



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

## **ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

### **ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΩΝ ΑΣΥΝΕΧΕΙΩΝ**

**ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΑΡΧΟΝΤΑΚΗΣ**  
ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ ΕΜΠ

Επιβλέπων καθηγητής Μ. Παπαδρακάκης

Αθήνα, Αύγουστος 2011







ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

## **ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

### **ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΩΝ ΑΣΥΝΕΧΕΙΩΝ**

**ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΑΡΧΟΝΤΑΚΗΣ**  
ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ ΕΜΠ

Επιβλέπων καθηγητής Μ. Παπαδρακάκης

Αθήνα, Αύγουστος 2011



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</b>	<b>1</b>
<b>ΘΡΑΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ</b>	<b>3</b>
1.1 Γενικά	3
1.2 Κλίμακες προσέγγισης	4
1.3 Μέθοδοι προσέγγισης :: Ασθενής και ισχυρή ασυνέχεια	5
<b>ΘΕΩΡΗΣΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑΣ (SDA)</b>	<b>7</b>
2.1 Εισαγωγή	7
2.2 Μεθοδολογίες προσομοίωσης των ισχυρών ασυνεχειών	8
2.3 Κινηματική :: Ασυνεχές πεδίο μετατοπίσεων	9
2.4 Ανάλυση ισχυρών ασυνεχειών	10
2.5 Ανάλυση ισχυρής ασυνέχειας προσομοιωμάτων θραύσης	11
2.5.1 Ισοτροπικό συνεχές προσομοίωμα θραύσης	11
2.5.2 Συνθήκη I :: Περιορισμός πεδίου τάσεων	14
2.5.3 Συνθήκη II :: Συνέχεια του ελκυστή	16
2.5.4 Συνθήκη III :: Προσδιορισμός του κάθετου διανύσματος	17
2.5.5 Σκέδαση :: Ενέργεια θραύσης	20
2.6 Ανάλυση ισχυρής ασυνέχειας προσομοιωμάτων πλαστικότητας	21
2.6.1 Προσομοίωμα πλαστικότητας με χαλάρωση ανηγμένων παραμορφώσεων	21
2.6.2 Συνθήκη I :: Περιορισμός πεδίου τάσεων	22
2.6.3 Συνθήκη II :: Συνέχεια του ελκυστή	24
2.6.4 Συνθήκη III :: Προσδιορισμός του κάθετου διανύσματος	24
2.6.5 Σκέδαση :: Ενέργεια θραύσης	26
<b>ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ E-FEM</b>	<b>29</b>
3.1 Γενικά	29
3.2 Δεσπόζουσες εξισώσεις	30
3.3 Διακριτοποίηση	32
3.4 Κανονικό μητρώο ακαμψίας στοιχείου CST	33

<b>3.5 Εμπλουτισμένο μητρώο ακαμψίας στοιχείου CST</b>	<b>36</b>
<b>3.6 Στατική συμπίκνωση</b>	<b>39</b>
<b>3.7 Αλγόριθμος εύρεσης πορείας της ασυνέχειας</b>	<b>41</b>
<b>SPARC</b>	<b>45</b>
<hr/>	
<b>4.1 Γενικά</b>	<b>45</b>
<b>4.2 Αποθήκευση καθολικού μητρώου ακαμψίας</b>	<b>46</b>
<b>4.3 Επίλυση γραμμικών συστημάτων</b>	<b>47</b>
<b>4.4 Αλγόριθμοι επίλυσης ασταθών μη γραμμικών προβλημάτων</b>	<b>48</b>
4.4.1 Κυλινδρική μέθοδος μήκους τόξου	49
4.4.2 Μέθοδος ελέγχου των μετατοπίσεων	54
<b>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</b>	<b>57</b>
<hr/>	
<b>5.1 Εισαγωγή</b>	<b>57</b>
<b>5.2 Εφαρμογές</b>	<b>57</b>
5.2.1 Προσομοίωση εφελκυσόμενης δοκού με κατακόρυφη ασυνέχεια	57
5.2.2 Προσομοίωση εφελκυσόμενης δοκού με διαγώνια ασυνέχεια	60
5.2.3 Προσομοίωση καμπτόμενης αμφιέριστης δοκού	61
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	<b>63</b>
<hr/>	

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το σύγγραμμα αυτό αποτελεί την μεταπτυχιακή εργασία του γράφοντα, η οποία εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου και είχε ως στόχο την κατανόηση του θεωρητικού υποβάθρου αλλά και την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων με ενσωματωμένες ασυνέχειες. Αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Πιο συγκεκριμένα:

- Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια συνοπτική εισαγωγή στη Θραυστομηχανική.
- Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά μια από τις βασικότερες οικογένειες μεθόδων προσομοίωσης ασυνεχειών, ή θεώρηση ισχυρής ασυνέχειας.
- Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται το αριθμητικό σκέλος της εφαρμογής της μεθόδου των ενσωματωμένων ασυνεχειών.
- Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το λογισμικό που ανέπτυξε ο γράφων σε συνεργασία με τον υποψήφιο διδάκτορα *Μανόλη Γεωργιουδάκη* για την επίλυση προβλημάτων πεπερασμένων στοιχείων και ειδικότερα μη γραμμικών προβλημάτων με ασυνέχειες.
- Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τρεις ενδεικτικές εφαρμογές της μεθόδου των ενσωματωμένων ασυνεχειών.

Θα ήθελα σε αυτό το σημείο να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Καθηγητή ΕΜΠ κ. *Μανόλη Παπαδρακάκη* για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, αλλά και για το συνεχές ενδιαφέρον του και τις πολύτιμες ιδέες και συμβουλές του.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα *Μανόλη Γεωργιουδάκη* για την πολύτιμη συμβολή του, στη διεκπεραίωση αυτής της εργασίας.

*Παναγιώτης Αρχοντάκης*



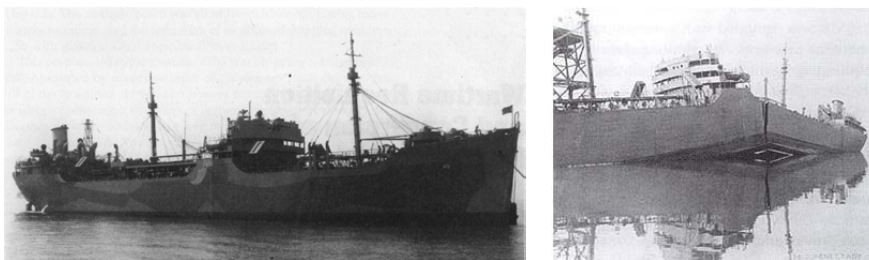


# 1

## ΘΡΑΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

### 1.1 Γενικά

Θραυστομηχανική είναι ο τομέας της Μηχανικής που ασχολείται με τη δημιουργία και τον τρόπο διάδοσης των ρωγμών στα υλικά. Στις μέρες μας η προσομοίωση προβλημάτων της Θραυστομηχανικής με υπολογιστικές μεθόδους αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για τη βελτίωση της μηχανικής συμπεριφοράς των υλικών, αλλά και την κατανόηση των λόγων που οδηγούν μια κατασκευή σε αστοχία.



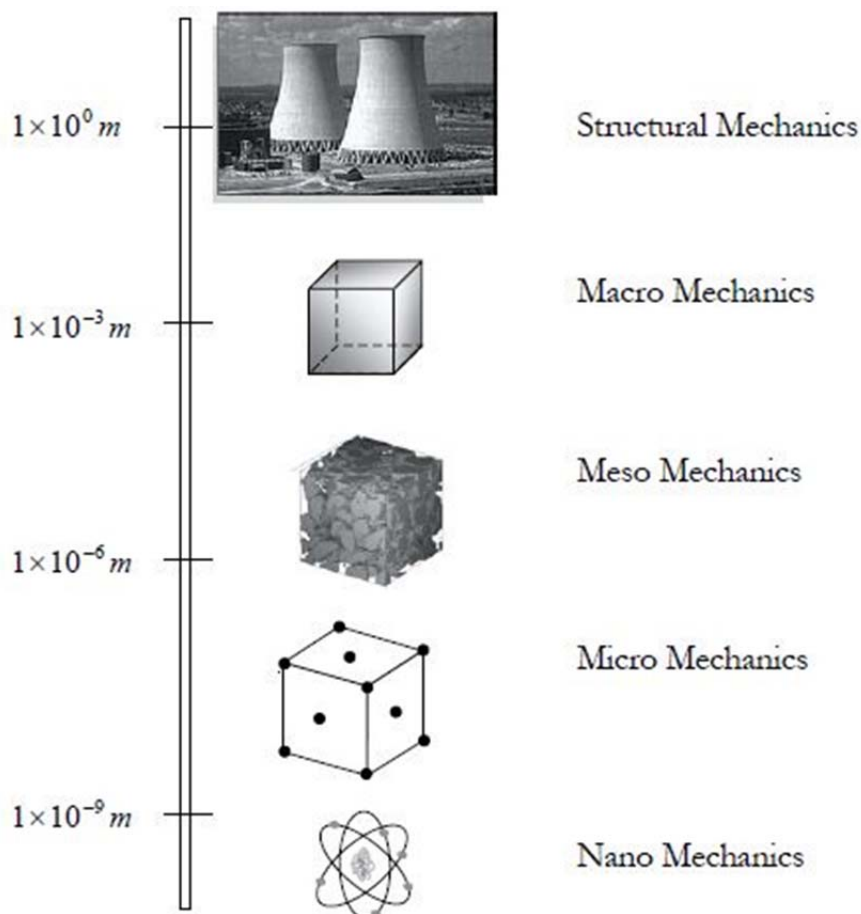
*Σχήμα 1.1 :: Χαρακτηριστικό πρόβλημα Θραυστομηχανικής: Ψαθυρή θραύση του κύτους ενός δεξαμενόπλοιου T2-SE-A1 λόγω χαμηλής ποιότητας χάλυβα.*

## 1.2 Κλίμακες προσέγγισης

Η Θραυστομηχανική είναι μια οικογένεια προβλημάτων, τα οποία μπορούν να εξετασθούν σε διάφορες κλίμακες.

Στην πιο βασική κλίμακα (μικροσκοπική), το κύριο χαρακτηριστικό της ρηγμάτωσης είναι η θραύση των ατομικών δεσμών του στερεού. Στην ενδιάμεση κλίμακα (μεσοσκοπική), η θραύση εκδηλώνεται με την μορφή της εκκίνησης διάδοσης και της συνένωσης μικροανοιγμάτων. Τέλος, στη μακροσκοπική κλίμακα, ως ρηγμάτωση μπορεί να χαρακτηριστεί η θραύση μιας κατασκευής σε δύο ή περισσότερα τμήματα, λόγω της διάδοσης των ρωγμών σε αυτό.

Γενικά έχουν αναπτυχθεί αρκετές μέθοδοι, βασιζόμενες στις προαναφερθείσες κλίμακες, οι οποίες αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της δημιουργίας και της διάδοσης των ρωγμών. Ωστόσο η μεταπτυχιακή αυτή εργασία εστιάζει σε μεθόδους που ανήκουν αποκλειστικά στη μακροσκοπική κλίμακα.



Σχήμα 1.2 :: Κλίμακες προσέγγισης του προβλήματος

### 1.3 Μέθοδοι προσέγγισης :: Ασθενής και ισχυρή ασυνέχεια

Η προσέγγιση μιας ασυνέχειας σε ένα συνεχές μέσο μπορεί να γίνει με δύο θεωρήσεις:

- **Ασθενής ασυνέχεια:** Ο εντοπισμός της ανηγμένης παραμόρφωσης μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μία ασυνέχεια στο πεδίο των ανηγμένων παραμορφώσεων διατηρώντας την συνέχεια του πεδίου των μετατοπίσεων.
- **Ισχυρή ασυνέχεια:** Ο εντοπισμός της ανηγμένης παραμόρφωσης μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μία ασυνέχεια στο πεδίο μετατοπίσεων.

Ο Ortiz (1987) υπέθεσε ένα συνεχές πεδίο μετατοπίσεων (*ασθενής ασυνέχεια*), όπου ο εντοπισμός της ανηγμένης παραμόρφωσης σε μία στενή λωρίδα εμφανίζεται ως το πιθανό εργαλείο για την προσομοίωση του πεδίου των μετατοπίσεων.

Σύμφωνα με τους Simo & Riffai (1990), η κλασική μέθοδος των ασυμβίβαστων μορφών αποτελείται από στοιχεία μικρότερης τάξης με βελτιωμένη απόδοση σε αραιά δίκτυα. Χρησιμοποιώντας την διατύπωση των μεταβολών στην ελαστικότητα, πρότειναν μία κλάση μεικτής υποθετικής ανηγμένης παραμόρφωσης, όπου η κεντρική ιδέα της ήταν ότι το πεδίο των ανηγμένων παραμορφώσεων αποτελείται από δύο μέρη:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^{\text{sym}} \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \S 1.1$$

όπου  $\nabla^{\text{sym}} \mathbf{u}$  είναι η συμμετρική βαθμίδα του πεδίου των μετατοπίσεων και  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  είναι το βελτιωμένο μέρος του πεδίου των ανηγμένων παραμορφώσεων. Απέδειξαν ότι το πεδίο  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  δεν υποβάλλεται σε οποιαδήποτε συνέχεια απαιτείται στο εσωτερικό του στοιχείου.

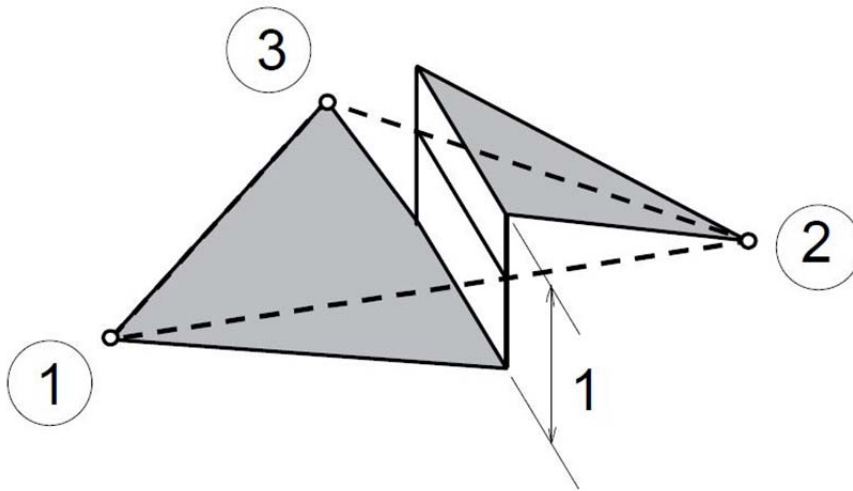
Από την κλάση των μεθόδων υποτιθέμενων βελτιωμένων ανηγμένων παραμορφώσεων, προκύπτει η θεώρηση ισχυρής ασυνέχειας (*Strong Discontinuity Approach: SDA*). Η θεώρηση ισχυρής ασυνέχειας αναφέρεται στην προσομοίωση του άλματος στο πεδίο των μετατοπίσεων κατά μήκος μίας μηδενικού εύρους ζώνης επιφάνειας, χρησιμοποιώντας τις συμβατικές προσομοιώσεις της μηχανικής του Στερεού Σώματος και τις καταστατικές εξισώσεις του υλικού να συνεχή μορφή. Έχει δειχθεί ότι το θεωρητικό προσομοίωμα διακριτών ρωγμών μπορεί να ερμηνευθεί ως η οριακή περίπτωση του συνεχούς μέσου, όταν η ζώνη εντοπισμού τείνει στο μηδέν (επιφάνεια ασυνέχειας). Σε αυτή τη περίπτωση η ανηγμένη παραμόρφωση έχει την έννοια της κατανομής Δέλτα του Dirac. Το ενδιαφέρον σημείο αυτής της προσέγγισης είναι ότι όλη η ανάλυση γίνεται στο πλαίσιο της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου. Η προσέγγιση της ισχυρής ασυνέχειας οδηγεί σε διακριτοποιήσεις των φορέων με πεπερασμένα στοιχεία, ανεξάρτητες από το παραγόμενο δίκτυο, χωρίς την εισαγωγή κάποιας μη-φυσικής παραμέτρου του υλικού.

Αυτή η προσέγγιση έχει υιοθετηθεί πρόσφατα από πολλούς ερευνητές επειδή παρουσιάζει ορισμένα πλεονεκτήματα, όπως:

- Η εφαρμογή της σε έναν κώδικα πεπερασμένων στοιχείων είναι σχετικά εύκολη.

- Είναι ανεξάρτητη του παραγόμενου δικτύου πεπερασμένων στοιχείων. Κατά συνέπεια δεν χρειάζεται επαναδιακριτοποίηση προκειμένου να προσομοιωθούν ανωτέρας τάξης βαθμίδες της ανηγμένης παραμόρφωσης.
- Δεν απαιτεί εισαγωγή καμιάς μη-φυσικής παραμέτρου του υλικού.

Ο Oliver (1995) χρησιμοποίησε μία ασυνεχή συνάρτηση σχήματος (για να προσομοιώσει το άλμα στις μετατοπίσεις) στο εσωτερικό ενός τριγωνικού στοιχείου επιτρέποντας μία ακριβή αντιπροσώπευση του ανοίγματος ρωγμών.



Σχήμα 1.3 :: Ασυνεχής συνάρτηση σχήματος τριγωνικού στοιχείου

Η μετάβαση από την θεώρηση της ασθενούς ασυνέχειας στην θεώρηση της ισχυρής ασυνέχειας προτάθηκε από τον Oliver (1997) και τον Manzoli (1998). Η συμπεριφορά του υλικού θα βρίσκεται υπό καθεστώς ισχυρής ασυνέχειας όταν πληρούνται οι αποκαλούμενες συνθήκες ισχυρής ασυνέχειας Oliver (2000).

# 2

## ΘΕΩΡΗΣΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑΣ (SDA)

### 2.1 Εισαγωγή

Η ανάλυση της μηχανικής του στερεού σώματος υπάγεται γενικά στα πλαίσια της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου, όπου τίθεται ως αίτημα η συνέχεια του πεδίου των μετατοπίσεων. Ωστόσο, σε πολλά προβλήματα μηχανικού είναι απαραίτητη η υπόθεση αλμάτων στο πεδίο των μετατοπίσεων:

- Ρωγμές στους βράχους και στο σκυρόδεμα
- Γραμμές ολίσθησης στα εδάφη
- Ζώνες διάτμησης στα μέταλλα (Μακροσκοπική αντιμετώπιση)

Η υπόθεση αυτών των αλμάτων γίνεται επιτακτική όταν στόχος της ανάλυσης είναι η προσέγγιση της οριακής κατάστασης κοντά στην έντονη θραύση ή την κατάρρευση.

Γενικά οι ασυνέχειες αυτές διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

- Ισχυρές ασυνέχειες (*strong discontinuities*): Είναι εκείνα τα άλματα στο πεδίο των μετατοπίσεων της ιστορίας φόρτισης, όπου εμφανίζονται συγκεκριμένη στιγμή,

γενικά άγνωστη πριν την ανάλυση και αναπτύσσονται κατά μήκος διαδρομών του στερεού αποτελώντας υλικές, σταθερές επιφάνειες.

- ο Ασθενείς ασυνέχειες (*weak discontinuities*): Είναι τα άλματα στο πεδίο των ανηγμένων παραμορφώσεων, τα οποία αναπτύσσονται κατά μήκος κινουμένων επιφανειών. Το πεδίο των μετατοπίσεων παραμένει συνεχές.

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η ανάπτυξη του θεωρητικού αλλά και του αριθμητικού υποβάθρου των μεθόδων προσομοίωσης των ισχυρών ασυνεχειών.

## **2.2 Μεθοδολογίες προσομοίωσης των ισχυρών ασυνεχειών**

Οι υπάρχουσες μεθοδολογίες για την αριθμητική προσομοίωση των ισχυρών ασυνεχειών ανήκουν σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

- ο Διακριτές θεωρήσεις (*discrete approaches*)
- ο Συνεχείς θεωρήσεις (*continuum approaches*)

Οι διακριτές θεωρήσεις βρίσκονται κοντά στην κλασική μη γραμμική Θραυστομηχανική και προϋποθέτουν συγκεκριμένο διάνυσμα ελκυστή συναρτήσεως καταστατικών εξισώσεων με άλματα για να περιγράψουν την συνεκτική συμπεριφορά (*cohesive behavior*) στην διεπιφάνεια ασυνέχειας, δεδομένου ότι το συνεχές τμήμα του σώματος περιγράφεται από τις συνήθεις καταστατικές εξισώσεις. Επιπρόσθετα πρέπει να θεωρηθούν κατάλληλα κριτήρια για τον καθορισμό και την διάδοση της ασυνέχειας.

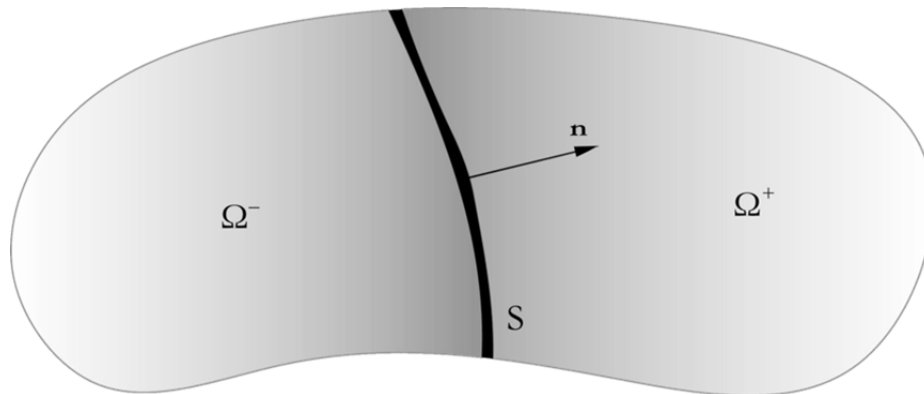
Σε αντίθεση, στις συνεχείς θεωρήσεις ολόκληρο το στερεό θεωρείται στα πλαίσια της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου, δηλαδή η έννοια της ανηγμένης παραμόρφωσης δεν ορίζεται μόνο στο συνεχές τμήμα του σώματος, αλλά και στην ασυνεχή διεπιφάνεια κι έτσι οι συμβατικές καταστατικές εξισώσεις τάσεων – ανηγμένων παραμορφώσεων διέπουν ολόκληρο το σώμα. Πιο αναλυτικά, η ασυνέχεια προσομοιώνεται μέσω δύο βασικών συστατικών:

- α. μιας έμμεσης κανονικοποίησης (συνήθως μη αναγνωρίσιμης) του ασυνεχούς πεδίου των μετατοπίσεων, η οποία προσεγγίζεται με τη βοήθεια μετατοπίσεων ανωτέρας τάξεως (εντοπισμός ανηγμένων παραμορφώσεων: *strain localization*) σε μία ζώνη της οποίας το εύρος της χαρακτηρίζεται από το λεγόμενο χαρακτηριστικό μήκος (*characteristic length*), που λαμβάνεται ως σταθερά του υλικού, ή μερικές φορές ως αριθμητική παράμετρος
- β. και ειδικών καταστατικών εξισώσεων όπου η αποκλειστική δομή τους οδηγεί στην ορθή κατάστρωση των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα και επιτρέπει την εμφάνιση εντοπισμού της ανηγμένης παραμόρφωσης. Τα τελευταία χρόνια, περισσότερο βάρος έχει δοθεί στην ανάπτυξη διαφορετικών θεωρήσεων που ανήκουν σ' αυτήν την οικογένεια: μέθοδοι κατανεμημένων ρωγμών (*smearred*

*crack methods*) που χρησιμοποιούν τοπικές καταστατικές εξισώσεις που εμφανίζουν κλάδο χαλάρωσης, μη-τοπικά (*non-local*) προσομοιώματα καταστατικών εξισώσεων, το συνεχές Cosserat (*Cosserat continuum*), τη θεώρηση της βαθμιδωτής πλαστικότητας (*gradient plasticity*) και η βισκοπλαστικότητα μπορούν να αναφερθούν ως τυπικά παραδείγματα.

