



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ
ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

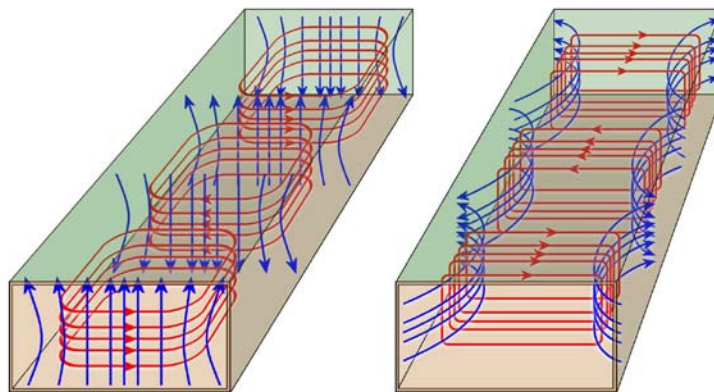


Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Διπλωματική Εργασία

Επίλυση προβλημάτων Κυματοδηγών με τη μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων

Κωνσταντίνος Μπασκουρέλος



Ακαδημαϊκός υπεύθυνος

Κοσμάς Τσακμακίδης
Επ. Καθηγητής
Τομέας Φυσικής Στερεάς Κατάστασης
Τμήμα Φυσικής ΕΚΠΑ

Ερευνητικός υπεύθυνος

Μιχάλης Πίσσας
Ερευνητής Α'
INN Δημόκριτος

Αθήνα, Οκτώβριος, 2020

Περιεχόμενα

Περίληψη	3
1 Βασική θεωρία Κυματοδηγών	4
1.1 Εισαγωγή	4
1.2 Γενικές Εξισώσεις των Κυματοδηγών	6
1.2.1 Σχέσεις διαμήκων και εγκάρσιων πεδίων σε κυματοδηγούς	6
1.2.2 Σχέση διασποράς σε κυματοδηγούς	11
1.2.3 Κυματική εξίσωση και ρυθμοί κυματοδηγών	12
1.3 Ρυθμοί Ορθογωνικών Κυματοδηγών	14
1.4 Διηλεκτρικοί κυματοδηγοί	17
1.5 Υβριδικοί ρυθμοί και ρυθμοί ακτινοβολίας	18
1.6 Ροή Ενέργειας σε Κυματοδηγούς	20
2 Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων στον Ηλεκτρομαγνητισμό	22
2.1 Εισαγωγή	22
2.2 Γενική περιγραφή και χαρακτηριστικά της FEM	23
2.2.1 Γένεση πλέγματος και πεπερασμένα στοιχεία	25
2.2.2 Γενικός φορμαλισμός της FEM	27
2.2.2.1 Κατασκευή των μητρώων των στοιχείων με τη μέθοδο Galerkin	28
2.2.2.2 Κατασκευή και αποθήκευση του ολικού μητρώου	31
2.2.2.3 Επιβολή συνοριακών συνθηκών και αποκοπή του υπολογιστικού χώρου	31
2.2.2.4 Επίλυση του ολικού συστήματος και μεταεπεξεργασία	32
2.3 Το πρόβλημα των παρασιτικών ρυθμών	34
2.4 Συναρτήσεις σχήματος για βαθμωτά και διανυσματικά στοιχεία	40
2.4.1 Συναρτήσεις σχήματος και μητρώα για κομβικά γραμμικά τριγωνικά στοιχεία	40
2.4.2 Συναρτήσεις σχήματος και μητρώα για διανυσματικά γραμμικά τριγωνικά στοιχεία	42
2.5 Κατασκευή του ολικού μητρώου από τα επιμέρους μητρώα των στοιχείων	45

3	Επίλυση προβλημάτων Κυματοδηγών με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων	47
3.1	Εισαγωγή	47
3.2	Επίλυση του προβλήματος Ομογενούς Κυματοδηγού με τη FEM	48
3.2.1	Εφαρμογή για ορθογωνικό και κυλινδρικό κυματοδηγό	53
3.2.1.1	Ορθογωνικός κυματοδηγός	53
3.2.1.2	Κυλινδρικός κυματοδηγός	55
3.3	Επίλυση του προβλήματος Ανομοιογενούς Κυματοδηγού με τη FEM	82
3.3.1	Παρατηρήσεις για την προγραμματιστική υλοποίηση	88
3.3.2	Εφαρμογή σε δομές κυματοδήγησης με ανομοιογενείς διατομές	89
3.3.2.1	Ορθογωνικός ομογενής κυματοδηγός	90
3.3.2.2	Μονόπλευρη τερματική γραμμή (unilateral finline)	93
	Αναφορές	102

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετάται και υλοποιείται προγραμματιστικά η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) για την επίλυση κάποιων σημαντικών προβλημάτων κυματοδηγών. Το κείμενο περιέχει τρία θεματικά κεφάλαια.

Το πρώτο κεφάλαιο περιέχει τις στοιχειώδεις έννοιες και την θεωρία των κυματοδηγών, απαραίτητες για την κατανόηση των προς επίλυση προβλημάτων. Η παρουσίαση είναι γενική, με κάποια έμφαση όμως στους ομογενείς ορθογωνικούς κυματοδηγούς που είναι η απλούστερη περίπτωση.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων στη γενική της μορφή. Δείχνεται η θεωρητική αφετηρία της μεθόδου και, περιληπτικά, όλα τα στάδια επίλυσης ενός προβλήματος με τη FEM και η σημασία τους. Εξετάζεται ιδιαίτερος το ζήτημα των παρασιτικών ρυθμών, το οποίο εμφανίζεται σε προβλήματα σκέδασης και ακτινοβολίας. Το ζήτημα αυτό δεν υπάρχει σε άλλους τομείς εφαρμογής της FEM και είναι πολύ σημαντικό για την αξιοπιστία της στον Ηλεκτρομαγνητισμό.

Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο, εφαρμόζεται η FEM για την επίλυση προβλημάτων κυματοδηγών. Συγκεκριμένα, δείχνεται πώς επιλύεται το κλασικό πρόβλημα εύρεσης των συχνοτήτων αποκοπής και των ρυθμών. Επίσης, παρουσιάζεται ένας πιο περίπλοκος φορμαλισμός, με τον οποίο μπορεί να κατασκευαστεί το διάγραμμα διασποράς σε κυματοδηγούς ανομοιογενούς διατομής. Ο φορμαλισμός αυτός είναι απαλλαγμένος από παρασιτικές λύσεις και ισχύει όχι μόνον για κυματοδηγούς αλλά για όλες τις συγγενείς διατάξεις κυματοδηγησης ` π.χ., για μονόπλευρη τερματική γραμμή (unilateral finline), για μικρολωρίδα (microstrip line) κ.α. Επίσης, μπορεί να επεκταθεί και σε διατομές με ανισότροπα υλικά ` η δυνατότητα αυτή παραμένει ανοιχτή σε μελλοντική μελέτη του θέματος.

Στο σημείο αυτό ευχαριστώ τους επιβλέποντες κ.κ. Κοσμά Τσακμακίδη, καθηγητή του τμήματος Φυσικής του ΕΚΠΑ, και Μιχάλη Πίσσα, ερευνητή Α΄ του Ινστιτούτου Νανοεπιστήμης και Νανοτεχνολογίας του ΕΚΕΦΕ “Δημόκριτος”, για την ανοχή και την υπομονή που μου επέδειξαν κατά τη συγγραφή του κειμένου. Ευχαριστώ επίσης τους κ.κ. Γεώργιο Κουτσούμπα, καθηγητή Θεωρητικής Φυσικής, και Κωστή Παρασκευαΐδη, αφυπηρετησα καθηγητή Φυσικής, της ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ για την υποστήριξή τους κατά τη διάρκεια της φοίτησής μου στο πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών όπου και τους είχα καθηγητές.

Φθινόπωρο 2020, Αθήνα,

Κωνσταντίνος Μπασκουρέλος.

1. Βασική θεωρία Κυματοδηγών

1.1 Εισαγωγή

Πολλές σύγχρονες τεχνολογίες αξιοποιούν το γεγονός ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μπορούν να οδηγηθούν κατά βούληση σε συγκεκριμένες διαδρομές, και να αποθηκευτούν προσωρινά σε εκλείσματα με χαμηλές απώλειες. Οι διατάξεις των αγωγών και διηλεκτρικών με τις οποίες επιτυγχάνονται τα παραπάνω ονομάζονται αντίστοιχα *κυματοδηγοί* και *κοιλότητες συντονισμού* ή *συντονιστές*. Ειδικότερα, κυματοδηγός είναι μια διάταξη που χρησιμοποιείται για την αποτελεσματική μεταφορά ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας μεταξύ δυο θέσεων¹. Οι κυματοδηγοί διαφοροποιούνται πρωταρχικά αναλόγως με τη γεωμετρία της διατομής τους (ορθογωνικοί, κυκλικοί, ελλειπτικοί κ.α.), και επίσης από το είδος του υλικού που περιέχουν ή είναι κατασκευασμένοι (μεταλλικοί, διηλεκτρικοί με ισότροπο ή ανισότροπο μέσο κ.α.). Οι κυματοδηγοί μπορούν να κατασκευαστούν για να μεταφέρουν κύματα σε ένα μεγάλο τμήμα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος, αλλά κυρίως είναι χρήσιμοι στις μικρομυματικές και οπτικές συχνότητες. Ανάλογα με την επιθυμητή συχνότητα λειτουργίας μπορεί να κατασκευαστούν από αγωγίμα ή διηλεκτρικά υλικά. Ο πρώτος κυματοδηγός προτάθηκε από τον J. J. Thomson το 1893 και κατασκευάστηκε από τον O. J. Lodge² το 1894. Η μαθηματική ανάλυση των διαδιδόμενων ρυθμών έγινε από τον Rayleigh το 1897. Στις αρχές του 20ού αι. οι κυματοδηγοί εγκαταλείφθηκαν και επανήλθαν στο προσκήνιο περίπου στα μέσα της δεκαετίας του 1930, όπου έκτοτε αναπτύχθηκαν σημαντικά και αποτελούν πλέον ώριμο τμήμα της ηλεκτρονικής τεχνολογίας και των επικοινωνιών.

Γενικά, ένας κυματοδηγός κατασκευάζεται τοποθετώντας αγωγίμα ή/και διηλεκτρικά υλικά έτσι ώστε ένα κύμα να παραμένει παγιδευμένο στο εσωτερικό του και να διαδίδεται κατά μήκος του. Πριν την ανάλυση ενός κυματοδηγού πρέπει να επιλεγούν δυο θεμελιώδη χαρακτηριστικά του: η μέθοδος με την οποία θα περιορίζεται το κύμα στο εσωτερικό του και το σχήμα της διατομής του.

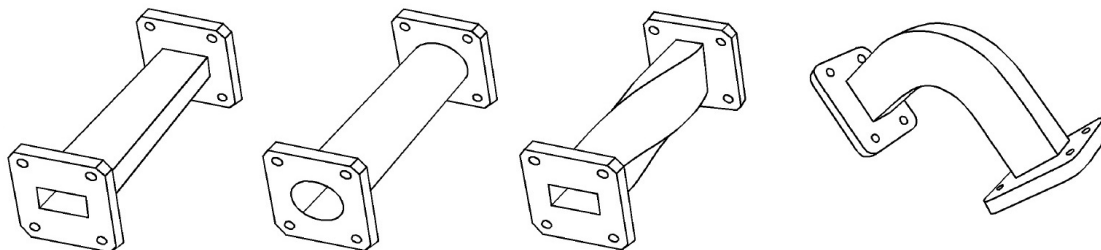
¹ Επίσης, μια άλλη διάταξη με την οποία μπορεί να μεταφερθεί ηλεκτρομαγνητική ενέργεια μεταξύ δύο σημείων είναι η *γραμμική μεταφοράς*. Πρόκειται για ένα συζευγμένο ζεύγος συρμάτων, ομοαξονικό καλώδιο ή άλλη παρόμοια διάταξη, κατανεμημένης ωμικής, επαγωγικής και χωρητικής αντίστασης, το οποίο μπορεί να καθοδηγήσει TEM κύματα με τις ίδιες ιδιότητες διάδοσης όπως ο κενός χώρος. Οι γραμμές μεταφοράς είναι κατάλληλες για τη μεταφορά TEM κυμάτων με συχνότητες περίπου ως 3GHz, δηλ. περίπου ως την SHF band (3-30 GHz). Σε μεγαλύτερες συχνότητες τα αγωγίμα στοιχεία τους εμφανίζουν υψηλές ωμικές απώλειες λόγω του επιδερμικού φαινομένου (skin effect) και πρέπει να χρησιμοποιηθούν κυματοδηγοί.

² Sir Oliver Joseph Lodge (1851-1940). Βρετανός φυσικός, συγγραφέας και εφευρέτης, πρωτοπόρος της ραδιοφωνίας. Επαλήθευσε την ύπαρξη Η/Μ κυμάτων ανεξάρτητα από τον Hertz και εφηύρε σημαντικές πατέντες για την κατασκευή του ραδιοφώνου.

Ένα κύμα παραμένει παγιδευμένο στο εσωτερικό του κυματοδηγού κάνοντας τα τοιχώματα (ή περιοχές έξω από τον πυρήνα του) υψηλά ανακλαστικά, ώστε το κύμα να ανακλάται διαρκώς εντός αυτού. Υπάρχουν τέσσερις κύριοι τρόποι με τους οποίους επιτυγχάνεται αυτή η ανάκλαση:

- *Χρήση αγωγών για τα τοιχώματα.* Αυτό είναι η κοινοτοπία για κύματα σχετικά χαμηλών συχνότητων, όπως στα radar και στα ηλεκτρονικά, επειδή η τραχύτητα των επιφανειών είναι μικρή συγκριτικά με το μήκος κύματος και επομένως δεν απαιτείται ειδική επεξεργασία στην μικροσκοπική κλίμακα (λείανση κ.α.).
- *Χρήση πλάσματος ως τοιχώματα,* όπως ένας υψηλά εμπλουτισμένος ημιαγωγός. Αυτό έχει ίδια συμπεριφορά με ένα μέταλλο, με τη διαφορά όμως ότι η ανακλαστικότητα μπορεί να ρυθμιστεί κατά βούληση μεταβάλλοντας τον εμπλουτισμό. Αυτός ο τρόπος είναι χρήσιμος για συσκευές στερεάς κατάστασης διότι ο κυματοδηγός μπορεί να κατασκευαστεί ως εγγενές τμήμα της συσκευής. Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί και αέριο πλάσμα π.χ., για συγκεκριμένες συχνότητες, η ιονόσφαιρα της γης δρα ως κυματοδηγός και χρησιμοποιείται για επικοινωνία μεγάλης εμβέλειας.
- *Χρήση διηλεκτρικής επένδυσης με χαμηλότερο δείκτη διάθλασης,* ώστε να συμβαίνει ολική εσωτερική ανάκλαση. Για την επίτευξη ολικής εσωτερικής ανάκλασης σε έναν κυματοδηγό, απαιτούνται γωνίες πρόσπτωσης σχεδόν παράλληλες με τα τοιχώματα αυτό επιτυγχάνεται συρρικνώνοντας αρκούντως τη διατομή του. Για σχετικά υψηλές συχνότητες χρησιμοποιούνται διηλεκτρικοί κυματοδηγοί π.χ., υπέρυθρα και ορατά φωτεινά σήματα συνήθως οδηγούνται με οπτικές ίνες.
- *Χρήση διηλεκτρικού υλικού όπου έχουν ανοιχθεί οπές στην εξωτερική του περιοχή.* Χρησιμοποιώντας φαινόμενα παρεμβολής (interference effects) σχηματίζεται ένας φωτονικός κρύσταλλος που είναι ανακλαστικός στην επιθυμητή συχνότητα.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί σύντομα η βασική θεωρία των κυματοδηγών εστιάζοντας στους κυματοδηγούς ορθογωνικής διατομής, για τους οποίους θα αναπτυχθεί αργότερα ένα μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 1.1: Μεταλλικοί κυματοδηγοί.

1.2 Γενικές Εξισώσεις των Κυματοδηγών

1.2.1 Σχέσεις διαμήκων και εγκάρσιων πεδίων σε κυματοδηγούς

Έστω ένας κυματοδηγός³ με διατομή τυχαίου σχήματος αλλά σταθερή κατά μήκος του, και με πεδία αρμονικής μεταβολής $e^{-i\omega t}$. Το οδηγούμενο κύμα κατά τον διαμήκη άξονα του κυματοδηγού είναι ελεύθερο. Αυτό σημαίνει ότι τα συνολικά πεδία έχουν τη μαθηματική μορφή

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = (\mathbf{E}_t(x, y) + E_z(x, y)\hat{\mathbf{z}})e^{ikz-i\omega t}, \quad (1.1)$$

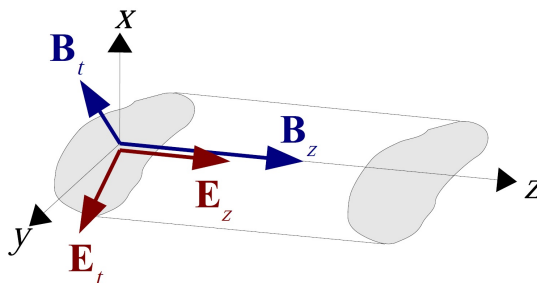
$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = (\mathbf{B}_t(x, y) + B_z(x, y)\hat{\mathbf{z}})e^{ikz-i\omega t}. \quad (1.2)$$

Η γενική λύση είναι το άθροισμα όλων των δυνατών μερικών λύσεων, σταθμισμένες με κατάλληλους συντελεστές. Οι παραπάνω εκφράσεις αναπαριστούν κύματα που οδεύουν κατά τη διαμήκη διεύθυνση z , η δε εξάρτησή τους κατά x και y καθορίζεται από τα τοιχώματα⁴. Στις εκφράσεις αυτές, τα πεδία έχουν χωριστεί σε συνιστώσες εγκάρσιες στον διαμήκη άξονα του κυματοδηγού (δείκτης t) και σε παράλληλες κατ' αυτόν (δείκτης z).

Εκ των (1.1) και (1.2) η εξάρτηση των συνιστωσών από τα z και t είναι γνωστή, άρα είναι

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = ik\mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} = ik\mathbf{B}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega\mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -i\omega\mathbf{B}. \quad (1.3)$$

Στις (1.3), k είναι ο αξονικός κυματάρυθμος, ο οποίος εκφράζει την απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κορυφών του κύματος κατά τον διαμήκη άξονα του κυματοδηγού. Οι (1.3) διατυπώθηκαν χωρίς τη χρήση κάποιας ιδιότητας από τη διάδοση των επίπεδων κυμάτων στον κενό άπειρο χώρο. Ως εκ τούτου, η σχέση του k με την κυκλ. συχνότητα ω , δηλ. η σχέση διασποράς, είναι ακόμη άγνωστη - και πάντως δεν είναι ίδια με την αντίστοιχη για τα επίπεδα κύματα στον κενό άπειρο χώρο, καθόσον τα κύματα εντός του κυματοδηγού συμπεριφέρονται διαφορετικά.



Σχήμα 1.2: Διαμήκεις και εγκάρσιες πεδιακές συνιστώσες σε κυματοδηγό.

³ Από εδώ και εντεύθεν θα θεωρείται ότι πρόκειται για κυματοδηγό μεταλλικό και κενό, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.

⁴ Συγκεκριμένα, από την απόσταση των τοιχωμάτων και τις συνοριακές συνθήκες επί αυτών. Αυτό θα εξεταστεί αργότερα.

Ακολουθώντας, χρησιμοποιώντας τις εξ. Maxwell και τις (1.1)-(1.2), θα διατυπωθούν οι σχέσεις που δίνουν τα εγκάρσια πεδία \mathbf{E}_t και \mathbf{B}_t ως συναρτήσεις των διαμήκων πεδίων E_z και B_z , και αντιστρόφως⁵.

Για τις πράξεις που θα ακολουθήσουν είναι χρήσιμες οι παρακάτω ταυτότητες⁶,

$$\nabla = \nabla_t + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.4)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{E}_t) = -\mathbf{E}_t, \quad \hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_t) = -\mathbf{B}_t, \quad (1.5)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\nabla_t \times \mathbf{E}_z) = \nabla_t E_z, \quad \hat{\mathbf{z}} \times (\nabla_t \times \mathbf{B}_z) = \nabla_t B_z. \quad (1.6)$$

Αφετηρία για τις αναζητούμενες σχέσεις είναι οι εξ. Maxwell χωρίς πηγές,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.8)$$

οι οποίες, για αρμονική χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$, είναι κατά γνωστά

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = -i\omega \mu \mathbf{E}. \quad (1.10)$$

Αναπτύσσοντας τα πεδία και το ∇ στις διαμήκεις και εγκάρσιες συνιστώσες τους, οι παραπάνω γράφονται

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad \nabla_t \cdot \mathbf{B}_t + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (1.11)$$

$$\left(\nabla_t + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\mathbf{E}_t + E_z \hat{\mathbf{z}}) = i\omega (\mathbf{B}_t + B_z \hat{\mathbf{z}}), \quad (1.12)$$

$$\left(\nabla_t + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\mathbf{B}_t + B_z \hat{\mathbf{z}}) = -i\omega \mu \mathbf{E}_t - i\omega \mu E_z \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.13)$$

Έχοντας υιοθετήσει κατά z την εξάρτηση e^{ikz} , οι παράγωγοι κατά z στις σχέσεις αυτές μπορούν να αποτιμηθούν και λαμβάνεται⁷

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = -ikE_z, \quad \nabla_t \cdot \mathbf{B}_t = -ikB_z, \quad (1.14)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t + \nabla_t \times (E_z \hat{\mathbf{z}}) + ik \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t = i\omega \mathbf{B}_t + i\omega B_z \hat{\mathbf{z}}, \quad (1.15)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{B}_t + \nabla_t \times (B_z \hat{\mathbf{z}}) + ik \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_t = -i\omega \mu \mathbf{E}_t - i\omega \mu E_z \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.16)$$

Οι (1.14)-(1.16) προέκυψαν από τις εξ. Maxwell απλώς θεωρώντας ότι τα πεδία έχουν αρμονική μεταβολή $e^{-i\omega t}$ και εξάρτηση e^{ikz} και αναπτύσσοντας τις διανυσματικές τους συνιστώσες.

⁵ Υπενθυμίζεται ότι γενικά ένα διανυσματικό πεδίο έχει συνιστώσα σε κάθε άξονα συντεταγμένων, και ότι κάθε τέτοια συνιστώσα είναι συνάρτηση όλων των συντεταγμένων.

Ας μην συγχέονται οι συνιστώσες με την συναρτησιακή τους εξάρτηση από τις συντεταγμένες.

⁶ Οι (3.19) και (1.5) ισχύουν για κάθε διάνυσμα ενώ οι (1.6) ισχύουν μόνον για τη διαμήκη συνιστώσα ενός διανύσματος.

⁷ Θεωρείται ότι οι συνιστώσες \mathbf{E}_t και $E_z \hat{\mathbf{z}}$ περιλαμβάνουν και τον όρο e^{ikz} . Ομοίως και οι \mathbf{B}_t και $B_z \hat{\mathbf{z}}$.

Οι (1.15) και (1.16) στο δεξί μέλος τους έχουν ένα διάνυσμα. Το διάνυσμα αυτό μπορεί να αναλυθεί σε διαμήκεις και εγκάρσιες συνιστώσες. Σε ότι αφορά τις διαμήκεις συνιστώσες, οι (1.15) και (1.16) πολλαπλασιάζονται εσωτερικά με $\hat{\mathbf{z}}$ και προκύπτει⁸

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) = i\omega B_z, \quad (1.17)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{B}_t) = -i\omega\mu\epsilon E_z. \quad (1.18)$$

Οι (1.14) και (1.17)-(1.18) δίνουν άμεσα τις διαμήκεις συνιστώσες των πεδίων αν είναι γνωστές οι εγκάρσιες. Εν συνεχεία, θα διατυπωθούν οι σχέσεις που, αντιστρόφως, δίνουν τις εγκάρσιες συνιστώσες αν είναι γνωστές οι διαμήκεις. Προς τούτο, οι (1.15) και (1.16) πολλαπλασιάζονται εξωτερικά με $\hat{\mathbf{z}}$, ήτοι

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\nabla_t \times \mathbf{E}_t + \nabla_t \times (E_z \hat{\mathbf{z}}) + ik \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t) = \hat{\mathbf{z}} \times (i\omega \mathbf{B}_t + i\omega B_z \hat{\mathbf{z}}), \quad (1.19)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\nabla_t \times \mathbf{B}_t + \nabla_t \times (B_z \hat{\mathbf{z}}) + ik \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_t) = \hat{\mathbf{z}} \times (-i\omega\mu\epsilon \mathbf{E}_t - i\omega\mu\epsilon E_z \hat{\mathbf{z}}). \quad (1.20)$$

Στις παραπάνω, λόγω του εξωτερικού γινομένου απαλείφονται κάποιοι όροι⁹ και απομένουν οι

$$\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \times (E_z \hat{\mathbf{z}}) + ik \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t = i\omega \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_t, \quad (1.21)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \times (B_z \hat{\mathbf{z}}) + ik \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_t = -i\omega\mu\epsilon \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t. \quad (1.22)$$

Χρησιμοποιώντας τις (1.5) και (1.6), οι τελευταίες γράφονται

$$\nabla_t E_z - ik \mathbf{E}_t = i\omega \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_t, \quad (1.23)$$

$$\nabla_t B_z - ik \mathbf{B}_t = -i\omega\mu\epsilon \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t. \quad (1.24)$$

⁸ Το ∇_t έχει μόνον τις εγκάρσιες συνιστώσες, εν προκειμένω κατά x και y . Επομένως είναι

$$\begin{aligned} \nabla_t \times (E_z \hat{\mathbf{z}}) &= (\nabla - \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}) \times (E_z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= \nabla \times (E_z \hat{\mathbf{z}}) - \hat{\mathbf{z}} \times (\frac{\partial E_z}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}) \\ &= \frac{\partial E_z}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Δηλ. το $\nabla_t \times (E_z \hat{\mathbf{z}})$ βρίσκεται στο xy επίπεδο, οπότε $\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla_t \times (E_z \hat{\mathbf{z}}) = 0$.

⁹ Όπως προκύπτει από τις πράξεις, το $\nabla_t \times \mathbf{E}_t$ έχει συνιστώσα μόνον κατά z .

Το $\hat{\mathbf{z}} \times$ απαλείφει τις z συνιστώσες, επομένως $\hat{\mathbf{z}} \times (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) = \mathbf{0}$.

Τονίζεται ότι το ∇_t δεν έχει διαμήκη συνιστώσα αλλά το $\nabla_t \times$ σε ένα διανυσματικό πεδίο μπορεί να έχει, όπως συμβαίνει εδώ.

Συγκεκριμένα, έστω $\mathbf{E}_t = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} + 0 \hat{\mathbf{z}}$ και $\nabla_t \times = (\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + 0 \hat{\mathbf{z}}) \times$.

Τότε είναι

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \mathbf{E}_t &= (\frac{\partial 0}{\partial y} - 0 E_y) \hat{\mathbf{x}} - (\frac{\partial 0}{\partial x} - 0 E_x) \hat{\mathbf{y}} + (\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}) \hat{\mathbf{z}} \\ &= (\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}) \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Οι (1.23) και (1.24) αποτελούν ένα σύστημα που μπορεί να λυθεί ως προς τις εγκάρσιες συνιστώσες \mathbf{E}_t και \mathbf{B}_t . Συγκεκριμένα, η (1.23) πολλαπλασιάζεται με $\hat{\mathbf{z}} \times$, χρησιμοποιείται ότι $\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_t) = -\mathbf{B}_t$ και αντικαθίσταται το $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t$ από την (1.24). Έτσι προκύπτει το \mathbf{B}_t . Με όμοια διαδικασία προκύπτει και το \mathbf{E}_t .

Η επίλυση με αυτόν τον τρόπο δίνει

$$\mathbf{E}_t = \frac{i}{\omega^2 \mu \varepsilon - k^2} (k \nabla_t E_z - \omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t B_z), \quad (1.25)$$

$$\mathbf{B}_t = \frac{i}{\omega^2 \mu \varepsilon - k^2} (k \nabla_t B_z + \omega \mu \varepsilon \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t E_z). \quad (1.26)$$

Οι (1.25) και (1.26), ενίοτε γνωστές ως *εξισώσεις κυματοδηγών*, δίνουν άμεσα τις εγκάρσιες συνιστώσες των πεδίων αν είναι γνωστές οι διαμήκεις. Δηλαδή δίνουν το εγκάρσιο προφίλ του πεδίου στον κυματοδηγό¹⁰.

Ως τώρα δεν έχει ληφθεί υπόψη η επίδραση των τοιχωμάτων του κυματοδηγού¹¹. Όλη η παραπάνω μελέτη βασίζεται στην υπόθεση ότι το πεδίο είναι ένα μονοχρωματικό, αρμονικό κύμα, οδεύον κατά¹² $+z$, βλ. (1.1) και (1.2). Οι σχέσεις που διατυπώθηκαν για τις συνιστώσες των πεδίων απορρέουν μόνο από αυτή υπόθεση και τις εξ. Maxwell. Αν το κύμα οδεύει κατά $-z$, η εξάρτηση κατά z θα είναι e^{-ikz} . Αν υπάρχουν κύματα που οδεύουν και προς τις δυο διευθύνσεις, τότε η λύση θα είναι μια υπέρθεση των σχέσεων για κάθε περίπτωση.

Οι διάφορες μορφές (field patterns) που μπορεί να λάβει το πεδίο σε έναν κυματοδηγό ονομάζονται *ρυθμοί*¹³. Οι βασικές κατηγορίες ρυθμών είναι οι TE, TM και TEM, όπου κατά τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος το πεδίο δεν έχει αντίστοιχα ηλεκτρική, μαγνητική ή αμφοτέρα ηλεκτρική και μαγνητική συνιστώσα. Συγκεκριμένα¹⁴:

- αν $E_z = 0$, το ηλεκτρικό πεδίο είναι αμιγώς εγκάρσιο. Οι διαμορφώσεις αυτές λέγονται *TE ρυθμοί*.
- αν $B_z = 0$, το μαγνητικό πεδίο είναι αμιγώς εγκάρσιο. Οι διαμορφώσεις αυτές λέγονται *TM ρυθμοί*.
- αν $E_z = B_z = 0$, αμφοτέρα το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι αμιγώς εγκάρσια. Οι διαμορφώσεις αυτές λέγονται *TEM ρυθμοί*.

Επισημαίνεται ότι οι (1.25) και (1.26) δεν ισχύουν για TEM κύματα. Σε αυτή την περίπτωση είναι $\omega^2 \mu \varepsilon - k^2 = 0$ όπως στον ελεύθερο χώρο, και θέτοντας $E_z = B_z = 0$ προκύπτει ότι $E_t = 0/0$ και $B_t = 0/0$. Το θέμα των TEM κυμάτων σε κυματοδηγούς δεν θα εξεταστεί περαιτέρω.

¹⁰ Στην πράξη, η διαδικασία που ακολουθείται είναι να προσδιορίζονται πρώτα οι διαμήκεις συνιστώσες και μετά οι εγκάρσιες. Συνεπώς, οι (1.25) και (1.26) είναι πιο χρήσιμες από τις (1.14) και (1.17)-(1.18) που δίνουν τις διαμήκεις συνιστώσες ως συναρτήσεις των εγκάρσιων.

¹¹ Δηλ. δεν έχουν εφαρμοστεί συνοριακές συνθήκες.

¹² Η διεύθυνση που οδεύει το κύμα καθορίζεται από την πηγή του τροφοδοτεί τον κυματοδηγό.

¹³ Ακριβέστερα, όπως θα φανεί παρακάτω, είναι οι μερικές λύσεις της εξ. Helmholtz για τη διαμήκη συνιστώσα του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου που αναπτύσσονται στον κυματοδηγό.

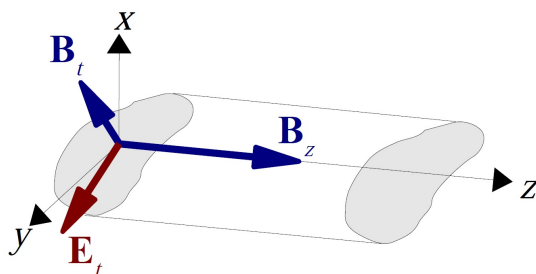
¹⁴ Οι ορισμοί αυτοί διατυπώνονται για κύμα που οδεύει κατά z . Αν η διεύθυνσή του είναι κάποια άλλη, οι ορισμοί εξακολουθούν να ισχύουν αλλά θα πρέπει να προσδιορίζεται η διεύθυνση κίνησης. Συνήθως αυτό γίνεται με κάποιον δείκτη, π.χ. TE^x δηλώνει εγκάρσιο ρυθμό όπου το κύμα οδεύει κατά x .

Διευκρινίζεται ότι οι ορισμοί αυτοί ισχύουν γενικά για Η/Μ κύματα¹⁵ οι ομόνυμοι ρυθμοί είναι απλώς διαμορφώσεις κυμάτων που εμπίπτουν σε αυτές τις κατηγορίες. Εν τέλει, με αυτούς τους ορισμούς οι (1.25) και (1.26) μπορούν να αποδομηθούν για τις δύο περιπτώσεις, TE και TM. Επομένως, κάθε κύμα μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα¹⁵ (επαλληλία) TE και TM κυμάτων (ή ρυθμών).

Εγκάρσιο ηλεκτρικό κύμα (TE), $E_z = 0$

$$\mathbf{E}_t = \frac{-i\omega}{\omega^2\mu\varepsilon - k^2} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t B_z), \quad (1.27)$$

$$\mathbf{B}_t = \frac{ik}{\omega^2\mu\varepsilon - k^2} (\nabla_t B_z). \quad (1.28)$$

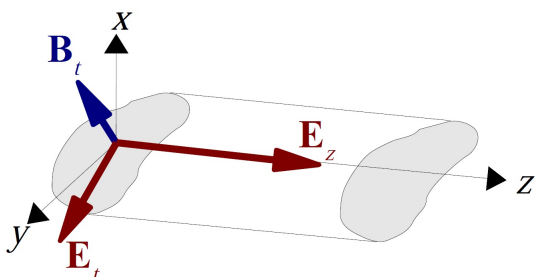


Σχήμα 1.3: TE κύμα.

Εγκάρσιο μαγνητικό κύμα (TM), $B_z = 0$

$$\mathbf{E}_t = \frac{ik}{\omega^2\mu\varepsilon - k^2} (\nabla_t E_z), \quad (1.29)$$

$$\mathbf{B}_t = \frac{i\omega\mu\varepsilon}{\omega^2\mu\varepsilon - k^2} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t E_z). \quad (1.30)$$



Σχήμα 1.4: TM κύμα.

Επισημαίνεται ότι τα παραπάνω αφορούν μόνον τις εγκάρσιες συνιστώσες.

Για τον TE ρυθμό, το ολικό μαγνητικό πεδίο είναι $(\mathbf{B}_t(x, y) + B_z(x, y) \hat{\mathbf{z}}) e^{ikz - i\omega t}$, για δε τον TM ρυθμό, το ολικό ηλεκτρικό πεδίο είναι $(\mathbf{E}_t(x, y) + E_z(x, y) \hat{\mathbf{z}}) e^{ikz - i\omega t}$.

¹⁵ Τονίζεται ότι αυτό δεν ισχύει όταν υπάρχουν πηγές διότι οι σχέσεις (1.25) και (1.26) διατυπώθηκαν από τις εξ. Maxwell θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν πηγές.

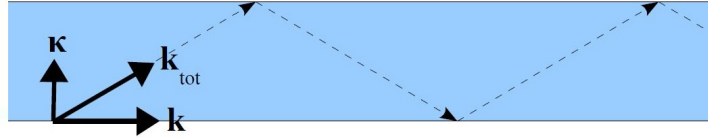
1.2.2 Σχέση διασποράς σε κυματοδηγούς

Έως τώρα θεωρήθηκε ότι το πεδίο εντός του κυματοδηγού είναι κύματα με διαμήκειες και εγκάρσιες συνιστώσες που οδεύουν παράλληλα στον άξονα του κυματοδηγού. Εναλλακτικά, μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι κύματα αμιγώς εγκάρσια που οδεύουν υπό γωνία με τον άξονα κυματοδηγού, ανακλώμενα διαρκώς στα τοιχώματά του. Σε αυτή την θεώρηση ισχύει η γνωστή σχέση διασποράς για τα επίπεδα κύματα του ελεύθερου χώρου,

$$k_{tot} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad \text{ή} \quad k_{tot}^2 = \omega^2\mu\varepsilon. \quad (1.31)$$

Εν προκειμένω, \mathbf{k}_{tot} είναι το ολικό κυματοδιάνυσμα, το οποίο δείχνει σε κάποια γωνία πλάγια ως προς τον άξονα του κυματοδηγού και δηλώνει την διεύθυνση που κινούνται τα εγκάρσια κύματα. Το \mathbf{k}_{tot} μπορεί να αναλυθεί σε μια αξονική συνιστώσα \mathbf{k} και μια εγκάρσια $\boldsymbol{\kappa}$, ως

$$\mathbf{k}_{tot} = \mathbf{k} + \boldsymbol{\kappa}. \quad (1.32)$$



Σχήμα 1.5: Ολικό κυματοδιάνυσμα.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα είναι

$$k_{tot}^2 = k^2 + \kappa^2$$

και εφαρμόζοντας τη συνθήκη διασποράς $k_{tot}^2 = \omega^2\mu\varepsilon$ δίνει

$$k^2 + \kappa^2 = \omega^2\mu\varepsilon$$

ή

$$k = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \kappa^2}. \quad (1.33)$$

Η (1.33) είναι η σχέση διασποράς για κυματοδηγούς.

Αν συχνότητα είναι αρκούντως μικρή ώστε $\omega^2\mu\varepsilon < \kappa^2$, τότε, εφόσον η επιτρεπτότητα ε και η διαπερατότητα μ είναι πραγματικές, το k θα προκύψει καθαρά φανταστικό. Επομένως, σε έναν κυματοδηγό μπορούν να υπάρχουν οδεύοντα κύματα μόνον αν η συχνότητα είναι αρκούντως μεγάλη. Αλλιώς, ο κυματάρηθος καθίσταται φανταστικός και τα πεδία εντός του κυματοδηγού είναι στάσιμα κύματα, ισχυρά αποσβενύμενα (standing evanescent waves).

Γράφοντας την σχέση διασποράς ως $\kappa^2 = \omega^2\mu\varepsilon - k^2$ οι εξισώσεις των κυματοδηγών γράφονται

$$\text{TE :} \quad \mathbf{E}_t = -i\frac{\omega}{\kappa^2}(\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t B_z), \quad \mathbf{B}_t = i\frac{k}{\kappa^2}(\nabla_t B_z). \quad (1.34)$$

$$\text{TM :} \quad \mathbf{E}_t = i\frac{k}{\kappa^2}(\nabla_t E_z), \quad \mathbf{B}_t = i\frac{\omega\mu\varepsilon}{\kappa^2}(\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t E_z). \quad (1.35)$$

Για έναν δεδομένο ρυθμό, το εγκάρσιο κυματοδιάνυσμα \mathbf{k} είναι μια σταθερά διότι τα πεδία στην εγκάρσια διεύθυνση είναι συγκεκριμένα στάσιμα κύματα. Οι δυνατές τιμές του \mathbf{k} αποτελούν ένα διακριτό σύνολο και προσδιορίζονται από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στα τοιχώματα. Έτσι, σε έναν συγκεκριμένο κυματοδηγό, για συγκεκριμένο ρυθμό το \mathbf{k} είναι γνωστό και το ω είναι επίσης γνωστό καθώς αποτελεί παράμετρο που θέτει ο χρήστης· άρα ο αξονικός κυματαριθμός k προσδιορίζεται από τη σχέση διασποράς.

1.2.3 Κυματική εξίσωση και ρυθμοί κυματοδηγών

Από την παραπάνω μελέτη είναι φανερό ότι αρκεί να βρεθούν οι αξονικές συνιστώσες των πεδίων καθώς οι εγκάρσιες μπορούν να προσδιοριστούν εξ αυτών με τις εξισώσεις (1.27)-(1.30) των κυματοδηγών¹⁶. Αφετηρία είναι η κυματική εξίσωση,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.36)$$

Η εξίσωση αυτή είναι διανυσματική, επομένως αναπαριστά τρεις εξισώσεις, μια για κάθε διανυσματική συνιστώσα. Εν προκειμένω ενδιαφέρει η διαμήκη συνιστώσα,

$$\nabla^2 E_z - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

ή

$$\nabla_t^2 E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (1.37)$$

Καθώς έχει υιοθετηθεί η χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$ και εξάρτηση κατά z η e^{ikz} , η παραπάνω γράφεται

$$\nabla_t^2 E_z - k^2 E_z + \omega^2 \mu\epsilon E_z = 0$$

ή

$$\nabla_t^2 E_z + (\omega^2 \mu\epsilon - k^2) E_z = 0$$

ή

$$\nabla_t^2 E_z + \kappa^2 E_z = 0. \quad (1.38)$$

Η (1.38), συνοδευόμενη από τις συνοριακές συνθήκες, είναι που πρέπει να λυθεί για να προσδιοριστούν οι TM ρυθμοί στον κυματοδηγό. Ακριβώς με την ίδια διαδικασία μπορούν να προσδιοριστούν και οι TE ρυθμοί, λύνοντας αντίστοιχα την εξίσωση

$$\nabla_t^2 B_z + \kappa^2 B_z = 0. \quad (1.39)$$

¹⁶ Με τις προϋποθέσεις που υιοθετήθηκαν στην §1.2.1 για τη διατύπωσή τους (απουσία πηγών, αρμονικό, μονοχρωματικό κύμα κλπ).

Οι λύσεις των δυο αυτών εξισώσεων¹⁷, δηλαδή οι μερικές λύσεις της διαμήκους συνιστώσας του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, είναι οι ρυθμοί που μπορούν να εμφανιστούν στον κυματοδηγό, αντιστοιχούν δε σε συγκεκριμένες τιμές κ_i , $i = 1, 2, \dots$ του εγκάρσιου κυματοδιανύσματος.

Οι δείκτες $i = 1, 2, \dots$ του κ_i δηλώνουν την τάξη των ρυθμών. Όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη ενός ρυθμού, τόσο πιο πολύπλοκη είναι μορφή του. Η τάξη των εμφανιζόμενων ρυθμών αυξάνεται σταδιακά καθώς αυξάνεται η ενέργεια που παρέχεται στον κυματοδηγό από την πηγή του. Είναι δυνατό να συνυπάρχουν ταυτόχρονα περισσότεροι από ένας ρυθμοί, πάντα όμως του ίδιου είδους, TM ή TE. Στην κατεύθυνση x και y η τάξη μπορεί να είναι διαφορετική. Η τάξη του ρυθμού δείχνεται με έναν υποδείκτη στη συντομογραφία του είδους του, π.χ. TM_{01} δηλώνει TM ρυθμό τάξης 0 κατά x και 1 κατά y . Συχνά είναι επιθυμητό να υπάρχει μόνο ο ρυθμός χαμηλότερης τάξης· αυτό καθορίζεται από τις διαστάσεις των τοιχωμάτων και τη συχνότητα λειτουργίας¹⁸. Επισημαίνεται ότι ένα TEM κύμα δεν μπορεί να υπάρχει σε κενούς, κλειστούς, κυματοδηγούς¹⁹.

Όλη η προηγούμενη μελέτη ισχύει για κάθε κενό κυματοδηγό σταθερής διατομής, ανεξάρτητα από το σχήμα της και το υλικό των τοιχωμάτων του. Η επήρεια που έχει το σχήμα της διατομής και το υλικό των τοιχωμάτων υπεισέρχεται χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες κατά τη λύση των εξισώσεων. Ειδικότερα, για τέλεια αγωγία τοιχώματα²⁰, η συνθήκη $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}|_S = \mathbf{0}$ που ισχύει πάντα στην επιφάνεια S ενός τέλει αγωγού, για τους ρυθμούς TM και TE επιβάλλεται αντίστοιχα από τις συνθήκες²¹

$$TM : \quad E_z|_S = 0, \quad (1.40)$$

$$TE : \quad \left. \frac{\partial B_z}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (1.41)$$

Όπως αναφέρθηκε στην §1.2.2, υπάρχει μια ελάχιστη τιμή για τη συχνότητα κάτω από την οποία η διάδοση των κυμάτων στον κυματοδηγό είναι αδύνατη. Υπενθυμίζεται η σχέση διασποράς,

$$k = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \kappa^2}. \quad (1.33)$$

¹⁷ Οι (1.38) και (1.39) είναι τυπικά προβλήματα Sturm-Liouville, μακράν γνωστά στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων.

¹⁸ Υπενθυμίζεται ότι αυτές οι παράμετροι υπεισέρχονται στις συνοριακές συνθήκες, μέσω των οποίων υπολογίζεται ο εγκάρσιος κυματάριθμος κ_i .

¹⁹ Μπορεί να δειχτεί εύκολα ότι ένα TEM κύμα έχει μηδενικό στροβιλισμό και απόκλιση, επομένως είναι κλίση ενός βαθμωτού δυναμικού, το οποίο ικανοποιεί την εξ. Laplace. Επειδή ο αγωγός είναι τέλειος, τα τοιχώματά του είναι ισοδυναμικές επιφάνειες, άρα το δυναμικό είναι σταθερό παντού και συνεπώς το ηλεκτρικό πεδίο είναι παντού μηδέν. Άρα σε κενό κυματοδηγό με τέλεια αγωγή τοιχώματα δεν μπορεί να υπάρξει TEM κύμα.

Αντίθετα, οι κυματοδηγοί δυο παράλληλων πλακών και οι γραμμές μεταφοράς μπορούν να μεταφέρουν και TEM κύματα· π.χ., στο ομοαξονικό καλώδιο ο επικρατέστερος ρυθμός είναι TEM_{00} . Ο βαθύτερος λόγος για τη διαφορά μεταξύ τους είναι τοπολογικός: ο κενός κυματοδηγός είναι απλά συνεκτικός τόπος ενώ το ομοαξονικό καλώδιο όχι. Βλ. [1] σελ. 677 και [19] σελ. 243.

²⁰ Εν προκειμένω, τα μέταλλα μπορούν να θεωρούνται προσεγγιστικά τέλειοι αγωγοί.

²¹ Βλ. [19] σελ. 231. Αντίστοιχες συνθήκες ισχύουν και για τέλεια μαγνητικούς αγωγούς αλλά εδώ δεν ενδιαφέρουν και δεν εξετάζονται. Βλ. [20] σελ. 18.

Αυτή η ελάχιστη τιμή λέγεται *συχνότητα αποκοπής* του κυματοδηγού και βρίσκεται θέτοντας $k = 0$ στη σχέση διασποράς. Συγκεκριμένα, είναι

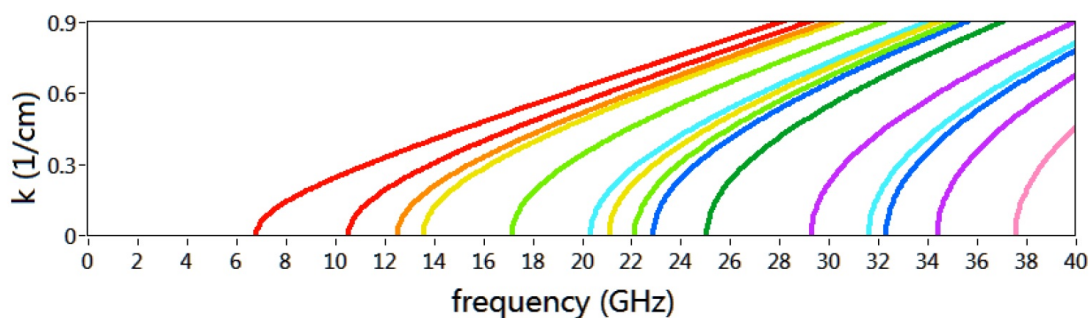
$$0 = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \kappa^2}$$

που δίνει

$$\omega_i \geq \frac{\kappa_i}{\sqrt{\mu \epsilon}}. \quad (1.42)$$

Η συχνότητα αποκοπής είναι το κατώφλι λειτουργίας του κυματοδηγού: η κυματοδηγηση γίνεται μόνο για συχνότητες μεγαλύτερες από αυτή. Επισημαίνεται ότι κάθε ρυθμός έχει τη δική του συχνότητα αποκοπής. Γενικά, οι ρυθμοί υψηλότερης τάξης έχουν μεγαλύτερους κυματάριθμους, άρα και μεγαλύτερες συχνότητες αποκοπής.

Στο σχ. 1.6 δείχνεται ένα διάγραμμα της σχέσης διασποράς (1.33). Ειδικότερα, αφορά τους TE ρυθμούς σε έναν κενό, μεταλλικό κυματοδηγό, ορθογωνικής διατομής, διαστάσεων διατομής 0.14 x 0.09 m.

