ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Γεώργιος Τσαταλμπασίδης

ΤΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΙΤΟ ΚΑΙ ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

Επιβλέπων καθηγητής: Παπανικολάου Βασίλης

Αθηνα 2020

Περιεχόμενα

1 ΤΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ 5

1.1 Κατασκευή του στοχαστικού ολοκληρώματος 6

1.2 Ο τύπος του Ito 15

1.3 Παραδείγματα ολοκληρωμάτων 22

2 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 25

2.1 Γενικά περί στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων 25

2.2 Απειροστικός γεννήτορας μιας διαδικασίας διάχυσης 31

2.3 Ο απειροστικός γεννήτορας μιας κίνησης Brown 34

2.4 Τύπος Feynman-Kac(I) 36

2.5 Τύπος Feynman-Kac(II) 39

3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ 41

3.1 Η γεωμετρική κίνηση Brown 41

3.2 Η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck 43

3.3 Γέφυρα Brown 46

3.4 Εξίσωση διάχυσης θερμότητας 47

3.5 Η εξίσωση Black-Scholes 48

4 Ο ΜΕΣΟΣ ΠΡΩΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ ΕΝΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΟΛΥΜΕΡΟΥΣ 49

4.1 Εισαγωγή 49

4.2 Στοχαστική Μοντελοποίηση Ενός Γραμμικού Πολυμερούς 50

4.3 Ασυμπτωτική Έκφραση 52

Κεφάλαιο 1

ΤΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε το ολολήρωμα $\int_{t_0}^{t} X_u dW_u$. Ο κλασικός ορισμός του ολοκληρώματος *Riemann* δηλαδή του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)dx$ αποτυγχάνει, διότι η ολοκληρωτέα πόσοτητα W_t δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο και έτσι δεν μπορεί να οριστεί το $\int_{t_0}^{t} X_u \left(\frac{dW_u}{du}\right) du$. Εξάλου αν προσπαθούσαμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα ως όριο αθροισμάτων $Riemann-Stieltjes$ μορφής $\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}]$ θα είχαμε την τυχαία μεταβλητή $W_{t_{i+1}}$ και άρα το άθροισμα θα ήταν μια τυχαία μεταβλητή, ενώ το ολοκληρωμα $Riemann-Stieltjes$ ορίζεται για γνωστές τιμές των μεταβλητών. Από την άλλη δεν μπορεί να οριστεί και ως ολοκλήρωμα $Riemann-Stieltjes$ γιατί το όλοκλήρωμα $Riemann-Stieltjes$ ορίζεται για ολοκληρωτές συνατήσεις $g(.)$ φραγμένης κύμανσης (bounded variation), και ξέρουμε ότι η κίνηση *Brown* έχει άπειρη κύμανση σε κάθε υποδιάστημα του $[0, \infty)$. Στην ουσία αυτό που θα κάνουμε είναι να βρούμε το όριο των αθροισμάτων $Riemann-Stieltjes$ στον L_2 και όχι σημειακά. Αυτό το όριο των αθροισμάτων θα είναι το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Θα ξεκινήσουμε την κατασκευή του ολοκληρώματος για απλές ανελίξεις X_t και θα το επεκτείνουμε σε μια πιο ευρεία κλάση στοχαστικών ανελίξεων.

Κατασκευή του στοχαστικού ολοκληρώματος

Ορισμός 1.1.1 Έστω W_t κίνηση *Brown* και $F_t := \sigma(W_s : s \in [0,t])$, $t \geq 0$, η διύλιση που παράγεται από την κίνηση *Brown*. Ορίζουμε μια κλάση στοχαστικών διαδικασιών, τις **διαδικασίες βήματος**, οι οποίες είναι της μορφής

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

όπου η_j είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές F_{t_j}-μετρήσιμες για κάθε $j = 0, 1, ..., n-1$. Συμβολίζουμε με M^2_{step} το σύνολο όλων αυτών των συναρτήσεων.

Ορισμός 1.1.2 Έστω συνάρτηση $f \in M^2_{step}$ στο διάστημα $[0,t]$ και

$$I(f) := \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j (W(t_{j+1}) - W(t_j))$$

Το **στοχαστικό ολοκλήρωμα** για την συνάρτηση f ορίζεται

$$\int_0^t f(s) dW_s := I(f)$$

Πρόταση 1.1.1 Για κάθε διαδικασία βήματος $f \in M^2_{step}$ το στοχαστικό ολοκλήρωμα είναι μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή $I(f) \in L^2$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{E}(|I(f)|^2) = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right)$$

ισομετρία *Ito*.

Απόδειξη. έχουμε $\mathbf{E}(\Delta_j W) = 0$ Και $\mathbf{E}(\Delta_j^2 W) = \Delta_j t$ από ορισμό κίνησης *Brown*. θεωρούμε

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1}}(t)$$

έτσι από ορισμό

$$I(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j (W_{t_{j+1}} - W_j)$$

παίρνουμε το τετράγωνο

$$|I(f)|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 + 2 \sum_{k<j} \eta_j (W_{t_j} - W_{t_{j+1}}) \eta_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) (1)$$

Χωρίσαμε τους διαγώνιους από τους μη-διαγώνιους όρους.
Έχουμε τώρα $(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$ ανεξάρτητο από το F_{t_j} και η_j είναι F_{t_j}-μετρήσιμη. Άρα $(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$ και η_j ανεξάρτητες. Το ίδιο ισχύει και για συνάρτησεις αυτών. Έτσι

$$\mathbf{E}[\eta_j^2 (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2] = \mathbf{E}[\eta_j^2] \mathbf{E}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2] = \mathbf{E}[\eta_j](t_{j_{t+1}} - t_j) \qquad (1.1)$$

επιπλέον οι $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ είναι ανεξάρτητη απο τις $\eta_k, \eta_j, W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$ συνεπώς

$$\mathbf{E}[\eta_j^2 (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 \eta_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2] = \mathbf{E}[\eta_j^2 (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 \eta_k] \mathbf{E}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2] \qquad (1.2)$$

Έτσι παίρνοντας μέση τιμή στην (1) και μέσο των (2)και(3) παίρνουμε

$$\mathbf{E}[I(f)^2] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}[\eta_j^2](t_{j+1-t_j}) \qquad (1.3)$$

έχουμε τώρα

$$|f|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})} + \sum_{k<j} \eta_k \eta_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})} \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})} = \sum_{j=0}^{n-1} [\eta_j^2] \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}$$

αφού $\mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})} \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})} = 0$.
Παίρνουμε ολοκληρώματα και στην συνέχεια μέσες τιμές και στα δύο μέλη έχουμε

$$\mathbf{E}\left[\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty \sum_{j=0}^{n-1} [\eta_j^2] \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})} dt\right]$$

και κάνοντας πράξεις στο 2ο μέλος

$$= \mathbf{E}\left[\int_0^\infty \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 \mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})} dt\right] = \mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\infty \eta_j^2 \mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})} dt\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 [t_j - t_{j+1})\right] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}\left[\eta_j^2 [t_j - t_{j+1})\right]$$

από την (4)$= \mathbf{E}[I(f)^2]$

Άρα τελικώς καταλήξαμε στο

$$\mathbf{E}[I(f)^2] = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right]$$

□

Πρόταση 1.1.2 Η απεικόνιση $I : M^2_{step} \to L^2$ είναι γραμμική, δηλαδή για κάθε $f, g \in M^2_{step}$ και για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

Απόδειξη. οι συναρτήσεις θα ειναι της μορφής

$$f = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}$$

και

$$g = \sum_{j=0}^{n-1} \varsigma_j \mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}$$

όπου η_j και ς_j τετραγωνικά ολοκληρώσιμες και F_{t_j}-μετρήσιμες για κάθε j . Αν η διαμέριση $0 < t_0 < t_1 < .... < t_n$ δεν είναι ίδια και για τις 2 συναρτήσεις, τότε

παίρνουμε μια άλλη διαμέριση που περιέχει και τις 2. Δηλαδή όλα τα σημεία και των 2 διαμερίσεων. Έτσι έχουμε

$$\alpha f + \beta g = \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha\eta_j + \beta\varsigma_j)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}$$

και

$$I(\alpha f + \beta g) = \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha\eta_j + \beta\varsigma_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j))$$

$$= \alpha \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j W(t_{j+1}) + \beta \sum_{j=0}^{n-1} \varsigma_j W(t_j) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

□

Τώρα θα κάνουμε επέκταση του ορισμού του στοχαστικού ολοκληρώματος και σε μια πιο γενική κλάση στοχαστικών ανελίξεων. Ο λόγος που οι παραπάνω αποδείξεις δόθηκαν είναι καθαρά κατασκευαστικός, δηλαδή θα τις χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε τις αντίστοιχες προτάσεις (ισομετρία *Ιτο*) και γραμμικότητα του ολοκληρώματος στο νέο χώρο στοχαστικών ανελίξεων που θα ορίσουμε αμέσως.

Με τον όρο **προσαρμοσμένη** στοχαστική διαδικασία f_t σε μια διύληση F_t εννοούμε ότι η πληροφορία που αφορά την στοχαστική διαδικασία μέχρι την χρονική στιγμή t περιέχεται στην σ-άλγεβρα F_t. Όλες δηλαδή οι τιμές τις στοχαστικής διαδικασίας είναι γνωστές μέχρι την χρονική στιγμή t.
Πιο τυπικά θα λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία f_t είναι **προσαρμοσμένη** σε μια διύληση F_t αν η f_t είναι F_t-μετρήσιμη για κάθε $t > 0$.

Ορισμός 1.1.3 Ονομάζουμε $\mathbf{M}^2$ το σύνολο όλων των προσαρμοσμένων στοχαστικών διαδικασιών $f(t), t \geq 0$ με

$$||f||_{M_2} = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right) < \infty$$

Όπου $||f||_{M^2}$ είναι η L^2 νόρμα στο χώρο $L^2([0,\infty) \times \Omega, B((0,\infty]) \times F, \lambda \otimes P)$ όπου λ μέτρο *Lebesque*, και $B((0,\infty])$ τα σύνολα *Borel* του $[0,\infty)$

Γενική παρατήρηση: γράφουμε την f με τον τρόπο $f(t)$ στη πραγματικότητα εννοούμε $f(t,\omega)$ αυτό τον συμβολισμό τον κάνουμε για ευκολία, όπως και πριν το η_j ήταν μια τυχαία μεταβλητή δηλαδή $\eta_j(\omega)$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω χώρο που ορίσαμε για να επεκτείνουμε τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος σε αυτόν το χώρο. Ένα ερώτημα είναι πως μας ήρθε η επέκταση σε αυτόν το χώρο. Θα πάμε λίγο ανάποδα και θα απαντήσουμε στο ερώτημα αφού πρώτα αποδείξουμε ένα θεώρημα, η απόδειξη του οποίου θα μας δώσει κάποια στοιχεία να απαντήσουμε.

Πρόταση 1.1.3 Για κάθε $f \in \mathbf{M}^2$ το στοχαστικό ολοκλήρωμα $I(f) \in L^2$ υπάρχει, είναι μοναδικό και ικανοποιεί την ισομετρία *Ito*

$$\mathbf{E}\left(|I(f)|^2\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right)$$

Απόδειξη. έστω $f \in \mathbf{M}^2$ θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την f από διαδικασίες βήματος δηλαδή με $f_1, f_2, ... \in \mathbf{M}^2_{step}$. Η προσέγγιση γίνεται κατά τη νόρμα $||.||_{\mathbf{M}^2}$. Άρα από ορισμό ορίου έχουμε

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} ||f - f_n||_{\mathbf{M}^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

θα δείξουμε ότι η ακολουθία $I(f_1), I(f_2)....$ είναι *Cauchy* ακολουθία στον $\mathbf{L}^2$.Έχουμε

$$||I(f_m) - I(f_n)||_{L^2} = ||I(f_m - f_n)||_{L^2} = ||f_m - f_n||_{M^2} \leq ||f - f_m||_{M^2} + ||f - f_n||_{M^2} < \varepsilon$$

Στην 1η ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και στη 2η την ισομετρία *Ito* για $\mathbf{M}^2_{step}$ που είχαμε αποδείξει πριν.
Άρα δείξαμε ότι είναι *Cauchy* ακολουθία στον $\mathbf{L}^2$.
Επειδή ο $\mathbf{L}^2$ με νόρμα $||.||_{L^2}$ είναι πλήρης χώρος , (συγκεκριμένα χώρος *Hilbert* αφού η νόρμα του μπορεί να οριστεί από εσωτερικό γινόμενο $||x||^2 =< x, x >$) κάθε *Cauchy* του $\mathbf{L}^2$ θα έχει όριο που ανήκει στο χώρο.
Άρα η ακολουθία $I(f_1), I(f_2), ...$ που προέκυψε από συναρτήσεις που προσέγγιζαν την f έχει όριο.

