ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Χώροι Μέτρων Πιθανότητας και Εφαρμογές

Σπύρος Γαρουνιάτης

Χώροι Μέτρων Πιθανότητας και Εφαρμογές

11 Νοεμβρίου 2020

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Μιχαήλ Λουλάκη για την βοήθεια του σχετικά με την επιλογή και ανάθεση της θεματολογίας της εργασίας, καθώς και για την βοήθεια του σχετικά με δομή της, τα τεχνικά της μέρη και σε λοιπές απορίες. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον κ. Παπαπαντολέων, καθώς και ο ίδιος με την καθοδήγηση του συνέβαλε στον εμπλουτισμό της εργασίας

Πρόλογος

.

Ο σκοπός της εργασίας είναι η εμβάθυνση και η εξοικείωση του αναγνώστη με την έννοια της ασθενής σύγκλισης μέτρων πιθανότητας σε χώρους πέρα από τον -μέχρι στιγμής γνωστό- χώρο τον πραγματικών αριθμών. Επιπλέον θα αναδείξουμε την χρησιμότητα της θεωρίας μέσα από εφαρμογές στον στοχαστικό λογισμό και στην χρηματοοικονομική θεωρία.

Οι ασυμπτωτικές συμπεριφορές των μέτρων πιθανότητας είναι ένα από τα κύρια αντικείμενα μελέτης στην θεωρία πιθανοτήτων και στη στατιστική. Μια πρώτη επαφή με τέτοιου είδους συμπεριφορές την συναντάμε στο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Ωστόσο δεν επαρκούν τα εργαλεία του τελευταίου για να μελετήσουμε για παράδειγμα την ασυμπτώτική κατανομή του μέγιστου μήκους του τυχαίου περιπάτου. Αυτή η έλλειψη εργαλείων λοιπόν έφερε το κίνητρο για την εμβάθυνση στη θεωρία της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς.

Η εργασία ουσιαστικά αποτελείται από 3 βασικά μέρη χωρισμένα σε 7 κεφάλαια. Το πρώτο μέρος αφορά εισαγωγικές έννοιες και γενικά θεωρήματα, το δεύτερο μέρος αποτελεί μία εξειδίκευση τους σε συγκεκριμένους χώρους, αξιοποιώντας τις μετρικές και γενικότερα τις τοπολογικές τους ιδιότητες και το τρίτο μέρος αφορά της εφαρμογές της θεωρίας.

Στην αρχή της εργασίας γίνεται μία υπενθύμιση από την θεωρία των μετρικών χώρων και της θεωρίας πιθανοτήτων, ωστόσο δεν επαρκεί ο χώρος για μία πλήρη υπενθύμιση στη θεωρία των 2 αντικειμένων, συνεπώς θα βοηθούσε μία πρώτη ανάγνωση από κάποιο βιβλίο ή σημειώσεις πραγματικής ανάλυσης και θεωρίας μέτρων πιθανότητας

Περιεχόμενα

Είσαγωγή

Από την θεωρία πιθανοτήτων γνωρίζουμε ότι για μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_n$ ορισμένες σε έναν κοινό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και X μία τυχαία μεταβλητή στον ίδιο χώρο, ότι η X_n 'συγκλίνει ασθενώς' στην X αν για τις αντίστοιχες σ.κ.π. ισχύει ότι $F_n(x) \to F(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει ότι $\mathbb{P}(X = x) = 0$. Αν συμβολίσουμε με $A_x = (-\infty, x)$ και με

$$\mathbb{P}_n(A_x) = F_n(x), \qquad \mathbb{P}_n(A_x) = F_n(x)$$

τότε αξιοποιώντας τους τελευταίους συμβολισμούς, έχουμε ότι η X_n 'συγκλίνει ασθενώς' στην X αν

$$\mathbb{P}_n(A_x) \to \mathbb{P}(A_x)$$

για κάθε σύνολο A_x με $\mathbb{P}(\partial A_x) = 0$. Γενικεύοντας τον συμβολισμό μας, όπως θα δείξουμε στο κεφάλαιο 1, έχουμε ότι η X_n 'συγκλίνει ασθενώς' στην X αν

$$\mathbb{P}_n(A) \to \mathbb{P}(A)$$

για κάθε $Borel$ υποσύνολο A με $\mathbb{P}(\partial A) = 0$. Αυτός είναι ένας συμβολισμός που θα χρειαστεί να εξοικειωθούμε, για τον λόγο ότι θα γενικεύσουμε τον ορισμό της ασθενούς σύγκλισης σε αυθαίρετους μετρικούς χώρους.

Αυτή λοιπόν θα είναι η αφετηρία της εργασίας: Ο ορισμός της ασθενούς σύγκλισης και διάφοροι χαρακτηρισμοί της. Επιπλέον,το πρώτο κεφάλαιο θα συνεχιστεί με κάποια γενικά θεωρήματα (που μάλιστα, κάποια από αυτά θα τα επικαλεστούμε σε πολλά σημεία της εργασίας) καθώς και με τοπικά οριακά θεωρήματα, την ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα και κάποιες αρχικές εφαρμογές.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα εμβαθύνουμε σε χαρακτηριστικές υποκλάσεις των $Borel$ υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου, κάποια κριτήρια ασθενούς σύγκλισης και θα δούμε την ασθενή σύγκλιση στο γινόμενο 2 χώρων, καθώς και την μελέτη της πάνω στον χώρο $\mathbb{R}^k$ και $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Το τρίτο κεφάλαιο έχει και αυτό γενικό χαρακτήρα. Εισάγονται οι έννοιες της σφιχτότητας και τις σχετικής συμπάγειας για μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας, και οι σύνδεση τους μέσα από το θεώρημα του $Prohorov$, ένα αναγκαίο θεώρημα για να προχωρήσουμε την θεωρία.

Το τέταρτο κεφάλαιο αφορά την μελέτη της ασθενούς σύγκλισης πάνω στον χώρο $C[0,1]$ των (ομοιόμορφα) συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Ο συγκεκριμένος χώρος εφοδιασμένος με την ¨ομοιόμορφη' μετρική ή ¨νόρμα άπειρο' μας δίνει συγκεκριμένες συνθήκες για να είναι μία ακολουθία μέτρων πιθανότητας σφιχτή συνεπώς -όπως θα δούμε- και να συγκλίνει. Επιπλέον σε αυτό το κεφάλαιο θα κατασκευάσουμε το μέτρο $Wiener$ (κίνηση $Brown$) και θα δούμε ένα σημαντικό θεώρημα, την αρχή της αναλογικότητας του $Donsker$ και κάποιες εφαρμογές του.

Στο πέμπτο κεφάλαιο θα δούμε την σύγκλιση στον χώρο $D[0,1]$ των συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που είναι δεξιά συνεχής και έχουν πεπερασμένο όριο από τα αριστερά. Ένα χαρακτηριστικό αυτού του κεφαλαίου είναι ότι θα εισάγουμε μία ¨καινούρια' μετρική (σε αντίθεση με τα κεφάλαια 2 και 4 που οι μετρικές ήταν γνωστές) η οποία ονομάζεται τοπολογία $Skorohod$. Όπως και στο κεφάλαιο 4, θα δούμε τις συνθήκες σφιχτότητας και σύγκλισης μίας ακολουθίας μέτρων πιθανότητας.

Στο έκτο κεφάλαιο θα επεκτείνουμε τον χώρο $D[0,1]$ στον χώρο $D[0,\infty)$ των συναρτήσεων $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ που είναι δεξιά συνεχής και έχουν πεπερασμένο όριο από τα αριστερά, επιπλέον θα επεκτείνουμε την τοπολογία *Skorohod*. Όπως και στα 2 προηγούμενα κεφάλαια, θα δούμε τις συνθήκες σφιχτότητας και σύγκλισης μίας ακολουθίας μέτρων πιθανότητας.

Τέλος στο έβδομο κεφάλαιο, θα δούμε μία εφαρμογή της θεωρίας που μάθαμε στην χρηματοοικονομική θεωρία. Θα δείξουμε ότι η αξία των πρωτογενών προϊόντων που μοντελοποιούνται με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα με κατάλληλες παραμέτρους συγκλίνει στη γεωμετρική κίνηση *Brown*, καθώς και θα δούμε την σύγκλιση της αξίας διάφορων παραγώγων προϊόντων.

Από την αρχή της εργασία χρησιμοποιούνται αρκετά εργαλεία από την πραγματική ανάλυση, τη θεωρία πιθανοτήτων με θεωρία μέτρου και ελάχιστα από την θεωρία τοπολογικών χώρων.

Κλείνοντας είναι απαραίτητο να αναφέρουμε ότι η εργασία, από το κεφάλαιο 1 έως 6 είναι βασισμένη στο βιβλίο του Patrick Billingsley [1] και το κεφάλαιο 7 είναι βασισμένο στο βιβλίο του Μιχαήλ Λουλάκη [2]

Κεφάλαιο 1

Το θεώρημα *Portmanteau* και θεωρήματα απεικόνισης

1.1 Υπενθύμιση από την τοπολογία μετρικών Χώρων

Ορισμός 1.1.1 Μετρικός χώρος είναι ένα ζεύγος (S,ρ) όπου S είναι ένα μη κενό σύνολο και $\rho : S \times S \to \mathbb{R}$ μια απεικόνιση που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

- $\rho(x, y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in S$ και $\rho(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ για κάθε $x, y \in S$
- $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in S$ (τριγωνική ανισότητα)

Η απεικόνιση ρ ονομάζεται **μετρική**, και ο αριθμός $\rho(x, y)$ ονομάζεται απόσταση του x από το y.

Ορισμός 1.1.2 (i) **Ανοικτή μπάλα** ονομάζουμε το σύνολο $B(x, \epsilon) := \{y \in S : \rho(x, y) < \epsilon\}$ όπου $x \in S$ και $\epsilon > 0$

(ii) Έστω $V \subset S$. Το V ονομάζεται **ανοικτό** υποσύνολο του S αν για κάθε $x \in V$ υπάρχει $\epsilon_x > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \epsilon_x) \subset V$

(iii) Εστω $F \subset S$. Το F ονομάζεται **κλειστό** υποσύνολο του S αν το $S \backslash F$ είναι ανοικτό

Ορισμός 1.13. Οι ανοικτές μπάλες διαμορφώνουν μια βάση της τοπολογίας του S υπο την έννοια ότι κάθε ανοικτό σύνολο είναι αυθαίρετη ένωση ανοικτών μπαλών. Η *Borel* **σ-Άλγεβρα** $\mathcal{S}$ είναι η τομή όλων των κλάσεων που περιέχουν τα ανοικτά υποσύνολα, και είναι κλειστή ως προς τη αριθμήσιμη ένωση και τομή συνόλων, και κλειστή ως προς τη διαφορά συνόλων.

Ορισμός 1.1.4. Μια κλάση υποσυνόλων του S, $\mathcal{A}$ ονομάζεται:

(i) π-σύστημα αν είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές

(i) λ-σύστημα του S αν: α) $S \in \mathcal{A}$, β) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow S \backslash A \in \mathcal{A}$ και γ) αν $\{A_n\}$ ακολουθία ξένων ανα 2 υποσυνόλων του S με $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \geq 1$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Θεωρημα 1.1.1 (π-λ λήμμα του *Dynkin*). Αν $\mathcal{A}$ είναι ένα π-σύστημα τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ όπου $\mathcal{L}$ είναι ένα λ-σύστημα, τότε $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}$ όπου $\sigma(\mathcal{A})$ η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τη κλαση $\mathcal{A}$.

Ορισμός 1.1.5. Ενας μετρικός χώρος (S,ρ) ονομάζεται:

(i) **διαχωρίσιμος** αν υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο D με $\overline{D} = S$ όπου $\overline{D}$ είναι η κλειστότητα του D (το ελάχιστο κλειστό που περιέχει το D)

(ii) **Πλήρης** αν κάθε *Cauchy* ακολουθία στοιχείων του S συγκλίνει σε στοιχείο του S.

Όπως θα δούμε παρακάτω, η διαχωρισιμότητα και η πληρότητα παίζουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη της σύγκλισης των μέτρων πιθανότητας. Είναι σημαντικό επομένως σε κάθε χώρο που θέλουμε να μελετήσουμε, να ορίσουμε κατάλληλη μετρική που να κάνει τον μετρικό χώρο διαχωρίσιμο και πλήρη

Πρόταση1.1.1 (Κριτήριο ύπαρξης ορίου βασικής ακολουθίας). Έστω $(x_n)_n$ *Cauchy* ακολουθία και υποθέτουμε ότι υπάρχει (x_{k_n}) υπακολουθία της που συγκλίνει σε κάποιο $x \in S$. Τότε η $(x_n)_n$ συγκλίνει στο x.

Ορισμός1.1 6. Εστω $\{U_i\}_{i\in I}$ μια συλλογή από ανοικτά υποσύνολα του S και $A \subset S$. η $\{U_i\}_{i\in I}$ θα λέγεται ανοικτό κάλυμμα του A αν

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

.

Ορισμός 1.1.7. Ο (S,ρ) ονομάζεται χώρος *Lindelof* αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του S έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα.

Θεώρημα 1.1.2. Εστω (S,ρ) μετρικός χώρος. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

(i) ο S είναι διαχωρίσιμος

(ii) ο S έχει αριθμήσιμη βαση

(iii) ο S είναι *Lindelof*

Θεώρημα 1.1.3 Εστω $M \subset S$ διαχωρίσιμο. Τότε:

(i) Υπάρχει αριθμήσιμη κλάση $\mathcal{A}$ ανοικτών συνόλων με τη ιδιότητα ότι αν $x \in G \cap M$ όπου το G είναι ανοικτό, τότε υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $x \in A \subset \overline{A} \subset G$

(ii) ο M εφοδιασμένος με την σχετική μετρική $\rho|_M$ είναι *Lindelof*

Ορισμός 1.1.8 (i) Έστω $K \subset S$ το K ονομάζεται **συμπαγές** αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(ii) Εστω $A \subset S$ το A θα λέγεται **σχετικά συμπαγές** αν το $\overline{A}$ είναι συμπαγές.

Ορισμός 1.1.9. Εστω $A \subset S$ το A ονομάζεται **ολικά φραγμένο** αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $F \subset A$ πεπερασμένο ώστε $A \subset \bigcup_{x \in F} B(x, \epsilon)$

Θεώρημα 1.1.4. Το $A \subset S$ είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν το A είναι Ολικά φραγμένο και το $\overline{A}$ είναι πλήρες.

1.2 Σύγκλιση κατά κατανομή και ασθενής σύγκλιση

Ορισμός 1.2.1. Εστω $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}$ μέτρα πιθανότητας ορισμένα στον μετρήσιμο χώρο $(S, \mathcal{S})$. Η $\mathbb{P}_n$ **συγκλίνει ασθενώς** στην $\mathbb{P}$ καθως $n \to \infty$ (συμβ. $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}_n$) αν για κάθε συνεχής και φραγμένη συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_S f(x) d\mathbb{P}_n(x) \to \int_S f(x) d\mathbb{P}(x)$$

Ορισμός 1.2.2. Έστω $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (S, \mathcal{S})$ ένα τυχαίο στοιχείο. Το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ στον S ονομάζεται **κατανομή της** X αν για κάθε $A \in \mathcal{S}$ ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \in A)$$

Ορισμός 1.2.3. Έστω X_n, X τυχαία στοιχεία στον $(S, \mathcal{S})$ ορισμένα στους $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ και $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ αντίστοιχα. Η X_n θα **συγκλίνει κατά κατανομή** στην X καθώς το $n \to \infty$ (συμβ. $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$) αν για κάθε συνεχής και φραγμένη συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_n[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$$

Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι για τις αντίστοιχες κατανομές $\mathbb{P}_n, \mathbb{P}$ ισχύει $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}_n$.

Παράδειγμα 1.2.1 Έστω $A \in \mathcal{S}$. Η συνάρτηση $f(x) = 1_{x \in A}$ είναι φραγμένη όμως όχι συνεχής. Επομένως αν $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}_n$ τότε αυτό δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι $\mathbb{P}_n(A) \to \mathbb{P}_n$, και αν $S = \mathbb{R}$ και $f(x) = x$ η f είναι συνεχής αλλα όχι φραγμένη επομένως δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι $\mathbb{E}_n[X_n] \to \mathbb{E}[X]$

Ορισμός 1.2.4. Το $A \subset S$ θα ονομάζεται $\mathbb{P}$-**συνεχές** αν $\mathbb{P}(\partial A) = 0$

Θεώρημα 1.2.1. (θεώρημα *Portmanteau*) Έστω $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}$ μέτρα πιθανότητας ορισμένα στον μετρήσιμο χώρο $(S, \mathcal{S})$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.
(i) $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}_n$

(ii) $\int_S f(x) d\mathbb{P}_n(x) \to \int_S f(x) d\mathbb{P}(x)$ Για κάθε $f : S \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη.

(iii) $\limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}_n(F) \leq \mathbb{P}(F)$ Για κάθε $F \subset S$ κλειστό

(iv) $\liminf_{n \to \infty} \mathbb{P}_n(G) \geq \mathbb{P}(G)$ Για κάθε $G \subset S$ ανοικτό

(v) $\mathbb{P}_n(A) \to \mathbb{P}(A)$ για κάθε A $\mathbb{P}$- συνεχές

απόδειξη Το $(i) \Rightarrow (ii)$ Είναι άμεσο

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Έστω $F \subset S$ κλειστό. Θέτουμε

$$g(x) = max\{(1 - \frac{\rho(x,F)}{\epsilon}), 0\}$$

και

$$F^\epsilon = \{x \in S : \rho(x,F) < \epsilon\}$$

Για $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό. Η g είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής αφού $|g(x) - g(y)| < \frac{\rho(x,y)}{\epsilon}$.
Επίσης έχουμε:

$$1_{\{x \in F\}} \leq g(x) < 1_{\{x \in F^\epsilon\}}$$

Αρα:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(F) \leq \limsup_{n\to\infty} \int g(x) d\mathbb{P}_n(x) = \int g(x) d\mathbb{P}(x) \leq \mathbb{P}(F^\epsilon)$$

επομένως το (iii) προκύπτει αφήνοντας το $\epsilon \to 0$

Το $(iii) \Rightarrow (iv)$ Προκύπτει εύκολα παίρνοντας $G = S \backslash F$.

$(iii) + (iv) \Rightarrow (v)$ Αν $\mathbb{P}(\partial A) = 0$ τότε $\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(A^o)$ επίσης έχουμε:

$$\mathbb{P}(\overline{A}) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(\overline{A}) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(A) \geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(A) \geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(A^o) \geq \mathbb{P}(A^o)$$

Για το $(v) \Rightarrow (i)$ θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 1.2.1 Εστω $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ μια διαμέριση του S. Τότε το πλήθος των $C \in \mathcal{C}$ για τα οποία $\mathbb{P}(C) > 0$ είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη Λήμματος: Θέτουμε $\mathcal{C}_n = \{C \in \mathcal{C} : \mathbb{P}(C) > \frac{1}{n}\}$ και ισχυριζόμαστε ότι το πλήθος του $\mathcal{C}_n$ είναι το πολύ $n-1$.
Πράγματι αν $|\mathcal{C}_n| = n$ τότε θα ειχαμε $C_1, C_2, ..., C_n$ τέτοια ώστε:
$\mathbb{P}(C_1) > \frac{1}{n}$
$\mathbb{P}(C_2) > \frac{1}{n}$
.
.
.
$\mathbb{P}(C_n) > \frac{1}{n}$
Αρα $\mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(C_2) + ... + \mathbb{P}(C_n) > 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n C_i) > 1$ το οποίο είναι άτοπο.

Επομένως $\{C \in \mathcal{C} : \mathbb{P}(C) > 0\} = \bigcup_n C_n$ και έχουμε το ζητούμενο.

Συνέχεια απόδειξης του θεωρήματος:

$(v) \Rightarrow (i)$ Έστω $f : S \to \mathbb{R}$ φραγμένη και συνεχής. Χωρις βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \leq f \leq 1$. Θέτουμε $A_t = \{x \in S : f(x) > t\}$ και έχουμε

$$\int_S f(x) d\mathbb{P}_n(x) = \int_0^1 \mathbb{P}_n(A_t) dt \to \int_0^1 \mathbb{P}(A_t) dt = \int_S f(x) d\mathbb{P}(x)$$

Η πρώτη ισότητα είναι γνωστή ιδιότητα ολοκλήρωσης μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων, η σύγκλιση προκύπτει από το (v), απ το ότι η f είναι συνεχής το οποίο σημαίνει ότι $\partial A_t = \{x \in S : f(x) = t\}$ και επειδή η συλλογή $\{x \in S : f(x) = t\}_t$ διαμερίζει το $[0,1]$ επομένως έχουμε από το προηγούμενο λήμμα ότι υπάρχουν αριθμήσιμου το πληθος στοιχείων της $\{x \in S : f(x) = t\}_t$ που δεν είναι $\mathbb{P}$-συνεχή, και -τέλος- από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης.

Πόρισμα Μία ακολουθία από μέτρα πιθανότητας δεν μπορεί να συγκλίνει ασθενώς σε δυο διαφορετικά όρια.

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε ότι αν$\int_S f(x)d\mathbb{P}(x) = \int_S f(x)d\mathbb{Q}(x)$ για κάθε φραγμένη ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}$ τότε $P = Q$. αν θέσουμε $f(x) = max\{(1 - \frac{\rho(x,F)}{\epsilon}), 0\}$ Τότε έχουμε

$$\mathbb{P}(F) \leq \int_S f(x)d\mathbb{P}(x) = \int_S f(x)d\mathbb{Q}(x) \leq \mathbb{Q}(F^{\epsilon})$$

Αφήνοντας το $\epsilon \to 0$ έχουμε ότι για κάθε F κλειστό ότι $\mathbb{P}(F) \leq \mathbb{Q}(F)$ και λόγω συμμετρίας έχουμε ότι $\mathbb{P}(F) = \mathbb{Q}(F)$. επομένως θα έχουμε $\mathbb{P}(G) = \mathbb{Q}(G)$ για κάθε G ανοικτό. Μένει λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την την κανονικότητα του μέτρου πιθανότητας για να δείξουμε ότι τα παραπάνω μέτρα συμφωνούν σε όλα τα $A \in \mathcal{S}$:

Αν $A \in \mathcal{S}$ και $\epsilon > 0$ τότε υπάρχουν F_ϵ κλειστό και G_ϵ ανοικτό τέτοια ώστε $F_\epsilon \subset A \subset G_\epsilon$ με $\mathbb{P}(G_\epsilon \backslash F_\epsilon) < \epsilon)$.

Για να αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα, θέτουμε με $\mathcal{G}_\mathbb{P}$ τη κλάση όλων των υποσυνόλωνA του S με $A \in \mathcal{S}$ που ικανοποιούν τις προηγούμενες σχέσεις. αν το A είναι κλειστό τότε θέτουμε $F = A$ και $G = F^\delta = \{x \in S : \rho(x,F) < \delta\}$ για δ αρκετα μικρο. επομένως όλα τα κλειστά ανήκουν στην $\mathcal{G}_\mathbb{P}$. Θα δείξουμε λοιπόν ότι η $\mathcal{G}_\mathbb{P}$ είναι μια σ-άλγεβρα. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία συνόλων της $\mathcal{G}_\mathbb{P}$ επιλέγουμε F_n κλειστό και G_n ανοικτό έτσι ώστε $\mathbb{P}(G_n \backslash F_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$ αν $G = \bigcup_n G_n$ και $F = \bigcup_{n \leq n_0} F_n$ με n_0 τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(\bigcup_n F_n \backslash F) < \epsilon/2$. Έχουμε ότι $G \subset \bigcup_n A_n \bigcup F$ με $\mathbb{P}(G \backslash F) < \epsilon$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η $\mathcal{G}_\mathbb{P}$ είναι επίσης κλειστή στα συμπληρώματα άρα και είναι σ- άλγεβρα. Εφόσον η $\mathcal{S}$ είναι η ελάχιστη σ-αλγεβρα που περιέχει τα κλειστά υποσύνολα προκύπτει ότι $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}_\mathbb{P}$

Το θεώρημα *Portmanteau* μας δίνει αρκετά χρήσιμα εργαλεία για να μελετήσουμε τη σύγκλιση μέτρων πιθανότητας. Με αυτά τα εργαλεία θα αποδείξουμε ένα αρκετά χρήσιμο θεώρημα, το θεώρημα απεικόνισης. Προτού όμως διατυπώσουμε (και αποδείξουμε αυτο το θεώρημα), πρώτα θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 1.2.2 Έστω (S, ρ), (S', ρ') μετρικοί χώροι και $h : S \to S'$ συνάρτηση (δεν χρειάζεται απαραίτητα να έχει κάποια ιδιότητα). ότε το το $D_h = \{x \in S : h(x)$ ασυνεχής $\}$ είναι $\mathcal{S}$-μετρήσιμο

Απόδειξη Υπενθυμίζοντας τον ορισμό συνέχειας για την h στο x_0, έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in S$ με $\rho(x_0, x) < \delta$ να ισχύει $\rho'(h(x), h(x_0)) < \epsilon$. Ισοδύναμα μπορουμε να πούμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in S$ με $\rho(x_0, x) < \delta$, $\rho(x_0, y) < \delta$ να ισχυέι $\rho'(h(x), h(y)) < \epsilon$ (εύκολα προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα). Λόγω της πυκνότητας των ρητών, μπορούμε να περιορίσουμε τα (ε,δ) να είναι θετικοί ρητοί. Επομένως, Το παρακάτω σύνολο μας βοηθάει για τον χαρακτηρισμό των σημείων ασυνέχειας, θέτουμε

$$A_{\epsilon,\delta} = \{x \in S : \exists y, z \in S : \rho(x, y) < \delta, \rho'(h(x), h(y)) \geq \epsilon\}$$

με (ϵ, δ) θετικοί ρητοί και έχουμε:

Ισχυρισμός: Το $A_{\epsilon,\delta}$ είναι ανοικτό

Πράγματι αν $x \in A_{\epsilon,\delta}$ τότε υπάρχουν x_1, x_2 με $\rho(x, x_1) < \delta$, $\rho(x, x_2) < \delta$ και $\rho'(h(x_1), h(x_2)) \geq \epsilon$. αν $y \in S$ με $\rho(x, y) < \delta - max\{\rho(x, x_1), \rho(x, x_2)\}$ έχουμε ότι $\rho(y, x_1) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_1) < \delta + \rho(x, x_1) - max\{\rho(x, x_1), \rho(x, x_2)\} \leq \delta$ δείχνουμε ότι $\rho(y, x_1) < \delta$. Άρα $y \in A_{\epsilon,\delta}$ και επομένως $B(x, \delta - max\{\rho(x, x_1), \rho(x, x_2)\}) \subset A_{\epsilon,\delta}$ επομένως $A_{\epsilon,\delta}$ ανοικτό.
Τέλος έχουμε:

$$D_h = \bigcup_{\epsilon \in \mathbb{Q}^+} \bigcap_{\delta \in \mathbb{Q}^+} A_{\epsilon,\delta}$$

Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στη διατύπωση του θεωρήματος.

Θεώρημα 1.2.2. (Θεώρημα απεικόνισης) Έστω (S, ρ), (S', ρ') μετρικοί χωροι, $\{X_n\}_n$ ακολουθία τυχαίων στοιχείων του S και X τυχαίο στοιχείο του S. Αν $h : S \to S'$ μια $\mathcal{S}/\mathcal{S}'$-μετρήσιμη απεικόνιση και $D_h \subset S$ το σύνολο των ασυνεχειών της. Άν $X_n \Rightarrow X$ και $\mathbb{P}(X \in D_h) = 0$, τότε $h(X_n) \Rightarrow h(X)$

Απόδειξη Έστω $F \in \mathcal{S}'$. Έχουμε:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(h^{-1}(F)) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(\overline{h^{-1}(F)}) \leq \mathbb{P}(\overline{h^{-1}(F)}) \leq \mathbb{P}(h^{-1}(\overline{F}) \cup D_h) = \mathbb{P}(h^{-1}(\overline{F}))$$

Η πρώτη ανισότητα είναι προφανής, η δεύτερη προκύπτει λόγω του ότι $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$, για την τρίτη, θα δείξουμε ότι $\overline{h^{-1}(F)} \subset h^{-1}(\overline{F}) \cup D_h$. Έστω λοιπόν $x \in \overline{h^{-1}(F)}$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n$ στοιχείων του $h^{-1}(F)$ με $x_n \to x$. Αν η h είναι συνεχής στο x, τότε από θεώρημα μεταφοράς και επειδή $h(x_n) \in F$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $h(x_n) \to h(x) \in \overline{F}$. διαφορετικά $x \in D_h$. Επομένως από θεώρημα *Portmanteau* έχουμε ότι $\mathbb{P}_n h^{-1} \Rightarrow \mathbb{P} h^{-1}$

Πόρισμα Αν $S_0 \in \mathcal{S}$ με $\mathbb{P}_n(S_0) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbb{P}(S_0) = 1$ τότε αν θέσουμε $\mathbb{P}'_n = \mathbb{P}_n|_{\mathcal{S}_0}$ και $\mathbb{P}' = \mathbb{P}|_{\mathcal{S}_0}$ τότε τα $\mathbb{P}'_n$, $\mathbb{P}'$ είναι μέτρα πιθανότητας στον $(S_0, \mathcal{S}_0)$ και επιπλέον

$$\mathbb{P}'_n \Rightarrow \mathbb{P}' \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$$

Απόδειξη " => " Είναι γνωστό από την θεωρία ότι $\mathcal{S}_0 = \{A \subset S_0 : A \in \mathcal{S}\}$ Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $Id : S_0 \to S$ η οποία είναι συνεχής. Επιπλέον για κάθε $A \in \mathcal{S}$ έχουμε $Id^{-1}(A) = A \cap S_0 \in \mathcal{S}_0$ επομένως από το θεώρημα απεικόνισης έχουμε

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}'_n Id^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}' Id^{-1} = \mathbb{P}_n$$

" <= " Έστω U ανοικτό υποσύνολο του S_0. τότε υπάρχει G ανοικτό υποσύνολο του S τέτοιο ώστε $U = G \cap S_0$. Επιπλέον έχουμε $\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(G \cap S_0) = \mathbb{P}(G)$ από το γεγονός ότι $\mathbb{P}_n(S_0) = 1$. Ομοίως ισχύει για τα μέτρα $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}'_n$, $\mathbb{P}'$. Επομένως από θεώρημα *Portmanteau* έχουμε

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}'_n(U) = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(G)' = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(G) \geq \mathbb{P}(G) = \mathbb{P}'(U)$$

1.3 Σύγκλιση κατά ολική μεταβολή και τοπικά οριακά θεωρήματα

Ορισμός 1.3.1. Έστω X_n και X τυχαία στοιχεία του S ορισμένα στον ίδιο χωρο πιθανότητας. Αν $\mathbb{P}(\rho(X_n, X) < \epsilon) \to 1$ για κάθε $\epsilon > 0$ τότε θα λέμε ότι η X_n συγκλίνει στο X κατά πιθανότητα (συμβ $X_n \xrightarrow{P} X$)

Θεώρημα 1.3.1 Έστω $(X_n, X_{u,n})$ τυχαία στοιχεία του $S \times S$. αν $X_{u,n} \Rightarrow Z_u$ καθώς $n \to \infty$ για σταθερό $u \in \mathbb{N}$, και $Z_u \to X$ καθώς $u \to \infty$ και

$$\lim_{u\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_{u,n}, X_n) \geq \epsilon) = 0$$

για κάθε $\epsilon > 0$. Τότε $X_n \Rightarrow X$

Απόδειξη Έστω $F \in \mathcal{S}$ κλειστό και ορίζουμε $F_\epsilon = \{x \in S : \rho(x, F) \leq \epsilon\}$. Τότε

$$\mathbb{P}(X_n \in F) = \mathbb{P}(X_n \in F, X_{u,n} \notin F_\epsilon) + \mathbb{P}(X_n \in F, X_{u,n} \in F_\epsilon) \leq \mathbb{P}(\rho(X_{u,n}, X_n) > \epsilon) + \mathbb{P}(X_{u,n} \in F_\epsilon)$$

Η ανισότητα προκύπτει απ το ότι αν $X_n \in F$ και $X_{u,n} \notin F_\epsilon$ τότε $\rho(X_{u,n}, F) > \epsilon \Rightarrow \rho(X_{u,n}, X_n) \geq \rho(X_{u,n}, F) > \epsilon$. Επίσης το F_ϵ είναι επίσης κλειστό και $F_\epsilon \downarrow F$ καθώς $\epsilon \downarrow 0$, επομένως έχουμε:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \limsup_{\epsilon\to 0} \limsup_{u\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{u,n} \in F_\epsilon) \leq$$

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \limsup_{u\to\infty} \mathbb{P}(Z_u \in F_\epsilon) \leq \limsup_{\epsilon\to 0} \mathbb{P}(X \in F_\epsilon) = \mathbb{P}(X \in F)$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Πόρισμα Έστω (X_n, Y_n) τυχαία στοιχεία του $S \times S$. Αν $Y_n \Rightarrow X$ καθώς $n \to \infty$ και $\rho(X_n, Y_n) \Rightarrow 0$, τότε $X_n \Rightarrow X$. Άν $Y_n = X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η σύγκλιση κατά πιθανότητα συνεπάγεται σύγκλιση κατά κατανομή.

Αρχικά θα δείξουμε ότι $X_n \xrightarrow{P} X$ είναι ισοδύναμη με $\rho(X_n, X) \Rightarrow 0$

Έστω $X_n \xrightarrow{P} X$, τότε για τη τ.μ. $Y_n = \rho(X_n, X)$ έχουμε ότι $Y_n \xrightarrow{P} 0$ Άρα και $Y_n \Rightarrow 0$.

Αν τώρα $\rho(X_n, X) \Rightarrow 0$ έχουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, X) \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(0 \in [\epsilon, \infty)) = 0$$

για κάθε $\epsilon > 0$ επομένως

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, X) \geq \epsilon) = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, X) \geq \epsilon) = 0$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε $\mathbb{P}(\rho(X_n, X) \geq \epsilon) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Για την απόδειξη του πορίσματος έχουμε ότι για κάθε $u \in \mathbb{N}$ $X_{u,n} = Y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\rho(X_n, Y_n) \Rightarrow 0$ τότε με παρόμοιο τρόπο όπως παραπάνω έχουμε ότι

$$\lim_{u\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, Y_n) \geq \epsilon) = 0$$

απ το θεώρημα 1.3.1 έχουμε $X_n \Rightarrow X$ και το τελευταίο συμπέρασμα είναι άμεσο.

Ορισμός 1.3.2 Σύγκληση κατά ολική μεταβολή (συμβ. $\mathbb{P}_n \xrightarrow{TV} \mathbb{P}$) έχουμε όταν

$$\sup_{A \in \mathcal{S}} |\mathbb{P}_n(A) - \mathbb{P}(A)| \to 0$$

Εύκολα προκύπτει ότι η σύγκλιση κατά ολική μεταβολή είναι πιο ισχυρή από την ασθενή σύγκλιση: για κάθε $A \in \mathcal{S}$ $\mathbb{P}$- συνεχές ισχύει ότι $|\mathbb{P}_n(A) - \mathbb{P}(A)| \leq \sup\{|\mathbb{P}_n(A) - \mathbb{P}(A)| : A \in \mathcal{S}\}$

Θεώρημα 1.3.2 (Θεώρημα του $Scheffe$) Έστω ότι τα $\mathbb{P}_n$ και $\mathbb{P}$ έχουν πυκνότητες f_n και f αντίστοιχα σε ένα μέτρο μ του $(S, \mathcal{S})$. Αν $f_n \to f$ μ-σ.π τότε $\mathbb{P}_n \xrightarrow{TV} \mathbb{P}$ και επομένως $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

Απόδειξη για κάθε $A \in \mathcal{S}$ έχουμε:

$$|\mathbb{P}_n(A) - \mathbb{P}(A)| = |\int_A (f_n(x) - f(x))d\mu(x)| \leq \int_S |f_n(x) - f(x)|d\mu(x) = 2\int_S (f_n(x) - f(x))^+ d\mu(x)$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει απ το ότι:

$$0 = \int_S (f_n(x) - f(x))d\mu(x) = \int_S (f_n(x) - f(x))^+ d\mu(x) - \int_S (f_n(x) - f(x))^- d\mu(x)$$

Τέλος απ το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε $\int_S (f_n(x) - f(x))^+ d\mu(x) \to 0$

Παρατήρηση

Απ΄ το θεώρημα $Scheffe$ παρατηρούμε ότι η οριακή τοπική σύγκλιση, συνεπάγεται την ολοκληρωτική ασθενή σύγκλιση. Το αντίθετο δεν ισχύει αναγκαστικά: Έστω $\mathbb{P} = m$ όπου m το μέτρο *Lebesgue* στον $S = [0, 1]$ με πυκνότητα $f = 1$. Έστω $\mathbb{P}_n$ η ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} (\frac{k}{n}, \frac{n^2k + 1}{n^3})$$

με πυκνότητα $f_n(x) = n^2 1_{x \in B_n}$. Εφόσον $m(B_n) = \frac{1}{n^2}$, το 1ο Λήμμα $Borel - Cantelli$ δινει $m(B_n, i.o) = 0$ επομένως $f_n(x) \to 0$ m σ.π. Όμως $|\mathbb{P}_n[0, x] - x| \leq n^{-1}$ και επομένως $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

Ορισμός 1.3.3. Έστω $S = \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}$ και ένα σημείο $\delta(n) = (\delta_1(n), \delta_2(n), ..., \delta_k(n))$ του $\mathbb{R}^k$ που οι συντεταγμένες του εξαρτώνται απ΄το n οι οποίες είναι θετικές. Έστω επίσης $\alpha(n) = (\alpha_1(n), \alpha_2(n), ..., \alpha_k(n))$ ένα αυθαίρετο σημείο του $\mathbb{R}^k$ του οποίου επίσης οι συντεταγμένες εξαρτώνται απ το n. Συμβολίζουμε με L_n το πλέγμα (*lattice*) που περιέχει όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^k$ της μορφής:

$$(u_1\delta_1(n) - \alpha_1(n), u_2\delta_2(n) - \alpha_2(n), ..., u_k\delta_k(n) - \alpha_k(n))$$

Με $u_i \in \mathbb{Z}, i = 1, .., k$.

Αν $x \in L_n$ τότε το γενικευμένο διάστημα $(x - \delta(n), x]$ είναι ένα κελί (*cell*) με όγκο $V(n) = \delta_1(n).\delta_2(n)...\delta_k(n)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι τα κελιά είναι μια διαμέριση του $\mathbb{R}^k$.

Θεώρημα 1.3.3 Έστω ότι $\{\mathbb{P}_n\}_n$ ακολουθία μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^k$ τα οποία έχουν στήριγμα το L_n που ορίστηκε παραπάνω. με σ.μ.π. $p_n(x)$.
Υποθέτουμε ότι $\mathbb{P}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^k$ με πυκνότητα f στο μέτρο *Lebesgue*.

Αν:

α) για τα παραπάνω $\delta_i(n), i = 1, ..., k$ ισχύει ότι $\delta_i(n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$ για κάθε i,
β) $(x_n)_n$ ακολουθία στοιχείων του L_n, $x \in \mathbb{R}^k$ και η $(x_n)_n$ μεταβάλεται έτσι ώστε $x_n \to x$ και να ισχύει ότι $\frac{p_n(x)}{V_n} \to f$

Τότε $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

Απόδειξη Ορίζουμε τις πυκνότητες f_n θέτοντας $f_n(y) = \frac{p_n(x)}{V_n}$ όταν $y \in (x - \delta(n), x]$. Για σταθερό $y \in \mathbb{R}^k$, επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τα κελια διαμερίζουν τον $\mathbb{R}^k$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in L_n$ με $y \in (x_n - \delta(n), x_n]$ και επειδή $\delta_i \to 0$ έχουμε ότι $x_n \to y$. Επομένως από υπόθεση $f_n(y) \to f(y)$ αφού $f_n(y) = \frac{p_n(x_n)}{V_n}$.
Έστω τώρα τυχαία διανύσματα Y_n με πυκνότητα f_n και X με πυκνότητα f. Από θεώρημα $Scheffe$ έχουμε $Y_n \Rightarrow X$ Ορίζουμε τώρα X_n στον ίδιο χωρο με αυτον των Y_n, Θέτοντας $X_n = x$, όταν $Y_n \in (x-\delta(n), x]$ έχουμε ότι $\mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(Y_n \in (x-\delta(n), x]) = \int_{x_1-\delta_1(n)}^{x_1} \cdots \int_{x_k-\delta_k(n)}^{x_k} \frac{p_n(x)}{V_n} dt_1...dt_k = p_n(x)$ αρα p_n σμπ της X_n. εφόσον $\|X_n - Y_n\| \leq \|\delta(n)\|$, από το πόρισμα του θεωρήματος 1.3.1 έχουμε ότι $X_n \Rightarrow X$

1.4 Το θεώρημα επιλογής του *Helly*

Ορισμός 1.4.1 (πολυδιάστατη σ.κ.π) Μία $F : \mathbb{R}^k \to [0, 1]$ ονομάζεται σ.κ.π. στον $\mathbb{R}^k$ αν ισχύουν τα παρακάτω

(i) Η F είναι παντού δεξιά συνεχής
(ii)Η F είναι αύξουσα και για κάθε γενικευμένο διάστημα $(a, b]$ ισχύει

$$\sum \pm F(a_1 + \theta_1 d_1, ...a_k + \theta_k d_k) \geq 0$$

Όπου $d_i = b_i - a_i$ και το αθροισμα είναι πανω σε όλες τις 2^k ακολουθίες $(\theta_1, ..., \theta_k)$ με $\theta_i \in \{0, 1\}$ και το $\pm$ είναι $+$ η - αν το πλήθος των 0 στην ακολουθία είναι άρτιο η περιττό αντίστοιχα
(iii) $F(x) \to 0$ καθώς μία συντεταγμένη του x τείνει στο $-\infty$ και $F(x) \to 1$ καθώς όλες οι συντεταγμένες τείνουν στο ∞

Για ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ στον $\mathbb{R}^k$ η

$$F(x_1, x_2, ..., x_k) = \mathbb{P}(\{y = (y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k : y_i \leq x_i \forall i = 1, 2, ..., k\})$$

είναι σ.κ.π

Παρατήρηση Απ'το θεώρημα *Portmanteau* έχουμε ότι $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P} <=> F_n(x_1, x_2, ..., x_k) \to F(x_1, x_2, ..., x_k)$ όταν $\mathbb{P}(\partial\{y = (y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k : y_i \leq x_i \forall i = 1, 2, ..., k\}) = 0$ δηλαδή όταν $F(x^-) = F(x)$,

Θεώρημα 1.4 (θεώρημα επιλογής του *Helly*). Αν $(F_n)_n$ είναι ακολουθία σ.κ.π. στον $\mathbb{R}^k$, τότε υπάρχει υπακολουθία $(F_{n_k})_k$ και συνάρτηση F που ικανοποιεί τα (i) και (ii) του ορισμου 1.4.1 Τέτοια ώστε

$$\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x) = F(x)$$

Απόδειξη Έστω $\mathbb{Q}^k \subset \mathbb{R}^k$ το σύνολο των ρητών στου $\mathbb{R}^k$- το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^k$ που οι συντεταγμένες του είναι ρητοί- έχουμε ότι $\mathbb{Q}^k = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε τις ακολουθίες

$$(F_n(q_1), F_n(q_2), ...)$$

Όπου κάθε μία από αυτές είναι σημεία του $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Από θεώρημα $Tychonoff$ το $[0,1]^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγές επομένως υπάρχει υπακολουθία $(F_{n_k})_k$ οποία συγκλίνει σε σημείο $(z_1, z_2, ...)$ του $[0,1]^{\mathbb{N}}$. ορίζουμε τη συνάρτηση F_0 με $F_0(q_i) = z_i$, $i = 1, 2, ...$ Έχουμε λοιπόν μία συνάρτηση $F_0 : \mathbb{R}^k \to [0,1]$ και υπακολουθία $(F_{n_k})_k$ τέτοια ώστε

$$\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(q) = F_0(q)$$

$q \in \mathbb{Q}^k$

Εφόσον οι F_n είναι σ.κ.π., για την F_0 ικανοποιείται η ιδιότητα (ii) (με a_i, b_i ρητούς). Ορίζουμε τώρα $F : \mathbb{R}^k \to [0,1]$ με

$$F(x) = \inf\{F_0(q) : q > x, q \in: \mathbb{Q}^k\}$$

Για τη δεξιά συνέχεια θα δούμε την απόδειξη στην μία διάσταση

Άν $x \in \mathbb{R}$ και $(q_m)_m$ ακολουθία ρητών με $q_m \downarrow x$ τότε $F_0(q_m) \to F(x)$. Αυτό προκύπτει απ το ότι αν $\epsilon > 0$ τότε υπάρχει $q > x$ ρητός με $F_0(q) < F(x) + \epsilon$. Λόγω τώρα της απ τα δεξιά σύγκλισης υπάρχει m_0 τέτοιο ώστε $x < q_m < q$ για κάθε $m \geq m_0$, και λόγω της μονοτονίας της F_0 έχουμε ότι $F(x) \leq F_0(q_m) \leq F_0(q) < F(x) + \epsilon$ που ολοκληρώνει τον ισχυρισμό μας. Αν τώρα οποιαδήποτε ακολουθία $(x_n)_n$ με $x_n \downarrow x$ μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει ακολουθία ρητων $(q_{n,m})_{n,m}$ με $q_{m,n} \xrightarrow{m\to\infty} x_n$ για κάθε n και $q_{m,n} \downarrow x$ απ όπου προκύπτει ότι $F(x+) = F(x)$ και επομένως η F είναι δεξιά συνεχής

Αν τώρα x είναι σημείο συνέχειας της F και $\epsilon > 0$ τότε μπορούμε να βρούμε ρητούς q', q'' με $q' < x < q''$ και

$$F(x) - \epsilon < F_0(q') \leq F_0(q'') < F(x) + \epsilon$$

και προφανώς

$$F_{n_k}(q') \leq F_{n_k}(x) \leq F_{n_k}(q'')$$

για κάθε n_k, που συνεπάγεται ότι

$$F(x) - \epsilon \leq \liminf_{k\to\infty} F_{k_n}(x) \leq \limsup_{k\to\infty} F_{k_n}(x) \leq F(x) + \epsilon$$

και επομένως $F_{n_k} \to F$

1.5 Δυο βασικές Εφαρμογές

1 Τριγωνικά τυχαία διανύσματα

Ορισμός 1.5.1 Τα Τριγωνικά τυχαία διανύσματα είναι ένας πίνακας (ενδεχομένως απείρων διαστάσεων) της μορφής

$$\begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 & ... & & & & & & \\ X_{21} & X_{22} & 0 & 0 & .. & & & & & \\ . & & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & & \\ X_{n1} & X_{n2} & X_{n3} & . & . & . & . & X_{nn} & 0 & ... \\ . & & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Θα δείξουμε ότι -υπο κατάλληλες προϋποθέσεις, και χωρίς να είναι δεδομένο το κλασσικό κεντρικό οριακό θεώρημα- ότι ισχύει το αντίστοιχο κεντρικό οριακό θεώρημα για τα Τριγωνικά τυχαία διανύσματα. Πρώτα όμως θα χρειαστούμε το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 1.5.1 Έστω $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}$ μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$. Αν $\int f d\mathbb{P}_n \to \int f d\mathbb{P}$ για κάθε φραγμένη, συνεχής με f να έχει συνεχείς, φραγμένες παραγώγους κάθε τάξης, τότε $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

Απόδειξη Ξέρουμε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = e^{-\frac{1}{s(1-s)}} 1_{(0,1)}$$

έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης (από θεώρημα $Taylor$ έχουμε $0 \leq g(x) \leq \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ για $x \in (0,1)$ και οι παράγωγοι $g^{(k)}(x)$ είναι της μορφής $g(x)\sum_i c_i \frac{1}{x^{m_i}}$). Με βάση αυτό, κατασκευάζουμε τη συνάρτηση

$$u(t) = a \int_t^1 e^{-\frac{1}{s(1-s)}} ds$$

με $u(t) = 1$ για $t \leq 0$, $u(t) = 0$ για $t \geq 1$ και a συντελεστής που την κάνει συνεχής. Αν F_n και F είναι οι αντίστοιχες σ.κ.π έχουμε:

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} 1_{\{y\leq x\}} d\mathbb{P}_n(y) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u(y-x) d\mathbb{P}_n(y) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} u(y-x) d\mathbb{P}(y) \leq F(x + \frac{1}{m})$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. επίσης έχουμε

$$F(x - \frac{1}{m}) \leq \int_{\mathbb{R}} u(m(y-x)+1) d\mathbb{P}(y) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u(m(y-x)+1) d\mathbb{P}_n(y) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x)$$

επίσης για κάθε m

επομένως για σημεία συνέχειας της F έχουμε $F_n(x) \to F(x)$

Επιστρέφουμε τώρα στο βασικό θεώρημα. Έστω οι τ.μ. της n- γραμμής του πίνακα που ορίστηκε παραπάνω:

$$X_{n1}, ..., X_{nk_n}$$

υποθέτουμε ότι οι X_{n_k} είναι ανεξάρτητες, με μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2_{n_k}$. θέτουμε $S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{n_k}$ και $s_n^2 = Var(S_n) = \sum_{k=1}^{k_n} \sigma^2_{n_k}$ και υποθέτουμε ότι $s_n > 0$

Θεώρημα 1.5.2 (Θεώρημα *Lindeberg*) Αν

$$\sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{s_n^2} \mathbb{E}[X_{nj}^2|\{|X_{nj}| > \epsilon s_n\}] = \frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\{|X_{nj}|>\epsilon s_n\}} X_{nj}^2 d\mathbb{P} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$ για κάθε $\epsilon > 0$ τότε $\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$

Απόδειξη Σύμφωνα με το θεώρημα 1.5.1, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}[f(\frac{S_n}{s_n})] \to \mathbb{E}[Z]$$

όπου $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ για κάθε f συνεχής φραγμένη με συνεχή και φραγμένη παράγωγο κάθε τάξης.

Για να το πετύχουμε αυτό θα χωρίσουμε την απόδειξη σε 4 βήματα

Βημα 1): Έστω μία τέτοια f. για $x \in \mathbb{R}$ Ισχύει

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} + \frac{h^3 f'''(a)}{6} \qquad (*)$$

όπου $a \in [x, x+h]$ επίσης

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 f''(b)}{2} \qquad (**)$$

όπου $b \in [x, x+h]$ αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{h^3 f'''(a)}{6} = \frac{h^2}{2}(f''(b) - f''(h))$$

Η (*) είναι καλή προσέγγιση της $f(x+h)$ για μεγάλα h ενω για μικρά είναι και οι 2 εξίσου καλές προσεγγίσεις. Μαθηματικά αυτό μπορεί να εκφραστεί ως εξής: Για $\epsilon > 0$

$$\frac{h^3 f'''(a)}{6} = \frac{h^2}{2}(f''(b) - f''(h))1_{\{|h|>\epsilon\}} + \frac{h^3 f'''(a)}{6} 1_{\{|h|\leq\epsilon\}}$$

Επιλέγουμε $K \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f^{(i)} \leq K$ για $i = 2, 3$ επομένως έχουμε

$$|\frac{h^3 f'''(a)}{6}| \leq Kh^2 1_{\{|h|>\epsilon\}} + \frac{K^3}{6}|h|^3 1_{\{|h|\leq\epsilon\}} \leq Kh^2 1_{\{|h|>\epsilon\}} + \frac{K^3}{6} h^2 \epsilon$$

Βήμα 2)

Η ιδέα εδώ είναι η εξής: Αν οι X_{nk_n} ήταν ανεξάρτητες τ.μ που ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2_{nk_n}$ το αποτέλεσμα θα ήταν άμεσο. Θα δείξουμε ότι για μεγάλα n οι τ.μ. στην υπόθεση διαφέρουν ελάχιστα από αυτές που ακολουθούν κανονική κατανομή. Έστω λοιπόν

$$Y_{n1}, Y_{n2}, ..., Y_{nk_n}$$

ανεξάρτητες τ.μ που ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2_{nk_n}$ οι οποίες είναι επίσης ανεξάρτητες απ τις $\{X_{nk_n}\}$ Θεωρούμε επίσης:
$T_{n0} = S_n = X_{n1} + ... + X_{nk_n}$
$T_{n1} = Y_{n1} + X_{n2} + X_{n3} .... + X_{nk_n}$
$T_{n2} = Y_{n1} + Y_{n2} + X_{n2} .... + X_{nk_n}$
.
.
.
$T_{nk_n} = Y_{n1} + ... + Y_{nk_n} = Zs_n$

Όπου η $Z = s_n^{-1}(Y_{n1} + ... + Y_{nk_n})$ ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή

Θέτουμε R_{nj} το άθροισμα των κοινών όρων των T_{nj} και $T_{n(j-1)}$. Για τα R_{nj} ισχύει:

$$T_{n(j-1)} = R_{nj} + X_{nj}$$

και

$$T_{nj} = R_{nj} + Y_{nj}$$

Παρατηρούμε ότι R_{nj} είναι ανεξάρτητα απ τα X_{nj} και Y_{nj} εκ κατασκευής.

Λόγω τριγωνικής ανισότητας ισχύει

$$|\mathbb{E}[f(\frac{S_n}{s_n})] - \mathbb{E}[f(Z)]| \leq \sum_{j=1}^{k_n} |\mathbb{E}[f(\frac{T_{nj}}{s_n})] - \mathbb{E}[f(\frac{T_{n(j-1)}}{s_n})| \qquad (1)$$

Για σταθερό j έχουμε

$$|\mathbb{E}[f(\frac{T_{nj}}{s_n})] - \mathbb{E}[f(\frac{T_{n(j-1)}}{s_n})| = |\mathbb{E}[f(\frac{R_{nj} + Y_{nj}}{s_n})] - \mathbb{E}[f(\frac{R_{nj} + X_{nj}}{s_n})|$$

Τώρα για $\epsilon' > 0$ αναπτύσσοντας τις $f(\frac{R_{nj}+Y_{nj}}{s_n})$ και $f(\frac{R_{nj}+X_{nj}}{s_n})$ όπως στην (*) (με $x = R_{nj}$,$h_1 = X_{nj}$, $h_2 = Y_{nj}$ και $\epsilon = \epsilon' s_n$) και επειδή

$$\mathbb{E}[f'(\frac{R_{nj}}{s_n})(Y_{nj} - X_{nj})] = 0$$

όπως και

$$\mathbb{E}[f''(\frac{R_{nj}}{s_n})(Y_{nj}^2 - X_{nj}^2)] = 0$$

(λόγω της ανεξαρτησίας της τριάδας $(R_{nj}$,X_{nj},$Y_{nj})$, καθώς και λόγω του ότι $Var(Y_{nj}) = Var(X_{nj})$) η (1) γίνεται:

$$|\mathbb{E}[f(\frac{S_n}{s_n})] - \mathbb{E}[f(Z)]| \leq \sum_{j=1}^{k_n} |\frac{f'''(a)}{6s_n^2}\mathbb{E}[X_{nj}^3] - \frac{f'''(a)}{6s_n^2}\mathbb{E}[Y_{nj}^3]|$$

Από τριγωνική ανισότητα:

$$\sum_{j=1}^{k_n} |\frac{f'''(a)}{6s_n^3}\mathbb{E}[X_{nj}^3] - \frac{f'''(a)}{6s_n^3}\mathbb{E}[Y_{nj}^3]| \leq \sum_{j=1}^{k_n}(\frac{K}{s_n^2}\mathbb{E}[X_{nj}^2|\{|X_{nj}| > \epsilon s_n\}] + \frac{\epsilon K}{6s_n^2}\mathbb{E}[X_{jn}^2]) + \sum_{j=1}^{k_n}\frac{K}{6s_n^3}\mathbb{E}[|Y_{nj}|^3] \quad (2)$$

Είναι γνωστό ότι $\mathbb{E}[|Y_{nj}|^3] = c\sigma_{nj}^3$ με $c = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}$ Επομένως το δεξί μέλος στη (2) γίνεται:

$$\sum_{j=1}^{k_n}\frac{K}{s_n^2}\mathbb{E}[X_{nj}^2|\{|X_{nj}| > \epsilon s_n\}] + \frac{\epsilon K}{6} + \sum_{j=1}^{k_n}\frac{K}{6s_n^3}c\sigma_{jn}^3 \qquad (3)$$

Βήμα 3)

Θα δείξουμε ότι

$$\frac{1}{s_n^2}\max_{1\leq j\leq k_n}\sigma_{nj}^2 \leq \epsilon^2 + \sum_{j=1}^{k_n}\frac{1}{s_n^2}\mathbb{E}[X_{nj}^2|\{|X_{nj}| > \epsilon s_n\}]$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$
Πράγματι:

$$X_{nj}^2 \leq \epsilon^2 s_n^2 + X_{nj}^2 1_{\{|X_{nj}|>\epsilon s_n\}} \leq \epsilon^2 s_n^2 + \sum_{j=1}^{k_n} X_{nj}^2 1_{\{|X_{nj}|>\epsilon s_n\}} =>$$

$$=> \frac{1}{s_n^2}\sigma_{nj}^2 \leq \epsilon^2 + \frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^{k_n}\mathbb{E}[X_{nj}^2|\{|X_{nj}| > \epsilon s_n\}] =>$$

$$=> \frac{1}{s_n^2}\max_{1\leq j\leq k_n}\sigma_{nj}^2 \leq \epsilon^2 + \sum_{j=1}^{k_n}\frac{1}{s_n^2}\mathbb{E}[X_{nj}^2|\{|X_{nj}| > \epsilon s_n\}]$$

(το άθροισμα είναι ανεξάρτητο απ το j)

Βήμα 4) Ολοκλήρωση της απόδειξης

Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{k_n}\frac{K}{s_n^2}\mathbb{E}[X_{nj}^2 \mid \{|X_{nj}| > \epsilon s_n\}] \to 0$$

καθώς $n \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{k_n}\frac{K}{6s_n^3}c\sigma_{jn}^3 \leq K\max_{1\leq j\leq k_n}\sigma_{nj}\frac{1}{s_n}\sum_{j=1}^{k_n}\frac{c\sigma_{nj}^2}{s_n^2} \leq cK\sqrt{\epsilon^2 + \sum_{j=1}^{k_n}\frac{1}{s_n^2}\mathbb{E}[X_{nj}^2|\{|X_{nj}| > \epsilon s_n\}]} \to K\epsilon$$

Επομένως

$$|\mathbb{E}[f(\frac{S_n}{s_n})] - \mathbb{E}[f(Z)]| \leq 2K\epsilon$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη

Πόρισμα (Κεντρικό οριακό θεώρημα) Αν $\{X_j\}_{j\geq 1}$ $i.i.d$ με μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2 > 0$, τότε

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$$

Απόδειξη τοποθετούμε στον πίνακα τις τ.μ X_j ετσι ώστε η $k-$γραμμή να έχει τη μορφή

$$X_1, X_2, ..., X_k$$

Έστω $\epsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{s_n^2}\mathbb{E}[X_{nj}^2 \mid \{|X_{nj}| > \epsilon s_n\}] = \frac{\mathbb{E}[X_1^2 \mid \{|X_1| > \epsilon\sqrt{n}\sigma\}]}{\sigma^2} \to 0$$

επομένως από θεώρημα $Lindeberg$ έχουμε το ζητούμενο

2) Η συσκευή $Cramer - Wold$

Θεώρημα1.5.3 Έστω $\{X_n\}_n$ ακολουθία τυχαίων διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^k$ με $X_n = (X_{n1}, ..., X_{nk})$ και X τυχαίο διάνυσμα στον ίδιο χώρο με $X = (X_1, ..., X_k)$ Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

(i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$

(ii) για κάθε $l \in \mathbb{R}^k$, $l^T X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} l^T X$

Απόδειξη " $=>$ " Έστω ότι $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. Για $l \in \mathbb{R}^k$, συνάρτηση $h(x) = l^T x$ είναι συνεχής ως γραμμική, επομένως απ το θεώρημα απεικόνισης

$$l^T X_n = h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(X) = l^T X$$

" $<=$ " Έχουμε ότι η τ.μ. $Y_{l,n} = l^T X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y_l = l^T X$ επομένως απ το θεώρημα συνέχειας του $Levy$ θα έχουμε:

$$\phi_{Y_{l,n}}(t) \to \phi_{Y_l}(t)$$

Για $t = 1$

$$\mathbb{E}[e^{il^T X_n}] \to \mathbb{E}[e^{il^T X}]$$

Όμως επειδή αυτή η σχέση ισχεί για κάθε $l \in \mathbb{R}^k$ έχουμε ότι

$$\phi_{X_n}(l) \to \phi_X(l)$$

επομένως $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$

1.6 Ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών

Σε αυτή την υποενότητα θα δούμε ότι αν έχουμε μια ακολουθία X_n συνεχών τυχαίων μεταβλητών που συγκλίνει ασθενώς σε μία τυχαία μεταβλητή, X, τότε υπάρχει μία συνθήκη, η οποία αν ικανοποιείται, η ακολουθία των μέσων τιμών των X_n συγκλίνει σε αυτή της X $Lebesgue$-σ.π.