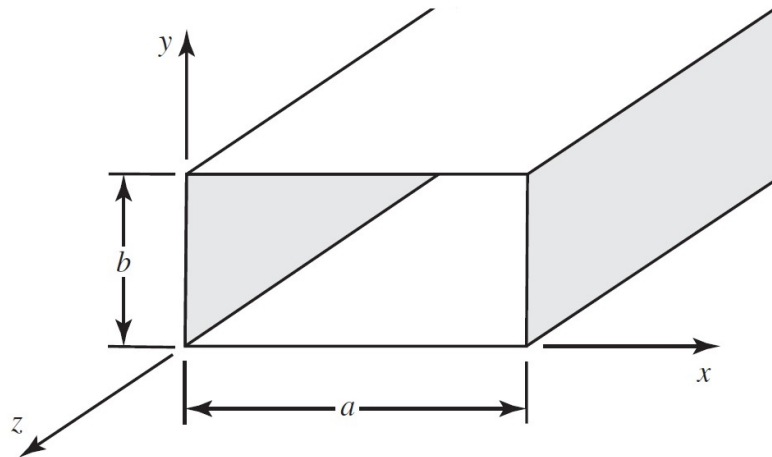


Σχήμα 1.6: Κυματάριθμος ως συνάρτηση της συχνότητας σε ορθογωνικό κυματοδηγό.

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι σε υψηλές συχνότητες οι καμπύλες τείνουν να είναι γραμμικές, όπως στη σχέση διασποράς του ελεύθερου χώρου. Επομένως, σε αρκούντως υψηλές συχνότητες, τα κύματα συμπεριφέρονται όπως στον ελεύθερο χώρο. Φαίνεται επίσης ότι μια συχνότητα διεγείρει περισσότερους από έναν ρυθμούς ταυτόχρονα: π.χ., στην συγκεκριμένη περίπτωση, στα 15 GHz διεγείρονται 4 ρυθμοί ενώ ένας μοναδικός ρυθμός εμφανίζεται στο εύρος 7 έως 10 GHz.

1.3 Ρυθμοί Ορθογωνικών Κυματοδηγών

Έστω ένας ορθογωνικός κυματοδηγός με τέλεια αγωγή τοιχώματα, με διαστάσεις διατομής $a \times b$ και σύστημα συντεταγμένων όπως δείχνεται στο σχ. 1.7. Ακολούθως θα προσδιοριστούν οι TM ρυθμοί εντός αυτού: η διαδικασία για τους TE ρυθμούς είναι αντίστοιχη και παραλείπεται.



Σχήμα 1.7: Γεωμετρία ορθογωνικού κυματοδηγού.

Για τον προσδιορισμό των TM ρυθμών αρκεί να λυθεί η (1.38), συνοδευόμενη από τις συνοριακές συνθήκες, ήτοι η

$$\nabla_t^2 E_z + \kappa^2 E_z = 0 \quad (1.38)$$

ή, σε καρτεσιανές συντεταγμένες,

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\kappa^2 E_z. \quad (1.43)$$

Σε αυτή την περίπτωση η συνοριακή συνθήκη είναι ότι το E_z πρέπει να μηδενίζεται στα τοιχώματα, $E_z|_S = 0$, τα οποία βρίσκονται στα $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ και $y = b$. Από τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών είναι γνωστό ότι η λύση έχει τη μορφή

$$E_z = E_0 \sin(Ax) \sin(By)$$

όπου A, B σταθερές. Θέτοντας αυτή τη δοκιμαστική λύση στην (1.43) προκύπτει

$$\begin{aligned} -A^2 E_0 \sin(Ax) \sin(By) - B^2 E_0 \sin(Ax) \sin(By) &= -\kappa^2 E_0 \sin(Ax) \sin(By), \\ \kappa^2 &= A^2 + B^2. \end{aligned}$$

Με εφαρμογή της συνθήκης $E_z(x = a, y) = 0$, η παραπάνω γράφεται

$$0 = E_0 \sin(Aa) \sin(By)$$

και δίνει

$$A = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Ομοίως, η εφαρμογή της συνθήκης $E_z(x, y = b) = 0$ δίνει

$$B = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Περιλαμβάνοντας την χρονική εξάρτηση και την εξάρτηση κατά z , η τελική λύση είναι

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{ikz - i\omega t}, \quad (1.44)$$

όπου

$$\kappa^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.45)$$

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon - \kappa^2.$$

Όπως έχει αναφερθεί, για τους ορθογωνικούς κυματοδηγούς η τάξη των ρυθμών δηλώνεται με δυο υποδείκτες, για τις κατευθύνσεις x και y αντίστοιχα, TM_{mn} . Π.χ., ένας ρυθμός TM_{21} είναι

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{ikz - i\omega t},$$

όπου

$$k = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right)}.$$

Επισημαίνεται ότι για $m = 0$ ή $n = 0$ η (1.44) δίνει ότι $E_z = 0$, οπότε, εκ των (1.29) και (1.30), όλες οι πεδιακές συνιστώσες είναι μηδέν. Επομένως, οι ρυθμοί TM_{0n} και TM_{m0} , π.χ. οι TM_{00} , TM_{01} , TM_{10} , TM_{20} κλπ, δεν είναι επιτρεπτοί.

Η ίδια διαδικασία για τους TE ρυθμούς δίνει

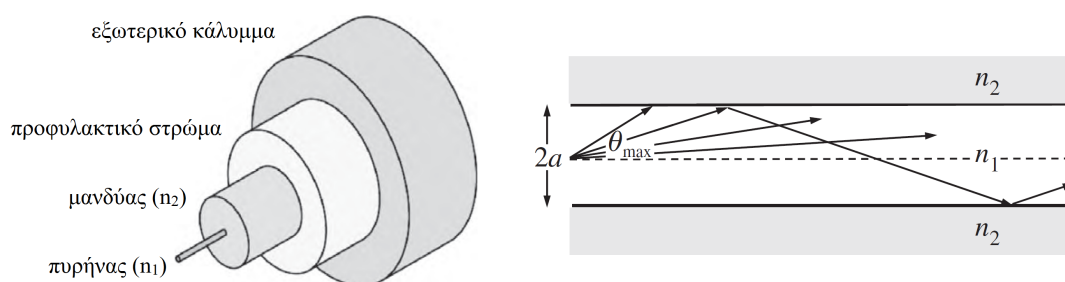
$$B_z = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{ikz - i\omega t}. \quad (1.46)$$

Στην περίπτωση των TE ρυθμών, για $m = 0$ ή $n = 0$ η (1.46) δίνει το ότι B_z γενικά δεν είναι μηδέν και οι ρυθμοί είναι επιτρεπτοί. Ωστόσο, αν είναι $m = n = 0$, το B_z καθίσταται μια σταθερά, οπότε, εκ των (1.27) και (1.28), όλες οι πεδιακές συνιστώσες είναι μηδέν. Επομένως ο ρυθμός TE_{00} δεν είναι επιτρεπτός²².

²² Αυτά ισχύουν μόνον σε ορθογωνικό κυματοδηγό. Σε κυματοδηγούς με άλλη διατομή, η ύπαρξη ρυθμών μηδενικής τάξης εξαρτάται κατά περίπτωση π.χ., σε κυλινδρικό κυματοδηγό οι ρυθμοί TM_{01} , TM_{02} , TM_{03} κλπ, καθώς και οι αντίστοιχοι TE, είναι επιτρεπτοί, όχι όμως οι TM_{00} , TM_{10} κλπ, και οι αντίστοιχοι TE.

1.4 Διηλεκτρικοί κυματοδηγοί

Σε εφαρμογές όπου οι ωμικές απώλειες των μεταλλικών κυματοδηγών είναι υψηλές²³ χρησιμοποιούνται διηλεκτρικοί κυματοδηγοί. Κοινό παράδειγμα είναι η οπτική ίνα, η οποία αποτελεί πλέον το καθιερωμένο μέσο για επικοινωνίες υψηλής ταχύτητας και μεγάλης χωρητικότητας.



Σχήμα 1.8: Δομή οπτικής ίνας και διάδοση του πεδίου στον πυρήνα της με ολική ανάκλαση.

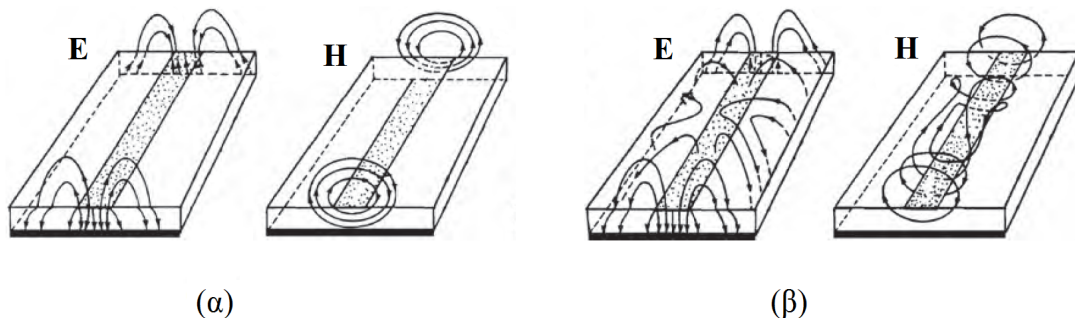
Στο σχ. 1.8 δείχνεται η δομή μιας οπτικής ίνας` ουσιαστικά είναι ένας διηλεκτρικός κυματοδηγός με εμφωλευμένη κυλινδρική δομή. Ο πυρήνας έχει δείκτη διάθλασης n_1 , ο μανδύας που τον περιβάλλει $n_2 < n_1$. Τα κύματα οδεύουν στον κυλινδρικό πυρήνα με διαδοχικές ανακλάσεις στην διεπιφάνεια του μανδύα, και με ελάχιστες απώλειες. Ένα προφυλακτικό στρώμα διαχωρίζει τον μανδύα από το εξωτερικό κάλυμμα και παρέχει μηχανική αντοχή στην διάταξη. Η δομή αυτή συχνά λέγεται ίνα βηματικού δείκτη ("step index" fiber) διότι ο δείκτης διάθλασης στην ακτινική κατεύθυνση είναι σταθερός και εμφανίζει ασυνέχεια μόνον στη διεπιφάνεια πυρήνα/μανδύα. Στην γενικότερη περίπτωση μια ίνα είναι του τύπου "βαθμιαίου δείκτη" ("graded index"), όπου ο δείκτης διάθλασης μεταβάλλεται ακτινικά με συνεχή τρόπο, $n(\rho)$.

Οι διηλεκτρικοί κυματοδηγοί διαφέρουν από τους αντίστοιχους μεταλλικούς σε τρία σημαντικά χαρακτηριστικά: (i) το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δεν περιορίζεται αυστηρά στον χώρο κυματοδότησης, (ii) το πλήθος των ρυθμών είναι πεπερασμένο, όχι άπειρο, (iii) οι ρυθμοί δεν είναι αποκλειστικά TM ή TE αλλά και υβριδικοί. Οι διαφορές αυτές οφείλονται στις συνοριακές συνθήκες, οι οποίες επιβάλλουν την προσαρμογή του πεδίου στις διεπιφάνειες αντί τον μηδενισμό του στα τοιχώματα όπως γίνεται στους μεταλλικούς.

²³ Αυτό συμβαίνει σε πολύ υψηλές συχνότητες, π.χ. στην περιοχή του οπτικού φάσματος.

1.5 Υβριδικοί ρυθμοί και ρυθμοί ακτινοβολίας

Υβριδικός ρυθμός είναι εκείνος όπου υπάρχουν αμφότερες οι διαμήκεις συνιστώσες E_z και H_z , και επομένως δεν είναι ούτε TE, ούτε TM. Οι υβριδικοί ρυθμοί γενικά εμφανίζονται σε ανομοιογενείς δομές, διηλεκτρικούς κυματοδηγούς²⁴ και στις οπτικές ίνες. Τυπική δομή κυματοδότησης όπου εμφανίζονται υβριδικοί ρυθμοί είναι η μικροταινία, η οποία χρησιμοποιείται σε ολοκληρωμένα κυκλώματα. Πρόκειται για μια μεταλλική λωρίδα προσαρτημένη στην επάνω πλευρά ενός διηλεκτρικού στρώματος, η δε κάτω πλευρά του στρώματος αυτού καλύπτεται από μεταλλικό υλικό, το οποίο δρα ως γείωση. Χωρίς το διηλεκτρικό, η δομή αυτή είναι μια γραμμή μεταφοράς δύο αγωγών, στην οποία ο θεμελιώδης ρυθμός είναι TEM. Με το διηλεκτρικό, ο θεμελιώδης TEM ρυθμός παραμορφώνεται και εμφανίζονται διαμήκεις πεδιακές συνιστώσες· έτσι, ο TEM ρυθμός μετατρέπεται σε υβριδικό ρυθμό. Πρακτικά, σε χαμηλές συχνότητες²⁵, οι συνιστώσες E_z και H_z είναι αμελητέες συγκριτικά με τις εγκάρσιες και ο θεμελιώδης ρυθμός σχεδόν ταυτίζεται με TEM. Ο υβριδικός ρυθμός εμφανίζεται σε υψηλότερες συχνότητες, όταν το μήκος κύματος γίνει παρόμοιας τάξης με τις χαρακτηριστικές διαστάσεις της μικροταινίας.



Σχήμα 1.9: Πεδιακές γραμμές σε μικροταινία²⁶. Θεμελιώδης ρυθμός σε (α) χαμηλή συχνότητα, (β) υψηλή συχνότητα.

Ειδικά για τις οπτικές ίνες, οι οποίες είναι κυλινδρικές, οι διαμήκεις πεδιακές συνιστώσες δίνονται από σχέσεις της μορφής

$$E_z = E_0 J_m(k_t \rho) e^{ik_t z} e^{\pm im\varphi},$$

$$H_z = H_0 J_m(k_t \rho) e^{ik_t z} e^{\pm im\varphi},$$

όπου η σημειογραφία είναι προφανής.

²⁴ Εξαιρούνται περιπτώσεις γεωμετριών όπου το πεδίο του ρυθμού είναι αυστηρά ομοιόμορφο αμφότερα στην κάθετο επί των διεπιφανειών και στη διεύθυνση διάδοσης. Π.χ., μια διηλεκτρική πλάκα απείρων διαστάσεων κατά y και z , η οποία χρησιμοποιείται για οπτική κυματοδότηση, αντίστοιχη του κυματοδηγού δύο παράλληλων μεταλλικών πλακών. Βλ. [1] σελ. 688.

²⁵ Υπενθυμίζεται ότι οι γραμμές μεταφοράς, όπου ο θεμελιώδης ρυθμός είναι TEM, είναι κατάλληλες για συχνότητες μέχρι περίπου 3 GHz, βλ. παρατ. 1.

²⁶ Εκ του [1].

Όταν $m = 0$, οι ρυθμοί είναι TM ή TE διότι το πεδίο είναι σταθερό στη διεύθυνση ϕ , ήτοι κάθετα και στη διεύθυνση διάδοσης και στην κάθετη της διεπιφάνειας επαφής. Όταν όμως $m \neq 0$, αυτό δεν συμβαίνει και οι συνθήκες προσαρμογής στη διεπιφάνεια μπορούν να ικανοποιηθούν μόνον από υβριδικούς ρυθμούς²⁷.

Σε διηλεκτρικούς κυματοδηγούς, οι οδεύοντες ρυθμοί δεν αποτελούν πλήρες σύνολο εκτός αν περιληφθούν και οι λεγόμενοι *ρυθμοί ακτινοβολίας*. Αυτοί είναι οι ακτίνες που δεν υφίστανται ολική ανάκλαση και ξεφεύγουν έξω από τον πυρήνα (διηλεκτρικό) του κυματοδηγού. Οι ακτίνες αυτές εισέρχονται στον μανδύα (cladding) που περιβάλλει τον πυρήνα και χάνουν ενέργεια²⁸ μέχρι να αποσβεστούν εντελώς. Κατά την έννοια των εξ. Maxwell είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης στο υλικό του μανδύα, ημιτονικής μορφής, όχι εκθετικά αποσβενύμενης.

Εκ τούτου, η έννοια της αποκοπής στον μεταλλικό και στον διηλεκτρικό κυματοδηγό είναι διαφορετική. Σε έναν μεταλλικό κυματοδηγό, ένας ρυθμός σε συχνότητες άνω της αποκοπής διαδίδεται και μεταφέρει ενέργεια κατά μήκος του κυματοδηγού· σε συχνότητες κάτω της αποκοπής απλώς αποσβένεται (evanescent wave) και δεν μεταφέρει ενέργεια αλλά ούτε και την διαχέει στο περιβάλλον. Αντίστοιχα, σε έναν διηλεκτρικό κυματοδηγό, ένας ρυθμός σε συχνότητες άνω της αποκοπής διαδίδεται και μεταφέρει ενέργεια κατά μήκος του· ωστόσο, σε συχνότητες κάτω της αποκοπής ακτινοβολεί και μεταφέρει ενέργεια έξω από τον πυρήνα κυματοδηγού.

²⁷ Για κάποιους από αυτούς τους ρυθμούς οι πεδιακές γραμμές μοιάζουν με το σπείρωμα κοχλίας και λέγονται πλάγιες ακτίνες (*skew rays*).

²⁸ Ενδεχομένως ανακλώνται διαδοχικά και στο πέρας του μανδύα.

1.6 Ροή Ενέργειας σε Κυματοδηγούς

Ακολούθως θα υπολογιστεί το διάνυσμα Poynting για τα πεδία στο εσωτερικό ενός κυματοδηγού, σταθερής διατομής. Υπενθυμίζεται ότι το διάνυσμα αυτό είναι

$$\mathbf{S} = \text{Re}(\mathbf{E}) \times \text{Re}(\mathbf{H}) \quad (1.47)$$

και δηλώνει τη ροή της πυκνότητας ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Αναπτύσσοντας το πραγματικό μέρος των διανυσμάτων γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{4} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \times (\mathbf{H} + \mathbf{H}^*) \\ &= \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^*) \end{aligned}$$

ή

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (1.48)$$

Η έκφραση αυτή είναι γενική. Για πεδία που έχουν αρμονική χρονική μεταβολή η μέση τιμή του δεύτερου όρου είναι μηδέν και απομένει

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \quad (1.49)$$

Στην παραπάνω, τα πεδία αναπτύσσονται σε εγκάρσιες και διαμήκεις συνιστώσες,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu} \text{Re}((\mathbf{E}_t + E_z \hat{\mathbf{z}}) \times (\mathbf{B}_t^* + B_z^* \hat{\mathbf{z}})). \quad (1.50)$$

Η (1.50) μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα για ρυθμούς TE (όπου $B_z = 0$) και TM (όπου $E_z = 0$),

$$\text{TE : } \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu} \text{Re}(\mathbf{E}_t \times (\mathbf{B}_t^* + B_z^* \hat{\mathbf{z}})), \quad (1.51)$$

$$\text{TM : } \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu} \text{Re}((\mathbf{E}_t + E_z \hat{\mathbf{z}}) \times \mathbf{B}_t^*). \quad (1.52)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις των κυματοδηγών (1.27)-(1.30) οι παραπάνω γράφονται

$$\text{TE : } \langle \mathbf{S} \rangle = \text{Re} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\omega k}{2\kappa^4} (\hat{\mathbf{z}} |\nabla_t B_z|^2 - i \frac{\kappa^2}{k} B_z^* \nabla_t B_z) \right], \quad (1.53)$$

$$\text{TM : } \langle \mathbf{S} \rangle = \text{Re} \left[\varepsilon \frac{\omega k}{2\kappa^4} (\hat{\mathbf{z}} |\nabla_t E_z|^2 + i \frac{\kappa^2}{k} E_z \nabla_t E_z^*) \right]. \quad (1.54)$$

Στις (1.53) και (1.54) ο πρώτος είναι η διαμήκης και ο δεύτερος όρος η εγκάρσια ροή πυκνότητας ενέργειας. Το εγκάρσιο διάνυσμα Poynting αφορά την ενέργεια που παλινδρομεί μεταξύ των τοιχωμάτων και δεν έχει πρακτική αξία.

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω εσωτερικά με $\hat{\mathbf{z}}$ λαμβάνεται

$$\text{TE : } \quad \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\mathbf{z}} = \text{Re} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\omega k}{2\kappa^4} |\nabla_t B_z|^2 \right], \quad (1.55)$$

$$\text{TM : } \quad \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\mathbf{z}} = \text{Re} \left[\varepsilon \frac{\omega k}{2\kappa^4} |\nabla_t E_z|^2 \right]. \quad (1.56)$$

Από τις δυο αυτές σχέσεις φαίνεται ότι η ενέργεια καθοδηγείται ισχυρά στα σημεία της διατομής όπου τα διαμήκη πεδία έχουν υψηλή κλίση.

2. Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων στον Ηλεκτρομαγνητισμό

2.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method - FEM) είναι μια από τις γνωστότερες αριθμητικές τεχνικές στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και την Υπολογιστική Μηχανική. Με τη FEM μπορεί να επιλυθεί μια ευρεία γκάμα συνοριακών προβλημάτων (Boundary Value Problems - BVPs) που διατυπώνονται με μερικές διαφορικές εξισώσεις, γραμμικές ή όχι, και ανεξάρτητα από την πολυπλοκότητα του γεωμετρικού χωρίου. Η FEM επινοήθηκε στον τομέα της Δομητικής Μηχανικής (Structural Mechanics) για την επίλυση προβλημάτων σύνθετων κατασκευών και ανάγεται περίπου στις αρχές του 1940¹. Η πρώτη διατύπωση της FEM με τις θεμελιώδεις ιδέες της όπως υφίστανται σήμερα, ήτοι ως αριθμητική μέθοδος για την επίλυση BVPs χρησιμοποιώντας μια τμηματικά συνεχή, πολυωνυμική προσέγγιση της άγνωστης συνάρτησης σε υποχωρία, αποδίδεται στον Courant, το 1943. Η FEM αναπτύχθηκε συστηματικά από τα τέλη της δεκαετίας του 1950 και εντεύθεν. Η εφαρμογή της στον Ηλεκτρομαγνητισμό ξεκίνησε στα τέλη της δεκαετίας του 1960 σε προβλήματα κυματοδηγών. Η ανάπτυξη τεχνικών για τον τερματισμό του υπολογιστικού χώρου², συγκεκριμένα οι συνοριακές συνθήκες απορρόφησης, τα τέλεια προσαρμοσμένα στρώματα, και τα άπειρα στοιχεία, έκανε εφικτή την εφαρμογή της FEM σε προβλήματα ανοικτών χωρίων όπως σκέδαση, κεραίες, μικροκυματικά κυκλώματα κ.α. Γενικά η FEM χρησιμοποιείται στο πεδίο της συχνότητας, ωστόσο υπάρχει και εκδοχή της στο πεδίο του χρόνου, η οποία διαδόθηκε αρκετά τα τελευταία χρόνια.

¹ Ιστορικά, μαζί με τη Μέθοδο των Ροπών (Method of Moments - MoM), η πραγματική καταγωγή της FEM είναι αρκετά παλαιότερη και ανάγεται στις μεταβολικές τεχνικές που μελετήθηκαν αρχικά από τον Rayleigh τον 19ο αι., και στην τεχνική του Galerkin περίπου το 1915. Γενικά, η ακριβής καταγωγή της FEM δεν είναι εντελώς σαφής καθώς βασίζεται σε μια πληθώρα ιδεών που εμφανίστηκαν σε διάφορες χρονικές περιόδους και όχι ενοποιημένα. Η επωνυμία FEM χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά από τον Clough το 1960. Σημαντικοί πρωτοπόροι της FEM ήταν οι Turner, Argyris, Kelsey, αργότερα ο Zienkiewicz κ.α.

² Η FEM είναι μια τεχνική διακριτοποίησης του εσωτερικού ενός χωρίου. Όταν το πρόβλημα αφορά χωρίο άπειρης έκτασης, π.χ. σκέδαση στον ελεύθερο χώρο, πρέπει με κάποιον τρόπο να τερματιστεί ο υπολογιστικός χώρος προσομοιώνοντας στο σύνορό του τον άπειρο χώρο. Το ζήτημα αυτό είναι ουσιαστικό και δεν είναι τετριμμένη διαδικασία. Το ίδιο ισχύει και για τις μεθόδους πεπερασμένων διαφορών. Αντίθετα, στις μεθόδους ολοκληρωτικών εξισώσεων δεν υφίσταται τέτοιο ζήτημα.

Ένα σημαντικό πρόβλημα της FEM που καθυστέρησε την καθολική αποδοχή της στον Ηλεκτρομαγνητισμό συγκριτικά με άλλες ανταγωνιστικές της μεθόδους είναι η εμφάνιση *παρασιτικών ρυθμών* (*spurious modes*) ή ψευδορυθμών, οι οποίοι μειώνουν την αξιοπιστία της. Το πρόβλημα αυτό λύθηκε περίπου στα μέσα της δεκαετίας του 1980 οπότε και αναπτύχθηκε ένα ειδικό είδος στοιχείων³, γνωστά ως *διανυσματικά στοιχεία* ή *στοιχεία ακμής* (*vector* ή *edge elements*). Αυτό οδήγησε σε μια βαθύτερη θεωρητική κατανόηση του προβλήματος των παρασιτικών ρυθμών και απεκατέστησε πλήρως την αξιοπιστία της FEM στον Ηλεκτρομαγνητισμό. Την τρέχουσα εποχή η FEM αποτελεί πλέον μια από τις σημαντικότερες υπολογιστικές μεθόδους στον Ηλεκτρομαγνητισμό και είναι υλοποιημένη σε λογισμικά βιομηχανικών προδιαγραφών.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί σύντομα ο γενικός φορμαλισμός και οι αρχές της FEM, και μετά η εφαρμογή της σε κάποια σημαντικά προβλήματα κυματοδηγών. Η FEM γενικά είναι πολύπλοκη μέθοδος, με βαθιά μαθηματικά θεμέλια· ως εκ τούτου, η παρουσίαση θα είναι αναγκαστικά ατελής αλλά επαρκής για τους σκοπούς του παρόντος κειμένου.

2.2 Γενική περιγραφή και χαρακτηριστικά της FEM

Το κύριο χαρακτηριστικό της FEM είναι ο χωρισμός του υπολογιστικού χώρου σε μικρότερα χωρία, τα ονομαζόμενα *πεπερασμένα στοιχεία*⁴. Το γεωμετρικό σύνολο των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί το *πλέγμα* του υπολογιστικού χώρου. Η αναπαράσταση του υπολογιστικού χώρου ως ένωση πεπερασμένων στοιχείων έχει σημαντικά πλεονεκτήματα: ακριβής γεωμετρική αναπαράσταση πολύπλοκων σχημάτων, μοντελοποίηση ανομοιογενών υλικών ορίζοντας διαφορετικές ιδιότητες σε κάθε στοιχείο, ακριβέστερος υπολογισμός τοπικών επιδράσεων από μεγάλες μεταβολές στα πεδία ή/και μοντελοποίηση χαρακτηριστικών μικρής κλίμακας. Η ολική λύση είναι η υπέρθεση των συνεισφορών από τα επιμέρους στοιχεία.

Αφού κατασκευαστεί το πλέγμα, η άγνωστη συνάρτηση αναπαρίσταται εντός κάθε στοιχείου ως γραμμικός συνδυασμός μερικών απλών *συναρτήσεων βάσης*, καλούμενες επίσης και *συναρτήσεις σχήματος* ή *παρεμβολής*, με άγνωστους συντελεστές. Αυτοί οι συντελεστές είναι οι τιμές της λύσης σε καθορισμένες θέσεις (κόμβους) των στοιχείων, π.χ. στις κορυφές τους ή/και στο εσωτερικό τους. Με αυτόν τον τρόπο, η λύση σε όλο το χωρίο προσεγγίζεται από τοπικές συναρτήσεις παρεμβολής με άγνωστους συντελεστές. Εφαρμόζοντας τη *μεταβολική αρχή Rayleigh-Ritz* ή μια τεχνική *Σταθμικών Υπολοίπων*⁵ διατυπώνεται ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους τους συντελεστές των συναρτήσεων παρεμβολής.

³ Όπως θα εξηγηθεί παρακάτω, ως στοιχεία θεωρούνται τα στοιχειώδη γεωμετρικά τμήματα στα οποία χωρίζεται ο υπολογιστικός χώρος μαζί με τις συναρτήσεις παρεμβολής στις κορυφές τους (κόμβοι) που προσεγγίζουν τοπικά τη λύση.

⁴ Ή και απλώς *στοιχεία* για λόγους συντομίας. Επισημαίνεται ότι για όλες τις έννοιες της FEM υπάρχουν αυστηροί μαθηματικοί ορισμοί αλλά δεν εμπίπτουν στους σκοπούς του παρόντος κειμένου. Π.χ., για έναν αυστηρό ορισμό του πεπερασμένου στοιχείου βλ. [2] σελ. 69.

⁵ Θα εξηγηθούν παρακάτω.

Το σύστημα αυτό αναπαριστά σε διακριτοποιημένη μορφή το συνοριακό πρόβλημα που ζητείται να επιλυθεί. Η λύση του συστήματος δίνει τους άγνωστους συντελεστές των συναρτήσεων παρεμβολής και συνεπώς την προσέγγιση της λύσης.

Συνοπτικά, τα κύρια τμήματα της FEM είναι τα ακόλουθα:

1. Προεπεξεργασία:

- Γένεση πλέγματος του υπολογιστικού χώρου και καταγραφή όλων των γεωμετρικών και τοπολογικών δεδομένων που το περιγράφουν.
- Καταγραφή δεδομένων που αφορούν τις συνοριακές συνθήκες, τις πηγές, τις παραμέτρους των υλικών κλπ, καθώς και οποιονδήποτε άλλων παραμέτρων αφορούν τη διατύπωση του προβλήματος.

2. Κυρίως επεξεργασία & επίλυση:

- Επιλογή των συναρτήσεων σχήματος (γραμμικές ή ανώτερου βαθμού πολυώνυμα).
- Διατύπωση της ασθενούς μορφής του συνοριακού προβλήματος από κάποια μεταβολική αρχή ή τεχνική σταθμικών υπολοίπων.
- Διατύπωση της άγνωστης συνάρτησης εντός κάθε στοιχείου ως γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων σχήματος, με άγνωστους συντελεστές. Αντικατάσταση στην ασθενή μορφή και διατύπωση της άγνωστης συνάρτησης κάθε στοιχείου σε μορφή μητρώου. Διαχωρισμός των άγνωστων συντελεστών από τους γνωστούς όρους και διατύπωση αμφότερων σε μορφή μητρώων. Τα μητρώα με τις παραστάσεις των γνωστών όρων αποτελούν τα λεγόμενα *μητρώα των στοιχείων*.
- Σύνθεση των μητρώων των στοιχείων σε ένα συνολικό μητρώο.
- Επιβολή των συνοριακών συνθηκών τροποποιώντας κατάλληλα το συνολικό μητρώο και το διάνυσμα των πηγών.
- Επίλυση του συστήματος.

3. Μεταεπεξεργασία:

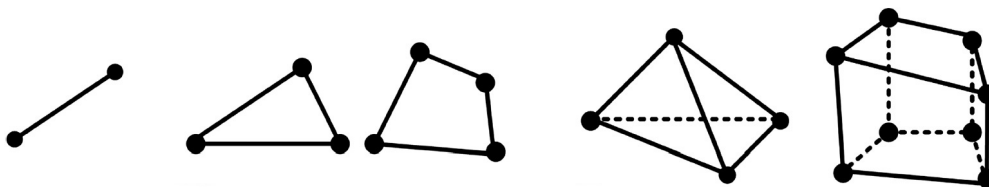
- Επεξεργασία της λύσης (αν χρειάζεται).
- Υπολογισμός δευτερευόντων μεγεθών ενδιαφέροντος.

Οι διαδικασίες αυτές περιγράφονται σύντομα παρακάτω.

2.2.1 Γένεση πλέγματος και πεπερασμένα στοιχεία

Η γένεση του πλέγματος είναι από τις πιο σημαντικές διαδικασίες της FEM. Η ακρίβεια της λύσης και το πλήθος των δεδομένων (άρα και ο χρόνος επίλυσης και η απαιτούμενη μνήμη) εξαρτώνται στενά από το χρησιμοποιούμενο πλέγμα. Η κατασκευή ενός πλέγματος σε ένα γεωμετρικά πολύπλοκο χωρίο δεν είναι τετριμμένη διαδικασία και μπορεί να αποβεί πολύ επίπονη και χρονοβόρα. Είναι προφανές ότι στην πράξη η χρησιμότητα της FEM εξαρτάται από την δυνατότητα να δημιουργείται εύκολα το πλέγμα του υπολογιστικού χώρου. Η πλεγματοποίηση είναι γενικά μια πολύπλοκη έως εξαιρετικά πολύπλοκη διαδικασία και στηρίζεται σε διάφορους κλάδους, όπως Γραφικά CAD, Διαφορική Γεωμετρία, Υπολογιστική Γεωμετρία κ.α. Υπάρχει μια πληθώρα από τεχνικές πλεγματοποίησης, η καθεμιά με τα δικά της πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα, κάποιες δε εξ αυτών κατάλληλες για συγκεκριμένες περιπτώσεις. Η πλεγματοποίηση δεν θα εξεταστεί στο παρόν κείμενο, παρά μόνον σε ότι αφορά κάποια γενικά χαρακτηριστικά των πιο απλών στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν αργότερα.

Για τα μονοδιάστατα προβλήματα, τα πιο απλά στοιχεία είναι τα ευθύγραμμα τμήματα⁶ για τα διδιάστατα είναι τα τρίγωνα και τα τετράπλευρα, για δε τα τριδιάστατα είναι τα τετράεδρα και τα εξάεδρα. Τα στοιχεία αυτά έχουν κόμβους μόνον στις κορυφές τους και προσεγγίζουν το μέγεθος στο εσωτερικό τους γραμμικά. Ένα στοιχείο όμως μπορεί να έχει κόμβους και στις ακμές ή/και στο εσωτερικό του⁶, οπότε και προσεγγίζει τη λύση στο εσωτερικό του με πολυώνυμο ανώτερου βαθμού. Από τα διάφορα είδη στοιχείων, τα τρίγωνα και τα τετράεδρα είναι γεωμετρικώς τα πιο ευέλικτα υπό την έννοια ότι μπορούν εύκολα να προσεγγίσουν ακανόνιστα γεωμετρικά σχήματα⁷.



Σχήμα 2.1: Απλά είδη πεπερασμένων στοιχείων σε μία, δύο και τρεις διαστάσεις.

Όλα τα παραπάνω στοιχεία είναι *κομβικά (nodal)* υπό την έννοια ότι η άγνωστη συνάρτηση (λύση) προσεγγίζεται στους κόμβους του στοιχείου από βαθμωτές τιμές και οι συναρτήσεις παρεμβολής είναι επίσης βαθμωτές. Αν το συνοριακό πρόβλημα αφορά διάνυσμα, τότε στους κόμβους τίθεται μια βαθμωτή τιμή και μια συνάρτηση παρεμβολής για κάθε συνιστώσα. Αυτή η πρακτική της FEM εφαρμόζεται επιτυχώς π.χ. στην Ελαστικότητα για την εύρεση των μετατοπίσεων.

⁶ Πιο αυστηρά, ένα πεπερασμένο στοιχείο είναι το στοιχειώδες γεωμετρικό χωρίο μαζί με τις συναρτήσεις παρεμβολής στους κόμβους του. Σε ότι αφορά το πλέγμα όμως, ενδιαφέρουν μόνον τα στοιχειώδη γεωμετρικά χωρία κατά την πλεγματοποίηση είναι αδιάφορο αν π.χ. ένα παραγόμενο τρίγωνο θα έχει 3 ή 6 κόμβους. Οι τυχόν επιπλέον κόμβοι που αυξάνουν τον βαθμό της παρεμβολής εισάγονται αφού τα στοιχειώδη χωρία έχουν δημιουργηθεί.

⁷ Γενικά όμως τα τετράπλευρα και τα εξάεδρα έχουν καλύτερη αριθμητική συμπεριφορά.

Στον Ηλεκτρομαγνητισμό όμως, λόγω του προβλήματος των παρασιτικών ρυθμών που προαναφέρθηκε, για διανυσματικά μεγέθη είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούνται στοιχεία που είναι εγγενώς διανυσματικά. Τα στοιχεία αυτά λέγονται *στοιχεία ακμής*⁸ (*edge elements*) και έχουν σημαντικές ιδιότητες που δεν υφίστανται στα κομβικά στοιχεία. Συγκεκριμένα, με τα στοιχεία ακμής προσεγγίζεται σωστά το διανυσματικό πεδίο στις ακμές και στις γωνίες ενός χωρίου. Επίσης, επιβάλλουν εγγενώς τη συνέχεια στην εφαπτομενική συνιστώσα του πεδίου και επιτρέπουν την ασυνέχεια στην κάθετη⁹ ως εκ τούτου, σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητισμού, η επιβολή συνοριακών συνθηκών είναι εύκολη. Τέλος, αξιοσημείωτο είναι ότι επιβάλλουν μηδενική απόκλιση ή στροφή στο διανυσματικό πεδίο¹⁰ η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική διότι έτσι καταστέλλονται οι παρασιτικοί ρυθμοί.

Τα στοιχεία ακμής εισήχθησαν αρχικά από τον Whitney [4], και αρκετά αργότερα κατασκευάστηκαν επάνω σε τετράεδρα και εξάεδρα από τον Nedelec [5]. Έκτοτε κατασκευάστηκε μια πληθώρα τέτοιων στοιχείων και μελετήθηκαν ενδελεχώς οι ιδιότητές τους¹¹ πλέον αποτελούν κοινοτοπία της FEM στον Ηλεκτρομαγνητισμό.

Η ακρίβεια της λύσης που δίνει η FEM εξαρτάται ισχυρά από το μέγεθος, την ποιότητα και την πυκνότητα των στοιχείων. Σε ότι αφορά το μέγεθος, τα στοιχεία πρέπει να είναι αρκούντως μικρά⁹, ώστε το πεδίο στο εσωτερικό τους να αναπαρίσταται αξιόπιστα από γραμμικά ή ανώτερου βαθμού πολυώνυμα.

Η *ποιότητα ενός στοιχείου* είναι το μέτρο κάποιας γεωμετρικής παραμέτρου του¹⁰ συγκριτικά με την τιμή της όταν το σχήμα του στοιχείου είναι βέλτιστο. Βέλτιστο σχήμα για το στοιχείο, και γενικότερα βέλτιστο πλέγμα, θεωρείται εκείνο που ελαχιστοποιεί το σφάλμα της λύσης. Υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία κριτηρίων [3], κατάλληλων για υπολογισμό της ποιότητας σε όλες τις πρακτικές περιπτώσεις¹¹. Τα κριτήρια αυτά αφορούν το σχήμα των στοιχείων ή/και στατιστικά μεγέθη γεωμετρικών και τοπολογικών ιδιοτήτων. Για τρίγωνα, το βέλτιστο σχήμα είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, για τετράεδρα το κανονικό τετράεδρο (πλατωνικό στερεό). Υπάρχει σχέση ανάμεσα στην ποιότητα του πλέγματος, το σφάλμα διακριτοποίησης και τον βαθμό κατάστασης (*condition number*) του πίνακα του συνολικού συστήματος [6]. Η υψηλή ποιότητα των στοιχείων μειώνει τον βαθμό κατάστασης του ολικού μητρώου και τον χρόνο επίλυσης.

Η πυκνότητα των στοιχείων είναι επίσης ένας σημαντικός παράγοντας κατά την πλεγματοποίηση. Η FEM είναι μια τοπική μέθοδος υπό την έννοια ότι ένα στοιχείο επηρεάζει μόνον τα άμεσα γειτονικά του, επομένως και τη λύση τοπικά. Εκ τούτου, σε περιοχές όπου αναμένονται μεγάλες μεταβολές της λύσης η τοπική πύκνωση του πλέγματος βελτιώνει την ακρίβεια της λύσης. Τέτοιες περιοχές είναι γωνίες, ακμές, οι διεπιφάνειες χωρίων με διαφορετικά υλικά, σύνορα κ.α. Η πύκνωση σε μια περιοχή ενδιαφέροντος μπορεί να γίνει με τρεις διαφορετικές μεθόδους, τις λεγόμενες *h*-, *p*- και *h-p*. Κατά την *h*-μέθοδο τα στοιχεία αντικαθίστανται με άλλα, περισσότερα στο πλήθος και μικρότερου μεγέθους. Κατά την *p*-μέθοδο τα στοιχεία γεωμετρικώς παραμένουν άθικτα αλλά αυξάνεται ο βαθμός τους (δηλαδή ο βαθμός των συναρτήσεων παρεμβολής) εισάγοντας επιπλέον κόμβους. Τέλος, η *h-p* μέθοδος είναι η ταυτόχρονη εφαρμογή των *h*- και *p*- μεθόδων.

⁸ Γνωστά και ως *διανυσματικά στοιχεία* (*vector elements*).

⁹ Σε αρμονικά προβλήματα πρέπει να είναι μικρότερα από το 1/10 του μήκους κύματος.

¹⁰ Π.χ. για ένα τρίγωνο μπορεί να είναι το ύψος, η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου κ.α.

¹¹ Για πλέγματα επίπεδα, χωρικά, επιφανειακά, ανισότροπα, με τρίγωνα, τετράπλευρα, εξάεδρα κ.α.

Είναι επίσης εφικτό να γίνεται αυτόματη εκτίμηση του σφάλματος και το πλέγμα να πυκνώνει αυτόματα όπου απαιτείται για την επίτευξη της επιθυμητής ακρίβειας. Αυτές οι τεχνικές εμπίπτουν στην λεγόμενη *προσαρμοστική πλεγματοποίηση* (*adaptive meshing*) και βασίζονται στη θεμελίωση της FEM μέσω της Συναρτησιακής Ανάλυσης.

2.2.2 Γενικός φορμαλισμός της FEM

Για την εφαρμογή της FEM υπάρχουν δυο θεμελιακές αφετηρίες: η μέθοδος των Σταθμικών Υπολοίπων και η μέθοδος Rayleigh-Ritz. Και στις δυο, πρώτο βήμα είναι να εκφραστεί η άγνωστη συνάρτηση ως γραμμικός συνδυασμός κατάλληλων συναρτήσεων βάσης με άγνωστους συντελεστές.

Η μέθοδος των Σταθμικών Υπολοίπων έχει αφετηρία τη θεώρηση ότι η διαφορική εξίσωση δεν ικανοποιείται ακριβώς και ότι όλοι οι όροι μεταφέρονται στο ένα μέλος της εξίσωσης¹² λόγω του σφάλματος, το άλλο δεν θα είναι μηδέν αλλά θα έχει κάποια τιμή (υπόλοιπο). Το σφάλμα αυτό σταθμίζεται πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με κατάλληλες συναρτήσεις βάσης και εξισώνοντας το σταθμισμένο σφάλμα με μηδέν¹². Η απαίτηση μηδενισμού του σταθμισμένου σφάλματος δίνει ένα γραμμικό σύστημα ως προς τους άγνωστους συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού, οι οποίοι είναι το ζητούμενο. Η επιλογή των συναρτήσεων βάσης και η στάθμιση μπορούν να γίνουν με διάφορους τρόπους, όπως Galerkin, ελάχιστα τετράγωνα κ.α. Για τη FEM γίνεται στάθμιση Galerkin, κατά την οποία οι συναρτήσεις βάσης είναι ταυτόσημες με τις συναρτήσεις βάσης που αναπαριστούν τη συνάρτηση.

Η μέθοδος Rayleigh-Ritz συνίσταται στην ελαχιστοποίηση ενός συναρτησιακού, της οποίας η λύση είναι και λύση του συνοριακού προβλήματος (BVP). Το συναρτησιακό είναι η ενέργεια του συστήματος. Η άγνωστη συνάρτηση, εκφρασμένη ως γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων βάσης με άγνωστους συντελεστές, αντικαθίσταται στο συναρτησιακό¹³ η απαίτηση ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού δίνει ένα γραμμικό σύστημα ως προς τους άγνωστους συντελεστές.

Η μέθοδος Rayleigh-Ritz έχει ισχυρό φυσικό αντίκρουσμα αλλά συχνά είτε είναι δύσκολο να βρεθεί το συναρτησιακό που αντιστοιχεί στη διαφορική εξίσωση, είτε δεν υπάρχει καν¹³. Γι αυτό συχνά προτιμάται η μέθοδος Σταθμικών Υπολοίπων. Και οι δυο τεχνικές μπορούν να καταλήξουν στο ίδιο γραμμικό σύστημα¹⁴, η επιλογή τους είναι θέμα ευκολίας κατά περίπτωση.

Η FEM αποσκοπεί στην εύρεση προσεγγιστικής λύσης σε BVPs που διέπονται από μερικές διαφορικές εξισώσεις. Ένα τυπικό BVP περιγράφεται σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ ή \mathbb{R}^3 γραμμένο τελεστικά ως

$$\mathcal{L}u = f \tag{2.1}$$

μαζί με τις συνοριακές συνθήκες στο σύνορο Γ του χωρίου.

¹² Η στάθμιση έχει την έννοια ότι το σφάλμα δεν απαιτείται να μηδενίζεται σημειακά αλλά κατανέμεται στο διάστημα υπολογισμού της λύσης¹² αυτό δίνει μια πιο ομαλή λύση.

¹³ Π.χ. σε περιπτώσεις όπου δεν ορίζεται δυναμική ενέργεια.

¹⁴ Αυτό συμβαίνει όταν για τη μέθοδο Σταθμικών Υπολοίπων εφαρμοστεί η εκδοχή Galerkin.

Στη εξίσωση αυτή, \mathcal{L} είναι ο διαφορικός τελεστής, f είναι μια γνωστή πηγή και u είναι η άγνωστη συνάρτηση που ζητείται να βρεθεί. Π.χ., για την εξίσωση των TM ρυθμών, (1.38), είναι $\mathcal{L} = \nabla_t^2 + \kappa^2$, $f = 0$ και $u = E_z$.

Παρακάτω θα παρουσιαστούν σύντομα τα βασικά βήματα της FEM, με γενικό τρόπο, υιοθετώντας τη μέθοδο των Σταθμικών Υπολοίπων με την εκδοχή Galerkin. Η μέθοδος αυτή θα εφαρμοστεί αργότερα στο πρόβλημα του κυματοδηγού με ανοιόμορφη διατομή.

2.2.2.1 Ασθενής μορφή και μέθοδος Galerkin, Κατασκευή των μητρώων των στοιχείων και των εξισώσεών τους

Μετά την προεπεξεργασία, ο υπολογιστικός χώρος Ω έχει χωριστεί σε στοιχεία με χωρία $\Omega^{(e)}$. Η (2.1) μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε στοιχείο e ,

$$\mathcal{L}u^{(e)} = f^{(e)} \quad (2.2)$$

όπου $u^{(e)}$ και $f^{(e)}$ είναι η άγνωστη συνάρτηση και η πηγή, περιορισμένες στο στοιχείο.

Αρχικά η άγνωστη συνάρτηση γράφεται προσεγγιστικά ως γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων βάσης (παρεμβολής) εντός του e στοιχείου ως

$$u^{(e)} = \sum_{j=1}^{n^{(e)}} u_j^{(e)} N_j^{(e)} \quad (2.3)$$

όπου είναι

j : ο δείκτης του κόμβου στο τρέχον στοιχείο,

$n^{(e)}$: το πλήθος κόμβων του στοιχείου,

$N_j^{(e)}$: η συνάρτηση σχήματος στον j κόμβο¹⁵,

$u_j^{(e)}$: ο αντίστοιχος άγνωστος συντελεστής¹⁶.

Οι συναρτήσεις σχήματος κάθε στοιχείου είναι μηδενικές έξω από το χωρίο του στοιχείου τους.

Επισημαίνεται ότι η (2.2) ικανοποιείται μόνον για την ακριβή λύση u . Αφού η άγνωστη συνάρτηση προσεγγίζεται ως γραμμικός συνδυασμός, η (2.2) θα ικανοποιείται μόνον προσεγγιστικά, $\mathcal{L}u^{(e)} \approx f^{(e)}$. Το σφάλμα αυτό της προσεγγιστικής λύσης λέγεται υπόλοιπο (*residual*) και ορίζεται ως

$$R^{(e)} = \mathcal{L}u^{(e)} - f^{(e)}. \quad (2.4)$$

Το $R^{(e)}$ αφορά ένα μεμονωμένο στοιχείο και είναι μια σημειακή ποσότητα, συνάρτηση των συντεταγμένων. Η ένωση των υπολοίπων όλων των στοιχείων (π.χ. θέτοντάς τα σε ένα μητρώο) δίνει το υπόλοιπο $R^{(\Omega)}$ για όλο τον υπολογιστικό χώρο Ω , προφανώς ως συνάρτηση των συντεταγμένων.

