

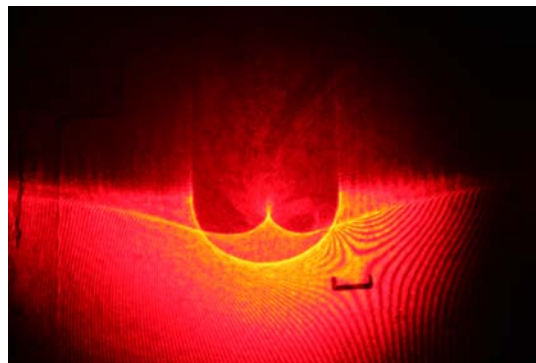


**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΥΛΙΚΩΝ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Όνοματεπώνυμο : Παπουτσής Γεώργιος**

**ΘΕΜΑ : ΚΑΥΣΤΙΚΕΣ ΣΕ ΣΦΗΝΕΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ  
ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟΥ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ**



**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΓΕΩΡΓΙΟΣ Α. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ,  
Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ**

**ΜΕΛΗ : ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Χ. ΠΡΟΒΑΤΙΔΗΣ, ΣΜΜ  
ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ Β. Γ. ΒΑΔΑΛΟΥΚΑ, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ**

**ΑΘΗΝΑ 2011**

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

## ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΟΠΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

### 1- ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

- 1.1 Εισαγωγή
- 1.2 Μεταβολή της Έντασης Φωτεινής Ακτίνας Διερχόμενης δια Διαφανούς Μέσου
- 1.3 Επίδραση της Φόρτισης επί του Οπτικού Δρόμου των Ανακλώμενων και Διερχόμενων Ακτινών
- 1.4 Βασική Θεωρία της Οπτικής Μεθόδου των Καυστικών
- 1.5 Εφαρμογή της Οπτικής Μεθόδου των Καυστικών στο Επίπεδο Εντατικό Πρόβλημα για Οπτικώς Ισότροπα Υλικά

### 2 - ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΑΦΩΝ

- 2.1 Γενικά
- 2.2 Συγκεντρωμένη Δύναμη σε Ημίχωρο

### 3 - ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΠΑΦΗΣ – ΕΠΑΦΗ HERTZ

- 3.1 Γενικά
- 3.2 Συνάρτηση Mushkelishvili

### 4 - ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ ΛΟΞΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ ΣΦΗΝΑΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

- 4.1 Εισαγωγή
- 4.2 Συγκέντρωση πλάγιας δύναμης στην κορυφή της σφήνας
- 4.3 Εφαρμοζοντας την μέθοδο των Καυστικών

### 5 - ΠΕΙΡΑΜΑ

- 5.1 Γενικά
- 5.2 Πειραματική Διάταξη
- 5.3 Διεξαγωγή Πειράματος

### 6 - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ-ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΕΝΤΑΣΕΩΣ

- 6.1 Υπολογισμός του φορτίου και του Συντελεστή Εντάσεως για κατακόρυφο φορτίο
- 6.2 Υπολογισμός του φορτίου για πλάγιο φορτίο

## ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

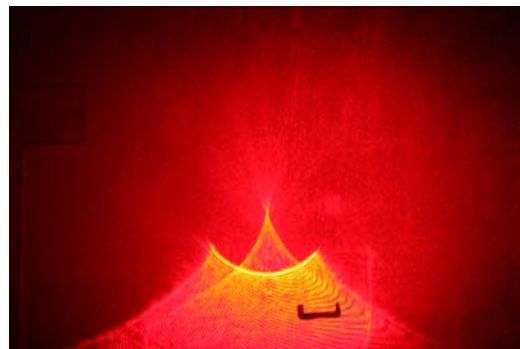
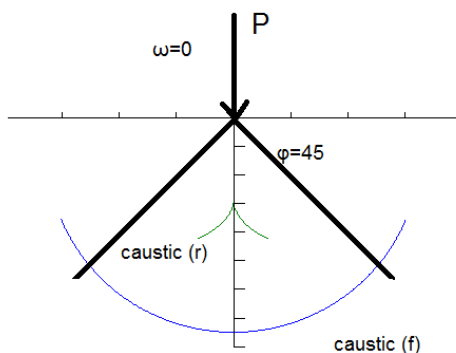
## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Κατ' αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα, για την διπλωματική μου εργασία καθηγητή, Κο Γιώργο Παπαδόπουλο τόσο για την πολύτιμη καθοδήγηση και βοήθεια του σε κάθε φάση της όσο και για την αμέριστη κατανόηση που είχε για τις εργασιακές μου υποχρεώσεις. Θέλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους γονείς μου και τα αδέρφια μου για την διαρκή στήριξη τους και την υπομονή που έδειξαν όλα αυτά τα χρόνια στις σπουδές μου καθώς και την κάθε είδους προσπάθεια που κατέβαλαν για να πάρω το πτυχίο μου. Επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ στους συμφοιτητές και αυριανούς συναδέλφους μου για τα αξέχαστα φοιτητικά χρόνια που περάσαμε μαζί.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι η εφαρμογή της πειραματικής μεθόδου των καυστικών για την αξιολόγηση λοξής δύναμης στην κορυφή μιας σφήνας ή σε οριζόντια ευθεία ορίων ενός ημιχώρου. Θα γίνει επίλυση προβλημάτων επαφών και κυρίως ο πειραματικός υπολογισμός της κατανομής των τάσεων στα σημεία επαφής δύο σωμάτων ή στα ιδιόμορφα σημεία εφαρμογής των εξωτερικών φορτίων επί της επιφάνειας σωμάτων ή γενικότερα ημιχώρων. Αντιστρόφως, από το σχηματισμό της καυστικής στα ιδιόμορφα αυτά σημεία είναι δυνατός ο υπολογισμός των εξωτερικών φορτίων. Η κατανομή των τάσεων στον ημιχώρο δίνεται από κατάλληλες τασικές συναρτήσεις οι οποίες έχουν υπολογιστεί θεωρητικά για κάθε πρόβλημα επαφής. Ακολουθώντας, γίνεται η θεωρητική ανάπτυξη των καυστικών και η πειραματική τους επαλήθευση. Τέλος, δίνονται κατάλληλες σχέσεις, εξαρτώμενες από τα χαρακτηριστικά της καυστικής, από τις οποίες προκύπτουν τα ζητούμενα φορτία.



1. Θεωρητικός υπολογισμός καυστικής
2. Πειραματική προσέγγιση καυστικής

$$P = \frac{0.0285 \left( \phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi \right) D_{\max}^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f}$$

3. Υπολογισμός του φορτίου από τη γεωμετρία της καυστικής

## ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΟΠΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

Στη Μηχανική του Παραμορφώσιμου σώματος γνωρίζουμε ότι στο άκρο της ρωγμής, στην κορυφή κυρτής γωνίας (π.χ σφήνας), γύρω από οπή, κλπ συγκεντρώνονται τάσεις με θεωρητικά άπειρη τιμή. Αυτά είναι τα γνωστά ιδιόμορφα σημεία (singular points). Με δεδομένο ότι από την ύπαρξη αυτών των σημείων επέρχεται η πιθανή αστοχία της κατασκευής, ως Μηχανικοί θα πρέπει να τα μελετήσουμε. Ο υπολογισμός των τάσεων στα ιδιόμορφα σημεία γίνεται με κάποιες θεωρητικές και κάποιες πειραματικές μεθόδους. Οι πειραματικές μέθοδοι είναι γνωστές σαν οπτικές μέθοδοι. Με τις πειραματικές μεθόδους ο ερευνητής έχει μεγαλύτερη ευελιξία σε σχέση με τις θεωρητικές, οι οποίες βασίζονται στη μαθηματική ανάλυση με αποτέλεσμα να στηρίζονται σε παραδοχές που πολλές φορές οδηγούν σε αποτελέσματα που απέχουν των πραγματικών. Οι μέχρι σήμερα πειραματικές μέθοδοι έχουν σκοπό να υπολογίσουν τις τάσεις σε κάθε ιδιόμορφο σημείο του σώματος υπολογίζοντας πειραματικά είτε τους συντελεστές εντάσεως των τάσεων, είτε τις μετατοπίσεις κ από αυτές τις παραμορφώσεις και τις τάσεις. Οι πειραματικές μέθοδοι με τις οποίες υπολογίζονται οι συντελεστές εντάσεως των τάσεων είναι:

1. η πειραματική μέθοδος της Φωτοελαστικότητας
2. η πειραματική μέθοδος των Ισοπαχών
3. η πειραματική μέθοδος των **Καυστικών**

Η οπτική μέθοδος των καυστικών, με την οποία θα ασχοληθούμε στο πείραμα μας, βασίζεται στην κλασική καυστική, η οποία είναι μια ιδιόμορφη καμπύλη, που σχηματίζεται από την συγκέντρωση των αποκλινόντων ανακλωμένων ακτινών που προέρχονται από την πρόσπτωση φωτεινής δέσμης πάνω σε ένα κοίλο ή κυρτό κάτοπτρο. Έτσι, η μηχανική ιδιομορφία γύρω από το άκρο μιας ρωγμής ή οπής, σφήνας κ.α βάσει των νόμων της οπτικής μετατρέπεται σε οπτική ιδιομορφία, δηλαδή σε μια φωτεινή καμπύλη στο χώρο, την Καυστική. Το μέγεθος και η μορφή της καυστικής, η οποία προβάλλεται πάνω σε ένα πέτασμα αναφοράς, εξαρτάται από την συγκέντρωση των τάσεων και τις οπτικές ιδιότητες του υλικού. Μετά από μαθηματική ανάλυση, υπολογίζεται ο συντελεστής συγκέντρωσης των τάσεων γύρω από το άκρο της σφήνας. Με τις καυστικές μελετάται η κοντινή γύρω από τη σφήνα περιοχή η οποία **δεν δύναται να μελετηθεί με άλλη πειραματική μέθοδο.**

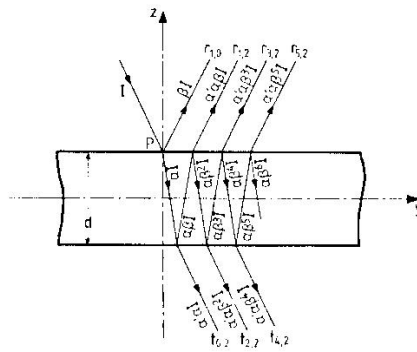
## 1- ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

### 1.1 Εισαγωγή

Κατά την τελευταία δεκαετία αναπτύχθηκε μια πειραματική μέθοδος από τους Manogg και Θεοχάρη, η οποία κρίνεται ως η μόνη ενδεδειγμένη για την ικανοποιητική παρακολούθηση των απότομων μεταβολών του εντατικού πεδίου και της διανομής των τάσεων εντός της μικρής στο το άκρο της ρωγμής ιδιόμορφης περιοχής. Η πειραματική αυτή μέθοδος καλείται **Οπτική Μέθοδος των Καυστικών** και βασίζεται στις αρχές της γεωμετρικής οπτικής. Με την πειραματική αυτή μέθοδο **η επικρατούσα ιδιομορφία των τάσεων παρά το άκρο της ρωγμής μετατρέπεται βάσει αυστηρών μαθηματικών κανόνων σε οπτική ιδιομορφία, η οποία μετρούμενη με μεγάλη ακρίβεια παρέχει ικανοποιητικά στοιχεία για την μελέτη της παρά το άκρο της ρωγμής περιοχή.** Η οπτική αυτή ιδιομορφία προέρχεται απ' τη συγκέντρωση της ιδιόμορφης στο χώρο καμπύλης, η οποία καλείται **Καυστική** των ακτινών φωτός που αποκλίνουν από την ισχυρώς καταπονούμενη παρά το άκρο της ρωγμής περιοχή. Η καυστική αυτή λαμβάνεται πάνω σε πέτασμα και αφού ευρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία προς το άκρο της ρωγμής περιοχή επιτρέπει την μελέτη αυτή. Η οπτική μέθοδος των καυστικών δύναται να εφαρμοσθεί σε όλα τα υλικά, διαφανή (μέθοδος διερχόμενων καυστικών) και μη διαφανή (μέθοδος των ανακλώμενων καυστικών) και αποτελεί απλή, ακριβή και ευαίσθητη μέθοδο μοναδική για τη μελέτη των ρωγμών.

### 1.2 Μεταβολή της Έντασης Φωτεινής Ακτίνας Διερχόμενης δια Διαφανούς Μέσου.

Θεωρούμε επίπεδη πλάκα πάχους  $d$ , με παράλληλες παράπλευρες επιφάνειες από διαφανές υλικό και ακτίνα μονοχρωματικού φωτός προσπίπτουσα καθέτως επί της πλάκας σε τυχαίο σημείο  $P$ , Σχ. 1.1. Η ακτίνα κατά την πρόσπτωσή της επί της πλάκας αφ' ενός ανακλάται αφ' εταίρου δε διαθλάται και ακολούθως διέρχεται από την πλάκα. Η διαθλώμενη όμως ακτίνα ανακλάται στην πίσω επιφάνεια της πλάκας και ακολούθως με την διάθλαση εξέρχεται από την εμπρός επιφάνεια. Οι διαδοχικές αυτές ανακλάσεις και διαθλάσεις της ακτίνας εξακολουθούν επ' άπειρον, έτσι ώστε μια απειρία ακτινών εξέρχεται από την εμπρός και πίσω επιφάνεια της πλάκας.



**Σχήμα 1.1 : Μεταβολή της έντασης φωτεινής δέσμης διερχόμενης δια διαφανούς μέσου.**

Η ένταση  $I$  της φωτεινής ακτίνας μειώνεται συνεχώς κατά τις διαδοχικές αυτές ανακλάσεις και διαθλάσεις. Εάν με  $r_{m,l}$  συμβολίζονται οι εξερχόμενες ακτίνες από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας και με  $t_{m,l}$  συμβολίζονται οι εξερχόμενες ακτίνες από την πίσω επιφάνεια της πλάκας, όπου ο δείκτης  $m$  παριστάνει τον αριθμό των ανακλάσεων και ο δείκτης  $l$  τον αριθμό των διαθλάσεων, τότε οι εντάσεις των ακτινών αυτών δίνονται από τις σχέσεις :

$$I_{r_{m,l},t_{m,l}} = \beta^m (1 - \beta)^l I \quad (1.1)$$

όπου ο λόγος  $\beta$  μείωσης της έντασης δίνεται από τη σχέση :

$$\beta = \left( \frac{\eta - 1}{\eta + 1} \right)^2 \quad (1.2)$$

όπου  $\eta$  είναι ο δείκτης διαθλάσεως του υλικού της πλάκας.

