ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Μεταπτυχιακή Εργασία

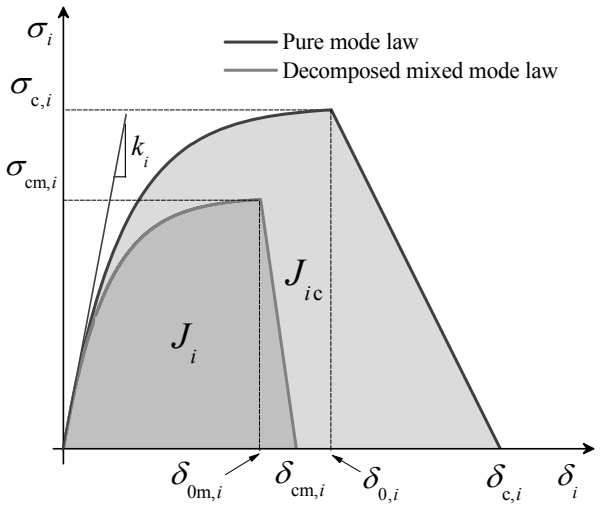
του

Κωνσταντίνου Ν. Ανυφαντή

με Τίτλο:

"*Ανάπτυξη 3-διάστατων καταστατικών νόμων για την ανάλυση συνδέσμων με όλκιμα κολλητικά μέσα με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*"

Επιβλέπων Καθηγητής Ε.Μ.Π.: κ. Μανόλης Παπαδρακάκης



Αθήνα, Οκτώβριος 2011

Περίληψη

Στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, παρουσιάζεται ένας καινούριος νόμος τάσης – σχετικής απομάκρυνσης ο οποίος περιγράφει την καταστατική σχέση ενός όλκιμου κολλητικού μέσου σε φόρτιση και θραύση Τύπου I, II και III. Η μαθηματική και αριθμητική διατύπωση των προτεινόμενων νόμων προσανατολίστηκε με σκοπό την χρήση τους ως τις καταστατικές σχέσεις 3-διάστατων πεπερασμένων στοιχείων διεπιφάνειας. Οι εν λόγω προτεινόμενοι νόμοι, βασίζονται στην προσέγγιση Embedded Process Zone και έχουν αναπτυχθεί στο πλαίσιο ανάλυσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων συνδέσμων με όλκιμα κολλητικά μέσα, όπου η κόλλα φορτίζεται υπό συνθήκες μεικτού Τύπου φόρτισης και θραύσης. Ο νόμος αυτός χρησιμοποιήθηκε πρώτα για την περιγραφή της καθαρής φόρτισης και θραύσης Τύπου I, II και III και έπειτα εισήχθησαν σε ένα ανεπτυγμένο μοντέλο μεικτού-Τύπου φόρτισης, με σκοπό να συσχετιστούν και να ληφθεί υπ' όψιν η μεταξύ αυτών εξάρτηση. Το μέρος των νόμων όπου οι τάσεις ακολουθούν ανοδική πορεία (ελαστοπλαστική συμπεριφορά υλικού), περιγράφεται από μια εκθετική συνάρτηση ενώ η φθίνουσα αποφόρτιση περιγράφεται από μια γραμμική συνάρτηση. Για την πρόβλεψη έναρξης και διάδοσης αστοχιών χρησιμοποιήθηκε το παραβολικό κριτήριο αστοχίας τάσεων και το γραμμικό κριτήριο ενεργειών, αντίστοιχα.

Με σκοπό την αριθμητική επαλήθευση και επιβεβαίωση των προτεινόμενων νόμων κατασκευάστηκαν και πειραματικά χαρακτηρίστηκαν δύο τύποι συνδέσεων, ένας σύνδεσμος μονής και ένας σύνδεσμος διπλής επικάλυψης. Αριθμητικές συγκρίσεις επίσης έγιναν με τη χρήση του ήδη υπάρχοντα στη βιβλιογραφία τραπεζοειδή νόμου. Οι προτεινόμενοι νόμοι προβλέπουν με μεγάλη ακρίβεια την ελαστοπλαστική συμπεριφορά των πειραματικά δοκιμασμένων νόμων, ως προς την καθολική τους απόκριση. Επιπρόσθετα, η υπολογισμένη αντοχή των συνδέσεων υπολογίστηκε με μεγάλη ακρίβεια.

Πίνακας Περιεχομένων

1. Εισαγωγή 1
2. Αριθμητική διατύπωση 3-διάστατου ΠΣ διεπιφάνειας 11
3. Καταστατικοί νόμοι 3-διάστατων ΠΣ στοιχείων διεπιφάνειας 24
3.1 Νόμοι σε φόρτιση και θραύση Τύπου I, II και III. 24
3.2 Σύζευξη ΕΡΖ νόμων 29
3.2.1 Φόρτιση και θραύση Τύπου I , II και III 30
3.2.2 Φόρτιση και θραύση Τύπου II και III 33
4. Αριθητική επιβεβαίωση 3-διάστατων στοιχείων 36
5. Περιγραφή πειραματικών δοκιμών 41
6. Αριθμητική μοντελοίηση πειραματικών δοκιμών 43
6.1 Κατασκευή μοντέλων και ορισμός ιδιοτήτων 43
6.2 Παρουσίαση αριθμητικών αποτελεσμάτων και σύγκριση με πειραματικές μετρήσεις . 47
6.3 Παραμετρική μελέτη ευαισθησίας για την επίδραση του σφάλματος *e*. 53
6.4 Κατανομές τάσεων στο κολλητικό μέσο (ΕΡΖ περιοχή). 55
7. Συμπεράσματα - Συζήτηση 68
8. Βιβλιογραφία 70

1. Εισαγωγή

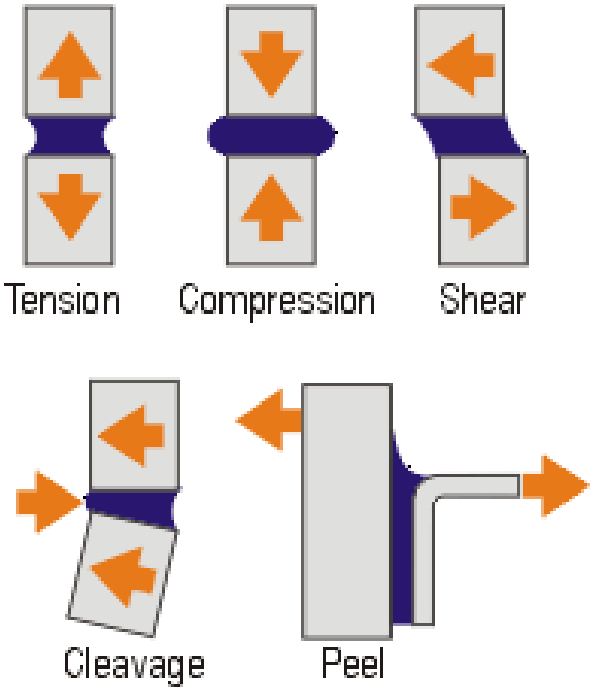
Η μοντέρνα τεχνολογία προσφέρει πολλές τεχνικές για την επισκευή δομικών στοιχείων που έχουν υποστεί βλάβη όπως μια ασυνέχεια ή έχουν χάσει μέρος της δυσκαμψίας ή της αντοχής τους. Στις περισσότερες των περιπτώσεων, η επισκευή επιτυγχάνεται με την εφαρμογή συμπληρωματικών υλικών στην ευρύτερη περιοχή της βλάβης. Ο σχεδιασμός κάθε επισκευής, προσανατολίζεται στην αντιστάθμιση της μειωμένης αντοχής ή δυσκαμψίας, που οφείλεται στην αντίστοιχη μορφή βλάβης. Ένα από τα προβλήματα υπό μελέτη, όπως φαίνεται στην διεθνή βιβλιογραφία, είναι η συνεργασία των δομικών υλικών που συνεργάζονται, δηλαδή του γονικού και του ενισχυτικού υλικού.

Μεταξύ των μεθόδων που χρησιμοποιούνται ευρέως για την ένωση δύο όμοιων ή ανόμοιων δομικών υλικών, οι τεχνικές συνένωσης με κολλητικά μέσα (adhesive bonding) έχουν τραβήξει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών και μηχανικών σχεδιαστών εξαιτίας των μοναδικών ιδιοτήτων που προσφέρουν, Adams et al. (1997):

1. Η ανάγκη χρήσης μηχανουργικών κατεργασιών (τόρνευση, φρεζάρισμα, έλαση) για κατασκευαστικές λεπτομέρειες είναι μειωμένη.
2. Μεγάλες επιφάνειες κόλλησης μπορούν να παραχθούν χωρίς ιδιαίτερα εκπαιδευμένο προσωπικό και εργατική δυναμικότητα.
3. Η συνένωση υλικών με κολλητικά μέσα, προσφέρει χαμηλούς λόγους υψηλής αντοχής ως προς το βάρος και αυξάνει κατά τρεις φορές την αντοχή σε διατμητικά φορτία, από ότι αντίστοιχες ηλωτές ενώσεις.
4. Βελτιωμένες και με εξομάλυνση επιφάνειες ως προς τα αεροδυναμικά/ υδροδυναμικά χαρακτηριστικά και την εξωτερική εμφάνιση.
5. Χρησιμοποιείται ως στεγανωτικό, και /ή εμποδίζει την διάβρωση ιδιαίτερα όταν πρόκειται για ασυμβίβαστα υλικά.
6. Προσφέρουν εξαιρετική ηλεκτρική και θερμική μόνωση.
7. Ανώτερη αντοχή σε κόπωση. Συνδέσεις με κολλητικά μέσα έχουν δείξει χρόνο ζωής σε κόπωση είκοσι φορές μεγαλύτερο σε σχέση με ηλωτές συνδέσεις αντίστοιχων υλικών.
8. Μειώνονται κατά κόρον τα σημεία συγκέντρωσης τάσεων.
9. Συχνά το κολλητικό μέσο είναι αρκετά εύκαμπτο ώστε να επιτρέπει την μεταβολή των συντελεστών θερμικής διαστολής, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για ανόμοια υλικά.

Διαφαίνεται λοιπόν πως υπάρχουν πολλά πλεονεκτήματα για την χρήση τεχνικών συνένωσης με κολλητικά μέσα, αλλά είναι υποχρεωτικό να αναπτυχθούν μέθοδοι που αποσκοπούν στην ανάλυση, στον σχεδιασμό και στην βελτιστοποίηση διάφορων γεωμετρικών διατάξεων που υπόκεινται σε διάφορους συνδυασμούς φόρτισης.

Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσει κανείς τους τύπους και τις μορφές των φορτίσεων αλλά και τις αντίστοιχες τάσεις που αναπτύσσονται σε συνδέσεις με κολλητικά μέσα. Εκτός από τα προς σύνδεση υλικά, η γεωμετρική διάταξη ενός συνδέσμου βασίζεται και στις αναπτυσσόμενες τάσεις στο κολλητικό μέσο και στα υπόλοιπα υλικά. Σε συνδέσμους με κολλητικά μέσα, πέντε είναι οι βασικοί τύποι φόρτισης, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Οι πέντε βασικοί τύποι τάσεων που αναπτύσσονται σε συνδέσεις με κολλητικά μέσα.

Οι εφελκυστικές τάσεις (tension) αναπτύσσονται όταν οι δυνάμεις δρουν κάθετα στο επίπεδο του συνδέσμου και κατανέμονται σε ολόκληρη την περιοχή της εφαρμογής του κολλητικού μέσου, δλδ στις ελεύθερες επιφάνειες των υλικών προς κόλληση. Οι συνδέσεις με κολλητικά μέσα ανταποκρίνονται ικανοποιητικά σε εφελκυστικά φορτία, καθώς ολόκληρο το κολλητικό μέσο συνεισφέρει στην αντοχή του συνδέσμου. Δυστυχώς, σε πρακτικές

εφαρμογές τα φορτία ασκούνται σπάνια αμιγώς αξονικά αλλά αναπτύσσουν τάσεις απόσχισης (cleavage - peel stresses) εξαιτίας της έκκεντρης εφαρμογής τους. Με σκοπό να σχεδιάσει κανείς ένα σύνδεσμο ο οποίος να παραλαμβάνει αμιγώς εφελκυστικά φορτία, είναι απαραίτητο να εισαχθούν συγκεκριμένοι περιορισμοί οι οποίοι δεν θα επιτρέπουν την ανάπτυξη τάσεων απόσχισης.

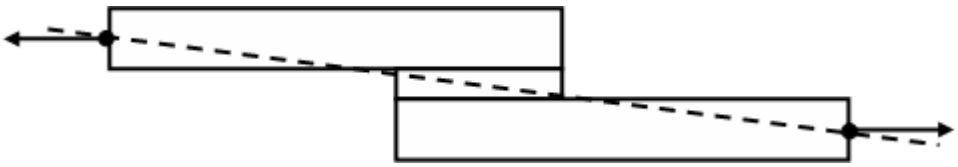
Τα θλιπτικά φορτία (compression) έχουν δράση αντίθετη των εφελκυστικών, καθώς και αυτές δρουν κάθετα στο επίπεδο του συνδέσμου, αλλά τείνουν να φέρουν τα προς κόλληση υλικά πιο κοντά και να μειώσουν το πάχος του κολλητικού μέσου. Έτσι, είναι σημαντικό να διατηρηθούν συνευθειακά ώστε να αναπτύσσονται μόνο θλιπτικές τάσεις εντός του κολλητικού μέσου. Εξαιτίας της μεγάλης αντοχής σε θλίψη που παρουσιάζουν τα περισσότερα από τα δομικά κολλητικά μέσα που χρησιμοποιούνται, οι σύνδεσμοι που φορτίζονται σε αξονικά θλιπτικά φορτία δεν παρουσιάζουν κίνδυνο αστοχίας. Παρ' όλα αυτά, μπορεί να εμφανιστούν ρωγμές σε αδύναμα σημεία εξαιτίας των ανομοιόμορφων κατανομών των τάσεων.

Τα κολλητικά μέσα είναι εν γένει ισχυρά σε διάτμηση (shear), καθώς ολόκληρη η περιοχή που έχει τοποθετηθεί το κολλητικό μέσο συνεισφέρει στην αντοχή του συνδέσμου. Δατμητικές τάσεις αναπτύσσονται όταν τα φορτία ασκούνται παράλληλα με το επίπεδο του κολλητικού μέσου. Γενικά σύνδεσμοι που σχεδιάζονται με βάση την αντοχή σε διάτμηση του κολλητικού μέσου, παρουσιάζουν σχετικά εύκολη διαδικασία κατασκευής και χρησιμοποιούνται κατά κόρον. Οι περισσότερες γεωμετρικές διατάξεις σχεδιάζονται, με σκοπό όλων των ειδών τα ασκούμενα φορτία, να οδηγούν το κολλητικό μέσο να φορτίζεται σε διάτμηση. Από την άλλη μεριά, οι τάσεις απόσχισης (peel - cleavage) τείνουν να είναι καταστροφικές για τον σύνδεσμο, κατά τρόπο που είναι τελείως ανεπιθύμητες.

Οι τάσεις απόσχισης (cleavage) αναπτύσσονται όταν τα φορτία ασκούνται στο ένα άκρο μιας στιβαρής συναρμογής με κολλητικά μέσα και τείνουν να απομακρύνουν τα προς κόλληση μέσα. Οι τάσεις απόσχισης (peel) είναι παρόμοιες με τις τάσεις απόσχισης (cleavage) αλλά αναπτύσσονται στο κολλητικό μέσο όπου ενώνει ένα εύκαμπτο με ένα στιβαρό υλικό.

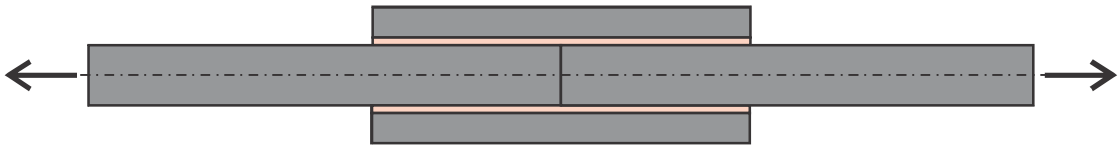
Σύνδεσμοι όπου φορτίζονται σε τάσεις απόσχισης (peel - cleavage) έχουν πολύ μικρότερη αντοχή απ' ότι σύνδεσμοι που φορτίζονται σε διάτμηση, επειδή οι τάσεις συγκεντρώνονται σε μια πολύ μικρή επιφάνεια σε σχέση με την συνολική επιφάνεια του κολλητικού μέσου. Οι τάσεις απόσχισης (peel) περιορίζονται σε μια πολύ λεπτή ζώνη στα άκρα της σύνδεσης έτσι το υπόλοιπο μέρος του κολλητικού μέσου δεν συνεισφέρει στην αντοχή του συνδέσμου.

Οι σύνδεσμοι με επικάλυψη (lap joints) είναι οι πιο συνήθεις σύνδεσμοι μεταξύ όμοιων και ανόμοιων υλικών, επειδή είναι εύκολη και απλή η κατασκευή τους, εφαρμόζονται σε λεπτά υλικά και το πιο σημαντικό είναι πως φορτίζεται το κολλητικό μέσο κατά βάση σε διάτμηση. Παρ' όλα αυτά ένας σύνδεσμος μονής επικάλυψης οδηγεί το κολλητικό μέσο να παραλαμβάνει όχι μόνο διατμητικές τάσεις, αλλά και τάσεις απόσχισης. Σε αυτόν τον σχεδιασμό τα προς κόλληση υλικά έχουν μια απόσταση μεταξύ τους και τα αξονικά - διατμητικά φορτία δεν είναι συνευθειακά, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.2. Αυτή η εκκεντρότητα οδηγεί στην ανάπτυξη καμπτικών ροπών οι οποίες προκαλούν τάσεις απόσχισης στα άκρα του συνδέσμου και μειώνουν την δομική ακεραιότητα του συνδέσμου, Adams et al. (1997).



Σχήμα 1.2: Σχηματική αναπαράσταση ενός συνδέσμου μονής επικάλυψης.

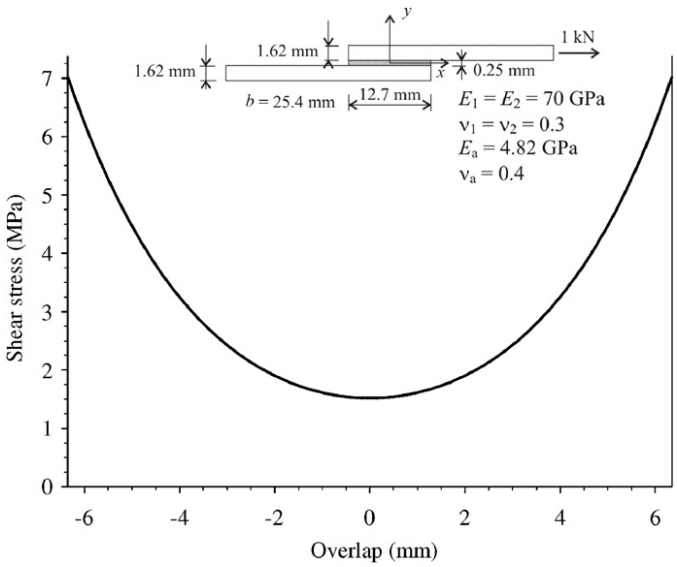
Ένας σύνδεσμος διπλής επικάλυψης, σαν αυτόν που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.3, έχει διάφορα πλεονεκτήματα που βελτιώνουν την δομική ακεραιότητα της σύνδεσης σε σχέση με την αντίστοιχη του συνδέσμου μονής επικάλυψης. Οι κύριες τάσεις που αναπτύσσονται είναι διατμητικές οι οποίες κατανέμονται σε ολόκληρη την επιφάνεια του κολλητικού μέσου. Τα ασκούμενα φορτία είναι συνευθειακά, κατά τρόπο που μειώνουν την περιοχή και το μέγεθος των τάσεων απόσχισης.



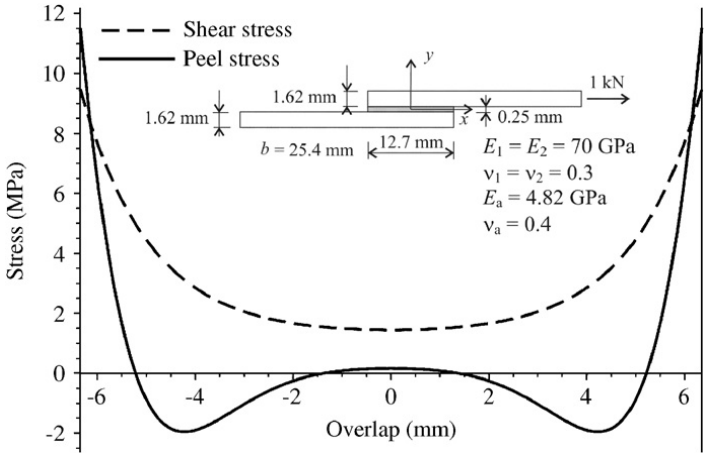
Σχήμα 1.3: Σχηματική αναπαράσταση ενός συνδέσμου διπλής επικάλυψης.

Η ανάλυση της δομικής ακεραιότητας συνδέσμων μονής και διπλής επικάλυψης με κολλητικά μέσα έχει μελετηθεί ευρέως από πλευράς αναλυτικής με την εξαγωγή κλειστού-τύπου λύσεων που αφορούν το πεδίο των μετατοπίσεων και των τάσεων τόσο εντός του

κολλητικού μέσου όσο και για τα προς κόλληση υλικά (da Silva et al. 2009a; da Silva et al. 2009b). Όσον αφορά τον σύνδεσμο μονής επικάλυψης, δύο είναι οι πρωτοπόρες αναλυτικές λύσεις που έχουν δημοσιευτεί. Η πρώτη αφορά το μοντέλο Volkersen (Volkersen, 1938), το οποίο θεωρεί τα προς κόλληση υλικά πως παραλαμβάνουν μόνο αξονικά φορτία και πως το κολλητικό μέσο φορτίζεται σε καθαρή διάτμηση. Η δεύτερη λύση προέρχεται από το μοντέλο Golland και Reisner (Golland και Reisner, 1944), το οποίο θεωρεί πως στο κολλητικό μέσο αναπτύσσονται τόσο διατμητικές όσο και ορθές τάσεις (τάσεις απόσχισης). Το Σχήμα 1.4 παρουσιάζει τις δύο αναλυτικές λύσεις για ένα σύνδεσμο από αλουμίνιο και εποξικό κολλητικό μέσο.



(α)



(β)

Σχήμα 1.4: Αναλυτικές λύσεις για την κατανομή των τάσεων κατά μήκος της επικάλυψης με βάση το μοντέλο Volkersen (α) και Golland και Reisner (β).

Παρ' όλα αυτά αναλυτικές λύσεις δεν είναι δυνατόν να υπολογιστούν για περιπτώσεις συνδέσμων όπου παρουσιάζουν γεωμετρική πολυπλοκότητα με μη-γραμμικότητα της γεωμετρίας ή των υλικών. Έτσι αριθμητικές λύσεις που βασίζονται στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι κατά κόρον εφαρμόσιμες. Διάφορες μεθοδολογίες υπάρχουν στη βιβλιογραφία σχετικά με Αναλύσεις Πεπερασμένων Στοιχείων συνδέσμων με κολλητικά μέσα που βασίζονται στην ανάλογη τεχνική που χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση του κολλητικού μέσου, την μοντελοποίηση της διεπιφάνειας μεταξύ κολλητικού μέσου και των προς κόλληση υλικών και την μοντελοποίηση των μηχανισμών αστοχίας.

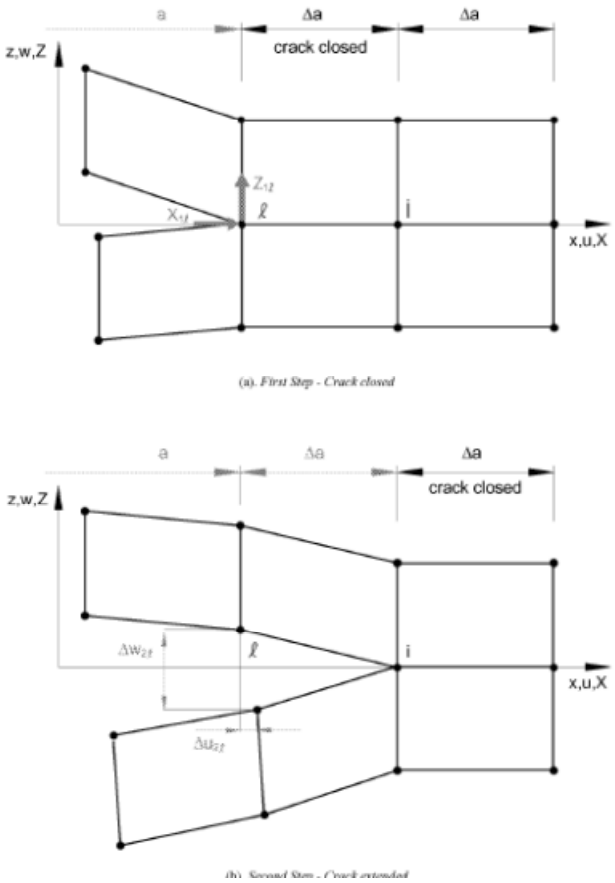
Όταν ένας σύνδεσμος φορτίζεται, οι αναπτυσσόμενες τάσεις μεταφέρονται από το ένα υλικό στο άλλο μέσω του κολλητικού μέσου και μέσω της μεταξύ αυτών διεπιφάνειας. Έτσι, δυο είναι οι βασικοί μακρομηχανισμοί αστοχίας που συνυπάρχουν στην περιοχή του κολλητικού μέσου, δηλαδή αστοχία του ίδιου του κολλητικού μέσου ή αστοχία της διεπιφάνειας (cohesive ή adhesive failure).

Συμβατικές μεθοδολογίες αφορούν 2-διάστατα ή 3-διάστατα πεπερασμένα στοιχεία συνεχούς μέσου που χρησιμοποιούνται για το κολλητικό μέσο και τα προς κόλληση υλικά (Dvorak et al. 2001; Yan et al. 2007; Pires et al. 2003; Vallée et al. 2010). Τα προσκείμενα στοιχεία στην διεπιφάνεια του κολλητικού μέσου και των προς κόλληση υλικών έχουν κοινούς κόμβους (υποθέτοντας συνθήκες τέλειας κόλλησης) κατά τρόπο ώστε οι διατμητικές και οι ορθές τάσεις μεταφέρονται αναλλοίωτες μέσω της διεπιφάνειας. Τέτοιου είδους προσεγγίσεις είναι επαρκείς για την μοντελοποίηση της ελαστικής και πλαστικής συμπεριφοράς του κολλητικού μέσου, αλλά αμελείται η επίδραση της διεπιφάνειας ως προς την δυσκαμψία και την αντοχή της.

Επιπρόσθετα, στα πλαίσια της ανωτέρω μεθοδολογίας, είναι δυνατή η ενσωμάτωση στις αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων κριτηρίων αστοχίας τάσης ή παραμόρφωσης που αποσκοπούν στην πρόβλεψη έναρξης αστοχίας εντός της στρώσης του κολλητικού μέσου (Papanikos et al. 2005; Odi and Friend 2004). Το μεγάλο μειονέκτημα τέτοιου είδους τεχνικών είναι πως τα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων έχουν εξάρτηση στην πυκνότητα του πλέγματος, καθώς οι συγκεντρώσεις τάσεων εμφανίζονται στα άκρα του κολλητικού μέσου.

Από τη άλλη μεριά, οι ρωγμές είναι πιο πιθανό να εμφανιστούν στην διεπιφάνεια κολλητικού μέσου και προς κόλληση υλικού (Goyal et al. 2008), καθώς στα σημεία αυτά οι συγκεντρώσεις τάσεων είναι σημαντικές και είναι υπεύθυνες για την αστοχία του συνδέσμου. Η τεχνική VCCT (Virtual Crack Closure Technique) έχει χρησιμοποιηθεί για την αριθμητική προσομοίωση της συμπεριφοράς σε αστοχία διάφορων συνδέσμων με κολλητικά μέσα (Panigrahi and Pradhan 2007; Zhang et al. 2010; Sun and Yang 2004), όπως παρουσιάζεται

στο Σχήμα 1.5. Με βάση την τεχνική αυτή, οι εσωτερικές επικόμβιες δυνάμεις υπολογίζονται στο άκρο της ρωγμής μαζί με τις σχετικές μετατοπίσεις (απομακρύνσεις) των προσκείμενων κόμβων. Τα μεγέθη αυτά χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του Ρυθμού Απελευθέρωσης Ενέργειας (energy release rate) G_i, i = I, II or III, το οποίο εν συνεχεία συγκρίνεται με τον πειραματικά υπολογισμένο κρίσιμο Ρυθμό Απελευθέρωσης Ενέργειας G_{ic}, i = I, II or III του αντίστοιχου υλικού. Διάδοση ρωγμής υφίσταται όταν ο αριθμητικά υπολογισμένος Ρυθμός Διάδοσης Ενέργειας είναι μεγαλύτερος από το μέγεθος G_{ic}. Αυτή η μέθοδος είναι έγκυρη μόνο στα πλαίσια της Γραμμικής Ελαστικής Θραυστομηχανικής (Linear Elastic Fracture Mechanics - LEFM) και έτσι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για προβλέψεις συνδέσμων με όλκιμα κολλητικά μέσα.



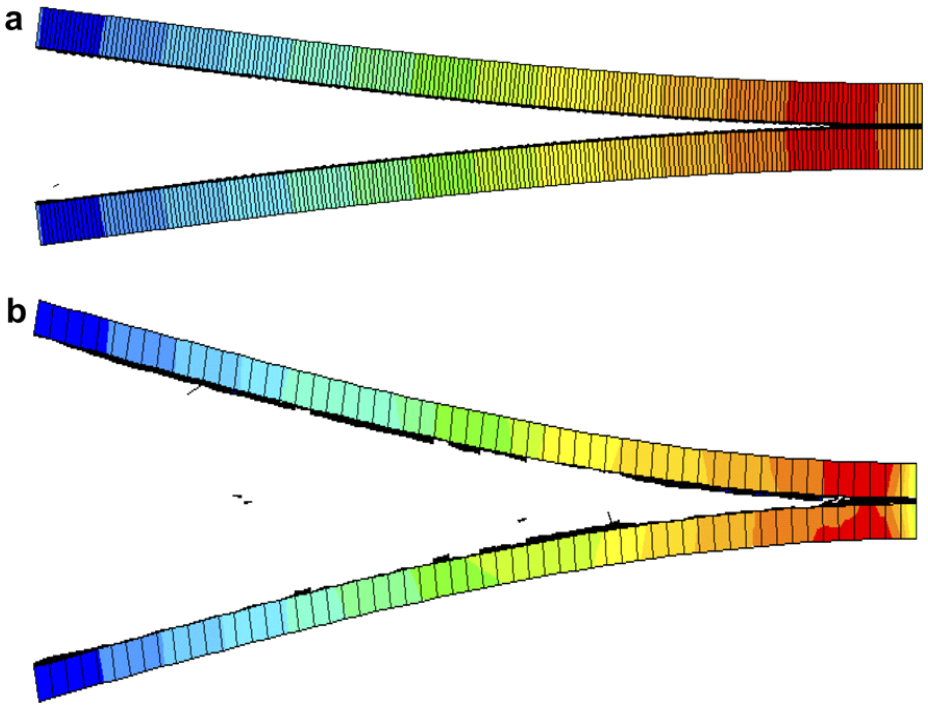
Σχήμα 1.5: Σχηματική αναπαράσταση της μεθόδου Virtual Crack Closure Technique.

