61	1,64	1,68	1,71	1,46	1,77
	65							
	70	1,81	1,84					
	75		1,89		1,93			
$\frac{X_{ic}}{DF_0}$	30		3,08	3,18			3,17	3,03
	35	3,23						
	38			3,19				
	45		3,13	3,34	3,16		3,3	2,82
	50	3						
	52							
	60		2,76	2,84	2,75		2,78	2,25
	65							
	70	1,94	2					
	75		1,67		1,8			
$\frac{S_t}{F_0}$	30		0,34	0,4				
	35	0,45						
	38			0,45				
	45		0,39	0,45	0,52			
	50	0,57						
	52			0,47				
	60		0,42	0,44	0,56			
	65							
	70	0,47						
75		0,39		0,51				
$\frac{S_i}{F_0}$	30		0,84	0,82				
	35	1,2						
	38			0,99				
	45		1,22	1,09	1,55			
	50	1,69						
	52			1,1				
	60		1,55	1,07	1,68			
	65							
	70	1,76						
75		1,53		1,67				

2.3 Διδιάστατες Φλέβες Αρνητικής Άνωσης

Η βιβλιογραφία που αφορά διδιάστατες φλέβες αρνητικής άνωσης είναι αρκετά περιορισμένη σε σχέση με αυτήν των κυκλικών. Τα περισσότερα πειραματικά δεδομένα αφορούν φλέβες κατακόρυφης εκροής ($\theta_0 = 90^\circ$) και εξετάζουν τον προσδιορισμό του τερματικού ύψους ανόδου.

Οι Campbell & Turner (1989) μελέτησαν πειραματικά την κατακόρυφη εκροή αλατόνευρου σε αποδέκτη με καθαρό νερό και προσδιόρισαν το τερματικό ύψος ανόδου της φλέβας. Οι Baines *et al.* (1990) προσέγγισαν τις διδιάστατες φλέβες αρνητικής άνωσης από θεωρητική σκοπιά και πειραματικώς μέσω οπτικοποίησης της ροής. Και στις δύο παραπάνω εργασίες αδιαστατοποιήθηκε το τερματικό ύψος ανόδου καταλλήλως με τον όρο $wF_o^{\frac{4}{3}}$, όπου F_o ο πυκνομετρικός αριθμός Froude στην εκροή του στομίου. Ωστόσο το αδιαστατοποιημένο τερματικό ύψος των Baines *et al.* (1990) ήταν περίπου το ένα τρίτο από αυτό που προέκυψε από τους Campbell & Turner (1989).

Οι Zhang & Baddour (1997) μελέτησαν διδιάστατες φλέβες αρνητικής άνωσης μέσω πειραμάτων κατακόρυφης εκροής από σχισμή, αλατόνευρου σε ακίνητο ομογενή αποδέκτη (δεξαμενή). Η σχισμή ήταν μήκους 15 cm και πλάτους 0.12–4 cm, ενώ η δεξαμενή ήταν διαστάσεων 150 cm x 15 cm x 120 cm. Μέσω οπτικής παρατήρησης προέκυψε η ύπαρξη τυρβωδών στροβίλων στο πεδίο ροής της φλέβας, οι οποίοι για μεγάλους πυκνομετρικούς αριθμούς Froude, φαίνεται να είναι ασταθείς (unstable fronts). Ακόμη, μέσω διαστατικής ανάλυσης, το τελικό τερματικό ύψος αδιαστατοποιήθηκε ως προς την κλίμακα μήκους $l_M = w F_o^{\frac{4}{3}}$. Τα παραπάνω εφαρμόζονται για πυκνομετρικούς αριθμούς Froude $F_o > 7$, ενώ η σταθερά αδιαστατοποίησης προσδιορίστηκε πειραματικά ίση με 1.59.

Ο Μήνος (2019) διερεύνησε πειραματικά κατακόρυφες διδιάστατες φλέβες αρνητικής άνωσης μέσω τεχνικών σκιαγράφησης (Shadowgraph) και φθορισμού επαγόμενου από επίπεδο φύλλο Laser (PLIF). Η πειραματική διάταξη αφορούσε εκροή αλατόνευρου από σχισμή μήκους 20mm και πλάτους 0.05–2.5mm, σε δεξαμενή καθαρού νερού διαστάσεων 0.7m x 1.0m x 0.8m. Η φλέβα ήταν περιορισμένη μεταξύ δύο κατακόρυφων τεμαχίων Plexiglas. Προέκυψαν αποτελέσματα σχετικά με το τερματικό ύψος ανόδου καθώς και τη μέση συγκέντρωση στην διατομή. Επιπλέον, ανέπτυξε αριθμητικό μοντέλο πρόβλεψης του τερματικού ύψους ανόδου της φλέβας το οποίο και εκτιμά ότι $Z_f/l_M = 1.35$.

Η διερεύνηση κεκλιμένων διδιάστατων φλεβών αρνητικής άνωσης είναι πολύ περιορισμένη. Η Βούστρου (2014) διεξήγαγε δύο ομάδες πειραμάτων ροής διδιάστατων φλεβών αρνητικής άνωσης, που παροχετεύονταν από διατομή 20cm x 0.2cm, για γωνίες εκτόξευσης 0°, 15°, 30°, 45°, 60° και 75° ως προς το οριζόντιο επίπεδο, ενώ η δεξαμενή με καθαρό νερό είχε διαστάσεις 3.0m x 1.5m x 1.0m. Από την πρώτη ομάδα πειραμάτων προέκυψαν αποτελέσματα για το τερματικό ύψος και τη θέση αυτού καθώς και για την οριζόντια απόσταση από το στόμιο μέχρι τη θέση επιστροφής του εξωτερικού ορίου στο επίπεδο παροχέτευσης. Η δεύτερη ομάδα πειραμάτων περιλάμβανε μετρήσεις συγκέντρωσης στη θέση του τερματικού ύψους, καθώς και στη θέση επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης από τις οποίες προέκυψαν αποτελέσματα για την τροχιά του άξονα και την αραιώση. Τα πειράματα εκτελέστηκαν στο Εργαστήριο Εφαρμοσμένης Υδραυλικής του ΕΜΠ. Μέρος των αποτελεσμάτων δημοσιεύθηκαν στην εργασία Voustrou *et al.* (2015). Η

Μυλωνάκου (2018) πραγματοποίησε πειραματική διερεύνηση διδιάστατων φλεβών αρνητικής άνωσης για γωνίες παροχέτευσης ως προς το οριζόντιο επίπεδο 15°, 30°, 45°, 50°, 60°, 75°, 80°, 85° και 90°. Χρησιμοποιήθηκε η ίδια δεξαμενή και το ίδιο σύστημα παροχέτευσης της φλέβας με αυτό που χρησιμοποίησε η Βούστρου (2014). Προέκυψαν αποτελέσματα για το αρχικό και τελικό τερματικό ύψος ανόδου της φλέβας, την οριζόντια απόσταση από το στόμιο έως την θέση του τερματικού ύψους, καθώς και για την οριζόντια απόσταση από το στόμιο έως την θέση επιστροφής του άνω ορίου στο επίπεδο παροχέτευσης.

Παρακάτω, στον Πίνακα 2-3, παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα που έχουν προκύψει για το τερματικό ύψος ανόδου του άνω ορίου της φλέβας. Τα αποτελέσματα είναι αδιαστατοποιημένα ως προς την κλίμακα μήκους $l_M = w F_o^{\frac{4}{3}}$.

Πίνακας 2-3: Αποτελέσματα τερματικού ύψους ανόδου διδιάστατων φλεβών αρνητικής άνωσης.

	θ_0	Μήνος (2019)	Μυλωνάκου (2018)	Βούστρου (2014)	Zhang & Baddour (1997)	Baines <i>et al.</i> (1990)	Campbell & Turner (1989)
$\frac{z_f}{l_M}$	15		0,24	0,25			
	30		0,5	0,49			
	45		0,75	0,71			
	50		0,77				
	60		0,92	0,92			
	75		1,08	1,04			
	80		1,2				
	85		1,16				
	90	1,15	1,13		1,59	0,52	1,30-1,56

Σχετικά με την μαθηματική προσομοίωση της ροής διδιάστατων φλεβών αρνητικής άνωσης, ο Jirka (2006), δημοσίευσε ολοκληρωματικό μοντέλο πρόβλεψης των κύριων παραμέτρων ροής διδιάστατων φλεβών αρνητικής άνωσης για δοθείσα γωνία παροχέτευσης σε ομογενή ή στρωματωμένο, στάσιμο ή κινούμενο αποδέκτη (Corjet). Πρόκειται για επέκταση του ολοκληρωματικού μοντέλου κυκλικών φλεβών αρνητικής άνωσης που είχε παρουσιάσει στην εργασία του ο Jirka (2004). Για κατακόρυφη παροχέτευση το μοντέλο εκτιμά το τερματικό ύψος ως άθροισμα του ύψους του άξονα και του πλάτους οπότε προκύπτει $Z_f = 1.4 l_M$ και $S_t / F_o^{(2/3)} = 0.36$. Πάντως τα αποτελέσματα δεν είχαν συγκριθεί με μετρήσεις λόγω έλλειψής τους. Οι Yannopoulos & Bloutsos (2012) παρουσίασαν μοντέλο στο οποίο γίνεται η θεώρηση ότι από την κύρια ροή μίας κεκλιμένης κυκλικής ή διδιάστατης φλέβας αρνητικής άνωσης διαφεύγει ρευστό (Escaping Mass Approach-EMA model). Τα αποτελέσματα προσέγγιζαν πειραματικά αποτελέσματα ικανοποιητικά.

2.4 Αντικείμενο και Στόχοι Παρούσας Εργασίας

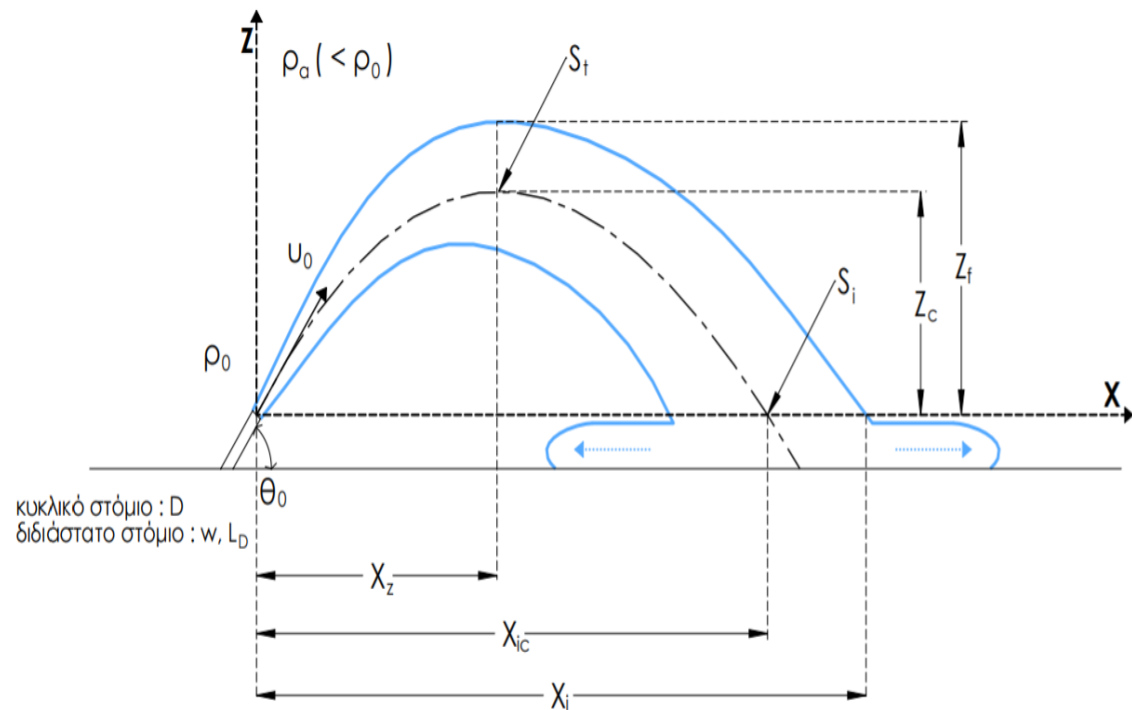
Στην παρούσα εργασία γίνεται μαθηματική προσομοίωση ροής κυκλικών και διδιάστατων φλεβών αρνητικής άνωσης που παροχετεύονται υπό γωνία σε στάσιμο ομογενή αποδέκτη. Για τη μοντελοποίηση της ροής κυκλικών φλεβών χρησιμοποιούνται μοντέλα που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενες εργασίες (Kikkert *et al.* 2007, Paranicolaou *et al.* 2008, Παπακωνσταντής 2009) και συγκρίνονται με μεγάλο εύρος πειραματικών δεδομένων. Για το μοντέλο των Paranicolaou *et al.* (2008) (βλ. επίσης Παπακωνσταντής 2009) δοκιμάζονται διάφορα σενάρια επίλυσης με στόχο την καλύτερη δυνατή πρόβλεψη των αντίστοιχων πειραματικών αποτελεσμάτων. Πραγματοποιείται εκτενής σύγκριση προβλέψεων και μετρήσεων για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της ροής και την αραίωση για διάφορες γωνίες παροχέτευσης.

Από την βιβλιογραφική ανασκόπηση που προηγήθηκε, προκύπτει ότι για τις διδιάστατες φλέβες αρνητικής άνωσης, υπάρχουν περιορισμένες εργασίες παρουσίασης πειραματικών αποτελεσμάτων και ολοκληρωματικών μοντέλων. Στόχος της εργασίας είναι η παρουσίαση ενός ολοκληρωματικού μοντέλου προσομοίωσης τέτοιων ροών και η σύγκρισή του με τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα (Βούστρου 2014, Μυλωνάκου 2018) για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

3 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

3.1 Το Υπό Μελέτη Πρόβλημα

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τη μοντελοποίηση της ροής φλεβών αρνητικής άνωσης, που εκτοξεύονται υπό γωνία ως προς το οριζόντιο επίπεδο σε ακίνητο ομογενή αποδέκτη. Η μελέτη εξετάζει τη ροή από την εκροή του στομίου, το οποίο μπορεί να είναι κυκλικό ή μορφής σχισμής, μέχρι την περιοχή που η φλέβα επιστρέφει στο επίπεδο παροχέτευσης. Τα διάφορα γεωμετρικά χαρακτηριστικά υπολογίζονται ως προς σύστημα συντεταγμένων στο κέντρο του στομίου, ανεξαρτήτως της γεωμετρίας του. Στο Σχήμα 3-1 γίνεται αναπαράσταση της ροής και δίνονται οι κύριοι συμβολισμοί.



Σχήμα 3-1: Σχηματική αναπαράσταση της ροής φλέβας αρνητικής άνωσης υπό γωνία θ_0 σε ακίνητο ομογενή αποδέκτη και κύριοι συμβολισμοί.

Το υπό μελέτη πρόβλημα αφορά την παροχέτευση υγρού με πυκνότητα ρ_0 , με αρχική ταχύτητα U_0 , μέσω στομίου που σχηματίζει γωνία θ_0 με το οριζόντιο επίπεδο και καταλήγει σε στάσιμο ομογενή αποδέκτη πυκνότητας $\rho_a < \rho_0$. Το στόμιο είναι είτε κυκλικής διατομής διαμέτρου D , ή διατομής μορφής σχισμής με πλάτος w και μήκος L_D ($L_D \gg w$). Η ροή εξελίσσεται σε δύο κλάδους, τον ανοδικό και τον καθοδικό. Αρχικά, στον ανοδικό κλάδο, η ροή κυριαρχείται από τις αδρανειακές δυνάμεις και ταυτόχρονα λόγω της συμπαράσυρσης ρευστού από τον αποδέκτη, μειώνεται η πυκνότητα ρευστού της φλέβας. Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, επειδή σε έναν όγκο ελέγχου η συνισταμένη δύναμη είναι προς τα κάτω και αντίρροπη της κατακόρυφης συνιστώσας της ορμής, η τελευταία συνεχώς μειώνεται μέχρι τον μηδενισμό της σε ένα αρχικό τερματικό ύψος.

Μετά τη μονιμοποίηση της ροής (steady state) το ύψος αυτό μειώνεται και ορίζεται ως το τελικό τερματικό ύψος Z_f . Στην συνέχεια, υπό την επίδραση των ανωστικών δυνάμεων η ροή της φλέβας κατέρχεται, μέχρι να επιστρέψει στον πυθμένα σε κάποια απόσταση από το στόμιο παροχέτευσης. Στον καθοδικό κλάδο η φλέβα συμπεριφέρεται σαν πλούμιο.

Τα βασικά χαρακτηριστικά της φλέβας που θα μας απασχολήσουν στην συνέχεια της εργασίας, και εμφανίζονται στο Σχήμα 3-1, συνοψίζονται παρακάτω:

- Z_f : τελικό τερματικό ύψος ανόδου του άνω (εξωτερικού) ορίου της φλέβας.
- Z_c : μέγιστο ύψος ανόδου του άξονα.
- X_z : οριζόντια απόσταση από το στόμιο παροχέτευσης μέχρι τη θέση που εμφανίζεται το τερματικό ύψος ανόδου.
- X_{ic} : οριζόντια απόσταση από το στόμιο μέχρι τη θέση επιστροφής του άξονα στο επίπεδο παροχέτευσης.
- X_i : οριζόντια απόσταση από το στόμιο μέχρι τη θέση επιστροφής του εξωτερικού ορίου στο επίπεδο παροχέτευσης.
- S_t : αξονική αραίωση στο σημείο του μέγιστου ύψους.
- S_i : αξονική αραίωση στο σημείο επιστροφής της ροής στο επίπεδο παροχέτευσης.

3.2 Διαστατική Ανάλυση

Όπως είδαμε στην παράγραφο 2.1, για κυκλικές φλέβες που παροχετεύονται από στόμιο διαμέτρου D , με γωνία θ_0 και με αρχικό πυκνομετρικό αριθμό Froude $F_o \gg 1$ ισχύουν οι σχέσεις : $\frac{X}{DF_o} = \text{σταθερά}$, $\frac{Z}{DF_o} = \text{σταθερά}$, $\frac{S}{F_o} = \text{σταθερά}$, όπου X , Z οι συντεταγμένες σημείου της ροής και S η αραίωση. Με βάση την ανάλυση αυτή, προκύπτουν οι σχέσεις που συνοψίζονται στον Πίνακα 3-1 :

Πίνακας 3-1: Αδιαστοτοποιημένες σχέσεις προσδιορισμού των βασικών χαρακτηριστικών ροής κεκλιμένων κυκλικών φλεβών αρνητικής άνωσης.

Παράμετρος	Εξίσωση
Τελικό τερματικό ύψος ανόδου	$\frac{Z_f}{DF_o} = c_1$
Μέγιστο ύψος ανόδου του άξονα	$\frac{Z_c}{DF_o} = c_2$
Οριζόντια θέση εμφάνισης τερματικού ύψους	$\frac{X_z}{DF_o} = c_3$
Οριζόντια θέση επιστροφής του άξονα στο επίπεδο παροχέτευσης	$\frac{X_{ic}}{DF_o} = c_4$
Οριζόντια θέση επιστροφής του άνω ορίου στο επίπεδο παροχέτευσης	$\frac{X_i}{DF_o} = c_5$
Αξονική αραίωση στο σημείο μέγιστου ύψους	$\frac{S_t}{F_o} = c_6$
Αξονική αραίωση στο σημείο επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης	$\frac{S_i}{F_o} = c_7$

Οι διάφορες σταθερές c_i εξαρτώνται από την γωνία παροχέτευσης θ_0 ($c_i=c_i(\theta_0)$), άρα για κάθε γωνία θ_0 προκύπτει διαφορετική τιμή σταθεράς, όπως έχει δειχτεί σε διάφορες πειραματικές εργασίες, π.χ. Parakonstantis *et al.* (2011a,b), Parakonstantis & Tsatsara (2018, 2019)

Αντίστοιχα, για διδιάστατες φλέβες, παροχετευόμενες από σχισμή πλάτους w και μήκους L_D , υπό γωνία θ_0 και με αρχικό πυκνομετρικό αριθμό Froude $F_0 \gg 1$ ισχύουν οι σχέσεις (Βούστρου 2014, Μυλωνάκου 2018):

$$\frac{X}{wF_0^{4/3}} = k_1, \quad \frac{Z}{wF_0^{4/3}} = k_2, \quad \frac{S}{F_0^{2/3}} = k_3$$

Συνεπώς προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις του Πίνακα 3-2:

Πίνακας 3-2: Αδιαστοτοποιημένες σχέσεις προσδιορισμού των βασικών χαρακτηριστικών ροής κεκλιμένων διδιάστατων φλεβών αρνητικής άνωσης

Παράμετρος	Εξίσωση
Τελικό τερματικό ύψος ανόδου	$\frac{Z_f}{wF_0^{4/3}} = k_1$
Μέγιστο ύψος ανόδου του άξονα	$\frac{Z_c}{wF_0^{4/3}} = k_2$
Οριζόντια θέση εμφάνισης τερματικού ύψους	$\frac{X_z}{wF_0^{4/3}} = k_3$
Οριζόντια θέση επιστροφής του άξονα στο επίπεδο παροχέτευσης	$\frac{X_{ic}}{wF_0^{4/3}} = k_4$
Οριζόντια θέση επιστροφής του άνω ορίου στο επίπεδο παροχέτευσης	$\frac{X_i}{wF_0^{4/3}} = k_5$
Αξονική αραίωση στο σημείο μέγιστου ύψους	$\frac{S_t}{F_0^{2/3}} = k_6$
Αξονική αραίωση στο σημείο επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης	$\frac{S_i}{F_0^{2/3}} = k_7$

Οι διάφορες σταθερές k_i εξαρτώνται από την γωνία παροχέτευσης θ_0 ($k_i=k_i(\theta_0)$), άρα για κάθε γωνία θ_0 , προκύπτει διαφορετική τιμή σταθεράς όπως έχει δειχτεί σε διάφορες πειραματικές εργασίες, π.χ. Βούστρου (2014), Μυλωνάκου (2018).

Στην παρούσα εργασία ο προσδιορισμός των σταθερών c_i και k_i για κυκλικές και διδιάστατες φλέβες αντίστοιχα, θα γίνει από τη μοντελοποίηση της ροής μέσω ολοκληρωματικών μοντέλων και αναλυτικών λύσεων που περιγράφονται παρακάτω. Τα αποτελέσματα θα συγκριθούν μεταξύ τους και με τις σταθερές που έχουν προκύψει από διάφορες πειραματικές μελέτες (Κεφάλαιο 4).

3.3 Αναλυτικές Λύσεις των Kikkert *et al.* (2007)

Στις εργασίες των Kikkert (2006) και Kikkert *et al.* (2007) δόθηκαν οι παρακάτω αναλυτικές σχέσεις υπολογισμού των κύριων χαρακτηριστικών της ροής φλεβών αρνητικής άνωσης:

$$\frac{Z_c}{D} = S_{JP} (\sin \theta_o)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{(\tan \theta_o)^{1/2}} \left[1 - \frac{1}{2 \sin \theta_o} \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_o}{1 - \sin \theta_o} \right) \right] \right\} \quad (3-1)$$

$$\frac{X_z}{D} = \frac{S_{JP}}{2} \frac{\cos \theta_o}{(\sin \theta_o)^{1/2}} \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_o}{1 - \sin \theta_o} \right) \quad (3-2)$$

$$\frac{Z_f}{D} = S_{JP} (\sin \theta_o)^{1/2} \left\{ \sin \theta_o \left(1 + \frac{1}{(\tan \theta_o)^2} \left[1 - \frac{1}{2 \sin \theta_o} \ln \left(\frac{1 + \sin \theta_o}{1 - \sin \theta_o} \right) \right] \right) + 2k\lambda \right\} \quad (3-3)$$

$$\frac{X_{ic}}{D} = S_{JP} \cos \theta_o \left\{ \frac{1}{2(\sin \theta_o)^{1/2}} \ln \frac{1 + (\sin \theta_o)^{1/2}}{1 - (\sin \theta_o)^{1/2}} + 12^{1/3} \left[1 - \left(\frac{1}{C_{ORP}} \right)^{1/3} \right] \right\} \quad (3-4)$$

$$\frac{X_i}{D} = \frac{X_{ic}}{D} + S_m^* 2k\lambda \quad (3-5)$$

$$S_t = 2I_{Q\Delta} k \left[\frac{1}{\pi I_M} \right]^{1/2} S_m^* \quad (3-6)$$

$$S_i = C_{ORP}^{5/3} 12^{1/3} \left(\frac{1}{\pi I_M^3} \right)^{1/4} \left(\frac{K I_{Q\Delta}}{I_Q} \right)^{0.5} \quad (3-7)$$

όπου:

$$S_{JP} = \left[\frac{I_{Q\Delta}}{I_\Delta} \frac{1}{k} \left(\frac{\pi}{I_M} \right)^{1/2} \right]^{1/2} F_o, \quad I_{Q\Delta} = 2, I_\Delta = 3.8, k = 0.11, I_M = 1.7, \lambda = 1.1 \quad (3-8)$$

$$S_m^* = S_{JP} (\sin \theta_o)^{1/2} \quad (3-9)$$

$$C_{ORP} = 1 + \sin \theta_o \left\{ 1 - \frac{1}{(\tan \theta_o)^2} \left[-1 + \frac{1}{2(\sin \theta_o)^{1/2}} \ln \left(\frac{1 + (\sin \theta_o)^{1/2}}{1 - (\sin \theta_o)^{1/2}} \right) \right] \right\} \quad (3-10)$$

3.4 Ολοκληρωματικό Μοντέλο

Για την μαθηματική προσομοίωση της ροής πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω παραδοχές (Παπακωνσταντής, 2009):

- Η πίεση ακολουθεί υδροστατική κατανομή σε όλο το πεδίο της ροής.
- Ισχύει η παραδοχή Boussinesq.
- Ισχύει η προσέγγιση οριακού στρώματος του Prandtl.
- Η μοριακή διάχυση αμελείται.
- Δεν υπάρχουν περιδινήσεις στο πεδίο ροής.

Ακολουθεί η περιγραφή των ολοκληρωματικών μοντέλων κυκλικών και διδιάστατων φλεβών αρνητικής άνωσης.

3.4.1 Περιγραφή Ολοκληρωματικού Μοντέλου Κυκλικών Φλεβών Αρνητικής Άνωσης

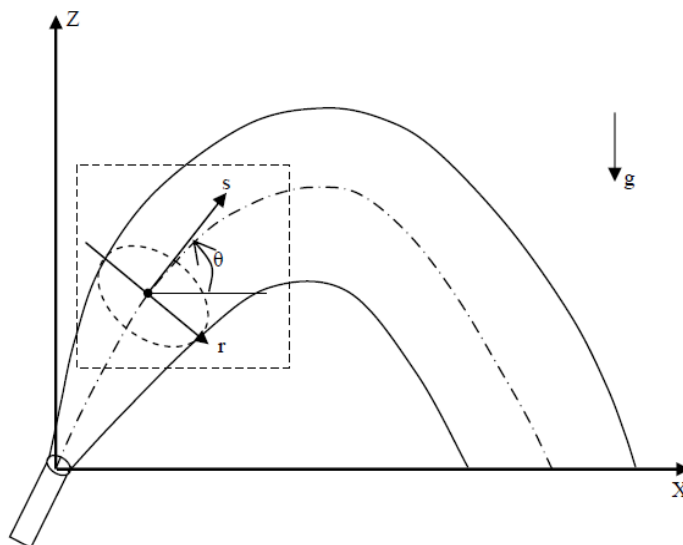
Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες (s, r) , όπου s είναι ο άξονας της φλέβας και r η εγκάρσια στον άξονα ακτινική απόσταση (Σχήμα 3-2), εκφράζουμε τις βασικές παραμέτρους ροής Q, M, B σε τυχαία θέση του άξονα s ως εξής:

$$Q(s) = \int_A u(r, s) dA = \int_0^b u(r, s) 2\pi r dr \quad (3-11)$$

$$M(s) = \int_A u^2(r, s) dA = \int_0^b u^2(r, s) 2\pi r dr \quad (3-12)$$

$$B(s) = \int_A g \frac{(\rho_\alpha - \rho(s, r))}{\rho_\alpha} u(r, s) dA = \int_0^b g \frac{\rho_\alpha - \rho(r, s)}{\rho_\alpha} u(r, s) 2\pi r dr < 0 \quad (3-13)$$

Όπου A η κυκλική επιφάνεια εγκάρσια του άξονα και b το όριο ολοκλήρωσης κατά την ακτινική απόσταση που συνήθως λαμβάνεται ότι τείνει στο άπειρο.