### 1.3 Επίδραση της Φόρτισης επί του Οπτικού Δρόμου των Ανακλώμενων και Διερχόμενων Ακτινών

Ας θεωρήσουμε φωτεινή ακτίνα ABDE, Σχ. 1.2, πολωμένη κατά τη διεύθυνση είτε της κυρίας τάσης  $\sigma_1$  είτε της κύριας τάσης  $\sigma_2$  και προσπίπτουσα καθέτως επί της πλευρικής επιφάνειας της πλάκας η οποία βρίσκεται σε εντατική κατάσταση (plane stress). Για την περίπτωση της ανακλάσεως της φωτεινής ακτίνας από την πίσω επιφάνεια της πλάκας, ο οπτικός δρόμος μεταξύ δύο σημείων A και A' της φωτεινής ακτίνας ABDA' (AB=A'B), όταν η πλάκα είναι αφόρτιστη, είναι :

$$s_A = 2(AB)\eta_o + 2d\eta \quad (1.3)$$

όπου  $d$  είναι το πάχος της πλάκας,  $\eta_o$  είναι ο δείκτης διαθλάσεως του περιβάλλοντος της πλάκας μέσου και  $\eta$  είναι ο δείκτης διαθλάσεως του





$$\delta_{1,2} = (\Delta s_{r_{1,2}} - \Delta s_f) = 2[(\eta_{1,2} - \eta)d + \eta\Delta d] \quad (1.9)$$

δια μέσου της σχέσης :

$$N_{1,2} = \frac{\delta_{1,2}}{\lambda} \quad (1.10)$$

όπου  $\lambda$  είναι το μήκος κύματος του χρησιμοποιούμενου μονοχρωματικού φωτός.

Οι μεταβολές του δείκτη διαθλάσεως  $\eta$  κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων  $\sigma_1, \sigma_2$ , στο επίπεδο τασικό πρόβλημα, δίνονται από τον φωτοασεοπτικό νόμο των Neumann-Maxwell:

$$\Delta\eta_{1,2} = \eta_{1,2} - \eta = b_1\varepsilon_{1,2} + b_2(\varepsilon_{2,1} + \varepsilon_3) \quad (1.11)$$

όπου  $b_1, b_2$  σταθερές και  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  οι κύριες παραμορφώσεις. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.9) και (1.10) και λαμβάνοντας υπ' όψιν το νόμο Hooke, προκύπτει για τον αριθμό των κροσσών :

$$N_{1,2} = 2\delta(\alpha^* \sigma_{1,2} + \beta^* \sigma_{2,1}) \quad (1.12)$$

όπου οι σταθερές  $\alpha^*$  και  $\beta^*$  δίνονται από τις σχέσεις :

$$\alpha^* = \frac{1}{E\lambda}(b_1 - 2\nu b_2 - \nu\eta) \quad (1.13)$$

$$\beta^* = \frac{1}{E\lambda}(b_2 - \nu(b_1 + b_2) - \nu\eta) \quad (1.14)$$

Ομοίως, η μεταβολή των οπτικών δρόμων των φωτεινών ακτινών ABDA' και ABDE που οφείλονται στη φόρτιση δίνονται από τις συνθήκες Favre :

$$\Delta s_{r_{1,2}} = 2c_r[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_r(\sigma_1 - \sigma_2)]d \quad (1.15)$$

$$\Delta s_{t_{1,2}} = 2c_t[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_t(\sigma_1 - \sigma_2)]d \quad (1.16)$$

όπου  $\xi_{r,t}$  είναι ο συντελεστής της **οπτικής ανισοτροπίας** του υλικού και  $c_{r,t}$  είναι **τασεοπτικές σταθερές** οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις :

$$c_{r,t} = \frac{\alpha_{r,t} + \beta_{r,t}}{2}, \quad \xi_{r,t} = \frac{\alpha_{r,t} - \beta_{r,t}}{\alpha_{r,t} + \beta_{r,t}} \quad (1.17)$$

με :

$$\alpha_r = \frac{1}{E} \left[ b_1 - 2\nu b_2 - \nu \left( \eta - \frac{\eta_o}{2} \right) \right] \quad (1.18)$$

$$\beta_r = \frac{1}{E} \left[ b_2 - \nu(b_1 + b_2) - \nu \left( \eta - \frac{\eta_o}{2} \right) \right] \quad (1.19)$$

$$\alpha_t = \frac{1}{E} [b_1 - 2\nu b_2 - \nu(\eta - \eta_o)] \quad (1.20)$$

$$\beta_t = \frac{1}{E} [b_2 - 2\nu(b_1 + b_2) - \nu(\eta - \eta_o)] \quad (1.21)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η μεταβολή του οπτικού δρόμου κατά τη φόρτιση ενός διπλοθλαστικού υλικού αποτελείται από ένα ισότροπο μέρος, το οποίο εξαρτάται από το άθροισμα των κυρίων τάσεων, και ένα ανισότροπο μέρος, το οποίο εξαρτάται από τη διαφορά των κυρίων τάσεων. Για την περίπτωση των οπτικών ισότροπων υλικών ισχύουν οι σχέσεις :

$$b_1 = b_2 = b \quad (1.22)$$

$$\Delta s_{r_1} = \Delta s_{r_2} = 2c_r(\sigma_1 + \sigma_2)d \quad (1.23)$$

$$\Delta s_{t_1} = \Delta s_{t_2} = c_t(\sigma_1 + \sigma_2)d \quad (1.24)$$

$$\alpha_r = \beta_r = c_r = \frac{1}{E} \left[ (1 - 2\nu)b - \nu \left( \eta - \frac{\eta_o}{2} \right) \right] \quad (1.25)$$

$$\alpha_t = \beta_t = c_t = \frac{1}{E} [(1 - 2\nu)b - \nu(\eta - \eta_o)] \quad (1.26)$$

Από τις σχέσεις (1.25) και (1.26) προκύπτει ότι :

$$c_r = c_t - \frac{\nu\eta_o}{2E} \quad (1.27)$$

Οι τασεοπτικές σταθερές  $c_r$  και  $c_t$  υπολογίζονται πειραματικά με τη Συμβολομετρική μέθοδο.

#### 1.4 Βασική Θεωρία της Οπτικής Μεθόδου των Καυστικών.

Οι φωτεινές ακτίνες  $r_{1,2}$  (Σχ. 1.1) οι οποίες ανακλώνται στην πίσω επιφάνεια της πλάκας και σχηματίζουν κυματικά μέτωπα :

$$S(x, y, z) = \text{σταθ}. \quad (1.28)$$

Εάν  $s(x,y)$  εκφράζει την οπτική πορεία της αντιστοίχου φωτεινής ακτίνας μεταξύ δύο επιπέδων παραλλήλων προς το μέσο επίπεδο της φορτιζόμενης πλάκας και κειμένων επί των παραπλεύρων επιφανειών της πλάκας, τότε ισχύει η σχέση :

$$S(x, y, z) = z - s(x, y) = \text{σταθ}. \quad (1.29)$$

και απ' αυτή προκύπτει ότι :

$$\text{grad}S(x, y, z) = k - \frac{\partial s}{\partial x} i - \frac{\partial s}{\partial y} j \quad (1.30)$$

όπου  $i, j, k$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα του τρισσορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων  $Oxyz$  του οποίου η αρχή  $O$  συμπίπτει με το άκρο της ρωγμής, ο άξονας  $Ox$  συμπίπτει με τον άξονα της ρωγμής και ο άξονας  $Oz$  είναι κάθετος στην πλάκα και  $s(x,y)$  είναι ο οπτικός δρόμος δια της πλάκας στο τυχαίο σημείο  $P$  αυτής (Σχ. 1.3)

Η απόκλιση των ανακλώμενων φωτεινών ακτινών σε απόσταση  $z_0$  από του μέσου επιπέδου της πλάκας εκφράζεται με το διάνυσμα  $w$  επί του επιπέδου  $z=z_0$  και δίνεται, σύμφωνα με τη θεωρία της Εικονικής, από τη σχέση :

$$w = z_0 \text{grad}S(x, y, z) \quad (1.31)$$

και σύμφωνα με τις σχέσεις (1.29) και (1.30) προκύπτει :

$$w = -z_0 \text{grad}s(x, y) = -z_0 \left( \frac{\partial s}{\partial x} i + \frac{\partial s}{\partial y} j \right) \quad (1.32)$$



Οι σχέσεις (1.38) και (1.39) γενικά μπορούν να γραφούν :

$$w = -\varepsilon z_o dc_{r,t} grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.40)$$

Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας ισχύει ότι, εάν  $\alpha$  είναι η γωνία στροφής λόγω της παραμόρφωσης τότε η απόκλιση  $\varphi$  της ανακλώμενης ακτίνας, σύμφωνα με το νόμο της οπτικής του Snell, δίνεται από τη σχέση :

$$\varphi = 2\alpha \quad (1.41)$$

και η γωνία  $\alpha$  δίνεται από τη σχέση :

$$\alpha = grad \frac{\Delta d}{2} = -grad \left[ \frac{vd}{2E} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (1.42)$$

οπότε η γωνία  $\varphi$  είναι :

$$\phi = -\frac{vd}{E} grad(\sigma_1 + \sigma_2) = -dc_f grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.43)$$

όπου :

$$c_f = \frac{v}{E} \quad (1.44)$$

είναι η τασεοπτική σταθερά για την πρώτη ανακλώμενη ακτίνα από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας. Το διάνυσμα απόκλισης  $w$ , της ανακλώμενης ακτίνας πάνω στο πέτασμα σε απόσταση  $z_o$  από την πλάκα, δίνεται από τη σχέση :

$$w = -z_o dc_f grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.45)$$

Οι σχέσεις (1.40) και (1.45) γενικά μπορούν να γραφούν :

$$w = -\varepsilon z_o dc_{r,t,f} grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.46)$$

Στην περίπτωση όπου η προσπίπτουσα επί της πλάκας φωτεινή δέσμη είναι αποκλίνουσα (+), ή συγκλίνουσα (-), ο συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διάταξης δίνεται από τη σχέση :

$$\lambda_m = \frac{z_o \pm z_i}{z_i}$$

όπου  $z_o$  είναι η απόσταση του πετάσματος αναφοράς από την πλάκα (Σχ. 1.3) και  $z_i$  είναι η απόσταση της εστίας της φωτεινής δέσμης από την πλάκα (δοκίμιο). Θέτοντας:

$$C_{r,t,f}^* = -\frac{\varepsilon_z dc_{r,t,f}}{\lambda_m} \quad (1.47)$$

η σχέση (1.46), για τα οπτικώς ισότροπα υλικά, γενικά μπορεί να γραφεί :

$$w = C_{r,t,f}^* \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.48)$$

### 1.5 Εφαρμογή της Οπτικής Μεθόδου των Καυστικών στο Επίπεδο Εντατικό Πρόβλημα για Οπτικώς Ισότροπα Υλικά.

Κατά την επίλυση του επίπεδου εντατικού προβλήματος, με την μέθοδο των μιγαδικών συναρτήσεων το άθροισμα των κυρίων τάσεων δίνεται από τη σχέση :

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\text{Re}\phi(z) \quad (1.49)$$

όπου  $\phi(z)$  αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής  $z$ . Έστω ότι  $\phi(z)$  είναι της μορφής :

$$\phi(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1.50)$$

όπου  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  πραγματικές συναρτήσεις των μεταβλητών  $x, y$  που ικανοποιούν την αρμονική εξίσωση Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.51)$$

Από τις σχέσεις (1.51) συμπεραίνεται ότι οι συναρτήσεις  $u, v$  ικανοποιούν την αρμονική εξίσωση Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (1.52)$$

Το διάνυσμα απόκλισης του φωτός για τα ισότροπα υλικά δίνεται από τη σχέση :

$$w = C_{r,t,f}^* \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) = 4C_{r,t,f}^* \text{grad} \text{Re}\phi(z) = 4C_{r,t,f}^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j \right) \quad (1.53)$$

ενώ στο μιγαδικό επίπεδο η σχέση αυτή γράφεται :

$$w = 4C_{r,t,f}^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.54)$$

Το διάνυσμα  $w$  εκφράζει τη σχετική απόκλιση του φωτός μεταξύ τυχαίου σημείου  $P$ , στη γειτονιά του άκρου της ρωγμής, της πλάκας και της εικόνας του πάνω στο πέτασμα αναφοράς τοποθετούμενου σε απόσταση  $z_0$  από την πλάκα. Εάν η απόκλιση αυτή αναφερθεί στην αρχή  $O'x'y'z'$  επί του πετάσματος αναφοράς (Σχ. 1.3), τότε το διάνυσμα απόκλισης εκφράζεται ως  $\mathbf{W}=\mathbf{z}+\mathbf{w}$ . Στο μιγαδικό επίπεδο γράφεται :

$$W = z + w = x + iy + 4C_{r,t,f}^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.55)$$

Το διάνυσμα  $\mathbf{W}$  στο μιγαδικό επίπεδο, πάνω στο πέτασμα αναφοράς, γράφεται :

$$W = x' + iy' \quad (1.56)$$

$$x' + iy' = \left( x + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial x} \right) + i \left( y + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.57)$$

και εξ' αυτής προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις :

$$x' = x + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.58)$$

$$y' = y + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.59)$$

Η ποσότητα  $W$  παριστάνει την προβολή επί του πετάσματος των αποκλίσεων των ακτινών. Η απόκλιση των ακτινών στην πλαστικοποιημένη περιοχή γύρω απ' την άκρη της ρωγμής εξαρτάται από την μεταβολή του πάχους και του δείκτη διαθλάσεως του υλικού. Οι αποκλίνουσες ακτίνες συγκεντρώνονται πάνω σε μια οριακή καμπύλη η οποία φωτίζεται έντονα. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **Καυστική**. Η οριακή αυτή περιβάλλουσα παριστάνει **ιδιόμορφη (singular) καμπύλη** για το μέγεθος  $W$ . Οι συνθήκες για την ύπαρξη ιδιομορφίας (singularity) πληρούνται με το μηδενισμό της **Ιακωβιανής (Jacobean) διακρίνουσας** :

$$J = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = 0 \quad (1.60)$$

η οποία γράφεται :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.61)$$

όπου :