### **2.3 Κινηματική :: Ασυνεχές πεδίο μετατοπίσεων**

Ας υποθέσουμε την διαμόρφωση αναφοράς  $\Omega$  του σώματος το οποίο χαρακτηρίζεται από ισχυρές ασυνέχειες κατά μήκος ενός δρόμου ασυνέχειας  $S$  όπου αποτελεί μία επιφάνεια του υλικού (π.χ. σταθερή στην διαμόρφωση αναφοράς) και το μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  κάθετο στην  $S$  (Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1 :: Ορισμός του δρόμου ασυνέχειας  $S$

Έστω ότι η  $S$  διαιρεί το σώμα σε δύο τμήματα  $\Omega^+$  και  $\Omega^-$  με τέτοιο τρόπο ώστε μία συνάρτηση Heavyside  $H_S(\mathbf{x})$  μπορεί να οριστεί στο  $\Omega$  (όπου  $\mathbf{x}$  είναι η υλική συντεταγμένη των σημείων του σώματος).

$$H_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ 0, & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases} \quad \S 2.1$$

Η πιο κοινή έκφραση του πεδίου των μετατοπίσεων χαρακτηριζόμενο από ισχυρές ασυνέχειες στην  $S$  μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + H_S(\mathbf{x})[[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) \quad \S 2.2$$

όπου το  $t$  αναφέρεται στο χρόνο,  $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  είναι το κανονικό τμήμα του πεδίου των μετατοπίσεων και  $[[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t)$  είναι μία συνάρτηση που χαρακτηρίζει το άλμα στις μετατοπίσεις και είναι συνεχής σε όλο το σώμα.

Από την § 2.2 ένα άλμα  $[[\mathbf{u}]]_S$  στο πεδίο των μετατοπίσεων εμφανίζεται στην  $S$  ως:



$$[[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in S} = [[\mathbf{u}]]_S \quad \S 2.3$$

Το αντίστοιχο πεδίο των ανηγμένων παραμορφώσεων μπορεί να υπολογισθεί από το συμμετρικό μέρος της βαθμίδας των μετατοπίσεων από την § 2.2 οδηγώντας στην εξής έκφραση:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= (\nabla \mathbf{u})^{\text{sym}} = \underbrace{(\nabla \bar{\mathbf{u}})^{\text{sym}} + H_S(\nabla [[\mathbf{u}]])^{\text{sym}}}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \delta_S([[ \mathbf{u} ]]) \otimes \mathbf{n}^{\text{sym}} \\ &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta_S([[ \mathbf{u} ]]) \otimes \mathbf{n}^{\text{sym}} \end{aligned} \quad \S 2.4$$

όπου ο εκθέτης  $(\bullet)^{\text{sym}}$  αναφέρεται στο συμμετρικό μέρος του  $(\bullet)$  και  $\delta_S$  είναι η γραμμική συνάρτηση Dirac δέλτα κατά μήκος της  $S$  που ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$\int_{\Omega} \delta_S \phi_0 d\Omega = \int_S \phi_0 d\Gamma \quad \forall \phi_0 \in C_0^\infty(\Omega) \quad \S 2.5$$

Στην § 2.4 οι όροι  $(\nabla \bar{\mathbf{u}})^{\text{sym}}$  και  $H_S(\nabla [[\mathbf{u}]])^{\text{sym}}$  έχουν συγκεντρωθεί στον όρο  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  που αποτελεί το κανονικό τμήμα του πεδίου των ανηγμένων παραμορφώσεων, και έχει φραγμένο χαρακτήρα, εμφανίζοντας το πολύ φραγμένες ασυνέχειες κατά μήκος της  $S$ . Ο μη φραγμένος χαρακτήρας του όρου  $\delta_S([[ \mathbf{u} ]]) \otimes \mathbf{n}^{\text{sym}}$  προκύπτει από την κλίση της συνάρτησης Heavyside που εμφανίζεται στην § 2.2.

## **2.4 Ανάλυση ισχυρών ασυνεχειών**

Η ιδέα της ανάλυσης με ισχυρές ασυνέχειες εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε συμβατική καταστατική εξίσωση. Ο σκοπός της ανάλυσης είναι να προσδιορίσει τα ποιοτικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα που καθιστούν την καταστατική εξίσωση συνεπής με την εμφάνιση ισχυρών ασυνεχειών κατά συνέπεια και τα μη φραγμένα πεδία των ανηγμένων παραμορφώσεων. Γι' αυτό το λόγο επιβάλλονται στο πεδίο των τάσεων το επόμενο σύνολο προϋποθέσεων, που παρέχονται από την καταστατική εξίσωση:

- Το πεδίο των τάσεων είναι φραγμένο σε όλο το  $\Omega$ .
- Το διάνυσμα του ελκυστή είναι συνεχές. Πιο συγκεκριμένα ο ελκυστής είναι συνεχής κατά μήκος της  $S$  κάθε στιγμή της ανάλυσης
- Σε κάθε σημείο  $P$  της επιφάνειας ασυνέχειας  $S$ , το κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  προσδιορίζεται από το πεδίο των τάσεων στον χρόνο εκκίνησης (η χρονική στιγμή όπου δημιουργείται η ασυνέχεια στο σημείο  $P$  που μας ενδιαφέρει)

Η συνθήκη a προέρχεται από την μη-φυσική έννοια των απεριόριστων τάσεων (ακόμα και στον δρόμο ασυνέχειας  $S$ , όπου οι ανηγμένες παραμορφώσεις είναι απεριόριστες σύμφωνα με την c). Η συνθήκη b προκύπτει από τις συνθήκες ισορροπίας κατά μήκος του δρόμου ασυνέχειας. Τέλος, η συνθήκη c φανερώνει τον χαρακτήρα της υλικής επιφάνειας

Σ παρεμποδίζοντας έτσι την όποια εξέλιξη του διανύσματος  $\mathbf{n}$  πέραν του χρόνου εκκίνησης.

## **2.5 Ανάλυση ισχυρής ασυνέχειας προσομοιωμάτων θραύσης**

### **2.5.1 Ισοτροπικό συνεχές προσομοίωμα θραύσης**

Υποθέτουμε την οικογένεια καταστατικών εξισώσεων που ορίζονται ως εξής:

$$\Psi = (1-d)\Psi_0, \quad \Psi_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \S 2.6$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1-d)\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \S 2.7$$

όπου  $\Psi$  είναι η ενέργεια απελευθέρωσης Helmholtz,  $\mathbb{C}$  είναι το καταστατικό ελαστικό μητρώο,  $\boldsymbol{\sigma}$  είναι ο τανυστής της τάσεως και  $d$  είναι ένα βαθμωτό μέγεθος θραύσης ( $0 \leq d \leq 1$ ). Η τιμή της εσωτερικής μεταβλητής  $d$  δίνεται από την αντίστοιχη συνθήκη θραύσης και τον νόμο εξέλιξής της. Ειδικότερα, η εξέλιξη της μπορεί να ολοκληρωθεί σε κλειστή μορφή τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t$  δίνοντας:

$$\begin{aligned} d_t &= G(r_t) \\ r_t &= \max_{s \in (-\infty, t)} \{r_0, \tau_s^e\} \end{aligned} \quad \S 2.8$$

Στην § 2.8,  $\tau_s^e$  είναι μία κατάλληλη νόρμα ανηγμένων παραμορφώσεων που περιγράφεται παρακάτω,  $r_0$  είναι ένα αρχικό κατώτατο όριο και  $G(\bullet)$  είναι μία non decreasing βαθμωτή συνάρτηση όπου:  $G(r_0) = 0$ ,  $G(\infty) \leq 1$  και  $G'(\mu) \geq 0 \quad \forall \mu \in [r_0, \infty]$ . Η μεταβλητή  $r_t$  περιγράφει, τη χρονική στιγμή  $t$ , το μέγεθος της ελαστικής περιοχής στο χώρο των ανηγμένων παραμορφώσεων  $E_e$  που ορίζεται ως:

$$E_e := \{\boldsymbol{\varepsilon} \mid \tau^e \leq r_t\} \quad \S 2.9$$

Υπό αυτές τις προϋποθέσεις είναι απλό να υποθέσουμε ότι και το  $d$  και  $r$  πάντα αυξάνουν με το χρόνο, έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} \dot{d} &\geq 0 \\ \dot{r} &\geq 0 \end{aligned} \quad \S 2.10$$

όπου  $\dot{d} = 0$  για την αποφόρτιση και την ελαστική φόρτιση, εκτιμώντας ότι  $\dot{d} > 0$  αντιστοιχεί στην ανελαστική φόρτιση.

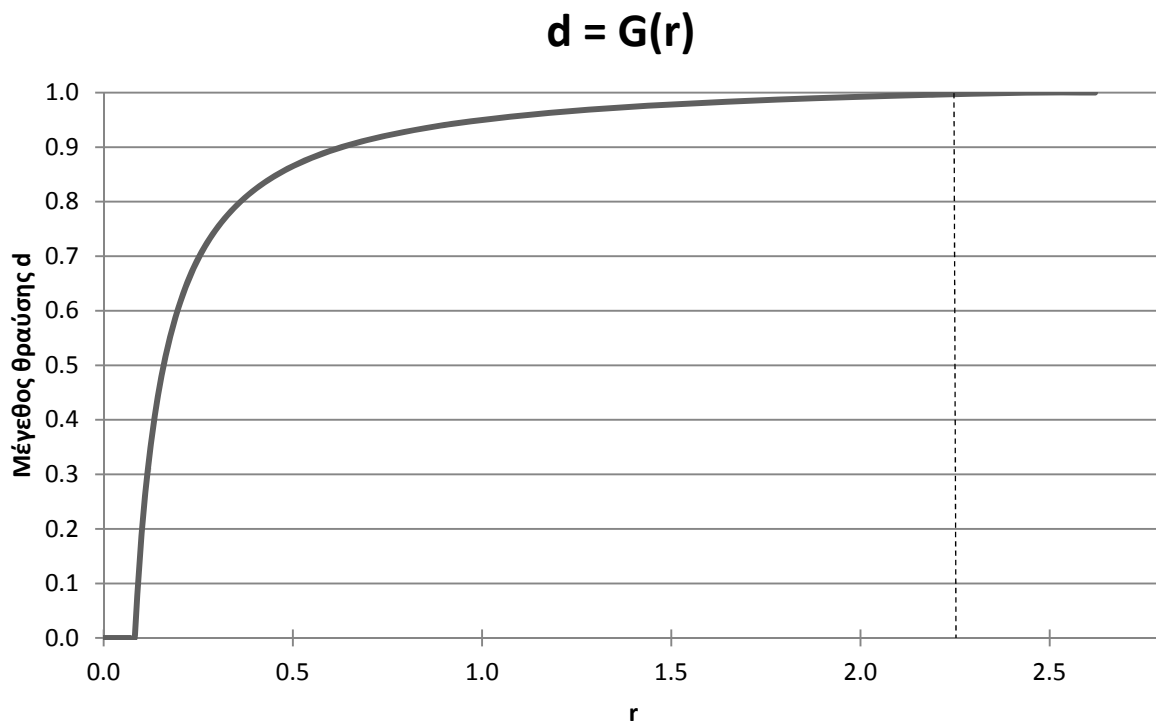
Επίσης, από τις § 2.6 και § 2.7 η διάχυση  $\mathcal{D}$  μπορεί να υπολογισθεί ως:

$$\mathbf{D} = -\dot{\Psi} + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \dot{d} \Psi_0 \geq 0 \quad \S 2.11$$

Χάριν απλότητας θα υποθέσουμε στα επόμενα έναν γραμμικό νόμο κράτυσης-χαλάρωσης της ανηγμένης παραμόρφωσης με συμμετρικό κλάδο εφελκυσμού-θλίψης που ορίζεται ως εξής:

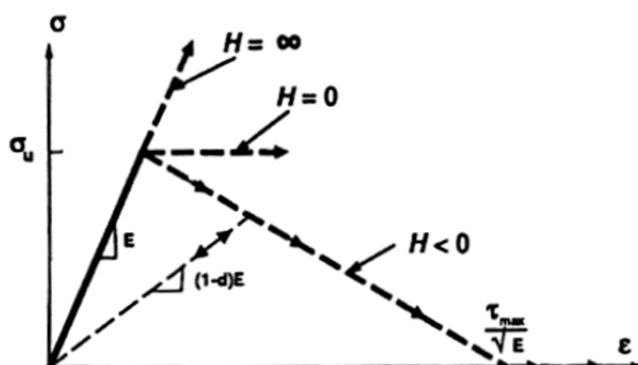
$$\tau^e = \sqrt{\mathbf{\epsilon} : \mathbf{C} : \mathbf{\epsilon}} \quad \S 2.12$$

$$d = G(r) = \begin{cases} 0, & r < r_0 = \sigma_u / \sqrt{E} \\ \frac{1}{1 + \mathcal{H}} \left( 1 - \frac{r_0}{r} \right), & r_0 < r < r_{\max} = -\frac{1}{\mathcal{H}} r_0 \quad (\mathcal{H} < 0) \\ 1, & r_{\max} < r \end{cases} \quad \S 2.13$$



Σχήμα 2.2 :: Συνάρτηση  $d=G(r)$

Στην § 2.13,  $\mathcal{H}$  είναι η παράμετρος χαλάρωσης,  $\sigma_u$  είναι η μέγιστη μονοαξονική τάση και  $E$  είναι η σταθερά του Young. Ο μονοαξονικός αυτός νόμος τάσεως-ανηγμένης παραμόρφωσης απεικονίζεται στο Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3 :: Προσομοίωμα θραύσης με μονοαξονικό νόμο τάσης-ανηγμένης παραμόρφωσης

Από τις § 2.7 και § 2.12 μπορεί να παραχθεί μία νέα νόρμα  $\tau^\sigma$  στο χώρο των τάσεων ως εξής:

$$\tau^\sigma = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}} = (1-d) \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} = (1-d) \tau^\varepsilon \quad \text{§ 2.14}$$

Για τους σκοπούς αυτής της ανάλυσης η νόρμα  $\tau^\sigma$  είναι καταλληλότερη από την νόρμα  $\tau^\varepsilon$ , κι έτσι στα επόμενα, το προσομοίωμα θα περιγράφεται σε όρους της  $\tau^\sigma$ , δεδομένου ότι κι οι δύο νόρμες σχετίζονται μεταξύ τους βάσει της § 2.14.

Μετά από αλγεβρικούς υπολογισμούς, ο αντίστοιχος νόμος μεταβολής των τάσεων συναρτήσει των ανηγμένων παραμορφώσεων μπορεί να υπολογισθεί ως εξής:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{§ 2.15}$$

όπου  $\mathbb{C}^d$  είναι το εφαπτομενικό καταστατικό μητρώο και ορίζεται ως:

$$\mathbb{C}^d = \begin{cases} (1-d)\mathbb{C}, & \dot{d} = 0 \text{ (αποφόρτιση)} \\ (1-d) \left[ \mathbb{C} - \frac{1}{1+\mathcal{H}} \frac{\tau_0}{(\tau^\sigma)^3} \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} \right], & \dot{d} \neq 0 \text{ (φόρτιση)} \end{cases} \quad \text{§ 2.16}$$

Τέλος, η διάχυση  $\mathcal{D}$  μπορεί να γραφεί υπό κατάλληλη μορφή ως:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\tau^\sigma)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{d}{1-d} \right) \geq 0 \quad \text{§ 2.17}$$

όπου ο όρος  $d/(1-d)$  μπορεί να εκφραστεί, υπό συνθήκες φόρτισης ως εξής:

$$\frac{d}{1-d} = \frac{1}{\mathcal{H}} g(\boldsymbol{\sigma}) \quad \S 2.18$$

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = 1 - \frac{r_0}{\tau^\sigma(\boldsymbol{\sigma})} \quad \S 2.19$$

Παρατηρούμε από τις εξισώσεις § 2.14 και § 2.19 ότι αν το πεδίο των τάσεων είναι φραγμένο (και διαφορετικό του μηδενός) τότε και η  $g(\boldsymbol{\sigma})$  είναι φραγμένη. Επίσης, για τις αρνητικές τιμές της παραμέτρου  $\mathcal{H}$  ( $\mathcal{H} < 0 \Rightarrow$  χαλάρωση ανηγμένων παραμορφώσεων) το πεδίο των τάσεων παραμένει φραγμένο για οποιαδήποτε τιμή του πεδίου των ανηγμένων παραμορφώσεων.

### 2.5.2 Συνθήκη I :: Περιορισμός πεδίου τάσεων

Η καταστατική εξίσωση § 2.7 μπορεί εύκολα να ξαναγραφεί ως:

$$\left(1 + \frac{d}{1-d}\right) \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \S 2.20$$

Αντικαθιστώντας το πεδίο των ανηγμένων παραμορφώσεων § 2.4 στην § 2.20 προκύπτει ότι:

$$\underbrace{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{φραγμένο}} + \frac{d}{1-d} \boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\mathbb{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\text{φραγμένο}} + \underbrace{\delta_s \mathbb{C} : (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_s \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}}}_{\text{απεριόριστο}} \quad \S 2.21$$

Παρατηρώντας την § 2.21 συμπεραίνουμε ότι αν επιβάλλουμε τον περιορισμό του πεδίου των τάσεων, τότε ο πρώτος όρος του αριστερού μέλους της εξίσωσης είναι φραγμένος καθώς κι ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους λόγω του φραγμένου χαρακτήρα της ποσότητας  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Επιπλέον, για τις ασυνεχείς λύσεις που αναζητούμε, δηλαδή  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_s \neq 0$ , ο τελευταίος όρος της § 2.21 είναι απερίοριστος. Έτσι, για να έχει ολόκληρη η εξίσωση μαθητική έννοια, ο απερίοριστος όρος πρέπει να αναιρεθεί με κάποιο πρόσθετο όρο στην § 2.21 εισάγοντας μία συνάρτηση δέλτα. Ο μοναδικός όρος που μπορεί να τον αναιρέσει είναι ο  $d/1-d$ . Από τις § 2.18, § 2.19 παρατηρούμε ότι ο όρος  $d/1-d$  είναι φραγμένος λόγω της συνάρτησης  $g(\boldsymbol{\sigma})$ . Επομένως, ο μόνος εφικτός τρόπος για να γίνει απερίοριστος είναι:

$$\frac{1}{\mathcal{H}} = \underbrace{\delta_s \frac{1}{\mathcal{H}}}_{\text{απεριόριστο}} + \underbrace{\frac{1}{\mathcal{H}^*}}_{\text{κανονικό}} \quad \S 2.22$$

Χάρην απλότητας, θα θεωρήσουμε στην συνέχεια την ειδική περίπτωση όπου  $1/\mathcal{H}^* = 0$  (η ανάλυση μπορεί να συνεχιστεί για την γενική περίπτωση αλλά δεν επιτυγχάνεται καμία πρόσθετη εμβάθυνση στο πρόβλημα), έτσι ώστε:

$$\frac{1}{\mathcal{H}} = \delta_s \frac{1}{\bar{\mathcal{H}}} \quad \S 2.23$$

Η εξίσωση § 2.23 δηλώνει μία κρίσιμη συνέπεια της συνθήκης περιορισμού του πεδίου των τάσεων που είναι: ο διανεμητικός χαρακτήρας (distributional character) της παραμέτρου χαλάρωσης  $\mathcal{H}$ , η αντίστροφη της οποίας έχει την δομή μίας συνάρτησης δέλτα που έχει ένταση ίση με  $1/\bar{\mathcal{H}} = 0$ . Η παράμετρος  $\bar{\mathcal{H}}$  θα καλείται στο εξής: εγγενής παράμετρος χαλάρωσης (intrinsic softening parameter).

Αντικαθιστώντας την § 2.23 στην § 2.18 και στη συνέχεια στην § 2.21 προκύπτει ότι:

$$\underbrace{[\boldsymbol{\sigma} - \mathbb{C} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}]}_{=0 \text{ in } \Omega \setminus S} = \delta_s \underbrace{\left[ \mathbb{C} : (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} - \frac{1}{\bar{\mathcal{H}}} g \boldsymbol{\sigma} \right]}_{=0 \text{ in } S} \quad \S 2.24$$

Για να έχει μαθηματική έννοια η εξίσωση § 2.24 οι όροι στις αγκύλες στο αριστερό και δεξί μέλος πρέπει να αναιρούνται στο συνεχές  $\Omega \setminus S$  και ασυνεχές μέρος ( $S$ ) του πεδίου  $\Omega$ , αντίστοιχα. Έτσι, το αντίστοιχο πεδίο των τάσεων που προκύπτει από την § 2.24 είναι:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S} = \mathbb{C} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad \S 2.25$$

$$\boldsymbol{\sigma}_S = \frac{\bar{\mathcal{H}}}{g(\boldsymbol{\sigma}_S)} \mathbb{C} : (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} \quad \S 2.26$$

Η εξίσωση § 2.25 περιγράφει την ελαστική συμπεριφορά του συνεχούς μέρους του σώματος σε όρους του κανονικού τμήματος του πεδίου των ανηγμένων παραμορφώσεων  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ . Μία ανελαστική συμπεριφορά θα μπορούσε να θεωρηθεί, χρησιμοποιώντας την εξίσωση § 2.22 αντί της απλοποιημένης έκφρασης § 2.23.

Η εξίσωση § 2.26 παρέχει την διακριτή μη-γραμμική καταστατική σχέση τάσεως-άλματος στην διεπιφάνεια  $S$  (δρόμος ασυνέχειας) και επιτρέπει τον πλήρη προσδιορισμό του τανυστή της τάσης πάνω στην  $S$  συναρτήσει του άλματος  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S$  και του κάθετου διανύσματος  $\mathbf{n}$ . Έτσι, σε αντίθεση με τις συνήθεις καταστατικές εξισώσεις στις επιφάνειες ασυνέχειας, δε περιλαμβάνεται μόνο το διάνυσμα του ελκυστή, αλλά επιπρόσθετα, αυτή η διακριτή (discrete) μορφή της καταστατικής εξίσωσης είναι συνεπής (αυτό προκύπτει από την φυσική συνθήκη περιορισμού των τάσεων) με την αρχική συνεχή καταστατική εξίσωση. Ειδικότερα, η εξίσωση § 2.26 μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε το άλμα συναρτήσει των τάσεων στην διεπιφάνεια. Επιλέγοντας μία κατάλληλη ορθογωνική βάση σχηματιζόμενη από τα μοναδιαία διανύσματα  $\mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$  ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$ ), οι συνιστώσες των διανυσμάτων  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S$  και  $\boldsymbol{\sigma}_S$  ως προς αυτή τη βάση σχετίζονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_p \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_q \end{bmatrix}_S = \frac{g_S}{\mathcal{H}} \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{np} \\ \sigma_{nq} \end{bmatrix}_S \quad \S 2.27$$

$$\sigma_{ppS} = \sigma_{qqS} = \frac{1}{1-\nu} \sigma_{nnS}, \quad \sigma_{pqS} = 0 \quad \S 2.28$$

Παρατηρούμε ότι η εμφάνιση του όρου  $g_S = g(\sigma_S)$  στην § 2.27 περικλείει, γενικά, μία γραμμική σχέση μεταξύ του άλματος και του διανύσματος του ελκυστή  $\sigma_S \cdot \mathbf{n} = [\sigma_{nn} \quad \sigma_{np} \quad \sigma_{nq}]_S^T$  και περιλαμβάνει όλες τις συνιστώσες του τανυστή της τάσης ως προς το επιλυμένο άλμα.

Η εξίσωση § 2.21 περιλαμβάνει την εμφάνιση του άλματος στο αρχικό ελαστικό χωρίο ( $d = 0$ ). Στην πραγματικότητα, σ' αυτή τη περίπτωση η εξίσωση § 2.21 μπορεί να γραφεί:

$$\underbrace{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{φραγμένο}} = \underbrace{\mathbb{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\text{φραγμένο}} + \underbrace{\delta_S \mathbb{C} : (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}}}_{\text{απεριόριστο}} \quad \S 2.29$$

και η συνθήκη περιορισμού των τάσεων επιβάλλει στον απεριορίστο όρο της § 2.29 να μεταβληθεί έτσι ώστε  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S = 0$ .

