ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μεταβολικές Λύσεις και Ευστάθεια Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων σε απειροδιάστατους Χώρους Hilbert

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ ΓΙΔΑΡΑΚΟΥ

Ακαδημαϊκός Επιβλέπων
Αντώνης Χαραλαμπόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π
Τομέας Μαθηματικών

Αθήνα, Οκτώβριος 2020

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μεταβολικές Λύσεις και Ευστάθεια Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων σε απειροδιάστατους Χώρους Hilbert

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ ΓΙΔΑΡΑΚΟΥ

Επιβλέπων: Αντώνης Χαραλαμπόπουλος

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 7/10/2020.

(Υπογραφή)	*(Υπογραφή)*	*(Υπογραφή)*
....	....	....
Αντώνης Χαραλαμπόπουλος Καθηγητής	Ευανθία Δούκα Επίκουρος Καθηγήτρια	Αλέκος Αρβανιτάκης Επίκουρος Καθηγητής

Αθήνα, Οκτώβριος 2020

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Υπεύθυνη Δήλωση
Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της πτυχιακής εργασίας, και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην πτυχιακή εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η πτυχιακή εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τις απαιτήσεις του προγράμματος σπουδών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

(Υπογραφή)

....
Παναγιώτης Γιδαράκος

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την γενική Στοχαστική (μη-γραμμική) εξίσωση Εξελικτικού Τύπου. Αρχικά θα επεκτείνουμε κάποιες έννοιες απο τις πεπερασμένες διαστάσεις του $\mathbb{R}^n$ σε κάποιους απειροδιάστατους χώρους *Hilbert* επαναπροσδιορίζοντας τις διαδικασίες *Brown – Wiener* και το Στοχαστικό Ολοκλήρωμα. Στην συνέχεια, θα παρουσιαστούν ορισμένοι ορισμοί για την έννοια της λύσης αυτών των εξισώσεων. Γενικά υπάρχουν τρεις τύποι λύσεων. Η Ημιομάδα (*Mild Solution*) η Μεταβολική Λύση (*Strong Solution*) και η Λύση *Martingale*. Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε είναι $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ οπου ο χώρος της λύσης μας θα είναι πυκνά ενσφηνωμένος σε έναν μεγαλύτερο *Hilbert*. Σε αυτήν την περίπτωση παράγονται Μεταβολικές Λύσεις. Το Θεώρημα Υπαρξης και Μοναδικότητας θα παρουσιαστεί μέσω ορισμένων συνθηκών που πρέπει να ακολουθούν οι συντελεστές, όπως μονοτονία, *Lipschitz*- συνέχεια κ.α. Τέλος, όταν είναι βέβαιο ότι αυτά τα προβλήματα έχουν Μοναδική Λύση. Θα δοκιμαστεί η Ευστάθεια αυτών των Λύσεων με τη χρήση ορισμένων Συναρτησοειδών προκειμένου να αποδειχθεί ότι αυτές οι Λύσεις εκφράζονται μέσω ενός Μοναδικού Μέτρου Πιθανότητας. Με άλλα λόγια, θα αποδειχθεί ότι ο τρόπος που φτάνουμε στην Λύση είναι μοναδικός

Λέξεις Κλειδιά

Q – Wiener Διαδικασία, Διαδικασιές σε χώρους *Hilbert*, Στοχαστικές Εξελικτικές Εξισώσεις, Τριάδα *Gelfand*, Μεταβολικές Λύσεις, Συναρτησοειδή *Lyapunov*, *Ito*, Αμετάβλητα Μέτρα, Ευστάθεια, Πρόβληματα Διαταραχών

Abstract

The current research focuses on the generic Stochastic (non-linear) Evolution Type equation. Firstly, some concepts from the finite dimensions of $\mathbb{R}^n$ will be expanded in some infinite-dimensions Hilbert spaces, by redefining the Brown-Wiener processes and the Stochastic Integral. After that, some definitions will be presented for the concept of the solution of these equations. In general, there are three types of solution. The Mild Solution, the Strong Solution and the Martingale Solution. Our method sets up the equation in a Gelfand triplet $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ where the original Hilbert space is compactly embedded,with the solution identified in a larger Hilbert space.In this case Variational Solutions are produced. Existence and Uniqueness Theorems will be presented through some conditions that the factors must follow, like monotony, Lipschitz-continuation etc. Finally, when it is certain that these problems have Unique Solution, the Stability of these Solutions will be tested (with the use of some Functionals) in order to prove that these Solutions are expressed through a Unique Probability Measure. In another words, it will be proved that the way to get a Solution is unique.

Keywords

Q-Wiener Process, Hilbert Valued Process, Stochastic Evolution Equations, Gelfand Triplet, Variational Solutions, Ito Lyapunov Functionals, Invariant Measures, Stability, Random Perturbations Problem

Στην επεκταμένη Οικογένει΄πανοσα μου

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Κίνηση *Brown* και *Martingales*

Έστω $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ ενας χώρος πιθανότητας,όπου το Ω συνόλο στοιχείων ω το $\mathcal{F}$ δηλώνει τα *Borel* υποσύνολα του Ω και το P είναι ενα μέτρο πιθανότητας. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ονομάζεται τυχαία μεταβλητή. Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X(t)$ ή X_t με $t \in \mathbb{R}^+$ ονομάζεται στοχαστική διαδικασία. Είναι συνεχής ,εαν η $X_t(\omega)$ ειναι συνεχής συνάρτηση του t για σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$.

Μια στοχαστική διαδικασία Y_t λέγεται εκδοχή της X_t εαν $\mathcal{P}\{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} = 1\ \forall t \in T$

Θεώρημα 1.1. *(Κριτήριο συνέχειας Kolmogorov) Έστω X_t μια διαδικασία του R^d και έστω οτι υπάρχουν θετικές σταθερές a,β,C τέτοιες ώστε $E|X_t - X_s|^a \leq C|t-s|^{1+\beta}\ \forall t,s$. Τότε η X έχει συνεχή εκδοχή.*

Παράδειγμα 1.1. *Η κίνηση Brown B_t ικανοποιεί το παραπάνω θεώρημα με $E|B_t - B_s|^4 = n(n+2)|t-s|^2$ άρα υπάρχει συνεχής εκδοχή, όπου εμείς θεωρούμε την ίδια την διαδικασία B_t ή W_t.*

Ορισμός 1.1. *Μια διαδικασία W_t ονομάζεται διαδικασία Wiener , εαν είναι μια συνεχής διαδικασία Gauss με ανεξάρτητες προσαυξήσεις με $w_0 = 0$, μέση τιμή $Ew_t = 0$ και διασπορά $Cov(w_t^i, w_s^j) = \delta_{ij}(t \wedge s)$*

Έστω τώρα μια οικογένεια σ-αλγεβρών $\{\mathcal{F}_t\}$ η οποία ονομάζεται διύλιση, είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής. Μια διαδικασία X_t ονομάζεται $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη εαν η X_t ειναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη $\forall t \in T$.

Ορισμός 1.2. *Έστω μια $\mathcal{F}_t$ και μια διαδικασία X_t $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη, τοτε η διαδικασία ονομάζεται $\mathcal{F}_t -$ martingale , εαν είναι ολοκληρώσιμη με $E|X_t| < \infty$ και ισχύει $E\{X_t|\mathcal{F}_s\} = X_s$, $\forall t > s$*

Ίσως πιο χρήσιμα *martingale* να είναι εκείνα που μιλάμε για τις ροπές τους. Δηλαδή αν $E|X_t|^p < \infty$ για κάποιο $p \geq 1$ ονομάζεται $L^p -$ *martingale*.

Μια τυχαία μεταβλητή τ ονομάζεται χρόνος διακοπής εαν $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in T$. Αμεσα ορίζουμε ενα το *localmartingale* εαν υπάρχει μια αύξουσα ακουλουθία χρόνων διακοπής $t_n \to t$, έτσι ώστε η διαδικασία διακοπής $X_{t \wedge t_n}$ να είναι $\mathcal{F}_t$ – *martingale* για κάθε n.

Θα ασχοληθούμε τώρα με την πιο σημαντική που θα μας απασχολήσει παρακάτω. Τα *semimartingalee* που γράφονται ως άθροισμα ενός *localmartingale* και μιας διαδικασιάς με φραγμένη κύμανση. Πιο συγκρεκριμένα, έστω b_t μια συνεχής $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη και M_t ενας συνεχές *martingale* με Q_t η τετραγωνική κύμανση της, έτσι η X_t ορίζεται ως

$$X_t = \int_0^t b_s ds + M_t$$

ένα συνεχές *semimartingale* με $Q_t = [M]_t$. Όπου η διαδικασία στην αγκύλη είναι η τετραγωνική κύμανση της M_t και ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 1.3. *(Τετραγωνική κύμανση) Έστω X_t με $t \in [0, T]$ μια συνεχής $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη διαδικασία και μια διαμέριση $I_T = \{0 = t_0 < .... < t_n = T\}$ με $|I_T| = max(t_k - t_{k-1})$ και $L_t(I_T) = \sum_{k=0}^{n}(X_{t_k} - X_{t_k-1})^2$. Εαν η ακολουθία $I_T^n, L_t(I_T)^n$ συγκλίνει κατά πιθανότητα καθώς $|I_T|^n \to 0$ στο $[X]_t$ τότε το όριο αυτό ονομάζεται Τετραγωνική κύμανση της X_t.*

Παράδειγμα 1.2. *Έστω $X_t = w_t$ η γνωστή κίνηση Brown τότε η $[w]_t = t$ σχ.β*

<u>Σημείωση</u> Αν έχουμε δυο διαδικασίες X_t, Y_t τότε η ¨Αμοιβαία¨ κύμανση τους ορίζεται ως $\langle X, Y \rangle_t = \frac{|X+Y|_t - |X-Y|_t}{4}$

Περνάμε τώρα σε κάποιες πολυ βασικές ανισότητες οι οποίες θα φανούν χρήσιμες για τις μετέπειτα αποδείξεις μας.

Θεώρημα 1.2. *(Ανισότητες Doob) Έστω $M_t \geq 0$ συνεχές L^p – submartingale. Τότε για κάθε $p \geq 1$ και $\lambda > 0$*

$$\lambda \mathbb{P}\{c > \lambda\} \leq E\{M_t : \sup_{s \leq t} M_s \geq \lambda\}$$

Στην περίπτωση που $p > 1$ ισχύει το ακόλουθο

$$E\{\sup_{s \leq t} M_s^p\} \leq q^p E\{M_t^p\}$$

όπου $q = \frac{p}{p-1}$,$\forall t \in T$

1.2 Στοχαστικά Ολοκληρώματα

Μια απο τις πιο όμορφες ανακαλύψεις των μαθηματικών ειναι βέβαια το ολοκλήρωμα, χάρη στον *Kiyosi Ito* στον άνθρωπο που έδωσε νόημα στο ολοκλήρωμα με στοχαστικό διαφορικό. Πίο συγκεκριμένα με βάση την κίνηση *Brown* όπου αργότερα γενικεύθηκε απο ενα *local – martingale* και *semi – martingale* μπορούμε σήμερα να μιλάμε για διαφορικες εξισώσεις με στοχαστικό παράγοντα και όχι μόνο. Στη μικρή αυτή ενότητα θα συγκρεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας έχοντας ως κινητήρια δύναμη ενα L^2 – *martingale* M_t και μια προσαρμοσμένη διαδικασία $f(t) \in R$. Για κάθε διαμέριση $\Delta_T^n = \{0 = t_0 < .... < t_n = T\}$ ορίζω

$$I_t^n = \sum_{k=1}^{n} f_{t_{k-1}\wedge t}(M_{t_k\wedge t} - M_{t_{k-1}\wedge t})$$

Αυτό μας λέει ότι η I_t^n είναι *martingale* με τετραγωνική κύμανση

$$[I^n]_t = \int_0^t |f_s^n|^2 d[M]_s$$

με $f_t^n = f_{t_{k-1}}$. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι

$$\int_0^T |f_t^n|^2 d[M]_t < \infty.$$

Τότε η σειρά I_t^n θα συγκλίνει ομοιόμορφα κατα πιθανότητα καθώς $|\Delta_T^n| \to 0$ στο

$$I_t = \int_0^t f_s dM_s$$

που ειναι ανεξάρτητο απο την διαμέριση που διαλέγουμε. το I_t ονομάζεται ολοκλήρωμα του *Ito* της f_t σχετικά με το *martingale* M_t.

Σημείωση: Η ολοκληρωτέα διαδικασία μπορεί να γενικευθει σε μια μεγαλύτερη κλάση στις προσβλέψιμες διαδικασίες $\mathcal{P} \subset [0,T] \times \Omega$. Αρα μια διαδικασία f_t λέγεται προβλέψιμη εαν η συνάρτηση $:(t,\omega) \to f_t(\omega)$ είναι $\mathcal{P}-$ μετρήσιμη στον $[0,T] \times \Omega$.

Γενικά: Κάθε αριστερά συνεχής προσαρμοσμένη διαδικασία ειναι προβλέψιμη.

Θεώρημα 1.3. *Έστω M_t,f_t όπως παραπάνω . Τότε το ολοκλήρωμα Ito I_t είναι συνεχές και local – martingale όπου ικανοποιείται η ιδιότητα $EI_t = 0$ και $[I]_t = \int_0^t |f_s|^2 d[M]_s$*

Θεώρημα 1.4. *(Ταυτότητα του Ito) Θεωρούμε X_t ενα συνεχές semimartingale με τύπο*

$$X_t^i = \int_0^t b_s^i ds + Z_t^i \quad i = 1, ..., d$$

και υποθέτουμε οτι $\Phi : R^d \times [0,T] \to R$ είναι μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $\Phi(x,t)$ δυο φορές διαφορίσιμη κατα x και μια φορά κατα t. Τότε ισχύει :

$$\Phi(X_t, t) = \Phi(X_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial s}(X_s, s) ds$$

$$+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(X_s, s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(X_s, s) d\langle X^i, X^j >_s$$

Συνδυάζοντας την ταυτότητα του *Ito* και τις ανισότητες του *Doob* καταλήγουμε σε μια ανισότητα που θεωρείτε κομβική σε πολλες τεχνικές αποδείξεις που θα μας απασχολήσουν.

Συμπέρασμα 1.1. *(Ισομετρία κατα Ito)*
$E[(\int_0^T f(t,\omega) dW_t)^2] = E[\int_0^T f(t,\omega)^2 dt]$

Θεώρημα 1.5. *(Burkholder – Davis – Gundy) Έστω $M_t, t \in [0,T]$ συνεχές martingale με $M_0 = 0$ και $E|M_T|^p < \infty$. Τότε για κάθε $p > 0$ υπάρχουν δυο θετικές σταθερές c_p, C_p τέτοιες ώστε*

$$c_p E[M]_T^{p/2} \leq E\{\sup_{t \leq T} |M_t|^p\} \leq C_p E[M]_T^{p/2}$$

Παράδειγμα 1.3. *Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^t W_s dW_s$*
Το εργαλείο μας εινα η ταυτότητα του Ito όπου $X_t = W_t$ και $\Phi(t,x) = \frac{1}{2}x^2$. Τότε $\Phi(t, W_t) = \frac{1}{2}W_t^2$ και απο την ταυτότητα του Ito για $d = 1$ έχουμε

$$d\Phi_t = ... = W_t dW_t + \frac{1}{2} dt.$$

Με άλλα λόγια

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t$$

1.3 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις τύπου *Ito*

Κίνητήρια δύναμη για την εργασία αυτή ειναι η πεπερασμένη διαφορική στοχαστική εξίσωση

$$dx(t) = b(x(t), t) + \sigma(x(t), t)dw_t$$

με αρχική συνθήκη $x(0) = \xi$ όπου $b : R^d \times [0, T] \to R^d$ και $\sigma : R^d \times [0, T] \to R^{d\times m}$ w_t μια κίνηση *Brown* στον R^m και ξ μια $\mathcal{F}_0$- μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε την παραπάνω εξίσωση μέσω ολοκληρωμάτων έχοντας

$$x(t) = \int_0^t b(x(s), s) + \int_0^t \sigma(x(s), s)dw_s, 0 \leq t \leq T \tag{1.1}$$

Δεδομένου ότι έχουμε την μορφή της εξίσωσης μπορούμε πλεον να δηλώσουμε ενα πολύ βασικό θεώρημα που θα μας απασχολήσει αρκετά στη συνέχεια για εξισώσεις που λαμβάνουν τιμές σε απειροδιάστατους χώρους.

