



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΟΝΙΑΜΑΤΩΝ ΜΕ ΣΚΟΠΟ ΤΗΝ
ΑΥΤΟΜΑΤΗ ΣΥΝΕΝΩΣΗ ΤΟΥΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΟΚΤΙΣΤΗ-ΜΑΡΙΝΑ Γ. ΣΤΑΛΙΜΕΡΟΥ

Επιβλέπων : Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς

Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2011.



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΟΝΙΑΜΑΤΩΝ ΜΕ ΣΚΟΠΟ
ΤΗΝ ΑΥΤΟΜΑΤΗ ΣΥΝΕΝΩΣΗ ΤΟΥΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΟΚΤΙΣΤΗ-ΜΑΡΙΝΑ Γ. ΣΤΑΛΙΜΕΡΟΥ

Επιβλέπων : Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς

Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 7^η Οκτωβρίου 2011.

.....
Κ. Παπαοδυσσεύς

Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Η. Κουκούτσης

Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Γ. Καμπουράκης

Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Θεοκτίστη-Μαρίνα Γ. Σταλιμέρου

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Θεοκτίστη-Μαρίνα Γ. Σταλιμέρου, Κ. Παπαοδυσσεύς, 2011.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή μελετάται μία μεθοδολογία ανακατασκευής τρισδιάστατων αντικειμένων. Το σύστημα που αναπτύχθηκε με βάση αυτή και μελετήθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία, βασίζεται στη τρισδιάστατη αναπαράσταση στον υπολογιστή των τρισδιάστατων αντικειμένων. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν θραύσματα τοιχογραφίας που βρέθηκαν σε ανάκτορο στην Τίρυνθα και η τρισδιάστατη πληροφορία τους αποκτήθηκε μέσω σάρωσης από 3D-scanner.

Η μεθοδολογία, σε πρώτη φάση, βρίσκει τα κάθετα διανύσματα που αντιστοιχούν σε όλα τα σημεία της άνω επιφάνειας του κονιάματος. Κατόπιν, είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε το αντίστοιχο επίπεδο της άνω επιφάνειας. Το τρίτο βήμα της μεθοδολογίας απαιτεί τομές του θραύσματος με επίπεδα παράλληλα στο βέλτιστο. Τέλος, σχεδιάζεται για κάθε τομή το περίγραμμα του κονιάματος. Ως αποτέλεσμα, για κάθε θραύσμα που επεξεργάζεται αυτή η μέθοδος, το αποτέλεσμα είναι πολλές καμπύλες (μία ανά τομή) που αναπαριστούν το σχήμα του θραύσματος στα παράλληλα επίπεδα της άνω επιφάνειάς του, κατά μήκος του κάθετου άξονα στην άνω επιφάνεια. Για κάθε κονίαμα χρειάζονται περίπου 12-25 τομές για να καλύψουν όλη την επιφάνειά του, ανάλογα με το πάχος του καθενός. Για τον σκοπό της αυτοματοποιημένης συνένωσής τους αρκούν περίπου 12 με 15 τομές.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα θραύσματα αναπαρίστανται επιτυχώς έτσι ώστε, να καθίσταται δυνατή η μετέπειτα αυτοματοποιημένη συνένωσή τους.

Λέξεις Κλειδιά

3D-scanning, θραύσματα τοιχογραφίας, Τίρυνθα, αυτόματη ανακατασκευή θραυσμένων αντικειμένων.

Abstract

In this thesis, a methodology of automatic reconstruction of three-dimensional objects was studied. The system developed under this and studied in this thesis is based on three-dimensional representation of three-dimensional computer objects. Specifically, used fresco fragments found in the palace at Tiryns and three-dimensional information obtained through the scanning of 3D-scanner.

The methodology, initially finds the perpendicular vectors correspond to all parts of the upper surface of the mortar. Then we can determine the corresponding level of the upper surface. The third step of the methodology requires incisions of the fragment with planes parallel to the optimum. Finally, plans for each intersection of the contour of the mortar. As a result, for each chip that processes this method, the result is a lot of curves (one per section) that represent the shape of the fragments in parallel planes of the upper surface along the vertical axis on the upper surface. For each mortar takes about 12-25 slices depending on the thickness of each.

The results showed that the fragments represented successfully in order to enable subsequent automated grouping them.

Keywords

3D-scanning, wall-painting fragments, Tiryns, automatic reconstruction of fragmented 3D objects

Περιεχόμενα

I. Εισαγωγή	σελ.7
1. Στόχοι και Σκοπός της Διπλωματικής	σελ.8
2. Ιστορικά	σελ. 8
II. Αναλυτική περιγραφή του απαραίτητου μαθηματικού υποβάθρου.....	σελ. 11
3. Περί καμπυλών	σελ.12
3.1 Γενικός ορισμός καμπύλης-εφαπτομένης καμπύλης	σελ. 12
3.2 Εφαπτόμενο και πρωτοκάθετο διάνυσμα σε καμπύλη.....	σελ. 16
3.3 Καμυλότητα μιας καμπύλης	18
4. Περί επιφανειών	σελ. 21
4.1 Επιφάνειες ορισμένες σε παραμετρική μορφή.....	σελ.21
4.1.1 Ορισμός παραμετρικής αναπαράστασης επιφανειών.....	σελ.21
4.1.2 Ισοπαραμετρικές Καμπύλες	σελ.23
4.1.3 Εφαπτόμενο διάνυσμα σε ισοπαραμετρική καμπύλη επιφάνειας.....	σελ. 24
4.1.4 Κάθετο διάνυσμα σε επιφάνεια που δίδεται σε παραμετρική μορφή	σελ.25
4.2 Επιφάνειες ορισμένες μέσω πεπλεγμένης εξίσωσης $f(x,y,z)=0$	σελ. 26
4.2.1 Εφαπτόμενο επίπεδο σε επιφάνεια που δίδεται σε πεπλεγμένη μορφή.....	σελ. 26
5. Περί επιπέδων επιφανειών.....	σελ. 27
5.1 Παραμετρικός ορισμός επιπέδου.....	σελ. 27
5.2 Απόσταση σημείου από επίπεδο	σελ. 30
6. Μερικές Βασικές Ιδιότητες Πολυγώνων.....	σελ. 31
6.1 Υπολογισμός εμβαδού πολυγώνου	σελ.31
6.2 Εντοπισμός του κέντρου βάρους πολυγώνου.....	σελ. 34
7. Στατιστική	σελ. 37
7.1 Κανονική κατανομή (Normal Distribution).....	σελ. 37
7.2 Κατανομή χ^2	σελ.39
7.3 Κατανομή t ή Student	σελ.42
7.4 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα	σελ. 43
7.4.1 Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.....	σελ.43
7.4.2 Κανονική Προσέγγιση της Διωνυμικής Κατανομής....	σελ.45
7.4.3 Κανονική Προσέγγιση της Κατανομής Poisson.....	σελ. 48
7.4.4 Διόρθωση Συνέχειας.....	σελ.48

8. Ελαχιστοποίηση Συναρτήσεων	σελ. 49
8.1 Γενικά περί τοπικών ελαχίστων συναρτήσεων.....	σελ. 49
8.2 Μέθοδος των Nelder Mead–Downhill Simplex Method in Multidimensions.....	σελ. 50
8.3 Μέθοδοι ελαχιστοποίησης συνάρτησης f με υπολογισμό των πρώτων μερικών παραγώγων της.....	σελ. 51
8.4 Μέθοδος απόκρημνων καταβάσεων (Steepest Descent)	σελ.61
8.5 Η μέθοδος συζυγών κλίσεων των Fletcher-Reeves	σελ.64
8.6 Η μέθοδος των Broyden-Fletcher-Goldfard-Shanno (BFGS)	σελ.66
8.7 Σύγκριση των μεθόδων ελαχιστοποίησης.....	σελ.70
 III. Περιγραφή της μεθόδου ψηφιακής επεξεργασίας των θραυσμάτων των τοιχογραφιών	σελ.72
9. Παρουσίαση της μεθόδου ψηφιακής επεξεργασίας των θραυσμάτων των τοιχογραφιών	σελ.73
10. Αναλυτική περιγραφή του κώδικα	σελ.80
10.1 Περιγραφή του κώδικα που βρίσκει το βέλτιστο επίπεδο στην άνω επιφάνεια του κονιάματος.....	σελ. 80
10.2 Περιγραφή του κώδικα που βρίσκει τομές κονιαμάτων.....	σελ. 81
10.3 Περιγραφή του κώδικα στροφής επιπέδου.....	σελ. 82
10.4 Περιγραφή του κώδικα που βρίσκει το περίγραμμα του κονιάματος για κάθε τομή	σελ.83
 IV. Συμπεράσματα	σελ. 84
 V. Βιβλιογραφία	σελ.85
 VI. Παράρτημα	σελ.86
1. Τρισδιάστατος σαρωτής-3D scanner.....	σελ. 87
2. Αρχεία STL	σελ.89
3. Ενδεικτικά τα αποτελέσματα ενός κονιάματος	σελ.92

I. Εισαγωγή

1. Στόχοι και Σκοπός της Διπλωματικής

Ένας πρώτος στόχος της παρούσης Διπλωματικής εργασίας είναι η εμπάθυνση στη θεωρία καμπυλών και επιφανειών.

Ένας δεύτερος στόχος είναι η χρήση εργαλείων και η ανάπτυξη κώδικα (προγραμμάτων) για αναπαράσταση και διαχείριση αυτών των οντοτήτων.

Εν συνεχεία, ο κύριος σκοπός είναι η εφαρμογή αυτών των τεχνολογικών εργαλείων στην ψηφιακή επεξεργασία δισδιάστατων και τρισδιάστατων απεικονίσεων θραυσμάτων τοιχογραφιών που είχαν ζωγραφιστεί στην Τίρυνθα πριν το 1100 π.Χ.. Η ψηφιακή επεξεργασία αυτών των θραυσμάτων είναι πολύ μεγάλης σημασίας, διότι τελικά στοχεύει στην ψηφιακή ανασύνθεση αυτών των τοιχογραφιών ή τουλάχιστον τμημάτων τους που σώζονται, με τη χρήση ενός πρωτότυπου πληροφοριακού συστήματος που έχει αναπτυχθεί από την ερευνητική ομάδα του επιβλέποντος της παρούσης διπλωματικής.

2. Ιστορικά

Η μυκηναϊκή ακρόπολη στην Τίρυνθα, καλύπτει μια περιοχή περίπου 20.000 τετραγωνικών μέτρων. Είναι χτισμένη σ' ένα χαμηλό, βραχώδη λοφίσκο, ο οποίος υψώνεται μόλις δεκαοκτώ μέτρα πάνω από την πεδιάδα του Άργους και κατά τη Μυκηναϊκή περίοδο, ήταν παραθαλάσσιος. Ο Heinrich Achliemann, ο οποίος διεξήγαγε τις εκσκαφές της Τροίας και των Μυκηνών, και ο αρχιτέκτων Wilhelm Dörpfeld, ανέσκαψε την ακρόπολη το 1885 και 1886. Σήμερα, οι ανασκαφές στην Τίρυνθα συνεχίζονται υπό τη διεύθυνση του Γερμανικού Αρχαιολογικού Ινστιτούτου.⁽³⁾

Το φρούριο ήταν το διοικητικό, οικονομικό και θρησκευτικό κέντρο μιας ευρείας περιοχής κατά τον 14^ο και 13^ο αιώνα π.Χ.. Η κεντρική εξουσία διατηρούσε αρχαία γραμμένα σε πήλινες πλάκες σε Γραμμική Β, την πρώτη μέχρι τώρα γνωστή ελληνική γραφή. Η ζωγραφική σε μεγάλη κλίμακα ήταν η επίσημη τέχνη, η οποία ασκούνταν από καλλιτέχνες διορισμένους από το βασιλιά. Η επίσημη κατοικία του ηγέτη στην κορυφή του φρουρίου ήταν διακοσμημένη με τοιχογραφίες. Γύψος με διακοσμητικές ζωγραφίες κάλυπτε επίσης τα δάπεδα των δύο μεγαλύτερων δωματίων, των μεγάρων. Η θεματολογία των τοιχογραφιών ήταν ποικίλη. Είτε προερχόταν από τη φύση ή αναπαριστούσε θρησκευτικές τελετές. Άλλοτε απεικόνιζε σκηνές από τη βασιλική αυλή, κυνηγιού ή πολέμου. Σπείρες και γεωμετρικά σχήματα είτε απλά γραμμικά σχέδια αποτελούσαν, επίσης, κομμάτι των θεμάτων των καλλιτεχνών. Ο καλλιτέχνης της μυκηναϊκής εποχής χρησιμοποιούσε φυσικά γήινα χρώματα, φτιαγμένα κυρίως από οξειδία μετάλλων, τα οποία επέθετε σε υγρή γύψινη επιφάνεια. Λεπτομέρειες προστίθεντο αφού είχε στεγνώσει ο γύψος.⁽³⁾

Μία από τις σημαντικότερες τοιχογραφίες που έχουν διασωθεί από την Ηπειρωτική Ελλάδα είναι η επονομαζόμενη Μυκηναία, η οποία βρίσκεται στο Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο της Αθήνας (inv.no 11670). Προέρχεται από ένα οίκημα της Ύστερης Ελλαδικής ΙΙΙ (13^{ος} αιώνας π.Χ.), κοντά στα τείχη, στην περιοχή του κέντρου θρησκευτικής λατρείας στις Μυκήνες. Πιθανολογείται ότι η τοιχογραφία έπεσε από το 2^ο όροφο του κτιρίου, το οποίο ο υπεύθυνος της ανασκαφής, Γ. Μυλωνάς, αναγνωρίζει ως το σπίτι του Αρχιερέα. ⁽³⁾

Το επιβλητικό πρόσωπο, με τα αμυγδαλωτά μάτια και το κομψό προφίλ, έχει μία σκεπτική έκφραση η οποία αποκαλύπτει την επισημότητα της στιγμής. Η φιγούρα έχει αποδοθεί σε αυτή μίας θεάς η οποία δέχεται τις προσφορές των πιστών. Σε αυτήν την περίπτωση, είναι ένα περιδέραιο, το οποίο κρατάει σφιχτά στο δεξί της χέρι. Εναλλακτικά, μπορεί να είναι η βέλτιστα διατηρημένη φιγούρα από μία πομπή ανθρώπων, οι οποίοι φέρουν προσφορές σε κάποια θεά. ⁽³⁾

Τα θραύσματα της τοιχογραφίας που χρησιμοποιούνται σε αυτήν την εργασία βρίσκονται στην Προϊστορική Συλλογή του Εθνικού Αρχαιολογικού Μουσείου της Αθήνας (inv. nos 1596, 1655, 1668, 5881-3). Προέρχονται από ανασκαφές στο μυκηναϊκό παλάτι της Τίρυνθας που πραγματοποιήθηκαν με επικεφαλής τον Η. Schliemann το 1885-1886 και το Γερμανικό Αρχαιολογικό Ινστιτούτο το 1909-1910. Παρουσιάζουν μία ποικιλία διακοσμητικών μοτίβων, συμπεριλαμβανομένων σπειρών, σχημάτων ροζέτας και περίτεχνων αφηρημένων σχεδίων και τοποθετούνται χρονικά ανάμεσα στον 14^ο και το 13^ο αιώνα π.Χ. . Μερικά από αυτά, με πάχος γύψου 2,5cm, ανήκουν στο δάπεδο του μικρότερου μεγάρου. ⁽³⁾

Ένα ερευνητικό έργο που βρίσκεται σε εξέλιξη αυτήν την περίοδο αφορά στη συντήρηση και τη μελέτη όλων των θραυσμάτων της τοιχογραφίας από την Τίρυνθα, τα οποία βρίσκονται είτε στην Αθήνα είτε στο Ναύπλιο και πραγματοποιείται από το Πανεπιστήμιο του Heidelberg (Prof. J. Maran), σε συνεργασία με το Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο (Δρ. Α. Παπάζογλου – Μανιουδάκη) και το Μουσείο του Ναυπλίου (Δρ. Α. Παπαδημητρίου). ⁽³⁾



Εικόνα 1: "Μυκηναία": Η πιο καλά διατηρημένη τοιχογραφία της Ηπειρωτικής Ελλάδας⁽³⁾

Μέσω της μεθοδολογίας και του συστήματος που θα περιγράψουμε και θα ελέγξουμε στην παρούσα εργασία, στόχος μας είναι να μπορέσουμε να αναπαραστήσουμε τα θραύσματα της τοιχογραφίας που βρέθηκαν στην Τίρυνθα ώστε να ανασυντεθεί μία τοιχογραφία αντίστοιχης ομορφιάς και σημασίας.⁽³⁾

II. Αναλυτική περιγραφή του απαραίτητου μαθηματικού υποβάθρου

3. Περί Καμπυλών

3.1 Γενικός ορισμός καμπύλης-εφαπτομένη καμπύλης

Όταν ένα σημείο κινείται κατά μήκος μιας καμπύλης του χώρου, η θέση του $P(t)$ κατά την στιγμή t , σε ένα καρτεσιανό τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$, έστω (x, y, z) μπορεί να καθοριστεί από τρεις εξισώσεις της μορφής ⁽²⁾

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad z = Z(t).$$

Καθώς η t μεταβάλλεται παίρνοντας τιμές σε ένα διάστημα $t \in [a, b] \subseteq \mathfrak{R}$, τα σημεία (x, y, z) που ορίζονται από τις εξισώσεις αυτές γράφουν την τροχιά του κινητού. Η παράμετρος t μπορεί να είναι χρόνος, γωνία, μήκος τόξου και άλλες. Παραδείγματος χάρη, αν η t , $t \in [0, 2\pi)$ παριστάνει την προσημασμένη γωνία που σχηματίζει ο ημιάξονας Ox με το διάνυσμα \overrightarrow{OP} , η οποία λέγεται και πολική γωνία, και ⁽²⁾

$$X(t) = R \cos(t), \quad Y(t) = R \sin(t), \quad Z(t) = 0,$$

τότε η καμπύλη είναι ένας ο κύκλος κέντρου O και ακτίνας R που βρίσκεται στο xy -επίπεδο. ⁽²⁾

Οι εξισώσεις $x = X(t)$, $y = Y(t)$, $z = Z(t)$ ονομάζονται παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης και οι X , Y , Z σημαίνουν συναρτήσεις που παίρνουν πραγματικές τιμές στο θεωρούμενο διάστημα (παραμετρικό διάστημα) και είναι ορισμένες και συνεχείς σε αυτό. ⁽²⁾

Ευθεία

Οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{v} = (a, b, c)$ είναι: ⁽²⁾

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + a \cdot t \\y(t) &= y_0 + b \cdot t \\z(t) &= z_0 + c \cdot t, \quad t \in \mathfrak{R}\end{aligned}$$

Κύκλος

Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας R στο xy -επίπεδο, είναι: ⁽²⁾

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + R \cdot \cos(t) \\y(t) &= y_0 + R \cdot \sin(t), t \in [0, 2\pi)\end{aligned}$$

Υπερβολή

Οι παραμετρικές εξισώσεις της υπερβολής στο xy -επίπεδο με εστίες $(-\gamma, 0)$ και $(\gamma, 0)$ είναι: ⁽²⁾

$$\begin{aligned}x(t) &= \alpha \cdot \cosh(t) \\y(t) &= \beta \cdot \sinh(t), t \in \mathfrak{R}\end{aligned}$$

με α, β, γ σταθερές και $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2$. ⁽²⁾

Έλλειψη

Οι παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης με κέντρο (x_0, y_0) στο xy -επίπεδο με εστίες $(-\gamma, 0)$ και $(\gamma, 0)$ είναι:

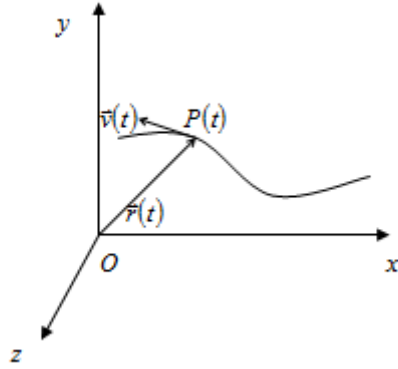
$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + a \cos(t) \\y(t) &= y_0 + b \sin(t), t \in [0, 2\pi] \text{ }^{(2), (4)}\end{aligned}$$

Παραβολή

Ένα ζευγάρι παραμετρικών εξισώσεων της παραβολής με εστία $E(0, \frac{p}{2})$ είναι το παρακάτω:

$$x = t^2 / 2p, y = t, t \in \mathfrak{R}. \text{ }^{(4)}$$

Έτσι όπως ορίστηκε η καμπύλη υποδηλώνει το γεωμετρικό τόπο των σημείων που κινούνται στο χώρο με ένα βαθμό ελευθερίας. ⁽²⁾



Εικόνα 2: Αναπαράσταση μιας καμπύλης στον χώρο. Στο σημείο της $P(t)$ διακρίνουμε την διανυσματική ακτίνα $\vec{r}(t)$ και το εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{v}(t)$. ⁽²⁾

Αν $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων Ox, Oy, Oz αντίστοιχα, τότε το διάνυσμα με αρχή το κέντρο των αξόνων και πέρας το σημείο (x, y, z) $\vec{r}(t) = X(t) \cdot \vec{i} + Y(t) \cdot \vec{j} + Z(t) \cdot \vec{k}$ λέγεται διανυσματική ακτίνα του αντίστοιχου σημείου της καμπύλης (x, y, z) . Επίσης η εξίσωση $\vec{r}(t) = X(t) \cdot \vec{i} + Y(t) \cdot \vec{j} + Z(t) \cdot \vec{k}$ λέγεται διανυσματική παραμετρική εξίσωση ή απλά διανυσματική εξίσωση της καμπύλης. Για καμπύλες που βρίσκονται πάνω στο xy -επίπεδο, η z -συνιστώσα, $Z(t)$, είναι για κάθε t ίση με το μηδέν. Όταν η συνάρτηση της καμπύλης έχει την ανωτέρω διανυσματική μορφή, η μελέτη των ιδιοτήτων της ανάγεται στην μελέτη των ιδιοτήτων των συναρτήσεων X, Y, Z . Όταν η t μεταβάλλεται στο παραμετρικό της διάστημα, η διανυσματική ακτίνα $\vec{r}(t)$ μεταβάλλεται εν γένει και κατά το μήκος της και κατά την κατεύθυνσή της. Εφόσον ορίζεται η παράγωγος της $\vec{r}(t)$ στη θέση t , το διάνυσμα $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = X'(t) \cdot \vec{i} + Y'(t) \cdot \vec{j} + Z'(t) \cdot \vec{k}$ λέγεται διανυσματική ταχύτητα, ενώ το μέτρο αυτής $v(t) = |\vec{v}(t)|$ επιτόρχεια ταχύτητα. Αν για ένα σημείο της καμπύλης $(x, y, z) = (X(t), Y(t), Z(t))$, ορίζεται το $\vec{r}'(t)$ και δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα, η ευθεία που διέρχεται από το σημείο αυτό και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{r}'(t)$ ονομάζεται εφαπτομένη της καμπύλης στο συγκεκριμένο σημείο. Όταν για όλα τα σημεία της καμπύλης C ορίζεται η παράγωγός της ως προς t , δηλαδή η $\vec{r}'(t)$, η οποία επιπλέον είναι συνεχής και πάντοτε διάφορη του μηδενικού διανύσματος, τότε η καμπύλη C είναι μια λεία ή ομαλή καμπύλη. Έτσι η καμπύλη αυτή έχει μια καλώς

ορισμένη εφαπτομένη σε κάθε σημείο της και η εφαπτομένη αυτή αλλάζει συνεχώς διεύθυνση όταν κινούμεθα πάνω στην καμπύλη. ⁽²⁾

Για κάθε t ορίζεται ένας αριθμός $s(t)$, ο οποίος παριστάνει την απόσταση που έχει διανύσει το κινητό πάνω στην καμπύλη από κάποια στιγμή t_0 μέχρι την στιγμή t . Η συνάρτηση αυτή s που μετράει το μήκος του τόξου έχει την ιδιότητα η παράγωγός της να είναι ίση με την επιτρόχια ταχύτητα. Δηλαδή, για κάθε t , είναι $s'(t) = v(t)$. Μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος του τόξου που, έχει διανύσει το κινητό πάνω στην καμπύλη από κάποια στιγμή t_0 μέχρι την στιγμή t_1 , ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση στο διάστημα $[t_0, t_1]$, δηλαδή: ⁽²⁾

$$s(t_1) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} dt .$$

Αν η κίνηση του σημείου αρχίζει τη στιγμή $t = a$, τότε $s(a) = 0$ και η απόσταση που κάλυψε μέχρι την στιγμή t_1 θα είναι: ⁽²⁾

$$s(t_1) = \int_a^{t_1} v(t) dt .$$

Ένα σημείο $P_0(t_0)$ λέγεται ομαλό σημείο της καμπύλης, αν $\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{P_0} \neq \vec{0}$, δηλαδή αν και μόνον αν, μια τουλάχιστον από τις παραγώγους $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0}, \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0}, \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_0}$ είναι διάφορος του μηδενός. Άρα το σύνολο των μη ομαλών σημείων αυτής θα ικανοποιεί τις εξισώσεις: ⁽²⁾

$$x'(t) = y'(t) = z'(t) = 0, \text{ δηλαδή } \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{0} .$$

Επειδή λοιπόν στα ομαλά σημεία μιας καμπύλης ισχύει ότι $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq \vec{0}$, θα είναι και

$\frac{ds}{dt} \neq 0$ σε αυτά τα σημεία. Επομένως η $s = s(t)$ μπορεί στα σημεία αυτά να λυθεί ως

προς t , δηλαδή να έχουμε $t = t(s)$. Επομένως, αν η καμπύλη είναι λεία, τότε μπορεί να γραφεί με νέα παράμετρο, την s , ως εξής: ⁽²⁾

$$\vec{r}(s) = X(t(s))\vec{i} + Y(t(s))\vec{j} + Z(t(s))\vec{k} = X(s)\vec{i} + Y(s)\vec{j} + Z(s)\vec{k}.$$

Η s λέγεται φυσική παράμετρος της καμπύλης. ⁽²⁾

3.2 Εφαπτόμενο και πρωτοκάθετο διάνυσμα σε καμπύλη

Ορίζουμε μια άλλη διανυσματική συνάρτηση που συνδέεται με την καμπύλη, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα \vec{T} , το οποίο ορίζεται για κάθε t για το οποίο είναι $v(t) \neq 0$ από την σχέση: ⁽²⁾

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{v(t)} \cdot \vec{v}(t) = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|} \quad \text{και είναι εξ ορισμού} \quad |\vec{T}(t)| = T(t) = 1.$$

Όταν το σημείο διαγράφει την καμπύλη, το αντίστοιχο διάνυσμα \vec{T} μεταβάλλεται μόνο κατά διεύθυνση αφού το μέτρο του παραμένει ίσο με την μονάδα. Προφανώς, αν η καμπύλη εκφράζεται με την φυσική της παράμετρο s , τότε είναι $\vec{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$.