Σχήμα 3-2: Γεωμετρία και σύστημα συντεταγμένων κυκλικής φλέβας αρνητικής άνωσης. (Πηγή: Παπακωνσταντής, 2009)

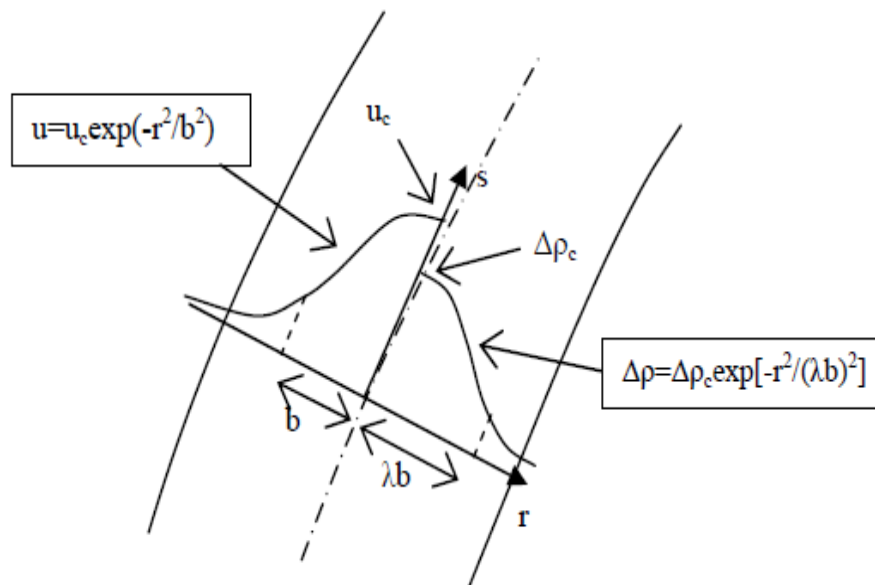
Μετρήσεις από πειράματα έχουν δείξει ότι οι κατανομές της ταχύτητας u , της συγκέντρωσης C και της φαινόμενης επιτάχυνσης της βαρύτητας g' παρουσιάζουν αυτοομοιότητα (self similarity) κατά τη διεύθυνση της ροής και ακολουθούν κατανομή Gauss (Fischer *et al.* 1979) όπως φαίνεται στο Σχήμα 3-3:

$$u = u_c e^{-r^2/b^2} \quad (3-14)$$

$$C = C_c e^{-r^2/b_c^2} \quad (3-15)$$

$$g' = g'_c e^{-r^2/b_c^2}, \quad g'_c = g \frac{\rho_a - \rho_c}{\rho_a} \quad (3-16)$$

Όπου u_c , C_c , g'_c οι τιμές στον άξονα της ταχύτητας, της συγκέντρωσης και της φαινόμενης επιτάχυνσης της βαρύτητας αντίστοιχα, r η ακτινική απόσταση από τον άξονα, b το πλάτος κατανομής της ταχύτητας και b_c το πλάτος κατανομής της συγκέντρωσης ή της φαινόμενης επιτάχυνσης της βαρύτητας (Σχήμα 3-3). Η παράμετρος λ θεωρείται σταθερή και ίση με $\lambda = \frac{b_c}{b} = 1.2$ (Jirka, 2004).



Σχήμα 3-3: Κατανομές ταχύτητας και διαφοράς πυκνότητας κατά μήκος του άξονα της φλέβας. (Πηγή: Παπακωνσταντής, 2009)

Οι κύριες εξισώσεις της ροής είναι η εξίσωση συνέχειας, η εξίσωση ποσότητας κίνησης (ορμής) κατά τη διεύθυνση s και η εξίσωση διατήρησης μάζας του διερχόμενου ρευστού. Ολοκληρώνοντας στη διατομή τις παραπάνω εξισώσεις και δεδομένων των (3-11) ως (3-16) προκύπτει σύστημα διαφορικών εξισώσεων με άγνωστες παραμέτρους τα Q , M , B , θ , X , Z (Fischer *et al.* 1979, Fan 1967). Αναλυτικά τη διαδικασία παρουσίασε ο Παπακωνσταντής (2009). Η επίλυση του συστήματος μπορεί να γίνει με αριθμητικές μεθόδους μέσω χρήσης λογισμικού.

Μια νέα μορφή του παραπάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων παρουσίασε στην διδακτορική του διατριβή ο Παπακωνσταντής (2009). Κάθε διαφορική

εξίσωση δίνει την μεταβολή ($\frac{d}{ds}$) μίας από τις έξι άγνωστες παραμέτρους. Η νέα μορφή ολοκληρωματικού μοντέλου που περιγράφει την ροή, θεωρεί κατανομές Gauss για την ταχύτητα και την φαινομενική επιτάχυνση της βαρύτητας και θα συμβολίζεται ως μοντέλο GM (Gaussian Model). Το μοντέλο GM έχει επίσης παρουσιαστεί από τους Papanicolaou *et al.* (2008). Το σύστημα εξισώσεων είναι το εξής:

$$\frac{dQ}{ds} = 2\sqrt{2\pi\alpha}M^{\frac{1}{2}} \quad (3-17)$$

$$\frac{dM}{ds} = \frac{1+\lambda^2}{2} \frac{QB}{M} \sin \theta \quad (3-18)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1+\lambda^2}{2} \frac{QB}{M^2} \cos \theta \quad (3-19)$$

$$\frac{dB}{ds} = 0 \quad (3-20)$$

$$\frac{dX}{ds} = \cos \theta \quad (3-21)$$

$$\frac{dZ}{ds} = \sin \theta \quad (3-22)$$

όπου α ορίζεται ο συντελεστής συμπαράσυρσης. Οι Morton *et al.* (1956) παρουσίασαν την υπόθεση συμπαράσυρσης στην οποία η φλέβα συμπαράσυρει με ταχύτητα v_e ρευστό από τον αποδέκτη. Η ταχύτητα αυτή είναι ανάλογη της αξονικής ταχύτητας της φλέβας σε κάθε θέση:

$$v_e = -\alpha u_c \quad (3-23)$$

Οι Fischer *et al.* (1979) όρισαν τον συντελεστή συμπαράσυρσης ως εξής:

$$a = a_j - (\alpha_j - \alpha_p) \frac{Ri(s)^2}{Ri_p^2} \quad (3-24)$$

Όπου:

- α_j είναι ο συντελεστής συμπαράσυρσης για απλή φλέβα (jet).
- α_p είναι ο συντελεστής συμπαράσυρσης για πλούμιο (plume).
- $Ri(s)$ είναι ο τοπικός αριθμός Richardson, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$Ri(s) = \frac{Q(s)|B(s)|^{1/2}}{M(s)^{5/4}} > 0 \quad (3-25)$$

- Ri_p είναι ο αριθμός Richardson που αντιστοιχεί στη ροή πλουμίου και ισχύει $Ri_p=0.56$ (Papanicolaou *et al.* 2008)

Ο αριθμός Richardson μεταβάλλεται από μία αρχική τιμή μέχρι την τελική του τιμή Ri_p . Όταν η ροή γίνει πλούμιο (περιοχή μέγιστου ύψους) ισχύει ότι $Ri(s)=Ri_p$ και κατά συνέπεια ο λόγος $\frac{Ri(s)^2}{Ri_p^2}$ γίνεται ίσος με το 1. Έτσι προκύπτει ότι ο

συντελεστής συμπαράσυρσης θα φτάσει την μέγιστη του τιμή, η οποία είναι το α_p . Ισχύει ότι $\alpha_j \leq \alpha \leq \alpha_p$.

Στην εκροή της φλέβας η κατανομή της ταχύτητας και της συγκέντρωσης είναι πρακτικά ομοιόμορφη (Top-Hat). Μετά από κάποια απόσταση (εικονική αφετηρία) ισχύει η αυτοομοιότητα, δηλαδή η ταχύτητα και η συγκέντρωση έχουν πρακτικά κατανομές Gauss. Οι Papanicolaou & List (1988) θεώρησαν την εικονική αφετηρία σε απόσταση $s_o = 3.28D$ από την εκροή κατά μήκος του άξονα της φλέβας, όπου D η διάμετρος του στομίου. Έτσι η απόσταση στην οποία εφαρμόζονται οι αρχικές συνθήκες είναι η s_o . Οι αρχικές συνθήκες συνοψίζονται στον Πίνακα 3-3:

Πίνακας 3-3: Αρχικές συνθήκες των παραμέτρων του ολοκληρωματικού μοντέλου.

$Q = Q_o = \frac{\pi D^2}{4} U_o$
$M = M_o = Q_o U_o$
$B = B_o = g_o' Q_o$
$\theta = \theta_o$
$X = X_o = s_o \cos \theta_o$
$Z = Z_o = s_o \sin \theta_o$

Μέσω της αριθμητικής επίλυσης με χρήση μίας ρουτίνας Runge – Kutta 4^{ης} τάξης θεωρώντας ένα βήμα ds , προκύπτουν κατά μήκος της τροχιάς της φλέβας s οι παράμετροι Q , M , B , θ , X , Z , α . Ο συντελεστής συμπαράσυρσης υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης (3-14) για τιμές α_j , α_p που υπάρχουν στη βιβλιογραφία. Σύμφωνα με τους Papanicolaou & List (1988) $\alpha_j=0.0545$ και $\alpha_p=0.0875$. Οι Papanicolaou *et al.* (2008) θεώρησαν μειωμένο συντελεστή $\alpha_j=0.030$ και ο Παπακωνσταντής (2009) θεώρησε $\alpha_j=0.025$ για την προσομοίωση των χαρακτηριστικών ροής κεκλιμένων κυκλικών φλεβών αρνητικής άνωσης. Με γνωστά τα παραπάνω μεγέθη υπολογίζονται όλα τα βασικά χαρακτηριστικά της ροής.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις που συνοψίζονται στον Πίνακα 3-4, υπολογίζονται το πλάτος κατανομής της ταχύτητας b , το οπτικό πλάτος της φλέβας b_{visual} , τα κύρια γεωμετρικά χαρακτηριστικά της φλέβας Z_f , Z_c , X_z , X_{ic} , X_i , οι ελάχιστες αραιώσεις S_t , S_i και η μέση στη διατομή αραιώση S_{ave} .

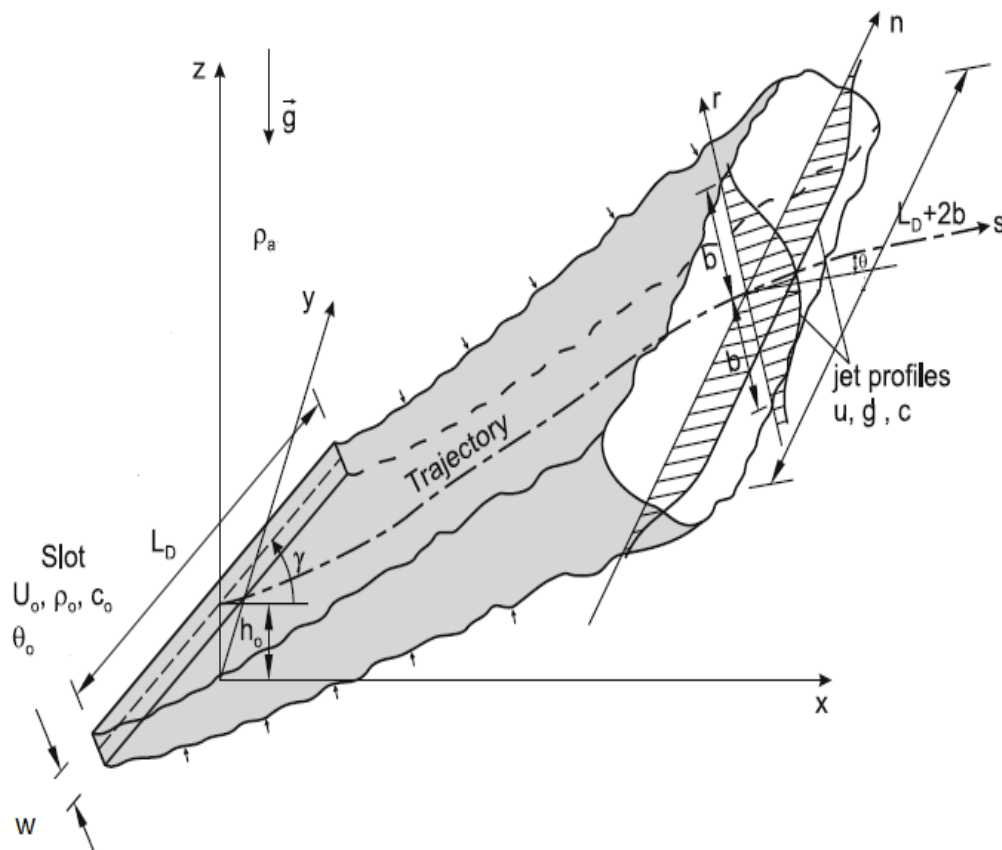
Πίνακας 3-4 : Εξισώσεις υπολογισμού παραμέτρων ροής της κυκλικής φλέβας. (Παπακωνσταντής, 2009)

Πλάτος κατανομής ταχύτητας	$b = \frac{Q}{\sqrt{2\pi M}}$
Οπτικό πλάτος φλέβας	$b_{\text{visual}} = 1.5\lambda b$
Συντεταγμένες (άνω) εξωτερικού ορίου	$X_{\text{up}} = X - b_{\text{visual}} \sin\theta$
	$Z_{\text{up}} = Z + b_{\text{visual}} \cos\theta$
Συντεταγμένες (κάτω) εσωτερικού ορίου	$X_{\text{down}} = X + b_{\text{visual}} \sin\theta$
	$Z_{\text{down}} = Z - b_{\text{visual}} \cos\theta$
Αξονική αραίωση	$S_c = \frac{Q}{Q_o} \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2}$
Μέση στη διατομή αραίωση	$S_{\text{ave}} = Q/Q_o$

Το μέγιστο ύψος του άξονα προκύπτει από την μέγιστη τιμή των Z , ενώ το τελικό τερματικό ύψος του άνω ορίου της φλέβας προκύπτει από το άθροισμα του Z_c με το οπτικό πλάτος b_{visual} ως εξής: $Z_f = Z_c + b_{\text{visual}}$. Η οριζόντια απόσταση X_z προσδιορίζεται από την θέση εμφάνισης του μέγιστου ύψους του άξονα Z_c . Η οριζόντια απόσταση X_{ic} προσδιορίζεται από την θέση που το Z τείνει να μηδενιστεί $Z \approx 0$. Η οριζόντια απόσταση X_i υπολογίζεται από την θέση που το Z_{up} τείνει να μηδενιστεί $Z_{\text{up}} \approx 0$.

3.4.2 Περιγραφή Ολοκληρωματικού Μοντέλου Διδιάστατων Φλεβών Αρνητικής Άνωσης

Φλέβα ρευστού πυκνότητας ρ_o , εκρέει με αρχική ταχύτητα U_o , από στόμιο γεωμετρίας σχισμής μήκους L_D και πλάτους w ($L_D \gg w$), υπό γωνία θ_o ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Ο Jirka (2006) παρουσίασε τις εξισώσεις της κίνησης θεωρώντας τοπικές συντεταγμένες s, n, r όπου s είναι ο άξονας της φλέβας και n, r εγκάρσιοι άξονες (Σχήμα 3-4), g η επιτάχυνση της βαρύτητας, c, ρ η συγκέντρωση και η πυκνότητα αντίστοιχα του ρευστού της φλέβας και ρ_a η πυκνότητα του αποδέκτη.



Σχήμα 3-4 : Γεωμετρία διδιάστατης φλέβας αρνητικής άνωσης όπου φαίνεται η σχισμή εκροής, το σύστημα τοπικών συντεταγμένων, καθώς και οι κατανομές ταχύτητας u και φαινόμενης επιτάχυνσης της βαρύτητας g' . (Πηγή: Jirka, 2006)

Στην εκροή ισχύουν οι παρακάτω αρχικές συνθήκες (Jirka, 2006):

$$Q_o = U_o A_o \quad (3-26)$$

$$M_o = U_o^2 A_o \quad (3-27)$$

$$B_o = U_o g'_o A_o \quad (3-28)$$

Όπου A_o το εμβαδόν της σχισμής εκροής: $A_o = w L_D \quad (3-29)$

Ακόμη, για να θεωρηθεί η ροή τυρβώδης στην εκροή θα πρέπει $\frac{U_o w}{\nu} > 1000$ (Jirka, 2006).

Όπως προκύπτει και από το Σχήμα 3-4, η ροή της φλέβας είναι τρισδιάστατη. Η φλέβα αναπτύσσει πλάτος εγκάρσια του άξονα ροής, κατά τους άξονες r και n .

Για $\frac{L_D}{2b} \gg 1$ η συμπαράσυρση της φλέβας στον άξονα n μπορεί να αμεληθεί και η ροή της φλέβας θεωρείται επίπεδη (διδιάστατη) (Jirka, 2006). Κατά συνέπεια, όλες οι παράμετροι της φλέβας ορίζονται ανά μονάδα μήκους L_D . Έτσι οι αρχικές συνθήκες τροποποιούνται ως εξής:

$$m_o = \frac{M_o}{L_D} = U_o^2 w \quad (3-30)$$

$$\beta_o = \frac{B_o}{L_D} = U_o g'_o w \quad (3-31)$$

$$q_o = \frac{Q_o}{L_D} = U_o w \quad (3-32)$$

Η διδιάστατη φλέβα περιγράφεται από τους τοπικούς άξονες s και r κατά μήκος της ροής της φλέβας. Με βάση τη θεωρία της αυτοομοιότητας, η ταχύτητα u , η φαινόμενη επιτάχυνση της βαρύτητας g' και η συγκέντρωση C ακολουθούν κατανομές Gauss (Jirka, 2006).

$$u = u_c e^{-r^2/b^2} \quad (3-33)$$

$$g' = g'_c e^{-r^2/b_c^2} \quad (3-34)$$

$$C = C_c e^{-r^2/b_c^2} \quad (3-35)$$

Όπου u_c , C_c , g'_c οι τιμές στον άξονα της ταχύτητας, της συγκέντρωσης και της φαινόμενης επιτάχυνσης της βαρύτητας αντίστοιχα, r η απόσταση από τον άξονα, b το $(1/e)$ πλάτος της κατανομής της ταχύτητας και b_c το $(1/e)$ πλάτος της κατανομής της συγκέντρωσης ή της φαινόμενης επιτάχυνσης της βαρύτητας. Ο λόγος των πλατών λ θεωρείται σταθερός και ίσος με $\lambda = \frac{b_c}{b} = 1.3$ (Jirka, 2006, Angelidis, 2002).

Οι βασικές παράμετροι ροής q , m , β σε τυχαία θέση κατά μήκος του άξονα διδιάστατης φλέβας ορίζονται ως εξής (Jirka, 2006):

$$q = \int_{-b_j}^{+b_j} u dr = \sqrt{\pi} b u_c \quad (3-36)$$

$$m = \int_{-b_j}^{+b_j} u^2 dr = \sqrt{\frac{\pi}{2}} b u_c^2 \quad (3-37)$$

$$\beta = \int_{-b_j}^{+b_j} u g' dr = \sqrt{\pi} b u_c \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} g'_c \quad (3-38)$$

Όπου b_j το όριο ολοκλήρωσης κατά μήκος του άξονα r , το οποίο λαμβάνεται άπειρο στην ολοκλήρωση, $b_j \rightarrow \infty$.

Από τις εξισώσεις (3-36) έως (3-38) μπορούμε να εκφράσουμε την αξονική ταχύτητα u_c , το πλάτος κατανομής της ταχύτητας b και την φαινομενική επιτάχυνση της βαρύτητας στον άξονα g'_c , ως εξής:

Διαιρώντας κατά μέλη (3-37) και (3-36) έχουμε :

$$\frac{m}{q} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} b u_c^2}{\sqrt{\pi} b u_c} \Rightarrow \frac{m}{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_c \Rightarrow u_c = \sqrt{2} \frac{m}{q} \quad (3-39)$$

Αντικαθιστώντας την (3-39) στην (3-37) έχουμε:

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}} b u_c^2 \Rightarrow m = \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \left(\sqrt{2} \frac{m}{q} \right)^2 \Rightarrow b = \frac{q^2}{\sqrt{2\pi} m} \quad (3-40)$$

Τέλος, με αντικατάσταση των (3-39), (3-40) στην (3-38) προκύπτει:

$$\beta = \sqrt{\pi} b u_c \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} g'_c \Rightarrow \beta = \sqrt{\pi} \frac{q^2}{\sqrt{2\pi} m} \sqrt{2} \frac{m}{q} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} g'_c \Rightarrow g'_c = \frac{\beta \sqrt{1+\lambda^2}}{q \lambda} \quad (3-41)$$

Οι κύριες εξισώσεις της ροής, είναι η εξίσωση συνέχειας, η εξίσωση ποσότητας κίνησης (ορμής) κατά τη διεύθυνση s και η εξίσωση διατήρησης μάζας του διερχόμενου ρευστού. Ολοκληρώνοντας στη διατομή τις παραπάνω εξισώσεις και με δεδομένες τις (3-36) ως (3-38) προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις (Jirka 2006):

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{dq}{ds} = 2u_c a \quad (3-42)$$

Όπου a , ο συντελεστής συμπαράσυρσης, σύμφωνα με την υπόθεση συμπαράσυρσης των Morton *et al.* (1956) και u_c η αξονική ταχύτητα.

Εξίσωση ποσότητας κίνησης (ορμής) κατά τον άξονα x :

$$\frac{d(m \cos \theta)}{ds} = 0 \quad (3-43)$$

Εξίσωση ποσότητας κίνησης (ορμής) κατά τον άξονα z :

$$\frac{d(m \sin \theta)}{ds} = \sqrt{\pi} \lambda b g'_c \quad (3-44)$$

Εξίσωση της ροής ειδικής άνωσης:

$$\frac{d\beta}{ds} = q \frac{g}{\rho_{ref}} \frac{d\rho_\alpha}{dz} \sin \theta \quad (3-45)$$

Όπου για ομογενή αποδέκτη (ρ_α =σταθερό) μετατρέπεται σε:

$$\frac{d\beta}{ds} = 0 \quad (3-46)$$

Οι εξισώσεις που περιγράφουν γεωμετρικά την τροχιά του άξονα της φλέβας X, Z:

$$\frac{dX}{ds} = \cos \theta \quad (3-47)$$

$$\frac{dZ}{ds} = \sin \theta \quad (3-48)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις συνιστούν ένα σύστημα έξι αγνώστων $q, m, \beta, \theta, X, Z$ και μπορεί να γίνει αριθμητική επίλυσή του, αν ορισθούν οι αρχικές συνθήκες και ο συντελεστής συμπαράσυρσης α .

Το παραπάνω σύστημα θα τροποποιηθεί όπως έγινε και στο αντίστοιχο σύστημα διαφορικών εξισώσεων κυκλικών φλεβών (Παπακωνσταντής, 2009) με σκοπό κάθε διαφορική εξίσωση να δώσει την μεταβολή ($\frac{d}{ds}$) κάθε μίας από τις άγνωστες παραμέτρους. Η νέα μορφή ολοκληρωματικού μοντέλου που περιγράφει την ροή, θεωρεί κατανομές Gauss για την ταχύτητα και την φαινόμενη επιτάχυνση της βαρύτητας και θα συμβολίζεται ως μοντέλο GM-2D (Gaussian Model).

Ειδικότερα, από τις εξισώσεις (3-43) και (3-44) έχουμε:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dm}{ds} \cos \theta - m \sin \theta \frac{d\theta}{ds} = 0 \\ \frac{dm}{ds} \sin \theta + m \cos \theta \frac{d\theta}{ds} = \sqrt{\pi} \lambda b g'_c \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos \theta}{m \sin \theta} \frac{dm}{ds} \\ \frac{dm}{ds} \sin \theta + m \cos \theta \frac{\cos \theta}{m \sin \theta} \frac{dm}{ds} = \sqrt{\pi} \lambda b g'_c \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos \theta}{m \sin \theta} \frac{dm}{ds} \\ \frac{dm}{ds} \left(\sin \theta + \frac{(\cos \theta)^2}{\sin \theta} \right) = \sqrt{\pi} \lambda b g'_c \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos \theta}{m \sin \theta} \frac{dm}{ds} \\ \frac{dm}{ds} \left(\frac{(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2}{\sin \theta} \right) = \sqrt{\pi} \lambda b g'_c \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos \theta}{m \sin \theta} \frac{dm}{ds} \\ \frac{dm}{ds} \frac{1}{\sin \theta} = \sqrt{\pi} \lambda b g'_c \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos \theta}{m \sin \theta} \frac{dm}{ds} \\ \frac{dm}{ds} = \sqrt{\pi} \lambda b g'_c \sin \theta \end{array} \right] \quad (3-49)$$

Από την (3-49), προκύπτουν οι μεταβολές των m και θ ως εξής:

$$\frac{dm}{ds} = \sqrt{\pi} \lambda \frac{q^2}{\sqrt{2\pi} m} \frac{\beta \sqrt{1+\lambda^2}}{q \lambda} \sin \theta \Rightarrow \frac{dm}{ds} = \frac{q\beta}{m} \sqrt{\frac{1+\lambda^2}{2}} \sin \theta$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos \theta}{m \sin \theta} \frac{q\beta}{m} \sqrt{\frac{1+\lambda^2}{2}} \sin \theta \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{q\beta}{m^2} \sqrt{\frac{1+\lambda^2}{2}} \cos \theta$$

Το τελικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει την ροή διδιάστατης φλέβας αρνητικής άνωσης είναι το εξής:

$$\frac{dq}{ds} = 2\sqrt{2} \frac{m}{q} a \quad (3-50)$$

$$\frac{dm}{ds} = \frac{q\beta}{m} \sqrt{\frac{1+\lambda^2}{2}} \sin \theta \quad (3-51)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{q\beta}{m^2} \sqrt{\frac{1+\lambda^2}{2}} \cos \theta \quad (3-52)$$

$$\frac{d\beta}{ds} = 0 \quad (3-53)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (3-54)$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin \theta \quad (3-55)$$

Ο συντελεστής συμπαράσυρσης a θα ληφθεί ως εξής

$$a = a_j - (\alpha_j - a_p) \frac{Ri(s)}{Ri_p} \quad (3-56)$$

Όπου:

- α_j είναι ο συντελεστής συμπαράσυρσης για απλή φλέβα (jet),
- α_p είναι ο συντελεστής συμπαράσυρσης για πλούμιο (plume).
- $Ri(s)$ είναι ο τοπικός αριθμός Richardson, ο οποίος ορίζεται ως εξής (Kotsovinos & List 1977, Angelidis 2002):

$$Ri(s) = \frac{q^3 |\beta|}{m^3} > 0 \quad (3-57)$$

- Ri_p είναι ο αριθμός Richardson που αντιστοιχεί στη ροή πλουμίου και ισχύει $Ri_p=0.30$ (Ramaprian & Chandrasekhara, 1983).

Ο αριθμός Richardson μεταβάλλεται από μία αρχική τιμή μέχρι την τελική του τιμή Ri_p . Όταν η ροή γίνει πλούμιο (περιοχή μέγιστου ύψους) ισχύει ότι $Ri(s)=Ri_p$ και κατά συνέπεια ο λόγος $\frac{Ri(s)}{Ri_p}$ γίνεται ίσος με το 1. Έτσι προκύπτει ότι ο συντελεστής συμπαράσυρσης θα φτάσει την μέγιστη του τιμή, η οποία είναι το

α_p . Ισχύει ότι $\alpha_j \leq \alpha \leq \alpha_p$. Λαμβάνοντας υπόψη τις εργασίες των Kotsovinos & List (1977), Ramaprian and Chandrasekhara (1983) και Angelidis (2002) θα χρησιμοποιηθούν οι τιμές: $\alpha_j = 0.055$, $\alpha_p = 0.11$. Η σχέση (3-56) για το συντελεστή συμπαράσυρσης α προκύπτει από τη σχέση (3-24) χρησιμοποιώντας Ri/Ri_p αντί Ri^2/Ri_p^2 επειδή στις διδιάστατες φλέβες είναι (Angelidis, 2002) $Ri \sim \frac{1}{F^2}$ όπου F ο τοπικός αριθμός Froude. Η σχέση (3-56) είναι παρόμοια με τις σχέσεις που χρησιμοποιούνται για το συντελεστή α στις εργασίες Angelidis (2002) και Jirka (2006).

Στην εκροή, όπως είδαμε και στις κυκλικές φλέβες, η κατανομή της ταχύτητας και της συγκέντρωσης είναι πρακτικά ομοιόμορφη (Top-Hat). Μετά από κάποια απόσταση (εικονική αφετηρία) ισχύει η αυτοομοιότητα, δηλαδή η ταχύτητα και η συγκέντρωση έχουν πρακτικά κατανομές Gauss. Ο Jirka (2006) προτείνει η εικονική αφετηρία να τοποθετείται σε απόσταση $s_o \approx 5.2 w$ από την εκροή κατά μήκος του άξονα της φλέβας, όπου w το πλάτος της σχισμής εκροής. Έτσι η απόσταση στην οποία εφαρμόζονται οι αρχικές συνθήκες είναι η s_o . Οι αρχικές συνθήκες συνοψίζονται στον Πίνακα 3-5.

Πίνακας 3-5: Αρχικές συνθήκες των παραμέτρων του ολοκληρωματικού μοντέλου διδιάστατης φλέβας.

$q_o = U_o w$
$m_o = U_o^2 w$
$\beta_o = g'_o U_o w$
θ_o
$x_o = s_o \cos \theta_o$
$z_o = s_o \sin \theta_o$

Μέσω της αριθμητικής επίλυσης με χρήση μίας ρουτίνας Runge – Kutta 4^{ης} τάξης, προκύπτουν για κάθε σημείο κατά μήκος της τροχιάς της φλέβας s οι παράμετροι q , m , β , θ , x , z , α . Ο συντελεστής συμπαράσυρσης υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης (3-46) για τιμές α_j , α_p που προτείνονται στη βιβλιογραφία. Με γνωστά τα παραπάνω μεγέθη υπολογίζονται όλα τα βασικά χαρακτηριστικά της ροής.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις που συνοψίζονται στον Πίνακα 3-6, υπολογίζονται το πλάτος κατανομής της ταχύτητας b , το οπτικό πλάτος της φλέβας b_{visual} για το οποίο έγινε η θεώρηση ότι είναι ίσο με το πλάτος κατανομής της συγκέντρωσης b_c , τα κύρια γεωμετρικά χαρακτηριστικά της φλέβας Z_t , Z_c , X_z , X_{ic} , X_i , οι ελάχιστες αραιώσεις S_t , S_i και η μέση στη διατομή αραιώση S_{ave} .

Πίνακας 3-6 : Εξισώσεις υπολογισμού παραμέτρων ροής της διδιάστατης φλέβας.