Μια εναλλακτική μεθοδολογία βασίζεται στην μοντελοποίηση της διεπιφάνειας μεταξύ του κολλητικού μέσου και προς κόλληση υλικού με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων διεπιφάνειας ενώ το κολλητικό μέσο εξακολουθεί να μοντελοποιείται με

πεπερασμένα στοιχεία συνεχούς μέσου (Goyal et al. 2008; Campilho et al. 2005; Conçalves et al. 2003; Tvergaard and Hutchinson 1993; Tvergaard and Hutchinson 1996).

Το μέγεθος του ρυθμού απελευθέρωσης ενέργειας εξακολουθεί να είναι κεντρική παράμετρος της εν λόγω μεθοδολογίας. Η μέθοδος αυτή επιτρέπει την πρόβλεψη της έναρξης και διάδοσης της αποκόλλησης χωρίς την ύπαρξη αρχικών ατελειών και οδηγεί στον υπολογισμό του μέγιστου φορτίου που δύναται να παραλάβει ο προς μοντελοποίηση σύνδεσμος.

Το σημαντικό μειονέκτημα της εν λόγω μεθόδου είναι ότι η τροχιά που θα ακολουθήσει η ρωγμή είναι προκαθορισμένη από τα σημεία τοποθέτησης των πεπερασμένων στοιχείων διεπιφάνειας. Οι Goyal et al. 2008 μοντελοποίησαν αριθμητικά την συμπεριφορά σε θραύση ενός δοκιμίου DCB (Double Cantilever Beam). Οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν πεπερασμένα στοιχεία συνεχούς μέσου για την μοντελοποίηση των αλουμινένιων δοκών και του κολλητικού μέσου. Εισήγαγαν πεπερασμένα στοιχεία διεπιφάνειας τόσο στην διεπιφάνεια κολλητικού μέσου/ δοκών όσο και μεταξύ των πεπερασμένων στοιχείων συνεχούς μέσου που χρησιμοποιήθηκαν για την μοντελοποίηση του κολλητικού μέσου. Κατ' αυτόν τον τρόπο μοντελοποίησαν τόσο αστοχίες στην διεπιφάνεια όσο και εντός του κολλητικού μέσου, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.6.



Σχήμα 1.6: Μοντελοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία διεπιφάνειας, συνδέσμου DCB.

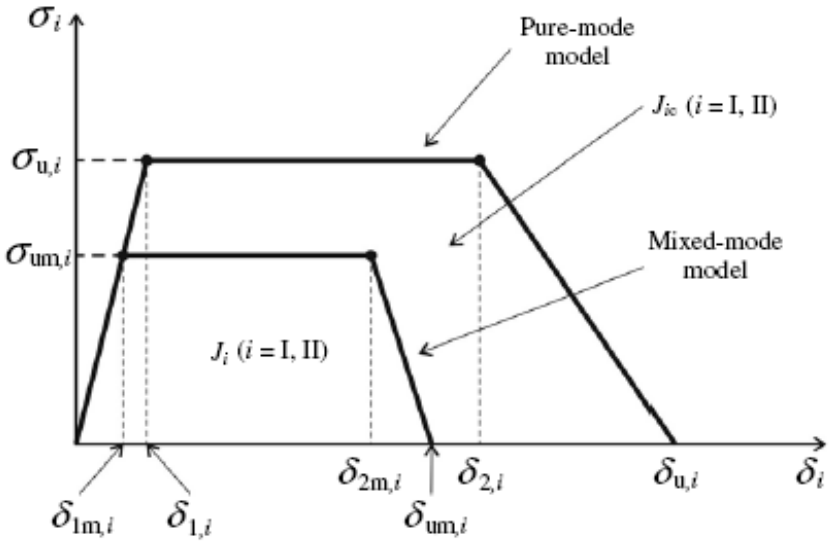
Οι Campilho et al. 2005 τοποθέτησαν πεπερασμένα στοιχεία διεπιφάνειας στην διεπιφάνεια κολλητικού μέσου/ προς κόλληση υλικών και μεταξύ των στρώσεων υλικών από σύνθετα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν για την δημιουργία συνδέσμων μονής και διπλής επικάλυψης. Έτσι πρόβλεψαν αστοχίες εντός του κολλητικού μέσου, στην διεπιφάνεια και αστοχίες μήτρας και αποκόλλησης στρώσεων συνδέσμων από σύνθετα υλικά.

Μια εναλλακτική μεθοδολογία για την πρόβλεψη της φόρτισης και αστοχίας συνδέσμων με κολλητικά μέσα βασίζεται στην προσέγγιση Embedded Process Zone (EPZ), η οποία εισήχθηκε από τον Thouless και τους συνεργάτες του (Yang et al. 1999; Li et al. 2005; Yang et al. 2001; Yang and Thoughless 2001). Με βάση την EPZ προσέγγιση το κολλητικό μέσο λειτουργεί ως το μέσο το οποίο παρέχει ελκυστές στα προς κόλληση υλικά. Η προσέγγιση αυτή αριθμητικά βασίζεται στη χρήση πεπερασμένων στοιχείων διεπιφάνειας στα πλαίσια τεχνικών Cohesive Zone Modeling (CZM). Από αριθμητικής σκοπιάς το συνεχές μέσο εκπροσωπείται εξ' ολοκλήρου από πεπερασμένα στοιχεία διεπιφάνειας τα οποία μοντελοποιούν την κινηματική εντός της EPZ. Οι καταστατικές σχέσεις δίνονται σε μορφή ελκυστών – σχετικών μετατοπίσεων (απομακρύνσεων) σε φόρτιση και θραύση Τύπου I (Yang et al. 1999; Li et al. 2005) και Τύπου II (Yang et al. 2001; de Moura et al. 2009), αντίστοιχα.

Η προσέγγιση EPZ έχει χρησιμοποιηθεί επίσης, για την προσομοίωση συνδέσμων όπου η συμπεριφορά του κολλητικού μέσου χαρακτηρίζεται από μεικτού τύπου φόρτιση και θραύση (Yang and Thoughless 2001; de Moura et al. 2009; Campilho et al. 2009a; Campilho et al. 2008; Campilho et al. 2009b; Li et al. 2006). Οι Yang και Thoughless (2001) χρησιμοποίησαν την EPZ προσέγγιση για την αριθμητική πρόβλεψη γεωμετριών οι οποίες δέχονται υψηλής έντασης πλαστικές παραμορφώσεις υπό την δράση μεικτού τύπου φόρτιση (T-peel και συνδέσμους μονής επικάλυψης). Οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν ένα κριτήριο αστοχίας μαζί με το μέγεθος γωνία φάσης (phase angle) με σκοπό να συσχετίσουν τους τραπεζοειδείς νόμους σε καθαρή φόρτιση και θραύση Τύπου I και Τύπου II και έτσι να προκύψει ένα μεικτού τύπου EPZ μοντέλο.

Ο Campilho και οι συνεργάτες του (de Moura et al. 2009; Campilho et al. 2009a; Campilho et al. 2008; Campilho et al. 2009b) ανέπτυξαν ένα μοντέλο αστοχιών μεικτού τύπου για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς όλκιμων κολλητικών μέσων με τη χρήση τραπεζοειδούς σχήματος καταστατικών νόμων (βλέπε Σχήμα 1.7) που περιγράφουν την φόρτιση και θραύση κάθε Τύπου, στα πλαίσια της Ελαστοπλαστικής Θραυστομηχανικής (Elastic Plastic Fracture Mechanics). Το μοντέλο που βασίζεται στους τραπεζοειδείς νόμους

έχει αποδειχτεί αποτελεσματικό για την σύζευξη της συμπεριφοράς της διεπιφάνειας και του κολλητικού μέσου (πλαστικότητα και αστοχία).

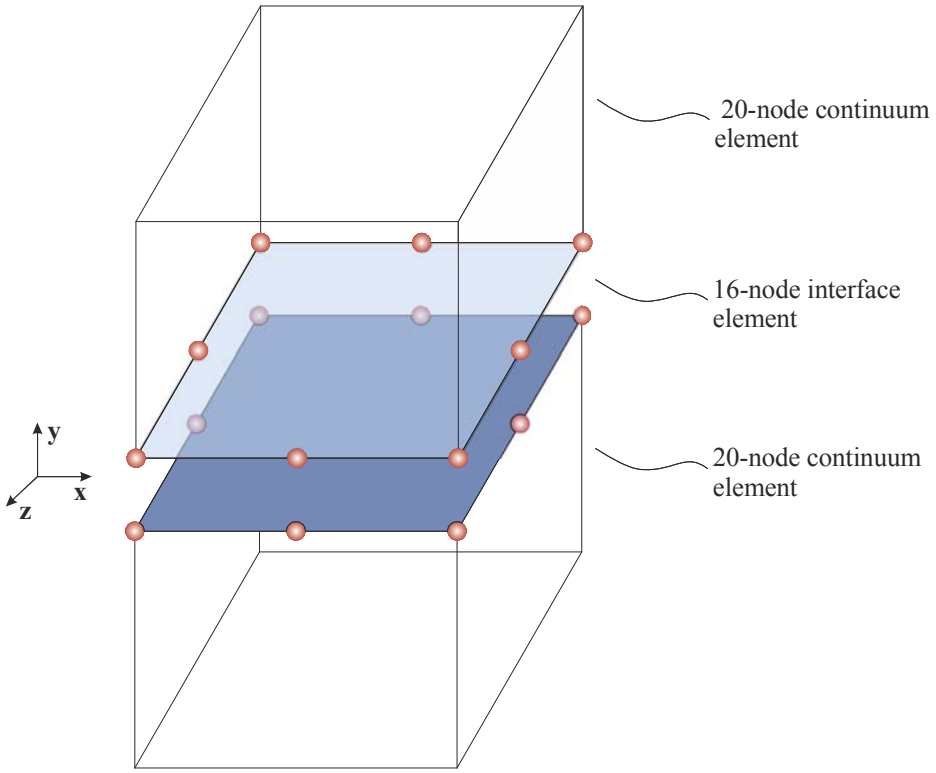


Σχήμα 1.7: Τραπεζοειδές μοντέλο μεικτού τύπου φόρτισης και θραύσης.

Στα πλαίσια της εν λόγω διπλωματικής εργασίας, αναπτύχθηκε ένα νέο 3-διάστατο μοντέλο το οποίο λαμβάνει υπ 'όψιν την ελαστική, πλαστική και θραυστομηχανική συμπεριφορά όλκιμων κολλητικών μέσων που χρησιμοποιούνται για την κατασκευαστική σύνδεση όμοιων ή ανόμοιων υλικών. Το μοντέλο αυτό επιβεβαιώθηκε μέσω συγκρίσεων μεταξύ αριθμητικών αποτελεσμάτων και πειραματικών μετρήσεων από δύο κλασσικούς συνδέσμους που χρησιμοποιούνται από την διεθνή βιβλιογραφία για την μελέτη του κολλητικού μέσου. Το προτεινόμενο μοντέλο βασίζεται στην προσέγγιση EPZ που αναπτύσσεται στην περιοχή της κόλλησης κατά την διάρκεια της φόρτισης ενός συνδέσμου με κολλητικά μέσα και αποτελείται από τρεις συζευγμένους νόμους τάσης-απομάκρυνσης, έναν σε φόρτιση και θραύση Τύπου I, II και III, αντίστοιχα. Αρχικά, η μαθηματική περιγραφή των αμιγών νόμων EPZ παρουσιάζεται για θραύση και αστοχία Τύπου I, II και III. Εν συνεχεία, παρουσιάζεται η σύζευξη των νόμων που γίνεται μέσω κριτηρίων θραύσης και αστοχίας με σκοπό την μοντελοποίηση καταστάσεων μεικτού Τύπου φόρτισης και αστοχίας. Το προτεινόμενο μοντέλο χρησιμοποιήθηκε ως η καταστατική εξίσωση πεπερασμένων στοιχείων διεπιφάνειας.

2. Αριθμητική διατύπωση 3-διάστατου ΠΣ διεπιφάνειας

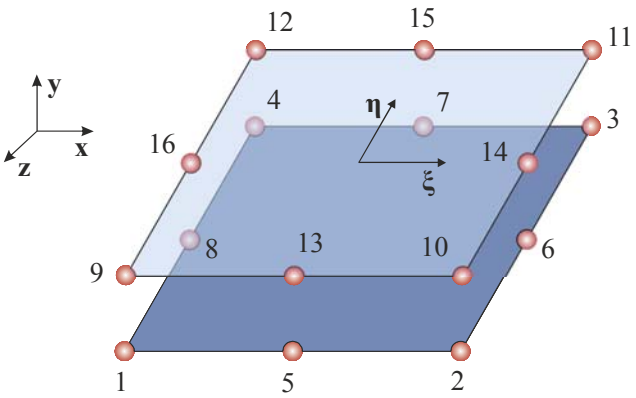
Το πεπερασμένο στοιχείο διεπιφάνειας (interface or cohesive element) που παρουσιάζεται, χρησιμοποιείται για την αριθμητική προσομοίωση των φαινομένων που δημιουργούνται και εξελίσσονται σε προβλήματα θραυστομηχανικής όπου ενδεχομένως αναπτύσσεται και διαδίδεται φυσική ασυνέχεια. Το εν λόγω στοιχείο αποτελείται από δύο τετραγωνικής μορφής επίπεδα στοιχεία όπου περιγράφουν την κινηματική και μηχανική στον 3-διάστατο χώρο. Τα δύο επιμέρους στοιχεία συνδέουν δύο επιμέρους γειτονικές έδρες δύο 3-διάστατων πεπερασμένων στοιχείων συνεχούς μέσου, αντίστοιχα. Κάθε επίπεδο στοιχείο αποτελείται από 8 κόμβους δηλαδή το πεπερασμένο στοιχείο αποτελείται από 16 κόμβους στο σύνολο. Έτσι το 3-διάστατο πεπερασμένο στοιχείο έχει συνδεσιμότητα με 20-κομβα 3-διάστατα στοιχεία όγκου συνεχούς μέσου, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Συνδεσιμότητα του 16-κομβου πεπερασμένου στοιχείου διεπιφάνειας με δύο 20-κομβα πεπερασμένα στοιχεία συνεχούς μέσου.

Τα δύο επιμέρους επίπεδα του πεπερασμένου στοιχείου διεπιφάνειας στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση βρίσκονται στην ίδια θέση (συμπίπτοντες κόμβοι - μηδενικό

πάχος) και απομακρύνονται ως συνέπεια της παραμόρφωσης των στοιχείων όγκου που συνδέουν. Στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζεται το γονικό 3-διάστατο πεπερασμένο στοιχείο (parent element) διεπιφάνειας μαζί με το καθολικό σύστημα αναφοράς (x-y-z) και το αντίστοιχο τοπικό καμπυλόγραμμο σύστημα αναφοράς (ξ-η). Επίσης στο σχήμα αυτό παρουσιάζεται η αρίθμηση των κόμβων, η οποία είναι συμβατή με το ABAQUS. Οι σχετικές μετατοπίσεις (relative displacements - separations) που προκύπτουν από τις μετακινήσεις των δύο επιμέρους επιπέδων, μετασχηματίζονται σε κάθετες και εφαπτομενικές στο μέσο επίπεδο σχετικές απομακρύνσεις (ορθές και διατμητικές). Οι τελευταίες παράγουν ελκυστές (tractions) στις αντίστοιχες διευθύνσεις, μέσω της καταστατικής εξίσωσης που διέπει την διεπιφάνεια.



Σχήμα 2.2: 3-διάστατο πεπερασμένο στοιχείο διεπιφάνειας.

Κάθε κόμβος του πεπερασμένου στοιχείου έχει 3 βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή μια μετακίνηση σε κάθε άξονα ενός 3-διάστατου καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (u_x, u_y, u_z). Έτσι οι συνολικοί επικόμβιοι βαθμοί ελευθερίας του 3-διάστατου πεπερασμένου στοιχείου διεπιφάνειας είναι 48 (3x16). Το διάνυσμα των επικόμβιων βαθμών ελευθερίας δίνεται ως:

$$u_N = \left\{ u_x^1 \quad u_y^1 \quad u_z^1 \quad u_x^2 \quad u_y^2 \quad u_z^2 \quad .... \quad u_x^{16} \quad u_x^{16} \quad u_x^{16} \right\}^T = \left\{ \overset{1x24}{\left\{ u_N^{\text{κάτω}} \right\}} \middle| \overset{1x24}{\left\{ u_N^{\text{άνω}} \right\}} \right\}^T \tag{2.1}$$

Η διαφορά των επικόμβιων μετατοπίσεων του άνω και του κάτω επιπέδου που ορίζει τις επικόμβιες σχετικές μετατοπίσεις υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta u_N = \left\{ u_N^{\text{άνω}} - u_N^{\text{κάτω}} \right\} \tag{2.2}$$

Ως άνω επίπεδο ορίζεται αυτό που αποτελείται από τους κόμβους 9 - 16 και ως κάτω επίπεδο αυτό που αποτελείται από τους κόμβους 1 – 8, ακολουθώντας τη σύμβαση του Σχήματος 2. Η ανωτέρω εξίσωση σε προγραμματιστικό περιβάλλον γράφεται ως:

$$\left\{\Delta u_{\mathrm{N}}\right\}^{24\mathrm{x}1} = \left[\Phi\right]^{24\mathrm{x}48} \begin{Bmatrix} u_{\mathrm{N}}^{\text{άνω}} \\ u_{\mathrm{N}}^{\text{κάτω}} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \left[-\mathrm{I}\right]^{24\mathrm{x}24} & \left[\mathrm{I}\right]^{24\mathrm{x}24} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_{\mathrm{N}}^{\text{κάτω}} \\ u_{\mathrm{N}}^{\text{άνω}} \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

Το μητρώο [Φ] αποτελείται από δύο επιμέρους τετραγωνικούς μοναδιαίους πίνακες διαστάσεων 24 x 24 τοποθετημένους σε σειρά. Για την ενδοπαρεμβολή των επικόμβιων σχετικών μετατοπίσεων εντός της επιφάνειας του πεπερασμένου στοιχείου χρησιμοποιούνται συναρτήσεις μορφής που αποτελούνται από τετραγωνικά πολυώνυμα ως προς το γονικό σύστημα συντεταγμένων (ξ, η). Έστω N_i (ξ, η) είναι οι συναρτήσεις σχήματος που αντιστοιχούν σε κάθε ζεύγος κόμβων, όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.1, όπου το ξ και το η έχουν πεδίου ορισμού [-1,1].

Πίνακας 2.1: Ζεύγη κόμβων

	Ζεύγος κόμβων	
i	*Κόμβος 1*	*Κόμβος 2*
1	1	9
2	2	10
3	3	11
4	4	12
5	5	13
6	6	14
7	7	15
8	8	16

Κάθε συνάρτηση σχήματος παίρνει την τιμή 1 στο ζεύγος κόμβων όπου αυτή αντιστοιχεί και την τιμή 0 στους υπόλοιπους κόμβους. Οι συναρτήσεις μορφής για το εν λόγω στοιχείο παρατίθενται ακολούθως:

$$N_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_5 + N_8) \tag{2.4 α}$$

$$N_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_5 + N_6) \tag{2.4 β}$$

$$N_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(N_6 + N_7) \tag{2.4 γ}$$

$$N_4(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)-\frac{1}{2}(N_7+N_8) \tag{2.4 δ}$$

$$N_5(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \tag{2.4 ε}$$

$$N_6(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \tag{2.4 ζ}$$

$$N_7(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \tag{2.4 η}$$

$$N_8(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \tag{2.4 θ}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω συναρτήσεις σχήματος μπορούν να υπολογιστούν οι σχετικές μετατοπίσεις εντός του πεπερασμένου στοιχείου από τις αντίστοιχες επικόμβιες τιμές:

$$\Delta u(\xi,\eta)=\begin{Bmatrix}\Delta u_x(\xi,\eta)\\ \Delta u_y(\xi,\eta)\\ \Delta u_z(\xi,\eta)\end{Bmatrix}=H(\xi,\eta)\Delta u_N \tag{2.5}$$

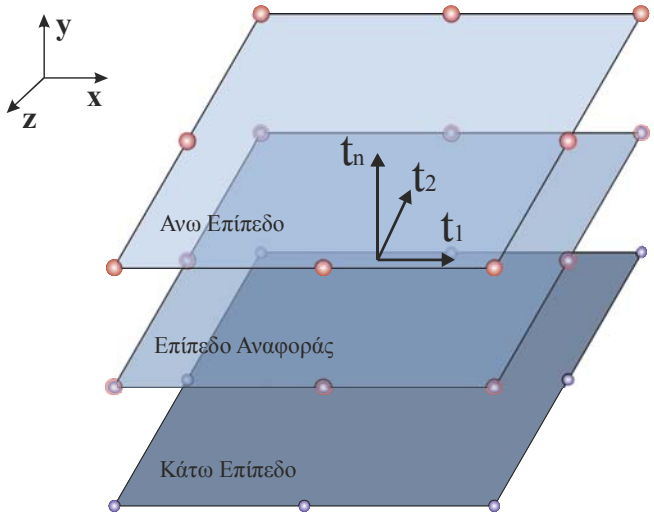
Όπου το διάνυσμα Δu είναι διαστάσεων 3x1 ενώ το μητρώο $H(\xi, \eta)$ είναι διαστάσεων 3x48 και ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$H(\xi,\eta)=\left[\mathrm{N}_1(\xi,\eta)\mathrm{I}_{3x3}\middle|\mathrm{N}_2(\xi,\eta)\mathrm{I}_{3x3}\middle| \quad .... \quad \middle|\mathrm{N}_8(\xi,\eta)\mathrm{I}_{3x3}\right] \tag{2.6}$$

Συνδυάζοντας την Εξίσωση (2.3) με την Εξίσωση (2.5) προκύπτει το μητρώο B διαστάσεων 3x48 το οποίο συνδέει το διάνυσμα Δu με το διάνυσμα των επικόμβιων βαθμών ελευθερίας u_N:

$$\Delta u(\xi,\eta)=\mathrm{B}u_N=\mathrm{H}(\xi,\eta)\Phi u_N \tag{2.7}$$

Ορίζεται ένα επίπεδο αναφοράς που βρίσκεται στο μέσο επίπεδο μεταξύ των δύο επιμέρους επιπέδων που ορίζουν το 3-διάστατο πεπερασμένο στοιχείο διεπιφάνειας (το άνω και το κάτω επίπεδο), όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Τα τρία επίπεδα που ορίζουν το 3-διάστατο πεπερασμένο στοιχείο διεπιφάνειας.

Οι συντεταγμένες του επιπέδου αναφοράς ορίζονται ως η μέση τιμή των συντεταγμένων του άνω και κάτω επιπέδου μέσω της Εξίσωσης 2.8.

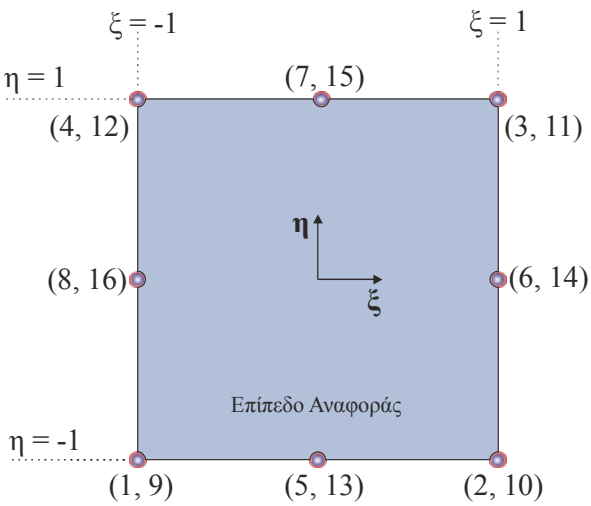
$$x_{\mathrm{N}}^{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\left(x_{\mathrm{N}}^{\text{άνω}} - x_{\mathrm{N}}^{\text{κάτω}}\right) \tag{2.8}$$

Όπου $x_{\mathrm{N}}^{\text{άνω}}$ και $x_{\mathrm{N}}^{\text{κάτω}}$ είναι οι συντεταγμένες του άνω και του κάτω επιπέδου σε μια συγκεκριμένη θέση υπολογισμένη κατά την μη-γραμμική επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας, αντίστοιχα. Έτσι για τον υπολογισμό των τελευταίων μεγεθών προστίθενται οι αντίστοιχες συντεταγμένες των κόμβων στην απαραμόρφωτη (αρχική) κατάσταση $\mathrm{X}_{\mathrm{N}}^{\text{κάτω}}$ και $\mathrm{X}_{\mathrm{N}}^{\text{άνω}}$ με τις αντίστοιχες μετατοπίσεις στο συγκεκριμένο βήμα της μη-γραμμικής λύσης, ως εξής:

$$x_{\mathrm{N}}^{\text{κάτω}} = \mathrm{X}_{\mathrm{N}}^{\text{κάτω}} + u_{\mathrm{N}}^{\text{κάτω}} \tag{2.9 α}$$

$$x_{\mathrm{N}}^{\text{άνω}} = \mathrm{X}_{\mathrm{N}}^{\text{άνω}} + u_{\mathrm{N}}^{\text{άνω}} \tag{2.9 β}$$

Όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.3, στο επίπεδο αναφοράς ορίζεται μια ορθοκανονική τριάδα μοναδιαίων διανυσμάτων η οποία αποτελείται από δύο εφαπτομενικά διανύσματα t_1 και t_2 και από ένα κάθετο στο επίπεδο διάνυσμα t_{n}. Για τον υπολογισμό των διανυσμάτων αυτών απαιτείται η συνεχής περιγραφή των συντεταγμένων του επιπέδου αναφοράς (βλέπε Σχήμα 2.4).



Σχήμα 2.4: Επίπεδο αναφοράς 16-κομβου 3-διάστατου πεπερασμένου στοιχείου διεπιφάνειας.

Έτσι οι συντεταγμένες κάθε σημείου που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο αναφοράς υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το μητρώο συναρτήσεων μορφής ως εξής:

$$x^{\mathrm{R}} = \mathrm{H}(\xi,\eta)\, x_{\mathrm{N}}^{\mathrm{R}} \tag{2.10}$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι παράλληλο στον ξ και στον η άξονα, αντίστοιχα.

$$v_{\xi} = \frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial \xi} \frac{1}{\left\| \frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial \xi} \right\|} \tag{2.11 α}$$

$$v_{\eta} = \frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial \eta} \frac{1}{\left\| \frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial \eta} \right\|} \tag{2.11 β}$$

Για τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων $\frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial \xi}$ και $\frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial \eta}$ χρησιμοποιείται η Εξίσωση (2.10) στην Εξίσωση (2.11).

$$\frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\mathrm{H}(\xi,\eta)\, x_{\mathrm{N}}^{\mathrm{R}}\right) = x_{\mathrm{N}}^{\mathrm{R}} \frac{\partial \mathrm{H}(\xi,\eta)}{\partial \xi} \tag{2.12 α}$$

$$\frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mathrm{H}(\xi,\eta)\, x_{\mathrm{N}}^{\mathrm{R}}\right) = x_{\mathrm{N}}^{\mathrm{R}} \frac{\partial \mathrm{H}(\xi,\eta)}{\partial \eta} \qquad (2.12\ \beta)$$

Όπου $\frac{\partial \mathrm{H}(\xi,\eta)}{\partial \xi}$ και $\frac{\partial \mathrm{H}(\xi,\eta)}{\partial \eta}$ είναι η πρώτη μερική παράγωγος των συναρτήσεων μορφής (Εξισώσεις (2.4 α-θ)) και δίνονται ως εξής:

$$N_{1,\xi}(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}(1-\eta) - \frac{1}{2}\left(N_{5,\xi} + N_{8,\xi}\right) \qquad (2.\ 13\alpha)$$

$$N_{2,\xi}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\eta) - \frac{1}{2}\left(N_{5,\xi} + N_{6,\xi}\right) \qquad (2.13\ \beta)$$

$$N_{3,\xi}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\eta) - \frac{1}{2}\left(N_{6,\xi} + N_{7,\xi}\right) \qquad (2.13\ \gamma)$$

$$N_{4,\xi}(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}(1+\eta) - \frac{1}{2}\left(N_{7,\xi} + N_{8,\xi}\right) \qquad (2.13\ \delta)$$

$$N_{5,\xi}(\xi,\eta) = -\xi(1-\eta) \qquad (2.13\ \varepsilon)$$

$$N_{6,\xi}(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right) \qquad (2.13\ \zeta)$$

$$N_{7,\xi}(\xi,\eta) = -\xi(1+\eta) \qquad (2.13\ \eta)$$

$$N_{8,\xi}(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right) \qquad (2.13\ \theta)$$

$$N_{1,\eta}(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi) - \frac{1}{2}\left(N_{5,\eta} + N_{8,\eta}\right) \qquad (2.14\ \alpha)$$

$$N_{2,\eta}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi) - \frac{1}{2}\left(N_{5,\eta} + N_{6,\eta}\right) \qquad (2.14\ \beta)$$

$$N_{3,\eta}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi) - \frac{1}{2}\left(N_{6,\eta} + N_{7,\eta}\right) \qquad (2.14\ \gamma)$$

$$N_{4,\eta}(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)-\frac{1}{2}\left(N_{7,\eta}+N_{8,\eta}\right) \tag{2.14 δ}$$

$$N_{5,\eta}(\xi,\eta)=-\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right) \tag{2.14 ε}$$

$$N_{6,\eta}(\xi,\eta)=-\eta(1+\xi) \tag{2.14 ζ}$$

$$N_{7,\eta}(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right) \tag{2.14 η}$$

$$N_{8,\eta}(\xi,\eta)=-\eta(1-\xi) \tag{2.14 θ}$$

Το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα t_{n} (βλέπε Σχήμα 2.3) ισούται με το εξωτερικό γινόμενο των συνεπίπεδων ορθογωνικών μοναδιαίων διανυσμάτων v_{ξ} και v_{η}. Έτσι το τοπικό κάθετο διάνυσμα στο καμπυλόγραμμο μέσο επίπεδο ισούται με:

$$t_{\mathrm{n}}=v_{\xi}\times v_{\eta}=\left(\frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial\xi}\times\frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial\eta}\right)\frac{1}{\left\|\frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial\xi}\times\frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial\eta}\right\|} \tag{2.15}$$

Οι συνιστώσες του οποίου υπολογίζονται ως εξής:

$$t_{\mathrm{n}}^{1}=\frac{y_{\xi}\cdot z_{\eta}-z_{\xi}\cdot y_{\eta}}{|J|} \tag{2.16 α}$$

$$t_{\mathrm{n}}^{2}=\frac{z_{\xi}\cdot x_{\eta}-x_{\xi}\cdot z_{\eta}}{|J|} \tag{2.16 β}$$

$$t_{\mathrm{n}}^{3}=\frac{x_{\xi}\cdot y_{\eta}-y_{\xi}\cdot x_{\eta}}{|J|} \tag{2.16 γ}$$

Όπου x_{ξ}, y_{ξ}, z_{ξ} και x_{η}, y_{η}, z_{η} είναι η πρώτη παράγωγος των συντεταγμένων κάθε σημείου που βρίσκεται στο επίπεδο αναφοράς ως προς ξ και ως προς η, αντίστοιχα. Το μέτρο του διανύσματος t_{n} ισούται με την Ιακωβιανή ορίζουσα του μητρώου μετασχηματισμού και ο υπολογισμός της γίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$|J| = \left\| \frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial \xi} \times \frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial \eta} \right\| = \sqrt{\left(y_\xi \cdot z_\eta - z_\xi \cdot y_\eta\right)^2 + \left(z_\xi \cdot x_\eta - x_\xi \cdot z_\eta\right)^2 + \left(x_\xi \cdot y_\eta - y_\xi \cdot x_\eta\right)^2} \tag{2.17}$$

Το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα t_1 το παίρνουμε ίσο και παράλληλο με το v_ξ:

$$t_1 = \frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial \xi} \frac{1}{\left\| \frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial \xi} \right\|} \tag{2.18}$$

