



**Στην αδερφή μου**

Ευχαριστώ θερμά τον Καθηγητή κ. Χ. Προβατίδη  
για την άψογη συνεργασία και καθοδήγηση καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης αυτής  
της μεταπτυχιακής εργασίας.  
Ευχαριστώ προσωπικά τους γονείς μου για την ηθική και υλική συμπαράσταση κατά  
τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

## Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή
2. Βιβλιογραφική επισκόπηση
3. Επισκόπηση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας
4. Μελέτη δυναμικής συμπεριφοράς του μηχανισμού στροφάλου-διωστήρα-εμβόλου
  - 4.1 Εισαγωγή
  - 4.2 Γωνία Διωστήρα με τον Άξονα Χ
  - 4.3 Γωνιακή Ταχύτητα Διωστήρα
  - 4.4 Γωνιακή Επιτάχυνση Διωστήρα
  - 4.5 Θέση Εμβόλου
  - 4.6 Ταχύτητα Εμβόλου
  - 4.7 Επιτάχυνση Εμβόλου
  - 4.8 Θέση Κέντρου Μάζας του Συστήματος
  - 4.9 Ταχύτητα Κέντρου Μάζας του Συστήματος
  - 4.10 Επιτάχυνση Κέντρου Μάζας του Συστήματος
  - 4.11 Δυνάμεις στις Αρθρώσεις και Κινητήρια Ροπή
  - 4.12 Ακινητοποίηση του κέντρου μάζας του συστήματος
5. Μελέτη ελαστοδυναμικής συμπεριφοράς του μηχανισμού στροφάλου-διωστήρα-εμβόλου με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων
  - 5.1 Αλγόριθμος Επίλυσης
  - 5.2 Μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης των 2-Σημείων
    - 5.2.1 Περίπτωση που αφορά μια διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού (ένας βαθμός ελευθερίας)
    - 5.2.2 Περίπτωση που αφορά ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού (δύο βαθμοί ελευθερίας)
    - 5.2.3 Περίπτωση που αφορά ένα σύστημα δυο διαφορικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού το οποίο χαρακτηρίζεται ως stiff
  - 5.3 Ανάπτυξη και περιγραφή της μεθοδολογίας επίλυσης
  - 5.4 Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε μια δοκό η οποία είναι αρθρωμένη στο ένα άκρο της και στηρίζεται σε ένα στρεπτικό ελατήριο
  - 5.5 Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε μια δοκό η οποία είναι αρθρωμένη στο ένα άκρο της και στηρίζεται σε ένα στρεπτικό ελατήριο και στο άλλο άκρο της είναι μια συγκεντρωμένη μάζα
  - 5.6 Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στο μηχανισμό στροφάλου-διωστήρα-εμβόλου
- 6 Συμπεράσματα
- 7 Κώδικες των προβλημάτων
- 8 Βιβλιογραφία

## Abstract

An integral part of everyday life of individuals in the last century is the use of motor vehicles. But how many have ever wondered how vehicles actually move? Behind this question lies a whole science, the science of **Multy-Body System Dynamics** .

The requirement of buyers for faster, safer and economical movement of one hand, coupled with the pursuit of industry to improve the quality of output, fuelling rapid growth in this area.

Source of motion of each vehicle is the mechanism crank-slider, which are the heart of most machines. The expansion of the gases produced due to the combustion of liquid fuel into the cylinder causes the linear movement of the carrier and piston rod through converting the linear movement of this conveyor, a rotary motion of the crankshaft. This rotational motion is transmitted to the wheels of vehicles with immediate effect to move them.

Despite its fundamental importance, as we understand, is to evaluate the behaviour of the vehicle, the study of dynamic behaviour mechanism of crank-slider, the study so far has been conducted on the subject, fails to describe the behaviour of a realistic model mechanism with sufficient accuracy and adequacy.

While it is difficult to formulate a model that adequately describes the behaviour of the mechanism, often sought elaboration of simplified models to describe the form of motion and its dependence on system parameters.

This exactly is the object of study of the fourth chapter of the paper. Specifically seeks a relatively simplified approach to behavioural of mechanism crank-slider. This mechanism is simulated with a model whose members are rigid. For the development of mathematical equations were applied to the equations of motion of Classical Dynamics, based on laws of motion formulated by Newton.

The purpose of the fifth chapter of the paper is to present an alternative way to troubleshoot kinematics and dynamics system bodies.

The problems, which we studied, the colleges are at the same level and are subject to an external momentary dynamic excitation. The problems include different ways of mounting objects and data collections include kinetic and potential energy.

The modelling system was based on the theory of finite elements. This method was the means of geometrical and physical description of the members of the scheme. Differential equations in which we end up describing the full motion of the system. The regression equations each time in a single coordinate system was performed using the theory of kinematics. The numerical integration method chosen allows to solve the equations or the members are stiff (rigid) or flexible, whether the problem is linear or not.

The analysis of the examples was performed using the computational package Matlab.

## 1. Εισαγωγή

Αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινής ζωής των ανθρώπων τον τελευταίο αιώνα, είναι η χρήση των μηχανοκινήτων οχημάτων. Πόσοι όμως έχουν αναρωτηθεί πως κινούνται τα οχήματα;

Πίσω από αυτή την ερώτηση κρύβεται μια ολόκληρη επιστήμη, η επιστήμη της **Δυναμικής Υλικών Σωμάτων** και της Μηχανολογίας γενικότερα.

Η απαίτηση του αγοραστικού κοινού για ταχύτερη, ασφαλέστερη και οικονομικότερη μετακίνηση αφ' ενός, σε συνδυασμό με την επιδίωξη της βιομηχανίας για βελτίωση της ποιότητας του παραγόμενου προϊόντος, τροφοδοτούν τη ραγδαία εξέλιξη στο χώρο αυτό.

Πηγή της κίνησης κάθε οχήματος, είναι ο μηχανισμός στροφάλου-διωστήρα-εμβόλου, που αποτελούν την καρδιά των περισσότερων μηχανών. Η εκτόνωση των αερίων, που παράγονται λόγω της καύσης του υγρού καυσίμου μέσα στον κύλινδρο, προκαλεί την ευθύγραμμη μεταφορική κίνηση του εμβόλου και μέσω του διωστήρα γίνεται μετατροπή της ευθύγραμμης μεταφορικής αυτής κίνησης, σε περιστροφική κίνηση του στροφάλου. Αυτή ακριβώς η περιστροφική κίνηση, μεταδίδεται στους τροχούς των οχημάτων με άμεσο αποτέλεσμα την κίνηση αυτών.

Παρά τη θεμελιώδη σημασία, που όπως καταλαβαίνουμε έχει για την αξιολόγηση της συμπεριφοράς του οχήματος, η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς του μηχανισμού στροφάλου-διωστήρα-εμβόλου, η μέχρι σήμερα μελέτη που έχει διεξαχθεί πάνω στο αντικείμενο, αδυνατεί να περιγράψει τη συμπεριφορά ενός ρεαλιστικού μοντέλου του μηχανισμού με ικανοποιητική ακρίβεια και επάρκεια.

Ενώ όμως είναι δύσκολο να καταστρωθεί ένα μοντέλο που να περιγράφει ικανοποιητικά τη συμπεριφορά του μηχανισμού, συχνά επιδιώκεται η κατάστρωση απλοποιημένων μοντέλων με σκοπό να περιγραφεί η μορφή της κίνησης και η εξάρτησή της από τις παραμέτρους του συστήματος.

Αυτό ακριβώς αποτελεί και το αντικείμενο μελέτης του τέταρτου κεφαλαίου της μεταπτυχιακής εργασίας. Συγκεκριμένα επιχειρείται μια σχετικά απλοποιημένη προσέγγιση της συμπεριφοράς του μηχανισμού στροφάλου-διωστήρα-εμβόλου. Ο εν λόγω μηχανισμός προσομοιώνεται με ένα μοντέλο του οποίου τα μέλη θεωρούνται απαραμόρφωτα. Για την κατάστρωση των μαθηματικών εξισώσεων, εφαρμόστηκαν οι εξισώσεις κίνησης της Κλασικής Δυναμικής, η οποία βασίζεται στους νόμους κίνησης που διατυπώθηκαν από το Νεύτωνα.

Σκοπός του πέμπτου κεφαλαίου της μεταπτυχιακής εργασίας, είναι η παρουσίαση ενός εναλλακτικού τρόπου αντιμετώπισης προβλημάτων κινηματικής και δυναμικής συμπεριφοράς συστήματος σωμάτων.

Στα προβλήματα, τα οποία μελετήσαμε, τα σώματα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και υπόκεινται σε μια εξωτερική στιγμιαία δυναμική διέγερση. Τα προβλήματα περιέχουν διάφορους τρόπους έδρασης των σωμάτων και περιλαμβάνουν στοιχεία συγκέντρωσης κινητικής και δυναμικής ενέργειας.

Η μοντελοποίηση του συστήματος έγινε με βάση τη θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων. Η μέθοδος αυτή αποτέλεσε το μέσω της γεωμετρικής και φυσικής περιγραφής των μελών του μηχανισμού. Οι διαφορικές εξισώσεις στις οποίες καταλήγουμε περιγράφουν την πλήρη κίνηση του συστήματος. Η αναγωγή των εξισώσεων κάθε χρονική στιγμή σε ένα ενιαίο χωρόδετο σύστημα συντεταγμένων έγινε με χρήση της θεωρίας από την κινηματική. Η μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης που επιλέξαμε επιτρέπει την επίλυση των εξισώσεων είτε τα μέλη είναι δύσκαμπτα (rigid) είτε εύκαμπτα, είτε το πρόβλημα είναι γραμμικό ή όχι.

Η ανάλυση των παραδειγμάτων έγινε με χρήση του υπολογιστικού πακέτου Matlab.

## 2. Βιβλιογραφική επισκόπηση

Η Δυναμική είναι ο κλάδος της **Μηχανικής**, που εξετάζει τη σχέση ανάμεσα στην κίνηση υλικών σωμάτων και στις δυνάμεις οι οποίες προκαλούν την κίνηση ή αναπτύσσονται στη διάρκεια της κίνησης.

Η επιστήμη της Δυναμικής υλικών σημείων βασίζεται σ' ένα μικρό αριθμό βασικών αρχών, αλλά είναι χρήσιμη σ' ένα ευρύτατο πεδίο εφαρμογών.

Οι αρχές της Δυναμικής μπορεί να εκφραστούν με τρία θεμελιώδη φυσικά μεγέθη, το μήκος, το χρόνο και τη μάζα.

Οι πρώτες μελέτες της Δυναμικής έγιναν από τον Αριστοτέλη, αλλά οι σωστές επιστημονικές βάσεις της τέθηκαν πολύ αργότερα από το Γαλιλαίο και το Νεύτωνα και συμπληρώθηκαν από πρωτοπόρους του πνεύματος όπως οι Euler, Lagrange, Hamilton, Laplace, Poicare και Einstein.

Το πέμπτο κεφάλαιο αφορά την δυναμική ανάλυση συστημάτων για μεγάλες κινηματικές μετατοπίσεις (Κινητοελαστοδυναμική)

Η διατύπωση των εξισώσεων κίνησης συστημάτων για μεγάλες μετατοπίσεις είναι εφικτή από τη εποχή του Lagrange. Οι Lagrange-ιανές εξισώσεις δίνουν την δυνατότητα διαμόρφωσης των εξισώσεων κίνησης με την επιλογή διακριτών βαθμών ελευθερίας. Η συστηματική προσέγγιση αυτού του προβλήματος είναι γνωστή και ως "Multi-Body System Dynamics". [1]

Στις αρχές της δεκαετίας του '70 έγινε πιο έντονη η ανάγκη συστηματικής ανάλυσης:

- i. της αντοχής σωμάτων που συμμετέχουν σε μηχανισμούς.
- ii. Της δυναμικής απόκρισης, όταν οι ελαστικές μετατοπίσεις των σωμάτων δεν είναι αμελητέες.

Η ανάγκη αυτή οδήγησε στην υιοθέτηση μιας καινούριας προσέγγισης με την βοήθεια της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων, που σήμερα είναι γνωστή ως "Flexible Multibody Dynamics" (Δυναμική Πολλαπλών Εύκαμπτων Σωμάτων). Η συγκεκριμένη επιστημονική περιοχή ασχολείται με την υπολογιστική μοντελοποίηση και ανάλυση εύκαμπτων σωμάτων, τα οποία εκτελούν μεγάλες μετατοπίσεις ή και μεγάλες περιστροφές κάτω από συγκεκριμένους περιορισμούς. [2]

Για ιστορικούς λόγους αναφέρεται ότι οι πρώτοι που εφάρμοσαν ολοκληρωμένα την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων στην ανάλυση μηχανισμών είναι η ερευνητική ομάδα της "σχολής του Delft" (Ολλανδία), στις αρχές της δεκαετίας '70. Η θεωρία που ανέπτυξε ο Besseling για μη-γραμμική ανάλυση δομών [3,4], εφαρμόστηκε από τον K. van der Werff στην ανάλυση της κινηματικής και δυναμικής μηχανισμών [5-9]. Ήδη από την αρχή της δεκαετίας του '80 έχει δημιουργηθεί πρόγραμμα H/Y για ανάλυση μηχανισμών [10-12]. Οι συμβολές στην ίδια επιστημονική περιοχή με διάφορες εφαρμογές συνεχίζονται με αμείωτο ρυθμό έως σήμερα από μέλη της "σχολής του Delft", όπως οι Jonker, Schwab, Meijaard, Aarts κ.α. [13-23]

Από τη γενική επισκόπηση της στάθμης της επιστήμης προκύπτει πως οι μεθοδολογίες που έχουν αναπτυχθεί [24-38] διαφοροποιούνται στον φορμαλισμό που χρησιμοποιούν για τη θέση ενός σώματος στο χωρόδετο σύστημα συντεταγμένων και κατατάσσονται στις παρακάτω πέντε βασικές κατηγορίες:

1. "Floating Frame of Reference" Formulation
2. "Linear Theory of Elastodynamics" Formulation
3. "Convected Coordinate System" Formulation
4. "Large Rotations Vector" Formulation
5. "Absolute Nodal Coordinate" Formulation

- Η κατηγορία “Floating Frame of Reference” αναπτύχθηκε στις αρχές της δεκαετίας του '80. Για τον προσδιορισμό της θέσης του σώματος χρησιμοποιούνται δυο κατηγορίες βαθμών ελευθερίας. Η μια κατηγορία περιγράφει τη θέση και τον προσανατολισμό του σωματόδετου συστήματος συντεταγμένων, ενώ η άλλη περιγράφει την παραμόρφωση του σώματος ως προς το σωματόδετο σύστημα. Η θέση ενός σημείου στο απόλυτο σύστημα είναι:

$$r^i = A^i + R_k^i \cdot (u_o^k + u_f^k)$$

Ο δείκτης  $i$  δηλώνει την αναφορά στο χωρόδετο σύστημα και ο δείκτης  $k$  στο σωματόδετο σύστημα, ο δείκτης  $o$  δηλώνει τη θέση του άκαμπτου σώματος και ο δείκτης  $f$  του παραμορφώσιμου, ο πίνακας  $A$  δηλώνει τη θέση του σωματόδετου συστήματος και ο πίνακας  $R$  τον προσανατολισμό του σωματόδετου ως προς το χωρόδετο σύστημα. Ο πίνακας  $R$  περιέχει τις γωνίες Euler

Οι δυναμικές εξισώσεις γράφονται τελικά στην μορφή:

$$M \cdot \ddot{u} + K \cdot u = q_e + q_v + q_c \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} M_{oo} & M_{of} \\ M_{fo} & M_{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_o \\ \ddot{u}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_o \\ u_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (q_e)_o \\ (q_e)_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (q_v)_o \\ (q_v)_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (q_c)_o \\ (q_c)_f \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα  $q_e$  είναι το διάνυσμα των εξωτερικών φορτίσεων, το  $q_v$  είναι το διάνυσμα των δυνάμεων Coriolis και φυγόκεντρων δυνάμεων και το  $q_c$  είναι το διάνυσμα των δυνάμεων λόγω περιορισμών. Οι περιορισμοί εκφράζονται μέσω πολλαπλασιαστών Lagrange. Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα αποτελεί η κατάλληλη επιλογή του σωματόδετου συστήματος συντεταγμένων.

- Η κατηγορία “Linear Theory of Elastodynamics” αναπτύχθηκε στις αρχές της δεκαετίας του '70. Σε αυτή την περίπτωση θεωρείται πως ο μηχανισμός αποτελείται από άκαμπτα σώματα. Από την επίλυση προκύπτουν οι αδρανειακές δυνάμεις και οι δυνάμεις των αντιδράσεων. Αυτές εισάγονται ως φορτίσεις σε ένα γραμμικά ελαστικό πρόβλημα και υπολογίζονται οι ελαστικές παραμορφώσεις των σωμάτων. Η συνολική κίνηση του σώματος αποτελεί το άθροισμα της κίνησης του άκαμπτου και της ελαστικής παραμόρφωσης. Αναφέρεται ότι τα δυο προβλήματα δεν επιλύονται ταυτόχρονα. Προϋπόθεση είναι ότι η ελαστική παραμόρφωση δεν έχει σημαντική επίδραση στην κίνηση του άκαμπτου. Οι δυναμικές εξισώσεις που αποτελούν υποεπίπτωση της προηγούμενης γράφονται τελικά:

$$M \cdot \ddot{u} + K \cdot u = q_e + q_v \rightarrow$$

$$M_{oo} \cdot \ddot{y}_{oo} = (q_e)_o$$

$$M_{ff} \cdot \ddot{y}_{ff} + K_{ff} \cdot y_f = (q_e)_f + (q_v)_f - M_{fo} \cdot \ddot{y}_o$$



- Η κατηγορία “Convected (Corotational) Coordinate System”, αναπτύχθηκε στις αρχές της δεκαετίας του ’80 και χρησιμοποιεί σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων το οποίο ορίζεται από τις μεταβλητές κατάστασης στους κόμβους του στοιχείου. Το σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων είναι εκείνο που εκτελεί την μεγάλη στροφή του στοιχείου (rigid body motion) και οι διαφορές των μεταβλητών κατάστασης από το σωματόδετο, αποτελούν τις ελαστικές παραμορφώσεις. Η συνηθέστερη περίπτωση είναι το σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων να ορίζεται από το μέσο όρο των βαθμών ελευθερίας στους κόμβους και η στροφή του στοιχείου να προκύπτει με χρήση του “polar decomposition theorem”. Αναφέρεται ότι το μητρώο δυσκαμψίας στις δυναμικές εξισώσεις είναι μη-γραμμικό. Ακόμη σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, πολλοί ερευνητές έχουν καταλήξει ότι με τη μέθοδο αυτή δεν μοντελοποιείται ορθά το σύστημα όπως π.χ. η αδράνεια του σώματος ή ότι τυχαίες κινήσεις του άκαμπτου σώματος οδηγούν σε μη μηδενική παραμόρφωση.
- Η κατηγορία “Large Rotations Vector” αναπτύχθηκε στις αρχές της δεκαετίας του ’70 και περιγράφει τη θέση του πεπερασμένου στοιχείου ως προς το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων. Χρησιμοποιεί ως βαθμούς ελευθερίας τις συντεταγμένες των κόμβων και στροφές, που δηλώνουν τον προσανατολισμό της διατομής (curvilinear coordinates). Οι προσανατολισμοί των ενδιάμεσων διατομών προκύπτουν με χρήση συναρτήσεων μορφής, όπως και στην περίπτωση των μετατοπίσεων. Αναφέρεται ότι στην περίπτωση που οι πεπερασμένες στροφές δεν συσχετισθούν με τις μετατοπίσεις, τότε το σύστημα είναι αόριστο. Για να λυθεί το συγκεκριμένο πρόβλημα αρκετοί ερευνητές συσχέτισαν τις στροφές με τις μερικές παραγώγους των μετατοπίσεων (Frenet Frame). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το μητρώο μάζας που προκύπτει να είναι μη-γραμμικό, γεγονός που το καθιστά μη ελκυστικό.
- Η κατηγορία “Absolute Nodal Coordinate” περιγράφει επίσης τη θέση του πεπερασμένου στοιχείου στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων. Αποτελεί φυσική συνέχεια της προηγούμενης κατηγορίας. Η θέση του στοιχείου περιγράφεται από τις μετατοπίσεις και από τις κλίσεις στους κόμβους του. Οι κλίσεις είναι οι μερικές παράγωγοι ως προς το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων. Η μεθοδολογία οδηγεί στη διατύπωση ενός σταθερού μητρώου μάζας, αλλά μη-γραμμικού μητρώου δυσκαμψίας, γεγονός που το καθιστά επίσης μη ελκυστικό.

Τονίζεται ότι οι δυο τελευταίες κατηγορίες αποτελούν κυρίως προεκτάσεις από συμβολές στην περιοχή της Μηχανικής και κυρίως στην ανάλυση / προσομοίωση του λυγισμού / πτύχωσης κατασκευών.

Τέλος, κοινό στις παραπάνω διατυπώσεις είναι το γεγονός πως εμφανίζονται μεγάλες ιδιοτιμές του μητρώου  $M^{-1} \cdot K$  (stiff differential equations), οι οποίες και οδηγούν στην ανάγκη εισαγωγής ειδικών αριθμητικών μεθόδων ολοκλήρωσης. Το ερευνητικό ενδιαφέρον προσανατολίζεται στην εξέλιξη αξιόπιστων μεθόδων.

Ο φορμαλισμός των δυναμικών εξισώσεων εύκαμπτων μηχανισμών, η ανάλυση και η προσομοίωση τους εξακολουθεί να προκαλεί το ερευνητικό ενδιαφέρον. Επίσης διακρίνεται η τάση για συστηματική έρευνα και ένταση της ερευνητικής προσπάθειας στην περιοχή των Οχημάτων.

### 3. Επισκόπηση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας

Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές οι παρατηρούμενες ταχύτητες είναι πολύ μικρές ως προς την ταχύτητα του φωτός (300.000 km/s).

Επίσης οι διαστάσεις των εξεταζόμενων σωμάτων είναι πολύ μεγαλύτερες από τις ατομικές ή τις πυρηνικές διαστάσεις και πολύ μικρότερες από τις διαστάσεις των συστημάτων που εξετάζονται από αστρονόμους και κοσμολόγους.

Κατά συνέπεια, οι προβλέψεις της λεγόμενης Κλασικής Δυναμικής –η οποία βασίζεται στους νόμους κίνησης που διατυπώθηκαν από το Νεύτωνα- είναι αρκετά ακριβείς για τη μεγάλη πλειοψηφία των τεχνολογικών εφαρμογών.

Για το λόγο αυτό, στο τέταρτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με την εφαρμογή της Κλασικής Δυναμικής σ' ένα μηχανισμό στροφάλου-διωστήρα-εμβόλου με βασική επιδίωξη την περιγραφή της γενικής συμπεριφοράς του μηχανισμού, προκειμένου να αποκτηθεί μια εποπτική εικόνα της ιδιαίτερης φύσης του προβλήματος.

Από την επισκόπηση της βιβλιογραφίας προκύπτει ότι όλες οι μεθοδολογίες που έχουν αναπτυχθεί μέχρι σήμερα έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό, τη μη γραμμική θεωρία. Οι δυναμικές εξισώσεις περιέχουν συνεπώς μη-τετραγωνικούς όρους και τα μητρώα μάζας ή δυσκαμψίας εξαρτώνται από τη θέση του σώματος. Η μη-γραμμικότητα οφείλεται κυρίως στις μεγάλες στροφές.

Επειδή όμως, οι μεγάλες στροφές μπορούν θεωρητικά να προσεγγισθούν με αρκετή ακρίβεια από μια αλληλουχία μικρών στροφών, στο πέμπτο κεφάλαιο χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, χρησιμοποιώντας όμως τον φορμαλισμό που ισχύει μόνο για μικρές μετατοπίσεις [36,37].

Σημειώνεται συμπληρωματικά ότι η μέθοδος Galerkin-Ritz είναι ισοδύναμη με την Αρχή Δυνατών Έργων, τις Εξισώσεις Lagrange και τις Εξισώσεις Hamilton. Συνεπώς, η όποια διατύπωση των εξισώσεων κίνησης είναι εφικτή.

Στην παρούσα εργασία ο όρος μηχανισμός έχει την έννοια ενός συστήματος από ελαστικά ή άκαμπτα σώματα.

Με τον όρο σώματα εννοούνται συνεχή σώματα (π.χ. ράβδοι, δοκοί κλπ), όπως και σώματα με συγκεντρωμένες ιδιότητες (π.χ. μάζες, ελατήρια κλπ)

Επίσης, στα πλαίσια των μηχανολογικών εφαρμογών οι ελαστικές μετατοπίσεις είναι συνήθως μικρές σε σχέση με τις μετατοπίσεις των μελών ενός μηχανισμού. Συνεπώς δεν συντρέχει λόγος για την ενασχόληση με μεθόδους για μεγάλες παραμορφώσεις ή ελαστικές στροφές.

Ακόμη, θεωρείται ότι η διαφορά μεταξύ των μεγάλων και μικρών στροφών (γωνιών) μπορεί μεθοδολογικά να γεφυρωθεί στο πλαίσιο της συνεχούς ενημέρωσης (updating) της γεωμετρίας.

Η εργασία αναφέρεται επίσης και στο θέμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης, όπου υιοθετείται η Μέθοδος των 2-Σημείων.

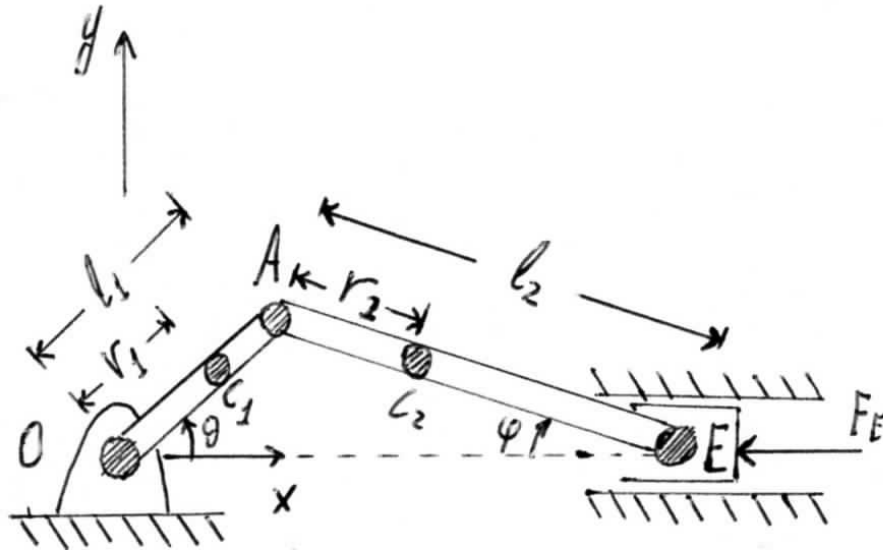
#### 4. Μελέτη Δυναμικής Συμπεριφοράς του Μηχανισμού Στροφάλου-Διωστήρα-Εμβόλου

##### Μαθηματική Διαμόρφωση

###### 4.1 Εισαγωγή

- Το εξεταζόμενο μοντέλο παρουσιάζεται σε μορφή σκαριφήματος στο παρακάτω σχήμα. Η ανάγκη να κατανοηθεί η συμπεριφορά του μηχανισμού, επιτάσσει τη χρήση ενός απλουστευμένου μοντέλου, έτσι ώστε να είναι δυνατή η περιγραφή της κίνησής του.
- Θεωρείται σύστημα αναφοράς OXYZ.
- Ο στρόφαλος προσομοιώνεται με την απαραμόρφωτη δοκό OA.
- Το άκρο O της δοκού OA, είναι αρθρωμένο στο σταθερό σημείο O της αρχής των αξόνων του συστήματος αναφοράς OXYZ.
- Το άκρο A της δοκού OA, είναι αρθρωμένο με το άκρο A της απαραμόρφωτου δοκού AE, που προσομοιώνει το διωστήρα.
- Το άκρο E της δοκού AE, είναι αρθρωμένο με το σώμα E, που προσομοιώνει το έμβολο.
- Το σώμα E, έμβολο, κινείται σε οδηγητική καμπύλη, που το αναγκάζει να εκτελεί ευθύγραμμη μεταφορική κίνηση στον άξονα X.
- Η δοκός AE, διωστήρας, εκτελεί γενική επίπεδη κίνηση στο επίπεδο OXY.
- Η δοκός OA, στρόφαλος, εκτελεί περιστροφή ως προς τον άξονα OZ.
- Η κίνηση του μηχανισμού συνολικά είναι επίπεδη στο επίπεδο OXY.
- Η επάρκεια με την οποία το συγκεκριμένο μοντέλο περιγράφει την κίνηση του μηχανισμού, δικαιολογεί τη χρήση του.
- Οι γεωμετρικές διαστάσεις και οι μαζικές ιδιότητες των απαραμόρφωτων μελών του μηχανισμού, είναι γνωστές.
- Θεωρείται ότι ο εξεταζόμενος μηχανισμός είναι τμήμα συμπιεστή, με δύναμη αντίστασης  $f_E$ .
- Η γωνιακή ταχύτητα  $\omega_1 = \dot{\theta}(t)$  του στροφάλου, είναι σταθερή και γνωστή
- Θεωρείται ότι  $\ddot{\theta}(t) \ll \dot{\theta}(t)^2$

- Όλα τα μεγέθη θα εκφραστούν ως προς τη μεταβαλλόμενη με το χρόνο  $t$  γωνία  $\vartheta$  του στροφάλου με τον άξονα  $X$ ,  $\vartheta(t)$ .



## 4.2 Γωνία Διωστήρα με τον Άξονα X

Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει:

$$l_1 \cdot \sin \vartheta(t) = l_2 \cdot \sin \varphi(t) \Rightarrow \sin \varphi(t) = \frac{l_1}{l_2} \cdot \sin \vartheta(t) \Rightarrow \sin \varphi(t) = l \cdot \sin \vartheta(t)$$

$$\text{Άρα: } \sin \varphi(t) = l \cdot \sin \vartheta(t) \quad (4.1)$$

Ακόμη:

$$(l_2 \cdot \cos \varphi(t))^2 + (l_1 \cdot \sin \vartheta(t))^2 = l_2^2 \Rightarrow \cos \varphi(t) = \frac{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}}{\sqrt{\quad}}$$

$$\text{Άρα: } \cos \varphi(t) = \frac{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}}{\sqrt{\quad}} \quad (4.2)$$

Η γωνία  $\varphi(t)$  δίνεται από τη σχέση (4.1):

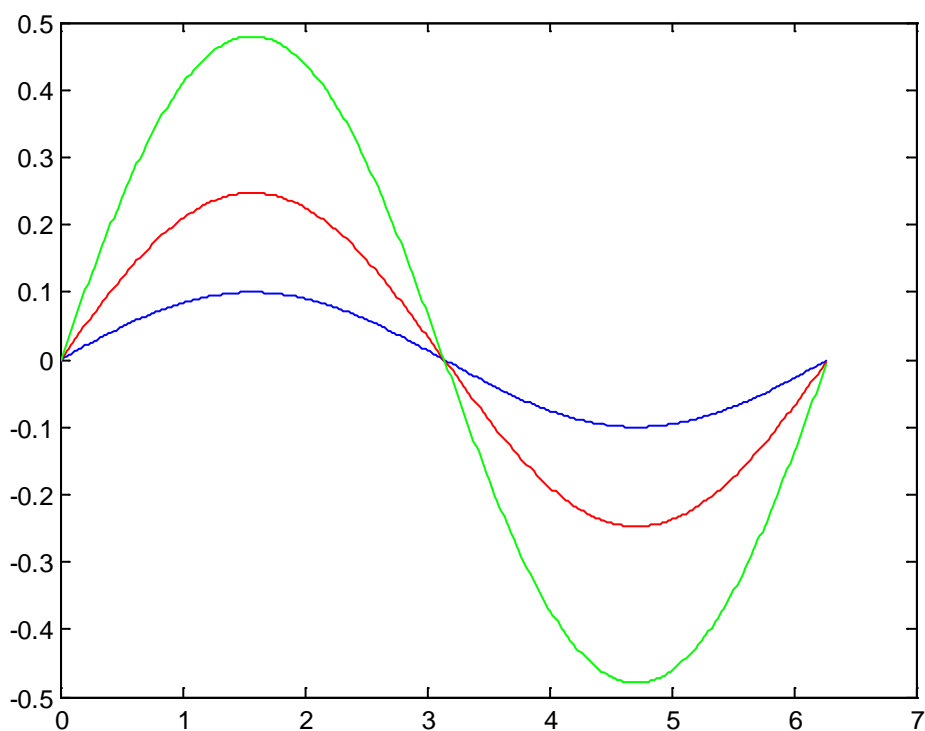
$$\sin \varphi(t) = l \cdot \sin \vartheta(t) \Rightarrow \varphi(t) = \arcsin(l \cdot \sin \vartheta(t)) \quad (4.3)$$

### Γωνία Διωστήρα με τον Άξονα X

Η μπλε γραμμή αντιστοιχεί για μήκος στροφάλου-διωστήρα  $l = \frac{l_1}{l_2} = 0,1$

Η κόκκινη γραμμή αντιστοιχεί για  $l = \frac{l_1}{l_2} = 0,25$

Η πράσινη γραμμή αντιστοιχεί για  $l = \frac{l_1}{l_2} = 0,5$



$$\varphi(t) = \arcsin(l \cdot \sin \vartheta(t)) \quad (4.3)$$

- Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνίας  $\vartheta(t)$  από 0 έως  $2 \cdot \pi$  rad .
- Στον κάθετο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνίας του διωστήρα.

