



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ

**Μοντελοποίηση, προσομοίωση και ανάλυση ευαισθησίας
μετρητικής διάταξης εντοπισμού και παρακολούθησης ρωγμών σε
ελάσματα με την μέθοδο πτώσης ηλεκτρικού δυναμικού (DCPD)**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Ευάγγελου Σκρινή

Επιβλέπων: Βασίλειος Σπιτάς
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2020

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι ο προσδιορισμός των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των ρωγμών σε ελάσματα και η παρακολούθηση αυτών σε πραγματικό χρόνο με την μέθοδο πτώσης ηλεκτρικού δυναμικού (DCPD). Για να επιτευχθεί αυτό, γίνεται αρχικά μία ευρεία μελέτη σε θέματα της Μηχανικής των Θραύσεων και τις επιδράσεις των ρωγμών στις ιδιότητες των υλικών. Ύστερα από την κατανόηση του προβλήματος γίνεται αντιληπτή η αναγκαιότητα προσδιορισμού του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που εμφανίζεται στο δοκίμιο λόγω της εφαρμογής παλμών ρεύματος σε αυτό, αλλά και η συσχέτισή του με την ύπαρξη ρωγμών. Η ανάλυση αυτή οδηγεί στην δημιουργία ενός αναλυτικού μοντέλου προσομοίωσης της μεθόδου DCPD, μέσω της επίλυσης των εξισώσεων του Maxwell εντός του ελάσματος προς δοκιμή. Τα προβλήματα πολυπλοκότητας λόγω των πολλών παραμέτρων και το υπολογιστικό κόστος, που συνεπάγεται η αναλυτική μοντελοποίηση της μεθόδου, οδηγούν στην ανάγκη αριθμητικής προσέγγισης του προβλήματος και τη χρήση του εμπορικού λογισμικού MAXWELL. Μετά από την επίλυση του ευθέως προβλήματος έγινε εντοπισμός των υπολοίπων στοιχείων, πέραν των ίδιων των ρωγμών, που ενδέχεται να επηρεάσουν την μορφή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου έτσι ώστε να είναι δυνατή η απομόνωση των χρήσιμων δεδομένων στην εύρεση λύσης του αντίστροφου. Ωστόσο σε αυτή την εφαρμογή της DCPD όπου η θέση της ρωγμής δεν είναι γνωστή αλλά ζητείται, απαιτείται η ανάπτυξη κατάλληλης μετρητικής διάταξης και η επιλογή των κατάλληλων μετρητικών οργάνων. Η διαδικασία αυτή έγινε με κριτήριο την απαιτούμενη ακρίβεια και την ευαισθησία των μετρήσεων σε πραγματικό χρόνο, την ευρωστία ως προς παραμέτρους όπως η υγρασία και η θερμοκρασία αλλά και την εξασφάλιση αρκετών δεδομένων για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος. Τέλος, αναπτύχθηκε και ένα μοντέλο για τον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών της θέσης, του μήκους και του προσανατολισμού των ρωγμών σε κάθε έλασμα με την απαιτούμενη ακρίβεια, χρησιμοποιώντας τις τιμές των μετρητικών οργάνων όπως προέκυψαν από την προσομοίωση.

Abstract

The purpose of this thesis is to determine the geometrical characteristics of cracks on laminates and to monitor them in real-time using the Direct Current Potential Drop method (DCPD). For this purpose, an extensive study involving Fracture Mechanics and the effects of cracks on the properties of materials is initially carried out. Understanding the multiple aspects of the problem, it is deemed necessary to determine the electromagnetic field that appears in the specimen due to the current pulses imposed to it, as well as its correlation with the existence of cracks. This analysis led to the creation of a detailed model simulation of the DCPD method, by solving the Maxwell equations inside the test specimen. However, the complexity problems due to the number of parameters and computational costs, due to the analytical solution of the governing equations of the method, led to the development of a numerical approximation of the problem and the use of the commercial FEA software MAXWELL(Ansys). After solving the straightforward problem, the remaining factors, other than cracks, that may affect the shape of the electromagnetic field were identified so that we can isolate the useful data for the inverse solution. However, in this application of DCPD where the location of the crack is not known but it is required, the development of a suitable experimental layout and the choice of measuring instruments were required. Its selection was based on the required accuracy and sensitivity of the measurements in real time, robustness to parameters such as humidity and temperature, as well as the need of sufficient data to solve the inverse problem. Finally, a stochastic model was developed to determine the location, length, and orientation of cracks in each laminate, with the precision required using the simulated values.

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που με βοήθησαν στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Ευχαριστώ όλο το διδακτικό προσωπικό του ΕΜΠ που με την εργασία του συνέβαλε στην ανάπτυξη του γνωστικού μου πεδίου σε όλη την πορεία των προπτυχιακών μου σπουδών και την καλλιέργεια του τρόπου σκέψης μου.

Ιδιαίτερα, όμως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, τον κύριο Βασίλειο Σπιτά, για την ανεκτίμητη συνεισφορά και την καθοδήγηση του στην εκπόνησή της, αλλά, κυρίως, για την συνεχή του προσπάθεια να μου μεταδώσει τις γνώσεις και την νοοτροπία που χρειάζεται να έχει ένας απόφοιτος μηχανικός. Η βοήθεια αυτή είχε καθοριστική επίδραση στην εξέλιξή μου και για αυτό του χρωστώ ευγνωμοσύνη.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους και συμφοιτητές που ήμασταν συνοδοιπόροι στο ταξίδι αυτό και οι οποίοι μου χάρισαν αναμνήσεις που θα με συνοδεύουν όλη μου την ζωή .

Τέλος, θέλω να αναφερθώ στην αγάπη και στην υποστήριξη που είχα από τα όλα μέλη της οικογένειάς μου και κυρίως τους γονείς μου, που με τους κόπους και τις θυσίες τους συνέβαλλαν στην ολοκλήρωση των σπουδών μου αλλά και στην διαπαιδαγώγησή μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη	3
Abstract	5
Ευχαριστίες	7
1. Εισαγωγή.....	11
2. Μηχανική των Ρωγμών	14
2.1. Θεωρία Ελαστικότητας	14
2.2. Μηχανική των Θραύσεων	16
2.3. Συντελεστές Έντασης των Τάσεων (SIF)	21
2.4. Ενεργειακή Προσέγγιση Εκκίνησης Ρωγμής.....	23
2.5. Κριτήριο αστοχίας.....	24
3. Μοντελοποίηση Μεθόδου Πτώσης Δυναμικού Συνεχούς Ρεύματος (DCPD).....	29
3.1 Μέθοδοι Πτώσης Δυναμικού	29
3.2 Αναλυτική Μοντελοποίηση Μεθόδου DCPD.....	31
3.3 Μοντελοποίηση της Μεθόδου DCPD σε περιβάλλον Πεπερασμένων Στοχείων	41
4. Αριθμητικό Μοντέλο Πρόβλεψης Γεωμετρικών Αποκλίσεων	42
4.1. Παράγοντες Διαμόρφωσης του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου	42
4.2 Συσχετισμός Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου και Ρωγμής.....	47
5. Συμπεράσματα	59
6. Βιβλιογραφία.....	60
Παράρτημα Ι	61
Παράρτημα ΙΙ.....	62
Κώδικας αναλυτικής προσομοίωσης μεθόδου DCPD με τη μέθοδο των Κατοπτρικών Πηγών	62
Κώδικας αναλυτικής προσομοίωσης μεθόδου DCPD με τον Μετασχηματισμό Schwarz-Cristoffel.....	75
Κώδικας αριθμητικής προσέγγισης της γεωμετρίας ρωγμών	77

1. Εισαγωγή

Η Βιομηχανική επανάσταση του 19^{ου} αιώνα αποτελεί ένα σύνθετο σύστημα ραγδαίων μεταβολών και ανακατατάξεων, τόσο κοινωνικών αλλά και τεχνολογικών. Σιγά σιγά μέσα στα επόμενα διακόσια χρόνια η κοινωνία αναπτύχθηκε ραγδαία στηριζόμενη στις μηχανές, οι οποίες έχουν κυριαρχήσει στις περισσότερες πτυχές της ζωής των ανθρώπων. Η αγροτική παραγωγή, η μαζική παραγωγή αγαθών, οι μετακινήσεις μέχρι και η ιατρική σήμερα είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με αυτές. Επιπλέον, η αντικατάσταση της δύναμης των ανθρώπων με αυτή της μηχανής σε θέματα κατεργασιών επέτρεψε την δημιουργία μεγάλων μεταλλικών κατασκευών και συναρμολογημάτων. Ο συνδυασμός αυτών των φαινομένων έδωσε έναυσμα στην ταχεία ανάπτυξη του διεπιστημονικού πεδίου της Επιστήμης και Τεχνολογίας των Υλικών, με σκοπό την διερεύνηση των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ της δομής και των ιδιοτήτων των υλικών, αλλά και την δημιουργία υλικών με συγκεκριμένες ιδιότητες.

Οι μηχανές ή οποιαδήποτε άλλη σωστά σχεδιασμένη κατασκευή θα πρέπει να μπορούν να εκτελέσουν μία ή περισσότερες λειτουργίες, εξυπηρετώντας τον σκοπό για τον οποίο δημιουργήθηκαν, και έπειτα να αστοχήσουν με ένα συγκεκριμένο τρόπο και σε ένα προσδιορισμένο χρόνο, αν δεν αντικατασταθούν. Με τον όρο αστοχία δοκιμίου (failure) περιγράφεται η αδυναμία του να συνεχίσει να επιτελεί ομαλά, αποτελεσματικά και με ασφάλεια την λειτουργία του. Η επιλογή αυτή του τρόπου και του χρόνου της αστοχίας των στοιχείων μιας κατασκευής είναι μια καίρια παράμετρος σχεδιασμού, άμεσα συσχετιζόμενη με την ασφάλεια, την οποία ο μηχανικός πρέπει να λάβει σοβαρά υπόψιν του. Η μηχανική συμπεριφορά των υλικών δεν είναι ένα αντικείμενο που μπορεί να μελετηθεί και να αναλυθεί μεμονωμένα. Πρόκειται για έναν συνδυασμό γνώσεων και μεθόδων από διαφορετικούς κλάδους της επιστήμης του μηχανολόγου καθώς και για ένα συνδυασμό διαφορετικών προσεγγίσεων στο θέμα της συμπεριφοράς των στερεών σωμάτων κάτω από την επίδραση δυνάμεων.

Για να επιτευχθεί αυτό απαιτείται βαθιά γνώση των μηχανικών ιδιοτήτων των χρησιμοποιούμενων υλικών καθώς και των κριτηρίων αστοχίας σε διαρροή ή σε θραύση αυτών. Ένας από τους πιο συνηθισμένους τρόπους ελέγχου της δομικής ακεραιότητας κατασκευών αποτελεί ο στατικός και δυναμικός έλεγχός του ως προς την διαρροή, την είσοδο δηλαδή στην πλαστική περιοχή. Από την στιγμή που συμβεί αυτό αδυνατεί το υλικό να επιστρέψει στην αρχική κατάσταση και αρχίζει να αποκλίνει από τις επιθυμητές διαστάσεις και ιδιότητες. Ως αποτέλεσμα, δεν είναι αξιόπιστο ως προς την λειτουργία του ενώ μπορεί να οδηγηθεί ακόμα και στην θραύση. Προσεγγίζοντας τα σώματα σαν ένα ομογενές και συνεχές μέσο, του οποίου η μηχανική συμπεριφορά μπορεί να περιγραφεί με αρκετή ακρίβεια με τη χρήση μερικών μόνο σταθερών του υλικού, έχουν αναπτυχθεί οι θεωρίες ελαστικότητας και πλαστικότητας από όπου προέρχεται το κριτήριο της διαρροής.

Για να αποτραπεί λοιπόν η θραύση, ο διαχωρισμός δηλαδή ενός στερεού σώματος σε δύο ή περισσότερα κομμάτια υπό την επίδραση μηχανικών τάσεων έχει αναπτυχθεί το κριτήριο διαρροής σύμφωνα με το οποίο υπάρχει μία ανώτερη τιμή ισοδύναμων τάσεων που μπορεί να ασκηθεί σε ένα σώμα πριν αυτό αναγκαστεί να εξέλθει από την ελαστική περιοχή του. Η κρίσιμη αυτή τάση εξαρτάται κυρίως από τις ιδιότητες του υλικού και την συχνότητα φόρτισής του αν δέχεται δυναμική καταπόνηση και δευτερευόντως από άλλα χαρακτηριστικά όπως η θερμοκρασία. Έγκειται στον μηχανικό να προσδιορίσει τα κρίσιμα σημεία μεγιστοποίησης των τάσεων και να τα ενισχύσει ή να βρει κάποιον τρόπο να τα ανακουφίσει. Η αναφερθείσα ανάλυση εξετάζει μακροσκοπικά το υλικό με την έννοια ότι, ακόμα και αν συμπεριληφθεί σε αυτήν η ανισοτροπία του σώματος ως προς τις μηχανικές του ιδιότητες, απαιτεί την απουσία γεωμετρικών ανωμαλιών σε μικροσκοπικό επίπεδο. Η μικροδομή όμως του υλικού επιδρά καθοριστικά στην αντοχή του, διότι οι ατέλειες που αναπτύσσονται οδηγούν στην δημιουργία ιδιόμορφων σημείων (singularities) εσωτερικά του, με πολύ

υψηλή συγκέντρωση τάσεων που για να ανακουφιστούν παρατηρείται διάδοση της ατέλειας θέτοντας έτσι την ακεραιότητα του δοκιμίου σε κίνδυνο. Επομένως υπάρχει η πιθανότητα θραύσης του υπό την επίδραση τάσεων σημαντικά μικρότερων του ορίου διαρροής. Γίνεται λοιπόν σαφές ότι για την πλήρη ανάλυση των φαινομένων της αστοχίας των υλικών είναι απαραίτητη η χρήση του τομέα της Θραυστομηχανικής (Fracture Mechanics) σε συνδυασμό με την θεωρία του παραμορφώσιμου σώματος.

Η δημιουργία των ρωγμών ξεκινά συνήθως από ατέλειες στην επιφάνεια ή το εσωτερικό των σωμάτων που είναι αρκετά δύσκολο να προσδιοριστούν. Στις περισσότερες περιπτώσεις καταστροφικής αστοχίας υλικού, τα αποτυπώματα του κύριου αίτιου που οδήγησε σε αυτήν μπορούν να ανιχνευθούν στα κερματισμένα τεμάχια της κατασκευής μέσω καταστρεπτικών μορφών ελέγχου όπως είναι η δοκιμή εφελκυσμού, η δοκιμή σκληρότητας και δυσθραυστότητας καθώς και άλλες χημικές αναλύσεις. Επιπλέον είναι δυνατή η οπτική ανάλυση των επιφανειών θραύσης του υλικού, η μορφολογία των οποίων είναι ενδεικτική του μηχανικού φορτίου που επενέργησε στο υλικό προκαλώντας την τελική του θραύση. Με αυτό τον τρόπο εξάγονται συμπεράσματα σχετικά με την εξέλιξη των ρωγμών και διαμορφώνονται οι κρίσιμες οριακές τιμές των κριτηρίων αστοχίας. Παρόλα αυτά, ο Συντελεστής Έντασης Τάσεων (SIF) όπως αποκαλείται, επηρεάζεται σημαντικά από την γεωμετρία του δοκιμίου και την δύναμη που του ασκείται αλλά και παράγοντες όπως η θερμοκρασία, η ανισοτροπία των ιδιοτήτων αλλά και η ύπαρξη πορώδους ή μικρορωγμών εσωτερικά του υλικού. Ως αποτέλεσμα η ύπαρξη ενός τέτοιου αξιόπιστου συντελεστή για μία συγκεκριμένη εφαρμογή χωρίς αντίστοιχα πειράματα είναι αμφίβολη. Ακόμη όμως και σε αυτήν την περίπτωση, αστοχία μπορεί να σημειωθεί όταν οι συνθήκες λειτουργίας και περιβάλλοντος υπερβαίνουν τα επιτρεπτά όρια ή υπό την επίδραση ενός εξωγενούς παράγοντα.

Προέκυψε λοιπόν η ανάγκη της ανάπτυξης Μη Καταστροφικών Τεχνικών (Non Destructive Techniques - NDT) για την ανίχνευση ατελειών στην επιφάνεια και στο εσωτερικό των υλικών χωρίς να επηρεάζουν δηλαδή τις μηχανικές του ιδιότητες και την γεωμετρία του εκάστοτε εξαρτήματος. Η σημασία των τεχνικών αυτών γίνεται αντιληπτή από την ευρεία εφαρμογή τους στην βιομηχανία και την ποικιλία μεθόδων αναγνώρισης ατελειών, σφαλμάτων και ανομοιογενειών που έχουν αναπτυχθεί. Κάποιες από πιο διαδεδομένες NDT αποτελούν οι μέθοδοι ελέγχου με υπερήχους, ραδιογραφίας με ακτίνες X ή γ καθώς και με την χρήση φθορίζοντων διεισδυτικών υγρών. Το κοινό στοιχείο των παραπάνω αποτελεί η εύκολη και ακριβής ανίχνευση ατελειών σε χυτά αντικείμενα, σε σφυρήλατες και συγκολλητές κατασκευές διαφόρων διαστάσεων, κάτι το οποίο συνηθίζεται έπειτα από την τελική τους κατεργασία. Μάλιστα η ραδιογραφία χρησιμοποιείται για τον εντοπισμό ατελειών σε ολόκληρα αεροπλάνα. Λόγω του ότι τα περισσότερα υλικά που χρησιμοποιούνται από την βιομηχανία είναι μεταλλικά, οι NDT σε μεγάλο βαθμό αφορούν μεταλλικά κράματα αξιοποιώντας τις ιδιότητές τους όπως είναι η ηλεκτρική αγωγιμότητα και η μαγνητική διαπερατότητα. Με βάση αυτές αναπτύχθηκαν μέθοδοι ελέγχου με μαγνητικά σωματίδια αλλά και με την πτώση δυναμικού (potential Drop)

Η παρούσα εργασία ασχολείται με την μελέτη και την ανάλυση της μεθόδου της πτώσης δυναμικού συνεχούς ρεύματος (Direct Current Potential Drop) με στόχο τον εντοπισμό της θέσης, του μήκους και της κατεύθυνσης διάδοσης της ρωγμής σε ελάσματα σε πραγματικό χρόνο. Πρόκειται για έναν απλό τρόπο παρατήρησης της εξέλιξης της ρωγμής εσωτερικά των υλικών σε σχέση με τους προηγούμενους όσον αφορά την ανάγκη κατάλληλων υποδομών και εξειδικευμένων μετρητικών οργάνων. Παρόλα αυτά, η ακρίβεια της είναι αρκετά υψηλή, άρα είναι κατάλληλη για την εξαγωγή συμπερασμάτων στην αστοχία υλικών. Επιπλέον έχει ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα σε σχέση με τις άλλες μεθόδους, το ότι για την λήψη μετρήσεων δεν απαιτείται η διακοπή της λειτουργίας του εκάστοτε εξαρτήματος. Άρα δεν είναι απαραίτητες ειδικές εγκαταστάσεις όπου θα πρέπει να σταματά

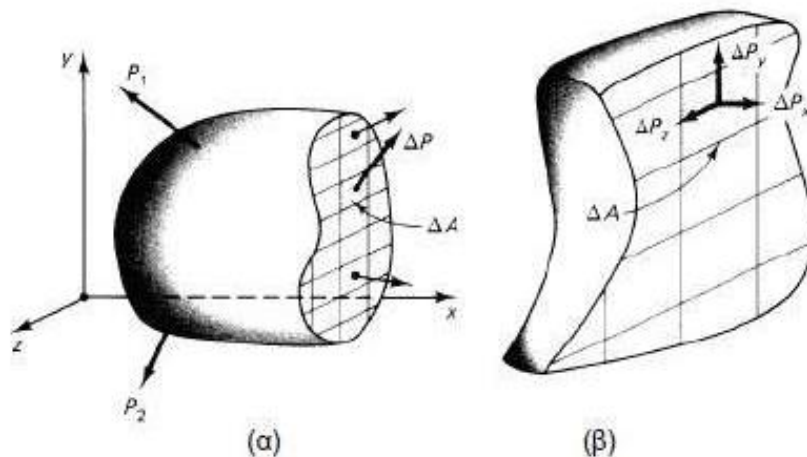
η εργασία που επιτελεί το κάθε δοκίμιο, για όσο χρονικό διάστημα διαρκεί η διαδικασία επιθεώρησής του. Αντικειμενικός σκοπός αυτής της εργασίας είναι η ανάπτυξη τεχνικών και μεθοδολογιών που θα πετυχαίνουν τη σύνδεση των αποτελεσμάτων(πτώση δυναμικού) της μεθόδου DCPD με τους στοιχειώδεις παράγοντες στους οποίους οφείλεται αλλά και την ακριβή δράση του κάθε παράγοντα ώστε να είναι δυνατή η απομόνωση της επίδρασης της ρωγμής. Η μελέτη της DCPD σε συγκεκριμένα δοκίμια για την παρακολούθηση των ρωγμών και η δημιουργία των καμπυλών βαθμονόμησης της είναι ένα ζήτημα εκτενώς αναλυμένο από πολλά εργαστήρια και τα συμπεράσματα της διάδοσης των ατελειών πειραματικά επιβεβαιωμένα. Η πρωτοτυπία που προτείνεται σε αυτήν την διπλωματική εργασία είναι η χρήση των δεδομένων της πτώσης δυναμικού για τον υπολογισμό των παραμέτρων της ρωγμής συμπεριλαμβανομένου και της θέσης σε οποιοδήποτε είδος δοκιμίου, κατά την διάρκεια επιβολής φορτίων λειτουργίας του, όπου στην βιβλιογραφία θεωρείται δεδομένη. Με αυτό τον τρόπο, έχοντας πλήρη γνώση σε πραγματικό χρόνο της μορφής των ατελειών σε ένα υλικό αλλά και της φόρτισης που δέχεται είναι δυνατόν να υπολογιστεί η διάρκεια ζωής του αλλά και η επικινδυνότητά του. Ως τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πλειάδα εφαρμογών υψηλών προδιαγραφών με στόχο την αύξηση της ασφάλειας μειώνοντας παράλληλα το κόστος συντήρησης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν τα ελάσματα αλουμινίου σε πτέρυγες αεροσκαφών.

2.Μηχανική των Ρωγμών

Το πρώτο βήμα στην προσπάθεια της τροποποίησης της μεθόδου DCPD είναι η ανάλυση του τρόπου δημιουργίας και εξέλιξης των ρωγμών. Η κατανόηση των αρχών λειτουργίας του φαινομένου υπό παρακολούθηση είναι απαραίτητη για την προσπάθεια προσδιορισμού της επίδρασης της οποιαδήποτε ατέλειας στην ολική πτώση δυναμικού. Επιπλέον, ο υπολογισμός της ακρίβειας και της ευαισθησίας της μεθόδου εξαρτάται από το ελάχιστο μέγεθος ρωγμής που θα πρέπει να είναι εντοπίσιμο από αυτή. Για το λόγο αυτό, το παρόν Κεφάλαιο αφιερώνεται στην παρουσίαση των αρχών της Μηχανικής των Θραύσεων που χρησιμοποιήθηκαν στην διαδικασία του προσδιορισμού της νέας μετρητικής διάταξης. Με βάση αυτές υλοποιήθηκε η προσπάθεια προσέγγισης του υπό διερεύνηση φαινομένου, η ανάλυση του τρόπου υπολογισμού του κρίσιμου μήκους ρωγμής και ο προσδιορισμός του χρόνου ζωής ενός δοκιμίου με ατέλειες.

2.1. Θεωρία Ελαστικότητας

Οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα στερεό σώμα, καταπονούν ανομοιόμορφα το εσωτερικό του καθώς διαδίδονται μέσα σε αυτό. Ας θεωρηθεί ένα τρισδιάστατο αντικείμενο σε στατική ισορροπία, το οποίο καταπονείται από διάφορα εξωτερικά φορτία P_1, P_2, \dots, P_i . Κάνοντας μία τομή σε αυτό, για να ισορροπήσουν οι δυνάμεις πρέπει να ασκηθεί η δύναμη ΔP όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1(α).



Σχήμα 2.1: (α) Εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις σε τομή ελευθέρου σώματος, (β) Ανάπτυξη των εσωτερικών δυνάμεων σε στοιχειώδη επιφάνεια ΔA

Η δύναμη αυτή μπορεί να αναλυθεί στις συνιστώσες του καρτεσιανού συστήματος με κάποια από αυτές να είναι κάθετη στην επιφάνεια τομής και οι άλλες πάνω σε αυτή. Επιπλέον θεωρώντας στοιχειώδη επιφάνεια ΔA στο Σχήμα 2.1(β) ορίζονται οι ορθές και διατμητικές τάσεις ως:

- ❖ η ορθή τάση κάθετη στο επίπεδο τομής

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A} \quad (\text{N/m}^2) \quad (2.1.a)$$

- ❖ η διατμητική τάση πάνω στο επίπεδο τομής στην κατά την y διεύθυνση

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A} \quad (\text{N/m}^2) \quad (2.1.b)$$

❖ η διατμητική τάση πάνω στο επίπεδο τομής στην κατά την z διεύθυνση

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A} \quad (\text{N}/\text{m}^2) \quad (2.1.\gamma)$$

Στην γενική περίπτωση ενός κύβου με πλευρές dx, dy, dz ο προσδιορισμός της καταπόνησης γίνεται από τον τανυστή των τάσεων, ο οποίος συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.1),(2.2),(2.3) στις τρεις κατευθύνσεις, ορίζεται ως:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Σύμφωνα με την θεωρία της ελαστικότητας κάθε φαινόμενο φόρτισης και ελαστικής παραμόρφωσης των υλικών και τα αποτελέσματά του μπορούν να ερμηνευθούν και να μοντελοποιηθούν με την χρήση των εξής τεσσάρων εξισώσεων:

1. Εξισώσεις Ισοροπίας Δυνάμεων

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

2. Σχέσεις Μετατοπίσεων – Παραμορφώσεων

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} * \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} * \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} * \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. Εξισώσεις Συμβασιμότητας των Παραμορφώσεων (εξασφαλίζοντας την συνέχεια και την ομοιογένεια)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

4. Ο Νόμος του Hooke

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (2.6)$$

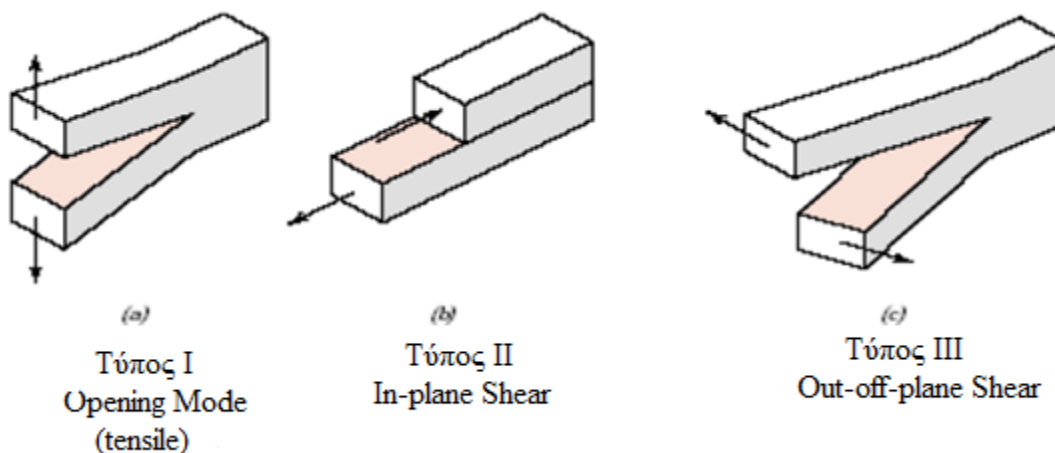
Όπου ο \mathbf{C}_{ijkl} ορίζεται ως ο τανυστής ογδόντα ενός (81) στοιχείων που περιλαμβάνει τις ελαστικές σταθερές του υλικού (Compliance Tensor). Λόγω όμως της συμμετρίας των τανυστών των τάσεων και των παραμορφώσεων ο αριθμός των ανεξάρτητων σταθερών που περιγράφουν τις ελαστικές

ιδιότητες ενός υλικού σε όλες τις διευθύνσεις μειώνεται στους τριάντα έξι (36).

Από την Θεωρία της Ελαστικότητας, με τις αναφερθείσες εξισώσεις είναι δυνατός ο υπολογισμός ενός ομαλού τασικού πεδίου που αναπτύσσεται εντός οποιουδήποτε στερεού και των παραμορφώσεων στο οποίο υπόκειται. Με βάση τις πληροφορίες αυτές και την διεξαγωγή πειραμάτων έχουν αναπτυχθεί πολλά κριτήρια αστοχίας των υλικών όπως του Tresca και του von Mises. Το τασικό όμως πεδίο σε ένα πραγματικό υλικό δεν είναι ποτέ ομαλό λόγω της ανομοιογένειας και των ιδιόμορφων σημείων που επιβάλλουν οι διαταραχές στην γεωμετρία του. Σε μία πολύ ακριβή μοντελοποίηση του φαινομένου, οι ανωμαλίες αυτές της μικροδομής του υλικού καθώς και τα εξωτερικά φορτία αποτελούν τους θεμελιώδεις παράγοντες που, μέσα από την σύνθετη αλληλεπίδρασή τους και την αλληλεξάρτηση που εμφανίζουν, θα καθορίσουν την συμπεριφορά του δοκιμίου και τα κριτήρια αστοχίας του. Ως συμπέρασμα, η καρτεσιανή περιγραφή του μοντέλου της αστοχίας των πραγματικών υλικών λόγω της πολυπλοκότητας είναι αρκετά δυσχερής.

2.2. Μηχανική των Θραύσεων

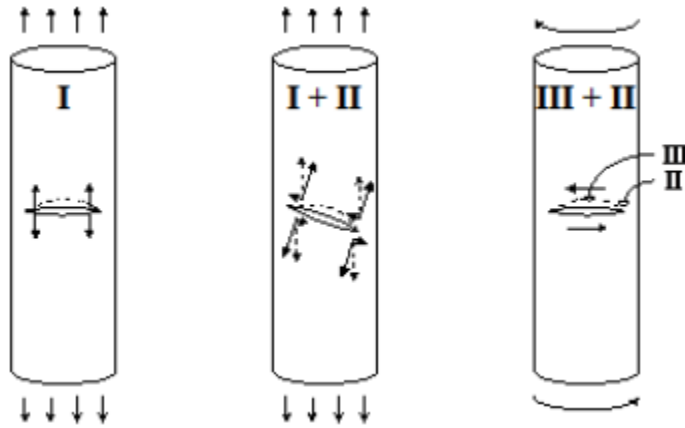
Η Θραυστομηχανική, για να δημιουργήσει επιλύσιμα μοντέλα, εστιάζει κυρίως στην ανάλυση κάποιων τυπικών μορφών των επιφανειών θραύσης, στον τρόπο που εμφανίζονται καθώς και σε κάθε πιθανό συνδυασμό τους. Ο G.R. Irwin, με την προϋπόθεση ότι οι ρωγμές εντός των στερεών δύνανται να θεωρηθούν ως επιφάνειες ασυνέχειας, παρατήρησε ότι υπάρχουν τρεις ανεξάρτητοι τρόποι μετάδοσής τους[1]. Επομένως κάθε είδος διάδοσης της ρωγμής μπορεί να προκύψει από την επαλληλία των τριών βασικών τύπων παραμόρφωσής της, που παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.2



Σχήμα 2.2 Βασικοί τύποι παραμόρφωσης της ρωγμής

Ο Τύπος I (εφελκυσμός- Mode I) αποτελεί τον κύριο λόγο επέκτασης των ατελειών στα υλικά λόγω του ότι συναντάται στην πλειοψηφία των περιπτώσεων και για αυτό έχει λάβει πολύ μεγαλύτερη προσοχή σε θεωρητικό και πειραματικό επίπεδο. Οι υπόλοιποι, ο Τύπος II (Mode II) και ο Τύπος III (Mode III) είναι εξίσου σημαντικοί στην αστοχία αλλά το γεγονός ότι εμφανίζονται συνήθως σε συνδυασμό με το Τύπο I ή και μεταξύ τους (Σχήμα 2.3), καθώς και η δυσκολία πειραματικής υποβολής των ρωγμών σε καθαρή διάτμηση ή στρέψη έχει οδηγήσει στην έλλειψη πειραματικών αποτελεσμάτων αλλά και του υπολογισμού των σταθερών προσδιορισμού της αστοχίας[2,3].

