ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ρευστομηχανική: Προσέγγιση των θεμελιωδών εξισώσεων μέσα από τη διαφορική γεωμετρία

Σπυριδούλα Αλμπάνη

Τριμελής επιτροπή:

Επιβλέπων: Χαραλαμπόπουλος Αντώνης, Καθηγητής
Δούκα Ευανθία, Επίκουρη Καθηγήτρια
Αρβανιτάκης Αλέξανδρος, Επίκουρος καθηγητής

Υδροδυναμική

Σπυριδούλα Αλμπάνη

2021/1/29

Η τριμελής επιτροπή απαρτίζεται από τους

- Χαραλαμπόπουλος Αντώνης, Καθηγητής
- Δούκα Ευανθία, Επίκουρη Καθηγήτρια
- Αρβανιτάκης Αλέξανδρος, Επίκουρος καθηγητής

Abstract

Hydrodynamics is one of those fundamental areas in mathematics where progress at any moment may be regarded as a standard to measure the real success of mathematical science. Many important achievements in this field are based on profound theories rather than on experiments. In turn, those hydrodynamical theories stimulated developments in the domains of pure mathematics, such as complex analysis, topology, stability theory, bifurcation theory, and completely integrable dynamical systems. In spite of all this acknowledged success, hydrodynamics with its spectacular empirical laws remains a challenge for mathematicians. For instance, the phenomenon of turbulence has not yet acquired a rigorous mathematical theory. Furthermore, the existence problems for the smooth solutions of hydrodynamic equations of a three-dimensional fluid are still open.

The simplest but already very substantial mathematical model for fluid dynamics is the hydrodynamics of an ideal (i.e., of an incompressible and inviscid) homogeneous fluid. From the mathematical point of view, a theory of such a fluid filling a certain domain is nothing but a study of geodesics on the group of diffeomorphisms of the domain that preserve volume elements.

In 1765, L. Euler published the equations of motion of a rigid body. Eulerian motions are described as geodesics in the group of rotations of three–dimensional Euclidean space, where the group is provided with a left-invariant metric.

It seems that there is a strong interconnection between hydrodynamics and differential (Riemannian) geometry. In this text we develop the very basic elements of geometry. Manifolds are mathematical entities which are locally diffeomorphic to the euclidean space. Such entities can have their own differential calculus, that is, integration and differentiation. But here comes the first problem: If differentiation requires us to displace vectors,

there is no fixed way to realize such displacements in an abstract manifold. Riemannian geometry introduces a structure –the metric– in a manifold in a way we can measure distances and know which diffeomorphisms keep the metric invariant. Under the condition of metric invariance we can now move objects between distinct positions in the manifold and do ordinary calculus. What enables us to make such motions, is given in an infinitessimal way: It is what we call a *connection*, in other words a way to differentiate things on directions while we respect (aka, keep fixed) the metric.

The second problem that arises, relates to integration. We need a measure (or a volume). In the riemannian case, measure sources from the metric, in an analogous fashion as in euclidean spaces. Measure theoretic approachdoesn't fit well to calculus, though. We need to introduce the so-called *differential forms*, which enables us to fully develop an integration theory which greatly resembles what we already know in $\mathbb{R}^m$.

The last chapter utilises geometry to formulate the very basic elements of hydrodynamics: That is, equation of continuity which relates to mass preservation, the euler equation which is the analogue of the newtons law and lastly the energy preservation equation. We follow the Eulerian approach to coordinates. In classical (Newtonian) mechanics we have the three space coordinates plus time: So, given a point $x \in \mathbb{R}^m$ and for every moment $t \in \mathbb{R}$ we measure the fluid velocity $q(t;x)$ and density $\rho(t;x)$. In contrast, in the eulerian way, we have the *generalized coordinates*, related only to the the geometrical restrictions of the problem. Now we label a fluid parcel at x_0 and at moment t_0, we let it move on its orbit $t \longmapsto a(t;x)$. We then measure its properties along its trajectory. Ofcource the mapping of the orbits connects the Newtonian and the Eulerian coordinates.

Περίληψη

Η υδροδυναμική είναι μία από τις θεμελιώδεις περιοχές των μαθηματικών όπου η πρόοδος σε οποιαδήποτε στιγμή μπορεί να ειδωθεί ως μέτρο για να εκτιμήσουμε την πραγματική επιτυχία της ίδιας της μαθηματικής επιστήμης. Πολλές σημαντικές επιτυχίες σε αυτό το πεδίο βασίζονται σε βαθιές θεωρίες παρά στο ίδιο το πείραμα. Με τη σειρά τους οι θεωρίες επί της υδροδυναμικής κινούν την πρόοδο στα θεωρητικά μαθηματικά, όπως η μιγαδική ανάλυση, η τοπολογία, η θεωρία ευστάθειας, θεωρία διακλαδώσεων και η θεωρία των πλήρως ολοκληρώσιμων δυναμικών συστημάτων. Παρά τη διαπιστωμένη πρόοδο, η υδροδυναμική με τους εντυπωσιακούς εμπειρικούς της νόμους παραμένει πρόκληση για τους μαθηματικούς. Για παράδειγμα το φαινόμενο της τυρβώδους ροής δεν έχει ακόμα μία αυστηρή θεωρία. Επιπροσθέτως, προβλήματα υπάρξεως για τις ομαλές λύσεις των εξισώσεων της υδροδυναμικής σε ένα τρισδιάστατο ρευστό παραμένουν ακόμα ανοιχτά.

Το απλούστερο πλην όμως ουσιώδες μαθηματικό μοντέλο για τη δυναμική των ρευστών είναι η υδροδυναμική του ιδανικού (δηλαδή ασυμπίεστου και άνευ ιξώδους) ρευστου. Από την μαθηματική πλευρά, η θεωρία ενός τέτοιου ρευστού που γεμίζει ένα συγκεκριμένο χωρίο δεν είναι παρά η μελέτη των γεωδαιτικών πάνω στην ομάδα των διαφορομορφισμών του χωρίου που διατηρούν αναλλοίωτο τον όγκο.

Το 1765, ο L. Euler δημοσίευσε τις εξισώσεις κίνησης του άκαμπτου σώματος. Οι κινήσεις Euler περιγράφονται ως γεωδαιτικές στην ομάδα των στροφών στις τρεις διαστάσεις στον Ευκλείδειο χώρο.

Κατά πως φαίνεται, υπάρχει ισχυρή σύνδεση μεταξύ της υδροδυναμικής και της διαφορικής γεωμετρίας. Σε αυτό το κείμενο αναπτύσσουμε τα πολύ βασικά στοιχεία της διαφορικής γεωμετρίας. Οι πολλαπλότητες είναι μαθηματικές οντότητες που τοπικά ομοιάζουν διαφορομορφικά με τον ευκλείδειο χώρο. Τέτοιες οντότητες μπορούν όμως να έχουν τον δικό τους διαφορικό λογισμό, δηλαδή παραγώγιση και ολοκλήρωση. Και εδώ έρχεται το πρώτο πρόβλημα: Η διαδικασία της παραγώγισης προϋποθέτει τη δυνατότητα να μετακινούμε διανύσματα από μια θέση σε μια άλλη. Σε μία αφηρημένη πολλαπλότητα δεν υπάρχει κάποιος προκαθορισμένος τρόπος να γίνει αυτό. Η γεωμετρία Riemann εφοδιάζει την πολλαπλότητα με μία δομή, ώστε να είναι εφικτό να μετρώνται αποστάσεις και έτσι να γνωρίζουμε ποιοι μετασχηματισμοί αφήνουν τη μετρική αναλλοίωτη. Κάτω από την απαίτηση για το αναλλοίωτο της μετρικής μπορούμε να μετακινούμε αντικείμενα από σημείο σε σημείο και στη συνέχεια να κάνουμε τον συνήθη διαφορικό λογισμό. Στην πράξη αυτό γίνεται σε απειροστικό επίπεδο, μέσω της *συνοχής*, ώστε να μπορούμε να παραγωγίζουμε αντικείμενα σεβόμενοι τη μετρική.

Το δεύτερο πρόβλημα που προκύπτει σχετίζεται με την ολοκλήρωση. Ολοκλήρωση σημαίνει μέτρο. Στην περίπτωση της γεωμετρίας Riemann η μετροθεωρητικη προσέγγιση δεν βολεύει τόσο πολύ τις διατυπώσεις μας. Παρουσιάζουμε τη θεωρία των διαφορικών μορφών (που είναι ουσιαστικά τα αντικείμενα που επιδέχονται ολοκληρώσεως), ώστε να μπορούμε να έχουμε μια πλήρη θεωρία ολοκλήρωσης που ομοιάζει με εκείνη του ευκλείδειου χώρου.

Το τελευταίο κεφάλαιο χρησιμοποιεί τη γεωμετρία για να εισάγει τα πολύ βασικά στοιχεία της υδροδυναμικής. Που είναι οι τρεις θεμελιώδεις εξισώσεις: Η εξίσωση της συνέχειας (συνέπεια της διατήρησης της μάζας), η εξίσωση του Euler (διατύπωση του νόμου το Νεύτωνα) και η διατήρηση της ενέργειας. Ακολουθούμε την προσέγγιση του Euler για τις συντεταγμένες. Σε αντίθεση με την κλασσική Νευτώνεια θεώρηση όπου σε ένα δοθέν σημείο x και για κάθε χρονική στιγμή t εξετάζουμε την ταχύτητα $q(t;x)$ και την πυκνότητα $\rho(t;x)$ του ρευστού, επικαλούμαστε την προσέγγιση του Euler. Εδώ οι συντεταγμένες είναι γενικευμένες και καθορίζονται μόνο από τους γεωμετρικούς περιορισμούς του προβλήματος. Συγκεκριμένα ένα σωματίδιο του ρευστού στη θέση x_0 και ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή t_0 ακολουθεί την τροχία του $t \longmapsto a(t;x)$ ώστε η μόνη συντεταγμένη που εξελίσσεται είναι ο χρόνος. Ακριβώς η απεικόνιση a είναι η σύνδεση μεταξύ νευτώνειας και Eulerιανής μηχανικής.

Περιεχόμενα

1 Εξωτερική Άλγεβρα

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μερικά βασικά στοιχεία από την εξωτερική άλγεβρα που θα χρειαστούν στο κείμενο.

1. Τανυστικό γινόμενο

Ξεκινάμε με την έννοια του τανυστικού γινομένου δύο διανυσματικών χώρων

Πρόταση 1.1: *Ας είναι V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του αυτού σώματος $\mathbf{K}$. Θεωρούμε τον ελεύθερο διανυσματικό χώρο $F = \mathrm{span}(V \times W)$ πάνω από τη βάση $V \times W$ και ορίζουμε*

$$I = \mathrm{span}\left\{ \begin{array}{c} (v, w+w') - (v,w) - (v,w'), \\ (v+v', w) - (v,w) - (v',w), \\ (\lambda v, w) - \lambda(v,w), \\ (v, \lambda w) - \lambda(v,w) \end{array} \middle| \, v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbf{K} \right\}$$

Γράφουμε $V \otimes W \overset{\text{def}}{=} F/I$. Υπάρχει μία διγραμμική απεικόνιση

$$\varphi \colon V \times W \longmapsto V \otimes W$$

με την εξής καθολική ιδιότητα: για κάθε διανυσματικό χώρο Z και διγραμμική απεικόνιση $A \colon V \times W \longmapsto Z$, να υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\widehat{A} \colon V \otimes W \longmapsto Z$ ώστε $A = \widehat{A} \circ \varphi$.