### 4.3 Γωνιακή Ταχύτητα Διωστήρα

Η γωνιακή ταχύτητα του διωστήρα δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_2 = \dot{\varphi}(t) \quad (4.4)$$

Από τις σχέσεις (4.3), (4.4) έχουμε:

$$\omega_2 = \dot{\varphi}(t) = \frac{\partial}{\partial t} (\arcsin(l \cdot \sin \vartheta(t))) = \frac{l \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t)}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}}$$
$$\omega_2 = \dot{\varphi}(t) = \frac{l \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t)}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}} \quad (4.5)$$

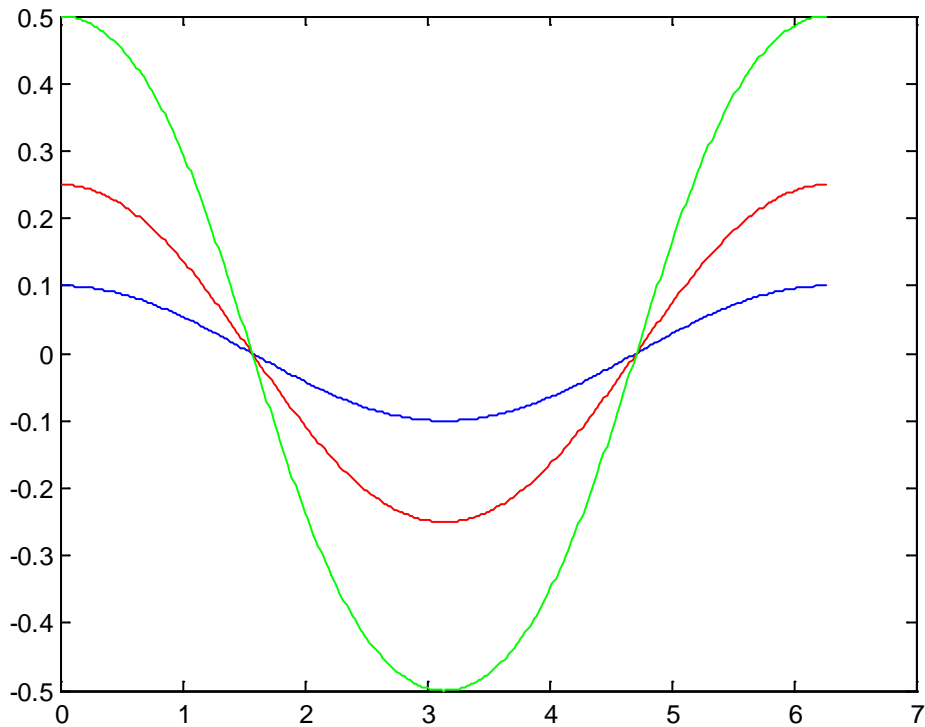
Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (4.5) με τον όρο  $\dot{\vartheta}(t)$ , προκύπτει η αδιαστατοποιημένη μορφή της γωνιακής ταχύτητας του διωστήρα:

$$\omega_{2a} = \frac{\omega_2}{\dot{\vartheta}(t)} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\dot{\vartheta}(t)} = \frac{l \cdot \cos \vartheta(t)}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}}$$

Αδιαστατοποιημένη μορφή της γωνιακής ταχύτητας του διωστήρα:

$$\omega_{2a} = \frac{l \cdot \cos \vartheta(t)}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}} \quad (4.6)$$

### Γωνιακή Ταχύτητα Διωστήρα



$$\omega_{2a} = \frac{l \cdot \cos \vartheta(t)}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}} \quad (4.6)$$

- Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνίας  $\vartheta(t)$  από 0 έως  $2 \cdot \pi$  rad .
- Στον κάθετο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας του διωστήρα.

Παρατηρείται ότι για γωνία στροφάλου 0,  $\pi$ ,  $2 \cdot \pi$  η γωνιακή ταχύτητα του διωστήρα παίρνει τις μέγιστες τιμές της

Για γωνία στροφάλου  $\frac{\pi}{2}$  και  $\frac{3 \cdot \pi}{2}$  παίρνει μηδενικές τιμές.



#### 4.4 Γωνιακή Επιτάχυνση Διωστήρα

$$a_2 = \ddot{\varphi}(t) \quad (4.7)$$

Από τις σχέσεις (4.3), (4.7) έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{\partial}{\partial t^2} (\arcsin(l \cdot \sin \vartheta(t))) = \\ &= \frac{l^3 \cdot \cos \vartheta(t)^2 \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t)^2}{\sqrt{(1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2)^3}} - \frac{l \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t)^2}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} + \frac{l \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \ddot{\vartheta}(t)}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} \quad (4.8) \end{aligned}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (4.8) με τον όρο  $\dot{\vartheta}(t)^2$  προκύπτει η αδιαστατοποιημένη μορφή της γωνιακής επιτάχυνσης του διωστήρα:

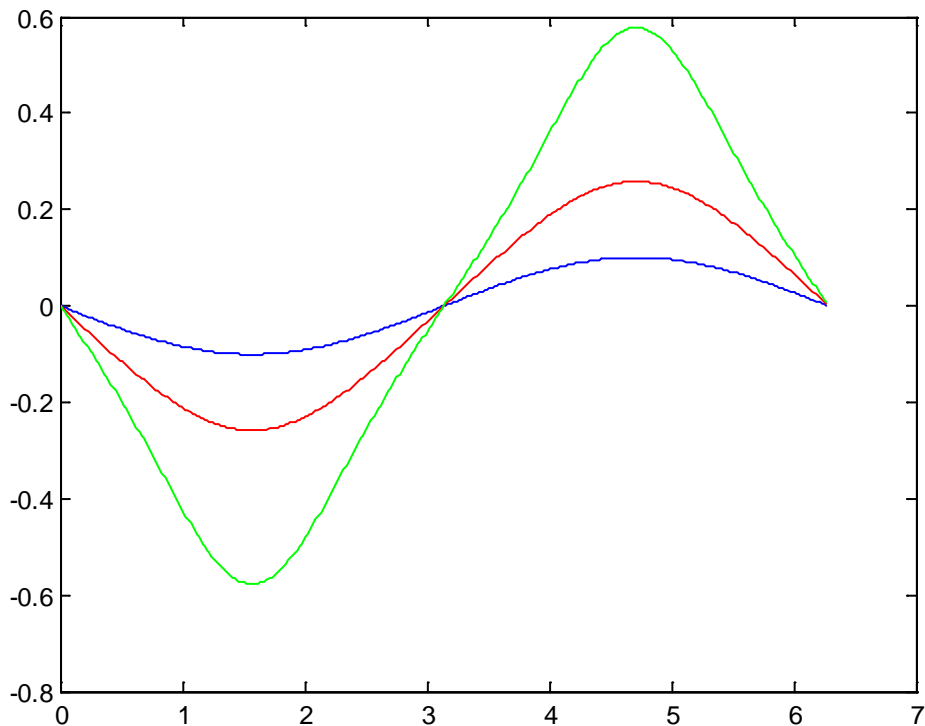
$$\begin{aligned} a_{2a} &= \frac{a_2}{\dot{\vartheta}(t)^2} = \frac{\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\vartheta}(t)^2} = \\ &= \frac{l^3 \cdot \cos \vartheta(t)^2 \cdot \sin \vartheta(t)}{\sqrt{(1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2)^3}} - \frac{l \cdot \sin \vartheta(t)}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} + \frac{l \cdot \cos \vartheta(t)}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} \cdot \frac{\ddot{\vartheta}(t)}{\dot{\vartheta}(t)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Όμως: } \frac{\ddot{\vartheta}(t)}{\dot{\vartheta}(t)^2} \ll 1 \Rightarrow \frac{\ddot{\vartheta}(t)}{\dot{\vartheta}(t)^2} \rightarrow 0$$

Άρα η αδιαστατοποιημένη μορφή της γωνιακής επιτάχυνσης του διωστήρα είναι:

$$a_{2a} = \frac{l^3 \cdot \cos \vartheta(t)^2 \cdot \sin \vartheta(t)}{\sqrt{(1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2)^3}} - \frac{l \cdot \sin \vartheta(t)}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} \quad (4.9)$$

## Γωνιακή Επιτάχυνση Διωστήρα



$$a_{2a} = \frac{l^3 \cdot \cos \vartheta(t)^2 \cdot \sin \vartheta(t)}{\sqrt{(1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2)^3}} - \frac{l \cdot \sin \vartheta(t)}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} \quad (4.9)$$

- Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνίας  $\vartheta(t)$  από 0 έως  $2 \cdot \pi$  rad .
- Στον κάθετο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνιακής επιτάχυνσης του διωστήρα.

Παρατηρείται ότι για γωνία στροφάλου 0,  $\pi$ ,  $2 \cdot \pi$  η γωνιακή επιτάχυνση του διωστήρα μηδενίζεται.

Για γωνία στροφάλου  $\frac{\pi}{2}$  και  $\frac{3 \cdot \pi}{2}$  παίρνει τις μέγιστες τιμές της.

#### 4.5 Θέση Εμβόλου

Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει:

$$x_E = l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + l_2 \cdot \cos \varphi(t) \Rightarrow x_E = l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + l_2 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)} \quad (4.10)$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον όρο  $l_2$  προκύπτει η αδιαστατοποιημένη μορφή της θέσης του εμβόλου:

$$x_{Ea} = \frac{x_E}{l_2} = l \cdot \cos \vartheta(t) + \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)} \quad (4.11)$$

#### 4.6 Ταχύτητα Εμβόλου

$$v_E = \dot{x}_E \quad (4.12)$$

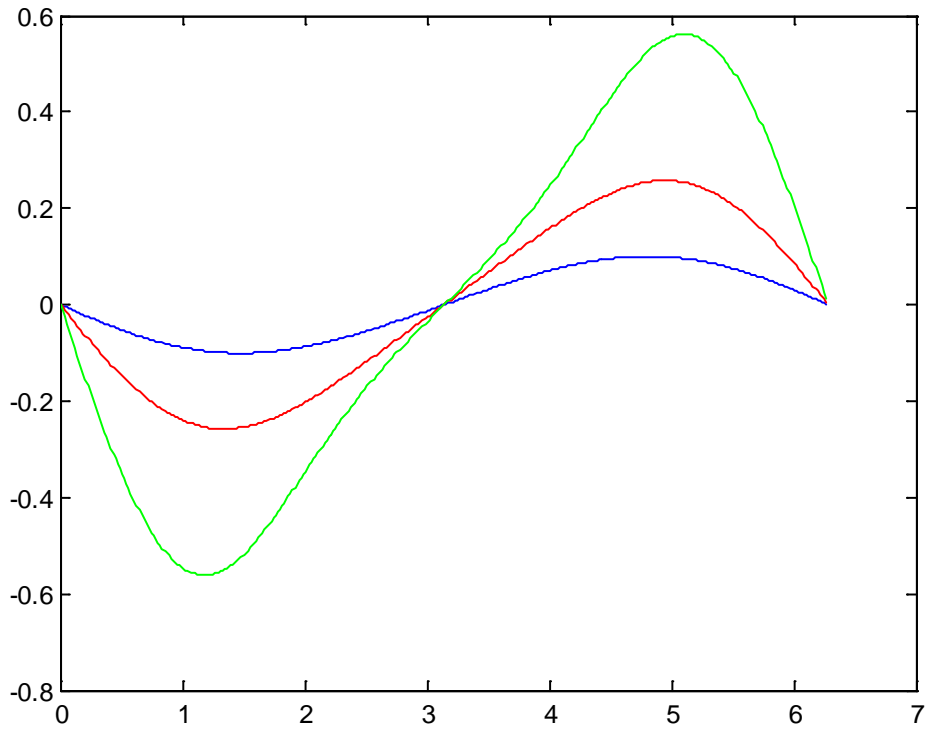
Από τις σχέσεις (4.10), (4.12) έχουμε:

$$\begin{aligned} v_E &= \frac{\partial}{\partial t} \left( l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + l_2 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)} \right) = \\ &= l_1 \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t) - \frac{l_2 \cdot l^2 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t)}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}} \quad (4.13) \end{aligned}$$

Διαιρώντας και τα δυο μέλη της εξίσωσης (4.13) με τον όρο  $l_2 \cdot \dot{\vartheta}(t)$  προκύπτει η αδιαστατοποιημένη μορφή της ταχύτητας του εμβόλου:

$$v_{Ea} = \frac{v_E}{l_2 \cdot \dot{\vartheta}(t)} = l \cdot \sin \vartheta(t) - \frac{l^2 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \sin \vartheta(t)}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}} \quad (4.14)$$

## Ταχύτητα Εμβόλου



$$v_{Ea} = \frac{v_E}{l_2 \cdot \dot{\vartheta}(t)} = l \cdot \sin \vartheta(t) - \frac{l^2 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \sin \vartheta(t)}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}} \quad (4.14)$$

- Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνίας  $\vartheta(t)$  από 0 έως  $2 \cdot \pi$  rad .
- Στον κάθετο άξονα φαίνεται η μεταβολή της ταχύτητας του εμβόλου.

Παρατηρείται ότι για γωνία στροφάλου 0,  $\pi$ ,  $2 \cdot \pi$  η ταχύτητα του εμβόλου μηδενίζεται (αλλαγή φοράς κίνησης).

Για γωνία στροφάλου  $\frac{\pi}{2}$  και  $\frac{3 \cdot \pi}{2}$  παίρνει τις μέγιστες τιμές της.

#### 4.7 Επιτάχυνση Εμβόλου

$$\alpha_E = \ddot{x}_E \quad (4.15)$$

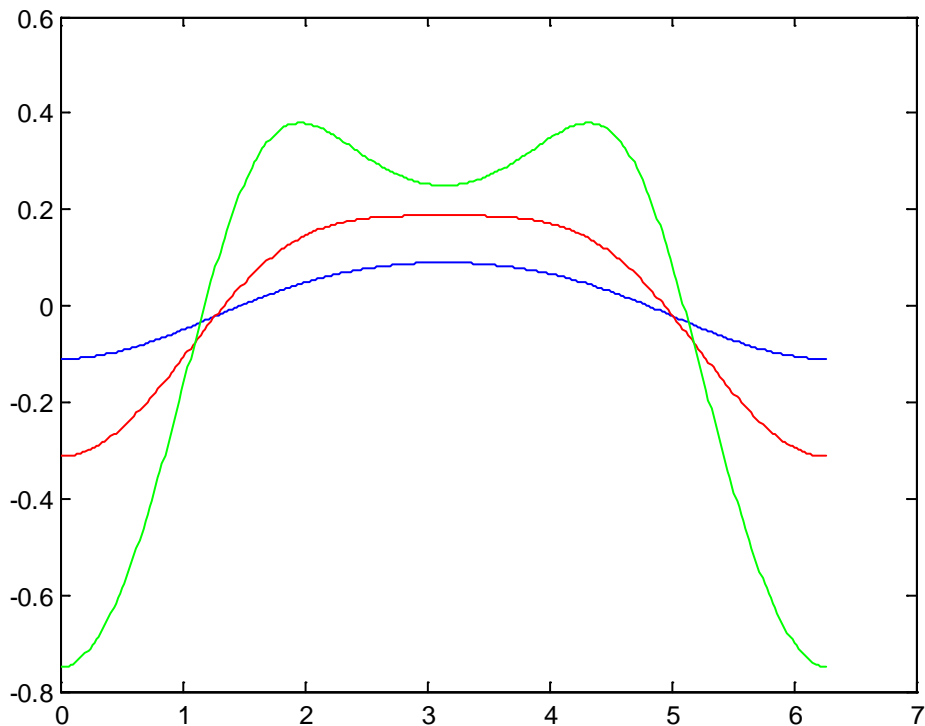
Από τις σχέσεις (4.10), (4.15) έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_E &= \frac{\partial}{\partial t^2} \left( l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + l_2 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)} \right) = \\ &= -l_1 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t)^2 - \frac{l_2 \cdot l^4 \cdot \cos^2 \vartheta(t) \cdot \sin^2 \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t)^2}{\sqrt{(1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t))^3}} - \frac{l_2 \cdot l^2 \cdot \cos \vartheta(t)^2 \cdot \dot{\vartheta}(t)^2}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}} + \\ &+ \frac{l_2 \cdot l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2 \cdot \dot{\vartheta}(t)^2}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}} - l_1 \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \ddot{\vartheta}(t) - \frac{l_2 \cdot l^2 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \ddot{\vartheta}(t)}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}} \end{aligned}$$

Διαιρώντας και τα δυο μέλη της εξίσωσης (4.16) με τον όρο  $l_2 \cdot \dot{\vartheta}(t)^2$  και λαμβάνοντας υπόψιν ότι  $\ddot{\vartheta}(t) \ll \dot{\vartheta}(t)^2 \Rightarrow \frac{\ddot{\vartheta}(t)}{\dot{\vartheta}(t)^2} \rightarrow 0$  προκύπτει η αδιαστατοποιημένη μορφή της επιτάχυνσης του εμβόλου:

$$\begin{aligned} \alpha_{Ea} &= \frac{\alpha_E}{l_2 \cdot \dot{\vartheta}(t)^2} = \\ &= -l \cdot \cos \vartheta(t) - \frac{l^4 \cdot \cos^2 \vartheta(t)^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)^2}{\sqrt{(1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t))^3}} - \frac{l^2 \cdot \cos \vartheta(t)^2}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}} + \frac{l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}} \quad (4.17) \end{aligned}$$

## Επιτάχυνση Εμβόλου



$$\alpha_{Ea} = \frac{\alpha_E}{l_2 \cdot \dot{\vartheta}(t)^2} = -l \cdot \cos \vartheta(t) - \frac{l^4 \cdot \cos \vartheta(t)^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}{\sqrt{(1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2)^3}} - \frac{l^2 \cdot \cos \vartheta(t)^2}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} + \frac{l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} \quad (4.17)$$

- Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνίας  $\vartheta(t)$  από 0 έως  $2 \cdot \pi$  rad .
- Στον κάθετο άξονα φαίνεται η μεταβολή της επιτάχυνσης του εμβόλου.

Για γωνία στροφάλου  $\frac{\pi}{2}$  και  $\frac{3 \cdot \pi}{2}$  η επιτάχυνση του εμβόλου μηδενίζεται.

Παρατηρείται ότι για γωνία στροφάλου 0,  $\pi$ ,  $2 \cdot \pi$  οι επιτάχυνση παίρνει τις μέγιστες τιμές της.

Μάλιστα για λόγο στροφάλου διωστήρα  $l = \frac{l_1}{l_2} = 0,5$  φαίνεται μια καμπή στην επιτάχυνση στο σημείο  $\pi$  και εμφάνιση της μέγιστης επιτάχυνσης στα δυο σημεία δεξιά και αριστερά του σημείου  $\pi$ .

#### 4.8 Θέση Κέντρου Μάζας του Συστήματος

i) Θέση κέντρου μάζας του στροφάλου

Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει:

Για τον άξονα X:

$$x_{g1} = r_1 \cdot \cos \vartheta(t) \quad (4.18)$$

Για τον άξονα Y:

$$y_{g1} = r_1 \cdot \sin \vartheta(t) \quad (4.19)$$

ii) Θέση κέντρου μάζας του διωστήρα

Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει:

Για τον άξονα X:

$$x_{g2} = l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + r_2 \cdot \cos \varphi(t) \quad (4.20)$$

Αντικαθιστώντας το  $\cos \varphi(t)$  από τη σχέση (4.2) προκύπτει:

$$x_{g2} = l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + r_2 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)} \quad (4.21)$$

Για τον άξονα Y:

$$y_{g2} = l_1 \cdot \sin \vartheta(t) - r_2 \cdot \sin \varphi(t) \quad (4.22)$$

Αντικαθιστώντας το  $\sin \varphi(t)$  από τη σχέση (4.1) προκύπτει:

$$y_{g2} = l_1 \cdot \sin \vartheta(t) - r_2 \cdot l \cdot \sin \vartheta(t) \quad (4.23)$$



iii) Θέση Κέντρου μάζας του εμβόλου:

Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει:

Για τον άξονα X:

$$x_{g3} = l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + l_2 \cdot \cos \varphi(t) \quad (4.24)$$

Αντικαθιστώντας το  $\cos \varphi(t)$  από τη σχέση (4.2) προκύπτει:

$$x_{g3} = l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + l_2 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)} \quad (4.25)$$

Για τον άξονα Y:

$$y_{g3} = 0 \quad (4.26)$$

Από τον ορισμό του κέντρου μάζας ενός συστήματος είναι:

$$r_g = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot r_{gi}}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (4.27)$$

Από τις σχέσεις (4.18), (4.21), (4.25) και (4.27) για τον άξονα X προκύπτει:

$$\begin{aligned} x_g &= \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \cdot x_{gi}}{\sum_{i=1}^3 m_i} \Rightarrow x_g = \frac{m_1 \cdot x_{g1} + m_2 \cdot x_{g2} + m_3 \cdot x_{g3}}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_g = \frac{m_1 \cdot (r_1 \cdot \cos \vartheta(t)) + m_2 \cdot \left( l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + r_2 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)} \right)}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (4.28) \\ &+ \frac{m_3 \cdot \left( l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + l_2 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)} \right)}{m_1 + m_2 + m_3} \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (4.19), (4.23),(4.26) και (4.27) για τον άξονα Y προκύπτει:

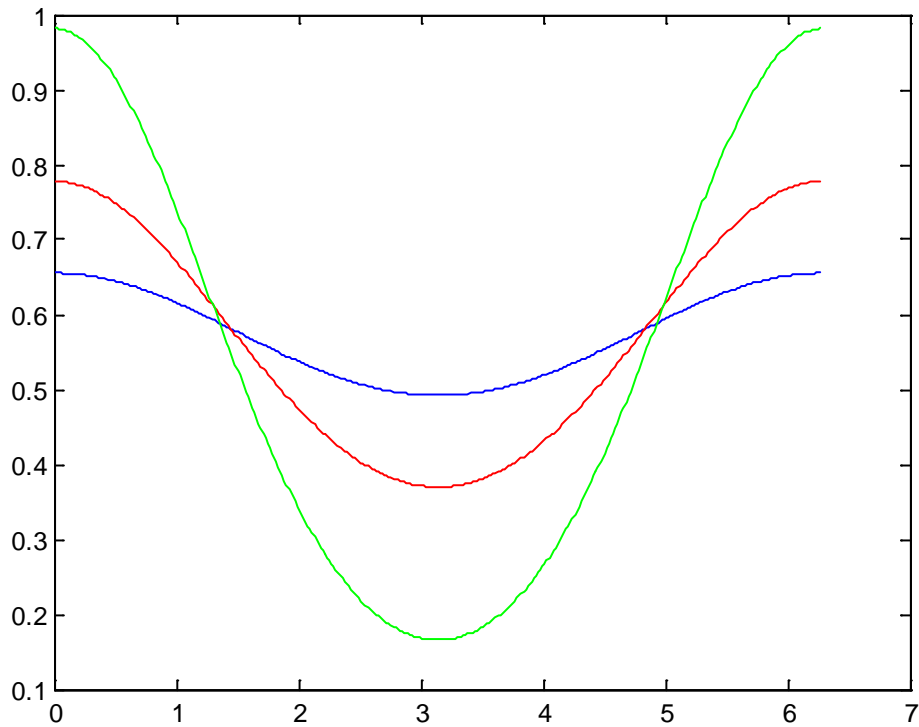
$$\begin{aligned}
 y_g &= \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \cdot y_{gi}}{\sum_{i=1}^3 m_i} \Rightarrow y_g = \frac{m_1 \cdot y_{g1} + m_2 \cdot y_{g2} + m_3 \cdot y_{g3}}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow \\
 \Rightarrow y_g &= \frac{m_1 \cdot (r_1 \cdot \sin \vartheta(t)) + m_2 \cdot (l_1 \cdot \sin \vartheta(t) - r_2 \cdot l \cdot \sin \vartheta(t)) + m_3 \cdot 0}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow \quad (4.29) \\
 \Rightarrow y_g &= \frac{m_1 \cdot (r_1 \cdot \sin \vartheta(t)) + m_2 \cdot (l_1 \cdot \sin \vartheta(t) - r_2 \cdot l \cdot \sin \vartheta(t))}{m_1 + m_2 + m_3}
 \end{aligned}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη των εξισώσεων (4.28), (4.29) με τον όρο  $l_2$  προκύπτει η αδιαστατοποιημένη μορφή της θέσης του κέντρου μάζας:

$$\begin{aligned}
 \chi_{ga} &= \frac{\chi_g}{l_2} = \frac{m_1 \cdot \left( \frac{r_1}{l_2} \cdot \cos \vartheta(t) \right) + m_2 \cdot \left( l \cdot \cos \vartheta(t) + \frac{r_2}{l_2} \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)} \right)}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (4.30) \\
 &+ \frac{m_3 \cdot \left( l \cdot \cos \vartheta(t) + \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)} \right)}{m_1 + m_2 + m_3}
 \end{aligned}$$

$$y_{ga} = \frac{y_g}{l_2} = \frac{m_1 \cdot \left( \frac{r_1}{l_2} \cdot \sin \vartheta(t) \right) + m_2 \cdot \left( l \cdot \sin \vartheta(t) - \frac{r_2}{l_2} \cdot l \cdot \sin \vartheta(t) \right)}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (4.31)$$

### Θέση Κέντρου Μάζας του Συστήματος στον Άξονα X

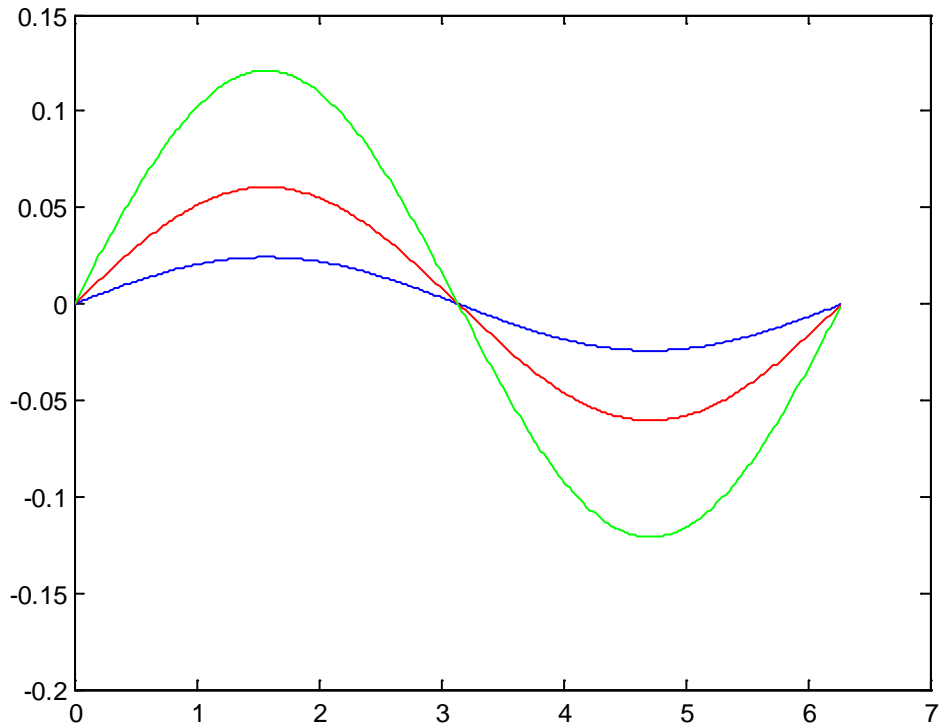


$$\chi_{ga} = \frac{\chi_g}{l_2} = \frac{m_1 \cdot \left( \frac{r_1}{l_2} \cdot \cos \vartheta(t) \right) + m_2 \cdot \left( l \cdot \cos \vartheta(t) + \frac{r_2}{l_2} \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)} \right)}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (4.30)$$

$$+ \frac{m_3 \cdot \left( l \cdot \cos \vartheta(t) + \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)} \right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

- Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνίας  $\vartheta(t)$  από 0 έως  $2 \cdot \pi$  rad .
- Στον κάθετο άξονα φαίνεται η θέση του κέντρου μάζας στον άξονα X.

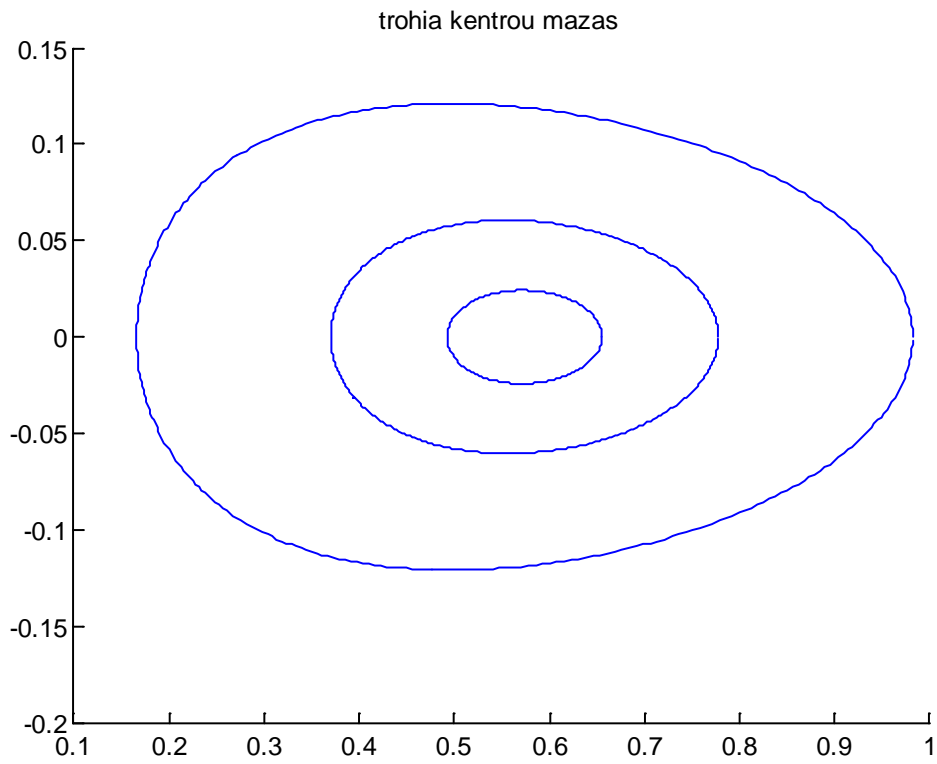
### Θέση Κέντρου Μάζας του Συστήματος στον Άξονα Y



$$y_{ga} = \frac{y_g}{l_2} = \frac{m_1 \cdot \left( \frac{r_1}{l_2} \cdot \sin \vartheta(t) \right) + m_2 \cdot \left( l \cdot \sin \vartheta(t) - \frac{r_2}{l_2} \cdot l \cdot \sin \vartheta(t) \right)}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (4.31)$$

- Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνίας  $\vartheta(t)$  από 0 έως  $2 \cdot \pi$  rad .
- Στον κάθετο άξονα φαίνεται η θέση του κέντρου μάζας στον άξονα Y.

## Τροχιά Κέντρου Μάζας



- Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η θέση του κέντρου μάζας στον άξονα X.
- Στον κάθετο άξονα φαίνεται η θέση του κέντρου μάζας στον άξονα Y.