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.63)$$

και αντικαθιστώντας στην ορίζουσα (1.61) προκύπτει :

$$\begin{vmatrix} 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad (1.64)$$

Από την ανάπτυξη της ορίζουσας (1.64) προκύπτει :

$$1 + 4C_{r,t,f}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 16C_{r,t,f}^{*2} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.65)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1.65) την πρώτη των σχέσεων (1.52) προκύπτει:

$$16C_{r,t,f}^{*2} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.66)$$

Παραγωγίζοντας την αναλυτική συνάρτηση  $\phi(z) = u(x, y) + i\nu(x, y)$ , δύο φορές ως προς  $x$ , προκύπτει :

$$\phi''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} \quad (1.67)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν τη δεύτερη των σχέσεων (1.51) προκύπτει :

$$\phi''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (1.68)$$



Το μέτρο της (1.68) είναι :

$$|\phi''(z)|^2 = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (1.69)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν την πρώτη των σχέσεων (1.52) προκύπτει :

$$|\phi''(z)|^2 = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (1.70)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1.70) στη σχέση (1.68) προκύπτει :

$$|4C_{r,t,f}^* \phi''(z)|^2 = 1 \quad (1.71)$$

και απ' την τελευταία σχέση προκύπτει :

$$|4C_{r,t,f}^* \phi''(z)| = 1 \quad (1.72)$$

Η σχέση (1.72) είναι η εξίσωση της αρχικής καμπύλης της καυστικής αφού ισχύει :

$$\overline{\phi'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.73)$$

Η σχέση (1.55) γίνεται :

$$W = z + 4C_{r,t,f}^* \overline{\phi'(z)} \quad (1.74)$$

**Η σχέση (1.74) είναι η εξίσωση της καυστικής.**

Στην περίπτωση όπου χρησιμοποιείται η τασική συνάρτηση Westergaard Z, η οποία συνδέεται με την  $\phi(z)$  με τη σχέση  $2\phi(z)=Z$ , η εξίσωση (1.72) της αρχικής καμπύλης της καυστικής γίνεται :

$$|2C_{r,t,f}^* Z''(z)| = 1 \quad (1.75)$$

Η δε εξίσωση (1.74) της καυστικής, λαμβανομένου και του συντελεστή μεγέθυνσης  $\lambda_m$ , γίνεται :

$$W = \lambda_m \left| z + 2C_{r,t,f}^* \overline{Z'(z)} \right| \quad (1.76)$$

## 2- ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΑΦΩΝ

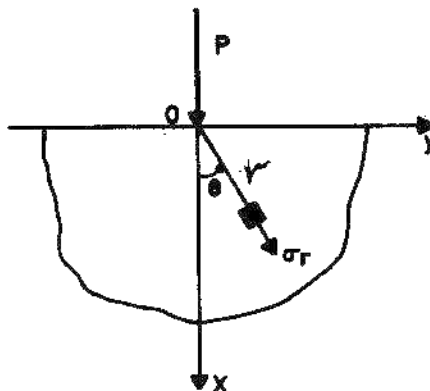
### 2.1 Γενικά

Τα προβλήματα επαφών παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον με πολλές πρακτικές εφαρμογές. Για τη λύση των προβλημάτων αυτών, εκτός από τις μαθηματικές αναλύσεις και τις υπολογιστικές μεθόδους, ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι πειραματικές μέθοδοι όπως η μέθοδος των καυστικών και η μέθοδος της φωτοελαστικότητας.

Η μέθοδος των καυστικών έχει εφαρμοστεί στην μελέτη των ιδιόμορφων τασικών πεδίων τα οποία αναπτύσσονται πλησίον συγκεντρωμένων ή κατανεμημένων φορτίων κατά μήκος ευθυγράμμου συνόρου. Στην παρούσα εργασία επιλύονται διάφορα προβλήματα επαφών με την πειραματική μέθοδο των καυστικών. Τέτοια προβλήματα είναι : συγκεντρωμένα φορτία επί της επιφάνειας ημίχωρων, συγκεντρωμένα φορτία στις κορυφές σφηνών διαφόρων γωνιών. Τα σημεία επαφών και τα σημεία εφαρμογής των φορτίων είναι ιδιόμορφα σημεία εις τα οποία η σχηματιζόμενη καυστική δίνει πληροφορίες για τα αναπτυσσόμενα τασικά πεδία. Από κατάλληλες τασικές συναρτήσεις προκύπτουν οι συναρτήσεις των τάσεων και εξ αυτών οι εξισώσεις των καυστικών.

### 2.2 Συγκεντρωμένη Δύναμη σε Ημίχωρο

Συγκεντρωμένη δύναμη  $P$  εξασκείται σε σημείο ευθυγράμμου συνόρου ημιάπειρης πλάκας (Σχ.2.1). Η τασική συνάρτηση  $\eta$  οποία επιλύει το πρόβλημα αυτό είναι :



Σχ. 2.1 : Γεωμετρία φορτιζόμενης πλάκας.

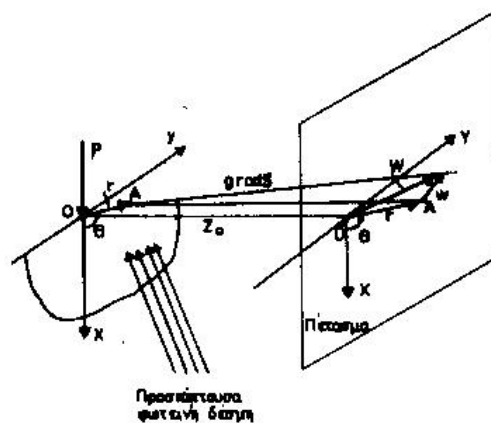
$$\Phi = -\frac{P}{\pi} r\theta \sin \theta \quad (2.1)$$

Οι τάσεις οι οποίες προκύπτουν από την τασική συνάρτηση αυτή, σε πολικές συντεταγμένες, είναι :

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (2.2)$$

Παράλληλη δέσμη φωτός προσπίπτει στη γειτονία του σημείου εφαρμογής του φορτίου, έστω στο σημείο A (Σχ. 2.2). Οι φωτεινές ακτίνες ανακλώνται από τις επιφάνειες της πλάκας ή διέρχονται δια της πλάκας και σχηματίζουν κυματικά μέτωπα :

$$S(x, y, z) = \sigma \alpha \theta. \quad (2.3)$$



Σχ. 2.2 : Οπτική διάταξη.

Για οπτικώς ισότροπα υλικά η διερχόμενη δια της πλάκας ακτίνα φωτός εκτρέπεται λόγω της παραμορφωμένης περιοχής γύρω από το σημείο εφαρμογής του φορτίου. Επί πετάσματος, σε απόσταση  $z_0$  από την πλάκα, η εκτροπή της διερχόμενης φωτεινής ακτίνας δίνεται από το διάνυσμα :

$$w_f = -\frac{z_0 d c_f}{\lambda_m} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (2.4)$$

όπου  $d$  είναι το πάχος της πλάκας,  $c_f \left( c_f = \frac{v}{E} \right)$  είναι η τασεοπτική σταθερά του υλικού της πλάκας και  $\lambda_m$  είναι ο συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διάταξης ο οποίος δίνεται από τη σχέση :

$$\lambda_m = \frac{z_0 - z_i}{z_i} \quad (2.5)$$

όπου  $z_0$  είναι η απόσταση μεταξύ της πλάκας και του πετάσματος και  $z_i$  είναι η απόσταση μεταξύ της εστίας της φωτεινής δέσμης και της πλάκας. Από τις σχέσεις (2.2) και (2.4) προκύπτει :

$$w_f = C_f \frac{1}{r^2} (\cos 2\theta_i + \sin 2\theta_j) \quad (2.6)$$

όπου η σταθερά  $C_f$  είναι :

$$C_f = -\frac{2z_0 d c_f P}{\lambda_m \pi} \quad (2.7)$$

Η αρχική καμπύλη της καυστικής και οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής είναι :

$$r_0 = (2C_f)^{\frac{1}{3}} \quad (2.8)$$

$$X_f = \lambda_m (2C_f)^{\frac{1}{3}} (\cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta) \quad (2.9)$$

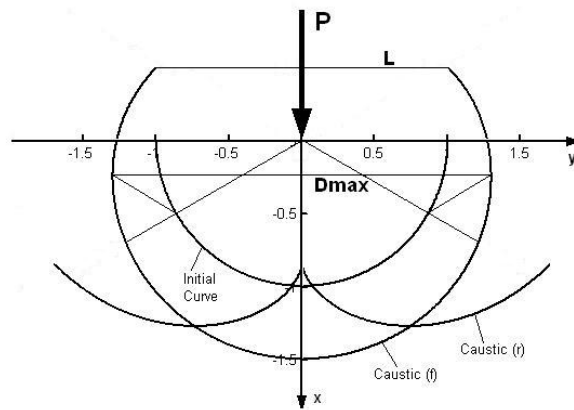
$$Y_f = \lambda_m (2C_f)^{\frac{1}{3}} (\sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta)$$

Για τιμές της γωνίας  $\theta$  μεταξύ  $-\frac{\pi}{2}$  και  $+\frac{\pi}{2}$ , η αρχική καμπύλη και η αντίστοιχη καυστική σχηματίζονται γύρω από το σημείο εφαρμογής του φορτίου P. Στο Σχ. 2.3 φαίνονται η αρχική καμπύλη και η αντίστοιχη καυστική. Από τη μέγιστη διάμετρο της καυστικής  $D_{\max}$  (για  $\theta=60^\circ$ ) προκύπτει :

$$D_{\max} = 2Y_f^{\max} \Big|_{\theta=60^\circ} = \lambda_m C_f^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{3}{2}} \quad (2.10)$$

και εξ αυτής προκύπτει το φορτίο P :

$$P = \frac{2\pi D_{\max}^3}{81\sqrt{3}z_0 d \lambda_m^2 c_f} \quad (2.11)$$



**Σχ. 2.3 : Γεωμετρία της αρχικής καμπύλης και της αντίστοιχης καυστικής στο σημείο εφαρμογής του φορτίου.**

Το φορτίο  $P$  υπολογίζεται πειραματικά από τη διάμετρο της καυστικής με τη χρήση της σχέσης (2.11). Επίσης, το φορτίο  $P$  είναι δυνατόν να υπολογιστεί πειραματικά από το άνοιγμα  $L$  των άκρων της καυστικής (Σχ. 2.3). Το μήκος  $L$  προκύπτει από τις παραμετρικές εξισώσεις (2.9) της καυστικής :

$$L = 2Y_f \Big|_{\theta=\phi=\pi/2} = 2\lambda_m (2C_f)^{\frac{1}{3}} \quad (2.12)$$

και εξ αυτής, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.7), προκύπτει :

$$P = \frac{\pi L^3}{32z_0 d \lambda_m^2 c_f} \quad (2.13)$$

### 3- ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΠΑΦΗΣ – ΕΠΑΦΗ Hertz

#### 3.1 Γενικά

Τα στερεά σώματα δεν είναι απολύτως στερεά. Βάσει της θεωρίας της ελαστικότητας είναι παραμορφώσιμα. Βασικός πυλώνας της θεωρίας της ελαστικότητας είναι ο νόμος του Hooke ο οποίος προβλέπει την παραμόρφωση (κάμψη, στρέψη, θλίψη κλπ.) ενός στερεού σώματος το οποίο υπόκειται σε κάποια εξωτερική φόρτιση. Η φόρτιση αυτή θα προκαλέσει μια τάση στο εσωτερικό του σώματος. Με τη σειρά της η τάση θα προκαλέσει μια ανάλογη παραμόρφωση στο σώμα η οποία μπορεί να υπολογιστεί.

Βασική παραδοχή της θεωρίας της ελαστικότητας είναι το ότι οι τιμές των τάσεων δεν ξεπερνούν εκείνες τις τιμές για τις οποίες έχουμε πλαστικές παραμορφώσεις στο σώμα. Δηλαδή οι προκύπτουσες παραμορφώσεις είναι ελαστικές, επομένως εξαλείφονται με την άρση της εξωτερικής φόρτισης. Η παραδοχή αυτή ισχύει για την πλειονότητα των εφαρμογών. Οι παραμορφώσεις που προαναφέρθηκαν (κάμψη, στρέψη, θλίψη κλπ.) δεν αφορούν το θέμα μας, αφού εδώ θα ασχοληθούμε με τοπικές παραμορφώσεις που προκαλούνται λόγω επαφής δύο σωμάτων. Όταν λοιπόν δυο εμπλεκόμενα σώματα πιέζουν το ένα το άλλο με κάποια δύναμη, προκύπτει τοπικά μια επιφάνεια επαφής λόγω παραμορφωσιμότητας και των δύο σωμάτων. Το μέγεθος της επιφάνειας αυτής εξαρτάται από τη δύναμη και την στιβαρότητα των σωμάτων. Εδώ να σημειωθεί πως όταν λέμε ότι οι επιφάνειες πιέζουν η μία την άλλη εννοούμε ότι η πρώτη ασκεί μια δύναμη στην δεύτερη και αυτή ασκεί μια δύναμη αντίδρασης στην πρώτη σύμφωνα με τον νόμο του Νεύτωνα.

**Σύμμορφες** επιφάνειες αποκαλούμε τις επιφάνειες των οποίων η γεωμετρία επιτρέπει να υπάρχει μεγάλη επιφάνεια επαφής μεταξύ τους. Δύο ομόκεντροι κύκλοι με μικρή διαφορά στην ακτίνα τους είναι σύμμορφες επιφάνειες όπως π.χ ένα κουζινέτο.