Λήμμα 1.6.1 Έστω X_n και X τυχαία στοιχεία του S. Αν $X_n \Rightarrow X$ τότε

$$\mathbb{E}[|X|] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|]$$

Απόδειξη Από θεώρημα απεικόνισης έχουμε $|X_n| \Rightarrow |X|$, επομένως *Lebesgue*-σχεδον για όλα τα $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f_n(t) := \mathbb{P}(|X_n| > t) \to \mathbb{P}(|X| > t) =: f(t)$$

Οι $(f_n)_n$ είναι μη αρνητικές συναρτήσεις επομένως από λήμμα $fatou$ έχουμε

$$\int_0^\infty f(t)dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)dt$$

και εφόσον $\mathbb{E}[|X|] = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_n| > t)dt$ έχουμε το ζητούμενο

Ορισμός 1.6.1 Έστω $\{X_n\}_n$ ακολουθία συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Οι X_n ονομάζονται **ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες** αν ισχύει ότι

$$\lim_{a\to\infty} \sup_n \int_{|X_n|\geq a} |X_n| d\mathbb{P} = 0$$

Παρατηρήσεις 1) Είναι άμεσο ότι αν η X_n είναι ομοιόμορφα φραγμένη, τότε θα είναι και ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Πράγματι για $a > \sup_n |X_n|$ έχουμε $\mathbb{P}(|X_n| > a) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επομένως $\sup_n \int_{|X_n|\geq a} |X_n| d\mathbb{P} = 0$.

2) Επιπλέον, αν η $\{X_n\}_n$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη τότε για $\epsilon = 1$, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $a \geq M$ να ισχύει $\sup_n \int_{|X_n|\geq a} |X_n| d\mathbb{P} < 1$, επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\int_{|X_n|\geq a} |X_n| d\mathbb{P} < 1$. Επίσης επειδή $\int_{|X_n|<a} |X_n| d\mathbb{P} < a$ εφόσον το $\mathbb{P}$ είναι πεπερασμένο, θα έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}[X_n] < 1 + a < \infty$$

δηλαδή η ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα συνεπάγεται ολοκληρωσιμότητα.

Θεώρημα 1.6.1 Αν οι X_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες και $X_n \Rightarrow X$, τότε η X είναι ολοκληρώσιμη και

$$E(X_n) \to E(X)$$

Απόδειξη Από παρατήρηση 2) και από το λήμμα 1.6.1 έχουμε ότι $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Θα υποθέσουμε αρχικά ότι οι X_n, X είναι μη αρνητικές. Από θεώρημα *Fubini*, για $a > 0$ αν ολοκληρώσουμε διπλά (υπό τα μέτρα λ και $\mathbb{P}$) την 1_{E_n}, όπου $E_n = \{(\omega, t) \in \Omega \times (0, \infty) : 0 < t < X_n(\omega) < a\}$ έχουμε

$$\mathbb{E}[X_n] = \int_0^a \mathbb{P}(t < X_n < a)dt + \int_{X_n\geq a} X_n d\mathbb{P}$$

και αντίστοιχα ολοκληρώνοντας την 1_E, όπου $E = \{(\omega, t) \in \Omega \times (0, \infty) : 0 < t < X(\omega) < a\}$ έχουμε

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^a \mathbb{P}(t < X < a)dt + \int_{X\geq a} X d\mathbb{P}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Ζητάμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X]| < \epsilon$. Από ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα, και επειδή η X είναι ολοκληρώσιμη υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_{X_n\geq a} X_n d\mathbb{P} < \epsilon/4, \qquad \int_{X\geq a} X d\mathbb{P} < \epsilon/4$$

Μένει μόνο να δείξουμε ότι $\int_0^a \mathbb{P}(t < X_n < a)dt \to \int_0^a \mathbb{P}(t < X < a)dt$. Μεγαλώνουμε κατάλληλα το a έτσι ώστε να είναι σημείο συνέχειας της σ.κ.π. της X, F. Τότε θα έχουμε $F_n(t) - F_n(a) \to F_n(t) - F_n(a)$ *Lebesgue*- σ.π. όπου F_n η σ.κ.π της X_n. Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης έχουμε τη ζητούμενη σύγκλιση, επομένως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\left| \int_0^a \mathbb{P}(t < X_n < a)dt - \int_0^a \mathbb{P}(t < X < a)dt \right| < \epsilon/2$$

για κάθε $n \geq n_0$ και τελικά

$$|\mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X]| \leq \left| \int_0^a \mathbb{P}(t < X_n < a)dt - \int_0^a \mathbb{P}(t < X < a)dt \right| + \int_{X_n \geq a} X_n d\mathbb{P} + \int_{X \geq a} X d\mathbb{P} < \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$.

Στη γενική περίπτωση έχουμε ότι $X_n = X_n^+ + X_n^-$ και $X = X^+ + X^-$ και από θεώρημα απεικόνισης $X_n^+ \Rightarrow X^+$ και $X_n^- \Rightarrow X^-$ με X_n^+, X_n^-, X^+, X^- μη αρνητικές. Επομένως

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_n^+] + \mathbb{E}[X_n^-] \to \mathbb{E}[X^+] + \mathbb{E}[X_n^-] = \mathbb{E}[X]$$

Κεφάλαιο 2

Σύγκλιση κατανομών σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

2.1 Κλάσεις καθορισμού και κλάσεις σύγκλισης

Ορισμός 2.1.1 Έστω (S, ρ) μετρικός χώρος και $\mathcal{S}$ η *Borel* σ-άλγεβρα υποσυνόλων του S.

(i) Μία κλάση υποσυνόλων $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ ονομάζεται **κλάση καθορισμού**, αν για δύο μέτρα πιθανότητας $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ με $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, να ισχύει $\mathbb{P}(B) = \mathbb{Q}(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{S}$

(ii) Μία κλάση υποσυνόλων $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ ονομάζεται **κλάση σύγκλισης** αν για κάθε $\mathbb{P}$ μέτρο πιθανότητας και $(\mathbb{P}_n)_n$ ακολουθία μέτρων πιθανότητας με $\mathbb{P}_n(A) \to \mathbb{P}(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{L}$ με A $\mathbb{P}$-συνεχές, να ισχύει $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

Λήμμα 2.1.1 Αν $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ είναι π-σύστημα και $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{S}$ τότε η $\mathcal{A}$ είναι κλάση καθορισμού

Απόδειξη Έστω ένα ζεύγος μέτρων πιθανότητας $\mathbb{P}$,$\mathbb{Q}$ με $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Θέτουμε $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{S} : \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)\}$. τότε
(i) $S \in \mathcal{B}$ (προφανώς)
(ii) Έστω $A, B \in \mathcal{B}$, με $A \subset B$, τότε $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(B) - \mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}(B \backslash A)$ αρα $B \backslash A \in \mathcal{B}$
(iii) Αν $\{A_n\}_n$ αύξουσα ακολουθία στη $\mathcal{B}$ τότε

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{Q}(A_n) = \mathbb{Q}(\bigcup_{n \geq 1} A_n)$$

Επομένως $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{B}$, άρα η $\mathcal{B}$ είναι κλάση *Dynkin*. Επειδή η $\mathcal{A}$ είναι κλειστη στις πεπερασμένες τομές έχουμε απ το π-λ λήμμα του *Dynkin* ότι $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$. Τέλος από υπόθεση έχουμε ότι $\mathcal{B} = \mathcal{S}$

Θεώρημα 2.1.1 Έστω (S, ρ) διαχωρίσιμος, $\mathbb{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(S, \mathcal{S})$ και $\mathcal{A}_{\mathbb{P}}$ μία κλάση υποσυνόλων του S με τις εξής ιδιότητες:
(i) Η $\mathcal{A}_{\mathbb{P}}$ είναι π-σύστημα
(ii) για κάθε $x \in S$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}}$ τέτοιο ώστε $x \in A^o \subset A \subset B(x, \epsilon)$.
Αν $\mathbb{P}_n(A) \to \mathbb{P}(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}}$ τότε $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

Απόδειξη Έστω αρχικά $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}}$, τότε και και $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}}$ επομένως παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{P}_n(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}_n(A_1) + \mathbb{P}_n(A_2) - \mathbb{P}_n(A_1 \cap A_2) \to \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$$

δηλαδή η $\mathbb{P}_n$ συγκλίνει και για κάθε πεπερασμένη ένωση στοιχείων του $\mathcal{A}_{\mathbb{P}}$

Έστω τώρα $G \subset S$ ανοικτό, αφού το G είναι ένωση ανοικτών μπαλών, τότε υπάρχει $A_x \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}}$ με $x \in A_x^o \subset A_x \subset G$. Επίσης ο S είναι διαχωρίσιμος, αρα είναι και $Lindelof$, επομένως θα υπάρχουν $x_1, x_2, ...$ με $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{x_i}$ με $A_{x_i} \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}}$.

Για ευκολία θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $A_{x_i} = A_i$ (επομένως $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$)

Έστω $\epsilon > 0$. Από τη συνέχεια του μέτρου πιθανότητας επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε:
$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) > \mathbb{P}(G) - \epsilon$ Τότε:

$$\mathbb{P}(G) - \epsilon < \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(G)$$

επομένως για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε G ανοικτό έχουμε $\mathbb{P}(G) - \epsilon < \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(G) =>$ $\mathbb{P}(G) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(G)$

Θεώρημα 2.1.2 Έστω (S, ρ) διαχωρίσιμος, και $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$. Για $x \in S$ και $\epsilon > 0$ Θέτουμε:

$$\mathcal{A}_{x,\epsilon} = \{A \in \mathcal{A} : x \in A^o \subset A \subset B(x, \epsilon)\}$$

και

$$\partial \mathcal{A}_{x,\epsilon} = \{\partial A : A \in \mathcal{A}_{x,\epsilon}\}$$

Αν:
(i) η $\mathcal{A}$ είναι π-σύστημα
(ii) Για κάθε $x \in S$ και $\epsilon > 0$, το $\partial \mathcal{A}_{x,\epsilon}$ περιέχει υπεραριθμήσιμου το πλήθος ξένα ανα 2 σύνολα
Τότε η $\mathcal{A}$ είναι κλάση σύγκλισης.

Απόδειξη Έστω $\mathbb{P}$ ένα μέτρο πιθανότητας, και $\mathcal{B}_{\mathbb{P}} = \{B \in \mathcal{A}$: B $\mathbb{P}$-συνεχές $\}$ Θα δείξουμε ότι αν για μία ακολουθία $(\mathbb{P}_n)_n$ ισχύει ότι $\mathbb{P}_n(B) \to \mathbb{P}(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{P}}$, τότε $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι αν $A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{P}}$ τότε επειδή $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$, το $\mathcal{B}_{\mathbb{P}}$ είναι π-σύστημα.

Τώρα έστω $x \in S$ και $\epsilon > 0$. Επειδή το $\partial \mathcal{A}_{x,\epsilon}$ περιέχει υπεραριθμήσιμου το πλήθος ξένα ανα 2 σύνολα, από το λήμμα 1.2.1, το πλήθος των $A \in \mathcal{A}_{x,\epsilon}$ με $\mathbb{P}(\partial A) > 0$ είναι το πολύ αριθμήσιμο, επομένως υπάρχει $A_x \in \mathcal{A}_{x,\epsilon}$ με $\mathbb{P}(\partial A_x) = 0$

Συγκεντρωτικά έχουμε:
(i) η $\mathcal{B}_{\mathbb{P}}$ είναι π-σύστημα
(ii) για κάθε $x \in S$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{P}}$ τέτοιο ώστε $x \in A^o \subset A \subset B(x, \epsilon)$.
Επομένως εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.1.1. έχουμε το ζητούμενο

2.2 Ασθενής σύγκλιση σε γινόμενο χώρων

Ορισμός 2.2.1 Έστω (S', ρ'), (S'', ρ'') μετρικοί χώροι, και $S = S' \times S''$ εφοδιασμένος με την μετρική

$$\rho((x', x''), (y', y'')) = \max\{\rho'(x', y'), \rho''(x'', y'')\}$$

είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η ρ ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού 1.1.1. και ότι η ρ είναι μετρική γινόμενο. Αρα ο (S, ρ) είναι μετρικός χώρος

Αν $\mathcal{S}'$ και $\mathcal{S}''$ οι *Borel* σ-άλγεβρες των S' και S'' αντίστοιχα, συμβολίζουμε με $\mathcal{S}$ τη *Borel* σ-άλγεβρα υποσυνόλων του S και με $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}'' = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{S}', B \in \mathcal{S}''\})$

Αν τώρα $\mathbb{P}$ ένα μέτρο πιθανότητας στον $S = S' \times S''$ ορίζουμε τις περιθώριες κατανομές $\mathbb{P}'$ και $\mathbb{P}''$ ως $\mathbb{P}'(A') = \mathbb{P}(A' \times S'')$, $A' \in \mathcal{S}'$ και $\mathbb{P}''(A'') = \mathbb{P}(S' \times A'')$, $A'' \in \mathcal{S}''$

Τέλος, αν $\mathbb{P}'$ μέτρο πιθανότητας στον S' και $\mathbb{P}''$ μέτρο πιθανότητας στον S'' τότε το $\mathbb{P}' \times \mathbb{P}''$ με $\mathbb{P}' \times \mathbb{P}''(A' \times A'') = \mathbb{P}'(A')\mathbb{P}''(A'')$ όπου $A' \times A'' \in \mathcal{S}' \times \mathcal{S}''$, είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον μετρήσιμο χώρο $(S' \times S'', \mathcal{S}' \times \mathcal{S}'')$. Το μέτρο αυτό ονομάζεται **μέτρο γινόμενο**

Λήμμα 2.2.1 Αν ο $S = S' \times S''$ είναι διαχωρίσιμος, τοτε $\mathcal{S} = \mathcal{S}' \times \mathcal{S}''$

Απόδειξη θεωρούμε τις προβολές $\pi' : S \to S'$ και $\pi'' : S \to S''$ με τύπους $\pi'(x', x'') = x'$ και $\pi''(x', x'') = x''$. Επειδή η ρ είναι μετρική γινόμενο οι π', π'' είναι συνεχής (επομένως και μετρήσιμες). Για $A' \in \mathcal{S}'$ και $A' \in \mathcal{S}'$ έχουμε ότι

$$A' \times A'' = \pi'^{-1}(A') \cap \pi''^{-1}(A'') \in \mathcal{S}$$

επομένως $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}'' \subset \mathcal{S}$
Τώρα επειδή ο S είναι διαχωρίσιμος, τότε κάθε ανοικτό στον S είναι αριθμήσιμη ένωση ανοικτών μπαλών του S. Επειδή για κάθε $(x'.x'') \in S$ και $r > 0$ ισχύει ότι

$$B((x', x''), r) = B(x', r) \times B(x'', r)$$

προκύπτει ότι $B((x', x''), r) \in \mathcal{S}' \times \mathcal{S}''$ και συνεπάγεται ότι κάθε ανοικτό είναι αριθμήσιμη ένωση στοιχείων του $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}''$. Επομένως $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}' \times \mathcal{S}''$

Θεώρημα 2.2.1 Έστω $(\mathbb{P}_n)_n$ ακολουθία μετρων πιθανότητας στον $S = S' \times S''$ και $\mathbb{P}$ μέτρο πιθανότητας στον S και S διαχωρίσιμος. Έχουμε

(i) Αν $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ τότε για τις περιθώριες κατανομές ισχύει ότι $\mathbb{P}'_n \Rightarrow \mathbb{P}'$ και $\mathbb{P}''_n \Rightarrow \mathbb{P}''$

(ii) $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ αν και μόνο αν $\mathbb{P}_n(A' \times A'') \to \mathbb{P}_n(A' \times A'')$ για κάθε $A' \in \mathcal{S}'$ $\mathbb{P}'$-συνεχές και για κάθε $A'' \in \mathcal{S}''$ $\mathbb{P}''$-συνεχές

(iii) $\mathbb{P}'_n \times \mathbb{P}''_n \Rightarrow \mathbb{P}$ αν και μόνο αν $\mathbb{P}'_n \Rightarrow \mathbb{P}'$ και $\mathbb{P}''_n \Rightarrow \mathbb{P}''$ και $\mathbb{P} = \mathbb{P}' \times \mathbb{P}''$

Απόδειξη (i) Οι προβολές π' και π'' είναι συνεχείς και $\mathbb{P}' = \mathbb{P}(\pi')^{-1}$ και $\mathbb{P}'' = \mathbb{P}(\pi'')^{-1}$ επομένως το ζητούμενο προκύπτει απ το θεώρημα απεικόνισης

(ii) Πριν ξεκινήσουμε την απόδειξη της ισοδυναμίας ξεκινάμε με τα εξής: Θέτουμε

$$\mathcal{A} = \{A' \times A'' : A' \in \mathcal{S}', A'' \in \mathcal{S}''\}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι π-σύστημα.
Θέτουμε επίσης $\mathcal{A}_{\mathbb{P}} = \{A' \times A'' \in \mathcal{A} : \mathbb{P}'(\partial A') = 0, \mathbb{P}''(\partial A'') = 0\}$
Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{A}_{\mathbb{P}}$ είναι και αυτό π-σύστημα: Έστω $A' \times A'', B' \times B'' \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}}$
θέλουμε να δείξουμε ότι
$A' \times A'' \cap B' \times B'' \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}}$
$<=> A' \cap B' \times A'' \cap B'' \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}}$
$<=> \mathbb{P}'(\partial(A' \cap B')) = 0$ και $\mathbb{P}''(\partial(A'' \cap B'')) = 0$

Το τελευταίο είναι εύκολο να το δείξουμε αφού:

$$\partial(A' \cap B') \subset \partial(A') \cup \partial(B')$$

και

$$\partial(A'' \cap B'') \subset \partial(A'') \cup \partial(B'')$$

Τώρα αν $A' \times A'' \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}}$ έχουμε

$$\partial(A' \times A'') = (\partial(A') \times \overline{A''}) \cup (\overline{A'} \times \partial(A'')) \subset (\partial(A') \times S'') \cup (S' \times \partial(A'')) \quad (*)$$

Η πρώτη ισότητα μπορεί να αποδειχθεί με απλή χρήση εγκλεισμών.

Επομένως προκύπτει ότι το κάθε στοιχείο του $\mathcal{A}_{\mathbb{P}}$ ειναι $\mathbb{P}$-συνεχές.

Σε αυτό το σημείο ξεκινάμε την βασική απόδειξη. Για το αντιστροφο λοιπον, έστω ότι $\mathbb{P}_n(A' \times A'') \to \mathbb{P}_n(A' \times A'')$ για κάθε $A' \in \mathcal{S}'$ $\mathbb{P}'$-συνεχές και για κάθε $A'' \in \mathcal{S}''$ $\mathbb{P}''$-συνεχές. Δηλαδή $\mathbb{P}_n(A' \times A'') \to \mathbb{P}_n(A' \times A'')$ για κάθε $A' \times A'' \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}}$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{A}_{\mathbb{P}}$ ικανοποιεί την συνθήκη (ii) του θεωρήματος 2.1.1

Έστω $x_0 = (x_0', x_0'') \in S$ και $\epsilon > 0$
Εφόσον για κάθε $r > 0$ τα $\partial B(x_0', r)$ και $\partial B(x_0', r)$ διαμερίζουν τα S' και S'' αντίστοιχα τοτε $\mathbb{P}'(\partial B_{S'}(x_0', r)) = 0$ $\mathbb{P}''(\partial B_{S''}(x_0'', r)) = 0$ για υπεραριθμήσιμο πλήθος των $r > 0$.

Επειδή $B_S(x_0, r) = B_{S'}(x_0', r) \times B_{S''}(x_0'', r)$ ισχύει ότι $B_S(x_0, r) \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}}$ για υπεραριθμήσιμο το πληθος r, Το οποίο σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε $r > 0$ για το οποίο $B_S(x_0, r) \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}}$ και $B_S(x_0, r) \subset B_S(x_0, \epsilon)$ επομένως απ το θεώρημα 2.1.1 έχουμε ότι $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$.

Για το ευθύ τώρα αν $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ και $A' \in \mathcal{S}'$ $\mathbb{P}'$-συνεχές και $A'' \in \mathcal{S}''$ $\mathbb{P}''$-συνεχές τότε από (*) το $A' \times A''$ είναι και $\mathbb{P}$-συνεχές, άρα από θ. *Portmanteau* $\mathbb{P}_n(A' \times A'') \to \mathbb{P}_n(A' \times A'')$

(iii) Έστω $\mathbb{P}_n' \times \mathbb{P}_n'' \Rightarrow \mathbb{P}$. Τότε από (i) $\mathbb{P}_n' \Rightarrow \mathbb{P}'$ και $\mathbb{P}_n'' \Rightarrow \mathbb{P}''$. Από θ.*Portmanteau* $\mathbb{P}_n'(A') \to \mathbb{P}'(A')$ και $\mathbb{P}_n''(A'') \to \mathbb{P}''(A'')$ για κάθε $A' \in \mathcal{S}'$ $\mathbb{P}'$-συνεχές και για κάθε $A'' \in \mathcal{S}''$ $\mathbb{P}''$-συνεχές το οποίο συνεπάγεται ότι $\mathbb{P}_n(A' \times A'') \to \mathbb{P}'(A')\mathbb{P}''(A'')$ για κάθε $A' \in \mathcal{S}'$ $\mathbb{P}'$-συνεχές και για κάθε $A'' \in \mathcal{S}''$ $\mathbb{P}''$-συνεχές. Από το (ii) $\mathbb{P}_n' \times \mathbb{P}_n'' \Rightarrow \mathbb{P}' \times \mathbb{P}''$ και από τη μοναδικότητα του ορίου έχουμε ότι $\mathbb{P} = \mathbb{P}' \times \mathbb{P}''$ Με όμοιο τρόπο δείχνουμε και την αντίθετη κατεύθυνση

Παρατήρηση Στο (i) του θεωρήματος είδαμε ότι η σύγκλιση στον χώρο γινόμενο συνεπάγεται σύγκλιση των περιθώριων κατανομών. Το αντίστροφο δεν ισχύει αναγκαστικά. Ως αντιπαράδειγμα θα θεωρήσουμε τα τυχαία διανύσματα (X, Y) που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1] \times [0, 1]$, και (U, V) ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή πάνω στη διαγώνιο $D = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x = y\}$ Οι περιθώριες και των δύο κατανομών ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1].

2.3 Ασθενής σύγκλιση στους $\mathbb{R}^k$ και $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Ορισμός 2.3.1 Για $k \in \mathbb{N}$, ο $\mathbb{R}^k = (x_1, x_2, ..., x_k), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, .., k$ είναι ο k-διάστατος ευκλείδειος χώρος με τη συνήθη μετρική:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_k - y_k)^2}$$

Με $\mathcal{R}^k$ συμβολίζουμε την *Borel* σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$. Τα μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^k$ καθορίζονται πλήρως από τις σ.κ.π. $F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x])$ όπου η F στο x είναι συνεχής, και για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ το $(-\infty, x]$ είναι ένα γενικευμένο διάστημα

Λήμμα 2.3.1 (Το M-*test* του *Weierstrass* για ακολουθίες) Έστω $x_1, x_2, ..., x_n, ... : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $x_n(i) \to x(i)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και για κάθε $i, n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|x_n(i)| < M_i$ όπου $\sum_{i=1}^{\infty} M_i < \infty$. Τότε
(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{\infty} x_n(i) < \infty$
(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} x(i) < \infty$
(iii) $\sum_{i=1}^{\infty} x_n(i) \to \sum_{i=1}^{\infty} x(i)$

Απόδειξη (i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\sum_{i=1}^{\infty} |x_n(i)| < \sum_{i=1}^{\infty} M_i < \infty$ άρα και η $\sum_{i=1}^{\infty} x_n(i) < \infty$ εφόσον συγκλίνει απόλυτα.

(ii) αφού για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|x_n(i)| < M_i$ και $x_n(i) \to x(i)$ τότε θα έχουμε $|x(i)| < M_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ επομένως με όμοιο τρόπο όπως στο (i), $\sum_{i=1}^{\infty} x(i) < \infty$

(iii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για σταθερό $i_0 \in \mathbb{N}$. έχουμε:

$$|\sum_{i=1}^{\infty} x_n(i) - \sum_{i=1}^{\infty} x(i)| \leq \sum_{i \leq i_0} |x_n(i) - x(i)| + 2 \sum_{i > i_0} M_i$$

Επομένως για $\epsilon > 0$ επιλέγουμε i_1 τέτοιο ώστε $\sum_{i > i_1} M_i < \frac{\epsilon}{3}$ και επειδή $x_n(i) \to x(i)$ υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $|x_n(i) - x(i)| < \frac{\epsilon}{3i_1}$ για κάθε $n \geq n_1$. Επομένως

$$\sum_{i \leq i_1} |x_n(i) - x(i)| + 2 \sum_{i > i_1} M_i < \frac{\epsilon}{3i_1} i_1 + 2\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_1$.

Ορισμός 2.3.2 Ο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι ο χώρος όλων των ακολουθιών $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Αν τον εφοδιάσουμε με την μετρική:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{min\{1, |x(i) - y(i)|\}}{2^i}$$

Τότε με την βοήθεια του προηγούμενου λήμματος μπορούμε να δείξουμε ότι για μια ακολουθια $(x_n)_n$ του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και για $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: $\rho(x_n, x) \to 0$ αν και μόνο αν $|x_n(i) - x(i)| \to 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, αν $\rho(x_n, x) \to 0$ τότε είναι άμεσο ότι $|x_n(i) - x(i)| \to 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Αντίστροφως, για την $y_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $y_n(i) = \frac{min\{1, |x_n(i) - x(i)|\}}{2^i}$, έχουμε ότι $y_n(i) \leq \frac{1}{2^i}$ με $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \infty$ και $y_n(i) \to 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, Άρα $\rho(x_n, x) \to 0$.

Τέλος, οι προβολές $\pi_k : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^k$ με $\pi_k(x) = (x(1), x(2), ..., x(k))$ είναι συνεχής. Πράγματι αν $(x_n)_n$ μια ακολουθια του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ με $x_n \to x$ τότε από τα προηγούμενα $|x_n(i) - x(i)| \to 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ άρα και $|x_n(i) - x(i)| \to 0$ για κάθε $i = 1, 2, .., k$. Επομένως $\pi_k(x_n) \to \pi_k(x)$ συνεπώς είναι και μετρήσιμες.

Ορισμός 2.3.3 Έστω $\mathbb{P}$ ένα μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{R}^{\mathbb{N}})$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε στον $(\mathbb{R}^k, \mathcal{R}^k)$ τα μέτρα πιθανότητας $\mathbb{P}\pi_k^{-1}$, με $\mathbb{P}\pi_k^{-1}(H) = \mathbb{P}(\pi_k^{-1}(H))$ για κάθε $H \in \mathcal{R}^k$. Τα μέτρα αυτά ονομάζονται **Κατανομές πεπερασμένων διαστάσεων** του $\mathbb{P}$

Θεώρημα 2.3.1 Ο $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \rho)$ -όπου ρ η μετρική που ορίστηκε στον Ορισμό 2.3.2- είναι πλήρης και διαχωρίσιμος. Αν $\mathbb{P}$ και $\mathbb{Q}$ είναι 2 μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{R}^{\mathbb{N}})$, με $\mathbb{P}\pi_k^{-1} = \mathbb{Q}\pi_k^{-1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ τότε $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$

Απόδειξη Λόγω της συνέχειας των προβολών π_k, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και για κάθε $\epsilon > 0$ τα σύνολα:

$$B_k(x, \epsilon) := \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y(i) - x(i)| < \epsilon \quad \forall i = 1, 2..., k\}$$

είναι ανοικτά, αφού τα σύνολα $A_k(x, \epsilon) := \{y \in \mathbb{R}^k : |y(i) - x(i)| < \epsilon \quad \forall i = 1, 2..., k\}$ είναι ανοικτά στον $\mathbb{R}^k$ και $B_k(x, \epsilon) = \pi_k^{-1}(A_k(x, \epsilon))$. Επίσης τα σύνολα $B_k(x, \epsilon)$ διαμορφώνουν μια βάση της τοπολογίας του $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \rho)$.

Πράγματι, έστω $r > 0$ και $B(x, r)$ ανοικτή μπάλα στον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Θέτουμε $\epsilon = \frac{r}{2} - 2^{-k}$, για κατάλληλο $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\epsilon > 0$. Αν $y \in B_k(x, \epsilon)$ τότε:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{min\{1, |x(i) - y(i)|\}}{2^i} \leq \epsilon \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq$$

$$\epsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} + 2^{-k} = \epsilon + 2^{-k} = \frac{r}{2} < r$$

Άρα $B_k(x, \epsilon) \subset B(x, r)$

Χρησιμοποιώντας αυτά τα σύνολα είναι εύκολο να δείξουμε ότι ο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίσιμος θέτοντας $D = \{(q(1), q(2), ...) : q(i) \in \mathbb{Q}\backslash\{0\} \quad \forall i \in F, \quad q(j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}\backslash F\}$ όπου F πεπερασμένο. Για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και $\epsilon > 0$ αν μας δοθούν είναι εύκολο να βρούμε k ρητούς (άρα και στοιχείο του D) όπου οι k πρώτες συντεταγμένες να απέχουν το πολύ ϵ (επιλέγοντας κατάλληλο $k \in \mathbb{N}$), συνεπώς $B_k(x, \epsilon) \neq \emptyset$

Έστω τώρα $(x_n)_n$ *Cauchy* ακολουθία του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, τότε για κάθε i-συντεταγμένη η $(x_n(i))_n$ είναι *Cauchy* στον $\mathbb{R}$ άρα υπάρχει $x(i) \in \mathbb{R}$ με $x_n(i) \to x(i)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. επομένως $x_n \to x$.

Τέλος αν $\mathcal{A}$ η κλάση των συνόλων πεπερασμένης διάστασης, δηλαδή περιέχει σύνολα της μορφής $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \pi_k(x) \in H\}$ όπου $k \in \mathbb{N}$ και $H \in \mathcal{R}^k$. Είναι άμεσο ότι η $\mathcal{A}$ είναι π-σύστημα. Μένει να δείξουμε ότι σ($\mathcal{A}$)=$\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$. Πράγματι εφόσον ο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίσιμος τότε θα είναι και δεύτερος αριθμήσιμος. Επειδή τα σύνολα B_k διαμορφώνουν μια βάση της τοπολογίας, έχουμε ότι αν $G \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ανοικτό τότε υπάρχουν $k_1, k_2, ... \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, ..., \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και $r_1, r_2, ... > 0$ τέτοια ώστε $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{k_i}(x_i, r_i)$ όπου τα $B_{k_i}(x_i, r_i) \in \mathcal{A}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. επομένως $\mathcal{R}^{\mathbb{N}} \subset \sigma(\mathcal{A})$. Επίσης λόγω της μετρησιμότητας των προβολών κάθε στοιχείο του $\mathcal{A}$, είναι και στοιχείο του $\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$. Άρα σ($\mathcal{A}$)=$\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$. Από το λήμμα 2.1.1. η $\mathcal{A}$ είναι κλάση καθορισμού.

Τα παρακάτω Λήμματα είναι χρήσιμα για την απόδειξη ενός βασικού κριτηρίου για σύγκληση μέτρων πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{R}^{\mathbb{N}})$

Λήμμα 2.3.2 Έστω $\pi_k : (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \rho) \to (\mathbb{R}^k, \rho_k)$ οι k-προβολές. Τότε $\partial(\pi_k^{-1}(H)) \subset \pi_k^{-1}(\partial H)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $H \in \mathcal{R}^k$.

Απόδειξη , έστω $x \in \partial(\pi_k^{-1}(H))$, τότε $x \in \overline{\pi_k^{-1}(H)}$. Έστω $\epsilon > 0$. Αφού οι π_k^{-1} είναι συνεχής στο x, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ με $\rho(x,y) < \delta$, να ισχύει ότι $\rho_k(\pi_k(x), \pi_k(y)) < \epsilon$. Αφού $x \in \overline{\pi_k^{-1}(H)}$, τότε υπάρχει $z \in \pi_k^{-1}(H)$ με $\rho(x,z) < \delta$ επομένως $\rho_k(\pi_k(x), \pi_k(z)) < \epsilon$ άρα $H \cap B_{\mathbb{R}^k}(\pi_k(x), \epsilon) \neq \emptyset$ που συνεπάγεται ότι $\pi_k(x) \in \overline{H}$

Επίσης αν $\pi_k(x) \in H^o$ τότε $x \in (\pi_k^{-1}(H))^o$. Πράγματι, αν $\pi_k(x) \in H^o$ τότε υπάρχει $r_1 > 0$ τέτοιο ώστε $B_{\mathbb{R}^k}(\pi_k(x), r_1) \subset H$, επομένως $x \in \pi_k^{-1}(B_{\mathbb{R}^k}(\pi_k(x), r_1)) \subset \pi_k^{-1}(H)$. Εφόσον οι π_k^{-1} είναι συνεχής, τότε τα σύνολα $\pi_k^{-1}(B_{\mathbb{R}^k}(\pi_k(x), r_1))$ είναι ανοικτά, τότε υπάρχει $r_2 > 0$ με $B_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}(x, r_2) \subset \pi_k^{-1}(B_{\mathbb{R}^k}(\pi_k(x), r_1)) \subset \pi_k^{-1}(H)$ άρα $x \in (\pi_k^{-1}(H))^o$. Συνεπάγεται ότι $((\pi_k^{-1}(H))^o)^c \subset (\pi_k^{-1}(H^o))^c$, επομένως ότι $\partial(\pi_k^{-1}(H)) \subset \pi_k^{-1}(\partial H)$

Λήμμα 2.3.3 Έστω (S, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset S$ τότε $x \in \partial A$ αν και μόνο αν υπάρχουν ακολουθίες $(a_n)_n$ του A και $(b_n)_n$ του A^c με $b_n \to x$ και $a_n \to x$

Απόδειξη " => " Έστω $x \in \partial A$. τότε $x \in \overline{A}$ Άρα υπάρχει ακολουθία $(a_n)_n$ του A με $a_n \to x$. Επίσης $x \in (A^o)^c = \overline{A^c}$. Άρα υπάρχει ακολουθία $(b_n)_n$ του A^c με $b_n \to x$

" <= " Αφού για την $(a_n)_n$ του A ισχύει ότι $a_n \to x$, τότε $x \in \overline{A}$ και αφού για την $(b_n)_n$ του A^c ισχύει ότι $b_n \to x$, τότε $x \in \overline{A^c} = (A^o)^c$

Θεώρημα 2.3.2 Έστω $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}$ μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{R}^{\mathbb{N}})$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

(ii) $\mathbb{P}_n \pi_k^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}\pi_k^{-1}$

Απόδειξη Η κατεύθυνση " => " είναι άμεση από το θεώρημα απεικόνισης

" <= " θέτουμε $\mathcal{A}$ τη κλάση των συνόλων πεπερασμένης διάστασης η οποία περιέχει σύνολα της μορφής $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \pi_k(x) \in H\}$ όπου $k \in \mathbb{N}$ και $H \in \mathcal{R}^k$. Η απόδειξη θα χωριστεί σε 3 βήματα:

Βήμα 1) Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλάση σύγκλισης
Θα κάνουμε χρήση του θεωρήματος 2.1.2. Έστω $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και $\epsilon > 0$. επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ με $2^{-k} < \frac{\epsilon}{2}$ και θέτουμε

$$A_\eta = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y(i) - x(i)| < \eta, \quad \forall i = 1, 2, ..., k\}$$

όπου $0 < \eta < \epsilon/2$, επίσης θέτουμε:

$$\mathcal{A}_{x,\epsilon} = \{A \in \mathcal{A} : x \in A^o \subset A \subset B(x, \epsilon)\}$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $0 < \eta < \epsilon/2$, $A_\eta \in \mathcal{A}_{x,\epsilon}$.

Πράγματι έστω $y \in A_\eta$. Τότε

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\min\{1, |x(i) - y(i)|\}}{2^i} \leq \eta + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

Επειδή $\frac{1}{2^{k+j}} < \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{2^j}$ για $j = 1, 2, ...$ τότε η τελευταία σχέση γίνεται

$$\eta + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \eta + \frac{\epsilon}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \eta + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Επίσης είναι εμφανές ότι $A_\eta \in \mathcal{A}$

Το ∂A_η περιέχει όλα τα στοιχεία $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ για τα οποία ισχύει ότι $|y(i) - x(i)| \leq \eta, \quad \forall i = 1, 2, ..., k$ όπου για ένα τουλάχιστον i ισχύει η ισότητα. επομένως τα ∂A_η είναι ξένα ανα 2. Επίσης αφού για κάθε $0 < \eta < \epsilon/2$ έχουμε ότι $\partial A_\eta \in \partial \mathcal{A}_{x,\epsilon} = \{\partial A : A \in \mathcal{A}_{x,\epsilon}\}$. Τέλος ο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίσιμος. Αρα ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 2.1.2

Βήμα 2) Θα δείξουμε ότι $\partial(\pi_k^{-1}(H)) = \pi_k^{-1}(\partial H)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $H \in \mathcal{R}^k$.

Έχουμε πρώτα ότι $\partial(\pi_k^{-1}(H)) \subset \pi_k^{-1}(\partial H)$ από το λήμμα 2.3.2

Επίσης $\pi_k^{-1}(\partial H) \subset \partial(\pi_k^{-1}(H))$. Πράγματι, έστω $x \in \pi_k^{-1}(\partial H)$, τότε $\pi_k(x) \in \partial H$ Από το λήμμα 2.3.3 υπάρχουν $(a_n)_n$ του H και $(b_n)_n$ του H^c με $b_n \to \pi_k(x)$ και $a_n \to \pi_k(x)$. Έστω $a'_n = (a(1)_n, a(2)_n, ..., a(k)_n, x(k+1), x(k+2), ..) \in \pi_k^{-1}(H)$ και $b'_n(b(1)_n, b(2)_n, ..., b(k)_n, x(k+1), x(k+2), ..) \in (\pi_k^{-1}(H))^c$. τότε $b'_n \to x$ και $a'_n \to x$. Πάλι από το λήμμα 2.3.3. έχουμε ότι $x \in \partial(\pi_k^{-1}(H))$

Βήμα 3): $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$
Έστω $A \in \mathcal{A}$ $\mathbb{P}$-συνεχές. Τότε $A = \pi_k^{-1}(H)$ όπου $k \in \mathbb{N}$ και $H \in \mathcal{R}^k$. Έχουμε:

$$\mathbb{P}\pi_k^{-1}(\partial H) = \mathbb{P}(\pi_k^{-1}(\partial H)) = \mathbb{P}(\partial(\pi_k^{-1}(H))) = \mathbb{P}(\partial A) = 0$$

Από ύποθεση έχουμε $\mathbb{P}_n(A) \to \mathbb{P}(A)$ και από το βήμα 1) $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

2.4 Το θεώρημα ύπαρξης του *Kolmogorov**

Έστω $k > 1$, π_k οι προβολές από τον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{R}^k$ με $\pi_k(x) = (x_1, ..., x_k)$ και ψ_k οι προβολές από τον $\mathbb{R}^k$ στον $\mathbb{R}^{k-1}$ με $\psi_k((x_1, ..., x_k)) = (x_1, ..., x_{k-1})$. Αν $\mathbb{P}$ ένα μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{R}^{\mathbb{N}})$, τότε ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας, μ_k στον $(\mathbb{R}^k, \mathcal{R}^k)$ ως:

$$\mu_k(A) = \mathbb{P}(\pi_k^{-1}(A)) \qquad (1)$$

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ισχύει ότι:

$$\pi_{k-1}(x) = \psi_k(\pi_k(x)) \qquad (2)$$

τότε θα έχουμε

$$\mu_{k-1} = \mu_k \psi_k^{-1} \qquad (3)$$

Το ερώτημα τώρα είναι αν μας δοθούν τα μ_k που ικανοποιούν τα (2) και (3), μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ στον $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{R}^{\mathbb{N}})$ που να ικανοποιεί την (1)· Η απάντηση θα δοθεί στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.4.1 (θεώρημα ύπαρξης του *Kolmogorov*) αν για κάθε $k \geq 1$ τα μέτρα πιθανότητας μ_k στον $(\mathbb{R}^k, \mathcal{R}^k)$ ικανοποιούν τις (2) και (3), τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ στον $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{R}^{\mathbb{N}})$ που να ικανοποιεί την (1).

Απόδειξη Έστω $i, k \in \mathbb{N}$ με $1 \leq i \leq k$. Ορίζουμε ως $\psi_{k,i}$ τη προβολή από τον $\mathbb{R}^k$ στον $\mathbb{R}^i$. Παρατηρούμε ότι

$$\psi_{k,i} = \psi_{i+1} \circ \psi_{i+2} \circ ... \circ \psi_k$$

και ότι:

$$\pi_i = \psi_{k,i} \circ \pi_k$$

από τη (3) έχουμε ότι

$$\mu_i = \mu_k \psi_{k,i}^{-1}$$

Έστω $\mathcal{A}$ η κλάση των συνόλων πεπερασμένης διάστασης του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A = \pi_i^{-1}(H)$ με $H \in \mathcal{R}^i$ για κάποιο $i \geq 1$. Αν $k > i$, επειδή $\pi_i = \psi_{k,i} \circ \pi_k$ αν θέσουμε $H' = \psi_{k,i}^{-1}(H)$, τότε $H' \in \mathcal{R}^k$ και $A = \pi_k^{-1}(H')$. Αν τώρα για κάποιο $A \in \mathcal{A}$ έχουμε $A = \pi_i^{-1}(H)$ για κάποιο $H \in \mathcal{R}^i$ και $A = \pi_k^{-1}(H')$ για κάποιο $H' \in \mathcal{R}^k$, τότε $H' = \psi_{k,i}^{-1}(H)$. Πράγματι, εστω $a = (a_1, a_2, ..., a_k) \in \mathbb{R}^k$. Τότε $a \in H'$ αν και μόνο αν $(a_1, ..., a_k, 0, 0, ...) \in \pi_k^{-1}(H') = \pi_i^{-1}(H)$ το οποίο ισχύει αν και μόνο αν $(a_1, ..., a_i) = \psi_{k,i}((a_1, ..., a_k, 0, ...) \in H$. εφόσον $\mu_i = \mu_k \psi_{k,i}^{-1}$ τότε:

$$\mu_i(H) = \mu_k(H')$$

Έχοντας λοιπον τα προηγούμενα, ορίζουμε τη συνολοσυνάρτηση $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ με $\mathbb{P}(A) = \mu_i(H)$ όταν $A = \pi_i^{-1}(H)$. Προφανώς $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ και $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = 1$.

Έστω τώρα $A, B \in \mathcal{A}$. Τότε για $i \in \mathbb{N}$ $A = \pi_i^{-1}(H)$ με $H \in \mathcal{R}^i$ και για $k \in \mathbb{N}$ $B = \pi_k^{-1}(J)$ με $J \in \mathcal{R}^k$. Υποθέτουμε ότι $k \geq i$. επομένως $A = \pi_k^{-1}(H')$ με $H' \in \mathcal{R}^k$. Άν A και B είναι ξένα, τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι και τα H', J είναι και αυτά ξένα μεταξύ τους. Εχούμε:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mu_k(H' \cup J) = \mu_k(H') + \mu_k(J) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Θα δείξουμε επίσης ότι η $\mathbb{P}$ είναι σ-προσθετική. Δηλάδη αν $\{A_n\}_n$ ακολουθία ξένων ανα 2 συνόλων στη $\mathcal{A}$, και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ τότε

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Αν θέσουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε επειδή το $\mathbb{P}$ είναι πεπερασμένα προσθετικό έχουμε

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \backslash \bigcup_{n=1}^{N} A_n) + \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{N} A_n)$$

για $N \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $D_N = A \backslash \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ (Επειδή η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, το D_N είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$). Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(D_N) = 0$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η ακολουθία $\{D_k\}$ είναι φθίνουσα, και $\bigcap_{k\geq 1} D_k = \emptyset$. παρατηρούμε ότι αν $i, j \in \mathbb{N}$ με $i < j$ τότε υπάρχουν n_i, n_j φυσικοί και $H_i \in \mathcal{R}^{n_i}$, $H_j \in \mathcal{R}^{n_j}$ για τα οποία υσχύει $D_i = \pi_{n_i}^{-1}(H_i)$ και $D_j = \pi_{n_j}^{-1}(H_j)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $n_j > n_i$. Λόγω της μονοτονίας των D_k έχουμε ότι $\pi_{n_j}^{-1}(H_j) \subset \pi_{n_i}^{-1}(H_i)$ επιπλέον μπορούμε να βρούμε ένα $H_i' \in \mathcal{R}^{n_j}$ τέτοιο ώστε $D_i = \pi_{n_j}^{-1}(H_i')$ επομένως $\pi_{n_j}^{-1}(H_j) \subset \pi_{n_j}^{-1}(H_i')$ το οποίο συνεπάγεται $H_j \subset H_i$ άρα $\mu_{n_j}(H_j) < \mu_{n_j}(H_i') \implies \mu_{n_j}(H_j) < \mu_{n_i}(H_i) \implies \mathbb{P}(D_j) < \mathbb{P}(D_i)$ Δηλαδή η ακολουθία $(\mathbb{P}(D_k))_k$ είναι φθίνουσα και εφόσον είναι κάτω φραγμένη απ το 0 είναι και συγκλίνουσα.

Για να καταλήξουμε σε άτοπο, θα υποθέσουμε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $i \in \mathbb{N}$ να ισχύει $\mathbb{P}(D_i) > \epsilon$. Τότε θα υπάρχουν $(n_i)_i$ και $H_i \in \mathcal{R}^{n_i}$ για τα οποία ισχύει $\mu_{n_i}(H_i) > \epsilon$. Από την κανονικότητα των μέτρων μ_{n_i} (πόρσιμα θεωρήματος *Portmanteau*) υπάρχει $F_i \subset H_i$ κλειστό με $\mu_{n_i}(H\backslash F_i) < \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$. Επειδή το F_i είναι κλειστό υποσύνολο ενός πλήρους μετρικού χώρου, είναι πλήρης και επίσης είναι διαχωρίσιμο. Άρα υπάρχει $K_i \subset F_i$ συμπαγές για το οποίο ισχύει $\mu_{n_i}(H\backslash K_i) < \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$. Θέτουμε $B_i = \pi_{n_i}^{-1}(K_i)$. Τότε $B_i \in \mathcal{A}$, $B_i \subset D_i$ και

$$\mathbb{P}(D_i\backslash B_i) < \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$$

Το $C_i = \bigcap_{j=1}^{i} B_i$ είναι υποσύνολο του D_i επίσης

$$\mathbb{P}(D_i\backslash C_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{i} D_i\backslash B_j) \leq \sum_{j=1}^{i}\mathbb{P}(D_i\backslash B_j) \leq \sum_{j=1}^{i}\mathbb{P}(D_j\backslash B_j) < \epsilon/2$$

επομένως $\mathbb{P}(C_i) > \epsilon/2$ που σημαίνει ότι τα C_i είναι μη κενά. Έχουμε λοιπόν μια φθίνουσα ακολουθία $\{C_i\}_i$ από μη κενά σύνολα με $C_i \subset \pi_{n_i}^{-1}(K_i)$. Μένει να δείξουμε ότι

$$\bigcap_i C_i \neq \emptyset$$

Έστω $x_j \in C_j$. τότε $x_j = (x_j(1), ..., x_j(n_1), ..., x_j(n_2), ...)$. Για $j = 1$ έχουμε ότι $(x_1(1), ..., x_1(n_1)) \in K_1$ επομένως κάθε συντεταγμένη είναι φραγμένη. Για $j = 2$ έχουμε ότι $(x_2(1), ..., x_2(n_1)) \in K_1$. συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία, έχουμε την ακολουθία $\{((x_j(1), ..., x_j(n_1))\}$ του K_1. Αφού το K_1 είναι συμπαγές τότε θα υπάρχει υπακολουθία $((x_{j_{k_1}}(1), ..., x_{j_{k_1}}(n_1))$ με

$$((x_{j_{k_1}}(1), ..., x_{j_{k_1}}(n_1)) \xrightarrow{k_1\to\infty} ((x(1), ..., x(n_1))$$

Τώρα για $j = 2$ έχουμε ότι $(x_2(1), ..., x_2(n_2)) \in K_2$ επομένως κάθε συντεταγμένη είναι φραγμένη. Για $j = 3$ έχουμε ότι $(x_3(1), ..., x_3(n_2)) \in K_2$, όμοια με πριν, βρίσκουμε υπακολουθία $((x_{j_{k_2}}(1), ..., x_{j_{k_2}}(n_2))$ όπου$((x_{j_{k_2}}(1), ..., x_{j_{k_2}}(n_1))$ είναι επιπλέον ακολουθία της προηγούμενη ακολουθίας, έχουμε:

$$((x_{j_{k_2}}(1), ..., x_{j_{k_2}}(n_2)) \xrightarrow{k_2\to\infty} ((x(1), ..., x(n_2))$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία για τα K_i, αν $x = (x(1), ..., x(n_1), ..., x(n_3), ...)$, για κάθε $i = 1, 2, ...$ έχουμε ότι $(x(1), ..., x(n_i) \in K_i$ και επομένως $x \in C_i$. Καταλήγουμε ότι $\bigcap_i C_i \neq \emptyset$ αρα και $\bigcap_i D_i \neq \emptyset$. Αρα το $\mathbb{P}$ είναι σ-προσθετικό. Τέλος, όπως έχουμε δείξει σ($\mathcal{A}$)=$\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ επομένως απ το θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή το $\mathbb{P}$ επεκτείνεται σε ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}'$ στον $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{R}^{\mathbb{N}})$ με $\mathbb{P}'(A) = \mathbb{P}(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ από το θεώρημα 2.3.1 η επέκταση είναι μοναδική.

Ο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ουσιαστικά είναι ο χώρος όλων των πραγματικών ακολουθιών. Αν μ_k είναι οι σ.κ.π, $F_k(z_1, ...z_k) =$

$\mu_k((-\infty, z_1] \times ... \times (-\infty, z_k])$ και ικανοποιούν τις προϋποθέσεις (2) και (3) τότε η σ.δ $\{X_n\}$ με $X_n(\omega) = \omega(n)$, έχει κατανομές πεπερασμένης διάστασης μ_k. Το θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί και για τον $\mathbb{R}^{[0,1]}$ τον χώρο όλων των συναρτήσεων $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}$:

Ορισμός 2.4 Το σύστημα των κατανομών πεπερασμένων διαστάσεων $\mu_{t_1,...t_k}$ είναι συνεπείς αν οι από κοινού σ.κ.π

$$F_{t_1,....,t_k}(z_1, ..., z_k) = \mu_{t_1,...t_k}((-\infty, z_1] \times ... \times (-\infty, z_k])$$

ικανοποιούν τις προϋποθέσεις συνέπειας:

$$F_{t_1,....,t_k,t_{k+1}}(z_1, ..., z_k, \infty) = F_{t_1,....,t_k}(z_1, ..., z_k)$$

και αν σ είναι μία μετάθεση του $(1, ..., k)$ τότε:

$$F_{t_{\sigma(1)},....,t_{\sigma(k)}}(z_{\sigma(1)}, ..., z_{\sigma(k)}) = F_{t_1,....,t_k}(z_1, ..., z_k)$$

θεώρημα 2.4.2 Έστω $\mu_{t_1,...t_k}$ είναι ένα συνεπές σύστημα κατανομών πεπερασμένων διαστάσεων. Αν για τον $\mathbb{R}^{[0,1]}$ ορίσουμε ως $\mathcal{F}$ την σ-άλγεβρα που παράγεται από τα σύνολα πεπερασμένης διάστασης $\{\omega : \omega(t_i) \in \mathcal{B}_i, i = 1, 2, ..., n\}$ όπου $\mathcal{B}_i$ είναι *Borel* υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{F})$ τέτοιο ώστε η σ.δ. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ με $X_t(\omega) = \omega(t)$, εχουν κατανομές πεπερασμένης διάστασης $\mu_{t_1,...t_k}$

Κεφάλαιο 3

Σφιχτότητα και το Θεώρημα *Prohorov*

3.1 Σφιχτότητα των μέτρων πιθανότητας

Στον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ δείξαμε ότι η ασθενής σύγκλιση είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση των κατανομών πεπερασμένης διάστασης. Αυτό εν γένει δεν ισχύει για όλους μετρικούς χώρους. Θα δούμε ένα αντιπαράδειγμα στο επόμενο κεφάλαιο. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε μια καινούρια έννοια, αυτή της σφιχτότητας η οποία παίζει άμεσο ρόλο στη σύνδεση της ασθενούς σύγκλισης και στη σύγκλιση των κατανομών πεπερασμένης διάστασης

Ορισμός 3.1.1 Έστω (S, ρ) μετρικός χώρος. Μια οικογένεια Π μέτρων πιθανότητας ονομάζεται **σφιχτή** αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K \subset S$ τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}(K) > 1 - \epsilon$$

για κάθε $\mathbb{P} \in \Pi$

Λήμμα 3.1.1 Έστω (S, ρ) μετρικός χώρος. Αν ο S είναι πλήρης και διαχωρίσιμος, τότε κάθε μέτρο πιθανότητας στον $(S, \mathcal{S})$ είναι σφιχτό

Απόδειξη Έστω $\mathbb{P}$ ένα μέτρο πιθανότητας στον $(S, \mathcal{S})$ και $\epsilon > 0$. Έχουμε ότι ο S είναι διαχωρίσιμος άρα είναι και $Lindelof \implies$ Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια ακολουθία $\{A_{k_i}\}_i$ από $1/k-$μπάλες για τις οποίες ισχύει ότι

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{k_i}$$

Από την συνέχεια του μέτρου πιθανότητας, μπορούμε να επιλέξουμε ένα n_k τέτοιο ώστε αν $B_k = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup ... \cup A_{k_{n_k}}$ να ισχύει $\mathbb{P}(B_k) > 1 - \frac{\epsilon}{2^k}$. Επίσης ο S είναι πλήρης. Θέτουμε

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$$

Ισχύει ότι υπάρχει k_ϵ για το οποίο $C \subset B_{k_\epsilon}$ και $\frac{1}{k_\epsilon} < \epsilon$, δηλαδή το B_{k_ϵ} καλύπτεται από πεπερασμένου το πλήθος ϵ-μπάλες. Επομένως, το C είναι ολικά φραγμένο, και το $\overline{C}$ είναι πλήρες. Από το θεώρημα 1.1.4 έχουμε ότι το $K = \overline{C}$ είναι συμπαγές και ισχύει ότι $\mathbb{P}(K^c) < \mathbb{P}(C^c) < \epsilon$ και έχουμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα Έστω η ακολουθία τ.μ. $(X_n)_n$ στον $\mathbb{R}$ με σ.μ.π

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n}$$

Θα δείξουμε ότι η $(X_n)_n$ ως οικογένεια είναι σφιχτή. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \epsilon$ για κάθε $n \geq M$. Θέτουμε $K = [-M^2, M^2]$, το K είναι συμπαγές, και αν $n \leq M$ τότε $0 \in K$ και $n^2 \in K$ επομένως $\mathbb{P}(X_n \in K) = 1 > 1 - \epsilon$. Αν τώρα $n > M$ έχουμε μονο $0 \in K$ επομένως $\mathbb{P}(X_n \in K) = 1 - \frac{1}{n} > 1 - \epsilon$

Ορισμός 3.1.2 Μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας Π στον $(S, \mathcal{S})$ ονομάζεται **σχετικά συμπαγής** αν κάθε ακολουθία στοιχείων της Π, έχει υπακολουθία που να συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο μέτρο πιθανότητας (το οποίο δεν είναι κατ ανάγκη στοιχείο της Π)

Ορισμός 3.1.2 Έστω $\mathcal{P}$ ο χώρος όλων των μέτρων πιθανότητας στον $(S, \mathcal{S})$. Η απόσταση *Prohorov* $\pi(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$, $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in \mathcal{P}$ ορίζεται ως

$$\pi(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \inf\{\epsilon > 0 : \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{Q}(A^\epsilon) + \epsilon, \quad \mathbb{Q}(A) \leq \mathbb{P}(A^\epsilon) + \epsilon \quad \forall A \in \mathcal{S}\}$$

όπου $A^\epsilon = \{x \in S : \rho(x, A) < \epsilon\}$

Λήμμα 3.1.2 Η απόσταση *Prohorov* είναι μετρική στον $\mathcal{P}$

Απόδειξη Είναι άμεσο ότι $\pi(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \pi(\mathbb{Q}, \mathbb{P})$ και τετριμένα $\pi(\mathbb{P}, \mathbb{P}) = 0$

Έστω $\pi(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = 0$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε F κλειστό έχουμε ότι $\mathbb{P}(F) \leq \mathbb{Q}(F^\epsilon) + \epsilon$. Αφήνοντας το $\epsilon \to 0$ έχουμε $\mathbb{P}(F) \leq \mathbb{Q}(F)$. Λόγω συμμετρίας $\mathbb{Q}(F) \leq \mathbb{P}(F)$ επομένως $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$

Για την τριγωνική ανισότητα, έστω ότι $\pi(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_3) < \epsilon_1$ και $\pi(\mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3) < \epsilon_2$. Θα δείξουμε πρώτα ότι για κάθε $A \in \mathcal{S}$, $(A^a)^b \subset A^{a+b}$. Πράγματι, έστω $x \in (A^a)^b$, τότε $\rho(x, A^a) < b$. Για κάθε $y \in A$ και για κάθε $z \in A^a$ έχουμε

$$\rho(x, A) \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

επειδή η τελευταία ισχύει για κάθε $y \in A$ τότε $\rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \rho(z, A) < \rho(x, z) + a$ και επειδή ισχύει και για κάθε $z \in A^a$ έχουμε $\rho(x, A) < \rho(x, A^a) + a < b + a$

Έχουμε λοιπόν ότι για κάθε $A \in \mathcal{S}$

$$\mathbb{P}_1(A) \leq \mathbb{P}_3(A^{\epsilon_1}) + \epsilon_1 \leq \mathbb{P}_2((A^{\epsilon_1})^{\epsilon_2}) + \epsilon_1 + \epsilon_2 \leq$$

$$\leq \mathbb{P}_2(A^{\epsilon_1+\epsilon_2}) + \epsilon_1 + \epsilon_2$$

λόγω συμμετρίας ισχύει

$$\mathbb{P}_2(A) \leq \mathbb{P}_1(A^{\epsilon_1+\epsilon_2}) + \epsilon_1 + \epsilon_2$$

Αρα $\pi(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) < \epsilon_1 + \epsilon_2$ και επειδή το τελευταίο ισχύει για κάθε ϵ_1 , ϵ_2 για τα οποια $\pi(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_3) < \epsilon_1$ και $\pi(\mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3) < \epsilon_2$ καταλήγουμε στο ότι

$$\pi(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) \leq \pi(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_3) + \pi(\mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3)$$

Λήμμα 3.1.3 Έστω ότι (S, ρ) μετρικός χώρος, διαχωρίσιμος και $\mathbb{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(S, \mathcal{S})$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν αριθμήσιμου το πλήθος ανοικτές μπάλες $B_1, B_2, ...$ τέτοιες ώστε:

(i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = S$
(ii) Αν r_i η ακτίνα των B_i, τότε $r_i < \delta$
(iii) $\mathbb{P}(\partial B_i) = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$

Απόδειξη Έστω D αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του S και $x \in D$. Αν $S_\rho(x, r) = \{y \in S : \rho(x, y) = r\}$. Ισχύει ότι για κάθε ανοικτή μπάλα ότι $\partial B(x, r) \subset S_\rho$. Έστω $\delta > 0$. Θέτουμε $\mathcal{A} = \{S_\rho(x, r) : \frac{\delta}{2} < r < \delta\}$. Τα σύνολα στην $\mathcal{A}$ είναι ξένα ανα 2 επομένως υπάρχουν αριθμησίμου το πλήθος r, με $\frac{\delta}{2} < r < \delta$ με $\mathbb{P}(S_\rho(x, r)) > 0$. Επομένως υπάρχει r_x με $\frac{\delta}{2} < r_x < \delta\}$ τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(S_\rho(x, r_x) = 0$. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία για κάθε $x \in D$, επομένως για κάθε $x \in D$ υπάρχει r_x τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(\partial B(x, r_x)) = 0$. επειδή το D είναι πυκνό οι μπάλες $B(x, r_i)$ καλύπτουν τον S και επειδή το D είναι αριθμήσιμο, οι μπάλες είναι αριθμήσιμου το πλήθος.