#### 4.9 Ταχύτητα Κέντρου Μάζας του Συστήματος

$$v_{xg} = \dot{\chi}_g \quad (4.32)$$

Από τις σχέσεις (4.28), (4.32) προκύπτει:

$$v_{xg} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_1 \cdot (r_1 \cdot \cos \vartheta(t)) + m_2 \cdot (l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + r_2 \cdot \sqrt{1-l^2} \cdot \sin \vartheta(t)^2)}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{m_3 \cdot (l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + l_2 \cdot \sqrt{1-l^2} \cdot \sin \vartheta(t)^2)}{m_1 + m_2 + m_3} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{xg} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left( \begin{aligned} & -m_1 \cdot (r_1 \cdot \sin \vartheta(t)) \cdot \dot{\vartheta}(t) + \\ & + m_2 \cdot \left( -l_1 \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t) - \frac{r_2 \cdot l^2 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t)}{\sqrt{1-l^2} \cdot \sin \vartheta(t)^2} \right) + \\ & + m_3 \cdot \left( -l_1 \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t) - \frac{l_2 \cdot l^2 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t)}{\sqrt{1-l^2} \cdot \sin \vartheta(t)^2} \right) \end{aligned} \right)$$

$$v_{yg} = \dot{y}_g \quad (4.34)$$

Από τις σχέσεις (4.29), (4.34) προκύπτει:

$$v_{yg} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_1 \cdot (r_1 \cdot \sin \vartheta(t)) + m_2 \cdot (l_1 \cdot \sin \vartheta(t) - r_2 \cdot l \cdot \sin \vartheta(t))}{m_1 + m_2 + m_3} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{yg} = \frac{m_1 \cdot (r_1 \cdot \cos \vartheta(t)) \cdot \dot{\vartheta}(t) + m_2 \cdot (l_1 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t) - r_2 \cdot l \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t))}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (4.35)$$

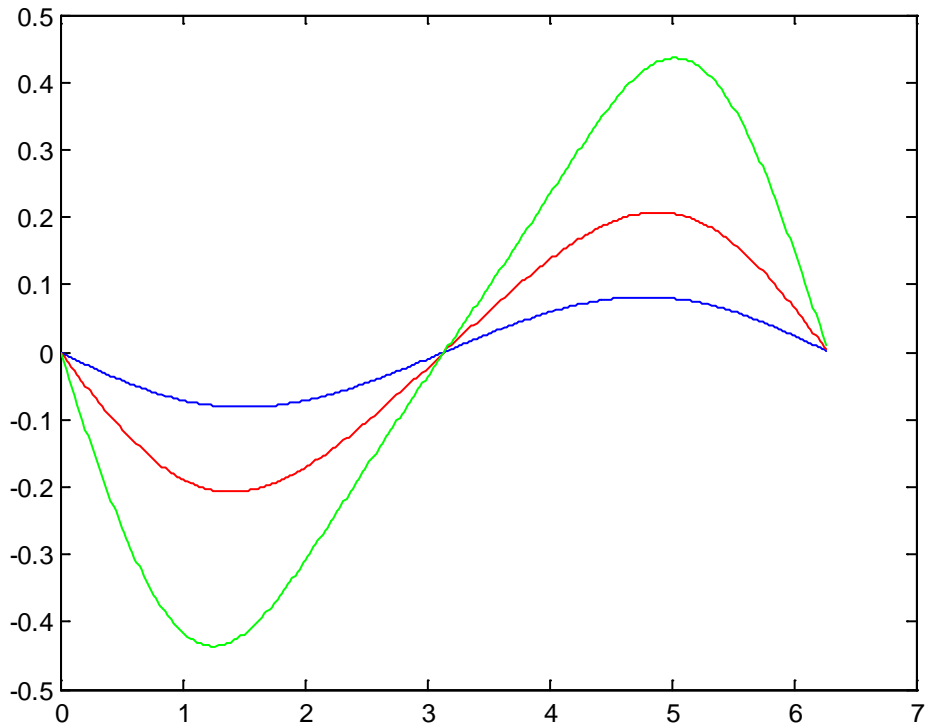
Διαιρώντας και τα δύο μέλη των εξισώσεων (4.33), (4.35) με τον όρο  $l_2 \cdot \dot{\vartheta}(t)$  προκύπτει η αδιαστατοποιημένη μορφή της ταχύτητας του κέντρου μάζας:

$$v_{xga} = \frac{v_{xg}}{l_2 \cdot \dot{\vartheta}(t)} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left( \begin{aligned} & -m_1 \cdot \left( \frac{r_1}{l_2} \cdot \sin \vartheta(t) \right) + \\ & + m_2 \cdot \left( -l \cdot \sin \vartheta(t) - \frac{\frac{r_2}{l_2} \cdot l^2 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \sin \vartheta(t)}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}} \right) + \\ & + m_3 \cdot \left( -l \cdot \sin \vartheta(t) - \frac{l^2 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \sin \vartheta(t)}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}} \right) \end{aligned} \right) \quad (4.36)$$

$\sqrt{\hspace{10em}}$

$$v_{yga} = \frac{v_{yg}}{l_2 \cdot \dot{\vartheta}(t)} = \frac{m_1 \cdot \left( \frac{r_1}{l_2} \cdot \cos \vartheta(t) \right) + m_2 \cdot \left( l \cdot \cos \vartheta(t) - \frac{r_2}{l_2} \cdot l \cdot \cos \vartheta(t) \right)}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (4.37)$$

### Ταχύτητα Κέντρου Μάζας του Συστήματος στον Άξονα X



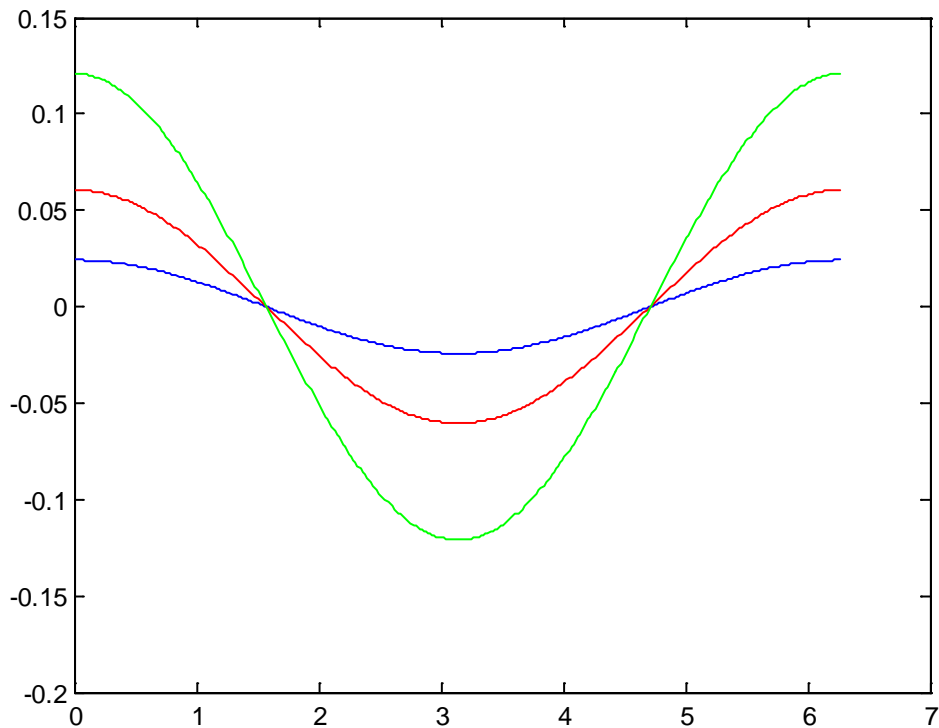
$$v_{xga} = \frac{v_{xg}}{l_2 \cdot \dot{\vartheta}(t)} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left( \begin{array}{l} -m_1 \cdot \left( \frac{r_1}{l_2} \cdot \sin \vartheta(t) \right) + \\ +m_2 \cdot \left( -l \cdot \sin \vartheta(t) - \frac{\frac{r_2}{l_2} \cdot l^2 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \sin \vartheta(t)}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}} \right) + \\ +m_3 \cdot \left( -l \cdot \sin \vartheta(t) - \frac{l^2 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \sin \vartheta(t)}{\sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)}} \right) \end{array} \right) \quad (4.36)$$

- Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνίας  $\vartheta(t)$  από 0 έως  $2 \cdot \pi$  rad .
- Στον κάθετο άξονα φαίνεται η μεταβολή της ταχύτητας του κέντρου μάζας του συστήματος στον άξονα X.

Η ταχύτητα είναι μηδέν στα σημεία που αλλάζει κατεύθυνση η συνολική κίνηση του μηχανισμού στον άξονα X.



### Ταχύτητα Κέντρου Μάζας του Συστήματος στον Άξονα Υ

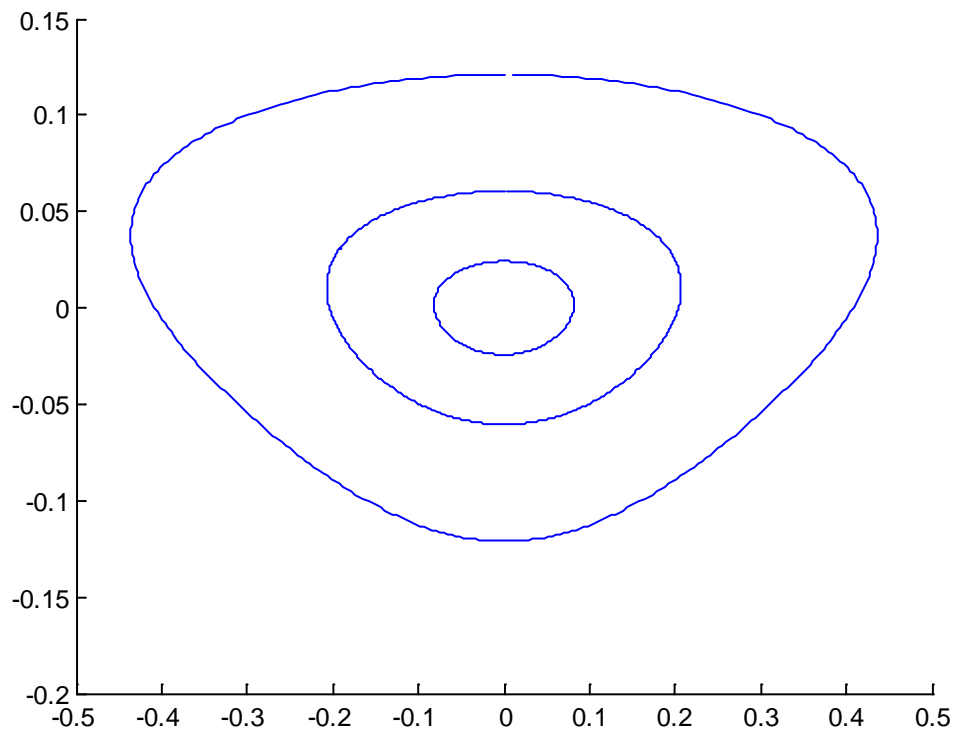


$$v_{yga} = \frac{v_{yg}}{l_2 \cdot \dot{\vartheta}(t)} = \frac{m_1 \cdot \left( \frac{r_1}{l_2} \cdot \cos \vartheta(t) \right) + m_2 \cdot \left( l \cdot \cos \vartheta(t) - \frac{r_2}{l_2} \cdot l \cdot \cos \vartheta(t) \right)}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (4.37)$$

- Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνίας  $\vartheta(t)$  από 0 έως  $2 \cdot \pi$  rad .
- Στον κάθετο άξονα φαίνεται η μεταβολή της ταχύτητας του κέντρου μάζας του συστήματος στον άξονα Υ.

Η ταχύτητα είναι μηδέν στα σημεία που αλλάζει κατεύθυνση η συνολική κίνηση του μηχανισμού στον άξονα Υ.

### Τροχιά Ταχύτητας Κέντρου Μάζας του Συστήματος



- Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η ταχύτητα του κέντρου μάζας στον άξονα X.
- Στον κάθετο άξονα φαίνεται η ταχύτητα του κέντρου μάζας στον άξονα Y.

#### 4.10 Επιτάχυνση Κέντρου Μάζας του Συστήματος

$$\alpha_{xg} = \ddot{\chi}_g \quad (4.38)$$

Από τις σχέσεις (4.28), (4.38) προκύπτει:

$$\alpha_{xg} = \frac{\partial}{\partial t^2} \left( \frac{m_1 \cdot (r_1 \cdot \cos \vartheta(t)) + m_2 \cdot (l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + r_2 \cdot \sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2})}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{m_3 \cdot (l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + l_2 \cdot \sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2})}{m_1 + m_2 + m_3} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{xg} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left( -m_1 \cdot (r_1 \cdot \cos \vartheta(t)) \cdot \dot{\vartheta}(t)^2 - m_1 \cdot (r_1 \cdot \sin \vartheta(t)) \cdot \ddot{\vartheta}(t) \right. \\ \left. + m_2 \cdot \left( \frac{-l_1 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t)^2 - \frac{r_2 \cdot l^4 \cdot \cos \vartheta(t)^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2 \cdot \dot{\vartheta}(t)^2}{\sqrt{(1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2)^3}}}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} + \frac{r_2 \cdot l^2 \cdot \cos \vartheta(t)^2 \cdot \dot{\vartheta}(t)^2}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} + \frac{r_2 \cdot l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2 \cdot \dot{\vartheta}(t)^2}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} - \right. \\ \left. -l_1 \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \ddot{\vartheta}(t) - \frac{r_2 \cdot l^2 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \ddot{\vartheta}(t)}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} \right) + \\ \left. + m_3 \cdot \left( \frac{-l_1 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t)^2 - \frac{l_2 \cdot l^4 \cdot \cos \vartheta(t)^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2 \cdot \dot{\vartheta}(t)^2}{\sqrt{(1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2)^3}}}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} + \frac{l_2 \cdot l^2 \cdot \cos \vartheta(t)^2 \cdot \dot{\vartheta}(t)^2}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} + \frac{l_2 \cdot l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2 \cdot \dot{\vartheta}(t)^2}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} - \right. \\ \left. -l_1 \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \ddot{\vartheta}(t) - \frac{l_2 \cdot l^2 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \ddot{\vartheta}(t)}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} \right) \right)$$

$$\alpha_{yg} = \ddot{y}_g \quad (4.40)$$

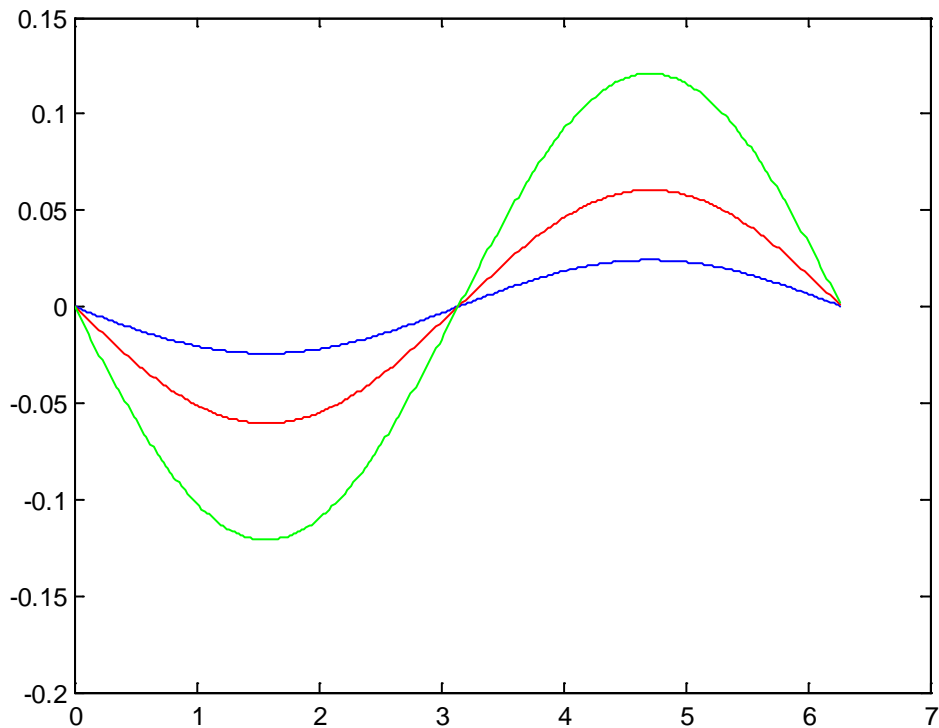
Από τις σχέσεις (4.29), (4.40) προκύπτει

$$\begin{aligned} \alpha_{yg} &= \frac{\partial}{\partial t^2} \left( \frac{m_1 \cdot (r_1 \cdot \sin \vartheta(t)) + m_2 \cdot (l_1 \cdot \sin \vartheta(t) - r_2 \cdot l \cdot \sin \vartheta(t))}{m_1 + m_2 + m_3} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_{yg} &= \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left( \begin{aligned} &-m_1 \cdot (r_1 \cdot \sin \vartheta(t)) \cdot \dot{\vartheta}(t)^2 + m_1 \cdot (r_1 \cdot \cos \vartheta(t)) \cdot \ddot{\vartheta}(t) + \\ &+ m_2 \cdot \left( \begin{aligned} &-l_1 \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t)^2 + r_2 \cdot l \cdot \sin \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t)^2 + \\ &+ l_1 \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \ddot{\vartheta}(t) - r_2 \cdot l \cdot \cos \vartheta(t) \cdot \ddot{\vartheta}(t) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \quad (4.41) \end{aligned}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη των εξισώσεων (4.39), (4.41) με τον όρο  $l_2 \cdot \dot{\vartheta}(t)^2$  προκύπτει η αδιαστατοποιημένη μορφή της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας:

$$\begin{aligned} \alpha_{xga} &= \frac{\alpha_{xg}}{l_2 \cdot \dot{\vartheta}(t)^2} \\ \Rightarrow \alpha_{xga} &= \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left( \begin{aligned} &-m_1 \cdot \left( \frac{r_1}{l_2} \cdot \cos \vartheta(t) \right) + \\ &+ m_2 \cdot \left( \begin{aligned} &-l \cdot \cos \vartheta(t) - \frac{\frac{r_2}{l_2} \cdot l^4 \cdot \cos \vartheta(t)^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}{\sqrt{(1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2)^3}} - \\ &\frac{\frac{r_2}{l_2} \cdot l^2 \cdot \cos \vartheta(t)^2}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} + \frac{\frac{r_2}{l_2} \cdot l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} \end{aligned} \right) + \\ &+ m_3 \cdot \left( \begin{aligned} &-l \cdot \cos \vartheta(t) - \frac{l^4 \cdot \cos \vartheta(t)^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}{\sqrt{(1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2)^3}} - \\ &\frac{l^2 \cdot \cos \vartheta(t)^2}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} + \frac{l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}{\sqrt{1-l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \quad (4.42) \end{aligned}$$

## Επιτάχυνση Κέντρου Μάζας του Συστήματος στον Άξονα Y



$$\alpha_{yga} = \frac{\alpha_{yg}}{l_2 \cdot \dot{\vartheta}(t)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{yga} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left( -m_1 \cdot \left( \frac{r_1}{l_2} \cdot \sin \vartheta(t) \right) + m_2 \cdot \left( -l \cdot \sin \vartheta(t) + \frac{r_2}{l_2} \cdot l \cdot \sin \vartheta(t) \right) \right) \quad (4.43)$$

- Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνίας  $\vartheta(t)$  από 0 έως  $2 \cdot \pi$  rad .
- Στον κάθετο άξονα φαίνεται η μεταβολή της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του συστήματος στον άξονα Y.

Στα σημεία που η ταχύτητα του κέντρου μάζας στον άξονα Y είναι μηδέν η επιτάχυνση είναι μέγιστη και εκεί που η ταχύτητα είναι μέγιστη, η επιτάχυνση είναι 0.

#### 4.11 Δυνάμεις στις Αρθρώσεις και Κινητήρια Ροπή

Στον στρόφαλο ενεργεί η κινητήρια ροπή . Η ροπή αυτή δημιουργεί δυνάμεις στις αρθρώσεις O, A, E οι οποίες προκαλούν την κίνηση του μηχανισμού στροφάλου-διωστήρα-εμβόλου. Για την εύρεση των δυνάμεων αυτών, είναι αναγκαίο να κατασκευασθούν τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος για το κάθε τμήμα του μηχανισμού χωριστά και τελικά να καταστρωθούν οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από αυτά. Τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος φαίνονται στο σχήμα .

$$O_x, O_y$$

είναι οι δυνάμεις που δημιουργούνται στην άρθρωση O στον άξονα X και Y αντίστοιχα

$$A_x, A_y$$

είναι οι δυνάμεις που δημιουργούνται στην άρθρωση A στον άξονα X και Y αντίστοιχα

$$E_x, E_y$$

είναι οι δυνάμεις που δημιουργούνται στην άρθρωση E στον άξονα X και Y αντίστοιχα

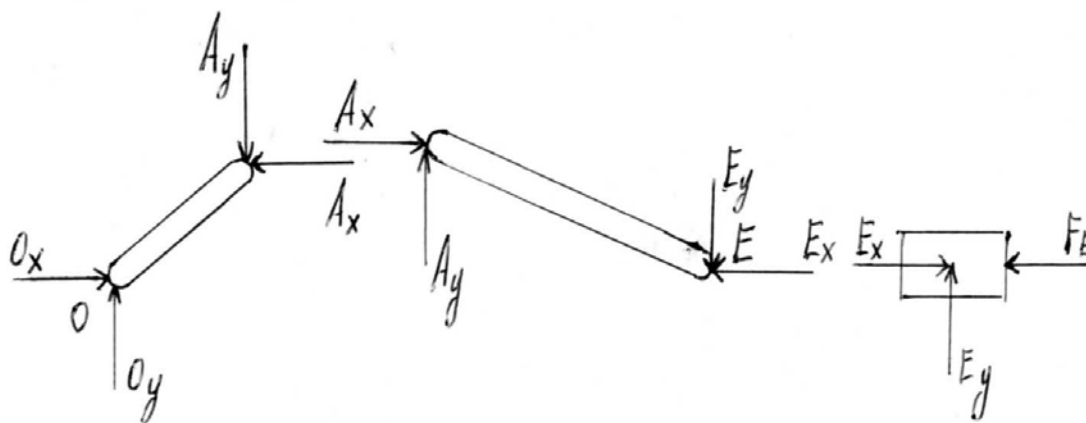
Όπως αναφέρθηκε θεωρείται ότι ο εξεταζόμενος μηχανισμός είναι τμήμα συμπιεστή με δύναμη αντίστασης  $f_E$ .

Δηλαδή ασκείται μία δύναμη  $f_E$  στο έμβολο στη διεύθυνση του άξονα X.

Ακόμη θεωρείται ότι οι τριβές είναι αμελητέες.

Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Euler, η κίνηση του κέντρου μάζας g, που δεν είναι αναγκαίο να συμπίπτει με κάποιο σημείο του συστήματος υλικών σημείων, είναι ίδια με την κίνηση που θα προέκυπτε, αν όλη η μάζα ήταν συγκεντρωμένη στο σημείο g και ήταν κάτω από την επίδραση της συνισταμένης εξωτερικής δύναμης F.

## Εξισώσεις Κίνησης Στροφάλου-Διωστήρα-Εμβόλου



Οι εξισώσεις που προκύπτουν από τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος είναι οι εξής:

Στρόφαλος

Άξονας X

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον στρόφαλο στον άξονα X είναι οι  $O_x, A_x$  και η συνισταμένη τους ισούται με τη μάζα του στροφάλου  $m_1$  επί την επιτάχυνση του κέντρου βάρους του στροφάλου στον άξονα X,  $\alpha_{g1x}$ .

$$O_x - A_x = m_1 \cdot \alpha_{g1x} \quad (4.44)$$

Άξονας Y

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον στρόφαλο στον άξονα Y είναι οι  $O_y, A_y$  και η συνισταμένη τους ισούται με τη μάζα του στροφάλου  $m_1$  επί την επιτάχυνση του κέντρου βάρους του στροφάλου στον άξονα Y,  $\alpha_{g1y}$ .

$$O_y - A_y = m_1 \cdot \alpha_{g1y} \quad (4.45)$$

Η δύναμη  $A_x$  προκαλεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής OZ του στροφάλου, που ισούται με το μέτρο της δύναμης  $A_x$  επί την κάθετη απόσταση της διεύθυνσης της δύναμης  $A_x$  από το επίπεδο OXZ.

$$\text{Ροπή της δύναμης } A_x : A_x \cdot l_1 \cdot \sin \vartheta(t)$$

Η δύναμη  $A_y$  προκαλεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής OZ του στροφάλου, που ισούται με το μέτρο της δύναμης  $A_y$  επί την κάθετη απόσταση της διεύθυνσης της δύναμης  $A_y$  από το επίπεδο OYZ.

$$\text{Ροπή της δύναμης } A_y : A_y \cdot l_1 \cdot \cos \vartheta(t)$$

Η ροπή αδράνειας του στροφάλου  $I_0$  επί τη γωνιακή επιτάχυνσή του  $\alpha_1$  ισούται με το άθροισμα των ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής OZ του στροφάλου.

$$I_0 \cdot \alpha_1 = M_0 + A_x \cdot l_1 \cdot \sin \vartheta(t) - A_y \cdot l_1 \cdot \cos \vartheta(t) \quad (4.46)$$

Διωστήρας

Άξονας X

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον διωστήρα στον άξονα X είναι οι  $A_x, E_x$  και η συνισταμένη τους ισούται με τη μάζα του διωστήρα  $m_2$  επί την επιτάχυνση του κέντρου βάρους του διωστήρα στον άξονα X,  $\alpha_{g2x}$ .

$$A_x - E_x = m_2 \cdot \alpha_{g2x} \quad (4.47)$$

Άξονας Y

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον διωστήρα στον άξονα Y είναι οι  $A_y, E_y$  και η συνισταμένη τους ισούται με τη μάζα του διωστήρα  $m_2$  επί την επιτάχυνση του κέντρου βάρους του διωστήρα στον άξονα Y,  $\alpha_{g2y}$ .

$$A_y - E_y = m_2 \cdot \alpha_{g2y} \quad (4.48)$$

Η δύναμη  $A_x$  προκαλεί ροπή ως προς το κέντρο βάρους του διωστήρα, που ισούται με το μέτρο της δύναμης  $A_x$  επί την κάθετη απόσταση της διεύθυνσης της δύναμης  $A_x$  από το κέντρο βάρους του διωστήρα.

$$\text{Ροπή της δύναμης } A_x : A_x \cdot r_2 \cdot \sin \varphi(t)$$

Η δύναμη  $A_y$  προκαλεί ροπή ως προς το κέντρο βάρους του διωστήρα, που ισούται με το μέτρο της δύναμης  $A_y$  επί την κάθετη απόσταση της διεύθυνσης της δύναμης  $A_y$  από το κέντρο βάρους του διωστήρα.

$$\text{Ροπή της δύναμης } A_y : A_y \cdot r_2 \cdot \cos \varphi(t)$$

Η δύναμη  $E_x$  προκαλεί ροπή ως προς το κέντρο βάρους του διωστήρα, που ισούται με το μέτρο της δύναμης  $E_x$  επί την κάθετη απόσταση της διεύθυνσης της δύναμης  $E_x$  από το κέντρο βάρους του διωστήρα.



$$\text{Ροπή της δύναμης } E_x: E_x \cdot (l_2 - r_2) \cdot \sin \varphi(t)$$

Η δύναμη  $E_y$  προκαλεί ροπή ως προς το κέντρο βάρους του διωστήρα, που ισούται με το μέτρο της δύναμης  $E_y$  επί την κάθετη απόσταση της διεύθυνσης της δύναμης  $E_y$  από το κέντρο βάρους του διωστήρα.

$$\text{Ροπή της δύναμης } E_y: E_y \cdot (l_2 - r_2) \cdot \cos \varphi(t)$$

Η ροπή αδράνειας του διωστήρα  $I_2$  επί τη γωνιακή επιτάχυνσή του  $\alpha_2$  ισούται με το άθροισμα των ροπών ως προς το κέντρο βάρους του διωστήρα.

$$\begin{aligned} I_2 \cdot \alpha_2 = & A_x \cdot r_2 \cdot \sin \varphi(t) + A_y \cdot r_2 \cdot \cos \varphi(t) + \\ & + E_x \cdot (l_2 - r_2) \cdot \sin \varphi(t) + E_y \cdot (l_2 - r_2) \cdot \cos \varphi(t) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Από την παραπάνω εξίσωση αντικαθιστώντας τα  $\sin \varphi(t), \cos \varphi(t)$  από τις σχέσεις προκύπτει:

$$\begin{aligned} I_2 \cdot \alpha_2 = & A_x \cdot r_2 \cdot \sin \vartheta(t) + A_y \cdot r_2 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)} + \\ & + E_x \cdot (l_2 - r_2) \cdot \sin \vartheta(t) + E_y \cdot (l_2 - r_2) \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)} \end{aligned} \quad (4.50)$$

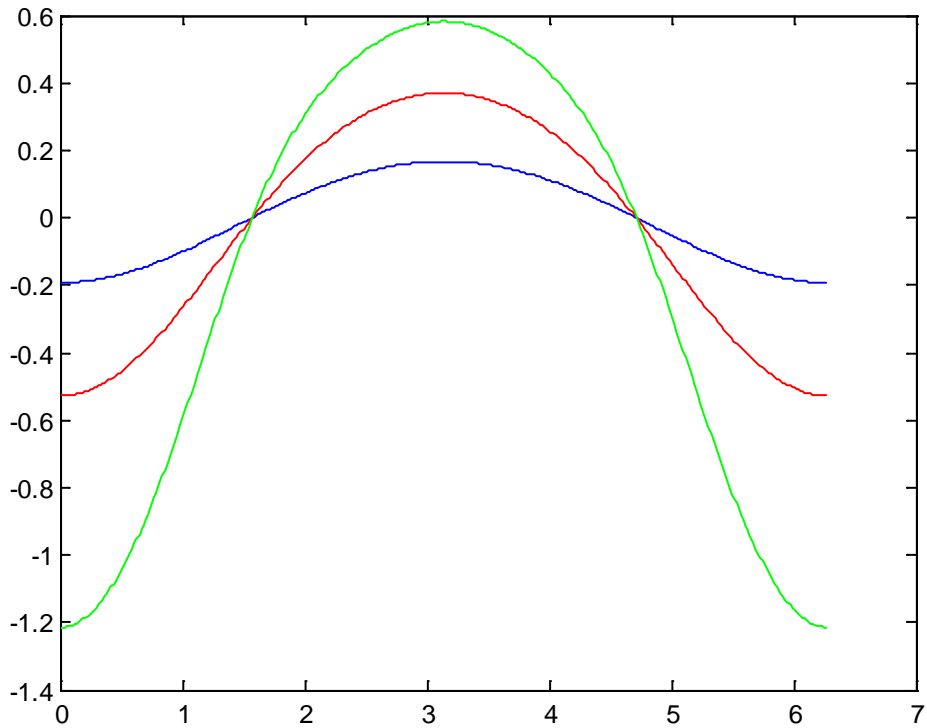
Έμβολο

Άξονας X

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον έμβολο στον άξονα X είναι οι  $E_x, F_E$  και η συνισταμένη τους ισούται με τη μάζα του εμβόλου  $m_3$  επί την επιτάχυνση του κέντρου βάρους του εμβόλου στον άξονα X,  $\alpha_{g3x}$ .

$$E_x - F_E = m_3 \cdot \alpha_{g3x} \quad (4.51)$$

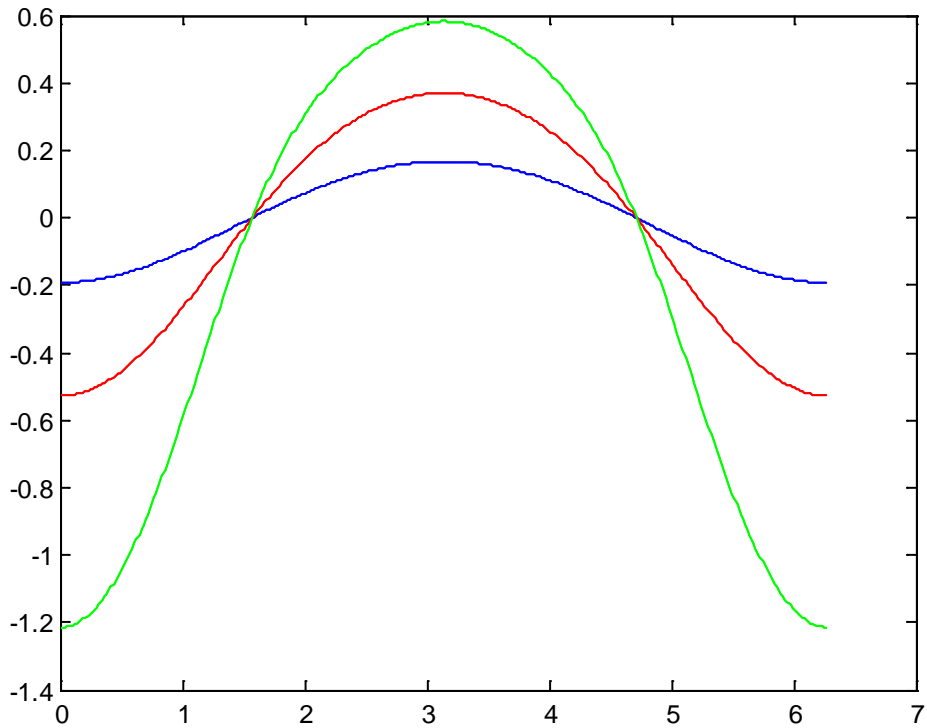
### Δυνάμεις στην άρθρωση O στον άξονα X



$$O_x = f_e + m_1 \cdot \alpha_{g1x} + m_2 \cdot \alpha_{g2x} + m_3 \cdot \alpha_{g3x} \quad (4.52)$$

- Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνίας  $\vartheta(t)$  από 0 έως  $2 \cdot \pi$  rad .
- Στον κάθετο άξονα φαίνεται η μεταβολή της δύναμης που αναπτύσσεται στην άρθρωση O στον άξονα X.

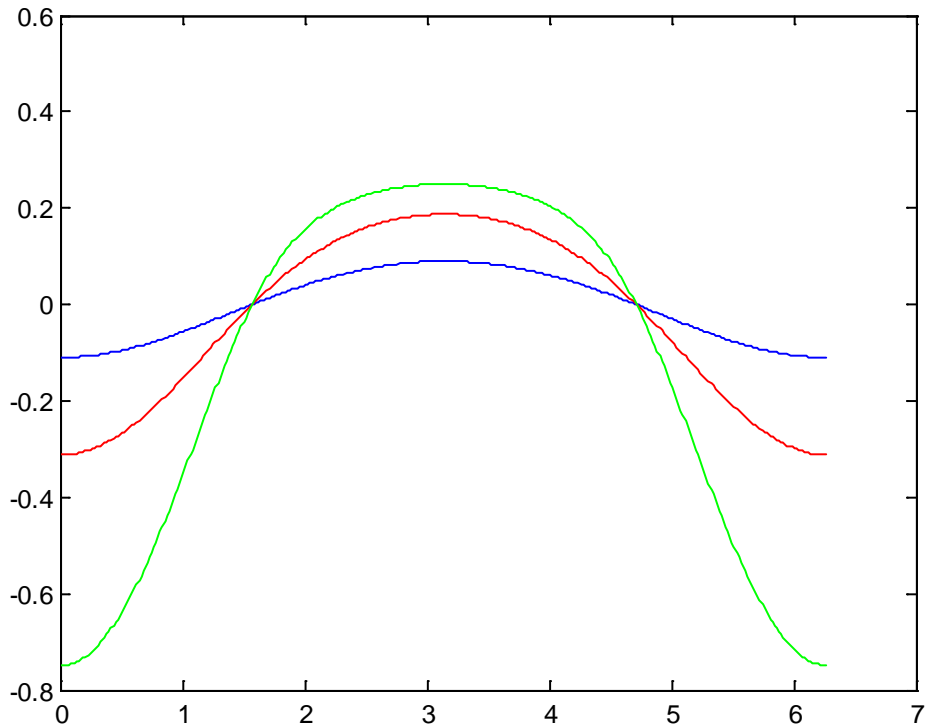
### Δυνάμεις στην άρθρωση A στον άξονα X



$$A_x = f_e + m_2 \cdot \alpha_{g2x} + m_3 \cdot \alpha_{g3x} \quad (4.53)$$

- Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνίας  $\vartheta(t)$  από 0 έως  $2 \cdot \pi$  rad .
- Στον κάθετο άξονα φαίνεται η μεταβολή της δύναμης που αναπτύσσεται στην άρθρωση A στον άξονα X.

