ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

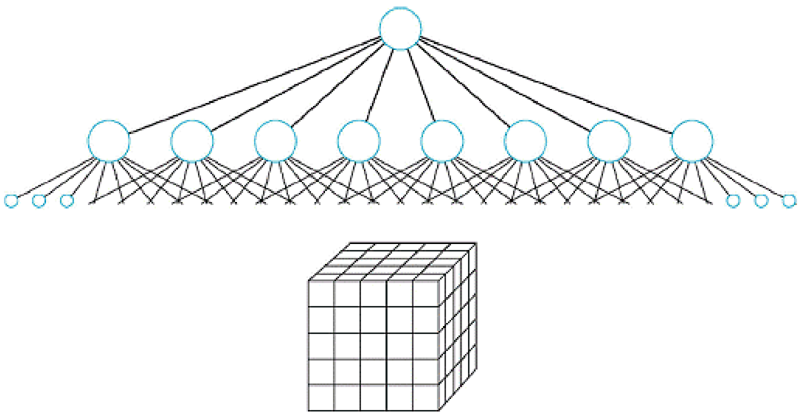
με τίτλο:

Δυναμικός Προγραμματισμός Θεωρία και Εφαρμογές

του φοιτητή:

Δρούτσα Αντώνη

(Αρ. Μητρώου ge15007)



Επιβλέπων Καθηγητής: Κολέτσος Ιωάννης, Αναπ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Μέλη εξεταστικής επιτροπής: Κοκκίνης Βασίλειος, Επίκ. καθ. ΕΜΠ
Κολέτσος Ιωάννης, Αναπ. Καθ. Ε.Μ.Π.
Στεφανέας Πέτρος, Επίκ. καθ. ΕΜΠ

Αθήνα , Ιούλιος 2020

Αφιερώνεται στην οικογένεια

μου.

Περίληψη

Ο στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να εισάγει στον αναγνώστη την έννοια του Δυναμικού Προγραμματισμού και πώς αυτός επιλύει διάφορα περίπλοκα προβλήματα με ταχύτατο ρυθμό και απλά μαθηματικά εργαλεία.

Στο κεφάλαιο 1 γίνεται μια εισαγωγή του όρου «Επιχειρησιακής Έρευνας» μέσα από ιστορικές αναδρομές και επιστημονικούς ορισμούς. Αναφέρονται επίσης οι κλάδοι με τους οποίους αλληλοεπιδρά η Επιχειρησιακή Έρευνα όπως και τα στάδια που τη συντελούν με τα αντίστοιχα μαθηματικά εργαλεία τους.

Στο κεφάλαιο 2 πρωταγωνιστικό ρόλο έχει ο Δυναμικός Προγραμματισμός και γι' αυτό μετά από την ιστορική αναδρομή του δίνονται διάφοροι ορισμοί του μαζί με την συγκεκριμένη ορολογία του που είναι κάτι που διέπει τη φύση των λύσεων του.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται ένα κλασσικό πρόβλημα στον Δυναμικό Προγραμματισμό γνωστό και ως "stagecoach" αναφέρεται σε ένα βέλτιστο μονοπάτι το οποίο χτίζεται μεταξύ ενός σημείου εκκίνησης (αρχή) και ενός τελικού σημείου (τέλος), εφόσον έχουν δοθεί οι αποστάσεις- κόστη μεταξύ των διαφόρων σημείων του δικτύου.

Στο κεφάλαιο 4 εντοπίζουμε ένα πολυσύχναστο πρόβλημα, αυτό των αποθεμάτων. Όπου μια εταιρία σύμφωνα με τις ανάγκες της πρέπει να προνοήσει και για το απόθεμα των προϊόντων του επόμενου μήνα. Κάτι το οποίο είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με την οικονομία της εταιρίας μιας και η αποθήκευση των αποθεμάτων διαφέρει ανάλογα με την ποσότητα τους.

Στο κεφάλαιο 5 συναντάμε επίσης ένα πρόβλημα που αντικατοπτρίζει τη φύση του Δυναμικού Προγραμματισμού και είναι η διανομή επιστημόνων σε ερευνητικές ομάδες(το οποίο καλύπτει μια

τεράστια οικογένεια παραπλήσιων προβλημάτων που λύνονται με τον ίδιο τρόπο). Σκοπός είναι να διανεμηθούν οι επιστήμονες κατά το βέλτιστο τρόπο ώστε να είναι όσο περισσότερο χρήσιμοι γίνεται.

Στο κεφάλαιο 6 γίνεται αντιληπτή η χρησιμότητα του Δυναμικού Προγραμματισμού ακόμη και σε προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού. Μέσω μιας τυποποιημένης διαδικασίας επιλύονται τέτοια προβλήματα σε σχετικά ελάχιστο χρονικό διάστημα.

Στο κεφάλαιο 7 με τη βοήθεια του Δυναμικού Προγραμματισμού επιλύεται ένα πρόβλημα ενός εργοστασίου που παράγει συγκεκριμένα προϊόντα ανάλογα με την απαίτηση του πελάτη. Κάτι που κάνει δύσκολη τη λύση του προβλήματος αυτού, γιατί δεν υπάρχουν περιθώρια επαν-επεξεργασίας σε προϊόντα που κατασκευάστηκαν ελαττωματικά εξαρχής(με μεγάλη απώλεια χρημάτων).

Στο κεφάλαιο 8 σημειώνεται μια εφαρμογή του Δυναμικού Προγραμματισμού στα τυχερά παίγνια. Συγκεκριμένα αναφέρεται σε παιχνίδι με μάρκες στο καζίνο. Έχοντας ως δεδομένη τη πιθανότητα κέρδους σε κάθε γύρω παρουσιάζεται η βέλτιστη πολιτική ώστε σε δυο μόνο γύρους να κερδίσει ο παίκτης άλλες δύο μάρκες στη κατοχή του.

Στο κεφάλαιο 9 διακρίνουμε ένα από τα πιο πολυσύχναστα προβλήματα στον κλάδο του Δυναμικού Προγραμματισμού, το πρόβλημα του σακιδίου. Ένας οδοιπόρος πρέπει να γεμίσει το σακίδιο του με διάφορα αντικείμενα διαφορετικού βάρους, τα οποία έχουν κάποιου είδους «αξία» σύμφωνα με το πρόβλημα, ώστε γεμίζοντας το εν τέλει να έχει μεγιστοποιήσει την αξία των αντικειμένων που διάλεξε να περιέχει το σακίδιο.

Στο κεφάλαιο 10 περιγράφεται μια παρόμοια διαδικασία με το κεφάλαιο 5, όπου ιατρικές ομάδες πρέπει να διατεθούν εν όψει κορωνοϊού σε διάφορες πόλεις σύμφωνα με το πόσο χρήσιμοι θα είναι στις πόλεις αυτές. Επομένως καλείται το συμβούλιο να καθορίσει πόσες ομάδες να διατεθούν σε κάθε μια από τις πόλεις ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική αποδοτικότητα των ομάδων αυτών.

Στο κεφάλαιο 11 παρουσιάζεται η λύση ενός πραγματικού προβλήματος με Δυναμικό Προγραμματισμό. Αναφέρεται σε έναν διαστημικό σταθμό, ο οποίος κατά την εγκατάστασή του θα πρέπει να ελέγχεται από κάποια συστήματα ελέγχου. Το κάθε σύστημα ελέγχου έχει διαφορετικές πιθανότητες να αποτύχει. Συμψηφίζοντας τις πιθανότητες αυτές ζητείται να βρεθεί η ελάχιστη πιθανότητα αποτυχίας των συστημάτων ελέγχου.

Λέξεις και φράσεις κλειδιά: Δυναμικός Προγραμματισμός, Γραμμικός Προγραμματισμός, Μαθηματικό Μοντέλο, Βελτιστοποίηση, Βέλτιστη Πολιτική, Μοντέλα Προγνωστικής Ανάλυσης

Abstract

The purpose of the hereby dissertation is to introduce the reader to the concept of Dynamic Programming and how it rapidly solves various highly complicated problems, using a set of simple mathematical tools.

Chapter 1 introduces the term "Operational Research" through historical context and several scientific definitions, while the areas with which it interacts are also mentioned as well as the stages that contribute to it with their corresponding mathematical tools.

In *Chapter 2* Dynamic Programming possesses the leading role and therefore, following the historical context, various terms are given with regard to it, followed by its specific terminology which establishes the nature of its solutions.

Chapter 3 presents a classic problem in Dynamic Programming known as "stagecoach" which refers to an optimal path built between a starting point (beginning) and a ending point (final), provided that the distances-costs between the various points of the network are given.

In *Chapter 4* the frequent problem of “stocks” is presented, which is based on the fact that companies need to provide stock for their products for the following month as well, based on their needs. That is inextricably linked to the company's economy since the ability to store more products depends on their quantity.

In *Chapter 5* we encounter a problem that reflects the nature of the Dynamic Programming, the distribution of scientists to the various research groups (which covers a great amount of similar problems solved likewise). What we want to achieve is the optimal distribution of scientists in order for them to be as useful as possible.

Chapter 6 reveals the use of the Dynamic Programming even in problems of the Linear Programming. Through a standard procedure such problems are solved in short notice.

In *Chapter 7,* with the assistance of the Dynamic Programming, the problem of a factory that produces numbered products according to the requests of its clients is solved. Apparently, solving this problem is a difficult task, considering there is no way to re-edit the already defective products (with a massive money loss).

In *Chapter 8* we face the implementation of the Dynamic Programming in "lucky games" , specifically in a game with casino chips. Taken the possibility of winning in every round for granted, there is the optimal policy so that the player wins two more chips in only two rounds.

Chapter 9 presents one of the most frequent problems in the Dynamic Programming, the “Knapsack problem”. A hiker should fill his Knapsack with various items of different weights, which have some kind of "value" according to the problem, in order to maximize the total value of the items in the backpack.

In *Chapter 10* there is a similar process to the one presented in Chapter 5, where medical groups should be moved to different towns, due to COVID-19 epidemy, in order to be as useful as possible in those areas. Therefore, each medical council needs to determine how many groups should be sent to each town in order to maximize the efficiency of them all.

Chapter 11 displays the solution of an actual problem with the use of Dynamic Programming. It refers to a space station, which has to be controlled by control systems during its installation. Each of these systems has different chances of failure. Considering all those chances, the goal is to calculate the minimum probability of failure as far as these control systems are concerned.

Keywords: Key: Dynamic Programming, Linear Programming, Mathematical model, Optimization, Optimal Policy, Predictive Analytics Models

Ευχαριστίες

Πριν την παρουσίαση του κυρίως μέρους της εργασίας μου, νιώθω την υποχρέωση να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου σε ορισμένους ανθρώπους που βοήθησαν ο καθένας με τον τρόπο του στην πραγματοποίησή της.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή μου τον κύριο Κολέτσο Ιωάννη ο οποίος με έβαλε στον κόσμο της Επιχειρησιακής Έρευνας και κατάφερα να γνωρίσω το μεγαλείο του Δυναμικού Προγραμματισμού. Τον ευχαριστώ για την ατέρμονη βοήθεια του στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας, ακόμη και σε ώρες αγρανάπαυσης κάτι που μόνο σπάνιο είναι στις μέρες μας.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς την οικογένειά μου, για την αμέριστη συμπαράσταση και στήριξη που μου προσέφεραν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Αθήνα , Ιούνιος 2020

Δρούτσας Αντώνιος

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει στόχο να εισάγει τον αναγνώστη στο χώρο του Δυναμικού Προγραμματισμού παραθέτοντας του διάφορα παραδείγματα και προβλήματα που η χρήση του είναι προτιμητέα για λόγους που θα επεξηγηθούν μέσα στην εργασία. Ο Δυναμικός Προγραμματισμός είναι κομμάτι της Επιχειρησιακής Έρευνας και τα τελευταία χρόνια έχει λάβει ραγδαία εξέλιξη. Η χρησιμότητα του ακόμα δεν είναι εμφανής σε όλο το φάσμα προβλημάτων που μπορεί να καλύψει γιατί είναι σχετικά νέα επιστήμη. Το σίγουρο είναι πως όποιος επενδύσει χρόνο σε αυτόν είναι σε θέση να κατανοήσει το μεγαλείο του και έπειτα να το εκμεταλλευτεί προς όφελος του.

«Όποιος δεν θυμάται το παρελθόν του είναι καταδικασμένος να το ξαναζήσει»

Τζωρτζ Σανταγιάνα

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 : Εισαγωγή

1.1 Ιστορική Αναδρομή

Από τα αρχαία χρόνια συχνά η συνεργασία μεταξύ επιστημόνων και στρατιωτικών αξιωματούχων με ένα και μοναδικό κοινό στόχο: *Τη λήψη της βέλτιστης απόφασης στη μάχη*. Πολλοί ειδικοί έχουν υποστηρίξει ότι η Επιχειρησιακή Έρευνα (Operational and Operations Research) εμφανίζεται για πρώτη φορά τον 3ο αιώνα π. Χ., κατά το δεύτερο Καρχηδονιακό Πόλεμο (Punic War) υπό τη μορφή αναλύσεων και λύσεων που ο Αρχιμήδης όρισε, στοχεύοντας στην οχύρωση της πόλης των Συρακουσών που πολιορκήθηκε από τους Ρωμαίους. Ο καταπέλτης, καθώς και ένα σύστημα κατόπτρων ικανών να καίνε τα πλοία των πολιορκητών, ήταν δύο αξιομνημόνευτες εφευρέσεις του, όπως προέκυψαν στα πλαίσια της αυτής προσπάθειας για βέλτιστη οχύρωση της πόλης.

Κατά την διάρκεια του Β’ Παγκοσμίου Πολέμου ανατέθηκε σε επιστήμονες και μηχανικούς να αναλύσουν διάφορα προβλήματα στρατιωτικού τύπου όπως για παράδειγμα να αναπτύξουν αποτελεσματικές μεθόδους που θα ήταν χρήσιμες στις στρατιωτικές επιχειρήσεις. Business & Management Πρωτοπόρος της ιδέας αυτής ήταν ο Albert Percival Rowe ο οποίος οδήγησε βρετανούς επιστήμονες να διδάξουν στρατιωτικούς ηγέτες πώς να χρησιμοποιήσουν το ραντάρ για τον εντοπισμό εχθρικών αεροσκαφών. Μέχρι το 1939 η Βασιλική Πολεμική Αεροπορία ξεκίνησε επίσημα προσπάθειες για την επέκταση του φάσματος του εξοπλισμού ραντάρ ώστε να αυξηθεί ο χρόνος μεταξύ της πρώτης προειδοποίησης που παρέχει το ραντάρ και της επίθεσης των εχθρικών αεροσκαφών. Αυτό επετεύχθη αναλύοντας το υλικό εξοπλισμού και των δικτύων επικοινωνίας. Έτσι λοιπόν, οι εφαρμογές των μαθηματικών και των επιστημονικών μεθόδων στις στρατιωτικές επιχειρήσεις ήρθαν να συντελέσουν τον πρώτο ορισμό της Επιχειρησιακής Έρευνας (Operations Research, OR). A.P. Rowe

Το γεγονός ότι το επιθυμητό αποτέλεσμα στην τελική έκβαση της μάχης με την αποτελεσματική πλήξη των εχθρικών στόχων βασίστηκε εν πολλοίς στις αποφάσεις που λήφθηκαν με γνώμονα τις μεθόδους των επιστημόνων, αποτέλεσε την κινητήρια δύναμη για την ραγδαία ανάπτυξη που έλαβε η Επιχειρησιακή Έρευνα.

Από μαθηματικής απόψεως, κατά τον 17ο και 18ο αιώνα, οι Newton, Leibnitz, Bernoulli και Lagrange, εργάσθηκαν για την εξαγωγή μεγίστων και ελαχίστων, περιορισμένων από προκαθορισμένες συναρτήσεις. Οι απαρχές του γραμμικού προγραμματισμού σκιαγραφούνται εκείνη την περίοδο από τον Γάλλο Μαθηματικό Jean Batiste Joseph Fourier, ενώ προς το τέλος του 18ου αιώνα, ο Gaspar Monge όρισε τις απαρχές της Γραφικής Μεθόδου (Graphical Method) χάρη στην ανάπτυξη της Περιγραφικής Γεωμετρίας (Descriptive Geometry).

Ο Janos Von Neumann δημοσίευσε τη δουλειά του "Theory of Games", η οποία εισήγαγε τους κλασικούς μαθηματικούς στην ιδέα του **Γραμμικού Προγραμματισμού**. Γνωστή και ως Γραμμική Βελτιστοποίηση, πρόκειται για μια μέθοδο που στοχεύει στην επίτευξη του καλύτερου δυνατού αποτελέσματος (όπως μέγιστου κέρδους ή ελάχιστου κόστους) σε ένα μαθηματικό μοντέλο του οποίου οι περιορισμοί αναπαρίστανται από γραμμικούς συσχετισμούς. Αργότερα, το 1947, εντόπισε την ομοιότητα του Γραμμικού Προγραμματισμού και της θεωρίας πινάκων που είχε ο ίδιος ορίσει.

Βέβαια, η μαθηματική θεωρία, που είναι γνωστή ως **Γραμμικός Προγραμματισμός**, είχε ήδη αναπτυχθεί από το 1939, από το Σοβιετικό μαθηματικό και οικονομολόγο Leonid Kantorovic σε συνεργασία με τον Ολλανδό μαθηματικό Tjalling Koopmans. Ο δε **Kantorovic** θεωρείται πατέρας του Γραμμικού Προγραμματισμού και ήταν ο νικητής του βραβείου Stalin το 1949 και του βραβείου Nobel (μαζί με τον Koopmans) στα οικονομικά το 1975. Οι δύο μαθηματικοί μελέτησαν ξεχωριστά για πρώτη φορά το Πρόβλημα της Μεταφοράς, το οποίο αργότερα έμεινε γνωστό ως Πρόβλημα των Koopmans-Kantorovic. Για τη λύση του, χρησιμοποίησαν γεωμετρικές μεθόδους που προκύπτουν από το θεώρημα κυρτότητας του Minkowski.