**Μη σύμμορφες** επιφάνειες αποκαλούμε τις επιφάνειες των οποίων η γεωμετρία απαγορεύει τη μεγάλη επιφάνεια επαφής μεταξύ τους. Για παράδειγμα δύο ομόκεντροι κύκλοι με μεγάλη διαφορά στις ακτίνες τους θεωρούνται μη σύμμορφες επιφάνειες. Τέτοια περίπτωση είναι η μπίλια ενός ρουλεμάν που έχει ακτίνα καμπυλότητας πολύ μικρότερη από την ακτίνα καμπυλότητας του δαχτυλιδιού-σώματος που την φιλοξενεί. Επίσης μη σύμμορφες επιφάνειες έχουμε και όταν μία κοίλη και μία κυρτή επιφάνεια έρθουν σε επαφή. Κλασικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας είναι η εμπλοκή των παρειών δύο δοντιών ενός ζεύγους οδοντωτών τροχών.

Ο **Heinrich Hertz** (1857-1894) ανέπτυξε μια θεωρία βάσει της οποίας μπορούμε να υπολογίζουμε το εμβαδόν της επιφάνειας επαφής μεταξύ δύο μη σύμμορφων επιφανειών που υπόκεινται σε φόρτιση η οποία προκαλεί και τοπική ελαστική παραμόρφωση. Η επιφάνεια επαφής μπορεί να έχει δύο πιθανά σχήματα, ανάλογα το είδος της μη σύμμορφης γεωμετρίας. Στις μη σύμμορφες επιφάνειες λοιπόν υφίστανται δύο είδη επαφής:

- 1. Σημειακή επαφή** έχουμε όταν π.χ. δύο σφαίρες έρθουν σε επαφή. Το σχήμα της επιφάνειας που θα δημιουργηθεί τότε (όταν δυο μη σύμμορφες επιφάνειες δημιουργούν μη σύμμορφη επαφή) θα είναι μια έλλειψη. Το σχήμα, δηλαδή η εκκεντρότητα της έλλειψης, καθορίζεται από τα επιμέρους γεωμετρικά στοιχεία των επιφανειών. Αν τα δύο υπο επαφή αντικείμενα λοιπόν είναι σφαίρες, η προκύπτουσα εκκεντρότητα είναι μηδενική οπότε έχουμε σχηματισμό κύκλου.
- 2. Γραμμική επαφή** έχουμε π.χ στην περίπτωση επαφής κυλίνδρου με το επίπεδο. Όταν οι μη σύμμορφες επιφάνειες δημιουργούν γραμμική επαφή, το σχήμα θα είναι ορθογώνιο. Η μια του πλευρά θα είναι ίση με την ελαστική διαπλάτυνση λόγω της φόρτισης (λόγω παραμορφωσιμότητας) και η άλλη του πλευρά θα είναι ίση με το πλάτος του κυλίνδρου ή γενικότερα των σωμάτων που έρχονται σε επαφή.

### 3.2 Συνάρτηση Mushkelishvili

Το πρόβλημα επαφής δύο κυλίνδρων μπορεί να λυθεί από την τασική συνάρτηση Mushkelishvili . Στην περίπτωση επαφής μεταξύ ενός κυλίνδρου,  $(\kappa_1, \mu_1)$  ακτίνας  $r$  και ενός κυλίνδρου,  $(\kappa_2, \mu_2)$  ακτίνας  $R$  εάν καταπονούνται ταυτόχρονα στο σημείο  $O$  από μια δύναμη  $P$ , θα υπάρξει μια τοπική παραμόρφωση κοντά στο σημείο επαφής προκαλώντας μια μικρή επιφάνεια, που ονομάζεται επιφάνεια επαφής.

Υποθέτοντας ότι οι ακτίνες  $r, R$  καμπυλότητας είναι ασύγκριτες σε διαστάσης απο την επιφάνεια επαφής, τότε η επιφάνεια επαφής υποτίθεται ότι είναι μια γραμμή μήκους  $2\lambda$ . Στην περίπτωση αυτή η τασική συνάρτηση Mushkelishvili είναι :

$$\Phi(z) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - z^2}}{2\pi K} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{f'(t)dt}{(t-z)\sqrt{\lambda^2 - t^2}} \quad (3.1)$$

όπου  $z$  είναι η σύνθετη μεταβλητή.  
Από την ισορροπία των δυνάμεων

$$\int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{tf'(t)dt}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}} = KP \quad (3.2)$$

Όπου

$$f(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) t^2 \quad (3.3)$$

που προέρχεται από την ισορροπία των παραμορφώσεων, και

$$K = \frac{\kappa_1 + 1}{4\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{4\mu_2} \quad (3.4)$$

και όπου  $\kappa_1$  και  $\kappa_2$  είναι οι ελαστικές σταθερές.



## 4- ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ ΛΟΞΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ ΣΦΗΝΑΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

### 4.1 Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία θα εφαρμόσουμε την πειραματική μέθοδο των καυστικών για την αξιολόγηση της συγκέντρωσης κατακόρυφης αλλά και λοξής δύναμης, στην κορυφή σφηνών διαφόρων γωνιών. Είναι δεδομένες οι παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών λόγω συγκέντρωσης της κατακόρυφης/πλάγιας δύναμης και δίνονται οι σχέσεις για τον υπολογισμό της δύναμης με βάση τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της καυστικής.

Τα προβλήματα επαφών και τα προβλήματα με σφήνα έχουν πολλές και σημαντικές πρακτικές εφαρμογές. Για την επίλυση αυτών των προβλημάτων, εκτός από μηχανική ανάλυση μπορεί επίσης να εφαρμοστεί η πειραματική μέθοδος των καυστικών. Οι Καυστικές έχουν εφαρμοστεί στη μελέτη ασυνήθιστων τασικών πεδίων που αναπτύσσονται κοντά σε ομοιόμορφα κατανεμημένα φορτία ή για τη μελέτη της κατανομής φορτίου σε ρουλεμάν και σε πολλαπλές επαφές των δοντιών εργαλείων.

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να δώσει τις παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών σε σφήνες από **ισοτροπα υλικά** για την περίπτωση συγκέντρωσης λοξής δύναμης στην κορυφή τους και τις σχέσεις υπολογισμού της συγκέντρωσης λοξής δύναμης στην κορυφή της σφήνας με βάση τη διάμετρο και τον εκτοπισμό σε άνοιγμα των καυστικών.

### 4.2 Συγκέντρωση πλάγιας δύναμης στην κορυφή της σφήνας

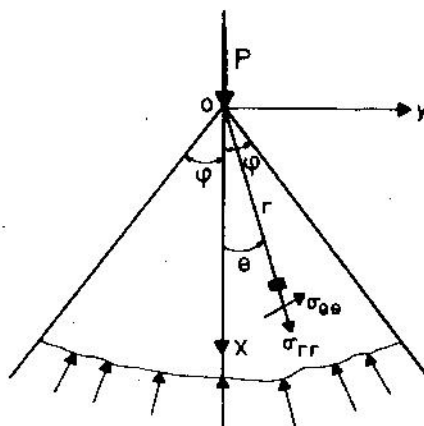
Συγκέντρωμένη λοξή δύναμη  $P$  εφαρμόζεται σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία  $\omega$  με τον άξονα της σφήνας. Έχοντας τις λύσεις για τις κάθετες και οριζόντιες συγκεντρωμένες δυνάμεις, η λύση για την λοξή δύναμη λαμβάνεται με υπέρθεση. Η ανάλυση της λοξής δύναμης  $P$  σε δύο συνιστώσες,  $P\cos\omega$  κάθετα και οριζόντια  $P\sin\omega$ , η ακτινική σε οποιοδήποτε σημείο της σφήνας προέρχεται από τη συνάρτηση καταπόνησης

$$\Phi = -\frac{P}{2} Ar\theta \sin\theta - \frac{P}{2} Br\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \quad (4.1)$$

Με

$$A = \frac{\cos\omega}{\phi + \frac{1}{2}\sin 2\phi}, \quad B = \frac{\sin\omega}{\phi - \frac{1}{2}\sin 2\phi} \quad (4.2)$$

όπου  $P$  είναι η συγκέντρωμένη δύναμη,  $\phi$  είναι η γωνία της σφήνας και  $r$ ,  $\theta$  είναι οι πολικές συντεταγμένες.



**Σχήμα 1. Γεωμετρία σφήνας γωνίας  $2\phi$**

1. Οι παράμετροι στο μπροστινό μέρος της σφήνας,  $\theta = +\phi, -\phi$ , για τη σφήνα ικανοποιούνται από τα στοιχεία της καταπόνησης τα οποία προέρχονται από την τασική συνάρτηση

$$\sigma_r = -PA \frac{\cos \theta}{r} + PB \frac{\sin \theta}{r} \quad (4.3)$$

$$\sigma_\theta = 0$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

Οι σταθερές  $k_1 = PA$  και  $k_2 = PB$  είναι οι παράμετροι συγκέντρωσης τάσεων. Με τη λήψη  $\phi = \pi / 2$  και  $\omega = 0$  η λύση για μια ημι-άπειρη πλάκα δόθηκε σύμφωνα με τη μέθοδο των καυστικών και μέθοδο της φωτοελαστικότητας. Για  $\omega = 0$  (κάθετη δύναμη) η τασική συνάρτηση και η ακτινική τάση γίνονται

$$\Phi = -\frac{P}{2(\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi)} r \theta \sin \theta \quad (4.4)$$

$$\sigma_r = -\frac{P}{\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi} \frac{\cos \theta}{r} \quad (4.5)$$

Και για  $\omega = \pi / 2$  (οριζόντια δύναμη) η τασική συνάρτηση και η ακτινική τάση

$$\Phi = -\frac{P}{2(\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi)} r \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \quad (4.6)$$

$$\sigma_r = +\frac{P}{\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi} \frac{\sin \theta}{r} \quad (4.7)$$

### 4.3 Εφαρμόζοντας τη Μέθοδο των Καυστικών.

Οι φωτεινές ακτίνες  $r_{1,2}$  οι οποίες ανακλώνται στην πίσω επιφάνεια της πλάκας σχηματίζουν κυματικά μέτωπα :

$$S(x, y, z) = \text{σταθ}. \quad (4.8)$$

Εάν  $s(x, y)$  εκφράζει την οπτική πορεία της αντιστοίχου φωτεινής ακτίνας μεταξύ δύο επιπέδων παραλλήλων προς το μέσο επίπεδο της φορτιζόμενης πλάκας και κειμένων επί των παραπλεύρων επιφανειών της πλάκας, τότε ισχύει η σχέση :

$$S(x, y, z) = z - s(x, y) = \text{σταθ}. \quad (4.9)$$

και απ' αυτή προκύπτει ότι :

$$\text{grad}S(x, y, z) = k - \frac{\partial s}{\partial x} i - \frac{\partial s}{\partial y} j \quad (4.10)$$

όπου  $i, j, k$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα του τρισσορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων  $Oxyz$ .

Η απόκλιση των ανακλώμενων φωτεινών ακτινών σε απόσταση  $z_0$  από του μέσου επιπέδου της πλάκας εκφράζεται με το διάνυσμα  $w$  επί του επιπέδου  $z=z_0$  και δίνεται, σύμφωνα με τη θεωρία της Εικονικής, από τη σχέση :

$$w_{r,t,f} = - \frac{\varepsilon z_0 d c_{r,t,f}}{\lambda_m} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (4.11)$$

Όπου  $d$  είναι το πάχος του δοκιμίου,  $C_r, t, f$  είναι τασεοπτική σταθερά και  $\lambda_m$  είναι ο λόγος μεγέθυνσης που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda_m = \frac{z_o + z_i}{z_i} \quad (4.12)$$

Όπου  $Z_o$  είναι η απόσταση μεταξύ πετάσματος αναφοράς και δοκιμίου και  $Z_i$  είναι η απόσταση μεταξύ του δοκιμίου και του φωτος εστίασης δέσμης. Το άθροισμα των τάσεων  $\sigma_1 + \sigma_2$  δίνεται από

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_r + \sigma_\theta = -PA \frac{\cos \theta}{r} - PB \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)}{r} \quad (4.13)$$

Οπότε το διάνυσμα της απόκλισης γράφεται:

$$w_{r,t,f} = C_{r,t,f} \text{grad}_{(x,y)} [A \frac{1}{r} \cos \theta + B \frac{1}{r} \cos(\frac{\pi}{2} + \theta)] = C_{r,t,f} \{A \frac{1}{r^2} [\cos 2\theta + \sin 2\theta] + B \frac{1}{r^2} [\cos 2(\frac{\pi}{2} + \theta) + \sin 2(\frac{\pi}{2} + \theta)]\} \quad (4.14)$$

$$\text{Όπου} \quad C_{r,t,f} = -\frac{\varepsilon_z dc_{r,t,f}}{\lambda_m} P \quad (4.15)$$

Με  $\varepsilon = 2$  για το ανακλώμενο φως από την πίσω (r) όψη του δοκιμίου και  $\varepsilon = 1$  για το ανακλώμενο φως από μπροστα (f) ή το διερχόμενο (t) μέσω του δοκιμίου. Οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής είναι

$$W_{r,t,f} = r + w_{r,t,f} = r \cos \theta + ir \sin \theta + w_{r,t,f} \quad (4.16)$$

Ή

$$X_{r,t,f} = r \cos \theta \pm C_{r,t,f} r^{-2} [A \cos 2\theta - B \cos 2\theta] \quad (4.17)$$

$$Y_{r,t,f} = r \sin \theta \pm C_{r,t,f} r^{-2} [A \sin 2\theta + B \sin 2\theta]$$

Όπου  $r$  είναι η ακτίνα της αρχικής καμπύλης των καυστικών και  $\theta$  παίρνει τιμές στην περιοχή  $-\varphi < \theta < +\varphi$ . Το σύμβολο (+) αντιστοιχεί στα καυστικά (r) και (t) (καυστικά που σχηματίζονται από την ανάκλαση του φωτός από την πίσω όψη (r) της πλάκας ή τις μεταδιδόμενες (t) ακτίνες φωτός μέσα από την πλάκα) και το (-) αντιστοιχεί στις καυστικές (f) (καυστικές που σχηματίζονται από το ανακλώμενο φως από την μπροστινή όψη (f) της πλάκας). Η αρχική καμπύλη  $r$  της καυστικής καθορίζεται από τον μηδενισμό της Ιακωβιανής  $J$  διακρίνουσας:

$$J = \frac{\partial(X_t, Y_t)}{\partial(r, \theta)} = 0 \quad (4.18)$$

Έτσι η αρχική καμπύλη γίνεται:

$$r_0 = r = (2C_{r,t,f} \sqrt{A^2 + B^2})^{\frac{1}{3}} \quad (4.19)$$

Οπότε και προκύπτουν οι τελικές παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών που θα αξιολογήσουμε με το πείραμα στην παρούσα εργασία.