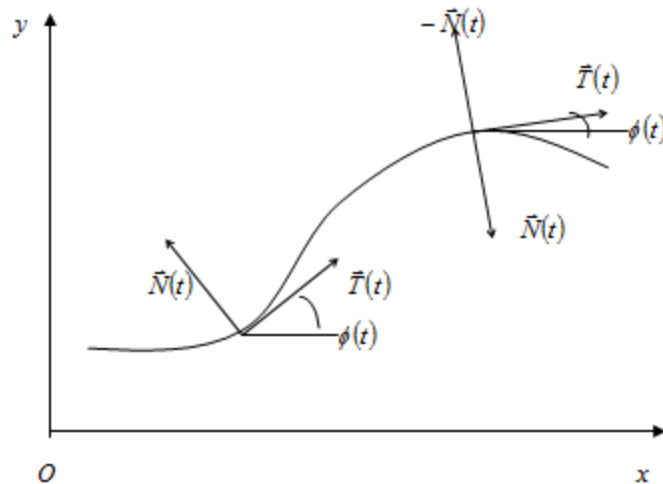
$$\text{Πράγματι είναι } \vec{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|}. \quad (2)$$

Η τάση του \vec{T} για μεταβολή της διεύθυνσής του μετριέται με την παράγωγό του \vec{T}' . Είναι γνωστό ότι, η παράγωγος μιας διανυσματικής συνάρτησης με σταθερό μέτρο, είναι διανυσματική συνάρτηση κάθετη προς την αρχική συνάρτηση. Άρα για κάθε t για το οποίο ισχύει $v(t) \neq 0$, είναι \vec{T}' κάθετο προς το \vec{T} . Ορίζουμε, τοιουτοτρόπως, μια άλλη διανυσματική συνάρτηση, την \vec{N} , που συνδέεται με την καμπύλη, το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση την κατεύθυνση του \vec{T}' , το οποίο ονομάζεται πρωτοκάθετο στην καμπύλη και δίνεται για κάθε t για το οποίο είναι $T'(t) \neq 0$ από την σχέση: ⁽²⁾

$$\vec{N}(t) = \frac{1}{T'(t)} \cdot \vec{T}'(t), \text{ ενώ είναι εξ ορισμού } |\vec{N}(t)| = N(t) = 1.$$

Όταν για κάποιο t ορίζονται τα δύο μοναδιαία διανύσματα $\vec{N}(t)$ και $\vec{T}(t)$, και τα θεωρήσουμε με αρχή το αντίστοιχο σημείο $P(t)$ της καμπύλης, τότε ορίζουν ένα επίπεδο που ονομάζεται εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης στο σημείο αυτό. Αν t_1, t_2, t_3 είναι τρεις οποιεσδήποτε τιμές του t και θεωρήσουμε το επίπεδο που ορίζεται από τα σημεία $P_1(t_1), P_2(t_2), P_3(t_3)$ της καμπύλης, μπορεί να αποδειχθεί ότι το επίπεδο που ορίζεται από τα σημεία αυτά πλησιάζει την θέση του εγγύτατου επιπέδου της καμπύλης στο t_2 , εφόσον ορίζεται, όταν τα t_1, t_3 πλησιάζουν το t_2 . Για τον λόγο αυτό, το εγγύτατο επίπεδο χαρακτηρίζεται πολλές φορές σαν εκείνο το επίπεδο που βρίσκεται όσο γίνεται πιο κοντά στην καμπύλη σε κάθε σημείο της. Όταν η καμπύλη είναι επίπεδη, όχι όμως ευθεία, το εγγύτατο επίπεδο, για όλα τα σημεία αυτής για τα οποία ορίζεται, ταυτίζεται με το επίπεδο της καμπύλης. Η παράγωγος της διανυσματικής ταχύτητας, είναι μια άλλη διανυσματική συνάρτηση της καμπύλης που ορίζεται από την σχέση $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t)$ για όποια εκ των σημείων $P(t)$ ορίζεται και είναι διάνυσμα του εγγύτατου επιπέδου στο $P(t)$ αν η αρχή του διανύσματος αυτής είναι στο συγκεκριμένο σημείο. ⁽²⁾

Επίσης, για επίπεδες καμπύλες, το $T'(t)$ είναι ένα μέτρο του συντελεστή μεταβολής της γωνίας κλίσης $\phi(t)$ του εφαπτόμενου διανύσματος $\vec{T}(t)$, όπως φαίνεται και στο κάτωθι σχήμα. ⁽²⁾



Εικόνα 3: Το $T'(t)$ είναι ένα μέτρο του συντελεστή μεταβολής της γωνίας κλίσης $\phi(t)$ του εφαπτομενικού διανύσματος $\vec{T}(t)$.⁽²⁾

3.3 Καμπυλότητα μιας καμπύλης

Για μια ευθεία γραμμή το εφαπτόμενο διάνυσμα \vec{T} δεν αλλάζει κατεύθυνση οπότε είναι $\vec{T}' = \vec{0}$, αλλά όταν η καμπύλη δεν είναι ευθεία γραμμή, η παράγωγος \vec{T}' μετρά την τάση της εφαπτομένης να αλλάξει κατεύθυνση. Ο συντελεστής μεταβολής του εφαπτόμενου διανύσματος \vec{T} ως προς την φυσική της παράμετρο (το μήκος του τόξου που διαγράφει το τυχόν σημείο της καμπύλης), $\frac{d\vec{T}}{ds}$, ονομάζεται **διανυσματική καμπυλότητα** της καμπύλης.⁽²⁾

Ο κανόνας της αλληλουχίας μας δίνει την διανυσματική καμπυλότητα σαν συνάρτηση του «χρόνου» t :⁽²⁾

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{s'(t)} \cdot \vec{T}'(t) = \frac{1}{v(t)} \cdot \vec{T}'(t)$$

Είναι όμως $\vec{N}(t) = \frac{1}{T'(t)} \cdot \vec{T}'(t)$, άρα ο προηγούμενος τύπος δίνει:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{T'(t)}{v(t)} \cdot \vec{N}(t)$$

Από τον τύπο αυτό συμπεραίνουμε ότι η διανυσματική καμπυλότητα $\frac{d\vec{T}}{ds}$ και το πρωτοκάθετο διάνυσμα $\vec{N}(t)$ έχουν την ίδια κατεύθυνση αφού η βαθμωτή ποσότητα $\frac{T'(t)}{v(t)}$ είναι ένας μη αρνητικός αριθμός. Η βαθμωτή αυτή ποσότητα $\frac{T'(t)}{v(t)}$, ονομάζεται καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο της $P(t)$ και γράφουμε $\kappa(t) = \frac{T'(t)}{v(t)}$. Με άλλα λόγια η καμπυλότητα $\kappa(t)$ της καμπύλης, στο σημείο της $P(t)$, είναι το μέτρο της διανυσματικής καμπυλότητας. ⁽²⁾

Αν η καμπύλη εκφράζεται με την φυσική της παράμετρο s , τότε είναι $\vec{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$ με

$$\vec{T}(s) \text{ μοναδιαίο. Πράγματι είναι } |\vec{T}(s)| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \frac{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|} = \frac{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|} = 1. \quad (2)$$

Άρα, η παράγωγος του $\vec{T}(s)$ ως προς s είναι κάθετο διάνυσμα στο $\vec{T}(s)$, με άλλα λόγια, το πρωτοκάθετο διάνυσμα στο σημείο $P(s)$, το $\vec{N}(s)$, δίνεται από την σχέση

$$\vec{N}(s) = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|}. \text{ Είναι όμως, όπως ορίσαμε ανωτέρω, } \kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|, \text{ άρα θα είναι}$$

$$\vec{N}(s) = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}. \quad (2)$$

Επίσης, αν η καμπύλη εκφράζεται με την φυσική της παράμετρο s , η καμπυλότητα

$$\text{μπορεί να δοθεί από την σχέση } \kappa = \left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right|, \text{ εφόσον } \kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right|. \quad (2)$$

Γενικά, η καμπυλότητα της καμπύλης δίνει ένα μέτρο του ρυθμού μεταβολής του εφαπτόμενου διανύσματος κατά μήκος της καμπύλης. Συνεπώς, όσο περισσότερο

στρίβει η καμπύλη στο σημείο P , τόσο μεγαλύτερη είναι η καμπυλότητα. Επομένως, η καμπυλότητα σε κάθε σημείο μιας ευθείας είναι προφανώς μηδέν. Επίσης, ένας κύκλος στρίβει σε όλα τα σημεία του ομοιόμορφα, έτσι η καμπυλότητα σε κάθε σημείο ενός κύκλου είναι ίδια και ίση με την καμπυλότητα ενός οποιουδήποτε κύκλου με την ίδια ακτίνα. Επιπλέον, όσο μικρότερη είναι η ακτίνα ενός κύκλου, τόσο περισσότερο στρίβει αυτός σε κάθε σημείο του, έτσι η καμπυλότητα ενός κύκλου είναι μεγαλύτερη από την καμπυλότητα ενός άλλου κύκλου με μεγαλύτερη ακτίνα. ⁽²⁾

Αν μια καμπύλη θεωρηθεί ως η τροχιά κίνησης ενός υλικού σημείου, τότε η καμπυλότητα αποτελεί ένα μέτρο της απόκλισης της τροχιάς από μία επίπεδη κίνηση. ⁽²⁾

Ακτίνα καμπυλότητας

Όταν $\kappa(t) \neq 0$, τότε ορίζεται ο αντίστροφός του $\frac{1}{\kappa(t)}$ και λέγεται ακτίνα καμπυλότητας της καμπύλης στο σημείο $P(t)$. Ο κύκλος που βρίσκεται στο εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης στο σημείο της $P(t)$ και έχει κέντρο το πέρας της διανυσματικής καμπυλότητας και ακτίνα ίση με $\frac{1}{\kappa(t)}$, ονομάζεται ο εγγύτατος κύκλος της καμπύλης στο σημείο της $P(t)$. Αποδεικνύεται ότι, ο εγγύτατος κύκλος της καμπύλης στο σημείο της $P(t)$, είναι η οριακή θέση των κύκλων που περνούν από τρία γειτονικά σημεία της καμπύλης P_a, P, P_b , όταν τα P_a και P_b τείνουν να συμπίψουν στο σημείο P . Για τον λόγο αυτό, ευλόγως ο εγγύτατος κύκλος της καμπύλης σε κάθε σημείο της, θεωρείται ως ο κύκλος που βρίσκεται όσο πιο κοντά γίνεται στην καμπύλη. ⁽²⁾

4. Περί επιφανειών

4.1 Επιφάνειες ορισμένες σε παραμετρική μορφή

4.1.1 Ορισμός παραμετρικής αναπαράστασης επιφανειών

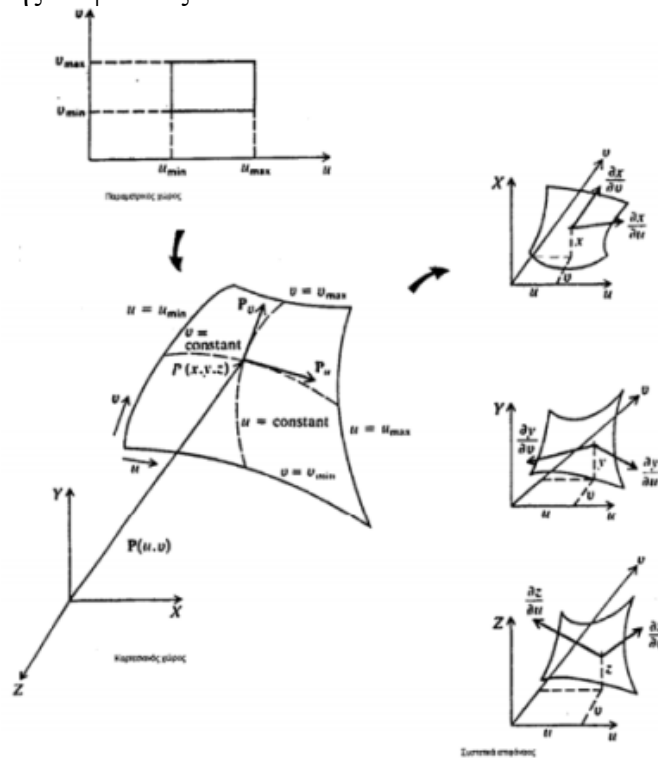
Μια επιφάνεια ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων στο χώρο που ικανοποιούν μία συνθήκη της μορφής:

$$F(x, y, z) = 0.$$

η οποία είναι μη παραμετρική παράσταση των επιφανειών και συνήθως, λέγεται πεπλεγμένη εξίσωση της επιφάνειας. Στα συστήματα σχεδιομελέτης με H/Y όμως, όπως και στην περίπτωση των καμπύλων, χρησιμοποιείται η παραμετρική αναπαράσταση, με εξισώσεις της μορφής: ⁽¹¹⁾

$$S(u,v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \quad (4.1)$$

όπου X , Y και Z είναι κατάλληλες συναρτήσεις των δύο παραμέτρων u, v ⁽¹¹⁾ όπου τα σημεία (u,v) κατά κανόνα, θεωρείται ότι ανήκουν σε ένα συνεκτικό χωρίο, υποσύνολο του R^2 . Το φυσικό νόημα του $S(u,v)$ είναι η διανυσματική ακτίνα που εκκινεί από την αρχή των αξόνων και περατούται στο τυχόν σημείο $M = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$ της επιφάνειας.



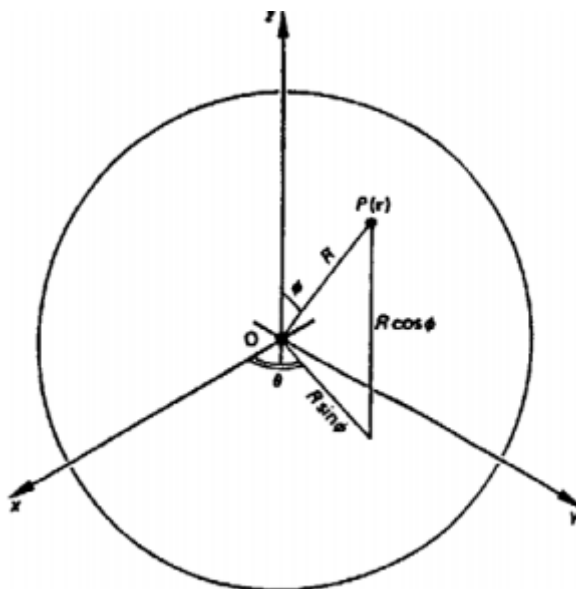
Εικόνα 4: Παραμετρική αναπαράσταση τρισδιάστατης επιφάνειας. Αριστερά, φαίνεται η επιφάνεια και δεξιά, η παραμετρική αναπαράσταση των τριών συντεταγμένων X, Y, Z . ⁽¹¹⁾

Παράδειγμα. Παραμετρική αναπαράσταση σφαίρας.

Για την περίπτωση της σφαίρας ακτίνας R , με κέντρο την αρχή των αξόνων, οι παραπάνω εξισώσεις έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 x &= X(\theta, \varphi) = R \sin\varphi \cos\theta \\
 y &= Y(\theta, \varphi) = R \sin\varphi \sin\theta \\
 z &= Z(\theta, \varphi) = R \cos\varphi
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

όπου οι παράμετροι u και v είναι τώρα οι γωνίες φ και θ και $0 \leq \varphi, \theta \leq 2\pi$.

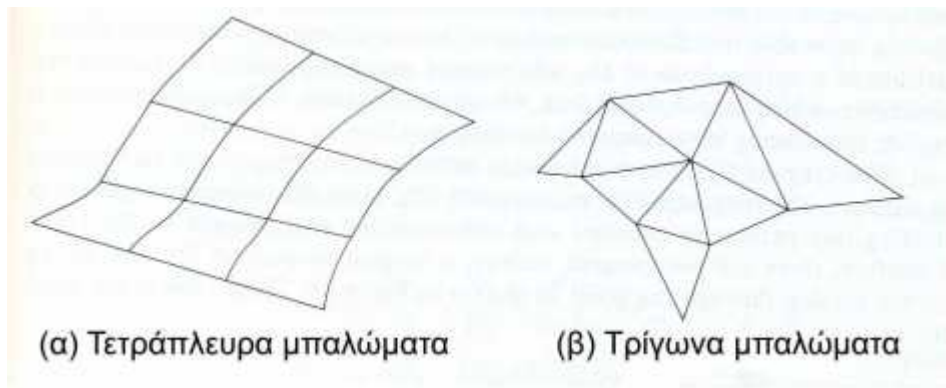


Εικόνα 5: Παραμετρική εξίσωση σφαίρας, βάσει των γωνιών θ και φ .

Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται παραμετρικές ή ελεύθερες εξισώσεις επιφανείας, και οι αντίστοιχες πεπλεγμένες εξισώσεις προέρχονται απαλείφοντας τα u και v από τις παραπάνω εξισώσεις για τα X , Y και Z (Implicitization). Για την περίπτωση της σφαίρας η εξίσωση είναι $X^2+Y^2+Z^2=R^2$. Στις περισσότερες περιπτώσεις η απαλοιφή αυτή δεν είναι εύκολη, και πολλές φορές μικρού βαθμού παραμετρικές εξισώσεις ισοδυναμούν σε υψηλού βαθμού πεπλεγμένες εξισώσεις. ⁽¹¹⁾

Με τη μέθοδο αυτή μια επιφάνεια χωρίζεται σε ανεξάρτητα τμήματα, μπαλώματα, και το τελικό αποτέλεσμα είναι η σύνδεση αυτών των μπαλωμάτων. Ένα μπάλωμα είναι το βασικό μαθηματικό στοιχείο για την μοντελοποίηση μιας σύνθετης επιφάνειας και μπορεί να είναι τετράπλευρο ή τρίγωνο. ⁽¹¹⁾

Οι επιφάνειες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, στις αναλυτικές επιφάνειες που είναι η επίπεδη επιφάνεια, η γραμμική επιφάνεια, η επιφάνεια εκ περιστροφής και ο τμηματικός κύλινδρος και στις επιφάνειες ελεύθερης μορφής που απεικονίζονται με πολυωνυμικά ή ρητά σχήματα. ⁽¹¹⁾



Εικόνα 6: Ορισμός σύνθετης επιφάνειας από τετράπλευρα και τρίγωνα μπαλώματα.

4.1.2 Ισοπαραμετρικές Καμπύλες

Σε μια παραμετρική επιφάνεια ορίζονται δύο οικογένειες ισοπαραμετρικών καμπυλών. Η πρώτη δημιουργείται θέτοντας $u = \text{σταθερό}$ και η δεύτερη θέτοντας $v = \text{σταθερό}$. Μια ισοπαραμετρική καμπύλη με σταθερό u έχει το v ως παράμετρο ορισμού της και αντίστροφα.⁽¹¹⁾

Για το παράδειγμα της σφαίρας:

Έστω M τυχόν σημείο σφαίρας και έστω S_u η επί της σφαίρας καμπύλη, η οποία προκύπτει όταν στην παραμετρική εξίσωση της σφαίρας (3.1) θέσουμε v σταθερό. Τότε, η S_u είναι μία καμπύλη η οποία κείται επί της σφαίρας και επομένως ένα εφαπτόμενο διάνυσμά της στο M είναι το $\frac{\partial S}{\partial u}$. Ομοίως, η S_v είναι μία καμπύλη που κείται επί της σφαίρας και ένα εφαπτόμενο διάνυσμά της είναι το $\frac{\partial S}{\partial v}$. Εάν τα $\frac{\partial S}{\partial u}$ και $\frac{\partial S}{\partial v}$ υπολογισμένα στο ίδιο σημείο της επιφάνειας, δεν είναι συγγραμμικά τότε αυτά ορίζουν ένα επίπεδο, το οποίο προφανώς, εφάπτεται της επιφάνειας στο M .

Το εφαπτόμενο επίπεδο στο M ορίζεται μονοσήμαντα από το κάθετο σε αυτό διάνυσμα στο M . Αλλά, το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων όπως το $\frac{\partial S}{\partial u}$ και $\frac{\partial S}{\partial v}$, τα οποία ανήκουν στο εφαπτόμενο επίπεδο είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο αυτό και άρα κάθετο στην επιφάνεια.

Συμπέρασμα :

Το διάνυσμα $\frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια σε κάθε σημείο αυτής, όπου τα $\frac{\partial S}{\partial u}$ και $\frac{\partial S}{\partial v}$ ορίζονται και δεν είναι συγγραμμικά.

4.1.3 Εφαπτόμενο διάνυσμα σε ισοπαραμετρική καμπύλη επιφάνειας

Σε κάθε σημείο της επιφάνειας υπάρχουν δύο εφαπτόμενα διανύσματα, ένα κατά τη διεύθυνση u και ένα κατά τη v κατά μήκος των ισοπαραμετρικών καμπύλων, που δίνονται από τις σχέσεις : ⁽¹¹⁾

$$P_u(u,v) = \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \hat{k}, \quad u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, \quad v_{\min} \leq v \leq v_{\max} \quad \text{και}$$

$$P_v(u,v) = \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \hat{k}, \quad u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, \quad v_{\min} \leq v \leq v_{\max} \quad (4.4)$$

Προφανώς, διαφορετική παραμετροποίηση έχει ως αποτέλεσμα και διαφορετικά εφαπτόμενα διανύσματα. Εάν το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων είναι μηδέν σε ένα σημείο, τότε τα δύο διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους. Σημεία της επιφάνειας, στα οποία έχουμε, $S_u \times S_v$ διάφορο του μηδενός ονομάζονται ομαλά (regular) σημεία και σε αυτά μπορούμε να ορίσουμε το εφαπτόμενο επίπεδο προς την επιφάνεια καθώς και το κάθετο. ⁽¹¹⁾

Το μέτρο των διανυσμάτων και τα μοναδιαία διανύσματα ορίζονται από τις σχέσεις :

$$|P_u| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

$$|P_v| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} \quad (4.5)$$

$$\hat{n}_u = \frac{P_u}{|P_u|}, \quad \hat{n}_v = \frac{P_v}{|P_v|}$$

Για την περίπτωση της σφαίρας

Το μοναδιαίο διάνυσμα είναι:

$$n = \frac{S_\phi \times S_\theta}{|S_\phi \times S_\theta|} = \frac{R^2 \sin^2 \phi \cos \theta \hat{i} + R^2 \sin^2 \phi \sin \theta \hat{j} + R^2 \cos \phi \sin \phi \hat{k}}{R^2 \sin \phi}$$

$$= \sin \phi \cos \theta \hat{i} + \sin \phi \sin \theta \hat{j} + \cos \phi \hat{k} = \frac{x}{R} \hat{i} + \frac{y}{R} \hat{j} + \frac{z}{R} \hat{k} = \frac{\text{grad} S}{|\text{grad} S|} \quad (4.6)$$

όπου, $S(r) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

Για γωνία $\phi = 0$, το μοναδιαίο διάνυσμα είναι μηδέν, και εάν δεν είχαμε προβλέψει την τιμή του $\sin \phi$, τότε η παραπάνω παραμετροποίηση δεν θα μπορούσε να υπολογίσει το κάθετο διάνυσμα στους πόλους, παρ' όλο που αυτό υφίσταται.

Η διανυσματική εξίσωση που περιγράφει το εφαπτόμενο επίπεδο Π , σε ένα σημείο P_0 της επιφάνειας, δίνεται από τη σχέση :

$$\Pi(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \quad (4.7)$$

όπου \mathbf{r} είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου στο εφαπτόμενο επίπεδο.

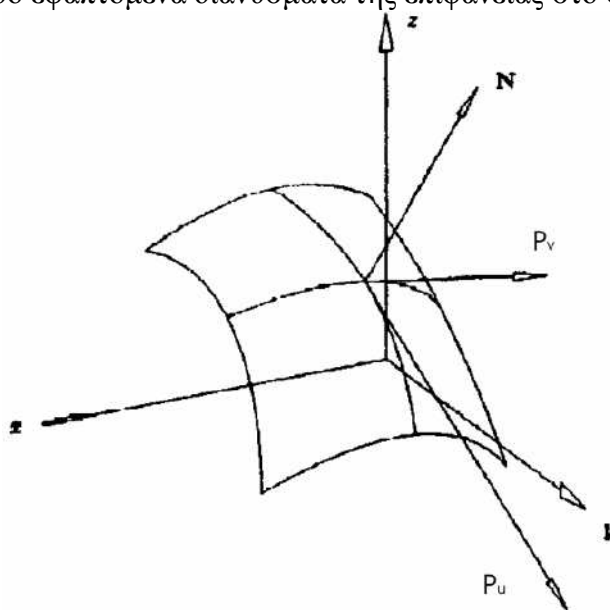
Για την περίπτωση της σφαίρας και για το σημείο $\mathbf{r}_0 = (R, R, R) / 3^{0.5}$:

$\mathbf{n} = (1, 1, 1) / 3^{0.5}$ και το κάθετο επίπεδο προσδιορίζεται από την εξίσωση :

$$x + y + z - 3^{0.5}R = 0.$$

4.1.4 Κάθετο διάνυσμα σε επιφάνεια που δίδεται σε παραμετρική μορφή

Το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια σε ένα σημείο της, είναι το διάνυσμα που είναι κάθετο προς τα δύο εφαπτόμενα διανύσματα της επιφάνειας στο σημείο αυτό.⁽¹¹⁾



Εικόνα 7: Κάθετο διάνυσμα σε επιφάνεια.

Συνεπώς, ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο των δύο εφαπτόμενων διανυσμάτων:

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} = \mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v \quad (4.8)$$

και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση :

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v}{|\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v|} \quad (4.9)$$

4.2 Επιφάνειες ορισμένες μέσω πεπλεγμένης εξίσωσης $f(x,y,z)=0$.

4.2.1 Εφαπτόμενο επίπεδο σε επιφάνεια που δίδεται σε πεπλεγμένη μορφή

Έστω f μια διαφορίσιμη συνάρτηση στο ανοικτό υποσύνολο U του \mathbb{R}^3 και a πραγματικός. Το σύνολο των σημείων (x, y, z) ώστε $f(x, y, z) = a$ λέγεται **ισοσταθμική επιφάνεια** της f η οποία αντιστοιχεί στο a . Αν αντί του \mathbb{R}^3 έχουμε το \mathbb{R}^2 , τότε το παραπάνω σύνολο λέγεται **ισοσταθμική καμπύλη** της f που αντιστοιχεί στο a .⁽⁹⁾

Υποθέτουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη με $\text{grad}f(x, y, z) \neq 0$.⁽⁹⁾

Μια καμπύλη $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια αυτή αν $f(C(t))=a$ για κάθε $t \in [a, b]$.⁽⁹⁾

Έστω M ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια $f(x, y, z) = a$ και C μια καμπύλη που βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια και διέρχεται από το M . Τότε υπάρχει s ώστε $C(s)=M$. Επειδή $f(C(t))=a$, παραγωγίζοντας παίρνουμε:⁽⁹⁾

$$\text{grad}f(C(t)) \cdot C'(t) = 0$$

οπότε στο $t=s$

$$\text{grad}f(M) \cdot C'(s) = 0,$$

όπου $\text{grad}f(M)$ είναι το **κάθετο** διάνυσμα στην επιφάνεια στο σημείο M ή η κλίση της επιφάνειας f στο σημείο M . Αυτό σημαίνει ότι η κλίση της f στο M είναι κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας της C στο M με την υπόθεση ότι $C'(s) \neq 0$. Ορίζουμε το **εφαπτόμενο επίπεδο** στην επιφάνεια αυτή στο σημείο M να είναι το επίπεδο το οποίο διέρχεται από το M και είναι κάθετο στο $\text{grad}f(M)$.⁽⁹⁾

5 Περὶ επιπέδων επιφανειῶν

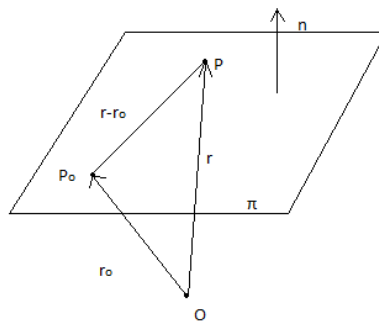
5.1 Παραμετρικὸς Ὄρισμὸς τοῦ Επιπέδου

Ένα επίπεδο ορίζεται:

- i) Από ένα σημεῖο του και μία διεύθυνση κάθετη σ' αυτό ἢ
- ii) Από ένα σημεῖο του και δύο μη συγγραμμικά διανύσματα παράλληλα προς αυτό ἢ
- iii) Από δύο σημεῖα του A,B και ένα διάνυσμα \mathbf{u} που εἶναι παράλληλο προς αυτό, ἀλλὰ ὄχι συγγραμμικό με το \mathbf{AB} ἢ
- iv) Από τρία σημεῖα του A,B,Γ που δεν βρίσκονται ἐπάνω στην ἴδια ευθεῖα.

Οι περιπτώσεις iii) και iv) ἀνάγονται ἀμεσα στην περίπτωση ii) και γι' αὐτό θα μελετήσουμε μόνο τις περιπτώσεις i) και ii).

- i) Το ἐπίπεδο (π) διέρχεται ἀπὸ το σημεῖο P_0 και εἶναι κάθετο σε ένα διάνυσμα $\mathbf{n} \neq 0$.⁽⁴⁾



Εικόνα 8: Ὄρισμὸς τοῦ επιπέδου ἀπὸ δύο σημεῖα του και ένα διάνυσμα κάθετο σε αὐτό ἀλλὰ που δεν εἶναι συγγραμμικό με το διάνυσμα που ορίζεται ἀπὸ τα δύο σημεῖα του επιπέδου.