### Δυνάμεις στην άρθρωση E στον άξονα X



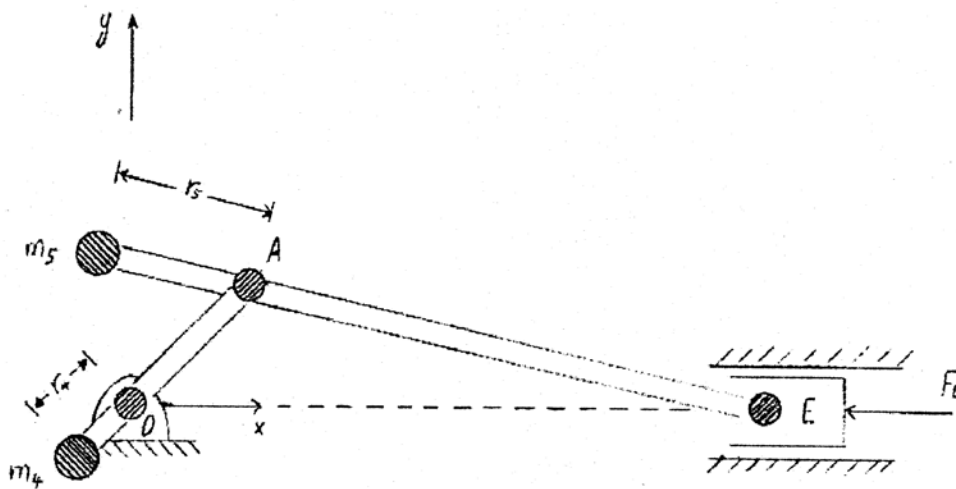
$$E_x = f_e + m_3 \cdot \alpha_{g3x} \quad (4.54)$$

- Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η μεταβολή της γωνίας  $\vartheta(t)$  από 0 έως  $2 \cdot \pi$  rad .
- Στον κάθετο άξονα φαίνεται η μεταβολή της δύναμης που αναπτύσσεται στην άρθρωση E στον άξονα X.

#### 4.12 Ακίνητοποίηση του κέντρου μάζας του συστήματος

Λόγω της περιστροφικής κίνησης του τροφάλου και του διωστήρα, δημιουργούνται ροπές, άρα και δυνάμεις, που ασκούνται στο πλαίσιο στήριξης του μηχανισμού.

Υπάρχει όμως η δυνατότητα, με προσθήκη μαζών στην προέκταση του τροφάλου και του διωστήρα, να ακίνητοποιήσουμε το κέντρο μάζας του συστήματος, με άμεσο αποτέλεσμα την εξουδετέρωση της συνισταμένης δύναμης που ασκείται επί του πλαισίου στήριξης του μηχανισμού.



Η θέση του κέντρου μάζας του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις:

$$x_{gm} = \frac{m_1 \cdot (r_1 \cdot \cos \vartheta(t)) - m_4 \cdot (r_4 \cdot \cos \vartheta(t)) + m_2 \cdot (l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + r_2 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)^2})}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} \sqrt{\quad}$$

$$+ \frac{m_5 \cdot (l_1 \cdot \cos \vartheta(t) - r_5 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)^2}) + m_3 \cdot (l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + l_2 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)^2})}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} \sqrt{\quad}$$

$$y_{gm} = \frac{m_1 \cdot (r_1 \cdot \sin \vartheta(t)) - m_4 \cdot (r_4 \cdot \sin \vartheta(t)) + m_2 \cdot (l_1 \cdot \sin \vartheta(t) - r_2 \cdot l \cdot \sin \vartheta(t))}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}$$

$$+ \frac{m_5 \cdot (l_1 \cdot \sin \vartheta(t) + r_5 \cdot l \cdot \sin \vartheta(t)) + m_3 \cdot 0}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις:

$$v_{xgm} = \dot{x}_{gm} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_1 \cdot (r_1 \cdot \cos \vartheta(t)) - m_4 \cdot (r_4 \cdot \cos \vartheta(t)) + m_2 \cdot (l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + r_2 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)^2})}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} \right)$$

$$+ \frac{m_5 \cdot (l_1 \cdot \cos \vartheta(t) - r_5 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)^2}) + m_3 \cdot (l_1 \cdot \cos \vartheta(t) + l_2 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin^2 \vartheta(t)^2})}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}$$

$$v_{ygm} = \dot{y}_{gm} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_1 \cdot (r_1 \cdot \sin \vartheta(t)) - m_4 \cdot (r_4 \cdot \sin \vartheta(t)) + m_2 \cdot (l_1 \cdot \sin \vartheta(t) - r_2 \cdot l \cdot \sin \vartheta(t))}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} \right)$$

$$+ \frac{m_5 \cdot (l_1 \cdot \sin \vartheta(t) + r_5 \cdot l \cdot \sin \vartheta(t))}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}$$

Για να προκύψει ακινητοποίηση του κέντρου μάζας του συστήματος θα πρέπει η ταχύτητά του να είναι μηδέν.

$$v_{xgm} = 0$$

$$v_{ygm} = 0$$

Λύνοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων ως προς  $m_4, m_5$  προκύπτει:

$$m_4 = \frac{l_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot r_1 - l \cdot m_2 \cdot r_2}{r_4} - \frac{(l_1 + l \cdot r_5) \cdot \left( -l_2 \cdot l^2 \cdot m_3 \cdot \cos \vartheta(t) - r_2 \cdot l^2 \cdot m_2 \cdot \cos \vartheta(t) - \right.}{r_4 \cdot \left( l^2 \cdot r_5 \cdot \cos \vartheta(t) + l \cdot r_5 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2} \right)}$$

$$m_5 = - \frac{-l_2 \cdot l^2 \cdot m_3 \cdot \cos \vartheta(t) - r_2 \cdot l^2 \cdot m_2 \cdot \cos \vartheta(t)}{l^2 \cdot r_5 \cdot \cos \vartheta(t) + l \cdot r_5 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}} - \frac{l_1 \cdot m_3 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2} - r_2 \cdot l \cdot m_2 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}}{l^2 \cdot r_5 \cdot \cos \vartheta(t) + l \cdot r_5 \cdot \sqrt{1 - l^2 \cdot \sin \vartheta(t)^2}}$$

Έτσι για κάποιες τιμές των αποστάσεων  $r_4, r_5$  υπολογίζονται οι μάζες  $m_4, m_5$ .

## 5. Μελέτη ελαστοδυναμικής συμπεριφοράς του μηχανισμού στροφάλου-διωστήρα-εμβόλου με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων

### 5.1 Αλγόριθμος Επίλυσης

Για την επίλυση του κινητοελαστοδυναμικού προβλήματος ενός μηχανισμού προτείνεται η παρακάτω διαδικασία:

**1<sup>ο</sup> βήμα:** Κατάστρωση των εξισώσεων του ελαστοδυναμικού προβλήματος με την κλασική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων:

$$M \cdot \ddot{x} + K \cdot x = F$$

**2<sup>ο</sup> βήμα:** Γραφή των εξισώσεων σε μορφή εξισώσεων κατάστασης  $A \cdot \dot{z} + B \cdot z = P$  (state-space) και ορισμός των αρχικών οριακών συνθηκών του συστήματος  $z_0$ .

**3<sup>ο</sup> βήμα:** Επίλυση των εξισώσεων με χρονικό βήμα προσαρμοσμένο ώστε να προκύψουν μικρές μετατοπίσεις.

**4<sup>ο</sup> βήμα:** Ενημέρωση της νέας θέσης του συστήματος και επιστροφή στο 1<sup>ο</sup> βήμα

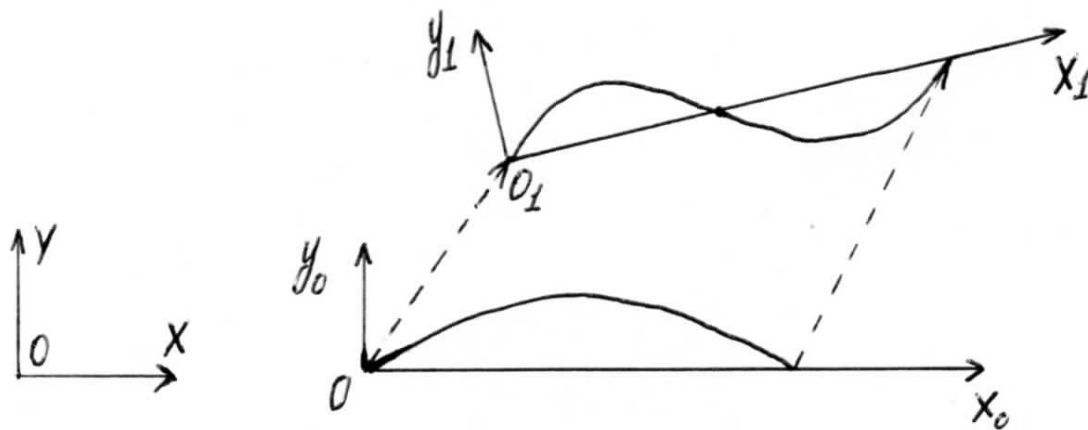
Οι δυναμικές εξισώσεις κάθε στοιχείου διατυπώνονται στο εκάστοτε τοπικό σύστημα συντεταγμένων π.χ. στη θέση 0 στο  $O_0x_0y_0$ .

Τονίζεται ότι στο διάλυμα των εξωτερικών φορτίσεων συμπεριλαμβάνονται οι δυνάμεις Coriolis και οι φυγόκεντρες δυνάμεις.

Για την σύνδεση των στοιχείων μεταξύ τους ακολουθείται η συνήθης πρακτική της συμβιβαστότητας των μετατοπίσεων. Η σύνδεση των κόμβων πραγματοποιείται στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων OXY με τη χρήση των κλασικών μητρώων μετασχηματισμού.



Όταν οριστούν τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας του συστήματος, ακριβώς όπως και στην Ελαστοδυναμική, τότε οι δυναμικές εξισώσεις γράφονται στη μορφή εξισώσεων κατάστασης. Οι αρχικές τιμές  $z_0$  των μεταβλητών κατάστασης ορίζονται με βάση το τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Αυτό σημαίνει π.χ. ότι στη θέση 0 ορίζονται στο σύστημα  $O_0x_0y_0$ , ενώ στη θέση 1, που αποτελεί την αρχή του επόμενου σταδίου, ορίζονται στο σύστημα  $O_1x_1y_1$ .



Η επίλυση των εξισώσεων πραγματοποιείται με τέτοιο βήμα, ώστε να προκύπτουν μικρές.

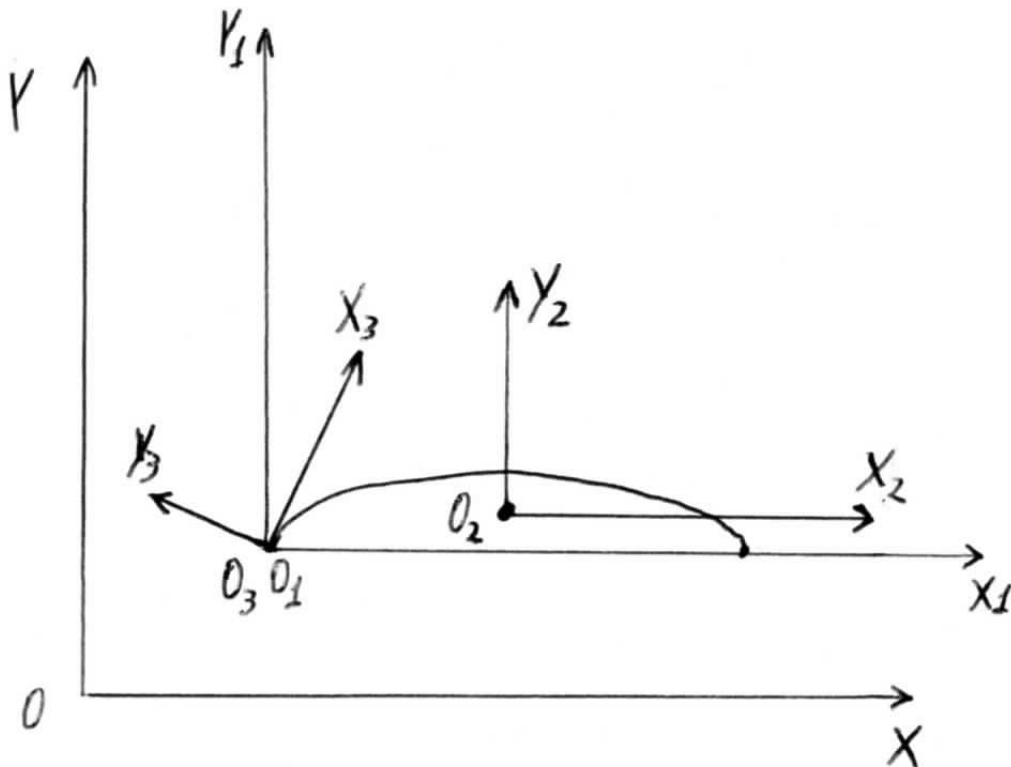
Οι στοιχειώδεις μετατοπίσεις προστίθενται στην προηγούμενη θέση της δοκού, οπότε π.χ. πραγματοποιείται η μετάβαση από τη θέση 0 στη θέση 1. Στη θέση 1 ορίζεται το καινούριο τοπικό σύστημα συντεταγμένων.

## Η επιλογή του τοπικού συστήματος συντεταγμένων

Στα κινητοελαστοδυναμικά προβλήματα η επιλογή του τοπικού συστήματος συντεταγμένων δεν είναι προκαθορισμένη.

Στις διάφορες μεθοδολογίες τα τοπικά συστήματα συντεταγμένων που επιλέγονται συνηθέστερα είναι τρία:

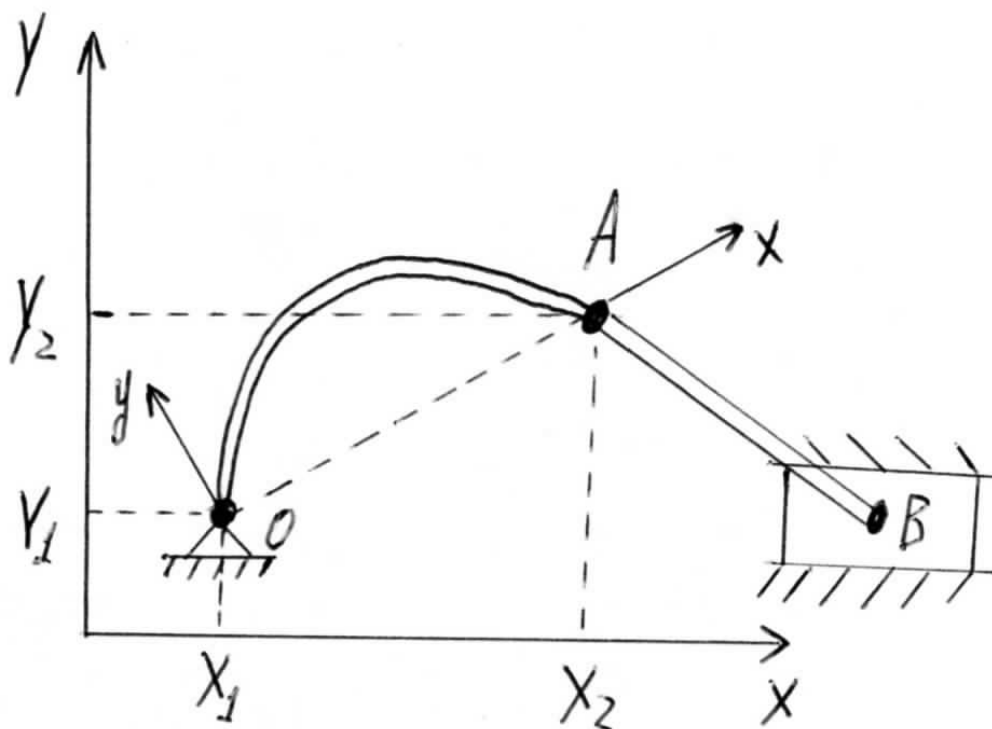
- Εκείνα που ορίζονται από τους κόμβους του στοιχείου π.χ.  $O_1X_1Y_1$ .
- Εκείνα που ορίζονται κεντροβαρικά στο στοιχείο π.χ.  $O_2X_2Y_2$ .
- Εκείνα που ορίζονται με βάση τις συντεταγμένες και τη στροφή ενός κόμβου του στοιχείου π.χ.  $O_3X_3Y_3$ .



Στη συγκεκριμένη μεθοδολογία το σύστημα συντεταγμένων ορίζεται, όπως και στην Ελαστοδυναμική, από τα άκρα της δοκού.

Στα άκρα βρίσκονται οι διάφοροι σύνδεσμοι, όπως π.χ. αρθρώσεις, κυλίσεις κ.λ.π. δηλαδή οι παράγοντες που προκαλούν τις μη-γραμμικότητες στην επίλυση του προβλήματος.

Τα πλεονεκτήματα της επιλογής αυτής είναι ότι επιτυγχάνεται καλύτερη εποπτεία στα σημεία «μη-γραμμικότητας» και ότι το μητρώο μάζας και δυσκαμψίας για το μέλος ΟΑ παραμένει σταθερό.



## 5.2 Η Μέθοδος των 2-Σημείων

Η «Μέθοδος των 2-Σημείων» εφαρμόζεται σε διαφορικές εξισώσεις 1<sup>ου</sup> βαθμού του τύπου:

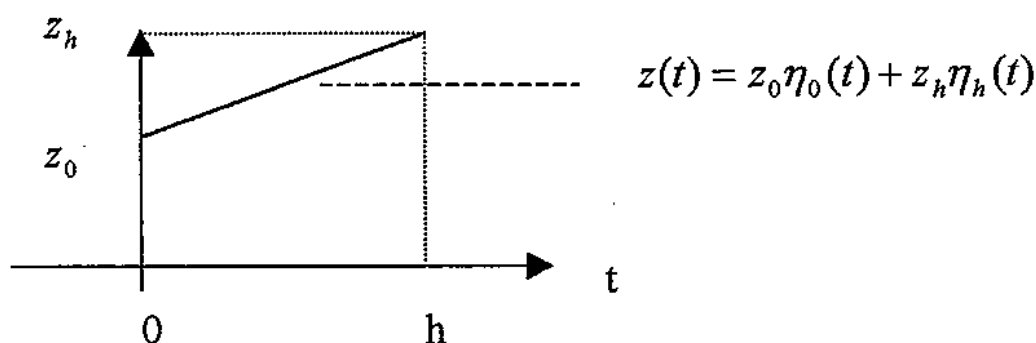
$$A \cdot \dot{z} + B \cdot z = p$$

Η εξίσωση ολοκληρώνεται αριθμητικά στο χρονικό βήμα “h”,  $0 \leq t \leq h$  όπου ισχύει:

$$z_0 = z(0) \quad z_h = z(h) \quad n_0(t) = 1 - \frac{t}{h} \quad n_h(t) = \frac{t}{h}$$

Σύμφωνα με τη Μέθοδο των 2-Σημείων υποθέτουμε πως στο χρονικό βήμα h η άγνωστη και ζητούμενη συνάρτηση  $z(t)$  μπορεί να προσεγγιστεί από τη γραμμική συνάρτηση:

$$z(t) = z_0 \cdot n_0(t) + z_h \cdot n_h(t)$$



Εάν η υποτιθέμενη λύση εισαχθεί στη διαφορική εξίσωση έχουμε:

$$\left(\frac{A}{h}\right) \cdot [-z_0 + z_h] + B \cdot [z_0 \cdot n_0(t) + z_h \cdot n_h(t)] = p(t)$$

Η παραπάνω διακριτή εξίσωση μπορεί λόγω της υπόθεσης της γραμμικής μορφής της  $z(t)$ , να ικανοποιηθεί μόνο σε ένα σημείο t:

$$t = \theta h$$

του βήματος (collocation) που χαρακτηρίζεται από το μέγεθος «θ» ( $0 < \theta < 1$ ). Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\left(\frac{A}{h}\right) \cdot [-z_0 + z_h] + B \cdot [z_0 \cdot (1 - \theta) + z_h \cdot \theta] = p_\theta$$

ή μετά την επίλυση ως προς  $z(h)$ :

$$\left[ \frac{A}{h} + B \cdot \theta \right] \cdot z_h = p_\theta + \left[ \frac{A}{h} - B \cdot (1 - \theta) \right] \cdot z_0 \quad (5.1)$$

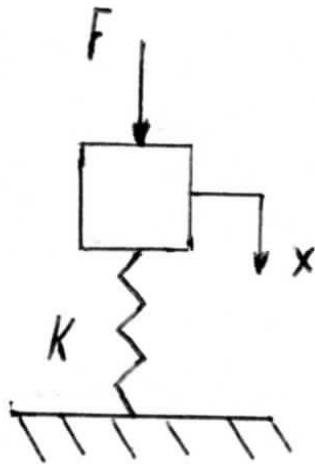
Η παραπάνω εξίσωση έχει τρεις ενδιαφέρουσες περιπτώσεις :

1.  $\theta=0$        $\left[ \frac{A}{h} \right] \cdot z_h = p_\theta + \left[ \frac{A}{h} - B \right] \cdot z_0$

2.  $\theta=0,5$      $\left[ \frac{A}{h} + \frac{1}{2} \cdot B \right] \cdot z_h = p_\theta + \left[ \frac{A}{h} - \frac{1}{2} \cdot B \right] \cdot z_0$

3.  $\theta=1$        $\left[ \frac{A}{h} + B \right] \cdot z_h = p_\theta + \left[ \frac{A}{h} \right] \cdot z_0$

### 5.2.1 Ένας Βαθμός Ελευθερίας



Μάζα του σώματος  $m=1$  kg

Σταθερά του ελατηρίου  $k=1$  N/m

Η δύναμη που ασκείται στο σώμα  $F=1$  N

Η μετατόπιση της μάζας από την αρχική θέση ισορροπίας  $x$

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση του σώματος είναι σύμφωνα με τις γενικευμένες εξισώσεις Newton:

$$m\ddot{x} + kx = f$$

Με αρχικές συνθήκες  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος σύμφωνα με τα γνωστά είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$$

Οπότε η περίοδος ταλάντωσης είναι  $T=6,28$  sec

Η αναλυτική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$x(t) = -\cos(\omega t) + 1$$

Γραφή των εξισώσεων σε μορφή εξισώσεων κατάστασης  $A\dot{z} + Bz = P$  (state-space) και ορισμός των αρχικών οριακών συνθηκών του συστήματος  $z_0$ .

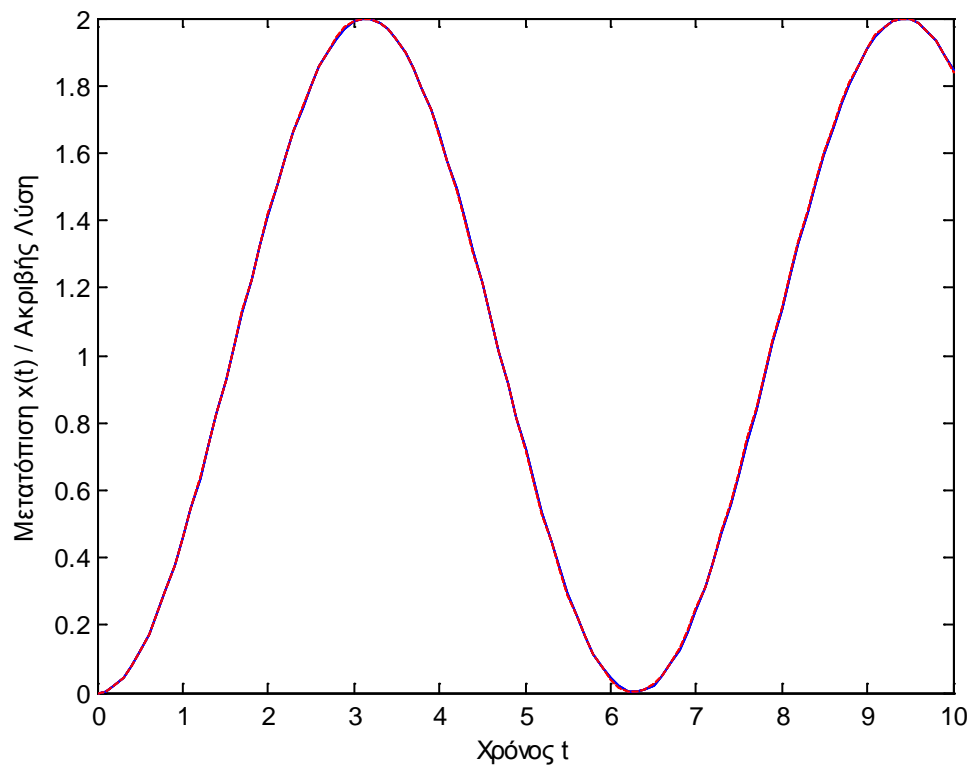
Ορίζω:

$$\left. \begin{array}{l} x = z_1 \\ \dot{x} = z_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \ddot{x} \end{array} \right\}$$

Έχουμε:

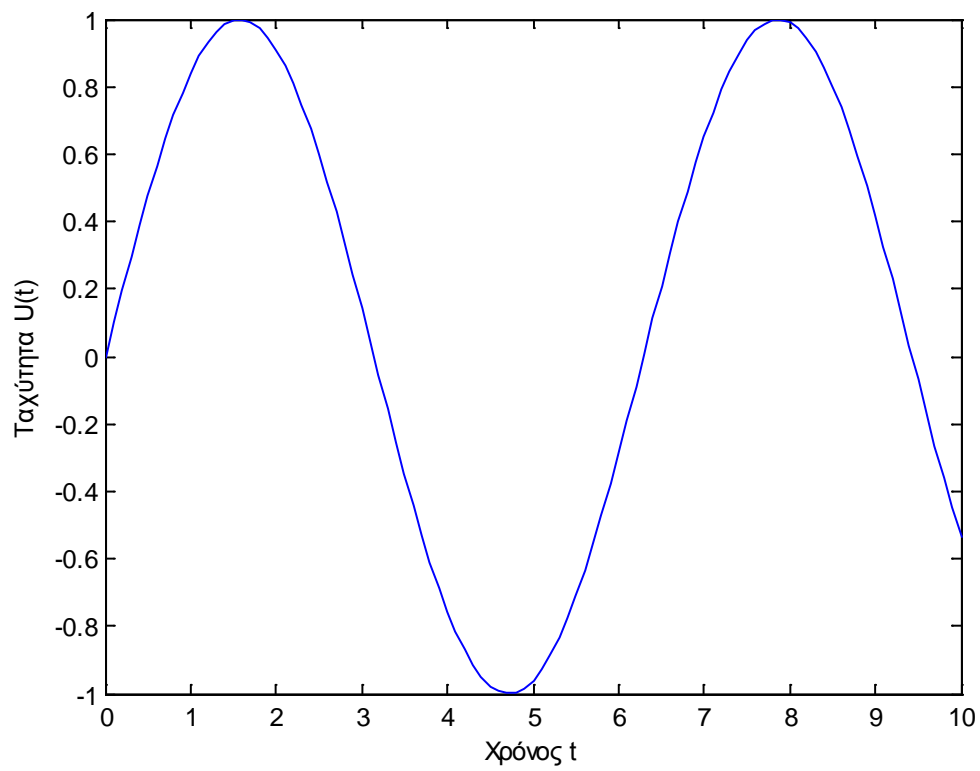
$$\left. \begin{array}{l} \dot{z}_1 - z_2 = 0 \\ m\dot{z}_2 + kz_1 = f \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow A\dot{z} + Bz = P \quad (5.2)$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης των 2-Σημείων με βήμα  $h=0,1$  και την παράμετρο  $\theta=0,5$  για χρόνο  $t=10$  sec και λαμβάνουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



### 5.2.1

**Μετατόπιση  $x(t)$  / Ακριβής Λύση**

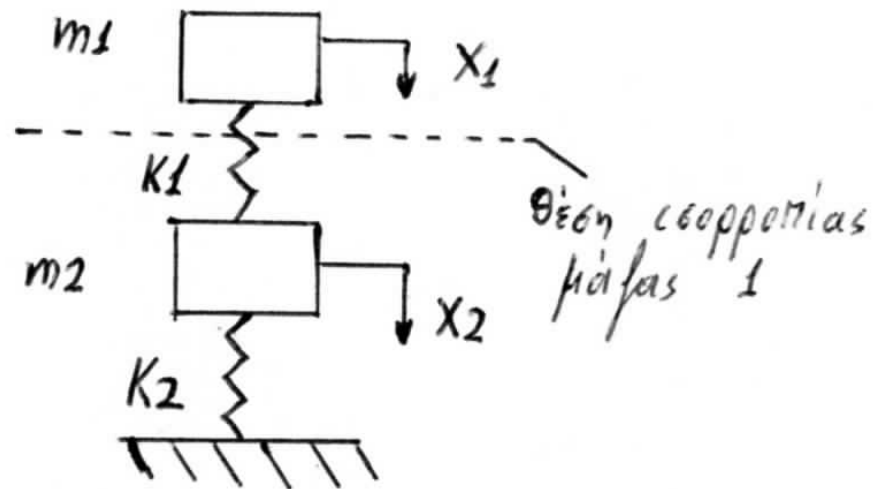


### 5.2.2

**Ταχύτητα  $v(t)$**



### 5.2.2 Δύο Βαθμοί Ελευθερίας



Μάζα του 1<sup>ου</sup> σώματος  $m_1=1$  kgr

Μάζα του 2<sup>ου</sup> σώματος  $m_2=2$  kgr

Σταθερά του 1<sup>ου</sup> ελατηρίου  $k_1=10$  N/m

Σταθερά του 2<sup>ου</sup> ελατηρίου  $k_2=10$  N/m

Η μετατόπιση της 1<sup>ης</sup> μάζας από τη θέση ισορροπίας  $x_1$

Η μετατόπιση της 2<sup>ης</sup> μάζας από τη θέση ισορροπίας  $x_2$

Απομάκρυνση της 1<sup>ης</sup> μάζας από τη θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή  $t=0$ :  
 $x_{1start}=1$

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος προκύπτουν με βάση τις γενικευμένες εξισώσεις Newton:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) &= f \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k_1(-x_1 + x_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M\ddot{x} + Kx = F$$

Γραφή των εξισώσεων σε μορφή εξισώσεων κατάστασης  $A\dot{z} + Bz = P$  (state-space) και ορισμός των αρχικών οριακών συνθηκών του συστήματος  $z_0$ .