και οι συνιστώσες του οποίου δίνονται ως εξής:

$$t_1^1 = \frac{x_\xi}{|J_1|} \tag{2.19 α}$$

$$t_1^2 = \frac{y_\xi}{|J_1|} \tag{2.19 β}$$

$$t_1^3 = \frac{z_\xi}{|J_1|} \tag{2.19 γ}$$

Το μέτρο του διανύσματος t_1 ισούται με:

$$|J_1| = \left\| \frac{\partial x^{\mathrm{R}}}{\partial \xi} \right\| = \sqrt{x_\xi + y_\xi + z_\xi} \tag{2.20}$$

Με σκοπό να δημιουργηθεί μια ορθοκανονική βάση t_1 - t_2 - t_{n} το μοναδιαίο διάνυσμα t_2 δίνεται από το εξωτερικό γινόμενο των μοναδιαίων t_1 - t_{n}.

$$t_2 = t_1 \times t_{\mathrm{n}} \tag{2.21}$$

Με συνιστώσες:

$$t_2^1 = t_{\mathrm{n}}^2 t_1^3 - t_{\mathrm{n}}^3 t_1^2 \tag{2.22 α}$$

$$t_2^2 = t_{\mathrm{n}}^3 t_1^1 - t_{\mathrm{n}}^1 t_1^3 \tag{2.22 β}$$

$$t_2^3 = t_n^1 t_1^2 - t_n^2 t_1^1 \tag{2.22 γ}$$

Στο σημείο αυτό μπορεί να οριστεί το μητρώο στροφής Θ που περιλαμβάνει τα τρία ορθοκανονικά μοναδιαία διανύσματα t_1 - t_2 - t_n:

$$\Theta = \begin{bmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_n^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_n^3 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Οι σχετικές μετατοπίσεις που δίνονται από την Εξίσωση (2.7) και εκφράζονται στο σύστημα x-y-z μπορούν να μετασχηματιστούν χρησιμοποιώντας το μητρώο στροφής Θ, ως προς την ορθοδοντική τριάδα t_1 - t_2 - t_n.

$$\Delta u_{1-2-n}(\xi,\eta) = \Theta^{\mathrm{T}} \Delta u(\xi,\eta) \tag{2.24}$$

και σε μητρωική γραφή:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^1 & t_1^2 & t_1^3 \\ t_2^1 & t_2^2 & t_2^3 \\ t_n^1 & t_n^2 & t_n^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_z \end{Bmatrix} \tag{2.25}$$

Έχοντας υπολογίσει το τοπικό σύστημα συντεταγμένων ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων, καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός του διανύσματος με τις εσωτερικές επικόμβιες δυνάμεις και του μητρώου δυσκαμψίας του 3-διάστατου πεπερασμένου στοιχείου διεπιφάνειας. Λαμβάνοντας υπόψη τη θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων και στροφών και αμελώντας αδρανειακές και δυνάμεις πεδίου η έκφραση των δυνατών έργων για ένα σώμα όγκου V που περιέχει διάφορες διεπιφάνειες S_{coh}, γράφεται ως εξής:

$$\int_V \sigma \nabla^{\mathrm{s}} \delta u \, \mathrm{d}V + \int_{S_{\mathrm{coh}}} \delta \Delta u^{\mathrm{T}} t_{\mathrm{coh}} \, \mathrm{d}S_{\mathrm{coh}} = \int_{S_{\mathrm{ext}}} \delta u^{\mathrm{T}} t_{\mathrm{ext}} \, \mathrm{d}S_{\mathrm{ext}} \tag{2.26}$$

όπου σ είναι ο τανυστής Cauchy των τάσεων, u είναι το πεδίο των μετατοπίσεων, Δu είναι οι σχετικές μετατοπίσεις ανά ζευγάρι κόμβων και t_{ext} και t_{coh} είναι οι ελκυστές (tractions) που ασκούνται στις εξωτερικές και εσωτερικές επιφάνειες του πεπερασμένου στοιχείου

διεπιφάνειας στην συγκεκριμένη παραμορφωσιακή κατάσταση. Έτσι οι επικόμβιες εσωτερικές δυνάμεις ορίζουν ένα διάνυσμα 48 x 1 θέσεων $f_{\mathrm{N}}^{\mathrm{el}}$ το οποίο ορίζεται ως:

$$f_{\mathrm{N}}^{\mathrm{el}} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} B^{\mathrm{T}}\Theta^{\mathrm{T}} t_{\mathrm{loc}} \left|J\right| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{2.27}$$

Το διάνυσμα των ελκυστών t_{loc} περιέχει τις τρεις τάσεις (φόρτιση και θραύση σε Mode I, II και III) που αναπτύσσονται στο εσωτερικό του πεπερασμένου στοιχείου και εκφράζονται μέσω της καταστατικής σχέσης της διεπιφάνειας ως συνάρτηση των σχετικών μετατοπίσεων $\Delta u_{1-2-\mathrm{n}}$.

$$t_{\mathrm{loc}} = \begin{Bmatrix} t_{\mathrm{Mode\,III}} \\ t_{\mathrm{Mode\,II}} \\ t_{\mathrm{Mode\,I}} \end{Bmatrix} = C\left(\Delta u_{1-2-\mathrm{n}}\right) \tag{2.28}$$

Το εφαπτομενικό μητρώο δυσκαμψίας του 3-διάστατου 16-κομβου πεπερασμένου στοιχείου διεπιφάνειας 48 x 48 θέσεων K^{el} ορίζεται ως (σύμβαση πρόσημου με βάση το ABAQUS):

$$\mathrm{K}^{\mathrm{el}} = -\frac{\partial f_{\mathrm{N}}^{\mathrm{el}}}{\partial d_{\mathrm{N}}} = -\int_{\mathrm{el}} B^{\mathrm{T}} \frac{\partial t_{\mathrm{loc}}}{\partial \Delta u} B \,\mathrm{dS}_{\mathrm{el}} \tag{2.29}$$

που καταλήγει στην εξής μορφή:

$$\mathrm{K}^{\mathrm{el}} = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} B^{\mathrm{T}}\Theta^{\mathrm{T}} C_{\mathrm{loc}} \Theta B \left|J\right| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{2.30}$$

Όπου C_{loc} είναι το 3 x 3 εφαπτομενικό μητρώο δυσκαμψίας της καταστατικής σχέσης του υλικού της διεπιφάνειας

$$C_{\mathrm{loc}} = \frac{\partial t_{\mathrm{loc}}}{\partial \Delta u_{1-2-n}} \tag{2.31}$$

και σε μητρωική γραφή:

$$C_{\text{loc}} = \begin{bmatrix} C_{\text{Mode III}} & & \\ & C_{\text{Mode II}} & \\ & & C_{\text{Mode I}} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Οι εκτός διαγωνίου όροι οδηγούν σε σύζευξη μεταξύ των μορφών φόρτισης και αστοχίας. Γενικά παραλείπονται και θεωρούνται ίσοι με το μηδέν καθώς η σύζευξη μεταξύ των μορφών προκύπτει από την μαθηματική κατάστρωση – διατύπωση των καταστατικών σχέσεων.

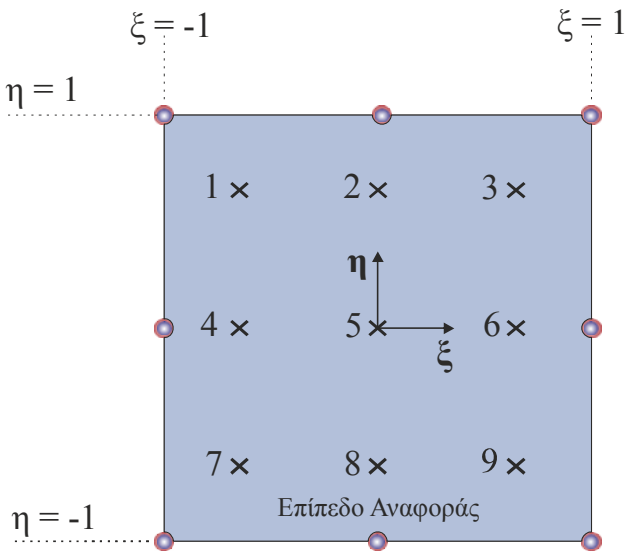
Για τον υπολογισμό των f_{N}^{el} και K^{el} που δίνονται από τις Εξισώσεις (2.27) και (2.30), αντίστοιχα, χρησιμοποιείται αριθμητική ολοκλήρωση Gauss που βασίζεται στη σχέση:

$$\text{I} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\left(\xi,\eta\right)\text{d}\xi\text{d}\eta \cong \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} W_i W_j f\left(\xi_i,\eta_j\right) \tag{2.33}$$

όπου m και n είναι τα σημεία ολοκλήρωσης κατά μήκος του ξ και η άξονα, τα μεγέθη W_i και W_j είναι τα βάρη Gauss στο συγκεκριμένο σημείο ολοκλήρωσης (i, j), αντίστοιχα. Γενικά χρησιμοποιείται ίσος αριθμός σημείων ολοκλήρωσης κατά μήκος κάθε άξονα, οπότε δημιουργείται ένα σχήμα ολοκλήρωσης (m x m). Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε ένα σχήμα 3x3 σημείων Gauss το οποίο απέδωσε ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα. Το Σχήμα 2.5 και ο Πίνακας 2.2 παρουσιάζουν τις θέσεις των σημείων ολοκλήρωσης Gauss με τα αντίστοιχα βάρη που χρησιμοποιήθηκαν για την αριθμητική ολοκλήρωση του μητρώου δυσκαμψίας και του διανύσματος με τις εσωτερικές επικόμβιες δυνάμεις του πεπερασμένου στοιχείου διεπιφάνειας που αναπτύχθηκε.

Πίνακας 2.2: Σχήμα αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss 9 σημείων (3x3)

Σημείο Gauss	i	ξ_i	W_i	j	η_j	W_j
1	1	$-\sqrt{0.6}$	0.55555555555	1	$\sqrt{0.6}$	0.55555555555
2	2	0	0.88888888888	1	$\sqrt{0.6}$	0.55555555555
3	3	$\sqrt{0.6}$	0.55555555555	1	$\sqrt{0.6}$	0.55555555555
4	1	$-\sqrt{0.6}$	0.55555555555	2	0	0.88888888888
5	2	0	0.88888888888	2	0	0.88888888888
6	3	$\sqrt{0.6}$	0.55555555555	2	0	0.88888888888
7	1	$-\sqrt{0.6}$	0.55555555555	3	$-\sqrt{0.6}$	0.55555555555
8	2	0	0.88888888888	3	$-\sqrt{0.6}$	0.55555555555
9	3	$\sqrt{0.6}$	0.55555555555	3	$-\sqrt{0.6}$	0.55555555555



Σχήμα 2.5: Διάταξη 9 σημείων Gauss στο επίπεδο αναφοράς.

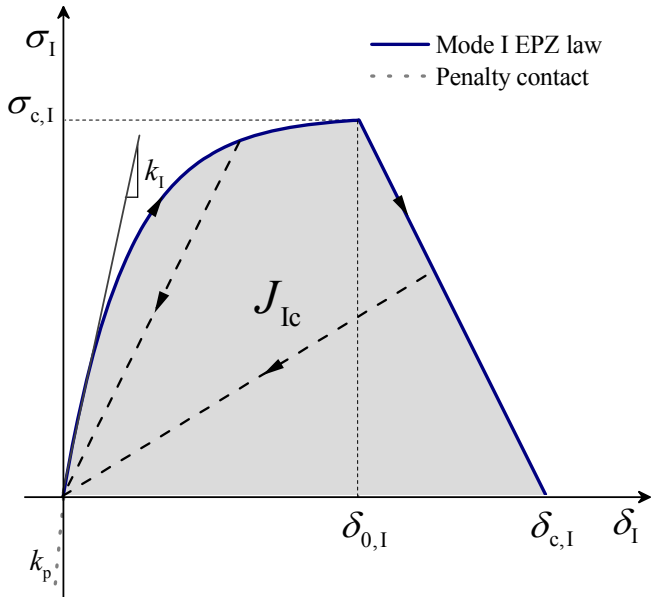
3. Καταστατικοί νόμοι 3-διάστατων ΠΣ στοιχείων διεπιφάνειας

Στα πλαίσια της ανάλυσης της δομικής ακεραιότητας συνδέσμων δομικών στοιχείων με κολλητικά μέσα, κατά βάση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, έχουν προταθεί διάφορες προσεγγίσεις που αφορούν στον τρόπο αντιμετώπισης του κολλητικού μέσου. Μια από τις προσεγγίσεις αυτές καλείται Embedded Process Zone (EPZ). Η γενική ιδέα που κρύβεται πίσω από τον όρο EPZ βασίζεται στην αντιμετώπιση της στρώσης του κολλητικού μέσου που συνδέει δύο όμοια ή ανόμοια υλικά ως το μέσο εκείνο που είναι υπεύθυνο για την παροχή και μεταφορά τάσεων – ελκυστών σ μεταξύ των προς σύνδεση δομικών στοιχείων (Yang and Thoughless 2001). Η περιγραφή της EPZ γίνεται μέσω της καταστατικής σχέσης που την εκπροσωπεί, δηλαδή της καταστατικής συμπεριφοράς του κολλητικού μέσου συμπεριλαμβανομένων και όλων των ειδών αστοχίας που λαμβάνουν χώρα κατά την χρονική ιστορία της φόρτισης του.

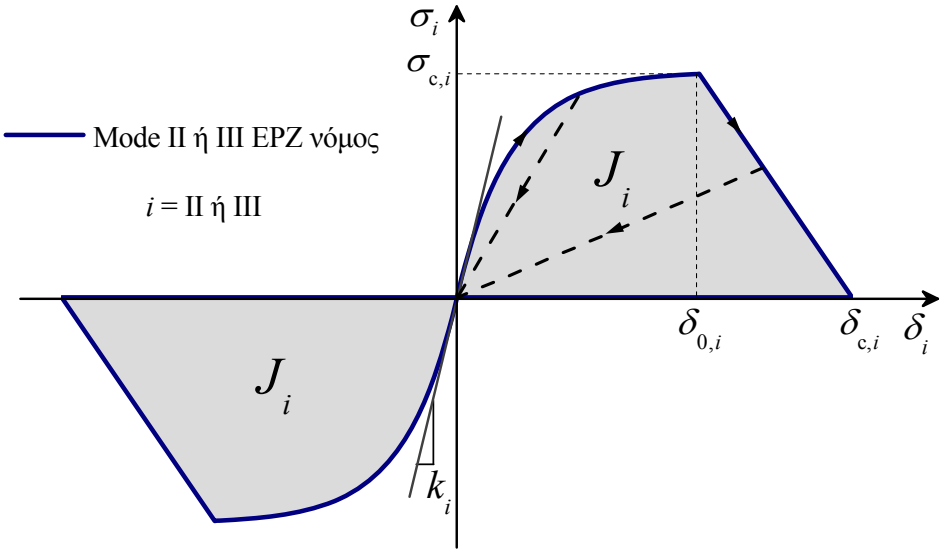
Η ανάπτυξη και αριθμητική διατύπωση ενός μοντέλου EPZ που περιγράφει την μεικτού τύπου φόρτιση και αστοχία (mixed-mode EPZ model) χωρίζεται σε δύο βασικά μέρη. Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει την ανάπτυξη ενός μοντέλου σε καθαρή φόρτιση και θραύση Τύπου I, II και III και εκφράζεται μέσω ενός νόμου Ελκυστή – Απομάκρυνσης (Traction-Separation law), $\sigma(\delta)$. Το μέγεθος δ ισούται με το μέγεθος Δu_{1-2-n} που ορίζεται στο Κεφάλαιο 2 και εκφράζει την τοπική απομάκρυνση των προς κόλληση δομικών στοιχείων (άνοιγμα σε μορφή φόρτισης και αστοχίας Τύπου I και διολίσθηση σε Τύπου II), που υπολογίζεται στην διεπιφάνεια των δύο στοιχείων. Ένας $\sigma(\delta)$ νόμος αποτελείται αρχικά από μια αυξητική συμπεριφορά των ελκυστών έως ένα μέγιστο σημείο και ακολουθεί μία καθοδική συνάρτηση μέχρι το σημείο όπου οι τάσεις μηδενίζονται και διατηρούνται στο μηδέν (σημείο όπου υφίσταται φυσική αποκόλληση - ρωγμή). Το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει την ενσωμάτωση κριτηρίων βλάβης και αστοχίας με σκοπό την σύζευξη των νόμων σε καθαρή φόρτιση και θραύση με σκοπό την ανάπτυξη του μοντέλου μεικτού Τύπου φόρτισης και θραύσης.

3.1 Νόμοι σε φόρτιση και θραύση Τύπου I, II και III.

Η περιγραφή που ακολουθεί και αφορά τον προτεινόμενο EPZ νόμο εφαρμόζεται σε 3-διάστατες αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων συνδέσμων με κολλητικά μέσα και για το σκοπό αυτό έχουν ληφθεί υπ' όψιν η φόρτιση και θραύση Τύπου I, II και III. Το Σχήμα 3.1 παρουσιάζει μια γραφική αναπαράσταση του προτεινόμενου EPZ νόμου για την φόρτιση και θραύση Τύπου I, II και III (Mode I, Mode II και Mode III).



(α)



(β)

Σχήμα 3.1: Προτεινόμενος EPZ νόμος για φόρτιση και θραύση Τύπου I (α), II και III (β).

Ο ελκυστής σ_{I} που περιγράφει την φόρτιση και θραύση Τύπου I αφορά τις ορθές τάσεις που αναπτύσσονται κάθετα στο επίπεδο της επικάλυψης του κολλητικού μέσου (peel stresses), ενώ οι ελκυστές σ_{II} και σ_{III} αφορούν διατμητικές τάσεις (shear stresses). Η περιοχή όπου αυξάνονται οι τάσεις (μέχρι το μέγιστο σημείο) σε κάθε προτεινόμενο νόμο δίνεται από μια εκθετική συνάρτηση η οποία αποσκοπεί στο να περιγράψει την ελαστοπλαστική

συμπεριφορά ενός όλκιμου δομικού κολλητικού μέσου, σε αντίθεση με τον τραπεζοειδή νόμο όπου μετά από την γραμμική ελαστική περιοχή οι τάσεις διατηρούν ένα πλατό μέχρι να αρχίσουν την φθίνουσα πορεία (2ο σημείο αλλαγής κλίσης). Για την καθοδική περιγραφή χρησιμοποιείται μια γραμμική συνάρτηση. Η επιλογή του συγκεκριμένου σχήματος (εκθετική-γραμμική συμπεριφορά) του προτεινόμενου EPZ νόμου έγινε καθώς αποτελεί μια πολύ καλή αναλυτική προσέγγιση πειραματικών νόμων οι οποίοι έχουν υπολογισθεί από πειράματα συνδέσμων μεταξύ χάλυβα με κολλητικά μέσα, τόσο σε καθαρή φόρτιση και θραύση Τύπου I (Ji et al. 2010) όσο και Τύπου II (Leffler et al. 2007).

Η ακόλουθη αριθμητική διατύπωση του προτεινόμενου EPZ νόμου περιγράφει την καταστατική σχέση στοιχείων διεπιφάνειας (προγραμματισμένη σε μια UEL υπορουτίνα στα πλαίσια του εμπορικού πακέτου πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS® 6.10). Η αντιστρεπτότητα των νόμων (συμπεριφορά σε αποφόρτιση) έχει συμπεριληφθεί στους προτεινόμενους καταστατικούς νόμους, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1 (γραμμικές αποφορτίσεις). Για λόγους πληρότητας η αντιστρεπτότητα έχει συμπεριληφθεί και στα δύο μέρη του νόμου (αύξουσα και φθίνουσα πορεία).

Το πρώτο μέρος του EPZ νόμου περιγράφεται από μια εκθετική συνάρτηση η οποία δίνεται από την Εξίσωση 3.1. Η ακόλουθη μορφή περιλαμβάνει τόσο φόρτιση όσο και αποφόρτιση.

$$\sigma_i\left(\delta_i\right)=\frac{\sigma_{\mathrm{c},i}}{\delta_{i,\max}}\left[1-\exp\left(-\frac{\delta_{i,\max}k_i}{\sigma_{\mathrm{c},i}}\right)\right]\delta_i \qquad \text{for} \qquad 0\le\delta_i<\delta_{0,i} \tag{3.1}$$

Το μέγεθος $\sigma_{\mathrm{c},i}$ είναι η κρίσιμη τάση και το μέγεθος $\delta_{0,i}$ είναι η αντίστοιχη απομάκρυνση στο σημείο έναρξης βλάβης (damage initiation) σε συνθήκες καθαρής φόρτισης και θραύσης. Το μέγεθος $\delta_{i,\max}$ ισούται με την μέγιστη απομάκρυνση υπολογισμένη σε ένα συγκεκριμένο βήμα της μη-γραμμικής ανάλυσης. Κατά την διάρκεια της φόρτισης το δ_i αυξάνεται συνεχώς και το $\delta_{i,\max}$ αυξάνεται και αυτό συνεχώς, έτσι ώστε $\delta_i = \delta_{i,\max}$ και οι τάσεις ακολουθούν την εκθετική συνάρτηση. Παρ' όλα αυτά, εάν σε κάποιο χρονικό βήμα το υπολογισμένο δ_i είναι μικρότερο από το $\delta_{i,\max}$, τότε η αποφόρτιση έχει ξεκινήσει κι το μέγεθος $\delta_{i,\max}$ παραμένει σταθερό και ίσο με την τελευταία τιμή του μεγέθους δ_i. Κατά την αποφόρτιση οι τάσεις ακολουθούν τη γραμμική διαδρομή αποφόρτισης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.

Οι αρνητικές κάθετες τάσεις ($\sigma_{\mathrm{I}} < 0$) υποδηλώνουν συνθήκες επαφής μεταξύ των γειτονικών εδρών των στοιχείων όγκου και έτσι ο αλγόριθμος ποινής χρησιμοποιείται για την

προσομοίωση της επαφής στον EPZ νόμο, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1 και δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\sigma_{\mathrm{I}}\left(\delta_{\mathrm{I}}\right)=k_{\mathrm{p}}\delta_{\mathrm{I}} \qquad \text{for} \qquad \delta_{\mathrm{I}}<0 \tag{3.2}$$

όπου το k_{p} είναι η ποινή ($\approx 10^5 \div 10^6$ MPa/mm). Θεωρείται πως οι αρνητικές τάσεις δεν συνεισφέρουν στην βλάβη του κολλητικού μέσου και έτσι αντιμετωπίζονται μόνο ως τάσεις επαφής. Η αρχική κλίση της Εξίσωσης 3.1 είναι ανεξάρτητη από την κρίσιμη τάση $\sigma_{\mathrm{c},i}$ και ισούται μόνο με τη δυσκαμψία k_i όπως παρουσιάζεται ακολούθως:

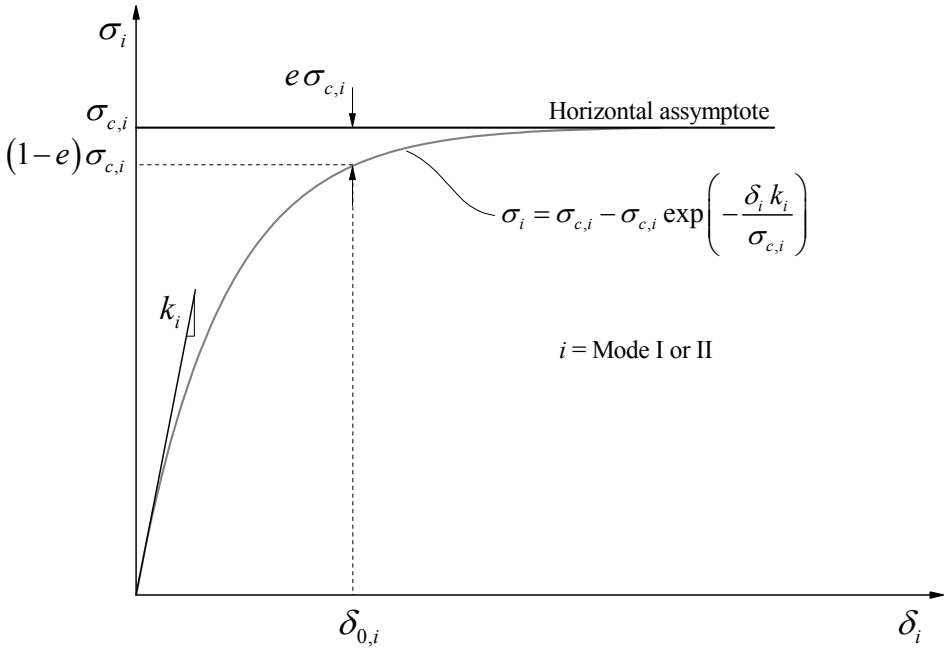
$$\left.\frac{\partial\sigma_i}{\partial\delta_i}\right|_{\delta_i=0}=k_i \tag{3.3}$$

Αυτό το χαρακτηριστικό της συγκεκριμένης εκθετικής συνάρτησης δίνει πλεονέκτημα στη διατύπωση του EPZ μοντέλου μεικτού τύπου φόρτισης και θραύσης το οποίο θα εξεταστεί αργότερα σε αυτό το κεφάλαιο.

Η αρχική κλίση (δυσκαμψία) k_i ορίζονται άμεσα για κάθε τύπο φόρτισης διαιρώντας την αντίστοιχη ελαστική σταθερά του κολλητικού μέσου προς το πάχος της κολλητικής στρώσης t_{a} (de Moura et al. 2009; Campilho et al. 2009a; Campilho et al. 2008; Campilho et al. 2009b) $k_{\mathrm{I}} = E_{\mathrm{a}} / t_{\mathrm{a}}$, $k_{\mathrm{II}} = G_{\mathrm{a}} / t_{\mathrm{a}}$ και $k_{\mathrm{III}} = k_{\mathrm{II}}$, όπου E_{a} και G_{a} είναι το μέτρο Young and διάτμησης του κολλητικού μέσου, αντίστοιχα.

Το μέγεθος $\delta_{0,i}$ μπορεί να ορισθεί απ' ευθείας ή να υπολογιστεί έμμεσα, λαμβάνοντας υπ' όψιν πως η εκθετική συνάρτηση (Εξίσωση 3.1), σε θεωρητική βάση, τείνει ασυμπτωτικά στην οριζόντια ασύμπτωτη $\sigma_{\mathrm{c},i}$. Έτσι η αντίστοιχη τετμημένη $\delta_{0,i}$ επιλέγεται να είναι ίση με $(1\text{-}e)\sigma_{\mathrm{c},i}$, όπου $(1\text{-}e)$ είναι η ανοχή (και e είναι το αριθμητικό σφάλμα) μεταξύ της θεωρητικής ασύμπτωτης $\sigma_{\mathrm{c},i}$ και της αντίστοιχης που χρησιμοποιείται στην αριθμητική ανάλυση, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.2. Αντικαθιστώντας το αριστερό μέρος της Εξίσωσης 3.1 με τον όρο $(1\text{-}e)\sigma_{\mathrm{c},i}$ και λύνοντας ως προς $\delta_{0,i}$, η ακόλουθη σχέση εξάγεται:

$$\delta_{0,i}=-\frac{\ln(e)\ \sigma_{\mathrm{c},i}}{k_i} \tag{3.4}$$



Σχήμα 3.2: Γραφική αναπαράσταση του αριθμητικού σφάλματος *e*.

Η έναρξη και διάδοση της αστοχίας περιγράφεται αριθμητικά στον EPZ νόμο με μια φθίνουσα συνάρτηση (αρνητική κλίση) των τάσεων προς το μηδέν. Με τον όρο αστοχία νοείται κάθε είδους φυσική ρωγμή ή εκτεταμένη ανάπτυξη πορώδους τόσο εντός του κολλητικού μέσου όσο και στην διεπιφάνεια αυτού με τα προς σύνδεση υλικά. Μια γραμμική συνάρτηση χρησιμοποιήθηκε για την περιγραφή της χαλάρωσης των τάσεων και δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\sigma_i\left(\delta_i\right) = -\frac{(1-e)\sigma_{\mathrm{c},i}}{\delta_{\mathrm{c},i}-\delta_{0,i}}\delta_i + \frac{(1-e)\sigma_{\mathrm{c},i}\delta_{\mathrm{c},i}}{\delta_{\mathrm{c},i}-\delta_{0,i}} \qquad \text{για} \quad \delta_{0,i} \le \delta_i < \delta_{\mathrm{c},i} \tag{3.5}$$

όπου $\delta_{\mathrm{c},i}$ είναι η κρίσιμη απομάκρυνση. Με σκοπό να ληφθεί υπ' όψιν η αντιστρεψιμότητα (αποφόρτιση) στο γραμμικό μέρος όπου φθίνουν οι τάσεις, μια παράμετρος ελέγχου της έκτασης της αστοχίας *D* χρησιμοποιείται με πεδίο ορισμού [0,1].

$$D = 1 - \frac{\delta_{0,i}\left(\delta_{\mathrm{c},i}-\delta_{i,\max}\right)}{\delta_{i,\max}\left(\delta_{\mathrm{c},i}-\delta_{0,i}\right)} \tag{3.6}$$

Έτσι η περιγραφή των τάσεων μπορεί να ξαναγραφτεί στην ακόλουθη μορφή, η οποία δίνει τόσο την φόρτιση όσο και την αποφόρτιση στο γραμμικό μέρος του νόμου:

$$\sigma_i\left(\delta_i\right)=(1-D)(1-e)\sigma_{\mathrm{c},i}\frac{\delta_i}{\delta_{0,i}} \quad \text{για} \quad \delta_{0,i}\le\delta_i<\delta_{\mathrm{c},i} \tag{3.7}$$

Πέρα από την κρίσιμη απομάκρυνση, οι αντίστοιχες τάσεις απελευθερώνονται τελείως και θεωρούνται μηδέν.

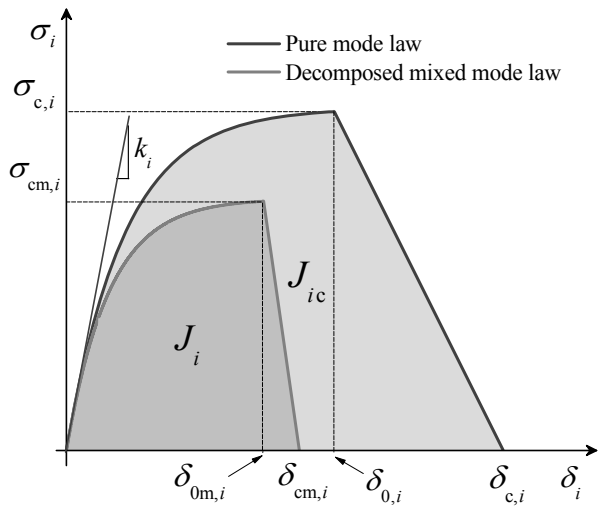
$$\sigma_i\left(\delta_i\right)=0 \quad \text{για} \quad \delta_i\ge\delta_{\mathrm{c},i} \tag{3.8}$$

Το συνολικό μέρος της ενέργειας που δαπανάται στο τέλος του EPZ νόμου δίνεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα της καμπύλης του προτεινόμενου EPZ νόμου.

$$J_{i\mathrm{c}}=\int_0^{\delta_{\mathrm{c},i}}\sigma_i d\delta_i=\frac{\sigma_{\mathrm{c},i}}{k_i}\left[k_i\delta_{0,i}-\sigma_{\mathrm{c},i}+\sigma_{\mathrm{c},i}\exp\left(-\frac{\delta_{0,i}k_i}{\sigma_{\mathrm{c},i}}\right)\right]+\frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{c},i}\left(\delta_{\mathrm{c},i}-\delta_{0,i}\right) \tag{3.9}$$

3.2 Σύζευξη EPZ νόμων

Έχοντας ορίσει τους EPZ νόμους σε καθαρή φόρτιση και θραύση Τύπου I, II και III, το επόμενο στάδιο είναι η μαθηματική διατύπωση του μεικτού τύπου-μοντέλο. Δύο περιπτώσεις ορίζονται, η μεν πρώτη περιλαμβάνει την συνεισφορά και των τριών Τύπων I, II και III στην ολική αστοχία ενώ στη δε περίπτωση οι ορθές τάσεις (σ_I) είναι αρνητικές και έτσι χρησιμοποιούνται μόνο για την περιγραφή των συνθηκών επαφής, οπότε συνεισφέρει μόνο η θραύση Τύπου II και III.