Θα δείξουμε ότι είναι μοναδικό αυτό το όριο, θεωρούμε 2 ακολουθίες που προσεγγίζουν την f έστω $f_1, f_2, ...$ και $g_1, g_2, ...$ που προσεγγίζουν την f , τότε και η ακολουθία $f_1, g_1, f_2, g_2, ...$ θα την προσεγγίζει. Άρα η ακολουθία

$$I(f_1), I(g_1), I(f_2), I(g_2), ...$$

θα είναι βασική, άρα θα έχει όριο στον $\mathbf{L}^2$, αυτό σημαίνει ότι και κάθε υπακολουθία της θα έχει το ίδιο όριο. Συγκεκριμένα οι περιττοί και άρτιοι όροι της ακολουθίας που είναι αντίστοιχα οι $I(f_1), I(f_2), ...$ και $I(g_1), I(g_2), ...$ θα έχουν κοινό όριο, το $I(f)$. Τέλος από ισομετρία Ito που αποδείξαμε για $\mathbf{M}^2_{step}$ έχουμε

$$||I(f_n)||_{L^2} = ||f_n||_{M^2}$$

για κάθε n παίρνοντας όριο $n \longrightarrow \infty$ σύμφωνα με αυτό που δείξαμε, παίρνουμε

$$||I(f)||_{L^2} = ||f||_{M^2}$$

που είναι η ισομετρία Ito για $f \in \mathbf{M}^2$. □

Θα απαντήσουμε τώρα στο ερώτημα που είχαμε θέσει πριν την παραπάνω πρόταση, δηλαδή πως μας ήρθε αυτός ο χώρος ως επέκταση.
Από την απόδειδη μπορούμε να βγάλουμε 2 συμπεράσματα:
1ο) ότι πήραμε έναν νέο χώρο ως όριο συναρτήσεων του χώρου $\mathbf{M}^2_{step}$,ένωση με τον ίδιο τον $\mathbf{M}^2_{step}$
2ο) ότι ο νέος χώρος είναι πλήρης
Αυτές οι 2 παρατηρήσεις μας δείχνουν ότι ο $\mathbf{M}^2$ αποτελεί πλήρωση του $\mathbf{M}^2_{step}$. Είναι μια συνηθισμένη επέκταση, παίρνουμε τον παλιό χώρο και προσθέτουμε τα όρια των ακολουθιών του. Είδαμε ουσιαστικά μέσω των ισομετριών Ito ότι υπάρχει ισομετρία μεταξύ των χώρων. Για να δείξει κανείς αυστηρά ότι όντως αποτελεί πλήρωση μένει να δείξει ότι ο 1ος χώρος είναι πυκνός στον 2ο.

Πρόταση 1.1.4 Αν $f, g \in \mathbf{M}^2$ και $\alpha \in \Re$ ισχύουν τα παρακάτω:

1)$I(\alpha f + g) = \alpha I(f) + I(g)$
2)$\mathbf{E}[I(f)] = 0$

Απόδειξη. 1) έστω $f_1, f_2, ...$, $g_1, g_2, ...$ δύο ακουλουθίες συναρτήσεων του $\mathbf{M}^2_{step}$ που προσεγγίζουν τις f, g αντίστοιχα. Θα έχουμε

$$I(\alpha f + g) = \lim_{n\to\infty} I(\alpha f_n + g_n) = \lim_{n\to\infty} (I(\alpha f_n) + I(g_n)) = \alpha I(f) + I(g)$$

χρησιμοποιήσαμε την γραμμικότητα των ολοκληρωμάτων για συναρτήσεις στον $\mathbf{M}^2_{step}$ που έχουμε αποδείξει. □

Απόδειξη. 2) θα δείξουμε ότι ισχύει για συναρτήσεις στον $\mathbf{M}^2_{step}$ και στη συνέχεια θα προσεγγίσουμε $f \in \mathbf{M}^2$ έχουμε ότι αν $f_1 \in \mathbf{M}^2_{step}$ το ολοκλήρωμα της γράφεται στην μορφή

$$I(f_1) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j (W(t_{j+1}) - W(t_j))$$

με η_j F_j-μετρήσιμη , και $W(t_{j+1}) - W(t_j)$ ανεξάρτητη του F_j για κάθε $j \leq n-1$, άρα οι τυχαίες μεταβλητές η_j και $W(t_{j+1}) - W(t_j)$ είναι ανεξάρτητες για κάθε $j \leq n-1$ έτσι για την μέση τιμή έχουμε

$$\mathbf{E}[(\eta_j(W(t_{j+1}) - W(t_j)] = \mathbf{E}[\eta_j]\mathbf{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j)] = 0$$

για κάθε $j \leq n-1$ και άρα αφού κάθε όρος του αθροίσματος είναι 0 έχουμε τελικά $\mathbf{E}[I(f_1)] = 0$. Άν πάρουμε τώρα μια ακολουθία $f_1, f_2, ...$ που προσεγγίζει την f τότε η ακολουθία $I(f_1), (f_2), ...$ προσεγγίζει την $I(f)$ στον $\mathbf{L}^2$ όμως η $\mathbf{L}^1$ νόρμα είναι ασθενέστερη απο την $\mathbf{L}^2$ άρα αφού η ακολουθία συγκλίνει στον $\mathbf{L}^2$, θα συγκλίνει και στον $\mathbf{L}^1$, έτσι τελικά

$$\mathbf{E}[I(f_n)] \to \mathbf{E}[I(f)]$$

καθώς $n \to \infty$
Άρα έχουμε $\mathbf{E}[I(f)] = 0$ □

Μέχρι τώρα έχουμε ορίσει το στοχαστικό ολοκλήρωμα για $f \in \mathbf{M}^2$

$$\int_0^\infty f(t)dW_t$$

μπορούμε να πάρουμε την $\widehat{f}(t) = \mathbf{1}_{[a,b]} f(t)$. Έτσι

$$\int_0^\infty \widehat{f}(t) dW_t = \int_a^b f(t) dW_t$$

ορίσαμε το ολοκλήρωμα σε ένα νέο χώρο το συμβολίζουμε με $\mathbf{M}^2_{[a,b]}$.
Όμοια για το $[0,T)$ παίρνουμε το $\mathbf{M}^2_T$
Όλες οι ιδιότητες που αποδείξαμε μέχρι τώρα προφανώς ισχύουν και για οποιαδήποτε επιλογή άκρων στο ολοκλήρωμα.

Ορισμός 1.1.4 Έστω $f \in \mathbf{M}^2([0,T])$, ονομάζουμε **αόριστο ολοκλήρωμα του Ito (indefinite integral)**, την στοχαστική διαδικασία

$$I_t := \int_0^t f(s) dW_s$$

Θα κάνουμε τώρα τον υπολογισμό ενός απλού ολοκληρώματος για να καταλάβουμε πόσο δύσκολος είναι ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων με τον ορισμό.

Παράδειγμα : Να υπολογιστεί το $\int_0^T W_t dW_t$.

Λύση: $W(t) \in \mathbf{M}^2_T$, έστω

$$f(t) = \mathbf{1}_{[0,T)}(t) W(t)$$

έχουμε $f(t) \in \mathbf{M}^2$ και $I_T(W_t) = \int_0^T W_t dW_t = \int_0^\infty f(t) dW_t$
έστω η διαμέριση σε n ίσα διαστήματα $0 = t_1^n, t_2^n < .... < t_n^n = T$ όπου $t_i^n = \dfrac{iT}{n}$

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i^n) \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n)}$$

η επιλογή της f_n έγινε επειδή αυτή η ακολουθία συναρτήσεων φαίνεται να προσεγγίζει την f. Τώρα πρέπει να το επιβεβαιώσουμε, να δείξουμε δηλαδή ότι η ακολουθία $f_1, f_2, ... \in \mathbf{M}^2_{step}$ προσεγγίζει την f

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty |\mathbf{1}_{[0,T)}(t) W(t) - \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i^n) \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n)}(t)|^2 dt\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \mathbf{E}\left(|W(t) - W(t_i^n|^2\right) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left(|t - t_i^n|^2\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(|t_{i+1}^n - t_i^n|^2\right)^2 dt = \frac{T}{2n} \longrightarrow 0$$

καθώς $n \longrightarrow \infty$
το ολοκλήρωμα των f_n θα είναι

$$I(f_n) = \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{j+1}^n)^2 - W(t_j^n)^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)^2$$

$$\to \frac{1}{2} W(T)^2 - \frac{1}{2} T$$

Καθώς $n \longrightarrow \infty$ στον L^2.
Η τελευταία ισότητα σχετίζεται με το $dW_t^2 = dt$.
Άρα καταλήξαμε στο

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2} W(T)^2 - \frac{1}{2} T.$$

Ο τύπος του Ito

Έστω $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με συνεχή παράγωγο, έχουμε απο το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού

$$f(g(b)) - f(g(a)) = \int_a^b f'(g(x))d(g(x))$$

κάτι αντίστοιχο θα ορίσουμε και τώρα, μόνο που ως ολοκληρωτή θα έχουμε την κίνηση *Brown*, στη συνέχεια θα γενικεύσουμε αυτό το αποτέλεσμα. Την απλούστερη μορφή που θα παραθέσουμε θα την αφήσουμε χωρίς απόδειξη, αντί αυτού θα αποδείξουμε μια γενικευμένη μορφή αυτής.

Θεώρημα 1.2.1 τύπος του Ito (I) Έστω $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds$$

Το δεξί μέλος είναι το άθροισμα ενός *Riemman* και ενός στοχαστικού ολοκληρώματος, δηλαδή το άθροισμα μιας διαδικασίας ¨φραγμένης κύμανσης' και μιας *martingale*. Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι όντως ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα γιατί $f'(W_s) \in \mathbf{M}_t^2$ και αυτό γιατί η $f'(W_s)$ είναι προσαρμοσμένη, και επίσης η $f'(W_s)$ είναι συνεχής, συνεπώς και η συνάρτηση $[f'(W_s)]^2$ είναι συνεχής, και άρα τελικά η $f'(W_s)$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη κατά *Riemann*.

Ορισμός 1.2.1 Μια στοχαστική διαδικασία X_t λέγεται **διαδικασία Ito** αν είναι της μορφής

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, X_s)ds + \int_0^t v(s, X_s)dW_s$$

με τις συνθήκες $\int_0^t |u(s, X_s)|ds < \infty$, $\int_0^t v(s, X_s)^2 ds < \infty$ σ.β
Ο παραπάνω τύπος γράφεται και σε διαφορική μορφή:

$$dX_t = udt + vdW_t$$

Το udt αποτελεί το τμήμα τάσης (drift) και το vdW_t το τμήμα διάχυσης.
Θα κάνουμε τώρα μια επέκταση του τύπου του Ito.

Θεώρμα 1.2.2 τύπος του Ito (II) Έστω $f(t,x) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους $f_t(t,x), f_x(x), f_{xx}(x)$ και $f_x \in \mathbf{M}_t^2$ για κάθε t. Τότε η $f(t, W(t))$ είναι Ito διαδικασία τέτοια ώστε

$$f(t,W(t))-f(0,W(0)) = \int_0^t \left(f_s(s,W(s)) + \frac{1}{2} f_{xx}(s,W(s)) \right) ds + \int_0^t f_x(s,W(s))dW(s)$$

Σε διαφορική μορφή γράφεται

$$df(t,W(t)) = \left(f_t(t,W(t)) + \frac{1}{2} f_{xx}(t,W(t)) \right) dt + f_x(t,W(t))dW(t)$$

Η απόδειξη είναι αρκετά μακροσκελής, και ένα βασικό τμήμα της είναι ο υπολογισμός ορισμένων αθροισμάτων.
Τα αθροίσματα αυτά είναι ουσιαστικά ολοκληρώματα λόγω της προσέγγισης με βηματικές συναρτήσεις.

Απόδειξη. Θα κάνουμε την απόδειξη αρχικά θεωρώντας ότι η f και οι μερικές παράγωγοι της μέχρι δευτέρας τάξης ως προς x είναι φραγμένες από μια σταθερά $C > 0$. Θωρούμε την διαμέριση $0 = t_0^n < t_2^n < .....t_n^n = t$ όπου $t_i^n = \dfrac{it}{n}$. Συμβολίζουμε τα $W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)$ και $t_{i+1}^n - t_i^n$ με $\Delta_i^n W$, και $\Delta_i^n t$ αντίστοιχα.

$$f(t,W(t)) - f(0,W(0)) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}^n, W_{i+1}^n) - f(t_i^n, W_i^n))$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n, W_{i+1}^n) + \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_i^n) - f(t_i^n, W_i^n)(*)$$

Από $Taylor$ υπάρχει ένα σημείο $\widehat{W}_i^n \in [W(t_i^n), W(t_{i+1}^n)]$ και $\widehat{t_i^n} \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ τέτοια ώστε

$$(*) \sum_0^{n-1} f_t(\widehat{t_{i+1}^n}, W_{i+1}^n)\Delta_i^n t + \sum_0^{n-1} f_x(t_{i+1}^n, W_i^n)\Delta_i^n W + \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} f_{xx}(t_{i+1}^n, \widehat{W}_i^n)(\Delta_i^n W)^2$$

$$= \sum_0^{n-1} f_t(\widehat{t_{i+1}^n}, W_{i+1}^n)\Delta_i^n t + \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} f_{xx}(t_{i+1}^n, W_i^n)\Delta_i^n t + \sum_{i=0}^{n-1} f_x(t_i^n, W_i^n)\Delta_i^n W$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{0}^{n-1} f_{xx}(t_{i+1}^n, W_i^n)\left((\Delta_i^n W)^2 - \Delta_i^n t\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f_{xx}(t_i^t, \widehat{W}_i^n) - f_{xx}(t_i^n, W_i^n)\right](\Delta_i^n W)^2$$

θα υπολογίσουμε τώρα τα πέντε αθροίσματα χωριστά
• Θεωρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{0}^{n-1} f_t(\widehat{t}_{i+1}^n, W_{i+1}^n)\Delta_i^n t = \int_0^t f_t(s, W(s))ds$$