Γίνεται σαφές, λοιπόν, ότι η Επιχειρησιακή Έρευνα επικεντρώνεται σε πρακτικές εφαρμογές που χρήζουν τεκμηριωμένης βέλτιστης λύσης, καθώς επίσης και σε έννοιες αλληλεπίδρασης ανθρώπου - μηχανής. Πιστεύεται ότι ο Charles Babbage είναι ο πατέρας της Επιχειρησιακής Έρευνας, λόγω της εμπεριστατωμένης έρευνάς του σχετικά με το κόστος μεταφοράς και της διαλογής της αλληλογραφίας, που πραγματοποιήθηκε για λογαριασμό του Uniform Penny Post στην Αγγλία το 1840.

Ωστόσο, η Επιχειρησιακή Έρευνα θα περιμένει αρκετά, ώστε να αναγνωριστεί ως αυτόνομη επιστήμη. Κατά τον δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο, η γερμανική Πολεμική Αεροπορία Luftwaffe υπέβαλε τους Βρετανούς σε μια σκληρή αεροπορική επιδρομή, δεδομένου ότι πρώτοι είχαν μειονέκτημα ισχύος στον εναέριο χώρο. Η βρετανική κυβέρνηση, για να προασπίσει τη χώρα της, συγκάλεσε επιστήμονες διαφορετικών ειδικοτήτων, οι οποίοι με τη σειρά τους επιζητούσαν τη βελτιστοποίηση της αεράμυνας της χώρας. Η λύση στο πρόβλημα δόθηκε από την τοποθέτηση των διαθέσιμων κεραιών με τρόπο τέτοιο, ώστε να επιτυγχάνεται η βέλτιστη κατανομή των σημάτων τους. Η μεγιστοποίηση του οφέλους των διαθέσιμων ραντάρ υπήρξε αρκετή, ώστε να διπλασιάσει την αποτελεσματικότητα του εναέριου αμυντικού συστήματος της χώρας! Η δραματική αυτή βελτίωση οδήγησε στη σύσταση επιπλέον παρόμοιων ομάδων στην Αγγλία, με στόχο τη μεγιστοποίηση της απόδοσης των διαθέσιμων πόρων και υποδομών του Αγγλικού κράτους.

Ο όρος Επιχειρησιακή έρευνα, ή όπως συχνά πλέον αναφέρεται Διοικητική Επιστήμη (Management Science), περιλαμβάνει την επιστημονική προσέγγιση στην λήψη αποφάσεων και των συνεπακόλουθων λύσεων των προβλημάτων που ενδέχεται να παρουσιαστούν σε έναν οργανισμό, ώστε να καθορίσει τον καλύτερο δυνατό σχεδιασμό και να συντονίσει ένα βέλτιστο σύστημα υπό συνθήκες που απαιτούν την κατανομή σπάνιων παραγωγικών πόρων. Μάλιστα, είναι γνωστό ότι μετά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο καθιερώθηκε ως νέο επιστημονικό πεδίο και αναπτύχθηκε γοργά κυρίως στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής ενώ κατά την διάρκεια των δεκαετιών των 1950 και 1960 ανακαλύφθηκαν οι περισσότεροι αλγόριθμοι και μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα.

Η μεθοδολογία της Επιχειρησιακής Έρευνας εφαρμόζεται σε προβλήματα που αφορούν το πώς να διεξάγεις και να συντονίσεις επιχειρήσεις (δηλαδή δραστηριότητες) εντός οργανισμών. Πιο συγκεκριμένα, οι μεταβολές στο οικονομικό και επιχειρησιακό περιβάλλον, η αύξηση της πολυπλοκότητας, της μεταβλητότητας καθώς και της αλληλεξάρτησης των διαφόρων φαινομένων, σε συνδυασμό με την ανάγκη υποστήριξης και σφαιρικής ταυτόχρονα προσέγγισης των προβλημάτων με σκοπό τη συστηματική ανάλυση και την αποτελεσματική λήψη αποφάσεων, συνέβαλλαν στην καθιέρωση της Επιχειρησιακής Έρευνας ως ένα απαραίτητο εργαλείο. Η φύση του εκάστοτε προβλήματος είναι ουσιαστικά αδιάφορη, καθώς η Επιχειρησιακή Έρευνα έχει εφαρμοστεί εκτενώς σε ποικίλους κλάδους όπως για παράδειγμα στη Μεταποίηση, στον κλάδο των Μεταφορών, στις Τηλεπικοινωνίες, στον Χρηματοοικονομικό σχεδιασμό, στις Δημόσιες Υπηρεσίες, στην Υγεία, στις Στρατιωτικές Επιχειρήσεις(όπως ήδη έχει αναφερθεί).

Σχετικά με τον δεύτερο όρο του ονόματος Επιχειρησιακή Έρευνα, ήτοι τον όρο Έρευνα, σημαίνει πως, προκειμένου να διερευνηθεί το πρόβλημα για το οποίο επιθυμούμε βέλτιστη λύση, χρησιμοποιούνται επιστημονικές μέθοδοι. Κάθε τέτοια διαδικασία ξεκινάει δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή στο να παρατηρήσουμε και να σχηματίσουμε το πρόβλημα καθώς και να συλλέξουμε τα απαραίτητα δεδομένα. Το επόμενο βήμα είναι να δημιουργήσουμε ένα επιστημονικό (συνήθως μαθηματικό) υπόδειγμα το οποίο έχει ως σκοπό να αφαιρέσει/περιορίσει σε μεγάλο βαθμό την πολυπλοκότητα του πραγματικού κόσμου προκειμένου να λύσουμε το πρόβλημα που έχουμε σχηματίσει. Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι το πρόβλημα είναι μια επαρκώς ακριβής αναπαράσταση των ουσιωδών χαρακτηριστικών της κατάστασης, η οποία μας επιτρέπει να καταλήξουμε σε συμπεράσματα (λύσεις) από αυτό το υπόδειγμα τα οποία θα είναι έγκυρα και για το πρόβλημα του πραγματικού κόσμου. Έπειτα, διεξάγονται κατάλληλα πειράματα προκειμένου να ελέγξουμε αυτή την υπόθεση (περί αντιπροσωπευτικής αναπαράστασης του πραγματικού προβλήματος) και να την προσαρμόσουμε όπου χρειάζεται και τελικά να επιβεβαιώσουμε κάποιες από τις υποθέσεις του υποδείγματος (αυτό το βήμα συχνά αναφέρεται ως επικύρωση του υποδείγματος). Επιπρόσθετα, η Επιχειρησιακή Έρευνα ασχολείται και με την πρακτική εφαρμογή της διοίκησης του οργανισμού. Έτσι, για να επιτύχει τον σκοπό της η Επιχειρησιακή Έρευνα θα πρέπει να παρέχει θετικά και κατανοητά συμπεράσματα στον λήπτη αποφάσεων όποτε αυτά χρειάζονται.

1.2 Τι είναι η Επιχειρησιακή Έρευνα

Η Επιχειρησιακή Έρευνα όπως ήδη αναφέραμε είναι ένας κλάδος που ασχολείται με την εφαρμογή προηγμένων αναλυτικών μεθόδων για να βοηθήσει στη λήψη καλύτερων αποφάσεων.

Τι σημαίνει όμως επιχειρησιακή έρευνα; Ένας απ' τους καλύτερους τρόπους να απαντήσουμε σε μια τέτοια ερώτηση θα ήταν να δώσουμε έναν ορισμό. Κάτι τέτοιο όμως αφενός μεν δε θα ήταν τόσο εύκολο, αφετέρου δε, αντικειμενικό να απαντηθεί καθώς έχουν προταθεί διάφοροι ορισμοί στο επιστημονικό αυτό πεδίο. Για να διασαφηνίσουμε λοιπόν τον όρο «επιχειρησιακή έρευνα» θα αναφέρουμε μερικούς απ' τους σημαντικότερους ορισμούς που έχουν δοθεί.

Ο R.Watson-Watt,ο οποίος μαζί με τον A.P.Rowe,φαίνεται ότι πρότεινε το όνομα «Operational Research» και ο οποίος ήταν ένας από τους πρωτεργάτες της εισαγωγής και ανάπτυξης του θέματος στη Βρετανική αεροπορία, έδωσε τον εξής ορισμό: *"Η Επιχειρησιακή Έρευνα αποσκοπεί στο να ερευνήσει ποσοτικά εάν ένας οργανισμός παίρνει από τη λειτουργία του εξοπλισμού του, τη βέλτιστη δυνατή συνεισφορά σε σχέση με τον ολικό αντικειμενικό σκοπό του, ποιες αλλαγές σε εξοπλισμό και μεθόδους απαιτούνται για τη βελτίωση των αποτελεσμάτων για το μικρότερο δυνατό κόστος σε προσπάθεια και χρόνο και τέλος σε ποιο βαθμό μεταβολές στους επιμέρους αντικειμενικούς σκοπούς συνεισέφεραν στην πιο οικονομική και έγκαιρη εκτέλεση του ολικού στρατηγικού αντικειμενικού σκοπού"*. (ΚΟΛΕΤΣΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ, 2017)

Ο ορισμός που έχει προταθεί από τους Ackoff και Sasienni επισημαίνει ιδιαίτερα ορισμένα χαρακτηριστικά της επιστημονικής φύσεως της Επιχειρησιακής Έρευνας:

"Επιχειρησιακή Έρευνα μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η εφαρμογή επιστημονικών μεθόδων από μικτές ομάδες σε προβλήματα που αφορούν τον έλεγχο οργανωμένων συστημάτων (αποτελούμενων από ανθρώπους και μηχανές) κατά τρόπο ώστε να παρέχουν λύσεις που εξυπηρετούν κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο τους σκοπούς του οργανισμού ως συνόλου". (Ackoff R.L., 1968) (Winston & Goldberg, 2004)

Από την Εταιρία Επιχειρησιακής Έρευνας της Μεγάλης Βρετανίας(Operational Research Society) έχει προταθεί ο ακόλουθος ορισμός:

"Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η εφαρμογή της σύγχρονης επιστήμης πάνω σε πολύπλοκα προβλήματα, τα οποία ανακύπτουν στη διεύθυνση και διοίκηση μεγάλων συστημάτων, αποτελούμενων από ανθρώπους, μηχανές, υλικά και κεφάλαια, στη Βιομηχανία, τις Επιχειρήσεις, τις Κυβερνητικές υπηρεσίες και την Άμυνα. Η χαρακτηριστική της μεθοδολογία συνίσταται στην ανάπτυξη επιστημονικού μοντέλου του υπό μελέτη συστήματος που περιλαμβάνει μετρήσεις τυχαίων παραγόντων και με το οποίο προβλέπει και συγκρίνει τα αποτελέσματα εναλλακτικών αποφάσεων, στρατηγικών και ελέγχων.

Ο σκοπός της είναι να βοηθήσει τη διοίκηση να καθορίσει την πολιτική και τις ενέργειες της επιστημονικά(κατά το βέλτιστο εφικτό τρόπο)" (ΚΟΛΕΤΣΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ, 2017)

Τέλος ακόμα ένας αξιοσημείωτος ορισμός της Ε.Ε.Ε.Ε.(Ελληνική Εταιρία Επιχειρησιακών Ερευνών) είναι:

"Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η επιστημονική προετοιμασία των αποφάσεων της Διοικήσεως (με την επιστημονική ανάλυση των δεδομένων και τη δημιουργία μαθηματικών προτύπων)"

1.3 Τα Βασικά στάδια μελέτης ενός προβλήματος

Η μεθοδολογία που απορρέει από την Επιχειρησιακή Έρευνα είναι σε μεγάλο βαθμό ίδια στο μεγαλύτερο εύρος των προβλημάτων της ανεξαρτήτως του πεδίο εφαρμογής της.

Τα στάδια είναι τα παρακάτω:

1.3.1 Διαμόρφωση ή κατάστρωση του προβλήματος

Στο στάδιο αυτό κύριο μέλημα μας είναι η συλλογή και επεξεργασία δεδομένων που οπωσδήποτε είναι απαραίτητη για την κατανόηση και περιγραφή του προβλήματος.

1.3.2 Ορισμός του συστήματος, καθορισμός στόχων

Στο σημείο αυτό εντοπίζουμε την οργανωτική δομή και τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί το σύστημα που θέλουμε να κατανοήσουμε και θέτουμε τους στόχους που θέλουμε να πετύχουμε. Επομένως είμαστε σε θέση τώρα να αναγνωρίσουμε τις μεταβλητές-παραμέτρους που θα χρησιμοποιήσουμε και τυχόν περιορισμούς που προκύπτουν.

1.3.3 Κατασκευή μαθηματικού προτύπου(μοντέλου)

Το στάδιο αυτό είναι υπεύθυνο για το σχηματισμό ενός μαθηματικού υποδείγματος που αναπαριστά το πρόβλημα. Κάτι τέτοιο έχει ως αποτέλεσμα τη μετατροπή του αρχικού προβλήματος σε μαθηματικές σχέσεις.

1.3.4 Επίλυση του μοντέλου

Σκοπός του συγκεκριμένου σταδίου είναι η ανάπτυξη μιας διαδικασίας (συνήθως βασίζεται στον ηλεκτρονικό υπολογιστή) για την εύρεση λύσεων του μοντέλου και κατ’ επέκταση του προβλήματος.

1.3.5 Έλεγχος εναλλακτικών λύσεων

Η λύση την οποία μας υπέδειξε το μοντέλο στο προηγούμενο στάδιο ενίοτε δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμη συσχετίζοντας τη με τις οδηγίες της διοίκησης της εκάστοτε εταιρείας. Ελέγχοντας τες καταλήγουμε στη βέλτιστη εξ αυτών που ανταποκρίνεται στο πρόβλημα μας.

1.3.6 Υλοποίηση και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων

Στο τελευταίο βήμα η προτεινόμενη λύση δοκιμάζεται και αν επιτύχει, εφαρμόζεται στο πραγματικό πρόβλημα. Έπειτα αξιολογούμε τα αποτελέσματα και εξάγουμε τα τελικά συμπεράσματα για την αποδοτικότητα ή μη της απόφασης που πάρθηκε.

Σημείωση: Αξίζει σε αυτό το σημείο να επισημάνουμε πως ακόμα και σήμερα δεν έχουν καθοριστεί τα όρια του κλάδου της Επιχειρησιακής Έρευνας, κάτι που κάνει ακόμα πιο ολοφάνερο το πόσο ισχυρό είναι αυτό το πεδίο και το ευρύ του φάσμα.

Κεφάλαιο 2 : Δυναμικός Προγραμματισμός

2.1 Εισαγωγή στον δυναμικό προγραμματισμό

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε την Επιχειρησιακή Έρευνα ως ευρύτερη έννοια και τη συμβολή που έχει σε διάφορους κλάδους μέσα από τις τεχνικές που ακολουθεί. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με έναν από τους σημαντικότερους κλάδους της, τον Δυναμικό Προγραμματισμό. Η πρώτη παρατήρηση του Δυναμικού Προγραμματισμού έλαβε χώρα από επιστήμονες οι οποίοι ασχολούνταν με προβλήματα ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης που θα μπορούσε δυνητικά να παριστάνει μια ελαχιστοποίηση κόστους κάποιας έκφρασης όπως τις περισσότερες φορές συμβαίνει. Τα προβλήματα αυτά είχαν ένα κοινό χαρακτηριστικό, όταν έπαυαν να τα παρατηρούν τηλεσκοπικά τότε συμπέραιναν πως η έκβαση κάθε απόφασης μπορεί να μην είναι πλήρως και αρχικά προβλέψιμη αλλά ίσως μπορεί να προβλεφθεί σε μεγάλο βαθμό πριν από την επόμενη απόφαση. Με λίγα λόγια υπήρχε μια εξάρτηση μεταξύ των αποφάσεων με σκοπό να ικανοποιείται η κύρια μαθηματική έκφραση του προβλήματος. Αυτό είχε ως συνέπια να επιλέγουν όσες περισσότερες βέλτιστες αποφάσεις μπορούν και έπειτα να καταλήγουν στη βέλτιστη λύση του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα παρατήρησαν ότι χωρίζοντας το αρχικό πρόβλημα σε μικρότερα υπό-προβλήματα και λύνοντάς στα κατά το βέλτιστο πάντα τρόπο αυτά οδηγούν με μαθηματική ακρίβεια στη βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος. Αυτό έδωσε κίνητρο στους επιστήμονες να εμβαθύνουν στην τεχνική αυτή διότι παρατήρησαν πολλά πλεονεκτήματα σε μεγάλα προβλήματα που τους απασχολούσαν. Συγκεκριμένα, προβλήματα με τεράστια απαίτηση μνήμης ηλεκτρονικού υπολογιστή και ιδιαίτερα χρονοβόρα στην επίλυση τους κατέληξαν να λύνονται αφενός γρηγορότερα σε μεγάλο βαθμό και αφετέρου φειδωλά ως προς τη μνήμη ηλεκτρονικού υπολογιστή.

<u>Σημείωση</u>: Ο χρόνος επίλυσης από εκθετικός αρχικά, βελτιστοποιήθηκε σε πολυωνυμικό και μάλιστα δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις που ο χρόνος αυτός είναι γραμμικός.