Αρχικά η Μηχανική των Θραύσεων συνδέθηκε με την ψαθυρή διάδοση ρωγμών, όπου η συμπεριφορά του υλικού μπορεί να θεωρηθεί γραμμικά ελαστική. Επομένως, η αντιμετώπιση των προβλημάτων πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο της Γραμμικής Ελαστικότητας διαμορφώνοντας έτσι την Γραμμική Ελαστική Μηχανική των Θραύσεων (Linear Elastic Fracture Mechanics – LEFM). Το τρισδιάστατο ελαστικό πρόβλημα της ρωγμής ενός στερεού μοντελοποιείται ουσιαστικά ως η



Σχήμα 2.3: Παραδείγματα εμφάνισης των τριών τύπων φόρτισης ή των συνδυασμών τους

σχετική κύλιση μεταξύ δύο επιφανειών. Για αυτό τον λόγο καταφεύγουμε στην υπόθεση του επίπεδου προβλήματος, κάτι που προσεγγίζει ικανοποιητικά την πραγματικότητα. Για την ικανοποίηση των εξισώσεων της ελαστικής θεωρίας που αναφέρθηκαν νωρίτερα προτείνεται η χρήση μίας άγνωστης συνάρτησης $F(x, y)$ για την περιγραφή των αναπτυγμένων τάσεων. Η συνάρτηση $F(x, y)$ ονομάζεται συνάρτηση Airy[4]. Ορίζουμε λοιπόν :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.7)$$

Προκύπτει αμέσως ότι η εξίσωση ισορροπίας (2.3) ικανοποιείται ταυτοτικά με απλή αντικατάσταση. Επιπλέον με την υπόθεση ισοτροπίας του υλικού οι τάσεις μπορούν να συσχετιστούν με τις παραμορφώσεις με την χρήση δύο μόνο σταθερών, του μέτρου ελαστικότητας καθώς και του λόγου Poisson. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων για το επίπεδο τις παραμορφώσεις με τις τάσεις από την εξίσωση του Hooke προκύπτει η εξίσωση :

$$\nabla^4 F(x, y) = \Delta^2 F(x, y) = 0 \quad (2.8)$$

Η τασική συνάρτηση λοιπόν είναι μία διαρμονική συνάρτηση που θα ικανοποιεί και τις οριακές συνθήκες που έχουν οριστεί. Οι περιορισμοί αυτοί μπορεί να συμπεριλαμβάνουν και τα όρια του υλικού αλλά η περιοχή ενδιαφέροντος είναι αυτή της ρωγμής αφού εκεί αναζητείται η κατανομή των τάσεων. Άρα είναι σημαντικό να ορισθούν στο σημείο αυτό οι κατάλληλες οριακές συνθήκες.

Στην πρώτη πληρέστερη θεώρηση της δομής της ρωγμής παρά τα άκρα της οδηγήθηκε ο A.A. Griffith με τη χρήση της LEFM, σύμφωνα με την οποία τα άκρα των ρωγμών αποτελούσαν ιδιόμορφα σημεία, όπου παρατηρείται απειρισμός των τάσεων. Κάτι τέτοιο προφανώς δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα αλλιώς κάθε στερεό με μία ρωγμή στο εσωτερικό του θα έπρεπε να οδηγείτο στην θραύση υπό την επίδραση της οποιαδήποτε εξωτερικής δύναμης. Παρόλα αυτά στην LEFM μπορούσε να δικαιολογηθεί την εμφάνιση πεπερασμένων τάσεων στα άκρα ρωγμών με την προϋπόθεση ότι οι απέναντι επιφάνειες της έχουν κοινή εφαπτομένη σε αυτά και δεν είναι ελεύθερες τάσεων. Όμως σε μια τέτοια περίπτωση αποδεικνύεται ότι η απελευθερωμένη ενέργεια για απειροστή μεταβολή των συνόρων της ρωγμής ισούται με μηδέν. Επομένως τέτοιες καμπύλες μπορούν να είναι το όριο μόνο ρωγμών που βρίσκονται σε ισορροπία, όπου δεν παρατηρείται αυθόρμητη προώθησή της. Επιπλέον, σε περίπτωση όπου οι επιφάνειές της είναι ελεύθερες τάσεων τότε, για οποιαδήποτε μορφή συνόρων, οι τάσεις απειρίζονται. Ο μόνος τρόπος για να προκύψουν αποδεκτές λύσεις είναι να θεωρηθούν μοριακές δυνάμεις συνοχής (cohesive forces) παρά τα άκρα της ρωγμής οι οποίες

αντιστέκονται στην διάδοσή της.

Έστω λοιπόν μία επίπεδη άπειρη πλάκα λεπτού πάχους με μία κυκλική οπή όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.4 η οποία δέχεται μονοαξονικό εφελκυσμό με ορθή τάση ίση με σ_∞ . Κάνοντας χρήση των πολικών συντεταγμένων για το συγκεκριμένο πρόβλημα ορίζουμε την συνάρτηση Airy ως εξής:

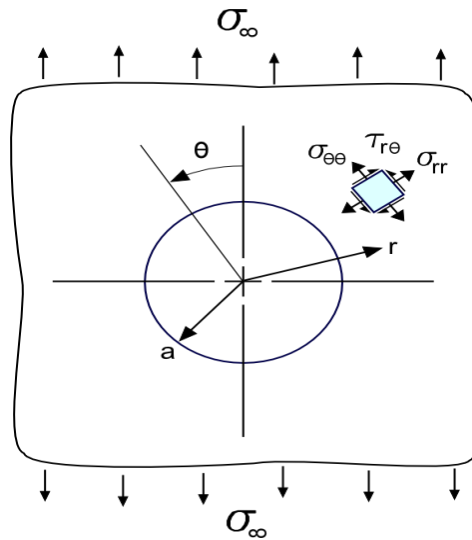
$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F(r, \theta)}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F(r, \theta)}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F(r, \theta)}{\partial \theta} \right) \quad (2.9)$$

Με βάση την επιλογή αυτή επιτυγχάνεται ξανά η ταυτοτική ικανοποίηση των εξισώσεων ισορροπίας (2.3), οι οποίες στην επίπεδη ανάλυση και λόγω των πολικών συντεταγμένων έχουν μετασχηματιστεί στο σύστημα που ακολουθεί:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση της κυκλικής οπής σε άπειρη πλάκα υπό εφελκυστική καταπόνηση τάσης σ_∞ (Σχήμα 2.4) οι οριακές συνθήκες των ελεύθερων επιφανειών διαμορφώνονται με βάση την LEFM είναι :

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty: \quad \sigma_x &= \sigma_\infty, \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \\ r = a: \quad \sigma_r(a, \theta) &= \tau_{r\theta}(a, \theta) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$



Σχήμα 2.4: Άπειρη πλάκα με κυκλική οπή

Για την ικανοποίησή τους ο Kirsch το 1899 [1] πρότεινε για τασική συνάρτηση την παρακάτω διαρμονική συνάρτηση:

$$F(r, \theta) = \sigma_\infty \left\{ \left(-\frac{r^2}{4} - \frac{a^2}{4r^2} + \frac{a^2}{2} \right) \cos 2\theta + \frac{r^2}{4} - \frac{a^2}{2} \ln r \right\} \quad (2.12)$$

Αντικαθιστώντας την συνάρτηση αυτή στις εξισώσεις (2.9) προκύπτουν οι εκφράσεις του τασικού πεδίου μέσα στην πλάκα και στα όρια της οπής οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω (2.13). Χαρακτηριστική είναι η μέγιστη τιμή που παίρνει η σ_θ για $r = a$ και $\theta = \pm \pi/2$ που είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος της οπής και ισούται με $3\sigma_\infty$.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma_\infty}{2} \left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} + \left[1 + \frac{3a^4}{r^4} - 4 \frac{a^2}{r^2} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_\infty}{2} \left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left[1 + \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + 2 \frac{a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta\end{aligned}\quad (2.13)$$

Υπάρχουν όμως και άλλες πολύ πιο εξελιγμένες αναλυτικές μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος προσδιορισμού των τάσεων στο επίπεδο στηριγμένες στην LEFM. Μία από αυτές είναι η χρήση των μιγαδικών δυναμικών Kolosov-Muskhelishvili. Μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής αποτελεί η χρήση μιγαδικών αριθμών και ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων που της επιτρέπουν την άμεση ικανοποίηση των οριακών συνθηκών μέσα από απλές αλγεβρικές εκφράσεις. Επιπλέον προσφέρει την δυνατότητα εισαγωγής σύμμορφων απεικονίσεων όπου πολύπλοκες ρωγμές μπορούν να μετασχηματιστούν σε απλούστερες γεωμετρίες στις οποίες η λύση των οριακών συνθηκών είναι γνωστή. Η μεθοδολογία της επίλυσης διατηρεί την ίδια λογική που αναλύθηκε στην προηγούμενη παράγραφο μόνο που αυτή την φορά η συνάρτηση Airy εκφράζεται σύμφωνα με τον τύπο του Cauchy [6], δηλαδή ως το πραγματικό μέρος δύο αναλυτικών και ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων:

$$F(x, y) = \operatorname{Re} \left[\bar{z} \cdot \varphi(z) + \chi(z) \right] \quad z = x + yi \quad (2.14)$$

Οι συναρτήσεις $\varphi(z), \chi(z)$ ονομάζονται μιγαδικά δυναμικά και μέσω της αντικατάστασης των εξισώσεων (2.14) και (2.8) στους τύπους (2.3) - (2.6) για την επίπεδη κατάσταση προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις ανάμεσα στις $\varphi(z), \chi(z)$, τις αναπτυσσόμενες τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ και τις μετατοπίσεις u, v :

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} [\varphi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2\tau_{xy}i &= 2 [\bar{z} \cdot \varphi''(z) + \chi''(z)]\end{aligned}\quad (2.15)$$

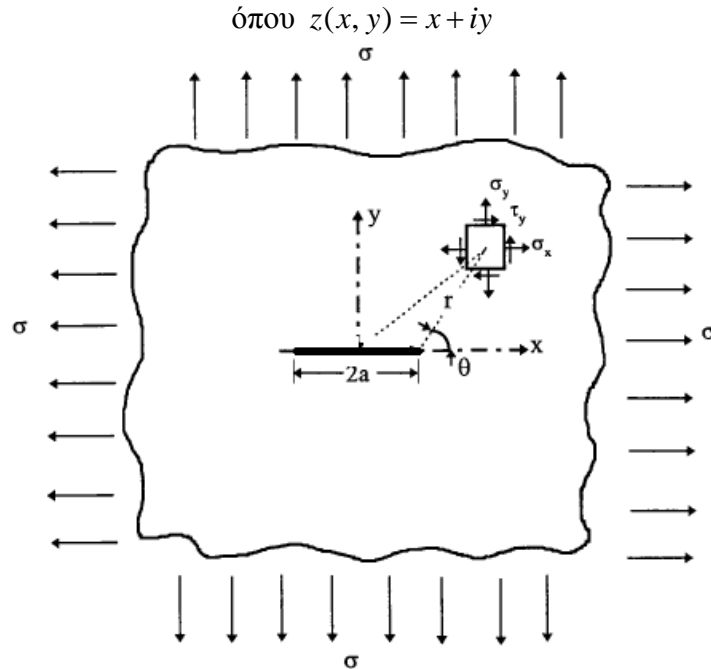
$$2G(u + iv) = k\varphi(z) - z \cdot \overline{\varphi'(z)} - \overline{\chi'(z)}$$

όπου G το μέτρο διάτμησης του υλικού, ν ο λόγος Poisson και k η σταθερά Muskhelishvili που εξαρτάται από το μητρώο δυσκαμψίας του υλικού. Στο σύστημα αυτό των τριών εξισώσεων όπως αναφέρθηκε είναι εύκολο να τεθούν οι οριακές συνθήκες για συγκεκριμένες τιμές του z κοντά στην άκρη της ρωγμής οδηγώντας το σύστημα σε μία μοναδική λύση. Παρόλα τα πλεονεκτήματα που προσφέρει αυτή η μέθοδος, ανάλογα με τις συνοριακές τιμές μπορεί να καταστεί υπερβολικά δύσκολος και χρονοβόρος ο υπολογισμός των μιγαδικών δυναμικών.

Μία υποπερίπτωση της Kolosov-Muskhelishvili αποτελεί η τασική συνάρτηση του Westergaard η οποία απλοποιείται σε μεγάλο βαθμό εκμεταλλευόμενη της συμμετρίας των τάσεων όπως αυτή

προκύπτει κατά μήκος ευθύγραμμης ρωγμής μήκους $2a$ πάνω στον άξονα $x'x$ σε άπειρη ελαστική πλάκα όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5. Η συμμετρία αυτή εξασφαλίζει μία ακόμη εξίσωση στο σύστημα (2.10) με αποτέλεσμα να απαιτείται μόνο ένα μιγαδικό δυναμικό Z (αναλυτική συνάρτηση του $z = x + iy$) για την περιγραφή της συνάρτησης Airy άρα και του τασικού πεδίου. Μάλιστα με την επιλογή της κατάλληλης συμμετρίας φορτίων οι εξισώσεις απλοποιούνται σε τέτοιο βαθμό που επιτρέπουν την ανάλυση και εκτός του επιπέδου. Το στοιχείο που χαρακτηρίζει την τασική συνάρτηση του Westergaard τόσο σημαντική είναι η δυνατότητα μοντελοποίησης των τριών βασικών τρόπων παραμόρφωσης ρωγμών με μηδενικό πάχος. Προφανώς και σε ένα πραγματικό στερεό μία ατέλεια δεν έχει μηδενικές διαστάσεις αλλά το πάχος της είναι τάξεις μεγέθους μικρότερο από τις υπόλοιπες διαστάσεις. Επιπλέον διατηρεί όλα τα πλεονεκτήματα της κανονικής Kolosov-Muskhelishvili για αυτό και έχει ευρεία χρήση. Για την μοντελοποίηση στο επίπεδο του εφελκυστικού Τύπου I πρέπει να τεθεί $\tau_{xy} = 0$ στον άξονα x ενώ για τον Τύπο II απαιτείται $\sigma_y = 0$. Για τον Τύπο III δεν αρκεί η ανάλυση στο επίπεδο αφού απαιτείται η επιβολή διάτμησης κάθετα σε αυτό. Συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας το σύστημα συντεταγμένων στο Σχήμα 2.5 οι οριακές συνθήκες τις κάθε περίπτωσης προσδιορίζονται ως:

- Σε διάδοση ρωγμής Mode I για $z(x, y) = x, |x| \leq a$ ισχύει $\tau_{xy} = 0$
- Σε διάδοση ρωγμής Mode II για $z(x, y) = x, |x| \leq a$ ισχύει $\sigma_y = 0$
- Σε διάδοση ρωγμής Mode III για $z \rightarrow \infty$ ισχύει $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} \neq 0$ και για $z(x, y) = x, |x| \leq a$ ισχύει $\sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$



Σχήμα 2.5: Πλάκα με ευθύγραμμη ρωγμή στον άξονα $x'x$ υπό διαζονικό εφελκυσμό

Με την αντικατάσταση των συνθηκών αυτών, που προέκυψαν από την συμμετρία γεωμετρίας και καταπόνησης, στις εξισώσεις 2.15 προκύπτει σε κάθε περίπτωση ο συσχετισμός των δύο μιγαδικών δυναμικών επιτρέποντάς την αντικατάστασή τους με μία μόνο άγνωστη μιγαδική συνάρτηση. Για κάθε λοιπόν περίπτωση προκύπτει μία διαφορετική τασική συνάρτηση και κατά επέκταση ένα διαφορετικό τασικό πεδίο όπως υπολογίζεται στην συνέχεια[6].

Σε διάδοση ρωγμής Τύπου I:

$$\begin{aligned}
 F &= \operatorname{Re} \bar{Z}_1 + y \operatorname{Im} \bar{Z}_1 \\
 \sigma_{xx} &= \operatorname{Re} Z_1 - y \operatorname{Im} Z_1' \\
 \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} Z_1 + y \operatorname{Im} Z_1' \\
 \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z_1'
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Σε διάδοση ρωγμής Τύπου II:

$$\begin{aligned}
 F &= -y \operatorname{Re} \bar{Z}_2 \\
 \sigma_{xx} &= 2 \operatorname{Im} Z_2 + y \operatorname{Re} Z_2' \\
 \sigma_{yy} &= -y \operatorname{Re} Z_2' \\
 \tau_{xy} &= \operatorname{Re} Z_2 - y \operatorname{Im} Z_2'
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Σε διάδοση ρωγμής Τύπου III:

$$\begin{aligned}
 F &= -\operatorname{Re} Z_3 \\
 \tau_{yz} &= \operatorname{Re} Z_3' \\
 \tau_{xz} &= \operatorname{Im} Z_3'
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

όπου Z_i η τασική συνάρτηση, μία αναλυτική συνάρτηση της μεταβλητής $z = x + iy$ για την οποία ισχύει $\bar{Z} = d\bar{Z}/dz$. Η μορφή της συνάρτησης αυτής εξαρτάται τόσο από την γεωμετρία της ρωγμής αλλά και από το μέγεθος της καταπόνησης που δέχεται. Στην περίπτωση της ευθύγραμμης ρωγμής μήκους $2a$ πάνω στον άξονα $x'x$ η συνάρτηση Z έχει την ίδια μορφή και στους τρεις τύπους διάδοσης των ρωγμών. Το γεγονός αυτό καθιστά την τασική συνάρτηση του Westergaard την πιο διαδεδομένη μέθοδο ανάλυσης ρωγμών και της αστοχίας αυτών.

2.3. Συντελεστές Έντασης των Τάσεων (SIF)

Είναι πλέον κατανοητό ότι η συμπεριφορά του υλικού κοντά στην αιχμή της ρωγμής δεν είναι δυνατόν να είναι γραμμικά ελαστική. Λόγω της δυσκολίας επίλυσης των μη γραμμικών εξισώσεων που περιγράφουν το ακριβές φαινόμενο, προέκυψε ως συμβιβαστική λύση η εισαγωγή των Συντελεστών Έντασης Τάσεων (Stress Intensity Factor, SIF). Οι συντελεστές αυτοί είναι ένα μέτρο της δυσθραυστότητας, της αντίστασης δηλαδή στην διάδοση της ρωγμής εκφράζοντας την αύξηση της τάσης κοντά στην αιχμή της ρωγμής. Συνδυάζοντας όλες τις παραπάνω πληροφορίες καταλήγουμε στην διαμόρφωση των τασικών πεδίων ανάλογα με τον τρόπο διάδοσης της ρωγμής ως εξής[5]:

Για Mode I σε άπειρη με μήκος ρωγμής $2a$ και εφελκυστική τάση σ_∞ μία τασική συνάρτηση που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες είναι η :

$$Z_1(z) = \frac{\sigma_\infty z}{\sqrt{z^2 - a^2}}
 \tag{2.19}$$

Για την επίλυση των εξισώσεων (2.16) ορίζουμε πολικό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο την αιχμή της ρωγμής θέτοντας στην τασική συνάρτηση την μεταβλητή $z(x, y) = x + iy$ με την έκφραση $z = \alpha + \zeta = \alpha + r \cdot e^{i\theta}$.

Οι τάσεις τελικά αναλύονται με την χρήση των σειρών Taylor όπου διατηρώντας τους πρώτους όρους κάθε φορά διαμορφώνεται το τασικό πεδίο με τις λεγόμενες εκφράσεις του Sneddon [4]:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\sigma_\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
\sigma_y &= \frac{\sigma_\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
\tau_{xy} &= \frac{\sigma_\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Η απλοποίηση αυτή συμβάλλει στην επίλυση αλλά αυξάνει σημαντικά την απόκλιση από την πραγματική λύση σε όλες τις περιοχές που δεν ισχύει η συνθήκη $r/a \ll 1$. Έπειτα ορίζεται το όριο

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\sigma_y(r, 0^\circ) \cdot \sqrt{2\pi r} \right] = K_I \xrightarrow{-2.19} K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \tag{2.21}$$

ως ο εφελκυστικός συντελεστής έντασης των τάσεων ο οποίος προκύπτει ότι συνδέεται με την τασική συνάρτηση αλλά και με τις εκφράσεις των τάσεων καθώς το $r \rightarrow 0$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
Z_I &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\zeta}} \\
\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
\sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
\tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται και οι άλλοι δύο SIF που περιγράφουν το τασικό πεδίο στις διαδόσεις ρωγμών Mode II και III. Για λόγους πληρότητας παραθέτονται και οι εξισώσεις που περιγράφουν τις τάσεις κοντά στην αιχμή των ρωγμών και στις δύο περιπτώσεις.

$$\begin{aligned}
Z_{II}(z) &= \frac{\tau_\infty z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad K_{II} = \tau_\infty \sqrt{\pi a}, \quad Z_{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\zeta}} \\
\sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\
\sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \\
\tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\tau_{xy}(r, 0^\circ) \cdot \sqrt{2\pi r} \right]
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
K_{III} &= \tau_o \sqrt{\pi a}, \quad Z_{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\zeta}} \\
\tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\
\tau_{xz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\
K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\tau_{zy}(r, 0^\circ) \cdot \sqrt{2\pi r} \right]
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Η γνώση των τασικών πεδίων γύρω από τις ρωγμές επιτρέπει την ανάλυση της αστοχίας τους. Οι απλοποιήσεις που χρησιμοποιήθηκαν μας αναγκάζουν να περιορίσουμε την περιοχή εμπιστοσύνης της μοντελοποίησης κοντά στην ρωγμή. Κάτι τέτοιο όμως δεν επηρεάζει την μέθοδο διότι αυτή η περιοχή διακρίνεται από συγκέντρωση τάσεων άρα και κινδυνεύει να αστοχήσει. Το είδος της ρωγμής δεν εξαρτάται μόνο από τον τρόπο διάδοσης αλλά και από την ίδια της την γεωμετρία. Το προηγούμενο μοντέλο αναφέρεται στις ατέλειες ως ευθύγραμμα τμήματα, κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα. Ως ατέλειες μπορούν να θεωρηθούν και οι κυκλικές ή ελλειπτικές οπές. Επιπλέον σε πεπερασμένες διαστάσεις δοκιμίων η θέση της ρωγμής αλλά και το μέγεθός της συγκριτικά με το πλάτος και το πάχος του στερεού επηρεάζουν σημαντικά τις σταθερές έντασης τάσεων άρα και τις τάσεις που αναπτύσσονται. Για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων ορίζεται ένας συντελεστής διόρθωσης f στον προσδιορισμό των SIF που πλέον δίνονται από την σχέση:

$$K_i = f \cdot \sigma_{ij\infty} \sqrt{\pi a} \quad (2.25)$$

όπου $\sigma_{ij\infty}$ είναι η τάση που ασκείται στα όρια του δοκιμίου

Ο συντελεστής αυτός προσδιορίζεται από τις πειραματικές μετρήσεις και δεν έχει καμία φυσική σημασία, αλλά χρησιμοποιείται για την χρήση μιας καθολικής εξίσωσης για την ανάλυση όλων των ρωγμών. Η εξάρτησή του από την μορφή, την θέση της ρωγμής αλλά και του στερεού είναι εμφανής και συνήθως υπολογίζεται συναρτήσεως του λόγου a/w με w το πλάτος του δοκιμίου προς εξέταση. Στην βιβλιογραφία υπάρχει μεγάλος αριθμός συναρτήσεων f που έχουν προσδιοριστεί για πλήθος περιπτώσεων με πολύ απλή όμως γεωμετρία, κυρίως ορθογώνια ελάσματα και κυλινδρικά στερεά.

Για λόγους πληρότητας αναφέρεται ότι, λόγω της αδυναμίας της LEMF να περιγράψει θεωρητικά το φαινόμενο εκκίνησης της ρωγμής, αναπτύχθηκαν μέθοδοι εισαγωγής των μη γραμμικών σχέσεων και επίλυσής τους. Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα αποτελεί η ενεργειακή μέθοδος J-Integral του J.Rice με την οποία μοντελοποιούνται αποτελεσματικά μη γραμμικά ελαστικά υλικά σε επίπεδη παραμόρφωση υπό σταθερή φόρτιση.

2.4. Ενεργειακή Προσέγγιση Εκκίνησης Ρωγμής

Η ανάλυση των τάσεων και των παραμορφώσεων οδήγησε αρχικά στην μοντελοποίηση ρωγμών που θα διαδίδονταν υπό οποιαδήποτε φόρτιση είτε που βρίσκονταν σε μόνιμη ισορροπία. Καμία από αυτές τις περιπτώσεις δεν αντιστοιχεί στην πραγματικότητα για αυτό και θεωρήθηκαν αναγκαίες τροποποιήσεις στην LEMF. Η εξέλιξη αυτού του φαινομένου, που μπορεί να οδηγήσει ακόμη και στην θραύση του υλικού για τάσεις αρκετά χαμηλότερες από το όριο διαρροής, έχει ενεργειακό περιεχόμενο επομένως μπορεί να περιγραφεί άρα και να εξηγηθεί ενεργειακά. Βέβαια η πλήρης ενεργειακή εξίσωση δεν μας είναι γνωστή αφού υπάρχουν πολλοί παράγοντες και φαινόμενα πέραν της εκκίνησης της ρωγμής όπως η πορεία της διάδοσής της που συμβάλλουν στο συνολικό φαινόμενο. Παρόλα αυτά ο Griffith εστιάζοντας στις κύριες μορφές ενέργειας που επηρεάζουν ένα ρηγματωμένο δοκίμιο οδηγήθηκε στην ανάπτυξη ενός κριτηρίου αστοχίας με εφαρμογή κυρίως στα ψαθυρά υλικά.

Αρχικά, καθοριστικό ρόλο στην διάδοση των ρωγμών διαδραματίζει η λεγόμενη επιφανειακή ενέργεια U_γ (surface energy) που αποδίδεται σε κάθε ελεύθερη επιφάνεια του στερεού λόγω των ελεύθερων χημικών δεσμών των ατόμων σε αυτές. Με την διάδοση των ρωγμών η ελεύθερη επιφάνεια του υλικού αυξάνεται άρα και η επιφανειακή ενέργεια θα αυξηθεί. Αν αυτή ήταν η μοναδική ενέργεια που επηρέαζε την διάδοση της ατέλειας τότε καθώς το φαινόμενο εξελισσόταν θα απαιτούνταν η ίδια ενέργεια ανεξαρτήτων του μήκους της ρωγμής. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα αφού όσο πιο μεγάλη είναι μία ρωγμή τόσο λιγότερη αντοχή έχει στην καταπόνηση από εξωτερικές

δυνάμεις άρα χρειάζεται προσφορά λιγότερης ενέργειας.

Επομένως, είναι αναγκαίο να ληφθεί υπόψιν η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης U_a (elastic strain energy). Η ενέργεια αυτή οφείλεται στο έργο που παράγουν τα εξωτερικά φορτία παραμορφώνοντας ελαστικά το στερεό, είναι αποθηκευμένη στο υλικό και μηδενίζεται όταν η φόρτιση γίνει ίση με μηδέν. Επιπλέον στα μη ψαθυρά υλικά ο όρος αυτός συμπεριλαμβάνει και την ενέργεια πλαστικής παραμόρφωσης. Όταν η ρωγμή διέρχεται από κάποιο πεδίο του χώρου και το χωρίσει στα δύο τμήματα, τότε η περιοχή αυτή αδυνατεί να παραλάβει φορτία αφού δεν μπορεί και να παραμορφωθεί ελαστικά και η ενέργεια παραμόρφωσης που ήταν αποθηκευμένη εκεί απελευθερώνεται. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου η προώθηση μιας ρωγμής στο υλικό δεν επιφέρει μείωση της αποθηκευμένης ελαστικής ενέργειας αν και παρατηρείται αύξηση της επιφανειακής ενέργειας του συστήματος. Για αυτό τον λόγο η U_a δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτούσια ως κριτήριο αστοχίας.

Ολική ενέργεια του συστήματος ορίζουμε το άθροισμα των U_a , U_γ καθώς και της εσωτερικής ενέργειας U_0 του δοκιμίου που χαρακτηρίζει το είδος της φόρτισης, το υλικό αλλά και τις υπόλοιπες μορφές ενέργειας όπου δεν επηρεάζουν την διαδικασία εκκίνησης της ρωγμής άρα δεν επηρεάζονται και από το μήκος της. Εάν λοιπόν για στοιχειώδης μεταβολή του μήκους της ρωγμής παρατηρείται μείωση του αθροίσματος $U_a + U_\gamma$ τότε η προώθηση της ρωγμής οδηγεί σε μείωση της συνολικής ενέργειας του συστήματος και επομένως το σύστημα τείνει αυθόρμητα προς την κατεύθυνση αυτή. Το μήκος της ρωγμής αυτό ονομάζεται κρίσιμο και σηματοδοτεί την είσοδο της ρωγμής στην ασταθή κατάσταση στην οποία η ρηγμάτωση διαδίδεται με σκοπό το δοκίμιο να οδηγηθεί σε χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση. Για τον προσδιορισμό του μήκους αυτού από τον ενεργειακό ισολογισμό απαιτούνται οι U_a , U_γ αλλά και η εξωτερική ενέργεια W που προσφέρεται στο υλικό από τις εξωτερικές δυνάμεις. Έπειτα ορίζονται τα μεγέθη του Ρυθμού Απελευθέρωσης Ενέργειας Παραμόρφωσης (G – Energy Release Rate) και της Αντίστασης στην Ρωγμή (R – Crack Resistance) από τις παρακάτω σχέσεις (2.24-2.25) όπου είναι εμφανής η επιρροή του μήκους ρωγμής a :

$$G = \frac{d}{da} (W - U_a) \quad (2.26)$$

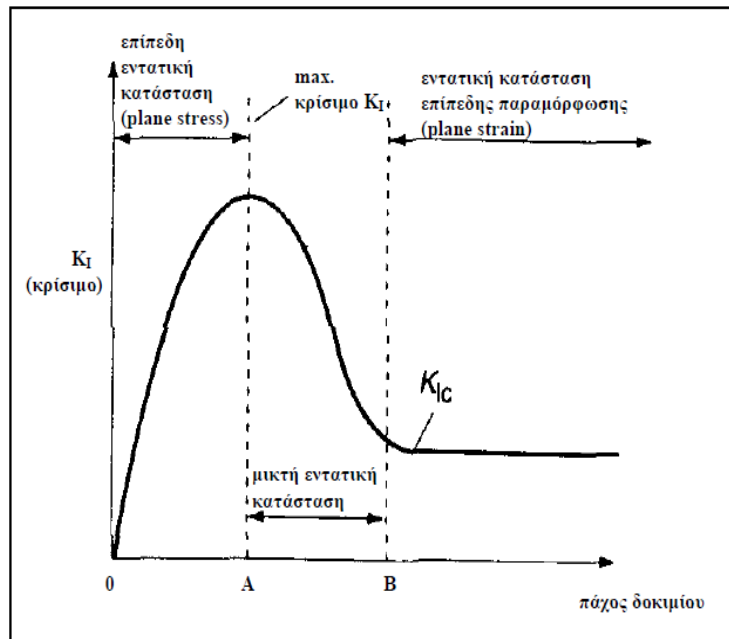
$$R = \frac{dU_\gamma}{da} \quad (2.27)$$

Πέραν του μήκους της ρωγμής οι G και R εξαρτώνται από την φόρτιση του δοκιμίου, της μηχανικής του ιδιότητες αλλά και από την ίδια την γεωμετρία του. Η κρίσιμη ρωγμή του στερεού εμφανίζεται στο μήκος όπου ικανοποιείται η σχέση $R = G$ και επαγωγικά προκύπτει ότι η διάδοσή της είναι επιτρεπτή μόνο όταν $R \leq G$. Από τον ορισμό των SIF και του ρυθμού εκροής ενέργειας αποδεικνύεται ότι υπάρχει σχέση που συνδέει το K_i με το G επομένως η διάδοση της ρωγμής είναι εφικτή στην περίπτωση που ο συντελεστής έντασης τάσεων K_i ξεπεράσει μία κρίσιμη τιμή K_{cr} .

2.5. Κριτήριο αστοχίας

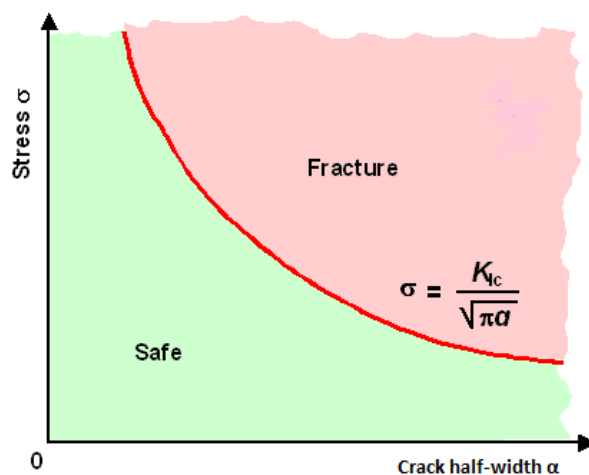
Είναι κατανοητό ότι ο προσδιορισμός το K_{cr} για κάθε τρόπο διάδοσης της ρωγμής (Mode I,II,III) για το υλικό που μας ενδιαφέρει είναι αναγκαίος με σκοπό την ανάπτυξη κριτηρίων αστοχίας. Για αυτό τον λόγο απαιτείται πειραματικός προσδιορισμός του κάτω από αυστηρές συνθήκες και προδιαγραφές διεθνών οργανισμών. Όμως το K_{cr} πέραν από τις ιδιότητες του υλικού επηρεάζεται και από την ίδια την γεωμετρία του δοκιμίου υπό εξέταση και κυρίως από το πάχος του.. Για παράδειγμα πειραματικές

μετρήσεις του K_I [4], εμφανίζουν αρχικά μια γραμμική αύξηση σε σχέση με το πάχος μέχρι την κρίσιμη τιμή $t=A$ που μεγιστοποιείται. Έπειτα ακολουθεί φθίνουσα πορεία μέχρι την τιμή $t=B$ όπου σταθεροποιείται (Σχήμα 2.6).



