



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ

**Μοντελοποίηση της δυναμικής συμπεριφοράς κυματοειδούς εδράνου
ολίσθησης μορφοποιούμενης γεωμετρίας και προσομοίωση σε
υπολογιστικό περιβάλλον Matlab-Simulink**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Γιώργου Μάριου Χαντουμάκου

Επιβλέπων: Βασίλειος Σπιτάς
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2020

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την μελέτη της λειτουργίας ενός κυματοειδούς εδράνου ολίσθησης μέσω ενεργητικής μεταβολής της γεωμετρίας του κατά την λειτουργία του σε ένα δυναμικό σύστημα. Η αλλαγή της γεωμετρίας οδηγεί σε μεταβολή των δυναμικών χαρακτηριστικών του εδράνου και, τελικά, του συστήματος, δίνοντας τη δυνατότητα ενεργητικού ελέγχου της απόκρισής του. Για να επιτευχθούν τα παραπάνω, έγινε αναλυτική μελέτη των υδροδυναμικών φαινομένων που λαμβάνουν χώρα τόσο σε ένα κανονικό έδρανο ολίσθησης, όσο και των αλλαγών που προκαλούνται σε αυτό λόγω της ύπαρξης λοβών σε ένα κυματοειδές έδρανο ολίσθησης. Παράλληλα, έγινε η σχεδίαση του σώματος του εδράνου, έτσι ώστε αυτό να μπορεί να μεταβάλλει τη γεωμετρία του κατά τον επιθυμητό τρόπο με αυξομείωση της πίεσης που επιβάλλεται εξωτερικά των λοβών από κάποιο ρευστό. Για όλα τα παραπάνω υποσυστήματα έγινε η μαθηματική τους ανάλυση και μοντελοποίηση με βάση την οποία αναπτύχθηκε το δυναμικό μοντέλο μιας διάταξης ειδικά σχεδιασμένης για την μελέτη ενός κυματοειδούς εδράνου ολίσθησης. Το έδρανο εξετάστηκε ως προς τη δυνατότητά του να ρυθμίσει τα επίπεδα κραδασμών του συστήματος και να δημιουργήσει συνθήκες αντισυντονισμού. Τα αποτελέσματα της μελέτης αποκάλυψαν τη δυνατότητα των κυματοειδών εδράνων ολίσθησης να περιορίζουν το επίπεδο των ταλαντώσεων πετυχαίνοντας μείωση τάξης μεγέθους στο πλάτος τους, ενώ μπορούν να οδηγήσουν το σύστημα σε αντισυντονισμό, εφόσον εκείνο έχει χαμηλή δυσκαμψία.

Abstract

The present thesis deals with the study of the operation of a wave bearing by actively changing its geometry while operating in a dynamic system. The alteration of its geometry results in a change in the dynamic characteristics of the bearing and, ultimately, the system, giving it the ability to actively control its response. In order to achieve the above, a detailed study of the hydrodynamic phenomena occurring in a normal sliding bearing was performed, as well as the changes at the hydrodynamic film caused by the existence of lobes in a wave bearing. At the same time, the bearing body was designed so that its geometry could be altered in the desired manner by varying the pressure applied in its outer ring by a means of fluid. For all the above subsystems their mathematical analysis and modeling was performed on the basis of which the dynamic model of a device specially designed for the study of a wave bearing was developed. The bearing was simulated for its ability to adjust the vibration levels of the system and to create conditions of antiresonance. The results of the study revealed the ability of the wave bearings to attenuate vibrations by reducing their amplitude by an order of magnitude, while they can lead the system to antiresonance should it has low stiffness.

*Αφιερώνεται,
στην μνήμη του πατέρα μου*

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που με βοήθησαν στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, αλλά και γενικότερα σε όλη την πορεία των προπτυχιακών μου σπουδών. Ευχαριστώ όλο το διδακτικό προσωπικό του ΕΜΠ που με την εργασία του συνέβαλε στην ανάπτυξη του γνωστικού μου πεδίου και την καλλιέργεια του τρόπου σκέψης μου και τους συμφοιτητές μου με τους οποίους πορευτήκαμε μαζί στα όμορφα χρόνια των σπουδών μας.

Ιδιαίτερα, όμως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, τον κύριο Βασίλειο Σπιτά, όχι μόνο για την ανεκτίμητη συνεισφορά του στην εκπόνησή της, αλλά, κυρίως, για την βοήθεια του καθόλη την διάρκεια των σπουδών μου. Τον συνάδελφο και φίλο Χρίστο Καλλίγερο και τα υπόλοιπα μέλη τους εργαστηρίου στοιχείων μηχανών για την υποστήριξη και την βοήθεια τους στην εκπόνηση της παρούσης διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους τους ανθρώπους που με αγάπη φροντίζουν για την εξέλιξη και τη βελτίωσή μου όχι μόνο ως μηχανικό, αλλά και ως άνθρωπο. Η οικογένειά μου, ο πνευματικός μου πατέρας, οι αδελφικοί μου φίλοι με τις συμβουλές και την καθοδήγησή τους με έχουν βοηθήσει όσο κανείς άλλος και εύχομαι ο Θεός να τους χαρίσει όσο εγώ δεν είμαι ικανός να τους ανταποδώσω.

Περιεχόμενα

Περίληψη	3
Abstract.....	5
Ευχαριστίες.....	8
1. Πίνακας συμβόλων	11
2. Εισαγωγή	12
2.1. Γενικά στοιχεία για τα έδρανα ολίσθησης.....	12
2.2. Γεωμετρικές εδράνων ολίσθησης.....	13
3. Τεχνολογίες επίτευξης κυματοειδούς γεωμετρίας εδράνων	15
3.1. Μηχανική παραμόρφωση μέσω εξωτερικών στοιχείων	16
3.2. Υδραυλική παραμόρφωση μέσω άσκησης πίεσης στους θαλάμους ρευστού	17
4. Αρχές υδροδυναμικής λίπανσης.....	21
4.1. Equation Chapter (Next) Section 4 Έδρανα ολίσθησης πεπερασμένου μήκους	23
4.2. Έδρανα ολίσθησης κυματοειδούς γεωμετρίας	29
5. Δυναμική μελέτη κυματοειδούς εδράνου ολίσθησης	36
5.1. Αριθμητικό μοντέλο πρόβλεψης γεωμετρικών αποκλίσεων	36
5.2. Μοντελοποίηση δυναμικού συστήματος.....	44
4.3. Προσομοίωση λειτουργίας κυματοειδών εδράνων	45
6. Συμπεράσματα και περαιτέρω έρευνα	50
6.1. Προτεινόμενη πειραματική διάταξη.....	51
6. Βιβλιογραφία	53
Παράρτημα	54
Κώδικας αριθμητικού υπολογισμού πίεσης κυματοειδούς εδράνου.....	54
Κώδικας δυναμικής μοντελοποίησης και υπολογισμού	59

1. Πίνακας συμβόλων

α	Συντελεστής απόκλισης
c_b	Ελάχιστο πάχος φιλμ λιπαντικού κυματοειδούς εδράνου ολίσθησης
c_p	Μέγιστο πάχος φιλμ λιπαντικού κυματοειδούς εδράνου ολίσθησης
C_{ij}	Ισοδύναμος συντελεστής απόδοσης λιπαντικού φιλμ
e	Εκκεντρότητα ρουλεμάν
\dot{e}	Ρυθμός μεταβολής εκκεντρότητας ρουλεμάν
F_X	Οριζόντια δύναμη αντίδρασης λιπαντικού φιλμ
F_Y	Κατακόρυφη δύναμη αντίδρασης λιπαντικού φιλμ
h	Αναλυτική συνάρτηση πάχους φιλμ λιπαντικού
h^*	Προσεγγιστική συνάρτηση πάχους φιλμ λιπαντικού
K_{ij}	Ισοδύναμος συντελεστής ελαστικότητας λιπαντικού φιλμ
L_b	Μήκος ρουλεμάν
m	Συντελεστής προέντασης $m=1- c_b/ c_p$
P_i	Ισοδύναμη πίεση λιπαντικού στον i -οστό λοβό
R	Ακτίνα εδράνου
R_b	Μέγιστη ακτίνα εφαρζόμενου άξονα στο ρουλεμάν
R_p	Ακτίνα καμπυλότητας λοβού
S'	Αριθμός Sommerfeld $S'=(\mu L_b \Omega R^3)/(\pi W c_b^2)$
W	Εξωτερικό φορτίο ρουλεμάν
x_j	Οριζόντια συνιστώσα μετατόπισης κέντρου ρουλεμάν
\dot{x}_j	Οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας κέντρου ρουλεμάν
x_i^L	Τετμημένη κέντρου i -οστού λοβού
y_j	Κατακόρυφη συνιστώσα μετατόπισης κέντρου ρουλεμάν
\dot{y}_j	Κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας κέντρου ρουλεμάν
y_i^L	Τεταγμένη κέντρου i -οστού λοβού
z	Αξονική συντεταγμένη ρουλεμάν
β	Γωνία μεταξύ της αρχής του λοβού με το άκρο του συγκλίνοντος τμήματος
δ	Λόγος ελλειπτικότητας $\delta= c_b/ c_p$
ε	Λόγος εκκεντρότητας $\varepsilon= e/ c_p$
$\dot{\varepsilon}$	Ρυθμός μεταβολής λόγου εκκεντρότητας $\dot{\varepsilon}= \dot{e} / c_b$
μ	Δυναμικό ιξώδες λιπαντικού
φ	Γωνιακή θέση εδράνου
$\dot{\varphi}$	Ρυθμός μεταβολής γωνιακής θέσης εδράνου
θ_i^0	Αρχική γωνία i -οστού λοβού
θ_i^*	Γωνία ελάχιστου πάχους φιλμ στον i -οστό λοβό
θ_g	Γωνία θέσης φορτίου
Ω	Γωνιακή ταχύτητα εδράνου rad/s
Ω_{eff}	Ενεργή γωνιακή ταχύτητα στο φιλμ λιπαντικού $\Omega_{eff}=\Omega-2 \dot{\varphi}$

2. Εισαγωγή

Τα έδρανα είναι τα στοιχεία μηχανών, στα οποία στηρίζονται οι στροφείς των ατράκτων ώστε να επιτυγχάνεται η ασφαλής περιστροφή τους. Μέσω αυτών μεταβιβάζονται τα φορτία που εφαρμόζονται στις ατράκτους στο έδαφος ή σε άλλες κατασκευές. Οι διαστάσεις τους είναι, συνήθως, τυποποιημένες και πάντοτε ορίζονται με βάση τη διάμετρο της ατράκτου που στηρίζουν. Επίσης δίνουν τη δυνατότητα ευθυγράμμισης της ατράκτου, ακτινικής μετατόπισης μικρών μοιρών της ατράκτου ως προς τον αρχικό άξονα περιστροφής της και αξονική μετατόπιση ώστε να παραλαμβάνονται θερμικές συστολές και διαστολές.

2.1. Γενικά στοιχεία για τα έδρανα ολίσθησης

Τα έδρανα, γενικά, κατατάσσονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

- Ανάλογα με το είδος της τριβής, σε έδρανα κύλισης (τριβή κύλισης) και σε έδρανα ολίσθησης (τριβή ολίσθησης).
- Ανάλογα με τα φορτία που παραλαμβάνουν, σε αξονικά έδρανα και σε ακτινικά έδρανα.
- Ανάλογα με τον τρόπο λειτουργίας τους, σε έδρανα σταθερά και σε έδρανα αυτορρυθμιζόμενα.

Στη σύγχρονη βιομηχανία τα έδρανα χρησιμοποιούνται σε πληθώρα εφαρμογών και ειδικά όταν απαιτείται μετάδοση υψηλών φορτίων. Για παράδειγμα σε όλων των ειδών τις μηχανές, σε επίγεια και εναέρια μέσα μεταφοράς (μηχανές, αυτοκίνητα, ελικόπτερα, αεροπλάνα, δορυφόροι, υποβρύχια, ατμοηλεκτρικοί σταθμοί κλπ), σε τουρμπίνες, συμπιεστές, αντλίες, πλυντήρια, ρολόγια χειρός μέχρι και σε σκληρούς δίσκους.

Τα έδρανα ολίσθησης με τα οποία ασχολείται η παρούσα εργασία συνήθως αποτελούνται από :

- Το χιτώνιο κατασκευασμένο από ειδικό αντιτριβικό μέταλλο εντός του οποίου εισέρχεται ο άξονας της μηχανής.
- Την βάση η οποία είναι είτε ολόσωμη είτε διαιρούμενη και τοποθετείται εξωτερικά του χιτωνίου
- Οπή ή οπές στο χιτώνιο και στη βάση απ' όπου εισέρχεται το λιπαντικό για την ομοιόμορφη κατανομή του.
- Το σύστημα λίπανσης.

Ανάλογα με την εφαρμογή η συνολική κατασκευή ενός εδράνου ολίσθησης μπορεί να διαφέρει αλλά τα βασικά κομμάτια είναι τα παραπάνω. Το πιο ευαίσθητο τμήμα ενός εδράνου ολίσθησης είναι το χιτώνιο και γι' αυτό πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στο υλικό, στην ποιότητα επιφάνειας, στον τρόπο λίπανσης και στις διαστάσεις του.

Η λίπανση είναι πολύ σημαντική καθώς επηρεάζει την πίεση και την θερμοκρασία που δημιουργείται. Τα λιπαντικά μπορεί να είναι σε στερεά, υγρή ή αέρια μορφή. Ανάλογα με είδος της λίπανσης του εδράνου ολίσθησης μπορούν να χωριστούν σε δύο βασικές κατηγορίες :

- Υδροδυναμική η οποία απαιτεί ύπαρξη συνεχούς ροής λιπαντικού και όχι πίεση εισαγωγής και η πίεση δημιουργείται λόγω της κίνησης του άξονα σε έκκεντρη θέση.
- Υδροστατική στην οποία διοχετεύουμε το λιπαντικό υπό πίεση και συνήθως χρησιμοποιείται όταν η ταχύτητα του άξονα είναι πολύ μικρή ή μηδενική.

Τα κύρια πλεονεκτήματα των εδράνων ολίσθησης είναι :

- Η κατασκευή τους και η σύνθεση τους είναι απλή
- Μεγάλη ποικιλία εδράνων ανάλογα με την εφαρμογή
- Μεγάλη διάρκειας ζωής όπου υπό προϋποθέσεις μπορεί να γίνει απεριόριστη
- Μπορούν να αποσβέσουν τις ταλαντώσεις του άξονα με αποτέλεσμα να παράγουν λιγότερο θόρυβο
- Αντέχουν μεγάλα φορτία
- Απαιτούν μικρότερο χώρο σε σχέση με τα έδρανα κυλίσεως
- Λειτουργούν σε υψηλές στροφές
- Λιγότερο ευαίσθητα στη σκόνη και στις μικροακαθαρσίες
- Το λιπαντικό μειώνει την τριβή και απομακρύνει την θερμότητα

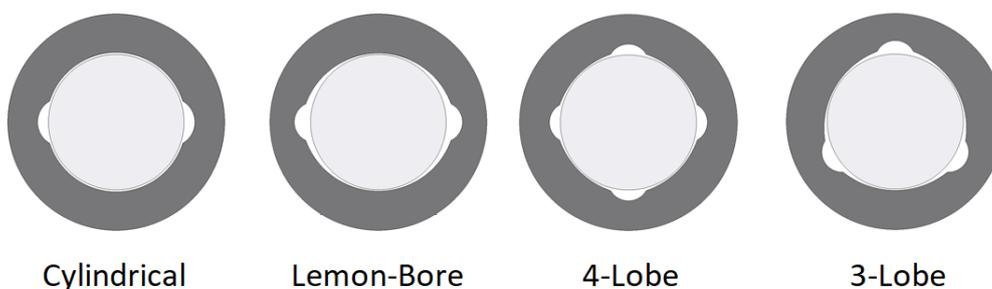
Τα κύρια μειονεκτήματα τους είναι:

- Μεγάλη ποσότητα λιπαντικού που χρειάζονται
- Μεγαλύτερες απώλειες λόγω τριβής έναντι των εδράνων κυλίσεως
- Βασίζονται στο λιπαντικό οπότε αν υπάρξει οποιαδήποτε βλάβη στο σύστημα λίπανσης, θα πάθουν βλάβη και αυτά
- Μικρότερη απόδοση σε σχέση με τα έδρανα κυλίσεως

2.2. Γεωμετρίες εδράνων ολίσθησης

Επεκτείνοντας τα παραπάνω παρουσιάζονται εν συντομία οι βασικότερες γεωμετρίες εδράνων ολίσθησης που χρησιμοποιούνται σε βιομηχανικές εφαρμογές. Το στοιχείο που αλλάζει κάθε φορά είναι η γεωμετρία της εσωτερικής οπής του εδράνου η οποία διαφέρει από το κλασικό έδρανο ολίσθησης και έχει διάφορες παραλλαγές από τύπο σε τύπο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.21. Η αλλαγή αυτή της γεωμετρίας επηρεάζει το υδροδυναμικό στρώμα λίπανσης που παρεμβάλλεται μεταξύ εδράνου και άξονα το οποίο με τη σειρά του καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τα δυναμικά χαρακτηριστικά του εδράνου και, γενικά, του συστήματος, όπως για παράδειγμα η ιδιοσυχνότητα του. Είναι, λοιπόν, κατανοητό πως αλλάζοντας την γεωμετρία της εσωτερικής οπής του εδράνου ολίσθησης μπορούν να ρυθμιστούν τα χαρακτηριστικά της απόκρισής του.

Η παρέμβαση αυτή στην εσωτερική οπή του εδράνου ολίσθησης γίνεται με την κατάλληλη τροποποίηση της κυκλικής γεωμετρίας που έχει ένα κλασικό έδρανο ολίσθησης. Η πιο συνηθισμένες παραλλαγές του απλού εδράνου ολίσθησης (plain journal bearing) είναι το παραβολικό ή lemon bore journal bearing και το κυματοειδές ή lobe journal bearing από το οποίο προηγείται και ένας αριθμός που δηλώνει τον αριθμό των κυμάτων ή lobes που έχει. Όπως γίνεται φανερό στο Σχήμα 2.2.1, πέρα από την τροποποίηση της κυκλικής γεωμετρίας σχηματίζονται λοβοί διαφόρων διαστάσεων και αριθμού, όπου προστίθενται επιπλέον ποσότητες λιπαντικού.



Σχήμα 2.2.1: Γεωμετρική διαμόρφωση εσωτερικών οπών

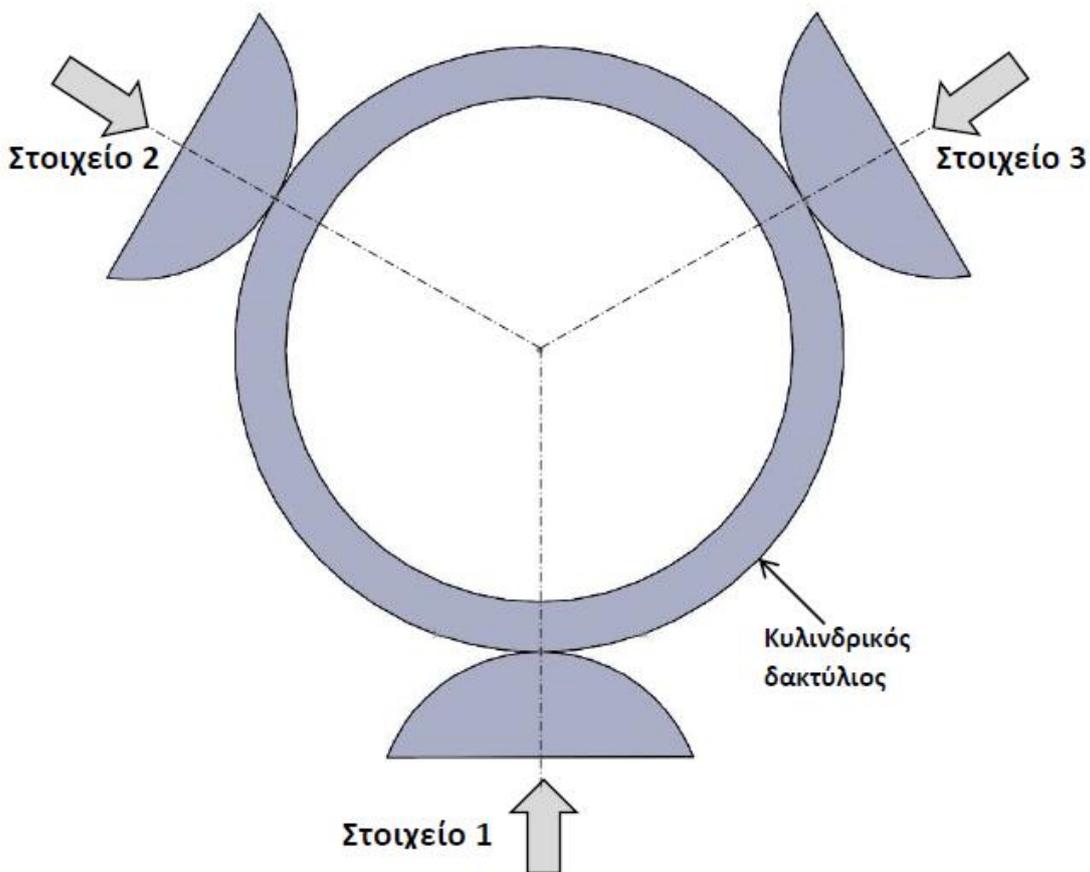
Η παρούσα εργασία θα ασχοληθεί με την τελευταία από τις παραπάνω κατηγορίες εδράνων ολίσθησης τα κυματοειδή έδρανα ή lobe journal bearings όπου δημιουργήθηκαν τη δεκαετία του 1990 από τον Florin Dimofte σε συνεργασία με τη NASA και η εσωτερική πλευρά του εδράνου δεν είναι κυκλική αλλά έχει ένα προφίλ που θυμίζει κύματα. Σε σύγκριση με τα κυκλικά έδρανα ολίσθησης παρουσιάζουν μερικές πολύ ενδιαφέρουσες διαφορές λόγω αυτής της γεωμετρίας όπως για παράδειγμα μπορούν να υποστηρίξουν μεγαλύτερο φορτίο σε σχέση με τα άλλα έδρανα, απορροφούν σε μεγαλύτερο βαθμό τις ταλαντώσεις/δονήσεις του άξονα οπότε όταν είναι κατάλληλα επιλεγμένα η μηχανή γίνεται αθόρυβη αφού οι ταλαντώσεις αποσβένουν στα κυματοειδή έδρανα και δεν μεταφέρονται στο εξωτερικό κέλυφος. Ενδεικτικά στην καμπίνα ενός ελικοπτερου ο θόρυβος μπορεί να φτάσει 100 dB με την χρήση εδράνων κύλισης ενώ με την χρήση κυματοειδών εδράνων μπορεί να είναι χαμηλότερος κατά περίπου 20dB [1]. Στη βιομηχανία οι θόρυβοι περιορίζονται μέσω επιπρόσθετων κοστοβόρων κατασκευών που προσθέτουν βάρος αλλά ακόμα και με αυτό τον τρόπο δεν είναι δυνατή η τοποθέτησή τους σε κάθε εφαρμογή. Επίσης σε αρκετές διαστημικές εφαρμογές η μετάδοση των ταλαντώσεων μέσα από το σύστημα μετάδοσης της κίνησης μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα λόγω συντονισμού. Τα κυματοειδή έδρανα έχουν ως σκοπό να λύσουν τα παραπάνω προβλήματα.

Ο σκοπός της διπλωματικής δεν είναι να γίνει μία μελέτη υπολογιστικής ρευστομηχανικής πάνω σε αυτά τα νέα έδρανα. Υδροδυναμική ανάλυση έχει γίνει ήδη από τον δημιουργό τους, τον Dimofte και συνεργάτες του [2-4] αν και παρουσιάζεται και εδώ για λόγους πληρότητας. Η παρούσα διπλωματική θα προτείνει ένα σύστημα στο οποίο θέτοντας εξωτερικές πιέσεις σε ένα κυματοειδές έδρανο θα μπορεί να αλλάξει την γεωμετρία των λοβών του και έτσι να αλλάξει την ιδιοσυχνότητα του ακόμα και σε πραγματικό χρόνο. Με αυτό τον τρόπο, οποιασδήποτε μορφής κυματοειδή έδρανα μπορούν να χρησιμοποιηθούν αλλάζοντας την ιδιοσυχνότητα για να αποσβέσουν ταλαντώσεις σε κάθε εφαρμογή που θα απαιτηθεί ακόμα και σε αυτές που η ιδιοσυχνότητα της εγκατάστασης μέσα στην οποία θα λειτουργούν αλλάζει δυναμικά. Πράγμα ιδιαίτερα ωφέλιμο σε εφαρμογές που επικρατούν ειδικές συνθήκες όπως για παράδειγμα σε ελικοπτερα, αεροπλάνα, δορυφόροι, υποβρύχια όπου θα προσαρμόζεται το έδρανο ώστε να αντέχει μεγαλύτερα φορτία, θα εξασφαλίζεται η σταθερότητα του άξονα και θα μειώνονται σε μεγάλο βαθμό οι δονήσεις/ταλαντώσεις που σε άλλη περίπτωση θα παράγονταν.

3. Τεχνολογίες επίτευξης κυματοειδούς γεωμετρίας εδράνων

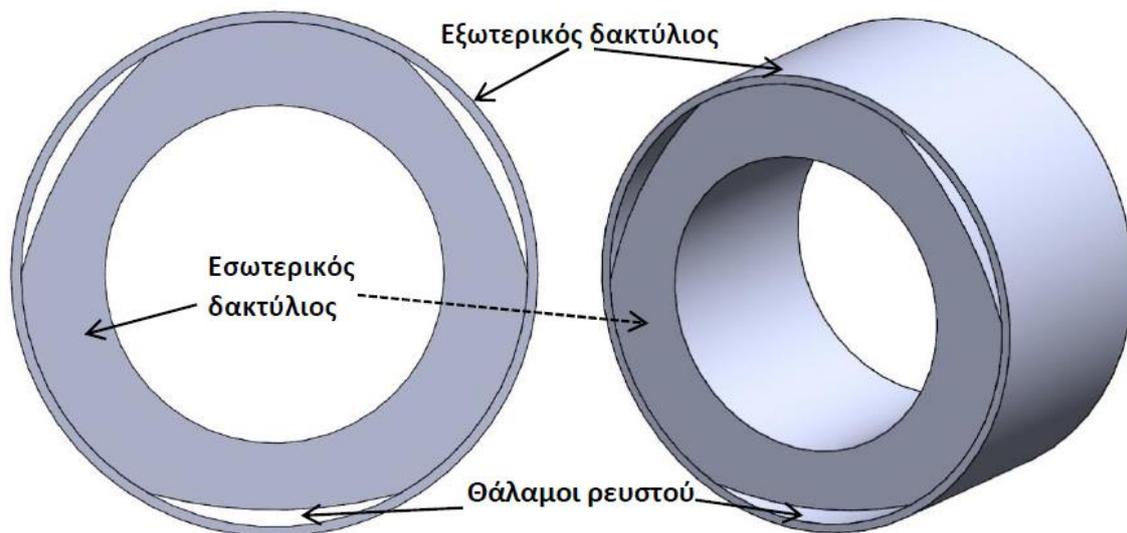
Η αρχή λειτουργίας βασίζεται στην άσκηση εξωτερικών πιέσεων σε ένα κυλινδρικό έδρανο και να μετατραπεί σε κυματοειδές έδρανο. Αυτό είναι εφικτό γιατί στο κυματοειδές έδρανο το πλάτος του κύματος είναι πολύ μικρό, της κλίμακας των μερικών μικρών, οπότε ασκώντας λογικές πιέσεις μπορεί να επιτευχθεί τέτοια παραμόρφωση που να δημιουργεί τεχνητά μία κυματοειδή γεωμετρία στην εσωτερική επιφάνεια του εδράνου.