Πλάτος κατανομής ταχύτητας	$b = \frac{q^2}{\sqrt{2\pi} m}$
Οπτικό πλάτος φλέβας	$b_{\text{visual}} = \lambda b$
Συντεταγμένες εξωτερικού ορίου	$X_{\text{up}} = x - b_{\text{visual}} \sin\theta$
	$Z_{\text{up}} = z + b_{\text{visual}} \cos\theta$
Συντεταγμένες εσωτερικού ορίου	$X_{\text{down}} = x + b_{\text{visual}} \sin\theta$
	$Z_{\text{down}} = z - b_{\text{visual}} \cos\theta$
Αξονική αραίωση	$S_c = \frac{q}{q_o} \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$
Μέση στη διατομή αραίωση	$S_{\text{ave}} = q/q_o$

Το μέγιστο ύψος του άξονα προκύπτει από την μέγιστη τιμή των Z , ενώ το τελικό τερματικό ύψος του άνω ορίου της φλέβας προκύπτει από το άθροισμα του Z_c με το οπτικό πλάτος b_{visual} ως εξής: $Z_f = Z_c + b_{\text{visual}}$. Η οριζόντια απόσταση X_z προσδιορίζεται από την θέση εμφάνισης του μέγιστου ύψους του άξονα Z_c . Η οριζόντια απόσταση X_{ic} προσδιορίζεται από την θέση που το Z τείνει να μηδενιστεί $Z \approx 0$. Η οριζόντια απόσταση X_i υπολογίζεται από την θέση που το Z_{up} τείνει να μηδενιστεί $Z_{\text{up}} \approx 0$.

4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Γενικά

Η μοντελοποίηση της ροής κυκλικών φλεβών αρνητικής άνωσης γίνεται με το ολοκληρωματικό μοντέλο **GM** (βλ. Κεφάλαιο 3.4.1), ενώ για τη μοντελοποίηση των διδιάστατων φλεβών γίνεται χρήση του νέου ολοκληρωματικού μοντέλου **GM-2D** (βλ. Κεφάλαιο 3.4.2). Για διάφορες γωνίες παροχέτευσης, τα αποτελέσματα των μοντέλων, τα οποία αφορούν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της φλέβας καθώς και την αξονική αραίωση, θα συγκριθούν με διαθέσιμα πειραματικά αποτελέσματα.

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων για κάθε μοντέλο επιλύεται αριθμητικά με χρήση της ρουτίνας Runge-Kutta 4^{ης} τάξης για τις αρχικές συνθήκες που ορίστηκαν (βλ. Κεφάλαιο 3). Αναπτύχθηκε κώδικας στο λογισμικό Matlab R2018a και χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση βιβλιοθήκης (build - in) του Matlab, ode45 με βήμα ολοκλήρωσης $ds=0.01$ cm κατά μήκος του άξονα της φλέβας. Από την αριθμητική επίλυση προκύπτουν οι παρακάτω παράμετροι ροής:

- κυκλικές φλέβες: Q, M, B, θ , X, Z,
- διδιάστατες φλέβες: q, m, β , θ , X, Z

Οι παραπάνω παράμετροι εξάγονται σε λογισμικό Microsoft Excel 2010. Τελικά, με βάση τους Πίνακες 3-4, 3-6, υπολογίζονται όλα τα κύρια χαρακτηριστικά της ροής Z_t , Z_c , X_z , X_{ic} , X_i , S_t , S_i . Οι συγκρίσεις των προβλέψεων των κύριων χαρακτηριστικών της ροής με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα γίνεται σε μορφή αδιάστατων γραφημάτων.

Επίσης για την περίπτωση κυκλικών φλεβών καταστρώθηκαν στο λογισμικό Microsoft Excel οι αναλυτικές εξισώσεις των Kikkert *et al.* (2007) (Σχέσεις 3-1 έως 3-10) από τις οποίες προκύπτουν οι προβλέψεις των κύριων χαρακτηριστικών της ροής. Στη συνέχεια συγκρίνονται με τις προβλέψεις του μοντέλου GM και τα πειραματικά δεδομένα.

4.2 Μοντελοποίηση Ροής Κυκλικών Φλεβών

Κατά την επίλυση με το μοντέλο GM (εξισώσεις 3-17 έως 3-22) θεωρήθηκαν αρχικός πυκνομετρικός αριθμός Froude $F_o \approx 32$, $Re_o \approx 7400$, $\Delta\rho_o = -2.5\%$, κυκλικό στόμιο διαμέτρου $D=0.6$ cm, αρχική παροχή (εκροής) $Q_o \approx 35$ cm³/s και αρχικές συνθήκες που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3-3. Εξετάζονται οι γωνίες παροχέτευσης 30°, 45°, 60°, 75°, 80°, 85° και 90°. Απόσπασμα του κώδικα φαίνεται στο Σχήμα 4-1, ενώ ολόκληρος ο κώδικας επίλυσης δίνεται στο Παράρτημα.

```

%% Αρχικές Συνθήκες
thetao=2*pi*45/360;           % Γωνία παροχέτευσης
Uo=4*Qo/((pi)*(D^2));
Mo=Uo*Qo;
go=g*(ra-ro)/ra;
Bo=go*Qo;
So=3.28*D;
Rio=Qo*(abs(Bo)^0.5)/(Mo^(5/4));

IC1=Qo;
IC2=Mo;
IC3=thetao;
IC4=Bo;
IC5=So*cos(thetao);
IC6=So*sin(thetao);



---


%% ΡΟΥΤΙΝΑ RK4
%βήμα 0.01cm           Αρχικές Συνθήκες
[s,n] = ode45(@model, [So:0.01: 80] , [IC1; IC2; IC3; IC4; IC5; IC6]);



---


%% Τελικά μητρώα Q,M,θ,B,X,Z
Q=n(:,1);
M=n(:,2);
theta=n(:,3);
B=n(:,4);
x=n(:,5);
z=n(:,6);

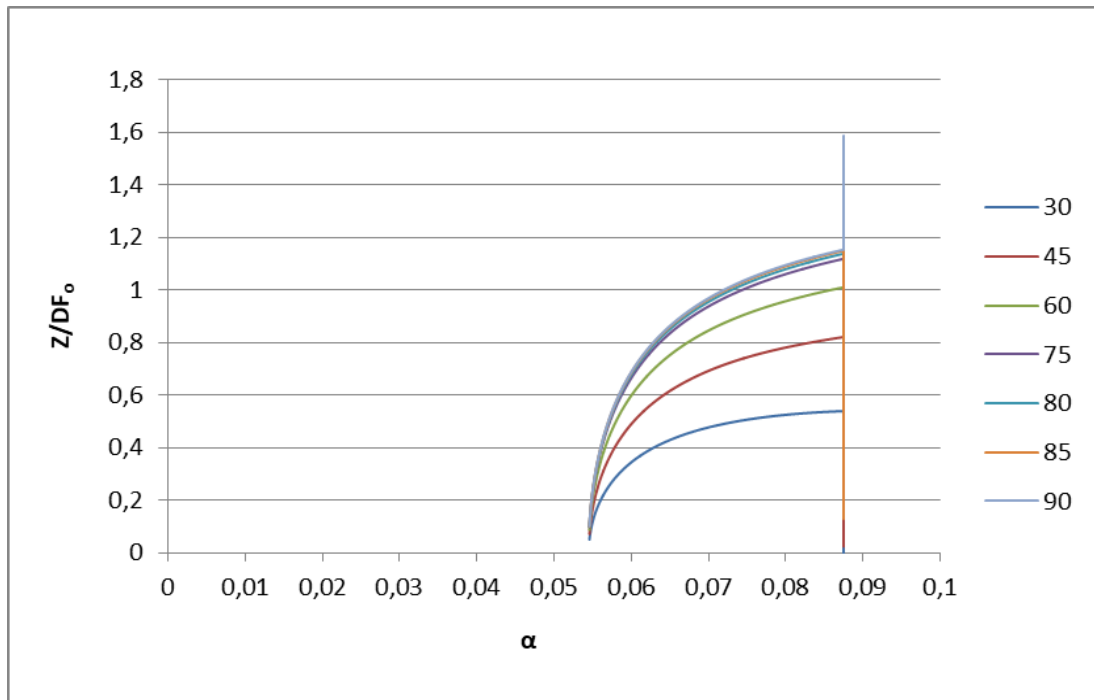
```

Σχήμα 4-1: Απόσπασμα από τον κώδικα, όπου ορίζονται οι αρχικές συνθήκες, εκτελείται η ρουτίνα ode45 και εξαγονται οι παράμετροι Q, M, B, θ, X, Z.

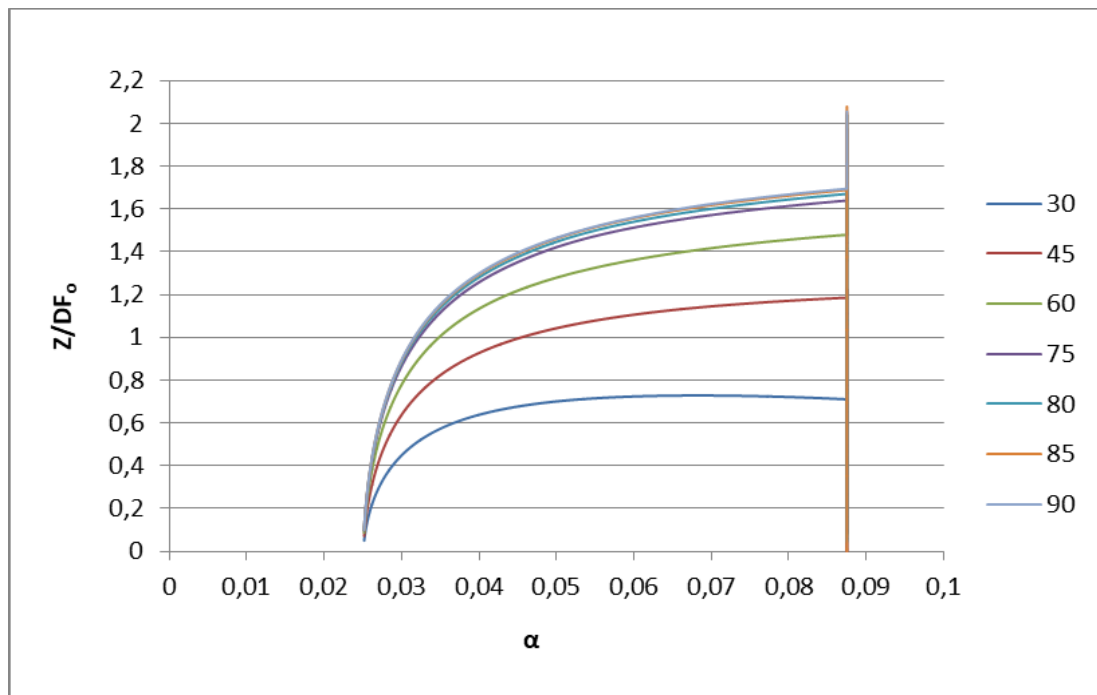
Σχετικά με τον συντελεστή συμπαράσυρσης α , ο οποίος ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση (3-24), εξετάστηκαν τρία διαφορετικά σενάρια για το ολοκληρωματικό μοντέλο.

- Στο πρώτο (Σενάριο 1) θεωρήθηκε $\alpha_j = 0.0545$, $\alpha_p = 0.0875$, $Ri_p = 0.56$.
- Στο δεύτερο (Σενάριο 2) θεωρήθηκε μειωμένος συντελεστής συμπαράσυρσης $\alpha_j = 0.025$, $\alpha_p = 0.0875$ και $Ri_p = 0.56$ (Παπακωνσταντής, 2009). Τα δύο παραπάνω σενάρια έχουν επιλυθεί σε διδακτορική διατριβή (Παπακωνσταντής, 2009).
- Στο τρίτο (Σενάριο 3) θεωρήθηκε $\alpha_j = 0.0545$, $\alpha_p = 0.0875$, $Ri_p = 0.56$. Ο συντελεστής συμπαράσυρσης λαμβάνεται ως: $a = a_j - (a_j - a_p) \sin \theta \frac{Ri^2(s)}{Ri_p^2}$, όπου η εισαγωγή του $\sin \theta$ στη σχέση (3-24) βασίζεται σε θεώρηση του Jirka (2004), ενώ ακόμη γίνεται θεώρηση αρνητικού αριθμού Richardson στο τετράγωνο $Ri^2(s) = \frac{Q^2(s)B(s)}{M^{5/2}(s)} < 0$. Το σενάριο αυτό έχει επιλυθεί από την Τσατσάρα (2016).

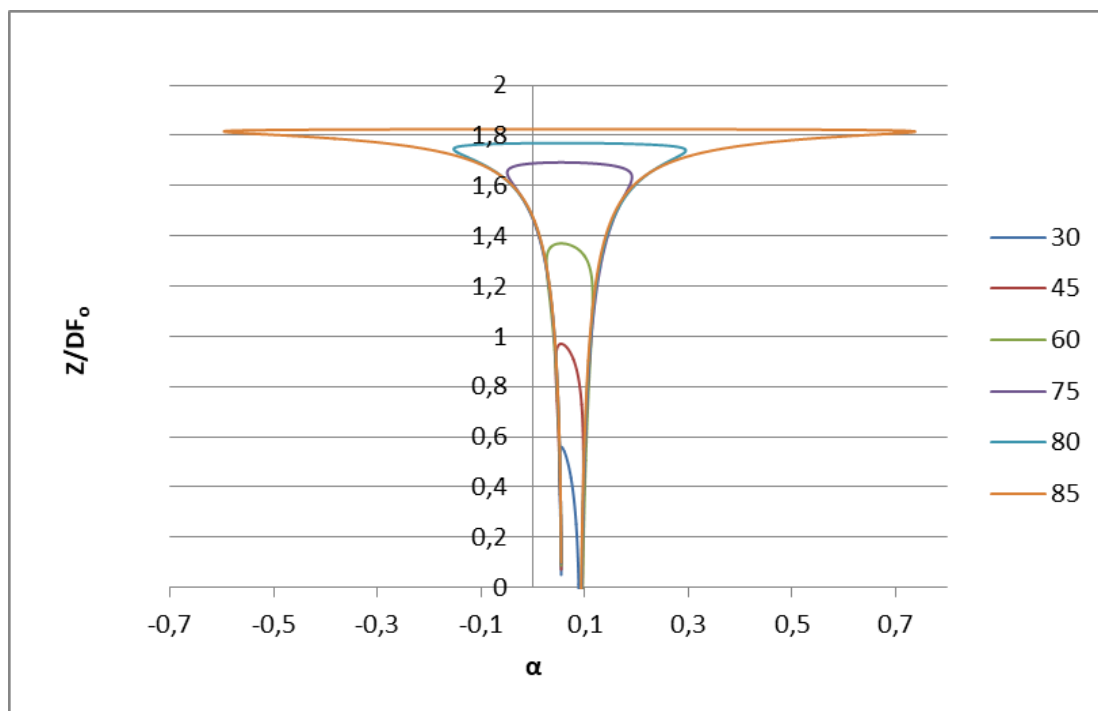
Στα παρακάτω Σχήματα 4-2, 4-3, 4-4 φαίνεται η μεταβολή του συντελεστή συμπαράσυρσης για τα τρία σενάρια, για εύρος γωνιών παροχέτευσης $\theta_0 = 30^\circ - 90^\circ$.



Σχήμα 4-2: Μεταβολή συντελεστή συμπαράσυρσης α (Σενάριο 1) με το αδιαστατοποιημένο ύψος του άξονα της φλέβας για γωνίες εκτόξευσης $30^\circ - 90^\circ$.



Σχήμα 4-3: Μεταβολή συντελεστή συμπαράσυρσης α (Σενάριο 2) με το αδιαστατοποιημένο ύψος του άξονα της φλέβας για γωνίες εκτόξευσης $30^\circ - 90^\circ$.



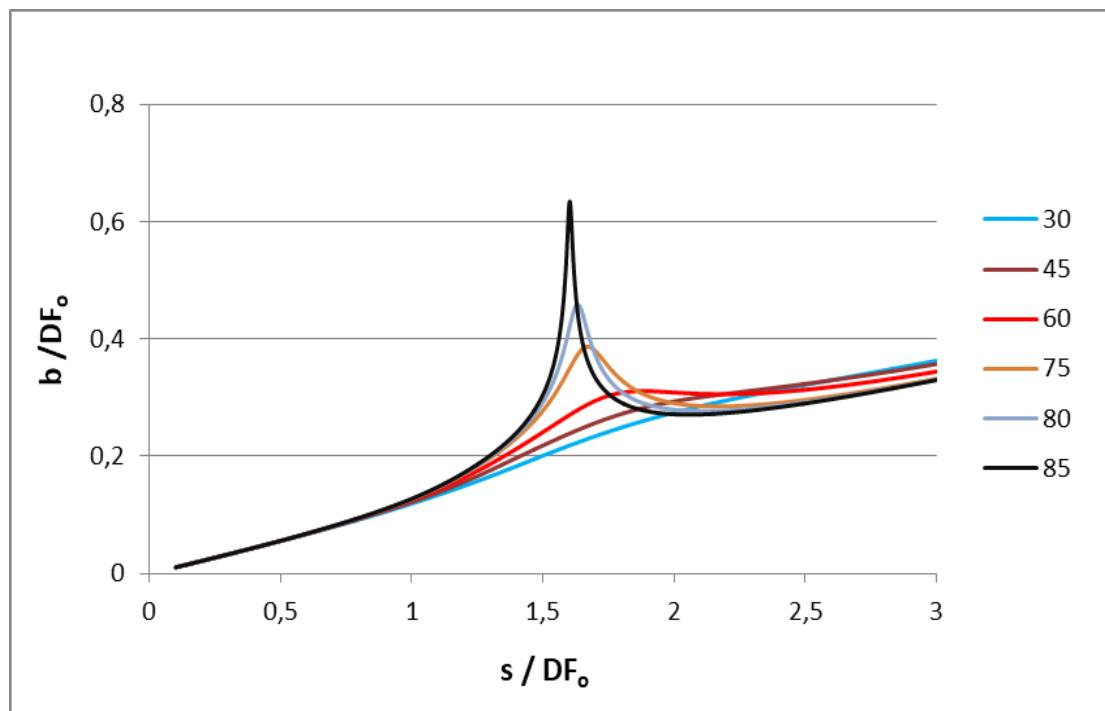
Σχήμα 4-4: Μεταβολή συντελεστή συμπαράσυρσης α (Σενάριο 3) με το αδιαστατοποιημένο ύψος του άξονα της φλέβας για γωνίες εκτόξευσης 30°-85°.

Στο Σενάριο 1, ο συντελεστής συμπαράσυρσης α ξεκινάει από την αρχική τιμή $\alpha_i=0.0545$ και αυξάνεται κατά μήκος του άξονα της φλέβας, μέχρι την τελική τιμή $\alpha_p=0.0875$, η οποία επιτυγχάνεται στο μέγιστο ύψος του άξονα της φλέβας. Στη συνέχεια, στον καθοδικό κλάδο ο συντελεστής παραμένει σταθερός και ίσος με $\alpha_p=0.0875$. Στο Σενάριο 2, ο συντελεστής συμπαράσυρσης α ξεκινάει από την τιμή $\alpha_i=0.025$ και καταλήγει στη τιμή $\alpha_p=0.0875$ στο μέγιστο ύψος του άξονα της φλέβας, όπου και παραμένει σταθερός μέχρι την επιστροφή της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης. Στο Σενάριο 3, ο συντελεστής συμπαράσυρσης α για γωνίες μέχρι και 60° ξεκινάει από $\alpha_i=0.0545$ και μειώνεται μέχρι το τερματικό ύψος, ενώ στη συνέχεια αυξάνεται προσεγγίζοντας την τιμή $\alpha_p=0.0875$. Για μεγαλύτερες γωνίες ($\geq 75^\circ$), ο συντελεστής ξεκινάει από $\alpha_i=0.0545$ και μειώνεται παίρνοντας αρνητικές τιμές, ενώ στην περιοχή του τερματικού ύψους αυξάνεται απότομα και έπειτα μειώνεται πάλι καταλήγοντας στην τιμή $\alpha_p=0.0875$.

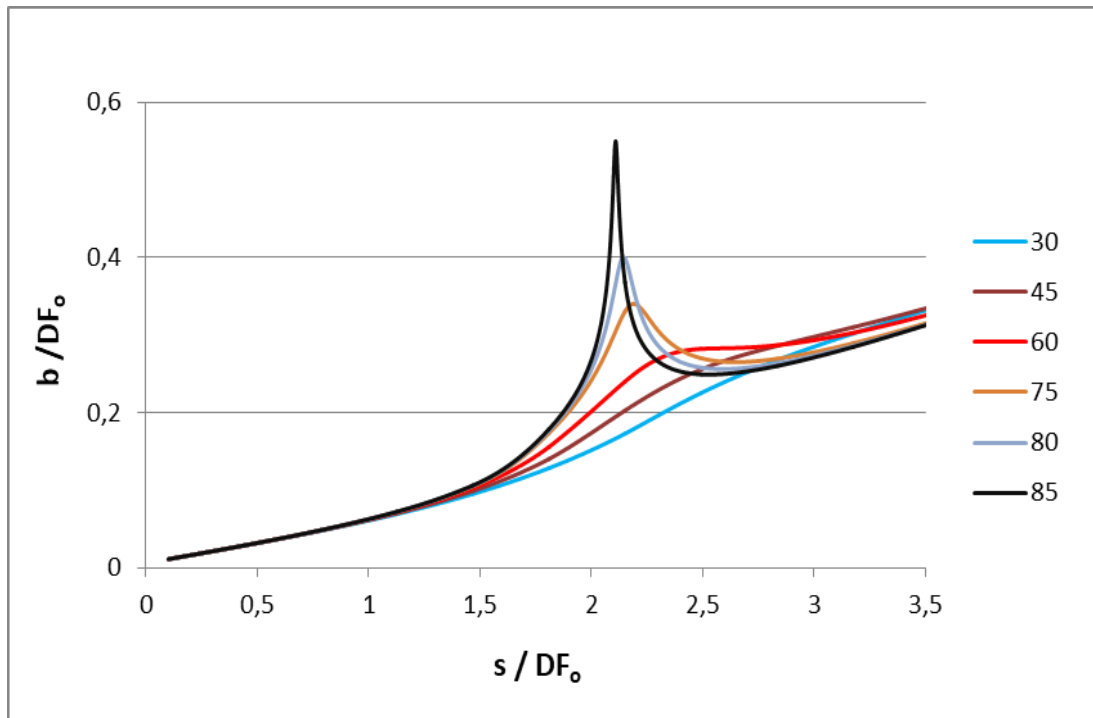
Η μεταβολή του πλάτους της κατανομής της ταχύτητας b γύρω από την περιοχή του τερματικού ύψους, για γωνίες μικρότερες των 75° είναι ομαλή για όλα τα σενάρια όπως θα δείξουμε παρακάτω. Για γωνίες ίσες και μεγαλύτερες από 75° το πλάτος κατανομής της ταχύτητας b αυξάνεται απότομα στην περιοχή του τερματικού ύψους και στην συνέχεια μειώνεται απότομα. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι στην περιοχή του τερματικού ύψους η ποσότητα κίνησης M μειώνεται. Για μεγάλες γωνίες παροχέτευσης η οριζόντια συνιστώσα και άρα η ποσότητα κίνησης M τείνει να μηδενιστεί ($M \rightarrow 0$) με αποτέλεσμα το

πλάτος $b = \frac{Q}{\sqrt{2\pi M}}$ να μεγαλώνει απότομα όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-5 α, β. Επειδή αυτό δεν φαίνεται να έχει φυσική σημασία, ο Παπακωνσταντής (2009), όρισε μια μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή του πλάτους b στην περιοχή εμφάνισης του τερματικού ύψους, ίση με $0.30DF_0$ για το Σενάριο 1 ($\alpha_j=0.0545$) και $0.27DF_0$ για το Σενάριο 2 ($\alpha_j =0.025$). Παρόμοιο περιορισμό είχαν θέσει και οι Papanicolaou *et al.* (2008). Σχετικά με τη μεταβολή του πλάτους b για το Σενάριο 3, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-5 γ, είναι ομαλή και δεν γίνεται κάποια διόρθωση της τιμής του. Για γωνία 90° το πλάτος κατανομής της ταχύτητας b θεωρείται ίσο με μηδέν και άρα $Z_f = Z_c$.

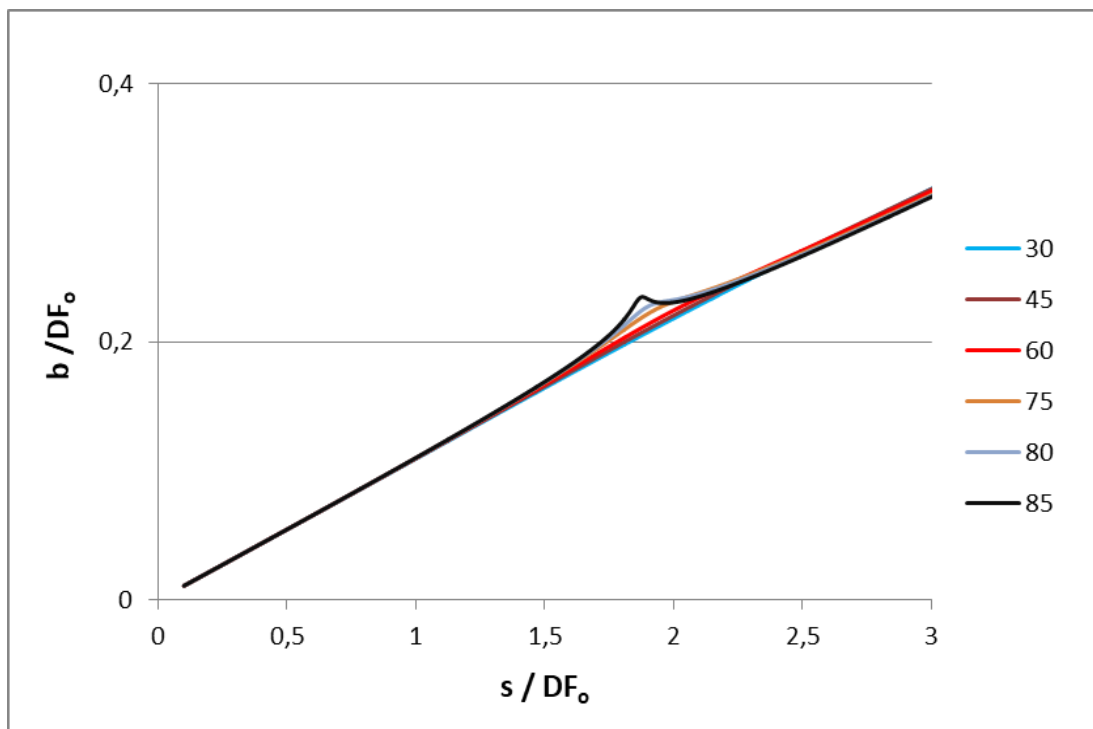
(α)



(β)

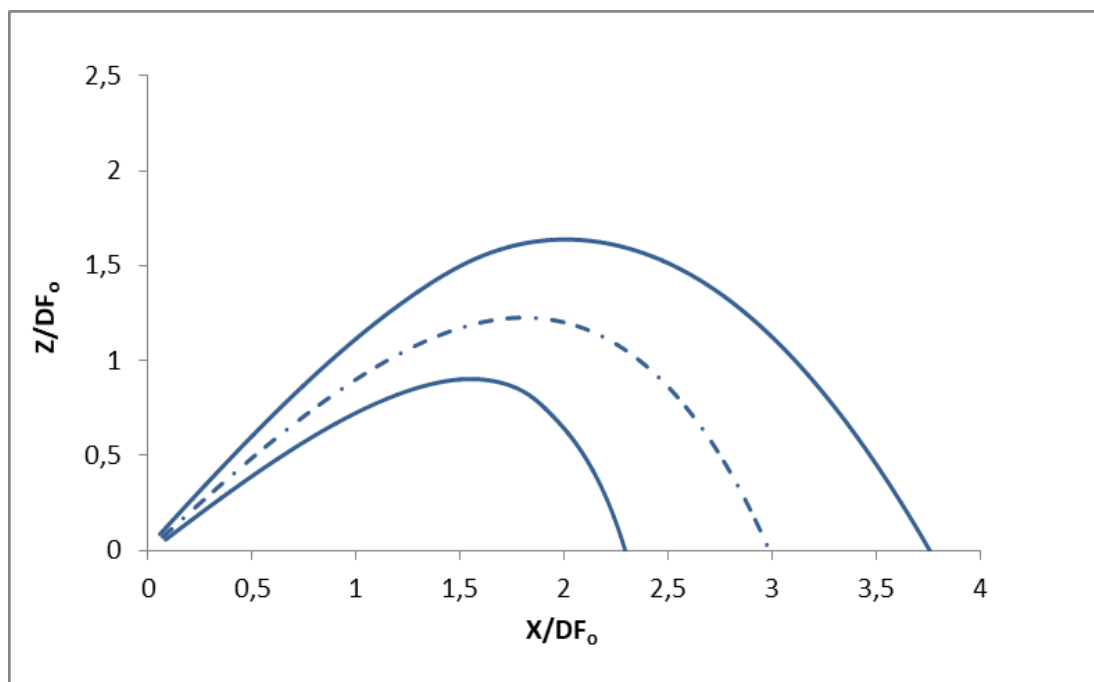


(γ)



Σχήμα 4-5 α, β, γ: Μεταβολή του αδιάστατου πλάτους κατανομής της ταχύτητας b κατά μήκος του άξονα της φλέβας για διάφορες γωνίες παροχέτευσης για το: (α) Σενάριο 1, (β) Σενάριο 2, (γ) Σενάριο 3.