Σχήμα 3.3: Προτεινόμενος νόμος και μοντέλο μεικτού τύπου φόρτισης και αστοχίας.

3.2.1 Φόρτιση και θραύση Τύπου I , II και III

Η σύζευξη των τριών τύπων φόρτισης και αστοχίας βασίζεται στους λόγους μίξης της απομάκρυνσης των τύπων αστοχίας:

$$\beta_{\mathrm{II}} = \frac{\delta_{\mathrm{II}}}{\delta_{\mathrm{I}}} \text{ και } \beta_{\mathrm{III}} = \frac{\delta_{\mathrm{III}}}{\delta_{\mathrm{I}}} \tag{3.10}$$

και στην συνιστάμενη απομάκρυνση δ_{m}

$$\delta_{\mathrm{m}} = \sqrt{\delta_{\mathrm{I}}^2 + \delta_{\mathrm{II}}^2 + \delta_{\mathrm{III}}^2} \tag{3.11}$$

Η διατύπωση μεικτού τύπου βασίζεται στην Εξίσωση (3.10) και (3.11) για την σύνθεση του μεικτού Τύπου ΕΡΖ νόμου από τους τρεις καθαρούς ΕΡΖ νόμους υπό συγκεκριμένους λόγους μίξης. Οι ίδιες βασικές εξισώσεις συνδυασμένες με κριτήρια έναρξης και διάδοσης αστοχιών χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν τους τρεις επιμέρους νόμους που προκύπτουν από τον μεικτού Τύπου ΕΡΖ νόμο, υπό σταθερούς λόγους μίξης.

Για την πρόβλεψη της έναρξης αστοχιών υπό συνθήκες μεικτού τύπου φόρτισης, το τετραγωνικό κριτήριο τάσεων χρησιμοποιείται (Campilho et al. 2008):

$$\left(\frac{\left\langle \sigma_{\mathrm{cm,I}} \right\rangle}{\sigma_{\mathrm{c,I}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\mathrm{cm,II}}}{\sigma_{\mathrm{c,II}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\mathrm{cm,III}}}{\sigma_{\mathrm{c,III}}}\right)^2 = 1 \tag{3.12}$$

όπου $\sigma_{\mathrm{cm,I}}$, $\sigma_{\mathrm{cm,II}}$ και $\sigma_{\mathrm{cm,III}}$ είναι οι κρίσιμες τάσεις των ΕΡΖ νόμων που προκύπτουν από τον ΕΡΖ μεικτού Τύπου νόμο. Οι αγκύλες Macaulay $\langle\ \rangle$ χρησιμοποιούνται για να δείξουν πως οι αρνητικές κάθετες τάσεις δεν συνεισφέρουν στην αστοχία και έτσι το $\sigma_{\mathrm{cm,I}}$ είναι μηδέν και μόνο οι διατμητικές τάσεις $\sigma_{\mathrm{cm,II}}$ και $\sigma_{\mathrm{cm,III}}$ συνεισφέρουν στην ΕΡΖ.

Επιλύοντας την Εξίσωση (3.4) ως προς $\sigma_{\mathrm{c},i}$ και $\sigma_{\mathrm{cm},i}$ (for i = I, II και III) ξεχωριστά και αντικαθιστώντας στην Εξίσωση (3.12) το τετραγωνικό κριτήριο τάσεων ξαναγράφεται με βάση το πεδίο των απομακρύνσεων:

$$\left(\frac{\left\langle \delta_{0\mathrm{m,I}} \right\rangle}{\delta_{0,\mathrm{I}}}\right)^2 + \left(\frac{\delta_{0\mathrm{m,II}}}{\delta_{0,\mathrm{II}}}\right)^2 + \left(\frac{\delta_{0\mathrm{m,III}}}{\delta_{0,\mathrm{III}}}\right)^2 = 1 \tag{3.13}$$

όπου $\delta_{0\mathrm{m,I}}$, $\delta_{0\mathrm{m,II}}$ και $\delta_{0\mathrm{m,III}}$ είναι οι μεικτού τύπου προκύπτουσες απομακρύνσεις, σημείο που ξεκινάει η βλάβη. Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (3.10) και (3.11) στην Εξίσωση (3.13) η συνιστάμενη απομάκρυνση $\delta_{0\mathrm{m}}$ προκύπτει ως εξής:

$$\delta_{0\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{1+\beta_{\mathrm{II}}^2+\beta_{\mathrm{III}}^2}{\frac{1}{\delta_{0,\mathrm{I}}^2}+\frac{\beta_{\mathrm{II}}^2}{\delta_{0,\mathrm{II}}^2}+\frac{\beta_{\mathrm{III}}^2}{\delta_{0,\mathrm{III}}^2}}} \tag{3.14}$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (3.10) και (3.11) στην Εξίσωση (3.14) προκύπτει η απομάκρυνση σε φόρτιση και θραύση Τύπου Ι:

$$\delta_{0\mathrm{m,I}} = \frac{\delta_{0,\mathrm{m}}}{\sqrt{1+\beta_{\mathrm{II}}^2+\beta_{\mathrm{III}}^2}} \tag{3.15}$$

και σε φόρτιση και θραύση Τύπου ΙΙ και ΙΙΙ

$$\delta_{0\mathrm{m,II}} = \beta_{\mathrm{II}}\delta_{0\mathrm{m,I}} \text{ και } \delta_{0\mathrm{m,II}} = \beta_{\mathrm{III}}\delta_{0\mathrm{m,I}} \tag{3.16}$$

Έχοντας υπολογίσει το $\delta_{0\mathrm{m,I}}$, $\delta_{0\mathrm{m,II}}$ και $\delta_{0\mathrm{m,III}}$ οι προκύπτουσες κρίσιμες τάσεις $\sigma_{\mathrm{cm},i}$ μπορούν να υπολογιστούν για κάθε τύπο i, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (3.4).

$$\sigma_{\mathrm{cm},i} = -\frac{k_i\delta_{0\mathrm{m},i}}{\ln(e)} \tag{3.17}$$

Οι ΕΡΖ νόμοι από τον μεικτό νόμο που προκύπτουν διατηρούν την αρχική κλίση k_i (και έτσι την αρχική γραμμική ελαστική συμπεριφορά) από τους αντίστοιχους νόμους σε καθαρή φόρτιση και αστοχία, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.3. Το γεγονός αυτό αποδεικνύει το πλεονέκτημα της Εξίσωσης (3.1), με βάση το οποίο οι γραμμικά ελαστικές ιδιότητες του κολλητικού μέσου μοντελοποιούνται ανεξάρτητα από τους λόγους μίξης.

Για την πρόβλεψη της διάδοσης βλαβών στην στρώση με το κολλητικό μέσο χρησιμοποιείται το γραμμικό κριτήριο ενεργειών θραύσης (Εξίσωση (3.18)) με βάση το οποίο

υπάρχει σύζευξη μεταξύ των αντίστοιχων ενεργειών σε φόρτιση και θραύση Τύπου I (J_{I}), Τύπου II (J_{II}) και Τύπου III (J_{III}), (Campilho et al. 2008).

$$\frac{J_{\mathrm{I}}}{J_{\mathrm{Ic}}}+\frac{J_{\mathrm{II}}}{J_{\mathrm{IIc}}}+\frac{J_{\mathrm{III}}}{J_{\mathrm{IIIc}}}=1 \tag{3.18}$$

Από φυσικής σκοπιάς, η ικανοποίηση του ανωτέρου κριτηρίου δηλώνει πως οι τάσεις στην EPZ περιοχή μηδενίζονται και έτσι δημιουργούνται νέες ελεύθερες τάσεων επιφάνειες αστοχίας. Οι ενέργειες θραύσης J_i υπολογίζονται ομοίως όπως στην Εξίσωση (3.10), μέσα από το ορισμένο ολοκλήρωμα των νόμων που προκύπτουν από τον μεικτό EPZ νόμο:

$$J_i=\int_0^{\delta_{\mathrm{cm},i}}\sigma_i\,d\delta_i=\frac{\sigma_{\mathrm{cm},i}}{k_i}\left[k_i\delta_{0\mathrm{m},i}-\sigma_{\mathrm{cm},i}+\sigma_{\mathrm{cm},i}\exp\left(-\frac{\delta_{0\mathrm{m},i}k_i}{\sigma_{\mathrm{cm},i}}\right)\right]+\frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{cm},i}\left(\delta_{\mathrm{cm},i}-\delta_{0\mathrm{m},i}\right) \tag{3.19}$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (3.9) και (3.19) στην Εξίσωση (3.18) προκύπτει ακριβής υπολογισμός της προκύπτουσας απομάκρυνσης $\delta_{\mathrm{cm,I}}$, $\delta_{\mathrm{cm,II}}$ και $\delta_{\mathrm{cm,III}}$ αντίστοιχα:

$$\delta_{\mathrm{cm,I}}=\frac{2J_{\mathrm{Ic}}J_{\mathrm{IIc}}J_{\mathrm{IIIc}}-2C_{\mathrm{I}}J_{\mathrm{IIc}}J_{\mathrm{IIIc}}-2C_{\mathrm{II}}J_{\mathrm{Ic}}J_{\mathrm{IIIc}}-2C_{\mathrm{III}}J_{\mathrm{Ic}}J_{\mathrm{IIc}}+\delta_{0\mathrm{m,I}}J_{\mathrm{IIIc}}J_{\mathrm{IIc}}\sigma_{\mathrm{cm,I}}+\delta_{0\mathrm{m,II}}J_{\mathrm{Ic}}J_{\mathrm{IIIc}}\sigma_{\mathrm{cm,II}}+\delta_{0\mathrm{m,III}}J_{\mathrm{Ic}}J_{\mathrm{IIc}}\sigma_{\mathrm{cm,III}}}{J_{\mathrm{IIc}}J_{\mathrm{IIIc}}\sigma_{\mathrm{cm,I}}+\beta_{\mathrm{II}}J_{\mathrm{Ic}}J_{\mathrm{IIIc}}\sigma_{\mathrm{cm,II}}+\beta_{\mathrm{III}}J_{\mathrm{Ic}}J_{\mathrm{IIc}}\sigma_{\mathrm{cm,III}}} \tag{3.20α}$$

$$\delta_{\mathrm{cm,II}}=\beta_{\mathrm{II}}\delta_{\mathrm{cm,I}} \tag{3.20 β}$$

$$\delta_{\mathrm{cm,III}}=\beta_{\mathrm{III}}\delta_{\mathrm{cm,I}} \tag{3.20 γ}$$

όπου C_i (i = I, II και III) είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα των περιοχών των νόμων που προκύπτουν από τον μεικτό νόμο και περιγράφονται από την εκθετική συνάρτηση :

$$C_i=\left(\frac{\sigma_{\mathrm{cm},i}}{k_i}\right)\left[\left(\delta_{0\mathrm{m},i}k_i\right)+\sigma_{\mathrm{cm},i}\exp\left(-\frac{\delta_{0\mathrm{m},i}k_i}{\sigma_{\mathrm{cm},i}}\right)-\sigma_{\mathrm{cm},i}\right] \tag{3.21}$$

Το μέγεθος δ_{cm} υπολογίζεται από την Εξίσωση (3.11).

$$\delta_{\mathrm{cm}}=\sqrt{\delta_{\mathrm{cm,I}}^2+\delta_{\mathrm{cm,II}}^2+\delta_{\mathrm{cm,III}}^2} \tag{3.22}$$

Έχοντας υπολογίσει όλες τις απαραίτητες παραμέτρους ώστε να καθίσταται πλήρης η περιγραφή του μεικτού EPZ νόμου και των νόμων που προκύπτουν από αυτόν, η αριθμητική (προγραμματιστική) υλοποίηση περιγράφεται ακολούθως. Φόρτιση και αποφόρτιση έχουν ληφθεί υπ ' όψιν στους μεικτού Τύπου νόμους. Το μέρος του νόμου όπου οι τάσεις αυξάνονται εκθετικά περιγράφονται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\sigma_{\mathrm{m},i}\left(\delta_i\right)=\frac{\sigma_{\mathrm{cm},i}}{\delta_{i,\max}}\left[1-\exp\left(-\frac{\delta_{i,\max}k_i}{\sigma_{\mathrm{cm},i}}\right)\right]\delta_i \qquad \text{για} \qquad 0\le\delta_i<\delta_{0\mathrm{m},i} \tag{3.23}$$

Εισάγεται επίσης μια παράμετρος ελέγχου της έκτασης της αστοχίας D με πεδίο ορισμού [0,1]:

$$D=1-\frac{\delta_{0\mathrm{m}}\left(\delta_{\mathrm{cm}}-\delta_{\mathrm{m}}\right)}{\delta_{\mathrm{m}}\left(\delta_{\mathrm{cm}}-\delta_{0\mathrm{m}}\right)} \tag{3.24}$$

Το κομμάτι όπου χαλαρώνουν οι τάσεις και περιγράφεται από μια γραμμική φθίνουσα συνάρτηση δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\sigma_{\mathrm{m},i}\left(\delta_i\right)=(1-D)(1-e)\,\sigma_{\mathrm{cm},i}\frac{\delta_i}{\delta_{0\mathrm{m},i}} \qquad \text{για} \qquad \delta_{0\mathrm{m}}\le\delta_{\mathrm{m}}<\delta_{\mathrm{cm}} \tag{3.25}$$

Τέλος, η απελευθέρωση των τάσεων (μηδενισμός) μετά από την κρίσιμη απομάκρυνση δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\sigma_{\mathrm{m},i}\left(\delta_i\right)=0 \qquad \text{για} \qquad \delta_{\mathrm{m}}\ge\delta_{\mathrm{cm}} \tag{3.26}$$

3.2.2 Φόρτιση και θραύση Τύπου II και III

Η σύζευξη των δύο τύπων φόρτισης και αστοχίας βασίζεται στον λόγο μίξης της απομάκρυνσης των τύπων αστοχίας, όταν ισχύει για αρνητικές τάσεις επαφής:

$$\beta_{\mathrm{c}}=\frac{\delta_{\mathrm{II}}}{\delta_{\mathrm{III}}} \tag{3.27}$$

και στην συνιστάμενη απομάκρυνση δ_{m}

$$\delta_{\mathrm{m}} = \sqrt{\delta_{\mathrm{II}}^2 + \delta_{\mathrm{III}}^2} \tag{3.28}$$

Η διατύπωση μεικτού τύπου βασίζεται στην Εξίσωση (3.27) και (3.28) για την σύνθεση του μεικτού τύπου EPZ νόμου από τους δύο καθαρούς EPZ νόμους υπό συγκεκριμένο λόγο μίξης. Οι ίδιες βασικές εξισώσεις συνδυασμένες με κριτήρια έναρξης και διάδοσης αστοχιών χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν τους δυο επιμέρους νόμους που προκύπτουν από τον μεικτού τύπου EPZ νόμο, υπό σταθερό λόγο μίξης.

Για την πρόβλεψη της έναρξης αστοχιών υπό συνθήκες μεικτού τύπου φόρτισης, το τετραγωνικό κριτήριο τάσεων χρησιμοποιείται (Campilho et al. 2008):

$$\left(\frac{\sigma_{\mathrm{cm,II}}}{\sigma_{\mathrm{c,II}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\mathrm{cm,III}}}{\sigma_{\mathrm{c,III}}}\right)^2 = 1 \tag{3.29}$$

Επιλύοντας την Εξίσωση (3.4) ως προς $\sigma_{\mathrm{c},i}$ και $\sigma_{\mathrm{cm},i}$ (for i = II και III) ξεχωριστά και αντικαθιστώντας στην Εξίσωση (3.29) το τετραγωνικό κριτήριο τάσεων ξαναγράφεται με βάση το πεδίο των απομακρύνσεων:

$$\left(\frac{\delta_{\mathrm{0m,II}}}{\delta_{\mathrm{0,II}}}\right)^2 + \left(\frac{\delta_{\mathrm{0m,III}}}{\delta_{\mathrm{0,III}}}\right)^2 = 1 \tag{3.30}$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (3.27) και (3.28) στην Εξίσωση (3.30) η συνιστάμενη απομάκρυνση $\delta_{0\mathrm{m}}$ προκύπτει ως εξής:

$$\delta_{0\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{1+\beta_{\mathrm{c}}^2}{\dfrac{\beta_{\mathrm{c}}^2}{\delta_{\mathrm{0,II}}^2} + \dfrac{1}{\delta_{\mathrm{0,III}}^2}}} \tag{3.31}$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (3.27) και (3.28) στην Εξίσωση (3.30) προκύπτει η απομάκρυνση σε φόρτιση και θραύση Τύπου III:

$$\delta_{\mathrm{0m,III}} = \frac{\delta_{\mathrm{0,m}}}{\sqrt{1+\beta_{\mathrm{c}}^2}} \tag{3.32}$$

και σε φόρτιση και θραύση Τύπου ΙΙ

$$\delta_{0\mathrm{m,II}} = \beta_{\mathrm{c}} \delta_{0\mathrm{m,III}} \tag{3.33}$$

Έχοντας υπολογίσει το $\delta_{0\mathrm{m,II}}$ και $\delta_{0\mathrm{m,III}}$ οι προκύπτουσες κρίσιμες τάσεις $\sigma_{\mathrm{cm},i}$ μπορούν να υπολογιστούν για κάθε τύπο i, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (3.4).

$$\sigma_{\mathrm{cm},i} = -\frac{k_i \delta_{0\mathrm{m},i}}{\ln(e)} \tag{3.34}$$

Για την πρόβλεψη της διάδοσης βλαβών στην στρώση με το κολλητικό μέσο χρησιμοποιείται το γραμμικό κριτήριο ενεργειών θραύσης (Εξίσωση (3.35)) με βάση το οποίο υπάρχει σύζευξη μεταξύ των αντίστοιχων ενεργειών σε φόρτιση και θραύση Τύπου ΙΙ (J_{II}) και Τύπου ΙΙΙ (J_{III}), (Campilho et al. 2008).

$$\frac{J_{\mathrm{II}}}{J_{\mathrm{IIc}}} + \frac{J_{\mathrm{III}}}{J_{\mathrm{IIIc}}} = 1 \tag{3.35}$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (3.9) και (3.19) στην Εξίσωση (3.35) προκύπτει ακριβής υπολογισμός της προκύπτουσας απομάκρυνσης $\delta_{\mathrm{cm,II}}$ και $\delta_{\mathrm{cm,III}}$ αντίστοιχα:

$$\delta_{\mathrm{cm,III}} = \frac{2J_{\mathrm{IIc}}J_{\mathrm{IIIc}} - 2C_{\mathrm{I}}J_{\mathrm{IIc}}J_{\mathrm{IIIc}} - 2C_{\mathrm{II}}J_{\mathrm{IIIc}} - 2C_{\mathrm{III}}J_{\mathrm{IIc}} + \delta_{0\mathrm{m,II}}J_{\mathrm{IIIc}}\sigma_{\mathrm{cm,II}} + \delta_{0\mathrm{m,III}}J_{\mathrm{IIc}}\sigma_{\mathrm{cm,III}}}{J_{\mathrm{IIc}}\sigma_{\mathrm{cm,III}} + \beta_{\mathrm{c}}J_{\mathrm{IIIc}}\sigma_{\mathrm{cm,II}}} \tag{3.36 α}$$

$$\delta_{\mathrm{cm,II}} = \beta_{\mathrm{c}} \delta_{\mathrm{cm,III}} \tag{3.36 β}$$

όπου C_i (i = ΙΙ και ΙΙΙ) είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα των περιοχών των νόμων που προκύπτουν από τον μεικτό νόμο και περιγράφονται από την εκθετική συνάρτηση :

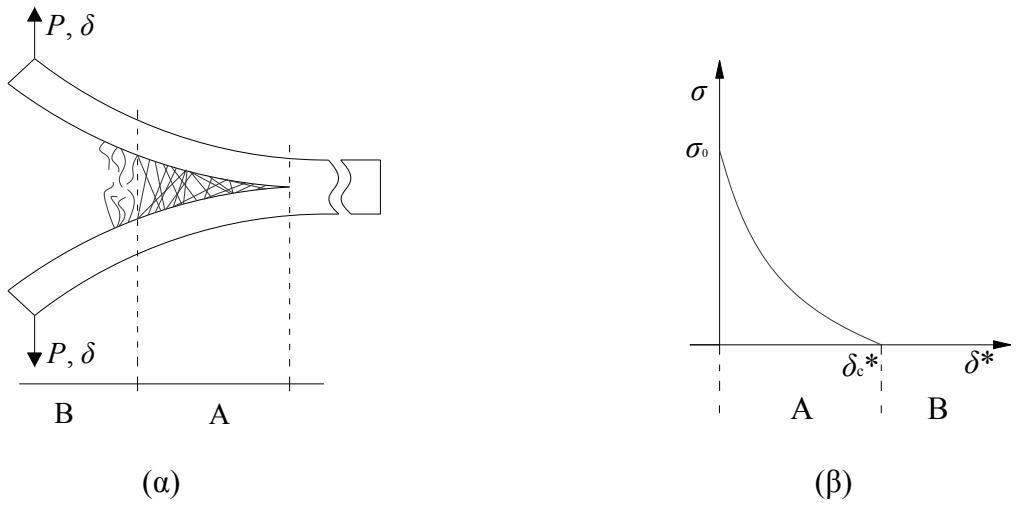
$$C_i = \left(\frac{\sigma_{\mathrm{cm},i}}{k_i}\right)\left[\left(\delta_{0\mathrm{m},i}k_i\right) + \sigma_{\mathrm{cm},i}\exp\left(-\frac{\delta_{0\mathrm{m},i}k_i}{\sigma_{\mathrm{cm},i}}\right) - \sigma_{\mathrm{cm},i}\right] \tag{3.37}$$

Το μέγεθος δ_{cm} υπολογίζεται από την Εξίσωση (3.28).

$$\delta_{\mathrm{cm}} = \sqrt{\delta_{\mathrm{cm,II}}^2 + \delta_{\mathrm{cm,III}}^2} \tag{3.38}$$

4. Αριθητική επιβεβαίωση 3-διάστατων στοιχείων

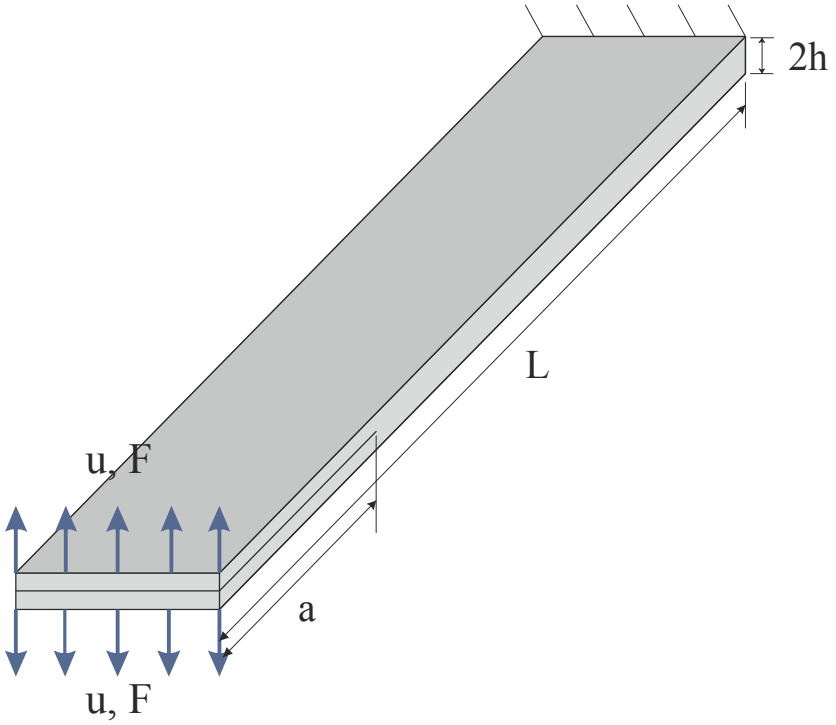
Με σκοπό την αριθμητική επιβεβαίωση και επαλήθευση του 3-διάστατου πεπερασμένου στοιχείου διεπιφάνειας που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, υιοθετήθηκε προς μοντελοποίηση ένα πρόβλημα θραυστομηχανικής το οποίο αποτελεί κλασσικό παράδειγμα αριθμητικής επαλήθευσης πεπερασμένων στοιχείων διεπιφάνειας. Το εν λόγω πρόβλημα βασίζεται στην μελέτη του φαινομένου "γεφύρωση ινών" (γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία ως fiber bridging) που εμφανίζεται κατά βάση σε θραύση Τύπου I σε ινώδη σύνθετα υλικά. Μια σχηματική απεικόνιση του φαινομένου αυτού παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.1 στα πλαίσια ενός πειράματος DCB (Double Cantilever Beam). Το φαινόμενο αυτό αναπτύσσεται κατά την αποκόλληση μεταξύ δύο στρώσεων ενός συνθέτου υλικού καθώς σε πρακτικό επίπεδο μια ρωγμή δεν ακολουθεί ποτέ την μέση διεπιφάνεια δύο διαδοχικών στρώσεων αλλά διακυμαίνεται στην ευρύτερη περιοχή μεταξύ των προηγούμενων. Έτσι μεμονωμένες ίνες ή ομάδες ινών "γεφυρώνουν" την περιοχή πίσω από το άκρο της ρωγμάτωσης (delamination) κατά τρόπο που τείνουν να επαναφέρουν τα μέτωπα της ρωγμής στην αρχική τους θέση. Οι ίνες λειτουργούν σαν ελατήρια που ασκούν τάσεις επαναφοράς στα δύο αντικριστά μέτωπα οι οποίες περιγράφονται από έναν νόμο ελκυστή-απομάκρυνσης όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.1 β.



Σχήμα 4.1: Η "Ζώνη Γεφύρωσης Ινών" σε πείραμα DCB (α) και ο αντίστοιχος νόμος τάσης - απομάκρυνσης που την περιγράφει (β).

Η αριθμητική υπολογιστική προσέγγιση του προβλήματος αυτού περιγράφεται από τους Alfano και Crisfield (2001). Οι συγγραφείς μοντελοποίησαν το φαινόμενο της

γεφύρωσης ινών στα πλαίσια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε 2-διάστατο χώρο (κατάσταση επίπεδης έντασης) ενός DCB δοκιμίου από σύνθετα υλικά. Η γεωμετρία του δοκιμίου παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2: Γεωμετρία δοκιμίου DCB για μελέτη θραύσης Τύπου I που χρησιμοποιήθηκε από τους Alfano και Crisfield (2001).

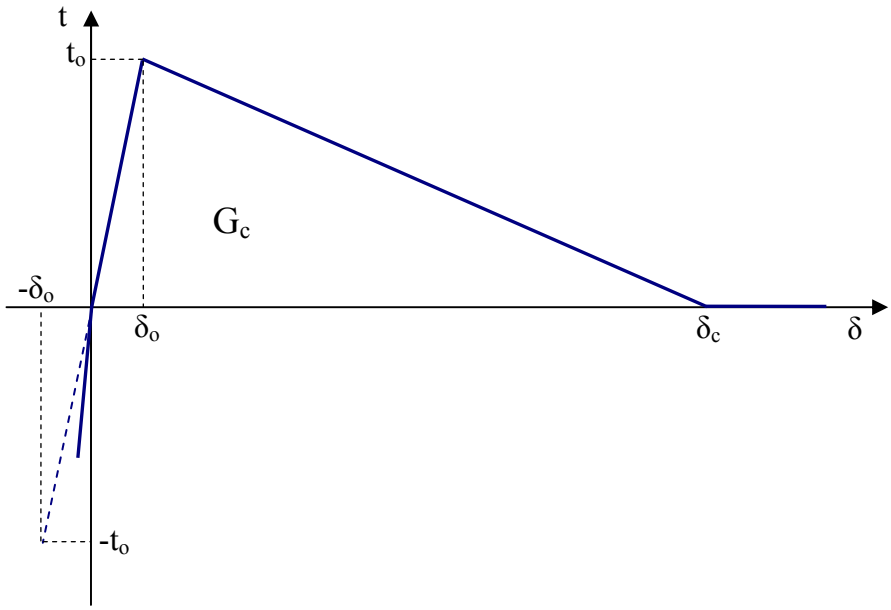
Το συνολικό μήκος L ισούται με 100 mm, το αρχικό μήκος της ρωγμής (προ-ρωγμή) a ισούται με 30 mm, το συνολικό πάχος του δοκιμίου h ισούται με 3 mm και το πλάτος του δοκιμίου w ισούται με 20 mm. Οι ιδιότητες του σύνθετου υλικού δίνονται στον Πίνακα 4.1.

Πίνακας 4.1: Ιδιότητες σύνθετου υλικού Alfano και Crisfield (2001)

E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	E_{33} (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{13} (GPa)	G_{13} (GPa)	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
135.3	9.0	9.0	5.2	4.0	4.0	0.24	0.24	0.46

Οι συγγραφείς τοποθέτησαν 2-διάστατα πεπερασμένα στοιχεία διεπιφάνειας στο μέσο επίπεδο στην περιοχή L - a. Η περιγραφή των τάσεων έγινε με βάση ενός τριγωνικού νόμου, ο οποίος είναι ευρέως διαδεδομένος στην διεθνή βιβλιογραφία (βλέπε Σχήμα 4.3). Για τον ορισμό του τριγωνικού νόμου απαιτούνται δύο παράμετροι: η μέγιστη τάση t_o και το θραυστομηχανικό μέγεθος της κρίσιμης ενέργειας απελευθέρωσης G_c η κρίσιμη τιμή της

απομάκρυνσης δ_c. Το μέγεθος G_c ισούται με το εμβαδό του τριγωνικού νόμου (ορισμένο ολοκλήρωμα). Η αρχική κλίση, που ορίζεται στην περιοχή μεταξύ 0 και δ_o αριθμητικά ισούται με μια πολύ υψηλή τιμή, καθώς πριν την έναρξη της θραύσης οι τάσεις μεταφέρονται από το ένα μέρος του υλικού στο άλλο μέσω της διεπιφάνειας αναλλοίωτες. Έτσι προκύπτει μια πολύ μικρή τιμή του μεγέθους δ_o, κατά τρόπο που το πρώτο σκέλος του τριγωνικού νόμου είναι αμελητέο ($\delta_o \ll \delta_c$).



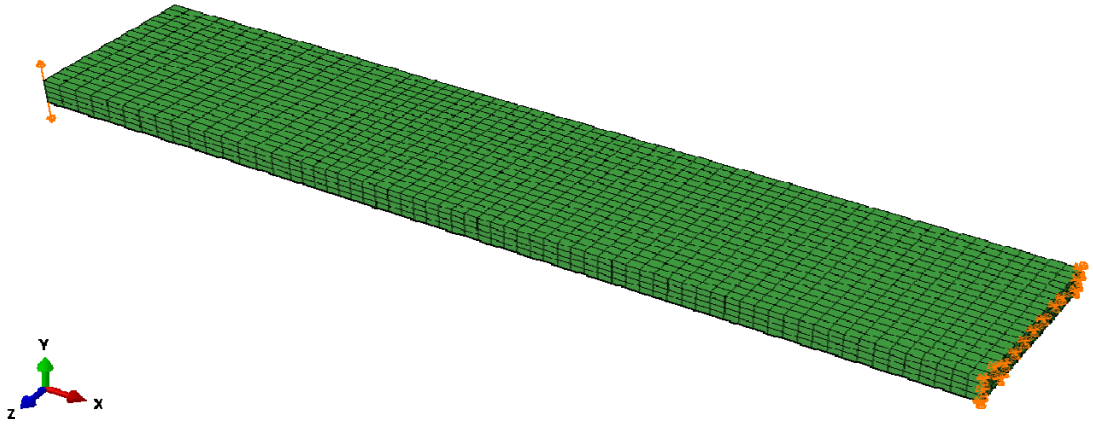
Σχήμα 4.3: Τριγωνικός νόμος τάσεων - απομακρύνσεων για την περιγραφή της καταστατικής σχέσης πεπερασμένων στοιχείων διεπιφάνειας.