Απόδειξη: Η απεικόνιση φ ορίζεται ως εξής:

$$\varphi\colon V \times W \longmapsto V \otimes W : (v,w) \longmapsto \varphi(v,w) = (v,w) + I$$

Ας είναι A όπως στην εκφώνηση. Παρατηρούμε ότι η διγραμμικότητα της A συνεπάγεται ότι $I \subseteq \ker A$ και επομένως $\mathrm{A} = \widehat{A} \circ \varphi$ για κάποια γραμμική απεικόνιση $\widehat{A}\colon V \otimes W \longmapsto Z$. Αν $\mathrm{T}\colon V \otimes W \longmapsto Z$ είναι μια γραμμική απεικόνιση ώστε $0 = \mathrm{T} \circ \varphi$, τότε για κάθε $(v,w) \in V \times W$ θα ίσχυε $T \cdot \varphi(v,w) = 0$. Όμως τα $\varphi(v,w), v \in V, w \in W$ είναι βάση του $V \otimes W$ και άρα $T = 0$. Επομένως η $\widehat{A}$ είναι μοναδική. //

Σημείωση 1.2: Το στοιχείο $(v,w) + I$ της προηγούμενης πρότασης θα συμβολίζεται με $v \otimes w$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ένας χώρος F και μία διγραμμική απεικόνιση $\varphi\colon V \times V \longmapsto F$ με την καθολική ιδιότητα της προηγούμενης πρότασης, είναι μοναδικά ως προς ισομορφισμό.

Ορισμός 1.3: Ας είναι V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbf{K}$. Ο διανυσματικός χώρος $V \otimes W$ επί του K ονομάζεται ***τανυστικό γινόμενο*** και συνοδευόμενος από την φ της πρότασης 1.1 ικανοποιεί την εξής καθολική ιδιότητα: "για κάθε διανυσματικό χώρο Z και διγραμμική απεικόνιση $A\colon V \times W \longmapsto Z$, να υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\widehat{A}\colon V \otimes W \longmapsto Z$ ώστε $A = \widehat{A} \circ \varphi$."

Σημείωση 1.4: Αν V, W είναι δυο διανυσματικοί χώροι και $\beta = \{e_i\}_{i \in I}, \gamma = \left\{f_j\right\}_{j \in J}$ είναι βάσεις τους, τότε το $\beta \otimes \gamma = \left\{e_i \otimes f_j \;\middle|\; i \in I, j \in J\right\}$ είναι βάση το $V \otimes W$: Αν $(v,w) \in V \times W$ τότε $v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_\kappa e_{i_k}$ και $w = \sum_{r=1}^{n} \mu_r f_{j_r}$ για κάποια $\lambda_1, ..., \lambda_k, \mu_1, ..., \mu_r \in \mathbf{K}$. Όμως $u \otimes v = \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_\kappa e_{i_k}, \sum_{r=1}^{n} \mu_r f_{j_r}\right) + I = \sum_{k,r=1}^{m,n} \lambda_\kappa \mu_r \left(e_{i_k}, f_{j_r}\right) + I = \sum_{k,r=1}^{m,n} \lambda_\kappa \mu_r e_{i_k} \otimes f_{j_r}$, άρα $V \otimes W = \operatorname{span} \beta \otimes \gamma$. Από την άλλη αν $\beta^* = (e_i^*)_{i \in I}$ και $\gamma^* = \left(f_j^*\right)_{j \in J}$ είναι οι δυικές βάσεις ώστε $e_i^* \cdot e_k = \delta_{ik}$ και $f_j^* \cdot f_r = \delta_{jr}$ τότε υπάρχουν μοναδικές γραμμικές $\varphi_{ij}\colon V \otimes W \longmapsto \mathbf{K}$ ώστε $\varphi_{ij} \cdot e_k \otimes f_r = \delta_{ij,kr}$. Αν $\Lambda = \{(i_k, j_r) \mid k = 1, ..., m;\ r = 1, ..., n\} \subseteq I \times J$ και $\lambda_{kr} \in K$ ώστε $\sum_{k,r} \lambda_{kr} \cdot e_{i_k} \otimes f_{j_r} = 0$, τότε $\lambda_{kr} = \varphi_{i_k j_r}\left(\sum_{k,r} \lambda_{kr} \cdot e_{i_k} \otimes f_{j_r}\right) = \varphi_{i_k j_r}(0) = 0$ και επομένως το $\beta \otimes \gamma$ είναι πράγματι γραμμικώς ανεξάρτητο. Ιδιαιτέρως όταν $\dim V = m, \dim W = n < +\infty$ τότε $\dim V \otimes W = mn$

Σημείωση 1.5: Αν V, W, Z είναι τρεις διανυσματικοί χώροι τότε μπορούμε να ταυτίσουμε το $V \otimes (W \otimes Z)$ με το $(V \otimes W) \otimes Z$ χρησιμοποιώντας την αντιστοιχία $x \otimes (y \otimes z) \longleftrightarrow (x \otimes y) \otimes z$ μέσα από την καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου. Έτσι –ως προς ισομορφισμό– υπάρχει μοναδικό τανυστικό γινόμενο $V \otimes W \otimes Z$ και είναι δυνατό να διατυπώσουμε αντίστοιχη καθολική ιδιότητα όπως και στον ορισμό με τους δύο παράγοντες.

Αυτά τα επιχειρήματα εφαρμόζονται και σε περισσότερους από 3 παράγοντες. Γράφουμε συμβολικά

$$V^{\otimes m} = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{m \text{ φορές}} \quad \text{και} \quad V^{\otimes 0} = \mathbf{K}$$

Ακόμα δε, αν $n, r \in \mathbb{N}$ υπάρχει μοναδική διγραμμική απεικόνιση

$$\otimes\colon V^{\otimes n} \times V^{\otimes r} \longmapsto V^{\otimes(n+r)} : (u, v) \longmapsto u \otimes v$$

που ικανοποιεί $(x_1 \otimes x_2 \otimes ...x_n) \otimes (x_{n+1} \otimes x_{n+2} \otimes ...x_{n+r}) = x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_{n+r}$ για όλα τα $x_1, x_2, ..., x_{n+r} \in V$. Στην πραγματικότητα, η $\otimes$ ορίζει μία πράξη που καθιστά το $\mathrm{T}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n}$ μία προσεταιριστική άλγεβρα που ονομάζεται τανυστική άλγεβρα του V.

Σημείωση 1.6: Αν V^* είναι ο αλγεβρικός δυικός του V, τότε μπορούμε να έχουμε σχέση δυϊκότητας μεταξύ $V^{\otimes n}$ και $(V^*)^{\otimes n}$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας δύο φορές την καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου παίρνουμε ότι υπάρχει μία διγραμμική απεικόνιση

$$\mathrm{ev}\colon (V^*)^{\otimes n} \times V^{\otimes n} \longmapsto \mathbf{K}$$

ώστε για κάθε $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n \in V^*$ και κάθε $x_1, x_2, ...x_n \in V$ να ισχύει

$$\mathrm{ev}\left(\eta_1 \otimes ... \otimes \eta_n; x_1 \otimes ... \otimes x_n\right) = \mathrm{ev}(\eta_1; x_1) \cdot ... \cdot \mathrm{ev}(\eta_n; x_n)$$

Πολύ συχνά αντί για $\mathrm{ev}(\eta; x)$ θα γράφουμε $\eta \cdot x$.

Αυτή η σχέση δυϊκότητας μας οδηγεί να ορίσουμε μία φυσική ενσφήνωση του $(V^*)^{\otimes n}$ στον $(V^{\otimes n})^*$ ως εξής $j\colon (V^*)^{\otimes n} \longmapsto (V^{\otimes n})^*$ ώστε για κάθε $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n \in V^*$ και κάθε $x_1, x_2, ...x_n \in V$ να ισχύει

$$j(\eta_1 \otimes ... \otimes \eta_n) \cdot (x_1 \otimes ... \otimes x_n) = \mathrm{ev}\left(\eta_1 \otimes ... \otimes \eta_n; x_1 \otimes ... \otimes x_n\right)$$

Όταν $\dim V < +\infty$ τότε η j είναι επί και έχουμε την ταύτιση $V^* \otimes V^* = (V \otimes V)^*$ μέσω της j.

Δηλαδή υπάρχει

Ορισμός 1.7: Ας είναι V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbf{K}$ και $n \in \mathbb{N}$. Γράφουμε

$$J_n = \mathrm{span}\left\{ x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_n \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1, x_2, ..., x_n \in V \\ \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbf{K} : \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \end{array} \right\}$$

και ορίζουμε $\bigwedge^n V = V^{\otimes m}/J_n$. Ορίζουμε επιπλέον

$$\varphi\colon V^n \longmapsto \bigwedge^n V : (x_1, ..., x_n) \longmapsto \varphi\left(x_1, ..., x_n\right) = x_1 \wedge ... \wedge x_n \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \otimes ... \otimes x_n + J_n$$

Το $\bigwedge^n V$ ικανοποιεί την εξής καθολική ιδιότητα: Για κάθε γραμμική απεικόνιση $A\colon V^m \longmapsto Z$ τέτοια ώστε $\mathrm{A}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ οποτεδήποτε τα $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, υπάρχει μοναδική $\widehat{A}\colon \bigwedge^n V \longmapsto Z$ ώστε $A = \widehat{A} \circ \varphi$.

Ακριβως όπως και στην περίπτωση του τανυστικού γινομένου, για $n, r \in \mathbb{N}$ υπάρχει μοναδική διγραμμική απεικόνιση (είναι καλά ορισμένη)

$$\wedge\colon \bigwedge^n V \times \bigwedge^r V \longmapsto \bigwedge^{n+r} V : (\hat{u} = u + J_n, \hat{v} = v + J_r) \longmapsto \hat{u} \wedge \hat{v} = u \otimes v + J_{n+r},$$

και μάλιστα η πράξη $\wedge$ που ορίζεται είναι επίσης προσεταιριστική και καθιστά το $\Lambda(V) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge^n V$ μία προσεταιριστική άλγεβρα, την επονομαζόμενη εξωτερική άλγεβρα του V

Σημείωση 1.8: Και οι $\bigwedge^n V^*$ και $\bigwedge^n V$ συνδέονται με σχέση δυικότητας ως εξής:

$$\text{ev}: \bigwedge^n V^* \times \bigwedge^n V \longmapsto \mathbf{K}$$

ώστε για κάθε $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n \in V^*$ και κάθε $x_1, x_2, ...x_n \in V$ να ισχύει

$$\text{ev}\left(\eta_1 \wedge ... \wedge \eta_n; x_1 \wedge ... \wedge x_n\right) = \det\left(\eta_i \cdot x_j\right)_{i,j=1}^n$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι –ως προς μια πολλαπλασιαστική σταθερά– η ορίζουσα είναι η μόνη δυνατή απεικόνιση για το ζεύγος δυϊκότητας: οφείλει να είναι n–γραμμική σε κάθε της παράγοντα και εναλλάσσουσα. Για την πολλαπλασιαστική σταθερά δε, υπάρχουν δύο "φυσικές" επιλογές: η πρώτη είναι να επιλέξουμε μια σταθερά ώστε $\text{ev}\left(e_1^* \wedge ... \wedge e_n^*; e_1 \wedge ... \wedge e_n\right) = 1$ (e_i^* είναι η δυική βάση της e_i)· αυτή την επιλογή βρίσκουμε στις περισσότερες σύγχρονες βιβλιογραφικές αναφορές και υιοθετούμε κι εδώ. Η άλλη επιλογή προέρχεται από τη διάσπαση του $(V^{\otimes n})^*$ σε ευθύ άθροισμα δύο υποχώρων: τον υπόχωρο των συμμετρικών $\text{Sym}_n(V)$ και τον υπόχωρο των εναλλασσουσών $\text{Alt}_n(V)$ γραμμικών απεικονίσεων, καθώς και την απαίτηση η ενφήνωση του $\bigwedge^n V^*$ στον $\left(\bigwedge^n V\right)^*$ να γίνεται μέσω της προβολής στον υπόχωρο $\text{Alt}(V)$ οδηγώντας μας σε μία πολλαπλασιαστική σταθερά $\dfrac{1}{n!}$.