$$X_{r,t,f} = \lambda_m (2C_{r,t,f} \sqrt{A^2 + B^2})^{\frac{1}{3}} \left[ \cos \theta \pm \frac{1}{2\sqrt{A^2 + B^2}} (A \cos 2\theta - B \sin 2\theta) \right]$$

(4.20)

$$Y_{r,t,f} = \lambda_m (2C_{r,t,f} \sqrt{A^2 + B^2})^{\frac{1}{3}} \left[ \sin \theta \pm \frac{1}{2\sqrt{A^2 + B^2}} (A \sin 2\theta + B \cos 2\theta) \right]$$

Οι διάφορες τιμές των παραμέτρων A, B καθώς και οι γωνίες που μελετήθηκαν φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

$\Omega$ (°)	$\omega$ (rad)	$\varphi$ (°)		$\varphi$ (rad)	$\sin(\omega)$	$\cos(\omega)$	A	B	$\frac{1}{2 * \sqrt{A^2 + B^2}}$
0,000	0,000	$\pi/6$	30	0,524	0,000	1,000	0,033	0,000	15,217
		$\pi/4$	45	0,785			0,022	0,000	22,750
		$\pi/3$	60	1,047			0,017	0,000	30,217
		$\pi/2$	90	1,571			0,011	0,000	45,000
		$2\pi/3$	120	2,094			0,008	0,000	59,783
45,000	0,785	$\pi/6$	30	0,524	0,707	0,707	0,023	0,024	14,995
		$\pi/4$	45	0,785			0,016	0,016	22,496
		$\pi/3$	60	1,047			0,012	0,012	29,998
		$\pi/2$	90	1,571			0,008	0,008	45,000
		$2\pi/3$	120	2,094			0,006	0,006	59,999
60,000	1,047	$\pi/6$	30	0,524	0,866	0,500	0,016	0,029	14,888
		$\pi/4$	45	0,785			0,011	0,019	22,372
		$\pi/3$	60	1,047			0,008	0,015	29,890
		$\pi/2$	90	1,571			0,006	0,010	45,000
		$2\pi/3$	120	2,094			0,004	0,007	60,107
90,000	1,571	$\pi/6$	30	0,524	1,000	0,000	0,000	0,034	14,783
		$\pi/4$	45	0,785			0,000	0,022	22,250
		$\pi/3$	60	1,047			0,000	0,017	29,783
		$\pi/2$	90	1,571			0,000	0,011	45,000
		$2\pi/3$	120	2,094			0,000	0,008	60,217

Οπότε η θεωρητική μορφή των εξισώσεων με τις σταθερές όπως προκύπτουν απο τον παραπάνω πίνακα διατυπωμένες σε εντολές MATLAB φαίνονται παρακάτω

```
r=(-pi/4:pi/1000:pi/4);  
  
x1=5*cos(r)+2.5*cos(2*r);  
y1=5*sin(r)+2.5*sin(2*r);  
x2=5*[(1.7)^(1/3)]*cos(r)-3*cos(2*r);  
y2=5*[(1.7)^(1/3)]*sin(r)-3*sin(2*r);  
  
x=(-0:0.01:0);  
p=tan(90*pi/180)*x;  
  
plot(y1,-1*x1,y2,-1*x2,x,p)
```

1. κώδικας υπολογισμού εξίσωσης καυστικής κατακόρυφου φορτίου σε σφήνα 45 μοιρών

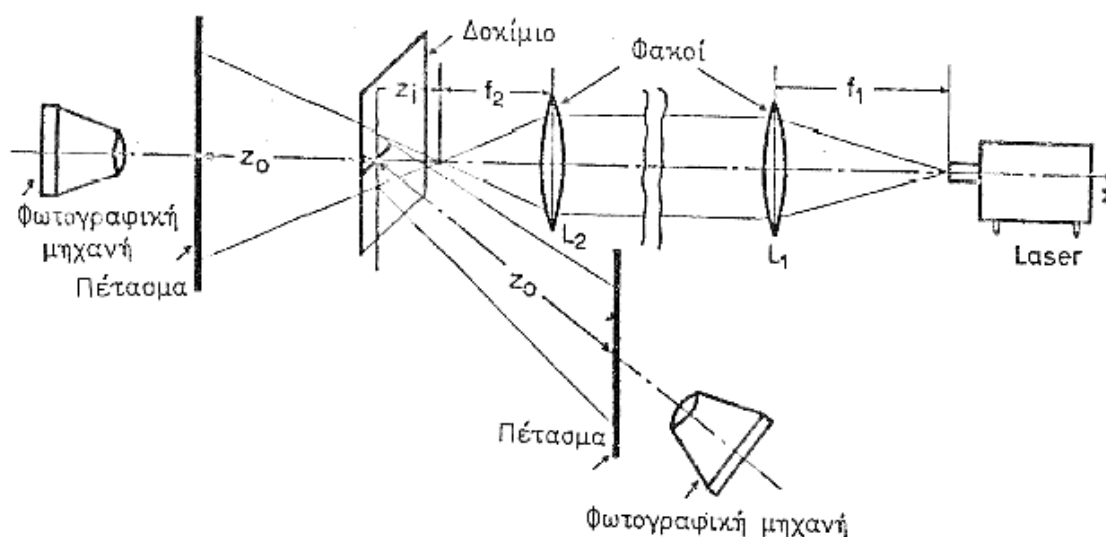
```
r=(-pi/2:pi/1000:pi/2);  
  
x1=5*(cos(r)+45*((0.0079*cos(2*r)-0.0079*sin(2*r))));  
y1=5*(sin(r)+45*((0.0079*sin(2*r)+0.0079*cos(2*r))));  
x2=5*[(1.7)^(1/3)]*(cos(r)-45*((0.0079*cos(2*r)-0.0079*sin(2*r))));  
y2=5*[(1.7)^(1/3)]*(sin(r)-45*((0.0079*sin(2*r)+0.0079*cos(2*r))));  
x=(-2:0.01:0);  
p=tan(135*pi/180)*x;  
  
plot(y1,-1*x1,y2,-1*x2,x,p)
```

2. κώδικας υπολογισμού εξίσωσης καυστικής λοξού φορτίου κατα 45 μοίρες σε σφήνα 90 μοιρών

## 5- ΠΕΙΡΑΜΑ

### 5.1 Γενικά:

Στο πείραμά μας χρησιμοποιήσαμε δοκίμιο από Plexiglas, υλικό που έχει παρόμοια συμπεριφορά με αυτή του σκυροδέματος. Το πάχος του δοκιμίου επιδιώκεται να είναι το πολύ 4 mm προκειμένου να επιτευχθεί επίπεδη εντατική κατάσταση. Όσο πιο λεπτό είναι το δοκίμιο τόσο ακριβέστερα και ορθότερα θα είναι τα αποτελέσματα που θα προκύψουν. Η διεξαγωγή του πειράματος έγινε στο εργαστήριο του τομέα Μηχανικής στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο και η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε περιγράφεται στη συνέχεια :



### Πειραματική διάταξη Καυστικών

Στη συνέχεια γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των ιδιοτήτων του plexiglass. Το plexiglass (PMMA) το οποίο θεωρείται πολυμερές θερμοπλαστικό υλικό, σχηματίζεται στους 240-250 °C. Παράγεται με όλες τις συνήθεις μεθόδους χύτευσης όπως για παράδειγμα χύτευση έγχυσης (injection) κ.α. Η πυκνότητα του είναι 1,150-1,190 kg/m<sup>3</sup>. Η τιμή αυτή είναι μικρότερη από το μισό της πυκνότητας του γυαλίου και αντίστοιχη με άλλων πλαστικών. Επίσης έχει πολύ μεγαλύτερη αντοχή σε σχέση με το γυαλί. Είναι όμως σημαντικά μικρότερη σε σχέση με άλλα βιομηχανικά πλαστικά. Το υλικό αυτό επιτρέπει την διεισδυση του ορατού φωτός έως και 98% (ανα μέτρο). Αντανακλά περίπου το 4% από κάθε επιφάνεια του με συντελεστή διάθλασης 1,4893-1,4899. Τέλος έχει πολύ καλές ιδιότητες σε ανοιχτό περιβάλλον σε σχέση με άλλα πλαστικά.



Στον επόμενο πίνακα φαίνονται συγκεντρωτικά κάποιες ιδιότητες του plexiglass:

Plexiglass – Acrylic glass (PMMA)	
Μονομερές	$(C_5O_2H_8)_n$
Πυκνότητα	1.19 g/cm <sup>3</sup>
Σημείο τήξης	130–140 °C
Σημείο βρασμού	200.0 °C

## 5.2 Πειραματική Διάταξη:

Η διάταξη που χρησιμοποιήσαμε για την διεξαγωγή του πειράματος των *Καυστικών* φαίνεται στο παραπάνω σχήμα και αποτελείται από τα εξής :

1. Laser τύπου He-Ne, το οποίο χρησιμοποιήθηκε σαν φωτεινή πηγή.
2. Δύο ειδικοί φακοί εστιακής απόστασης  $f=1m$  για τη δημιουργία συγκλίνουσας ή αποκλίνουσας φωτεινής δέσμης.
3. Ένα πέτασμα αναφοράς πάνω στο οποίο προβάλλονται οι σχηματιζόμενες καυστικές.
4. Μια φωτογραφική μηχανή για την φωτογράφιση των καυστικών.

Για τις καυστικές το πέτασμα αναφοράς τοποθετείται σε απόσταση  $z_o$  μπροστά απ' το δοκίμιο. Στην περίπτωση του πειράματός μας η συγκεκριμένη απόσταση αλλάζει κάποιες φορές και γι αυτό θα αναφέρεται πριν από κάθε μέτρηση. Η εστία της φωτεινής δέσμης είναι μπροστά απ' το δοκίμιο και σε απόσταση  $z_i$  από αυτό. Η συγκεκριμένη απόσταση είναι  $z_i=30$  cm. Ένα άλλο μέγεθος που πρέπει να ορισθεί είναι ο συντελεστής μεγέθυνσης  $\lambda_m$ , ο οποίος προσδιορίζεται ως εξής :

$$\lambda_m = \frac{z_o + z_i}{z_i}$$

Η πειραματική διάταξη στο εργαστήριο ήταν σχεδόν έτοιμη και εμείς απλά τοποθετήσαμε τα υλικά-εργαλεία μας στις σωστές θέσεις και με τις κατάλληλες αποστάσεις. Στη συνέχεια συγκεντρώσαμε τις διαθέσιμες σφήνες/δοκίμια για τις οποίες θα παρατηρούσαμε τις καυστικές. Αυτές είχαν τις εξής γωνίες:

1.  $\Phi=90$  μοίρες
2.  $\Phi=45$  μοίρες
3.  $\Phi=120$  μοίρες
4.  $\Phi=135$  μοίρες

Τις τοποθετήσαμε λοιπόν στην κατάλληλη χειροκίνητη πρέσσα για την επιβολή φορτίου. Τοποθετήσαμε το πέτασμα σε σωστή θέση και ακριβώς απο πίσω την φωτογραφική μηχανή για την αποτύπωση των καυστικών φροντίζοντας να μην υπάρχει καθόλου φώς-εκτος της φωτεινής δέσμης laser-στο χώρο. Ξεκινήσαμε λοιπόν να καταπονούμε το δοκίμιο αυξάνοντας κάθε φορά χειροκίνητα το φορτίο και τραβούσαμε φωτογραφίες. Προσοχή χρειαζόταν όσο αυξάναμε το φορτίο ώστε να μην προκύψει λυγισμός αλλά καθαρή **θλίψη**. Στις πρώτες τρεις σφήνες εφαρμόσαμε κατακόρυφο φορτίο ενώ στην τέταρτη πλάγιο.

Επάνω στο πέτασμα υπάρχει σχεδιασμένος ο αποκαλούμενος 'μάρτυρας' που είναι το μαύρο ευθύγραμμο τμήμα απο μαρκαδόρο που φαίνεται στις φωτογραφίες κοντά στις καυστικές. Τον συμπεριλάβαμε στις φωτογραφίες είναι οτι σκοπός του είναι να μας δείξει την αναλογία-κλίμακα των φωτογραφιών εκτυπωμένων στο χαρτί σε σχέση με τις πραγματικές ώστε να μετρήσουμε ακριβώς το μέγεθος τους. Γνωρίζοντας λοιπόν οτι ο 'μάρτυρας' είναι 2cm στο πέτασμα θα τον μετρήσουμε στη φωτογραφία και η αναλογία

$$t = \frac{S_{\text{πραγματικό}}}{S_{\text{μετρούμενο}}} = \frac{2}{S_{\text{μετρούμενο}}}$$

δίνει κάθε φορά τα πραγματικά μεγέθη της καυστικής. Δηλαδή η πραγματική διάμετρος θα προκύπτει απο την μετρούμενη επι τον συντελεστή t.