2.2 Ιστορική Αναδρομή

Ο όρος δυναμικός προγραμματισμός χρησιμοποιήθηκε αρχικά στη δεκαετία του 1940 από τον Richard Bellman για να περιγράψει τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων όπου κάποιος πρέπει να βρει τις καλύτερες αποφάσεις το ένα μετά το άλλο. Η συνεισφορά του Bellman γίνεται αμέσως γνωστή στο άκουσμα της εξίσωσης Bellman, ένα κεντρικό αποτέλεσμα του δυναμικού προγραμματισμού που επαναδιατυπώνει ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σε αναδρομική μορφή. Αργότερα το 1953 θεμελιώθηκε από τον ίδιο τον Bellman με στόχο να περιγράψει τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων που διασπώνται σε μία αλληλουχία διαδοχικών αποφάσεων. Ο πρώτος στόχος όπως αναφέρει ο Bellman στην αυτοβιογραφία του ήταν να βρει ένα όνομα για τις διαδικασίες λήψης αποφάσεων σε πολλά στάδια. Αυτός ο όρος αναφέρεται κατά κύριο λόγο στην εξίσωση του Bellman , η οποία επαναδιατυπώνει ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με επαναλαμβανόμενη μορφή και αποτελεί κεντρικό αποτέλεσμα του δυναμικού προγραμματισμού. Επομένως η λέξη "προγραμματισμός" χρησιμοποιήθηκε για να δηλώσει την κατάστρωση ενός σχεδίου και δεν έχει καμία σχέση με τον προγραμματισμό υπολογιστών. Γενικά χρησιμοποιείται ως συνώνυμο της βελτιστοποίησης και προέρχεται από τον όρο μαθηματικός προγραμματισμός. Με τη σειρά της η λέξη "δυναμικός", υποδηλώνει την χρονικά μεταβαλλόμενη φύση της διαδικασίας του δυναμικού προγραμματισμού, καθώς συμβαίνει σε πολλαπλά διαδοχικά στάδια. Σύμφωνα με τα παραπάνω οι επιστήμονες κατέληξαν ότι ο δυναμικός προγραμματισμός είναι μία σχεδιαστική τεχνική που λύνει με αποτελεσματικότερο τρόπο πολύπλοκα προβλήματα βελτιστοποίησης με τη βοήθεια ενός προγράμματος που εφαρμόζει έναν δυναμικό αλγόριθμο προγραμματισμού στον υπολογιστή. (History of Dynamic Programming)

2.2.1 Αρχή της Βελτιστοποίησης

Ο Bellman πήρε την απόφαση να ερευνήσει τρία πεδία: το δυναμικό προγραμματισμό, τη θεωρία ελέγχου και τις διαδικασίες χρονικής υστέρησης. Πρωταρχικό του μέλημα στο Δυναμικό Προγραμματισμό ήταν να τον θέσει σε μια αυστηρή βάση. Παρατήρησε ότι χρησιμοποιούσε συνεχώς την ίδια τεχνική για να εξάγει τον τύπο της συνάρτησης. Την τεχνική αυτή ονόμασε "**Αρχή της βελτιστοποίησης**".

Η συστηματική εργασία του πάνω στη Θεωρία Ελέγχου και έχοντας ήδη κάποια εμπειρία προβλημάτων Οικονομικών και Επιχειρησιακής Έρευνας ανέπτυξε ως "εργαλείο" του το ***λογισμό των μεταβολών*** **(calculus of variables).** Συνειδητοποίησε ότι απλά προβλήματα χρειάζονταν έναν ευφυή χειρισμό, καθότι δεν υπήρχε καμία σταθερότητα. Έστω και μια μικρή αλλαγή στο πρόβλημα μπορούσε να επιφέρει μια ουσιαστική αλλαγή στη λύση. Γρήγορα, όμως, διαπίστωσε ότι αυτό το εργαλείο δεν ήταν αρκετό για την εξεύρεση της λύσης.

Αφιερώνοντας τον περισσότερο χρόνο και προσπάθεια στις εξισώσεις του Δυναμικού Προγραμματισμού, ήταν σε θέση να λύσει ορισμένες από αυτές και να προσδιορίσει τις ιδιότητες των συναρτήσεων και την πολιτική που έπρεπε να ακολουθηθεί για άλλες. Ανέπτυξε κάποιες καινούργιες θεωρίες, όπως τις Μαρκοβιανές διαδικασίες λήψης αποφάσεων και μπορούσε να ερμηνεύσει εκ νέου μια παλιά θεωρία, όπως το λογισμό μεταβολών. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή λυνόταν ένας μεγάλος αριθμός μαθηματικών μοντέλων του Δυναμικού Προγραμματισμού, ωστόσο, δεν ήταν πάντοτε δεδομένη η εύρεση της λύσης, λόγω των περιορισμών ή της γραμμικότητας. Έτσι κι αλλιώς η λύση, δεν είναι απλά χρονικά εξαρτώμενες συναρτήσεις ή αριθμοί, αλλά ένας κανόνας που λέει σε αυτόν που λαμβάνει την απόφαση πώς να πράξει: είναι δηλαδή μία πολιτική, μια σειρά διαδοχικών διαδικασιών.

Εφόσον, κάθε αλλαγή στο πρόβλημα επέφερε και αλλαγή στη λύση, κάτι τέτοιο σημαίνει ότι για να βρεθεί αριθμητική λύση με αποτελεσματικό τρόπο, ήταν απαραίτητα και κάποια άλλα εργαλεία. Και ο Bellman παρά την απροθυμία του να ασχοληθεί σοβαρά με το λογισμό μεταβολών, το ερώτημα που παρέμενε ακόμα ήταν πώς θα μπορούσε κανείς να καταλήξει σε αριθμητική λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης και αν οι όποιες μέθοδοι υπήρχαν κατά πόσον ήταν αξιόπιστες.

Το ζητούμενο για τον Bellman δεν ήταν να σταθεί σ' αυτό το ερώτημα και σίγουρα δεν είχε σκεφτεί να εφαρμόσει το Δυναμικό Προγραμματισμό για τον έλεγχο διαδικασιών **ντετερμινιστικού** τύπου. Μάλλον περισσότερο είχε αναπτύξει τη θεωρία σαν εργαλείο για **στοχαστικές** διαδικασίες λήψης αποφάσεων. Συμπέρανε ότι υπάρχει μία πολύ ενδιαφέρουσα αλληλεπίδραση μεταξύ δυναμικού προγραμματισμού και θεωρίας ελέγχου. Έτσι, μπορούσε να χειριστεί σε κάποια έκταση διαδικασίες ντετερμινιστικού τύπου και στοχαστικές διαδικασίες στα οικονομικά και την επιχειρησιακή έρευνα.

Εμβαθύνοντας όλο και περισσότερο διαπίστωσε ότι η χρήση του λογισμού μεταβολών στη θεωρία ελέγχου προϋποθέτει, έστω και σιωπηρά, ότι έχουμε αιτία και αποτέλεσμα υπό έλεγχο, ότι γνωρίζουμε τόσο το σκοπό, όσο και τη διάρκεια της διαδικασίας ελέγχου. Υπονοείται η υπόθεση ότι κανείς ξέρει τί να παρατηρήσει και ότι οι μεταβλητές κατάστασης μπορούν να μετρηθούν με αυθαίρετη ακρίβεια. Στον πραγματικό κόσμο, καμία από αυτές τις υποθέσεις δεν είναι ομοιόμορφα έγκυρη. Πολλές φορές, οι άνθρωποι αναρωτιούνται γιατί τα μαθηματικά και οι υπολογιστές δε χρησιμοποιούνται για το χειρισμό ουσιαστικών προβλημάτων για την κοινωνία. Η απάντηση στο ερώτημά τους είναι ότι δε γνωρίζουμε πώς να περιγράψουμε τα πολύπλοκα συστήματα της κοινωνίας που περιλαμβάνουν και τους ανθρώπους, δεν καταλαβαίνουμε αίτιο και αποτέλεσμα, δηλαδή, τις συνέπειες των αποφάσεων. Δεν καταλαβαίνουμε καν πώς να κάνουμε τους στόχους μας ακριβέστερους. Καμία από τις απαιτήσεις της κλασικής επιστήμης δεν πληρείται και τελικά, αναπτύσσεται σταδιακά μια νέα μεθοδολογία για την αντιμετώπιση αυτών των ασαφών προβλημάτων, ο δρόμος της οποίας είναι αρκετά δύσβατος.

Όμως η πολυπλοκότητα που παρουσιάζει ο πραγματικός κόσμος ήταν ένας καλός λόγος για να επιστρέψει ο Bellman στη Θεωρία Αριθμών, η οποία, όμως, μάλλον δεν ήταν η καλύτερη προσέγγιση για τόσο δύσκολα προβλήματα όσον αφορά την απόδοση. Αυτός ήταν και ο λόγος που αποφάσισε να στραφεί σε ντετερμινιστικές διαδικασίες ελέγχου και να τις τροποποιήσει ανά στάδιο, ώστε να αποκτήσει θεωρίες για την αντιμετώπιση βασικών αβεβαιοτήτων με έναν πιο εκλεπτυσμένο τρόπο.

Στο σημείο αυτό θα ήταν παράληψη να μην αναφέρουμε ότι οι πιθανότητες που παρουσιάζουν “καλή συμπεριφορά” (well-behaved) αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια της κλασικής Θεωρίας Πιθανοτήτων που οδηγεί στη σύγχρονη θεωρία στοχαστικών διαδικασιών ελέγχου, όπου η αβεβαιότητα εκπροσωπείται από τυχαίες μεταβλητές με γνωστές κατανομές πιθανότητας και όπου στόχος είναι η μεγιστοποίηση των αναμενόμενων τιμών.

2.3 Παραδείγματα στον Δυναμικό Προγραμματισμό

Παρακάτω παρατίθενται ονομαστικά ορισμένα παραδείγματα ευρέως διαδεδομένα στον Δυναμικό Προγραμματισμό, με σκοπό την ευκολότερη κατανόηση του. Οι πιο γνωστές εφαρμογές του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι οι εξής:

1. Ακολουθία Fibonacci
2. Το πρόβλημα του Σακιδίου (Knapsack)
3. Το πρόβλημα της Ελάχιστης Διαδρομής (Shortest Path Problem)
4. Θεωρία Ουρών (Queuing Theory)
5. Θεωρία Ελέγχου (Control Theory)
6. Το πρόβλημα του Αλυσιδωτού Πολλαπλασιασμού Πινάκων (Matrix Chain Multiplication Problem)

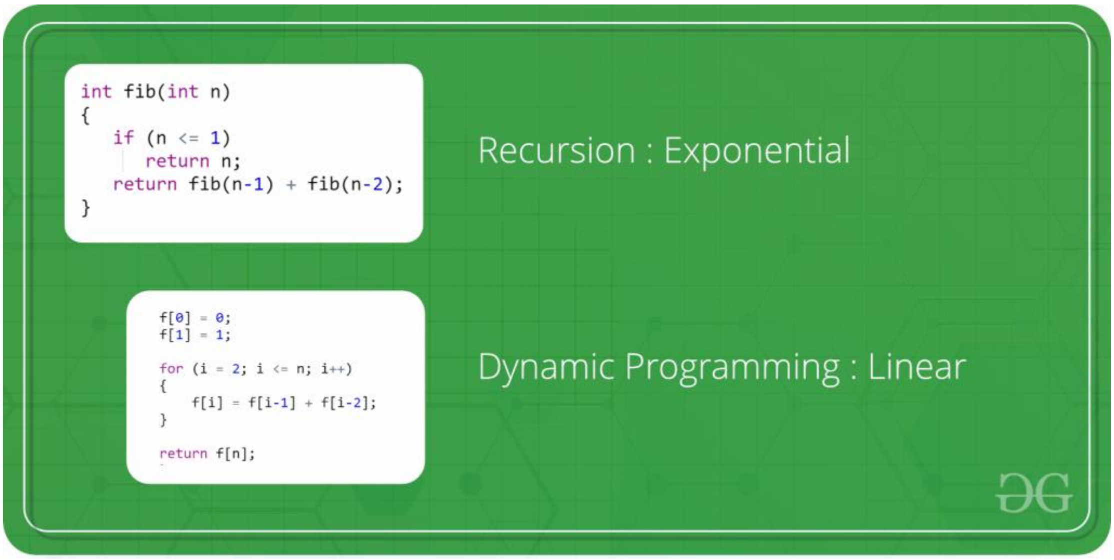
2.3.1 Ακολουθία Fibonacci

Το πιο γνωστό παράδειγμα του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι η ακολουθία Fibonacci το οποίο και θα δείξουμε επιγραμματικά στο κεφάλαιο αυτό.

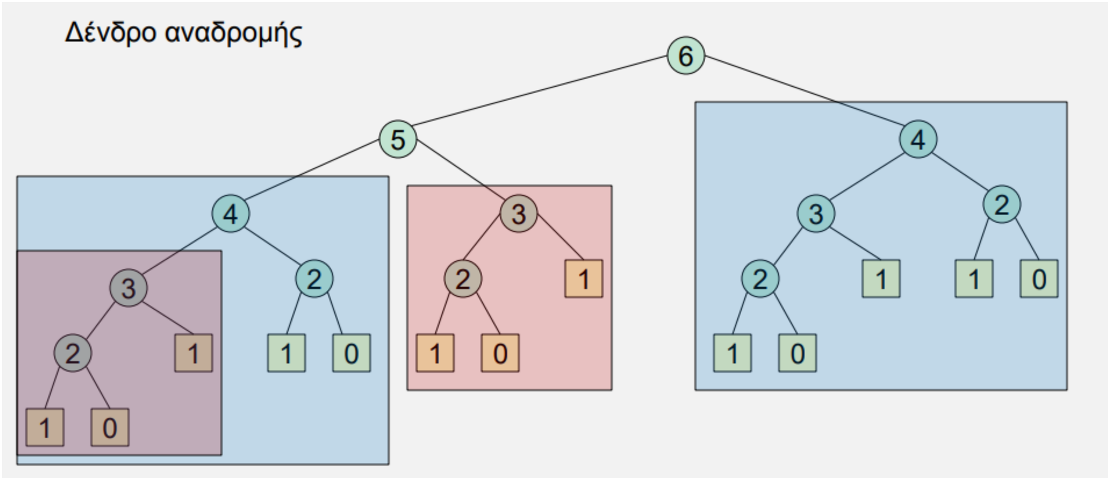
Υπενθύμιση: Η ακολουθία Fibonacci αποτελείται από τους αριθμούς που ικανοποιούν την εξής ιδιότητα: ο κάθε όρος της ακολουθίας είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενών της, γνωρίζοντας ότι ο $1^{ος}$ όρος της είναι ο αριθμός 0 και ο $2^{ος}$ ο αριθμός 1.

Για παράδειγμα, αν γράψουμε μια απλή αναδρομική σχέση για τους αριθμούς Fibonacci, έχουμε εκθετική χρονική πολυπλοκότητα και αν την βελτιστοποιήσουμε αποθηκεύοντας λύσεις υπο-προβλημάτων, η πολυπλοκότητα του χρόνου μειώνεται σε γραμμική.

Συγκεκριμένα έχουμε τους δύο κώδικες:

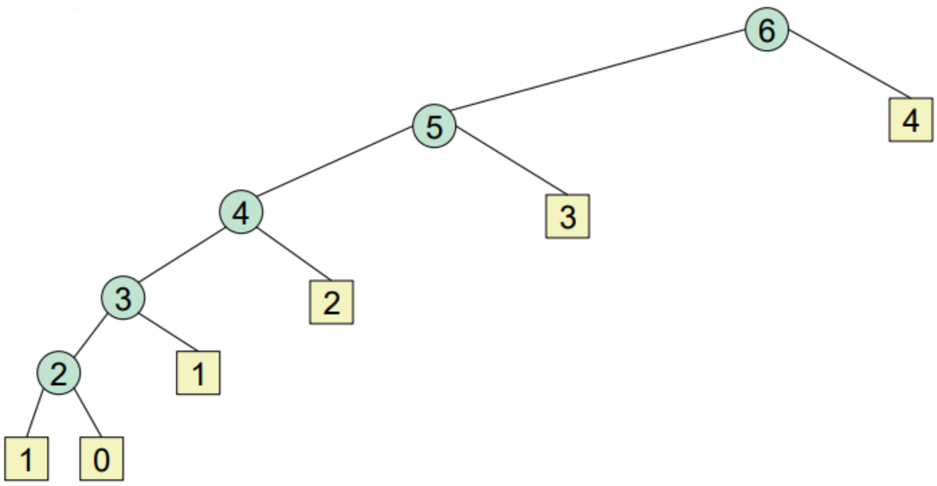


Αυτό συμβαίνει γιατί στη πραγματικότητα ο πρώτος κώδικας υπολογίζει τα παρακάτω:



Όπως φαίνεται στο σχήμα για να υπολογίσουμε τον 6^{ο} όρο της ακολουθίας Fibonacci χρειαζόμαστε τον 5^{ο} και τον 4^{ο}. Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα ο 4^{ος} όρος υπολογίζεται 2 φορές, ο 3^{ος} όρος 3 φορές και 2^{ος} 5 φορές. Δηλαδή ο υπολογιστής υπολογίζει άσκοπα όρους που τους έχει ήδη υπολογίσει.

Ενώ χρησιμοποιώντας τον δεύτερο κώδικα έχουμε:



Δηλαδή ο υπολογιστής υπολογίζει μόνο μία φορά τους όρους της ακολουθίας και τους αποθηκεύει, χρησιμοποιώντας έτσι πολλή λιγότερη μνήμη και δίνοντας ταχύτερα το αποτέλεσμα στον χρήστη.

2.4 Κλασσικός ορισμός

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω φτάνουμε στο συμπέρασμα πως ο δυναμικός προγραμματισμός (DP) είναι μια γενική προσέγγιση δημιουργίας αλληλένδετων αποφάσεων με βέλτιστο τρόπο, που προκύπτουν από λύσεις μικρότερων περιπτώσεων του ίδιου προβλήματος. Τυπικά, τα προβλήματα για τα οποία είναι χρήσιμη η εφαρμογή του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι προβλήματα βελτιστοποίησης. Χαρακτηριστικό τους είναι ότι υπονοεί μια αναδρομική διαδικασία βελτιστοποίησης που βασίζεται στη λύση ενός προβλήματος Ν σταδίων: λύνοντας, δηλαδή, αρχικά ένα μονοδιάστατο πρόβλημα και διαδοχικά συμπεριλαμβάνοντας ένα στάδιο κάθε φορά και λύνοντας μονοδιάστατα προβλήματα μέχρι να βρεθεί η καθολική βέλτιστη λύση. Η ***προς-τα-πίσω*** *ή* ***οπισθοδρομική επαγωγή*** *(backward induction),* ως αρχικό στάδιο του προβλήματος λαμβάνουμε το τελικό στάδιο και μετακινούμενοι προς τα πίσω ανά ένα στάδιο κάθε φορά βρίσκουμε τη βέλτιστη πολιτική για εκείνο το στάδιο, μέχρις ότου συμπεριληφθούν όλα τα στάδια (δηλαδή μέχρι να βρούμε τη βέλτιστη πολιτική για το αρχικό/πρώτο στάδιο). Αξίζει να αναφέρουμε πως υπάρχει και ***προς-τα-εμπρός*** μέθοδος ξεκινώντας από το πρώτο κομμάτι του προβλήματος και επιλύουμε προς τα πίσω με όμοιο τρόπο όπως προηγουμένως, αλλά δεν θα λύσουμε προβλήματα με αυτόν τον τρόπο στη παρούσα διπλωματική. Επομένως η μεθοδολογία του Δυναμικού Προγραμματισμού πρέπει να έχει τα εξής κύρια χαρακτηριστικά για την οπισθοδρομική επαγωγή:

1. Χωρίζουμε το πρόβλημά μας σε τόσα στάδια όσες και οι αποφάσεις που θα πρέπει στο τέλος να ληφθούν.
2. Ξεκινάμε από το τελευταίο στάδιο απόφασης και προχωρούμε προς το πρώτο αντίστροφα δηλαδή προς την αρχή του προβλήματος.
3. Σε κάθε στάδιο υπολογίζουμε την καλύτερη δυνατή απόφαση, από οποιαδήποτε θέση αυτού του σταδίου, μέχρι τον τελικό προορισμό, την λύση του προβλήματος.
4. Η διαδικασία αυτή θα πρέπει να είναι η πιο βέλτιστη μεταξύ όλων των πιθανών καταστάσεων αυτής της θέσης και του τελικού προορισμού. Έτσι για κάθε επόμενη θέση υπολογίζουμε την απόφαση που θα πρέπει να λάβουμε από την

τωρινή μας θέση έως την επόμενη, συν την βέλτιστη απόφαση που έχουμε ήδη λάβει ως τώρα μέχρι τον προορισμό μας.