Θεωρούμε μία ἀρχή O. Ἄν εἶναι $P_0(\mathbf{r}_0)$ και $P(\mathbf{r})$ εἶναι ένα τυχαῖο σημεῖο τοῦ επιπέδου, τότε το $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ ἔχει διεύθυνση παράλληλη προς το ἐπίπεδο και ἀρα κάθετη στο \mathbf{n} . Ἐπομένως,⁽⁴⁾

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.1)$$

Ἡ παραπάνω εξίσωση λέγεται διανυσματικὴ εξίσωση τοῦ επιπέδου (π). Ἄν θεωρήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων με ἀρχή το O, ὡς προς το οποίο εἶναι $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + \Gamma\mathbf{k}$ και $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:⁽⁴⁾

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + \Gamma(z-z_0) = 0 \quad (5.2)$$

ἢ ἰσοδύναμα

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \quad (5.3)$$

όπου

$$\Delta = -(Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0) \text{ και } |A| + |B| + |\Gamma| \neq 0.$$

Η εξίσωση (5.3) λέγεται **καρτεσιανή εξίσωση** του επιπέδου.⁽⁴⁾

Αντιστρόφως το σύνολο των σημείων του χώρου που οι συντεταγμένες τους (x, y, z) επαληθεύουν μία εξίσωση της μορφής (5.3), βρίσκονται επάνω σε ένα επίπεδο που είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + \Gamma\mathbf{k}$. Πράγματι, αν $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και $P_2(x_2, y_2, z_2)$ είναι δύο τέτοια σημεία, δηλαδή⁽⁴⁾

$$Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 + \Delta = 0, \quad Ax_2 + By_2 + \Gamma z_2 + \Delta = 0,$$

τότε

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + \Gamma(z_2 - z_1) + \Delta = 0.$$

Η σχέση όμως αυτή είναι ισοδύναμη με την $\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = 0$ και άρα $\mathbf{n} \perp \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$. Άρα όλα τα σημεία του χώρου που οι συντεταγμένες τους ικανοποιούν την (5.3), σχηματίζουν με το \mathbf{P}_1 διανύσματα που είναι κάθετα στο σταθερό διάνυσμα \mathbf{n} και επομένως είναι συνεπίπεδα.⁽⁴⁾

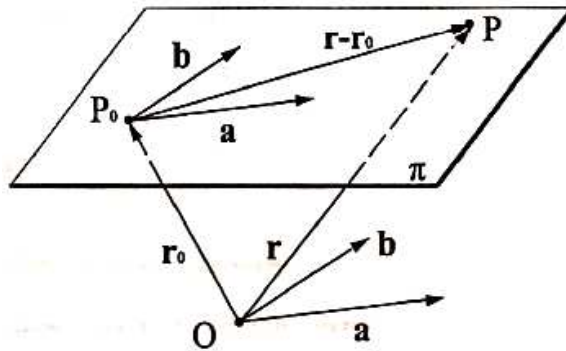
Αξιοσημείωτες περιπτώσεις

- **Επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα των συντεταγμένων.**
 - Το επίπεδο xOy περνά από την αρχή $O(0,0,0)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{n} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k} = \mathbf{k}$. Άρα έχει εξίσωση $z=0$.
 - Όμοια τα επίπεδα yOz , xOz έχουν εξισώσεις $x=0$, $y=0$ αντίστοιχα.
 - Γενικότερα, η εξίσωση $z=c$ παριστάνει επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $(0,0,c)$ και έχει κάθετο διάνυσμα το \mathbf{k} , δηλαδή είναι παράλληλο στο επίπεδο xOy (άρα κάθετο στον άξονα $z'z$). Όμοια οι εξισώσεις $x=c$, $y=d$ παριστάνουν επίπεδα παράλληλα προς τα yOz , xOz αντίστοιχα.⁽⁴⁾

- **Επίπεδα παράλληλα προς τους άξονες των συντεταγμένων.**
 - Ένα επίπεδο που είναι παράλληλο προς τον άξονα $z'z$ έχει κάθετο διάνυσμα της μορφής $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ και άρα εξίσωση της μορφής
 - $Ax + By + \Delta = 0$,
 - Όπου παρατηρούμε ότι απουσιάζει η μεταβλητή που αντιστοιχεί στον άξονα προς τον οποίο είναι παράλληλο.

 - Όμοια προκύπτουν οι εξισώσεις
 - $By + \Gamma z + \Delta = 0$, $Ax + \Gamma z + \Delta = 0$
 - των επιπέδων που είναι παράλληλα προς τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.

- ii) Το επίπεδο διέρχεται από το σημείο $P_0(r_0)$ και είναι παράλληλο προς τα μη συγγραμμικά διανύσματα \mathbf{a} , \mathbf{b} .⁽⁴⁾



Εικόνα 9: Ορισμός επιπέδου από σημείο και δύο μη συγγραμμικά διανύσματα. ⁽⁴⁾

Στην περίπτωση αυτή τα διανύσματα $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$, \mathbf{a} , \mathbf{b} θα είναι συνεπίεδα και άρα το μικτό τους γινόμενο θα είναι μηδέν: ⁽⁴⁾

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0. \quad (5.4)$$

Η (3.4) προκύπτει από την εξίσωση (3.1) με $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. ⁽⁴⁾

Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχουν αριθμοί $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Τέτοιοι ώστε

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0 = \kappa \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Η εξίσωση (5.5) λέγεται **διανυσματική παραμετρική εξίσωση** του επιπέδου. ⁽⁴⁾

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το O , ως προς το οποίο είναι $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$. Η εξίσωση (3.5) είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \kappa a_1 + \lambda b_1 \\ y &= y_0 + \kappa a_2 + \lambda b_2 \\ z &= z_0 + \kappa a_3 + \lambda b_3 \end{aligned} \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.6)$$

Οι εξισώσεις αυτές λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις** του επιπέδου και για κάθε ζευγάρι $(\kappa, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ δίνουν τις συντεταγμένες του ενός σημείου του. ⁽⁴⁾

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφούν και στη μορφή πίνακα, η οποία λέγεται καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου: ⁽¹⁰⁾

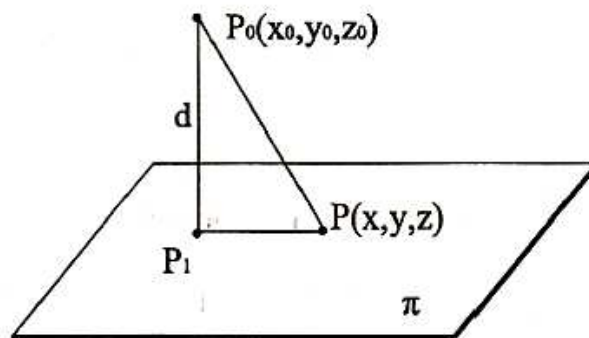
$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 & \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 & \mathbf{z} - \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}_1 & \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{z}_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.7)$$

5.2 Απόσταση σημείου από επίπεδο

Παρακάτω θα αποδείξουμε ποια είναι η απόσταση ενός σημείου από το επίπεδο.

Απόδειξη

Θεωρούμε ένα επίπεδο (π): $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ και ένα σημείο $P_0(x_0,y_0,z_0)$.



Εικόνα 10: Απόσταση σημείου από επίπεδο. ⁽⁴⁾

Αν $P(x,y,z)$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου, η απόσταση d του P_0 από το (π) είναι ίση με το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ στη διεύθυνση του καθέτου διανύσματος $\mathbf{n}=\mathbf{A}\mathbf{i}+\mathbf{B}\mathbf{j}+\mathbf{\Gamma}\mathbf{k}$ του επιπέδου η οποία είναι: ⁽⁴⁾

$$|\text{Pr}_{\mathbf{n}}\mathbf{P}_0\mathbf{P}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} \quad (5.8)$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} d &= |\text{Pr}_{\mathbf{n}}\mathbf{P}_0\mathbf{P}| = |\mathbf{P}_0\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}| / |\mathbf{n}| = |A(x-x_0) + B(y-y_0) + \Gamma(z-z_0)| / \sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2} \\ &= |Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 - (Ax + By + \Gamma z)| / \sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2} \end{aligned}$$

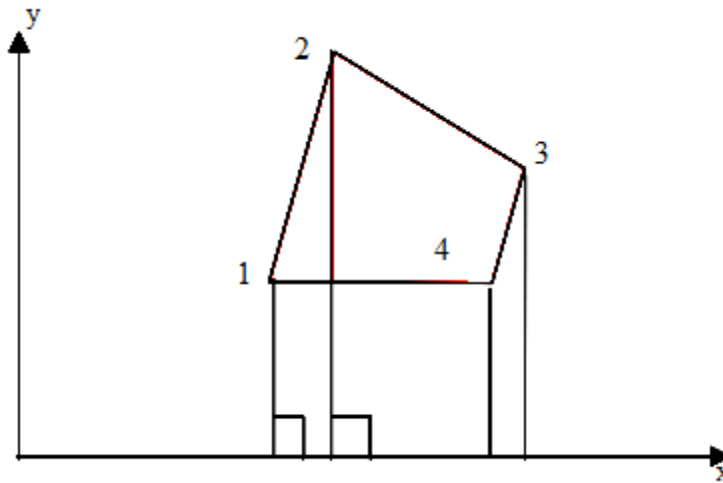
και άρα:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}} \quad (5.9)$$

6 Μερικές Βασικές Ιδιότητες Πολυγώνων

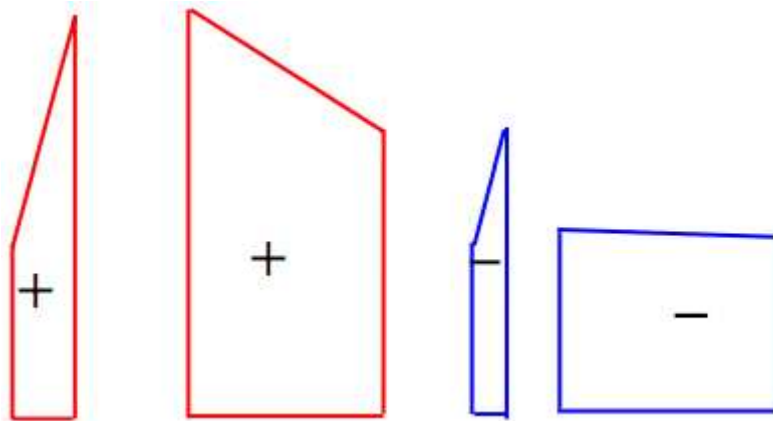
6.1 Υπολογισμός εμβαδού πολυγώνου

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός πολυγώνου.



Εικόνα 11: έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του πολυγώνου που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, με κορυφές 1,2,3,4.

Το πρώτο βήμα απαιτεί να διασπαστεί το σχήμα σε απλούστερες, συνιστώσες επιφάνειες ως εξής: ⁽¹⁵⁾



Εικόνα 12: Συνιστώσες εμβαδού. Τα πρόσημα συμβολίζουν το αν η συμβολή του εμβαδού της συγκεκριμένης συνιστώσας θα είναι θετική ή αρνητική.

Η πιο συνηθισμένη μέθοδος – αλγόριθμος υπολογισμού του εμβαδού περιγράφεται στην παραπάνω εικόνα. Από τα άκρα κάθε πλευράς του πολυγώνου, φέρουμε κατακόρυφες γραμμές και υπολογίζουμε το εμβαδόν του τραπεζίου, που ορίζεται από την πλευρά αυτή, τις δύο κατακόρυφες γραμμές και τον άξονα των x. Το εμβαδόν του τραπεζίου που ορίζεται από την πλευρά 1-2 υπολογίζεται από τη σχέση: ⁽¹⁵⁾

$$(x_1-x_2)*(y_1+y_2)/2 \quad (1)$$

Αφού υπολογιστεί το εμβαδόν του κάθε τραπεζίου, αθροίζονται οι επί μέρους επιφάνειες και το τελικό εμβαδόν του πολυγώνου προκύπτει: ⁽¹⁵⁾

$$A = \sum((x(i+1) - x(i)) * (y(i+1) + y(i)) / 2) \quad (2)$$

Όταν $x(i+1) < x(i)$ τότε η συμμετοχή του αντίστοιχου τραπεζίου στο συνολικό εμβαδόν είναι αρνητική. Αυτό επιτρέπει τα τραπέζια που δημιουργούνται στην περιοχή κάτω από το πολύγωνο να αφαιρούνται με αποτέλεσμα η τελική επιφάνεια A να είναι η ζητούμενη επιφάνεια του πολυγώνου. ⁽¹⁵⁾

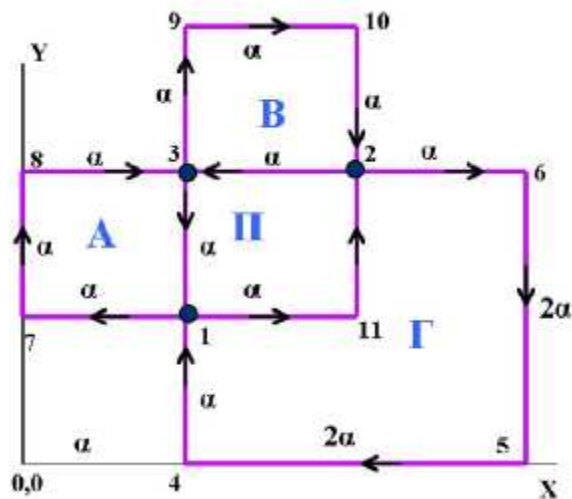
Αυτός ο αλγόριθμος δουλεύει σωστά για όλα τα πολύγωνα ακόμη και όταν τα πολύγωνα δεν είναι κυρτά ή εάν έχουν εσωτερικά κενά. Εξαιρούνται τα πολύγωνα των οποίων τα όρια αλληλοτέμνονται (π.χ. ένα πολύγωνο σε σχήμα 8). Ωστόσο, σε ένα τοπολογικό μοντέλο, ούτως ή άλλως, ένα τέτοιο πολύγωνο θα καταχωριζόταν ως δύο διαφορετικά, με κοινή κορυφή και ίδιες ιδιότητες. ⁽¹⁵⁾

Εάν το πολύγωνο ψηφιοποιείται και αποθηκεύεται αριστερόστροφα τότε η επιφάνεια A προκύπτει αρνητική. ⁽¹⁵⁾

Προβλήματα εμφανίζονται όταν το πολύγωνο έχει αρνητικές τιμές y . Τότε, μία λύση είναι να προσθέσουμε μία μεγάλη θετική τιμή στα y ώστε όλα να γίνουν θετικά. ⁽¹⁵⁾

Εφαρμογή του αλγορίθμου σε τοπολογικές δομές

Όταν το πολύγωνο ορίζεται από αλυσίδες-τόξα για τα οποία έχει καθοριστεί ποιο πολύγωνο έχουν προς τα αριστερά (L) και ποιο προς τα δεξιά (R) μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς του εμβαδού του τραπεζίου ως προς κάθε αλυσίδα. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι τοπολογικές σχέσεις των αλυσίδων, οι οποίες φαίνονται στον πίνακα 1. Για κάθε αλυσίδα του πίνακα εφαρμόζεται ο προηγούμενος αλγόριθμος και υπολογίζεται μία επιφάνεια. Ο υπολογισμός γίνεται με βάση τις συντεταγμένες του πίνακα 2 και τη σχέση (2). Η υπολογιζόμενη επιφάνεια καταχωρίζεται με θετικό πρόσημο στο πολύγωνο που βρίσκεται στα δεξιά της αλυσίδας και με αρνητικό πρόσημο στο πολύγωνο που βρίσκεται στα αριστερά της αλυσίδας όπως φαίνεται στον πίνακα 3. ⁽¹⁵⁾



Εικόνα 13: Εφαρμογή του αλγορίθμου σε τοπολογικές δομές.

	L	R
1-2	Π	Γ
2-3	Π	B
3-1	Π	A
1-3	0	A
3-2	0	B
2-4	0	Γ

Πίνακας 1: Τοπολογία αλυσίδων του παραπάνω σχήματος.

Κορυφή	X	y
1	α	α
2	2α	2α
3	α	2α
4	α	0
5	3α	0
6	3α	2α
7	0	α
8	0	2α
9	α	3α
10	2α	3α
11	2α	α

Πίνακας2: Οι συντεταγμένες των κορυφών του σχήματος.

Για παράδειγμα, η αλυσίδα 1-3 αποτελείται από τα τμήματα 1-7, 7-8 και 8-3. Η υπολογιζόμενη επιφάνεια από την αλυσίδα αυτή είναι η εξής:

$$(x_7-x_1)(y_7+y_1)/2+(x_8-x_7)(y_8+y_7)/2+(x_3-x_8)(y_3+y_8)=(0-\alpha)(\alpha+\alpha)/2+(0-0)(2\alpha+\alpha)/2+(\alpha-0)(2\alpha+2^\alpha)/2=\alpha^2$$

Η επιφάνεια α^2 καταχωρίζεται στο πολύγωνο A και η $-\alpha^2$ στο εξωτερικό πολύγωνο που συμβολίζεται με 0 και το οποίο βρίσκεται αριστερά της αλυσίδας. ⁽¹⁵⁾

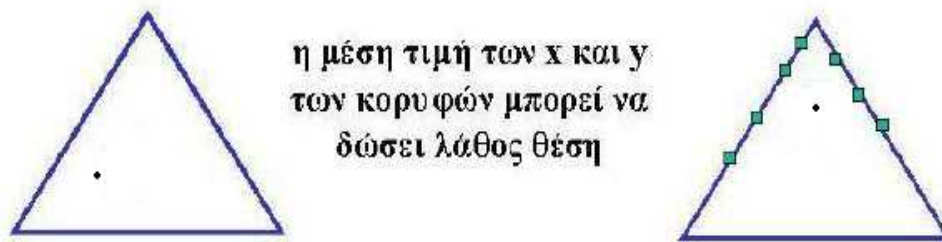
	Π	A	B	Γ	0
1-2	$-\alpha^2$			α^2	
2-3	$2\alpha^2$		$-2\alpha^2$		
3-1	0	0			
1-3		α^2			$-\alpha^2$
3-2			$3\alpha^2$		$-3\alpha^2$
2-4				$2\alpha^2$	$-2\alpha^2$
Σύνολο	α^2	α^2	α^2	$3\alpha^2$	$-6\alpha^2$

Πίνακας 3: Σταδιακός προσδιορισμό της επιφάνειας όλων των πολυγώνων μέσω αλυσίδων. Με 0 συμβολίζεται το εξωτερικό πολύγωνο.

6.2 Εντοπισμός του κέντρου βάρους πολυγώνου

Ως κέντρο βάρους ορίζεται το σημείο γύρω από το οποίο ισορροπεί το πολύγωνο. Μερικές φορές όμως, το κέντρο βάρους βρίσκεται εκτός του πολυγώνου. Σε μία τέτοια περίπτωση ορίζουμε χειρονακτικά ένα εσωτερικό σημείο του πολυγώνου, που παίζει το ρόλο του κέντρου βάρους.⁽¹⁵⁾

Μία μέθοδος αυτόματου υπολογισμού των συντεταγμένων του κέντρου βάρους x_k, y_k , είναι αυτές να προκύψουν ως εξής: Το x_k ως η μέση τιμή των x των κορυφών και αντίστοιχα, το y_k ως η μέση τιμή των y . Αυτός ο τρόπος όμως, δε δίνει το πραγματικό κέντρο βάρους σε πολύγωνα όπως αυτά του παρακάτω σχήματος.⁽¹⁵⁾



Εικόνα 14: Το υπολογιζόμενο ως κέντρο βάρους σημείο προσεγγίζει την περιοχή του πολυγώνου με τις περισσότερες κορυφές.⁽¹⁵⁾

Ένας καλύτερος αλγόριθμος υπολογισμού του κέντρου βάρους είναι να χρησιμοποιηθούν τα τραπέζια που δημιουργούνται όταν φέρουμε κατακόρυφες ευθείες από κάθε κορυφή μέχρι τον άξονα των x . Κάθε ένα από τα τραπέζια αποτελείται από ένα τρίγωνο και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και επομένως το κέντρο βάρους του πολυγώνου μπορεί να υπολογισθεί ως ο κεντροβαρικός μέσος όρος των κέντρων βάρους των επί μέρους τριγώνων και παραλληλογράμμων. Τότε, οι σχέσεις υπολογισμού των συντεταγμένων του κέντρου βάρους είναι:⁽¹⁵⁾

$$\begin{aligned} x_k &= \Sigma ((y_i - y_{i+1})(x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2) / 6A) \\ y_k &= \Sigma ((x_i - x_{i+1})(y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2) / 6A) \end{aligned} \quad (3)$$

όπου το A δίνεται από τη σχέση (2).

Για την εφαρμογή αυτού του αλγορίθμου, οι κορυφές του πολυγώνου πρέπει να δίνονται δεξιόστροφα και οι συντεταγμένες πρέπει να είναι θετικές.⁽¹⁵⁾

Δημιουργία buffer

Η buffer είναι μία ζώνη δεδομένου πλάτους που δημιουργείται γύρω από ένα σημείο, από μία γραμμή ή από ένα πολύγωνο. ⁽¹⁵⁾

Περιπτώσεις:

- Η buffer γύρω από ένα σημείο είναι η απλούστερη των περιπτώσεων καθώς αρκεί να φέρουμε τον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο και ακτίνα το δεδομένο πλάτος.
- Η buffer γύρω από μία ευθεία ή τεθλασμένη γραμμή ορίζεται από δύο γραμμές παράλληλες προς την αρχική που απέχουν από αυτήν απόσταση ίση με το δεδομένο πλάτος.
- Η buffer γύρω από ένα πολύγωνο δημιουργείται με τον υπολογισμό ενός ορίου παράλληλου προς το όριο του πολυγώνου και σε απόσταση ίση με το γνωστό πλάτος.

Η μέθοδος υπολογισμού της buffer γύρω από μία τεθλασμένη και γύρω από ένα πολύγωνο ουσιαστικά είναι η μέθοδος υπολογισμού μίας τεθλασμένης παράλληλης σε μία αρχική σε δεδομένη απόσταση. ⁽¹⁵⁾

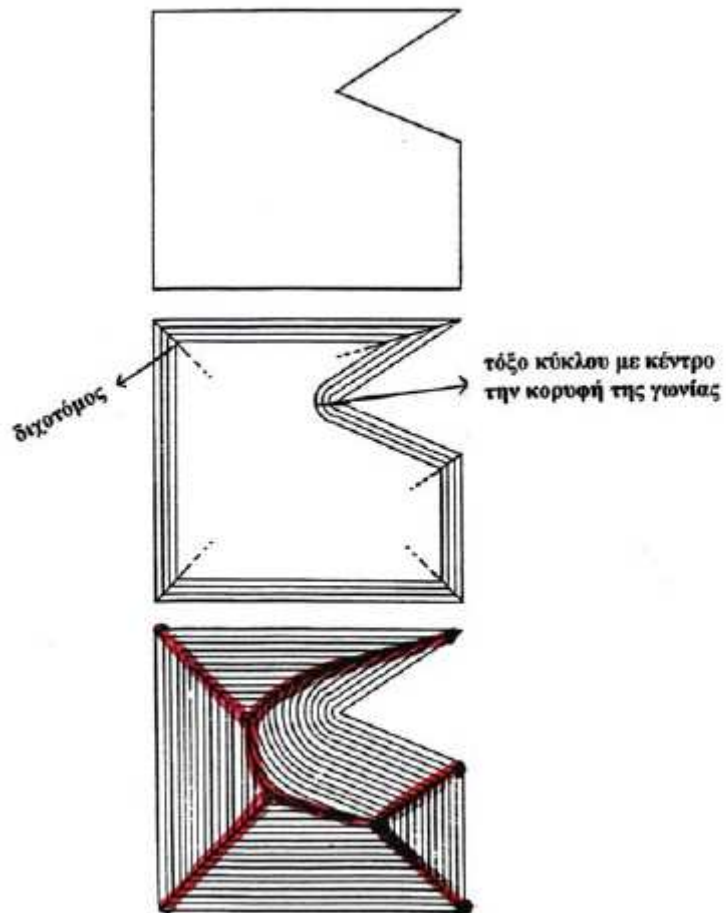
Σκελετός πολυγώνου

Ο σκελετός ενός πολυγώνου είναι το δίκτυο των γραμμών στο εσωτερικό του πολυγώνου, το οποίο κατασκευάζεται έτσι ώστε κάθε σημείο πάνω στις γραμμές του να απέχει εξίσου από τις δύο κοντινότερες πλευρές του πολυγώνου. Οι κόμβοι αυτού του δικτύου απέχουν εξίσου από τις τρεις κοντινότερες πλευρές. Ο σκελετός είναι ότι απομένει όταν το πολύγωνο συρρικνώνεται. Η συρρίκνωση γίνεται με κίνηση κάθε πλευράς προς τα μέσα κατά σταθερό βήμα. Ουσιαστικά ο σκελετός είναι το αντίστροφο της buffer. ⁽¹⁵⁾

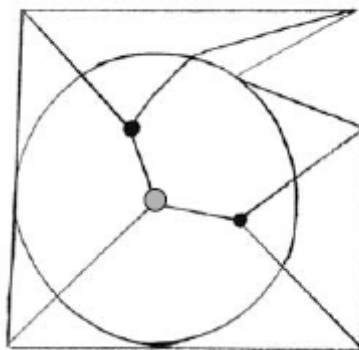
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ο σκελετός ενός μη κυρτού πολυγώνου. Στις κυρτές γωνίες του η διχοτόμος τους αποτελεί γραμμή οδηγό για την κίνηση των πλευρών προς τα μέσα. Στις γωνίες πάνω από 180^0 , το συρρικνωμένο πολύγωνο αποτελείται από τόξο κύκλου που έχει κέντρο την κορυφή αυτών των γωνιών. Καθώς η διαδικασία προχωρεί οι διχοτόμοι και τα τόξα ενώνονται και δημιουργούν το δίκτυο του σκελετού. Η συρρίκνωση του πολυγώνου καταλήγει σε σημείο, το οποίο απέχει τη μέγιστη απόσταση από το αρχικό όριο του πολυγώνου και είναι το κέντρο του μεγαλύτερου κύκλου που μπορεί να σχεδιαστεί στο εσωτερικό του πολυγώνου. ⁽¹⁵⁾

Ο σκελετός ενός πολυγώνου είναι μια καλή θέση για την αυτόματη γραφή ονοματολογίας στο πολύγωνο. Το όνομα μπορεί να σχεδιαστεί: ⁽¹⁵⁾

- κατά μήκος των γραμμών του σκελετού
- με βάση το σημείο-κέντρο του κύκλου



Εικόνα 15: Σκελετός μη κυρτού πολυγώνου. ⁽¹⁵⁾



Εικόνα 16: Ο σκελετός, ο μέγιστος κύκλος και το κέντρο του εσωτερικού κύκλου του πολυγώνου της παραπάνω εικόνας. ⁽¹⁵⁾

7 Στατιστική

7.1 Κανονική κατανομή (Normal Distribution)

Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται ότι ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 , συμβολικά $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σππ) $f(x)$ είναι της μορφής: ⁽¹⁾

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R \quad (7.1)$$

Ως γνωστόν γι' αυτή τη συνάρτηση έχει αποδειχθεί ότι: ⁽¹⁾

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Θα επιβεβαιώσουμε ότι αυτή η σππ έχει πράγματι μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 . Οντως, για κάθε τυχαία μεταβλητή X με σππ $f(x)$ ισχύει: ⁽¹⁾

$$\text{μέση τιμή } X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu + \mu) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu) f(x) dx + \mu,$$

οπότε με την αντικατάσταση $z = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \Rightarrow dz = -\frac{(x-\mu)dx}{\sigma^2}$ προκύπτει ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu) f(x) dx = 2 \int_{\mu}^{+\infty} (x - \mu) f(x) dx = -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\infty} e^{-z} dz = 0.$$

Άρα τελικώς, αποδείξαμε ότι: μέση τιμή $X = \mu$. ⁽¹⁾

Αναλόγως ισχύει:

$$\text{Διασπορά } X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx, \text{ οπότε με την αντικατάσταση } z = \frac{x - \mu}{\sigma},$$

λαμβάνουμε:

Διασπορά $X =$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz &= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z(e^{-\frac{z^2}{2}})' dz = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[z(e^{-\frac{z^2}{2}}) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right\} = \\ &= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (0 - \sqrt{2\pi}) = \sigma^2 \end{aligned}$$

Άρα τελικώς αποδείξαμε ότι: διασπορά $X = \sigma^2$. (1)