Θεώρημα 1.6. *(Ύπαρξης Μοναδικότητας) Θεωρούμε συντελεστές $b(x, t)$ και $\sigma(x, t)$ της (1) μετρήσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν:*

1. *Για κάθε $x \in R^d$ και $t \in [0, T]$, υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$|b(x, t)|^2 + Tr[\sigma(x, t)\sigma^*(x, t)] \leq C(1 + |x|^2)$$

2. *Για κάθε $x \in R^d$ και $t \in [0, T]$ και για κάποιο $K > 0$*

$$|b(x, t) - b(y, t)|^2 + Tr\{[\sigma(x, t) - \sigma(y, t)][\sigma^*(x, t) - \sigma^*(y, t)]\} \leq K|x - y|^2$$

Τότε δεδομένου οτι $\xi \in L^2(\Omega; R^d)$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση η οποία ειναι συνεχής και $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη διαδικασία στον R^d με $E\sup_{t\leq T} |x(t)|^2 < \infty$

Σημείωση: Η συνθήκη (1) μας λέει οτι πρακτικα η λύση μας δεν παυει να υπάρχει σε πεπερασμένο χρόνο. Δηλαδή $|x(t)| \not\to \infty$ καθως $t \to \infty$. Ενώ η συνθήκη (2) μας δείχνει τη μοναδικότητα της λύσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στοχαστικές Διαδικασίες σε Χώρους *Hilbert*

Το κεφάλαιο αυτό θα αφιερωθεί στα εργαλεία μελέτης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων Εξελικτικού Τύπου σε απειροδιάστατους χώρους *Hilbert* οι οποίες διαταράσσονται μέσω λευκού θορύβου White Noise ή αλλιως Wiener noise. Όπως και πριν θα ορίσουμε την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας, θα εισάγουμε τα απαραίτητα *Martingale* τα οποία θα παίρνουν πλεον τιμές σε χώρους *Hilbert*. Στην συνέχεια θα κατασκευάσουμε και τα στοχαστικά μας ολοκληρώματα ή αλλιως διαδικασίες *Ito* με συνέπεια στις διαδικασίες *Wiener* και θα καταλήξουμε στην ταυτότητα του *Ito*. Έτσι θα είμαστε ετοιμοι απο πλευράς εργαλείων να περάσουμε στις αποδείξεις της ¨ Ύπαρξης και Μοναδικότητας ¨.

2.1 Διαδικασίες $Q-$*Wiener* και *Martingales*

Ξεκινάμε δίνοντας τον ορισμό των μέτρων *Gauss*

Ορισμός 2.4. *Έστω H ένας χώρος Hilbert, ένα μέτρο μ στον $(H, \mathcal{B}(H))$ ονομάζεται Gauss εαν για τυχαίο $h \in H$ υπάρχει ενα $m \in R$, $q \geq 0$ τέτοιο ώστε,*

$$\mu\ (\{x \in H, \langle h, x\rangle \in A\}) = N(m,q)(A)$$

Μια πολυ χρήσιμη ιδιότητα είναι οτι εαν το μ είναι ενα μέτρο *Gauss* τότε

$$h \to \int_H \langle h, x\rangle \mu(dx)$$

$$(h_1, h_2) \to \int_H \langle h_1, x\rangle\langle h_2, x\rangle \mu(dx)$$

όπου h_1, h_2 καλά ορισμένα και συνεχή συναρτησοειδή.

Επόμενο είναι να ορίσουμε μια στοχαστική διαδικασία σε εναν χώρο *Hilbert* H Έχοντας ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ και έστω I ένα διάστημα του R.

Μία τυχαία οικογένεια $\{X_t(\omega)\}_{t\in I}$ η οποία παίρνει τιμές στον H και είναι ορισμένη στον Ω ονομάζεται Στοχαστική Διαδικασία. Οι συναρτήσεις της μορφής $X(\cdot,\omega)$ ονομάζονται τροχιές της $X(t)$.

Έστω H,K δυο διαχωρίσιμοι χώροι *Hilbert* με εσωτερικό γινόμενο και νόρμες $\|\cdot\|_H = (\cdot,\cdot)_H^{\frac{1}{2}}$ και $\|\cdot\|_K = (\cdot,\cdot)_K^{\frac{1}{2}}$ αντοίστιχα. Θα χρειαστούμε να ορίσουμε κάποιους χώρους γραμμικών τελεστών που θα φανούν χρήσισμοι σε όλη την έκταση της εργασίας μας.
Έστω Γ ένας γραμμικός τελεστής απο $K \to H$.

1. $\mathcal{L}(K,H)$ ο χώρος των φραγμένων γραμμικών τελεστών $\Gamma : K \to H$ με νόρμα $\|\Gamma\|_{\mathcal{L}}$

2. $\mathcal{L}_2(K,H)$ ο χώρος των *Hilbert – Schmidt* τελεστών με νόρμα να ορίζεται ως
$$\|\Gamma\|_{\mathcal{L}_2} = \{\sum_{k=1}^{\infty} \|\Gamma e_k\|^2\}^{1/2}$$
όπου η $\{e_k\}$ είναι μια πλήρης ορθοκανονική βάση του K

3. $\mathcal{L}_1(K,H)$ ο χώρος των τελεστών ίχνους με νόρμα να ορίζεται ως
$$\|\Gamma\|_{\mathcal{L}_1} = Tr\hat{\Gamma} = \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{\Gamma} e_k, e_k)$$
με $\hat{\Gamma} = (\Gamma^*\Gamma)^{1/2}$ όπου $\hat{\Gamma}$ δηλώνει τον συζυγή του Γ.

Σημειωση Εύκολα βλέπουμε οτι αν εαν ο $\Gamma \in \mathcal{L}_1(H)$ ειναι αυτοσυζυγής δηλαδή $\|\Gamma\|_{\mathcal{L}_1} = Tr\Gamma$, τότε ονομάζουμε την κλάσση των αυτοσυζυγών τελεστών με $\hat{\mathcal{L}}_1(H)$.
Στη συνέχεια αναπτύσσουμε ενα χρήσιμο Λήμμα.

Λήμμα 2.1. *Έστω $A : K \to H$ και $B : H \to H$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Τα επόμενα ισχύουν.*

1. $\|A\|_{\mathcal{L}} \le \|A\|_{\mathcal{L}_2} \le \|A\|_{\mathcal{L}_1}$
2. $\|BA\|_{\mathcal{L}_1} \le \|A\|_{\mathcal{L}_2}\|B\|_{\mathcal{L}_2}$
3. $\|BA\|_{\mathcal{L}_j} \le \|A\|_{\mathcal{L}_j}\|B\|_{\mathcal{L}} \;\; j = 1,2$

Ορίζουμε τους βασικούς μας ορισμούς των *Martingale*.
Αρχίζουμε με τον πλήρη χώρο πιθανοτητάς μας $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ και $\mathcal{F}_t$ την διύλιση μας.

Ορισμός 2.5. *Έστω M_t, $t \in [0,T]$ να είναι μια $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία ορισμένη στον Ω με τιμές στον H τέτοια ώστε $E\,\|M_t\| = E\,\|M_t\|_H < \infty$. Ονομάζεται $H-$ valued martingale εαν*

$$E\{M_t \,|\, \mathcal{F}_s\} = M_s$$

για κάθε $s,t \in [0,T]$ με $s \le t$.

Ορισμός 2.6. *Εαν $E\,\|M_t\|^p < \infty$ με $p \ge 1$, τότε η M_t ονομάζεται $H-$ valued L^p martingale εαν υπάρχει μια ολοκληρώσιμη $\hat{\mathcal{L}}_1(H)$-valued διαδικασία $\hat{Q}_t$ στο $[0,T]$ τέτοια ώστε:*

$$\langle (M,g),(M,h)\rangle_t = (\hat{Q}_t g,h) = \int_0^t (Q_s g,h)ds$$

σχεδόν βεβαίως $\forall g,h \in H$. Με αυτον τον τρόπο ορίζεται ο τελεστης συνδιακύμανσης $[M_t] == \hat{Q}_t$ της M_t. Εαν έχει πυκνότητα Q_t τέτοια ώστε

$$[M]_t = \int_0^t Q_s ds$$

τότε ο Q_t ονομάζεται <u>τελεστής τοπικής συνδιακύμανσης</u> της M_t.

Έπεται οτι αν εαν μ μέτρο *Gauss*, τότε υπάρχει ενα στοιχείο $m \in H$ και ενας γραμμικός τελεστής Q τέτοιος ώστε

$$\int_H \langle h,x\rangle \mu(dx) = \langle m,h\rangle \;\; \forall h \in H$$

και

$$\int_H \langle h_1, x-m\rangle\langle h_2, x-m\rangle \mu(dx) = \langle Qh_1,h_2\rangle \;\;\; \forall h_1,h_2 \in H$$

Λήμμα 2.2. *Έστω M_t συνεχές L^2- martingale στον H με $M_0 = 0$ και $\hat{Q}_t \in \hat{\mathcal{L}}_1(H)$. Τότε*

$$E\,\|M_t\|^2 = E\;\; Tr[M]_t = E\;(Tr\hat{Q}_t)$$

Απόδειξη. Έστω $\{e_k\}$ μια πλήρης ορθοκανονική βάση του H. Τότε

$$E\|M_t\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} E(M_t,e_k)^2$$

αφού το $m_t^k = (M_t,e_k)$ είναι ενα συνεχές *martingale* νε $m_0^k = 0$ έχουμε ότι

$$|m_t^k|^2 = 2\int_0^t m_s^k dm_s^k + [m^k]_t$$

άρα

$$E|m_t^k|^2 = E[m^k]_t = E(\hat{Q}_t e_k, e_k)$$

οπότε τελικά

$$E\|M_t\|^2 == \sum_{k=1}^{\infty} E(\hat{Q}_t e_k, e_k) = E(Tr\hat{Q}_t)$$

και το λήμμα έχει αποδειχθεί. □

Σημείωση Με βάση το προηγούμενο Λήμμα ορίζουμε με $\mathcal{M}_T^p(H)$ τον χώρο *Banach* των συνεχών $H-$ *valued* L^p- *martingales* με νόρμα

$$\|M_{p,T}\| = (E \sup_{0\le t\le T} \|M_t\|^{p})^{1/p}$$

Θεώρημα 2.7. *(Doob's Maximal ανισότητες)*
Έστω M_t, $t \in [0,T]$ ένα συνεχές $H-$ valued L^p- martingale. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες :

1. *Για $p \geq 1$ και για κάθε $\lambda>0$*

$$P\{\sup_{0\le t\le T} \|M_t\| \geq \lambda\} \leq \lambda^{-p}\, E\|M_T\|^{\,p}$$

2. *Για $p > 1$*

$$E\{\sup_{0\le t\le T} \|M_t\|^p\} \leq (\frac{p}{p-1})^p E\|M_T\|^p$$

Ορισμός 2.7. *Μια στοχαστική διαδικασία X_t σε κάποιο χώρο Hilbert H ονομάζεται $H-$ valuedGauss εαν για κάθε $h \in H$, (X_t, h) είναι μια διαδικασία Gauss με πραγματικές τιμές.*

Ορισμός 2.8. *Έστω $Q \in \mathcal{L}_1(H)$ να είναι ενας αυτοσυζυγής τελεστής ίχνους στον H. Μια $H-$ valued στοχαστική διαδικασία $\{W_t,\ t \geq 0\}$ ονομάζεται διαδικασία $Q-$ Wiener εαν:*

1. *Η W_t έχει συνεχείς τροχιές στον H για $t \geq 0$ και $W_0 = 0$ σχεδόν βεβ.*

2. *Η W_t έχει στεθερές ανεξάρτητες προσαυξήσεις*

3. *Η W_t είναι μια τυπική Gauss διαδικασία στον H με τελεστή συνδιακύμανσης Q τέτοια ώστε*

$$E\ (W_t, h) = 0, \quad E\ (W_t, h)(W_s, g) = (t \wedge s)(Qh, g)$$

για κάθε $s, t \in [0, \infty)$, $h, g \in H$. Δηλαδή $(W_t - W_s) = N(0, (t-s)Q)$

Σημείωση
Υπάρχει μια πλήρης ορθοκανονική βάση $\{e_k\}$ στον H και μια φραγμένη ακολουθία απο μη-αρνητικούς πραγματικοίς $\{\lambda_k\}$ τέτοιοι ώστε $Qe_k = \lambda_k e_k$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε ένα θεώρημα αναπαράστασης για μια διαδικασία $Q-Wiener$

Θεώρημα 2.8. *Έστω $\{e_k\}$ ενα πλήρες σύνολο ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή συνδιακύμανσης Q με ιδιοτιμές $\{\lambda_k\}$ έστι ώστε $Qe_k = \lambda_k e_k$. Τότε, για $0 \leq t \leq T$, μια $Q-Wiener$ διαδικασία W_t στον H έχει την ακόλουθη αναπαράσταση:*

$$W_t = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} b_t^k e_k$$

όπου $\{b_t^k\}$ $k = 1, 2, ..$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων, ομοιόμορφων κατανεμημένων κανονικών μονοδιάστατων κινήσεων Brown. Επιπλέον, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε πεπερασμένο διάστημα του $[0, T]$ με πιθανότητα 1.

Μια επιπλέον βολική θεώρηση είναι η κυλινδρική διαδικασία Wiener B_t στον H. Πιο συγκρεκριμένα η $B_t = Q^{-1/2} W_t$ έχει για τελεστή συνδιακύμανσης τον ταυτοτικό τελεστή I. Στην πραγματικότητα μπορούμε να σκεφτούμε την B_t σαν μια γενικευμένη διαδικασία Wiener με τιμές στον δυικό K_Q' του K_Q όπου ο K_Q δηλώνει την πλήρωση του $(Q^{1/2}H)$ με νόρμα $\|\cdot\|_Q = \|Q^{-1/2}.\|$.

Παράδειγμα
Έστω $I = [0, \pi]$ και $f(\xi, \eta) = \xi \wedge \eta$, $\xi, \eta \in [0, \pi]$ Η συνάρτηση f είναι συνεχής και θετικά ορισμένη. Επίσης για την μονοδιάστατη κίνηση Brown ισχύει

$$\xi \wedge \eta = E[b(\xi) b(\eta)]$$

Οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του αντίστοιχου τελεστή Q δίνονται από

$$\lambda_k = \frac{1}{(k + \frac{1}{2})^2}, \quad e_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} sin(n + \frac{1}{2})\xi$$

Έτσι παίρνουμε την αναπαράσταση της $Q-Wiener$ διαδικασίας απο τον τύπο

$$W(t, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_t^k}{n + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} sin(n + \frac{1}{2})\xi$$

όπου οι $\{b_k\}$ είναι ανεξάρτητες τυπικές διαδικασίες Wiener.

2.2 Στοχαστικό Ολοκληρώμα σε χώρους *Hilbert*

Έστω H, K διαχωρίσιμοι χώροι *Hilbert* και $W_t,\ t \geq 0$ μια $Q-$*Wiener* διαδικασία στον H ορισμένη στον πλήρη χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ με διύλιση $\mathcal{F}_t,\ t \geq 0$. Στην προσπάθεια να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα με συνέπεια την διαδικασια W_t, ξεκινάμε με τον H_Q υπόχωρο του H με νόρμα $\|.\|_Q$ και εσωτερικό γινόμενο

$$(g,h)_Q = (Q^{-1/2}g, Q^{-1/2}h)_H = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(g,e_k)_H(h,e_k)_H$$

για κάθε $g, h \in H_R$.
Ορίζουμε πλέον με $\mathcal{L}_Q^2$ τον χώρο $\mathcal{L}_2(H_Q, K)$ των *Hilbert.Schmidt* τελεστών.