¹⁵ Η στην j ακμή αν πρόκειται για στοιχείο ακμής.

¹⁶ Είναι η τιμή της λύσης στον συγκεκριμένο κόμβο.

Το ζητούμενο είναι να βρεθεί η λύση που ελαχιστοποιεί το $R^{(\Omega)}$, ή ισοδύναμα το $R^{(e)}$ κάθε στοιχείου· τότε η προσεγγιστική λύση είναι “κοντά” στην ακριβή¹⁷. Ιδανικά, αν το $R^{(\Omega)}$ είναι μηδέν, τότε έχει ληφθεί η ακριβής λύση. Ωστόσο, ακριβής μηδενισμός του υπολοίπου είναι δύσκολο να επιτευχθεί. Αντίθετα, ο μηδενισμός του επιβάλλεται υπό μια μέση έννοια· συγκεκριμένα, θεωρείται το εσωτερικό γινόμενο καθενός $R^{(e)}$ με κατάλληλες συναρτήσεις βάρους (*weighting functions*) και εξισώνεται με μηδέν. Καθώς πρόκειται για συναρτήσεις, το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως ολοκλήρωμα στο χωρίο κάθε στοιχείου. Έτσι γράφεται

$$\langle R^{(e)}, w_i^{(e)} \rangle = \int_{\Omega^{(e)}} w_i^{(e)} R^{(e)} d\Omega^{(e)} = 0 \quad (2.5)$$

όπου $w_i^{(e)}$, $i = 1, 2, \dots, n^{(e)}$ είναι η i συνάρτηση βάρους.

Το πλήθος των συναρτήσεων βάρους πρέπει να είναι όσο το πλήθος των αγνώστων, εν προκειμένω $n^{(e)}$ για κάθε στοιχείο. Η ποσότητα (2.5) λέγεται *σταθμικό υπόλοιπο*.

Η παραπάνω διαδικασία λέγεται μέθοδος των Σταθμικών Υπολοίπων. Οι συναρτήσεις βάρους μπορούν να επιλεγούν με πολλούς τρόπους· καθένας οδηγεί και σε μια διαφορετική παραλλαγή της μεθόδου αυτής¹⁸. Όταν οι συναρτήσεις βάρους είναι ίδιες με τις συναρτήσεις βάσης, δηλ. $w_i^{(e)} = N_i^{(e)}$, πρόκειται για την τεχνική Galerkin· αυτή είναι που χρησιμοποιείται στη FEM¹⁹.

Εισάγοντας την (2.4) στην (2.5) και μεταφέροντας τον όρο με την πηγή στο δεξί μέλος είναι

$$\int_{\Omega^{(e)}} w_i^{(e)} \mathcal{L}u^{(e)} d\Omega^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} w_i^{(e)} f^{(e)} d\Omega^{(e)}. \quad (2.6)$$

Η (2.3) τίθεται στην παραπάνω και δίνει

$$\int_{\Omega^{(e)}} w_i^{(e)} \left(\mathcal{L} \sum_{j=1}^{n^{(e)}} u_j^{(e)} N_j^{(e)} \right) d\Omega^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} w_i^{(e)} f^{(e)} d\Omega^{(e)}$$

ή

$$\sum_{j=1}^{n^{(e)}} u_j^{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} w_i^{(e)} \mathcal{L}N_j^{(e)} d\Omega^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} w_i^{(e)} f^{(e)} d\Omega^{(e)}. \quad (2.7)$$

Επειδή $w_i^{(e)} = N_i^{(e)}$, η παραπάνω γράφεται

$$\sum_{j=1}^{n^{(e)}} u_j^{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} \mathcal{L}N_j^{(e)} d\Omega^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} f^{(e)} d\Omega^{(e)}. \quad (2.8)$$

¹⁷ Υπό την έννοια κάποιας μετρικής.

¹⁸ Π.χ., στάθμιση με υποπεριοχές, συντοπισμό (συναρτήσεις δέλτα), ελάχιστα τετράγωνα κ.α. Για μια επισκόπηση βλ. [7].

¹⁹ Έναντι των άλλων εκδοχών Σταθμικών Υπολοίπων, η μέθοδος Galerkin έχει κάποια πλεονεκτήματα. Καταρχήν, όταν ο διαφορικός τελεστής είναι αυτοσυζυγής οδηγεί σε συμμετρικό γραμμικό σύστημα διευκολύνοντας την επίλυση. Επιπλέον, σχεδόν πάντα καταλήγει στις ίδιες εξισώσεις με τις μεταβολικές μεθόδους προσδίδοντας μεγαλύτερο φυσικό αντίκρουσμα στις εξισώσεις απ’ ότι οι άλλες εκδοχές. Αυτό γενικά βοηθά και τη σύγκλιση της λύσης.

Στην (2.8) ο διαφορικός τελεστής \mathcal{L} δρα στη συνάρτηση σχήματος $N_j^{(e)}$. Με κατά παράγοντες ολοκλήρωση²⁰, το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους λαμβάνει μια μορφή όπου η ολοκληρωτέα παράσταση είναι γινόμενο δύο διαφορικών τελεστών \mathcal{L}_1 και \mathcal{L}_2 , χαμηλότερης τάξης από τον \mathcal{L} . Ο ένας εξ αυτών δρα στη συνάρτηση σχήματος $N_j^{(e)}$, ο άλλος στη συνάρτηση βάρους $N_i^{(e)}$. Ως αποτέλεσμα, λαμβάνεται μια εξίσωση όπου οι απαιτήσεις παραγωγίσης για τη λύση είναι μειωμένες σε σχέση με την αρχική εξίσωση. Η εξίσωση αυτή με τη χαμηλότερης τάξης παραγωγή λέγεται *ασθενής μορφή* (*weak form*) του BVP και αποτελεί σημαντικό θέμα του φορμαλισμού της FEM²¹.

Με την κατά πράγοντες ολοκλήρωση εμφανίζονται ολοκληρώματα στο σύνορο του χωρίου· στο σημείο αυτό υπεισέρχονται οι συνοριακές συνθήκες²². Η διαδικασία αυτή έχει ως αποτέλεσμα να μειώνονται οι απαιτήσεις ομαλότητας της λύσης. Στον Ηλεκτρομαγνητισμό οι διαφορικές εξισώσεις είναι 2ης τάξης και απαιτούν λύσεις C^2 . Ωστόσο, για την ασθενή μορφή τους αρκούν τμηματικές λύσεις C^1 .

Στην ασθενή μορφή, ο όρος $\int_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} \mathcal{L} N_j^{(e)} d\Omega^{(e)}$ έχει αντικατασταθεί από ένα διγραμμικό συναρτησιακό της μορφής $B(N_i^{(e)}, N_j^{(e)}) = \langle \mathcal{L}_1 N_i^{(e)}, \mathcal{L}_2 N_j^{(e)} \rangle$. Έτσι, η (2.8) γράφεται

$$\sum_{j=1}^{n^{(e)}} u_j^{(e)} B(N_i^{(e)}, N_j^{(e)}) = \int_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} f^{(e)} d\Omega^{(e)}. \quad (2.9)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί με τη μορφή μητρώων ως

$$\mathbf{A}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{b}^{(e)} \quad (2.10)$$

όπου είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(e)} &= [A_{ij}^{(e)}] && : \text{ένα } n^{(e)} \times n^{(e)} \text{ τοπικό μητρώο,} \\ \mathbf{u}^{(e)} &= [u_1^{(e)}, u_2^{(e)}, \dots, u_{n^{(e)}}^{(e)}] && : \text{το διάνυσμα των αγνώστων συντελεστών,} \\ \mathbf{b}^{(e)} & && : \text{ένα } n^{(e)} \times 1 \text{ μητρώο με γνωστούς όρους,} \end{aligned}$$

με $A_{ij}^{(e)} = B(N_i^{(e)}, N_j^{(e)})$ και $b_i^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} f^{(e)} d\Omega^{(e)}$, $i, j = 1, 2, \dots, n^{(e)}$.

²⁰ Αντίστοιχη γενίκευση υπάρχει σε 2D και 3D.

²¹ Η ασθενής μορφή έχει σημαντικά πλεονεκτήματα.

Η αρχική εξίσωση έχει τις μέγιστες δυνατές απαιτήσεις συνέχειας, δυσκολεύοντας έτσι την εύρεση λύσης. Π.χ., οι διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης απαιτούν λύσεις C^2 ενώ η ασθενής μορφή λύσεις C^1 τμηματικά συνεχείς, οι οποίες είναι ευκολότερο να βρεθούν και έχουν μεγαλύτερο φυσικό αντίκρουσμα (π.χ. κλιμακωτές διαβαθμίσεις στον υπολογιστικό χώρο).

Ένα άλλο πλεονέκτημα είναι η χρήση μοντέλων πηγών με συναρτήσεις δέλτα, κάτι που μπορεί να γίνει μόνον αν η εξίσωση βρίσκεται κάτω από ένα ολοκλήρωμα, όπως και συμβαίνει στην ασθενή μορφή. Το θέμα αυτό είναι αρκετά βαθύ και αφορά τη θεμελίωση της FEM εν μέσω των χώρων Sobolev, όπου οι εξισώσεις θεωρούνται με την έννοια των Κατανομών (Distribution Theory).

Πρακτικά, το νόημα είναι ότι η τάξη ανωμαλίας της αρχικής εξίσωσης μειώνεται μεταφέροντας κάποιες παραγωγίσεις στις συναρτήσεις βάρους, και επομένως μπορούν να γίνουν δεκτές λύσεις που για την αρχική εξίσωση είναι απαράδεκτες.

²² Περισσότερα επ' αυτού θα σχολιαστούν αργότερα.

2.2.2.2 Κατασκευή και αποθήκευση του ολικού μητρώου

Οι εξισώσεις των στοιχείων μπορούν να συνενωθούν για όλα τα στοιχεία και να διατυπωθεί ένα ολικό σύστημα εξισώσεων. Το σύστημα αυτό είναι η διακριτοποιημένη έκφραση του BVP. Το πλήθος των εξισώσεων είναι ίσο με το πλήθος των αγνώστων αν υπάρχουν συνολικά n κόμβοι το σύστημα έχει τη μορφή

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (2.11)$$

όπου \mathbf{A} είναι ένας $n \times n$ πίνακας,

\mathbf{u} είναι το $n \times 1$ διάνυσμα των αγνωστων συντελεστών²³

και \mathbf{b} είναι το $n \times 1$ διάνυσμα του δεξιού μέλους που περιλαμβάνει τις πηγές.

Η κατασκευή των ολικών μητρώων \mathbf{A} και \mathbf{b} γίνεται χρησιμοποιώντας τα δεδομένα συνδεσιμότητας των στοιχείων που παρήχθησαν από την πλεγματοποίηση²⁴. Επειδή κάθε κόμβος ή ακμή είναι κοινός μόνον στα άμεσα γειτονικά στοιχεία, το μητρώο \mathbf{A} , παρά το μεγάλο πλήθος στοιχείων του, προκύπτει γενικά πολύ αραιό. Αυτό είναι ένα από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά της FEM. Το πλήρες μητρώο \mathbf{A} έχει n^2 στοιχεία αλλά τα μη μηδενικά είναι μόνον $O(n)$ το πλήθος και κατανέμονται γύρω από την κύρια διαγώνιο σε μορφή ζώνης²⁵. Το χαρακτηριστικό αυτό είναι πολύ ελκυστικό διότι αρκεί να αποθηκεύεται μόνον η ζώνη αυτή (*band storage*) ή μόνον τα μη μηδενικά στοιχεία (*sparse storage*), εξοικονομώντας σημαντικά μνήμη και πράξεις. Ειδικά για τη δεύτερη δυνατότητα, υπάρχουν διάφορες μορφές αποθήκευσης αραιών πινάκων, εκ των οποίων γνωστότερες είναι η μορφή *συμπιεσμένης αραιής γραμμής* (*Compressed Sparse Row - CSR*) και η μορφή *συμπιεσμένης αραιής στήλης* (*Compressed Sparse Column - CSC*), βλ. [9]. Για μεγάλους αραιούς πίνακες οι μορφές αποθήκευσης CSR και CSC είναι πολύ οικονομικές και υλοποιούνται στα περισσότερα διαθέσιμα πακέτα γραμμικής άλγεβρας (Matlab, Python κ.α.)²⁶.

2.2.2.3 Επιβολή συνοριακών συνθηκών και τερματισμός του υπολογιστικού χώρου

Οι συνοριακές συνθήκες είναι αναπόσπαστο τμήμα ενός συνοριακού προβλήματος και από αυτές εξαρτάται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης του. Στα περισσότερα προβλήματα ενδιαφέροντος οι συνοριακές συνθήκες είναι τύπου Dirichlet, Neumann, Robin ή μικτές. Για τη λύση ενός BVP με τη FEM, οι συνοριακές συνθήκες πρέπει να

²³ Δηλαδή των τιμών της λύσης στους κόμβους.

²⁴ Βλ. §2.4.

²⁵ Το πλάτος της ζώνης αυτής εξαρτάται από την αρίθμηση των κόμβων στο πλέγμα.

Με τεχνικές επαναρίθμησης (*renumbering*) μπορεί να γίνει ελάχιστο επιτυχάνοντας μεγάλη οικονομία πόρων. Ο πιο γνωστός αλγόριθμος επαναρίθμησης είναι ο αντίστροφος αλγόριθμος Cuthill-McKee.

Ωστόσο, όταν χρησιμοποιείται κάποια τεχνική αποθήκευσης αραιών πινάκων όπως η CSR ή η CSC, το πλάτος της ζώνης δεν επηρεάζει το μέγεθος της αποθήκευσης και άρα δεν χρειάζεται επαναρίθμηση.

²⁶ Αντίθετα, το γνωστό πακέτο LAPACK χρησιμοποιεί αποθήκευση ζώνης.

ληφθούν υπόψη²⁷ πριν την επίλυση του ολικού γραμμικού συστήματος.

Οι εξισώσεις των κόμβων που αφορούν συνθήκες Dirichlet πρέπει να εξαιρούνται από το τελικό γραμμικό σύστημα καθώς η λύση σ' αυτούς είναι γνωστή· ωστόσο, αυτό είναι δύσκολο προγραμματιστικά. Η πρακτική που ακολουθείται είναι να κατασκευάζεται το ολικό μητρώο περιλαμβάνοντας όλες τις εξισώσεις και μετά να τροποποιείται κατάλληλα²⁸ ώστε η λύση να δίνει τις γνωστές τιμές των συνοριακών συνθηκών²⁹.

Σε προβλήματα ακτινοβολίας ή σκέδασης ο φυσικός χώρος εκτείνεται στο άπειρο και ισχύει η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld που επιβάλλει στα εξερχόμενα κύματα ασυμπτωτική συμπεριφορά (μηδενισμός στο άπειρο). Κατά την επίλυση με τη FEM, ο υπολογιστικός χώρος πρέπει αναγκαστικά να τερματιστεί με ένα ιδεατό σύνορο, το οποίο όμως να είναι “διαφανές” για τα εξερχόμενα κύματα, δηλαδή στο σύνορο το κύμα να απορροφάται χωρίς ανάκλαση. Αυτό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους, π.χ. με συνοριακές συνθήκες απορρόφησης, στοιχεία άπειρης έκτασης κ.α. Η πιο αποτελεσματική τεχνική, η οποία πλέον αποτελεί το στάνταρ σε τέτοια προβλήματα, είναι το *τέλεια προσαρμοσμένο στρώμα* (*Perfectly Matched Layer - PML*), βλ. [10]· πρόκειται για ένα είδος απορροφητή που απορροφά τα προσπίπτοντα πεδία με αμελητέα ανάκλαση, για οποιαδήποτε γωνία πρόσπτωσης. Το PML μπορεί να υλοποιηθεί είτε ως στρώμα ανισότροπου υλικού με κατάλληλους ταυστές ηλεκτρικής επιτρεπτότητας και μαγνητικής διαπερατότητας, είτε ως μιγαδικός μετασχηματισμός συντεταγμένων.

Σε προβλήματα κυματοδηγών και συντονιστών ο τερματισμός του υπολογιστικού χώρου με PML ή άλλη παρόμοια τεχνική δεν χρειάζεται διότι ο φυσικός χώρος του προβλήματος είναι κλειστός.

2.2.2.4 Επίλυση του ολικού συστήματος και μεταεπεξεργασία

Μετά από τη διατύπωση του ολικού γραμμικού συστήματος και την επιβολή των συνοριακών συνθηκών, το σύστημα λύνεται και λαμβάνεται η λύση στους κόμβους. Σε ρεαλιστικά προβλήματα το πλήθος των αγνώστων είναι μεγάλο³⁰ και η επίλυση δεν είναι τετριμμένη διαδικασία. Ωστόσο, ο πίνακας του συστήματος που παράγεται με τη FEM έχει κάποια ειδικά χαρακτηριστικά που μπορούν να διευκολύνουν την επίλυση του

²⁷ Επισημαίνεται ότι οι συνοριακές συνθήκες ήδη υπεισέρχονται μερικώς στη διατύπωση της ασθενούς μορφής. Η ασθενής μορφή περιέχει συνοριακούς όρους με παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης, οι οποίοι έχουν παραχθεί από τις κατά παράγοντες ολοκληρώσεις. Αυτό σημαίνει ότι οι συνθήκες Neumann είναι ενσωματωμένες στην ασθενή μορφή. Συνθήκες αυτού του είδους λέγονται *φυσικές* (*natural*). Αντίθετα, για τις συνθήκες Dirichlet πρέπει να ληφθεί μέρος εκ των υστέρων. Συνθήκες αυτού του είδους λέγονται *ουσιώδεις* (*essential*).

²⁸ Μαζί τροποποιείται και το διάνυσμα του δεξιού μέλους.

²⁹ Επίσης μπορεί να γίνει και επιβολή συνοριακών συνθηκών γενικότερης μορφής (π.χ. μια σχέση που πρέπει να ικανοποιείται) προσθέτοντας στην ασθενή μορφή κάποιους όρους ποινής ή πολλαπλασιαστές Lagrange· τέτοιες περιπτώσεις είναι συνήθεις στη Δομητική Μηχανική αλλά δεν συναντώνται στον Ηλεκτρομαγνητισμό.

³⁰ Σε ρεαλιστικές περιπτώσεις τα συστήματα που παράγονται με τη FEM είναι της τάξης των 10^5 ή και 10^6 αγνώστων. Στον Ηλεκτρομαγνητισμό, τα στοιχεία πρέπει να είναι μικρότερα τουλάχιστον από το $\lambda/10$, όπου λ το ελάχιστο χρησιμοποιούμενο μήκος κύματος· σε ένα διηλεκτρικό το λ μειώνεται σε $\lambda/\sqrt{\epsilon_r}$ και η απαίτηση αυτή γίνεται $\lambda/(10\sqrt{\epsilon_r})$. Είναι προφανές ότι σε 3D προβλήματα οι απαιτήσεις σε μήκη αυξάνονται πολύ γρήγορα με το μέγεθος των μοντέλων. Γενικά η FEM είναι κατάλληλη για ηλεκτρικώς μικρά αντικείμενα (της τάξης λίγων λ).

συστήματος. Συγκεκριμένα, είναι ένας πίνακας αραιός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Όπως αναφέρθηκε, όντας αραιός μπορούν να αποθηκεύονται μόνον τα μη μηδενικά στοιχεία του εξοικονομώντας μνήμη· επιπλέον, λόγω της συμμετρίας³¹ και της θετικής ορισσιμότητας μπορούν να εφαρμοστούν πιο αποτελεσματικές τεχνικές επίλυσης, εξειδικευμένες για τέτοιους πίνακες.

Υπενθυμίζεται ότι οι μέθοδοι επίλυσης χωρίζονται γενικά στις άμεσες και στις επαναληπτικές. Οι άμεσες μέθοδοι στηρίζονται στην απαλοιφή Gauss, ήτοι στην αναγωγή του πίνακα σε έναν άνω τριγωνικό κώνοντας πράξεις με τις γραμμές του. Άμεσες μέθοδοι είναι μεταξύ άλλων η Gauss-Jordan και οι παραγοντοποιήσεις LU, Cholesky και QR. Στις επαναληπτικές συγκαταλέγονται η Gauss-Seidel, η συζυγής μέθοδος κλίσης και οι παραλλαγές της³².

Για την επίλυση ενός συστήματος n αγνώστων οι άμεσες μέθοδοι απαιτούν $O(n^3/3)$ πράξεις, οι δε επαναληπτικές $O(mn^2)$ όπου m το πλήθος των επαναλήψεων. Άρα, οι άμεσες μέθοδοι είναι ταχύτερες όταν $n^3/3 \leq mn^2$ ή $n \leq 3m$. Αν η αρχική εκτίμηση της λύσης με την οποία εκκινεί μια επαναληπτική μέθοδος δεν είναι “κοντά” στη λύση, απαιτούνται γενικά πολλές επαναλήψεις· έτσι, μια άμεση μέθοδος θα είναι πιο γρήγορη, εκτός αν το n είναι αρκούντως μεγάλο. Οι ταχύτερες επαναληπτικές μέθοδοι είναι αυτές των λεγόμενων χώρων Krylov, όπως η συζυγής μέθοδος κλίσης, όπου οι απαιτούμενες επαναλήψεις είναι περίπου όσο το πλήθος των αγνώστων³³. επομένως, σύμφωνα με την εκτίμηση $n \leq 3m$, οι άμεσες μέθοδοι θα είναι πιο γρήγορες. Ωστόσο, όταν ένας αραιός πίνακας παραγοντοποιείται με μια άμεση μέθοδο, ο παράγοντας με το άνω ή κάτω τμήμα του δεν παραμένει αραιός όπως στον αρχικό πίνακα, αυξάνοντας έτσι τις απαιτήσεις σε μνήμη. Αντίθετα, οι επαναληπτικές μέθοδοι διατηρούν την αραιότητα του συστήματος. Επιπλέον, οι επαναληπτικές μέθοδοι είναι πιο εύκολο να παραλληλιστούν. Λόγω των παραπάνω, στη FEM προτιμώνται επαναληπτικές μέθοδοι όπως η συζυγής μέθοδος της κλίσης.

Για τη βελτίωση της σύγκλισης της επαναληπτικής μέθοδου εφαρμόζεται κάποια τεχνική *προσυντήρησης (preconditioning)*. Αυτό συνίσταται στον πολλαπλασιασμό του συστήματος με κάποιο κατάλληλο μητρώο \mathbf{P} , ώστε το σύστημα γίνεται $\mathbf{PAu} = \mathbf{Pb}$. Το μητρώο \mathbf{P} πρέπει να είναι “κοντά” στο \mathbf{A}^{-1} ώστε το \mathbf{PA} να ισούται προσεγγιστικά με τον μοναδιαίο πίνακα \mathbf{O} υπολογισμός του \mathbf{P} απαιτεί $O(n)$ πράξεις και γίνεται με μια κοινή επαναληπτική μέθοδο όπως η Jacobi, Gauss-Seidel, ατελής παραγοντοποίηση LU (incomplete LU factorization) κ.α.

Τονίζεται ότι σε ρεαλιστικά προβλήματα το μέγεθος του συστήματος (και συνεπώς οι απαιτήσεις σε υπολογιστικούς πόρους) απαιτεί τη χρήση βέλτιστων τεχνικών επίλυσης, αλλιώς το πρόβλημα δεν είναι υπολογιστικά διαχειρίσιμο. Η μέθοδος επίλυσης δεν πρέπει να επιλέγεται απλοϊκά αλλά να εκμεταλλεύεται τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των μητρώων όσο το δυνατόν.

Μετά την επίλυση του συστήματος, η λύση στους κόμβους των στοιχείων είναι πλέον γνωστή³⁴. Με τις συναρτήσεις παρεμβολής η λύση μπορεί να υπολογιστεί και

³¹ Επισημαίνεται ότι η συμμετρία είναι απόρροια της αυτοσυζυγίας (αν έχει) του διαφορικού τελεστή και της μεθόδου Galerkin που εφαρμόζεται για να διατυπωθεί η ασθενής μορφή.

³² Συγκεκριμένα οι BiConjugate Gradient (BiCG), Conjugate Gradient Squared (CGS) και η BiConjugate Gradient Stabilized (BiCGSTAB). Οι παραλλαγές αυτές αφορούν τη λύση συστημάτων που δεν είναι συμμετρικά ή θετικά ορισμένα, ή τα στοιχεία είναι μιγαδικά. Βλ. [11].

³³ Ιδανικά είναι ίσες με αυτό.

³⁴ Η λύση είναι δυνατόν να υποστεί κάποια επεξεργασία αν χρειάζεται, ώστε να βελτιωθεί η φυσική

στο εσωτερικό των στοιχείων. Επιπλέον, ανάλογα με το πρόβλημα, μπορούν να υπολογιστούν και άλλα μεγέθη ενδιαφέροντος, όπως η διατομή σκέδασης, η εμπέδηση κ.α. Αυτά τα δευτερογενή αποτελέσματα είναι χρήσιμα στην ανάλυση και τη σύνθεση της κατασκευής.

2.3 Το πρόβλημα των παρασιτικών ρυθμών

Αναφέρθηκε ήδη ότι ένα σημαντικό πρόβλημα που έχει η εφαρμογή της FEM στον Ηλεκτρομαγνητισμό είναι η εμφάνιση *παρασιτικών ρυθμών* ή *ψευδορυθμών* (*spurious modes*). Οι παρασιτικοί ρυθμοί εμφανίζονται σε προβλήματα ιδιοτιμών· είναι επιπλέον ρυθμοί, οι οποίοι δεν έχουν φυσική υπόσταση και αλλοιώνουν την πραγματική λύση. Αυτό το πρόβλημα δεν υπάρχει σε άλλους κλάδους όπου εφαρμόζεται η FEM, και έχει μεγάλη σημασία διότι μειώνει την αξιοπιστία της μεθόδου. Ακολούθως επιχειρείται μια εξήγηση της προέλευσης των παρασιτικών ρυθμών και των τρόπων εξάλειψής τους.

Στον “παραδοσιακό”, κομβικό φορμαλισμό της FEM, με τον οποίο εφαρμόζεται στα προβλήματα Δομητικής Μηχανικής³⁵, τα πεδία αναπαρίστανται θεωρώντας κάθε συνιστώσα τους ως γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων παρεμβολής. Συγκεκριμένα, για το πεδίο των μετατοπίσεων σε ένα στοιχείο είναι

$$u_x = \sum u_{x_i} N_i(x, y, z) \quad (2.12)$$

όπου N_i είναι μια συνήθης συνάρτηση σχήματος και u_{x_i} η τιμή της μετατόπισης u_x στον κόμβο i , το δε άθροισμα σαρώνει όλους τους κόμβους του στοιχείου. Όμοιες σχέσεις γράφονται και για τις μετατοπίσεις u_y και u_z .

Αντίστοιχα, π.χ. για το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να γραφεί

$$E_x = \sum E_{x_i} N_i(x, y, z) \quad (2.13)$$

και ομοίως για τις E_y και E_z .

Ωστόσο, για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο αυτή η πρακτική είναι επισφαλής. Ο λόγος είναι ότι τα διανυσματικά πεδία που αφορούν την Δομητική Μηχανική και εκείνα που αφορούν τον Ηλεκτρομαγνητισμό είναι εγγενώς διαφορετικά. Υπενθυμίζεται ότι σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών επιχειρείται να λυθεί η κυματική εξίσωση, η οποία για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, \mathbf{E} και \mathbf{H} , προέρχεται από τις εξισώσεις στροφής του Maxwell. Όμως, τα \mathbf{E} και \mathbf{H} δεν αρκεί να ικανοποιούν μόνον τις εξισώσεις στροφής αλλά και τις εξισώσεις της απόκλισης.

Εκτός από το πρόβλημα των ψευδορυθμών, επισημαίνεται κι άλλη μια πρακτική δυσκολία του κομβικού φορμαλισμού. Επειδή τα πεδία προσεγγίζονται χρησιμοποιώντας τις τιμές τους στους κόμβους, η σύνδεση των στοιχείων (κοινοί κόμβοι) έχει ως

της συμπεριφορά. Π.χ. είναι δυνατόν η ένταση ενός πεδίου να χρειάζεται κάποια εξομάλυνση ώστε να βελτιωθεί η συνέχειά της μεταξύ των στοιχείων. Αυτή η διαδικασία, γνωστή ως σύμμορφη εξομάλυνση του πεδίου, είναι αρκετά συνηθισμένη στη Μηχανική.

³⁵ Στη Δομητική Μηχανική περιλαμβάνονται προβλήματα γραμμικής ελαστικότητας, ταλαντώσεων κ.α. Πρωταρχικοί άγνωστοι σ' αυτά είναι οι μετατοπίσεις (πεδίο μετατοπίσεων) και οι δυνάμεις ή οι τάσεις (πεδίο τάσεων).

αποτέλεσμα όλες οι συνιστώσες των μεγεθών να είναι συνεχείς. Για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο αυτό είναι ανεπιθύμητο · στη διεπιφάνεια δυο διαφορετικών υλικών, πρέπει να είναι συνεχείς μόνον οι εφαπτομενικές συνιστώσες των \mathbf{E} και \mathbf{H} · οι κάθετες να είναι ασυνεχείς και να μεταβάλλονται ελεύθερα. Αν το σύνορο του υλικού έχει τυχαία διεύθυνση, η επιβολή αυτής της συνθήκης είναι πρακτικά πολύ δύσκολη³⁶.

Με τον διανυσματικό φορμαλισμό, το διανυσματικό πεδίο αναπαρίσταται δια μιας, χωρίς να αποδομείται στις συνιστώσες του · π.χ., το ηλεκτρικό πεδίο γράφεται

$$\mathbf{E} = \sum E_i \mathbf{N}_i \quad (2.14)$$

όπου \mathbf{N}_i είναι μια διανυσματική συνάρτηση σχήματος και E_i κατάλληλοι συντελεστές³⁷, το δε άθροισμα σαρώνει όλες τις ακμές του στοιχείου.

Συγκριτικά με την (2.13), η (2.14) καθιστά την επίλυση πολύ πιο εύρωστη και ακριβή · η αιτία δεν είναι άμεσα φανερή και πρέπει να αναζητηθεί στην αναλυτική λύση και στον τρόπο που αυτή είναι εμφωλευμένη στην ασθενή μορφή της εξίσωσης.

Υπενθυμίζεται ότι εν προκειμένω ζητείται να λυθεί μια εξίσωση Helmholtz για το ηλεκτρικό (ή το μαγνητικό) πεδίο. Για τον κομβικό φορμαλισμό, δηλ. την αναπαράσταση των πεδίων όπως στη (2.13), πρέπει κατά τα γνωστά να λυθεί η

$$\nabla_t^2 E_z + \kappa^2 E_z = 0. \quad (1.38)$$

Για τον διανυσματικό φορμαλισμό, δηλ. με αναπαράσταση των πεδίων όπως στη (2.14), πρέπει να λυθεί η³⁸

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} - k_i^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

όπου εν προκειμένω k_i είναι ο κυματάριθμος κατά τη διεύθυνση που οδεύει το κύμα³⁹. Όπως αναφέρθηκε, το \mathbf{E} πρέπει επιπλέον της (2.15) και των συνοριακών συνθηκών, να ικανοποιεί και την εξίσωση της απόκλισης,

$$\nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} = 0. \quad (2.16)$$

Η (2.16) μπορεί να θεωρείται ως ένας πρόσθετος περιορισμός για το \mathbf{E} .

Λαμβάνοντας την απόκλιση της (2.15), και λόγω της ταυτότητας $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a} = 0$, είναι προφανές ότι

³⁶ Αν το σύνορο του υλικού είναι στη διεύθυνση κάποιου άξονα συντεταγμένων, οι εφαπτομενικές συνιστώσες μπορούν να τεθούν ίσες και να αποδοθούν επιπλέον βαθμοί ελευθερίας στους κόμβους ώστε οι κάθετες να μεταβάλλονται ελεύθερα. Για τυχαία διεύθυνση όμως είναι πολύ πιο περίπολοκο.

³⁷ Όπως θα φανεί παρακάτω κάθε τέτοιος συντελεστής είναι η εφαπτομενική συνιστώσα του πεδίου στην αντίστοιχη ακμή του στοιχείου.

³⁸ Η (2.15) αφορά σώματα ομογενή ή ανομοιογενή αλλά όχι ανισότροπα.

Για ανισότροπα σώματα τα μ_r και ε_r είναι ταυστές και η σχέση είναι πιο πολύπλοκη.

³⁹ Όπως θα δειχτεί στην §3.3, για την επίλυσή της η (2.15) αποδομείται σε δυο εξισώσεις, μια για τη διαμήκη συνιστώσα και μια για τις εγκάρσιες. Αντίθετα όμως με την (1.38), οι δυο αυτές εξισώσεις είναι διανυσματικές: περιέχουν όρους με τη στροφή και την κλίση των συνιστωσών και δεν αποδομούνται περαιτέρω σε βαθμωτές.

$$k_i^2 \nabla \cdot \varepsilon_r \mathbf{E} = 0. \quad (2.17)$$

Επομένως, για τη δυναμική περίπτωση, δηλαδή όταν $k_i \neq 0$, η εξίσωση της απόκλισης πράγματι ικανοποιείται.

Ωστόσο, η στατική περίπτωση, δηλαδή όταν $k_i = 0$, είναι προβληματική καθώς η εξίσωση της απόκλισης δεν ικανοποιείται αναγκαστικά. Στη στατική περίπτωση το ηλεκτρικό πεδίο έχει τη μορφή $\mathbf{E} = -\nabla V$. Εκ του προβλήματος υπάρχει ένα θεωρητικά άπειρο πλήθος λύσεων αυτής της μορφής (ήτοι για μηδενική ιδιοτιμή το πεδίο να είναι κλίση κάποιου δυναμικού). Επειδή $\nabla \times \nabla V = \mathbf{0}$, οι λύσεις αυτές επίσης ικανοποιούν την διανυσματική κυματική εξίσωση και αποτελούν τον μηδενοχώρο (*null space*)⁴⁰ του τελεστή της εξίσωσης.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα δίνεται από τη θεωρία των κυματοδηγών. Όπως δείχθηκε στην §1.3, οι TE ρυθμοί σε έναν ορθογωνικό κυματοδηγό με PEC⁴¹ τοιχώματα δίνονται από τη σχέση

$$\mathbf{E}_{mn} = \hat{\mathbf{x}} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) - \hat{\mathbf{y}} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.18)$$

με ιδιοτιμές⁴²

$$\kappa_{mn}^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

όπου για απλότητα αναγράφονται μόνον οι παράγοντες της εξάρτησης κατά x και y .

Η παραπάνω λύση είναι μακράν γνωστή στη θεωρία των κυματοδηγών. Ωστόσο, η κυματική εξίσωση έχει και την στατική λύση, η οποία σχεδόν ποτέ δεν μνημονεύεται καθώς δεν ενδιαφέρει και απορρίπτεται σιωπηρά. Για τους TE ρυθμούς η στατική λύση, αντίστοιχη της (2.18), είναι

$$\mathbf{E}_{mn}^{null} = \hat{\mathbf{x}} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \hat{\mathbf{y}} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.20)$$

με ιδιοτιμές $\kappa_{mn} = 0$.

Οι λύσεις αυτές αποτελούν τον μηδενοχώρο (*null space solutions*) της (2.15) που αναφέρθηκε παραπάνω. Αν και φαίνονται σχεδόν ταυτόσημες με τις (2.18), έχουν δύο σημαντικά χαρακτηριστικά. Καταρχήν μπορούν να γραφούν ως κλίση ενός δυναμικού, συγκεκριμένα ως

$$\mathbf{E}_{mn}^{null} = \nabla \left(\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right) \quad (2.21)$$

απ' όπου φαίνεται άμεσα ότι για $k_i = 0$ επαληθεύουν τη (2.15).

Επίσης, φαίνεται εύκολα και είναι πολύ σημαντικό, ότι οι στατικές αυτές λύσεις δεν έχουν μηδενική απόκλιση. Κατά την αναλυτική επίλυση, επειδή οι ιδιοτιμές τους είναι μηδενικές αυτές οι λύσεις απορρίπτονται καθώς η στατική περίπτωση δεν ενδιαφέρει.

Όντας επιτρεπτές λύσεις της (2.15), οι (2.20) ικανοποιούν και την ασθενή μορφή της, προερχόμενη από κάποιο συναρτησιακό ή με τη μέθοδο των σταθμικών υπολοίπων. Ωστόσο - εδώ είναι το κρίσιμο σημείο ! - κατά την επίλυση της ασθενούς μορφής

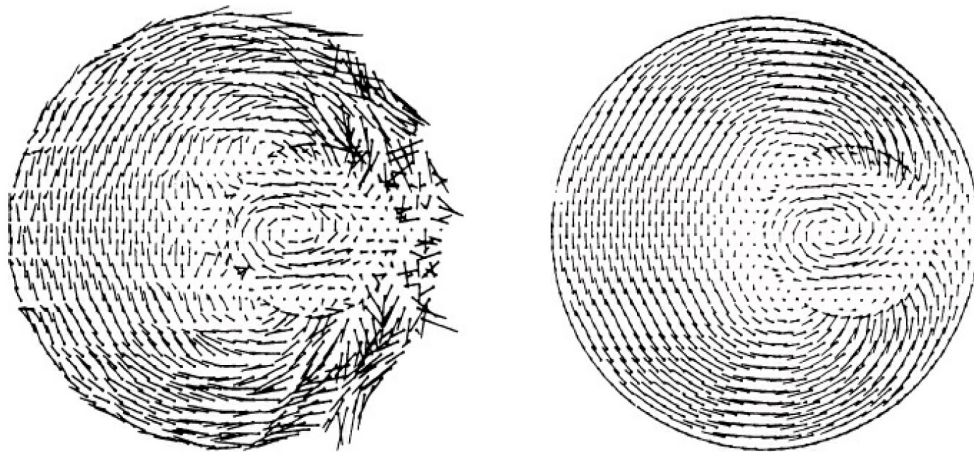
⁴⁰ γνωστό και ως πυρήνα (*kernel*), συντομογραφικά *ker*.

⁴¹ PEC : Perfect Electric Conductor

⁴² Υπενθυμίζεται ότι η περίπτωση $m = n = 0$ δεν είναι αποδεκτή στους TE ρυθμούς.

με τη FEM δεν μπορούν να απορριφθούν⁴³ και υπολογίζονται μαζί με τις μη στατικές αδιακρίτως.

Συνοψίζοντας, επιλύοντας την ασθενή μορφή με τη FEM προκύπτουν όχι μόνον οι ζητούμενες ιδιοτιμές της δυναμικής περίπτωσης, αλλά επιπλέον και ένα πλήθος από μηδενικές ιδιοτιμές και τα αντίστοιχά τους ιδιοδιανύσματα. Επειδή η FEM υπόκειται σε αριθμητικά σφάλματα, οι μηδενικές ιδιοτιμές δεν θα είναι ακριβώς μηδέν αλλά κάπως μεγαλύτερες. Λόγω των σφαλμάτων στις προσεγγίσεις, οι τιμές αυτές συχνά μπορούν γίνουν αρκετά μεγάλες και να εισέλθουν στο φάσμα των δυναμικών ιδιοτιμών· τότε οι δυναμικές ιδιοτιμές και οι κακές αυτές προσεγγίσεις των μηδενικών δεν μπορούν να διακριθούν. Σε αυτή την περίπτωση λέγεται ότι αποτελούν έναν παρασιτικό ρυθμό ή παρασιτική λύση: μια ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της, στο φάσμα των αναμενόμενων, που όμως δεν ικανοποιεί την εξίσωση της απόκλισης και άρα είναι αφύσικη. Πιο αυστηρά, ως παρασιτικοί ρυθμοί ορίζονται οι αριθμητικές λύσεις του ιδιοπρόβληματος, οι οποίες καθώς πυκνώνει το πλέγμα δεν συγκλίνουν σε κανέναν φυσικό ρυθμό της ηλεκτρομαγνητικής διάταξης⁴⁴.



Σχήμα 2.2: Πραγματικό μέρος του ηλεκτρικού πεδίου με παρασιτικούς ρυθμούς και δίχως αυτούς⁴⁵.

Γενικά, όταν ο μηδενοχώρος της στροφής δεν αναπαρίσταται επαρκώς από το σχήμα της διακριτοποίησης⁴⁶, η ανεπαρκής, κακή αυτή προσέγγιση έχει ως επακόλουθο τη μειωμένη ακρίβεια στον υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του μηδενοχώρου με ότι αυτό συνεπάγεται.

⁴³ Εκτός αν το συναρτησιακό εκ του οποίου προέχεται η ασθενής μορφή τροποποιηθεί κατάλληλα ώστε να εξαιρούνται. Αυτό γίνεται προσθέτοντας στο συναρτησιακό κάποιον όρο ποινής.

⁴⁴ Υπό αυτή την έννοια όλες οι λύσεις του μηδενοχώρου του τελεστή είναι παρασιτικοί ρυθμοί καθώς δεν αντιστοιχούν στις πλήρεις εξισώσεις Maxwell· ωστόσο, στη βιβλιογραφία ο όρος χρησιμοποιείται για ρυθμούς που έχουν λανθασμένα μη μηδενικές ιδιοτιμές.

⁴⁵ Εκ του [13] σελ. 201. Είναι το συνολικό \mathbf{E} , όχι ένας ρυθμός.

⁴⁶ Σε ότι αφορά τη FEM, από τις συναρτήσεις βάσης των στοιχείων.

Τονίζεται ότι τα στοιχεία ακμής εξαλείφουν σχεδόν πλήρως τις παρασιτικές λύσεις αλλά δεν τις απορρίπτουν εγγενώς. Το αληθές είναι ότι αναπαριστούν πολύ καλύτερα τον μηδενικό χώρο της στροφής και οι μηδενικές λύσεις υπολογίζονται ακριβέστερα ὡς αποτέλεσμα, αυτές δεν υπεισέρχονται στο φάσμα των μη μηδενικών ιδιοτιμών.

Σε ότι αφορά προβλήματα στα οποία το k_i τίθεται εκ των προτέρων, επειδή είναι οπωσδήποτε $k_i \neq 0$, δεν υπάρχουν μηδενικές ιδιοτιμές ἄρα, σε αυτή την περίπτωση οι αστρόβιλοι ρυθμοί των μηδενικών ιδιοτιμών απορρίπτονται εκ της διατύπωσης του προβλήματος, δεν εμφανίζονται καν και δεν μπορούν να δράσουν παρασιτικά.

Ένας τρόπος εξάλειψης των παρασιτικών λύσεων είναι να διατυπωθεί το πρόβλημα έτσι ώστε οι ιδιοτιμές $k_i = 0$ και τα ιδιοδιανύσματά τους να μην είναι επιτρεπτά. Αυτό επιτυγχάνεται επιβάλλοντας την εξίσωση της απόκλισης

$$\nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} = 0 \quad (2.16)$$

στην περιοχή δίχως πηγές.

Υπενθυμίζεται ότι οι παρασιτικές λύσεις προέρχονται από μηδενικές λύσεις, οι οποίες δεν έχουν μηδενική απόκλιση. Επιβάλλοντας την (2.16), η μόνη επιτρεπτή λύση για $k_i = 0$ είναι η $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, η οποία έχει μηδενική απόκλιση τετριμμένα ὅλες οι υπόλοιπες αφού δεν είναι σωληνοειδείς θα απορριφθούν. Θεωρούμενη ως περιορισμός, η (2.16) μπορεί να ενσωματωθεί στην ασθενή μορφή με κάποια τεχνική επιβολής περιορισμών σε προβλήματα ελαχιστοποίησης⁴⁷. Από τις διαθέσιμες μεθόδους έχει δοκιμαστεί επιτυχώς η μέθοδος ποινής που είναι η ευκολότερη να εφαρμοστεί. Ωστόσο, η μέθοδος ποινής διορθώνει το πρόβλημα αλλά δεν εξαλείφει την αιτία του, η οποία είναι η ατελής αναπαράσταση του μηδενικού χώρου της στροφής. Οι παρασιτικοί ρυθμοί δεν εξαλείφονται εγγενώς και εξαρτώνται από μια παράμετρο που καθορίζει πόσο ισχυρά επιβάλλεται η συνθήκη της απόκλισης. Η εμφάνιση παρασιτικών λύσεων εξακολουθεί να ελλοχεύει διότι η αναπαράσταση του μηδενικού χώρου εξακολουθεί να είναι κακή⁴⁸.

Ένας άλλος τρόπος για την εξάλειψη των ψευδορυθμών είναι η χρήση στοιχείων C^1 . Σε αυτή την μέθοδο θεωρείται ένα βοηθητικό διανυσματικό πεδίο ζ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{E} = \nabla \times \zeta. \quad (2.22)$$

Εκ της (2.22) το \mathbf{E} είναι σωληνοειδές, ἴτοι εκ κατασκευής ισχύει η (2.16). Το βοηθητικό πεδίο ζ αναπαρίσταται με κομβικά C^1 στοιχεία⁴⁹, ανά συνιστώσες, όπως έχει εξηγηθεί παραπάνω. Θέτοντας την (2.22) στο συναρτησιακό, εμφανίζονται δεύτερες παράγωγοι για το ζ ἔπομένως, στην ασθενή μορφή εμφανίζονται πρώτες παράγωγοι⁵⁰, οι οποίες

⁴⁷ Σε αυτή την περίπτωση, για την διατύπωση της ασθενούς μορφής πρέπει να είναι αφετηρία ένα συναρτησιακό και να χρησιμοποιηθεί κάποια μεταβολική μέθοδος όπως η Rayleigh-Ritz.

Οι κύριες τεχνικές επιβολής περιορισμών σε ελαχιστοποίηση συναρτησιακών είναι η μέθοδος ποινής (*penalty method*), η οποία είναι σχετικά εύκολη στην εφαρμογή της αλλά προσεγγιστική, και η μέθοδος πολλαπλασιαστών *lagrange*, η οποία είναι ακριβής και πιο γενική αλλά δυσκολότερο να εφαρμοστεί.

⁴⁸ Τα σχόλια αυτά αφορούν πρωτίστως τα κομβικά στοιχεία.

Αν χρησιμοποιηθούν στοιχεία ακμής, η (2.16) ικανοποιείται (τουλάχιστον για τα χαμηλότερης τάξης εξ αυτών) ὡστόσο, και σε αυτή την περίπτωση οι ψευδορυθμοί συνεχίζουν να είναι αποδεκτοί από την ασθενή διατύπωση του προβλήματος.

⁴⁹ Δηλαδή με τον κομβικό φορμαλισμό.

⁵⁰ Υπενθυμίζεται ότι η ασθενής μορφή είναι μια διατύπωση της αρχικής εξίσωσης με μειωμένη ομαλότητα για τη λύση ἴ για τη FEM είναι το ἡμισυ της τάξης που έχει η αρχική εξίσωση.

κατασκευάζονται με C^1 στοιχεία.

Έχει αποδειχτεί⁵¹ ότι η διακριτοποίηση του \mathbf{E} με κομβικά C^1 στοιχεία αναπαριστά ακριβώς τον μηδενοχώρο της στροφής και επομένως εξαλείφει εντελώς τις παρασιτικές λύσεις⁵². Ωστόσο, αφενός τα κομβικά C^1 στοιχεία δεν είναι διαδεδομένα⁵³, αφετέρου ο κομβικός φορμαλισμός ενέχει τη δυσκολία επιβολής των συνοριακών συνθηκών των πεδίων στις διεπιφάνειες.

Συγκριτικά με τα παραπάνω, ήδη αναφέρθηκε ότι τα στοιχεία ακμής αναπαριστούν καλύτερα τον μηδενοχώρο της στροφής και ως εκ τούτου καταστέλλουν σημαντικά ή τελείως τις παρασιτικές λύσεις⁵⁴. Επιπλέον, η επιβολή των συνοριακών συνθηκών με αυτά είναι εύκολη.

Συμπερασματικά, η βαθύτερη αιτία για την προέλευση των παρασιτικών ρυθμών είναι η ατελής αναπαράσταση του μηδενοχώρου της στροφής. Κάθε βάση συναρτήσεων που τον αναπαριστά πλήρως, καθιστά τη FEM ευσταθή και ακριβή. Τα συνήθη κομβικά στοιχεία είναι ακατάλληλα⁵⁴ η καλύτερη επιλογή είναι τα στοιχεία ακμής, είτε μόνα τους είτε σε συνδυασμό με τα κομβικά⁵⁴. Αυτή είναι και η πρακτική που θα υιοθετηθεί αργότερα στο κείμενο για την επίλυση κλασικών προβλημάτων κυματοδηγών.

Είναι αξιοσημείωτο ότι το πρόβλημα των παρασιτικών λύσεων δεν υπάρχει στην FDTD διότι εκεί οι διακριτοποιημένες εξισώσεις ικανοποιούν ακριβώς τις εξισώσεις Gauss στο πλέγμα Yee, εκ κατασκευής⁵⁵.

⁵¹ Βλ. [14] και [15].