Δύο είναι οι μέθοδοι που επιτρέπουν να γίνει αυτό με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι κατασκευαστικά εφικτό. Η πρώτη εφαρμόζεται ασκώντας πίεση μέσω κάποιων στοιχείων (για παράδειγμα μικρά έμβολα) που είναι τοποθετημένα στην εξωτερική πλευρά του εδράνου όπως απεικονίζεται στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Στοιχεία 1,2,3 τοποθετημένα εξωτερικά του εδράνου

Ενώ η δεύτερη μέθοδος υλοποιείται με την τοποθέτηση δύο εδράνων, το ένα πάνω στο άλλο. Στο εσωτερικό έδρανο, η εξωτερική πλευρά σε συγκεκριμένα σημεία δεν είναι τελείως κυλινδρική, αλλά έχει υποστεί κατεργασία αποκοπής μερικών μικρών εκεί που πρόκειται να δημιουργηθεί κυματοειδής γεωμετρία. Το δεύτερο έδρανο είναι κυλινδρικό και εφάπτεται πάνω στην εξωτερική πλευρά του πρώτου (σχήμα 3.2). Στα σημεία όπου το πρώτο έδρανο δεν είναι κυλινδρικό θα σχηματιστεί ένα κενό ανάμεσα στο πρώτο και το δεύτερο έδρανο. Αυτά τα σημεία είναι οι λεγόμενοι «θάλαμοι ρευστού» ή «fluid rockets».



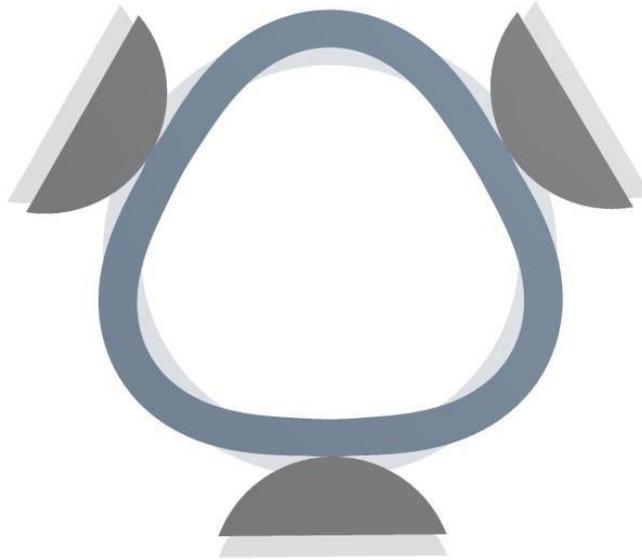
Σχήμα 3.2: Δύο κυλινδρικοί δακτύλιοι τοποθετημένοι ώστε να σχηματίζουν θαλάμους ρευστού ανάμεσα τους

3.1. Μηχανική παραμόρφωση μέσω εξωτερικών στοιχείων

Μετατοπίζοντας τα στοιχεία 1,2,3 κατά μήκος των αξονικών γραμμών όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1.1, το έδρανο παραμορφώνεται χωρίς να ασκηθούν μεγάλες πιέσεις και αποκτά την επιθυμητή κυματοειδή γεωμετρία με το κατάλληλο πλάτος. Το μέγεθος των πιέσεων που χρειάζεται να ασκηθούν εξαρτάται κυρίως από τους παρακάτω τρεις παράγοντες:

- Από το πάχος του εδράνου,
- Από το επιθυμητό πλάτος,
- Από τις πιέσεις-δυνάμεις που δημιουργούνται εσωτερικά του εδράνου κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του.

Όσο μεγαλύτερα είναι αυτά τα τρία τόσο μεγαλύτερες είναι οι πιέσεις-μετατοπίσεις που πρέπει να έχουν τα στοιχεία 1,2,3 ώστε να επιτευχθεί η κατάλληλη παραμόρφωση. Στο σχήμα 3.1.1 φαίνεται το κυκλικό έδρανο το οποίο παραμορφώθηκε και έμμεσα μετατράπηκε σε κυματοειδές έδρανο. Στην πραγματικότητα η μεταβολή αυτή δεν είναι ορατή επομένως για λόγους κατανόησης της λειτουργίας στο σχήμα 3.1.1 απεικονίζεται η παραμόρφωση σε πολύ μεγάλη κλίμακα.



Σχήμα 3.1.1: Περαιτέρω παραμόρφωση κυματοειδούς εδράνου

Στο σχήμα 3.3 τα μέρη που είναι διάφανα δείχνουν τις αρχικές θέσεις των στοιχείων 1,2,3 και την αρχική μη παραμορφωμένη γεωμετρία του εδράνου. Με την ίδια μέθοδο αλλά με την χρήση περισσότερων στοιχείων ένα κυλινδρικό έδρανο μπορεί να μετατραπεί σε κυματοειδές με τέσσερα, πέντε ή περισσότερα κύματα.

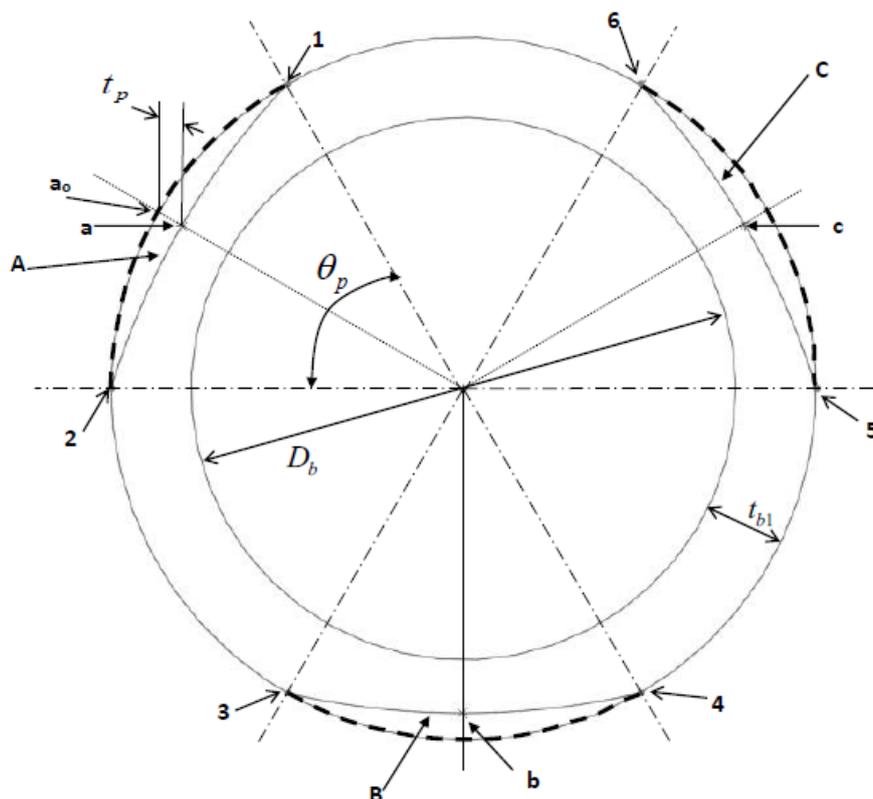
3.2. Υδραυλική παραμόρφωση μέσω άσκησης πίεσης στους θαλάμους ρευστού

Σε αντίθεση με την προηγούμενη μέθοδο κατασκευής, εδώ υπάρχουν πιο πολλές παράμετροι που επηρεάζουν την μετατροπή ενός κυκλικού εδράνου σε έδρανο με κυματοειδή εσωτερική επιφάνεια. Στο σχήμα 3.2 παρουσιάστηκε η βασική μορφολογία των θαλάμων ρευστού. Εδώ παρουσιάζονται με περισσότερες λεπτομέρειες οι βασικότερες παράμετροι σχεδίασης που αποτελέσουν την βάση για την περαιτέρω μελέτη της συγκεκριμένης τεχνικής. Μέσα από αυτή την μέθοδο διεκπεραιώνεται και ο σκοπός της παρούσας διπλωματικής, η δυναμική αλλαγή στην γεωμετρία των θαλάμων ρευστού οι οποίες μέσα από τις εξισώσεις που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια θα δίνουν τη δυνατότητα σε έναν μηχανικό να μπορεί να αλλάξει την ιδιοσυχνότητα στην οποία συντονίζονται τα ρουλεμάν και στη συνέχεια να αποσβέσει ολικώς ή εν μέρει την ταλάντωση της εγκατάστασης. Στο σχήμα 3.2.1 απεικονίζεται η γεωμετρία του εσωτερικού εδράνου και τα βασικά του χαρακτηριστικά.

Γενικά χαρακτηριστικά

Ως D_b ορίζεται η διάμετρος του εδράνου

Ως t_{bt} ορίζεται το πάχος του εδράνου



Σχήμα 3.2.1: Γεωμετρία και χαρακτηριστικές μεταβλητές εσωτερικού εδράνου

Ειδικά χαρακτηριστικά

Ορίζονται τρεις πλευρές που τοποθετούνται οι θάλαμοι ρευστού. Αυτά είναι τα τόξα A, B, C.

Για το τόξο A η αρχή είναι το σημείο 1 και τέλος το σημείο 2. Το a είναι το ενδιάμεσο σημείο του τόξου A. Οι διακεκομμένες γραμμές που συνδέουν τα 1 και 2 είναι το έδρανο αν ήταν τελείως κυκλικό. Έτσι το κενό που σχηματίζεται μεταξύ του σημείου a και του σημείου a₀ ονομάζεται πάχος του θαλάμου ρευστού και συμβολίζεται με t_p. Ενώ ως θ_p ορίζεται η γωνία του τόξου A.

Για το B η αρχή είναι το σημείο 3 και τέλος το σημείο 4. Το b είναι το ενδιάμεσο σημείο του τόξου B και ισχύουν τα ίδια με το A.

Για το C η αρχή είναι το σημείο 5 και τέλος το σημείο 6. Το c είναι το ενδιάμεσο σημείο του τόξου C και ισχύουν τα ίδια με τα άλλα δύο τόξα.

Τα παραπάνω ορίζουν τις θέσεις-γωνίες που βρίσκονται οι θάλαμοι ρευστού. Και αρκούν για τον σχεδιασμό την κατανόηση της λειτουργίας τους. Όπως και στη παράγραφο 3.1, έτσι και εδώ οι βασικότεροι παράγοντες που επηρεάζουν το μέγεθος των πιέσεων που πρέπει να ασκηθούν στους θαλάμους του ρευστού για να μετατραπεί ένα κυλινδρικό έδρανο σε κυματοειδή είναι:

- Το πάχος του εδράνου.
- Το επιθυμητό πλάτος του μήκους κύματος στην εσωτερική πλευρά του εδράνου.
- Το μέγεθος των πιέσεων που δημιουργούνται στο εσωτερικό του εδράνου κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του.
- Το πλάτος των θαλάμων ρευστού και τα A, B, C που ορίζεται κατάλληλα ανάλογα με τους τρεις προηγούμενους παράγοντες.

Επίσης το πάχος των θαλάμων ρευστού και γενικότερα η τοποθέτηση των A, B, C επηρεάζεται και από κατασκευαστικούς και λειτουργικούς παράγοντες όπως για παράδειγμα ο απαιτούμενος χώρος του συστήματος λίπανσης, το πάχος του θαλάμου ρευστού που επιβάλλεται να μην είναι πολύ λεπτός για λόγους αντοχής κλπ.

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω, παρουσιάζεται στη συνέχεια ένα έδρανο με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που παρουσιάζονται στον πίνακα 2.1

D_b	50.174 mm
t_{b1}	15 mm
t_{b2}	3 mm
t_p	2 mm

Πίνακας 2.1 α: Γενικά χαρακτηριστικά εσωτερικού και εξωτερικού εδράνου

θάλαμος Ρευστού A

Σημεία	Γωνία Θέσης
1	120°
2	180°
Μέσο a	150°

Πίνακας 2.1 β: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά θαλάμου A

Θάλαμος Ρευστού B

Σημεία	Γωνία Θέσης
3	240°
4	300°
Μέσο b	270°

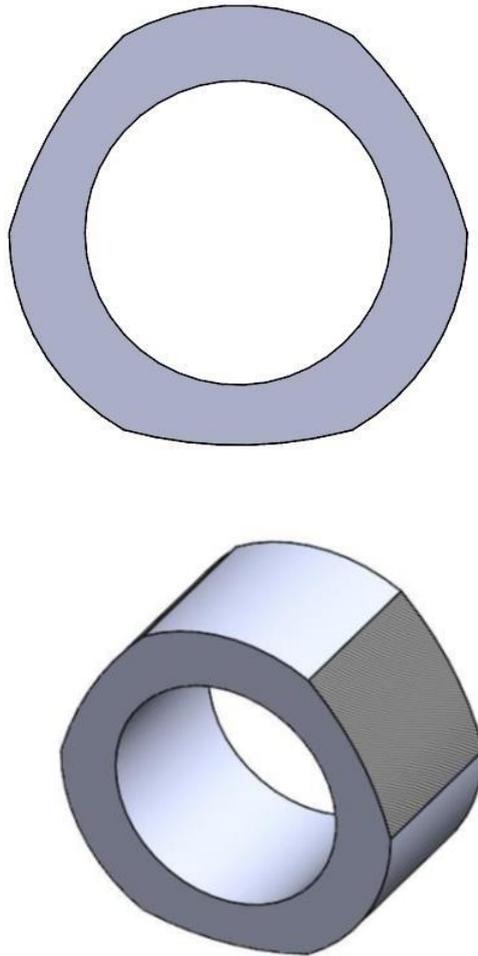
Πίνακας 2.1 γ: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά θαλάμου B

Θάλαμος Ρευστού C

Σημεία	Γωνία Θέσης
5	0°
6	60°
Μέσο c	30°

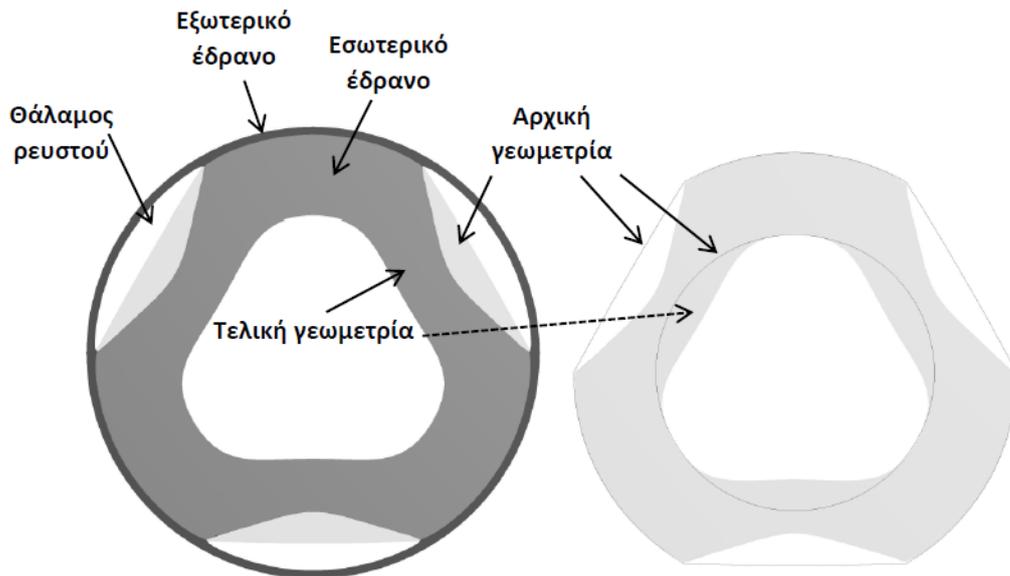
Πίνακας 2.1 δ: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά θαλάμου C

Η τελική μορφή του εσωτερικού εδράνου με τα παραπάνω γεωμετρικά χαρακτηριστικά απεικονίζεται στο σχήμα 3.2.2. Τα γραμμοσκιασμένα τμήματα είναι οι περιοχές Α,Β,С.



Σχήμα 3.2.2: Όψεις εσωτερικού εδράνου

Προχωρώντας παρότι για το εσωτερικό έδρανο υπάρχει ένα πλήθος παραμέτρων που πρέπει να ορισθούν και να ληφθούν υπόψη από ένα μηχανικό, για το εξωτερικό έδρανο το χαρακτηριστικό που κατέχει σημαντικό ρόλο είναι το πάχος του. Εντούτοις το εξωτερικό έδρανο δεν έχει σημαντικό στην μελέτη της ιδιοσυχνότητας τους κυματοειδούς εδράνου γι' αυτό και δεν μελετάται. Στο σχήμα 3.2.3 απεικονίζεται το παραμορφωμένο έδρανο όταν ασκηθούν πιέσεις στους θαλάμους ρευστού.

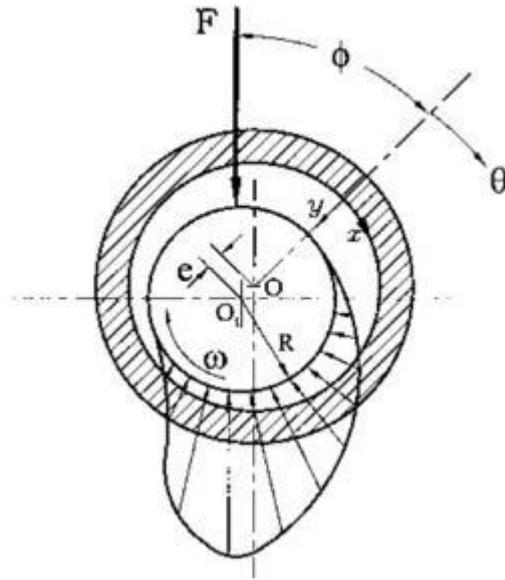


Σχήμα 3.2.3: Παραμόρφωση εσωτερικού εδράνου μέσω άσκησης πίεσης στους θαλάμους ρευστού

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ένα μαθηματικό μοντέλο που προσομοιώνει τον λειτουργικό έλεγχο που επιτελείται μέσω της μεθόδου διπλής κατατομής. Από την ανάλυση της μεθόδου που προηγήθηκε γίνεται κατανοητό πως για την διεκπεραίωση του ελέγχου απαιτούνται τα παρακάτω στοιχεία: δύο οδοντωτοί τροχοί, ο εξεταζόμενος και ο αντίστοιχος πρότυπος, μια εξειδικευμένη μηχανή που θα εξασφαλίζει την σφικτή συνεργασία τους και ο μετρητικός εξοπλισμός για την αποτύπωση της μεταβολής της αξονικής τους απόστασης. Η μορφή των κατατομών των οδόντων και η επιβολή σφικτής συνεργασίας καθορίζουν ποια θα είναι κάθε στιγμή τα σημεία επαφής των τροχών, η γωνία περιστροφής του κινούμενου τροχού και τελικά τη μεταβολή της αξονικής απόστασης.

4. Αρχές υδροδυναμικής λίπανσης

Στην συνέχεια παρουσιάζεται η αρχή λειτουργίας που της υδροδυναμικής λίπανσης που εμφανίζεται ανάμεσα στο έδρανο και στον άξονα, διαχωρίζοντας τις δυο ολισθαίνουσες επιφάνειες με ένα λεπτό στρώμα λιπαντικού. Το στρώμα αυτό δημιουργεί ένα κύμα πίεσης που έχει ως αποτέλεσμα να μπορεί να υποστηρίξει εξωτερικό φορτίο. Το κενό μεταξύ του εδράνου και του άξονα στο οποίο βρίσκεται το ρευστό έχει σχήμα σφήνας γι' αυτό ονομάζεται «υδροδυναμικός σφήνας» [5]. Το ρευστό προσκολλάται στις επιφάνειες και ακολουθεί την κίνηση τους. Δημιουργούνται υψηλές διατμητικές τάσεις που σπρώχνουν το ρευστό να περάσει από τον σφήνα, υποχρεώνοντας τον άξονα σε μια έκκεντρη περιστροφή γύρο από το ονομαστικό του κέντρο. Έτσι, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1, δημιουργείται υψηλή πίεση στο μικρό κενό και επιτρέπει την παραλαβή φορτίου. Με αυτό τον τρόπο το υδροδυναμικό στρώμα του λιπαντικού διαχωρίζει επιφάνειες. Υπό σταθερές συνθήκες η ικανότητα παραλαβής φορτίου (W) ενός εδράνου ισούται με το εξωτερικό φορτίο του άξονα (F) αλλά έχουν αντίθετη φορά.



Σχήμα 4.1: Κατανομή της πίεσης σε ένα έδρανο

Θεωρητικές και πειραματικές μελέτες έχουν δείξει πως η ικανότητα παραλαβής φορτίων εξαρτάται από την ταχύτητα περιστροφής του άξονα και το ιξώδες του ρευστού. Επίσης λεπτό στρώμα συνεπάγεται μεγαλύτερη ικανότητα παραλαβής φορτίου αλλά μέχρι κάποιο όριο που εξαρτάται από την εφαρμογή γιατί για παράδειγμα σε μία μηχανή ή έναν μηχανισμό που δονείται/ταλαντώνεται υπάρχει ο κίνδυνος οι επιφάνειες να έρθουν σε επαφή.

Το 1880 για πρώτη φορά ο Tower διεξήγαγε πειράματα για να αποδείξει την ύπαρξη πίεσης μεταξύ ενός περιστρεφόμενου άξονα και ενός εδράνου. Όμως το 1886 ο Reynolds άρχισε παρόμοια πειράματα και το 1894 ανέπτυξε την κλασική θεωρία της υδροδυναμικής λίπανσης κάνοντας διάφορες παραδοχές που δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματα ώστε να απλοποιήσει τις εξισώσεις Navier-Stokes.

Στις αρχές του 20ου αιώνα υπήρχαν μόνο έδρανα μεγάλου μήκους ($L \gg D$) και γι' αυτό η θεωρία του Reynolds αφορά αυτά. Στις μέρες μας τα περισσότερο διαδεδομένα έδρανα ολίσθησης είναι τα μικρού μήκους ($L \ll D$) γιατί παρουσιάζουν μία σειρά πλεονεκτημάτων σε σχέση με τα έδρανα μεγάλου μήκους παρά το γεγονός ότι τα τελευταία έχουν μεγαλύτερη ικανότητα παραλαβής φορτίου και μεγαλύτερη ικανότητα παραλαβής φορτίου ανά μονάδα επιφάνειας λόγω του μεγάλου μήκους.

Μερικά από αυτά είναι

- Καλύτερη ψύξη του λιπαντικού που συνεπάγεται καλύτερη συμπεριφορά γιατί δεν αλλοιώνονται τα χαρακτηριστικά του λόγω της θερμοκρασίας. Μπορεί να θεωρηθεί ότι το ιξώδες παραμένει σταθερό δηλαδή $\mu = \text{σταθερό}$.
- Λιγότερο ευαίσθητα σε κακή ευθυγράμμιση του άξονα
- Έχουν λιγότερη φθορά
- Πιο μικρά άρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε εφαρμογές που ο χώρος είναι περιορισμένος. Η τάση στις μέρες μας είναι να γίνονται όλο και πιο μικρές οι μηχανές και γενικότερα οι κατασκευές. Ανταγωνίζονται τα έδρανα κύλισης όπου συνήθως είναι μικρού μήκους.

Οι σημαντικότερες παραδοχές που έκανε ο Reynolds είναι οι παρακάτω:

- Θεώρησε ότι η ροή είναι στρωτή δηλαδή $Re \ll 1000$ που είναι αποδεκτή παραδοχή
- Το ρευστό είναι νευτώνιο, ασυμπίεστο και συνεχές
- Η βαρύτητα δεν λαμβάνεται υπόψη
- Η αδράνεια της μάζας του ρευστού δεν λαμβάνεται υπόψη γιατί είναι πολύ μικρότερη από τη δύναμη του ιξώδους / τριβής του ρευστού.
- Η ταχύτητα του ρευστού είναι ίδια με της περιστρεφόμενης επιφάνειας
- Η πίεση είναι σταθερή κατά το πάχος του φιλμ του ρευστού
- Το ιξώδες του ρευστού παραμένει σταθερό

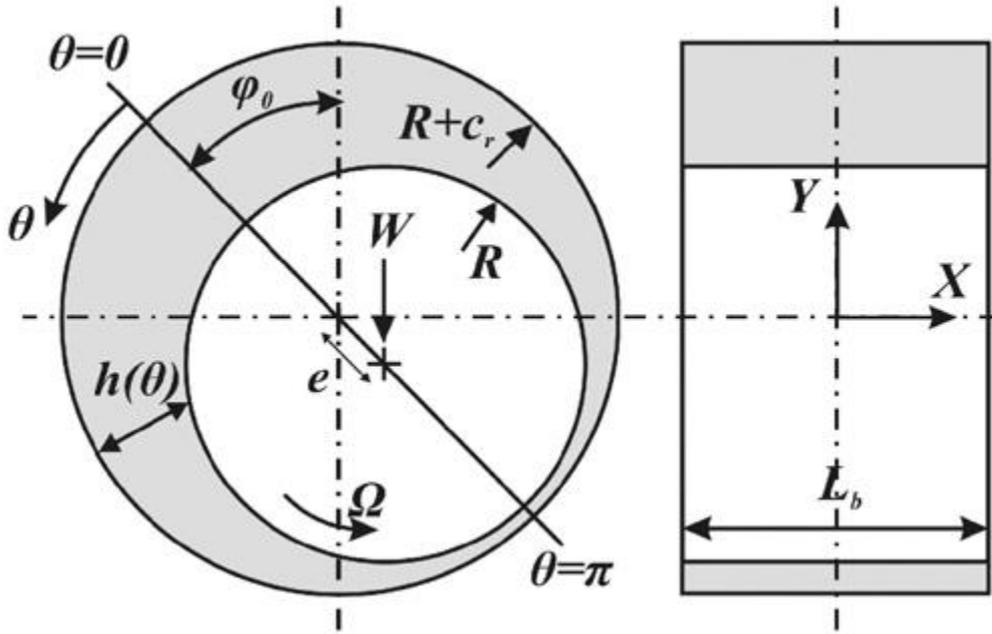
Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο υπολογισμός της πίεσης χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εξισώσεις του Reynolds αρχικά στη περίπτωση του πεπερασμένου εδράνου ολίσθησης κυκλικής γεωμετρίας και στην συνέχεια η αναγωγή των εξισώσεων αυτών για την περίπτωση του κυματοειδούς εδράνου ολίσθησης. Με τους κώδικες που έχουν γραφεί για την παρακάτω υλοποίηση στο υπολογιστικό περιβάλλον Matlab να δίνονται στο Παράρτημα Α και την ερμηνεία των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται να δίνεται στην αρχή της παρούσας εργασίας.

4.1. Έδρανα ολίσθησης πεπερασμένου μήκους

Αρχικά παρουσιάζεται η αναλυτική μορφή της εξίσωσης του Reynolds για ένα έδρανο ολίσθησης με την εξίσωση 4.1.1. την οποία επιλύοντας θα βρεθεί το προφίλ της πίεσης που διέπει εσωτερικά το έδρανο ολίσθησης.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial P(x, \theta)}{\partial x} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial P(x, \theta)}{\partial \theta} \right) = \Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.4.1)$$

Από την οποία μπορεί να προκύψει η εκάστοτε ημιαναλυτική λύση απλοποιώντας έναν από τους δυο αριστερά όρους ανάλογα την σχέση μήκους διαμέτρου που έχουμε. Για την περίπτωση, δηλαδή, ενός μακρού εδράνου ($L \gg D$) μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο το πρώτο όρο του αριστερού μέρους της εξίσωσης, ενώ για την περίπτωση του κοντού εδράνου ($L \ll D$) μπορεί να θεωρηθεί το δεύτερο όρο της εξίσωσης.