Θεώρημα 3.1.1 Έστω ότι ο S είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}$ μέτρα πιθανότητας στον $(S, \mathcal{S})$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

(ii) $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}$

Απόδειξη $(i) \implies (ii)$ Έστω $\epsilon > 0$. Ζητάμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\pi(\mathbb{P}_n, \mathbb{P}) \leq \epsilon$ το οποίο σημαίνει ότι για κάθε $A \in \mathcal{S}$ ισχύει

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}_n(A^\epsilon) + \epsilon$$

$$\mathbb{P}_n(A) \leq \mathbb{P}(A^\epsilon) + \epsilon$$

Έστω $\delta > 0$ με $\delta < \frac{\epsilon}{3}$. Από λήμμα 3.1.3, υπάρχουν μπάλες $B_1, B_2, ...$ με ακτίνες μικρότερες του $\frac{\delta}{2}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = S$ και $\mathbb{P}(\partial B_i) = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. από την συνέχεια του μέτρου, υπάρχει k τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k} B_i) \geq 1 - \delta \qquad (1)$$

Θέτουμε τώρα $\mathcal{B} = \{\bigcup_{i \in I} B_i : I \subset 1, ..., k\}$. Η $\mathcal{B}$ είναι πεπερασμένη κλάση και θα την χρησιμοποιήσουμε για να προσεγγίσουμε αυθαίρετα $Borel$ υποσύνολα. Άν $B \in \mathcal{B}$, τότε $\partial B \subset \partial B_1 \cup ... \cup \partial B_k$ επομένως $\mathbb{P}(\partial B) = 0$, επομένως το B είναι $\mathbb{P}$-συνεχές. Από υπόθεση, $\mathbb{P}_n(B) \to \mathbb{P}(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$. Επιλέγουμε n_0 τέτοιο ώστε

$$|\mathbb{P}_n(B) - \mathbb{P}(B)| < \delta$$

για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $B \in \mathcal{B}$ επιλέγοντας $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$

$$\mathbb{P}_n(\bigcup_{i=1}^{k} B_i) > \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k} B_i) - \delta > 1 - 2\delta \qquad (2)$$

Έστω τώρα $A \in \mathcal{S}$. θεωρούμε την προσέγγιση του A το σύνολο

$$C = \bigcup \{B_i, i = \{1, 2, ...k\} : A \cap B_i \neq \emptyset\} \in \mathcal{B}$$

Έστω r_j η ακτίνα της μπάλας B_j για κάθε $j = 1, ..., k$. Παρατηρούμε ότι αν $x \in C$ τότε θα υπάρχει B_i με $x \in B_i$ και $B_i \cap A \neq \emptyset$ επομένως $0 \leq \rho(x, A) < 2r_i < \delta$ δηλαδή $C \subset A^\delta$
Επίσης ισχυριζόμαστε ότι

$$A = [A \cap (\bigcup_{i=1}^{k} B_i)] \cup [A \cap (\bigcup_{i=1}^{k} B_i)^c] \subset C \cup [A \cap (\bigcup_{i=1}^{k} B_i)^c] \qquad (3)$$

πράγματι, $A \cap (\bigcup_{i=1}^{k} B_i) = \bigcup_{i=1}^{k} (A \cap B_i) \subset \bigcup_{i \in J} B_i = C$ όπου J είναι το σύνολο των δεικτών i για τους οποίους $B_i \cap A \neq \emptyset$. αξιοποιώ ντας τις (1),(2) και (3) και για κάθε $n \geq n_0$

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}((\bigcup_{i=1}^{k} B_i)^c) \leq \mathbb{P}(C) + \delta \leq \mathbb{P}_n(C) + 2\delta \leq$$

$$\leq \mathbb{P}_n(A^\delta) + 2\delta \leq \mathbb{P}_n(A^\epsilon) + \epsilon$$

ομοίως

$$\mathbb{P}_n(A) \leq \mathbb{P}_n(C) + \mathbb{P}_n((\bigcup_{i=1}^{k} B_i)^c) \leq \mathbb{P}_n(C) + 2\delta \leq \mathbb{P}(C) + 3\delta \leq$$

$$\leq \mathbb{P}(A^\delta) + 3\delta \leq \mathbb{P}(A^\epsilon) + \epsilon$$

Εφόσον το A ηταν τυχαίο έχουμε το ζητούμενο.

$(ii) \implies (i)$ Έστω $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}$. Τότε υπάρχει $(x_n)_n$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $x_n \to 0$ και

$$\mathbb{P}_n(F) \leq \mathbb{P}(F^{x_n}) + x_n$$

για κάθε F κλειστό. Επομένως

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(F) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(F^{x_n}) + x_n = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(F^{x_n}) = \mathbb{P}(F)$$

Άρα $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

Παρατήρηση Σε έναν πλήρη και διαχωρίσιμο μετρκό χώρο S, μία σχετικά συμπαγής οικογένεια Π μέτρων πιθανότητας στον $(S, \mathcal{S})$, είναι σχετικά συμπαγής ως σύνολο του μετρικού χώρου $(\mathcal{P}, \pi)$. Από την ισοδυναμία της ασθενούς σύγκλισης και της π-σύγκλισης, έχουμε ότι η Π είναι σχετικά συμπαγής αν και μόνο αν η $\overline{\Pi}$ είναι π-συμπαγής.

Θεώρημα 3.1.2 Έστω $\mathbb{P}_n$ και $\mathbb{P}$ μέτρα πιθανότητας στον $(S, \mathcal{S})$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

(ii) Κάθε υπακολουθία του $\mathbb{P}_n$ περιέχει μια επιπλέον υπακολουθία, $\mathbb{P}_{n''}$ με $\mathbb{P}_{n''} \Rightarrow \mathbb{P}$

Απόδειξη $(i) \implies (ii)$ Έστω $\mathbb{P}_{n'}$ μια υπακολουθία του $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}_{n''}$ υπακολουθία του $\mathbb{P}_{n'}$ και $A \in \mathcal{S}$, $\mathbb{P}$-συνεχές. Τότε $\mathbb{P}_{n''}(A) \to \mathbb{P}(A)$ ως υπακολουθία πραγματικών αριθμών.

$(ii) \implies (i)$ Έστω ότι η $\mathbb{P}_n$ δεν συγκλίνει στο $\mathbb{P}$. Τότε υπάρχει $f : S \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη με $\int_S f(x)d\mathbb{P}_n(x)$ να μην συγκλίνει στο $\int_S f(x)d\mathbb{P}(x)$. Δηλαδή υπάρχει $\epsilon > 0$ και υπακολουθία του $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}_{n'}$ με

$$|\int_S f(x)d\mathbb{P}_{n'}(x) - \int_S f(x)d\mathbb{P}_n(x)| \geq \epsilon$$

για κάθε n' όρο της ακολουθίας, το οποίο σημαίνει ότι για κάθε υπακολουθία $\mathbb{P}_{n''}$ της $\mathbb{P}_{n'}$ έχουμε

$$|\int_S f(x)d\mathbb{P}_{n''}(x) - \int_S f(x)d\mathbb{P}_n(x)| \geq \epsilon$$

το οποίο είναι άτοπο.

3.2 Το θεώρημα *Prohorov*

Θεώρημα 3 Έστω (S, ρ) μετρικός χώρος πλήρης και διαχωρίσιμος, και Π οικογένεια μέτρων πιθανότητας στον $(S, \mathcal{S})$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) Η Π είναι σφιχτή

(ii) Η Π είναι σχετικά συμπαγής

Απόδειξη $(i) \implies (ii)$ Έστω $(\mathbb{P}_n)_n$ ακολουθία της Π. Εφόσον η Π είναι σφιχτή, επιλέγουμε $K_1 \subset K_2 \subset ....$ με K_i συμπαγή, τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $\mathbb{P}_n(K_i) > 1 - \frac{1}{i}$. Την ακολουθία $\{K_i\}_i$ την κατασκευάζουμε ως εξής:

Επιλέγουμε K_1 συμπαγές τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n(K_1) > 0$. Τώρα επιλέγουμε K_2' συμπαγές τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n(K_2') > \frac{1}{2}$. Θέτουμε $K_2 = K_1 \cup K_2'$. Τότε το K_2 είναι συμπαγές και ισχύει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n(K_2) \geq \mathbb{P}_n(K_2') > \frac{1}{2}$ και $K_1 \subset K_2$. Επαγωγικά κατασκευάζουμε τα υπόλοιπα μέλη της ακολουθίας.

Θέτουμε επίσης $K_\infty = \bigcup_i K_i$, και ισχυριζόμαστε ότι το K_∞ είναι διαχωρίσιμο. Πράγματι, έστω $\bigcup_{j \in J} U_j$ ανοικτό κάλυμμα του K_∞ όπου J αυθαίρετο σύνολο δεικτών. Τότε για κάθε $i = 1, 2, ...$, $K_i \subset \bigcup_{j \in J} U_j$. Αφού το K_i είναι συμπαγές, τότε υπάρχει F_i πεπερασμένο με $K_i \subset \bigcup_{j \in F_i} U_j$. Για $I = \bigcup_i F_i$, το I είναι αριθμήσιμο με $K_\infty \subset \bigcup_{j \in I} U_j$.

Από θεώρημα 1.1.3 (i), υπάρχει αριθμήσιμη κλάση $\mathcal{A}$ ανοικτών συνόλων με την ιδιότητα ότι άν G είναι ανοικτό και $x \in K_\infty \cap G$ τότε $x \in A \subset \overline{A} \subset G$ όπου $A \in \mathcal{A}$. Θέτουμε τώρα μία νέα κλάση

$$\mathcal{H} = \{\{\bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_{m_j}} \cap K_{i_j} : k \in \mathbb{N}, A_{m_j} \in \mathcal{A}\} \cup \emptyset\}$$

Η $\mathcal{H}$ είναι αριθμήσιμη δήλαδή $\mathcal{H} = \{H_j : j \in \mathbb{N}\}$. Όμοια όπως στο θεώρημα του $Helly$ θεωρούμε την ακολουθία στον $[0,1]^{\mathbb{N}}$:

$$(\mathbb{P}_n(H_1), \mathbb{P}_n(H_2), ...)$$

Από θεώρημα $Tychonoff$, ο $[0,1]^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγής επομένως υπάρχει υπακολουθία $(\mathbb{P}_{n_k}((H_i)_i)_k$ οι οποία συγκλίνει σε σημείο του $[0,1]^{\mathbb{N}}$. θέτουμε τώρα

$$a(H) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_{n_k}(H)$$

για κάθε $H \in \mathcal{H}$. Επιπλέον, για G ανοικτά και αυθαίρετα $M \subset S$ ορίζουμε:

$$\beta(G) = \sup_{H\subset G} a(H) \qquad \gamma(M) = \inf_{G\supset M} b(G)$$

Ο στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε στον $(S, \mathcal{S})$ ένα μέτρο πιθανότητας, $\mathbb{P}$ τέτοιο ώστε για κάθε G ανοικτό να ισχύει $\mathbb{P}(G) = \beta(G)$. Τότε για κάθε $H \subset G$ θα ισχύει

$$a(H) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_{n_k}(H) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathbb{P}_{n_k}(G)$$

το οποίο σημαίνει ότι $\mathbb{P}(G) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathbb{P}_{n_k}(G)$ που θα ολοκληρώσει την απόδειξη.
Η κατασκευή αυτού του μέτρου θα γίνει σε 7 βήματα:

Βήμα 1) Θα δείξουμε ότι αν F κλειστό και G ανοικτό με $F \subset G$ και $F \subset H$ για κάποιο $H \in \mathcal{H}$, τότε υπάρχει $H_0 \in \mathcal{H}$ με $F \subset H_0 \subset G$.

Πράγματι, αφού $F \subset H$ και η $\{K_i\}_i$ είναι αύξουσα, τότε $F \subset K_j$ για κάποιο $j = 1, 2, ...$ και επειδή F κλειστό τότε θα είναι και συμπαγές. Για κάθε $x \in F$ έχουμε ότι $x \in K_\infty \cap G$ άρα υπάρχει $A_x \in \mathcal{A}$ με $x \in A_x \subset \overline{A_x} \subset G$. Το $\bigcup_{x\in F} A_x$ είναι ανοικτό κάλυμμα του F επομένως υπάρχουν x_1,...,$x_k \in F$ με $F \subset \bigcup_{i=1}^k A_{x_i}$. Επομένως θέτουμε $H_0 = \bigcup_{i=1}^k \overline{A_{x_i}} \cap K_j$

Βήμα 2) Θα δείξουμε ότι η β είναι πεπερασμένα υποπροσθετική στα ανοικτά υποσύνολα.

Πράγματι, έστω $H \subset G_1 \cup G_2$ όπου $H \in \mathcal{H}$ και G_1, G_2 ανοικτά. ορίζουμε:

$$F_1 = \{x \in H : \rho(x, G_1^c) \geq \rho(x, G_2^c)\}$$

$$F_2 = \{x \in H : \rho(x, G_2^c) \geq \rho(x, G_1^c)\}$$

Έχουμε λοιπόν ότι $H = F_1 \cup F_2$ (διότι αν $x \in H \implies x \in G_1 \cup G_2$. αν $x \in G_1 \backslash G_2$, τότε $\rho(x, G_2^c) = 0$ και $\rho(x, G_1^c) > 0$, δηλαδή $x \in F_1$. Ομοίως αν $x \in G_2 \backslash G_1$ έχουμε ότι $x \in F_2$. Αν $x \in G_1 \cap G_2$ τότε $\rho(x, G_1^c) > 0$ και $\rho(x, G_2^c) > 0$. επομένως θα έχουμε $\rho(x, G_2^c) > \rho(x, G_1^c)$ είτε $\rho(x, G_1^c) > \rho(x, G_2^c) > 0$ είτε $\rho(x, G_2^c) = \rho(x, G_1^c) > 0$ σε κάθε περίπτωση $x \in F_1 \cup F_2$). Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι $F_1 \subset G_1$ και $F_2 \subset G_2$. Σύμφωνα με το βήμα 1) υπάρχουν H_1 και H_2 στοιχεία της $\mathcal{H}$ τέτοια ώστε $F_i \subset H_i \subset G_i$ $i = 1, 2$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι

α) $a(H_1) \leq a(H_2)$, αν $H_1 \subset H_2$
β) $a(H_1 \cup H_2) = a(H_1) + a(H_2)$, αν $H_1 \cap H_2 = \emptyset$
γ) $a(H_1 \cup H_2) \leq a(H_1) + a(H_2)$

Με βάση των α), β), γ) έχουμε

$$a(H) \leq a(H_1) + a(H_2) \leq \beta(G_1) + \beta(G_2)$$

επειδή το τελευταίο ισχύει για κάθε $H \subset G_1 \cup G_2$ τότε

$$\beta(G_1 \cup G_2) \leq \beta(G_1) + \beta(G_2)$$

Βήμα 3) Θα δείξουμε ότι η β είναι σ-υποπροσθετική στα ανοικτά σύνολα.

Πράγματι, αν $H \subset \bigcup_{n\geq 1} G_n$ με G_n ανοικτό για κάθε $n \geq 1$ και $H \in \mathcal{H}$, τότε αφού το H είναι συμπαγές υπάρχει $n_0 \geq 1$ με $H \subset \bigcup_{n\leq n_0} G_n$ (αναδιατάσσουμε πιθανώς τους όρους της G_n). Από το βήμα 2) έχουμε:

$$a(H) \leq \sum_{n\leq n_0} \beta(G_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta(G_n)$$

εφόσον το τελευταίο ισχύει για κάθε $H \subset \bigcup_{n\geq 1} G_n$ τότε $\beta(\bigcup_{n\geq 1} G_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta(G_n)$

Βήμα 4) θα δείξουμε ότι το γ είναι εξωτερικό μέτρο

Πράγματι, είναι φανερό ότι $\gamma(\emptyset) = 0$. Επίσης η γ είναι μονότονη: Έστω $M_1 \subset M_2$ θέτουμε

$$A_1 = \{\beta(G) : G \supset M_1, \quad G \quad \alpha\nu o\iota\kappa\tau o\}$$

$$A_2 = \{\beta(G) : G \supset M_2, \quad G \quad \alpha\nu o\iota\kappa\tau o\}$$

λόγω της μονοτονίας των M_i $i = 1, 2$ ισχύει ότι $A_2 \subset A_1$ άρα $\inf(A_2) \geq \inf(A_1)$ δηλαδή

$$\gamma(M_2) \geq \gamma(M_1)$$

Μένει μονο να δείξουμε ότι η γ είναι αριθμήσιμα υποπροσθετική: Έστω $\{M_n\}_n$ ακολουθία αυθαίρετων υποσυνόλων και $\epsilon > 0$. Υπάρχουν G_n ανοικτά τέτοια ώστε $M_n \subset G_n$ και $\beta(G_n) < \gamma(M_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$ από το βήμα 3) έχουμε

$$\gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) \leq \beta(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta(G_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(M_n) + \epsilon$$

Επομένως

$$\gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(M_n)$$

Βήμα 5) θα δείξουμε για κάθε G ανοικτό και κάθε F κλειστό, ότι $\beta(G) \geq \gamma(F \cap G) + \gamma(F^c \cap G)$

Πράγματι, έστω G ανοικτό, F κλειστό και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν H_3 και H_4 στο $\mathcal{H}$ τέτοια ώστε

$$H_3 \subset F^c \cap G \quad \kappa\alpha\iota \quad a(H_3) > \beta(F^c \cap G) - \frac{\epsilon}{2}$$

$$H_4 \subset H_3^c \cap G \quad \kappa\alpha\iota \quad a(H_3) > \beta(H_3^c \cap G) - \frac{\epsilon}{2}$$

Αφού ισχύει ότι $H_4 \subset H_3^c \cap G \subset H_3^c$ τότε τα H_3 και H_4 είναι ξένα, και επιπλέον αφού $H_3 \subset F^c \cap G$ τότε περιέχονται στο G (σημ. ότι $\beta(G) = \sup_{H\subset G} a(H)$).
Έχουμε λοιπόν

$$\beta(G) \geq a(H_3 \cup H_4) = a(H_3) + a(H_4) > \beta(F^c \cap G) - \frac{\epsilon}{2} + \beta(H_3^c \cap G) - \frac{\epsilon}{2} \geq$$

$$\geq \gamma(F^c \cap G) + \gamma(F \cap G) - \epsilon$$

και αφήνοντας το $\epsilon \to 0$ έχουμε το ζητούμενο

Βήμα 6) Θα δείξουμε ότι αν F είναι κλειστό, τότε $F \in \mathcal{M}_\gamma$, όπου $\mathcal{M}_\gamma$ η κλάση των γ-μετρήσιμων συνόλων.

Πράγματι έστω L αυθαιρετο υποσύνολο του S και G ανοικτό με $G \supset L$. Από βήμα 5) και την μονοτονία της γ έχουμε ότι για κάθε F κλειστό:

$$\beta(G) \geq \gamma(F \cap G) + \gamma(F^c \cap G) \geq \gamma(F \cap L) + \gamma(F^c \cap L)$$

και επειδή η τελευταία ισχύει για κάθε $G \supset L$ ανοικτο τότε

$$\gamma(L) \geq \gamma(F \cap L) + \gamma(F^c \cap L)$$

Τέλος τα L και F είναι τυχαία επιλεγμένα επομένως έχουμε το ζητούμενο.

Βημα 7) Είναι $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_\gamma$ και αν θέσουμε $\mathbb{P} = \gamma|_{\mathcal{S}}$ τότε το $\mathbb{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(S, \mathcal{S})$ με $\mathbb{P}(G) = \gamma(G) = \beta(G)$ για κάθε G ανοικτό

Πράγματι, αφού κάθε κλειστό υποσύνολο του S είναι στοιχείο της $\mathcal{M}_\gamma$ και η $\mathcal{M}_\gamma$ είναι σ-αλγεβρα τότε $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_\gamma$. Για να δείξουμε ότι το το $\mathbb{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας, θα δείξουμε πρώτα ότι για κάθε $i = 1, 2, ..$ τα $K_i \in \mathcal{H}$. Πράγματι, έστω $i \geq 1$. Όπως δείξαμε, υπάρχουν $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k} \in \mathcal{A}$ με $K_i \subset \bigcup_{j=1}^k A_{i_j}$ επομένως, $K_i \subset \bigcup_{j=1}^k \overline{A_{i_j}}$, επομένως $K_i = \bigcup_{j=1}^k (\overline{A_{i_j}} \cap K_i) \in \mathcal{H}$, επομένως:

$$1 \geq \mathbb{P}(S) = \beta(S) \geq \sup_{i \geq 1} a(K_i) > \sup_{i \geq 1} (1 - 1/i) = 1$$

το οποίο ολοκληρώνει το πρώτο μέρος της απόδειξης.

$(ii) \implies (i)$ Θεωρούμε την ακολουθία $\{G_n\}_n$ ανοικτών συνόλων με $G_n \uparrow S$. Έστω $\epsilon > 0$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει n_ϵ τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(G_{n_\epsilon}) > 1 - \epsilon$, για κάθε $\mathbb{P} \in \Pi$.

Πράγματι, αν δεν ίσχυε αυτό, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\mathbb{P}_n \in \Pi$ τέτοιο ώστε $\mathbb{P}_n(G_n) \leq 1 - \epsilon$. Επειδή η Π είναι σχετικά συμπαγής, τότε υπάρχει υπακολουθία $(\mathbb{P}_{n_k})_k$ τέτοια ώστε $\mathbb{P}_{n_k} \Rightarrow \mathbb{Q}$ για κάποιο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$. Τότε

$$\mathbb{Q}(G_n) \leq \liminf_{k \to \infty} \mathbb{P}_{n_k}(G_n) \leq \liminf_{k \to \infty} \mathbb{P}_{n_k}(G_{n_k}) \leq 1 - \epsilon$$

και επειδή $G_n \uparrow S$, $1 = \mathbb{Q}(S) = \lim_n(G_n) \leq 1 - \epsilon$ το οποίο είναι άτοπο.

Έστω $\{B(x_i, \frac{1}{k})\}_i$ ακολουθία ανοικτών μπαλών ακτίνας $1/k$ η οποία καλύπτει τον S (σημ. ότι ο S είναι διαχωρίσιμος). Επομένως για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $S = \bigcup_i B(x_i, \frac{1}{k})$. Από ισχυρισμό για δοσμένο $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_k = n_k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbb{P} \in \Pi$

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n_k} B(x_i, \frac{1}{k})) > 1 - \frac{\epsilon}{2^k}$$

Από την απόδειξη του λήμματος 3.1.1 έχουμε ότι το $C = \bigcap_k \bigcup_{i \leq n_k} B(x_i, \frac{1}{k})$ είναι ολικά φραγμένο και ότι το $K = \overline{C}$ είναι συμπαγές, με $\mathbb{P}(K^c) < \epsilon$ για κάθε $\mathbb{P} \in \Pi$

Κεφάλαιο 4

Το συναρτησιακό κεντρικό οριακό θεώρημα στον $C[0,1]$

4.1 Ο διανυσματικός χώρος $C[0,1]$ με τη νόρμα $\|.\|_\infty$

Ορισμός 4.1.1. Ένα στοιχείο του $C = C[0,1]$ είναι μια συνεχής συνάρτηση $x : [0,1] \to \mathbb{R}$. Αν ορίσουμε

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| : t \in [0,1]\}$$

τότε ο $(C[0,1], \|.\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα, επομένως ο $(C[0,1], \rho_\infty)$ είναι μετρικός χώρος με ρ_∞ η μετρική που επάγει η νόρμα (δηλ. $\rho_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty$).
Τέλος, συμβολίζουμε με $\mathcal{C}$ την *Borel* σ-άλγεβρα υποσυνόλων του C

Ορισμός 4.1.2 Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία στον C και $x \in C$, με την $(x_n)_n$ να συγκλίνει κατά σημείο στη x. Θέτουμε $M_n = \sup\{|x_n(t) - x(t)| : t \in [0,1]\}$. Η $(x_n)_n$ **συγκλίνει ομοιόμορφα** στη x αν $M_n \to 0$

Ορισμός 4.1.3 Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία στον C. Η $(x_n)_n$ ονομάζεται **ομοιόμορφα** *Cauchy* αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \epsilon$$

για κάθε $t \in [0,1]$

Πρόταση 4.1.1 Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία στον C και $x : [0,1] \to \mathbb{R}$. Τότε

(i) $x_n \xrightarrow{\rho_\infty} x$ αν και μόνο αν η $(x_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη x.

(ii) η $(x_n)_n$ είναι ακολουθία *Cauchy* στον $(C[0,1], \|.\|_\infty)$ αν και μόνο αν η $(x_n)_n$ είναι ομοιόμορφα *Cauchy* ακολουθία συναρτήσεων.

Πρόταση 4.1.2 Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία στον C και $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $x_n \xrightarrow{\rho_\infty} x$. Τότε $x \in C$.

Πρόταση 4.1.3 Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία στον C. Η $(x_n)_n$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι ομοιόμορφα *Cauchy*.

Πόρισμα Ο $(C[0,1], \rho_\infty)$ είναι πλήρης.

Απόδειξη Έστω $(x_n)_n$ *Cauchy* ακολουθία. Από πρόταση 4.1.1. η $(x_n)_n$ είναι ομοιόμορφα *Cauchy*. Από πρόταση 4.1.3. η $(x_n)_n$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα και συγκλίνει σε συνεχή συνάρτηση (πρόταση 4.1.2). Πάλι από πρόταση 4.1.1. η $(x_n)_n$ είναι ρ_∞-συγκλίνουσα.

Πρόταση 4.1.4 Έστω (S,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και (S',ρ') μετρικός χώρος. Κάθε $f:(S,\rho)\to(S',\rho')$ συνεχής, είναι και ομοιόμορφα συνεχής. Επομένως Αφού ο $[0,1]$ εφοδιασμένος με τη σύνηθη σχετική τοπολογία είναι συμπαγής, τα στοιχεία του C είναι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα 4.1.1. Ο $(C[0,1], \rho_\infty)$ είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε L_k να είναι το σύνολο όλων των πολυγωνικών συναρτήσεων $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ οι οποίες σε κάθε διάστημα της διαμέρισης του [0,1], $\{[\frac{i}{k},\frac{i+1}{k}]\}_{0\le i\le k-1}$ είναι γραμμικές και στα σημεία $\{\frac{i}{k}\}$ έχουν τιμή ρητό. Είναι εμφανές ότι τα L_k έχουν αριθμήσιμου το πλήθος στοιχεία. Θα δείξουμε ότι το $\bigcup_k L_k$ είναι πυκνό στον C.

Έστω $x \in C$ και $\epsilon > 0$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|x(t)-x(\frac{i+1}{k})| < \epsilon, \quad \forall t \in [\frac{i}{k},\frac{i+1}{k}], \quad i=0,1,..,k-1$$

Πράγματι, αφού η x είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $t,s \in [0,1]$ με $|t-s| < \delta$ να ισχύει $|x(t)-x(s)| < \epsilon$. Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{k} < \delta$ που σημαίνει ότι για κάθε $i = 0,1,...,k-1$ έχουμε $|\frac{i+1}{k}-\frac{i}{k}| < \delta$, άρα για κάθε $t \in [\frac{i}{k},\frac{i+1}{k}]$ θα έχουμε $|x(t)-x(\frac{i+1}{k})| < \epsilon$.

Τώρα, από πυκνότητα των ρητών στον $\mathbb{R}$ υπάρχει $y \in L_k$ τέτοιο ώστε $|y(\frac{i+1}{k})-x(\frac{i+1}{k})| < \epsilon$ για κάθε i. Επειδή ο [0,1] είναι συμπαγής, υπάρχει $t_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $\|x-y\|_\infty = |x(t_0)-y(t_0)|$, και επειδή τα $\{[\frac{i}{k},\frac{i+1}{k}]\}_{0\le i\le k-1}$ διαμερίζουν το [0,1] υπάρχει i_0 τέτοιο ώστε $t_0 \in [\frac{i_0}{k},\frac{i_0+1}{k}]$ αρα:

$$|x(t_0)-y(t_0)| \le |x(t_0)-x(\frac{i_0+1}{k})| + |y(t_0)-x(\frac{i_0+1}{k})| < \epsilon + |y(a)-x(\frac{i_0+1}{k})|$$

όπου $a = \frac{i_0+1}{k}$ η $a = \frac{i_0}{k}$ γιατί λόγω της γραμμικότητας της y στο $[\frac{i_0}{k},\frac{i_0+1}{k}]$, η ποσότητα $|y(t)-x(\frac{i_0+1}{k})|$ μεγιστοποιείται στα άκρα του διαστήματος. Είναι εύκολο να δούμε ότι $|y(a)-x(\frac{i_0+1}{k})| < 2\epsilon$ επομένως έχουμε το ζητούμενο

4.2 Ασθενής σύγκλιση στον C

Ορισμός 4.2.1 Έστω X_n, X ορισμένα στον $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ τυχαία στοιχεία του C (δηλαδή για κάθε $\omega \in \Omega$ Το $X(\omega)$ είναι στοιχείο του C). Το X_n θα συγκλίνει στο X **στις πεπερασμένες διαστάσεις** (συμβ $X_n \xrightarrow{\pi.\delta} X$) αν για κάθε πεπερασμένη επιλογή στοιχείων του [0,1], $t_1,...,t_k$ έχουμε

$$(X^{(n)}_{t_1},..,X^{(n)}_{t_k}) \Rightarrow (X_{t_1},..,X_{t_k})$$

Ορισμός 4.2.2 Ορίζουμε τις προβολές $\pi_{t_1,\ldots,t_k} : C \to \mathbb{R}^k$ ώς

$$\pi_{t_1,\ldots,t_k}(x) = (x(t_1), ..., x(t_k))$$

Είναι σχεδόν εμφανές ότι οι προβολές είναι συνεχής για κάθε πεπερασμένη επιλογή $t_1, t_2, ..., t_k$. Πράγματι, αν $x_n \xrightarrow{\rho_\infty} x$ τότε η x_n συγκλίνει κατά σημείο στη x, επομένως

$$\pi_{t_1,\ldots,t_k}(x_n) = (x_n(t_1), ..., x_n(t_k)) \to (x(t_1), ..., x(t_k)) = \pi_{t_1,\ldots,t_k}(x)$$

Προκύπτει λοιπόν από το θεώρημα απεικόνισης ότι αν $X_n \Rightarrow X$, τότε $X_n \xrightarrow{\pi.\delta} X$

Όπως είχαμε αναφέρει στην εισαγωγή του κεφαλαίου 3, σε αντίθεση με τον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, στον C δεν μπορούμε να περάσουμε από τη σύγκλιση των κατανομών πεπερασμένης διάστασης, στην ασθενή σύγκλιση. Για να στηρίξουμε αυτόν τον ισχυρισμό παραθέτουμε ένα αντιπαράδειγμα.

Παράδειγμα Έστω η ακολουθία $(z_n)_n$ στοιχείων του C, με τη z_n να αυξάνεται γραμμικά απ το 0 στο 1 στο διάστημα $[0, \frac{1}{n}]$, φθίνει γραμμικά από το 1 στο 0, στο διάστημα $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ και παραμένει 0 στο διάστημα $[\frac{2}{n}, 1]$. Είναι εμφανές ότι ο $z_n(t) \to 0$ για κάθε $t \in [0, 1]$

Θέτουμε $X_n(\omega) = z_n$ και $X(\omega) = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Επομένως έχουμε ότι $X_n \xrightarrow{\pi.\delta} X$. Θέτουμε $h : C \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \|x\|_\infty$. Η h είναι συνεχής και έχουμε $h(X_n) = h(z_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $h(X) = h(0) = 0$. Αν είχαμε $X_n \Rightarrow X$ τότε απ το θεώρημα απεικόνισης θα είχαμε $h(X_n) \Rightarrow h(X)$ το οποίο όπως δείξαμε δεν ισχύει.

Ωστόσο, στο επόμενο λήμμα (και παρακάτω) θα δούμε ότι οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης παίζουν σημαντικό ρόλο:

Λήμμα 4.2.1 Έστω $\mathbb{P}$ και $\mathbb{Q}$, 2 μέτρα πιθανότητας στον $(C, \mathcal{C})$. Αν $\mathbb{P}\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k} = \mathbb{Q}\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k}$, $k \in \mathbb{N}$ για κάθε $0 \leq t_1 \cdots \leq t_k \leq 1$ τότε $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$

Απόδειξη Ορίζουμε ως $\mathcal{C}_f$ την κλάση των συνόλων πεπερασμένης διάστασης. Τα στοιχεία του είναι της μορφής

$$\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k}(H) = \{y \in C : (y(t_1), \ldots, y(t_k)) \in H\}$$

όπου $0 \leq t_1 \cdots \leq t_k \leq 1$ και $H \in \mathcal{R}^k$. από την συνέχεια των προβολών $\pi_{t_1,\ldots,t_k}$ έχουμε ότι $\mathcal{C}_f \subset \mathcal{C}$

Αν δείξουμε ότι η $\mathcal{C}_f$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και ότι $\sigma(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}$ τότε από το λήμμα 2.1.1. θα έχουμε ότι η $\mathcal{C}_f$ είναι κλάση καθορισμού. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}_f$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές.
Ισχυρισμός: κάθε κλειστή μπάλα $B[x, a]$ μπορεί να γραφτεί ως:

$$B[x, a] = \bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \{|y(r) - x(r)| \leq a\} = A$$

Πράγματι, αν $y \in B[x, a]$ τότε $\|x - y\|_\infty \leq a$ επομένως για κάθε r ρητό στο $[0, 1]$ θα ισχύει $|y(r) - x(r)| \leq a$ αρα $B[x, a] \subset A$.

Αν τώρα $y \in A$ έχουμε ότι για κάθε r ρητό στο $[0, 1]$ θα ισχύει $|y(r) - x(r)| \leq a$. Θέτουμε $f(t) = |x(t) - y(t)|$ συνεχής στο [0,1]. Το [0,1] είναι συμπαγές επομένως υπάρχει $t_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(t_0) = \|y - x\|_\infty$ από πυκνότητα ρητών έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(r_n)_n$ ρητών στο [0,1] με $r_n \to t_0$ επιπλέον έχουμε $f(r_n) \leq a \implies \limsup_n f(r_n) \leq a$ άρα $\|y - x\|_\infty \leq a$ που ολοκληρώνει τον ισχυρισμό.

Επομένως, επειδή για κάθε $x \in C$, $a > 0$ και για r ρητό, το

$$\{y \in C : |y(r) - x(r)| \leq a\} = \pi_r^{-1}([a - x(r), a + x(r)])$$

είναι στοιχείο του $\mathcal{C}_f$, από ισχυρισμό έχουμε ότι το $\sigma(\mathcal{C}_f)$ περιέχει όλες τις κλειστές μπάλες επομένως και τις ανοικτές ($B(x,a) = \bigcup_n B[x, a - \frac{1}{n}]$), και επειδή ο C είναι διαχωρίσιμος έχουμε ότι $\sigma(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}$

Ορισμός 4.2.3 Ορίζουμε τον δείκτη συνέχειας μιας συνάρτησης $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ ως:

$$w_x(\delta) = w(x,\delta) = \sup_{|s-t| \leq \delta} |x(s) - x(t)|, \qquad \delta \in [0,1]$$

Παρατήρηση Για κάθε $x : [0,1] \to \mathbb{R}$, ο δείκτης συνέχειας της x, $w_x(\delta)$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση του δ. επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι $x \in C$ αν και μόνο αν $w_x(\delta) \to 0$ καθώς $\delta \to 0$. Το ευθύ μέρος της απόδειξης είναι άμεσο από τους ορισμούς. Για το αντίστροφο, θα χρειαστούμε το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα* Αν (S,ρ), (S',ρ') μετρικοί χώροι και $x : (S,\rho) \to (S',\rho')$ συνάρτηση που απεικονίζει βασικές ακολουθίες του (S,ρ) σε βασικές ακολουθίες του (S',ρ') τότε η x είναι συνεχής. Αν επιπλέον ο (S,ρ) έχει την ιδιότητα ότι κάθε ακολουθία του έχει βασική υπακολουθία, τότε η x είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Αν τώρα $w_x(\delta) \to 0$ καθώς $\delta \to 0$ επιλέγουμε μια βασική ακολουθία $(t_n)_n$ του [0,1] και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $w_x(\delta) < \epsilon$ για κάθε $\delta \in (0,\lambda)$. Επίσης υπάρχει k_0 τέτοιο ώστε για κάθε $m, n \geq k_0$ να ισχύει $|t_n - t_m| < \delta \implies |x(t_n) - x(t_m)| < \epsilon$. Τέλος επειδή ο [0,1] είναι συμπαγής, κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία επομένως και *Cauchy*.

Λήμμα 4.2.2 για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $x \in C$ η $w_x(\delta)$ είναι συνεχής.

Απόδειξη Έστω $x, y \in C$, $\delta > 0$ και $s, t \in [0,1]$ με $|s-t| < \delta$ έχουμε:

$$|y(s) - y(t)| \leq |y(s) - x(s)| + |x(t) - y(t)| + |x(s) - x(t)| \leq 2\rho(x,y) + w_x(\delta) \implies$$

$$w_y(\delta) - w_x(\delta) \leq 2\rho(x,y)$$

κάνοντας την ίδια διαδικασία για το x καταλήγουμε ότι $|w_y(\delta) - w_x(\delta)| \leq 2\rho(x,y)$

Λήμμα 4.2.3 Έστω $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}$ μέτρα πιθανότητας στον $(C,\mathcal{C})$. Αν οι κατανομές πεπερασμένων διαστάσεων των $\mathbb{P}_n$ συγκλίνουν ασθενώς σε αυτές του $\mathbb{P}$ και αν η $(\mathbb{P}_n)_n$ είναι σφιχτή τότε $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

Απόδειξη Εφόσον η $(\mathbb{P}_n)_n$ είναι σφιχτή απ το θεώρημα *Prohorov* θα είναι και σχετικά συμπαγής επομένως και συγκλίνουσα $\implies$ υπάρχει μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ στον $(C,\mathcal{C})$ τέτοιο ώστε $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{Q}$. Επειδή οι προβολές είναι συνεχείς συναρτήσεις, από θεώρημα απεικόνισης έχουμε για $k \in \mathbb{N}$ και $0 \leq t_1 \ldots t_k \leq 1$ ότι $\mathbb{P}_n\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k} \Rightarrow \mathbb{Q}\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k} \implies$ από υπόθεση έχουμε $\mathbb{P}\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k} = \mathbb{Q}\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k}$ και από το λήμμα 4.2.2. ότι $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$

Δείξαμε προηγουμένως ότι δεν αρκεί να γνωρίζουμε μόνο τη σύγκλιση στις πεπερασμένες διαστάσεις για να μελετήσουμε την ασθενή σύγκλιση μίας ακολουθίας μέτρων πιθανότητας. Μια συνθήκη για την ασθενή σύγκλιση είναι η σχετική συμπάγεια της ακολουθίας. Επειδή Ο C είναι διαχωρίσιμος και συμπαγής και η ακολουθία είναι σφικτή, τότε το θεώρημα *Prohorov* μας δίνει ότι είναι και σχετικά συμπαγής. Επομένως έχει νόημα για μια ακολουθία μέτρων πιθανότητας, να δούμε κάτω υπο ποιες συνθήκες είναι σφικτή.

Θεώρημα 4.2.1 (Θεώρημα *Arzela – Ascoli*) Ένα $A \subset C$ είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν:

$$(i) \sup_{x \in A} |x(0)| < \infty,$$

$$(ii) \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} w_x(\delta) = 0$$

Απόδειξη (ευθύ) Αν το A είναι σχετικά συμπαγές τότε το (i) είναι άμεσο. Για το (ii), για κάθε $x \in \overline{A}$ θέτουμε $f_n(x) = w_x(\delta_n)$, όπου $(\delta_n)_n$ μη αύξουσα με $\delta_n \to 0$. Για κάθε $x \in \overline{A}$ η $(f_n(x))_n$ είναι μη αύξουσα και επιπλέον $f_n(x) \to 0$. Έστω $\epsilon > 0$ θέτουμε

$$G_n = \{x \in \overline{A} : f_n(x) < \epsilon\}$$

τότε επειδή η f είναι συνεχής, τα $(G_n)_n$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\overline{A}$ και επιπλέον το καλύπτουν, επίσης, επειδή το $\overline{A}$ είναι συμπαγές, και η f μη αύξουσα, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\overline{A} \subset G_{n_0}$, επομένως η σύγκλιση $f_n(x) \to 0$ είναι ομοιόμορφη.

(Αντίστροφο) Έστω ότι ισχύουν οι (i) και (ii) και έστω $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε,

$$\sup_{x \in A} w_x(\frac{1}{n}) < \epsilon$$

Επιπλέον, για κάθε $t \in [0,1]$ και για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι

$$|x(t)| \leq |x(0)| + \sum_{i=1}^{n} |x(t\frac{i}{n})| - |x(t\frac{i-1}{n})| \leq |x(0)| + nw_x(\frac{1}{n})$$

από όπου προκύπτει ότι $\|x\|_\infty < \infty$

Θέτουμε $a = \|x\|_\infty < \infty$. Η ιδέα είναι να αξιοποιήσουμε τις ιδιότητες του $(C, \rho(= \|.\|_\infty))$ και συγκεκριμένα την πληρότητα και την διαχωρισιμότητα. Έχοντας αυτές τις ιδιότητες αρκεί να δείξουμε ότι το A είναι ολικά φραγμένο, δηλαδή να βρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο B_ϵ που θα είναι ένα 2ϵ-δίκτυο για το A.

Έστω λοιπόν $E = \{a_i : i = \{0, 1, ..., k\}\}$ μια διαμέριση του $[-a, a]$ τέτοια ώστε $a_i - a_{i-1} \leq \epsilon$ (Μπορούμε να βρούμε μια τέτοια λόγω της συμπάγειας του $[-a, a]$ που επομένως είναι και ολικά φραγμένο). Θέτουμε το B_ϵ να αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ οι οποίες συνδέουν γραμμικά τα σημεία $(\frac{i-1}{n}, a_{j_{i-1}})$, $(\frac{i}{n}, a_{j_i})$. Έστω $x \in A$. Ζητάμε $y \in B_\epsilon$ τέτοιο ώστε $\rho(x, y) \leq 2\epsilon$. Είναι εμφανές, ότι για κάθε $i = 1, ...n$ έχουμε ότι $|x(\frac{i}{n})| \leq a$, επομένως υπάρχουν $a_{j_{i-1}}, a_{j_i} \in E$ για τα οποία $a_{j_{i-1}} \leq x(\frac{i}{n}) \leq a_{j_i}$, δηλαδή υπάρχει $y \in B_\epsilon$ τέτοιο ώστε για κάθε $i = 1, ..., n$ να ισχύει $|x(\frac{i}{n}) - y(\frac{i}{n})| \leq \epsilon$. Από το (ii) της υπόθεσης έχουμε $|x(\frac{i}{n}) - x(\frac{i-1}{n})| \leq \epsilon$, (σημ. έχουμε πάρει κατάλληλο n για το δοσμένο ϵ) και επιπλέον, για κάθε $t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ πάλι από την υπόθεση (ii) έχουμε ότι

$$|x(t) - y(\frac{i}{n})| \leq |x(\frac{i}{n}) - y(\frac{i}{n})| + |x(t) - x(\frac{i}{n})| \leq 2\epsilon$$

και όμοια $|x(t) - y(\frac{i-1}{n})| \leq 2\epsilon$. Λόγω της κατασκευής των $y \in B_\epsilon$, το y θα έχει την μορφή $y(t) = \lambda_1(t)y(\frac{i}{n}) + \lambda_2(t)y(\frac{i-1}{n})$ με $\lambda_1(t) + \lambda_2(t) = 1$, $t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$. Τέλος έχουμε:

$$|x(t) - y(t)| = |(\lambda_1(t) + \lambda_2(t))x(t) - (\lambda_1(t)y(\frac{i}{n}) + \lambda_2(t)y(\frac{i-1}{n}))| \leq 2\lambda_1(t)\epsilon + 2\lambda_2(t)\epsilon = 2\epsilon$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $\rho(x, y) \leq 2\epsilon$

Θεώρημα 4.2.2 Έστω $(\mathbb{P}_n)_n$ ακολουθία μέτρων πιθανότητας στον $(C, \mathcal{C})$. Η οικογένεια $(\mathbb{P}_n)_n$ είναι σφιχτή, αν και μόνο αν ισχύουν ταυτόχρονα:

$$(i) \qquad \lim_{a\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(x : |x(0)| \geq a) = 0$$

$$(ii) \quad \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(x : w_x(\delta) \geq \epsilon) = 0 \quad \forall\epsilon > 0$$

Απόδειξη " => " Έστω ότι η $(\mathbb{P}_n)_n$ είναι σφιχτή και $1 > \eta > 0$. Επιλέγουμε $K \subset C$ συμπαγές, τέτοιο ώστε για κάθε n να ισχύει $\mathbb{P}_n(K) > 1 - \eta$. για $a > \max_{x\in K} x(0)$, από το θεώρημα 4.2.1 έχουμε ότι $K \subset \{x : |x(0)| \leq a\}$ απ όπου προκύπτει το (i). Επίσης πάλι απ το θεώρημα 4.2.1. για κατάλληλο $\delta > 0$ προκύπτει ότι $K \subset \{x : w_x(\delta) \leq \epsilon\}$ για δοσμένο $\epsilon > 0$ από όπου προκύπτει το (ii).

" <= " Σύμφωνα με το (i), για κάθε $\eta > 0$, υπάρχει $a_\eta > 0$ και $n_\eta \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{P}_n(x : |x(0)| \geq a_\eta) \leq \eta \quad \forall n \geq n_\eta \qquad (1)$$

Και από το (ii) της υπόθεσης, για κάθε $\epsilon, \lambda > 0$ υπάρχει $\delta_{\epsilon,\lambda} > 0$ και $n_{\epsilon,\eta} \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}_n(x : w_x(\delta_{\epsilon,\lambda}) \geq \epsilon) \leq \lambda \quad \forall n \geq n_{\epsilon,\lambda} \qquad (2)$$

Επιπλέον, από το Λήμμα 3.1.1. για τα πεπερασμένου πλήθος $k \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι το $\mathbb{P}_k$ είναι σφιχτό. Από την απόδειξη της κατέυθυνσης "$(i) => (ii)$", υπάρχει $a_{\eta,k} > 0$ τέτοιο ώστε $\mathbb{P}_k(x : |x(0)| \geq a_{\eta,k}) \leq \eta$ καθως και υπάρχει $\delta_{\epsilon,\lambda,k} > 0$ τέτοιο ώστε $\mathbb{P}_n(x : w_x(\delta_{\epsilon,\lambda,k}) \geq \epsilon) \leq \lambda$ επομένως μπορούμε να βρούμε $a_\eta > 0$ και $\delta_{\epsilon,\lambda} > 0$ τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι (1) και (2) με $n_\eta = n_{\lambda,\epsilon} = 1$

Έστω λοιπόν $\eta > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mathbb{P}_n(B) \geq 1 - \eta$ όπου $B = \{x : |x(0)| < a_\eta)\}$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ θέτουμε $B_m = \{x : w_x(\delta_{\frac{1}{m}, 2^{-m}\eta}) < \frac{1}{m}\}$ και έχουμε $\mathbb{P}_n(B_m) \geq 1 - 2^{-m}\eta$. Θέτουμε

$$K = \overline{B \cap (\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m)}$$

Παρατηρούμε ότι λόγω του B ικανοποιείται η συνθήκη (i) του θεωρήματος 4.2.1 και λόγω των B_m ικανοποιείται η συνθήκη (ii) του ίδιου θεωρήματος. Άρα το K είναι συμπαγές απ το θεώρημα 4.2.1.

Τέλος έχουμε

$$\mathbb{P}_n(C \backslash (B \cap (\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m))) < 2\eta$$

που σημαίνει ότι $\mathbb{P}_n(K) \geq 1 - 2\eta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πόρισμα Έστω $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}$ μέτρα πιθανότητας στον $(C, \mathcal{C})$. Αν οι κατανομές πεπρασμένων διαστάσεων των $\mathbb{P}_n$ συγκλίνουν ασθενώς σε αυτές του $\mathbb{P}$ και αν

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}_n(x : w_x(\delta) \geq \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

τότε $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

Απόδειξη από υπόθεση, έχουμε ότι για κάθε $H \in \mathcal{R}$ ότι $\mathbb{P}_n\pi_0^{-1}(H) \Rightarrow \mathbb{P}_n\pi_0^{-1}(H)$, για $a > 0$ από θεώρημα *Portmanteau* έχουμε ότι $\limsup_n \mathbb{P}_n(x : |x(0)| \geq a) \leq \mathbb{P}(x : |x(0)| \geq a)$ και $lim_{a\to\infty}\mathbb{P}(x : |x(0)| \geq a) = 0$ επομένως ικανοποιείται και η συνθήκη (i) του θεωρήματος 4.2.2. δηλαδή η $(\mathbb{P}_n)_n$ είναι σφιχτή. Μένει τώρα να εφαρμόσουμε το λήμμα 4.2.3

Λήμμα 4.2.4. Έστω $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ και

$$\min_{1<i<k}(t_i - t_{i-1}) \geq \delta \qquad (1)$$

για κάποιο $\delta > 0$. Αν ορίσουμε $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, τότε για τυχαίο $x \in C$ έχουμε

$$w_x(\delta) \leq 3\max_{1<i\leq k}\sup_{s\in I_i}|x(s) - x(t_{i-1})| \qquad (2)$$

Επιπλεόν για κάθε $\mathbb{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(C, \mathcal{C})$ και για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει:

$$\mathbb{P}(x : w_x(\delta) \geq 3\epsilon) \leq \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(x : \sup_{s\in I_i}|x(s) - x(t_{i-1})| \geq \epsilon) \qquad (3)$$

Απόδειξη Θέτουμε m το μέγιστο στη σχέση (2). Έστω $s, t \in [0, 1]$ με $|s - t| < \delta$. Επειδή κάθε διάστημα I_i έχει μήκος τουλάχιστον δ, τότε τα s, t είτε θα βρίσκονται στο ίδιο διάστημα, ειτε θα βρίσκονται σε γειτονικά. Αν τα s, t βρίσκονται στο ίδιο I_j τότε έχουμε

$$|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - x(t_{j-1})| + |x(t) - x(t_{j-1})| \leq 2m$$

Αν τα s, t βρίσκονται σε γειτονικά διαστήματα, έστω $t \in I_{j-1}$ και $s \in I_j$ τότε θα έχουμε

$$|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - x(t_{j-1})| + |x(t_j) - x(t_{j-1})| + |x(t) - x(t_j)| \leq 3m$$

επομένως $w_x(\delta) \leq 3m$

Έστω ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$, $\epsilon > 0$ και $x \in C$. Αν $x \in \bigcap_{i=1}^{k}\{x : \sup_{s\in I_i}|x(s) - x(t_{i-1})| < \epsilon\}$ τότε θα έχουμε ότι $x \in \{x : w_x(\delta) < 3\epsilon\}$ αρα

$$\{x : w_x(\delta) \geq 3\epsilon\} \subset \bigcup_{i=1}^{k}\{x : \sup_{s\in I_i}|x(s) - x(t_{i-1})| \geq \epsilon\}$$

και το ζητούμενο έπεται από την υποπροσθετικότητα του μέτρου $\mathbb{P}$

4.3 Η διαδικασία *Wiener* (κίνηση *Brown*) και το θεώρημα *Donsker*

Ορισμός 4.3.1 Μία **μονοδιάστατη διαδικασία** *Wiener* είναι μια στοχαστική διαδικασία $\{W_t\}_{t\geq 0}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) η W_t έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις: Για $t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq 1$, οι τ.μ. $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες.
(ii) Αν $s,t \geq 0$, τότε η τ.μ. $W_{s+t} - W_s$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 0 και διασπορά t, κάτω από το μέτρο $\mathbb{W}$.
(iii) η W έχει συνεχή μονοπάτια. Δηλαδή, η απεικόνιση $t \to W_t$ είναι συνεχής $\mathbb{W}$-σχεδόν παντού (θα ορίσουμε αργότερα το μέτρο $\mathbb{W}$)

Επιπλεόν η μονοδιάστατη διαδικασία *Wiener* ονομάζεται **τυπική** αν $W_0 = 0$

Πρόταση 4.3.1. Αν W_t είναι μια διαδικασία *Wiener* τότε για κάποιο $h \in [0,1]$ η $W_t^* = W_{t+h} - W_h$ είναι επίσης διαδικασία *Wiener*

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι η W^* ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) έως (iii) του ορισμού 4.3.1.

(i) έστω $t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq 1$. έχουμε $(W_{t_0}^*, W_{t_1}^* - W_{t_0}^*, \ldots, W_{t_n}^* - W_{t_{n-1}}^*)$
$=(W_{t_0+h} - W_h, W_{t_1+h} - W_{t_0+h}, \ldots, W_{t_n+h} - W_{t_{n-1}+h})$ ανεξάρτητες

(ii) Έστω $s,t \geq 0$ έχουμε $W_{s+t}^* - W_s^* = W_{s+t+h} - W_{s+h}$ για $s' = s+h$ έχουμε $s',t \geq 0$ και $W_{s+t} - W_s'$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 0 και διασπορά t, κάτω από το μέτρο $\mathbb{W}$

(iii) Η $W*$ είναι η διαφορά μιας ολίσθηση της W κατά h με την W_h. Εφόσον εξορισμού η W είναι συνεχής, τότε και η W^* είναι συνεχής

Ορισμός 4.3.2 Ορίζουμε το **μέτρο** *Wiener*, $\mathbb{W}$ στον $(C,\mathcal{C})$, ως το μέτρο με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Για κάθε $t \leq 0$ η τυχαία μεταβλητή X_t ακολουθεί την κανονική κατανομή κάτω από το μέτρο $\mathbb{W}$ με μέσο 0 και διασπορά t
(ii) η στοχαστική διαδικασία $\{X_t : 0 \leq t \leq 1\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις κάτω από το μέτρο $\mathbb{W}$

Η τυπική διαδικασία *Wiener*, W είναι τυχαίο στοιχείο του $(C,\mathcal{C},\mathbb{W})$ με $W_t(\omega) = \omega(t)$

Θεώρημα 4.3.1 Στον $(C,\mathcal{C})$ υπάρχει ένα μέτρο $\mathbb{W}$ με κατανομή πεπερασμένης διάστασης:

$$\mathbb{W}(X_t \leq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{a} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

Απόδειξη Θα ξεκινήσουμε την κατασκευή μας με μια ακολουθία $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *i.i.d.* τ.μ. ορισμένων σε έναν κοινό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ με μέσο 0 και πεπερασμένη διασπορά σ^2, $\sigma > 0$. Θέτουμε

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

, $S_0 = 0$ και επιπλέον θέτουμε $X_t^{(n)}$ μια συνεχή συνάρτηση που συνδέει γραμμικά τα σημεία $\frac{i}{n}$, $i = 1, \dots n$, με $X_{\frac{i}{n}}^{(n)}(\omega) = \frac{S_i(\omega)}{\sigma\sqrt{n}}$. Για κάθε σημείο $t \in [0,1]$, η $X_t^{(n)}$ μπορεί να γραφτεί ως:

$$X_t^{(n)}(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt]) \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} Y_{[nt]+1}(\omega)$$

Για ευκολία, θέτουμε $\psi_{[nt]}(\omega) = (nt - [nt])\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} Y_{[nt]+1}(\omega)$. Για κάθε $\epsilon > 0$ Από ανισότητα *Chebyshev* έχουμε $\mathbb{P}(|\psi_{[nt]} - 0| > \epsilon) \leq \frac{(nt-[nt])^2}{n\epsilon^2}$ και επειδή η ποσότητα $(nt - [nt])$ είναι πάντα < 1 τότε το δεξί μέλος της ανισότητας θα τείνει στο 0 καθώς $n \to \infty$. Από πόρισμα του θεωρήματος 1.3.1 έχουμε ότι $\psi \Rightarrow 0$. Για τον πρώτο όρο απ το δεξί μέλος έχουμε ότι $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{[nt]}} S_{[nt]}(\omega) \frac{\sqrt{[nt]}}{\sqrt{n}}$ από το Κ.Ο.Θ. έχουμε ότι $\frac{1}{\sigma\sqrt{[nt]}} S_{[nt]}(\omega) \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ και $\frac{[nt]}{n} \to t$. Από το θεώρημα 2.2.1, επειδή $S_{[nt]}$, $Y_{[nt]+1}$ είναι ανεξάρτητες, έχουμε ότι

$$X_t^{(n)} \Rightarrow \mathcal{N}(0,t)$$

Τώρα, για $s \leq t$, επειδή οι τ.μ. $S_{[ns]}, S_{[nt]} - S_{[ns]}$ είναι ανεξάρτητες, έχουμε απ το θεώρημα 2.2.1 ότι

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_{[ns]}, S_{[nt]} - S_{[ns]}) \Rightarrow (\mathcal{N}(0,s), \mathcal{N}(0,t-s))$$

Για τα $(\psi_{[ns]}, \psi_{[nt]} - \psi_{[ns]})$, για $\epsilon > 0$ παρατηρούμε ότι αν $\psi_{[ns]}^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2}$ και $(\psi_{[nt]} - \psi_{[ns]})^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2}$, τότε $\sqrt{\psi_{[ns]}^2 + (\psi_{[nt]} - \psi_{[ns]})^2} \leq \epsilon$ επομένως

$$\mathbb{P}(\sqrt{\psi_{[ns]}^2 + (\psi_{[nt]} - \psi_{[ns]})^2} > \epsilon) \leq \mathbb{P}(\psi_{[ns]}^2 > \frac{\epsilon^2}{2}) + \mathbb{P}((\psi_{[nt]} - \psi_{[ns]})^2 > \frac{\epsilon^2}{2})$$

Με δεδομένο ότι $\psi_{[ns]}$ και $\psi_{[nt]}$ είναι ανεξάρτητες και με όμοια διαδικασία όπως προηγουμένως, έχουμε ότι $(\psi_{[ns]}, \psi_{[nt]} - \psi_{[ns]}) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Επομένως από το θεώρημα *Slutsky*, έχουμε ότι

$$(X_s^{(n)}, X_t^{(n)} - X_t^{(n)}) \Rightarrow (N_1, N_2 - N1)$$

όπου N_1, $N_2 - N_1$ ανεξάρτητες κανονικές κατανομές

Απο το θεώρημα απεικόνισης έχουμε

$$(X_s^{(n)}, X_t^{(n)}) \Rightarrow (\mathcal{N}(0,s), \mathcal{N}(0,t))$$

Επομένως, αν συμβολίσουμε με $\mathbb{P}_n$ τις κατανομές των X_n στον, τότε επαγωγικά για κάθε $0 < t_1 < t_2 \cdots < t_k$ έχουμε ότι

$$\mathbb{P}_n \pi_{t_1,\dots,t_k}^{-1} \Rightarrow \mathbb{W}\pi_{t_1,\dots,t_k}^{-1}$$

όπου $\mathbb{W}\pi_{t_1,\dots,t_k}^{-1} = (\mathcal{N}(0,t_1)), \dots \mathcal{N}(0,t_k)$ και για κάθε πεπερασμένη επιλογή των $\{t_i\}$, το $\mathbb{W}\pi_{t_1,\dots,t_k}^{-1}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Το μόνο που μας μένει είναι να δείξουμε ότι η οικογένεια $\{\mathbb{P}_n\}_n$ είναι σφιχτή. Αν το δείξουμε αυτό, τότε από το λήμμα 4.2.3 η $\{\mathbb{P}_n\}_n$ θα συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο $\mathbb{W}$ με τις ιδιότητες που περιγράψαμε στον ορισμό 4.3.2. Πρώτα θα δείξουμε ότι η $\{\mathbb{P}_n\}_n$ είναι σφιχτή, αν η ακολουθία $(Y_n)_n$ είναι στάσιμη.