Σημείωση 1.9: Ας υπολογίσουμε τη διάσταση του $\bigwedge^k V$ όταν $\dim V = n < +\infty$. Αν $\beta = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ είναι μία βάση του V και $x_1, x_2, ..., x_k \in V$, τότε θα υπάρχει ένας πίνακας $A = \left(a_{ij}\right)_{i=1,j=1}^{k,n}$ ώστε $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} e_i$. Καθώς αναπτύσσουμε το $x_1 \wedge ... \wedge x_k$ καταλήγουμε σε έναν γραμμικό συνδυασμό από διανύσματα $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_k}$ όπου $i_1 < i_2 < ... < i_k$ –οι διπλές εγγραφές των e_i κάνουν τον παράγοντα 0, αφού τότε ανήκουν στον υπόχωρο J_k. Αυτά τα διανύσματα δείχνεται ότι είναι *βάση* του $\bigwedge^k V$. Με πόσους τρόπους έχουμε αύξουσες k–άδες από αριθμούς από 1 ως n; Με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Ακριβώς αυτή ειναι η διάσταση του $\bigwedge^k V$. Σημειώστε ότι για k από n και πάνω το $\bigwedge^k V$ είναι ο μηδενικός υπόχωρος, ιδιαιτέρως $\dim \bigwedge^n V = 1$.

Ορισμός 1.10: Ας είναι V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Ένα στοιχείο $\eta \in \bigwedge^k V^*$ ονομάζεται k–***μορφή***.

2. Μορφές και δυϊκότητα

Ορισμός 1.11: Ας είναι V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και έστω $n = \dim V < +\infty$. Μία n-μορφή $\Omega \in \bigwedge^n V^*$ ονομάζεται ***μορφή όγκου*** αν είναι μη μηδενική

Σημείωση 1.12: Καθώς για οποιονδήποτε πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο V ισχύει $\dim \bigwedge^n V = 1$, $\Omega \neq 0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\Omega^\sharp$ ώστε $\Omega \cdot \Omega^\sharp = 1$. Αυτό το $\Omega^\sharp$ ορίζει και μία προσανατολισμένη βάση του V που έχει όγκο 1.

Ορισμός 1.13: Αν V είναι διανυσματικός χώρος, $\eta \in \bigwedge V^*$, $\alpha \in \bigwedge V$ και $m \overset{\text{def}}{=} \deg \eta - \deg \alpha$ ώστε $m \geq 0$. Ορίζουμε την ***συστολή*** $\imath_\alpha \eta$ ως εξής:

$$\imath_\alpha \eta \cdot \beta = \eta \cdot (\alpha \wedge \beta)\,, \qquad \text{για κάθε } \beta \in \bigwedge^m V$$

Σημείωση 1.14: Για $p \geq q$ η απεικόνιση

$$\bigwedge^p V^* \otimes \bigwedge^q V \ni \xi \otimes \alpha \longmapsto \imath_\alpha \xi \in \bigwedge^{p-q} V^*$$

είναι γραμμική

Πρόταση 1.15: *Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος, $\xi, \eta \in \bigwedge V^*$ είναι δύο μορφές και $\alpha, \beta \in \bigwedge V$ τότε*

[C1] *Αν* $\deg \xi = \deg \alpha$ *τότε* $\imath_\alpha \xi = \xi \cdot \alpha$

[C2] *Αν* $\deg \alpha = 1$, *τότε* $\imath_\alpha(\xi \wedge \eta) = (\imath_\alpha \xi) \wedge \eta + (-1)^{\deg \xi} \xi \wedge \imath_\alpha \eta$

[C3] $\imath_\beta \imath_\alpha \xi = \imath_{\alpha \wedge \beta} \xi$

Σημείωση 1.16: Ας θεωρήσουμε μία βάση $e_1, ..., e_n$ του V και τη δυική αυτής $e_1^*, ..., e_n^*$ ώστε $e_i^* \cdot e_j = \delta_{ij}$ για όλα τα $i, j = 1, ..., n$. Ας είναι $p > 1$ και $i_1, i_2, ..., i_p, j \in \{1, 2, ..., n\}$ ώστε $i_1, i_2, ..., i_p$ ανά δύο διαφορετικά. Τότε

$$\imath_{e_j}\left(e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*\right) = \begin{cases} 0 & \text{αν } j \notin I \\ (-1)^{k-1} e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge \cancel{e_{i_k}^*} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^* & \text{αν } j = i_k \text{ για κάποιο } k \end{cases}$$

ιδιαιτέρως, αν $\Omega = e_1^* \wedge e_2^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$,

$$\imath_{e_j} \Omega = (-1)^{j-1}\, e_1^* \wedge e_2^* \wedge \cdots \wedge \text{№} e_j^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$$

Λήμμα 1.17: *Ας είναι W διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης $\dim W = n < +\infty$. Υποθέτουμε ότι για την $\eta \in \bigwedge^{n-k} W$ ισχύει ότι $\xi \wedge \eta = 0$, $\forall \xi \in \bigwedge^k W$ τότε $\eta = 0$.*

Απόδειξη: Ας είναι $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ μία βάση του W. Αν $I = \{i_1 < i_2 < ... < i_k\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ τότε συμβολίζουμε $\mathbf{e}_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_k}$. Επίσης $I^{\complement} = \{1, 2, ..., n\} \setminus I$. Παρατηρήστε ότι $\mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_J = 0$ αν και μόνον αν $I \cap J \neq \emptyset$. Επομένως το η είναι της μορφής $\eta = \sum_{|I|=n-k} a_I \mathbf{e}_I$. Αν $J \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ με $|J| = n - k$ τότε

$$0 = \mathbf{e}_{J^{\complement}} \wedge \eta = \mathbf{e}_{J^{\complement}} \wedge \sum_{|I|=n-k} a_I \mathbf{e}_I = a_J\, \mathbf{e}_{J^{\complement}} \wedge \mathbf{e}_J,$$

δηλαδή $a_J = 0$. Όμως το J ήταν τυχόν. Άρα $\eta = 0$. //

Πρόταση 1.18: *Ας είναι V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης $n = \dim V < +\infty$ με μορφή όγκου Ω. Ας είναι $k \in \{1, 2, ..., n\}$ και $\alpha \in \bigwedge^k V$, $\eta \in \bigwedge^{n-k} V^*$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

α) $\eta = \imath_\alpha \Omega$

β) *Για κάθε $\xi \in \bigwedge^k V^*$ ισχύει $\xi \wedge \eta = (\xi \cdot \alpha)\, \Omega$.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε την **α**) $\Rightarrow$ **β**) με επαγωγή στο k. Για $k = 0$, όπου το a ανάγεται σε βαθμωτή ποσότητα, $\imath_\alpha \Omega = \alpha\Omega$ και δεν υπάρχει κάτι να δείξουμε. Υποθέτουμε ότι η συνεπαγωγή **α**) $\Rightarrow$ **β**) ισχύει για k. Ας είναι λοιπόν $\alpha_1 \in \bigwedge^k V, \xi_1 \in \bigwedge^k V^*, \beta \in V, \lambda \in V^*$. Θέτουμε $\eta_1 = \imath_{\alpha_1} \Omega$, $\alpha = \alpha_1 \wedge \beta$, $\xi = \xi_1 \wedge \lambda$ και $\eta = \imath_\alpha \Omega$. Τότε

$$\begin{aligned}
\xi \wedge \imath_\alpha \Omega = \xi_1 \wedge \lambda \wedge \imath_{\alpha_1 \wedge \beta} \Omega &= \xi_1 \wedge \lambda \wedge \imath_\beta \imath_{\alpha_1} \Omega \\
&= (-1)^{k+1} \imath_\beta \left(\xi_1 \wedge \lambda \wedge \imath_{\alpha_1} \Omega\right) - (-1)^{k+1} \imath_\beta (\xi_1 \wedge \lambda) \wedge \imath_{\alpha_1} \Omega \\
&= 0 - (-1)^{k+1} \left(\imath_\beta (\xi_1 \wedge \lambda) \cdot \alpha_1\right) \Omega \\
&= \left((\xi_1 \wedge \lambda) \cdot \left((-1)^k \beta \wedge \alpha_1\right)\right) \Omega \\
&= \left((\xi_1 \wedge \lambda) \cdot (\alpha_1 \wedge \beta)\right) \Omega \\
&= (\xi \cdot \alpha)\Omega
\end{aligned}$$

Δείξαμε ότι **α**) $\Rightarrow$ **β**) για $k+1$ και όταν $\alpha = \alpha_1 \wedge \beta$, $\xi = \xi_1 \wedge \lambda$. Όμως η γραμμικότητα της

$$\xi \otimes \alpha \longmapsto \xi \wedge \imath_\alpha \Omega - (\xi \cdot \alpha)\Omega$$

επιβάλλει ότι η ισότητα θα ισχύει και σε γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων της μορφής $\xi \otimes \alpha$, άρα και σε ολόκληρο το $\bigwedge^{k+1} V^* \otimes \bigwedge^{k+1} V$.

Αντίστροφα τώρα, υποθέτουμε ότι για την $\eta \in \bigwedge^{n-k} V^*$ και το $\alpha \in \bigwedge^k$ ισχύει $\xi \wedge \eta = \xi\alpha\, \Omega$, $\forall \xi \in \bigwedge^k V^*$. Λόγω του πρώτου μέρους της απόδειξης, $\xi \wedge \imath_\alpha \Omega = \xi\alpha\, \Omega$, για όλα τα ξ. Επομένως

$$\xi \wedge (\eta - \imath_\alpha \Omega) = 0\ , \qquad \forall \xi \in \bigwedge^k V^*$$

Επομένως, από το λήμμα 1.17, $\eta = \imath_\alpha \Omega$. //

Καθώς ο V^{**} ταυτίζεται με τον V μέσω της κανονικής ενσφήνωσης (αφού $\dim V = \dim V^{**}$ στην πεπερασμένης διάστασης περίπτωση)

$$J\colon V \longmapsto V^{**} : \alpha \longmapsto (J\alpha\colon V^* \longmapsto \mathbb{R} : \xi \longmapsto (J\alpha)\xi = \xi \cdot \alpha)$$

μπορούμε να ορίσουμε δυική της συστολής

Ορισμός 1.19: Αν V είναι διανυσματικός χώρος, $\eta \in \bigwedge V^*$, $\alpha \in \bigwedge V$ και $m = \stackrel{\text{def}}{=} \deg \alpha - \deg \eta$ ώστε $m \geq 0$. Ορίζουμε την συστολή $\imath^\eta \alpha$ ως εξής:

$$\imath^\eta \alpha = J^{-1} \imath_\eta (J\alpha)$$

Σημείωση 1.20: Ώστε –με τον συμβολισμό του προηγούμενου ορισμού, για όλα τα $\xi \in \bigwedge^m V^*$ θα ισχύει

$$\xi \cdot \imath^\eta \alpha = \xi \cdot J^{-1} \imath_\eta J\alpha = \imath_\eta J\alpha \cdot \xi = J\alpha \cdot (\eta \wedge \xi) = (\eta \wedge \xi) \cdot \alpha$$