Σχήμα 4.1.1: Γεωμετρία κυλινδρικού εδράνου και πάχος λιπαντικού

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση την σχέση 4.1.2 και 4.1.3 που μας δίνει την εξίσωση που ορίζει το πάχος του λιπαντικού και την χρονική της μερική παράγωγο, έχουμε την σχέση 4.1.4.

$$h = c_r + e \cos(\theta) \quad (3.4.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \dot{e} \cos(\theta) \quad (3.4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{(c_r + e \cos(\theta))^3}{6\mu} \frac{\partial^2 P(\theta, x)}{\partial x^2} - \frac{3(c_r + e \cos(\theta))^2 e \sin(\theta)}{6\mu R^2} \frac{\partial P(\theta, x)}{\partial \theta} \\ + \frac{(c_r + e \cos(\theta))^3}{6\mu R^2} \frac{\partial^2 P(\theta, x)}{\partial \theta^2} = -e\Omega \sin(\theta) + 2\dot{e} \cos(\theta) \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Στην συνέχεια υποθέτοντας ότι η πίεση μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα μιας ειδικής και μιας ομογενούς λύσης με την μορφή 4.1.5 και με τη σειρά τους οι ειδική και η ομογενείς εξίσωση στις μορφές 4.1.6 και 4.1.7 μετατρέποντας πλέον τον υπολογισμό της πίεσης στην επίλυση τεσσάρων Sturm-Liouville προβλημάτων.

$$P(x, \theta) = u(x, \theta) + g(x, \theta) \quad (3.4.5)$$

$$u(x, \theta) = \varphi(\theta) + \psi(x) \quad (3.4.6)$$

$$g(x, \theta) = f(\theta)m(x) \quad (3.4.7)$$

Αντικαθιστώντας την 4.1.6 στην 4.1.4 έχω την επόμενη μορφή που φαίνεται στην εξ. 4.1.8. Η οποία ισότητα για να ισχύει, αφού το αριστερό μέρος είναι συνάρτηση της θέσεως και το δεξί της γωνίας, θα πρέπει να ισούτο και τα δύο με μια σταθερά C, όπως φαίνεται στις εξισώσεις 4.1.9 και 4.1.10

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{1}{R^2} \frac{d^2\varphi(\theta)}{d\theta^2} - \frac{3e \sin(\theta)}{R^2 (c_r + \text{ecos}(\theta))^3} \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} + \frac{6\mu e \Omega \sin(\theta)}{(c_r + \text{ecos}(\theta))^3} - \frac{12\mu \dot{e} \cos(\theta)}{(c_r + \text{ecos}(\theta))^3} \quad (3.4.8)$$

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = C \quad (3.4.9)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{d^2\varphi(\theta)}{d\theta^2} - \frac{3e \sin(\theta)}{R^2 (c_r + \text{ecos}(\theta))^3} \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} + \frac{6\mu e \Omega \sin(\theta)}{(c_r + \text{ecos}(\theta))^3} - \frac{12\mu \dot{e} \cos(\theta)}{(c_r + \text{ecos}(\theta))^3} = C \quad (3.4.10)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση 4.1.9 εύκολα μπορεί κανείς να καταλήξει στην 4.1.11, ενώ για την εξίσωση 4.1.10, τώρα, θα χρειαστεί να οριστεί μια νέα συνάρτηση z όπως φαίνεται στην εξίσωση 4.1.12 για να γραμμικοποιηθεί η παραπάνω εξίσωση και έτσι να προκύψει η σχέση 4.1.13.

$$\psi(x) = -Cx^2/2 + c_1x + c_2 \quad (3.4.11)$$

$$\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} = z(\theta) \quad (3.4.12)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{dz(\theta)}{d\theta} - \frac{3e \sin(\theta)}{R^2 (c_r + \text{ecos}(\theta))^3} z(\theta) + \frac{6\mu e \Omega \sin(\theta)}{(c_r + \text{ecos}(\theta))^3} - \frac{12\mu \dot{e} \cos(\theta)}{(c_r + \text{ecos}(\theta))^3} = C \quad (3.4.13)$$

Στην συνέχεια λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς z και ολοκληρώνοντας το αποτέλεσμα προσθέτοντας του μια σταθερά c_4 προκύπτει η επόμενη σχέση.

$$\varphi(\theta) = c_4 + \frac{1}{2} \left(-\frac{2(-18c_r e^2 R^2 \mu \Omega + (2c_r^2 + e^2)c_3)}{(-c_r^2 + e^2)^{5/2}} + \frac{3e(2c_r^2 R^2 \mu \Omega - c_r^2 c_3) \sin(\theta)}{(c_r^2 - e^2)^2 (c_r + \text{ecos}(\theta))^2} + \frac{12(-c_r^2 + e^2) \dot{e} R^2 \mu - e^2 (6c_r R^2 \mu \Omega - c_3) \sin(\theta)}{(-c_r^2 e + e^3)(c_r + \text{ecos}(\theta))^2} \right) \quad (3.4.14)$$

Στην συνέχεια εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες για την εύρεση των σταθερών c στο πρόβλημα της ειδικής λύσης. Αυτές ορίζονται μηδενικές στα δυο άκρα του στοιχείου ολίσθησης στην ακτινική διεύθυνση, $x = \pm L_b/2$ ενώ στην κυλινδρική στην αρχή και στο τέλος τους του λιπαντικού φιλμ, $\theta=0$ και $\theta=\pi$. Έτσι προκύπτει ότι $\psi(L_b/2) = \psi(-L_b/2) = 0$ άρα οι σταθερές c_1 και c_2 είναι μηδενικές και η συνάρτηση $\psi(x)$ εκφυλίζεται στη μηδενική συνάρτηση. Βέβαια, για λόγους πληρότητας αναφέρεται, πως ακόμα και στην περίπτωση που θεωρηθούν αλλαγές κατά το μήκος του άξονα και συνεπώς δεν υπάρχει εκφυλισμός στην μηδενική λύση της εξίσωσης $\psi(x)$ το αποτέλεσμα θα είναι μια παραβολική κατανομή της πίεσης, κατά το μήκος του άξονα, η οποία θα είναι και τάξης μεγέθους μικρότερη από την $\varphi(\theta)$. Συνεπώς θα μπορεί να αμελείται στον τελικό υπολογισμό της ειδικής λύσης. Με την ίδια

λογική εφαρμόζοντας τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες στην εξίσωση 4.1.14 υπολογίζεται το c_3 και το c_4 .

Περνώντας τώρα στην ομογενή λύση εφαρμόζοντας στην εξίσωση 4.1.4 την 4.1.5 και 4.1.7 προκύπτει το επόμενο αποτέλεσμα.

$$-\frac{m''(x)}{m(x)} = \frac{f''(\theta)}{R^2 f(\theta)} - \frac{3e \sin(\theta)}{R^2 (c_r + e \cos(\theta))} \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} \quad (3.4.15)$$

Όπως και στην περίπτωση της ειδικής λύσεις για να μπορεί να επαληθευθεί αυτή η εξίσωση πρέπει και τα δυο μέρη της να είναι ίσα με μια σταθερά λ . Δίνοντας τις σχέσεις 4.1.16 και 4.1.17.

$$-\frac{m''(x)}{m(x)} = \lambda \quad (3.4.16)$$

$$\frac{f''(\theta)}{R^2 f(\theta)} - \frac{3e \sin(\theta)}{R^2 (c_r + e \cos(\theta))} \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \lambda \quad (3.4.17)$$

Το αριστερά μέρος λύνεται σχετικά απλά δίνοντας τις επόμενες τρεις περιπτώσεις ανάλογα με τον τρόπο που έχει οριστεί το λ .

1. Για $\lambda=0$ ολοκληρώνοντας την εξίσωση 4.1.16 προκύπτει η σχέση 4.1.18.

$$m(x) = c_5 x + c_6 \quad (3.4.18)$$

2. Για $\lambda>0$ και έστω $\lambda=\kappa^2$ ολοκληρώνοντας την εξίσωση 4.1.16 προκύπτει η σχέση 4.1.19.

$$m(x) = c_5 \cos(kx) + c_6 \sin(kx) \quad (3.4.19)$$

3. Ενώ για $\lambda<0$ και έστω $\lambda=-\kappa^2$ ολοκληρώνοντας την εξίσωση 4.1.9 προκύπτει η σχέση 4.1.20.

$$m(x) = c_5 e^{\kappa x} + c_6 e^{-\kappa x} \quad (3.4.20)$$

Αξιολογώντας τώρα τα παραπάνω αποτελέσματα δεχόμενοι την πρώτη περίπτωση η εξίσωση 4.1.17 θα πάρει την μορφή πρώτης τάξης διαφορικής εξίσωσης χρησιμοποιώντας έναν μετασχηματισμό όμοιο με τον 4.1.12 και ακολουθώντας την ίδια πορεία με την ειδική λύση, όμως αυτή η περίπτωση θα έδειχνε μια γραμμική κατανομή στην αξονική διεύθυνση λόγω της εξίσωσης 4.1.18 συνεπώς και απορρίπτεται αφού μια τέτοια παραδοχή δεν είναι γενικά αποδεκτή [6]. Για $\lambda \neq 0$, τώρα, η διαφορική 4.1.17 δεν έχει κλειστή μορφή επίλυσης και δεν μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά. Για το λόγο αυτό προηγείται η γραμμικοποίηση του πάχους του λιπαντικού και στη συνέχεια η επίλυση της εξισώσεις 4.1.17. Υπάρχουν δύο τρόποι να επιλυθεί η συγκεκριμένη εξίσωση μετά την γραμμικοποίηση του πάχους του λιπαντικού, με την χρήση των συναρτήσεων Bessel όπως και γίνεται στην παρούσα εργασία και με την χρήση της μεθόδου των δυναμοσειρών που φαίνεται στην βιβλιογραφία. Η

μεθοδολογία της επίλυσης με την μέθοδο των πολυωνύμων Bessel ξεκινά με τη σχέση 4.1.17 παίρνει την επόμενη μορφή.

$$f''(\theta) + \frac{3h'}{h} f'(\theta) - \lambda R^2 f(\theta) = 0 \quad (3.4.21)$$

Στην συνέχεια θεωρώντας γραμμικό το πάχος του λιπαντικού, ορίζω ως το γραμμικοποιημένο, πλέον, πάχος του λιπαντικού αυτό που φαίνεται στη σχέση 4.1.22. Έτσι η εξίσωση 4.1.21 μπορεί μετά την ολοκλήρωση της να γραφεί σαν άθροισμα των συναρτήσεων Bessel πρώτης τάξης αφού πλέον το πάχος του λιπαντικού είναι γραμμικά εξαρτώμενο από την γωνία θ όπως φαίνεται με την σχέση 4.1.23, ανάλογα με την τιμή του λ . Επειδή όμως δεν έχει φυσικό νόημα η ύπαρξη μιγαδικού αριθμού στην πίεση που αναπτύσσεται εσωτερικά του εδράνου ολισθήσεως απορρίπτεται η σχέση για $\lambda > 0$ και μένει τελικά η σχέση 4.1.24. Ενώ γενικά για τις συναρτήσεις Bessel ισχύουν οι σχέσεις 4.1.25

$$\hat{h} = (c_r + e) - 2e\theta / \pi \quad (3.4.22)$$

$$f(\theta) = \left\{ \begin{array}{l} c_7 \frac{J(1, \frac{i(c_r + e)k\pi R}{2e} ikR\theta)}{c_r\pi + e\pi - 2e\theta} + c_8 \frac{Y(1, \frac{i(c_r + e)k\pi R}{2e} ikR\theta)}{c_r\pi + e\pi - 2e\theta}, \quad \lambda = k^2 \\ -c_7 \frac{J(1, \frac{(c_r + e)k\pi R}{2e} kR\theta)}{c_r\pi + e\pi - 2e\theta} + c_8 \frac{Y(1, \frac{-(c_r + e)k\pi R}{2e} kR\theta)}{c_r\pi + e\pi - 2e\theta}, \quad \lambda = -k^2 \end{array} \right. \quad (3.4.23)$$

$$f(\theta) = -c_7 \frac{J(1, \frac{(c_r + e)k\pi R}{2e} kR\theta)}{c_r\pi + e\pi - 2e\theta} + c_8 \frac{Y(1, \frac{-(c_r + e)k\pi R}{2e} kR\theta)}{c_r\pi + e\pi - 2e\theta}, \quad \lambda = -k^2 \quad (3.4.24)$$

Όπου,

$$J(n, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \quad (3.4.25)$$

$$Y(n, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right)$$

Τέλος για τον υπολογισμό της πίεσης χρειάζεται να εφαρμοστούν οι συνοριακές συνθήκες και για το πρόβλημα της ομογενούς λύσης. Αρχικά για τις αξονικές συνοριακές συνθήκες θα πρέπει η πίεση στα δύο άκρα του στοιχείου ολισθήσεως να είναι ίσα με την ατμοσφαιρική πίεση για κάθε τιμή της γωνίας θ , όπως και στην περίπτωση της ειδικής λύσης. Θα πρέπει δηλαδή $u(\pm L_b/2, \theta) = -g(\pm L_b/2, \theta)$ ή $\varphi(\theta) = -m(\pm L_b/2)f(\theta)$. Ενώ για τις κυλινδρικές συντεταγμένες ακολουθώντας τις συνοριακές συνθήκες που τέθηκαν στην ειδική λύση θα πρέπει η πίεση να μηδενίζεται στα άκρα του στοιχείου ολισθήσεως σε ολόκληρο το μήκος τους στοιχείου δηλαδή $\varphi(0) = -m(x)f(0)$. Έτσι προκύπτουν οι συνοριακές συνθήκες 4.1.26 ως 4.1.29.

$$m(L_b/2) = 1 \quad (3.4.26)$$

$$m(-L_b/2) = 1 \quad (3.4.27)$$

$$f(0) = 0 \quad (3.4.28)$$

$$f(\pi) = 0 \quad (3.4.29)$$

Για την ακτινική, λοιπόν, συνιστώσα της πίεσης, αντικαθιστώντας το λ στην σχέση 4.1.16 προκύπτει η 4.1.30, από την οποία ολοκληρώνοντας παράγεται η 4.1.20 που έχει ήδη υπολογιστεί. Εφαρμόζοντας στη συνέχεια τις συνοριακές συνθήκες 4.1.26 και 4.1.27 προκύπτουν οι ιδιοσυναρτήσεις $m_n(x)$ που φαίνονται στη σχέση 4.1.31 όπου τα k_n είναι οι ιδιοτιμές που προκύπτουν από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στην εξίσωση 4.1.30.

$$m''(x) - k^2 m(x) = 0 \quad (3.4.30)$$

$$m_n(x) = \frac{e^{L_b k_n/2}}{1 + e^{L_b k_n/2}} e^{k_n x} + \frac{e^{-L_b k_n/2}}{1 + e^{-L_b k_n/2}} e^{-k_n x} \quad (3.4.31)$$

Με την ίδια λογική γίνεται και ο υπολογισμός της ακτινικής συνιστώσας της ομογενούς λύσης εφαρμόζοντας, δηλαδή, τις συνοριακές συνθήκες 4.1.27 και 4.1.28 στην εξίσωση 4.1.32. Από τα οποία προκύπτει η σχέση 4.1.33 από την οποία υπολογίζονται τα c_7 και c_8 . Και εφαρμόζοντας και στην τελική σχέση 4.1.35 τις ιδιοτιμές του k_n που υπολογίστηκαν ως τις ρίζες του συστήματος 4.1.34.

$$f''(\theta) + \frac{3\hat{h}}{\hat{h}} f'(\theta) + k^2 R^2 f(\theta) = 0 \quad (3.4.32)$$

$$c_7 = -c_8 \frac{Y(1, -(c_r + e)k\pi R/2e)}{J(1, -(c_r + e)k\pi R/2e)} = 1 \quad (3.4.33)$$

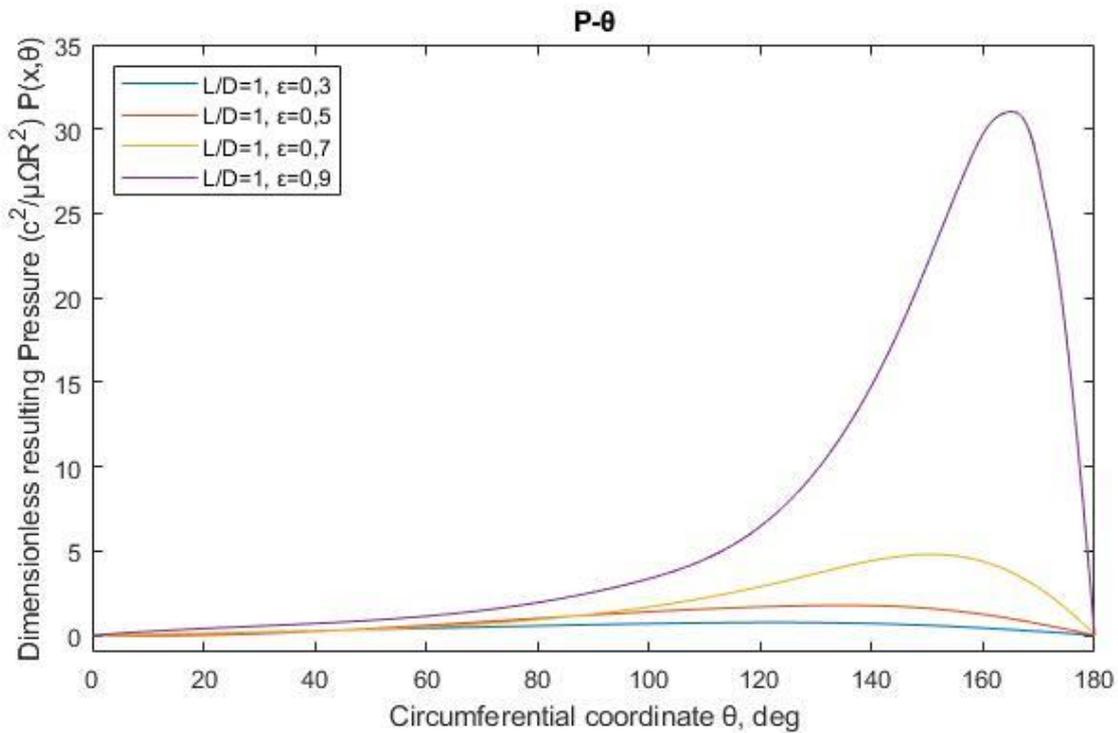
$$\begin{vmatrix} -(J(1, \frac{(c_r + e)k\pi R}{2e}) / (c_r\pi + e\pi)) & Y(1, \frac{-(c_r + e)k\pi R}{2e}) / (c_r\pi + e\pi) \\ J(1, \frac{(c_r + e)k\pi R}{2e} - k\pi R) / (c_r\pi - e\pi) & Y(1, \frac{-(c_r + e)k\pi R}{2e} + k\pi R) / (c_r\pi - e\pi) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.4.34)$$

$$f_n(\theta) = -c_7 \frac{J(1, \frac{(c_r + e)k_n\pi R}{2e} - k_n R\theta)}{c_r\pi + e\pi - 2e\theta} + c_8 \frac{Y(1, \frac{-(c_r + e)k_n\pi R}{2e} + k_n R\theta)}{c_r\pi + e\pi - 2e\theta} \quad (3.4.35)$$

Ολοκληρώνοντας υπολογίζεται η ομογενής λύση όπως φαίνεται στη σχέση 4.1.36 και χρησιμοποιώντας ένα εύρος της τάξης του $n=100$, αρκετά ικανοποιητικό μιας και οι διαφορές ήδη από το $n=80$ είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μικρότερες από την πίεση. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτουν τα διαγράμματα εμφανίζονται στο σχήμα 4.1.1 που εκφράζουν την αδιάστατη πίεση

συναρτήση της γωνίας για τέσσερεις διαφορετικούς λόγους εκκεντρότητας .

$$g(x, \theta) = \sum_n (f_n(\theta) m_n(x)) \quad (3.4.36)$$



Σχήμα 4.1.1: Κατανομή της πίεσης $P(y, x)$ συναρτήση της γωνίας θ για κυλινδρικό έδρανο ολίσθησης για τρεις διαφορετικές εκκεντρότητες

4.2. Έδρανα ολίσθησης κυματοειδούς γεωμετρίας

Περνώντας, τώρα, στον υπολογισμό των αναλυτικών λύσεων της πίεσης που δημιουργείται εσωτερικά ενός κυματοειδούς εδράνου ολίσθησης θα ακολουθηθεί η ίδια πορεία με το κεφάλαιο 4.1 με τις απαραίτητες αλλαγές που απαιτούνται. Αρχικά όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2.1 το προφίλ του λιπαντικού και οι παράγοντες που το επηρεάζουν όπως και την τελική πίεση διαφέρουν.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h_i^3}{6\mu} \frac{\partial P_i(z, \theta)}{\partial z} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h_i^3}{6\mu} \frac{\partial P_i(z, \theta)}{\partial \theta} \right) = \Omega_{eff} \frac{\partial h_i}{\partial \theta} + 2h_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.4.40)$$

Συνεχίζοντας την ίδια μέθοδο με το κεφάλαιο 4.1, η πίεση με την σειρά της μπορεί να υπολογιστεί ως το άθροισμα μιας ειδικής και μιας ομογενούς λύσης και αυτές με την σειρά τους να οριστούν ως άθροισμα και γινόμενο όρων που επηρεάζονται από την αξονική θέση και την κυλινδρική. όπως παρουσιάζονται στην σχέση 4.2.5. Μεταθέτοντας και πάλι το πρόβλημα στην επίλυση των τεσσάρων Sturm-Liouville προβλημάτων για τον υπολογισμό των $\varphi_i(\theta)$, $\psi_i(z)$, $f_i(\theta)$ και $m_i(z)$.

$$\begin{aligned} P_i(z, \theta) &= u_i(z, \theta) + g_i(z, \theta), \quad i = 1, 2, 3 \\ u_i(z, \theta) &= \varphi_i(\theta) + \psi_i(z), \quad i = 1, 2, 3 \\ g_i(z, \theta) &= f_i(\theta) m_i(z), \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.4.41)$$

Για την ειδική λύση αντικαθιστώντας προκύπτει η σχέση 4.2.6 η οποία για να ισχύει πρέπει και τα δυο μέρη της εξίσωσης να ισούνται με έναν σταθερό αριθμό C, όπως παρουσιάζεται στις σχέσεις 4.2.7 και 4.2.8.

$$-\frac{d^2 \psi_i(z)}{dz^2} = \frac{1}{R^2} \frac{d^2 \varphi_i(\theta)}{d\theta^2} + \frac{3h'_i}{R^2 h_i} \frac{d\varphi_i(\theta)}{d\theta} - \frac{6\mu\Omega_{eff} h'_i + 12\mu h'_i}{h_i^3}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.4.42)$$

$$-\frac{d^2 \psi_i(z)}{dz^2} = C, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.4.43)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{d^2 \varphi_i(\theta)}{d\theta^2} + \frac{3h'_i}{R^2 h_i} \frac{d\varphi_i(\theta)}{d\theta} - \frac{6\mu\Omega_{eff} h'_i + 12\mu h'_i}{h_i^3} = C, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.4.44)$$

Επιλέγεται για λόγους απλοποίησης του προβλήματος η συνάρτηση $\psi(z)$ να θεωρηθεί και πάλι ίση με το μηδέν, παραδοχή αποδεκτή και μαθηματικά αφού στην αντίθετη περίπτωση η ομογενής εξίσωση θα ήταν εξαρτώμενη από την ειδική για να ικανοποιηθεί η συνθήκη των οριακών συνθηκών. Προχωρώντας, στη συνέχεια, στον υπολογισμό της συνάρτησης του $\varphi_i(\theta)$, ολοκληρώνοντας την σχέση 4.2.8 προκύπτει η 4.2.9 με τους όρους της να αναλύονται στις σχέσεις 4.2.10.

$$\begin{aligned} \varphi_i(\theta) &= c_{1,i} + a \tanh \left(\frac{c_p + a_i - \beta_i}{\sqrt{u_i}} \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) u_i^{-5/2} \sigma_i + \frac{\beta_i \sigma_i - 3\xi_i \sin(\theta)}{2a_i h_i u_i^2} + \frac{\tau_i \sin(\theta) - \partial_i}{2a_i h_i^2 u_i}, \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.4.45)$$

$$\begin{aligned} \zeta_i &= 2\dot{a}\beta_i - 2a_i\dot{\beta} + (a_i^2 + \beta_i^2)\Omega_{eff} \\ \partial_i &= -12\mu R^2 a_i (a_i \dot{a} + \beta_i \dot{\beta}) + 6\mu R^2 c_p^2 (2\dot{a} + \beta_i \Omega_{eff}) + c_{2,i} c_p \beta_i \\ \xi_i &= (2\mu R^2 c_p^2 + 4\mu R^2 (a_i^2 + \beta_i^2)) \zeta_i + c_{2,i} c_p (a_i^2 + \beta_i^2) \\ \sigma_i &= 18\mu R^2 c_p \zeta_i + c_{2,i} (a_i^2 + \beta_i^2 + 2c_p^2) \\ \tau_i &= 6\mu R^2 c_p \zeta_i + c_{2,i} (a_i^2 + \beta_i^2) \\ u_i &= -c_p^2 + a_i^2 + \beta_i^2 \end{aligned} \quad (3.4.46)$$

Σαν οριακή συνθήκη, πλέον, ορίζεται ο μηδενισμός της πίεσης στα σημεία που μηδενίζεται το πάχος του λιπαντικού μετά από κάθε λοβό και στο σημείο που ξεκινάει το πάχος του λιπαντικού τα οποία υπολογίζονται από τον μηδενισμό της σχέσης 4.2.1. Τα οποία αντικαθιστώντας στη σχέση 4.2.9, υπολογίζονται οι σταθερές $c_{1,i}$ και $c_{2,i}$.