Λήμμα 4.3.1 Έστω ότι για την ακολουθία $(X_n)_n$ που ορίσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 4.3.1, η $(Y_n)_n$ είναι στάσιμη και ότι

$$\lim_{\lambda\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\lambda^2\mathbb{P}_n(\max_{k\leq n}|S_k|\geq\lambda\sigma\sqrt{n})=0$$

τότε η ακολουθία των κατανομών $(\mathbb{P}_n)_n$ των X_n στον $(C,\mathcal{C})$ είναι σφιχτή

Απόδειξη Θα κάνουμε χρήση του θεωρήματος 4.2.2. Για την υπόθεση (i), παρατηρούμε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $X_0^{(n)}=0$ επομένως για κάθε $a>0$ έχουμε ότι $\mathbb{P}(X_n : X_0^{(n)}>a)=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Για υπόθεση (ii), θέλουμε για κάθε $\epsilon>0$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(w(X_n,\delta)\geq\epsilon)=0$$

Από το λήμμα 4.2.4 έχουμε για $\epsilon,\delta>0$, $0=t_0<\cdots<t_u=1$ και $\min_{1\leq i\leq u}(t_i-t_{i-1})\geq\delta$

$$\mathbb{P}(w(X_n,\delta)\geq 3\epsilon)\leq\sum_{i=1}^{u}\mathbb{P}\left(\sup_{t_{i-1}\leq s\leq t_i}|X_s^{(n)}-X_{t_{i-1}}^{(n)}|\geq\epsilon\right)\qquad(1)$$

Για να διευκολύνουμε την ανάλυση μας, μπορούμε να θέσουμε τα t_i να είναι της μορφής $t_i=\frac{m_i}{n}$, όπου $m_i, i=0,1,...,u$ είναι ακέραιοι αριθμοί με $0=m_0<m_1<\cdots<m_u=n$. Λόγω της μορφής τους, τα t_i είναι τα σημεία κορυφών στο γράφημα της $X_t^{(n)}$ (σημ. η $X_t^{(n)}$ είναι γραμμική σύνδεση διαδοχικών σημείων). Επομένως το *supremum* στη σχέση (1) γίνεται:

$$\mathbb{P}(w(X_n,\delta)\geq 3\epsilon)\leq\sum_{i=1}^{u}\mathbb{P}\left(\max_{m_{i-1}\leq k\leq m_i}|S_k-S_{m_{i-1}}|\geq\epsilon\sigma\sqrt{n}\right)\qquad(2)$$

Για τη τελευταία σχέση λόγω της στασιμότητας των Y_n έχουμε

$$S_k-S_{m_{i-1}}=^d\sum_{j=0}^{k-m_{i-1}}Y_j=S_{k-m_{i-1}}$$

επομένως αν για "k" $=k-m_{i-1}$ τότε η σχέση (2) γίνεται:

$$\mathbb{P}(w(X_n,\delta)\geq 3\epsilon)\leq\sum_{i=1}^{u}\mathbb{P}\left(\max_{k\leq m_i-m_{i-1}}|S_k|\geq\epsilon\sigma\sqrt{n}\right)\qquad(3)$$

Τώρα για να διευκολύνουμε επιπλέον την ανάλυση μας θα προσπαθήσουμε να βρούμε έναν ακέραιο m τέτοιο ώστε $m_i=im$ για κάθε $i=1,...,u-1$

Αν υπάρχει ένας τέτοιος m θα πρέπει να ικανοποιεί τα παρακάτω κριτήρια
(a) πρέπει $m_i-m_{i-1}=m\geq n\delta$ για κάθε $i=1,...,u-1$
(b) πρέπει $(u-1)m<n\leq um$
Για $m=[n\delta]$ και $u=[n/m]$, είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι ικανοποιούνται τα (a) και (b). Παρατηρούμε ότι:

$$m_u-m_{u-1}\leq m$$

$$u=\left[\frac{n}{m}\right]\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{\delta}<\frac{2}{\delta}$$

$$\frac{n}{m} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\delta} > \frac{1}{2\delta}$$

Επομένως για αρκετά μεγάλο n, η (3) γίνεται:

$$\mathbb{P}(w(X_n,\delta) \geq 3\epsilon) \leq u\mathbb{P}\left(\max_{k\leq m}|S_k| \geq \epsilon\sigma\sqrt{n}\right)$$

$$\leq \frac{2}{\delta}\mathbb{P}\left(\max_{k\leq m}|S_k| \geq \epsilon\sigma\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\delta}}\right) \quad (4)$$

Θέτουμε τώρα $\lambda = \frac{\epsilon}{\sqrt{2\delta}}$. Τότε η (4) γίνεται

$$\mathbb{P}(w(X_n,\delta) \geq 3\epsilon) \leq \frac{4\lambda^2}{\epsilon^2}\mathbb{P}\left(\max_{k\leq m}|S_k| \geq \sigma\lambda\sqrt{m}\right)$$

Η τελευταία σχέση είναι όμοια με τη σχέση της υπόθεσης. Επιπλέον για $\delta \downarrow 0$ έχουμε $\lambda \to \infty$, $m \to \infty$ καθώς $n \to \infty$ (για κάθε $\delta > 0$) επομένως

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(w(X_n,\delta) \geq 3\epsilon) = 0$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Επανερχόμαστε στο θεώρημα 4.3.1. Αν η οικογένεια $(\mathbb{P}_n)_n$ ικανοποιεί την συνθήκη του λήμματος 4.3.1 έχουμε φτάσει στο ζητούμενο. Χρειαζόμαστε ένα ακόμη εργαλείο:

Λήμμα 4.3.2(Ανισότητα *Etemandi*) Αν $X_1,\ldots,X_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. τότε για κάθε $a > 0$ έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n}|S_k| \geq 3a\right) \leq 2\mathbb{P}(|S_n| \geq a) + \max_{1\leq k\leq n}\mathbb{P}(|S_k| \geq a)$$

Απόδειξη για $k = 1,\ldots,n$ θέτουμε:

$$A_k = \{\max_{1\leq j\leq k-1}|S_j| < 3a\} \cap \{|S_k| \geq 3a\}$$

με $A_1 = \{|S_1| \geq 3a\}$ είναι εμφανές ότι τα $A_1,\ldots,A_n$ είναι ξένα ανα 2 και ότι

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \left\{\max_{1\leq k\leq n}|S_k| \geq 3a\right\}$$

Πράγματι, αν $\omega \notin A$ τότε $\max_{1\leq k\leq n}|S_k(\omega)| < 3a$ δηλαδή $|S_k(\omega)| < 3a$ για κάθε $k = 1,...,n$ που σημαίνει ότι $\omega \notin A_k$ για κάθε k.

Επίσης έχουμε:

$$A_k \cap \{|S_n| < a\} \subset A_k \cap \{|S_n - S_k| > 2a\}$$

Αφού αν $|S_n| < a$ και $|S_k| \geq 2a$ τότε $|S_n - S_k| \geq |S_k| - |S_n| > 2a$ και επίσης, τα ενδεχόμενα A_k, και $\{|S_n - S_k| > 2a$ είναι ανεξάρτητα. Επομένως:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \{|S_n| \geq a\}) + \mathbb{P}(A \cap \{|S_n| < a\}) \leq$$

$$\leq \mathbb{P}(\{|S_n| \geq a\}) + \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k \cap \{|S_n - S_k| > 2a\}) =$$

$$= \mathbb{P}(\{|S_n| \geq a\}) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(\{|S_n - S_k| > 2a\}) \leq$$

$$\leq \mathbb{P}(\{|S_n| \geq a\}) + \max_{1\leq k\leq n} \mathbb{P}(\{|S_n - S_k| > 2a\})\mathbb{P}(A)$$

Όπως είδαμε και προηγουμένως, αν $|a-b| > 2c$, τότε είτε $|a| > c$ είτε $|b| > c$ επομένως

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\{|S_n| \geq a\}) + \max_{1\leq k\leq n} \mathbb{P}(\{|S_n - S_k| > 2a\})$$

$$\leq \mathbb{P}(\{|S_n| \geq a\}) + \max_{1\leq k\leq n} \mathbb{P}(\{|S_k| > a\}) + \mathbb{P}(\{|S_n| \geq a\})$$

και έχουμε το ζητούμενο

Συνέχεια της απόδειξης του θεωρήματος 4.3.1. Επειδή οι Y_n είναι ανεξάρτητες τ.μ. θα κάνουμε χρήση της ανισότητας *Etemandi*:

$$\mathbb{P}\left(\max_{k\leq m} |S_k| \geq a\right) \leq 3 \max_{k\leq m} \mathbb{P}(|S_k| \geq \frac{a}{3})$$

για κάθε $a > 0$.

Για να κατασκευάσουμε το $\mathbb{W}$ μπορούμε να επιλέξουμε τις Y_n ετσι ώστε να μας διευκολύνουν περισσότερο. Επομένως υποθέτουμε ότι οι Y_n είναι $i.i.d.$ και ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Ζητάμε λοιπόν να ικανοποιείται η συνθήκη

$$\lim_{\lambda\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \lambda^2 \max_{k\leq n} \mathbb{P}_n(|S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}) = 0$$

Από το Κ.Ο.Θ. η τ.μ. $\frac{S_k}{\sqrt{k}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Επίσης από ανισότητα $Markov$ έχουμε

$$\mathbb{P}(|\mathcal{N}| \geq \lambda) = \mathbb{P}(|\mathcal{N}^4| \geq \lambda^4) \leq \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}^4]}{\lambda^4} = \frac{3}{\lambda^4}$$

Από θεώρημα απεικόνισης έχουμε επίσης ότι $\left|\frac{S_k}{\sqrt{k}}\right| \Rightarrow |\mathcal{N}(0,1)|$ επομένως για $\eta > 0$ υπάρχει k_0 τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}(\frac{|S_k}{\sqrt{k}}| \geq \lambda\sigma) < \eta + \mathbb{P}(|\mathcal{N}| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{3}{\sigma^4\lambda^4} + \eta$$

για $k \geq k_0$, τώρα αν $k_0 \leq k \leq n$

$$\mathbb{P}(|S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}) = \mathbb{P}(\frac{|S_k|}{\sqrt{k}} \geq \lambda\sigma\sqrt{\frac{n}{k}}) \leq \mathbb{P}(\frac{|S_k}{\sqrt{k}}| \geq \lambda\sigma) < \eta + \mathbb{P}(|\mathcal{N}| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{3}{\sigma^4\lambda^4} + \eta$$

για $\eta = \frac{1}{\lambda^4} > 0$, έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}) \leq \frac{3}{\sigma^4\lambda^4} + \frac{1}{\lambda^4}$$

και για $\lambda \to \infty$ ικανοποιείται η συνθήκη του λήμματος 4.3.1. για $k \geq k_0$.

Αν τώρα $k < k_0$ από ανισότητα $Chebyshev$ έχουμε:

$$\mathbb{P}(|S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}) < \frac{k_0}{\lambda^2\sigma^2 n}$$

για $n \to \infty$ ικανοποιείται η συνθήκη του λήμματος 4.3.1. για $k < k_0$. Άρα και για το μέγιστο k επομένως η $(\mathbb{P}_n)_n$ είναι σφιχτή το οποίο τελειώνει την απόδειξη μας.

Ολοκληρώνουμε αυτή την υποενότητα με την αρχή της αναλογικότητας του *Donsker* βάση της οποίας θα συμπεράνουμε ότι ο τυχαίος περίπατος συγκλίνει στην κίνηση *Brown*.

Θεώρημα 4.3.2 (αρχή της αναλογικότητας του *Donsker*): Αν $(Y_n)_y$ είναι *i.i.d.* με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2, και X_n τυχαία στοιχεία του C που ορίσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 4.3.1. τότε $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbb{W}$

Απόδειξη Τη περισσότερη από την απαιτούμενη διεργασία την έχουμε κάνει ήδη στο προηγούμενο θεώρημα και στο προηγούμενο Λήμμα. Δείξαμε λοιπόν ότι οι πεπερασμένες διαστάσεις της X_n συγκλίνουν ασθενώς στις πεπερασμένες διαστάσεις ενός μέτρου $\mathbb{W}$, δηλαδή:

$$(X_{t_1}^{(n)}, ..., X_{t_k}^{(n)}) \Rightarrow (W_{t_1}, ..., W_{t_k})$$

όπου το μέτρο $\mathbb{W}$ έχει συγκεκριμένες ιδιότητες που αναλύσαμε στο θεώρημα 4.3.1.Αν επίσης δείξουμε ότι

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(w_{X_n}(\delta) \geq \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

τότε από το πόρισμα του θεωρήματος 4.2.2. θα έχουμε $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbb{W}$.Αν οι Y_n είναι κανονικά κατανεμημένες τότε το έχουμε ήδη δείξει. Στην απόδειξη του λήμματος 4.3.1. δείξαμε ότι για $\epsilon >, \delta > 0$

$$\mathbb{P}(w(X_n, \delta) \geq 3\epsilon) \leq u\mathbb{P}\left(\max_{k\leq m} |S_k| \geq \epsilon\sigma\sqrt{n}\right)$$

Από την ανισότητα *Etemandi* έχουμε

$$\mathbb{P}(w(X_n, \delta) \geq 3\epsilon) \leq 3u \max_{k\leq m} \mathbb{P}\left(|S_k| \geq \frac{\epsilon\sigma}{3}\sqrt{n}\right)$$

επομένως, όπως και στο θεώρημα 4.3.1 αρκέι να ελγξουμε αν

$$\lim_{\lambda\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \lambda^2 \max_{k\leq n} \mathbb{P}(|S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}) = 0 \qquad (5)$$

Κάνοντας την ίδια διαδικασία όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 4.3.1 η συνθήκη (5) ικανοποιείται και έχουμε το ζητούμενο.

4.4 Εφαρμογές του θεωρήματος *Donsker*

Το μέγιστο και το ελάχιστο του μονοπατιού *Brown*

Θεωρημα 4.4.1 Θεωρούμε την τυπική διαδικασία *Wiener*, W και θέτουμε:

$$m = \inf_t W_t \qquad M = \sup_t W_t$$

Άν $a \leq 0 \leq b$ και $a \leq u \leq v \leq b$ τότε:

$$\mathbb{P}(a < m \leq M < b, u < W_1 < v) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Phi(2k(b-a)+v) - \Phi(2k(b-a)+u))$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Phi(2k(b-a)+2b-u) - \Phi(2k(b-a)+2b-v))$$

επομένως για $u = a$ και $v = b$ έχουμε:

$$\mathbb{P}(a < m \leq M < b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k (\Phi(k(b-a)+b) - \Phi(k(b-a)+a))$$

Απόδειξη Έστω S_n *S.S.R.W.* και θέτουμε $m_n = \min\{S_0, \dots S_n\}$ και $M_n = \max\{S_0, \dots S_n\}$. Η απεικόνιση απ τον C στον $\mathbb{R}^3$:

$$x \to (\inf_t x(t), \sup_t x(t), x(1))$$

είναι συνεχής.

Πράγματι, η $x \to x(1)$ είναι γραμμική και φραγμένη, επίσης, αν $F(x) = \sup_t x(t)$, τότε, επειδή το [0,1] είναι συμπαγές και κάθε $x \in C$ είναι συνεχής, για κάθε $x \in C$, υπάρχει $t_x \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $F(x) = x(t_x)$. Έστω τώρα $x, y \in C$, έχουμε $F(x) - F(y) = x(t_x) - y(t_y) \leq x(t_x) - y(t_x) \leq \sup_t (x-y)(t) \leq \|x-y\|_\infty$. Ομοίως $F(y) - F(x) \leq \|x-y\|_\infty$, άρα F 1-*Lipschitz*. Τέλος, $\inf_t x(t) = -sup_t - x(t)$.

Επιπλέον, $\sup_t X_t^{(n)} = \max_{i \leq n} S_i$ γιατί το μέγιστο θα βρίσκεται σε κάποια κορυφή. Όμοίως $\inf_t X_t^{(n)} = \min_{i \leq n} S_i$ Επομένως από το συναρτησιακό Κ.Ο.Θ. (Θεώρημα *Donsker*) και το θεώρημα απεικόνισης έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(m_n, M_n, S_n) \Rightarrow (m, M, W_1)$$

Θα χωρίσουμε την απόδειξη του θεωρήματος σε 2 βήματα

Βήμα 1) Θα δείξουμε ότι για $i, j, i', j' \in \mathbb{Z}$ με $i \leq 0 \leq j$ και $i \leq i' \leq j' \leq j$ ότι

$$\mathbb{P}(i < m_n \leq M_n < j, i' < S_n < j') =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mathbb{P}(2k(j-i)+i' < S_n < 2k(j-i)+j'))$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mathbb{P}(2k(j-i)+2j-j' < S_n < 2k(j-i)+2j-i'))$$

Δηλαδή ότι για κάθε $i < l < j$:

$$\mathbb{P}(i < m_n \leq M_n < j, S_n = l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 2k(j-i)+l) -$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mathbb{P}(S_n = 2k(j-i)+2j-l))$$

παρατηρούμε ότι επειδή $|S_n| \leq n$, τα αθροίματα είναι πεπερασμένα. Θα δείξουμε την τελευταία σχέση με τη χρήση επαγωγής στο μήκος του μονοπατιού

Για $n = 1$
Το l μπορεί να πάρει τιμές 1 και -1. για $l = 1$ έχουμε:

για $j, i = 0$

$$\mathbb{P}(i < m_1 \leq M_1 < 0, S_1 = 1) = 0$$

και στα αθροίσματα έχουμε

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(S_1 = 1) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mathbb{P}(S_1 = -1)) = 0$$

για $j = 0$ και $i = -1$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(S_1 = -2k+1) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mathbb{P}(S_1 = -2k-1)) = \mathbb{P}(S_1 = 1) + \mathbb{P}(S_1 = -1) - \mathbb{P}(S_1 = 1) - \mathbb{P}(S_1 = -1) = 0$$

για $j = 0$ και $i < -1$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(S_1 = -2ik + 1) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mathbb{P}(S_1 = -2ki - 1)) = \mathbb{P}(S_1 = 1) - \mathbb{P}(S_1 = -1) = 1/2 - 1/2 = 0$$

Με όμοιο τρόπο παιρνουμε υποπεριπτώσεις για $j = 1$ και καταλήγουμε στο ζητούμενο.
Για $j > 1$ έχουμε:

$$\mathbb{P}(i < m_1 \leq M_1 < 1, S_1 = 1) = \mathbb{P}(i < m_1 \leq M_1 < 1 | S_1 = 1)\mathbb{P}(S_1 = 1) = \mathbb{P}(S_1 = 1)$$

και επειδή $(j - i) \geq 2$, $(2j - 1) \geq 3$ η μόνη δυνατή τιμή στα k είναι μονο 0 στο πρώτο.

Για $l = -1$ η διαδικασία είναι όμοια (παίρνουμε περιπτώσεις για το i και υποπεριπτώσεις για το j)
Στο επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι η υπόθεση μας ισχύει για μήκος $n - 1$ και για όλες τις κατάλληλες τριάδες (i, j, l). Για μήκος n με ανάλυση του πρώτου βήματος και από τη Μαρκοβιανή ιδιότητα έχουμε:

$$\mathbb{P}(i < m_n \leq M_n < j, S_n = l) = \mathbb{P}(i - 1 < m_{n-1} \leq M_{n-1} < j - 1, S_{n-1} = l - 1)\frac{1}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbb{P}(i + 1 < m_{n-1} \leq M_{n-1} < j + 1, S_{n-1} = l + 1) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{n-1} = 2k(j - i) + l - 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{n-1} = 2k(j - i) + l + 1) -$$

$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{n-1} = 2k(j - i) + 2j - l - 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{n-1} = 2k(j - i) + 2j - l + 1)) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 2k(j - i) + l) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mathbb{P}(S_n = 2k(j - i) + 2j - l)$$

Βήμα 2): Θα δείξουμε για $c > 0$ και $a < b$,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(2k[c\sqrt{n}] + [a\sqrt{n}] < S_n < 2k[c\sqrt{n}] + [b\sqrt{n}]) \to$$

$$\to \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Phi(2kc + b) - \Phi(2kc + a)), \qquad n \to \infty$$

Πράγματι, από το κλασσικό Κ.Ο.Θ. για κάθε $k \in \mathbb{Z}$

$$s_{n,k} = \mathbb{P}(2k[c\sqrt{n}] + [a\sqrt{n}] < S_n < 2k[c\sqrt{n}] + [b\sqrt{n}]) \to \Phi(2kc+b) - \Phi(2kc+a) = s_k, \qquad n \to \infty$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{n,k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k$$

από το Λήμμα $Scheffe$

Άρα:

$$\mathbb{P}(a < m \leq M < b, u < W_1 < v) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Phi(2k(b-a) + v) - \Phi(2k(b-a) + u))$$

$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Phi(2k(b-a) + 2b - u) - \Phi(2k(b-a) + 2b - v)) \qquad (1)$$

επομένως για $u = a$ και $v = b$ ¨ανοίγοντας' τα μερικά αθροίσματα και ¨αναδιατασσοντας' τους όρους έχουμε:

$$\mathbb{P}(a < m \leq M < b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k (\Phi(k(b-a) + b) - \Phi(k(b-a) + a)) \qquad (2)$$

Πόρισμα θεωρούμε τη διαδικασία $Wiener$, $\{W_t\}_{0\leq t\leq 1}$. Άν $a \leq 0 \leq b$, τότε

$$(i) \quad \mathbb{P}(\sup_t W_t < b) = 2\Phi(b) - 1$$

$$(ii) \quad \mathbb{P}(\inf_t W_t > a) = 1 - 2\Phi(a)$$

$$(iii) \quad \mathbb{P}(\sup_t |W_t| < b) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k (\Phi((2k+1)b) - \Phi((2k-1)b))$$

Απόδειξη: για το πρώτο, γυρνάμε στην αποδεικτέα σχέση: για $i, j, i', j' \in \mathbb{Z}$ με $i \leq 0 \leq j$ και $i \leq i' \leq j' \leq j$:

$$\mathbb{P}(i < m_n \leq M_n < j, i' < S_n < j') =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mathbb{P}(2k(j-i) + i' < S_n < 2k(j-i) + j'))$$

$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mathbb{P}(2k(j-i) + 2j - j' < S_n < 2k(j-i) + 2j - i'))$$

Για $a = -n - 1$ η σχέση γίνεται:

$$\mathbb{P}(i' < S_n < j') - \mathbb{P}(2j - j' < S_n < 2b - i')$$

(μενει μονο ο όρος για $k = 0$)
Όπως και στο προηγούμενο θεώρημα, περνώντας στο όριο έχουμε:

$$\mathbb{P}(M < b, u < W_1 < v) = \Phi(v) - \Phi(u) - \Phi(2b - u) + \Phi(2b - v)$$

Τώρα για $u \to -\infty$ και $v = b$ έχουμε

$$\mathbb{P}(M < b) = \Phi(b) - 1 + \Phi(2b - v) = 2\Phi(b) - 1$$

Για το δεύτερο εργαζόμαστε ομοίως για $b = n+1$ και για το τρίτο, στη σχέση 2 του προηγούμενου θεωρήματος, θέτουμε $a = -b$

Ο νόμος του αντίστροφου ημιτόνου

Λήμμα 4.4.1. Έστω $x \in C$ και μια *Borel* μετρήσιμη και φραγμένη $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Θέτουμε $h(x) = \int_0^1 u(x(t))dt$. Άν η u είναι συνεχής εκτός από ένα σύνολο D_u με $\lambda(D_u) = 0$, όπου λ είναι το μέτρο *Lebesgue*, τότε η h είναι $\mathcal{C}$- μετρήσιμη και είναι συνεχής, εκτός από ένα σύνολο με $\mathbb{W}$-μέτρο 0.

Απόδειξη Εφόσον και οι 2 απεικονίσεις $x \to x(t)$ και $t \to x(t)$ είναι συνεχής, η απεικόνιση $(x,t) \to x(t)$ είναι συνεχής στην τοπολογία γινόμενο συνεπώς και *Borel* μετρήσιμες. επομένως η απεικόνιση $\psi(x,t) = u(x(t))$ είναι επίσης μετρήσιμη (ως σύνθεση μετρήσιμων συναρτήσεων). Επιπλέον η ψ είναι φραγμένη, επομένως η $h(x) = \int_0^1 \psi(x,t)dt$ είναι $\mathcal{C}$- μετρήσιμη από θεώρημα *Fubini*.

Θέτουμε επίσης $E = \{x(t) : x(t) \in D_u\}$. Αν $\mathbb{W}$ είναι το μέτρο *Wiener* στον $(C, \mathcal{C})$, Από θεώρημα *Fubini*, έχουμε

$$\int\int 1_E d(\lambda \otimes \mathbb{W}) = \int_{[0,1]}\int_{C[0,1]} 1_E d\mathbb{W} d\lambda = \int_{[0,1]} \mathbb{W}\{x : (x,t) \in E\} d\lambda$$

Όμως $\mathbb{W}\{x : (x,t) \in E\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{D_u} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 0$ Για κάθε $t \in [0,1]$ επομένως

$$\int_{C[0,1]} \lambda\{x : (x,t) \in E\} d\mathbb{W} = 0$$

Δηλαδή $\lambda\{x : (x,t) \in E\} = 0$ $\mathbb{W}$-σ.π. $\implies$ υπάρχει $A \in \mathcal{C}$ με $\mathbb{W}(A) = 0$ τέτοιο ώστε $\lambda\{x : (x,t) \in E\} = 0$ για κάθε $x \in A^c$. Έστω τώρα $(x_n)_n$ ακολουθία στον $C[0.1]$ και $x \in C$. Άν $\|x_n - x\|_\infty \to 0$ και $x \in A^c$, τότε $\lambda\{x : (x,t) \in E\} = 0$ Άρα σχεδόν για όλα τα $t \in [0,1]$ έχουμε $x(t) \notin D_u$ και επομένως $u(x_n(t)) \to u(x(t))$, σχεδόν για όλα τα $t \in [0,1]$. Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα μας, και απ το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης έχουμε ότι:

$$x \notin A, \quad x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \implies \int_0^1 u(x_n(t))dt \to \int_0^1 u(x(t))dt$$

Λήμμα 4.4.2. Οι πρακάτω απεικονίσεις $h_i : C \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$

(*i*) $h_1(x) = \sup\{t \in [0,1] : x(t) = 0\}$

(ii) $h_2(x) = \lambda\{t \in [0,1] : x(t) > 0\}$
(iii) $h_3(x) = \lambda\{t \in [0, h_1(x)] : x(t) > 0\}$

(Όπου το λ είναι το μέτρο *Lebesque* στον [0,1]) Είναι $\mathcal{C}$-μετρήσιμες και συνεχής $\mathbb{W}$-σ.π.

Απόδειξη Για την h_2, ορίζουμε την απεικόνιση: $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $u(z) = 1_{\{z\in(0,\infty)\}}$, φραγμένη, συνεχής λ σχεδόν παντού επομένως απ το λήμμα 4.4.1 έχουμε το ζητούμενο

για την h_1 παρατηρούμε ότι το σύνολο

$$\{x \in C : h_1(x) < a\} = \{x \in C : x(t) > 0, t \in [a,1]\} \cup \{x \in C : x(t) < 0, t \in [a,1]\}$$

είναι ανοικτό, επομένως η h_1 είναι $\mathcal{C}$-μετρήσιμη
Η h_1 δεν είναι παντού συνεχής. Θα δείξουμε όμως ότι είναι συνεχής σε ένα σύνολο A στο οποίο η διαδικασία $W \in A$ σ.π. Θέτουμε

$A = \{x \in C : x(1) \neq 0$ και σε σε κάθε γειτονιά του 0 η x παίρνει διαδοχικά θετικές και αρνητικές τιμές$\}$

Πράγματι, έστω $x \in A$, $\epsilon > 0$ και $h(x) = t_x$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η x είναι τοπικά αύξουσα στη γειτονιά $(t_x - \epsilon, t_x + \epsilon)$. Θέτουμε αρχικά
$\delta_1 = \min\{|x(t)| : t \in [t_x + \epsilon, 1]\}$ και επιλέγουμε δ_2 τέτοιο ώστε $(-\delta_2, \delta_2) \subset x(t_x - \epsilon, t_x + \epsilon)$. Θέτουμε τέλος $\delta = \frac{\min\{\delta_1,\delta_2\}}{2}$. Αν $y \in C$ με $\|y - x\| < \delta$ τότε:

α) για κάθε $t \in [t_x + \epsilon, 1]$, $h(t) \neq 0$
Αν ίσχυε κάτι τέτοιο, θα είχαμε ένα $t_0 \in [t_x + \epsilon, 1]$ για το οποίο $|x(t_0)| < \delta < \delta_1$, Το οποίο φυσικά δεν ισχυέι.
β) η h έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(t_x - \epsilon, t_x + \epsilon)$
Θα δείξουμε ότι υπάρχει t_1 στο $(t_x - \epsilon, t_x)$ και t_2 στο $(t_x, t_x + \epsilon)$ τέτοια ώστε $h(t_1) < 0$ και $h(t_2) > 0$ (Σημ. υποθέσαμε ότι η x είναι τοπικά αύξουσα)
Αν για κάθε $t \in (t_x - \epsilon, t_x)$ είχαμε $h(t) > 0$ τότε επιλέγουμε $s = \sup\{t \in (t_x - \epsilon, t_x) : x(t) < 0.$ τότε θα έχουμε ότι $|x(s).| \geq \delta_2$ και εφόσον $h(s) > 0$ $|h(s) - x(s)| \geq \delta_2 > \delta$ το οποίο επίσης δεν ισχύει.

Επομένως υπάρχει t_1 στο $(t_x - \epsilon, t_x)$ τέτοιο ώστε $h(t_1) < 0$. Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε t_2 στο $(t_x, t_x + \epsilon)$ τέτοιο ώστε $h(t_2) > 0$, και συνεπώς απ το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει ένα σημείο $t_y \in (t_x - \epsilon, t_x + \epsilon)$ με $y(t_y) = 0$ και t_y το τελευταίο σημείο μηδενισμου, $\Longrightarrow |h(x) - h(y)| < \epsilon$

Τώρα μπορεί να αποδειχτεί ότι το σύνολο

$$Z_W = \{t \in [0,1] : W_t = 0\}$$

Είναι με πιθανότητα 1 κλειστό σύνολο, δεν έχει μεμονωμένα σημεία συνεπώς είναι υπεραριθμήσιμο και $\lambda(Z_W) = 0$.
Αν τώρα $W \notin A$ έχουμε ότι υπάρχουν $\epsilon_0 > 0$ και $0 < t_1 < 1$ για τα οποία $W_{t_1} = 0$ και $W_t > 0$ (ή $W_t < 0$) για κάθε $t \in [t_1 - \epsilon_0, t_1 - \epsilon_0] \backslash \{t_1\}$ Επομένως το t_1 είναι μεμονωμένο σημείο.[1], επίσης έχουμε $\mathbb{W}(W_1 = 0) = 0$. Επομένως $W \in A$ με πιθανότητα 1

[1] Κάθε γειτονιά του 0 περιέχει σημεία μηδενισμού. Από μία από της ιδιότητες της κίνησης *Brown*, αυτή της ανάκλασης έχουμε ότι μια τυπική διαδικασία *Wiener* δεν μπορεί να διατηρήσει πρόσημο σε ένα διάστημα $(0, \epsilon)$ (για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε ότι $\mathbb{P}(\sup_{0<t<\epsilon} W_t \geq 1/n) = 2\mathbb{P}(W_\epsilon \geq 1/n) = 2\mathbb{P}(Z \geq 1/n\sqrt{\epsilon}) \to 1$, ομοίως για την $-W_t$ έχουμε $\mathbb{P}(\sup_{0<t<\epsilon} -W_t \geq 1/n) \to 1$).Επιπλέον για κάθε $t_0 \in Z_W$ η διαδικασία $W_t^* = W_{t_0+t}$ είναι τυπική διαδικασία *Wiener* και δεξιά του σημείου αυτού δέν διατηρείται το πρόσημο με πιθανότητα 1

Τέλος, για την h_3 αν $\psi(x,t) = \int_0^t v(x(s))ds$ τότε έχουμε $h_3(x) = \psi(x, h_1(x))$ και εφαρμόζουμε το λήμμα 4.2.2

Θεώρημα 4.4.2. θεωρούμε τη τυπική διαδικασία $Wiener$, $\{W_t\}_{0\leq t\leq 1}$, καθώς και:

$T = h_1(W)$ να είναι ο χρόνος της τελευταίας άφιξης της W_t στο 0
$U = h_2(W)$ να είναι ο συνολικός χρόνος που η W_t είναι θετική, και
$V = h_3(W)$ να είναι ο συνολικός χρόνος που που η W είναι θετική στο διάστημα $[0, T]$

για τις οποίες ισχύει:

$$U = V + (1-T)1_{W_1\geq 1} \quad (*)$$

(Αν $W_1 < 0$ τότε $W_t < 0$ για κάθε $t \in [T, 1]$ άρα $U = V$)
Τότε η τριπλέτα $(T < V < W_1)$ έχει από κοινού πυκνότητα

$$f(t,v,z) = 1_{\{0<v<t<1\}}g(t,z), \quad g(t,z) = \frac{1}{2\pi}\frac{|z|}{t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{z^2}{2(1-t)}}$$

Και η δεσμευμένη κατανομή του V είναι ομοιόμορφη στο $[0, T]$ και

$$\mathbb{P}(T \leq t) = \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{t}) \quad 0 < t < 1$$

Απόδειξη Η ιδέα είναι να εφαρμόσουμε το θεώρημα $Donsker$ στον $S.S.R.W$, S_n.Έστω $X_t^{(n)}$ που ορίσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 4.3.1. θεωρούμε:

$T_n = nh_1(X_n)$ είναι ο χρόνος $i \leq n$ της τελευταίας άφιξης της αλυσίδας στο 0
$U_n = nh_2(X_n)$ είναι το πλήθος των χρόνων $i \leq n$ που και τα 2, S_i και S_{i-1} είναι μη αρνητικά, και
$V_n = nh_3(X_n)$ είναι το πλήθος των χρόνων $i \leq T_n$ που και τα 2, S_i και S_{i-1} είναι μη αρνητικά

Τα παραπάνω δικαιολογούνται γιατί λόγω της μορφής του X_n και ότι στην αλυσίδα του περιπάτου οι Y_i παίρνουν τιμές 1 ή -1, τα σημεία μηδενισμού της X_n είναι κορυφές της.

Θέτουμε $p_n(i) = \mathbb{P}(S_n = i)$. Αν $\frac{i}{\sqrt{n}} \to z$ και $i \equiv n(\mod 2)$, τότε από τον τύπο του $Stirling$ και επειδή $\frac{S_n+n}{2} \sim bi(n, 1/2)$ έχουμε

$$\frac{\sqrt{n}}{2}p_n(i) \to \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{z^2}{2}}$$

Επιπλέον θα χρησιμοποιήσουμε ένα θεώρημα απ τη θεωρία τυχαίων περιπάτων , το ¨πρόβλημα ψηφοφορίας ' ($Ballot\ Problem$) σύμφωνα με το οποίο

$$\mathbb{P}(S_1 \geq 1, \ldots, S_{n-1} \geq 1, S_n = j) = \frac{i}{n}p_n(i) \quad i \geq 1$$

Αν $S_{2m} = 0$ τότε $U_{2m} = V_{2m}$, και ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(V_{2m} = 2j | S_{2m} = 0) = \frac{1}{m+1} \quad j = 0, 1, ..., m$$

Με βάση τα παραπάνω, για $0 \leq 2j \leq 2k < n$ και $i \geq 1$ έχουμε:

$$\mathbb{P}(T_n = 2k, V_{2n} = 2j, S_n = i) =$$

$$\mathbb{P}(S_{2k}=0, V_{2n}=2j, S_{2k+1}\geq 1,\ldots,S_{n-1}\geq 1, S_n=i)=$$
$$\mathbb{P}(S_{2k}=0)\mathbb{P}(V_{2n}=2j|S_{2k}=0)\mathbb{P}(S_{2k+1}\geq 1,\ldots,S_{n-1}\geq 1, S_n=i|S_{2k}=0)=$$
$$=p_{2k}(0)\frac{1}{k+1}\frac{i}{n-2k}p_{n-2k}(i)$$

Αν θεώρήσουμε το πλέγμα του $\mathbb{R}^3$, L_n που ορίζεται από τα σημεία $(\frac{2k}{n},\frac{2j}{n},\frac{i}{\sqrt{n}})$, με $i\equiv n \mod 2$, ο όγκος των κελιών είναι $\frac{2}{n}.\frac{2}{n}.\frac{2}{\sqrt{n}}=\frac{8}{n^{\frac{-5}{2}}}$. Αν τα i,j,k είναι τέτοια ώστε:

$$\frac{2k}{n}\to t \qquad \frac{2j}{n}\to v \quad \frac{i}{\sqrt{n}}\to z$$

με $0<v<t<1$ και $z>0$ τότε έχουμε

$$\frac{\mathbb{P}(T_n=2k, V_{2n}=2j, S_n=i)}{V(n)}=$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2k}}\frac{\sqrt{2k}}{2}p_{2k}(0)\frac{n}{2(k+1)}\frac{i}{\sqrt{n}}\frac{n}{n-2k}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-2k}}\frac{\sqrt{n-2k}}{2}p_{n-2k}(i)\to$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}z\frac{1}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2(1-t)}}=g(z,t)$$

Για $z<0$ παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα λόγω συμμετρίας. Από θεώρημα *Donsker*, $(\frac{T_n}{n},\frac{V_n}{n},\frac{S_n}{\sqrt{n}})\xrightarrow{\mathcal{D}}(T,V,W_1)$ και από θεώρημα 1.3.3 η τριπλέτα έχει πυκνότητα

$$f(t,v,z)=1_{\{0<v<t<1\}}g(t,z)$$

Επομένως η από κοινού πυκνότητα των (T,W_1) είναι $tg(t,z)1_{\{0<t<1\}}$ επομένως η περιθώρια πυκνότητα της T θα είναι:

$$f_T(t)=\int_{-\infty}^{\infty}tg(t,z)dz=\int_0^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2(1-t)}}\frac{zdz}{\pi(1-t)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\pi(1-t)^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}}$$

δηλαδή

$$\mathbb{P}(T\leq t)=\frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{t}),\quad 0<t<1$$

Επιλέον, για $(T,W_1)=(t,z)$, έχουμε ότι η πυκνότητα του V είναι $f_{V|T,W}=\frac{1}{t}1_{\{0<v<t\}}$ δηλαδή η δεσμευμένη κατανομή της V είναι ομοιόμορφη στο $[0,t]$. Από την (*) έχουμε ότι η U ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,t]$ Για $z<0$. για $z\geq 0$ έχουμε ότι $U=V+1-t$ που συνεπάγεται ότι $U\sim\mathcal{U}[1-t,t]$

Με βάση τα παραπάνω, έχουμε ότι η πυκνότητα του U είναι

$$g_U(u)=\int_{-\infty}^{0}\int_u^1 g(t,z)dtdz+\int_0^{\infty}\int_{1-u}^{1}g(t,z)dtdz$$

Η ολοκλήρωση ως προς z είναι άμεση, λόγω της μορφής της $g(t,z)$. Για την ολοκλήρωση ως προς t χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $t=\frac{1}{y^2}$ και καταλήγουμε ότι

$$g_U(u)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}1_{\{0<u<1\}}$$

και τελικά $\mathbb{P}(U \leq u) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{u}, \quad 0 < u < 1$

Η γέφυρα *Brown*

Ορισμός 4.4.1 Η μετασχηματισμένη διαδικασία $Wiener$,$W_t^o = W_t - tW_1$, $t \in [0,1]$ ονομάζεται **τυπική γέφυρα** *Brown*

Παρατηρήσεις: α) για κάθε $t \in [0,1]$ η W_t^0 είναι γραμμική συνάρτηση κανονικών τυχαίων μεταβλητών, επομένως είναι και η ίδια κανονική. επιπλέον για $s < t$ έχουμε
$Cov(W_s^o, W_t^o) = Cov(W_t - tW_1, W_s - sW_1) = Cov(W_t, W_s) - sCov(W_t, W_1) - tCov(W_s, W_1) + stV(W_1) = s - st - st + st = s(1-t)$

β) Η απεικόνιση $h : C \to C$ με $h(x)(t) = x(t) - tx(1)$ είναι συνεχής, αφού για κάθε $t \in [0,1]$ και για κάθε $x, y \in C$ έχουμε $|x(t) - tx(1) - y(t) + ty(1)| \leq |x(t) - y(t)| + t|x(1) - y(1)| \leq 2\|x - y\|$ επομένως $\|h(x) - h(y)\| \leq 2\|x - y\|$ επομένως από θεώρημα $Donsker$ $h(X_n) \Rightarrow h(W) = W^o$

Θεώρημα 4.4.3. Θέτουμε το μέτρο $\mathbb{P}_\epsilon$ στον $(C, \mathcal{C})$ ώς

$$\mathbb{P}_\epsilon(A) = \mathbb{P}(W \in A | 0 \leq W_1 \leq \epsilon), \quad A \in \mathcal{C}$$

Τότε $\mathbb{P}_\epsilon \Rightarrow \mathbb{W}^o$ όπου $\mathbb{W}^o$ είναι η κατανομή της γέφυρας $Brown$ W^o

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι για κάθε κλειστό $F \in \mathcal{C}$ ότι

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}(W \in F | 0 \leq W_1 \leq \epsilon) \leq \mathbb{P}(W^o \in F)$$

Εφόσον για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε ότι $Cov(W_1, W_t^o) = 0$ και επειδή οι W_1 και W_t^o ακολουθούν την κανονική κατανομή, έχουμε ότι για κάθε επιλογή $0 \leq t_1 < \cdots < t_k \leq 1$, η W_1 είναι ανεξάρτητη από κάθε $(W_{t_1}^o, \ldots, W_{t_k}^o)$ επομένως αν $\mathcal{C}_f$ είναι η κλάση των συνόλων πεπερασμένης διάστασης έχουμε

$$\mathbb{P}(W^o \in A, W_1 \in B) = \mathbb{P}(W^o \in A)\mathbb{P}(W_1 \in B), \quad A \in \mathcal{C}_f, B \in \mathcal{R} \implies$$

$$\implies \mathbb{P}(W^o \in A | W_1 \in [0,\epsilon] = \mathbb{P}(W^o \in A), \quad A \in \mathcal{C}_f,$$

δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$, το μέτρο $\mathbb{Q} = \mathbb{P}_{0 \leq W_1 \leq \epsilon}$ και το μέτρο $\mathbb{P}$ συμφωνούν σε μια κλάση καθορισμού επομένως:

$$\mathbb{P}(W^o \in A | W_1 \in [0,\epsilon] = \mathbb{P}(W^o \in A), \quad A \in \mathcal{C}$$

επιπλέον, $\|W - W^o\| = \sup\{|W_t - W_t + tW_1| : t \in [0,1]\} = |W_1|$ επομένως

$$\{|W_1| \leq \delta\} \cap \{W \in F\} = \{W^o \in F_\delta\}$$

(Σημ $F_\delta = \{x \in C : \rho(x,F) \leq \delta\}$). Για $\epsilon < \delta$ έχουμε

$$\mathbb{P}(|W_1| \leq \delta, W \in F | 0 \leq W_1 \leq \epsilon) = \mathbb{P}(W \in F | 0 \leq W_1 \leq \epsilon) \leq \mathbb{P}(W^o \in F_\delta)$$

και τελικά έχουμε:

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}(W \in F | 0 \leq W_1 \leq \epsilon) \leq \limsup_{\delta \to 0} \mathbb{P}(W^o \in F_\delta) = \mathbb{P}(W^o \in F)$$

που είναι το ζητούμενο.

Θεώρημα 4.4.4 Οι συναρτήσεις κατανομών για τις παρακάτω συνάρτησεις της γέφυρας *Brown* είναι:

$$\mathbb{P}(a < \inf_t W_t^o \leq \sup_t W_t^o \leq b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(e^{-2k^2(b-a)^2} - e^{-2(b+k(b-a))^2}\right), \quad a < 0 < b$$

$$\mathbb{P}(\sup_t |W_t^o| \leq b) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2b^2}, \quad b > 0$$

$$\mathbb{P}(\sup_t W_t^o \leq b) = \mathbb{P}(\inf_t W_t^o > -b) = 1 - e^{-2b^2}, \quad b > 0$$

$$\mathbb{P}(h_2(W^o) \leq u) = u, \quad u \in (0,1)]$$

Απόδειξη Η ιδέα της απόδειξης είναι η ακόλουθη: Θεωρούμε ότι $h : C \to \mathbb{R}^k$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση και το σύνολο ασυνεχειών της D_h, έχει $\mathbb{W}^o$ μέτρο 0. από το θεώρημα 4.4.3 και το θεώρημα απεικόνισης, έχουμε:

$$\mathbb{P}(h(W^o) \leq a) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}(h(W) \leq a | 0 \leq W_1 \leq \epsilon)$$

ή εναλλακτικά:

$$\mathbb{P}(h(W^o) \leq a) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}(h(W) \leq a | -\epsilon \leq W_1 \leq 0)$$

Ανατρέχοντας στο θεώρημα 4.4.1 έχουμε:

$$\mathbb{P}(a < m \leq M < b, 0 < W_1 < \epsilon) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Phi(2k(b-a)+\epsilon) - \Phi(2k(b-a)))$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Phi(2k(b-a)+2b) - \Phi(2k(b-a)+2b-\epsilon))$$

και είναι γνωστο ότι

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Phi(z+\epsilon) - \Phi(z)}{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Επομένως

$$\mathbb{P}(a < m \leq M < b | 0 < W_1 < \epsilon) = \frac{\mathbb{P}(a < m \leq M < b, 0 < W_1 < \epsilon)}{\mathbb{P}(0 < W_1 < \epsilon)} =$$

περνόντας στο όριο, για το πρώτο μέλος έχουμε

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}(a < m \leq M < b | 0 < W_1 < \epsilon) = \mathbb{P}(a < \inf_t W_t^o \leq \sup_t W_t^o \leq b)$$

ένω για το δεύτερο μέλος για κάθε όρο έχουμε

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Phi(2k(b-a)+\epsilon) - \Phi(2k(b-a))}{\Phi(\epsilon) - \Phi(0)} =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\frac{\Phi(2k(b-a)+\epsilon) - \Phi(2k(b-a))}{\epsilon}}{\frac{\Phi(\epsilon) - \Phi(0)}{\epsilon}} = e^{-2k^2(b-a)^2}$$

και
$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Phi(2k(b-a)+2b)-\Phi(2k(b-a)+2b-\epsilon)}{\Phi(\epsilon)-\Phi(0)}=$$
$$=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\frac{\Phi(2k(b-a)+2b)-\Phi(2k(b-a)+2b-\epsilon)}{\epsilon}}{\frac{\Phi(\epsilon)-\Phi(0)}{\epsilon}}=-e^{-2(b+k(b-a))^2}$$
και έχουμε την πρώτη αποδεικτέα

Μένει μόνο να αιτιολογήσουμε την εναλλαγή αθροίσματος με το όριο. Για κάθε όρο k θεωρούμε
$$g_k=\mathbb{P}(k\le Z\le k+\epsilon),\quad k\in\mathbb{Z}$$
$$g_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_k^{k+\epsilon}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
Για $k\ge 1$, έχουμε $\frac{t}{k}>1$ επομένως
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_k^{k+\epsilon}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_k^{\infty}\frac{t}{k}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{k^2}{2}}$$
Για $k\le -1$ έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα λόγω συμμετρίας

Τέλος για $k=0$ έχουμε
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\epsilon}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\le\frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}}\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$
και τελικά $g_k\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{k^2}{2}}<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{k^2}$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ που κάνει τη σύγκλιση ομοιόμορφη για $\epsilon\to 0$ για τη δεύτερη και τρίτη αποδεικτέα εργαζόμαστε όπως στο πόρισμα του θεωρήματος 4.4.1.

Για την τελευταία, αν $U=h_2(W)$ τότε πρέπει να δείξουμε ότι
$$\lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(U\le u|-\epsilon\le W_1\le 0)=u$$
και επειδή $-\epsilon\le W_1\le 0$ ισοδύναμα, αν $V=h_3(W)$ πρέπει να δείξουμε ότι
$$\lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(V\le u|-\epsilon\le W_1\le 0)=u$$
Ανατρέχουμε στο θεώρημα 4.4.2. Δείξαμε ότι με δεδομένα τα T και W_1 η V ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,T)$. Αν θέσουμε $L=\frac{V}{T}$ τότε η L ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$ και είναι ανεξάρτητη από το ζεύγος (T,W_1). Επομένως:
$$\mathbb{P}(V\le u|-\epsilon\le W_1\le 0)=\mathbb{P}(TL\le u|-\epsilon\le W_1\le 0)=$$
$$\int_0^1\mathbb{P}(T\le\frac{u}{s}|-\epsilon\le W_1\le 0)ds=u+\int_u^1\mathbb{P}(T\le\frac{u}{s}|-\epsilon\le W_1\le 0)ds$$
Τέλος έχουμε:
$$'\int_u^1\mathbb{P}(T\le\frac{u}{s}|-\epsilon\le W_1\le 0)ds=\frac{1}{\Phi(\epsilon)-\Phi(0)}\int_u^1\mathbb{P}(T\le\frac{u}{s},-\epsilon\le W_1\le 0)ds\le$$
$$\le c\epsilon^{-1}\int_u^1\mathbb{P}(T\le r,-\epsilon\le W_1\le 0)\frac{dr}{r^2}\le$$

$$\leq c\epsilon^{-1}u^{-2}\int_u^1\int_0^r\int_0^\epsilon tg(t,z)dzdtdr = c\epsilon^{-1}u^{-2}\int_u^1\int_0^r \frac{1-e^{\frac{-\epsilon^2}{2(1-t)}}}{\sqrt{t(1-t)}} \leq$$

$$\leq c_1\epsilon u^{-2}\int_u^1\int_0^r \frac{1}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}dtdr = c_1\epsilon u^{-2}\int_u^1 \frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{1-r}}dr \to 0$$

καθώς $\epsilon \to 0$ και $0 < u < 1$

Στη δεύτερη ανισότητα έχουμε $\int_0^\epsilon \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}dt \geq \epsilon\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-e^{\epsilon^2/2}) \geq \epsilon\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ για τον λόγο ότι $t/\epsilon < 1$

Στη τελευταία ποσότητα, έχουμε $\int_u^1 \frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{1-r}}dr = 2(\sqrt{(1-u)u} + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{u}}\right))$
και επειδή $\frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{u}} \to 0$ για $u \to 0$ η ποσότητα είναι πεπερασμένη

4.5 Ανισότητες μερικών αθροισμάτων

Ορισμός 4.5.1 Έστω $Y_1,\ldots,Y_m$ τ.μ (όχι αναγκαστικά ανεξάρτητες ή ισόνομες). Θέτουμε $S_k = Y_1+\cdots+Y_k$ και $S_0 = 0$ και ορίζουμε τις ποσότητες

$$M_m = \max_{0\leq k\leq m}|S_k| \text{ και } M'_m = \max_{0\leq k\leq m}\min\{|S_k|,|S_m-S_k|\}$$

Παρατήρηση Εφόσον για κάθε $k=1,..,m$ έχουμε $\min\{|S_k|,|S_m-S_k|\} \leq |S_k| \leq M_m$ τότε είναι άμεσο ότι

$$M'_m \leq M_m$$

Επιπλέον, επειδή $|S_k| \leq |S_k|+|S_m|$ και $|S_k| \leq |S_m-S_k|+|S_m|$ τότε θα έχουμε $|S_k| \leq \min\{|S_k|+|S_m|,|S_k-S_m|+|S_m|\} = |S_m|+\min\{|S_k|,|S_m-S_k|\}$ έχουμε

$$M_m \leq M'_m + |S_m|$$

Επομένως για $l > 0$ έχουμε $\{M'_m \leq \frac{l}{2}\}\cap\{|S_m| \leq \frac{l}{2}\} \subset \{M_m \leq l\}$ και συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{P}(M_m \geq l) \leq \mathbb{P}(M'_m \geq \frac{l}{2}) + \mathbb{P}(|S_m| \geq \frac{l}{2}) \leq 2\mathbb{P}(M_m \geq \frac{l}{2})$$

Λήμμα 4.5.1 Είναι

$$M_m \leq 3M'_m + \max_{1\leq i\leq m}|Y_i|$$

Απόδειξη Θεωρούμε το σύνολο $I = \{k=0,..,m : |S_k| \leq |S_k-S_m|\}$. Είναι εμφανές ότι $0 \in I$ επιπλέον, αν $S_m = 0$ τότε $M_m = M'_m$ και η αποδεικτέα ισχύει τετριμμένα. για $S_m \neq 0$ τότε είναι επίσης εμφανές ότι $m \notin I$. Επομένως με έναν απλό συλλογισμό μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει $0 < k \leq m$ τέτοιο ώστε $k-1 \in I$ και $k \notin I$. Για αυτό το k ισχύει ότι $|S_{k-1}| \leq |S_m - S_{k-1}|$ δηλαδή $|S_{k-1}| \leq M'_m$ και επιπλέον αφου $k \notin I$ έχουμε $|S_m-S_k| < |S_k|$ δηλαδή $|S_m-S_k| \leq M'_m$ και έτσι έχουμε

$$|S_m| \leq |S_{k-1}-S_k| + |S_m-S_k| + |S_{k-1}| \leq 2M'_m + |Y_k|$$

στην παρατήρηση δείξαμε ότι $M_m \leq M'_m + |S_m|$ από όπου τελικά προκύπτει το ζητούμενο.

Λήμμα 4.5.2 Έστω ότι υπάρχουν μη αρνητικοί $u_1,\ldots,u_m$ τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\mathbb{E}[|S_j-S_i|^c.|S_k-S_j|^c] \leq \left(\sum_{i<r\leq j}u_r\right)^a\left(\sum_{j<r\leq k}u_r\right)^a$$

για $0 \leq i \leq j \leq k \leq m$ και όπου $c, a > 0$. Τότε

$$\mathbb{P}(|S_j - S_i| \geq l, |S_k - S_j| \geq l) \leq \frac{1}{l^{2c}} \left(\sum_{i<r\leq k} u_r \right)^{2a}$$

Απόδειξη Εφόσον ισχύει ότι $xy \leq (x+y)^2$ για κάθε $x, y \geq 0$ από υπόθεση έχουμε

$$\mathbb{E}[|S_j - S_i|^c . |S_k - S_j|^c] \leq \left(\sum_{i<r\leq k} u_r \right)^{2a}$$

επιπλέον έχουμε

$$\mathbb{P}(|S_j - S_i| \geq l, |S_k - S_j| \geq l) \leq \mathbb{P}(|S_j - S_i|^c . |S_k - S_j|^c \geq l^{2c}) \leq$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[|S_j - S_i|^c . |S_k - S_j|^c]}{l^{2c}} \leq \frac{\left(\sum_{i<r\leq k} u_r \right)^{2a}}{l^{2c}}$$

Από ανισότητα $Markov$

Θεώρημα 4.5.1 Αν $c \geq 0$, $a > \frac{1}{2}$ και για κάθε $l > 0$ ισχύει

$$\mathbb{P}(|S_j - S_i| \geq l, |S_k - S_j| \geq l) \leq \frac{1}{l^{2c}} \left(\sum_{i<r\leq k} u_r \right)^{2a}$$

$0 \leq i \leq j \leq k \leq m$, τότε για κάθε $l > 0$ έχουμε

$$\mathbb{P}(M'_m \geq l) \leq \frac{K_{c,a}}{l^{2c}} \left(\sum_{0<r\leq m} u_r \right)^{2a}$$

όπου $K_{c,a}$ είναι θετική σταθερά που εξαρτάται από το c και το a.

Απόδειξη Θέτουμε $\delta = \frac{1}{2c+1}$. Εφόσον $c \geq 0$, έχουμε $0 < \delta \leq 1$. Επειδή

$$2^{\delta} \left(\frac{1}{2^{2a\delta}} + \frac{1}{K^{\delta}} \right) \xrightarrow{K\to\infty} \frac{1}{2^{\delta(2a-1)}} < 1$$

(για τον λόγο ότι $\delta > 0$ και $2a - 1 > 0$ από υπόθεση). Τότε για K αρκετά μεγάλο έχουμε

$$2^{\delta} \left(\frac{1}{2^{2a\delta}} + \frac{1}{K^{\delta}} \right) \leq 1 \quad (*)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει

$$\mathbb{P}(M'_m \geq l) \leq \frac{K}{l^{2c}} \left(\sum_{0<r\leq m} u_r \right)^{2a}$$

για $K \geq 1$ και τέτοιο ώστε να ικανοποιεί τη $(*)$. Θα κάνουμε χρήση επαγωγής ως προς το m

Για $m=1$, από υπόθεση για $i=0$, $j=k=1$ έχουμε $\mathbb{P}(M_1'\geq l)=\mathbb{P}(|Y_1|\geq l)\leq \frac{1}{l^{2c}}u_1^{2a}\leq \frac{K}{l^{2c}}u_1^{2a}$

Για $m=2$, Εφόσον $M_2'=\min\{|S_1|,|S_2-S_1|\}$, με όμοιο τρόπο αξιοποιούμε την υπόθεση για $i=0$, $j=1$ και $k=2$

Έστω ότι ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό μικρότερο του m. Για τον m, θέτουμε $u=u_1+...+u_m$. Αν $u=0$, τότε από υπόθεση έχουμε για $i=0$ και $k=m$ $\mathbb{P}(\min\{|S_j|,|S_m-S_j|\}\geq l)=0$ για κάθε $j=0,..,m$ επομένως η αποδεικτέα ισχύει τετριμμένα. Διαφορετικά, αν $u>0$, τότε υπάρχει $v\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\frac{u_1+...+u_{v-1}}{u}\leq\frac{1}{2}\leq\frac{u_1+...+u_v}{u}\quad(**)$$

Όπου το άθροισμά στο αριστερό μέλος είναι 0 για $v=1$. Θεωρούμε τις ποσότητες

$$U_1=\max_{0\leq i\leq v-1}\min\{|S_i|,|S_{v-1}-S_i|\}$$

$$U_2=\max_{v\leq j\leq m}\min\{|S_j-S_v|,|S_m-S_j|\}$$

$$D_1=\min\{|S_{v-1}|,|S_m-S_{v-1}|\}$$

$$D_2=\min\{|S_v|,|S_m-S_v|\}$$

Από υπόθεση έχουμε ότι ισχύει

$$\mathbb{P}(|S_j-S_i|\geq l,|S_k-S_j|\geq l)\leq\frac{1}{l^{2c}}\left(\sum_{i<r\leq k}u_r\right)^{2a}$$

$0\leq i\leq j\leq k\leq m$ επομένως μπορούμε να κάνουμε τον περιορισμό $0\leq i\leq j\leq k\leq v-1$. Από επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(U_1\geq l)\leq\frac{K}{l^{2c}}(u_1+\dots u_{v-1})^{2a}\leq\frac{u^{2a}}{l^{2c}}\frac{K}{2^{2a}}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει από την (**)

Επιπλέον μπορούμε να κάνουμε τον περιορισμό $v\leq i\leq j\leq k\leq m$. Επειδή $m-v<m$ από επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\mathbb{P}(U_2\geq l)\leq\frac{K}{l^{2c}}(u_{v+1}+\dots u_m)^{2a}\leq\frac{u^{2a}}{l^{2c}}\frac{K}{2^{2a}}$$

και εδώ, η τελευταία ανισότητα ισχύει από την (**). Τώρα, από υπόθεση έχουμε για $i=0$, $j=v-1$ και $k=m$

$$\mathbb{P}(D_1\geq l)\leq\frac{1}{l^{2c}}(u_1+\dots u_m)^{2a}=\frac{u^{2a}}{l^{2c}}$$

και όμοια

$$\mathbb{P}(D_2\geq l)\leq\frac{u^{2a}}{l^{2c}}$$

Θα δείξουμε ότι $\min\{|S_i|,|S_m-S_i|\}\leq U_1+D_1$ για κάθε $0\leq i\leq v-1$. Πράγματι, αν $\mu_i=\min\{|S_i|,|S_m-S_i|\}$ και για $0\leq i\leq v-1$ θα έχουμε είτε $|S_i|\leq U_1$ είτε $|S_{v-1}-S_i|\leq U_1$. Στη πρώτη περίπτωση έχουμε

$$\mu_i\leq|S_i|\leq U_1\leq U_1+D_1$$

στη δεύερη περίπτωση, αν $D_1 = |S_{v-1}|$ τότε

$$\mu_i \leq |S_i| \leq |S_{v-1} - S_i| + |S_{v-1}| \leq U_1 + D_1$$

Αν $D_1 = |S_m - S_{v-1}|$

$$\mu_i \leq |S_m - S_i| \leq |S_m - S_{v-1}| + |S_{v-1} - S_i| \leq U_1 + D_1$$

και έχουμε τον ισχυρισμό

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι $\min\{|S_j|, |S_m - S_j|\} \leq U_2 + D_2$ για κάθε $v \leq j \leq m$. Επομένως με βάση τα προηγούμενα έχουμε

$$M'_m \leq \max\{D_1 + U_1, U_2 + D_2\}$$

Δηλαδή

$$\mathbb{P}(M'_m \geq l) \leq \mathbb{P}(D_1 + U_1 \geq l) + \mathbb{P}(D_2 + U_2 \geq l)$$

Έστω επίσης $l_1, l_2 > 0$ με $l_1 + l_2 = l$. τότε όπως δείξαμε

$$\mathbb{P}(U_1 + D_1 \geq l) \leq \mathbb{P}(U_1 \geq l_1) + \mathbb{P}(D_1 \geq l_2) \leq \frac{u^{2a}}{l_1^{2c}} \frac{K}{2^{2a}} + \frac{u^{2a}}{l_2^{2c}}$$

Αν θέσουμε $C_1 = u^{2a} \frac{K}{2^{2a}}$ και $C_2 = u^{2a}$, θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο της ποσότητας

$$\left(\frac{C_1}{l_1^{2c}} + \frac{C_2}{l_2^{2c}} \right)$$

ως προς τα l_1, l_2 με την Μέθοδο *Lagrange* βρίσκουμε ότι είναι

$$\frac{1}{l^{2c}} (C_1^{\delta} + C_2^{\delta})^{\frac{1}{\delta}}$$

όπου $\delta = \frac{1}{2c+1}$. Παρατηρούμε ότι η ίδια σχέση ισχύει και για τα D_2, U_2. Τελικά έχουμε:

$$\mathbb{P}(M'_m \geq l) \leq \frac{u^{2a}}{l^{2c}} 2 \left(\frac{K^{\delta}}{2^{2a\delta}} + 1 \right)^{\frac{1}{\delta}} \leq \frac{K u^{2a}}{l^{2c}}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει από την επιλογή του K. Επομένως έχουμε το επαγωγικό βήμα και την αποδεικτέα.

Θεώρημα 4.5.2 Θέτουμε

$$M''_m = \max_{0 \leq i \leq j \leq k \leq m} \min\{|S_j - S_i|, |S_k - S_j|\}$$

Αν $c \geq 0$, $a > \frac{1}{2}$ και για κάθε $l > 0$ ισχύει

$$\mathbb{P}(|S_j - S_i| \geq l, |S_k - S_j| \geq l) \leq \frac{1}{l^{2c}} \left(\sum_{i < r \leq k} u_r \right)^{2a}$$

$0 \leq i \leq j \leq k \leq m$, τότε για κάθε $l > 0$ έχουμε

$$\mathbb{P}(M''_m \geq l) \leq \frac{K'_{c,a}}{l^{2c}} \left(\sum_{0 < r \leq m} u_r \right)^{2a}$$

όπου $K'_{c,a}$ είναι θετική σταθερά που εξαρτάται από το c και το a.