Λήμμα 2.3. *Η κλάση των $\mathcal{L}_Q^2$ τελεστών είναι ενας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert με νόρμα*

$$\|F\|_Q = ((F,F))_Q^{1/2} = [Tr(FQF^*)]^{1/2}$$

Σημείωση $((F,G))_Q = Tr(GRF^*)$ για κάθε $F, G \in \mathcal{L}_Q^2$

2.2.1 Απλές Διαδικασίες

Για να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μας ξεκινάμε με μια $\Phi_t(\omega) \in \mathcal{L}_Q^2$ $t \in [0,T]$ $\mathcal{F}_t$- προσαρμοσμένη διαδικασία τέτοια ώστε:

$$E \int_0^T \|\Phi_s\|_Q^2 ds < \infty$$

Ορίζω με $(\Phi \cdot W)_t = \int_0^T I_{[0,T]}\Phi_s dW_s = \int_0^t \Phi_s dW_s \quad t \leq T$.

Ξεκινάμε ως συνήθως με μια απλή διαδικασία Φ_s^n με τύπο:

$$\Phi_s^n = \sum_{k=1}^{n} I_{[t_{k-1}, t_k)}(s)\Phi_{k-1}$$

όπου η Φ_k είναι μια $\mathcal{F}_{t_k}$-προσαρμοσμένη διαδικασία στον $\mathcal{L}_Q^2$ τέτοια ώστε:

$$E\ \|\Phi_k\|_Q^2 = E\ Tr(\Phi_k Q \Phi_k^*) < \infty$$

Με τα παραπάνω έχω την δυνατότητα να ορίσω το σύνολο όλων των απλών διαδικασιών με $\mathcal{S}_T(H_Q, K)$.
Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$(\Phi \cdot W)_t = \int_0^t \Phi_s dW_s = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{k-1}(W_{t\wedge t_k} - Wt \wedge t_{k-1})$$

Περνάμε τώρα σε ενα σημαντικό Λήμμα που μας λέει οτι το στοχαστικό ολοκλήρωμα για τις απλές διαδικασίες που ορίσαμε παραπάνω ειναι ενα συνεχές *martingale* στον L^2.

Λήμμα 2.4. *Για $\Phi \in \mathcal{S}_T(H_Q, K)$, $X_t = (\Phi \cdot W)_t$ είναι ενα $L^2 -$ martingale με τιμές στον K και $\forall\ g, h \in K$, ισχύει:*

$$E\ (X_t, g) = 0,\ \ E\ (X_t, g)(X_s, h) = E\ \int_0^{t\wedge s} (R_p g, h) dp$$

και

$$E\ \|X_t\|^2 = E\ \int_0^t TrR_p dp$$

όπου $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_K$ και $R_t = (\Phi_t Q \Phi_t^*)$

2.2.2 Γενικευμένες Διαδικασίες

Απο τις απλές διαδικασίες θέλουμε να επεκτείνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος σε πιο γενικές διαδικασίες στον $\mathcal{L}_Q^2$.
Θεωρούμε $\mathcal{B}_T$ την παραγώμενη σ-άλγεβρα απο τα σύνολα $\{0\} \times B_0$ και $(s, t] \times B$ όπου $B_0 \in \mathcal{F}_0$, $B \in \mathcal{F}_s$ $0 \le s < t < T$. Τότε η $\mathcal{L}_Q^2$ διαδικασία Φ_t ονομάζεται προβλέψιμος τελεστής, εαν η απεικόνηση $\Phi\ : [0, T) \times \Omega \mapsto \mathcal{L}_Q^2$ είναι $\mathcal{B}_T$-μετρήσιμη. Συνεπώς ορίζεται ο χώρος των προβλέψιμων τελεστών του $\mathcal{L}_Q^2$, $\mathcal{P}_T$ εφοδιασμένος με την νόρμα:

$$\|\Phi\|_{\mathcal{P}_T} = \{E\ \int_0^T\ Tr(\Phi_t Q \Phi_t^*) dt\}^{1/2}$$

Στην συνέχεια θα διατυπώσουμε ενα Λήμμα χωρίς απόδειξη το οποίο επεκτείνει μια απλη διαδικασία σε ενα προβλέψιμο τελεστή δίνοντας νόημα στο ολοκλήρωμα *Ito*

Λήμμα 2.5. *Το σύνολο $\mathcal{P}_T$ είναι ενας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert με νόρμα $\|\Phi\|_{\mathcal{P}_T} = \{E\ \int_0^T\ Tr(\Phi_t Q \Phi_t^*) dt\}^{1/2}$ και το σύνολο $\mathcal{S}_T(H_Q, K)$ είναι πυκνό στον $\mathcal{P}_T$.*

Κατασκευή του ολοκληρώματος *Ito*.
Ξεκινάμε με μια $\Phi^n \in \mathcal{S}_T(H_Q, K)$, $X_t^n = (\Phi^n \cdot W)$. Τότε απο το Λήμμα 2.4 έχουμε την ισομετρία :

$$E\ \|X_T^n\|_K^2 = E\ \int_0^T\ Tr\ (\Phi_t Q \Phi_t^*)dt = E\ \int_0^T\ \|\Phi_t^n\|_Q^2 dt \tag{2.1}$$

και για $\Phi \in \mathcal{P}_T$ που ικανοποιεί $\|\Phi\|_{\mathcal{P}_T}^2 < \infty$ απο το Λήμμα 2.5 υπάρχει $\Phi^n \in \mathcal{S}_T(H_Q, K)$ τέτοια ώστε λόγω πυκνότητας να ισχύει:

$$\|\Phi^n - \Phi\|_{\mathcal{P}_T} \to 0$$

Έτσι βλέπουμε οτι η εξίσωση (2.1) δείχνει μια ισομετρία απο τον $\mathcal{S}_T(H_Q, K) \mapsto \mathcal{M}_T^2$. Τελικά ορίζουμε το ολοκλήρωμα *Ito* της Φ σαν το όριο στον $\mathcal{M}_T^2$

$$(\Phi \cdot W) = \int_0^T \Phi_s dW_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \Phi_s^n dW_s$$

2.2.3 Ολοκλήρωμα ως προς ενα *Martingale*

Ένα φυσικό ερώτημα είναι αν μπορούμε να επεκτείνουμε την παραπάνω ιδέα ως προς ενα *martingale* αντι της διαδικασίας *Wiener*, W_t. Όπως και στην πεπερασμένη περίπτωση αυτό μπορεί να γίνει παίρνοντας μια φραγμένη και προβλέψιμη διαδικασία $f_t \in K$ $t \in [0, T]$ και όμοια με τα προηγούμενα ορίζω το $(f \cdot X)_t$ ως το ολοκλήρωμα $\int_0^t (f_s, dX_s) = \int_0^t (f_s, \Phi_s dW_s)$.

Λήμμα 2.6. *Έστω f_t, g_t διαδικασίες με τιμές στον H οι οποίες είναι προβλέψιμες και φραγμένες στο $[0, T]$ τότε τα επόμενα ισχύουν:*

$$E\ (f \cdot X)_t = 0$$

$$E\ (f \cdot X)_t (g \cdot X)_t = E\ \int_0^T (\Phi_t Q \Phi_t^* f_s, g_s) ds$$

Περνάμε τώρα στον ορισμό ενος ολοκληρώματος της μορφής $(F_t \Phi \cdot W)_t$. όπου η $F : [0, T] \times [0, T] \to \mathcal{L}(H)$ ειναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής. Συνοπτικά για τον ορισμό του ολοκληρώματος αυτού θέτω $Y_t = (F_t \Phi \cdot W)_t$ με $E \int_0^T \|Y_t\|^2 dt < \infty$. Διαλέγω μια απλή διαδικασία $\Phi^n \in \mathcal{S}_T(K_Q, H)$ και

ορίζω αναδρομικά την Y_t^n. Φυσικά $EY_t^n = 0$, υπολογίζω το $E \int_0^T \|Y_t^n\|^2 dt$.
Γενικά έστω $\Phi \in \mathcal{P}_T \quad F(t,s) \in \mathcal{L}(H)$ τότε σύμφωνα με τα παραπάνω

$$E \int_0^T \|Y_t\|^2 dt \leq \kappa^2 TE \int_0^T Tr(\Phi_s Q \Phi_s^*) ds.$$

Απο το Λήμμα 2.5 υπάρχει $\Phi^n \in \mathcal{S}_T(K_Q, H)$ τέτοια ώστε

$$E \int_0^T \int_0^T \|F^m(t,s)\Phi_s^m - F^n(t,s)\Phi_s^n\|_Q^2 ds dt \to 0.$$

Με άλλα λόγια η $\{Y^n\}$ ειναι μια ακολουθία *Cauchy* στον $L^2(\Omega \times (0,T), H)$ όπου συγκλίνει στο Y με $Y(t) = \int_0^T F(t,s)\Phi_s dW_s$. Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται Εξελικτικό Στοχαστικο Ολοκλήρωμα.
Σημείωση Στην περίπτωση όπου $F(t,s) = F(t-s)$ ονομάζεται Συνέλιξη.

Θεώρημα 2.9. *Έστω $F(t,s) \in \mathcal{L}(H)$ φραγμένος και ομοιόμορφα συνεχής τέτοιος ώστε:*

$$\sup_{s,t \in [0,T]} \|F(t,s)\|_{\mathcal{L}} < \infty$$

Τότε το εξελικτικο ολοκλήρωμα Y_t έχει συνεχή εκδοχή η οποία ειναι $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη διαδικασία στον H τέτοια ώστε $EY_t = 0$ και

$$E(Y_t, Y_s) = \int_0^{t \wedge s} Tr\{F(t,r)\Phi_s Q \Phi_r^* F^*(s,r)\} dr$$

2.3 Ο Τύπος του *Ito*

Ξεκιναμε την ενότητα με το ξ να είναι μια $\mathcal{F}_0$ τυχαία μεταβλητή στον H με $E\|\xi\|^2 < \infty$. Υποθέτουμε επιπλέον μια διαδικασία V_t η οποία είναι προβλέψιμη στον H και ολοκληρώσιμη στον $[0,T]$ και τελευταία έχουμε την X_t όπου είναι ενα συνεχές $H-$ *valued Martingale* με $X_0 = 0$ με τελεστή συνδιακύμανσης Θ_t.
Τώρα ορίζω το *semimartingale* $Y_t = \xi + \int_0^t V_s ds + X_t$.
Ένα συναρτησοειδές $F(\cdot,\cdot) : H \times [0,T] \to R$ όπου $\partial_t F(z,t) = \frac{\partial}{\partial_t} F(z,t)$ και κατά *Frechet* ως προς το z με $F'(z,t) \in H$ και $F''(z,t) \in \mathcal{L}(H)$.
Στην συνέχεια ορίζουμε την κλάση των C_U^2 συναρτησοειδών *Ito*.

Η F ανήκει στην C_U^2 εάν ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες :

1. $F : H \times [0,T] \to R$ και οι μερικές παράγωγοι της $\partial_t F(z,t), F'(z,t), F''(z,t)$ είναι συνεχείς στον $H \times [0,T]$.

2. Η F και οι παράγωγοι $\partial_t F(z,t), F' \in H$ είναι φραγμένοι και ομοιόμορφα συνεχείς στα φραγμένα υποσύνολα του $H \times [0,T]$
3. Για κάθε $\Gamma \in \mathcal{L}_1(H)$ η απεικόνιση: $(z,t) \to Tr[F''(z,t)\Gamma]$ είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής στα φραγμένα υποσύνολα $H \times [0,T]$.

Σύμφωνα με τις παραπάνω υποθέσεις θα διατυπώσουμε την Ταυτότητα του *Ito*.

Θεώρημα 2.10. *Έστω Y_t, $t \in [0,T]$, ένα semimartingale δοσμένο όπως παραπάνω όπου επιπλέον ικανοποιεί $E\{\int_0^t \|V_s\|^2 ds + \int_0^t Tr\Theta_s ds\} < \infty$. Επίσης έστω $F(z,t)$ ένα C_U^2 συναρτησοδειδές. Ito.*
Τότε η επόμενη ταυτότητα ισχύει σχεδόν βεβαίως.

$$F(Y_t,t) = F(\xi,0) + \int_0^t \partial_s F(Y_s,s) + (F'(Y_s,s),V_s)ds$$

$$+ \int_0^t (F'(Y_s,s),dX_s) + \frac{1}{2}\int_0^t Tr[F''(Y_s,s)\Theta_s]ds$$

Εαν η διαδικασία X_t παριστάνει ενα στοχαστικό ολοκλήρωμα τότε το παραπάνω Θεώρημα αλλάζει όπως θα δούμε στην συνέχεια.

Θεώρημα 2.11. *Έστω $Y_t = \xi + \int_0^t V_s ds + \int_0^t \Phi_s dW_s$. και F ένα C_U^2-συναρ.Ito. Τότε η επόμενη ταυτότητα ισχύει.*

$$F(Y_t,t) = F(\xi,0) + \int_0^t \partial_s F(Y_s,s) + (F'(Y_s,s),V_s)ds$$

$$+ \int_0^t (F'(Y_s,s),\Phi_s dW_s) + \frac{1}{2}\int_0^t Tr[F''(Y_s,s)\Phi_s Q\Phi_s^*]ds$$

Κλείνοντας την ενότητα πρέπει να διατυπώσουμε μια σημαντική ανισότητα που θα συναντάμε σε όλη την έκταση της εργασίας μας.

Λήμμα 2.7. *Έστω $X_t = \int_0^t \Phi_s dW_s$ και για $p \geq 1$, έχουμε $E\{\int_0^t Tr[\Phi_s Q\Phi_s^*]ds\}^p < \infty$.Τότε υπάρχει μια σταθερά $C_p > 0$ ώστε*

$$E \sup_{0\leq s\leq t} \|X_s\|^{2p} \leq C_p E\{\int_0^t Tr[\Phi_s Q\Phi_s^*]ds\}^p, \quad 0 \leq t \leq T$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μεταβολικές Λύσεις

Η μοντελοποίηση περίπλοκων μαθηματικών μοντέλων τα οποία εξελίσονται στον χρόνο εντάσονται στα προβλήματα Διαφορικών Εξισώσεων. Πολλές φορές λόγω κοινών χαρακτηριστικών αναφέρονται και ως Θεωρία Εξελικτικών Εξισώσεων. Όταν στις εξισώσεις αυτές εμπλέκεται και ενας παράγοντας ¨Θορύβου¨ μέσω κάποιων διαταραχών των τελεστών μας ή μέσω μια διαδικασίας *Wiener*,τότε οι εξισώσεις μετατρέπονται σε Στοχαστικές. Η προσοχή μας πλέον εστιάζεται στις λύσεις λόγω της πιθανοκρατικής φύσης τους. Οι λύσεις πλέον είναι Στοχαστικές Διαδικασίες και όχι απεικονίσεις αφού οι συντελεστές των εξισώσεων είναι τυχαίες συναρτήσεις. Πριν απο το 1970, δεν υπήρχε κάποιο γενικό πλαίσιο πάνω στις Στοχαστικές ΜΔΕ, η αρχή έγινε όταν παρουσιάστηκαν ως Στοχαστικές ΣΔΕ σε χώρους *Hilbert* ή *Banach*. Από τότε οι ΣΜΔΕ είναι γνωστές ως Στοχαστικές Εξελικτικές Εξισώσεις (*Stochastic Evolution Equations*).Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε είδος δυναμικού με στοχαστική επίδραση σε κάποιο φυσικό ή τεχνητό σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω αυτών των εξισώσεων (συστήματα σωματιδίων, δυναμική πληθυσμιακής γενετικής) ,έτσι είναι φυσικό οτι οι λύσεις θα είναι απειροδιάστατες.Στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε την μέθοδο λύσης μιας ΣΔΕ σε απειροδιάστατους χώρους γνωστή και ως μεταβολική μέθοδος. Το κλειδί στην επιτυχία της μεθόδου αυτής ειναι οτι οι συντελεστές της εξίσωσης μας θα πρέπει να ικανοποιούν κάποιες απαιτήσεις μονοτονίας.