⁵² Αντίθετα, οι συνολικοί βαθμοί ελευθερίας (δηλ. οι συναρτήσεις βάσης) που διαθέτει ένα πλέγμα με C^0 στοιχεία δεν επαρκούν για την αναπαράσταση μεγάλου πλήθους στοιχείων της μορφής ∇V και ταυτόχρονα ικανοποίηση όλων των συνθηκών συνέχειας των V και ∇V . Βλ. [15].

Η αποτυχία ικανοποίησης της συνέχειας των κάθετων συνιστωσών των ∇V μεταξύ των στοιχείων, εκδηλώνεται ως πλασματικά φορτία στα σύνορα μεταξύ τους, τα οποία αποτελούν πηγές για περαιτέρω στατικές (μηδενικές) λύσεις χειροτερεύοντας την κατάσταση. Βλ. [16].

⁵³ Τα C^1 στοιχεία αναπαράγουν το πεδίο με συνέχεια στις πρώτες παραγώγους του μεταξύ των συνόρων τους και λέγονται *σύμμορφα*. Δεν είναι απλώς στοιχεία με αυξημένο βαθμό. Χρησιμοποιούνται στη Δομητική Μηχανική σε προβλήματα πλακών και κελυφών. Στον Ηλεκτρομαγνητισμό γενικά δεν είναι διαθέσιμα και πρέπει να κατασκευαστούν για το δεδομένο πρόβλημα.

⁵⁴ Οι παρασιτικοί ρυθμοί έχουν πάντα σχετικά μεγάλη απόκλιση και σε αυτό στηρίζεται η μέθοδος ποινής για να τους απορρίψει. Τα στοιχεία ακμής της πιο χαμηλής τάξης είναι σωληνοειδή αλλά τα ανώτερης τάξης όχι. Παραταύτα, όλα παράγουν ακριβείς λύσεις, χωρίς ψευδορυθμούς⁵⁴ ο λόγος είναι η καλύτερη αναπαράσταση του μηδενοχώρου. Η σωληνότητα των στοιχείων δεν είναι αναγκαία συνθήκη για την εξάλειψη των ψευδορυθμών.

⁵⁵ Βλ. [12] σελ. 54 και 78.

2.4 Συναρτήσεις σχήματος για βαθμωτά και διανυσματικά στοιχεία

Αναφέρθηκε ήδη ότι η άγνωστη συνάρτηση (λύση) αναπαρίσταται εντός κάθε στοιχείου ως γραμμικός συνδυασμός κάποιων συναρτήσεων βάσης, καλούμενες επίσης και *συναρτήσεις σχήματος* ή *παρεμβολής*. Οι (αρχικά άγνωστοι) συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού είναι οι τιμές της λύσης στους κόμβους των στοιχείων και αποτελούν το ουσιαστικό ζητούμενο της επίλυσης με τη FEM. Τονίζεται ότι οι συναρτήσεις σχήματος έχουν τοπικό χαρακτήρα, ήτοι κάθε στοιχείο έχει τις δικές του, οι οποίες περιορίζονται σ' αυτό και μόνον· έξω από το στοιχείο μηδενίζονται⁵⁶. Με τις συναρτήσεις σχήματος μπορεί να βρεθεί η λύση στο εσωτερικό του στοιχείου κάνοντας παρεμβολή τις τιμές των κόμβων του.

Στα βαθμωτά στοιχεία, ως συναρτήσεις σχήματος χρησιμοποιούνται πολυώνυμα, τα οποία έχουν εύκολο χειρισμό (εύκολη παραγωγή και ολοκλήρωση) και μπορούν να αυξήσουν εύκολα την ακρίβεια της λύσης αυξάνοντας τον βαθμό τους⁵⁷. Παρόμοια ισχύουν και για τα διανυσματικά στοιχεία· ωστόσο, οι ιδιότητες των διανυσματικών συναρτήσεων βάσης είναι λιγότερο τετριμμένες. Ειδικά για την εύρεση της λύσης, ήτοι τις τιμές στους κόμβους των στοιχείων, οι συναρτήσεις σχήματος υπεισέρχονται στον υπολογισμό κάποιων μητρώων που προκύπτουν από τη διακριτοποίηση της εξίσωσης.

Ακολούθως θα παρουσιαστούν οι συναρτήσεις σχήματος και οι σχέσεις των μητρώων για τα τριγωνικά γραμμικά στοιχεία, κομβικά και διανυσματικά, τα οποία χρησιμοποιούνται στο παρόν κείμενο. Αν και τα στοιχεία αυτά είναι πολύ απλά, επαρκούν με το παραπάνω για να δώσουν αξιόπιστα αποτελέσματα στα προβλήματα που εξετάζονται.

2.4.1 Συναρτήσεις σχήματος και μητρώα για βαθμωτά γραμμικά τριγωνικά στοιχεία

Οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τα προβλήματα του Ηλεκτρομαγνητισμού περιέχουν μεταξύ άλλων τους όρους Φ και $\nabla^2 \Phi$, όπου Φ η άγνωστη συνάρτηση. Εκ των όρων αυτών, όπως δείχνεται στις §3.2 και §3.3, προκύπτουν για κάθε στοιχείο e τα μητρώα $[S^{(e)}]$ και $[T^{(e)}]$ με στοιχεία

$$S_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} \nabla N_i^{(e)} \cdot \nabla N_j^{(e)} d\Omega \quad (2.23)$$

$$T_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} N_j^{(e)} d\Omega \quad (2.24)$$

⁵⁶ Αυτό είναι μεγάλο πλεονέκτημα διότι προσδίδει ευελιξία και δεν ισχύει σε άλλες τεχνικές Σταθμικών Υπολοίπων. Π.χ., στην κλασική μέθοδο Ritz οι συναρτήσεις βάσης αφορούν ολόκληρο το χωρίο, έτσι η επιλογή συναρτήσεων βάσης είναι πολύ πιο δύσκολη καθώς εξαρτάται από το σχήμα του χωρίου.

⁵⁷ Πέραν της απλότητας και της ευκολίας χειρισμού τους, οι συναρτήσεις σχήματος πρέπει να ικανοποιούν και κάποιες άλλες απαιτήσεις όπως η πληρότητα. Ωστόσο, οι απαιτήσεις αυτές υπάγονται στην αυστηρή μαθηματική θεμελίωση της FEM και δεν αναφέρονται εδώ.

όπου $N_i^{(e)}$ είναι η συνάρτηση σχήματος του κόμβου i και $\Omega^{(e)}$ η επιφάνεια του στοιχείου e όπου γίνεται η ολοκλήρωση.

Οι (2.23) και (2.24) ισχύουν για κάθε είδος στοιχείου (τριγωνικό, τετραπλευρικό, γραμμικό, ανώτερης τάξης κ.α.). Η διαφοροποίηση ανάλογα με το στοιχείο έγκειται στις συναρτήσεις σχήματος. Για τα γραμμικά τριγωνικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται στο κεφ. 3, συναρτήσεις σχήματος είναι οι εμβαδικές συντεταγμένες⁵⁸ L_i :

$$N_i(x, y) = L_i(x, y) = \frac{1}{2A} (\alpha_i + b_i x + c_i y), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.25)$$

όπου A είναι το εμβαδόν του τριγώνου,

$$A = \frac{1}{2} ((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)) \quad (2.26)$$

και

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j \quad ; \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2.27)$$

όπου x_i, y_i είναι οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου.

Τα ολοκληρώματα στις (2.23) και (2.24) γενικώς υπολογίζονται αριθμητικά, με ολοκλήρωση Gauss-Legendre. Ωστόσο, για τα γραμμικά τρίγωνα οι εκφράσεις είναι απλές και μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά⁵⁸ συγκεκριμένα, στην περίπτωση αυτή οι (2.23) και (2.24) δίνουν

$$[S^{(e)}] = \sum_{i=1}^3 \cot\theta_i [Q]_i, \quad (2.28)$$

$$[T^{(e)}] = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Στην (2.28), οι σταθερές $[Q]_i$ είναι τα μητρώα

$$[Q]_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [Q]_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[Q]_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

⁵⁸ Βλ. [25] σελ. 135 και 174.

Επίσης, οι παράγοντες $\cot\theta_i$ δίνονται από τη σχέση

$$\cot\theta_i = \frac{1}{2A} \left((y_k - y_i)(y_i - y_j) + (x_i - x_k)(x_j - x_i) \right). \quad (2.31)$$

Με τις παραπάνω σχέσεις, οι (2.23) και (2.24) μπορούν να υπολογιστούν για τα γραμμικά τριγωνικά στοιχεία. Περισσότερες πληροφορίες για τις συναρτήσεις σχήματος και άλλα είδη κομβικών στοιχείων μπορούν να βρεθούν σε οποιοδήποτε σύγγραμμα που αφορά τη FEM.

2.4.2 Συναρτήσεις σχήματος και μητρώα για διανυσματικά γραμμικά τριγωνικά στοιχεία

Όπως σχολιάστηκε εκτενώς νωρίτερα, για την αξιόπιστη λύση προβλημάτων ακτινοβολίας απαιτούνται διανυσματικά στοιχεία. Σε αυτές τις περιπτώσεις προκύπτουν τα μητρώα $[E^{(e)}]$, $[F^{(e)}]$ και $[G^{(e)}]$ με στοιχεία⁵⁹

$$E_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} (\nabla \times \mathbf{N}_i^{(e)}) \cdot (\nabla \times \mathbf{N}_j^{(e)}) d\Omega \quad (2.32)$$

$$F_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)} \cdot \mathbf{N}_j^{(e)} d\Omega \quad (2.33)$$

$$G_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)} \cdot \nabla N_j^{(e)} d\Omega. \quad (2.34)$$

όπου η σημειογραφία είναι όπως παραπάνω.

Για τα γραμμικά τριγωνικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται στο κεφ. 3, οι συναρτήσεις σχήματος προέρχονται από τις αντίστοιχες βαθμωτές⁶⁰ συγκεκριμένα, δίνονται από τις σχέσεις :

$$\mathbf{N}_1(x, y) = l_1 (N_1 \nabla N_2 - N_2 \nabla N_1) \quad (2.35)$$

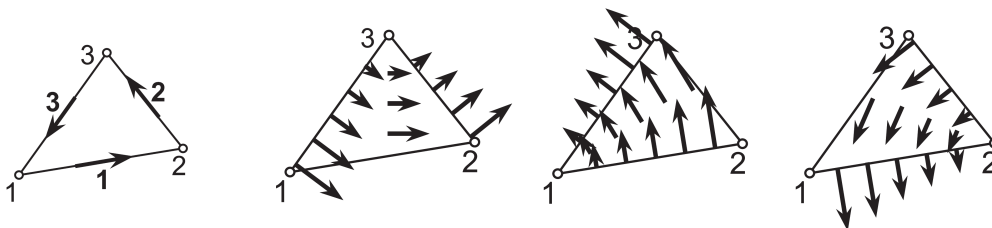
$$\mathbf{N}_2(x, y) = l_2 (N_2 \nabla N_3 - N_3 \nabla N_2) \quad (2.36)$$

$$\mathbf{N}_3(x, y) = l_3 (N_3 \nabla N_1 - N_1 \nabla N_3) \quad (2.37)$$

όπου l_i είναι το μήκος της ακμής i και N_i η βαθμωτή συνάρτηση σχήματος του κόμβου i . Επισημαίνεται ότι, ως διανύσματα, οι \mathbf{N}_i είναι προσανατολισμένες, εν προκειμένω αντιωρολογιακά. Το τριγωνικό στοιχείο με αυτές τις συναρτήσεις είναι το λεγόμενο *στοιχείο Whitney*.

⁵⁹ Το $[G^{(e)}]$ εμφανίζεται όταν χρησιμοποιούνται αμφότερα κομβικά στοιχεία και στοιχεία ακμής (μικτοί φορμαλισμοί).

⁶⁰ Για τα τρίγωνα είναι οι (2.25).



Σχήμα 2.3: Αρίθμηση ακμών και διανυσματικές συναρτήσεις σχήματος γραμμικού τριγωνικού στοιχείου (στοιχείο Whitney).

Οι συναρτήσεις αυτές έχουν δυο πολύ σημαντικές ιδιότητες, ήδη σχολιασμένες εκτενώς. Πρώτον, σε μια ακμή i , εφαπτομενική συνιστώσα μη μηδενική έχει μόνον η συνάρτηση σχήματος N_i . Για τα γραμμικά στοιχεία, η εφαπτομενική αυτή συνιστώσα είναι σταθερή κατά μήκος όλης της ακμής. Η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζει τη συνέχεια των εφαπτομενικών πεδιακών συνιστωσών μεταξύ των διεπιφανειών των στοιχείων και καθιστά εύκολη την επιβολή των συνοριακών συνθηκών. Δεύτερον, εντός του τριγώνου, η N_i είναι σωληνοειδής, ήτοι $\nabla \cdot N_i = 0$. Με αυτή την ιδιότητα είναι εύκολη η προσέγγιση σωληνοειδών πεδίων.

Τα μητρώα $[E^{(e)}]$ και $[F^{(e)}]$, αφού γίνουν οι πράξεις, δίνονται από τις σχέσεις :

$$[E^{(e)}] = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 1 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 1 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

και

$$[F^{(e)}] = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 1 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} [K^{(e)}] \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 1 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Το μητρώο $[K^{(e)}]$ καθορίζεται από τη γεωμετρία του τριγώνου και είναι⁶¹

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} 2(u_{22} - u_{12} - u_{11}) & u_{23} - u_{22} - 2u_{13} + u_{12} & u_{21} - 2u_{23} - u_{11} + u_{13} \\ u_{23} - u_{22} - 2u_{13} + u_{12} & 2(u_{33} - u_{23} - u_{22}) & u_{31} - u_{33} - 2u_{21} + u_{23} \\ u_{21} - 2u_{23} - u_{11} + u_{13} & u_{31} - u_{33} - 2u_{21} + u_{23} & 2(u_{11} - u_{13} - u_{33}) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

με

$$u_{ij} = (y_{i+1} - y_{i-1})(y_{j+1} - y_{j-1}) + (x_{i+1} - x_{i-1})(x_{j+1} - x_{j-1}) \quad (2.41)$$

όπου οι δείκτες i και j λαμβάνουν κυκλικά τις τιμές $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

⁶¹ Η μορφή αυτή του $[K^{(e)}]$ ισχύει για επίπεδο πρόβλημα και στοιχεία στο ίδιο επίπεδο.

Για πρόβλημα στον χώρο οι πράξεις πρέπει να γίνουν λαμβάνοντας υπόψη και την τρίτη συντεταγμένη.

Τέλος, το μητρώο το μητρώο $[G^{(e)}]$, αφού γίνουν οι πράξεις, έχει τα στοιχεία :

$$\begin{aligned}
G_{11}^{(e)} &= d_1 \left((y_2 - y_3) \left((y_2 - y_3) - (y_3 - y_1) \right) + (x_3 - x_2) \left((x_3 - x_2) - (x_1 - x_3) \right) \right) \\
G_{12}^{(e)} &= -d_1 \left((y_3 - y_1) \left((y_3 - y_1) - (y_2 - y_3) \right) + (x_1 - x_3) \left((x_1 - x_3) - (x_3 - x_2) \right) \right) \\
G_{13}^{(e)} &= d_1 \left(y_1 (y_1 - y_3) - y_2 (y_2 - y_3) y_3 (y_1 - y_2) + x_1 (x_1 - x_3) + x_2 (x_3 - x_2) + x_3 (x_2 - x_1) \right) \\
G_{21}^{(e)} &= d_2 \left(y_1 (y_3 - y_2) - y_2 (y_1 - y_2) - y_3 (y_3 - y_1) + x_1 (x_3 - x_2) + x_2 (x_2 - x_1) + x_3 (x_1 - x_3) \right) \\
G_{22}^{(e)} &= d_2 \left((y_3 - y_1) \left((y_3 - y_1) - (y_1 - y_2) \right) + (x_1 - x_3) \left((x_1 - x_3) - (x_2 - x_1) \right) \right) \\
G_{23}^{(e)} &= -d_2 \left((y_1 - y_2) \left((y_1 - y_2) - (y_3 - y_1) \right) + (x_2 - x_1) \left((x_2 - x_1) - (x_1 - x_3) \right) \right) \\
G_{31}^{(e)} &= -d_3 \left((y_2 - y_3) \left((y_2 - y_3) - (y_1 - y_2) \right) + (x_3 - x_2) \left((x_3 - x_2) - (x_2 - x_1) \right) \right) \\
G_{32}^{(e)} &= d_3 \left(y_1 (y_2 - y_1) - y_2 (y_3 - y_1) - y_3 (y_2 - y_3) + x_1 (x_2 - x_1) + x_2 (x_1 - x_3) + x_3 (x_3 - x_2) \right) \\
G_{33}^{(e)} &= d_3 \left((y_1 - y_2) \left((y_1 - y_2) - (y_2 - y_3) \right) + (x_2 - x_1) \left((x_2 - x_1) - (x_3 - x_2) \right) \right)
\end{aligned}
\tag{2.42}$$

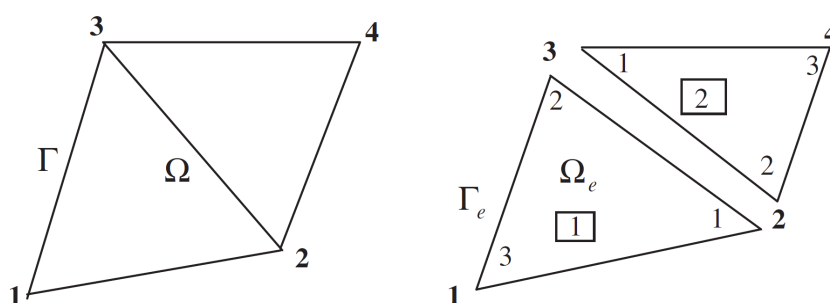
όπου $d_i = \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2}$.

Οι παραπάνω σχέσεις για τα στοιχεία των μητρώων προέρχονται από τις αναλυτικές ολοκληρώσεις. Εναλλακτικά, οι ολοκληρώσεις μπορούν να γίνουν αριθμητικά με ολοκλήρωση Gauss-Legendre· αυτό είναι αναπόφευκτο σε συναρτήσεις σχήματος ανώτερης τάξης, για τις οποίες τα ολοκληρώματα έχουν περίπλοκη μορφή.

Στην §2.3 σχολιάστηκε εκτενώς η σημασία που έχει η σωληνότητα των στοιχείων ακμής στη FEM. Η σωληνότητα είναι πολύ επιθυμητή ιδιότητα αλλά δυστυχώς δεν είναι όλα τα στοιχεία ακμής σωληνοειδή. Π.χ., τα στοιχεία ακμής ανώτερης τάξης γενικώς δεν είναι· επίσης, δεν είναι ούτε τα γραμμικά τετράπλευρα τυχαίου σχήματος. Εκ τούτου, και λόγω και της απλότητάς τους, τα στοιχεία ακμής που κυρίως χρησιμοποιούνται είναι τα γραμμικά τρίγωνα. Τα τετράπλευρα χρησιμοποιούνται αρκετά λιγότερο και σε συνδυασμό με κάποια τεχνική που παρέχει έλεγχο στη σωληνότητα, καθώς και σε επιφανειακά προβλήματα στον χώρο, στα οποία η τρίτη συνιστώσα του πεδίου αναπαρίσταται με κομβικά στοιχεία και μπορεί να δώσει μηδενική σωληνότητα.

2.5 Κατασκευή του ολικού μητρώου από τα επιμέρους μητρώα των στοιχείων

Η κατασκευή του συνολικού γραμμικού συστήματος γίνεται χρησιμοποιώντας τα δεδομένα συνδεσιμότητας των στοιχείων που παρήχθησαν από την πλεγματοποίηση. Ακολούθως παρουσιάζεται μια μέθοδος με την οποία κατασκευάζεται το ολικό μητρώο των συντελεστών των αγνώστων, και των σταθερών, συνενώνοντας τα μητρώα των στοιχείων.



Σχήμα 2.4: Καθολική και τοπική αρίθμηση κόμβων πεπερασμένων στοιχείων.

Ως παράδειγμα, έστω το πλέγμα στο σχήμα 2.4: πρόκειται για ένα πλέγμα δυο στοιχείων, όπου αναγράφεται η καθολική και η τοπική αρίθμηση των κόμβων. Η μέθοδος κατασκευής των μητρώων του ολικού συστήματος δείχνεται στα σχ. 2.5 και 2.6. Κάθε τοπικό μητρώο $n \times n$ αντιστοιχεί σε ένα πεπερασμένο στοιχείο e με n κόμβους, εν προκειμένω τρεις. Οι δείκτες της γραμμής και της στήλης του τοπικού μητρώου δηλώνουν ότι το αντίστοιχο στοιχείο του, $K_{ij}^{(e)}$, αφορά τον συσχετισμό των δύο κόμβων i και j , όπου τα i, j είναι η τοπική αρίθμηση των κόμβων του πεπερασμένου στοιχείου. Επιπλέον, από την πλεγματοποίηση είναι γνωστή και η καθολική (global) αρίθμηση των κόμβων αυτών, εν προκειμένω δεικνυόμενη σε κύκλους. Αντίστοιχα, οι δείκτες της γραμμής και της στήλης του ολικού μητρώου δηλώνουν ότι το αντίστοιχο στοιχείο του, $K_{\alpha\beta}$, αφορά τον συσχετισμό των δύο κόμβων α και β , όπου τα α, β είναι η καθολική αρίθμηση των κόμβων του πεπερασμένου στοιχείου. Η κατασκευή του ολικού μητρώου συνίσταται στην τοποθέτηση των στοιχείων κάθε τοπικού μητρώου στην θέση του ολικού μητρώου που υποδεικνύει η καθολική τους αρίθμηση, βλ. σχ. 2.5. Το διάνυσμα του δεξιού μέλους του ολικού συστήματος κατασκευάζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, βλ. σχ. 2.6.

Υπενθυμίζεται ότι η κατασκευή του ολικού συστήματος δεν αρκεί· πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι συνοριακές συνθήκες. Ειδικά για τους κόμβους που φέρουν συνθήκες Dirichlet, οι εξισώσεις τους πρέπει είτε να εξαιρούνται από το σύστημα, είτε το σύστημα να τροποποιηθεί ώστε να δίνει την εκεί γνωστή λύση. Στα προβλήματα ιδιοτιμών συνήθως υιοθετείται ο πρώτος τρόπος. Στα αιτιοκρατικά προβλήματα εφαρμόζεται ο δεύτερος τρόπος καθώς η παραπάνω διαδικασία κατασκευής του ολικού μητρώου είναι σχετικώς εύκολη προγραμματιστικά.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \\
 \\
 \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{4} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \\
 \\
 \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array} \begin{bmatrix} K_{33}^{(1)} & K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & 0 \\ K_{13}^{(1)} & K_{11}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{12}^{(1)} + K_{21}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{23}^{(1)} & K_{21}^{(1)} + K_{12}^{(2)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{13}^{(2)} \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{31}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Σχήμα 2.5: Κατασκευή του μητρώου συντελεστών (A) του συνολικού γραμμικού συστήματος από τα επιμέρους μητρώα των πεπερασμένων στοιχείων.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \end{bmatrix} \\
 \\
 \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{bmatrix} \\
 \\
 \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array} \begin{bmatrix} F_3^{(1)} \\ F_1^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Σχήμα 2.6: Κατασκευή του διανύσματος σταθερών (B) του συνολικού γραμμικού συστήματος από τα επιμέρους μητρώα των πεπερασμένων στοιχείων.

3. Επίλυση προβλημάτων Κυματοδηγών με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

3.1 Εισαγωγή

Τα προβλήματα κυματοδηγών ήταν από τα πρώτα προβλήματα Ηλεκτρομαγνητισμού που εφαρμόστηκε η FEM. Τα προβλήματα αυτά χωρίζονται σε δυο κατηγορίες. Στην πρώτη, ζητούμενο είναι να βρεθούν οι ρυθμοί που αναπτύσσονται σε ομογενείς και ανομοιογενείς¹ κυματοδηγούς, με διατομή αυθαίρετου σχήματος, και οι κυκλωματικές παράμετροι ανομοιομόρφων πολυαγωγίμων γραμμών (μικροταινίες, επίπεδοι κυματοδηγοί κ.α.). Τα προβλήματα αυτά συνίστανται στην επίλυση ενός ιδιοπροβλήματος για να υπολογιστεί η σταθερά διάδοσης κατά μήκος του κυματοδηγού και η μορφή των πεδίων στο επίπεδο της διατομής. Πρόκειται για ένα πρόβλημα που λύνεται με χρήση της FEM σε δυο διαστάσεις.

Η δεύτερη κατηγορία προβλημάτων κυματοδηγών είναι η ανάλυση και ο χαρακτηρισμός εξαρτημάτων². Σε αυτά ζητείται να βρεθεί η μορφή των πεδίων από μια δεδομένη διέγερση όταν στον κυματοδηγό είναι προσαρτημένο κάποιο βοηθητικό εξάρτημα, π.χ. ένα πολύθυρο (multiport) ή κάποιος συνδετήρας μετάβασης (transition device). Τα προβλήματα αυτά γενικά είναι τριδιάστατα· ωστόσο, σε κάποιες απλές αλλά πρακτικά σημαντικές περιπτώσεις η ανάλυση μπορεί να γίνει σε ένα επίπεδο, αποφεύγοντας την πολυπλοκότητα· π.χ. σε καμπτήρες (bends), γωνιακούς συνδετήρες και επίπεδους E- και H- διακλαδωτήρες (E- and H- plane junctions).

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί η πρώτη κατηγορία προβλημάτων. Συγκεκριμένα, θα δειχτεί πώς υπολογίζεται με τη FEM η σχέση διασποράς και οι εγκάρσιες πεδιακές συνιστώσες σε έναν κυματοδηγό, ομογενή ή όχι, με διατομή τυχαίου σχήματος³. Θα παρουσιαστούν δυο φορμαλισμοί της FEM. Ο πρώτος είναι ο πιο απλός και χρησιμοποιεί κομβικά στοιχεία. Είναι κατάλληλος για ομογενείς κυματοδηγούς, στους οποίους οι TE και TM ρυθμοί είναι αποπλεγμένοι και μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα⁴.

¹ Η ανομοιογένεια θεωρείται εν προκειμένω κατά την διατομή του κυματοδηγού, όχι κατά μήκος του. Τα προβλήματα αυτά λέγονται και *εγκάρσια* (*transverse problems*) καθώς το πρόβλημα λύνεται σε ένα χωρίο (διατομή) εγκάρσια στη διεύθυνση διάδοσης.

² Λέγονται και *αιτιοκρατικά* προβλήματα κυματοδότησης καθώς η σταθερά διάδοσης είναι γνωστή.

³ Σταθερή όμως κατά μήκος του.

⁴ Αυτό γενικά ισχύει σε όλες τις ομογενείς δομές κυματοδότησης.

Ο δεύτερος φορμαλισμός είναι κατάλληλος για ανομοιογενείς κυματοδηγούς, στους οποίους εμφανίζονται υβριδικοί ρυθμοί⁵. Είναι πιο γενικός και χρησιμοποιεί αμφότερα στοιχεία ακμής και κομβικά στοιχεία. Σε έναν ανομοιογενή κυματοδηγό το πρόβλημα των παρασιτικών λύσεων είναι έντονο και η χρήση στοιχείων ακμής επιβεβλημένη.

3.2 Επίλυση του προβλήματος Ομογενούς Κυματοδηγού με τη FEM

Σύμφωνα με τη θεωρία της §1.2.3, για έναν κλειστό, ομογενή κυματοδηγό, με διατομή αυθαίρετου σχήματος, πρέπει να λυθεί το ιδιοπρόβλημα⁶

$$\nabla_t^2 \Phi + k_t^2 \Phi = 0 \quad (3.1)$$

ορισμένο στο χωρίο Ω της διατομής του κυματοδηγού.

Για τους TM και TE ρυθμούς, και για τις περιπτώσεις PEC ή PMC τοιχωμάτων⁷ οι συνοριακές συνθήκες που συνοδεύουν την (3.1) είναι κατά τα γνωστά

TM ($H_z = 0$)

$$\Phi = E_z \quad (3.2)$$

$$\text{PEC} : \Phi|_S = 0, \quad \text{PMC} : \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (3.3)$$

TE ($E_z = 0$)

$$\Phi = H_z \quad (3.4)$$

$$\text{PEC} : \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_S = 0, \quad \text{PMC} : \Phi|_S = 0. \quad (3.5)$$

Για την επίλυση της (3.1) με τη FEM πρέπει να διατυπωθεί η ασθενής μορφή της εξίσωσης. Κατά τα γνωστά, αυτό μπορεί να γίνει είτε με τη μέθοδο Rayleigh-Ritz, είτε με τη μέθοδο των Σταθμικών Υπολοίπων. Εν προκειμένω θα εφαρμοστεί ο δεύτερος τρόπος⁸.

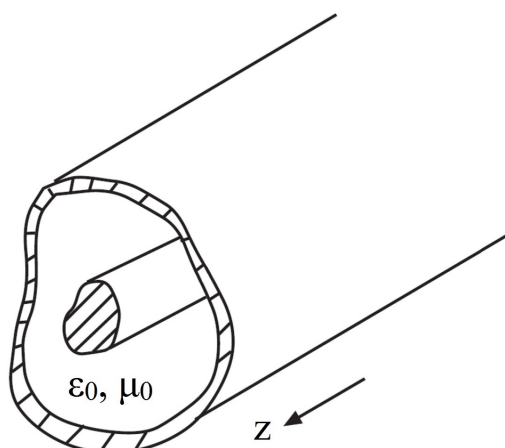
⁵ Είναι ρυθμοί στους οποίους υπάρχουν διαμήκεις συνιστώσες και του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Εμφανίζονται μεταξύ άλλων σε μικροταινίες και σε οπτικές ίνες. Βλ. [1] σελ. 692.

⁶ Πρόκειται για την εξίσωση (1.38) αναγραφόμενη εδώ με πιο γενικό συμβολισμό.

⁷ PEC : Perfect Electric Conductor, PMC : Perfect Magnetic Conductor.

⁸ Οι δυο μέθοδοι καταλήγουν στο ίδιο ακριβώς διακριτοποιημένο ιδιοπρόβλημα.

Η μέθοδος Rayleigh-Ritz απαιτεί να είναι γνωστό το συναρτησιακό που ελαχιστοποιείται από τη λύση της εξίσωσης. Για ανομοιογενή ή ανισότροπα υλικά, με μιγαδικές παραμέτρους ϵ και μ , η εύρεση και ο χειρισμός αυτού του συναρτησιακού είναι επίπονη διαδικασία· αν και στη βιβλιογραφία αυτά τα συναρτησιακά είναι γνωστά, εδώ προτιμάται η μέθοδος των Σταθμικών Υπολοίπων.



Σχήμα 3.1: Γεωμετρία ομογενούς κυματοδηγού.

Η μέθοδος των Σταθμικών Υπολοίπων περιγράφηκε σύντομα στη §2.2.2. Εδώ θα εφαρμοστεί για την εξίσωση Helmholtz, (3.1). Έστω ότι το χωρίο Ω όπου επιλύεται η (3.1) έχει σύνορο $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, στο οποίο το τμήμα Γ_D ισχύει η συνθήκη Dirichlet $\Phi = \Phi_0$, στο δε στο υπόλοιπο Γ_N η συνθήκη Neumann $\partial\Phi/\partial n = 0$.

Για τη διατύπωση της ασθενούς μορφής της (3.1), θεωρείται το εσωτερικό γινόμενο (ολοκλήρωμα) της (3.1) στο Ω , με αυθαίρετες συναρτήσεις βάρους W . Το ολοκλήρωμα αυτό αποτελεί το σταθμικό υπόλοιπο (weighted residual) της εξίσωσης και τίθεται ίσο με μηδέν,

$$\iint_{\Omega} W (\nabla_t^2 \Phi + k_t^2 \Phi) d\Omega = 0. \quad (3.6)$$

Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες⁹ η παραπάνω γράφεται

$$\int_{\Gamma} W (\nabla_t \Phi \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\Gamma - \iint_{\Omega} \nabla_t W \cdot \nabla_t \Phi d\Omega + \iint_{\Omega} W k_t^2 \Phi d\Omega = 0. \quad (3.7)$$

Η (3.7) είναι η ασθενής μορφή της ομογενούς εξίσωσης Helmholtz και περιλαμβάνει και τις συνοριακές συνθήκες. Όπως φαίνεται, η ασθενής μορφή περιέχει τις συνθήκες Neumann (φυσικές), άρα όταν μετατραπεί σε γραμμικό σύστημα αυτές θα πληρούνται αυτομάτως. Αντίθετα, οι συνθήκες Dirichlet (ουσιώδεις) δεν εμφανίζονται στην ασθενή μορφή και πρέπει να επιβληθούν με ειδική μέριμνα πριν επιλυθεί το σύστημα¹⁰.

Στο τμήμα Γ_N του συνόρου όπου η $\partial\Phi/\partial n$ είναι γνωστή, αντικαθίσταται άμεσα.

Στο τμήμα Γ_D του συνόρου όπου η Φ είναι γνωστή, το ολοκλήρωμα παραλείπεται¹¹.

⁹ Η ισοδύναμη, εφαρμόζοντας την πρώτη ταυτότητα Green.

¹⁰ Βλ. κεφ. 2 παρατ. 27.

¹¹ Στο Γ_D η $\partial\Phi/\partial n$ είναι άγνωστη και εισάγει επιπλέον αγνώστους στο σύστημα. Ωστόσο, δεν χρειάζεται να υπολογιστεί διότι ζητούμενο είναι η Φ , η οποία στο Γ_D δίνεται. Επομένως, οι άγνωστοι αυτοί παραλείπονται από το σύστημα θεωρώντας ότι στο Γ_D είναι $W = 0$. Οι γνωστές τιμές της Φ στους κόμβους του Γ_D , υπεισέρχονται στις υπόλοιπες εξισώσεις μέσω των χωρικών ολοκληρωμάτων και πρέπει να επιβληθούν στο σύστημα πριν λυθεί.

Εν προκειμένω, για τους ρυθμούς TM και TE, σε όλο το σύνορο ισχύει αντίστοιχα η συνθήκη Dirichlet $E_z = 0$ ή η συνθήκη Neumann $\partial E_z / \partial n = 0$. Επομένως, και στις δυο περιπτώσεις, ο συνοριακός όρος της (3.7) δεν υπάρχει και απομένει τελικά

$$\iint_{\Omega} \nabla_t W \cdot \nabla_t \Phi \, d\Omega - \iint_{\Omega} W k_t^2 \Phi \, d\Omega = 0. \quad (3.8)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί την ασθενή μορφή του συνοριακού προβλήματος της (3.1).

Επειδή η ακριβής λύση δεν είναι γνωστή, η (3.8) ικανοποιείται από μια προσεγγιστική λύση $\bar{\Phi}$ και το δεξί της μέλος δεν είναι ακριβώς μηδέν αλλά έχει μια τιμή (σφάλμα) που λέγεται *σταθμικό υπόλοιπο (weighted residual)*¹². Με τη μέθοδο των *Σταθμικών Υπολοίπων (Weighted Residual Method - WRM)* επιδιώκεται να βρεθεί η προσεγγιστική λύση που ιδανικά μηδενίζει το υπόλοιπο αυτό. Η συνολική διαδικασία με την οποία επιτυγχάνεται αυτό αποτελεί τη FEM. Συγκεκριμένα, η εφαρμογή της FEM στο πλαίσιο της WRM, σύμφωνα και με την §2.2, συνίσταται περίπου στα ακόλουθα:

1. Παράγεται το πλέγμα του υπολογιστικού χώρου Ω .
2. Διατυπώνεται προσεγγιστικά η λύση σε κάθε στοιχείο με κάποιο πολυώνυμο. Το πολυώνυμο αυτό έχει ως συντελεστές τις (άγνωστες) τιμές της λύσης στους κόμβους του στοιχείου. Οι άγνωστοι αυτοί συντελεστές, δηλαδή οι τιμές της λύσης στους κόμβους, αποτελούν το ζητούμενο.
3. Επιλέγονται οι συναρτήσεις βάρους και διατυπώνεται το σταθμικό υπόλοιπο σε κάθε στοιχείο. Αυτό παράγει μια μητρική εξίσωση για κάθε στοιχείο.
4. Ενώνονται οι συνεισφορές των σταθμικών υπολοίπων από όλα τα στοιχεία και διατυπώνεται το σταθμικό υπόλοιπο για όλο το χωρίο. Αυτό έχει τη μορφή ενός γραμμικού συστήματος.
5. Επιβάλλεται μηδενισμός στο σταθμικό υπόλοιπο όλου του χωρίου. Αυτό καταλήγει σε ένα αλγεβρικό σύστημα ή γενικευμένο ιδιοπρόβλημα, του οποίου η λύση εν προκειμένω δίνει τη σταθερά διάδοσης και τη διαμήκη συνιστώσα του πεδίου στη διατομή.

Το πρώτο βήμα γίνεται με χρήση κάποιου γεννήτορα πλέγματος (mesh generator). Όπως αναφέρθηκε στο κεφ. 2, η πλεγματοποίηση είναι πολύ σημαντική διαδικασία για τη FEM αλλά η θεωρία της είναι εν πολλοίς ανεξάρτητη από τη θεωρία της FEM και δεν εξετάζεται εδώ.

Κατά το δεύτερο βήμα, σε κάθε στοιχείο e η λύση γράφεται προσεγγιστικά ως

$$\bar{\Phi}^{(e)}(x, y) = \sum_{j=1}^{n^{(e)}} \bar{\Phi}_j^{(e)} N_j^{(e)}(x, y) \quad (3.9)$$

¹² Οι έννοιες “υπόλοιπο” και “σταθμικό υπόλοιπο” ελαφρώς διαφέρουν. Η πρώτη είναι το σημειακό σφάλμα της εξίσωσης ενώ η δεύτερη η κατανομή του σφάλματος αυτού στο χωρίο του προβλήματος με ολοκλήρωση. Για λόγους συντομίας, συνήθως η ονομασία “υπόλοιπο” χρησιμοποιείται και για τις δυο περιπτώσεις, με τη διαφορά τους να φαίνεται από τα συμφραζόμενα.

όπου $\bar{\Phi}_j^{(e)}$ είναι άγνωστοι συντελεστές και $N_j^{(e)}$ ένα σύνολο πολυωνυμικών συναρτήσεων βάσης¹³, $n^{(e)}$ το πλήθος τους, όσο οι κόμβοι του στοιχείου. Οι συναρτήσεις βάσης εν προκειμένω είναι βαθμωτές αλλά αν η άγνωστη συνάρτηση είναι διάνυσμα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και διανυσματικές (στοιχεία ακμής).

Κατά το τρίτο βήμα, καταρχήν διατυπώνεται η ασθενής μορφή της εξίσωσης για τα στοιχεία¹⁴. Ακολούθως, επιλέγεται ένα σύνολο συναρτήσεων βάρους $W_i^{(e)}$, $n^{(e)}$ το πλήθος τους, και μαζί με τις συναρτήσεις $\bar{\Phi}^{(e)}$ της (3.9) εισάγονται στην ασθενή μορφή. Ανάλογα με τις συναρτήσεις βάρους που επιλέγονται, υπάρχουν διάφορες εκδοχές της WRM· για διάφορους λόγους¹⁵ προτιμάται η εκδοχή Galerkin.

Στην εκδοχή Galerkin, ως συναρτήσεις βάρους επιλέγονται οι συναρτήσεις βάσης, $W_i^{(e)} = N_i^{(e)}$, $i = 1, 2, \dots, n^{(e)}$.

Με αυτή την επιλογή, το υπόλοιπο $R_i^{(e)}$ της ασθενούς μορφής σε κάθε στοιχείο είναι

$$\iint_{\Omega^{(e)}} \nabla_t N_i^{(e)} \cdot \nabla_t \bar{\Phi}^{(e)} d\Omega - \iint_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} k_t^2 \bar{\Phi}^{(e)} d\Omega = R_i^{(e)} \quad (3.10)$$

$$i = 1, 2, \dots, n^{(e)}$$

όπου $n^{(e)}$ είναι το πλήθος των κόμβων του στοιχείου.

Η παραπάνω γράφεται μητρικά ως

$$[S^{(e)}] [\bar{\Phi}^{(e)}] - k_t^2 [T^{(e)}] [\bar{\Phi}^{(e)}] = [R^{(e)}] \quad (3.11)$$

όπου τα μητρώα-στήλες $[\bar{\Phi}^{(e)}]$ είναι οι άγνωστες κομβικές τιμές $\bar{\Phi}_j^{(e)}$, το δε μητρώο $[R^{(e)}]$ περιέχει τα σταθμικά υπόλοιπα στους κόμβους κάθε στοιχείου.

Οι ακριβείς εκφράσεις των μητρώων $[S^{(e)}]$ και $[T^{(e)}]$ δείχνονται στο κεφ. 2 και δεν θα επαναληφθούν εδώ.

Κατά το τέταρτο βήμα, τα μητρώα $[S^{(e)}]$ και $[T^{(e)}]$ όλων των στοιχείων συνενώνονται σε δυο ολικά μητρώα, $[S]$ και $[T]$ αντιστοίχως. Η σύνθεση των δύο αυτών ολικών μητρώων γίνεται χρησιμοποιώντας τα δεδομένα συνδεσιμότητας των στοιχείων που παρήχθησαν από την πλεγματοποίηση¹⁶. Σε αυτή τη διαδικασία αθροίζονται σε κάθε κόμβο τα σταθμικά υπόλοιπα από όλα τα στοιχεία που είναι προσαρτημένα στον κόμβο αυτόν· ουσιαστικά αυτό ισοδυναμεί με τη στάθμιση του σφάλματος σε κάθε κόμβο με μια ολική συνάρτηση βάρους $W_i^{(g)}$. Η $W_i^{(g)}$ αφορά τον κόμβο με καθολική αρίθμηση¹⁷ i και πλέον δεν περιορίζεται σε ένα στοιχείο αλλά εκτείνεται σε όλα τα στοιχεία που είναι προσαρτημένα στον κόμβο.

Επειδή αναζητείται η λύση με το ελάχιστο σφάλμα, τα μητρώα $[R^{(e)}]$ θεωρούνται μηδενικά και το ολικό σταθμικό υπόλοιπο είναι το μηδενικό μητρώο, $[R^{(e)}] = [0]$.

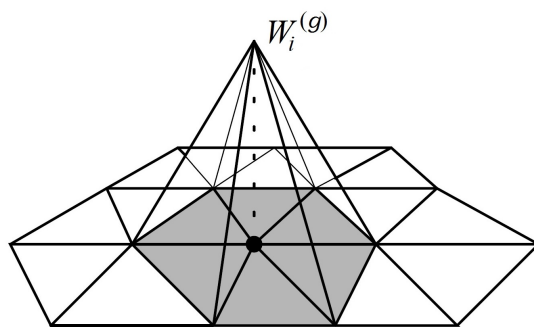
¹³ Γενικά, στη μέθοδο Σταθμικών Υπολοίπων οι συναρτήσεις βάρους μπορούν να επιλεγούν με πολλούς τρόπους, π.χ. τριγωνομετρικές, δέλτα, υποχωρία κ.α. Κάθε επιλογή καταλήγει σε μια μέθοδο επίλυσης. Για τη FEM είναι πολυώνυμα, γραμμικά ή ανώτερου βαθμού.

¹⁴ Δεν έχει σημασία αν διατυπωθεί για όλο το χωρίο ή για τα μεμονωμένα στοιχεία διότι η μορφή της είναι φορμαλιστικά η ίδια.

¹⁵ Βλ. κεφ. 2, παρατ. 19.

¹⁶ Ένας αλγόριθμος δείχνεται στο κεφ. 2.

¹⁷ Δηλ. i είναι η αρίθμηση που έχει ο κόμβος στο πλέγμα, όχι τοπικά στο στοιχείο.



Σχήμα 3.2: Ολική συνάρτηση βάρους και το πεδίο ορισμού της.

Έτσι, η (3.11) γίνεται ένα γενικευμένο ιδιοπρόβλημα¹⁸,

$$[S^{(e)}] [\bar{\Phi}^{(e)}] = k_t^2 [T^{(e)}] [\bar{\Phi}^{(e)}]. \quad (3.12)$$

Στο στάδιο αυτό πρέπει να ληφθούν υπόψη οι συνθήκες Dirichlet, αν υπάρχουν¹⁹. Εν προκειμένω, αυτό απαιτείται αν το πρόβλημα αφορά τους TM ρυθμούς, για τους οποίους είναι $E_z = 0$ στα τοιχώματα του κυματοδηγού - και επομένως και στην περιφέρεια της διατομής του. Οι συνθήκες Dirichlet είναι η λύση στο τμήμα Γ_D του συνόρου, οπότε στους αντίστοιχους συνοριακούς κόμβους οι τιμές της είναι γνωστές. Οι εξισώσεις των κόμβων με τις γνωστές τιμές είτε εξαιρούνται από το σύστημα (3.12), είτε το σύστημα τροποποιείται κατάλληλα για να τις αναπαράγει²⁰. Επιπλέον, και στους δυο τρόπους, οι γνωστές τιμές του τμήματος Γ_D πρέπει να αντικατασταθούν και σε όσες από τις υπόλοιπες εξισώσεις υπεισέρχονται²¹.

Το τελευταίο βήμα είναι λύση του ιδιοπροβλήματος (3.12). Τεχνικές που λύνουν ιδιοπροβλήματα είναι μακράν γνωστές από την Αριθμητική Ανάλυση: όλα τα πακέτα γραμμικής άλγεβρας (Matlab, Python κ.α.) έχουν ρουτίνες για την εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων²².

¹⁸ Αν το k_t είναι γνωστό (οπότε πρόκειται για αιτιοκρατικό πρόβλημα), παράγεται ένα γραμμικό σύστημα.

¹⁹ Διευκρινίζεται ότι οι συνθήκες Dirichlet, εφόσον υφίστανται σε κάποιο τμήμα του συνόρου, δηλαδή αν $\Gamma_D \neq \{\}$, πρέπει να επιβληθούν στο σύστημα, ανεξάρτητα αν είναι μηδενικές ή όχι. Υπενθυμίζεται ότι το συνοριακό ολοκλήρωμα της ασθενούς μορφής που αφορά το Γ_D είναι μηδέν, βλ. παρατ. 11. Ωστόσο, ο μηδενισμός εκείνου του ολοκληρώματος απλώς αποτρέπει την εισαγωγή των αγνώστων $\partial\Phi/\partial n$ στο σύστημα: οι γνωστές τιμές, ήτοι οι συνθήκες Dirichlet, εξακολουθούν να πρέπει να επιβληθούν.

²⁰ Το να εξαιρούνται από το σύστημα οι εξισώσεις που αντιστοιχούν σε γνωστή λύση συνήθως αποφεύγεται για προγραμματιστικούς λόγους. Ειδικά στα αιτιοκρατικά προβλήματα, η πρακτική είναι το σύστημα να τροποποιείται κατάλληλα ώστε να αναπαράγει τη λύση εκεί όπου δίνεται, περιλαμβάνοντας όλες τις εξισώσεις, χωρίς να μεταβάλλονται οι διαστάσεις των μητρώων.

²¹ Η εμπλοκή των γνωστών τιμών στις εξισώσεις των υπολοίπων κόμβων γίνεται μέσω των χωρικών ολοκληρωμάτων της ασθενούς μορφής.

²² Επισημαίνεται ότι το (3.12) δεν είναι ένα σύννηθες ιδιοπρόβλημα $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ αλλά ένα γενικευμένο ιδιοπρόβλημα $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{u}$. Η επίλυση του γενικευμένου ιδιοπροβλήματος μπορεί να γίνει αφού πρώτα μετατραπεί σε σύννηθες ή με εξειδικευμένες μεθόδους. Βλ. [11].

Οι ιδιοτιμές k_t που λαμβάνονται από τη λύση του (3.12) είναι οι κυματάρηθμοι αποκοπής που αντιστοιχούν στους διάφορους ρυθμούς. Με γνωστά τα k_t μπορούν να προσδιοριστούν οι συχνότητες αποκοπής. Επίσης, από τη σχέση διασποράς (1.33),

$$k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_t^2} \quad (3.13)$$

μπορούν να βρεθούν η σταθερά διάδοσης και απόσβεσης στη συχνότητα λειτουργίας ω κάθε ρυθμού.

Τα ιδιοδιανύσματα της λύσης είναι οι συντελεστές $\bar{\Phi}_j^{(e)}$ για τα αναπτύγματα των $\bar{\Phi}^{(e)}(x, y)$ στην (3.9). Ειδικότερα, είναι οι συντελεστές των συναρτήσεων βάσης με τις οποίες αναπαρίσταται η διαμήκης συνιστώσα του πεδίου σε κάθε στοιχείο, E_z ή H_z για TM ή TE ρυθμούς αντίστοιχα.