Παρατηρούμε ότι αν i_0 είναι ο δείκτης του μεγίστου στη ποσότητα M'_m τότε

$$M'_m = \min\{|S_{i_0} - S_0|, |S_m - S_{i_0}|\} \leq M''_m$$

Απόδειξη θέτουμε

$$N_m = \min_{1\leq r\leq m} \max\{\max_{0\leq i<r} |S_i|, \max_{r\leq i\leq m} |S_m - S_i|\}$$

Έστω r_0 είναι ο δείκτης που το N_m λαμβάνει το ελάχιστο. Για $0 \leq i \leq j \leq k \leq m$, έχουμε 2 περιπτώσεις:
1) $j < r_0$. Τότε και $i < r_0$ επομένως

$$\min\{|S_j - S_i|, |S_k - S_j|\} \leq |S_j - S_i| \leq |S_j| + |S_i| \leq 2 \max_{0\leq i<r_0} |S_i| \leq 2N_m$$

2)$j \geq r_0$, τότε και $k \geq r_0$ επομένως

$$\min\{|S_j - S_i|, |S_k - S_j|\} \leq |S_k - S_j| \leq |S_m - S_j| + |S_m - S_k| \leq 2 \max_{r_0\leq i\leq m} |S_m - S_i|\} \leq 2N_m$$

δηλαδή $M''_m \leq 2N_m$. Αρκεί λοιπόν να βρούμε κατάλληλο K τέτοιο ώστε να έχουμε

$$\mathbb{P}(N_m \geq l) \leq \frac{K}{l^{2c}}(u_1 + \dots u_m)^{2a}$$

Όπως και στο προηγούμενο θεώρημα, επιλέγουμε $K \geq 1$ και αρκετά μεγάλο ώστε

$$2^\delta \left(\frac{1}{2^{2a\delta}} + \frac{1}{K^\delta}\right) \leq 1$$

η προηγούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με

$$\frac{(2K)^\delta}{2^{2a\delta}} + (4.2^{2c})^\delta \leq K^\delta \quad (***)$$

με $\delta = \frac{1}{2c+1}$. Θα κάνουμε χρήση επαγωγής στο m

Για $m = 1$, $N_1 = |S_1|$ και από υπόθεση έχουμε το ζητούμενο

Όμοια με το προηγούμενο θεώρημα, Έστω ότι ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό μικρότερο του m. Θέτουμε $u = u_1 + ... + u_m$ και επιλέγουμε $v \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει η (**).

Για διευκόλυνση, θέτουμε $A_1 = N_{v-1}$,

$$A_1 = \min_{1\leq r<v} \max\{\max_{0\leq i<r} |S_i|, \max_{r\leq i<v} |S_{v-1} - S_i|\}$$

και $A_2 = N_{m-h}$ (δηλαδή το N ορισμένο στις $Y_{v+1}, \dots Y_m$)

$$A_2 = \min_{v<r\leq m} \max\{\max_{v\leq i<r} |S_i - S_v|, \max_{r\leq i\leq m} |S_m - S_i|\}$$

Από επαγωγική υπόθεση για τα $Y_1, \dots Y_{v-1}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(A_1 \geq l) \leq \frac{K}{l^{2c}}(u_1 + \dots u_{v-1})^{2a} \leq \frac{u^{2a}}{l^{2c}} \frac{K}{2^{2a}}$$

Επίσης από επαγωγική υπόθεση για τα $Y_{v+1}, \dots, Y_m$ έχουμε

$$\mathbb{P}(A_2 \geq l) \leq \frac{K}{l^{2c}}(u_{v+1} + \dots u_{v-1})^{2a} \leq \frac{u^{2a}}{l^{2c}} \frac{K}{2^{2a}}$$

Για διευκόλυνση, θέτουμε $\mu(i,j,k) = \min\{|S_j - S_i|, |S_k - S_j|\}$ και ορίζουμε

$$B = \max\{\mu(0, v-1, m), \mu(0, v-1, v), \mu(v-1, v, m), \mu(0, h, m)\}$$

Από υπόθεση έχουμε

$$\mathbb{P}(B \geq l) \leq \mathbb{P}(\mu(0, v-1, m) \geq l) + \mathbb{P}(\mu(0, v-1, v) \geq l) + \mathbb{P}(\mu(v-1, v, m) \geq l) + \mathbb{P}(\mu(0, h, m) \geq l) \leq 4\frac{u^{2a}}{l^{2c}}$$

Τώρα θα δείξουμε ότι $N_m \leq \max\{A_1, A_2\} + 2B$. Πράγματι, έστω r_1, r_2 οι δείκτες που παίρνουν την ελάχιστη τιμή τους οι ποσότητες A_1 και A_2 αντίστοιχα. Για να δείξουμε τον ισχυρίσμό, αρκεί να βρούμε έναν δείκτη r για τον οποίο ισχύει

$$\max_{0<i<r} |S_i| \leq \max\{A_1, A_2\} + 2B$$

και

$$\max_{r \leq i \leq m} |S_m - S_i| \leq \max\{A_1, A_2\} + 2B$$

Ισχύει ότι $\mu(0, v-1, m) \leq B$. Αν έχουμε ταυτόχρονα

$$|S_{v-1}| \leq B \quad (1)$$

και

$$|S_m - S_v| \leq B \quad (2)$$

τότε μπορούμε να επιλέξουμε ως r το v. Πράγματι για $0 \leq i \leq r_1$ έχουμε $|S_i| \leq A_1$ και για $r_1 \leq i < v$ έχουμε

$$|S_i| \leq |S_i - S_{v-1}| + |S_{v-1}| \leq A_1 + B$$

άρα $\max_{0<i<r} |S_i| \leq \max\{A_1, A_2\} + 2B$. Τώρα, για $v \leq i < r_2$ έχουμε

$$|S_m - S_i| \leq |S_i - S_v| + |S_m - S_v| \leq A_2 + B$$

και για $r_2 \leq i \leq m$ έχουμε $|S_m - S_i| \leq A_2$. Άρα $\max_{r \leq i \leq m} |S_m - S_i| \leq \max\{A_1, A_2\} + 2B$. Αν τώρα δεν ισχύει η (1), τότε θα δείξουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε ως r το r_1. Πράγματι εφόσον έχουμε $|S_{v-1}| > B$ τότε θα έχουμε $|Y_v| \leq B$ και $|S_m - S_{v-1}| \leq B$. Άν $0 \leq i \leq r_1$ τότε και όπως και πρίν $|S_i| \leq A_1$. επομένως έχουμε $\max_{0<i<r} |S_i| \leq \max\{A_1, A_2\} + 2B$. Άν $r_1 \leq i < v$ τότε θα έχουμε

$$|S_m - S_i| \leq |S_m - S_{v-1}| + |S_i - S_{v-1}| \leq A_1 + B$$

για $v \leq i < r_2$ έχουμε

$$|S_m - S_i| \leq |S_i - S_v| + |S_m - S_{v-1}| + |Y_v| \leq A_2 + 2B$$

και για $r_2 \leq i \leq m$ τότε όπως και προηγουμένως $|S_m - S_i| \leq A_2$. Με αντίστοιχο τρόπο δείχνουμε και την περίπτωση που ισχύει η (2) επιλέγοντας το r ως r_2 και έχουμε τελικά ότι $N_m \leq \max\{A_1, A_2\} + 2B$. Με βάση αυτό το συμπέρασμα, για $l_1, l_2 > 0$ με $l_1 + l_2 = l$ έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(N_m \geq l) \leq \mathbb{P}(A_1 \geq l_1) + \mathbb{P}(A_2 \geq l_1) + \mathbb{P}(B \geq \frac{l_2}{2})$$

και επειδή για κάθε όρο απ το δεξί μέλος έχουμε βρει άνω φράγμα, έχουμε

$$\mathbb{P}(N_m \geq l) \leq \frac{u^{2a}}{l_1^{2c}} \frac{2K}{2^{2a}} + 4.2^{2c} \frac{u^{2a}}{l_2^{2c}}$$

και βρίσκοντας την ελάχιστη τιμή από το δεξί μέλος, όμοια με το προηγούμενο θεώρημα καταλήγουμε

$$[\mathbb{P}(N_m \geq l) \leq \frac{u^{2a}}{l^{2c}} \left(\frac{(2K)^{\delta}}{2^{2a\delta}} + (4.2^{2c})^{\delta} \right)^{\frac{1}{\delta}} \leq K \frac{u^{2a}}{l^{2c}}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη

Κεφάλαιο 5

Ο Χώρος $D = D[0,1]$

5.1 Οι Συναρτήσεις càdlàg

Ορισμός 5.1.1 Ο χώρος $D = D[0,1]$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι δεξιά ημισυνεχής και έχουν πεπερασμένο όριο απ τα αριστερά σε κάθε σημείο.

Ορισμός 5.1.2 Έστω $x \in D$ και $T \subset [0,1]$. Θέτουμε

$$w_x(T) = w(x,T) = \sup_{s,t \in T} |x(s) - x(t)|$$

Για σύνολα της μορφής $[t, t+\delta]$ γράφουμε $w_x[t, t+\delta]$ αντί για $w_x([t, t+\delta)]$ και ο δείκτης συνέχειας όπως τον ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι:

$$w_x(\delta) = w(x,\delta) = \sup_{0 \le t \le 1-\delta} w_x[t, t+\delta]$$

Είναι εμφανές ότι αν $T_1 \subset T_2$, τότε $w_x(T_1) \le w_x(T_2)$. Επομένως η $w_x(\delta)$ είναι μονότονη ως προς δ

Λήμμα 5.1.1 Για κάθε $x \in D$ και για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχουν σημεία $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_u = 1$ τέτοια ώστε

$$w_x[t_{i-1}, t_i) < \epsilon, \quad i = 1, ..., u$$

Απόδειξη Έστω $x \in D$ και $\epsilon > 0$. Θέτουμε

$A_{x,\epsilon} = \{t \in [0,1]$: το διάστημα $[0,t)$ έχει πεπερασμένη διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_u = t$ για την οποία ισχύει $w_x[t_{i-1}, t_i) < \epsilon, \quad i = 1, ..., u\}$

και έστω $t^o = \sup A_{x,\epsilon}$. Έχουμε αρχικά ότι στο 0 η x είναι δεξιά συνεχής, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $t \in [0,\delta)$ έχουμε $|x(t) - x(0)| < \frac{\epsilon}{4}$. Επομένως για κάθε $s,t \in [0,\delta)$ έχουμε

$$|x(s) - x(t)| \le |x(s) - x(0)| + |x(t) - x(0)| < \epsilon/2$$

Δηλαδή

$$w_x[0,\delta) \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

επομένως $\delta \in A_{x,\epsilon}$ και $t^o > 0$. Τώρα εφόσον $A_{x,\epsilon} \subset [0,1]$ έχουμε ότι $t^0 \le 1$, δηλαδή η x ορίζεται στο t^o. Σε αυτό το σημείο η x έχει όριο από τα αριστερά, το $x(t^{o-}) \implies$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $t \in (t^o - \delta_1, t^o)$ να ισχύει $|x(t) - x(t^{o-})| < \frac{\epsilon}{4}$. Επομένως για κάθε $s, t \in (t^o - \delta, t^o)$ έχουμε

$$|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - x(t^{o-})| + |x(t) - x(t^{o-})| < \epsilon/2$$

επομένως $w_x(t^o - \delta_1, t^o) < \epsilon$.
Επειδή $t^o = \sup A_{x,\epsilon}$ υπάρχει $T \in A_{x,\epsilon}$ με $t^o - \delta_1 < T \leq t^o$ και επειδή $[T, t^o) \subset (t^o - \delta, t^o)$ έχουμε

$$w_x[T, t^o) < \epsilon$$

επιπλέον, υπάρχουν πεπερασμένα $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_u = T$ για τα οποία ισχύει ότι
$w_x[t_{i-1}, t_i) < \epsilon, \quad i = 1, ..., u$ για $t_{u+1} = t^o$, έχουμε ότι $t^o \in A_{x,\epsilon}$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι $t^o = 1$. Άν είχαμε $t^o < 1$, τότε επειδή η x είναι δεξιά συνεχής στο t^o, υπάρχει $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $t \in [t^o, t^o + \delta_2)$ να ισχύει ότι $|x(t) - x(t^o)| < \frac{\epsilon}{4}$. Θέτουμε $t_1 = t^o + \frac{\delta_2}{2}$ και τώρα για κάθε $s, t \in [t^o, t_1)$, έχουμε

$$|x(t) - x(s)| < \frac{\epsilon}{2} \implies w_x[t^o, t_1) < \epsilon$$

Όμως αυτό σημαίνει ότι $t_1 \in A_{x,\epsilon}$ και $t_1 > t^o$ το οποίο είναι άτοπο.

Παρατηρήσεις:1) Για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούν να υπάρξουν, το πολύ πεπερασμένου το πλήθος άλματα για μια συνάρτηση $x \in D$. Άν t είναι ένα σημείο ασυνέχειας της x, τότε $t \in \bigcup_n V_n$ όπου $V_n = \{t \in [0,1] : |x(t) - x(t^-)| \geq \frac{1}{n}\}$. Τα V_n είναι πεπερασμένου το πλήθος σύνολα, επομένως υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμου το πλήθος ασυνέχειες της x.

2) κάθε $x \in D$ είναι φραγμένη. Πράγματι, για $\epsilon > 0$ υπάρχουν σημεία $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_u = 1$ τέτοια ώστε $w_x[t_{i-1}, t_i) < \epsilon, \quad i = 1, ..., u$. επομένως αν $t \in [0,1]$ τότε υπάρχει $i = 1, ..u$ για το οποίο $t \in [t_i, t_{i+1})$ επομένως

$$|x(t)| \leq |x(t) - x(t_i)| + |x(t_i) - x(t_i^-)| + |x(t_i^-)| \leq \epsilon + J_i + |x(t_i^-)| \leq \max_{1 \leq 1 \leq u} J_i + \epsilon + \max_{1 \leq 1 \leq u} |x(t_i^-)|$$

Όπου J_i είναι το άλμα στο σημείο t_i

3) Έστω $x \in D$ τότε η x είναι *Borel* μετρήσιμες. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{u_n}^{(n)} = 1$ για τα οποία ισχύει ότι $w_x[t_{i_n}^{(n)}, t_{i_n+1}^{(n)}) < \frac{1}{n}, \quad i = 1, ..., u_n$ ορίζουμε $t_{i,n} = \frac{t_{i_n+1}^{(n)} + t_{i_n}^{(n)}}{2}$ και $y_n(t) = \sum_{i=0}^{u_n - 1} x(t_{i,n}) 1_{[t_{i_n}^{(n)}, t_{i_n+1}^{(n)})}(t)$. Αν $n \in \mathbb{N}$ και $t \in [0,1]$ τότε $t \in [t_{i_n}^{(n)}, t_{i_n+1}^{(n)})$ και εμφανώς, $t_{i,n} \in [t_{i_n}^{(n)}, t_{i_n+1}^{(n)})$. Επομένως:

$$|y_n(t) - x(t)| = |x(t_{i,n}) - x(t)| \leq \frac{1}{n}$$

και αυτό ισχύει για κάθε $t \in [0,1]$. Άρα

$$\|y_n - x\| \leq \frac{1}{n}$$

που σημαίνει ότι η y_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην x. Επειδή η $(y_n)_n$ είναι ακολουθία απλών συναρτήσεων, η x είναι *Borel* μετρήσιμη (Παρακάτω θα δούμε τη σχέση μετρησιμότητας-ορίου).

Ορισμός 5.1.2 1) Έστω $\delta \in (0,1)$. Μια διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_u = 1$ ονομάζεται

δ-διαμέριση αν για κάθε $i = 1, ..., u$ ισχύει $t_i - t_{i-1} > \delta$

2) Ορίζουμε τον ανάλογο δείκτη συνέχειας του D ως

$$w'_x(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_{1 \le i \le u} w_x[t_{i-1}, t_i)$$

Όπου το *infimum* είναι πάνω σε όλες τις δ-διαμερίσεις, $\{t_i\}$. Η απεικόνιση $w'_x(\delta)$ ονομάζεται δείκτης càdlàg του x

Λήμμα 5.1.2 Άν μια απεικόνιση $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ ανήκει στο D τότε:

$$\lim_{\delta \to 0} w'_x(\delta) = 0$$

Απόδειξη Έστω $x \in D$, και $\epsilon > 0$. Από λήμμα 5.1.1, υπάρχει διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_u = 1$ για την οποία ισχύει $w_x[t_{i-1}, t_i) < \epsilon, \quad i = 1, ..., u$. Θέτουμε $\lambda = \frac{\min_{1 \le i \le n}(t_i - t_{i-1})}{2}$ επομένως για κάθε $0 < \delta < \lambda$, η $\{t_i\}$ είναι δ-διαμέριση και επιπλέον

$$w'_x(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_{1 \le i' \le u'} w_x[t_{i'-1}, t_{i'}) \le \max_{1 \le i \le u} w_x[t_{i-1}, t_i) \le \epsilon$$

Λήμμα 5.1.3 Για κάθε $x \in D$, η $w'_x(\delta)$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση του δ, επίσης αν $\delta < 1/2$ $w'_x(\delta) \le w_x(2\delta)$ και επιπλέον, για κάθε $x \in D$ έχουμε:

$$w_x(\delta) \le 2w'_x(\delta) + j_x, \quad j_x = \sup_{0 \le t \le 1} |x(t) - x(t^-)|$$

Απόδειξη Έστω $x \in D$ και $\delta_1 < \delta_2$. Θέτουμε τα σύνολα:

$A = \{\max_{1 \le i \le u} w_x[t_{i-1}, t_i) : \{t_i\}\ \delta_1\text{-διαμέριση }\}$

$B = \{\max_{1 \le i \le v} w_x[s_{i-1}, s_i) : \{s_i\}\ \delta_2\text{-διαμέριση }\}$

επειδή $\delta_1 < \delta_2$ τότε μια δ_2-διαμέριση θα είναι και δ_1- διαμέριση επομένως $B \subset A$ από όπου προκύπτει η μονοτονία του w'_x

Έστω τώρα μια δ-διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_u = 1$ με $t_i - t_{i-1} \le 2\delta$ Αν $s, t \in [t_{i-1}, t_i)$ τότε $|s - t| \le 2\delta$ επομένως $\max_{1 \le i \le u} w_x[t_{i-1}, t_i) \le w_x(2\delta)$ και συνεπώς $w'_x(\delta) \le w_x(2\delta)$

Τέλος, για $\epsilon > 0$, υπάρχει δ-διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_u = 1$ τέτοια ώστε $\max_{1 \le i \le u} w_x[t_{i-1}, t_i) < w'_x(\delta) + \epsilon$, αν $s, t \in [0,1]$ με $|s - t| \le \delta$ τότε είτε $s, t \in [t_{i-1}, t_i)$ για κάποιο $i = 1, ..., u$ είτε βρίσκονται σε γειτονικά διαστήματα. Στη πρώτη περίπτωση έχουμε

$$|x(s) - x(t)| \le w_x[t_{i-1}, t_i) < w'_x(\delta) + \epsilon$$

Στη δεύτερη έχουμε ότι $s \in [t_{i-1}, t_i)$ και $t \in [t_i, t_{i+1})$. Επιπλέον, υπάρχει ακολουθία $(t_n)_n$, με $t_n \uparrow t_i$, $t_n < t_i$ και $x(t_n) \to x(t_i^-)$. Επομένως για το δοσμένο ϵ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x(t_n) - x(t_i^-)| < \epsilon$ για $n \ge n_0$. Επίσης $t_n \in [t_{i-1}, t_i)$. Επομένως

$$|x(s) - x(t)| \le |x(t) - x(t_i)| + |x(s) - x(t_n)| + |x(t_i) - x(t_i^-)| + |x(t_n) - x(t_i^-)| <$$

$$< 2(w'_x(\delta) + \epsilon) + j_{t_i} + \epsilon \le 2(w'_x(\delta) + \epsilon) + j_x + \epsilon$$

Για κάθε $n \ge n_0$. Για $\epsilon \to 0$ έχουμε το ζητούμενο

5.2 Η τοπολογία *Skorohod*

Στον χώρο D, η $\|.\|_\infty$ δεν μπορεί να μας δώσει καθαρή εικόνα για το αν 2 συναρτήσεις είναι αρκετά κοντά

Παράδειγμα Έστω οι απεικονίσεις $x = 1_{\{[a,1]\}}$ και $y = 1_{\{[b,1]\}}$, $a, b \in (0,1)$ και $b > a$. Εδώ θα έχουμε $x(a) = 1$ ενώ $y(a) = 0$ επομένως $\|x - y\|_\infty = 1$ όσο κοντά και αν βρίσκονται τα a και b. Όμως για $t \notin [a,b)$ - όπου το $[a,b)$ είναι ένα πολύ μικρό διάστημα- έχουμε $x(t) = y(t)$

Χρειαζόμαστε επομένως μια μετρική που να εξαλείφει μια τέτοια παθογένεια η όποια επιπλέον θα μας κάνει τον χώρο πλήρη και διαχωρίσιμο

Ορισμός 5.2.1 Θέτουμε

$\Lambda = \{\lambda : [0,1] \to [0,1] : \lambda$ συνεχής και γν. αύξουσα, επί$\}$

και

$$\rho(x,y) = \inf\{\epsilon > 0 : \quad \exists \lambda \in \Lambda \quad \text{τ.ω.} \quad \sup_{t\in[0,1]} |\lambda(t) - t| < \epsilon, \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(\lambda(t))| < \epsilon\}$$

Παρατηρούμε ότι η $\lambda(t) \equiv t$ είναι στοιχείο του Λ επομένως η $\rho(x,y)$ είναι πεπερασμένη.
Επιπλέον, η ρ είναι μετρική.

Πράγματι, είναι εμφανές ότι για κάθε $x, y \in D$, $\rho(x,y) \geq 0$

Έστω $\rho(x,y) = 0$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(\lambda_n)_n$ στο Λ με $\|\lambda_n - t\|_\infty \to 0$ και $\|x - y(\lambda_n)\|_\infty \to 0$. Επομένως για κάθε $t \in [0,1]$ $\lambda_n(t) \to t$, και $y(\lambda_n(t)) \to x(t)$. Άν t είναι σημείο συνέχειας του y, τότε για $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $s \in (t-\delta, t+\delta)$ έχουμε $|y(s) - y(t)| < \epsilon$. επιπλέον, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\lambda_n(t) \in (t-\delta, t+\delta)$ για κάθε $n \geq n_0$ επομένως $|y(\lambda_n(t)) - y(t)| < \epsilon$ δηλαδή $y(\lambda_n(t)) \to y(t)$ και από την μοναδικότητα του ορίου $y(t) = x(t)$. Αν t είναι σημείο ασυνέχειας της y, τότε επειδή η y είναι δεξιά συνεχής με όμοιο τρόπο καταλήγουμε $y(t) = x(t)$, εκτός αν η ακολουθία $(\lambda_n(t))_n$ είναι αύξουσα επομένως $x(t) = y(t^-)$, όμως επειδή η x, y είναι δεξιά συνεχείς, έχουμε ότι υπάρχει γειτονιά δεξιά του t στην οποία $x = y$ λ-σ.π. επομένως

$$x(t) = \lim_{s\to t^+} x(s) = \lim_{s\to t^+} y(s) = y(t)$$

Και τελικά $x = y$

Άν τώρα $x = y$, είναι άμεσο για $\lambda = t$ ότι $\rho(x,y) = 0$

Επίσης έχουμε ότι για κάθε $t \in [0,1]$, και $\lambda \in \Lambda$ υπάρχει $s \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $|\lambda(t) - t| = |s - \lambda^{-1}(s)|$ και $|x(t) - y(\lambda(t))| = |y(s) - x(\lambda^{-1}(s))|$, γιατί η είναι λ 1-1 και επί. Επιπλέον, 1) επειδή το $[0,1]$ είναι συμαγές, κάθε κλειστό υποσύνολο του, F είναι συμπαγές και $\lambda(F)$ είναι κλειστό, και 2) η αντίστροφη μίας μονότονης συνάρτησης διατηρεί την μονοτονία έχουμε $\lambda^{-1} \in \Lambda$ και τελικά $\sup_{t\in[0,1]} |\lambda(t) - t| = \sup_{s\in[0,1]} |\lambda^{-1}(s) - s|$ και $\sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(\lambda(t))| = \sup_{s\in[0,1]} |y(s) - x(\lambda^{-1}(s))|$ που σημαίνει ότι $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

Για την τριγωνική ανισότητα, έστω $x, y, h \in D$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ και $t \in [0,1]$

$$|x(t) - y(\lambda_1(\lambda_2(t)))| \leq |x(t) - h(\lambda_2(t))| + |h(\lambda_2(t)) - y(\lambda_1(\lambda_2(t)))| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - h(\lambda_2(t))| + \sup_{s\in[0,1]} |h(s) - y(\lambda_1(s))|$$

και

$$|\lambda_2(\lambda_1(t)) - t| \leq |\lambda_2(\lambda_1(t)) - \lambda_1(t)| + |\lambda_1(t) - t| \leq \sup_{t\in[0,1]} |\lambda_2(t) - t| + \sup_{s\in[0,1]} |\lambda_1(s) - s|$$

επομένως αν $(\epsilon_n^{(1)})_n$ είναι ακολουθία του συνόλου

$$\{\epsilon > 0 : \quad \exists \lambda \in \Lambda_1 \quad \text{τ.ω.} \quad \sup_{t\in[0,1]} |\lambda_1(t) - t| < \epsilon, \sup_{t\in[0,1]} |h(t) - y(\lambda_1(t))| < \epsilon\}$$

με $\epsilon_n^{(1)} \to \rho(h,y)$ και αντίστοιχα υπάρχει ακολουθία $(\epsilon_n^{(2)})_n$ με $\epsilon_n^{(2)} \to \rho(x,h)$ τότε με βάση τα προηγούμενα έχουμε ότι $\rho(x,y) < \epsilon_n^{(1)} + \epsilon_n^{(2)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Συνεπώς ο χώρος D αν εφοδιαστεί με την ρ, είναι μετρικός χώρος και η ρ ονομάζεται τοπολογία *Skorohod*

Λήμμα 5.2.1 Για $x, y \in D$ $\rho(x,y) = \inf\{\|\lambda - t\|_\infty \vee \|x - y \circ \lambda\|_\infty : \lambda \in \Lambda\}$

Απόδειξη συμβολίζουμε με

$$A = \{\|\lambda - t\|_\infty \vee \|x - y \circ \lambda\|_\infty : \lambda \in \Lambda\}$$

Αν $a \in A$, τότε υπάρχει $\lambda_1 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $a = \|\lambda_1 - t\|_\infty \vee \|x - y \circ \lambda_1\|_\infty$. Επομένως $\rho(x,y) \leq \|\lambda_1 - t\|_\infty \leq a$ και $\rho(x,y) \leq \|x - y \circ \lambda_1\|_\infty \leq a$, έτσι τό $\rho(x,y)$ είναι κάτω φράγμα του A.

Έστω τώρα $\epsilon > 0$. τότε υπάρχει $\lambda \in \Lambda$ και $\epsilon' > 0$ τέτοια ώστε

$$\|\lambda - t\|_\infty < \epsilon', \quad (1)$$

$$\|x - y \circ \lambda\|_\infty < \epsilon' \quad (2)$$

και

$$\epsilon' < \rho(x,y) + \epsilon \quad (3)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε $b = \|\lambda - t\|_\infty \vee \|x - y \circ \lambda\|_\infty < \epsilon'$ και από το (3) έχουμε

$$\|\lambda - t\|_\infty \vee \|x - y \circ \lambda\|_\infty < \epsilon' < \rho(x,y) + \epsilon$$

και $b \in A$ που ολοκληρώνει την απόδειξη

Παράδειγμα Γυρνώντας στο αρχικό παράδειγμα, αν $\lambda \in \Lambda$ τότε $y(\lambda(t)) = 1$ για $\lambda(t) \in [b,1]$ και 0 διαφορετικά. Αν $\lambda(a) = b$ τότε λόγω την μονοτονίας της λ, θα έχουμε για κάθε $a < t \leq 1$, $\lambda(t) > b$ δηλαδή $y(\lambda(t)) = 1_{[a,1]} = x$ επομένως $\|x - y \circ \lambda\|_\infty = 0$. Αν $\lambda(b) \neq a$ τότε $\|x - y \circ \lambda\|_\infty = 1$. Παρατηρούμε η ποσότητα $\|\lambda - t\|_\infty$ δεν μπορεί να ξεπεράσει το 1 επομένως έχει νόημα να ψάξουμε το $infimum$ στο παρακάτω σύνολο:

$$\{\|\lambda - t\|_\infty : \lambda \in \Lambda, \lambda(a) = b\}$$

Άν η λ συνδέει γραμμικά τα σημεία $\{(0,0), (a,b), (1,1)\}$ τότε $\|\lambda - t\|_\infty = |b - a|$ επομένως $\rho(x,y) \leq |a - b|$.

Η λ δηλαδή είναι η συνάρτηση που προκαλεί τη κατάλληλη χρονική ¨καθυστέριση’ που χρειαζόμαστε για να δούμε πόσο κοντά είναι 2 συναρτήσεις.

Παρατήρηση Από τον ορισμό, στην τοπολογία *Skorohod* μια ακολουθία $(x_n)_n$ του D συγκλίνει σε στοιχείο του D αν υπάρχει ακολουθία στοιχείων του Λ, $(\lambda_n)_n$ με $\lambda_n \to t$ ομοιόμορφα και $x_n \circ \lambda_n \to x$ ομοιόμορφα. Αν μια ακολουθία $(x_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην x τότε συγκλίνει και στην τοπολογία *Skorohod* (θέτουμε $\lambda_n = t$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως όπως είδαμε στο παράδειγμα, η σύγκλιση στη τοπολογία *Skorohod* δεν συνεπάγεται ομοιόμορφη σύγκλιση. Ωστόσο η $(x_n)_n$ συγκλίνει σημειακά στα σημεία συνέχειας της x. Πράγματι,

$$|x(t)-x_n(t)| \leq |x(\lambda_n(t))-x(t)|+|x(\lambda_n(t))-x_n(t)| \leq |x(\lambda_n(t))-x(t)|+\sup_{s\in[0,1]}|x_n(\lambda_n^{-1}(s))-x(s)|$$

και επειδή τα σημεία ασυνέχειας είναι το πολύ αριθμήσιμα $x_n \to x$ *Lebesgue* σ.π.

Τέλος αν $x \in C$, και $x_n \to x$ στην τοπολογία *Skorohod* τότε $x_n \to x$ ομοιόμορφα. Πράγματι, για κάθε $t \in [0,1]$ από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε

$$|x(t) - x_n(t)| \leq |x(\lambda_n(t)) - x(t)| + \sup_{s\in[0,1]}|x_n(\lambda_n^{-1}(s)) - x(s)|$$

θέτουμε $\delta_n = \|\lambda_n - t\|$ επομένως

$$|x(t) - x_n(t)| \leq w_x(\delta_n) + \sup_{s\in[0,1]}|x_n(\lambda_n^{-1}(s)) - x(s)|$$

και τελικά

$$\|x - x_n\| \leq w_x(\delta_n) + \sup_{s\in[0,1]}|x_n(\lambda_n^{-1}(s)) - x(s)| \to 0$$

που με βάση και τα προηγούμενα, σημαίνει ότι ο περιορισμός στη *Skorohod* τοπολογίας στον C ταυτίζεται με την $\|.\|$ τοπολογία.

Λήμμα 5.2.2 Έστω μια διαμέριση $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = 1$ του $[0,1]$. Ορίζουμε μια απεικόνιση $\psi : [0,1] \to [0,1]$ με

$$\psi(t) = \begin{cases} s_{j-1} & t \in [s_{j-1}, s_j), \quad j = 1,...,k \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

Αν $\max_j(s_j - s_{j-1}) \leq \delta$ για κάποιο $\delta \in (0,1)$, τότε $\rho(x \circ \psi, x) \leq \delta \vee w'_x(\delta)$ για κάθε $x \in D$

Απόδειξη Έστω $\delta \in (0,1)$ και $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει μια δ-διαμέριση $\{t_i\}$ τέτοια ώστε $w_x[t_{i-1}, t_i) \leq w'_x(\delta) + \epsilon$ για κάθε i. Θεωρούμε την $\lambda \in \Lambda$ με $\lambda(t_i) = s_j$ όταν $t_i \in (s_{j-1}, s_j]$ $j = 1,..,k$, $\lambda(0) = 0$ και στα ενδιάμεσα σημεία είναι γραμμική. Παρατηρούμε ότι επειδή $t_i \in (s_{j-1}, s_j]$ για κάποιο j τότε $|\lambda(t_i) - t_i| = |s_j - t_i| \leq \delta$ επομένως $\|\lambda - t\|_\infty \leq \delta$. Επομένως μένει μόνο να δείξουμε ότι $|x(\psi(t)) - x(\lambda^{-1}(t))| \leq w'_x(\delta) + \epsilon$ για κάθε $t \in [0,1]$. Αυτό ισχύει τετριμμένα αν $t = 0$ ή $t = 1$. Αν $t \in (0,1)$ τότε θα δείξουμε ότι $\psi(t), \lambda^{-1}(t) \in [t_{i-1}, t_i)$ για κάποιο i.

Πρώτα θα δείξουμε ότι αν για κάποιο i έχουμε $\psi(t) < t_i$ τότε θα έχουμε $\lambda^{-1}(t) < t_i$, και αντίστροφα.
Πράγματι, αν $t_i \in (s_{j-1}, s_j]$ τότε

$$\psi(t) < t_i \implies \psi(t) < s_j \implies \psi(t) \leq s_{j-1} \implies \psi(t) < t_i$$

Δηλαδή $\psi(t) < t_i$ αν και μόνο αν $\psi(t) < s_j$ αν και μόνο αν $t_i < s_j$. Επιπλέον έχουμε $\lambda(t_i) = s_j$ επομένως $t < s_j$ αν και μόνο αν $t < \lambda(t_i)$ αν και μόνο αν $\lambda^{-1}(t) < t_i$ που ολοκληρώνει τον ισχυρισμό μας.

Τέλος αν τα $\psi(t), \lambda^{-1}(t)$ ηταν σε ξεχωριστά διαστήματα, τότε λόγω του παραπάνω ισχυρισμού, μια από τις 2 ποσότητες θα ήταν τελικά μικρότερη από το κάτω φράγμα που της ορίζει το διάστημα της διαμέρισής, πράγμα που είναι άτοπο

Λήμμα 5.2.3 Ο (D, ρ) είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη Έστω $k \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $s_j = \frac{j}{k}$ $,j = 0, ..., k$ και

$$B_k = \{x \in D : x(t) = \sum_{j=1}^{k} q_j 1_{[s_{j-1}, s_j)}(t), \quad x(1) = q_k \quad , q_j \in \mathbb{Q} \quad j = 1, ...k\}$$

Το $B = \bigcup_k B_k$ είναι αριθμήσιμο. Επομένως για $x \in D$ και $\epsilon > 0$ αρκεί να βρούμε $y \in B$ τέτοιο ώστε $\rho(x, y) < 2\epsilon$. Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{k} < \epsilon$ και $w'_x(\frac{1}{k}) < \epsilon$ (αυτό είναι δυνατό γιατί $\lim_\delta w'_x(\delta) = 0$) και θέτουμε την απεικόνιση $\psi : [0, 1] \to [0, 1]$ όπως ορίστηκε στο λήμμα 5.3.2. Επιπλέον θέτουμε:

$$y(t) = \begin{cases} q_{j-1} & t \in [s_{j-1}, s_j), \quad j = 1, ..., k \\ q_k, & t = 1 \end{cases}$$

με q_j τέτοια ώστε $|x(s_j) - q_j| < \epsilon$ για κάθε $j = 1, .., k$. Παρατηρούμε ότι η $x \circ \psi$ έχει τύπο

$$x(\psi(t)) = \begin{cases} x(s_{j-1}) & t \in [s_{j-1}, s_j), \quad j = 1, ..., k \\ x(1), & t = 1 \end{cases}$$

επομένως είναι εύκολο να δούμε για $\lambda = t$ ότι $\rho(x \circ \psi, y) < \epsilon$ και ότι $y \in B$. Τέλος από το λήμμα 5.3.2 και τη τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\rho(x, y) \leq \rho(x \circ \psi, y) + \rho(x, x \circ \psi) < 2\epsilon$$

Μια άλλη μετρική ιδιότητα που ζητάμε να έχει ο χώρος (D, ρ) είναι η πληρότητα. Το επόμενο παράδειγμα μας δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει.

Παράδειγμα Έστω η ακολουθία $(x_n)_n$ με $x_n = 1_{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n})}$. Δουλεύοντας όπως στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε ότι

$$\rho(x_n, x_m) \leq |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$$

δηλαδή η ακολουθία είναι *Cauchy*. Ωστόσο τα μόνα δυνατά όρια είναι η $x \equiv 0$ ή $x = 1_{\{\frac{1}{2}\}}$ όμως σε αυτές τις περιπτώσεις έχουμε $\|x_n \circ \lambda_n - x\| = 1$, δηλαδή δεν συγκλίνει η ακολουθία στην τοπολογία *Skorohod*.

Ορισμός 5.2.2 Για κάθε $\lambda \in \Lambda$ ορίζουμε

$$\|\lambda\|_l = \sup_{s<t, s,t \in [0,1]} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right|$$

Και ορίζουμε την απεικόνιση $d : D \times D \to \mathbb{R}$ ως

$$d(x, y) = \inf\{\epsilon > 0 : \exists \lambda \in \Lambda \quad \text{τ.ω.} \quad \|\lambda\|_l \leq \epsilon, \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - g(\lambda(t))| \leq \epsilon\}$$

Παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά με την ρ- μετρική, βρίσκεται στις συναρτήσεις λ. Για $t < s$, $\epsilon > 0$ θέλουμε $\|\lambda\|_l \leq \epsilon$ δηλαδή

$$e^{-\epsilon} \leq \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \leq e^{\epsilon}$$

τώρα για s πολύ κοντά στο t βλέπουμε ένα περιορισμό στις κλίσεις του λ. Δηλαδή όταν 2 συναρτήσεις είναι ¨κοντά¨, ζητάμε από το Λ συναρτήσεις με κλίση κοντά στο 1.

Επίσης, με όμοιο τρόπο όπως στο λήμμα 5.2.1 ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$d(x,y) = \inf\{\|\lambda\|_l \vee \|x - y \circ \lambda\|_\infty : \lambda \in \Lambda\}$$

Επιπλέον, η d είναι μετρική. Αρκεί μόνο να ελέγξουμε την ποσότητα $\|\lambda\|$ και ότι $d(x,y) = 0 \implies x = y$.

έχουμε λοιπόν ότι

$$\|\lambda^{-1}\|_l = \sup_{s<t,s,t\in[0,1]} \left|\log \frac{\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(s)}{t-s}\right| = \sup_{s<t,s,t\in[0,1]} \left|\log \frac{t-s}{\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(s)}\right| =$$

$$= \sup_{\lambda(t_1)<\lambda(t_2),\lambda(t_1),\lambda(t_2)\in[0,1]} \left|\log \frac{\lambda(t_2) - \lambda(t_2)}{t_2 - t_1}\right| = \sup_{t_1<t_2,t_1,t_2\in[0,1]} \left|\log \frac{\lambda(t_2) - \lambda(t_2)}{t_2 - t_1}\right| = \|\lambda\|_l$$

Επιπλέον έχουμε για $s, t \in [0,1]$ με $s < t$

$$\left|\log \frac{\lambda_2(\lambda_1(t)) - \lambda_2(\lambda_1(s))}{t-s}\right| = \left|\log \frac{(\lambda_2(\lambda_1(t)) - \lambda_2(\lambda_1(s)))}{(\lambda_1(t) - \lambda_1(s))} \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_1(s))}{(t-s)}\right| \leq$$

$$\left|\log \frac{\lambda_2(\lambda_1(t)) - \lambda_2(\lambda_1(s))}{\lambda_1(t) - \lambda_1(s)}\right| + \left|\log \frac{\lambda_1(t) - \lambda_1(s)}{t-s}\right| \leq \|\lambda_1\|_l + \|\lambda_2\|_l$$

και τελικά $\|\lambda_2 \circ \lambda_1\|_l \leq \|\lambda_1\|_l + \|\lambda_2\|_l$

Τέλος έχουμε:

1) Για κάθε $u \in (0, \infty)$ ότι $|u - 1| \leq e^{|\log u|} - 1$.
Πράγματι για $u \geq 1$ ισχύει τετριμμένα. Αν τώρα $u \in (0,1)$ τότε $e^{|\log u|} = \frac{1}{u}$ και αν είχαμε $1 - u > \frac{1}{u} - 1$ τότε θα έπρεπε $(u-1)^2 < 0$ που είναι άτοπο.

2) Για κάθε $\lambda \in \Lambda$, $\|\lambda - t\| \leq e^{\|\lambda\|_l} - 1$.
Πράγματι, για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε:

$$|\lambda(t) - t| = t\left|\frac{\lambda(t) - \lambda(0)}{t-0} - 1\right| \leq \left|\frac{\lambda(t) - \lambda(0)}{t-0} - 1\right| \leq$$

$$e^{\left|\log \frac{\lambda(t) - \lambda(0)}{t-0}\right|} - 1 \leq e^{\|\lambda\|_l} - 1$$

Η δεύτερη ανισότητα προέκυψε από το 1)

3) για κάθε $\lambda \in \Lambda$, $\|x - y \circ \lambda\|_\infty \leq e^{\|x - y \circ \lambda\|_\infty} - 1$

Αυτό προκύπτει από την γνωστή ανισότητα $e^x \geq x+1$

Από το 2) και από το 3) έχουμε ότι για κάθε$\lambda \in \Lambda$

$$\rho(x,y) \leq e^{\|\lambda\|_l \vee \|x-y\circ\lambda\|_\infty} - 1$$

που σημαίνει ότι

$$\rho(x,y) \leq e^{d(x,y)} - 1$$

Από την ισοδύναμη μορφή της d. Επομένως αν $d(x,y)=0$ καταλήγουμε ότι $\rho(x,y)=0$ δηλαδή $x=y$.

Λήμμα 5.2.4 υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\rho(x,y) \leq 2d(x,y)$$

Αν $d(x,y) < \epsilon_0$

Απόδειξη έχουμε ότι

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+2t)}{2t} = 1$$

και ότι

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1-2t)}{2t} = -1$$

επομένως για $\epsilon = \frac{1}{2}$ υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ για το οποίο αν $t_0 \in [0,\epsilon_0)$:

$$\log(1-2t_0) < -t_0 < t_0 < \log(1+2t_0) \quad (1)$$

υποθέτουμε ότι $d(x,y) < t_0$ και $\lambda \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $d(x,y) \leq \|\lambda\|_l < t_0$ και ότι $\|x-y\circ\lambda\| < t_0$. Έχουμε τώρα:

$$\log(1-2t_0) < -t_0 < \log\frac{\lambda(t)}{t} < t_0 < \log(1+2t_0)$$

Για κάθε $t \in (0,1]$ που σημαίνει ότι

$$1-2t_0 < \frac{\lambda(t)}{t} < 1+2t_0$$

που συνεπάγεται ότι $|\lambda(t)-t| < 2t_0$ δηλαδή ότι $\rho(x,y) \leq 2t_0$. Επειδή η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε $t_0 \in (d(x,y),\epsilon_0)$ καταλήγουμε ότι $\rho(x,y) \leq 2d(x,y)$

Παρατήρηση Μελετώντας τις ανισότητες στην (1) μπορούμε να δούμε ότι το λήμμα ισχύει για $\epsilon_0 = \frac{1}{4}$

Λήμμα 5.2.5 Έστω $\delta \in (0,1/4)$ και $x \in D$. Αν $\rho(x,y) < \delta^2$ τότε $d(x,y) \leq 4\delta + w'_x(\delta)$

Απόδειξη Υπάρχει δ-διαμέριση $\{t_i\}$ τέτοια ώστε $w_x[t_{i-1},t_i) < w'_x(\delta)+\delta$ για κάθε i. Επιλέγουμε $\mu \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\|x-y\circ\mu\| < \delta^2$ και $\|\mu-t\| < \delta^2$. Επιπλέον θεωρούμε την $\lambda \in \Lambda$ με $\lambda(t_i)=\mu(t_i)$ για κάθε i και συνδέουμε γραμμικά στα ενδιάμεσα σημεία. Τώρα αν $t \in [t_{i-1},t_i)$ έχουμε

$$t_{i-1} \leq t < t_i$$

$$\implies \lambda(t_{i-1}) \leq \lambda(t) < \lambda(t_i)$$

$$\implies \mu(t_{i-1}) \le \lambda(t) < \mu(t_i)$$
$$\implies t_{i-1} \le \mu^{-1}(\lambda(t)) < t_i$$

Δηλαδή το t και $\mu^{-1}(\lambda(t))$ βρίσκονται πάντα στο ίδιο διάστημα της διαμέρισής. Επομένως, για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε:

$$|x(t) - y(\lambda(t))| \le |x(t) - x(\mu^{-1}(\lambda(t)))| + |y(\lambda(t)) - x(\mu^{-1}(\lambda(t)))|$$
$$\le w'_x(\delta) + \delta + \delta^2 < w'_x(\delta) + 4\delta$$

Επιπλέον έχουμε

$$|\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1})| = |\mu(t_i) - \mu(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1})| \le 2\delta^2 < 2\delta(t_i - t_{i-1})$$

Αν τώρα $t, s \in [t_{i-1}, t_i)$ με $s < t$, τότε λόγω της γραμμικής μορφής της λ θα έχουμε ότι η κλίση του τμήματος θα είναι $\frac{\mu(t_i)-\mu(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$ επομένως

$$|\lambda(t) - \lambda(s) - (t-s)| = |t-s| \left| \frac{\mu(t_i) - \mu(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| \le 2\delta|t-s|$$

Στη γενική περίπτωση που τα s, t βρίσκονται σε διαφορετικά διαστήματα της διαμέρισης, αν $u \in (s,t)$ παρατηρούμε ότι

$$|\lambda(t) - \lambda(s) - (t-s)| \le |\lambda(t) - \lambda(u) - (t-u)| + |\lambda(s) - \lambda(u) - (s-u)|$$

επομένως, αν μεσολαβόυν $n-1$ ευθύγραμα τμήματα από το τμήμα που βρίσκεται το s μέχρι αυτό του t, εφαρμόζουμε τη προηγούμενη τριγωνική ανισότητα προσθέτοντας τα n σημεία των κορυφών των ευθύγραμμων τμημάτων $[t_{i-1}, t_i)$. Εφαρμόζοντας σε κάθε ένα τη ειδική περίπτωση έχουμε

$$|\lambda(t) - \lambda(s) - (t-s)| \le 2\delta(t - t_{i_n} + t_{i_n} - t_{i_{n-1}} \dots t_{i_1} - s) = 2\delta(t-s)$$

επομένως

$$1 - 2\delta \le \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t-s} \le 1 + 2\delta$$

δηλαδή

$$\log(1-2\delta) \le \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t-s} \le \log(1+2\delta)$$

Τώρα για $u > -1/2$ από τη γνωστη ανίσοτητα $e^u \ge u+1$ έχουμε $\log(1+2u) \le 2u \le 4u$ επιπλέον για $u \in [0, 1/4)$ η $f(u) = \log(1-2u) + 4u$ είναι αύξουσα επομένως $\log(1-2u) > -4u$ και τελικά $\|\lambda\|_l \le 4\delta$ που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Πόρισμα Οι d και ρ είναι ισοδύναμες (Επομένως ο (D,d) είναι διαχωρίσιμος)

Απόδειξη Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία στον D και $x \in D$. Αν $x_n \xrightarrow{d} x$, τότε επειδή, όπως δείξαμε ισχύει ότι $\rho(x_n, x) \le e^{d(x_n,x)} - 1$ τότε θα έχουμε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Έστω τώρα $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Τότε επιλέγουμε $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n_1} < 1/4$. Επιπλέον υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \ge n_2$. Επιλέγουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ επομένως θα έχουμε $d(x_n, x) < \frac{4}{n} + w'_x(\frac{1}{n})$ για κάθε $n \ge n_0$ και από το λήμμα 5.1.2 έχουμε $x_n \xrightarrow{d} x$

Θεώρημα 5.2.1 Ο (D, d) είναι πλήρης.

Απόδειξη Έστω $(x_n)_n$ βασική ακολουθία στον D. Θα δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_k$ που συγκλίνει. Επιλέγουμε n_k όρους από την ακολουθία, έτσι ώστε για την ακολουθία $y_k = x_{n_k}$ να ισχύει $d(y_k, y_{k+1}) < \frac{1}{2^k}$. Τότε για κάθε k υπάρχει $\mu_k \in \Lambda$ τέτοιο ώστε

$$\|y_k - y_{k+1} \circ \mu_k\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{και} \quad \|\mu_k\| < \frac{1}{2^k}$$

Με όμοιο τρόπο, όπως στη απόδειξη του λήμματος 5.2.4, έχουμε ότι

$$\|\mu_k - t\| < \frac{1}{2^{k-1}}$$

Επομένως για $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|\mu_{k+m+1} \circ \mu_{k+m} \circ \cdots \circ \mu_k - \mu_{k+m} \circ \mu_{k+m-1} \circ \cdots \circ \mu_k\| =$$

$$= \|\mu_{k+m+1} - t\| < \frac{1}{2^{k+m}}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επομένως, για κάθε k η ακολουθία $(\mu_{k+m} \circ \mu_{k+m-1} \circ \cdots \circ \mu_k)_m$ είναι βασική ακολουθία στοιχείων του $(C, \|.\|_\infty)$ και επειδή ο τελευταίος είναι *Banach*, από πρόταση 4.1.3. συκλίνει ομοιόμορφα σε μία σενεχή συνάρτηση λ_k. Επειδή συγκλίνει και κατά σημείο θα έχουμε $\lambda_k(0) = 0$ και $\lambda_k(1) = 1$ και επιπλέον, επειδή κάθε όροι είναι γνήσια αύξουσες συναρτήσεις, η λ_k θα είναι μη φθίνουσα. Θέλουμε να δείξουμε τώρα ότι είναι και αυτή γνήσια αύξουσα. Για $s < t$ έχουμε

$$\left|\log \frac{\mu_{k+m} \circ \mu_{k+m-1} \circ \cdots \circ \mu_k(t) - \mu_{k+m} \circ \mu_{k+m-1} \circ \cdots \circ \mu_k(s)}{t - s}\right| \leq$$

$$\leq \|\mu_{k+m} \circ \mu_{k+m-1} \circ \cdots \circ \mu_k\|_l \leq \|\mu_{k+m}\|_l + \cdots + \|\mu_k\|_l < \frac{1}{2^{k-1}}$$

Αν αφήσουμε το $m \to \infty$, τότε το πρώτο μέλος θα γίνει

$$\left|\log \frac{\lambda_k(t) - \lambda_k(s)}{t - s}\right|$$

επομένως η ποσότητα $\|\lambda_k\|_l$ είναι πεπερασμένη. Αυτό σημαίνει ότι η λ_k είναι γνήσια αύξουσα και επομένως $\lambda_k \in \Lambda$

Επιπλέον για κάθε $t \in [0, 1]$ έχουμε

$$\lambda_k(t) = \lim_{m \to \infty} \mu_{k+m} \circ \mu_{k+m-1} \circ \cdots \circ \mu_k(t) =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \mu_{k+m} \circ \mu_{k+m-1} \circ \cdots \circ \mu_{k+1}(s) = \lambda_{k+1}(s) = \lambda_{k+1}(\mu_k(t))$$

δηλαδή $\lambda_k = \lambda_{k+1} \circ \mu_k$. Με βάση αυτό έχουμε

$$\sup_{t \in [0,1]} |y_k(\lambda_k^{-1}(t)) - y_{k+1}(\lambda_{k+1}^{-1}(t))| = \sup_{s \in [0,1]} |y_k(s) - y_{k+1}(\mu_k(s))| < \frac{1}{2^k}$$

Δηλαδή, η ακολουθία $(h_k)_k$ με $h_k(t) = y_k(\lambda_k^{-1}(t))$ είναι ομοιόμορφα *Cauchy* άρα και συγκλίνουσα σε μια συνάρτηση y η οποία όπως θα δούμε είναι στοιχείο του D. Τέλος έχουμε

$$\sup_{t \in [0,1]} |y_k(\lambda_k^{-1}(t)) - y(t)| \to 0 \quad \text{και} \quad \|\lambda_k\|_l \to 0$$

που σημαίνει ότι $d(y_k, y) \to 0$ και από την πρόταση 1.1.1 έχουμε ότι $d(x_n, y) \to 0$

Μένει μόνο να δείξουμε ότι $y \in D$. Θα δείξουμε ότι αν $t \in [0,1]$ τότε η y έχει όριο από τα αριστερά. Με όμοιο τρόπο θα δείξουμε ότι είναι δεξιά συνεχής. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η h_n είναι στοιχείο του D, άρα υπάρχει το $h_n(t^-)$. Μπορεί να δειχτεί ότι η ακολουθία $(h_n(t^-))_n$ είναι *Cauchy* άρα είναι συγκλίνουσα (προκύπτει απ το ότι είναι όριο από τα αρστερά και απ το ότι η h_n είναι *Cauchy*). Έστω $\epsilon > 0$ και $t \in [0,1]$. τότε υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_1$

$$|h_n(s) - y(s)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{για κάθε} \quad s \in [0,1]$$

επιπλέον υπάρχει $\eta \in [0,1]$ και n_2 τέτοιο ώστε

$$|h_n(t^-) - \eta| < \frac{\epsilon}{3}$$

Για κάθε $n \geq n_2$. Επιλέγουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Επομένως για την h_{n_0} ισχύουν τα προηγούμενα και επιπλέον υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $s \in (t - \delta, t)$

$$|h_{n_0}(s) - h_{n_0}(t^-)| < \frac{\epsilon}{3}$$

και τελικά για κάθε $s \in (t - \delta, t)$

$$|y(s) - \eta| \leq |y(s) - h_{n_0}(s)| + |h_{n_0}(s) - h_{n_0}(t^-)| + |h_{n_0}(t^-) - \eta| < \epsilon$$

5.3 Η συμπάγεια στον D

Λήμμα 5.3.1 για σταθερό $\delta \in (0,1)$ η $w'(\delta, x)$ είναι άνω ημισυνεχής ως προς x.

Απόδειξη Υπενθυμίζουμε ότι μια $f : (S, \rho) \to \mathbb{R}$ είναι άνω ημισυνεχής στο x αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $y \in S$ με $\rho(x, y) < \delta$ να ισχύει $f(y) < f(x) + \epsilon$.

Έστω $\epsilon > 0$ και $x \in D$. τότε υπάρχει δ-διαμέριση $\{t_i\}$ τέτοια ώστε

$$w_x[t_{i-1}, t_i) < w'(x, \delta)$$

για κάθε i. Επιπλέον επιλέγουμε $\eta > 0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε για κάθε i να ισχύει

$$t_i - t_{i-1} > \delta + 2\eta \quad \text{και} \quad \eta < \frac{\epsilon}{4}$$

Αν $\rho(x, y) < \eta$ τότε υπάρχει $\lambda \in \Lambda$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t| = \sup_{t \in [0,1]} |\lambda^{-1}(t) - t| < \eta \quad \text{και} \quad \sup_{t \in [0,1]} |y(t) - x(\lambda(t))| < \eta$$

Θέτουμε $s_i = \lambda^{-1}(t_i)$, τότε επειδή $-\eta < s_i - t_i < \eta$ και $-\eta < s_{i-1} - t_{i-1} < \eta$ έχουμε:

$$s_i - s_{i-1} > t_i - t_{i-1} - 2\eta > \delta$$

Επιπλέον αν $s, t \in [s_{i-1}, s_i)$, τότε επειδή η λ είναι γνήσια αύξουσα, ισχύει ότι $\lambda(t), \lambda(s) \in [t_{i-1}, t_i)$ επομένως

$$|y(s) - y(t)| \leq |y(t) - x(\lambda(t))| + |y(s) - x(\lambda(s))| + |x(\lambda(s)) - x(\lambda(t))| <$$

$$< 2\eta + w'(x, \delta) + \epsilon/2 < w'(x, \delta) + \epsilon$$

και επειδή αυτό ισχύει για όλα τα $s, t \in [s_{i-1}, s_i)$ έχουμε ότι $w_y[s_{i-1}, s_i) < w'(x, \delta) + \epsilon$, επίσης ισχύει για όλα τα i, επομένως $\max_i w_y[s_{i-1}, s_i) < w'(x, \delta) + \epsilon$ και όπως είδαμε το $\{s_i\}$ είναι δ-διαμέριση επομένως $w'(y, \delta) < w'(x, \delta) + \epsilon$

Θεώρημα 5.3.1 Έστω $A \subset D$. Το A είναι σχετικά συμπαγές στη τοπολογία *Skorohod* αν και μόνο αν

$$(i) \quad \sup_{x \in A} \|x\|_\infty < \infty$$

$$(ii) \quad \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} w'_x(\delta) = 0$$

Απόδειξη " => " Αν το A είναι σχετικά συμπαγές στη d μετρική, τότε θα είναι και σχετικά συμπαγές και στη ρ μετρική γιατί η συμπάγεια διατηρείται μέσο ομοιομορφισμών. Αρχικά, έχουμε: $\rho(x, 0) = \|x\|_\infty$. Πράγματι, για $\lambda(t) = t$ έχουμε ότι $\rho(x, 0) \leq \|x\|_\infty$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ϵ' τέτοιο ώστε $\|x\|_\infty < \epsilon' < \rho(x, 0) + \epsilon$ επομένως $\rho(x, y) \geq \|x\|_\infty$. Εφόσον το A είναι σχετικά συμπαγές, τότε το A είναι ολικά φραγμένο (Σημ. κάθε υποσύνολο συμπαγούς είναι ολικά φραγμένο). Επομένως για $\epsilon > 0$, υπάρχουν $x_1, x_2, .., x_n$ τέτοια ώστε

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\rho(x_i, \epsilon)$$

Αν $x \in A$ τότε για κάποιο $i = 1, .., n$ έχουμε $\rho(x_i, x) < \epsilon$ επομένως

$$\|x\| = \rho(x, 0) \leq \rho(x, x_i) + \rho(x_i, 0) < \epsilon + \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, .., \|x_n\|\}$$

και επειδή αυτό ισχύει για κάθε $x \in A$ τότε έχουμε το (i).

Για το το (ii) θέτουμε $f_n(x) = w'_x(\delta_n)$ όπου $(\delta_n)_n$ φθίνουσα ακολουθία με $\delta_n \downarrow 0$. Από το λήμμα 5.3.1 για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η f_n είναι άνω ημισυνεχής. Επομένως, εφόσον $f_n(x) \xrightarrow{n} 0$, εργαζόμαστε όπως στο θεώρημα 4.2.1. και έχουμε το ζητούμενο

" <= " Θέτουμε $a = \sup_{x \in A} \|x\|$. Έστω $\epsilon > 0$. μπορούμε να βρόυμε διαμέριση $-a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = a$ με $a_j - a_{j-1} \leq \epsilon$ και λόγω του (ii) υπάρχει $\delta < \epsilon$ τέτοιο ώστε $w'_x(\delta) < \epsilon$. Από το λήμμα 5.2.2, οποιαδήποτε $\psi_{\{s_i\}}$ με $\max_j(s_j - s_{j-1}) \leq \delta$, έχουμε $\rho(x \circ \psi_{\{s_i\}}, x) < \epsilon$ για κάθε $x \in A$. Θέωρούμε μία τέτοια διαμέριση $\{s_i\}$ και και θέτουμε

$$B_\epsilon = \{y \in D : \text{στα διαστήματα } [s_{j-1}, s_j) \text{ και στο 1 παίρνει σταθερή τιμή } a_j \text{ με } a_j \in \{a_0, ..., a_k\}\}$$

Είναι εμφανές ότι το B_ϵ είναι πεπερασμένο. Έστω $x \in A$. για κάθε j υπάρχεί i_j τέτοιο ώστε $a_{i_j - 1} \leq x(s_j) \leq a_{i_j}$. Επιλέγοντας $\lambda(t) = t$ και με βάση το προηγούμενο, παρατηρούμε ότι υπάρχει $y \in B_\epsilon$ τέτοιο ώστε $\rho(x \circ \psi_{\{s_i\}}, y) < \epsilon$ και τελικά από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι $\rho(x, y) < 2\epsilon$, που σημαίνει ότι το A είναι ολικά φραγμένο στη ρ μετρική

Μένει να δείξουμε ότι το A είναι ολικά φραγμένο και στην d μετρική. Έστω $\epsilon > 0$, επιλέγουμε

$\delta \in (0, 1/4)$ με $4\delta + w'_x(\delta) < \epsilon$ (αυτό ισχύει από το το (ii)). Επειδή το A είναι ολικά φραγμένο στη μετρική ρ, Υπάρχει $B_{\frac{\delta^2}{2}} \subset D$ πεπερασμένο για το οποίο ισχύει ότι αν $x \in A$ τότε υπάρχει $y \in B_{\frac{\delta^2}{2}}$ με $\rho(x,y) < \delta^2$. Από το λήμμα 5.2.5 έχουμε $d(x,y) < 4\delta + w'_x(\delta) < \epsilon$ που ολοκληρώνει την απόδειξη

Ορισμός 5.3.1 Ορίζουμε την απεικόνιση $w''_x(\delta) : D \times (0,1) \to \mathbb{R}$ ως:

$$w''_x(\delta) = \sup_{\substack{t_1 \le t \le t_2 \\ t_2 - t_1 \le \delta}} |x(t) - x(t_1)| \wedge |x(t_2) - x(t)|$$

Λήμμα 5.3.2 Η $w''_x(\delta)$ είναι μη φθίνουσα ως προς δ και επιπλέον $w''_x(\delta) \le w'_x(\delta)$

Απόδειξη Το πρώτο μπορεί να δειχτεί όπώς στο λήμμα 5.3.1 μέσο εγκλεισμού, παρατηρόντας ότι αν $\delta_1 < \delta_2$, και αν $t_2 - t_1 \le \delta_1$ τότε $t_2 - t_1 \le \delta_2$.