Σχήμα 2.6: Πειραματικά Αποτελέσματα της σχέσης K_I με το πάχος του δοκιμίου

Η αστοχία των υλικών με την διάδοση των ατελειών μπορεί να προκύψει είτε από στατική καταπόνηση είτε από κόπωση. Σύμφωνα με το κριτήριο Griffith αυτό συμβαίνει όταν οι SIF υπερβαίνουν την τιμή K_{cr} . Στην περίπτωση λοιπόν της απλής φόρτισης από τον τρόπο που ορίστηκε ο K_I (σχέση 2.21) προκύπτει η ασφαλής περιοχή όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



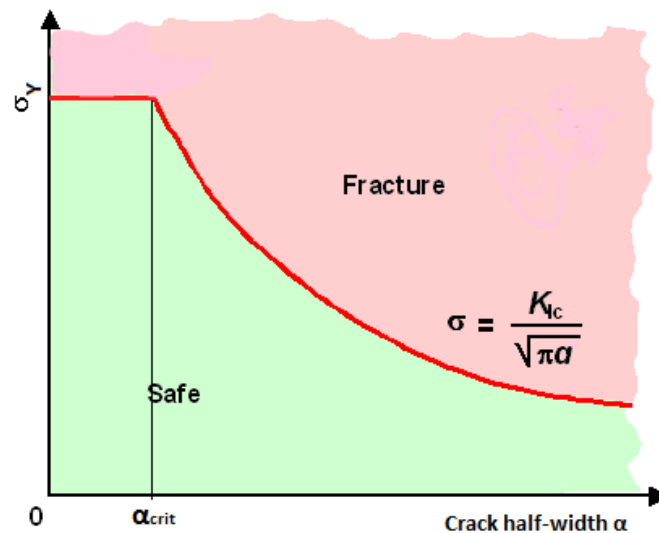
Σχήμα 2.7: Κριτήριο Griffith

Η κόκκινη καμπύλη του διαγράμματος είναι το όριο πάνω από το οποίο η εφαρμοζόμενη τάση σ σε συνδυασμό με το μήκος της ρωγμής $2a$ οδηγούν το δοκίμιο στην αστοχία. Ακολουθώντας αυτή την μέθοδο παρατηρείται ότι για μικρές τιμές του μήκους της ρωγμής η υπολογιζόμενη τάση αστοχίας

υπερβαίνει την τάση διαρροής του υλικού σ_Y όπως ορίζεται από την ελαστική μηχανική. Επομένως κάτω από ένα κρίσιμο μήκος α_{cr} η ρωγμή δεν έχει επίδραση στην αντοχή του υλικού. Το κρίσιμο αυτό μήκος προσδιορίζεται από την σχέση:

$$\alpha_{crit} = \frac{1}{\pi} \frac{K_{crit}^2}{\sigma_Y^2} \quad (2.28)$$

Επομένως το κριτήριο Griffith σε συνδυασμό με ένα κριτήριο διαρροής (π.χ. von Mises) αποδίδεται σχηματικά ως εξής:



Σχήμα 2.8: Κριτήριο Griffith και κριτήριο von Mises

Επομένως ο έλεγχος της κατάστασης του δοκιμίου σε πραγματικό χρόνο είναι αποτελεσματικός μόνο στην περίπτωση στην οποία η μετρητική διάταξη έχει την δυνατότητα να εντοπίσει ρωγμή μήκους τουλάχιστον ίσο με α_{crit} . Σε περίπτωση που δεν συμβαίνει αυτό υπάρχει περίπτωση η διάδοση του ρήγματος να ξεκινήσει δίχως να γίνει αντιληπτή με καταστροφικά αποτελέσματα για την λειτουργία του δοκιμίου αλλά και την ασφάλεια.

Αναγκαίος είναι όμως και ο προσδιορισμός της συμπεριφοράς της ρωγμής στην περίπτωση της δυναμικής καταπόνησης. Η ανάλυση αυτή δεν διαφέρει ουσιαστικά ως προς την αρχή της με την μελέτη της κόπωσης των υλικών. Για ρωγμή Mode I αν οριστεί εύρος τάσεων φόρτισης ανά κύκλο φόρτισης ίσο με

$$\Delta\sigma = \sigma^{\max} - \sigma^{\min} \quad (2.29)$$

τότε από την εξίσωση (2.25) προκύπτει το εύρος του SIF από την σχέση:

$$\Delta K_I = \Delta K_I^{\max} - \Delta K_I^{\min} = f(\sigma^{\max} - \sigma^{\min}) \cdot \sqrt{\pi \alpha} = f \Delta\sigma \sqrt{\pi \alpha} \quad (2.30)$$

Επιπλέον της κόπωσης από τα πειράματα των Paris και Erdogan προκύπτει η συμπεριφορά της ρωγμής στην πάροδο του χρόνου σε σχέση με τους συντελεστές εντάσεων των τάσεων. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων αποδίδονται σε λογαριθμική κλίμακα του ρυθμού επέκτασης της ρωγμής (μήκος ρωγμής ανά κύκλο φόρτισης - da/dN) συναρτήσεως του εύρους του συντελεστή διάδοσης των τάσεων (ΔK). Από το Σχήμα 2.9 είναι προφανής η ύπαρξη τριών περιοχών οι οποίες αντιστοιχούν στην εμφάνιση διαφορετικών φαινομένων. Η πρώτη περιοχή βρίσκεται κοντά στο ΔK_{th}

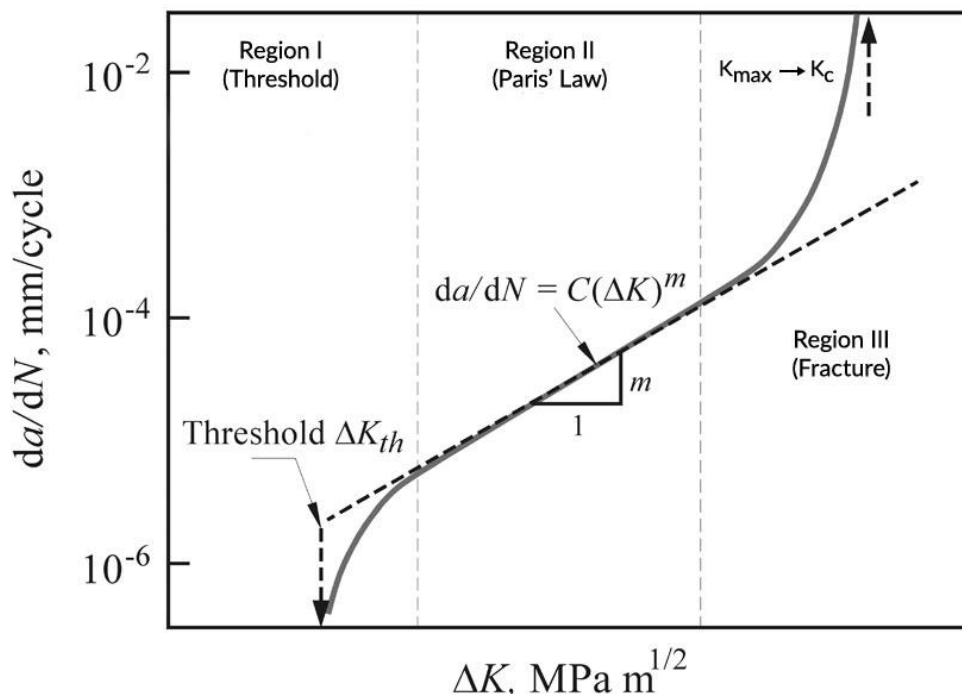
κάτω από το οποίο η ρωγμή δεν επεκτείνεται. Ύστερα στην δεύτερη περιοχή παρατηρείται σταθερή διάδοση της ρωγμής η οποία διέπεται από τον Νόμο του Paris [4]:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (2.31)$$

Με τα C, m να είναι σταθερές που υπολογίζονται από τα πειραματικά αποτελέσματα για κάθε υλικό. Στην συνέχεια η τρίτη περιοχή κοντά στην κρίσιμη τιμή του συντελεστή έντασης των τάσεων έχει ως αποτέλεσμα την ασταθή και ταχεία θραύση του υλικού. Με την πάροδο των χρόνων έχουν χρησιμοποιηθεί και άλλες καμπύλες παρεμβολής των εμπειρικών δεδομένων τόσο για την περιοχή II αλλά και για την περιοχή III [1]. Επιλύοντας την εξίσωση (2.31) ως προς N προκύπτει:

$$N = \frac{(a_{cr}^{1-\frac{m}{2}} - a_0^{1-\frac{m}{2}})}{C(f\Delta\sigma\sqrt{\pi})^2(-\frac{m}{2}+1)} \quad (2.32)$$

με a_0 να είναι το αρχικό μήκος της ρωγμής, a_{cr} να είναι το κρίσιμο μήκος της ρωγμής και N ο αριθμός των κύκλων φόρτισης πριν από την αστοχία. Σε μία εφαρμογή που πραγματοποιείται συνεχής έλεγχος αλλά η διακοπή της λειτουργίας δεν είναι εφικτή την οποιαδήποτε στιγμή (π.χ. αεροπλάνα) δεν είναι αρκετό για την μετρητική διάταξη να δύναται να εντοπίσει το κρίσιμο μήκος ρωγμής. Γνωρίζοντας τα χαρακτηριστικά της δυναμικής φόρτισης που δέχεται αλλά και την μεγαλύτερη χρονική διάρκεια αναγκαίας αδιάλειπτης λειτουργίας προσδιορίζεται το μέγιστο πλήθος N των φορτίσεων που θα πρέπει να μπορεί δεχτεί το εξάρτημα από την στιγμή που θα προσδιοριστεί ως ακατάλληλο. Με την πληροφορία αυτή και τον τύπο (2.32) υπολογίζεται το a_0 που αποτελεί το νέο μήκος “κρίσιμης” ρωγμής που θα πρέπει να μπορεί να ανιχνευτεί από την μετρητική διάταξη ώστε να μην παρατηρηθεί ασταθής διάδοση κατά την διάρκεια λειτουργίας.



Σχήμα 2.9: Διάγραμμα Paris-Erdogan για την διάδοση ρωγμών σε κόπωση

Στην περίπτωση του συνδυασμού τύπων ρωγμής έχουν αναπτυχθεί πληθώρα κριτηρίων βασισμένα στους συντελεστές συγκέντρωσης έντασης του καθενός ξεχωριστά. Συγκεκριμένα στην περίπτωση διάδοσης ρωγμών τύπου I και τύπου II από την αναλυτική λύση έχουν προκύψει οι παρακάτω

εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Στις εξισώσεις αυτές έχουν στηριχθεί τα δύο πιο διαδεδομένα κριτήρια το MTS (Maximum Tangential Stress-Μέγιστης Εφαπτομενικής Τάσης) το οποίο εκφράζεται μαθηματικά ως [12]:

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \text{ και } \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} < 0 \tag{2.34}$$

και το MSS (Maximum Sheer Stress-Μέγιστης Διατμητικής Τάσης) για το οποίο πρέπει να ισχύει [12]:

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \text{ και } \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \tag{2.35}$$

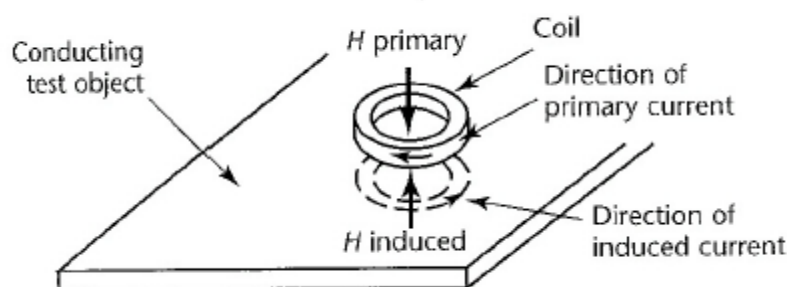
3. Μοντελοποίηση Μεθόδου Πτώσης Δυναμικού Συνεχούς Ρεύματος (DCPD)

Λόγω της ευρείας χρήσης μεταλλικών αγωγίμων υλικών στις κατασκευές οι μέθοδοι της πτώσης του δυναμικού είναι αρκετά διαδεδομένες και χρησιμοποιούνται για την διάγνωση προβλημάτων που σχετίζονται με την καταστροφική αστοχία του υλικού. Στοιχεία όπως το πάχος (σωλήνων, δεξαμενών) αλλά και οι ρωγμές εντός των υλικών επηρεάζουν την ηλεκτρική αντίσταση τους, επομένως είναι δυνατόν να συσχετιστούν οι τιμές της πτώσης του δυναμικού με τις γεωμετρικές ατέλειες του εκάστοτε δοκιμίου.

Από τις τελευταίες δεκαετίες του 20^{ου} αιώνα έχει ξεκινήσει συστηματικά η ανάπτυξη και η χρήση των μεθόδων αυτών στην βιομηχανία. Πέραν του αυξημένου ενδιαφέροντος για NDT από την περίοδο αυτή μέχρι και σήμερα υπάρχουν και άλλοι παράγοντες που οδήγησαν στην διάδοση των μεθόδων πτώσης δυναμικού. Αρχικά, η πρόοδος στην Ηλεκτρολογία έκανε δυνατή την ανάπτυξη αισθητήρων με μεγαλύτερη ανάλυση και ευαισθησία παρέχοντας την δυνατότητα για πιο ακριβείς μετρήσεις, όλο και μικρότερων μεταβολών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Επιπλέον οι εξελίξεις στην επιστήμη της Μηχανικής των Υπολογιστών οδήγησε στην βελτίωση της ανάλυσης μεγάλου όγκου δεδομένων επιτρέποντας την βαθύτερη κατανόηση του φυσικού φαινομένου μέσα από αριθμητικές μοντελοποιήσεις των εξισώσεων του Maxwell. Πλέον έχουν αναπτυχθεί πολλοί μέθοδοι για την επιβολή ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και ανίχνευσης της πτώσης δυναμικού (PD Techniques) σε αγωγίμα υλικά με πολύπλοκες πειραματικές διατάξεις.

3.1 Μέθοδοι Πτώσης Δυναμικού

Η πιο διαδεδομένη από τις μεθόδους αυτές είναι η Eddy Current Testing που χρησιμοποιείται τόσο για τον υπολογισμό του πάχους σε κατασκευές, τον προσδιορισμό του μεταλλικού κράματος αλλά και τον εντοπισμό επιφανειακών ρωγμών. Το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι η δημιουργία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου εντός των υλικών με την χρήση των αναπτυσσόμενων δινορευμάτων, χωρίς δηλαδή να έρθει σε επαφή με αυτά. Βασίζεται στην τάση των αγωγίμων υλικών να αντιστέκονται στην αλλαγή του μαγνητικού πεδίου μέσα στο οποίο βρίσκονται, σύμφωνα με τον νόμο του Lenz. Η αλλαγή αυτή επιτυγχάνεται με την χρήση εναλλασσόμενου ρεύματος σε ένα καλώδιο το οποίο τοποθετείται κοντά στην προς εξέταση επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα (3.1).

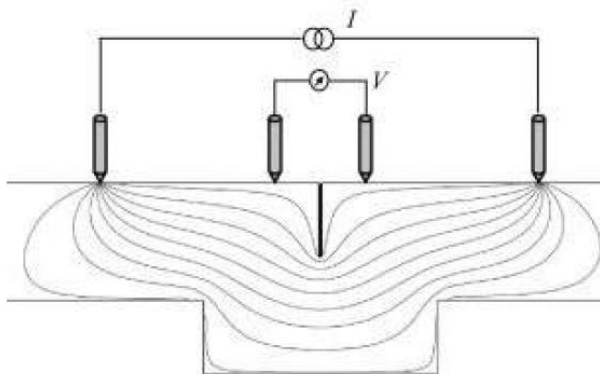


Σχήμα 3.1: Eddy Current Method

Στην περιοχή αυτή δημιουργούνται δινορεύματα, ώστε να αντισταθούν στην δημιουργία του μαγνητικού πεδίου, τα οποία όμως επηρεάζονται από την ύπαρξη ατελειών. Με βάση αυτή την ιδέα έχουν αναπτυχθεί πολλές παρόμοιες μέθοδοι όπως η Pulsed Eddy Current και η Remote Field Current Method. Το μειονέκτημα που αντιμετωπίζουν όλες οι αναφερθείσες διατάξεις είναι το μικρό πάχος

διείσδυσης των ρευμάτων στο υλικό (skin effect) αλλά κυρίως η αδυναμία τους για αυτοματοποιημένο έλεγχο μεγάλων επιφανειών

Στην παρούσα διπλωματική για την παρακολούθηση της διάδοσης της ρωγμής χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Direct Current Potential Drop (DCPD). Σύμφωνα με αυτή, μία πηγή ρεύματος τροφοδοτεί με συνεχές ρεύμα τα εξεταζόμενα αγωγία δοκίμια, μέσω ηλεκτρικών ακροδεκτών σε συγκεκριμένα σημεία και στην συνέχεια με κατάλληλους αισθητήρες πραγματοποιείται μέτρηση της τάσης εκατέρωθεν της ρωγμής (Σχήμα(3.2)).



Σχήμα 3.2: Διάταξη DCPD

Η αρχή στην οποία στηρίζεται είναι ότι η πορεία του ηλεκτρικού ρεύματος επηρεάζεται από τις ατέλειες του υλικού με αποτέλεσμα την ανάπτυξη, εκατέρωθεν από αυτές, μεγαλύτερης διαφοράς δυναμικού σε σχέση με αυτή που θα αντιστοιχούσε αν επηρεαζόταν μόνο από την ηλεκτρική αντίσταση του υλικού. Επιπλέον κάθε μεταβολή του μεγέθους των ατελειών, θα επηρεάσει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, λόγω των διαφορετικών γεωμετρικών χαρακτηριστικών και συνεπώς θα προκαλέσει αλλαγή στις μετρήσεις του δυναμικού. Με βάση αυτήν την ιδιότητα γνωρίζοντας την τιμή της τάσης γύρω από μία ρωγμή η δυνατός ο προσδιορισμός του μήκους της. Προϋπόθεση αποτελεί η γνώση των καμπυλών συσχέτισης των δύο αυτών μεγεθών οι οποίες προκύπτουν από την ανάλυση των πειραματικών δεδομένων. Ακόμη, αυτή η Μη-Καταστροφική Μέθοδος επιτρέπει την αυτοματοποίηση του προσδιορισμού του μήκους της ρωγμής σε πραγματικό χρόνο, ακόμη και υπό δυσμενείς συνθήκες όπως η υψηλή θερμοκρασία και το οξειδωτικό περιβάλλον . Όμως η τυπική μέθοδος DCPD εμφανίζει κάποια μειονεκτήματα όσον αφορά τα σφάλματα και τον θόρυβο που δημιουργείται λόγω των περιπλανώμενων ρευμάτων, την ύπαρξη θερμοηλεκτρικών δυναμικών και άλλα. Ο τρόπος αντιμετώπισης του φαινομένου αυτού είναι η αύξηση της προδιδόμενης έντασης του ρεύματος (μερικές εκατοντάδες A) κατά την οποία μειώνεται το ποσοστό θορύβου σε σχέση το ίδιο το σήμα. Με την πρακτική αυτή όμως παρατηρείται αύξηση της θερμοκρασίας λόγω του φαινομένου Joule γεγονός που δημιουργεί την ανάγκη για πιο μεγάλες και ανθεκτικές πειραματικές διατάξεις.

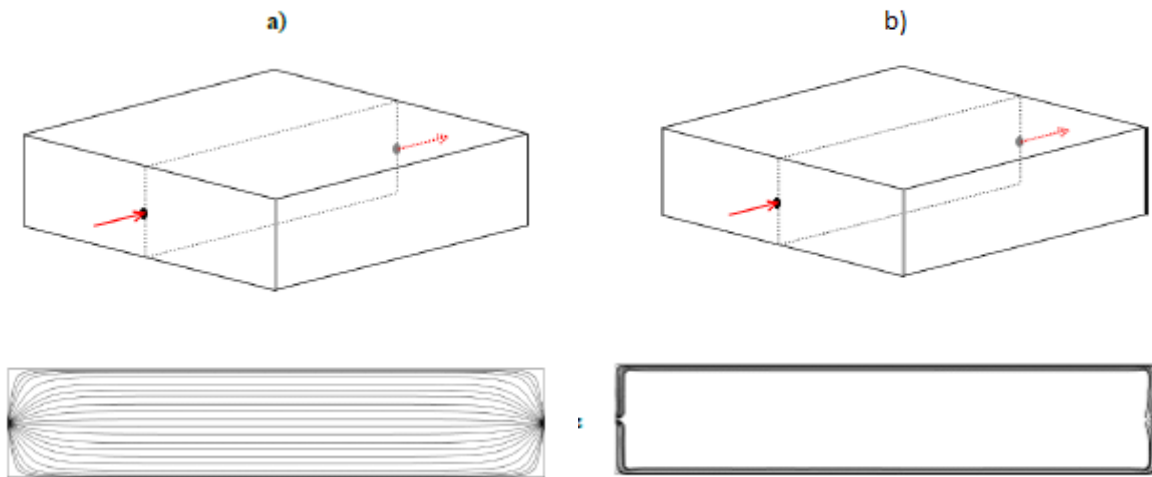
Παράλληλα με την DCPD αναπτύχθηκε και η ίδια μέθοδος για εναλλασσόμενο ρεύμα (ACPD) δίνοντας ουσιαστικά λύση στα προβλήματα θορύβου άρα και της αναγκαίας υψηλής έντασης του ρεύματος μέσω της αύξησης της συχνότητας του. Το βασικό της πρόβλημα, όπως και στην Eddy Current, αποτελεί το skin effect σύμφωνα με το οποίο το βάθος που μπορεί να φτάσει το εναλλασσόμενο ρεύμα είναι περιορισμένο και αντιστρόφως ανάλογο με την συχνότητα του ρεύματος όπως φαίνεται και από την σχέση:

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\pi f \mu}} \quad (3.1)$$

με δ το πάχος διείσδυσης, ρ η ηλεκτρική αντίσταση του υλικού, f η συχνότητα του ρεύματος και μ η μαγνητική διαπερατότητα του υλικού

Το πρόβλημα αυτό δεν υφίσταται στην DCPD όπου το ρεύμα διαχέεται σε όλο το δοκίμιο όπως

φαίνεται και στο Σχήμα 3.3 [7].



Σχήμα 3.3: Διάχυση ρεύματος στο εσωτερικό στερεού για α) Συνεχές Ρεύμα β) Εναλλασσόμενο ρεύμα υψηλής συχνότητας

Η χρυσή τομή των δύο εναλλακτικών αποτελεί η χρήση παλμών «συνεχούς» ρεύματος έτσι ώστε να εξασφαλιστούν τα οφέλη και των δύο μεθόδων και κανένα από τα μειονεκτήματά τους. Η συγκεκριμένη μέθοδος θέλει προσοχή ώστε η λήψη των μετρήσεων να πραγματοποιείται αφού έχει σταθεροποιηθεί το πεδίο και όχι στην μεταβατική κατάσταση. Από την εξίσωση (3.1) ορίζεται το άνω όριο της συχνότητας των παλμών f_{\max} αντικαθιστώντας την παράμετρο δ με το πραγματικό πάχος του δοκιμίου που επιθυμούμε να ελέγξουμε. Επίσης σημαντικό ρόλο στο πάχος διείσδυσης έχει και η απόσταση μεταξύ των ηλεκτροδίων [8]. Η συχνότητα όμως δεν μπορεί να λάβει υπερβολικά μικρές τιμές λόγω του ότι σε αυτές εμφανίζεται και πάλι το πρόβλημα του θορύβου. Έχει υπολογιστεί ότι η πυκνότητα του θορύβου που σε αυτήν την περίπτωση είναι αντιστρόφως ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα της συχνότητας και για αυτόν το λόγο δύναται να πάρει κάτω από κάποια τιμή [7]. Όμως με κατάλληλη μετρητική διάταξη είναι δυνατή η μείωση αυτού του σφάλματος σε μεγάλο βαθμό με την επιλογή preamplifier με καλή απόδοση σε χαμηλές συχνότητες.

3.2 Αναλυτική Μοντελοποίηση Μεθόδου DCPD

3.2.1 Μέθοδος Κατοπτρικών Πηγών

Έστω A το σημείο εισόδου ρεύματος I στο δοκίμιο και ένα B το σημείο εξόδου ρεύματος I από αυτό (Σχήμα 3.4). Οι εξισώσεις που περιγράφουν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που θα δημιουργηθεί είναι οι εξής:

$$\nabla \cdot (\sigma_{ij} \nabla V) = I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) - I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B) \Rightarrow \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot (\sigma_{ij} \nabla V) = I [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B)]$$

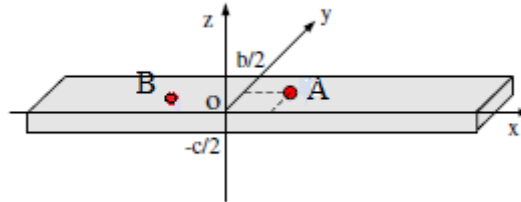
$$\mathbf{J} = \sigma_{ij} \mathbf{E} = -\sigma_{ij} \nabla V \quad (3.3)$$

Παράλληλα για συνοριακές συνθήκες ορίζεται ότι στα όριο του στερεού η συνιστώσα της πυκνότητας ρεύματος κάθετη στην επιφάνεια θα είναι ίση με μηδέν.

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.4)$$

όπου V το ηλεκτρικό δυναμικό (V), σ_{ij} ο ταυστής της ηλεκτρικής αγωγιμότητας του υλικού (s/m),

I η ένταση του ρεύματος (A), J η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος A/m^2 , E η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (V/m) και r το διάνυσμα του κάθε σημείου του χώρου R^3 .



Σχήμα 3.4: Ημιάπειρη πλάκα με A,B σημεία εισόδου και εξόδου του ρεύματος

Η αναλυτική λύση της παραπάνω εξίσωσης στην παρούσα μορφή της είναι εξαιρετικά πολύπλοκη και στην βιβλιογραφία οι περισσότεροι ερευνητές καταφεύγουν σε κάποια αριθμητική προσέγγισή της. Όμως υπό κάποιες παραδοχές είναι δυνατή η λύση της, για συγκεκριμένες περιπτώσεις οι οποίες όμως εμφανίζουν αρκετό ενδιαφέρον όπως αυτή των κατοπτρικών πηγών.

Η μέθοδος της επίλυσης ξεκινά με τον περιορισμό του πεδίου ορισμού στο χωρίο $D = \{R^3 | z \leq 0\}$ δηλαδή τον κάτω ημιχώρο. Έπειτα, όπως συμβαίνει και στην πραγματική εφαρμογή της DCPD, τα σημεία εισόδου και εξόδου του ρεύματος A,B λαμβάνονται πάνω στο xy επίπεδο ($\vec{r}_A = (x_A, y_A, 0)$ $\vec{r}_B = (x_B, y_B, 0)$). Λόγω της επιφανειακής θέσης των πηγών και των καταβοθρών ρεύματος η πυκνότητα J δεν διανέμεται κάθετα στην επιφάνεια μιας σφαίρας με κέντρο το A αλλά στην μισή αυτής, η οποία βρίσκεται εντός του 'υλικού', κάτω από το επίπεδο xy. Επομένως γύρω από τα σημεία A και B θα δημιουργούνται ημισφαιρικές επιφάνειες (Σχήμα 3.5) των οποίων η πυκνότητα ρεύματος δίνεται από τον τύπο:

$$dJ = I / dA \Rightarrow$$

$$J = \frac{I}{A_{σφαιρας} \cdot 0,5} = \frac{I}{2\pi r^2} \quad (3.5)$$

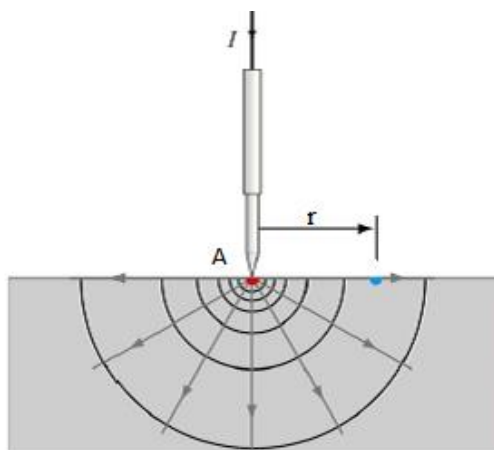
όπου για την πηγή A ισχύει:

$$r = r_A = \sqrt{(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2 + (z_i - z_A)^2} \quad (3.6)$$

όπου r η ακτίνα της σφαίρας που ορίζεται από το σημείο (x_i, y_i, z_i) που αναζητείται το δυναμικό του και τις συντεταγμένες (x_A, y_A, z_A) της πηγής του ρεύματος. Στο σημείο B βέβαια, η πυκνότητα ρεύματος έχει αντίθετο πρόσημο από ότι στο σημείο A.

Στην παρούσα φάση μία ακόμη απλοποίηση είναι δυνατή. Έχει ήδη οριστεί ότι $z_A = 0$ αλλά επιπλέον στην DCPD τα πιθανά σημεία για την λήψη μετρήσεων βρίσκονται όλα στην επιφάνεια επομένως ισχύει $z_i = 0$. Ως αποτέλεσμα η τάση αρκεί να οριστεί μόνο πάνω στο xy επίπεδο όπου:

$$r = r_{iA} = \sqrt{(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2} \quad (3.7)$$



Σχήμα 3.5: Διάδοση Ρεύματος εντός υλικού από σημειακή πηγή

Για να αποφευχθούν οι πράξεις μεταξύ τανυστών σε αυτό το σημείο έγινε η παραδοχή ότι το υλικό έχει ομοιόμορφη ηλεκτρική αγωγιμότητα σ σε όλο σώμα του. Με γνωστές λοιπόν τις παραπάνω σχέσεις (3.7,3.5) αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3.3) προκύπτει η τάση :

$$V = \frac{I}{2\pi r_A \sigma} \quad (3.8)$$

Στην δεδομένη περίπτωση όπου στα σημεία A και B θεωρήθηκε από μία πηγή και μία καταβόθρα αντίστοιχα η τάση υπολογίζεται με υπέρθεση των δύο ρευμάτων από τον εξής τύπο:

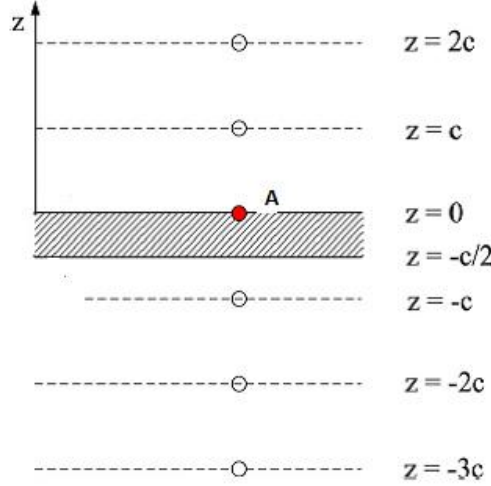
$$V = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (3.9)$$

η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace (3.2) (Παράρτημα I) και ικανοποιεί ταυτοτικά την οριακή συνθήκη (3.4) στην συγκεκριμένη περίπτωση.

Για την μαθηματική μοντελοποίηση δοκιμίου με πεπερασμένες διαστάσεις οι συνθήκες όμως περιπλέκονται. Μέχρι τώρα οι οριακές συνθήκες εξασφαλιζόνταν από την παραδοχή ότι J διαχέεται κάθετα σε ημισφαιρικές επιφάνειες που ορίζονται πάνω στο επίπεδο xy άρα δεν ήταν δυνατόν να τμήσει το όριο του υλικού (που στην προκειμένη περίπτωση ήταν το xy επίπεδο). Για πεπερασμένο πάχος θα πρέπει να εξασφαλιστεί ότι η εξίσωση επίλυσης δεν δημιουργεί καταστάσεις που αντιβαίνουν στην οριακή συνθήκη στην κάτω επιφάνεια του 'στερεού'. Για να ξεπεραστεί το εμπόδιο αυτό χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των κατοπτρικών πηγών. Υποθέτοντας ένα δοκίμιο με πάχος $c/2$ τότε τοποθετώντας μία πηγή στο σημείο $(0,0,-c)$ η οποία αλληλοεπιδρά με την πηγή A στο $(0,0,0)$ ικανοποιείται η οριακή συνθήκη στο επίπεδο της κάτω επιφάνειας. Παρατηρείται όμως ότι με αυτό τον τρόπο χάνεται η ταυτοτική ικανοποίηση της οριακής συνθήκης στο άνω επίπεδο. Για να λυθεί το πρόβλημα που δημιουργήθηκε πρέπει να προστεθεί μια πηγή στο σημείο $(0,0,c)$. Συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία αρκετές φορές (Σχήμα 2.8), όπου μετά από έναν αριθμό πηγών παρατηρείται σύγκλιση των τιμών του δυναμικού πεδίου που αναπτύσσεται.. Η εξίσωση των άπειρων αθροισμάτων της τάσης προκύπτει ως εξής:

$$V = \frac{I}{2\pi\sigma} \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r'_{iA}} - \frac{1}{r'_{iB}} \right) = \frac{I}{2\pi\sigma} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{r_{iA}^2 + (nc)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_{iB}^2 + (nc)^2}} \right) \quad (3.10)$$

Η ίδια λογική ακολουθείται καθώς επιβάλλονται πεπερασμένα όρια και στις υπόλοιπες διαστάσεις του δοκιμίου. Το πρόβλημα στη μέθοδο αυτή των κατοπτρικών πηγών είναι ότι κάθε φορά δεν αναπαράγεται μόνο η πραγματική πηγή αλλά και όλες οι θυγατρικές κατοπτρικές πηγές.