Δυικά της πρότασης 1.18 έχουμε την

Πρόταση 1.21: *Ας είναι V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης $n = \dim V < +\infty$ με μορφή όγκου Ω. Ας είναι $k \in \{1, 2, ..., n\}$ και $\alpha \in \bigwedge^{n-k} V$, $\eta \in \bigwedge^k V^*$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

α) $\alpha = \imath^\eta \Omega^\sharp$

β) *Για κάθε $\beta \in \bigwedge^k V$ ισχύει $\beta \wedge \alpha = (\eta \cdot \beta)\, \Omega^\sharp$.*

Μέσω της συστολής και με προϋπόθεση την ύπαρξη μορφής όγκου, είναι δυνατό να επεκτείνουμε την έννοια του συμπληρωματικού υπόχωρου στην εξωτερική άλγεβρα. Η ιδέα, είναι η εξής: Ας υποθέσουμε ότι V είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης $n = \dim V$. Ας είναι και $V_1 \subsetneqq V$ ένας υπόχωρος αυτού και $\omega_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$ μία βάση του. Ο κάθετος υπόχωρος $V_1^\perp = \bigcap \Big\{\ker \lambda : V_1 \subsetneqq \ker \lambda\Big\}$ έχει διάσταση $n-k$ και ας είναι $\omega_1^\perp = \{\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_{n-k}^*\}$ μια βάση του. Στη συνέχεια σε κάθε υπόχωρο διάστασης m αντιστοιχούμε ένα m–διάνυσμα, ειδικά στον V_1 το $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_k$ και στον $V_1^\perp$ το $\alpha_1^* \wedge \alpha_2^* \wedge ... \wedge \alpha_{n-k}^*$. Για να δουλέψει αυτή η αντιστοίχιση χρειαζόμαστε δύο πράγματα: έναν προσανατολισμό και ένα μέτρο μεγέθους κάθε βάσης. Αυτή ακριβώς είναι η χρησιμότητα της μορφής όγκου Ω. Ώστε καταλήγουμε στον επόμενο ορισμό:

Ορισμός 1.22: Ας είναι V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης $n = \dim V < +\infty$ με μορφή όγκου Ω. Αν $\alpha \in \bigwedge^k V$ τότε ορίζουμε $\star\alpha = \imath_\alpha \Omega$. Αν $\eta \in \bigwedge^k V^*$ τότε ορίζουμε $\star\eta = \imath^\eta \Omega^\sharp$.

Σημείωση 1.23: Ας είναι V διανυσματικός χώρος με $n = \dim V < +\infty$. Ας είναι και $\alpha \in \bigwedge^k V$ και $\eta = \star\alpha$. Για κάθε $\beta \in \bigwedge^{n-k} V$

$$\begin{aligned} \beta \wedge (\star \star \alpha) &= (\star\alpha \cdot \beta)\Omega^\sharp = \Omega \cdot (\alpha \wedge \beta)\, \Omega^\sharp \\ &= (-1)^{k(n-k)} \Omega \cdot (\beta \wedge \alpha)\, \Omega^\sharp = (-1)^{k(n-k)} \beta \wedge \alpha \wedge \imath^\Omega\, \Omega^\sharp \\ &= (-1)^{k(n-k)} \beta \wedge \alpha \end{aligned}$$

Από το λήμμα 1.17, $\star \star \alpha = (-1)^{k(n-k)} \alpha$

Όταν ο V είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο G, τότε υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός $\flat \colon V \longmapsto V^*$ (ο αντίστροφος αυτού συμβολίζεται με $\sharp \colon V^* \longmapsto V$) που ταυτίζει τον V και τον V^*. Ο $\flat$ ορίζει επίσης έναν ισομορφισμό μεταξύ $\bigwedge V$ και $\bigwedge V^*$ ώστε για κάθε $u_1, u_2, ..., u_k \in V$ να έχουμε

$$(u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_k)^\flat = u_1^\flat \wedge u_2^\flat \wedge ..., u_k^\flat$$

και για κάθε $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k \in V^*$

$$\left(\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge ... \wedge \theta_k\right)^\sharp = \theta_1^\sharp \wedge \theta_2^\sharp \wedge ..., \theta_k^\sharp$$

Επομένως το εσωτερικό γινόμενο στον $\bigwedge V$ ορίζεται για δύο $\alpha = u_1 \wedge ... \wedge u_k, \beta = v_1 \wedge ... \wedge v_k \in \bigwedge^k V$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha^\flat \cdot \beta = \det\left(u_i^\flat \cdot v_j\right)_{i,j=1}^k = \det\left(\left\langle u_i, v_j \right\rangle\right)_{i,j=1}^k$$

Η ύπαρξη εσωτερικού γινομένου συνεπάγεται μήκη και γωνίες μεταξύ διανυσμάτων. Επομένως ένα εσωτερικό γινόμενο, μαζί με την επιλογή προσανατολισμού ορίζει μονοσήμαντα ένα στοιχείο όγκου.

Πρόταση 1.24: *Ας είναι V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης $n = \dim V$ με εσωτερικό γινόμενο G. Ας είναι $\beta : f_1, f_2, ..., f_n \in V$ μια διατεταγμένη ορθοκανονική βάση του V. Τότε υπάρχει μοναδική μορφή όγκου $\Omega \in \bigwedge^n V^*$ τέτοια ώστε $\Omega \cdot f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n = 1$. Μάλιστα αν $\alpha : x_1, x_2, ..., x_n \in V$ είναι βάση του V και $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, ..., \mathrm{d}x_n \in V^*$ είναι η δυική αυτής, τότε*

$$\Omega = \sqrt{|\det G|}\ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n$$

όπου G ο πίνακας του εσωτερικού γινομένου ως προς τη βάση αυτή.

Απόδειξη: Θα υπάρχει ακριβως μία γραμμική απεικόνιση $A \colon V \longmapsto V$ ώστε $Af_i = x_i$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n$. Ας είναι G_α, G_β οι πίνακες του εσωτερικού γινομένου ως προς τις βάσεις α, β αντίστοιχα και A_β ο πίνακας της A ως προς τη βάση β. Τότε

$$G_\alpha = \left(e_j^\top G_\alpha e_i\right)_{i,j} = \left(\left\langle e_i, e_j \right\rangle\right)_{i,j} = \left(\left\langle A \cdot f_i, A \cdot f_j \right\rangle\right)_{i,j} = \left(f_j^\top A_\beta^\top G_\beta A_\beta f_i\right)_{i,j} = A_\beta^\top G_\beta A_\beta$$

Ακόμα

$$\begin{aligned} 1 &= \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n \cdot x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n \\ &= \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n \cdot Af_1 \wedge Af_2 \wedge ... \wedge Af_n \\ &= \det A\ \ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n \cdot f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n \end{aligned}$$

επομένως η ζητούμενη μορφή ειναι η $\Omega = \det A\ \ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n$. Ακόμα $G_\beta = \mathrm{I}_n$ και άρα $G_\alpha = A^\top A$, από όπου $\det G_\beta = \det A^\top \det A = (\det A)^2$ και έχουμε το αποδεικτέο. //

Σημείωση 1.25: Με τα σύμβολα της προηγούμενης πρότασης, $\Omega^\sharp = f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n = (\Omega)^\sharp$. Αυτό δικαιολογεί και τη χρήση του συμβόλου $\Omega^\sharp$. Επίσης παρατηρήστε ότι, για οποιαδήποτε βάση β και $n-$άδα διανυσμάτων $x_1, x_2, ..., x_n \in V$, και γραμμικό μετασχηματισμό A ώστε $Af_i = x_i$ (όχι κατ' ανάγκη αντιστρέψιμο),

$$\begin{aligned} \|x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n\| &= \sqrt{\langle x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n, x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n \rangle} \\ &= \sqrt{\left|\det\left(\left\langle x_i, x_j \right\rangle\right)_{ij}\right|} = |\det A|\ \sqrt{\left|\det G_\beta\right|} \end{aligned}$$

2 Διαφορική Γεωμετρία

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε συνοπτικά μερικά βασικά στοιχεία από τη διαφορική γεωμετρία που είναι απαραίτητα για την παρουσίαση των εννοιών της υδροδυναμικής.

1. Διαφορικές πολλαπλότητες, μορφισμοί

Ορισμός 2.1: Έστω X σύνολο και p κάποιος μή αρνητικός ακέραιος ή ∞.

Αν $U \subseteq X$, V είναι χώρος Banach και $\phi\colon U \longmapsto V$, το ζεύγος (U, ϕ) ονομάζεται ***χάρτης*** (chart) αν η ϕ είναι απεικόνιση 1-1 και το $\phi(U)$ είναι ανοικτό στον V. Αν το U είναι γνήσιο υποσύνολο του X, ο χάρτης ονομάζεται τοπικός, ενώ αν $U = X$ τότε ο χάρτης ονομάζεται ολικός. Η αντίστροφη απεικόνιση ϕ^{-1} ονομάζεται ***συντεταγμενική περιοχή*** (coordinate chart).

Δύο χάρτες (U_i, ϕ_i) με $\phi_i\colon U_i \longmapsto V_i$ V_i χώροι Banach, $i = 1, 2$ ονομάζονται C^p–συμβιβαστοί μεταξύ τους αν α) $\phi_1(U_1 \cap U_2)$, $\phi_2(U_1 \cap U_2)$ είναι ανοικτά στους V_1 και V_2 αντίστοιχα και β) εφόσον $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, η απεικόνιση $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ είναι C^p–αμφιδιαφόριση.

Μία οικογένεια χαρτών $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ ονομάζεται C^p – άτλαντας (atlas) αν

AT1 η οικογένεια συνόλων $(U_i)_{i \in I}$ αποτελεί κάλυψη του X

AT2 Ανά δύο οι χάρτες του $\mathcal{A}$ ειναι C^p–συμβιβιστοί

Το ζεύγος $(X, \mathcal{A})$ ονομάζεται ***διαφορική πολλαπλότητα*** (manifold).

Σημείωση 2.2: Το σύνολο X δεν έχει a priori κάποια τοπολογία, ωστόσο θα θέλαμε οι ϕ_i να είναι και τοπολογικοί ισομορφισμοί. Μπορεί να δειχθεί ότι ο X δέχεται ακριβώς μια τοπολογία τ_A με αυτή την ιδιότητα. Τα ανοικτά αυτής της τοπολογίας θα είναι εκείνα τα $G \subseteq X$ με την ιδιότητα για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ το σύνολο $\phi(U \cap A)$ να είναι ανοικτό. Η τοπολογία αυτή ειναι T_1 και τοπικά κατά τόξα συνεκτική. Χωρίς περαιτέρω προϋποθέσεις δε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η τοπολογία που ορίσαμε είναι και Hausdorff.

Εφεξής οποτεδήποτε αναφερόμαστε σε τοπολογικές ιδιότητες της πολλαπλότητας X θα θεωρούμε αυτήν την τοπολογία. Αν το σύνολο X έχει εκ των προτέρων τοπολογία τότε θα πρέπει να αναζητηθεί *συμβατότητα* μεταξύ αυτής και της τοπολογικής δομής που εισάγει ο άτλαντας.