Για το δεύτερο, υποθέτουμε ότι $w'_x(\delta) < w$ και έστω $\{s_i\}$ μία δ-διαμέριση για την οποία ισχύει $w_x[s_{i-1}, s_i) < w$ για κάθε i. Αν $t_1 \le t \le t_2$ και $t_2 - t_1 \le \delta$ τότε τα t_1 και t_2 θα είναι είτε στο ίδιο διάστημα, είτε σε γειτονικά. Στη πρώτη περίπτωση έχουμε $|x(t) - x(t_j)| < w$, $j = 1, 2$ στη δεύτερη περίπτωση, το t θα βρίσκεται είτε στο $[t_1, s_i)$ έιτε στο $[s_i, t_2]$ για κάποιο i επομένως θα έχουμε είτε $|x(t) - x(t_1)| < w$ είτε $|x(t) - x(t_2)| < w$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $w''_x(\delta) < w$. Για $w \downarrow w'_x(\delta)$ έχουμε $w''_x(\delta) < w'_x(\delta)$

Λήμμα 5.3.3 για κάθε $x \in D$ και κάθε $\delta \in (0,1)$ ισχύει:

$$\frac{w'_x(\frac{\delta}{2})}{24} \le w''_x(\delta) \vee |x(\delta) - x(0)| \vee |x(1^-) - x(1-\delta)| \le w'_x(\delta)$$

Απόδειξη Για τη δεύτερη ανισότητα έχουμε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει δ-διαμέριση $\{t_i\}$ για την οποία ισχύει $w_x[t_0, t_1) \le w'_x(\delta) + \epsilon$. Επειδή 0, και δ ανήκουν στο $[t_0, t_1)$ έχουμε ότι $|x(\delta) - x(0)| \le w_x[t_0, t_1) < w'_x(\delta) + \epsilon$. Επομένως $|x(\delta) - x(0)| \le w'_x(\delta)$. Έστω ένα νεό $\epsilon > 0$. Επειδή η x έχει όριο από τα αριστερά, υπάρχει $v \in (1-\delta, 1)$ για το οποίο ισχύει $|x(v) - x(1^-)| < \epsilon/2$. έστω επίσης μια δ-διαμέριση $\{v_i\}$ για την οποία ισχύει $w_x[v_{j-1}, v_j) < w'_x(\delta) + \epsilon/2$. Επειδή $v, 1-\delta \in [v_{n-1}, 1)$, θα ισχύει ότι $|x(v) - x(1-\delta)| < w'_x(\delta) + \epsilon/2$. Από τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$|x(1^-) - x(1-\delta)| \le |x(v) - x(1^-)| + |x(v) - x(1-\delta)| < w'_x(\delta) + \epsilon$$

και τέλος από το λήμμα 5.3.2 έχουμε το ζητούμενο

Για τη πρώτη, θα δείξουμε ότι

$$(i) \quad w_x[t_1, t_2) \le 2(w''_x(\delta) + |x(t_2) - x(t_1)|)$$

για $t_2 - t_1 \le \delta$ και

$$(ii) \quad w'_x(\delta/2) \le 6(w''_x(\delta) \vee w_x[0,\delta) \vee w_x[1-\delta, 1))$$

Συνδιάζοντας τις 2 σχέσεις, θα έχουμε

$$\frac{w'_x(\delta/2)}{6} \le w''_x(\delta) \vee w_x[0,\delta) \vee w_x[1-\delta,1) \le$$

$$\le (2w''_x(\delta) + 2|x(\delta) - x(0)|) \vee (2w''_x(\delta) + 2|x(1^-) - x(1-\delta)|) \quad (*)$$

Η τελευταία προκύπτει απ το (i) και επιπλέον από το ότι

$$w_x[1-\delta,1)=\lim_{t\uparrow 1} w_x[1-\delta,t)\leq 2(w''_x(\delta)+\lim_{t\uparrow 1}|x(t)-x(1-\delta)|)$$

Συνεχίζοντας από την (*) έχουμε

$$(2w''_x(\delta)+2|x(\delta)-x(0)|)\vee(2w''_x(\delta)+2|x(1^-)-x(1-\delta)|)\leq$$

$$\leq(4w''_x(\delta)\vee 4|x(\delta)-x(0)|\vee 4|x(1^-)-x(1-\delta)|)$$

Η τελευταία προκύπτει απ το ότι ένας από τους 3 όρους θα είναι μέγιστος (ή ίσος με του υπόλοιπους). Θα δείξουμε πρώτα την (i). Αν $t_2-t_1\leq\delta$ και $t\in[t_1,t_2]$, τότε θα έχουμε είτε $|x(t)-x(t_1)|\leq w''_x(\delta)$, είτε $|x(t_2)-x(t)|\leq w''_x(\delta)$. Έστω ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας ισχύει η τελευταία. Τότε

$$|x(t)-x(t_1)|\leq|x(t)-x(t_2)|+|x(t_2)-x(t_1)|\leq w''_x(\delta)+|x(t_2)-x(t_1)| \quad (1)$$

Επομένως και

$$\sup_{t_1\leq t\leq t_2}|x(t)-x(t_1)|\leq w''_x(\delta)+|x(t_2)-x(t_1)|$$

Επιπλέον για $s\in[t_1,t_2]$, θα έχουμε επίσης ότι είτε $|x(s)-x(t_1)|\leq w''_x(\delta)$, είτε $|x(t_2)-x(s)|\leq w''_x(\delta)$. Αν ισχύει η πρώτη τότε το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. Αν ισχύει η δευτερη εργαζόμαστε όπως στην (1). Τελικά έχουμε

$$\sup_{t_1\leq s,t\leq t_2}|x(t)-x(s)|\leq 2(w''_x(\delta)+|x(t_2)-x(t_1)|)$$

που οδηγεί στο ζητούμενο Θα δείξουμε την (ii) σε 4 βήματα.

Βήμα 1) θα δείξουμε για $t_2-t_1\leq\delta$ και για $s,t\in[t_1,t_2]$ με $t>s$ ότι

$$|x(s)-x(t_1)|\wedge|x(t_2)-x(t)|\leq 2w''_x(\delta)$$

Πράγματι, έχουμε ότι $t_1\leq s\leq t_2$ με $t_2-t_1\leq\delta$ και επίσης $t_1\leq s\leq t$ με $t-t_1\leq\delta$. Με βάση αυτά και από τον ορισμό του $w''_x(\delta)$ θα έχουμε είτε $|x(s)-x(t_1)|\leq w''_x(\delta)$ είτε $|x(s)-x(t_2)|\leq w''_x(\delta)$ και $|x(s)-x(t)|\leq w''_x(\delta)$ ταυτόχρονα. στην δεύτερη περίπτωση, από την τριγωνική ανισότητα θα έχουμε $|x(t_2)-x(t)|\leq 2w''_x(\delta)$

Βήμα 2) Θέτοντας

$$a=w''_x(\delta)\vee w_x[0,\delta)\vee w_x[1-\delta,1) \quad \text{και} \quad T_{x,a}=\{t:|x(t)-x(t^-)|>2a\}$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει διαμέριση $0=s_0<s_1<\cdots<s_r=1$ τέτοια ώστε $s_i-s_{i-1}\geq\delta$ με

$$T_{x,a}\subset\{s_0,\ldots,s_r\}$$

Πράγματι, αν $T_{x,a}=\emptyset$ ισχύει τετριμμένα για κάθε τέτοια διαμέριση. Διαφορετικά, έστω $u_1,u_2\in T_{x,a}$ με $u_2>u_1$ και $u_2-u_1<\delta$. Τότε υπάρχουν ξένα μεταξύ τους διαστήματα (t_1,s) και (t,t_2) με $u_1\in(t_1,s)$ και $u_2\in(t,t_2)$. Μπορούμε να πάρουμε το μήκος των διαστημάτων αρκετά μικρό έτσι ώστε να ισχύει $t_2-t_1<\delta$. επειδή $s,t\in[t_1,t_2]$ με $t>s$ και $t_2-t_1\leq\delta$, από το βήμα 1) έχουμε ότι

$$|x(s)-x(t_1)|\wedge|x(t_2)-x(t)|\leq 2w''_x(\delta)$$

επειδή αυτό ισχύει για κάθε t_1,s,t,t_2 κοντά στα u_1 και u_2 αντίστοιχα, αν $t_1\uparrow u_1$, $s\downarrow u_2$, $t\uparrow u_2$ και $t_2\downarrow u_2$ τότε θα έχουμε είτε $|x(u_1)-x(u_1^-)|\leq 2w''_x(\delta)\leq 2a$ είτε $|x(u_2)-x(u_2^-)|\leq 2w''_x(\delta)\leq 2a$

το οποίο είναι άτοπο.

Βήμα 3) Αν στο σύνολο $\{s_0,\dots,s_r\}$ υπάρχουν 2 διαδοχικά σημεία s_{j-1}, s_j με $s_j - s_{j-1} > \delta$, τότε προσθέτουμε ένα σημείο στη μέση του διαστήματος επομένως έχουμε ένα πιθανώς μεγαλύτερο σύνολο $\{s_0,\dots,s_r\}$ με το r πιθανώς μεγαλύτερο, και

$$T_{x,a} \subset \{s_0,\dots,s_r\}, \quad \frac{\delta}{2} < s_j - s_{j-1} \leq \delta \quad j = 1,...,r$$

Βήμα 4) Θα δείξουμε ότι $w'_x(\frac{\delta}{2}) \leq 6a$
Πράγματι, αφού το $\{s_0,\dots,s_r\}$ από το βήμα 3) είναι μια $\delta/2$-διαμέριση, αρκεί να δείξουμε για κάθε $i = 1,..,r$ ότι

$$w_x[s_{i-1}, s_i) \leq 6a$$

Έστω λοιπόν ένα δίαστημα $[s_{i-1}, s_i)$ και $t_1, t_2 \in [s_{i-1}, s_i)$ με $t_1 < t_2$. Θα δείξουμε ότι

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leq 6a$$

Θέτουμε

$$\sigma_1 = \sup\{\sigma \in [t_1,t_2] : \sup_{t_1 \leq u \leq \sigma} |x(u) - x(t_1)| \leq 2a\}$$

και

$$\sigma_2 = \inf\{\sigma \in [t_1,t_2] : \sup_{\sigma \leq u \leq t_2} |x(t_2) - x(u)| \leq 2a\}$$

αν $\sigma_1 < \sigma_2$, τότε επιλέγουμε $s,t \in (\sigma_1,\sigma_2)$ με $s < t$. Είναι εμφανές ότι $s,t \in [t_1,t_2]$ και ότι $s \notin \{\sigma \in [t_1,t_2] : \sup_{t_1 \leq u \leq \sigma} |x(u) - x(t_1)| \leq 2a\}$, το οποίο σημαίνει ότι $\sup_{t_1 \leq u \leq s} |x(u) - x(t_1)| > 2a$, δηλαδή υπάρχει ένα $u_1 \in [t_1, s]$ με $|x(u_1) - x(t_1)| > 2a$. Επειδή $t < \sigma_2$, με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ένα $u_2 \in [t, t_2]$ για το οποίο ισχύει ότι $|x(u_2) - x(t_2)| > 2a$. Τώρα επειδή $t_1, t_2 \in [s_{i-1}, s_i)$, θα ισχύει ότι $t_2 - t_1 \leq \delta$ και $t_1 \leq u_1 < u_2 \leq t_2$, επομένως από το βήμα 1) θα έχουμε:

$$|x(u_1) - x(t_1)| \wedge |x(t_2) - x(u_2)| \leq 2w''_x(\delta)$$

δηλαδή είτε $|x(u_1) - x(t_1)| \leq 2w''_x(\delta) \leq 2a$ είτε $|x(u_2) - x(t_2)| \leq 2w''_x(\delta) \leq 2a$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $\sigma_2 \leq \sigma_1$. Θέτουμε

$$A = \{\sigma \in [t_1,t_2] : \sup_{t_1 \leq u \leq \sigma} |x(u) - x(t_1)| \leq 2a\}$$

και

$$B = \{\sigma \in [t_1,t_2] : \sup_{\sigma \leq u \leq t_2} |x(t_2) - x(u)| \leq 2a\}$$

Έστω $(\sigma_n)_n$ ακολουθία στοιχείων του A, με $\sigma_n \uparrow \sigma_1$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|x(\sigma_n) - x(t_1)| \leq 2a$ και επειδή $x \in D$ έχουμε $|x(\sigma_1^-) - x(t_1)| \leq 2a$. Για το σ_2, έχουμε 2 περιπτώσεις:

α) $\sigma_2 = \sigma_1$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(l_n)_n$ στο B με $l_n \downarrow \sigma_1$ και ισχύει ότι $|x(l_n) - x(t_2)| \leq 2a$. Επειδή $x \in D$ τότε θα ισχύει $|x(\sigma_1) - x(t_2)| \leq 2a$.

β) $\sigma_2 < \sigma_1$. Τότε $\sigma_1 - \sigma_2 > 0$. Από τον χαρακτηρισμό του $infimum$, υπάρχει $\sigma \in B$ τέτοιο ώστε $\sigma < \sigma_2 + \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_1$. Επειδή $\sigma \in B$, τότε

$$\sup_{\sigma \leq u \leq t_2} |x(t_2) - x(u)| \leq 2a$$

και επειδή $\sigma_1 > \sigma$ θα έχουμε $|x(\sigma_1) - x(t_2)| \leq 2a$ Δηλαδή σε κάθε περίπτωση έχουμε $|x(\sigma_1) - x(t_2)| \leq 2a$. Τέλος επειδή $t_1 \in A$, έχουμε ότι $\sigma_1 \in [t_1, t_2]$ (διότι, $\sigma_1 = \sup A$) και επομένως $\sigma_1 \in (s_{i-1}, s_i)$.Από το βήμα 2) έχουμε $|x(\sigma_1^-) - x(\sigma_1)| \leq 2a$ και τελικά

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leq |x(\sigma_1^-) - x(t_1)| + |x(\sigma_1) - x(t_2)| + |x(\sigma_1^-) - x(\sigma_1)| \leq 6a$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη

Θεώρημα 5.3.2 Ένα σύνολο $A \subset D$ είναι σχετικά συμπαγές στην τοπολογία *Skorhod* αν και μόνο αν

$$(i) \quad \sup_{x \in A} \|x\|_\infty < \infty$$

και (ii) ισχύουν ταυτόχρονα

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} w_x''(\delta) = 0$$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} |x(\delta) - x(0)| = 0$$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} |x(1^-) - x(1-\delta)| = 0$$

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι η συνθήκη (ii) είναι ισοδύναμη με την συνθήκη (ii) του θεωρήματος 5.3.1. Από το λήμμα 5.3.3 έχουμε $w_x''(\delta) \vee |x(\delta) - x(0)| \vee |x(1^-) - x(1-\delta)| \leq w_x'(\delta)$ επομένως αν $\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} w_x'(\delta) = 0$ τότε έχουμε το (ii). Αντίστροφα, αν ισχύει το (ii) από το λήμμα 5.3.3 έχουμε $\frac{w_x'(\frac{\delta}{2})}{24} \leq w_x''(\delta) \vee |x(\delta) - x(0)| \vee |x(1^-) - x(1-\delta)|$ που σημαίνει ότι $\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} w_x'(\delta) = 0$

5.4 Κατανομές πεπερασμένης διάστασης και μέτρα πιθανότητας στον D

Ορισμός 5.4.1 Έστω $T \subset [0, 1]$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}$ την *Borel* σ-άλγεβρα υποσυνόλων του D και θέτουμε ως $\mathcal{D}_f(T)$ την κλάση υποσυνόλων πεπερασμένης διάστασης, όπου τα στοιχεία της είναι της μορφής

$$\pi_{t_1,\ldots,t_k}^{-1}(H)$$

όπου $k \in \mathbb{N}$, $t_i \in T$ για κάθε $i = 1, .., k$ και $H \in \mathcal{R}^k$

Για το επόμενο λήμμα θα χρειαστούμε μια σημαντική υπενθύμιση: Αν (S, ρ), (S', ρ') μετρικοί χώροι και $(f_n)_n$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : S \to S$ και $f : S \to S'$ με $f_n(x) \to f(x)$ τότε η f είναι μετρήσιμη.

Πράγματι, θεωρούμε ένα κλειστό $F \in \mathcal{S}'$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$F = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}^+} F^{2q}$$

Επίσης μπορούμε να δείξουμε για κάθε $q \in \mathbb{Q}^+$ ότι

$$f^{-1}(F) \subset \liminf_{n \to \infty} f_n^{-1}(F^q) \subset f^{-1}(F^{2q})$$

Για το τελευταίο, στον πρώτο εγκλεισμό, έστω $x \in f^{-1}(F)$, τότε $f(x) \in F$. Λόγω της σύγκλισης υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\rho'(f_n(x), f(x)) < q$ επομένως για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\rho'(f_n(x), F) \leq \rho'(f_n(x), f(x)) < q$$

Για τον δεύτερο εγκλεισμό, αν $x \in \liminf_{n\to\infty} f_n^{-1}(F^q)$ τότε υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει $\rho'(f_n(x), F) < q$. Επομένως για κάθε $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ και για κάθε $y \in F$ έχουμε

$$\rho'(f(x), y) \leq \rho(f(x), f_n(x)) + \rho'(f_n(x), y)$$

και τελικά

$$\rho'(f(x), F) \leq \rho(f(x), f_n(x)) + \rho'(f_n(x), F) < 2q$$

και καταλήγουμε ότι $f^{-1}(F) = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}^+} \liminf_{n\to\infty} f_n^{-1}(F^q)$ επομένως η f είναι μετρήσιμη αφού το σύνολο $\{A \in \mathcal{S} : f^{-1}(A) \in \mathcal{S}'\}$ είναι σ-άλγεβρα

Λήμμα 5.4.1 Θεωρούμε τις προβολές $\pi_{t_1,\ldots,t_k} : D \to \mathbb{R}^k$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω

α) Οι προβολές π_0 και π_1 είναι συνεχής, και για $t \in (0,1)$ η π_t είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν η x είναι συνεχής στο t.
β) Κάθε $\pi_{t_1,\ldots,t_k}$ είναι μετρήσιμη
γ) Αν $1 \in T$ και T πυκνό στο [0,1], τότε $\sigma\{\pi_t : t \in T\} = \sigma\{\mathcal{D}_f(T)\} = \mathcal{D}$, και η $\mathcal{D}_f(T)$ είναι κλάση καθορισμού

Απόδειξη α) Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία στο D και $x \in D$ με $x_n \to x$. Για $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 και ακολουθία $(\lambda_n)_n$ στο Λ με $|\lambda_n(t) - t| < \epsilon$ και $|x(t) - x_n(\lambda_n(t))| < \epsilon$ για κάθε $t \in [0,1]$ και για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή για κάθε $\lambda \in \Lambda$ έχουμε $\lambda(1) = 1$ και $\lambda(0) = 0$ τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|x(0) - x_n(0)| < \epsilon$ και $|x(1) - x_n(1)| < \epsilon$. Επομένως $\pi_1(x_n) \to \pi_1(x)$ και $\pi_0(x_n) \to \pi_0(x)$

Έστω τώρα $t \in (0,1)$, $(x_n)_n$ ακολουθία στο D και $x \in D$ με $x_n \to x$. Αν η x είναι συνεχής στο t τότε όπως είδαμε στον ορισμό της τοπολογίας *Skorohod* η x_n συγκλίνει σημειακά στα σημεία συνέχειας της x. Αν η x είναι ασυνεχής στο t τότε επιλέγουμε ακολουθία στο Λ με $\lambda_n(t) = t - \frac{1}{n}$ και συνδέει γραμμικά τα σημεία $\{(0,0), (t, t-\frac{1}{n}), (1,1)\}$ και θέτουμε $x_n(s) = x(\lambda_n(s))$. Τότε $\|\lambda_n - t\| \leq \frac{1}{n}$ και $\|x_n - x\circ\lambda_n\| = 0$ επομένως $\rho(x_n, x) \to 0$ όμως $\lim_n x_n(t) = \lim_n x(t-\frac{1}{n}) \neq x(t)$

β) Μία απεικόνιση στον $\mathbb{R}^k$ είναι μετρήσιμη αν κάθε συντεταγμένη της είναι μετρήσιμη. επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η π_t είναι μετρήσιμη για $t \in (0,1)$. Για κάθε $\epsilon > 0$ Ορίζουμε

$$h_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+\epsilon} x(s)ds$$

Επειδή η x είναι συνεχής *Lebesgue* σ.π. είναι και *Riemman* ολοκληρώσιμη επομένως η h_ϵ είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, η h_ϵ είναι συνεχής: Αν $(x_n)_n$ ακολουθία στο D με $x_n \to x$ έχουμε ότι η $\gamma_n(s) = \frac{1}{\epsilon}x_n(s)1_{[t,t+\epsilon]}$ συγκλίνει στη $\frac{1}{\epsilon}x(s)1_{[t,t+\epsilon]}$ *Lebesgue* σ.π. (τα σημεία ασυνέχειας είναι το πολύ αριθμήσιμου το πλήθος) και επιπλέον εφόσον $x_n \to x$ για $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 και $(\lambda_n)_n$ ακολουθία στο Λ με $\|x_n - x\circ\lambda_n\| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Αν $s \in [0,1]$, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|x_n(s)| \leq |x_n(s) - x(\lambda_n(s))| + |x(\lambda_n(s))| \leq \epsilon + \|x\|_\infty$$

Επειδή στη τελευταία περισσεύουν πεπερασμένοι όροι, έχουμε ότι η x_n είναι ομοιόμορφα φραγμένη επομένως και η γ_n και επειδή βρισκόμαστε σε χώρο πεπερασμένου μέτρου, από θεώρημα φραγμένης σύγκλισης, έχουμε $h_\epsilon(x_n) \to h_\epsilon(x)$

Τέλος θα δείξουμε ότι $\lim_{\epsilon\to 0^+} h_\epsilon(x) = \pi_t(x)$. Πράγματι, έστω $\epsilon' > 0$. Η x είναι δεξιάς συνεχής επομένως υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $s \in [t, t+\delta)$ έχουμε $|x(s) - x(t)| < \epsilon$. Έστω τώρα

$l \in [0, \delta]$. Τότε

$$|\int_t^{t+l} \frac{x(s)}{l} ds - x(t) = |\int_t^{t+l} \frac{x(s) - x(t)}{l} ds| \leq \int_t^{t+l} \frac{|x(s) - x(t)|}{l} ds| < \epsilon$$

και επειδή για κάθε $\epsilon > 0$, η h_ϵ είναι μετρήσιμη, τότε και το όριο της θα είναι μετρήσιμο.

γ) Εφόσον το T είναι πυκνό στο $[0, 1]$, υπάρχει ακολουθία $(t_n)_n$ στο T με $t_n \downarrow 0$. Αν $x \in D$, τότε από την δεξιά συνέχεια θα έχουμε $x(t_n) \to x(0)$ δηλαδή $\pi_{t_n}(x) \to \pi_0(x)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οι $\pi_{t_n}(x)$ είναι $\sigma\{\pi_t : t \in T\}$ μετρήσιμες, επομένως η π_0 είναι $\sigma\{\pi_t : t \in T\}$ μετρήσιμη. Αφού ισχύει το τελευταίο μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $0 \in T$.

Έστω ότι $s_0, .., s_k$ είναι σημεία του T με $0 = s_0 < \cdots < s_k = 1$. Για $\overrightarrow{a} = (a_0, ..., a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ Ορίζουμε την απεικόνιση $V_a : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$V_a(t) = \begin{cases} a_{j-1}, & t \in [s_{j-1}, s_j) \\ a_k & t = 1 \end{cases}$$

Και ορίζουμε την γραμμική απεικόνιση $V : \mathbb{R}^{k+1} \to D$ με $V(\overrightarrow{a}) = V_a$. Η V είναι συνεχής εφόσον είναι φραγμένη στη μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^{k+1}$, επομένως η $\psi = V \circ \pi_{s_0,...,s_k}$ είναι $\sigma\{\pi_t : t \in T\}/\mathcal{D}$ μετρήσιμη γιατί η $\pi_{s_0,...,s_k}$ είναι $\sigma\{\pi_t : t \in T\}/\mathcal{R}^{k+1}$ μετρήσιμη.

Αφού το T είναι πυκνό στο [0,1], επιλέγουμε $0 = s_0^n < \cdots < s_k^n = 1$ για τα οποία ισχύει ότι $\max_i(s_i^n - s_{i-1}^n) < \frac{1}{n}$, και θεωρούμε την $\psi^n = V \circ \pi_{s_0^n,...,s_k^n}$. Με βάση αυτή την επιλογή ορίζουμε την απεικόνιση $A_n : D \to D$ με $A_n(x) = \psi^n(x)$. Από το λήμμα 5.2.2 για κάθε $x \in D$ έχουμε $A_n(x) \to x$, και επιπλέον για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η A_n είναι $\sigma\{\pi_t : t \in T\}/\mathcal{D}$ μετρήσιμη, επομένως η συνάρτηση-όριο -δηλαδή η ταυτοτική συνάρτηση Id, είναι και αυτή $\sigma\{\pi_t : t \in T\}/\mathcal{D}$ μετρήσιμη. Αν τώρα $B \in \mathcal{D}$ θα ισχύει ότι $B = Id^{-1}(B) \in \sigma\{\pi_t : t \in T\}$, δηλαδή $\sigma\{\pi_t : t \in T\} = \mathcal{D}$.

Τέλος, έχουμε δείξει ότι τα σύνολα πεπερασμένης διάστασης είναι ένα π-σύστημα επομένως από το λήμμα 2.1.1 η $\mathcal{D}_f(T)$ είναι κλάση καθορισμού.

Ορισμός 5.4.2 Συμβολίζουμε με D_c το σύνολο των συναρτήσεων $x \in D$ που είναι μη φθίνουσες, για κάθε $t \in [0, 1]$ ισχύει ότι $x(t) \in \mathbb{Z}$ και στα σημεία ασυνέχειας ισχύει $|x(t) - x(t^-)| = 1$. Το D_c ονομάζεται σύνολο ακέραιων μονοπατιών.

Παρατηρήσεις 1) Έστω $x \in D_c$ και $t \in [0, 1]$. Λόγω της δεξιάς συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $u \in [t, t + \delta)$ να ισχύει $|x(t) - x(u)| < 1/2$. Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα $[t, t + \delta)$ η x είναι σταθερή. Επομένως για 2 διαδοχικά σημεία ασυνέχειας, η x είναι σταθερή. Επιπλέον, από το λήμμα 5.1.1. έχουμε ότι υπάρχει διαμέριση $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$ με $w_x[t_{i-1}, t_i) < 1$ και επειδή τα άλματα είναι πάντα 1, τα $[t_{i-1}, t_i)$ είναι διαστήματα που η x είναι συνεχής. Επομένως μια $x \in D_c$ έχει πεπερασμένου το πλήθος σημεία ασυνέχειας κσι τελικά παίρνει πεπερασμένου το πλήθος τιμές.

2) Αν $(x_n)_n$ είναι ακολουθία στο D_c και $x \in D$ με $x_n \to x$, και t σημείο συνέχειας του x τότε $x_n(t) \to x(t)$ επομένως η ακολουθία $(x_n(t))_n$ είναι $Cauchy$. Για $\epsilon = 1/2$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x_n(t) - x_{n+1}(t)| < 1/2$ για κάθε $n \geq n_0$. Εφόσον $x_n, x_{n+1} \in D_c$ έχουμε ότι $x_n(t) = x_{n+1}(t)$ δηλαδή η $x_n(t)$ είναι τελικά σταθερή επομένως $x(t) = x_{n_0}(t)$,που σημαίνει ότι κάθε σημείο συνέχειας της x είναι ακέραιος.

Αν t είναι σημείο ασυνέχειας της x, από δεξιά συνέχεια επιλέγουμε ακολουθία $(t_n)_n$ με t_n να είναι σημείο συνέχειας (αυτό είναι δυνατό, γιατί σε κάθε διάστημα $[t, t + \delta)$ μπορούμε να βρούμε σημείο συνέχειας) με $t_n \downarrow t$ και $x(t_n) \to x(t)$. Τώρα όμοια έχουμε ότι η ακολουθία $(x(t_n))_n$ είναι *Cauchy* και επειδή $x(t_n) \in \mathbb{Z}$ τότε θα είναι τελικά σταθερή, δηλαδή τελικά $x(t) \in \mathbb{Z}$.

Επίσης θα δείξουμε ότι η x έχει άλματα μήκους 1. Έστω t σημείο ασυνέχειας της x και έστω $|x(t) - x(t^-)| \geq 2$ (Σημ οι $x(t), x(t^-)$ είναι ακέραιοι). θέτουμε $|x(t) - x(t^-)| = J_t$. λόγω της δεξιάς συνέχειας και της ύπαρξης του αριστερού ορίου για $\epsilon = \frac{J_t}{8}$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|x(s) - x(t^-)| < \epsilon$ για κάθε $s \in (t-\delta, t)$ και $|x(r) - x(t)| < \epsilon$ για κάθε $r \in [t, t+\delta)$. επομένως $J_t \leq |x(s) - x(t^-)| + |x(r) - x(t)| + |x(r) - x(s)| < 2\epsilon + |x(r) - x(s)|$ δηλαδή $|x(r) - x(s)| > 3/2$ επειδή τοπικά η x προσεγγίζεται από τελικά σταθερή ακολουθία των x_n (χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορουμε να υποθέσουμε ότι τα διαστήματα $(t-\delta, t)$ και $[t, t+\delta)$ αποτελούνται από σημεία συνέχειας) τότε θα υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x_{n_0}(r) - x_{n_0}(s)| > 3/2$ για $s \uparrow t$ και $r \downarrow t$ έχουμε $|x_{n_0}(t^-) - x_{n_0}(t)| > 3/2$ το οποίο δεν ισχύει.

Τέλος θα δείξουμε ότι η x είναι μη φθίνουσα. Έστω $t_1 < t_2$. Αν τα t_1, t_2 είναι σημεία συνέχειας, τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x(t_1) = x_{n_0}(t_1)$ και $x(t_2) = x_{n_0}(t_2)$ και επειδή x_{n_0} μη φθίνουσα, έχουμε το ζητούμενο. Αν t_1, t_2 είναι και τα 2 σημεία ασυνέχειας, τότε για s αρκετά κοντά στο t_1 από τα δεξιάς και r αρκετά κοντά στο t_2 από τα δεξιάς, με s, r σημεία συνέχειας, $\Longrightarrow$ υπάρχει n_1 με $x(s) = x_{n_1}(s)$ και $x(r) = x_{n_1}(r)$. Αν είχαμε $x(t_1) > x(t_2)$ τότε θα είχαμε και $x(s) > x(r)$ δηλαδή $x_{n_1}(s) > x_{n_1}(r)$ και τελικά $x_{n_1}(t_1) \geq x_{n_1}(t_2)$ το οποίο δέν ισχύει. Αν ένα από τα t_1, t_2 είναι σημεία ασυνέχειας, εργαζόμαστε όπως στις προηγούμενες 2 περιπτώσεις συνδιαστικά και έχουμε το ζητούμενο.

Καταλήγοντας έχουμε ότι το D_c είναι κλειστό.

Λήμμα 5.4.2 Έστω $T_0 = \{t_1, t_2, \dots\}$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$, και θέτουμε $\pi(x) = (x(t_1), x(t_2), \dots)$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω

α) Η απεικόνιση $\pi : D \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι $\mathcal{D}/\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ μετρήσιμη
β) Αν $(x_n)_n$ είναι ακολουθία στο D_c και $x \in D_c$ με $\pi(x_n) \to \pi(x)$, τότε $x_n \to x$ στη *Skorohod* μετρική.

Απόδειξη α) Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό στον ορισμό 2.3.2, έχουμε ότι

$$\pi^{-1}(\pi_k^{-1}(H)) = \pi_{t_1,\dots,t_k}^{-1}(H) \in \mathcal{D} \quad \text{για} \quad H \in \mathcal{R}^k$$

και από την απόδειξη του θεωρήματος 2.3.1 έχουμε ότι η κλάση πεπερασμένων συνόλων $\pi_k^{-1}(H)$ παράγουν την $\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$

β) Εφόσον έχουμε $\pi(x_n) \to \pi(x)$ τότε θα έχουμε $x_n(t_i) \to x(t_i)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και όπως δείξαμε, για κάθε i υπάρχει n_i τέτοιο ώστε $x(t_i) = x_{n_i}(t_i)$. Επιπλέον, η x έχει πεπερασμένου το πλήθος ασυνέχειες, έστω $0 < s_1 < \cdots < s_k \leq 1$. Έστω $\epsilon > 0$. επιλέγουμε $u_i, v_i \in T_0$ τέτοια ώστε

$$v_i - u_i < \epsilon \text{ και } u_i < s_i < v_i$$

και τα διαστήματα $[v_{i-1}, u_i]$ $i = 1, ..., k$ να είναι ξένα ανα 2 και θέτοντας $v_0 = 0$. Παρατηρούμε το εξής: στο διάστημα $[v_{i-1}, u_i]$ η x είναι σταθερή εφόσον ανήκει στο D_c και δεν έχει άλματα σε αυτό το διάστημα. Επιπλέον $x_n(v_{i-1}) \to x(v_{i-1})$ και $x_n(u_i) \to x(u_i)$ τότε όπως είδαμε η x_n είναι τελικά σταθερή τοπικά, επομένως υπάρχει n_i τέτοιο ώστε $x(v_{i-1}) = x_{n_i}(v_{i-1}) = x_{n_i}(u_i)$. επειδή η x_{n_i} είναι αύξουσα, θα έχουμε ότι $x_{n_i}(s) = x(v_{i-1})$ για κάθε $s \in [v_{i-1}, u_i]$. Επιπλέον αυτό ισχύει για όλους τους όρους που είναι μεγαλύτεροι από το n_i. Επειδή υπάρχουν πεπερασμένου το πλήθος τέτοια διαστήματα καταλήγουμε ότι υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε η x_n να συμφωνεί με την x στα διαστήματα $[v_{i-1}, u_i]$ $i = 1, ..., k$ για κάθε $n \geq n_0$ και επομένως το άλμα των x_n θα βρίσκεται εντός των διαστημάτων (u_i, v_i) $i = 1, ..., k$

Θεωρούμε τώρα $\lambda_n \in \Lambda$ να απεικονίζει το s_i στο σημείο ασυνέχειας της x_n στο διάστημα (u_i, v_i) και τα υπόλυπα σημεία τα συνδέουμε γραμμικά. Τότε είναι εμφανές ότι $\|\lambda_n - t\|_\infty < \epsilon$. Επίσης, συμβολίζουμε με s_i^n το σημείο ασυνέχειας της x_n στο διάστημα (u_i, v_i). Για $t \in (s_{i-1}, s_i)$ έχουμε ότι η $\lambda_n(t) \in (s_{i-1}^n, s_i^n)$ δηλαδή είναι ανάμεσα σε 2 διαδοχικά σημεία ασυνέχειας της x_n,(δηλαδή η x_n είναι σταθερή σε αυτό το διάστημα) και επειδή το t βρίσκεται και αυτο ανάμεσα σε 2 διαδοχικά σημεία ασυνέχειας της x, από τα προηγούμενα για $n \geq n_0$ έχουμε $x(t) = x_n(\lambda_n(t))$. Για τα σημεία s_i έχουμε $x_n(\lambda_n(s_i)) = x_n(s_i^n) = x(s_i)$ για $n \geq n_0$. Δηλαδή $x_n \circ \lambda_n = x$ που τελικά σημαίνει ότι $\rho(x_n, x) \to 0$

Θεώρημα 5.4.1 Έστω T_0 πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο του $[0, 1]$. Αν $\mathbb{P}_n$ και $\mathbb{P}$ είναι μέτρα πιθανότητας στον $(D, \mathcal{D})$ με $\mathbb{P}_n(D_c) = \mathbb{P}(D_c) = 1$ και

$$\mathbb{P}_n \pi^{-1}_{t_1,...,t_k} \Rightarrow \mathbb{P} \pi^{-1}_{t_1,...,t_k}$$

για κάθε k-αδα στο T_0 τότε $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

Απόδειξη Αρχικά έχουμε ότι τα μέτρα $\mathbb{P}_n \pi^{-1}$ και $\mathbb{P}\pi^{-1}$ είναι μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{R}^{\mathbb{N}})$ και από υπόθεση έχουμε ότι

$$\mathbb{P}_n \pi^{-1} \pi_k^{-1} \Rightarrow \mathbb{P} \pi^{-1} \pi_k^{-1}$$

Από το θεώρημα 2.3.2 έχουμε ότι $\mathbb{P}_n \pi^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}\pi^{-1}$. Έστω $A \subset D$. Ορίζουμε

$$A^* = \pi^{-1}(\overline{\pi(A)})$$

Είναι εμφανές ότι αν $x \in A$ τότε $\pi(x) \in \pi(A) \subset \overline{\pi(A)}$ και επομένως $A \subset A^*$. Επιπλέον επειδή $\overline{\pi(A)}$ κλειστό και π μετρήσιμη έχουμε ότι $A^* \in \mathcal{D}$. Αν τώρα $A \in \mathcal{D}$ τότε

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(A) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(A^*) = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(\pi^{-1}(\overline{\pi(A)})) \leq$$

$$\leq \mathbb{P}(\pi^{-1}(\overline{\pi(A)})) = \mathbb{P}(A^*)$$

Έστω τώρα $F \in \mathcal{D}$ κλειστό. Από τυπο ολικής πιθανότητας έχουμε

$$\mathbb{P}_n(F) = \mathbb{P}_n(F \cap D_c)\mathbb{P}_n(D_c) + \mathbb{P}_n(F \cap D_c^c)\mathbb{P}_n(D_c^c) = \mathbb{P}_n(F \cap D_c)$$

επομένως

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(F) = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(F \cap D_c) \leq \mathbb{P}((F \cap D_c)^*) = \mathbb{P}((F \cap D_c)^* \cap D_c)$$

Μένει να δείξουμε ότι για κάθε F κλειστό ότι $(F \cap D_c)^* \cap D_c \subset F$.

Πράγματι, έστω $x \in (F \cap D_c)^* \cap D_c$. τότε $x \in (F \cap D_c)^*$ επομένως $\pi(x) \in \overline{\pi(F \cap D_c)}$ που σημαίνει ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n$ στο $F \cap D_c$ με $\pi(x_n) \to \pi(x)$. Από το λήμμα 5.4.2 β) έχουμε ότι $x_n \to x$ στην τοπολογία *Skorohod* γιατί $x \in D_c$. Εφόσον $x_n \in F$ για κάθε n και το F είναι κλειστό, έχουμε ότι $x \in F$ που ολοκληρώνει την απόδειξη

Πόρισμα (Διαδικασία *Poisson*) Η διαδικάσία *Poisson* $\mathcal{N}_t$ με ρυθμό a είναι μια στοχαστική διαδικασία για την οποία ισχύει $\mathcal{N}_0 = 0$, έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και για κάθε $s, t \in [0,1]$ με $s < t$ ισχύει

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = \frac{a^k (t-s)^k}{k!} e^{-a(t-s)}$$

Μπορεί να αποδειχτεί ότι $\mathcal{N}_t \in D_c$ με πιθανότητα 1.

Έστω $Y_{n1}, \dots, Y_{nn}$ ακολουθία *i.i.d Bernoulli* με $Y_{ni} \in \{0,1\}$ $\mathbb{P}(Y_{ni} = 1) = \frac{a}{n}$. Ορίζουμε $X_t^{(n)} = \sum_{i \le [nt]} Y_{nt}$. Τότε $X_n \to \mathcal{N}_t$

Απόδειξη Είναι εμφανές ότι η $X_t^{(n)}$ είναι στοιχείο του D_c και ότι έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. επιπλέον για $t \in [0,1]$, η $X_t^{(n)} \sim bi([nt], \frac{a}{n})$, και εφόσον $[nt]\frac{a}{n} \to ta$, έχουμε ότι η $X_t^{(n)} \Rightarrow Po(at)$. Από το θεώρημα 2.2.1, το θεώρημα απεικόνισης και το θεώρημα 5.4.1 έχουμε το ζητούμενο

Λήμμα 5.4.3 Έστω $\mathbb{P}$ ένα μέτρο πιθανότητας στον $(D, \mathcal{D})$. Ορίζουμε $T_{\mathbb{P}} \subset [0,1]$ να είναι το σύνολο των t για τα οποία η προβολή π_t είναι συνεχής $\mathbb{P}$-σ.β. Το $T_{\mathbb{P}}$ περιέχει το 0 και 1, και το συμπλήρωμα του στο [0,1] είναι το πολύ αριθμήσιμο. Για $t \in (0,1)$, το $t \in T_{\mathbb{P}}$ αν και μόνο αν $\mathbb{P}\{x : x(t) \neq x(t^-)\} = 0$

Απόδειξη Ο τελευταίος ισχυρισμός ισχύει απ το λήμμα 5.4.1 α). Θέτουμε $J_t = \{x : x(t) \neq x(t^-)\}$. Θα δείξουμε ότι $\mathbb{P}(J_t) > 0$ είναι δυνατό για το πολύ αριθμήσιμου το πλήθος t. Θέτουμε επίσης $J_t(\epsilon) = \{x : |x(t) - x(t^-)| > \epsilon\}$. Έστω $\epsilon, \delta > 0$. Τότε υπάρχουν το πολύ πεπερασμένου το πλήθος t για τα οποία ισχύει $\mathbb{P}(J_t(\epsilon)) > \delta$. Πράγματι,αν ίσχυε για άπειρου το πλήθος, τότε θα υπήρχε ακολουθία t_n τέτοια ώστε

$$\mathbb{P}(J_{t_n}(\epsilon) i.o.) = \mathbb{P}(\limsup_n J_{t_n}(\epsilon)) \ge \limsup_n \mathbb{P}(J_{t_n}(\epsilon)) \ge \delta$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν το πολύ πεπερασμένου το πλήθος άλματα που το μήκος τους ξεπερνάει το ϵ. Επιπλέον επειδή

$$\{t : \mathbb{P}(J_t(\epsilon)) > 0\} = \bigcup_n \{t : \mathbb{P}(J_t(\epsilon)) > \frac{1}{n}\}$$

θα έχουμε ότι $\mathbb{P}(J_t(\epsilon)) > 0$ για το πολύ αριθμήσιμου το πλήθος t και τέλος

$$\{t : \mathbb{P}(J_t) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t : \mathbb{P}\left(J_t\left(\frac{1}{n}\right)\right) > 0\}$$

που ισχύει γιατί $\mathbb{P}(J_t(\epsilon)) \uparrow \mathbb{P}(J_t)$

Θεώρημα 5.4.2 Έστω $\mathbb{P}_n$ και $\mathbb{P}$ μέτρα πιθανότητας στον $(D, \mathcal{D})$. Αν η ακολουθία $(\mathbb{P}_n)_n$ είναι σφιχτή και $\mathbb{P}_n \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} \Rightarrow \mathbb{P}\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}$ ισχύει για κάθε $t_1, \dots, t_k \in T_{\mathbb{P}}$ τότε $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι κάθε υπακολουθία $(\mathbb{P}_{n'})_{n'} \subset (\mathbb{P}_n)_n$ που συγκλίνει σε κάποιο μέτρο $\mathbb{Q}$ τότε $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$. Από θεώρημα *Prohorov* και το θεώρημα 3.1.2 θα έχουμε το ζητούμενο. Πράγματι, αν $t_1, \dots, t_k \in T_{\mathbb{Q}}$, τότε από το λήμμα 5.4.3, η $\pi_{t_1,\dots,t_k}$ είναι συνεχής σε ένα σύνολο που έχει $\mathbb{Q}$ μέτρο 1. Επομένως αν $\mathbb{P}_{n'} \Rightarrow \mathbb{Q}$, από το θεώρημα απεικόνισης θα έχουμε

$$\mathbb{P}_{n'} \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} \Rightarrow \mathbb{Q}\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}$$

Επιπλέον, επειδή $t_1, \ldots, t_k \in T_{\mathbb{P}}$, από υπόθεση έχουμε

$$\mathbb{P}_{n'}\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k} \Rightarrow \mathbb{P}\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k}$$

επομένως, αν $t_1, \ldots, t_k \in T_{\mathbb{P}} \cap T_{\mathbb{Q}}$ θα έχουμε $\mathbb{P}\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k} = \mathbb{Q}\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k}$. Από το λήμμα 5.4.3 έχουμε ότι το $T_{\mathbb{P}} \cap T_{\mathbb{Q}}$ είναι πυκνό, και περιέχει το 1. Επομένως απ το λήμμα 5.4.1 γ) έχουμε ότι η $\mathcal{D}_f(T_{\mathbb{P}} \cap T_{\mathbb{Q}})$είναι κλάση καθορισμού που ολοκληρώνει την απόδειξη.

5.5 Σφιχτότητα και ασθενής σύγκλιση στον D

Θεώρημα 5.5.1 Έστω $\mathbb{P}_n$ μέτρα πιθανότητας στον $(D, \mathcal{D})$. Η ακολουθία $(\mathbb{P}_n)_n$ είναι σφιχτή αν και μόνο αν ισχύουν τα παρακάτω

$$(i) \quad \lim_{a\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(x : \|x\| \geq a) = 0$$

$$(ii) \quad \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(x : w'_x(\delta) \geq \epsilon) \quad \text{για κάθε } \epsilon > 0$$

Η Απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη του θεωρήματος 4.2.2: Όπως στο τελευταίο χρησιμοποιήσαμε το θέώρημα 4.2.1, με αντίστοιχο τρόπο χρησιμοποιούμε το θεώρημα 5.3.1 για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος

Παρόμοια αντιστοιχία μπορούμε να κάνουμε με τη χρήση του θεωρήματος 5.3.2 για να δείξουμε το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 5.5.2 Έστω $\mathbb{P}_n$ μέτρα πιθανότητας στον $(D, \mathcal{D})$. Η ακολουθία $(\mathbb{P}_n)_n$ είναι σφιχτή αν και μόνο αν ισχύουν τα παρακάτω

$$(i) \quad \lim_{a\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(x : \|x\| \geq a) = 0$$

και για κάθε $\eta, \epsilon > 0$ να υπάρχει $\delta > 0$ και n_0 ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα

$$\mathbb{P}_n(x : w''_x(\delta) \geq \epsilon) \leq \eta$$

$$\mathbb{P}_n(x : |x(\delta) - x(0)| \geq \epsilon) \leq \eta$$

$$\mathbb{P}_n(x : |x(1^-) - x(1-\delta)| \geq \epsilon) \leq \eta$$

για κάθε $n \geq n_0$

Λήμμα 5.5.1 Αν ισχύει η συνθήκη (ii) του θεωρήματος 5.5.1 τότε η συνθήκη (i) είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη: (i') Για κάθε t που ανήκει σε ένα υποσύνολο T του $[0, 1]$, που είναι πυκνό στο [0,1] και περιέχει το 1, ισχύει

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(x : |x(t)| \geq a) = 0$$

Απόδειξη Αν για $t \in [0, 1]$ έχουμε $|x(t)| \geq a$ τότε θα έχουμε $\|x\| \geq a$ επομένως αν ίσχυέι το (i) τότε ισχύει (i')

Έστω ότι τώρα ισχύουν οι (i') και (ii) του θεωρήματος 5.5.1. Έστω $0 < \delta < 1$ επιλέγουμε από το T σημεία $0 < s_1 < \cdots < s_k = 1$ έτσι ώστε $\max\{s_1, s_2 - s_1, \ldots, s_k - s_{k-1}\} < \delta$. Από το (i'), για $\eta > 0$, και εφόσον τα s_j είναι πεπερασμένου το πλήθος, υπάρχει $a > 0$ και n_0 τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}_n(x : \max_j |x(s_j)| \geq a) < \eta \quad (1)$$

για κάθε $n \geq n_0$. Τώρα για $x \in D$ επιλέγουμε μια δ-διαμέριση $(t_0, \ldots, t_v)$ τέτοια ώστε

$$w_x[t_{i-1}, t_i) < w'_x(\delta) + 1$$

για κάθε $i = 1, \ldots, v$. Έστω $t \in [0,1]$ τότε υπάρχει $i = 1, ...v$ τέτοιο ώστε $t \in [t_{i-1}, t_i)$. Επιπλέον, επειδή τα $\{t_i\}$ είναι δ-διαμέριση τότε θα υπάρχει κάποιο $s_j \in [t_{i-1}, t_i)$ επομένως

$$|x(t)| \leq |x(t) - x(s_j)| + |x(s_j)| < w'_x(\delta) + 1 + \max_j |x(s_j)|$$

δηλαδή

$$\|x\| \leq w'_x(\delta) + 1 + \max_j |x(s_j)| \quad (2)$$

Επειδή ισχύει η (ii), υπάρχει $\delta_0 > 0$ και n_1 τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}_n(x : w'_x(\delta_0) \geq 1) \leq \eta$$

για κάθε $n \geq n_1$. Επίσης, από τα προηγούμενα, για το δ_0 μπορούμε να επιλέξουμε αντίστοιχα σημεία $\{s_j\}$ στο T πεπερασμένου το πλήθος και αντίστοιχη $\{t_i\}$ δ_0-διαμέριση, έτσι ώστε να ισχύουν οι (1) και (2). Αν

$$x \in \{x : w'_x(\delta_0) < 1\} \cap \{x : \max_j |x(s_j)| < a\}$$

τότε $x \in \{x : \|x\| < a + 2\}$ επομένως

$$\mathbb{P}_n(x : \|x\| < a + 2) \leq \mathbb{P}_n(x : w'_x(\delta_0) \geq 1) + \mathbb{P}_n(x : \max_j |x(s_j)| \geq a) < 2\eta$$

για κάθε $n \geq n_1$ και τελικα έχουμε την (i)

Θεώρημα 5.5.3 Έστω $\mathbb{P}_n$ και $\mathbb{P}$ μέτρα πιθανότητας στον $(D, \mathcal{D})$ και έστω ότι

$$\mathbb{P}_n \pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k} \Rightarrow \mathbb{P} \pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k}$$

ισχύει για κάθε $t_1, \ldots, t_k \in T_{\mathbb{P}}$. Έστω επιπλέον ότι $\mathbb{P}(J_1) = 0$ και ότι για κάθε $\eta, \epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ και n_0 ώστε να ισχύει

$$\mathbb{P}_n(x : w''_x(\delta) \geq \epsilon) \leq \eta$$

για κάθε $n \geq n_0$. Τότε $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε ότι η $(\mathbb{P}_n)_n$ είναι σφιχτή. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 5.4.2, θα έχουμε το ζητούμενο. Θα δείξουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος 5.5.2. Για το (ii), έστω $\epsilon, \eta > 0$. Ζητάμε $\delta > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ για τα οποία ισχύουν

$$\mathbb{P}_n(x : |x(\delta) - x(0)| \geq \epsilon) \leq \eta$$

$$\mathbb{P}_n(x : |x(1^-) - x(1 - \delta)| \geq \epsilon) \leq \eta$$

για κάθε $n \geq n_0$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχουν άπειρα $\delta > 0$ για τα οποία ισχύει $\mathbb{P}(x : |x(\delta) - x(0)| \geq \epsilon) < \eta$. Πράγματι, έστω ακολουθία $(\delta_n)_n$ με $\delta_n \downarrow 0$. Για κάθε $x \in D$ από δεξιά συνέχεια θα έχουμε ότι

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{x : |x(\delta_n) - x(0)| < \epsilon\}$$

Επομένως αν συμβολίσουμε με $A_n = \{x : |x(\delta_n) - x(0)| \geq \epsilon\}$ θα έχουμε ότι $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$, επομένως $\limsup_n \mathbb{P}(x : |x(\delta_n) - x(0)| \geq \epsilon) = 0$ που σημαίνει ότι υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}(x : |x(\delta_n) - x(0)| \geq \epsilon) < \eta$$

για κάθε $n \geq n_1$. Επειδή $\delta_n \downarrow 0$ μπορούμε να πάρουμε το δ όσο μικρό θέλουμε. Επιλέγουμε λοιπόν δ από το $T_{\mathbb{P}}$ αρκετά μικρό ώστε να ισχύει $\mathbb{P}_n(x : w''_x(\delta) \geq \epsilon) \leq \eta$ για κάθε n μεγαλύτερο από ένα κατάλληλο n_0 (αυτό είναι δυνατό από την μονοτονία του $w''_x(\delta)$). Θέτουμε $F_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \geq \epsilon\}$. Το F_ϵ είναι κλειστό. Από υπόθεση έχουμε ότι $\mathbb{P}_n\pi_{0,\delta}^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}\pi_{0,\delta}^{-1}$ επομένως από θεώρημα *Portmanteau*

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(\pi_{0,\delta}^{-1}(F_\epsilon)) \leq \mathbb{P}(\pi_{0,\delta}^{-1}(F_\epsilon)) < \eta$$

επομένως υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_2$ να ισχύει

$$\mathbb{P}_n(x : |x(\delta) - x(0)| \geq \epsilon) < \eta$$

Επιπλέον, εφόσον $\mathbb{P}(J_1) = 0$, οι x είναι σύνεχής στο 1 με πιθανότητα 1. Επομένως λόγω συμμετρίας, με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ και n_3 τέτοια ώστε για κάθε $n \geq n_3$ να ισχύει

$$\mathbb{P}_n(x : |x(1^-) - x(1 - \delta)| \geq \epsilon) \leq \eta$$

επομένως έχουμε την συνθήκη (ii) του θεωρήματος 5.5.2. Η τελευταία είναι ισοδύναμη με την συνθήκη (ii) του θεωρήματος 5.5.1. Επομένως, για να δείξουμε την συνθήκη (i) αρκεί να δέιξουμε την (i') του λήμματος 5.5.1. Έστω $t \in T_{\mathbb{P}}$ και $a > 0$. Τότε επειδή το $F_a = (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ είναι κλειστό έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(x : |x(t)| \geq a) = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(\pi_t^{-1}(F_a)) \leq \mathbb{P}(\pi_t^{-1}(F_a)) \xrightarrow{a\to 0} 0$$

Θεώρημα 5.5.4 Έστω $\mathbb{P}_n$ μέτρα πιθανότητας στον $(D, \mathcal{D})$. Αν για κάθε $\eta > 0$ υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}_n(x : |x(0)| > a) \leq \eta$$

και επιπλέον ότι για κάθε $\epsilon, \eta > 0$ υπάρχουν $\delta > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{P}_n(x : w_x(\delta) \geq \epsilon) < \eta$$

για κάθε $n \geq n_0$ τότε η $(\mathbb{P}_n)_n$ είναι σφιχτή. Αν επιπλέον μια υπακολουθία $(\mathbb{P}_{n'})_{n'}$ συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο $\mathbb{P}$ τότε $\mathbb{P}(C[0,1]) = 1$

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος 5.5.1. Για την (ii) έστω $\epsilon, \eta > 0$. τότε υπάρχουν $\delta_0 > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\mathbb{P}_n(x : w_x(\delta_0) \geq \epsilon) < \eta$ για κάθε $n \geq n_0$. Από το λήμμα 5.1.3, για $\delta < 1/2$ έχουμε $w'_x(\delta) \leq w_x(2\delta)$. Για $\delta' = \delta_0/2$ έχουμε ότι $\delta' < 1/2$ επομένως για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\mathbb{P}_n(x : w'_x(\delta') \geq \epsilon) \leq \eta$$

Που είναι η συνθήκη (ii).

Για την συνθήκη (i), για $\epsilon, \eta > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ και n_1 τέτοια ώστε

$$\mathbb{P}_n(x : w_x(\delta_1) \geq \epsilon) < \eta$$

Επιπλέον για το ίδιο $\eta > 0$ υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}_n(x : |x(0)| > a) \leq \eta$$

επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{k} < \delta$. Για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε

$$|x(t)| \leq |x(0)| + \sum_{i=1}^{k} |x\left(\frac{it}{k}\right) - x\left(\frac{(i-1)t}{k}\right)| \leq |x(0)| + kw_x(\delta)$$

επομένως $\mathbb{P}_n(x : \|x\| > a + k\epsilon) \leq 2\eta$ για κάθε $n \geq n_1$. Για τους όρους που είναι μικρότεροι από το n_1 ξέρουμε ότι κάθε μέτρο είναι είναι σφιχτό, επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $n_1 = 1$ και έχουμε την συνθήκη (i).

Για τον τελευταίο ισχυρισμό του θεωρήματος, θα δείξουμε ότι για $\epsilon, \delta > 0$ ισχύει

$$B = \{y : w_y(\frac{\delta}{2}) \geq 2\epsilon\} \subset (\{x : w_x(\delta) \geq \epsilon\})^o$$

Πράγματι, για $r = \min\{\frac{\delta}{4}, \frac{\epsilon}{2}\}$, αν $y \in B$ και $x \in D$ με $\rho(x,y) < r$, θα βρούμε $t_1, t_2 \in [0,1]$ με $|t_2 - t_1| < \delta$ και $|x(t_2) - x(t_1)| \geq \epsilon$. Επειδή $w_y(\frac{\delta}{2}) \geq 2\epsilon$ τότε υπάρχουν $t, s \in [0,1]$ με $|t - s| \leq \delta/2$ και $|y(t) - y(s)| \geq 2\epsilon$. Επιπλέον, υπάρχει $\lambda \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\|\lambda - t\| < r$ και $\|y - x \circ \lambda\| < r$. Με βάση τα προηγούμενα έχουμε

$$2\epsilon \leq |y(t)-y(s)| \leq |y(s)-x(\lambda(s))| + |y(t)-x(\lambda(t))| + |x(\lambda(t))-x(\lambda(s))| \leq \epsilon + |x(\lambda(t))-x(\lambda(s))|$$

επομένως $|x(\lambda(t)) - x(\lambda(s))| \geq \epsilon$. Επίσης

$$|\lambda(s) - \lambda(t)| \leq |\lambda(t) - t| + |\lambda(s) - s| + |s - t| \leq \delta$$

επομένως $B(y, r) \subset \{x : w_x(\delta) \geq \epsilon\}$.

Τώρα επειδή $\mathbb{P}_{n'} \Rightarrow \mathbb{P}$ θα έχουμε

$$\mathbb{P}(y : w_y(\frac{\delta}{2}) \geq 2\epsilon) \leq \mathbb{P}((\{x : w_x(\delta) \geq \epsilon\})^o) \leq \liminf_{n' \to \infty} \mathbb{P}_{n'}((\{x : w_x(\delta) \geq \epsilon\})^o) \leq$$
$$\leq \liminf_{n' \to \infty} \mathbb{P}_{n'}(x : w_x(\delta) \geq \epsilon) \leq \limsup_{n' \to \infty} \mathbb{P}_{n'}(x : w_x(\delta) \geq \epsilon)$$

Από υπόθεση για $\epsilon, \eta > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ και n_0 τέτοια ώστε $\mathbb{P}_{n'}(x : w_x(\delta) \geq \epsilon) < \eta$ για κάθε $n' \geq n_0$, επομένως έχουμε $\mathbb{P}(y : w_y(\frac{\delta}{2}) \geq 2\epsilon) \leq \eta$, και έτσι κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχει $\delta_m > 0$ τέτοιο ώστε αν συμβολίσουμε με $A_m = \{y : w_y(\delta_m) \geq 1/m\}$ τότε θα έχουμε $\mathbb{P}(A_m) < 1/m$. Θέτουμε $A = \liminf_m A_m$ και έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(A) \leq \liminf_m \mathbb{P}(A_m) \leq \liminf_m 1/m = 0$$

επομένως $\mathbb{P}(A) = 0$. Αν $x \notin A$ τότε $\lim_{\delta \to 0} w_x(\delta) = 0$ και επομένως $x \in C$ με πιθανότητα 1

Παρατήρηση Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $\mathbb{P}_n \pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k} \Rightarrow \mathbb{P}\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k}$ ισχύει για κάθε $t_1, \ldots, t_k \in T_{\mathbb{P}}$ τότε επειδή η $\mathbb{P}_n$ είναι σφιχτή έχουμε $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ και $\mathbb{P}(C) = 1$

Ορισμός 5.5.1 Τα τυχαία στοιχεία του D είναι απεικονίσεις $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to D$ τέτοια ώστε για κάθε $\omega \in \Omega$ η $X(\omega)$ είναι στοιχείο του D. Για ένα τυχαίο στοιχείου του D ορίζουμε $T_X \subset [0,1]$ να είναι το σύνολο των t για τα οποία η προβολή π_t είναι συνεχής $\mathbb{P}$-σ.β. όπου $\mathbb{P}$ είναι η κατανομή του X.