Ορίζω:

$$\left. \begin{array}{l} x = z_1 \\ \dot{x} = \dot{z}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \ddot{x} = \dot{z}_2 \end{array} \right\}$$

Έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{z}_1 - z_2 = 0 \\ M\dot{z}_2 + Kz_1 = F \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ K & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \Rightarrow$$

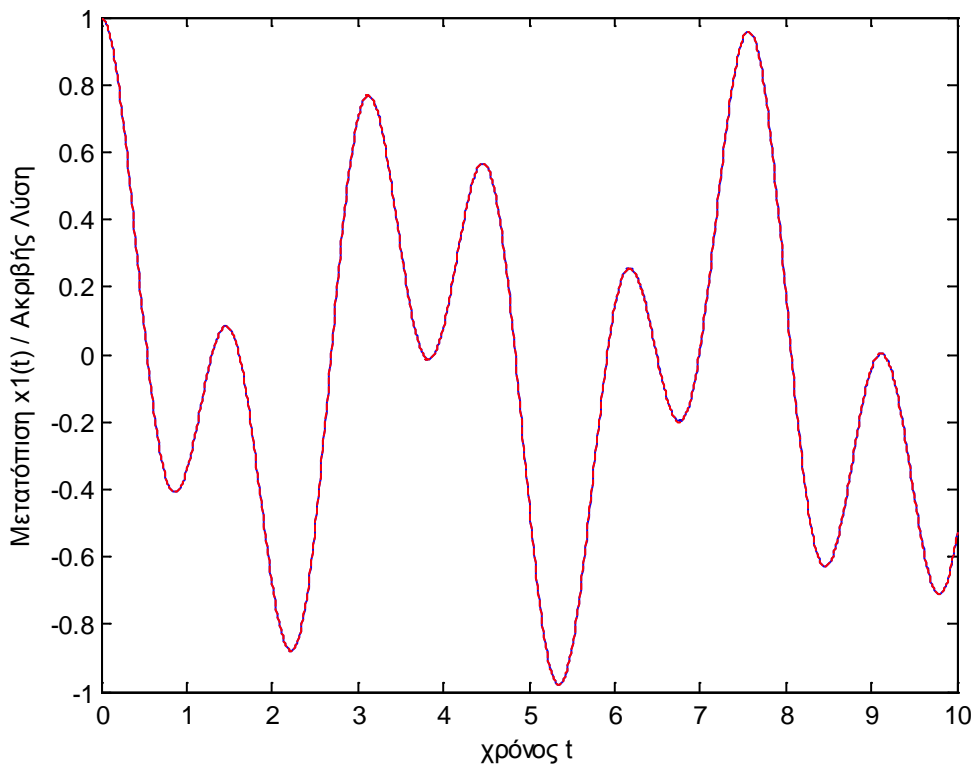
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Az + Bz = P$$

Εάν θεωρήσουμε ότι  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = x_2(0) = 0$  και  $x_1(0) = 1$  τότε η αναλυτική λύση του συστήματος είναι:

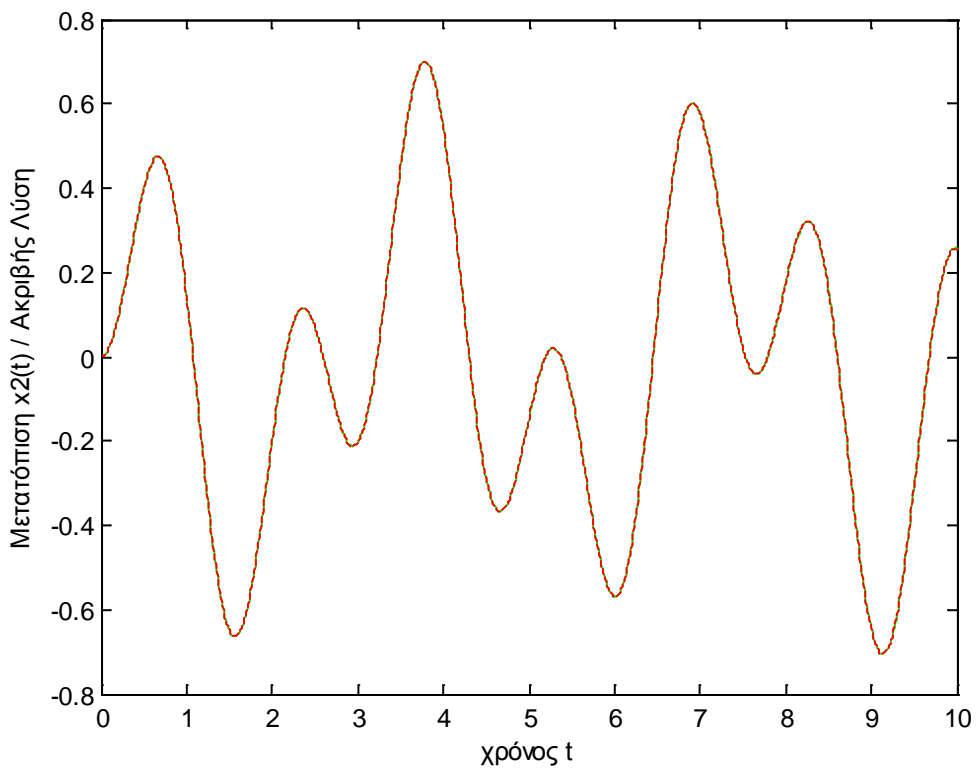
$$x_1(t) = \frac{1}{2}(\cos(1,7114t) + \cos(4,1317t))$$

$$x_2(t) = 0,7072 \frac{1}{2} \cos(1,7114t) - 0,7072 \frac{1}{2} \cos(4,1317t)$$

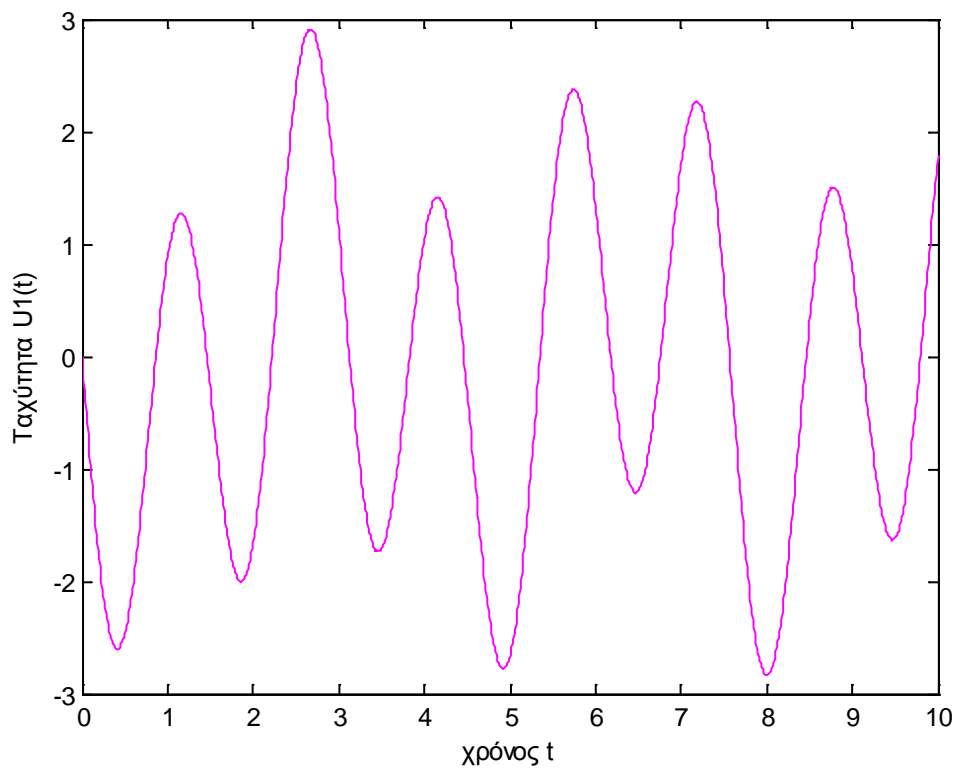
Εφαρμόζουμε τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης των 2-Σημείων με βήμα  $h=0,01$  και την παράμετρο  $\theta=0,5$  για χρόνο  $t=10$  sec και λαμβάνουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



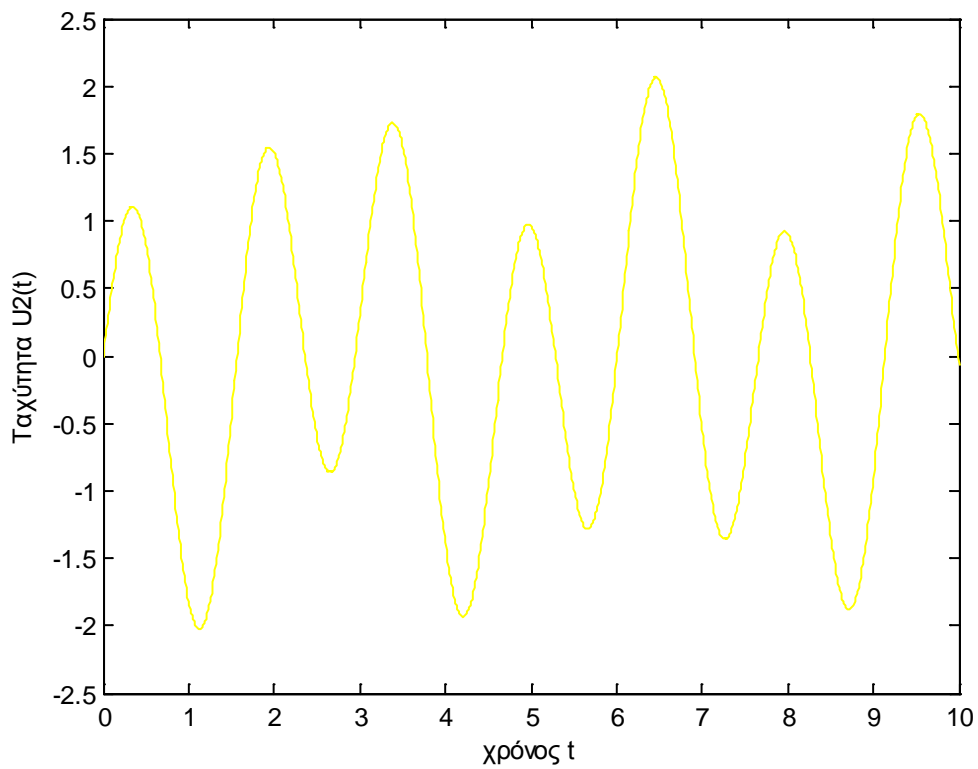
**5.4.1**  
**Μετατόπιση  $x_1(t)$  / Ακριβής Λύση**



**5.4.2 Μετατόπιση  $x_2(t)$  / Ακριβής Λύση**



**5.4.3**  
**Ταχύτητα  $v_1(t)$**



**5.4.4**  
**Ταχύτητα  $v_2(t)$**

### 5.2.3 Δύο Βαθμοί Ελευθερίας Stiff

Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση με τη μόνη διαφορά ότι η σταθερά  $k_2$  του 2<sup>ου</sup> ελατηρίου έχει πολύ μεγάλη τιμή σε σχέση με τη σταθερά του 1<sup>ου</sup> ελατηρίου, π.χ.  $k_2=9990$  N/m.

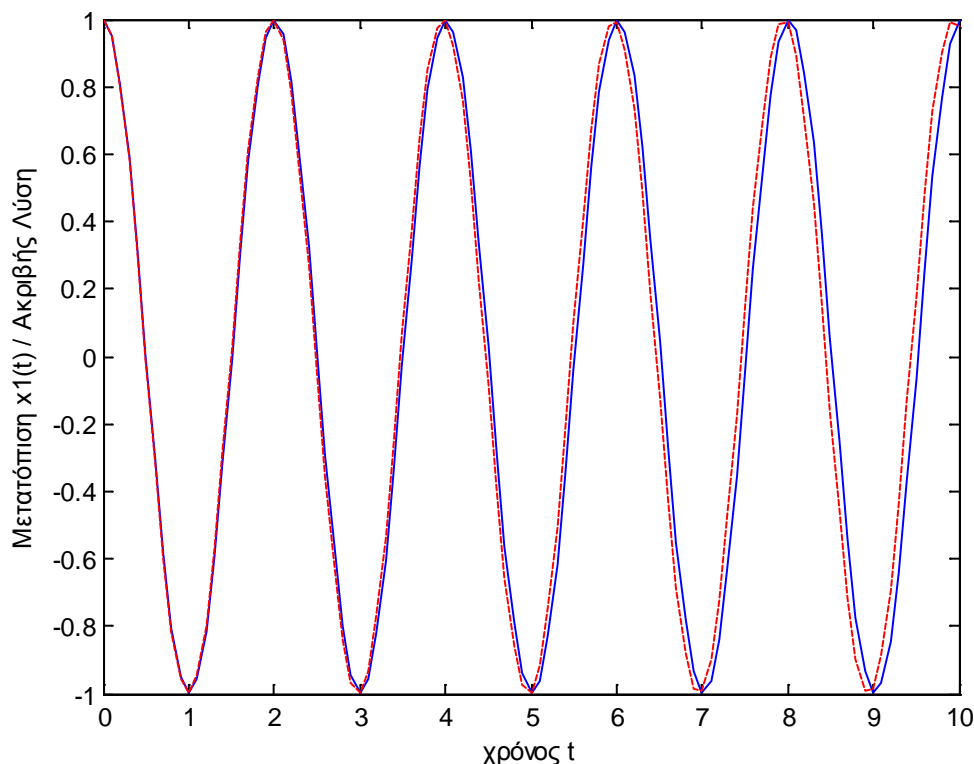
Τέτοιου είδους προβλήματα στα οποία οι τιμές των ιδιοτιμών διαφέρουν αρκετά χαρακτηρίζονται ως «stiff equations» και είναι απαραίτητο οι αλγόριθμοι ολοκλήρωσης που χρησιμοποιούνται να εξετάζονται και σε αυτήν την περίπτωση.

Εάν θεωρήσουμε ότι  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = x_2(0) = 0$  και  $x_1(0) = 1$  τότε η αναλυτική λύση του συστήματος είναι:

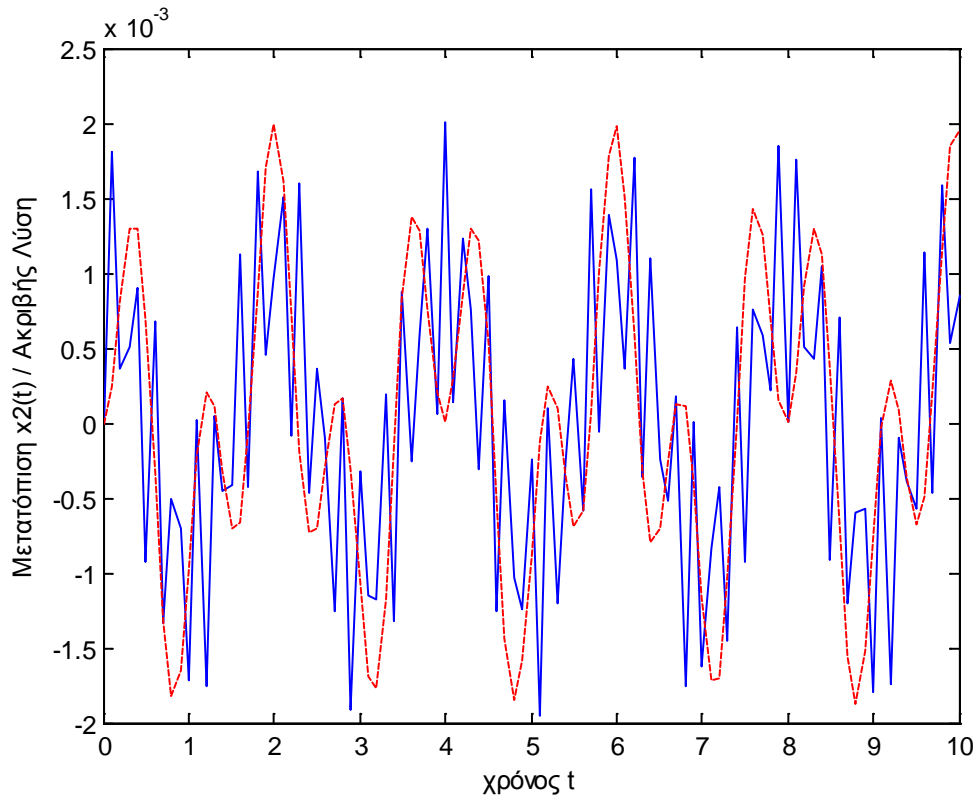
$$x_1(t) = \cos(3,1607t)$$

$$x_2(t) = 0,001 \cos(3,1607t) - 0,001 \cos(70,7107t)$$

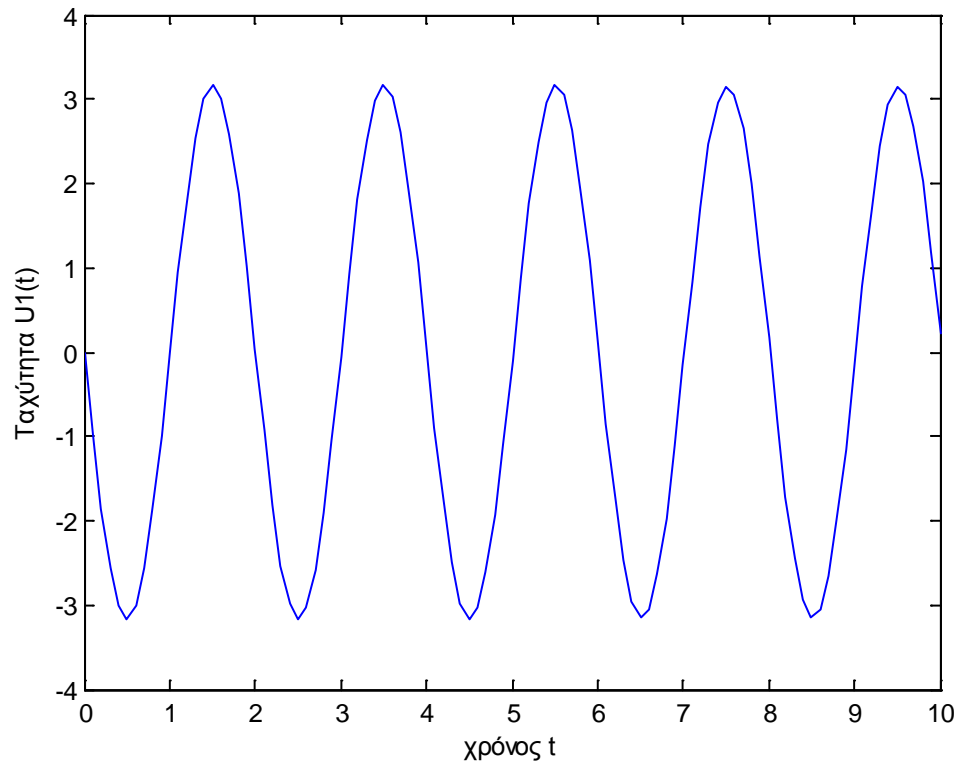
Εφαρμόζουμε τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης των 2-Σημείων με βήμα  $h=0,1$  και την παράμετρο  $\theta=0,5$  για χρόνο  $t=10$  sec και λαμβάνουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



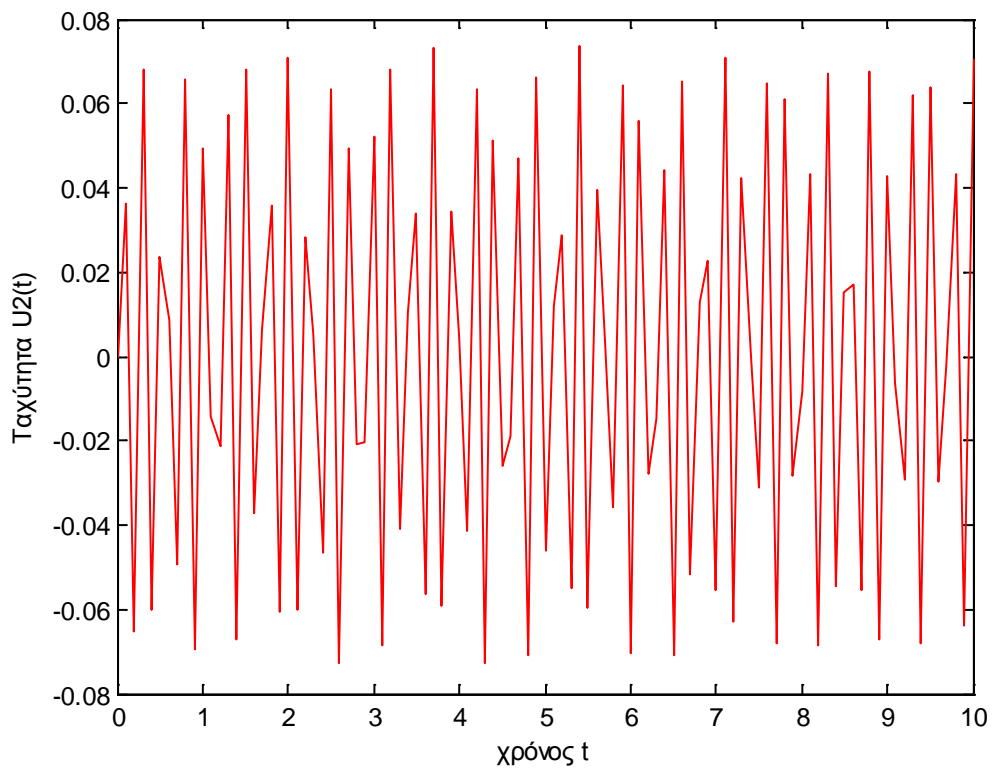
**5.5.1**  
**Μετατόπιση  $x_1(t)$  / Ακριβής Λύση**



**5.5.2 Μετατόπιση  $x_2(t)$  / Ακριβής Λύση**



**5.5.3  
Ταχύτητα  $v_1(t)$**



**5.5.4**  
**Ταχύτητα  $u_2(t)$**

### 5.3 Ανάπτυξη και περιγραφή της μεθοδολογίας επίλυσης

Προκειμένου να περιγράψουμε την κίνηση ενός σώματος απαραίτητο στοιχείο σε αυτήν την προσπάθεια είναι να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις που την διέπουν. Προς αυτή την κατεύθυνση έχουν αναπτυχθεί διάφορες μεθοδολογίες μεταξύ των οποίων είναι:

- i. Η Αρχή των Δυνατών Έργων
- ii. Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων
- iii. Η μέθοδος των Γενικευμένων Εξισώσεων Newton
- iv. Η μέθοδος Lagrange
- v. Η θεωρία των Bond Graph

Όλες αυτές οι μέθοδοι μοντελοποίησης έχουν αποδειχθεί είτε ταυτόσημες είτε υποπερίπτωση κάποιας άλλης και ανάγονται ουσιαστικά στην Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας.

Στην εργασία μας χρησιμοποιούμε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στην περίπτωση ελαστοδυναμικού μονοδιάστατου επίπεδου προβλήματος. Η παραπάνω περιγραφή σημαίνει συνοπτικά τα παρακάτω:

- i. Το πρόβλημα θεωρείται μονοδιάστατο. Αυτό σημαίνει ότι οι περιπτώσεις που μας αφορούν είναι σώματα που έχουν τη μια διάσταση πολύ μεγαλύτερη ( $>10$ ) από τις άλλες δύο. Στην πράξη δηλαδή τέτοια σώματα μπορούν να θεωρηθούν οι δοκοί και οι ράβδοι.
- ii. Τα σώματα που αποτελούν το σύστημα βρίσκονται όλα στο ίδιο επίπεδο και οι διεγέρσεις επίσης που επενεργούν πάνω τους βρίσκονται στο ίδιο με προηγούμενος επίπεδο.
- iii. Τα σώματα δεν εισέρχονται στην πλαστική περιοχή
- iv. Οι παραμορφώσεις κάθε πεπερασμένου στοιχείου έχουν ληφθεί γραμμικές. Η αντιστοιχία της θεώρησης αυτής σε σχέση με την πραγματικότητα εξαρτάται από την διακριτοποίηση του συστήματος και από το μέγεθος των διεγέρσεων.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω συνεχίζουμε λέγοντας ότι οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση ενός σώματος έχουν τη γενική μορφή:

$$M \cdot \ddot{x} + K \cdot x = f$$

M: το μητρώο μάζας

K: το μητρώο δυσκαμψίας

f: το διάνυσμα της φόρτισης

#### A. Δοκός σε εφελκυσμό

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει μια δοκό σε εφελκυσμό είναι (προκύπτει εάν εφαρμόσουμε την μέθοδο των τετραέδρων σε ένα στοιχειώδες κομμάτι της δοκού):

$$\rho A \ddot{u} - (EAu')' = f_x(x, t)$$



Σύμφωνα με τη μέθοδο των Δυνατών Έργων, η σχετική διαφορική εξίσωση πολλαπλασιάζεται με την δυνατή μεταβολή  $\delta\tilde{u}(x,t)$  της άγνωστης μεταβλητής  $\tilde{u}(x,t)$  και ολοκληρώνεται στο διάστημα  $0 \leq x \leq L$  (L: μήκος πεπερασμένου στοιχείου).

$$\int_{x=0}^{x=L} \delta\tilde{u}(x,t) [\rho A \ddot{u} - (EAu')' - f_x(x,t)] dx = 0$$

Το προκύπτον ολοκλήρωμα αντιστοιχεί στο δυνατό έργο όλων των δυνάμεων του πεπερασμένου στοιχείου.

Στη συνέχεια με εφαρμογή της μεθόδου Ritz τα μη συμμετρικά μέλη (δηλαδή οι χωρικές παράγωγοι) μετατρέπονται σε συμμετρικά.

$$\int_{x=0}^{x=L} \delta\tilde{u} (EAu')' dx = \delta\tilde{u} (EAu') \Big|_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \delta\tilde{u}' (EAu') dx$$

Το 1<sup>ο</sup> μέλος της δεξιάς πλευράς της ισότητας αποτελεί τις οριακές συνθήκες και συνήθως αλληλοαναιρείται με την επανασύνδεση των πεπερασμένων στοιχείων, οπότε παραλείπεται.

Μπορούμε να διακριτοποιήσουμε την εξίσωση θεωρώντας ότι

$$u(x,t) \rightarrow \tilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^M N_n(x) u_n(t)$$

Όπου  $N_n(x)$  οι συναρτήσεις μορφής και  $u_n(t)$  οι μετατοπίσεις σε δεδομένα σημεία. Οι συναρτήσεις μορφής έχουν την ιδιότητα «1-0», δηλαδή είναι ίσες με 1 στον κόμβο στον οποίον αναφέρονται και 0 στους υπόλοιπους.

Επίσης, η μεταβολή  $\delta\tilde{u}(x,t) = N_m(x) \delta u_m$   $m=1, \dots, M$  όπου M ο αριθμός των μεταβλητών.

Με βάση τις παραπάνω παραδοχές λαμβάνουμε τα μητρώα μάζας, δυσκαμψίας και φόρτισης στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

Για το μητρώο μάζας:

$$\int_{x=0}^{x=L} \delta\tilde{u} \rho A \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} dx = \delta u_m \sum_{n=1}^M \left[ \int_{x=0}^{x=L} N_m(x) \rho A N_n(x) dx \right] \ddot{u}_n(t) \quad m=1 \dots M$$

Το εσωτερικό της αγκύλης αποτελεί το στοιχείο  $M_{mn}$  του μητρώου μάζας.

Για το μητρώο δυσκαμψίας:

$$\int_{x=0}^{x=L} \delta \tilde{u}' EA \tilde{u}' dx = \delta u_m \sum_{n=1}^M \left[ \int_{x=0}^{x=L} N'_m(x) E A N'_n(x) dx \right] u_n(t) \quad m=1 \dots M$$

Το εσωτερικό της αγκύλης αποτελεί το στοιχείο  $K_{mn}$  του μητρώου δυσκαμψίας.

Για το μητρώο φόρτισης:

$$\int_{x=0}^{x=L} \delta \tilde{u} f_x(x, t) dx = \delta u_m \int_{x=0}^{x=L} N_m(x) f_x(x, t) dx \quad m=1 \dots M$$

Ο όρος μετά το ολοκλήρωμα αποτελεί τον όρο  $f_{m1}$ .

Εάν οι συναρτήσεις μορφής που διαλέξουμε είναι γραμμικές τότε θα έχουν τη μορφή:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{και} \quad N_2(x) = \frac{x}{L}$$

και αναφέρονται στους τοπικούς βαθμούς ελευθερίας στα όρια του πεπερασμένου στοιχείου.

Με ολοκλήρωση των σχέσεων στις οποίες καταλήξαμε προηγουμένως καταλήγουμε στα παρακάτω μητρώα:

$$M = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f = \frac{f_x L}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad f_x : \text{constan } t$$

Στην περίπτωση της δοκού που υφίσταται εφελκυσμό, τότε έχει δύο βαθμούς ελευθερίας  $u_1$  και  $u_2$  και οι διαφορικές εξισώσεις που ισχύουν είναι:

$$\frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$\rho$ : η πυκνότητα του πεπερασμένου στοιχείου ( $kg / m^3$ )

$A$ : η διατομή του ( $m^2$ )

$E$ : το μέτρο ελαστικότητάς του ( $N / m^2$ )

$L$ : το μήκος του (m)

$F_1$ : η συγκεντρωμένη δύναμη που επενεργεί στο άκρο 1 (N)

$F_2$ : η συγκεντρωμένη δύναμη που επενεργεί στο άκρο 2 (N)

$u_1$ : η μετατόπιση του άκρου 1 από την αρχική θέση ισορροπίας του (m)

$u_2$ : η μετατόπιση του άκρου 2 από την αρχική θέση ισορροπίας του (m)

## B. Δοκός σε κάμψη

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει μια δοκό σε κάμψη είναι: (προκύπτει εάν εφαρμόσουμε την μέθοδο των τετραέδρων σε ένα στοιχειώδες κομμάτι της δοκού)

$$\rho A \frac{\partial w^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ_z \frac{\partial w}{\partial x^2} \right) = f_z(x, t)$$

Επειδή η δοκός έχει 4 βαθμούς ελευθερίας τουλάχιστον στην διακριτοποίηση οι συναρτήσεις μορφής θα είναι 4.

Οι συναρτήσεις μορφής πρέπει να είναι τουλάχιστον 3<sup>ου</sup> βαθμού ώστε μετά την εφαρμογή της Galerkin-Ritz να μην καταλήγουμε σε ταυτότητα.

Οι συναρτήσεις  $N_n(x)$  προκύπτουν από ένα πολυώνυμο  $\tilde{w}(x, t)$  με  $M=4$  όρους:

$$\tilde{w}(x, t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3$$

Οι συναρτήσεις μορφής είναι τελικά οι παρακάτω:

$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$N_2(x) = \left[ \left(\frac{x}{L}\right) - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] L$$

$$N_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$N_4(x) = \left[ -\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] L$$

Με τις παραπάνω συναρτήσεις μορφής  $N_n(x)$  η κινητική ενέργεια  $T$  και η δυναμική ενέργεια  $U$  της δοκού σε κάμψη είναι:

$$T = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=L} \rho A (\dot{\tilde{w}})^2 dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=L} \rho A \left( \sum_{n=1}^M N_n(x) \ddot{u}_n(t) \right)^2 dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=L} EJ_z (\tilde{w}'' )^2 dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=L} EJ_z \left( \sum_{n=1}^M N_n''(x) u_n(t) \right)^2 dx$$

Αντίστοιχα προκύπτει το έργο των εξωτερικών δυνάμεων

$$W_t = \int_{x=0}^{x=L} \tilde{w}(x,t) f_z(x,t) dx = \int_{x=0}^{x=L} \sum_{n=1}^M N_n(x) u_n(t) f_z(x,t) dx$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Lagrange βρίσκουμε:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[ \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=L} \rho A \left( \sum_{n=1}^M N_n(x) \dot{u}_n(t) \right)^2 dx \right] = \sum_{n=1}^M \left[ \int_{x=0}^{x=L} \rho A N_m(x) N_n(x) dx \right] \ddot{u}_n(t)$$

Ο όρος που βρίσκεται μέσα στην αγκύλη αποτελεί το στοιχείο  $M_{mm}$  του μητρώου μάζας.

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left[ \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=L} EJ_z \left( \sum_{n=1}^M N_n''(x) u_n(t) \right)^2 dx \right] = \sum_{n=1}^M \left[ \int_{x=0}^{x=L} EJ_z N_m''(x) N_n''(x) dx \right] u_n(t)$$

Ο όρος που βρίσκεται μέσα στην αγκύλη αποτελεί το στοιχείο  $K_{mm}$  του μητρώου δυσκαμψίας.

$$\frac{\partial W}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left[ \int_{x=0}^{x=L} \sum_{n=1}^M N_n(x) u_n(t) f_z(x,t) dx \right] = \sum_{n=1}^M \left[ \int_{x=0}^{x=L} N_m(x) f_z(x,t) dx \right] u_n(t)$$

Ο όρος που βρίσκεται μέσα στην αγκύλη αποτελεί το στοιχείο  $f_{m1}$  του διανύσματος φόρτισης.

Στην περίπτωση δοκού που υφίσταται κάμψη, τότε έχει τέσσερις βαθμούς ελευθερίας  $v_1, w_1$  και  $v_2, w_2$

Το μητρώο μάζας είναι ίσο με:

$$M_k = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ sym & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Το μητρώο δυσκαμψίας είναι ίσο με:

$$K_k = \frac{EJ_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{sym} & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα φορτίσεων είναι ίσο με:

$$f_k = \begin{bmatrix} 0 \\ M_1 \\ 0 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα των αγνώστων είναι:

$$x_k = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \\ v_2 \\ v_2' \end{Bmatrix}$$

$\rho$ : η πυκνότητα του πεπερασμένου στοιχείου ( $kg / m^3$ )

$A$ : η διατομή του ( $m^2$ )

$E$ : το μέτρο ελαστικότητάς του ( $N / m^2$ )

$L$ : το μήκος του (m)

$J_z$ : η ροπή αδράνειας ως προς κάμψη ( $m^4$ )

$M_1$ : η συγκεντρωμένη ροπή που επενεργεί στο άκρο 1 (Nm)

$M_2$ : η συγκεντρωμένη ροπή που επενεργεί στο άκρο 2 (Nm)

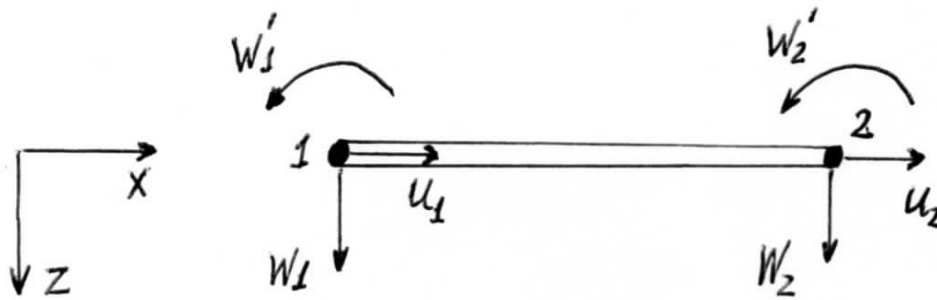
$v_1$ : η μετατόπιση του άκρου 1 από την αρχική θέση ισορροπίας του (m)

$v_2$ : η μετατόπιση του άκρου 2 από την αρχική θέση ισορροπίας του (m)

$w_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x}$ : η γωνία παραμόρφωσης του άκρου 1 από την αρχική θέση ισορροπίας του (rad)

$w_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x}$ : η γωνία παραμόρφωσης του άκρου 2 από την αρχική θέση ισορροπίας του (rad)

### Γ. Δοκός σε εφελκυσμό-θλίψη και κάμψη



Όταν μια δοκός υφίσταται εφελκυσμό-θλίψη και κάμψη ταυτόχρονα τότε γίνεται σύνθεση των δύο μητρώων και το μητρώο μάζας παίρνει τη μορφή:

$$M_k = \begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ & 156\alpha & 22L\alpha & 0 & 54\alpha & -13L\alpha \\ & & 4L^2\alpha & 0 & 13L\alpha & -3L^2\alpha \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & & 156\alpha & -22L\alpha \\ \text{sym} & & & & & 4L^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\mu = \frac{\rho AL}{6}$$

$$a = \frac{\rho AL}{420}$$

Αντίστοιχα το μητρώο δυσκαμψίας γίνεται:

$$K_k = \begin{bmatrix} \nu & 0 & 0 & -\nu & 0 & 0 \\ & 12\delta & 6L\delta & 0 & -12\delta & 6L\delta \\ & & 4L^2\delta & 0 & -6L\delta & 2L^2\delta \\ & & & \nu & 0 & 0 \\ & & & & 12\delta & -6L\delta \\ \text{sym} & & & & & 4L^2\delta \end{bmatrix}$$

$$\nu = \frac{EA}{L} \quad \delta = \frac{EJ_z}{L^3}$$

Το διάνυσμα φόρτισης γίνεται:

$$f_k = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα των αγνώστων είναι:

$$x_k = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Τα παραπάνω μητρώα δυσκαμψίας και μάζας ισχύουν στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή στο σύστημα συντεταγμένων που ο άξονας  $\chi$  ταυτίζεται με τον άξονα του πεπερασμένου στοιχείου.

Στις προηγούμενες περιπτώσεις ο διαμήκης άξονας του πεπερασμένου στοιχείου ταυτίζεται με τον άξονα  $\chi$  του τοπικού συστήματος συντεταγμένων. Στην περίπτωση που το πεπερασμένο στοιχείο σχηματίζει γωνία  $\Psi$  με τον άξονα  $\chi$  του καθολικού συστήματος συντεταγμένων τότε τα μητρώα πρέπει να πολλαπλασιαστούν με ένα μητρώο, το μητρώο μετασχηματισμού  $T$ , προκειμένου οι μετατοπίσεις να αναφέρονται στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων.