Τυπική κανονική κατανομή

Εάν η τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διασπορά ένα, δηλαδή $Z \sim N(0,1)$, τότε αυτή λέγεται τυπική κανονική κατανομή (standard normal distribution - snd). Η μεγάλη χρησιμότητα μια τέτοιας κατανομής έγκειται στο γεγονός ότι οι πιθανότητες αναφορικά με οποιαδήποτε κανονική κατανομή, μπορούν να υπολογιστούν βάσει των πιθανοτήτων της Z . Πράγματι έστω η $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Τότε η πιθανότητα $P(X \leq t)$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω της Z ως εξής: (1)

$$P(X \leq t) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{t - \mu}{\sigma}\right). \text{ Αλλά εάν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της κανονικής}$$

κατανομής και τον ορισμό της πιθανότητας P έχουμε:

$$P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (7.2)$$

Με την αντικατάσταση $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ στο τελευταίο ολοκλήρωμα λαμβάνουμε:

$$P(X \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = P\left(Z \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right) \quad (7.3)$$

Άρα η γνώση των πιθανοτήτων της Z παρέχει αμέσως γνώση των πιθανοτήτων της X μέσω του ανωτέρου τύπου. Γι' αυτό το λόγο, όλοι οι στατιστικοί πίνακες και οι

περισσότερες βάσεις δεδομένων στους υπολογιστές υπολογίζουν και χρησιμοποιούν ως τυχαία μεταβλητή αναφοράς την Z . ⁽¹⁾

7.2 Κατανομή χ^2

Έστω μια τυπική κανονική κατανομή, $X \sim N(0,1)$ και έστω ένας πληθυσμός, μία ιδιότητα/ποσότητα I του οποίου ακολουθεί την X . Δειγματοληπτούμε τυχαία n άτομα του πληθυσμού και μετρούμε την I για κάθε άτομο οπότε λαμβάνουμε n μετρήσεις-ποσότητες $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$. Υπολογίζουμε την ποσότητα ⁽¹⁾

$$\chi_{n,1}^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \dots + \chi_n^2. \quad (7.4)$$

Δειγματοληπτούμε τυχαία με επανάθεση, για δεύτερη φορά το συγκεκριμένο πληθυσμό, μετρούμε πάλι την I των ατόμων του δείγματος, οπότε και λαμβάνουμε μια νέα ποσότητα $\chi_{n,2}^2$. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία για i -οστή φορά οπότε και λαμβάνουμε την ποσότητα $\chi_{n,i}^2$. Αφήνοντας το i να τείνει στο άπειρο, λαμβάνουμε μια στατιστική κατανομή των $\chi_{n,i}^2$, η οποία συμβολίζεται χ_n^2 και ονομάζεται κατανομή X – τετράγωνο (chi-square) με n βαθμούς ελευθερίας. Για να γράψουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X – τετράγωνο, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση Γάμα, η οποία είναι η αναλυτική επέκταση του $n!$ και δίνεται από τον τύπο: ⁽¹⁾

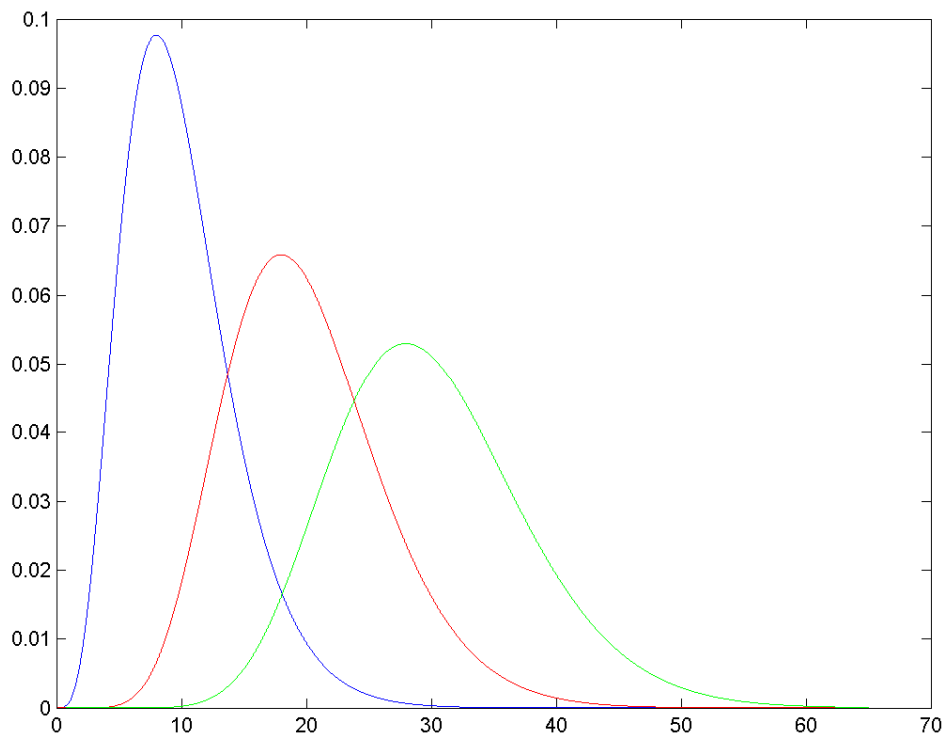
$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (n > 0) \quad (7.5)$$

Πράγματι όταν το n είναι ακέραιος $\Gamma(n) = (n-1)!$ διότι προφανώς $\Gamma(1) = 1$, ενώ εύκολα αποδεικνύεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ότι $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής X – τετράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας έχει ως εξής: ⁽¹⁾

$$f_{x^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

γραφική παράσταση της οποίας παρατίθεται κατωτέρω για διάφορα n. ⁽¹⁾



Εικόνα 17: Γραφική παράσταση της (σππ) μιας κατανομής x^2 για διάφορους βαθμούς ελευθερίας. Όσο μεγαλώνει το n μικραίνει η κορυφή της γραφικής παράστασης. Για n=10 έχω την υψηλότερη κορυφή, για n=20 τη μεσαία και για n=30 έχουμε την χαμηλότερη κορυφή. ⁽¹⁾

Σημειώνεται ότι η δειγματική διασπορά S_n^2 ενός τυχαίου δείγματος n ατόμων όταν ο πληθυσμιακός μέσος μ είναι γνωστός δίνεται από τον τύπο : ⁽¹⁾

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \quad (7.7)$$

Εάν, επιπλέον, ο πληθυσμός αυτός ακολουθεί κανονική κατανομή, τότε, η ποσότητα

$$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

ακολουθεί κατανομή χ^2 -τετράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας δεδομένου ότι όλες οι ποσότητες $\frac{x_i - \mu}{\sigma}$ ακολουθούν $N(0,1)$.

(1)

Εάν ο πληθυσμιακός μέσος μ είναι άγνωστος τότε η δειγματική διασπορά δίνεται από τον τύπο

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (7.8)$$

Το $(n-1)$ στον παρονομαστή εισάγεται αντί του n για να αποφεύγεται η πόλωση κατά τη στατιστική επεξεργασία των δειγμάτων. ⁽¹⁾

Έστω η τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί την $N(\mu, \sigma^2)$. Παρατηρούμε ότι η ποσότητα

$$Y^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \quad (7.9)$$

είναι άθροισμα των τετραγώνων των ποσοτήτων $y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$. Επειδή, δε, η

πληθυσμιακή μέση τιμή του y_i είναι μηδέν ενώ η πληθυσμιακή διασπορά του y_i τείνει στο ένα όταν $n \rightarrow \infty$ προκύπτει ότι και τα y_i οριακά ακολουθούν τυπική

κανονική κατανομή. Η Y^2 είναι τελικά μια κατανομή χ^2 -τετράγωνο, αλλά με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας λόγω του ενός περιορισμού που εισάγει η εξάρτηση του \bar{x} από τα x_i . Άρα η δειγματική διασπορά ενός κανονικού πληθυσμού διασυνδέεται άμεσα με την κατανομή χ^2 -τετράγωνο. ⁽¹⁾

7.3 Κατανομή t ή Student

Έστω μια κανονική κατανομή, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και έστω ένας πληθυσμός, μία ιδιότητα/ποσότητα I του οποίου ακολουθεί την X . Δειγματοληπτούμε τυχαία n άτομα του πληθυσμού και μετρούμε την I για κάθε άτομο οπότε λαμβάνουμε n μετρήσεις-ποσότητες x_1, x_2, \dots, x_n . Υπολογίζουμε το δειγματικό μέσο αυτών

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \text{ όπου ο κάτω δείκτης στο } \bar{x}_1 \text{ υποδηλώνει ότι αυτή είναι η πρώτη}$$

δειγματοληψία που πραγματοποιήσαμε. Επαναλαμβάνουμε για δεύτερη φορά την τυχαία δειγματοληψία οπότε και λαμβάνουμε ένα νέο δειγματικό μέσο \bar{x}_2 . Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία, οπότε κατά την i -οστή τυχαία δειγματοληψία λαμβάνουμε το δειγματικό μέσο \bar{x}_i . Αφήνοντας το i να τείνει στο άπειρο, λαμβάνουμε μια κατανομή \bar{X} των \bar{x}_i . Η κατανομή αυτή περιγράφεται μέσω της ποσότητας: ⁽¹⁾

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (7.10)$$

η οποία ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή.

Εάν η πληθυσμιακή διασπορά σ είναι άγνωστη τότε η κατανομή των \bar{x} περιγράφεται από την ποσότητα

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S / \sqrt{n}} \quad (7.11)$$

η οποία ακολουθεί κατανομή t ή Student με n-1 βαθμούς ελευθερίας. ⁽¹⁾

Η κατανομή Student n βαθμών ελευθερίας έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την κάτωθι:

$$f_{t,n}(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (7.12)$$

7.4 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

7.4.1 Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

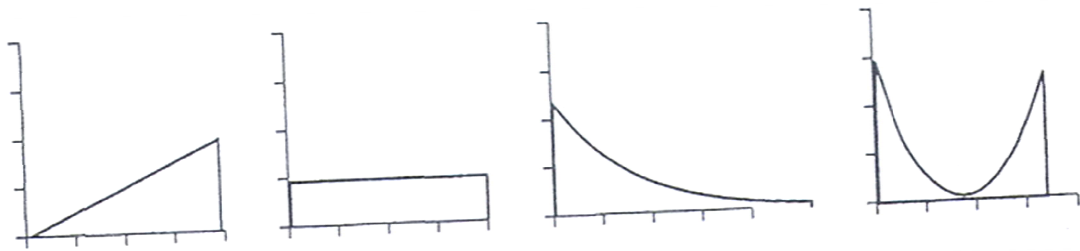
Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.) αφορά στην οριακή συμπεριφορά των ακολουθιών τ.μ. (τυχαίων μεταβλητών) $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ως προς την κατά Νόμο σύγκλιση. Με άλλα λόγια, μπορούμε να πούμε ότι το Κ.Ο.Θ. εξηγεί μεγάλο εύρος εφαρμογής της κανονικής κατανομής και συνδέει οποιαδήποτε κατανομή με την κανονική. ⁽⁶⁾

Θεώρημα 7.4.1

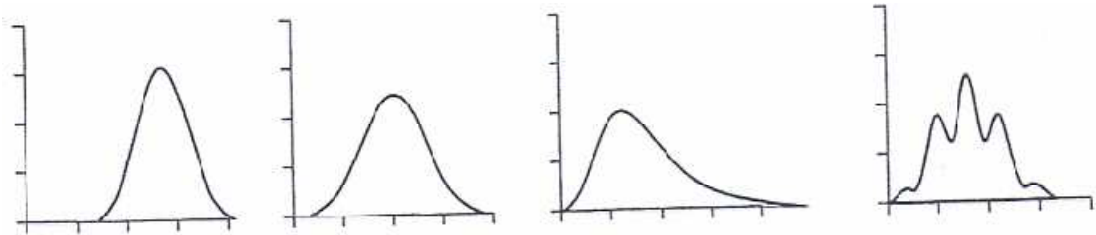
Αν από έναν πληθυσμό που ακολουθεί οποιαδήποτε κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 , επιλέξουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n και υπολογίσουμε τους μέσους τους, τότε, για μεγάλα n (θεωρητικά $n \rightarrow \infty$), η κατανομή αυτών των μέσων (των δειγματικών) είναι κατά προσέγγιση κανονική κατανομή με μέση τιμή επίσης μ και διασπορά σ^2/n . ⁽⁶⁾

Παράδειγμα 7.4.1.1 ⁽⁶⁾

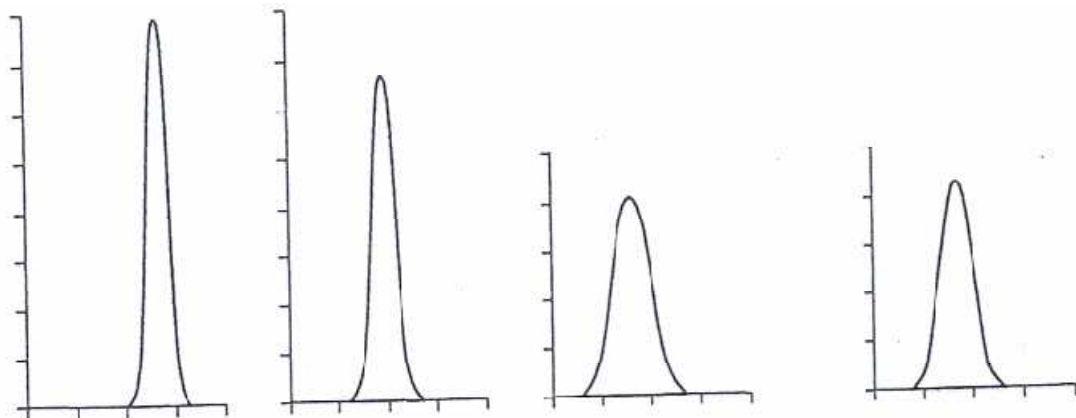
Έστω οι παρακάτω κατανομές τεσσάρων πληθυσμών:



Τότε, οι κατανομές των δειγματικών μέσων είναι αντίστοιχα για $n=4$:



Και για $n=25$:



Όσο πιο μεγάλο είναι το μέγεθος n των δειγμάτων, τόσο καλύτερη (ακριβέστερη) είναι η προσέγγιση της κατανομής των δειγματικών μέσων από την κανονική κατανομή.

Παρατηρήσεις ⁽⁶⁾

1. Μια ισοδύναμη διατύπωση του Κ.Ο.Θ. είναι η εξής:

Αν από έναν πληθυσμό που ακολουθεί οποιαδήποτε κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 , επιλέξουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n και υπολογίσουμε το άθροισμα των παρατηρήσεων κάθε δείγματος, τότε για μεγάλα n (θεωρητικά $n \rightarrow \infty$) η κατανομή αυτών των αθροισμάτων είναι κατά προσέγγιση κανονική κατανομή με μέση τιμή $n\mu$ και διασπορά $n\sigma^2$, δηλαδή, αν συμβολίσουμε με S_n την τυχαία

μεταβλητή που εκφράζει αυτά τα αθροίσματα, τότε κατά προσέγγιση $S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$.

2. Η τυπική απόκλιση της κατανομής των δειγματικών μέσων $\sigma_x = \sigma/\sqrt{n}$ ονομάζεται τυπικό σφάλμα (standard error). Παρατηρείστε ότι το τυπικό σφάλμα είναι μικρότερο από την τυπική απόκλιση σ της X . Σηλαδή, η μεταβλητότητα του πληθυσμού από τον οποίο προέρχονται. Μάλιστα, όσο αυξάνει το μέγεθος του δείγματος, η δειγματική μεταβλητότητα (η μεταβλητότητα από δείγμα σε δείγμα των $X_{\text{μέσων}}$, δηλαδή, το σ_x) ελαττώνεται.

3. Όπως ήδη αναφέραμε, όσο πιο μεγάλο είναι το μέγεθος των δειγμάτων n , τόσο καλύτερη (ακριβέστερη) είναι η προσέγγιση της κατανομής των δειγματικών μέσων από την κανονική κατανομή. Πρακτικά, όμως, πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το n ; Σαφής απάντηση στο ερώτημα αυτό δεν υπάρχει. Γενικά, το πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το n , εξαρτάται από την κατανομή του πληθυσμού. Για παράδειγμα, αν η κατανομή του πληθυσμού είναι λοξή (ασύμμετρη) απαιτείται μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος από αυτό που απαιτείται αν είναι περίπου συμμετρική. Γενικά, το μέγεθος του δείγματος πρέπει να είναι τουλάχιστον 30, δηλαδή, $n \geq 30$. Όμως, όπως φαίνεται και στα σχήματα του παραδείγματος 7.1, υπάρχουν περιπτώσεις όπου καλές προσεγγίσεις παίρνουμε και για μικρότερα n .

Τέλος, επισημαίνουμε την περίπτωση όπου ο πληθυσμός από τον οποίο γίνεται η δειγματοληψία είναι κανονικός. Στην περίπτωση αυτή, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, αποδεικνύεται θεωρητικά ότι η κατανομή των δειγματικών μέσων (και της S_n), είναι κανονική κατανομή ανεξάρτητα από την τιμή του n . Δηλαδή, αποδεικνύεται ότι:

Αν X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε, $X_{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$.

7.4.2 Κανονική προσέγγιση της Διωνυμικής Κατανομής

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα της θεωρίας πιθανοτήτων, γνωστό ως οριακό θεώρημα των De Moivre-Laplace, μας λέει ότι: ⁽⁶⁾

Για μεγάλα n (θεωρητικά $n \rightarrow \infty$), η διωνυμική κατανομή μπορεί να προσεγγισθεί από μια κανονική κατανομή με ίδια μέση τιμή και ίδια διασπορά. Δηλαδή, αν $X \sim B(n,$

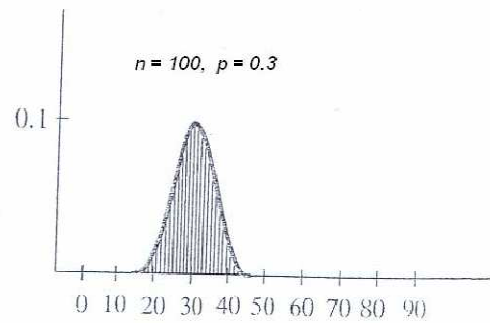
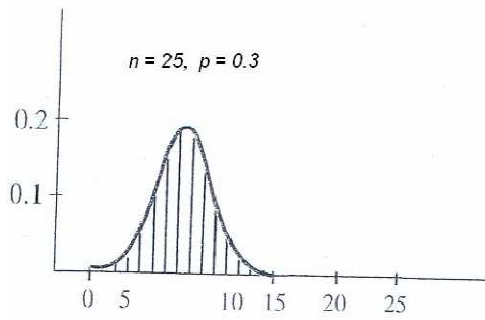
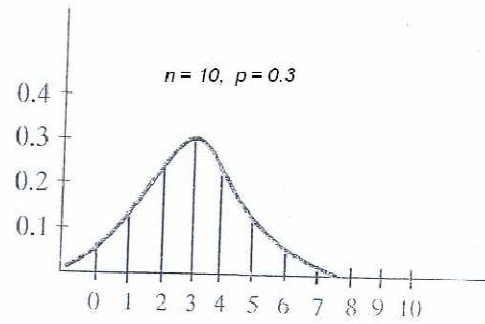
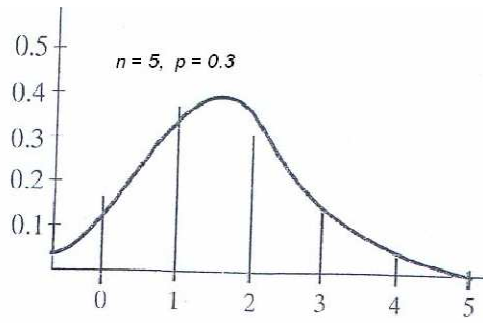
p) τότε η κατανομή της X προσεγγίζεται, για μεγάλες τιμές του n , από την $N(\mu, \sigma^2)$ με $\mu=np$ και $\sigma^2=np(1-p)$. ⁽⁶⁾

Το ίδιο ερώτημα που προέκυψε με τη διατύπωση του Κ.Ο.Θ. μας απασχολεί εξίσου και στο παραπάνω αποτέλεσμα: πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το n για να μπορεί, πρακτικά, να χρησιμοποιηθεί κανονική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής. Όπως φαίνεται και στα σχήματα που υπάρχουν στην επόμενη σελίδα, το πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το n , εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου p . Αν για παράδειγμα, $p=1/2$ ή κοντά στο $1/2$, τότε και για όχι πολύ μεγάλες τιμές του n παίρνουμε εξαιρετικές προσεγγίσεις της διωνυμικής. Αντίθετα, αν το p είναι πολύ μικρό ή πολύ μεγάλο, για καλή προσέγγιση, απαιτούνται πολύ μεγαλύτερες τιμές του n . Ένας πρακτικός, γενικός, κανόνας είναι ο εξής: ⁽⁶⁾

Για να πάρουμε, μέσω του θεωρήματος De Moivre-Laplace, καλές προσεγγίσεις της διωνυμικής κατανομής αρκεί $np(1-p) \geq 10$. Επίσης, συχνά, στη βιβλιογραφία συναντάται και ο κανόνας: $np > 5$ και $n(1-p) > 5$.

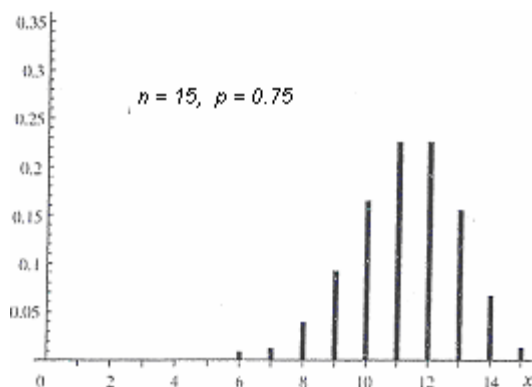
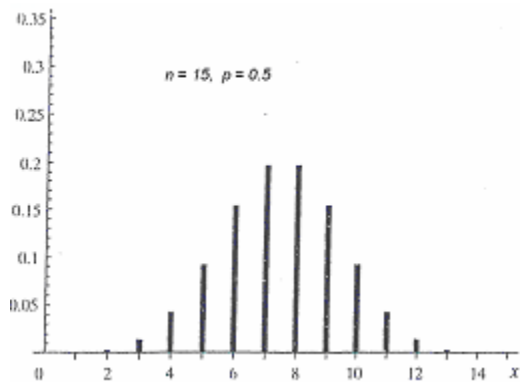
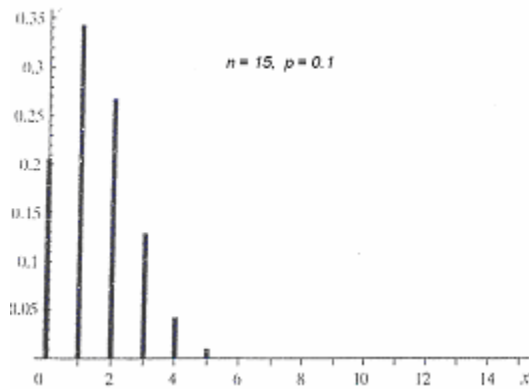
Παράδειγμα ⁽⁶⁾

Στα τέσσερα σχήματα που ακολουθούν δίνεται η συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής με $p=0.3$ (σταθερό) και $n=5, 10, 25, 100$ καθώς και η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής με την αντίστοιχη μέση τιμή και διασπορά, δηλαδή, με $\mu=np$ και $\sigma^2=np(1-p)$. Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερο γίνεται το n τόσο πιο καλή είναι η προσέγγιση.



Παράδειγμα⁽⁶⁾

Στα τρία επόμενα σχήματα δίνεται η συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής με $n=15$ (σταθερό) και $p=0.1, 0.5, 0.7$. Παρατηρούμε ότι η μορφή της κατανομής είναι κανονική για $p=0.5$.



7.4.3 Κανονική προσέγγιση της Κατανομής Poisson

Με εφαρμογή του Κ.Ο.Θ. , αποδεικνύεται ότι και η κατανομή Poisson μπορεί να προσεγγισθεί ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή. Πιο συγκεκριμένα, αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ , τότε η κατανομή της X προσεγγίζεται, για μεγάλες τιμές του λ (στην πράξη για $\lambda > 10$), από την $N(\mu, \sigma^2)$ με $\mu = \lambda$ και $\sigma^2 = \lambda$.⁽⁶⁾

7.4.4 Διόρθωση Συνέχειας

Τόσο στην περίπτωση της κανονικής προσέγγισης της διωνυμικής κατανομής όσο και στην περίπτωση της κανονικής προσέγγισης της κατανομής Poisson, γίνεται προσέγγιση διακριτής κατανομής από συνεχή. Στις περιπτώσεις αυτές (που γίνεται προσέγγιση διακριτής κατανομής από συνεχή), καλό είναι να ενσωματώνεται στον προσεγγιστικό τύπο η λεγόμενη διόρθωση συνέχειας. Έτσι, όταν, για παράδειγμα, η διωνυμική $X \sim B(n, p)$ προσεγγίζεται από την $N(np, np(1-p))$ οι πιθανότητες⁽⁶⁾

$$P(a \leq X \leq b), P(X \leq b) \text{ και } P(a \leq X)$$

με διόρθωση συνέχειας υπολογίζονται ως εξής:⁽⁶⁾

$$P(a \leq X \leq b) \approx P(a-0.5 \leq X \leq b+0.5) = P\left(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{b+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{b+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$P(X \leq b) \approx P(X \leq b+0.5) = P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{b+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{b+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$P(X \geq a) \approx P(X \geq a-0.5) = P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad (6)$$

8 Ελαχιστοποίηση Συναρτήσεων

8.1 Γενικά περί τοπικών ελαχίστων συναρτήσεων

Έστω ότι θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την τιμή μιας δοθείσης πραγματικής συνάρτησης f . Διακρίνουμε τις κάτωθι περιπτώσεις,⁽²⁾ αναλόγως με τον ορισμό της προς μελέτη συνάρτησης.

A) Έστω η συνάρτηση $f = f(x):A \rightarrow \mathbb{R}$ με A υποσύνολο του \mathbb{R} , μιας μεταβλητής x (ελαχιστοποίηση σε μια διάσταση).⁽²⁾ Τρεις μέθοδοι υπάρχουν για την ελαχιστοποίηση της τιμής αυτής της συνάρτησης:

- Χωρίς υπολογισμό των παραγώγων (όταν έχει ασυνεχείς δεύτερες ή χαμηλότερες παραγώγους).
- Με υπολογισμό και δευτέρων παραγώγων (μέθοδος Brent).
- Με υπολογισμό των πρώτων μόνο παραγώγων για κατασκευή υψηλής τάξης πολυωνύμων παρεμβολής.⁽²⁾

B) Έστω η συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n):A \rightarrow \mathbb{R}$ με A υποσύνολο του \mathbb{R}^n , n μεταβλητών x_1, x_2, \dots, x_n (ελαχιστοποίηση σε n διαστάσεις).⁽²⁾ Κατηγοριοποιούμε τις μεθόδους με βάση το αν χρησιμοποιούν υπολογισμό παραγώγων προκειμένου να υπολογιστεί το ελάχιστο.

- **Χωρίς υπολογισμό παραγώγων**
 - Η μέθοδος των Nelder Mead (Downhill Simplex Method in Multidimensions).
 - Η μέθοδος Powell (Direction Set Method in Multidimensions).⁽²⁾
- **Με υπολογισμό πρώτων παραγώγων**
 - Μέθοδος απόκρημνων καταβάσεων (steepest Descent)
 - Οι μέθοδοι των συζυγών κλίσεων (conjugate gradient) των Fletcher-Reeves ή των Polak-Ribiere.⁽²⁾
 - Οι μέθοδοι quasi-Newton των Davidon-Fletcher-Powell (DFP) ή των Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS).^{(2), (18)}

8.2 Μέθοδος των Nelder Mead–Downhill Simplex Method in Multidimensions

Η μέθοδος των Nelder Mead–Downhill Simplex Method in Multidimensions, η οποία θα περιγραφεί στην παρούσα παράγραφο, απαιτεί μόνο εκτιμήσεις της f και όχι παραγώγους.