Αποτέλεσμα αυτού του μοντέλου είναι ότι όταν θα φτάσουμε στην αρχή του προβλήματος, θα αθροίσουμε όλες τις βέλτιστες αποφάσεις που έχουμε λάβει έως τώρα σε κάθε στάδιό, σε μία γενική βέλτιστη πολιτική που θα πρέπει να ακολουθήσουμε για την τελική λύση του προβλήματος.

Αυτή η μέθοδος βασίζεται στην **Αρχή βελτιστοποίησης του Bellman (1950)**, η οποία διατυπώνεται ως ακολούθως:

«Μία βέλτιστη πολιτική (στρατηγική) έχει την ιδιότητα ότι οποιεσδήποτε κι αν είναι η αρχική κατάσταση και η αρχική απόφαση, οι υπόλοιπες αποφάσεις πρέπει να συνιστούν μια βέλτιστη πολιτική (στρατηγική), όσον αφορά την κατάσταση που προκύπτει από την πρώτη απόφαση»

Πιο απλουστευμένα θα μπορούσαμε να πούμε ότι η παραπάνω αρχή διατυπώνει πως οι βέλτιστες πολιτικές έχουν και βέλτιστες υπό-πολιτικές. Η ευστάθεια της αρχής αυτής προκύπτει από το γεγονός ότι αν μία πολιτική δεν έχει βέλτιστη υπό-πολιτική, τότε πιθανή αντικατάσταση της υπό-πολιτικής αυτής από μία βέλτιστη υπό-πολιτική θα μπορούσε να βελτιώσει την πραγματική πολιτική.(κάτι που δεν είναι πάντοτε εφικτό)

2.5 Ορολογία Δυναμικού Προγραμματισμού

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στα προηγούμενα κεφάλαια στον Δυναμικό Προγραμματισμό προσπαθούμε συνήθως να επιλύσουμε σύνθετα προβλήματα μέσα από τη λύση υπό- προβλημάτων, να δημιουργήσουμε αναδρομικές σχέσεις κλπ. Η δυσκολία που αντιμετωπίζουμε είναι η ανεύρεση του κατάλληλου μοντέλου που θα μας βοηθήσει να περιγράψουμε καλύτερα την κατάσταση που βρισκόμαστε. Γενικά θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε πως οι μεταβλητές απόφασης μπορεί να είναι ακέραιες ή συνεχείς, οι αντικειμενικές συναρτήσεις και οι περιορισμοί να είναι γραμμικοί ή μη-γραμμικοί. Ας δούμε συνοπτικά κάποια βασικά στοιχεία του μοντέλου:

maximize $\mathrm{z} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)$

υπό τους περιορισμούς: $\sum_i^n a_i \cdot x_i \leq b$ όπου $x_i \geq 0,\ i = 0,1, \ldots, n$ ακέραιος b και α_i είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Στάδιο (i): το αρχικό στάδιο χωρίζεται σε n στάδια, όπου αρχικό είναι το n στάδιο και τελικό το στάδιο 1. Ο δείκτης i μας δίνει το στάδιο στο οποίο βρισκόμαστε την εκάστοτε στιγμή.

Τρέχουσα κατάσταση (s_i): είναι η συνθήκη στην οποία ενδέχεται να βρεθεί το σύστημα για κάποιο στάδιο n.

Μεταβλητή απόφασης (x_i): για κάθε στάδιο στο οποίο βρισκόμαστε υπάρχει μία ή περισσότερες μεταβλητές απόφασης.

Βέλτιστη μεταβλητή απόφασης (x_i^*): ονομάζεται η βέλτιστη απόφαση σε κάποιο στάδιο δοθείσας της τρέχουσας κατάστασης.

Συνάρτηση βέλτιστης τιμής $f_i(s_i)$: πρόκειται για την καλύτερη (ελάχιστη/ μέγιστη) συνάρτηση τιμών από το i στάδιο έως το n δοθείσας της τρέχουσας κατάστασης s_i.

Υπό συνθήκη συνάρτηση τιμής $f_i(s_i, x_i)$: η συνεισφορά των σταδίων $i, i+1, \ldots, n$ στην αντικειμενική συνάρτηση αν το σύστημα ξεκινά από την κατάσταση s_i του σταδίου n, η άμεση απόφαση είναι x_i και βέλτιστες αποφάσεις λαμβάνονται από κει και πέρα.

Αναδρομική σχέση $f_i^*(s_i) = \max_{x_i} f_i(s_i, x_i)$ ή $f_i^*(s_i) = \min_{x_i} f_i(s_i, x_i)$

Σημείωση : Όλη η ευχέρεια του Δυναμικού Προγραμματισμού κρύβεται στο ότι ο όρος $f_i(s_i, x_i)$ γράφεται ως συνάρτηση των s_i, x_i, $f_{i+1}^*(s_{i+1})$ και πιθανώς κάποιου μέτρου της συνεισφοράς του x_i στην αντικειμενική συνάρτηση. Ο όρος $f_{i+1}^*(s_{i+1})$ εισάγεται στο δεξί μέλος, έτσι ώστε ο όρος $f_i^*(s_i)$ να οριστεί συναρτήσει του $f_{i+1}^*(s_{i+1})$ κάτι που καθιστά τη σχέση αναδρομική. Η αναδρομική σχέση επεκτείνεται συνεχώς σε κάθε στάδιο καθώς μετακινούμαστε προς τα πίσω χρησιμοποιώντας στην κάθε επόμενη σχέση το αποτέλεσμα της προηγούμενης ως δεδομένο και μειώνοντας όλους τους δείκτες κατά 1.

Κεφάλαιο 3 : Το πρόβλημα της μεταφοράς

Σε ένα τέτοιο πρόβλημα αναζητούμε τη συντομότερη διαδρομή σε ένα δίκτυο επικοινωνίας το οποίο χτίζεται μεταξύ ενός σημείου εκκίνησης (αρχή) και ενός τελικού σημείου (τέλος), εφόσον έχουν δοθεί οι αποστάσεις- κόστη μεταξύ των διαφόρων σημείων του δικτύου. Έτσι, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) αν έχουμε *προς-τα-πίσω επαγωγή* (backward induction), βρίσκουμε τη συντομότερη διαδρομή από το τέλος προς την αρχή, ή καλύτερα τη συντομότερη (κάποιες φορές οικονομικότερη) διαδρομή από τον τελικό προορισμό προς όλες τις πιθανές διασταυρώσεις του δικτύου, και

2) αν έχουμε *προς-τα εμπρός επαγωγή* (forward induction), βρίσκουμε αντίθετα το συντομότερο μονοπάτι ξεκινώντας από την αρχή και πηγαίνοντας προς το τέλος, δηλαδή το συντομότερο μονοπάτι για το οποίο θα έχουμε τη βέλτιστη λύση στο πρόβλημα που έχουμε να λύσουμε.

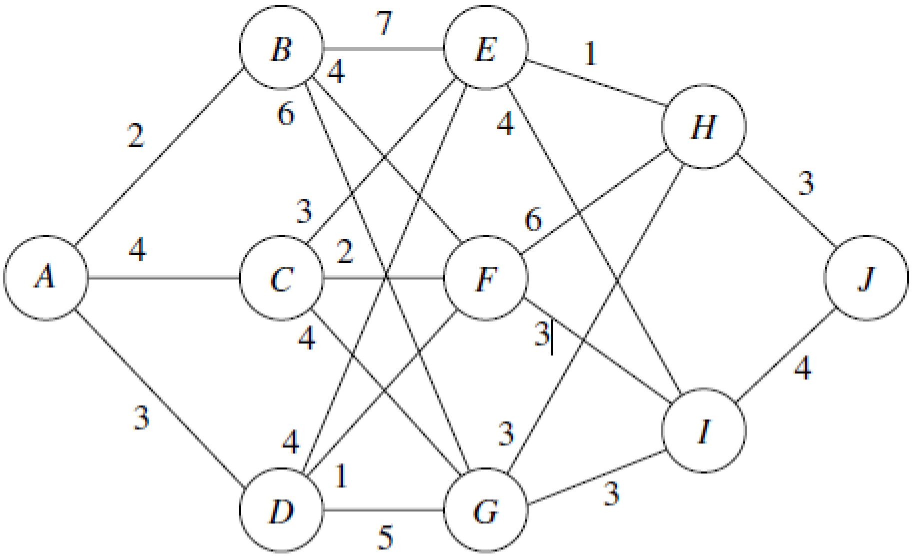
Παρόλο που, οι δύο αυτοί τρόποι οδηγούν στην ίδια λύση εμείς όπως έχουμε ήδη αναφέρει χρησιμοποιούμε τον πρώτο στο συγκεκριμένο βιβλίο.

Στο σημείο αυτό τονίζουμε ότι το συγκεκριμένο κεφάλαιο έχει πολλές εφαρμογές σε διάφορα προβλήματα αλλά η συλλογιστική πορεία των λύσεων παραμένει ίδια. Για το λόγο αυτό εμείς θα εξετάσουμε μια περίπτωση από αυτές (οικονομικότερο κόστος μεταφοράς από ένα σημείο σε ένα άλλο).

3.1 Ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς

Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι ένα κλασσικό πρόβλημα στον Δυναμικό Προγραμματισμό γνωστό και ως “stagecoach”. Το πρόβλημα πραγματεύεται έναν πωλητή ο οποίος ταξιδεύει από μια μικρή πόλη A σε μια μικρή πόλη J, αλλά δεν ήθελε να πληρώσει περισσότερο για τη μεταφορά από ό, τι ήταν απαραίτητο. Τα μεταφορικά μέσα αποτελούσαν σταθμούς που είχαν προγραμματιστεί μεταξύ των μικρών πόλεων της περιοχής. Το κόστος του ταξιδιού βρισκόταν συνδυάζοντας το κόστος των μεμονωμένων αποστάσεων. Δεδομένου ενός σχηματικού χάρτη των πιθανών διαδρομών με τη μορφή του κατωτέρω γραφήματος(Σχήμα 1) να βρεθεί η διαδρομή με το ελάχιστο κόστος πληρωμής.

Σχήμα 1



Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι η προσέγγιση της επιλογής του φθηνότερου τρόπου που προσφέρει κάθε διαδοχική επιλογή δεν αποφέρει μια συνολική βέλτιστη απόφαση. Δηλαδή ακολουθώντας τη στρατηγική A → B → F → I → J παίρνοντας κάθε φορά τη φθηνότερη διαδρομή έχουμε με συνολικό κόστος 13. Ωστόσο θυσιάζοντας στη πρώτη διαδρομή τη φθηνότερη επιλογή, βλέπουμε να μας επιτρέπει στη συνέχεια μεγαλύτερη εξοικονόμηση. Θα ήταν παράλειψη να μην αναφέρουμε πως με το συγκεκριμένο τρόπο εξετάζονται άμεσα και με πολύ απλούς υπολογισμούς $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ εναλλακτικές διαδρομές. Κάτι που αν γινόταν με 18 διαφορετικές περιπτώσεις θα έκανε το πρόβλημα πολυπλοκότερο, να μην αναφέρουμε τη περίπτωση που αντί για 18 εναλλακτικές διαδρομές είχαμε 100 ή 200 κάτι που είναι σύνηθες να επιλύει ένας μέσος υπολογιστής. Για παράδειγμα η διαδρομή A → D → F είναι φθηνότερη από την A → B → F με κόστος 4 και 6 αντίστοιχα. Μια πιθανή σκέψη για την επίλυση του προβλήματος αυτού θα ήταν η μέθοδος δοκιμών και σφαλμάτων. Κατά την οποία χρειάζεται να βρούμε όλες τις πιθανές διαδρομές με τα ανάλογα κόστη και να επιλέξουμε την οικονομικότερη. Κάτι τέτοιο είναι δύσκολο όμως καθότι ο αριθμός των δυνατών διαδρομών είναι μεγάλος (18) και πρέπει να υπολογιστεί το συνολικό κόστος για κάθε μία απ' αυτές κάτι που είναι αρκετά χρονοβόρο.

Ευτυχώς, ο δυναμικός προγραμματισμός παρέχει μια λύση με πολύ λιγότερη προσπάθεια από την εξαντλητική απαρίθμηση. (Δε θα ήταν παράληψη να σημειώσουμε πως η υπολογιστική εξοικονόμηση είναι τεράστια για μεγαλύτερες περιπτώσεις αυτού του είδους

προβλημάτων). Αναγκαία προϋπόθεση της μεθοδολογίας αυτής είναι λύση από το τέλος προς την αρχή.

<u>Μέθοδος:</u> Θέτουμε τις μεταβλητές απόφασης x_n όπου n=1,2,3,4 να είναι ο άμεσος προορισμός. Έτσι ώστε η επιλεγμένη διαδρομή να είναι A → x_1 → x_2 → x_3 → x_4 με $x_{4=}$J

Έστω $f_n(s, x_n)$ το συνολικό κόστος της καλύτερης συνολικής επιλογής για τα υπόλοιπα στάδια, δεδομένου ότι ο πωλητής είναι σε κατάσταση s, ξεκινώντας στο στάδιο n, και επιλέγοντας το x_n ως τον άμεσο προορισμό του.

$x*_n$: οποιαδήποτε τιμή της x_n (όχι κατ' ανάγκη μοναδική) που ελαχιστοποιεί το $f_n(s, x_n)$. Δηλαδή $f_n^*(s) = \min_{x_n} f_n(s, x_n) = f_n(s, x*_n)$.

Όπου $f_n(s, x_n) = c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n)$ και c_{sx_n} το κόστος από τη κατάσταση s, ξεκινώντας στο στάδιο n, και επιλέγοντας το x_n.

Προφανώς $f_5^*(J) = 0$ αφού ο τελικός προορισμός (κατάσταση J) φθάνει στο τέλος του σταδίου 4.

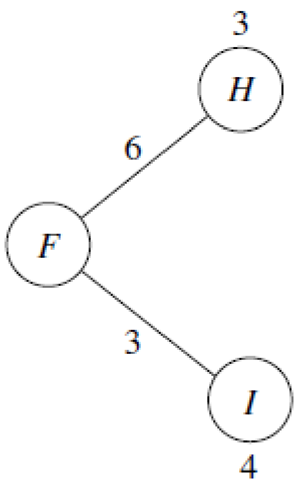
Όταν ο πωλητής έχει μόνο μια διαδρομή ακόμα (στο στάδιο n=4) η πορεία του στη συνέχεια καθορίζεται εξ ολοκλήρου από την τρέχουσα κατάσταση του (H ή I) και ο τελικός προορισμός του είναι $x_{4=}$J. Άρα η διαδρομή στο στάδιο αυτό είναι S → J και είναι $f_4^*(s) = f_4(s, J) = c_{sJ}$ με άμεση λύση στο n=4 να είναι :

Σχήμα 2

S	$f_4^*(s)$	x_4^*
H	3	J
I	4	J

Όταν ο πωλητής έχει ακόμα 2 στάδια (n=3), η διαδικασία λύσης απαιτεί λίγους υπολογισμούς. Για παράδειγμα αν βρίσκεται στο σημείο F τότε πρέπει να μεταβεί στον κόμβο H ή I με άμεσο κόστος $c_{FH} = 6$ ή $c_{FI} = 3$. Αν επιλέξει την διαδρομή H το ελάχιστο επιπλέον κόστος μετά από εκεί φαίνεται στον προηγούμενο πίνακα $f_4^*(H) = 3$. Επομένως το συνολικό κόστος για την απόφαση αυτή είναι 6+3=9. Αντίθετα αν επιλέξει την διαδρομή I το συνολικό κόστος είναι 3+4=7, κάτι που είναι προτιμότερο. Επομένως η βέλτιστη επιλογή είναι η x_3^* =I επειδή δίνει το ελάχιστο κόστος $f_3^*(F) = 7$.

Σχήμα 3



Παρόμοιοι υπολογισμοί πρέπει να γίνουν όταν αρχίζει από τις άλλες δυο πιθανές καταστάσεις S=E και S=G. Οπότε έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

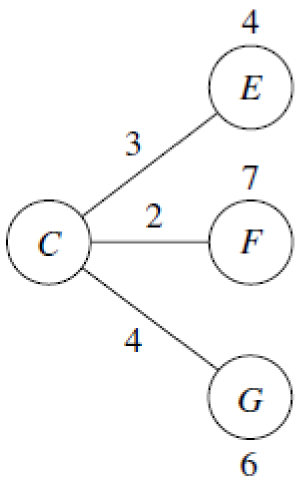
Σχήμα 4

n=3

S \ x_3	$f_3(s, x_3) = c_{sx_3} + f_4^*(x_3)$		$f_3^*(s)$	x_3^*
	H	I		
E	4	8	4	H
F	9	7	7	I
G	6	7	6	H

Η λύση για το πρόβλημα στο στάδιο (n=2), όπου υπάρχουν τρείς διαδρομές λαμβάνεται με παρόμοιο τρόπο. Στη περίπτωση αυτή έχουμε $f_2(s, x_2) = c_{sx_2} + f_3^*(x_3)$. Για παράδειγμα αν ο πωλητής βρίσκεται στο σημείο C τότε έχουμε το σχήμα 5:

Σχήμα 5



Στη συνέχεια πρέπει να μεταβεί στην κατάσταση E, F ή G με άμεσο κόστος $c_{CE} = 3$ ή $c_{CF} = 2$ ή $c_{CG} = 4$ αντίστοιχα.