Η τυπική μορφή της τροχιάς της φλέβας για γωνίες μικρότερες των 75° δίνεται στο Σχήμα 4-6.



Σχήμα 4-6: Τροχιά της φλέβας, όπου φαίνονται ο άξονας και το άνω και κάτω όριο της, για γωνία παροχέτευσης $\theta_0=45^\circ$ (Σενάριο 2).

Στον Πίνακα 4-1, συνοψίζονται τα αποτελέσματα των προβλέψεων του μοντέλου GM για τις κυκλικές φλέβες σε αδιάστατη μορφή για τα τρία σενάρια που εξετάζονται. Ακόμη, στον Πίνακα 4-2, δίνονται τα αποτελέσματα που υπολογίστηκαν από την εφαρμογή των αναλυτικών λύσεων των Kikkert et al. (2007), οι εξισώσεις των οποίων έχουν δοθεί στο Κεφάλαιο 3.3. Επίσης δίνονται οι προβλέψεις του μοντέλου Corjet (Jirka, 2008). Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, καθώς και αρκετά πειραματικά δεδομένα, θα συγκριθούν διαγραμματικά για καθένα από τα μεγέθη Z_f , Z_c , X_z , X_{ic} , X_i , S_t , S_i .

Πίνακας 4-1: Προβλέψεις μοντέλου GM κυκλικών φλεβών για τα Σενάρια 1, 2, 3.

	θ	α_j	Z_c/DF_o	$b/DF_o(\Delta^*)$	$b_c/DF_o(\Delta^*)$	Z_f/DF_o	X_z/DF_o	X_{ic}/DF_o	X_i/DF_o	S_t/F_o	$S_t/F_o(ave^*)$	S_i/F_o	$S_i/F_o(ave^*)$
<u>Σενάριο 1</u>	30°	0.0545 $Ri^2 > 0$	0,54	0,2	0,24	0,91	1,39	2,37	3,17	0,32	0,53	0,66	1,12
	45°		0,92	0,25	0,3	1,37	1,36	2,35	3,11	0,36	0,6	0,79	1,33
	60°		1,26	0,3	0,36	1,79	1,1	1,93	2,64	0,35	0,6	0,83	1,41
	75°		1,5	0,3	0,36	2,04	0,62	1,11	1,78	0,33	0,56	0,82	1,38
	80°		1,55	0,3	0,36	2,09	0,42	0,77	1,41	0,32	0,54	0,8	1,36
	85°		1,58	0,3	0,36	2,12	0,21	0,39	1,02	0,31	0,53	0,79	1,34
	90°		1,59	0	0	1,59	0	0	0	0,31	0,53	-	-
<u>Σενάριο 2</u>	30°	0.025 $Ri^2 > 0$	0,73	0,16	0,19	1,01	1,88	3,1	3,87	0,24	0,41	0,69	1,16
	45°		1,23	0,22	0,26	1,62	1,81	2,99	3,76	0,3	0,52	0,87	1,48
	60°		1,67	0,26	0,32	2,14	1,42	2,4	3,16	0,31	0,53	0,96	1,63
	75°		1,97	0,27	0,32	2,46	0,79	1,38	2,1	0,29	0,49	0,97	1,64
	80°		2,04	0,27	0,32	2,52	0,54	0,95	1,65	0,28	0,47	0,95	1,62
	85°		2,08	0,27	0,32	2,56	0,27	0,49	1,18	0,27	0,46	0,94	1,6
	90°		2,09	0	0	2,09	0	0	0	0,27	0,45	-	-
<u>Σενάριο 3</u>	30°	0.0545 $Ri^2 < 0$	0,56	0,17	0,21	0,87	1,47	2,55	3,31	0,27	0,46	0,59	1
	45°		0,97	0,2	0,24	1,33	1,5	2,61	3,37	0,28	0,48	0,76	1,29
	60°		1,37	0,22	0,26	1,76	1,26	2,22	2,97	0,26	0,43	0,88	1,49
	75°		1,69	0,22	0,27	2,1	0,77	1,37	2,09	0,19	0,32	0,92	1,56
	80°		1,77	0,23	0,27	2,18	0,54	0,98	1,69	0,16	0,27	0,92	1,55
	85°		1,83	0,23	0,28	2,25	0,29	0,53	1,22	0,12	0,2	0,91	1,54
	90°		1,85	0,32	0,38	1,85	0	0	0	0,02	0,03	-	-

Δ^* : Διορθωμένη τιμή πλάτους ταχύτητας ή συγκέντρωσης στη θέση τερματικού ύψους

ave^* : Πρόβλεψη του μοντέλου για τη μέση στη διατομή αραίωση (ave)

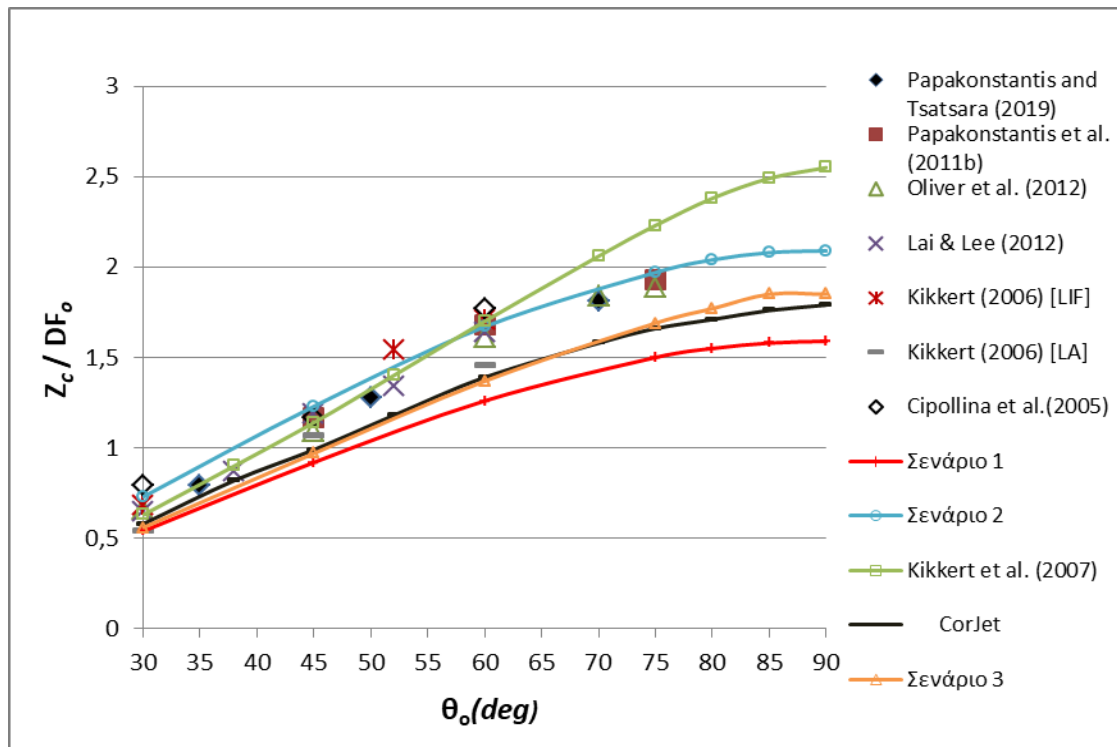
Πίνακας 4-2: Αποτελέσματα αναλυτικών λύσεων των Kikkert *et al.* (2007) και προβλέψεις μοντέλου Corjet (Jirka, 2008).

	θ	Z_c/DF_0	Z_f/DF_0	X_z/DF_0	X_{ic}/DF_0	X_i/DF_0	S_t/F_0	S_i/F_0
Kikkert <i>et al.</i> (2007)	30°	0,63	1,07	1,72	2,96	3,39	0,34	0,68
	45°	1,14	1,66	1,89	3,05	3,57	0,41	0,96
	60°	1,7	2,27	1,8	2,72	3,3	0,45	1,27
	75°	2,23	2,84	1,36	1,88	2,49	0,48	1,57
	80°	2,38	2,99	1,09	1,44	2,05	0,48	1,66
	85°	2,49	3,11	0,7	0,88	1,49	0,48	1,73
	90°	2,55	3,17	-	-	-	-	-
Corjet (Jirka,2008)	30°	0,58	0,84	1,5	2,56	-	0,27	0,56
	45°	0,99	1,31	1,52	2,66	-	0,29	0,65
	60°	1,39	1,73	1,26	2,24	-	0,29	0,69
	75°	1,66	2	0,76	1,32	-	0,26	0,69
	80°	1,71	2,05	0,54	0,89	-	0,25	0,69
	85°	1,76	2,09	0,3	0,48	-	0,24	0,67
	90°	1,79	2,1	0	0	-	0,23	0,66

Στα παρακάτω σχήματα οι συνεχείς γραμμές αφορούν προβλέψεις μοντέλων, ενώ τα μεμονωμένα σύμβολα αφορούν πειραματικά δεδομένα.

Μέγιστο ύψος άξονα φλέβας Z_c .

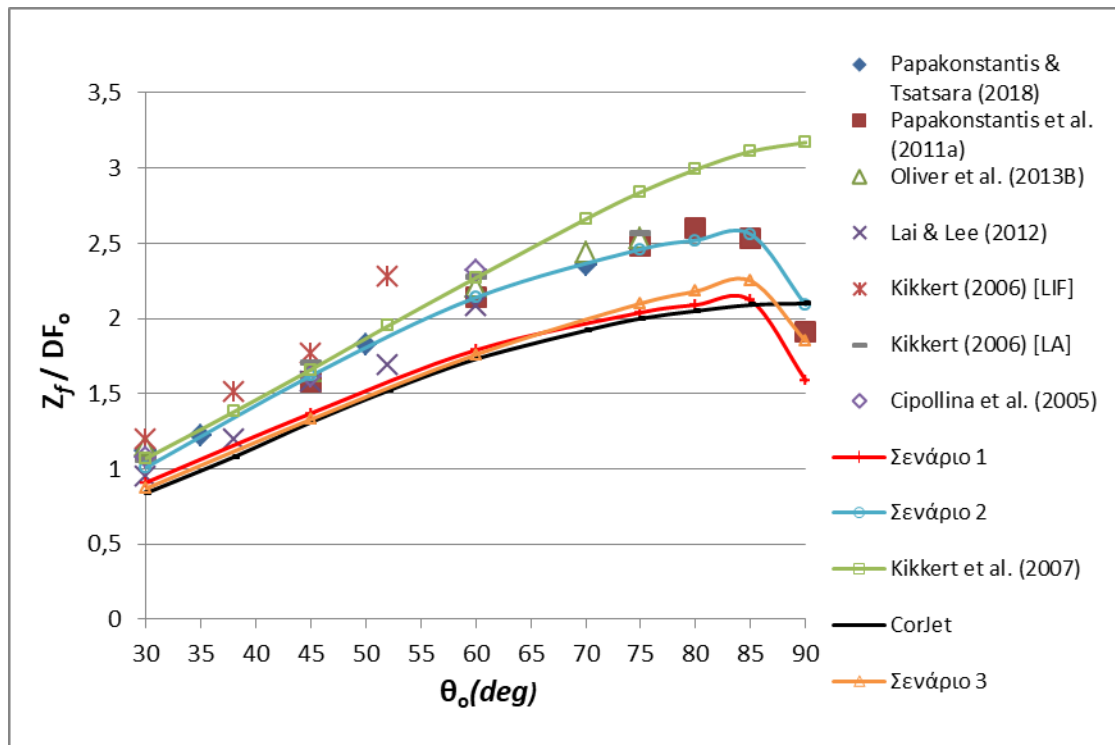
Σύμφωνα με το Σχήμα 4-7 τα μοντέλα GM (Σενάρια 1, 3) και Corjet υποεκτιμούν το ύψος Z_c για όλες τις γωνίες παροχέτευσης. Το Σενάριο 1 προσεγγίζει κάποια πειραματικά αποτελέσματα για την γωνία των 30° ενώ παρουσιάζει αποκλίσεις για γωνίες έως και 45° στο εύρος 8-20%. Για γωνίες άνω των 45° προκύπτουν αποκλίσεις έως και 30%. Λίγο μικρότερες αποκλίσεις σε όλο το εύρος των γωνιών προκύπτουν για το Σενάριο 3 και το Corjet, τα αποτελέσματα των οποίων πρακτικά ταυτίζονται. Τα αποτελέσματα των παραπάνω μοντέλων παρουσιάζουν αποκλίσεις έως και 23% για γωνίες άνω των 45°. Για μειωμένο συντελεστή συμπαράσυρσης (Σενάριο 2) το μοντέλο GM προσεγγίζει ικανοποιητικά τα περισσότερα πειραματικά δεδομένα με αποκλίσεις μικρότερες από 15%. Οι αναλυτικές λύσεις των Kikkert *et al.* (2007) προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα περισσότερα πειραματικά δεδομένα για γωνίες μέχρι ~60° με αποκλίσεις μικρότερες από 15% ενώ για μεγαλύτερες γωνίες τα δεδομένα αποκλίνουν κατά μέσο όρο 15%.



Σχήμα 4-7: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων με πειραματικά δεδομένα για το μέγιστο ύψος του άξονα της φλέβας Z_c .

Τελικό τερματικό ύψος φλέβας Z_f

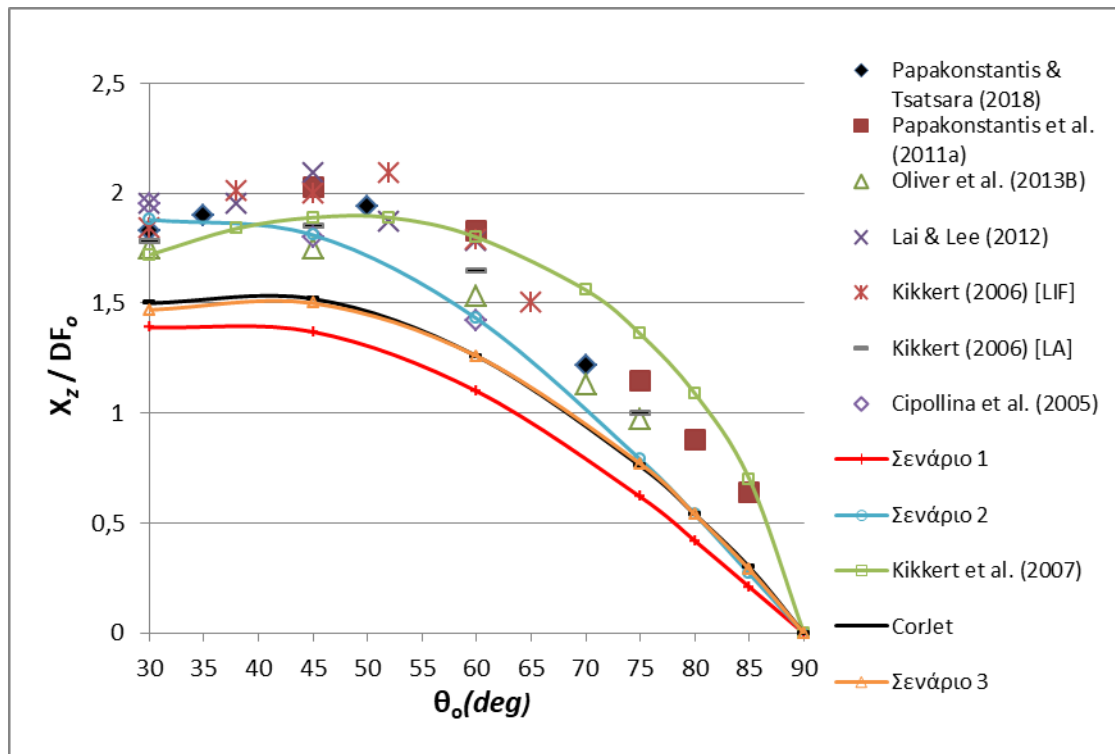
Σύμφωνα με το Σχήμα 4-8 τα αποτελέσματα των μοντέλων GM (Σενάρια 1, 3) και CorJet πρακτικά ταυτίζονται και υποεκτιμούν το ύψος Z_f για όλες τις γωνίες παροχέτευσης. Για γωνίες μικρότερες των 45° προκύπτουν αποκλίσεις 5-20% ενώ για μεγαλύτερες γωνίες εμφανίζονται αποκλίσεις 7-30%. Για μειωμένο συντελεστή συμπαράσυρσης (Σενάριο 2) το μοντέλο GM προσεγγίζει ικανοποιητικά τα περισσότερα πειραματικά δεδομένα με αποκλίσεις μικρότερες από 15%. Οι αναλυτικές λύσεις των Kikkert *et al.* (2007) προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα περισσότερα πειραματικά δεδομένα για γωνίες μέχρι $\sim 60^\circ$ με αποκλίσεις μικρότερες από 15% ενώ για μεγαλύτερες γωνίες τα αποτελέσματα αποκλίνουν σημαντικά από τα αντίστοιχα πειραματικά με αποκλίσεις 10-40%.



Σχήμα 4-8: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων με πειραματικά δεδομένα για το τελικό τερματικό ύψος Z_f .

Οριζόντια θέση τελικού τερματικού ύψους φλέβας X_z

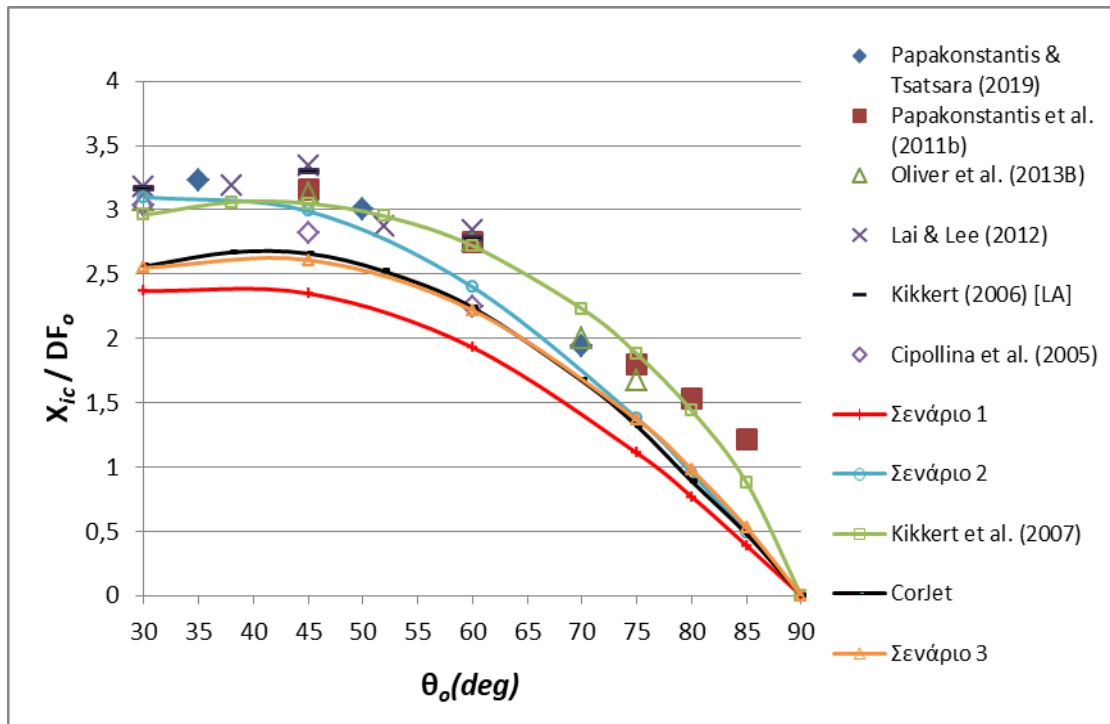
Με βάση το Σχήμα 4-9 προκύπτει ότι οι προβλέψεις του μοντέλου GM για το Σενάριο 1 υποεκτιμούν σε μεγάλο βαθμό τα πειραματικά δεδομένα της θέσης X_z σε όλο το εύρος των γωνιών με αποκλίσεις 25-39%. Το ίδιο ισχύει για τις προβλέψεις των μοντέλων CorJet και GM για το Σενάριο 3, οι οποίες πρακτικά ταυτίζονται και αποκλίνουν από τα πειραματικά αποτελέσματα 14-30%. Για το Σενάριο 2, το μοντέλο GM προσεγγίζει καλύτερα τα πειραματικά δεδομένα για γωνίες μέχρι 45° με αποκλίσεις έως και 15%, ενώ υποεκτιμά σε ποσοστό 7-27% τα περισσότερα πειραματικά αποτελέσματα μεγαλύτερων γωνιών. Οι αναλυτικές λύσεις των Kikkert *et al.* (2007) προσεγγίζουν τα περισσότερα πειραματικά δεδομένα για γωνίες μέχρι 60° με απόκλιση 7-25%, ενώ για μεγαλύτερες γωνίες υπερεκτιμούν τα πειραματικά αποτελέσματα σε ποσοστό 10-29%.



Σχήμα 4-9: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων με πειραματικά δεδομένα για την οριζόντια θέση του τελικού τερματικού ύψους της φλέβας X_z .

Οριζόντια θέση του άξονα της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης X_{ic} .

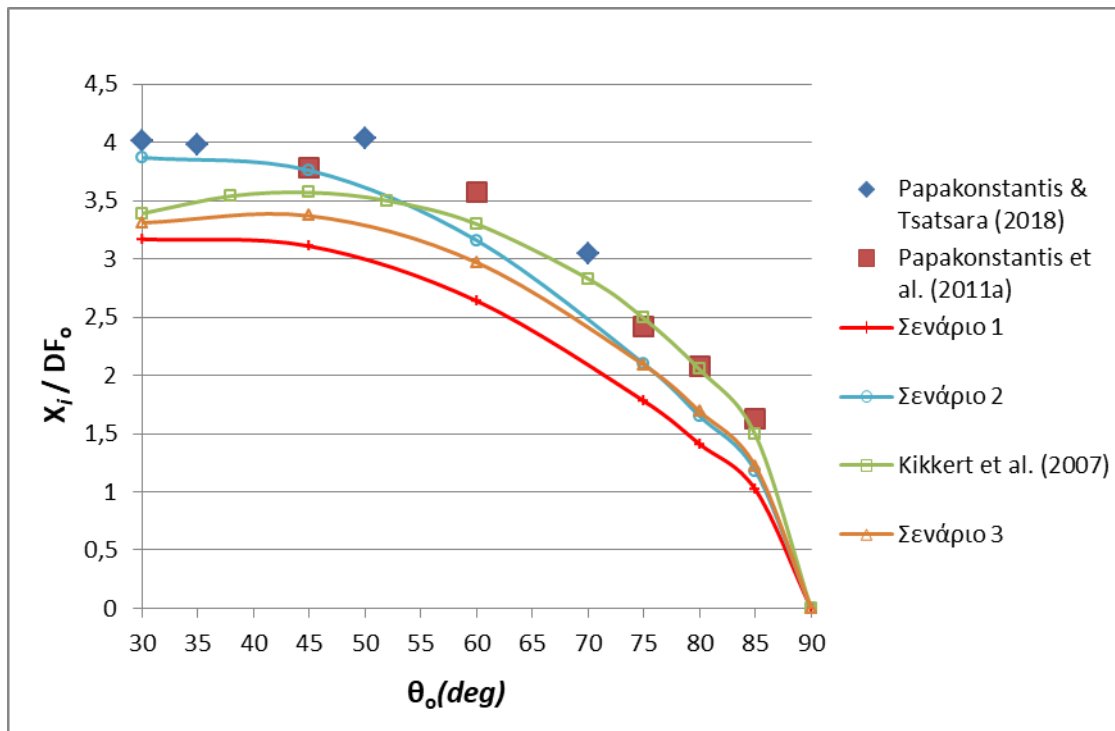
Με βάση το Σχήμα 4-10 προκύπτει ότι οι προβλέψεις του μοντέλου GM για το Σενάριο 1 υποεκτιμούν σε μεγάλο βαθμό το σύνολο των πειραματικών αποτελεσμάτων της θέσης X_{ic} σε όλο το εύρος των γωνιών με αποκλίσεις 15-62%. Οι προβλέψεις των μοντέλων Corjet και GM για το Σενάριο 3, οι οποίες πρακτικά ταυτίζονται, υποεκτιμούν σε λίγο μικρότερο βαθμό τα πειραματικά αποτελέσματα σε σχέση με το Σενάριο 1 σε ποσοστό 10-56%. Για το Σενάριο 2, το μοντέλο GM προσεγγίζει καλύτερα τα πειραματικά δεδομένα για γωνίες μέχρι 50° με αποκλίσεις έως και 15%, ωστόσο για μεγαλύτερες γωνίες τα αποτελέσματα ταυτίζονται με τα αποτελέσματα των μοντέλων Corjet και GM για το Σενάριο 3. Οι αναλυτικές λύσεις των Kikkert *et al.* (2007) προσεγγίζουν τα περισσότερα πειραματικά δεδομένα ικανοποιητικά για όλο το εύρος των γωνιών με απόκλιση μικρότερη από 20%.



Σχήμα 4-10: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων με πειραματικά δεδομένα για την οριζόντια θέση επιστροφής του άξονα της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης X_{ic} .

Οριζόντια απόσταση του άνω ορίου της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης X_i .

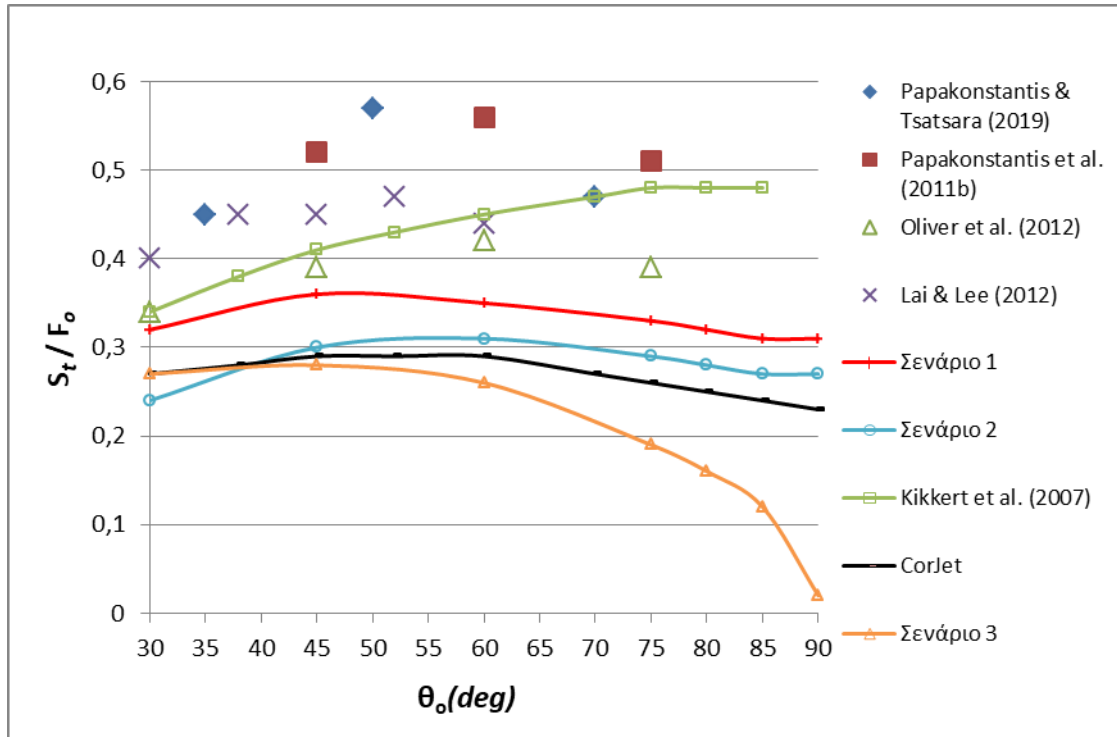
Από το Σχήμα 4-11 προκύπτει ότι το μοντέλο GM για το Σενάριο 1 υποεκτιμά σημαντικά τα πειραματικά δεδομένα για όλο το εύρος των γωνιών (21-46%), όπως επίσης και το Σενάριο 3 αλλά σε μικρότερο βαθμό (12-33%). Το μοντέλο GM για το Σενάριο 2 προσεγγίζει ικανοποιητικά τα πειραματικά αποτελέσματα για γωνίες στο εύρος $30^\circ - 45^\circ$, ενώ για μεγαλύτερες γωνίες οι προβλέψεις πρακτικά συμπίπτουν με τις προβλέψεις για το Σενάριο 3. Οι αναλυτικές λύσεις των Kikkert *et al.* (2007) προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα πειραματικά δεδομένα για γωνίες άνω των 45° με αποκλίσεις μικρότερες από 16%.