Χωρική διάταξη (simplex), είναι η γεωμετρική απεικόνιση η οποία συντίθεται σε n διαστάσεις, από $n+1$ σημεία και όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από αυτά. Σε δύο διαστάσεις ένα simplex είναι ένα τρίγωνο. Σε τρεις διαστάσεις είναι ένα τετράεδρο, όχι υποχρεωτικά κανονικό. Γενικά ενδιαφερόμαστε για τα simplexes που είναι μη εκφυλισμένα για παράδειγμα, αυτά που περικλείουν ένα πεπερασμένο χώρο n διαστάσεων. Αν ένα οποιοδήποτε σημείο ενός μη εκφυλισμένου simplex ληφθεί ως αρχή συντεταγμένων, τότε τα n άλλα σημεία ορίζουν κατευθύνοντα διανύσματα που εκτείνονται στο n -διάστατο διανυσματικό χώρο.⁽²⁾

Ορισμός

Simplex $S \subset \mathcal{R}^n$ είναι ένα σύνολο από $n+1$ διανύσματα, $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{R}^n$, για τα οποία ισχύει:

$$\mathbf{E} = (x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_1),$$

δηλαδή, σχηματίζουν μία βάση \mathbf{E} στον \mathcal{R}^n .^{(4), (19)}

Σε ελαχιστοποίηση μιας διάστασης, είναι πιθανόν να ταξινομήσουμε ένα ελάχιστο, έτσι ώστε να μπορεί να εγγηθεί την επιτυχία μιας διαδοχικής απομόνωσης. Σε πολλές διαστάσεις το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε, είναι να δώσουμε στον αλγόριθμό μας μια τυχαία τιμή εκκίνησης, δηλαδή ένα διάνυσμα n ανεξάρτητων μεταβλητών. Η μέθοδος πρέπει να ξεκινήσει όχι με ένα μόνο σημείο, αλλά με $n+1$ σημεία, ορίζοντας ένα αρχικό simplex. Αν θεωρηθεί ένα από αυτά τα σημεία να είναι το αρχικό σημείο εκκίνησης P_0 , τότε τα άλλα n σημεία μπορούμε να τα πάρουμε από την σχέση:^{(2), (5), (19)}

$$P_i = P_0 + \lambda \cdot \vec{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.1)$$

όπου τα \vec{e}_i είναι η μοναδιαία διανύσματα και λ είναι μια τυχαία επιλεγμένη σταθερά. Μπορούμε, αν επιθυμούμε, για κάθε \vec{e}_i να έχουμε και διαφορετικό λ_i . Σε κάθε βήμα, ο αλγόριθμος διατηρεί ένα ταξινομημένο σύνολο από simplex διανύσματα της μορφής $(x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n+1}^k)$, όπου ο δείκτης k υποδηλώνει τον αριθμό επανάληψης της διαδικασίας, έτσι ώστε σε κάθε βήμα να ισχύει: ^{(2), (19)}

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_{n+1}).$$

Η μέθοδος ακολουθεί σειρά βημάτων, τα περισσότερα των οποίων, απλά μετακινούν το σημείο του simplex στο οποίο η συνάρτηση είναι μέγιστη, δια μέσου της αντίθετης πλευράς του simplex σε ένα σημείο όπου η τιμή της συνάρτησης είναι μικρότερη. ^{(2), (19)}

Για παράδειγμα έστω ότι $n=3$. Τότε, το simplex είναι ένα τετράεδρο στον τρισδιάστατο χώρο, δηλαδή μία πυραμίδα. Σε κάθε βήμα εμείς βρισκόμαστε στο κέντρο βάρους της πυραμίδας. Από το κέντρο βάρους αλλάζουμε θέση ώστε, να βρεθούμε σε κάθε κορυφή και υπολογίζουμε τη μεταβολή της τιμής της συνάρτησης από τη θέση του κέντρου βάρους μέχρι την εκάστοτε κορυφή. Επιλέγω να μετακινηθώ προς εκείνη την κορυφή στην οποία η τιμή της συνάρτησης μειώθηκε περισσότερο. Στη νέα θέση που βρίσκομαι χτίζω νέα πυραμίδα και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου η τιμή της συνάρτησης να είναι μεγαλύτερη ή ίση στις κορυφές από την τιμή που έχει στο κέντρο βάρους.

8.3 Μέθοδοι ελαχιστοποίησης συνάρτησης f με υπολογισμό των πρώτων μερικών παραγώγων της

Ορισμός του ανάδελτα και μεγιστοποίηση-ελαχιστοποίηση της κατά κατεύθυνση παραγώγου

Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $f(X)$ αντί $f(x, y)$, εννοώντας με X το διάνυσμα από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων O προς το σημείο (x, y) . Η συνάρτηση f θα λέγεται τότε βαθμωτή συνάρτηση μιας διανυσματικής μεταβλητής,

ή λέμε ότι η f είναι ένα βαθμωτό πεδίο. Χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό και την ίδια ορολογία για διανύσματα τριών ή γενικώς n διαστάσεων. Με τον τρόπο αυτό, στα επόμενα, λέγοντας «σημείο» και «διάνυσμα» στον n -χώρο, θα εννοούμε αδιακρίτως ένα διατεταγμένο σύστημα n πραγματικών αριθμών (x_1, x_2, \dots, x_n) . Επίσης, όταν λέμε «σημείο X » θα εννοούμε το πέρας του διανύσματος X , του οποίου η αρχή είναι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων O . Έστω f είναι ένα βαθμωτό πεδίο και $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ένα σημείο του πεδίου ορισμού αυτού, τότε αμφότεροι οι συμβολισμοί $f(X)$ και $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ δηλώνουν την τιμή του f στο συγκεκριμένο αυτό σημείο, αλλά συνηθίζουμε όταν χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $f(X)$ να λέμε ότι η f είναι συνάρτηση της διανυσματικής μεταβλητής X , ενώ όταν χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ λέμε ότι η f είναι συνάρτηση των n πραγματικών μεταβλητών x_1, x_2, \dots, x_n . Παρακάτω, θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $f(X)$ γιατί είναι απλούστερος στη γραφή και γιατί, επιπλέον, δεν απαιτείται στις διατυπώσεις ορισμών και θεωρημάτων που ακολουθούν, να καθορίζουμε τις διαστάσεις του χώρου που ορίζεται η f .⁽²⁾

Γειτονιά ενός σημείου

Έστω $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ δοθέν σημείο του n -χώρου, και r θετικός πραγματικός. Το σύνολο των σημείων $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ του n -χώρου για τα οποία ισχύει η σχέση $|X - A| < r$ ή ισοδύναμα, $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2$ λέγεται γειτονιά του σημείου A με ακτίνα r και την συμβολίζουμε με $N(A; r)$ ή απλούστερα $N(A)$. Επίσης, ονομάζεται και r -κυκλική περιοχή όταν $n = 2$ και r -σφαιρική περιοχή με $n > 2$.⁽²⁾

Ανοικτό σύνολο

Ένα υποσύνολο S του n -χώρου, λέγεται ανοικτό όταν για κάθε σημείο A του S , υπάρχει μια τουλάχιστον γειτονιά $N(A)$ του A τέτοια ώστε να ισχύει $N(A) \subseteq S$.⁽²⁾

Παράγωγος βαθμωτού πεδίου ως προς διάνυσμα

Έστω f βαθμωτό πεδίο ορισμένο στο ανοικτό σύνολο S και $X \in S$. Εφόσον S ανοικτό σύνολο, υπάρχει γειτονιά $N(X)$ του X τέτοια ώστε να ισχύει $N(X) \subseteq S$ και έστω A , γειτονικό σημείο του X με $A \in N(X)$. Αναζητούμε τον ρυθμό μεταβολής της f καθώς το σημείο X κινείται στο S προς το γειτονικό του σημείο, A . Γενικά, ο ρυθμός μεταβολής θα εξαρτάται από την κατεύθυνση κατά την οποία θα κινηθούμε από το σημείο προς το γειτονικό του. Έστω λοιπόν, ότι κινούμαστε από το X κατά την κατεύθυνση Y . Δηλαδή, το γειτονικό σημείο A του X , βρίσκεται στην ευθεία που διέρχεται από το X και είναι παράλληλη στο διάνυσμα Y . Τότε, το A θα περιγράφεται από το διάνυσμα $X+h \cdot Y$ όπου, h πραγματικός. Η απόσταση των X και $X+h \cdot Y$ είναι $|h \cdot Y| = |h| \cdot |Y|$. Τότε, ορίζονται οι τιμές $f(X)$ και $f(X+h \cdot Y)$ καθώς και, ο λόγος $\frac{f(X+h \cdot Y) - f(X)}{h}$, που παριστάνει το μέσο συντελεστή μεταβολής της f πάνω στην ευθεία που, συνδέει τα σημεία X και $X+h \cdot Y$.⁽²⁾

Ορισμός: Παράγωγος βαθμωτού πεδίου ως προς ένα διάνυσμα

Έστω f βαθμωτό πεδίο ορισμένο στο ανοικτό σύνολο S , X σημείο του S και Y αυθαίρετο διάνυσμα του n -χώρου. Η παράγωγος του βαθμωτού πεδίου f στο σημείο X ως προς το διάνυσμα Y παριστάνεται με $f'(X:Y)$ ή $\frac{\partial f(X)}{\partial Y}$ ή $D_Y f(X)$ και ορίζεται :

$$f'(X:Y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X+h \cdot Y) - f(X)}{h}$$

με την προϋπόθεση ότι υπάρχει το όριο στο δεύτερο μέλος της ισότητας και είναι πραγματικός αριθμός.⁽²⁾

Στον ορισμό αυτό, εμπεριέχεται, ως ειδική περίπτωση, η έννοια της μερικής παραγώγου. Πράγματι, αν αντί Y επιλέξουμε το μοναδιαίο διάνυσμα A_k του x_k -

άξονα συντεταγμένων στον n -χώρο, δηλαδή $A_k(0,0,\dots,0,x_k=1,0,\dots,0)$, τότε η $D_k f(X)$ ή $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ ή είναι η μερική παράγωγος της f ως προς A_k .⁽²⁾

Όταν Y είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, $|Y|=1$, η απόσταση των X και $X+h \cdot Y$ είναι $|h \cdot Y|=|h| \cdot |Y|=|h|$. Στην περίπτωση αυτή, το πηλίκο $\frac{f(X+h \cdot Y)-f(X)}{h}$ παριστάνει τον μέσο συντελεστή μεταβολής του f κατά μονάδα αποστάσεων, πάνω στην ευθεία που ενώνει τα X και $X+h \cdot Y$ και, η παράγωγος $f'(X:Y)$ λέγεται *παράγωγος του f στο X κατά την κατεύθυνση Y* και συμβολίζεται πάλι με $f'(X:Y)$ ή $\frac{\partial f(X)}{\partial Y}$.⁽²⁾

Ορισμός: Συνέχεια βαθμωτού πεδίου σε σημείο του πεδίου ορισμού του

Έστω f βαθμωτό πεδίο ορισμένο σε ένα σημείο A του n -χώρου και, ας υποθέσουμε ότι, σε κάθε γειτονιά του A υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο διαφορετικό του A και στο οποίο, ορίζεται η f . Θα λέμε ότι το πεδίο f είναι συνεχές στο A τότε και μόνον τότε, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει γειτονιά $N(A)$ του A τέτοια ώστε, να ισχύει $|f(X)-f(A)| < \varepsilon$ για κάθε X της $N(A)$ στο οποίο, ορίζεται η f . Το f είναι συνεχές στο σύνολο S , αν ορίζεται σε αυτό και είναι συνεχές σε κάθε σημείο του S .⁽²⁾

Ορισμός: Παραγωγίσιμο βαθμωτό πεδίο

Έστω f βαθμωτό πεδίο ορισμένο στο ανοικτό σύνολο S . Το f λέγεται παραγωγίσιμο στο S τότε και μόνον τότε όταν για κάθε σημείο X του S ορίζεται η παράγωγος $f'(X:Y)$ για κάθε διάνυσμα Y .⁽²⁾

Ορισμός: Συνεχώς παραγωγίσιμο βαθμωτό πεδίο σε σημείο του πεδίου ορισμού του

Έστω f βαθμωτό πεδίο ορισμένο σε μια γειτονιά $N(A)$ του σημείου A , το f λέγεται συνεχώς παραγωγίσιμο στο A τότε και μόνον τότε όταν ορίζεται η παράγωγος $f'(A:Y)$ για κάθε διάνυσμα Y και το πεδίο $f'(A:Y)$ είναι συνεχές στο A , δηλαδή όταν για κάθε Y και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει γειτονιά $N(A)$ του A τέτοια ώστε να ισχύει $|f'(X:Y) - f'(A:Y)| < \varepsilon$ για κάθε X της $N(A)$ στο οποίο ορίζεται η f .⁽²⁾

Ορισμός: Συνεχώς παραγωγίσιμο βαθμωτό πεδίο

Έστω f βαθμωτό πεδίο ορισμένο στο ανοικτό σύνολο S . Το f λέγεται συνεχώς παραγωγίσιμο στο S τότε και μόνον τότε όταν για κάθε σημείο X του S ορίζεται η παράγωγος $f'(X:Y)$ για κάθε διάνυσμα Y και το πεδίο $f'(X:Y)$ είναι συνεχές στο σύνολο S .⁽²⁾

Αποδεικνύεται ότι ένα βαθμωτό πεδίο με συνεχείς μερικές παραγώγους D_1f, D_2f, \dots, D_nf σε ένα ανοικτό σύνολο S του n -χώρου είναι συνεχώς παραγωγίσιμο στο S .⁽²⁾

Στο \mathbb{R} η ύπαρξη της παραγώγου μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο της συνεπάγεται την συνέχεια της f στο σημείο αυτό, αλλά στον n -χώρο η ύπαρξη των μερικών παραγώγων ενός βαθμωτού πεδίου f σε ένα σημείο ξ του πεδίου ορισμού του δεν συνεπάγεται την ύπαρξη της κατευθυνόμενης παραγώγου της συνάρτησης ως προς κάθε κατεύθυνση στο σημείο ξ . Αποδεικνύεται ότι όταν ένα βαθμωτό πεδίο είναι συνεχώς παραγωγίσιμο σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού του θα είναι και συνεχές στο σημείο αυτό.^{(2), (5)}

Γραμμικότητα της παραγώγου ενός βαθμωτού πεδίου ως προς ένα διάνυσμα

Αποδεικνύεται ότι η παράγωγος ενός συνεχώς παραγωγίσιμου βαθμωτού πεδίου είναι γραμμική συνάρτηση του διανύσματος ως προς το οποίο λαμβάνεται η παράγωγος.

Αναλυτικότερα, έστω $f: S \rightarrow \mathfrak{R}$, $S \subseteq \mathfrak{R}^n$, $A \in S$ και f συνεχώς παραγωγίσιμο στο A , τότε ισχύει:

$$f'(A: a \cdot X + b \cdot Z) = a \cdot f'(A: X) + b \cdot f'(A: Z)$$

για οποιαδήποτε διανύσματα X, Z του \mathfrak{R}^n και για οποιαδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, b .⁽²⁾

Άμεση συνέπεια της γραμμικότητας της παραγώγου βαθμωτού πεδίου ως προς διάνυσμα είναι το ακόλουθο θεώρημα.⁽²⁾

Θεώρημα

Αν είναι f βαθμωτό πεδίο συνεχώς παραγωγίσιμο σε μια γειτονιά του $X \in \mathfrak{R}^n$ και $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ τότε είναι:

$$f'(X: Y) = \sum_{k=1}^n y_k \cdot D_k f(X).^{(2)}$$

Κλίση ενός βαθμωτού πεδίου

Έστω f παραγωγίσιμο βαθμωτό πεδίο σε ένα ανοικτό σύνολο S του n -χώρου. Η κλίση του f , συμβολικώς $\vec{\nabla} f$, είναι το διανυσματικό πεδίο (διανυσματική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής) του οποίου η τιμή σε κάθε $X \in S$ είναι το διάνυσμα $\vec{\nabla} f = (D_1 f(X), \dots, D_n f(X))$ (χρησιμοποιούμε το σύμβολο του διανύσματος για να τονίσουμε ότι $\vec{\nabla} f$ είναι διανυσματικό πεδίο) ή $\vec{\nabla} f = D_1 f(X) \cdot \vec{i}_1 + \dots + D_n f(X) \cdot \vec{i}_n$, $\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_n$ τα μοναδιαία του n -χώρου ή

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f(X)}{\partial x_1} \cdot \vec{i}_1 + \dots + \frac{\partial f(X)}{\partial x_n} \cdot \vec{i}_n, \quad X = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{ή} \quad X = x_1 \cdot \vec{i}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{i}_n.^{(2)}$$

Από τον ορισμό της κλίσης βαθμωτού πεδίου και το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι όταν f βαθμωτό πεδίο συνεχώς παραγωγίσιμο σε μια γειτονιά του $X \in \mathfrak{R}^n$ και $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ή $Y = y_1 \cdot \vec{i}_1 + \dots + y_n \cdot \vec{i}_n$ τότε είναι:⁽²⁾

$$f'(X : Y) = \frac{\partial f(X)}{\partial Y} = \sum_{k=1}^n y_k \cdot D_k f(X) = \vec{\nabla} f \cdot Y$$

Η ανωτέρω σχέση μας δίνει τον τρόπο υπολογισμού της παραγώγου βαθμωτού πεδίου ως προς ένα διάνυσμα $f'(X : Y)$ ενώ, αν Y μοναδιαίο δίνει τρόπο υπολογισμού της κατά κατεύθυνση Y παραγώγου του f στο X .⁽²⁾

Ειδικά, αν $n = 2$ ή $n = 3$ είναι:⁽²⁾

$$f'(X : Y) = \frac{\partial f(X)}{\partial Y} = \sum_{k=1}^n y_k \cdot D_k f(X) = \vec{\nabla} f \cdot Y = |\vec{\nabla} f| \cdot |Y| \cdot \cos(\theta)$$

όπου θ είναι η γωνία των δύο διανυσμάτων $\vec{\nabla} f$ και Y . Η ανωτέρω σχέση μας δίνει τον τρόπο υπολογισμού της παραγώγου βαθμωτού πεδίου ως προς ένα διάνυσμα $f'(X : Y)$ ενώ, αν Y μοναδιαίο για τον υπολογισμό της κατά κατεύθυνση Y παραγώγου του f στο X έχουμε:⁽²⁾

$$f'(X : Y) = \frac{\partial f(X)}{\partial Y} = \sum_{k=1}^n y_k \cdot D_k f(X) = \vec{\nabla} f \cdot Y = |\vec{\nabla} f| \cdot |Y| \cdot \cos(\theta) = |\vec{\nabla} f| \cdot \cos(\theta). \quad (2)$$

Παρατηρήσεις

Αν f βαθμωτό πεδίο ορισμένο σε ανοικτό υποσύνολο S του \mathbb{R}^3 ή \mathbb{R}^2 , θα θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι S υποσύνολο του \mathbb{R}^2 και Y μοναδιαίο τότε η κατά κατεύθυνση Y παράγωγος του βαθμωτού πεδίου f στο $X_0 = (x_0, y_0) \in S \subseteq \mathbb{R}^2$ εφόσον είναι συνεχώς παραγωγίσιμο σε μια γειτονιά του X_0 ή έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο X_0 είναι:⁽²⁾

$$f'(X_0 : Y) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial Y} = D_Y f(x_0, y_0) = |\vec{\nabla} f(x_0, y_0)| \cdot \cos(\theta)$$

με θ τη γωνία των δύο διανυσμάτων $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ και Y .⁽²⁾

Η μέγιστη τιμή της $D_Y f(x_0, y_0)$ επιτυγχάνεται όταν $\cos(\theta)=1$, δηλαδή για $\theta=0$. Συγκεκριμένα, η $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ είναι η κατεύθυνση κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(X)$ στο σημείο (x_0, y_0) γίνεται μέγιστος και ισούται με $|\vec{\nabla} f(x_0, y_0)|$.⁽²⁾

Όταν $\theta=\pi$, τότε $\cos(\theta)=-1$ και $-\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ είναι η κατεύθυνση κατά την οποία παρατηρείται ο ελάχιστος ρυθμός μεταβολής της $f(X)$ στο σημείο (x_0, y_0) και ισούται με $|\vec{\nabla} f(x_0, y_0)|$.⁽²⁾

Προφανώς, για $\theta = \pi/2$ έχουμε⁽²⁾ $D_Y f(x_0, y_0) = 0$.

Παράδειγμα-πρόβλημα⁽²⁾

Ζητείται να βρεθεί ο κύκλος C που βέλτιστα προσεγγίζει ένα σύνολο σημείων (x_i, y_i) , $i=1,2,\dots,N$.

Έστω η καμπύλη $\vec{r}(\theta) = x(\theta) \cdot \vec{i} + y(\theta) \cdot \vec{j}$, με θ να παίρνει τιμές σε ένα διακριτό (πλην «πυκνό») υποσύνολο του \mathfrak{R} . Για τις διάφορες τιμές του θ , προκύπτουν τα σημεία της καμπύλης (x_i, y_i) , $i=1,2,\dots,N$.

Η εξίσωση του κύκλου C κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας R είναι $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2$. Αν ο C είναι ο ζητούμενος κύκλος, θα πρέπει για τις τιμές αυτές των x_0, y_0 και R , να ελαχιστοποιείται η ποσότητα:

$$\sum_{i=1}^N [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2]^2$$

Θεωρώ την συνάρτηση $E : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$, με τύπο:

$$E(x_0, y_0, R) = \sum_{i=1}^N [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2]^2$$

Ζητώ τα σημεία (x_0, y_0, R) του \mathfrak{R}^3 για τα οποία η συνάρτηση $E(x_0, y_0, R)$ ελαχιστοποιείται.

Μέθοδος επίλυσης

Υπολογίζω το $-\vec{\nabla}E$. Είναι, μετά από πράξεις,

$$\vec{\nabla}E = \frac{\partial E}{\partial x_0} \cdot \vec{i} + \frac{\partial E}{\partial y_0} \cdot \vec{j} + \frac{\partial E}{\partial R} \cdot \vec{k}$$

με

$$\frac{\partial E}{\partial x_0} = -\sum_{i=1}^N 4 \cdot (x_i - x_0) \cdot [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2]$$

$$\frac{\partial E}{\partial y_0} = -\sum_{i=1}^N 4 \cdot (y_i - y_0) \cdot [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2]$$

$$\frac{\partial E}{\partial R} = -\sum_{i=1}^N 4 \cdot R \cdot [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2]$$

Για να γίνει ελαχιστοποίηση κάνω διαδοχικές προσεγγίσεις του ελαχίστου της $E(x_0, y_0, R)$ κατά μήκος του $-\vec{\nabla}E$ όπως περιγράφουμε κατωτέρω.

Ορίζω αυθαίρετα μια τιμή του (x_0, y_0, R) έστω την (x_0^0, y_0^0, R^0) και υπολογίζω το $-\vec{\nabla}E|_{(x_0^0, y_0^0, R^0)}$. Κινούμαι κατά μήκος του $-\vec{\nabla}E|_{(x_0^0, y_0^0, R^0)}$ μέχρις ότου η τιμή της E να σταματήσει να μειώνεται. Το σημείο στο οποίο σταματά η περαιτέρω μείωση της τιμής της E το ονομάζω (x_0^1, y_0^1, R^1) . Αναλυτικότερα, έστω, $\vec{e}^0 = (e_1^0, e_2^0, e_3^0)$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση του $-\vec{\nabla}E|_{(x_0^0, y_0^0, R^0)}$. Υπολογίζουμε τις τιμές $E(x_0^0 + \lambda \cdot e_1^0, y_0^0 + \lambda \cdot e_2^0, R^0 + \lambda \cdot e_3^0)$ με $\lambda \in \mathbb{R}^+$, αναζητώντας ελαχιστοποίηση της ποσότητας αυτής, αυξάνοντας κάθε φορά την τιμή του λ . Όσο οι τιμές αυτής μειώνονται συνεχίζω. Όταν για κάποιο $\lambda = \lambda_{m+1}$ προκύψει μια τιμή της ποσότητας που είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη τιμή της, για $\lambda = \lambda_m$, θεωρώ ότι το $\lambda = \lambda_m$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της ποσότητας $E(x_0^0 + \lambda \cdot e_1^0, y_0^0 + \lambda \cdot e_2^0, R^0 + \lambda \cdot e_3^0)$, η οποία είναι συνάρτηση του λ και ως εκ τούτου μπορεί να επιτευχθεί ελαχιστοποίηση αυτής.

Θεωρώ ότι το σημείο (x_0^1, y_0^1, R^1) με $x_0^1 = x_0^0 + \lambda_m \cdot e_1^0, y_0^1 = y_0^0 + \lambda_m \cdot e_2^0, R^1 = R^0 + \lambda_m \cdot e_3^0$ είναι μια νέα προσέγγιση του ελαχίστου της $E(x_0, y_0, R)$. Συνεχίζω ούτω καθ' εξής έως ότου συγκλίνει.⁽²⁾

Ορισμός των συζυγών κατευθύνσεων αναφορικά με μία συνάρτηση δευτέρου βαθμού

Εάν ελαχιστοποιήσουμε μια συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n): A \rightarrow \mathbb{R}$ με A υποσύνολο του \mathbb{R}^n κατά μήκος μιας διεύθυνσης \vec{u} , τότε, το ανάδελτα της συνάρτησης στο σημείο ελαχίστου θα πρέπει να είναι κάθετο στην διεύθυνση του \vec{u} αλλιώς, η κατά κατεύθυνση προς \vec{u} παράγωγος της συνάρτησης δε θα μηδενιζόταν. Στη συνέχεια θεωρούμε ένα συγκεκριμένο σημείο P ως αρχή του συστήματος συντεταγμένων και έστω $(x_1^P, x_2^P, \dots, x_n^P)$ οι συντεταγμένες του. Τότε το ανάπτυγμα της f κατά Taylor δίνει:⁽²⁾

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(P) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j + \dots \approx c - b \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

όπου,

$$c = f(P) \quad , \quad b = -\vec{\nabla} f|_P \quad , \quad [A]_{i,j} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_P$$

Τα στοιχεία του πίνακα A είναι οι δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι της f . Ο πίνακας A ονομάζεται πίνακας Hessian της συνάρτησης f στο σημείο αυτής, P . Από τον προσεγγιστικό τύπο της f , υπολογίζουμε το ανάδελτα αυτής:⁽²⁾

$$\vec{\nabla} f = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b$$

Το ερώτημα που προκύπτει είναι πώς αλλάζει το ανάδελτα κινούμενο μέσω της f κατά μήκος μιας διεύθυνσης. Προφανώς, $\delta(\vec{\nabla}f) = A \cdot \delta(\vec{x})$ όπου με \vec{x} συμβολίζουμε το διάνυσμα με αρχή το κέντρο του συστήματος συντεταγμένων και πέρας το σημείο με συντεταγμένες x_1, x_2, \dots, x_n . Ας υποθέσουμε ότι, μετακινηθήκαμε κατά μήκος μιας κατεύθυνσης \vec{u} σε ένα ελάχιστο και εν συνεχεία, προτιθέμεθα να μετακινηθούμε κατά μήκος μιας νέας κατεύθυνσης \vec{v} . Η συνθήκη, η οποία μας εξασφαλίζει ότι, η κίνηση κατά μήκος της νέας διεύθυνσης \vec{v} δεν θα ακυρώσει την ελαχιστοποίηση κατά μήκος της διεύθυνσης \vec{u} , είναι ότι το ανάδελτα πρέπει να παραμένει κάθετο στην \vec{u} . Με άλλα λόγια, η νέα διεύθυνση \vec{v} θα πρέπει να είναι κάθετη (ορθογώνια) προς την προηγούμενη διεύθυνση \vec{u} . Η συνθήκη αυτή, εκφράζεται με την σχέση $0 = \vec{u}^T \cdot \delta(\vec{\nabla}f) = \vec{u}^T \cdot A \cdot \vec{v}$. Όταν για δύο διανύσματα ισχύει η σχέση $\vec{u}^T \cdot A \cdot \vec{v} = 0$, τότε συνηθίζεται τα διανύσματα \vec{u} και \vec{v} να ονομάζονται συζυγή. Ενώ, όταν η σχέση ισχύει για όλα τα δυνατά ζεύγη ενός συνόλου διανυσμάτων, το σύνολο αυτό των διανυσμάτων ονομάζεται συζυγές. Αρκεί, να γίνει ελαχιστοποίηση κατά μήκος n γραμμικώς ανεξάρτητων διευθύνσεων, οι οποίες είναι ανά δύο συζυγείς. Αφού πραγματοποιηθούν οι n ελαχιστοποιήσεις, κατά μήκος των ανωτέρω διευθύνσεων, θα επιτευχθεί το ελάχιστο της συνάρτησης αν, η f είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού n μεταβλητών. Για συναρτήσεις, οι οποίες δεν είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού n μεταβλητών, δεν επιτυγχάνεται η εύρεση ελαχίστου αλλά, οι επαναλαμβανόμενες αναδρομές των n ελαχιστοποιήσεων, θα συγκλίνουν στο ελάχιστο.⁽²⁾

8.4 Μέθοδος απόκρημνων καταβάσεων (Steepest Descent)

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, την οποία και επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε. Έστω λοιπόν, μια συνάρτηση $f = f(x, y): A \rightarrow \mathbb{R}$ με A υποσύνολο του \mathbb{R}^2 , δύο μεταβλητών x, y , η οποία είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο A .⁽²⁾

- 1) Εκκινώ από τυχόν σημείο $P_0(x_0, y_0)$ του A , ελπίζοντας ότι αυτή η τυχούσα επιλογή θα μας οδηγήσει στο ελάχιστο. Στο P_0 υπολογίζουμε το

$$-\vec{\nabla}f|_{P_0} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j} = \vec{g}_0$$

- 2) Κάνουμε ελαχιστοποίηση κατά μήκος του \vec{g}_0 , με τον τρόπο που ακολουθεί:
Έστω λ πραγματική μεταβλητή. Σε περιοχή του (x_0, y_0) θέτω

$$x(\lambda) = x_0 - \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$y(\lambda) = y_0 - \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Ορίζω ένα βήμα μεταβολής του λ , έστω $\Delta\lambda$ και την ακολουθία $\lambda_v = v \cdot \Delta\lambda$, $v = 1, 2, 3, \dots$. Μόλις βρω ελάχιστο της $f(\lambda) = f(x_0 + v \cdot \Delta\lambda, y_0 + v \cdot \Delta\lambda)$ στο σύνολο

$$\{(x_0, y_0), (x_0 + 1 \cdot \Delta\lambda, y_0 + 1 \cdot \Delta\lambda), (x_0 + 2 \cdot \Delta\lambda, y_0 + 2 \cdot \Delta\lambda), \dots, (x_0 + v \cdot \Delta\lambda, y_0 + v \cdot \Delta\lambda), v \in N\}$$

σταματάμε. Το ελάχιστο βρίσκεται δυναμικά, δηλαδή όσο η τιμή της f φθίνει, συνεχίζω να αυξάνω το v . Μόλις ισχύσει η σχέση $f(x_0 + k \cdot \Delta\lambda, y_0 + k \cdot \Delta\lambda) = f(x_0 + (k+1) \cdot \Delta\lambda, y_0 + (k+1) \cdot \Delta\lambda)$ για κάποιο δείκτη $k \in N$ σταματάμε και θέτουμε

$$x_1 = x_0 + k \cdot \Delta\lambda \text{ και } y_1 = y_0 + k \cdot \Delta\lambda$$

Το σημείο (x_1, y_1) είναι μια δεύτερη προσέγγιση της επιθυμητής λύσης.