Αφού φτάσει εκεί, το ελάχιστο πρόσθετο κόστος για το στάδιο 3 στο το τέλος δίνεται από τον πίνακα n=3 ως $f_3^*(E) = 4$, $f_3^*(F) = 7$, $f_3^*(G) = 6$ τα οποία φαίνονται στο προηγούμενο διάγραμμα πάνω και κάτω από τους κόμβους. Οι υπολογισμοί για τις τρεις εναλλακτικές λύσεις συνοψίζονται παρακάτω.

$x_{2=}E : f_2(C, E) = c_{CE} + f_3^*(E) = 3 + 4 = 7$

$x_{2=}F : f_2(C,F) = c_{CF} + f_3^*(F) = 2 + 7 = 9$

$x_{2=}G : f_2(C,G) = c_{CG} + f_3^*(G) = 4 + 6 = 10$

Το ελάχιστο των τριών αυτών αριθμών είναι 7, οπότε το ελάχιστο συνολικό κόστος από την κατάσταση C στον τελικό προορισμό είναι$f_2^*(C) = 7$, και ο άμεσος προορισμός πρέπει να είναι $x_2^* = E$. Κάνοντας παρόμοιους υπολογισμούς ξεκινώντας από τα σημεία B ή D έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα στον πίνακα που ακολουθεί.

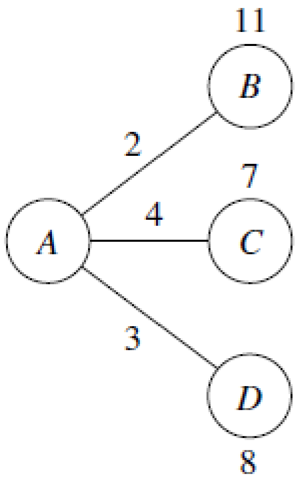
Σχήμα 6

n=2

x_2 / S	$f_2(s,x_2) = c_{sx_2} + f_3^*(x_2)$			$f_2^*(s)$	x_2^*
	E	F	G		
B	11	11	12	11	E ή F
C	7	9	10	7	E
D	8	8	11	8	E ή F

Σημειώνεται ότι στην πρώτη και την τρίτη σειρά αυτού του πίνακα τα σημεία E και F δίνουν την ελάχιστη τιμή του x_2, οπότε ο άμεσος προορισμός από τα σημεία B και D πρέπει να είναι $x_2^* = E \text{ ή } F$. Προχωρώντας στο πρώτο στάδιο (n=1) οι υπολογισμοί είναι παρόμοιοι με την μόνη εξαίρεση ότι υπάρχει ένα μόνο πιθανό σημείο εκκίνησης το A.

Σχήμα 7



Αυτοί οι υπολογισμοί συνοψίζονται στη συνέχεια για τις τρεις εναλλακτικές λύσεις για τον άμεσο προορισμό:

$x_{1=}B : f_1(A,B) = c_{AB} + \ f_2^*(B) = 2 + 11 = 13$

$x_{1=}C : f_1(A,C) = c_{AC} + \ f_2^*(C) = 4 + 7 = 11$

$x_{1=}D : f_1(A,D) = c_{AD} + \ f_2^*(D) = 3 + 8 = 11$

Συνεπώς το $f_1^*(A) = 11$ και $x_1^* = C$ ή D είναι το ελάχιστο κόστος, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Σχήμα 8

n=1

x_1 / S	$f_1(s,x_1) = c_{sx_1} + \ f_2^*(x_1)$			$f_1^*(s)$	x_1^*
	B	C	D		
A	13	11	11	11	C ή D

Μια βέλτιστη λύση για όλο το πρόβλημα μπορεί πλέον να εντοπιστεί από τους τέσσερις πίνακες. Τα αποτελέσματα για το στάδιο (n=1) υποδεικνύουν ότι ο πωλητής μπορεί να μεταβεί αρχικά είτε την κατάσταση C είτε την κατάσταση D.

Τελικά οι βέλτιστες λύσεις είναι οι παρακάτω με το ίδιο συνολικό κόστος $f_1^*(A) = 11.$

Διαδρομή 1 : A → C → E → H → J

Διαδρομή 2 : A → D → E → H → J

Κεφάλαιο 4 : Το πρόβλημα των αποθεμάτων

4.1 Ελαχιστοποίηση του κόστους αποθεμάτων

Μια εταιρία έχει ως πολιτική της στο τέλος του κάθε μήνα να προμηθεύεται προϊόντα με σκοπό να μην έχει απώλεια κέρδους. Είναι γνωστό ότι το κόστος ανά μήνα είναι 1€ ανά τεμάχιο. Δίνεται επίσης ότι το κόστος εγκατάστασης των μηχανών παραγωγής είναι 900€ και το κόστος παραγωγής 2€ ανά τεμάχιο. Τα απαιτούμενα αποθέματα φαίνονται στο σχήμα 1

Σχήμα 1

ΜΗΝΑΣ	ΑΠΟΘΕΜΑ
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ	100
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ	200
ΜΑΡΤΙΟΣ	300
ΑΠΡΙΛΙΟΣ	400
ΣΥΝΟΛΟ	1000

ΛΥΣΗ

Το κόστος παραγωγής των 1000 τεμαχίων θα παραχθεί ούτως ή άλλως ανεξάρτητα από το αν τα αντικείμενα παράγονται στην αρχή ή οποιαδήποτε άλλη στιγμή.

Συνεπώς έχουμε ήδη καθορισμένο κόστος : $1000€ \cdot 2 = 2000€$.

Περίπτωση 1 – ΑΠΡΙΛΙΟΣ

Απαιτούμενο απόθεμα : 400 τεμάχια

Κόστος : $900€$

Περίπτωση 2 - ΜΑΡΤΙΟΣ

Έχουμε τις ακόλουθες εναλλακτικές λύσεις.

1. Παραγωγή 700 τεμαχίων (απαιτούμενη ζήτηση ΜΑΡΤΙΟΥ-ΑΠΡΙΛΙΟΥ)
   Κόστος : $900€ + 400€ \cdot 1 = 1300€$
2. Παραγωγή 300 τεμαχίων τον ΜΑΡΤΗ και 400 τεμαχίων τον ΑΠΡΙΛΗ
   Κόστος : $900€ + 900€ = 1800€$

Ως εκ τούτου, η βέλτιστη επιλογή για τον ΜΑΡΤΗ είναι η παραγωγή 700 τεμαχίων με κόστος 1300€.

Περίπτωση 3 – ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ

Έχουμε τις ακόλουθες εναλλακτικές λύσεις.

1. Παραγωγή 900 τεμαχίων τον ΦΛΕΒΑΡΗ
   Κόστος : $900€ + 700€ \cdot 1 + 400€ \cdot 1 = 2000€$
2. Παραγωγή 500 τεμαχίων το ΦΛΕΒΑΡΗ και 400 τεμαχίων τον ΑΠΡΙΛΗ
   Κόστος : $900€ + 300€ \cdot 1 + 900€ = 2100€$
3. Παραγωγή 200 τεμαχίων τον ΦΛΕΒΑΡΗ και 700 τεμαχίων τον ΜΑΡΤΗ
   Κόστος : $900€ + 1300€ = 2200€$

Επειδή από την προηγούμενη περίπτωση η βέλτιστη περίπτωση ήταν η παραγωγή 700 τεμαχίων τον ΜΑΡΤΙΟ, θα ήταν ασύμφορο οικονομικά να εξετάσουμε την παραγωγή 200 τεμαχίων το ΦΛΕΒΑΡΗ, 300 τεμαχίων τον ΜΑΡΤΗ και 400 τεμαχίων τον ΑΠΡΙΛΗ.

Περίπτωση 4 – ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ

Έχουμε τις ακόλουθες εναλλακτικές λύσεις.

1. Παραγωγή 1000 τεμαχίων τον ΓΕΝΑΡΗ
   Κόστος : $900€ + 900€ \cdot 1 + 700€ \cdot 1 + 400 \cdot 1 = 2900€$
2. Παραγωγή 600 τεμαχίων τον ΓΕΝΑΡΗ και 400 τεμαχίων τον ΑΠΡΙΛΗ
   Κόστος : $900€ + 500€ \cdot 1 + 300€ \cdot 1 + 900€ = 2600€$
3. Παραγωγή 300 τεμαχίων τον ΓΕΝΑΡΗ και 700 τεμαχίων τον ΜΑΡΤΗ
   Κόστος : $900€ + 200€ \cdot 1 + 1300€ = 2400€$

4. Παραγωγή 100 τεμαχίων τον ΓΕΝΑΡΗ και 900 τεμαχίων τον ΦΛΕΒΑΡΗ
   Κόστος : $900€ + 2000€ = 2900€$

Το ελάχιστο κόστος είναι 2400€. Ως εκ τούτου, η καλύτερη πολιτική είναι να κατασκευάσει 300 τεμάχια τον ΓΕΝΑΡΗ και 700 τεμάχια τον ΜΑΡΤΗ.

Κεφάλαιο 5 : Επιστήμονες και ερευνητικές ομάδες

5.1 Διανομή επιστημόνων

Ένα κυβερνητικό διαστημικό έργο διεξάγει έρευνα σχετικά για ένα συγκεκριμένο μηχανικό πρόβλημα το οποίο πρέπει να λυθεί προκειμένου οι άνθρωποι να μπορούν να πετάξουν με ασφάλεια στον Άρη. Υπάρχουν τρείς ερευνητικές ομάδες οι οποίες δοκιμάζουν τρείς διαφορετικές προσεγγίσεις για την επίλυση αυτού του προβλήματος. Υποθέτοντας ότι οι ομάδες αυτές αποκαλούνται 1,2,3 έχει εκτιμηθεί ότι οι αντίστοιχες πιθανότητες αποτυχίας τους είναι 0.40, 0.60 και 0.80. Επειδή ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί η πιθανότητα αποτυχίας η κυβέρνηση δίνει τη δυνατότητα να προσληφθούν δύο ακόμη επιστήμονες για τη πιθανότερη επίτευξη του προγράμματος. Το πρόβλημα είναι να καθορίσουμε τον τρόπο κατανομής των δύο επιπλέον επιστημόνων για να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα ότι και οι τρεις ομάδες θα αποτύχουν. Οι πιθανότητες φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Σχήμα 1

Νεοι Επιστήμονες	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3
0	0.40	0.60	0.80
1	0.20	0.40	0.50
2	0.15	0.20	0.30

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τρία στάδια $n = (1,2,3)$ που αντιστοιχούν στις τρείς ομάδες.

Η κατάσταση $S_n = 0,1,2$ είναι ο αριθμός νέων επιστημόνων που είναι ακόμη διαθέσιμοι για κατανομή στις υπόλοιπες ομάδες.

Θεωρούμε επίσης τις μεταβλητές απόφασης $X_n \geq 0$ για $n = 1,2,3$ που συμβολίζουν τον αριθμό των πρόσθετων επιστημόνων που κατανέμονται στην ομάδα n.

Τέλος θεωρούμε τις πιθανότητες $Pi(X_i)$ που υποδηλώνουν την πιθανότητα αποτυχίας για την ομάδα i εάν της αποδίδεται X_i επιπλέον επιστήμονες.

Συνεπώς πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το γινόμενο :

$$\prod_{i=1}^{3} Pi(X_i)$$

Υπό τον περιορισμό :

$$\sum_{i=1}^{3} X_i = 2$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_n(S_n, X_n) = Pn(X_n) \cdot \min \prod_{i=n+1}^{3} Pi(X_i)$

Με το ελάχιστο να λαμβάνεται για $X_{n+1}, \dots, X_3$ ώστε $\sum_{i=n}^{3} X_i = S_n$

Για $n = (1,2,3)$ είναι $f_n^*(S_n) = \min f_n(S_n, X_n)$ με $X_n = 0,1, \dots, S_n$

Όπου $f_n(S_n, X_n) = Pn(X_n) \cdot f_{n+1}^*(S_n - X_n)$

Προφανώς ορίζουμε εξαρχής $f_4^* = 1$. Οπότε έχουμε την αναδρομική σχέση :

$f_n^*(S_n) = \min\{Pn(X_n) \cdot f_{n+1}^*(S_n - X_n)\}$ για $n = (1,2)$ και $X_n = 0,1, \dots, S_n$

Και για $n = 3$ είναι $f_3^*(S_3) = \min\{P_3(X_3)\}$ για $X_n = 0,1, \dots, S_n$

Οι υπολογισμοί δυναμικού προγραμματισμού που προκύπτουν είναι οι εξής :

n=3

S_3	$f_3^*(S_3)$	x_3^*
0	0.80	0
1	0.50	1
2	0.30	2

Σχήμα 2

Αμέσως μετά έχουμε :

n=2

S_2 \ x_2	$f_2(S_2,x_2) = P_2(x_2) \cdot f_3^*(S_2 - x_2)$			$f_2^*(S_2)$	x_2^*
	0	1	2		
0	0.48	-	-	0.48	0
1	0.30	0.32	-	0.30	0
2	0.18	0.20	0.16	0.16	2

Σχήμα 3

Και τέλος έχουμε :

n=1

S_1 \ x_1	$f_1(S_1,x_1) = P_1(x_1) \cdot f_2^*(S_1 - x_1)$			$f_1^*(S_1)$	x_1^*
	0	1	2		
2	0.064	0.060	0.072	0.060	1

Σχήμα 4

Επομένως η βέλτιστη λύση πρέπει να έχει $X_1^* = 1$ οπότε και $S_2 = 2 - 1 = 1$ άρα και $X_2^* = 0$ που σημαίνει ότι $S_3 = 1 - 0 = 1$ και άρα $X_3^* = 1$. Δηλαδή οι ομάδες 1 και 3 πρέπει να λάβουν έναν ακόμη επιστήμονα και τότε η νέα πιθανότητα αποτυχίας για τις τρείς ομάδες θα είναι 0.060.

Κεφάλαιο 6 : Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού

6.1 Επίλυση προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού μέσω Δυναμικού Προγραμματισμού

Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού :

$\max Z = \max\{3X_1 + 5X_2\}$

Υπό τους περιορισμούς :

$\begin{cases} X_1 \leq 4 \\ 2X_2 \leq 12 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 18 \end{cases}$ και $\begin{cases} X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$\begin{cases} X_1 \leq 4 \\ 2X_2 \leq 12 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 18 \end{cases}$ => $\begin{cases} X_1 \leq 4 & (1) \\ X_2 \leq 6 & (2) \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 18 & (3) \end{cases}$

Θεωρούμε τις μεταβλητές R_1, R_2, R_3 που αντιστοιχούν στο δεξιό μέλος των περιορισμών. Δηλαδή είναι $\begin{cases} R_1 = 4 \\ R_2 = 6 \\ R_3 = 18 \end{cases}$

Από τη σχέση (2) έχουμε $X_2 \leq R_2$ και από τη σχέση (3) έχουμε $X_2 \leq \frac{R_3}{2}$

Θα μεγιστοποιήσουμε τη μεταβλητή X_2 τότε πρέπει η τιμή της $X_2 = \min\left\{R_2, \frac{R_3}{2}\right\}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_2(R_1, R_2, R_3) = \max(5X_2) = 5\max(X_2) = 5\min\left\{R_2, \frac{R_3}{2}\right\}$ (4)

$f_1(4{,}6{,}18) = \max\{3X_1 + f_2(4 - 2X_1, 6{,}18 - 3X_1)\} \overset{(4)}{\Rightarrow} f_1(4{,}6{,}18) = \max\left\{3X_1 + 5\min\left[6, \frac{18-3X_1}{2}\right]\right\}$ (5) με $0 \leq X_1 \leq 6$ και $0 \leq X_2 \leq 2$

Βρίσκουμε το εύρος του X_1 λύνοντας την εξίσωση :

$6 = \frac{18-3X_1}{2} \Rightarrow 12 = 18 - 3X_1 \Rightarrow 3X_1 = 6 \Rightarrow X_1 = 2$

● Αν $X_1 \leq 2$ τότε : $f_1(4{,}6{,}18) = \max\left\{3X_1 + 5\min\left[6, \frac{18-3X_1}{2}\right]\right\} = \max\{3X_1 + 5 \cdot 6\}$

● Αν $X_1 > 2$ τότε $f_1(4{,}6{,}18) = \max\left\{3X_1 + 5\min\left[6, \frac{18-3X_1}{2}\right]\right\} = \max\left\{3X_1 + 5 \cdot \frac{18-3X_1}{2}\right\}$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε ότι το μέγιστο επιτυγχάνεται για $X_1 = 2$ το οποίο συνεπάγεται ότι $X_2 = \min\left\{6, \frac{3 \cdot 2}{2}\right\} = 6$

Τελικά η βέλτιστη λύση επιτυγχάνεται για $X_1 = 2$ και $X_2 = 6$ με $Z = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = 36$

Κεφάλαιο 7 : Το πρόβλημα των ελλαττωματικών προϊόντων

7.1 Ελαχιστοποίηση κόστους παραγωγής για προϊόν με υψηλή ποιότητα κατασκευής

Μια εταιρία έχει λάβει εντολή για την κατασκευή ενός προϊόντος της συγκεκριμένου τύπου και ακριβώς όπως το έχει ζητήσει ο πελάτης μετά από ειδική παραγγελία. Ωστόσο, ο πελάτης έχει καθορίσει τέτοια αυστηρή ποιότητα κατασκευής που ο κατασκευαστής ενδέχεται να πρέπει να παράγει περισσότερα από ένα τεμάχια για να αποκτήσει ένα τεμάχιο που είναι αποδεκτό για τον πελάτη. Ο αριθμός των πρόσθετων αντικειμένων που παράγονται σε μια διαδικασία παραγωγής καλείται «περιθώριο απόρριψης». Ο όρος αυτός είναι συνηθισμένος κατά την παραγωγή τέτοιων προσαρμοσμένων παραγγελιών, κάτι που κρίνεται σκόπιμο και σε αυτή τη περίπτωση. Ο κατασκευαστής εκτιμά ότι κάθε παραγόμενο προϊόν αυτού του τύπου θα είναι αποδεκτό με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και ελλαττωματικό(χωρίς τη δυνατότητα επεξεργασίας) με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Το κόστος παραγωγής για κάθε παρτίδα τεμαχίων ανεξαρτήτως ποιότητας (αποδεκτό – ελλαττωματικό) είναι 100€. Επιπλέον υπάρχει κόστος εγκατάστασης ύψους 300€ κάθε φορά που μια παρτίδα τεμαχίων είναι ελλαττωματική. Ο κατασκευαστής έχει χρόνο να πραγματοποιήσει μέχρι 3 διαδικασίες παραγωγής. Αν και οι τρείς διαδικασίες παραγωγής αποτύχουν, τότε το κόστος για τον κατασκευαστή στο χαμένο εισόδημα από πωλήσεις και το κόστος ποινής ανέρχεται στα 1600€. Στόχος είναι να βρεθεί η βέλτιστη λύση σχετικά με το μέγεθος της παρτίδας(1+ περιθώριο απόρριψης) για την απαιτούμενη πορεία παραγωγής που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος για τον κατασκευαστή.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θεωρούμε τις μεταβλητές :

$n = 1,2,3 \; \sigma\tau\acute{\alpha}\delta\iota\alpha$

$X_n = μέγεθος\ παρτίδας\ στο\ n\ στάδιο$

$S_n = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ Δείκτρια συνάρτηση που δηλώνει τον αριθμό των αποδεκτών προϊόντων που ακόμα χρειάζονται.