3.2.1 Εφαρμογή για ορθογωνικό και κυλινδρικό κυματοδηγό

Η παραπάνω θεωρία εφαρμόστηκε για την εύρεση των συχνοτήτων αποκοπής και των ρυθμών σε δυο κοινότητες περιπτώσεις κυματοδηγών: έναν ορθογωνικής και έναν κυκλικής διατομής. Καθώς η αναλυτική λύση γι' αυτές τις περιπτώσεις είναι γνωστή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελεγχθεί στην πράξη η ακρίβεια της μεθόδου.

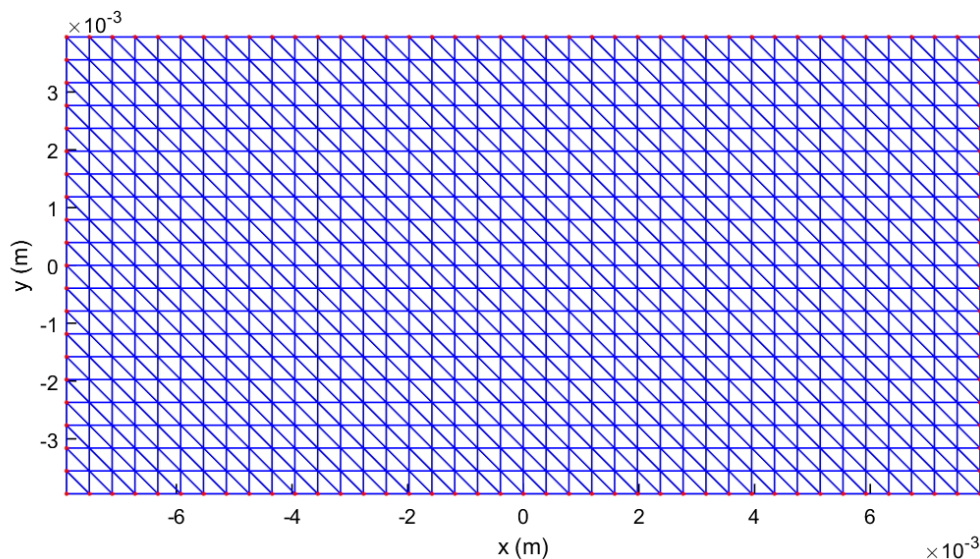
3.2.1.1 Ορθογωνικός κυματοδηγός

Στην περίπτωση του ορθογωνικού κυματοδηγού επιλέχτηκε το μοντέλο²³ WR-62, το οποίο έχει διατομή διαστάσεων 1.58 x 0.79 cm και συνιστώμενο εύρος λειτουργίας 12.4 - 18.0 GHz. Η επίλυση με τη FEM έγινε με ένα ιδιοκατασκευασμένο πρόγραμμα στο Matlab, με τις εξής παραμέτρους και δεδομένα:

διαστάσεις $a \times b$ διατομής	: 1.58 x 0.79 cm,
διαμέριση σε κάθε πλευρά	: $a/40 = 0.0395$ cm,
πλήθος τριγώνων	: 1600,
πλήθος κόμβων	: 861,
πλήθος αγνώστων (TM ρυθμοί)	: 741,
πλήθος αγνώστων (TE ρυθμοί)	: 861.

Για την επιβολή των συνοριακών συνθηκών, εφαρμόστηκε η τεχνική εξαίρεσης των γνωστών τιμών από το σύστημα. Στην περίπτωση των TM ρυθμών όπου οι συνθήκες είναι Dirichlet, είναι φανερό το όφελος από τη μείωση του πλήθους των εξισώσεων.

²³ Βλ. [21] σελ. 720.



Σχήμα 3.3: Πλέγμα ορθογωνικού κυματοδηγού (διαμ. $a/40$).

Στα σχήματα 3.5 - 3.8 δείχνονται οι συχνότητες αποκοπής για τους πρώτους ρυθμούς, υπολογισμένες με τη FEM και με την αναλυτική λύση, καθώς και το σχετικό σφάλμα²⁴. Όπως φαίνεται, το σφάλμα παραμένει μικρότερο από 1% για τους 10 πρώτους ρυθμούς και μικρότερο από 2% για τους 20 πρώτους ρυθμούς.

Αν χρειάζεται, η ακρίβεια μπορεί να αυξηθεί περαιτέρω πυκνώνοντας το πλέγμα. Επ' αυτού, έγινε μια δοκιμή με τη διπλάσια διαμέριση ανά πλευρά²⁵, με τα εξής δεδομένα:

διαστάσεις $a \times b$ διατομής	: 1.58 x 0.79 cm,
διαμέριση σε κάθε πλευρά	: $a/80 = 0.01975$ cm,
πλήθος τριγώνων	: 6400,
πλήθος κόμβων	: 3321,
πλήθος αγνώστων (TM ρυθμοί)	: 3081,
πλήθος αγνώστων (TE ρυθμοί)	: 3321.

Τα αποτελέσματα δείχνονται στα σχ. 3.9 - 3.12.

Σε αυτή την περίπτωση, το σφάλμα παραμένει μικρότερο από 1% για τους 40 πρώτους ρυθμούς και μικρότερο από 2% για περισσότερους από 70 ρυθμούς.

²⁴ Υπενθυμίζεται ότι το σχετικό σφάλμα δίνεται από τη σχέση

$$rerr = \frac{|x - x_{ap}|}{|x|}, \quad x \neq 0 \quad (3.14)$$

όπου x είναι η ακριβής τιμή και x_{ap} η προσεγγιστική.

²⁵ Επομένως το πλήθος των στοιχείων τετραπλασιάζεται.

Πολύ αδρά, ο υποδιπλασιασμός της διαμέρισης περίπου τετραπλασίασε την ακρίβεια. Το αποτέλεσμα αυτό δικαιολογείται και θεωρητικά²⁶.

Στα σχ. 3.21 - 3.22 δείχνονται τα διαγράμματα πυκνότητας²⁷ (density plots) των πρώτων TM και TE ρυθμών, όπως υπολογίστηκαν με τη FEM.

3.2.1.2 Κυλινδρικός κυματοδηγός

Στην περίπτωση του κυλινδρικού κυματοδηγού επιλέχθηκε μια διατομή με ακτίνα 1.6 cm. Όπως και για τον ορθογωνικό, έγιναν δυο δοκιμές και συγκρίθηκε η λύση της FEM με την αναλυτική λύση. Συγκεκριμένα, τα δεδομένα των δοκιμών ήταν τα εξής:

ακτίνα r της διατομής	: 1.6 cm,
διαμέριση στην ακτίνα	: $r/20 = 0.08$ cm,
πλήθος τριγώνων	: 2468,
πλήθος κόμβων	: 1297,
πλήθος αγνώστων (TM ρυθμοί)	: 1173,
πλήθος αγνώστων (TE ρυθμοί)	: 1297.

για την πρώτη, και

ακτίνα r της διατομής	: 1.6 cm,
διαμέριση στην ακτίνα	: $r/40 = 0.04$ cm,
πλήθος τριγώνων	: 9966,
πλήθος κόμβων	: 5109,
πλήθος αγνώστων (TM ρυθμοί)	: 4859,
πλήθος αγνώστων (TE ρυθμοί)	: 5109.

για την δεύτερη.

²⁶ Αποδεικνύεται, βλ. [22] σελ. 90, ότι στις νόρμες L^2 και H^1 , για γραμμικά στοιχεία, το σφάλμα υπόκειται στις σχέσεις

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)} \quad \text{και} \quad \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch |u|_{H^2(\Omega)}$$

όπου είναι:

u και u_h η ακριβής και η προσεγγιστική λύση αντίστοιχα,

Ω το χωρίο ορισμού της εξίσωσης,

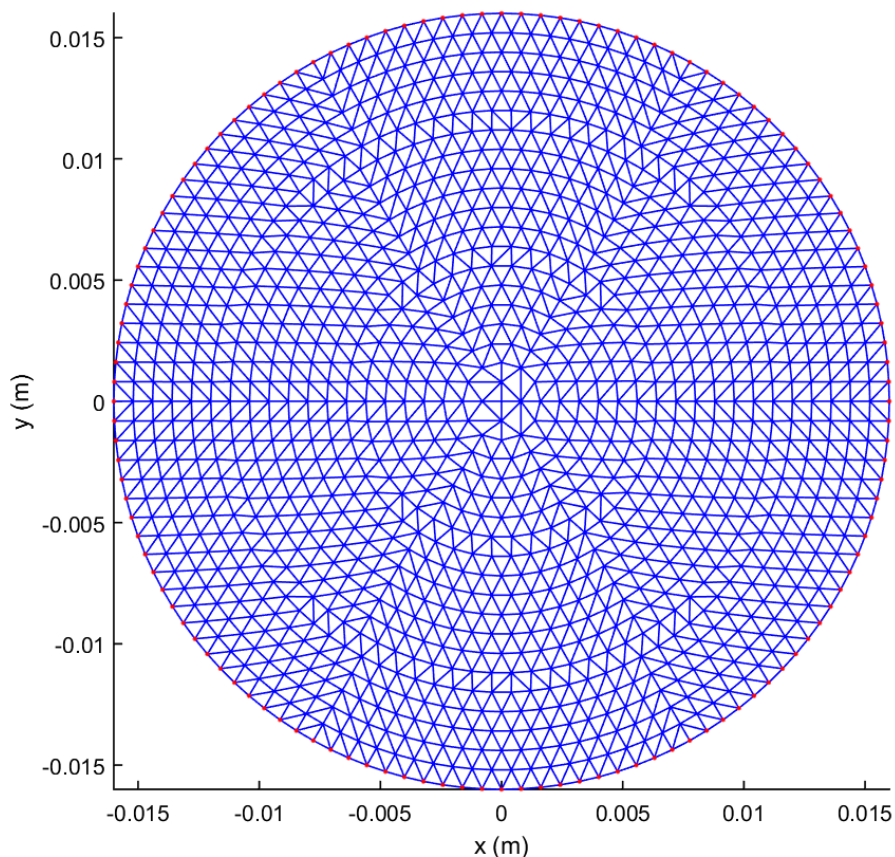
h η παράμετρος διακριτοποίησης της λύσης (π.χ. το μήκος των στοιχείων),

C μια θετική σταθερά, ανεξάρτητη από το h ,

$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ οι νόρμες $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_a^b u^2 dx}$, $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\int_a^b u^2 + u'^2 dx}$ και

$|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ η ημινόρμα $|u|_{H^2(\Omega)} = \sqrt{\int_a^b u''^2 dx}$.

²⁷ Έτσι ονομάζεται το γραφικό όπου χρωματίζεται το μέτρο ανάλογα με την τιμή του, μιας διάστασης συνάρτησης στην επιφάνεια ορισμού της. Η ορολογία αυτή προέρχεται από το Mathematica.



Σχήμα 3.4: Πλέγμα κυλινδρικού κυματοδηγού (διαμ. $r/20$).

Για την πρώτη δοκιμή, τα αποτελέσματα δείχνονται στα σχ. 3.13-3.16.

Όπως φαίνεται, το σφάλμα παραμένει μικρότερο από 1% για τους 20 πρώτους ρυθμούς και μικρότερο από 2% για τους 40 πρώτους ρυθμούς. Για τους TE ρυθμούς τα αποτελέσματα είναι πιο ακριβή διότι αφορούν το μαγνητικό πεδίο που έχει μικρότερο μέτρο από το ηλεκτρικό και ως εκ τούτου η μεγέθυνση των σφαλμάτων είναι μικρότερη.

Για την δεύτερη δοκιμή, τα αποτελέσματα δείχνονται στα σχ. 3.17-3.20.

Η διαμέριση τώρα είναι υποδιπλασιασμένη και χονδρικά φαίνεται πάλι ότι η ακρίβεια είναι περίπου τετραπλάσια, με κάποιες αποκλίσεις που πιθανόν οφείλονται στην περιορισμένη ακρίβεια με την οποία είναι γνωστή η αναλυτική λύση²⁸.

Στα σχ. 3.23-3.24 δείχνονται τα διαγράμματα πυκνότητας κάποιων TM και TE ρυθμών, όπως υπολογίστηκαν με τη FEM. Επισημαίνεται ότι για την κυκλική διατομή, οι ιδιοτιμές (συχνότητες αποκοπής) είναι εκφυλισμένες. Κάθε ιδιοτιμή εμφανίζεται τουλάχιστον δυο φορές, με διαφορετικό ιδιοδιάνυσμα κάθε φορά. Τα ιδιοδιανύσματα των

²⁸ Στην αναλυτική λύση υπεισέρχονται οι ρίζες των συναρτήσεων Bessel και των παραγώγων τους, οι οποίες ελήφθησαν από πίνακες με 4 δεκαδικά ψηφία. Καθώς οι λύσεις είναι τάξης του 10^9 (συχνότητες αποκοπής της τάξης των GHz), το περιορισμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων επηρεάζει αρκετά το αποτέλεσμα.

εκφυλισμένων ιδιοτιμών είναι ταυτόσημα εκτός από την πόλωσή²⁹ τους. Ο εκφυλισμός αυτός οφείλεται στην αζιμουθιακή συμμετρία και υπάρχει σε όλους τους ρυθμούς TM_{mn} και TE_{mn} , με εξαίρεση εκείνους όπου $m = 0$ ³⁰. Δηλαδή, οι ρυθμοί TM_{01} , TM_{02} κλπ, καθώς και οι αντίστοιχοι TE , έχουν απλές ιδιοτιμές, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πολλαπλές (εκφυλισμένες). Στην θεωρία ο εκφυλισμός αυτός συνήθως παραβλέπεται αλλά στην αριθμητική επίλυση εμφανίζεται αναπόφευκτα. Στα σχ. 3.23-3.24 δείχνονται ενδεικτικά μόνον δυο εκφυλισμένοι ρυθμοί· ωστόσο, υπάρχουν και οι υπόλοιποι, σύμφωνα με τα παραπάνω.

Υπενθυμίζεται ότι λύνοντας το ιδιοπρόβλημα (3.1), ήτοι την $\nabla_t^2 \Phi + k_t^2 \Phi = 0$, λαμβάνονται οι ιδιοτιμές k_t^2 . Θεωρώντας ότι η διάδοση γίνεται κατά $+z$ και ότι δεν υπάρχουν απώλειες (άρα το k_t είναι αμιγώς πραγματικό), οι (εγκάρσιοι) κυματάριθμοι αποκοπής είναι $\sqrt{k_t^2}$ κλπ.

²⁹ Τα εκφυλισμένα ιδιοδιανύσματα δεν είναι οπωσδήποτε κάθετα ως γεωμετρικά διανύσματα. Π.χ., εν προκειμένω υπάρχουν εκφυλισμένα ιδιοδιανύσματα που η πόλωση μεταξύ τους δεν είναι κάθετη. Είναι όμως κάθετα υπό την έννοια του εσωτερικού γινομένου ως ολοκλήρωμα, όπως επιβάλλει η θεωρία του ιδιοπροβλήματος Sturm-Liouville.

Επίσης, σε ότι αφορά τα εκφυλισμένα ιδιοδιανύσματα, η επίλυση με τη FEM δεν τα δίνει κατ' ανάγκην στις γνωστές μορφές (patterns) που προτρέπει η θεωρία· ωστόσο, με κατάλληλους γραμμικούς συνδυασμούς αυτών των ιδιοδιανυσμάτων λαμβάνονται τα ιδιοδιανύσματα όπως αναμένονται θεωρητικά.

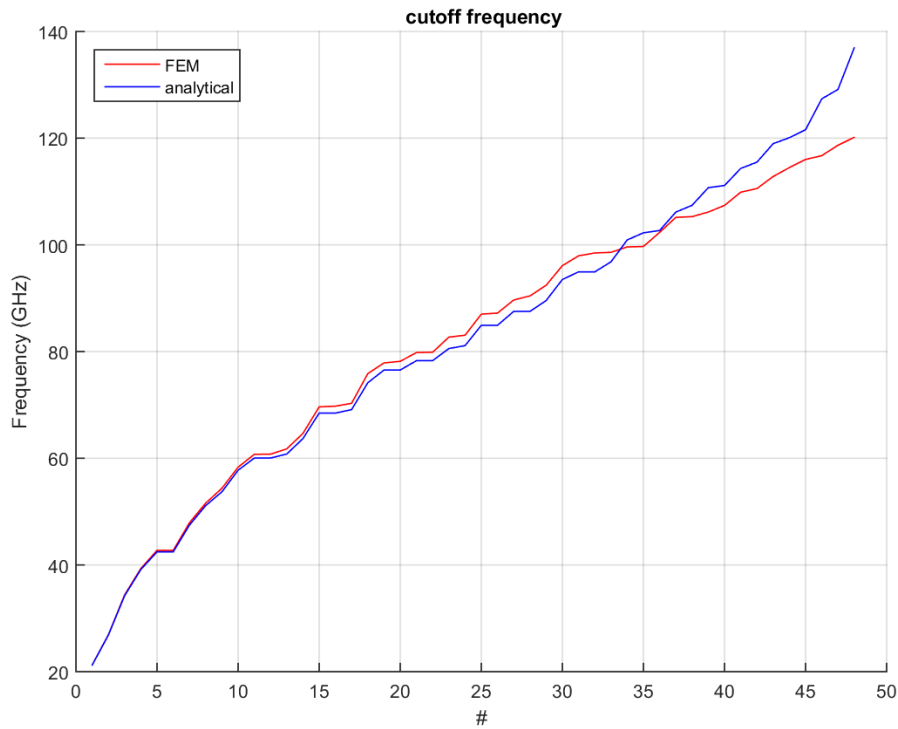
³⁰ Τα διαμήκη πεδία που δίνει η λύση της (3.1) έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 J_m(k_t \rho) e^{e^{ik_t z}} e^{\pm im\phi}, \\ H_z &= H_0 J_m(k_t \rho) e^{e^{ik_t z}} e^{\pm im\phi} \end{aligned}$$

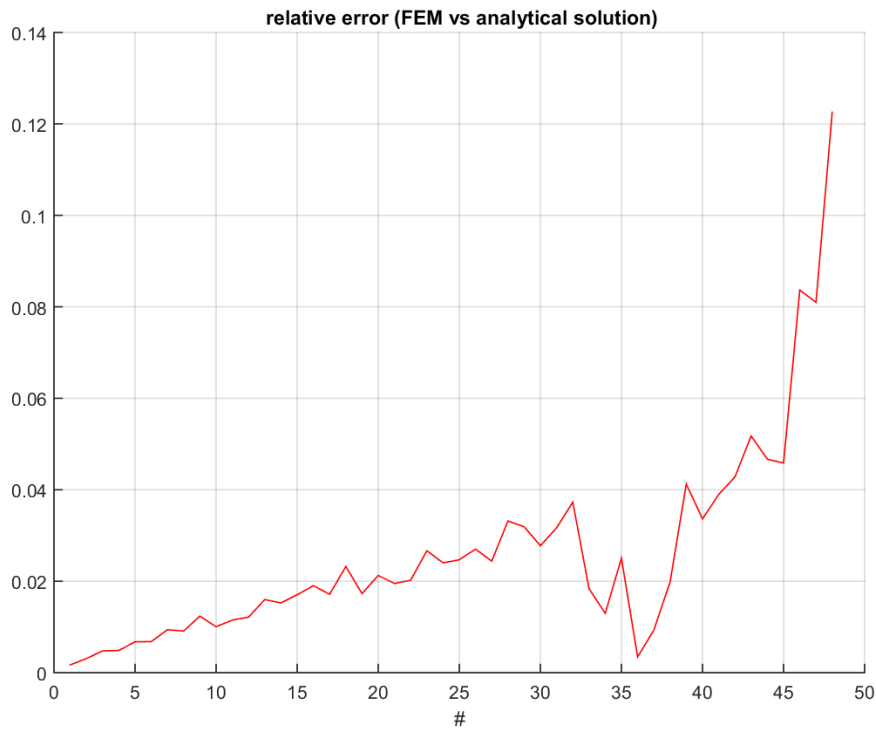
για τους ρυθμούς TM και TE αντίστοιχα, βλ. [1] σελ. 682.

Ο παράγοντας $e^{\pm im\phi}$ αφορά την γωνιακή εξάρτηση και προξενεί εκφυλισμένους ρυθμούς. Π.χ., για $m = 2$ το $e^{im\phi}$ γράφεται συναρτήσει των $\cos(2\phi)$ και $\sin(2\phi)$ και παράγονται δύο ιδιοδιανύσματα TE_{21} στραμμένα μεταξύ τους κατά 45° .

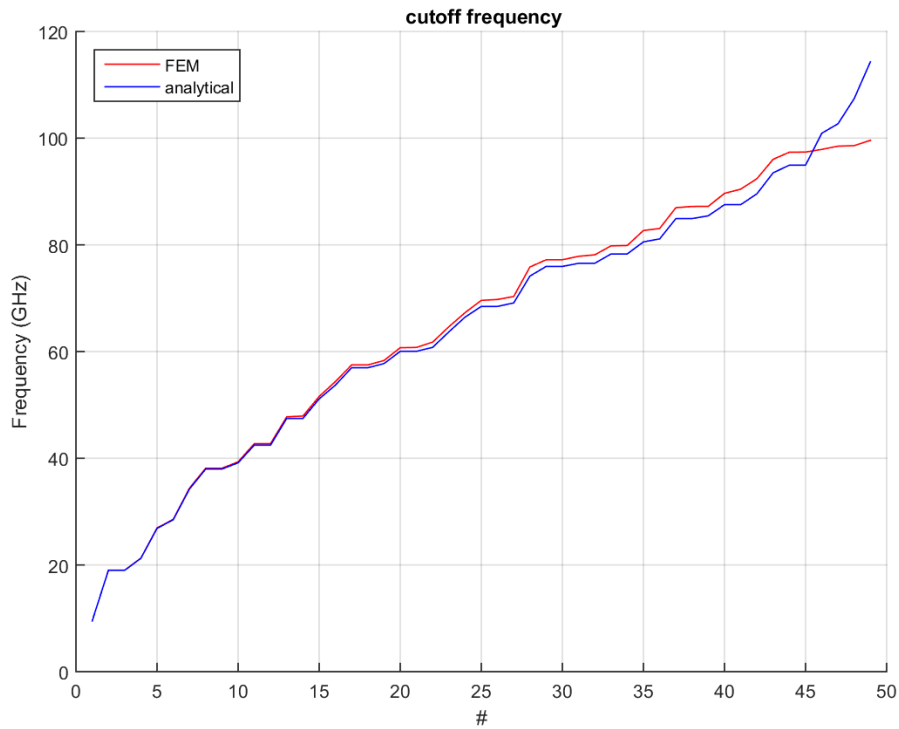
Όταν $m = 0$ ο παράγοντας αυτός δεν υφίσταται· επομένως, οι ρυθμοί TM_{0n} και TE_{0n} δεν έχουν εκφυλισμένες ιδιοτιμές.



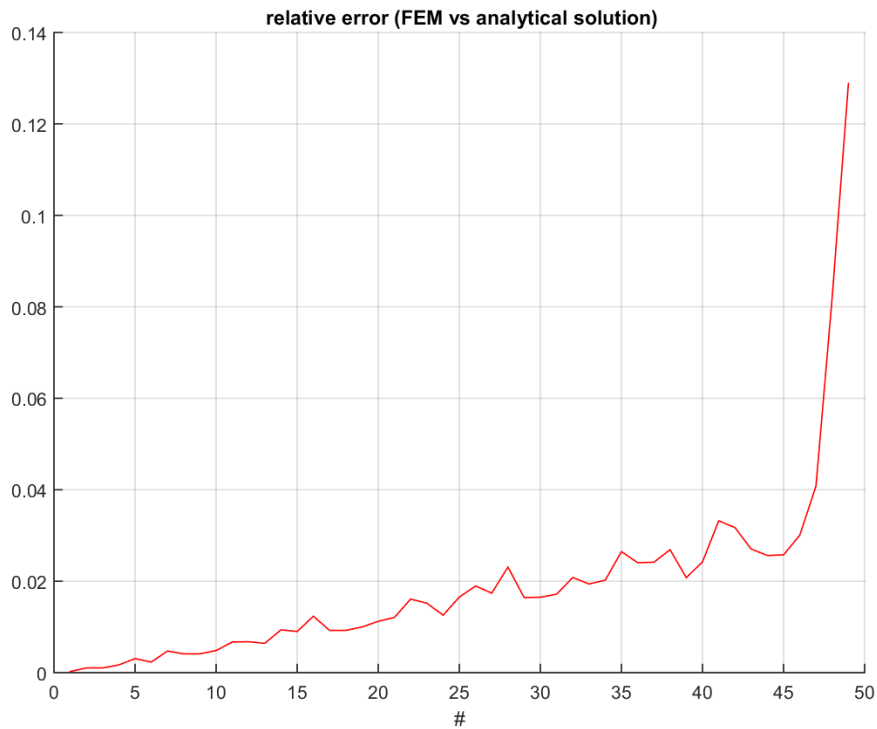
Σχήμα 3.5: Συχνότητες αποκοπής, TM ρυθμοί (διαμ. $a/40$).



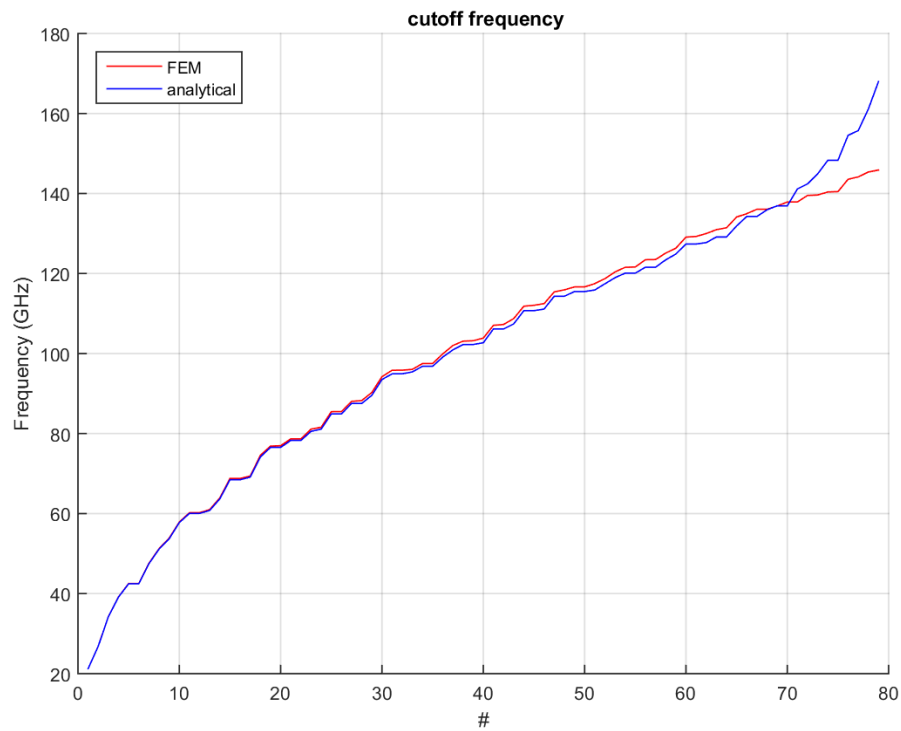
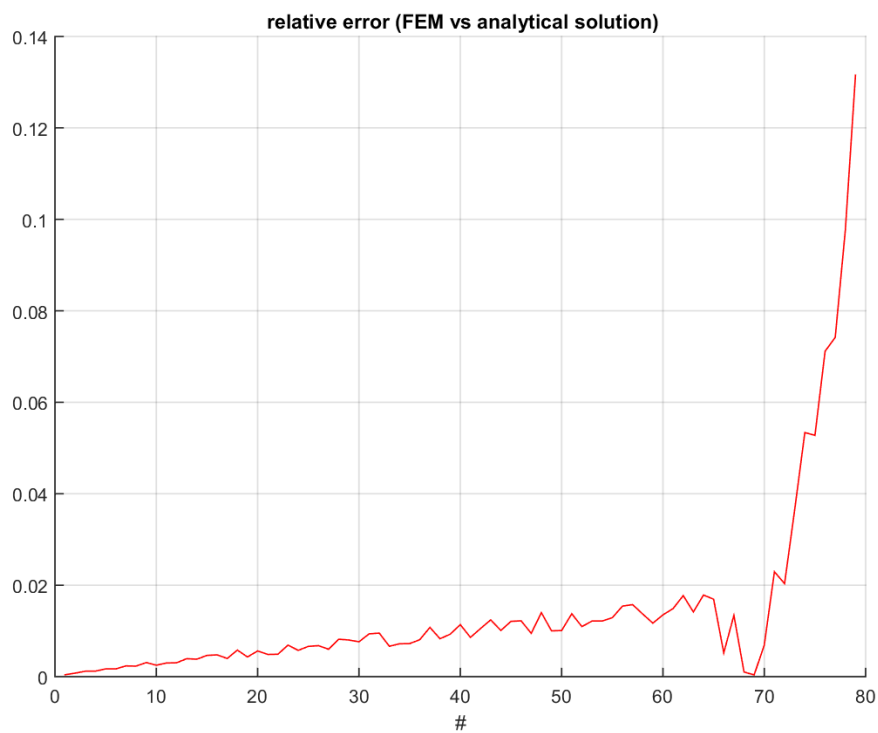
Σχήμα 3.6: Σχετικό σφάλμα συχνοτήτων αποκοπής, TM ρυθμοί (διαμ. $a/40$).

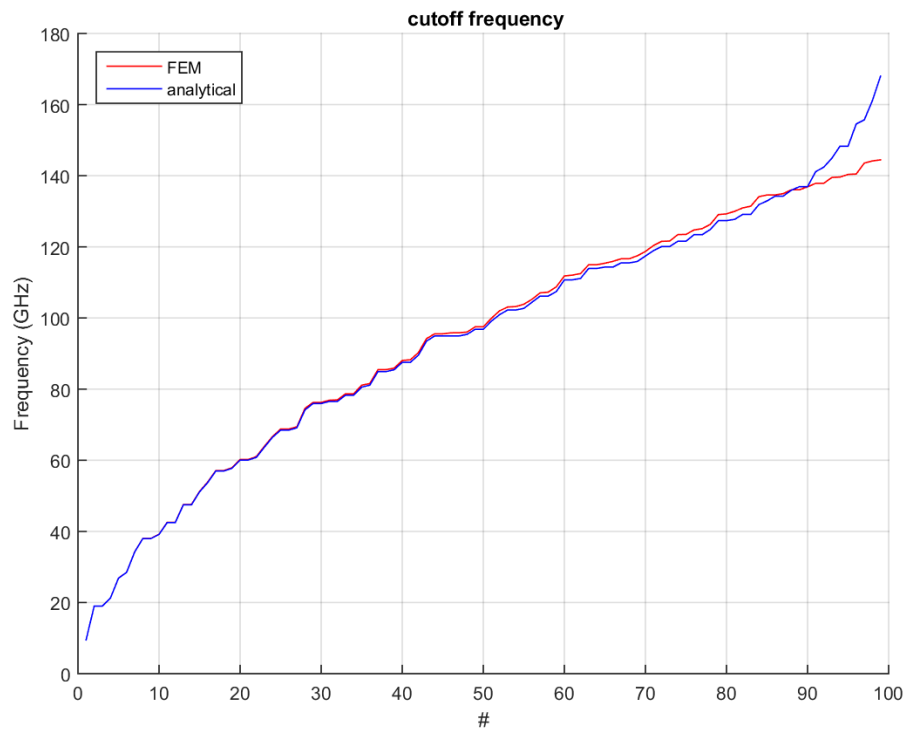
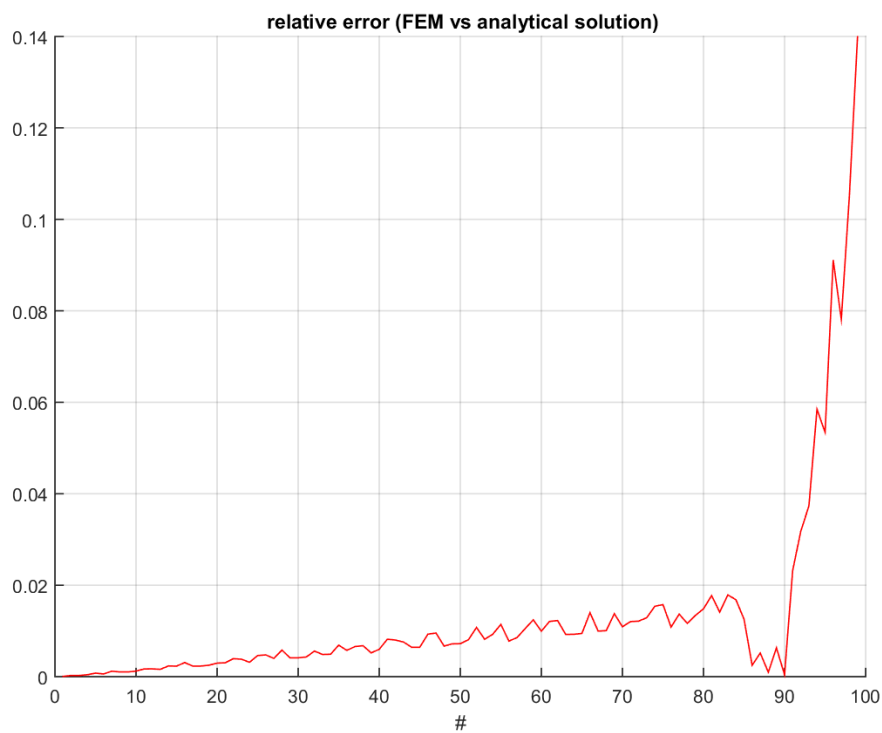


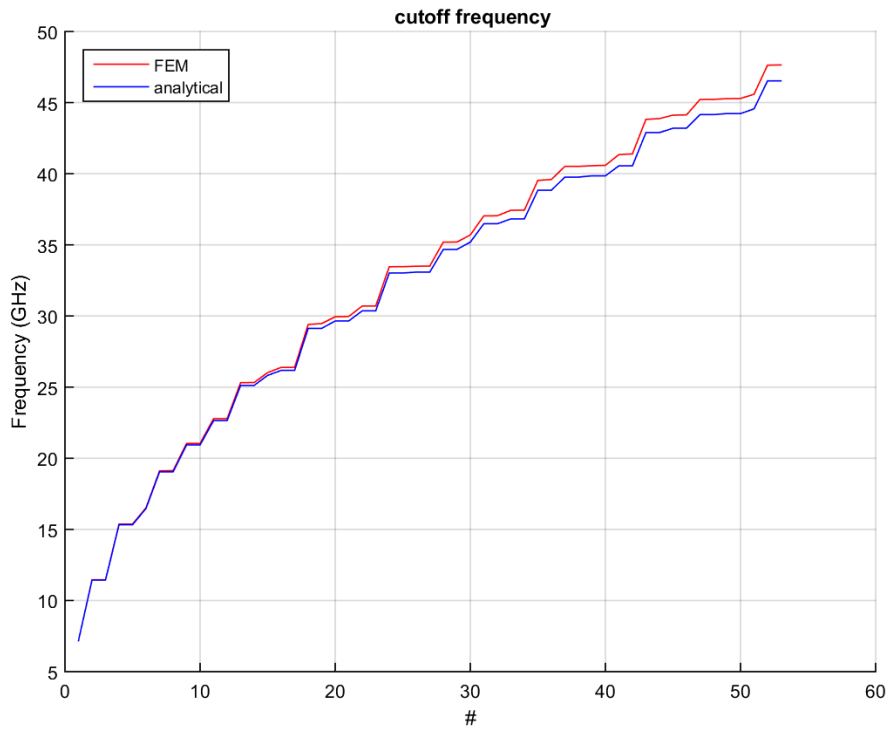
Σχήμα 3.7: Συχνότητες αποκοπής, TE ρυθμοί (διαμ. $a/40$).



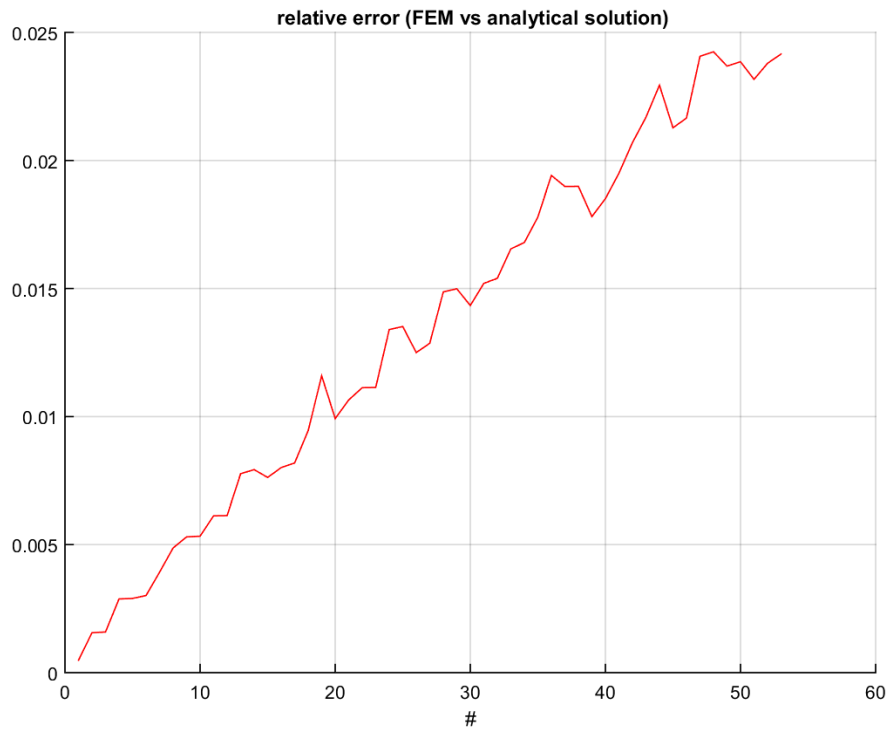
Σχήμα 3.8: Σχετικό σφάλμα συχνοτήτων αποκοπής, TE ρυθμοί (διαμ. $a/40$).

Σχήμα 3.9: Συχνότητες αποκοπής, TM ρυθμοί (διαμ. $a/80$).Σχήμα 3.10: Σχετικό σφάλμα συχνοτήτων αποκοπής, TM ρυθμοί (διαμ. $a/80$).

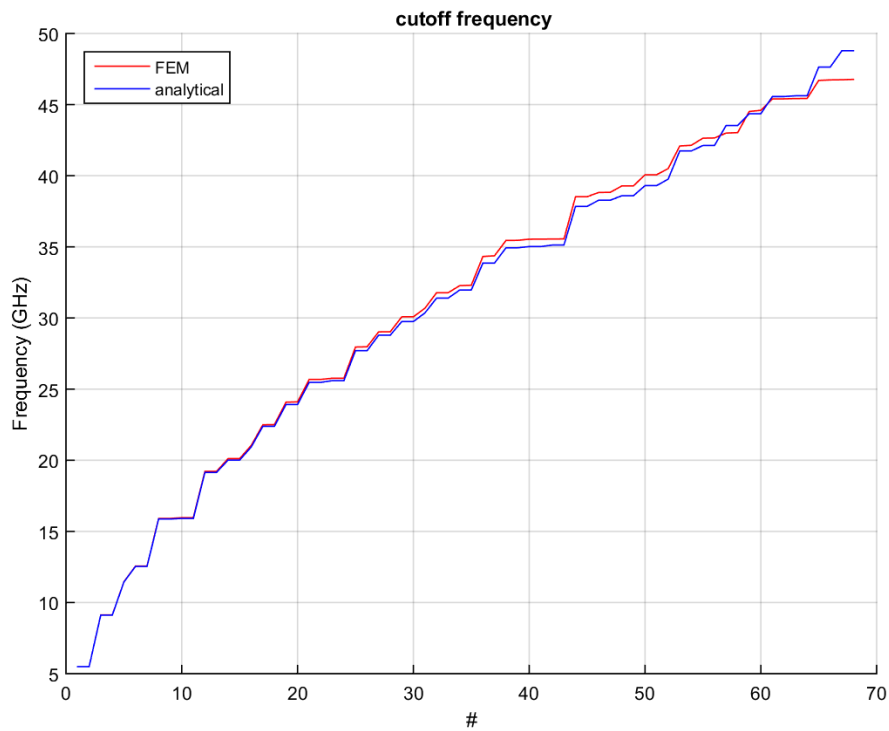
Σχήμα 3.11: Συχνότητες αποκοπής, TE ρυθμοί (διαμ. $a/80$).Σχήμα 3.12: Σχετικό σφάλμα συχνοτήτων αποκοπής, TE ρυθμοί (διαμ. $a/80$).



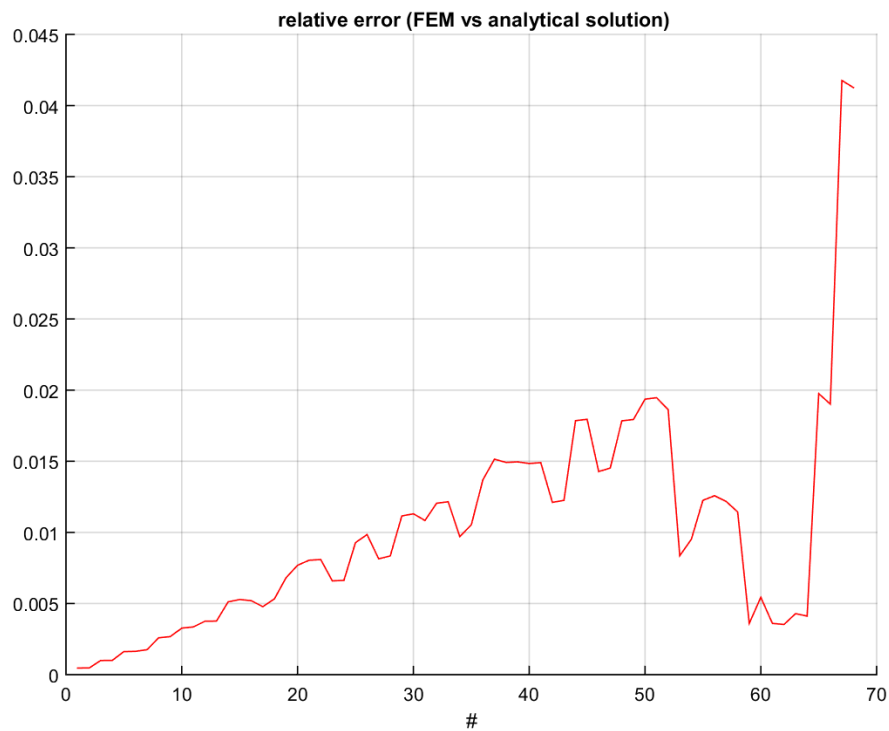
Σχήμα 3.13: Συχνότητες αποκοπής, TM ρυθμοί (διαμ. $r/20$).



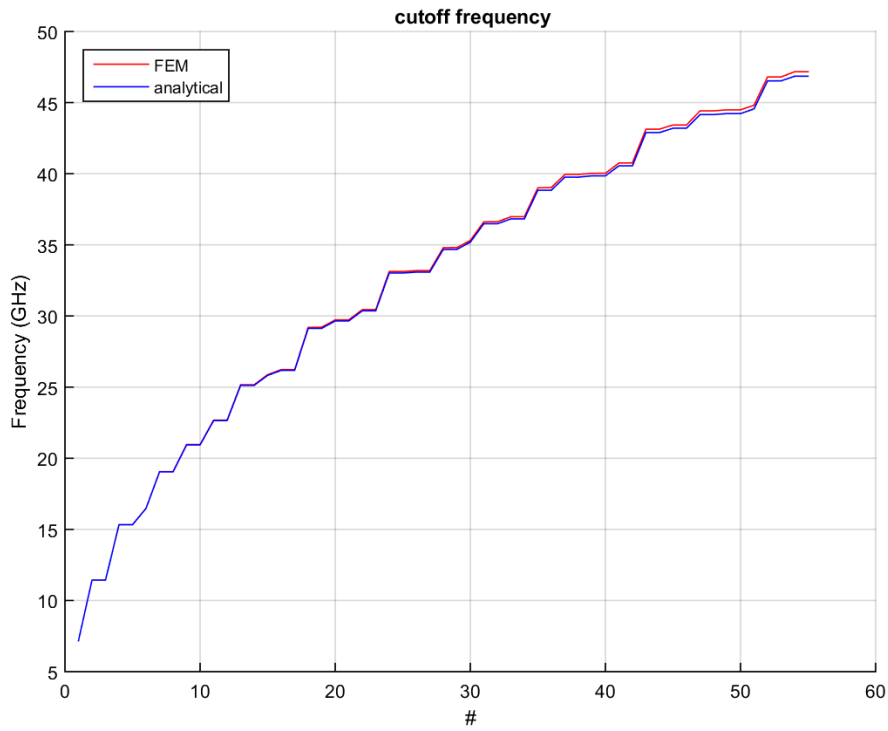
Σχήμα 3.14: Σχετικό σφάλμα συχνοτήτων αποκοπής, TM ρυθμοί (διαμ. $r/20$).



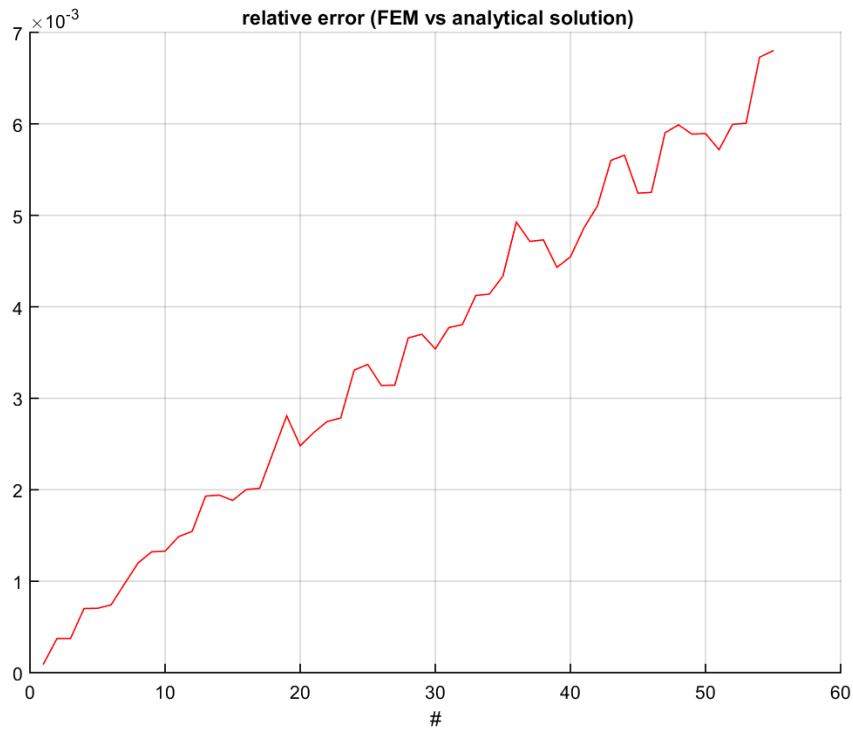
Σχήμα 3.15: Συχνότητες αποκοπής, TE ρυθμοί (διαμ. $r/20$).



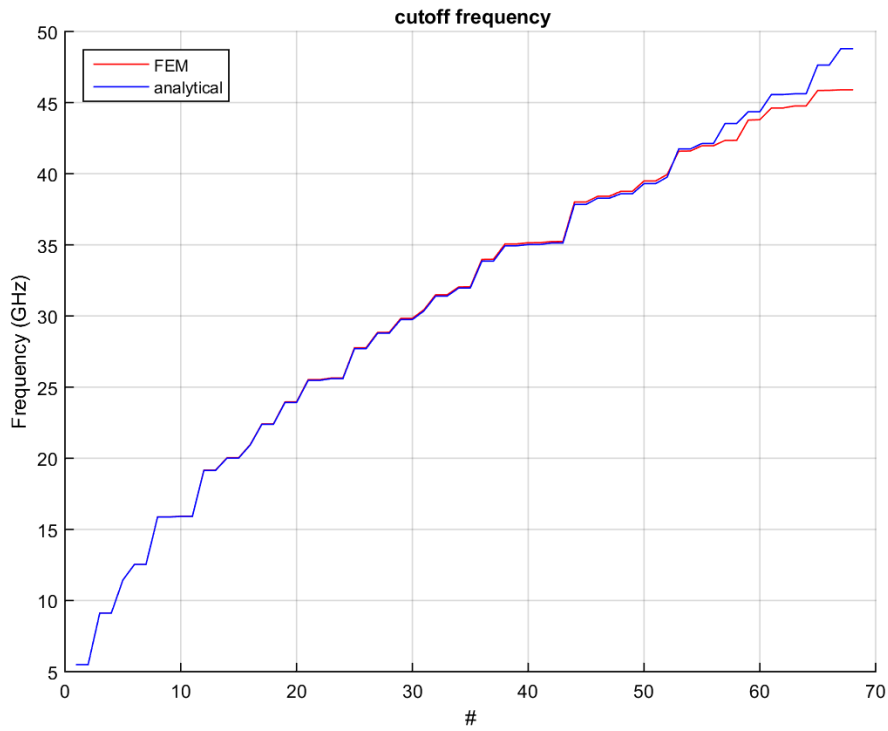
Σχήμα 3.16: Σχετικό σφάλμα συχνοτήτων αποκοπής, TE ρυθμοί (διαμ. $r/20$).