3.1 Η Τριάδα Gelfand και Ιδιότητες

Έστω H ένας διαχωρίσιμος χώρος *Hilbert* με εσωτερικό γινόμενο και H^* ο δυϊκός του. Έστω ανακλαστικός *Banach* V όπου $V \subset H$ πυκνό. Τότε ισχύει οτι $H^* \subset V^*$. Τελικά απο τον ισομορφισμό του *Riesz* έχουμε ότι

$$V \subset H \subset V^*$$

Με τις εμφυτεύσεις να είναι συνεχείς και πυκνές.Το εσωτερικό γινόμενο στον H θα το συμβολίζουμε με $(\cdot,\cdot)$ και το δυϊκό γινόμενο μεταξύ των V, V^* με $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Τότε το (V, H, V^*) ονομάζεται Τριάδα $Gelfard$. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη Σ.Διαφορική του H με τύπο

$$dX_t = A_t X_t dt + F_t(X_t)dt + B_t(X_t)dW_t,$$

όπου W_t ειναι μια $Q-$*Wiener* διαδικασία με τιμές στον K με $TrQ < \infty$ και $t \in [0,T]$, B_t με τιμές στον L^2_Q, ενώ ο A_t παίρνει τιμές σε εναν μεγαλύτερο χώρο V^* όπως και ο F_t , η λύση δε, θα βρίσκεται πάλι στον H.
Θα λέμε οτι μια $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη διαδικασία X_t είναι μια Ισχυρή Λύση ή μια Μεταβολική Λύση εάν

$$(X_t,\varphi) = (h,\varphi) + \int_0^t \langle A_s X_s, \varphi\rangle ds + \int_0^t (F_s(X_s),\varphi)ds + \int_0^t (\varphi, B_s(X_s))dW_s \quad (3.1)$$

για κάθε $\varphi \in V$ και για κάθε $t \in [0,T]$και τελικά $X \in L^2(\Omega_T, V)$

Στην συνέχεια θα μας απασχολήσουν οι ιδιότητες του A_t και θα διατυπώσουμε κάποιες συνθήκες.
Έστω $(\Omega, F, \mathbb{P})$ ένας πλήρης χώρος πιθανότητας και μια διύλιση $\mathcal{F}_t$. Επιλέγω $T \in [0,\infty)$ με

$$A : [0,T] \times V \times \Omega \to V^* \ ,B : [0,T] \times V \times \Omega \to L^2_Q \ ,F : [0,T] \times V \times \Omega \to V^*$$

(B1) Έστω A_t μια συνεχής οικογένεια κλειστών τυχαίων γραμμικών τελεστών με πεδίο $\mathcal{D}(A)$ πυκνό στον H ώστε $A_t : \ V \to V^*$ και για κάθε $v \in V$, η $A_t v$ είναι μια συνεχής προσαρμοσμένη με τιμές στον V^* διαδικασία

(B2) Για κάθε $u, v \in V$ υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε

$$|\langle A_t u, v\rangle| \leq a\|u\|_V \|v\|_V, \quad (t,\omega) \in \Omega_T$$

(B3) Υπάρχουν σταθερές $\beta > 0$ και $\gamma \in R$ τέτοιες ώστε

$$\langle A_t v, v\rangle \leq -\beta\|v\|^2_V \ + \ \gamma\|v\|^2, \quad \forall u \in V \ \ (t,\omega) \in \Omega_T$$

Γυρνάμε στο γραμμικό πρόβλημα.

$$\begin{aligned} &dX_t = A_t X_t dt + f_t dt + \Phi_t dW_t \, , 0 < t < T \\ &X_0 = h \end{aligned} \quad (3.2)$$

ή

$$X_t = h + \int_0^t A_s X_s ds + \int_0^t f_s ds + M_t \quad (3.3)$$

Λήμμα 3.8. *Υποθέτουμε οτι οι συνθήκες (B1)-(B3) ισχύουν και η f_t είναι μια $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη διαδικασία στον $L^2(\Omega_T, H)$. Υποθέτουμε επίσης οτι η M_t είναι μια V_0-διαδικασία τέτοια ώστε η $N_t = A_t M_t$ να είναι L^2- martingale στον H. Τότε για $h \in H$ η εξίσωση (3.3) έχει μοναδική Ισχυρή Λύση $X \in L^2(\Omega, C([0,T], H)) \cap L^2(\Omega_T, V)$ έτσι ώστε η εξίσωση ενέργειας να ισχύει:*

$$\|X_t\|^2 = \|h\|^2 + 2\int_0^t \langle A_s X_s, X_s\rangle ds + 2\int_0^t (f_s, X_s) ds$$

$$+2\int_0^t (X_s, \Phi_s dW_s) + \int_0^t \|\Phi_s\|_Q^2 ds$$

Απόδειξη. Αφού το *martingale* στην (3.3) είναι ομαλό, είναι εφικτό να ελέγχουμε το πρόβλημα στην ντετερμινιστική του φάση. Έστω

$$Y_t = X_t - M_t$$

τότε απο την (3.3) η $Y_t \in V$ ικανοποιεί

$$Y_t = h + \int_0^t A_s Y_s ds + \int_0^t (f_s + N_s) ds$$

για σχεδόν ολα τα $(t,\omega) \in \Omega_T$. Αφού το $\hat{f}_t = f_t + N_t \in L^2((0,T), H)$ η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση $Y \in (C([0,T], H)) \cap L^2((0,T), V)$ με

$$\|Y_t\|^2 = \|h\|^2 + 2\int_0^t \langle A_s Y_s, Y_s\rangle ds + 2\int_0^t (f_s + N_s, Y_s) ds$$

Λόγω της συνθήκης (B.3) και της ανισότητας του *Gronwall* φτάνουμε στο

$$E\{\sup_{0\le t\le T} \|Y_t\|^2 + \int_0^T \|Y_s\|_V^2 ds\} \le K$$

για κάποιο $K > 0$. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανισότητα μαζί με την ισότητα του Y_t, βλέπουμε οτι η $X \in L^2(\Omega, C([0,T], H)) \cap L^2(\Omega_T, V)$. Για την ενεργειακή εξίσωση χρησιμοποιούμε το γεγονός οτι $Y_t = X_t - M_t$ και την εξίσωση του *Ito* στην $\|Y_t\|^2$

□

Στην συνέχεια θα δείξουμε οτι το παραπάνω Λήμμα ισχύει ακόμη και αν η M_t είναι ένα $H-$ *valued Martingale.*

3.2 Απόδειξη Ύπαρξης Μοναδικότητας της Γραμμικής περίπτωσης

Θεώρημα 3.12. *Δεδομένου οτι οι συνθήκες για το A_t ικανοποιούνται, θεωρούμε οτι η f_t είναι μια προβλέψιμη διαδικασία στον H και $\Phi \in \mathcal{P}_T$ ώστε:*

$$E\int_0^T (\|f_s\|^2 + \|\Phi_s\|_Q^2)ds < \infty$$

Τότε, για $h \in H$, η γραμμική εξίσωση (3.2) έχει μοναδική Μ εταβολική Λύση $X \in L^2(\Omega, C([0,T], H)) \cap L^2(\Omega_T, V)$ και η εξίσωση ενέργειας ισχύει:

$$\|X_t\|^2 = \|h\|^2 + 2\int_0^t \langle A_s X_s, X_s\rangle ds + 2\int_0^t (f_s, X_s)ds + 2\int_0^t (X_s, \Phi_s dW_s) + \int_0^t \|\Phi_s\|_Q^2 ds$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε απο τη μοναδικότητα. Υποθέτουμε οτι x, y είναι δύο λύσεις της (3.2). Θέτω με $z = x - y$ και έχω ότι $dz = A_t z_t dt$ με $z_0 = 0$. Δηλαδή η z ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση. Συνεπάγεται ότι:

$$\|z_t\|^2 = 2\int_0^t \langle A_s z_s, z_s\rangle ds$$

Απο την συνθήκη (B.3) έχουμε οτι

$$\|z_t\|^2 + 2\beta\int_0^t \|z_s\|_V^2 ds \le 2\gamma\int_0^t \|z_s\|^2 ds.$$

Απο την ανισότητα του *Gronwall* έχουμε ότι $\|z_t\|^2 = 0$ και $\int_0^t \|z_s\|_V^2 ds = 0$ Άρα, $x = y$ και η λύση είναι μοναδική.

Στην συνέχεια δίνουμε την απόδειξη ύπαρξης της λύσης αυτής.

Προσέγγιση Λύσεων

Έστω $\{\varphi_k\}$ με, $\varphi_k \in V_0$ $k = 1, 2, ..$, μια πλήρης ορθοκανονική βάση του H που περιλαμβάνει το V_0. Έστω τώρα το σύνολο $H_n = span\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$. Υποθέτουμε οτι $P_n : H \to H_n$ είναι ένας τελεστής ορθογώνιας προβολής που ορίζεται ως $P_n g = \sum_{k=1}^n (g, \varphi_k)\varphi_k, g \in H$. Άρα $P_n g \in \mathcal{D}(A)$. Εφόσον $\Phi \in \mathcal{P}_T$ και M_t $L^2 - martingale$ στον H ορίζουμε $M_t^n = P_n M_t$ έτσι ώστε το M_t^n να είναι ενα $L^2 - martingale$ στον $\mathcal{D}(A)$. Θεωρούμε τις προσεγγίσεις για την (3.3):

$$X_t^n = h + \int_0^t A_s X_s^n ds + \int_0^t f_s ds + M_t^n \tag{3.4}$$

Επειδή τώρα το $N_t^n = A_t M_t^n$ είναι ενα $L^2 - martingale$ στον H, έπεται απο το Λήμμα 3.8 οτι οι εξισώσεις (3.4) έχουν μοναδική λύση X^n που ανήκει στον $L^2(\Omega, C([0,T],H)) \cap L^2(\Omega_T, V)$ και ικανοποιεί την

$$\|X_t^n\|^2 = \|h\|^2 + 2\int_0^t \langle A_s X_s^n, X_s^n\rangle ds + 2\int_0^t (f_s, X_s^n) ds + 2\int_0^t (X_s^n, dM_s^n) + \int_0^t \|\Phi_s^n\|_Q^2 ds \tag{3.5}$$

Σύγκλιση Ακολουθίας Προσεγγίσεων

Έστω $\mathcal{Y}_T$ ο *Banach* χώρος των $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένων διαδικασιών με τιμές στον V στο $[0,T]$ με συνεχή μονοπάτια στον H και νόρμα

$$\|X\|_T = \{E[\sup_{0\le t\le T} \|X_t\|^2 + \int_0^T \|X_s\|_V^2 ds]\}^{1/2}.$$

Έστω τώρα η λύση της (3.4) X^m ,$X^{mn} = (X^m - X^n)$ και $M_t^{mn} = (M_t^m - M_t^n)$. Έτσι η X^{mn} ικανοποιεί την εξίσωση:

$$X_t^{mn} = \int_0^t A_s X_s^{mn} ds + M_t^{mn} \tag{3.6}$$

Λόγω της συνθήκης (B3), της (3.5) και της (3.6) έχουμε:

$$\|X_t^{mn}\|^2 + 2\beta \int_0^t \|X_s^{mn}\|_V^2 ds \le 2\gamma \int_0^t E\|X_s^{mn}\|^2 ds + E\int_0^t TrQ_s^{mn} ds + 2\int_0^t (X_s^{mn}, dM_s^{mn}), \tag{3.7}$$

όπου Q_s^{mn} δηλώνει τον τοπικό τελεστή συνδιακύμανσης του M_s^{mn}. Παίρνοντας την μέση τιμή έχουμε:

$$E\|X_t^{mn}\|^2 + 2\beta E\int_0^t \|X_s^{mn}\|_V^2 ds \le 2\gamma \int_0^t E\|X_s^{mn}\|^2 ds + E\int_0^t TrQ_s^{mn} ds. \tag{3.8}$$

Έτσι, απο τη συνθήκη της υπόθεσης και το Λήμμα του *Gronwall*, συμπεραίνουμε πρώτα ότι: $\sup_{0\le t\le T} E\|X_t^{mn}\|^2 \le K_1 E\int_0^t TrQ_s^{mn} ds$, άρα η (3.7) γίνεται

$$2\beta E\int_0^t \|X_t^{mn}\|_V^2 ds \le 2\gamma T \sup_{0\le t\le T} E\|X_t^{mn}\|^2 + E\int_0^t TrQ_s^{mn} ds \le (2_1 T + 1) E\int_0^t TrQ_s^{mn} ds \tag{3.9}$$

ή

$$E\int_0^T \|X_s^{mn}\|_V^2 ds \le K_2 E\int_0^T TrQ_s^{mn} ds \tag{3.10}$$

για κάποιες σταθερές $K_1, K_2 > 0$. Επιπλέον από την (3.7) οδηγούμαστε στην εξής ανισότητα:

$$E\sup_{0\le r\le t} \|X_r^{mn}\|^2 \le 2\gamma \int_0^t E\sup_{0\le r\le s} \|X_r^{mn}\|^2 ds + E\int_0^t TrQ_s^{mn} ds + 2E\sup_{0\le r\le t} |\int_0^r (X_r^{mn}, dM_s^{mn})| \tag{3.11}$$

όπου

$$\int_0^t TrQ_s^{mn} ds = \int_0^t \|P_m - P_n\|\Phi_s\|_Q^2 ds \tag{3.12}$$

Απο την ανισότητα του *Doob* έχουμε:

$$\begin{aligned}
&E \sup_{0\le r\le t} |\int_0^r (X_r^{mn}, dM_s^{mn})| \\
&\le 3E\{\int_0^t (Q_s^{mn} X_s^{mn}, X_s^{mn}) ds\}^{1/2} \\
&\le 3E\{\sup_{0\le r\le t} \|X_r^{mn}\|\}\{\int_0^t TrQ_s^{mn} ds\}^{1/2} \\
&\le \frac{1}{4} E \sup_{0\le r\le t} \|X_r^{mn}\|^2 + 9E\int_0^t TrQ_s^{mn} ds
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Παίρνοντας τώρα την (3.11), (3.13) και χρησιμοποιώντας παράλληλα την ανισότητα του *Gronwall*. Μπορούμε πάλι να βρούμε μια σταθερά $K_3 > 0$ τέτοια ώστε:

$$E \sup_{0\le t\le T} \|X_t^{mn}\|^2 \le K_3 E \int_0^T TrQ_s^{mn} ds \tag{3.14}$$

απο τις (3.10) και (3.14), παίρνουμε

$$\|X_{mn}\|_T^2 = \|X_m - X_n\|_T^2 \le (K_2 + K_3) E \int_0^T TrQ_s^{mn} ds \tag{3.15}$$

απο την (3.12), καταλήγουμε οτι $E\int_0^t TrQ_s^{mn} ds \to 0$ καθώς $m, n \to \infty$. Δηλαδή η $\{X_n\}$ είναι μια ακολουθία *Cauchy* στον $\mathcal{Y}_T$ όπου συγκλίνει στο X.