Προφανώς στο στάδιο $n = 1$ είναι $S_1 = 1$

$f_n(S_n, X_n) =$ αναμενόμενο κόστος για τα στάδια 1,2,3

$f_n^*(S_n) = \min_{X_n=0,1,\dots} f_n(S_n, X_n)$ όπου $f_n^*(0) = 0$

Για λόγους ευκολίας χρησιμοποιούμε το ποσό των 100€ ως μονάδα μέτρησης οπότε η συνεισφορά στο κόστος στο στάδιο n είναι $K(X_n) + X_n$

Όπου $K(X_n) = \begin{cases} 0\ , αν\ X_n = 0 \\ 3\ , αν\ X_n > 0 \end{cases}$

Συνεπώς για $S_n = 1$ είναι $f_n(1, X_n) = K(X_n) + X_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{X_n} \cdot f_{n+1}^*(1)$ και προφανώς $f_4^*(1) = 16$

Και αναζητώ το $\min_{X_n=0,1,\dots} \left\{K(X_n) + X_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{X_n} \cdot f_{n+1}^*(1)\right\}$

Οι υπολογισμοί φαίνονται στους παρακάτω πίνακες :

n=3

S_3 \ x_3	$f_3(1, x_3) = K(x_3) + x_3 + 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}$						$f_3^*(S_3)$	x_3^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0	-	-	-	-	-	0	0
1	16	12	9	8	8	$\frac{17}{2}$	8	3 ή 4

Πίνακας 1

n=2

S_2 \ x_2	$f_2(1, x_2) = K(x_2) + x_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} \cdot f_3^*(1)$					$f_2^*(S_2)$	x_2^*
	0	1	2	3	4		
0	0	-	-	-	-	0	0
1	8	8	7	7	$\frac{15}{2}$	7	2 ή 3

Πίνακας 2

n=1

x_1 / S_1	$f_1(1,x_1) = K(x_1) + x_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \cdot f_2^*(1)$					$f_1^*(S_1)$	x_1^*
	0	1	2	3	4		
1	7	$\frac{15}{2}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{55}{8}$	$\frac{119}{16}$	$\frac{27}{4}$	2

Πίνακας 3

Σύμφωνα με τους παραπάνω υπολογισμούς η βέλτιστη λύση είναι να παραχθούν δύο στοιχεία στη πρώτη σειρά παραγωγής αν δεν παραχθούν αποδεκτά στοιχεία ,τότε στη συνέχεια παράγονται δύο ή τρία στοιχεία στη δεύτερη σειρά παραγωγής, αν δεν υπάρξει και πάλι αποδεκτό στοιχείο, τότε παράγονται είτε τρία είτε τέσσερα στοιχεία στην τρίτη σειρά παραγωγής. Το αναμενόμενο κόστος για την πολιτική αυτή είναι 675€.

Κεφάλαιο 8 : Παιχνίδι στο καζίνο

8.1 Μεγιστοποίηση πιθανότητας κέρδους

Ένας μαθηματικός κατά την εκπόνηση του μεταπτυχιακού του στην Επιχειρησιακή Έρευνα ανέπτυξε τον εξής ισχυρισμό : ως λάτρης των τυχερών παιχνιδιών υποστηρίζει ότι σε ένα συγκεκριμένο παιχνίδι του καζίνο μπορεί με μεγάλη πιθανότητα να βγαίνει συνεχώς νικητής. Οι συνάδελφοι του δε τον πιστεύουν και γι’ αυτό βάζουν ένα στοίχημα μαζί του για το αν ο ισχυρισμός του στέκει επιστημονικά ή όχι. Η θεωρία του είναι ότι ξεκινώντας με τρείς μάρκες θα έχει τουλάχιστον πέντε μάρκες μετά από τρία παιχνίδια. Κάθε παιχνίδι του περιλαμβάνει ποντάρισμα οποιουδήποτε επιθυμητού αριθμού διαθέσιμων μαρκών και στη συνέχεια είτε κερδίζεις είτε χάνεις αυτόν τον αριθμό μαρκών. Αν με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ κερδίζει σε κάθε παιχνίδι τότε εφαρμόζοντας Δυναμικό Προγραμματισμό βρείτε το βέλτιστο ποντάρισμα σε κάθε γύρο του παιχνιδιού. Λαμβάνοντας υπόψη σας ότι η απόφαση σε κάθε επόμενο γύρο έχει ως δεδομένα τα αποτελέσματα του προηγούμενου γύρου. Στόχος σας είναι να μεγιστοποιηθεί η πιθανότητα να κερδίσει το στοίχημα ο μαθηματικός έναντι των συναδέλφων του. (Hillier, 2009)

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τις μεταβλητές :

$n = 1,2,3 \; αριθμός \; παιχνιδιών$

$X_n = αριθμός \; μαρκών \; που \; ποντάρει \; στο \; n \; παιχνίδι$

$S_n = αριθμός \; μαρκών \; που \; έχει \; στη \; διάθεσή \; του \; στο \; n \; παιχνίδι$

Προφανώς αν ο μαθηματικός ολοκληρώσει το τρίτο παιχνίδι με περισσότερες από πέντε μάρκες είναι και πάλι νικητής.

$f_n(S_n, X_n) =$ πιθανότητα τερματισμού τριών παιχνιδιών με τουλάχιστον πέντε μάρκες, δεδομένου ότι ο μαθηματικός αρχίζει το στάδιο n σε κατάσταση S_n και κάνει άμεση απόφαση X_n

Αναζητώ το $f_n^*(S_n) = max f_n(S_n, X_n)$

Με $f_n(S_n, X_n) = \frac{1}{3} \cdot f_{n+1}^*(S_n - X_n) + \frac{2}{3} \cdot f_{n+1}^*(S_n + X_n)$

Προφανώς κάθε φορά που χάνει στον επόμενο γύρο έχει $S_n - X_n$,ενώ όταν νικάει έχει $S_n + X_n$. Επίσης είναι $f_4^*(S_4) = 0$ αν $S_4 < 5$ και $f_4^*(S_4) = 1$ αν $S_4 \geq 5$

Άρα έχω $f_n^*(S_n) = \max\left\{\frac{1}{3} \cdot f_{n+1}^*(S_n - X_n) + \frac{2}{3} \cdot f_{n+1}^*(S_n + X_n)\right\}$

Οι υπολογισμοί φαίνονται στους παρακάτω πίνακες :

n=3

S_3	$f_3^*(S_3)$	X_3^*
0	0	-
1	0	-
2	0	-
3	$\frac{2}{3}$	2 ή περισσότερα
4	$\frac{2}{3}$	1 ή περισσότερα
≥5	1	0 ή $\leq S_3 - 5$

Πίνακας 1

n=2

S_2 \ x_2	$f_2(S_2, X_2) = \frac{1}{3} \cdot f_3^*(S_2 - X_2) + \frac{2}{3} \cdot f_3^*(S_2 + X_2)$					$f_2^*(S_2)$	x_2^*
	0	1	2	3	4		
0	0	-	-	-	-	0	-

1	0	0	-	-	-	0	-
2	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	-	-	$\frac{4}{9}$	1 ή 2
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-	$\frac{2}{3}$	0 ή 2 ή 3
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	1
≥5	1	-	-	-	-	1	0 ή $\leq S_2 - 5$

Πίνακας 2

n=1

S_1 \ x_1	$f_1(S_1, X_1) = \frac{1}{3} \cdot f_2^*(S_1 - X_1) + \frac{2}{3} \cdot f_2^*(S_1 + X_1)$				$f_1^*(S_1)$	x_1^*
	0	1	2	3		
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{27}$	1

Πίνακας 3

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε την ακόλουθη στρατηγική

$$X_1^* = 1 \begin{cases} \text{αν νικήσει } X_2^* = 1 \begin{cases} \text{αν νικήσει } X_3^* = 0 \\ \text{αν χάσει } X_3^* = 2 \text{ ή } 3 \end{cases} \\ \text{αν χάσει } X_2^* = 1 \text{ ή } 2 \begin{cases} \text{αν νικήσει } X_3^* = \begin{cases} 2 \text{ ή } 3 \text{ αν } X_2^* = 1 \\ 1,2,3 \text{ ή } 4 \text{ αν } X_2^* = 2 \end{cases} \\ \text{αν χάσει } \rightarrow \text{χάνει το στοίχημα} \end{cases} \end{cases}$$

Η στρατηγική αυτή δίνει στον μαθηματικό πιθανότητα να κερδίσει το στοίχημα $\frac{20}{27}$.

Κεφάλαιο 9 : Το πρόβλημα του σακιδίου (The knapsack problem)

9.1 Εύρεση βέλτιστου φορτίου

Το πρόβλημα του σακιδίου περιγράφει την κατάσταση ενός οδοιπόρου ο οποίος πρέπει να αποφασίσει τον τρόπο με τον οποίο θα αποθηκεύσει διάφορα αντικείμενα στο σακίδιό του κατά το βέλτιστο, όμως, τρόπο. Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπισθεί και ως ένα γενικό πρόβλημα κατανομής πόρων, όπου ένας περιορισμένος αριθμός πόρων αντιστοιχεί σε ένα σύνολο εναλλακτικών λύσεων, με στόχο τη μεγιστοποίηση της συνολικής απόδοσης. (Taylor, 2004)

Έστω ότι το σακίδιο έχει χωρητικότητα Wγια τα n συνολικά αντικείμενα που θα τοποθετηθούν σε αυτό, με m_i να είναι ο αριθμός των μονάδων του iαντικειμένου, ενώ έχουν βάρος w_i και κέρδος p_i έκαστο. Για την περιγραφή του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε πάλι την προς-τα-πίσω αναδρομή, οπότε η μοντελοποίηση θα είναι η εξής:

$$\max z = p_1 \cdot m_1 + p_2 \cdot m_2 + \cdots + \ p_n \cdot m_n$$

Υπό τους περιορισμούς

$$\begin{cases} w_1 \cdot m_1 + w_2 \cdot m_2 + \cdots + w_n \cdot m_n = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot m_i \ \leq W \\ m_1, m_2, \dots, m_n \geq 0 \ ακαίραιοι \end{cases}$$

Όπου : $w_i \cdot m_i$ είναι το βάρος του κάθε είδους, $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot m_i$ το συνολικό βάρος των αντικειμένων, $p_i \cdot m_i$ η αξία του κάθε είδους και $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot m_i$ η συνολική αξία των αντικειμένων.

Ορίζουμε $f_i(s_i) =$ η μέγιστη απόδοση της κατάστασης s_i για τα στάδια $i, i + 1, \dots, n$

Όπου s_i: το συνολικό βάρος στο στάδιο $i, i+1, \dots, n$

Έστω ότι το διαθέσιμο βάρος φόρτωσης για τα αντικείμενα $i, i+1, \dots, n$ είναι $w = 0,1, \dots, W$ και αποφασίζουμε να τοποθετήσουμε m_i μονάδες του αντικειμένου i με αναμενόμενη απόδοση $p_i \cdot m_i$. Αφού, λοιπόν, το διαθέσιμο βάρος είναι W και το βάρος κάθε μονάδας του αντικειμένου είναι w_i, συνεπάγεται ότι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός αντικειμένων που μπορούν να τοποθετηθούν στο σακίδιο είναι $\left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor$, άρα το $m_i = 0,1,2, \dots , \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor$.

Έχουμε ότι $f_i(s_i) = \max\limits_{m_i=0,1,2,\dots,\left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor} \{p_i \cdot m_i + f_{i+1}(s_{i+1})\}$, $i = 1,2, \dots , n$ με

$f_{n+1}(s_{n+1}) = 0$

Επίσης έχουμε ότι στο στάδιο i το βάρος του αντικειμένου $w_i \cdot m_i = s_i - s_{i+1}$ $\Rightarrow s_{i+1} = s_i - w_i \cdot m_i$. Άρα αντικαθιστώντας το s_{i+1} στην προηγούμενη σχέση λαμβάνουμε:

$$f_i(s_i) = \max_{m_i=0,1,2,\dots,\left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor,\ s_i \leq W} \{p_i \cdot m_i + f_{i+1}(s_i - w_i \cdot m_i)\},$$

$$i = 1,2, \dots , n$$

<u>Το πρόβλημα</u> :

Δίνεται ότι μία αντιπροσωπία αγροτικών μηχανημάτων η οποία θέλει να μεταφέρει τριών ειδών εμπορεύματα (1,2,3) από την κεντρική της αποθήκη στο κατάστημα. Το συνολικό βάρος το οποίο μπορεί να φορτωθεί το φορτηγό που θα τα μεταφέρει ανέρχεται σε $W = 4$ μονάδες βάρους, ενώ το βάρος w_i και η αξία p_i ανά είδος του κάθε εμπορεύματος φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

$i -$ αντικείμενο	Βάρος - w_i	Κέρδος - p_i
1	2	29
2	3	39
3	1	12

Πίνακας 1

Αναζητούμε πόσα θα πρέπει να είναι τα αντικείμενα που μπορούν να φορτωθούν στο φορτηγό, ώστε να η συνολική απόδοση να μεγιστοποιηθεί;

ΛΥΣΗ

Στάδιο 3

Χρησιμοποιώντας και πάλι την προς-τα πίσω αναδρομή, θα υπολογίσουμε πρώτα την κατάσταση s_3(αντικείμενο 3), μετά την κατάσταση s_2(αντικείμενο 2) και τέλος την κατάσταση s_1(αντικείμενο 1). Στο στάδιο 3(αντικείμενο 3) το διαθέσιμο βάρος μπορεί να πάρει τις τιμές 0,1,2,3,4 εφόσον $W = 4$.

Από τον προηγούμενο πίνακα έχουμε ότι $w_3 = 1$ άρα το μέγιστο φορτίο που μπορεί να παρατηρηθεί με αντικείμενο 3 είναι $\frac{4}{1} = 4$ το οποίο είναι ακέραιος αριθμός, συνεπώς και οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το m_3 είναι 0,1,2,3,4 , συν τις εναλλακτικές λύσεις του m_3 μόνο αν ισχύει $w_3 \cdot m_3 \leq s_3$. Βλέπουμε παρακάτω τις εφικτές λύσεις για όλες τις τιμές του s_3 σε αυτό το στάδιο.

$f_3(s_3) = \max_{m_3}(12 \cdot m_3)$,όπου $\max m_3 = \frac{4}{1} = 4$ που ανήκει στους ακεραίους

$$f_3(0) = \max_{m_3}(0) \text{ , για } m_3 = 0$$

$$f_3(1) = \max_{m_3}\begin{cases} 0, \gamma\iota\alpha\ m_3 = 0 \\ 12,\ \gamma\iota\alpha\ m_3 = 1 \end{cases}$$

$$f_3(2) = \max_{m_3}\begin{cases} 0, \gamma\iota\alpha\ m_3 = 0 \\ 12,\ \gamma\iota\alpha\ m_3 = 1 \\ 24, \gamma\iota\alpha\ m_3 = 2 \end{cases}$$

$$f_3(3) = \max_{m_3}\begin{cases} 0, \gamma\iota\alpha\ m_3 = 0 \\ 12,\ \gamma\iota\alpha\ m_3 = 1 \\ 24, \gamma\iota\alpha\ m_3 = 2 \\ 36, \gamma\iota\alpha\ m_3 = 3 \end{cases}$$

$$f_3(4) = \max_{m_3} \begin{cases} 0, & \gamma\iota\alpha\ m_3 = 0 \\ 12, & \gamma\iota\alpha\ m_3 = 1 \\ 24, & \gamma\iota\alpha\ m_3 = 2 \\ 36, & \gamma\iota\alpha\ m_3 = 3 \\ 48, & \gamma\iota\alpha\ m_3 = 4 \end{cases}$$

Στο παρακάτω πίνακα φαίνονται τα παραπάνω αποτελέσματα.

s_3	$12 \cdot m_3$					Βέλτιστη λύση	
	$m_3 = 0$	$m_3 = 1$	$m_3 = 2$	$m_3 = 3$	$m_3 = 4$	$f_3(s_3)$	m_3^*
0	0	-	-	-	-	0	0
1	0	12	-	-	-	12	1
2	0	12	24	-	-	24	2
3	0	12	24	36	-	36	3
4	0	12	24	36	48	48	4

Πίνακας 2

Στάδιο 2

Τώρα θα υπολογίσουμε την αναδρομική σχέση για την κατάσταση s_2.