Επιπρόσθετα κάθε νόμος τάσεων - απομακρύνσεων σε θραύση Τύπου I που περιγράφει την διεπιφάνεια ενός συνεχούς μέσου συμπεριλαμβάνει την μαθηματική διατύπωση συνθηκών μηχανικής επαφής (contact conditions) για την σωστή μοντελοποίηση της περιοχής που βρίσκεται μπροστά από το άκρο της ρωγμής ($\delta < 0$). Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας χρησιμοποιήθηκε ο κλασσικός αλγόριθμος ποινής (penalty contact) για την αντιμετώπιση των συνθηκών επαφής. Οι ιδιότητες που χρησιμοποιήθηκαν για τον τριγωνικό νόμο παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2.

Πίνακας 4.2: Ιδιότητες τριγωνικού νόμου Alfano και Crisfield (2001)

t_n (MPa)	G_c (N/mm)	δ_0 (mm)	δ_c (mm)
1.7	0.28	0.0006	0.3294

Στα πλαίσια της αριθμητικής επιβεβαίωσης των αναπτυγμένων 3-διάστατων πεπερασμένων στοιχείων διεπιφάνειας μοντελοποιήθηκε η εργασία των Alfano και Crisfield (2001). Η γεωμετρία του Σχήματος 4.2 χρησιμοποιήθηκε για την δημιουργία πλέγματος 3-διάστατων πεπερασμένων στοιχείων συνεχούς μέσου στο εμπορικό πακέτο ABAQUS 6.10 (βλέπε Σχήμα 4.4). Χρησιμοποιήθηκαν 5200 εικοσάκομβα εξάεδρα ΠΣ με κωδική ονομασία C3D20.

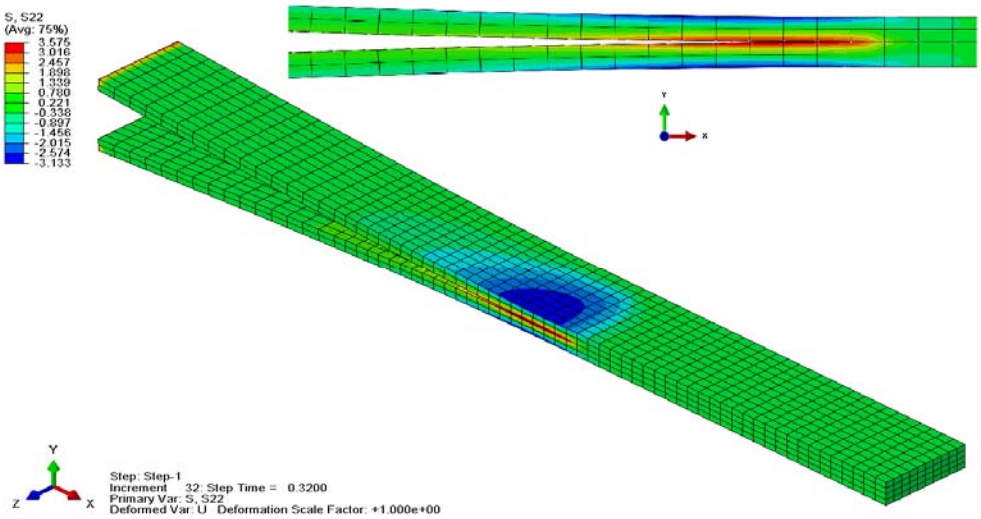


Σχήμα 4.4: Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων του DCB δοκιμίου.

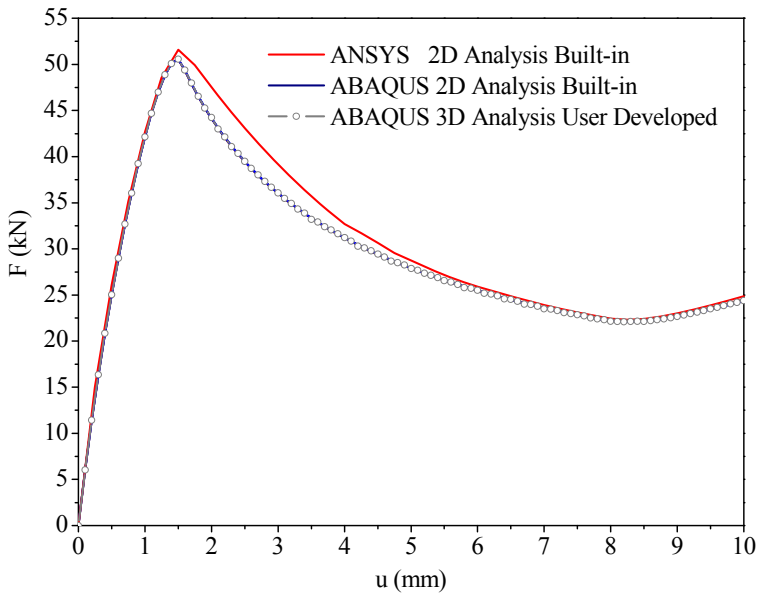
Οι βαθμοί ελευθερίας των κόμβων της δεξιάς συνοριακής διατομής του μοντέλου δεσμεύτηκαν ($U_x = U_y = U_z = 0$) ενώ η μετατόπιση στον εγκάρσιο (κατά το πάχος) βαθμό ελευθερίας των κόμβων της άνω και κάτω πλευράς της αριστερής διατομής δεσμεύτηκαν αντίστοιχα μεταξύ τους. Ασκήθηκε μετατόπιση u στα πλαίσια της μη γραμμικής ανάλυσης με την μέθοδο Newton Raphson. Στο Σχήμα 4.5 παρουσιάζεται το μισό μοντέλο DCB (διαμήκης τομή) με σκοπό να παρουσιαστούν οι κατανομές των ορθών τάσεων σ_y. Στο εν λόγω σχήμα διαφαίνεται η κόκκινη περιοχή πίσω από το άκρο της ρωγμής, γεγονός που υποδηλώνει την ύπαρξη θλιπτικών ορθών τάσεων (γεφύρωμα ινών).

Στο Σχήμα 4.6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σε μορφή ασκούμενη μετατόπιση - δύναμη όπως προέκυψαν από αναλύσεις 2 διαστάσεων με τα ήδη υπάρχοντα στην βιβλιοθήκη του Abaqus και του Ansys στοιχεία και τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα που

προέκυψαν από τις 3-διάστατες αναλύσεις με βάση τα ανεπτυγμένα πεπερασμένα στοιχεία διεπιφάνειας και τον τριγωνικό νόμο που περιγράφεται ανωτέρω. Συμπεραίνουμε με βάση το σχήμα αυτό πως τα αποτελέσματα από το Abaqus συμπίπτουν με πολύ καλή ακρίβεια ενώ υπάρχει μια διαφορά μικρότερη του 10% από τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από το Ansys.



Σχήμα 4.5: Κατανομή ορθών τάσεων σ_y του DCB δοκιμίου (παρουσιάζεται το μισό συμμετρικό στο x-y επίπεδο).

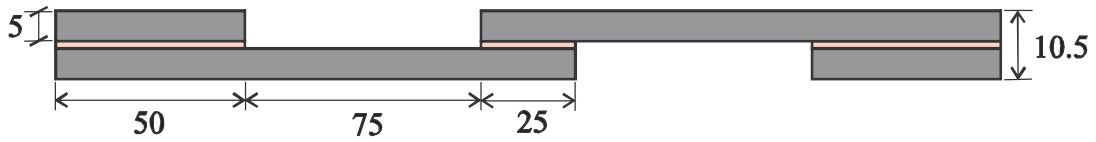


Σχήμα 4.6: Ασκούμενη μετατόπιση και αντίδραση όπως προκύπτει από μη-γραμμική ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων.

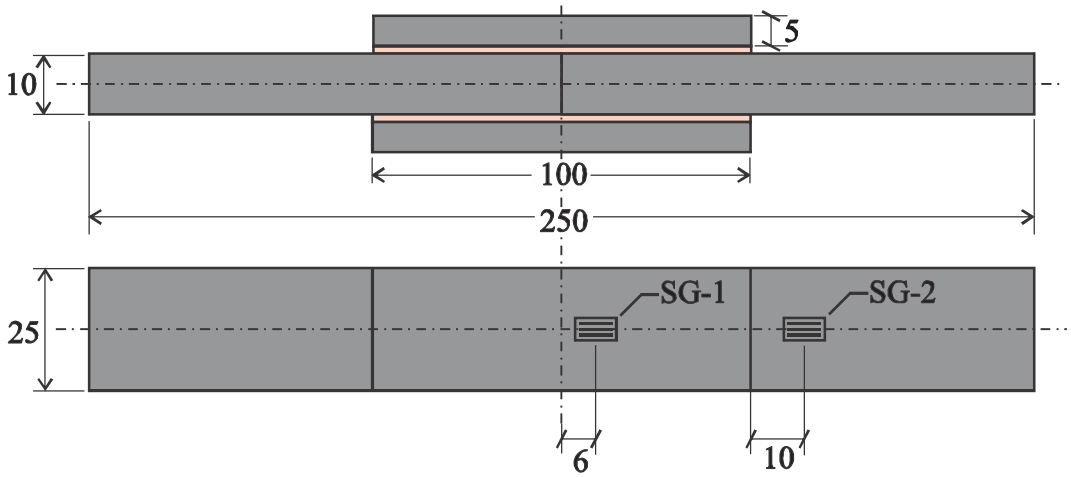
5. Περιγραφή πειραματικών δοκιμών

Με σκοπό την αριθμητική επιβεβαίωση του μοντέλου EPZ που αναπτύχθηκε, διεξήχθησαν πειραματικές δοκιμές δύο ειδών συνδέσμων με κολλητικά μέσα, ενός συνδέσμου μονής επικάλυψης (Single Lap Joint - SLJ) και ενός συνδέσμου διπλής επικάλυψης (Double Strap Joint - DSJ). Η επιλογή των εν λόγω συνδέσμων έγινε καθώς αποτελούν υποψήφιους συνδέσμους για επιβεβαίωση αριθμητικών μοντέλων με βάση τη διεθνή βιβλιογραφία. Η φόρτιση των συνδέσμων αυτών οδηγεί το κολλητικό μέσο σε συνθήκες μικτής φόρτισης και θραύσης.

Η γεωμετρία και οι διαστάσεις των συνδέσμων που κατασκευάστηκαν και δοκιμάστηκαν παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.1.



(α)



(β)

Σχήμα 5.1: Διαστάσεις (σε mm) και γεωμετρική διάταξη ενός συνδέσμου μονής (α) και διπλής (β) επικάλυψης.

Τα προς κόλληση υλικά είναι κατασκευασμένα από ένα τυπικό ναυπηγικό χάλυβα. Ως κολλητικό μέσο χρησιμοποιήθηκε η κατασκευαστική κόλλα με εμπορική ονομασία Araldite 2015, η οποία είναι δύο-συστατικών σχετική σκληρή εποξική και παρέχεται από την εταιρία Huntsman Container Corporation Ltd.

Το ονομαστικό πλάτος όλων των δοκιμίων είναι ίσο με 25 mm. Το ονομαστικό πάχος του κολλητικού μέσου είναι 0.5 mm και με σκοπό την διατήρηση ομοιόμορφου πάχους κατά την κατασκευή χρησιμοποιήθηκαν αποστάτες ίσου πάχους με την ονομαστική τιμή του 0.5 mm. Πριν την κόλληση των επικαλύψεων των συνδέσμων διπλής επικάλυψης τα δύο προς κόλληση μέταλλα πάχους 10 mm ήρθαν σε επαφή χωρίς την ύπαρξη κολλητικού μέσου ενδιάμεσα.

Τα δοκίμια φορτίστηκαν με μονοαξονική στατική εφελκυστική μετατόπιση, η οποία εφαρμόστηκε με ρυθμό 0.1 mm/min μέσω μιας υδραυλικής μηχανής δοκιμών MTS. Δύο αισθητήρες παραμόρφωσης (SG-1 και SG-2) τοποθετήθηκαν σε κάθε σύνδεσμο διπλής επικάλυψης, ο μεν πρώτος τοποθετήθηκε πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια μιας εκ των επικαλύψεων και ο δεύτερος τοποθετήθηκε στην ελεύθερη επιφάνεια ενός εκ των εσωτερικών υλικών, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.1 β. Το μήκος μέτρησης των αισθητήρων είναι 10 mm. Σκοπός των αισθητήρων είναι η μέτρηση της παραμόρφωσης με σκοπό την σύγκριση με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα. Κατά τη διάρκεια των πειραματικών δοκιμών η επιβαλλόμενη μετατόπιση και οι δυνάμεις αντίδρασης κατεγράφησαν. Συνολικά έξι σύνδεσμοι δοκιμάστηκαν, τρεις από κάθε είδος συνδέσμου. Το Σχήμα 5.2 παρουσιάζει ένα σύνδεσμο από κάθε είδος υπό πειραματικές συνθήκες.

(α) (β)

Σχήμα 5.2: Πειραματική δοκιμή συνδέσμου μονής (α) και διπλής (β) επικάλυψης.

6. Αριθμητική μοντελοίηση πειραματικών δοκιμών

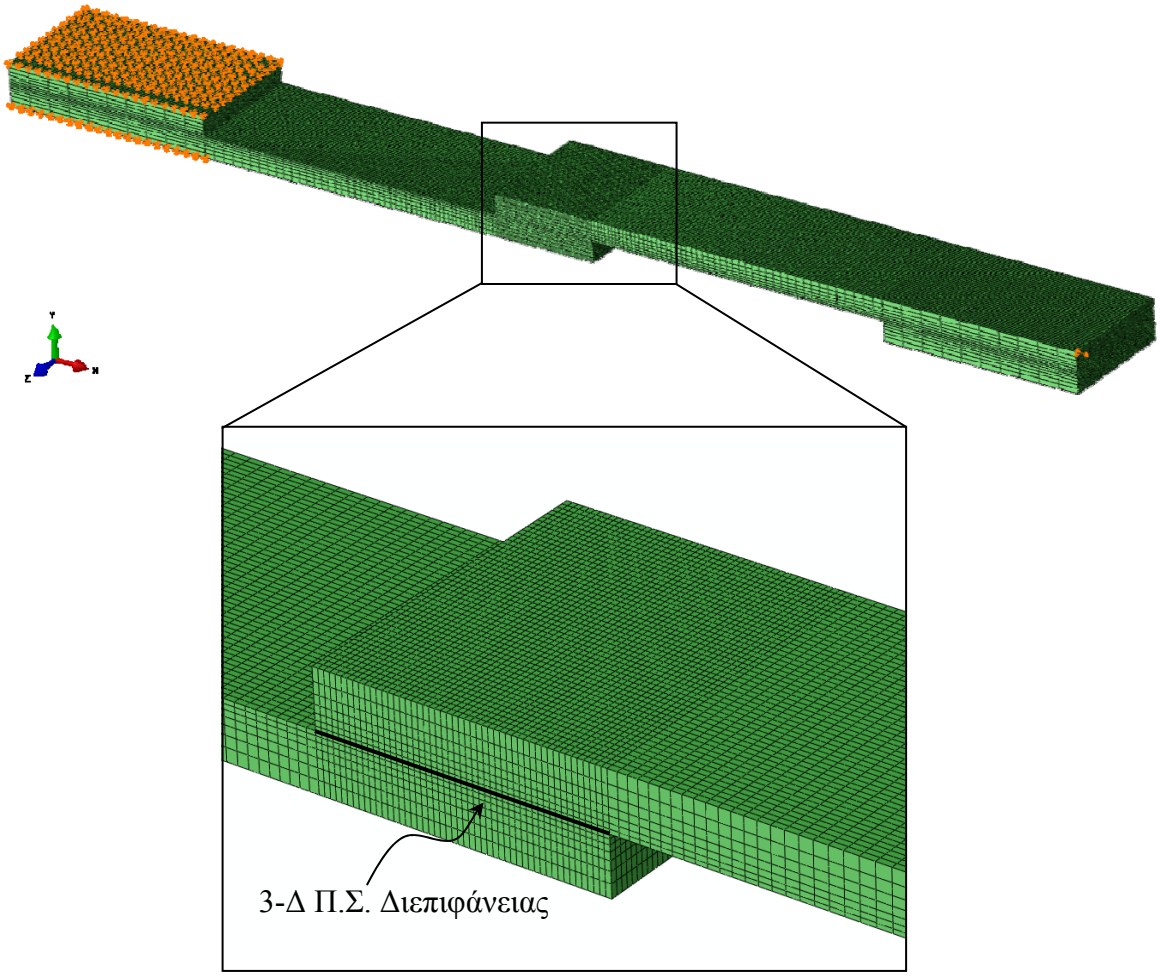
6.1 Κατασκευή μοντέλων και ορισμός ιδιοτήτων

Η τρι-διάστατη αριθμητική προσομοίωση με πεπερασμένα στοιχεία των συνδέσμων μονής και διπλής επικάλυψης έγινε στο εμπορικό πακέτο Abaqus 6.10. Η μοντελοποίηση του κολλητικού μέσου βασίζεται στην προσέγγιση EPZ (Embedded Process Zone). Στα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων που αναπτύχθηκαν, το κολλητικό μέσο εκπροσωπείται εξ' ολοκλήρου από πεπερασμένα στοιχεία διεπιφάνειας των οποίων η καταστατική συμπεριφορά περιγράφεται από τους προτεινόμενους νόμους. Το πάχος του κολλητικού μέσου (0.5mm) δεν συμπεριλαμβάνεται στο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων αλλά υπεισέρχεται στην μαθηματική διατύπωση των καταστατικών νόμων. Δηλαδή η αρχική κλίση των προτεινόμενων νόμων ισούται με το μέτρο ελαστικότητας ή διάτμησης προς το πάχος του κολλητικού μέσου, για φόρτιση και θραύση Τύπου I ή II και III, αντίστοιχα, όπως περιγράφεται παρακάτω.

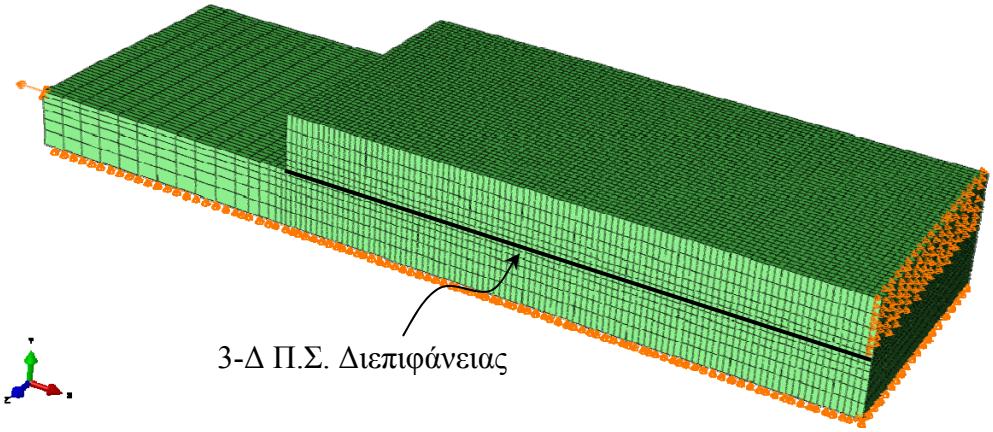
Στο Σχήμα 6.1 και 6.2 παρουσιάζονται τα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων που αναπτύχθηκαν για τον σύνδεσμο μονής και διπλής επικάλυψης μαζί με τις συνοριακές συνθήκες που εφαρμόστηκαν, αντίστοιχα. Για την δημιουργία του πλέγματος των μεταλλικών υλικών (δομικά στοιχεία προς κόλληση) χρησιμοποιήθηκαν τρια-διάστατα 20κομβα πεπερασμένα στοιχεία συνεχούς μέσου (κωδική ονομασία C3D20 στη βιβλιοθήκη πεπερασμένων στοιχείων του Abaqus 6.10). Στις περιοχές αλληλοεπικάλυψης (περιοχές τοποθέτησης κολλητικού μέσου) τοποθετήθηκαν τα 16-κομβα πεπερασμένα στοιχεία διεπιφάνειας των οποίων η μαθηματική διατύπωση περιγράφεται στο 2° κεφάλαιο. Τα επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία διεπιφάνειας που χρησιμοποιήθηκαν σε όλες τις περιπτώσεις έχουν διαστάσεις (0.5 x 0.5) mm^2 και για την αριθμητική ολοκλήρωση των στοιχείων του μητρώου δυσκαμψίας και του διανύσματος των εσωτερικών δράσεων χρησιμοποιήθηκαν 9 σημεία ολοκλήρωσης (3 x 3).

Με σκοπό την εξοικονόμηση υπολογιστικού κόστους μοντελοποιήθηκε μόνο το 1/4 του συνδέσμου διπλής επικάλυψης και εφαρμόστηκαν οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες συμμετρίας (βλέπε Σχήμα 6.2). Ως φόρτιση, ασκήθηκε επιβαλλόμενη μετατόπιση στο ένα άκρο κάθε συνδέσμου. Οι κόμβοι των επιφανειών όπου ασκήθηκε η μετατόπιση δεσμεύτηκαν με τη χρήση Multi Point Constraint (MPC - Tie) τεχνικών, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.3 για τον σύνδεσμο μονής και διπλής επικάλυψης, αντίστοιχα.

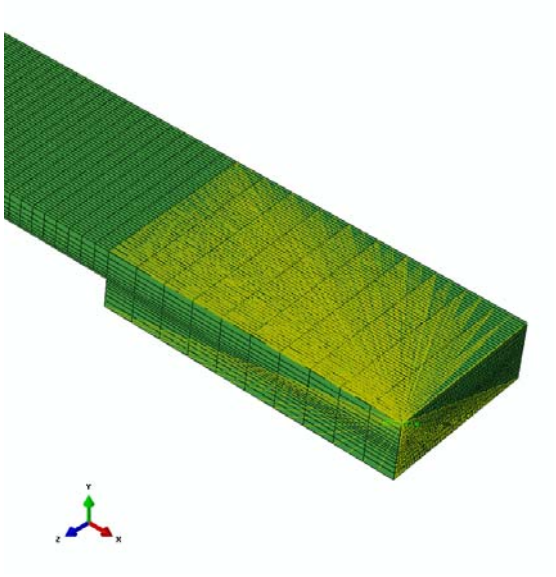
Για την επίλυση των μη-γραμμικών εξισώσεων ισορροπίας χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος Newton-Raphson και για την υποβοήθηση της σύγκλισης χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος "Αναζήτηση Γραμμής (Line Search)".



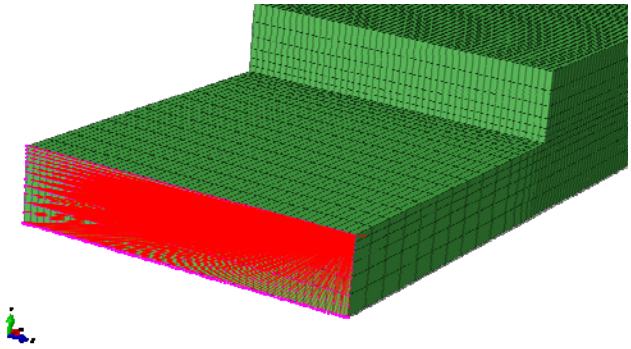
Σχήμα 6.1: Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων συνδέσμων μονής επικάλυψης.



Σχήμα 6.2: Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων συνδέσμων διπλής επικάλυψης.



(α)



(β)

Σχήμα 6.3: Εφαρμογή Multi Point Constraint (MPC - Tie) στις επιφάνειες φόρτισης του συνδέσμου μονής (α) και διπλής επικάλυψης (β).

Η υλοποίηση του προτεινόμενου μεικτού-τύπου EPZ μοντέλου, στα πλαίσια της μαθηματικής διατύπωσης των πεπερασμένων στοιχείων διεπιφάνειας, απαιτούν τον ορισμό των παραμέτρων των ανεξάρτητων καθαρών νόμων σε φόρτιση και θραύση Τύπου I, II και III οι οποίες χαρακτηρίζουν το δομικό όλκιμο κολλητικό μέσο που μοντελοποιείται (HUNTSMAN Araldite 2015).

Με σκοπό να χρησιμοποιηθούν ακριβείς τιμές των απαιτούμενων παραμέτρων σε θραύση Τύπου I, II και III, απαιτούνται αντίστοιχα πειράματα για τον προσδιορισμό αυτών. Για παράδειγμα πειράματα DCB (Double Cantilever Beam specimens) και ENF (End Notch Flexure) μεταξύ των ίδιων υλικών που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των συνδέσμων

θα ήταν καλή επιλογή για τον χαρακτηρισμό των πειραματικών νόμων. Στα πλαίσια όμως της παρούσας εργασίας δεν υπάρχουν διαθέσιμα τέτοιου είδους πειράματα, οπότε και οι αντίστοιχες παράμετροι αντλήθηκαν από την διεθνή βιβλιογραφία. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν για τον ορισμό των νόμων παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.1. Οι ίδιες ιδιότητες που χρησιμοποιήθηκαν για φόρτιση και θραύση Τύπου ΙΙ χρησιμοποιήθηκαν για τον ορισμό του αντίστοιχου νόμου σε φόρτιση και θραύση Τύπου ΙΙΙ.

Οι κρίσιμες τάσεις $\sigma_{c,I}$ και $\sigma_{c,II}$ και ενέργεια θραύσης J_{Ic} λήφθηκαν ίσες με αυτές που προτείνει ο κατασκευαστής, όπως προσδιορίστηκαν από πειράματα μεταξύ χαλύβδινων συνδέσμων. Οι παράμετροι $\sigma_{c,I}$ και $\sigma_{c,II}$ λήφθηκαν ίσες με την αντοχή του κολλητικού μέσου σε εφελκυσμό και διάτμηση, αντίστοιχα. Η ενέργεια θραύσης J_{IIc} λήφθηκε από τους de Moura et al. 2009.

Επιπρόσθετα, οι παράμετροι $\delta_{0,I}$, $\delta_{0,II}$ και $\delta_{0,III}$ ($\delta_{0,II} = \delta_{0,III}$) απαιτούνται για τον πλήρη προσδιορισμό των προτεινόμενων νόμων EPZ. Όπως περιγράφεται και στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι παράμετροι αυτές δύναται να υπολογιστούν μέσω του μεγέθους e. Για το λόγο αυτό υπολογίστηκε μια βέλτιστη τιμή e μέσω μιας κυκλικής διαδικασίας δοκιμής-λάθους και στα δύο είδη συνδέσμων. Η διαδικασία αυτή οδήγησε σε τιμή του μεγέθους e ίση με 0.1%.

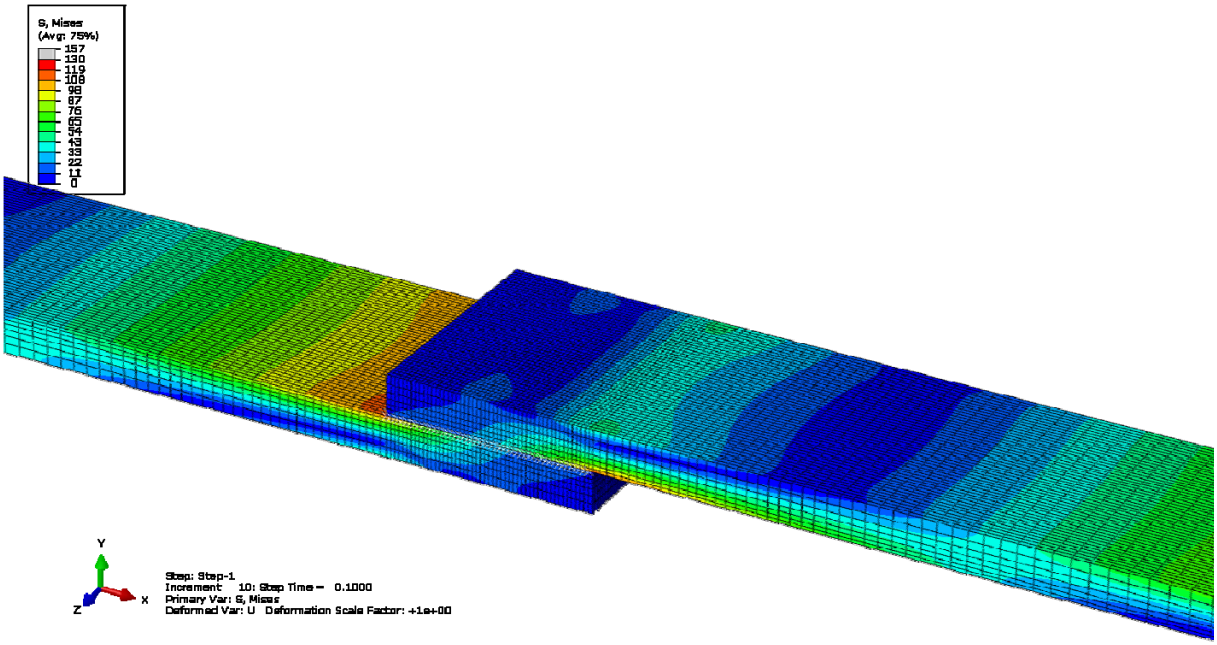
Για λόγους σύγκρισης, το τραπεζοειδές μοντέλο προγραμματίστηκε σε υπορουτίνα UEL και τα αντίστοιχα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά που προκύπτουν από το προτεινόμενο μοντέλο. Τα μεγέθη $\delta_{2,I}$ και $\delta_{2,II}$ ($\delta_{2,III} = \delta_{2,II}$) που απαιτούνται για τον πλήρη προσδιορισμό των τραπεζοειδών νόμων τέθηκαν ίσα με τα αντίστοιχα $\delta_{0,i}$ μεγέθη, που υπολογίστηκαν μέσω της Εξίσωσης 3.4 ($\delta_{2,I}$ = 0.0691mm και $\delta_{2,II}$ = 0.898 mm).