**Παρατήρηση 1 ::** Παρατηρούμε ότι οι παραδοχές που υιοθετήθηκαν για να εξάγουμε την εξίσωση § 2.26 μπορούν να αντιστραφούν με την εξής έννοια: αν (α) ο διανεμητικός χαρακτήρας της παραμέτρου κράτυνσης-χαλάρωσης, η εξίσωση § 2.23 επιβάλλεται (κατά συνέπεια η ελαστική συμπεριφορά που ορίζεται από την § 2.25 θεωρείται στο  $\Omega \setminus S$ ) και (β) θεωρείται χαλάρωση των ανηγμένων παραμορφώσεων (*strain softening*) για την καταστατική συμπεριφορά της  $S$  ( $\mathcal{H} < 0$ ), τότε οι τάσεις είναι φραγμένες και στα δύο χωρία  $\Omega \setminus S$  (εφόσον  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  είναι φραγμένο στην (§ 2.25)) και  $S$ . Έτσι, η εξίσωση § 2.26 ικανοποιείται αυτόματα από την επιβολή της συνήθους καταστατικής εξίσωσης § 2.7 μέσω της συνέπειας της § 2.24. Αυτή η παραδοχή είναι καθοριστική για την αποφυγή της άμεσης επιβολής της εξίσωσης § 2.26, που είναι καθορισμένη (και μερικές φορές δύσκολο να παραχθεί) από την θεωρούμενη καταστατική εξίσωση, και θα χρησιμοποιηθεί για την αριθμητική προσομοίωση του προβλήματος.

### 2.5.3 Συνθήκη II :: Συνέχεια του ελκυστή

Μόλις το πεδίο των τάσεων προσδιοριστεί συναρτήσει του άλματος της μετατόπισης από την εξίσωση § 2.26, το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός του άλματος αυτού. Το αναγκαίο σύνολο των εξισώσεων προκύπτει από το γεγονός ότι το διάνυσμα του ελκυστή στο συνεχές μέρος του σώματος ( $\Omega \setminus S$ ) πλησίον της ασυνέχειας  $S$  είναι ίσο με το διάνυσμα του ελκυστή στην επιφάνεια ασυνέχειας, δηλαδή:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\Omega|S} |_{x \in S} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n} \quad \S 2.30$$

και από τις εξισώσεις § 2.25 και § 2.26 προκύπτει ότι:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbb{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S = \frac{\bar{\mathcal{H}}}{g_S} \mathbf{n} \cdot \mathbb{C} : (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} = \frac{\bar{\mathcal{H}}}{g_S} \mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n} \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S \quad \S 2.31$$

Τέλος, επιλύοντας την § 2.31 ως προς το άλμα  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S$  έχουμε:

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S = \frac{g(\boldsymbol{\sigma}_S \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S, \mathbf{n})}{\bar{\mathcal{H}}} (\mathbf{Q}^e)^{-1} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbb{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S \quad \S 2.32$$

$$\mathbf{Q}^e = \mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n}$$

όπου,  $\mathbf{Q}^e$  είναι ο ελαστικός ακουστικός τανυστής.

Η εξίσωση § 2.32, από την σκοπιά της § 2.26, δίνει το άλμα  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S$  σε όρους του κανονικού τμήματος του πεδίου των ανηγμένων παραμορφώσεων  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S$  και του κάθετου διανύσματος  $\mathbf{n}$ . Τονίζεται πάλι, για την εξίσωση § 2.32, που εξαρτάται από το επιλεγμένο καταστατικό προσομοίωμα, ότι δε χρειάζεται να παραχθεί άμεσα για τους σκοπούς της προσομοίωσης. Επομένως, η συνθήκη συνέχειας του ελκυστή § 2.30 παρέχει το σύνολο των εξισώσεων από τις οποίες προσδιορίζεται το άλμα.

### **2.5.4 Συνθήκη III :: Προσδιορισμός του κάθετου διανύσματος**

Ας υποθέσουμε τώρα κάποιο υλικό σημείο  $P$  στην επιφάνεια ασυνέχειας  $S$  και έστω  $t_0$  η χρονική στιγμή κατά την οποία η ασυνέχεια λαμβάνει χώρα στο σημείο  $P$  (χρόνος εκκίνησης) που χαρακτηρίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket(\mathbf{x}_P, t_0) &= \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_P^0 = 0 \\ \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}_P, t_0) &= \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_P^0 \neq 0 \end{aligned} \quad \S 2.33$$

Η εξίσωση § 2.26 μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$g_S \boldsymbol{\sigma}_S = \bar{\mathcal{H}} \mathbb{C} : (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} \quad \S 2.34$$

και παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο προκύπτει:

$$\dot{g}_S \boldsymbol{\sigma}_S + g_S \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S = \bar{\mathcal{H}} \mathbb{C} : (\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_S \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} \quad \S 2.35$$

όπου έχει υποτεθεί ο υλικός χαρακτήρας της επιφάνειας  $S$  ( $\dot{\mathbf{n}} = 0$ ). Η εξίσωση § 2.35 ισχύει για κάθε χρονική στιγμή και ειδικά για τον χρόνο εκκίνησης  $t_0$ , όπου σύμφωνα με την § 2.33<sub>1</sub>  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S^0 = 0$ , (και  $g_S^0 = 0$  από την § 2.34) και έτσι η εξίσωση § 2.35 γίνεται:



$$\dot{g}_S^0 \boldsymbol{\sigma}_S^0 = \bar{\mathcal{H}} \mathbb{C} : \left( \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_S^0 \otimes \mathbf{n} \right)^{\text{sym}} \quad \S 2.36$$

Επίσης, στον χρόνο εκκίνησης όπου  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S^0 = 0$  και  $g_S^0 = 0$  από τις εξισώσεις § 2.4 και § 2.18 προκύπτει αντίστοιχα ότι:  $\llbracket \boldsymbol{\epsilon} \rrbracket_S^0 = \llbracket \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \rrbracket_S^0$  και  $d^0 = 0$ , όπου τελικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\boldsymbol{\sigma}_S^0 = \mathbb{C} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_S^0 \quad \S 2.37$$

Αντικαθιστώντας την § 2.37 στην § 2.36 οδηγούμαστε στην εξής έκφραση:

$$\mathbb{C} : \left( \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_S^0 \otimes \mathbf{n} \right)^{\text{sym}} = \frac{\dot{g}_S^0}{\bar{\mathcal{H}}} \boldsymbol{\sigma}_S^0 = \frac{\dot{g}_S^0}{\bar{\mathcal{H}}} \mathbb{C} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_S^0 \quad \S 2.38$$

και πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά τα δύο μέλη της εξίσωσης § 2.38 με  $\mathbb{C}^{-1}$ :

$$\left( \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_S^0 \otimes \mathbf{n} \right)^{\text{sym}} = \frac{\dot{g}_S^0}{\bar{\mathcal{H}}} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_S^0 \quad \S 2.39$$

Οι εξισώσεις § 2.39 παρέχουν ένα σύνολο εξισώσεων για τον προσδιορισμό των  $\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_S^0$  και  $\mathbf{n}$ . Ειδικότερα, το κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  μπορεί να προσδιοριστεί εκμεταλλευόμενοι την δομή του δεξιού μέλους της § 2.39. Στην πραγματικότητα, πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά και μετά από τα δεξιά και τα δύο μέλη της εξίσωσης με ένα τυχόν διάνυσμα  $\mathbf{t}$  ορθογώνιο ως προς το  $\mathbf{n}$ , τότε το αριστερό μέλος της § 2.39 αναιρείται κι έτσι προκύπτει:

$$\mathbf{t} \cdot \left( \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_S^0 \otimes \mathbf{n} \right)^{\text{sym}} \cdot \mathbf{t} = 0 = \frac{\dot{g}_S^0}{\bar{\mathcal{H}}} \mathbf{t} \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_S^0 \cdot \mathbf{t} \quad \S 2.40$$

έτσι ώστε:

$$\mathbf{t} \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_S^0 \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \forall \mathbf{t} \mid \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \S 2.41$$

Η εξίσωση § 2.41 είναι ικανή για τον προσδιορισμό του κάθετου διανύσματος  $\mathbf{n}$  σε κάθε σημείο της  $S$  συναρτήσει του κανονικού (φραγμένου) τμήματος των ανηγμένων παραμορφώσεων  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_S^0$  στο χρόνο εκκίνησης. Ειδικότερα, για την δισδιάστατη περίπτωση, εφόσον το κάθετο και το εφαπτομενικό διάνυσμα μπορούν να προσδιοριστούν από την κλίση μίας γωνίας  $\theta$  ως προς μία ορθογωνική βάση  $\hat{\mathbf{e}}_1$  και  $\hat{\mathbf{e}}_2$  ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{t} &= -\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_2 \end{aligned} \quad \S 2.42$$

Αντικαθιστώντας την § 2.42 στην § 2.41 και ύστερα από απλούς υπολογισμούς, καταλήγουμε στην κλειστή λύση για την γωνία  $\theta$ :

$$\theta = \operatorname{atan} \left[ \frac{\bar{\epsilon}_{12}^0 \pm \sqrt{(\bar{\epsilon}_{12}^0)^2 - \bar{\epsilon}_{11}^0 \bar{\epsilon}_{22}^0}}{\bar{\epsilon}_{11}^0} \right]_S \quad \S 2.43$$

παρέχοντας δύο διαφορετικές πιθανές λύσεις για την διεύθυνση του κάθετου διανύσματος.

Ένας εναλλακτικός ισοδύναμος τρόπος, για τον υπολογισμό του κάθετου διανύσματος  $\mathbf{n}$  προκύπτει από την § 2.38. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της § 2.38 με τον όρο  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_S^0$  και λαμβάνοντας υπόψη την § 2.37 προκύπτει ότι:

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_S^0 : \mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_S^0 = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0 \cdot \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_S^0 = \frac{\dot{\mathcal{G}}_S^0}{\mathcal{H}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0 : \mathbb{C}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0 \quad \S 2.44$$

και έτσι:

$$\frac{\dot{\mathcal{G}}_S^0}{\mathcal{H}} = \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0 \cdot \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_S^0}{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0 : \mathbb{C}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0} \quad \S 2.45$$

Τώρα, πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και τα δύο μέλη της § 2.38 με το διάνυσμα  $\mathbf{n}$  προκύπτει:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_S^0 = \frac{\dot{\mathcal{G}}_S^0}{\mathcal{H}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_S^0 \quad \S 2.46$$

και αντικαθιστώντας την § 2.45 στην § 2.46 καταλήγουμε στην εξής έκφραση:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_S^0 - \frac{\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0 \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0 \cdot \mathbf{n}}{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0 : \mathbb{C}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0} [\dot{\mathbf{u}}]_S^0 = \mathbf{0} \quad \S 2.47$$

Αναδιατάσσοντας την εξίσωση § 2.47 μπορούμε να γράψουμε (βλ. Εξ. § 2.14):

$$\mathbf{Q}_S^{d^0}(\mathbf{n}) \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_S^0 = \mathbf{0} \quad \S 2.48$$

$$\mathbf{Q}_S^{d^0}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_S^{d^0} \cdot \mathbf{n} \quad \S 2.49$$

$$\mathbb{C}_S^{d^0} = \mathbb{C} - \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0 \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0}{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0 : \mathbb{C}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0} = \mathbb{C} - \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0 \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}_S^0}{(\tau_S^{\sigma^0})^2} \quad \S 2.50$$

Συγκρίνοντας την § 2.50 με την § 2.16 παρατηρούμε ότι η ποσότητα  $\mathbb{C}_S^{d^0}$  είναι ο εφαπτομενικός καταστατικός ελαστο-θραυστικός (elasto-damage) τανυστής στο χρόνο εκκίνησης (όταν  $d=0$  και  $\tau_0 = \tau^\sigma$ ) για μηδενική τιμή της παραμέτρου κράτυνσης-χαλάρωσης  $\mathcal{H} = 0$  (ή  $\bar{\mathcal{H}} = 0$ ). Έτσι, η ποσότητα  $\mathbf{Q}_S^{d^0}$  στην § 2.49 είναι ο ελαστο-θραυστικός ακουστικός τανυστής στον χρόνο εκκίνησης για μηδενική τιμή της παραμέτρου

χαλάρωσης. Για να έχει η εξίσωση § 2.48 μη τετριμμένες λύσεις (δηλαδή  $[[\mathbf{u}]]_S^0 \neq 0$ ) πρέπει να ισχύει για τον ακουστικό ταυυστή ότι:

$$\det[\mathbf{Q}_S^{d^0}(\mathbf{n})] = 0 \quad \text{§ 2.51}$$

η οποία λύνεται ως προς το κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{n}$ .

Παρατηρούμε την ομοιότητα με την προηγούμενη διαδικασία, για τον προσδιορισμό του κάθετου διανύσματος  $\mathbf{n}$  με αυτή που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση αστοχίας βασισμένη στον ακουστικό ταυυστή. Εντούτοις, δίνεται έμφαση ότι στη παρούσα ανάλυση ισχυρής ασυνέχειας ο εξεταζόμενος ακουστικός ταυυστής αντιστοιχεί στον χρόνο εκκίνησης και σε μηδενική τιμή της παραμέτρου χαλάρωσης.

### **2.5.5 Σκέδαση :: Ενέργεια θραύσης**

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, αγνοώντας την κινητική ενέργεια, η εξωτερική ενέργεια που προσφέρεται στο σώμα μεταξύ του χρονικού διαστήματος  $[t_1, t_2]$  μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}}|_1^2 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Omega} (\dot{\Psi} + \mathbf{D}) \, d\Omega \right] dt \\ &= \int_{\Omega} \left[ (\Psi_2 - \Psi_1) + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{D} \, dt \right] d\Omega \end{aligned} \quad \text{§ 2.52}$$

όπου  $\Psi$  και  $\mathbf{D}$  είναι η ενέργεια απελευθέρωσης Helmholtz και η σκέδαση, αντίστοιχα, οι οποίες από τις § 2.6, § 2.7, και § 2.17-§ 2.19 μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\Psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{§ 2.53}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2\mathcal{H}} (\tau^\sigma)^2 \dot{g} = \frac{r_0}{2\mathcal{H}} \dot{\tau}^\sigma = \delta_S \frac{r_0}{2\mathcal{H}} \dot{\tau}_S^\sigma \quad \text{§ 2.54}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι η διαδικασία παραμόρφωσης που οδηγεί στην διατύπωση της ισχυρής ασυνέχειας κατά μήκος της  $S$  είναι η ακόλουθη:

Η διαδικασία ξεκινάει  $t_0 = 0$  με  $(\Psi_0, \tau_0^\sigma, d_0) = (0, 0, 0)$ , ύστερα οι τάσεις αυξάνονται ελαστικά (χωρίς σκέδαση) μέχρι να επιτευχθεί η αρχική κατώτατη τιμή  $r_0$  στο χρόνο  $t_1$  όπου  $(\Psi_1, \tau_1^\sigma, d_1) = (\frac{1}{2}r_0^2, r_0, 0)$ . Τελικά, μία μονοτονική διαδικασία φόρτισης ( $\dot{d} \neq 0$ ) οδηγεί στην ολική χαλάρωση των τάσεων την χρονική στιγμή  $t_2$  όπου  $(\Psi_2, \tau_2^\sigma, d_2) = (0, 0, 1)$ . Σύμφωνα με τις § 2.52 και § 2.54 η εξωτερική ενέργεια που προσφέρεται κατά την διαδικασία αυτή (από την χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  μέχρι την χρονική στιγμή  $t_2$ ) μπορεί να υπολογισθεί ως εξής:

$$\begin{aligned}
W_{\text{ext}}|_0^2 &= \int_{\Omega} \left[ \underbrace{(\Psi_2 - \Psi_0)}_{=0} + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{D} \, dt \right] d\Omega = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Omega} \delta_S \frac{r_0}{2\mathcal{H}} \dot{\tau}_S^\sigma \, d\Omega \right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_S \frac{r_0}{2\mathcal{H}} \dot{\tau}_S^\sigma \, d\Gamma \right] dt = \int_S \frac{r_0}{2\mathcal{H}} \left[ \int_{\tau_1^\sigma}^{\tau_2^\sigma} d\tau^\sigma \right] d\Gamma \quad \S 2.55 \\
&= \int_S \frac{r_0}{2\mathcal{H}} \left[ \underbrace{\tau_2^\sigma}_{=0} - \underbrace{\tau_1^\sigma}_{=r_0} \right] d\Gamma = \int_S -\frac{r_0^2}{2\mathcal{H}} \, d\Gamma
\end{aligned}$$

Έτσι, η προς ολοκλήρωση ποσότητα στο τελευταίο ολοκλήρωμα στην § 2.55 αντιστοιχεί στην προσφερόμενη ενέργεια ανά μονάδα επιφανείας του δρόμου ασυνέχειας  $S$ , και θα καλείται στο εξής ενέργεια θραύσεως  $G_f$  (fracture energy):

$$G_f = -\frac{r_0^2}{2\mathcal{H}} \quad \S 2.56$$

και λαμβάνοντας υπόψη την § 2.13<sub>1</sub>, η εξίσωση § 2.56 μπορεί να λυθεί ως προς την παράμετρο  $\bar{\mathcal{H}}$ :

$$\bar{\mathcal{H}} = -\frac{r_0^2}{2G_f} = -\frac{\sigma_u^2}{2G_f E} \quad \S 2.57$$

η οποία δηλώνει ότι η εγγενής παράμετρος χαλάρωσης  $\bar{\mathcal{H}}$  είναι μία ιδιότητα του υλικού σχετιζόμενη με την ενέργεια θραύσεως, την σταθερά  $E$  του Young και την μονοαξονική οριακή τάση  $\sigma_u$  μέσω της § 2.57. Στην εξίσωση αυτή, δηλώνεται επίσης η αρνητική τιμή της παραμέτρου  $\bar{\mathcal{H}}$ .

## 2.6 Ανάλυση ισχυρής ασυνέχειας προσομοιωμάτων πλαστικότητας

### 2.6.1 Προσομοίωμα πλαστικότητας με χαλάρωση ανηγμένων παραμορφώσεων

Υποθέτουμε μία οικογένεια καταστατικών προσομοιωμάτων ελαστοπλαστικότητας. Χάριν απλότητας, θα περιοριστούμε στο κλασικό προσομοίωμα συναρτημένης πλαστικότητας που ορίζεται ως εξής:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \quad \S 2.58$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \S 2.59$$

$$\dot{q} = -\lambda \mathcal{H} \frac{\partial f}{\partial q} \quad \S 2.60$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q) = \hat{f}(\boldsymbol{\sigma}) + q - \sigma_y \quad \S 2.61$$

$$\lambda \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0, \quad \lambda f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \quad \S 2.62$$

όπου  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  και  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  είναι η ο τανυστής της τάσης, της ανηγμένης παραμόρφωσης και της πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης αντίστοιχα,  $\mathbb{C}$  είναι ο ισοτροπικός ελαστικός καταστατικός τανυστής,  $q$  είναι μία stress-like εσωτερική μεταβλητή,  $\hat{f}(\boldsymbol{\sigma})$  είναι μία ομογενής συνάρτηση (ενός βαθμού),  $\sigma_y > 0$  είναι η τάση διαρροής και  $\mathcal{H}$  είναι η παράμετρος χαλάρωσης που υποθέτουμε ότι είναι αρνητική ( $\mathcal{H} < 0$ ). Οι εξισώσεις § 2.62 αποτελούν τις κλασικές συνθήκες Kuhn-Tucker, επιτρέποντας μας να προσδιορίσουμε τον πλαστικό πολλαπλασιαστή  $\lambda$  που μπορεί να υπολογιστεί από την συνθήκη συνέπειας  $\dot{f} = 0$  συναρτήσει των  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  ή του  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  ως εξής:

$$\lambda = \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\mathcal{H}} \nabla \hat{f} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = -\frac{1}{\mathcal{H}} \dot{q} \quad \S 2.63$$

$$\lambda = \frac{\nabla \hat{f} : \mathbb{C}}{\mathcal{H} + \nabla \hat{f} : \mathbb{C} : \nabla \hat{f}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \S 2.64$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις § 2.63 και § 2.64 στην § 2.58 οδηγούμαστε στο κλασικό εφαλτομενικό ελαστοπλαστικό τανυστή  $\mathbb{C}^{ep}$  που ορίζεται ως:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \S 2.65$$

$$\mathbb{C}^{ep} = \mathbb{C} - \frac{\mathbb{C} : \nabla \hat{f} \otimes \nabla \hat{f} : \mathbb{C}}{\mathcal{H} + \nabla \hat{f} : \mathbb{C} : \nabla \hat{f}} \quad \S 2.66$$

και ο αντίστροφός του  $(\mathbb{C}^{ep})^{-1}$  ορίζεται ως:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbb{C}^{ep})^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad \S 2.67$$

$$(\mathbb{C}^{ep})^{-1} = \mathbb{C}^{-1} + \frac{1}{\mathcal{H}} \nabla \hat{f} \otimes \nabla \hat{f} \quad \S 2.68$$

Τέλος, η σκέδαση  $\mathbf{D}$  μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$\mathbf{D} = \sigma_y \lambda = -\frac{1}{\mathcal{H}} \sigma_y \dot{q} \geq 0 \quad \S 2.69$$

### 2.6.2 Συνθήκη I :: Περιορισμός πεδίου τάσεων

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την εξίσωση § 2.4 και εξετάζοντας τον υλικό χαρακτήρα της επιφάνειας ασυνέχειας  $\mathbf{S}$  ( $\dot{\mathbf{n}} = 0$ ) καταλήγουμε στην εξής έκφραση:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta_s([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} \quad \S 2.70$$

και αντικαθιστώντας την εξίσωση § 2.70 στην § 2.67 και έπειτα στην § 2.68, προκύπτει:

$$\underbrace{\dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}_{\text{φραγμένο}} + \underbrace{\delta_s([\underline{\dot{\mathbf{u}}}] \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}}}_{\text{απεριόριστο}} = \underbrace{\mathbb{C}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}_{\text{φραγμένο}} + \frac{1}{\mathcal{H}} \underbrace{\nabla \hat{f} \otimes \nabla \hat{f} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}_{\text{φραγμένο}} \quad \S 2.71$$

Αν απαιτήσουμε το πεδίο των τάσεων  $\boldsymbol{\sigma}$  (κι επίσης  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ) να είναι φραγμένο, ο απερίοριστος όρος στο αριστερό μέλος της § 2.71 πρέπει να αναιρεθεί προκειμένου το άλμα  $[\underline{\mathbf{u}}]_S^0$  να είναι διάφορο του μηδενός. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί στην § 2.71 μόνο αν εμφανιστεί μία συνάρτηση δέλτα στη δομή της  $1/\mathcal{H}$  έτσι ώστε:

$$\frac{1}{\mathcal{H}} = \delta_s \frac{1}{\mathcal{H}} + \frac{1}{\mathcal{H}^*} \quad \S 2.72$$

Για  $1/\mathcal{H}^* = 0$ :

$$\frac{1}{\mathcal{H}} = \delta_s \frac{1}{\mathcal{H}} \quad \S 2.73$$

από την οποία προκύπτει ο διανεμητικός χαρακτήρας της παραμέτρου χαλάρωσης  $\mathcal{H}$  συναρτήσει της εγγενούς παραμέτρου χαλάρωσης  $\bar{\mathcal{H}}$ .

Τώρα, αντικαθιστώντας την § 2.73 στην § 2.71 και αναιρώντας τους φραγμένους όρους στο συνεχές χωρίο  $\Omega \setminus S$  και τους απερίοριστους όρους στην επιφάνεια ασυνέχειας  $S$  καταλήγουμε στην:

$$\dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \mathbb{C}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} = \mathbb{C} : \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad \S 2.74$$

$$([\underline{\dot{\mathbf{u}}}]_S \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} = \frac{1}{\mathcal{H}} \nabla \hat{f}_S \otimes \nabla \hat{f}_S : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \quad \S 2.75$$

Η εξίσωση § 2.74 δηλώνει την ελαστική συμπεριφορά στο συνεχές χωρίο  $\Omega \setminus S$  του σώματος. Η εξίσωση § 2.75 παρέχει μία διακριτή καταστατική εξίσωση στην επιφάνεια ασυνέχειας  $S$  συνεπής με το αρχικό ελαστοπλαστικό προσομοίωμα που δίνεται από τις εξισώσεις § 2.58 - § 2.62. Σχετίζει την μεταβολή του άλματος  $[\underline{\dot{\mathbf{u}}}]_S$  στις μετατοπίσεις, τις τάσεις  $\boldsymbol{\sigma}_S$  και την μεταβολή των τάσεων  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S$  στην επιφάνεια ασυνέχειας  $S$ .