Η $W(t)$ είναι συνεχής στο $[0,t]$ άρα είναι φραγμένη στο $[0,t]$ συνεπώς υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε $|W(t)| \leq K$ για κάθε $s \in [0,t]$ και συνεπώς η $W(.)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,t]$. Επίσης η $f_t(.,.)$ στο κλειστό σύνολο $[0,t] \times [-K,K]$ άρα ομοιόμορφα συνεχής σε αυτό. Έτσι από ομοιόμορφη σύγκλιση παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} sup_{i,t} f_t(\widehat{t}_{i+1}^n, W_{i+1}^n - f_t(t, W(t)) = 0$$

και έτσι από τον ορισμό του ολοκληρώματος *Riemann* έχουμε το ζητούμενο.
• Όμοια η συνάρτηση $f_{xx}(.,.)$ είναι συνεχής στο ίδιο κλειστό σύνολο, άρα ομοιόμορφα συνεχής άρα

$$\lim_{n\to\infty} sup_{i,t}|f_{xx}(t_i^n, W_i^n) - f_{xx}(t, W(t))| = 0$$

και από ορισμό του ολοκληρώματος *Riemman*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{0}^{n-1} f_{xx}(t_i^n, W_i^n)\Delta_i^n = \int_0^t f_{xx}(s, W(s))ds$$

• Θα δείξουμε τώρα ισότητα για στοχαστικό ολοκλήρωμα , δηλαδή όριο στον L^2,ϑ.δ.ο

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f_x(t_i^n, W_i^n)\Delta_i^n W = \int_0^t f_x(t, W(t))dW(t)$$

Αφού η $f_x(t,x)$ φραγμένη από το $K > 0$ έχουμε ότι η $g(t) := f_x(t, B(t)) \in \mathbf{M}_t^2$ και η ακολουθία

$$g_n = \sum_{i=0}^{n-1} f_x(t_i^n, W_i^n)\mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n)} \in \mathbf{M}_{step}^2$$

προσεγγίζει την g. Από συνέχεια των $g_n(t), g(t)$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} |g_n(t) - g(t)|^2 = 0$. Για κάθε $t \in [0,t]$ επειδή $|g_n(t) - g(t)|^2 \leq t4K^2$ από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} \int_0^t |g_n(t) - g(t)|^2 dt = 0$ Αλλά $\int_0^t |g_n(t) - g(t)|^2 dt \leq 4tK$ έτσι από θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\int_0^t |g_n(t) - g(t)|^2 dt\right) = 0$$

Και συνεπώς η g_n προσεγγίζει την g και άρα $I(g_n \longrightarrow I(g)$ στον L^2 καθώς $n \longrightarrow \infty$ άρα τελικά

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f_x(t_i^n, W_i^n)\Delta_i^n W = \int_0^t f_x(t, W(t))dW(t)$$

• Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} f_{xx}(t_i^n, W_i^n)\left((\Delta_i^n)^2 - \Delta_i^n t\right) = 0$$

στον L^2.

$$\mathbf{E}\left|\sum_{i=0}^{n-1} f_{xx}(t_i^n, W_i^n)\left((\Delta_i^n W)^2 - \Delta_i^n t\right)\right|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{E}\left|f_{xx}(t_i^n, W_i^n)\left((\Delta_i^n)^2 - \Delta_i^n t\right)\right|^2 (**)$$

όμως $|f_{xx}(t_i^n, W_i^n)| \leq K$ για κάθε t_i^n

$$(**) \leq K^2 \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{E}\left|(\Delta_i^n)^2 - \Delta_i^n t\right|^2 = 2K^2 \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n t)^2 = 2K^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^2}{n^2} = 2K^2 \frac{t^2}{n} \to 0$$

και άρα αποδείχθηκε η ζητούμενη σύγκλιση.
• έχουμε με όμοιο τρόπο όπως στα δύο πρώτα αθροίσματα

$$\lim_{n\to\infty} sup_i \left|f_{xx}(t_i^n, \widehat{W}_i^n) - f_{xx}(t_i^n, W_i^n)\right| = 0$$

επειδή $\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n W)^2 \to t$ καθώς $n \to \infty$ έτσι

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} \left(f_{xx}(t_i^n, \widehat{W}_i^n - f_{xx}(t_i^n, W_i^n)\right)(\Delta_i^n B)^2\right|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} sup_i \left| f_{xx}(t_i^n, \widehat{W}_i^n) - f_{xx}(t_i^n, W_i^n) \right| \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n W)^2 \longrightarrow 0$$

καθώς $n \longrightarrow \infty$
Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη υπό την προϋπόθεση ότι η f είναι φραγμένη, με φραγμένες μερικές παραγώγους. Τώρα μένει να δειχθεί χωρίς την προϋπόθεση αυτή.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ παίρνουμε μια λεία συνάρτηση $h_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ τέτοια ώστε $h_n(x) = 1$ για κάθε $x \in [-n, n]$ και $h_n(x) = 0$ για $x \in [-n, n]^c$. Έτσι

$$f_{n(t,x)} = h_n(x) f(t,x)$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος, και έχει φραγμένες μερικές παραγώγους, έτσι ισχύει ο τύπος του θεωρήματος $Ito(II)$ για την $f_n(t,x)$. Θεωρούμε την ακολουθία ενδεχομένων

$$A_n = \left\{ sup_{s\in[0,t]} |W(s)| < n \right\}$$

Έχουμε ότι $f(t,x) = f_n(t,x)$ για κάθε $s \in [0,t]$ και $x \in [-n,n]$, έτσι ο τύπος ικανοποιείται για την A_n. Μένει να δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1.$$

Αυτό από την ανισότητα $Doob \Rightarrow$

$$n^2(1-P(A_n)) = n^2 P\left\{ sup_{s\in[0,t]} |W(s)| \geq n \right\} \leq \mathbf{E}\left(sup_{s\in[0,t]} |W(s)| \right)^2 \leq 4\mathbf{E}|W(t)|^2 = 4t$$

και έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Σημείωση: Το θεώρημα 1.2.2 μπορεί να πάρει μια άλλη εύχρηστη μορφή.
Έστω $f(t,x) \in \mathbf{M}_t^2$, έστω $F(t,x)$ μια παράγουσα της $f(t,x)$ ως προς x.
Θεωρούμε ότι οι F_t, f_x είναι συνεχείς μερικές παράγωγοι.

$$\int_0^t f(s, W(s)) dW(s) = [F(s, W(s))]_0^t - \int_0^t \left(F_s(s, W(s)) + \frac{1}{2} f_x(s, W(s)) \right) ds$$

αποτελεί το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού του Ito. Με βάση αυτόν τον τύπο υπολογίζοντας ένα ολοκλήρωμα $Riemann$ καταλήγουμε στην εύρεση του

στοχαστικού ολοκληρώματος για την $f(.,.)$.
Όμοια για το τύπο Ito(I)) έχουμε

$$\int_0^t f(W(s))dW(s) = [F(s, W(s))]_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t f'(W(s))ds$$

Πρόταση 1.2.3 Έστω $f_t \in \mathbf{M}^2([0,T])$ με $0 \leq t \leq T$. Τότε το στοχαστικό ολοκλήρωμα Ito της f_t είναι μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη *martingale*.

Απόδειξη. Η $\int_0^t f(h)dW_h$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη από ισομετρία του *Ito*. Επίσης $\int_0^t f(h)dW_h$ είναι προσαρμοσμένη στην F_t από ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος. Θα δείξουμε ότι $\mathbf{E}[\int_0^t f(h)dW_h|F_s] = \int_0^s f(h)dW_h$ με $0 \leq s \leq t \leq T$ Έχουμε τώρα

$$\int_0^t f(h)dW_h = \int_0^s f(h)dW_h + \int_s^t f(h)dW_h$$

και $\int_s^t f(h)dW_h$ ανεξάρτητο από την F_s. Συνεπώς

$$\mathbf{E}\left[\int_s^t f(h)dW_h|F_s\right] = \mathbf{E}\left[\int_s^t f(h)dW_h\right] = 0$$

Άρα τελικά παίρνουμε

$$\mathbf{E}\left[\int_0^t f(h)dW_h|F_s\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^s f(h)dW_h + \int_s^t f(h)dW_h|F_s\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^s f(h)dW_h\right]$$

$$= \int_0^t f(h)dW_h$$

αφού η $\int_0^s f(h)dW_h$ είναι F_s-μετρήσιμη.
Άρα δείξαμε ότι είναι *martingale*. □

Ο τύπος του *Ito(II)* μπορεί να γραφτεί και για γενικότερες διαδικασίες *Ito* όχι κατά ανάγκη την κίνηση *Brown*, το παρακάτω θεώρημα είναι εντελώς αντίστοιχο του προηγούμενου θεωρήματος, και η απόδειξη με όμοιο τρόπο γιαυτό

και παραλείπετε.

Θεώρημα 1.2.4 (τύπος του Ito II*) Έστω X_t μια διαδικασία *Ito* που ικανοποιεί την εξίσωση $dX_t = udt + vdW_t$ και $g(t,x)) \in C^{1,2}\ [0,\infty) \times \mathbb{R}$. Τότε η διαδικασία $Y_t = g(t, X_t)$ είναι επίσης *Ito* και ισχύει

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2$$

κάνοντας χρήση των κανόνων $dt*dt = dt*dW_t = dW_t*dt = 0$ και $dW_t*dW_t = dt$ παίρνουμε την ισοδύναμη έκφραση (που θα χρησιμοποιούμε)

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \left[\frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + u(s,\omega)\frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2}u(s,\omega)^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s)\right] ds$$

$$+ \int_0^t u(s,\omega)\frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)dW_s$$

και σε διαφορική μορφή γράφεται

$$dg(t, X_t) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + u\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}u^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) dt + u\frac{\partial g}{\partial x}dW_t$$

Ο τύπος αυτός μετασχηματίζει μια διαδικασία *Ito* σε μια άλλη διαδικασία *Ito* κάτω από έναν μη-γραμμικό μετασχηματισμό $g(.,.)$.
(Η απόδειξη ουσιαστικά έχει δοθεί, πιο συγκεκριμένα μπορεί να την δει κανείς στο [7])

Παραδείγματα ολοκληρωμάτων

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t W_s^n dW_s$$

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε τη σημείωση του τύπου του $Ito-(II)$.
για $.f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(t,x) = x^n$ η $F(t,x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ είναι μια παράγουσα ως προς x. Υπολογίζουμε τα παρακάτω που έχουμε στην εξίσωση του τύπου.
$F_t(t,x) = 0$, $f_x(t,x) = nx^{n-1}$
έτσι αντικαθιστώντας στον τύπο του Ito για $x = W_s$ έχουμε

$$\int_0^t W_s^n dW_s = \frac{W_t^{n+1}}{n+1} - 0 - \int_0^t 0 + \frac{1}{2} n W_s^{n-1} ds$$

Άρα

$$\int_0^t W_s^n dW_s = \frac{W_t^{n+1}}{n+1} - \frac{n}{2}\int_0^t W_s^{n-1} ds$$

Παράδειγμα 2: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t e^{W_s} dW_s$$

Λύση: έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(t,x) = e^x$, μια παράγουσα ως προς x είναι η $F(t,x) = e^x$
έχουμε $F_t(t,x) = 0,\ f_x(t,x) = e^x$
Αντικαθιστώντας στον τύπο του $Ito-(II)$

$$\int_0^t e^{W_s} dW_s = e^{W_t} - e^{W_0} - \int_0^t 0 + \frac{1}{2} e^{W_s} ds = e^{W_t} - 1 - \int_0^t \frac{1}{2} e^{W_s} ds$$

$$\int_0^t e^{W_s} dW_s = e^{W_s} - 1 - \frac{1}{2}\int_0^t e^{W_s} ds$$

Παράδειγμα 3: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t s dW_s$$

Λύση: Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(t,x) = t$
μια παράγουσα ως προς x είναι η $F(t,x) = tx$.
Έχουμε

$$F_t(t,x) = x, f_x(t,x) = 0$$

Αντικαθιστούμε στον τύπο του $Ito - (II)$ για $x = W_s$

$$\int_0^t s dW_s = [F(s, W_s)]_0^t - \int_0^t W_s + \frac{1}{2} 0 ds = tW_t - \int_0^t W_s ds$$

Συνεπώς

$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s ds$$

Κεφάλαιο 2

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Γενικά περί στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων

Στην προσπάθεια μας να μοντελοποιήσουμε κάποιο συστήμα ή φαινόμενο το οποίο περιέχει κάποιου είδος τυχαιότητας , το μοντέλο στο οποίο καταλήγουμε περιγράφεται από μια στοχαστική διαφορική εξίσωση. Από τη λύση της εξίσωσης αυτής βρίσκουμε μια εξίσωση που περιγράφει το σύστημα, έτσι προβλέπουμε την μελοντική εξέλιξη του συστήματος-φαινομένου. Γιαυτό τον λόγο ψάχνουμε τρόπους εύρεσης λύσης μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης.

Ορισμός 2.1.1 Μια στοχαστική διαφορική εξίσωση είναι μια εξίσωση της μορφής

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

με $X_0 = x_0$ όπου W_t μια m-διάστατη κίνηση $Brown$, $b : [0, t] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και $\sigma : [0, t] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις και $X_t \in \mathbb{R}^n$.
Στην πραγματικότητα η παραπάνω εξίσωση είναι απλά ένας συμβολισμός της ολοκληρωτικής εξίσωσης.