Το μητρώο μάζας στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$M = T^T \cdot M_k \cdot T$$

$M_k$ : το μητρώο μάζας στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων.

Το μητρώο δυσκαμψίας στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$K = T^T \cdot K_k \cdot T$$

$K_k$ : το μητρώο δυσκαμψίας στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων.



Το διάνυσμα φόρτισης στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$f = T^T \cdot f_k$$

$f_k$  : το διάνυσμα φόρτισης στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων.

Το διάνυσμα των αγνώστων αναφέρεται σε ένα ενιαίο σύστημα συντεταγμένων, όπου π.χ.  $u$  είναι η μετατόπιση κατά τον άξονα  $x$  και  $v$  η μετατόπιση κατά τον κάθετο στο ίδιο επίπεδο στον άξονα  $x$ .

Η βασική λογική που ακολουθήσαμε στην επίλυσή μας είναι να ανανεώνουμε το σύστημα συντεταγμένων σε κάθε βήμα ολοκλήρωσης. Επειδή οι σχέσεις που έχουμε ισχύουν μόνο για μικρές μετατοπίσεις πρέπει να ανανεώνουμε τα τοπικά συστήματα συντεταγμένων ώστε να λαμβάνουν την καινούρια θέση των πεπερασμένων στοιχείων, διαφορετικά οι μετατοπίσεις ως προς την αρχική θέση θα γίνονται μεγάλες.

Εάν όμως στην έναρξη κάθε βήματος λαμβάνεται ως αρχική θέση ισορροπίας η τελευταία θέση του πεπερασμένου στοιχείου, τότε το λάθος στους υπολογισμούς θα είναι ανάλογο του βήματος που χρησιμοποιήσαμε.

Με άλλα λόγια στην έναρξη κάθε βήματος η αρχή του συστήματος θα βρίσκεται στην αρχή του πεπερασμένου στοιχείου και ο άξονας  $x$  θα διέρχεται από το άλλο άκρο του.

Το σκεπτικό αυτό μας αναγκάζει να κάνουμε τα εξής:

- Να αποθηκεύουμε σε κάθε βήμα ολοκλήρωσης τη μετατόπιση του συστήματος συντεταγμένων αλλά και όλων των βαθμών ελευθερίας, η οποία ισούται με το άθροισμα των μεταβολών όλων των προηγούμενων βημάτων.
- Ως αρχικές συνθήκες ολοκλήρωσης για το επόμενο βήμα να λαμβάνονται οι μετατοπίσεις ίσες με μηδέν και οι ταχύτητες ως είναι καθώς εκφράζουν μεταβολή και δεν επηρεάζονται από το σύστημα συντεταγμένων. Όσον αφορά τις γωνίες παραμόρφωσης σε αυτές πρέπει να αφαιρεθεί η γωνία  $\Psi$  κατά την οποία έχει στραφεί το πεπερασμένο στοιχείο, δηλαδή  $w_{k, \text{karx}} = w_k - \Psi$  (σε δύσκαμπτα σώματα επομένως θα είναι μηδέν).

Επίσης, επειδή τα μέλη κινούνται κατά τη διάρκεια του χρόνου, και συνεπώς αλλάζουν οι θέσεις τους ως προς το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, αλλάζουν και τα μητρώα δυσκαμψίας και μάζας. Επομένως αλλάζουν και οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα.

Άρα ανανεώνοντας σε κάθε βήμα ολοκλήρωσης το μητρώο μετασχηματισμού πετυχαίνουμε να περιγράψουμε με το σωστό τρόπο το σύστημά μας.

Είναι προφανές ότι όσο πιο μικρό είναι το βήμα, τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια έχουμε.

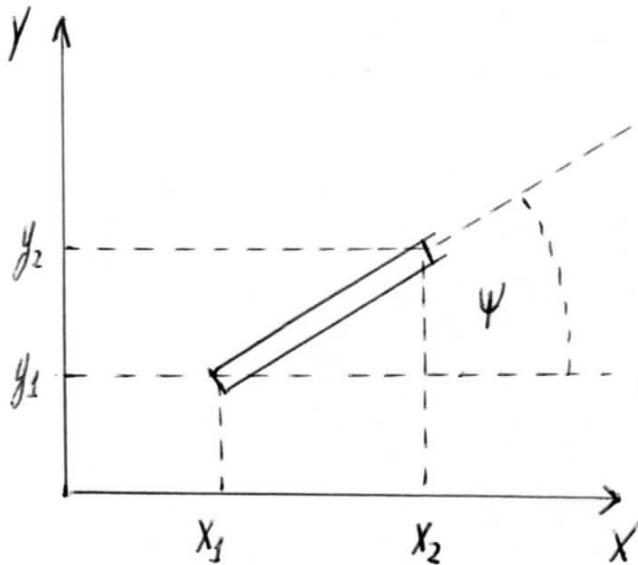
Στο μητρώο μετασχηματισμού η γωνία  $\Psi$  που σχηματίζει το πεπερασμένο στοιχείο σε σχέση με το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων προκύπτει με βάση τις θέσεις των άκρων του.

Η γωνία  $\Psi$  θα δίνεται από την παρακάτω σχέση και αναφέρεται πάντα στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων:

$$\tan \Psi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$y_2, y_1, x_2, x_1$

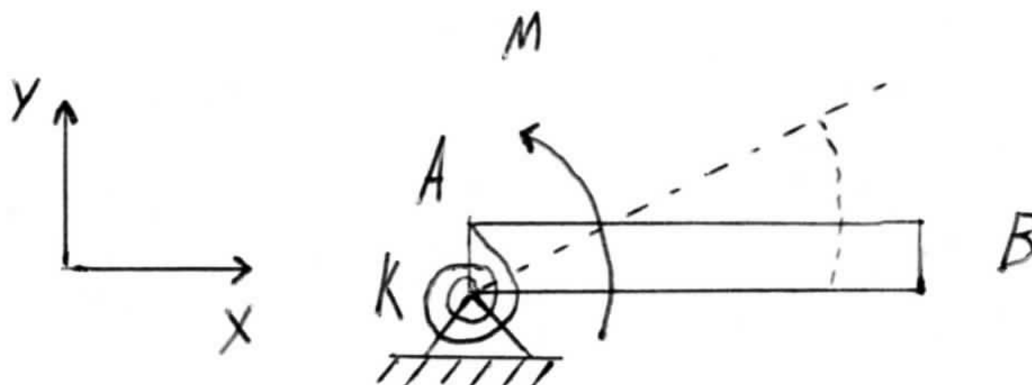
είναι οι συντεταγμένες των άκρων του πεπερασμένου στοιχείου ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων.



Επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι οι διαφορικές εξισώσεις στις οποίες καταλήγουμε περιέχουν πολλές και διαφορετικής τάξεως ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης της κατασκευής (καμπτικές-αξονικές ταλαντώσεις κ.λ.π.)

Οι εξισώσεις μας λοιπόν ανήκουν στην κατηγορία των «stiff equations». Για το λόγο αυτό στην επίλυσή τους χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των 2-Σημείων.

**5.4 Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε μια δοκό η οποία είναι αρθρωμένη στο ένα άκρο της και στηρίζεται σε ένα στρεπτικό ελατήριο**



Έχουμε μία ράβδο που είναι αρθρωμένη στο ένα άκρο της. Στο ίδιο άκρο υπάρχει ένα στρεπτικό ελατήριο σταθεράς  $k$ . Στο ίδιο άκρο ασκείται μια στρεπτική ροπή. Ζητείται η απόκριση του συστήματος.

Τα χαρακτηριστικά της ράβδου είναι:

Πυκνότητα  $\rho=7700 \text{ kg} / \text{m}^3$

Μέτρο Ελαστικότητας  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N} / \text{m}^2$

Μήκος  $L=0,5 \text{ m}$

Διατομή  $A=0,01 \text{ m}^2$

Ροπή Αδράνειας ως προς Κάμψη  $J_z = 10^{-5} \text{ m}^4$

Σταθερά Ελατηρίου  $k=10 \text{ N/m}$

Μάζα  $m=38,5 \text{ kg}$

Μαζική Ροπή Αδράνειας  $I=3,2083 \text{ kgm}^2$

Στρεπτική Ροπή  $M \text{ (Nm)}$  είναι συνάρτηση Dirac με μέση τιμή ίση με  $0,1$

Σύμφωνα με τις γενικευμένες εξισώσεις Newton η διαφορική εξίσωση που διέπει το σύστημα είναι:

$$I\ddot{\theta} + k\theta = M$$

Όπου  $I = mL^2 / 3$  ,  $m=\rho AL$

η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο ένα άκρο της

$\theta$ : η γωνιακή μετατόπιση σε σχέση με την αρχική θέση.

Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι  $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} = 1,7655 \text{ rad} / \text{sec}$

Η περίοδος ταλάντωσης είναι  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 3,5589 \text{ sec}$

Θα εισάγουμε τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας με βάση τα προηγούμενα.

Οι βαθμοί ελευθερίας κατά αύξων αριθμό είναι:

- u1: μετατόπιση του κόμβου 1 κατά  $x$
- v1: μετατόπιση του κόμβου 1 κατά  $y$
- w1: στροφή του κόμβου 1
- u2: μετατόπιση του κόμβου 2 κατά  $x$
- v2: μετατόπιση του κόμβου 2 κατά  $y$
- w2: στροφή του κόμβου 2

Επειδή η δοκός είναι αρθρωμένη στο ένα άκρο της, οι βαθμοί ελευθερίας 1 και 2 διαγράφονται από τις αντίστοιχες εξισώσεις.

Επομένως τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας σε κάθε βήμα ολοκλήρωσης θα είναι:

$$M_k = \begin{bmatrix} 4L^2\alpha & 0 & 13L\alpha & -3L^2\alpha \\ & 2\mu & 0 & 0 \\ & & 156\alpha & -22L\alpha \\ \text{sym} & & & 4L^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\mu = \frac{\rho AL}{6} \quad a = \frac{\rho AL}{420}$$

$$K_k = \begin{bmatrix} 4L^2\delta & 0 & -6L\delta & 2L^2\delta \\ & \nu & 0 & 0 \\ & & 12\delta & -6L\delta \\ \text{sym} & & & 4L^2\delta \end{bmatrix}$$

$$\nu = \frac{EA}{L} \quad \delta = \frac{EJ_z}{L^3}$$

Το μητρώο μετασχηματισμού είναι:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η γωνία  $\psi$  θα είναι ίση με:

$$\tan \psi = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}$$

Όπου  $v_2, v_1, u_2, u_1$

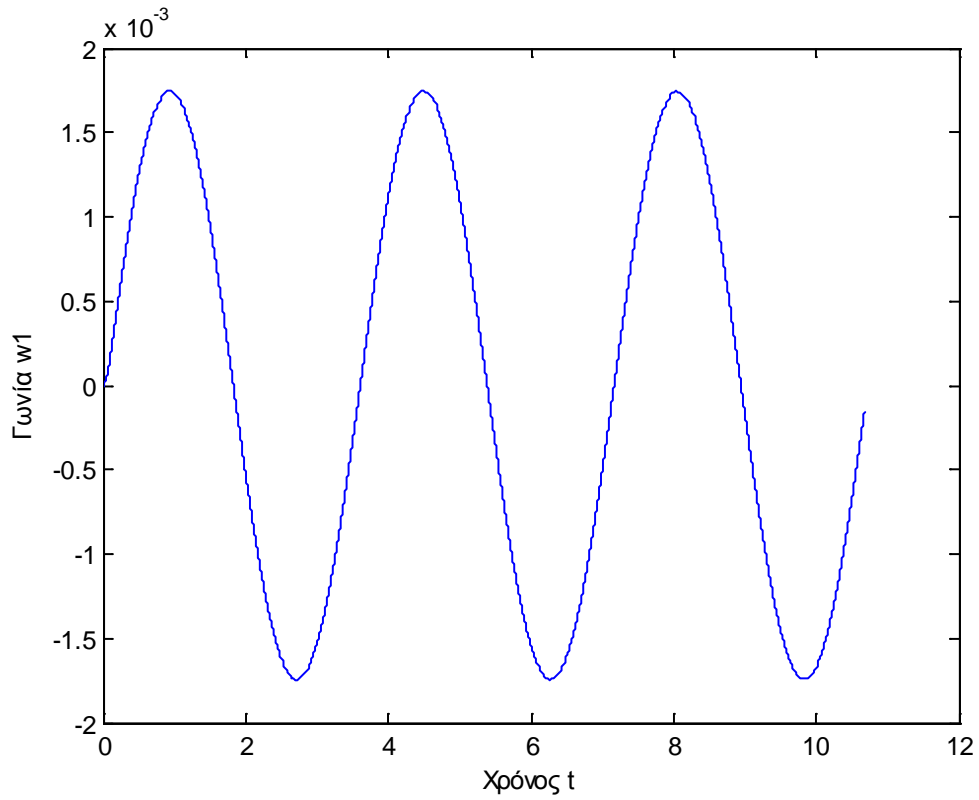
είναι οι συντεταγμένες ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων.

Το διάνυσμα φόρτισης θα είναι:

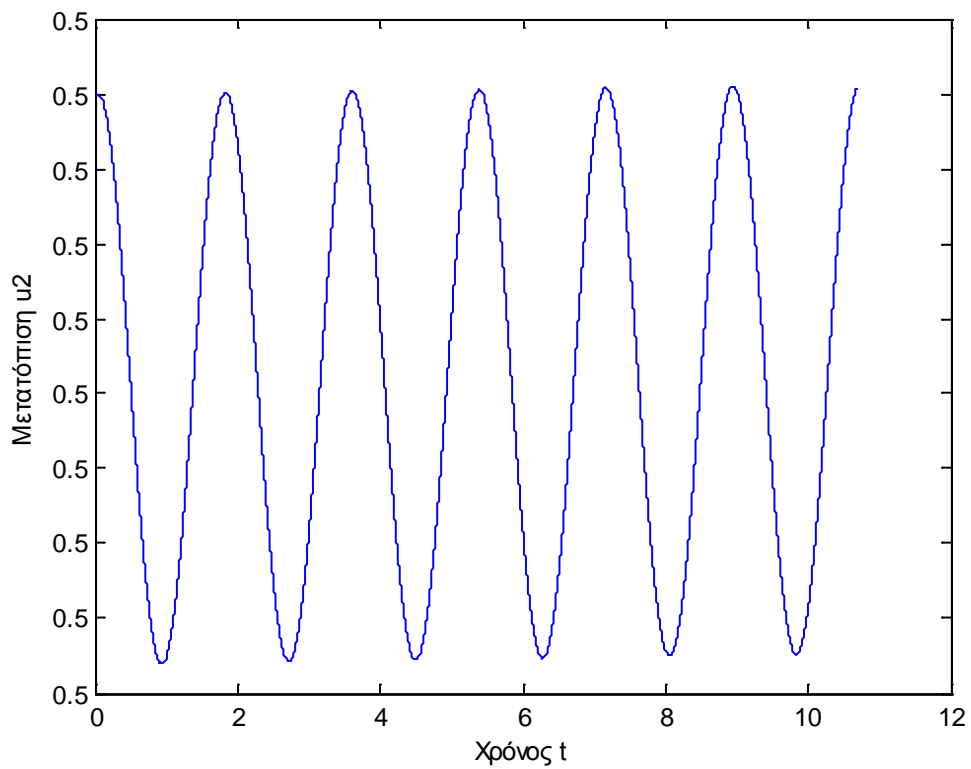
$$f = [M - kw_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Όπου  $w_1$  είναι η μετατόπιση της γωνίας 1 από το καθολικό σύστημα συντεταγμένων.

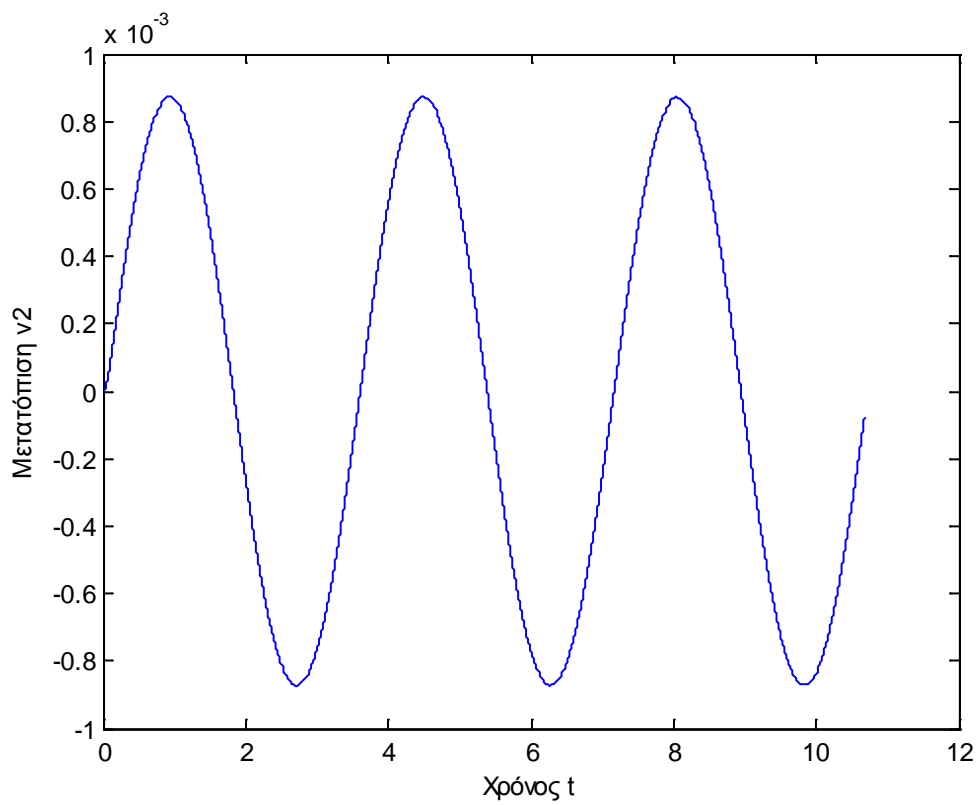
Εφαρμόζουμε τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης των 2-Σημείων με βήμα  $h=0,001$  και την παράμετρο  $\theta=0,9$  και λαμβάνουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



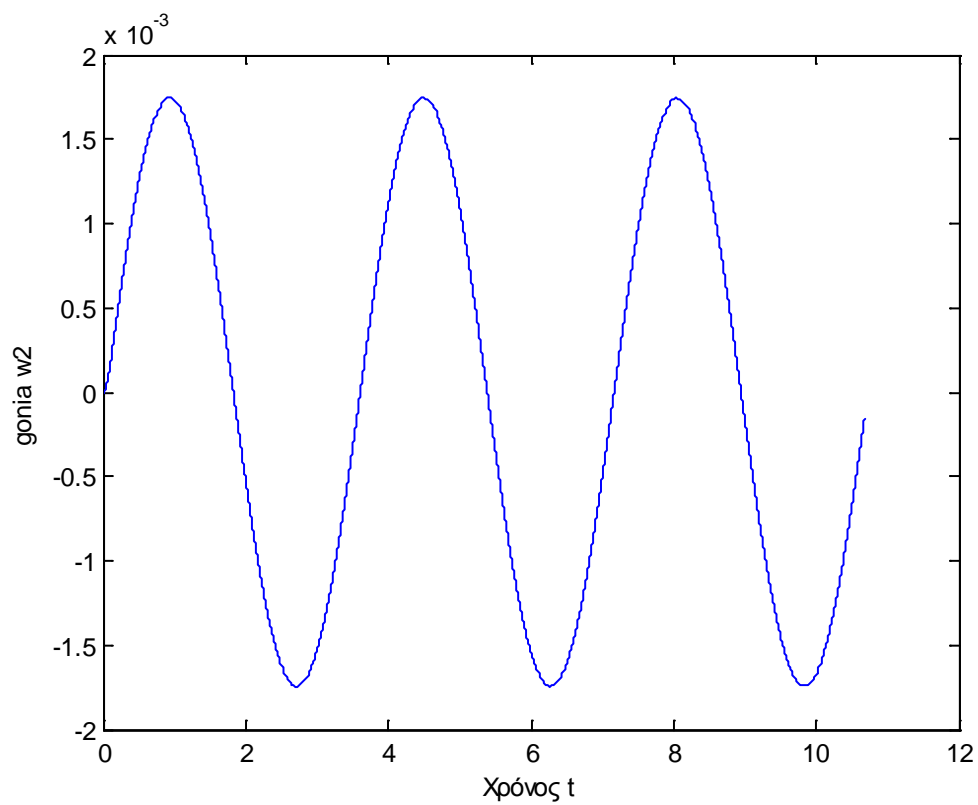
**5.6.1**  
**Στροφή του κόμβου 1**



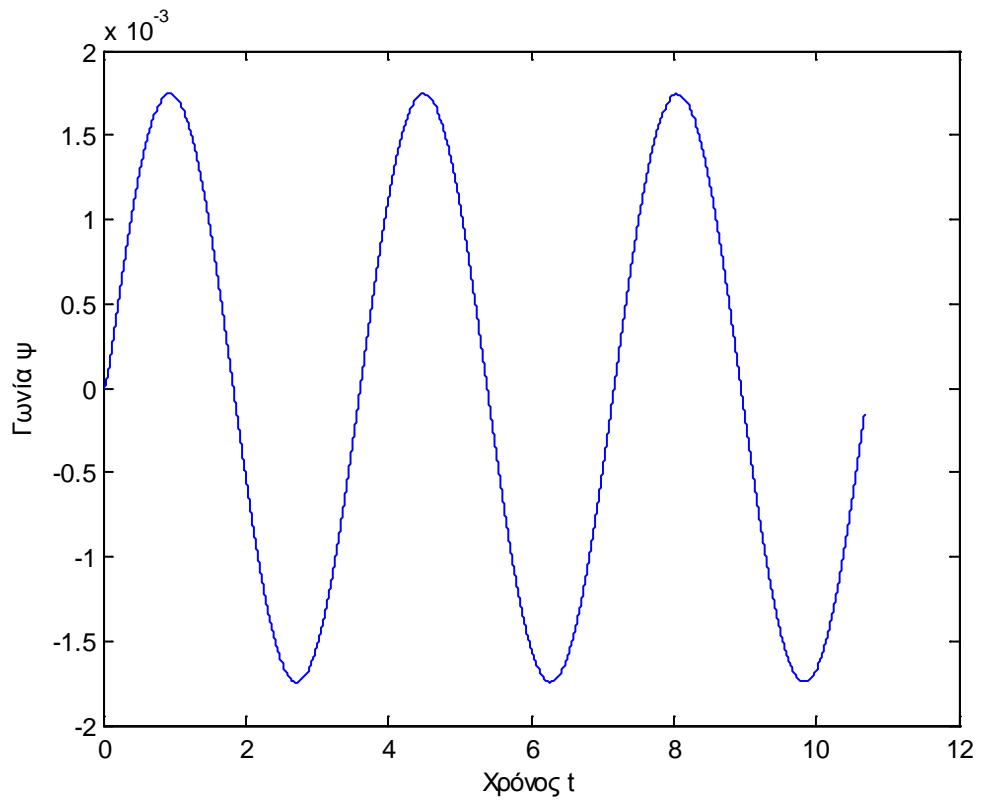
**5.6.2**  
**Μετατόπιση του κόμβου 2 κατά  $\chi$**



**5.6.3**  
Μετατόπιση του κόμβου 2 κατά  $y$



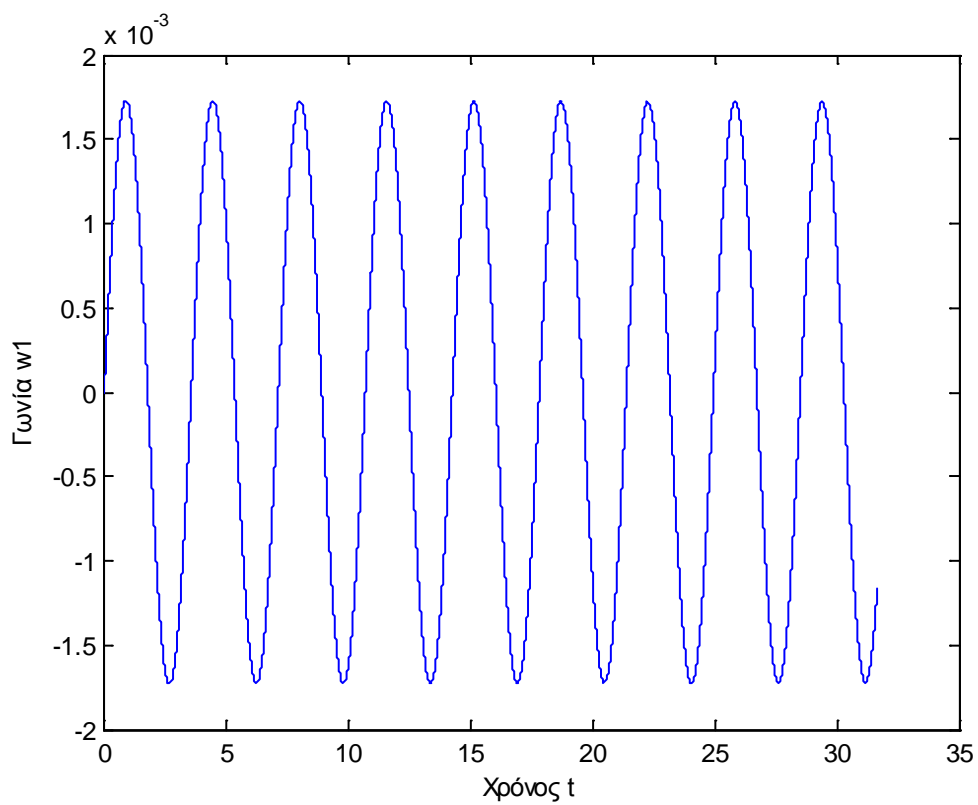
**5.6.4**  
Στροφή του κόμβου 2



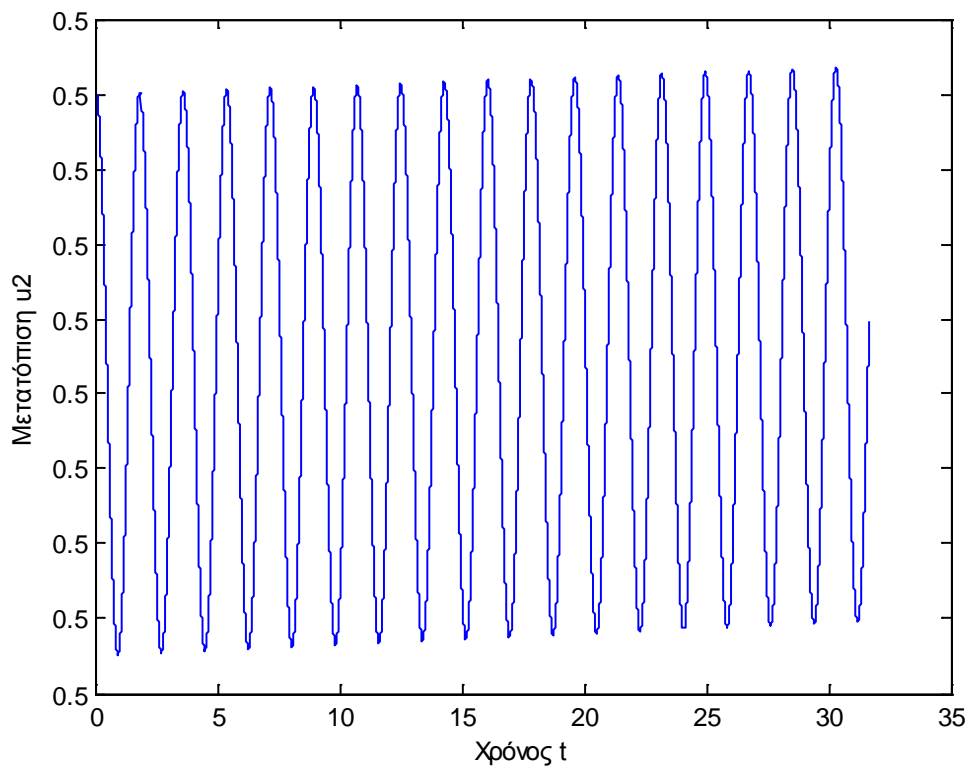
**5.6.5**  
**Γωνία  $\Psi$**



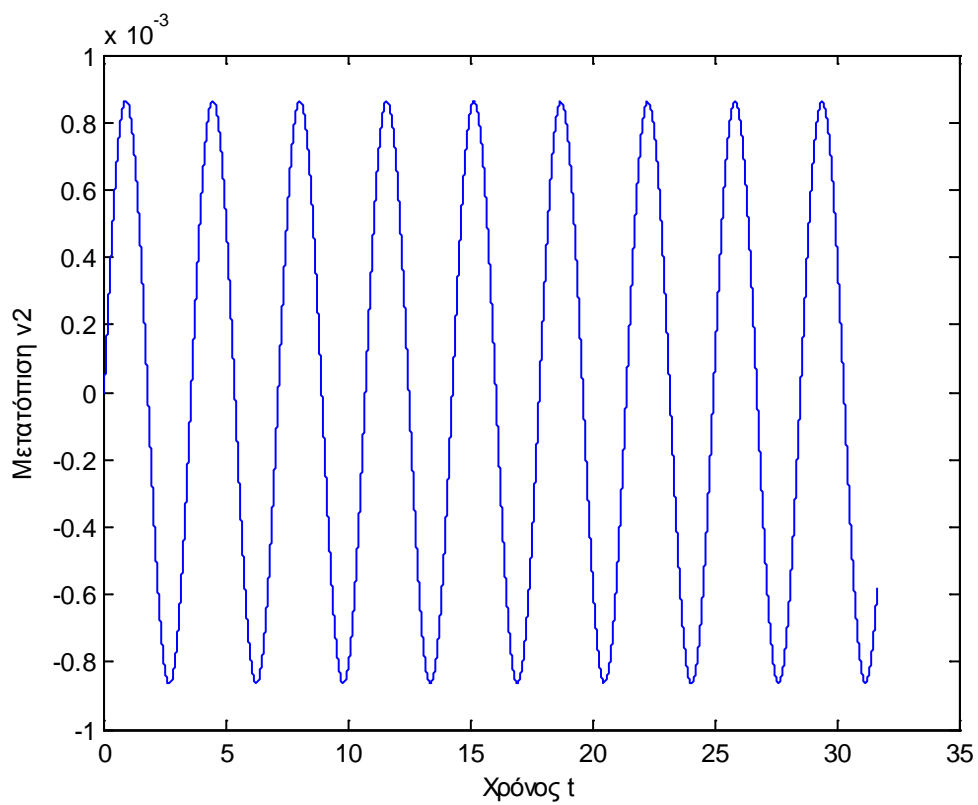
**5.5 Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε μια δοκό η οποία είναι αρθρωμένη στο ένα άκρο της και στηρίζεται σε ένα στρεπτικό ελατήριο και στο άλλο άκρο της είναι μια συγκεντρωμένη μάζα**



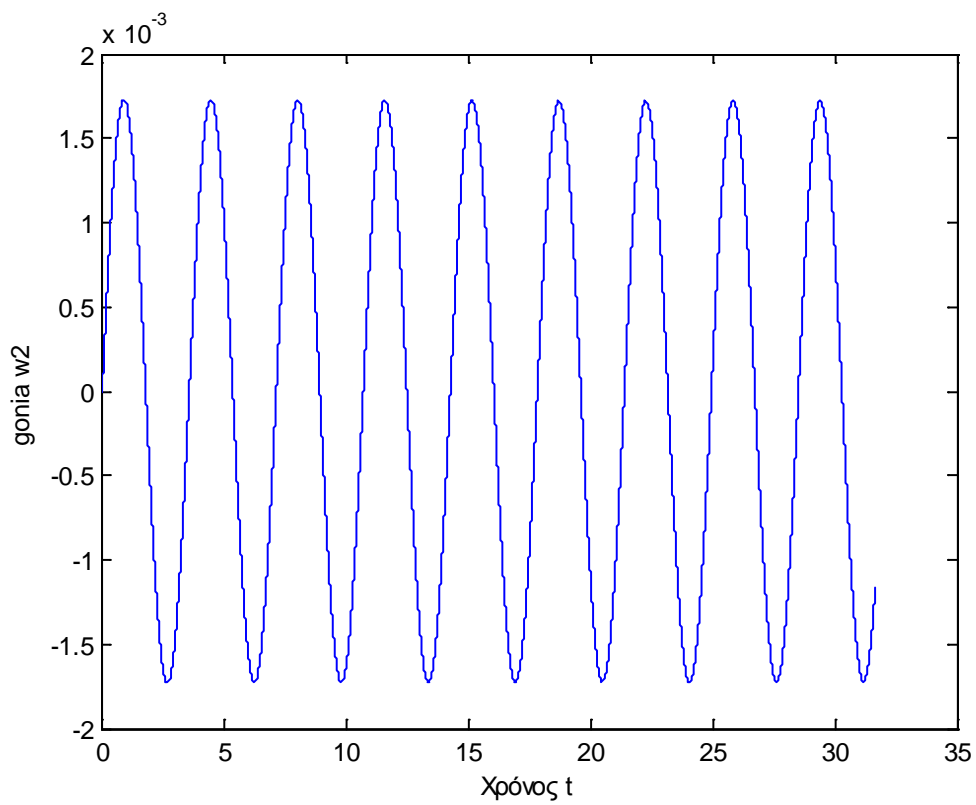
**5.7.1  
Στροφή του κόμβου 1**



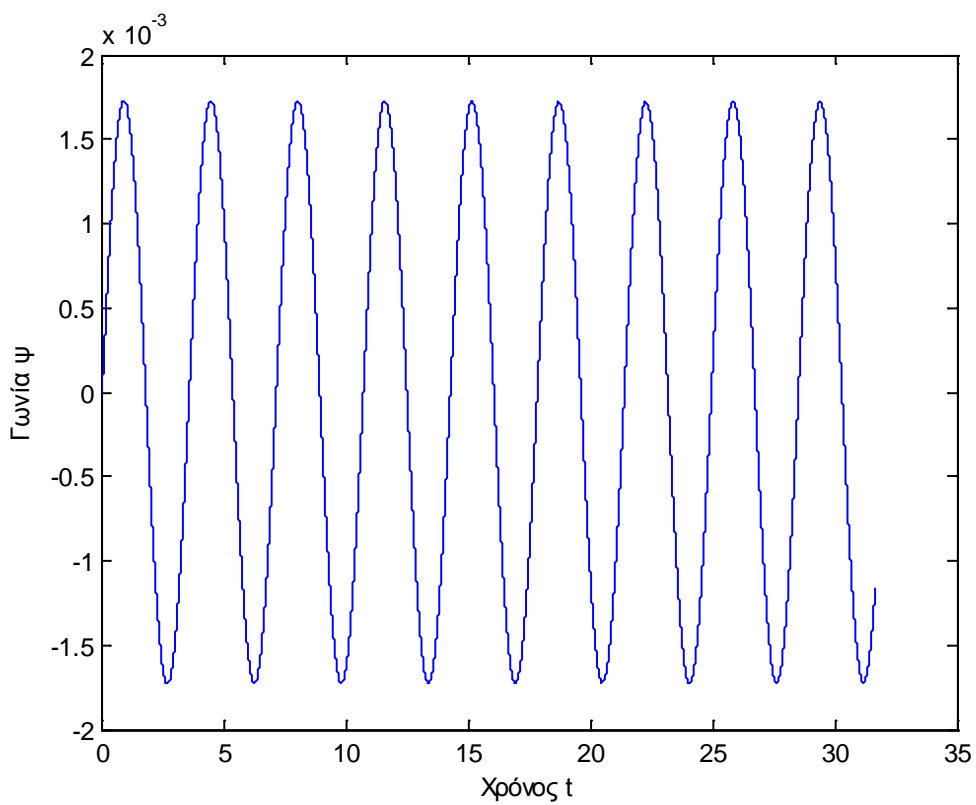
**5.7.2**  
**Μετατόπιση του κόμβου 2 κατά χ**



**5.7.3**  
**Μετατόπιση του κόμβου 2 κατά y**

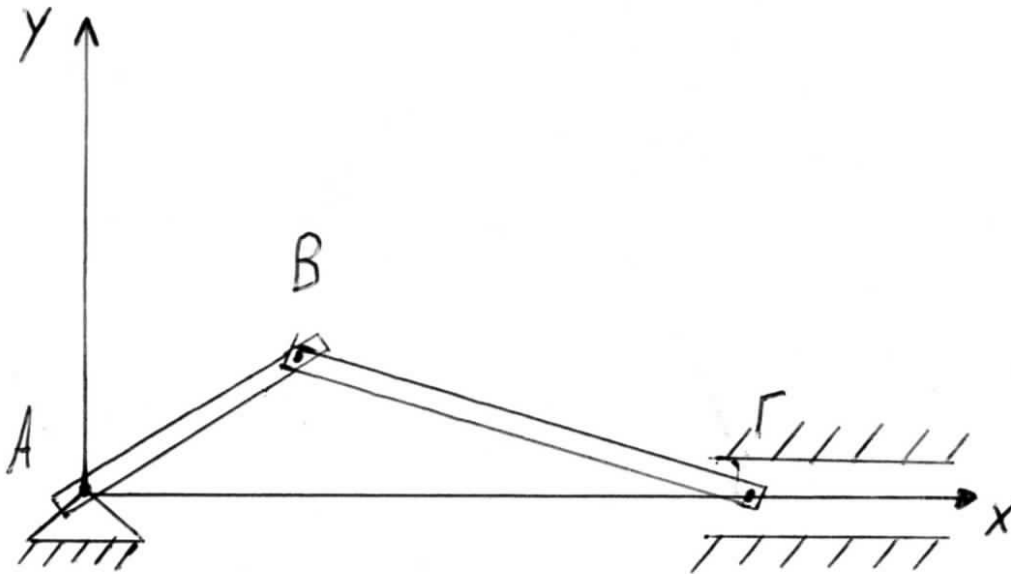


**5.7.4**  
**Στροφή του κόμβου 2**



**5.7.5**  
**Γωνία  $\Psi$**

### 5.6 Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στο μηχανισμό στροφάλου-διωστήρα-εμβόλου



Θεωρούμε έναν μηχανισμό άρθρωσης-ολίσθησης (crankslider) με την παρακάτω γεωμετρία:

A: Άρθρωση

Γ: Ολίσθηση

Μέλος AB: μήκος  $L1=0,5m$

Μέλος ΒΓ: μήκος  $L2=1,5m$

Μέτρο ελαστικότητας χάλυβα:  $E = 2,1 \cdot 10^{11} (Nm^2)$

Διατομή της ράβδου:  $A = 10^{-4} (m^2)$

Ροπή αδράνειας ως προς κάμψη στον άξονα y:  $J_z = 10^{-5} (m^4)$

Ως αρχική θέση του μηχανισμού λαμβάνουμε τη θέση εκείνη κατά την οποία και τα δυο μέλη του μηχανισμού ταυτίζονται με τον άξονα x.