Περνώντας τώρα στον υπολογισμό τον ομογενών εξισώσεων μηδενίζοντας το αριστερό μέρος της εξισώσεως 4.2.4 για την ομογενή λύση προκύπτει η 4.2.11. Από την οποία, αντικαθιστώντας την τρίτη σχέση της 4.2.5, προκύπτει η 4.2.12 .

$$\frac{h_i^3}{6\mu} \frac{\partial^2 g_i(z, \theta)}{\partial z^2} + \frac{3h_i^2 h_i'}{6\mu R^2} \frac{\partial g_i(z, \theta)}{\partial \theta} + \frac{h_i^3}{6\mu R^2} \frac{\partial^2 g_i(z, \theta)}{\partial \theta^2} = 0, \quad i=1,2,3 \quad (3.4.47)$$

$$-\frac{m_i''(z)}{m_i(z)} = \frac{1}{R^2} \frac{f_i''(\theta)}{f_i(\theta)} + \frac{1}{R^2} \frac{3h_i' f_i'(\theta)}{h_i f_i(\theta)}, \quad i=1,2,3 \quad (3.4.48)$$

Η τελευταία για να ισχύει, όπως έχει προαναφερθεί, αφού το αριστερό και το δεξί της μέρος είναι συναρτήσεις διαφορετικής μεταβλητής θα πρέπει να είναι ίσες με έναν σταθερό αριθμό λ . Έτσι προκύπτουν οι σχέσεις 4.2.13 και 4.2.14.

$$-\frac{m_i''(z)}{m_i(z)} = \lambda, \quad i=1,2,3 \quad (3.4.49)$$

$$f_i''(\theta) + \frac{3h_i'}{h_i} f_i'(\theta) - \lambda R^2 f_i(\theta) = 0, \quad i=1,2,3 \quad (3.4.50)$$

Όπου επιλύοντας την σχέση 4.2.13 με τον ίδιο τρόπο με την σχέση 4.1.16 και για τις ίδιες συνοριακές συνθήκες με το προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή $m_i(-L_b/2) = m_i(L_b/2) = 1$ προκύπτει η ιδιοσυνάρτηση που φαίνεται στη σχέση 4.1.15.

$$m_{i,j}(z) = \frac{e^{\frac{L_b k_j}{2}}}{1 + e^{L_b k_j}} \left(e^{k_j z} + e^{-k_j z} \right), \quad (3.4.51)$$

$$i=1,2,3(\text{Lobe}), \quad j=1,2,\dots$$

Ολοκληρώνοντας την μεθοδολογία του κεφαλαίου 4.1 για να επιλυθεί η εξίσωση 4.2.14 θα πρέπει πρώτα να γραμμικοποιηθεί το πάχος του λιπαντικού. Η γραμμικοποίηση αυτή φαίνεται στη σχέση 4.2.16 και εφαρμόζοντας την στην σχέση 4.2.14 προκύπτει η 4.2.17.

$$h_i^* = \underbrace{\left(\frac{h_i(\theta_i^0) - h_i(\theta_i^*)}{\theta_i^0 - \theta_i^*} \right)}_{A_i} \theta + \underbrace{\left(h_i(\theta_i^0) - \frac{h_i(\theta_i^0) - h_i(\theta_i^*)}{\theta_i^0 - \theta_i^*} \theta_i^0 \right)}_{B_i}, \quad i=1,2,3 \quad (3.4.52)$$

$$f_i''(\theta) + \frac{3A_i}{A_i \cdot \theta + B_i} f_i'(\theta) + k^2 R^2 f_i(\theta) = 0, \quad i=1,2,3 \quad (3.4.53)$$

Από την εξίσωση 3.2.17, προκύπτει η αναλυτική λύση 3.2.18 χρησιμοποιώντας τα πολύωνμα Bessel. Αντικαθιστώντας, τώρα, στην εξίσωση 3.2.18 την 3.1.25 προκύπτει η σχέση 3.2.19.

$$f_i(\theta) = c_{1,i} \frac{J\left(1, \frac{B_i k R}{A_i} + k R \theta\right)}{A_i \cdot \theta + B_i} + c_{2,i} \frac{Y\left(1, \frac{B_i k R}{A_i} + k R \theta\right)}{A_i \cdot \theta + B_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.4.54)$$

$$f_i(\theta) = \sqrt{\frac{2A_i}{kR\pi(A_i \cdot \theta + B_i)^3}} \left(c_{1,i} \cos\left(\frac{kR(A_i \cdot \theta + B_i)}{A_i} - \frac{3\pi}{4}\right) + c_{2,i} \sin\left(\frac{kR(A_i \cdot \theta + B_i)}{A_i} - \frac{3\pi}{4}\right) \right) \quad (3.4.55)$$

Στην παραπάνω εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες που ασκήθηκαν και στην ειδική λύση, δηλαδή $f_i(\theta_i^0) = f_i(\theta_i^*) = 0$, γίνεται ο υπολογισμός των ιδιοτιμών του k_j για κάθε έναν από τους τρεις λοβούς. Έτσι η ομογενής λύση παίρνει τη μορφή της εξίσωσης 4.2.20. Με το $\bar{f}_{i,j}(\theta)$ να ορίζεται ως την κανονικοποιημένη συνάρτηση των ιδιοσυναρτήσεων $f_{i,j}(\theta)$ και φαίνεται στη σχέση 4.2.21. Τέλος αντικαθιστώντας στην σχέση 4.2.20 την 4.2.21 και την 4.2.15 προκύπτει η 4.2.22.

$$g_i(z, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} (m_{i,j}(z) \bar{f}_{i,j}(\theta)) \quad (3.4.56)$$

$$\bar{f}_{i,j}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} R^2 h_i^* 3 f_{i,j}(\theta) d\theta}} f_{i,j}(\theta) \quad (3.4.57)$$

$$g_i(z, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(c_{i,j} \frac{e^{\frac{L_b k_j}{2}}}{1 + e^{L_b k_j}} (e^{k_j z} + e^{-k_j z}) \bar{f}_{i,j}(\theta) \right) \quad (3.4.58)$$

Ολοκληρώνοντας με τον υπολογισμό της πίεσης για τον υπολογισμό των σταθερών $c_{i,j}$ εφαρμόζονται στη σχέση 4.2.22 οι συνοριακές συνθήκες για τον μηδενισμό της πίεσης στα άκρα του εδράνου δηλαδή $P_i(-L_b/2, \theta) = P_i(L_b/2, \theta) = 0$. Έτσι προκύπτει η σχέση 4.2.23 για τον υπολογισμό των σταθερών $c_{i,j}$. Ενώ αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 4.2.22, 4.2.23 και 4.2.9 προκύπτει η 4.2.24, που εκφράζει την συνολική πίεση που δημιουργείται ανάμεσα στον άξονα και στο κυματοειδές έδρανο ολίσθησης.

$$c_{i,j} = \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} -\varphi_i(\theta) R^2 h_i^* 3 \bar{f}_{i,j}(\theta) d\theta \quad (3.4.59)$$

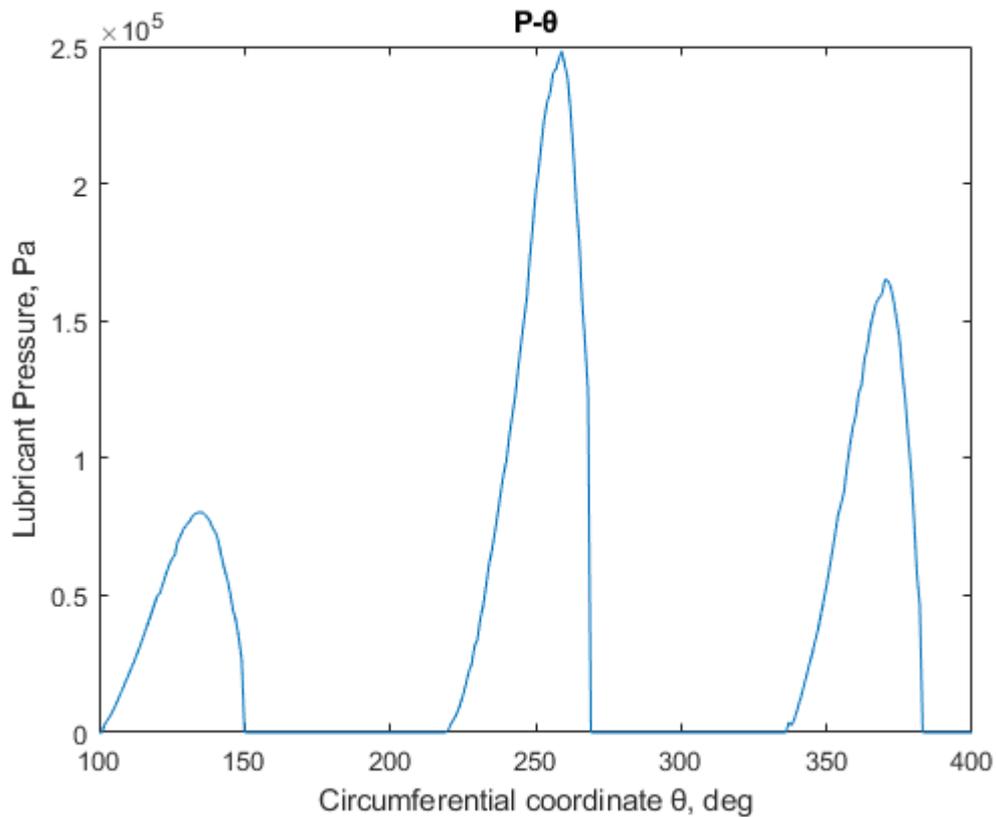
$$P_i(z, \theta) = \varphi_i(\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} c_{i,j} \cdot \left(\frac{e^{\frac{L_b k_j}{2}}}{1 + e^{L_b k_j}} (e^{k_j z} + e^{-k_j z}) \bar{f}_{i,j}(\theta) \right) \quad (3.4.60)$$

Ενώ η μορφή της καμπύλης που δημιουργείται από την εξίσωση 4.2.24 φαίνεται στο διάγραμμα 4.2.1 για ένα συγκεκριμένο έδρανο ολίσθησης που θεωρήθηκε με τις παραμέτρους του πίνακα 4.2 για να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα σύμφωνα με την εργασία [7] όπως και έγινε. Επίσης σε αυτό το σημείο καλό είναι να αναφερθεί ο αριθμός Sommerfeld που ορίζεται ως S' και δίνεται από την σχέση 4.2.25. Ο παραπάνω αριθμός οποίος θα αξιοποιηθεί ιδιαίτερα στην δυναμική ανάλυση όπως θα φανεί στο επόμενο κεφάλαιο. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι για σταθερές συνθήκες λειτουργίας της εγκατάστασης με το ίδιο έδρανο ολίσθησης ο αριθμός Sommerfeld εξαρτάτε από το ελάχιστο πάχος του λιπαντικού το οποίο με την σειρά του εξαρτάται από την εκκεντρότητα. Τέλος στο διάγραμμα 4.2.2 φαίνεται η μορφή της πίεσης για διάφορες τιμές του αριθμού Sommerfeld.

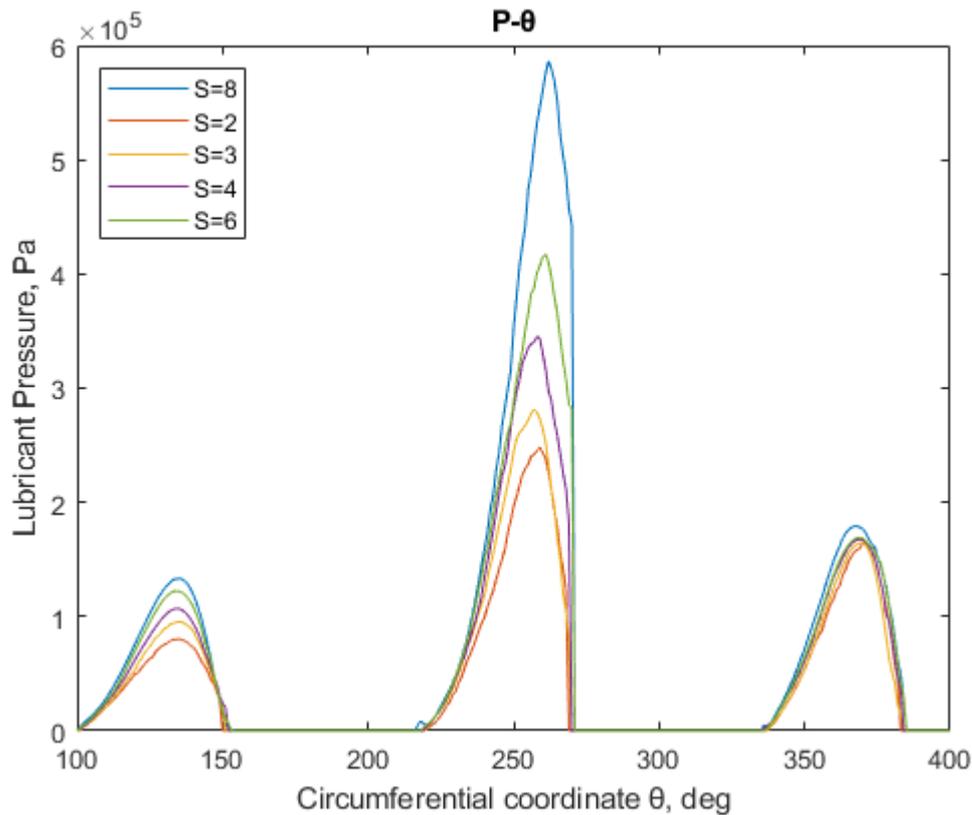
$$S' = (\mu L_b \Omega R^3) / (\pi W c_b^2) \quad (3.4.61)$$

Μέγεθος	Τιμή
Ταχύτητα περιστροφής (rpm)	1500
Ακτίνα εδράνου (mm)	60
Μήκος εδράνου (mm)	40
Διάμετρος έκκεντρου (mm)	30
Ποκνότητα (kg/m ³)	7800
Ιξώδες λιπαντικού (Pa s)	0.0166
Ελάχιστο αρχικό πάχος λιπαντικού (mm)	0.009
Μέγιστο αρχικό πάχος λιπαντικού (mm)	0.025

Πίνακας 4.2: Χαρακτηριστικά διάταξης για έλεγχο πίεσης

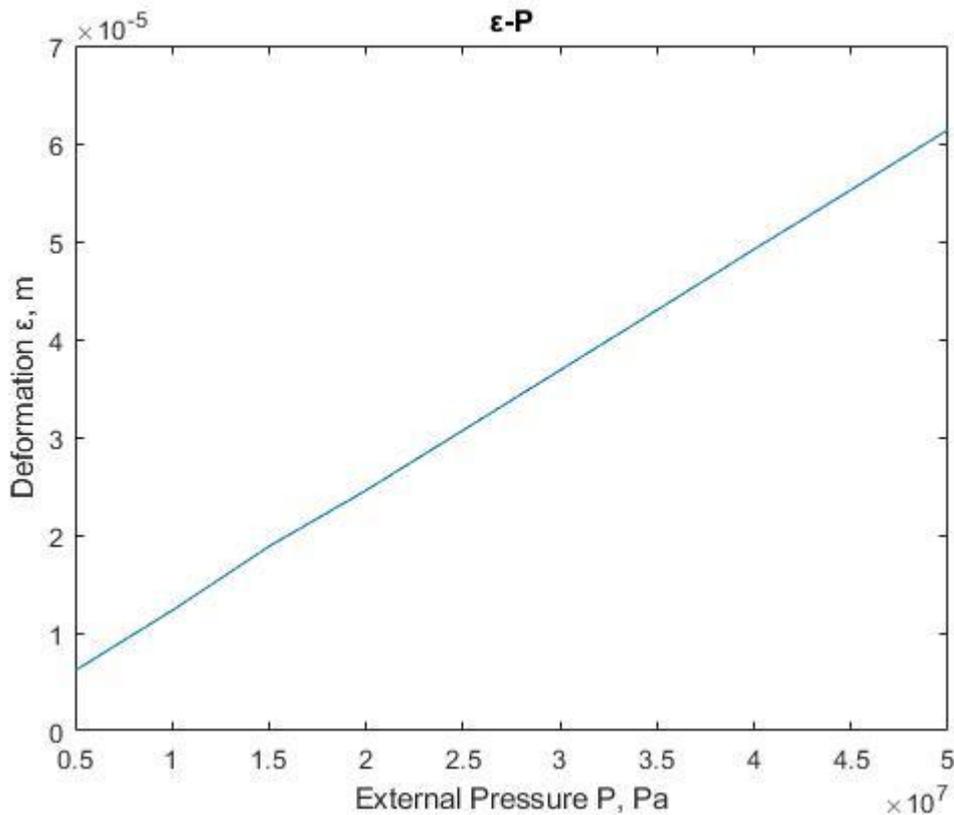


Διάγραμμα 4.2.1: Αναλυτικός υπολογισμός του προφίλ της πίεσης σε κυματοειδές έδρανο



Διάγραμμα 4.2.2: Αναλυτικός υπολογισμός του προφίλ της πίεσης σε κυματοειδές έδρανο για διάφορες τιμές του αριθμού Sommerfeld

Τέλος παρουσιάζεται στο διάγραμμα 4.2.3 με την σχέση της πίεσης που ασκείται στους λοβούς και την παραμορφωσιμότητα τους η οποία ισούται με την μύωση του ελάχιστου πάχους του λιπαντικού. Παρουσιάζεται, δε σε αυτό το σημείο για να φανεί η διαφορά τάξεως μεγέθους στις δυο πιέσεις, αυτή που εφαρμόζεται εξωτερικά στον λοβό και αυτή που ασκείται από την περιστροφή του άξονα. Όστε να γίνει κατανοητό με αυτό τον τρόπο ότι δεν μπορεί να επηρεαστεί η γεωμετρία εσωτερικά και να επανέλθει στην αρχική. Ο υπολογισμός της εξήσωσης πίεσης παραμορφωσιμότητας έγινε αρχικά με την μοντελοποίηση του εδράνου ολίσθησης στο υπολογιστικό πρόγραμμα του ANSYS στη συνέχεια υπολογίστηκε η παραμόρφωση της εκάστοτε τιμής της πίεσης και ολοκληρώθηκε με μια παρεμβολή στο σημεία για να εξαχθεί η τελική καμπύλη.



Διάγραμμα 4.2.3: Γραφική απεικόνιση πίεσης που ασκείται στους θαλάμους ρευστού με την παραμόρφωση τους.

5. Δυναμική μελέτη κυματοειδούς εδράνου ολίσθησης

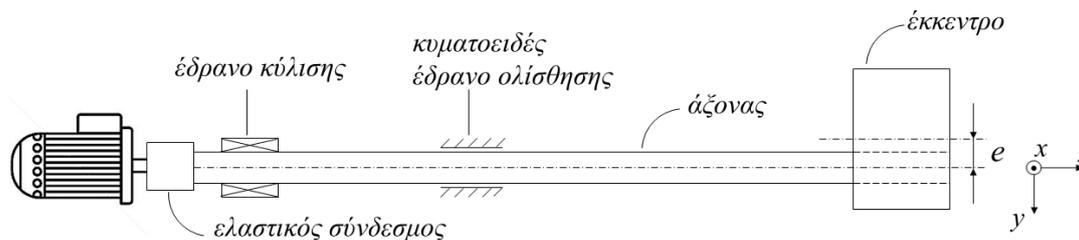
Το πλεονέκτημα της χρήσης κυματοειδών εδράνων ολίσθησης, έτσι όπως αυτά παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα Κεφάλαια, αφορούν τη δυνατότητα δυναμικής μεταβολής των παραμέτρων που αφορούν την απόσβεση και την στιβαρότητά τους. Οι μεταβολές αυτές έχουν άμεση επίδραση στα δυναμικά χαρακτηριστικά συνολικά της διάταξης που τα έδρανα αυτά αποτελούν μέρος, με απώτερο σκοπό τον δυναμικό έλεγχο τους σε πραγματικές συνθήκες. Ο έλεγχος αυτός αφορά κυρίως την ρύθμιση των ιδιοσυχνοτήτων του συστήματος σε σχέση με τη συχνότητα περιστροφής του.

Ο ρόλος των κυματοειδών εδράνων ολίσθησης σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα είναι διττός. Αφενός, μπορούν να ρυθμίσουν τα επίπεδα ταλαντώσεων του άξονα μεταβάλλοντας τη στιβαρότητά τους. Αφετέρου μπορεί να οδηγήσουν το σύστημα σε αντισυντονισμό, οπότε και λόγω της παρουσίας φαινομένων απόσβεσης το πλάτος του συντονισμού γίνεται πολύ μικρό. Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται και οι δύο αυτές λειτουργίες των κυματοειδών εδράνων ολίσθησης πάνω σε μία διάταξη που προσαρμόζεται κατάλληλα για κάθε περίπτωση.

5.1. Αριθμητικό μοντέλο πρόβλεψης γεωμετρικών αποκλίσεων

Με γνώμονα την εξέταση της λειτουργίας ενός κυματοειδούς εδράνου ολίσθησης σχεδιάζεται μια κατάλληλη διάταξη, το σκαρίφημα της οποίας παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.1. Η εξεταζόμενη διάταξη αποτελείται ουσιαστικά από έναν άξονα που εδράζεται σε δύο σημεία με ένα έδρανο κύλισης και ένα κυματοειδές έδρανο ολίσθησης. Από την πλευρά του εδράνου κύλισης τοποθετείται ελαστικός σύνδεσμος που μεταφέρει την

κίνηση στον άξονα από έναν ηλεκτρικό κινητήρα. Από την πλευρά του κυματοειδούς εδράνου ολίσθησης ο άξονας σχηματίζει έναν πρόβολο, στην άκρη του οποίου βρίσκεται τοποθετημένο ένα έκκεντρο. Με την περιστροφή του κινητήρα, περιστρέφεται ο άξονας και το έκκεντρο που βρίσκεται συνδεδεμένο με αυτόν και κάνουν την εμφάνισή τους φυγόκεντρες δυνάμεις που διεγείρουν συνολικά το σύστημα.



Σχήμα 5.1.1: Διάταξη ελέγχου λειτουργίας κυματοειδούς εδράνου ολίσθησης.

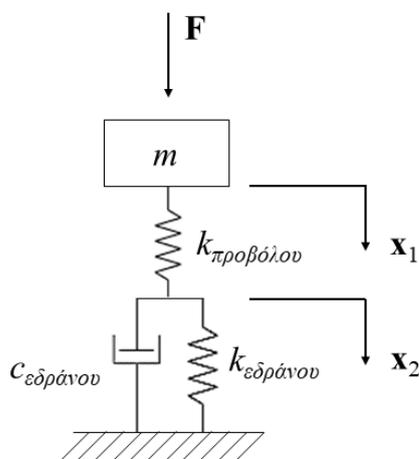
Η μοντελοποίηση της διάταξης του Σχήματος 5.1.1 παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.1.2. Το υποσύστημα του άξονα με το έκκεντρο μοντελοποιείται ως ένα σύστημα μάζας – ελατηρίου με δύο βαθμούς ελευθερίας $\mathbf{x}_1 = [x_1 \ y_1]^T$. Η καμπτική δυσκαμψία του προβολικού άξονα δίνεται από την σχέση 5.1.1:

$$k_{\pi} = \frac{3EI}{L^3} \quad (3.4.62)$$

Αφού το σύστημα είναι δύο βαθμών ελευθερίας, το μητρώο στιβαρότητας προκύπτει ως:

$$\mathbf{K}_{\pi} = \begin{bmatrix} k_{\pi} & 0 \\ 0 & k_{\pi} \end{bmatrix}$$

Η στρεπτική δυσκαμψία του άξονα αμελείται αφού στην διάταξη δεν υπάρχει φορτίο που να εμποδίζει την ελεύθερη περιστροφή του άξονα. Επίσης, αμελείται και η απόσβεση του ίδιου του υποσυστήματος εφόσον είναι σημαντικά μικρότερη με εκείνη που διατελεί το έδρανο ολίσθησης.



Σχήμα 5.1.2: Μοντελοποίηση διάταξης ελέγχου κυματοειδούς εδράνου ολίσθησης

Τα πράγματα γίνονται πιο σύνθετα στον υπολογισμό των μητρώων του εδράνου αφού αρχικά πρέπει να υπολογιστούν οι δυνάμεις κατά τους άξονες x και y που προκύπτουν από την εξίσωση της πίεσης 4.2.24, και παρουσιάζονται στις εξισώσεις 5.1.2 και 5.1.3. Στη συνέχεια για τον υπολογισμό των ζητούμενων μητρώων υπολογίζονται οι μερικές παράγωγοι που παρουσιάζονται στις σχέσεις 5.1.4 και 5.1.5. Για να προκύψουν τελικά οι σχέσεις 5.1.6α ως 5.1.6δ και 5.1.7α ως 5.1.7δ.

$$F_X = -\sum_{i=1}^3 \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} (\varphi_i(\theta) \cos(\theta) d\theta + 4R \sum_{j=1}^{\infty} (\int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \frac{c_{i,j}}{k_j} \frac{e^{\frac{L_b k_j}{2}}}{1+e^{L_b k_j}} \sinh\left(\frac{k_j L_b}{2}\right) \cos(\theta) \bar{f}_{i,j}(\theta))) \quad (3.4.63)$$

$$F_Y = -\sum_{i=1}^3 \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} (RL_b \varphi_i(\theta) \sin(\theta) d\theta + 4R \sum_{j=1}^{\infty} (\int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \frac{c_{i,j}}{k_j} \frac{e^{\frac{L_b k_j}{2}}}{1+e^{L_b k_j}} \sinh\left(\frac{k_j L_b}{2}\right) \sin(\theta) \bar{f}_{i,j}(\theta))) \quad (3.4.64)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} \quad (3.4.65)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} \quad (3.4.66)$$

$$K_{YY} = \frac{\partial F_Y}{\partial y} = -RL_b \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^3 \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \varphi_i(\theta) \sin(\theta) d\theta - 4R \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \frac{c_{i,j}}{k_j} \frac{e^{\frac{L_b k_j}{2}}}{1+e^{L_b k_j}} \sinh\left(\frac{k_j L_b}{2}\right) \sin(\theta) \bar{f}_{i,j}(\theta) \quad (5.1.6\alpha)$$

$$K_{XX} = \frac{\partial F_x}{\partial x} = -RL_b \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^3 \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \varphi_i(\theta) \cos(\theta) d\theta - 4R \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \frac{c_{i,j}}{k_j} \frac{e^{\frac{L_b k_j}{2}}}{1+e^{L_b k_j}} \sinh\left(\frac{k_j L_b}{2}\right) \cos(\theta) \bar{f}_{i,j}(\theta) \quad (5.1.6\beta)$$

$$K_{YX} = \frac{\partial F_Y}{\partial x} = -RL_b \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^3 \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \varphi_i(\theta) \sin(\theta) d\theta - 4R \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \frac{c_{i,j}}{k_j} \frac{e^{\frac{L_b k_j}{2}}}{1+e^{L_b k_j}} \sinh\left(\frac{k_j L_b}{2}\right) \sin(\theta) \bar{f}_{i,j}(\theta) \quad (5.1.6\gamma)$$

$$K_{XY} = \frac{\partial F_X}{\partial y} = -RL_b \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^3 \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \varphi_i(\theta) \cos(\theta) d\theta - 4R \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \frac{c_{i,j}}{k_j} \frac{e^{\frac{L_b k_j}{2}}}{1+e^{L_b k_j}} \sinh\left(\frac{k_j L_b}{2}\right) \cos(\theta) \bar{f}_{i,j}(\theta) \quad (5.1.6\delta)$$

$$C_{YY} = \frac{\partial F_Y}{\partial \dot{y}} = -RL_b \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \sum_{i=1}^3 \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \varphi_i(\theta) \sin(\theta) d\theta - 4R \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \frac{c_{i,j}}{k_j} \frac{e^{\frac{L_b k_j}{2}}}{1+e^{L_b k_j}} \sinh\left(\frac{k_j L_b}{2}\right) \sin(\theta) \bar{f}_{i,j}(\theta) \quad (5.1.7\alpha)$$

$$C_{xx} = \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} = -RL_b \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \sum_{i=1}^3 \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \varphi_i(\theta) \cos(\theta) d\theta$$

$$-4R \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \frac{c_{i,j}}{k_j} \frac{e^{\frac{L_b k_j}{2}}}{1+e^{L_b k_j}} \sinh\left(\frac{k_j L_b}{2}\right) \cos(\theta) \bar{f}_{i,j}(\theta)$$
(5.1.7β)