**Παρατήρηση 2 ::** Ισχύουν οι ίδιες παρατηρήσεις όπως και στην Παρατήρηση 1. Έτσι, αν

- η εξίσωση § 2.73 (διανεμητικός χαρακτήρας της παραμέτρου χαλάρωσης) και κατά συνέπεια η εξίσωση § 2.74 (ελαστική συμπεριφορά στο  $\Omega \setminus S$ ) επιβάλλεται και
- οι τάσεις είναι φραγμένες στην  $S$  (θεωρώντας μία αρνητική τιμή της παραμέτρου  $\bar{\mathcal{H}}$ ) (χαλάρωση ανηγμένων παραμορφώσεων)

τότε η εξίσωση § 2.75 δεν πρέπει να επιβληθεί άμεσα κι αυτές θα ικανοποιηθούν πλήρως από την ελαστοπλαστική εξίσωση § 2.67 και § 2.71.

**Παρατήρηση 3** :: Η εξίσωση § 2.75 παρέχει την μεταβολή του άλματος των μετατοπίσεων  $[[\dot{\mathbf{u}}]]_{\mathcal{S}}$  συναρτήσει του πεδίου των τάσεων. Για την ειδική περίπτωση της θεωρίας πλαστικής ροής  $J_2$  και για την δισδιάστατη περίπτωση, τα αποτελέσματα μπορούν να απλοποιηθούν στις εξής εκφράσεις:

$$\begin{aligned} [[\dot{\mathbf{u}}]]_{n_{\mathcal{S}}} &= 0 \\ [[\dot{\mathbf{u}}]]_{p_{\mathcal{S}}} &= \dot{\gamma}_{\mathcal{S}} = \frac{3}{\mathcal{H}} \dot{\tau}_{\mathcal{S}} \end{aligned} \quad \text{§ 2.76}$$

όπου  $[[\mathbf{u}]]_{n_{\mathcal{S}}}$  και  $[[\mathbf{u}]]_{p_{\mathcal{S}}} = \gamma_{\mathcal{S}}$  είναι η κάθετη και η εφαπτομενική συνιστώσα του άλματος της μετατόπισης αντίστοιχα, και  $\tau_{\mathcal{S}}$  είναι η διατμητική τάση κατά μήκος της ασυνέχειας  $\mathcal{S}$ . Έτσι, η εξίσωση § 2.76 εκφράζει ότι χρησιμοποιώντας την θεωρία πλαστικής ροής  $J_2$  μπορούμε να προσομοιώσουμε μόνο γραμμές ολίσθησης ( $[[\mathbf{u}]]_n = 0$ ), που διέπονται από την απλοποιημένη σχέση τάσεων-μετατοπίσεων § 2.76<sub>2</sub>.

### **2.6.3 Συνθήκη II :: Συνέχεια του ελκυστή**

Η συνέχεια του ελκυστή κατά μήκος της  $\mathcal{S}$  επιβάλλει:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\Omega|\mathcal{S}}|_{x \in \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{§ 2.77}$$

ή παίρνοντας χρονικές παραγώγους (και υποθέτοντας ότι  $\dot{\mathbf{n}} = 0$ ) προκύπτει ότι:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega|\mathcal{S}}|_{x \in \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{§ 2.78}$$

Αντίθετα με τα προσομοιώματα θραύσης, η εξίσωση § 2.75 δε μπορεί να αντιστραφεί άμεσα και να λυθεί ως προς  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$ , λόγω της ελλιπούς σειράς του τετάρτης τάξεως ταυυστή  $\nabla \hat{f}_{\mathcal{S}} \otimes \nabla \hat{f}_{\mathcal{S}}$ . Ο πλήρης προσδιορισμός του πεδίου των τάσεων μπορεί να γίνει από κοινού με τις εξισώσεις που παρέχονται από την συνθήκη συνέχειας του ελκυστή έτσι ώστε, τελικά, οι εξισώσεις § 2.75 και § 2.77 ή § 2.78 να παρέχουν ένα ορθά τοποθετημένο, στη γενική περίπτωση μη-γραμμικό, σύστημα εξισώσεων επιτρέποντας τον προσδιορισμό του άλματος  $[[\mathbf{u}]]_{\mathcal{S}}$  και του πεδίου των τάσεων  $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}$  στην επιφάνεια ασυνέχειας.

### **2.6.4 Συνθήκη III :: Προσδιορισμός του κάθετου διανύσματος**

Η εξίσωση § 2.75 μπορεί να γραφεί για τον χρόνο εκκίνησης  $t_0$  ως εξής:

$$\begin{aligned} ([[ \dot{\mathbf{u}} ] ]_{\mathcal{S}} \otimes \mathbf{n})^{\text{sym}} &= \gamma^0 \nabla \hat{f}(\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}^0) \\ \gamma^0 &= \frac{\nabla \hat{f}_{\mathcal{S}}^0 : \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}^0}{\mathcal{H}} = \frac{\hat{f}_{\mathcal{S}}^0}{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad \text{§ 2.79}$$

Η εξίσωση § 2.79 παρέχει ένα σύνολο εξισώσεων όμοιων μ' αυτό που παρήχθησαν για το προσομοίωμα θραύσης (βλ. Εξίσωση § 2.39), αλλά συναρτήσει τώρα των τάσεων  $\boldsymbol{\sigma}_S^0$  αντί των ανηγμένων παραμορφώσεων  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_S^0$ . Κατά συνέπεια, μπορεί να εφαρμοστεί κι εδώ μία όμοια διαδικασία μ' αυτή που περιγράφηκε στο εδάφιο 2.4.4 για τον προσδιορισμό του κάθετου διανύσματος  $\mathbf{n}$ , η οποία οδηγεί στην εξής σχέση:

$$\mathbf{t} \cdot \nabla \hat{f}_S^0 \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \forall \mathbf{t} \mid \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \S 2.80$$

Όπως περιγράφηκε στη Παρατήρηση (7), για την δισδιάστατη περίπτωση η κλίση της γωνίας  $\theta$  του κάθετου διανύσματος ως προς μία ορθογωνική βάση  $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$  μπορεί να υπολογιστεί άμεσα συναρτήσει των συνιστωσών του διανύσματος  $\nabla \hat{f}_S^0$  από την εξής σχέση:

$$\theta = \operatorname{atan} \left[ \frac{\nabla \hat{f}_{12}^0 \pm \sqrt{(\nabla \hat{f}_{12}^0)^2 - \nabla \hat{f}_{11}^0 \nabla \hat{f}_{22}^0}}{\nabla \hat{f}_{11}^0} \right]_S \quad \S 2.81$$

Για την ειδική περίπτωση της θεωρίας πλαστικής ροής  $J_2$  και την δισδιάστατη περίπτωση (επίπεδη ένταση, επίπεδη παραμόρφωση), μπορούν να παραχθούν κλειστές εκφράσεις για την γωνία  $\theta$ , συναρτήσει του αποκλίνοντα τανυστή της τάσης σε καθένα από τα πεδία  $S$  και  $\Omega \setminus S$ .

Μία εναλλακτική διαδικασία για τον προσδιορισμό του κάθετου διανύσματος  $\mathbf{n}$  μπορεί να περιγραφεί ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως στο εδάφιο 2.4.4. Για το ελαστοπλαστικό προσομοίωμα λοιπόν έχουμε: πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της § 2.79<sub>1</sub> με τον όρο  $\nabla \hat{f}_S^0 : \mathbb{C}$  προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \nabla \hat{f}_S^0 : \mathbb{C} : ([\dot{\mathbf{u}}]_S^0 \otimes \mathbf{n})^{\operatorname{sym}} &= \gamma^0 \nabla \hat{f}^0 : \mathbb{C} : \nabla \hat{f}_S^0 \\ \gamma^0 &= \frac{\nabla \hat{f}_S^0 : \mathbb{C} : [\dot{\mathbf{u}}]_S^0 \cdot \mathbf{n}}{\nabla \hat{f}_S^0 : \mathbb{C} : \nabla \hat{f}_S^0} \end{aligned} \quad \S 2.82$$

Τώρα, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση § 2.79<sub>1</sub> με  $\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}$  προκύπτει ότι:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbb{C} : ([\dot{\mathbf{u}}]_S^0 \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_S^0 = \mathbf{n} \cdot \mathbb{C} : \nabla \hat{f}_S^0 \gamma^0 \quad \S 2.83$$

και αντικαθιστώντας την § 2.80 στην § 2.81 καταλήγουμε στην:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_S^0 - \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbb{C} : \nabla \hat{f}_S^0 \otimes \nabla \hat{f}_S^0 : \mathbb{C}}{\nabla \hat{f}_S^0 : \mathbb{C} : \nabla \hat{f}_S^0} \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_S^0 = \mathbf{0} \quad \S 2.84$$

Η εξίσωση § 2.82 μπορεί να αναδιαταχθεί ως ακολούθως:



$$\mathbf{Q}_S^{\text{ep}^0}(\mathbf{n}) \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]]_S^0 = \mathbf{0} \quad \S 2.85$$

$$\mathbf{Q}_S^{\text{ep}^0}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_S^{\text{ep}^0} \cdot \mathbf{n} \quad \S 2.86$$

$$\mathbb{C}_S^{\text{ep}^0} = \mathbb{C} - \frac{\mathbb{C} : \nabla \hat{f}_S^0 \otimes \nabla \hat{f}_S^0 : \mathbb{C}}{\nabla \hat{f}_S^0 : \mathbb{C} : \nabla \hat{f}_S^0} \quad \S 2.87$$

Για να υφίστανται λύσεις με  $[[\dot{\mathbf{u}}]]_S^0 \neq \mathbf{0}$  από την § 2.85 πρέπει ο ελαστοπλαστικός ακουστικός τανυστής  $\mathbf{Q}_S^{\text{ep}^0}(\mathbf{n})$  να είναι ιδιάζων, δηλαδή:

$$\det[\mathbf{Q}_S^{\text{ep}^0}(\mathbf{n})] = 0 \quad \S 2.88$$

από την οποία μπορεί να υπολογισθεί το διάνυσμα  $\mathbf{n}$ . Από τις εξισώσεις § 2.86 και § 2.87 παρατηρούμε ότι ο τανυστής  $\mathbf{Q}_S^{\text{ep}^0}$  δίνεται συναρτήσει του τανυστή  $\mathbb{C}_S^{\text{ep}^0}$  που αποτελεί τον εφαπτομενικό ελαστοπλαστικό τανυστή στο χρόνο εκκίνησης με μηδενική τιμή κράτυνσης όπως μπορεί να διαπιστωθεί από την σύγκριση με την εξίσωση § 2.66.

### **2.6.5 Σκέδαση :: Ενέργεια Θραύσης**

Από την εξίσωση § 2.69 λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση § 2.73 η σκέδαση  $\mathbf{D}$  μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{\mathcal{H}} \sigma_y \dot{q} = -\delta_s \frac{1}{\mathcal{H}} \sigma_y \dot{q} \quad \S 2.89$$

όπου κατά την πλαστική φόρτιση,  $q$  μπορεί να υπολογισθεί από την συνθήκη συνέπειας  $f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0$  και συνεπώς, από την εξίσωση § 2.61 ισχύει ότι:

$$q = \sigma_y - \hat{f}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \S 2.90$$

Παρατηρούμε ότι  $\hat{f}(\mathbf{0}) = 0$  εξαιτίας του ομογενή χαρακτήρα της συνάρτησης  $\hat{f}(\cdot)$ . Λαμβάνοντας υπόψη την § 2.73, η ενέργεια απελευθέρωσης μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\Psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \delta_s \frac{q^2}{\mathcal{H}} \quad \S 2.91$$

Ας υποθέσουμε μία διαδικασία παραμόρφωσης που οδηγεί στην διατύπωση της ισχυρής ασυνέχειας. Η διαδικασία ξεκινάει την χρονική στιγμή  $t_0 = 0$ , με  $(\Psi_0, q_0) = (0, 0)$ . Στη συνέχεια οι ανηγμένες παραμορφώσεις αυξάνουν ελαστικά (χωρίς σκέδαση) μέχρι την εκκίνηση της πλαστικής ροής την χρονική στιγμή  $t_1$  (χρόνος εκκίνησης). Πέραν της χρονικής αυτής στιγμής η καταστατική εξίσωση χαλάρωσης των ανηγμένων παραμορφώσεων οδηγεί στην χαλάρωση των τάσεων την χρονική στιγμή  $t_2$  όπου  $\hat{f}(\boldsymbol{\sigma}_2) = \hat{f}(\mathbf{0}) = 0$  κι έτσι  $q_2 = \sigma_y$

λόγω της εξίσωσης § 2.90. Κατά συνέπεια,  $(\Psi_2, q_2) = (\frac{1}{2}\delta_s(\sigma_y^2/\bar{\mathcal{H}}), \sigma_y)$ . Η εξωτερική ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα, μπορεί να εκφραστεί από την § 2.52 ως:

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}}|_0^2 &= \int_{\Omega} \left[ (\Psi_2 - \Psi_1) + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{D} dt \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \delta_s \left[ \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{\bar{\mathcal{H}}} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sigma_y^2}{\bar{\mathcal{H}}} \dot{q} dt \right] d\Omega = \int_{\mathcal{S}} \left[ \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{\bar{\mathcal{H}}} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sigma_y^2}{\bar{\mathcal{H}}} \dot{q} dt \right] d\Gamma \quad \text{§ 2.92} \\ &= \int_{\mathcal{S}} \left[ \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{\bar{\mathcal{H}}} - \frac{\sigma_y^2}{\bar{\mathcal{H}}} \int_{q_1=0}^{q_2=\sigma_y} dq \right] d\Gamma = \int_{\mathcal{S}} -\frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{\bar{\mathcal{H}}} d\Gamma \end{aligned}$$

Έτσι η προσφερόμενη ενέργεια ανά μονάδα ασυνεχούς επιφάνειας (ενέργεια θραύσης: fracture energy) μπορεί να εξαχθεί από την § 2.92, κι αποτελεί την ολοκληρώσιμη ποσότητα του τελευταίου ολοκληρώματος, δηλαδή:

$$G_f = -\frac{\sigma_y^2}{2\bar{\mathcal{H}}} \quad \text{§ 2.93}$$

Παρατηρούμε ξανά την ομοιότητα της εξίσωσης § 2.56 (προσομοίωμα θραύσης) με την εξίσωση § 2.93 (ελαστοπλαστικό προσομοίωμα). Από την εξίσωση § 2.93 η εγγενής παράμετρος χαλάρωσης  $\bar{\mathcal{H}}$  μπορεί να θεωρηθεί ως παράμετρος του υλικού, σχετιζόμενη με την ενέργεια θραύσης  $G_f$  και την τάση διαρροής σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\bar{\mathcal{H}} = -\frac{\sigma_y^2}{2G_f} \quad \text{§ 2.94}$$



# 3

## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ E-FEM

### 3.1 Γενικά

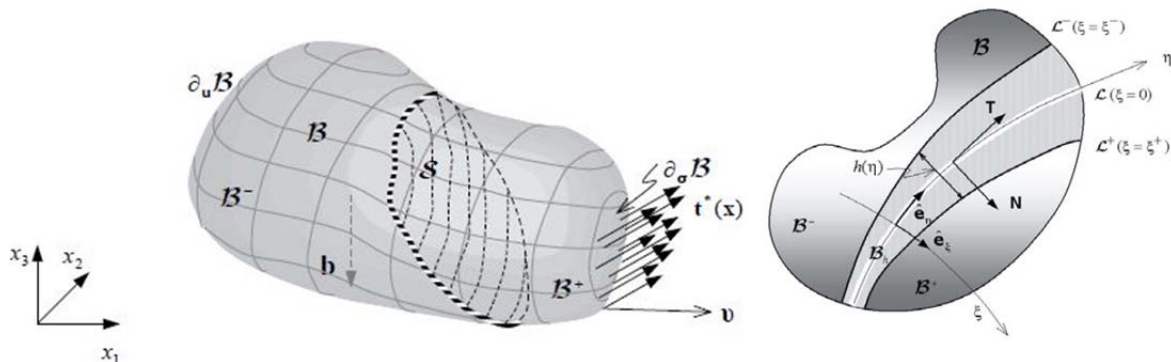
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η διατύπωση του προβλήματος πεπερασμένων στοιχείων για συνεχή μέσα τα οποία διέπονται από ασυνέχειες, E-FEM (**E**mbdedded **F**inite **E**lement **M**ethod). Για την επίλυση του προβλήματος απαιτούνται ειδικές τεχνικές εμπλουτισμού στα συνήθη πεπερασμένα στοιχεία. Ο εμπλουτισμός αυτός λαμβάνει χώρα στο πεδίο των ανηγμένων παραμορφώσεων ή των μετατοπίσεων.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στις παρακάτω ενότητες θα δοθεί έμφαση στα τριγωνικά στοιχεία **CST** (*Constant Strain Triangle*). Ωστόσο μπορεί να γίνει γενίκευση της μεθόδου σε όλα τα πεπερασμένα στοιχεία σε 2 και 3 διαστάσεις με τη χρήση του ίδιου θεωρητικού υποβάθρου.

### 3.2 Δεσπόζουσες εξισώσεις

Η μέθοδος των ενσωματωμένων ασυνεχειών βασίζεται στον εμπλουτισμό των πεπερασμένων στοιχείων με επιπλέον, ασυνεχείς συναρτήσεις σχήματος οι οποίες επιτρέπουν άλματα στο πεδίο των μετατοπίσεων όπως ορίζει και η μέθοδος της ισχυρής ασυνέχειας, SDA.

Έστω ένας φορέας  $B$ , ο οποίος διατρέχεται από μία ασυνέχεια  $S$ . Η ασυνέχεια χωρίζει τον φορέα σε δύο χωρία  $B^+$  και  $B^-$ , ενώ η ίδια καταλαμβάνει το χωρίο  $B_h$ . Στον φορέα δρουν δύο δυνάμεις, το βάρος ( $b$ ) και οι δυνάμεις τριβής ( $t^*$ ).



Σχήμα 3.1 :: Φορέας από τον οποίο διέρχεται ασυνέχεια

Οι δεσπόζουσες εξισώσεις του υπό μελέτη προβλήματος δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ΔΕΣΠΟΖΟΥΣΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ		
Equilibrium equation	$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$	$\forall \mathbf{x} \in B \setminus S$
Constitutive equation	$\boldsymbol{\sigma} = \Sigma(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}))$	$\forall \mathbf{x} \in B$
Kinematic equation	$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^{sym} \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla)$	$\forall \mathbf{x} \in B$
Outer traction continuity	$\mathcal{T}^- = \mathcal{T}^+ \Leftrightarrow \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma}^- = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma}^+$	$\forall \mathbf{x} \in S$
Essential boundary conditions	$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(\mathbf{x})$	$\forall \mathbf{x} \in \partial_u B$
Natural boundary conditions	$\mathbf{t} = \mathbf{t}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}$	$\forall \mathbf{x} \in \partial_\sigma B$
Inner traction continuity	$\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}_S \Leftrightarrow \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma}_S$	$\forall \mathbf{x} \in S$

Σχήμα 3.2 :: Δεσπόζουσες εξισώσεις

Η έκφραση του ασυνεχούς πεδίου των μετατοπίσεων δίνεται από τη σχέση:

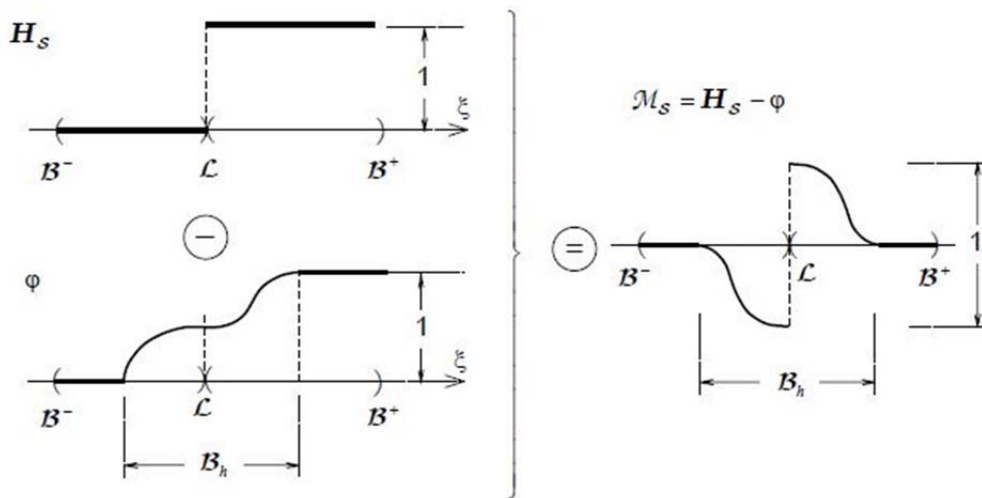
$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + M_s(\mathbf{x}) \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) \quad \S 3.1$$

Η συνάρτηση  $M_s(\mathbf{x})$  ορίζεται ως εξής:

$$M_s(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_s(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \quad \S 3.2$$

Όπου με  $\mathbf{H}_s(\mathbf{x})$  συμβολίζεται η συνάρτηση *Heaviside* και το  $\varphi$  είναι συνεχής συνάρτηση, η οποία στο χωρίο  $B$  λαμβάνει τις παρακάτω τιμές:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \forall \mathbf{x} \in B^- \\ 1, & \forall \mathbf{x} \in B^+ \\ \text{arbitrary,} & \forall \mathbf{x} \in B_h \end{cases} \quad \S 3.3$$



Σχήμα 3.3 :: Συναρτήσεις  $\mathbf{H}_s, \varphi$  &  $M_s$

Το εμπλουτισμένο πεδίο των ανηγμένων παραμορφώσεων λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^{sym} \dot{\mathbf{u}} = \underbrace{\nabla^{sym} \hat{\mathbf{u}}}_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)} + \underbrace{\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes (\delta_S^h(\mathbf{x}) \mathbf{N} - \nabla \varphi(\mathbf{x}))}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)}^{sym} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \S 3.4$$

Όπου το  $\delta_S^h$  ορίζεται ως εξής:

$$\delta_S^h(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{h} \cdot \chi_S(\mathbf{x}), & \text{Weak discontinuity} \\ \frac{1}{k} \cdot \chi_S(\mathbf{x}), & \text{Strong discontinuity} \end{cases} \quad \downarrow h \rightarrow k \quad \S 3.5$$

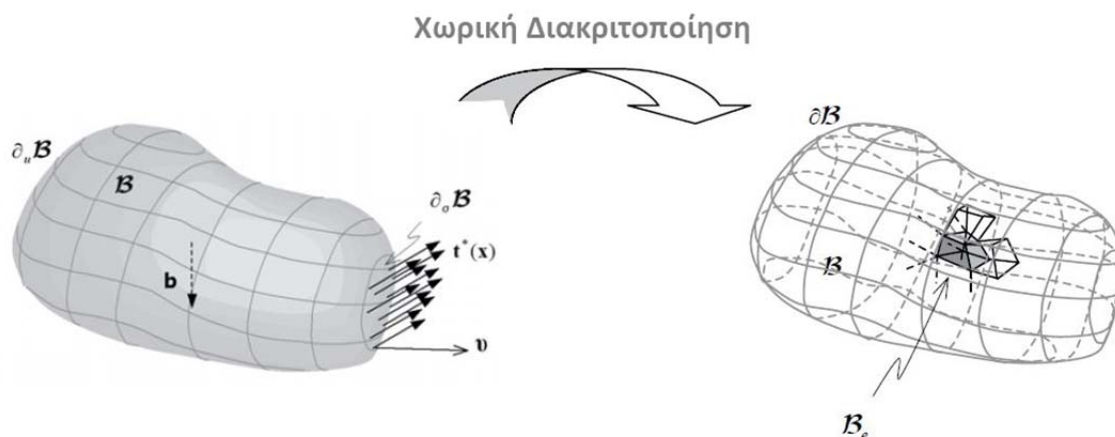
Και το  $\chi_S(\mathbf{x})$  ορίζεται ως εξής:

$$\chi_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \forall \mathbf{x} \in B_h \\ 0, & \forall \mathbf{x} \in B \setminus B_h \end{cases} \quad \S 3.6$$

### 3.3 Διακριτοποίηση

Το χωρίο  $B$  πρέπει να διακριτοποιηθεί σε επιμέρους πεπερασμένα στοιχεία  $\bar{B}_e$ , όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.4.

$$B = \bigcup_{e=1}^{n_{elements}} \bar{B}_e \quad \S 3.7$$



Σχήμα 3.4 :: Διακριτοποίηση του χωρίου  $B$  σε πεπερασμένα στοιχεία

Η γεωμετρία αλλά και το πεδίο των μετατοπίσεων κάθε πεπερασμένου στοιχείου  $\bar{B}_e$  δίνεται ως συνάρτηση των συναρτήσεων σχήματος  $N_i$ . Πιο συγκεκριμένα για ένα στοιχείο  $n_{node}$  κόμβων έχουμε:

$$\mathbf{x}^e = \sum_{i=1}^{n_{node}} N_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_i \quad \S 3.8$$

$$\mathbf{u}^e = \sum_{i=1}^{n_{node}} N_i \cdot \mathbf{a}_i \quad \S 3.9$$

Όπου με  $\hat{\mathbf{x}}_i$  και  $\mathbf{a}_i$  συμβολίζονται οι συντεταγμένες και οι μετατοπίσεις των κόμβων  $i$  αντίστοιχα.