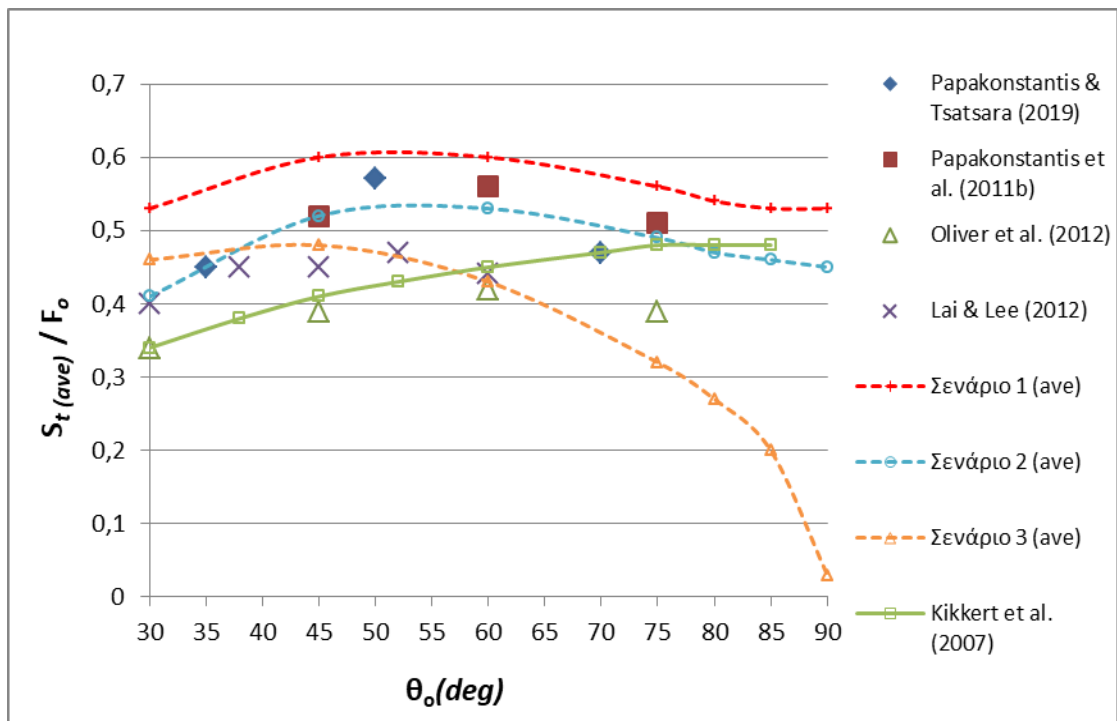
Σχήμα 4-11: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων με τα πειραματικά δεδομένα για την οριζόντια θέση επιστροφής του εξωτερικού ορίου της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης X_i .

Αξονική αραίωση στο τερματικό ύψος S_t

Σύμφωνα με το Σχήμα 4-12 η αξονική αραίωση στο τερματικό ύψος υποεκτιμάται σημαντικά από κάθε μοντέλο και ειδικά από το Σενάριο 3, όπου για μεγάλες γωνίες η αραίωση μειώνεται απότομα και σχεδόν μηδενίζεται. Οι αναλυτικές λύσεις των Kikkert *et al.* (2007) προσεγγίζουν κυρίως πειραματικά αποτελέσματα των Oliver *et al.* (2012) για γωνίες μέχρι 60° ενώ για τις γωνίες $70-75^\circ$ προσεγγίζουν τα πειραματικά των Papakonstantis *et al.* (2011b) και Papakonstantis & Tsatsara (2019). Στη συνέχεια επιχειρείται σύγκριση των πειραματικών αποτελεσμάτων με τις προβλέψεις για τη μέση στη διατομή αραίωση (*ave*) (Παπακωνσταντής, 2009). Από το Σχήμα 4-13 προκύπτει ότι η μέση στη διατομή αραίωση για το Σενάριο 1 υπερεκτιμά τα πειραματικά δεδομένα, το Σενάριο 2 προσεγγίζει αρκετά καλά τα πειραματικά δεδομένα των Papakonstantis *et al.* (2011b) και Papakonstantis & Tsatsara (2019) σε όλο το εύρος των γωνιών, ενώ το Σενάριο 3 προσεγγίζει κυρίως πειραματικά αποτελέσματα των Lai & Lee (2012) για γωνίες μέχρι και 60° .



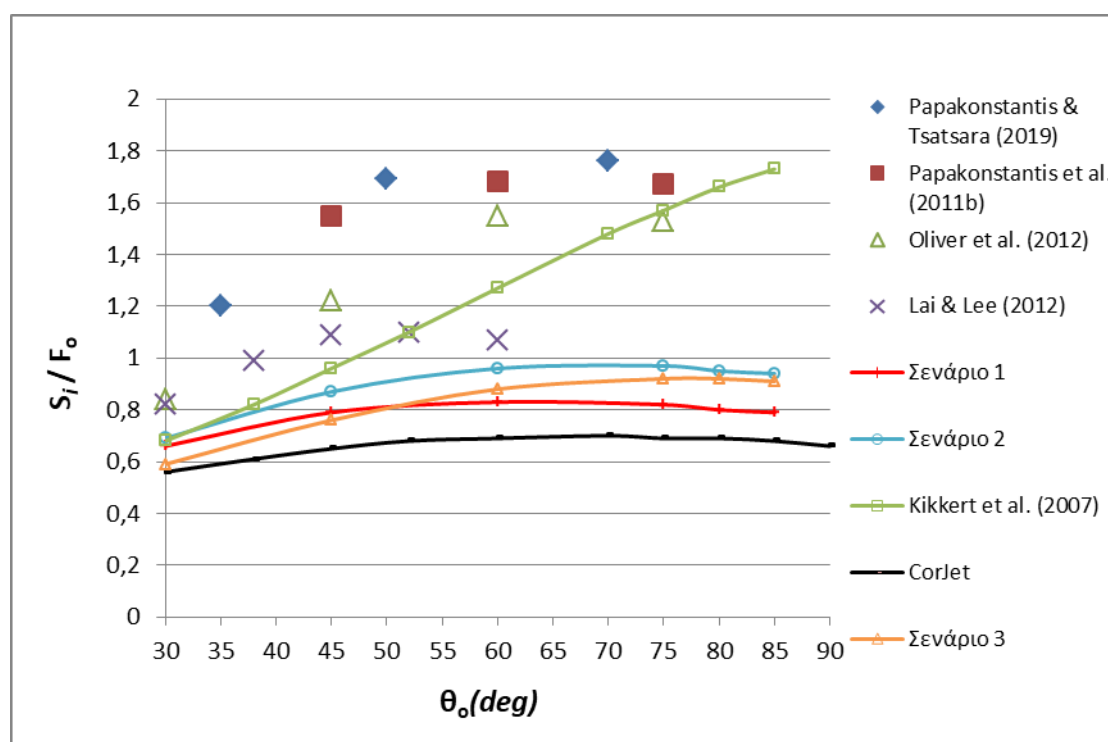
Σχήμα 4-12: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων με πειραματικά δεδομένα για την αξονική αραίωση S_t στη θέση του μέγιστου τερματικού ύψους της φλέβας.



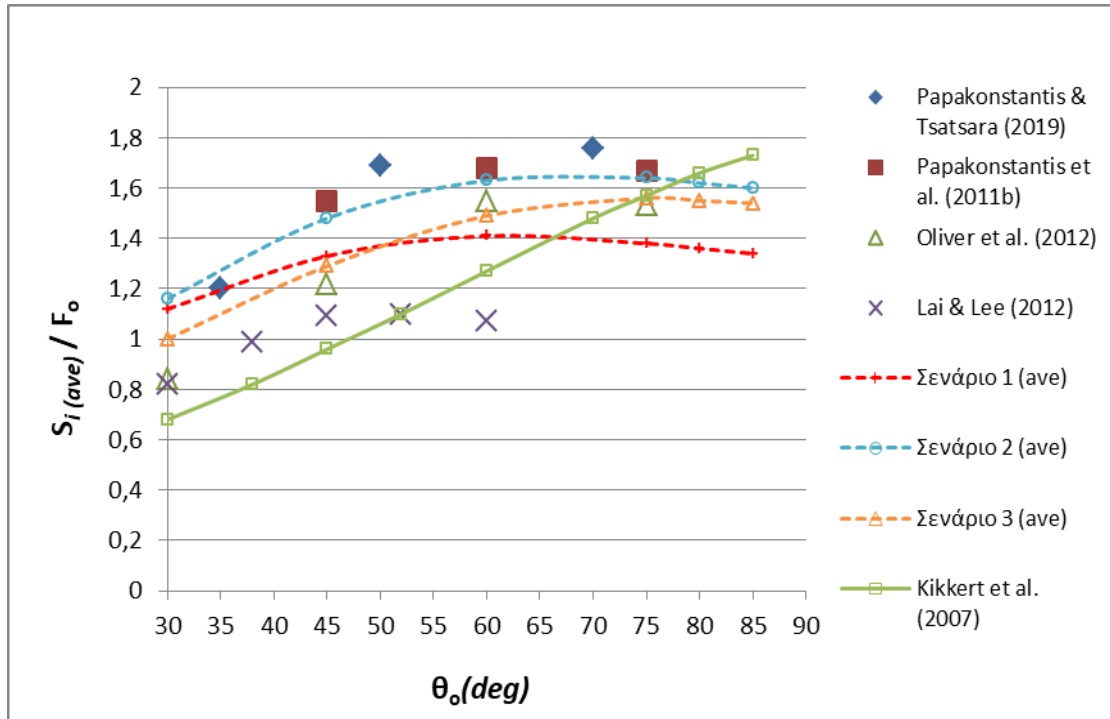
Σχήμα 4-13: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων για την μέση αξονική αραίωση της φλέβας $S_{t(ave)}$ στη θέση του μέγιστου τερματικού ύψους της φλέβας με πειραματικά δεδομένα για την ελάχιστη (αξονική) αραίωση.

Αξονική αραίωση στη θέση επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης S_i .

Σύμφωνα με το Σχήμα 4-14 η αξονική αραίωση στη θέση επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης υποεκτιμάται σημαντικά από κάθε μοντέλο. Πάντως προβλέπεται από τα μοντέλα ότι η αραίωση δεν μεταβάλλεται ιδιαίτερα μετά την γωνία 45°. Το Σενάριο 2 του μοντέλου GM προβλέπει επίσης ότι η μέγιστη αξονική αραίωση στο σημείο επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης προκύπτει για τις γωνίες 60°-75°, γεγονός που έρχεται σε συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα. Οι αναλυτικές λύσεις των Kikkert *et al.* (2007) υποεκτιμούν σε όλο το εύρος των γωνιών τα περισσότερα πειραματικά αποτελέσματα, ενώ δεν τα ακολουθούν ούτε ποιοτικά. Σχετικά με τη μέση στη διατομή αραίωση, από το Σχήμα 4-15 προκύπτει ότι τα Σενάρια 1 και 3 υποεκτιμούν τα πειραματικά δεδομένα των Papakonstantis *et al.* (2011b), Papakonstantis & Tsatsara (2019) ενώ το Σενάριο 2 τα προσεγγίζει αρκετά καλά.



Σχήμα 4-14: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων με πειραματικά δεδομένα για την αξονική αραίωση S_i στη θέση επιστροφής της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης.



Σχήμα 4-15: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων για την μέση αξονική αραίωση της φλέβας $S_{i(ave)}$ στη θέση επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης με πειραματικά δεδομένα για την αξονική αραίωση.

Συνοψίζοντας, από τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει ότι το μοντέλο GM για μειωμένο συντελεστή συμπαράσυρσης (Σενάριο 2) προβλέπει ικανοποιητικά τα πειραματικά δεδομένα των διάφορων χαρακτηριστικών κυκλικών φλεβών αρνητικής άνωσης. Σε αντίστοιχα συμπεράσματα κατέληξε και ο Παπακωνσταντής (2009). Το μοντέλο Corjet υποεκτιμά στο σύνολο τους τα πειραματικά δεδομένα. Οι αναλυτικές λύσεις των Kikkert *et al.* (2007) γενικά προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά γωνιών μέχρι και 60°.

4.3 Μοντελοποίηση Ροής Διδιάστατων Φλεβών

Κατά την επίλυση με το μοντέλο GM-2D (εξισώσεις 3-50 έως 3-55) έχει γίνει θεώρηση: αρχικού πυκνομετρικού αριθμού Froude $F_o \approx 40$, $Re_o \approx 3000$, $\Delta\rho_o = -0.73\%$, στόμιο διδιάστατης γεωμετρίας πλάτους $w = 0.2$ cm και μήκους $L_D = 20$ cm, αρχική ογκομετρική παροχή (εκροής) $Q_o \approx 190$ cm³/s (παροχή ανά μονάδα μήκους σχισμής $q_o \approx 9.5$ cm²/s) και αρχικές συνθήκες που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3-5. Εξετάζονται οι γωνίες παροχέτευσης 15°, 30°, 45°, 50°, 60°, 75°, 80°, 85° και 90°. Απόσπασμα του κώδικα φαίνεται στο Σχήμα 4-16, ενώ ολόκληρος ο κώδικας επίλυσης δίνεται στο Παράρτημα.

```
%% Αρχικές Συνθήκες
thetao = 2*pi*45/360;           % Αρχική γωνία παροχέτευσης θο
qo = Qo/L;
mo = w*Uo^2;
go = g*dr;
betao = w*Uo*qo;
So = 5.2*w;                     % Εικονική αφειτηρία

IC1 = qo;
IC2 = mo;
IC3 = thetao;
IC4 = betao;
IC5 = So*cos(thetao);
IC6 = So*sin(thetao);

%% ΡΟΥΤΙΝΑ RK4
%βήμα ds 0.01cm                Αρχικές Συνθήκες
[s,n] = ode45(@model2d, [So:0.01: 90] , [IC1; IC2; IC3; IC4; IC5; IC6]);

%% Τελικά μητρώα q, m, theta=θ, beta=β, x, z
q = n(:,1);
m = n(:,2);
theta = n(:,3);
beta = n(:,4);
x = n(:,5);
z = n(:,6);
```

Σχήμα 4-16: Απόσπασμα από τον κώδικα, όπου ορίζονται οι αρχικές συνθήκες, εκτελείται η ρουτίνα ode45 και εξάγονται οι παράμετροι q, m, β, θ, X, Z.

Επιλύθηκαν τρία διαφορετικά σενάρια για το ολοκληρωματικό μοντέλο GM-2D διδιάστατων φλεβών.

- Στο πρώτο (Σενάριο A), θεωρήθηκε συντελεστής συμπαράσυρσης α σύμφωνα με τη σχέση (3-56), αριθμός Richardson σύμφωνα με τη σχέση (3-57) και $\alpha_j = 0.055$, $\alpha_p = 0.11$, $Ri_p = 0.30$.
- Στο δεύτερο (Σενάριο B) θεωρήθηκε σταθερός συντελεστής συμπαράσυρσης $\alpha = 0.11$.

- Στο τρίτο (Σενάριο Γ) θεωρήθηκε συντελεστής συμπαράσυρσης $a = a_j - (a_j - a_p) \sin \theta \frac{Ri(s)}{Ri_p}$, όπου η εισαγωγή του $\sin \theta$ στη σχέση (3-56) βασίζεται σε θεώρηση του Jirka (2006), ενώ λαμβάνεται αρνητικός αριθμός Richardson $Ri(s) = \frac{q(s)^3 \beta(s)}{m(s)^3} < 0$ και $\alpha_j = 0.055$, $\alpha_p = 0.11$, $Ri_p=0.30$.

Εξετάστηκε ακόμη το παρακάτω σενάριο για συντελεστή συμπαράσυρσης a με βάση τη σχέση (3-56) και αριθμό Richardson Ri με βάση τη σχέση (3-57).

- $\alpha_j = 0.055$, $\alpha_p=0.11$, $Ri_p=0.6$ (Kotsovinos & List, 1977).

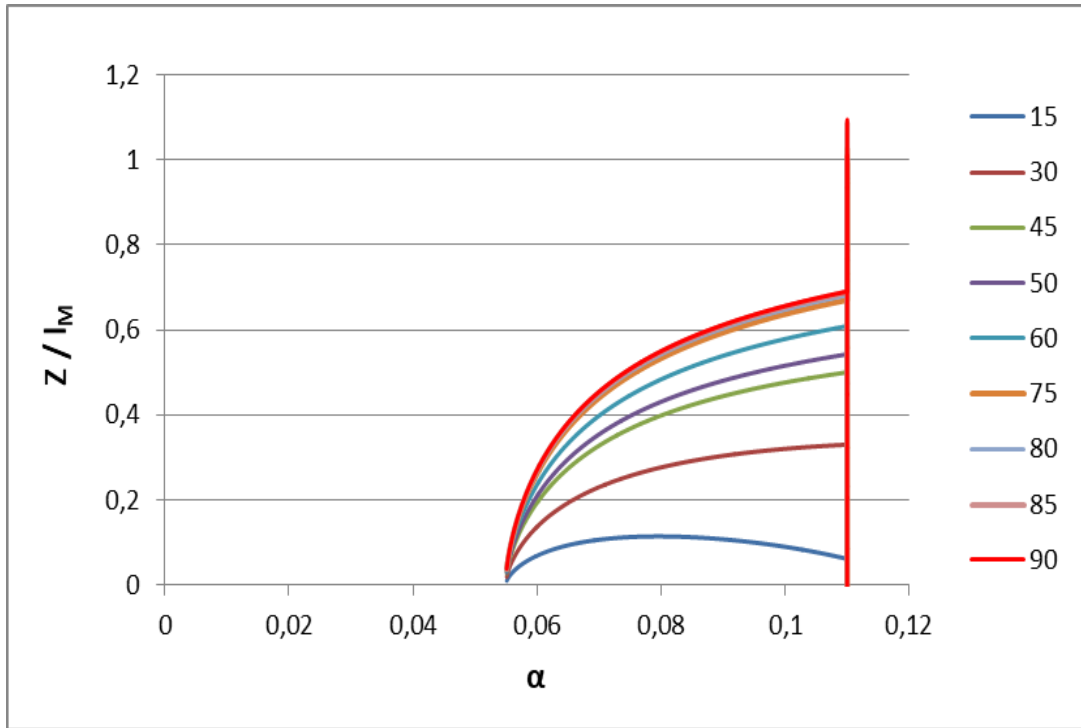
Το παραπάνω σενάριο δίνει πρακτικά ίδια αποτελέσματα με το Σενάριο Α και οι προβλέψεις του παρουσιάζονται στο Παράρτημα.

Σχετικά με τον λόγο των πλατών $\lambda = b_c/b$, εξετάστηκαν δύο τιμές: $\lambda=1.3$ (Jirka, 2006 και Angelidis, 2002) και $\lambda=1.35$ (Kotsovinos & List, 1977). Στον Πίνακα 4-3 δίνονται προς σύγκριση τα αποτελέσματα των διαφόρων χαρακτηριστικών της φλέβας για τις δύο τιμές του λ για το σενάριο Α και για αρχική γωνία παροχέτευσης $\theta_0 = 45^\circ$. Λόγω των πρακτικά ίδιων αποτελεσμάτων υιοθετήθηκε η τιμή $\lambda=1.3$. Όμοια συμπεράσματα προέκυψαν και για τα υπόλοιπα σενάρια.

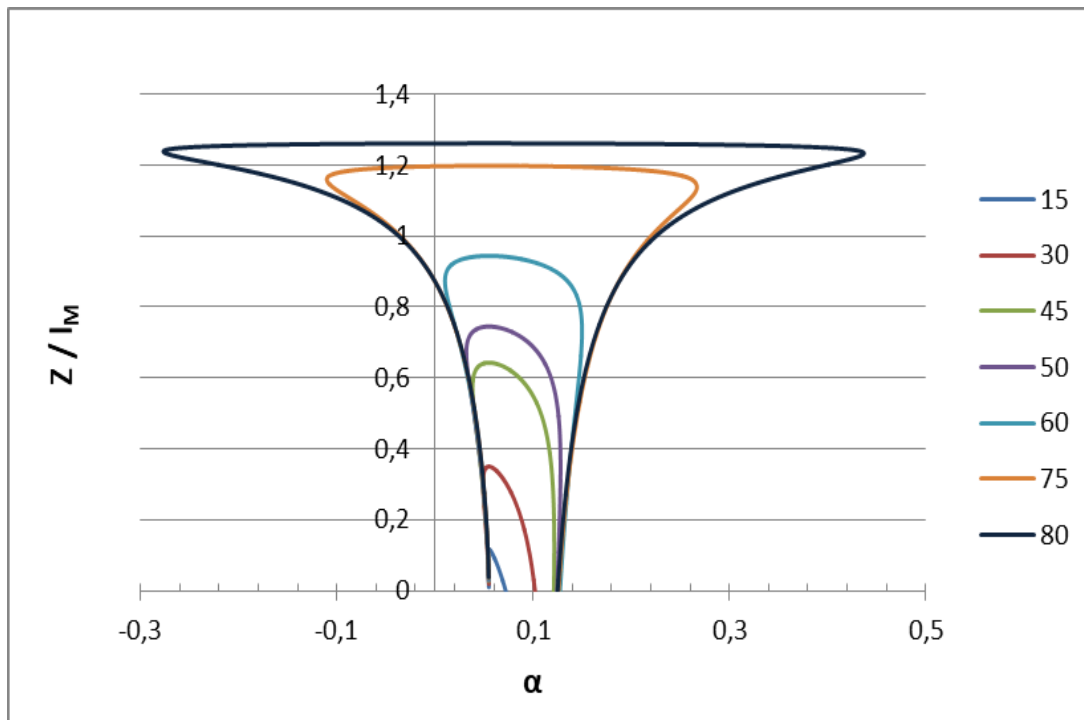
Πίνακας 4-3: Αποτελέσματα προβλέψεων μοντέλου για $\lambda=1.3$ και $\lambda=1.35$, αρχική γωνία παροχέτευσης $\theta_0=45^\circ$ για το Σενάριο Α.

	θ	Z_c/I_M	b/I_M	b_c/I_M	Z_f/I_M	X_z/I_M	X_{ic}/I_M	X_i/I_M	$S_t/F_o^{(2/3)}$	$S_i/F_o^{(2/3)}$
$\lambda=1.3$	45	0.597	0.258	0.336	0.933	0.98	1.796	2.31	0.536	0.824
$\lambda=1.35$	45	0.588	0.253	0.342	0.93	0.965	1.77	2.297	0.539	0.829

Στα παρακάτω Σχήματα 4-17, 4-18 φαίνεται η μεταβολή του συντελεστή συμπαράσυρσης για τα σενάρια Α και Γ, για εύρος γωνιών παροχέτευσης $\theta_0=15^\circ$ - 90° .



Σχήμα 4-17: Μεταβολή συντελεστή συμπαράσυρσης α (Σενάριο Α) με το αδιαστατοποιημένο ύψος του άξονα της φλέβας για γωνίες εκτόξευσης 15°-90°

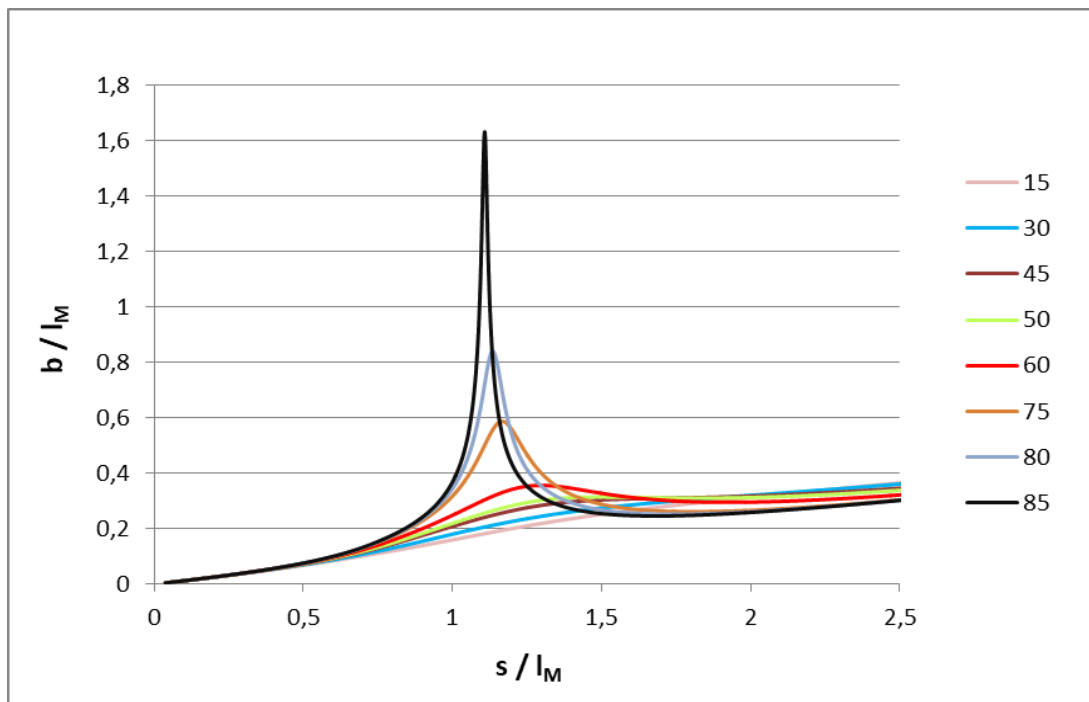


Σχήμα 4-18: Μεταβολή συντελεστή συμπαράσυρσης α (Σενάριο Γ) με το αδιαστατοποιημένο ύψος του άξονα της φλέβας για γωνίες εκτόξευσης: 15°-80°.

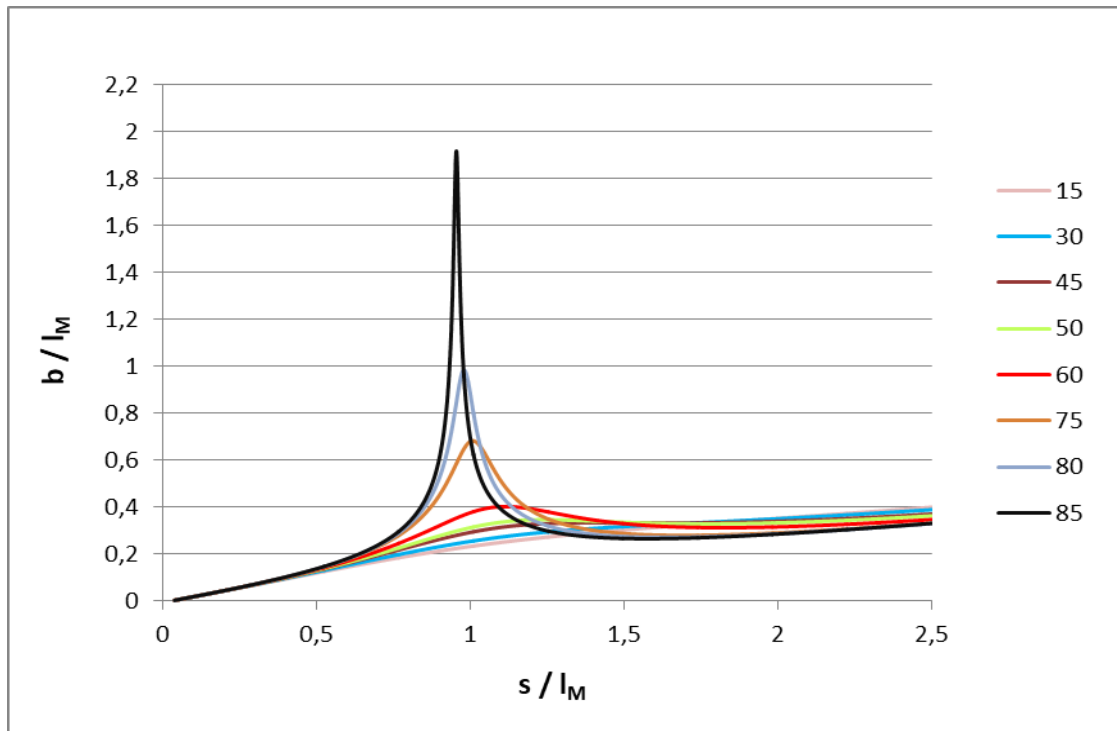
Στο Σενάριο Α, ο συντελεστής συμπαράσυρσης α ξεκινάει από την αρχική τιμή $\alpha_j=0.055$ και αυξάνεται κατά μήκος του άξονα της φλέβας, μέχρι την τελική τιμή $\alpha_p=0.11$, η οποία επιτυγχάνεται στην περιοχή του μέγιστου ύψους του άξονα της φλέβας. Στον καθοδικό κλάδο ο συντελεστής παραμένει σταθερός και ίσος με $\alpha_p=0.11$. Στο Σενάριο Β, ο συντελεστής συμπαράσυρσης α είναι σταθερός και ίσος με $\alpha=0.11$ σε όλη την τροχιά της φλέβας. Στο Σενάριο Γ, ο συντελεστής συμπαράσυρσης α για γωνίες μέχρι και 60° ξεκινάει από $\alpha_j=0.055$ και μειώνεται μέχρι το τερματικό ύψος. Στη συνέχεια αυξάνεται, μέχρι τιμές που προσεγγίζουν το $\alpha_p=0.11$. Για μεγαλύτερες γωνίες ($\geq 75^\circ$), ο συντελεστής ξεκινάει από $\alpha_j=0.055$ και μειώνεται παίρνοντας αρνητικές τιμές λίγο πριν το τερματικό ύψος, ενώ στην περιοχή του τερματικού ύψους αυξάνεται απότομα και καταλήγει στην τιμή $\alpha_p=0.11$. Οι αρνητικές τιμές είναι αποτέλεσμα του μοντέλου και δεν φαίνεται να έχουν φυσική σημασία.

Σχετικά με τη μεταβολή του πλάτους της κατανομής της ταχύτητας b γύρω από την περιοχή του τερματικού ύψους, για γωνίες μικρότερες των 60° είναι ομαλή για όλα τα σενάρια όπως θα δείξουμε παρακάτω. Για γωνίες ίσες και μεγαλύτερες από 60° το πλάτος κατανομής της ταχύτητας b αυξάνεται απότομα στην περιοχή του τερματικού ύψους και στην συνέχεια μειώνεται απότομα. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι στη περιοχή του τερματικού ύψους η ποσότητα κίνησης m μειώνεται. Για μεγάλες γωνίες παροχέτευσης η οριζόντια συνιστώσα και άρα η ποσότητα κίνησης m τείνει να μηδενιστεί ($m \rightarrow 0$) με αποτέλεσμα το πλάτος $b = \frac{q^2}{\sqrt{2\pi m}}$ να μεγαλώνει απότομα. Επειδή αυτό δεν φαίνεται να έχει φυσική σημασία, θα οριστεί μια μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή του πλάτους στην περιοχή του τερματικού ύψους.