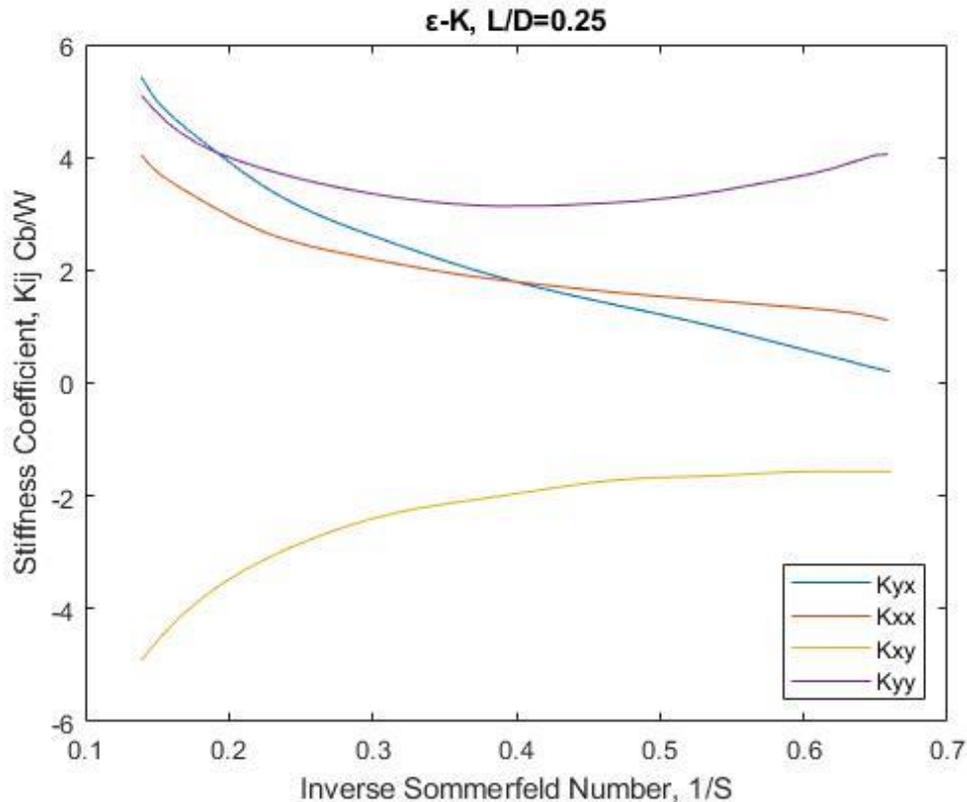
$$C_{yx} = \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} = -RL_b \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \sum_{i=1}^3 \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \varphi_i(\theta) \sin(\theta) d\theta$$

$$-4R \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \frac{c_{i,j}}{k_j} \frac{e^{\frac{L_b k_j}{2}}}{1+e^{L_b k_j}} \sinh\left(\frac{k_j L_b}{2}\right) \sin(\theta) \bar{f}_{i,j}(\theta)$$
(5.1.7γ)

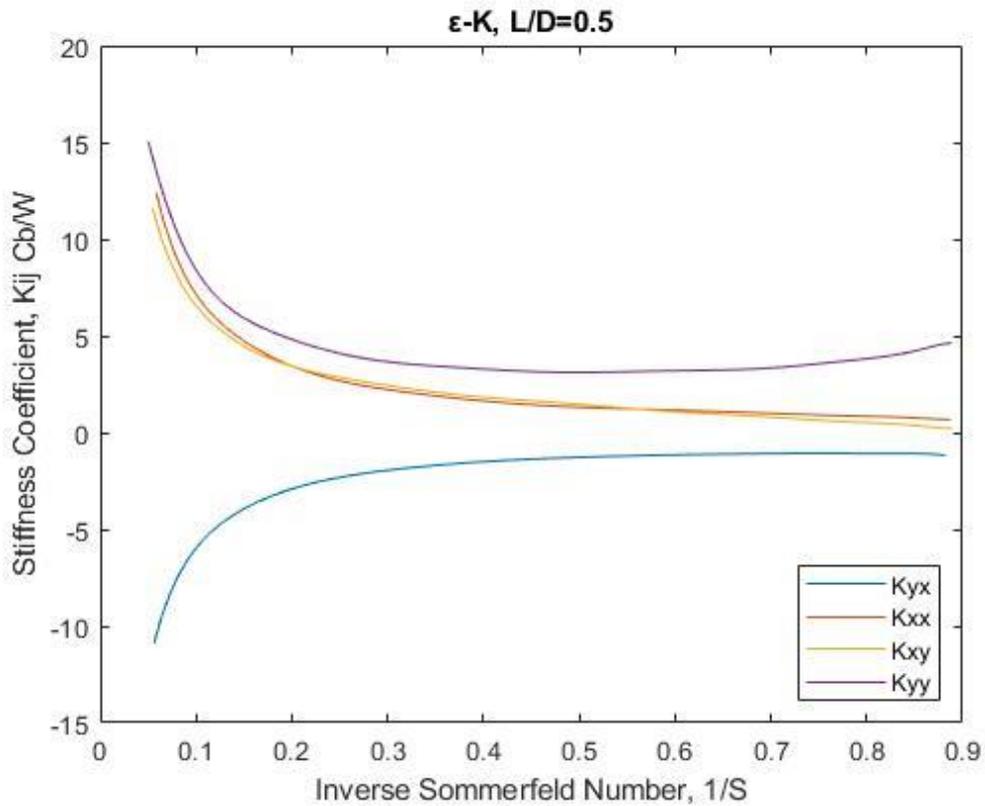
$$C_{xy} = \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} = -RL_b \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \sum_{i=1}^3 \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \varphi_i(\theta) \sin(\theta) d\theta$$

$$-4R \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_i^0}^{\theta_i^*} \frac{c_{i,j}}{k_j} \frac{e^{\frac{L_b k_j}{2}}}{1+e^{L_b k_j}} \sinh\left(\frac{k_j L_b}{2}\right) \sin(\theta) \bar{f}_{i,j}(\theta)$$
(5.1.7δ)

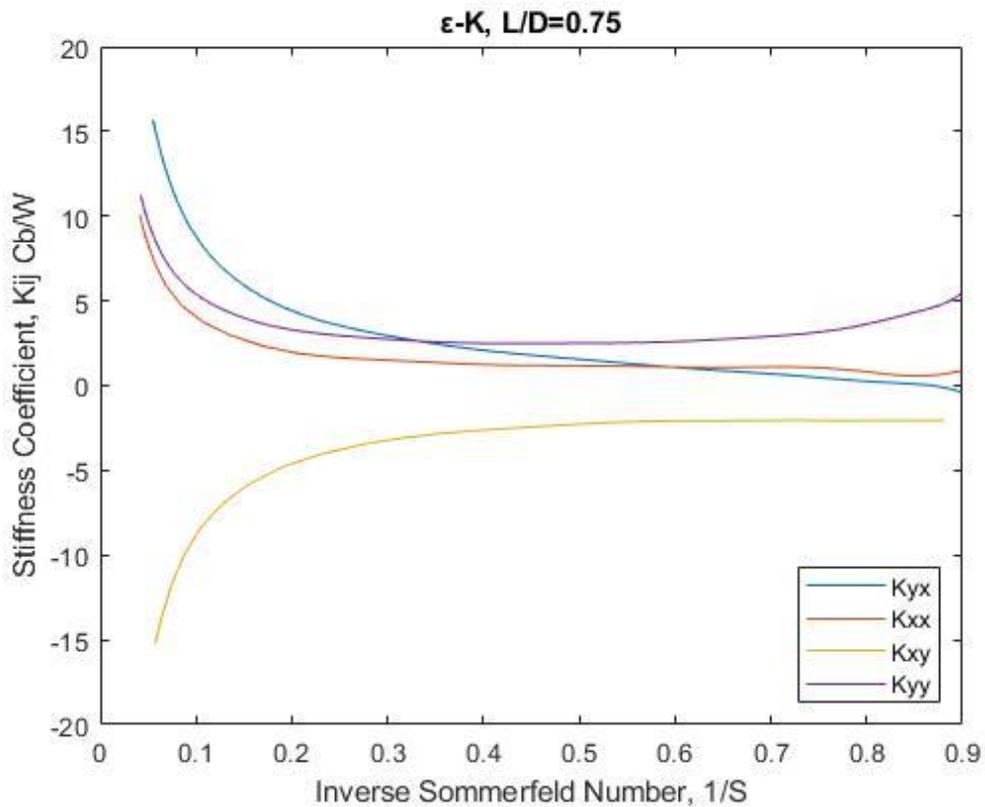
Επειδή όμως ο παραπάνω υπολογισμός εκ νέου απαιτεί μεγάλη υπολογιστική ισχύ και συνεπώς μεγάλο χρόνο, πράγμα απαγορευτικό για την χρήση που επιθυμούμε αφού θα πρέπει να γίνεται επανυπολογισμός των μητρώων όσο λειτουργεί η εγκατάσταση, επιλέχθηκε μια μεθοδολογία που θα επιτρέπει την σύντομο υπολογισμό τους. Υπολογίστηκαν, δηλαδή, τα παραπάνω μητρώα για 4 σταθερές περιπτώσεις ανάλογα με τον λόγο μήκους προς διάμετρο του εδράνου, συνάρτηση του αριθμού Sommerfeld, και στην συνέχεια θα γίνεται παρεμβολή της κάθε περίπτωσης που μελετάται σε μια από αυτές. Εποπτικά οι 4 αυτές περιπτώσεις για τα μητρώα στιβαρότητας και απόσβεσης φαίνονται στα διαγράμματα 5.1.1α ως 5.1.1δ και 5.1.2α ως 5.1.2δ αντίστοιχα.



Διάγραμμα 5.1.1α: Μητρώο στιβαρότητας συναρτήσει του αριθμού Sommerfeld για λόγο μήκους προς διάμετρο 0.25.

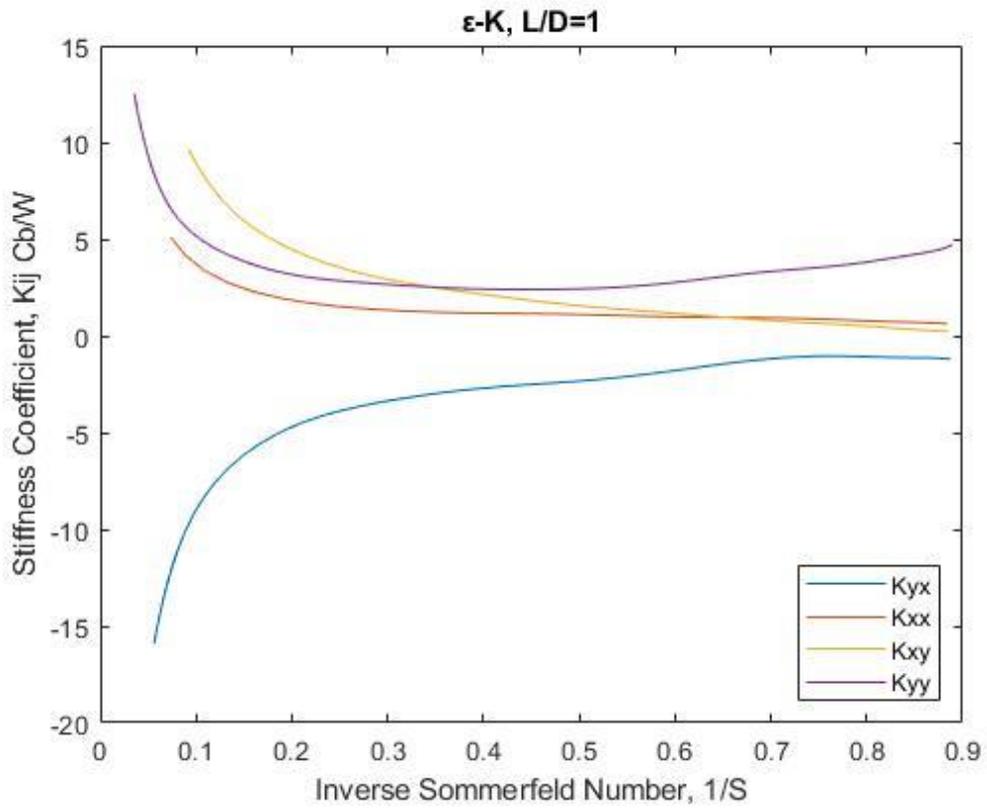


Διάγραμμα 5.1.1β: Μητρώο στιβαρότητας συναρτήσει του αριθμού Sommerfeld για λόγο μήκους προς διάμετρο 0.5.

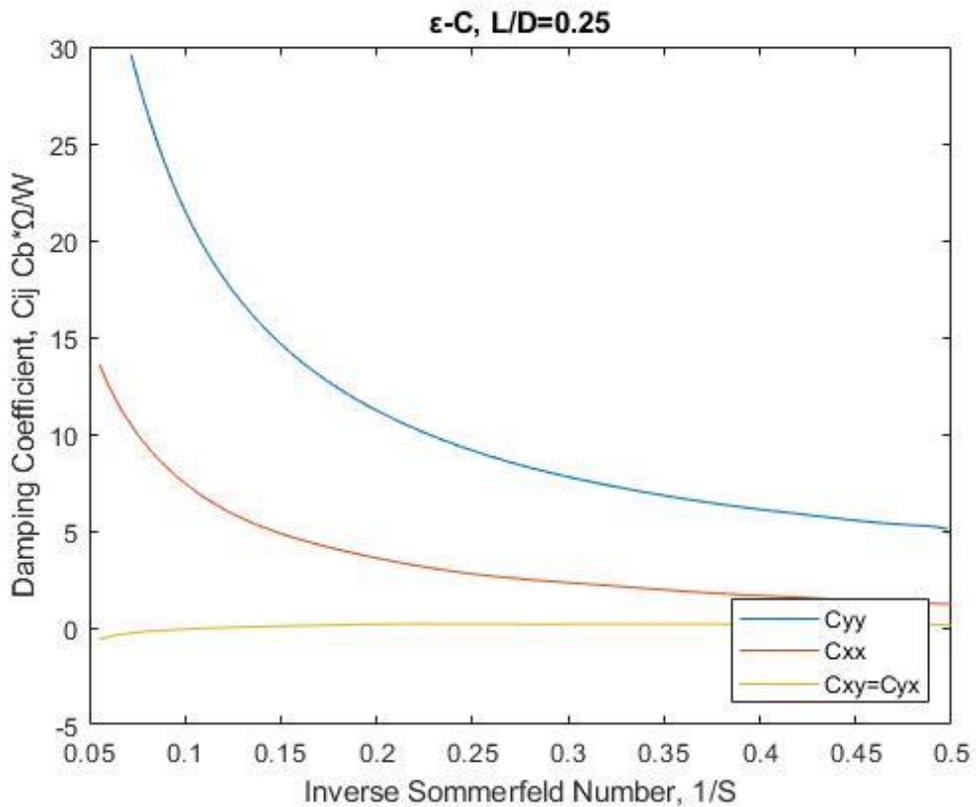


Διάγραμμα 5.1.1γ: Μητρώο στιβαρότητας συναρτήσει του αριθμού

Sommerfeld για λόγο μήκους προς διάμετρο 0.75.

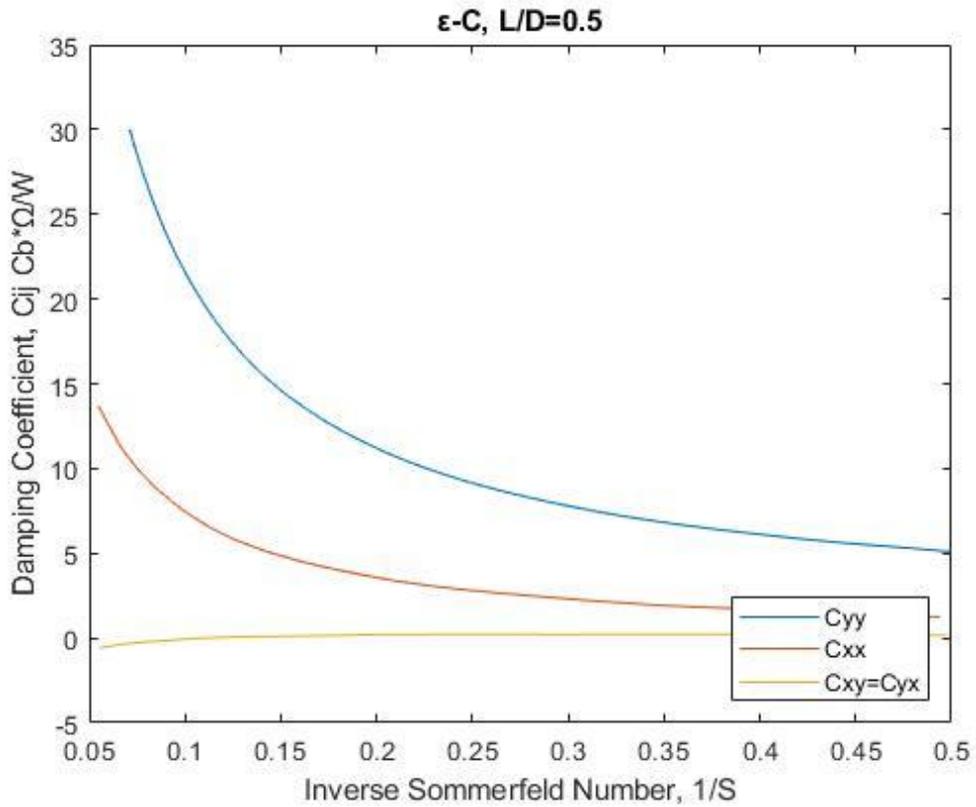


Διάγραμμα 5.1.1δ: Μητρώο στιβαρότητας συναρτήσει του αριθμού Sommerfeld για λόγο μήκους προς διάμετρο 1.

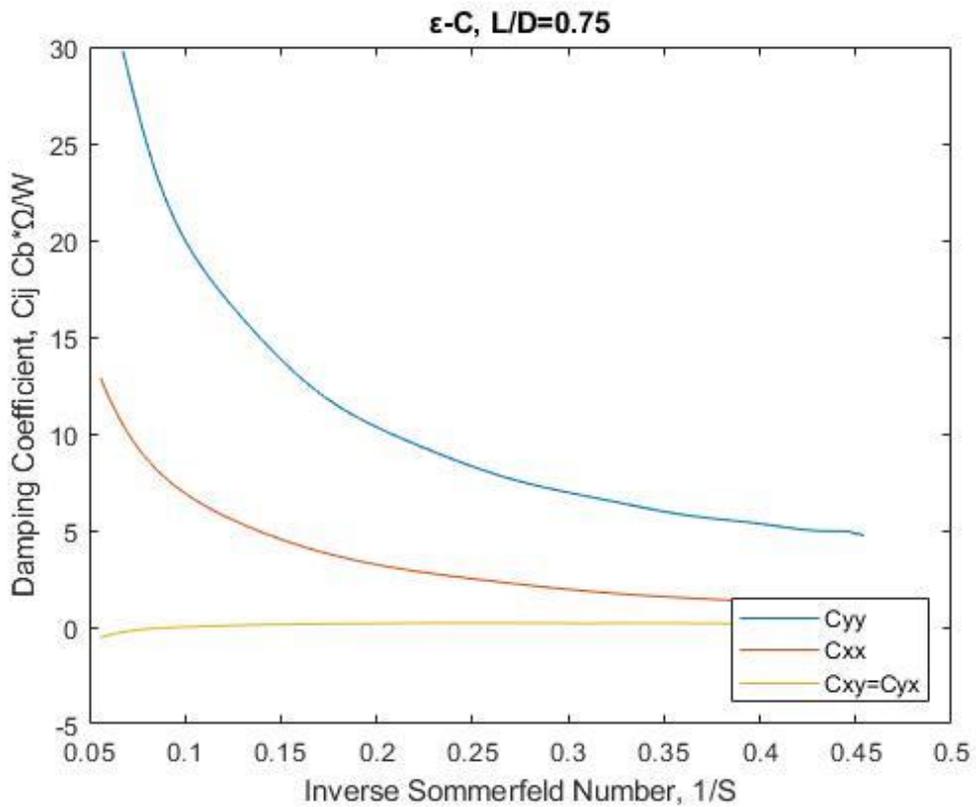


Διάγραμμα 5.1.2α: Μητρώο απόσβεσης συναρτήσει του αριθμού

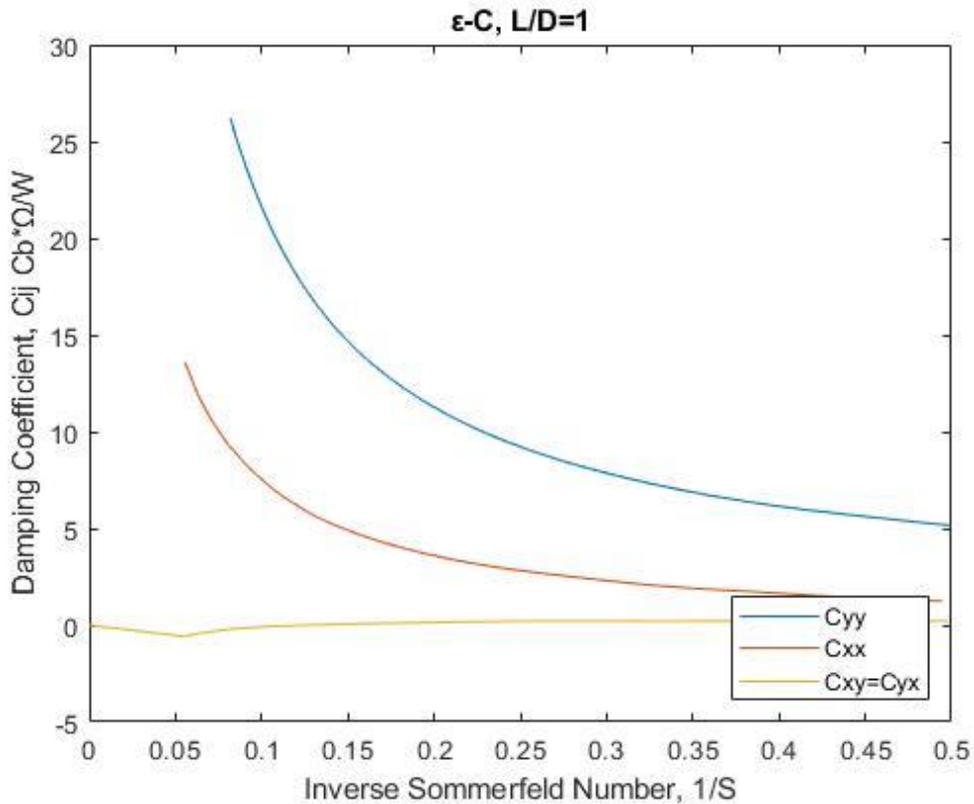
Sommerfeld για λόγο μήκους προς διάμετρο 0.25.



Διάγραμμα 5.1.2β: Μητρώο απόσβεσης συναρτήσει του αριθμού Sommerfeld για λόγο μήκους προς διάμετρο 0.5.

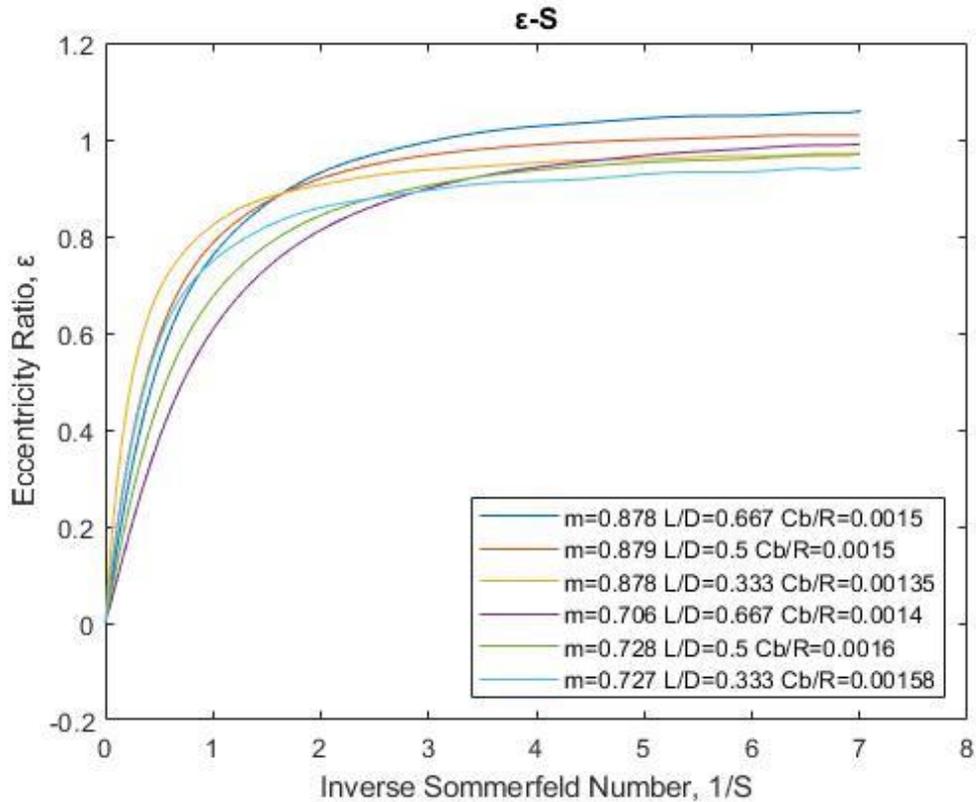


Διάγραμμα 5.1.2γ: Μητρώο απόσβεσης συναρτήσει του αριθμού Sommerfeld για λόγο μήκους προς διάμετρο 0.75.



Διάγραμμα 5.1.2δ: Μητρώο απόσβεσης συναρτήσει του αριθμού Sommerfeld για λόγο μήκους προς διάμετρο 1.

Ο λόγος που επιλέχθηκε τα μητρώα να υπολογιστούν ως προς τον αριθμό Sommerfeld είναι επειδή εκείνος με τη σειρά του, όπως και προαναφέρθηκε, για σταθερές συνθήκες λειτουργίας της εγκατάστασης με το ίδιο έδρανο ολίσθησης εξαρτάτε από το ελάχιστο πάχος του λιπαντικού το οποίο με την σειρά του εξαρτάτε από την εκκεντρότητα. Τα οποία είναι ακριβώς αυτά που επηρεάζονται όταν αλλάζει το πάχος των λοβών που πρόκειται να γίνεται για να αλλάζει η ιδιοσυχνότητα. Εποπτικά η σχέση αριθμού Sommerfeld και της εκκεντρότητας για διαφορετικά έδρανα ολίσθησης φαίνεται στο διάγραμμα 5.1.3.