Οι βαθμοί ελευθερίας που αντιστοιχούν σε κάθε άκρο είναι:

#### Πεπερασμένο στοιχείο 1

Κόμβος A

u1: μετατόπιση του κόμβου A κατά τον άξονα x  
v1: μετατόπιση του κόμβου A κατά τον άξονα y  
w1: στροφή του κόμβου A

Κόμβος B

u2: μετατόπιση του κόμβου B κατά τον άξονα x  
v2: μετατόπιση του κόμβου B κατά τον άξονα y  
w12: στροφή του κόμβου B

#### Πεπερασμένο στοιχείο 2

Κόμβος B

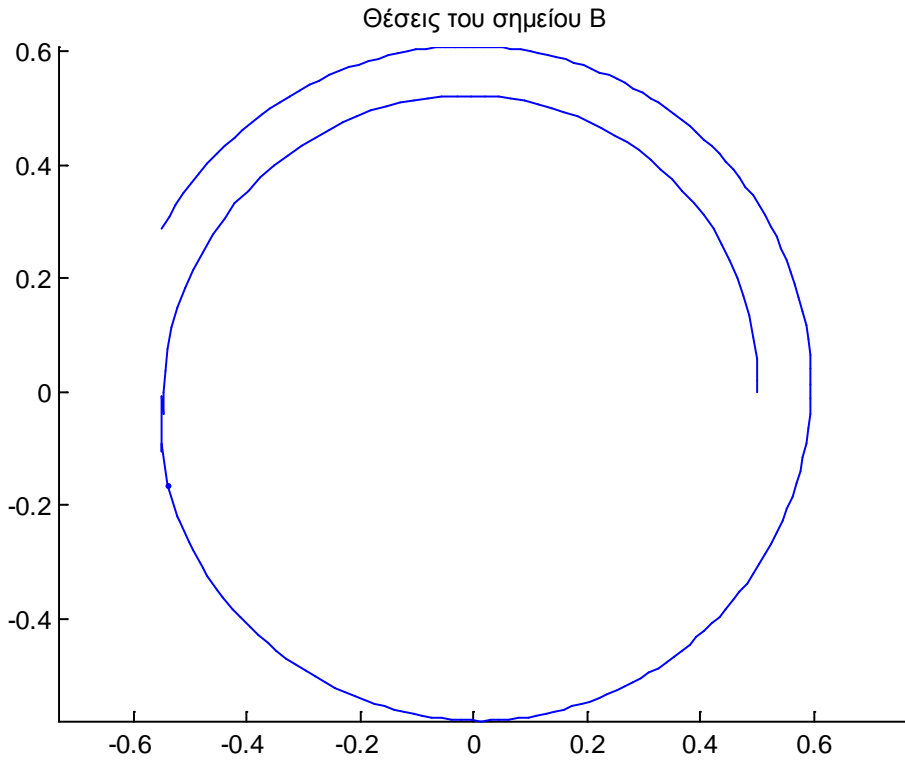
u2: μετατόπιση του κόμβου B κατά τον άξονα x  
v2: μετατόπιση του κόμβου B κατά τον άξονα y  
w21: στροφή του κόμβου B

Κόμβος Γ

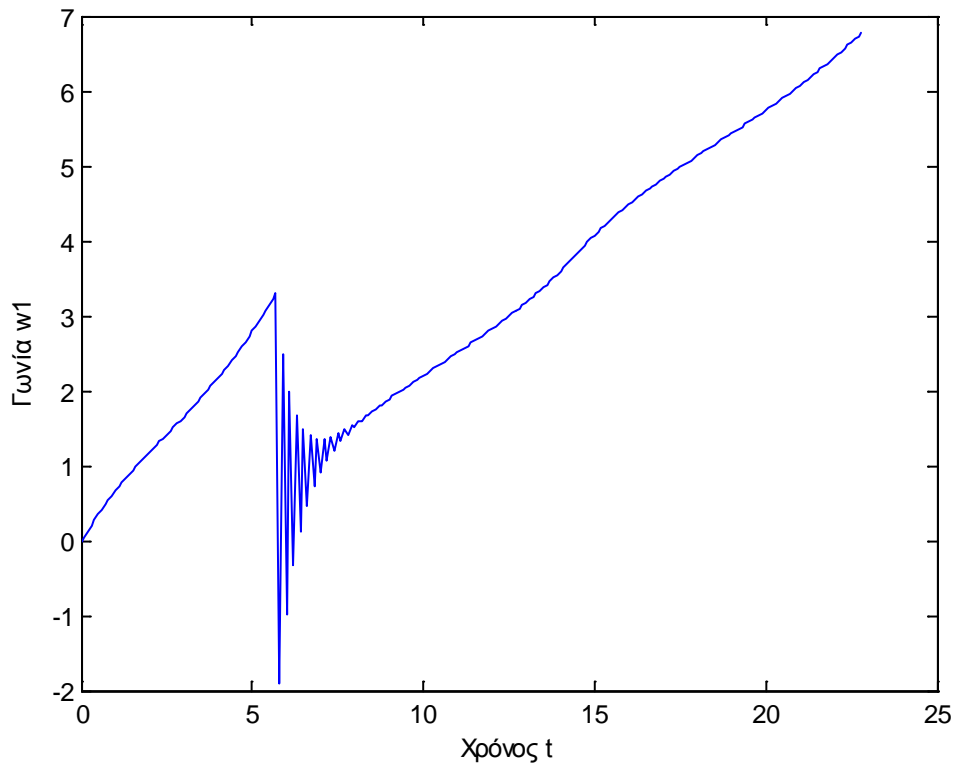
u2: μετατόπιση του κόμβου Γ κατά τον άξονα x  
v2: μετατόπιση του κόμβου Γ κατά τον άξονα y  
w2: στροφή του κόμβου Γ

Τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας προκύπτουν μετά από την σύνθεση των 2 πεπερασμένων στοιχείων και την απαλοιφή των βαθμών ελευθερίας.  
Οι βαθμοί ελευθερίας που απαλείφονται είναι οι u1,v1 λόγω της άρθρωσης και ο v3 λόγω της ολίσθησης.

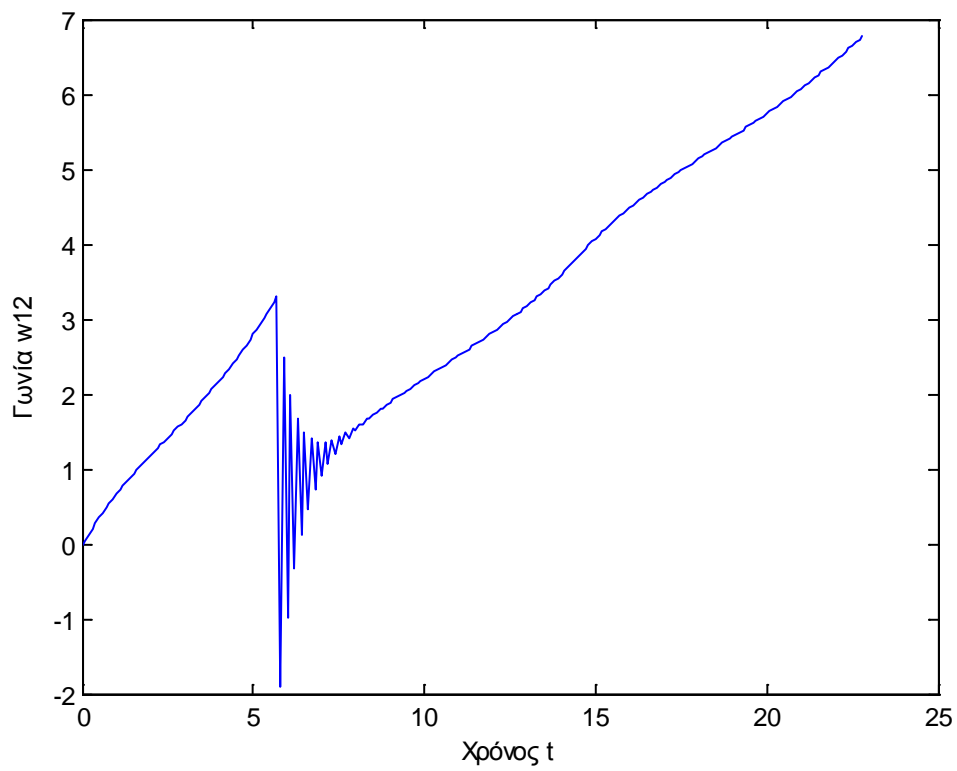
Εάν εφαρμόσουμε στιγμιαία μια στρεπτική ροπή στον κόμβο 1, και χρησιμοποιώντας την μέθοδο ολοκλήρωσης των 2-Σημείων με  $h=0,1$  και  $\theta=0,55$  (η ολοκλήρωση διαρκεί τόσο ώστε το 1<sup>ο</sup> μέλος να εκτελέσει μια περιστροφή) προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα:



**5.8.1**  
**Τροχιά του κόμβου B**

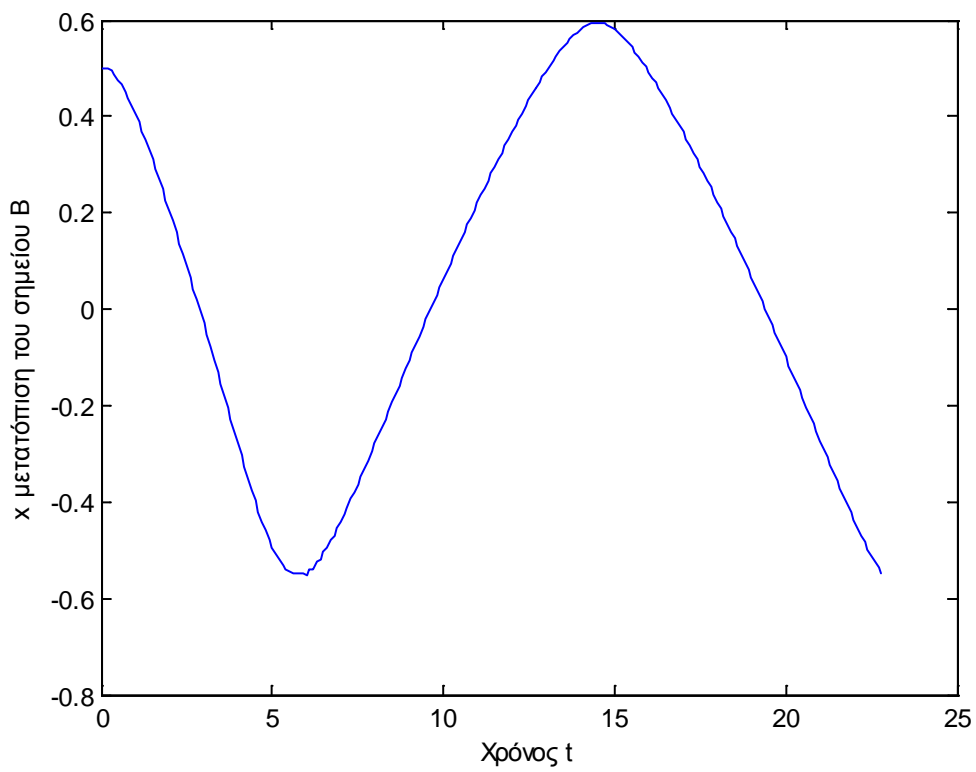


**5.8.2**  
**Στροφή του κόμβου A**



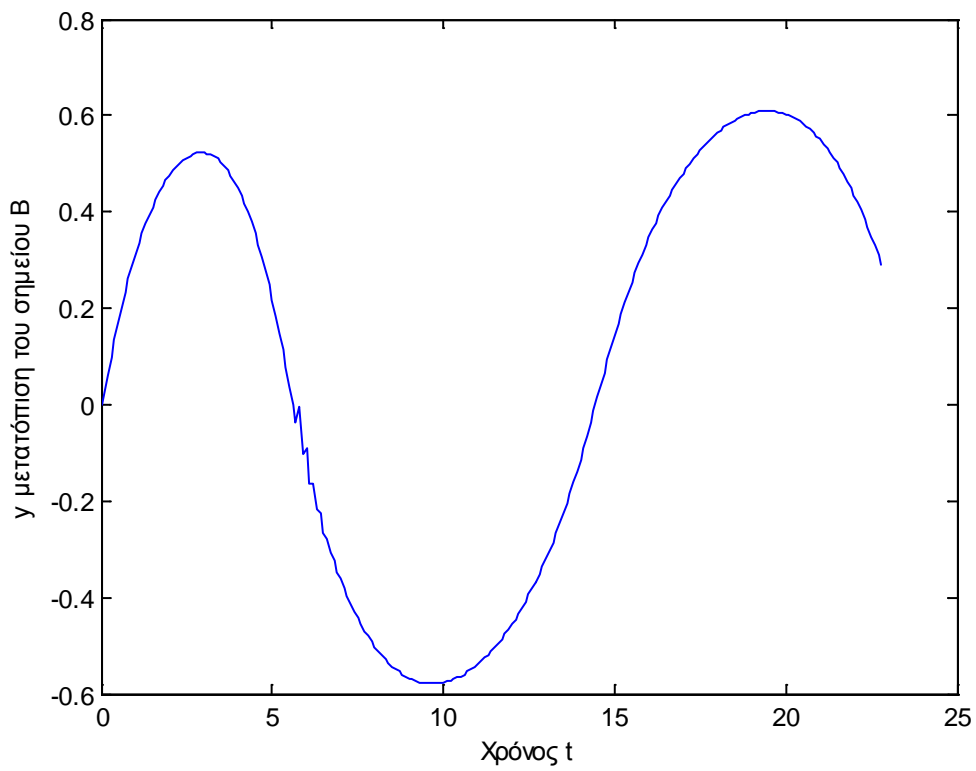
### 5.8.3

**Στροφή του κόμβου B του πεπερασμένου στοιχείου 1**

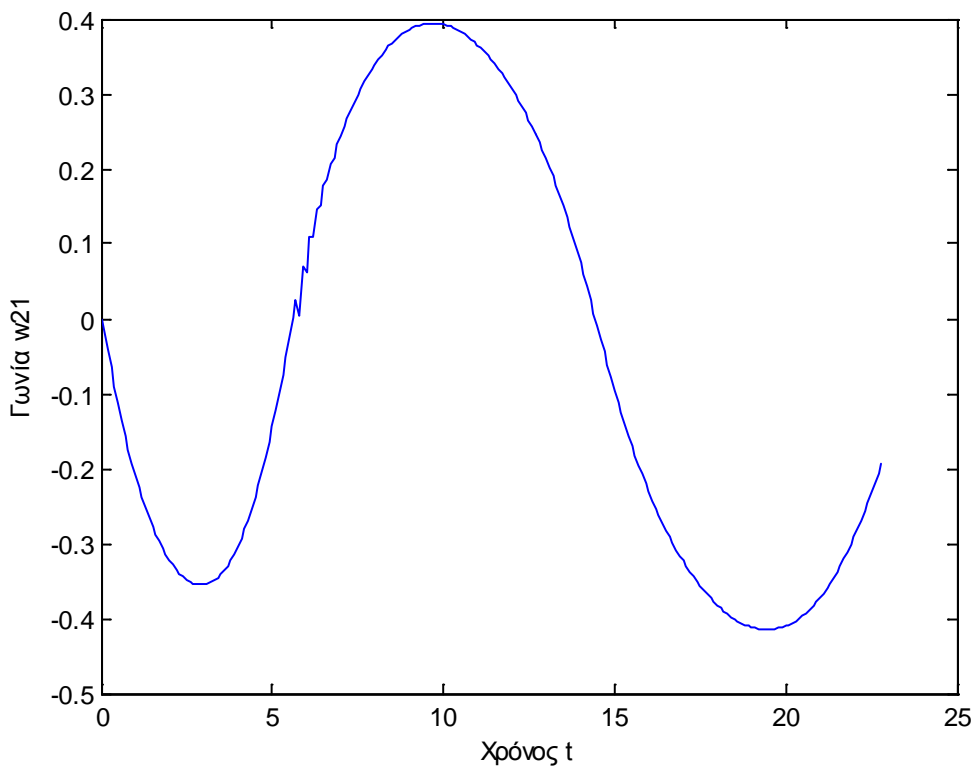


### 5.8.4

**Μετατόπιση του κόμβου B κατά χ**

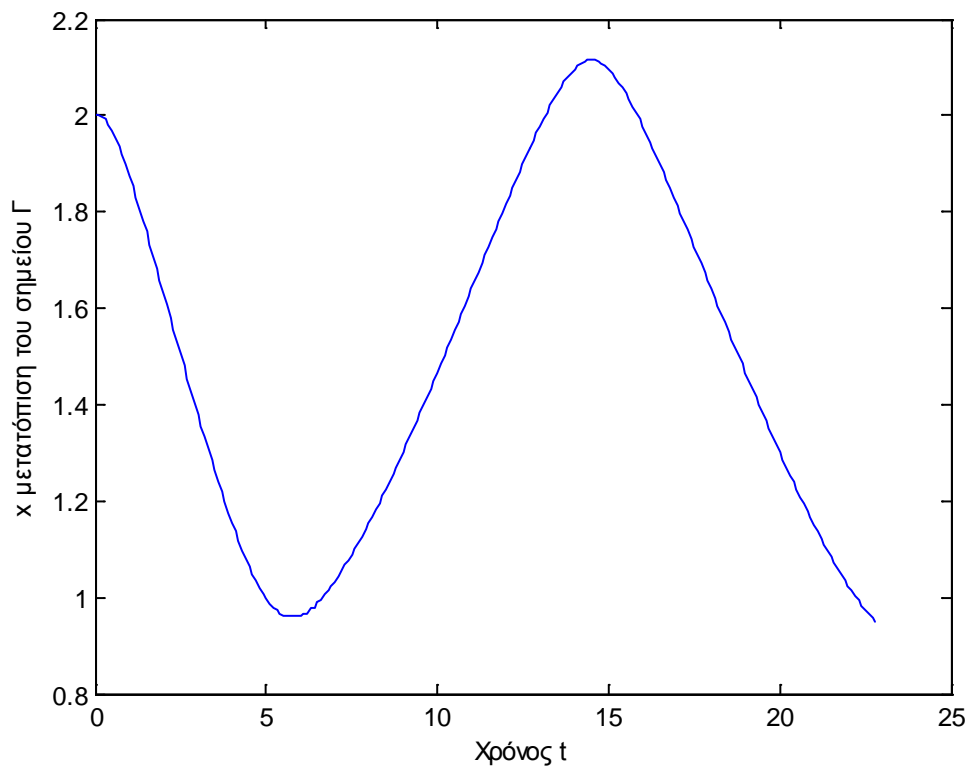


**5.8.5**  
**Μετατόπιση του κόμβου B κατά y**

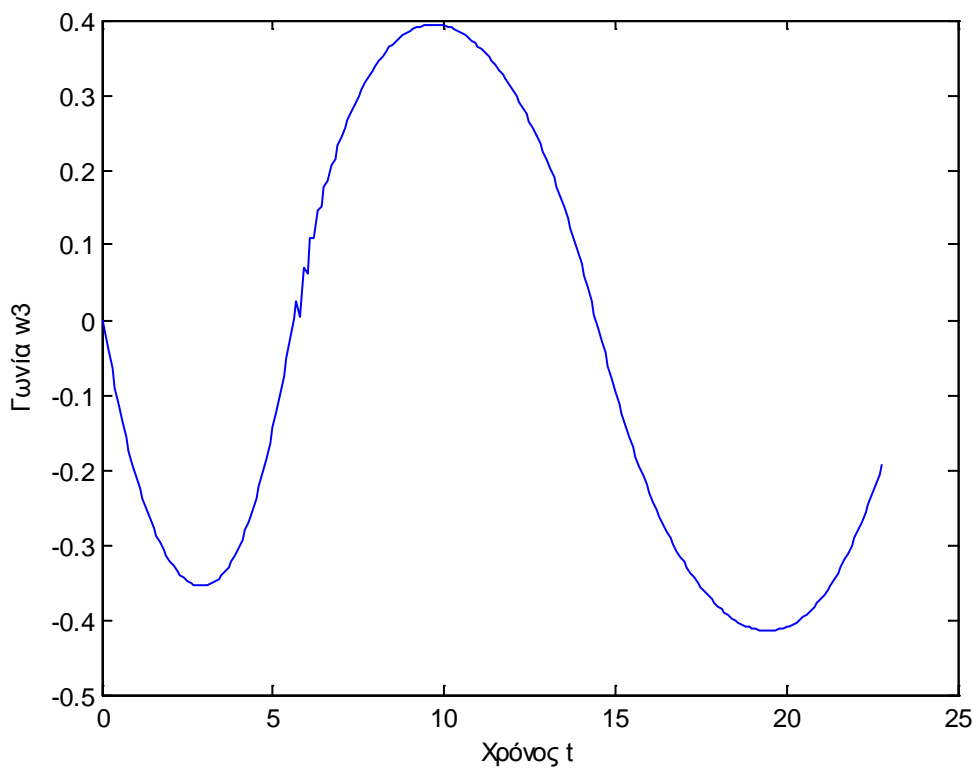


**5.8.6**  
**Στροφή του κόμβου B του πεπερασμένου στοιχείου 2**





**5.8.7**  
Μετατόπιση του κόμβου Γ κατά  $\chi$



**5.8.8**  
Στροφή του κόμβου Γ

## 6. Συμπεράσματα

Κατά την περιστροφική κίνηση του τροφάλου, για τις διάφορες τιμές σε rad της γωνίας  $\vartheta(t)$  όπως φαίνεται στον οριζόντιο άξονα των διαγραμμάτων δηλαδή, προκύπτουν οι τιμές των διάφορων αδιάστατων μεγεθών.

Αυτές τις τιμές αν τις πολλαπλασιάσουμε με την ποσότητα που τις διαιρέσαμε για την αδιαστατοποίηση του αντίστοιχου μεγέθους, προκύπτουν οι τιμές του κάθε μεγέθους, για τις διάφορες τιμές της γωνίας  $\vartheta(t)$ .

Έτσι φαίνεται ποιοτικά η συνολική κίνηση του μηχανισμού, οι ροπές που δημιουργούνται, καθώς και οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στις αρθρώσεις των μελών του μηχανισμού.

### Η συνολική κίνηση του μηχανισμού έχει ως εξής:

- Ο στρόφαλος εκτελεί περιστροφική κίνηση ως προς την άρθρωση O στο επίπεδο XY. Η θέση του δίνεται από την τιμή της γωνίας  $\vartheta(t)$  του τροφάλου με τον άξονα X.
- Η περιστροφική κίνηση του τροφάλου αναγκάζει το διωστήρα να εκτελεί μια γενική κίνηση, περιστροφική και μεταφορική στο επίπεδο XY.
- Ο διωστήρας με τη σειρά του αναγκάζει το έμβολο, που βρίσκεται μέσα στον οδηγό, στον κύλινδρο δηλαδή, να εκτελεί παλινδρομική κίνηση στον άξονα X.

Συγκεκριμένα **στη θέση του τροφάλου** όπου  $\vartheta(t) = 0$  ο διωστήρας συμπίπτει με τον άξονα X, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα της γωνίας  $\varphi(t)$  του διωστήρα με τον άξονα X, όπου η τιμή της γωνίας  $\varphi(t)$  είναι 0 για  $\vartheta(t) = 0$ .

Η γωνιακή ταχύτητα του διωστήρα σε αυτή τη θέση έχει τη μέγιστη τιμή, ενώ η γωνιακή επιτάχυνσή του είναι μηδέν.

Αντίθετα για το έμβολο, η ταχύτητά του σε αυτή τη θέση είναι μηδέν και η επιτάχυνσή του μέγιστη, που είναι αναμενόμενο αφού σε αυτή τη θέση γίνεται αλλαγή φοράς κίνησης.

Σε αυτή τη θέση το έμβολο καταλαμβάνει την πιο απομακρυσμένη θέση από την άρθρωση O.

Κατά την περιστροφή του τροφάλου, μεταβολή της γωνίας  $\vartheta(t)$ , η γωνιακή ταχύτητα του διωστήρα μειώνεται και η επιτάχυνσή του αυξάνεται.

Το έμβολο κινείται προς τα αριστερά, η ταχύτητά του αυξάνεται και η επιτάχυνσή του μειώνεται.

**Στη θέση**  $\vartheta(t) = \frac{\pi}{2}$ , η γωνιακή ταχύτητα του διωστήρα είναι μηδέν και η γωνιακή επιτάχυνσή του έχει τη μέγιστη τιμή,

Ενώ η ταχύτητα του εμβόλου είναι μέγιστη και η επιτάχυνσή του μηδενική.

**Στη θέση**  $\vartheta(t) = \pi$ , η γωνιακή ταχύτητα του διωστήρα είναι μέγιστη και η γωνιακή επιτάχυνσή του μηδέν,

Ενώ η ταχύτητα του εμβόλου είναι μηδέν και η επιτάχυνσή του μέγιστη,

Που είναι αναμενόμενο αφού σε αυτή τη θέση γίνεται αλλαγή φοράς κίνησης.

Σε αυτή τη θέση ο διωστήρας συμπίπτει ξανά με τον άξονα X, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα της γωνίας  $\varphi(t)$  του διωστήρα με τον άξονα X, όπου η τιμή της γωνίας  $\varphi(t)$  είναι μηδέν για  $\vartheta(t) = \pi$ .

Ακόμη το έμβολο βρίσκεται στην κοντινότερη θέση από την άρθρωση O.

Σε αυτή τη θέση το έμβολο έχει διανύσει τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση.

Το μήκος αυτής της απόστασης, είναι το **μήκος εμβολισμού** και πολλαπλασιαζόμενο με το εμβαδό της διατομής του εμβόλου προκύπτει ο **όγκος εμβολισμού**.

**Είναι κατανοητό ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο στρόφαλος τόσο μεγαλύτερος είναι και ο όγκος εμβολισμού, άρα τόσο μεγαλύτερο το παραγόμενο έργο.**

Για αυτό το μήκος του στροφάλου έχει καθοριστική σημασία.

Από τη θέση  $\vartheta(t) = \pi$  μέχρι  $\vartheta(t) = 2 \cdot \pi$  η κίνηση του μηχανισμού είναι ανάλογη με αυτή που περιγράφηκε παραπάνω.

Στις δυο ακραίες θέσεις του εμβόλου, δηλαδή για  $\vartheta(t) = 0$  και για  $\vartheta(t) = \pi$  εμφανίζονται οι μέγιστες επιταχύνσεις του κέντρου μάζας του συστήματος, άρα και οι μέγιστες δυνάμεις στις αρθρώσεις του μηχανισμού, που είναι αναμενόμενο αφού είναι δυο σημεία αλλαγής της φοράς κίνησης του μηχανισμού στον άξονα X.

Όμως στη θέση  $\vartheta(t) = 0$  οι τιμές των επιταχύνσεων είναι μεγαλύτερες από ότι στη θέση  $\vartheta(t) = \pi$ .

Άρα οι μέγιστες δυνάμεις εμφανίζονται στη θέση  $\vartheta(t) = 0, 2\pi \dots$

Για τον άξονα Y η **αλλαγή φοράς κίνησης για το διωστήρα** γίνεται στις θέσεις

$\vartheta(t) = \frac{\pi}{2}, \frac{3 \cdot \pi}{2}$  όπου εμφανίζονται και οι μέγιστες επιταχύνσεις του κέντρου μάζας στον άξονα Y, άρα και οι μέγιστες δυνάμεις στις αρθρώσεις στον άξονα Y.

**Ακόμη παρατηρείται ότι όσο πιο μικρός είναι ο λόγος  $l = \frac{l_1}{l_2}$  του μήκους του**

**στροφάλου προς το μήκος του διωστήρα, τόσο πιο μικρές είναι οι τιμές όλων των μεγεθών που περιγράφουν τα διαγράμματα.**

**Δηλαδή, όσο πιο μικρός είναι στρόφαλος σε σχέση με το διωστήρα, τόσο ομαλότερη είναι η κίνηση του μηχανισμού και τόσο μικρότερες δυνάμεις σχηματίζονται.**

**Ταυτόχρονα, όσο πιο μεγάλος είναι ο στρόφαλος, τόσο πιο μεγάλος είναι ο όγκος εμβολισμού άρα και το παραγόμενο έργο.**

Για αυτό πρέπει να είναι τέτοια η τιμή του λόγου στροφάλου-διωστήρα, ώστε να είναι ικανοποιητικός ο όγκος εμβολισμού άρα και το παραγόμενο έργο της μηχανής, χωρίς όμως αυτό να αποβαίνει αρνητικό στην ομαλή λειτουργία του μηχανισμού.

Το ποια είναι η ιδανική τιμή του λόγου στροφάλου-διωστήρα, είναι κάτι που ξεφεύγει από τη μελέτη αυτής της εργασίας.

Μπορεί να αποτελέσει όμως πρόταση για μελλοντική έρευνα, γιατί όπως είναι κατανοητό έχει τεράστια πρακτική αξία.