Σχήμα 3.6: Άπειρη αγώγιμη πλάκα με πεπερασμένο πάχος

Ως αποτέλεσμα για ένα ορθογωνικό δοκίμιο με μήκος $a/2$, πλάτος $b/2$, και πάχος $c/2$ προκύπτει η εξίσωση τάσης ως το παρακάτω άπειρο άθροισμα:

$$V = \frac{I}{2\pi\sigma} \sum_{p=1}^{p=2} \sum_{q=1}^{q=2} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_{iA}^2 + (nc)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_{iB}^2 + (nc)^2}} \right) \quad (3.11)$$

όπου:

$$\rho_{iA} = \sqrt{(x_i - (-1)^p x_A - la)^2 + (y_i - (-1)^q y_A - mb)^2} \quad (3.12)$$

$$\rho_{iB} = \sqrt{(x_i - (-1)^p x_B - la)^2 + (y_i - (-1)^q y_B - mb)^2} \quad (3.13)$$

Η διαδικασία αυτή μπορεί να επεκταθεί για παραπάνω από μία πηγές και καταβόθρες αυξάνοντας τους όρους του άπειρου αθροίσματος, πραγματοποιώντας με μεγάλη προσοχή μία υπέρθεση όλων των εισόδων και εξόδων του ρεύματος. Το πρόβλημα με τον τύπο αυτό (3.11) είναι ο χρόνος σύγκλισης του. Για κάθε ένα άπειρο άθροισμα χρειάζονται περίπου εικοσιπέντε (25) όροι με $n, m, l = -12, -11, \dots, 0, \dots, 11, 12$ για να συγκλίνει σε μία τιμή. Για την βελτίωση της ταχύτητας σύγκλισης γίνεται χρήση της παρακάτω ταυτότητας που έχει προκύψει από την ανάλυση Fourier για άπειρα αθροίσματα [9,10]:

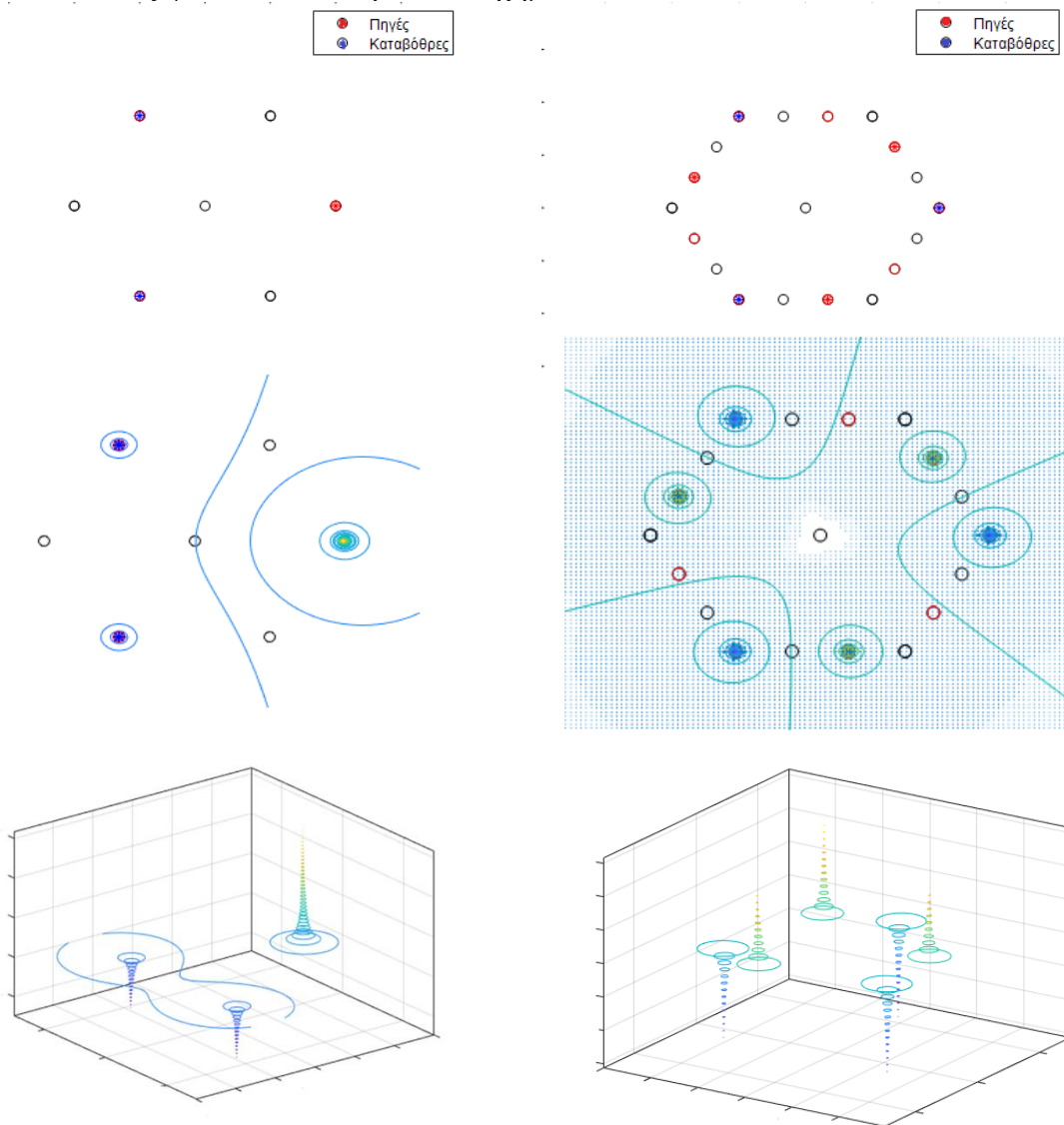
$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{\exp\left[-\zeta \sqrt{\rho^2 + (z-nc)^2}\right]}{\sqrt{\rho^2 + (z-nc)^2}} = \frac{2}{c} K_0(\zeta\rho) + \frac{4}{c} \sum_{\nu=1}^{+\infty} K_0\left[\rho \sqrt{\zeta^2 + \left(\frac{2\nu\pi}{c}\right)^2}\right] \cos\left(\frac{2\nu\pi z}{c}\right) \quad (3.14)$$

όπου $K_0(x)$ είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δεύτερου τύπου. Θέτοντας $z=0$ και $\zeta \rightarrow 0$ προκύπτει για την εξίσωση (3.11) η εξής μετατροπή:

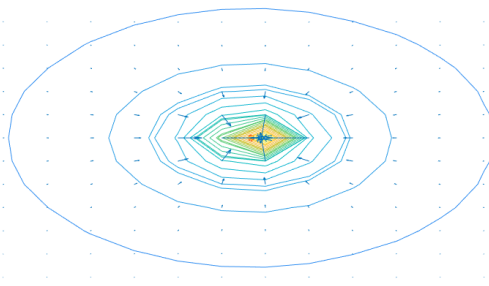
$$V = \frac{I}{2\pi \cdot \sigma} \sum_{p=1}^{p=2} \sum_{q=1}^{q=2} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \left\{ \frac{2}{c} \ln\left(\frac{\rho_{iB}}{\rho_{iA}}\right) + \frac{4}{c} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[K_0\left(\rho_{iA} \frac{2\nu\pi}{c}\right) - K_0\left(\rho_{iB} \frac{2\nu\pi}{c}\right) \right] \right\} \quad (3.15)$$

η οποία συγκλίνει με αρκετές λιγότερες επαναλήψεις.

Για την δοκιμή του μοντέλου απαιτείται ο προσδιορισμός των διαστάσεων του στερεού, του ρεύματος έντασης I , της ηλεκτρικής αγωγιμότητας σ καθώς και της θέσης των πηγών και καταβοθρών. Επιδιώκοντας την εξακρίβωση της επίδρασης της εισόδου και εξόδου του ρεύματος σε διάφορα σημεία οι διαστάσεις και η τιμή του ρεύματος παίρνουν τις τετριμμένες τιμές $a = 20cm, b = 20cm, c = 20cm, I = 1A, \sigma = 1s/m$. Το ίδιο όμως δεν συνέβη για τις θέσεις πηγών και καταβοθρών. Η περιοχή εμπιστοσύνης μιας μετρητικής διάταξης DCPD δεν καλύπτει όλη την επιφάνεια του δοκιμίου πάρα μόνο ένα μέρος αυτής. Για το λόγο αυτό στην διάταξη αποδόθηκαν μορφές κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο ακτίνας $r_p = 2cm$, που επαναλαμβανόμενες μπορούν να καλύψουν όλο τον χώρο γύρω τους, δηλαδή μορφή τριγώνου, τετραγώνου και εξαγώνου. Αξιοποιώντας την γλώσσα προγραμματισμού MATLAB δημιουργήθηκε αλγόριθμος στον οποίο μπορεί να επιλεγεί οποιοσδήποτε αριθμός σημείων των παραπάνω γεωμετριών και να τους αποδοθούν χαρακτηριστικά πηγής ή καταβόθρας. Στην συνέχεια με τους τύπους (3.11,3.15) υπολογίζεται το τασικό πεδίο όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 3.7: Τασικό πεδίο στην επιφάνεια του δοκιμίου για εξαγωνική μορφή για διάφορους συνδυασμούς εισόδου και εξόδου του ρεύματος.



Σχήμα 3.8: Τασικό πεδίο γύρω από πηγή ρεύματος

Όπως είναι εμφανές η μέθοδος αυτή αξιοποιώντας μία ομογενή λύση δεν δύναται να παράγει το πραγματικό δυναμικό πεδίο αλλά ένα πεδίο μετατοπισμένο κατά μια τυχαία σταθερά T . Επομένως η γνώση του πραγματικού μπορεί να προκύψει μόνο αν είναι γνωστή μία τιμή του όπως για παράδειγμα την θέση της γείωσης. Όμως μπορούν να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα όσον αφορά την διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων της επιφάνειας.

Μειονέκτημα της άνω μεθόδου είναι ότι τα αποτελέσματα της εξαρτώνται αρκετά από την γεωμετρία του δοκιμίου και συγκεκριμένα από τις διαστάσεις του σε σχέση με την απόσταση μεταξύ των πηγών και των καταβοθρών. Όταν βρίσκονται κοντά στα όρια του δοκιμίου τότε η αξιοπιστία των παραπάνω τύπων μειώνεται δραματικά [8]. Και στην πραγματικότητα όμως όταν εισάγεται ρεύμα κοντά στις άκρες του στερεού τότε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο παρουσιάζει διαταραχές (edge effect). Πειραματικές συγκρίσεις έχουν αναδείξει ότι όσο πιο μικρή είναι η απόσταση της πηγής από την καταβόθρα σε σχέση με τις υπόλοιπες διαστάσεις τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια επιτυγχάνεται [8].

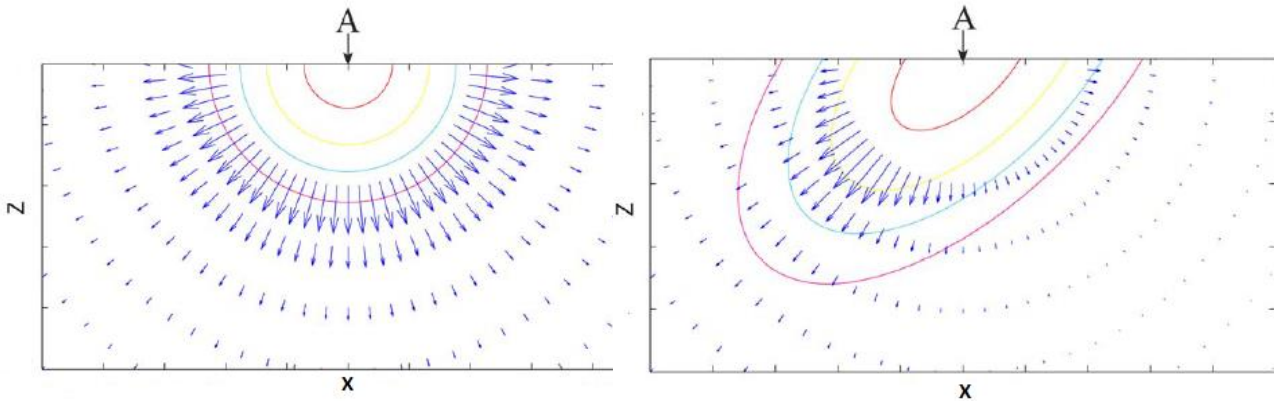
Μετά την δημιουργία του μοντέλου για την επιφάνεια του στερεού σε προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB απαιτείται η μοντελοποίηση της ατέλειας. Για να επιτευχθεί αυτό θεωρήθηκε ένα ευθύγραμμο τμήμα με τυχαία σημεία για άκρα. Το ευθύγραμμο αυτό τμήμα σηματοδοτεί μία επιπλέον οριακή συνθήκη Neumann και για την ικανοποίηση του, όπως και προηγουμένως, χρησιμοποιείται προσθήκη σημειακών πηγών και καταβοθρών έντασης ρεύματος. Αρχικά υπολογίζονται τα αντικατοπτρικά σημεία των αρχικών πηγών και καταβοθρών ως προς την διεύθυνση του ευθυγράμμου τμήματος-ρωγμής. Στην συνέχεια ακολουθείται όλη η προαναφερθείσα διαδικασία για να εξασφαλιστεί η ικανοποίηση των οριακών συνθηκών στα άκρα του δοκιμίου υπό τα καινούρια δεδομένα. Ως τελικός τύπος υπολογισμού προκύπτει :

$$V = \frac{I}{2\pi\sigma} \sum_{p=1}^{p=2} \sum_{q=1}^{q=2} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_{iA}^2 + (nc)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_{iB}^2 + (nc)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho_{iA'}^2 + (nc)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_{iB'}^2 + (nc)^2}} \right) \quad (3.16)$$

όπου A', B' τα συμμετρικά σημεία ως προς την διεύθυνση της ρωγμής.

Στην περίπτωση που η ατέλεια αποτελείται από πολλά ευθύγραμμα σχήματα με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται ο τύπος του δυναμικού πεδίου λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα συμμετρικά σημεία. Τα αποτελέσματα που παράγονται με αυτό τον τρόπο είναι συγκεκριμένα και δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα διότι στις περισσότερες περιπτώσεις αν και αποτρέπει το ρεύμα να διέλθει μέσα από τα όρια της ρωγμής, επιτυγχάνει το ίδιο σε όλη την διεύθυνσή της, χωρίζοντας το δοκίμιο σε δύο μέρη. Ακόμη, στην περίπτωση που η ατέλεια βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετο των σημείων εισόδου και εξόδου του ρεύματος η θέση των πηγών και καταβοθρών ταυτίζεται με αποτέλεσμα να αλληλοαναιρούνται. Ο λόγος αυτός σε συνδυασμό με την πολυπλοκότητα του προβλήματος στην περίπτωση της σύνθετης ρωγμής οδηγεί στην εγκατάλειψη αυτής της μοντελοποίησης. Παρόλα αυτά η μέθοδος αυτή μπορεί πολύ εύκολα να συμπεριλάβει την τρισδιάστατη επίλυση του φυσικού φαινομένου χωρίς την παρουσία της ατέλειας με την άρση του μηδενισμού της τιμής του z_i .

Επιπροσθέτως αν θεωρηθεί ανισοτροπία του υλικού ως προς την ηλεκτρική αντίσταση $R_i(R_x R_y R_z)$ σε κάθε άξονα τότε το δυναμικό πεδίο θα επηρεαστεί σημαντικά [13] όπως φαίνεται στο σχήμα(3.9)



Σχήμα 3.9: Τασικό πεδίο σε ισότροπο και ανισότροπο υλικό

Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο τύπος της τάσης που συμπεριλαμβάνει όλα τα καινούρια χαρακτηριστικά κάνοντας χρήση της ηλεκτρικής αντίστασης αντί της ηλεκτρικής αγωγιμότητας ($R = 1/\sigma (\Omega \cdot m)$).

$$V = \frac{I \sqrt{R_x R_y R_z}}{2\pi} \sum_{p=1}^{p=2} \sum_{q=1}^{q=2} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left(\frac{1}{P_{iA}} - \frac{1}{P_{iB}} \right) \quad (3.17)$$

$$P_{iA} = \sqrt{R_x (x_i - (-1)^p x_A - la)^2 + R_y (y_i - (-1)^q y_A - mb)^2 + R_z (z_i - nc)^2}$$

$$P_{iB} = \sqrt{R_x (x_i - (-1)^p x_B - la)^2 + R_y (y_i - (-1)^q y_B - mb)^2 + R_z (z_i - nc)^2} \quad (3.18)$$

Έχοντας λοιπόν ένα ημι-αναλυτικό μοντέλο για την ανάπτυξη ηλεκτρομαγνητικού πεδίου εντός οποιουδήποτε ορθογωνικού στερεού είναι δυνατή η μελέτη της απόκρισης του πεδίου σε ερεθίσματα και διαφορετικές καταστάσεις όπως η μεταβολή της έντασης του επιβαλλόμενου ρεύματος, η αύξηση των σημείων εισόδου και εξόδου του ρεύματος και η ανισοτροπία της ηλεκτρικής αντίστασης του υλικού.

3.2.2 Μέθοδος Μιγαδικών Μετασχηματισμών

Την κατανόηση της δυσκολίας της μαθηματικής αποτύπωσης του προβλήματος και των οριακών συνθηκών ακολούθησε μία βαθύτερη μελέτη όσον αφορά τα φαινόμενα που κυριαρχούν κατά την επιβολή ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε ένα δοκίμιο. Αυτό που παρατηρείται είναι ότι όσο πιο κοντά τοποθετούνται τα ηλεκτρόδια εισόδου και εξόδου του ρεύματος τόσο μεγαλύτερο ποσοστό του συνεχούς ρεύματος που παραμένει σε μικρό βάθος κοντά στην επιφάνεια. Άρα δίχως βλάβη της ακρίβειας, η δισδιάστατη επίλυση του φαινομένου αρκεί για την εξαγωγή συμπερασμάτων για την διάδοση της ρωγμής μιας και τόσο οι πηγές και οι καταβόθρες όσο και τα σημεία μέτρησης της τάσης βρίσκονται στην επιφάνεια του υλικού. Γίνεται ακόμα η παραδοχή ισότροπου υλικού για να απλοποιηθούν οι διαφορικές εξισώσεις. Επιπλέον για να απαλειφθούν οι όροι Dirac που περιπλέκουν την εξίσωση δύναται να θεωρηθούν κύκλοι με ακτίνα που τείνει στο 0, στους οποίους η κάθετη συνιστώσα της πυκνότητας ρεύματος στην περιφέρεια υπακούει την εξίσωση:

$$\oint_{S_A} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = I \quad (3.19)$$

Ως αποτέλεσμα το νέο σύστημα εξισώσεων που πρέπει να λυθεί διαμορφώνεται ως εξής:

$$\nabla \cdot \nabla V = 0 \quad (3.20)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla V \quad (3.21)$$

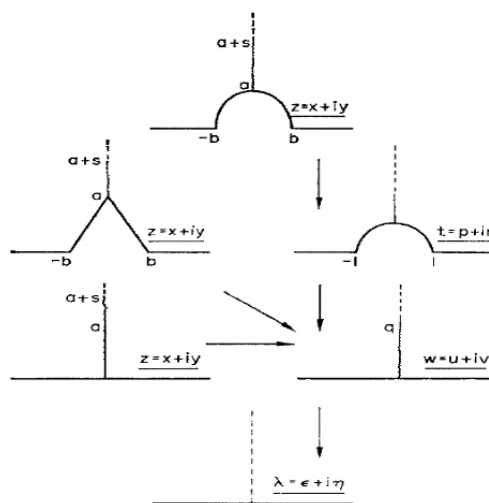
εντός του δοκιμίου με τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ στα όρια του δοκιμίου (πρόβλημα von Neumann)} \quad (3.22)$$

$$\oint_{S_A} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = -\oint_{S_B} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = I \quad (3.23)$$

στους κύκλους ακτίνας r_A, r_B γύρω από τα σημεία εισόδου και εξόδου του ρεύματος με $r_A, r_B \rightarrow 0$

Για την επίλυση του συστήματος αυτού στο δισδιάστατο πλέον επίπεδο μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μιγαδική ανάλυση και συγκεκριμένα η θεωρία των απεικονίσεων. Σύμφωνα με αυτή, μία μιγαδική συνάρτηση $w = f(z)$ με πεδίο ορισμού D ορίζεται ως η σύμμορφη απεικόνιση ενός επιπέδου z στο επίπεδο w αν και μόνο αν είναι ολόμορφη στο D και $f'(z) \neq 0 |z \in D$. Το γεγονός ότι οι σύμμορφες απεικονίσεις έχουν την ιδιότητα να διατηρούν την γωνία τομής μεταξύ δύο καμπύλων κατά μέτρο και προσανατολισμό αλλά και ότι η εξίσωση Laplace παραμένει αναλλοίωτη κατά τον μετασχηματισμό αυτό, τις καθιστά ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την επίλυση του άνω συστήματος (3.20-3.23). Η λύση αυτή σε ένα οποιοδήποτε χωρίο δεν είναι πάντοτε εφικτή και δεν μπορεί να παραμετροποιηθεί. Με την χρήση όμως μιγαδικών μετασχηματισμών είναι δυνατή η απεικόνιση του σε ένα άλλο επίπεδο όπου απλοποιείται αρκετά ή είναι ήδη γνωστή η λύση του. Ύστερα λύνοντας την εξίσωση $w = f(z)$ ως προς z προκύπτει η αντίστροφη συνάρτηση η οποία χρησιμοποιείται για τον μετασχηματισμό της λύσης της Laplace στο αρχικό επίπεδο. Η διαδικασία αυτή έχει μελετηθεί όπως προέκυψε από έρευνα στην σχετική βιβλιογραφία [14] υπό περιορισμούς και μόνο για πεπερασμένο είδος ατελειών. Συγκεκριμένα η ανάλυση αφορούσε το άνω ημιεπίπεδο με οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet στον οριζόντιο άξονα και ελλειψοειδείς, τριγωνικές ή γραμμικές ατέλειες που ξεκινούσαν από αυτόν άξονα όπως φαίνεται στο σχήμα (3.10).



Σχήμα 3.10: Απειρη αγωγήμη πλάκα με πεπερασμένο πάχος

Οι παραδοχές αυτές επιτρέπουν μέσα σε δύο στάδια, με την χρήση του μετασχηματισμού Schwartz-Christoffel και Joukowski την απεικόνιση της ρωγμής στο άνω ημιεπίπεδο και κάνουν δυνατή την

εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης $z = f^{-1}(w)$. Επομένως στις συγκεκριμένες περιπτώσεις μπορούν να εξαχθούν πληροφορίες σχετικά με την μορφή του δυναμικού πεδίου και την επιρροή της γεωμετρίας των ατελειών σε αυτό. Όμως δεν δίνεται κανένας συσχετισμός ανάμεσα στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του δοκιμίου αφού ουσιαστικά μοντελοποιείται ως μία ημιάπειρη πλάκα για να διευκολυνθούν οι πράξεις. Μία επιπλέον παραδοχή είναι ότι η είσοδος του ρεύματος στο άνω ημιεπίπεδο πραγματοποιείται για $z \rightarrow \infty$. Γίνεται λοιπόν αντιληπτό πως η ανάλυση αυτή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της μορφής οποιασδήποτε ρωγμής που είναι και ο σκοπός αυτής της εργασίας.

Με μία πιο αυστηρή μοντελοποίηση όμως είναι δυνατόν να περιγραφεί η DCPD μέθοδος στο δισδιάστατο επίπεδο με ικανοποιητική ακρίβεια και να λυθεί αναλυτικά. Ως πεδίο ορισμού D ορίζεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στις πλευρές του οποίου πρέπει να ικανοποιείται η οριακή συνθήκη (3.22). Εντός αυτού του χώρου μπορεί να αναπτυχθεί οποιοδήποτε είδους ατέλεια όπως και συμβαίνει στην πραγματικότητα και να μοντελοποιηθεί εισάγοντας την ίδια οριακή συνθήκη στην καμπύλη της ρωγμής. Η λύση της εξίσωσης Laplace στην συγκεκριμένη περίπτωση φαίνεται αδύνατη και για αυτό επιδιώκεται ο σύμμορφος μετασχηματισμός της σε ένα άλλο επίπεδο. Ιδανική περίπτωση είναι η απεικόνιση του εσωτερικού του ορθογωνίου, εκτός των σημείων που περικλείει η καμπύλη της ρωγμής, στο άνω ημιεπίπεδο με τον οριζόντιο άξονα να μετατρέπεται στην καμπύλη πάνω στην οποία πρέπει να ικανοποιηθούν όλες οι συνθήκες. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό και ονομάζεται «Πρόβλημα von Neumann για το άνω ημιεπίπεδο» και επιλύεται ως εξής [5]:

Έστω συνάρτηση $g(x)$ συνεχής στο R που ικανοποιεί την συνθήκη $|x^a g(x)| < M, x \in R$ όπου $a > 1$. Για σταθερό $t \in R$, η συνάρτηση $\text{Log}(z-t)$ είναι αρμονική στο ημιεπίπεδο $\text{Im } z > 0$. Τότε η συνάρτηση:

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|z-t|g(t)dt + K \Rightarrow \quad (3.24)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[(x-t)^2 + y^2 \right] g(t)dt + K$$

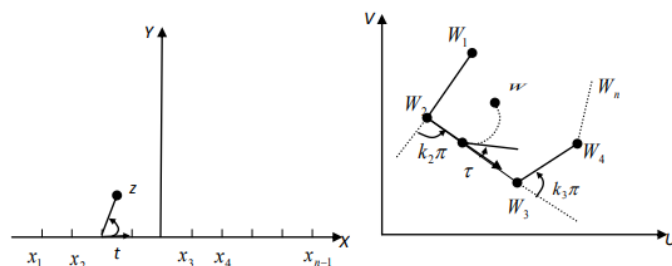
είναι αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο. Επιπλέον παραγωγίζοντας ως προς y προκύπτει ο τύπος:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yg(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad (3.25)$$

όπου πάνω στον άξονα x παίρνει την τιμή $u_y(x, 0) = g(x)$. Επομένως για την επίλυση της Laplace στο άνω ημιεπίπεδο με οριακές συνθήκες Neumann το μόνο που χρειάζεται είναι ο προσδιορισμός της συνεχούς συνάρτησης $g(x)$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x) \quad (3.26)$$

Για την συγκεκριμένη εφαρμογή απαιτείται ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει τα εσωτερικά σημεία οποιοδήποτε σχήματος στο άνω ημιεπίπεδο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου μετασχηματισμού αποτελεί ο Schwarz-Christoffel ο οποίος κάνει το ακριβώς αντίθετο, αντιστοιχεί δηλαδή το άνω ημιεπίπεδο εντός ενός πεδίου που τα σύνορα είναι ευθύγραμμα τμήματα Σχήμα 3.11.



Σχήμα 3.11: Μετασχηματισμός Schwarz-Christoffel του επιπέδου z στο επίπεδο w

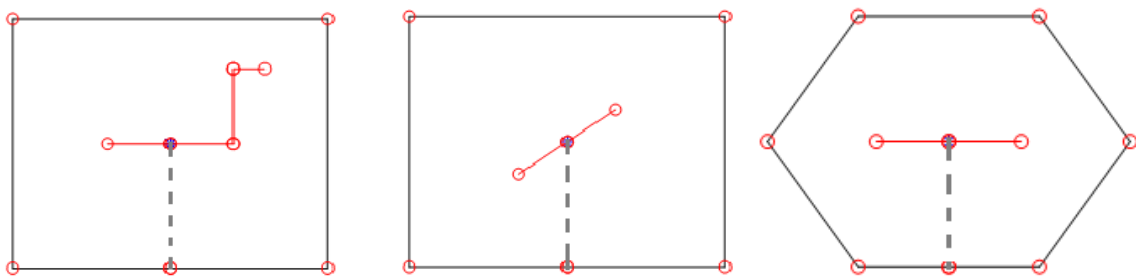
Αυτό σημαίνει ότι δεν χρειάζεται η αντίστροφη συνάρτηση για να υπολογιστούν τα πραγματικά δεδομένα αλλά μόνο ο προσδιορισμός των οριακών συνθηκών υπό την μορφή της συνάρτησης $g(x)$. Ένα καίριο σημείο που δεν έχει αντιμετωπιστεί μέχρι τώρα είναι αυτό της ρωγμής. Στον Schwarz-Christoffel είναι γνωστή επακριβώς η θέση κάθε σημείου του άξονα $x'x$ πάνω στο σύνορο D σε αντίθεση με τα σημεία του επιπέδου που θα μετασχηματιστούν στο σύνορο της εκάστοτε ατέλειας. Ακόμη και αν ήταν γνωστά, η ύπαρξη οριακών συνθηκών εκτός του οριζώντιου άξονα καθιστά την λύση (3.24) άκυρη αφού ορίζεται μία νέα εξίσωση Laplace με παρόμοια δυσκολία με την αρχική. Για την παράκαμψη του παρόντος αδιεξόδου προτείνεται η ένωση της ρωγμής με το σύνορο του δοκιμίου και η προσέγγιση της καμπύλης της ρωγμής με ευθύγραμμα τμήματα. Με αυτόν τον τρόπο τα σημεία του συνόρου της κάθε ατέλειας μπορούν να απεικονισθούν από συγκεκριμένα σημεία του άξονα $x'x$. Προσοχή πρέπει να δοθεί στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την ρωγμή με τα σύνορα του δοκιμίου στο οποίο δεν ισχύει η ίδια οριακή συνθήκη αλλά η τιμή εκεί προσδιορίζεται από το ίδιο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Ο τύπος λοιπόν που μας δίνει τον μετασχηματισμό Schwarz-Christoffel απαιτεί να έχουν οριστεί στο πεδίο D , οι κορυφές του πολυγώνου w_i αλλά και οι εσωτερικές γωνίες φ_i (rad). Επομένως ορίζεται μονοσήμαντα η σύμμορφη απεικόνιση $f(z)$ του άνω ημιεπιπέδου επί του D έτσι ώστε να ισχύει

$$f'(z) = A(z-x_1)^{\frac{\varphi_1}{\pi}-1}(z-x_2)^{\frac{\varphi_2}{\pi}-1}(z-x_3)^{\frac{\varphi_3}{\pi}-1} \dots (z-x_{n-1})^{\frac{\varphi_{n-1}}{\pi}-1} \Rightarrow$$

$$f(z) = A \int (z-x_1)^{\frac{\varphi_1}{\pi}-1}(z-x_2)^{\frac{\varphi_2}{\pi}-1}(z-x_3)^{\frac{\varphi_3}{\pi}-1} \dots (z-x_{n-1})^{\frac{\varphi_{n-1}}{\pi}-1} dz + B$$
(3.27)

με $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1}$ πραγματικοί αριθμοί πάνω στον άξονα $x'x$ για τους οποίους $f(x_i) = w_i$, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_n$ και A, B σταθερές που εξαρτώνται από τις τιμές αυτές.

Η επιλογή των x_i επηρεάζει μόνο το ολοκλήρωμα της σχέσης (3.27) και μπορεί να συμβάλλει θετικά στην διαδικασία επίλυσής του. Παράλληλα όμως καθορίζει και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)$ η οποία αντιστοιχεί τις οριακές συνθήκες του επιπέδου με κορυφές τα σημεία w_i στον άξονα. Η εξίσωση (3.27) μπορεί να παραμετροποιηθεί ως το μέγεθος και την μορφή του δοκιμίου καθώς και της ρωγμής (Σχήμα 3.12)



Σχήμα 3.12: Απεικόνιση των πεδίων ορισμού για διάφορες ρωγμές στο επίπεδο w

Προς αυτόν το σκοπό δημιουργήθηκε αλγόριθμος στο προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB για τον υπολογισμό τόσο της συνάρτησης $f(z)$ αλλά και της λύσης του συνολικού προβλήματος $u(x, y)$ (3.24). Στην πιο απλή περίπτωση της ευθύγραμμης ρωγμής και της σημειακής πηγής τοποθετημένης στο σύνορο του δοκιμίου, η πολυπλοκότητα του μοντέλου και ο αριθμός των παραμέτρων στάθηκαν απαγορευτικοί παράγοντες στην ολοκλήρωση της εκτέλεσης του προγράμματος. Αντικαθιστώντας με

συγκεκριμένες τιμές και προσδιορίζοντας έτσι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(z)$ έγινε εφικτός ο υπολογισμός της, μόνο όμως σε αυτήν την τριτοβάθμια κατάσταση εντός ενός εύλογου χρονικού διαστήματος. Σε περίπτωση ανάλυσης μιας πιο σύνθετης ρωγμής δεν προκύπτει αποτέλεσμα. Δύσκολος είναι και ο προσδιορισμός της συνάρτησης $g(x)$ η οποία οφείλει να είναι συνεχής σε όλο τον άξονα x' . Λόγω των παραπάνω δυσκολιών αλλά και για περαιτέρω λόγους που θα αναλυθούν στο επόμενο κεφάλαιο η μέθοδος αυτή δεν αναπτύσσεται παραπάνω.