Ισχυρή Λύση

Τέλος θα δείξουμε οτι το όριο X που βρήκαμε είναι όντως μια Ισχυρή Λύση. Έστω τώρα ενα $\varphi \in V$ εφαρμόζοντας την εξίσωση του *Ito* παίρνουμε:

$$(X_t^n, \varphi) = (h, \varphi) + \int_0^t (A_s X_s^n, \varphi) ds + \int_0^t (f_s, \varphi) ds + (M_t^n, \varphi) \tag{3.16}$$

Παιρνώντας στο όριο καθώς $n \to \infty$, η (3.16) συγκλίνει κατα σημείο στον $L^2(\Omega)$ στο

$$(X_t, \varphi) = (h, \varphi) + \int_0^t \langle A_s X_s, \varphi \rangle ds + \int_0^t (f_s, \varphi) ds + (M_t, \varphi) \tag{3.17}$$

για κάθε $\varphi \in V$. Έτσι καταλήγουμε οτι η X είναι Ισχυρή Λύση. □

Παράδειγμα 3.4. *Έχουμε το Συνοριακό Πρόβλημα Αρχικών τιμών για μια παραβολική εξίσωση με τυχαίους συντελεστές :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} [\, a_{jk}\,(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_k}] + \sum_{k=1}^{d} b_k\,(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}$$

$$+\, c\,(x,t)u \,+ f\,(x,t) \,+\, \sigma\,(x,t)\,\dot{W}\,(x,t),\;\; x \in D\; t \in\; (0,T)$$

$$u|_{\partial D} = 0,\;\; u(x,0) = h(x)$$

Όπου τα $a_{j,k}, b_k, c, f$ και σ είναι προσαρμοσμένα τυχαία πεδία φραγμένα και συνεχεί στο $D\times[0,T]$ σχ.β. Υπάρχουν θετικές σταθερές a, β τέτοιες ώστε για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^d$ να ισχύει

$$a|\xi|^2 \leq \sum_{j,k=1}^{d} a_{j,k}\,(x,t)\,\xi_j\,\xi_k \;\leq\; \beta|\xi|^2 \;\; \forall (x,t) \in D\times[0,T] \quad (1)$$

Ως γνωστόν η $W(x,t)$ ειναι μια διαδικασία Wiener στον $L^2(D)$ με φραγμένη συνδιακύμανση $r(x,y)$. Έστω τωρα $H = K = L^2(D)$, $V = H_0^1$ και $V' = H^{-1}$ και ορίζω

$$A_t\varphi = \sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} [\, a_{jk}\,(\cdot,t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] + \sum_{k=1}^{d} b_k\,(\cdot,t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \,+\, c(\cdot,t)\varphi,\;\; \varphi \in V$$

Θέτουμε $f_t = f(\cdot,t)$ και $M_t = \int_0^t \sigma(\cdot,s)dW(\cdot,s)$. Τότε η αρχική μας εξίσωση παίρνει την μορφή της (3.3) $X_t = h + \int_0^t A_s X_s ds + \int_0^t f_s ds + M_t$. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε,

$$\langle A_t\varphi, \psi\rangle = -\int_D [\sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}\,(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)]dx$$

$$+ \int_D [\sum_{k=1}^{d} b_k\,(x,t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) \,+\, c(x,t)\varphi(x)]\psi(x)dx$$

για κάθε $\psi, \varphi \in V$. Απο την συνθήκη (1) και την απο το οτι οι συντελεστές ειναι φραγμένοι επιβεβαιώνουμε οτι οι συνθήκες (B1-B2-B3) ικανοποιούνται. Έτσι απο το Θεώρημα 3.12, εαν $h \in H$ και

$$E\int_0^T \{\int_D |f(x,t)|^2 dx \,+\, \int_D r(x,x)\sigma^2(x,t)dx\}dt < \infty$$

Η εξίσωση μας έχει Μοναδική Λύση $u \in L^2(\Omega, C([0,T],H)) \cap L^2(\Omega_T, H_0^1)$.

3.3 Απόδειξη Ύπαρξης Μοναδικότητας με τοπικούς συντελεστές για το Μη-γραμμικό Πρόβλημα

Το επόμενο Λήμμα θα το χρειαστούμε για την συνέχεια καθώς θα έχουμε συντελεστές μη-γραμμικούς

Λήμμα 3.9. *Υποθέτουμε οτι ισχύουν οι συνθήκες του Θεώρημα 3.12. Τότε η επόμενη ανισότητα ισχύει:*

$$E\sup_{0\le t\le T}\|X_t\|^2+E\int_0^T\|X_s\|_V^2ds\le C_T\{\|h\|^2+E\int_0^T(\|f_s\|^2+\|\Phi_s\|_Q^2)ds\}$$

για κάποια σταθερά $C_T>0$.

Στα επόμενα και τελευταία δυο θεωρήματα θα συζητήσουμε για τις λύσεις της μη-γραμμικής εξίσωσης (3.1) με ομαλούς μη-γραμμικούς όρους. Συγκεκριμένα για το επόμενο Θεώρημα θεωρούμε:

(Γ.1) Για κάθε $v\in H$, $F_t(u)$, $B_t(v)$ είναι $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένες διαδικασίες με τιμές στον H και $\mathcal{L}_Q^2$ αντίστοιχα. Υποθέτουμε οτι υπάρχουν θετικές σταθερές b, C τέτοιες ώστε

$$E\int_0^T\{\|F_t(0)\|^2+\|B_t(0)\|_Q^2\}dt\le b$$

και

$$\|\hat{F}_t(u)\|^2+\|\hat{B}_t(v)\|_Q^2\le C(1+\|v\|^2)$$

όπου θέσαμε

$$\hat{F}_t(u)=F_t(v)-F_t(0),\quad \hat{B}_t(u)=B_t(v)-B_t(0)$$

(Γ.2) Υπάρχει σταθερά $\kappa>0$, ώστε για κάθε $u,v\in H$, η συνέχεια κατα *Lipschitz* να ισχύει :

$$\|F_t(u)-F_t(v)\|^2=\|B_t(u)-B_t(v)\|_Q^2\le\kappa\|u-v\|^2$$

Θεώρημα 3.13. *Εαν οι συνθήκες Β,Γ ικανοποιούνται. Τότε για $h\in H$ το μη-γραμμικό πρόβλημα $dX_t=[A_tX_t+F_t(X_t)]dt\ +B_t(X_t)dW_t$ έχει μοναδική μεταβολική λύση $X\in L^2(\Omega,C([0,T],H))\cap L^2(\Omega_T,V)$ και ισχύει η ακόλουθη εξίσωση:*

$$\|X_t\|^2=\|h\|^2+2\int_0^t\langle A_sX_s,X_s\rangle ds+2\int_0^t(F_s(X_s),X_s)ds$$
$$+2\int_0^t(X_s,B_s(X_s)dW_s)+\int_0^t\|B_s(X_s)\|_Q^2ds$$

Απόδειξη. Το θεώρημα θα αποδειχθεί με την βοήθεια της Αρχής της Απεικόνισης. Δηλαδή την ύπαρξη και μοναδικότητα ενός σταθερού σημείου μιας απεικόνισης στον ίδιο τον μετρικό του χώρο. Θα χρειαστούμε τον χώρο $\mathcal{Y}_T$ που ορίσαμε στο Θεώρημα 3.12. Δοσμένου τώρα ενος $X \in \mathcal{Y}_T$,ορίζω με μ την Λύση της εξίσωσης :

$$\mu_t = h + \int_0^t A_s\mu_s ds + \int_0^t F_s(X_s)ds + \int_0^t B_s(X_s)dW_s \tag{3.18}$$

Λόγω (Γ1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
&E\int_0^T \{\|F_s(X_s)\|^2 + \|B_s(X_s)\|_Q^2\}ds \\
&\le E\int_0^T [\,\|\hat{F}_s(X_s)\|^2 \;+\; \|\hat{B}_s(X_s)\|_Q^2] + [\,\|F_s(0)\|^2 + \|B_s(0)\|_Q^2\,]\}ds \\
&\le 2[C(T + E\int_0^T \|X_s\|_1^2) + b]
\end{aligned}$$

γ$X \in \mathcal{Y}_T$ η εξίσωση (3.18) εχεί μοναδική λύση $\mu \in \mathcal{Y}_T$. Έστω Γ το γράφημα λύσης έτσι ώστε $\mu_t = \Gamma X$. Απο το Λήμμα (3.9) η απεικόνιση $\Gamma : \mathcal{Y}_T \to \mathcal{Y}_T$ είναι φραγμένη. Για να δείξουμε την συστολή του γραφήματος έχουμε, $x, y \in \mathcal{Y}_T$, $\mu = \Gamma x$ και $\hat{\mu} = \Gamma y$. Έπεται απο τον ορισμό της (3.18) ότι για $\nu = (\mu - \hat{\mu})$:

$$\nu_t = \int_0^t A_s\nu_s ds + \int_0^t [F_s(x_s) - F_s(y_s)]ds + \int_0^t [B_s(x_s) - B_s(y_s)]ds \tag{3.19}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση ενέργειας του Θεωρήματος 3.12 και τις (Β.3) και (Γ.2) συνοψίζουμε στο:

$$\begin{aligned}
&\|\nu_t\|^2 + 2\beta\int_0^t \|\nu_s\|_1^2 ds \le 2\gamma\int_0^t \|\nu_s\|^2 ds \\
&+ 2\int_0^t ([[F_s(x_s) - F_s(y_s)], \nu_s)ds + \int_0^t \|B_s(x_s) - B_s(y_s)\|_Q^2 ds \\
&+ \int_0^t (\nu_s, [B_s(x_s) - B_s(y_s)]dW_s) \\
&\le (2\gamma + 1)\int_0^t \|\nu_s\|^2 ds + 2\kappa\int_0^t \|x_s - y_s\|^2 ds \\
&+ 2\int_0^t (\nu_s, [B_s(x_s) - B_s(y_s)]dW_s)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Βλέπουμε οτι οι προσεγγίσεις μας ειναι παραπλήσιες με την απόδειξη του Λήμματος 3.9. Συνεπώς μέσω της Μέσης Τιμής της εξίσωσης (3.20) και έπειτα την ανισότητα του *Gronwall* έχουμε

$$E\sup_{r\le t}\|\nu_r\|^2 \le C_1(T)\int_0^t \|x_s - y_s\|^2 ds \tag{3.21}$$

και

$$\int_0^T \|\nu\|_1^2 ds \le C_2(T)\int_0^T \|x_s - y_s\|^2 ds \tag{3.22}$$

όπου $C_1 = 2\kappa\exp(2\gamma+1)T$ και $C_2 = (C_1 T + 2\kappa)/2\beta$. Παίρνοντας το *supremum* της (3.20) και έπειτα την Μέση Τιμή, βλέπουμε οτι

$$E\sup_{0\le t\le T}\|\nu_t\|^2 \le C_3(T)\int_0^T \|x-y\|^2 ds \tag{3.23}$$

με $C_3 = 2[C_1 T(2\gamma+1)+20\kappa]$. Έπεται απο τις (3.22) και (3.23) ότι:

$$\|\Gamma x - \Gamma y\|_T^2 = \|\nu\|_T^2 \le (C_2 + C_3)E\int_0^T \|x_s - y_s\|^2 ds \le (C_2 + C_3)T\|x-y\|_T^2$$

Το οποίο μας δείχνει οτι το Γ είναι ενα γράφημα συστολής στον $\mathcal{Y}_T$ για μικρό T. Λόγω συνέχειας υπάρχει μοναδική Ισχυρή Λύση για κάθε $T > 0$. □

Σημείωση Στο προηγούμενο θεώρημα οι μη γραμμικοι όροι ήταν φραγμένοι απο $H \to H$. Εαν ήταν μόνο στον V θα είχαμε ενα τεχνικά πιο δύσκολο πρόβλημα. Η παραπάνω απόδειξη θα μπορούσε να σταθεί εαν οι συντελεστές ήταν κατα μια έννοια ¨μικροί¨.Αντιθέτως θα θέσουμε κάποιες νέες συνθήκες όπου θα αποδείξουμε ύπαρξη και μοναδικότητα με μια άλλη θεώρηση.

3.4 Απόδειξη Ύπαρξης Μοναδικότητας με Μονότονους συντελεστές για το Μη-γραμμικό πρόβλημα

(Δ1) Για κάθε $v \in V$, η $F_t(v)$ είναι μια $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη διαδικασία στον H, ο $B_t(v)$ είναι ένας προβλέψιμος τελεστής στον $\mathcal{P}_T$, και υπάρχουν θετικές σταθερές b, C τέτοιες ώστε:

$$E\int_0^T \{\|F_t(0)\|^2 + \|B_t(0)\|_Q^2\}dt \le b$$

και για κάθε $N > 0$ υπάρχει μια σταθερά $C_N > 0$ τέτοια ώστε:

$$|(\hat{F}_t(v), v)| + \|\hat{B}_t(v)\|_Q^2 \leq C_N(1 + \|v\|_V^2)$$

για κάθε $v \in V$ με $\|v\|_V < N$.

(Δ2) Για κάθε $N > 0$, υπάρχει σταθερά $K_N > 0$, ισχύει η συνέχεια κατά *Lipschitz*:

$$\|F_t(u) - F_t(v)\|^2 + \|B_t(u) - B_t(v)\|_Q^2 \leq K_N\|u - v\|_V^2$$

για κάθε $u, v \in V$ με $\|u\|_V < N$, $\|v\|_V < N$

(Δ3) Για κάθε $v \in V$, υπάρχουν σταθερές $\beta > 0$,λ και C_1 ώστε να ισχύει

$$\langle A_t v, v\rangle + (\hat{F}_t(v), v) + \frac{1}{2}\|\hat{B}_t(v)\|_Q^2 \leq -\beta\|v\|_Q^2 + \lambda\|v\|^2 + C_1$$

(Δ4) Για κάθε $u, v \in V$, για κάποια σταθερά δ ισχύει η συνθήκη μονοτονίας :

$$2\langle A_t(u - v), u - v\rangle + 2(F_t(u) - F_t(v), u - v) + \|B_t(u) - B_t(v)\|_Q^2 \leq \delta\|u - v\|^2$$

Θεώρημα 3.14. *Δεδομένου οτι οι συνθήκες Β,Δ ισχύουν, τότε για κάθε $h \in H$ το μη-γραμμικό πρόβλημα $dX_t = [A_tX_t + F_t(X_t)]dt + B_t(X_t)dW_t$ δέχεται μοναδική μεταβολική λύση $X \in L^2(\Omega, C([0,T], H)) \cap L^2(\Omega_T, V)$. Επιπλεόν ισχύει:*

$$\|X_t\|^2 = \|h\|^2 + 2\int_0^t \langle A_sX_s, X_s\rangle ds + 2\int_0^t (F_s(X_s), X_s)ds$$
$$+ \int_0^t \|B_s(X_s)\|_Q^2 ds + 2\int_0^t (X_s, B_s(X_s)dW_s)$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε απο την μοναδικότητα και έπειτα θα δείξουμε την ύπαρξη. Έστω x, y δυο ισχυρές λύσεις τότε απο την εξίσωση την ενέργειας και την συνθήκη (Δ4) μπορούμε εύκολα να δείξουμε οτι:

$$E\|x_t - y_t\|^2 = 2E\int_0^t \langle A_s(x_s - y_s), x_s - y_s\rangle ds$$
$$+ E\int_0^t \{2(F_s(x_s) - F_s(y_s), x_s - y_s) + \|B_s(x_s) - B_s(y_s)\|_Q^2\} ds$$
$$\leq \delta E\int_0^t \|x_s - y_s\|^2 ds$$

όπου με την βοήθεια της ανισότητας *Gronwall* παίρνουμε

$$E\|x_s - y_s\|^2 = 0, \quad \forall\, t \in [0, T]$$

Οπότε η μοναδικότητα αποδείχθηκε.

Προσέγγιση Λύσεων

Έστω $\{v_k\}$ με , $v_k \in V$, μια πλήρης ορθοκανονική βάση του H.. Έστω τώρα το σύνολο $H_n = span\{v_1, ..., v_n\}$. Υποθέτουμε οτι $P_n : H \to H_n$ είναι ένας τελεστής ορθογώνιας προβολής που ορίζεται ως $P_n h = \sum_{k=1}^{n} (h, v_k) v_k, h \in H$. Επεκτείνουμε τον P_n σε έναν τελεστή προβολής $P'_n : V' \to V'_n$ με τύπο $P'_n w = \sum_{k=1}^{n} \langle w, v_k \rangle v_k$ για $w \in V'$. Έτσι έχουμε οτι $V_n = H_n = V'_n$. Έστω $\{e_k\}$ το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων του Q και $K_n = span\{e_1, ..., e_n\}$. Δηλώνουμε με Π_n τον τελεστή προβολής απο τον $K \to K'_n$ με τύπο $\Pi_n \varphi = \sum_{k=1}^{n} (\varphi, e_k) e_k$. Εισάγουμε τώρα τους μετασχηματισμούς :

$$A_t^n v = P'_n A_t v, \;\; F_t^n(v) = P_n F_t(v), \;\; B_t^n(v) = P_n B_t(v) \tag{3.24}$$

για $v \in V$. Επιστρέφουμε στην εξίσωση προσέγγισης :

$$\begin{aligned} &dX^n(\cdot, t) = A_t^n X^n(\cdot, t) dt + F_t^n(X^n(\cdot, t)) dt + B_t^n(X^n(\cdot, t)) dW_t^n \\ &X_0^n = h^n \end{aligned} \tag{3.25}$$

για $t \in (0, T)$, $W_t^n = \Pi_n W_t$ και $h^n = P_n h$ για $h \in H$.
Παρατηρούμε οτι η παραπάνω εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί σαν μια εξίσωση τύπου *Ito* στον R^n, όπου κάτω απο τις συνθήκες (Δ), οι συντελεστες F^n, B^n είναι τοπικά φραγμένοι, *Lipschitz* συνεχείς και μονότονοι. Έτσι απο το Θεώρημα για πεπερασμένες διαστάσεις ύπαρχει μοναδική λύση $X^n(\cdot, t)$ στο V_n σε κάθε πεπερασμένο διάστημα του $[0, T]$ και ικανοποιεί την ιδιότητα: $X \in L^2(\Omega, C([0, T], H)) \cap L^2(\Omega_T, V) = \mathcal{Y}_T$.