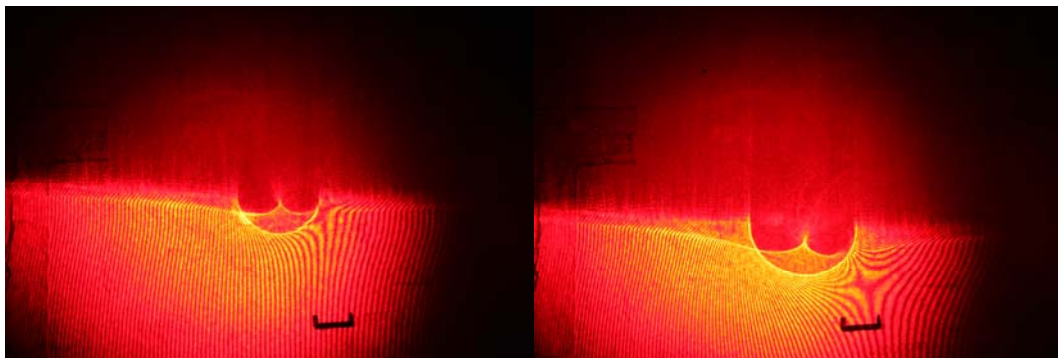
$$D_{\text{πραγμ.}} = D_{\text{μετρούμενο}} \cdot t$$

### 5.3 Διεξαγωγή πειράματος:

Ξεκινήσαμε το πείραμα μας με μια οριζόντια πλάκα απο Plexiglas δηλαδή θεωρώντας σφήνα με  $\varphi=\pi/2$  και για καταπόνηση σε οριζόντιο φορτίο δηλαδή  $\omega=0$  μοίρες. Τα χαρακτηριστικά του δοκιμίου (πλάκας) καθώς και οι αποστάσεις  $Z_0$  και  $Z_i$  φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

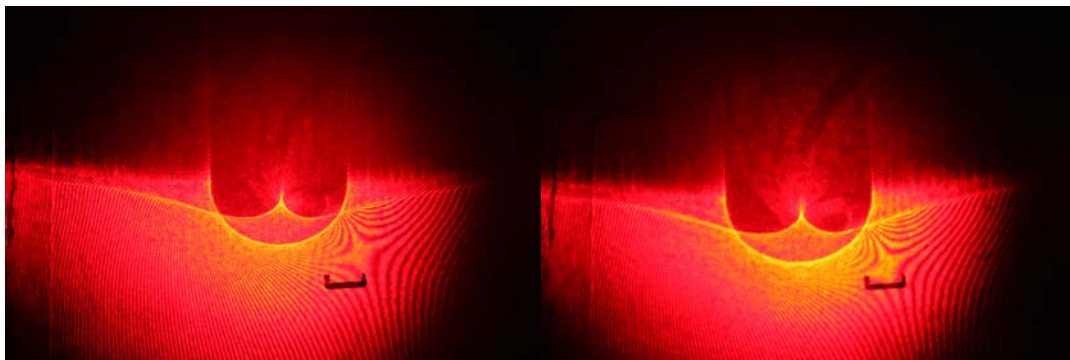
Πάχος δοκιμίου	4 mm	$\lambda_m$	6.97
$Z_0$	179 cm		
$Z_i$	30 cm		
Cf	1.7E-10 m <sup>2</sup> /N		

Οι φωτογραφίες που τραβήχτηκαν, στις οποίες φαίνεται η κάθε φορά αύξηση του φορτίου απο την αύξηση του μεγέθους της καυστικής είναι οι εξής:



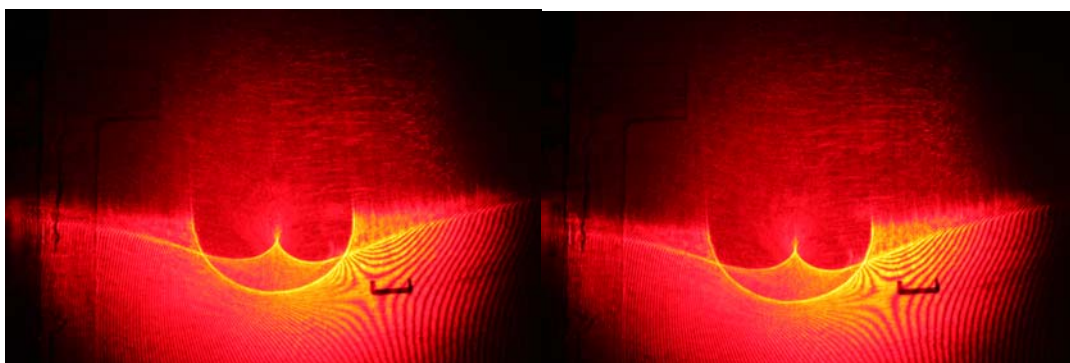
(1)

(2)



(3)

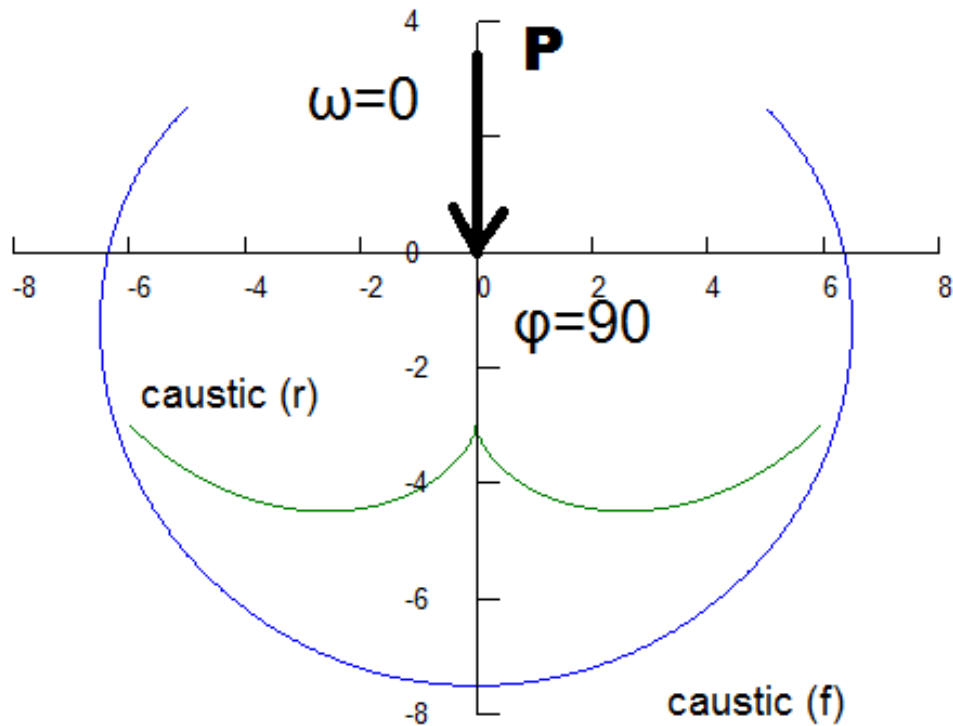
(4)



(5)

(6)

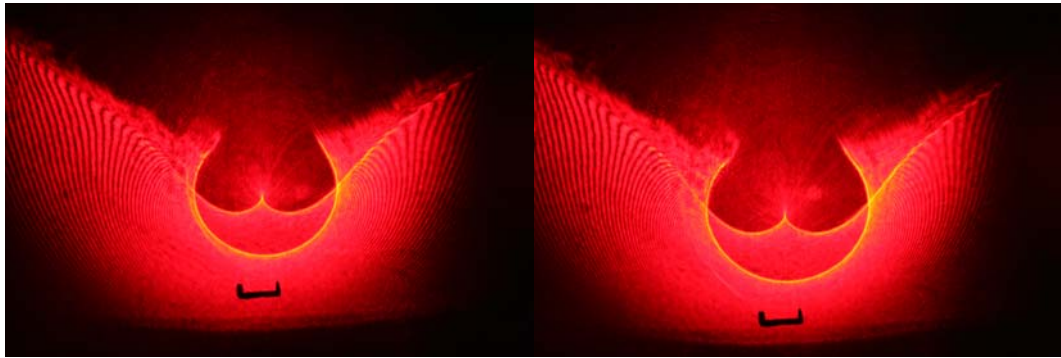
Παρακάτω παρουσιάζεται η μορφή των καυστικών όπως προκύπτουν από τις θεωρητικές εξισώσεις του προγράμματος της matlab για να τις συσχετίσουμε.



Στη συνέχεια αλλάξαμε σφήνα και πάλι για  $\omega=0$  μοίρες καταπονήσαμε σφήνα με γωνία  $\phi=120$  μοίρες. Τα χαρακτηριστικά του δοκιμίου (πλάκας) καθώς και οι αποστάσεις  $Z_0$  και  $Z_i$  φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

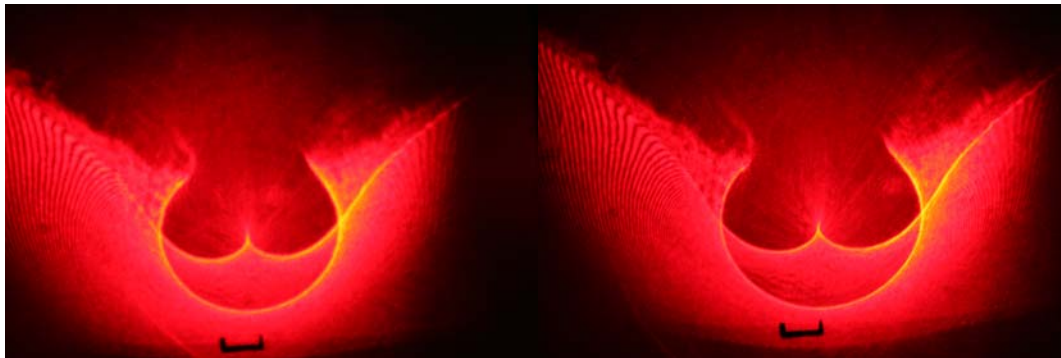
Πάχος δοκιμίου	4 mm	$\lambda_m$	6.97
$Z_0$	179 cm		
$Z_i$	30 cm		
$C_f$	1.7E-10 m <sup>2</sup> /N		

Οι φωτογραφίες που τραβήχτηκαν είναι οι εξής:



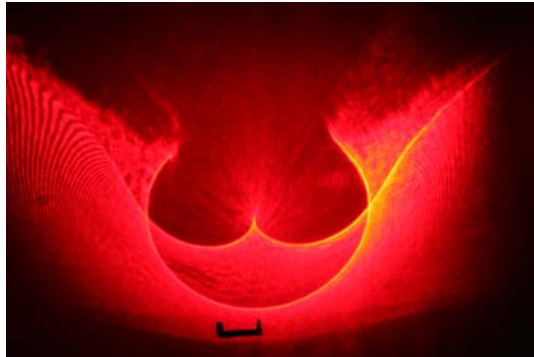
(1)

(2)

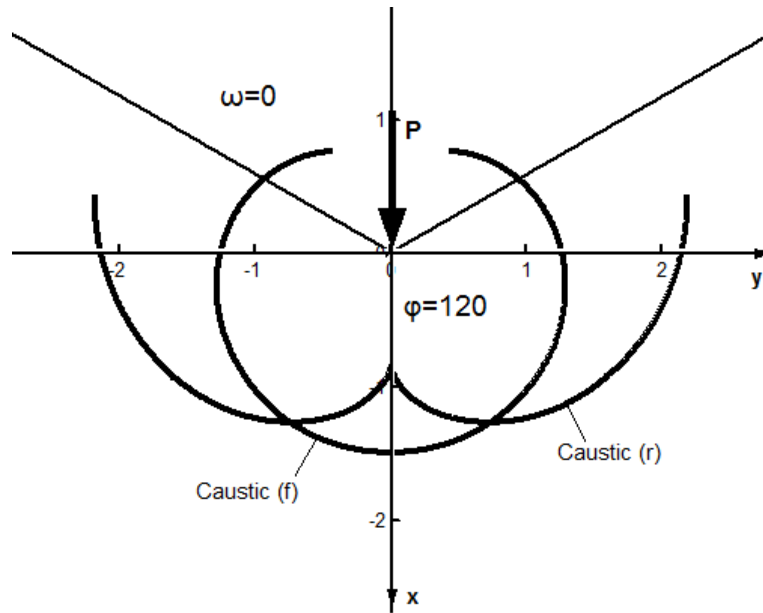


(3)

(4)



(5)



Στη συνέχεια αλλάξαμε σφήνα και πάλι για  $\omega=0$  μοίρες καταπονήσαμε σφήνα με γωνία  $\phi=45$  μοίρες. Τα χαρακτηριστικά του δοκιμίου (πλάκας) καθώς και οι αποστάσεις  $Z_0$  και  $Z_i$  φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

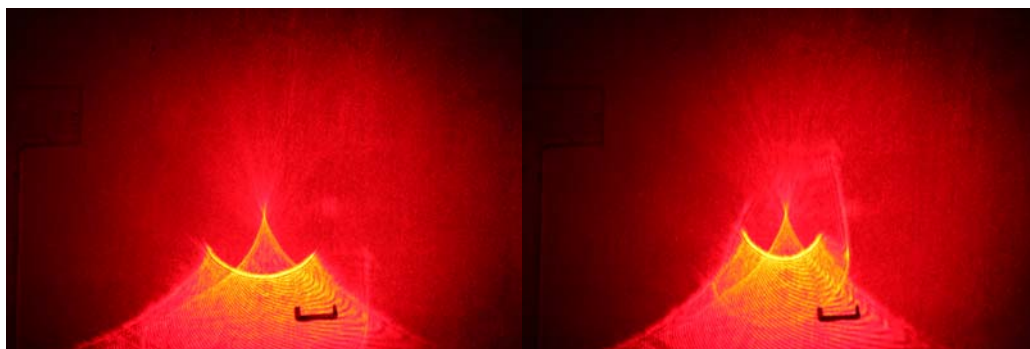
<b>Πάχος δοκιμίου</b>	<b>3 mm</b>	$\lambda_m$	<b>6.97</b>
<b><math>Z_0</math></b>	<b>179 cm</b>		
<b><math>Z_i</math></b>	<b>30 cm</b>		
<b><math>C_f</math></b>	<b><math>1.7E-10 \text{ m}^2/\text{N}</math></b>		