3.3 Μοντελοποίηση της Μεθόδου DCPD σε περιβάλλον Πεπερασμένων Στοιχείων

Πέραν των αναφερθέντων μεθόδων αναλυτικής επίλυσης του συστήματος διαφορικών εξισώσεων στην διπλωματική αυτή παρουσιάζεται και αριθμητική προσέγγιση που προβλήματος. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε το εμπορικό πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων MAXWELL (μέρος του Ansys Workbench 2019R1) το οποίο εξειδικεύεται στην επίλυση των εξισώσεων του Maxwell εντός των υλικών. Το συγκεκριμένο πρόγραμμα επιτρέπει την σχεδίαση στερεών με ατέλειες εσωτερικά, την απόδοση υλικού σε αυτά με ισοτροπικές ή ανισοτροπικές ιδιότητες αλλά και την εφαρμογή πλήθους οριακών συνθηκών. Το πρόγραμμα εκτελεί πύκνωση του πλέγματος που το ίδιο δημιουργεί σε κάθε επανάληψη μέχρις ότου τα αποτελέσματα συγκλίνουν με σφάλμα μικρότερο από 0.05%. Η αριθμητική αυτή επίλυση αποτέλεσε εν τέλει την κύρια πηγή πληροφοριών για την επίδραση των ρωγμών στο πεδίο δυναμικού που αναπτύσσεται. Τα εξαγόμενα αποτελέσματα θα εξεταστούν λεπτομερώς στο επόμενο κεφάλαιο.

Παρόλα αυτά κρίθηκε σκόπιμο να γίνει σύγκριση ανάμεσα στο αναλυτικό και το αριθμητικό μοντέλο. Αρχικά χρησιμοποιήθηκε ένα υποθετικό δοκίμιο διαστάσεων $0.1 \times 0.1 \times 1$ μέτρα, ηλεκτρικής αντίστασης $\rho = 1 \Omega/m$ στο οποίο εφαρμόστηκε στα άκρα του ρεύμα έντασης $I = 1A$. Σε αυτήν την τριτοβάθμια περίπτωση παρατηρείται ταύτιση αποτελεσμάτων (3% απόκλιση) τα οποία επιβεβαιώνονται και από τον νόμο του Ohm ως αληθή. Όμως περίπτωση δοκιμίων με μικρό πάχος οι τιμές της αναλυτικής επίλυσης διαφέρουν αρκετά από τις πραγματικές τιμές στις οποίες η αριθμητική προσέγγιση συγκλίνει. Στην βιβλιογραφία επεξηγείται ότι το φαινόμενο αυτό είναι αναμενόμενο διότι στα συγκεκριμένα δοκίμια η μοντελοποίηση της σφαιρικής διάδοσης του ρεύματος δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Αντιθέτως αν θεωρηθεί ότι γύρω από την σημειακή πηγή το ρεύμα διαδίδεται κάθετα σε μία κυλινδρική επιφάνεια τότε πράγματι οι τιμές εμφανίζουν μία απόκλιση της τάξης του 5% η οποία όμως προβλέπεται από την σύγκριση της μεθόδου με τα πειραματικά δεδομένα[9,15].

4. Αριθμητικό Μοντέλο Πρόβλεψης Γεωμετρικών Αποκλίσεων

Σκοπός της μεθόδου DCPD αποτελεί ο προσδιορισμός των γεωμετρικών στοιχείων των ρωγμών που εμφανίζονται στα στερεά υλικά, ή άλλων στοιχείων όπως το πάχος των δοκιμίων. Σε κάθε περίπτωση, η βασική ιδέα συνίσταται στο ότι από λίγες μετρήσεις της διαφοράς δυναμικού σε συγκεκριμένα σημεία είναι δυνατός ο προσδιορισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και μέσω της συσχέτισής του με ένα πεδίο αναφοράς, ο υπολογισμός των χαρακτηριστικών που δικαιολογούν την διαφορά τους εφόσον αυτή εντοπιστεί. Σε περιπτώσεις όπου ένα μόνο χαρακτηριστικό αναζητείται όπως το πάχος ή η ηλεκτρική αντίσταση του υλικού, η όλη διαδικασία μπορεί να εκφυλιστεί στην εύρεση της καμπύλης συσχέτισης ανάμεσα στις διάφορες τιμές του ζητούμενου στοιχείου και του δυναμικού που μετρήθηκε. Ο προσδιορισμός του μεγέθους των ατελειών εφόσον είναι γνωστό το σημείο αφετηρίας τους εμπίπτει σε αυτή την κατηγορία. Η εφαρμογή σταθερού ρεύματος και η μέτρηση της διαφοράς δυναμικού εκατέρωθεν της ρωγμής αποτελεί μία πάγια πειραματική τεχνική για τον συσχετισμό της τάσης με το μήκος της. Τα πειράματα αυτά πραγματοποιούνταν ως επί το πλείστον σε συγκεκριμένα δοκίμια(π.χ. Compact Tension-CT, Double Edge-Notched Tension-DEN(T)) όπου η καταπόνησή τους μπορεί να προκαλέσει την δημιουργία ρωγμών συγκεκριμένου Τύπου(Mode I,II,III) με σκοπό την πειραματική επιβεβαίωση της τιμής του Συντελεστή Έντασης Τάσεων. Σε αυτή τη λογική έχουν αναπτυχθεί και πιο περίπλοκες μετρητικές διατάξεις που είναι ευαίσθητες και σε αλλαγή του προσανατολισμού της ρωγμής συνδυάζοντας ουσιαστικά τους τύπους διάδοσης των ατελειών[2].

Κοινός παρονομαστής όλων των μεθόδων αυτών αποτελεί η a priori γνώση του σημείου εκκίνησης της ρωγμής. Η διπλωματική αυτή πραγματεύεται την μοντελοποίηση, την προσομοίωση και την ανάλυση ευαισθησίας μετρητικής διάταξης εντοπισμού του μήκους, της διεύθυνσης αλλά και της θέσης των ρωγμών σε πραγματικό χρόνο. Με αυτόν τον τρόπο θα είναι δυνατή η έγκαιρη πρόβλεψη της αστοχίας του εκάστοτε σώματος που οφείλεται στην διάδοση ρωγμών. Για να επιτευχθεί ο σκοπός αυτός απαιτείται ο προσδιορισμός και η σε βάθος κατανόηση όλων των παραγόντων που επιδρούν στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από την επιβολή παλμού ρεύματος εντός οποιουδήποτε αγωγίμου υλικού. Έπειτα όλοι αυτοί πέραν της ρωγμής θα πρέπει να απομονωθούν και να αντισταθμιστεί η επίδρασή τους. Στην συνέχεια ακολουθεί εκτενή μελέτη της ίδιας της ατέλειας και του τρόπου διαμόρφωσης του πεδίου της ηλεκτρικής τάσης γύρω από αυτή.

4.1. Παράγοντες Διαμόρφωσης του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου

Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιείται το εμπορικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων MAXWELL που αποτελεί κομμάτι του Ansys Electronics Desktop. Η αναλυτική λύση της μιγαδικής ανάλυσης έχει απορριφθεί λόγω της πολυπλοκότητας και της αδυναμίας χρήσης παραμέτρων σε αυτή . Η παραμετροποίηση ήταν βασικής σημασίας στην λογική επίλυσης του προβλήματος όχι γιατί επηρέαζε το ευθύ πρόβλημα αλλά το αντίστροφό του. Στο πραγματικό δοκίμιο, παίρνοντας πεπερασμένο αριθμό μετρήσεων της τάσης, γίνεται προσπάθεια προσδιορισμού ολόκληρου του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Τα σημεία αυτά δεν είναι γνωστό σε ποια περιοχή αντιστοιχούν κατά τον μετασχηματισμό τους από το άνω ημιεπίπεδο στο επίπεδο w, λόγω του ότι η γεωμετρία της ρωγμής είναι άγνωστη (αναγκαία για τον προσδιορισμό των $f(z),g(x)$). Για την επίλυση λοιπόν του αντίστροφου προβλήματος απαιτείται ένας γενετικός αλγόριθμος που επηρεάζοντας τιμές συγκεκριμένων παραμέτρων των συναρτήσεων $f(z)$ και $g(x)$ ανάλογα με το κριτήριο σύγκλισης του, θα δημιουργεί ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που θα προσεγγίζει τις τιμές της τάσης στα σημεία μέτρησης. Έπειτα από τις καταληκτικές τιμές των παραμέτρων αυτών θα είναι δυνατόν να εξαχθούν πληροφορίες σχετικά με την μορφή της ατέλειας στο δοκίμιο. Για να συμβεί αυτό είναι αναγκαία η ολοκληρωμένη

εκτέλεση χιλιάδων αν όχι δεκάδων χιλιάδων προσομοιώσεων λόγω της πληθώρας των ανεξάρτητων μεταβλητών. Στην παρούσα κατάσταση όμως της μεθόδου κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν. Στην ίδια λογική απαιτείται να ολοκληρωθεί ένας αρκετά μεγάλος αριθμός προσομοιώσεων έτσι ώστε να συσχετιστούν οι αλλαγές στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της ρωγμής και της μετρητικής διάταξης.

Ένα από τα πιο συχνά στοιχεία που επηρεάζει την ακρίβεια των μετρήσεων και είναι αδύνατον να απαλειφθεί πλήρως αποτελεί ο θόρυβος. Πέραν των μετρητικών οργάνων, θόρυβος στις μετρήσεις μπορεί να δημιουργηθεί από εξωτερικούς παράγοντες όπως μία τοπική ανισοτροπία του υλικού, μία τοπική άνοδος της θερμοκρασίας ή κάποια αστάθεια στη σύνδεση του δοκιμίου με τα ηλεκτρόδια του ρεύματος. Καταρχάς πρώτο βήμα αποτελεί η χρήση μηχανημάτων και κατάλληλων φίλτρων που μειώνουν σημαντικά τον θόρυβο των οργάνων. Όσον αφορά τους εξωγενείς παράγοντες λόγω αδυναμίας προσομοίωσης τους, δεν δύνανται να αντιμετωπιστούν πλήρως σε υπολογιστικό επίπεδο. Λύση στο αδιέξοδο δίνει η συσχέτιση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της ρωγμής όχι με το ηλεκτρικό δυναμικό V αλλά με το λόγο του ως προς την τάση αναφοράς V_0 του μη ρηγματωμένου υλικού. Με βάση την ίδια λογική, σε πολλές περιπτώσεις στην βιβλιογραφία, με τη χρήση του νόμου του Ohm ($R = V/I$) αξιοποιείται ο λόγος R/R_0 . Με τον τρόπο αυτό το σύστημα αποκτά μεγαλύτερη ευρωστία σε σχέση με το φαινόμενο του θορύβου.

Έναν ακόμη καταφανή παράγοντα επίδρασης αποτελεί η μεταβολή της θερμοκρασίας του υλικού κατά την οποία μεταβάλλονται οι ιδιότητές του (ηλεκτρική αντίσταση) αλλά και σε δεύτερο επίπεδο λόγω της θερμικής διαστολής αλλάζει και η απόσταση ανάμεσα στα σημεία μέτρησης. Σε περίπτωση ανισότροπου υλικού για τον προσδιορισμό της επιρροής χρειάζονται πειραματικές μετρήσεις για την πλήρη γνώση του τρόπου μεταβολής των ιδιοτήτων σε κάθε διεύθυνση. Με βάση αυτή προσδιορίζεται εκ νέου η αντίσταση αναφοράς για τα καινούρια δεδομένα. Στην περίπτωση ισότροπου υλικού οι ιδιότητες αυτές είναι συνήθως ήδη γνωστές από την βιβλιογραφία. Γνωρίζοντας λοιπόν την μεταβολή της θερμοκρασίας είναι δυνατός ο υπολογισμός της ηλεκτρικής αντίστασης μέσα από εμπειρικούς τύπους που συνδέουν αυτά τα δύο μεγέθη. Επιπλέον για την θερμική διαστολή λόγω ομοιόμορφης κατανεμημένης θερμοκρασίας ισχύουν για μικρές μεταβολές των διαστάσεων οι παρακάτω τύποι :

$$L'_0 = L_0(1 + a_L \Delta T) \quad (4.1)$$

$$A'_0 = A_0(1 + a_A \Delta T) \quad (4.2)$$

από όπου προσδιορίζεται η νέα αντίσταση αναφοράς ως:

$$R'_0 = \rho \frac{L'_0}{A'_0} = R_0 \frac{(1 + a_A \Delta T)}{(1 + a_B \Delta T)} \quad (4.3)$$

με ρ η γραμμική ηλεκτρική αντίσταση του υλικού.

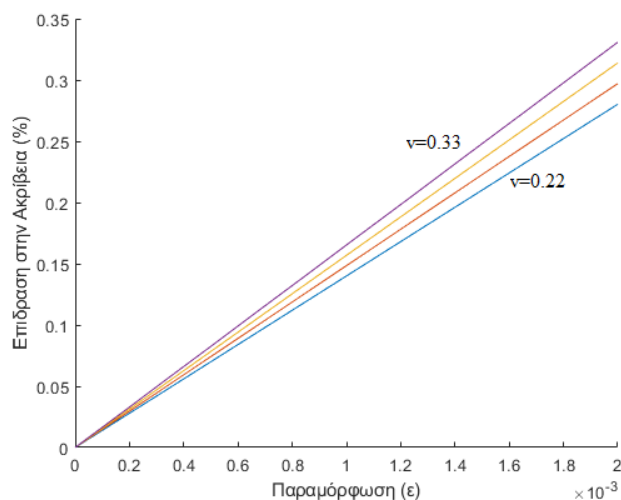
Παρόμοια επίδραση με την θερμοκρασία έχει και η παραμόρφωση που εμφανίζεται στο δοκίμιο λόγω της καταπόνησης που αυτό δέχεται. Θεωρώντας μονοαξονική φόρτιση, αν αναπτυχθεί παραμόρφωση (ε) σε μία διεύθυνση τότε στις υπόλοιπες λόγω του συντελεστή Poisson (ν) θα παρατηρηθεί παραμόρφωση ίση με $(-\nu\varepsilon)$. Από τον τύπο της ηλεκτρικής αντίστασης $R = \rho L/A$ προκύπτει ότι ο λόγος της καινούριας αντίστασης ως προς την παλιά ισούται με:

$$\frac{R'}{R} = \frac{L'}{L} \frac{A}{A'} = \frac{(1 + \varepsilon)}{(1 - \nu\varepsilon)^2} \quad (4.4)$$

Θεωρώντας ότι το δοκίμιο λειτουργεί στην ελαστική περιοχή είναι δυνατός ο προσδιορισμός της επίδρασης της παραμόρφωσης στην ηλεκτρική αντίσταση. Στο σχήμα (4.1) για διάφορες τιμές του λόγου Poisson και για μέγιστη παραμόρφωση ίση με 0.2% απεικονίζεται η απόκλιση των δύο αντιστάσεων όπως αυτή προκύπτει από την εξίσωση (4.4). Η επίδραση λοιπόν της παραμόρφωσης

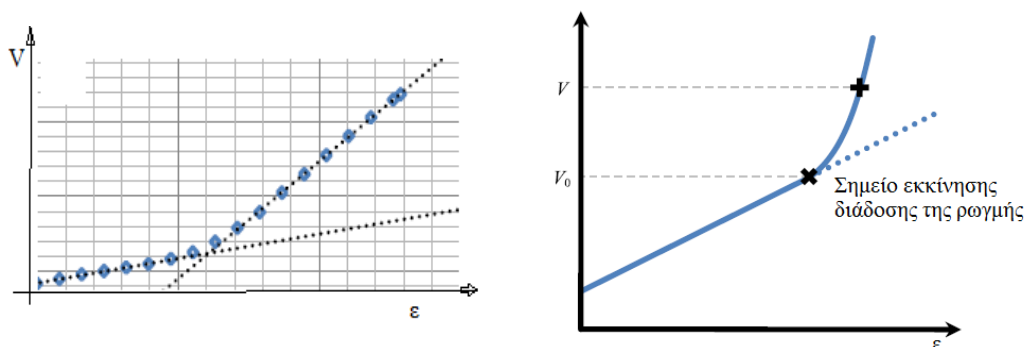
στην ελαστική περιοχή μπορεί να φτάσει και το ποσοστό του 0.35%.

Πέραν όμως της αλλαγής στην γεωμετρία, η εφαρμογή τάσης (αίτιο της παραμόρφωσης) στο υλικό θα επηρεάσει την ηλεκτρική του αντίσταση ρ λόγω της αλλαγής στην μικροδομή του. Επιπλέον, σίγουρα δεν θα είχε νόημα να μελετηθεί το υλικό στην πλαστική περιοχή του λόγω του ότι ένα από



Σχήμα 4.1: Επίδραση της ελαστικής και πλαστικής παραμόρφωσης στην ηλεκτρική αντίσταση υλικών

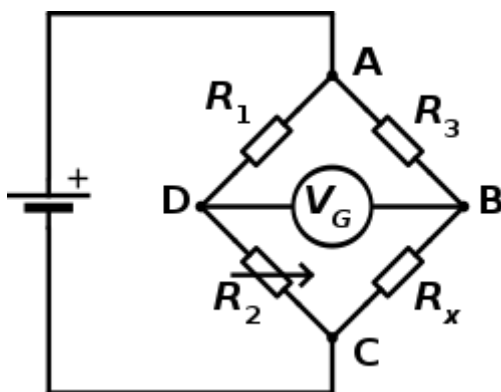
τα πιο βασικά κριτήρια αστοχίας αποτελεί η εφαρμογή τάσης άνω του ορίου διαρροής. Όμως είναι πιθανή η εμφάνιση του φαινομένου του ερπυσμού λόγω των αντίξωων συνθηκών λειτουργίας. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να είναι γνωστή η επιρροή της πλαστικής παραμόρφωσης στην ηλεκτρική αγωγιμότητα του υλικού έτσι ώστε να μην εξαχθούν λανθασμένα στοιχεία για την μορφολογία της ρωγμής και να είναι δυνατός ο προσδιορισμός του χρόνου ζωής του δοκιμίου με ακρίβεια. Η περίπτωση αυτή έχει μελετηθεί πειραματικά και αριθμητικά[11] και από τα αποτελέσματα (Σχήμα 4.2) προκύπτει γραμμική σχέση ανάμεσα στη διαφορά δυναμικού και τη μετατόπιση μέχρι το σημείο ανάπτυξης της ρωγμής. Στο σημείο εκείνο που η καμπύλη χάνει τη γραμμικότητά της η μετρούμενη τάση μετατρέπεται στη νέα τάση αναφοράς V_0 από την οποία μπορεί να υπολογιστεί η νέα αντίσταση αναφοράς. Καθώς διαδίδεται η ρωγμή ο ρόλος της πλαστικής παραμόρφωσης καθίσταται μικρός αλλά υπολογίσιμος της τάξης του 1-2%



Σχήμα 4.2: Πειραματικές μετρήσεις της διαφοράς δυναμικού σε δοκίμιο υπό εφελκυσμό

Για την αντιστάθμιση των επιδράσεων της θερμοκρασίας και της τάσης καθίσταται σαφές ότι είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός της θερμοκρασίας και της παραμόρφωσης αντίστοιχα. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση θερμοστοιχείων σε διάφορα σημεία του στερεού και επιμηκυνσιομέτρου στην διεύθυνση της παραμόρφωσης. Ένας πιο αποδοτικός τρόπος για τον υπολογισμό της αντίστασης αναφοράς, της αντίστασης δηλαδή μεταξύ δύο σημείων σε ένα δοκίμιο χωρίς ατέλειες, είναι η χρήση

της γέφυρας Wheatstone Η διάταξη όπως φαίνεται στο σχήμα(4.3) αποτελείται από 2 σταθερές αντιστάσεις R_1, R_3 , μία μεταβαλλόμενη R_2 και ένα μετρητή τάσης. Η άγνωστη αντίσταση R_x



Σχήμα 4.3: Γέφυρα Wheatstone

συνδέεται με τις υπόλοιπες με τον τύπο $R_x = R_3 \frac{R_2}{R_1}$ μόνο στην περίπτωση όμως ισορροπίας του

κυκλώματος δηλαδή για V_g ίσο με μηδέν. Η τιμή της διαφοράς δυναμικού στα σημεία D και B μπορεί να μετρηθεί με πολύ μεγάλη ακρίβεια επομένως αν γνωρίζουμε και τις τιμές των υπολοίπων αντιστάσεων με την αντίστοιχη ακρίβεια, η τιμή της R_x που θα υπολογιστεί θα έχει πολύ μικρό σφάλμα. Για την συγκεκριμένη περίπτωση αν τοποθετηθούν τα σημεία C,B σε δεδομένη απόσταση πάνω στο εξεταζόμενο δοκίμιο, η οποιαδήποτε επίδραση είτε της θερμοκρασίας είτε της παραμόρφωσης θα μεταφραστεί σε αλλαγή της R_x σε R'_x , αλλάζοντας έτσι την ένδειξη του βολτομέτρου. Μεταβάλλοντας την τιμή της R_2 για να επαναφερθεί η γέφυρα Wheatstone σε ισορροπία προκύπτει η ακριβής τιμή της ηλεκτρικής αντίστασης ανάμεσα στα σημεία C,B. Ως αποτέλεσμα είναι δυνατός ο υπολογισμός της οποιασδήποτε επίδρασης θερμοκρασίας και παραμόρφωσης κάθε στιγμή ως ο λόγος της αντίστασης R'_x και της αρχικής αντίστασης αναφοράς R_x . Βέβαια είναι πολύ σημαντικό τα σημεία C,B να τοποθετηθούν σε περιοχή του δοκιμίου η οποία δεν κινδυνεύει από την ανάπτυξη ρωγμών σε αυτή. Το ζητούμενο αυτό είναι εφικτό μόνο με γνώση της γεωμετρίας και του είδους της καταπόνησης που δέχεται το υλικό.

Εκτός από τους εξωγενείς παράγοντες που αναφέρθηκαν, η ρωγμή είναι το κύριο στοιχείο, του οποίου η επίδραση στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο πρέπει να απομονωθεί. Τα χαρακτηριστικά της γεωμετρίας των ατελειών δηλαδή το μήκος, η διεύθυνση, η θέση αλλά και το βάθος της ρωγμής επηρεάζουν κάθε ένα με διαφορετικό τρόπο την μετρούμενη τάση. Όμως η διαδικασία προσδιορισμού του τύπου της εξάρτησης του κάθε στοιχείου δεν αποτελεί μία απλή περίπτωση όπως οι προηγούμενες, όπου εξεταζόταν η επιρροή μόνο ενός συγκεκριμένου παράγοντα στο δυναμικό πεδίο. Αντιθέτως η τοπολογία της μετρητικής διάταξης και τα όρια του στερεού υλικού που ελέγχονται μαζί με την μορφή της ρωγμής αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους και συγκροτούν το σύστημα των οριακών συνθηκών που συμβάλλει καθοριστικά στην διαμόρφωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Συνδετικός κρίκος μεταξύ αυτών αποτελεί το μέγεθος της ρωγμής. Η επίδραση του μήκους της οποιαδήποτε ατέλειας στο δυναμικό που αναπτύσσεται γύρω της εξαρτάται και από τις διαστάσεις του δοκιμίου προς εξέταση. Επιπλέον το ύψος της τάσης που θα αναπτυχθεί εκατέρωθεν της ρωγμής εξαρτάται και από την θέση των πηγών και καταβροθών.

Πρόκειται λοιπόν για ένα πολυσύνθετο φαινόμενο του οποίου η παραμετρική ανάλυση είναι αρκετά πολύπλοκη. Ως πρώτο βήμα ορίζεται ο προσδιορισμός του ελάχιστου μήκους ρωγμής που θα πρέπει να είναι εντοπίσιμο από την εκάστοτε μετρητική διάταξη. Μία τυχαία επιλογή αυτού του μεγέθους

είναι άνευ ουσίας καθώς θα οδηγήσει είτε στην αδυναμία προσδιορισμού της κρίσιμης ρωγμής είτε, λόγω της άρρηκτης σχέσης της με όλα τα προαναφερθέντα στοιχεία, στην αύξηση της πολυπλοκότητας λόγω της δημιουργίας μιας συντηρητικής ως προς την ακρίβεια, διάταξης. Για τον προσδιορισμό του κριτηρίου αστοχίας σε μία εφαρμογή άρα και του κρίσιμου μήκους ρωγμής πρέπει να υπολογιστούν οι συντελεστές έντασης των τάσεων. Οι SIF, όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο δεν εξαρτώνται αποκλειστικά από το υλικό αλλά από την γεωμετρία του δοκιμίου και τη διεύθυνση της φόρτισής του. Δίχως βλάβη της γενικότητας, μπορεί να πραγματοποιηθεί επιλογή συγκεκριμένου δοκιμίου και υλικού ώστε να υπολογιστεί η κρίσιμη ρωγμή και στην συνέχεια όλες οι αποστάσεις να εκφραστούν συναρτήσει αυτής. Η παραμετροποίηση αυτή επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων ανεξάρτητα όλων των διαστάσεων εκτός της ρωγμής.

Για αυτό τον λόγο επιλέγεται να εξεταστεί η DCPD σε έλασμα αλουμινίου 7075 διαστάσεων 0,5x0.5 μέτρα και πάχους 3mm το οποίο υπόκειται σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Η επιλογή αυτή έγινε με γνώμονα μία πιθανή εφαρμογή της μεθόδου που αναπτύχθηκε στα ελάσματα των περυγών αεροσκαφών όπου η διάδοση ρωγμών Τύπου II και Τύπου III εμφανίζονται σπάνια. Στη συνέχεια αναζητήθηκε στη βιβλιογραφία ο υπολογισμός του K_{I_c} για δοκίμιο με παρόμοια χαρακτηριστικά και είδος φόρτισης με το προαναφερθέν. Για το έλασμα διαστάσεων 20' x 20' ίντσες και πάχους 1/8' της ίντσας υπό εφελκυσμό υπολογίστηκε πειραματικά το όριο διαρροής σ_y στα 68 KSI και το K_{I_c} ίσο με $120 \text{ KSI} \sqrt{\text{in}}$ [16,17].

Επομένως σύμφωνα με τον τύπο 2.21 υπολογίζεται το $a_{cr} = 1.1 \text{ in}$. Θεωρώντας ότι η ατέλεια δεν θα ξεκινήσει από τα άκρα του ελάσματος η κρίσιμη ρωγμή έχει μήκος $2a_{cr} = 2.2 \text{ in}$ δηλαδή 5.6mm. Ακόμη η μέθοδος DCPD είναι ευαίσθητη και στο βάθος ανάπτυξης της ρωγμής [18] που σημαίνει ότι με κατάλληλη τοποθέτηση της μετρητικής διάταξης είναι δυνατός ο εντοπισμός του συνόρου της εντός του υλικού. Για το συγκεκριμένο όμως τύπο ελάσματος που επιλέχθηκε και συνυπολογίζοντας την καταπόνηση που δέχεται, έγινε η παραδοχή της διαμετρικής ρωγμής που επεκτείνεται από την άνω μέχρι την κάτω επιφάνεια, κάτι που δεν αποκλίνει από το πραγματικό φαινόμενο.

Έχοντας οριοθετήσει το πρόβλημα όσον αφορά τις διαστάσεις και την απαιτούμενη ακρίβεια, το επόμενο βήμα είναι η επιλογή της μετρητικής διάταξης. Απαιτείται δηλαδή ο προσδιορισμός των σημείων εισόδου και εξόδου του ρεύματος καθώς και των αισθητήρων με σκοπό την εξασφάλιση αρκετών δεδομένων για την ανασύνθεση της μορφολογίας της ρωγμής. Όμως η επιλογή αυτή δεν εξαρτάται αποκλειστικά από τον τρόπο επίλυσης του αντίστροφου προβλήματος. Σημαντικό ρόλο διαδραματίζουν οι σχετικές αποστάσεις των πηγών και των αισθητήρων τόσο με την ρωγμή αλλά και με τα όρια του δοκιμίου, οι οποίες επηρεάζουν την πολυπλοκότητα και την ακρίβεια της μεθόδου. Συγκεκριμένα παρατηρείται αλλοίωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου καθώς η απόσταση μεταξύ των πηγών αποκτά τιμή συγκρίσιμη με τις διαστάσεις του δοκιμίου. Το ίδιο συμβαίνει και κατά την τοποθέτηση τους κοντά στις άκρες του δοκιμίου. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται Edge Effect και είναι αναμενόμενο διότι το ρεύμα ακολουθεί την γεωμετρία του στερεού, επομένως η εκτροπή του στα όρια σε σχέση με την ομαλή του πορεία στο κέντρο του δοκιμίου θα επηρεάσει την τιμή της αντίστασης αναφοράς. Αξίζει να σημειωθεί πως το μικρό πάχος του δοκιμίου ενισχύει το edge effect σε αρκετά μεγάλο βαθμό[8].

Η μέθοδος προσδιορισμού της ρωγμής από πεπερασμένες τιμές δυναμικού σε συγκεκριμένα σημεία βασίστηκε στην ιδέα της υπολογιστικής τομογραφίας. Στο δοκίμιο για συγκεκριμένα σημεία εισόδου και εξόδου του ρεύματος, δημιουργούνται περιοχές με υψηλή πυκνότητα δυναμικών γραμμών στις οποίες με αισθητήρες δύναται να ελεγχθεί με ακρίβεια η διαταραχή τους. Ο αριθμός και η θέση των πηγών και καταβοθρών επηρεάζουν την τοπολογία αλλά και την έκταση της αναφερθείσας περιοχής δίνοντας έτσι την δυνατότητα να δημιουργηθεί ένας χάρτης αντιστάσεων ανάμεσα στα σημεία

μέτρησης του επιπέδου σε διαφορετικές διευθύνσεις. Με αυτές τις πληροφορίες είναι δυνατός ο προσδιορισμός της μορφής της ρωγμής με την προϋπόθεση ότι τα χαρακτηριστικά της έχουν συνδεθεί με τον λόγο των αντιστάσεων προς την αντίσταση αναφοράς (ή του λόγου των τάσεων ως προς την τάση αναφοράς).

Απαιτείται λοιπόν η εύρεση των τοπολογικών χαρακτηριστικών της μετρικής διάταξης, η οποία θα σαρώσει την περιοχή που περιβάλλει και επαναλαμβανόμενη θα καλύπτει όλη την επιφάνεια του δοκιμίου. Αρχικά αναζητείται μόνο η θέση των εισόδων και εξόδων του ρεύματος και όχι των αισθητήρων, η θέση των οποίων θα εξαρτηθεί έμμεσα από τις πηγές όπως εξηγήθηκε σε προηγούμενη παράγραφο. Στο σημείο αυτό, ως όριο της μετρητικής διάταξης ορίστηκαν διάφορα πολύγωνα εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο και ως θέση των πηγών και καταβοθρών ρεύματος σημεία πάνω σε αυτές. Στην συνέχεια από τα ημιαναλυτικά μοντέλα παρατηρούμε την πυκνότητα των ισοτασικών καμπύλων και τη διεύθυνσή τους καθώς μόνο τέμνοντάς αυτές οι ρωγμές αλλοιώνουν το παραγόμενο πεδίο.