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_t$$

Μια στοχαστική διαφορική εξίσωση έχει λύση αν υπάρχει διαδικασία Ito, X_t η οποία την ικανοποιεί. Άν οι b, σ είναι ανεξάρτητες του χρόνου (είναι συναρτήσεις που δεν περιέχουν ρητά τον χρότο) δηλαδή της μορφής $b(X_t), \sigma(X_t)$ τότε οι λύσεις των εξισώσεων αυτής της μορφής λέγονται **διαδικασίες διάχυσης**.
Κατασκευάζουμε διαδικασίες διάχυσης για την επίλυση στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

Έχοντας ως δεδομένα τους συντελεστές της εξίσωσης $b(.,.), \sigma(.,.)$, την κίνηση W_t και τη διήθηση F_t και ως ζητούμενο τον καθορισμό μιας διαδικασίας Ito X_t που να ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση. Οι λύσεις που βρίσκονται με αυτόν το τρόπο ονομάζονται **ισχυρές λύσεις**.
Άν τα δεδομένα είναι μόνο οι συναρτήσεις $b(.,.), \sigma(.,.)$ και ζητούμενα η W_t , η διήθηση F_t και μια διαδικασία Ito X_t που να ικανοποιούν τη σχέση, τότε λέμε ότι έχουμε μια **ασθενή λύση**.
Μια ισχυρή λύση προφανώς είναι και ασθενής λύση.

Θα δούμε τώρα τι παριστάνουν οι συναρτήσεις $b(.,.)$ και $\sigma(.,.)$. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση γράφεται ισοδύναμα σε ολοκληρωτική μορφή

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_t$$

παίρνουμε δύο φορές την δεσμευμένη στην F_t μέση τιμή στην εξίσωση αυτή για τις χρονικές στιγμές t και $t+h$ αντίστοιχα. Αφαιρώντας τη μία από την άλλη καταλήγουμε στο

$$E[X_{t+h} - X_t|F_t] = E\left[\int_t^{t+h} b(s, X_s)ds|F_t\right] + E\left[\int_t^{t+h} \sigma(s, X_s)dW_s|F_t\right]$$

όπου το 2ο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 0 όπως έχουμε δει, έτσι

$$= \int_t^{t+h} E[b(s, X_s)|F_s]ds \approx hb(x, X_t)$$

για μικρά h δηλαδή η $b(t, X_t)$ δίνει τον ρυθμό που μεταβάλλεται η μέση τιμή για μικρούς χρόνους δοσμένου του παρελθόντος F_t.

Με αντίστοιχο τρόπο θα δώσουμε μια ερμηνεία και για την σ(.,.). Έχουμε

$$Var(X_{t+h} - X_t|F_t) = E([X_{t+h} - X_t - E(X_{t+h} - X_t|F_t)]^2|F_t)$$

$$= E\left(\left\{\int_t^{t+h}(b(s,X_s) - E(b(s,X_s)|F_s))ds + \int_t^{t+h}\sigma(s,X_s)dW_s\right\}^2|F_t\right)$$

$$= k(h) + E\left(\left\{\int_t^{t+h}\sigma(s,X_s)dW_s\right\}^2|F_s\right) = E\left(\int_t^{t+h}\sigma^2(s,X_s)ds|F_s\right) + k(h)$$

όπου $k(h)$ συνάρτηση τέτοια ώστε $k(h)/h \to 0$ καθώς $h \to 0$

$$\approx h\sigma^2(t,X_t).$$

και άρα η διασπορά για μικρές χρονικές μεταβολές δοσμένου του παρελθόντος F_t είναι ανάλογη με την $\sigma(t,X_t)$.

Θεώρημα 2.1.1 Η στοχαστική διαφορική εξίσωση όπως ορίστηκε (ορισμός 3.1.1) έχει *μοναδική λύση*, αν ικανοποιεί τις παρακάτω δύο συνθήκες:

$$i)|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$$

για κάθε t, x, y, για κάποιο $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$ (**Συνέχεια Lipschitz**).

$$ii)|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq C(1+|x|^2)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, για κάποιο $C \in \mathbb{R}$ με $C > 0$ (**Συνθήκη γραμμικής αύξησης**). Η μοναδική αυτή λύση είναι **ισχυρή λύση** (Απόδειξη [6]).

Η λύση μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, της οποίας οι συντελεστές δεν περιέχουν ρητά τον χρόνο, δηλαδή συντελεστές της μορφής $b(X_t), \sigma(X_t)$ ικανοποιεί την ιδιότητα $Markov$ δηλαδή αν X_t μια λύση και f συνεχής και φραγμένη συνάρτηση , για κάθε $t, s \geq 0$ ισχύει

$$E_x[f(X_{t+s})|F_s] = E_{X_s}[f(X_t)]$$

ο οποίος είναι ένας ισοδύναμος ορισμός της ιδιότητας $Markov$ με αυτόν που δόθηκε στο πρώτο κεφάλαιο.

Η ισότητα ισχύει ακόμη και αν αντικατασταθεί ο χρόνος t από έναν χρόνο στάσης. Ικανοποιεί δηλαδή και την ισχυρή ιδιότητα $Markov$.

Άν X_t μια d-διάστατη στοχαστική διαδικασία προσαρμοσμένη στην F_t λέγεται διαδικασία $Markov$ αν για κάθε $A \in B(\mathbb{R}^d)$ και για $0 \leq s \leq t$

$$P(X_t \in A|F_s) = P(X_t \in A|X_s)$$

και ισχύει η ισοδύναμη ιδιότητα:
για κάθε $Borel$ μετρήσιμη $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ έχουμε

$$E[f(X_t)|F_s] = E[f(X_t)|X_s]$$

συμβολίζουμε $E_{s,X_s}[f(X_t)] := E[f(X_t)|X_s]$ και χρησιμοποιώντας την πιθανότητα μετάβασης

$$p(s, x; t, A) := P(X_t \in A|F_s)$$

της διαδικασίας X_t ορίζουμε την συνάρτηση

$$E_{s,x}[f(X_t)] := \int_{R^d} f(y)p(s, x; t, y)dy$$

Θεώρημα 2.1.2(Ιδιότητα Markov) Έστω X_t η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

με τους συντελεστές να πληρούν τις συνθήκες $Lipschitz$ και την συνθήκη γραμμικής αύξησης. Τότε X_t είναι μια διαδικασία $Markov$ με πιθανότητα μετάβασης που ορίζεται από την σχέση

$$p(s, x; t, A) = P(X_t^{(s,x)} \in A)$$

όπου $X_t^{(s,x)}$ είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$X_t^{(s,x)} = x + \int_s^t b(r, X_r^{(s,x)})dr + \int_s^t \sigma(r, X_r^{(s,x)})dW_r$$

για $t \geq s$ δηλαδή η $X_t^{(s,t)}$ είναι η λύση της αρχικής στοχαστικής διαφορικής που ξεκινάει τη χρονική στιγμή s στην θέση x.

Απόδειξη. Έστω $G_s = \sigma(W_r - W_s : r \geq s)$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από τις μεταβολές της κίνησης $Brown$ μεταξύ των χρονικών στιγμών s, r επειδή η κίνηση $Brown$ έχει ανεξάρτητες μεταβολές, αυτή η σ-άλγεβρα θα είναι ανεξάρτητη από την φυσική σ-άλγεβρα που παράγει η κίνηση $Brown$, δηλαδή από την $F_s = \sigma(W_r, r \leq s)$ Από ορισμό της $X_t^{(s,x)}$ βλέπουμαι ότι είναι G_s-μετρήσιμη, και άρα ανεξάρτητη απο την F_s. Η X_t όμως ικανοποιεί την

$$X_t = X_s + \int_s^t b(r, X_r)dr + \int_s^t \sigma(r, X_r)dW_r$$

δηλαδή της δοσμένης στοχαστικής διαφορικής με αρχική τιμή $X_s = x$ την αρχική χρονική στιγμή s. Αυτή η εξίσωση είναι ίδια με αυτήν της $X_t^{(s,x)}$ και άρα λόγω μοναδικότητας της λύσης θα έχουμε ότι $X_t = X_t^{(s,x)}$ για $s \leq t$. Έστω $A \in B(\Re^n)$ θέτουμε $h(x, \omega) = \mathbf{1}_A(X_t^{(s,x)})$, η $h(.,.)$ είναι φραγμένη συνάρτηση, μετρήσιμη συνάρτηση του x ανεξάρτητη της F_s αφού και η $X_t^{(s,x)}$ είναι, θα δείξουμε ότι η για κάθε F_s-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή, η X_s είναι μια τέτοια τυχαία μεταβλητή, οτι ισχύει

$$E[h(X_s, \omega)|F_s] = E[h(X_s, \omega)]$$

αν η $h(x, \omega)$ είναι απλή συνάρτηση μορφής

$$h(x, \omega) = \sum_{i=1}^{k} u_i(x)v_i(\omega)$$

όπου $v_i(\omega)$ τυχαίες μεταβλητές, προφανώς ανεξάρτητες της F_s από ορισμό της $h(.,.)$, έτσι έχουμε

$$E[h(x, \omega)] = \sum_{i=1}^{k} u_i(x)E[v_i(\omega)]$$

για κάθε $A \in F_s$ έχουμε

$$E[h(X_s, \omega)\mathbf{1}_A] = E\left[\sum_{i=1}^{k} u_i(X_s)v_i(\omega)\mathbf{1}_A\right] = \sum_{i=1}^{k} E[u_i(X_s)\mathbf{1}_A]E[v_i(\omega)]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{k} u_i(X_s)E[v_i(\omega)]\mathbf{1}_A\right] = E[E[h(X_s, \omega)]\mathbf{1}_A]$$

και άρα καταλήγουμε στο

$$E[h(X_s,\omega)|F_s] = E[h(X_s,\omega)]$$

Άρα η σχέση ισχύει για h απλές συναρτήσεις, όμως κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $h(.,.)$ μπορεί να προσεγγιστεί απο μια ακολουθία τυχαίων απλών συναρτήσεων. Άρα θα ισχύει αυτό που δείξαμε για κάθε φραγμένη μετρήσιμη τυχαία συνάρτηση του x.
Έχουμε τώρα $P(X_t \in A|F_s) = E[\mathbf{1}_A(X_t^{(s,X_s)})|F_s] = E[\mathbf{1}_A(X_t^{(s,x)})]|_{x=X_s} = p(s,x;t,A)|_{x=X_s} = p(s,X_s;t,A)$.

□

Θεώρημα 2.1.3 (Η ισχυρή ιδιότητα Markov) Έστω X_t η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t$$

με συντελεστές που ικανοποιούν τις συνθήκες γραμμικής αύξησης και είναι ομοιόμορφα *Lipschitz* δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις

$$|b(t,x) - b(t,y)|^2 \leq C|x-y|^2$$

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq C|x-y|^2$$

$$|b(t,x)|^2 \leq D(1+|x|^2)$$

$$\sigma(t,x)|^2 \leq D(1+|x|^2)$$

Τότε η στοχαστική διαδικασία X_t έχει ισχυρή ιδιότητα $Markov$. (Απόδειξη[2])

Το θεώρημα λέει πως αν έχουμε μια διάχυση X_t ως λύση της στοχαστικές διαφορικής με τους παραπάνω περιορισμούς, για κάθε τυχαία χρονική στιγμή T που επιλέγεται η διαδικασία εξαρτάται από την την τιμή της X_T τη χρονική στιγμή T και είναι ανεξάρτητη από το τι έγινε πριν. Αυτό είναι χρήσιμο αφού, μπορούμε να προβλέψουμε την ροή μιας διάχυσης χωρίς να ξέρουμε το παρελθόν της.

Απειροστικός γεννήτορας μιας διαδικασίας διάχυσης

Έστω

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

μια στοχαστική διαφορική εξίσωση και κατάλληλη f και σταθερές ώστε να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος (Τύπος του $Ito\ III$) όπως δείξαμε ισχύει

$$f(X_t, t) = f(X_s, s) + \int_s^t F(X_u, u)du + \int_s^t \nabla^T f(X_u, u)\sigma(X_u, u)dW_u$$

όπου

$$F(X_u, u) = f_t(X_u, u) + \nabla^T f(X_u, u)b(X_u, u) + \frac{1}{2}Tr(\sigma^T(f_{x_i x_j})\sigma)$$

παίρνουμε δεσμευμένη μέση τιμή πάνω στο X_s και στα δύο μέλη της πρώτης εξίσωσεις. Η δεσμευμένη μέση τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος είναι 0. Έτσι παίρνουμε

$$E[f(X_t, t)|X_s] = f(X_s, s) + E\left[\int_s^t F(X_u, u)du|X_s\right]$$

$$\lim_{t\to s^+} E(f(X_t, t) - f(X_s, s)|X_s) = E\left[\lim_{t\to s^+}\int_{u=s}^{u=t} F(X_u, u)du|X_s\right]$$

$\exists\ \widehat{t} \in [t, s]$ τέτοιο ώστε

$$F(X_{\widehat{t}}, \widehat{t})(t - s) = \int_s^t F(X_u, u)du$$

για

$$\begin{cases} t = s + \Delta s \\ s \leq \widehat{t} \leq s + \Delta s \end{cases}$$

έχουμε

$$\int_s^{s+\Delta s} F(X_u, u)du = F(X_s, s)\Delta s$$

όταν $t \to s \Rightarrow \Delta s \to 0$ έτσι

$$\lim_{t\to s^+} E(f(X_t,t) - f(X_s,s)|X_s) = F(X_s,s) \lim_{ds\to 0} \Delta s$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to s^+} E(f(X_t,t) - f(X_s,s)|X_s) = F(X_s,s) \lim_{t\to s^+} (t-s)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to s^+} \frac{E[f(X_t,t)|X_s] - f(X_s,s)}{t-s} = F(X_s,s)$$

Ορισμός 2.2.1 Έστω μια διάχυση X_t που ξεκινάει την χρονική στιγμή t_0 στο χωρικό σημείο x_0, συμβολίζουμε με $X_t^{(t_0,x_0)}$ αυτή την διαδικασία. Ο **απειροστικός γεννήτορας** A (infinitesimal generator) της διάχυσης X_t ορίζεται ως

$$Af(t_0,x_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{E[f(X_t^{(t_0,x_0)})] - f(t_0,x_0)}{t-t_0}$$

$t_0 \in \mathbb{R}_+, x_0 \in \mathbb{R}^n$
Στην πιο απλή περίπτωση που έχουμε χρόνικά ομογενή διάχυση δηλαδή στοχαστική διαφορική εξίσωση μορφής $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ και $f(X_t,t) = f(X_t)$ $t_0 = 0$, $X_{t_0} = X_0 = 0$
Τότε ο απειροστικός γεννήτορας απλοποιείται στη μορφή

$$A(f(x)) = \lim_{t\to 0} \frac{E_x[f(X_t)] - f(x)}{t}, x \in \mathbb{R}^n$$

Το επόμενο θεώρημα δίνει τον απειροστό γεννήτορα μιας διαδικασίας διάχυσης ως εξίσωση των συντελεστών της στοχαστικής διαφορικής.