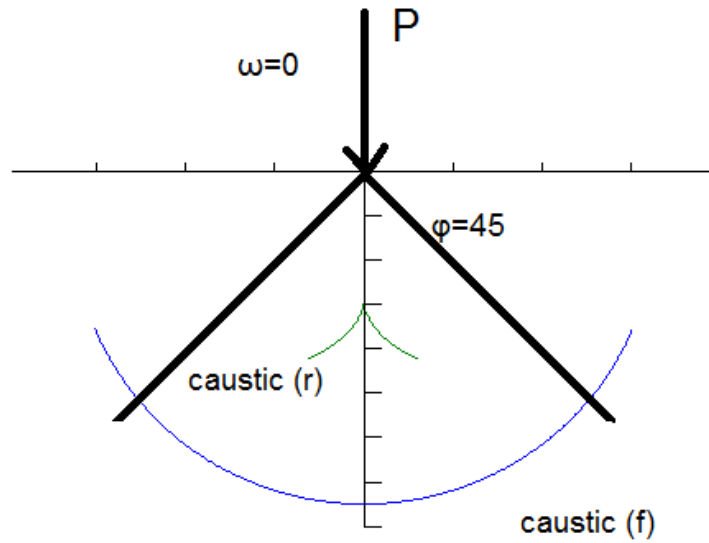
Οι φωτογραφίες που τραβήχτηκαν είναι οι εξής:



(1)

(2)

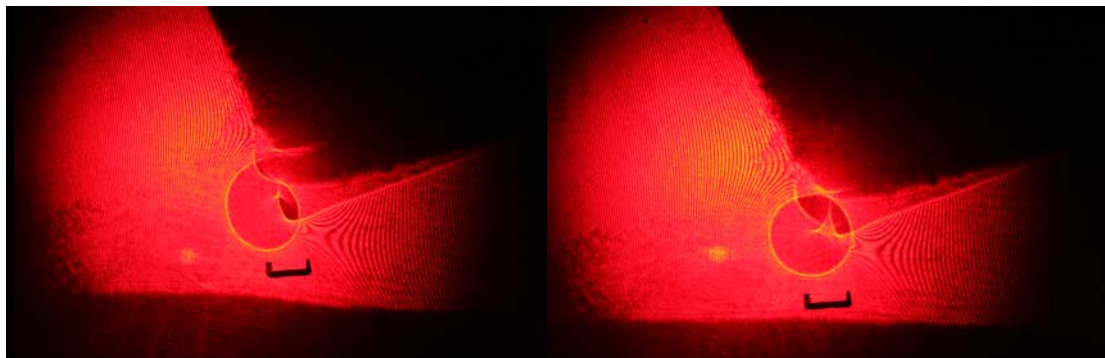




Στη συνέχεια αλλάξαμε σφήνα και πραγματοποιήσαμε το πείραμα με πλάγιο φορτίο και για  $\omega=25$  μοίρες καταπονήσαμε σφήνα με γωνία  $\phi=135$  μοίρες. Τα χαρακτηριστικά του δοκιμίου (πλάκας) καθώς και οι αποστάσεις  $Z_0$  και  $Z_i$  φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

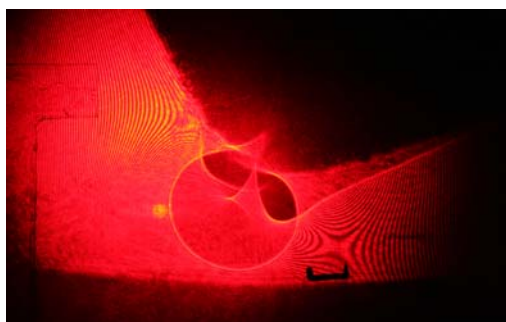
Πάχος δοκιμίου	3 mm	$\lambda_m$	6,87
$Z_0$	176 cm		
$Z_i$	30 cm		
$C_f$	1.7E-10 m <sup>2</sup> /N		

Οι φωτογραφίες που τραβήχτηκαν είναι οι εξής:



(1)

(2)



(3)

## 6- ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ-ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΕΝΤΑΣΕΩΣ

### 6.1 Υπολογισμός του φορτίου και του Συντελεστή Εντάσεως $K_w$ για κατακόρυφο φορτίο $\omega=0$

Στο οριζόντιο επίπεδο και σε απόσταση  $x_0$  από την κορυφή της σφήνας, οι συνιστώσες των τάσεων σε τυχαίο σημείο M υπολογίζονται από την πολική συνιστώσα τάσης  $\sigma_{rr}$  :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{rr} \cos^2 \theta = -\frac{P}{\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi} \frac{\cos^3 \theta}{r} = -\frac{P}{\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi} \frac{\cos^4 \theta}{x_0}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{rr} \sin^2 \theta = -\frac{P}{\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{r} = -\frac{P}{\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi} \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{x_0} \quad (6.1)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_{rr} \sin \theta \cos \theta = -\frac{P}{\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{r} = -\frac{P}{\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi} \frac{\cos^3 \theta \sin \theta}{x_0}$$

$$\text{Όπου } r = \frac{x_0}{\cos \theta} \quad (6.2)$$

Αν όμως συμπεριλάβουμε στις παραπάνω σχέσεις τις εξισώσεις των καυστικών προκύπτει ο υπολογισμός των συνιστωσών των τάσεων από την διάμετρο και το εκτόπισμα της καυστικής :

$$\sigma_{xx} = -0.0285 \frac{D_{\max}^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f} \frac{\cos^4 \theta}{x_0} \Big|_{\phi \geq 60^\circ} = -\frac{L^3}{16 z_0 d \lambda_m^2 c_f [\sin \phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi]^3} \frac{\cos^4 \theta}{x_0} \Big|_{\forall \phi} \quad (6.3)$$

$$\sigma_{yy} = -0.0285 \frac{D_{\max}^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f} \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{x_0} \Big|_{\phi \geq 60^\circ} = -\frac{L^3}{16 z_0 d \lambda_m^2 c_f [\sin \phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi]^3} \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{x_0} \Big|_{\forall \phi}$$

$$\tau_{xy} = -0.0285 \frac{D_{\max}^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f} \frac{\cos^3 \theta \sin \theta}{x_0} \Big|_{\phi \geq 60^\circ} = -\frac{L^3}{16 z_0 d \lambda_m^2 c_f [\sin \phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi]^3} \frac{\cos^3 \theta \sin \theta}{x_0} \Big|_{\forall \phi}$$



Στο οριζόντιο επίπεδο, για απόσταση από την κορυφή της σφήνας όση η ακτίνα της αρχικής καμπύλης της καυστικής :

$$x_0 = r_0 = \frac{D_{\max}^3}{2.598\lambda_m} \Big|_{\phi \geq 60^\circ} = \frac{L}{2[\sin \phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi]\lambda_m} \Big|_{\forall \phi} \quad (6.4)$$

Οι συνιστώσες των τάσεων γράφονται:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -0.074 \frac{D_{\max}^2}{z_0 d \lambda_m c_f} \cos^4 \theta \Big|_{\phi \geq 60^\circ} = - \frac{L^2}{8z_0 d \lambda_m c_f [\sin \phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi]^2} \cos^4 \theta \Big|_{\forall \phi} \quad (6.5) \\ \sigma_{yy} &= -0.074 \frac{D_{\max}^2}{z_0 d \lambda_m c_f} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \Big|_{\phi \geq 60^\circ} = - \frac{L^2}{8z_0 d \lambda_m c_f [\sin \phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi]^2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \Big|_{\forall \phi} \\ \tau_{xy} &= -0.074 \frac{D_{\max}^2}{z_0 d \lambda_m c_f} \cos^3 \theta \sin \theta \Big|_{\phi \geq 60^\circ} = - \frac{L^2}{8z_0 d \lambda_m c_f [\sin \phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi]^2} \cos^3 \theta \sin \theta \Big|_{\forall \phi} \end{aligned}$$

Για τιμές της γωνίας  $\theta$  από  $-\phi$  έως  $+\phi$ .

Τελικά προκύπτει ο υπολογισμός του κατακόρυφου συγκεντρωμένου φορτίου βάσει των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της καυστικής από τη σχέση:

$$P = \frac{0.0285 \left( \phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi \right) D_{\max}^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_{r,t,f}} \quad (6.6)$$

Οι εξισώσεις των τάσεων που γράψαμε παραπάνω γίνονται:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -K_w \frac{\cos^3 \theta}{r} \\ \sigma_{yy} &= -K_w \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{r} \\ \tau_{xy} &= -K_w \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{r} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Όπου  $K_w$  είναι ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων για σφήνα γωνίας  $2\phi$ . Αυτός δίνεται από τη σχέση:

$$K_w^{th} = \frac{P}{\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi} \quad (6.8)$$

Ο συντελεστής  $K_w$  μπορεί να υπολογιστεί πειραματικά από τις καυστικές σύμφωνα με τη σχέση:

$$K_w^{ex} = 0.0285 \frac{D_{max}^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f} \Big|_{\phi \geq 60^\circ} = \frac{L^3}{16 z_0 d \lambda_m^2 c_f [\sin \phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi]^3} \Big|_{\forall \phi} \quad (6.9)$$

Έτσι μπορούμε από τις δύο παραπάνω σχέσεις να υπολογίσουμε την θεωρητική τιμή  $K_w^{th}$  του συντελεστή εντάσεως τάσεων και την πειραματική  $K_w^{ex}$  τιμή του και να τις συγκρίνουμε. Ο συντελεστής αυτός εξαρτάται από τη γωνία της σφήνας και τις ιδιότητες του υλικού. Από τη σχέση :

$$f = \frac{K_w^{ex}}{K_w^{th}} \quad (6.10)$$

Μπορούμε να προσδιορίσουμε έναν συντελεστή διόρθωσης  $f$  από τον οποίο θα προσδιορίσουμε την θεωρητική τιμή του  $K_w$  πειραματικά με δεδομένα τις διαστάσεις της σφήνας και τις ιδιότητες του υλικού της.

Για μετρήσεις του ανοίγματος και της διαμέτρου της καυστικής που σε κάποιες περιπτώσεις θεωρήθηκαν τα ίδια, οι φωτογραφίες που χρησιμοποιήθηκαν ήταν αυτές που είναι στο παράρτημα (Α4) οι οποίες είναι πιο ευανάγνωστες. Σε αυτές λοιπόν ο αποκαλούμενος 'μάρτυρας' είναι ίσος με 2cm πράγμα που σημαίνει ότι ο συντελεστής  $t=1$  και επομένως ισχύει

$$D_{πραγμ.} = D_{μετρομενο}$$

Με γνωστή τη σχέση υπολογισμού του φορτίου από τις γεωμετρικές παραμέτρους της καυστικής προκύπτουν οι παρακάτω υπολογισμοί, για τους οποίους χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές που λήφθηκαν από την πραγματοποίηση του πειράματος δηλαδή οι παρακάτω:

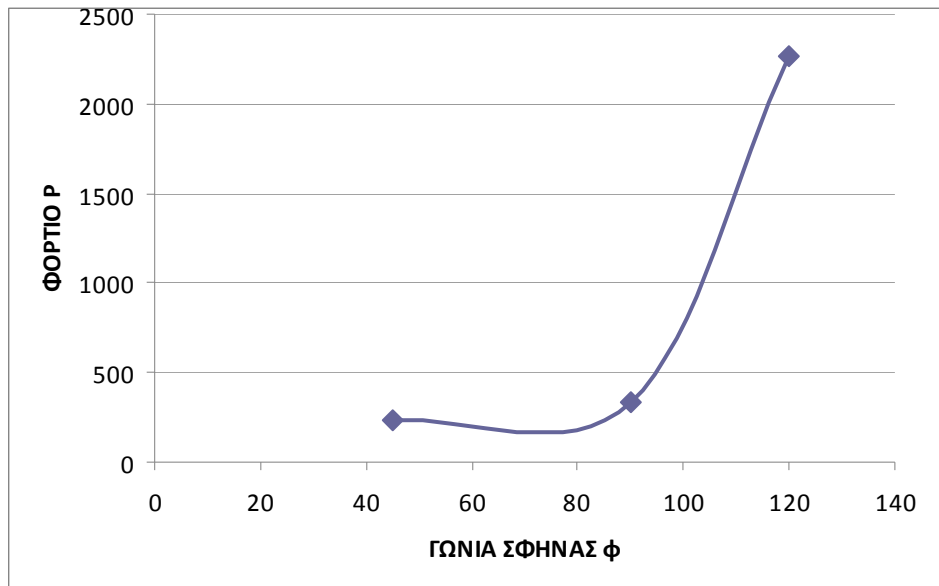
$z_0$	[m]	1,79	1,76
$d$	[m]	0,004	0,003
$\lambda_m^2$	-	48,5809	47,1969
$c_f$	[m <sup>2</sup> /N]	1,7E-10	

$\omega$ (°)	$\omega$ (rad)	$\varphi$ (°)		$\sin(\omega)$	$\cos(\omega)$	A	B	$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	$\pi/6$	<b>30,00</b>	<b>0,00</b>	1,00	0,03	0,00	30,43
		$\pi/4$	<b>45,00</b>			0,02	0,00	45,50
		$\pi/2$	<b>90,00</b>			0,01	0,00	90,00
		-	<b>135,00</b>			0,01	0,00	134,50
<b>25,00</b>	<b>0,44</b>	$\pi/6$	<b>30,00</b>	<b>0,43</b>	0,90	0,03	0,01	30,27
		$\pi/4$	<b>45,00</b>			0,02	0,01	45,32
		$\pi/3$	<b>60,00</b>			0,01	0,01	60,28
		$\pi/2$	<b>90,00</b>			0,01	0,00	90,00
		-	<b>135,00</b>			0,01	0,00	134,68

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι υπολογισμοί του κατακόρυφου φορτίου για τις 3 πρώτες σφήνες των 90, 120 και 45 μοιρών. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι ο τύπος θεωρητικού υπολογισμού δίνει το φορτίο ανα μέτρο και επειδή θεωρούμε την σφήνα σαν μονάδα πολλαπλασιασμένο το φορτίο με το πάχος της σφήνας δίνει τελικό αποτέλεσμα.

<b>sin2φ</b>	0	<b>P [N]</b>	-0,87	<b>P [N]</b>	1	<b>P [N]</b>
<b>cosφ</b>	0,00		-0,5		0,7	
<b>φ [μοίρες]</b>	90		120		45	
<b>D<sub>max</sub></b>	0,048	334,73	0,083	4712,46	0,045	236,33
	0,062	721,36	0,094	6845,37	0,047	269,26
	0,08	1549,70	0,1	8241,64	0,054	408,37
	0,085	1858,80	0,115	12534,50	0,064	679,85
	0,093	2434,59	0,126	16486,37	-	-
	0,094	2513,97	-	-	-	-
<b>L [m]</b>	0,048	334,73	0,065	2263,36	0,045	236,33
	0,062	721,36	0,07	2826,88	0,047	269,26
	0,08	1549,70	0,075	3476,94	0,054	408,37
	0,085	1858,80	0,086	5242,14	0,064	679,85
	0,093	2434,59	0,095	7066,17	-	-
	0,094	2513,97	-	-	-	-

Παρακάτω φαίνεται η καμπύλη της μεταβολής του φορτίου –κατακόρυφος άξονας- συναρτήσει της αύξησης της γωνίας φ-οριζόντιος άξονας.