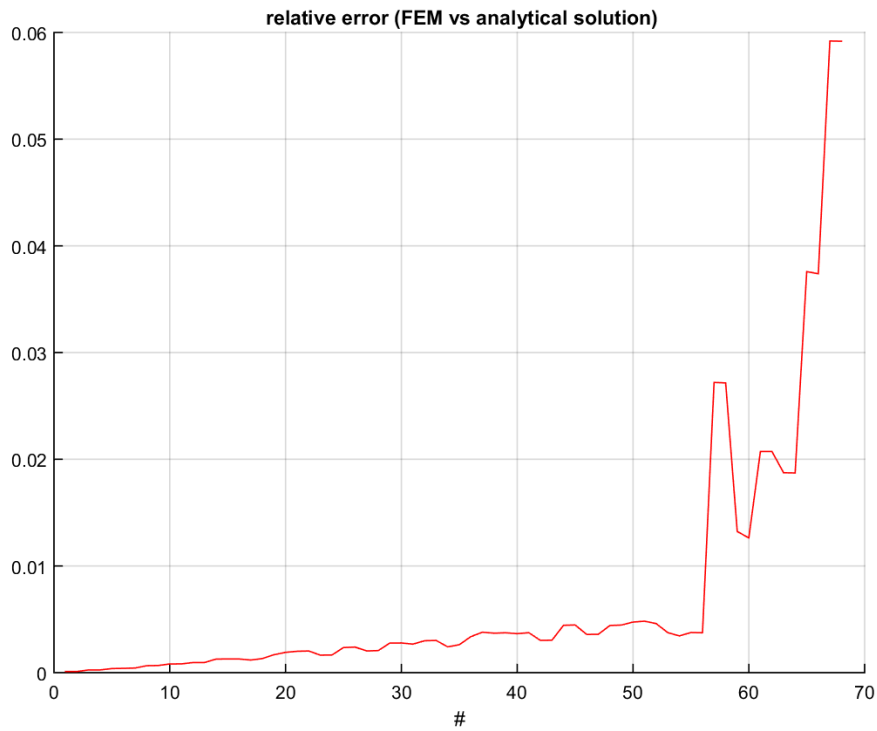
Σχήμα 3.17: Συχνότητες αποκοπής, TM ρυθμοί (διαμ. $r/40$).



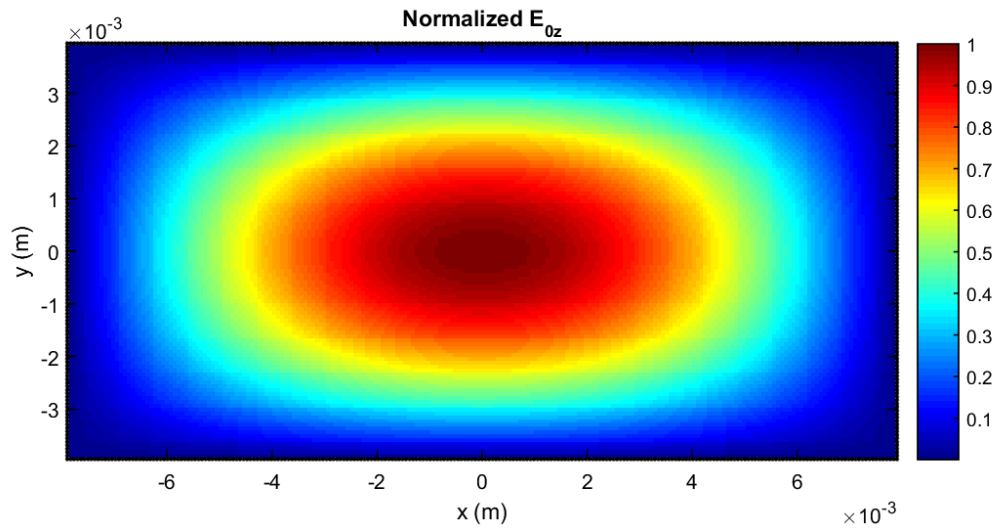
Σχήμα 3.18: Σχετικό σφάλμα συχνοτήτων αποκοπής, TM ρυθμοί (διαμ. $r/40$).



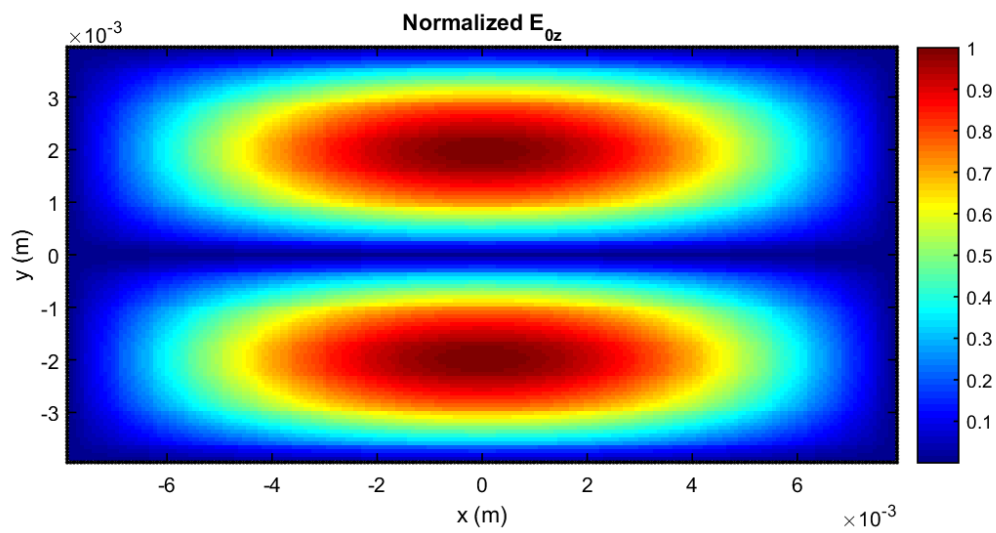
Σχήμα 3.19: Συχνότητες αποκοπής, TE ρυθμοί (διαμ. $r/40$).



Σχήμα 3.20: Σχετικό σφάλμα συχνοτήτων αποκοπής, TE ρυθμοί (διαμ. $r/40$).

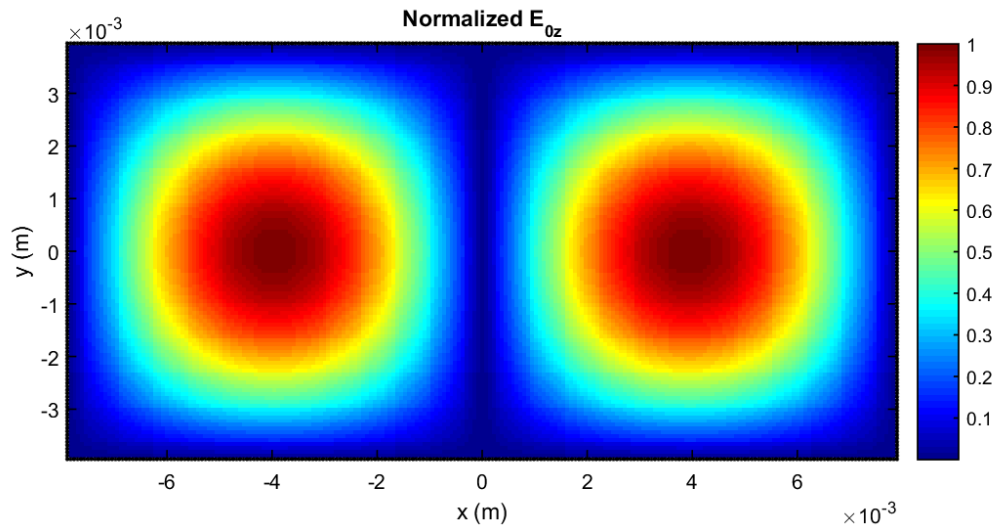
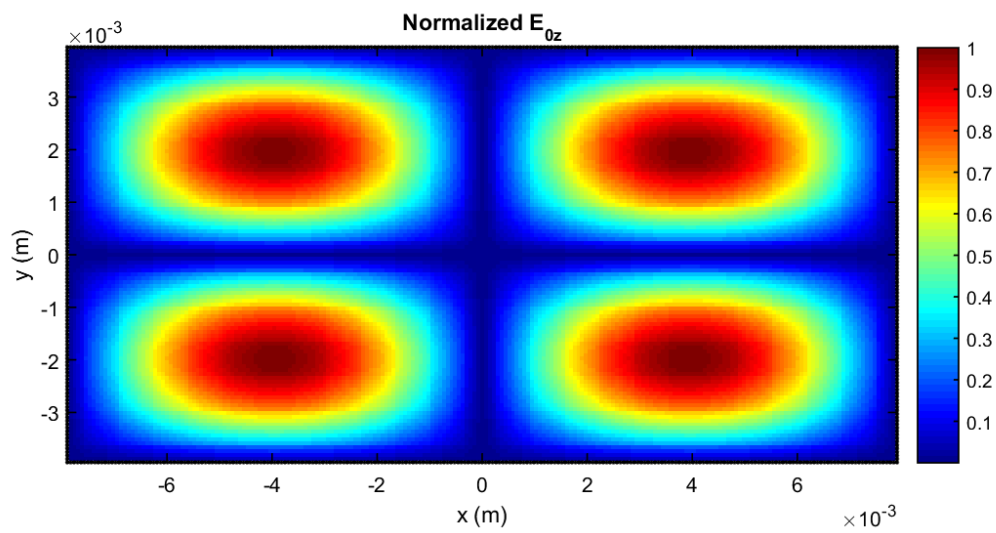


(i) TM_{11}

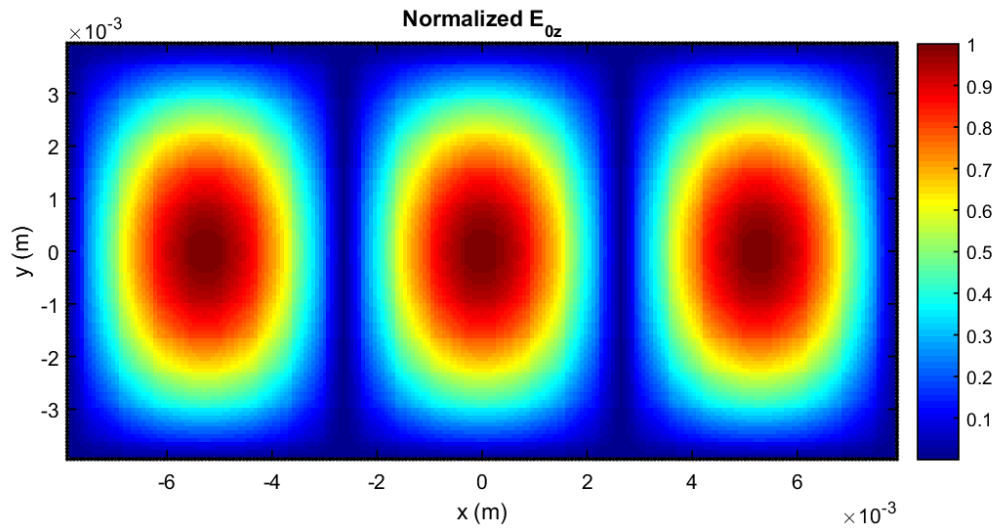


(ii) TM_{12}

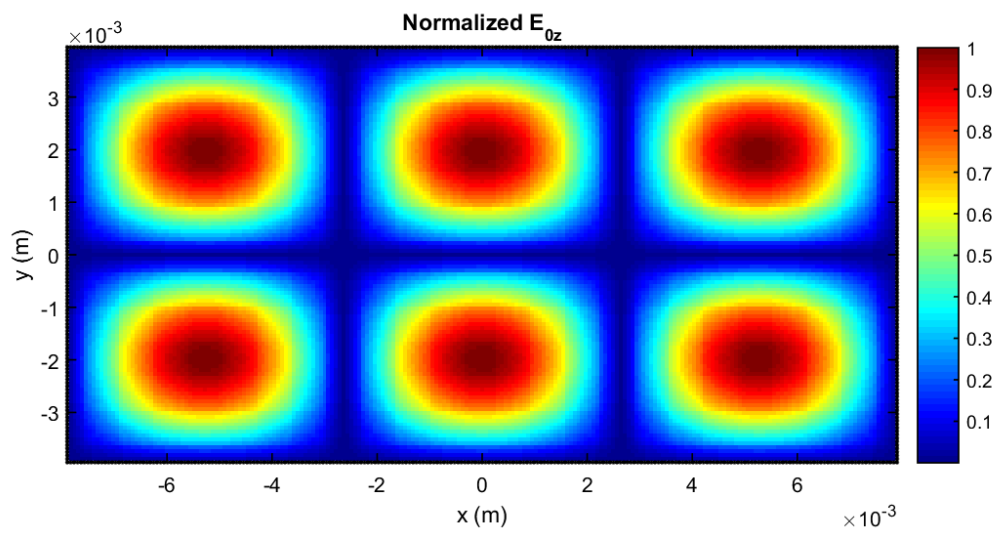
Σχήμα 3.21: Διαγράμματα πυκνότητας TM ρυθμών

(iii) TM_{21} (iv) TM_{22}

Σχήμα 3.21: Διαγράμματα πυκνότητας TM ρυθμών (συνέχεια)

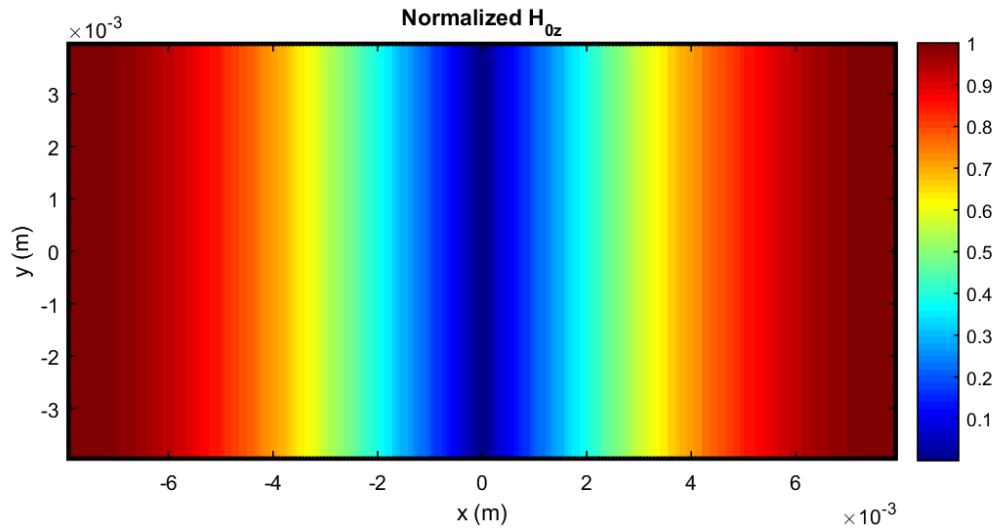


(v) TM_{31}

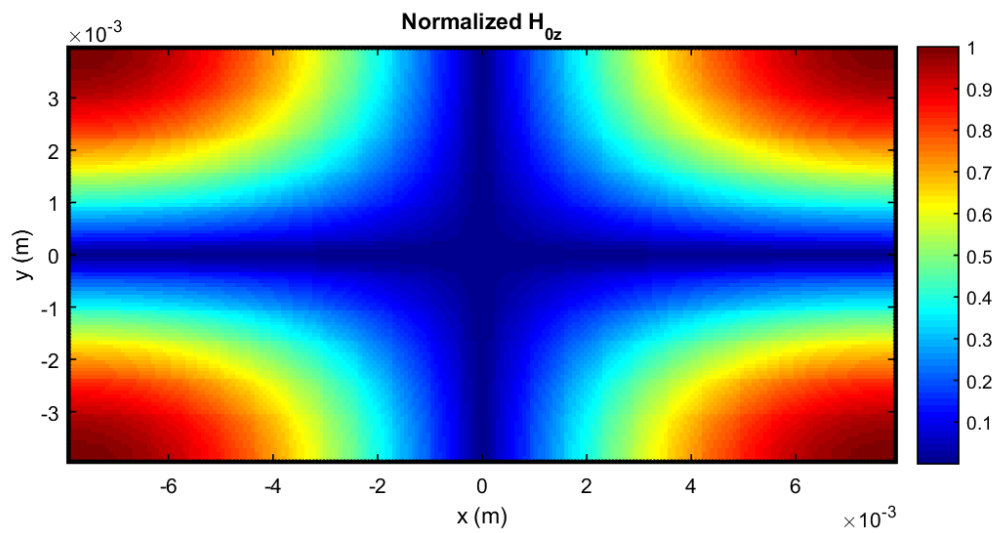


(vi) TM_{32}

Σχήμα 3.21: Διαγράμματα πυκνότητας TM ρυθμών (συνέχεια)

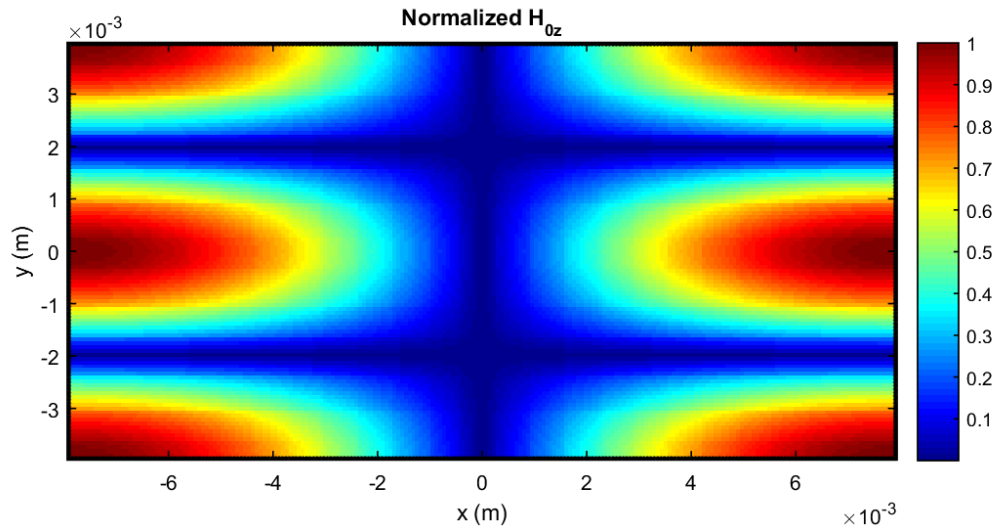


(i) TE_{10}

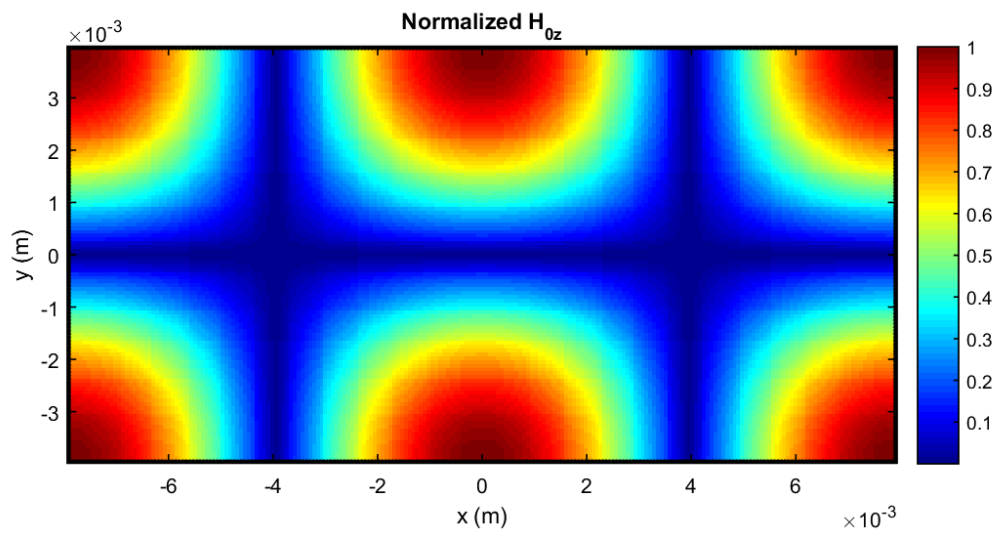


(ii) TE_{11}

Σχήμα 3.22: Διαγράμματα πυκνότητας TE ρυθμών

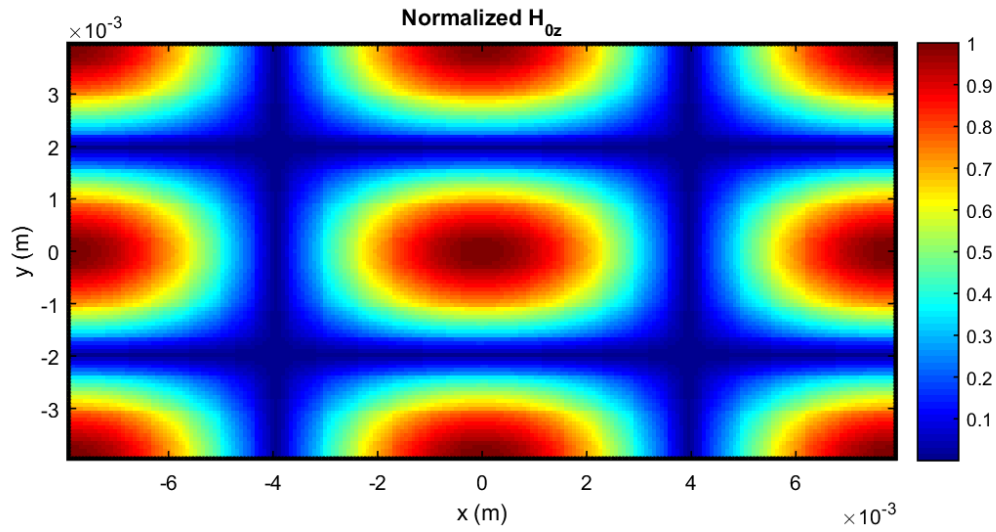


(iii) EM_{12}

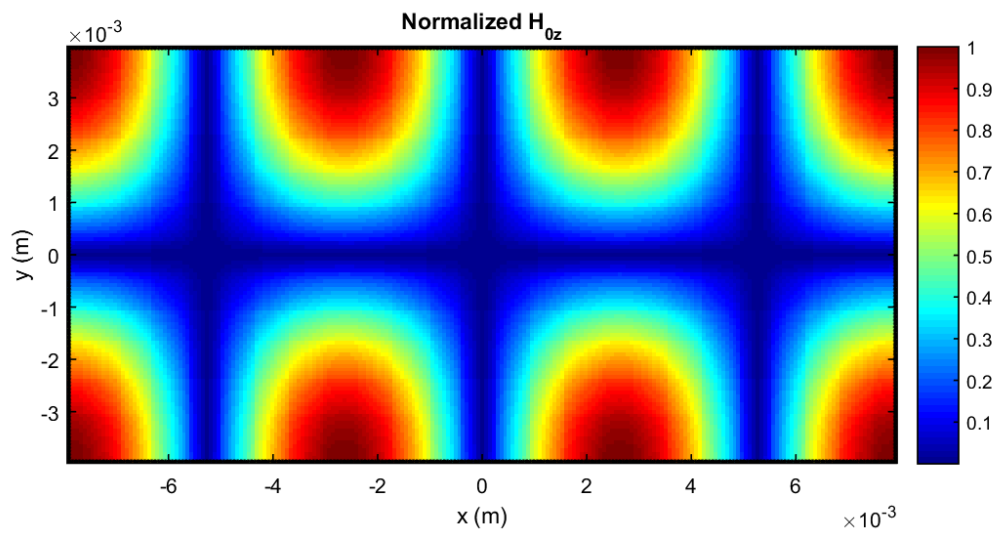


(iv) TE_{21}

Σχήμα 3.22: Διαγράμματα πυκνότητας TE ρυθμών (συνέχεια)

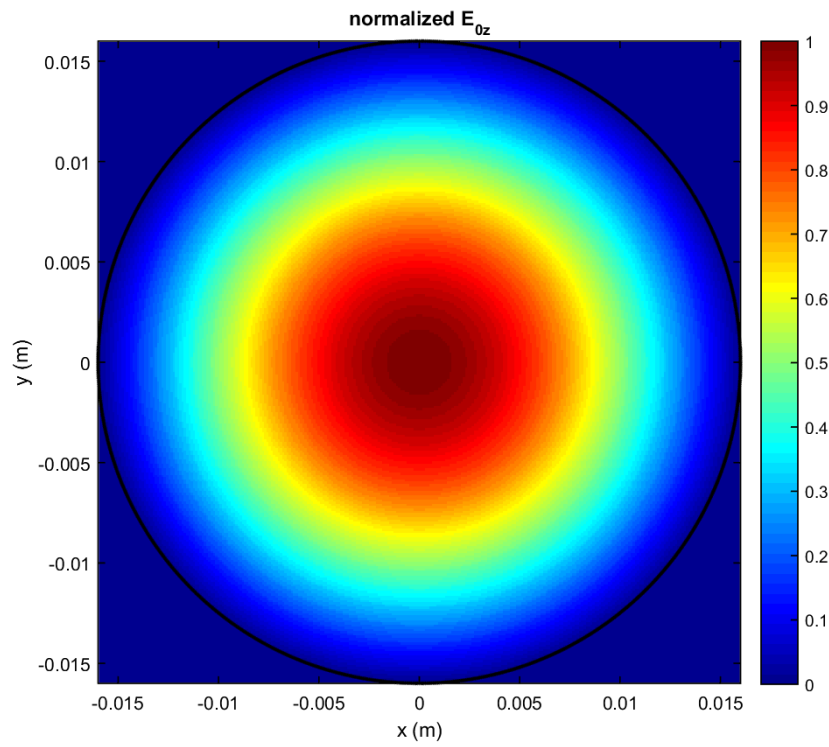


(v) TE_{22}

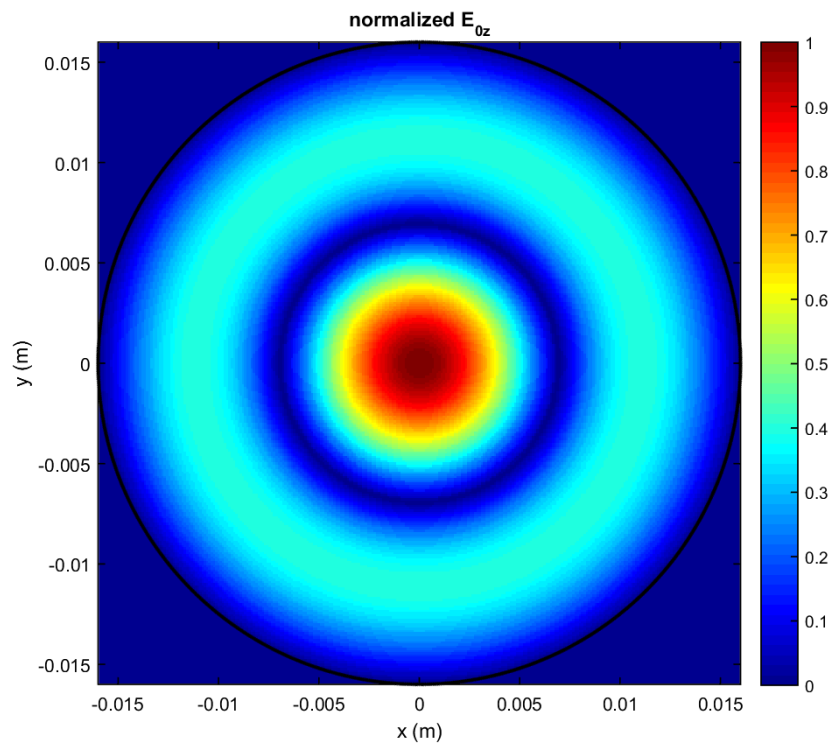


(vi) TE_{31}

Σχήμα 3.22: Διαγράμματα πυκνότητας TE ρυθμών (συνέχεια)

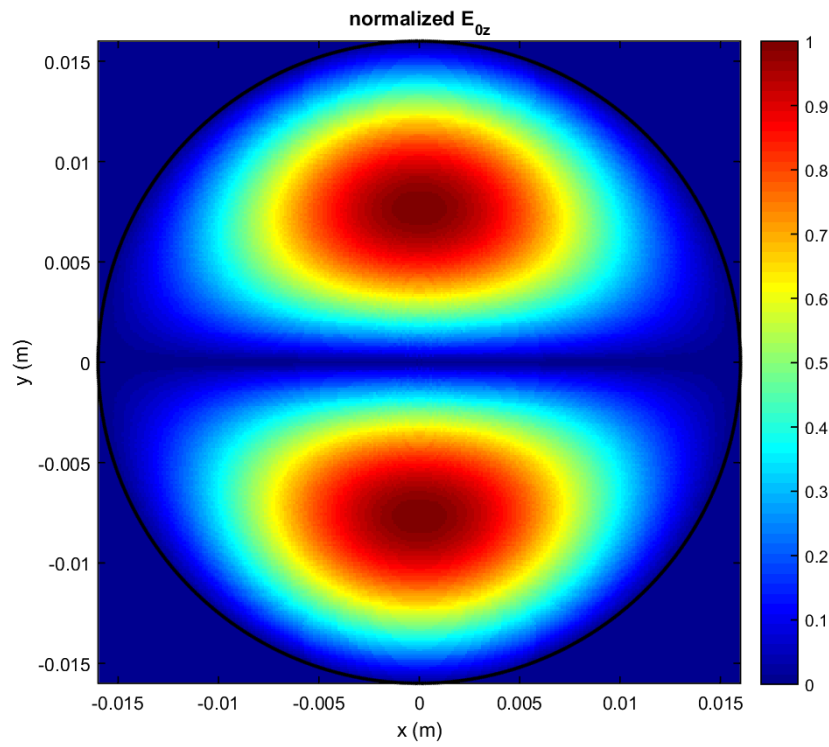
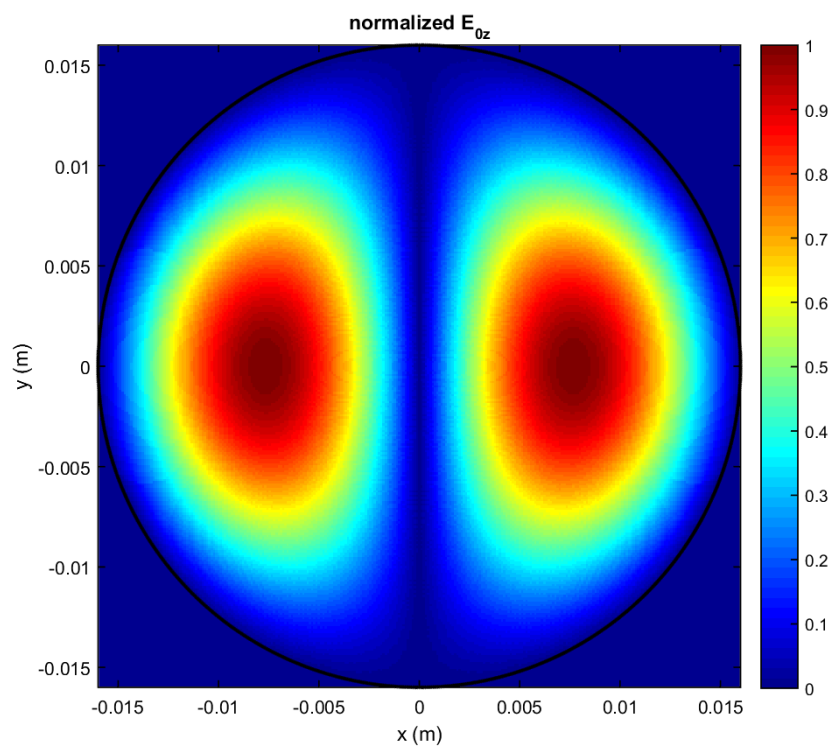


(i) TM_{01}

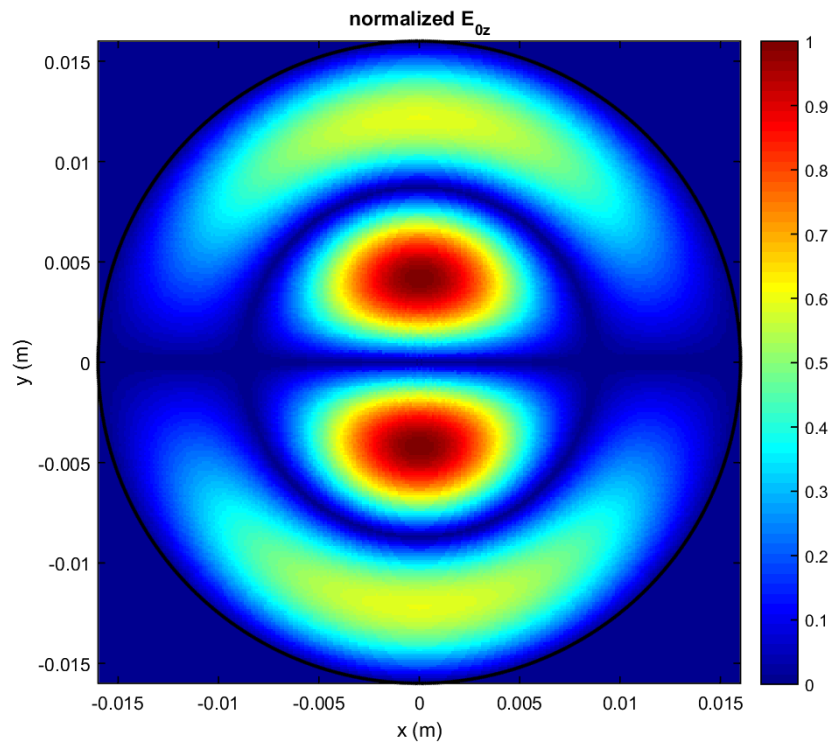
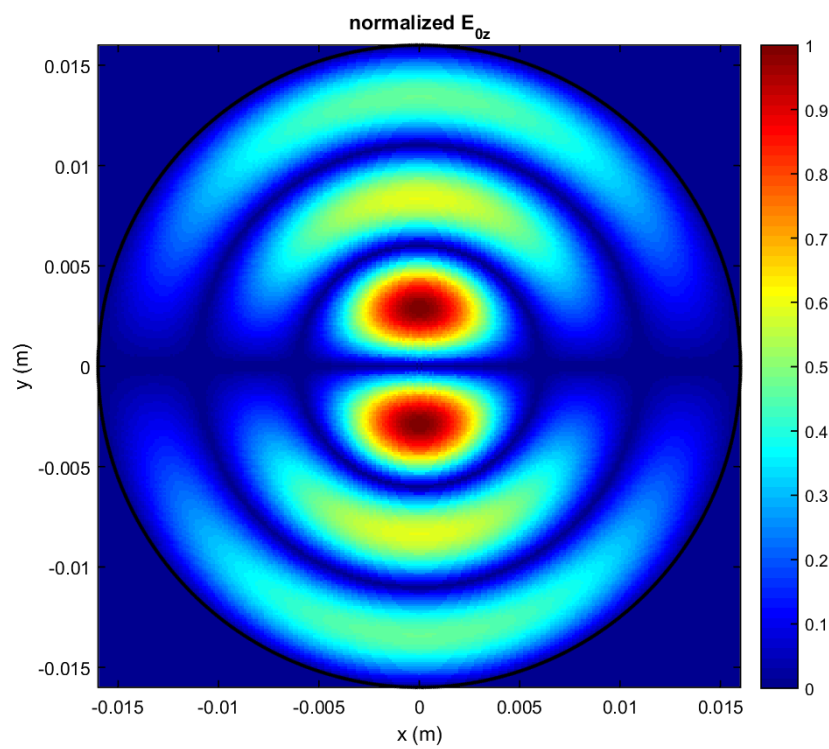


(ii) TM_{02}

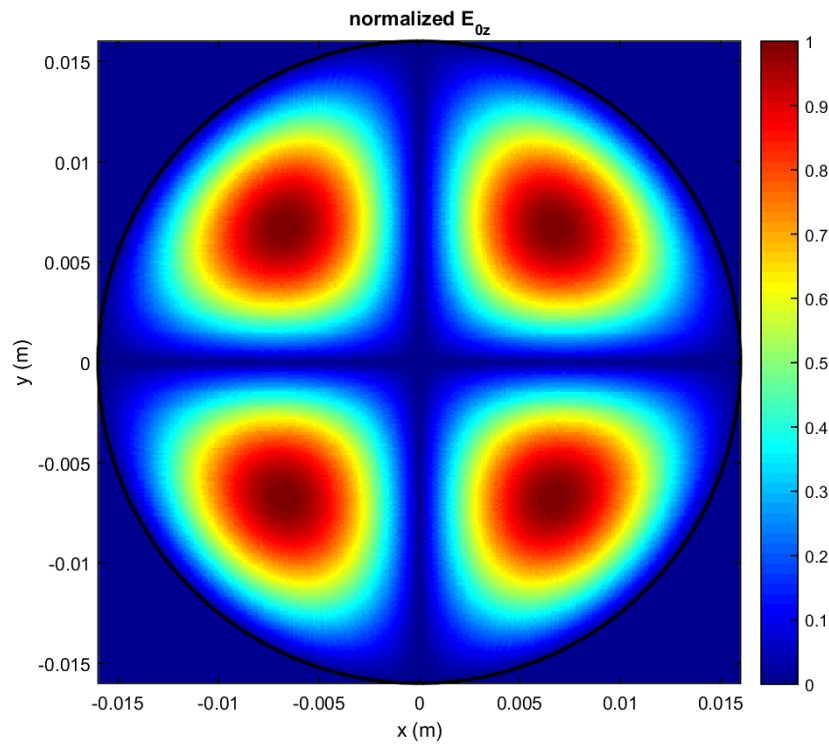
Σχήμα 3.23: Διαγράμματα πυκνότητας TM ρυθμών

(iii) TM_{11} (iv) TM_{11} (εκφυλισμένος με τον παραπάνω)

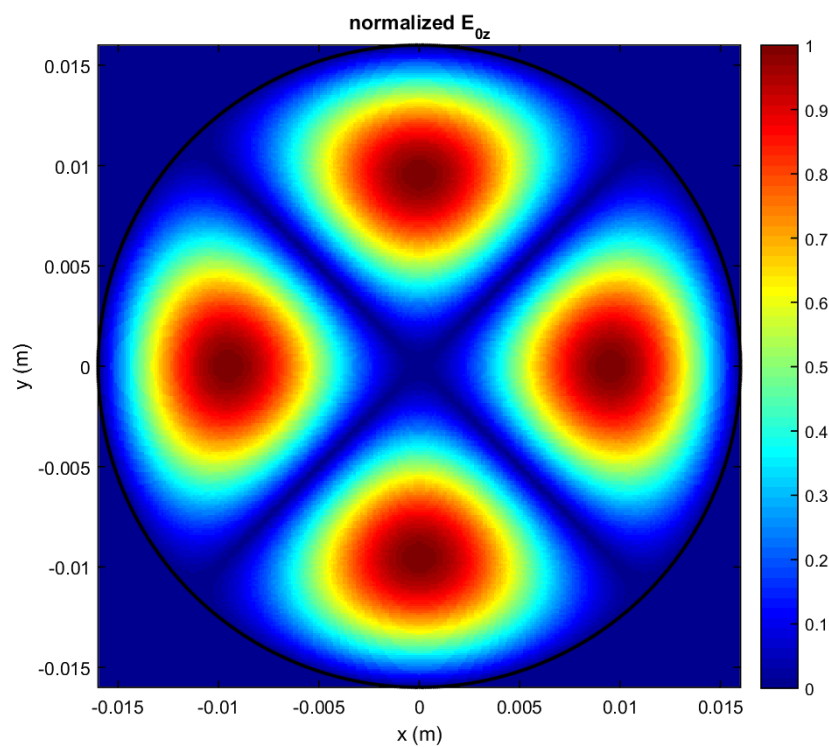
Σχήμα 3.23: Διαγράμματα πυκνότητας TM ρυθμών (συνέχεια)

(v) TM_{12} (vi) TM_{13}

Σχήμα 3.23: Διαγράμματα πυκνότητας TM ρυθμών (συνέχεια)

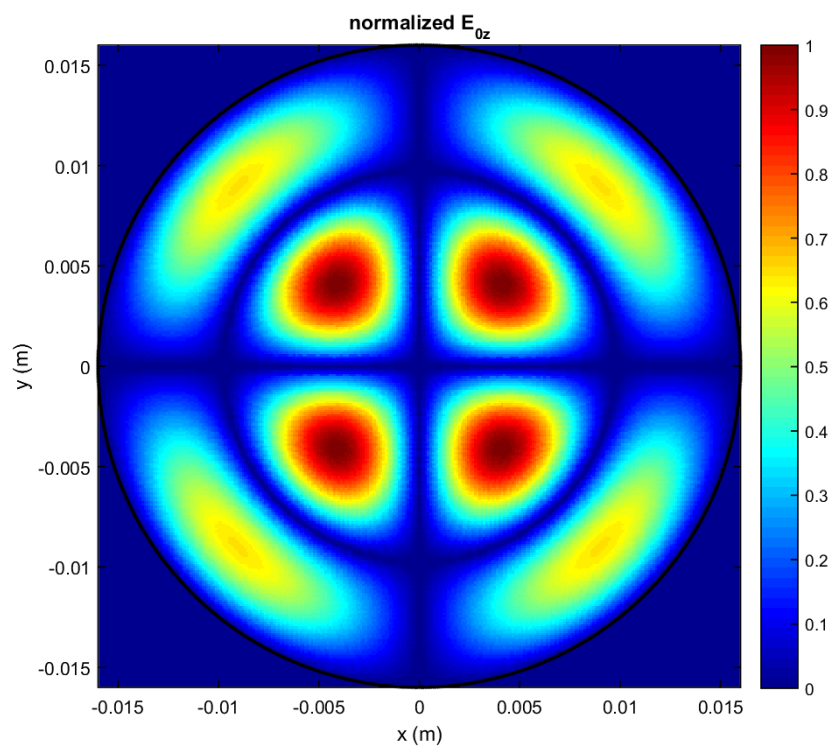
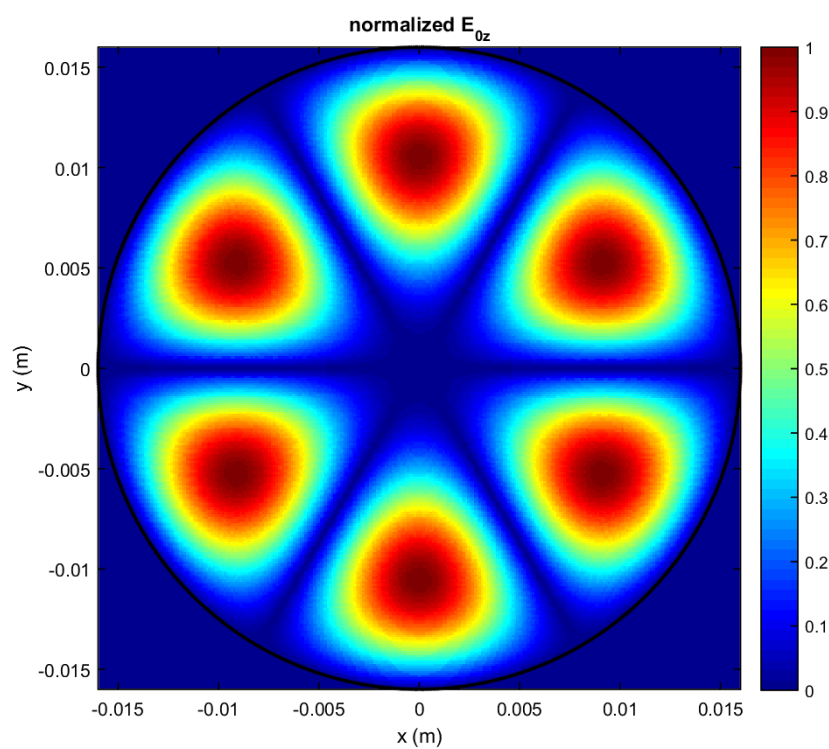


(vii) TM_{21}

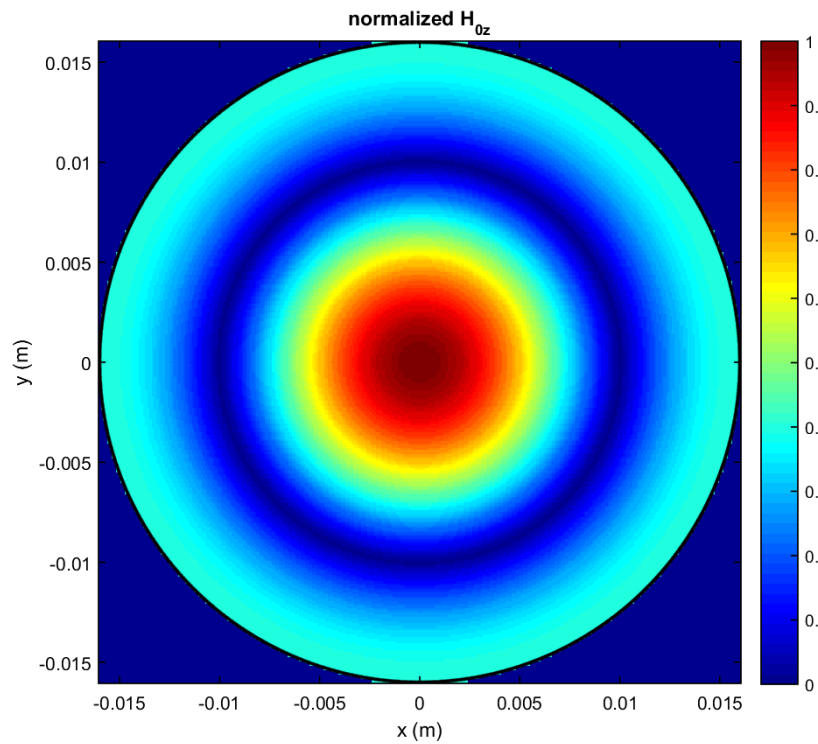


(viii) TM_{21} (εκφυλισμένος με τον παραπάνω)

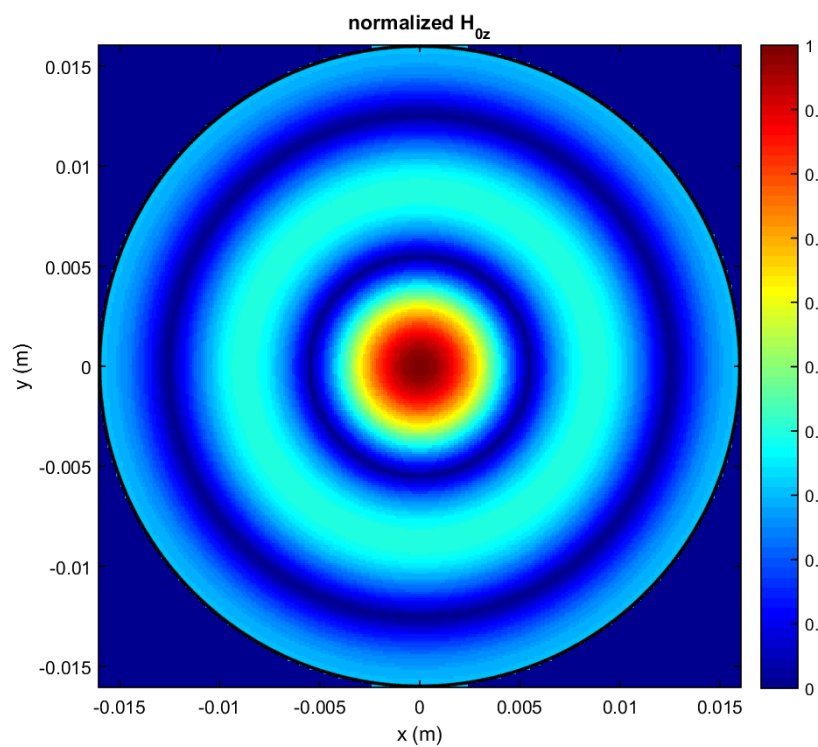
Σχήμα 3.23: Διαγράμματα πυκνότητας TM ρυθμών (συνέχεια)

(ix) TM_{22} (x) TM_{31}

Σχήμα 3.23: Διαγράμματα πυκνότητας TM ρυθμών (συνέχεια)