Οι ανηγμένες παραμορφώσεις του στοιχείου δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^{sym} \mathbf{u} = \mathbb{L}_e \mathbf{u}_e = \nabla N_e \cdot \mathbf{a}_e = \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{a}_e \quad \S 3.10$$

Ο τελεστής  $\mathbb{L}$  εκφράζεται αναλυτικά στην παρακάτω σχέση:

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad \S 3.11$$

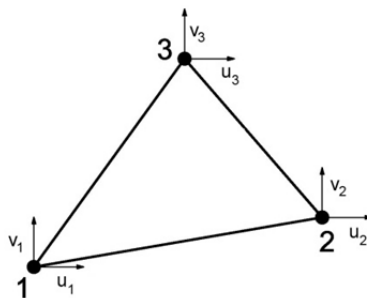
Ενώ το μητρώο παραμορφώσεως λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_3} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_3} & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad \S 3.12$$

Όπου με  $i$  συμβολίζεται ο αριθμός του κάθε κόμβου.

### 3.4 Κανονικό μητρώο ακαμψίας στοιχείου CST

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστεί το μητρώο ακαμψίας των τριγωνικών στοιχείων CST.

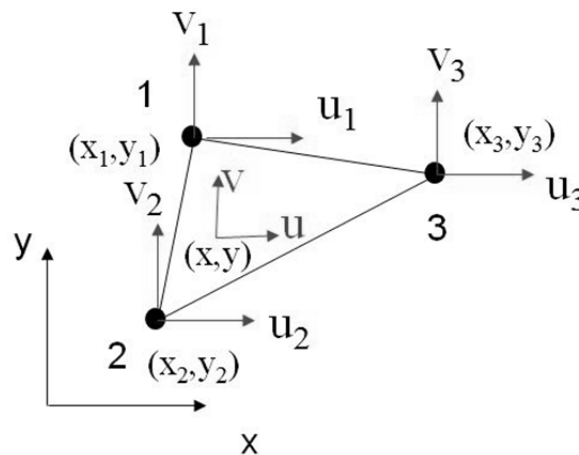


Σχήμα 3.5 :: Τριγωνικό στοιχείο CST

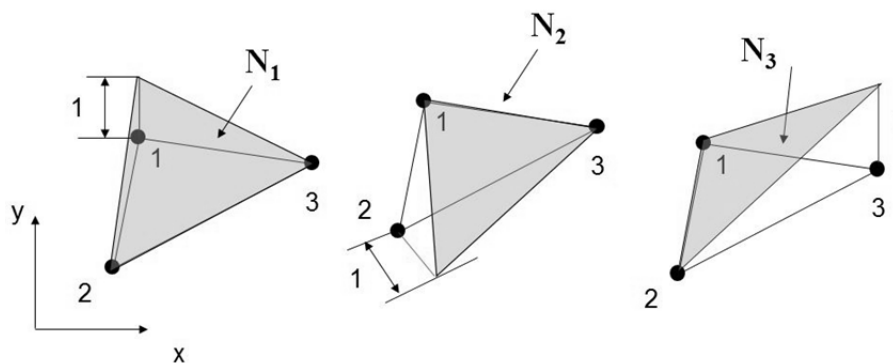


Το πεπερασμένο στοιχείο CST αποτελεί το απλούστερο πεπερασμένο στοιχείο στο επίπεδο. Αποτελείται από τρεις κόμβους και κάθε ένας από αυτούς έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Ο υπολογισμός των μετατοπίσεων σε οποιοδήποτε σημείο εντός του στοιχείου γίνεται με την παρακάτω σχέση, αφού πρώτα υπολογιστούν οι επικόμβιες μετατοπίσεις.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{\S 3.13}$$



Σχήμα 3.6 :: Τριγωνικό στοιχείο CST στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων



Σχήμα 3.7 :: Συναρτήσεις σχήματος στοιχείου CST

Οι συναρτήσεις σχήματος του στοιχείου CST υπολογίζονται ως εξής:

$$N_1 = \frac{a_1 + b_1 \cdot x + c_1 \cdot y}{2 \cdot A} \quad \text{\S 3.14}$$

$$N_2 = \frac{a_2 + b_2 \cdot x + c_2 \cdot y}{2 \cdot A} \quad \text{\S 3.15}$$

$$N_3 = \frac{a_3 + b_3 \cdot x + c_3 \cdot y}{2 \cdot A} \quad \text{\S 3.16}$$

Όπου:

$$\alpha_1 = x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \quad \S 3.17$$

$$b_1 = y_2 - y_3 \quad \S 3.18$$

$$c_1 = x_3 - x_2 \quad \S 3.19$$

$$\alpha_2 = x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \quad \S 3.20$$

$$b_2 = y_3 - y_1 \quad \S 3.21$$

$$c_2 = x_1 - x_3 \quad \S 3.22$$

$$\alpha_3 = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \quad \S 3.23$$

$$b_3 = y_1 - y_2 \quad \S 3.24$$

$$c_3 = x_2 - x_1 \quad \S 3.25$$

Το  $A$  είναι το εμβαδό του τριγώνου και υπολογίζεται ως εξής:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad \S 3.26$$

Το μητρώο παραμόρφωσης  $\mathbf{B}$  εκφράζεται ως εξής:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} = \quad \S 3.27$$

$$= \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

Παρακάτω δίνεται η σχέση από την οποία προκύπτει το διάνυσμα των ανηγμένων παραμορφώσεων:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]^T = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} \quad \S 3.28$$

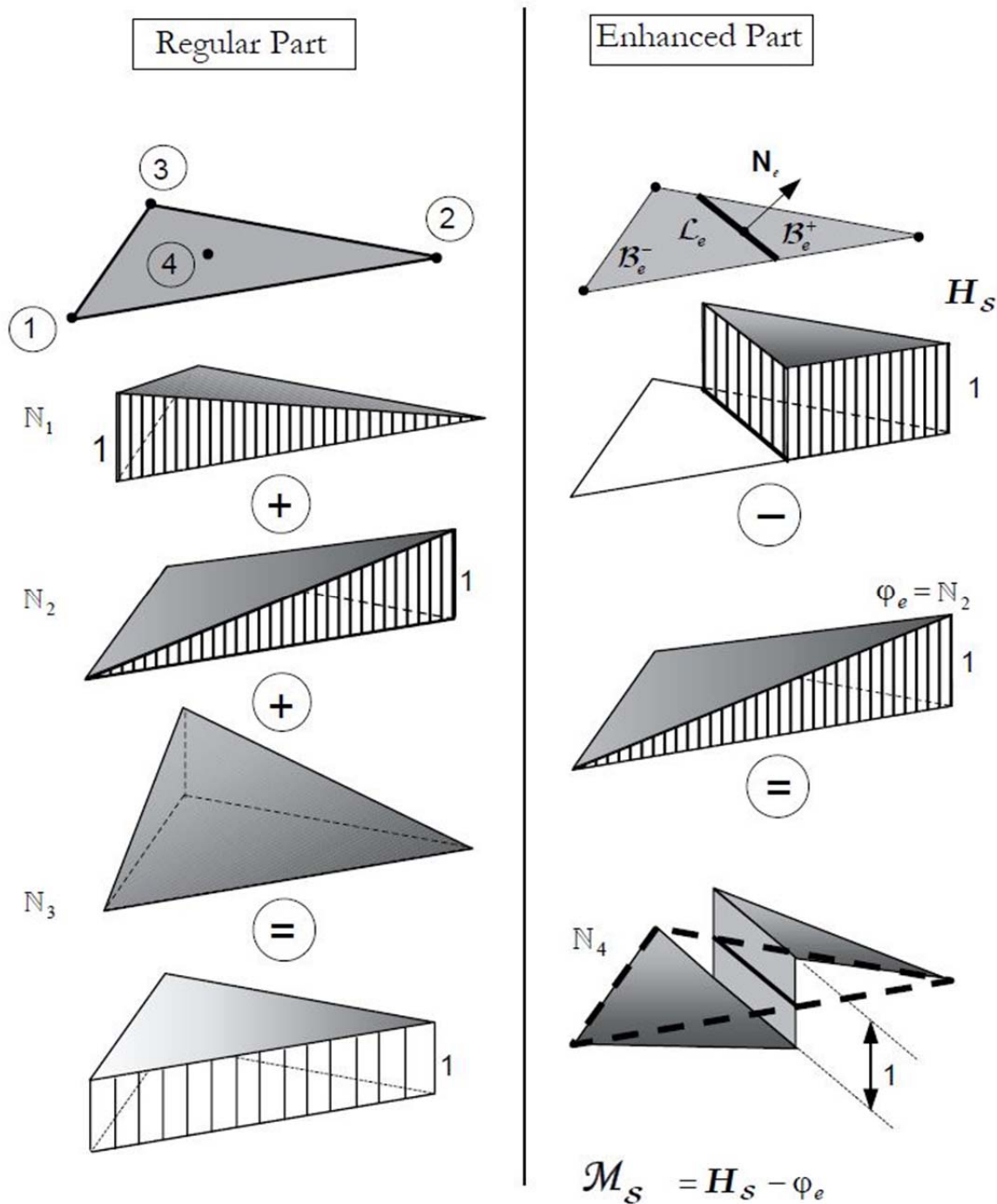
Τέλος το μητρώο ακαμψίας προκύπτει από το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\underset{6 \times 6}{\mathbf{k}} = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} dV \quad \underset{t=const.}{=} \quad A \cdot t \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \quad \S 3.29$$

Όπου  $t$  αντιστοιχεί στο πάχος του στοιχείου.

**3.5 Εμπλουτισμένο μητρώο ακαμψίας στοιχείου CST**

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστεί το εμπλουτισμένο μητρώο ακαμψίας για τα τριγωνικά στοιχεία CST. Όπως έχει προαναφερθεί, ο εμπλουτισμός αυτός επιτρέπει την εμφάνιση αλμάτων στο πεδίο των μετατοπίσεων εντός του στοιχείου. Συνεπώς επιτρέπει την προσομοίωση της εμφάνισης μιας ασυνέχειας εντός ενός στοιχείου και κατ' επέκταση εντός ενός φορέα.

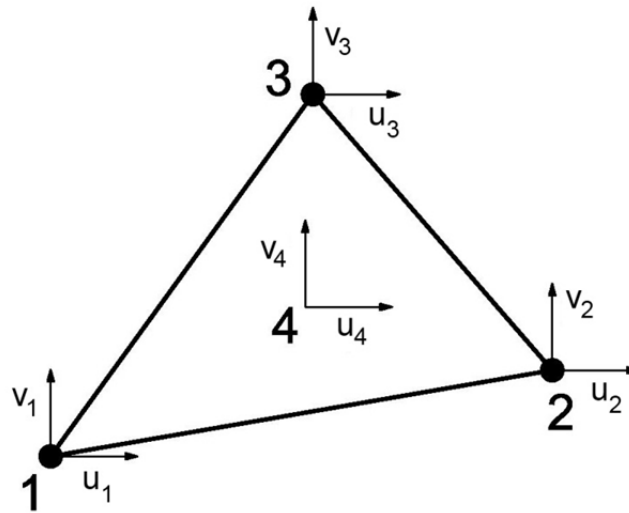


Σχήμα 3.8 :: Συναρτήσεις σχήματος του κανονικού (αριστερά) και του εμπλουτισμένου στοιχείου CST

Προκειμένου να επιτευχθεί ο εμπλουτισμός του στοιχείου CST, προστίθεται ένας επιπλέον κόμβος στο κέντρο βάρους του τριγώνου. Οι συντεταγμένες του δίνονται ως συνάρτηση των συντεταγμένων των άλλων κόμβων σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$x_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \S 3.30$$

$$y_4 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad \S 3.31$$



Σχήμα 3.9 :: Εμπλουτισμένο στοιχείο CST

Σύμφωνα με τη σχέση § 3.4

$$\dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \hat{\epsilon} + \tilde{\epsilon} = \underbrace{\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}}_{\text{Regular}} + \underbrace{\mathbf{G}_e \cdot \boldsymbol{\alpha}}_{\text{Enhanced}} \quad \S 3.32$$

Όπου με  $\mathbf{a}$  συμβολίζεται το διάνυσμα των μετατοπίσεων των κόμβων 1,2 & 3 και με  $\boldsymbol{\alpha}$  συμβολίζεται το διάνυσμα των μετατοπίσεων του κόμβου 4:

$$\mathbf{a} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]^T \quad \S 3.33$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [u_4 \quad v_4]^T \quad \S 3.34$$

Όπως φαίνεται από τη σχέση § 3.32 το πεδίο των ανηγμένων παραμορφώσεων προκύπτει από το συνδυασμό του κανονικού στοιχείου με το εμπλουτισμένο. Το μητρώο παραμόρφωσης του κανονικού στοιχείου δίνεται από τη σχέση § 3.27. Το μητρώο παραμόρφωσης που αντιστοιχεί στον εμπλουτισμένο κόμβο,  $\mathbf{G}_e$ , δίνεται από την παρακάτω έκφραση:

$$\mathbf{G}_e = \delta_s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}) - \nabla \varphi_e(\mathbf{x}) \quad \S 3.35$$

Όπου το  $\varphi_e(\mathbf{x})$  δίνεται από τη σχέση § 3.36 και το  $\delta_s$  από τη σχέση § 3.37:

$$\phi_e = N_2 = \frac{1}{2A} (a_2 + b_2 x + c_2 y) = \begin{cases} \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{b_2}{2A} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{c_2}{2A} \end{cases} \quad \S 3.36$$

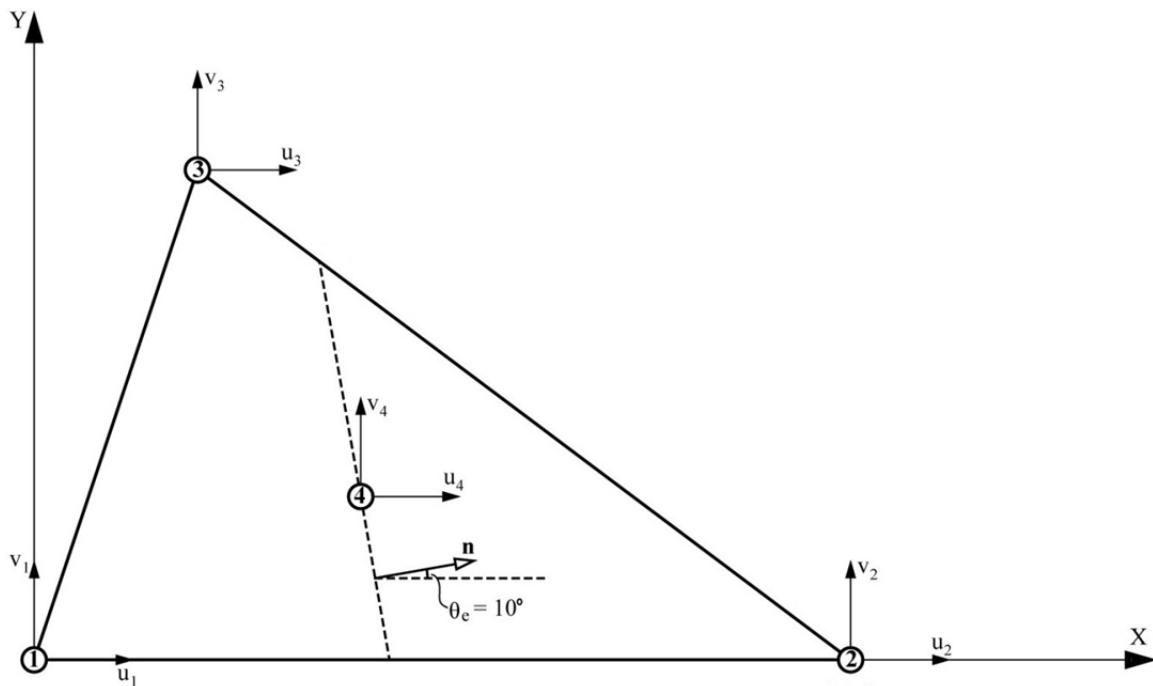
$$\delta_s = \frac{1}{k} \quad \S 3.37$$

Έτσι σχηματίζεται το παρακάτω μητρώο παραμόρφωσης:

$$\mathbf{G}_e = \begin{bmatrix} \delta_s n_x - \frac{\partial \phi_e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \delta_s n_y - \frac{\partial \phi_e}{\partial y} \\ \delta_s n_y - \frac{\partial \phi_e}{\partial y} & \delta_s n_x - \frac{\partial \phi_e}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_s n_x - \frac{b_2}{2A} & 0 \\ 0 & \delta_s n_y - \frac{c_2}{2A} \\ \delta_s n_y - \frac{c_2}{2A} & \delta_s n_x - \frac{b_2}{2A} \end{bmatrix} \quad \S 3.38$$

Όπου:

$$\begin{aligned} n_x &= \cos \theta_e \\ n_y &= \sin \theta_e \end{aligned} \quad \S 3.39$$



Σχήμα 3.10 :: Ασυνέχεια εντός του στοιχείου CST  
Ορισμός της γωνίας  $\theta_e$

Λόγω της δημιουργίας της ασυνέχειας αναπτύσσονται πρόσθετες δυνάμεις στο εσωτερικό του στοιχείου (τριβή). Για το λόγο αυτό προκύπτει ένα πρόσθετο μητρώο παραμόρφωσης,  $\mathbf{G}_e^*$ , το οποίο δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{G}_e^* = \begin{bmatrix} \left( \delta_s - \frac{l_e}{A} \right) \mathbf{n}_x & 0 \\ 0 & \left( \delta_s - \frac{l_e}{A} \right) \mathbf{n}_y \\ \left( \delta_s - \frac{l_e}{A} \right) \mathbf{n}_y & \left( \delta_s - \frac{l_e}{A} \right) \mathbf{n}_x \end{bmatrix} \quad \text{\S 3.40}$$

Όπου το  $l_e$  αναφέρεται στο μήκος της ασυνέχειας.

Έχοντας υπολογίσει όλα τα μητρώα παραμόρφωσης, το εμπλουτισμένο μητρώο ακαμψίας μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{aa}^e & K_{ab}^e \\ K_{ba}^e & K_{bb}^e \end{bmatrix} \quad \text{\S 3.41}$$

όπου κάθε ένα από τα υπομητρώα του ορίζεται παρακάτω:

$$K_{aa}^e = \int_{B_e} (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) dV \quad \text{\S 3.42}$$

$$K_{ab}^e = \int_{B_e} (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{G}_e) dV \quad \text{\S 3.43}$$

$$K_{ba}^e = \int_{B_e} (\mathbf{G}_e^{*T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) dV \quad \text{\S 3.44}$$

$$K_{bb}^e = \int_{B_e} (\mathbf{G}_e^{*T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{G}_e) dV \quad \text{\S 3.45}$$

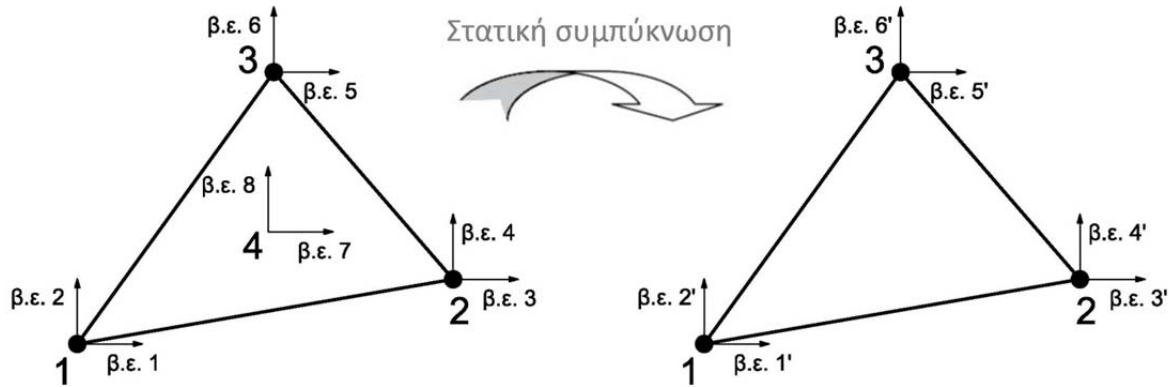
Το μητρώο  $\mathbf{C}$  για επίπεδη ένταση δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{\S 3.46}$$

### **3.6 Στατική συμπύκνωση**

Η μέθοδος της στατικής συμπύκνωσης χρησιμοποιείται έτσι ώστε να μειωθούν οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου με τις ενσωματωμένες ασυνέχειες, στο πλήθος των βαθμών ελευθερίας του κανονικού στοιχείου. Αυτό γίνεται γιατί έτσι αποφεύγεται η εισαγωγή επιπλέον βαθμών ελευθερίας στο καθολικό σύστημα με αποτέλεσμα οι διαστάσεις του καθολικού μητρώου ακαμψίας να παραμένουν σταθερές.

Εάν θεωρήσουμε τριγωνικό στοιχείο CST (Constant Strain Triangle) όπως αυτό του σχήματος 3.11, τότε οι δυνάμεις των κανονικών κόμβων (1,2,3) συμβολίζονται με  $P_a^e$  και οι δυνάμεις του κόμβου προς συμπύκνωση (4) συμβολίζονται με  $P_b^e$ . Κατά αντιστοιχία ορίζονται και οι μετακινήσεις  $\delta_a^e$ ,  $\delta_b^e$ .