Αυτό γιατί από τη μια μεριά χρειάζεται μικρός λόγος στροφάλου-διωστήρα ώστε να υπάρχει ομαλότερη λειτουργία του κινητήρα που σημαίνει μείωση των φθορών του, άρα μακροχρόνια λειτουργία του.

Από την άλλη μεριά όμως χρειάζεται μεγάλος λόγος στροφάλου-διωστήρα ώστε να υπάρχει η μέγιστη δυνατή παραγωγή έργου με την κατανάλωση της ελάχιστης ενέργειας, που σημαίνει οικονομικότερος κινητήρας.

## 8. Κώδικες Προβλημάτων

### Κώδικας για το πρόβλημα με τον έναν βαθμό ελευθερίας

```
%2 point method (single spring, single mass)
clear
tic
theta=0.5;%input('give theta:')
h=0.1;
%theta=0.8;
% % % m=1; k=1; %spring & mass
%dimiourgo ta mitroa A kai B
A=[1 0
   0 1];
B=[0 -1
   1  0];
%oloklirono arithmitika me tin methodo ton dio simion
%arhikes sinthikes (diafora apo ti thesi isoropias)
zo=[0;0];
%p=[0;0;1;0];
p=[0;1];
%καθορισμός του πότε θα χρησιμοποιούμε το μητρω
μετασχηματισμού
%αρχικές συνθήκες για το loop
x(1,:)=zo';
t=0:h:10;
for counter=2:length(t)
    z=inv((A/h)+B*theta)*(p+(A/h-B*(1-theta))*zo);
    zo=z;
    x(counter,:)=z';
end
toc
v=0:h:10;
y=-cos(v)+1;
figure(1)
plot(t,x(:,1))
hold on
plot(t,y,'r--')
xlabel('Χρόνος t')
ylabel('Μετατόπιση x(t) / Ακριβής Λύση')
figure(2)
plot(t,x(:,2))
xlabel('Χρόνος t')
ylabel('Ταχύτητα U(t)')
for i=1:length(t)
    sfalma(i)=abs(x(i,1)-y(i));
end
norm=sum(sfalma)
```

## Κώδικας για το πρόβλημα με τους δύο βαθμούς ελευθερίας

```

%2 point method (two springs, two masses)
clear
tic
theta=0.5;%input('give theta:')
h=0.01;
%
%dimiourgo ton monadiaio kai mideniko pinaka, prokimenou
na ftiaxo ta
%mitroa A kai B
% % I=eye(length(Mol));
% % O=zeros(length(Kol));
%dimiourgo ta mitroa A kai B
A=[1 0 0 0
   0 1 0 0
   0 0 1 0
   0 0 0 2];
% % % Mh=inv(Mol)*Kol;
B=[0 0 -1 0
   0 0 0 -1
   10 -10 0 0
   -10 20 0 0];
%oloklirono arithmitika me tin methodo ton dio simion
%arhikes sinthikes (diafora apo ti thesi isoropias)
zo=[1;0;0;0];
%
% pause
p=[0;0;0;0];
%καθορισμός του πότε θα χρησιμοποιούμε το μητρω
%μετασχηματισμού
%αρχικές συνθήκες για το loop
x(1,:)=zo';
t=0:h:10;
for counter=2:length(t)
    z=inv((A/h)+B*theta)*( p + (A/h-B*(1-theta))*zo );
    zo=z;
    x(counter,:)=z';
end
toc
%
v=0:h:10;
y1=0.5*(cos(1.7114*v)+cos(4.1317*v));
y2=0.7072*0.5*cos(1.7114*v)-0.7072*0.5*cos(4.1317*v);
figure(1)
plot(t,x(:,1),'b')
hold on
plot(t,y1,'r--')
ylabel('Μετατόπιση x1(t) / Ακριβής Λύση')
xlabel('Χρόνος t')
figure(2)
plot(t,x(:,2),'g')

```

```
hold on
plot(t,y2,'r--')
ylabel('Μετατόπιση x2(t) / Ακριβής Λύση')
xlabel('χρόνος t')
figure(3)
plot(t,x(:,3),'m')
ylabel('Ταχύτητα U1(t)')
xlabel('χρόνος t')
figure(4)
plot(t,x(:,4),'y')
ylabel('Ταχύτητα U2(t)')
xlabel('χρόνος t')
```

## Κώδικας για το πρόβλημα με τη ράβδο

```
%point2
clear
tic
%το συγκεκριμένο script χρησιμοποιεί την μέθοδο των δυο
σημείων προκειμένου
%να λύσει διαφορικές εξισώσεις
r=7700;%kr/m^3, πυκνότητα
E=2.1*10^11;%N/m^2, Μέτρο Ελαστικότητας
L=0.5; %m, Μήκος Δοκού
A=10^-2;
m=r*A*L; %Μάζα της Δοκού
%ml=100;%
Ith=m*L^2/3; %+ml*L^2; %ροπή αδρανείας ομογενούς ράβδου
που έχει μάζα m και μήκος L ως προς άξονα κάθετο στο ένα
άκρο
k=10^1; %σταθερά στρεπτικού ελατηρίου
Jz=10^-5; %ροπή αδρανείας ως προς κάμψη για την
αναφερόμενη διατομή
theta =0.9;
h=10^-3;
mi=r*A*L/6;
al=r*A*L/420;
ni=E*A/L;
de=E*Jz/L^3;
% Μητρώο Μάζας Πεπερασμένου Στοιχείου
Mp=[2*mi,0,0,mi,0,0;
    0,156*al,22*L*al,0,54*al,-13*L*al;
    0,22*L*al,4*L^2*al,0,13*L*al,-3*L^2*al;
    mi,0,0,2*mi,0,0;
    0,54*al,13*L*al,0,156*al,-22*L*al;
    0,-13*L*al,-3*L^2*al,0,-22*L*al,4*L^2*al];
% Μητρώο Δυσκαμψίας Πεπερασμένου Στοιχείου
Kp=[ni,0,0,-ni,0,0;
    0,12*de,6*L*de,0,-12*de,6*L*de;
    0,6*L*de,4*L^2*de,0,-6*L*de,2*L^2*de;
    -ni,0,0,ni,0,0;
    0,-12*de,-6*L*de,0,12*de,-6*L*de;
    0,6*L*de,2*L^2*de,0,-6*L*de,4*L^2*de];
% Τα παρακάτω ορίζονται γιατί χρειάζονται για την
υπορουτίνα matr
Kpe=Kp;
Mpe=Mp;
Kp(3,3)=Kp(3,3)+k;
%Mp(5,5)=Mp(5,5)+100;
%Πρόσθεση του ελατηρίου στο μητρώο δυσκαμψίας
%Kp(3,3)=kp(3,3)+k;
%Απαλοιφή των βαθμών ελευθερίας που δεσμεύονται λόγω της
άρθρωσης
Mp(1:2,:)=[];Mp(:,1:2)=[];Kp(1:2,:)=[];Kp(:,1:2)=[];
```

```

%Επιπλέον χρήσιμες πληροφορίες
%[U,V]=eig(Kp,Mp);
ome=k/Ith;
periodos=2*pi/sqrt(ome)
VV=eig(Kp,Mp);
O=zeros(length(Mp));
I=eye(length(Mp));
A=[I 0;
    0 Mp];
B=[0 -I;
    Kp 0];
%Ζητάω τις απαραίτητες για την μέθοδο ολοκλήρωσης
%Μεταβλητές th,h (βήμα ολοκλήρωσης) και tend (τέλος
χρόνου ολοκλήρωσης)
%theta=input('δώστε την τιμή της μεταβλητής th:');
tend=3*periodos;
%h=input('δώστε το βήμα h της χρονικής ολοκλήρωσης:');
%tend=input('δώστε το τέλος tend του χρόνου
ολοκλήρωσης:');
%Υπολογίζω το πλήθος των βημάτων
plhthos=floor(tend/h);
%ορίζω την αρχική κατάσταση του συστήματος
zo=zeros(2*length(Mp),1); x(1,:)=[0,L,0,0];
%θέτω την αρχή του χρόνου ίση με 0
tn=0;
t(1)=tn;
p=[0;0;0;0;0;0;0;0];
counter=1;
dinami(1)=0.1;
%μέθοδος 2point για την εφαρμογή που έχουμε με το
στρεπτικό ελατήριο
%φτιάχνω το loop για τον υπολογισμό του zh
%η λύση της διαφορικής δίνει μετατοπίσεις σε σχέση με την
θέση ισορροπίας
for i=1:plhthos
    tn=tn+h;
    if tn<0.1
        p(5)=0.1-k*x(counter,1);
    end
    if tn>0.1
        p(5)=-k*x(counter,1);
    end
    z=inv(A/h+B*theta)*(p+(A/h-B*(1-theta))*zo);
    counter=counter+1;
    dynami(counter)=p(5);
    t(counter)=tn;
    x(counter,:)=x(counter-1,:)+(z(1:4))';
    psi=atan2(x(counter,3),x(counter,2));
    gonia(counter)=psi;
end

```



```

%ανανεώνω τα μητρώα μάζας
T=[cos(psi) sin(psi) 0 0 0 0;
   -sin(psi) cos(psi) 0 0 0 0;
   0 0 1 0 0 0;
   0 0 0 cos(psi) sin(psi) 0;
   0 0 0 -sin(psi) cos(psi) 0;
   0 0 0 0 0 1];
M=T'*Mpe*T;
K=T'*Kpe*T;
%M(5,5)=M(5,5)+100;
M(1:2,:)=[];
M(:,1:2)=[];
K(1:2,:)=[];
K(:,1:2)=[];
A=[I 0;0 M];B=[0 -I;K 0];
z'
arxiko=[z(3)/(L+z(2)),z(2),z(3),z(3)/(L+z(2)),0,0,0,0]
zo=z-arxiko';
zo'

end

figure(1)
plot(t,x(:,1))
ylabel('Γωνία w1')
xlabel('Χρόνος t')
figure(2)
plot(t,x(:,2))
ylabel('Μετατόπιση u2')
xlabel('Χρόνος t')
%grid
figure(3)
plot(t,x(:,3))
%VB=L*th(2,:);
hold on
%plot(th(1,:),VB,'r--')
ylabel('Μετατόπιση v2')
xlabel('Χρόνος t')
%grid
figure(4)
plot(t,x(:,4))
%grid
ylabel('gonia w2')
xlabel('Χρόνος t')

figure(5)
plot(t,gonia)
ylabel('Γωνία ψ')
xlabel('Χρόνος t')
toc

```

## Κώδικας για το πρόβλημα στροφάλου-διωστήρα-εμβόλου

```
%crankslider4 peperasmena stoixeia
clear
tic
h=10^-1;
theta=0.55;
%L1:μήκος 1 ραβδου %L2:μηκος 2 ραβδου %E:μετρο
ελαστικότητας %r:πυκνότητα
%A:εμβαδό διατομής %Jz:ροπή αδράνειας ως προς κάμψη
L1=0.5; L2=1.5; E=2.1*10^11; %N/m^2
A=10^-4; Jz=(10^-5); r=7700; %kg/m^3
%οι συντελεστές των μητρώων
m1=r*A*L1/6; a1=r*A*L1/420; n1=E*A/L1; d1=E*Jz/L1^3;
m2=r*A*L2/6; a2=r*A*L2/420; n2=E*A/L2; d2=E*Jz/L2^3;
%μητρώα μάζας και δυσκαμψίας στα τοπικά συστήματα
M11=[2*m1,0,0,m1,0,0;
      0,156*a1,22*L1*a1,0,54*a1,-13*L1*a1;
      0,22*L1*a1,4*L1^2*a1,0,13*L1*a1,-3*L1^2*a1;
      m1,0,0,2*m1,0,0;
      0,54*a1,13*L1*a1,0,156*a1,-22*L1*a1;
      0,-13*L1*a1,-3*L1^2*a1,0,-22*L1*a1,4*L1^2*a1];
K11=[n1,0,0,-n1,0,0;
      0,12*d1,6*L1*d1,0,-12*d1,6*L1*d1;
      0,6*L1*d1,4*L1^2*d1,0,-6*L1*d1,2*L1^2*d1;
      -n1,0,0,n1,0,0;
      0,-12*d1,-6*L1*d1,0,12*d1,-6*L1*d1;
      0,6*L1*d1,2*L1^2*d1,0,-6*L1*d1,4*L1^2*d1];
M12=[2*m2,0,0,m2,0,0;
      0,156*a2,22*L2*a2,0,54*a2,-13*L2*a2;
      0,22*L2*a2,4*L2^2*a2,0,13*L2*a2,-3*L2^2*a2;
      m2,0,0,2*m2,0,0;
      0,54*a2,13*L2*a2,0,156*a2,-22*L2*a2;
      0,-13*L2*a2,-3*L2^2*a2,0,-22*L2*a2,4*L2^2*a2];
K12=[n2,0,0,-n2,0,0;
      0,12*d2,6*L2*d2,0,-12*d2,6*L2*d2;
      0,6*L2*d2,4*L2^2*d2,0,-6*L2*d2,2*L2^2*d2;
      -n2,0,0,n2,0,0;
      0,-12*d2,-6*L2*d2,0,12*d2,-6*L2*d2;
      0,6*L2*d2,2*L2^2*d2,0,-6*L2*d2,4*L2^2*d2];
%αρχικές γωνίες ph1,ph2
%ph1=pi/6; ph2=-0.167; ph1a=ph1; ph2a=ph2;
ph1=0; ph2=0; ph1a=ph1; ph2a=ph2;
%μητρώα μετασχηματισμού
T1=[cos(ph1),sin(ph1),0,0,0,0;
     -sin(ph1),cos(ph1),0,0,0,0;
     0,0,1,0,0,0;
     0,0,0,cos(ph1),sin(ph1),0;
     0,0,0,-sin(ph1),cos(ph1),0;
     0,0,0,0,0,1];
```

```

T2=[cos(ph2),sin(ph2),0,0,0,0;
    -sin(ph2),cos(ph2),0,0,0,0;
    0,0,1,0,0,0;
    0,0,0,cos(ph2),sin(ph2),0;
    0,0,0,-sin(ph2),cos(ph2),0;
    0,0,0,0,0,1];
%μητρώα μάζας και δυσκαμψίας σε καθολικούς βαθμούς
ελευθερίας
Mg1=T1'*Ml1*T1; Kg1=T1'*Kl1*T1;
Mg2=T2'*Ml2*T2; Kg2=T2'*Kl2*T2;
%πίνακας βαθμών ελευθερίας
dof=[1,2,3,4,5,6;
     4,5,7,8,9,10];
%σύνδεση των δυο μητρώων μέσω των μετατοπίσεων για την
κατασκευή των ολικών
%μητρωων
Mol=zeros(10); Kol=zeros(10);
%ολικο μητρωο μαζας
Mol(dof(1,:),dof(1,:))=Mol(dof(1,:),dof(1,:))+Mg1;
Mol(dof(2,:),dof(2,:))=Mol(dof(2,:),dof(2,:))+Mg2;
%ολικο μητρώο δυσκαμψίας
Kol(dof(1,:),dof(1,:))=Kol(dof(1,:),dof(1,:))+Kg1;
Kol(dof(2,:),dof(2,:))=Kol(dof(2,:),dof(2,:))+Kg2;
%βαθμοί ελευθερίας που διαγραφονται λόγω αρθρώσεων και
κυλίσεων
q=[1,2,9];
%διαγράφω τις στήλες και γραμμές του μητρώου
Mol(q,:)=[]; Mol(:,q)=[];
Kol(q,:)=[]; Kol(:,q)=[];
%υπολογίζω τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανυσματα του
συστήματος
[U,V]=eig(Kol,Mol);
%δημιουργώ τον μοναδιαιο και μηδενικό πίνακα, προκειμένου
να φτιάξω τα
%μητρώα A και B
I=eye(length(Mol)); O=zeros(length(Kol));
%δημιουργώ τα μητρώα A και B
A=[I,O;
   O,Mol];
B=[O,-I;
   Kol,O];
%ορίζω το διάνυσμα p
p=zeros(length(A),1);
p(8)=1;
%ολοκληρώνω αριθμητικά με τη μέθοδο των δύο σημείων
%αρχικές συνθήκες (διαφορά από τη θέση ισορροπίας)
z0=zeros(length(A),1);
%καθορισμός του πότε θα χρησιμοποιούμε το μητρώο
μετασχηματισμού

```

```

%αρχικές συνθήκες για το loop
counter=1;
tn=0;
x(1,:)=[ph1a,L1*cos(ph1a),L1*sin(ph1a),ph1a,ph2a,L1*cos(p
h1a)+L2*cos(ph2a),ph2a];
for c=1:100000000
    tn=tn+h;
    counter=counter+1;
    t(counter)=tn;
    if tn>0.1;
        p=zeros(length(A),1);
    end
    pp(counter)=p(8);
    z=inv((A/h)+B*theta)*(p+(A/h-B*(1-theta))*z0);
    %αποθήκευση των τιμών
    x(counter,1:7)=x(counter-1,1:7)+(z(1:7))';
    %ορισμός της γωνίας για τον μετασχηματισμό
    ph1=atan2(x(counter,3),x(counter,2));
    f1(counter)=ph1;
    ph2=atan2(-x(counter,3),x(counter,6)-x(counter,2));
    f2(counter)=ph2;
    %μητρώα μετασχηματισμού
    T1=[cos(ph1),sin(ph1),0,0,0,0;
        -sin(ph1),cos(ph1),0,0,0,0;
        0,0,1,0,0,0;
        0,0,0,cos(ph1),sin(ph1),0;
        0,0,0,-sin(ph1),cos(ph1),0;
        0,0,0,0,0,1];
    T2=[cos(ph2),sin(ph2),0,0,0,0;
        -sin(ph2),cos(ph2),0,0,0,0;
        0,0,1,0,0,0;
        0,0,0,cos(ph2),sin(ph2),0;
        0,0,0,-sin(ph2),cos(ph2),0;
        0,0,0,0,0,1];
    %μητρώα μάζας και δυσκαμψίας σε καθολικούς βαθμούς
    ελευθερίας
    Mg1=T1'*M11*T1; Kg1=T1'*K11*T1;
    Mg2=T2'*M12*T2; Kg2=T2'*K12*T2;
    %σύνδεση των δυο μητρώων μέσω των μετατοπίσεων για την
    κατασκευή των ολικών
    %μητρώων
    Mol=zeros(10); Kol=zeros(10);
    %ολικο μητρωο μαζας
    Mol(dof(1,:),dof(1,:))=Mol(dof(1,:),dof(1,:))+Mg1;
    Mol(dof(2,:),dof(2,:))=Mol(dof(2,:),dof(2,:))+Mg2;
    %ολικο μητρώο δυσκαμψίας
    Kol(dof(1,:),dof(1,:))=Kol(dof(1,:),dof(1,:))+Kg1;
    Kol(dof(2,:),dof(2,:))=Kol(dof(2,:),dof(2,:))+Kg2;
    %διαγράψω τις στήλες και γραμμές του μητρώου
    Mol(q,:)=[]; Mol(:,q)=[];
    Kol(q,:)=[]; Kol(:,q)=[];

```

```

%δημιουργώ τα νέα μητρώα A και B
A=[I,O;
   O,Mol];
B=[O,-I;
   Kol,O];
%ορισμός του καινούριου αρχικού διανύσματος
%z'
arxiko=[f1(counter)-f1(counter-1),z(2),z(3),f1(counter)-
f1(counter-1),f2(counter)-f2(counter-1),z(6),f2(counter)-
f2(counter-1),0,0,0,0,0,0,0];
z0=z-arxiko';
%z0'
%pause
if tn>4*5.7
    disp('end')
    break
end
end
figure(1)
for i=1:length(x)-1
    xb=[x(i,2),x(i+1,2)];
    yb=[x(i,3),x(i+1,3)];
    line(xb,yb)
end
title('Θέσεις του σημείου B')
axis equal
%grid
figure(2)
%subplot(2,1,1)
plot(t,x(:,1))
ylabel('Γωνία w1')
xlabel('Χρόνος t')
%grid
%subplot(2,1,2)
figure(5)
plot(t,x(:,4))
ylabel('Γωνία w2')
xlabel('Χρόνος t')
%grid
figure(3)
%subplot(3,1,1)
plot(t,x(:,2))
ylabel('x μετατόπιση του σημείου B')
xlabel('Χρόνος t')
%grid
%subplot(3,1,2)
figure(4)
plot(t,x(:,3))
ylabel('y μετατόπιση του σημείου B')
xlabel('Χρόνος t')
%grid

```

```

        %subplot(3,1,3)
        figure(7)
        plot(t,x(:,6))
        ylabel('x μετατόπιση του σημείου Γ')
        xlabel('Χρόνος t')
%grid
        figure(6)
        %subplot(2,1,1)
        plot(t,x(:,5))
        ylabel('Γωνία w21')
        xlabel('Χρόνος t')
%grid
        %subplot(2,1,2)
        figure(8)
        plot(t,x(:,7))
        ylabel('Γωνία w3')
        xlabel('Χρόνος t')
        figure(12)
for i=1:length(x)-1
    xb=[x(i,2),x(i+1,2)];
    yb=[x(i,3),x(i+1,3)];
    line(xb,yb)
end
    title('Θέσεις του σημείου B')
    axis equal
    figure(9)
    %subplot(3,1,1)
    plot(t,f1)
    ylabel('gonia f1')
%grid
    %subplot(3,1,2)
    figure(10)
    plot(t,f2)
    ylabel('gonia f2')
%grid
    %subplot(3,1,3)
    figure(11)
    plot(t,pp)
    axis([0 0.25 0 0.15])
    ylabel('fortisi')
    xlabel('xronos t')
    disp('vima oloklirosis:')
    disp(num2str(h))
    disp('theta:')
    disp(num2str(theta))
    toc
    whos

```

## Κώδικας για τη γωνιακή ταχύτητα διωστήρα

```
%Γωνιακή Ταχύτητα Διωστήρα
length=[0.1 0.25 0.5];
r1=0;
r2=48;
l1=70;
m1=0.3;
m2=0.59;
m3=0.74;
for j=1:3
    l=length(j);
    nstep=360;
    dfi=2*pi/nstep;
    for i=1:nstep
        fi=(i-1)*dfi;
        nom1=-r1*(sin(fi));
        nom2=-l1*(sin(fi))+l*r2*(sin(fi));
        oy=m1*nom1+m2*nom2;
        td(j,i)=oy; angle(i)=fi;
    end
end

figure(1)
plot(angle,td(1,:), 'b')
hold on
plot(angle,td(2,:), 'r')
hold on
plot(angle,td(3,:), 'g')
hold on
```

### Κώδικας για την επιτάχυνση του κέντρου μάζας

```
%επιτάχυνση κεντρου μαζας χ
length=[0.1 0.25 0.5];
r1=0;
r2=48;
l2=145;
m1=0.3;
m2=0.59;
m3=0.74;
for j=1:3
    l=length(j);
    nstep=360;
    dfi=2*pi/nstep;
    for i=1:nstep
        fi=(i-1)*dfi;
        nom1=-m1*(r1/l2)*cos(fi);
        nom2=m2*[-l*cos(fi)-
        (((r2/l2)*l^4*(cos(fi))^2*(sin(fi))^2)/(sqrt(1-
        l^2*(sin(fi))^2))^3)-(((r2/l2)*l^2*(cos(fi))^2)/(sqrt(1-
        l^2*(sin(fi))^2))
        +(((r2/l2)*l^2*(sin(fi))^2)/(sqrt(1-
        l^2*(sin(fi))^2)))]];
        nom3=m3*[-l*cos(fi)-
        ((l^4*(cos(fi))^2*(sin(fi))^2)/(sqrt(1-
        l^2*(sin(fi))^2))^3)-((l^2*(cos(fi))^2)/(sqrt(1-
        l^2*(sin(fi))^2))
        +((l^2*(sin(fi))^2)/(sqrt(1-l^2*(sin(fi))^2)))]];
        den=m1+m2+m3;
        ata=(nom1+nom2+nom3)/den;
        sk(j,i)=ata; angle(i)=fi;
    end
end
figure(1)
plot(angle,sk(1,:), 'b')
hold on
plot(angle,sk(2,:), 'r')
hold on
plot(angle,sk(3,:), 'g')
hold on
```



## Κώδικας για τη δύναμη O<sub>χ</sub>

```
%Δύναμη Oχ
length=[0.1 0.25 0.5];
r1=0;
r2=48;
l1=42;
l2=145;
m1=0.3;
m2=0.59;
m3=0.74;
for j=1:3
    l=length(j);
    nstep=360;
    dfi=2*pi/nstep;
    for i=1:nstep
        fi=(i-1)*dfi;
        nom1=-r1/(m3*l2)*cos(fi);
        nom2=-l*(cos(fi))-
(1^4*r2/l2*(cos(fi))^2*(sin(fi))^2)/(sqrt(1-
1^2*(sin(fi))^2))^3-(1^2*r2/l2*(cos(fi))^2)/sqrt(1-
1^2*(sin(fi))^2)
        +(1^2*r2/l2*(sin(fi))^2)/sqrt(1-1^2*(sin(fi))^2);
        nom3=-l*(cos(fi))-
(1^4*r2/l2*(cos(fi))^2*(sin(fi))^2)/(sqrt(1-
1^2*(sin(fi))^2))^3-(1^2*(cos(fi))^2)/sqrt(1-
1^2*(sin(fi))^2)
        +(1^2*(sin(fi))^2)/sqrt(1-1^2*(sin(fi))^2);
        ax=m1/m3*nom1+m2/m3*nom2+nom3;
        td(j,i)=ax; angle(i)=fi;
    end
end

end
figure(1)
plot(angle,td(1,:), 'b')
hold on
plot(angle,td(2,:), 'r')
hold on
plot(angle,td(3,:), 'g')
hold on
```

## Κώδικας για την τροχιά κέντρου μάζας

```
%Τροχιά κέντρου μάζας
length=[0.1 0.25 0.5];
r1=0;
r2=48;
l2=145;
m1=0.3;
m2=0.59;
m3=0.74;
for j=1:3
    l=length(j);
    nstep=360;
    dfi=2*pi/nstep;
    for i=1:nstep
        fi=(i-1)*dfi;
        nom1=-m1*(r1/l2)*sin(fi);
        den1=m1+m2+m3;
        nom2=m3*(-l*sin(fi)-(l^2*cos(fi)*sin(fi))/sqrt(1-
l^2*(sin(fi))^2));
        den2=m1+m2+m3;
        nom3=m2*(-l*sin(fi)-
((r2/l2)*l^2*cos(fi)*sin(fi))/sqrt(1-l^2*(sin(fi))^2));
        den3=m1+m2+m3;
        uxcg=nom1/den1+nom2/den2+nom3/den3;
        tkm(j,i)=uxcg; angle(i)=fi;
    end

end

for j=1:3
    l=length(j);
    nstep=360;
    dfi=2*pi/nstep;
    for i=1:nstep
        fi=(i-1)*dfi;
        nom=m1*(r1/l2)*cos(fi)+m2*(l*cos(fi)-
(r2/l2)*l*cos(fi));
        den=m1+m2+m3;
        uycg=nom/den;
        tkmy(j,i)=uycg; angle(i)=fi;
    end

end
line(tkm(1,:),tkmy(1,:))
line(tkm(2,:),tkmy(2,:))
line(tkm(3,:),tkmy(3,:))
```

## 8. Βιβλιογραφία

- 1) Schiehlen, W., "Multibody System Dynamics: Roots and Perspectives", *Multibody System Dynamics* 1, pp. 149-188, 1997.
- 2) Shabana, A. A., "Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Developments", *Multibody System Dynamics* 1, pp. 189-222, 1997.
- 3) Visser, W. and Besseling, J.F., "Large displacement analysis of beams", Report WTHD 10, Laboratory for Engineering Mechanics, Delf University of Technology, Delf, March 1969.
- 4) Besseling, J.F., "Non-linear analysis of structures by the finite element method as a supplement to a linear analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3, pp. 173-194, 1974.
- 5) Werff, K. van der, "Numerieke berekening van de beweging van vlakke mechanismen", Report LTM 514, Laboratory for Engineering Mechanics, Delf University of Technology, Delf, 1973.
- 6) Werff, K. van der, "Kinematics of coplanar mechanisms by digital computation", *Proceedings of the Fourth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, September 8-13, 1975, Newcastle upon Tyne, England, pp. 685-690.
- 7) Werff, K. van der, "Dynamic analysis of planar mechanisms with rigid links", Report WTHD 85 and LTM 583, Laboratory for Engineering Mechanics, Delf University of Technology, Delf, 1976.
- 8) Werff, K. van der, "Kinematic and Dynamic Analysis of Mechanisms, a Finite Element approach," *Dissertation*, Delf University Press, Delf, 1977.
- 9) Besseling, J.F., Ernst L.J., Werff, K. van der, Koning, A.U. and Riks E., "Geometrical", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 17/18, pp. 131-157, 1979.
- 10) Rankers, H., Berg, B. van den, Dijk, A. van, Klein Breteler, A.J. and Werff, K. van der, "Computer aided design of mechanisms, the CADOM project of the Delf University of Technology", *Proceedings of the Fifth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, July 8-13, 1979, Montreal, Canada, The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1979, pp. 667-672.
- 11) Werff, K. van der, "SPACAR, a programme system for the analysis of the motion of spatial mechanisms, user manual", Report LTM 739, Laboratory for Engineering Mechanics, Delf University of Technology, Delf, 1983.
- 12) Jonker, J.B. and Meijaard J.P., "SPACAR-computer program for dynamic analysis of flexible spatial mechanisms and manipulators", W.O. SCHIEHLEN (ed.), *Multibody Systems Handbook*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 123-143, 1990.
- 13) Jonker, J.B., "A finite element dynamic analysis of spatial mechanisms with flexible links", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 76 pp. 17-40, 1989.
- 14) Jonker, J.B., "A finite element dynamic analysis of flexible manipulators", *International Journal of Robotics Research* 9, pp. 59-74, 1990.
- 15) Meijaard, J.P., "Direct determination of periodic solutions of the dynamical equations of flexible mechanisms and manipulators", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32, pp. 1691-1710, 1991.
- 16) Jonker, J.B., "Linearization of dynamic equations of flexible mechanisms-a finite element approach", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 31, pp. 1375-1392, 1991.

- 17) Jonker, J.B., "A perturbation method for dynamic analysis and simulation of flexible manipulators", *Multibody Systems Dynamic* 6, pp. 245-266, 2001.
- 18) Meijaard, J.P., "Validation of flexible beam elements in dynamics programs", *Nonlinear Dynamics* 9, pp. 21-36, 1996.
- 19) Schwab, A.L., Meijaard, J.P. and Meijers, P., "A comparison of revolute joint clearance models in the dynamic analysis of rigid and elastic mechanical systems", *Mechanisms and Machine Theory* 37, pp. 895-913, 2002.
- 20) Paraschiv, I., Avontuur, G.C. and Werff K. van der, "The influence of high-speed rotors on the motion of slowly moving platforms", *Multibody System Dynamics* 5, pp. 399-410, 2001.
- 21) Schwab, A.L. and Meijaard, J.P., "Dynamics of Flexible Multibody Systems with Non-Holonomic Constraints: A Finite Element Approach", *Multibody System Dynamics* 10, pp. 107-123, 2003.
- 22) Jonker, J.B. and AARTS R.G.K.M., "A Perturbation Method for Dynamic Analysis and Simulation of Flexible Manipulators", *Multibody System Dynamics* 6, pp. 245-266, 2001.
- 23) Aarts, R.G.K.M. and Jonker J.B., "Dynamic simulation of planar flexible link manipulators using adaptive modal integration", *Multibody System Dynamics* 7, pp. 31-50, 2002.
- 24) Argyris J.H., "An excursion into large rotations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 32, pp. 85-155, 1982.
- 25) Belytschko, T. and Hsieh, B.J., "Nonlinear transient finite element analysis with convected coordinates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7, pp. 255-271, 1973.
- 26) De Veubeke, B.F., "The dynamics of flexible bodies", *International Journal for Engineering Science* 14, pp. 895-913, 1976.
- 27) Erdman, A.G. and Sandor G.N., "Kinetoelastodynamics – A review of the state of the art and trends", *Mechanism and Machine Theory* 7, pp. 19-33, 1972.
- 28) Lowen, G.G. and Jandrasits, W.G., "Survey of investigations in the dynamic behaviour of mechanisms containing links with distributed mass and elasticity", *Mechanism and Machine Theory* 7, pp. 13-17, 1972.
- 29) Nikraves, P., Chung, I. and Benedict, R.L., "Plastic hinge approach to vehicle crash simulation", *Computers & Structures* 16, pp. 395-400, 1983.
- 30) Rankin, C.C. and Brogan, F.A., "An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations", *ASME Journal of Pressure Vessel Technology* 108, pp. 165-174, 1986.
- 31) Klein, B., "Ein Beitrag zur rechnerunterstuetzten Analyse und Synthese ebener Gelenkgetriebe unter Beruecksichtigung mathematischer Optimierungsstrategien und der Finite-Element-Methode", Dissertation, Ruhr Universitaet Bochum, 1977.
- 32) Kanarachos, A. und Klein, B., "Rechnerunterstuetzte Masssynthese ebener Gelenkgetriebe mit Hilfe mathematischer Optimierungsstrategien", VDI-Bericht 321, VDI Verlag, 1979.
- 33) Schwertassek, R., Wallrapp, O. and Shabana, A., "Flexible multibody simulation and choice of shape functions", *Nonlinear Dynamics* 20, pp. 361-380, 1999.
- 34) Shabana, A. A., "Constrained motion of deformable bodies", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32, pp. 1813-1831, 1991.
- 35) Shabana, A. A., "Finite element incremental approach and exact rigid body inertia", *ASME Journal of Mechanical Design* 118, pp. 171-178, 1996.

- 36) K.N. Spentzas, S.A. Kanarachos, “An incremental finite element analysis of mechanisms and robots”, Springer-Verlag 2002
- 37) Stratis Kanarachos, “Analysis of 2D flexible mechanisms using linear finite elements and incremental techniques”, Springer-Verlag 2008
- 38) Σ. Νατσιάβας, Εφαρμοσμένη Δυναμική, Θεσσαλονίκη 1994