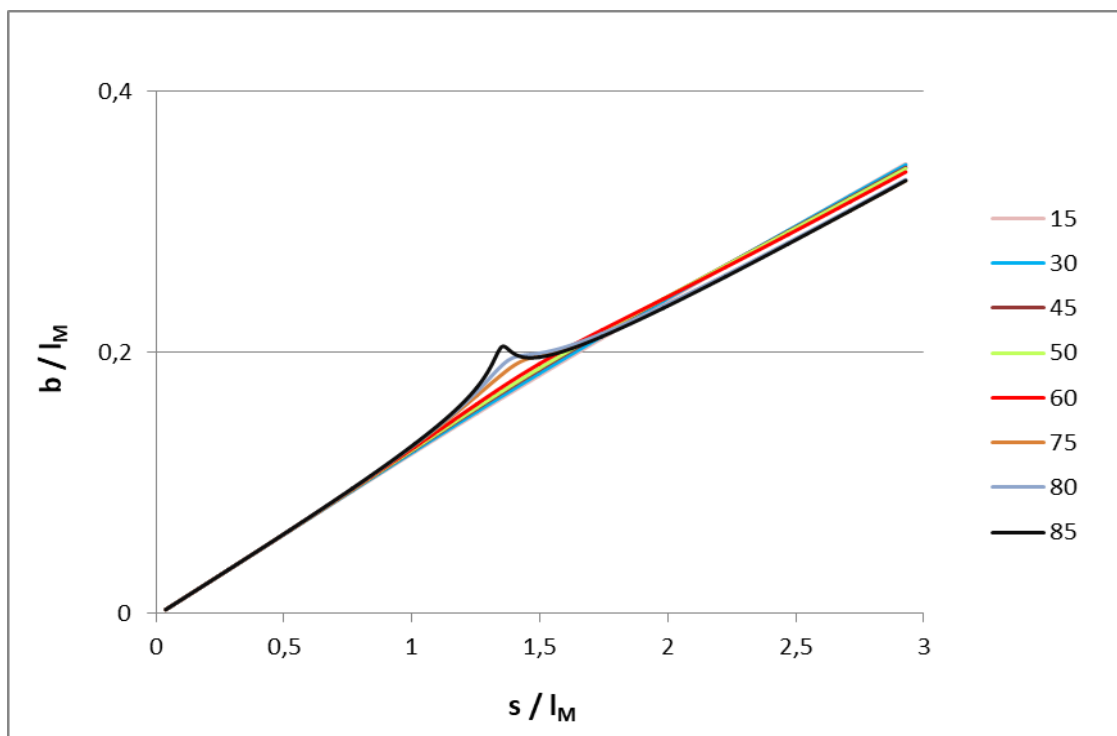
(α)



(β)



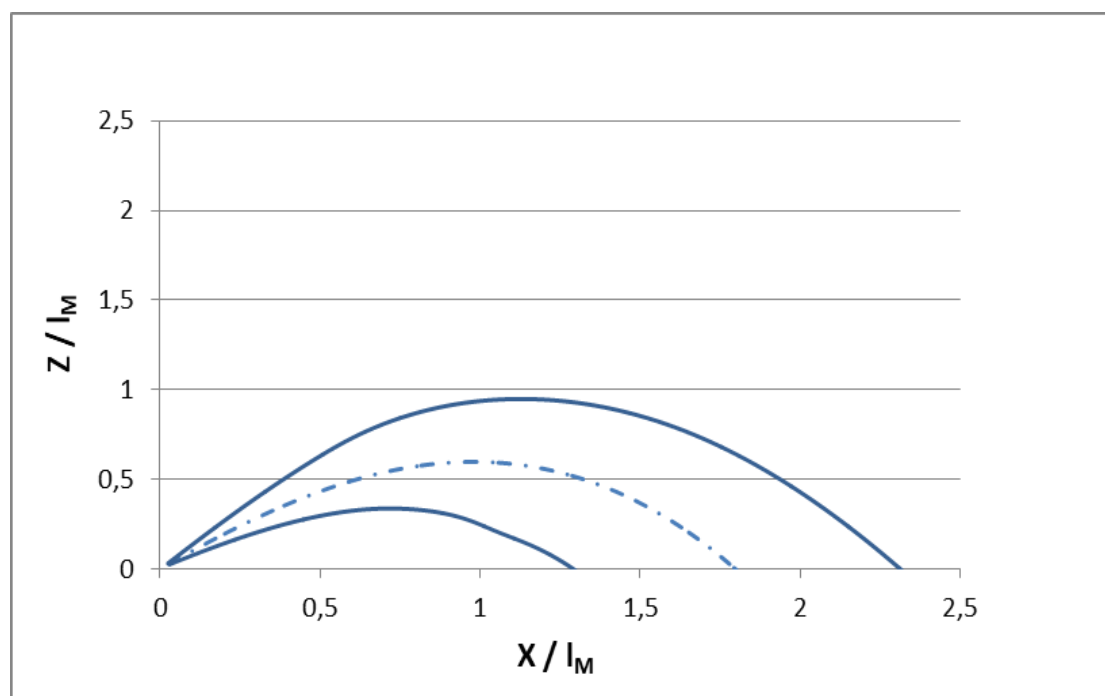
(γ)



Σχήμα 4-19 α, β, γ: Μεταβολή του αδιάστατου πλάτους κατανομής της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα της φλέβας για διάφορες γωνίες παροχέτευσης για: (α) Σενάριο Α, (β) Σενάριο Β και (γ) Σενάριο Γ.

Σύμφωνα με το Σχήμα 4-19 α, β, γ η μεταβολή του πλάτους b δεν είναι ομαλή στην περιοχή εμφάνισης του τερματικού ύψους για γωνίες $\geq 60^\circ$ για τα σενάρια Α, Β. Θεωρείται μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή περίπου ίση με $0.3 l_M$, για το σενάριο Α και $0.33 l_M$ για το σενάριο Β. Σχετικά με το σενάριο Γ η μεταβολή του πλάτους είναι σχετικά ομαλή και δεν γίνεται διόρθωση. Για γωνία 90° το πλάτος κατανομής της ταχύτητας b θεωρείται ίσο με μηδέν και άρα $Z_f = Z_c$.

Η τυπική μορφή της τροχιάς της φλέβας για γωνίες μικρότερες των 60° δίνεται στο Σχήμα 4-20.



Σχήμα 4-20: Τροχιά της φλέβας, όπου φαίνονται ο άξονας και το άνω και κάτω όριο της, για γωνία παροχέτευσης $\theta_0=45^\circ$ (Σενάριο Α).

Στον Πίνακα 4-4, συνοψίζονται σε αδιάστατη μορφή τα αποτελέσματα των προβλέψεων του μοντέλου GM-2D των διδιάστατων φλεβών για τα τρία σενάρια που εξετάζονται (Α, Β, Γ). Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, καθώς και περιορισμένα πειραματικά αποτελέσματα που υπάρχουν, θα συγκριθούν διαγραμματικά για καθένα από τα μεγέθη Z_f , Z_c , X_z , X_{ic} , X_i , S_t , S_i .

Πίνακας 4-4: Προβλέψεις μοντέλου GM-2D διδιάστατων φλεβών για τα Σενάρια A, B, Γ.

	θ	Z_c / l_M	$b / l_M (\Delta^*)$	$b_c / l_M (\Delta^*)$	Z_f / l_M	X_z / l_M	X_{ic} / l_M	X_i / l_M	$St / Fo^{(2/3)}$	$S_t / Fo^{(2/3)} (ave^*)$	$S_i / Fo^{(2/3)}$	$S_i / Fo^{(2/3)} (ave^*)$
Σενάριο A $\alpha_j = 0.055$ $\alpha_p = 0.11$ $Ri_p = 0.30$	15	0,11	0,1	0,13	0,25	0,69	1,26	1,94	0,39	0,49	0,6	0,75
	30	0,34	0,18	0,24	0,57	0,95	1,72	2,3	0,5	0,63	0,76	0,96
	45	0,6	0,26	0,34	0,93	0,98	1,8	2,31	0,54	0,68	0,82	1,04
	50	0,68	0,28	0,37	1,05	0,95	1,74	2,24	0,54	0,68	0,83	1,05
	60	0,84	0,3	0,39	1,23	0,81	1,52	1,97	0,52	0,66	0,83	1,04
	75	1,03	0,3	0,39	1,42	0,47	0,89	1,27	0,49	0,62	0,79	1
	80	1,06	0,3	0,39	1,45	0,32	0,61	0,98	0,48	0,6	0,78	0,99
	85	1,09	0,3	0,39	1,48	0,16	0,31	0,67	0,47	0,6	0,77	0,98
	90	1,09	0	0	1,09	0	0	0	0,47	0,59	-	-
Σενάριο B $\alpha=0.11$	15	0,1	0,14	0,18	0,28	0,58	1,37	1,79	0,46	0,58	0,75	0,95
	30	0,28	0,22	0,29	0,57	0,8	1,49	2,11	0,55	0,7	0,77	0,97
	45	0,51	0,3	0,38	0,89	0,85	1,58	2,12	0,57	0,72	0,82	1,03
	50	0,58	0,32	0,42	1	0,82	1,54	2,05	0,57	0,72	0,82	1,03
	60	0,72	0,33	0,43	1,15	0,71	1,35	1,81	0,56	0,7	0,81	1,02
	75	0,88	0,33	0,43	1,31	0,41	0,79	1,18	0,53	0,67	0,78	0,98
	80	0,92	0,33	0,43	1,35	0,28	0,54	0,92	0,52	0,65	0,76	0,96
	85	0,94	0,33	0,43	1,37	0,14	0,28	0,64	0,51	0,65	0,76	0,95
	90	0,94	0	0	0,94	0	0	0	0,51	0,65	-	-
Σενάριο Γ $\alpha_j = 0.055$ $\alpha_p = 0.11$ $Ri_p=0.30$ $Ri<0$	15	0,12	0,09	0,11	0,23	0,71	1,31	1,86	0,37	0,46	0,52	0,65
	30	0,35	0,13	0,17	0,52	1,01	1,87	2,37	0,43	0,54	0,67	0,84
	45	0,64	0,16	0,21	0,86	1,1	2,03	2,52	0,43	0,54	0,78	0,98
	50	0,74	0,17	0,22	0,97	1,08	2	2,47	0,42	0,52	0,8	1,01
	60	0,94	0,18	0,23	1,18	0,97	1,8	2,26	0,38	0,48	0,84	1,06
	75	1,2	0,19	0,25	1,44	0,6	1,14	1,57	0,28	0,35	0,85	1,08
	80	1,26	0,19	0,25	1,51	0,43	0,82	1,23	0,23	0,29	0,85	1,08
	85	1,31	0,2	0,27	1,57	0,23	0,44	0,85	0,17	0,21	0,85	1,07
	90	1,33	0	0	1,33	0	0	0	0,03	0,04	-	-

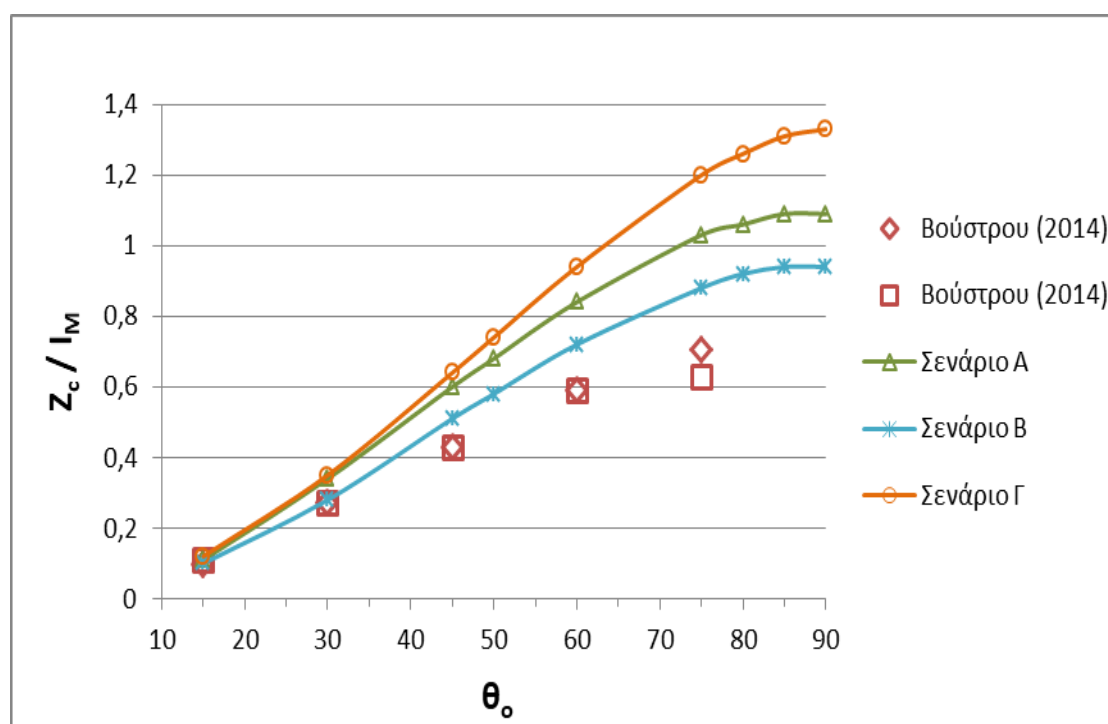
Δ^* : Διορθωμένη τιμή πλάτους ταχύτητας ή συγκέντρωσης στη θέση τερματικού ύψους

ave^* : Πρόβλεψη του μοντέλου για τη μέση στη διατομή αραίωση

Στο υπόμνημα των παρακάτω σχημάτων, οι συνεχείς γραμμές αφορούν τα μοντέλα που εξετάζονται, ενώ τα μεμονωμένα σύμβολα αφορούν τα πειραματικά δεδομένα.

Μέγιστο ύψος άξονα φλέβας Z_c .

Η Βούστρου (2014) μέσω μετρήσεων συγκέντρωσης (2 μετρήσεις για κάθε γωνία παροχέτευσης) παρουσίασε αποτελέσματα σχετικά με το μέγιστο ύψος του άξονα της φλέβας. Σύμφωνα με το Σχήμα 4-21 το μοντέλο GM-2D για τα Σενάρια Α, Γ προσεγγίζει τα πειραματικά δεδομένα μόνο για τις γωνίες των 15° και 30° με απόκλιση < 25%, ωστόσο για μεγαλύτερες γωνίες τα υπερεκτιμά σε μεγάλο βαθμό (40-53% για Σενάριο Α, 49-79% για Σενάριο Γ). Το Σενάριο Β, προσεγγίζει καλύτερα τα πειραματικά δεδομένα για γωνίες εύρους 15°-45° με απόκλιση μέχρι και 18%, ενώ υπερεκτιμά τα πειραματικά δεδομένα για μεγαλύτερες γωνίες κατά 22-31%.

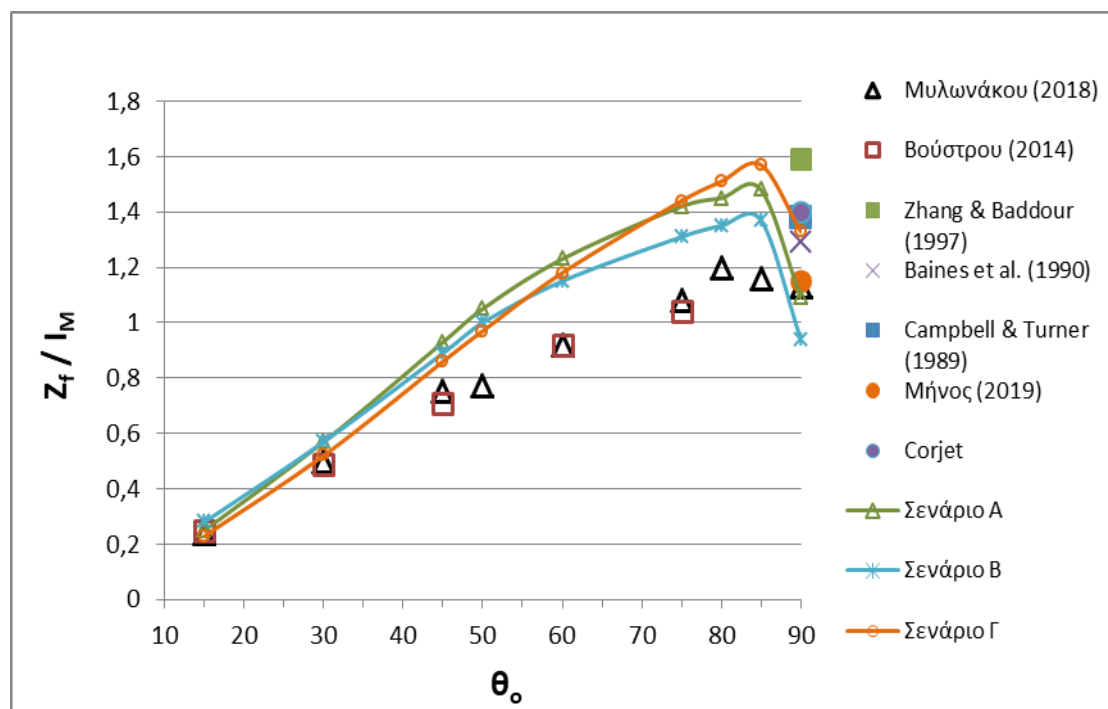


Σχήμα 4-21: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων με πειραματικά δεδομένα για το μέγιστο ύψος του άξονα της φλέβας Z_c .

Τελικό τερματικό ύψος φλέβας Z_f .

Σύμφωνα με το Σχήμα 4-22 το μοντέλο GM-2D για όλα τα σενάρια υπερεκτιμά το ύψος Z_f για τις γωνίες παροχέτευσης 45°-85°. Για γωνίες μέχρι 45° και τα τρία σενάρια προσεγγίζουν τα πειραματικά δεδομένα με απόκλιση < 19%. Για γωνίες παροχέτευσης 45°-85° το Σενάριο Β προσεγγίζει καλύτερα σε σχέση με τα υπόλοιπα σενάρια τα πειραματικά δεδομένα με αποκλίσεις 18-26%. Για γωνία παροχέτευσης 90° το σενάριο Α έρχεται σε συμφωνία με τα πειραματικά

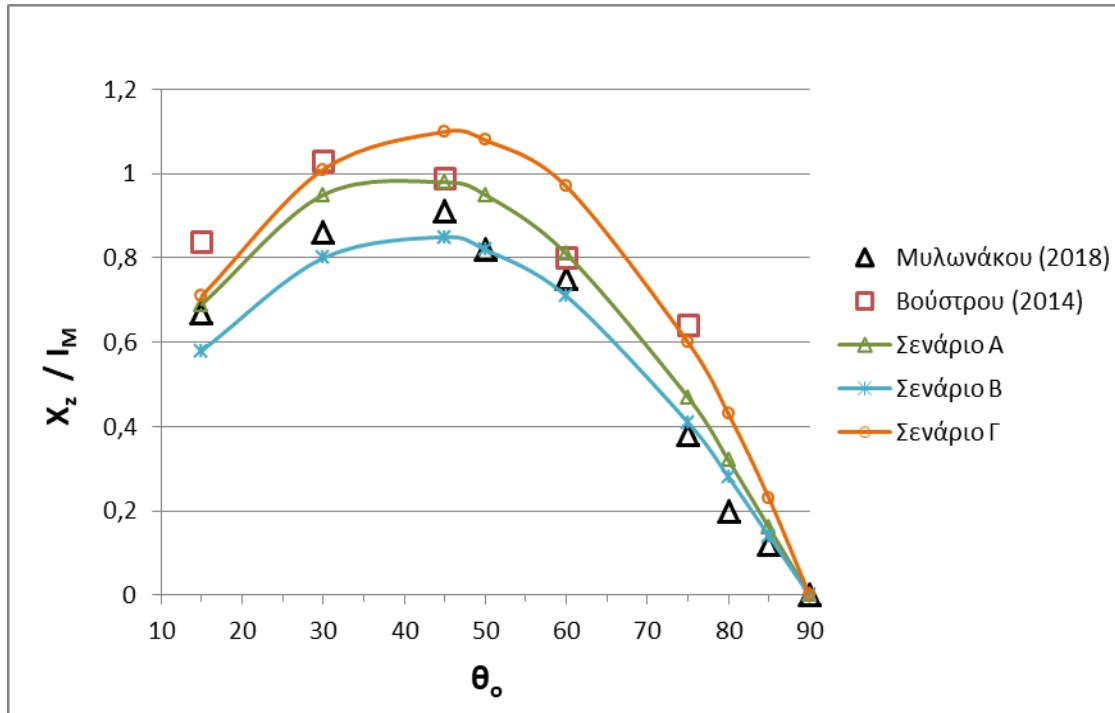
αποτελέσματα δύο διπλωματικών εργασιών (Μυλωνάκου 2018, Μήνος 2019). Για την ίδια γωνία το σενάριο Γ προσεγγίζει ικανοποιητικά τα πειραματικά αποτελέσματα των Baines *et al.* (1990) και Campbell & Turner (1989) καθώς και τις προβλέψεις του μοντέλου Corjet. Προφανώς οι αποκλίσεις οφείλονται στις αποκλίσεις που παρατηρήθηκαν στην πρόβλεψη του μέγιστου ύψους του άξονα. Πρέπει να αναφερθεί ότι στα πειράματα των Μυλωνάκου (2018) και Βούστρου (2014) ο λόγος των διαστάσεων του μήκους προς το πλάτος της σχισμής ήταν $L_D/w=100$ αλλά η φλέβα δεν ήταν πλευρικά περιορισμένη ώστε να διασφαλιστεί απόλυτα ότι η ροή είναι διδιάστατη.



Σχήμα 4-22: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων με πειραματικά δεδομένα για το τελικό τερματικό ύψος Z_f .

Οριζόντια θέση τελικού τερματικού ύψους φλέβας X_z

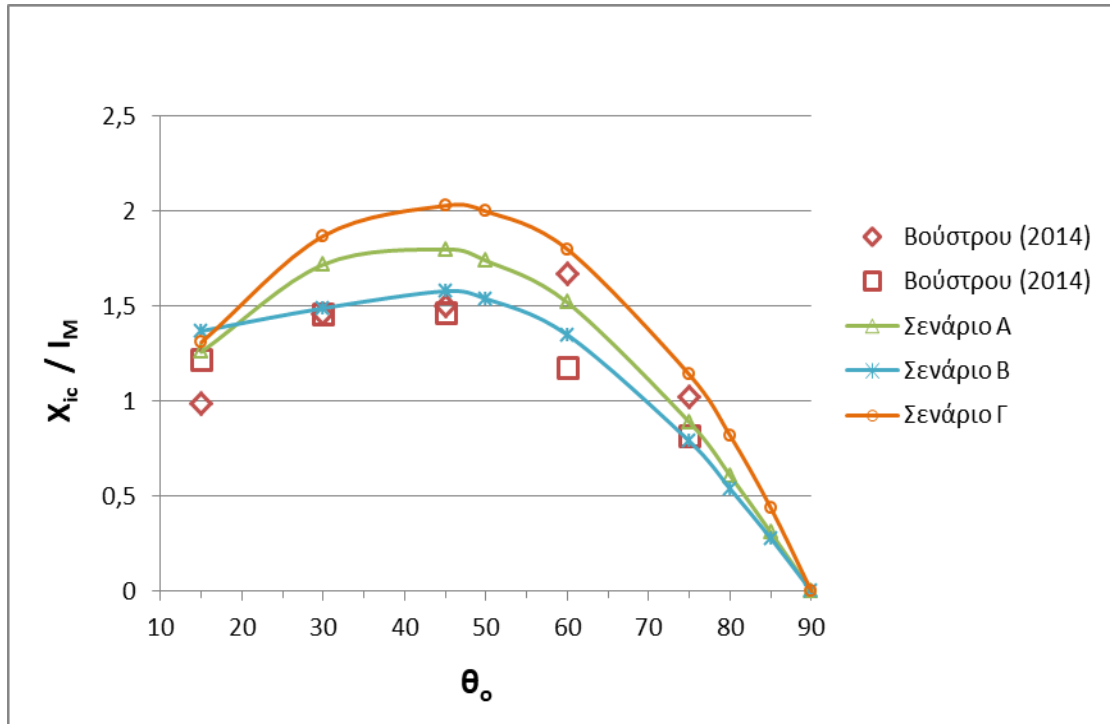
Με βάση το Σχήμα 4-23 προκύπτει ότι οι προβλέψεις του μοντέλου GM-2D για το Σενάριο A προσεγγίζουν με απόκλιση <18% τα πειραματικά δεδομένα κυρίως της Βούστρου (2014) για γωνίες στο εύρος $15^\circ - 60^\circ$, ενώ υπερεκτιμούν τα περισσότερα πειραματικά δεδομένα της Μυλωνάκου (2018) με απόκλιση 8-60%. Το Σενάριο B προσεγγίζει ικανοποιητικά τα πειραματικά δεδομένα της Μυλωνάκου (2018) σε όλο το εύρος των γωνιών, ενώ υποεκτιμά τα πειραματικά δεδομένα της Βούστρου (2014) με απόκλιση 14-56%. Το Σενάριο Γ υπερεκτιμά γενικά τα περισσότερα πειραματικά δεδομένα, προσεγγίζοντας μόνο τις μετρήσεις για τις γωνίες 30° και 75° της Βούστρου (2014). Πρέπει πάντως να αναφερθεί ότι παρατηρούνται σημαντικές διακυμάνσεις μεταξύ των πειραματικών δεδομένων των Μυλωνάκου (2018) και Βούστρου (2014) στις περισσότερες γωνίες.



Σχήμα 4-23: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων με πειραματικά δεδομένα για την οριζόντια θέση του τελικού τερματικού ύψους της φλέβας X_z .

Οριζόντια θέση επιστροφής του άξονα της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης X_{ic} .

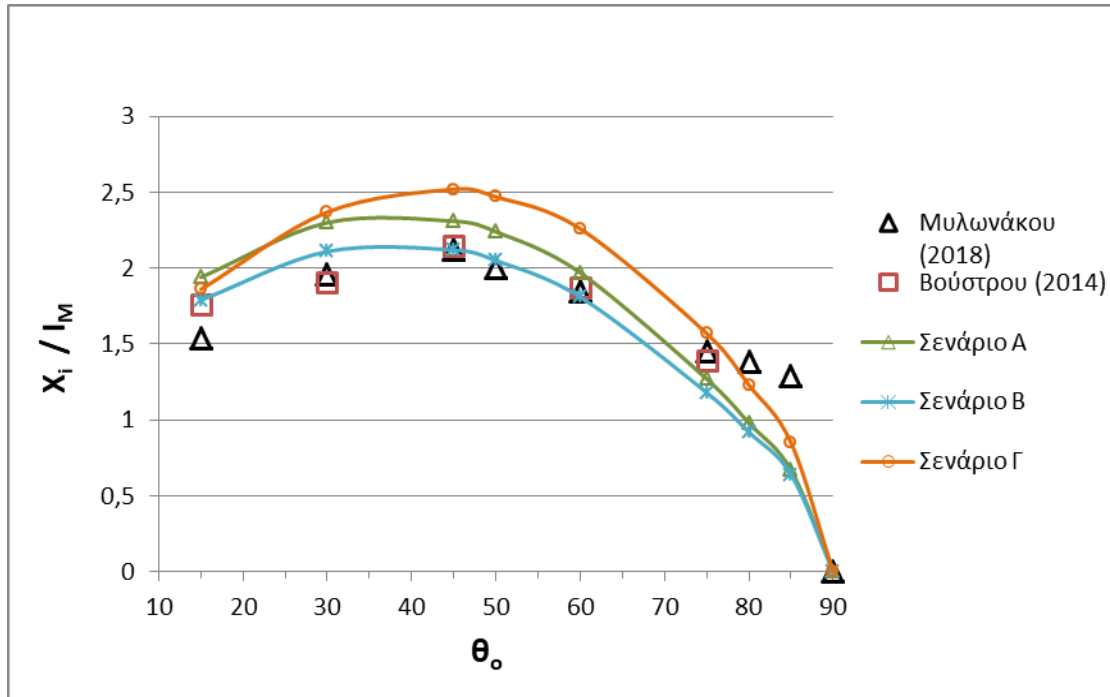
Η Βούστρου (2014) μέσω μετρήσεων συγκέντρωσης (2 μετρήσεις για κάθε γωνία παροχέτευσης) παρουσίασε αποτελέσματα σχετικά με τη θέση επιστροφής του άξονα στο επίπεδο παροχέτευσης. Σύμφωνα με το Σχήμα 4-24 οι προβλέψεις του μοντέλου GM-2D για τα Σενάρια A και Γ υπερεκτιμούν τις πειραματικές μετρήσεις για γωνίες 30° και 45°, ενώ για τις υπόλοιπες γωνίες προσεγγίζουν την μία από τις δύο μετρήσεις ανά γωνία που έχει κάνει η Βούστρου (2014). Το Σενάριο B προσεγγίζει (απόκλιση <15%) για όλο το εύρος των γωνιών τα πειραματικά αποτελέσματα της μίας από τις δύο μετρήσεις ανά γωνία. Πρέπει να αναφερθεί ότι ο μικρός αριθμός πειραματικών μετρήσεων (δύο για κάθε γωνία) και το γεγονός ότι για κάποιες γωνίες παροχέτευσης οι μετρήσεις παρουσιάζουν μεγάλη διακύμανση, δυσχεραίνουν την αξιολόγηση των προβλέψεων του μοντέλου.



Σχήμα 4-24: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων με πειραματικά δεδομένα για την οριζόντια θέση επιστροφής του άξονα της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης X_{ic} .