Για περαιτέρω ανάλυση επιλέγονται δύο διατάξεις, αυτή της εξαγωνικής και της οκταγωνικής μορφής. Η εξαγωνική αποτελείται από τρεις πηγές στις κορυφές και τρεις αντίστοιχες καταβόθρες συμμετρικές ως προς το κέντρο του πολυγώνου. Κάθε μία πηγή στέλνει παλμούς ρεύματος ίδιου πλάτους καθώς οι υπόλοιπες είναι ανενεργές. Με αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε μετρήσεις από τρία διαφορετικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία στις τρεις διαφορετικές διευθύνσεις που ορίζονται από τις αντιδιαμετρικές κορυφές του. Στην ίδια λογική η οκταγωνική διάταξη αποτελούμενη από τέσσερις πηγές επιτρέπει τις μετρήσεις σε τέσσερα ηλεκτρομαγνητικά πεδία όπου το διάνυσμα της πυκνότητας ρεύματος J παίρνει μεγαλύτερες τιμές είναι επί τις ευθείες με κλίση 0° , 45° , 90° και 135° . Η επιλογή των διατάξεων προς διερεύνηση έγινε με γνώμονα τη δυνατότητα ανάπτυξης ηλεκτρομαγνητικών πεδίων που θα επηρεάζονταν από την ίδια ρωγμή με διαφορετικό τρόπο. Το χαρακτηριστικό αυτό αποτελεί μία επιθυμητή ιδιότητα αφού κατά την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος θα επιτρέψει την αναγνώριση της ρωγμής με παραπάνω από έναν τρόπο βελτιώνοντας την ακρίβεια και παράλληλα μειώνοντας το ποσοστό του σφάλματός της

4.2 Συσχετισμός Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου και Ρωγμής

Το αντίστροφο πρόβλημα στην μορφή που αναλύεται έχει τέσσερις άγνωστες μεταβλητές: το μήκος, την διεύθυνση της ρωγμής καθώς και την τετμημένη και την τεταγμένη του κέντρου αυτής. Επομένως για τον μαθηματικό υπολογισμό τους απαιτείται ο προσδιορισμός τουλάχιστον τεσσάρων αντιστάσεων που θα οδηγήσουν στην επίλυση του παρακάτω συστήματος :

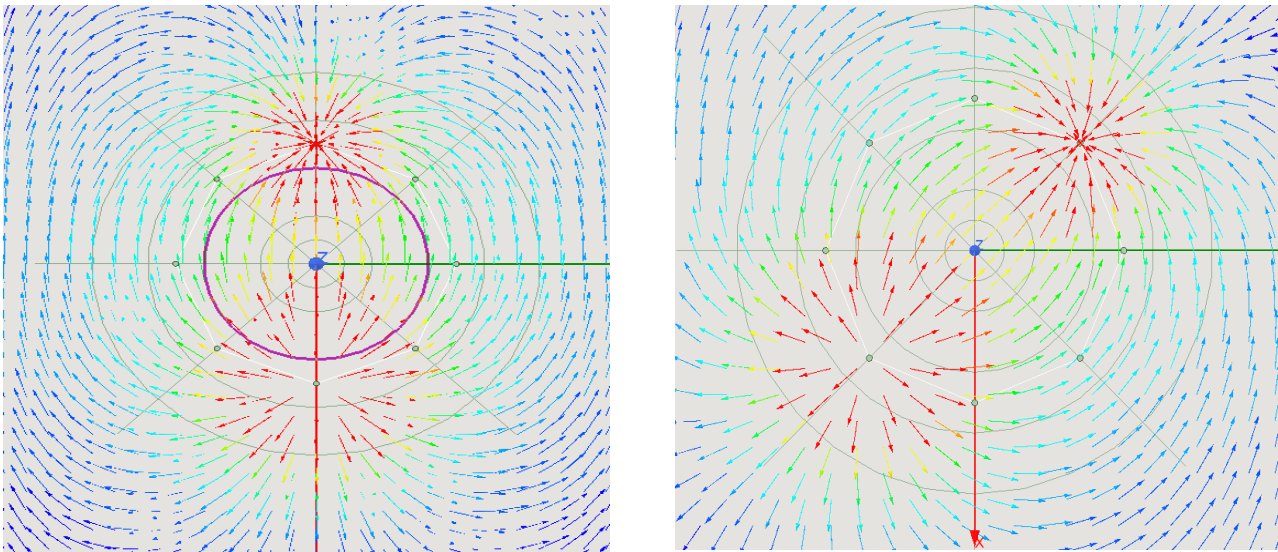
$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, k_i) &= R_1 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, k_i) &= R_2 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, k_i) &= R_3 \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, k_i) &= R_4 \end{aligned} \tag{4.5}$$

όπου x_1, x_2, x_3, x_4 οι άγνωστοι, k_i όλοι οι παράγοντες πέραν της ρωγμής που επηρεάζουν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (όρια δοκιμίου, ένταση ρεύματος κ.α.) , R_i η μετρούμενη ηλεκτρική αντίσταση (μέσω της τάσης) ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένα σημεία και f_i η συνάρτηση υπολογισμού της αντίστασης R_i

Η επιλογή των σημείων αυτών είναι πολύ σημαντική καθώς θα πρέπει να εξασφαλίζει ότι το σύστημα δεν είναι αόριστο. Αυτό συμβαίνει διότι οι αναλυτικές εξισώσεις δημιουργίας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου εντός του δοκιμίου δεν είναι γνωστές άρα το παραπάνω σύστημα μπορεί να μην είναι μονοσήμαντα επιλύσιμο για τις συγκεκριμένες θέσεις των αισθητήρων. Ακόμη όμως και στην περίπτωση που οι συναρτήσεις f_i είναι γνωστές, η πολυπλοκότητά τους και το πλήθος παραγόντων

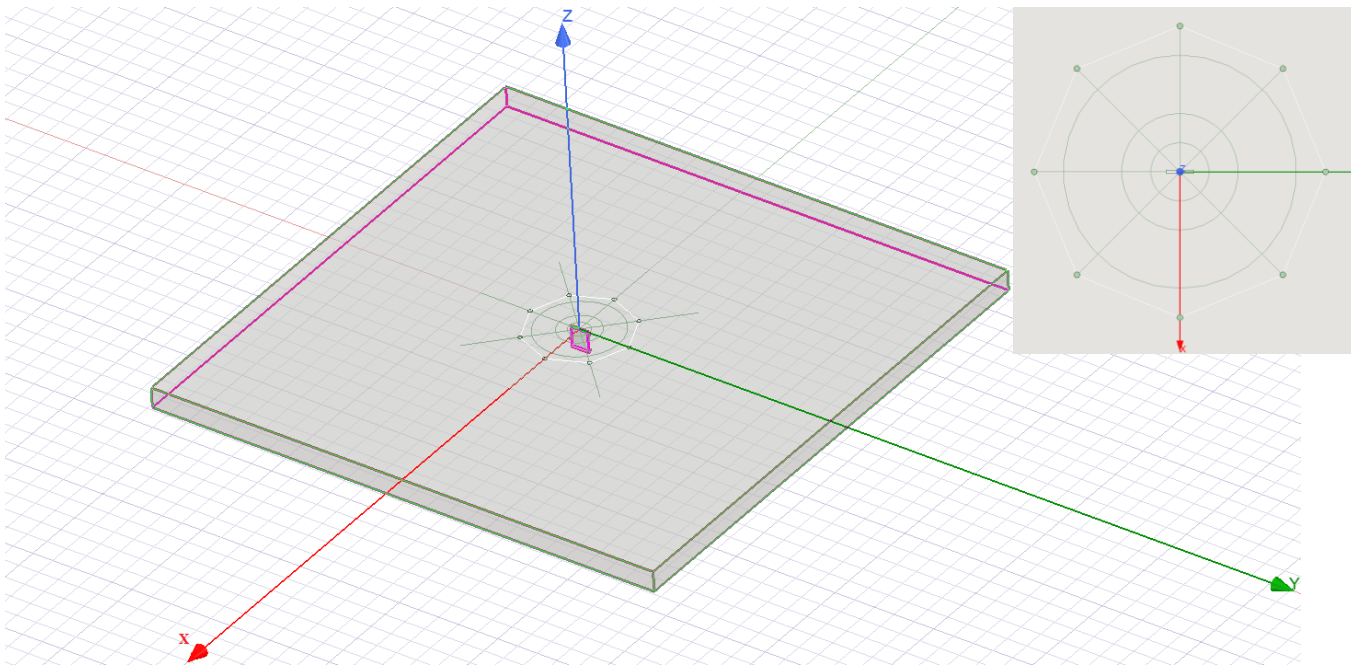
καθιστά την αναλυτική επίλυση του αντίστροφου προβλήματος αμφίβολη. Η λύση όμως είναι εφικτή με την εφαρμογή κάποιου στοχαστικού αλγόριθμου που μεταβάλλοντας τους x_1, x_2, x_3, x_4 ανάλογα με το κριτήριο σύγκλισης ικανοποιεί σύστημα το (4.5). Ένας τρόπος εξασφάλισης της επίλυσης του συστήματος είναι η εφαρμογή διαφορετικών ηλεκτρομαγνητικών πεδίων (αλλαγή k_i) με διαφορετική ευαισθησία ως προς την ρωγμή και ο έλεγχος της μεταβολής των αντιστάσεων R_i μέσω της μετρούμενης τάσης. Επιπλέον πολύ σημαντική είναι και η τοποθέτηση των μετρητικών στις περιοχές υψηλής ευαισθησίας των πεδίων που δημιουργούνται, ώστε να λαμβάνουν σημαντικές πληροφορίες για τις ατέλειες, αλλά και οι περιοχές αυτές να καλύπτουν όλη την επιφάνεια που πρέπει να ελεγχθεί. Η προσπάθεια όμως της αναλυτικής επίλυσης του ευθέως προβλήματος, με την ύπαρξη μιας ατέλειας εντός του υλικού δεν οδήγησε σε αποτελέσματα.

Στην συνέχεια έγινε γεωμετρική προσέγγιση του προβλήματος. Μέσω των προσομοιώσεων στο λογισμικό MAXELL για την διάταξη οκταγωνικής μορφής, πραγματοποιείται προσπάθεια σύνδεσης των χαρακτηριστικών της ρωγμής με την συμπεριφορά της διαφοράς δυναμικού ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένα σημεία εκατέρωθεν αυτής. Σχεδιάζεται το έλασμα αλουμινίου μέσα στο προγραμματιστικό περιβάλλον και του αποδίδονται οι μηχανικές και ηλεκτρικές ιδιότητες από την βιβλιοθήκη υλικών εμφωλευμένη στο MAXWELL. Στην περίπτωση της οκταγωνικής διάταξης, με την προϋπόθεση ότι μόνο μία πηγή ενεργοποιείται κάθε φορά, οι περιοχές ενδιαφέροντος βρίσκονται γύρω από ευθείες που ορίζουν οι αντιδιαμετρικές κορυφές του κανονικού οκταγώνου (Σχήμα 4.4,4.5).



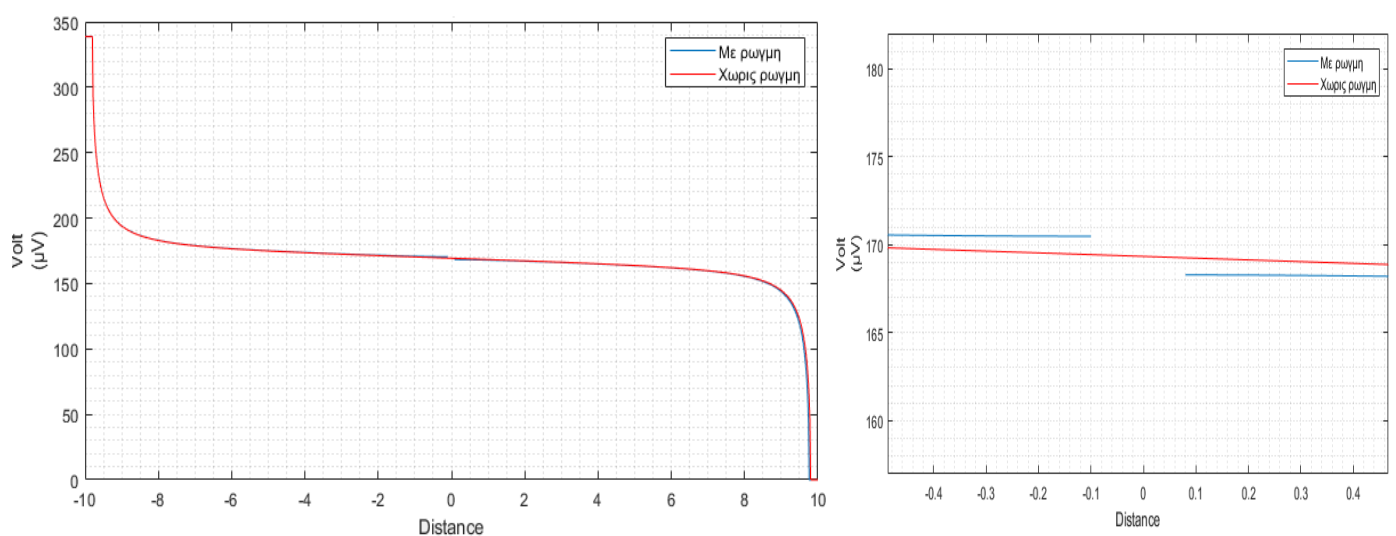
Σχήμα 4.4: Μορφή της πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος J για διαφορετικές θέσεις πηγών και καταβοθρών (0° και 135° αντίστοιχα)

Επομένως ζεύγη εικονικών αισθητήρων τοποθετούνται πάνω στις διευθύνσεις αυτές. Επιπλέον ως αρχική κατάσταση για την εκκίνηση όλων των προσομοιώσεων σύγκρισης ορίζεται η τοποθέτηση των πηγών σε κύκλο ακτίνας $10a_{cr}$, της ρωγμής στο κέντρο του οκταγώνου μήκους $2a_{cr}$ πάνω στον άξονα Y ενώ τοποθετούνται επιπλέον εικονικοί αισθητήρες πάνω σε κύκλους διαμέτρου $4a_{cr}, 8a_{cr}, 16a_{cr}$ (Σχήμα 4.5).



Σχήμα 4.5: Σχεδιασμός ελάσματος με διαμπερή ρωγμή στο κέντρο του και οκταγωνική μετρητική διάταξη γύρω από αυτό.

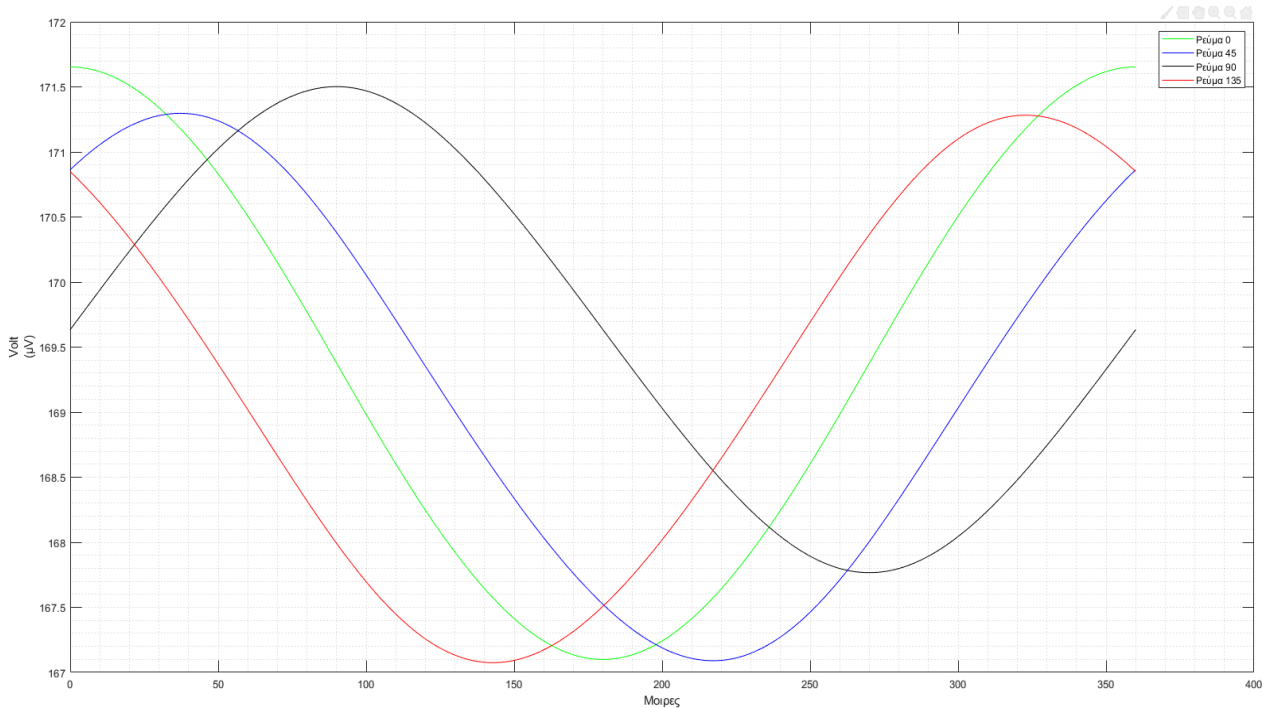
Για το ρεύμα ορίζεται ένταση ίση με 0.5 A. Επιλύοντάς λοιπόν το μοντέλο με το ζεύγος πηγή-καταβόθρα κάθετο στην ρωγμή, προκύπτει η μορφή της τάσης πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την είσοδο με την έξοδο του ρεύματος ως εξής:



Σχήμα 4.6: Αναπτυσσόμενη τάση πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει πηγή-καταβόθρα με την ρωγμή κάθετη σε αυτό

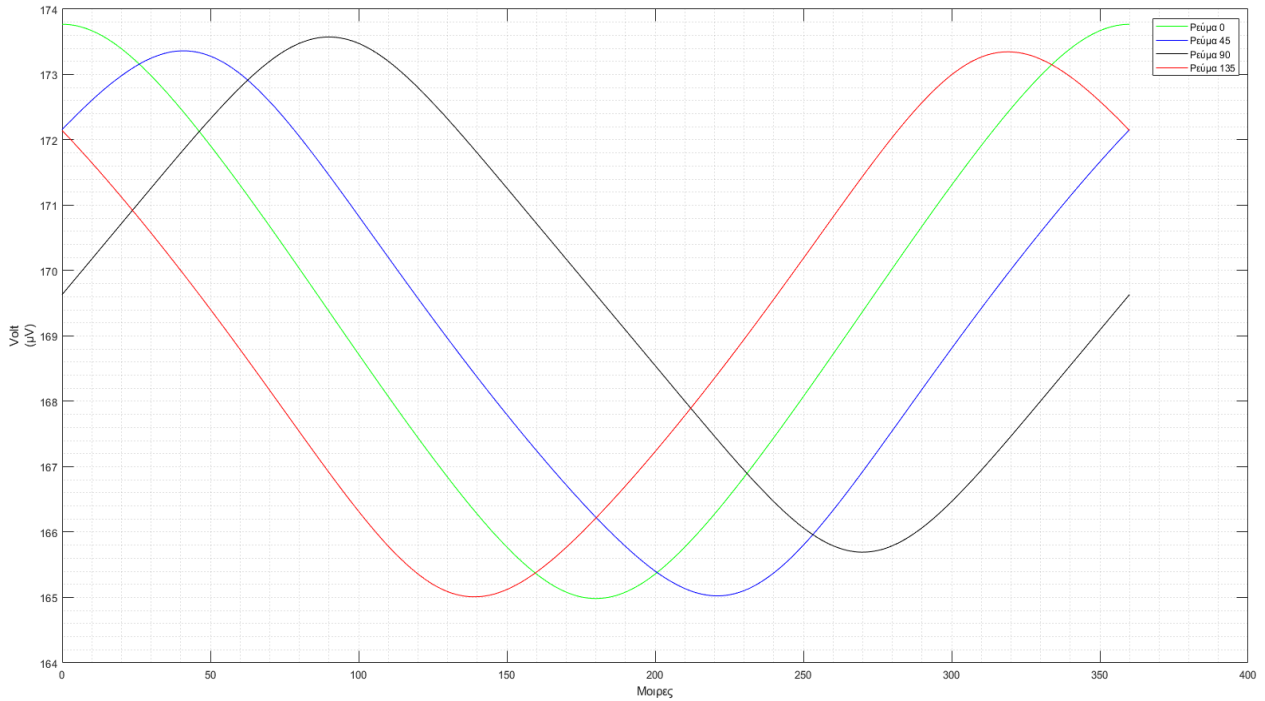
Είναι προφανές πως τη μέγιστη αναταραχή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου την προκαλεί μία ρωγμή

κάθετη στην ευθεία που ενώνει την είσοδο με την έξοδο του ρεύματος λόγω της μεγάλης πυκνότητας ρεύματος που διέρχεται από την περιοχή αυτή. Επιβεβαιώνεται και από τις προσομοιώσεις ότι για την ίδια ρωγμή εμφανίζεται η μεγαλύτερη διαφορά δυναμικού εκατέρωθεν της στη συγκεκριμένη κατάσταση και η μικρότερη όταν αυτή είναι παράλληλη στο διάνυσμα J που διέρχεται από την περιοχή ενδιαφέροντος. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ιδιότητα είναι δυνατός ο προσδιορισμός της διεύθυνσης της ρωγμής συγκρίνοντας τις τιμές των τεσσάρων εικονικών ζευγών αισθητήρων πάνω στις ευθείες με κλίση 0° , 45° , 90° και 135° για τα τέσσερα διαφορετικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία που σχηματίζονται από το ζεύγος πηγή-καταβόθρα πάνω στις αντίστοιχες ευθείες. Εξετάζοντας λοιπόν τον χώρο γύρω από την ρωγμή (πάνω σε μία περιφέρεια κύκλου) με την παραπάνω τακτική προκύπτουν τα αποτελέσματα όπως φαίνεται στα Σχήματα 4.7, 4.8, 4.9.

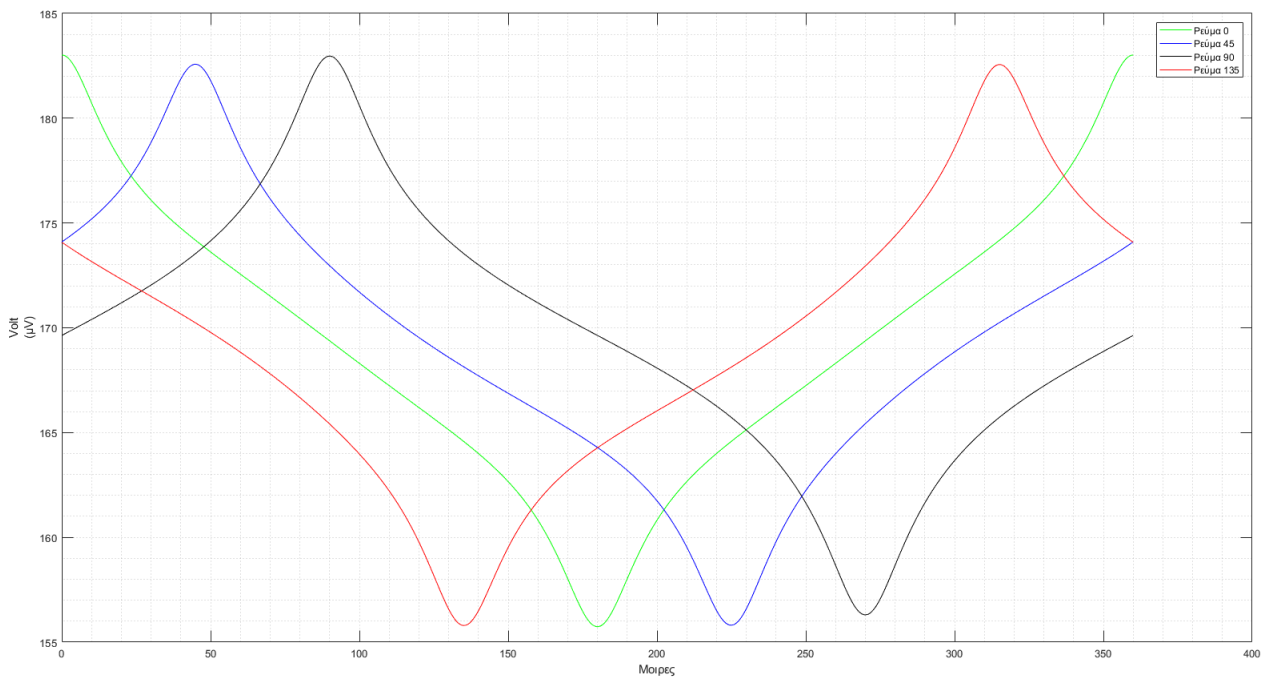


Σχήμα 4.7: Αναπτυσσόμενη τάση πάνω σε περιφέρεια κύκλου με διάμετρο $4a_{cr}$ με το ζεύγος πηγή-καταβόθρα να έχει προσανατολισμό $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$

Όπως ήταν αναμενόμενο παρατηρείται ότι η τάση σε μία περιφέρεια κύκλου γύρω από την ρωγμή έχει ημιτονοειδή μορφή. Η μέγιστη τιμή της κάθε καμπύλης αντιστοιχεί στο σημείο το οποίο βρίσκεται πιο κοντά στην εκάστοτε πηγή. Όμως το μέγιστο πλάτος της καμπύλης αντιστοιχεί στην περίπτωση που η ρωγμή βρίσκεται κάθετη στην ευθεία που ενώνει την είσοδο με την έξοδο του ρεύματος. Τοποθετώντας λοιπόν αισθητήρες στα σταθερά σημεία που η κάθε καμπύλη παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της, είναι δυνατός ο προσδιορισμός της κλίσης οποιασδήποτε ρωγμής. Βεβαίως η διαταραχή του πεδίου που οφείλεται στον προσανατολισμό της ρωγμής εξασθενεί καθώς η απόσταση από αυτή αυξάνεται (Σχήμα 4.8, 4.9).

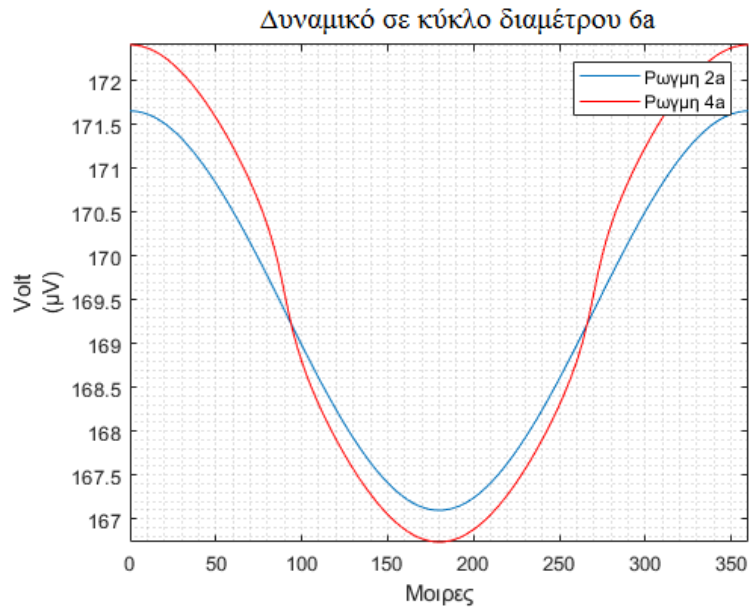


Σχήμα 4.8: Αναπτυσσόμενη τάση πάνω σε περιφέρεια κύκλου με διάμετρο $8a_{cr}$ με το ζεύγος πηγή-καταβόθρα να έχει προσανατολισμό $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$

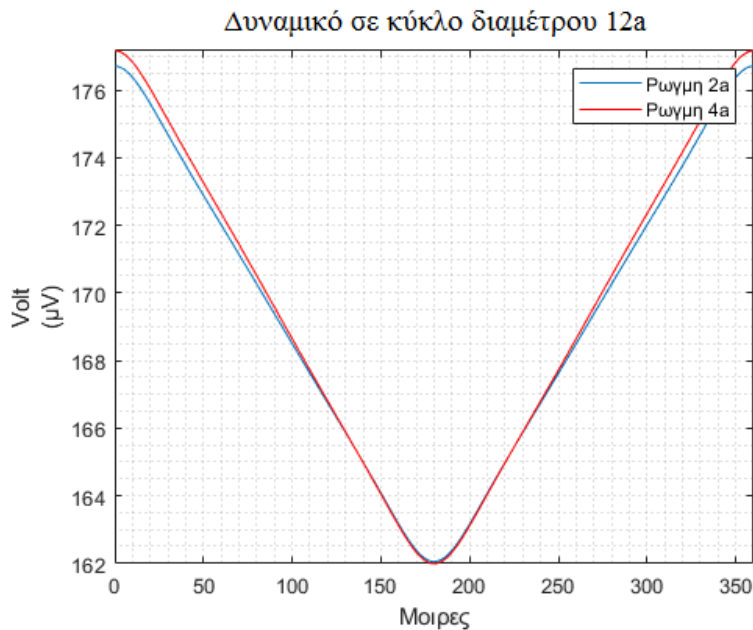


Σχήμα 4.9: Αναπτυσσόμενη τάση πάνω σε περιφέρεια κύκλου με διάμετρο $16a_{cr}$ με το ζεύγος πηγή-καταβόθρα να έχει προσανατολισμό $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$

Στην συνέχεια, η ίδια διαδικασία επαναλήφθηκε για τον υπολογισμό της επίδρασης του μήκους της ρωγμής καθώς και της σχετικής απόστασης των αισθητήρων. Αρχικά γίνεται η ανάλυση των αποτελεσμάτων για την συμπεριφορά του τασικού πεδίου ύστερα από τον διπλασιασμό του μήκους της ρωγμής. Σε αυτήν την περίπτωση οι εικονικοί αισθητήρες τοποθετήθηκαν σε περιφέρεια κύκλων με διάμετρο $6a_{cr}$, $12a_{cr}$ ενώ το ζεύγος πηγής-καταβόθρας βρίσκεται πάνω στον άξονα $X'X$ σε απόσταση $20a_{cr}$. Τα αποτελέσματα παραθέτονται στα Σχήματα 4.10,4.11.

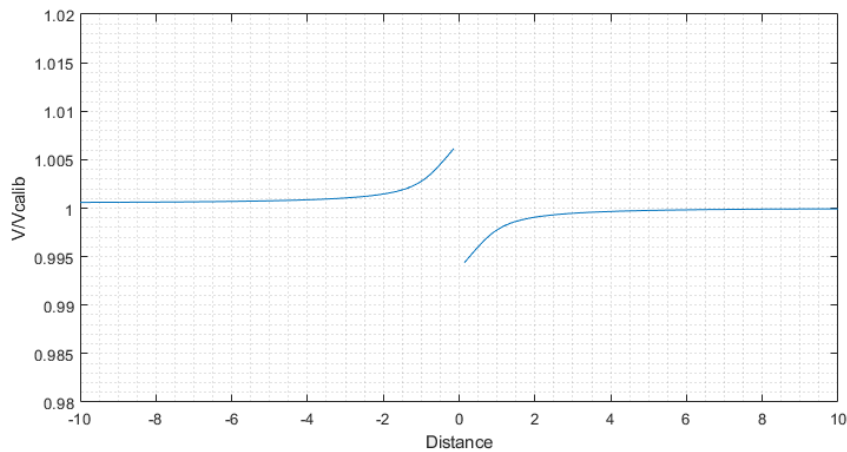


Σχήμα 4.10: Αναπτυσσόμενη τάση πάνω σε περιφέρεια κύκλου με διάμετρο $6a_{cr}$ με το ζεύγος πηγή-καταβόθρα να βρίσκεται στον άξονα $X'X$

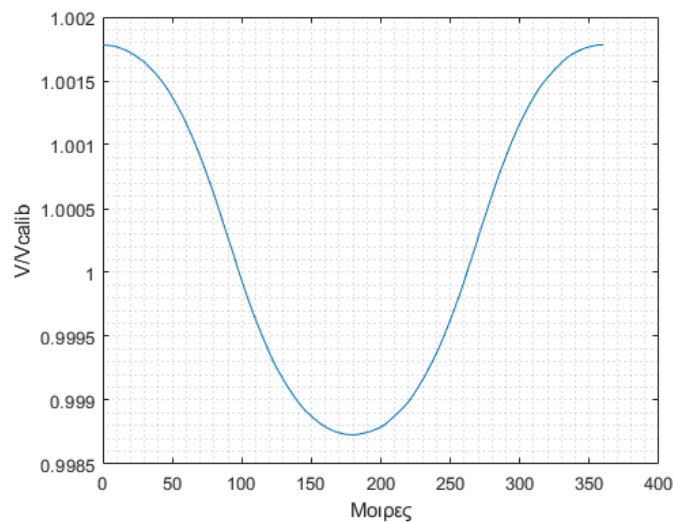


Σχήμα 4.11: Αναπτυσσόμενη τάση πάνω σε περιφέρεια κύκλου με ακτίνα $12a_{cr}$ με το ζεύγος πηγή-καταβόθρα να βρίσκεται στον άξονα $X'X$

Από τα παραπάνω διαγράμματα έγινε εμφανής η ύπαρξη δύο σοβαρών προβλημάτων. Καταρχάς η εξαιρετικά μικρή τάση που αναπτύσσεται δεν επιτρέπει τις ακριβείς μετρήσεις καθώς η απαιτούμενη διακριτική ικανότητα και ευαισθησία είναι απαγορευτικές. Όμως υπάρχουν παράγοντες όπως η ένταση του ρεύματος που μπορούν να συμβάλλουν θετικά αυξάνοντας την τιμή της τάσης που αναπτύσσεται. Το κυριότερο πρόβλημα παρουσιάστηκε κατά την σύγκριση της διαφοράς δυναμικού στις παραπάνω περιπτώσεις με το δοκίμιο όταν δεν είχε καμία ατέλεια με σκοπό τη δημιουργία του αδιάστατου μεγέθους V/V_{valid} . Η περίπτωση που το ζεύγος πηγής-καταβόθρας βρίσκεται στον άξονα X'X παρουσιάζεται στα Σχήματα 4.12, 4.13.