Φραγμένες Λύσεις Προσέγγισης

Το να δείξουμε οτι η ακολουθία $\{X^n\}$ είναι φραγμένη στον χώρο *Banach* $\mathcal{Y}_T$, γίνεται μέσω της εξίσωσης (3.25) όπου:

$$\begin{aligned} &\|X^n(\cdot, t)\|^2 = \|h^n\|^2 + 2 \int_0^t (A_s^n X_s^n, X_s^n) ds + \\ &2 \int_0^t (F_s^n(X_s^n), X_s^n) ds + \int_0^t \|B_s^n(X_s^n)\|_Q^2 ds + 2 \int_0^t (X_s^n, B_s^n(X_s^n) \Pi_n dW_s) \end{aligned}$$

Τώρα απο την απλή ανισότητα:

$$2(F_s(v),v)+\|B_s(v)\|_Q^2 \le 2[(\hat{F}_s(v),v)+\|\hat{B}_s(v)\|_Q^2]+2[(F_s(0),v)+\|B_s(0)\|_Q^2]$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (Δ3) η εξίσωση (3.25) γράφεται ως

$$\begin{aligned}&X^n(\cdot,t)\|^2+2\beta\int_0^t\|X_s^n\|_V^2 ds\\&\le\|h^n\|^2+2C_1T+(2\lambda+1)\int_0^t\|X_s^n\|^2ds+2\int_0^t[\|F_s(0)\|^2+\|B_s(0)\|_Q^2]ds\\&+2\int_0^t(X_s^n,B_s^n(X_s^n)\Pi_n dW_s)\end{aligned}\tag{3.26}$$

Έπειτα η συνέχεια θα γίνει όπως στο Θεώρημα 3.13 με τις εξισώσεις (3.21,3.22,3.23). Τότε η (3.26) να μας δίνει:

$$E\int_0^T\|X_s^n\|_V^2 ds\le K_1,\quad E\sup_{0\le t\le T}\|X^n(\cdot,t)\|^2\le K_2\tag{3.27}$$

για δύο θετικές σταθερές.

Ασθενή Όρια

Λόγω της (3.27) έπεται οτι υπάρχει μια υπακολουθία X^k η οποία συγκλίνει ασθενώς στο X στον $L^2(\Omega_T,V)$. Επίσης λόγω της (Δ1) μπορούμε να πούμε οτι $F^n(X^n)\rightsquigarrow f$ στον $L^2(\Omega_T,H)$, $B^n(X^n)\Pi_n\rightsquigarrow\Phi$ στον $L^2(\Omega_T,\mathcal{L}_Q^2)$ και $X_T^n\rightsquigarrow\xi$ στον $L^2(\Omega,H)$, όπου με $\rightsquigarrow$ συμβολίζουμε την ασθενή σύγκλιση.
Επεκτείνουμε το διάστημα μας κατα $\epsilon>0$ και μηδενίζω τους όρους για $t\neq[0,T]$. Έστω τώρα ενα $\theta\in C^1(-\epsilon,T+\epsilon)$ με $\theta(0)=1$ και για $Y_k\in V$ ορίζω $Y_t^k=\theta(t)Y_k$. Εφαρμόζοντας την εξισωση του *Ito* στο (X_t^n,Y_t^k) έχουμε:

$$\begin{aligned}(X_T^n,Y_T^k)&=(h^n,Y^k)+\int_0^T(X_s^n,\dot{Y}_s^k)ds+\int_0^T\langle A_sX_s^n,Y_s^k\rangle ds\\&+\int_0^T(F_s^n(X_s^n),Y_s^k)ds+\int_0^T(Y_s^k,B_s^n(X_s^n)\Pi_n dW_s)\end{aligned}\tag{3.28}$$

Όπου μ$\dot{Y}_s^k=[\frac{d}{ds}\theta(s)]Y_k$. Στέλνοντας το $n\to\infty$ η παραπάνω σχέση θα συγκλίνει ασθενώς στο

$$\begin{aligned}(X_T,Y_T^k)&=(h,Y_k)+\int_0^T(X_s,\dot{Y}_s^k)ds+\int_0^T\langle A_sX_s,Y_s^k\rangle ds\\&\int_0^T(f_s,Y_s^k)ds+\int_0^T(Y_s^k,\Phi_s dW_s)\end{aligned}\tag{3.29}$$

Θα εξετάσουμε τώρα το στοχαστικό ολοκλήρωμα στην παραπάνω εξίσωση, θέτω $\Phi^n = B^n(X^n)\Pi_n$ στον $L^2(\Omega_T, \mathcal{L}_Q^2)$. Το ότι $\Phi^n \rightsquigarrow \Phi$ στον $\mathcal{P}_T$ σημαίνει οτι για κάθε $Q \in \mathcal{P}_T$. $(\Phi^n, Q)_{\mathcal{P}_T} \to (\Phi, Q)_{\mathcal{P}_T} = E\int_0^T \|Q_s^*\Phi_s\|_Q^2 ds$. Επισης ισχύει και η επομενη ανισότητα για το ολοκλήρωμα μας.

$$|(\Phi^n - \Phi, Q)_{\mathcal{P}_T}| \leq |(B^n(X^n) - \Phi, Q)_{\mathcal{P}_T}| + |(B^n(X^n), Q - Q\Pi_n)_{\mathcal{P}_T}| \to 0, \;\; n \to \infty$$

Διαλέγουμε πάλι ενα $\theta_m \in C^1(-\epsilon, T+\epsilon)$, $\theta_m(0) = 1$ τέτοιο ώστε $\theta_m \rightsquigarrow \chi_t$ και $\dot{\theta}_m \rightsquigarrow \delta_t$ όπου $\chi_t(s) = 1$ $s \leq t$ αλλιως 0 και $\delta_t(s) = \delta(t-s)$ η συνάρτηση *Dirac*. Κατ΄ αντιστοιχία πάλι ορίζω με $Y_t^{k,m} = \theta_m(t)Y_k$, αντικαθιστώ το Y_t^k στην (3.29) αφήνω το $m \to \infty$:

$$(X_t, Y_k) = (h, Y_k) + \int_0^t \langle A_s X_s, Y_k \rangle ds + \int_0^t (f_s, Y_k) ds + \int_0^t (Y_k, \Phi_s dW_s), \;\; 0 < t < T \tag{3.30}$$

Αφού τώρα ο V είναι πυκνός στον H η εξίσωση ισχύει για κάθε $Y \in V$. Έτσι απο το Θεώρημα 3.13 η X είναι μια Ισχυρή Λύση της γραμμικής *Ito* εξίσωσης :

$$X_t = h + \int_0^t A_s X_s ds + \int_0^t f_s ds + \int_0^t \Phi_s dW_s, \;\; X_T = \xi \tag{3.31}$$

Ισχυρή Λύση

Έχοντας βρει την λύση για το γραμμικο πρόβλημα θέλουμε τώρα να την βρούμε και για το μη γραμμικό. Δηλαδή θέλουμε να δείξουμε οτι $f_s = F_s(X_s)$ και επίσης $\Phi_s = B_s(X_s)$ έτσι ώστε η X_t να είναι η Ισχυρή Λύση του προβληματος μας.
Αρχίζουμε με μια $Y \in L^2(\Omega_T, V)$ και θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα (Δ.4) παιρνοντας παραλληλα την μέση τιμή:

$$\begin{aligned} Z_n = \; & 2\,E\int_0^T e^{-\delta s}[\langle A_s(X_s^n - Y_s), X_s^n - Y_s\rangle] - \delta\|X_s^n - Y_s\|^2 ds \\ & + 2\,E\int_0^T e^{-\delta s}(F_s^n(X_s^n) - F_s^n(Y_s), X_s^n - Y_s) ds \\ & + \; E\int_0^T e^{-\delta s}\|B_s^n(X_s^n) - B_s^n(Y_s)\|_Q^2 ds \;\leq\; 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θέσουμε το $\delta = 0$ και να ξαναγράψουμε το Z_n ως

$$Z_n = Z_n' + Z_n'' \leq 0 \tag{3.33}$$

με

$$
\begin{aligned}
Z'_n = {} & 2\,E\int_0^T \langle A_s X_s^n, X_s^n\rangle ds \\
& +\, 2\,E\int_0^T (F_s^n(X_s^n), X_s^n) ds \\
& +\, E\int_0^T \|B_s^n(X_s^n)\|_Q^2 ds
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

$$
\begin{aligned}
Z''_n = {} & 2\,E\int_0^T [\langle A_s Y_s, Y_s\rangle - \langle A_s X_s^n, Y_s\rangle - \langle A_s Y_s, X_s^n\rangle] ds \\
& +\, 2\,E\int_0^T [(F_s^n(Y_s), Y_s) - (F_s^n(X_s^n), Y_s) - (F_s^n(Y_s), X_s^n)] ds \\
& +\, E\int_0^T [\|B_s^n(Y_s)\|_Q^2 - 2(B_s^n(X_s^n), B_s^n(Y_s))^Q] ds
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

όπου το $(\cdot,\cdot)_Q$ δηλώνει το εσωτερικό γινόμενο του $\mathcal{L}_Q^2$. Μέσω την εξίσωσης της ενέργειας της (3.25) η (3.34) μας δίνει ότι

$$Z'_n = E\|X_T^n\|^2 - \|h^n\|^2 \geq E\|X_T^n\|^2 - \|h\|^2.$$

Τελικά απο το Λήμμα του *Fatou* και την εξίσωση (3.31)

$$
\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} Z'_n \geq {} & E\|X_T\|^2 - \|h\|^2 = 2\,E\int_0^T \langle A_s X_s, X_s\rangle ds \\
& + 2\,E\int_0^T (f_s, X_s) ds + E\int_0^T \|\Phi_s\|_Q^2 ds.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Αντίστοιχα και το Z''_n έχει όρια οπότε συμπεραίνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
& 2\,E\int_0^T \langle A_s(X_s - Y_s), X_s - Y_s\rangle ds \\
& +\, 2\,E\int_0^T (F_s(X_s) - f_s, X_s - Y_s) ds \\
& +\, E\int_0^T \|B_s(X_s) - \Phi_s\|_Q^2 ds \leq \liminf_{n\to\infty} Z_n \leq 0.
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Θέτντας $X_s = Y_s$ η παραπάνω σχέση μας δίνει

$$E\int_0^T \|B_s(X_s) - \Phi_s\|_Q^2 ds = 0$$

δηλαδή $B_s(X_s) = \Phi_s$ σχεδόν βεβαίως.Έπεται απο την (3.37) ότι

$$2\,E\int_0^T \langle A_s(X_s - Y_s), X_s - Y_s\rangle ds + 2\,E\int_0^T (F_s(X_s) - f_s, X_s - Y_s) ds \leq 0 \tag{3.38}$$

Βάζοντας $Y = X - aZ$, όπου $Z \in L^2(\Omega_T, V)$ και $a > 0$ η παραπάνω ανισότητα γίνεται:

$$aE\int_0^T \langle A_s Z_s, Z_s\rangle ds + E\int_0^T (F_s(X_s - aZ_s) - f_s, Z_s)ds \leq 0$$

Αφήνοντας τώρα το $a \to 0$ παίρνουμε

$$E\int_0^T (F_s(X_s) - f_s, Z_s)ds \leq 0$$

που σημαίνει ότι $f_s = F_s(X_s)$. Δηλαδή το ασθενές όριο X είναι όντως η Ισχυρή Λύση.
Τέλος λόγω της (3.25), μαζί με την ενεργειακή μπορούμε να δείξουμε ότι $E\sup_{0\leq t\leq T}\|X_t - X_t^n\|^2 \to 0$ έτσι $X \in L^2(\Omega, C([0,T],H)) \cap L^2(\Omega_T, V)$. □

Παράδειγμα 3.5. *Ας δούμε τώρα ενα παράδειγμα εφαρμογής του παραπάνω κεντρικού θεωρήματος.*
Θεωρούμε την εξίσωση διάχυσης σε ενα υποσύνολο $D \subset R^3$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (k\Delta - a)u - \gamma u^3 + f(x,t) + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial t}W_k(x,t)$$

$$u|_{\partial D} = 0, \quad u(x,0) = h(x)$$

όπου τα $k, a, \gamma > 0$ σταθερές , $f(\cdot,t)$ είναι μια προβλέψιμη διαδικασία στον H και $W_k(x,t)$ με $k = 1, ..., d$ είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Wiener με συνάρτηση συνδιακύμανσης $q_k(x,y)$ τέτοια ώστε:

$$E\int_0^T \int_D |f(x,t)|^2 dxdt < \infty \quad \sup_{x,y\in D}|q_k(x,y)| \leq r_0 \tag{3.39}$$

για $k = 1,2,3$. Έστω τώρα $H = L^2(D)$ και $V' = H^{-1}$, $K = (H)^3 = H\times H\times H$. $A_t = (k\Delta - a)$ και $F_t(u) = -\gamma u^3 + f_t$. Θεωρούμε ενα στοιχείο $Z = (Z^1, Z^2, Z^3) \in K$ και ορίζω $[B_t(u)]Z = \sum_{k=1}^3(\frac{\partial}{\partial x_k}u)Z^k$ με $B_t(0) = 0$ και θέτουμε $W_t = (W_t^1, W_t^2, W_t^3)$. Τότε η εξίσωση μας παίρνει την μορφή

$$dX_t = A_t X_t dt + F_t(X_t)dt + B_t(X_t)dW_t,$$

Οι συνθήκες (Β1-Β3) ικανοποιούνται. Θέλουμε τώρα να ελέγξουμε την συνθήκη (Δ1). Αυτο θα γίνει μέσω της εξίσωσης (3.39) αφού

$$|(\hat{F}_t(v), v)| + \|\hat{B}_t(v)\|_Q^2 = \nu|v|_4^4 + \sum_{j,k=1}^{3}\int_D q_{jk}(x,x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v}{\partial y_k}(x)dx$$

$$\leq \gamma|v|_4^4 + r_0\|\nabla v\|^2 \leq \gamma|v|_4^4 + C_1\|v\|_1^2$$

Για κάποια σταθερά $C_1 > 0$.
Τώρα για την συνθήκη (Δ2), για $u, v \in H^1$, *έχουμε*

$$\|F(u) - F(v)\|^2 + \|B(u) - B(v)\|_Q^2 \leq \gamma\|u^3 - v^3\| + C_1\|u - v\|_1^2,$$

με

$$\|u^3 - v^3\|^2 = \|(u^2 + uv + v^2)(u - v)\|^2 \leq 8\{\|u^2(u - v)\|^2 + \|v^2(u - v)\|^2\}$$

(Απο θεώρημα Sobolev) έχουμε τον L^4 *με νόρμα* $\|u\|_4 \leq C_1\|u\|_1$ *και* $\|u^2 v\|^2 \leq C_2\|u\|_1^4\|v\|_1^2$ *για* $C_1, C_2 > 0$
΄Ετσι $\|u^3 - v^3\|^2 \leq C_3(\|u\|_1^4 + \|v\|_1^4)\|u - v\|_1^2$
ικανοποιείται και η (Δ2).
Η (Δ3) ισχύει επειδή

$$\langle A_t v, v\rangle + (\hat{F}_t(v), v) + \|\hat{B}_t(v)\|_Q^2 = \kappa < \Delta v, v\rangle - a\|v\|^2$$

$$-\gamma(v^3, v) + \|\hat{B}_t(v)\|_Q^2 \leq -(\kappa - r_0)\|\nabla v\|^2 - a\|v\|^2$$

εφόσον $\kappa > r_0$. *Η μονοτονία (Δ4) ισχύει αφού*

$$2\langle A(u - v), u - v\rangle + 2(F(u) - F(v), u - v) + \|B(u) - B(v)\|_Q^2$$

$$\leq -(2\kappa - r_0)\|\nabla(u - v)\|^2 - 2a\|u - v\|^2.$$

Εφαρμόζουμε τώρα το Θεώρημα και καταλήγουμε οτι αν η εξίσωση μας με $r_0 < \kappa$, $h \in H$ *έχει μοναδική λύση* $u \in L^2(\Omega, \mathbb{C}([0, T], H)) \cap L^2(\Omega_T, H_0^1)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ασυμπτωτική συμπεριφορά Λύσεων

4.1 Συναρτησοειδή *Lyapunov Ito*

Στην παρούσα ενότητα θα δώσουμε κάποιους ορισμούς συναρτησοειδών τα οποία παίζουν βασικό ρόλο για την απόφαση εαν τελικά οι λύσεις των προβλημάτων μας ειναι ευσταθείς. Ξεκινάμε λοιπόν απο την γραμμικη εξίσωση $X_t = X_0 + \int_0^t A_s X_s ds + \int_0^t f_s ds + M_t$. Αφού το $A_t X_t \in V'$ η ταυτότητα του *Ito* δεν ισχύει. Χρεάζεται να την επεκτείνουμε μέσω πιο αυστηρών συνθηκών. Το συναρτησιακό *Ito* θα το συμβολίσουμε με $\Phi : U_T \to R$ με $U \subset H$ και ικανοποιεί τα επόμενα :

1. Το $\Phi : U_T \to R$ είναι τοπικά φραγμένο και συνεχές ώστε οι μερικές δευτεροι παράγωγοι να υπάρχουν για κάθε ζεύγος $(u, t) \in U_T$
2. Οι παράγωγοι $\partial_t \Phi, \Phi' \in H$ είναι τοπικά φραγμένες και συνεχείς
3. Για κάθε $\Gamma \in \mathcal{L}_1(H)$ η απεικόνηση $(u, t) \to Tr[\Phi(u, t)''\Gamma]$ είναι τοπικά φραγμένη και συνεχής για κάθε ζεύγος (u, t)
4. $\langle \Phi'(\cdot, t), v' \rangle$ είναι συνεχής για κάθε $v' \in V'$ και

$$\|\Phi'(v, t)\|_V \leq \kappa(1 + \|v\|_V)$$

Το επόμενο Θεώρημα μας δίνει μια γενικευμένη Ταυτότητα του *Ito* για τις Ισχυρές Λύσεις της γραμμικής εξίσωσης μας.