Οριζόντια απόσταση του άνω ορίου της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης X_i .

Με βάση το σχήμα 4-25 οι προβλέψεις του μοντέλου GM-2D για το Σενάριο A υπερεκτιμούν τα πειραματικά αποτελέσματα με απόκλιση έως και 24% για γωνίες στο εύρος 15°-75°, ενώ υποεκτιμούν τα πειραματικά δεδομένα για μεγαλύτερες γωνίες (80°-85°). Αντίστοιχα συμπεράσματα ισχύουν για το Σενάριο Γ, με λίγο μεγαλύτερες αποκλίσεις για γωνίες στο εύρος 30°-60°, ενώ φαίνεται να προσεγγίζει καλύτερα τα πειραματικά δεδομένα μεγαλύτερων γωνιών σε σχέση με τα άλλα σενάρια. Το Σενάριο B προσεγγίζει ικανοποιητικά τα πειραματικά δεδομένα για γωνίες μέχρι 60° (απόκλιση <15%) ενώ υποεκτιμά τις πειραματικές μετρήσεις για μεγαλύτερες γωνίες.

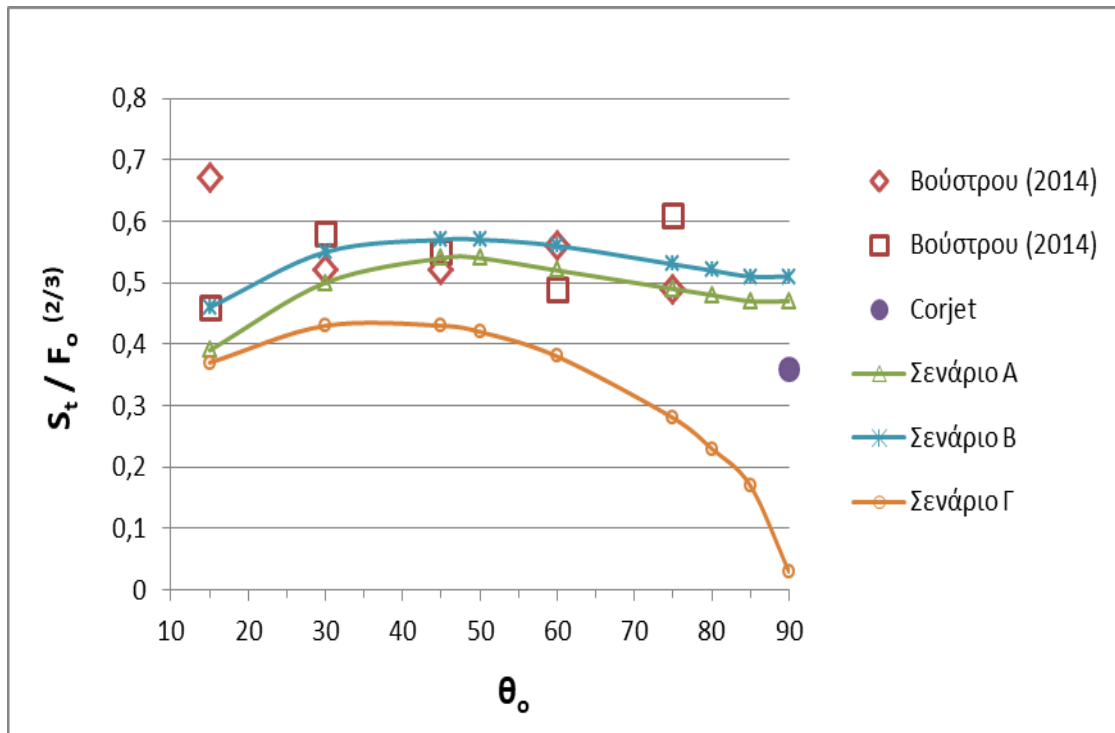


Σχήμα 4-25: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων με τα πειραματικά δεδομένα για την οριζόντια θέση επιστροφής του εξωτερικού ορίου της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης X_i .

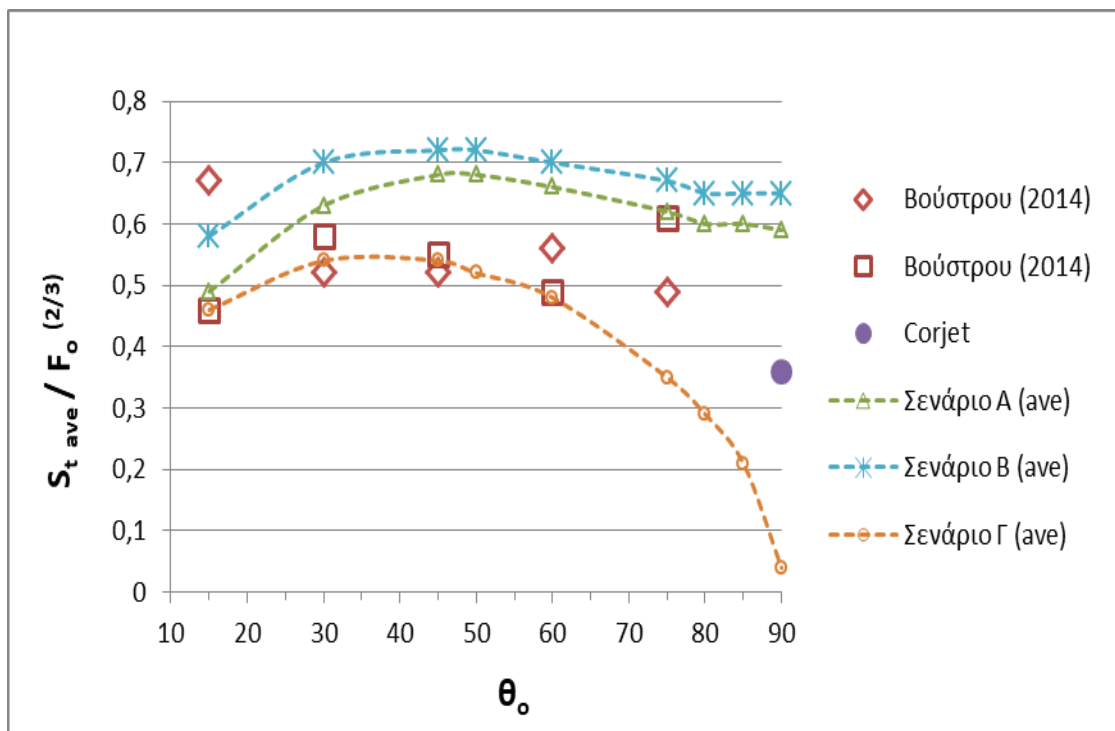
Αξονική αραίωση στο τερματικό ύψος S_t

Με βάση το Σχήμα 4-26 α είναι φανερό ότι οι προβλέψεις του μοντέλου GM-2D για την αραίωση από τα Σενάρια Α και Β έρχονται σε ικανοποιητική συμφωνία με τις πειραματικές μετρήσεις της Βούστρου (2014). Ακόμη για τα δύο αυτά σενάρια προκύπτει ότι η αραίωση δεν μεταβάλλεται σημαντικά για γωνίες άνω των 30° . Το Σενάριο Γ υποεκτιμά σημαντικά την αραίωση σε όλο το εύρος των γωνιών και μάλιστα για γωνίες άνω των 60° οι προβλέψεις μειώνονται απότομα και τείνουν να μηδενιστούν (για γωνία 90°). Με βάση το Σχήμα 4-26 β τα αποτελέσματα του σεναρίου Γ για τη μέση στη διατομή αραίωση προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα πειραματικά δεδομένα για γωνίες μέχρι και 60° . Το μοντέλο Corjet για γωνία 90° δίνει πρόβλεψη κατά μέσο όρο 35% μικρότερη από τις προβλέψεις των Σεναρίων Α και Β. Πρέπει να αναφερθεί ότι ο μικρός αριθμός πειραματικών μετρήσεων (δύο για κάθε γωνία) και το γεγονός ότι για μεμονωμένες γωνίες (15° και 80°) οι μετρήσεις παρουσιάζουν σημαντικές αποκλίσεις μεταξύ τους, δυσχεραίνουν την αξιολόγηση των προβλέψεων του μοντέλου.

(α)



(β)

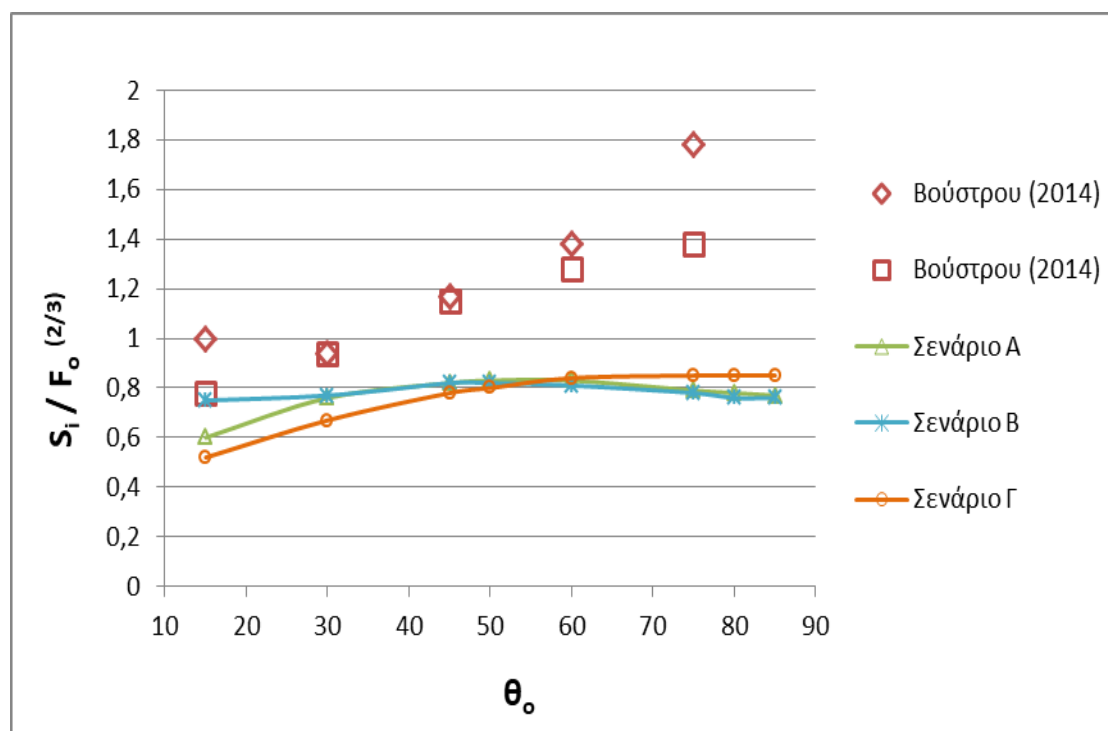


Σχήμα 4-26: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων για (α) την αξονική αραίωση της φλέβας S_t και (β) την μέση αραίωση της φλέβας $S_{t\ ave}$ στη θέση μέγιστου τερματικού ύψους με πειραματικά δεδομένα για την ελάχιστη αραίωση.

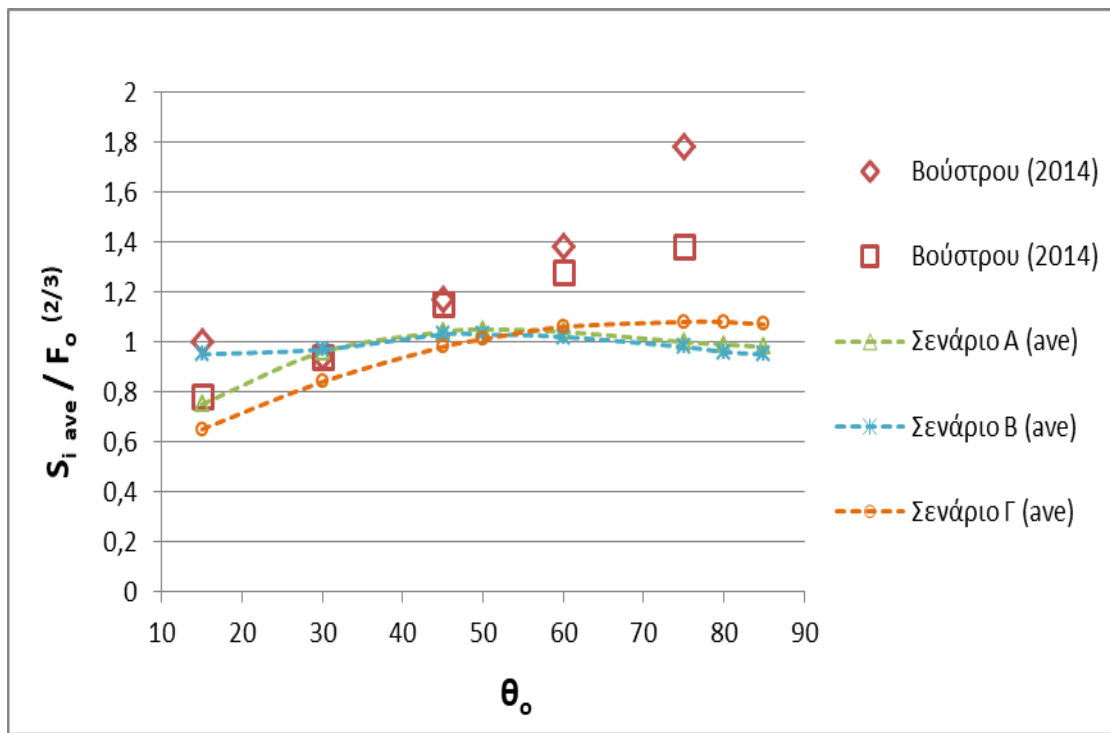
Αξονική αραίωση στη θέση επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης S_i .

Με βάση το Σχήμα 4-27 (α) προκύπτει ότι οι προβλέψεις του μοντέλου GM-2D για όλα τα σενάρια υποεκτιμούν σε μεγάλο βαθμό τις πειραματικές μετρήσεις της Βούστρου (2014). Μάλιστα, το μοντέλο αδυνατεί να προβλέψει την αυξητική τάση των αποτελεσμάτων για γωνίες άνω των 45° . Σχετικά με την μέση στη διατομή διάλυση (ave), προκύπτει από το Σχήμα 4-27 (β) ότι τα Σενάρια Α, Β, και Γ προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα πειραματικά αποτελέσματα για γωνίες μέχρι 45° , ενώ υποεκτιμούν τις μετρήσεις για γωνίες 60° και 75° . Ομοίως και εδώ, πρέπει να τονιστεί ότι ο μικρός αριθμός πειραματικών μετρήσεων (δύο για κάθε γωνία) και το γεγονός ότι για μεμονωμένες γωνίες (15° και 75°) οι μετρήσεις παρουσιάζουν μεγάλες αποκλίσεις μεταξύ τους, δυσχεραίνουν την αξιολόγηση των προβλέψεων του μοντέλου.

(α)



(β)



Σχήμα 4-27 α, β: Σύγκριση προβλέψεων των μοντέλων για (α) την αξονική αραίωση της φλέβας S_i και (β) την μέση αραίωση της φλέβας S_i (ave) στη θέση επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης με πειραματικά δεδομένα για την ελάχιστη αραίωση.

Συνοψίζοντας, από τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει ότι το μοντέλο GM-2D για το Σενάριο B (σταθερός συντελεστής συμπαράσυρσης $\alpha=0.11$), προβλέπει ικανοποιητικά τα περισσότερα πειραματικά δεδομένα των χαρακτηριστικών διδιάστατων φλεβών αρνητικής άνωσης. Ειδικότερα προσεγγίζει ικανοποιητικά σε όλο το εύρος των γωνιών παροχέτευσης την θέση του τελικού τερματικού ύψους της φλέβας X_z , την οριζόντια θέση επιστροφής του άξονα της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης X_{ic} , την θέση επιστροφής του εξωτερικού ορίου της φλέβας στο επίπεδο παροχέτευσης X_i και την αξονική αραίωση της φλέβας S_i . Δεν προβλέπει ικανοποιητικά για όλο το εύρος των γωνιών παροχέτευσης τα ύψη Z_c και Z_f (το ύψος Z_f υπερεκτιμάται κατά μέσο όρο 22%) καθώς και την αξονική αραίωση στη θέση επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης S_i . Το Σενάριο A αποκλίνει περισσότερο από τα πειραματικά δεδομένα σε σχέση με το σενάριο B, ενώ το Σενάριο Γ προσεγγίζει τα πειραματικά δεδομένα μόνο για μεμονωμένες περιπτώσεις γωνιών. Στην αξιολόγηση των προβλέψεων πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι στα πειράματα των Μυλωνάκου (2018) και Βούστρου (2014) αν και ο λόγος των διαστάσεων της σχισμής ήταν $L_D/w=100$ η ροή δεν ήταν πλευρικά περιορισμένη, ώστε να εξασφαλιστεί απόλυτα ότι δεν θα υπάρχει συμπαράσυρση από τα άκρα, γεγονός που ίσως να έχει επηρεάσει τα ύψη Z_f και Z_c . Ακόμη, ο μικρός αριθμός

πειραματικών δεδομένων για κάποια χαρακτηριστικά της φλέβας και οι διακυμάνσεις μεταξύ των μετρήσεων ανά γωνία δυσχεραίνουν την αξιολόγηση των προβλέψεων του μοντέλου.

5 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 Ανακεφαλαίωση

Η παρούσα διπλωματική ασχολείται με τη μοντελοποίηση της ροής φλεβών αρνητικής άνωσης που παροχετεύονται υπό γωνία σε ακίνητο ομογενή αποδέκτη. Έγινε μελέτη κυκλικών και διδιάστατων φλεβών αρνητικής άνωσης.

Για τις κυκλικές φλέβες, εξετάστηκαν οι γωνίες παροχέτευσης 30°, 45°, 60°, 75°, 80°, 85° και 90° με σκοπό τον υπολογισμό κύριων χαρακτηριστικών της φλέβας, χρησιμοποιώντας:

- Το ολοκληρωματικό μοντέλο GM (Gaussian Model) που παρουσίασαν οι Paranicolaou *et al.* (2008) και ο Παπακωνσταντής (2009), το οποίο θεωρεί κατανομές ταχύτητας και συγκέντρωσης Gauss. Έγινε αριθμητική επίλυση του μοντέλου για τρία διαφορετικά σενάρια σχετικά με τον υπολογισμό του συντελεστή συμπαράσυρσης α :
 - Σενάριο 1: $\alpha_j = 0.0545$, $\alpha_p = 0.0875$ και $Ri_p = 0.56$.
 - Σενάριο 2: θεωρήθηκε μειωμένος συντελεστής συμπαράσυρσης $\alpha_j = 0.025$, $\alpha_p = 0.0875$ και $Ri_p = 0.56$.
 - Σενάριο 3: $\alpha_j = 0.0545$, $\alpha_p = 0.0875$, $Ri_p = 0.56$ και $Ri^2 < 0$.
- Τις αναλυτικές λύσεις που δημοσίευσαν οι Kikkert *et al.* (2007).
- Τις προβλέψεις του μοντέλου Corjet (Jirka, 2008) για τον υπολογισμό των διαφορών χαρακτηριστικών της φλέβας.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν συγκρίθηκαν με διαθέσιμα πειραματικά αποτελέσματα διάφορων ερευνητών. Σχετικά με το μοντέλο GM, προέκυψε ότι για το Σενάριο 1, δηλαδή εφαρμόζοντας τιμή συντελεστή συμπαράσυρσης $\alpha_j = 0.0545$ που έχει μετρηθεί στις απλές φλέβες, το μοντέλο υποεκτιμά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της φλέβας και την αραίωση. Όμοια συμπεράσματα προέκυψαν και για το Σενάριο 3 δηλαδή για τη θεώρηση συντελεστή συμπαράσυρσης που μειώνεται στον ανοδικό κλάδο (αρνητικός αριθμός Richardson στο τετράγωνο). Για το Σενάριο 2, δηλαδή με χρήση μειωμένου συντελεστή συμπαράσυρσης $\alpha_j = 0.025$ (Paranicolaou *et al.* 2008 και Παπακωνσταντής, 2009) γίνεται ικανοποιητική πρόβλεψη των γεωμετρικών χαρακτηριστικών, ενώ η αξονική αραίωση μπορεί να προσεγγιστεί από την μέση στη διατομή αραίωση. Οι αναλυτικές λύσεις των Kikkert *et al.* (2007) προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα περισσότερα γεωμετρικά χαρακτηριστικά για γωνίες μέχρι 60°-75°, ενώ για μεγαλύτερες γωνίες οι προβλέψεις υπερεκτιμούν τα πειραματικά αποτελέσματα. Επίσης υποεκτιμάται η αξονική αραίωση. Τέλος,

οι προβλέψεις του μοντέλου Corjet υποεκτιμούν στο σύνολό τους τα χαρακτηριστικά των φλεβών.

Για τις διδιάστατες φλέβες, εξετάστηκαν οι γωνίες παροχέτευσης 15°, 30°, 45°, 50°, 60°, 75°, 80°, 85° και 90°, με σκοπό τον υπολογισμό κύριων χαρακτηριστικών της ροής. Καταστρώθηκε ένα νέο ολοκληρωματικό μοντέλο, το μοντέλο GM-2D (Gaussian Model), όμοιας προσέγγισης με το ολοκληρωματικό μοντέλο των κυκλικών φλεβών, το οποίο επίσης θεωρεί κατανομές ταχύτητας και συγκέντρωσης Gauss. Έγινε αριθμητική επίλυση του μοντέλου για τρία διαφορετικά σενάρια σχετικά με τον υπολογισμό του συντελεστή συμπαράσυρσης α :

- Σενάριο Α: $\alpha_j = 0.055$, $\alpha_p = 0.11$, $Ri_p = 0.30$.
- Σενάριο Β: σταθερός συντελεστής συμπαράσυρσης $\alpha = 0.11$.
- Σενάριο Γ: $\alpha_j = 0.055$, $\alpha_p = 0.11$, $Ri_p = 0.30$ και $Ri < 0$.

Οι προβλέψεις του μοντέλου στη συνέχεια συγκρίθηκαν με περιορισμένα, όπως προέκυψε από την βιβλιογραφική ανασκόπηση, πειραματικά αποτελέσματα. Από την σύγκριση προέκυψε ότι κανένα σενάριο επίλυσης δεν μπορεί να προσεγγίσει σε όλο το εύρος των γωνιών παροχέτευσης το τερματικό ύψος καθώς και την αραίωση στη θέση επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης. Σχετικά με τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά, προσεγγίζονται ικανοποιητικά για θεώρηση σταθερού συντελεστή συμπαράσυρσης $\alpha = 0.11$. Για χρήση συντελεστών συμπαράσυρσης $\alpha_j = 0.055$, $\alpha_p = 0.11$ και θεώρηση θετικού ή αρνητικού αριθμού Richardson, οι προβλέψεις γενικά υπερεκτιμούν τα πειραματικά αποτελέσματα των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της φλέβας και της αραίωσης στη θέση επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης.

5.2 Συμπεράσματα

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από την μοντελοποίηση των φλεβών αρνητικής άνωσης είναι:

Κυκλικές φλέβες

- Το μοντέλο GM υποεκτιμά τα πειραματικά αποτελέσματα για τιμή του συντελεστή συμπαράσυρσης $\alpha_j = 0.0545$, είτε γίνει θεώρηση θετικού αριθμού Ri^2 , είτε αρνητική.
- Οι προβλέψεις του μοντέλου GM προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά όταν εφαρμόζεται μειωμένος συντελεστής συμπαράσυρσης $\alpha_j = 0.025$.
- Το μοντέλο GM, για κάθε σενάριο υποεκτιμά την αξονική αραίωση, ωστόσο οι μετρημένες τιμές προσεγγίζονται ικανοποιητικά από τη μέση στη διατομή αραίωση για την περίπτωση του μειωμένου συντελεστή συμπαράσυρσης $\alpha_j = 0.025$ (Σενάριο 2).

- Οι αναλυτικές λύσεις των Kikkert *et al.* (2007) προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά κυρίως για γωνίες παροχέτευσης μέχρι και 70°, ενώ για μεγαλύτερες γωνίες υπερεκτιμούν τα περισσότερα γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Η αξονική αραίωση υποεκτιμάται σε όλο το εύρος των γωνιών.
- Οι προβλέψεις του μοντέλου Corjet (Jirka, 2008) είναι μικρότερες από τα πειραματικά αποτελέσματα για όλα τα χαρακτηριστικά της φλέβας.

Διδιάστατες φλέβες

- Το μοντέλο GM-2D υπερεκτιμά τα περισσότερα χαρακτηριστικά της ροής όταν εφαρμόζονται για το συντελεστή συμπαράσυρσης οι τιμές $\alpha_j=0.055$, $\alpha_p=0.11$ και $Ri_p=0.30$, είτε για θετικό τοπικό αριθμό Richardson (Σενάριο A), είτε για αρνητικό (Σενάριο Γ).
- Οι προβλέψεις του μοντέλου GM-2D προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα περισσότερα πειραματικά αποτελέσματα όταν εφαρμόζεται σταθερός συντελεστής συμπαράσυρσης με τιμή $\alpha=0.11$ (Σενάριο B).
- Το μοντέλο GM-2D υπερεκτιμά για κάθε σενάριο τα διαθέσιμα πειραματικά αποτελέσματα για το τερματικό ύψος για μεγάλο εύρος γωνιών παροχέτευσης. Ωστόσο σημειώνεται ότι στα περισσότερα πειράματα δεν υπήρξε περιορισμός της φλέβας πλευρικά με τοιχώματα ώστε να εξασφαλίζεται πλήρως ότι η ροή είναι διδιάστατη.
- Οι προβλέψεις του μοντέλου για $\alpha_j=0.055$, $\alpha_p=0.11$ και $Ri_p=0.60$ ήταν ελαφρώς μεγαλύτερες για όλα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της φλέβας σε σχέση με την εφαρμογή των συντελεστών $\alpha_j=0.055$, $\alpha_p=0.11$ και $Ri_p=0.30$.
- Οι προβλέψεις του μοντέλου σχετικά με την αξονική αραίωση στη θέση του τερματικού ύψους είναι ικανοποιητικές όταν εφαρμόζονται είτε οι τιμές $\alpha_j=0.055$, $\alpha_p=0.11$ και $Ri_p=0.30$ και θετικός τοπικός αριθμός Richardson (Σενάριο A), είτε σταθερός συντελεστής συμπαράσυρσης $\alpha=0.11$ (Σενάριο B). Ωστόσο η αξονική αραίωση στη θέση επιστροφής στο επίπεδο παροχέτευσης υποεκτιμάται σε όλα τα σενάρια, ακόμα και από τις προβλέψεις της μέσης στην διατομή αραίωσης για γωνίες πάνω από 60°.
- Απαιτούνται περισσότερα πειραματικά δεδομένα για την ορθή αξιολόγηση των προβλέψεων του μοντέλου GM-2D.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική Βιβλιογραφία

Ανδρεαδάκης, Α. Δ (2008) Επεξεργασία νερού – βασικές αρχές και διεργασίες, Εκδόσεις ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, Αθήνα.

Βούστρου, Μ. Κ. (2014) Πειραματική μελέτη δισδιάστατων κεκλιμένων τυρβωδών φλεβών αρνητικής άνωσης. Διατριβή Διπλώματος Ειδίκευσης, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα.

Δημητρίου, Ι. Δ. (1978) Τυρβώδης διάχυσις κατακόρυφων υδάτινων φλεβών αρνητικής ανώσεως. Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Κιουλέπογλου, Α. Ι. (2018) Υπολογιστική Διερεύνηση της Ροής Τυρβωδών Κυκλικών Φλεβών Αρνητικής Άνωσης. Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία ΔΠΜΣ " Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων", Αθήνα.

Κωτσοβίνος, Ν. Ε. (2003) Ρευστομηχανική. Ξάνθη (Εταιρία Αξιοποίησης και διαχείρισης περιουσίας Δημοκριτείου Πανεπιστημίου Θράκης).

Μήνος, Π. (2019) Διδιάστατες κατακόρυφες φλέβες αρνητικής άνωσης. Διπλωματική Εργασία, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Μυλωνάκου, Ε. Λ. (2018) Πειραματική διερεύνηση διδιάστατων τυρβωδών φλεβών αρνητικής άνωσης. Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία ΔΠΜΣ " Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων", Αθήνα.

Μπλούτσος, Α. (2012) Προσομοίωση αλληλεπίδρασης ανωστικών φλεβών σε ήρεμο ή κινούμενο αποδέκτη. Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα.

Παπακωνσταντής, Η. (2009) Τυρβώδεις κυκλικές φλέβες αρνητικής άνωσης υπό γωνία σε ακίνητο ομογενή αποδέκτη. Διδακτορική Διατριβή, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Τσατσάρα, Ε. (2016) Πειραματική και υπολογιστική διερεύνηση κεκλιμένων τυρβωδών φλεβών αρνητικής άνωσης. Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία ΔΠΜΣ " Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων", Αθήνα.

Χριστοδούλου, Γ. (1985) Στοιχεία πειραματικής υδραυλικής.

Διεθνής Βιβλιογραφία

Abessi, O., & Roberts, P. J. W. (2014) Multiport diffusers for dense discharges.

J. Hydraul. Eng. ASCE, 140 (8), DOI 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000882.

Abraham, G. (1967) Jets with negative buoyancy in homogeneous fluid. J. Hydraul. Res. 5, 235-248.

Agrawal, A. & Prasad, A. K. (2003) Integral solution for the mean flow profiles of turbulent jets, plumes, and wakes. Trans. ASME: J. Fluids Eng. 125, 813–822.