$f_2(s_2) = \max_{m_2} \{ 39 \cdot m_2 + f_3(s_2 - 3 \cdot m_2) \}$, όπου

$\max m_2 = \frac{4}{3}\ όμως\ πρέπει\ m_2\ ακέραιος. Άρα\ διαλέγουμε\ τον\ αμέσως\ προηγούμενο\ m_2 = 1$

Επομένως έχουμε ότι :

$$f_2(0) = \max_{m_2} \begin{cases} 0 + f_3(0) = 0 + 0 = 0\ , για\ m_2 = 0 \\ -,\ για\ m_2 = 1 \end{cases}$$

$$f_2(1) = \max_{m_2} \begin{cases} 0 + f_3(1) = 0 + 12 = 12\ , για\ m_2 = 0 \\ -,\ για\ m_2 = 1 \end{cases}$$

$$f_2(2) = \max_{m_2} \begin{cases} 0 + f_3(2) = 0 + 24 = 24\ , για\ m_2 = 0 \\ -,\ για\ m_2 = 1 \end{cases}$$

$$f_2(3) = \max_{m_2} \begin{cases} 0 + f_3(3) = 0 + 36 = 36\ , για\ m_2 = 0 \\ 39 + f_3(0) = 39 + 0,\ για\ m_2 = 1 \end{cases}$$

$$f_2(4) = \max_{m_2} \begin{cases} 0 + f_3(4) = 0 + 48 = 48\ , για\ m_2 = 0 \\ 39 + f_3(1) = 39 + 12 = 51,\ για\ m_2 = 1 \end{cases}$$

Επομένως σχηματίζουμε τον ακόλουθο πίνακα :

s_2	$39 \cdot m_2 + f_3(s_2 - 3 \cdot m_2)$		Βέλτιστη λύση	
	$m_2 = 0$	$m_2 = 1$	$f_2(s_2)$	m_2^*
0	0+0=0	-	0	0
1	0+12=12	-	12	0
2	0+24=24	-	24	0
3	0+36=36	39+0=39	39	1
4	0+48=48	39+12=51	51	1

Πίνακας 3

Στάδιο 1

Στο σημείο αυτό θα υπολογίσουμε την αναδρομική σχέση για την κατάσταση s_1.

$f_1(s_1) = \max_{m_1} \{ 29 \cdot m_1 + f_2(s_1 - 2 \cdot m_1)\}$, όπου $\max m_1 = \frac{4}{2} = 2$ που είναι ακέραιος

Άρα έχουμε τα εξής:

$$f_1(0) = \max_{m_1} \begin{cases} 0 + f_2(0) = 0 + 0 = 0\,, \gamma\iota\alpha\; m_1 = 0 \\ -,\; \gamma\iota\alpha\; m_1 = 1 \\ -,\; \gamma\iota\alpha\; m_1 = 2 \end{cases}$$

$$f_1(1) = \max_{m_1} \begin{cases} 0 + f_2(1) = 0 + 12 = 12\,, \gamma\iota\alpha\; m_1 = 0 \\ -,\; \gamma\iota\alpha\; m_1 = 1 \\ -,\; \gamma\iota\alpha\; m_1 = 2 \end{cases}$$

$$f_1(2) = \max_{m_1} \begin{cases} 0 + f_2(2) = 0 + 24 = 24\,, \gamma\iota\alpha\ m_1 = 0 \\ 29 + f_2(0) = 29 + 0 = 29,\ \gamma\iota\alpha\ m_1 = 1 \\ -,\ \gamma\iota\alpha\ m_1 = 2 \end{cases}$$

$$f_1(3) = \max_{m_1} \begin{cases} 0 + f_2(3) = 0 + 39 = 39\,, \gamma\iota\alpha\ m_1 = 0 \\ 29 + f_2(1) = 29 + 12 = 41,\ \gamma\iota\alpha\ m_1 = 1 \\ -,\ \gamma\iota\alpha\ m_1 = 2 \end{cases}$$

$$f_1(4) = \max_{m_1} \begin{cases} 0 + f_2(4) = 0 + 51 = 51\,, \gamma\iota\alpha\ m_1 = 0 \\ 29 + f_2(2) = 29 + 24 = 53,\ \gamma\iota\alpha\ m_1 = 1 \\ 58 + f_2(0) = 58 + 0 = 58,\ \gamma\iota\alpha\ m_1 = 2 \end{cases}$$

Με τον ακόλουθο πίνακα να δείχνει τα αποτελέσματα:

s_1	$29 \cdot m_1 + f_2(s_1 - 2 \cdot m_1)$			Βέλτιστη λύση	
	$m_1 = 0$	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$	$f_1(s_1)$	m_1^*
0	0+0=0	-	-	0	0
1	0+12=12	-	-	12	0
2	0+24=24	29+0=29	-	29	1
3	0+39=39	29+12=41	-	41	1
4	0+51=51	29+24=53	58+0=58	58	2

Πίνακας 4

Έτσι είναι εύκολο να καταλήξουμε στη βέλτιστη λύση του προβλήματος. Ο πίνακας 1του πρώτου σταδίου μας δείχνει ότι η κατάσταση $s_1 = 4$ δίνει την καλύτερη λύση για $m_1^* = 2$, κάτι το οποίο σημαίνει ότι από το αντικείμενο 1 θα φορτωθούν 2 μονάδες στο φορτηγό. Οπότε από τον τύπο $s_{i+1} = s_i - w_i \cdot m_i$, προκύπτει ότι $s_2 = s_1 - 2 \cdot m_1 = 4 - 2 \cdot 2 = 0$. Στο στάδιο 2 τώρα έχουμε, ότι $s_2 = 0$ δίνει $m_2^* = 0$

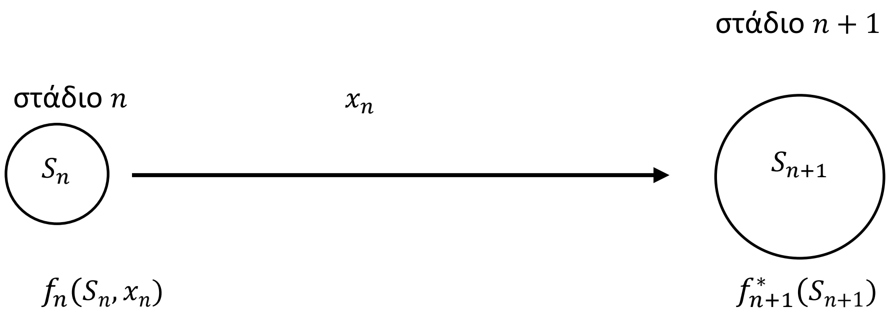
και έτσι προκύπτει $s_3 = s_2 - 3 \cdot m_2^* = 0 - 3 \cdot 0 = 0$. Και τέλος στο στάδιο 3 έχουμε ότι $s_3 = 0$ δίνει $m_3^* = 0$.

Τελικά η μέγιστη αξία του φορτίου το οποίο μπορεί να μεταφέρει το φορτηγό από την αποθήκη στο κατάστημα παρατηρείται αν από το πρώτο μηχάνημα φορτωθούν 2 κομμάτια και από τα επόμενα δύο μηχανήματα φορτωθούν 0 κομμάτια με όφελος 58 χρηματικών μονάδων.

Κεφάλαιο 10 : Το πρόβλημα της Διανομής Ιατρικών Ομάδων

10.1 Εύρεση βέλτιστου μέτρου απόδοσης

Αυτή η ενότητα περιγράφει περαιτέρω την εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού σε ντετερμινιστικά προβλήματα, όπου η μετάβαση από κάθε στάδιο στο επόμενο στάδιο καθορίζεται πλήρως από την πολιτική απόφαση που πάρθηκε στο παρόν στάδιο. Δεν υπάρχει δηλαδή περίπτωση όπου η απόφαση για το ποιά θα είναι η επόμενη κατάσταση ακολουθεί μια κατανομή πιθανότητας. Ο ντετερμινιστικός δυναμικός προγραμματισμός μπορεί να περιγραφεί διαγραμματικά όπως φαίνεται παρακάτω στο σχήμα :



Όπου στο στάδιο n βρισκόμαστε στην κατάσταση S_n παίρνοντας απόφαση x_n τότε μας μετακινεί σε μια κατάσταση S_{n+1} . Η συνεισφορά στη συνέχεια στην αντικειμενική συνάρτηση βάσει μιας βέλτιστης πολιτικής έχει υπολογιστεί προηγουμένως $f^*_{n+1}(S_{n+1})$. Ο συνδυασμός αυτών των δύο ποσοτήτων με κατάλληλο τρόπο παρέχει τη $f_n(S_n, x_n)$, με σωστή συμβολή του n σταδίου στην αντικειμενική συνάρτηση. Έτσι βελτιστοποιώντας ως προς x_n παίρνουμε $f^*_n(S_n) = f_n(S_n, x^*_n)$ και βρίσκοντας για κάθε πιθανή κατάσταση η διαδικασία επίλυσης (*προς-τα-πίσω επαγωγή*) είναι έτοιμη να μας οδηγήσει στο στάδιο 1.

Το πρόβλημα :

Το πανελλήνιο συμβούλιο υγείας είναι αφιερωμένο στη βελτίωση της υγειονομικής περίθαλψης σε υποανάπτυκτες πόλεις που δεν είναι εφοδιασμένες με ΜΕΘ(μονάδες εντατικής θεραπείας) για ασθενείς που έχουν προσβληθεί από τον κορωνοϊό. Διαθέτει λοιπόν πέντε ομάδες εξειδικευμένων γιατρών τις οποίες θα στείλει σε τρείς πόλεις οι οποίες χρειάζονται άμεσα ιατρική υποστήριξη λόγω των κρουσμάτων του κορωνοϊού. Επομένως το συμβούλιο πρέπει να καθορίσει πόσες ομάδες να διατεθούν σε κάθε μια από τις πόλεις ώστε να μεγιστοποιήσει τη συνολική αποδοτικότητα των πέντε αυτών ομάδων. Οι ομάδες πρέπει να παραμείνουν άθικτες, οπότε ο αριθμός που δίνεται σε κάθε πόλη πρέπει να είναι ένας ακέραιος αριθμός. Το μέτρο απόδοσης που χρησιμοποιείται είναι επιπλέον ανθρώπινα έτη (για μια συγκεκριμένη πόλη, το μέτρο αυτό ισούται με το αυξημένο προσδόκιμο ζωής σε χρόνια για τον αντίστοιχο πληθυσμό της). Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα εκτιμώμενα πρόσθετα έτη ζωής για κάθε μια πόλη για κάθε πιθανή κατανομή ιατρικών ομάδων. Ποια κατανομή είναι η βέλτιστη ώστε να μεγιστοποιεί το μέτρο απόδοσης;

ΙΑΤΡΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ	ΑΝΘΡΩΠΙΝΑ ΕΤΗ		
	ΠΟΛΕΙΣ		
	1	2	3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130

Πίνακας 1

ΛΥΣΗ

Αυτό το πρόβλημα απαιτεί την πραγματοποίηση τριών αλληλένδετων αποφάσεων, δηλαδή, πώς πολλές ιατρικές ομάδες να κατανείμουν σε καθεμία από τις τρεις πόλεις. Ως εκ τούτου, ακόμα κι αν δεν υπάρχει σταθερή ακολουθία, αυτές οι τρεις πόλεις μπορούν να θεωρηθούν ως τα τρία στάδια για μια δυναμική διαμόρφωση προγραμματισμού. Θεωρούμε τις μεταβλητές απόφασης x_n $(n = 1,2,3)$ ως τον αριθμό των ιατρικών ομάδων οι οποίες προορίζονται να διατεθούν στο στάδιο n στην n πόλη.

Η αναγνώριση των καταστάσεων μπορεί να μην είναι άμεσα εμφανής. Για τον προσδιορισμό των καταστάσεων, θέτουμε ερωτήματα όπως τα ακόλουθα. Τι είναι αυτό που αλλάζει από το ένα στάδιο στο άλλο; Δεδομένου ότι οι αποφάσεις ελήφθησαν στα προηγούμενα στάδια, πώς μπορεί να υπάρξει σχέση ώστε να περιγραφεί η κατάσταση στο τρέχον στάδιο; Τι πληροφορίες σχετικά με την τρέχουσα κατάσταση είναι απαραίτητο να έχουν καθοριστεί από το προηγούμενο; Λαμβάνοντας υπόψη μας όλα τα παραπάνω, μια κατάλληλη επιλογή για την "κατάσταση του συστήματος" είναι :

$s_n =$ ο αριθμός των ιατρικών ομάδων που είναι ακόμη διαθέσιμοι για κατανομή στις υπόλοιπες πόλεις

Έτσι για παράδειγμα στο στάδιο 1(πόλη 1) όπου όλες οι πόλεις παραμένουν υπό εξέταση για κατανομές θα έχουμε $s_n = 5$

Όσο για τα υπόλοιπα στάδια (2 και 3) το θα είναι 5 μείον τον αριθμό των ομάδων που θα έχουν διατεθεί σε προηγούμενα στάδια, σύμφωνα με την εξής ακολουθία :

$$s_1 = 5, \qquad s_2 = 5 - x_1, \qquad s_3 = s_2 - x_2$$

Το παρακάτω σχήμα (σχήμα 1) δείχνει τις καταστάσεις που πρέπει να ληφθούν υπόψη σε κάθε στάδιο. Οι σύνδεσμοι (τμήματα γραμμής) δείχνουν τις πιθανές μεταβάσεις σε επόμενα στάδια από το ένα στάδιο στο άλλο σύμφωνα με την πραγματοποίηση μιας εφικτής χορήγησης ιατρικών ομάδων στη σχετική χώρα. Οι αριθμοί που εμφανίζονται δίπλα στους συνδέσμους είναι οι αντίστοιχες συνεισφορές στο μέτρο απόδοσης, όπου αυτοί οι αριθμοί προέρχονται από τον πίνακα 1.

Παρατηρώντας το πρόβλημα από τη μεριά αριθμών, το συνολικό πρόβλημα είναι να βρεθεί η διαδρομή από την αρχική κατάσταση 5 (αρχικό στάδιο 1) έως την τελική κατάσταση 0 (μετά το στάδιο 3) η οποία μεγιστοποιεί το άθροισμα της συνολικής διαδρομής.

Για να δηλώσουμε μαθηματικά το πρόβλημα, ορίζουμε $p_i(x_i)$ να είναι το μέτρο απόδοσης από την x_i κατανομή ιατρικών ομάδων στη πόλη i. Έτσι ώστε ο στόχος να είναι να επιλέξουμε x_1, x_2, x_3 ώστε να μεγιστοποιηθεί:

$$\sum_{i=1}^{3} p_i(x_i)$$

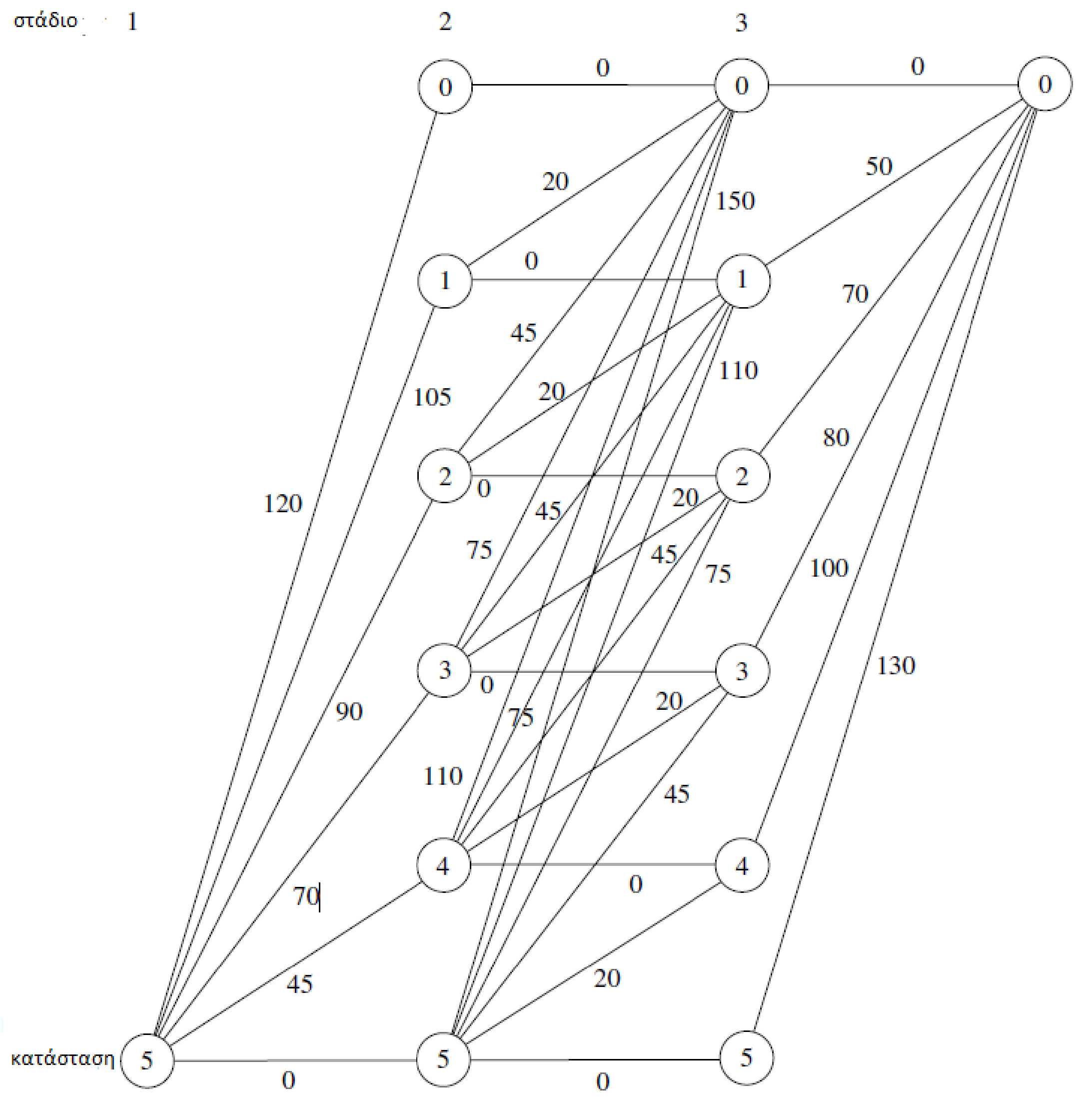
Σύμφωνα με τους περιορισμούς :