Πίνακας 6.1: Φυσικές παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν για τον ορισμό των προτεινόμενων νόμων

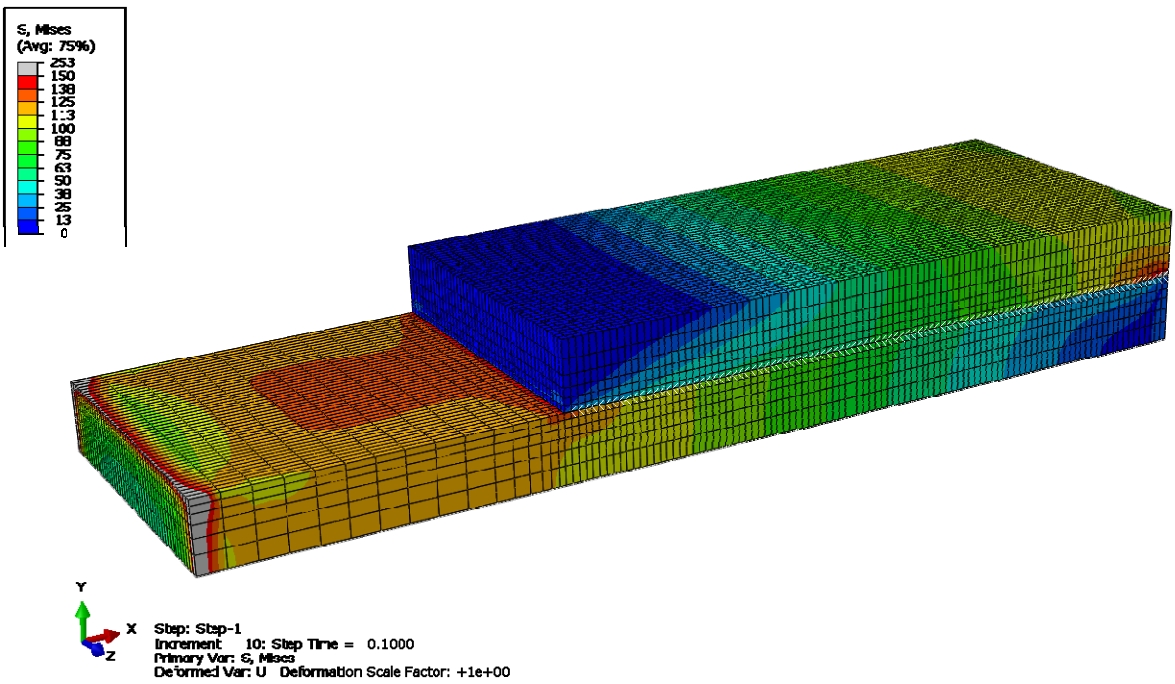
Mode i	k_i (N/mm^3)	$\sigma_{c,i}$ (MPa)	J_{ic} (N/mm)
I	3700	30.0	4.0
II	1423	18.5	4.7
III	1423	18.5	4.7

6.2 Παρουσίαση αριθμητικών αποτελεσμάτων και σύγκριση με πειραματικές μετρήσεις

Στο Σχήμα 6.4 παρουσιάζεται η κατανομή των ελαστικών ισοδύναμων τάσεων von Mises στα προς κόλληση μεταλλικά υλικά του συνδέσμου μονής και διπλής επικάλυψης, αντίστοιχα. Η ασκούμενη δύναμη (εδώ ισοδυναμεί με το φορτίο αντίδρασης καθώς επιβάλλουμε μετατόπιση στα άκρα των συνδέσμων) μεταφέρεται από τον ένα υλικό στο άλλο μέσω του κολλητικού μέσου. Οι σχετικές απομακρύνσεις (δ_I, δ_{II} και δ_{III}) δύο υλικών σημείων (άνω-κάτω), όπου αρχικά είχαν κοινές συντεταγμένες υποδηλώνουν την κατάσταση του κολλητικού μέσου σε εκείνο το σημείο (ελαστικότητα, πλαστικότητα ή θραύση). Έτσι μέσω των σχετικών απομακρύνσεων υπολογίζονται οι αντίστοιχες τάσεις μέσω των προτεινόμενων νόμων και του μοντέλου μεικτής φόρτισης και θραύσης. Στην ελαστική περιοχή, όπου οι αναπτυσσόμενες τάσεις συνδέονται με τις σχετικές μετατοπίσεις μέσω των σταθερών αναλογίας k_I, k_{II} και k_{III}, οι ισοδύναμες τάσεις που αναπτύσσονται στα μεταλλικά στοιχεία των συνδέσμων φαίνονται στο Σχήμα 6.4. Στην περίπτωση του συνδέσμου μονής επικάλυψης (Σχήμα 6.4 α) παρατηρούμε πως δεν συνεισφέρει ολόκληρη η περιοχή της επικάλυψης (μπλε χρώμα - μηδενικές τάσεις) τόσο στο μήκος όσο και στο πάχος των μεταλλικών ελασμάτων. Παρόμοιο συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί για τον σύνδεσμο διπλής επικάλυψης για το συνδετικό έλασμα (άνω μεταλλικό τμήμα).



(α)

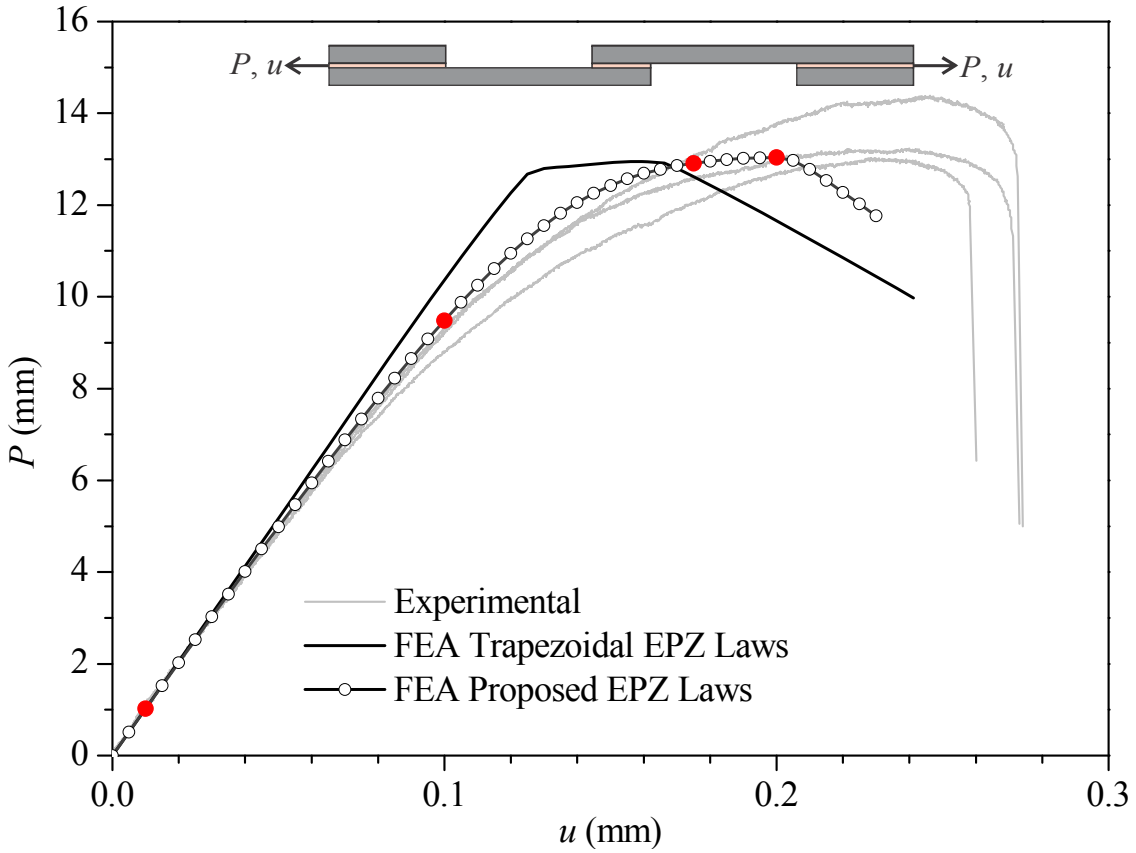


(β)

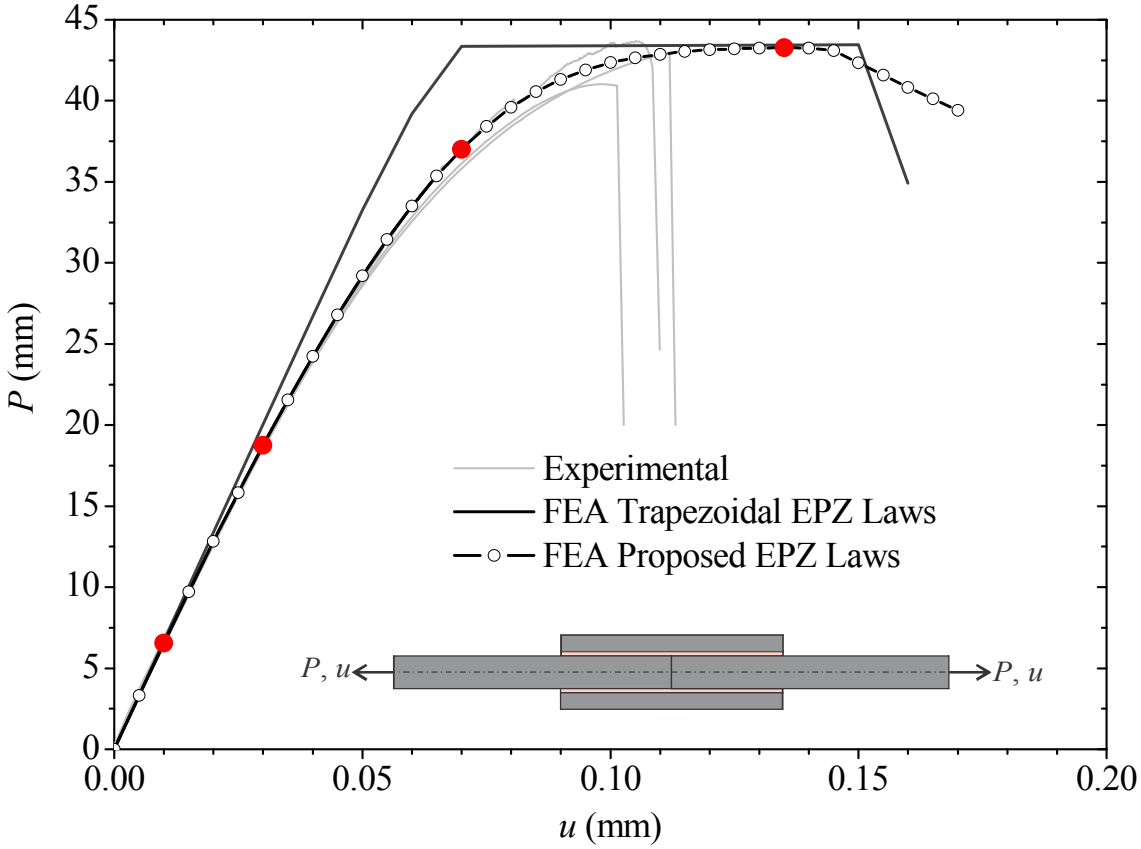
Σχήμα 6.4: Κατανομή ισοδύναμων τάσεων von Mises στα μεταλλικά υλικά του συνδέσμου μονής επικάλυψης (α) και διπλής επικάλυψης (β).

Οι μετρήσεις που κατεγράφησαν κατά την διάρκεια των πειραματικών δοκιμών και από τα τρία δοκίμια, που περιγράφονται στην παράγραφο 5, παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.5 και 6.6 για το σύνδεσμο μονής και διπλής επικάλυψης, αντίστοιχα. Επιπρόσθετα, στα εν λόγω σχήματα παρουσιάζονται και τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων όπως προέκυψαν από τα μοντέλα του Σχήματος 6.1 και 6.2, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που παρατίθενται στον Πίνακα 6.1 για τους προτεινόμενους νόμους και τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προέκυψαν από τον τραπεζοειδή νόμο χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του Πίνακα 6.1 και 6.2. Ειδικότερα, τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρατίθενται στο Σχήμα 6.5 και 6.6 προέκυψαν χρησιμοποιώντας τιμές του μεγέθους *e* που προέκυψαν μέσω ανάλυσης βέλτιστης ταύτισης μεταξύ των πειραματικών και των αριθμητικών καμπύλων, για τους προτεινόμενους νόμους. Η εν λόγω ανάλυση οδήγησε σε τιμή ίση με 0.1% και για τα δύο είδη συνδέσμων. Η ανάλυση ευαισθησίας που οδηγεί σε συμπεράσματα σχετικά με την επίδραση του σφάλματος *e* και για τις δύο περιπτώσεις συνδέσμων, παρουσιάζεται στην παράγραφο 6.3.

Με βάση το Σχήμα 6.5 και 6.6, εκτός από τις σχετικά μικρές αριθμητικές διαφορές μεταξύ των πειραματικών μετρήσεων σε κάθε σετ συνδέσμων που παρατηρούνται, και οι τρεις πειραματικές καμπύλες παρουσιάζουν κοινή συμπεριφορά, η οποία δύναται να χωριστεί σε τρία επιμέρους τμήματα. Το πρώτο τμήμα χαρακτηρίζεται από μια γραμμική συμπεριφορά όπου ακολουθεί το τμήμα στο οποίο είναι εμφανείς οι αυξανόμενες μη-γραμμικότητες έως το όριο αντοχής (μέγιστη δύναμη του συνδέσμου). Έπειτα ακολουθεί το τελευταίο τμήμα όπου η δύναμη ακολουθεί μια καθοδική πορεία. Αυτή η συμπεριφορά υποδηλώνει την ανικανότητα του συνδέσμου να παραλάβει μεγαλύτερο φορτίο και συνεπάγεται την έναρξη και διάδοση διαφόρων μηχανισμών που οδηγούν σε αστοχία της σύνδεσης. Οι εν λόγω μηχανισμοί αστοχίας συμβαίνουν στην EPZ περιοχή και συμπεριλαμβάνουν την γένεση πόρων στο κολλητικό μέσω, αποκόλληση στην διεπιφάνεια κολλητικού μέσου και μετάλλου, μικρο-ρωγμές, κ.α..



Σχήμα 6.5: Σύγκριση πειραματικών μετρήσεων και αριθμητικών αποτελεσμάτων πεπερασμένων στοιχείων με τη χρήση του τραπεζοειδούς και του προτεινόμενου νόμου για τον σύνδεσμο μονής επικάλυψης.

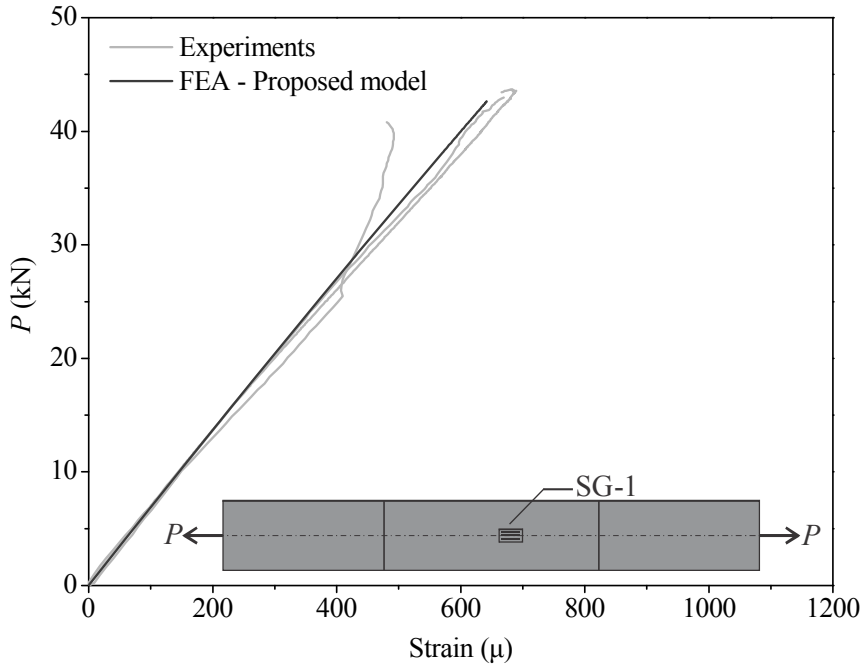


Σχήμα 6.6: Σύγκριση πειραματικών μετρήσεων και αριθμητικών αποτελεσμάτων πεπερασμένων στοιχείων με τη χρήση του τραπεζοειδούς και του προτεινόμενου νόμου για τον σύνδεσμο διπλής επικάλυψης.

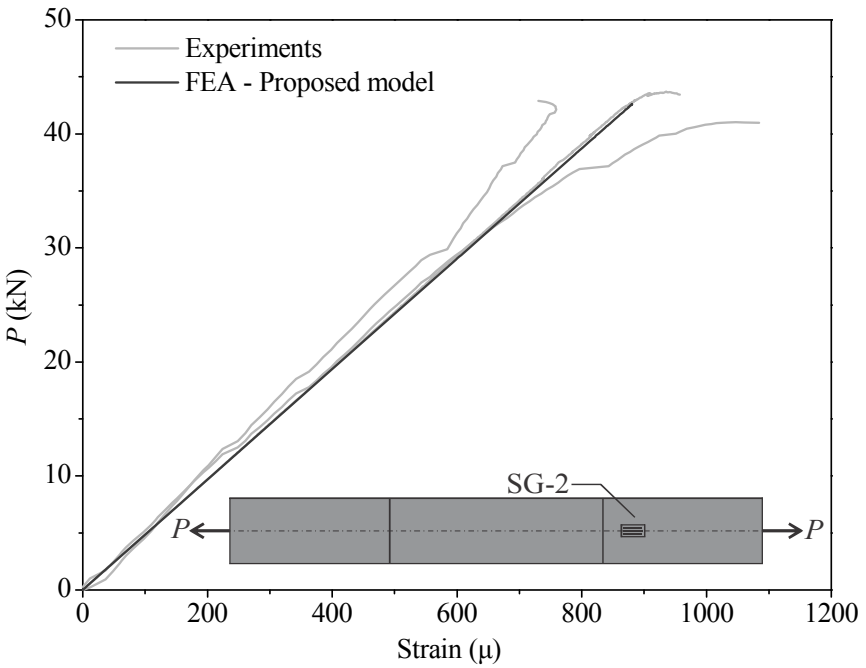
Όσον αφορά τα αντίστοιχα αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων που παρήχθησαν με τη χρήση του προτεινόμενου νόμου, η αρχική γραμμική κλίση και η εν συνεχεία μη-γραμμική περιοχή εξαρτώνται εξ' ολοκλήρου από την ελαστοπλαστική συμπεριφορά του κολλητικού μέσου, συμπεριφορά που περιγράφεται από την εκθετική περιγραφή των τάσεων στον προτεινόμενο νόμο, που αποδίδει πολύ καλά αποτελέσματα (βλέπε Σχήμα 6.5 και 6.6). Ο τραπεζοειδής νόμος προβλέπει την γραμμική ελαστική συμπεριφορά αλλά αδυνατεί να προβλέψει την ελαστοπλαστική συμπεριφορά των πειραματικών μετρήσεων, σε κάθε περίπτωση συνδέσμου. Παρ' όλα αυτά τόσο ο τραπεζοειδής όσο και ο προτεινόμενος νόμος προβλέπουν με μεγάλη επιτυχία την αντοχή των συνδέσμων με αποκλίσεις από τις πειραματικά μετρημένες τιμές μικρότερες του 2.5 %. Μετά την αντοχή του συνδέσμου η προβλεπόμενη καθοδική πορεία της δύναμης που ακολουθείται για αυξανόμενες τιμές της επιβαλλόμενης μετατόπισης και για τις δύο περιπτώσεις συνδέσμων, δεν είναι ρεαλιστική σε σχέση με τις αντίστοιχες πειραματικές. Με βάση τις πειραματικές δοκιμές (βλέπε Σχήμα 6.5 και 6.6) μετά το επίπεδο της μέγιστης δύναμης η κάθοδος (αποφόρτιση – μείωση ικανότητας

παραλαβής φορτίου) είναι απότομη και δραστική. Το γεγονός αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα πως το φαινόμενο της έναρξης και διάδοσης αστοχιών είναι ισχυρά δυναμικό. Η αριθμητική όμως διατύπωση των εξισώσεων ΠΣ που χρησιμοποιήθηκαν δεν προβλέπουν δυναμικά φαινόμενα (χρονική εξάρτηση εξισώσεων ισορροπίας) έτσι καθίσταται αδύνατη η ορθή πρόβλεψη της αποφόρτισης. Όμως για τις συγκεκριμένες περιπτώσεις συνδέσμων και σε γενικότερο πλαίσιο ανάλυσης και σχεδιασμού συνδέσεων υπό στατικά φορτία, ενδιαφέρον παρουσιάζει η αντοχή αυτών και η πορεία φόρτισης που ακολουθείται σε σχέση με την σχετική επιμήκυνση με σκοπό την ενδεχόμενη εισαγωγή συντελεστών ασφαλείας.

Κατά την διάρκεια των πειραματικών δοκιμών, στα μεταλλικά στελέχη των συνδέσμων αναπτύχθηκαν μόνο ελαστικές τάσεις και στις δύο περιπτώσεις που εξετάστηκαν. Οι καταγεγραμμένες παραμορφώσεις του πειράματος και τα αριθμητικά υπολογισμένα αντίστοιχα μεγέθη στις δύο θέσεις του συνδέσμου διπλής επικάλυψης, όπως επιδεικνύεται στο Σχήμα 5.1 (SG-1 στο άνω μεταλλικό στέλεχος και SG-2 στο εσωτερικό μεταλλικό στέλεχος), παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.7. Η συμπεριφορά των παραμορφώσεων και από τους δύο αισθητήρες είναι γραμμική αγγίζοντας τις μέγιστες τιμές λίγο πριν την αστοχία των συνδέσμων. Αυτές οι τιμές είναι κατά πολύ μικρότερες από το όριο παραμόρφωσης κατά τη διαρροή του χάλυβα (<< 2000 με). Η συμπεριφορά αυτή δικαιολογείται από το γεγονός ότι τα χαλύβδινα ελάσματα είναι δύσκαμπτα και κατά αυτόν τον τρόπο, το αδύναμο σημείο των συνδέσμων είναι η περιοχή του κολλητικού μέσου, το οποίο και αστοχεί πρώτο. Αυτή η ελαστική συμπεριφορά προβλέπεται με πολύ καλή ακρίβεια από τα πεπερασμένα στοιχεία με το προτεινόμενο μοντέλο μεικτού-τύπου φόρτισης και αστοχίας.



(α)



(β)

Σχήμα 6.7: Δύναμη αντίδρασης ως προς τις παραμορφώσεις του συνδέσμου διπλής επικάλυψης όπως πειραματικά κατεγράφησαν και αριθμητικά υπολογίστηκαν για την θέση SG-1 (α) και για την θέση SG-2 (β).

6.3 Παραμετρική μελέτη ευαισθησίας για την επίδραση του σφάλματος e.

Όπως αναφέρεται και στην προηγούμενη παράγραφο, οι φυσικές παράμετροι των αμιγών προτεινόμενων EPZ νόμων που χρησιμοποιήθηκαν στην ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων των συνδέσμων μονής και διπλής επικάλυψης, παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.1. Στις συγκεκριμένες περιπτώσεις, τα μεγέθη $\delta_{0,i}$ (i = I, II και III) είναι οι άγνωστες παράμετροι καθώς δεν υπάρχουν διαθέσιμοι πειραματικοί νόμοι τάσης – σχετικής απομάκρυνσης για τη θραύση Τύπου I, II και III για το δεδομένο σύστημα υλικών. Έτσι, η Εξίσωση 6.4, που συνδέει το μέγεθος $\delta_{0,i}$ με το αντίστοιχο μέγεθος $\sigma_{0,i}$ μέσω του σφάλματος e, χρησιμοποιήθηκε στην αριθμητική ανάλυση.

Μια παραμετρική ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων για τον σύνδεσμο μονής και διπλής επικάλυψης έγινε με σκοπό την μελέτη ευαισθησίας του σφάλματος e. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζονται ως προς την καθολική απόκριση των συνδέσμων στο Σχήμα 6.8.

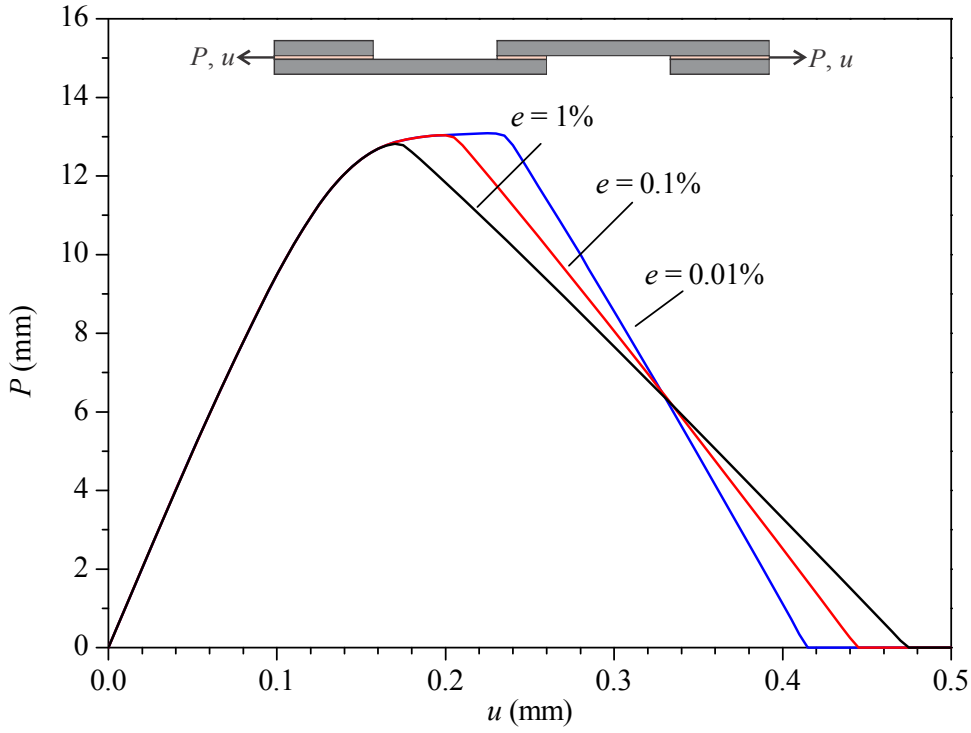
Οι παράμετροι των νόμων που χρησιμοποιήθηκαν είναι αυτές που δίνονται στον Πίνακα 6.1, ενώ τρεις τιμές λήφθηκαν υπόψη για το σφάλμα e στις παραμετρικές αναλύσεις και για τις δύο περιπτώσεις συνδέσμων:

- $e = 1\%$
- $e = 0.1\%$
- $e = 0.01\%$

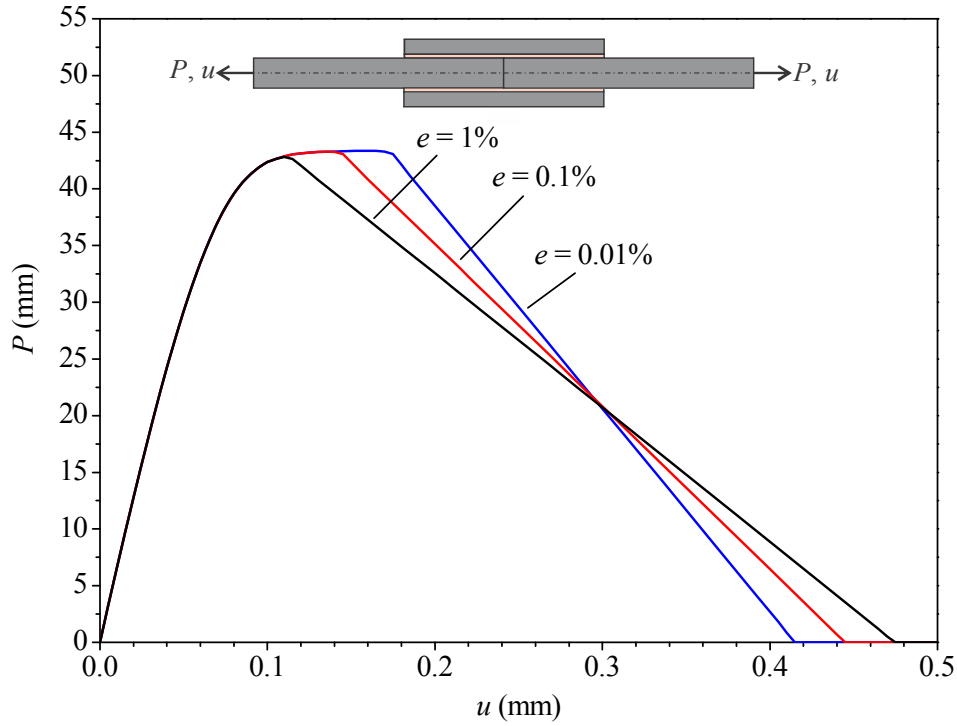
Αξίζει να τονιστεί πως και στις τρεις αυτές περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε κοινή τιμή για την ενέργεια θραύσης J_{ci} (i = I, II και III).

Όπως συμπεραίνεται από τα αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων (βλέπε Σχήμα 6.8) οι επιλεγείσες τιμές του σφάλματος e έχουν μικρή επίδραση στην μέγιστη δύναμη κάθε περίπτωσης συνδέσμου, ενώ έχουν μεγαλύτερη επίδραση στην αντίστοιχη τιμή της μετατόπισης.

Από αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα πλαίσια της μελέτης ευαισθησίας και από συγκρίσεις μεταξύ των αριθμητικών και πειραματικών καμπύλων, συμπεραίνεται πως για τιμή του σφάλματος e ίση με 1% οδηγείται η προτεινόμενη μέθοδος σε ακριβείς προβλέψεις για την αντοχή των συνδέσμων (μέγιστη δύναμη που δύναται να φέρουν) και σε πιο συντηρητικές προβλέψεις για την αντίστοιχη μέγιστη ασκούμενη μετατόπιση.



(α)

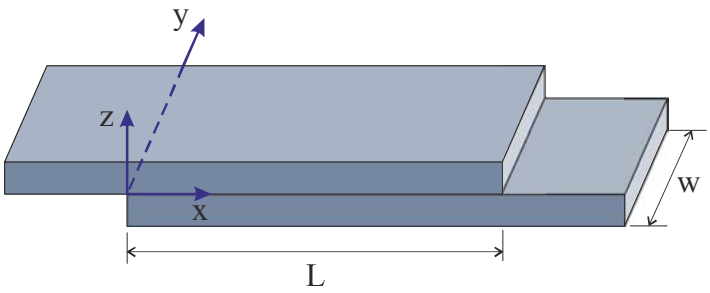


(β)

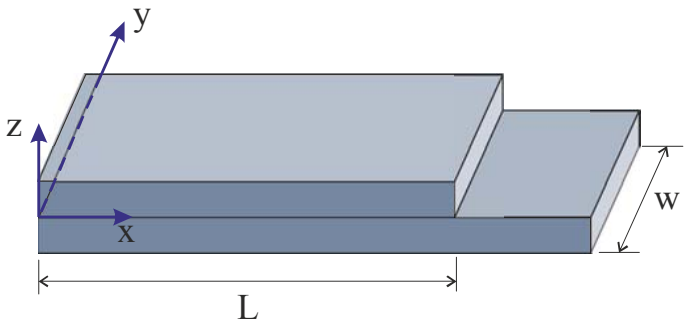
Σχήμα 6.8: Αποτελέσματα από την ανάλυση ευαισθησίας για το σφάλμα *e* που χρησιμοποιήθηκε στην ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων για τον σύνδεσμο (α) μονής επικάλυψης και (β) διπλής επικάλυψης.

6.4 Κατανομές τάσεων στο κολλητικό μέσο (EPZ περιοχή).

Στην εν λόγω παράγραφο, γίνεται μια προσπάθεια παρουσίασης της κατανομής των τριών τάσεων, ορθών σ_y και διατμητικών τ_{xz} και τ_{yz} για φόρτιση Τύπου I, II και III, αντίστοιχα, στην περιοχή των δύο συνδέσμων που καλύπτει το κολλητικό μέσο. Οι εν λόγω τάσεις έχουν προκύψει από τις καταστατικές σχέσεις που περιγράφουν τους προτεινόμενους νόμους EPZ για φόρτιση και θραύση Τύπου I, II και III και του μεικτού-τύπου μοντέλου που περιγράφεται 3° κεφάλαιο. Οι τάσεις που παρουσιάζονται αφορούν συγκεκριμένα σημεία πάνω στις καθολικές καμπύλες όπου έχει συγκλίνει η μη-γραμμική λύση με τη μέθοδο Newton-Raphson. Έτσι έχουν επιλέγει τέσσερα σημεία (τιμές δύναμης - μετατόπισης) για κάθε γεωμετρία συνδέσμου, με σκοπό να παρουσιαστεί η μεταβολή των πεδίων των τριών τάσεων κατά την διάρκεια της φόρτισης των συνδέσμων. Τα σημεία αυτά ανήκουν ένα στην ελαστική περιοχή και τα υπόλοιπα τρία στην ελαστοπλαστική και πλαστική περιοχή του κολλητικού μέσου (γραμμική και μη-γραμμική συμπεριφορά συνδέσμων). Για την παρουσίαση των πεδίων των τάσεων χρησιμοποιήθηκαν 2-διάστατα διαγράμματα ισοϋψών καμπυλών στην περιοχή w x L, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.9.