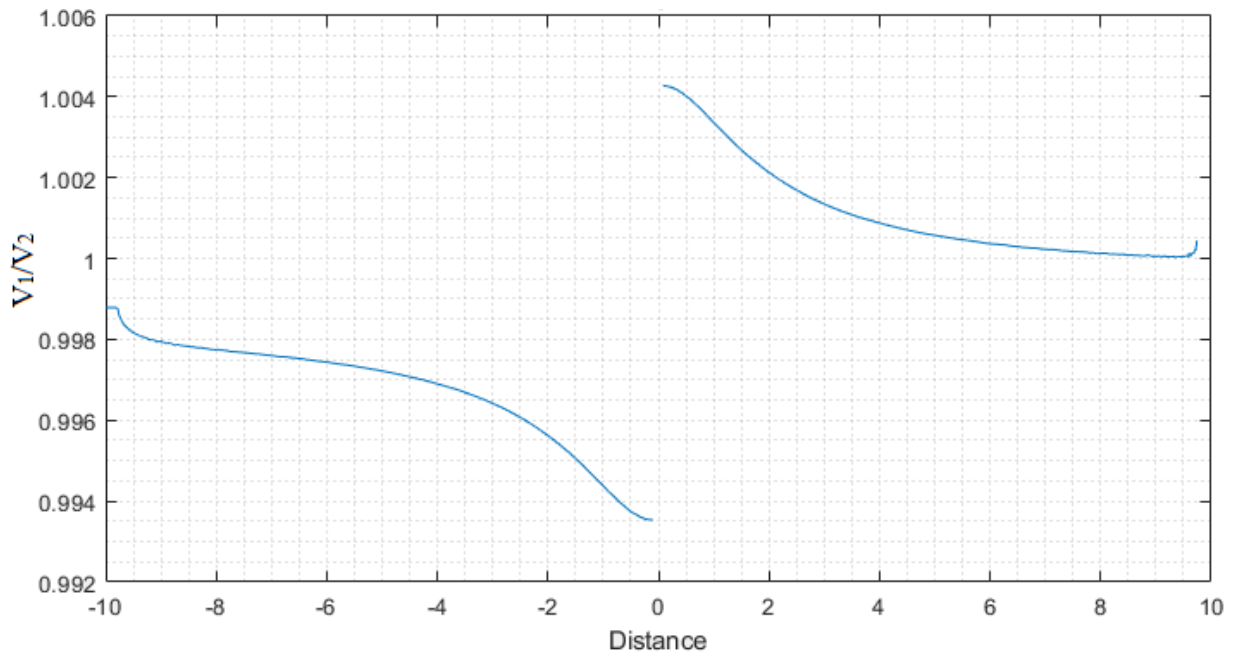


Σχήμα 4.12: Λόγος αναπτυσσόμενης τάσης προς την τάση αναφοράς πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει πηγή-καταβόθρα με τη ρωγμή κάθετη σε αυτό



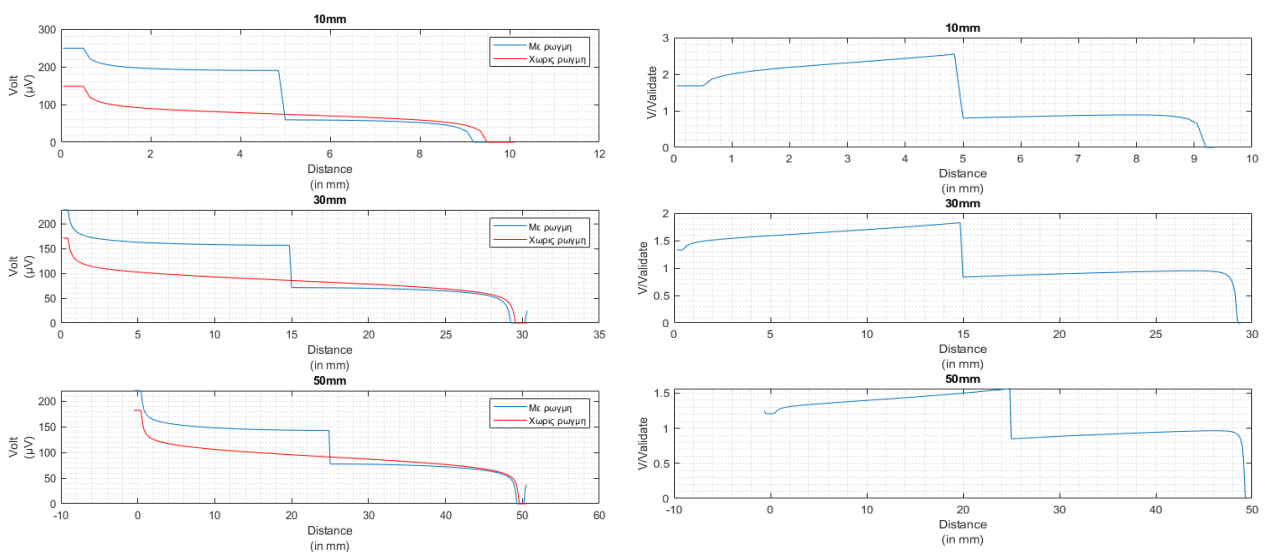
Σχήμα 4.13: Λόγος αναπτυσσόμενης τάσης προς την τάση αναφοράς πάνω σε περιφέρεια κύκλου με διάμετρο $4a_{cr}$

Επιπλέον το ποσοστό μεταβολής που επέφερε ο διπλασιασμός του μήκους της ρωγμής στην τάση παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.14



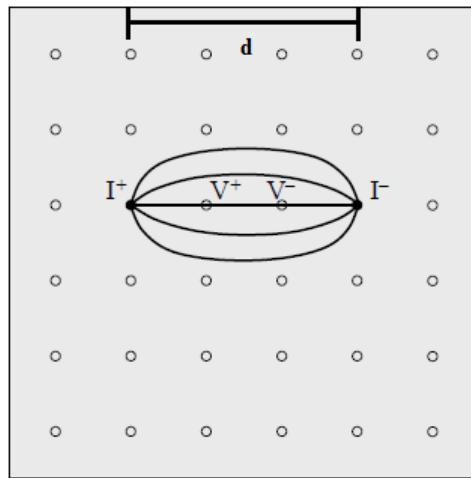
Σχήμα 4.14: Λόγος αναπτυσσόμενων τάσεων πάνω σε περιφέρεια κύκλου με ακτίνα $12a_{cr}$ με το ζεύγος πηγή-καταβόθρα να βρίσκεται στον άξονα $X'X$

Οι παράγοντες που είναι υπεύθυνοι για την αύξηση της επίδρασης της ρωγμής στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι το μέγεθος της ρωγμής και η σχετική απόσταση των πηγών. Το μήκος της ρωγμής δεν μπορεί να αυξηθεί αφού έχει ήδη υπολογιστεί η μέγιστη τιμή που πρέπει να μπορεί να εντοπιστεί. Επομένως μοναδική λύση αποτελεί η μείωση της απόστασης d της εισόδου και της εξόδου του ρεύματος. Όπως φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα για να επιτευχθεί μία ικανοποιητική τιμή στον λόγο V/V_{valid} ώστε να βρεθεί εκτός του στατιστικού σφάλματος, η απόσταση των πηγών πρέπει να γίνει συγκρίσιμη ή και μικρότερη του μήκους της ρωγμής (Σχήμα 4.15).



Σχήμα 4.15: Αναπτυσσόμενη τάση και ο λόγος της ως προς την τάση αναφοράς πάνω σε ευθύγραμμο τμήμα διαφορετικού μήκους (10mm , 30mm , 50mm) που ενώνει πηγή-καταβόθρα με ρωγμή κάθετη πάνω σε αυτό.

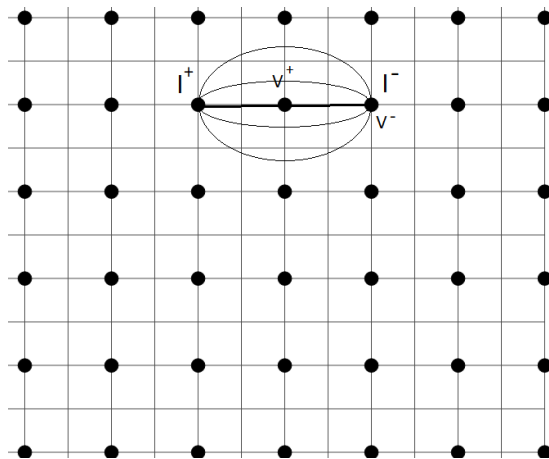
Η επιλογή της κατάλληλης απόστασης δεν πρέπει να ληφθεί αποκλειστικά με γνώμονα την τιμή της διαφοράς δυναμικού σε σχέση με την τάση αναφοράς αλλά και με την πολυπλοκότητα της μετρητικής διάταξης η οποία επηρεάζεται από το πλήθος πηγών και μετρητικών. Είναι προφανές πως ο αριθμός των στοιχείων αυτών οφείλει να είναι όσο μικρότερος γίνεται. Παράλληλα παρατηρείται ότι λόγω της σημαντικής μείωσης της απόστασης των πηγών, σε σημείο που η ρωγμή μπορεί να μην περικλείεται ολόκληρη από μία διάταξη, ο προσδιορισμός της επίδρασής της σε διάφορα ηλεκτρομαγνητικά πεδία για την εξαγωγή των γεωμετρικών πληροφοριών δεν είναι απαραίτητος. Αντιθέτως ο απλός εντοπισμός της ύπαρξης της ατέλειας είναι αρκετός αφού στοιχεία όπως το μήκος και ο προσανατολισμός θα διαμορφωθούν από το συγκερασμό των αποτελεσμάτων όλων των διατάξεων από τις οποίες διέρχεται. Για τους λόγους που αναφέρθηκαν, η οκταγωνική διάταξη αντικαθίσταται από την πιο απλή τετραγωνική η οποία επαναλαμβάνεται μέχρι να καλύψει όλη την επιφάνεια δημιουργώντας ένα πλέγμα σημείων.



Σχήμα 4.16 : Μετρητική Διάταξη Πλέγματος

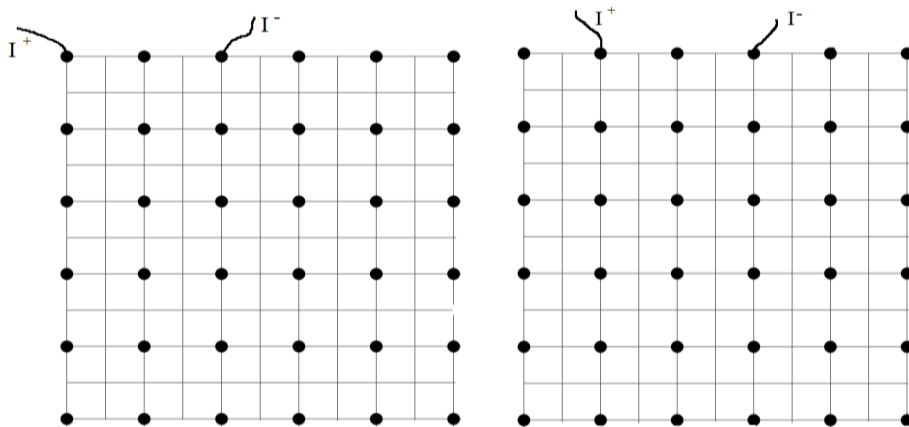
Για να μειώσουμε την πυκνότητά του πλέγματος κάθε ένα σημείο θα αξιοποιείται ανάλογα με την περίπτωση είτε ως πηγή/καταβόθρα ρεύματος, είτε ως σημείο μέτρησης της διαφοράς δυναμικού. Η διαδικασία λήψης των μετρήσεων αξιοποιεί τετράδες σημείων είτε στον οριζόντιο είτε στον κατακόρυφο άξονα όπου τα εξωτερικά σημεία θα χρησιμοποιούνται για την είσοδο και την έξοδο του ρεύματος ενώ στα εσωτερικά γίνεται η μέτρηση της διαφοράς δυναμικού όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.16.

Με αυτόν τον τρόπο προσδιορίζεται η ύπαρξη ρωγμής, με διεύθυνση κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα προαναφερθέντα σημεία. Η διαδικασία αυτή αφορά μόνο την περιοχή ελέγχου των εσωτερικών σημείων η οποία ορίζεται ως η επιφάνεια από την προηγούμενη μέχρι και την επόμενη θέση του πλέγματος. Με την μεθοδολογία αυτή όμως η εξωτερική λωρίδα του πλέγματος δεν είναι δυνατόν να ελεγχθεί. Στην παρούσα περίπτωση βέβαια, η διάδοση ατελειών στα όρια του ελάσματος είναι μικρή ενώ σε άλλες περιπτώσεις, διαδραματίζει πολύ μεγάλη σημασία λόγω της επίδρασης που έχει στο μήκος της κρίσιμης ρωγμής. Στο πλαίσιο αυτό προτείνεται μία άλλη μεθοδολογία η οποία αφενός μειώνει το πλήθος των αναγκαίων σημείων του πλέγματος και αφετέρου ελέγχει όλη την ζητούμενη επιφάνεια. Διατηρώντας ίδια λογική με πριν χρησιμοποιούνται τριάδες σημείων είτε στον οριζόντιο είτε στον κατακόρυφο άξονα όπου τα εξωτερικά σημεία θα χρησιμοποιούνται για την είσοδο και την έξοδο του ρεύματος. Όμως η διαφορά της τάσης θα μετρείται ανάμεσα στο μεσαίο σημείο και την έξοδο του ρεύματος (Σχήμα 4.17).



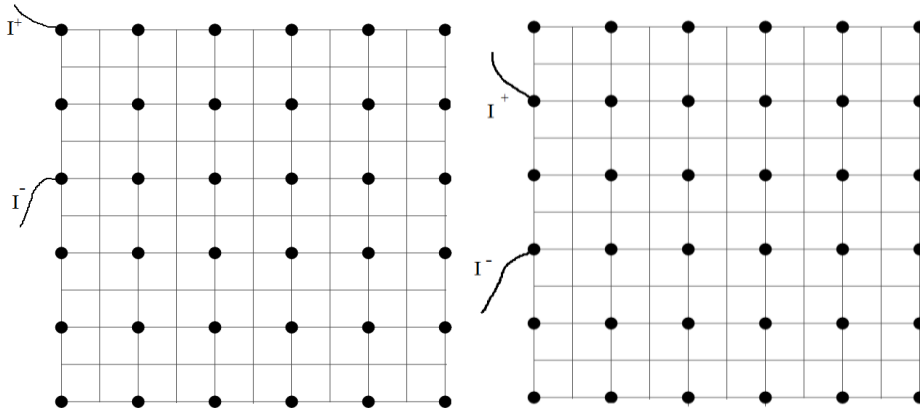
Σχήμα 4.17 : Μετρητική Διάταξη Πλέγματος

Αν αυτό δεν μπορεί να γίνει πρακτικά λόγω του τρόπου σύνδεσης των καλωδίων τότε μπορεί να μετρηθεί σε ένα μετέπειτα σημείο του ηλεκτρικού κυκλώματος, όπου η γνώση της αντίστασης και της έντασης του διερχόμενου ρεύματος επιτρέπει τον έμμεσο υπολογισμό της τάσης που ζητείται. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται για κάθε άξονα δύο φορές με αλλάζοντας την πολικότητα του ρεύματος. Άρα αρχικά πραγματοποιείται μία σάρωση ως προς τον οριζόντιο άξονα Σχήμα4.18.



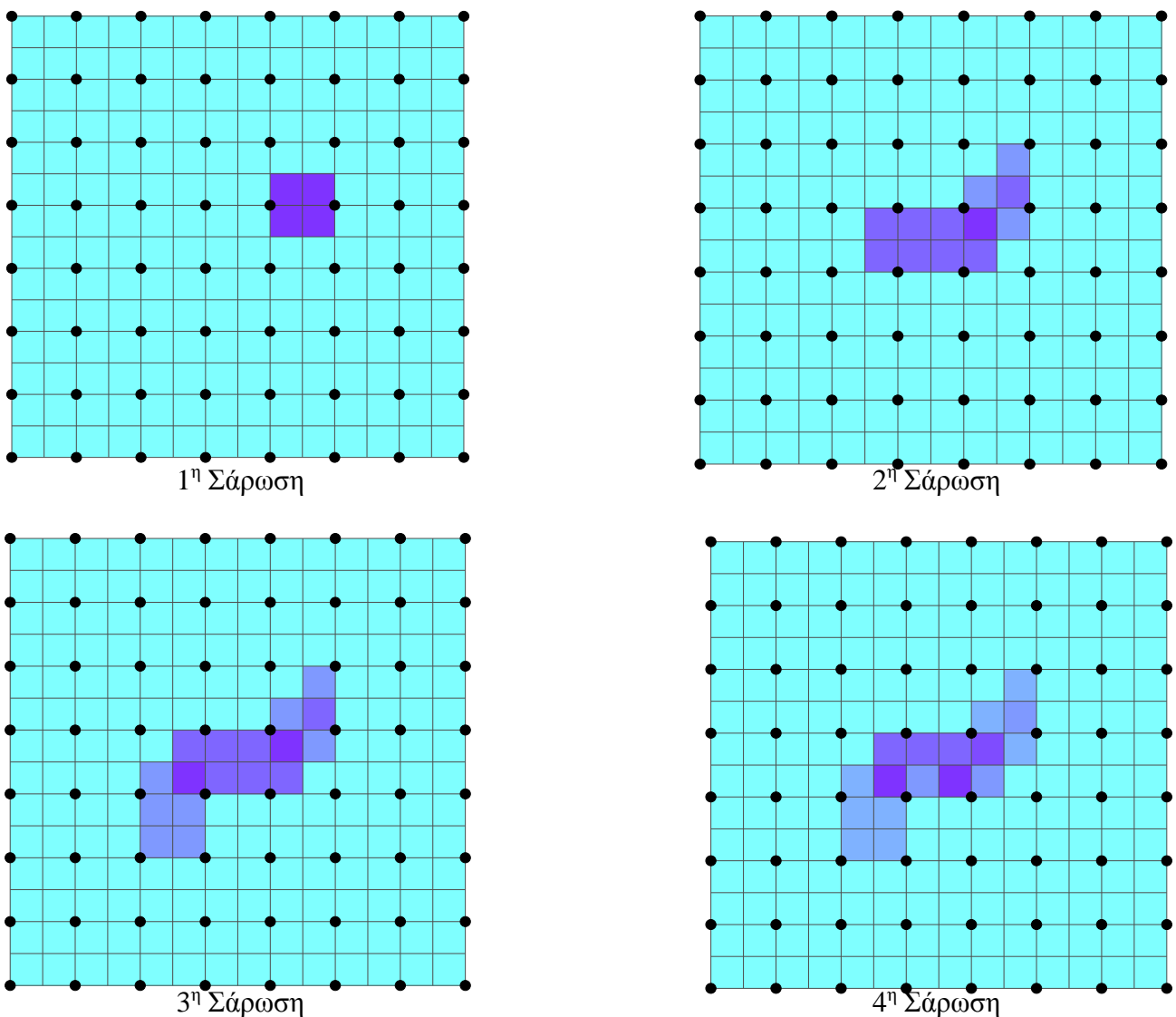
Σχήμα 4.18 : Σχηματική αναπαράσταση των βημάτων της οριζόντιας σάρωσης

Έπειτα ακολουθεί ο κατακόρυφος άξονας (Σχήμα 4.19)

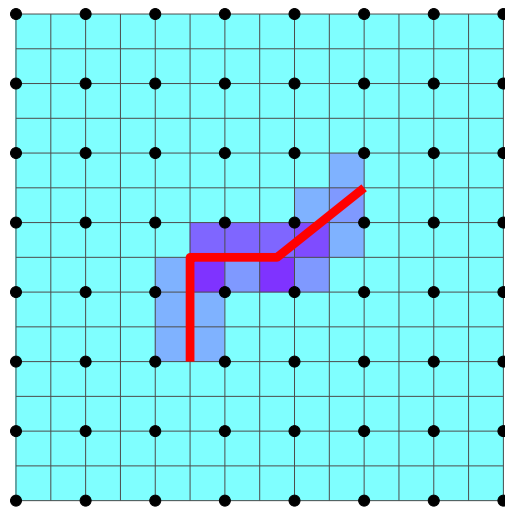


Σχήμα 4.19 : Σχηματική αναπαράσταση των βημάτων της κατακόρυφης σάρωσης

Στην συνέχεια τα δύο αυτά βήματα επαναλαμβάνονται με αλλαγή της θέσης των πηγών με τις καταβόθρες ρεύματος και το αντίστροφο. Ως αποτέλεσμα προκύπτουν τέσσερις πίνακες μετρήσεων οι οποίοι συγχωνεύονται σε έναν αφού έχουν απορριφθεί τιμές κάτω από ένα όριο. Από την περιοχή εμπιστοσύνης που αντιστοιχεί σε κάθε τιμή του τελικού πίνακα, προκύπτει η γεωμετρία της ρωγμής. Το όριο και οι περιοχές αυτές εξάγονται από το Σχήμα 4.15 και εξαρτώνται από αρκετά χαρακτηριστικά της διάταξης κυρίως όμως την ένταση του ρεύματος και την απόσταση d . Τέλος για μία τυχαία ρωγή για το έλασμα αλουμινίου, όπου επιλέγοντας απόσταση d ίση με το μισό μήκος της κρίσιμης ρωγμής και έντασης ρεύματος ίση με 5A πραγματοποιούνται οι σαρώσεις εντός του MAXWELL και στην συνέχεια προκύπτουν οι πίνακες των μετρήσεων. Έπειτα, μέσω ενός αλγόριθμου ανεπτυγμένο σε προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB αποδίδονται στις τιμές αυτές οι γεωμετρικές περιοχές εμπιστοσύνης που αν ληφθούν συνολικά υπόψιν αποδίδουν τη μορφή της ρωγμής. Στην συνέχεια παραθέτονται τα ενδιάμεσα στάδια της μεθόδου (Σχήμα 4.20).



Σχήμα 4.20 : Σχηματική αναπαράσταση της προσπάθειας αριθμητικής προσέγγισης της ρωγμής



Σχήμα 4.21 : Σύγκριση της ρωγμής με την αριθμητική προσέγγισής της

5. Συμπεράσματα

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως στόχο την παρουσίαση της μεθόδου Direct Current Potential Drop για τον εντοπισμό και την παρακολούθηση ρωγμών, την αναλυτική και αριθμητική προσομοίωσή της καθώς και την λεπτομερή ανάλυση της ευαισθησίας της στην περίπτωση επίπεδων ελασμάτων με ρωγμή.

Η DCPD ως μέθοδος είναι αρκετά διαδεδομένη αλλά περιορίζεται ως προς την χρήση της σε πειραματικές διατάξεις και δοκίμια όπου η αρχή της ρωγμής είναι a priori γνωστή. Στα πλαίσια της εργασίας μελετήθηκε εις βάθος η δυνατότητα αυτής της Μη Καταστροφικής Τεχνικής να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του μήκους, της διεύθυνσης αλλά και της θέσης ατελειών σε αγώγιμα υλικά. Με την γνώση αυτή σε πραγματικό χρόνο, είναι δυνατόν να προβλεφθεί η θραύση και η διάρκεια ζωής οποιουδήποτε στερεού. Αρχικά, μέσω της Μηχανικής των Θραύσεων, επεξηγήθηκε αναλυτικά ο τρόπος προσδιορισμού της ελάχιστης ακρίβειας που πρέπει να παρουσιάζει η εκάστοτε διάταξη ώστε από τα δεδομένα, να προκύπτουν ασφαλή συμπεράσματα σχετικά με την αστοχία των υλικών.

Για την προσομοίωση της μεθόδου προτάθηκαν δύο μοντέλα, ένα αναλυτικό και ένα αριθμητικό. Η χρήση αναλυτικών μεθόδων για την προσέγγιση του προβλήματος αποδείχθηκε προβληματική, μιας και η ύπαρξη των ατελειών εντός των υλικών οδήγησε στην αύξηση της πολυπλοκότητας και του υπολογιστικού κόστους του μοντέλου. Ήταν όμως δυνατή η εξαγωγή συμπερασμάτων για την μορφή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε στερεά δίχως ρωγμές συναρτήσει της διάταξης των πηγών και της ανισοτροπίας του υλικού. Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε βασίστηκε στο λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων «MAXWELL» που επιτρέπει την επίλυση των εξισώσεων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου με πολύ μικρό ποσοστό σφάλματος της τάξης του 0.05%. Παράλληλα έγινε σύγκριση μεταξύ των δύο αυτών μοντέλων σε περιπτώσεις όπου η μαθηματική λύση του είναι γνωστή.

Τέλος για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος γίνεται εκτενής ανάλυση των παραγόντων πέραν της ρωγμής που επηρεάζουν το δυναμικό πεδίο εντός του υλικού, και στους τρόπους αντιστάθμισής τους. Ύστερα, μέσω των αριθμητικών προσομοιώσεων, επιδιώκεται ο συσχετισμός των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των ατελειών με συγκεκριμένες διαταραχές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Από τα αποτελέσματα γίνεται εμφανής η πολυπλοκότητα του προβλήματος και το μεγάλο πλήθος μεταβλητών από το οποίο εξαρτάται. Αξιοποιώντας όλες τις αναφερθείσες πληροφορίες αναλύεται διεξοδικά η μεθοδολογία επιλογής κατάλληλης μετρητικής διάταξης για τον εντοπισμό ρωγμών σε έλασμα συγκεκριμένων διαστάσεων.

Κατά την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας επιδιώχθηκε η σε βάθος ανάλυση των φαινομένων που αναδείχθηκαν και η αντιμετώπιση των προβλημάτων με πληρότητα και σαφήνεια. Παρουσιάστηκαν εκτενώς οι σημαντικότεροι τομείς του αντίστροφου προβλήματος και καθίστατο σαφής η αποτελεσματικότητα της μεθόδου DCPD στην παρακολούθηση της διάδοσης ρωγμών. Μια προσθήκη που θα μπορούσε να γίνει σε μελλοντική επανεξέταση των θεμάτων που αναπτύσσονται στην εργασία είναι η εύρεση της πλήρους αναλυτικής επίλυσης του προβλήματος και ο συνδυασμός της με τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων έτσι ώστε να προσδιορίζεται αριθμητικά το πεδίο ενδιαφέροντος και να επιλύονται αναλυτικά οι εξισώσεις μόνο στην περιοχή αυτή. Επιπλέον η βελτιστοποίηση της μετρητικής διάταξης αποτελεί ένα αρκετά σύνθετο θέμα λόγω του πλήθους των εμπλεκόμενων μεταβλητών και χρίζει περαιτέρω ανάλυσης και έρευνας. Τέλος με την εφαρμογή της μεθόδου για συγκεκριμένα δοκίμια υπό συγκεκριμένη λειτουργία ενδέχεται να αναδειχθούν εξειδικευμένα προβλήματα αλλά και εξειδικευμένες λύσεις για αυτά. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η μοντελοποίηση της μεταβατικής κατάστασης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που παρατηρείται λόγω του παλμού ρεύματος με σκοπό την απόδοση μηχανικών ιδιοτήτων στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των ρωγμών .

6. Βιβλιογραφία

- [1] Γ.Α. Παπαδόπουλος, *Μηχανική των Θραύσεων*, εκδόσεις Κλειδάριθμος
- [2] V. Spitas, C. Spitas, P. Michelis, *A three-point electrical potential difference method for in situ monitoring of propagating mixed-mode cracks at high temperature*, Measurement 43, 950-959,2010.
- [3] V. Spitas, C. Spitas, P. Michelis, *Real-time measurement of shear fatigue crack propagation at high-temperature using the potential drop technique*, Measurement 41, 424-432, 2008.
- [4] Ν.Π. Ανδριανόπουλος, *Μηχανική των Θραύσεων*, εκδόσεις Συμείων
- [5] Δ.Χ. Κραββαρίτης, *Θέματα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών*, εκδόσεις Τσότρας σελ. 311-362
- [6] Martin H. Sadd, *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*, pp 297-336.
- [7] J.Corcoran, C.M.Davies, P.Cawley, *A quasi-DC Potential Drop Measurement System for Materials Testing*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement., 2019.
- [8] J.Corcoran, P.Hooper, C.Davies, *Creep strain measurement using a potential drop technique*, International Journal of Mechanical Sciences Volume 110, Pages 190-200,2016.
- [9] Y.Lu, N.Bowler, J.R.Bowler, Y.Huang, *Edge effects in four-point direct current potential drop measurements on metal plates*, Journal of physics: Applied Physics, 2009.
- [10] J.R. Bowler, N. Bowler, *Theory of four-point alternating current potential drop measurements on conductive plates*, Iowa State University Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences,2007.
- [11] K.M. Tarnowski,K.M. Nikbin, *Improvements in the measurement of creep crack initiation and growth using potential drop*, International Journal of Solids and Structures, 2017.
- [12] Qian and A.Fatemi, *Mixed Mode fatigue crack growth: A Literature Survey*, Engineering Fracture Mechanics Vol. 55, No. 6, pp. 969-990,1996
- [13] M.S.Greenhalgh, *DC Resistivity modelling and Sensitivity Analysis in anisotropic media*, Department of Physics, University of Adelaide, 2008.
- [14] G.Clark and J.F.Knott, *Measurement of fatigue cracks in notched specimens by means of theoretical electrical potential calibrations*, Department of Metallurgy and Materials Science, University of Cambridge, 1975
- [15] Elhoucine Madhi, P.B.Nagy, *Sensitivity analysis of a directional potential drop sensor for creep monitoring*, NDT & E International Volume 44, Issue 8, Pages 708-717, 2011. J
- [16] G.Kaufman, R.L.Moore, P.E.Schilling, *Fracture Toughness of structural aluminum alloys*, Engineering Fracture Mechanics Vol. 2, Issue 3, pp. 197-210, ,1971.
- [17] *Plane strain fracture toughness (K_{IC}) Data handbook for Metals*, U.S. army material and mechanics research center, 1973J.
- [18] G.Sposito, *Advances in potential drop techniques for non-destructive testing*, Department of Mechanical Engineering, Imperial College London ,2009

Παράρτημα I

Έστω η διαφορική εξίσωση $\nabla \cdot (\nabla u) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \Rightarrow \Delta u = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. Για την επίλυση αναζητούμε την θεμελιώδη (fundamental) λύση της εξίσωσης Laplace η οποία θα προσομοιάζει την διασπορά που έχει η Dirac και για $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ να μηδενίζεται. Ολοκληρώνοντας ως προς σφαίρα ακτίνας r γύρω από το (x_0, y_0, z_0) προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \iiint (\nabla \cdot \nabla u) dV &= \iiint \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV \stackrel{\Theta. Gauss}{\Rightarrow} \\ \iint (\nabla u) dS &= 1 \Rightarrow \\ \iint \left(\frac{du}{dr} \right) dS &= 1 \Rightarrow \\ 4\pi\alpha^2 \frac{du}{dr} \Big|_{r=\alpha} &= 1 \Rightarrow \\ \frac{du}{dr} \Big|_{r=\alpha} &= \frac{1}{4\pi\alpha^2} \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει:

$u = -\frac{1}{4\pi r}$ που πράγματι ακολουθεί τα πρότυπα που αναφέρθηκαν. Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στον προσδιορισμό του συστήματος συντεταγμένων και δεν μας επηρεάζει. Αν η Dirac έχει ένα πλάτος ίσο με $-I$ (με κατεύθυνση προς τα αρνητικά του άξονα z για το συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων) και έστω ανεξάρτητος συντελεστής σ_{ij} τότε η λύση της εξίσωσης $\nabla \cdot (\sigma_{ij} \nabla u) = -I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ είναι $u = \frac{I}{4\pi r \sigma_{ij}}$.

Πρέπει ακόμη να ληφθεί υπόψιν ότι το σημείο \vec{r}_0 δεν αποτελεί στην πραγματικότητα σημειακή πηγή ρεύματος για όλο τον χώρο αλλά μόνο για τον κάτω ημιχώρο. Ως αποτέλεσμα η πυκνότητα του ρεύματος διπλασιάζεται αφού $dV' = 0,5 dV$. Εν τέλει καταλήγουμε στην εξίσωση $u = \frac{I}{2\pi r \sigma_{ij}}$

Παράρτημα II

Κώδικας αναλυτικής προσομοίωσης μεθόδου DCPD με τη μέθοδο των Κατοπτρικών Πηγών

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear
hold off
%Προσδιόρισε τα χαρακτηριστικά του δοκιμίου
XYZ = [10,10,10];

a=2*XYZ(1);
b=2*XYZ(2);
c=2*XYZ(3);
center = [a/4,b/4];

%% προσδιορισμός της θέσης των παροχών ρεύματος%%

% I1(1,1)=x1;
% I1(1,2)=y1;

% I2(1,1)=x2;
% I2(1,2)=y2;

%% Για Εξαγωνική Γεωμετρία %%

% Ακτίνα Περιγεγραμμένου Κυκλού
rp=1;
% Ακτίνα εγγεγραμμένου Κυκλού
re=rp*cosd(30);

% Οι πιθανές θέσεις είναι πολλαπλάσιο του 6 για ομοιομορφία (N = 1,2,3,...)