Σχήμα 3.11 :: Στατική συμπύκνωση στοιχείου Embedded-CST

$$P_e = K_e \cdot \delta_e \quad \S 3.47$$

Το οποίο μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{bmatrix} P_a^e \\ P_b^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa}^e & K_{ab}^e \\ K_{ba}^e & K_{bb}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_a^e \\ \delta_b^e \end{bmatrix} \quad \S 3.48$$

Σε αναλυτική μορφή το παραπάνω σύστημα γράφεται ως εξής:

$$P_a^e = K_{aa}^e \cdot \delta_a^e + K_{ab}^e \cdot \delta_b^e \quad \S 3.49$$

$$P_b^e = K_{ba}^e \cdot \delta_a^e + K_{bb}^e \cdot \delta_b^e \rightarrow \delta_b^e = K_{bb}^{e-1} \cdot (P_b^e - K_{ba}^e \cdot \delta_a^e) \quad \S 3.50$$

Αντικαθιστώντας την § 3.50 στην § 3.49 οδηγούμαστε στο παρακάτω σύστημα:

$$P_a^e - K_{ab}^e \cdot K_{bb}^{e-1} \cdot P_b^e = (K_{aa}^e - K_{ab}^e \cdot K_{bb}^{e-1} \cdot K_{ba}^e) \cdot \delta_a^e \quad \S 3.51$$

Εάν ορίσουμε τα  $P_e^*$ ,  $K_e^*$  όπως στις παρακάτω δύο εξισώσεις:

$$P_e^* = P_a^e - K_{ab}^e \cdot K_{bb}^{e-1} \cdot P_b^e \quad \S 3.52$$

$$K_e^* = K_{aa}^e - K_{ab}^e \cdot K_{bb}^{e-1} \cdot K_{ba}^e \quad \S 3.53$$

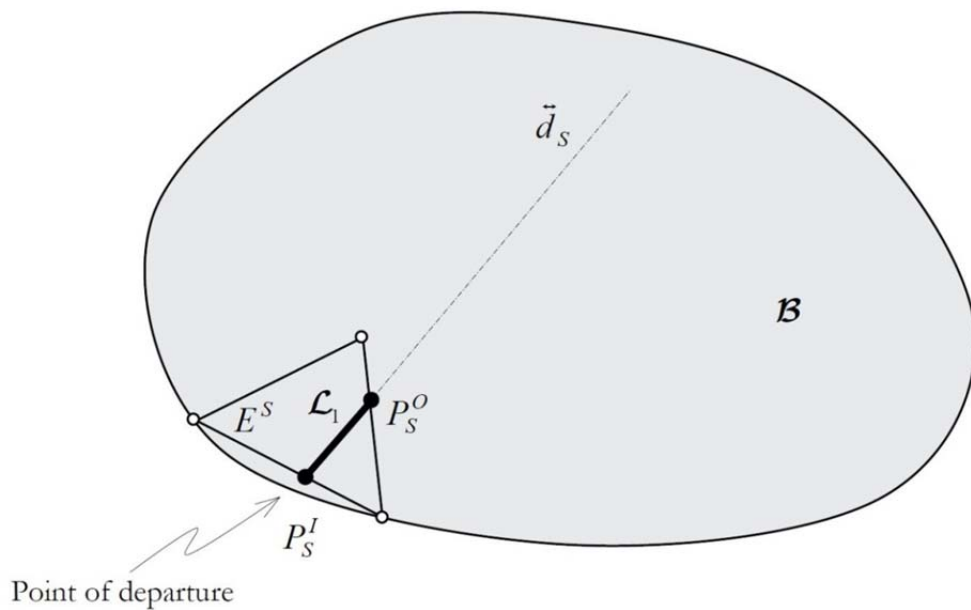
Το σύστημα § 3.51 μπορεί να γραφεί στη συμπυκνωμένη του μορφή:

$$P_e^* = K_e^* \cdot \delta_a^e \quad \S 3.54$$

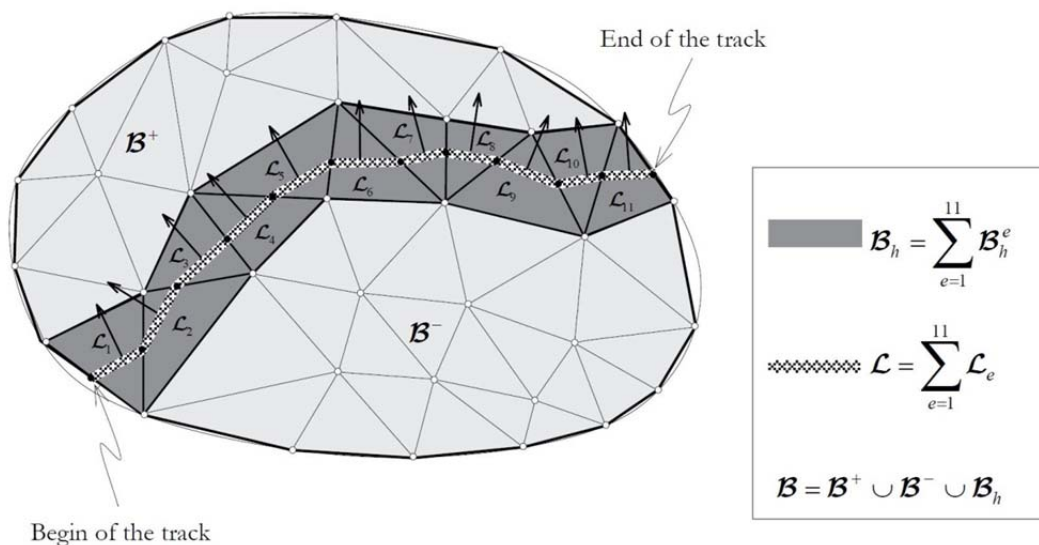
### 3.7 Αλγόριθμος εύρεσης πορείας της ασυνέχειας

Έχοντας γνωστή την κρίσιμη διεύθυνση της ασυνέχειας εντός ενός στοιχείου, έχουμε τη δυνατότητα να καταγράψουμε την εξέλιξη της ασυνέχειας κατά τη διάρκεια της μη γραμμικής ανάλυσης. Πρέπει να τονιστεί ότι η γνώση της πορείας της ασυνέχειας είναι απαραίτητη για τον ακριβή υπολογισμό των χωρίων  $B^+$  και  $B^-$ .

Στόχος του αλγορίθμου είναι η εύρεση του σημείου  $P_e^o$  για το στοιχείο  $e$  και η εύρεση του προσκείμενου στοιχείου στην πλευρά στην οποία ανήκει το εν λόγω σημείο. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται ένα παράδειγμα για το οποίο θεωρούμε  $P_e^o = P_s^o$  για το στοιχείο  $E^s$ .



Σχήμα 3.12 :: Αρχή του δρόμου της ασυνέχειας εντός του φορέα



Σχήμα 3.13 :: Εξέλιξη της ασυνέχειας εντός του φορέα



Ο εντοπισμός της πορείας της ασυνέχειας ανάγεται σε απλό γεωμετρικό πρόβλημα. Ειδικότερα για την περίπτωση των τριγωνικών στοιχείων (CST, E-CST) ο αλγόριθμος έχει την ακόλουθη δομή:

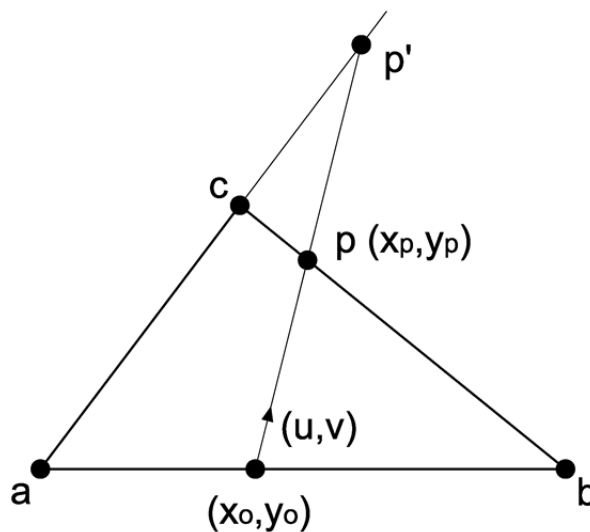
**Δεδομένα:**

- Συντεταγμένες του σημείου εισόδου της ασυνέχειας στο στοιχείο. ( $x_o, y_o$ )
- Συντεταγμένες των κόμβων του στοιχείου. ( $x_a, y_a, x_b, y_b, x_c, y_c$ )
- Το διάνυσμα που καθορίζει τη διεύθυνση της ασυνέχειας εντός του στοιχείου. ( $u, v$ )

**Στόχος:**

- Εύρεση του επόμενου σημείου στο δρόμο της ασυνέχειας. ( $x_p, y_p$ )
- Εύρεση του στοιχείου στο οποίο πρόκειται να εισέλθει η ασυνέχεια.

Όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα εάν έχουμε γνωστό το σημείο εισόδου της ασυνέχειας στο στοιχείο, καθώς και την διεύθυνση της ασυνέχειας εντός αυτού, γεωμετρικά προκύπτουν δύο πιθανά σημεία τομής με τις ευθείες που διέρχονται από τους κόμβους του στοιχείου. Ωστόσο μόνο ένα από αυτά θα βρίσκεται πάνω σε μια πλευρά του στοιχείου. Αυτό θα είναι και το ζητούμενο στοιχείο.



Σχήμα 3.14 :: Ασυνέχεια εντός του στοιχείου CST

Για την περίπτωση του σχήματος 3.14, ο αλγόριθμος λειτουργεί ως εξής:

1. Εύρεση της πλευράς εισόδου. Στην περίπτωση που εξετάζουμε η πλευρά εισόδου είναι η **ab**.
2. Εύρεση του σημείου τομής της ασυνέχειας με την ευθεία που διέρχεται από την πλευρά **ac**. Το σημείο τομής που θα βρούμε είναι το **p'**.

3. Επιβεβαίωση για το αν το σημείο τομής που βρήκαμε ανήκει στην πλευρά **ac**. Στην εξεταζόμενη περίπτωση το σημείο **p'** βρίσκεται εκτός της **ac**.
4. Εύρεση του σημείου τομής της ασυνέχειας με την ευθεία που διέρχεται από την πλευρά **bc**. Το σημείο τομής που θα βρούμε είναι το **p**.
5. Επιβεβαίωση για το αν το σημείο τομής που βρήκαμε ανήκει στην πλευρά **bc**. Στην εξεταζόμενη περίπτωση το σημείο **p** βρίσκεται εντός της **bc**. Συνεπώς το σημείο που ψάχνουμε είναι το **p**.
6. Αναζήτηση σε όλα τα πεπερασμένα στοιχεία για την εύρεση του επόμενου στοιχείου στο οποίο θα εισέλθει η ασυνέχεια. Αυτό που ψάχνουμε είναι το δεύτερο τριγωνικό στοιχείο το οποίο έχει τους κόμβους **b** και **c**.



# 4

## SPARC

### 4.1 Γενικά

Οι στόχοι της μεταπτυχιακής αυτής εργασίας απαιτούσαν εξαρχής τη δημιουργία ενός λογισμικού ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων, στο οποίο θα ήταν δυνατό να ενσωματωθεί ο αλγόριθμος των ενσωματωμένων ασυνεχειών. Το λογισμικό αυτό θα έπρεπε να δύναται να εκτελέσει μη γραμμικές αναλύσεις και μάλιστα σε όσο το δυνατό λιγότερο χρόνο.

Βασισμένο σε αυτούς τους στόχους, δημιουργήθηκε το **SPARC**<sup>1</sup> (*Structural Parallel Code*), ένα πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή το οποίο έχει τη δυνατότητα να εκτελεί ταχύτατα ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων πεπερασμένων στοιχείων.

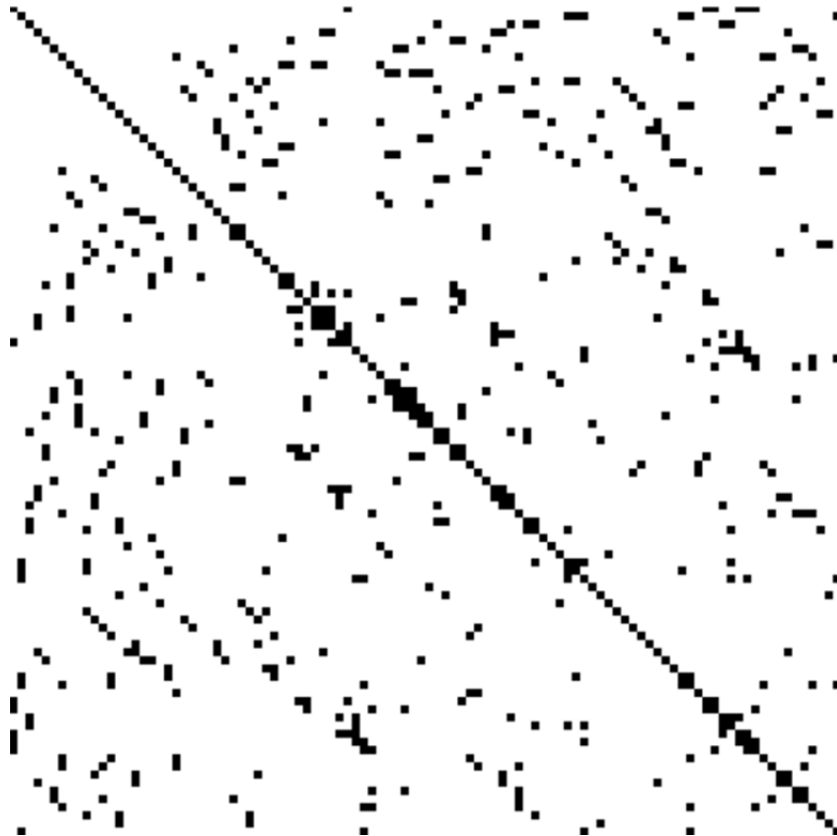
Ενδεικτικές εφαρμογές του SPARC θα παρουσιαστούν στο επόμενο κεφάλαιο. Ωστόσο πριν γίνει αυτό, είναι σημαντικό να αναφερθούν μερικές λεπτομέρειες ή καλύτερα ιδιαιτερότητες του κώδικα.

---

<sup>1</sup> Το λογισμικό SPARC προγραμματίστηκε από τους Μ. Γεωργιουδάκη και Π. Αρχοντάκη

## 4.2 Αποθήκευση καθολικού μητρώου ακαμψίας

Είναι γενικώς αποδεκτό ότι για προβλήματα πεπερασμένων στοιχείων είναι αρκετά πιο αποδοτικό η αποθήκευση του μητρώου ακαμψίας να γίνεται σε κάποιου είδους συμπιεσμένη μορφή. Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο, αλλά στην πραγματικότητα όλες βασίζονται στην ίδια θεώρηση. Αυτή είναι, η αποθήκευση των μη μηδενικών όρων του μητρώου σε ένα διάνυσμα και η χρησιμοποίηση βοηθητικών διανυσμάτων για την περιγραφή της θέσης τους στο αρχικό ασυμπίεστο μητρώο.



Σχήμα 4.1 :: Σχηματική απεικόνιση καθολικού μητρώου ακαμψίας, όπου με τα μαύρα τετράγωνα συμβολίζονται οι μη μηδενικοί όροι

Το πρόγραμμα SPARC είναι σχεδιασμένο έτσι ώστε να αποθηκεύει το καθολικό μητρώο ακαμψίας σε συμπιεσμένη μορφή **CSR** (**C**ompressed **S**parse **R**ow). Αυτός ο τρόπος αποθήκευσης χρησιμοποιεί τρία διανύσματα για την περιγραφή ενός μητρώου:

<i>values</i>	Διάνυσμα στο οποίο αποθηκεύονται σειριακά οι μη μηδενικοί όροι του ασυμπίεστου μητρώου.
<i>columns</i>	Βοηθητικό διάνυσμα, ίδιας διάστασης με το διάνυσμα <i>values</i> , το οποίο καθορίζει την στήλη στην οποία ανήκει κάθε στοιχείο του διανύσματος <i>values</i> .
<i>row index</i>	Βοηθητικό διάνυσμα, διάστασης ίσης με το άθροισμα των γραμμών του αρχικού μητρώου συν ένα, το οποίο καθορίζει τις θέσεις μνήμης του διανύσματος <i>values</i> στις οποίες γίνεται αλλαγή γραμμής.

Για να γίνει καλύτερα αντιληπτός ο τρόπος λειτουργίας του συμπιεσμένου μητρώου CSR παρακάτω παρατίθεται δύο ενδεικτικά παραδείγματα. Το μητρώο A της εξίσωσης § 4.1 είναι ένα μη συμμετρικό μητρώο. Αντιθέτως το μητρώο B της εξίσωσης § 4.2 είναι συμμετρικό και για το λόγο αυτό, αποθηκεύουμε μόνο το άνω τριγωνικό τμήμα του.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 4 \\ -4 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{§ 4.1}$$

values [1 -1 -3 -2 5 4 6 4 -4 2 7 8 5]  
 columns [1 2 4 1 2 3 4 5 1 3 4 2 5]  
 row index [1 4 6 9 12 14]

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{§ 4.2}$$

values [1 -1 2 4 7 3 2 6 1 2]  
 columns [1 2 4 2 5 3 4 4 5 5]  
 row index [1 4 6 8 10 11]

Πρέπει να τονιστεί ότι το όφελος, από την άποψη του υπολογιστικού κόστους αλλά και της δεσμευμένης μνήμης είναι πάρα πολύ σημαντικό, ειδικότερα όταν λύνονται προβλήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας.

### **4.3 Επίλυση γραμμικών συστημάτων**

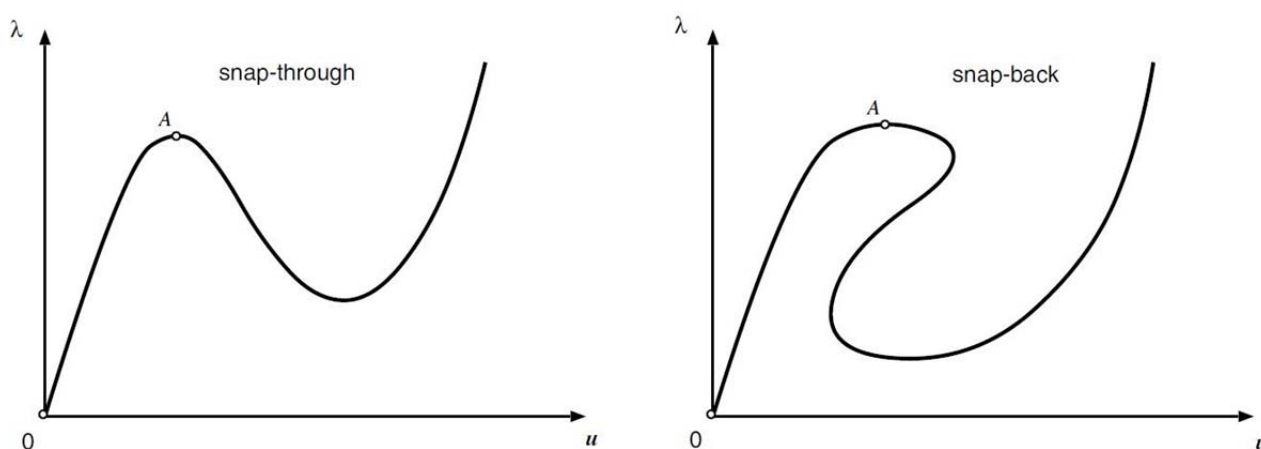
Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μια αριθμητική μέθοδος για τον υπολογισμό μερικών διαφορικών εξισώσεων και χρησιμοποιείται με επιτυχία για την επίλυση προβλημάτων μηχανικού. Η επιτυχία της μεθόδου οφείλεται κατά κύριο λόγο στο γεγονός ότι ανάγει ένα πολύπλοκο πρόβλημα σε ένα απλούστερο, δηλαδή την επίλυση διαφορικών εξισώσεων στην επίλυση ενός ή πολλών γραμμικών συστημάτων. Παρόλο που υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι για την επίλυση γραμμικών συστημάτων, είναι γεγονός ότι όλοι απαιτούν αξιοσημείωτη υπολογιστική ισχύ, η οποία αυξάνεται όσο αυξάνεται και η πολυπλοκότητα των προβλημάτων που επιθυμούμε να επιλύσουμε.

Προκειμένου να επιτύχουμε ταχύτερα αποτελέσματα, αυτό που μπορούμε να κάνουμε, όσον αφορά το λογισμικό, είναι να δίνουμε τη δυνατότητα στους αλγορίθμους μας να αξιοποιούν το 100% της ισχύος των σημερινών υπολογιστών. Ωστόσο, κάτι τέτοιο απαιτεί την χρησιμοποίηση παράλληλων αλγορίθμων (*parallel algorithms*).

Για το λόγο αυτό το λογισμικό SPARC κάνει χρήση του επιλύτη **Pardiso** (*Parallel Direct Solver*). Ο συγκεκριμένος επιλύτης είναι προγραμματισμένος με τέτοιο τρόπο ώστε αξιοποιεί πλήρως την ισχύ των σύγχρονων πολυπύρηνων επεξεργαστών προσφέροντας έτσι σημαντικά οφέλη όσον αφορά τους χρόνους εκτέλεσης.

#### 4.4 Αλγόριθμοι επίλυσης ασταθών μη γραμμικών προβλημάτων

Πολλά προβλήματα πεπερασμένων στοιχείων χαρακτηρίζονται από ασταθείς συνθήκες ισορροπίας. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι τα προβλήματα λυγισμού και γενικά προβλήματα που παρουσιάζουν συμπεριφορά *snap-through* ή *snap-back*.



Σχήμα 4.2 :: Ασταθής ισορροπία. Συμπεριφορά *snap-through* & *snap-back*

Τέτοιου είδους προβλήματα λύνονται με τη σταδιακή αναζήτηση σημείων ισορροπίας (φορτίο, μετατόπιση). Η αναζήτηση αυτή γίνεται είτε με τη σταδιακή αύξηση των επιβαλλόμενων φορτίων, οπότε αναφερόμαστε σε *load controlled methods*, είτε με τη σταδιακή αύξηση των επιβαλλόμενων μετατοπίσεων, οπότε αναφερόμαστε σε *displacement controlled methods*.

Το λογισμικό SPARC έχει ενσωματώσει δύο μεθόδους επίλυσης ασταθών μη γραμμικών προβλημάτων:

- Την κυλινδρική μέθοδο μήκους τόξου (*cylindrical arc-length method*)
- Την μέθοδο ελέγχου των μετατοπίσεων (*displacement control*)

Στις επόμενες ενότητες (4.4.1, 4.4.2) παρουσιάζονται αναλυτικά και οι δύο μέθοδοι.

#### 4.4.1 Κυλινδρική μέθοδος μήκους τόξου

Ο δρόμος ισορροπίας στις μεθόδους “load control” χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο σημείων ισορροπίας του φορτικού συντελεστή και της μετατόπισης:

$$\{\lambda, u\} \quad \text{\S 4.3}$$

Για προβλήματα ανάλυσης, στα οποία αναμένεται συμπεριφορά *snap-through* ή *snap-back* (όπως αυτά του σχήματος 4.2) οι συνήθεις μέθοδοι επιβαλλόμενου φορτίου, όπως η μέθοδος *Newton – Raphson*, αδυνατούν να ακολουθήσουν το δρόμο ισορροπίας πέραν του πρώτου σημείου καμψής. Προκειμένου να καταγράψουμε τη συμπεριφορά ενός φορέα, πέραν αυτού του σημείου πρέπει να καταφύγουμε σε κατάλληλες μεθόδους, οι οποίες έχουν τη δυνατότητα να το υπερπηδήσουν. Η δημοφιλέστερη μέθοδος “load control” με αυτή την ιδιότητα είναι η μέθοδος μήκους τόξου (*arc-length method*).

Η μέθοδος *arc-length* βασίζεται στη θεώρηση ότι ο φορτικός συντελεστής  $\lambda$  δε μεταβάλλεται σταθερά σε κάθε βήμα  $n$ .

$$\Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \text{variable} \quad \text{\S 4.4}$$

Ο υπολογισμός του υπολοίπου των δυνάμεων (*residual forces*) γίνεται με την παρακάτω εξίσωση:

$$\mathbf{r}(u_{n+1}, \Delta\lambda) = \mathbf{f}^{int}(u_{n+1}) - (\lambda_n + \Delta\lambda) \cdot \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad \text{\S 4.5}$$

Όπου με  $\mathbf{f}^{int}$  συμβολίζεται το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων και με  $\mathbf{f}^{ext}$  συμβολίζεται το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων.