Θεώρημα 5.5.5 Έστω X_n, X τυχαία στοιχεία του D. Υποθέτουμε ότι

$$(X_n(t_1), \ldots, X_n(t_k)) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X(t_1), \ldots, X(t_k))$$

Για κάθε $t_1, \dots t_k \in T_X$, Επιπλέον υποθέτοθμε ότι $\mathbb{P}(X(1) \neq X(1^-)) = 0$ και ότι

$$\mathbb{P}(|X_n(t) - X_n(t_1)| \geq l, |X_n(t_2) - X_n(t)| \geq l) \leq \frac{1}{l^{2c}}(F(t_2) - F(t_1))^{2a}$$

για $t_1 \leq t \leq t_2$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $c \geq 0$ και $a > \frac{1}{2}$ και $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ μη φθίνουσα και συνεχής. Τότε $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$

Παρατήρηση Στη θέση της τελευταίας συνθήκης μπορούμε να βάλουμε:

$$\mathbb{E}\left[|X_n(t) - X_n(t_1)|^c . |X_n(t_2) - X_n(t)|^c\right] \leq (F(t_2) - F(t_1))^{2a}$$

Πράγματι

$$\mathbb{P}(|X_n(t) - X_n(t_1)| \geq l, |X_n(t_2) - X_n(t)| \geq l) \leq \mathbb{P}(|X_n(t) - X_n(t_1)|.|X_n(t_2) - X_n(t)| \geq l^2) =$$

$$\mathbb{P}(|X_n(t) - X_n(t_1)|^c.|X_n(t_2) - X_n(t)|^c \geq l^{2c}) \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X_n(t) - X_n(t_1)|^c . |X_n(t_2) - X_n(t)|^c\right]}{l^{2c}}$$

Από ανισότητα $Markov$

Απόδειξη Από το θεώρημα 5.5.3, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\eta, \epsilon > 0$ υπάρχουν $\delta > 0$ και n_0 τέτοια ώστε $\mathbb{P}(w''_{X_n}(\delta) \geq \epsilon) < \eta$. Έστω $t_0 \in [0,1]$,$\delta_0 > 0$ και $n_1, m \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τις τ.μ

$$Y_i = X_n\left(t_0 + \frac{i}{m}\delta_0\right) - X_n\left(t_0 + \frac{i-1}{m}\delta_0\right) \quad i = 1, ..., m$$

και

$$M''_m = \max_{0 \leq i \leq j \leq k \leq m} \min\left\{\left|X_n\left(t_0 + \frac{j}{m}\delta_0\right) - X_n\left(t_0 + \frac{i}{m}\delta_0\right)\right|, \left|X_n\left(t_0 + \frac{k}{m}\delta_0\right) - X_n\left(t_0 + \frac{j}{m}\delta_0\right)\right|\right\}$$

Παρατηρούμε ότι, $S_n = X_n\left(t_0 + \frac{n}{m}\delta_0\right) - X_n(t_0)$ και $S_n - S_k = X_n\left(t_0 + \frac{n}{m}\delta_0\right) - X_n\left(t_0 + \frac{k}{m}\delta_0\right)$ επομένως το M''_m είναι αυτό που ορίσαμε στο θεώρημα 4.5.2. Επομένως απ το ίδιο θεώρημα έχουμε

$$\mathbb{P}(M''_m \geq \epsilon) \leq \frac{K}{\epsilon^{2c}}(F(t_0 + \delta_0) - F(t_0))^{2a} \quad (*)$$

λόγω της μονοτονίας της F. Το K εξαρτάται μόνο από το c και a. Τώρα για $0 \leq t'_2 \leq t' \leq t'_1 < 1$ θέτουμε

$$i(t'_1) = [t'_1 m] \quad j(t') = [t'm] \quad k(t'_2) = [t'_2 m]$$

Επομένως

$$M''_m = \max_{0 \leq [t'_1 m] \leq [t'm] \leq [t_2 m] \leq m} \min\left\{\left|X_n\left(t_0 + \frac{[t'm]}{m}\delta_0\right) - X_n\left(t_0 + \frac{[t'_1 m]}{m}\delta_0\right)\right|,\right.$$
$$\left.\left|X_n\left(t_0 + \frac{[t'_2 m]}{m}\delta_0\right) - X_n\left(t_0 + \frac{[tm]}{m}\delta_0\right)\right|\right\}$$

και επειδή η X_n είναι δεξιά συνεχής, για $m \to \infty$ έχουμε

$$M''_m \to \sup_{0 \leq t'_1 \leq t' \leq t'_2 \leq 1} \min\{|X_n(t_0 + t'\delta_0) - X_n(t_0 + t'_1\delta_0)|, |X_n(t_0 + t'_2\delta_0) - X_n(t_0 + t'\delta_0)|\}$$

θέτουμε $t_1 = t_0 + t_1'\delta_0$, $t = t_0 + t'\delta_0$, $t_2 = t_0 + t_2'\delta_0$ και το όριο γίνεται

$$\sup_{t_0 \le t_1 \le t \le t_2 \le t_0+\delta_0} \min\{|X_n(t) - X_n(t_1)|, |X_n(t_2) - X_n(t)|\}$$

την τελευταία ποσότητα την θέτουμε $w(X_n, [t_0, t_0 + \delta_0])$ και λόγω της (*) έχουμε

$$\mathbb{P}(w(X_n, [t_0, t_0 + \delta_0]) \ge \epsilon) \le \frac{K}{\epsilon^{2c}}(F(t_0 + \delta_0) + F(t_0))^{2a} \quad (**)$$

Παρατηρούμε ότι τα t_0, δ_0 ήταν τυχαία επιλεγμένα. Έστω $\delta > 0$. Θέτουμε $t_i = i\delta$ και θεωρούμε την διαμέριση $\{t_i\}$ $i = 0, .., [1/\delta]$ με $t_{[1/\delta]} = 1$. Για $\epsilon > 0$ υποθέτουμε ότι για κάθε $i = 1, .., [1/\delta] - 1$ ισχύει

$$w''(X_n, [t_{i-1}, t_{i+1}]) \le \epsilon$$

Αν τώρα $s_1 \le s \le s_2$ και $s_2 - s_1 \le \delta$ τότε τα s_1, s_2 θα βρίσκονται στα ίδια ή σε γειτονικά διαστήματα της διαμέρισης $\{t_i\}$, έτσι, θα ανήκουν και τα 2 σε ένα διάστημα της μορφής $[t_{i-1}, t_{i+1}]$. Επομένως από τη προηγούμενη υπόθεση και τον ορισμό του $w''(X_n, .)$ έχουμε ότι

$$\min\{|X_n(s) - X_n(s_1)|, |X_n(s_2) - X_n(s)|\} \le \epsilon$$

και επειδή η επιλογή των s_1, s, s_2 ήταν τυχαία έχουμε

$$w''_{X_n}(\delta) \le \epsilon$$

Τώρα λόγω του τελευταίου και της (**) θα έχουμε

$$\mathbb{P}(w''_{X_n}(\delta) \le \epsilon) \le \frac{K}{\epsilon^{2c}} \sum_{k=1}^{[1/\delta]-1} (F(t_{k+1}) - F(t_{k-1}))^{2a}$$

και επειδή $t_{i+1} - t_{i-1} \le 2\delta$ έχουμε

$$\frac{K}{\epsilon^{2c}} \sum_{k=1}^{[1/\delta]-1} (F(t_{k+1}) - F(t_{k-1}))^{2a} \le \frac{K}{\epsilon^{2c}}(F(t_2) - F(0) + F(t_3) - F(t_1) + \dots F(1) - F(t_{[1/\delta]-2}))w_F(2\delta)^{2a-1} =$$

$$= \frac{K}{\epsilon^{2c}}(F(1) - F(0) + F(t_{[1/\delta]-1}) - F(t_1))(w_F(2\delta))^{2a-1} \le \frac{K}{\epsilon^{2c}} 2(F(1) - F(0))(w_F(2\delta))^{2a-1}$$

Επειδή $a > \frac{1}{2}$ και επειδή η F είναι ομοιόμορφα συνεχής, για $\delta \to 0$ έχουμε την αποδεικτέα

5.6 Εφαρμογές

Το θεώρημα *Donsker*

Ο χώρος D πολλες φορές είναι πιο βολικός από τον C όταν θέλουμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα *Donsker*. Έστω $Y_1, Y_2, \dots$ τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, με $S_n = Y_1 + \dots Y_n$ και έστω X_n συνάρτηση στον D με

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}$$

Εφόσον η $X_t^{(n)}$ είναι τ.μ, η X_n είναι τυχαίο στοιχείο στον D. Θα δείξουμε ότι υπο κατάλληλες συνθήκες ότι η κατανομή του X_n συγκλίνει ασθενώς στο μέτρο $Wiener$. Η ταυτοτική απεικόνιση $I : C \to D$ είναι συνεχής επομένως είναι και $\mathcal{C}/\mathcal{D}$ μετρήσιμη. Άν $\mathbb{W}$ είναι το μέτρο $Wiener$ στον $(C, \mathcal{C})$, τότε το μέτρο $\mathbb{W}I^{-1}$ είναι μέτρο $Wiener$ στον $(D, \mathcal{D})$. Στο εξής θα συμβολίζουμε το μέτρο $\mathbb{W}I^{-1}$ ως $\mathbb{W}$. Είναι εμφανές ότι $\mathbb{W}(C) = 1$. Τέλος, συμβολίζουμε ως W ένα τυχαίο στοιχείο στον D με κατανομή $\mathbb{W}$

Θεώρημα 5.6.1 Έστω $Y_1, Y_2, \ldots$ $i.i.d$ τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ με $\mathbb{E}[Y_i] = 0$ και $V(Y_i) = \sigma^2$ τότε $X_n \Rightarrow W$.

Απόδειξη Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι

$$(X_{t_1}^{(n)} \ldots X_{t_k}^{(n)}) \Rightarrow (W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})$$

όπου W_t είναι η διαδικασία $Wiener$. Η τελευταία είναι συνεχής $\mathbb{W}$-σ.π επομένως έχει άλμα στο 1 με πιθανότητα 0. Για να κάνουμε χρήση του θεωρήματος 5.5.5 θα δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[|X_n(t) - X_n(t_1)|^2 . |X_n(t_2) - X_n(t)|^2\right] \leq 4(t_2 - t_1)^2$$

για $t_1 \leq t \leq t_2$. Πράγματι,

$$\mathbb{E}\left[|X_n(t) - X_n(t_1)|^2 . |X_n(t_2) - X_n(t)|^2\right] =$$

$$\frac{1}{\sigma^4 n^2}\mathbb{E}\left[\left|S_{[nt]} - S_{[nt_1]}\right|^2 . \left|S_{[nt_2]} - S_{[nt]}\right|^2\right] = \frac{1}{n^2}([nt] - [nt_1])([nt_2] - [nt]) \leq \frac{([nt_2] - [nt_1])^2}{n^2}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της ανεξαρτησίας των Y_i. Αν $t_2 - t_1 \geq \frac{1}{n}$ τότε

$$\frac{([nt_2] - [nt_1])}{n} \leq t_2 - t_1 + \frac{1}{n} \leq 2(t_2 - t_1)$$

και έχουμε τον ισχυρισμό.

Αν τώρα $t_2 - t_1 < \frac{1}{n}$, τότε θεωρούμε την διαμέριση $[\frac{i-1}{n}, \frac{1}{n})$. Επειδή $t_1 \leq t \leq t_2$, τότε είτε t_1, t θα ανήκουν στο ίδιο διάστημα της διαμέρισης είτε τα t, t_2 θα ανήκουν στο ίδιο διάστημα. Επομένως θα έχουμε είτε $[nt] = [nt_1]$ είτε $[nt] = [nt_2]$ δηλαδή

$$\mathbb{E}\left[|X_n(t) - X_n(t_1)|^2 . |X_n(t_2) - X_n(t)|^2\right] = 0$$

και τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 5.5.5.

Κυριαρχημένα Μέτρα

Οι τυχαίες μεταβλητές του θεωρήματος 5.6.1 είναι ορισμένες σε έναν κοινό χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Θα δείξουμε ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε το μέτρο $\mathbb{P}$ με ένα μέτρο $\mathbb{P}_0$ που είναι απολύτως συνεχές ως προς το $\mathbb{P}$. Θυμίζουμε ότι ένα μέτρο $\mathbb{Q}$ είναι απόλυτα συνεχές ως προς ένα μέτρο $\mathbb{P}$ αν $\mathbb{P}(A) = 0 \implies \mathbb{Q}(A) = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$

Λήμμα 5.6.1 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος μέτρου και $\mathbb{P}_0$ που είναι απολύτως συνεχές ως προς το $\mathbb{P}$. Αν $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ μια άλγεβρα ενδεχομένων τέτοια ώστε, αν για A_n ακολουθία συνόλων με $A_n \in \sigma(\mathcal{F}_0)$ έχουμε

$$\mathbb{P}(A_n|E) \to a, \text{ για κάθε } E \in \mathcal{F}_0 \text{ με } \mathbb{P}(E) > 0$$

τότε $\mathbb{P}_0(A_n) \to a$

Απόδειξη έχουμε ότι $\mathbb{P}_0 = \int_A g_0(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$, όπου $g_0 = \frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{P}}$ η παράγωγος $Radon - Nikodyn$ του $\mathbb{P}_0$ ως προς το $\mathbb{P}$, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{A_n} g d\mathbb{P} \to a \int_{\Omega} g d\mathbb{P} \quad (1)$$

Όπου η g είναι $\mathcal{F}$ μετρήσιμη και $\mathbb{P}$ ολοκληρώσιμη. Θα δείξουμε την (1) σε 3 βήματα

Βήμα 1) Θέτουμε $\mathcal{F}_1 = \sigma(\mathcal{F}_0)$ και $\mathcal{F}_2$ τη κλάση των ενδεχομένων E για τα οποία ισχύει

$$\mathbb{P}(A_n \cap E) \to a\mathbb{P}(E)$$

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. Είναι εμφανές ότι $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_2$. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 1.1.1. Μένει να δείξουμε ότι η $\mathcal{F}_2$ είναι λ-σύστημα.
Έχουμε ότι $\Omega \in \mathcal{F}_0$ και από υπόθεση $\Omega \in \mathcal{F}_2$. Επιπλέον $\mathbb{P}(A_n) \to a$

Έστω επιπλέον ότι $E \in \mathcal{F}_2$. Τότε

$$\mathbb{P}(A_n \cap E^c) = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_n \cap E) \to a - a\mathbb{P}(E) = a\mathbb{P}(E^c)$$

Έστω επίσης $\{E_m\}_m$ ακολουθία ξένων ανα 2 ενδεχομένων της $\mathcal{F}_2$. Θέτουμε $E = \bigcup_m E_m$. Είναι

$$\mathbb{P}(A_n \cap E) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap E_m) \to a \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_m) = a\mathbb{P}(E)$$

Η δεύτερη ισότητα προέκυψε από το λήμμα 2.3.1 αφού $\mathbb{P}(A_n \cap E_m) \leq \mathbb{P}(E_m)$ και $\sum_m \mathbb{P}(E_m) = \mathbb{P}(E)$

Βήμα 2) Θα δείξουμε ότι η (1) ισχύει για $\mathcal{F}_1$- μετρήσιμες συναρτήσεις g. θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική της τυπικής μηχανικής. Έστω ότι η $g = 1_E$ όπου $E \in \mathcal{F}_1$. Τότε

$$\int_{A_n} 1_E d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A_n \cap E) \to a\mathbb{P}(E) = a \int_{\Omega} 1_E d\mathbb{P}$$

από το βήμα 1). Τώρα αν η g είναι $\mathcal{F}_1$ απλή, έχουμε ότι $g = \sum_{i \in F} a_i 1_{E_i}$ (όπου F πεπερασμένο) και

$$\int_{A_n} g d\mathbb{P} = \sum_{i \in F} a_i \mathbb{P}(A_n \cap E_i) \to a \sum_{i \in F} a_i \mathbb{P}(E_i) = a \int_{\Omega} g d\mathbb{P}$$

Αν g είναι $\mathcal{F}_1$ μετρήσιμη και g μη αρνητική και $\mathbb{P}$-ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει ακολουθία απλών $(g_k)_k$ με $|g_k| \leq |g|$ και $g_k \to g$. Έχουμε

$$\left| \int_{A_n} g d\mathbb{P} - a \int_{\Omega} g d\mathbb{P} \right| = \left| \int_{A_n} g + g_k - g_k d\mathbb{P} - a \int_{\Omega} g + g_k - g_k d\mathbb{P} \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{A_n} g_k d\mathbb{P} - a \int_{\Omega} g_k d\mathbb{P} \right| + (1 + |a|)\mathbb{E}[|g - g_k|]$$

Για $n \to \infty$ έχουμε $\left| \int_{A_n} g_k d\mathbb{P} - a \int_{\Omega} g_k d\mathbb{P} \right| \to 0$ και επειδή $|g_k| \leq |g|$, $g_k \to g$ και g $\mathbb{P}$-ολοκληρώσιμη, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε

$$\left| \int_{A_n} g d\mathbb{P} - a \int_{\Omega} g d\mathbb{P} \right| \to 0$$

Τέλος για g $\mathcal{F}_1$ μετρήσιμη και $\mathbb{P}$-ολοκληρώσιμη έχουμε

$$\int_{A_n} g d\mathbb{P} = \int_{A_n} g^+ d\mathbb{P} + \int_{A_n} g^- d\mathbb{P} \to a \int_\Omega g^+ d\mathbb{P} + a \int_\Omega g^- d\mathbb{P} = a \int_\Omega g d\mathbb{P}$$

Βήμα 3) Έστω g, $\mathcal{F}$ μετρήσιμη και $\mathbb{P}$- ολοκληρώσιμη. Θέτουμε $g_1 = \mathbb{E}[g|\mathcal{F}_1]$. Εξ ορισμού η g_1 είναι $\mathcal{F}_1$ μετρήσιμη ισχύει $\mathbb{E}[|g_1|] \leq \mathbb{E}[|g|]$ επομένως και $\mathbb{P}$- ολοκληρώσιμη, και εφόσον $A_n \in \mathcal{F}_1$ έχουμε

$$\int_{A_n} g d\mathbb{P} = \int_{A_n} g_1 d\mathbb{P} \to a \int_\Omega g_1 d\mathbb{P} = a \int_\Omega g d\mathbb{P}$$

Θεώρημα 5.6.2 Έστω $Y_1, Y_2, \ldots$ *i.i.d* τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ με $\mathbb{E}[Y_i] = 0$ και $V(Y_i) = \sigma^2$. Αν $\mathbb{P}_0$ είναι απολύτως συνεχές ως προς το $\mathbb{P}$, τότε $X_n \Rightarrow W$.

Απόδειξη Θα χωρίσουμε την απόδειξη σε 4 βήματα.

Βήμα 1) Θεωρούμε μια ακολουθία k_n τέτοια ώστε $k_n \to \infty$ και $\frac{k_n}{n} \to 0$ και θέτουμε

$$\overline{X}_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=k_n}^{[nt]} Y_i$$

και

$$M_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{1 \leq k \leq k_n} |Y_1 + \cdots + Y_k|$$

Έστω $a > 0$. από ανισότητα *Kolmogorov* έχουμε

$$\mathbb{P}(M_n \geq a) \leq \frac{k_n}{n} \to 0$$

και επομένως

$$\rho(X_n, \overline{X}_n) \leq \|X_n - \overline{X}_n\| = M_n \Rightarrow 0$$

ως προς το μέτρο $\mathbb{P}$. Από θεώρημα 5.6.1 και από το πόρισμα του θεωρήματος 1.3.1 έχουμε ότι $\overline{X}_n \Rightarrow W$ ως προς το μέτρο $\mathbb{P}$.

Βήμα 2) Θα δείξουμε ότι $\overline{X}_n \Rightarrow W$ ως προς το μέτρο $\mathbb{P}_0$. Πράγματι, αν $A \in \mathcal{D}$ είναι $\mathbb{W}$-συνεχές τότε αν συμβολίσουμε με $A_n = \{\overline{X}_n \in A\}$ και με $a = \mathbb{W}(W \in A)$ τότε από θεώρημα *Portmanteau* έχουμε $\mathbb{P}(A_n) \to a$. Θέτουμε

$$\mathcal{F}_0 = \{(Y_1, \ldots, Y_k)^{-1}(H) : k \in \mathbb{N}, H \in \mathcal{R}^k\}$$

Η $\mathcal{F}_0$ είναι άλγεβρα και αν $E \in \mathcal{F}_0$ τότε λόγω της ανεξαρτησιίας των Y_i για αρκετά μεγάλο n έχουμε ότι τα ενδεχόμενα A_n και E είναι ανεξάρτητα επομένως $\mathbb{P}(A_n|E) = \mathbb{P}(A_n) \to a$ και επομένως από το λήμμα 5.6.1 $\mathbb{P}_0(X_n \in A) \to \mathbb{W}(W \in A)$

Βήμα 3) Εφόσον $1_{\{M_n \geq a\}} \to 0$ $\mathbb{P}$-σχεδόν βεβαίως, και επειδή $g_0 1_{\{M_n \geq a\}} \leq |g_0|$ έχουμε

$$\mathbb{P}_0(M_n \geq a) = \int g_0 1_{\{M_n \geq a\}} d\mathbb{P} \to 0$$

Από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

βήμα 4) κάνοντας την ίδια διαδικασία όπως στο βήμα 1) για το μέτρο $\mathbb{P}_0$ έχουμε το ζητούμενο

Εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής

Ορισμός 5.6.1 Έστω $Y_1, \dots, Y_n$, *i.i.d.* τ.μ. με σ.κ.π. F, και για κάθε $\omega \in \Omega$ έχουμε $Y_i(\omega) \in [0,1]$, $i = 1,..,n$. Η εμπειρική της διαδικασία ορίζεται ως $E_t^{(n)} = \sqrt{n}(F_n(t) - F(t))$, όπου

$$F_n(t) = \frac{1}{n}(1_{\{Y_1 \le t\}} + \cdots + 1_{\{Y_n \le t\}})$$

είναι η εμπειρική συνάρτηση κατανομής. Επειδή για κάθε $\omega \in \Omega$, η $E_t^{(n)}(\omega)$ είναι τυχαία μεταβλητή έχουμε ότι η Y_n είναι τυχαίο στοιχείο του D για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λήμμα 5.6.2 Έστω $(Z_1^{(n)}, ..., Z_r^{(n)})$ τ.μ. που ακολουθούν την πολυωνυμική κατανομή $M(n, p_1, \dots p_r)$. τότε το διάνυσμα

$$Z = \left(\frac{Z_1^{(n)} - np_1}{\sqrt{n}}, ..., \frac{Z_r^{(n)} - np_r}{\sqrt{n}} \right)$$

συγκλίνει ασθενώς στη πολυδιάστατη κανονική κατανομή με διάνυσμα μέσης τιμης 0 και πίνακα συνδιακυμάνσεων

$$V = \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 & -p_1p_3 & ... & -p_1p_r \\ -p_2p_1 & p_2(1-p_2) & -p_2p_3 & ... & -p_2p_r \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ -p_rp_1 & -p_rp_2 & -p_rp_3 & ... & p_r(1-p_r) \end{pmatrix}$$

Απόδειξη Έχουμε

$$\phi_Z(\theta_1, .., \theta_r) = \left(\sum_{j=1}^{r} p_j e^{i\overline{\theta}_j/\sqrt{n}} \right)^n$$

όπου $\overline{\theta}_j = \theta_j - (\theta_1 p_1 + ... + \theta_r p_r)$. Αναπτύσσοντας σε δυναμοσειρά έχουμε:

$$\left(\sum_{j=1}^{r} p_j e^{i\overline{\theta}_j/\sqrt{n}} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{r} p_j \overline{\theta}_j^2 + o(\frac{1}{n}) \right)^n \to e^{-\sum_{j=1}^{r} p_j \overline{\theta}_j^2/2}$$

και επειδή $\overline{\theta}_j = \theta_j - (\theta_1 p_1 + ... + \theta_r p_r)$, κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε ότι η τελευταία ποσότητα είναι

$$e^{\overrightarrow{\theta} V \overrightarrow{\theta}^T}$$

Θεώρημα 5.6.3 Αν $Y_1, Y_2, ...$ είναι *i.i.d.* με τιμές στο [0,1] και με σ.κ.π. F, τότε η εμπειρική της διαδικασία συγκλίνει ασθενώς, $E_n \Rightarrow E$ όπου $\{E_t\}_{0 \le t \le 1}$ είναι τυχαίο στοιχείο του D με $\{E_t\}_{0 \le t \le 1} = \{W^o_{F(t)}\}_{0 \le t \le 1}$, όπου η W^o είναι η τυπική γέφυρα *Brown*. Το όριο E είναι γκαουσιανή διαδικασία με $\mathbb{E}[E_t] = 0$ και $\mathbb{E}[E_t E_s] = F(s)(1 - F(t))$ για $s \le t$.

Απόδειξη Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση που οι Y_i ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Τότε $F(t) = t$. Θα δείξουμε ότι $E_n \Rightarrow W^o$, όπου η W^o είναι η γέφυρα *Brown* με $\mathbb{E}[W^o_t W^o_s] = s(1-t)$ για $s \le t$. θέτουμε

$$U_t^{(n)} = nF_n(t) = (1_{\{Y_1 \le t\}} + \cdots + 1_{\{Y_n \le t\}})$$

Μπορεί να δειχτεί ότι για $0 < t_0 < ... < t_k < 1$, το διάνυσμα $(U_{t_0}^{(n)}, U_{t_1}^{(n)} - U_{t_0}^{(n)}, \ldots, U_1^{(n)} - U_{t_k}^{(n)})$ ακολουθέι την πολυωνυμική κατανομη με παραμέτρους $(n, t_0, t_1 - t_0, ..., 1 - t_k)$ και από το προηγούμενο λήμμα, οι πεπερασμένες διαστάσεις της $E_t^{(n)} = \frac{U_t^{(n)} - nt}{\sqrt{n}}$, συγκλίνουν ασθενώς στις πεπερασμένες διαστάσεις της W^o.

Θα κάνουμε χρήση του θεωρήματος 5.5.5 για να δείξουμε την ασθενή σύγκλιση της E_n. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}[(E_t^{(n)} - E_{t_1}^{(n)})^2 (E_{t_2}^{(n)} - E_t^{(n)})^2] \leq (t - t_1)(t_2 - t) \leq (t_2 - t_1)^2$$

όπου $t_1 \leq t \leq t_2$. Επιπλέον έχουμε ότι

$$E_t^{(n)} - E_{t_1}^{(n)} = \frac{U_t^{(n)} - U_{t_1}^{(n)} - n(t - t_1)}{\sqrt{n}} = \frac{1_{\{t_1 \leq Y_1 \leq t\}} + \cdots + 1_{\{t_1 \leq Y_n \leq t\}} - n(t - t_1)}{\sqrt{n}}$$

επομένως αν θέσουμε $a_i = 1_{\{t_1 \leq Y_i \leq t\}} - (t - t_1)$ και $b_i = 1_{\{t \leq Y_i \leq t_2\}} - (t_2 - t)$ τότε ισοδύναμα πρέπει να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2\right] \leq n^2 (t_2 - t)(t - t_1)$$

Θέτουμε $p_1 = t - t_1$ και $p_2 = t_2 - t$ και έχουμε

$$a_i = \begin{cases} 1 - p_1, & \text{με πιθανότητα } p_1 \\ -p_1 & \text{με πιθανότητα } 1 - p_1 \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} 1 - p_2, & \text{με πιθανότητα } p_2 \\ -p_2 & \text{με πιθανότητα } 1 - p_2 \end{cases}$$

και

$$a_i b_i = \begin{cases} -(1 - p_1)p_2, & \text{με πιθανότητα } p_1 \\ -(1 - p_2)p_1 & \text{με πιθανότητα } p_2 \\ p_2 p_1 & \text{με πιθανότητα } 1 - p_2 - p_1 \end{cases}$$

επομένως

$$\mathbb{E}[a_i^2] = p_1(1 - p_1), \quad \mathbb{E}[b_i^2] = p_2(1 - p_2), \quad \mathbb{E}[a_i b_i] = -p_1 p_2$$

$$\mathbb{E}[a_i^2 b_i^2] = p_1 p_2 (p_1 + p_2 - 3p_1 p_2)$$

Με δεδομένο ότι για $j \neq i$ τα a_i, a_j και b_i, b_j είναι ανεξάρτητα και ισόνομα αντίστοιχα και κάνοντας απλές πράξεις έχουμε:

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2\right] = n\mathbb{E}[a_i^2 b_i^2] + n(n-1)\mathbb{E}[a_i^2]\mathbb{E}b_i^2] + 2n(n-1)(\mathbb{E}[a_i 2 b_i])^2$$

$$= np_1 p_2 [p_1 + p_2 - 3p_1 p_2 + (n-1)(1 - p_1 - p_2) + 3(n-1)p_1 p_2] \leq n^2 p_1 p_2 = n^2 (t_2 - t)(t - t_1)$$

και έχουμε το ζητούμενο για την περίπτωση της ομοιόμορφης κατανομής.

Αν τώρα οι $\{Y_i\}$ έχουν οποιαδήποτε κατανομή με σ.κ.π F στο [0,1], ορίζουμε ως ¨αντίστροφη' τον μετασχηματισμό ποσοστημορίων της F:

$$\phi(s) = \inf\{t : s \leq F(t)\}$$

είναι γνωστό ότι, $s \leq F(t)$ αν και μόνο αν $\phi(s) \leq t$. Επομένως αν η η_i ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1] τότε

$$F_{\phi(\eta_i)}(t) = \mathbb{P}(\phi(\eta_i) \leq t) = \mathbb{P}(\eta_i \leq F(t))$$

επομένως η $\phi(\eta_i)$ έχει σ.κ.π. την F, δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $Y_n = \phi(\eta_n)$ όπου η_n ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1].

Αν $G_t^{(n)}$ είναι η εμπειρική συνάρτηση κατανομής των $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ και $H_t^{(n)} = \sqrt{n}(G_n(t) - t)$, τότε από τα προηγούμενα έχουμε ότι $H_n \Rightarrow W^o$.

Παρατηρούμε ότι

$$G_{(n)}(F(t)) = \frac{1_{\{\eta_1 \leq F(t)\}} + \cdots + 1_{\{\eta_n \leq F(t)\}}}{n} =$$

$$\frac{1_{\{\phi(\eta_1) \leq t\}} + \cdots + 1_{\{\phi(\eta_n) \leq t\}}}{n} = \frac{1_{\{Y_1 \leq t\}} + \cdots + 1_{\{Y_n \leq t\}}}{n} = F_n(t)$$

Ορίζουμε $\psi : D \to D$ με $\psi(x)(t) = x(F(t))$. Αν $x_n \to x$ στη τοπολογία *Skorohod* και $x \in C$ τότε η σύγκλιση θα είναι ομοιόμορφη επομένως θα έχουμε $x_n \circ F \to x \circ F$ ομοιόμορφα (διότι $\sup\{|x_n(F(t) - x(F(t))| : t \in [0,1]\} \leq \sup\{|x_n(t) - x(t)| : t \in [0,1]\}$) δηλαδή $\psi(x_n) \to \psi(x)$ ομοιόμορφα άρα και στην τοπολογία *Skorohod*, το οποίο σημαίνει ότι η ψ είναι συνεχής στη x όταν $x \in C$. τώρα επειδή $W^o \in C$ σ.π. και από θεώρημα απεικόνισης έχουμε $\psi(H_n) \Rightarrow \psi(W^o)$ τότε

$$E_n = (E_t^{(n)})_{t\in[0,1]} = (H_{F(t)}^{(n)})_{t\in[0,1]} = \psi(H_n) \Rightarrow \psi(W^o) = (W_{F(t)}^o)_{t\in[0,1]} = E$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 6

Ο χώρος $D[0,\infty)$

6.1 2 μετρικές στον χώρο D_∞

Για την επέκταση της τοπολογίας *Skorohod* στον χώρο $D_\infty = D[0,\infty)$, θεωρούμε για κάθε $t > 0$ τον χώρο $D_t = D[0,t]$. Επίσης, ορίζουμε

$$\|x\|_t = \sup\{|x(u)| : u \in [0,t]\}$$

Όλοι οι ορισμοί του D ισχύουν κατά αναλογία και στον D_t για παράδειγμα το σύνολο Λ στη μετρική *Skorohod* στον D, έχει ως ανάλογο το σύνολο Λ_t στον D_t με την διαφορά ότι τα στοιχεία του έχουν πεδίο ορισμού το $[0,t]$. Ομοίως για της μετρικές ρ_t και d_t.

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε τη *Skorohod* σύγκλιση $x_n \to x$ στον D_∞ απαιτώντας να ισχύει

$$\rho_t(x_n, x) \to 0$$

για κάθε $t > 0$. Όμως, αν $x_n = 1_{[0,1-\frac{1}{n})}$ το όριο που αναμένουμε είναι η $x(t) = 1_{[0,1)}$, στην ρ_1 ωστόσο έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $\lambda_n(1-\frac{1}{n}) < 1$ επομένως $|x(\lambda_n(1-\frac{1}{n}) - x_n(1-\frac{1}{n})| = 1$. Εδώ το πρόβλημα είναι η ασυνέχεια στο 1. Επομένως πρέπει να εργαστούμε κατάλληλα για να καλύψουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Λήμμα 6.1.1. Έστω $u \in (0,t)$ με t πεπερασμένο. Αν $\rho_t(x_n, x) \to 0$ και η x είναι συνεχής στο u τότε $\rho_u(x_n, x) \to 0$

Απόδειξη Από υπόθεση υπάρχει ακολουθία $(\lambda_n)_n \subset \Lambda_t$ τέτοια ώστε $\|\lambda_n - t\|_t \to 0$ και $\|x_n - x \circ \lambda_n\|_t \to 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Από την συνέχεια της x, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $v \in [u-2\delta, u+2\delta]$ να ισχύει $|x(u) - x(v)| \le \epsilon/2$. Επιπλέον, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \ge n_0$ και $v \le t$ να ισχύει $|\lambda_n(v) - v| \le \delta$, και $|x_n(v) - x(\lambda_n(v))| \le \epsilon/2$. Τότε για κάθε $n \ge n_0$ και $|u - v| \le \delta$ έχουμε

$$|\lambda_n(v) - u| \le |\lambda_n(v) - v| + |u - v| \le 2\delta$$

και επομένως

$$|x_n(v) - x(u)| \le |x_n(v) - x(\lambda_n(v))| + |x(\lambda_n(v)) - x(u)| \le \epsilon$$

και επειδή αυτό ισχύει για κάθε v με $|u - v| \le \delta$

$$\sup_{|u-v|\le\delta} |x(u) - x(v)| \le \epsilon \text{ και } \sup_{|u-v|\le\delta} |x(u) - x_n(v)| \le \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Θέτουμε

$$u_n = \begin{cases} u - \frac{1}{n} & \text{αν } \lambda_n(u) \leq u \\ u & \text{αν } \lambda_n(u) = u \\ \lambda_n^{-1}(u - \frac{1}{n}) & \text{αν } \lambda_n(u) > u \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι $u_n \leq u$. Επίσης

$$|u_n - u| \leq \max\{\frac{1}{n}, |\lambda_n^{-1}(u - \frac{1}{n}) - u|\}$$

αν το μέγιστο είναι η ποσότητα $|\lambda_n^{-1}(u - \frac{1}{n}) - u|$ τότε έχουμε

$$|u_n - u| \leq |\lambda_n^{-1}(u - \frac{1}{n}) - (u - \frac{1}{n})| + \frac{1}{n}$$

και έχουμε ότι $u_n \to u$. Επιπλέον, έχουμε

$$|\lambda_n(u_n) - u| \leq |\lambda_n(u_n) - u_n| + |u_n - u|$$

δηλαδή $\lambda_n(u_n) \to u$.

Ορίζουμε τώρα $\mu_n \in \Lambda_u$ ως $\mu_n(v) = \lambda_n(v)$ για $v \in [0, u_n]$ και συνδέουμε γραμμικά τα σημεία $\{(u_n, \lambda_n(u_n)), (u, u)\}$. Λόγω γραμμικότητας, έχουμε $|\mu_n(v) - v| \leq |\lambda_n(u_n) - u_n|$, για κάθε $v \in (u_n, u]$ και για κάθε $v \in [0, u_n]$ έχουμε $|\mu_n(v) - v| = |\lambda_n(v) - v|$, το οποίο σημαίνει ότι $\|\mu_n - t\|_u \to 0$

Μένει μόνο να δείξουμε ότι $\|x_n - x \circ \mu_n\|_u \to 0$. Επιλέγουμε $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$u_n > u - \delta \quad \text{και} \quad \lambda_n(u_n) > u - \delta$$

για κάθε $n \geq n_1$. Τώρα αν $v \leq u_n$ έχουμε

$$|x_n(v) - x(\mu_n(v))| = |x_n(v) - x(\lambda_n(v))| \leq \|x_n - x \circ \lambda_n\|_t$$

και αν $v \in [u_n, u]$ και $n \geq n_1$, τότε $v \in [u - \delta, u]$ και επειδή $\mu_n(v) > \mu_n(u_n) = \lambda_n(u_n) > u - \delta$ έχουμε ότι $\mu_n(v) \in [u - \delta, u]$ και τελικα για $n \geq \max\{n_1, n_0\}$ έχουμε

$$|x_n(v) - x(\mu_n(v))| \leq |x_n(v) - x(u)| + |x(u) - x(\mu_n(v))| \leq 2\epsilon$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Ορισμός 6.1.1 Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την απεικόνιση $\psi_i : D_\infty \to D_i$ ως

$$\psi_i(x)(t) = x(t)1_{\{t \leq i-1\}} + (i - t)x(t)1_{\{i-1 \leq t \leq i\}}$$

Παρατηρούμε ότι αν $t_n \uparrow i$ τότε $\psi_i(x)(t_n) = |(t_n - i)x(t_n)| \to 0$ και $\psi_i(x)(i) = 0$ επομένως η $\psi_i(x)$ είναι συνεχής στο i.

Ορισμός 6.1.2 2 τοπολογικά ισοδύναμες μετρικές, ρ_∞, d_∞ ορίζονται στον D_∞ ως εξής

$$\rho_\infty(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \rho_i(\psi_i(x), \psi_i(y))}{2^i} \quad d_\infty(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 \wedge d_i(\psi_i(x), \psi_i(y))}{2^i}$$

Από τον ορισμό των μετρικών στην τοπολογία *Skorohod* έχουμε άμεσα ότι $\rho_\infty, d_\infty \geq 0$, ότι $\rho_\infty(x,y) = \rho_\infty(y,x)$ (ομοίως για την d_∞), $\rho_\infty(x,x) = 0$ (ομοίως για την d_∞) και την τριγωνική ανισότητα. Αν $\rho_\infty(x,y) = 0$ τότε $\psi_i(x) = \psi_i(y)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Αν $t \geq 0$ τότε υπάρχει $i_t \in \mathbb{N}$ με $t \leq i_t$ και επειδή $\psi_{i_t}(x) = \psi_{i_t}(y)$ έχουμε ότι $x(t) = y(t)$ και επειδή το t ήταν τυχαίο έχουμε $x = y$.

Λήμμα 6.1.2 Η απεικόνιση $\psi_i : D_\infty \to D_i$ είναι συνεχής.

Απόδειξη Αν $\rho_\infty(x_n, x) \to 0$ έχουμε $\rho_i(\psi_i(x_n), \psi_i(x)) \to 0$

6.2 Χαρακτηρισμός της *Skorohod* σύγκλισης στον D_∞

Συμβολίζουμε με Λ_∞ το σύνολο των συνεχών, γνησία αυξουσών συναρτήσεων $\lambda : [0,\infty) \to [0,\infty)$ τέτοιες ώστε $\lambda(0) = o$ και $\lambda(s) \to \infty$ καθώς $t \to \infty$. Επιπλέον ορίζουμε

$$\|x\|_D = \sup\{|x(u)| : u \in [0,\infty)\}$$

Θεώρημα 6.2.1 Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία στον D_∞ και $x \in D_\infty$. Τότε $\rho_\infty(x_n, x) \to 0$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(\lambda_n)_n$ στο Λ_∞ τέτοια ώστε

$$\|\lambda_n - t\|_D \to 0 \quad \text{και} \quad \|x_n \circ \lambda_n - x\|_i \to 0$$

για κάθε $i \in \mathbb{N}$

Απόδειξη " => " Έστω $\rho_\infty(x_n, x) \to 0$. Τότε για κάθε $i \in \mathbb{N}$ έχουμε $\rho_i(\psi_i(x_n), \psi_i(x)) \to 0$ και επομένως υπάρχει $\lambda_n^{(i)} \in \Lambda_i$ τέτοια ώστε

$$\epsilon_n^{(i)} = \|\lambda_n^{(i)} - t\|_i \vee \|\psi_i(x_n \circ \lambda_n^{(i)}) - \psi_i(x)\|_i \to 0$$

για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε n_i τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_i$ να ισχύει $\epsilon_n^{(i)} < \frac{1}{i}$ μπορούμε να επιλέξουμε τα n_i έτσι ώστε $n_i < n_{i+1}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Θέτουμε

$$i_1 = \cdots = i_{n_1 - 1} = 1, \quad i_{n_1} = \cdots = i_{n_2 - 1} = 2, \quad i_{n_2} = \cdots = i_{n_3 - 1} = 3...$$

και έχουμε ότι $i_n \to \infty$. Ορίζουμε $\lambda_n \in \Lambda_\infty$ ώς

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \lambda_n^{(i_n)}(t) & \text{αν } t \leq i_n \\ t & \text{αν } t > i_n \end{cases}$$

Η λ_n είναι καλώς ορισμένη γιατί εφόσον $\lambda_n^{(i_n)} \in \Lambda_{i_n}$ έχουμε ότι $\lambda_n^{(i_n)}(i_n) = i_n$ και $\lambda_n^{(i_n)}$ γνήσια αύξουσα. Επομένως

$$\|\lambda_n - t\|_D = \|\lambda_n^{(i_n)} - t\|_{i_n} \leq \epsilon_n^{(i_n)} \leq \frac{1}{i_n} \to 0$$

Έστω τώρα $i \in \mathbb{N}$. επειδή $i_n \to \infty$ τότε για μεγάλο n έχουμε $i \leq i_n - 1$ (άρα και $t \leq i_n - 1$ για κάθε $t \leq i$) και

$$\|x_n \circ \lambda_n - x\|_i = \|\psi_{i_n}(x_n \circ \lambda_n) - \psi_{i_n}(x)\|_i \leq \|\psi_{i_n}(x_n \circ \lambda_n) - \psi_{i_n}(x)\|_{i_n} =$$

$$= \|\psi_{i_n}(x_n \circ \lambda_n^{i_n}) - \psi_{i_n}(x)\|_{i_n} \leq \epsilon_n^{(i_n)} \leq \frac{1}{i_n} \to 0$$

" <= " Έστω ότι υπάρχει ακολουθία $(\lambda_n)_n$ στο Λ_∞ τέτοια ώστε

$$\|\lambda_n - t\|_D \to 0 \quad \text{και} \quad \|x_n \circ \lambda_n - x\|_i \to 0$$

για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $C_i \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x_n\|_i \leq C_i$$

για κάθε $n, i \in \mathbb{N}$. Πράγματι, εφόσον $|\lambda_n - t\|_D \to 0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $-i < \lambda_n(2i) - 2i$ για κάθε $n \geq n_0$ δηλαδή $\lambda_n(2i) > i \geq t$ που σημαίνει ότι $\|x_n\|_i \leq \|x_n \circ \lambda_n\|_{2i}$. Επιπλέον, έχουμε $|\|x_n \circ \lambda_n\|_{2i} - \|x\|_{2i}| \leq \|x_n \circ \lambda_n - x\|_{2i} \to 0$ που σημαίνει ότι $\|x_n \circ \lambda_n\|_{2i} \to \|x\|_{2i}$ επομένως η ακολουθία $(\|x_n \circ \lambda_n\|_{2i})_n$ είναι φραγμένη, επομένως και η $(\|x_n\|_i)_n$.

Έστω τώρα ένα $i \in \mathbb{N}$ αρκεί να δείξουμε ότι $\rho_i(\psi_i(x_n), \psi_i(x)) \to 0$. Όπως και στο λήμμα 6.1.1 ορίζουμε

$$u_n = \begin{cases} i - \frac{1}{n} & \text{αν } \lambda_n(i) \leq i \\ i & \text{αν } \lambda_n(i) = i \\ \lambda_n^{-1}(i - \frac{1}{n}) & \text{αν } \lambda_n(i) > i \end{cases}$$

και θεωρούμε την $\mu_n \in \Lambda_i$ ώς $\mu_n(v) = \lambda_n(v)$ για κάθε $v \in [0, u_n]$ και και συνδέουμε γραμμικά τα σημεία $\{(u_n, \lambda_n(u_n)), (i, i)\}$. Επομένως έχουμε όπως και στο λήμμα 6.1.1

$$\|\mu_n - t\|_i \leq \|\lambda_n - t\|_i \leq \|\lambda_n - t\|_D \to 0$$

και αρκεί να δείξουμε ότι

$$\|\psi_i(x_n \circ \mu_n) - \psi_i(x)\|_i \to 0$$

Θέτουμε $j = \lambda_n^{-1}(i-1)$. Αν $j \leq i-1$ και $t \leq i$ τότε είτε $t \leq j$ έιτε $j < t \leq i-1$ είτε $i-1 < t \leq i$. Στη πρώτη περίπτωση έχουμε $\lambda_n(t) \leq i-1$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση έχουμε $i-1 \leq \lambda_n(t) \leq i$ επομένως

$$\|\psi_i(x_n \circ \lambda_n) - \psi_i(x)\|_i =$$

$$= \max\{\|x_n \circ \lambda_n - x\|_j, \sup_{j<t\leq i-1} |(i - \lambda_n(t))x_n(\lambda_n(t)) - x(t)|,$$

$$\sup_{i-1<t\leq i} |(i - \lambda_n(t))x_n(\lambda_n(t)) - (i-t)x(t)|\}$$

θέτουμε τώρα $M_i = \max\{C_i, \|x\|_i\}$ επιπλέον έχουμε ότι

$$\sup_{i-1<t\leq i} |(i - \lambda_n(t))x_n(\lambda_n(t)) - (i-t)x(t)| =$$

$$= \sup_{i-1<t\leq i} |(i - \lambda_n(t))x_n(\lambda_n(t)) - (i-t)x(t) + \lambda_n(t)x(t) - \lambda_n(t)x(t)| \leq$$

$$\leq \sup_{i-1<t\leq i} |(i - \lambda_n(t))|.|x_n(\lambda_n(t)) - x(t)| + \sup_{i-1<t\leq i} |\lambda_n(t) - t||x(t)|$$

Επομένως με βάση τα προηγούμενα έχουμε

$$\|\psi_i(x_n \circ \lambda_n) - \psi_i(x)\|_i \leq \max\{\|x_n \circ \lambda_n - x\|_i + M_i \sup_{j<t\leq i-1} |i - 1 - \lambda_n(t)|,$$

$$, \sup_{i-1<t\leq i} |(i - \lambda_n(t))|.|x_n(\lambda_n(t)) - x(t)| + \sup_{i-1<t\leq i} |\lambda_n(t) - t||x(t)|\} \quad (1)$$

Για την περίπτωση που $j < t \leq i-1$ έχουμε $0 < \lambda_n(t) - (i-1) \leq \lambda_n(i-1) - (i-1) \leq \|\lambda_n - t\|_i$ επίσης στην περίπτωση που $i-1 < t \leq i$ έχουμε επίσης $\lambda_n(t) - i \leq \lambda_n(i) - i \leq \|\lambda_n - t\|_i$. Η (1) γίνεται

$$(1) \leq (\|\lambda_n - t\|_i + 1)\|x_n \circ \lambda_n - x\|_i + M_i\|\lambda_n - t\|_i \to 0$$

Αν $j > i-1$ με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Για $s \leq u_n$ έχουμε

$$|\psi_i(x_n)(\mu_n(s)) - \psi_i(x)(s)| \leq \|\psi_i(x_n \circ \lambda_n - \psi_i(x)\|_i \to 0$$

Τέλος, για την περίπτωση $u_n < s \leq i$ για $\epsilon > 0$ με $\epsilon < 1$ επιλέγουμε n_1 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει ότι

$$u_n > i - \epsilon \quad \text{και} \quad \mu_n(u_n) > i - \epsilon$$

Τότε

$$|\psi_i(x_n)(\mu_n(s)) - \psi_i(x)(s)| \leq \sup_{u_n \leq s \leq i} |(i - \mu_n(s))x_n(\mu_n(s)) - (i-s)x(s)|$$

και επειδή $u_n \leq s \leq i$ έχουμε ότι $|i - \mu_n(s)| \leq \epsilon$ και τελικά

$$|\psi_i(x_n)(\mu_n(s)) - \psi_i(x)(s)| \leq 2M_i\epsilon$$

Θεώρημα 6.2.2 Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία στον D_∞ και $x \in D_\infty$. Τότε $\rho_\infty(x_n, x) \to 0$ αν και μόνο αν $\rho_u(x_n, x) \to 0$ για κάθε σημείο u συνέχειας της x.

Απόδειξη => Έστω $\rho_\infty(x_n, x) \to 0$. Τότε $\rho_i(\psi_i(x_n), \psi_i(x)) \to$ για κάθε $i\mathbb{N}$. Αν u είναι ένα σημείο συνέχειας της x, τότε επιλέγουμε έναν ακέραιο i τέτοιο ώστε $u < i-1$ και έχουμε

$$\rho_u(x_n, x) = \rho_u(\psi_i(x_n), \psi_i(x)) \to 0$$

από το λήμμα 6.1.1

<= Εφόσον η x έχει αριθμήσιμου το πλήθος ασυνέχειες, επιλέγουμε ακολουθία $(u_i)_i$ σημείων συνέχειας της x με $u_i \uparrow \infty$. Από υπόθεση έχουμε

$$\rho_{u_i}(x_n, x) \to 0$$

για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Επομένως για κάθε i υπάρχει ακολουθία $(\lambda_n^{(i)})_n \subset \Lambda_{u_i}$ τέτοια ώστε

$$\epsilon_n^{(i)} = \|\lambda_n^{(i)} - t\|_{u_i} \vee \|x_n \circ \lambda_n^{(i)} - x\|_{u_i} \to 0$$

Από την απόδειξη του θεωρήματος 6.2.1 χρησιμοποιούμε τα ίδια επιχειρήματα για να κατασκευάσουμε μία ακολουθία $(i_n)_n$ τέτοια ώστε $i_n \to \infty$ και $\epsilon_n^{(i_n)} < \frac{1}{i_n}$. Ορίζουμε

$$\lambda_n(v) = \begin{cases} \lambda_n^{(i_n)}(v) & \text{αν} \quad v \leq u_{i_n} \\ v & \text{αν} \quad v > u_{i_n} \end{cases}$$

Όπως είδαμε $\lambda_n \in \Lambda_\infty$ και $\|\lambda_n - t\|_D = \|\lambda_n - t\|_{u_{i_n}} \leq \epsilon_n^{(i_n)} \to 0$. Τώρα για $i \in \mathbb{N}$ και για αρκετά μεγάλο n επιλέγουμε i_n τέτοιο ώστε $i < u_{i_n}$. Τότε

$$\|x_n \circ \lambda_n - x\|_i = \|x_n \circ \lambda_n^{i_n} - x\|_i \leq \|x_n \circ \lambda_n^{i_n} - x\|_{u_{i_n}} \leq \epsilon_n^{(i_n)} \to 0$$

Από θεώρημα 6.2.1 έχουμε $\rho_\infty(x_n, x) \to 0$

6.3 Διαχωρισιμότητα και πληρότητα στον D_∞

Λήμμα 6.3.1 Έστω $\{(S_i,\rho_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ συλλογή μετρικών χώρων και θέτουμε $S = S_1 \times S_2 \times ....$ Όπως και στο κεφάλαιο 2, για $x \in S$ συμβολίζουμε την i-συντεταγμένη του με $x(i)$ και εφοδιάζουμε τον S με την μετρική

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \rho_i(x(i),y(i))}{2^i}$$

Αν κάθε S_i είναι διαχωρίσιμος τότε ο S είναι διαχωρίσιμος. Επιπλέον αν κάθε S_i είναι πλήρης, τότε ο S είναι πλήρης

Απόδειξη Διαχωρισιμότητα: Έστω B_i αριθμήσιμο και πυκνό στον S_i, και $x_0(i) \in S_i$. Θέτουμε

$$B = B_{x_0(1),x_0(2),...} = \{x \in S : x = (x(1),\dots,x(k),x_0(k+1),x_0(k+2)..), x(j) \in B_j, j = 1,...k\}$$

Είναι εμφανές ότι το B είναι αριθμήσιμο. Έστω $\epsilon > 0$ και $y \in S$. Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon$$

επίσης, επιλέγουμε σημεία $x(1),\dots,x(k)$ με $x(i) \in B_i$ τέτοια ώστε $\rho_i(x(i),y(i)) < \epsilon$, και θέτουμε $x = (x(1),\dots,x(k),x_0(k+1),x_0(k+2)..)$. Τότε $x \in B$ και επιπλέον

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \rho_i(x(i),y(i))}{2^i} < \epsilon \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} + \epsilon \le 2\epsilon$$

Πληρότητα: Έστω $x_n = (x_n(1),x_n(2),...)$ ακολουθία *Cauchy* στον S. Τότε για κάθε $i \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(x_n(i))_n$ είναι *Cauchy*. Πράγματι για $\epsilon > 0$ υπάρχει n_i τέτοιο ώστε για κάθε $n,m \ge n_i$ να ισχύει

$$\rho(x_n,x_m) < \frac{\epsilon}{2^{i+k}}$$

όπου $k \ge 0$ είναι ο ελάχιστος ακέραιος έτσι ώστε $\epsilon < 2^k$. Επομένως θα ισχύει

$$1 \wedge \rho_i(x_n(i),x_m(i)) < \frac{\epsilon}{2^k} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \rho_i(x_n(i),x_m(i)) < \frac{\epsilon}{2^k} \le \epsilon$$

και τελικά $\rho_i(x_n(i),x_m(i)) < \epsilon$.

Εφόσον ο S_i είναι πλήρης, τότε θα υπάρχει $x(i) \in S_i$ με $\rho_i(x_n(i),x(i)) \to 0$ για $n \to \infty$. Θέτουμε $y_n(i) = \frac{1\wedge\rho_i(x_n(i),x(i))}{2^i}$. Έχουμε ότι $y_n(i) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ για κάθε i και επιπλέον ότι $y_n(i) \le \frac{1}{2^i}$. από το $M-test$ του $Weierstrass$ έχουμε

$$\rho(x_n,x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_n(i) \to 0$$

και επομένως ο (S,ρ) είναι πλήρης

Ορίσμός 6.2.1 θεωρούμε τον χώρο γινόμενο $\overline{D} = D_1 \times D_2 \times ....$ εφοδιασμένο με την μετρική

$$\overline{d}(\overline{x},\overline{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 \wedge d_i(\overline{x}(i),\overline{y}(i))}{2^i}, \quad \overline{x} = (\overline{x}(1),\overline{x}(2),...), \overline{y} = (\overline{y}(1),\overline{y}(2),...) \in \overline{D}$$

Επιπλέον, για $x \in D_\infty$, ορίζουμε $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), ...)$. Παρατηρούμε ότι $\psi(x) \in \overline{D}$ και ότι $\overline{d}(\psi(x), \psi(y)) = d_\infty(x, y)$ δηλαδή η ψ εμφυτεύει ισομετρικά τον (D_∞, d_∞) στον $(\overline{D}, \overline{d})$

Λήμμα 6.3.2 η $\psi(D_\infty)$ είναι κλειστή στην $\overline{D}$

Απόδειξη Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία στον D_∞ και $\overline{x} \in \overline{D}$ τέτοια ώστε $\overline{d}(\psi(x_n), \overline{x}) \to 0$. Τότε $\rho_i(\psi_i(x_n), \overline{x}(i)) \to 0$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Πρέπει να βρούμε ένα $x \in D_\infty$, τέτοιο ώστε $\overline{x} = \psi(x)$

Η ακολουθία συναρτήσεων $(\overline{x}(i))_i$ με $\overline{x}(i) \in D_i$, έχει το πολύ αριθμήσιμου το πλήθος ασυνέχειες. Επομένως υπάρχει $T \subset [0, \infty)$ πυκνό, τέτοι ώστε για $s \in T$ και $s \leq i$, η $\overline{x}(i)$ να είναι συνεχής στο s. Εφόσον $\rho_i(\psi_i(x_n), \overline{x}(i)) \to 0$, έχουμε $\psi_i(x_n)(s) \to \overline{x}(i)(s)$ για κάθε $s \in T \cap [0, 1]$ επομένως αν για κάθε $s \in T$ επιλέξουμε $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $s \leq i - 1$ τότε λόγω της προηγούμενης σύγκλισης έχουμε ότι η $x_n(s)$ συγκλίνει. Για κάθε $s \in T$ ορίζουμε $x(s) = \lim_n x_n(s)$

Από την συνέχεια των $\psi_i, x(i)$ έχουμε για κάθε $s \in T \cap [0, i]$

$$\psi_i(x)(s) = \lim_{n\to\infty} \psi_i(x_n)(s) = \overline{x}(i)(s) \quad (1)$$

επομένως για κάθε $s \in T \cap [0, i-1]$ έχουμε $x(s) = \overline{x}(i)(s)$ και επειδή το $T \cap [0, i-1]$ είναι πυκνό στο $[0, i-1]$, επεκτείνουμε την x θέτοντας $x(s) = \overline{x}(i)(s)$ για κάθε $s \in [0, i-1]$. Αν $s \in [0, i-1] \backslash T$ τότε θεωρούμε ακολουθία s_n στο $T \cap [0, i-1]$ με $s_n \downarrow s$. Τότε:

$$x(s_n) = \overline{x}(i)(s_n) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x(s_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{x}(i)(s_n) = \overline{x}(i)(s) = x(s)$$

Δηλαδή η x είναι δεξιά συνεχής, και με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι υπάρχει το αριστερό όριο. Επομένως η x είναι càdlàg σε κάθε δίαστημα $[0, i-1]$ που σημαίνει ότι η x είναι càdlàg στο $[0, \infty)$. Τέλος, για $i \in \mathbb{N}$, επειδή η x είναι ορισμένη παντού, μαζί με την $x(i)$ είναι δεξιά συνεχείς και ισχύει η (1). Τότε για $s \in [i-1, i] \backslash T$ υπάρχει ακολουθία $s_n \in [i-1, i] \cap T$ τέτοια ώστε $s_n \downarrow s$. Λόγω των προηγουμένων, έχουμε $\psi_i(x)(s) = \overline{x}(i)(s)$ για κάθε $s \in [0, i]$ που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Θεώρημα 6.3.1 Ο (D_∞, d_∞) είναι διαχωρίσιμος και πλήρης.

Απόδειξη Από λήμμα 6.3.1, έχουμε ότι ο $\overline{D}$ είναι πλήρης και διαχωρίσιμος. Επομένως και κάθε κλειστός υπόχωρος του.

Για την Διαχωρισιμότητα του D_∞, θεωρούμε ένα $B \subset \psi(D_\infty)$ ($\psi(D_\infty)$ κλειστός) B πυκνό και αριθμήσιμο. θα δείξουμε ότι το ζητούμενο σύνολο είναι το $\psi^{-1}(B) \subset D_\infty$. Πράγματι, έστω $x \in D_\infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(y_n)_n$ στο D_∞ με $\overline{d}(\psi(y_n), \psi(x)) \to 0$ και επειδή ψ είναι ισομετρία, έχουμε $d_\infty(y_n, x) \to 0$

Για την πληρότητα, έστω $(x_n)_n$ βασική ακολουθία στον D_∞. Τότε επειδή ψ είναι ισομετρία έχουμε ότι $(\psi(x_n))_n$ είναι βασική ακολουθία στον $\psi(D_\infty)$. Τότε υπάρχει $x \in D_\infty$ τέτοιο ώστε $\overline{d}(\psi(x_n), \psi(x)) \to 0$ (αφού $\psi(D_\infty)$ κλειστός) επομένως $d_\infty(x_n, x) \to 0$.

6.4 Η ασθενής σύγκλιση στον D_∞

Ορισμός 6.4.1 Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $s \geq i$ ορίζουμε την απεικόνιση $\psi_{s,i} : D_s \to D_i$ ώς

$$\psi_{s,i}(x)(t) = x(t)1_{\{t \leq i-1\}} + (i-t)x(t)1_{\{i-1<t\leq i\}}$$

Παρατήρηση Μπρούμε να δούμε ότι η $\psi_{s,i}$ είναι συνεχής. Πράγματι, έστω ακολουθία $(x_n)_n$ του D_s και $x \in D_s$ με $d_s(x_n, x) \to 0$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(\lambda_n^{(s)})_n$ στο Λ_s τέτοια ώστε

$$\|\lambda_n^{(s)} - t\|_s \to 0 \quad \text{και} \quad \|x_n \circ \lambda_n^{(s)} - x\|_s \to 0$$

Αν δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\lambda_n \in \Lambda_\infty$ τέτοια ώστε

$$\|\lambda_n - t\|_D \to 0 \quad \text{και} \quad \|x_n \circ \lambda_n - x\|_i \to 0$$

και επιπλέον ότι η ακολουθία $(\|x_n\|_i)_n$ είναι φραγμένη, τότε από την απόδειξη του θεωρήματος 6.2.1 θα έχουμε $\rho_i(\psi_{k,i}(x_n), \psi_{k,i}(x)) \to 0$. Θέτουμε

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \lambda_n^{(s)}(t) & \text{αν} \quad t \leq s \\ t & \text{αν} \quad t > s \end{cases}$$

Επομένως

$$\|\lambda_n - t\|_D = \|\lambda_n^{(s)} - t\|_s \to 0$$

επιπλέον

$$\|x_n \circ \lambda_n - x\|_i = \|x_n \circ \lambda_n^{(s)} - x\|_i \leq \|x_n \circ \lambda_n^{(s)} - x\|_s \to 0$$

Τέλος, $\|x_n\|_i \leq \|x_n\|_s \leq \|x_n - x \circ (\lambda_n^{(s)})^{-1}\|_s + \|x \circ (\lambda_n^{(s)})^{-1}\|_s$

Λήμμα 6.4.1 Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουμε $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ στον D_∞ είναι να ισχύει ότι $\mathbb{P}_n\psi_k^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}\psi_k^{-1}$ στον D_k για κάθε $k \in \mathbb{N}$

Απόδειξη Εφόσον η ψ_k είναι συνεχής, αν $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$, τότε από θεώρημα απεικόνισης έχουμε $\mathbb{P}_n\psi_k^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}\psi_k^{-1}$

Για το αντίστροφο θα χρειαστούμε την ισομετρία ψ και την αντίστροφη της, ψ^{-1} (Στον ορισμό της μετρικής στον D_∞ δείξαμε ότι η ψ είναι 1-1). Ορίζουμε 2 απεικονίσεις $\phi_k : \overline{D} \to D_1 \times \cdots \times D_k$ και $\zeta_k : D_k \to D_1 \times \cdots \times D_k$, ως

$$\phi_k(\overline{x}) = (\overline{x}(1), ..., \overline{x}(k)) \quad \zeta_k(x) = (\psi_{k,1}(x), ..., \psi_{k,k}(x))$$

Θεωρούμε την κλάση $\overline{\mathcal{D}}_f \subset \overline{\mathcal{D}}$ η οποία περιέχει σύνολα της μορφής

$$\phi^{-1}(H) \quad \text{με} \quad H \in \mathcal{D}_1 \times ... \times \mathcal{D}_k$$

Θα χωρίσουμε το υπόλοιπο της απόδειξης σε 4 βήματα.