N=1;

Origin(1,1)= center(1)- sind(30)*rp;
Origin(1,2)= center(2)-re;
Origin(2,1)= center(1)+ sind(30)*rp;
Origin(2,2)= center(2)-re;
dx=Origin(2,1)- Origin(1,1);
dy=Origin(2,2)- Origin(1,2);

for i = 1:N+1
    Thesis(1,i,1)=Origin(1,1)+dx/N*(i-1);
    Thesis(1,i,2)=Origin(1,2)+dy/N*(i-1);
end

plot (center(1), center(2) , 'ko' )

for i= 1:N+1
    hold on
    plot(Thesis(1,i,1),Thesis(1,i,2), 'ko')
end

axis ([ center(1)-2*rp center(1)+2*rp, center(2)-2*rp center(2)+2*rp ])

for j =2:6
```

```

z=1;
if mod(j,3)==1
    z=2;
end

dx=(-1)^(floor(j/3))*rp*sind(30)*z;
dy=re*(2-z)*(-1)^(floor(j/4));

Origin(mod(j,6)+1,1)=dx +Origin(j,1);
Origin(mod(j,6)+1,2)=dy+Origin(j,2);

for i = 1:N+1
    Thesis(j,i,1)=Origin(j,1)+dx/N*(i-1);
    Thesis(j,i,2)=Origin(j,2)+dy/N*(i-1);
end

for i= 1:N+1
    hold on
    plot(Thesis(j,i,1),Thesis(j,i,2),'ko')

end

end
z=1;
for j=1:6
    for i = 1:N
        FinalThesis(z,1)= Thesis(j,i,1);
        FinalThesis(z,2)= Thesis(j,i,2);
        z=z+1;
    end
end
end
%% Σε καθε πιθανη γεωμετρια για να εχουμε ομοιομορφια υπαρχουν 2 πιθανες
διαταξεις %% %% z = 0 ,1 %%

z=0;

for i = 0:N*3-1

    Ithesis(i+1,1)=FinalThesis(i*2+1+z,1);
    Ithesis(i+1,2)=FinalThesis(i*2+1+z,2);
    hold on
    plot(Ithesis(i+1,1),Ithesis(i+1,2),'ro')
end

Seats = 3*N;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Εισαγωγή των στοιχείων διάταξης για την επιλυση%%
Inumber = 3;
Igive = 1;
Isink = Inumber-Igive ;
%% Προσδιορισμός των σημειων ρεύματος εισαγωγής Η αρχη είναι κάτω δεξιά %%
I1=[2];
I2=[1,3];

for i=1:length(I1)
    I1xyz(i,1) = Ithesis(I1(i),1);
    I1xyz(i,2) = Ithesis(I1(i),2);
end

```

```

for i=1:length(I2)
    I2xyz(i,1) = Ithesis(I2(i),1);
    I2xyz(i,2) = Ithesis(I2(i),2);

end

for i=1:Igive
    plot(I1xyz(i,1),I1xyz(i,2),'r*')
hold on
end

for i=1:Isink
    plot(I2xyz(i,1),I2xyz(i,2),'b*')
hold on
end

axis ([ center(1)-2*rp center(1)+2*rp, center(2)-2*rp center(2)+2*rp ])
legend('Πηγές','Καταβόθρες')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear
hold off
%Προσδιόρισε τα χαρακτηριστικά του δοκιμίου

XYZ = [10,10,10];
a=2*XYZ(1);
b=2*XYZ(2);
c=2*XYZ(3);
center = [a/2,b/2];

% προσδιορισμός της θέσης των παροχών ρεύματος%

% I1(1,1)=x1;
% I1(1,2)=y1;

% I2(1,1)=x2;
% I2(1,2)=y2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Για Τριγωνική Γεωμετρία %%

% Ακτίνα Περιγεγραμμένου Κυκλου
rp=3^(-0.5)*1;
% Ακτίνα εγγεγραμμένου Κυκλου
re=rp/2;

% Οι πιθανές θέσεις είναι πολλαπλασιο του 6 για ομοιομορφία (N = 1,2,3,...)

N=2;

Origin(1,1)= center(1)- sind(60)*rp;
Origin(1,2)= center(2)-re;
Origin(2,1)= center(1)+ sind(60)*rp;
Origin(2,2)= center(2)-re;
dx=Origin(2,1)- Origin(1,1);

```



```

dy=Origin(2,2)- Origin(1,2);

for i = 1:N+1
    Thesis(1,i,1)=Origin(1,1)+dx/N*(i-1);
    Thesis(1,i,2)=Origin(1,2)+dy/N*(i-1);
end

plot (center(1), center(2) , 'ko' )

for i= 1:N+1
    hold on
    plot(Thesis(1,i,1),Thesis(1,i,2), 'ko')

end

axis ([ center(1)-3*rp center(1)+3*rp, center(2)-3*rp center(2)+3*rp ])

for j =2:3

    z=1;
    if mod(j,2)==1
        z=2;
    end

    dx=(-1)*cosd(30)*rp;
    dy=(re+rp)*(-1)^(z+1);

    Origin(mod(j,3)+1,1)=dx + Origin(j,1);
    Origin(mod(j,3)+1,2)=dy + Origin(j,2);

    for i = 1:N+1
        Thesis(j,i,1)=Origin(j,1)+dx/N*(i-1);
        Thesis(j,i,2)=Origin(j,2)+dy/N*(i-1);
    end

    for i= 1:N+1
        hold on
        plot(Thesis(j,i,1),Thesis(j,i,2), 'ko')

    end

end

z=1;
for j=1:3
    for i = 1:N
        FinalThesis(z,1)= Thesis(j,i,1);
        FinalThesis(z,2)= Thesis(j,i,2);
        z=z+1;
    end
end

%% Σε κάθε πιθανή γεωμετρία για να έχουμε ομοιομορφία υπάρχουν 2 πιθανές
διατάξεις %% %% z = 0 ,1 %%

z=0;

for i = 0:floor(3*N/2)-1

    Ithesis(i+1,1)=FinalThesis(i*2+1+z,1);
    Ithesis(i+1,2)=FinalThesis(i*2+1+z,2);

```

```

    hold on
    plot(Ithesis(i+1,1),Ithesis(i+1,2),'ro')
end

Seats = floor(3*N/2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Εισαγωγή των στοιχείων διάταξης για την επίλυση%

Inumber = 3;
Igive = 1;
Isink = Inumber-Igive ;

I1=[2];
I2=[1,3];

for i=1:length(I1)
    I1xyz(i,1) = Ithesis(I1(i),1);
    I1xyz(i,2) = Ithesis(I1(i),2);

end
for i=1:length(I2)
    I2xyz(i,1) = Ithesis(I2(i),1);
    I2xyz(i,2) = Ithesis(I2(i),2);

end

for i=1:Igive
    plot(I1xyz(i,1),I1xyz(i,2),'r*')
hold on
end

for i=1:Isink
    plot(I2xyz(i,1),I2xyz(i,2),'b*')
hold on
end

axis ([ center(1)-2*rp center(1)+2*rp, center(2)-2*rp center(2)+2*rp ])

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear
hold off
%Προσδιόρισε τα χαρακτηριστικά του δοκιμίου

XYZ = [10,10,10];
a=2*XYZ(1);
b=2*XYZ(2);
c=2*XYZ(3);
center = [a/4,b/4];

% προσδιορισμός της θέσης των παροχών ρεύματος%

% I1(1,1)=x1;
% I1(1,2)=y1;

```

```

% I2(1,1)=x2;
% I2(1,2)=y2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Για Τετραγωνική Γεωμετρία %%

% Ακτινα Περιγεγραμμενου Κυκλου
rp=2^0.5;
% Ακτινα εγγεγραμμενου Κυκλου
re=rp*cosd(45);

% Οι πιθανες θέσεις είναι πολλαπλασιο του 4 για ομοιομορφια (N = 1,2,3,...)

N=2;

Origin(1,1)= center(1)-re;
Origin(1,2)= center(2)-re;
Origin(2,1)= center(1)+ re;
Origin(2,2)= center(2)-re;
dx=Origin(2,1)- Origin(1,1);
dy=Origin(2,2)- Origin(1,2);

for i = 1:N+1
    Thesis(1,i,1)=Origin(1,1)+dx/N*(i-1);
    Thesis(1,i,2)=Origin(1,2)+dy/N*(i-1);
end

plot (center(1), center(2) , 'ko' )

for i= 1:N+1
    hold on
    plot(Thesis(1,i,1),Thesis(1,i,2), 'ko')
end

axis ([ center(1)-2*rp center(1)+2*rp, center(2)-2*rp center(2)+2*rp ])

for j =2:4

    z=1;
    if mod(j,2)==0
        z=2;
    end

    dx=(2-z)*(-2)*re;
    dy=2*re*(z-1)*(-1)^(floor(j/2)+1);

    Origin(mod(j,4)+1,1)=dx+Origin(j,1);
    Origin(mod(j,4)+1,2)=dy+Origin(j,2);

    for i = 1:N+1
        Thesis(j,i,1)=Origin(j,1)+dx/N*(i-1);
        Thesis(j,i,2)=Origin(j,2)+dy/N*(i-1);
    end

    for i= 1:N+1
        hold on
        plot(Thesis(j,i,1),Thesis(j,i,2), 'ko')
    end
end

```

```

        end

    end
    z=1;
    for j=1:4
        for i = 1:N
            FinalThesis(z,1)= Thesis(j,i,1);
            FinalThesis(z,2)= Thesis(j,i,2);
            z=z+1;
        end
    end
    %% Σε κάθε πιθανή γεωμετρία για να έχουμε ομοιομορφία υπάρχουν 2 πιθανές
    διατάξεις %% %% z = 0 ,1 %%

z=0;

    for i = 0:N*2-1

        Ithesis(i+1,1)=FinalThesis(i*2+1+z,1);
        Ithesis(i+1,2)=FinalThesis(i*2+1+z,2);
        hold on
        plot(Ithesis(i+1,1),Ithesis(i+1,2),'ro')
    end

Seats = 2*N;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Εισαγωγή των στοιχείων διάταξης για την επίλυση%%
Inumber = 4;
Igive = 2;
Isink = Inumber-Igive ;

I1=[1,3];
I2=[2,4];

for i=1:length(I1)
    I1xyz(i,1) = Ithesis(I1(i),1);
    I1xyz(i,2) = Ithesis(I1(i),2);
end
for i=1:length(I2)
    I2xyz(i,1) = Ithesis(I2(i),1);
    I2xyz(i,2) = Ithesis(I2(i),2);
end

for i=1:Igive
    plot(I1xyz(i,1),I1xyz(i,2),'r*')
hold on
end

for i=1:Isink
    plot(I2xyz(i,1),I2xyz(i,2),'b*')
hold on
end

axis ([ center(1)-2*rp center(1)+2*rp, center(2)-2*rp center(2)+2*rp ])

```

```

legend('Πηγές', 'Καταβόθρες')

% Ευρεση Δυναμικου σε σημειο %% %% Δεν εχουν μπει οι αρχικες συνθηκες αρα δεν
εχει νοημα σε σημειο αλλα σε 2 σημεια %%

% Σε Amper ολα θετικα
I1value = [1];
I2value = [0.5,0.5];

coord=[5,5,0];
%Resistivity in XYZ in Ω*m
Rx=1;
Ry=1;
Rz=1;
%Αριθμος Επαναληψεων

N=5;
Cnst=1/2/pi*(Rx*Ry*Rz)^(0.5);

for i=1:Igive
    f1(i)=0;
    for p=1:2
        for q=1:2
            for l=N*(-1):N
                for m=N*(-1):N
                    for n=N*(-1):N
                        r=(Rx*(coord(1)-(-1)^p*I1xyz(i,1)-l*a)^2+Ry*(coord(2)-
(-1)^q*I1xyz(i,2)-m*b)^2+Rz*(coord(3)-0-(n*c))^2)^0.5;
                        f1(i)=f1(i)+1/r;
                    end
                end
            end
        end
    end

for i=1:Isink
    f2(i)=0;
    for p=1:2
        for q=1:2
            for l=N*(-1):N
                for m=N*(-1):N
                    for n=N*(-1):N
                        r=(Rx*(coord(1)-(-1)^p*I2xyz(i,1)-l*a)^2+Ry*(coord(2)-
(-1)^q*I2xyz(i,2)-m*b)^2+Rz*(coord(3)-0-(n*c))^2)^0.5;
                        f2(i)=f2(i)+1/r;
                    end
                end
            end
        end
    end

V=0;
for i=1:Igive
    V=V+f1(i)*I1value(i);
end
for i=1:Isink

```

```

V=V-f2(i)*I2value(i);
end
V1=V*Cnst
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

NN=200;
[X,Y]=meshgrid(center(1)-1.5*rp:(3*rp)/NN:1.5*rp+center(1),center(2)-
1.5*rp:(3*rp)/NN:1.5*rp+center(2));
Z=X;
for ii=1:length(X)
    for jj=1:length(X)

        coord=[X(ii,jj),Y(ii,jj),0];

        for i=1:Igive
            f1(i)=0;
            for p=1:2
                for q=1:2
                    for l=N*(-1):N
                        for m=N*(-1):N
                            for n=N*(-1):N
                                r=(Rx*(coord(1)-(-1)^p*I1xyz(i,1)-
1*a)^2+Ry*(coord(2)-(-1)^q*I1xyz(i,2)-m*b)^2+Rz*(coord(3)-0-(n*c))^2)^0.5;
                                f1(i)=f1(i)+1/r;
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end

        for i=1:Isink
            f2(i)=0;
            for p=1:2
                for q=1:2
                    for l=N*(-1):N
                        for m=N*(-1):N
                            for n=N*(-1):N
                                r=(Rx*(coord(1)-(-1)^p*I2xyz(i,1)-
1*a)^2+Ry*(coord(2)-(-1)^q*I2xyz(i,2)-m*b)^2+Rz*(coord(3)-0-(n*c))^2)^0.5;
                                f2(i)=f2(i)+1/r;
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end

        V=0;
        for i=1:Igive
            V=V+f1(i)*I1value(i);
        end
        for i=1:Isink
            V=V-f2(i)*I2value(i);
        end
        Z(ii,jj)=V*Cnst;

    end
end

```

```

end
hold on
contour(X,Y,Z,30)
hold on
contour(X,Y,Z)
[A,B] = gradient(Z,0.1,0.1);
hold on
quiver(X,Y,A,B)

%% Ευρεση Δυναμικου σε σημειο %% %% Δεν εχουν μπει οι αρχικες συνθηκες αρα δεν
εχει νοημα σε σημειο αλλα σε 2 σημεια %%

% Σε Amper ολα θετικα
I1value = [1];
I2value = [0.5,0.5];

coord=[5,5,0];
%Resistivity in XYZ in Ω*m
Rx=1;
Ry=1;
Rz=1;
%Αριθμος Επαναληψεων
N=10;
Cnst=1/2/pi*(Rx*Ry*Rz)^(0.5);

for i=1:Igive
    f1(i)=0;
    for p=1:2
        for q=1:2
            for l=N*(-1):N
                for m=N*(-1):N
                    r=(Rx*(coord(1)-(-1)^p*I1xyz(i,1)-l*a)^2+Ry*(coord(2)-(-
1)^q*I1xyz(i,2)-m*b)^2+Rz*(coord(3)-0)^2)^0.5;
                    K=0;
                    for u =1:N
                        K=K+Ko(2*pi*u*r^2/c);
                    end
                    f1(i)=f1(i)+2/c*log(1/r)+4/c*K;
                end
            end
        end
    end

for i=1:Isink
    f2(i)=0;
    for p=1:2
        for q=1:2
            for l=N*(-1):N
                for m=N*(-1):N
                    r=(Rx*(coord(1)-(-1)^p*I2xyz(i,1)-l*a)^2+Ry*(coord(2)-(-
1)^q*I2xyz(i,2)-m*b)^2+Rz*(coord(3)-0)^2)^0.5;
                    K=0;
                    for u =1:N
                        K=K+Ko(2*pi*u*r/c);
                    end
                    f2(i)=f2(i)+2/c*log(1/r)+4/c *K;
                end
            end
        end
    end
end

```

```

end

V=0;
for i=1:Igive
    V=V+f1(i)*I1value(i);
end
for i=1:Isink
    V=V-f2(i)*I2value(i);
end
V2=V*Cnst

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
NN=50;
[X,Y]=meshgrid(center(1)-1.5*rp:(3*rp)/NN:1.5*rp+center(1),center(2)-
1.5*rp:(3*rp)/NN:1.5*rp+center(2));
Z=X;
for ii=1:length(X)
    for jj=1:length(X)

        coord=[X(ii,jj),Y(ii,jj),0];

        for i=1:Igive
            f1(i)=0;
            for p=1:2
                for q=1:2
                    for l=N*(-1):N
                        for m=N*(-1):N
                            for n=N*(-1):N
                                r=(Rx*(coord(1)-(-1)^p*I1xyz(i,1)-
l*a)^2+Ry*(coord(2)-(-1)^q*I1xyz(i,2)-m*b)^2+Rz*(coord(3)-0)^2)^0.5;
                                f1(i)=f1(i)+1/r;
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end

        for i=1:Isink
            f2(i)=0;
            for p=1:2
                for q=1:2
                    for l=N*(-1):N
                        for m=N*(-1):N
                            for n=N*(-1):N
                                r=(Rx*(coord(1)-(-1)^p*I2xyz(i,1)-
l*a)^2+Ry*(coord(2)-(-1)^q*I2xyz(i,2)-m*b)^2+Rz*(coord(3)-0)^2)^0.5;
                                f2(i)=f2(i)+1/r;
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end

        V=0;
        for i=1:Igive
            V=V+f1(i)*I1value(i);

```



```

        end
        for i=1:Isink
            V=V-f2(i)*I2value(i);
        end
        Z(ii,jj)=V*Cnst;

    end
end
hold on
contour(X,Y,Z,30,'ShowText','on')
hold on
contour(X,Y,Z)
[A,B] = gradient(Z,0.2,0.2);
hold on
quiver(X,Y,A,B)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Ευρεση Δυναμικου σε σημειο %% Δεν εχουν μπει οι αρχικες συνθηκες αρα δεν
%χει νοημα σε σημειο αλλα σε 2 σημεια %%

% Σε Amper ολα θετικα
I1value = [1];
I2value = [0.5,0.5];

coord=[5,5,0];
%Resistivity in XYZ in Ω*m
Rx=1;
Ry=1;
Rz=1;
%Αριθμος Επαναληψεων
N=50;
Cnst=1/2/pi*(Rx*Ry*Rz)^(0.5)/c*2;

%% Mode thin plates %%

for i=1:Igive
    f1(i)=0;
    for p=1:2
        for q=1:2
            for l=N*(-1):N
                for m=N*(-1):N
                    for n=N*(-1):N
                        r=(Rx*(coord(1)-(-1)^p*I1xyz(i,1)-l*a)^2+Ry*(coord(2)-
(-1)^q*I1xyz(i,2)-m*b)^2+Rz*(coord(3)-0-n*c)^2)^0.5;
                        f1(i)=f1(i)+log(1/r);
                    end
                end
            end
        end
    end
end

for i=1:Isink
    f2(i)=0;
    for p=1:2
        for q=1:2
            for l=N*(-1):N
                for m=N*(-1):N
                    for n=N*(-1):N

```

```

                r=(Rx*(coord(1)-(-1)^p*I2xyz(i,1)-l*a)^2+Ry*(coord(2)-
(-1)^q*I2xyz(i,2)-m*b)^2+Rz*(coord(3)-0-n*c)^2)^0.5;
                f2(i)=f2(i)+log(1/r);
            end
        end
    end
end

end

V=0;
for i=1:Igive
    V=V+f1(i)*I1value(i);
end
for i=1:Isink
    V=V-f2(i)*I2value(i);
end
V3=V*Const/c/2

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
NN=50;
[X,Y]=meshgrid(center(1)-1.5*rp:(3*rp)/NN:1.5*rp+center(1),center(2)-
1.5*rp:(3*rp)/NN:1.5*rp+center(2));
Z=X;
for ii=1:length(X)
    for jj=1:length(X)

        coord=[X(ii,jj),Y(ii,jj),0];

        for i=1:Igive
            f1(i)=0;
            for p=1:2
                for q=1:2
                    for l=N*(-1):N
                        for m=N*(-1):N
                            for n=N*(-1):N
                                r=(Rx*(coord(1)-(-1)^p*I1xyz(i,1)-
l*a)^2+Ry*(coord(2)-(-1)^q*I1xyz(i,2)-m*b)^2+Rz*(coord(3)-0-(n*c))^2)^0.5;
                                f1(i)=f1(i)+1/r;
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end

        for i=1:Isink
            f2(i)=0;
            for p=1:2
                for q=1:2
                    for l=N*(-1):N
                        for m=N*(-1):N
                            for n=N*(-1):N
                                r=(Rx*(coord(1)-(-1)^p*I2xyz(i,1)-
l*a)^2+Ry*(coord(2)-(-1)^q*I2xyz(i,2)-m*b)^2+Rz*(coord(3)-0-(n*c))^2)^0.5;
                                f2(i)=f2(i)+1/r;
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end

```

```

        end
    end
end

V=0;
for i=1:Igive
    V=V+f1(i)*I1value(i);
end
for i=1:Isink
    V=V-f2(i)*I2value(i);
end
Z(ii,jj)=V*Cnst;

end
end
hold on
contour(X,Y,Z, 'ShowText', 'on')

```

Κώδικας αναλυτικής προσομοίωσης μεθόδου DCPD με τον Μετασχηματισμό Schwarz-Cristoffel

```

clear
hold off
% thetatest1=[90,90,90,360,360,90,90,90,90];
% thetatest2=[90,90,90,360,90,360,270,90,90,90,90];
%% Χώρος Δοκιμής %%
%% Τετραγωνο %%
n=4;
side=10;
A=[0,0];
B=[side,0];
C=[side,side];
D=[0,side];
Base = [A;B;C;D;A];

%% Εξαγωνο %%
% % % n=6;
% % % center=[5,5];
% % % rp=5;
% % % re=rp*cosd(30);
% % % Origin(1,1)= center(1)- sind(30)*rp;
% % % Origin(1,2)= center(2)-re;
% % % Origin(2,1)= center(1)+ sind(30)*rp;
% % % Origin(2,2)= center(2)-re;
% % % for j =2:5
% % %     z=1;
% % %     if mod(j,3)==1
% % %         z=2;
% % %     end
% % %     dx=(-1)^(floor(j/3))*rp*sind(30)*z;
% % %     dy=re*(2-z)*(-1)^(floor(j/4));
% % %     Origin(mod(j,6)+1,1)=dx +Origin(j,1);
% % %     Origin(mod(j,6)+1,2)=dy+Origin(j,2);
% % % end
% % % Base=Origin;
% % % Base(7,:)=Origin(1,:);
%% Μέρη Πωγμής N%%
N=1;
Length=[4,3,1];
Angle=[0,90,0];

```

```

CrackXY=[5,5];
for i = 2: N
CrackXY(2*i-1)=CrackXY(2*i-3)+cosd(Angle(i-1))*Length(i-
1)/2+cosd(Angle(i))*Length(i)/2;
CrackXY(2*i)=CrackXY(2*i-2)+sind(Angle(i-1))*Length(i-
1)/2+sind(Angle(i))*Length(i)/2;
end

X(1)=CrackXY(1)-cosd(Angle(1))*Length(1)/2;
Y(1)=CrackXY(1)-sind(Angle(1))*Length(1)/2;
for i =1 : N
X(i+1)=CrackXY(2*i-1)+cosd(Angle(i))*Length(i)/2;
Y(i+1)=CrackXY(2*i)+sind(Angle(i))*Length(i)/2;
end

for i = 1 : n
    x=linspace(Base(i,1),Base(i+1,1));
    y=linspace(Base(i,2),Base(i+1,2));
    hold on
    plot(x,y,'k');
end
for i = 1 : N
    hold on
    plot(CrackXY(2*i-1),CrackXY(2*i-1),'b*')
end
axis([-5 15 -5 15])
for i = 1 : N
    x=linspace(X(i),X(i+1));
    y=linspace(Y(i),Y(i+1));
    hold on
    plot(x,y,'r');
end

NN=n+2+2+2*N;

wx(1)=Base(1,1);
wy(1)=Base(1,2);
wx(2)=CrackXY(1);
wy(2)=Base(1,2);
wx(3)=CrackXY(1);
wy(3)=CrackXY(2);

    for i=1:N+1
        wx(i+3)=X(i);
        wy(i+3)=Y(i);
    end
    for i=1:N-1
        wx(N+4+i)= wx(N+4-i);
        wy(i+N+4)= wy(N+4-i);
    end
wx(NN-n)=CrackXY(1);
wy(NN-n)=CrackXY(2);
wx(NN-n+1)=CrackXY(1);
wy(NN-n+1)=Base(1,2);
for i = 2:n
wx(2*N+2+2+i)=Base(i,1);
wy(2*N+2+2+i)=Base(i,2);
end

```

```

for i = 1 : NN
    plot(wx(i),wy(i), 'ro');
    hold on
end

theta(1)=360/n;
theta(2)=90;
if Angle(1)<90
theta(3)=90-Angle(1);
else
theta(3)=270-Angle(1);
end
theta(4)=360;
for i = 5 : 4+N-1
    if Angle(i-4)<Angle(i-3)
        theta(i)=180-Angle(i-3)+Angle(i-4);
    elseif Angle(i-4)>90
        theta(i)=Angle(i-4)-Angle(i-3);
    else
        theta(i)=180-Angle(i-3)+Angle(i-4);
    end
end
theta(4+N)=360; %Αλλαγή πορείας στην ρωγμή
for i=1:NN-n-1-(NN-n-N)
    theta(NN-n-N+i)=360-theta(4+N-i) ;
end
theta(NN-n)=180-theta(3); % επιστροφή στο κεντρο της ρωγμης
theta(NN-n+1)=90; % το σημείο επιστροφης στην βάση
for i = NN-n+2:NN-1 % Τα υπολοιπα σημεία της βάσης
    theta(i)=360/n;
end
NN==length(theta)+1

syms A B z zz
Xmin=-13;
for i = 1:NN
x(i)=Xmin+5*(i-1);
end
x(3)=0;

f1=1;
for i = 1:NN-1
f1 = (zz-x(i))^(theta(i)/180-1)*f1;
end

F=A*int(f1, 'zz',0,z)+B;
pretty(F)
F1=inline(F)
feval(F1,A,B,5+8i,zz)

```

Κώδικας αριθμητικής προσέγγισης της γεωμετρίας ρωγμών

```

clear

M=4;
N=4;
% A=zeros(M,N);
% B=zeros(M,N);
% C=zeros(M,N);
% D=zeros(M,N);
A=[ 0 0 0 0;

```

```

    0 0 1 0;
    0 0 0 0;
    0 0 0 0];
B=[ 0 0 0 0;
    0 0 0 1;
    0 1 1 0;
    0 0 0 0];
C=[ 0 0 0 0;
    0 0 0 0;
    0 1 0 0;
    0 1 0 0];
D=[ 0 0 0 0;
    0 1 1 0;
    0 0 0 0;
    0 0 0 0];
Map=zeros(2*M-1-1,2*N-1-1);

%% ο πρώτος M x 2 ~ M x (N-1) %% %% Ρεύμα από αριστερά προς δεξιά %%
for i= 1:M
    for j = 2:N-1
        if A(i,j)==1
            a=1;
            if j==N-1
                a=0.5;
            end
            if i~=1
                Map((i-1)*2, (j-1)*2+1)= Map((i-1)*2, (j-1)*2+1) + a;
                Map((i-1)*2, (j-1)*2+1+1)= Map((i-1)*2, (j-1)*2+1+1) + a;
            end

            if i~=M
                Map((i-1)*2+1, (j-1)*2+1)= Map((i-1)*2+1, (j-1)*2+1) + a;
                Map((i-1)*2+1, (j-1)*2+1+1)= Map((i-1)*2+1, (j-1)*2+1+1) + a;
            end
        end
    end
end
% Map
%% ο δεύτερος έλεγχος 2 x N ~ (M-1) x N %% %% Ρεύμα από κάτω προς πάνω %%

for i= 2:M-1
    for j = 1:N
        if B(i,j)==1
            a=1;
            if i==2
                a=0.5;
            end
            if j~=1
                Map((i-1)*2, (j-1)*2)= Map((i-1)*2, (j-1)*2) + a;
                Map((i-1)*2-1, (j-1)*2)= Map((i-1)*2-1, (j-1)*2) + a;
            end

            if j~=N
                Map((i-1)*2, (j-1)*2+1)= Map((i-1)*2, (j-1)*2+1) + a;
                Map((i-1)*2-1, (j-1)*2+1)= Map((i-1)*2-1, (j-1)*2+1) + a;
            end
        end
    end
end
end
end

```

```

%
% Map
%% ο τρίτος ελεγχος M x 2 ~ M x (N-1) %% %% Ρεύμα από δεξιά προς αριστερά%%
for i= 1:M
    for j = 2:N-1
        if C(i,j)==1
            a=1;
            if j==2
                a=0.5;
            end
            if i~=1
                Map((i-1)*2, (j-1)*2)= Map((i-1)*2, (j-1)*2) + a;
                Map((i-1)*2, (j-1)*2-1)= Map((i-1)*2, (j-1)*2-1) + a;
            end

            if i~=M
                Map((i-1)*2+1, (j-1)*2)= Map((i-1)*2+1, (j-1)*2) + a;
                Map((i-1)*2+1, (j-1)*2-1)= Map((i-1)*2+1, (j-1)*2-1) + a;
            end
        end
    end
end
% Map
%% ο τέταρτος ελεγχος 2 x N ~ (M-1) x N %% %% Ρεύμα από πάνω προς κάτω %%
for i= 2:M-1
    for j = 1:N
        if D(i,j)==1
            a=1;
            if i==M-1
                a=0.5;
            end
            if j~=1
                Map((i-1)*2+1, (j-1)*2)= Map((i-1)*2+1, (j-1)*2) + a;
                Map((i-1)*2+1+1, (j-1)*2)= Map((i-1)*2+1+1, (j-1)*2) + a;
            end

            if j~=N
                Map((i-1)*2+1, (j-1)*2+1)= Map((i-1)*2+1, (j-1)*2+1) + a;
                Map((i-1)*2+1+1, (j-1)*2)= Map((i-1)*2+1+1, (j-1)*2) + a;
            end
        end
    end
end

extra=2;
Map2 = zeros(6+2*extra*2);
Map2((size(Map2,1)-6)/2+1:size(Map2,1)-(size(Map2,1)-6)/2, (size(Map2,1)-6)/2+1:size(Map2,1)-(size(Map2,1)-6)/2)=3*Map;

x=0.5:2:size(Map2,1)+0.5;
y=0.5:2:size(Map2,1)+0.5;

xcr=[1.5 1.5 4 6.5];
ycr=[6.5 3.5 3.5 1.5];

xcr=xcr+(size(Map2,1)-6)/2;
ycr=ycr+(size(Map2,1)-6)/2;

```

```

figure(1)

imagesc(Map2)
hold on

% mapc = [0 1 1;
%         0 0.9 0.9;
%         0 0.8 0.8;
%         0 0.7 0.7;
%         0 0.6 0.6;
%         0 0.5 0.5;
%         0 0.4 0.4;
%         0 0.3 0.3;
%         0 0.2 0.2;
%         0 0.1 0.1;
%         0 0 0];

% mapc = [0 1 1;
%         0 0.7 0.7;
%         0 0.6 0.6;
%         0 0.5 0.5;
%         0 0.4 0.4;
%         0 0.3 0.3;
%         0 0.2 0.2];

mapc = [0 0 1;
        0 0 0.7;
        0 0 0.6;
        0 0 0.5;
        0 0 0.4;
        0 0 0.3;
        0 0 0.2];

i=0.5; j=1; k=1;
mapc = [i j k
        i j*0.7 k;
        i j*0.6 k;
        i j*0.5 k;
        i j*0.4 k;
        i j*0.3 k;
        i j*0.2 k];

colormap(mapc)

xl1=1.5:2:size(Map2,1)-0.5;
yl1=1.5:2:size(Map2,1)-0.5;

% for i=1:length(xl)
%     plot([xl(i) xl(i)], [yl(1) yl(end)], 'Color', [0.3 0.3 0.3], 'Linewidth', 1)
%     hold on
% end
%
% for j=1:length(yl)
%     plot([xl(1) xl(end)], [yl(j) yl(j)], 'Color', [0.3 0.3 0.3], 'Linewidth', 1)
%     hold on
% end

```



```

for i=1:length(x)
    plot([x(i) x(i)], [y(1) y(end)], 'Color', [0.3 0.3 0.3], 'Linewidth', 0.5)
    hold on
end

for j=1:length(y)
    plot([x(1) x(end)], [y(j) y(j)], 'Color', [0.3 0.3 0.3], 'Linewidth', 0.5)
    hold on
end

for i=1:length(xl1)
    plot([xl1(i) xl1(i)], [y(1) y(end)], 'Color', [0.3 0.3 0.3], 'Linewidth', 0.5)
    hold on
end

for j=1:length(yl1)
    plot([x(1) x(end)], [yl1(j) yl1(j)], 'Color', [0.3 0.3 0.3], 'Linewidth', 0.5)
    hold on
end

for i=1:length(x)
    for j=1:length(y)
        plot(x(i), y(j), 'o', 'Color', 'k', 'Markersize', 10, 'Markerfacecolor', 'k')
        hold on
    end
end

% plot(xcr, ycr, 'Color', 'r', 'Linewidth', 8)

hold off
axis equal
set(gca, 'Visible', 'off')
xlim([0.5 size(Map2,1)+0.5])
ylim([0.5 size(Map2,1)+0.5])

```