Θεώρημα 2.2.1 Έστω $X_t \in \mathbb{R}^n$ μια χρονικά ομογενή διάχυση *Ito* που είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

όπου W $m-$διάστατη διαδικασία $Wiener$. Τότε

$$A(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Απόδειξη. Από τον τύπο του $Ito-(III)$ για την f για την χρονικά ομογενή στοχαστική διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$f(X_t) = f(x)+\int_0^t [\nabla^T f(X_s)b(X_s)+\frac{1}{2}Tr(\sigma^T(X_s)f_{x_ix_j}(X_s)\sigma(X_s))]ds+\int_0^t \nabla^T f\sigma dW_s$$

$$\Rightarrow E_x[f(X_t)] = f(x)+E_x\left\{\int_0^t [\nabla^T f(X_s)b(X_s) + \frac{1}{2}Tr(\sigma^T(X_s)f_{x_ix_j}(X_s)\sigma(X_s))]ds\right\}$$

$$\lim_{t\to 0^+} E_x[f(X_t)] = f(x)+E_x\left\{\lim_{t\to 0^+}\int_0^t [\nabla^T f(X_s)b(X_s) + \frac{1}{2}Tr(\sigma^T(X_s)f_{x_ix_j}(X_s)\sigma(X_s))]ds\right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+} E_x[f(X_t)] = f(x)+[\lim_{t\to 0^+} \nabla^T f(X_s)b(X_s)+\frac{1}{2}Tr(\sigma^T(X_s)f_{x_ix_j}(X_s)\sigma(X_s))]\int_0^t ds$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+} E_x[f(X_t)] = f(x) + [\nabla^T f(X_s)b(X_s) + \frac{1}{2}Tr(\sigma^T(X_s)f_{x_ix_j}(X_s)\sigma(X_s))]$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}[E_x[f(X_t)] - f(x)] = \nabla^T f(X_s)b(X_s) + \frac{1}{2}Tr(\sigma^T(X_s)f_{x_ix_j}(X_s)\sigma(X_s))$$

$$= \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\Rightarrow A(f(x)) = \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

□

Ο τύπος του $Ito-(III)$ γράφεται και στην μορφή

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t (Af)(X_s)ds + \int_0^t \nabla^T f(X_s)\sigma dW_s$$

Ο απειροστικός γεννήτορας μιας κίνησης Brown

Υπολογισμός του απειροστικού γεννήτορας μιας κίνησης $Brown$.
Η κίνηση $Brown$ είναι λύση της χρονικά ομογενούς στοχαστικής διαδικασίας

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

με $X_t = W_t \Rightarrow b \equiv 0$,$\sigma \equiv 1$ τότε οποιαδήποτε συνάρτηση της X_t της μορφής $f(X_t, t) \in C^{1,2}$ με τον τύπο $Ito - (II*)$ γράφεται

$$df(X_t, t) = [f_t(X_t, t) + b(X_t)f_x(X_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx}(X_t, t)]dt + \sigma f_x(X_t, t)dW_t$$

και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γνωστές συνθήκες

$$df(W_t, t) = \frac{1}{2}f_{xx}(W_t, t)dt + f_x(W_t)dW_t$$

από όπου προκύπτει ο απειροστικός γεννήτορας

$$A = \frac{1}{2}\partial_{xx}$$

Υπολογισμός του απειροστικού γεννήτορα για μια m-διάστατη κίνηση $Brown$
Έστω η χρονικά ομογενής στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

με $b(X_t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\sigma(X_t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$,$dW_t \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Από την πολυδιάστατη μορφή του Ito για κάθε $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}^m \times [0, \infty))$ έχουμε

$$df(X_t, t) = [f_t + \sum_{i=1}^{n} b_i f_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\sigma\sigma^T)_{ij} f_{ij}]dt + \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ik} f_i\right) dW_t^k$$

Άν $X_t = \begin{pmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ W_t^n \end{pmatrix} = W_t \Rightarrow m = n$ και $b = 0_n$, $\sigma = (\delta_{ij})$, $\sigma\sigma^T = (\delta_{ij})$.

Συνεπώς, αντικαθιστώντας έχουμε

$$df(W_t,t) = [f_t(W_t,t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}f_{ij}]dt + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_{ik}f_i\right)dW_t^k$$

όμως

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}f_{ij} = \sum_{i=1}^{n}f_{ii}$$

και

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_{i=k}f_i = \sum_{k=1}^{n}f_k$$

$$\Rightarrow df(W_t,t) = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}f_{ii}\right)dt + \sum_{k=1}^{n}f_k dW_t^k$$

Άρα ο απειροστικός γεννήτορας της m-διάστατης κίνησης $Brown$ είναι ο

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\partial_{x_ix_i} = \frac{1}{2}\nabla^2$$

Τύπος Feynman-Kac(I)

Με τον τύπο των Feynman-Kac βρίσκουμε τη γενική λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων(παραβολικών προβλημάτων) με διαφορετικό τρόπο (πολύ σύντομο) από τους κλασικούς τρόπους λύσης του.
Θεωρούμε τον τελεστή

$$A := \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Θεώρημα 2.4.1 Έστω το ακόλουθο πρόβλημα *Cauchy* ή πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Au + c(x)u \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

Με $u(t,x) \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$, $c(x)$ συνεχής και φραγμένη, $f \in C_0^2$, και A ο παραπάνω τελεστής.
Η λύση του παραπάνω προβλήματος *Cauchy* δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = E_x\left[f(X_t)exp\left(\int_0^t c(X_s)ds\right)\right]$$

Δηλαδή βρίσκουμε διαχύσεις $X_t(\omega_i)$ που αντιστοιχούν στον τελεστή A και υπολογίζουμε την παραπάνω μέση τιμή της παραπάνω ποσότητας για τις διαχύσεις αυτές.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει για $c = 0$
Η απόδειξη θα γίνει σε δύο μέρη. Στο πρώτο θα δείξουμε ότι αν μια συνάρτηση ικανοποιεί το ΠΑΤ τότε μπορεί να αναπαρασταθεί από τον τύπο με τη μέση. Στο δεύτερο μέρος θα δείξουμε ότι αν μια συνάρτηση ικανοποιεί τον τύπο με την μέση τιμή τότε αναγκαστικά η συνάρτηση είναι λύση του ΠΑΤ.

(I) Θα δείξουμε ότι <u>αν</u> η $u(t,x)$ είναι λύση του πρόβληματος αρχικών τιμών για $c = 0$ <u>τότε</u> $u(t,x) = E_x[f(X_t)]$ που είναι ο παραπάνω τύπος για $c = 0$
Θεωρούμε ένα σταθερό t_0 και ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία

$$M_t = u(t_0 - t, X_t)$$

Από την διαφορική μορφή του τύπου του $Ito(III)$ παίρνουμε

$$dM_t = \left\{ M_t + \nabla M_t b + \frac{1}{2} Tr(\sigma^T M_{ij} \sigma) \right\} dt + \nabla M_t \sigma dW_t$$

εδώ έχουμε ∇ αντί ∇^T στον τύπο του $Ito(III)$ διότι η M_t είναι πίνακας γραμμής και όχι στήλης όπως στο θεώρημα.
Αντικαθιστώντας $M_t = u(t_0 - t, X_t)$ έχουμε

$$dM_t = \left(-\frac{\partial u(t_0 - t, X_t)}{\partial t} + Au(t_0 - t, X_t) \right) dt + \nabla(u) \sigma dW_t$$

το $" - "$ βγήκε από την μερική παραγώγιση του $u(t_0 - t, X_t)$ αντί του $u(t, X_t)$.
Το

$$-\frac{\partial u(t_0 - t, X_t)}{\partial t} + Au(t_0 - t, X_t)$$

ικανοποιεί την αρχική εξίσωση, άρα ισούται με 0.
Έτσι καταλλήγουμε στον τύπο

$$dM_t = \nabla(u) \sigma dW_t$$

Άρα η M_t ολοκληρώνοντας και στα 2 μέλη βλέπουμε ότι μπορεί να γραφτεί σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα, συγκεκριμένα το

$$\int_0^t \nabla(u) \sigma dW_t$$

και άρα είναι μια $martingale$.
Έτσι

$$E_x[M_{t_0}] = E_x[M_0]$$

έχουμε

$$E_x[M_{t_0}] = E_x[u(0, X_{t_0})] = E_x[f(X_{t_0})]$$

όπου $f(x)$ η σύναρτηση αρχικής κατανομής. Επίσης

$$E_x[M_0] = E_x[u(t_0, X_0)] = u(t_0, x)$$

αφού η διάχυση X_t ξεκινάει στο σημείο $X_0 = x$.
Έτσι από τις ισότητες παίρνουμε

$$E_x[f(X_{t_0})] = u(t_0, x)$$

και το t_0 ήταν αυθαίρετο. Άρα θα ισχύει για κάθε t, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

(ΙΙ) Υποθέτουμε τώρα ότι $u(t,x) = E_x[f(X_t)]$ θα δείξουμε ότι η u είναι λύση του ΠΑΤ για $c = 0$.
Ορίζουμε την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$M_t = u(T-t, X_t)$$

για T σταθερό και $t < T$. Θα δείξουμε ότι η M_t είναι $martingale$.

$$E[f(X_t)|F_t] = E_{X_t}[f(X_{T-t})] = u(T-t, X_t) = M_t$$

η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγο της ιδότητας $Markov$ της διαδικασίας διάχυσης X_t.

$$E[M_t|F_s] = E[E[f(X_t)|F_t]|F_s] = E[f(X_T)|F_s] = M_s$$

και άρα M_t είναι $martingale$.
Άν εφαρμόσουμε τον τύπο του $Ito(III)$ ακριβώς όπως και στο (Ι) μέρος θα έχουμε πάλι

$$dM_t = d(u(T-t, X_t)) = \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + Au\right) dt + \nabla(u)\sigma dW_t$$

όμως αφού η M_t είναι $martingale$ το τμήμα τάσης της εξίσωσης πρέπει να ισούται με 0. Δηλαδή

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au$$

Το ότι ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $u(0,x) = f(x)$ φαίνεται από τον τρόπο κατασκευής της συνάρτησης $u(t,x)$.
Έτσι τελικά η $u(t,x)$ ικανοποιεί το αρχικό πρόβλημα αρχικών τιμών. □

Τύπος Feynman-Kac(II)

Πολλές φορές έχουμε ως δεδομένο, την λύση του προβλήματος ενός προβλήματος $Cauchy$ για κάθε x για ένα δεδομένο T, και θέλουμε να βρούμε την λύση για έναν ενδιάμενο χρόνο $t < T$.
Τέτοια προβλήματα κυρίως εμφανίζονται στα χρηματοοικονομικά σε προβλήματα αποτίμησης παραγώγων συμβολαίων των οποίων η αξία είναι γνωστή την στιγμή της λήξης του, και θέλουμε να γνωρίζουμε την αξία που έχουν κάποια χρονική στιγμή πριν.
Όπως πριν θεωρούμε τον τελεστή

$$A := \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Θεώρημα 2.5.1 Έστω το ακόλουθω πρόβλημα $Cauchy$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial t} = Au + c(x)u \\ u(T,x) = f(x) \end{cases}$$

με $u(t,x) \in C^{1,2}$, c συνεχής και φραγμένη, και $f \in C_0^2$
Η γενική λύση του προβλήματος δίνεται από την

$$u(t,x) = E_{t,x}\left[f(X_t)\exp\left(\int_t^T c(X_s)ds\right)\right]$$

(Η απόδειξη για $c = 0$ γίνεται όπως για τον τύπο $Feynman - Kac(I)$, χρησιμοποιώντας τον τύπο $Ito(III)$ για την $M_t = u(t, X_t)$. (Πιο λεπτομερειακά[6]).

Κεφάλαιο 3

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Η γεωμετρική κίνηση Brown

Θεωρούμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε την γενική λύση και να προσδιορίσουμε την κατανομή της.
Η παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση αν X_t είναι η τιμή μιας μετοχής τη χρονική στιγμή t περιγράφει την δυναμική της μετοχής στο χρόνο. Ο συντελεστής μ είναι το $drift$(τάση) και ο συντελεστής σ είναι η διακύμανση της τιμής της μετοχής.