Διάγραμμα 5.1.3: Μέτρο εκκεντρότητας συναρτήσει του αριθμού Sommerfeld

5.2. Μοντελοποίηση δυναμικού συστήματος

Αφού η μάζα του εδράνου ολίσθησης που συμμετέχει στην ταλάντωση είναι ένα μικρό ποσοστό της ήδη μικρής μάζας του εδράνου, η μοντελοποίηση του γίνεται με ένα σύστημα ελατηρίου-αποσβεστήρα, τα χαρακτηριστικά των οποίων δίνονται παραπάνω. Οι εξισώσεις που περιγράφουν το μοντέλο του Σχήματος 2.4.2 δίνονται από τις σχέσεις 5.2.1.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{K}_\pi (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) &= \mathbf{F} \\ \mathbf{C}_\varepsilon \dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{K}_\varepsilon \mathbf{x}_2 &= \mathbf{K}_\pi (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (3.4.67)$$

Η δύναμη \mathbf{F} που διεγείρει το σύστημα προκαλείται λόγω της ύπαρξης του έκκεντρου. Η δύναμη αυτή υπολογίζεται από σχέση 5.2.2. Όπου \bar{x} το κέντρο μάζας του έκκεντρου που υπολογίζεται από την σχέση 5.2.3.

$$F_0 = m_{\varepsilon\kappa\kappa} \bar{x} \Omega^2 \quad (3.4.68)$$

$$\bar{x} = \frac{\pi R_{\varepsilon\kappa\kappa}^2 e}{\pi (R_{\varepsilon\kappa\kappa}^2 - R_{\acute{\alpha}\xi\omicron\nu\alpha}^2)} \quad (3.4.69)$$

Η δύναμη αυτή μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με μία ημιτονοειδή καμπύλη σε κάθε άξονα με διαφορά φάσης 90° . Επομένως, το διάνυσμα της φυγόκεντρου δύναμης στο επίπεδο (x, y) δίνεται από τη σχέση 5.2.5.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_0 \sin(\Omega t) \\ F_0 \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (3.4.70)$$

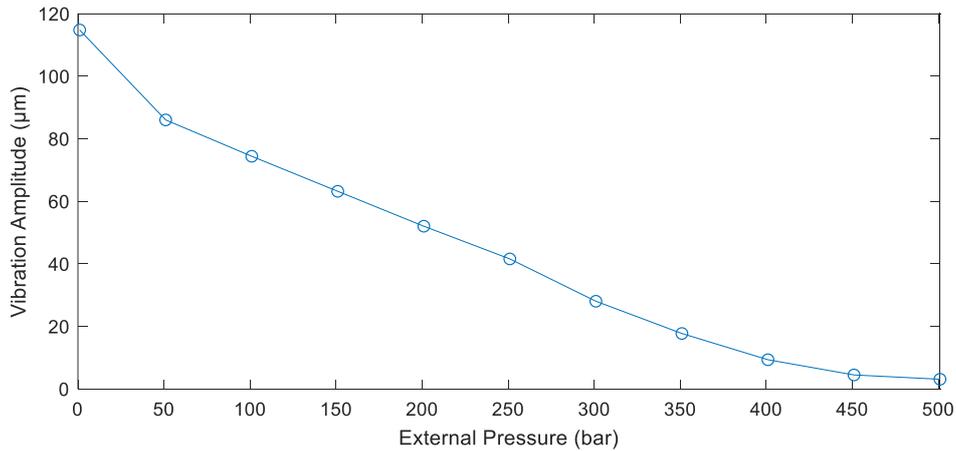
4.3. Προσομοίωση λειτουργίας κυματοειδών εδράνων

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ο ρόλος ενός εδράνου κύλισης κυματοειδούς μορφής μπορεί να είναι διπλός. Η πρώτη λειτουργία που θα επιτελεί αφορά την δυνατότητα ρύθμισης του επιπέδου των ταλαντώσεων ενός συστήματος μεταβάλλοντας την πίεση που ασκείται εξωτερικά των εδράνων και κατά συνέπεια την γεωμετρία του εσωτερικού δακτυλίου. Η αλλαγή της γεωμετρίας του εδράνου επιφέρει μεταβολή της τιμής της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής του πάχους του λιπαντικού. Με αυτόν τον τρόπο, αλλάζει η τιμή της εκκεντρότητας του άξονα που εδράζεται στο έδρανο, που με τη σειρά της έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή των μητρώων στιβαρότητας και απόσβεσης του εδράνου και, τελικά, όλου το συστήματος. Η αλλαγή των μητρώων αυτών θα αλλάξει τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος και θα επηρεάσει ανάλογα το πλάτος των ταλαντώσεων που προκύπτουν λόγω των φυγόκεντρων δυνάμεων και της περιστροφής του άξονα.

Στο Σχήμα 5.3.1 παρουσιάζεται το μέγιστο πλάτος των ταλαντώσεων που προκύπτουν στον άξονα της διάταξης του Σχήματος 5.1.1, με γεωμετρικά και δυναμικά χαρακτηριστικά που δίνονται στον Πίνακα 5.1. Όπως γίνεται φανερό από το Σχήμα 5.3.1, αυξάνοντας την πίεση που ασκείται εξωτερικά του εδράνου κυλίσεως μπορεί να μειωθεί το επίπεδο των ταλαντώσεων του άξονα ανάλογα με τις ανάγκες της κάθε εφαρμογής. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, μπορεί να επιτευχθεί μείωση ταλαντώσεων που προσεγγίζει το 100%.

Μέγεθος	Τιμή
Ταχύτητα περιστροφής (rpm)	1500
Διάμετρος άξονα (mm)	20
Μήκος προβόλου (mm)	200
Διάμετρος έκκεντρου (mm)	30
Μήκος έκκεντρου (mm)	20
Εκκεντρότητα e (mm)	1
Μέτρο ελαστικότητας (GPa)	210
Πυκνότητα (kg/m ³)	7800
Ιξώδες λιπαντικού (Pa s)	0.0166
Ελάχιστο αρχικό πάχος λιπαντικού (mm)	0.07
Μέγιστο αρχικό πάχος λιπαντικού (mm)	0.14

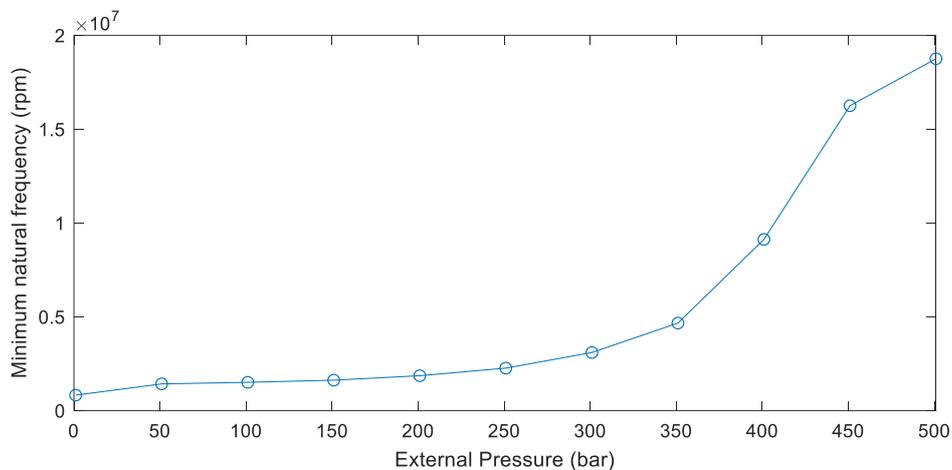
Πίνακας 5.1: Χαρακτηριστικά διάταξης για έλεγχο ταλαντώσεων



Σχήμα 5.3.1: Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης του άξονα συναρτήσει της πίεσης εξωτερικά του κυματοειδούς εδράνου κύλισης

Η δεύτερη λειτουργία που καλείται να επιτελέσει ένα κυματοειδές έδρανο κύλισης είναι να φέρει το σύστημα σε αντισυντονισμό. Με κατάλληλη μεταβολή της στιβαρότητας των εδράνων το σύστημα διεγείρεται, το πλάτος της ταλάντωσης, όμως, παραμένει χαμηλό λόγω της αποσβεστικής δράσης που ταυτόχρονα παρέχουν τα έδρανα. Με αυτόν τον τρόπο απορροφάται ποσοστό της ενέργειας που παράγεται από το σύστημα και μειώνονται τα επίπεδα κραδασμών και θορύβου της διάταξης.

Στο Σχήμα 5.3.2 παρουσιάζεται η ελάχιστη ιδιοσυχνότητα του συστήματος για διάφορες τιμές της εξωτερικής πίεσης των εδράνων. Όπως γίνεται φανερό, οι τιμές της ιδιοσυχνότητας, που παρουσιάζεται σε rpm για να είναι άμεσα συγκρίσιμη με την συχνότητα διέγερσης του συστήματος, είναι εξαιρετικά μεγάλες, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η διέγερση του συστήματος σε συντονισμό. Κατά συνέπεια, απαιτείται η μείωση κατά πρώτο λόγο της στιβαρότητας του συστήματος και κατά δεύτερο η αύξηση των ταλαντούμενων μαζών, έτσι ώστε να μειωθούν οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος στο επίπεδο των επιτεύξιμων ταχυτήτων περιστροφής του άξονα και του έκκεντρου.



Σχήμα 5.3.2. Ελάχιστη ιδιοσυχνότητα της διάταξης για την ρύθμιση του μέγιστου πλάτους ταλάντωσης συναρτήσει της πίεσης εξωτερικά του κυματοειδούς εδράνου κύλισης

Οι πίνακες μάζας, απόσβεσης και στιβαρότητας της διάταξης έτσι όπως αυτή περιγράφεται στον Πίνακα 5.1 δίνονται παρακάτω σε :

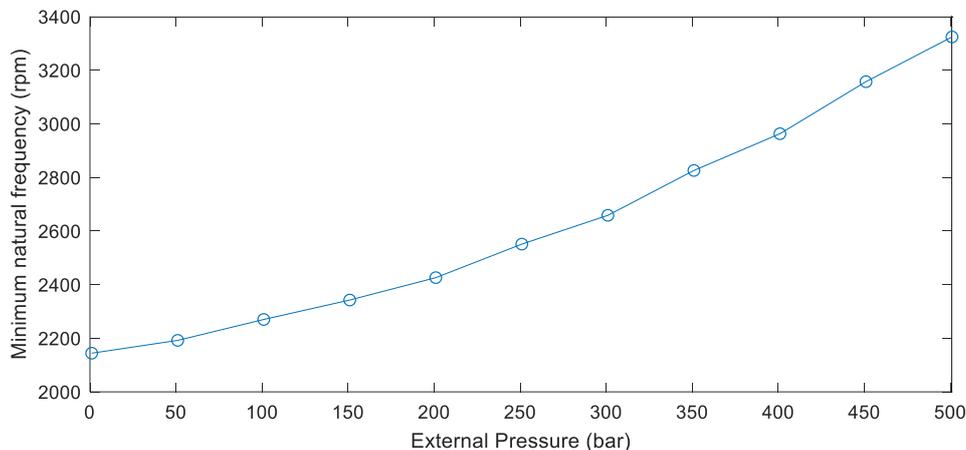
$$M = \begin{bmatrix} 0.55 & 0 \\ 0 & 0.55 \end{bmatrix}, K_{\pi} = \begin{bmatrix} 1.23 & 0 \\ 0 & 1.23 \end{bmatrix} \times 10^6,$$

$$K_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 3.22 & -4.86 \\ 5.03 & 3.59 \end{bmatrix} \times 10^6, C_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 2.63 & -0.10 \\ -0.10 & 6.08 \end{bmatrix} \times 10^4$$

Αρχικά, επιχειρείται να μειωθεί η στιβαρότητα των εδράνων με ταυτόχρονη αύξηση της μάζας του έκκεντρου, έτσι ώστε να μειωθούν οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος οι οποίες υπολογίζονται κατά τα γνωστά από τη σχέση 5.3.1.

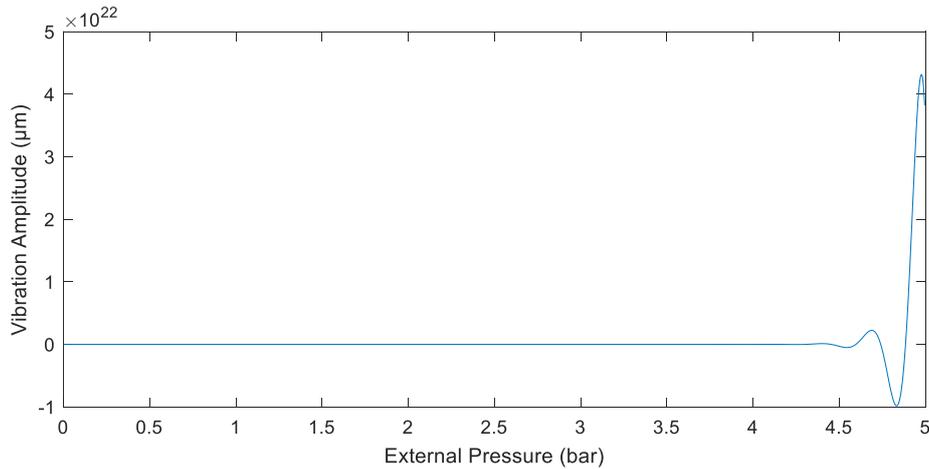
$$\det|\mathbf{M}\omega^2 - \mathbf{K}| = 0 \quad (3.4.71)$$

Οι κύριοι παράγοντες που επηρεάζουν τη στιβαρότητα των εδράνων είναι ο αριθμός Summerfield, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του άξονα και η ταχύτητα περιστροφής του, το ελάχιστο πάχος λιπαντικού και το μέγιστο φορτίο. Εάν η ταχύτητα περιστροφής του άξονα αυξηθεί στα 2500 rpm, οι διαστάσεις του έκκεντρου αυξηθούν σε διάμετρο και μήκους και γίνουν 50 mm και 200 mm αντίστοιχα, το ελάχιστο πάχος λιπαντικού γίνει 0.27mm και η εκκεντρότητα περιοριστεί σε ένα επίπεδο λίγων μικρομέτρων, έτσι ώστε να μειωθεί το φορτίο που παραλαμβάνει το έδρανο, τότε η ελάχιστη ιδιοσυχνότητα για κάθε τιμή της εξωτερικής πίεσης του εδράνου είναι όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.3.3 Όπως γίνεται φανερό, για μια πίεση περίπου 200 bar εξωτερικά του εδράνου, το σύστημα έρχεται σε συντονισμό.



Σχήμα 5.3.3 Ελάχιστη ιδιοσυχνότητα της τροποποιημένης διάταξης για επίτευξη αντισυντονισμού συναρτήσει της πίεσης εξωτερικά του κυματοειδούς εδράνου κύλισης

Η επίτευξη της διέγερσης του συστήματος σε συντονισμό δεν αρκεί από μόνο του για να διασφαλίσει την επιτυχημένη λειτουργία των εδράνων. Πρέπει ταυτόχρονα τα έδρανα να είναι σε θέση να αποσβένουν τα μεγάλα πλάτη ταλάντωσης που προκύπτουν λόγω του συντονισμού. Στο Σχήμα 5.3.4 παρουσιάζεται η απόκριση του συστήματος όταν αυτό συντονίζεται. Όπως γίνεται φανερό, το πλάτος της ταλάντωσης τείνει να απειριστεί και, κατά συνέπεια, η λειτουργία των εδράνων κύλισης κρίνεται ανεπαρκής.



Σχήμα 5.3.4. Απόκριση της τροποποιημένης διάταξης κατά την διέγερσή της στην συχνότητα συντονισμού.

Ο λόγος της αδυναμίας των εδράνων να αποσβέσουν τα μεγάλα πλάτη ταλάντωσης που εμφανίζονται κατά των συντονισμό γίνεται εμφανής μετά την εξέταση των μητρώων του τροποποιημένου συστήματος που παρουσιάζονται παρακάτω. Τα στοιχεία του μητρώου μάζας παρουσιάζουν μια αύξηση περίπου 6 φορές της προηγούμενης τιμής τους, το μητρώο δυσκαμψίας του προβόλου παρέμεινε αμετάβλητο, τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας του εδράνου υπέστησαν μείωση τριών τάξεων μεγέθους, ενώ τα αντίστοιχα των μητρώων απόσβεσης τεσσάρων τάξεων μεγέθους.

$$M = \begin{bmatrix} 3.06 & 0 \\ 0 & 3.06 \end{bmatrix}, K_{\pi} = \begin{bmatrix} 1.23 & 0 \\ 0 & 1.23 \end{bmatrix} \times 10^6,$$

$$K_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0.75 & -1.67 \\ 1.54 & 1.38 \end{bmatrix} \times 10^3, C_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 4.19 & 0.39 \\ 0.39 & 14.01 \end{bmatrix}$$

Η μείωση της στιβαρότητας των κυματοειδών εδράνων κύλισης επιφέρει την ανάλογη μείωση της αποσβεστικής τους ικανότητας όπως αναλύεται και στην αντίστοιχη ενότητα της παρούσης εργασίας. Μία, λοιπόν, αυθαίρετη μείωση της δυσκαμψίας των εδράνων με σκοπό την μείωση της ιδιοσυχνότητας του συστήματος δεν οδηγεί και στο επιθυμητό αποτέλεσμα, καθώς τυχόν διέγερση της συχνότητας συντονισμού του συστήματος δεν συνεπάγεται ταυτόχρονη ικανότητα απόσβεσης των μεγάλων ταλαντώσεων που προκαλούνται. Επομένως, η ανασχεδίαση της διάταξης πρέπει να γίνει με βάση τις παρακάτω παρατηρήσεις. Η στιβαρότητα του ίδιου του άξονα θα πρέπει να μειωθεί και να γίνει μικρότερη από εκείνη των εδράνων, έτσι ώστε εκείνη να είναι η κύρια παράμετρος που καθορίζει την συνολική δυσκαμψία του συστήματος (άξονας και έδρανο είναι συνδεδεμένα σε σειρά) και να εξασφαλίζει ότι το σύστημα μπορεί να διεγερθεί στην συχνότητα συντονισμού στις επιθυμητές ταχύτητες περιστροφής του άξονα. Ταυτόχρονα, η στιβαρότητα των εδράνων θα πρέπει να είναι η μεγαλύτερη δυνατή έτσι ώστε να επιτυγχάνεται και η μέγιστη δυνατή απόσβεση από τα έδρανα, ενώ θα μπορεί ακόμα να επηρεάσει τη συνολική στιβαρότητα του συστήματος με την αλλαγή της πίεσης εξωτερικά των εδράνων.

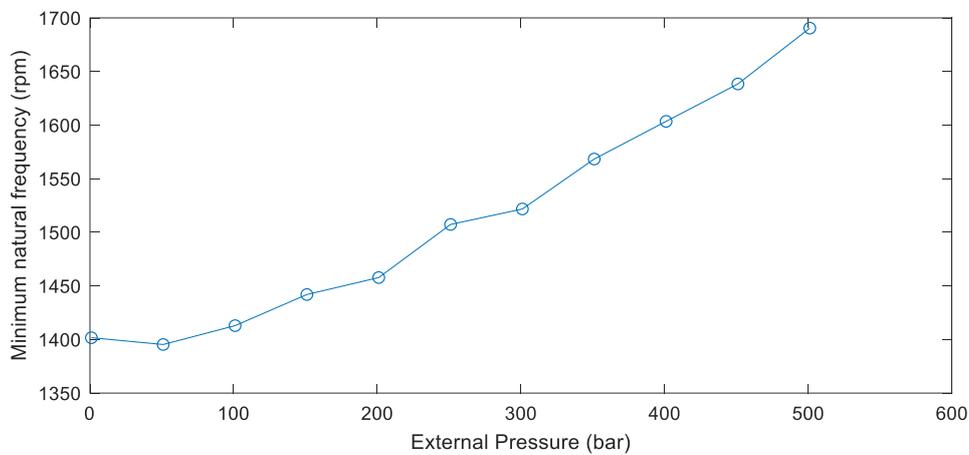
Μετά από παραμετρική διερεύνηση του συστήματος, εξετάζονται όλες τις διαφορετικές παραμέτρους που επηρεάζουν τα μητρώα απόσβεσης και στιβαρότητας, το τροποποιημένο σύστημα που επιλέχθηκε φαίνεται στον Πίνακα 5.2, ενώ η τιμές τις ιδιοσυχνότητας για διάφορες τιμές της πίεσης στο Σχήμα 5.3.5 Στο Σχήμα 5.3.6 φαίνεται η απόκριση του συστήματος στη συχνότητα συντονισμού, κατά την οποία το πλάτος της ταλάντωσης στη μόνιμη κατάσταση περιορίζεται μόλις στα 7 μm. Τα μητρώα του νέου συστήματος είναι:

$$M = \begin{bmatrix} 6.98 & 0 \\ 0 & 6.98 \end{bmatrix}, K_{\pi} = \begin{bmatrix} 1.69 & 0 \\ 0 & 1.69 \end{bmatrix} \times 10^3,$$

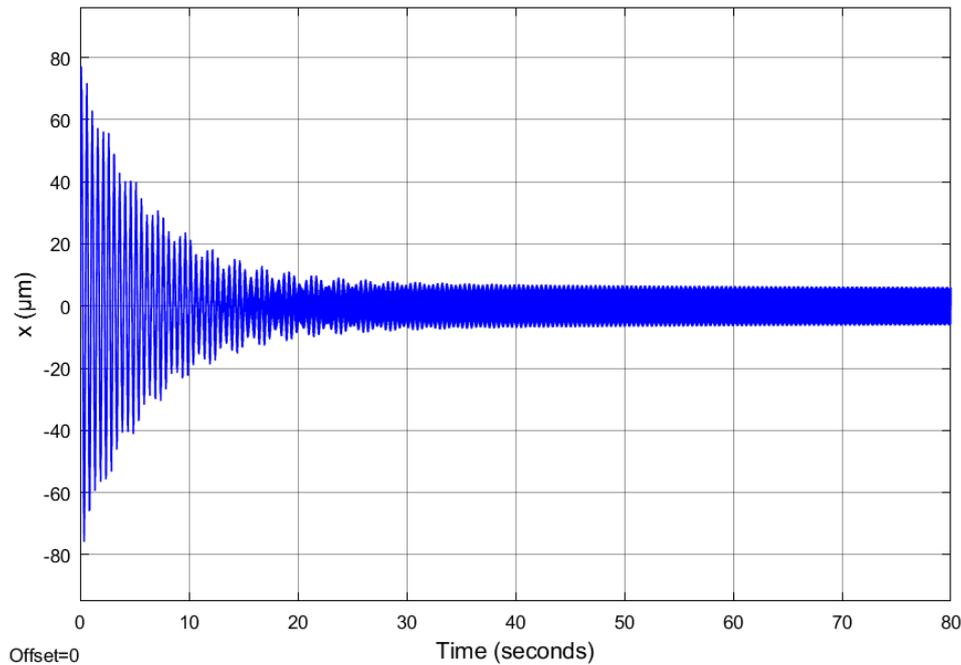
$$K_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0.42 & -1.19 \\ -0.26 & 2.96 \end{bmatrix} \times 10^4, C_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 18.28 & -12.11 \\ -12.11 & 148.40 \end{bmatrix}$$

Μέγεθος	Τιμή
Ταχύτητα περιστροφής (rpm)	1500
Διάμετρος άξονα (mm)	20
Μήκος προβόλου (mm)	1800
Διάμετρος έκκεντρου (mm)	50
Μήκος έκκεντρου (mm)	200
Έκκεντρότητα e (mm)	0.015
Μέτρο ελαστικότητας (GPa)	210
Πυκνότητα (kg/m ³)	7800
Ιξώδες λιπαντικού (Pa s)	0.0166
Ελάχιστο αρχικό πάχος λιπαντικού (mm)	0.21
Μέγιστο αρχικό πάχος λιπαντικού (mm)	0.42

Πίνακας 5.2. Χαρακτηριστικά διάταξης για επίτευξης αντισυντονισμού



Σχήμα 5.3.5 Ελάχιστη ιδιοσυχνότητα της τελικής διάταξης για επίτευξη αντισυντονισμού συναρτήσει της πίεσης εξωτερικά του κυματοειδούς εδράνου κύλισης



Σχήμα 5.3.6. Απόκριση της τελικής διάταξης κατά την διέγερσή της στην συχνότητα συντονισμού.

6. Συμπεράσματα και περαιτέρω έρευνα

Τα κυματοειδή έδρανα κύλισης αποτελούν πλέον έναν εξαιρετικά αξιόπιστο και αποδοτικό τρόπο έδρασης στρεφόμενων αξόνων, προσφέροντας παράλληλα δυνατότητες περιορισμού κραδασμών και θορύβου που παράγονται από τα συστήματα στα οποία συμμετέχουν. Η μεγάλη τους αξία αναγνωρίστηκε από τη διεθνή επιστημονική κοινότητα με την θεωρητική ανάλυση και την πειραματική επιβεβαίωση της λειτουργίας τους. Οι εργασίες αυτές συνέβαλαν στην καθιέρωση των κυματοειδών εδράνων και την ευρύτερη χρήση τους σε βιομηχανικές εφαρμογές.

Μέσα από την παρούσα εργασία επιχειρήθηκε η διεύρυνση των λειτουργιών που επιτελεί ένα κυματοειδές έδρανο ολίσθησης μέσω ενεργητικής μεταβολής της γεωμετρίας του κατά την λειτουργία του σε ένα δυναμικό σύστημα. Η αλλαγή της γεωμετρίας οδηγεί σε μεταβολή των δυναμικών χαρακτηριστικών του εδράνου και, τελικά, του συστήματος δίνοντας τη δυνατότητα ενεργητικού ελέγχου της απόκρισής του.

Για να επιτευχθούν τα παραπάνω, έγινε αναλυτική μελέτη των υδροδυναμικών φαινομένων που λαμβάνουν χώρα τόσο σε ένα κανονικό έδρανο ολίσθησης, όσο και των αλλαγών που προκαλούνται σε αυτό λόγω της ύπαρξης λοβών στο κυματοειδές έδρανο ολίσθησης. Παράλληλα, έγινε η σχεδίαση του σώματος του εδράνου, έτσι ώστε αυτό να μπορεί να μεταβάλλει τη γεωμετρία του κατά τον επιθυμητό τρόπο με αυξομείωση της πίεσης που επιβάλλεται εξωτερικά των λοβών από κάποιο ρευστό.

Για όλα τα παραπάνω υποσυστήματα έγινε η μαθηματική τους μοντελοποίηση με βάση την οποία αναπτύχθηκε το δυναμικό μοντέλο μιας διάταξης ειδικά σχεδιασμένης για την εξέταση ενός κυματοειδούς εδράνου ολίσθησης. Βασικό μέρος του σχεδιασμού αποτέλεσε και η διαστασιολόγηση της ίδιας της διάταξης έτσι ώστε να μπορούν να ελεγχθούν οι διάφορες λειτουργίες του εδράνου.

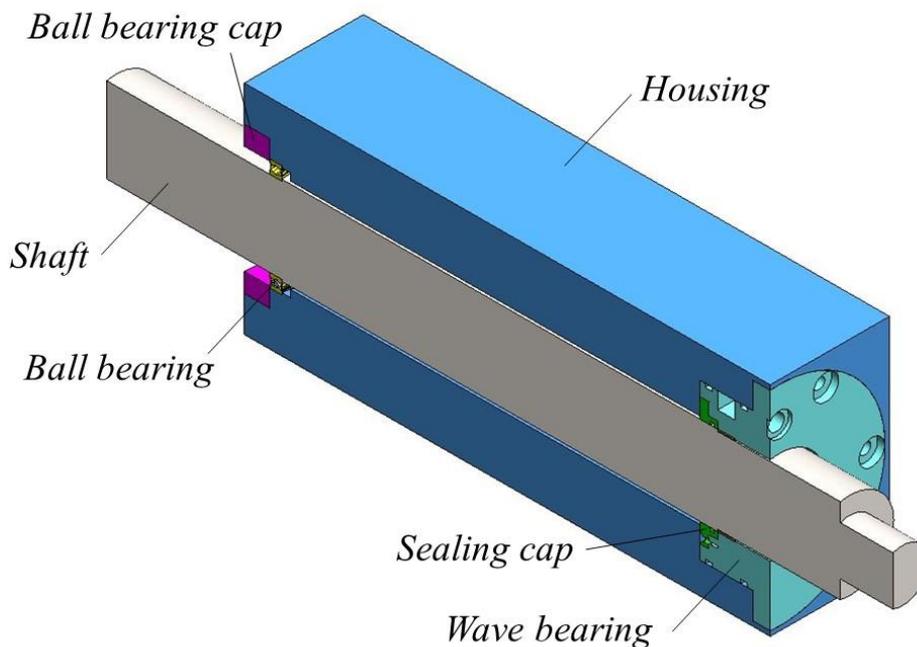
Οι δύο βασικές λειτουργίες του εδράνου που εξετάστηκαν ήταν η ρύθμιση του επιπέδου των

ταλαντώσεων ενός συστήματος και η δυνατότητα επίτευξης φαινομένων αντισυντονισμού. Από τη διερεύνηση των παραμέτρων των εδράνων και του συστήματος αποκαλύφθηκαν οι δυνατότητες των εδράνων στο να μπορούν να ρυθμίσουν το επίπεδο των κραδασμών και να το περιορίσουν σε έναν πολύ μεγάλο και ικανοποιητικό βαθμό που αγγίζει ένα ποσοστό μείωσης 100%. Αντίθετα, φαινόμενα αντισυντονισμού μπορεί να εμφανιστούν μόνο σε συστήματα που έχουν εξ ιδίων μικρή σχετικά δυσκαμψία, καθώς διαφορετικά η ιδιοσυχνότητές τους είναι πολύ μεγάλες για διεγερθούν από την ταχύτητα περιστροφής του άξονα ή η απόσβεση των εδράνων δεν είναι επαρκής για να διατηρήσουν χαμηλό πλάτος ταλαντώσεων.