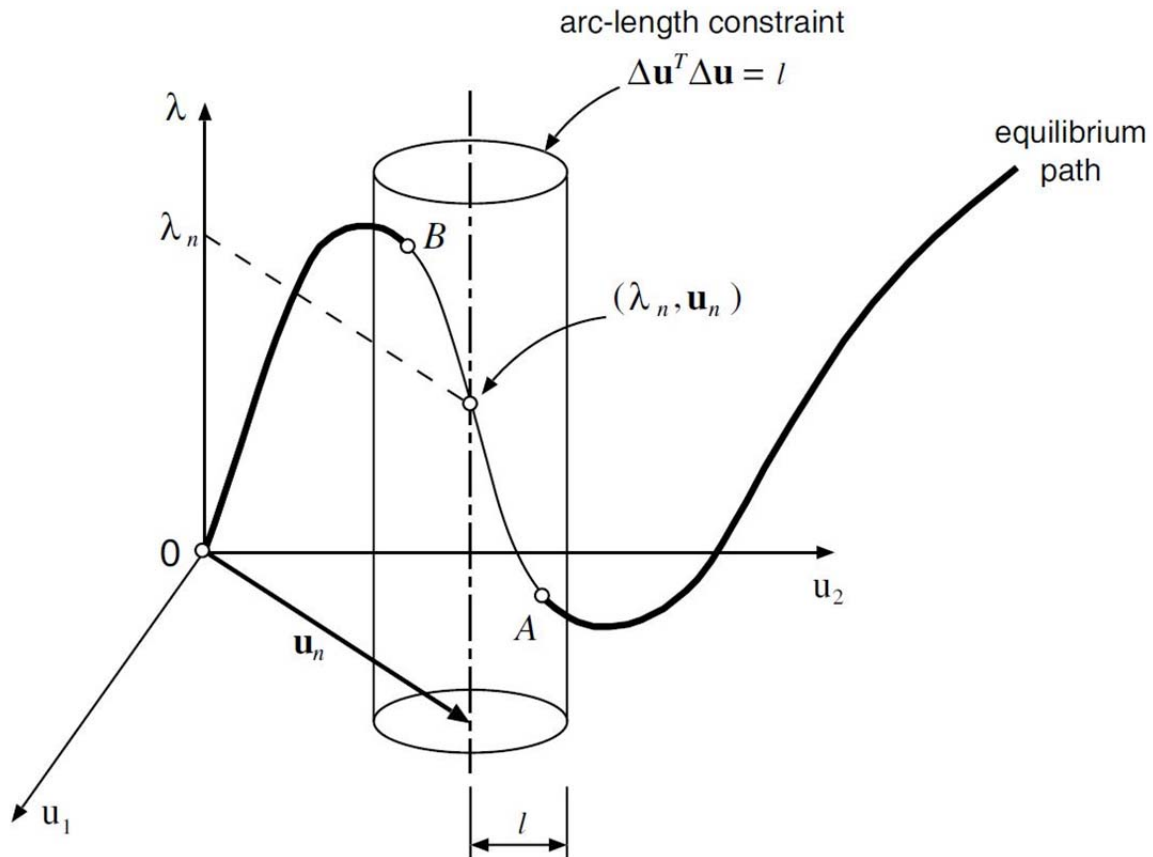
Η μέθοδος *arc-length* περιλαμβάνει και έναν περιορισμό για το πόσο «μακριά» μπορεί να βρεθεί το επόμενο σημείο ισορροπίας. Ο περιορισμός αυτός αντικατοπτρίζεται από τη μεταβλητή μήκος (*length*) και για την κυλινδρική μέθοδο ορίζεται ως εξής:

$$\Delta u^T \cdot \Delta u = l^2 \quad \text{\S 4.6}$$

Γεωμετρικά αυτός ο περιορισμός σημαίνει ότι το επόμενο σημείο ισορροπίας πρέπει να είναι σημείο τομής του δρόμου ισορροπίας και ενός κυλίνδρου ακτίνας  $l$  του οποίου το κέντρο βρίσκεται στο προηγούμενο σημείο ισορροπίας. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι σε κάθε βήμα του αλγορίθμου υπάρχουν δύο πιθανά σημεία ισορροπίας (σχήμα 4.3).

Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά τα βήματα του αλγορίθμου.





Σχήμα 4.3 :: Κυλινδρική μέθοδος τόξου για πρόβλημα δύο βαθμών ελευθερίας. Δύο πιθανά σημεία ισορροπίας (A,B) σε κάθε βήμα.

**Παράμετροι αλγορίθμου:**

- Μέγιστος αριθμός βημάτων (*maximum number of increments*)
- Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων ανά βήμα (*maximum number of iterations*)
- Επιθυμητός αριθμός επαναλήψεων ανά βήμα (*desired number of iterations*)
- Ανεκτή απόκλιση (*tolerance*)
- Αρχικός φορτικός συντελεστής (*initial load factor*)
- Παράμετρος που καθορίζει το μέγιστο μήκος τόξου (*maximum length parameter*)
- Παράμετρος που καθορίζει το ελάχιστο μήκος τόξου (*minimum length parameter*)

**Βήματα επαναληπτικού αλγορίθμου (iteration algorithm):**

- i. Πριν ξεκινήσει ο αλγόριθμος ( $k = 0$ ) πρέπει να εισαχθούν τα δεδομένα του προηγούμενου σημείου ισορροπίας,  $n$ :

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(k=0)} = \mathbf{u}_n$$

$$\lambda_{n+1}^{(0)} = \lambda_n$$

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}_n) - \lambda_n \cdot \mathbf{f}^{ext}$$

§ 4.7

ii. Έπειτα υπολογίζεται το εφαπτομενικό μητρώο ακαμψίας:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_T \left( \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} \right) \quad \S 4.8$$

iii. Ξεκινά ο αλγόριθμος και τίθεται  $k = k + 1$ . Επιλύονται τα παρακάτω γραμμικά συστήματα ως προς  $\delta \mathbf{u}^*$  και  $\delta \bar{\mathbf{u}}$  αντίστοιχα:

$$\mathbf{K}_T \cdot \delta \mathbf{u}^* = -\mathbf{r}^{(k-1)} \quad \S 4.9$$

$$\mathbf{K}_T \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} = -\mathbf{f}^{ext} \quad \S 4.10$$

iv. Στη συνέχεια πρέπει να βρεθεί αυξητικός φορτικός συντελεστής για την τρέχουσα επανάληψη:

a) Εάν η τρέχουσα επανάληψη είναι η πρώτη ( $k = 1$ ) τότε υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\delta \lambda^{(1)} = \text{sign}(\Delta \mathbf{u}_n^T \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}) \cdot \frac{l}{\sqrt{\delta \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}}} \quad \S 4.11$$

b) Ειδικά ( $k \neq 1$ ) από τη σχέση § 4.12:

$$a \cdot \delta \lambda^{(k)^2} + b \cdot \delta \lambda^{(k)} + c = 0 \quad \S 4.12$$

όπου:

$$a = \delta \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \quad \S 4.13$$

$$b = 2 \cdot (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^*)^T \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \quad \S 4.14$$

$$c = (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^*)^T \cdot (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^*) - l^2 \quad \S 4.15$$

Η σχέση § 4.12 είναι ένα τριώνυμο. Στην περίπτωση που έχει δύο πραγματικές λύσεις η διαλογή της σωστής γίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\delta \lambda^{(k)} = \max \left( (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^* + \delta \lambda_i \cdot \delta \bar{\mathbf{u}})^T \cdot \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} \right) \quad \S 4.16$$

v. Σε αυτό το βήμα υπολογίζουμε τον νέο φορτικό συντελεστή:

$$\lambda_{n+1}^{(k)} = \lambda_{n+1}^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)} \quad \S 4.17$$

vi. Υπολογίζουμε το διάνυσμα της μεταβολής των μετακινήσεων στην τρέχουσα επανάληψη.

$$\delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta \mathbf{u}^* + \delta \lambda^{(k)} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \quad \S 4.18$$

vii. Υπολογίζουμε το διάνυσμα των μετακινήσεων.

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)} \quad \S 4.19$$

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} = \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)} \quad \S 4.20$$

viii. Υπολογίζουμε το νέο υπόλοιπο της διαφοράς των δυνάμεων:

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}) - \lambda_{n+1}^{(k)} \cdot \mathbf{f}^{ext} \quad \S 4.20$$

ix. Ελέγχουμε τη σύγκλιση του αλγορίθμου. Εάν συγκλίνει προχωράμε το σημείο ισορροπίας της τελευταίας επανάληψης θα είναι και σημείο ισορροπίας του βήματος. Ο αλγόριθμος προχωρά στο επόμενο βήμα. Εάν δε συγκλίνει ο αλγόριθμος κάνει άλλη μια επανάληψη ξεκινώντας από το ii. Το κριτήριο σύγκλισης είναι το ακόλουθο:

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{f}^{ext}\|} \leq tolerance \quad \S 4.20$$

### Μήκος τόξου

Ο αλγόριθμος, προκειμένου να ξεκινήσει πρέπει να του δοθεί ένα αρχικό μήκος τόξου. Αυτό υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$l_o = \sqrt{\Delta \lambda_o^2 \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \bar{\mathbf{u}}} \quad \S 4.21$$

Όπου το  $\Delta \lambda_o$  είναι ο αρχικός φορτικός συντελεστής και εισάγεται από τον χρήστη.

Σε κάθε νέο βήμα (*increment*) επαναυπολογίζεται το μήκος τόξου χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση:

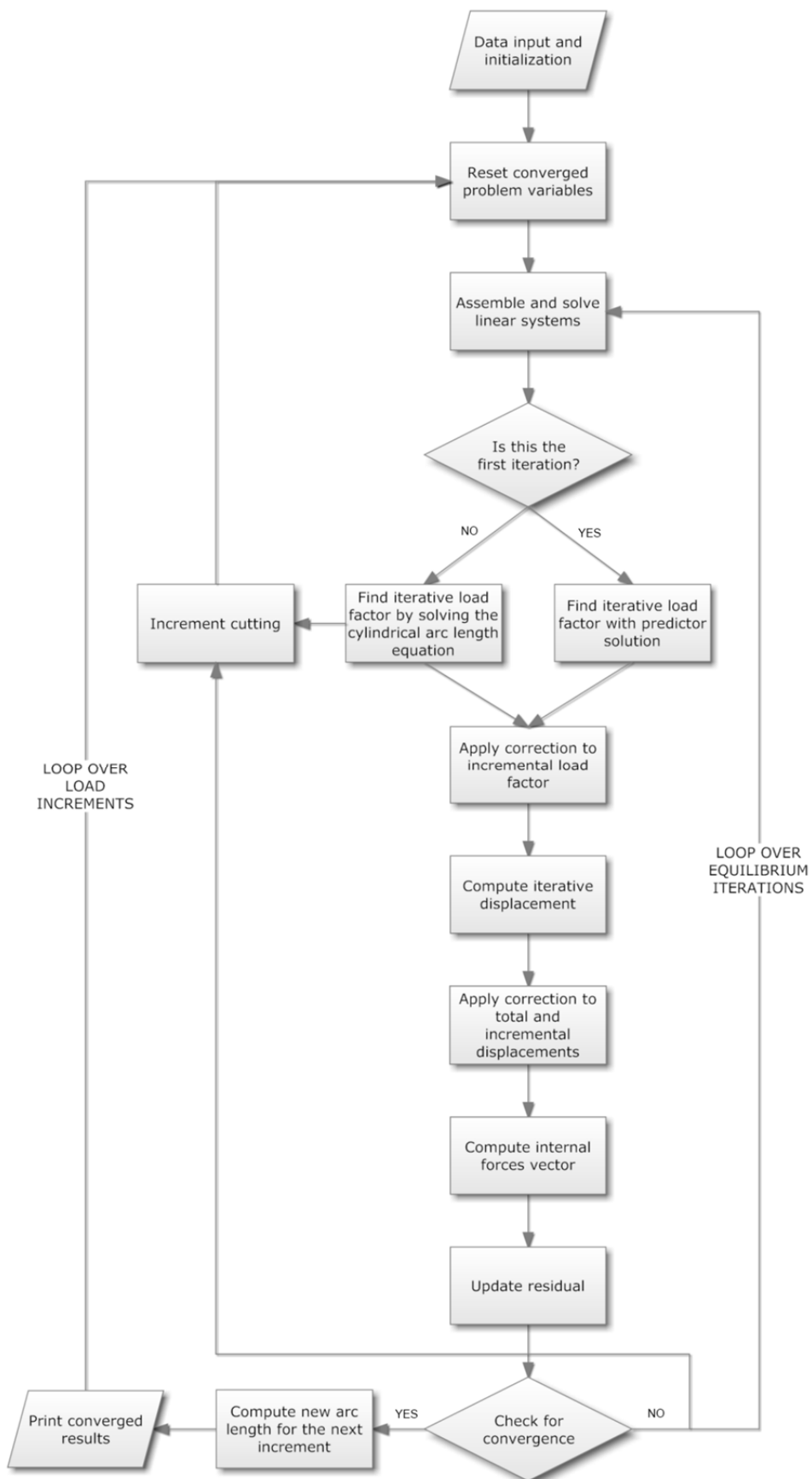
$$l_{next} = l_{current} \cdot \frac{n_{desired}}{n_{convergence}} \quad \S 4.22$$

Όπου  $n_{desired}$  είναι ο επιθυμητός αριθμός επαναλήψεων ανά βήμα (εισάγεται από τον χρήστη) και  $n_{convergence}$  είναι το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτήθηκαν για τη σύγκλιση του προηγούμενου βήματος.

Ωστόσο, το νέο μήκος τόξου θα πρέπει να βρίσκεται εντός των καθορισμένων ορίων.

$$l_{minparameter} \cdot l_o = l_{min} \leq l_{next} \leq l_{max} = l_{maxparameter} \cdot l_o \quad \S 4.22$$

Όπου τα  $l_{minparameter}$  και  $l_{maxparameter}$  δίνονται από το χρήστη.



Σχήμα 4.4 :: Διάγραμμα ροής του αλγορίθμου “cylindrical arc-length”

#### 4.4.2 Μέθοδος ελέγχου των μετατοπίσεων

Η μέθοδος ελέγχου των μετατοπίσεων είναι μια από τις πρώτες μεθόδους που εφαρμόστηκαν για την υπερπήδηση οριακών σημείων. Στη μέθοδο αυτή αντί για το διάνυσμα των εξωτερικών φορτίων, σε κάθε βήμα αυξάνεται η μετατόπιση σε κάποιους προεπιλεγμένους βαθμούς ελευθερίας. Η μέθοδος αντιμετωπίζει με επιτυχία προβλήματα με συμπεριφορά *snap-through*, αλλά αποτυγχάνει σε προβλήματα με συμπεριφορά *snap-back*. Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά τα βήματα της μεθόδου.

Για κάθε επανάληψη του αλγορίθμου, η εξίσωση ισορροπίας έχει την παρακάτω μορφή:

$$\mathbf{K}_{tangent} \cdot \overrightarrow{\delta \mathbf{u}} = \overline{\Sigma \mathbf{F}}_{external} - \mathbf{F}_{internal} \quad \S 4.23$$

Η οποία σε μητρική μορφή γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fs} \\ \mathbf{K}_{sf} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_f \\ \delta \mathbf{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma \mathbf{F}_f \\ \Sigma \mathbf{F}_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_f^{int} \\ \mathbf{F}_s^{int} \end{bmatrix} \quad \S 4.24$$

Με δείκτη  $f$  συμβολίζεται το τμήμα του διανύσματος/μητρώου το οποίο αναφέρεται στους ελεύθερους βαθμούς ελευθερίας (*free degrees of freedom*), ενώ με δείκτη  $s$  συμβολίζεται το τμήμα που αναφέρεται στους δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας (*supported degrees of freedom*). Εδώ πρέπει να τονισθεί ότι οι βαθμοί ελευθερίας στους οποίους θα ασκηθεί μετατόπιση θεωρούνται δεσμευμένοι.

Η § 4.24 μπορεί να γραφεί σε αναλυτική μορφή ως εξής:

$$\mathbf{K}_{ff} \cdot \delta \mathbf{u}_f + \mathbf{K}_{fs} \cdot \delta \mathbf{u}_s = \Sigma \mathbf{F}_f - \mathbf{F}_f^{int} \quad \S 4.25$$

$$\mathbf{K}_{sf} \cdot \delta \mathbf{u}_f + \mathbf{K}_{ss} \cdot \delta \mathbf{u}_s = \Sigma \mathbf{F}_s - \mathbf{F}_s^{int} \quad \S 4.26$$

Επιλύοντας την § 4.25 ως προς  $\delta \mathbf{u}_f$  και την § 4.26 ως προς  $\Sigma \mathbf{F}_s$  έχουμε:

$$\delta \mathbf{u}_f = \mathbf{K}_{ff}^{-1} \cdot (\Sigma \mathbf{F}_f - \mathbf{F}_f^{int} - \mathbf{K}_{fs} \cdot \delta \mathbf{u}_s) \quad \S 4.27$$

$$\Sigma \mathbf{F}_s = \mathbf{K}_{sf} \cdot \delta \mathbf{u}_f + \mathbf{K}_{ss} \cdot \delta \mathbf{u}_s + \mathbf{F}_s^{int} \quad \S 4.28$$

Οι σχέσεις § 4.27 και § 4.28 αποτελούν τον βασικό κορμό της μεθόδου. Με την πρώτη γίνεται γνωστό το διορθωτικό διάνυσμα των μετατοπίσεων για τους ελεύθερους βαθμούς ελευθερίας, ενώ με τη δεύτερη υπολογίζεται το διάνυσμα των αντιδράσεων των δεσμευμένων βαθμών ελευθερίας.

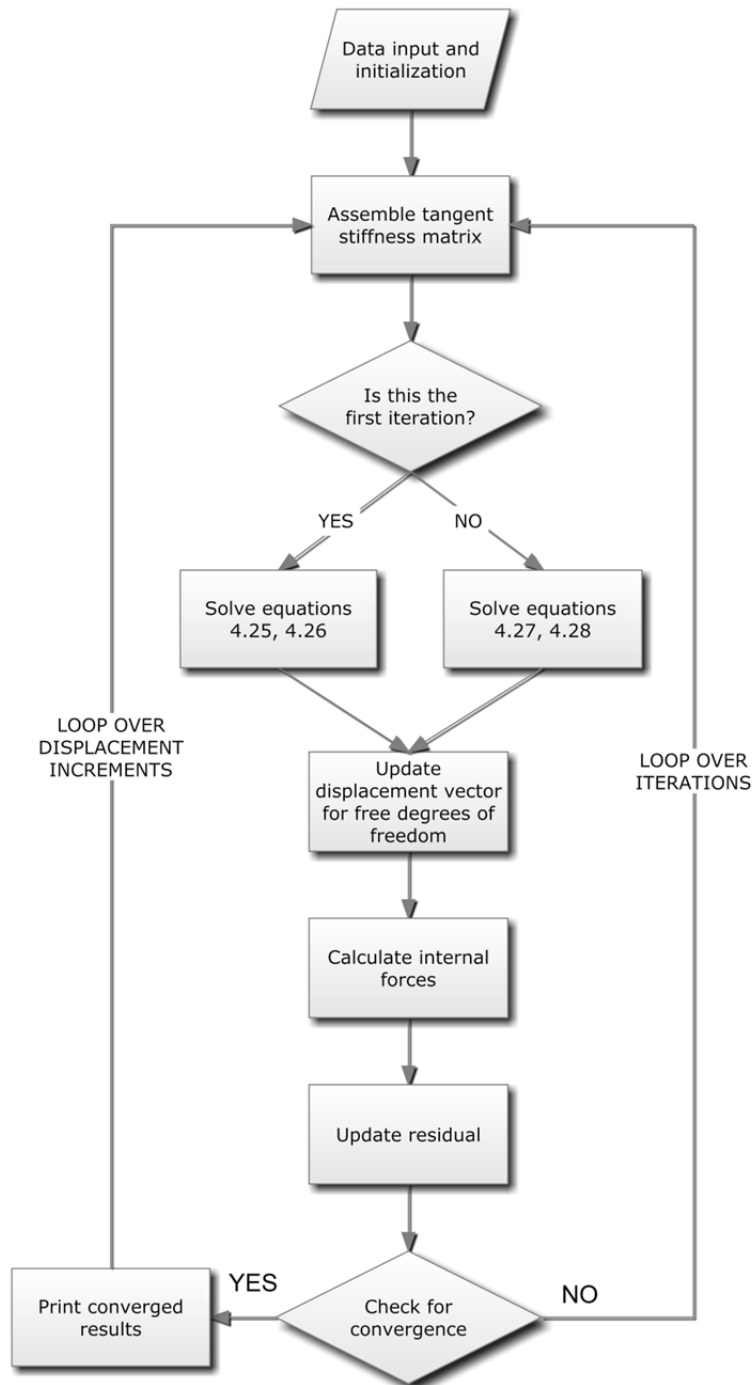
Πρέπει να σημειωθεί ότι το διάνυσμα των επιβαλλόμενων μετατοπίσεων,  $\delta \mathbf{u}_s$ , επιβάλλεται στην αρχή κάθε βήματος (*increment*). Επομένως οι σχέσεις § 4.27 και § 4.28 ισχύουν για την πρώτη επανάληψη κάθε βήματος. Για τις υπόλοιπες, θέτουμε  $\delta \mathbf{u}_s = \mathbf{0}$  και επομένως έχουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\delta u_f = K_{ff}^{-1} \cdot (\Sigma F_f - F_f^{int}) \quad \text{\S 4.29}$$

$$\Sigma F_s = K_{sf} \cdot \delta u_f + F_s^{int} \quad \text{\S 4.30}$$

Αφού γίνουν οι κατάλληλες επιλύσεις (\S 4.27 και \S 4.28 ή \S 4.29 και \S 4.30) ανανεώνεται το διάνυσμα των μετατοπίσεων για τους ελεύθερους κόμβους (\S 4.31), υπολογίζονται οι νέες εσωτερικές δυνάμεις και ελέγχεται η σύγκλιση του αλγορίθμου.

$$u_f = u_f^{old} + \delta u_f \quad \text{\S 4.31}$$



Σχήμα 4.5 :: Διάγραμμα ροής του αλγορίθμου ελέγχου των μετατοπίσεων



# 5

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### 5.1 Εισαγωγή

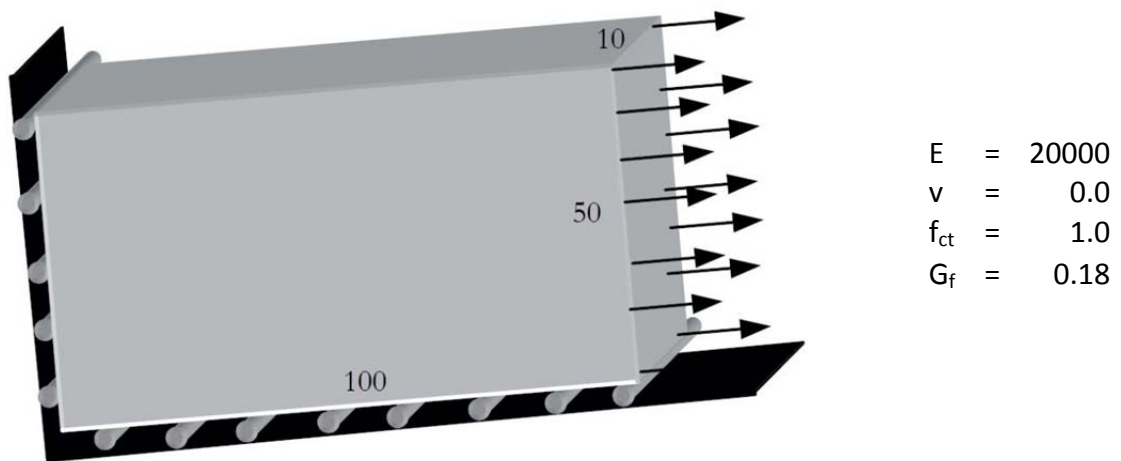
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τρεις ενδεικτικές εφαρμογές προβλημάτων με ασυνέχειες, οι οποίες επιλύθηκαν με το προαναφερθέν λογισμικό **SPARC** (*Structural PARallel Code*) στα πλαίσια αυτής της μεταπτυχιακής.