Θεώρημα 4.15. *Υποθέτουμε οτι ο A_t ικανοποιεί τις συνθήκες (B1)-(B3) η $f \in L^2((0,T), H)$ είναι μια ολοκληρώσιμη προσαρμοσμένη διαδικασία, το M_t είναι ενα συνεχές L^2 – martingale στον H με τελεστή συνδιακύμανσης Q_t. ´Εστω X_t η Ισχυρή Λύση της γραμμικής με $X_0 \in L^2(\Omega, H)$ $\mathcal{F}_0$- μετρήσιμη. Για οποιοδήποτε Συναρτησιακό Ito $\Phi \in U_T$, η επόμενη εξίσωση ισχύει*

$$\Phi(X_t, t) = \Phi(X_0, 0) + \int_0^t \partial_s \Phi(X_s, s) ds + \int_0^t \langle A_s X_s, \Phi'(X_s, s) \rangle ds$$
$$\int_0^t (f_s, \Phi'(X_s, s)) ds + \int_0^t (\Phi'(X_s, s), dM_s) + \frac{1}{2} \int_0^t Tr[\Phi''(X_s, s) Q_s] ds$$

Σημείωση

$$\mathcal{L}_s\Phi(v,s) = \frac{\partial}{\partial s}\Phi(v,s) + \frac{1}{2}Tr[\Phi''(v,s)B_s(v)QB_s(v)^*]$$
$$\langle A_s v, \Phi(v,s)'\rangle + (B_s(v), \Phi(v,s)'$$

Έστω $U \subset H$ μια γειτονία του μηδέν. Ενα συναρτησιακό *Ito* ονομάζεται συναρτησιακο *Lyapunov* για την μη-γραμμική εξίσωση με $\Psi : U \times R^+ \to R$ εαν:

1. $\Psi(0,t) = 0$ $\forall t \geq 0$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε
$$\inf_{t\geq 0, \|h\|\geq\epsilon} \Psi(h,t) \geq \delta$$
2. για κάθε v, t
$$\mathcal{L}_t\Psi(v,t) \leq 0.$$

4.2 Φραγμένες Λύσεις

Έστω X_t^h μια Ισχυρή Λύση της $dX_t = A_tX_tdt + F_t(X_t)dt + B_t(X_t)dW_t$ με $X_0^h = h$, το W_t είναι μια διαδικασία *Wiener* με τελεστή συνδιακύμανσης πεπερασμένου ίχνους Q. Λέμε οτι η λύση συνεχίζει να υπάρχει εαν

$$\lim_{r\to\infty} P\{\sup_{0\leq t\leq T} \|X_t^h\| > r\} = 0$$

Για κάθε $T > 0$. Εάν ισχύει για $T = \infty$ η λύση ονομάζεται Ολικά Φραγμένη.

Λήμμα 4.10. *΄Εστω $\Psi : U \times R^+ \to R^+$ ένα συν. Lyapunov και έστω X_t^h η Ισχυρή Λύση της μη-γραμμικής εξίσωσης. Για $r > 0$, εισάγουμε το $B_r\{h \in H : \|h\| \leq r\}$ ώστε $B_r \subset U$. Και ορίζουμε*

$$\tau = \inf\{t > 0 : X_t^h \in B_r^c, h \in B_r\}$$

όπου το $B_r^c = H/B_r$. Τότε η διαδικασία $\psi_t = \Psi(X_{t\wedge\tau}^h, t\wedge\tau)$ είναι ενα τοπικό $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένο supermartingale και η επόμενη ανισότητα του Chebyshev ισχύει

$$P\{\sup_{0\leq t\leq T} \|X_t^h\| > r\} \leq \frac{\Psi(h,0)}{\Psi_r}$$

όπου $\Psi_r = \inf_{0\leq t\leq T, h\in U\wedge B_r^c}\Psi(h,t)$

Λόγω του προηγούμενου Λήμματος τα δυο επόμενα Θεωρήματα Φραξιμότητας μπορούν να δειχθούν αρκετά εύκολα

Θεώρημα 4.16. *Έστω οτι υπάρχει ενα συν. Lyapunov $\Psi : H \times R^+ \to R^+$ ώστε*

$$\Psi_r = \inf_{t \geq 0, \|h\| \geq r} \Psi(h,t) \to \infty \ \ r \to \infty$$

Τότε η λύση X_t^h είναι ολικά φραγμένη.

Απόδειξη. Απο το Λήμμα 4.10 έχουμε ότι

$$P\{\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^h\| > r\} = \lim_{T \to \infty} P\{\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^h\| > r\} \leq \frac{\Psi(h,0)}{\Psi_r}$$

Δηλαδή

$$\lim_{r \to \infty} P\{\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^h\| > r\} = 0$$

που επιβεβαιώνει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.17. *Εαν υπάρχει ενα συν. Ito $\Phi : H \times R^+ \to R^+$ και μια σταθερά $a > 0$ ώστε $\mathcal{L}_t\Phi \leq a\Phi(v,t)$ $\forall v \in V$ και το $\inf_{t \geq 0, \|h\| \geq r} \Phi(h,t) = \Phi_r$ υπάρχει ώστε το $\lim_{r \to \infty} \Phi_r = \infty$. Τότε η λύση X_t^h συνεχίζει να υπάρχει σε πεπερασμένο χρόνο.*

Απόδειξη. Έστω $\Psi(v,t) = e^{-at}\Phi(v,t)$. Εύκολα βλέπουμε οτι $\mathcal{L}_t\Psi \leq 0$, άρα η Ψ είναι όντως ενα συν. *Lyapunov*. Έτσι απο το Λήμμα 4.10

$$P\{\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^h\| > r\} = 0 \leq \frac{\Psi(h,0)}{\Psi_r} \leq \frac{\Phi(h,0)}{\Phi_r} \to 0$$

καθώς το $r \to \infty$ για κάθε $T > 0$. □

4.3 Ευστάθεια της Μηδενικής Λύσης

Θεωρούμε ότι $X_0 = h \in H$ και το μη-γραμμικο πρόβλημα έχει Ολική ισχυρή Λύση $X^h \in L^2(\Omega, C([0,T], H)) \cap L^2(\Omega_T, V)$ για κάθε $T > 0$. Υποθέτουμε τώρα οτι η εξίσωση έχει μια λύση Ισορροπίας $\hat{X}$. Για ευκολία θέτουμε $F_t(0) = 0$ και $B_t(0) = 0$ ώστε η $\hat{X} = 0$ να είναι λύση για ολα τα $t > 0$. Συγκεκριμένα θα εργαστούμε για την ευστάθεια αυτής της λύσης.
Στην συνέχεια θα δώσουμε μερικούς ορισμούς της ευστάθειας.

Ορισμός 4.9. *Λέμε οτι η λύση $X = 0$ είναι Ευσταθής κατά Πιθανότητα στον H εαν για κάθε ϵ_1, ϵ_2, υπάρχει ενα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε εαν $\|h\| < \delta$ τότε*

$$P\{\sup_{t > 0} \|X_t^h\| > \epsilon_1\} < \epsilon_2$$

Ορισμός 4.10. *Η μηδενική λύση λέγεται οτι είναι Ασυμπτωτικά p-Ευσταθής στον H για $p \geq 1$ εαν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $\|h\| < \delta$, τότε, $\lim_{t\to\infty} E\|X_t^h\|^p = 0$. Επιπλέον εαν υπάρχουν θετικές σταθερές $K(\delta), \nu, T$ ώστε $E\|X_t^h\|^p \leq K(\delta)e^{-\nu t}$ $t > T$, Ονομάζεται Εκθέτικά p-Ευσταθής*

Ορισμός 4.11. *Η μηδενική λύση τώρα ονομάζεται Σχεδόν Βεβαίως Ασυμπτωτικά Ευσταθής εάν υπάρχει $\delta > 0$ με $\|h\| < \delta$ και $P(\lim_{t\to\infty} \|X_t^h\| = 0) = 1$. Αντίστοιχα Σχεδόν Βεβαίως Εκθετικά Ευσταθής εαν $\|X_t^h\| \leq K(\delta)e^{-\nu t}$ $\forall t > T$*

Θεώρημα 4.18. *Έστω οτι υπάρχει ενα συναρ. Lyapunov $\Psi : H \times R^+ \to R^+$. Τότε η Μηδενική Λύση της μη-γραμμικης εξίσωσης είναι Ευσταθής κατα Πιθανότητα.*

Απόδειξη. Έστω $r > 0$ ώστε η $B_r = \{h \in H : \|h\| \leq r\} \subset U$. Απο το Λήμμα 4.10 για κάθε $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, έχουμε

$$P\{\sup_{0\leq t\leq T} \|X_t^h\| > \epsilon_1\} \leq P\{\sup_{0\leq t\leq T} \|X_t^h\| > (r \wedge \epsilon_1)\} \leq \frac{\Psi(h,0)}{\Psi_{r\wedge\epsilon_1}}$$

Καθώς $T \to \infty$ παίρνουμε

$$P\{\sup_{t\geq 0} \|X_t^h\| > \epsilon_1\} \leq \frac{\Psi(h,0)}{\Psi_{r\wedge\epsilon_1}}$$

Αφού η $\Psi(h,0)$ είναι συνεχής με $\Psi(0,0) = 0$, για $\epsilon_2 > 0$, υπάρχει ενα $\delta > 0$ ώστε η παραπάνω ανισότητα φράσεται απο το ϵ_2 εαν $\|h\| \leq \delta$. □

Θεώρημα 4.19. *Έστω η X_t^h και $E\|X_t^h\|^p < \infty$ $t > 0$. Υποθέτουμε οτι υπάρχει και ενα συν.Lyapunov $\Psi(h,t)$ στον $H \times R^+$ ώστε*

$$\mathcal{L}_t\Psi(v,t) \leq -a\Psi(v,t), \quad \forall v \in V, t > 0 \tag{4.1}$$

$$\beta\|h\|^p \leq \Psi(h,t) \leq \gamma\|h\|^p, \quad \forall h \in H, t > 0 \tag{4.2}$$

με θετικές σταθέρες. Τότε η Μηδενική Λύση είναι Εκθετικά p-Ευσταθής.

Θεώρημα 4.20. *Έστω οτι υπάρχει ενα συν.Lyapunov $\Psi : H \times R^+ \to R^+$. $\mathcal{L}_t\Psi(v,t) \leq -a\Psi(v,t)$, $\forall v \in V$, $t > 0$ για κάποια σταθερά $a > 0$. Τότε η μηδενική Λύση είναι σχεδόν βεβαίως Ασυμπτωτικά Ευσταθής. Εαν επιπλέον υπάρχουν θετικές σταθερές β, p, με $\Psi(h,t) \geq \beta\|h\|^p$ τότε η είναι σχεδόν βεβαίως Εκθετικά Ευσταθής.*

Θεώρημα 4.21. *Έστω οτι οι συντελεστές της μη-γραμμικής εξίσωσης ικανοποιούν την συνθήκη:*

$$2\langle A_t v, v\rangle + 2(F_t(v), v) + \|B_t(v)\|_Q^2 \leq \beta\|v\|^2 - a\|v\|_V^2 \; v \in V \tag{4.3}$$

για καποιες σταθερές $a > 0$ και β.. Εαν $\lambda = \inf_{v\in V} \frac{\|v\|_V^2}{\|v\|^2} > \beta/a$. Τότε η μηδενική λύση ειναι σχεδόν βεβαίως εκθετικά ευσταθής.

Απόδειξη. Έστω $\Psi(h) = ||h||^2$. Τότε απο την συνθήκη (4.3),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Psi(v) &= 2\langle A_t v, v\rangle + 2(F_t(v), v) + ||B_t(v)||_Q^2 \\ &\le \beta||v||^2 - a||v||_V^2 \le -(a\frac{||v||_V^2}{||v||^2} - \beta)||v||^2 \\ &\le -(a\lambda - \beta)||v||^2\end{aligned}$$

Δηλαδή $\mathcal{L}\Psi(v) \le -\kappa\Psi(v), \quad v \in V$ με $\kappa = a\lambda - \beta > 0$. Απο το Θεώρημα 4.20, η μηδενική λύση είναι Εκθετικά Ευσταθής. □

4.4 Αμετάβλητα Μέτρα

Στην ενότητα αυτή η προσοχή μας συγκεντώνεται στο πως συμπεριφέρεται η κατανομή της Λύσης κάθως το $t \to \infty$. Ξεκινάμε απο την γνωστή εξίσωση $dX_t = AX_t dt + F(X_t)dt + B(X_t)dW_t$ με $X_0 = \xi$. Το $\xi \in L^2(\Omega, H)$ να είναι μια $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή. Υποθέτουμε οτι η εξίσωση έχει μοναδική ολική λύση X_t όπως ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.Στις πεπερασμένες διαστάσεις δε, η Λύση είναι μια χρονικά ομογενής συνεχης διαδικασία *Markov* στον H με πιθανότητα μετάβασης $P(h, t, \cdot)$ ορισμένη απο μια δεσμευμένη πιθανότητα

$$P(h, t-s, B) = P(X_t \in B | X_s = h)$$

για $0 \le s < t, h \in H$ και $B \in \mathcal{B}(H)$ το *Borel* πεδίο του H.
Τώρα για κάθε φραγμένη συνεχή συνάρτηση $\Phi \in C_b(H)$ ο τελεστής μετάβασης P_t ορίζεται ως :

$$(P_t\Phi)(h) = \int_H \Phi(g)P(h, t, dg) = E\{\Phi(X_t)|X_0 = h\}.$$

Στην συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό του αμετάβλητου μέτρου, της ιδιότητας *Feller* και ενός σημαντικού χώρου που θα μας καλύψει στην ενοότητα αυτή.