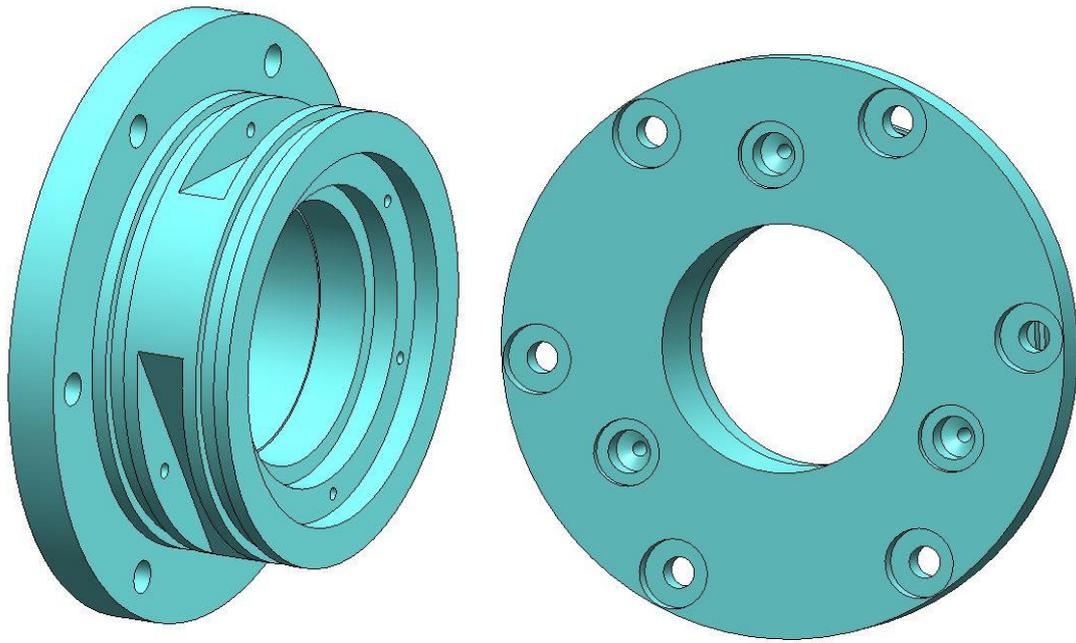
Σε μελλοντική επανεξέταση του θέματος θα μπορούσε να γίνει μια πιο ενδελεχής διερεύνηση διατάξεων μικρής δυσκαμψίας στα οποία η λειτουργία αντισυντονισμού των εδράνων θα μπορούσε να είναι πολύ χρήσιμη. Επίσης, θα μπορούσε να γίνει η πειραματική επιβεβαίωση των θεωρητικών αποτελεσμάτων και η πλήρης σχεδίαση του υδραυλικού κυκλώματος που θα παρέχει την πίεση εξωτερικά των εδράνων.

6.1. Προτεινόμενη πειραματική διάταξη

Τέλος πέρα από τις παραπάνω θεωρητικές μελέτες στη συνέχεια προτείνεται και μια πειραματική εγκατάσταση για την επαλήθευση των θεωρητικών αποτελεσμάτων που προέκυψαν. Η σχεδίαση της συγκεκριμένης διάταξης είναι βασισμένη στις εγκαταστάσεις και στις υλικοτεχνικές υποδομές του εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Η πειραματική αυτή διάταξη αποτελείται από την εξωτερική εγκατάσταση του πειράματος, τον άξονα, ένα έδρανο κύλισης από την μια μεριά και το έδρανο ολίσθησης μαζί με τους γρασαδόρους από την άλλη όπως φαίνεται στο σχήμα 6.1.1. Ενώ μια προτεινόμενη κατασκευή του κυματοειδούς εράνου παρουσιάζεται στο σχήμα 6.1.2.



Σχήμα 6.1.1: Προτεινόμενη πειραματική διάταξη για εξακρίβωση λειτουργίας των κυματοειδών εδράνων ως προς την ρύθμιση των κραδασμών.



Σχήμα 6.1.2: Προτεινόμενος σχεδιασμός κυματοειδούς εδράνου για την προτεινόμενη πειραματική διάταξη.

6. Βιβλιογραφία

- [1] Ene N.M., Dimofte F., *Effect of fluid film wave bearings on attenuation of gear mesh noise and vibration*, Tribology International, 53, (2012), 108-114
- [2] Dimofte F., *Wave Journal Bearing with Compressible Lubricant-Part I: The Wave Bearing Concept and a Comparison to the Plain Circular Bearing*, Tribology Transactions, 38(1), (1995), 153-160
- [3] Dimofte F., *Wave Journal Bearing with Compressible Lubricant-Part II: A Comparison of the Wave Bearing with a Wave-Groove Bearing and a Lobe Bearing*, Tribology Transactions, 38(2), (1995), 364-372
- [4] Dimofte F., Ene N.M., Afjeh A.A., *No Conventional Fluid Film Bearings with Waved Surface*, in Ghrib T.(ed.) *New Tribological Ways*, InTech, (2011)
- [5] Γραϊκούσης Ρ., *Στοιχεία Μηχανών I – Στοιχεία Περιστροφικής Κινήσεως*, Εκδόσεις Γιαχούδη, (1983)
- [6] D. Sfyris, A.Chasalevris, *An exact analytical solution of the Reynolds equation for the finite journal bearing lubrication*, Tribology International 55, (2012), 46–58
- [7] A.Chasalevris, *Analytical Evaluation of the Static and Dynamic Characteristics of Three-Lobe Journal Bearings With Finite Length*, Tribology International 61, (2015), 158–167
- [8] Phakatkar H.G., Ghorpade R.R., *Tribology*, Nirali Prakashan, (2009)
- [9] Williams J., *Engineering Tribology*, Cambridge University Press, New York, (2005)
- [10] Stachowiak G., Batchelor A.W., *Engineering Tribology*, Butterworth-Heinemann, (2013)
- [11] Παπαδόπουλος Χρ., *Στοιχεία Μηχανών*, Εκδόσεις Τζιόλα, (2012)
- [12] Raimondi A.A., Boyd J., *A Solution for the Finite Journal Bearing and its Application to Analysis and Design: I*, 1(1), (1958), 159-174
- [13] Leader M.E., *Understanding Journal Bearings*, Durango, Colorado
- [14] Hori Y., *Hydrodynamic Lubrication*, Springer, Tokyo, (2006)
- [15] Wang J.K., Khonsari M.M., *Thermohydrodynamic Instability in Fluid-Film Bearings*, Wiley, (2016)
- [17] A. Chasalevris, D.Sfyris, *Evaluation of the finite journal bearing characteristics, using the exact analytical solution of the Reynolds equation*, Tribology International 57, (2013), 216–234
- [18] Gao Lei, Zhang Hongxin,, Xu Wei1, Shu Pei1, Ningxia Road, *The Reynolds Equation Method for Crankshaft's oil Film Stiffness*, 3rd International Conference on Mechatronics, Robotics and Automation (ICMRA 2015)

Παράρτημα

Κώδικας αριθμητικού υπολογισμού πίεσης κυματοειδούς εδράνου

```
clear
syms c11 c12 c13 ti si ksi thi c21 c22 c23 cc11 cc12 cc13
Weff=140.43; % rad/s /140.43/314.159265358
mm=0.0166; % preload factor mm=1-cb/cp=1-cb/(Rp -R) /0.0166 Pa*s/0.0147
cp=2.522*10^(-4); % Μέγιστο πάχος λιπαντικού στο ρουλεμάν/ 2.522e - 4 m/0.116
cb=9.4713*10^(-5); % Ελάχιστο πάχος λιπαντικού στο ρουλεμάν/ 9.4713e-5
m/1.8942*10^(-4)
ai=[2.0916e-06,-1.9118e-05,2.2815e-05]; % οριζόντια μετατόπιση του ρουλεμαν απο
το κέντρο των συντεταγμένων
bi=[2.6208e-05,-1.4789e-05,-1.4854e-05]; % κατακόριφη μετατόπιση του ρουλεμαν
απο το κέντρο των συντεταγμένων
ad=[ai(1)/2*pi()/Weff, ai(2)/2*pi()/Weff,ai(3)/2*pi()/Weff]; % παράγωγος του ai
bd=[bi(1)/2*pi()/Weff, bi(2)/2*pi()/Weff,bi(3)/2*pi()/Weff]; % παράγωγος του bi
e=[(sqrt(ai(1)^2+bi(1)^2))/cb, (sqrt(ai(2)^2+bi(2)^2))/cb, (sqrt(ai(3)^2+bi(3)^2)
/cb)];
W=314.159265;
T=2*pi()/W;

x0=0;
y0=0;

R=0.06; % Ακτίνα άξονα m/ 0.06m/0.05
Lb=0.04;% Μήκος ρουλεμαν m/ 0.04 m/0.08
tha=[340 100 220]; %Αρχικές μοίρες ποκέτας/[340 100 220]/[120 240 0]
tht=[40 160 280]; %Τελικές μοίρες ποκέτας/[40 160 280]/[180 300 60]
%thi=[150 270 30]; %Μέσες μοίρες ποκέτας

%Υπολογισμός συνάρτησης λυπαντικού
c=1;
for i=1:3
for th=0:pi()/180:2*pi()-pi()/180
hk(i,c)=cp-ai(i)*cos(th)-bi(i)*sin(th);
hr(i,c)=cp-ai(i)*cos(th)-bi(i)*sin(th);
hd(i,c)=hk(i,c)./cb;
c=c+1;
end
c=1;
end
for i=1:360
hi(i)=hk(1,i);
end

for i=1:360
if i>=tha(2) && i<=tht(2)
hk(1,i)=0;
hk(3,i)=0;

elseif i>=tha(3) && i<=tht(3)
hk(1,i)=0;
hk(2,i)=0;
elseif i>=tha(1) || i<=tht(1)
hk(2,i)=0;
hk(3,i)=0;
else
hk(1,i)=0;
hk(2,i)=0;
```

```

        hk(3,i)=0;
    end
end

for i=1:3
    zi(i)=2*ad(i)*bi(i)-2*ai(i)*bd(i)+(ai(i)^2+bi(i)^2)*Weff;
    ui(i)=-cp^2+ai(i)^2+bi(i)^2;
end

ti1=6*mm*R^2*cp*zi(1)+c21*(ai(1)^2+bi(1)^2);
ti2=6*mm*R^2*cp*zi(2)+c22*(ai(2)^2+bi(2)^2);
ti3=6*mm*R^2*cp*zi(3)+c23*(ai(3)^2+bi(3)^2);
si1=18*mm*R^2*cp*zi(1)+c21*(ai(1)^2+bi(1)^2+2*cp^2);
si2=18*mm*R^2*cp*zi(2)+c22*(ai(2)^2+bi(2)^2+2*cp^2);
si3=18*mm*R^2*cp*zi(3)+c23*(ai(3)^2+bi(3)^2+2*cp^2);
ksi1=(2*mm*R^2*cp^2+4*mm*R^2*(ai(1)^2+bi(1)^2))*zi(1)+2*c21*cp*(ai(1)^2+bi(1)^2);
;
ksi2=(2*mm*R^2*cp^2+4*mm*R^2*(ai(2)^2+bi(2)^2))*zi(2)+2*c22*cp*(ai(2)^2+bi(2)^2);
;
ksi3=(2*mm*R^2*cp^2+4*mm*R^2*(ai(3)^2+bi(3)^2))*zi(3)+2*c23*cp*(ai(3)^2+bi(3)^2);
;
thi1=-
12*mm*R^2*ai(1)*(ai(1)*ad(1)+bi(1)*bd(1))+6*mm*R^2*cp^2*(2*ad(1)+bi(1)*Weff)+c21*cp*bi(1);
thi2=-
12*mm*R^2*ai(2)*(ai(2)*ad(2)+bi(2)*bd(2))+6*mm*R^2*cp^2*(2*ad(2)+bi(2)*Weff)+c22*cp*bi(2);
thi3=-
12*mm*R^2*ai(3)*(ai(3)*ad(3)+bi(3)*bd(3))+6*mm*R^2*cp^2*(2*ad(3)+bi(3)*Weff)+c23*cp*bi(3);

%Aplyig boundary conditions

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
c11=solve(c11+(atanh((cp+ai(1)+bi(1))/sqrt(ui(1)))*tan(tha(1)*pi()/180/2))*ui(1)^(-5/2)*si1+((bi(1)*si1-3*ksi1*sin(tha(1)*pi()/180))/(2*ai(1)*hi(tha(1)+1)*ui(1)^2))+((ti1*sin(tha(1)*pi()/180)-thi1(1)*pi()/180)/(2*ai(1)*hi(tha(1)+1)^2*ui(1))),c11);
c12=solve(c12+(atanh((cp+ai(2)+bi(2))/sqrt(ui(2)))*tan(tha(2)*pi()/180/2))*ui(2)^(-5/2)*si2+((bi(2)*si2-3*ksi2*sin(tha(2)*pi()/180))/(2*ai(2)*hi(tha(2)+1)*ui(2)^2))+((ti2*sin(tha(2)*pi()/180)-thi2(1)*pi()/180)/(2*ai(2)*hi(tha(2)+1)^2*ui(2))),c12);
c13=solve(c13+(atanh((cp+ai(3)+bi(3))/sqrt(ui(3)))*tan(tha(3)*pi()/180/2))*ui(3)^(-5/2)*si3+((bi(3)*si3-3*ksi3*sin(tha(3)*pi()/180))/(2*ai(3)*hi(tha(3)+1)*ui(3)^2))+((ti3*sin(tha(3)*pi()/180)-thi3(1)*pi()/180)/(2*ai(3)*hi(tha(3)+1)^2*ui(3))),c13);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

c21=double(solve(c11,c21));
c22=double(solve(c12,c22));
c23=double(solve(c13,c23));

ti1=double(6*mm*R^2*cp*zi(1)+c21*(ai(1)^2+bi(1)^2));
ti2=double(6*mm*R^2*cp*zi(2)+c22*(ai(2)^2+bi(2)^2));
ti3=double(6*mm*R^2*cp*zi(3)+c23*(ai(3)^2+bi(3)^2));
si1=double(18*mm*R^2*cp*zi(1)+c21*(ai(1)^2+bi(1)^2+2*cp^2));
si2=double(18*mm*R^2*cp*zi(2)+c22*(ai(2)^2+bi(2)^2+2*cp^2));
si3=double(18*mm*R^2*cp*zi(3)+c23*(ai(3)^2+bi(3)^2+2*cp^2));

```

```

ksi1=double((2*mm*R^2*cp^2+4*mm*R^2*(ai(1)^2+bi(1)^2))*zi(1)+2*c21*cp*(ai(1)^2+bi(1)^2));
ksi2=double((2*mm*R^2*cp^2+4*mm*R^2*(ai(2)^2+bi(2)^2))*zi(2)+2*c22*cp*(ai(2)^2+bi(2)^2));
ksi3=double((2*mm*R^2*cp^2+4*mm*R^2*(ai(3)^2+bi(3)^2))*zi(3)+2*c23*cp*(ai(3)^2+bi(3)^2));
thi1=double(-
12*mm*R^2*ai(1)*(ai(1)*ad(1)+bi(1)*bd(1))+6*mm*R^2*cp^2*(2*ad(1)+bi(1)*Weff)+c21*cp*bi(1));
thi2=double(-
12*mm*R^2*ai(2)*(ai(2)*ad(2)+bi(2)*bd(2))+6*mm*R^2*cp^2*(2*ad(2)+bi(2)*Weff)+c22*cp*bi(2));
thi3=double(-
12*mm*R^2*ai(3)*(ai(3)*ad(3)+bi(3)*bd(3))+6*mm*R^2*cp^2*(2*ad(3)+bi(3)*Weff)+c23*cp*bi(3));

cc11=double(solve(cc11+(atanh((cp+ai(1)+bi(1))/sqrt(ui(1)))*tan(tht(1)*pi()/180/2))*ui(1)^(-5/2)*si1+((bi(1)*si1-
3*ksi1*sin(tht(1)*pi()/180))/(2*ai(1)*hi(tht(1)+1)*ui(1)^2))+((ti1*sin(tht(1)*pi()/180)-thi1(1)*pi()/180)/(2*ai(1)*hi(tht(1)+1)^2*ui(1))),cc11));
cc12=double(solve(cc12+(atanh((cp+ai(2)+bi(2))/sqrt(ui(2)))*tan(tht(2)*pi()/180/2))*ui(2)^(-5/2)*si2+((bi(2)*si2-
3*ksi2*sin(tht(2)*pi()/180))/(2*ai(2)*hi(tht(2)+1)*ui(2)^2))+((ti2*sin(tht(2)*pi()/180)-thi2(1)*pi()/180)/(2*ai(2)*hi(tht(2)+1)^2*ui(2))),cc12));
cc13=double(solve(cc13+(atanh((cp+ai(3)+bi(3))/sqrt(ui(3)))*tan(tht(3)*pi()/180/2))*ui(3)^(-5/2)*si3+((bi(3)*si3-
3*ksi3*sin(tht(3)*pi()/180))/(2*ai(3)*hi(tht(3)+1)*ui(3)^2))+((ti3*sin(tht(3)*pi()/180)-thi3(1)*pi()/180)/(2*ai(3)*hi(tht(3)+1)^2*ui(3))),cc13));

si=[si1 si2 si3];
ksi=[ksi1 ksi2 ksi3];
thi=[thi1 thi2 thi3];
ti=[ti1 ti2 ti3];
c1=[cc11 cc12 cc13];
c2=[c21 c22 c23];

c=1;

for th=0:pi()/180:2*pi()-pi()/180
    for i =1:3
        fi(i,c)=0;
    end
    %%      fi(c)=0;
    c=c+1;
end

c=1;
for th=0:pi()/180:2*pi()-pi()/180
    for i =1:3
        fi(i,c)=c1(i)+(atanh((cp+ai(i)-bi(i))/sqrt(ui(i)))*tan(th/2))*ui(i)^(-5/2)*si(i)+((bi(i)*si(i)-
3*ksi(i)*sin(th))/(2*ai(i)*hi(c)*ui(i)^2))+((ti(i)*sin(th)-thi(i)))/(2*ai(i)*hi(c).^2*ui(i)));
    end
    c=c+1;
end

```

```

for i=1:3

    A(i)=(hi (tha (i) +1) -hi (tht (i) +1)) / (tha (i) *pi () /180-tht (i) *pi () /180);
    B(i)=hi (tha (i) +1) -A(i) *tha (i) *pi () /180;
    r=1;
    for th=0:pi () /180:2*pi () -pi () /180
        hii (i, r)=A(i) *th+B(i);
        r=r+1;
    end
end

for i=1:3
    for l=1:20
        K1 (i, l) = ((pi () +l*pi ()) *A(i)) / (R* (tha (i) *pi () /180-tht (i) *pi () /180));
        K2 (i, l) = ((pi () -l*pi ()) *A(i)) / (R* (tha (i) *pi () /180-tht (i) *pi () /180));
    end
end

for i=1:12
    Ktj (1, i) =K1 (1, i);
    Ktj (2, i) =K2 (2, i);
    Ktj (3, i) =K2 (3, i);
end

for i=1:3
for j=1:11
    if Ktj (i, j) ==0
        Ktj (i, j) =Ktj (i, j+1);
        Ktj (i, j+1) =0;
    end
end
end

for i=1:2
    cb1 (i) =c1 (i) .*10^(-8);
    cb2 (i) =c2 (i) .*10^(-8);
end
    cb1 (3) =c1 (3) .*10^(-6);
    cb2 (3) =c2 (3) .*10^(-6);

for i=1:3
    r=1;
    for th=0:pi () /180:2*pi () -pi () /180
        for k=1:length(Ktj) -1

ff(i, k, r)=double(sqrt (2*A(i) / (Ktj (k) *R*pi () * (A(i) *th+B(i) ) ^3)) * (cb1 (i) *cos (Ktj (k)
) *R* (A(i) *th+B(i) ) /A(i) -3*pi () /4) +cb2 (i) *sin (Ktj (k) *R* (A(i) *th+B(i) ) /A(i) -
3*pi () /4)));
            end
            r=r+1;
        end
    end
end

```

```

for i=1:3
    r=1;
    for th=0:pi()/180:2*pi()-pi()/180
        for k=1:length(Ktj)-1
            fun=@(th)
R.^2.*(A(i).*th+B(i)).*3.*(sqrt(2*A(i)./(Ktj(k).*R.*pi()).*(A(i).*th+B(i)).^3)).*(
(cb1(i)*10*cos(Ktj(k).*R.*(A(i).*th+B(i))./A(i)-
3.*pi()/4)+cb2(i).*sin(Ktj(k).*R.*(A(i).*th+B(i))./A(i)-3.*pi()/4))));
            q1(i,k,r)=integral(fun,tha(i),tht(i));

            end
            r=r+1;
        end
    end
end

for i=1:3
    r=1;
    for th=0:pi()/180:2*pi()-pi()/180
        for k=1:length(Ktj)-1
            ffi2(i,k,r)= ff(i,k,r)/sqrt(q1(i,k,r));
            ffi(i,k,r)= ff(i,k,r)/sqrt(abs(q1(i,k,r)));
        end
        r=r+1;
    end
end

for i=1:3
    r=1;
    for th=0:pi()/180:2*pi()-pi()/180
        for k=1:length(Ktj)-1
            fun=@(th) -
R.^2.*(A(i).*th+B(i)).*3*R.^2.*(A(i).*th+B(i)).*3.*(sqrt(2*A(i)./(Ktj(k).*R.*pi())
.*(A(i).*th+B(i)).^3)).*(cb1(i).*cos(Ktj(k).*R.*(A(i).*th+B(i))./A(i)-
3.*pi()/4)+cb2(i).*sin(Ktj(k).*R.*(A(i).*th+B(i))./A(i)-
3.*pi()/4))).*(c1(i)+atanh(cp+ai(i)+bi(i)./sqrt(ui(i)).*tan(th/2)).*(ui(i)^(-
5/2).*si(i))+bi(i).*si(i)-
3*ksi(i).*sin(th))/(2*ai(i).*hi(i).*ui(i)^2)+(ti(i).*sin(th)-
thi(i))/(2*ai(i).*hi(i).^2.*ui(i)));
            q2(i,k,r)=integral(fun,tha(i),tht(i));
            q2(i,k,r)=real(q2(i,k,r));
        end
        r=r+1;
    end
end

for i=1:3
    r=1;
    for th=0:pi()/180:2*pi()-pi()/180
        Ad(i,r)=0;
    %
        Ad(r)=0;
        r=r+1;
    end
end

z=2;
Lb=0.08;
for i=1:3
    r=1;
    for th=0:pi()/180:2*pi()-pi()/180
        for k=1:length(Ktj)-1%10

```

```

        Ad(i,r)=q2(i,k,r).*(
exp(Lb.*Ktj(k)/2)./(1+exp(Lb.*Ktj(k)))).*(exp(z.*Ktj(k)/2)+exp(-
z.*Ktj(k)/2)).*ffi(i,k,r)+Ad(i,r);
        Ad2(i,k,r)=q2(i,k,r).*(
exp(Lb.*Ktj(k)/2)./(1+exp(Lb.*Ktj(k)))).*(exp(z.*Ktj(k)/2)+exp(-
z.*Ktj(k)/2)).*ffi(i,k,r);
        end
        r=r+1;
    end
end

for i=1:3
    for r=1:360
        Pt(i,r)=Ad(i,r) + fi(i,r);
    %         Pt(r)=Ad(r) + fi(r);

    end
end

for i=1:3
    for r=1:360
        Pt2(i,r)=Pt(i,r);
    end
end

for i=1:360
    if i>=tha(2) && i<=tht(2)
        Pt2(1,i)=0;
        Pt2(3,i)=0;
    elseif i>=tha(3) && i<=tht(3)
        Pt2(1,i)=0;
        Pt2(2,i)=0;
    elseif i>=tha(1) || i<=tht(1)
        Pt2(2,i)=0;
        Pt2(3,i)=0;
    else
        Pt2(1,i)=0;
        Pt2(2,i)=0;
        Pt2(3,i)=0;
    end
end

for j=1:3
for i=1:360
    Pt2(j,i)=abs(Pt2(j,i));
end
end

```

Κώδικας δυναμικής μοντελοποίησης και υπολογισμού

```
clear
```

```
%% Design Parameters
```

```

W=2500;           % Shaft speed (rpm)
Decc=50e-3;      % Eccentric mass diameter
drill=0e-3;      % Shaft inside diameter
ecc=1e-3;        % Eccentricity

```

```

hecc=200e-3;    % Eccentric mass length
Lr=200e-3;     % Shaft length
decc=7800;     % Density
densr=7800;
Er=210e9;      % Modulus of elasticity

W=pi/30*W;
P=[5 6 7 8 9 10 15 20 25 30 35 40 45 50]; %Bar
d=[6.1405 7.3686 8.5967 9.8248 11.053 12.281 18.8422 24.562 30.703 36.843 42.984
49.1924 55.265 61.405];
P=P*100000;
d=d*10^-7;

% dj=X(1)*PP+X(2);

% dj=1e-6;
% % %

e=0.9637;
mm=0.0166;%Pa*s
% vm=32e-6;
% densm=857;
% mm=vm*densm;
L=0.015;%m
D=0.02;
Rs=D/2;%m

LD=L/D;

% % %

Recc=Decc/2;

Aecc=pi*Recc^2-pi*Rs^2;
Vecc=Aecc*hecc;
mecc=Vecc*decc;
xmean=(pi*Recc^2*ecc)/(pi*(Recc^2-Rs^2));

F0=mecc*xmean*W^2;
F0=0.1;
ecc=F0*pi*(Recc^2-Rs^2)/(mecc*pi*Recc^2*W^2)
Wf=F0;

% mj=2;
%
% Mj=[mj 0;
%     0 mj];

dr=D;
% Lr=500e-3;

mr=densr*pi*dr^2/4*Lr+mecc;

```

```

Mr=[mr 0;
    0 mr];

Cr=[0 0;
    0 0];

Ir=pi*(dr^4-drill^4)/64;
kr=6*Er*Ir/((Lr)^3);

Kr=[kr 0;
    0 kr];
PP=1e5:50e5:501e5;
for ii=1:length(PP)

    X=polyfit(P,d,1);
    dj=polyval(X,PP(ii));
    DJ(ii)=dj;

%     cp=2.522*1e-4+dj;
%     cp=54.*1e-5+dj;
%     cb=9.4713*1e-5-dj;%m
%     cb=27*1e-5-dj;%m
%     m=1-cb/cp;

    S=(mm*L*W*Rs^3)/(pi*Wf*cb^2);
    S=1/S;

%% Eccentricity
[~,~,raw]=xlsread();

raw(cellfun(@(x) ~isempty(x) && isnumeric(x) && isnan(x),raw)) = {' '};
stringVectors = string(raw(:, [3,6,9,12,15]));
stringVectors(ismissing(stringVectors)) = ' ';
raw = raw(:, [1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17]);

%% Replace non-numeric cells with NaN
Rt = cellfun(@(x) ~isnumeric(x) && ~islogical(x),raw); % Find non-numeric cells
raw(Rt) = {0}; % Replace non-numeric cells

%% Create output variable
data = reshape([raw{:}],size(raw));

%% Allocate imported array to column variable names
Line1 = data(:,1);
VarName2 = data(:,2);
VarName3 = stringVectors(:,1);
Line2 = data(:,3);
VarName5 = data(:,4);
VarName6 = stringVectors(:,2);
Line3 = data(:,5);
VarName8 = data(:,6);
VarName9 = stringVectors(:,3);
Line4 = data(:,7);
VarName11 = data(:,8);
VarName12 = stringVectors(:,4);
Line5 = data(:,9);
VarName14 = data(:,10);