- 3) Στο (x_1, y_1) εκτελούμε τα βήματα 1 και 2 όπως για το $P_0(x_0, y_0)$ κ.ο.κ.
4) Τελικό βήμα: Έστω ότι είμαι στο σημείο (x_j, y_j) , θα σταματήσουμε την περαιτέρω διαδικασία όταν $\lfloor f(x_j, y_j) \rfloor$ γίνει μικρότερο ή ίσο μιας τιμής πολύ κοντά στο μηδέν, η οποία επιλέγεται ανάλογα με την εφαρμογή, ή όταν το $f(x_j, y_j)$ δεν διαφέρει σημαντικά από το $f(x_{j-1}, y_{j-1})$ ή όταν το (x_j, y_j) δεν διαφέρει σημαντικά από το (x_{j-1}, y_{j-1}) . Στην τελευταία περίπτωση ο αλγόριθμος «βάλτωσε» χωρίς κατ'

ανάγκη να συγκλίνει στο ελάχιστο. Σημειώνουμε ότι η ελαχιστοποίηση κατά μήκος ενός άξονα μπορεί να γίνει με πολλές διαφορετικές τεχνικές, όπως π.χ. την πολύ διαδεδομένη τεχνική κατά την οποία η μονοδιάστατη πλέον συνάρτηση $f(\lambda)$, προσεγγίζεται με ένα πολυώνυμο ως προς λ τρίτου βαθμού. Η μέθοδος ελαχιστοποίησης που επιλέξαμε είναι εξαντλητική και επομένως αρκετά χρονοβόρα, αλλά δίνει ασφαλέστατα αποτελέσματα στις συγκεκριμένες εφαρμογές. ⁽²⁾

Μειονέκτημα της μεθόδου Steepest Descent: ο δρόμος προς την λύση μπορεί να κάνει ζικ-ζακ, όπως εξηγούμε κατωτέρω και να καθυστερήσει πολύ. Πράγματι, με την μέθοδο Steepest Descent μπορεί να επιτευχθεί επιτυχής ελαχιστοποίηση κατά μήκος των συντεταγμένων των αξόνων των ισοϋψών σε μια μακρινή, στενή «κοιλιάδα» (η κοιλιάδα σχηματίζεται από τις ισοϋψείς), αλλά, αν το σχήμα της κοιλιάδας δεν είναι ευνοϊκό, η μέθοδος είναι εξαιρετικά αναποτελεσματική, εφόσον ακολουθεί πολλά μικρά βήματα για να επιτύχει την τιμή ελαχίστου. Με άλλα λόγια, η μέθοδος εκτελεί πολλά μικρά βήματα κατεβαίνοντας την μακρινή στενή κοιλιάδα, ακόμη και αν η κοιλιάδα είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού κατά την οποία περίπτωση ο δρόμος σύγκλισης διασχίζει πολλές φορές τους κύριους άξονες. Συνεπώς, με την μέθοδο των steepest Descent, πρέπει κανείς να κάνει μια αλλαγή γωνίας 90 μοιρών η οποία, μπορεί να ακυρώσει μερικές από τις προηγούμενες ελαχιστοποιήσεις. Εμείς στην πραγματικότητα θέλουμε τον τρόπο που μας οδηγεί όχι στο να κατεβαίνουμε κατά μήκος του νέου ανάδελτα αλλά, μάλλον, κατά μια διεύθυνση η οποία δεν καταστρατηγεί-ακυρώνει τις ελαχιστοποιήσεις οι οποίες προηγήθηκαν στα προηγούμενα βήματα. . Για να αποφύγουμε τις παλινδρομήσεις χρησιμοποιούμε την μέθοδο conjugate gradient (συζυγών κλίσεων) των Fletcher-Reeves ή αυτή των Polak-Ribiere. Οι μέθοδοι οι οποίες ακολουθούν αυτήν την διαδικασία ονομάζονται μέθοδοι των συζυγών κλίσεων (conjugate gradient) και περιγράφονται στην αμέσως επόμενη παράγραφο. ⁽²⁾

8.5 Η μέθοδος συζυγών κλίσεων των Fletcher-Reeves

Οι μέθοδοι Conjugate Gradient παρέχουν ένα αρκετά γενικό τρόπο ελαχιστοποίησης συναρτήσεων. Η εφαρμογή τους ουσιαστικά βασίζεται στην δυνατότητά τους να επιλύουν πολύ αποδοτικά γραμμικά συστήματα $N \times N$ δηλαδή σύνολα εξισώσεων της μορφής $\hat{A} \cdot \hat{x} = \hat{b}$ όπου \hat{x} είναι ο πίνακας των αγνώστων, \hat{A} ο πίνακας συντελεστών των αγνώστων, και \hat{b} ο πίνακας των σταθερών όρων.⁽²⁾

Το ελκυστικό αυτών των μεθόδων για αραιά συστήματα με μεγάλο αριθμό αγνώστων, είναι ότι η αναφορά στον πίνακα \hat{A} γίνεται μόνο μέσω του πολλαπλασιασμού του με ένα διάνυσμα ή του πολλαπλασιασμού του μετασχηματισμού του με ένα διάνυσμα. Αυτές οι πράξεις εκτελούνται πολύ εύκολα για ένα κατάλληλα αποθηκευμένο αραιό πίνακα. Γνωστού όντως του πίνακα \hat{A} , ο αλγόριθμος απαιτεί να υπολογισθούν οι συναρτήσεις, οι οποίες πληρούν τις συνθήκες των ανωτέρω πολλαπλασιασμών του αραιού πίνακα, όσο το δυνατόν αποτελεσματικότερα. Απλοί αλγόριθμοι συζυγών ανάδελτα (conjugate gradient), επιλύουν την ειδική περίπτωση στην οποία επισυμβαίνει ο πίνακας \hat{A} να είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Οι αλγόριθμοι αυτοί βασίζονται στην ιδέα της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης

$$f(\hat{x}) = \frac{1}{2} \hat{x}^T \cdot \hat{A} \cdot \hat{x} - b \cdot \hat{x} .^{(2)}$$

Η συνάρτηση αυτή ελαχιστοποιείται όταν μηδενίζεται το ανάδελτα αυτής $\nabla f = \hat{A} \cdot \hat{x} - \hat{b}$, το οποίο ισοδυναμεί με την λύση του συστήματος $\hat{A} \cdot \hat{x} = \hat{b}$. Η ελαχιστοποίηση εκτελείται σε διαδοχικά βήματα, δημιουργώντας μια σειρά από ζητούμενες διευθύνσεις p_k , κατά τις οποίες επιτυγχάνεται τοπικά βέλτιστη ελαχιστοποίηση της συνάρτησης. Σε κάθε βήμα υπολογίζεται μια ποσότητα a_k , η οποία ελαχιστοποιεί την $f(x_k + a_k \cdot p_k)$, όπου x_k είναι το υπ' αριθμόν k σημείο ελαχίστου. Στην συνέχεια το x_{k+1} τίθεται ίσο με το νέο σημείο $x_k + a_k \cdot p_k$. Τα p_k και x_k επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε το x_{k+1} να μην αντιτίθεται- να μην ακυρώνει τις προηγούμενες ελαχιστοποιήσεις της f στον χώρο των διανυσμάτων με διευθύνσεις τις ήδη ληφθείσες $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Μετά από L επαναλήψεις

επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση στον διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^n , δηλαδή η λύση του συστήματος $\widehat{A} \cdot \widehat{x} = \widehat{b}$.⁽²⁾

Ελαχιστοποίηση τυχούσης συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με A υποσύνολο του \mathbb{R}^n , η μεταβλητών, η οποία είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο A .

1) Εκκινούμε από τυχόν σημείο P_0 του A . Στο P_0 υπολογίζουμε το $-\vec{\nabla} f|_{P_0}$ και θέτουμε $\vec{g}_0 = \vec{h}_0 = -\vec{\nabla} f|_{P_0}$.

2) Κάνουμε ελαχιστοποίηση κατά μήκος του \vec{h}_0 , όπως και στην μέθοδο των απόκρημων καταβάσεων και φτάνω στο σημείο P_1 .

3) Στο P_1 υπολογίζουμε το $-\vec{\nabla} f|_{P_1}$ και θέτουμε $\vec{g}_1 = -\vec{\nabla} f|_{P_1}$ και $\vec{h}_1 = \vec{g}_1 + \gamma_0 \cdot \vec{h}_0$, όπου $\gamma_0 = \frac{\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1}{\vec{g}_0 \cdot \vec{g}_0}$.

4) Κάνουμε ελαχιστοποίηση κατά μήκος του \vec{h}_1 , όπως και στην μέθοδο των απόκρημων καταβάσεων και φτάνω στο σημείο P_2 .

5) Στο P_2 υπολογίζουμε το $-\vec{\nabla} f|_{P_2}$ και θέτουμε $\vec{g}_2 = -\vec{\nabla} f|_{P_2}$ και $\vec{h}_2 = \vec{g}_2 + \gamma_1 \cdot \vec{h}_1$, όπου $\gamma_1 = \frac{\vec{g}_2 \cdot \vec{g}_2}{\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1}$ κ.ο.κ.

6) Σταματάμε με τον ίδιο τρόπο όπως και στην μέθοδο των απόκρημων καταβάσεων, δηλαδή όταν $\lfloor f(P_j) \rfloor$ γίνει μικρότερο ή ίσο μιας τιμής πολύ κοντά στο μηδέν, η οποία επιλέγεται ανάλογα με την εφαρμογή, ή όταν το $f(P_j)$ δεν διαφέρει σημαντικά από το $f(P_{j-1})$ ή όταν τα σημεία (P_j) και (P_{j-1}) δεν διαφέρουν σημαντικά. Στην τελευταία περίπτωση, όταν η απόσταση μεταξύ των σημείων (P_j) και (P_{j-1}) είναι μικρότερη ή ίση της διακριτικής ικανότητας του υπολογιστή, τότε συνάγεται ότι ο αλγόριθμος «βάλλτωσε» χωρίς κατ' ανάγκη να δώσει λύση. Για να γίνουμε ακόμα πιο συγκεκριμένοι, τα περισσότερα ευρέως διαδεδομένα υπολογιστικά συστήματα εκτελούν πράξεις το πολύ μέχρι 16 δεκαδικά ψηφία (long double), γεγονός που σημαίνει ότι η ελάχιστη ποσοστιαία διαφορά μεταξύ δύο αριθμών που μπορεί να διακρίνει ένα τέτοιο υπολογιστικό σύστημα είναι της τάξεως των 10^{-16} .

Άρα όταν $\frac{|P_j - P_{j-1}|}{P_j} \leq 10^{-16}$, ο αλγόριθμος δεν έχει λόγο να συνεχίσει, αφού όλα τα αποτελέσματά του είναι εκτός των ορίων φερεγγυότητας του υπολογιστικού συστήματος. ⁽²⁾

Μερικές φορές, όταν φτάσουμε σε κάποιο ελάχιστο μέσω του αλγορίθμου των Fletcher-Reeves, συμφέρει να επαναλάβουμε την διαδικασία των συζυγών κλίσεων χρησιμοποιώντας τον τύπο των Polak-Ribiere, κατά τον οποίο οι τιμές των γ_i δίνονται από τον τύπο $\gamma_i = \frac{(\vec{g}_{i+1} - \vec{g}_i) \cdot \vec{g}_{i+1}}{\vec{g}_i \cdot \vec{g}_i}$. Αυτό συμβαίνει, για τον λόγο ότι ο αλγόριθμος Polak-Ribiere βλέπει μερικές φορές καλύτερα τις μικρές διαφορές. ⁽²⁾

8.6 Η μέθοδος των Broyden-Fletcher-Goldfard-Shanno (BFGS)

Η BFGS μέθοδος ελαχιστοποίησης θεωρείται η πιο ισχυρή και αποδοτική από τις ως τώρα γνωστές quasi-Newton μεθόδους. ⁽¹⁹⁾ Ανήκει στις μεθόδους quasi-Newton, οι οποίες, ουσιαστικά, είναι μία βελτίωση της μεθόδου Newton.

Αναφορά στη μέθοδο Newton

Η μέθοδος Newton στοχεύει στο να δημιουργήσει μία συγκλίνουσα ακολουθία x_n ξεκινώντας από ένα αρχικό τυχαίο σημείο, έστω x_0 . ⁽²⁰⁾

Η μέθοδος αυτή ελαχιστοποιεί τη γενίκευση του αναπτύγματος Taylor δευτέρου βαθμού μίας συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$: ^{(19), (20), (21)}

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x + \frac{1}{2} f''(x) \Delta x^2$$

σε n διαστάσεις, για μία συνάρτηση πολλών μεταβλητών: ^{(19), (20), (21)}

$$f(\mathbf{x}_k + \mathbf{h}_k) \approx f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{h}_k^T \nabla f(\mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} \mathbf{h}_k^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_k) \mathbf{h}_k$$

Για το σκοπό αυτό, αντικαθιστούμε την παράγωγο με το ανάδελτα $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ και το συντελεστή της δεύτερης παραγώγου του αναπτύγματος Taylor με τον αντίστροφο πίνακα Hessian $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_k)$. ^{(19), (20), (21)}

Για την ανάλυση των βημάτων της μεθόδου, χρησιμοποιούμε τη βοηθητική συνάρτηση $F(\mathbf{h}_k) \equiv f(\mathbf{x}_k + \mathbf{h}_k)$. Υποθέτοντας ότι ο πίνακας Hessian είναι θετικά ορισμένος, η βοηθητική συνάρτηση F παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν: ^{(19), (23)}

$$\nabla F(\mathbf{h}_k) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση δευτέρου βαθμού του ∇F , η οποία είναι: ⁽¹⁹⁾

$$\nabla F(\mathbf{h}_k) \approx \nabla f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_k)\mathbf{h}_k, \quad (8.6.1)$$

Παίρνουμε:

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_k)\mathbf{h}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k).$$

Από την τελευταία σχέση παίρνουμε το βήμα \mathbf{h}_k της επαναληπτικής διαδικασίας:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{h}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_k)^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k), \quad (8.6.2)$$

υποθέτοντας ότι ο πίνακας $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_k)$ είναι αντιστρέψιμος, κάτι που προκύπτει από την αρχική μας υπόθεση ότι είναι θετικά ορισμένος. ^{(19), (23)}

Αν το \mathbf{h}_k χρησιμοποιηθεί σαν κατεύθυνση αναζήτησης και το βήμα υπολογίζεται από μία γραμμική μέθοδο αναζήτησης τότε, η επαναληπτική διαδικασία προσδιορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_k)^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k). \quad (19) \quad (8.6.3)$$

Το τρίγωνο Cholesky

Για κάθε συμμετρικό θετικά ορισμένο πίνακα \mathbf{A} , υπάρχει πίνακας \mathbf{L} τέτοιος ώστε:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T,$$

όπου, ο πίνακας \mathbf{L} είναι ένας αντιστρέψιμος κάτω τριγωνικός πίνακας με θετικά στοιχεία διαγωνίου.

Αν θέλουμε να λύσουμε ένα γραμμικό συμμετρικό θετικά ορισμένο σύστημα της μορφής $Ax=b$ και το διασπάσουμε στα δύο παρακάτω τριγωνικά συστήματα της μορφής:

$$Ly = b \text{ και } L^T x = y$$

τότε, η εύρεση της λύσης είναι αριθμητικά πιο σταθερή και αποτελεσματική από την γκαουσιανή μέθοδο επίλυσης. ^{(19), (22), (23)}

Οι μέθοδοι Quasi-Newton

Οι μέθοδοι quasi-Newton αποτελούν ένα σύνολο μεθόδων ελαχιστοποίησης που όλες βασίζονται στη σχέση (8.6.3). Αντί όμως να υπολογίζουν με ακρίβεια τον πίνακα Hessian, διατηρούν μία προσέγγιση αυτού ή του αντίστροφού του την οποία συμβολίζουμε με B_k και S_k αντίστοιχα. Ακόμη, ορίζουμε τα p_k, q_k : ^{(19), (23)}

$$p_k \equiv x_{k+1} - x_k \equiv \alpha_k h_k$$

$$q_k \equiv \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k).$$

όπου, $h_k = -H_f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)$ το βήμα της μεθόδου Newton. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (8.6.1) και αντικαθιστώντας τα p_k, q_k έχουμε: ^{(19), (23)}

$$\nabla f(x_{k+1} + p_k) - \nabla f(x_k) \approx H_f(x_k) p_k$$

Από τη σχέση των Sherman-Morrison-Woodbury έχουμε ότι για έναν $n \times n$ πίνακα A τάξης- k της μορφής: ^{(19), (23)}

$$\bar{A} = A + UV^T,$$

όπου $U, V \in \mathcal{R}^{n \times k}$, $k \leq n$, ο αντίστροφός του δίνεται από την παρακάτω σχέση: ^{(19), (23)}

$$\bar{A}^{-1} = A^{-1} - A^{-1} U (1 + V^T A^{-1} U)^{-1} V^T A^{-1}.$$

Τα παραπάνω για τον πίνακα A ισχύουν και για τον πίνακα Hessian καθώς και, για τον ανάστροφό του. Επίσης, για την προσέγγιση των δύο αυτών πινάκων προσθέτουμε πίνακες διόρθωσης τάξης-1 ή τάξης-2, όπως φαίνεται παρακάτω: ^{(19), (23)}

$$B_{k+1} = B_k + C_k$$

$$\mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{S}_k + \mathbf{C}_k$$

Οι πίνακες \mathbf{B}_{k+1} και \mathbf{S}_{k+1} ικανοποιούν τις συνθήκες quasi-Newton:

$$\mathbf{B}_{k+1} \mathbf{p}_k = \mathbf{q}_k$$

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{q}_k .$$

Έτσι, προκύπτουν οι επαναληπτικές σχέσεις των quasi-Newton μεθόδων:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{B}_k^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k) ,$$

με χρήση του πίνακα Hessian ή ισοδύναμα, με χρήση του αντίστροφου πίνακα Hessian:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{S}_k \nabla f(\mathbf{x}_k).$$

Στην πράξη, οι τελευταίες παραπάνω δύο σχέσεις υπολογίζονται λύνοντας την $\mathbf{B}_k \mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$, όπου το \mathbf{d}_k προκύπτει από την τριγωνοποίηση Cholesky και μετά εφαρμόζοντας την εξίσωση $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$. ^{(19), (23)}

Η μέθοδος BFGS

Η BFGS διαφοροποιείται σε σχέση με τη βασική δομή των quasi-Newton μόνο στον υπολογισμό του πίνακα Hessian και του αντιστρόφου του. Οι σχέσεις που δίνουν τους δύο πίνακες είναι οι παρακάτω: ^{(19), (23)}

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{k+1} &= \mathbf{B}_k + \frac{\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{p}_k} - \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^T \mathbf{B}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{p}_k} \\ \mathbf{S}_{k+1} &= \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{p}_k \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{p}_k} \right) \mathbf{S}_k \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{q}_k \mathbf{p}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{p}_k} \right) + \frac{\mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{p}_k} . \end{aligned}$$

8.7 Σύγκριση των μεθόδων ελαχιστοποίησης

Πολυπλοκότητα των ανωτέρω μεθόδων

Οι ανωτέρω μέθοδοι διακρίνονται σε μεθόδους που έχουν πολυπλοκότητα της τάξης του n και μεθόδους πολυπλοκότητας n^2 . Οι υπολογισμοί που χρειάζεται κάθε μέθοδος στην υλοποίησή της παίζουν επίσης σημαντικό ρόλο στον χρόνο που χρειάζεται η κάθε μία για να τρέξει. Η πολυπλοκότητα είναι ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό των μεθόδων καθώς, αν μία μέθοδος είναι πολύ αργή, σε πολλά προβλήματα, μπορεί να καθίσταται αδύνατο να οδηγήσει σε λύση. ^{(2), (19)}

Η μέθοδος Nelder Mead είναι πολυπλοκότητας n^2 , της οποίας, ο αλγόριθμος λύσης χαρακτηρίζεται ως αργός, αλλά εξαιρετικά εύρωστος. Η μέθοδος Powell έχει πολυπλοκότητα n^2 , η οποία απαιτεί μίας διάστασης ελαχιστοποίηση ενός υπο-αλγορίθμου όπως η μέθοδος του Brent. Η μέθοδος Powell είναι σχεδόν βέβαιο ότι είναι ταχύτερη, αλλά η μέθοδος των Nelder Mead μπορεί συχνά να είναι η καλύτερη.

Για τη μέθοδο steepest Descent πρέπει να πούμε ότι ο αλγόριθμος σύγκλισης καθυστερεί σημαντικά. Ο αλγόριθμος των Fletcher-Reeves είναι πιθανόν καλύτερος του αλγορίθμου των Polak-Ribiere, έχει πολυπλοκότητα n^2 και απαιτεί υπολογισμό πρώτων παραγώγων και μιας διάστασης ελαχιστοποίηση ενός υπο-αλγορίθμου. ^{(2), (19)}

Οι μέθοδοι quasi-Newton των Davidon-Fletcher-Powell (DFP) ή των Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) έχουν πολυπλοκότητα n και απαιτούν υπολογισμό πρώτων παραγώγων και μιας διάστασης ελαχιστοποίηση ενός υπο-αλγορίθμου. ^{(2), (19)}

Συμπεράσματα

Η μέθοδος Nelder-Mead αποτυγχάνει σε προβλήματα με πολλές διαστάσεις. Αν επανεκκινήσουμε τη διαδικασία μπορεί να αποφευχθεί ένα ενδεχόμενο stall. Οι ως τώρα αλγόριθμοι που εξαλείφουν τα μειονεκτήματα της μεθόδου Nelder Mead έχουν απαγορευτική υπολογιστική πολυπλοκότητα. Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε ότι γενικά, όταν γνωρίζουμε τις πρώτης τάξης παραγώγους δε χρησιμοποιούμε μεθόδους χωρίς παραγωγή γιατί είναι ανακριβέστερες και περισσότερο αργές στην σύγκλιση. ^{(2), (19)}

Οι μέθοδοι συζυγών κλίσεων είναι καλές μόνο στην επίλυση γραμμικών συστημάτων. Αν το σύστημα δεν είναι γραμμικό, απαιτούν πολλούς περιορισμούς στη θεώρηση του προβλήματος.^{(2), (19)}

Οι μέθοδοι quasi – Newton παρουσιάζουν την ταχύτερη σύγκλιση αλλά σε πολλά προβλήματα αποτυγχάνουν χωρίς λόγο.^{(2), (19)}

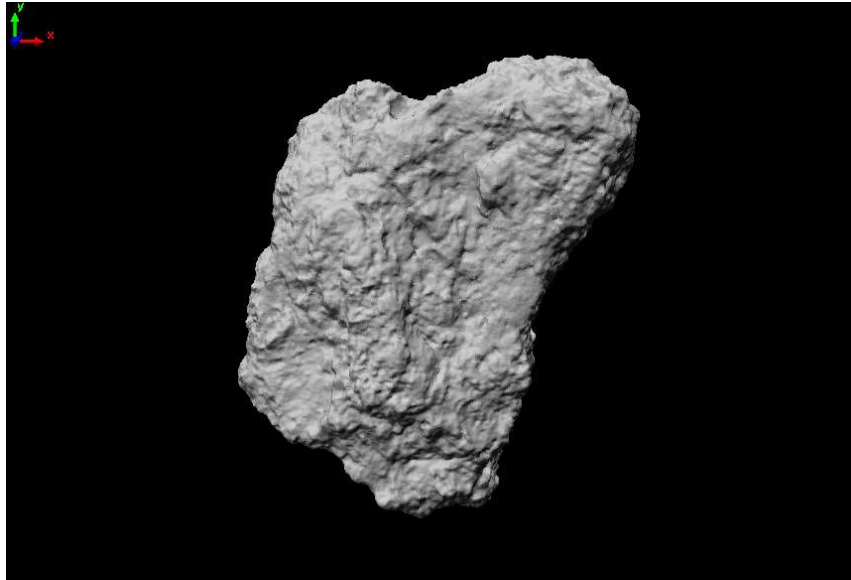
Τέλος, η BFGS μέθοδος είναι η καλύτερη και πιο αξιόπιστη σε σύγκριση με όσες αναλύσαμε ως τώρα. Λύνει σχεδόν όλα τα προβλήματα και σε ικανοποιητικό χρόνο.^{(2), (19)}

III. Περιγραφή της μεθόδου ψηφιακής επεξεργασίας των θραυσμάτων των τοιχογραφιών

9. Παρουσίαση της μεθόδου ψηφιακής επεξεργασίας των θραυσμάτων των τοιχογραφιών

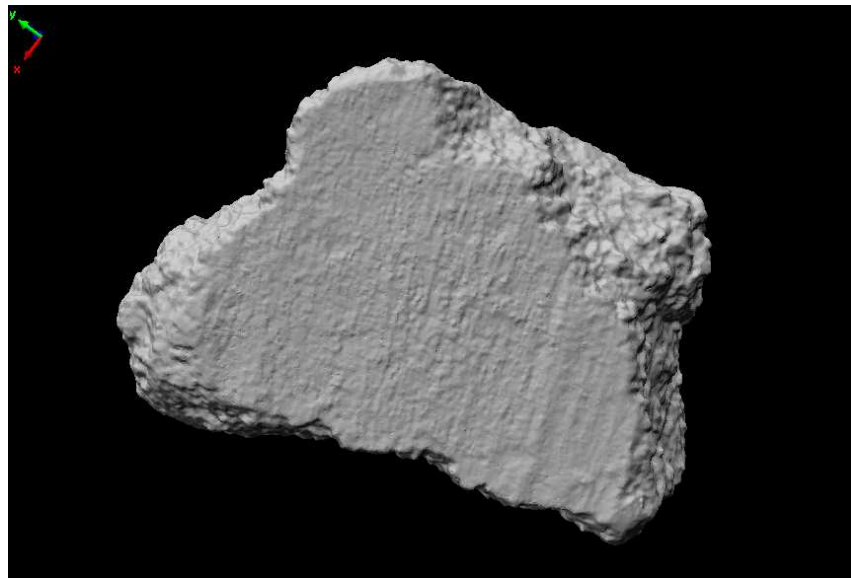
Βήμα 1^ο

Με χρήση κατάλληλου λογισμικού επεξεργασίας τρισδιάστατων εικόνων «ανοίγουμε» το αρχείο stl.