(α)



(β)

Σχήμα 6.9: Σχηματική απεικόνιση και ορισμός γεωμετρικών στοιχείων των συνδέσμων (α) μονής και (β) διπλής επικάλυψης.

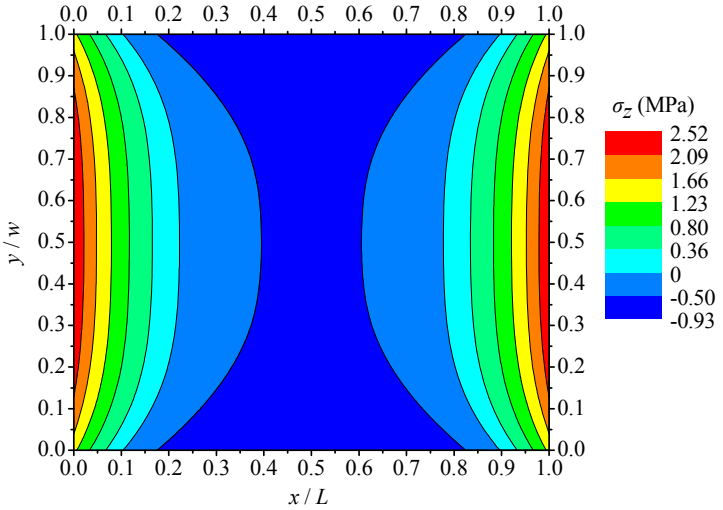
Στα σχήματα 6.10, 6.11, 6.12 και 6.13 παρουσιάζονται οι κατανομές των ορθών σ_z και διατμητικών τ_{xz} και τ_{yz} για επιβαλλόμενη τιμή μετατόπισης 0.01 mm, 0.1 mm, 0.175 mm και 0.2 mm, αντίστοιχα, για την περίπτωση του συνδέσμου μονής επικάλυψης (κόκκινα σημεία στην καμπύλη του σχήματος 6.5). Για την διευκόλυνση της παρουσίασης των αποτελεσμάτων, στα 2-διάστατα διαγράμματα οι άξονες έχουν κανονικοποιηθεί ως προς τα ονομαστικά μεγέθη w και L. Ως γενική παρατήρηση για όλα τα διαγράμματα, οι ορθές τάσεις σ_y και οι διατμητικές τάσεις τ_{xz} είναι συμμετρικές ως προς τον y άξονα (x = 0.5) και τον x άξονα (y = 0.5). Οι κατανομές των διατμητικών τ_{yz} τάσεων είναι αντισυμμετρικές. Αυτό είναι απολύτως λογικό καθώς η γεωμετρική διάταξη του συνδέσμου μονής επικάλυψης είναι από φύση αντισυμμετρική.

Οι αναπτυσσόμενες ελαστικές ορθές τάσεις στο κολλητικό μέσο (βλέπε Σχήμα 6.10 α), παρουσιάζουν μέγιστες τιμές στα άκρα, για τιμές του x/L = 0 και x/L = 1 και μειώνονται κατά μη-γραμμικό τρόπο όσο το x/L τείνει στο 0.5 και από τα δύο αντισυμμετρικά άκρα. Ειδικότερα, παρουσιάζονται μέγιστα στη θέση y/w = 0.5. Στο μεγαλύτερο μέρος του κολλητικού μέσου οι ελαστικές ορθές τάσεις είναι αρνητικές, γεγονός που υποδηλώνει την επαφή των δύο μεταλλικών ελασμάτων και τον περιορισμό των τάσεων στα άκρα. Οι εκτός επιπέδου διατμητικές τάσεις τ_{xz} έχουν αναπτυχθεί σε ολόκληρη την περιοχή του κολλητικού μέσου και εμφανίζουν μέγιστα στα άκρα. Οι εν λόγω τάσεις δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερες μεταβολές αλλά μειώνονται όσο το x/L τείνει στο 0.35 και στο 0.65 από τα δύο άκρα, αντίστοιχα. Στην περιοχή που οριοθετείται από τις εν λόγω τιμές οι τάσεις τ_{xz} σταθεροποιούνται. Οι εντός επιπέδου διατμητικές τάσεις τ_{yz} διατηρούνται σε σχετικά χαμηλά επίπεδα και εμφανίζουν κατά απόλυτη τιμή μέγιστα στα τέσσερα άκρα της σύνδεσης κατά τρόπο αντισυμμετρικό.

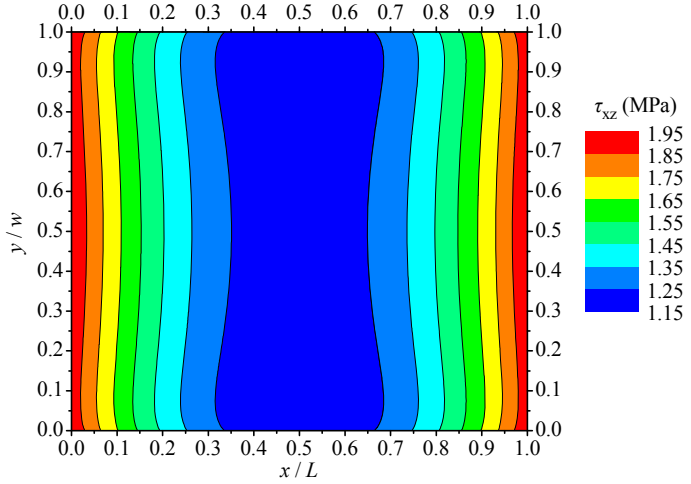
Όσον αφορά τις κατανομές των τάσεων στο σημείο όπου η ασκούμενη μετατόπιση είναι 0.1 mm (σημείο στην μη-γραμμική περιοχή, βλέπε Σχήμα 6.5 και 6.11 α), οι ορθές τάσεις σ_y συμπεριφέρονται κατά τον ίδιο τρόπο όπως οι αντίστοιχες ελαστικές αλλά με αυξημένα επίπεδα τιμών. Επίσης, παρατηρείται πως αναπτύσσονται σε μεγαλύτερο μέρος του κολλητικού μέσου με συνεπαγόμενη μείωση των αρνητικών ορθών τάσεων (τάσεων επαφής). Οι εκτός επιπέδου διατμητικές τάσεις τ_{xz} παρουσιάζουν μια ανακατανομή σε σχέση με την αντίστοιχη κατανομή που παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.10 α. Τα μέγιστα έχουν μετατοπιστεί στα τέσσερα γωνιακά άκρα του συνδέσμου ενώ στην ευρύτερη περιοχή των x/L = 0 και x/L = 1 και με τεταγμένη y/w = 0.5, παρατηρείται μείωση των τιμών. Αυτό είναι ένα μεταβατικό στάδιο των τάσεων από την ελαστική στην ελαστοπλαστική καταστατική συμπεριφορά του κολλητικού μέσου στα πλαίσια της EPZ περιοχής.

Η συνέχιση της φόρτισης του συνδέσμου οδηγεί στην προχωρημένη μη-γραμμική συμπεριφορά (είσοδο στο πλατό) με σταθμό το σημείο με επιβαλλόμενη μετατόπιση ίση με 0.175 mm, όπου οι υπολογισμένες τάσεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.12. Οι ορθές τάσεις αναπτύσσονται σε μεγαλύτερο μέρος του συνδέσμου αλλά τα μέγιστα που και εδώ εμφανίζονται στα άκρα είναι μειωμένα (12.6 Mpa, βλέπε Σχήμα 6.12 α) σε σχέση με τα αντίστοιχα μέγιστα στο προηγούμενο σημείο (15.1 Mpa, βλέπε Σχήμα 6.11 α). Η μείωση αυτή οφείλεται στην σημαντική ανακατανομή των εκτός επιπέδου διατμητικών τάσεων τ_{xz} (βλέπε Σχήμα 6.12 β), οι οποίες έχουν οδηγήσει στην πλαστικοποίηση του μεγαλύτερου μέρους του κολλητικού μέσου (κόκκινη περιοχή στο διάγραμμα) με μειωμένες τιμές στα άκρα (x/L = 0 και x/L = 1). Οι εντός επιπέδου διατμητικές τάσεις τ_{yz} διατηρούνται και σε αυτό σημείο σε σχετικά χαμηλά επίπεδα και εμφανίζουν κατά απόλυτη τιμή μέγιστα στα τέσσερα άκρα της σύνδεσης κατά τρόπο αντισυμμετρικό και χαρακτηρίζονται ελαστικές.

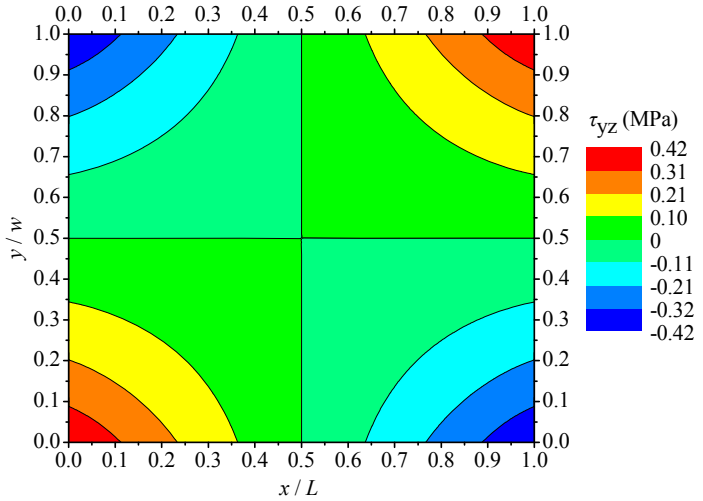
Το σημείο με επιβαλλόμενη μετατόπιση ίση με 0.175 mm της μη-γραμμικής καθολικής καμπύλης του συνδέσμου μονής επικάλυψης του σχήματος 6.5 σηματοδοτεί τη λήξη της ελαστοπλαστικής περιοχής, όπως αυτή περιγράφεται από το εκθετικό τμήμα των προτεινόμενων EPZ νόμων, πριν την έναρξη μείωσης των τάσεων (μείωση δυνατότητας παραλαβής του περαιτέρω φορτίου). Οι υπολογισμένες τάσεις στο σημείο αυτό παρουσιάζονται στα διαγράμματα του σχήματος 6.13. Συγκρίνοντας την κατανομή των ορθών τάσεων σ_y του σχήματος 6.13 α με την κατανομή του σχήματος 6.12 α, συμπεραίνεται πως οι τάσεις έχουν πάρει την τελική μέγιστη τιμή ίση με 9.6 Mpa στα άκρα και πλέον κατανέμονται σχεδόν στο μεγαλύτερο μέρος του κολλητικού μέσου (μειώνοντας κατά πολύ τις τάσεις επαφής). Οι εκτός επιπέδου διατμητικές τάσεις τ_{xz} διατηρούν την μορφή κατανομής του προηγούμενου σημείο, συγκρίνοντας τα διαγράμματα των σχημάτων 6.13 α και 6.12 α, αντίστοιχα, αλλά έχοντας ως μέγιστο το όριο αντοχής σε διάτμηση ($\sigma_{c,II}$ = 18.5 MPa) στην περιοχή του κολλητικού μέσου μακριά από τα άκρα. Στα άκρα παρατηρούνται μειωμένες τιμές των τ_{xz} τάσεων αλλά αυξημένες τιμές των ορθών τάσεων σ_y. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει πως οι αστοχίες θα ξεκινήσουν από τα άκρα του συνδέσμου καθώς αυτά υπόκεινται σε συνθήκες μεικτού-Τύπου φόρτισης (συνδυασμός σ_y και τ_{xz} τάσεων) και εν συνεχεία η καθαρή διάτμηση θα οδηγήσει στην τελική αστοχία του συνδέσμου. Οι εντός επιπέδου διατμητικές τάσεις τ_{yz} διατηρούνται και σε αυτό σημείο σε πολύ χαμηλά επίπεδα και εμφανίζουν κατά απόλυτη τιμή μέγιστα στα τέσσερα άκρα της σύνδεσης κατά τρόπο αντισυμμετρικό και χαρακτηρίζονται ελαστικές.



(α)

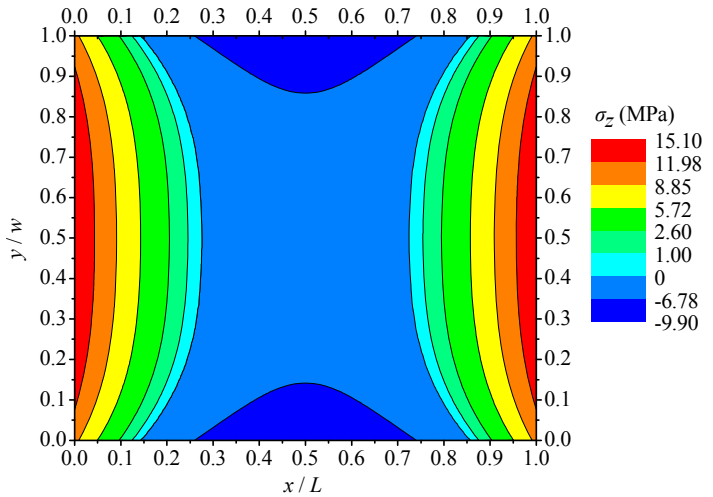


(β)

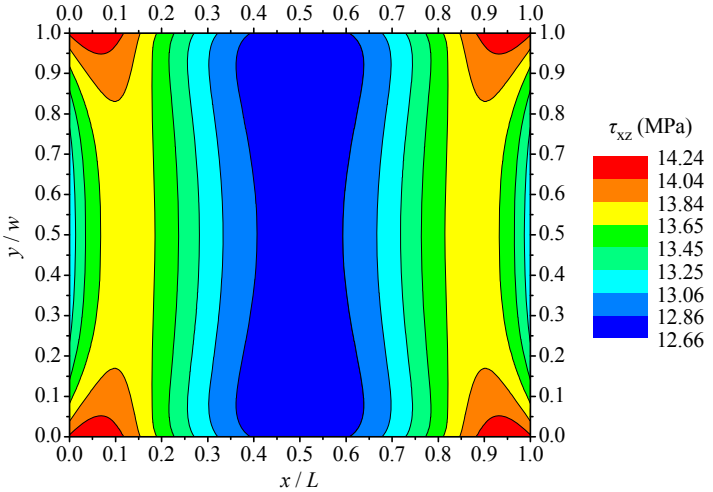


(γ)

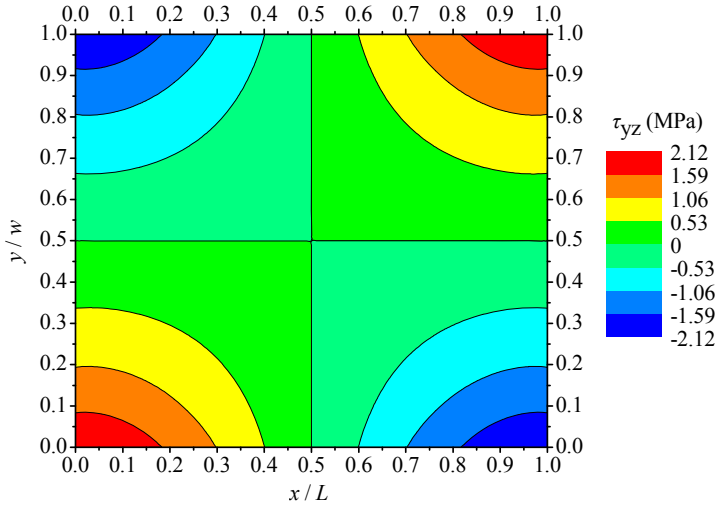
Σχήμα 6.10: Κατανομή ελαστικών ορθών σ_y (α) και διατμητικών τ_{xz} (β) και τ_{yz} (γ) τάσεων για επιβαλλόμενη μετατόπιση u ίση με 0.01 mm στο σύνδεσμο μονής επικάλυψης.



(α)

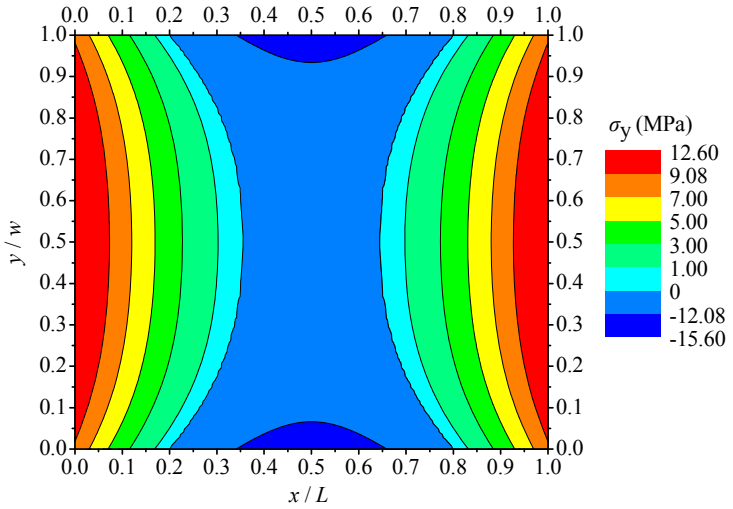


(β)

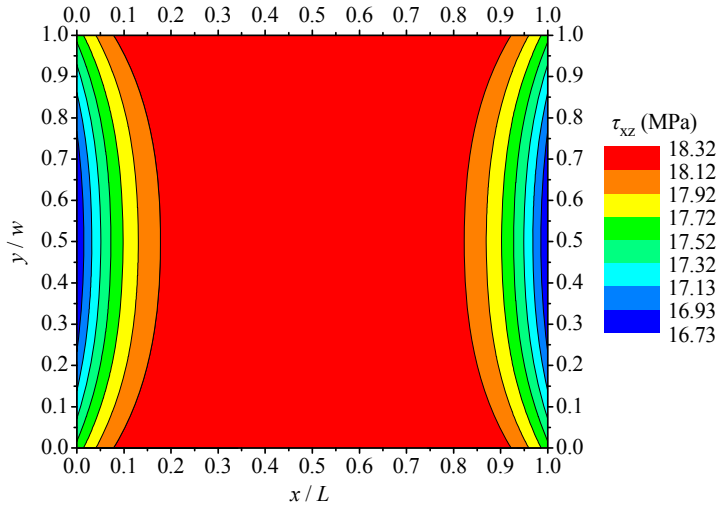


(γ)

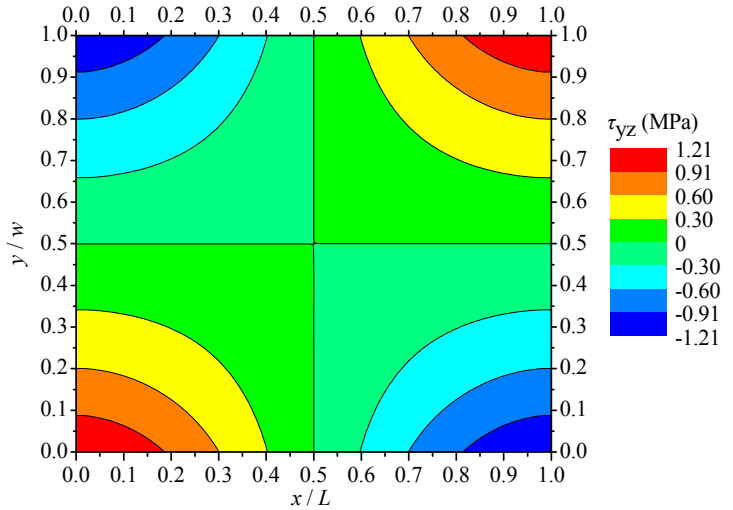
Σχήμα 6.11: Κατανομή ελαστοπλαστικών ορθών σ_y (α) και διατμητικών τ_{xz} (β) και τ_{yz} (γ) τάσεων για επιβαλλόμενη μετατόπιση u ίση με 0.1 mm στο σύνδεσμο μονής επικάλυψης.



(α)

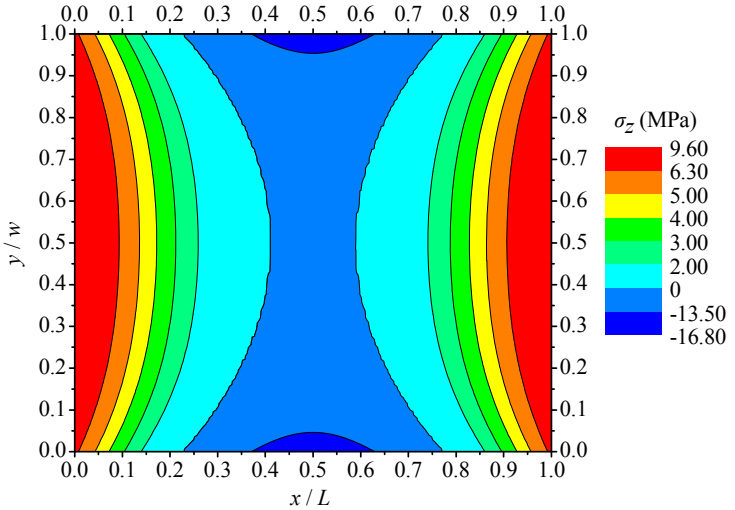


(β)

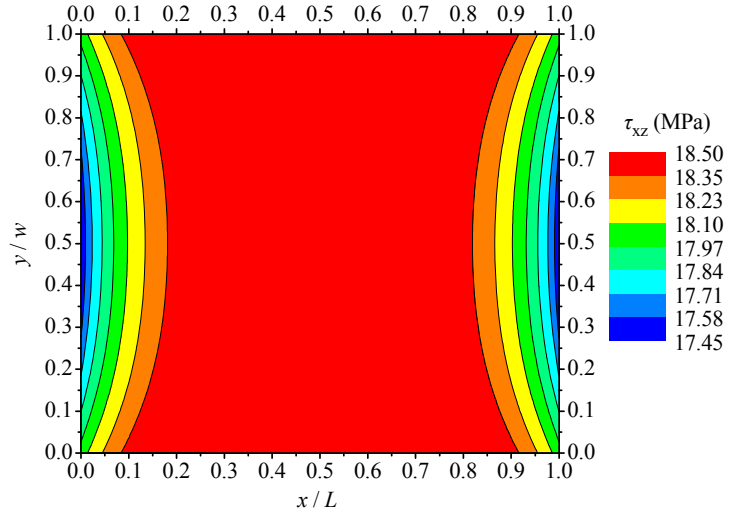


(γ)

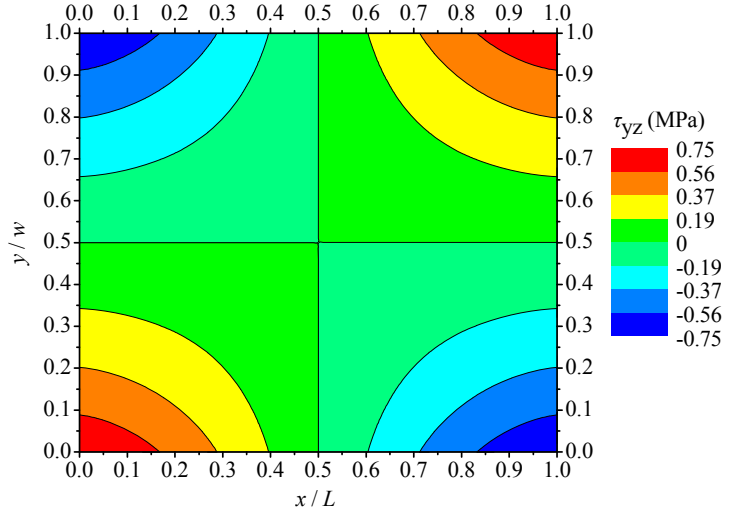
Σχήμα 6.12: Κατανομή ελαστοπλαστικών ορθών σ_y (α) και διατμητικών τ_{xz} (β) και τ_{yz} (γ) τάσεων για επιβαλλόμενη μετατόπιση u ίση με 0.175 mm στο σύνδεσμο μονής επικάλυψης.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 6.13: Κατανομή ελαστοπλαστικών ορθών σ_y (α) και διατμητικών τ_{xz} (β) και τ_{yz} (γ) τάσεων για επιβαλλόμενη μετατόπιση *u* ίση με 0.2 mm στο σύνδεσμο μονής επικάλυψης.

Στα σχήματα 6.14, 6.15, 6.16 και 6.17 παρουσιάζονται οι κατανομές των ορθών σ_y και διατμητικών τ_{xz} και τ_{yz} για επιβαλλόμενη τιμή μετατόπισης 0.01 mm, 0.03 mm, 0.07 mm και 0.135 mm, αντίστοιχα, για την περίπτωση του συνδέσμου διπλής επικάλυψης (κόκκινα σημεία στην καμπύλη του σχήματος 6.6 β). Για την διευκόλυνση της παρουσίασης των αποτελεσμάτων, στα 2-διάστατα διαγράμματα οι άξονες έχουν κανονικοποιηθεί ως προς τα ονομαστικά μεγέθη w και L (βλέπε Σχήμα 6.9 β). Ως γενική παρατήρηση για όλα τα διαγράμματα, οι ορθές τάσεις σ_y και οι διατμητικές τάσεις τ_{xz} και τ_{yz} είναι συμμετρικές ως προς τον x άξονα (y = 0.5).

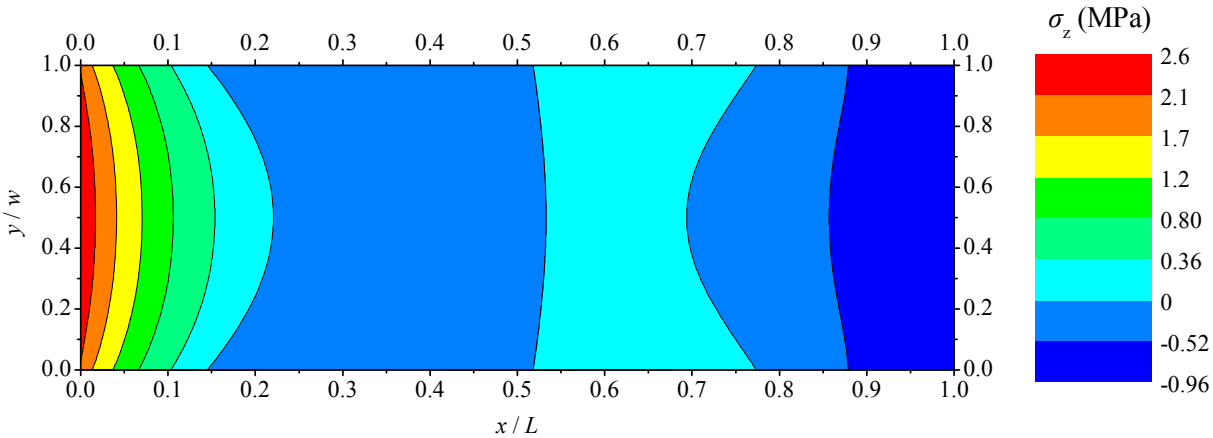
Οι αναπτυσσόμενες ελαστικές ορθές τάσεις στο κολλητικό μέσο (βλέπε Σχήμα 6.14 α), παρουσιάζουν μέγιστες τιμές στο άκρο όπου x/L = 0 και μειώνονται κατά μη-γραμμικό τρόπο όσο το x/L τείνει στο 0.2. Ειδικότερα, παρουσιάζονται μέγιστα στη θέση y/w = 0.5. Στο μεγαλύτερο μέρος του κολλητικού μέσου οι ελαστικές ορθές τάσεις είναι αρνητικές, γεγονός που υποδηλώνει την επαφή των δύο μεταλλικών ελασμάτων και τον περιορισμό των τάσεων στα άκρα. Στην περιοχή όπου οριοθετείται μεταξύ των τεταγμένων x/L = 0.51 και x/L = 0.76 παρατηρείται ανάπτυξη θετικών ορθών τάσεων που παραμένουν σε χαμηλά σε σχέση με τα μέγιστα επίπεδα. Οι εκτός επιπέδου διατμητικές τάσεις τ_{xz} έχουν αναπτυχθεί σε ολόκληρη την περιοχή του κολλητικού μέσου και εμφανίζουν μέγιστα στο δεξί άκρο (x/L = 1). Αυξημένες παρατηρούνται οι τάσεις στο αριστερό άκρο όπου x/L = 0. Οι εν λόγω τάσεις μειώνονται όσο το x/L τείνει στο 0.4 και στο 0.65 από τα δύο άκρα, αντίστοιχα. Στην περιοχή που οριοθετείται από τις εν λόγω τιμές οι τάσεις τ_{xz} σταθεροποιούνται. Οι εντός επιπέδου διατμητικές τάσεις τ_{yz} διατηρούνται σε σχετικά χαμηλά επίπεδα και εμφανίζουν κατά απόλυτη τιμή μέγιστα στα τέσσερα άκρα της σύνδεσης.

Εν συνεχεία, για επιβαλλόμενη μετατόπιση 0.03 mm (βλέπε Σχήμα 6.15) οι τάσεις δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερες μεταβολές σε σχέση με τις προαναφερθείσες ελαστικές του Σχήματος 6.14. Παρ' όλα αυτά ενισχύονται τα μέγιστα των ορθών και των εκτός επιπέδου διατμητικών τάσεων στα άκρα x/L = 0 και x/L = 1, αντίστοιχα, ενώ οι εντός επιπέδου διατμητικές τάσεις έχουν αυξηθεί σε επίπεδα τιμών χωρίς μεταβολές της κατανομής τους.

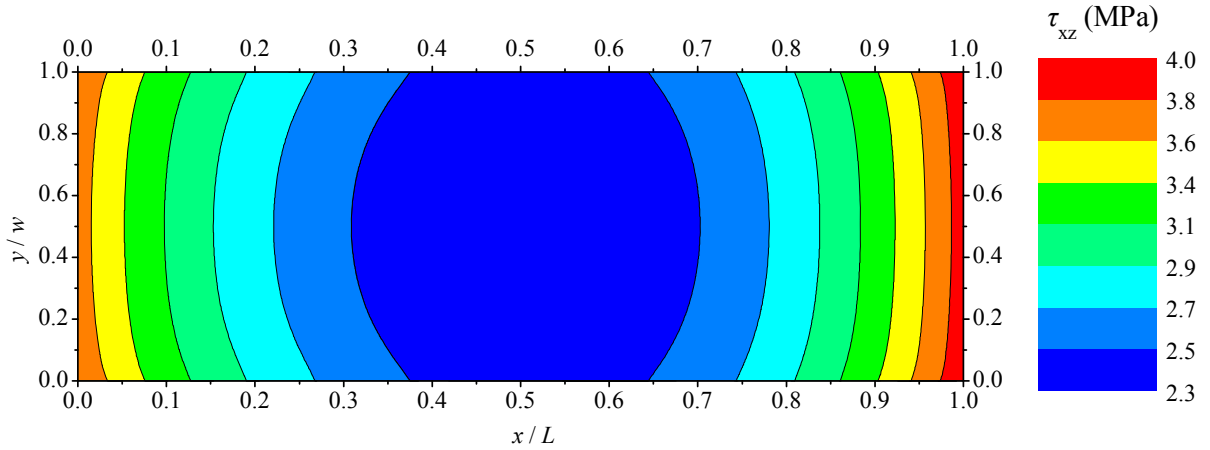
Για επιβαλλόμενη μετατόπιση ίση με 0.07 mm, οι αναπτυσσόμενες τάσεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.16. Η περιοχή που καταλαμβάνουν οι θετικές ορθές τάσεις έχει αυξηθεί έως x/L = 0.3 ενώ η περιοχή όπου οριοθετούνταν από x/L = 0.51 και x/L = 0.76 σε περιοχή θετικών ορθών τάσεων στα Σχήματα 6.15 α και 6.16 α έχει αντικατασταθεί από αρνητικές τάσεις επαφής. Η εν λόγω ανακατανομή οδηγεί στο συμπέρασμα πως μεγαλύτερο μέρος του κολλητικού μέσου φορτίζεται με ορθές τάσεις. Οι εκτός επιπέδου διατμητικές τάσεις τ_{xz} (βλέπε Σχήμα 6.16 β) δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερες μεταβολές ως προς τις τιμές των

ισοϋψών περιοχών αλλά τα μέγιστα πλέον οριοθετούνται καθαρά στο δεξί άκρο όπου x/L = 1. Οι εντός επιπέδου διατμητικές τάσεις διατηρούνται σε χαμηλά επίπεδα υποδηλώνοντας πως παραμένουν στην ελαστική περιοχή.