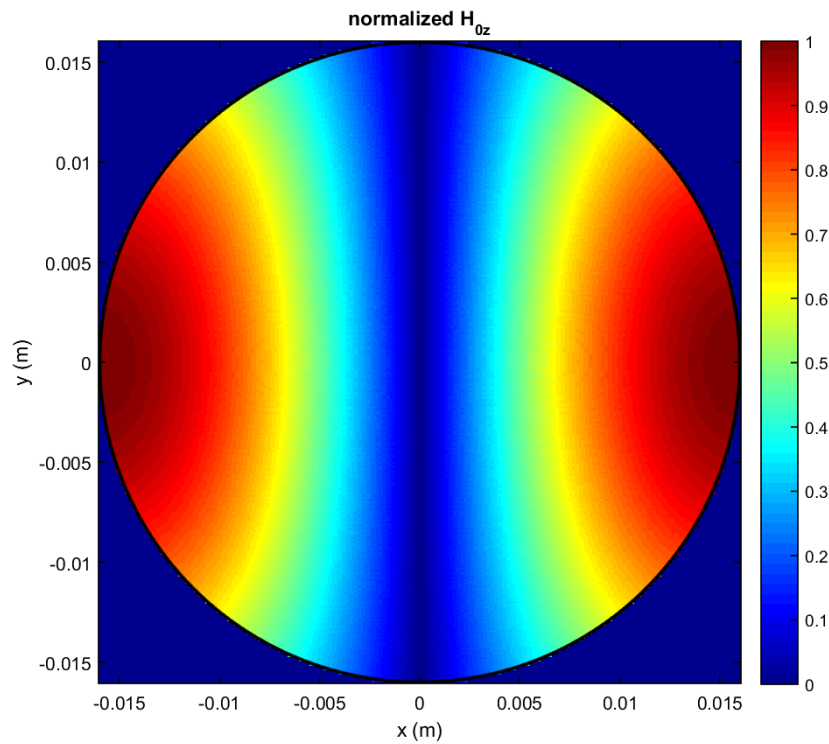


(i) TE_{01}

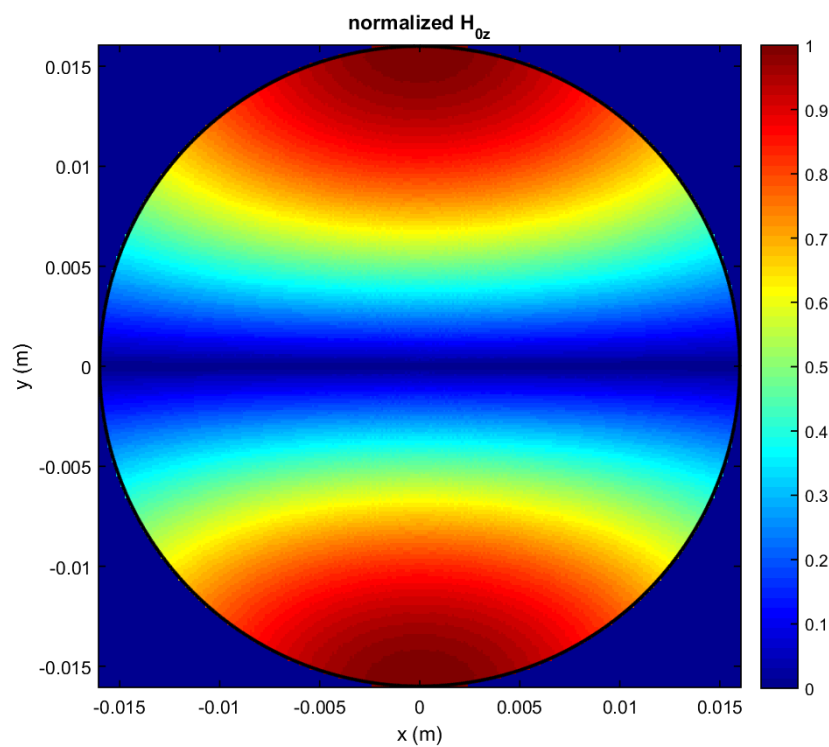


(ii) TE_{02}

Σχήμα 3.24: Διαγράμματα πυκνότητας TE ρυθμών

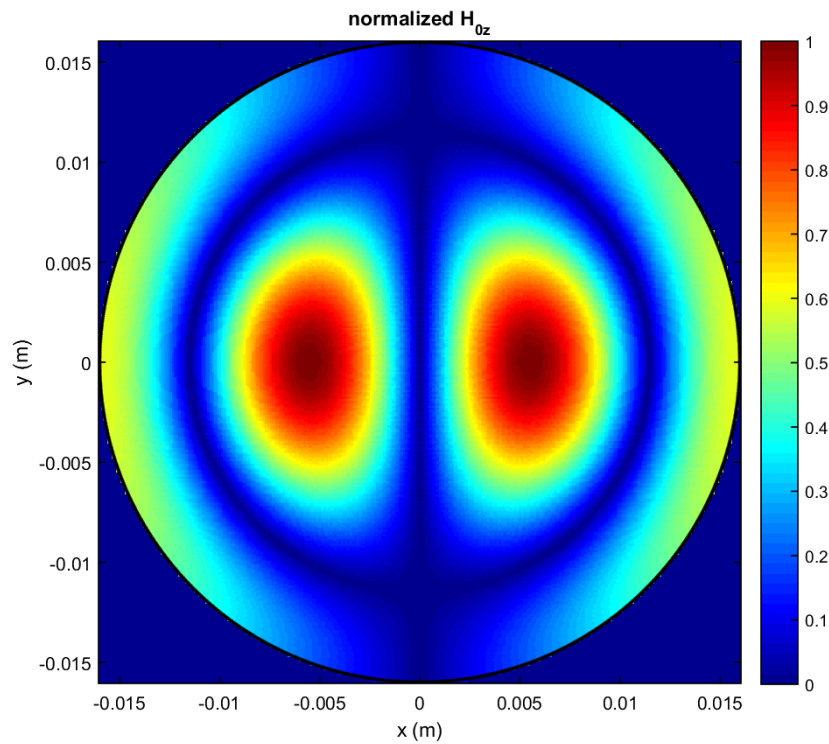


(iii) TE_{11}

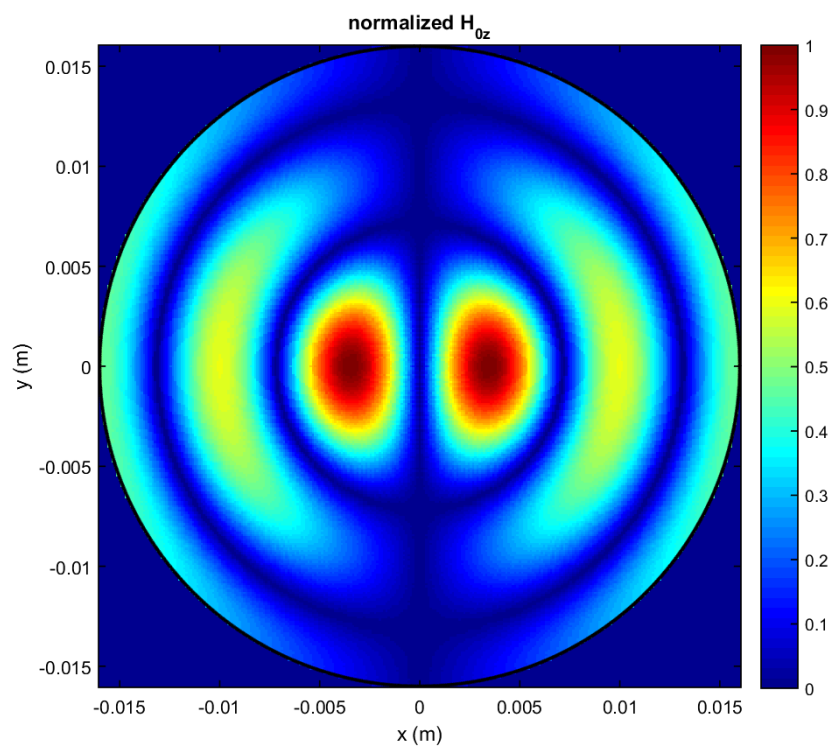


(iv) TE_{11} (εκφυλισμένος με τον παραπάνω)

Σχήμα 3.24: Διαγράμματα πυκνότητας TE ρυθμών (συνέχεια)

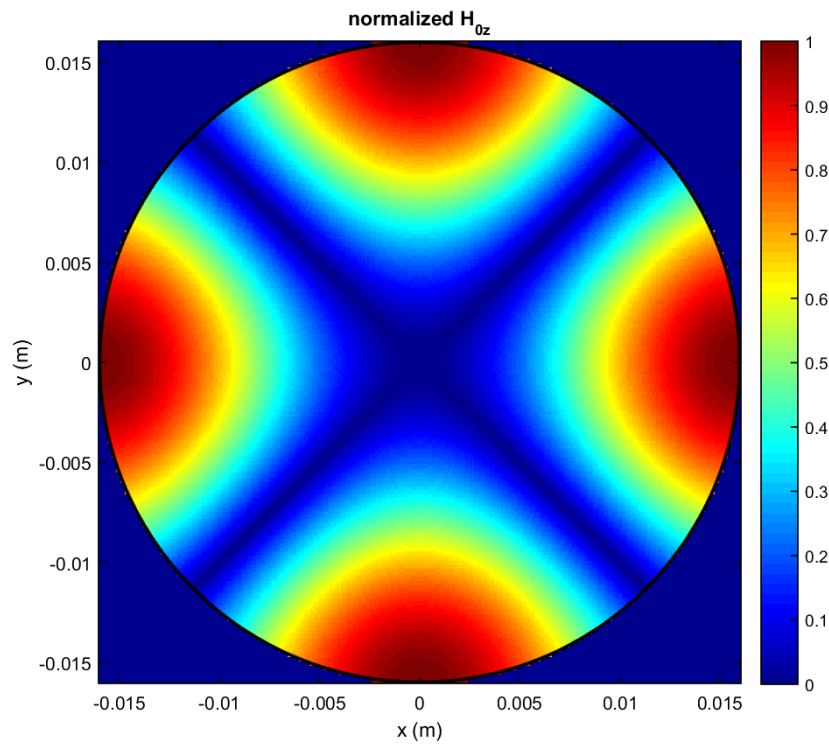


(v) TE_{12}

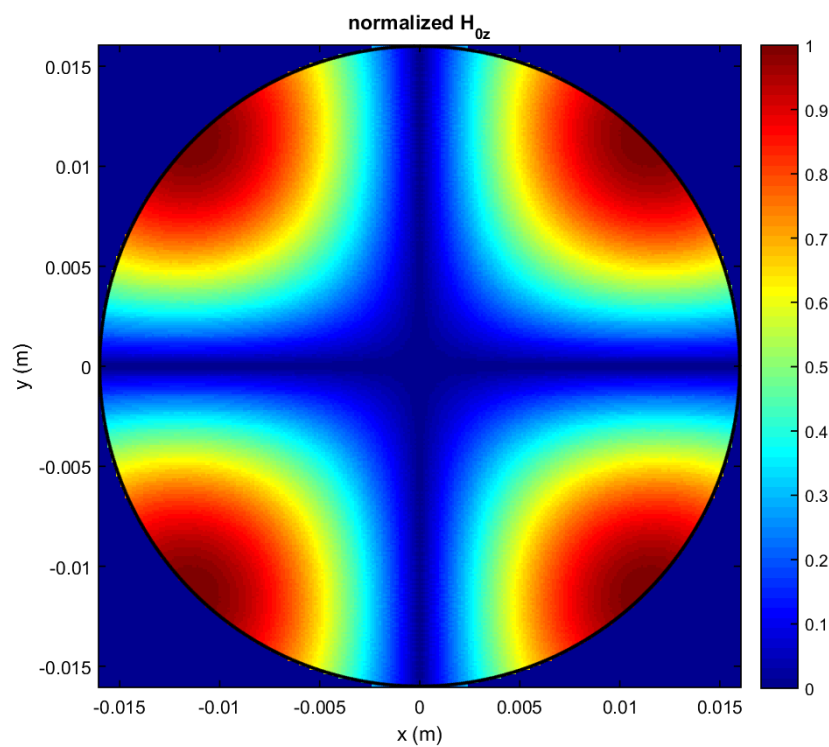


(vi) TE_{13}

Σχήμα 3.24: Διαγράμματα πυκνότητας TE ρυθμών (συνέχεια)

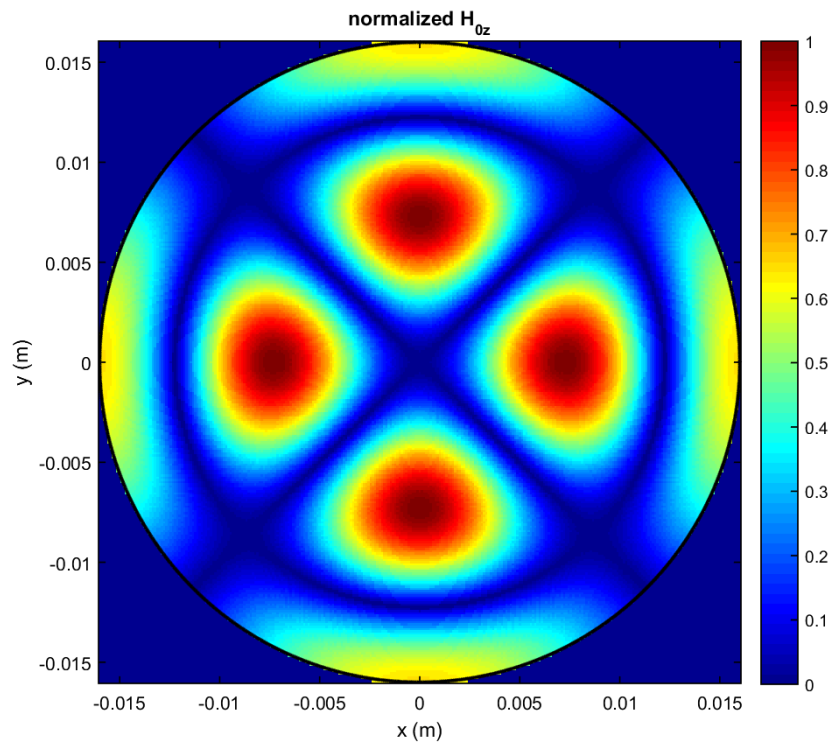


(vii) TE_{21}

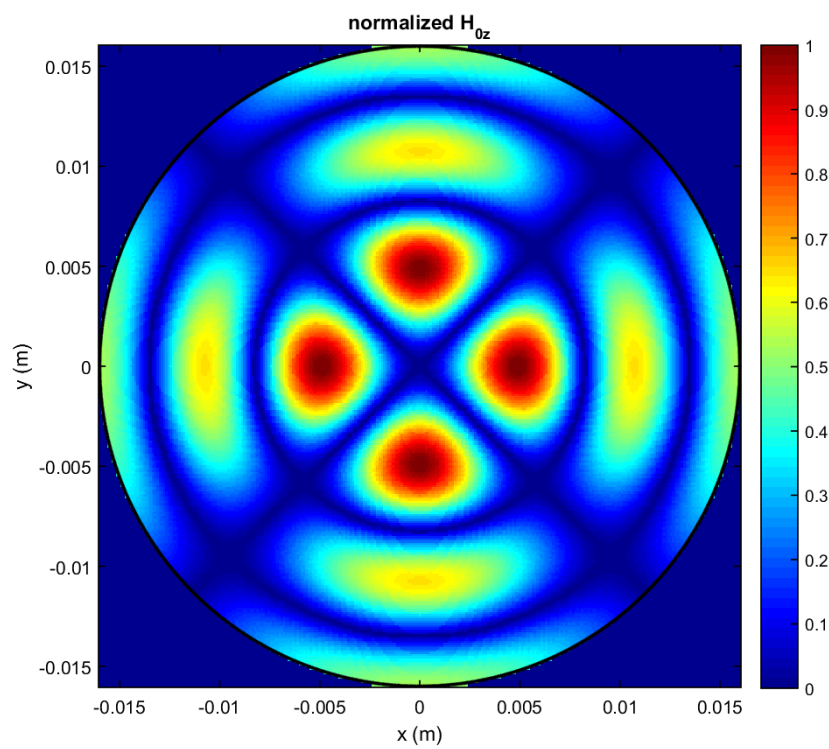


(viii) TE_{21} (εκφυλισμένος με τον παραπάνω)

Σχήμα 3.24: Διαγράμματα πυκνότητας TE ρυθμών (συνέχεια)



(ix) TE_{22}

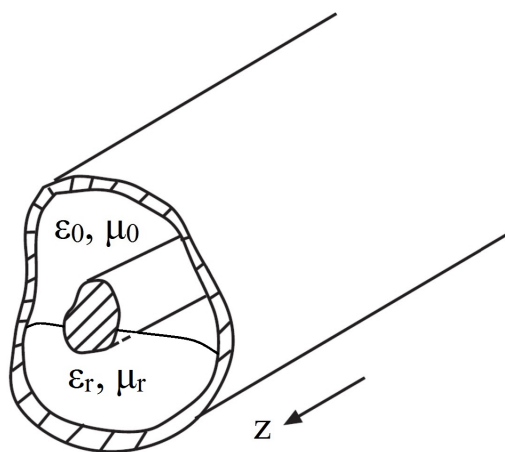


(x) TE_{23}

Σχήμα 3.24: Διαγράμματα πυκνότητας TE ρυθμών (συνέχεια)

3.3 Επίλυση του προβλήματος Ανομοιογενούς Κυματοδηγού με τη FEM

Όταν ο κυματοδηγός είναι ανομοιογενής, η επίλυση του ιδιοπροβλήματος (3.1) με τον προηγούμενο τρόπο είναι επισφαλής. Σε έναν ανομοιογενή κυματοδηγό μπορεί να εμφανίζονται και υβριδικοί ρυθμοί³¹· αυτό απαιτεί να περιλαμβάνεται και η εγκάρσια συνιστώσα στη διατύπωση του προβλήματος, επομένως πρέπει λυθεί η διανυσματική κυματική εξίσωση³¹. Επιπλέον, είναι πολύ πιθανό να εμφανιστούν παρασιτικές λύσεις³¹· ως εκ τούτου, πρέπει να χρησιμοποιηθούν στοιχεία ακμής.



Σχήμα 3.25: Γεωμετρία ανομοιογενούς κυματοδηγού.

³¹ Υπενθυμίζεται ότι η θεωρία των κυματοδηγών όπως αναπτύχθηκε ως τώρα, εκκινεί από την θεώρηση ότι τα πεδία έχουν τη μορφή (1.1) και (1.2), στην οποία η εξάρτηση κατά z είναι μόνον η e^{ikz} · τότε το πρόβλημα της κυματοδότησης σε ομογενείς κυματοδηγούς ανάγεται στην (3.1).

Για ανομοιογενείς κυματοδηγούς ισχύει η διδιάστατη εξίσωση

$$\nabla \cdot (p(x, y) \nabla U(x, y)) + k_0^2 q(x, y) U(x, y) = f(x, y)$$

όπου εδώ είναι $\nabla = \nabla_t = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y}$, $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$ και ο όρος των πηγών $f = 0$.

Η (3.1) είναι ειδική περίπτωση της ανωτέρω.

Για τους TM ρυθμούς τίθεται

$$U(x, y) = E_z(x, y), \quad p(x, y) = \frac{1}{\varepsilon_r}, \quad q(x, y) = \mu_r,$$

ενώ για τους TE ρυθμούς αντίστοιχα

$$U(x, y) = H_z(x, y), \quad p(x, y) = \frac{1}{\mu_r}, \quad q(x, y) = \varepsilon_r.$$

Η παραπάνω μπορεί να λυθεί με τη FEM όπως η (3.1) και να βρεθούν οι συχνότητες αποκοπής και οι ρυθμοί σε έναν ανομοιογενή κυματοδηγό. Ωστόσο, για να εξασφαλιστεί ο σωστός υπολογισμός τυχόν υβριδικών ρυθμών και η απουσία ψευδορυθμών, χρησιμοποιείται το συζευγμένο σύστημα εξισώσεων που παρουσιάζεται στην §3.3.

Ο φορμαλισμός που θα αναπτυχθεί για ανομοιογενείς κυματοδηγούς έχει αφηρηρία τη διανυσματική κυματική εξίσωση³² εν προκειμένω, η εξίσωση αυτή διαχωρίζεται στο εγκάρσιο και στο διαμήκες τμήμα της και τελικά προκύπτει ένα σύστημα δύο πλεγμένων εξισώσεων που λύνεται με τη FEM. Ακολούθως θα παρουσιαστεί αυτή η διαδικασία.

Έστω οι εξισώσεις Maxwell της στροφής³²,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (3.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\bar{\epsilon}\mathbf{E} \quad (3.16)$$

με $\bar{\epsilon} = \epsilon + \sigma/i\omega\epsilon$, όπου ϵ και σ είναι αντίστοιχα η ηλεκτρική επιτρεπτότητα και η αγωγιμότητα του διηλεκτρικού μέσου. Λαμβάνοντας τη στροφή της (3.15) και θέτοντας σε αυτή το $\nabla \times \mathbf{H}$ από την (3.16), προκύπτει η διανυσματική κυματική εξίσωση,

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

όπου $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$, $\mu_r = \mu/\mu_0$ και $\bar{\epsilon}_r = \bar{\epsilon}/\epsilon_0$.
Η χωρική μορφή του πεδίου θεωρείται ότι είναι³³

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y) e^{-\gamma z} = (\mathbf{E}_t(x, y) + E_z(x, y) \hat{\mathbf{z}}) e^{-\gamma z} \quad (3.18)$$

με εξάρτηση κατά z την $e^{-\gamma z}$. Εν προκειμένω, είναι $\gamma = \alpha + i\beta$ η σταθερά διάδοσης, μιγαδική, όπου α και β είναι η σταθερά απόσβεσης και φάσης αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας την (3.18), η (3.17) μπορεί να διαχωριστεί στο εγκάρσιο και στο διαμήκες τμήμα της. Συγκεκριμένα, το ∇ γράφεται

$$\nabla = \nabla_t + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_t - \gamma \hat{\mathbf{z}} \quad (3.19)$$

οπότε

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= (\nabla_t - \gamma \hat{\mathbf{z}}) \times (\mathbf{E}_t + E_z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= \nabla_t \times \mathbf{E}_t + \nabla_t E_z \times \hat{\mathbf{z}} - \gamma \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t \\ &= \nabla_t \times \mathbf{E}_t + (\nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t) \times \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Επομένως είναι³⁴

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} &= (\nabla_t - \gamma \hat{\mathbf{z}}) \times \frac{1}{\mu_r} (\nabla_t \times \mathbf{E}_t + (\nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t) \times \hat{\mathbf{z}}) \\ &= \nabla_t \times \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \mathbf{E}_t + \nabla_t \times \left(\frac{1}{\mu_r} (\nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t) \times \hat{\mathbf{z}} \right) - \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\gamma}{\mu_r} ((\nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t) \times \hat{\mathbf{z}}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

³² Για λόγους συμβατότητας με τη βιβλιογραφία, στον προκειμένο φορμαλισμό θεωρείται ότι η αρμονική μεταβολή των πεδίων είναι $e^{i\omega t}$ αντί $e^{-i\omega t}$ που υιοθετήθηκε στο κεφ. 1.

³³ Η θεωρία στο κεφ. 1 και στην §3.2 αφορά αμιγώς φανταστική σταθερά διάδοσης, $\gamma = ik$. Εδώ, κάπως γενικότερα, θεωρείται μιγαδική, οπότε μπορούν να ληφθούν υπόψη και τυχόν απώλειες που επιφέρει το διηλεκτρικό.

³⁴ Υπενθυμίζεται ότι $\hat{\mathbf{z}} \times (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) = \mathbf{0}$. Βλ. παρατ. 9.

Στην (3.21), ο δεύτερος όρος είναι διαμήκης και οι άλλοι δυο είναι εγκάρσιοι. Η (3.21) αντικαθίσταται στην (3.17)· η απαίτηση μηδενισμού των όρων δίνει το ζεύγος των εξισώσεων

$$\nabla_t \times \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \mathbf{E}_t - \frac{\gamma}{\mu_r} (\nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t) - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \mathbf{E}_t = \mathbf{0}, \quad (3.22)$$

$$\nabla_t \times \left(\frac{1}{\mu_r} (\nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t) \times \hat{\mathbf{z}} \right) - k_0^2 \bar{\epsilon}_r E_z \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

Οι δυο αυτές σχέσεις είναι η (3.17), αποδομημένη στην εγκάρσια και στη διαμήκη συνιστώσα της. Οι (3.22) και (3.23) είναι πλεγμένες· μπορούν να λυθούν είτε όπως είναι, είτε αφού αποσυμπλεχθούν πρώτα. Η επίλυση του πλεγμένου συστήματος είναι αριθμητικά πιο οικονομική και γρήγορη και προτιμάται³⁵.

Στο σύστημα των (3.22) και (3.23) η σταθερά διάδοσης γ , η οποία στο ιδιοπρόβλημα είναι άγνωστος, περιέχεται ταυτόχρονα και στην πρώτη και στη δεύτερη δύναμη, δυσκολεύοντας την επίλυση. Με τον μετασχηματισμό

$$\mathbf{e}_t = \gamma \mathbf{E}_t, \quad (3.24)$$

$$e_z = E_z. \quad (3.25)$$

οι εξισώσεις περιέχουν το γ μόνον στη δεύτερη δύναμη.

Συγκεκριμένα, πολλαπλασιάζοντας την (3.22) με γ και την (3.23) με γ^2 γράφονται

$$\nabla_t \times \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \mathbf{e}_t - \gamma^2 \frac{1}{\mu_r} (\nabla_t e_z + \mathbf{e}_t) = k_0^2 \bar{\epsilon}_r \mathbf{e}_t, \quad (3.26)$$

$$\gamma^2 \nabla_t \times \left(\frac{1}{\mu_r} (\nabla_t e_z + \mathbf{e}_t) \times \hat{\mathbf{z}} \right) = \gamma^2 k_0^2 \bar{\epsilon}_r e_z \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.27)$$

Το πλεγμένο ζεύγος των (3.26) και (3.27) μπορεί να λυθεί ως προς γ^2 , με συνοριακές συνθήκες για τέλεια ηλεκτρικά ή μαγνητικά τοιχώματα (PEC ή PMC) τις³⁶

PEC

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_t = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

$$e_z = 0 \quad (3.29)$$

PMC

$$(\nabla_t e_z + \mathbf{e}_t) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.30)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{e}_t = \mathbf{0} \quad (3.31)$$

³⁵ Η αποσύμπλεξη των (3.22) και (3.23) γίνεται χρησιμοποιώντας ιδιότητες της απόκλισης και καταλήγει σε ένα γενικευμένο ιδιοπρόβλημα, το οποίο όμως δεν είναι συμμετρικό. Αντίθετα, το πλεγμένο σύστημα καταλήγει σε ένα συμμετρικό γενικευμένο ιδιοπρόβλημα, του οποίου η αριθμητική επίλυση είναι πιο αποδοτική.

³⁶ Υπενθυμίζεται ότι σε PEC τοιχώματα μηδενίζεται η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου και η κάθετη του μαγνητικού πεδίου. Αντίστοιχα, σε PMC τοιχώματα μηδενίζεται η εφαπτομενική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου και η κάθετη του ηλεκτρικού πεδίου.

Το σύστημα των (3.26) και (3.27) θα λυθεί με τη FEM· η διαδικασία είναι ουσιαστικά η ίδια όπως για την κοινή εξίσωση Helmholtz, (3.1), αλλά με κάποιες διαφορές που οφείλονται στο ότι ο άγνωστος \mathbf{e}_t είναι διάνυσμα.

Καταρχήν, υπενθυμίζεται ότι για τον διανυσματικό άγνωστο θα χρησιμοποιηθούν στοιχεία ακμής. Επίσης, επειδή εφαρμόζεται η εκδοχή Galerkin, οι συναρτήσεις βάσης είναι ίδιες με τις συναρτήσεις βάσης. Έτσι, για τους αγνώστους \mathbf{e}_t και e_z η λύση σε κάθε στοιχείο e προσεγγίζεται αντίστοιχα ως

$$\bar{\mathbf{e}}_t^{(e)}(x, y) = \sum_{j=1}^3 \bar{e}_{tj}^{(e)} \mathbf{N}_j^{(e)}(x, y), \quad (3.32)$$

$$\bar{e}_z^{(e)}(x, y) = \sum_{j=1}^3 \bar{e}_{zj}^{(e)} N_j^{(e)}(x, y), \quad (3.33)$$

όπου $\mathbf{N}_j^{(e)}$, $N_j^{(e)}$ είναι οι διανυσματικές και κομβικές συναρτήσεις βάσης, και $\bar{e}_{tj}^{(e)}$, $\bar{e}_{zj}^{(e)}$ οι άγνωστοι συντελεστές τους αντίστοιχα.

Τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται, ακμής για το \mathbf{e}_t και κομβικά για το e_z , είναι γραμμικά τρίγωνα (τρεις κόμβοι).

Οι (3.26) και (3.27) σταθμίζονται με τις διανυσματικές και κομβικές συναρτήσεις αντίστοιχα και δίνουν σε κάθε στοιχείο

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)}(x, y) \cdot \left(\nabla_t \times \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \mathbf{e}_t \right) d\Omega \\ & - \frac{\gamma^2}{\mu_r} \iint_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)}(x, y) \cdot (\nabla_t e_z + \gamma \mathbf{e}_t) d\Omega \\ & - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \iint_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)}(x, y) \cdot \mathbf{e}_t d\Omega = R_i^{(e)}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.34)$$

και³⁷

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \iint_{\Omega^{(e)}} \hat{\mathbf{z}} N_i^{(e)}(x, y) \cdot \left(\nabla_t \times \left(\frac{1}{\mu_r} (\nabla_t e_z + \mathbf{e}_t) \times \hat{\mathbf{z}} \right) \right) d\Omega \\ & - \gamma^2 k_0^2 \bar{\epsilon}_r \iint_{\Omega^{(e)}} \hat{\mathbf{z}} N_i^{(e)}(x, y) \cdot e_z \hat{\mathbf{z}} d\Omega = R_i^{(e)}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.35)$$

όπου $\Omega^{(e)}$ είναι η επιφάνεια των στοιχείων (εν προκειμένω επιλέχθηκαν τρίγωνα). Ακολούθως, στις (3.34) και (3.35) θα εφαρμοστεί κατά παράγοντες ολοκλήρωση και θα γραφούν σε ασθηνή μορφή.

Υπενθυμίζεται η σχέση³⁸

$$\iint_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} d\Omega = \iint_{\Omega} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d\Omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma \quad (3.36)$$

³⁷ Επισημαίνεται ότι επειδή η (3.27) είναι διανυσματική σταθμίζεται με το εσωτερικό γινόμενο της με τη διανυσματική συνάρτηση $N_j \hat{\mathbf{z}}$, η οποία όμως είναι κομβική, όχι συνάρτηση στοιχείου ακμής.

³⁸ Προέρχεται από την ταυτότητα $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

και η πρώτη διανυσματική ταυτότητα Green³⁹,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}) d\Omega &= \iint_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma} (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Η (3.34) με χρήση της (3.37), και αφού αναδιαταχθούν οι όροι⁴⁰, γράφεται⁴¹

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu_r} \iint_{\Omega^{(e)}} (\nabla_t \times \mathbf{N}_i^{(e)}) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) d\Omega - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \iint_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)} \cdot \mathbf{e}_t d\Omega \\ &- \frac{1}{\mu_r} \int_{\Gamma^{(e)}} (\mathbf{N}_i^{(e)} \times \nabla_t \times \mathbf{e}_t) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma \\ &- \frac{\gamma^2}{\mu_r} \iint_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)} \cdot \nabla_t e_z d\Omega \\ &- \frac{\gamma^2}{\mu_r} \iint_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)} \cdot \mathbf{e}_t d\Omega = R_i^{(e)}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ομοίως δε, η (3.35) με χρήση της (3.36) επίσης

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma^2}{\mu_r} \iint_{\Omega^{(e)}} (\nabla_t \times \hat{\mathbf{z}} N_i^{(e)}) \cdot ((\nabla_t e_z + \mathbf{e}_t) \times \hat{\mathbf{z}}) d\Omega \\ &- \frac{\gamma^2}{\mu_r} \int_{\Gamma^{(e)}} N_i^{(e)} \hat{\mathbf{z}} \times ((\nabla_t e_z + \mathbf{e}_t) \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma \\ &- \gamma^2 k_0^2 \bar{\epsilon}_r \iint_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} \hat{\mathbf{z}} \cdot e_z \hat{\mathbf{z}} d\Omega = R_i^{(e)}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Οι (3.38) και (3.39) είναι η ασθενής μορφή του συστήματος των (3.26) και (3.27) σε κάθε στοιχείο. Οι ολοκληρώσεις γίνονται στην επιφάνεια $\Omega^{(e)}$ και στις ακμές $\Gamma^{(e)}$ (σύνορο) κάθε στοιχείου (εν προκειμένω τρίγωνα).

Κατά τα γνωστά, οι συνοριακοί όροι αφορούν τις φυσικές συνοριακές συνθήκες. Για τους όρους αυτούς υπάρχουν τρεις περιπτώσεις: η ακμή είτε είναι σύνορο δυο στοιχείων (κοινή), είτε ανήκει σε ένα PEC τοίχωμα, είτε ανήκει σε ένα PMC τοίχωμα. Και στις τρεις περιπτώσεις τα συνοριακά ολοκληρώματα μηδενίζονται και δεν εμφανίζονται στην τελική εξίσωση⁴².

³⁹ Επισημαίνεται ότι οι (3.36) και (3.37) είναι η διδιάστατη εκδοχή των ομώνυμων σχέσεων.

⁴⁰ Η αναδιάταξη βοηθά παρακάτω στην γραφή της σχέσης μητρικά.

⁴¹ Σε κάθε στοιχείο, οι συντελεστές $\bar{\epsilon}_r$ και μ_r είναι ενδεχομένως διαφορετικοί αλλά σταθεροί· επομένως, μπορούν να τεθούν έξω από τις παραγώγους και τα ολοκληρώματα.

⁴² Επισημαίνεται ότι το ίδιο ισχύει και στην (3.7) η οποία αφορά τον ομογενή κυματοδηγό. Η (3.7) είχε διατυπωθεί για όλο το χωρίο, όχι για κάθε στοιχείο όπως εδώ, αλλά οι αρχές των συνοριακών συνθηκών είναι ίδιες.

Συγκεκριμένα, έστω το συνοριακό ολοκλήρωμα της (3.38) και η εξίσωση

$$-\frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \mathbf{e}_t = i k_0 Z_0 \gamma H_z \hat{\mathbf{z}} \quad (3.40)$$

όπου $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ και $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$.

Οι ολοκληρώσεις στις εσωτερικές ακμές του πλέγματος παραλείπονται διότι γίνονται δυο φορές (μια για κάθε στοιχείο στο οποίο ανήκει η ακμή) με αντίθετη φορά και άρα η συνολική συνεισφορά είναι μηδέν. Αν η ακμή ανήκει σε ένα PEC τοίχωμα, επειδή είναι $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_t = \mathbf{0}$ οι αντίστοιχοι άγνωστοι δεν χρειάζεται να υπολογιστούν⁴³· θεωρείται ότι εκεί οι συναρτήσεις βάρους είναι μηδέν. Αν ανήκει σε ένα PMC τοίχωμα, είναι $H_z = 0$, άρα και $\nabla_t \times \mathbf{e}_t = \mathbf{0}$ εκ της (3.40). Επομένως, σε κάθε περίπτωση το συνοριακό ολοκλήρωμα της (3.38) μηδενίζεται. Για παρόμοιους λόγους μηδενίζεται και το συνοριακό ολοκλήρωμα της (3.39).

Οι προσεγγίσεις (3.32), (3.33) των \mathbf{e}_t , e_z αντικαθίστανται στις ασθενείς μορφές (3.38) και (3.39) και τα σταθμισμένα υπόλοιπα τίθενται μηδενικά, $R_i^{(e)} = 0$. Οι σχέσεις γράφονται μητρικά ως

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & \frac{1}{\mu_r} [S_t^{(e)}] - k_0^2 \bar{\varepsilon}_r [T_t^{(e)}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{e}_z^{(e)}] \\ [\bar{e}_t^{(e)}] \end{bmatrix} \\ & = \gamma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_r} [S_z^{(e)}] - k_0^2 \bar{\varepsilon}_r [T_z^{(e)}] & \frac{1}{\mu_r} [G^{(e)}]^T \\ \frac{1}{\mu_r} [G^{(e)}] & \frac{1}{\mu_r} [T_t^{(e)}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{e}_z^{(e)}] \\ [\bar{e}_t^{(e)}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.41)$$

όπου τα στοιχεία των επιμέρους μητρώων είναι

$$S_{zij}^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} \nabla_t N_i^{(e)} \cdot \nabla_t N_j^{(e)} d\Omega \quad (3.42)$$

$$T_{zij}^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} N_j^{(e)} d\Omega \quad (3.43)$$

$$S_{tij}^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} (\nabla_t \times \mathbf{N}_i^{(e)}) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{N}_j^{(e)}) d\Omega \quad (3.44)$$

$$T_{tij}^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)} \cdot \mathbf{N}_j^{(e)} d\Omega \quad (3.45)$$

$$G_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)} \cdot \nabla_t N_j^{(e)} d\Omega \quad (3.46)$$

⁴³ Το συνοριακό ολοκλήρωμα περιέχει την παράσταση $\hat{\mathbf{n}} \times \nabla_t \times \mathbf{e}_t$ η οποία είναι τύπου Neumann, όπως συμβαίνει στις ασθενείς μορφές· άρα το ολοκλήρωμα παραλείπεται αφού εν προκειμένω ισχύει η (3.28), η οποία είναι ομογενής Dirichlet.

Στο σύστημα επιβάλλονται οι τιμές της συνθήκης Dirichlet, $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_t = \mathbf{0}$, η οποία αφορά μόνον τη εφαπτομενική συνιστώσα του \mathbf{e}_t . Οι υπόλοιπες συνιστώσες προσαρμόζονται αυτόματα, χωρίς μέριμνα, βλ. [17] σελ. 98.

Το σύστημα (3.41) αφορά μόνον έναν στοιχείο. Τα μητρώα όλων των στοιχείων συνενώνονται σε ολικά μητρώα κατά τα γνωστά, προσθέτοντας τις συνεισφορές στους κόμβους από όλα τα στοιχεία· έτσι προκύπτει το τελικό γραμμικό σύστημα που αφορά τους αγνώστους στους κόμβους του πλέγματος

$$\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [S_t] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{e}_z] \\ [\bar{e}_t] \end{bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} [S_z] & [G]^T \\ [G] & [T_t] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{e}_z] \\ [\bar{e}_t] \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Για δεδομένη συχνότητα λειτουργίας, το k_0 είναι γνωστό· λύνοντας το ιδιοπρόβλημα (3.47) βρίσκεται η σταθερά διάδοσης $\gamma = \alpha + i\beta$ απ' όπου μπορεί να ληφθεί η σταθερά απόσβεσης α και φάσης β , και να γίνει το διάγραμμα διασποράς. Επίσης, βρίσκονται και οι ρυθμοί του κυματοδηγού. Έτσι το πρόβλημα είναι λυμένο πλήρως.

Επισημαίνεται ότι επειδή ο παραπάνω φορμαλισμός περιέχει όλες τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου, αφορά όλους τους ρυθμούς ταυτόχρονα· η διάκρισή τους σε TM και TE (εφόσον είναι τέτοιοι) γίνεται αφού υπολογιστούν. Αν ζητείται και το μαγνητικό πεδίο, μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά από το ηλεκτρικό. Σε έναν ανομοιογενή κυματοδηγό μπορεί να εμφανίζονται υβριδικοί ρυθμοί, οι οποίοι δεν δύναται να υπολογιστούν αξιόπιστα με τεχνικές που βασίζονται στον ξεχωριστό υπολογισμό των TM και TE.

3.3.1 Παρατηρήσεις για την προγραμματιστική υλοποίηση

Όπως αναφέρθηκε, στον παραπάνω φορμαλισμό χρησιμοποιούνται κομβικά στοιχεία για τη διαμήκη συνιστώσα και στοιχεία ακμής για την εγκάρσια, γραμμικά τρίγωνα και στις δυο περιπτώσεις. Τα στοιχεία των μητρώων στα οποία καταλήγει, (3.42)-(3.46), δείχνονται στο κεφ. 2. Το γραμμικό σύστημα (3.47) είναι ένα γενικευμένο ιδιοπρόβλημα της μορφής $\mathbf{A} \mathbf{x} = \gamma^2 \mathbf{B} \mathbf{x}$ όπου γ^2 είναι οι άγνωστες ιδιοτιμές και

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [S_t] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} [S_z] & [G]^T \\ [G] & [T_t] \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Αν το διηλεκτρικό έχει απώλειες, δηλαδή είναι $\gamma = \alpha + i\beta$ με $\alpha > 0$, τα δυο μητρώα \mathbf{A} και \mathbf{B} είναι μιγαδικά, διπλασιάζοντας τις απαιτήσεις μνήμης⁴⁴.

Το μητρώο \mathbf{A} δεν είναι θετικά ορισμένο⁴⁵. Μέθοδοι επίλυσης ιδιοπροβλημάτων εξειδικευμένες για μητρώα μη θετικά ορισμένα, αραιά και με μορφή ζώνης δεν υπάρχουν⁴⁶· για μεγάλα συστήματα μια επιλογή μπορεί να είναι κάποια μέθοδος υποχώρων Krylov, οι οποίες γενικά είναι αποδοτικές για αραιά μητρώα.

⁴⁴ Συγκριτικά με την περίπτωση που δεν υπάρχουν απώλειες και το γ είναι καθαρά φανταστικό, $\gamma = i\beta$.

⁴⁵ Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι θετικά ορισμένο ένα μητρώο είναι οι ορίζουσες όλων των πρωτευόντων υπομητρώων του να είναι θετικές· αυτό φανερά δεν ισχύει για το \mathbf{A} .

⁴⁶ Π.χ., το LAPACK, για ιδιοπροβλήματα μη θετικά ορισμένων μητρώων διαθέτει τις ρουτίνες xGGEV και xGGEVX, οι οποίες όμως δεν είναι εξειδικευμένες για αραιά ή συμμετρικά μητρώα.

Η μορφή του μητρώου \mathbf{A} επιτείνει περαιτέρω την δυσκολία του ιδιοπροβλήματος (3.47). Συγκεκριμένα, το \mathbf{A} έχει τρία μηδενικά υπομητρώα ως αποτέλεσμα, το \mathbf{A} έχει μεγάλο βαθμό κατάστασης (ill-conditioned matrix) και η λύση είναι πολύ επιρρεπής σε αριθμητικά σφάλματα. Η ευστάθεια και η ακρίβεια της λύσης βελτιώνονται με την εξισορρόπηση των μητρώων \mathbf{A} και \mathbf{B} . Πρόκειται για μια διαδικασία κατά την οποία το σύστημα προς επίλυση μετατρέπεται σε ένα ισοδύναμο όπου το μέγιστο στοιχείο κάθε γραμμής και στήλης του μητρώου κυμαίνεται μεταξύ⁴⁷ $1/2$ και 1 . Η εξισορρόπηση μειώνει τον βαθμό κατάστασης (condition number) του μητρώου και εν προκειμένω συνιστάται εντόνως. Ο βαθμός κατάστασης επηρεάζεται δυσμενώς από πολλούς παράγοντες. Σε ότι αφορά το πλέγμα, οι μεγάλες γωνίες των στοιχείων, οι μεγάλες διαφορές στις φυσικές σταθερές των στοιχείων και η ύπαρξη ποσοτήτων με μεγάλες διαφορές στο μέτρο τους στα μητρώα των στοιχείων αυξάνουν τον βαθμό κατάστασης⁴⁸. Για τη μείωση του βαθμού κατάστασης, καταρχήν το πλέγμα κλιμακώνεται ώστε το μέσο μήκος των ακμών να είναι περίπου μονάδα⁴⁹. Αυτό καθιστά μικρές τις διαφορές των ιδιοτιμών στα υπομητρώα $[T_t]$ και $[S_z]$ της (3.48) και μειώνει τον βαθμό κατάστασης του \mathbf{B} . Τέλος, τα μητρώα \mathbf{A} και \mathbf{B} υφίστανται εξισορρόπηση ώστε ο βαθμός κατάστασης να μειωθεί περαιτέρω και η επίλυση να είναι πιο ακριβής. Σε κάποια πακέτα γραμμικής άλγεβρας όπως στο Matlab και στο LAPACK η εξισορρόπηση αυτή είναι ενσωματωμένη στις ρουτίνες που κάνουν την επίλυση του ιδιοπροβλήματος⁵⁰.

3.3.2 Εφαρμογή σε δομές κυματοδότησης με ανομοιογενείς διατομές και διαγράμματα διασποράς

Η παραπάνω θεωρία δεν αφορά αποκλειστικά κυματοδηγούς αλλά και άλλες δομές κυματοδότησης όπως μικροταινίες, διηλεκτρικές ταινίες (dielectric image lines) κ.α. Ακολούθως, παρουσιάζεται η εφαρμογή της σε δυο κοινότερες περιπτώσεις πρακτικού ενδιαφέροντος: σε ορθογωνικό ομογενή κυματοδηγό και σε μονόπλευρη τερματική γραμμή (unilateral finline).

Υπενθυμίζεται ότι στο πρόβλημα του ανομοιογενούς κυματοδηγού πρωταρχικός άγνωστος είναι η σταθερά διάδοσης η συχνότητα αποκοπής βρίσκεται λύνοντας το πρόβλημα σε ένα εύρος συχνοτήτων ώστε να βρεθεί η συχνότητα όπου η σταθερά διά-

⁴⁷ $1/4$ και 1 όταν το μητρώο είναι συμμετρικό και πρέπει να διατηρηθεί η συμμετρία μετά από την κλιμάκωση. Βλ. [18] σελ. 307.

⁴⁸ Σε ένα συμμετρικό μητρώο, η ελάχιστη ιδιοτιμή είναι μικρότερη ή ίση με το ελάχιστο διαγώνιο στοιχείο αντίστοιχα, η μέγιστη είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μέγιστο διαγώνιο στοιχείο. Ο βαθμός κατάστασης ενός μητρώου ορίζεται ως ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη ιδιοτιμή του. Επομένως, σε ένα θετικά ορισμένο μητρώο είναι τουλάχιστον όσο ο λόγος του μεγίστου προς το ελάχιστο στοιχείο της διαγωνίου. Ως εκ τούτου, ότι αυξάνει τη διαφορά μεγέθους των διαγώνιων στοιχείων, αυξάνει τον βαθμό κατάστασης. Βλ. [18] σελ. 304.

⁴⁹ Οι συχνότητες επίσης κλιμακώνονται ανάλογα.

⁵⁰ Στο Matlab η συνάρτηση eig κάνει μερική εξισορρόπηση αυτόματα. Στο LAPACK η ρουτίνα xGGEVX που λύνει γενικευμένα μη συμμετρικά ιδιοπροβλήματα κάνει επίσης και εξισορρόπηση των μητρώων.

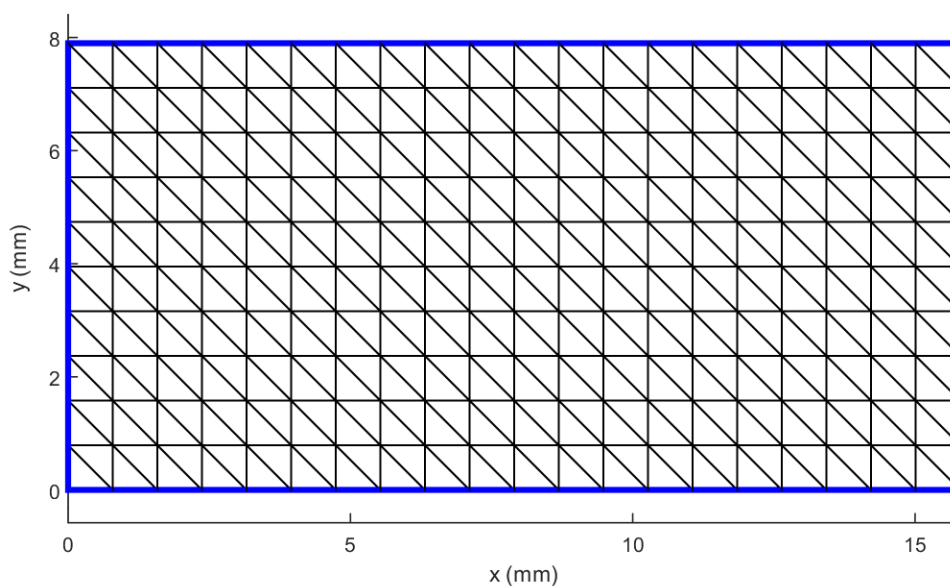
δοσης μηδενίζεται ή αλλάζει πρόσημο⁵¹.