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = \int_0^t \mu dt + \int_0^t \sigma dW_s = \mu t + \sigma W_t$$

Παίρνουμε την στοχαστική διαδικασία $Z_t = ln(X_t)$. Από τον τύπο του $Ito - (II*)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&dZ_t = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2}\frac{1}{X_t^2}(dX_t)^2 \\
&\frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2X_t^2}\sigma^2 X_t^2 dt = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\
&\Rightarrow \int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = \int_0^t dZ_s - \int_0^t \frac{1}{2}\sigma^2 ds = Z_t + \frac{1}{2}\sigma^2 t \\
&\Rightarrow \int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = ln(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t
\end{aligned}$$

όμως

$$\int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = \mu t + \sigma W_t$$

συνεπώς

$$\ln(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t = \mu t + \sigma W_t$$

και έτσι καταλλήγουμε στην γενική λύση

$$X_t = x \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right]$$

ή

$$X_t = e^{\ln(x) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

Παρατηρούμε ότι για $\sigma = 0$ η γενική λύση θα έχει την μορφή $X_t = x\exp(\mu t)$ αυτό που περιμέναμε από την αρχική εξίσωση $dX_t = \mu X_t dt$ που είναι μια σ.δ.ε χωριζόμενων μεταβλητών. Άρα συμφωνεί με τα αποτελέσματα μας στην ειδική περίπτωση που γνωρίζουμε.
Ενώ από την γενική λύση για την κατανομή της

$$X_t \sim LN(\cdot | \ln(x) + (\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t)$$

Θα κάνουμε ακόμη μια διερεύνηση. Θα δούμε πως συμπεριφέρεται η δεσμευμένη μέση τιμή $E[X_t|F_s]$

$$E[X_t|F_s] = xe^{(\mu-\sigma^2/2)t}E[e^{\sigma}W_t|F_s] = xe^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_s}E[e^{\sigma(W_t-W_s)}|F_s]$$
$$= xe^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_s}E[e^{\sigma(W_t-W_s)}] = xe^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_s}E[e^{\sigma W_{t-s}}]$$
$$= xe^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_s}e^{0\sigma+(t-s)\sigma^2/2} = xe^{\mu t+\sigma W_s-s\sigma^2/2} = xe^{(\mu-\sigma^2/2)s+\sigma W_s}e^{\mu(t-s)}$$

$$\Rightarrow E[X_t|F_s] = X_s e^{\mu(t-s)}$$

προφανώς $t-s>0$

$$\Rightarrow E[X_t|F_s]\begin{cases} \geq X_s, \alpha\nu(\mu\geq 0)(submartingale) \\ \leq X_s, \alpha\nu(\mu\leq 0)(supermartingale) \\ = X_s, \alpha\nu(\mu = 0)(martingale) \end{cases}$$

Η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

Θεωρούμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = \alpha(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$$

με $\alpha, \mu, \sigma > 0$ και $X_0 = x$.
Η παραπάνω εξίσωση αρχικά χρησιμοποιήθηκε απο τους φυσικούς Ornstein-Uhlenbeck για να μελετήσουν την κίνηση αερίων. Πλέον η εξίσωση χρησιμοποιείται συχνά σε ορισμένα μοντέλα επιτοκίων στα χρηματοοικομικά.

Έστω η στοχαστική διαδικασία $Y_t = F(t, X_t) = e^{\alpha t}X_t$, από τον τύπο του $Ito-(II*)$

$$\Rightarrow d(e^{\alpha t}X_t) = (e^{\alpha t}X_t + \alpha e^{\alpha t}(\mu - X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 0)dt + \sigma e^{\alpha t}dW_t$$

$$\Rightarrow d(e^{\alpha t}X_t) = \alpha e^{\alpha t}\mu dt + \sigma e^{\alpha t}dW_t$$

$$\Rightarrow \int_0^t d(e^{\alpha u} X_u) = \int_0^t \alpha e^{\alpha u} \mu du + \int_0^t \sigma e^{\alpha u} dW_u$$

$$\Rightarrow e^{\alpha t} X_t - x = \mu(e^{\alpha t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\alpha u} dW_u$$

$$\Rightarrow X_t = \mu + (x - \mu)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} dW_u$$

Ornstein-Uhlenbeck

$$E[X_t] = \mu + (x - \mu)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} E\left[\int_0^t e^{\alpha u} dW_u\right]$$

έστω $Z_t = \int_0^t e^{\alpha u} dW_u$. Η διαδικασία Z_t είναι *martingale* Έτσι

$$E[Z_t | F_s] = Z_s \Rightarrow E[Z_t] = E[Z_s]$$

για κάθε $s \in [0, t]$, άρα και για $s = 0$ όπου

$$E[Z_s] = 0 \Rightarrow E[Z_t] = 0$$

και συνεπώς έχουμε

$$E[X_t] = \mu + (x - \mu)e^{-\alpha t} \to \mu$$

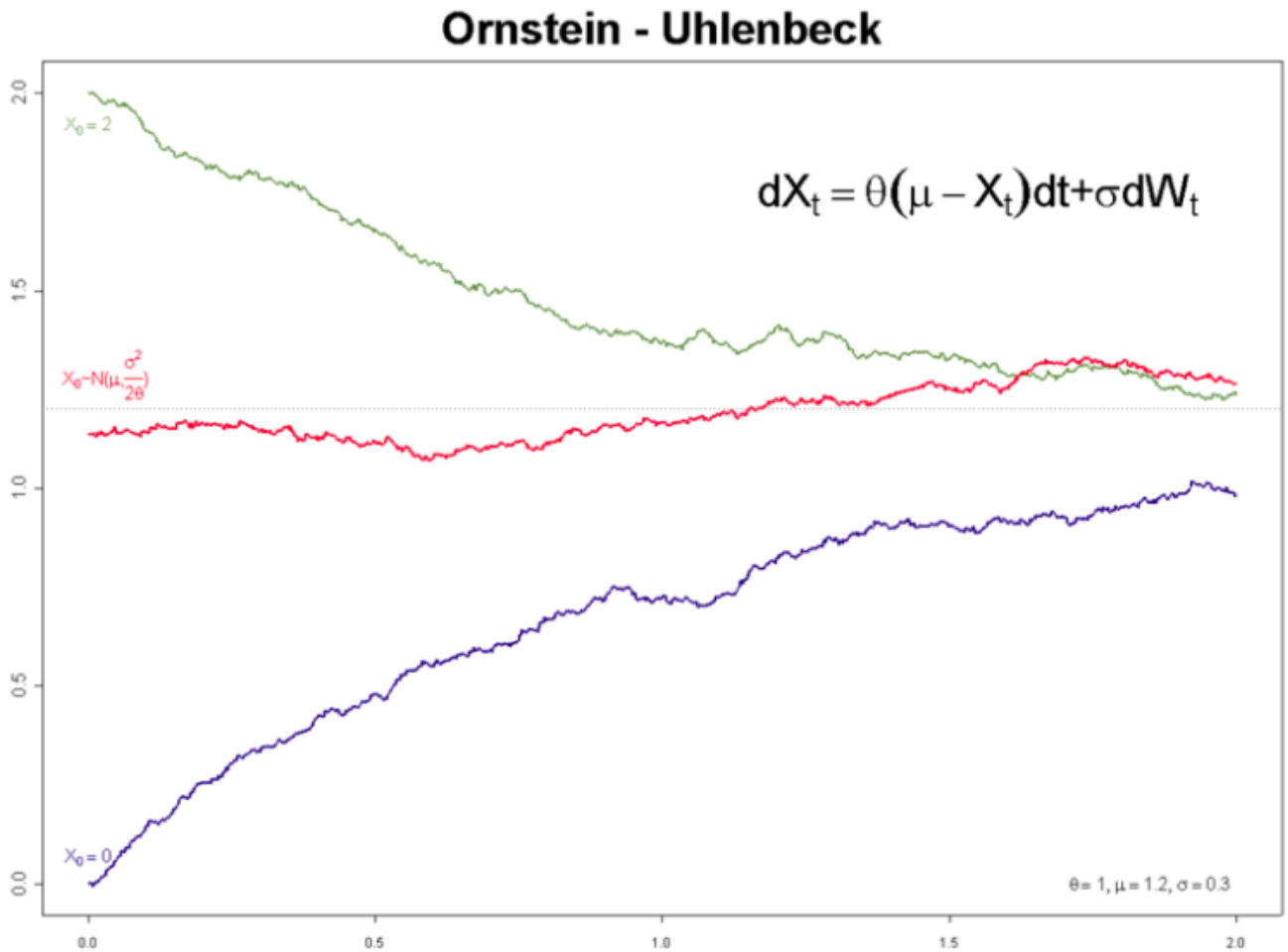
καθώς $t \to \infty$
υπολογισμός της κατανομής της διάχυσης X_t

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} e^{\alpha t_i} \Delta_i W \sim \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} e^{\alpha t_i} N(.|0, \Delta_i t) \sim \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} N(.|0, e^{2\alpha t_i} \Delta_i t)$$

$$\sim N\left(.|0, \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} e^{2\alpha t_i} \Delta_i t\right) = N\left(.|0, \int_0^t e^{2\alpha u} du\right) = N\left(.|0, \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow X_t \sim N\left(.|\mu + (x - \mu)e^{-\alpha t}, \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\right) \to N\left(.|\mu, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$$

καθώς $t \to \infty$. Άρα για μεγάλους χρόνους η κατανομή της X_t είναι κανονική με παραμέτρους $\mu, \sigma^2/2\alpha$.



https://en.wikipedia.org/wiki/Ornstein − Uhlenbeck

Γέφυρα Brown

Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t}dt - dW_t$$

με $X_0 = 0$
θεωρούμε την συνάρτηση $f(t,x) = g(t)x$ όπου $g(t)$ είναι μια C^1 συνάρτηση την οποία θα προσδιορίσουμε σε λίγο.
Εφαρμόζοντας τον τύπο $II*$ του Ito στην συνάρτηση $f(t,x)$ έχουμε

$$df(t,X_t) = \left(\frac{dg}{dt} - \frac{g}{1-t}\right) X_t dt + g(t)dW_t$$

Άρα η επιλογή της $g(t)$ που μας απλοποιεί την εξίσωση είναι αυτή για την οποία

$$\frac{dg}{dt} = \frac{g}{1-t} \Rightarrow g(t) = \frac{1}{1-t}$$

, έτσι για

$$f(t,x) = \frac{1}{1-t}x$$

ο τύπος του $Ito - II*$ δίνει

$$df(t,X_t) = \frac{1}{1-t}dW_t$$

από την οποία ολοκληρώνοντας στο $(0,t)$ έχουμε

$$f(t,X_t) - f(0,0) = \int_0^t \frac{dW_s}{1-s}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-t}X_t = \int_0^t \frac{dW_s}{1-s}$$

$$\Rightarrow X_t = (1-t)\int_0^t \frac{dW_s}{1-s}$$

η λύση αυτή λέγεται **γέφυρα Brown**.

$$E[X_t] = (1-t)E\left[\int_0^t \frac{dW_s}{1-s}\right] = 0$$

και

$$Var(X_t) = E[X_t^2] = (1-t)^2 E\left[\left(\int_0^t \frac{dW_s}{1-s}\right)^2\right]$$

από ισομετρία Ito

$$= (1-t)^2 \int_0^t (1-s)^2 ds = t - t^2.$$

Εξίσωση διάχυσης θερμότητας

Έστω το ακόλουθο πρόβλημα $Cauchy$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(0,x) = f(x)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση διάχυσης θερμότητας του πραγματικού άξονα. Η $u(t,x)$ δίνει την θερμοκρασία την χρονική στιγμή t στην θέση x και η αρχική συνθήκη $u(0,x) = f(x)$ δείχνει την αρχική θερμοκρασία σε κάθε σημείο του άξονα, η οποία δίνεται από μια συνάρτηση του x την $f(x)$.
Θα βρούμε την γενική λύση με τον τύπο των $Feynman - Kac(I)$. Όπως έχουμε δείξει η διαδικασία διάχυσης που παράγει ο γεννήτορας

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

είναι η κίνηση $Brown$.
Από τον τύπο των $Feynman - Kac$ για την διάχυση $X_t = W_t$ και $c(x) \equiv 0$ έχουμε

$$u(t,x) = E_x[f(W_t)] = E_0[f(x + W_t)]$$

γνωρίζουμε την κατανομή της W_t. Άρα μπορούμε να βρούμε και την μέση τιμή της, έτσι

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) dy$$

για $z = y - x$, $dz = dy$

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+z) exp\left(-\frac{z^2}{2t}\right) dz$$

Διερεύνηση: Αν πάρουμε $f(x) = 5$ μια σταθερή συνάρτηση, έχουμε $u(0, x) = 5$ για κάθε x.
Άν αντικαταστίσουμε στην γενική λύση την συνάρτηση αυτή έχουμε

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} 5exp\left(-\frac{z^2}{2t}\right) dz = 5$$

$$u(t, x) = 5$$

για κάθε t, x. Αυτό δηλαδή που περιμέναμε, αφού στην περίπτωση σταθερής θερμοκρασίας όλου του άξονα δεν υπάρχει κάποια μεταφορά θερμοκρασίας από σημείο σε σημείο, παραμένει σταθερή η θερμοκρασία σε όλο τον άξονα.

Η εξίσωση Black-Scholes

Έστω το ακόλουθο πρόβλημα *Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 s^2 \dfrac{\partial u}{\partial s^2} + rs\dfrac{\partial u}{\partial s} - ru = 0 \\ u(T, s) = f(s) \end{cases}$$

Η εξίσωση αυτή λέγεται εξίσωση *Black-Scholes* και δίνει την τιμή ενός παραγώγου συμβολαίου κάποια χρονική στιγμή ως συνάρτηση του χρόνου και της τιμής του βασικού τίτλου.