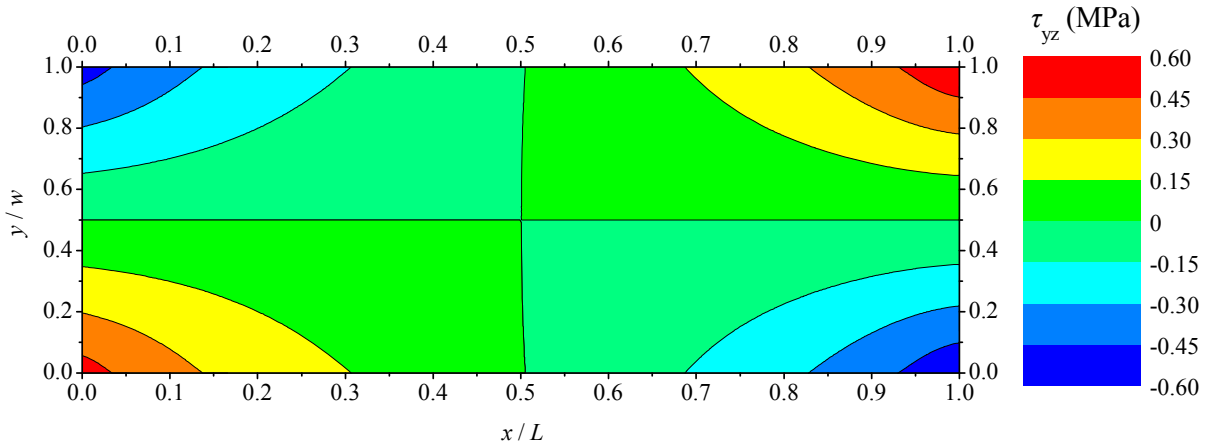
Για επιβαλλόμενη μετατόπιση ίση με 0.135 mm, σημείο μέγιστης δύναμης που παραλαμβάνει ο σύνδεσμος (αντοχή) αλλά και σημείο όπου ικανοποιείται το κριτήριο αστοχίας που περιγράφεται από την εξίσωση 3.12 και 3.29 για την μεικτού Τύπου φόρτιση, οι αναπτυσσόμενες τάσεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.17. Οι ορθές τάσεις εξακολουθούν να εμφανίζουν μέγιστα στο άκρο όπου x/L = 0 με αύξηση της επιφάνειας δράσης τους έως την τετμημένη x/L = 0.4. Στο σημείο x/L = 0 η κρίσιμη τάση $\sigma_{cm,I}$ ισούται με 8.6 Mpa με αρχική τιμή $\sigma_{c,I}$ ίση με 30 Mpa. Η περιοχή θετικών τάσεων στα μέσα του συνδέσμου έχει αντικατασταθεί πλήρως από αρνητικές ορθές τάσεις επαφής. Οι εκτός επιπέδου διατμητικές τάσεις τ_{xz} παρουσιάζουν ανακατανομή κατά τρόπο που μειώνονται ελαφρώς στα άκρα x/L = 0 και x/L = 1 ενώ μεγιστοποιούνται στο εσωτερικό στην περιοχή όπου οριοθετείται από x/L = 0.15 και x/L = 0.91. Η κρίσιμη τάση $\sigma_{cm,II}$ ισούται με 18.31 Mpa με αρχική τιμή $\sigma_{c,II}$ ίση με 18.5 Mpa. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει πως ο εν λόγω σύνδεσμος φορτίζεται ως επί το πλείστον σε διάτμηση. Οι ορθές τάσεις όμως οδηγούν στην έναρξη της αστοχίας τόσο από το ένα άκρο x/L = 0 και από το άλλο άκρο x/L = 1 Οι εντός επιπέδου διατμητικές τάσεις διατηρούνται σε χαμηλότερα επίπεδα από τις αντίστοιχες τιμές του προηγούμενου σχήματος υποδηλώνοντας πως παραμένουν στην ελαστική περιοχή.



(α)

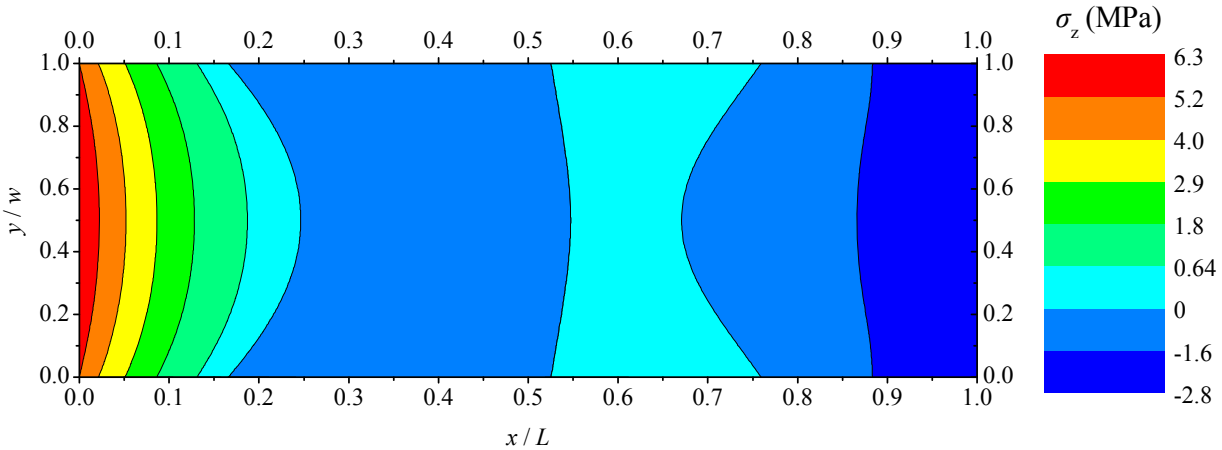


(β)

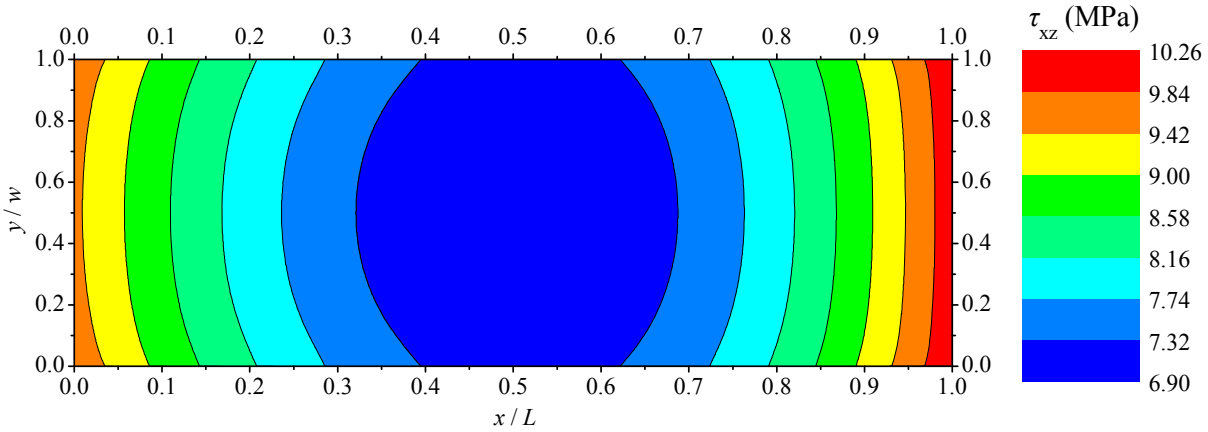


(γ)

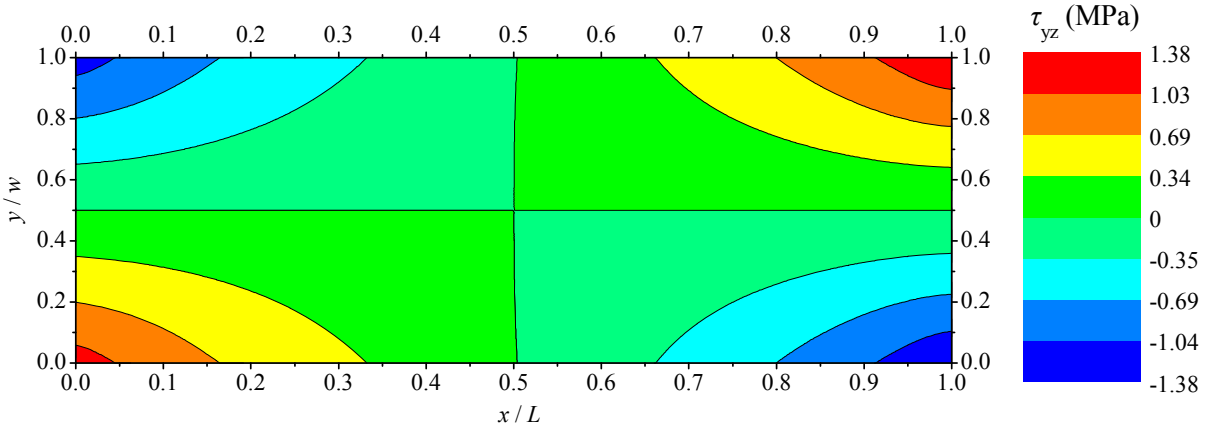
Σχήμα 6.14: Κατανομή ελαστικών ορθών σ_y (α) και διατμητικών τ_{xz} (β) και τ_{yz} (γ) τάσεων για επιβαλλόμενη μετατόπιση u ίση με 0.01 mm στο σύνδεσμο διπλής επικάλυψης.



(α)

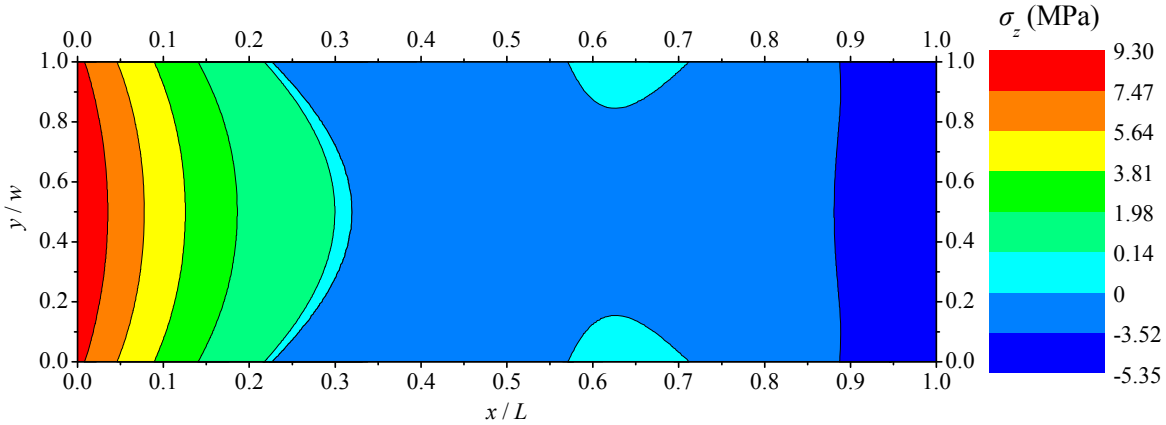


(β)

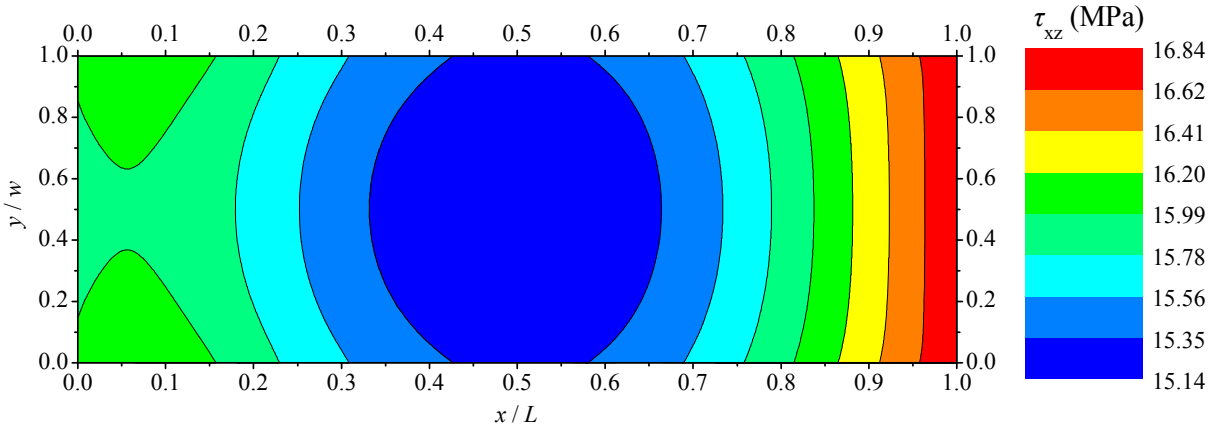


(γ)

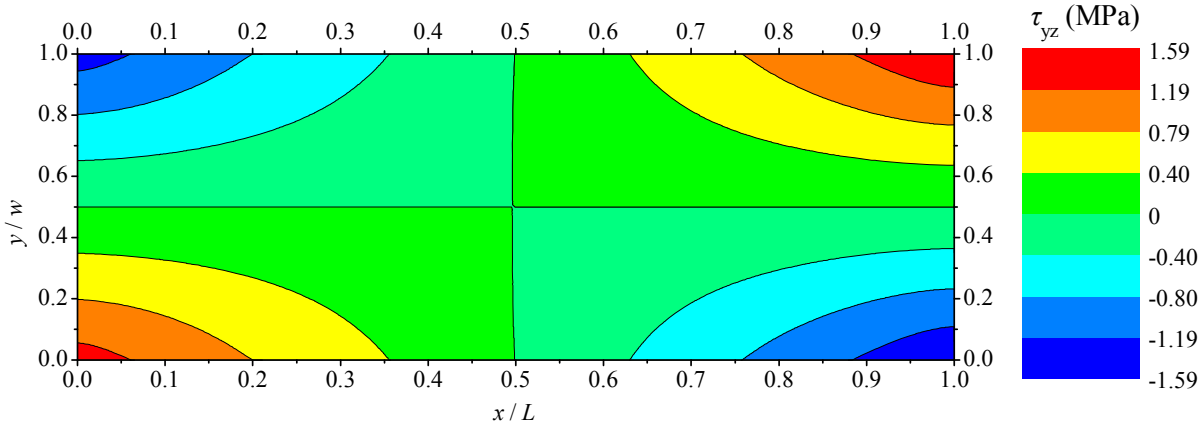
Σχήμα 6.15: Κατανομή ορθών σ_y (α) και διατμητικών τ_{xz} (β) και τ_{yz} (γ) τάσεων για επιβαλλόμενη μετατόπιση *u* ίση με 0.03 mm στο σύνδεσμο διπλής επικάλυψης.



(α)

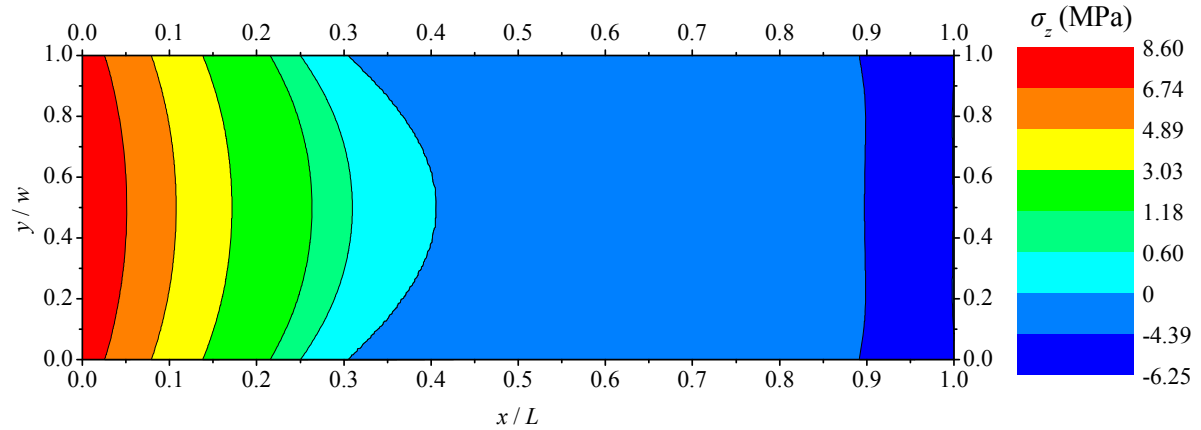


(β)

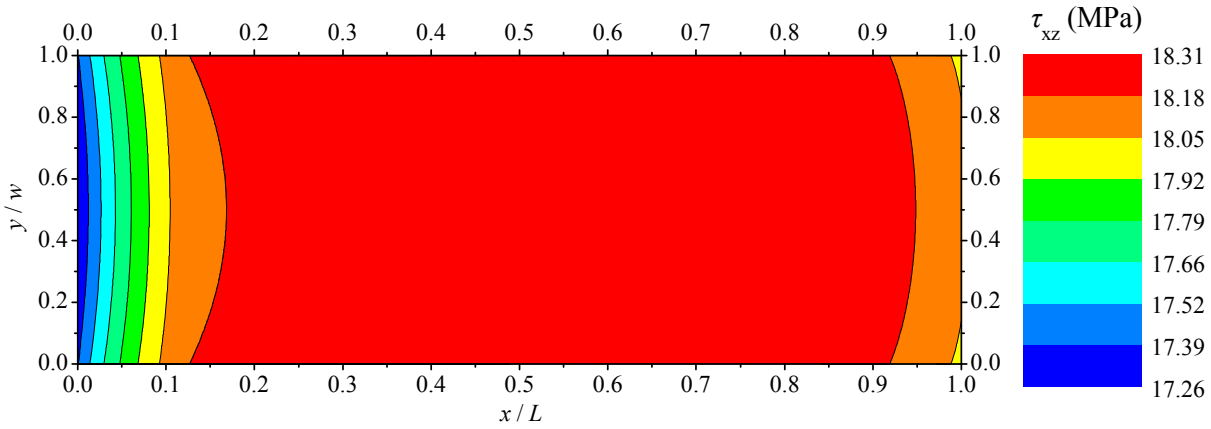


(γ)

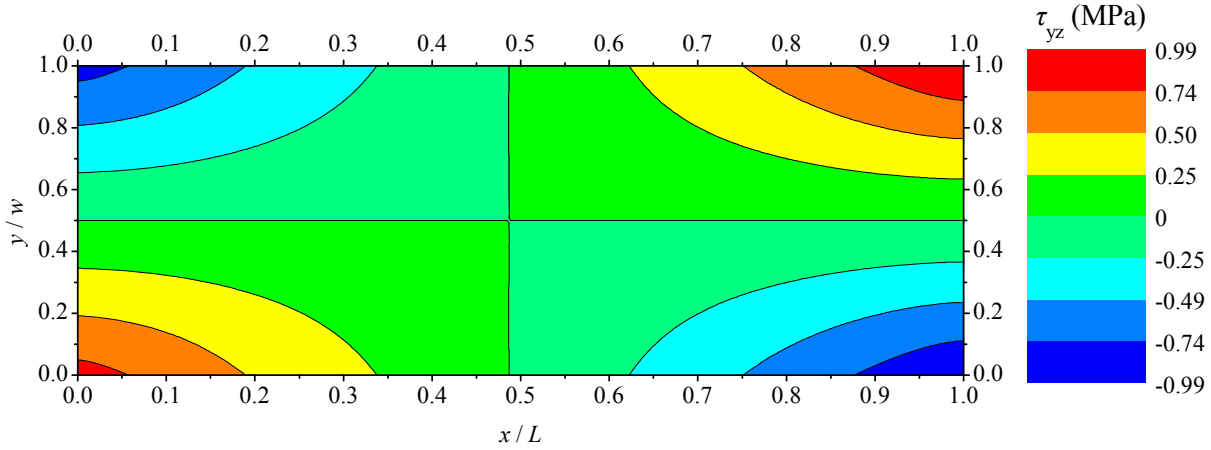
Σχήμα 6.16: Κατανομή ορθών σ_y (α) και διατμητικών τ_{xz} (β) και τ_{yz} (γ) τάσεων για επιβαλλόμενη μετατόπιση u ίση με 0.07 mm στο σύνδεσμο διπλής επικάλυψης.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 6.17: Κατανομή ορθών σ_y (α) και διαμτητικών τ_{xz} (β) και τ_{yz} (γ) τάσεων για επιβαλλόμενη μετατόπιση *u* ίση με 0.135 mm στο σύνδεσμο διπλής επικάλυψης.

7. Συμπεράσματα - Συζήτηση

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής, παρουσιάζεται ένας καινούριος νόμος τάσης-σχετικής απομάκρυνσης, ο οποίος περιγράφει την καταστατική σχέση ενός όλκιμου κολλητικού μέσου σε φόρτιση και θραύση Τύπου I, II και III. Ο εν λόγω προτεινόμενος νόμος χρησιμοποιείται για να εκφράσει την Embedded Process Zone (EPZ) ενός όλκιμου κολλητικού μέσου που περιορίζεται μεταξύ δύο κατασκευαστικών στοιχείων (μεταλλικών ή σύνθετων υλικών) με σκοπό να προσφέρει μόνιμη σύνδεση. Η μαθηματική του διατύπωση είναι προσανατολισμένη για την περιγραφή της μεικτού-τύπου φόρτισης και αστοχίας ενός συνδέσμου.

Μια σειρά συνδέσμων μονής και διπλής επικάλυψης κατασκευάστηκαν και δοκιμάστηκαν πειραματικά και οι αντίστοιχες μετρήσεις συγκρίθηκαν με αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων με τη χρήση των προτεινόμενων νόμων, για λόγους επιβεβαίωσης και επαλήθευσης. Οι προτεινόμενοι νόμοι εισήχθησαν σε ένα μοντέλο μεικτού τύπου φόρτισης και αστοχίας, που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της εν λόγω διπλωματικής, το οποίο και προγραμματίστηκε στα πλαίσια 3-διάστατων στοιχείων διεπιφάνειας σε υπορουτίνα UEL στο Abaqus 6.10.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα με την χρήση του προτεινόμενου νόμου συγκρίνονται πολύ καλά με τα αντίστοιχα πειραματικά ως προς τις καμπύλες δύναμης – μετατόπισης και δύναμης – παραμορφώσεων. Το προτεινόμενο μοντέλο προέβλεψε με μεγάλη ακρίβεια την ελαστοπλαστική απόκριση και την αντοχή και των δύο Τύπου συνδέσμων, χρησιμοποιώντας σε κάθε ανάλυση κοινούς νόμους (ιδιότητες νόμων).

Επιπρόσθετα, το ήδη υπάρχων στη βιβλιογραφία τραπεζοειδές μοντέλο νόμων, το όποιο θεωρείται αξιόπιστο για την μοντελοποίηση όλκιμων κολλητικών μέσων, χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων των πειραματικά δοκιμασμένων συνδέσμων. Με βάση τα εξαγόμενα αποτελέσματα από τον τραπεζοειδή νόμο, ο τελευταίος προβλέπει την γραμμικώς ελαστική περιοχή και την αντοχή κάθε περίπτωσης συνδέσμου, αλλά αδυνατεί να προβλέψει τις αυξανόμενες μη-γραμμικότητες που οφείλονται στην ελαστοπλαστική συμπεριφορά του κολλητικού μέσου. Για τις δεδομένες περιπτώσεις συνδέσεων, όπου χρησιμοποιούνται παχιά χαλύβδινα ελάσματα και όλκιμο κολλητικό μέσο, οι τραπεζοειδείς νόμοι προβλέπουν υψηλότερα φορτία για δεδομένη τιμή επιβαλλόμενης μετατόπισης συγκριτικά με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από τον προτεινόμενο νόμο και τις πειραματικές μετρήσεις. Η διαφορά αυτή γίνεται μεγαλύτερη όσο η τιμή της δύναμης πλησιάζει την αντοχή του συνδέσμου. Αυτό το συμπέρασμα είναι

σημαντικό όταν σχεδιάζει κανείς ένα κατασκευαστικό μέρος που εμπεριέχει μια σύνδεση με κολλητικά μέσα. Σε τέτοια περίπτωση ο προτεινόμενος νόμος προβλέπει την συνολική απόκριση και τις προκύπτουσες κατανομές τάσεων με μεγαλύτερη ακρίβεια από ότι ο τραπεζοειδής νόμος.

Για τον ορισμό κάθε νόμου σε καθαρή φόρτιση και θραύση Τύπου i (i = I, II και III), τέσσερις είναι οι απαραίτητες παράμετροι που απαιτούνται, η αρχική δυσκαμψία k_i, η κρίσιμη τάση $\sigma_{c,i}$, η αντίστοιχη απομάκρυνση στη θέση αυτή $\delta_{0,i}$, η κρίσιμη απομάκρυνση $\delta_{c,i}$ ή η δυσθραυστότητα J_{ic}. Η κρίσιμη τάση και η δυσθραυστότητα υπολογίζονται πειραματικά, ενώ η αρχική κλίση υπολογίζεται εύκολα από τις ελαστικές ιδιότητες του κολλητικού μέσου που παρέχονται από τον κατασκευαστή. Αναπτύθχηκε μια αναλυτική σχέση που συνδέει την φυσική παράμετρο $\delta_{0,i}$ μέσω συγκεκριμένης αριθμητικής παραμέτρου (σφάλμα e). Η ανάλυση ευαισθησίας έναντι της επίδρασης του σφάλματος e στα αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων έδειξε πως στην περίπτωση των εν λόγω συνδέσμων και του κολλητικού μέσου που χρησιμοποιήθηκε, ακριβείς προβλέψεις της αντοχής των συνδέσμων λαμβάνουν χώρα για τιμές του σφάλματος e ίσο με 1%.

8. Βιβλιογραφία

Adams, R.D., Comyn, J. and Wake, W.C. (1997), Structural adhesive joints in engineering. London: Chapman-Hall.

Anyfantis, K.N., Tsouvalis, N.G., 2009. Analysis and Design of Marine Structures, edited by G. Soares and P. Das, Proceedings of MARSTRUCT 2009, 2nd International Conference on Marine Structures - Analysis and Design of Marine Structures, Taylor & Francis Group, London, 387-392.

Campilho, R.D.S.G., de Moura, M.F.S.F., Domingues, J.J.M.S., 2005. Modelling single and double-lap repairs on composite materials. Composites Science and Technology 65:1948-1958.

Campilho, R.D.S.G., de Moura, M.F.S.F., Pinto, A.M.G. , Morais, J.J.L., Domingues, J.J.M.S. 2009a. Modelling the tensile fracture behaviour of CFRP scarf repairs. Composites Part B 40:149-157.

Campilho, R.D.S.G., de Moura, M.F.S.F., Domingues, J.J.M.S., 2008. Using a cohesive damage model to predict the tensile behaviour of CFRP single-strap repairs, International Journal of Solids and Structures 45: 1497-1512.

Campilho, R.D.S.G., de Moura, M.F.S.F., Ramantani, D.A., Morais, J.J.L., Domingues, J.J.M.S., 2009b. Tensile behaviour of three-dimensional carbon-epoxy adhesively bonded single- and double-strap repairs. International Journal of Adhesion and Adhesives 29: 678-86.

da Silva, L.F.M., das Neves, P.J.C., Adams, R.D., Spelt, J.K., 2009a. Analytical models of adhesively bonded joints – Part I: Literature survey. International Journal of Adhesion and Adhesives 29: 319-330.

da Silva, L.F.M., das Neves, P.J.C., Adams, R.D., Wang, A., Spelt, J.K, 2009b. Analytical models of adhesively bonded joints – Part II: Comparative study. International Journal of Adhesion and Adhesives 29: 331-341.

de Moura, M.F.S.F., Campilho, R.D.S.G., Gonçalves, J.P.M., 2009. Pure mode II fracture characterization of composite bonded joints. International Journal of Solids and Structures 46: 1589-95.

Dvorak, G., Zhang, J. and Canyurt, O. (2001), Adhesive tongue-and-groove joints for thick composite laminates, Composites Science and Technology 61, 1123–1142.

Goland, M. and Reissner, E. (1944). The stresses in cemented joints. Journal of Applied Mechanics. 11, 17-27.

Gonçalves, J.P.M., de Moura, M.F.S.F., Magalhães, A.G., de Castro, P.M.S.T., 2003. Application of interface finite elements to three-dimensional progressive failure analysis of adhesive joints. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures 26: 479 – 486.

Goylal, V.K, Johnson, E.R., Goyal, V.K., 2008. Predictive strength-fracture model of composite bonded joints. Composite Structures 82: 434–446.

Li, S., Thouless, M.D., Waas, A.M., Schroeder, J.A., Zavattieri, P.D., 2005. Use of mode-I cohesive zone models to describe the fracture of an adhesively-bonded polymer-matrix composite. Composite Science & Technology 65: 281–93.

Odi, R.A., Friend, C.M., 2004. An improved 2D model for bonded composite joints. International Journal of Adhesion and Adhesives 24: 389–405.

Panigrahi, S.K., Pradhan, B., 2007. Three dimensional failure analysis and damage propagation behaviour of adhesively bonded single lap joints in laminated FRP composites. Journal of Reinforced Plastics and Composites 26: 183-201.

Papanikos, P., Tserpes, K.I., Labeas, G., Pantelakis, S, 2005. Progressive damage modeling of bonded composite repairs. Theoretical and Applied Fracture Mechanics 43: 189–198.

Pires, I., Quintino, L., Durodola, J.F. and Beevers, A. (2003) Performance of bi-adhesive bonded aluminium lap joints. International Journal of Adhesion & Adhesives 23, 215-223.

Sun, W., Yang, C., 2004. Fracture analysis of adhesive-bonded single-lap composite joints, International SAMPE Technical Conference 3931-3942.

Tvergaard, V., Hutchinson, J.W. 1993. The influence of plasticity on the mixed-mode interface toughness. Journal of Mechanics and Physics of Solids 41: 1119–1135.

Tvergaard, V., Hutchinson, J.W. 1996. On the toughness of ductile adhesive joints. Journal of Mechanics of Physics and Solids 44:789–800.

Vallée, T., Correia, J.R., Keller, T., 2010. Optimum thickness of joints made of GFPR pultruded adherends and polyurethane adhesive. Composite Structures 92: 2102–2108.

Volkersen, O. (1938). Die Niektraftverteiling in Zugbeanspruchten mit Konstanten Laschenquerschritten. Luftfahrtforschung. 15, 41-47.

Yan, Z.M., You, M., Yi, X.S., Zheng X.L., Li Z. (2007), A numerical study of parallel slot in adherend on the stress distribution in adhesively bonded aluminum single lap joint, International Journal of Adhesion & Adhesives 27, 687–695.

Yang, Q.D., Thouless, M.D., 2001. Mixed – mode fracture analyses of plastically – deforming adhesive joints. International Journal of Fracture 110: 175-87.

Yang, Q.D., Thouless, M.D., Ward, S.W. 2001. Elastic-plastic mode-II fracture of adhesive joints. International Journal of Solids and Structures 38: 3251-62.

Yang, Q.D., Thouless, M.D., Ward, S.W., 1999. Numerical simulations of adhesively-bonded beams failing with extensive plastic deformation. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 47: 1337–1353.

Zhang, Y., Vassilopoulos, P. A. Keller, T., 2010. Mode I and II fracture behaviour of adhesively-bonded pultruded composite joints. Engineering Fracture Mechanics 77: 128-43.