Σημείωση 2.3: Αν σε έναν άτλαντα προσθέσουμε χάρτες διαφορικά συμβιβαστούς, θα οδηγηθούμε σε έναν μεγαλύτερο άτλαντα για την πολλαπλότητα. Μπορούμε να θεωρήσουμε $\mathcal{A}'$ το σύνολο των χαρτών που είναι διαφορικά συμβιβαστοί με τους χάρτες του $\mathcal{A}$. Η νέα οικογένεια χαρτών που θα προκύψει θα είναι ο μοναδικός μεγαλύτερος δυνατός άτλαντας για την πολλαπλότητα του οποίου οι χάρτες είναι διαφορικά συμβιβαστοί με τον αρχικό άτλαντα. Μπορεί επίσης να επαληθευθεί ότι τα πεδία ορισμών των χαρτών του $\mathcal{A}'$ αποτελούν βάση για την τοπολογία τ_A και ότι οι τοπολογίες τ_A και $\tau_{A'}$ ταυτίζονται.

Σημείωση 2.4: Οι χώροι Banach V_i στον ορισμό του άτλαντα δεν υποτίθενται να ταυτίζονται, όμως όλοι μεταξύ τους είναι ισομορφικοί σε κάθε συνεκτική συνιστώσα τη πολλαπλότητας X και αυτό επιτυγχάνεται μέσω του ισομορφισμού $\mathsf{D}\,\phi_j \circ \phi_i^{-1}$.

Πράγματι, υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο X είναι συνεκτικός, στον άτλαντα $\mathcal{A}$ εισάγουμε τη σχέση ισοδυναμίας $(U_1, \phi_1) \sim (U_2, \phi_2) \in \mathcal{A}$ ανν οι χώροι Banach V_1, V_2 είναι ισομορφικοί. Στη συνέχεια διαμερίζουμε τον άτλαντα $\mathcal{A}$ με τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ και για κάθε κλάση ισοδυναμίας $[(U, \phi)]$ ορίζουμε

$$G_U = \bigcup_{(U_1,\phi_1)\in[(U,\phi)]} U_1$$

Δείχνουμε ότι δύο $G_U, G_{U'}$ είτε είναι ξένα είτε ταυτίζονται. Αν $y \in G_U \cap G_{U'}$ τότε μπορούμε να βρούμε δύο διαφορετικούς χάρτες πάνω από το y, ας πούμε πχ $(U_1, \phi_1) \in [(U, \phi)]$ και $(U_2, \phi_2) \in [(U', \phi')]$. Τότε όμως $\mathsf{D}(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})(\phi_1(y))$ είναι ισομορφισμός χώρων Banach* και άρα οι κλάσεις ισοδυναμίας ταυτίζονται. Άρα $G_U = G_{U'}$. Τώρα έκαστο G_U είναι ανοικτό, και όλα μαζί αποτελούν μία διαμέριση του X. Χρησιμοποιούμε τη συνεκτικότητα του X για να πάρουμε ότι μόνο ένα G_U είναι μη κενό, και άρα υπάρχει ακριβώς ένα G_U που ταυτίζεται με το X και άρα ακριβώς μία κλάση ισοδυναμίας.

Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για τον δεδομένο άτλαντα υπάρχει ακριβώς ένας χώρος Banach V –μοναδικός ως προς ισομορφισμό, και να ταυτίσουμε όλους τους V_i με τον V. Ο χώρος E ονομάζεται μοντέλο (model) για την πολλαπλότητα X.

Ορισμός 2.5: Ας είναι X, Y δύο C^p–πολλαπλότητες, $p \geq 1$ και $f\colon X \longmapsto Y$ απεικόνιση. Η f ονομάζεται C^p–διαφορίσιμη (differentiable) ή ***μορφισμός*** στο $x \in X$ αν υπάρχουν χάρτες (U, ϕ), (U_1, ψ) πάνω από το x και το $f(x)$ αντίστοιχα ώστε $f(U) \subseteq U_1$ και η απεικόνιση

* υποθέτουμε ότι η πολλαπλότητα είναι τουλάχιστον C^1. Στην περίπτωση πεπερασμένης διάστασης αρκεί η συνέχεια των χαρτών: οι χώροι πεπερασμένης διάστασης είναι ισομορφικοί αν υπάρχει τοπολογικός ομοιομορφισμός μεταξύ δύο ανοικτών στους χώρους αυτούς.

$f_{\psi,\phi} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ είναι C^p στο σημείο $\phi(x)$. Η απεικόνιση $f_{\psi,\phi}$ ονομάζεται τοπική παράσταση της f για τους αντίστοιχους χάρτες.

Αν η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε $x \in X$, τότε η f ονομάζεται μορφισμός (morphism). Αν η f είναι μορφισμός, 1-1 και επί, και η αντίστροφή της f^{-1} είναι μορφισμός επίσης, τότε η f ονομάζεται ***ισομορφισμός*** (isomorphism).

Σημείωση 2.6: Φυσικά, αν για κάποιους χάρτες (U, ϕ), (U_1, ψ) η τοπική παράσταση $f_{\psi,\phi}$ είναι διαφορίσιμη, τότε το ίδιο συμβαίνει και για οποιουσδήποτε άλλους χάρτες (U', ϕ') (U_1', ψ') με $f(U') \subseteq U_1'$, τότε κοντά στο x,

$$\begin{aligned} f_{\psi',\phi'} &= \psi' \circ f \circ {\phi'}^{-1} \\ &= \psi' \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ {\phi'}^{-1} \\ &= (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ f_{\psi,\phi} \circ \left(\phi \circ {\phi'}^{-1}\right) \end{aligned}$$

δηλαδή η νέα τοπική παράσταση ειναι επίσης C^p ως σύνθεση C^p απεικονίσεων.

Σημείωση 2.7: Αν οι πολλαπλότητες X, Y είναι εφοδιασμένες με τη φυσική τοπολογία που επάγει η διαφορική δομή των ατλάντων, τότε κάθε C^p–μορφισμός, είναι και συνεχής απεικόνιση.

Σημείωση 2.8: Σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων, είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

Ορισμός 2.9: Έστω X μία πολλαπλότητα με μοντέλο τον χώρο Banach E και $Y \subseteq X$ υποσύνολο. Το Y θα ονομάζεται ***υποπολλαπλότητα*** (submanifold) του X αν σε κάθε $y \in Y \subseteq X$, υπάρχει ένας χάρτης (U, ϕ) του y, και ένας υπόχωρος E_y^U του E με τοπολογικό συμπλήρωμα ώστε

$$\phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap \left(E_y^U + \phi(y)\right)$$

Παρατηρήστε ότι από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτουν οι εξής παρατηρήσεις:

Σημείωση 2.10: Αν ο άτλαντας της X θεωρηθεί μεγιστικός –μια υπόθεση που πάντα θα υιοθετούμε, τότε μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\phi(y) = 0$

Σημείωση 2.11: Το σύνολο Y γίνεται το ίδιο πολλαπλότητα αν περιορίσουμε όλους τους χάρτες του X στο Y, όπου αυτό είναι εφικτό. Στον τυχόντα χάρτη (U, ϕ) της X με $y \in U \cap Y$, ορίζουμε $\phi_Y = \phi\big|_{U\cap Y} - \phi(y)$ που είναι 1-1 και επί από το $U \cap Y$ στο $(\phi(U) - \phi(y)) \cap E_y^U$ (μάλιστα με $\phi_Y(y) = 0$).

Αν $y \in Y$ και (V, ψ), (U, ϕ) είναι δυο χάρτες στο y, τότε η σύνθεση

$$E_y^U \xrightarrow{\mathrm{Id}+\phi(y)} E_y^U + \phi(y) \xrightarrow{\phi^{-1}} Y \xrightarrow{\psi} E_y^V + \psi(y) \xrightarrow{\mathrm{pr}\circ(\mathrm{Id}-\psi(y))} E_y^V$$

είναι διαφορίσιμη, το ίδιο και η αντίστροφή της.

Μάλιστα η διαφορική δομή που εισάγει ο ανωτέρω άτλαντας στην υποπολλαπλότητα, ορίζει μια τοπολογία στην Y, που είναι ακριβώς η σχετική τοπολογία στον X.

Σημείωση 2.12: Μπορούμε να ταυτίσουμε σε κάθε συνεκτική συνιστώσα της Y όλους τους υπόχωρους E_y^U, με έναν κοινό υπόχωρο E_Y. Κάτι τέτοιο ειναι εφικτό μέσω των ισομορφισμών $\mathsf{D}\left(\psi_Y \circ \phi_Y^{-1}\right)(\phi(y))$ για κάθε δύο χάρτες και κάθε σημείο της Y. Εφεξής θα κάνουμε σιωπηλά αυτή την ταύτιση.

Σημείωση 2.13: Η Y είναι *τοπικά κλειστή* στον X, γιατί αν (U, ϕ) είναι ένας χάρτης που τέμνει την Y τότε

$$\phi\left(\overline{U \cap Y}^U\right) = \overline{\phi(U) \cap \left(E_y^U + \phi(y)\right)}^{\phi(U)} =$$
$$\phi(U) \cap \overline{\left(E_y^U + \phi(y)\right)} = \phi(U) \cap \left(E_y^U + \phi(y)\right) = \phi(U \cap Y)$$

και επομένως $U \cap \overline{Y} = \overline{U \cap Y}^U = U \cap Y$.

Ως τοπικά κλειστή, η Y είναι η τομή ενός ανοικτού και ενός κλειστού υποσυνόλου της X.

Σημείωση 2.14: Αν δοθεί οποιαδήποτε πολλαπλότητα Z και μορφισμός $f\colon Z \longmapsto X$ με $f(Z) \subseteq Y$, τότε μπορούμε να ορίσουμε την $f_Y\colon Z \longmapsto Y$. Η f ειναι διαφορίσιμη αν και μόνο αν η f_Y ειναι.

2. Νηματικές δέσμες

Ορισμός 2.15: Υποθέτουμε ότι E και X είναι δύο C^p–πολλαπλότητες (p είναι μη αρνητικός ακέραιος ή ∞) και $\pi\colon E \longmapsto X$ είναι ένας C^p μορφισμός. Η τριάδα (E, π, X) ονομάζεται ***νηματική δέσμη*** (vector bundle) αν

VB1 Για κάθε $x \in X$ το σύνολο $E_x = \pi^{-1}(\{x\})$ είναι χώρος Banach

VB2 υπάρχει μία οικογένεια C^p–ισομορφισμών

$$\tau_i\colon \pi^{-1}(U_i) \longmapsto U_i \times F_i \quad , \quad i \in I$$

ώστε η $(U_i)_{i \in I}$ να αποτελεί ανοικτή κάλυψη του X, κάθε F_i είναι χώρος Banach, $\pi = \mathrm{pr}_1 \circ \tau_i$ και η μερική απεικόνιση $\tau_{ix} = \tau_i\big|_{E_x}$ είναι ισομορφισμός μεταξύ του E_x και F_i, $x \in U_i$.

VB3 Για κάθε $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ η απεικόνιση

$$\tau_{ji}\colon U_i \cap U_j \longmapsto \mathsf{L}(F_i, F_j) : x \longmapsto$$
$$\tau_{ji}(x) : F_i \longmapsto F_j : h \longmapsto \left(\tau_{ji} x\right) h = \mathrm{pr}_2 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, h)$$

είναι ένας C^p–μορφισμός

Κάθε ζεύγος (U_i, τ_i) ονομάζεται ***απλοποιούν ζεύγος*** (trivializing map) ενώ όλη η οικογένεια των απλοποιούντων ζευγών ονομάζεται απλοποιούσα κάλυψη (trivializing cover) της δέσμης E. Η πολλαπλότητα E ονομάζεται ολικός χώρος (total space), και η X ονομάζεται χώρος βάσης (base space).