### 5.2 Εφαρμογές

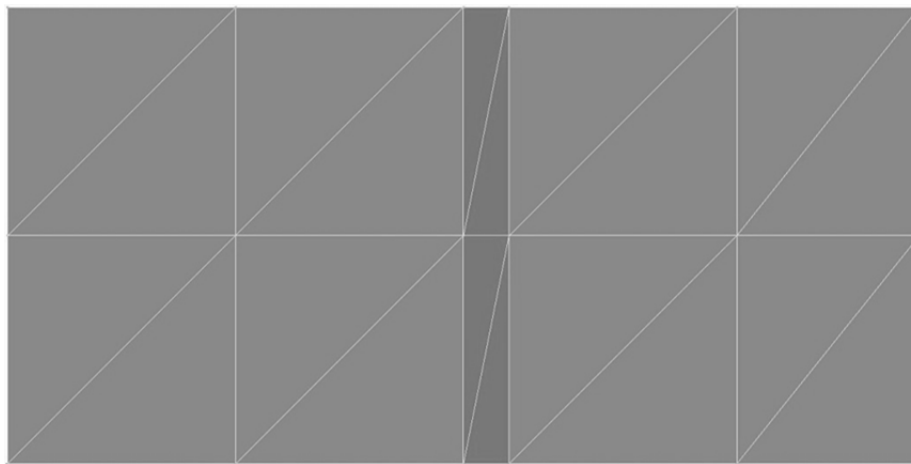
#### 5.2.1 Προσομοίωση εφελκυσμένης δοκού με κατακόρυφη ασυνέχεια

Σε αυτήν την εφαρμογή, η δοκός του σχήματος 5.1 καταπονείται σε εφελκυσμό. Η δοκός φέρει κατακόρυφη ασυνέχεια πλάτους 5cm περί το μέσον της. Για την προσομοίωση αυτή χρησιμοποιήθηκαν τριγωνικά στοιχεία CST (Constant Strain Triangle). Ο φορέας διακριτοποιήθηκε αρχικά με ένα αραιό δίκτυο 20 στοιχείων (σχήμα 5.2) και στη συνέχεια με ένα πιο πυκνό δίκτυο 420 στοιχείων (σχήμα 5.3). Οι μη γραμμικές αναλύσεις έγιναν με τη μέθοδο μήκους τόξου αλλά και με τη μέθοδο ελέγχου των μετατοπίσεων.

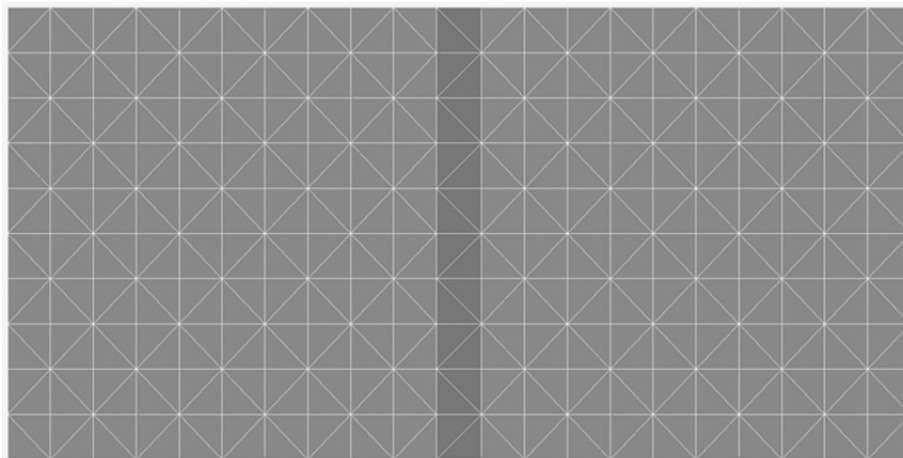




Σχήμα 5.1 :: Εφελκυσόμενη δοκός (μονάδες μήκους σε mm)

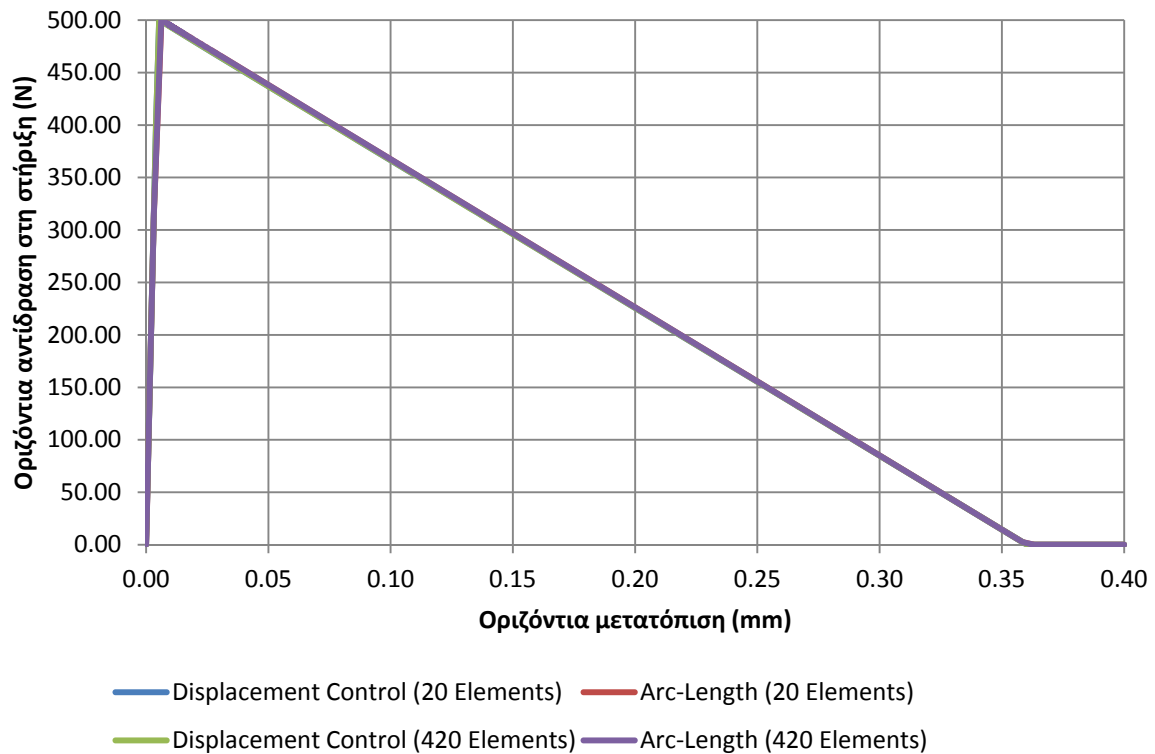


Σχήμα 5.2 :: Προσομοίωση με 20 τριγωνικά στοιχεία CST. Γραμμοσκιασμένα φαίνονται τα στοιχεία που προσομοιώνουν την ασυνέχεια.

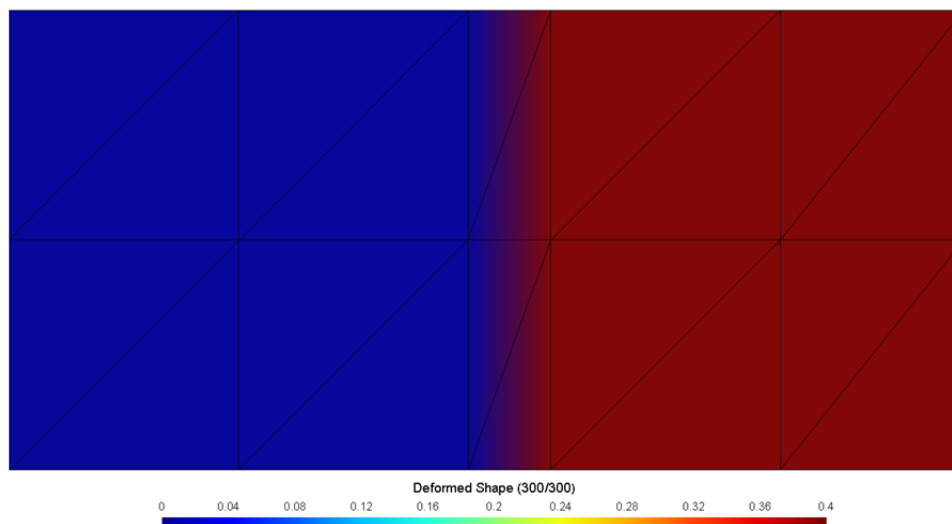


Σχήμα 5.3 :: Προσομοίωση με 420 τριγωνικά στοιχεία CST. Γραμμοσκιασμένα φαίνονται τα στοιχεία που προσομοιώνουν την ασυνέχεια.

Στο σχήμα 5.4 φαίνεται η καμπύλη της οριζόντιας αντίδρασης στη στήριξη ως συνάρτηση της μετατόπισης του δεξιού άκρου της δοκού. Όπως είναι φανερό, η πυκνότητα του δικτύου δεν επηρεάζει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Επιπλέον γίνεται αντιληπτό ότι και οι δύο αλγόριθμοι επίλυσης μη γραμμικών προβλημάτων λειτουργούν σωστά.



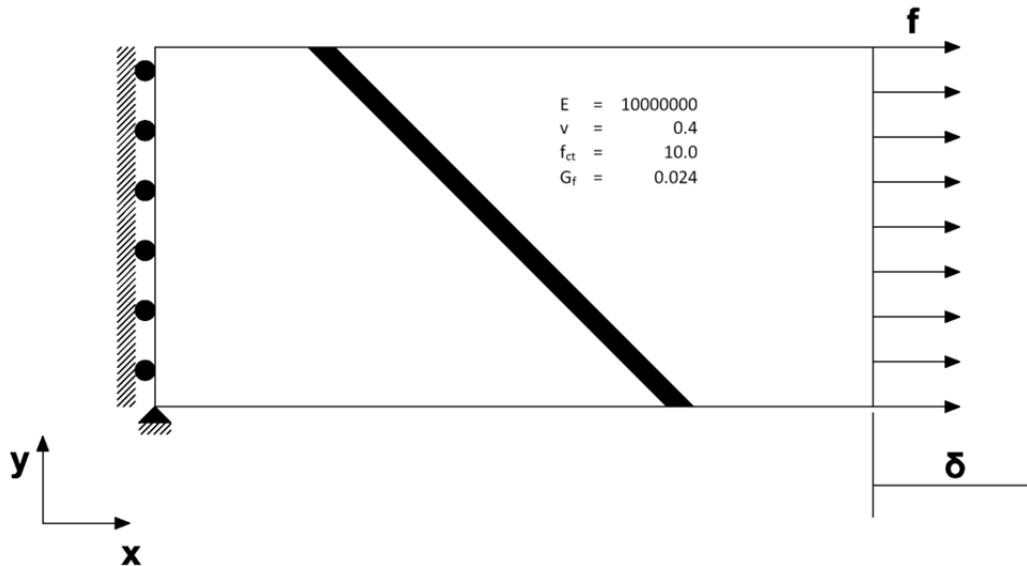
Σχήμα 5.4 :: Διάγραμμα οριζόντιου φορτίου ως προς την οριζόντια μετατόπιση στο φορτιζόμενο άκρο της δοκού.



Σχήμα 5.5 :: Παραμορφωμένος φορέας για την προσομοίωση με τα 20 στοιχεία (Displacement Contour). Η παραμόρφωση αναλαμβάνεται από τα στοιχεία με την ασυνέχεια.

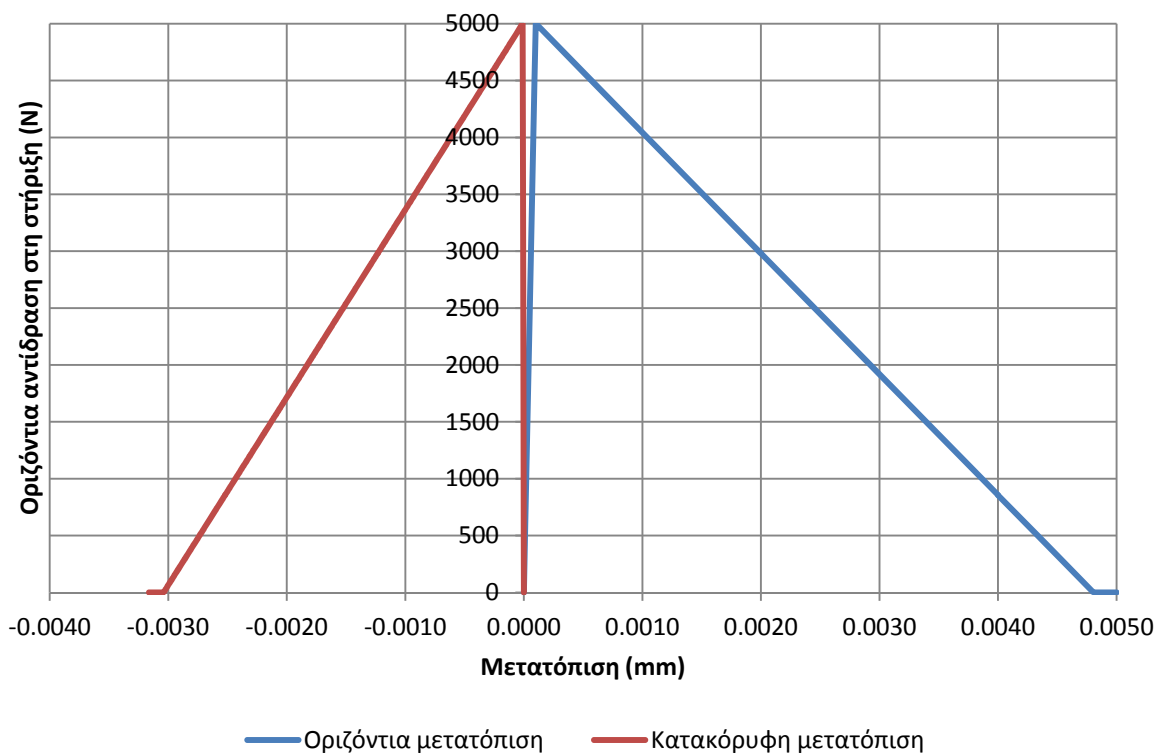
### 5.2.2 Προσομοίωση εφελκόμενης δοκού με διαγώνια ασυνέχεια

Σε αυτήν την εφαρμογή, η δοκός του σχήματος 5.6 καταπονείται σε εφελκυσμό. Η δοκός φέρει διαγώνια ασυνέχεια πλάτους 5cm περί το μέσον της. Για την προσομοίωση χρησιμοποιήθηκαν τριγωνικά στοιχεία CST.

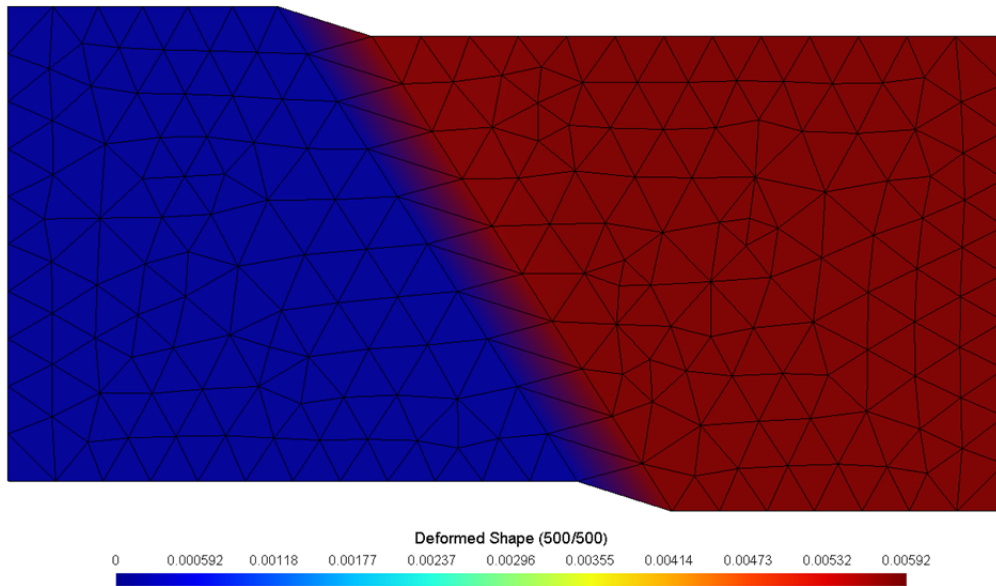


Σχήμα 5.6 :: Εφελκόμενη δοκός 100x50x10 mm με διαγώνια ασυνέχεια (N, mm)

Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης:



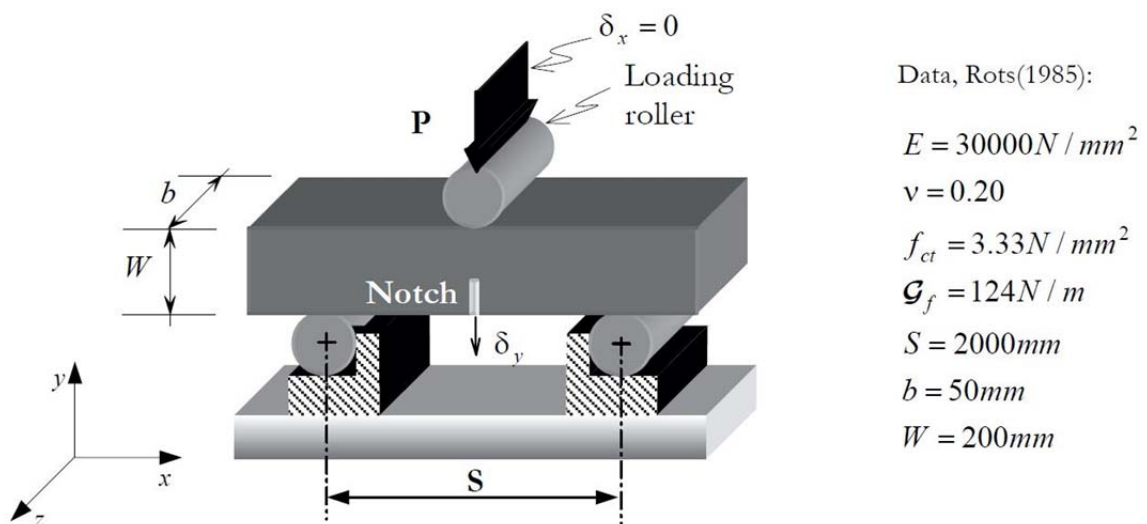
Σχήμα 5.7 :: Διάγραμμα οριζόντιου φορτίου ως προς τις μετατοπίσεις στο φορτιζόμενο άκρο της δοκού.



Σχήμα 5.8 :: Παραμορφωμένος φορέας (Displacement Contour).  
Η παραμόρφωση αναλαμβάνεται από τα στοιχεία με την ασυνέχεια.

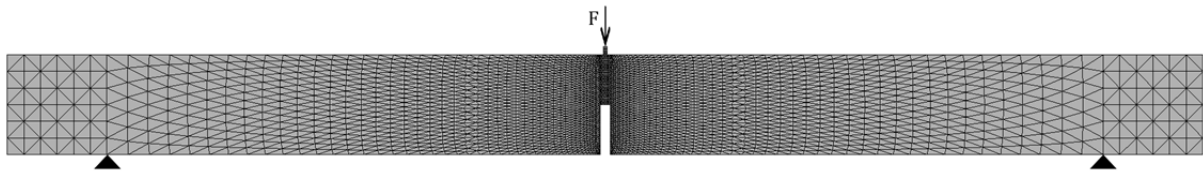
### 5.2.3 Προσομοίωση καμπτόμενης αμφιέριστης δοκού

Σε αυτήν την εφαρμογή, η αμφιέριστη δοκός του σχήματος 5.9 καταπονείται σε κάμψη. Για την προσομοίωση χρησιμοποιήθηκαν τριγωνικά στοιχεία CST.



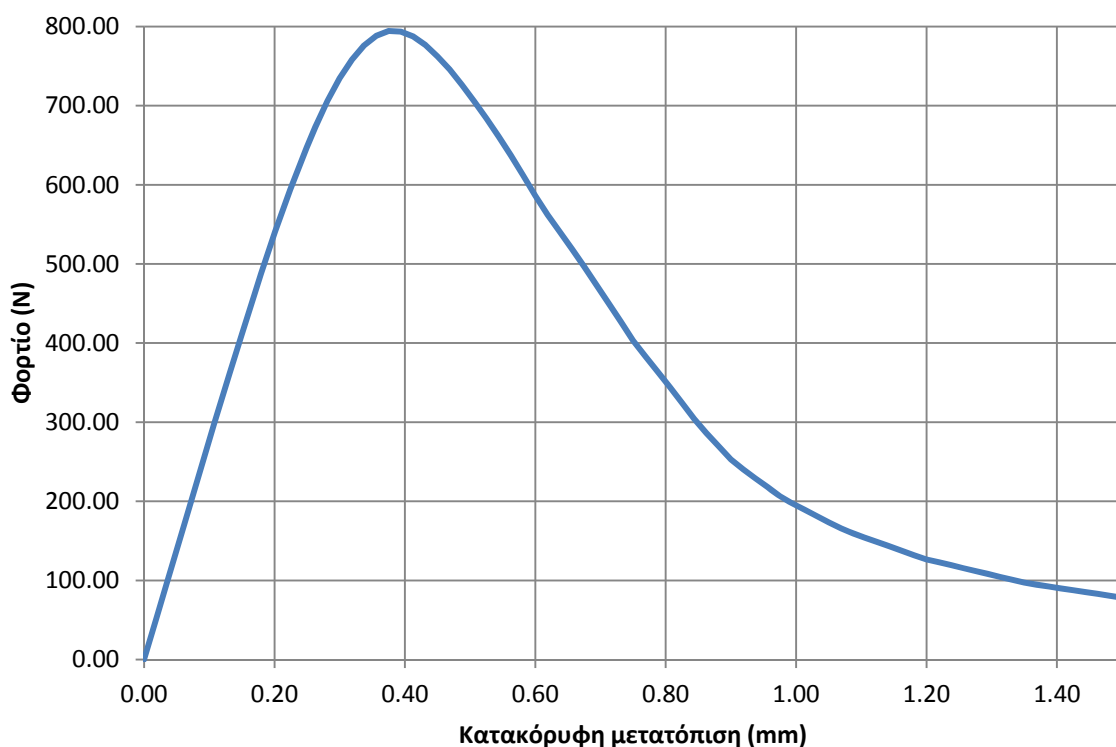
Σχήμα 5.9 :: Καμπτόμενη δοκός ανοίγματος 2m.

Παρακάτω φαίνεται το δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων που επιλέχθηκε για την προσομοίωση. Συνολικά ο φορέας διακριτοποιήθηκε σε 5500 τριγωνικά στοιχεία CST έχοντας 5788 βαθμοί ελευθερίας.

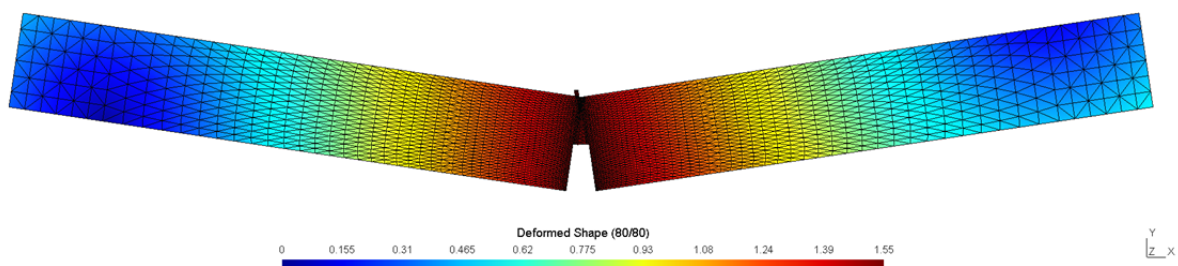


Σχήμα 5.10 :: Δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων

Παρακάτω φαίνεται η καμπύλη φορτίου μετατόπισης η οποία προέκυψε από την ανάλυση:



Σχήμα 5.11 :: Καμπύλη φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης για τον κόμβο που βρίσκεται στο μέσον της δοκού (άνω παρειά).



Σχήμα 5.12 :: Παραμορφωμένος φορέας (Displacement Contour)

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- [1] A three dimensional setting for strong discontinuities modelling in failure mechanics | Eduardo Walter Vieira Chaves | Universitat Politècnica de Catalunya | 2003
- [2] Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations, Part 1: Fundamentals | J. Oliver | 1996
- [3] Computational methods for plasticity – theory and applications | EA de Souza Neto – D Peric – DRJ Owen | Wiley Publications | 2008
- [4] Non – linear Finite Element Analysis of Solids and Structures | M.A. Crisfield | Wiley Publications | 2000
- [5] Arc-Length technique for nonlinear finite element analysis | Memon et al | Journal of Zhejiang University SCIENCE | 2003