Βήμα 1) Θα δείξουμε ότι η κλάση $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{D}}_f$ είναι κλάση σύγκλισης, κάνοντας χρήση του θεωρήματος 2.1.2. Πράγματι, έστω $B(\overline{x}, \epsilon) \subset \overline{D}$ ανοικτή μπάλα στον $\overline{D}$. Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{2^k} < \frac{\epsilon}{2}$ και θεωρούμε επιπλέον

$$A_\eta = \{\overline{y} \in \overline{D} : d_i(\overline{x}(i), \overline{y}(i)) < \eta, \quad i = 1, ..., k\}$$

για κάθε $0 < \eta < \frac{\epsilon}{2}$. Το A_η είναι ανοικτό επομένως $(A_\eta)^o = A_\eta$ και προφανώς $\overline{x} \in A_\eta$ και $\overline{x} \in B(\overline{x}, \epsilon)$. Επιπλέον για κάθε $\overline{y} \in A_\eta$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 \wedge d_i(\overline{x}(i), \overline{y}(i))}{2^i} < \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+m}} < \epsilon/2 + \frac{1}{2^k} < \epsilon$$

Επομένως $A_\eta \in \mathcal{A}_{\overline{x},\epsilon}$ (σημ. $\mathcal{A}_{x,\epsilon} = \{A \in \mathcal{A} : x \in A^o \subset A \subset B(x,\epsilon)\}$) και επιπλέον

$$\partial A_\eta = \{\overline{y} \in \overline{D} : d_i(\overline{x}(i), \overline{y}(i)) = \eta, \quad i = 1, ..., k\}$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι για $\eta_1 \neq \eta_2$ τα ∂A_{η_1} και ∂A_{η_2} είναι ξένα. Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι π-σύστημα.

Βήμα 2) Για μέτρα πιθανότητας $\mathbb{Q}_n$ και $\mathbb{Q}$ στον $\overline{D}$ θα δείξουμε ότι αν $\mathbb{Q}_n\phi_k \Rightarrow \mathbb{Q}\phi_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε $\mathbb{Q}_n \Rightarrow \mathbb{Q}$. Πράγματι αν εργαστούμε ομοίως με την απόδειξη του θεωρήματος 2.3.2 έχουμε ότι $\partial(\phi_k^{-1}(H)) = \phi_k^{-1}\partial(H)$ για $H \in \mathcal{D}_1 \times ... \times \mathcal{D}_k$ Επομένως αν $A \in \mathcal{A}$ $\mathbb{Q}$-συνεχές, έχουμε ότι $A = \phi_k^{-1}(H)$ και

$$\mathbb{Q}\phi_k^{-1}(\partial H) = \mathbb{Q}(\phi_k^{-1}(\partial H)) = \mathbb{Q}(\partial(A)) = 0$$

επομένως το H είναι $\mathbb{Q}\phi_k^{-1}$-συνεχές και $\mathbb{Q}_n(A) \to \mathbb{Q}(A)$

Βήμα 3) Με δεδομένη την υπόθεση $\mathbb{P}_n\psi_k^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}\psi_k^{-1}$ στον D_k για κάθε k, θα δείξουμε ότι $\mathbb{P}_n\psi^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}\psi^{-1}$ στον $\overline{D}$. Πράγματι, αρχικά έχουμε ότι η απεικόνιση ζ_k είναι συνεχής, διότι αν $x_n \to x$ τότε για κάθε $i \leq k$ θα έχουμε $\psi_{k,i}(x_n) \to \psi_{k,i}(x)$. Από το θεώρημα απεικόνισης έχουμε $\mathbb{P}_n\psi_k^{-1}\zeta_k^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}\psi_k^{-1}\zeta_k^{-1}$, και επειδή $\zeta_k \circ \psi_k = \phi_k \circ \psi$, έχουμε $\mathbb{P}_n\psi^{-1}\phi_k^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}\psi^{-1}\phi_k^{-1}$. Από το βήμα 2) έχουμε $\mathbb{P}_n\psi^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}\psi^{-1}$

Βήμα 4) Επεκτείνουμε την ισομετρία ψ^{-1}, σε μία απεικόνιση $\psi_0 : \overline{D} \to D_\infty$ με $\psi_0\overline{x} = x_0$ για κάθε $\overline{x} \notin \psi(D_\infty)$ όπου x_0 οποιαδήποτε συνάρτηση του D_∞. Η ψ_0 περιορισμένη στο σύνολο $\psi(D_\infty)$ είναι συνεχής (ως ισομετρία) και επιπλέον το $\psi(D_\infty)$ είναι στήριγμα των $\mathbb{P}_n\psi^{-1}, \mathbb{P}\psi^{-1}$ Επομένως από το πόρισμα του θεωρήματος απεικόνισης έχουμε

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n\psi^{-1}\psi_0^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}\psi^{-1}\psi_0^{-1} = \mathbb{P}$$

Ορσιμός 6.4.1 Για ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ στον D_∞ ορίζουμε $T_\mathbb{P} \subset [0,\infty)$ ως

$$T_\mathbb{P} = \{t \in (0,\infty) : \mathbb{P}(J_t) = 0\}$$

όπου $J_t = \{x \in D_\infty : x \text{ ασυνεχής στο } t\}$. Όπως και στην περίπτωση του D_1, έχουμε ότι $0 \in T_\mathbb{P}$ και επιπλέον έχουμε ότι το συμπλήρωμα του έχει το πολύ αριθμήσιμου το πλήθος στοιχεία επομένως το $T_\mathbb{P}$ είναι πυκνό στο $[0,\infty)$.

Λήμμα 6.4.2 Ορίζουμε τις προβολές $\pi_{t_1,...t_k}$ στον D_∞ και τις προβολές $\pi^i_{s_1,...s_k}$ στον D_i, $i \in \mathbb{N}$ με $s_j \leq i$ για $j = 1, ..., k$. Οι προβολές είναι $\mathcal{D}_\infty/\mathcal{R}^k$ και $\mathcal{D}_i/\mathcal{R}^k$ αντίστοιχα μετρήσιμες.

Απόδειξη Για $t \in [0,i]$ Από το λήμμα 5.4.1 έχουμε ότι η π^i_t είναι $\mathcal{D}_i/\mathcal{R}$ μετρήσιμη. Αν τώρα $t \in [0,\infty)$ επιλέγουμε $i \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $t \leq i-1$. Επειδή η απεικόνιση ψ_i είναι συνεχής (άρα και $\mathcal{D}_\infty/\mathcal{D}_i$ μετρήσιμη) έχουμε για κάθε $x \in D_\infty$ ότι $\pi^i_t(\psi_i(x)) = \psi_i(x)(t) = x(t) = \pi_t$ δηλαδή $\pi_t = \pi^i_t \circ \psi_i$

Λήμμα 6.4.3 Για $x \in D_\infty$ ορίζουμε $r_t : D_\infty \to D_t$ με τύπο $r_t(x) = x|_{[0,t]}$. Η απεικόνιση r_t είναι μετρήσιμη και το σύνολο των σημείων που είναι ασυνεχής, ανήκουν στο J_t

Απόδειξη Ορίζουμε ως $\delta_k = \frac{t}{k}$ για $k \in \mathbb{N}$. Επιπλέον για κάθε $x \in D_\infty$ ορίζουμε την συνάρτηση $r^k_t(x) \in D_t$ ως

$$r^k_t(x)(s) \begin{cases} x(i\delta_k) & \text{όταν το } s \text{ βρίσκεται σε διάστημα της μορφής} \quad [i\delta, (i+1)\delta_k) \\ t \quad \text{αν} & s = t \end{cases}$$

με $i = 0, ..., k-1$. Από το λήμμα 6.4.2 έχουμε ότι η προβολή $\pi_{0,\delta_k,..,k\delta_k}$ είναι $\mathcal{D}_\infty/\mathcal{R}^{k+1}$ μετρήσιμη και από την απόδειξη του λήμματος 5.4.1 (γ) έχουμε ότι $r_t^k = V \circ \pi_{0,\delta_k,..,k\delta_k}$ επομένως η r_t^k είναι $\mathcal{D}_\infty/\mathcal{D}_t$ μετρήσιμη. Επιπλέον, από το λήμμα 5.2.2, για κάθε $x \in D_\infty$ έχουμε

$$\rho_t(r_t^k(x), r_t(x)) \leq \delta_k \vee w_t'(x, \delta_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Επομένως η r_t είναι $\mathcal{D}_\infty\mathcal{D}_t$ μετρήσιμη ως όριο μετρήσιμων.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό του λήμματος, έστω $x \in D_\infty$, $t \in [0,\infty)$ και $(x_n)_n$ ακολουθία στον D_∞. Υποθέτουμε ότι η x είναι συνεχής στο t. Αν $\rho_\infty(x_n, x) \to 0$ τότε από θεώρημα 6.2.2 έχουμε ότι

$$\rho_t(r_t(x_n), r_t(x)) = \rho_t(x_n, x) \to 0$$

Δηλαδή αν $x \notin J_t$ τότε η r_t είναι συνεχής στο x

Θεώρημα 6.4.1 Μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουμε $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ στον D_∞ είναι $\mathbb{P}_n r_t^{-1} \Rightarrow \mathbb{P} r_t^{-1}$ για κάθε $t \in T_\mathbb{P}$

Απόδειξη Αν $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ τότε από το λήμμα 6.4.3 έχουμε ότι η r_t είναι μετρήσιμη και τα σημεία ασυνέχειας έχουν $\mathbb{P}$ μέτρο 0. Επομένως από το θεώρημα απεικόνισης έχουμε $\mathbb{P}_n r_t^{-1} \Rightarrow \mathbb{P} r_t^{-1}$ για κάθε $t \in T_\mathbb{P}$.

Για το αντίστροφο, από το λήμμα 6.4.1 αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{P}_n \psi_i^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}\psi_i^{-1}$ στον D_i για κάθε $i \in \mathbb{N}$. επομένως για δοσμένο i, επιλέγουμε ένα $t \in T_\mathbb{P}$ τέτοιο ώστε $t \geq i$. Εφόσον $\psi_i = \psi_{t,i} \circ r_t$ συνεχής, από το θεώρημα απεικόνισης έχουμε

$$\mathbb{P}_n \psi_i^{-1} = \mathbb{P}_n(r_t^{-1})\psi_{t,i}^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}(r_t^{-1})\psi_{t,i}^{-1} = \mathbb{P}\psi_i^{-1}$$

Πόρισμα Έστω $Y_1, Y_2, ...$ $i.i.d$ τ.μ. ορισμένες στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ με $\mathbb{E}[Y_1] = 0$ και $V(Y_1) = \sigma^2$. Αν θέσουμε

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 + ... + Y_{[nt]}$$

τότε $X_n \Rightarrow W$ στον D_∞.

Απόδειξη Από το θεώρημα 5.6.1, έχουμε $X_n \Rightarrow W$ στον D_1. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $X_n \Rightarrow W$ στον D_t για κάθε $t \in [0,\infty)$. Επομένως για κάθε $t \in [0,\infty)$, έχουμε $r_t(X_n) \Rightarrow r_t(W)$ και μένει μόνο να εφαρμόσουμε το θεώρημα 6.4.1.

Κεφάλαιο 7

Η σύγκλιση του διωνυμικού υποδείγματος στο μόντελο *Black&Scholes*

7.1 Είσαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αξιοποιήσουμε τα εργαλεία των προηγούμενων κεφαλαίων για να μελετήσουμε την οριακή συμπεριφορά ενός διακριτού υποδείγματος, γνωστό ώς διωνυμικό υπόδειγμα, συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων το όριο είναι αυτό που ορίζει το μοντέλο των *Black* και *Scholes*. Προτού προχωρήσουμε στην διατύπωση και απόδειξη του βασικού θεωρήματος, θα κάνουμε μια σύντομη υπενθύμιση βασικών στοιχείων της χρηματοοικονομικής θεωρίας.

Θα ξεκινήσουμε με ένα από τα αξιώματα των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, το αξίωμα του *No Arbitrage*. Σύμφωνα με το τελευταίο, δεν είναι δυνατόν να υπάρξει κέρδος χωρίς την ανάληψη ρίσκου. Επομένως, προκειμένου να μοντελοποιήσουμε την αγορά θα χρειαστούμε εργαλεία από την θεωρία πιθανοτήτων.

Ορισμός 7.1.1.. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και $\mathbb{T}$ ένα (προς το παρόν αυθαίρετο) υποσύνολο του $[0, \infty)$. Ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία $S : \Omega \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$, $(\omega, t) \to S_t(\omega)$ να είναι η αξία του πρωτογενούς προϊόντος στην χρονική στιγμή t αν συμβεί το ενδεχόμενο ω. Η S_0 είναι γνώστη ποσότητα (ντετερμινιστική).

Ο άξονας του χρόνου $\mathbb{T}$ έχει τις εξής μορφές:
Για μοντέλα διακριτού χρόνου: $\mathbb{T} = \{0, 1\}$ (μοντέλο μίας περιόδου) $\mathbb{T} = \{0, 1, ..., T\}$, $T \in \mathbb{N}$, $T \geq 2$, (μοντέλο πολλαπλών περιόδων) Για μοντέλα συνεχή χρόνου: $\mathbb{T} = [0, T]$, $T > 0$.

Επιπλέον ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία S^0 που συμβολίζει το χρεόγραφο άνευ ρίσκου, με επιτόκιο r και αρχική τιμή $S_0^0 = 1$ και $S_t^0 = (1 + r)^t$ για μοντέλα διακριτού χρόνου και $S_t^0 = e^{rt}$ για μοντέλα συνεχούς χρόνου.

Ορισμός 7.1.2 Η στοχαστική διαδικασία $B(.,T)$ που ορίζεται ως

$$B(t,T) = \frac{S_t^0}{S_T^0}$$

ονομάζεται ομόλογο, με αξία $B(t,T)$ την χρονική στιγμή t που αποπληρώνει 1 χρηματική μονάδα την χρονική στιγμή T.

7.2 Το διωνυμικό υπόδειγμα μίας περιόδου

Ο σκοπός μας είναι να αναλύσουμε υποδείγματα που θεωρούνται ρεαλιστικά για πραγματικές αγορές. Θα ξεκινήσουμε από ένα πολύ απλό υπόδειγμα, και βήμα - βήμα θα καταλήξουμε στον σκοπό μας. Κάθε ρεαλιστικό υπόδειγμα πρέπει να λαμβάνει υπόψιν τη τυχαιότητα της χρονικής εξέλιξης τη αξίας του πρωτογενούς προϊόντος και την μεταβολή της αξίας του χρήματος στον χρόνο.

Έστω μια αγορά που αποτελείται μόνο από ένα πρωτογενές προϊόν και ένα ομόλογο. Η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι γνωστή, $S_0 = s_0$ και μας ενδιαφέρει η S_1.

Ορισμός 7.2.1 (διωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου) Για γνωστή τιμή του πρωτογενούς προϊόντος με $S_0 = s_0$, η S_1 είναι τυχαία μεταβλητή που μπορεί να λάβει 2 τιμές: Την s_1 με πιθανότητα p με $0 < p < 1$ και την s_2 με πιθανότητα $1 - p$

Το αξίωμα *No Arbitrage* επιβάλλει:

$$s_1 < s_0 e^{rT} < s_2$$

7.3 Το διωνυμικό υπόδειγμα πολλαπλών περιόδων

Το συγκεκριμένο υπόδειγμα είναι επίσης διακριτό, ωστόσο είναι περισσότερο ρεαλιστικό. Θα διαμερίσουμε το διάστημα $[0,T]$ όπου T είναι ο χρόνος αναφοράς, σε ίσα μικρότερα χρονικά διαστήματα, όπου σε κάθε ένα από αυτά, η δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος ακολουθεί τη δυναμική του διωνυμικού υποδείγματος μίας περιόδου.

Όπως και προηγουμένως, θεωρούμε ότι η αγορά αποτελείται από ένα πρωτογενές προϊόν με κίνδυνο και ένα ένα ομόλογο χωρίς κίνδυνο. Διαμερίζουμε το $[0,T]$ σε N υποδιαστήματα. Έστω $0 = t_0 < t_1 \dots t_N = T$ η διαμέριση με το μήκος των υποδιαστιμάτων να είναι $h = \frac{T}{N}$ επομένως $t_i = ih$, $i = 0, \dots, N$

Έστω $B_0 = 1$ η σημερινή αξία του ομολόγου. Υποθέτουμε ότι η αξία του μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό και ότι

$$\frac{B_{t_{i+1}}}{B_{t_i}} = \Lambda$$

Κάνοντας την σύμβαση ότι το ομόλογο είναι σταθερός λογαριασμός με σταθερό επιτόκιο r και συνεχή ανατοκισμό έχουμε ότι

$$\Lambda = e^{rh}$$

Ορισμός 7.2.2 (διωνυμικό υπόδειγμα πολλαπλών περιόδων) Αν η αρχική τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι γνωστή και ίση με S_0, και

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \xi_{i+1} \quad (1)$$

Όπου $(\xi_i)_{i=1}^N$ είναι ακολουθία $i.i.d.$ τ.μ. με κατανομή

$$\xi_i = \begin{cases} u & \text{με πιθανότητα} \quad p \\ d & \text{με πιθανότητα} \quad 1-p \end{cases}$$

Το αξίωμα *No Arbitrage* επιβάλλει:

$$d < e^{rh} < u$$

και επιπλέον ζητάμε $d > 0$ έτσι ώστε η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος να είναι θετική. Ισοδύναμα η (1) γράφεται ώς

$$S_{t_i} = S_0 \prod_{j=1}^{i} \xi_j$$

7.4 Παράγωγα προϊόντα

Ορισμός 7.3.1 Παράγωγο προϊόν ονομάζεται ένα συμβόλαιο το οποίο κάποια χρονική στιγμή αποφέρει ένα κέρδος το οποίο εξαρτάται από την συμπεριφορά της τιμής άλλων συμβολαίων/προϊόντων που υπάρχουν στην αγορά και συνήθως είναι ¨βασικότερο' από αυτά.

Θα μας απασχολήσουν παράγωγα προϊόντα συγκεκριμένου τύπου: Τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα

Ορισμός 7.3.2 1) Ευρωπαϊκο συμβόλαιο αγοράς σε ένα πρωτογενές προϊόν (συνήθως μετοχή) είναι ένα συμβόλαιο που δίνει στον κάτοχο του το **δικαίωμα να αγοράσει** ένα πρωτογενές προϊόν από τον εκδότη του συμβολαίου σε έναν δεδομένο χρόνο T σε δεδομένη τιμή K.

2) Ευρωπαϊκο συμβόλαιο αγοράς σε ένα πρωτογενές προϊόν (συνήθως μετοχή) είναι ένα συμβόλαιο που δίνει στον κάτοχο του το **δικαίωμα να πουλήσει** ένα πρωτογενές προϊόν στον εκδότη του συμβολαίου σε έναν δεδομένο χρόνο T σε δεδομένη τιμή K.

Ο χρόνος T ονομάζεται ημερομηνία λήξης και η τιμή K ονομάζεται τιμή άσκησης του δικαιώματος. Ο κάτοχος ενός από τα παραπάνω συμβόλαια δεν είναι υποχρεωμένος να κάνει τη συναλλαγή που του επιτρέπεται, παρα μόνο όταν τη θεωρεί συμφέρουσα. Επομένως, στο Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς το κέρδος τη χρονική στιγμή T είναι $(S_T - K)^+$ και στο Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης το κέρδος τη χρονική στιγμή T είναι $(K - S_T)^+$.

7.4.1 Τιμολόγηση συμβολαίων με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα

1. Τιμολόγηση με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα μίας περιόδου

Μας ενδιαφέρει να τιμολογήσουμε δίκαια ένα παράγωγο προϊόν. Η αποπληρωμή ενός Ευρωπαϊκού παραγώγου επί του προϊόντος S_T όπου Τ η ημερομηνία λήξης, είναι μία τυχαία μεταβλητή, την οποία την συμβολίζουμε με $f(S_T)$ και παίρνει τιμές $f_1 = f(s_1)$ με πιθανότητα p και $f_2 = f(s_2)$ με πιθανότητα $1-p$. Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από ϕ μέρη του προϊόντος S, και ψ ομόλογα, τα οποία έχουν αρχική αξία e^{-rt} και τελική αξία σε χρόνο T ίση με 1, έτσι ώστε η απόδοση του χαρτοφυλάκιου την χρονική στιγμή T να συμπίπτει με αυτή του παραγώγου. Αν s_1 και s_2 οι πιθανές τιμές του S σε χρόνο T, με $s_1 > s_2$, τότε πρέπει να ισχύει ότι

$$\phi s_1 + \psi = f_1$$

αν η αξία του S πάρει την τιμή s_1, και

$$\phi s_2 + \psi = f_2$$

αν η αξία του S πάρει την τιμή s_2. Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι

$$\phi = \frac{f_1 - f_2}{s_1 - s_2}, \qquad \text{και} \qquad \psi = \frac{s_1 f_2 - f_2 s_2}{s_1 - s_2}$$

Εφόσον το χαρτοφυλάκιο έχει ίδια αξία με το παράγωγο προϊόν την χρονική στιγμή T, τότε το αξίωμα *No Arbitrage* επιβάλλει να έχουν και την ίδια αρχική αξία. Επομένως η δίκαιη τιμή του παραγώγου είναι:

$$f_0 = \phi s_0 + \psi e^{-rT}$$

$$\implies f_0 = e^{-rT}(qf_1 + (1-q)f_2) = e^{-rT}\mathbb{E}^q[f(S_T)]$$

όπου

$$q = \frac{e^{rT}s_0 - s_2}{s_1 - s_2}$$

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι η τιμολόγηση δεν εξαρτάται από την πιθανότητα p. Αυτή τη παρατήρηση θα την χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη του βασικού θεωρήματος αυτού του κεφαλαίου.

2. Τιμολόγηση με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα πολλαπλών περιόδων

Εδώ μια πλήρη ανάλυση είναι αρκετά σύνθετη και ξεφεύγει από τον χαρακτήρα της εργασίας. Θα αναφέρουμε συνοπτικά μια ¨σκιαγράφηση' της. Όπως είδαμε, θεωρούμε N το πλήθος χρονικές στιγμές, $t_1, \ldots, t_N$ και με δεδομένη την αρχική τιμή του πρωτογενούς προϊόντος ίση με S_0, την χρονική στιγμή t_i έχουμε

$$S_{t_i} = S_0 \prod_{j=1}^{i} \xi_j$$

Έστω ότι φτάνουμε στην χρονική στιγμή t_i, $i \leq N$. Εκείνη την στιγμή θα έχουμε πλέον γνωστή την τιμή $S_{t_i} = S_0 u^k d^j$, με $k+j = i$ και $k = 0, ...i$. Συμβολίζουμε με $V(t_i, S_{i,j})$ την αποπληρωμή του συμβολαίου την χρονική στιγμή t_i όταν η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι $S_{k,j} := S_0 u^k v^j$. Αν υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στο μοντέλο μιας περιόδου, τότε θα έχουμε $s_0 = S_{i,j}$, $s_1 = S_0 u^{i+1} d^j$ και $s_2 = u^i d^{j+1}$. Επιπλέον θα έχουμε αντίστοιχα "T" $= h$ και επομένως για

$$q = \frac{e^{rT}s_0 - s_2}{s_1 - s_2} = \frac{e^{rh} - d}{u - d}$$

θα έχουμε

$$V(t_i, S_{k,j}) = [qV(t_{i+1}, S_{k+1,j}) + (1-q)V(t_{i+1}, S_{k,j+1})]e^{-rh} \quad (*)$$

Επομένως, μιας και οι αποπληρωμές την χρονική στιγμή T είναι γνωστές την χρονική στιγμή T για κάθε δυνατή τιμή του S_T μπορούμε να ορίσουμε έναν αναδρομικό αλγόριθμο, ο οποίος με βάση την (*) θα καταλήγει στην ζητούμενη $V(0, S_0)$

Παρατηρούμε επίσης ότι η παράμετρος p δεν επιρεάζει την τιμολόγηση του συμβολαίου.

7.5 Η σύγκλιση στο μόντελο *Black&Scholes*

Όπως είδαμε, σε ένα διωνυμικό υπόδειγμα διαμερίζουμε το διάστημα $[0,T]$ σε N ίσα υποδιαστήματα. Εδώ θα δούμε την οριακή του συμπεριφορά καθώς το $N \to \infty$, επιλέγοντας κατάλληλες παραμέτρους.

Θεωρούμε λοιπόν ένα διωνυμικό υπόδειγμα N περιόδων για τη δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος S στο διάστημα $[0,T]$. Η διαφορά μεταξύ 2 διαδοχικών χρονικών περιόδων είναι $h = T/N$. Επιπλέον στη προηγούμενη υποενότητα είδαμε ότι στη τιμολόγηση των παράγωγων προϊόντων δεν εξαρτάται από την παράμετρο p επομένως θεωρούμε ότι $p = 1/2$. Επιπλέον, όταν το N παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, το h παίρνει πολύ μικρές. Είναι λογικό επομένως να επιλέξουμε τις τιμές των u και d κοντά στο 1. Επιλέγουμε

$$u = e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}} \qquad \text{και} \qquad d = e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}}$$

όπου μ και σ είναι θετικές σταθερές. Κάνοντας αυτή την επιλογή, αποφεύγουμε απότομες μεταβολες της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος, και όταν περάσουμε στο όριο, δεν θα έχουμε άλματα.

Υποθέτουμε ότι η αγορά αποτελείται από το πρωτογενές προϊόν και μία μετοχή. Καθώς το h γίνεται πολύ μικρό, το αξίωμα *No Arbitrage* επιβάλλει

$$e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}} < e^{rh} < e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}}$$

Για κάθε επιλογή των r, μ, σ.

Όπως είδαμε, η αξία του πρωτογενούς προϊόντος καταγράφεται τις χρονικές στιγμές $t_0 = 0 < t_1, ... < t_n = T$ με $t_i = ih$ με

$$S_{t_i} = S_0 \prod_{j=1}^{i} \xi_j$$

Όπου $(\xi_i)_{i=1}^N$ είναι ακολουθία $i.i.d.$ τ.μ. με κατανομή

$$\xi_i = \begin{cases} e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}} & \text{με πιθανότητα} \quad 1/2 \\ e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}} & \text{με πιθανότητα} \quad 1/2 \end{cases}$$

Θέτουμε

$$E_{t_i}^{(N)} = E(N, t_i) := log\left(\frac{S_{t_i}}{S_0}\right) = \sum_{j=1}^{i} \mu h + \sigma\sqrt{h}Y_j = \mu t_i + \sigma\sqrt{h}\sum_{j=1}^{i} Y_j$$

Όπου $(Y_i)_{i=1}^N$ είναι ακολουθία $i.i.d.$ τ.μ. που παίρνουν τιμές ± 1 με πιθανότητα $1/2$ και επομένως $\mathbb{E}[Y_i] = 0$ και $V(Y_i) = 1$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$, επεκτείνουμε τα E_N ώστε να είναι στοιχεία του D_T ως εξής:

$$E_t^{(N)} = 0 \qquad \text{Για κάθε} \quad t \in \left[0, \frac{T}{N}\right)$$

$$E_t^{(N)} = \frac{T}{N}\left[N\frac{t}{T}\right]\mu + \sigma\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{[N\frac{t}{T}]} Y_j \qquad \text{Για κάθε} \quad t \in \left[\frac{T}{N}, T\right]$$

και επιπλέον επεκτείνουμε την αξία του πρωτογενούς προϊόντος ως

$$S_t^{(N)} = S_0 e^{E_t^{(N)}}$$

Έχουμε τώρα

$$\lim_{N\to\infty} \frac{T}{N}\left[N\frac{t}{T}\right]\mu = \mu t$$

για κάθε $t \in [0,T]$. Αν θεωρήσουμε τις στοχαστικές διαδικασίες $\{X_t^{(N)}\}_{0\le t\le T}$ με

$$X(N,t) = \sigma\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{[N\frac{t}{T}]} Y_j$$

Τότε από θεώρημα 5.6.1 (θεώρημα *Donsker*) έχουμε

$$X_N \Rightarrow \sigma\sqrt{T}W'$$

όπου $W' = W/\sqrt{T}$ και $\{W_t\}_{0\le t\le T}$ η τυπική διαδικασία *Wiener* στο $[0,T]$ Επομένως η ακλουθία του D_T, E_N συγκλίνει ασθενώς σε μία στοχαστική διαδικασία $\{E_t\}_{0\le t\le T}$, με

$$E_t = \mu t + \sigma W_t$$

και από θεώρημα απεικόνισης έχουμε ότι η S_N συγκλίνει ασθενώς σε μία στοχαστική διαδικασία $\{S_t\}_{0\le t\le T}$ με

$$S_t = S_0 e^{\mu t+\sigma W_t}$$

Η τελευταία ονομάζεται **Γεωμετρική κίνηση** *Brown*. Η παράμετρος μ ονομάζεται **τάση** και η παράμετρος σ ονομάζεται **μεταβλητότητα**.

7.6 Σύγκλιση της αναμενόμενης τιμής των παραγώγων

Ορισμός 7.6.1 1) Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. **Διήθηση** σε αυτόν τον χώρο είναι μια οικογένεια $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$ σ-αλγεβρών, με $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ για κάθε $t\ge0$ και για κάθε $t_1>t_2$ ισχύει $\mathcal{F}_{t_2}\subset\mathcal{F}_{t_1}$.

2) Μία στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\ge0}$ στον $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ είναι **προσαρμοσμένη** στη διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$ αν η X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη για κάθε $t\ge0$.

3) Για μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\ge0}$, η $\mathcal{F}_t=\sigma(X_s : 0\le s\le t)$ είναι διήθηση στην οποία η $\{X_t\}_{t\ge0}$ είναι προσαρμοσμένη. Την συγκεκριμένη διήθηση την ονομάζουμε **φυσική διήθηση**.

Ορισμός 7.6.2 Αν μία στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\ge0}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) Η $\{X_t\}_{t\ge0}$ είναι προσαρμοσμένη στην $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$

(ii) $\mathbb{E}[|X_t|]<\infty$ για κάθε $t\ge0$

(iii) $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]=X_s$, $\mathbb{P}$-σ.β για κάθε $t\ge s$

τότε λέγεται **martingale** ως προς την διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$ και ως προς το μέτρο $\mathbb{P}$

Για $t\ge s$, η $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$ έχει την εξής ερμηνεία: Άν μάθουμε την αξία ενός πρωτογενούς προϊόντος αμέσως μετά την χρονική στιγμή s, η $\mathbb{E}[S_t|\mathcal{F}_s]$ δείχνει την καλύτερη εκτίμηση που έχουμε για την αξία του την χρονική στιγμή t με δεδομένη την μέχρι στιγμής πληροφορία κατά τον χρόνο s. Αν η

$\{S_t\}_{t\geq 0}$ είναι martingale τότε η πιθανότητα να ¨ανέβει' η αξία της ταυτίζεται με την πιθανότητα να ¨πέσει¨.

Ορισμός 7.6.3 (μέτρο martingale) Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ ο χώρος των τροχιών του πρωτογενούς προϊόντος και έστω $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ η φυσική δίηθηση της σ.δ. $\{e^{-rt}S_t\}_{t\geq 0}$. Αν εφοδιάσουμε τον χώρο με ένα μέτρο πιθανόττας $\mathbb{Q}$ ως προς το οποίο η $\{e^{-rt}S_t\}_{t\geq 0}$ να είναι martingale, τότε αυτό το μέτρο ονομάζεται martingale.

Μπορεί να αποδειχτεί ότι αν U_T είναι η αποπληρωμή ενός παραγώγου στον χρόνο λήξης T τότε η σημερινή αξία του είναι

$$U_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U_T] \quad (1)$$

όπου $\mathbb{Q}$ είναι μέτρο martingale.

Θα κατασκευάσουμε λοιπόν ένα μέτρο martingale για το διωνυμικό υπόδειγμα πολλαπλών περιόδων. Έχουμε

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}] = S_{t_i}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}] =$$

$$= S_{t_i}\left(u\mathbb{Q}(\xi_{t_{i+1}} = u|\mathcal{F}_{t_i}) + d\mathbb{Q}(\xi_{t_{i+1}} = d|\mathcal{F}_{t_i})\right) = S_{t_i}(d + (u-d)\mathbb{Q}(\xi_{t_{i+1}} = u|\mathcal{F}_{t_i}))$$

επομένως πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη με $e^{-rt_{i+1}}$ και από την ιδιότητα (iii) των martingales

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rt_{i+1}}S_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}] = e^{-rt_{i+1}}S_{t_i}(d + (u-d)\mathbb{Q}(\xi_{t_{i+1}} = u|\mathcal{F}_{t_i})) \implies$$

$$e^{-rt_i}S_{t_i} = e^{-rt_{i+1}}S_{t_i}(d + (u-d)\mathbb{Q}(\xi_{t_{i+1}} = u|\mathcal{F}_{t_i})) \implies$$

$$\mathbb{Q}(\xi_{t_{i+1}} = u|\mathcal{F}_{t_i}) = \frac{e^{rh} - d}{u - d} = q \quad (2)$$

Η φυσική διήθηση εδώ ορίζεται για χρόνους στο διάστημα $[0, T]$ και $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Η τελευταία συνθήκη μαζί με την σχέση (1) είναι τα αναλυτικά επιχειρήματα πίσω από τον διαισθητικό συλλογισμό που κάναμε στην τιμολόγηση παραγώγων με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα πολλαπλών περιόδων, και όπως είδαμε ισχύει ότι $0 < q < 1$. Επιπλέον μπορούμε να δούμε ότι η σχέση (2) για $i = 0$ μας δίνει την κατανομή της τ.μ. ξ_1 κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}$ και $i = 1$ μας δίνει τη κατανομή της τ.μ. ξ_2 με δεδομένη την ξ_1. Κάνοντας χρήση επαγωγής, μπορούμε να δούμε ότι οι (ξ_i) είναι ανεξάρτητες και ισόνομες κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}$.

Η σύγκλιση του διωνυμικού υποδείγματος κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}$

Όπως και στην προηγούμενη υποενότητα θα επιλέξουμε τα u, d ως

$$u(h) = e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}} \qquad \text{και} \qquad d(h) = e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}}$$

Επειδή θέλουμε να δούμε τη σύγκλιση κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(h)$ θα ισχύει

$$q(h) = \frac{e^{rh} - e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}}}{e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}} - e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}}} \quad (3)$$

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε τις i.i.d. τ.μ. $\{\eta_i\}$ ως

$$\eta_i = \begin{cases} \mu h + \sigma\sqrt{h} & \text{με πιθανότητα} \quad q(h) \\ \mu h - \sigma\sqrt{h} & \text{με πιθανότητα} \quad 1 - q(h) \end{cases}$$

Είναι
$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\eta_i] = \sigma\sqrt{h}(2q(h)-1)+\mu h \quad (4)$$
και
$$V^{\mathbb{Q}}(\eta_i) = q(h)(1-q(h))(2\sigma)^2 h$$
Όπως είδαμε στη σχέση (3) η q είναι συνάρτηση του h και έχει παράγωγο κάθε τάξης. Από θεώρημα Taylor έχουμε
$$q(h) = \frac{1}{2}(1-h\frac{\mu - r\sigma^2/2}{\sigma}) + O(h^2) \quad (5)$$
και επειδή $h = T/N$ έχουμε ότι για $N \to \infty$, $h \to 0$ και επομένως $q \to 1/2$. Με βάση την σχέση (5), η σχέση (4) μετά από πράξεις γίνεται
$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\eta_i] = (r-\sigma^2/2)h + O(h^2)$$
Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα 5.6.1 χρειαζόμαστε τ.μ. μεταβλητές με μέση τιμή 0. Επομένως θέτουμε
$$Z_i = \eta_i - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\eta_i]$$
Είναι $V^{\mathbb{Q}}(Z_i) = V^{\mathbb{Q}}(\eta_i) = q(1-q)(2\sigma)^2 h$. Επιπλέον θέτουμε
$$Y_i = \frac{Z_i}{\sqrt{V^{\mathbb{Q}}(Z_i)}} = \frac{Z_i}{\sqrt{q(1-q)}2\sigma\sqrt{h}}$$
και τελικά
$$E_{t_i}^{(N)} := \log\left(\frac{S_{t_i}}{S_0}\right) = \sum_{j=0}^{i}(\sqrt{q(1-q)}2\sigma\sqrt{h}Y_j + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\eta_i]) =$$
$$= \sqrt{q(1-q)}2\sigma\sqrt{h}\sum_{j=0}^{i} Y_j + (r-\sigma^2/2)t_i + iO(h^2)$$
Όπως και στην προηγούμενη υποενότητα, Για κάθε $N \in \mathbb{N}$, επεκτείνουμε τα E_N ώστε να είναι στοιχεία του D_T ως εξής:
$$E_t^{(N)} = 0 \qquad \text{Για κάθε} \quad t \in \left[0, \frac{T}{N}\right)$$
$$E_t^{(N)} = \frac{T}{N}\left[N\frac{t}{T}\right](r-\sigma^2/2) + \left[N\frac{t}{T}\right]O(h^2) + \sqrt{q(1-q)}2\sigma\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{[N\frac{t}{T}]} Y_j$$
Παρατηρόντας ότι
$$\frac{t}{h}O(h^2) \leq \left[N\frac{t}{T}\right]O(h^2) < \frac{t}{h}O(h^2) + O(h^2)$$
επειδή $O(h^2) \to 0$ καθώς $N \to \infty$ με την ταχύτητα του $1/N^2$, έχουμε ότι
$$\lim_{N\to\infty}\left[N\frac{t}{T}\right]O(h^2) = 0$$
επιπλέον
$$\lim_{N\to\infty}\sqrt{q(1-q)}2\sigma = \sigma$$

και τέλος, εργαζόμενοι όμοια με την προηγούμενη υποενότητα, κάνοντας την χρήση του θεωρήματος 6.5.1 έχουμε ότι η ακλουθία του D_T, E_N συγκλίνει ασθενώς σε μία στοχαστική διαδικασία $\{E_t\}_{0\leq t\leq T}$, με

$$E_t = (r-\sigma^2/2)t + \sigma W_t$$

και από θεώρημα απεικόνισης έχουμε ότι η $S_N = e^{E_N}$ συγκλίνει ασθενώς σε μία στοχαστική διαδικασία $\{S_t\}_{0\leq t\leq T}$ με

$$S_t = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma W_t}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι το μέτρο-όριο, $\mathbb{Q}$ της σύγκλισης είναι και αυτό martingale. Για $s \leq t$, έχουμε

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rt}S_t|\mathcal{F}_s] = S_s e^{-rs}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{\sigma(W_t-W_s)-\sigma^2(t-s)/2}|\mathcal{F}_s] =$$

$$= S_s e^{-rs}e^{-\sigma^2(t-s)/2}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{\sigma(W_t-W_s)}|\mathcal{F}_s] \quad (6)$$

λόγω των ανεξάρτητων προσαυξήσεων της διαδικασίας Wiener, η (6) γίνεται

$$S_s e^{-rs}e^{-\sigma^2(t-s)/2}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{\sigma W_{t-s}}] = S_s e^{-rs}$$

Επομένως όπως αναφέραμε, κάτω από αυτό το μέτρο, αν U_T είναι η αποπληρωμή ενός παραγώγου στον χρόνο λήξης T τότε η σημερινή αξία του είναι

$$U_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U_T]$$

με $U_T = f(S_T)$ και επιπλέον για κάθε $N \in \mathbb{N}$, για τα μέτρα $\mathbb{Q}_N$ έχουμε ομοίως

$$U_0^{(N)} = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}[U_T^{(N)}]$$

με $U_T^{(N)} = f(S_T^{(N)})$ Αν η f είναι συνεχής και φραγμένη, τότε από τον ορισμό της ασθενούς σύγκλισης έχουμε ότι

$$U_0^{(N)} = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}[U_T^{(N)}] \to e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U_T] = U_0$$

Επομένως για Ευρωπαϊκά συμβόλαια πώλησης, με τίμη άσκησης K, εφόσον η $f(S_T) = (K-S_T)^+$ είναι συνεχής και φραγμένη, έτσι, η δίκαιη τιμολόγηση του συμβολαίου είναι

$$U_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(K-S_T)^+] = -S_0\Phi(-d_1) + Ke^{-rT}\Phi(-d_2)$$

Όπου

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

και

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Ο παραπάνω φορμαλισμός είναι γνωστός ως Φόρμουλα Black-Scholes για ευρωπαϊκά δικαιώματα πώλησης.

Ωστόσο αν η f είναι συνεχής όμως όχι φραγμένη, τότε όπως είδαμε στην υποενότητα 1.6 μπορούμε να περάσουμε στο ολοκλήρωμα υπό τον όρο, η ακολουθία των τ.μ. $(f(S_T^{(N)}))$ να είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Η (σχεδόν παντού) συνέχεια της f είναι απαραίτητη ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα απεικόνισης. Θεωρώντας ότι τα πρωτογενή προϊόντα δεν μπορούν να απειριστούν, η ιδιότητα της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας μας δίνει πολλές δυνατές συναρτήσεις απόδοσης οι οποίες που το ολοκλήρωμα τους συγκλίνει, και αυτό γιατί από την παρατήρηση 1 της υποενότητας 1.6, οι ομοιόμορφα φραγμένες τ.μ. είναι και ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες, ώστοσο, είναι ορθότερο να δούμε ότι $S_T^{(N)} = f(S_0 u^k d^{N-k}) = f(S_0 e^{\mu T + \sigma\left(\frac{\sqrt{N}2k}{N} - \sqrt{N}\right)})$ για $k = \{0, ..., N\}$ και να δούμε πως συμπεριφέρεται ως ακολουθία

Τέλος θα δούμε και την σύγκλιση των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς. Η συνάρτηση απόδοσης είναι $f(S_T) = (S_T - K)^+$ η οποία δεν είναι φραγμένη, ωστόσο είναι συνεχής σ.π. Επιπλέον, $(S_T - K)^+ = S_T - K - (S_T - K)^-$ και η συνάρτηση, $g(x) = (x-a)^-$ είναι φραγμένη. Επιπλέον αν η συνάρτηση απόδοσης είναι η ταυτοτική, μπορούμε είτε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία $S_T^{(N)}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, είτε αντισταθμίζουμε αυτό το παράγωγο με ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει μια μονάδα του πρωτογενούς προϊόντος, και επομένως η σύγκλιση προκύπτει από το αξίωμα *No Arbitrage*. Κάνοντας τις πράξεις έχουμε ότι

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} S_T] = S_0$$

Επομένως, έχουμε σύγκλιση και στα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς. Προκύπτει λοιπόν ότι

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}(S_T - K)^+] = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

7.7 Εμβάθυνση στη συνάρτηση απόδοσης

Στην προηγούμενη υποενότητα είδαμε την περίπτωση σύγκλησης των αρχικών αξιών των παραγώγων όταν η συνάρτηση απόδοσης είναι μόνο συνάρτηση της τελικής αξίας του πρωτογενούς προϊόντος. Εδώ, θα δούμε διάφορες περιπτώσεις που εξαρτάται και από επιπλέον μεταβλητές.

Η εξάρτηση από την τελική και από την μέγιστη αξία του πρωτογενούς προϊόντος

Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την τ.μ.

$$M_N = \max_{1 \le i \le N} S_{t_i}^{(N)}$$

Αξιοπιώντας τα εργαλεία που έχουμε στη θεωρία, είναι εύκολο να δούμε την ασθενώς σύγκλιση της M_N. Είναι

$$M_N = \max_{1 \le i \le N} S_{t_i}^{(N)} = \max_{1/N \le [tN/T]/N \le 1} S_{a_N}^{(N)} \Rightarrow \sup_{0 \le t \le T} S_t = M_T$$

(όπου $a_N = \left[\frac{tN}{T}\right]\frac{T}{N}$) από θεώρημα απεικόνισης και βάση της σύγκλισης της S_N

Τώρα θα δείξουμε ότι $(S_T^{(N)}, M_N) \Rightarrow (S_T, M_T)$. Για να το δείξουμε αυτό, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θα συμβολίσουμε ως R_N την γραμμική παρεμβολή των $E_{t_i}^{(N)}$. Δηλαδή

$$R_t^{(N)} = E_{[Nt/T]}^{(N)} + (N\frac{t}{T} - \left[\frac{Nt}{T}\right])((r - \sigma^2/2)h + 2\sigma\sqrt{q(1-q)}\sqrt{h}Y_{[Nt/T]+1}) =$$

$$= \left(2\frac{T}{N}\left[N\frac{t}{T}\right] - t\right)(r - \sigma^2/2) + \left[N\frac{t}{T}\right]O(h^2) +$$
$$+ \sqrt{q(1-q)}2\sigma\sqrt{T}X_t^{(N)}$$

όπου

$$X_t^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{\left[\frac{Nt}{T}\right]} Y_i + \left(N\frac{t}{T} - \left[\frac{Nt}{T}\right]\right) \frac{1}{\sqrt{N}} Y_{[Nt/T]+1}$$

Για τα την ακολουθία $(X_N)_N$ των τυχαίων συναρτήσεων του C_T εφαρμόζουμε το θεώρημα *Donsker* στον C_T ενώ για τους υπόλοιπους όρους εργαζόμαστε όπως προηγουμένως και καταλήγουμε ότι

$$R_N \Rightarrow E$$

όπου $E_t = (r - \sigma^2/2)t + \sigma W_t$. Στο κεφάλαιο 4, δείξαμε ότι η απεικόνιση από το $C_T \to \mathbb{R}^2$ με

$$x \mapsto (x(T), \sup_{t\in[0,T]} x(t))$$

είναι συνεχής. Οι R_N είναι στοιχεία του C_T και λόγω γραμμικής παρεμβολής οι μέγιστες τιμές βρίσκονται στις κορυφές των R_N. επομένως

$$(E_T^{(N)}, \max_{1\le i\le N} E_{t_i}^{(N)}) = (R_T^{(N)}, \sup_{t\in[0,T]} R_t^{(N)}) \Rightarrow (E_T, \sup_{t\in[0,T]} E_t)$$

από θεώρημα απεικόνιισης. επιπλέον η απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (e^x, e^y)$$

είναι επίσης συνεχής. Επομένως

$$(e^{E_T^{(N)}}, e^{\max_{1\le i\le N} E_{t_i}^{(N)}}) \Rightarrow (e^{E_T}, e^{\sup_{t\in[0,T]} E_t})$$

Χρησιμοποιώντας ότι για μία συνεχής και αύξουσα συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $g(\sup(A)) = \sup g(A)$ για κάθε φραγμένο και μη κένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ (πράγματι, για καθε $x \in A$ έχουμε $x \le \sup A$ επομένως $g(x) \le g(\sup A)$ λόγω μονοτονίας. Επομένως $\sup g(A) \le g(\sup A)$ επιπλέον υπάρχει x_n αύξουσα ακολουθία στο A με $x_n \to \sup A$ και για κάθε όρο έχουμε $g(x_n) \le \sup g(A)$, λόγω συνέχειας έχουμε $g(\sup A) \le \sup g(A)$), έχουμε ότι

$$e^{\max_{1\le i\le N} E_{t_i}^{(N)}} = \max_{1\le i\le N} e^{E_{t_i}^{(N)}}$$

και

$$e^{\sup_{t\in[0,T]} E_t} = \sup_{t\in[0,T]} e^{E_t}$$

Συνεπώς με βάση το προηγούμενο θα έχουμε $(S_T^{(N)}, M_N) \Rightarrow (S_T, M_T)$. Όπως και προηγουμένως, αν U_T είναι η αποπληρωμή ενός παραγώγου στον χρόνο λήξης T τότε η σημερινή αξία του είναι

$$U_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U_T]$$

με $U_T = f(S_T, M_T)$ και επιπλέον για κάθε $N \in \mathbb{N}$, για τα μέτρα $\mathbb{Q}_N$ έχουμε ομοίως

$$U_0^{(N)} = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}[U_T^{(N)}]$$

με $U_0^{(N)} = f(S_T^{(N)}, M_N)$. Συνεπώς, αν η f είναι συνεχής και φραγμένη, η αρχική αξία των παράγωγων, συγκλίνει από τον ορισμό της ασθενούς σύγκλισης. Μια αρκετά γνωστή κατηγορία παραγώγων είναι αυτά που ακυρώνονται όταν ξεπεράσουν ένα κάποιο φράγμα $B > 0$. Πολλά από αυτά τα παράγωγα έχουν συνάρτηση απόδοσης της μορφής

$$f(S_T, M_T) = g(S_T)1_{\{M_T<B\}}$$

Για παράδειγμα στα ευρωπαϊκά δικαιώματα πώλησης με *Barrier*, θεωρούμε την $f(S_T, M_T) = (K - S_T)^+ 1_{\{M_T<B\}}$, και $f(S_T^{(N)}, M_N) = (K - S_T^{(N)})^+ 1_{\{M_N<B\}}$. Σε αυτή τη περίπτωση, για την ακολουθία $H_N = (K - S_T^{(N)})^+ 1_{\{M_N<B\}}$, για κάθε $N \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$H_N \leq (K - S_T^{(N)})^+ \leq K$$

Επομένως η ακολουθία είναι ομοιόμορφα φραγμένη, συνεπώς και ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Επιπλέον, τα σημεία ασυνέχειας της

$$f(x, y) = (K - x)^+ 1_{\{y<B\}}, \quad 0 \leq x \leq y$$

έχουν $\mathbb{Q}$- μέτρο 0 στην από κοινού κατανομή. Πράγματι, κάνοντας ένα σχήμα, είναι εύκολο να δούμε ότι τα σημεία ασυνέχειας είναι ευθύγραμμα τμήματα, συνεπώς έχουν μέτρο 0.

Ετσι, έχουμε

$$H_N \Rightarrow (K - S_T)^+ 1_{\{M_T<B\}}$$

από θεώρημα απεικόνισης και τελικά

$$U_0^{(N)} = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}[f(S_T^{(N)}, M_N)] \to e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T, M_T)]$$

.

Εξάρτηση από την μέση τιμή των αξιών του πρωτογενούς προϊόντος

Εδώ θα εξετάσουμε συναρτήσεις απόδοσης που εξαρτώνται από την ποσότητα

$$A(0, T) = \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$$

Στη συνεχή περίπτωση και

$$A_N(0, T) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_{t_j}$$

στη διακριτή. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση από τον $D \to \mathbb{R}$ με

$$x \mapsto \int_0^T x(t)dt$$

είναι συνεχής. Η διαδικασία είναι όμοια με την απόδειξη του Λήμματος 5.4.1 β). Θεωρούμε μια ακολουθία $(x_n)_n$ στον D_T και $x \in D_T$ με $\rho(x_n, x) \to 0$. Τότε $x_n \to x$ *Lebesgue* σχεδόν παντού. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $\rho(x_n, x) \to 0$, τότε υπάρχει n_0 και ακολουθία $(\lambda_n)_n$ του Λ_T τέτοια ώστε

$$\|x_\circ\lambda_n - x_n\|_\infty < \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως

$$|x_n(t)| \leq \|x_\circ \lambda_n - x_n\|_\infty + \|x\|_\infty < \epsilon + \|x\|_\infty$$

για κάθε $n \geq n_0$, και επειδή αυτό ισχύει για κάθε $t \in [0, T]$

$$\|x_n\|_\infty < \epsilon + \|x\|_\infty = M_1$$

θέτουμε $M_2 = \max\{\|x_1\|, .., \|x_{n_0-1}\|_\infty\}$ και $M = \max\{M_1, M_2\}$ και συμπεραίνουμε ότι η x_n είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Συνεπώς, επειδή $\int_0^T x(t)dt \leq \|x\|_\infty T < \infty$ από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε

$$\int_0^T x_n(t)dt \to \int_0^T x(t)dt$$

Επομένως

$$A_N(0,T) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_{t_j} = \frac{1}{T}\int_0^T S_N dt \Rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T S dt = A(0,T)$$

(Εδώ χρησημοποιήσαμε την S_N ως στοιχείο του D_T). Συναρτήσεις απόδοσης αυτής της μορφής χρησιμοποιούνται στου Ασιατικού τύπου συμβόλαια, όπου κάποια μοιάζουν με αυτά του ευρωπαϊκού. Για παράδειγμα όταν η συνάρτηση απόδοσης είναι $f(A) = (K - A)^+$ που σε αυτή τη περίπτωση η αρχική αξία του παραγώγου συγκλίνει γιατί η f είναι φραγμένη και συνεχής.

Υλικό για περεταίρω μελέτη

Στη χρηματοοικονομική θεωρία, τα εργαλεία που μελετήσαμε χρησημοποιούνται ακόμα και σε αρκετά προσφατες δημοσιεύσεις: Παραθέτουμε μία σύντομη παρουσίαση 2 εξ αυτών:

1) Σύγκλιση της βέλτιστης αναμενόμενης χρησιμότητας με βάση υποδείγματα διακριτού χρόνου

Έστω μία τ.μ. Y με μέση τιμή 0, διασπορά 1 και φραγμένο στήριγμα. Θεωρούμε ότι $T = 1$ και ότι η αγορά αποτελείται από ένα πρωτογενές προϊόν και ένα προϊόν ανευ ρίσκου με μηδενικό επιτόκιο. Διαμερίζουμε το $[0, 1]$ σε N υποδιαστήματα ίσου μήκους. Η αξία του πρωτογενούς προϊόντος την χρονική στιγμή t_i (όπου $t_i = i\ N$, $i = 1, ..., N-1$) είναι

$$S_{t_i} = e^{\sum_{j=1}^{i} \frac{Y_j}{\sqrt{N}}}$$

Όπου $\{U_j\}_j$ είναι μία ακολουθία i.i.dτ.μ. που ακολουθούν την ίδια κατανομή με την Y και επιπλέον $S_0 = 1$ Θεωρούμε τα τυχαία στοιχεία του D_1, $E_t^{(N)}$ με $E_t^{(N)} = \sum_{j=1}^{[tN]} \frac{Y_j}{\sqrt{N}}$ τότε όπως προηγουμένως, από θεώρημα 5.6.1 και από το θεώρημα απεικόνισης, η αξία του πρωτογενούς προϊόντος συγκλίνει σε μια σ.δ. $\{S_t\}_{0\leq t\leq 1}$ με

$$S_t = e^{W_t}$$

Έστω ένας ορθολογικός επενδυτής, με αρχική περιουσία x, με την οποία αγοράζει ένα χαρτοφυλάκιο με ένα πρωτογενές προϊόν και ένα προϊόν άνευ ρίσκου. Στη συνέχεια ανταλλάσει με μη προβλεπόμενο και αυτοχρηματοδοτούμενο τρόπο τα προϊόντα (δηλαδή, (α) στον χρόνο t_i που πραγματοποιείται η ανταλλαγή, η μόνη πληροφορία που κατέχει είναι το ιστορικό των αξιών του πρωτογενούς προϊόντος μέχρι και την χρονική στιγμή t_i και(β) κάθε αγορά πρωτογενούς προϊόντος μετά τον χρόνο 0 χρηματοδοτείται από τις πωλήσεις των ομολόγων, και τα έσοδα από κάθε πώληση πρωτογενούς προϊόντος επενδύονται σε προϊόντα άνευ ρίσκου) αναζητόντας να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη τιμή μίας συνάρτησης χρησιμότητας $U:(0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ η οποία δρα στη τελική αξία του χαρτοφυλάκιου την χρονική στιγμή 1.

Η ερώτηση που διαμορφώνει την βάση αυτής της δημοσίευσης είναι η εξής: Αν τα προϊόντα του επενδυτή περιγράφονται σε μοντέλα διακριτού χρόνου, όπως αυτό που περιγράψαμε, πως συμπεριφέρεται η βέλτιστη αναμενόμενη χρησιμότητας καθώς το $N\rightarrow\infty$ και επιπλεόν πως περιγράφεται σε ένα μοντέλο όπως αυτό των Black-Scholes-Merton· Έστω $u_N(x)$ να είναι η μέγιστη αναμενόμενη ελαστικότητα, στο μοντέλο N περιόδων, όταν ο επενδυτής έχει αρχική περιουσία x, και $u(x)$ να είναι η μέγιστη αναμενόμενη ελαστικότητα, στο μοντέλο-όριο BSM, όταν ο επενδυτής έχει αρχική περιουσία x. Χρησιμοποιώντας την έννοια της ¨ασυμπτωτικής ελαστικότητας της χρησιμότητας' η οποία ορίζεται ως

$$AE(U)=\limsup_{x\rightarrow\infty}\frac{xU'(x)}{U(x)}$$

ϑα αποδειχτεί ότι $u_n(x)\rightarrow u(x)$ στις ειδικές περιπτώσεις που οι U, έχουν ασυμπτωτική ελαστικότητα μικρότερη του 1, ενώ με την χρήση αντιπαραδείγματος ϑα αποδείχτεί ότι είναι δυνατό η $u(x)$ να είναι πεπερασμένη, ενώ $u_n(x)\rightarrow\infty$ για κάθε $x>0$. Περισσότερα για αυτή την δημοσίευση βρίσκονται στο [9]

2) Σύγκλιση της βέλτιστης αναμενόμενης χρησιμότητας για ακολουθίες διωνυμικών μοντέλων

Αυτή η δημοσίευση, έρχεται σε συνέχεια της προηγούμενης που περιγράψαμε και χρειάζεται μία εξοικείωση με τους συμβολισμούς και τι ορολογίες που χρησιμοποιούνται στη τελευταία. Εδώ γίνεται ανάλυση της σύγκλισης της αναμενόμενης χρησιμότητας προσεγγίζοντας το μοντέλο $Black-Scholes$ από διωνυμικά υποδείγματα. Στη προηγούμενη δημοσίευση, παρατέθηκε ένα αντιπαράδειγμα, συμφωνα με το οποίο, μία τέτοια σύγκλιση μπορεί να μην είναι επιτυχής. Το συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα είναι βασισμένο σε ένα μη συμμετρικό διωνυμικό μοντέλο, στο οποίο οι ροπές της τρίτης τάξης είναι ϑετικές.

Στην ίδια δημοσίευση αφέϑηκε σαν ανοικτό ερώτημα, για το πως είναι η ασυμπτωτική συμπεριφορά των $u_N(x)$ όταν οι ροπές τρίτης τάξης είναι αρνητικές ή στην συμμετρική περίπτωση του διωνυμικού μοντέλου. Μπορούμε να επιτύχουμε την σύγκλιση της $u_N(x)$· Εδώ ϑα δειχτεί ότι η απάντηση είναι καταφατική. Περισσότερα για αυτή την δημοσίευση βρίσκονται στο [10]

Βιβλιογραφία

[1] Patrick Billingsley Convergence of Probability Measures *first edititon, New York, Wiley*, 1968

[2] Λουλάκης Μ. *Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία [ηλεκτρ. Βιβλίο] Αθήνα: Σύνδεσμός Ελληνικών Ακαδημαϊκών βιβλίων Διαθέσιμο στο https://hdl.handle.net/11419/3481*, 2015

[3] Σπύρος Αργυρός *Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης*, 2011

[4] Σ. Νεγρεπόντης, Γ. Κουμουλλής *Θεωρία Μέτρου, Εκδόσεις συμμετρία Αθήνα* 2005

[5] Δημήτρης Χελιώτης *Ένα δεύτερο μάθημα στις πιθανότητες* Αθήνα: Σύνδεσμός Ελληνικών Ακαδημαϊκών βιβλίων, 2015

[6] Δημήτρης Χελιώτης *Εισαγωγή στον στοχαστικό λογισμό* Αθήνα: Σύνδεσμός Ελληνικών Ακαδημαϊκών βιβλίων, 2015

[7] William Feller *An Introduction to Probability Theory and its application, third edition, New York, Wiley*, 1968

[8] Αντώνης Παπαπαντολέων *ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ* 2019

[9] David M. Kreps, Walter Schachermayer *Convergence of Optimal Expeted Utility for a Sequence of Discrete- Time Markets*, 2020

[10] Friedrich Hubalek, Walter Schachermayer *Convergence of Optimal Expeted Utility for a Sequence of Binomial Models*, 2020