Εικόνα 178: Το θραυσμένο αντικείμενο στη μορφή προς επεξεργασία.

Προφανώς, η πλευρά που βλέπουμε στην παραπάνω εικόνα δεν είναι η άνω επιφάνεια του θραύσματος. Περιστρέφουμε το αντικείμενο μέχρι να βρούμε την άνω επιφάνεια, η οποία είναι η πιο λεία και «επίπεδη» από τις άλλες.

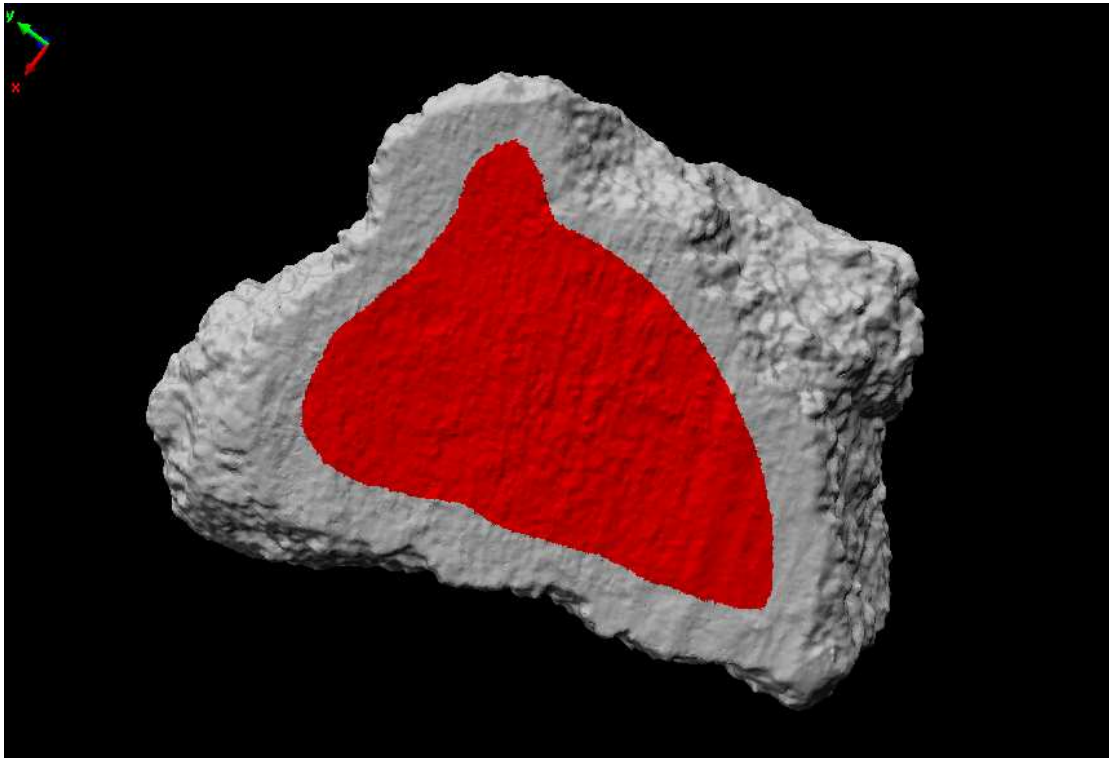


Εικόνα 189: Η άνω επιφάνεια του κονιάματος.

Στην παραπάνω εικόνα φαίνεται η άνω επιφάνεια του θραύσματος και είναι αυτή που μας ενδιαφέρει. Όπως φαίνεται και από την εικόνα, αυτή η επιφάνεια δεν είναι εντελώς λεία και επίπεδη όπως είναι ένα μαθηματικό επίπεδο. Παρόλες όμως τις ατέλειές της, μπορεί να προσομοιωθεί από ένα βέλτιστο επίπεδο με πολύ μικρά σφάλματα.

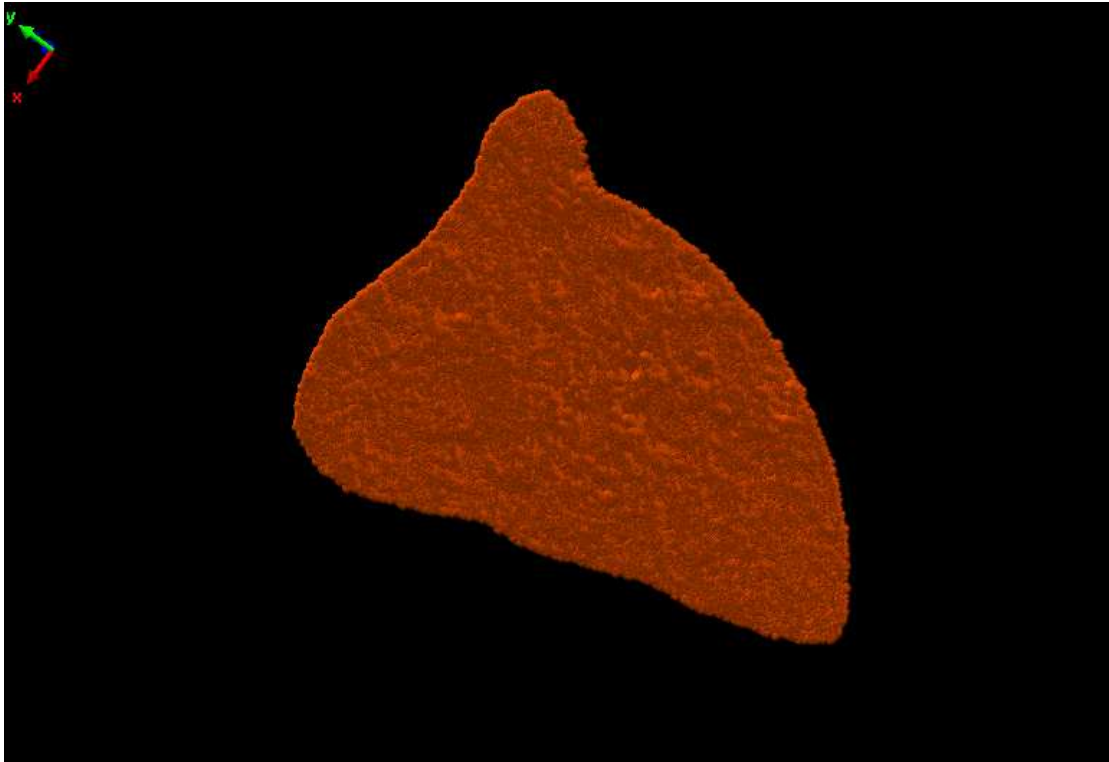
Πριν την επεξεργασία που θα γίνει σε αυτό το θραύσμα, αποθηκεύουμε σε έναν φάκελο την εικόνα ως αρχείο .stla που θα χρησιμοποιηθεί σε επόμενο βήμα.

Ο σκοπός αυτού του πρώτου βήματος είναι να εξάγουμε όλα τα κάθετα διανύσματα στην άνω επιφάνεια του θραύσματος. Οι ατέλειες που έχει αυτή, μπορεί να οδηγήσουν σε σφάλματα γι' αυτό το λόγο δε χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε όλη την άνω επιφάνεια αλλά το «καλύτερο» μέρος αυτής. Δηλαδή, όσο από αυτήν μπορεί να δώσει αρκετή πληροφορία ώστε να προσομοιωθεί από ένα επίπεδο.



Εικόνα 20: Επιλεγμένο μέρος της επιφάνειας που θα χρησιμοποιηθεί για το βέλτιστο επίπεδο.

Οι συντεταγμένες στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y,z) των κάθετων διανυσμάτων εξάγονται και αποθηκεύονται σε ένα αρχείο κειμένου (.txt).



Εικόνα 21: Κάθετα διανύσματα στην άνω επιφάνεια.

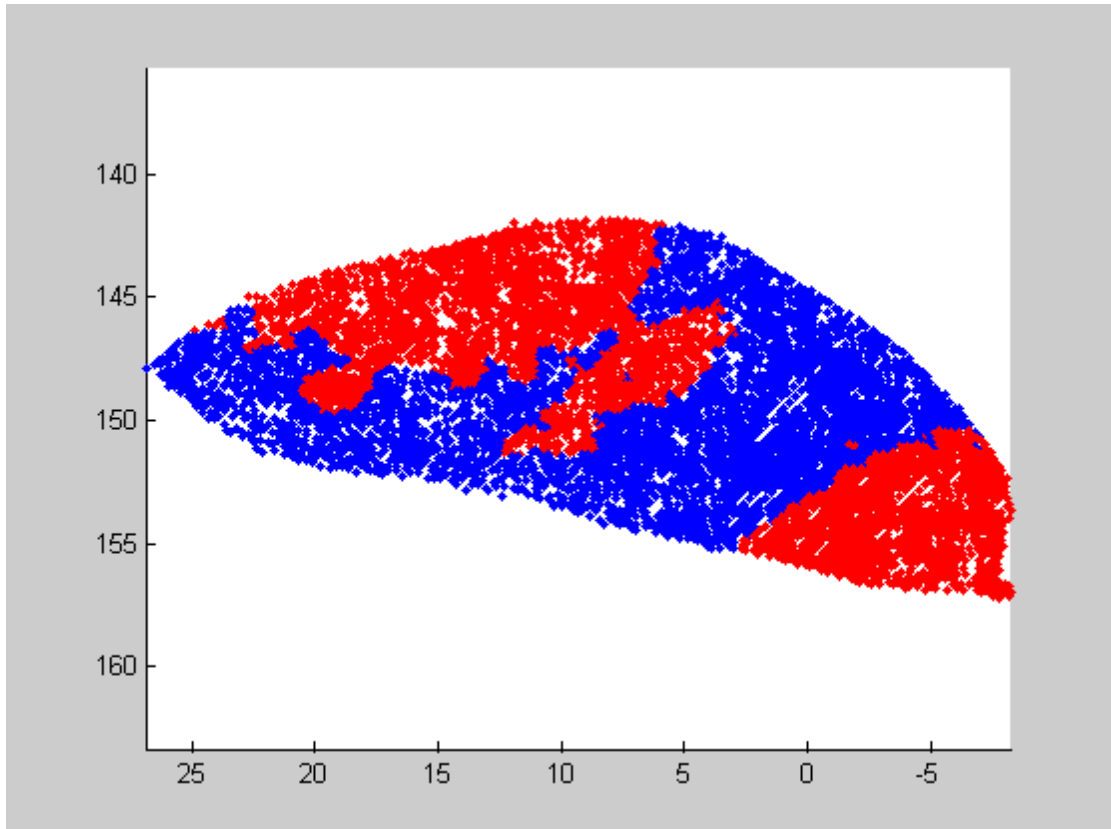
Βήμα 2^ο

Στο βήμα αυτό, χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα του πρώτου βήματος για να βρούμε το βέλτιστο επίπεδο που προσομοιώνει την άνω επιφάνεια του θραύσματος.

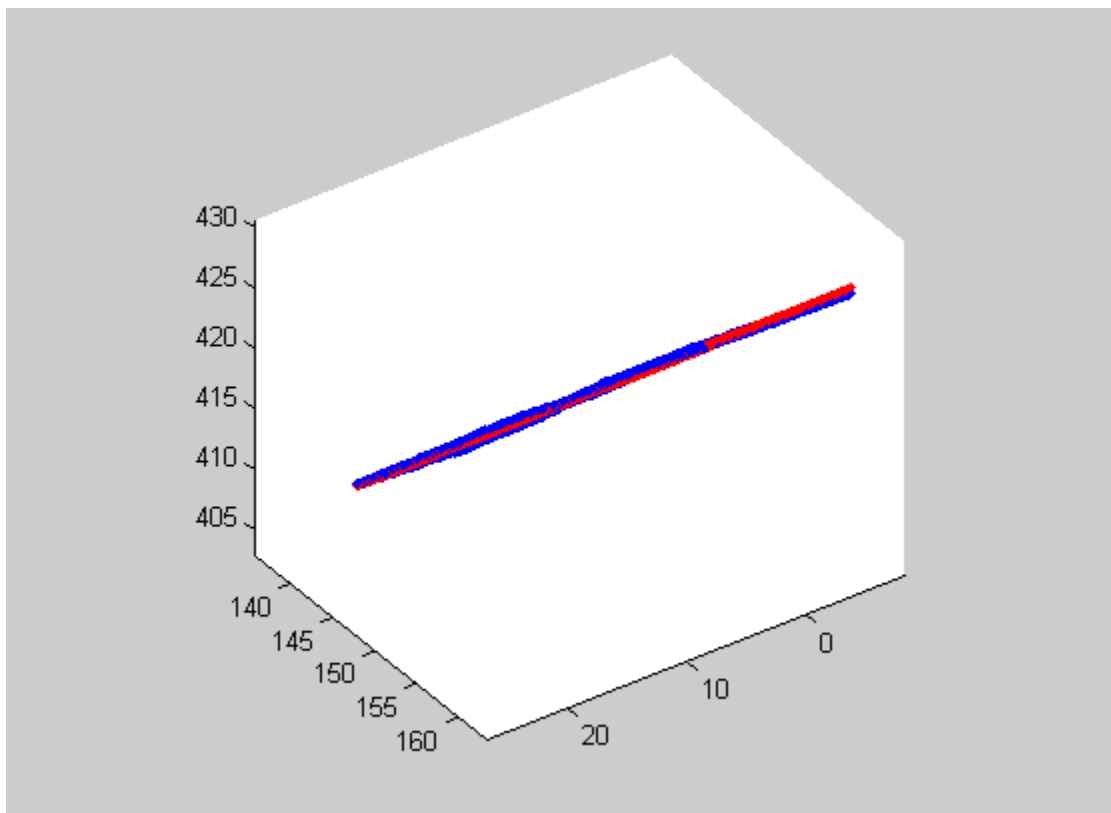
Έχοντας το αρχείο με τα κάθετα διανύσματα σε κάθε σημείο της εξεταζόμενης επιφάνειας, τρέχουμε τον κώδικα που βρίσκει το βέλτιστο επίπεδο. Το αποτέλεσμα είναι ένα επίπεδο σε παράθυρο για να οπτικοποιήσουμε το αποτέλεσμα και να ελέγξουμε κατά πόσο είναι σωστά και ένα αρχείο κειμένου που γράφει το κάθετο διάνυσμα στο βέλτιστο επίπεδο, καθώς και το σφάλμα με το οποίο σχεδιάζεται το επίπεδο.

Για παράδειγμα το παρακάτω διάνυσμα στο χώρο R^3 προσδιορίζει το βέλτιστο επίπεδο που αντιστοιχεί σε ένα από τα κονιάματα της παρούσας εργασίας:

$$\begin{pmatrix} 3.7550589979751553e-002 \\ 9.1461782135080480e-002 \\ -4.0061103521164637e+002 \end{pmatrix}$$



Εικόνα 192: Το βέλτιστο επίπεδο για ένα από τα θραύσματα που επεξεργάστηκαν.



Εικόνα 23: Το ίδιο επίπεδο με αυτό της προηγούμενης εικόνας από άλλη οπτική γωνία.

Βήμα 3^ο

Σε αυτό το βήμα τρέχουμε ένα πρόγραμμα γραμμένο σε γλώσσα C, το οποίο για κάθε θραύσμα με δεδομένο το βέλτιστο επίπεδο της άνω επιφάνειας από τα προηγούμενα βήματα υπολογίζει τις τομές. Δηλαδή, επίπεδα παράλληλα στο βέλτιστο, καθ' όλο το μήκος του κάθετου στο βέλτιστο επίπεδο άξονα.

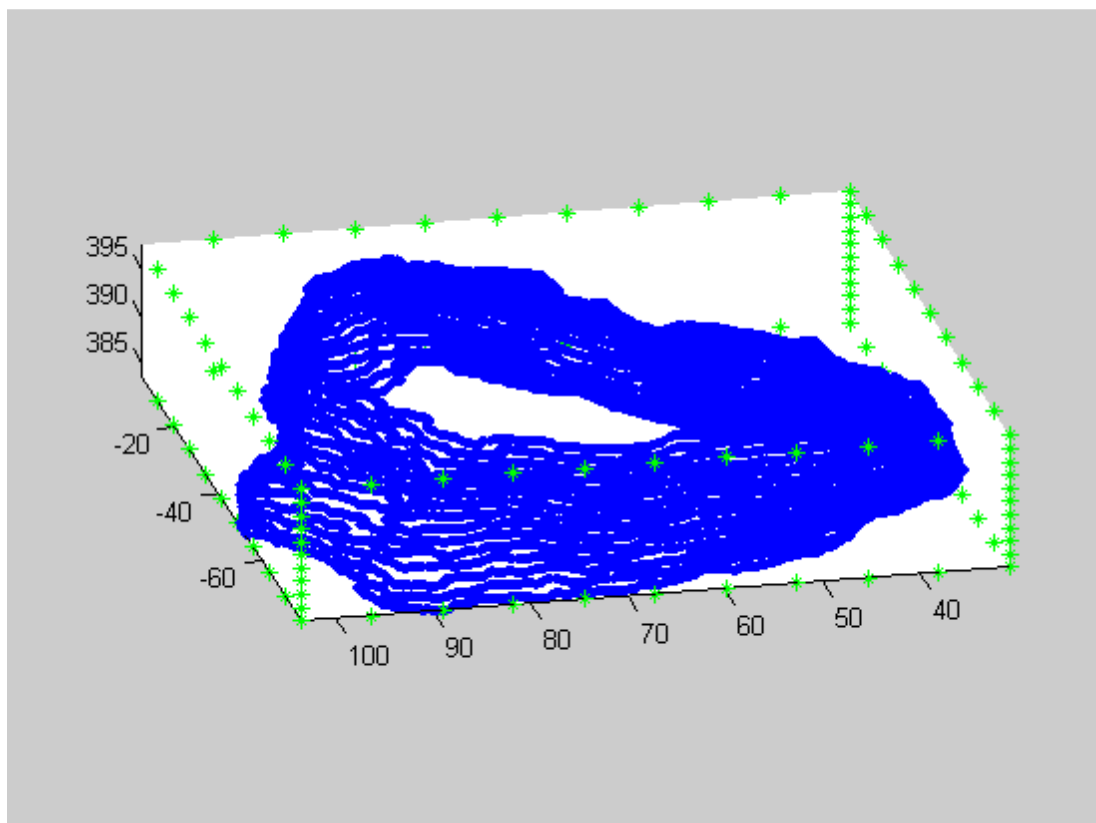
Τα επίπεδα καθορίζονται από το κάθετο διάνυσμα σε αυτά και η έξοδος του κώδικα είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων που περιγράφουν τα σημεία τομής σε αρχείο κειμένου.

Ο κώδικας αυτός βρίσκει τα επίπεδα των τομών με την ίδια λογική με την οποία βρίσκουμε το βέλτιστο επίπεδο της άνω επιφάνειας.

Βήμα 4^ο

Καθώς ο σκοπός είναι τα θραύσματα να μπορέσουν να συνενωθούν αργότερα, πρέπει οι άνω επιφάνειες όλων να είναι στο ίδιο επίπεδο. Σε αυτό το βήμα λοιπόν, η διαδικασία απαιτεί η άνω επιφάνεια να γίνει συνεπίπεδη με το xy-επίπεδο. Αυτό επιτυγχάνεται κάνοντας το κάθετο διάνυσμα συγγραμικό με τον z- άξονα.

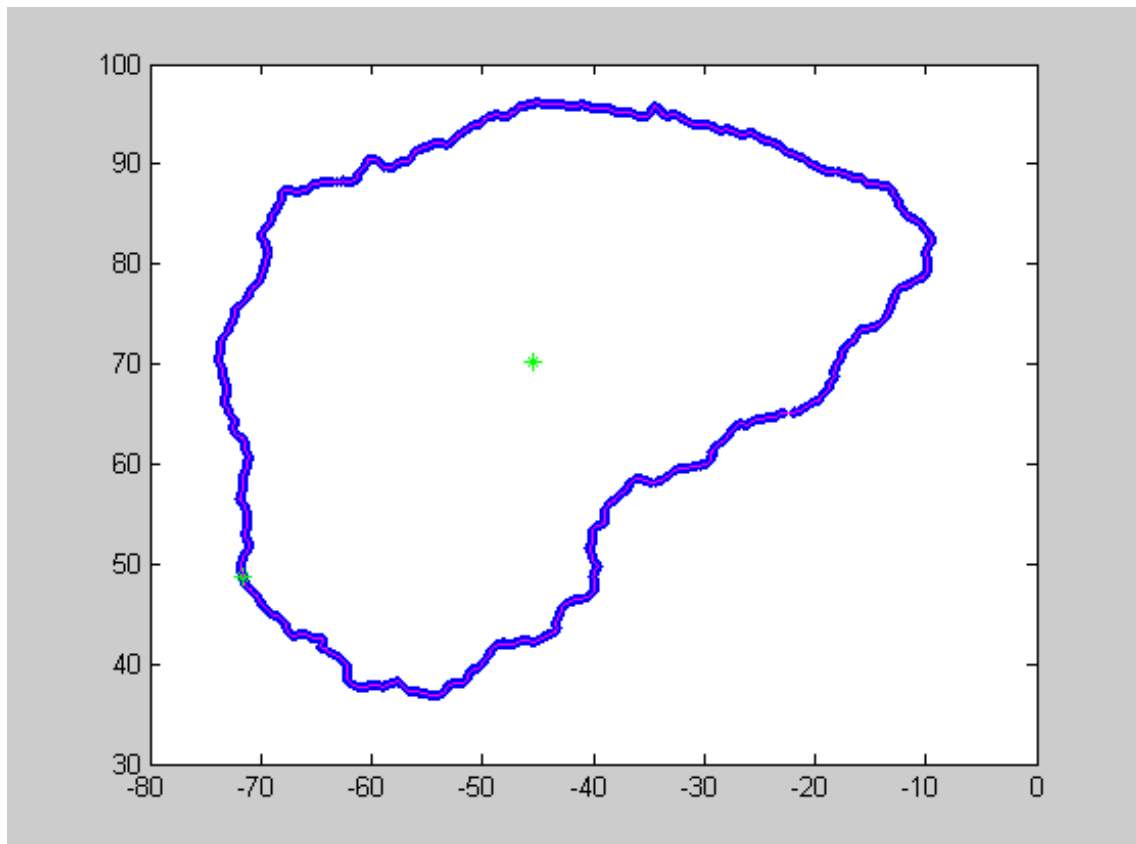
Όπως είναι λογικό, οι υπόλοιπες τομές θα είναι επίπεδα παράλληλα προς το xy-επίπεδο.



Εικόνα 204: Στραμμένο θραύσμα.

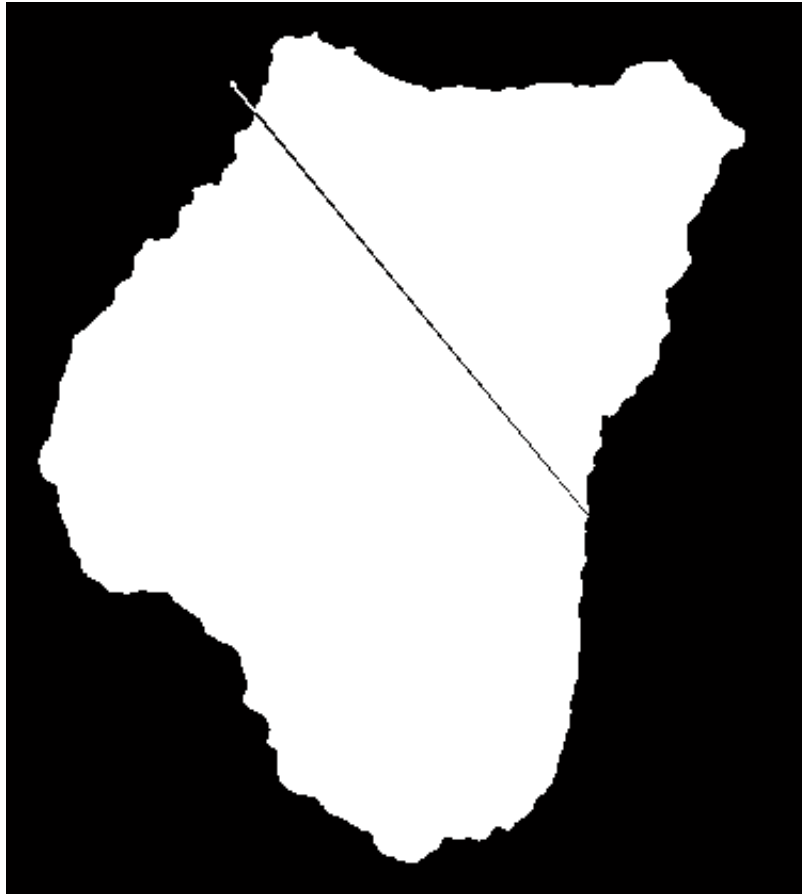
Βήμα 5^ο

Ο κώδικας που τρέχουμε σε αυτό το βήμα βρίσκει το περίγραμμα του θραύσματος που αντιστοιχεί στην κάθε τομή και εμείς ελέγχουμε εάν αυτό είναι συμπαγές.



Εικόνα 215: Σχηματίζεται το περίγραμμα του θραύσματος ανά τομή.

Στην παραπάνω εικόνα φαίνεται η στραμμένη τομή του βήματος 4 από την οποία υπολογίζεται το ακριβές περίγραμμα. Επειδή το θραύσμα περιέχει ατέλειες και μπορεί σε κάθε τομή να υπάρχουν κενά που να εμποδίζουν το σχηματισμό σαφούς περιγράμματος πρέπει να υπάρχει έλεγχος για το αν το περίγραμμα είναι ενιαίο.



Εικόνα 226: Το περίγραμμα είναι ασαφές και συνεπώς θα υπάρξει σφάλμα στο σχεδιασμό του.



Εικόνα 237: Σαφές περίγραμμα.

10. Αναλυτική περιγραφή του κώδικα

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε ένα γενικό περίγραμμα των κωδίκων που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εκπόνηση της διπλωματικής αυτής.

10.1 Περιγραφή του κώδικα που βρίσκει το βέλτιστο επίπεδο στην άνω επιφάνεια του κονιάματος

Ο κώδικας αυτός βρίσκει το επίπεδο που προσομοιώνει κατά βέλτιστο τρόπο την άνω επιφάνεια του κονιάματος. Δηλαδή, βρίσκει το επίπεδο που θα ήταν η άνω επιφάνεια αν ήταν τελείως λεία και επίπεδη.