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 5$$

x_i: μη αρνητικοί ακέραιοι

Με αντικειμενική συνάρτηση :

$$f_n(s_n, x_n) = p_n(x_n) + \max \sum_{i=n+1}^{3} p_i(x_i)$$



Σχήμα 1

Όπου για τα $x_{n+1}, \dots, x_3$ ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = s_n$$

Και για τους μη αρνητικούς ακεραίους x_i για $n = 1,2,3$ έχουμε :

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,1,\dots,s_n} f_n(s_n, x_n)$$

Οπότε, $f_n(s_n, x_n) = p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)$ δεδομένου ότι το $f_4^* = 0$

Άρα συνεπάγεται ότι,

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,1,\dots,s_n} \{p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)\}, \gamma\iota\alpha\ n = 1,2$$

Ενώ για το τελευταίο στάδιο($n = 3$)

$$f_3^*(s_3) = \max_{x_3=0,1,\dots,s_3} p_3(x_3)$$

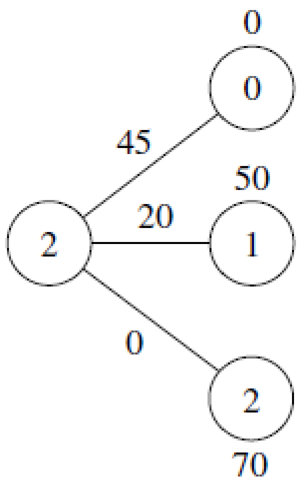
Ξεκινώντας από το τελευταίο στάδιο ($n = 3$) σημειώνουμε ότι οι τιμές του $p_3(x_3)$ δίδονται στην τελευταία στήλη του Πίνακα 1 και παρατηρούμε ότι αυτές αυξάνονται καθώς μετακινούμαστε προς το κάτω μέρος της στήλης. Ως εκ τούτου, με s_3 ιατρικές ομάδες ακόμα διαθέσιμες για την κατανομή στην πόλη 3, το μέγιστο του $p_3(x_3)$ επιτυγχάνεται αυτόματα με την κατανομή όλων των ομάδων s_3. Έτσι $x_3^* = s_3$ και $f_3^*(s_3) = p_3(x_3)$,όπως φαίνεται παρακάτω :

$\boldsymbol{n = 3}$

s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
0	0	0
1	50	1
2	70	2
3	80	3
4	100	4
5	130	5

Πίνακας 2

Τώρα προχωρούμε προς τα πίσω για να ξεκινήσουμε από το επόμενο στάδιο ($n = 2$). Εδώ η εύρεση του x_2^* απαιτεί τον υπολογισμό και τη σύγκριση του $f_2(s_2, x_2)$ για τις εναλλακτικές τιμές του x_2, με $x_2 = 0,1, \dots, s_2$. Γραφικά για $s_2 = 2$ έχουμε :



Σχήμα 2

Έτσι αν $x_2 = 0$ η κατάσταση που προκύπτει στο στάδιο 3 θα είναι $s_2 - x_2 = 2 - 0 = 2$, ενώ $x_2 = 1$ οδηγεί στην κατάσταση 1 και $x_2 = 2$ οδηγεί στην κατάσταση 0. Οι αντίστοιχες τιμές του $p_2(x_2)$ από τη πόλη 2 στον πίνακα 1 εμφανίζονται κατά μήκος των δεσμών και οι τιμές των $f_3^*(s_2 - x_2)$ από τον πίνακα $n = 3$δίνονται δίπλα στους κόμβους του σταδίου 3. Οι απαιτούμενοι υπολογισμοί γι' αυτήν την περίπτωση του $s_2 = 2$ συνοψίζονται παρακάτω.

$f_2(2, x_2) = p_2(x_2) + f_3^*(2 - x_2)$,

όπου $p_2(x_2)$ δίνεται στη πόλη 2 στον πίνακα 1

και $f_3^*(2 - x_2)$ δίνεται στον πίνακα 2 ($n = 3$)

$x_2 = 0 : f_2(2{,}0) = p_2(0) + f_3^*(2) = 0 + 70 = 70$

$x_2 = 1 : f_2(2{,}1) = p_2(1) + f_3^*(1) = 20 + 50 = 70$

$x_2 = 2 : f_2(2{,}2) = p_2(2) + f_3^*(0) = 45 + 0 = 45$

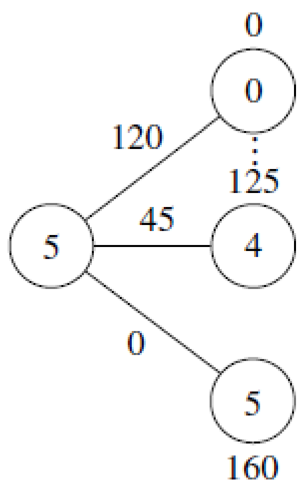
Επειδή ο στόχος είναι η μεγιστοποίηση, $x_2^* = 0$ ή $x_2^* = 1$ με $f_2^*(2) = 70$ συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο για το s_2 και έχουμε τα παρακάτω:

$$\boldsymbol{n = 2}$$

$s_2 \backslash x_2$	$f_2(s_2, x_2) = p_2(x_2) + f_3^*(s_2 - x_2)$						$f_2^*(s_2)$	x_2^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0	-	-	-	-	-	0	0
1	50	20	-	-	-	-	50	0
2	70	70	45	-	-	-	70	0 ή 1
3	80	90	95	75	-	-	95	2
4	100	100	115	125	110	-	125	3
5	130	120	125	145	160	150	160	4

Πίνακας 3

Τώρα είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε προς τα πίσω για να λύσουμε το αρχικό πρόβλημα από όπου ξεκινήσαμε (στάδιο 1). Στο σημείο αυτό η μόνη κατάσταση που πρέπει να ληφθεί υπόψη είναι η κατάσταση εκκίνησης του $s_1 = 5$ όπως φαίνεται παρακάτω.



Σχήμα 3

Δεδομένου ότι η κατανομή των x_1 ιατρικών ομάδων στη πόλη 1 οδηγεί σε κατάσταση $5 - x_1$στο στάδιο 2, η επιλογή του $x_1 = 0$ οδηγεί στον κάτω κόμβο στα δεξιά το $x_1 = 1$ οδηγεί στον επόμενο κόμβο προς τα πάνω, και ούτω καθεξής μέχρι τον άνω κόμβο με το $x_1 = 5$. Οι αντίστοιχες τιμές $p_1(x_1)$ από τον πίνακα 1 εμφανίζονται δίπλα στους συνδέσμους. Οι αριθμοί δίπλα από τους κόμβους λαμβάνονται από το $f_2^*(s_2)$ του πίνακα 3. Όπως και στο $n = 2$, ο υπολογισμός που απαιτείται για κάθε εναλλακτική λύση αξίας της μεταβλητής απόφασης περιλαμβάνει την προσθήκη της αντίστοιχης τιμής σύνδεσης και κόμβου αξία, όπως συνοψίζεται κατωτέρω.

$f_2(5, x_1) = p_1(x_1) + f_2^*(5 - x_1)$,

όπου $p_1(x_1)$ δίνεται στη πόλη 1 στον πίνακα 1

και $f_2^*(5 - x_1)$ δίνεται στον πίνακα 3 ($n = 2$)

$x_1 = 0 : f_2(5{,}0) = p_1(0) + f_2^*(5) = 0 + 160 = 160$

$x_1 = 1 : f_1(5{,}1) = p_1(1) + f_2^*(4) = 45 + 125 = 170$

.

.

.

$x_1 = 5 : f_1(5{,}5) = p_1(5) + f_2^*(0) = 120 + 0 = 120$

Με παρόμοιους υπολογισμούς έχουμε τον παρακάτω πίνακα

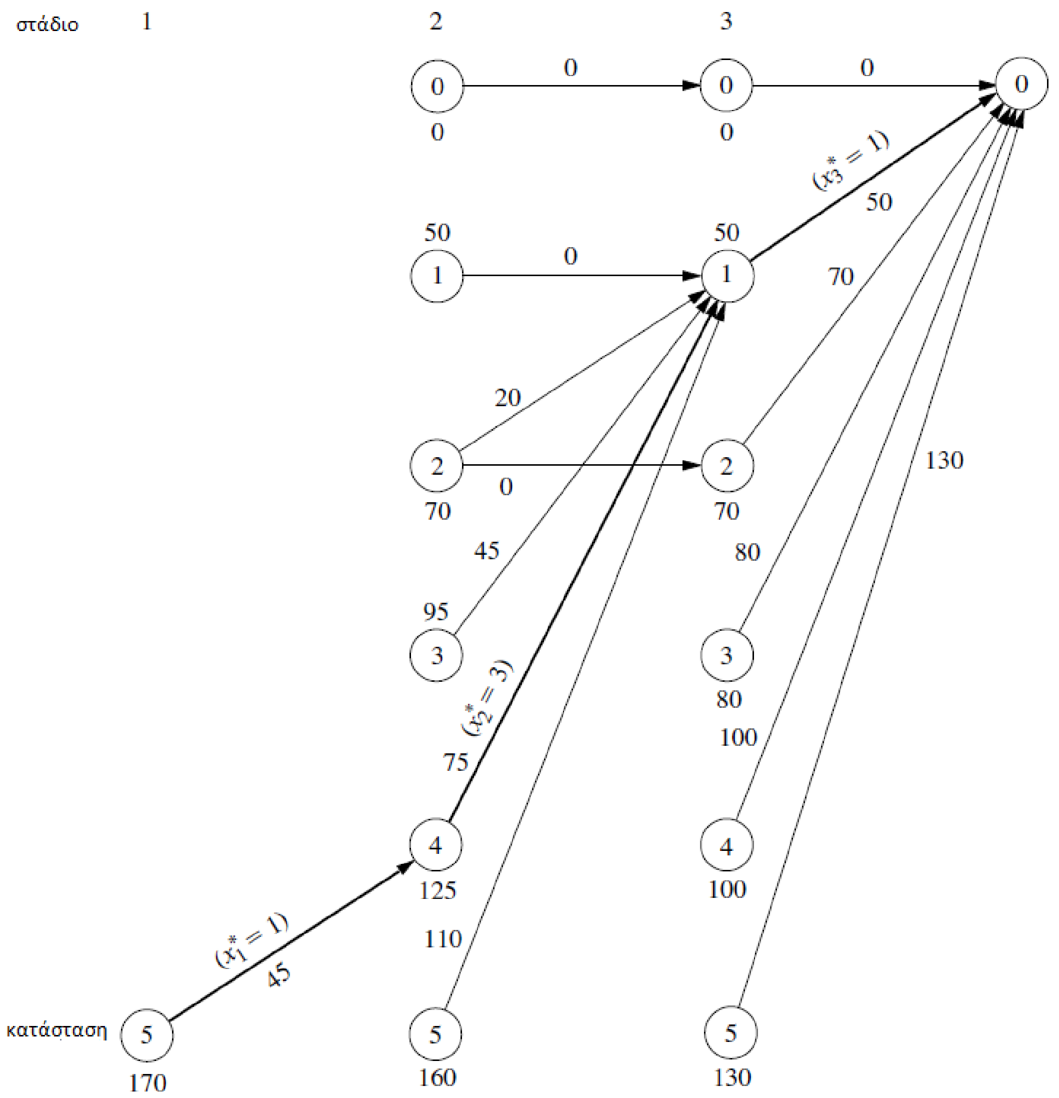
$\boldsymbol{n = 1}$

s_1 \ x_1	$f_1(s_1, x_1) = p_1(x_1) + f_2^*(s_1 - x_1)$						$f_1^*(s_1)$	x_1^*
	0	1	2	3	4	5		
5	160	170	165	160	155	120	170	1

Πίνακας 4

Συνεπώς η βέλτιστη λύση έχει $x_1^* = 1$, οπότε $s_2 = 5 - 1 = 4$ οπότε $x_2^* = 3$ και άρα $s_3 = 4 - 3 = 1$ που σημαίνει ότι $x_3^* = 1$. Δηλαδή η κατανομή των ιατρικών ομάδων στις 3 πόλεις θα είναι (1,3,1) με $f_1^*(s_1 = 5) = 170$ ανθρώπινα –έτη.

Η διαδρομή φαίνεται συνοπτικά στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4

Κεφάλαιο 11 : Μελέτη περίπτωσης

11.1 πρόβλημα της επάρκειας της ηλεκτρικής ενέργειας στον ευρωπαϊκό διαστημικό σταθμό

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε μια εφαρμογή του Δυναμικού Προγραμματισμού σε ένα πραγματικό επιστημονικό επίκαιρο πρόβλημα. Το πρόβλημα που θα αναφερθούμε προφανώς είναι ένα από τα πολλά που μπορεί να συμβάλει ο Δυναμικός Προγραμματισμός στις μέρες μας.

<u>Το πρόβλημα</u> :

Μια εταιρεία έχει ξεκινήσει εργασίες εγκατάστασης ενός διαστημικού σταθμού μέσω του οποίου θέλει να ελέγχει τη διατήρηση ζωής του από τρία παράλληλα συστήματα ελέγχου. Τα δεδομένα που έχει μετά από σχετική έρευνα είναι πως όταν κάποιο από τα υποσυστήματα χαλάσει , τα υπόλοιπα είναι ικανά (ακόμη κι αν μόνο ένα είναι σε λειτουργία) να διατηρήσουν τη ζωή στο σταθμό. Το πρόβλημα διαπιστώνεται όταν και τα τρία υποσυστήματα δεν λειτουργούν, τότε το σύστημα διατήρησης ζωής υφίσταται ολική πτώση με καταστροφικές συνέπειες και χωρίς κάποιον αντιστρεπτικό παράγοντα. Χάρη στην ηλιακή ενέργεια η οποία συλλέγεται από έξι εγκατεστημένα κάτοπτρα/κυψέλες, τα τρία αυτά υποσυστήματα διατηρούνται σε λειτουργία. Μπορούν να είναι ταυτόχρονα σε λειτουργία έως έξι κάτοπτρα/κυψέλες συνολικά ανεξαρτήτως υποσυστήματος. Παρακάτω δίνεται ο πίνακας με τις πιθανότητες δυσλειτουργίας/πτώσης του καθενός από τα τρία υποσυστήματα ανάλογα με τις κυψέλες συσσώρευσης ηλιακής ενέργειας που προ-εγκαθίστανται σε λειτουργία.

Χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία του Δυναμικού Προγραμματισμού καλούμαστε να εντοπίσουμε τον βέλτιστο συνδυασμό εγκατάστασης κατόπτρων στα τρία υποσυστήματα, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η πιθανότητα ολικής πτώσης του συστήματος διατήρησης ζωής.

Πίνακας 1

Πλήθος Κατόπτρων	**Πιθανότητα αποτυχίας Υποσυστήματος**		
	1	**2**	**3**
0	**1.00**	**1.00**	**1.00**
1	**0.55**	**0.40**	**0.60**
2	**0.40**	**0.35**	**0.35**
3	**0.25**	**0.30**	**0.25**
4	**0.20**	**0.20**	**0.15**
5	**0.08**	**0.12**	**0.04**
6	**0.05**	**0.08**	**0.04**

ΛΥΣΗ

Το πρόβλημα είναι παραπλήσιο με αυτό του Κεφαλαίου 5 (Διανομή επιστημόνων και ερευνητικών ομάδων). Θα ακολουθήσουμε την ίδια ακριβώς συλλογιστική πορεία και εδώ.

Έστω:

x_n: ο αριθμός κατόπτρων που εγκαθίστανται στο υποσύστημα $n, n = 1,2,3$

s_n: ο διαθέσιμος αριθμός κατόπτρων για εγκατάσταση στο στάδιο n

$Pn(x_n)$: η πιθανότητα δυσλειτουργίας/πτώσης του υποσυστήματος n, εφόσον εγκατασταθούν σε αυτό x_n κάτοπτρα

Έχουμε τα τρία στάδια της λύσης:

n=3

s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
0	1.00	0
1	0.60	1
2	0.35	2
3	0.25	3
4	0.15	4
5	0.04	5
6	0.04	6

Πίνακας 2

n=2

	$f_2(s_2,x_2) = p_2(x_2) \cdot f_3^*(s_2 - x_2)$							$f_2^*(s_2)$	x_2^*
x_2 / s_2	0	1	2	3	4	5	6		
0	1.00	-	-	-	-	-	-	1.00	0
1	0.60	0.40	-	-	-	-	-	0.40	1
2	0.35	0.24	0.35	-	-	-	-	0.24	1
3	0.25	0.14	0.21	0.30	-	-	-	0.14	1
4	0.15	0.10	0.1225	0.18	0.20	-	-	0.10	1
5	0.04	0.06	0.0875	0.105	0.12	0.12	-	0.04	0
6	0.04	0.016	0.0525	0.075	0.07	0.072	0.08	0.016	1

Πίνακας 3

n=1

s_1 \ x_1	$f_1(s_1,x_1)=p_1(x_1)\cdot f_2^*(s_1-x_1)$							$f_1^*(s_1)$	x_1^*
	0	1	2	3	4	5	6		
6	0.016	0.022	0.04	0.035	0.048	0.032	0.05	0.016	0

Πίνακας 4

Συνεπώς η βέλτιστη λύση έχει $x_1^*=0$, οπότε $s_2=6-0=6$ οπότε $x_2^*=1$ και άρα $s_3=6-1=5$ που σημαίνει ότι $x_3^*=5$. Δηλαδή η κατανομή των κατόπτρων στα 3 υποσυστήματα θα είναι (0,1,5) με $f_1^*(s_1=6)=0.016$

Βιβλιογραφία

Ackoff R.L., S. M. (1968). *Fundamentals of Operations.* Lincoln: John Wiley and Sons.

Bertsekas, D. P. (2017). *Dynamic Programming and Optimal Control.* Athens Scientific.

Hillier, F. S. (2009). *Introduction to Operations Research.* London,United States: McGraw-Hill Education - Europe.

Taylor, B. W. (2004). *Introduction to management science.* London: Upper Saddle River, N.J.

Winston, W. L., & Goldberg, J. B. (2004). *Operations Research : Applications and Algorithms 4th.* CA, United States: Cengage Learning, Inc.

ΚΟΛΕΤΣΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ, Σ. Δ. (2017). *ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ.* ΑΘΗΝΑ: ΣΥΜΕΩΝ.

Σύνδεσμοι

1. britannica/topic/operations-research
2. businessmanagementideas
3. wikipedia

Παράρτημα