Σημείωση 2.16: Πάλι, οι χώροι Banach F_i είναι όλοι ισομορφοι μεταξύ τους, και μπορούν να ταυτιστούν με έναν ακριβώς χώρο Banach F (που ειναι μοναδικός ως προς ισομορφισμό). Ο χώρος F ονομάζεται τύπος των νημάτων (fiber type) της X.

Σημείωση 2.17: Οι απεικονίσεις τ_{ij} ονομάζονται απεικονίσεις μεταφοράς (transport mappings) και το σύνολο τιμών τους παίζει θεμελιώδη ρόλο στη νηματική δέσμη. Χωρίς περαιτέρω προϋποθέσεις το σύνολο αυτό είναι το $\mathsf{GL}(F)$

Ορισμός 2.18: Ας είναι $\pi_i\colon E_i \longmapsto X_i$, $i = 1,2$ δύο C^p νηματικές δέσμες με νήματα τύπου $\mathbf{F}_i$, $i = 1,2$ αντίστοιχα. Ένα ζεύγος C^p–μορφισμών ($F\colon E_1 \longmapsto E_2, f\colon X_1 \longmapsto X_2$), ονομάζεται ***μορφισμός νηματικών δεσμών*** αν

VBM1 Η F διατηρεί τα νήματα, δηλαδή $\pi_2 \circ F = f \circ \pi_1$ και η $F_x \stackrel{\text{def}}{=} F\Big|_{E_{1,x}}\colon E_{1,x} \longmapsto E_{2,f(x)}$ είναι γραμμική συνεχής στα νήματα, $x \in X_1$

VBM2 Για κάθε $x \in X_1$ και $y = f(x) \in X_2$ υπάρχουν απλοποιούντα ζεύγη (U, τ) και (V, σ) πάνω από το x και y αντίστοιχα ώστε $f(U) \subseteq V$ και η τοπική παράσταση

$$U \ni z \longmapsto \sigma \circ F_z \circ \tau^{-1} \in \mathsf{L}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$$

να είναι C^p–μορφισμός

Είναι εφικτό να κατσκευάσουμε μία νηματική δέσμη αν γνωρίζουμε τις απεικονίσεις μεταφοράς της:

Πρόταση 2.19: *Ας είναι X μία C^p–πολλαπλότητα, $\mathbf{F}$ ένας χώρος Banach, $(U_i)_{i\in I}$ μια ανοιχτή κάλυψη της X και $\left(\tau_{ij}\colon U_i \cap U_j \longmapsto \mathsf{GL}(\mathbf{F})\right)_{i,j\in I, U_i\cap U_j\neq\emptyset}$ μία οικογένεια C^p–μορφισμών ώστε για κάθε $i,j,k \in I$ να έχουμε $\tau_{ki} = \tau_{kj} \circ \tau_{ji}$ οπουδήποτε η σύνθεση έχει νόημα. Τότε υπάρχει μοναδική ως προς ισομορφισμό C^p–νηματική δέσμη $\pi\colon E \longmapsto X$ με τύπο νημάτων $\mathbf{F}$ και απεικονίσεις μεταφοράς τις τ_{ij}, $i,j \in I$, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.*

Απόδειξη: Η ιδέα της απόδειξης είναι οτι ο ολικός χώρος θα ειναι ο $E = I \times X \times \mathbf{F}\Big/\sim$ όπου $(i,x,h) \sim (j,y,k) \in I \times X \times \mathbf{F}$ ανν $x = y \in U_i \cap U_j$ και $\tau_{ji}(x) \cdot h = k$. Τότε οι απεικονίσεις $\pi\colon \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{X} : [(i,x,h)] \longmapsto \pi\left([(i,x,h)]\right) = x$ και για κάθε $i \in I$

$$\tau_i\colon \pi^{-1}(U_i) \longmapsto U_i \times \mathbf{F} : [(i,x,h)] \longmapsto \tau_i\left([(i,x,h)]\right) = (x,h)$$

ορίζουν μία απλοποιούσα κάλυψη για την E. //

Σημείωση 2.20: Η οικογένεια $\left(\tau_{ij}\right)_{ij}$ της πρότασης 2.19 με την ιδιότητα $\tau_{ki} = \tau_{kj} \circ \tau_{ji}$ οποτεδήποτε η σύνθεση έχει νόημα, ονομάζεται σύγκυκλος.

Ορισμός 2.21: Ας είναι $p \geq 2$ και X μία C^p–πολλαπλότητα με μοντέλο τον $\mathbf{F}$ και $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ ένας άτλαντας. Αν $i,j \in I$ ώστε $U_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} U_i \cap U_j \neq \emptyset$, γράφουμε $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. Η C^{p-1}–νηματική δέσμη με τύπο νημάτων $\mathbf{F}$ και απεικονίσεις μεταφοράς $\left(\mathsf{D}\,\varphi_{ji}\right)_{i,j\in I: U_{ij}\neq\emptyset}$ ονομάζεται ***εφαπτόμενη δέσμη*** (tangent bundle) της X και συμβολίζεται T^*X

Ορισμός 2.22: Ας είναι $p \geq 2$ και X μία C^p–πολλαπλότητα με μοντέλο τον $\mathbf{F}$ και $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ ένας άτλαντας. Αν $i, j \in I$ ώστε $U_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} U_i \cap U_j \neq \emptyset$, γράφουμε $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. Η C^{p-1}–νηματική δέσμη με τύπο νημάτων $\mathbf{F}^*$ και απεικονίσεις μεταφοράς $\left(\mathsf{D}\,\varphi_{ij}\right)_{i,j \in I : U_{ij} \neq \emptyset}$ ονομάζεται ***συνεφαπτόμενη δέσμη*** (tangent bundle) της X και συμβολίζεται $\mathsf{T}X$

Κάθε μορφισμός από μια πολλαπλότητα σε μια άλλη επάγει, έναν μορφισμό στους εφαπτόμενους χώρους.

Ορισμός 2.23: Αν $f \colon X \longmapsto Y$ είναι C^p–μορφισμός, $p \geq 2$ και $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$, $\left(V_j, \psi_j\right)_{j \in J}$ είναι δυο άτλαντες για τις X και Y αντίστοιχα, τότε η απεικόνιση,

$$\mathsf{T}X \ni u = [(i, x, h)] \longmapsto \mathsf{T}f(u) = \left[(j, f(x), \mathsf{D}(\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}))\right] \in \mathsf{T}Y, \quad x \in U_i, f(x) \in V_j$$

είναι μορφισμός από την δέσμη $\mathsf{T}X$ στην $\mathsf{T}Y$ και ονομάζεται ***εφαπτόμενη απεικόνιση***

3. Διανυσματικά πεδία

Εδώ οι πολλαπλόητητες θα είναι C^p–διαφορίσιμες με $p \geq 2$ συνεκτικές και Hausdorff, εκτός αν υποτεθεί διαφορετικά.

Ορισμός 2.24: Ας είναι X μία C^p–διαφορίσιμη πολλαπλότητα και $\pi \colon E \longmapsto X$ μία νηματική δέσμη. Ένας C^{p-1}–μορφισμός $\xi \colon \mathrm{X} \longmapsto E$ ώστε $\pi \circ \xi = \mathrm{Id}_X$ ονομάζεται ***τομή*** (section) της E. Όταν $E = \mathsf{T}X$ το ξ ονομάζεται ***διανυσματικό πεδίο***. Όταν $p = \infty$ το σύνολο των διανυσματικών πεδίων στη X θα γράφεται $\mathfrak{X}(X)$. Όταν $E = \mathsf{T}^*X$ τότε το ξ ονομάζεται ***συνεφαπτόμενο πεδίο***

Ορισμός 2.25: Ας είναι X μια C^p–πολλαπλότητα και $\xi \colon \mathrm{X} \longmapsto \mathsf{T}X$ ένα διανυσματικό πεδίο. Μία καμπύλη $a \colon J \subseteq \mathbb{R} \longmapsto X$ ορισμένη σε ανοικτό διάστημα ονομάζεται ολοκληρωτική καμπύλη του X αν $\alpha' = \xi \circ a$ στο J.

Αν $U \subseteq X$ είναι ανοικτό, ένας μορφισμός $a \colon (-\delta, \delta) \times U \longmapsto M$ ονομάζεται τοπική ροή του ξ αν για κάθε $x \in U$, η καμπύλη $(-\delta, \delta) \ni t \longmapsto a(t, x) \in M$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ.

Σημείωση 2.26: Αν η καμπύλη a του ορισμού 2.25 είναι μονο παραγωγίσιμη τότε επαγωγικά αποδεικνύεται ότι ειναι και C^p. Η ύπαρξη ολοκληρωτικών καμπυλών και ροών σχετίζεται με λύση διαφορικών εξισώσεων στην πολλαπλόητητα X. Μάλιστα η εξίσωση $a' = \xi \circ a$ είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης που εξαρτάται (με διαφορίσιμο τρόπο) από την παράμετρο $x \in U$.

Ορισμός 2.27: Ας είναι X, Y δύο C^p πολλαπλότητες και η, ξ δύο διανυσματικά πεδία στην X και την Y αντίστοιχα. Υποθέτουμε επίσης ότι $f \colon X \longmapsto Y$ είναι C^p μορφισμός. Τα διανυσματικά πεδία η, ξ ονομάζονται f–***συσχετισμένα*** αν

$$\mathsf{T}f \circ \eta = \xi \circ f$$

Όταν τόσο η f όσο και η f^{-1} είναι μορφισμοί, τότε έχει νόημα να ορίσουμε την ξ μέσω της η: $\xi = \mathsf{T}f \circ \eta \circ f^{-1}$ σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $\xi = f_*\eta$. Αντιστοίχως γράφουμε $f^*\eta = \xi$ όταν $\mathsf{T}(f^{-1}) \circ \eta \circ f = \xi$.

Σημείωση 2.28: Αν τα πεδία η, ξ είναι f–συσχετισμένα, τότε είναι φανερό ότι μια ολοκληρωτική καμπύλη $a\colon (-\delta, \delta) \longmapsto X$ του ξ ορίζει μια $\beta = f \circ \alpha$ ολοκληρωτική καμπύλη του η. **Πράγματι**, υποθέτουμε ότι σε κάθε $x \in M$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(a(t,x)) = \beta(t, f(x))$ για κάθε $|t| < \delta$. Παραγωγίζοντας την σχέση αυτή στο 0, παίρνουμε ότι $\mathsf{T}f \circ \xi = \eta \circ f$. Αντίστροφα, και εφόσον έχουμε δείξει ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι μοναδικές, παρατηρούμε ότι η καμπύλη $t \longmapsto \gamma(t) = f(a(t, f^{-1}(x)))$ ικανοποιεί $\gamma'(t) = \big(f(a(t, f^{-1}(x)))\big)' = \mathsf{T}f \circ \xi \circ a(t, f^{-1}(x)) = \eta \circ f \circ a(t, f^{-1}(x)) = \eta \circ \gamma(t)$ και άρα ειναι ολοκληρωτική καμπύλη της η, και πρέπει να ταυτίζεται με την $\beta(t,x)$.

Συνεπώς η ύπαρξη τοπικής ροής ενός διανυσματικού πεδίου ανάγεται –σε τοπικό επίπεδο– στην ύπαρξη ροής της τοπικής του παράστασης σε έναν χάρτη.