Από την μορφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης έχουμε τον τελεστή

$$A = rs\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial}{\partial s^2}$$

και $c(x) = r$
Ο τελεστής A έχουμε δει ότι είναι ο γεννήτορας τελεστής της διαδικασίας διάχυσης S_t που είναι λύση της γεωμετρικής κίνησης *Brown*. Δηλαδή της στοχαστικής διαφορικής

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Εφαρμόζοντας των τύπο των *Feynman-Kac* για την διάχυση S_t παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση για την εξίσωση *Black-Scholes*

$$u(t, s) = E_{t,s}[\exp^{-r(T-t)} f(S_T)]$$

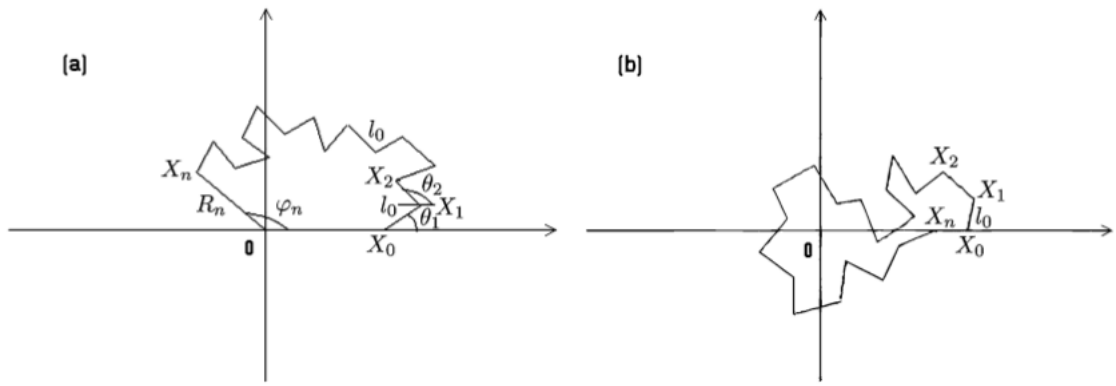
Κεφάλαιο 4

Ο ΜΕΣΟΣ ΠΡΩΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ ΕΝΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΟΛΥΜΕΡΟΥΣ

Εισαγωγή

Σε αυτή την εφαρμογή παρουσιάζουμε το άρθρο των S.Vakeroydi , M.Yor , D.Holecman ¨Ο Μέσος Πρώτος Χρόνος Επαναφοράς Ενός Γραμμικού Πολυμερούς' (MRT) . Σε αυτό το άρθρο ερευνούμε την κίνηση ενός γραμμικού πολυμερούς στις 2-διαστάσεις, και μελετούμε τον μέσο χρόνο επαναφοράς MRT γύρω από ένα σταθερό σημείο. Θεωρούμε (0,0) το σημείο αυτό. Στο τρισδιάστατο χώρο η αντίστοιχη μελέτη αφορά τον μέσο χρόνο περιστροφής ενός πολυμερούς γύρω από γραμμή και δεν αφορά μελέτη του συγκεκριμένου άρθρου. Σε αυτή την δουλειά μελετούμε την κατανομή του χρόνου αυτού χρησιμοποιώντας ένα πιο απλό γραμμικό πολυμερές, το οποίο θεωρούμε ότι αποτελείται από n άκαμπτες ράβδους. Επίσης χρησιμοποιούμε την κίνηση Brown για να μοντελοποιήσουμε την γωνία μεταξύ δύο ράβδων. Τέλος χρησιμοποιούμε έναν ασυμπτωτικό τύπο για το $E[\tau_n]$.

Στοχαστική Μοντελοποίηση Ενός Γραμμικού Πολυμερούς



Αναπαράσταση ενός γραμμικού πολυμερούς. (α) Τυχαία διαμόρφωση,(β) Η n-ιοστη αναδίπλωση φτάνει 2π.

Στην πρώτη προσέγγιση μας ενδιαφέρει πότε η n-οστη ράβδος φτάνει στο 2π (μια περιστροφή γύρω από το σημείο (0,0).
Θεωρούμε ότι οι n ράβδοι έχουν ίσο μήκος l_0 και $(X_0, X_1, ..., X_n)$ τα σημεία που ξεκινάνε οι ράβδοι με $X_0 = (L, 0)$. $L > 0$ η απόσταση του σταθερού σημείου X_0 από την αρχή (0,0). Η δυναμική του πολυμερούς χαρακτηρίζεται από τις γωνίες $(\theta_1(t), \theta_2(t), ...\theta_n(t), t \geq 0)$.

Επίσης έχουμε $(\theta_i(t), i \leq n) \overset{law}{=} \sqrt{2D}B_i(t), i \leq n)$
ή σε διαφορική μορφή $d\theta_i(t) = \sqrt{2D}dB_i(t)$
όπου $B_i(t)$ είναι μια μονοδιάστατη κίνηση Brown ,και D είναι μια σταθερά περιστροφής.
Το κινούμενο τέλος δίνεται από την σχέση

$$X_n(t) = L + \sum_{k=1}^{n} e^i \theta_k(t) \tag{4.1}$$

ή σε πολική μορφή

$$X_n(t) = R_n e^{i\phi_n(t)}$$

Τα $\phi_i(.), R_i(.)$ παρουσιάζονται στο σχήμα παραπάνω.
Από τώρα και στο εξής θα χρησιμοποιούμε την αναπαραμετρικοποίηση $\hat{l} = \dfrac{L}{l_0}$, $\hat{t} = \dfrac{t}{2D}$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της κίνησης Brown έχουμε

$$X_n(t) = L + \sum_{k=1}^{n} e^i \hat{B}_k(t) \tag{4.2}$$

Όπου $\hat{B}_k(t)$ είναι μια μονοδιάστατη κίνηση Brown για κάθε $k = 1, ..., n$.
Η μέση αρχικοποίηση δίνεται ακολούθως

$$c_n = E\left(\sum_{k=1}^{n} e^{i\hat{\theta}_k(0)}\right) \tag{4.3}$$

με

$$\hat{\theta}_k(0) = \hat{B_k}(0)$$

Απαιτούμε η αρχική γωνία $\phi_n(0)$ να είναι αρκετά μακρυά από 2π, κυρίως εστιάζουμε στο ίσιο πολυμερές. Σε αυτή την περίπτωση

$$MRT \equiv E\{\tau_n | c_n\} \equiv E[\tau_n] \tag{4.4}$$

όπου

$$\tau_n \equiv inf\{t > 0, |\phi_n(t)| = 2\pi\} \tag{4.5}$$

Τώρα θα ασχοληθούμε με την εξίσωση παρακάτω για να βρούμε μια έκφραση για το $X_n(t)$.

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\hat{X}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}[X_n(t) - E(X_n(t))] \tag{4.6}$$

χρησιμοποιώντας ιδιότητες μέσης τιμής της κίνησης Brown παίρνουμε την ισότητα

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\hat{X}_n(t) = Z_t^{(n)} \tag{4.7}$$

όπου

$$Z_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{k=1}^{n} e^{iB_k(t)} - E\left(\sum_{k=1}^{n} e^{iB_k(t)}\right)\right] \tag{4.8}$$

Εφαρμόζοντας την φόρμουλα του *Itô* $Z_t^{(n)}$ εύκολα καταλήγουμε στο

$$Z_t^{(n)} = M_t^{(n)} - \frac{1}{2}\int_0^t Z_s^n ds \tag{4.9}$$

με

$$M_t^{(n)} = \frac{i}{\sqrt{n}} \int_0^t \sum_{k=1}^{n} e^{iB_k(s)} dB_k(s) \tag{4.10}$$

να είναι martingales και η ακολουθία $M_t^{(n)}$ συγκλίνει συγκλίνει κατά κατανομή σε μια δισδιάστατη κίνηση Brownian (από το θεώρημα 3.1 του άρθρου.).
Από την (3.9) παίρνουμε μια χρήσιμη φόρμουλα (GOUP) η οποία δίνεται ως εξής

$$Z_t^{(n)} = e^{-t/2} \int_0^t e^{s/2} dM_s^{(n)} \tag{4.11}$$

Τώρα από προηγούμενες σχέσεις καταλήγουμε στο

$$X_n(t) = \bar{X}_n(t) + E[X_n(t)] = \sqrt{n} Z_t^{(n)} + c_n e^{-t/2} + \hat{l}$$

$$\hat{X}_n(t) \equiv X_n(t) - \hat{l} = \sqrt{n} Z_t^{(n)} + c_n e^{-t/2} \tag{4.12}$$

Ασυμπτωτική Έκφραση

Να σημειώσουμε εδώ ότι τα όρια $n \to +\infty$ είναι στον L_1 προφανώς, ενώ τα όρια $t \to +\infty$ αφορούν ομοιόμορφη σύγκλιση, δηλαδή στον L_2.
Συνδιάζοντας το Πόρισμα 3.3 και την πρόταση 4.1 του άρθρου παίρνουμε

$$Z_t^{(n)} \to Z_t^{(\infty)} \to e^{-t/2} \int_0^t \frac{e^{s/2}}{\sqrt{2}} dB_s \text{ ας } n \to +\infty, t \to +\infty \tag{4.13}$$

$$\hat{X}_n(t) = \sqrt{n} Z_t^{(n)} + c_n e^{-t/2} = \sqrt{n} e^{-t/2} \left(\hat{c}_n + \int_0^t e^{s/2} dM_s^{(n)} \right) \tag{4.14}$$

με

$$\hat{c}_n \equiv \frac{c_n}{\sqrt{n}}$$

χρησιμοποιώντας τις (3.12),(3.13),(3.14) έχουμε

$$\hat{X}_n(t) \overset{law}{=} \sqrt{n} Y_t^{(n)} \tag{4.15}$$

όπου

$$Y_t^{(n)} \equiv e^{-t/2}\left(\hat{c}_n + \int_0^t e^{s/2} dB_{s/2}\right) \tag{4.16}$$

με αυτόν τον τρόπο θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα για το $\hat{X}_n(t)$ χρησιμοποιώντας $Y_t^{(n)}$.
Αλλάζοντας μεταβλητή και ορίζοντας μια πιο απλή γραφή για την (3.16) παίρνουμε

$$Y_{2t} = e^{-t}\left(\hat{c}_n + \int_0^t e^u dB_u\right) \tag{4.17}$$

Ornstein-Uhlenbeck εξίσωση με παραμέτρους $\mu = 0$, $\alpha = 1$.
Υπάρχει μια άλλη κίνηση Brown που ξεκινάει από το $\hat{c}_n$ τέτοια ώστε:

$$Y_{2t} = e^{-t}(\hat{B}_{\alpha_t}) \tag{4.18}$$

με

$$\alpha_t = \int_0^t e^{2s} ds = \frac{e^{2t} - 1}{2} \tag{4.19}$$

χρησιμοποιώντας την φόρμουλα του Ito στην (3.18) για $f(t,x) = e^{-t}x$ και χρησιμοποιώντας την διαφορική μορφή της παραγώμενης εξίσωσης παίρνουμε

$$dY_{2s} = -e^{-s}\hat{B}_{\alpha_s} ds + e^{-s}\hat{B}_{\alpha_s} \tag{4.20}$$

διαιρώντας με Y_{2s} και παίρνοντας το φανταστικό μέρος καταλήγουμε στην

$$\theta_{2t}^Y = \theta_{\alpha_t}^{\hat{B}} \tag{4.21}$$

με

$$\theta_t^Y \equiv Im\left(\int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s}\right) \tag{4.22}$$

είναι μια συνεχής στροφική διαδικασία η οποία συνδέεται με μια στοχαστική διαδικασία Υ.

$$T_c^{|\theta^Y|} \equiv inf\{t \geq 0 : |\theta_t^Y| = c\} \tag{4.23}$$

$$T_c^{|\theta^{\hat{B}}|} \equiv inf\{t \geq 0 : |\theta_t^{\hat{B}}| = c\} \tag{4.24}$$

έτσι, οι χρόνοι χτυπήματος $T_c^{|\theta^Y|}$, $T_c^{|\theta^{\hat{B}}|}$ πρέπει να ικανοποιούν την (3.19).
η οποία (λύνοντας και παίρνοντας μέση τιμή) συνεπάγει το

$$E[T_c^{|\theta^Y|}] = \frac{ln2}{4} + \frac{1}{4}E\left[ln\left(T_c^{|\theta^{\hat{B}}|} + \frac{1}{2}\right)\right] \tag{4.25}$$

παίρνοντας $c = 2\pi$ και n μεγάλο (έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ότι $\hat{X}_n(t) \overset{law}{=} \sqrt{n}Y_t^{(n)}$) ο MRT του $\hat{X}_n(t)$ γύρω (0,0) δίνεται από την

$$E[\hat{\tau}_n] = \frac{\sqrt{n}}{4}\left(ln2 + E\left[ln\left(T_c^{|\theta^{\hat{B}}|} + \frac{1}{2}\right)\right]\right) \tag{4.26}$$

Μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει τον MRT $E[\hat{\tau}_n]$, να δίνεται από την (3.26) το τελευταίο βήμα είναι να βρούμε μια προσέγγιση για τον δεύτερο όρο

$$E\left[ln\left(T_c^{|\theta^{\hat{B}}|} + \frac{1}{2}\right)\right] \tag{4.27}$$

Αυτό είναι ένα τεχνικό κομμάτι, και παρουσιάζουμε τα βασικά αποτελέσματα.

$$E\left[ln\left(T_c^{|\theta^{\hat{B}}|} + \frac{1}{2}\right)\right] = 2ln(\hat{c}_n) + E[ln(T_{2\pi}^{|\theta|})] + \frac{1}{\hat{c}_n^2}E\left[\frac{1}{T_{2\pi}^{|\theta|}}\right] \tag{4.28}$$

χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Bougerol παίρνουμε την παρακάτω αναπαράσταση

$$E[ln(T_c^{|\theta|})] = 2F(c) + ln(2) + c_E \tag{4.29}$$

Όπου το $F(c)$ δίνεται από ένα ντετερμινιστικό ολοκλήρωμα

$$F(c) = \int_0^\infty \frac{dz}{cosh((\pi z)/2)} ln(sinh(cz)) \tag{4.30}$$

$c_E = 0.577$ η σταθετά του Euler και τέλος παίρνουμε μια προσέγγιση του $E[T_{2\pi}^{|\theta^y|}]$ με

$$E[T_{2\pi}^{|\theta^y|}] \approx \frac{1}{4}\left(2ln(\hat{c}_n) + Q + \frac{0.08}{\hat{c}_n^2}\right) \tag{4.31}$$

Όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την προσέγγιση των παρακάτω ποσοτήτων
$Q = 2F(2\pi) + 2LN2 + c_E$, $F(2\pi) \approx 3.84$

$$E\left[\frac{1}{T_{2\pi}^{|\theta|}}\right] \approx 0.167 \text{ , } Q \approx 9.54$$

έτσι για $c = 2\pi$, n μεγάλο και πολλαπλασιάζοντας με $\sqrt{n}$ εξάγουμε την τελική έκφραση για MRT του $\hat{X}_n(t)$ να δίνεται από την:

$$E[\hat{\tau}] \approx \frac{\sqrt{n}}{4}\left[2ln\left(\frac{c_n}{\sqrt{n}}\right) + 0.08\frac{n}{c_n^2} + Q\right] \tag{4.32}$$

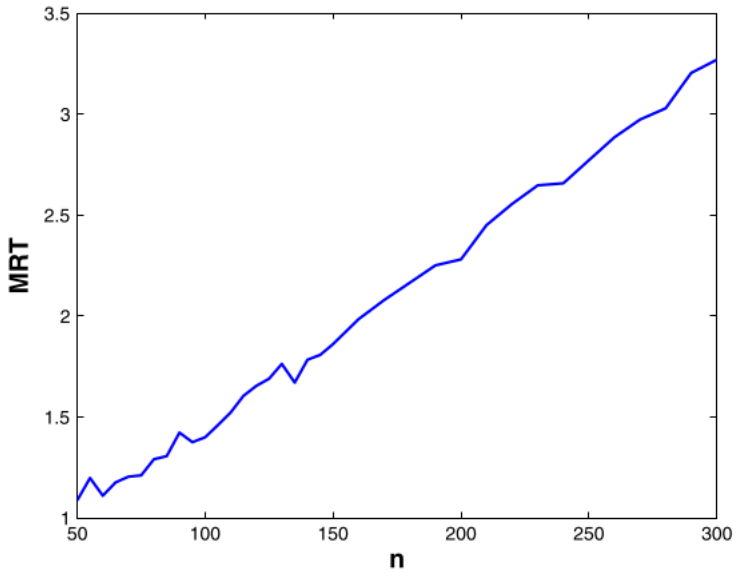
έτσι για αρκετά μεγάλο πολυμερές $nl_0 >> L \Rightarrow n >> \hat{l}$ έτσι $\hat{l} = \dfrac{L}{l_0}$ είναι αμελητέο και από την (3.12) έχουμε την προσέγγιση $X_n(t) \approx \hat{X}_n(t)$ επαναφέροντας την αρχική αναπαραμετρικοποίηση που είχαμε κάνει το MRT ενός πουλερούς δίνεται από την

$$E[\tau] \approx \frac{\sqrt{n}}{8D}\left[2ln\left(\frac{E\left(\sum_{k=1}^{n} e^{i\hat{\theta}_k(0)}\right)}{\sqrt{n}}\right) + \frac{0.08n}{E\left(\sum_{k=1}^{n} e^{i\hat{\theta}_k(0)}\right)^2} + Q\right] \tag{4.33}$$

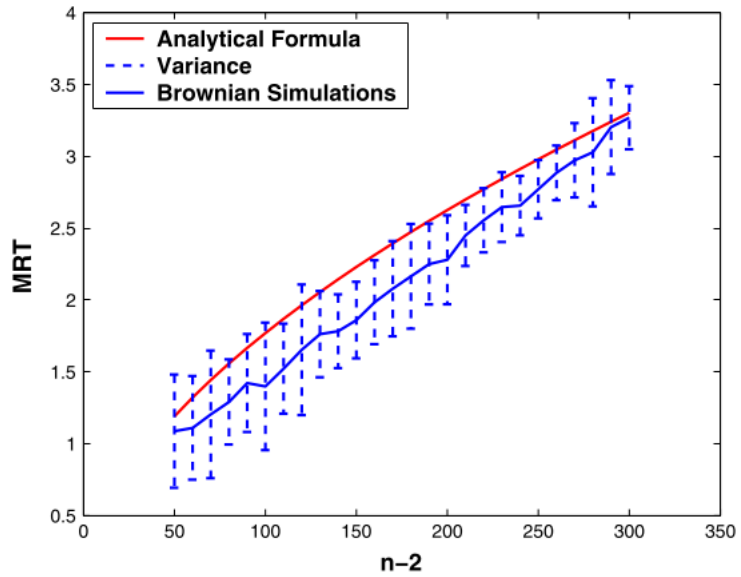
αν το πολυμερές είναι αρχικοποιημένα τεντομένο, δηλαδή $c_n = n$, παίρνουμε

$$E[\tau] = \frac{\sqrt{n}}{8D}\left[ln(n) + 0.08\frac{1}{n} + Q\right] \tag{4.34}$$

MRT ως συνάρτηση του n

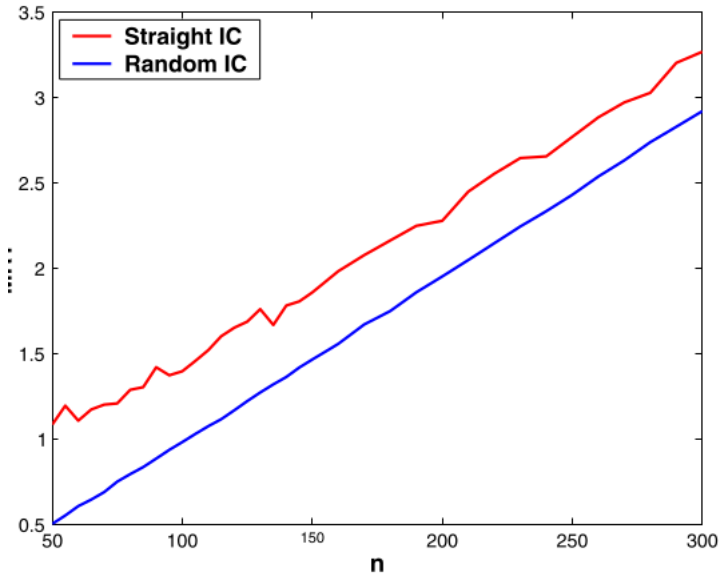


Σύγκριση της Αναλυτικής φόρμουλας με προσομοιώσεις κίνησης Brown για το MRT



Παράμετροι $D = 10$, $L = 0.3$, $l_0 = 0.25$ και τεντωμένο πολυμερές για αρχικές συνθήκες. Έτσι η συνθήκη $\sqrt{n}l_0 >> L$ ικανοποιείται.

MRT του ελέυθερου τέλους του πολυμερούς ως συνάρτηση του n για ένα τεντωμένο πολυμερές και ένα πολυμερές με τυχαία αρχική κατάσταση.



Για αρχικές γωνίες από ομοιόμορφη κατανομή, $\vartheta_i(0) \sim U(0, 2\pi)$, $i = 1, .., n$

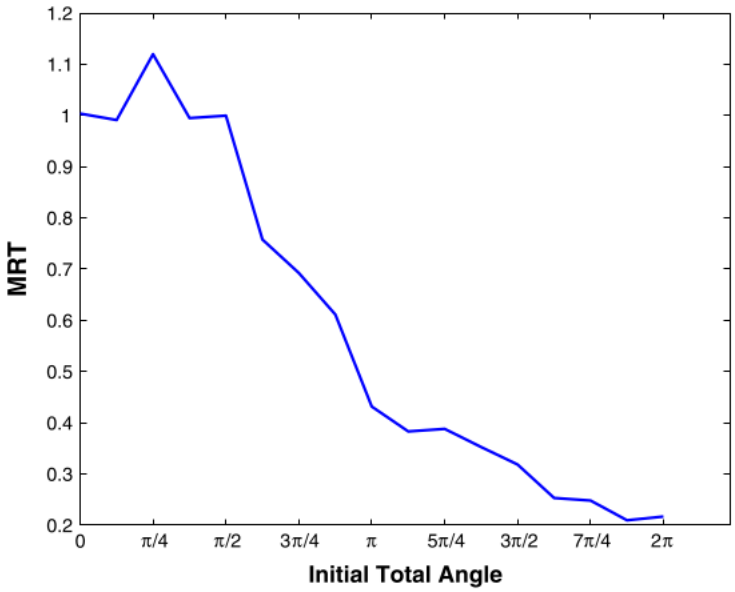
$$c_n = E\left[\sum_{k=1}^{n} e^{i\vartheta_i(0)}\right] = 0$$

και με παρόμοιο τρόπο κάτω από τις ίδιες συνθήκες ο MRT ικανοποιεί την

$$E[\tau_n] \approx \frac{\sqrt{n}}{8D}\hat{Q} \tag{4.35}$$

με $\hat{Q} \approx 9.62$.

Προσομοιώσεις με κίνησης Brown για το MRT ως συνάρτηση της αρχικής γωνίας $\phi_n(0)$

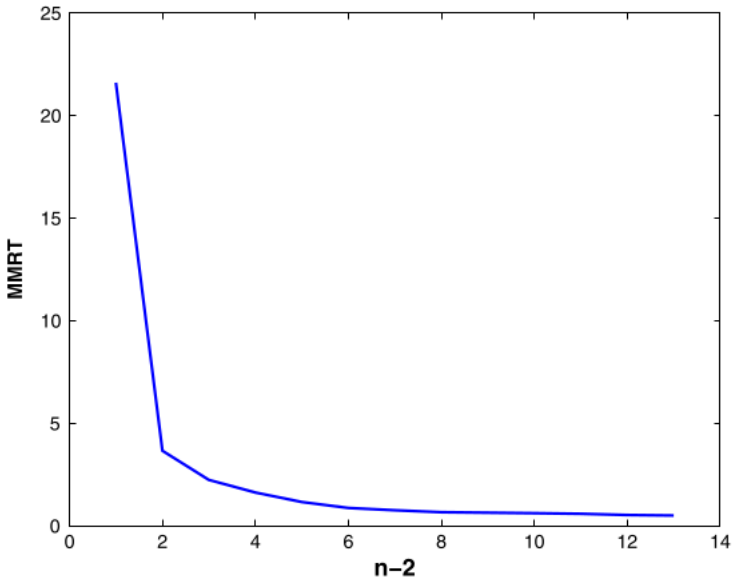


$n = 10$ $D = 1$ $L = 0.1$ $l_0 = 0.2$ παρατηρούμε ότι, όταν $\phi_n(0) < \frac{\pi}{2}$ ο MRT είναι ανεξάρτητος από την αρχική γωνία, και για $\phi_n(0) > \frac{\pi}{2}$ ο MRT μειώνεται σε όσο η αρχική γωνία μεγαλώνει, και τείνει στο 0 όταν η γωνία τείνει στο 2π. Τέλος ορίζουμε τον ¨Ελάχιστο Μέσο Χρόνο επαναφοράς' ($MMRT$). Ο πρώτος χρόνος κατά τον οποίο οποιοδήποτε σημείο τυλιχτεί γύρω από την αρχή (0,0). Δηλαδή οποιαδήποτε γωνία να γίνει 2π.

$$MMRT \equiv min_{E_n} E\{\tau_n | c_n\} \equiv E[\tau_{min}] \tag{4.36}$$

E_n το σύνολο των ράβδων, τα οποία μπορούν να περιστραφούν γύρω από την αρχή (0,0).

Προσωμοιώσεις κίνησης Brown του $MMRT$,$D = 10$



$MMRT$ μειώνεται με την σταθερά περιστροφής D και αυξάνεται όσο αυξάνεται η απόσταση L.(ανοιχτό πρόβλημα είναι ο υπολογισμός του $MMRT$ ασυμπτωτικά).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Ο ΜΕΣΟΣ ΠΡΩΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ ΕΝΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΟΛΥΜΕΡΟΥΣ

Βιβλιογραφία

[1] *Zdzistaw Brzezniak and Tomasz Zastawniak*, Basic Stochastic Processes, Springer 1999

[2] *Bernt Oksendal*, Stochastic Differential Equations, Springer 2003

[3] *Steven Shreve*, Stochastic Calculus and Finance, 1997

[4] *Fima C Klebaner*, Introduction To Stochastic Calculus With Applications Second Edition, 2005

[5] *S.Vakeroudis, M.Yor, D.Holcman*, The Mean First Rotation Time of a Planar Polymer, Published online: 2011

[6] *Δημήτρης Χελιώτης*, Εισαγωγή στον στοχαστικό λογισμό, 2015

[7] *Α.Ν.Γιαννακόπουλος*, Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, 2003

[8] *Δημήτριος Γ. Κωνσταντινίδης*, Θεωρία Στοχαστικών Διαδικασιών Μέρος Β′, 2010