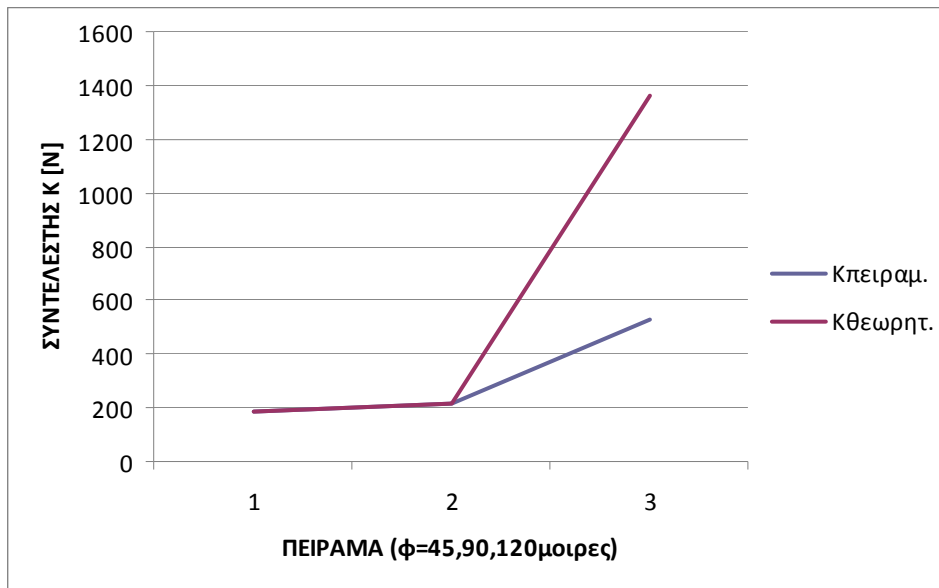
Ενώ ο θεωρητικός και πειραματικός υπολογισμός του συντελεστή εντάσεως των τάσεων σύμφωνα με τους τύπους που αναφέρθηκαν προηγουμένως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα **εκφρασμένος σε Newton [N]**:

$$K_w^{th} = \frac{P}{\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi}$$

$$K_w^{ex} = 0.0285 \frac{D_{max}^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f} \Big|_{\phi \geq 60^\circ} = \frac{L^3}{16 z_0 d \lambda_m^2 c_f [\sin \phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi]^3} \Big|_{\forall \phi}$$

[Newton]
[Newton]
[Newton]

$\sin 2\varphi$	0	$K_w^{ex}$	$K_w^{th}$	-0,87	$K_w^{ex}$	$K_w^{th}$	1	$K_w^{ex}$	$K_w^{th}$
$\cos \varphi$	0,00			-0,5			0,7		
$\varphi$	90			120			45		
$D_{max}$	0,048	213,21	213,21	0,083	1102,33	2847,41	0,045	183,91	183,91
	0,062	459,46	459,46	0,094	1601,26	4136,18	0,047	209,54	209,54
	0,08	987,07	987,07	0,1	1927,87	4979,84	0,054	317,80	317,80
	0,085	1183,95	1183,95	0,115	2932,05	7573,72	0,064	529,07	529,07
	0,093	1550,69	1550,69	0,126	3856,46	9961,55	-	-	-
	0,094	1601,26	1601,26	-	-	-	-	-	-
$L$	0,048	213,21	213,21	0,065	529,44	1367,59	0,045	183,91	183,91
	0,062	459,46	459,46	0,07	661,26	1708,09	0,047	209,54	209,54
	0,08	987,07	987,07	0,075	813,32	2100,87	0,054	317,80	317,80
	0,085	1183,95	1183,95	0,086	1226,23	3167,46	0,064	529,07	529,07
	0,093	1550,69	1550,69	0,095	1652,91	4269,59	-	-	-
	0,094	1601,26	1601,26	-	-	-	-	-	-



Παρατηρούμε πως στις περιπτώσεις σφηνών 90 και 45 μοιρών είναι ίδιο το πειραματικό με το θεωρητικό αποτέλεσμα ενώ για τη σφήνα των 120 μοιρών υπάρχει απόκλιση οπότε θα υπολογίσουμε τον συντελεστή διόρθωσης ο οποίος προκύπτει ίδιος για όποιο ζευγάρι μετρήσεων πάρουμε και ίσος με:

$$f=0,387$$

ο οποίος εξαρτάται απο τη γεωμετρία της σφήνας.

## 6.2 Υπολογισμός του φορτίου και του συντελεστή εντάσεως για συγκεντρωμένη λοξή φόρτιση

Η κατακόρυφη συνιστώσα του ανοίγματος  $L$  δίνεται απο τη σχέση

$$L_V = X_{r,t,f} \Big|_{\theta=-\phi} - X_{r,t,f} \Big|_{\theta=\phi} = 2\lambda_m (2C_{r,t,f} \sqrt{A^2 + B^2})^{1/3} \left[ \frac{B}{2\sqrt{A^2 + B^2}} \sin 2\phi \right] \quad (6.11)$$

Όπου το άνοιγμα  $L$  της καυστικής είναι

$$L = \sqrt{L_H^2 + L_V^2} = 2\lambda_m (2C_{r,t,f} \sqrt{A^2 + B^2})^{1/3} D \quad (6.12)$$

Όπου

$$|D| = \left[ \left( \sin \phi + \frac{A}{2\sqrt{A^2 + B^2}} \sin 2\phi \right)^2 + \left( \frac{B}{2\sqrt{A^2 + B^2}} \sin 2\phi \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.13)$$

Τελικά προκύπτει ο υπολογισμός του λοξού συγκεντρωμένου φορτίου βάσει των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της καυστικής απο τη σχέση:

$$P = \frac{L^3}{16\epsilon_0 d \lambda_m c_{r,t,f}} \frac{1}{D^3 \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (6.14)$$

Στο οριζόντιο επίπεδο και σε απόσταση  $X_0$  απο την κορυφή της σφήνας, οι συνιστώσες των τάσεων σε τυχαίο σημείο  $M$  υπολογίζονται απο την πολική συνιστώσα τάσης  $\sigma_{rr}$ :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{rr} \cos^2 \theta = -PA \frac{\cos^3 \theta}{r} + PB \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{r} = -PA \frac{\cos^4 \theta}{x_0} + PB \frac{\sin \theta \cos^3 \theta}{x_0} \quad (6.15)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{rr} \sin^2 \theta = -PA \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{r} + PB \frac{\sin^3 \theta}{r} = -PA \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{x_0} + PB \frac{\sin^3 \theta \cos \theta}{x_0}$$

$$\tau_{xy} = \sigma_{rr} \sin \theta \cos \theta = -PA \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{r} + PB \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{r} = -PA \frac{\cos^3 \theta \sin \theta}{x_0} + PB \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{x_0}$$

$$\text{Με } r = \frac{x_0}{\cos \theta} = \frac{r_0}{\cos \theta} \quad (6.16)$$

Στο οριζόντιο επίπεδο, για απόσταση από την κορυφή της σφήνας όση η ακτίνα της αρχικής καμπύλης της καυστικής :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{L^2}{8\epsilon z_0 d \lambda_m^2 c_f D^2 \sqrt{A^2 + B^2}} (A \cos^4 \theta - B \sin \theta \cos^3 \theta) \\ \sigma_{yy} &= -\frac{L^2}{8\epsilon z_0 d \lambda_m^2 c_f D^2 \sqrt{A^2 + B^2}} (A \cos^2 \theta \sin^2 \theta - B \sin^3 \theta \cos \theta) \\ \tau_{xy} &= -\frac{L^2}{8\epsilon z_0 d \lambda_m^2 c_f D^2 \sqrt{A^2 + B^2}} (A \cos^3 \theta \sin \theta - B \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Για τιμές της γωνίας  $\theta$  από  $-\varphi$  έως  $+\varphi$ .

Ετσι με δεδομένα του πειράματος τις τιμές που παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα γίνονται οι υπολογισμοί του λοξού φορτίου.

$z_0$	[m]	1,76
<b>d</b>	[m]	0,003
$\lambda_m^2$	-	47,1969
$c_f$	[m <sup>2</sup> /N]	1,7E-10

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι υπολογισμοί του λοξού φορτίου για την τελευταία σφήνα των 135 μοιρών. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι ο τύπος θεωρητικού υπολογισμού δίνει το φορτίο ανα μέτρο και επειδή θεωρούμε την σφήνα σαν μονάδα πολλαπλασιασμένο το φορτίο με το πάχος της σφήνας δίνει τελικό αποτέλεσμα



$$P = \frac{L^3}{16\epsilon z_0 d \lambda_m^2 c_{r,t,f}} \frac{1}{D^3 \sqrt{A^2 + B^2}}$$

Να σημειώσω στο σημείο αυτό πως η ποσότητα D που υπάρχει στην προηγούμενη σχέση δεν είναι η διάμετρος της καυστικής αλλά μια ποσότητα που προκύπτει από την σχέση 6.13

<b>sin2φ</b>	-1	<b>L</b> <b>[m]</b>
<b>cosφ</b>	-0,70	
<b>φ [μοίρες]</b>	135	
<b>P [N]</b>	360	0,01
	-	-
	513	0,015
	720	0,02
	-	-

Οι πειραματικοί συντελεστές εντάσεως υπολογίζονται από τις επόμενες σχέσεις:

$$k_1^{ex} = \frac{L^3 \cos \omega}{16\epsilon z_0 d \lambda_m^2 c_{r,t,f} (\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi)} \frac{1}{D^3 \sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$k_2^{ex} = \frac{L^3 \sin \omega}{16\epsilon z_0 d \lambda_m^2 c_{r,t,f} (\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi)} \frac{1}{D^3 \sqrt{A^2 + B^2}}$$

Οπότε μετά από υπολογισμούς έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

k1	174	248	348
k2	96	137	192

## **ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

Από τη μελέτη της παρούσας εργασίας προκύπτει ότι είναι δυνατόν να υπολογιστούν τα φορτία που ασκούνται σε ένα δοκίμιο πειραματικά μέσω της οπτικής.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα σημεία επαφής δύο σωμάτων όπως στα ρουλεμάν και στους οδοντωτούς τροχούς. Από τη θεωρητική και πειραματική μελέτη απεδείχθη η ταύτιση των θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων όσον αφορά την λήψη των καυστικών με τις αντίστοιχες σχεδιασθείσες.

Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε είναι η Μέθοδος της Καυστικής, η οποία μπορεί να δημιουργηθεί από μια περιοχή πάρα πολύ κοντά στην άκρη της ρωγμής, επομένως έχουμε τη δυνατότητα να εξετάσουμε την περιοχή αυτή, από πληροφορίες που συλλέγονται αποκλειστικά και μόνο από αυτή την περιοχή, γεγονός που δε συμβαίνει με άλλη μέθοδο.

Από τη μελέτη των καυστικών φάνηκε ότι οι παράγοντες που επηρεάζουν σημαντικά την μορφή και το μέγεθος της καυστικής είναι :

1. Ο συντελεστής μεγέθυνσης  $\lambda_m$ , ο οποίος για σταθερή απόσταση δοκιμίου πετάσματος  $z_0$  πρέπει να παίρνει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη τιμή για καλύτερα αποτελέσματα.
2. Η απόσταση δοκιμίου πετάσματος  $z_0$  για παράλληλη δέσμη φωτός να παίρνει όσο το δυνατόν μικρότερη τιμή για καλύτερα αποτελέσματα.
3. Η χρησιμοποίηση της εγκάρσιας μέγιστης διαμέτρου και όχι της διαμήκουσ.

## **ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ**

Κατά την διάρκεια της μελέτης για την συγγραφή της παρούσης διπλωματικής εργασίας κατέβαλα προσπάθεια για την όσο το δυνατόν καλύτερη κατανόηση του βασικού επιπέδου της πειραματικής ανάλυσης των τάσεων σε ιδιόμορφα σημεία. Ο στόχος μου ήταν να αναπτύξω ένα εξειδικευμένο γνωστικό υπόβαθρο σε θέματα μηχανικής παραμορφώσιμου σώματος ώστε να μπορώ μεθαύριο σαν μηχανικός να αντιμετωπίζω καλύτερα τα προβλήματα αστοχίας. Μπορεί παρά όλα αυτά το αντικείμενο να είναι αρκετά εξειδικευμένο στα θέματα εφαρμοσμένης μηχανικής, σε συνδιασμό όμως με την πειραματική έρευνα που πραγματοποιήσαμε στο εργαστήριο της σχολής απέκτησα εμπειρία που θα αποτελέσει ουσιαστικό εργαλείο σε οποιαδήποτε έρευνα ή αναζήτηση επίλυσης κάποιου προβλήματος σαν μηχανικός.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

**Γεώργιος Α. Παπαδόπουλος**, Πειραματική Μηχανική των Θραύσεων – Οπτικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων.

**George A. Papadopoulos**, Fracture Mechanics – The Experimental Method of Caustics and the Det. – Criterion of Fracture, Springer – Verlog London Limited 1993.

**Γ. Α. Παπαδόπουλος και Β. Βαδαλούκα**, Επίλυση προβλημάτων επαφών με τη μέθοδο των καυστικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή ΕΜΦΕ, Τομέας Μηχανικής, Λεωφ. Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Τ.Κ. 157 73 Ζωγράφου, Αθήνα.

**George A. Papadopoulos**, Experimental study of the load distribution in bearings by the method of caustics and the photoelasticity method – Publication on 19 October 2004

**George A. Papadopoulos**, Evaluation of Concentration Oblique Force at the Apex of a Wedge by the Method of Caustics

**Δημήτριος Μαυρομάτης**, Είδη λιπαινόμενων επιφανειών – Επαφή Hertz