Angelidis, P. B. (2002) A numerical model for the mixing of an inclined submerged heated plane water jet in calm fluid. Int. J. Heat Mass Trans. 45, 2567-2575.

Baines, W.D., Turner, J.S., Campbell, I.H. (1990) Turbulent fountains in an open chamber. J. Fluid. Mech. 212, 557–592.

Bloomfield, L.J., Kerr, R.C. (1998) Turbulent fountains in a stratified fluid. J. Fluid. Mech. 358, 335-356.

Bloomfield, L. J. & Kerr, R. C. (2000) A theoretical model of a turbulent fountain. J. Fluid Mech. 424, 197-216

Bloomfield, L. J. & Kerr, R. C. (2002) Inclined turbulent fountains. J. Fluid Mech. 451, 283-294.

Campbell, I.H., Turner, J.S. (1989) Fountains in Magma Chambers. J. Petrology 30(4), 885–92.

Christodoulou, G.C., Yannopoulos, P.C., Papakonstantis, I.G., Bloutsos, A.A. (2014). A Comparison of Integral Models for Negatively Buoyant Jets. Proceedings of the 7th International Symposium on Environmental Hydraulics, 7-9 January 2014, Singapore.

Cipollina, A., Bonfiglio, A., Micale, G. & Brucato, A. (2004) Dense jet modelling applied to the design of dense effluent diffusers. Desalination 167, 459-468.

Cipollina, A., Brucato, A., Grisafi, F. & Nicosia, S. (2005) Benchscale investigation of inclined dense jets. *J. Hydraul. Eng. ASCE* 131(11), 1017–1022.

Crowe, A. T., Davidson, R. I., Nokes, R. I. (2016) Velocity measurements in inclined negatively buoyant jets. *Environ. Fluid Mech.* 16 (3), 503-520.

Fan, L. N. (1967) Turbulent buoyant jets into stratified or flowing ambient fluids. Tech. Rep. KHR-15, W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA.

Fischer, H. B., List, E. J., Koh, R. C. Y., Imberger, J., Brooks, N. H. (1979) *Mixing in inland and coastal waters.* Academic Press.

Friedman P. D., Katz, J. (2000) Rise height for negatively buoyant fountains and depth penetration for negatively buoyant jets impinging on an interface. *Trans. ASME: J. Fluids Eng.* 122, 779–782.

Jirka, G. H. (2004) Integral model for turbulent buoyant jets in unbounded stratified flows. Part I: Single round jet. *Environ. Fluid Mech.* 4, 1–56.

Jirka, G. H. (2006) Integral model for turbulent buoyant jets in unbounded stratified flows. Part 2: Plane Jet. *Environ. Fluid Mech.* 6: 43–100.

Kikkert, G. A. (2006) Buoyant jets with two and three dimensional trajectories. PhD thesis, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand.

Kikkert, G.A., Davidson M.J., Nokes, R.I. (2007) Inclined Negatively Buoyant Discharges. *J. Hydraul. Eng. ASCE* 133(5), 545-554.

Kotsovinos, N.E. (1975) A study of the entrainment and turbulence in a plane buoyant jet. Tech. Rep. KH-R-32. W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, California.

Kotsovinos, N.E., List, J. E. (1977) Plane turbulent buoyant jets. Part 1. Integral properties. *Journal of Fluid Mechanics.* vol. 81, part 1, pp. 35-44

Lai, C.C.K., Lee, J.H.W. (2012) Mixing of inclined dense jets in stationary ambient. *J. Hydro-environ. Res.* 6, 9–28.

Lindberg, W.R. (1994) Experiments on negatively buoyant jets, with or without cross-flow. In *Recent Research Advances in the Fluid Mechanics of Turbulent Jets and Plumes* (ed. P. A. Davies & M. J. Valente Neves), 131-145. Kluwer.

McLellan, T. M. & Randal, R. E. (1986) Measurement of brine jet height and dilution. *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng.*, 112(2), 200–216.

Nemlioglu, S., Roberts, P. J. W. (2006) Experiments on dense jets using 3D laser-induced fluorescence (3DLIF). In *4th International Conference on Marine Waste Water Disposal and Marine Environment*.

Morton, B. R., Taylor, G. I., Turner, J. S. (1956) Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources. *Proc. R. Soc. Lond. A* 234, 1-23.

Nikiforakis, I. K., Stamou, A. I. (2014) Integrated modelling for the discharge of brine from desalination plants into coastal waters. *Desalin. Water Treat.*, DOI: 10.1080/19443994.2014.933629.

Nikiforakis, I.K. (2015) Numerical and experimental investigation of brine discharge from desalination plants into coastal waters. PhD thesis, National Technical University of Athens, Greece.

Oliver, C. J. (2012) Near field mixing of negatively buoyant jets. PhD thesis, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand.

Oliver, C. J., Davidson, M. J., Nokes, R.I. (2013) Predicting the near-field mixing of desalination discharges in a stationary environment. *Desalination*. 309,148-155.

Papakonstantis, I. G., Christodoulou, G. C., Papanicolaou, P.N. (2011a) Inclined negatively buoyant jets 1: geometrical characteristics. *J. Hydraul. Eng.* 49(1), 3–12.

Papakonstantis, I. G., Christodoulou, G. C., Papanicolaou, P.N. (2011b) Inclined negatively buoyant jets 2: concentration measurements. *J. Hydraul. Eng.* 49(1), 13–22.

Papakonstantis, I., Kampourelli, M., Christodoulou, G. (2007) Height of rise of inclined and vertical negatively buoyant jets. In *Proc. 32nd IAHR Congress*:

Harmonizing the Demands of Art and Nature in Hydraulics; Fluid Mechanics and Hydraulics Theme (ed. G. Di Silvio & S. Lanzoni; theme ed. A. Cenedese), CD-ROM.

Papakonstantis, I.G., Tsatsara, E.I. (2018) Trajectory Characteristics of Inclined Turbulent Dense Jets. *Environ. Process.* 5, 539–554, DOI: <https://doi.org/10.1007/s40710-018-0307-6>

Papakonstantis, I.G., Tsatsara, E.I. (2019) Mixing Characteristics of Inclined Turbulent Dense Jets. *Environ. Process.* 6, 525–541, DOI:<https://doi.org/10.1007/s40710-019-00359-w>

Papanicolaou, P. N., List, J. E. (1987) Statistical and spectral properties of tracer concentration in round buoyant jets. *Intl J. Heat Mass Transf.* 30, 2059–2071.

Papanicolaou, P. N., List, J. E. (1988) Investigations of round vertical turbulent buoyant jets. *J. Fluid Mech.* 195, 341–391.

Papanicolaou, P.N., Kokkalis, T.J. (2008) Vertical buoyancy preserving and non-preserving fountains, in a homogeneous calm ambient. *Int. J. Heat Mass Transf.* 51, 4109-4120.

Papanicolaou, P. N., Papakonstantis, I. G., Christodoulou, G. C. (2008) On the entrainment coefficient in negatively buoyant jets. *J. Fluid Mech.* 614, 447-470.

Ramaprian, B.R., Chandrasekhara, M.S. (1983) Study of vertical plane turbulent jets and plumes, IIHR Rep. No 257, Iowa Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa.

Roberts, P. J. W., Ferrier, A., Daviero, G. (1997) Mixing in inclined dense jets. *J. Hydraul. Eng. ASCE* 123(8), 693–699.

Roberts, P. J. W., Toms, G. (1987) Inclined dense jets in flowing current. *J. Hydraul. Eng. ASCE* 113(3), 323-341.

Shao, D., & Law, A. W.-K. (2010) Mixing and boundary interactions of 30° and 45° inclined dense jets. *Environ. Fluid Mech.* 10(5), 521–553.

Turner, J.S. (1966) Jets and plumes with negative or reversing buoyancy. *J. Fluid Mech.* 26, 779-792.

Vafeiadou, P., Papakonstantis, I., Christodoulou, G. (2005) Numerical simulation of inclined negatively buoyant jets. Proc. of the 9th International Conference on Environmental Science and Technology, Rhodes, Greece, 1-3 September 2005.

Voustrou, M.K., Yannopoulos, P.C., Christodoulou, G.C. (2015) Experiments on plane negatively buoyant jets. In 36th IAHR (International Association for Hydro-Environment Engineering and Research) World Congress.

Wang, H. & Law, A. W.-K. (2002) Second-order integral model for a round turbulent buoyant jet. *J. Fluid Mech.* 459, 397–428.

Wright, S. 1984 Buoyant jets in density stratified cross-flow. *J. Hydraul. Div. ASCE* 110(5), 643-656.

Yannopoulos, P. C. (2006) An improved integral model for plane and round turbulent buoyant jets. *J. Fluid Mech.* 547, 267–296.

Yannopoulos, P. C., Bloutsos, A. A. (2012) Escaping mass approach for inclined plane and round buoyant jets. *J. Fluid Mech.* 695, 81–111.

Zeitoun, M. A., McIlhenny, W. F., Reid, R. O. (1970) Conceptual designs of outfall systems for desalting plants. Res. and Devel. Progress Report No 550, Office of Saline Water, US Dept. of Interior, Washington, DC, USA, p. 139.

Zhang, H., Baddour, R.E. (1997) Maximum vertical penetration of plane turbulent negatively buoyant jets. *J. Eng. Mech.* 123, 973– 977.

Zhang, H., Baddour, R.E. (1998) Maximum penetration of vertical round dense jets at small and large Froude numbers. *J. Hydraul. Eng. ASCE* 124, 550–553.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παρακάτω δίνεται το script και η συνάρτηση “model” που “καλείται” για την επίλυση του ολοκληρωματικού μοντέλου κυκλικών φλεβών GM, σε λογισμικό Matlab 2018a.

```
%% Δεδομένα, Μονάδες: cm,s,kg
clc;clear;close all;
D=0.6;
ra=997.6;
ro=1022.5;
Qo=35.05;
g=981;
Fo=32.4;
Reo=7438;
aj=0.025; % Σενάρια aj : 1,3)0.0545 2) 0.025
ap=0.0875;
Rip=0.56;

%% Αρχικές Συνθήκες % Αρχική γωνία παροχέτευσης
thetao=2*pi*45/360;
Uo=4*Qo/((pi)*(D^2));
Mo=Uo*Qo;
go=g*(ra-ro)/ra;
Bo=go*Qo;
So=3.28*D;
Rio=Qo*(abs(Bo)^0.5)/(Mo^(5/4));
IC1=Qo;
IC2=Mo;
IC3=thetao;
IC4=Bo;
IC5=So*cos(thetao);
IC6=So*sin(thetao);

%% ΡΟΥΤΙΝΑ RK4 %βήμα 0.01cm Αρχικές Συνθήκες
[s,n] = ode45(@model, [So:0.01: 80] , [IC1; IC2; IC3; IC4; IC5; IC6]);

%% Τελικά μητρώα Q,M,θ,B,X,Z
Q=n(:,1);
M=n(:,2);
theta=n(:,3);
B=n(:,4);
x=n(:,5);
z=n(:,6);
Ritemp=(Q.*(abs(B).^0.5))./(M^(5/4)); % Σενάρια: (1,2)
for i = 1:length(Ritemp);
    if Ritemp(i)>0.56;
        Ritemp(i)=0.56;
    end
end
Ri=Ritemp;
a=aj-(aj-ap).*(Ri.^2)./(Rip.^2);
% Ri_square= (Q.^2).*B./(M^(5/2)); % Σενάρια 3
% a=aj-(aj-ap).*Ri_square.*sin(theta)./(Rip.^2);
% a=aj-(aj-ap).*Ri_square./(Rip.^2); % Σενάρια 3, χωρίς sinθ

%% Αδιαστατοποιημένα μητρώα x,z
x_adiastato = x./(D*Fo);
```

```

z_adiastato = z./(D*Fo);

%% Uc, b, gc, S, bvisual, Save
Uc=2*M./Q;
b=Q./sqrt(2*pi*M);
bc=1.2*b;
gc=((1+1.2^2)/(1.2^2))*B./Q;
S=go./gc;
S_adiastato=S/Fo;
bvisual=1.5*1.2*b;
Save=Q/Qo;

%% Χαρακτηριστικά μεγέθη x, z
(Xz, Zc, Zf, Xic, Xi, Xup, Zup, Xdown, Zdown), Si, St
%1) Zc, Xz, St, b, bc (i2)
[i1, i2]=max(z_adiastato);
zc_adiastato=i1;
xz_adiastato=x_adiastato(i2);
St_adiastato=S_adiastato(i2);
b_adiastato=b(i2)/(D*Fo);
bc_adiastato=1.2*b(i2)/(D*Fo);
%2) Xic, Si
%Για την εύρεση του Xic και Si, βρίσκω τη θέση που το z~0, π.χ 1200
xic_adiastato=x_adiastato(1200);
Si_adiastato=S_adiastato(1200);
%3) Xi, Zf
zup=z+bvisual.*cos(theta);
zf_adiastato=zup(i2)/(D*Fo);
if thetao >= (2*pi*75/360) % Σενάριο 1,2
    if thetao==2*pi*90/360
        zf_adiastato=zc_adiastato
    else
        zf_adiastato=zc_adiastato+1.5*1.2*(0.27); % Σενάριο 1: 0.3
    end % Σενάριο 2: 0.27
end
xup=x-bvisual.*sin(theta);
% Βρίσκω το σημείο που Zup=0, π.χ 2000
xi=xup(2000);
xi_adiastato=xi/(D*Fo);
xdown=x+bvisual.*sin(theta);
zdown=z-bvisual.*cos(theta);
zup_adiastato=zup/(D*Fo);
xup_adiastato=xup/(D*Fo);
zdown_adiastato=zdown/(D*Fo);
xdown_adiastato=xdown/(D*Fo);

%% Γραφικές Παραστάσεις - Έλεγχος
hold on
figure(1)
plot(x_adiastato, z_adiastato)
plot(xup_adiastato, zup_adiastato)
plot(xdown_adiastato, zdown_adiastato)
title('Τροχιά φλέβας, για θο=45ο, Σενάριο 2')
legend('Άξονας φλεβας', 'Άνω όριο', 'Κάτω όριο')
xlabel('x/DFo')
ylabel('z/DFo')
axis equal

figure (2)
plot(Ri, z_adiastato)

```

```

title('Ri-z, για  $\theta_0=45^\circ$ , Σενάριο 2')
xlabel('Ri')
ylabel('z/DFo')

```

```

figure (3)
plot(a,z_adiastato)
title('a-z, για  $\theta_0=45^\circ$ , Σενάριο 2')
xlabel('a')
ylabel('z/DFo')

```

```

figure (4)
plot(M,z_adiastato)
xlabel('M')
ylabel('z_adiastato')

```

```

figure (5)
plot(z_adiastato, Q)
xlabel('z_adiastato')
ylabel('Q')

```

```

%% Εξαγωγή μητρώων σε Excel
xlswrite('dedomena',Q,1,'C2')
xlswrite('dedomena',M,1,'D2')
xlswrite('dedomena',theta,1,'E2')
xlswrite('dedomena',B,1,'F2')
xlswrite('dedomena',x,1,'G2')
xlswrite('dedomena',z,1,'H2')
xlswrite('dedomena',Ri,1,'I2')
% xlswrite('abc',Ri_square,'I2')
xlswrite('dedomena',a,1,'J2')

```

```

function f = model(s,n)
% Η συνάρτηση που καλείται από το script και λύνει το σύστημα δ.ε
% n(1)=Q n(2)=M n(3)=theta n(4)=B n(5)=x n(6)=z
k=2*sqrt(2*pi); % σταθερές
l=((1.2)^2 +1)/2; % σταθερές
Ri=(n(1).*(abs(n(4)).^0.5))./(n(2).^ (5/4)); % Richardson (1,2)
if Ri>0.56
    Ri=0.56;
end
% Risquare=(n(1).^2)*n(4)/(n(2)^(5/2)); % Richardson^2 (3)
aj=0.0545; % 1,3)0.0545 2) 0.025
ap=0.0875;
Rip =0.56;
a=aj-(aj-ap).*(Ri.^2)./(Rip.^2); % α: (1,2)
% a=aj-(aj-ap).*Risquare.*sin(n(3))./(Rip.^2); % α: (3)
% a=aj-(aj-ap).*Risquare./ (Rip.^2); % α: (3) χωρίς sinθ

f = [ k*a*n(2)^0.5 ; % β μέλη των δ.ε
      l*n(1)*n(4)*sin(n(3))/n(2) ;
      l*n(1)*n(4)*cos(n(3))/(n(2)^2) ;
      0 ;
      cos(n(3)) ;
      sin(n(3)) ];
end

```

Παρακάτω δίνεται το script και η συνάρτηση “model2d” που “καλείται” για την επίλυση του ολοκληρωματικού μοντέλου διδιάστατων φλεβών GM-2D, σε λογισμικό Matlab 2018a.

```

%% Δεδομένα, Μονάδες: cm,s,kg
clc;clear;close all;
L = 20;
w = 0.2;
dr = -0.0073; % Δρο/ρα
Qo = 191.23;
Uo = Qo/(w*L);
g = 981;
Fo = Uo/sqrt(g*abs(dr)*w);
lambda = 1.3; % λ = 1.3 ή 1.35
Reo = (Uo*2*L*w)/((L+w)/100);
lm = w*(Fo^(4/3));
aj = 0.055; % Αναλόγως τα σενάρια
ap = 0.11;
Rip = 0.30;

%% Αρχικές Συνθήκες
thetao = 2*pi*45/360; % Αρχική γωνία παροχέτευσης θo
qo = Qo/L;
mo = w*Uo^2;
go = g*dr;
betao = w*Uo*go;
So = 5.2*w; % Εικονική αφετηρία
IC1 = qo;
IC2 = mo;
IC3 = thetao;
IC4 = betao;
IC5 = So*cos(thetao);
IC6 = So*sin(thetao);

%% ΡΟΥΤΙΝΑ RK4
%βήμα 0.01cm Αρχικές Συνθήκες
[s,n] = ode45(@model2d, [So:0.01: 90] , [IC1; IC2; IC3; IC4; IC5;
IC6]);

%% Τελικά μητρώα q, m, theta, beta=β, x, z
q = n(:,1);
m = n(:,2);
theta = n(:,3);
beta = n(:,4);
x = n(:,5);
z = n(:,6);

%% Αδιαστατοποιημένα μητρώα x,z ( lm = wFo^(4/3) )
x_adiastato = x./lm;
z_adiastato = z./lm;

%% Uc, b, gc, S, bvisual, Save, u, Ri, Fr, α
Uc = sqrt(2)*m./q;
b = (q.^2)./(sqrt(2*pi)*m);
bc = lambda*b;
gc = (sqrt(1+lambda^2)/lambda)*beta./q;
S = go./gc;
S_adiastato = S/(Fo^(2/3));

```

```

bvisual = bc;
Save = q/qo;
Save_adiastato = Save/(Fo^(2/3));
Ritemp = ((q.^3).*abs(beta))./(m.^3); % Σενάρια με Ri>0
for i = 1:length(Ritemp)
    if Ritemp(i)>Rip;
        Ritemp(i)=Rip;
    end
end
Ri=Ritemp;
a = aj+(ap-aj)*Ri/Rip;
% Ri=(q.^3).*beta./(m.^3); % Σενάρια με Ri<0
% a = aj+(ap-aj)*sin(theta).*Ri/Rip;
% a = aj+(ap-aj).*Ri/Rip;

%% Χαρακτηριστικά μεγέθη x, z (Xz, Zc, Zf, Xic, Xi, Xup, Zup, Xdown, Zdown),
Si, St
%1) Zc, Xz, St, b, bc (i2)
[i1,i2]=max(z_adiastato);
zc_adiastato=i1;
xz_adiastato=x_adiastato(i2);
St_adiastato=S_adiastato(i2);
Stave_adiastato=Save_adiastato(i2);
b_adiastato=b(i2)/lm;
bc_adiastato=bc(i2)/lm;
%2) Xic, Si
%Για την εύρεση του Xic και Si, πρέπει να βρώ τη θέση που το z~0,
%π.χ 6000
xic_adiastato=x_adiastato(6000);
Si_adiastato=S_adiastato(6000);
Siave_adiastato=Save_adiastato(6000);
%3) Xi, Zf
zup=z+bvisual.*cos(theta);
zf_adiastato=zup(i2)/lm;
if thetao >= (2*pi*60/360)
    if thetao==2*pi*90/360
        zf_adiastato=zc_adiastato
    else
        zf_adiastato=zc_adiastato+1.35*0.3;
    end
end
end
xup=x-bvisual.*sin(theta);
% Βρίσκω τη θέση που Zup~0, π.χ 6600
xi=xup(6600);
xi_adiastato=xi/lm;
xdown=x+bvisual.*sin(theta);
zdown=z-bvisual.*cos(theta);
zup_adiastato=zup/lm;
xup_adiastato=xup/lm;
zdown_adiastato=zdown/lm;
xdown_adiastato=xdown/lm;

%% Γραφικές παραστάσεις - Έλεγχος
hold on
figure(1)
plot(x_adiastato,z_adiastato)
plot(xup_adiastato,zup_adiastato)
plot(xdown_adiastato,zdown_adiastato)
title('Σενάριο α , θo=45')
legend('Άξονας φλέβας', 'Άνω όριο', 'Κάτω όριο')
xlabel('x/lm')

```

```

ylabel('z/lm')
axis equal

figure (2)
plot(Ri, z_adiastato)
title ('Ri-z/lm')
xlabel('Ri')
ylabel('z/lm')

figure (3)
plot(a, z_adiastato)
title('a-z/lm')
xlabel('a')
ylabel('z/lm')

figure (4)
plot(m, z_adiastato)
title('m-z/lm')
xlabel('m')
ylabel('z_adiastato')

figure (5)
plot(z_adiastato, q)
title('q-z/lm')
xlabel('z_adiastato')
ylabel('q')

%% Εξαγωγή μητρώων σε Excel
xlswrite('dedomena2d',q,1,'C2')
xlswrite('dedomena2d',m,1,'D2')
xlswrite('dedomena2d',theta,1,'E2')
xlswrite('dedomena2d',beta,1,'F2')
xlswrite('dedomena2d',x,1,'G2')
xlswrite('dedomena2d',z,1,'H2')
xlswrite('dedomena2d',Ri,1,'I2')
xlswrite('dedomena2d',a,1,'J2')

```

```

function f = model2d(s,n)
% Η συνάρτηση που λύνει το σύστημα RK4
% n(1)=q n(2)=m n(3)=theta n(4)=β n(5)=x n(6)=z
k = 2*sqrt(2); % σταθερές
lambda=1.3; % λ= 1.3 ή 1.35
l = sqrt((lambda^2 +1)/2); % σταθερές

aj = 0.055; % Αναλόγως τα σενάρια
ap = 0.11;
Rip = 0.30;

Ri = (n(1).^3).*abs(n(4))./(n(2).^3); % Σενάρια με Ri>0
if Ri > Rip
    Ri=Rip
end
a = aj+(ap-aj).*Ri./Rip;
% Ri = (n(1).^3).*n(4)./(n(2).^3); % Σενάρια με Ri<0
% a = aj+(ap-aj).*Ri./Rip;
% a = aj+(ap-aj).*sin(n(3)).*Ri./Rip;

f = [ k*a*n(2)/n(1) ; % β' μέλη των δ.ε
      l*n(1)*n(4)*sin(n(3))/n(2) ;

```

```

1*n(1)*n(4)*cos(n(3))/(n(2)^2) ;
0 ;
cos(n(3)) ;
sin(n(3)) ] ;
end

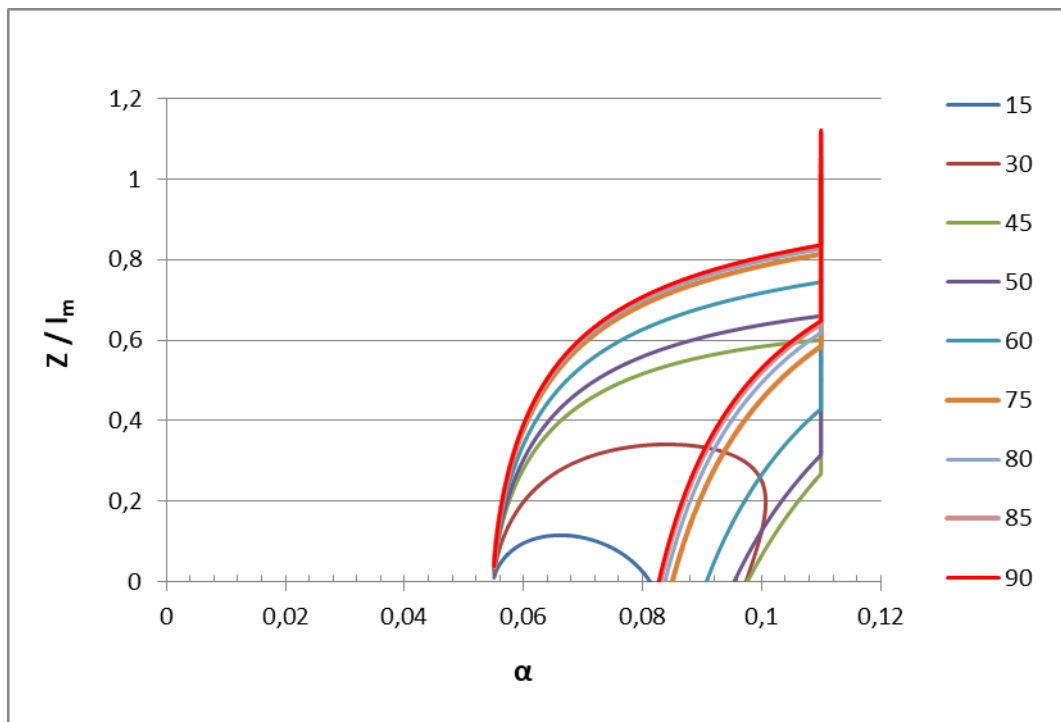
```

Εξετάστηκε ένα επιπλέον σενάριο (σενάριο i) για το μοντέλο διδιάστατων φλεβών GM-2D εκτός από αυτά που εξετάστηκαν στο Κεφάλαιο 4.3, για το οποίο έγινε θεώρηση:

- $\alpha_j=0.055, \alpha_p=0.11, Ri_p=0.6$ (Kotsovinos & List, 1977)

$$Ri(s) = \frac{q^3 |\beta|}{m^3} > 0, \quad a = a_j - (\alpha_j - \alpha_p) \frac{Ri(s)}{Ri_p}$$

Στο Σχήμα Π-1 δίνεται η μεταβολή του συντελεστή συμπαράσυρσης με το αδιαστατοποιημένο ύψος του άξονα της για το παραπάνω σενάριο.



Σχήμα Π-1: Μεταβολή συντελεστή συμπαράσυρσης α με το ύψος του άξονα της φλέβας για γωνίες εκτόξευσης $15^\circ-90^\circ$ (Σενάριο i)

Στον παρακάτω Πίνακα Π-1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά την εφαρμογή του ολοκληρωματικού μοντέλου GM-2D για το Σενάριο i.

Πίνακας Π-1: Αποτελέσματα μοντέλου GM-2D διδιάστατων φλέβων φλεβών για τα Σενάρια: A,i.

	θ	Z_c / l_M	$b/l_M (\Delta^*)$	$b_c / l_M (\Delta^*)$	Z_f / l_M	X_z / l_M	X_{ic} / l_M	X_i / l_M	$S_t / F_o^{(2/3)}$	$S_t / F_o^{(2/3)} (M^*)$	$S_i / F_o^{(2/3)}$	$S_i / F_o^{(2/3)} (M^*)$
<u>Σενάριο A</u> $\alpha_j = 0.055$ $\alpha_p = 0.11$ $R_{ip} = 0.30$	15	0,11	0,1	0,13	0,24	0,69	1,26	1,94	0,39	0,49	0,59	0,75
	30	0,34	0,18	0,24	0,57	0,95	1,72	2,3	0,5	0,63	0,76	0,96
	45	0,6	0,26	0,33	0,93	0,98	1,8	2,31	0,53	0,67	0,82	1,04
	50	0,68	0,28	0,37	1,05	0,95	1,75	2,24	0,53	0,67	0,83	1,05
	60	0,85	0,3	0,39	1,24	0,81	1,52	1,97	0,52	0,66	0,83	1,04
	75	1,03	0,3	0,39	1,42	0,47	0,89	1,27	0,49	0,62	0,79	1
	80	1,06	0,3	0,39	1,45	0,32	0,61	0,98	0,48	0,6	0,78	0,99
	85	1,09	0,3	0,39	1,48	0,16	0,31	0,67	0,47	0,6	0,77	0,98
	90	1,1	0	0	1,1	0	0	0	0,47	0,59	-	-
<u>Σενάριο i:</u> $\alpha_j = 0.055$ $\alpha_p = 0.11$ $R_{ip} = 0.6$	15	0,12	0,09	0,12	0,24	0,7	1,28	1,86	0,38	0,48	0,55	0,69
	30	0,34	0,16	0,21	0,55	0,97	1,77	2,31	0,47	0,59	0,72	0,91
	45	0,61	0,24	0,31	0,92	1,01	1,85	2,34	0,51	0,65	0,81	1,02
	50	0,7	0,26	0,34	1,04	0,98	1,79	2,26	0,51	0,65	0,82	1,03
	60	0,87	0,32	0,42	1,26	0,84	1,57	1,99	0,5	0,64	0,81	1,02
	75	1,05	0,55	0,71	1,44	0,48	0,91	1,27	0,47	0,6	0,76	0,96
	80	1,09	0,78	1,02	1,48	0,33	0,63	0,97	0,46	0,58	0,75	0,95
	85	1,11	1,52	1,98	1,5	0,17	0,32	0,65	0,46	0,58	0,74	0,93
	90	1,12	0	0	1,12	0	0	0	0,45	0,57	-	-