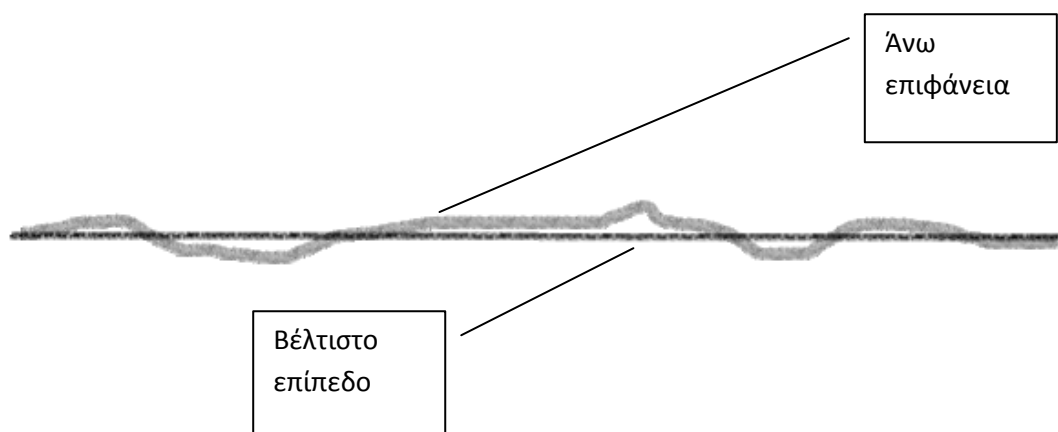
Θεωρούμε μία βοηθητική δομή αποτελούμενη από δύο παράλληλα επίπεδα ϵ_1, ϵ_2 σε πολύ μικρή απόσταση μεταξύ τους, ως και από το παράλληλο προς αυτά μέσο επίπεδο ϵ_μ . Ας φανταστούμε ότι η δομή αυτή σαρώνει το χώρο-περνάει από όλες τις θέσεις του χώρου. Στη θέση που περιορίζει βέλτιστα το άνω επίπεδο του κονιάματος αναμένουμε ότι θα ικανοποιούνται οι εξής τρεις συνθήκες:

1. Ο αριθμός των εγκλωβισμένων σημείων από τα ϵ_1 και ϵ_2 θα είναι μέγιστος σχετικά με όλες τις άλλες θέσεις της δομής στο χώρο.

2. Εάν θεωρήσουμε την προσημασμένη απόσταση όλων των σημείων της άνω πλευράς του κονιάματος από το μεσοεπίπεδο της δομής ϵ_μ . Το πρόσημο διαλέγεται εντελώς αυθαίρετα, συμβατικά:

Πχ. Τα σημεία της άνω τομής του κονιάματος που βρίσκονται ως προς το ϵ_μ απ την ίδια πλευρά με το ϵ_1 λαμβάνουν θετικό πρόσημο αποστάσεως από το ϵ_μ , ενώ αυτά που βρίσκονται από την ίδια πλευρά λαμβάνουν αρνητικό πρόσημο.

Τότε, στη θέση βέλτιστης τοποθέτησης της δομής, η μέση τιμή των αποστάσεων των προσημασμένων αποστάσεων των σημείων της άνω τομής του κονιάματος από το ϵ_μ , αναμένουμε να είναι πολύ κοντύτερα στο μηδέν από οποιαδήποτε άλλη θέση.



Εικόνα 248: Εύρεση του βέλτιστου επιπέδου της άνω επιφάνειας.

Μία ποιοτική ανάλυση αυτής της συνθήκης:

Λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος, είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι οι προσημασμένες αποστάσεις από το ϵ_μ ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 . Στη θέση βέλτιστης τοποθέτησης του ϵ_μ ως προς τα σημεία της άνω τομής, είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι η πιθανότητα ένα σημείο της τομής να βρίσκεται από την ίδια πλευρά με το ϵ_1 όσον αφορά το ϵ_μ , είναι ίδια με την πιθανότητα να βρίσκεται από την ίδια πλευρά με την ϵ_2 . Αυτό σημαίνει ότι η κατανομή των προσημασμένων αποστάσεων που εξετάζουμε είναι συμμετρική ως προς το μηδέν. Αλλά σε μια κανονική κατανομή αυτό συμβαίνει μόνο όταν $\mu=0$.

Υπολογιστικά, πρέπει μόνο να προσέξω το εύρος της δομής. Δηλαδή, η απόσταση των επιπέδων ϵ_1, ϵ_2 , να είναι ικανοποιητικά μεγάλη για να χωράει όλη την άνω τομή να περιλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος των σημείων της κυματώδους άνω τομής. Ταυτόχρονα όμως, η απόσταση αυτή των ϵ_1, ϵ_2 δεν πρέπει να είναι πολύ μεγάλη διότι τότε, θα περιλαμβάνει και πολλά σημεία εκτός της άνω τομής, γεγονός που θα περιπλέξει την ορθή επιλογή της θέσης της δομής.

3. Στη θέση βέλτιστης προσαρμογής το άθροισμα του τετραγώνου των αποστάσεων θα είναι ελάχιστο.

Στην πράξη, η υλοποίηση αυτή γίνεται ως εξής: έστω τυχόν επίπεδο, εν προκειμένω το ϵ_μ , με εξίσωση $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$. Η απόσταση τυχόντος σημείου (x_0, y_0, z_0) από το ϵ_μ , είναι $|Ax_0+By_0+\Gamma z_0-\Delta|$ δια μία σταθερά.

Στη θέση βέλτιστης προσαρμογής της δομής, τα σημεία της άνω τομής θα έχουν τη μικρότερη δυνατή συνολική απόσταση από το ϵ_μ και μέση τιμή προσημασμένη μηδέν. Άρα θα ισχύει $\min(|Ax_i+By_i+\Gamma z_i-\Delta|)=\text{ελάχιστο}$ (γιατί είναι η μέση τιμή των αποστάσεων όλων από το επίπεδο), όπου (x_i, y_i, z_i) τυχόν σημείο της τομής. Επειδή το απόλυτο δεν είναι παραγωγίσιμο προτιμήσαμε για να βοηθήσουμε την `fminsearch` το ελάχιστο του τετραγώνου των αποστάσεων.

10.2 Περιγραφή του κώδικα που βρίσκει τομές κονιαμάτων

Ο κώδικας της C χρησιμοποιήθηκε σε αυτήν την μέθοδο ώστε το κάθε κονίαμα να τμηθεί σε τομές παράλληλες της άνω επιφάνειας του κονιάματος.

Ως είσοδο δέχεται ένα αρχείο `.stla` και ένα αρχείο `.txt` για κάθε κονίαμα. Τα αρχεία `.stla` περιέχουν σε κωδικοποίηση ASCII τα κάθετα διανύσματα και τα διανύσματα των τριγώνων που συνθέτουν την εξωτερική επιφάνεια των κονιαμάτων. Τα αρχεία `.txt` παρέχουν στον κώδικα τις συντεταγμένες του κάθετου διανύσματος της άνω επιφάνειας του κονιάματος. Ως έξοδο αυτός ο κώδικας δίνει τις τομές του κονιάματος. Οι τομές, είναι επίπεδα παράλληλα στην άνω επιφάνεια και προσδιορίζονται και αυτές, όπως και το επίπεδο της άνω επιφάνειας, από το κάθετο

διάνυσμα στο βέλτιστο επίπεδο. Δηλαδή, η έξοδος του κώδικα είναι αρχεία .txt που το καθένα περιέχει τις συντεταγμένες του κάθετου διανύσματος της κάθε τομής.

Η βασική ιδέα του κώδικα των τομών είναι η εξής:

Πάμε κάτω και πάνω στο ίδιο με το επίπεδο-τομή που ελέγχουμε με χρήση μίας μεταβλητής-δείκτη. Αν είναι στο ίδιο επίπεδο με την τομή παίρνει τιμή μηδέν. Αν είναι κάτω από αυτήν παίρνει αρνητική τιμή και αν είναι πάνω, θετική. Ελέγχουμε πού βρίσκεται το σημείο και αναλόγως τοποθετούμε το διάνυσμα στην τομή. Βρίσκουμε το σημείο τομής μεταξύ ενός επιπέδου και του άξονα που συνδέει δύο σημεία έστω (x_0, y_0, z_0) και (x_i, y_i, z_i) . Παίρνοντας πολλά τέτοια σημεία τομής βρίσκουμε τελικά την επιφάνεια της τομής.

10.3 Περιγραφή του κώδικα στροφής επιπέδου

Γενική ιδέα

Έστω $Ax+By+Cz+D=0$ ένα επίπεδο. Το κάθετο διάνυσμα σε αυτό είναι το ανάδελτα του αριστερού μέρους, δηλαδή το $n=Ai+Bj+Ck$. Το n σχηματίζει με το k μία γωνία, έστω φ . Επιπλέον, τα δύο αυτά διανύσματα ορίζουν ένα επίπεδο. Το κάθετο διάνυσμα σε αυτό το επίπεδο είναι το εξωτερικό γινόμενο των δύο αυτών διανυσμάτων, έστω m . Το κάθετο αυτό διάνυσμα $m = Bi-Aj$ κείται επί του xy επιπέδου.

Βήματα

- 1) Υπολογίζουμε την προσημασμένη γωνία $\varphi = (\widehat{m}, 1)$.
- 2) Στρέφουμε τα πάντα ως προς z κατά αυτή τη γωνία, φ , πολλαπλασιάζοντας με τη μήτρα:

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τώρα το m κείται και στο xz -επίπεδο.

- 3) Υπολογίζουμε τη γωνία $\psi = (\widehat{n}, k)$.
- 4) Στρέφουμε τα πάντα προς τον άξονα των x κατά γωνία ψ , πολλαπλασιάζοντας με τη μήτρα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix}$$

10.4 Περιγραφή του κώδικα που βρίσκει το περίγραμμα του κονιάματος για κάθε τομή

Ο κώδικας αυτός βρίσκει το περίγραμμα κάθε τομής. Η βασική ιδέα του κώδικα είναι η παρακάτω:

Βήματα

- 1) Βρίσκουμε το κέντρο βάρους.
- 2) Βρίσκουμε τη γωνία των επιβατικών ακτίνων από το κέντρο βάρους όλων των σημείων.
- 3) Παίρνουμε μία διαμέριση από $-\pi$ έως π με βήμα $1/1000$ και βρίσκουμε με for-loop και find τις γωνίες που είναι σε κάθε τομέα και παίρνουμε το μέσο όρο των x και y που ανήκουν σε αυτόν τον τομέα. Αυτό είναι το σημείο του περιγράμματος.

IV. Συμπεράσματα

Η παρούσα Διπλωματική εργασία, έδειξε ότι η εξεταζόμενη μεθοδολογία είναι ικανή να επιτύχει το σκοπό της. Είναι δυνατόν να αναπαραστήσουμε τα κονιάματα με τέτοιο τρόπο ώστε αυτά να συνενωθούν αυτόματα.

Η τρισδιάστατη αναπαράσταση σαν πρόβλημα έχει λυθεί σε πολλές εφαρμογές. Το στοιχείο που καθιστά πρωτότυπη τη μεθοδολογία που αναλύσαμε, είναι οι πληροφορίες που παίρνουμε για το τρισδιάστατο αντικείμενο σε ψηφιακή μορφή. Το σημαντικότερο όμως είναι η ακρίβεια αυτών των πληροφοριών, έτσι ώστε, να καθίσταται δυνατή η αυτοματοποιημένη συνένωση των κονιαμάτων.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η μέθοδος είναι αρκετά ισχυρή ώστε, η φθορά των αρχαιολογικών θραυσμάτων να μη στέκεται εμπόδιο στην πλήρη και λεπτομερή ανακατασκευή των τελευταίων.

V. Βιβλιογραφία

1. Παναγιώτης Ρουσσόπουλος: ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΠΡΟΗΓΜΕΝΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟ ΤΟΥ ΤΡΟΠΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ Διδακτορική Διατριβή , Επιβλέπων Καθηγητής : Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς , Αθήνα Οκτώβριος 2010.
2. Αφροδίτη Πανταζή: Στατιστικές μέθοδοι αναγνώρισης προτύπων για ταυτοποίηση γεωμετρικών σχημάτων σε σημαντικά αρχαιολογικά ευρήματα, ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ, επιβλέπων καθηγητής Κων/νος Παπαοδυσσεύς, Αθήνα, Δεκέμβριος 2007.
3. Αργυρώ Βαλτάρα: Μελέτη επί της Αυτόματης Ανακατασκευής Θραυσμένων Αντικειμένων Εφαρμογή σε Αρχαιολογικά Ευρήματα ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ επιβλέπων Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς, Αθήνα 2011.
4. Ν.Καδιανάκης - Σ.Καρανάσιος : ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, Έκδοση 3^η, Αθήνα 2003.
5. Ν. ΚΑΔΙΑΝΑΚΗΣ – Σ. ΚΑΡΑΝΑΣΙΟΣ – Α. ΦΕΛΛΟΥΡΗΣ: ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών, Έκδοση Έκτη, Αθήνα 2003.
6. Εργαστήριο Μαθηματικών&Στατιστικής/Γ.Παπαδόπουλος (www.aua.gr/gpapadopoulos), Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.
7. Γ.Κοκολάκης-Ι.Σπηλιώτης: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ, Έκδοση 3^η, Εκδόσεις Συμεών.
8. Yuval Filmu: Two Proofs of the Central Limit Theorem, January/February 2010(www.cs.toronto.edu/~yuvalf/CLT.pdf).
9. <http://www.math.aegean.gr/Courses/ap3/A13k10/k10.htm>
10. <http://www.aueb.gr/users/mathpage/epeaek/Logismos/Kefal4/kefal4.html>
11. <http://www.cadlab.tuc.gr/courses/cad/chap6.pdf>
12. [http://en.wikipedia.org/wiki/STL_\(file_format\)](http://en.wikipedia.org/wiki/STL_(file_format))
13. <http://orion.math.iastate.edu/burkardt/data/stl/stl.html>
14. <http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/data/stla/stla>.
15. http://e-topo.web.auth.gr/TOMEIS_INDEX/TOMEASB/Papadopolou/GIVE/simple-algorithms-polygons.pdf
16. http://en.wikipedia.org/wiki/3D_scanner
17. http://en.wikipedia.org/wiki/Point_cloud
18. http://en.wikipedia.org/wiki/Quasi-Newton_method
19. Seppo Pulkkinen: A Review of Methods for Unconstrained Optimization: Theory, Implementation and Testing, Master's Thesis, University of Helsinki Department of Mathematics and Statistics, November 2008.
20. http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method_in_optimization
21. Ε.Γαλάνης: Εισαγωγή στην ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ, Έκδοση 3^η , Αθήνα.
22. http://en.wikipedia.org/wiki/Cholesky_decomposition
23. http://www.telecom.tuc.gr/courses/statdsp/docs/class_notes/02_notes.pdf
24. http://en.wikipedia.org/wiki/Surface_normal

VI. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1. Τρισδιάστατος σαρωτής-3D scanner

Ένας τρισδιάστατος σαρωτής είναι μία συσκευή η οποία αναλύει ένα πραγματικό αντικείμενο ή περιβάλλον με σκοπό να συλλέξει πληροφορίες για το σχήμα ή και την εμφάνισή του, π.χ. χρώμα. Τα δεδομένα που συλλέγονται χρησιμοποιούνται για την τρισδιάστατη αναπαράσταση των αντικειμένων.

Για την κατασκευή ενός τέτοιου μηχανήματος υπάρχουν πολλές τεχνολογίες σχεδιασμού και υλοποίησης, η κάθε μία με τα δικά της πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Πολλοί περιορισμοί εξακολουθούν να υφίστανται ακόμη : για παράδειγμα, οι τεχνολογίες οπτικοποίησης συναντούν πολλές δυσκολίες με μεταλλικά, διαφανή και άλλα αντικείμενα.

Η συλλογή τρισδιάστατων δεδομένων είναι χρήσιμη σε πολλές εφαρμογές. Από την βιομηχανία παραγωγής ταινιών και τρισδιάστατων παιχνιδιών μέχρι το βιομηχανικό σχεδιασμό, εφαρμογές μηχανικής κ.α..⁽¹⁶⁾

Λειτουργία

Ο σκοπός ενός τρισδιάστατου σαρωτή είναι συνήθως να κατασκευάσει ένα «νέφος σημείων» από γεωμετρικά δείγματα της επιφάνειας του αντικειμένου.⁽¹⁶⁾

Ένα «νέφος σημείων» είναι μία ομάδα από διανύσματα σε τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων. Αυτά τα διανύσματα είναι, συνήθως, ορισμένα από τις καρτεσιανές συντεταγμένες, x, y, z ⁽¹⁷⁾, έχοντας ως αρχή το σημείο της επιφάνειας του αντικειμένου και ως πέρασ τον εξωτερικό χώρο που περιβάλλει την επιφάνεια.

Αυτά λοιπόν τα σημεία, μπορούν μετά να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση του αντικειμένου.

Η λειτουργία των τρισδιάστατων σαρωτών μοιάζει πολύ με αυτήν της κάμερας. Όπως και μία κάμερα, έτσι και ένας τρισδιάστατος σαρωτής έχει περιορισμένο οπτικό πεδίο και όπως μία κάμερα, μπορεί να συλλέξει πληροφορίες μόνο για ευδιάκριτες επιφάνειες. Όπως μία κάμερα συλλέγει πληροφορίες για το χρώμα των επιφανειών του οπτικού της πεδίου, έτσι και ένας τρισδιάστατος σαρωτής συλλέγει πληροφορίες για την απόσταση των επιφανειών εντός του οπτικού του πεδίου. Στην «εικόνα» που παράγεται από έναν τρισδιάστατο σαρωτή περιγράφεται η απόσταση από μία επιφάνεια για κάθε ένα σημείο στην εικόνα. Αυτό επιτρέπει να γίνει αντιληπτή η θέση κάθε σημείου της εικόνας, σε τρεις διαστάσεις.

Στις περισσότερες περιπτώσεις μία μόνο σάρωση δε θα δώσει ένα ολοκληρωμένο μοντέλο του αντικειμένου. Πολλαπλές σαρώσεις, ίσως ακόμη και εκατοντάδες μπορεί να χρειαστούν, από πολλές διαφορετικές οπτικές γωνίες, προκειμένου να ανακτηθούν οι απαιτούμενες πληροφορίες για όλες τις πλευρές του αντικειμένου. Αυτές οι σαρώσεις, πρέπει όλες να γίνουν σε ένα κοινό σύστημα αναφοράς, μία διαδικασία που καλείται ευθυγράμμιση ή εγγραφή και μετά, ενώνονται για να δημιουργήσουν το ολοκληρωμένο μοντέλο.⁽¹⁶⁾

Τεχνολογία

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να κατηγοριοποιηθούν οι τρισδιάστατοι σαρωτές. Μία καλά ορισμένη κατηγοριοποίηση τους χωρίζει σε δύο κατηγορίες: τρισδιάστατοι σαρωτές επαφής και μη-επαφής. Οι μη-επαφής μπορούν να χωριστούν περαιτέρω σε δύο υποκατηγορίες: τους ενεργούς και τους παθητικούς.

- Τρισδιάστατοι Σαρωτές Επαφής

Οι τρισδιάστατοι σαρωτές επαφής έρχονται σε φυσική επαφή με το αντικείμενο. Μία συσκευή μέτρησης συντεταγμένων είναι ένα παράδειγμα ενός τρισδιάστατου σαρωτή επαφής.⁽¹⁶⁾ Επειδή αυτού του είδους τα μηχανήματα έρχονται σε επαφή με το αντικείμενο μπορεί να το αλλοιώσουν κατά την επαφή και, γι' αυτό το λόγο αποφεύγονται όταν το αντικείμενο είναι εύθραυστο ή έχει ιστορική αξία κ.τ.λ..

➤ Μη-επαφής ενεργοί τρισδιάστατοι σαρωτές

Οι ενεργοί μη-επαφής τρισδιάστατοι σαρωτές εκπέμπουν ένα είδος φωτεινής ακτινοβολίας και εντοπίζουν την αντανάκλασή της προκειμένου να προσδιορίσουν το αντικείμενο. Πιθανοί τύποι ακτινοβολίας είναι: φως, υπέρηχος, ακτίνες χ.⁽¹⁶⁾

Παρακάτω θα δώσουμε δύο μεθόδους τρισδιάστατης σάρωσης με χρήση ακτιβολίας λέιζερ.

Τρισδιάστατα σκάνερ με ακτίνα λέιζερ

Χρόνος πτήσης (Time-of-flight)

Αυτού του είδους οι σαρωτές εκπέμπουν έναν παλμό ακτίνας λέιζερ στην επιφάνεια του αντικειμένου, ο οποίος ανακλάται πίσω στη συσκευή. Το χρονικό διάστημα μέχρι να επιστρέψει ο παλμός μετράται. Εφόσον η ταχύτητα του φωτός c είναι γνωστή, ο χρόνος που κάνει το φως να επιστρέψει καθορίζει το διπλάσιο της απόστασης μεταξύ του σαρωτή και της επιφάνειας. Αν t είναι ο χρόνος μεταξύ εκπομπής και επιστροφής, τότε η απόσταση είναι ίση με $(c \cdot t)/2$. Η ακρίβεια αυτού του είδους σαρωτών εξαρτάται από την ακρίβεια με την οποία μπορούμε να μετρήσουμε το χρόνο.

Επειδή η ακτίνα λέιζερ μπορεί να προσδιορίσει ένα μόνο σημείο κάθε φορά, για τον προσδιορισμό ολόκληρου του αντικειμένου είτε περιστρέφουμε το σαρωτή είτε χρησιμοποιείται ένα σύστημα περιστρεφόμενων καθρεπτών. Η δεύτερη μέθοδος είναι ταχύτερη.⁽¹⁶⁾

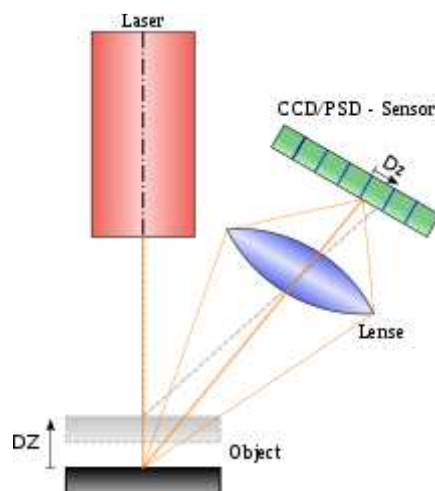
Τριγωνισμός (Triangulation)

Οι σαρωτές που λειτουργούν με αυτήν την τεχνολογία είναι επίσης ενεργοί σαρωτές που χρησιμοποιούν ακτίνες laser⁽¹⁶⁾ για να προσδιορίσουν το αντικείμενο.

Οι σαρωτές αυτοί εκπέμπουν μία ακτίνα laser στο αντικείμενο και με χρήση κάμερας βλέπουν πάνω σε ποια επιφάνεια προσπίπτει η «κουκίδα» της ακτίνας laser. Η κάμερα παρακολουθεί την πορεία της κουκίδας και έτσι προσδιορίζεται το αντικείμενο. Οι σαρωτές αυτοί καλούνται «τριγωνισμού» γιατί η κάμερα, η πηγή laser και η κουκίδα σχηματίζουν ένα τρίγωνο.

Το μήκος της μίας πλευράς του τριγώνου και η απόσταση μεταξύ κάμερας και πηγής laser είναι γνωστά. Η γωνία της πηγής laser είναι επίσης γνωστή. Η γωνία του τριγώνου που ορίζεται από την κάμερα επίσης μπορεί να υπολογιστεί κοιτάζοντας στην περιοχή που βρίσκεται η κουκίδα του laser στο πεδίο ορατότητας της κάμερας.

Αυτές οι πληροφορίες καθορίζουν πλήρως το σχήμα και το μέγεθος του τριγώνου και δίνουν την περιοχή της κουκίδας του laser που ορίζει την μία από τις τρεις κορυφές του τριγώνου. ⁽¹⁶⁾



Εικόνα 259: Αρχή λειτουργίας σαρωτή τριγωνισμού. ⁽¹⁶⁾

2. Αρχεία STL

Τα αρχεία .stl είναι αρχεία τα οποία παρέχουν πληροφορίες για ένα τρισδιάστατο αντικείμενο. Τα αρχικά stl είναι συντομογραφία της λέξης στερεολιθογραφία (stereolithography) και υποδηλώνουν τον πρωταρχικό στόχο αυτού του τύπου αρχείων, που είναι να περιγράφουν το σχήμα ενός τρισδιάστατου, στατικού αντικειμένου. ^{(12), (13)}

Τα δεδομένα των αρχείων αυτών περιγράφουν μόνο την γεωμετρία της επιφάνειας των τρισδιάστατων αντικειμένων, χωρίς να δίνουν καμία επιπλέον πληροφορία για το χρώμα, την υφή ή οτιδήποτε άλλο. Η επιφάνεια που περιγράφεται, έχει χωριστεί σε τρίγωνα. Για κάθε τρίγωνο της επιφάνειας, το αρχείο περιλαμβάνει τις διαστάσεις των διανυσμάτων του τριγώνου σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και σε ωρολογιακή φορά, όπως αυτά φαίνονται από το εξωτερικό της επιφάνειας. Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του τριγώνου μπορεί επίσης να περιλαμβάνεται στο αρχείο. Τα αρχεία STL υποστηρίζουν τόσο δυαδική όσο και αναπαράσταση ASCII. Η πρώτη είναι πιο συνηθισμένη καθώς τα δυαδικά αρχεία είναι πιο συμπιεσμένα. ^{(12), (13), (24)}

Ένα ASCII STL αρχείο χωρίζεται σε μπλοκ, ένα για κάθε διάνυσμα. Στην πρώτη γραμμή του αρχείου υπάρχει πρώτη η λέξη sold και μετά το όνομα του αρχείου. Το τέλος του αρχείου επισημαίνεται με τη λέξη endsolid. Όμοια, κάθε μπλοκ διανύσματος αρχίζει με τη λέξη facet και το όνομα και από κάτω, outer loop και τελειώνει με τη λέξη endloop και στην από κάτω γραμμή με τη λέξη endfacet . ^{(12), (13), (24)}

Τα δυαδικά STL αρχεία έχουν μία επικεφαλίδα 80 χαρακτήρων, η οποία δεν πρέπει ποτέ να αρχίζει με τη λέξη `solid` γιατί κάτι τέτοιο θα προκαλέσει σύγχυση για την αναγνώριση του αρχείου σαν ASCII STL. Την επικεφαλίδα διαδέχεται ένας μη προσημασμένος ακέραιος μεγέθους 4-bytes που υποδηλώνει τον αριθμό των τριγώνων στο αρχείο. Τέλος, ακολουθεί η περιγραφή των τριγώνων. Το αρχείο τελειώνει με το τέλος της περιγραφής και του τελευταίου τριγώνου. ⁽¹²⁾

Το κάθε τρίγωνο περιγράφεται από δώδεκα 32- bits αριθμούς κινητής υποδιαστολής: τρεις για το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα και τρεις για τις συντεταγμένες x, y, z κάθε διανύσματος. Μετά τους δώδεκα παραπάνω αριθμούς ακολουθεί ένας μη-προσημασμένος αριθμός μεγέθους δύο bytes που χρησιμεύει ως μετρητής. ⁽¹²⁾

Παράδειγμα ASCII STL αρχείου για κύβο ^{(12), (13)}

```
solid cube_corner
  facet normal 0.0 -1.0 0.0
    outer loop
      vertex 0.0 0.0 0.0
      vertex 1.0 0.0 0.0
      vertex 0.0 0.0 1.0
    endloop
  endfacet
  facet normal 0.0 0.0 -1.0
    outer loop
      vertex 0.0 0.0 0.0
      vertex 0.0 1.0 0.0
      vertex 1.0 0.0 0.0
    endloop
  endfacet
  facet normal 0.0 0.0 -1.0
    outer loop
      vertex 0.0 0.0 0.0
```

```

        vertex 0.0 0.0 1.0
        vertex 0.0 1.0 0.0
    endloop
endfacet
facet normal 0.577 0.577 0.577
    outer loop
        vertex 1.0 0.0 0.0
        vertex 0.0 1.0 0.0
        vertex 0.0 0.0 1.0
    endloop
endfacet
endsolid

```

Δομή δυαδικού STL αρχείου⁽¹²⁾

```

UINT8[80]- Header
UINT32 - Number of triangles

foreach triangle
REAL32[3] - Normal vector
REAL32[3] - Vertex 1
REAL32[3] - Vertex 2
REAL32[3] - Vertex 3
UINT16 - Attribute byte count
End

```

3. Ενδεικτικά τα αποτελέσματα ενός κονιάματος

Κατά την εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής η μέθοδος εφαρμόστηκε σε εξήντα κονιάματα.



Εικόνα 30: Το κονίαμα ως τρισδιάστατη εικόνα.

Παρακάτω φαίνονται τα περιγράμματα των πρώτων δεκαέξι τομών, τα οποία είναι αρκετά για τον σκοπό της αυτοματοποιημένης συνένωσης του εν λόγω κονιάματος με τα γειτονικά του. Η πρώτη είναι η άνω επιφάνεια και ακολουθούν οι επόμενες εις βάθος.