Ειδικότερα, η επίλυση του ιδιοπροβλήματος δίνει τις ιδιοτιμές γ^2 , όπου $\gamma = \alpha + i\beta$ είναι η σταθερά διάδοσης, πραγματική ή μιγαδική, και $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ είναι η σταθερά απόσβεσης και φάσης αντίστοιχα. Ο φορμαλισμός του προβλήματος αφορά διάδοση κατά $+z$, βλ. (3.18), επομένως για τη διάδοση κρατείται η θετική τιμή του β . Αρνητικές ιδιοτιμές, $\gamma^2 < 0$, σημαίνει ότι το γ είναι αμιγώς φανταστικό, $\gamma = i\beta$, άρα υπάρχει διάδοση. Θετικές ιδιοτιμές, $\gamma^2 > 0$, σημαίνει ότι το γ είναι πραγματικό, θετικό, $\gamma = \alpha$, άρα το κύμα απορροφάται πλήρως (evanescent wave) και δεν υπάρχει διάδοση. Επίσης, είναι δυνατόν το γ^2 να είναι μιγαδικό, $\alpha > 0$ και $\beta > 0$.

Όλα αυτά δείχνονται στο διάγραμμα διασποράς όπου καταγράφεται η σταθερά διάδοσης⁵² για διάφορες συχνότητες και ρυθμούς· αυτό δείχνει συνοπτικά την απόκριση της δομής στη διάδοση των κυμάτων εντός αυτής. Σε όλες τις περιπτώσεις η επίλυση έγινε με προγράμματα ιδιοκατασκευασμένα στο Matlab.

3.3.2.1 Ορθογωνικός ομογενής κυματοδηγός

Στην περίπτωση του ορθογωνικού ομογενούς κυματοδηγού επιλέχτηκε πάλι το μοντέλο⁵³ WR-62, το οποίο έχει διατομή διαστάσεων 1.58 x 0.79 cm.



Σχήμα 3.26: Πλέγμα ορθογωνικού κυματοδηγού (διαμ. $a/20$).

⁵¹ Αντίθετα, στο πρόβλημα του ομογενούς κυματοδηγού, §3.2, πρωταρχικός άγνωστος είναι οι συχνότητες αποκοπής· η σταθερά διάδοσης σε δεδομένη συχνότητα βρίσκεται από την σχέση διασποράς, (3.13). Ειδικότερα, η επίλυση του ιδιοπροβλήματος δίνει τις ιδιοτιμές k_t^2 , όπου k_t είναι οι εγκάρσιοι κυματάρθμοι, οι οποίοι προξενούν αποκοπή, το δε k_t θεωρείται θετικό.

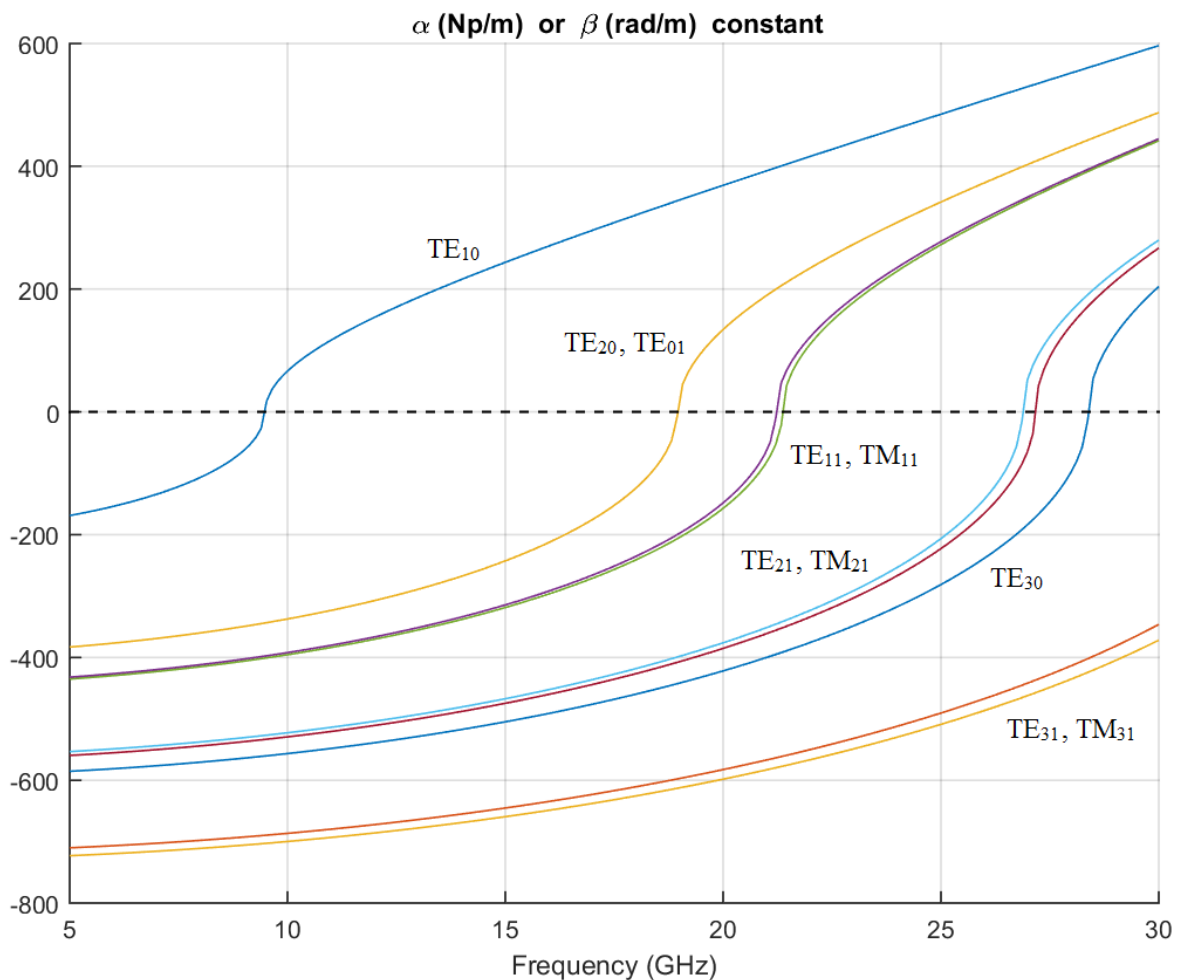
⁵² Αν και είναι εξ ορισμού $\alpha > 0$, στο διάγραμμα αυτό το α τίθεται με αρνητικό πρόσημο για να φαίνονται ευκολότερα οι περιοχές συχνοτήτων όπου υπάρχει διάδοση και πλήρης απορρόφηση (αποκοπή).

⁵³ Βλ. [21] σελ. 720.

Η επίλυση με τη FEM είχε τις εξής παραμέτρους και δεδομένα :

διαστάσεις $a \times b$ διατομής	: 1.58 x 0.79 cm,
διαμέριση σε κάθε πλευρά	: $a/20 = 0.079$ cm,
πλήθος τριγώνων	: 400,
πλήθος κόμβων	: 231,
πλήθος ακμών	: 630,
πλήθος αγνώστων	: 741,
εύρος συχνοτήτων επίλυσης	: 5 - 30 GHz, 200 βήματα.

Και στην περίπτωση αυτή, για την επιβολή των συνοριακών συνθηκών, εφαρμόστηκε η τεχνική εξαίρεσης των γνωστών τιμών από το σύστημα, καθώς εφαρμόζονται συνθήκες Dirichlet, αυτό μειώνει το συνολικό πλήθος των αγνώστων (τελικά 741 έναντι των αρχικών 231 + 630).



Σχήμα 3.27: Διάγραμμα διασποράς του ορθογωνικού κυματοδηγού WR-62.

Στο σχ. 3.27 δείχνεται το διάγραμμα διασποράς όπως λαμβάνεται με τη FEM. Η συχνότητα αποκοπής βρέθηκε 9.419 GHz, πολύ κοντά στην αναλυτική τιμή 9.486 GHz. Γνωρίζοντας προσεγγιστικά την συχνότητα αποκοπής, η ακρίβεια μπορεί να βελτιωθεί περαιτέρω λύνοντας το πρόβλημα σε ένα διάστημα γύρω από αυτή την τιμή με αρκούτως μικρό βήμα για τη συχνότητα.

Σε κάθε συχνότητα που έγινε επίλυση καταγράφηκαν οι 10 πρώτοι ρυθμοί⁵⁴. Όπως έχει αναφερθεί, ο φορμαλισμός του προβλήματος αφορά όλους ρυθμούς, χωρίς διαχωρισμό σε TM και TE⁵⁵. Εν προκειμένω, επειδή η αναλυτική λύση για τον ορθογωνικό ομογενή κυματοδηγό είναι γνωστή, οι ρυθμοί που λαμβάνονται με τη FEM μπορούν να ταυτοποιηθούν, ταξινομώνοντας τους κατά αύξουσα σειρά των ιδιοτιμών. Έτσι, στο σχ. 3.27, από πάνω προς τα κάτω, οι καμπύλες αφορούν τους ρυθμούς:

$$TE_{10}, TE_{20} = TE_{01}, TE_{11} = TM_{11}, TE_{21} = TM_{21}, TE_{30}, TE_{31} = TM_{31}.$$

Οι ισότητες στην παραπάνω ακολουθία δηλώνουν ότι οι ρυθμοί είναι εκφυλισμένοι⁵⁶. Στο σχ. 3.27 φαίνεται ότι η σύμπτωση των εκφυλισμένων TE-TE ρυθμών είναι τέλεια π.χ., το ζεύγος $TE_{20} = TE_{01}$ που δείχνεται με την 2η καμπύλη. Αντίθετα, οι ρυθμοί στα εκφυλισμένα ζεύγη TE-TM απέχουν κάπως περισσότερο π.χ., το ζεύγος $TE_{11} = TM_{11}$ που δείχνεται με την 3η και 4η καμπύλη. Αυτό δικαιολογείται: οι εκφυλισμένοι TE-TE ρυθμοί⁵⁷ έχουν καλύτερη σύμπτωση διότι υπολογίζονται μόνον με στοιχεία ακμής αντίθετα, σε έναν TE-TM εκφυλισμό η σύμπτωση είναι μικρότερη διότι υπολογίζονται με διαφορετικές βάσεις (στοιχεία ακμής έναντι στοιχείων ακμής και κομβικών στοιχείων), κι αυτό προξενεί μεγαλύτερο σφάλμα.

Γενικά, με τις (3.26) και (3.27) οι TM ρυθμοί είναι πιο επιρρεπείς σε σφάλματα από τους TE διότι η λύση δίνει και τις τρεις ηλεκτρικές συνιστώσες, οι οποίες υπολογίζονται με διαφορετικές βάσεις (η e_t με στοιχεία ακμής, η e_z με κομβικά στοιχεία). Αντίθετα, οι TE ρυθμοί έχουν μόνον την συνιστώσα e_t , για την οποία χρησιμοποιούνται μόνον

⁵⁴ Προφανώς οι ιδιοτιμές και αντίστοιχοι ρυθμοί είναι όσοι το μέγεθος του συστήματος (και θεωρητικά άπειροι) αλλά για το διάγραμμα διασποράς αρκούν οι πρώτοι καθώς αυτοί είναι οι σημαντικότεροι.

⁵⁵ Η διάκρισή τους γίνεται ανάλογα με το αν το εξεταζόμενο ιδιοδιάνυσμα έχει μόνον την συνιστώσα e_t , οπότε ο ρυθμός είναι TE ή αν έχει επιπλέον και την e_z , οπότε είναι TM (ή υβριδικός).

⁵⁶ Υπενθυμίζεται ότι αυτό σημαίνει ισότητα ιδιοτιμών, δηλαδή ότι αυτοί οι ρυθμοί έχουν την ίδια ιδιοτιμή. Δεν σημαίνει ότι ταυτίζονται τα ιδιοδιανύσματα. Η σχέση που δίνει τις συχνότητες αποκοπής σε ορθογωνικό ομογενή κυματοδηγό είναι κατά τα γνωστά για τους TE ρυθμούς η

$$(f_c)_{mn} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{με } |m| + |n| \neq 0$$

και για τους TM ρυθμούς η

$$(f_c)_{mn} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2},$$

$$m = 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

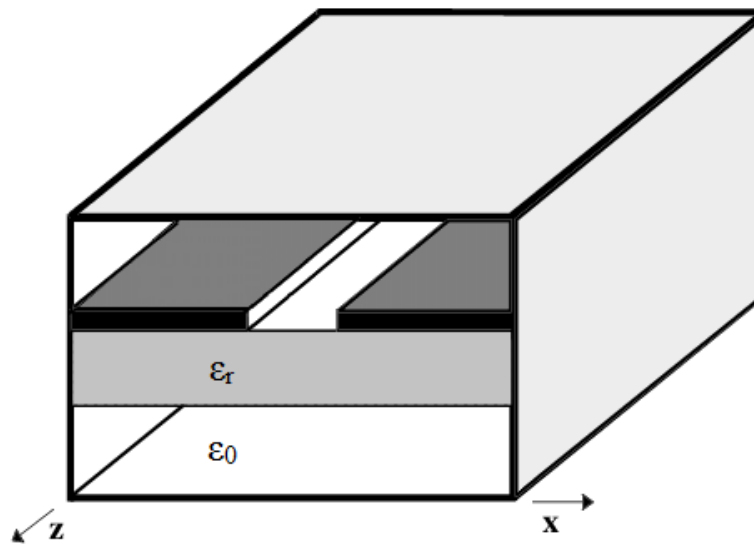
Στο εξεταζόμενο πρόβλημα είναι $b = a/2$, οπότε εκ των σχέσεων αυτών προκύπτουν οι παραπάνω εκφυλισμοί.

⁵⁷ Υπενθυμίζεται ότι αφορούν την συνιστώσα e_t .

στοιχεία ακμής. Ως εκ τούτου, οι λύσεις με τη FEM για τους TM ρυθμούς διαφέρουν περισσότερο από τις αναλυτικές τους τιμές απ' ότι αυτές των TE ρυθμών⁵⁸.

3.3.2.2 Μονόπλευρη τερματική γραμμή (unilateral finline)

Η μονόπλευρη τερματική γραμμή είναι ένας κυματοδηγός που εσωτερικά περιέχει δυο αγωγίμες ταινίες, οι οποίες είναι σε επαφή με τα τοιχώματα και επικάθονται σε ένα διηλεκτρικό στρώμα. Το διηλεκτρικό καθιστά την διάταξη ανομοιογενή, με αποτέλεσμα να εμφανίζονται υβριδικοί ρυθμοί.

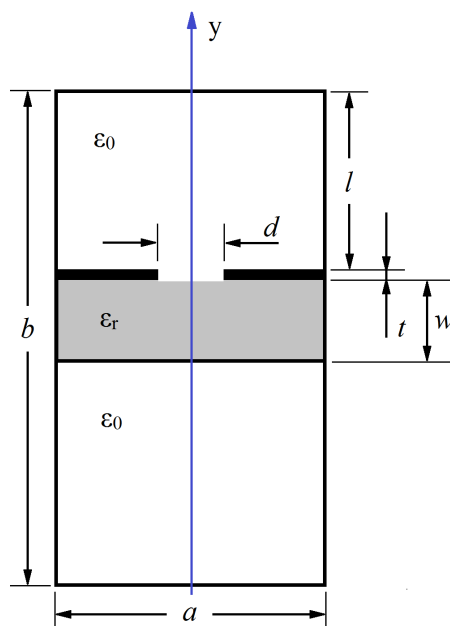


Σχήμα 3.28: Μονόπλευρη τερματική γραμμή.

Εν προκειμένω υιοθετείται η γεωμετρία που δείχνεται στο σχ. 3.29, όπου διαστάσεις είναι οι ακόλουθες:

- a : 3.556 mm,
- b : 7.112 mm,
- d : 1.1 mm,
- l : 3.556 mm,
- t : 0.0254 mm,
- w : 0.254 mm,
- ϵ_r : 2.22

⁵⁸ Αν αντί των (3.26) και (3.27) είχαν χρησιμοποιηθεί αντίστοιχες με το μαγνητικό πεδίο, η κατάσταση θα ήταν αντίστροφη: πιο επιρρεπείς στα σφάλματα θα ήταν οι TE ρυθμοί.



Σχήμα 3.29: Γεωμετρία μονόπλευρης τερματικής γραμμής.

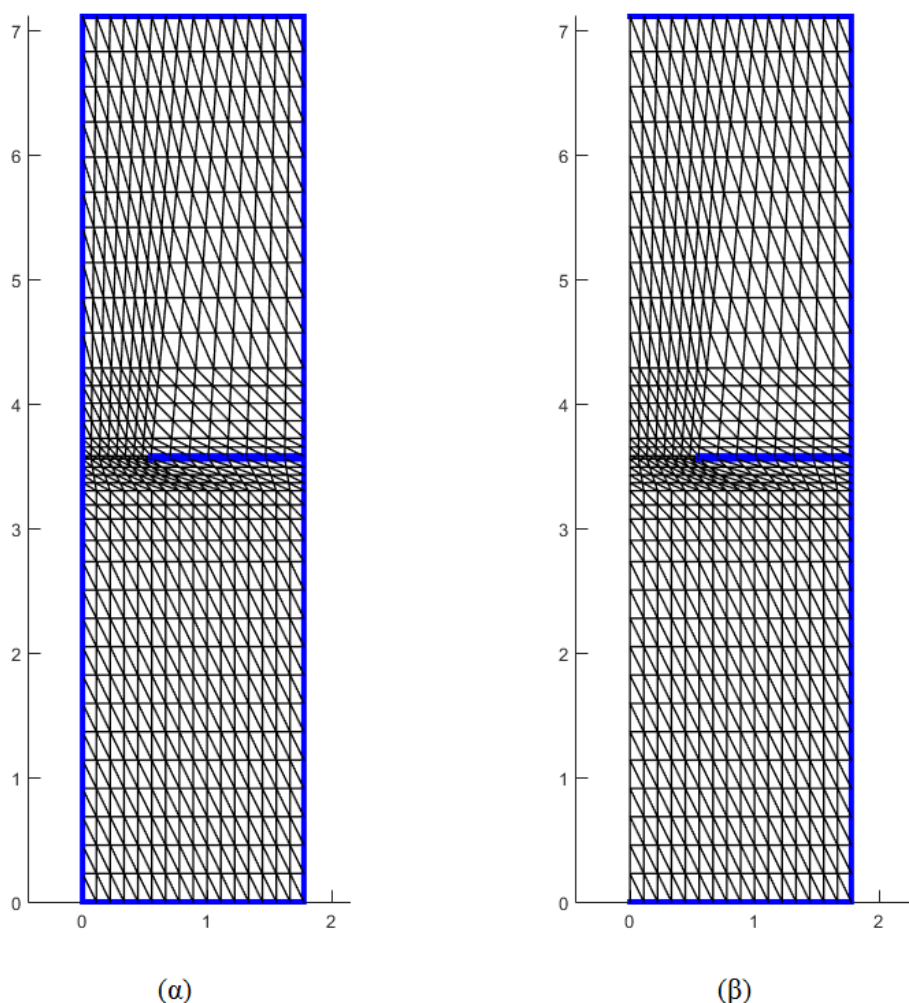
Η μοντελοποίηση αυτής της διάταξης με τη FEM δεν είναι τελείως τετριμμένη. Για την κατασκευή του διαγράμματος διασποράς θεωρείται το εύρος 10 - 90 GHz με 320 βήματα. Καταρχήν πρέπει να επιλεγεί το μέγεθος των στοιχείων που εξασφαλίζει την ακρίβεια της λύσης. Η μέγιστη συχνότητα, 90 GHz, αντιστοιχεί σε μήκος κύματος 3.331 mm⁵⁹ επομένως, λαμβάνοντας υπόψη και το διηλεκτρικό, η μέγιστη ακμή των στοιχείων πρέπει να είναι τουλάχιστον $10\sqrt{\epsilon_r}$ φορές μικρότερη⁵⁹, ήτοι το πολύ 0.23 mm περίπου. Για τις δεδομένες διαστάσεις, αυτό καταλήγει σε ένα μεγάλο γραμμικό σύστημα που σε συνδυασμό με το πλήθος των επιλύσεων καθιστά το πρόβλημα εξαιρετικά χρονοβόρο σε συνήθειες υπολογιστές⁶⁰.

Ένας τρόπος να καταστεί το πρόβλημα χρονικά διαχειρίσιμο είναι να χρησιμοποιηθεί η συμμετρία της διατομής. Συγκεκριμένα, αντί να λυθεί το πρόβλημα για την πλήρη διατομή, μπορεί να λυθεί δυο φορές για την ημίσεια διατομή. Στο αποκομμένο τμήμα της διατομής, στον άξονα συμμετρίας, την μια φορά τίθεται pec και βρίσκονται οι μισοί ρυθμοί, την άλλη τίθεται pmc⁶¹ και βρίσκονται οι άλλοι μισοί ρυθμοί. Με αυτόν τον τρόπο, τα μητρώα **A** και **B** της (3.48) έχουν μέγεθος λιγότερο από το μισό απ' ό τι της πλήρους διατομής⁶¹ έτσι, για κάθε συχνότητα που επιλύεται το ιδιοπρόβλημα εξοικονομείται μεγάλος υπολογιστικός χρόνος. Το κάθε ημίσειο πρόβλημα λύνεται πολύ γοργότερα από το πλήρες διότι το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα είναι πολύ μικρότερο, άρα η λύση του συνολικού προβλήματος λαμβάνεται γρηγορότερα ($2 \frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ έναντι $n \times n$).

⁵⁹ Βλ. κεφ. 2 παρατ. 30.

⁶⁰ Για τα συγκεκριμένα δεδομένα, το σύστημα έχει 26037 αγνώστους και πρέπει να λυθεί 320 φορές ανάλογα με τον υπολογιστή η επίλυση μπορεί να διαρκέσει και μέρες.

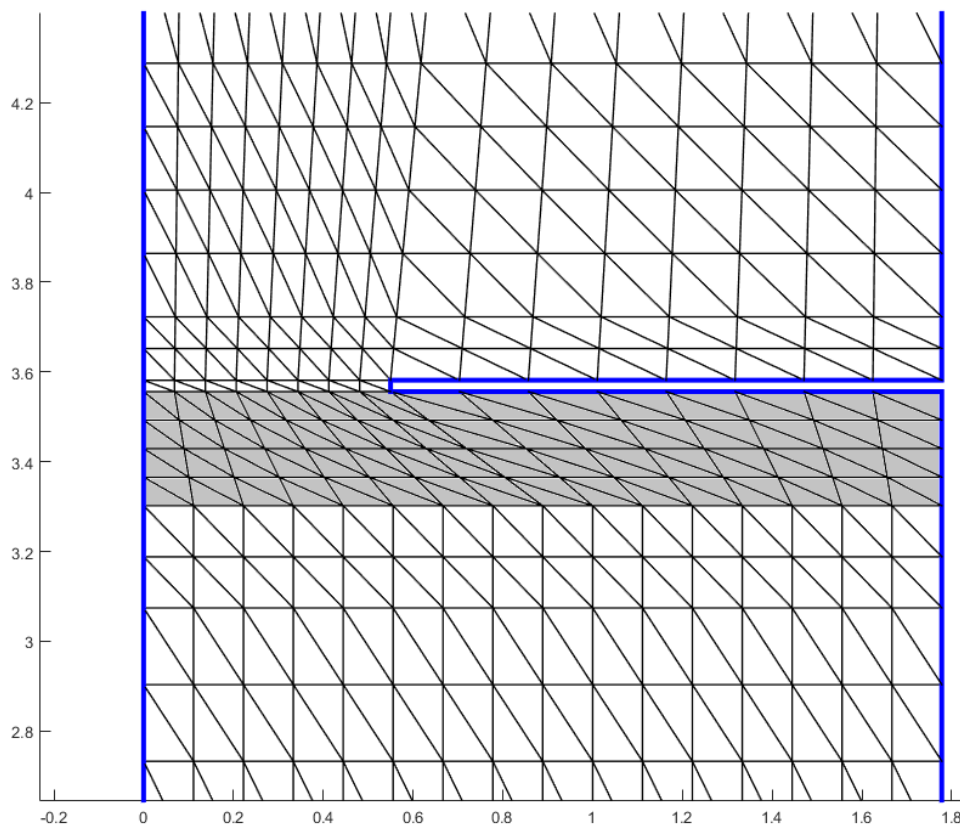
⁶¹ Υπενθυμίζεται ότι για το ηλεκτρικό πεδίο η χρήση pmc ισοδυναμεί με επιβολή ομογενών συνθηκών Neumann, βλ. (3.3). Για τους κόμβους με αυτή τη συνθήκη δεν χρειάζεται καμιά μέριμνα διότι επ' αυτών άγνωστο είναι το ηλεκτρικό πεδίο (περιλαμβάνεται στους αγνώστους), η δε κλίση του στο pmc είναι μηδέν. Βλ. §3.2.



Σχήμα 3.30: Το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων της μονόπλευρης τερματικής γραμμής για τη μισή διατομή. Η συνοριακή συνθήκη στον άξονα συμμετρίας είναι (α) pec, (β) pmc.

Το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων της διατομής, συγκεκριμένα το σύνορό της, απαιτεί προσοχή. Βασική συνθήκη για την επίλυση ενός συνοριακού προβλήματος με τη FEM είναι το σύνορο του χωρίου να είναι τύπου *Lipchitz*⁶². Για την εξεταζόμενη γεωμετρία, αυτό σημαίνει ότι η μεταλλική ταινία που συνδέεται με τα τοιχώματα δεν μπορεί να παρασταθεί απλοϊκά με ένα ευθύγραμμο τμήμα προσαρτημένο στο τοίχωμα διότι τότε το σύνορο δεν θα είναι Lipschitz⁶². Το σωστό είναι να αποτελεί εγγενώς τμήμα του συνόρου, όπως δείχνεται στο σχ. 3.31. Μόνον έτσι εξασφαλίζεται ότι μαθηματικά το πρόβλημα έχει λύση.

⁶² Ο αυστηρός ορισμός του συνόρου Lipschitz είναι πολύ τεχνικός και δεν θα επιχειρηθεί εδώ. Πρακτικά, ένα σύνορο είναι Lipschitz όταν τοπικά μπορεί να περιγραφεί από μια συνάρτηση με συνέχεια Lipschitz και το χωρίο που περικλείει βρίσκεται μόνον στη μια μεριά της καμπύλης. Η συνέχεια Lipschitz είναι ένας ορισμός συνέχειας ισχυρότερος από τη συνήθη ομοιόμορφη συνέχεια. Βλ. [24] σελ. 47 και 44.



Σχήμα 3.31: Λεπτομέρεια στο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων της μονόπλευρης τερματικής γραμμής.

Εν τέλει, το διάγραμμα διασποράς που λαμβάνεται με τη FEM για τις ημίσειες διατομές του σχ. 3.30, δείχνεται στα σχ. 3.32 και 3.33. Στα διαγράμματα αυτά δείχνονται οι καμπύλες μόνον για τις πραγματικές τιμές του γ^2 , όπου κατά τα γνωστά είναι είτε $\gamma = i\beta$, $\beta > 0$ και υπάρχει διάδοση, είτε $\gamma = \alpha > 0$ και γίνεται αποκοπή⁶³.

Στο εξεταζόμενο πρόβλημα όμως εμφανίζονται και μιγαδικές ιδιοτιμές γ^2 , όπου $\gamma = \alpha + i\beta$ με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Αυτό συμβαίνει οπωσδήποτε όταν το διηλεκτρικό έχει απώλειες, οπότε τα δυο μητρώα \mathbf{A} και \mathbf{B} , βλ. (3.48), είναι μιγαδικά. Στην περίπτωση αυτή οι μιγαδικές ιδιοτιμές δεν είναι συζυγείς μεταξύ τους και το α δηλώνει απορρόφηση λόγω απωλειών. Αν δεν υπάρχουν απώλειες, όπως στο εξεταζόμενο πρόβλημα, τότε οι τυχόν μιγαδικές ιδιοτιμές είναι συζυγείς μεταξύ τους και το α δηλώνει απορρόφηση λόγω αποκοπής. Τα διαγράμματα διασποράς των μιγαδικών ιδιοτιμών δείχνονται στα σχ. 3.34 και 3.35. Οι καμπύλες των μιγαδικών ιδιοτιμών εμπέκονται με τις πραγματικές και έχουν άλματα· μια πραγματική εκφυλισμένη καμπύλη μπορεί να μετατρέπεται σε μιγαδική (με πραγματικό και φανταστικό μέρος) και μετά πάλι σε εκφυλισμένη πραγματική.

⁶³ Υπενθυμίζεται η παρατ. 52 για το πρόσημο του α στο διάγραμμα.

Η φυσική ερμηνεία των μιγαδικών ιδιοτιμών (όταν δεν υπάρχουν απώλειες) είναι ότι οφείλονται στη σύζευξη ενέργειας των ρυθμών. Εν προκειμένω, οι δυο μεταλλικές ταινίες δρουν ως πηγή περίθλασης του πεδίου στο εσωτερικό του κυματοδηγού και προξενούν σύζευξη ενέργειας δύο εκφυλισμένων ρυθμών, ενός άρτιου με έναν περιττό, βλ. [23]. Η λεπτομερής μελέτη των μιγαδικών καμπύλων διασποράς ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος κειμένου και δεν θα επιχειρηθεί εδώ.

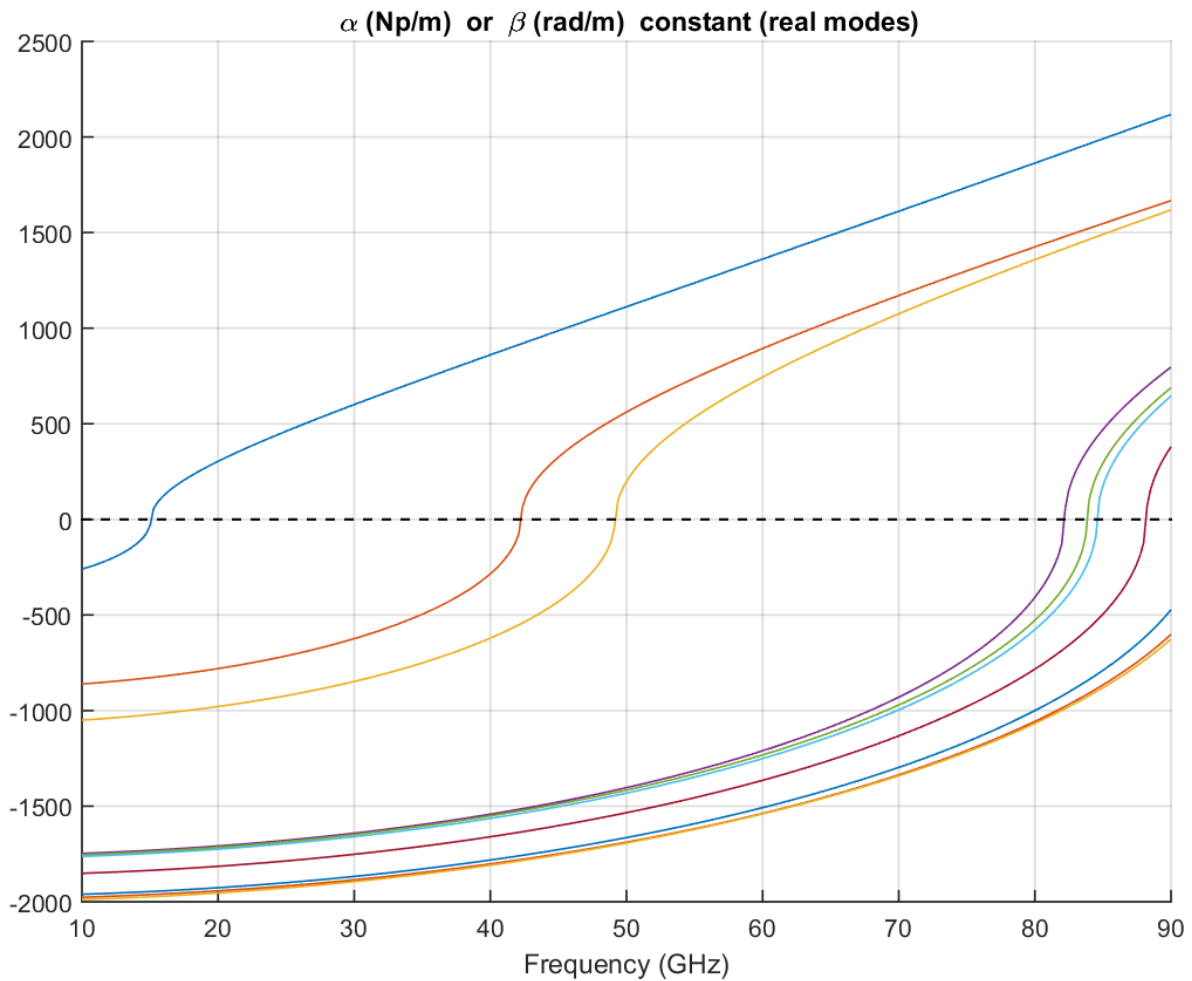
Η διάταξη αυτή, με τις παραπάνω διαστάσεις, μελετάται μια εξειδικευμένη μέθοδο στην [23]. Ακολουθώς συγκρίνονται οι συχνότητες αποκοπής μερικών ρυθμών που βρέθηκαν με τη FEM με τις αντίστοιχες που αναφέρονται στην [23], υπολογισμένες με άλλη τεχνική.

# ρυθμός ¹	FEM	[23]	διαφορά ²
1	15.561	15.141	-2.7%
2	42.123	42.225	0.2%
3	49.699	49.247	-0.9%
4	82.397	82.100	-0.3%
5	84.029	83.855	-0.2%
6	84.370	84.608	0.2%
7	91.281	88.119	-3.5%

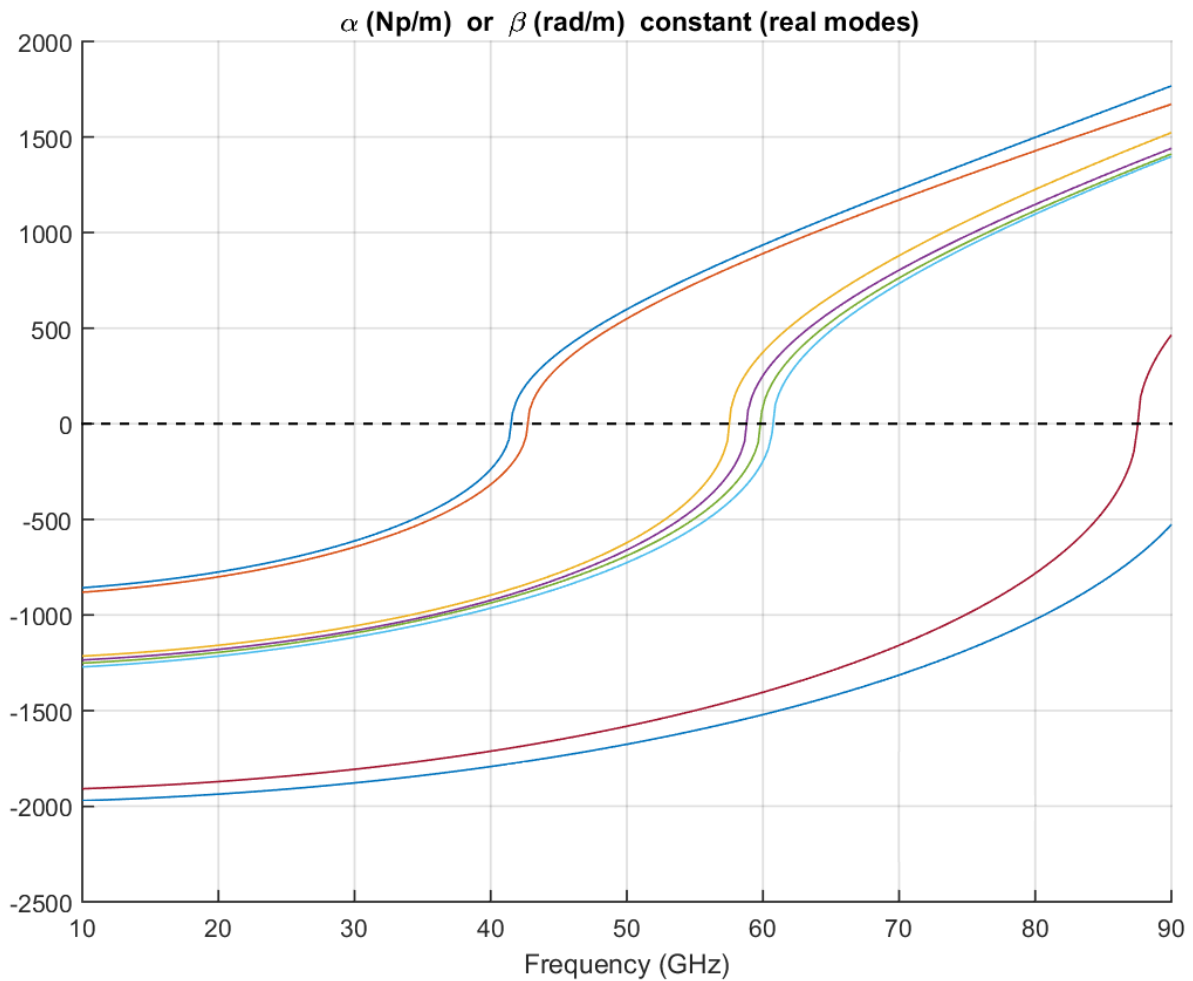
Η συμφωνία είναι άριστη εκτός από την πρώτη και την τελευταία τιμή. Ειδικά για την τελευταία, υπενθυμίζεται ότι το μέγιστο μέγεθος που επιλέχθηκε για τα στοιχεία του καννάβου εξασφαλίζει την ακρίβεια έως τα 90 GHz.

¹ Είναι μόνον οι ρυθμοί της ημίσειας διατομής με pec, σχ. 3.30α.

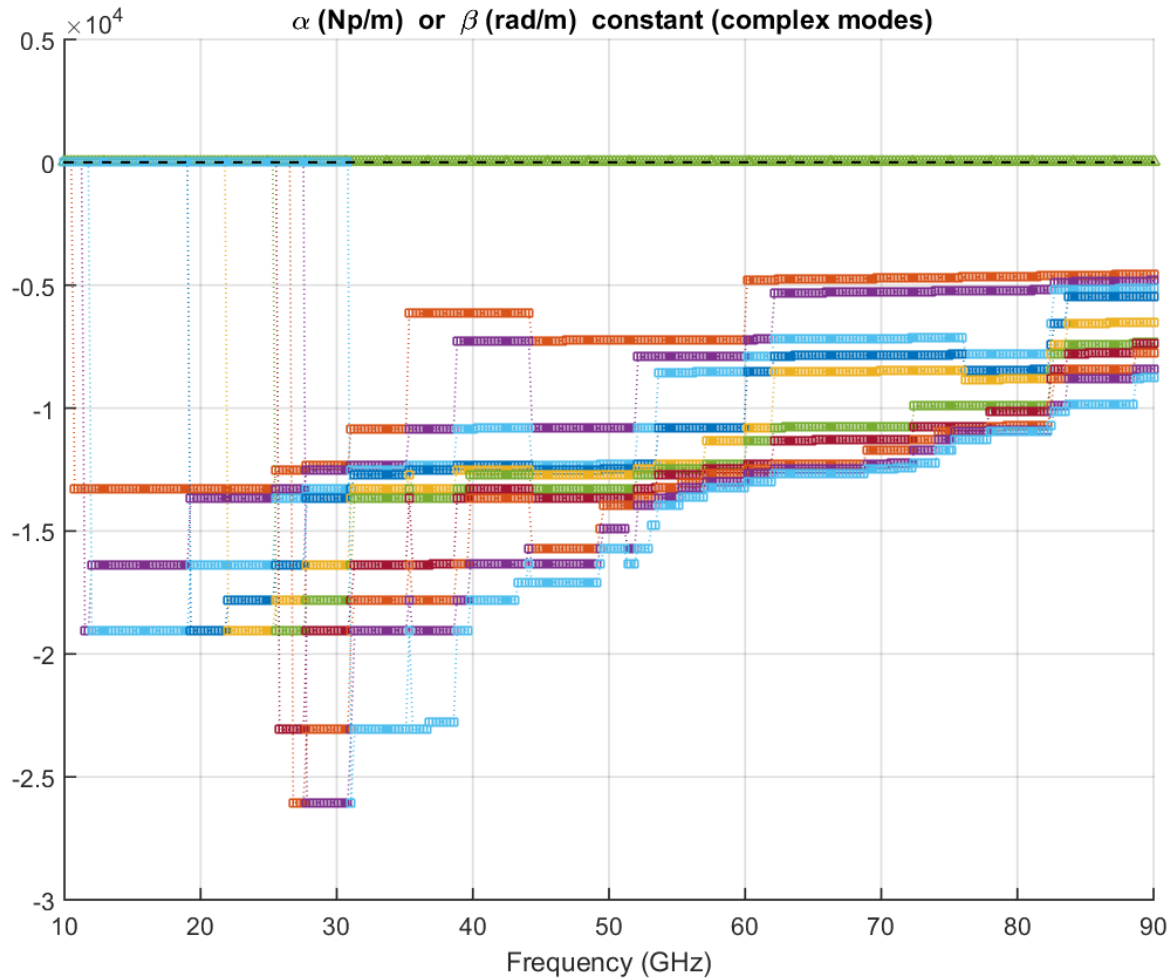
² Ακριβής τιμή θεωρείται εκείνη της [23].



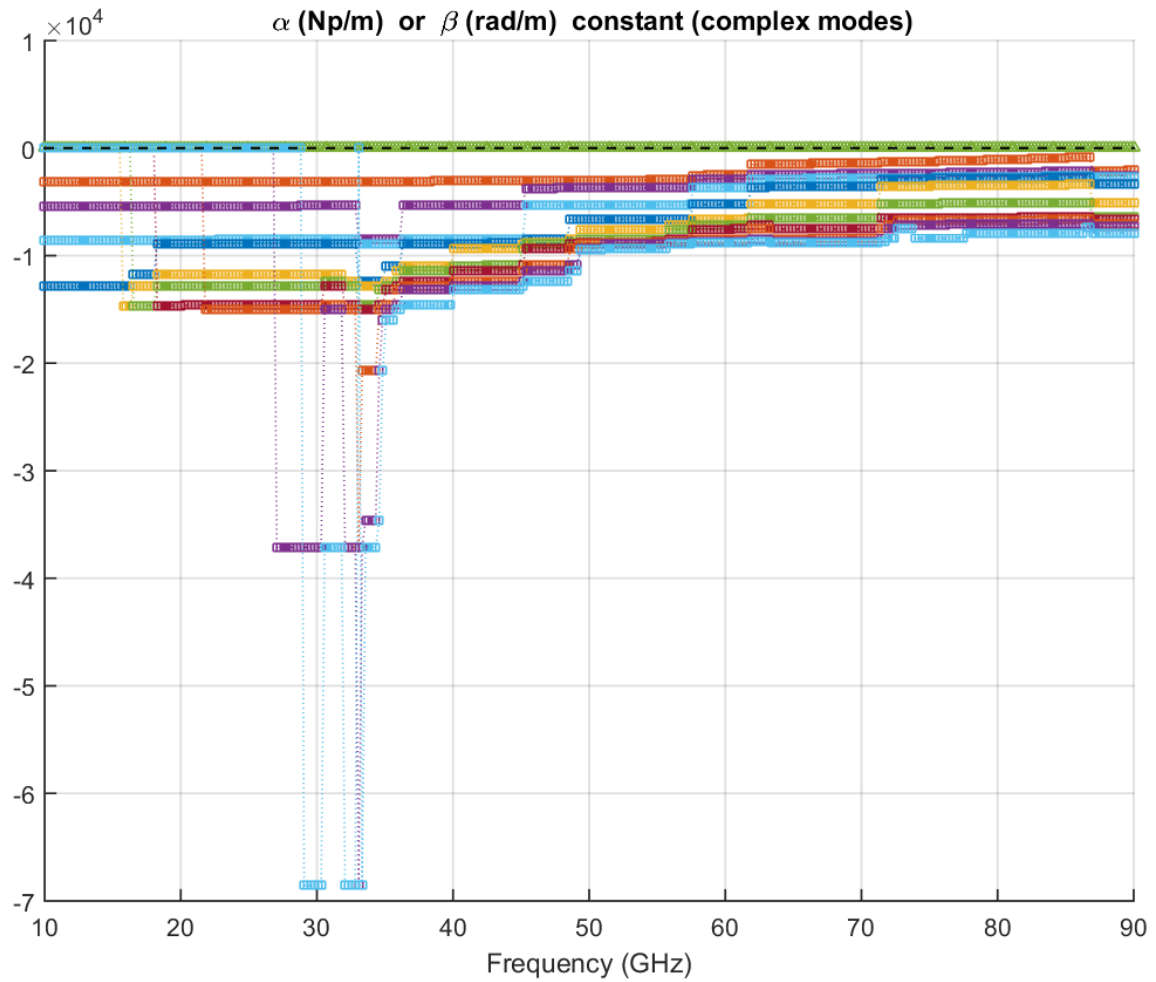
Σχήμα 3.32: Διάγραμμα διασποράς της μονόπλευρης τερματικής γραμμής του σχ. 3.30α (ημίσεια διατομή, res , γ^2 πραγματικό).



Σχήμα 3.33: Διάγραμμα διασποράς της μονόπλευρης τερματικής γραμμής του σχ. 3.30β (ημίσεια διατομή, ρ_{mc} , γ^2 πραγματικό).



Σχήμα 3.34: Διάγραμμα διασποράς της μονόπλευρης τερματικής γραμμής του σχ. 3.30α (ημίσεια διατομή, pec, γ^2 μιγαδικό).



Σχήμα 3.35: Διάγραμμα διασποράς της μονόπλευρης τερματικής γραμμής του σχ. 3.30β (ημίσεια διατομή, pnc, γ^2 μιγαδικό).

Αναφορές

- [1] *Modern Electrodynamics*,
A. Zangwill,
Cambridge University Press, 2012.
- [2] *The Mathematical Theory of Finite Element Methods, 3rd ed.*,
R. C. Brenner, L. R. Scott, Springer, 2008.
- [3] *Delaunay Triangulation and Meshing. Application to Finite Elements*,
P. L. George, H. Borouchaki, Hermes, 1998.
- [4] *Geometric Integration Theory*,
H. Whitney, Princeton University Press, 1957.
- [5] “Mixed finite elements in R^3 ”,
J. C. Nedelec, Numer. Math., vol. 35, no. 3, pp. 315–341, 1980.
- [6] *What is a good linear finite element ?
Interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures*,
J. R. Shewchuk, Technical Report, University of California at Berkeley, 2002.
- [7] *Boundary Elements. An Introductory Course, 2nd ed.*,
C. A. Brebbia, J. Dominguez, WIT Press, 1992.
- [8] *Computational Fluid Dynamics, 2nd ed.*,
T. J. Chung, Cambridge University Press, 2010.
- [9] *Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 2nd ed.*,
Y. Saad, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [10] *PML for Computational Electromagnetics*,
J. P. Berenger, Morgan & Claypool, 2007.
- [11] *Introduction to Numerical Analysis, 3rd ed.*,
J. Stoer, R. Burlisch, Springer, 2002.
- [12] *Computational Electrodynamics:
The Finite-Difference Time-Domain Method, 3rd ed.*,
A. Taflove and S. Hagness, Artech House, 2005.

- [13] *The Finite Element Method in Electromagnetics, 2nd ed.*,
J. Jin, Wiley, 2002.
- [14] “*Combined finite element-modal solution of three dimensional eddy current problems*”,
S. H. Wong, Z. J. Cendes, IEEE Trans. Magnetics, 24(6), November 1988.
- [15] “*Edge elements and what they can do for you*”,
J. P. Webb, IEEE Trans. Magnetics, 29:1460-1465, 1993.
- [16] *Multigrid FEM for Electromagnetic Field Modeling*,
Y. Zbu, A. Cangellaris, IEEE Press, 2006.
- [17] *Finite Elements for electrical engineers, 3rd ed.*,
P. Silvester, R. Ferrari, Cambridge Univeristy Press, 1996.
- [18] *Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων, том. I*,
Γ. Τσαμασφύρος, Συμμετρία, 2005.
- [19] *Lectures on Electromagnetism, 2nd ed.*,
Ashok Das, World Scientific, 2013.
- [20] *Advanced Engineering Electromagnetics, 2nd ed.*,
C. Balanis, Wiley & Sons, 2012.
- [21] *Microwave Engineering, 4th ed.*,
D. Pozar, Wiley & Sons, 2012.
- [22] *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, C. Johnson, Cambridge Univeristy Press, 1987.
- [23] “*Eigenvalue Approach to the Efficient Determination of Hybrid and Complex Spectrum of Inhomogeneous Closed Waveguide*”,
T. Rozzi, L. Pierantoni, M. Farina, IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, vol. 45, pp. 345-353, March 1997.
- [24] *Nonlinear Differential Equations*,
S. Fucik, A. Kufner, Elsevier, 1980.
- [25] *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics*,
E. Onate, Springer, 2009.