Παραθέτουμε το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της τοπικής ροής σε χώρους Banach:

Θεώρημα 2.29 (ύπαρξης ροής σε χώρους Banach): *Υποθέτουμε ότι* $\mathbf{F}$ *είναι ένας χώρος Banach,* $U \subseteq \mathbf{F}$ *ανοικτό,* $\xi\colon U \longmapsto \mathbf{F}$ *ένα διανυσματικό πεδίο* C^p*. Ας είναι ακόμα* $x_0 \in U$*.*

Τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή $U_0 \subseteq U$ *του* x_0*, ανοικτό διάστημα* $J_0 \subseteq \mathbb{R}$ *που περιέχει το 0 που περιέχει το 0 και μοναδική ροή*

$$a\colon J_0 \times U_0 \longmapsto U$$

που είναι επίσης C^p *και επιπλέον ικανοποιεί*

$$\begin{cases} \mathsf{D}_t\, \mathsf{D}_x\, a(t,x) = \mathsf{D}_x\, \xi(a(t,x))\, \mathsf{D}_x\, a(t,x) & t \in J_0, x \in U_0 \\ \mathsf{D}_x\, a(0,x) = \mathrm{Id}_V & x \in U_0 \end{cases}$$

Πρόταση 2.30: *Ας είναι* $\xi\colon M \longmapsto \mathsf{T}M$ *ένα* C^{p-1} *διανυσματικό πεδίο.*

1. *Αν* $p \in M$*, υπάρχει* (U, ϕ) *χάρτης πάνω από το* p *και μία ροή*

   $$\alpha\colon (-\delta, \delta) \times U \longmapsto M$$

   που είναι C^{k-1} *στο* U*. Η ροή* α *είναι μοναδική πάνω από το* p*, με την έννοια οτι οποιαδήποτε άλλη ροή* α_1 *ορισμένη στο* p *ταυτίζεται με την* α *σε κάποια ανοιχτή περιοχή του* p*.*

2. *Υποθέτουμε επιπλέον ότι η πολλαπλότητα* M *είναι Hausdorff. Αν* $\alpha_i\colon J_i \longmapsto M$*,* $i = 1, 2$ *είναι δύο ολοκληρωτικές καμπύλες που τέμνονται σε κάποιο κοινό σημείο* $t_0 \in J_1 \cap J_2$*. Τότε ταυτίζονται στην τομή* $J_1 \cap J_2$*.*

Απόδειξη: Για το 1. παίρνουμε την τοπική παράσταση $\xi_\varphi = \mathsf{T}\varphi \circ \xi \circ \varphi^{-1}$ πάνω από το U. Η ξ_φ είναι επίσης C^{p-1} και ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας ώστε να πάρουμε μία μοναδική τοπική ροή $a_\varphi\colon J_0 \times \varphi(U_0) \longmapsto \varphi(U)$ που είναι

C^{p-1} επίσης. Η $a(t,x) = \varphi^{-1} \circ a_{\varphi}(t, \varphi(x))$ είναι η ζητούμενη ροή τοπικά. Αν υπήρχε και άλλη ροή a_1 ορισμένη σε περιοχή του $(0,p)$, τότε αναγκαστικά η τοπική της παράσταση μέσω του χάρτη (U, φ) θα συνέπιπτε σε περιοχή του $(0, \varphi(p))$ με την a_{φ}, και επομένως $a = a_1$ τοπικά.

Για το 2. ας είναι $I = \{s \in J_1 \cap J_2 : a_1(s) = a_2(s)\}$. Το I είναι κλειστό, αφού $I = (a_1, a_2)^{-1}(\Delta)$, όπου $\Delta = \{(x,x) | x \in M\}$ η οποία είναι κλειστή εφόσον η M είναι Hausdorff. Το I είναι επίσης ανοιχτό, αφού αν $s \in I$ τότε εφαρμόζουμε το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας περί το $p = a_1(s) = a_2(s)$ (όπως στο ερώτημα 1) ώστε να πάρουμε μοναδική ροή περί το p και κατά μείζονα λόγο μοναδικές ολοκληρωτικές καμπύλες) για να συμπεράνουμε ότι οι a_1, a_2 ταυτίζονται σε περιοχή του s. Ακόμα το I είναι μη κενό αφού $t_0 \in I$ και είναι υποσύνολο της τομής $J_1 \cap J_2$ που είναι συνεκτικό (ως διάστημα). Επομένως $I = J_1 \cap J_2$.//

Πόρισμα 2.31: *Κάθε ολοκληρωτική καμπύλη a του διανυσματικού πεδίου ξ με αρχική συνθήκη $a(p)$ μπορεί να επεκταθεί σε ένα μέγιστο διάστημα μέσω του 2 της προηγούμενης πρότασης, το οποίο θα γράφουμε $J(p) = (t^-(p), t^+(p))$.*

Έτσι παίρνουμε ένα υποσύνολο της πολλαπλότητας $\mathbb{R} \times \mathrm{M}$

$$\mathcal{D}(\xi) = \bigcup_{p \in M} J(p) \times \{p\} = \{(t,p) \mid t^-(p) < t < t^+(p)\}$$

στο οποίο ορίζεται μοναδική ροή α. Η ροή αυτή είναι σίγουρα C^{k-1} στο εσωτερικό του $\mathcal{D}(\xi)$, που βέβαια περιέχει το $\{0\} \times M$, αλλά πρέπει να δειχθεί ότι το $\mathcal{D}(\xi)$ είναι ανοιχτό.

Πρόταση 2.32: *Αν $p \in M$, $(t,p) \in \mathcal{D}(\xi)$, τότε οι καμπύλες $a_1(s) = \alpha(s, a(t,p))$ και $a_2(s) = \alpha(s+t, p)$ είναι οι ίδιες ολοκληρωτικές καμπύλες για το διανυσματικό πεδίο ξ και επομένως $J(a(t,x)) = J(x) - t$.*

Απόδειξη: Οι συναρτήσεις a_1, a_2 έχουν νόημα, καθώς τόσο το $J(x)$ όσο και το $J(a(t,x))$ είναι ανοιχτά διαστήματα και άρα για $|s|$ επαρκώς μικρό, $t + s \in J(x)$ και $s \in J(a(t,x))$. Είναι λοιπόν $a_1(0) = a_2(0) = \alpha(t,x)$ και επομένως οι ολοκληρωτικές καμπύλες a_1, a_2 του ξ τέμνονται, και επομένως ταυτίζονται, άρα $J(a(t,x)) = J(x) - t$, αφού $s + t \in J(x)$ αν και μόνον αν $s \in J(a(t,x))$. //

Θεώρημα 2.33 (Καθολική ομαλότητα της ροής): *Έστω $\xi \colon M \longmapsto \mathsf{T}M$ ένα C^{p-1} διανυσματικό πεδίο και έστω $\alpha \colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M \longmapsto M$ η ροή αυτού. Τότε το $\mathcal{D}(\xi)$ είναι ανοικτό και η ροή είναι C^{p-1} παντού στο $\mathcal{D}(\xi)$.*

Απόδειξη: Ας είναι τυχόν αλλά σταθερό $p \in M$. Θεωρούμε τώρα το σύνολο

$$Q = \left\{ \tau \in J(p) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα } J_\tau \text{ που περιέχει το } \tau\text{, και μία ανοι-} \\ \text{κτή περιοχή } U_\tau \text{ του } p\text{, ώστε } J_\tau \times U_\tau \subseteq \mathcal{D}(\xi) \text{ και η ροή να είναι} \\ C^{k-1} \text{ στο } J_\tau \times U_\tau. \end{array} \right\}$$

Το τοπικό θεώρημα επιβεβαιώνει ότι σε περιοχή του $(0,p)$ η ροή υπάρχει και είναι C^{k-1}, και άρα το Q είναι μη κενό. Το Q από τον ορισμό του είναι ανοικτό υποσύνολο του $J(p)$. Έστω τώρα $b \in \overline{Q}^{J(p)}$ (το b είναι πάντα εσωτερικό σημείο του $J(p)$). Τότε το $p_b = \alpha(b,p)$ είναι ορισμένο και μπορούμε να εφαρμόσουμε το τοπικό θεώρημα ύπαρξης για να πάρουμε μία τοπική ροή

$$\alpha_b \colon (-\delta, \delta) \times B_\delta(p_b) \longmapsto U$$

για κάποιο $\delta > 0$, και η α_b να είναι C^{k-1}.

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει ένα διάστημα J_1 και μια ανοικτή περιοχή U_1 του p ώστε $J_1 \times U_1 \subseteq \mathcal{D}(\xi)$ και η ροή α να απεικονίζει το $J_1 \times U_1$ στο $B_\delta(p_b)$. Πράγματι: η τροχιά $J(p) \ni t \longmapsto \alpha(t,p)$ είναι C^{k-1}, κατά μείζονα λόγο συνεχής στο b και άρα υπάρχει ένα $\delta_1 > 0$ ώστε $\alpha((b-\delta_1, b+\delta_1) \times \{p\}) \subseteq B_{\delta/4}(p_b)$. Παίρνουμε $t_1 \in Q$ τουλάχιστον δ-κοντά στο b και παρατηρούμε ότι στο σημείο (t_1, p) η ροή α, είναι συνεχής και στις δύο της μεταβλητές, γιατί εξ' υποθέσεως υπάρχει διάστημα J_{t_1} που περιέχει το t_1 και U_{t_1} ανοικτή περιοχή του p ώστε η α να είναι C^{k-1} στο $J_{t_1} \times U_{t_1}$. Παίρνουμε διάστημα $J_1 \subseteq J_{t_1}$ που περιέχει το t_1 και $U_1 \subseteq U_{t_1}$ περιοχή του p ώστε $\alpha(J_1 \times U_1) \subseteq B_{\delta/2}(p_b)$. Η επιλογή του t_1 ήταν τέτοια ώστε $t_1 \in (b-\delta, b+\delta)$ και άρα μπορούμε να μικρύνουμε το διάστημα J_1 ώστε να περιέχεται στο $(b-\delta, b+\delta)$ και να παραμένει περιοχή του t_1.

Ορίζουμε τώρα την

$$\beta(t,q) = \alpha_b(t - t_1, \alpha(t_1, q)), \quad |t - t_1| < \delta, q \in U_1$$

Παρατηρούμε ότι εφόσον $J_1 - t_1 \subseteq (b - t_1 - \delta, b - t_1 + \delta) \subseteq (-\delta, \delta)$ (δηλαδή η β και η α έχουν τροχιές με κοινό πεδίο ορισμού το J_1) και $\beta(t_1, q) = \alpha(t_1, q)$ (δηλαδή οι τροχιές της β και της α τέμνονται στο t_1) θα πάρουμε ότι $\alpha = \beta$ στο $J_1 \times U_1$. Άρα η β επεκτείνει την α και σε περιοχή του (b,p), άρα $b \in Q$.

Παίρνουμε τελικά ότι $Q = J(x)$.

Το p ήταν τυχόν, άρα το $\mathcal{D}(\xi)$ είναι ανοικτό. //

Με το συμβολισμό της πρότασης 2.33, αν σταθεροποιήσουμε κάποιο $t \in \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε το σύνολο

$$\mathcal{D}_t(\xi) = \{p \in U : (t,p) \in \mathcal{D}(\xi)\}$$

και τη μερική απεικόνιση

$$\alpha_t \colon \mathcal{D}_t(\xi) \longmapsto U : p \longmapsto \alpha_t(p) = \alpha(t,p)$$

Πόρισμα 2.34: *Με το συμβολισμό της πρότασης 2.33, αν σταθεροποιήσουμε κάποιο $t \in \mathbb{R}$, τότε το σύνολο $\mathcal{D}_t(\xi)$ είναι ανοικτό, η απεικόνιση α_t είναι C^{k-1}–αμφιδιαφόριση μεταξύ του $\mathcal{D}_t(\xi)$ και του $\mathcal{D}_{-t}(\xi)$ και $\alpha_t^{-1} = \alpha_{-t}$*

Αν $0 \leq s \leq t$ τότε $\mathcal{D}_t(\xi) \subseteq \mathcal{D}_s(\xi)$. Ενώ $\alpha_{t-s} \circ \alpha_s = \alpha_t$.