```

```

VarName15 = stringVectors(:,5);
Line6 = data(:,11);
VarName17 = data(:,12);

%% Clear temporary variables
clearvars data raw stringVectors R;

for i=3:244
    A1(i-2)=Line1(i);%m=0.878 L/D=0.667 Cb/R=0.0015
    A2(i-2)=VarName2(i);
    B1(i-2)=Line2(i);%m=0.878 L/D=0.5 Cb/R=0.0015
    B2(i-2)=VarName5(i);
    C1(i-2)=Line3(i);%m=0.878 L/D=0.333 Cb/R=0.00135
    C2(i-2)=VarName8(i);
    D1(i-2)=Line4(i);%m=0.706 L/D=0.667 Cb/R=0.0014
    D2(i-2)=VarName11(i);
    E1(i-2)=Line5(i);%m=0.728 L/D=0.5 Cb/R=0.0016
    E2(i-2)=VarName14(i);
    F1(i-2)=Line6(i);%m=0.727 L/D=0.333 Cb/R=0.00158
    F2(i-2)=VarName17(i);
end

X1=polyfit(A1,A2,12);
Y1=polyval(X1,A1);
X2=polyfit(B1,B2,12);
Y2=polyval(X2,B1);
X3=polyfit(C1,C2,12);
Y3=polyval(X3,C1);
X4=polyfit(D1,D2,12);
Y4=polyval(X4,D1);
X5=polyfit(E1,E2,12);
Y5=polyval(X5,E1);
X6=polyfit(F1,F2,12);
Y6=polyval(X6,F1);

dLD1=(0.667-LD);
dLD1=[dLD1, 1];
dLD2=(0.5-LD);
dLD2=[dLD2, 2];
dLD3=(0.333-LD);
dLD3=[dLD3, 3];

temp=1;
min1=dLD1(1,1);
if abs(min1)>abs(dLD2(1,1))
    min1=dLD2(1,1);
    temp=dLD2(1,2);
end
if abs(min1)>abs(dLD3(1,1))
    min1=dLD3(1,1);
    temp=dLD3(1,2);
end

mins=10;
temps=100;
if temp==1
    if min(m-0.878,m-0.706)==m-0.878
        tempd=1;
    end
end

```

```

    for i=1:length(A1)
        if A1(i)~=0
            if abs(A1(i)-S)<mins
                mins=A1(i)-S;
                temps=i;
            end
        end
    end
else
    tempd=4;
    for i=1:length(D1)
        if D1(i)~=0
            if abs(D1(i)-S)<mins
                mins=D1(i)-S;
                temps=i;
            end
        end
    end
end
elseif temp==2
    if min(m-0.879,m-0.728)==m-0.879
        tempd=2;
        for i=1:length(B1)
            if B1(i)~=0
                if abs(B1(i)-S)<mins
                    mins=B1(i)-S;
                    temps=i;
                end
            end
        end
    else
        tempd=5;
        for i=1:length(E1)
            if E1(i)~=0
                if abs(E1(i)-S)<mins
                    mins=E1(i)-S;
                    temps=i;
                end
            end
        end
    end
end
else
    if min(m-0.878,m-0.722)==m-0.878
        tempd=3;
        for i=1:length(C1)
            if C1(i)~=0
                if abs(C1(i)-S)<mins
                    mins=C1(i)-S;
                    temps=i;
                end
            end
        end
    else
        tempd=6;
        for i=1:length(F1)
            if F1(i)~=0
                if abs(F1(i)-S)<mins
                    mins=F1(i)-S;
                    temps=i;
                end
            end
        end
    end
end
end

```

```

        end
end

if tempd==1
    EN=Y1 (temps)+mins;
elseif tempd==2
    EN=Y2 (temps)+mins;
elseif tempd==3
    EN=Y3 (temps)+mins;
elseif tempd==4
    EN=Y4 (temps)+mins;
elseif tempd==5
    EN=Y5 (temps)+mins;
else
    EN=Y6 (temps)+mins;
end

e=EN;

[~, ~, raw] = xlsread();
raw(cellfun(@(x) ~isempty(x) && isnumeric(x) && isnan(x),raw)) = {'';
stringVectors = string(raw(:, [3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33]));
stringVectors(ismissing(stringVectors)) = '';
raw =
raw(:, [1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20,22,23,25,26,28,29,31,32,34,35]);

%% Replace non-numeric cells with NaN
Rt = cellfun(@(x) ~isnumeric(x) && ~islogical(x),raw); % Find non-numeric cells
raw(Rt) = {0.0}; % Replace non-numeric cells

%% Create output variable
data = reshape([raw{:}],size(raw));

%% Allocate imported array to column variable names
Cyy = data(:,1);
VarName2 = data(:,2);
VarName3 = stringVectors(:,1);
Cxx = data(:,3);
VarName5 = data(:,4);
VarName6 = stringVectors(:,2);
CCyxCxy = data(:,5);
VarName8 = data(:,6);
VarName9 = stringVectors(:,3);
Cyy1 = data(:,7);
VarName11 = data(:,8);
VarName12 = stringVectors(:,4);
Cxx1 = data(:,9);
VarName14 = data(:,10);
VarName15 = stringVectors(:,5);
CxyCyx = data(:,11);
VarName17 = data(:,12);
VarName34 = stringVectors(:,6);
Cyy2 = data(:,13);
VarName37 = data(:,14);
VarName40 = stringVectors(:,7);
Cxx2 = data(:,15);
VarName43 = data(:,16);
VarName46 = stringVectors(:,8);
CyxCxy1 = data(:,17);
VarName48 = data(:,18);
VarName49 = stringVectors(:,9);

```

```

Cyy3 = data(:,19);
VarName50 = data(:,20);
VarName51 = stringVectors(:,10);
Cxx3 = data(:,21);
VarName52 = data(:,22);
VarName53 = stringVectors(:,11);
CxyCyx1 = data(:,23);
VarName54 = data(:,24);

%% Clear temporary variables
clearvars data raw stringVectors R;

for i=4:118
    ACyy(i-3,1)=Cyy(i);%L/D=0.25
    ACyy(i-3,2)=VarName2(i);
    ACxx(i-3,1)=Cxx(i);%L/D=0.25
    ACxx(i-3,2)=VarName5(i);
    ACyxCxy(i-3,1)=CCyxCxy(i);%L/D=0.25
    ACyxCxy(i-3,2)=VarName8(i);

    BCyy(i-3,1)=Cyy1(i);%L/D=0.5
    BCyy(i-3,2)=VarName11(i);
    BCxx(i-3,1)=Cxx1(i);%L/D=0.5
    BCxx(i-3,2)=VarName14(i);
    BCxyCyx(i-3,1)=CxyCyx(i);%L/D=0.5
    BCxyCyx(i-3,2)=VarName17(i);

    CCyy(i-3,1)=Cyy2(i);%L/D=0.75
    CCyy(i-3,2)=VarName37(i);
    CCxx(i-3,1)=Cxx2(i);%L/D=0.75
    CCxx(i-3,2)=VarName43(i);
    CCyxCxy(i-3,1)=CyxCxy1(i);%L/D=0.75
    CCyxCxy(i-3,2)=VarName48(i);

    DDxx(i-3,1)=Cxx3(i);%L/D=1
    DDxx(i-3,2)=VarName52(i);
    DCxyCyx(i-3,1)=CxyCyx1(i);%L/D=1
    DCxyCyx(i-3,2)=VarName54(i);
    DCyy(i-3,1)=Cyy3(i);%L/D=1
    DCyy(i-3,2)=VarName50(i);

end

ACyy=ACyy(1:115,1:2);
ACxx=ACxx(1:33,1:2);
ACyxCxy=ACyxCxy(1:21,1:2);

BCyy=BCyy(1:110,1:2);
BCxx=BCxx(1:26,1:2);
BCxyCyx=BCxyCyx(1:17,1:2);

CCyy=CCyy(1:108,1:2);
CCxx=CCxx(1:36,1:2);
CCyxCxy=CCyxCxy(1:28,1:2);

DDxx=DDxx(1:28,1:2);
DCxyCyx=DCxyCyx(1:23,1:2);
DCyy=DCyy(1:107,1:2);

```

```

X11=polyfit(ACyy(:,1),ACyy(:,2),12);
Y11=polyval(X11,ACyy(:,1));
X12=polyfit(ACxx(:,1),ACxx(:,2),12);
Y12=polyval(X12,ACxx(:,1));
X13=polyfit(ACyxCxy(:,1),ACyxCxy(:,2),12);
Y13=polyval(X13,ACyxCxy(:,1));

X21=polyfit(BCyy(:,1),BCyy(:,2),12);
Y21=polyval(X21,BCyy(:,1));
X22=polyfit(BCxx(:,1),BCxx(:,2),12);
Y22=polyval(X22,BCxx(:,1));
X23=polyfit(BCxyCyx(:,1),BCxyCyx(:,2),12);
Y23=polyval(X23,BCxyCyx(:,1));

X31=polyfit(CCyy(:,1),CCyy(:,2),12);
Y31=polyval(X31,CCyy(:,1));
X32=polyfit(CCxx(:,1),CCxx(:,2),12);
Y32=polyval(X32,CCxx(:,1));
X33=polyfit(CCyxCxy(:,1),CCyxCxy(:,2),12);
Y33=polyval(X33,CCyxCxy(:,1));

X42=polyfit(DDxx(:,1),DDxx(:,2),12);
Y42=polyval(X42,DDxx(:,1));
X43=polyfit(DCxyCyx(:,1),DCxyCyx(:,2),12);
Y43=polyval(X43,DCxyCyx(:,1));
X44=polyfit(DCyy(:,1),DCyy(:,2),8);
Y44=polyval(X44,DCyy(:,1));

dLD1=(0.25-LD);
dLD1=[dLD1, 1];
dLD2=(0.5-LD);
dLD2=[dLD2, 2];
dLD3=(0.75-LD);
dLD3=[dLD3, 3];
dLD4=(1-LD);
dLD4=[dLD4, 4];

temp=1;
min1=dLD1(1,1);
if abs(min1)>abs(dLD2(1,1))
    min1=dLD2(1,1);
    temp=dLD2(1,2);
end
if abs(min1)>abs(dLD3(1,1))
    min1=dLD3(1,1);
    temp=dLD3(1,2);
end
if abs(min1)>abs(dLD4(1,1))
    min1=dLD4(1,1);
    temp=dLD4(1,2);
end

minexx=10;
tempxx=100;
mineyx=10;
tempyx=100;
mineyy=10;
tempyy=100;

```

```

if temp==1
    for i=1:length(ACxx)
        if ACxx(i)~=0
            if abs(ACxx(i)-e)<minexx
                minexx=ACxx(i)-e;
                tempxx=i;
            end
        end
    end

    for i=1:length(ACyxCxy)
        if ACyxCxy(i)~=0
            if abs(ACyxCxy(i)-e)<mineyx
                mineyx=ACyxCxy(i)-e;
                tempyx=i;
            end
        end
    end

    for i=1:length(ACyy)
        if ACyy(i)~=0
            if abs(ACyy(i)-e)<mineyy
                mineyy=ACyy(i)-e;
                tempyy=i;
            end
        end
    end
elseif temp==2
    for i=1:length(BCxx)
        if BCxx(i)~=0
            if abs(BCxx(i)-e)<minexx
                minexx=BCxx(i)-e;
                tempxx=i;
            end
        end
    end

    for i=1:length(BCxyCyx)
        if BCxyCyx(i)~=0
            if abs(BCxyCyx(i)-e)<mineyx
                mineyx=BCxyCyx(i)-e;
                tempyx=i;
            end
        end
    end

    for i=1:length(BCyy)
        if BCyy(i)~=0
            if abs(BCyy(i)-e)<mineyy
                mineyy=BCyy(i)-e;
                tempyy=i;
            end
        end
    end
elseif temp==3
    for i=1:length(CCxx)
        if CCxx(i)~=0
            if abs(CCxx(i)-e)<minexx
                minexx=CCxx(i)-e;

```

```

        tempxx=i;
    end
    end
end

for i=1:length(CCyxCxy)
    if CCyxCxy(i)~=0
        if abs(CCyxCxy(i)-e)<mineyx
            mineyx=CCyxCxy(i)-e;
            tempyx=i;
        end
    end
end

for i=1:length(CCyxx)
    if CCyxx(i)~=0
        if abs(CCyxx(i)-e)<minexx
            minexx=CCyxx(i)-e;
            tempxx=i;
        end
    end
end

else

    for i=1:length(DCyxCxy)
        if DCyxCxy(i)~=0
            if abs(DCyxCxy(i)-e)<mineyx
                mineyx=DCyxCxy(i)-e;
                tempyx=i;
            end
        end
    end

    for i=1:length(DCyxx)
        if DCyxx(i)~=0
            if abs(DCyxx(i)-e)<minexx
                minexx=DCyxx(i)-e;
                tempxx=i;
            end
        end
    end

    for i=1:length(DCyxx)
        if DCyxx(i)~=0
            if abs(DCyxx(i)-e)<minexx
                minexx=DCyxx(i)-e;
                tempxx=i;
            end
        end
    end

    for i=1:length(DCyxx)
        if DCyxx(i)~=0
            if abs(DCyxx(i)-e)<minexx
                minexx=DCyxx(i)-e;
                tempxx=i;
            end
        end
    end

end

if temp==1
    CYX=Y13(tempyx)+mineyx;
    CXX=Y12(tempxx)+minexx;
    CYY=Y11(tempyy)+mineyy;
elseif temp==2
    CYX=Y23(tempyx)+mineyx;
    CXX=Y22(tempxx)+minexx;

```

```

        CYY=Y21(tempyy)+mineyy;
elseif temp==3
        CYX=Y33(tempyx)+mineyx;
        CXX=Y32(tempxx)+minexx;
        CYY=Y31(tempyy)+mineyy;
else
        CYX=Y43(tempyx)+mineyx;
        CXX=Y42(tempxx)+minexx;
        CYY=Y44(tempyy)+mineyy;
end

CC=[CXX CYX;
     CYX CYY];

CC = CC*Wf/cb/W;

%% Import the data
% [~, ~, raw] = [~, ~, raw] = xlsread();
stringVectors = string(raw(:, [3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45]));
stringVectors(ismissing(stringVectors)) = '';
raw =
raw(:, [1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20,22,23,25,26,28,29,31,32,34,35,37,38,40,41,43,44,46,47]);

%% Replace non-numeric cells with 0.0
Rt = cellfun(@(x) (~isnumeric(x) && ~islogical(x)) || isnan(x), raw); % Find non-numeric cells
raw(Rt) = {0.0}; % Replace non-numeric cells

%% Create output variable
data = reshape([raw{:}], size(raw));

%% Allocate imported array to column variable names
Kyx = data(:,1);
VarName1 = data(:,2);
VarName4 = stringVectors(:,1);
Kxx = data(:,3);
VarName7 = data(:,4);
VarName10 = stringVectors(:,2);
Kxy = data(:,5);
VarName13 = data(:,6);
VarName16 = stringVectors(:,3);
Kyy = data(:,7);
VarName18 = data(:,8);
VarName19 = stringVectors(:,4);
Kxy1 = data(:,9);
VarName20 = data(:,10);
VarName21 = stringVectors(:,5);
Kyx1 = data(:,11);
VarName22 = data(:,12);
VarName23 = stringVectors(:,6);
Kxx1 = data(:,13);
VarName24 = data(:,14);
VarName25 = stringVectors(:,7);
Kyy1 = data(:,15);
VarName26 = data(:,16);
VarName27 = stringVectors(:,8);
Kyy2 = data(:,17);
VarName28 = data(:,18);

```

```

VarName29 = stringVectors(:,9);
Kxx2 = data(:,19);
VarName30 = data(:,20);
VarName31 = stringVectors(:,10);
Kxy2 = data(:,21);
VarName32 = data(:,22);
VarName33 = stringVectors(:,11);
Kyx2 = data(:,23);
VarName35 = data(:,24);
VarName36 = stringVectors(:,12);
Kyy3 = data(:,25);
VarName38 = data(:,26);
VarName39 = stringVectors(:,13);
Kxx3 = data(:,27);
VarName41 = data(:,28);
VarName42 = stringVectors(:,14);
Kxy3 = data(:,29);
VarName44 = data(:,30);
VarName45 = stringVectors(:,15);
Kyx3 = data(:,31);
VarName47 = data(:,32);

%% Clear temporary variables
clearvars data raw stringVectors R;

for i=4:110
    AKyx(i-3,1)=Kyx(i);%L/D=0.25
    AKyx(i-3,2)=VarName1(i);
    AKxx(i-3,1)=Kxx(i);%L/D=0.25
    AKxx(i-3,2)=VarName7(i);
    AKxy(i-3,1)=Kxy(i);%L/D=0.25
    AKxy(i-3,2)=VarName13(i);
    AKyy(i-3,1)=Kyy(i);%L/D=0.25
    AKyy(i-3,2)=VarName18(i);

    BKyx(i-3,1)=Kyx1(i);%L/D=0.5
    BKyx(i-3,2)=VarName22(i);
    BKxx(i-3,1)=Kxx1(i);%L/D=0.5
    BKxx(i-3,2)=VarName24(i);
    BKxy(i-3,1)=Kxy1(i);%L/D=0.5
    BKxy(i-3,2)=VarName20(i);
    BKyy(i-3,1)=Kyy1(i);%L/D=0.5
    BKyy(i-3,2)=VarName26(i);

    CKyx(i-3,1)=Kyx2(i);%L/D=0.75
    CKyx(i-3,2)=VarName35(i);
    CKxx(i-3,1)=Kxx2(i);%L/D=0.75
    CKxx(i-3,2)=VarName30(i);
    CKxy(i-3,1)=Kxy2(i);%L/D=0.75
    CKxy(i-3,2)=VarName32(i);
    CKyy(i-3,1)=Kyy2(i);%L/D=0.75
    CKyy(i-3,2)=VarName28(i);

    DKyx(i-3,1)=Kyx3(i);%L/D=1
    DKyx(i-3,2)=VarName47(i);
    DKxx(i-3,1)=Kxx3(i);%L/D=1
    DKxx(i-3,2)=VarName41(i);
    DKxy(i-3,1)=Kxy3(i);%L/D=1
    DKxy(i-3,2)=VarName44(i);
    DKyy(i-3,1)=Kyy3(i);%L/D=1
    DKyy(i-3,2)=VarName38(i);

```

end

```
AKyx=AKyx(1:70,1:2);  
AKxx=AKxx(1:50,1:2);  
AKxy=AKxy(1:32,1:2);  
AKyy=AKyy(1:34,1:2);
```

```
BKyx=BKyx(1:67,1:2);  
BKxx=BKxx(1:56,1:2);  
BKxy=BKxy(1:54,1:2);  
BKyy=BKyy(1:106,1:2);
```

```
CKyx=CKyx(1:44,1:2);  
CKxx=CKxx(1:29,1:2);  
CKxy=CKxy(1:24,1:2);  
CKyy=CKyy(1:105,1:2);
```

```
DKyx=DKyx(1:45,1:2);  
DKxx=DKxx(1:29,1:2);  
DKxy=DKxy(1:38,1:2);  
DKyy=DKyy(1:107,1:2);
```

```
X11=polyfit(AKyx(:,1),AKyx(:,2),12);  
Y11=polyval(X11,AKyx(:,1));  
X12=polyfit(AKxx(:,1),AKxx(:,2),12);  
Y12=polyval(X12,AKxx(:,1));  
X13=polyfit(AKxy(:,1),AKxy(:,2),12);  
Y13=polyval(X13,AKxy(:,1));  
X14=polyfit(AKyy(:,1),AKyy(:,2),12);  
Y14=polyval(X14,AKyy(:,1));
```

```
X21=polyfit(BKyx(:,1),BKyx(:,2),12);  
Y21=polyval(X21,BKyx(:,1));  
X22=polyfit(BKxx(:,1),BKxx(:,2),12);  
Y22=polyval(X22,BKxx(:,1));  
X23=polyfit(BKxy(:,1),BKxy(:,2),12);  
Y23=polyval(X23,BKxy(:,1));  
X24=polyfit(BKyy(:,1),BKyy(:,2),12);  
Y24=polyval(X24,BKyy(:,1));
```

```
X31=polyfit(CKyx(:,1),CKyx(:,2),12);  
Y31=polyval(X31,CKyx(:,1));  
X32=polyfit(CKxx(:,1),CKxx(:,2),12);  
Y32=polyval(X32,CKxx(:,1));  
X33=polyfit(CKxy(:,1),CKxy(:,2),12);  
Y33=polyval(X33,CKxy(:,1));  
X34=polyfit(CKyy(:,1),CKyy(:,2),12);  
Y34=polyval(X34,CKyy(:,1));
```

```
X41=polyfit(DKyx(:,1),DKyx(:,2),12);  
Y41=polyval(X41,DKyx(:,1));  
X42=polyfit(DKxx(:,1),DKxx(:,2),12);  
Y42=polyval(X42,DKxx(:,1));  
X43=polyfit(DKxy(:,1),DKxy(:,2),12);  
Y43=polyval(X43,DKxy(:,1));  
X44=polyfit(DKyy(:,1),DKyy(:,2),12);  
Y44=polyval(X44,DKyy(:,1));
```

```

dLD1=(0.25-LD);
dLD1=[dLD1, 1];
dLD2=(0.5-LD);
dLD2=[dLD2, 2];
dLD3=(0.75-LD);
dLD3=[dLD3, 3];
dLD4=(1-LD);
dLD4=[dLD4, 4];

temp=1;
min1=dLD1(1,1);
if abs(min1)>abs(dLD2(1,1))
    min1=dLD2(1,1);
    temp=dLD2(1,2);
end
if abs(min1)>abs(dLD3(1,1))
    min1=dLD3(1,1);
    temp=dLD3(1,2);
end
if abs(min1)>abs(dLD4(1,1))
    min1=dLD4(1,1);
    temp=dLD4(1,2);
end

minexx=10;
tempxx=100;
minexy=10;
tempxy=100;
mineyx=10;
tempyx=100;
mineyy=10;
tempyy=100;

if temp==1
    for i=1:length(AKxx)
        if AKxx(i)~=0
            if abs(AKxx(i)-e)<minexx
                minexx=AKxx(i)-e;
                tempxx=i;
            end
        end
    end

    for i=1:length(AKyx)
        if AKyx(i)~=0
            if abs(AKyx(i)-e)<mineyx
                mineyx=AKyx(i)-e;
                tempyx=i;
            end
        end
    end

    for i=1:length(AKxy)
        if AKxy(i)~=0
            if abs(AKxy(i)-e)<minexy
                minexy=AKxy(i)-e;
                tempxy=i;
            end
        end
    end
end

```

```

for i=1:length(AKyy)
    if AKyy(i)~=0
        if abs(AKyy(i)-e)<mineyy
            mineyy=AKyy(i)-e;
            tempyy=i;
        end
    end
end
elseif temp==2
    for i=1:length(BKxx)
        if BKxx(i)~=0
            if abs(BKxx(i)-e)<minexx
                minexx=BKxx(i)-e;
                tempxx=i;
            end
        end
    end
end

for i=1:length(BKyx)
    if BKyx(i)~=0
        if abs(BKyx(i)-e)<mineyx
            mineyx=BKyx(i)-e;
            tempyx=i;
        end
    end
end

for i=1:length(BKxy)
    if BKxy(i)~=0
        if abs(BKxy(i)-e)<minexy
            minexy=BKxy(i)-e;
            tempxy=i;
        end
    end
end

for i=1:length(BKyy)
    if BKyy(i)~=0
        if abs(BKyy(i)-e)<mineyy
            mineyy=BKyy(i)-e;
            tempyy=i;
        end
    end
end
elseif temp==3
    for i=1:length(CKxx)
        if CKxx(i)~=0
            if abs(CKxx(i)-e)<minexx
                minexx=CKxx(i)-e;
                tempxx=i;
            end
        end
    end
end

for i=1:length(CKyx)
    if CKyx(i)~=0
        if abs(CKyx(i)-e)<mineyx
            mineyx=CKyx(i)-e;
            tempyx=i;
        end
    end
end

```

```

end

for i=1:length(CKxy)
    if CKxy(i)~=0
        if abs(CKxy(i)-e)<minexy
            minexy=CKxy(i)-e;
            tempxy=i;
        end
    end
end

for i=1:length(CKyy)
    if CKyy(i)~=0
        if abs(CKyy(i)-e)<mineyy
            mineyy=CKyy(i)-e;
            tempyy=i;
        end
    end
end

else

    for i=1:length(DKxx)
        if DKxx(i)~=0
            if abs(DKxx(i)-e)<minexx
                minexx=DKxx(i)-e;
                tempxx=i;
            end
        end
    end

    for i=1:length(DKyx)
        if DKyx(i)~=0
            if abs(DKyx(i)-e)<mineyx
                mineyx=DKyx(i)-e;
                tempyx=i;
            end
        end
    end

    for i=1:length(DKxy)
        if DKxy(i)~=0
            if abs(DKxy(i)-e)<minexy
                minexy=DKxy(i)-e;
                tempxy=i;
            end
        end
    end

    for i=1:length(DKyy)
        if DKyy(i)~=0
            if abs(DKyy(i)-e)<mineyy
                mineyy=DKyy(i)-e;
                tempyy=i;
            end
        end
    end

end

if temp==1
    KYX=Y11(tempyx)+mineyx;

```

```

        KXX=Y12 (tempxx) +minexx;
        KXY=Y13 (tempxy) +minexy;
        KYY=Y14 (tempyy) +mineyy;
elseif temp==2
        KYX=Y21 (tempyx) +mineyx;
        KXX=Y22 (tempxx) +minexx;
        KXY=Y23 (tempxy) +minexy;
        KYY=Y24 (tempyy) +mineyy;
elseif temp==3
        KYX=Y31 (tempyx) +mineyx;
        KXX=Y32 (tempxx) +minexx;
        KXY=Y33 (tempxy) +minexy;
        KYY=Y34 (tempyy) +mineyy;
else
        KYX=Y41 (tempyx) +mineyx;
        KXX=Y42 (tempxx) +minexx;
        KXY=Y43 (tempxy) +minexy;
        KYY=Y44 (tempyy) +mineyy;
end

KK=[KXX KXY;
     KYX KYY];

KK = KK*Wf/cb;

M=Mr;
C=CC;
% K=KK+Kr;
K=inv (inv (KK) +inv (Kr));

syms wn

w=solve (det (M*wn-K==0));

Wn (:, ii)=double (w);

Wnmin=min (Wn);

Tsim=30;
tstep=0.001;

sim Closed_4

ac (ii)=max (max (accel.Data (floor (end/2):end, :)));
xv (ii)=max (max (xvar.Data (floor (end/2):end, :)));

end
% plot (PP/1e5, ac, '-o')
figure (1)
plot (PP/1e5, Wnmin*30/pi, '-o')
xlabel ('External Pressure (bar)')
ylabel ('Minimum natural frequency (rpm)')
xlim ([0 501])
figure (2)
plot (PP/1e5, xv*1e6, '-o')
xlabel ('External Pressure (bar)')

```

```
ylabel('Vibration Amplitude ( $\mu\text{m}$ )')
```