Ορισμός 4.12. *Ένα μέτρο πιθανότητας $\mu \in (H, \mathcal{B}(H))$ ονομάζεται Αμετάβλητο Μέτρο μιας συνάρτησης μετάβασης εάν ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\mu(B) = \int_H P(h, t, B)\mu(dh),$$

ισοδύναμα

$$\int_H (P_t\Phi)(h)\mu(dh) = \int_H \Phi(h)\mu(dh)$$

για κάθε φραγμένη συνάρτηση $\Phi \in C_b(H)$

Ορισμός 4.13. *Για $\Phi \in C_b(H)$ εαν ο $P_t\Phi(h)$ είναι φραγμένος και συνεχής για $t > 0, h \in H$ τότε η πιθανότητα μετάβασης $P(h,t,\cdot)$ έχει την ιδιότητα του Feller.*

Ορισμός 4.14. *Έστω $\mathcal{M}_1(H)$ να δηλώνει τον χώρο των μέτρων πιθανότητας στον $\mathcal{B}(H)$. Μια ακολουθία μέτρων $\{\mu_n\}$ λέγεται οτι συγκλίνει ασθενώς στο μ στον $\mathcal{M}_1(H)$,εαν*

$$\lim_{n\to\infty}\int_H \Phi(h)\mu_n(dh) = \int_H \Phi(h)\mu(dh)$$

για κάθε $\Phi \in C_b(H)$

Δηλαδή με απλά λόγια ένα μέτρο είναι ένας τρόπος για να φτάσουμε προς την λύση όμως δεν είναι λύση ,όπου με ανάλογα θεωρήματα μπορούμε να δείξουμε μοναδικότητα τών μέτρων (τρόπων) αυτών.

Λήμμα 4.11. *Έστω $\mu = \mathcal{L}\{X_t\}$ να δηλώνει το μέτρο πιθανότητας για την λύση της εξίσωσης, όπου επιπλέον έχει την ιδιότητα Feller. Εαν $\mu_t \to \mu$, τότε το μ είναι ενα αμετάβλητο μέτρο για την διαδικασία της Λύσης.*

Λήμμα 4.12. *Έστω $\mu_t^h(\cdot) = P(h,t,\cdot)$ μια κατανομή της X_t^h. Εαν $\mu_t^h \to \mu$ για κάθε $h \in H$, τότε το μ είναι μοναδικό αμετάβλητο μέτρο για την διαδικασία της λύσης.*

Απόδειξη. Λόγω της ασθενούς σύγκλισης για την $\Phi \in C_b(H)$ έχουμε

$$(P_t\Phi)(h) = \int_H \Phi(g)\mu_t^h(dg) \to \int_H \Phi(g)\mu(dg)$$

Τώρα για κάθε αμετάβλητο μέτρο $\nu \in \mathcal{M}_1(H)$ έχουμε

$$\int_H \Phi(h)\nu(dh) = \lim_{t\to\infty}(P_t\Phi)(g)\nu(dg) = \int_H \Phi(g)\mu(dg)$$

Δηλαδή το μέτρο μ είναι μοναδικό. □

Θεώρημα 4.22. *Υποθέτουμε οτι το μ είναι ενα αμετάβλητο μέτρο της εξίσωσης μας με κατανομή $\mathcal{L}\{\xi\} = \mu$. Τότε η λύση $\{X_t^\xi, t > 0\}$ είναι μια στάσιμη διαδικασία στον H.*

Για το επόμενο Θεώρημα πρέπει να ορίσουμε δυο χώρους, έστω $K_N = \{v \in V : \|v\|_V \leq N\}$ και $A_N = \{h \in H/K_N\}$. Επιπλέον απο το προηγούμενο κεφάλαιο η ενσφήνωση $V \hookrightarrow H$ είναι συμπαγής έτσι και ο K_N είναι συμπαγής στον H.

Θεώρημα 4.23. *Θεωρούμε την συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης $P(h,t,\cdot)$ για τη διαδικασία λύσης X_t με την ιδιότητα Feller και επιπλέον να ικανοποιεί την συνθήκη: Για κάποια $h \in H$, υπάρχει μια ακολουθία $T_n \uparrow \infty$ έτσι ώστε*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} P(h,t,A_N)dt = 0 \tag{4.4}$$

ομοιόμορφα κατα n. Τότε υπάρχει ενα αμετάβλητο μέτρο μ στον $(H, \mathcal{B}(H))$

Το επόμενο και τελευταίο θεώρημα είναι το κρίσιμο για την ενότητα μας

Θεώρημα 4.24. *Έστω η γνωστή μας εξίσωση με F να είναι ενα συν.Ito, όλες οι συνθήκες του Θεωρήματος 3.14 ικανοποιούνται και επιπλέον η συνθήκη (Δ.3) γίνεται πιο αυστηρή με*

$$2\langle A_t v, v\rangle + 2(F(v), v) + \|B_t(v)\|_Q^2 \le \alpha - \beta\|v\|_V^2 \tag{4.5}$$

για κάποιες σταθερές $\beta > 0$ και α και η σταθερά δ της (Δ4) ειναι αρνητική. Τότε υπάρχει Μοναδικό αμετάβλητο μέτρο μ.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με την εφαρμογή του παραπάνω Θεωρήματος 4.23 ώστε να δείξουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου μέτρου. Επιβεβαιώνουμε την ιδιότητα του *Feller*. Υποθέτουμε τις X_t^h, X_t^g με αρχικές συνθήκες $\xi = g$ και h στον H αντίστοιχα. Τότε απο την συνθήκη της μονοτονίας (Δ.4) έχουμε οτι η διαφορά $X_t^g - X_t^h$ ικανοποιεί:

$$E\|X_t^g - X_t^h\|^2 = \|g-h\|^2 + E\int_0^t 2\langle A(X_s^g - X_s^h), X_s^g - X_s^h\rangle ds$$

$$+E\int_0^t \{2(F_s(X_s^g) - F_s(X_s^h), X_s^g - X_s^h) + \|B_s(X_s^g) - B_s(X_s^h)\|_Q^2\} ds$$

$$\le \|g-h\|^2 - \lambda \int_0^t E\|X_s^g - X_s^h\|^2 ds$$

Όπου το $\delta = -\lambda$ και $\lambda > 0$. Απο την παραπάνω ανισότητα έπεται ότι

$$E\|X_t^g - X_t^h\|^2 \le e^{-\lambda t}\|g-h\|^2 \quad t \ge 0 \tag{4.6}$$

Για την ιδιότητα του *Feller* μένει να πάρουμε μια φραγμένη και συνεχή συνάρτηση *Lipschitz* Φ. Τότε για $s,t \in [0,T]$ και για $g,h \in H$

$$\|(P_t\Phi)(g) - (P_s\Phi)(h)\| \le \|(P_t - P_s)\Phi)(g)\| + \|(P_t\Phi)(g) - (P_s\Phi)(h)\|$$

$$\le E\|\Phi(X_t^g) - \Phi(X_s^g)\| + E\|\Phi(X_t^g) - \Phi(X_t^h)\|$$

$$\le \kappa\{(E\|(X_t^g - X_s^g)\|^2)^{1/2} + (E\|X_t^g - X_t^h\|^2)^{1/2}\}$$

με σταθερά *Lipschitz* κ. Αφού η X_t^g είναι τετραγωνικά συνεχής και μαζι με την (4.6) η ιδιότητα του *Feller*, επιβεβαιώνεται.
Τώρα θα δέιξουμε οτι η εξίσωση (4.4) του παραπάνω θεωρήματος ικανοποιείται. Ξανά απο την συνθήκη (Δ.3) λαμβάνουμε ότι

$$E\|X_t^h\|^2 = \|h\|^2 + 2E\int_0^t \langle A_s X_s^h, X_s^h\rangle ds + 2E\int_0^t (F_s(X_s^h), X_s^h)ds + E\int_0^t \|B_s(X_s^h)\|_Q^2 ds$$

$$\leq \|h\|^2 + at - \beta E\int_0^t \|X_s^h\|_V^2 ds$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$E\int_0^t \|X_s^h\|_1^2 \leq \frac{1}{\beta}(at + \|h\|^2) \tag{4.7}$$

Αφού η X_t^h είναι μια διαδικασία με τιμές στον V και το μέτρο πιθανότητας της μ_t^h έχει στήριγμα στον V έτσι ώστε η $P(h,t,A_N) = P\{\|X_t^h\|_1 > N\}$. Απο την ανισότητα του *Chebysev* και την (4.7) συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{1}{T}\int_0^T P(h,t,A_N)dt = \frac{1}{T}\int_0^T P\{\|X_t^h\|_1 > N\}$$

$$\leq \frac{1}{N^2 T}\int_0^T E\|X_t^h\|_V^2 dt \leq \frac{1}{\beta N^2 T}(aT + \|h\|^2)$$

που συγκλίνει στο 0 καθώς το $N \to \infty$. Δηλαδή όντως ένα υπάρχει αμετάβλητο μέτρο $\mu_t^h \to \mu$ για κάθε $h \in H$. Επιπλέον απο το Λήμμα 4.12 είναι μοναδικό. □

4.5 Πρόβλημα Τυχαίων Διαταραχών

Αναλογιζόμαστε την εξίσωση

$$\begin{aligned} dX_t^\epsilon &= AX_t^\epsilon dt + F(X_t^\epsilon)dt + \epsilon B(X_t^\epsilon)dW_t \\ X_0^\epsilon &= h \end{aligned} \tag{4.8}$$

όπου το X_t^ϵ δείχνει την εξάρτηση της λύσης με μια παράμετρο $\epsilon \in (0,1)$ και $h \in H$. Η (4.8) θεωρείται ως μια τυχαία διαταραχή της εξίσωσης :

$$dX_t = AX_t dt + B(X_t)dt, \quad t > 0 \;\; X_0 = h \tag{4.9}$$

Μπορούμε μέσω των συνθηκών Β,Γ της προηγούμενης ενότητας να δείξουμε το φαινομενικά φανερό αποτέλεσμα $X_t^\epsilon \to X_t$ στο $[0,T]$.

Θεώρημα 4.25. *Έστω οι συνθήκες του Θεωρήματος 3.14 και ένα $b > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει*

$$\|B(x)\|_Q^2 \leq b(1 + \|x\|_V^2) \;\; \forall x \in V \tag{4.10}$$

Τότε η λύση διαταραχής X_t^ϵ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, T]$ στην X_t. Δηλαδή υπάρχει μια σταθερά $C_T > 0$ όπου

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^\epsilon - X_t\|^2 \leq C_T \epsilon (1 + \|h\|^2) \;\; \forall \epsilon (0, 1) \tag{4.11}$$

Έστω τώρα μ^ϵ το μέτρο πιθανότητας για την X_t^ϵ στον $C([0, T], H)$. Από το προηγούμενο Θεώρημα , αφού η $X^\epsilon \to X$, τότε το $\mu^\epsilon \to \mu^0 = \delta_X$ ασθενώς, με δ να είναι το μέτρο *Dirac* συγκεντρωμένο στην X. Εμείς ενδιαφερόμαστε για τον ρυθμό σύγκλισης της εκτιμόμενης πιθανότητας

$$\mu^\epsilon (B_\delta^c) = P\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t^\epsilon - X_t\| > \delta\},$$

για μικρά ϵ, δ, με $B_\delta^c = H / B_\delta$ και $B_\delta = \{Y \in H : \sup_{0 \leq t \leq T} \|Y_t - X_t\| \leq \delta\}$. Πριν απαντήσουμε όμως θα διατυπώσουμε το επόμενο Λήμμα που θα μας βοηθήσει.

Λήμμα 4.13. *Έστω M_t ενα συνεχές με τιμές στον H martingale με τοπικό τελεστή Q_t ώστε*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} TrQ_t \leq N < \infty \tag{4.12}$$

για κάποιο $N > 0$. Τότε ισχύει

$$P\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \|M_s\| \geq r\} \leq 3 \exp\{-\frac{r^2}{4Nt}\} \tag{4.13}$$

Θεώρημα 4.26. *Έστω οτι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.14, και το $\delta \leq 0$ στην συνθήκη (Δ4), ώστε*

$$\langle A(x - y), x - y \rangle + (F(x) - F(y), x - y) \leq 0, \forall x, y \in V \tag{4.14}$$

και υπάρχει ενα $\gamma > 0$ ώστε

$$\|B(y)\|_Q^2 \leq \gamma^2 , \;\; \forall y \in V. \tag{4.15}$$

Τότε η λύση μέτρου μ^ϵ συγκλίνει ασθενώς στο $\mu = \delta_X$ εκθετικά.Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $r > 0$ και $t \in (0.T]$ έχουμε

$$P\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \|M_s\| \geq r\} \leq 3 \exp\{-\frac{r^2}{4Nt}\} \tag{4.16}$$

Επιπλέον, η λύση διαταραχής X_t^ϵ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως στην X_t ομοιόμορφα στο $[0, T]$ καθώς $\epsilon \to 0$

Απόδειξη. Έστω $Y_t^\epsilon = X_t^\epsilon - X_t$ και $\Psi_\lambda(\cdot) = (1+\lambda\|\cdot\|^2)^{1/2}$. Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του *Ito* παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
&\Psi_\lambda(Y_t^\epsilon) = 1 + \lambda \int_0^t \Psi_\lambda^{-1}(Y_t^\epsilon)[\langle AY_s^\epsilon, Y_s^\epsilon\rangle \\
&+ (F(X_s^\epsilon) - F(X_s), Y_t^\epsilon)]ds \\
&\lambda\epsilon \int_0^t \Psi_\lambda^{-1}(Y_s^\epsilon)(Y_s^\epsilon, B(X_t^\epsilon)dW_s) + \frac{\epsilon^2}{2}\int_0^t \{\lambda\Psi_\lambda^{-1}(Y_s^\epsilon)\|B(X_s^\epsilon)\|_Q^2 \\
&- \lambda^2\Psi_\lambda^{-3}(Y_s^\epsilon)(B(X_s^\epsilon)QB^*(X_s^\epsilon)Y_s^\epsilon, Y_s^\epsilon)\}ds.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Απο τις (4.14) και (4.15) συμπεραίνουμε για την παραπάνω εξίσωση ότι:

$$
\begin{aligned}
&\Psi_\lambda(Y_t^\epsilon) \leq 1 + z_t^\lambda + \frac{\epsilon^2}{2}\int_0^t \{\lambda\Psi_\lambda^{-1}(Y_s^\epsilon)\|B(X_s^)\|_Q^2 \\
&+ \lambda^2[\Psi_\lambda^{-2}(Y_s^\epsilon) - \Psi_\lambda^{-3}(Y_s^\epsilon)](B(X_s^\epsilon)QB^*(X_s^\epsilon)Y_s^\epsilon, Y_s^\epsilon)\}ds \\
&\leq (1 + \lambda\gamma^2\epsilon^2 T) + z_t^\lambda
\end{aligned}
$$

όπου με z_t^λ θεωρήσαμε

$$
z_t^\lambda = \lambda\epsilon \int_0^t \Psi_\lambda^{-1}(Y_s^\epsilon)(Y_s^\epsilon, B(X_t^\epsilon)dW_s)
$$

$$
-\frac{1}{2}\lambda^2\epsilon^2 \int_0^t \Psi_\lambda^{-2}(Y_s^\epsilon)(B(X_s^\epsilon)QB^*(X_s^\epsilon)Y_s^\epsilon, Y_s^\epsilon)\}ds.
$$

τελικά σύμφωνα με το Λήμμα 4.13 παίρνουμε

$$
P\{\sup_{0\leq s\leq t}\|M_s\| \geq r\} \leq exp[-(1+\lambda r^2)^{1/2} + (1+\lambda\gamma^2\epsilon^2 t)]
$$

όπου φτάνουμε στην επιθυμητή ανισότητα θέτοντας $\lambda = (r/2\gamma\epsilon t)^2 - (1/r^2)$. Δίχνουμε την σύγκλιση αφού θέσουμε $\epsilon = \epsilon_n = 1/n$ και $\gamma = \gamma_n = 1/n^2$ στην (4.16). Τότε απο το Λήμμα *Borel – Canteli* έχουμε οτι $X_t^{\epsilon_n} \to X_t$ σχεδόν βεβαίως στον H και ομοιόμορφα στο $[0, T]$. □

Βιβλιογραφία

Bernt Oksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Spinger-Verlag,2000

Giuseppe Da Prato,Jerzy Zabczyk, *Stochastic Equations In Infinite Dimensions*, Cambridge University Press,1992

Leszek Gawarecki,Vidyadhar Mandrekar , *Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions*, Spinger-Verlag,2011

Wei Liu,Michael RRockner, *Stochastic Partial Differential Equations: An Introduction*, Spinger-Verlag,2015

Pao-Liu Chow, *Stochastic Partial Differential Equations*, Taylor Francis Group,2014

Mark A. McKibben, *Discovering Evolution Equations with Applications Volume 2-Stochastic Equations*, Taylor Francis Group,2011