Απόδειξη: Ότι το $\mathcal{D}_t(\xi)$ είναι ανοικτό (ενδεχομένως κενό), είναι τετριμμένο. Το ίδιο και το ότι η α_t είναι μορφισμός. Έστω τώρα $p \in \mathcal{D}_t(\xi)$, τότε το $\alpha(t,p)$ ορίζεται και ακόμα $J(\alpha(t,p)) = J(p) - t$, άρα $-t \in J(\alpha(t,p))$ και ισχύει $\alpha(-t, \alpha(t,p)) = \alpha(0,p) = p$. Το p όμως ήταν τυχόν, Δηλαδή $\alpha_{-t} \circ \alpha_t = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}_t(\xi)}$. Εναλλάσοντας τους ρόλους μεταξύ t και $-t$ έχουμε επίσης και ότι $\alpha_t \circ \alpha_{-t} = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}_{-t}(\xi)}$. Το ζητούμενο έπεται.

Για το δεύτερο σκέλος, ο εγκλεισμός είναι προφανής. Ας είναι $p \in \mathcal{D}_t(\xi)$. Τότε $p \in \mathcal{D}_s(\xi)$ και άρα $a(s,p)$ ορίζεται. Είναι δε $J(a(s,p)) = J(p) - s$. Όμως $t \in J(p)$ και $t - s \in J(a(s,p))$, επομένως ισχύει η ισότητα $\alpha(t-s, a(s,p)) = a(t,p)$, το ζητούμενο. //

Πόρισμα 2.35: *Με το συμβολισμό της πρότασης 2.33, οι συναρτήσεις $t^-(x)$ και $t^+(x)$ είναι αντίστοιχα άνω και κάτω ημισυνεχείς.*

Απόδειξη: Δείχνουμε ότι το $L_\lambda = [t^+ > \lambda]$ είναι ανοιχτό. Πράγματι, αν $p \in M$ με $\lambda < t^+(p)$, παίρνουμε $\max\{\lambda, t^-(p)\} < \eta < t^+(p)$ και έχουμε ότι το $(\eta, p) \in \mathcal{D}(\xi)$, συνεπώς υπάρχει U_p ανοιχτή περιοχή του p και $\epsilon > 0$ ώστε $(\eta-\epsilon, \eta+\epsilon) \times U_p \subseteq \mathcal{D}(\xi)$ που συνεπάγεται ότι για κάθε $q \in U_p$, $t^+(q) \geq \eta + \epsilon > \lambda$ το ζητούμενο.

Όμοια προκύπτει και η άνω ημισυνέχεια της t^-. //

Πρόταση 2.36: *Ας είναι M μία C^p–πολλαπλότητα (όχι κατ' ανάγκη Hausdorff), $p \in M$, (U, φ) ένας χάρτης πάνω από το p και $\xi\colon U \longmapsto \mathsf{T}M$ ένα διανυσματικό πεδίο ορισμένο στο U ώστε $\xi(p) \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει χάρτης πάνω από p ώστε η τοπική παράσταση του ξ να είναι σταθερή.*

Απόδειξη: Ας είναι $\mathbf{F}$ το μοντέλο της M. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\varphi(p) = 0$. Ας είναι $\xi_\varphi = \mathrm{pr}_2 \circ \overline{\varphi} \circ \xi \circ \varphi^{-1}$ η τοπική παράσταση του ξ στον χάρτη φ. Γράφουμε με α_φ την τοπική ροή του ξ_φ περί το 0 (περιορισμένη ίσως σε μια μικρότερη περιοχή του 0, $V \subseteq \varphi(U)$). Από την υπόθεση $h = \xi_\varphi \neq 0$. Θα υπάρχει ένα $\lambda \in \mathbf{F}^*$ ώστε $\lambda \cdot h = 1$ Ορίζουμε $\Lambda\colon \mathbf{F} \longmapsto \mathbb{R} \times \ker\lambda : f \longmapsto \Lambda f = (\lambda f, f - \lambda(f)\cdot h)$ και παρατηρούμε ότι η Λ είναι γραμμικός ισομορφισμός. Ορίζουμε επίσης

$$\psi\colon \Lambda^{-1}(V) \longmapsto \varphi(U) : f \longmapsto \psi(z) = \alpha_\varphi \circ \Lambda(z)$$

Υπολογίζουμε ότι $\mathsf{D}\,\psi(z) = \xi_\varphi(\psi(z)) \otimes \lambda + \mathsf{D}_x\,\alpha_\varphi(\Lambda(z)) \circ (\mathrm{Id}_{\mathbf{F}} - h \otimes \lambda)$. Ιδιαιτέρως, $\mathsf{D}\,\psi(0) = \mathrm{Id}_{\mathbf{F}}$, ενώ για όλα τα $z \in V$ έχουμε $\mathsf{D}\,\psi(z) \cdot h = \xi_\varphi(\psi(z))$.

Επομένως υπάρχει ο ψ^{-1} σε κάποια περιοχή V_1 του 0, και ο $\eta = \psi^{-1} \circ \varphi\colon \varphi^{-1}(V_1) \longmapsto \psi^{-1}(V_1)$ είναι τοπικός χάρτης πάνω από το p. Ακόμα η τοπική παράσταση του ξ στον η είναι

$$\begin{aligned}\xi_\eta &= \overline{\eta} \circ \xi \circ \eta^{-1} = (\mathsf{D}\,\psi)^{-1} \cdot \overline{\varphi} \circ \xi \circ \varphi^{-1} \circ \psi = (\mathsf{D}\,\psi^{-1}) \cdot \xi_\varphi \circ \psi \\ &= (\mathsf{D}\,\psi^{-1}) \cdot \mathsf{D}\,\psi(z) \cdot h = h\end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη //

Πρόταση 2.37: *Ας είναι M μία συμπαγής C^p πολλαπλότητα και $\xi\colon M \longmapsto \mathsf{T}M$ ένα διανυσματικό πεδίο. Τότε οποιαδήποτε ολοκληρωτική καμπύλη ορίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη: Ας είναι $p \in M$ και ας είναι $J(p) = (c, d)$ το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της ολοκληρωτικής καμπύλης. Αν $d < +\infty$, τότε θα βρούμε μια αύξουσα ακολουθία $(t_n)_n$ ώστε $t_n \longrightarrow d$ και $a(t_n) \longrightarrow x \in M$, για κάποιο $x \in M$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι η ολοκληρωτική καμπύλη επεκτείνεται και σε περιοχή του d που είναι άτοπο εξ' αιτίας της μεγιστικότητας του $J(p)$. Άρα $d = +\infty$ και ομοίως $c = -\infty$. //

Αν είναι γνωστή η ροή ενός διανυσματικού πεδίου μπορούμε να πάρουμε παράγωγο πάνω στις διευθύνσεις των ολοκληρωτικών καμπυλών.

Πρόταση 2.38 (παράγωγος Lie): *Ας είναι M μία C^p πολλαπλότητα και ξ, η δύο διανυσματικά πεδία στη M. Ας είναι $a\colon \mathcal{D}(\xi) \subseteq \mathbb{R} \times M \longmapsto M$ η ροή του ξ. Η απεικόνιση*

$$\mathcal{L}_\xi\,\eta\colon M \longmapsto \mathsf{T}M : p \longrightarrow \mathcal{L}_\xi\,\eta(x) = \frac{\partial}{\partial t} \mathsf{T}a_{-t} \circ \eta \circ a_t(x)\bigg|_{t=0} *$$

* *Η καμπύλη $\mathbb{R} \ni t \longmapsto a_t^*\eta(x) \in \mathsf{T}M$ βρίσκεται για όλα τα t στο ίδιο νήμα T_xM και επομένως έχει νόημα το όριο και ανήκει πάλι στο T_xM*

ορίζει ένα C^{p-3}–διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο του οποίου η τοπική παράσταση σε έναν χάρτη (U,φ) είναι:

$$\left(\mathcal{L}_\xi\,\eta\right)_\varphi = \mathsf{D}\,\eta_\varphi\cdot\xi_\varphi - \mathsf{D}\,\xi_\gamma\cdot\eta_\varphi$$

Η $\mathcal{L}_\xi\,\eta$ είναι αντισυμμετρική, $\mathbb{R}$–γραμμική ως προς ξ,η και ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi: Αν η,ξ,ζ είναι διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία ($p\geq 4$) τότε

$$\mathcal{L}_\xi\left(\mathcal{L}_\eta\,\zeta\right) = \mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi\,\eta}\,\zeta + \mathcal{L}_\eta\left(\mathcal{L}_\xi\,\zeta\right)$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό του $\mathcal{L}_\xi\,\eta$ είναι άμεσο πως για κάποιον ισομορφισμό φ, θα ισχύει $\varphi_*\,\mathcal{L}_\xi\,\eta = \mathcal{L}_{\varphi_*\xi}\,\varphi_*\eta$, ενώ αν (U,φ) είναι χάρτης, οι τοπικές παραστάσεις ξ_φ,η_φ δεν είναι άλλο από τις $\varphi_*\xi,\varphi_*\eta$ αντίστοιχα. Άρα μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να εργαστούμε απευθείας σε ευκλείδειες συντεταγμένες. Ορίζουμε $g(s,t) = \mathsf{D}_2\,a(s,a(t,x))\cdot\eta(a(t,x))$, s,t επαρκώς κοντά στο 0. Η g είναι διαφορίσιμη κοντά στο $(0,0)$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial s} &= \mathsf{D}_1\,\mathsf{D}_2\,a(s,a(t,x))\cdot\eta(a(t,x)) = \mathsf{D}\,\xi(a(s,a(t,x)))\cdot\mathsf{D}_2\,a(s,a(t,x))\cdot\eta(a(t,x))\\
\frac{\partial g}{\partial t} &= \mathsf{D}_2^2\,a(s,a(t,x))\cdot(\xi(a(t,x)),\eta(a(t,x))) + \mathsf{D}_2\,a(s,a(t,x))\cdot\mathsf{D}\,\eta(a(t,x))\cdot\mathsf{D}\,\xi(a(t,x))
\end{aligned}$$

όμως $a(0,x) = x$ και $\mathsf{D}_2\,a(0,x) = \mathrm{Id}$ και $\mathsf{D}_2\,a(0,x) = 0$. Επομένως

$$\frac{\partial g}{\partial s}(0,0) = \mathsf{D}\,\xi(x)\cdot\eta(x) \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial g}{\partial t}(0,0) = \mathsf{D}\,\eta(x)\cdot\xi(x)$$

και $\mathcal{L}_\xi\,\eta(x) = \frac{\partial}{\partial t}g(-t,t)\Big|_{t=0}$ δίνει το ζητούμενο. Όλες οι άλλες ιδιότητες προκύπτουν από την έκφραση αυτή. //

Σημείωση 2.39: Συνεπώς αν ξ,η είναι δύο διανυσματικά πεδία στη M τότε η $\mathcal{L}_\xi\,\eta = 0$ είναι ισοδύναμη με το ότι $\left(a_{-t}\right)_*\eta(x) = \eta(x)$ για κάθε $x\in M$ και $|t|<\delta_x$. Κι αυτό με τη σειρά του είναι ισοδύναμο με το ότι οι ροές των η,ξ αντιμετατίθενται.

4. Διαφορικές μορφές

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τη δέσμη των γραμμικών απεικονίσεων. Αν $\pi_E\colon E\longmapsto M$, $\pi_F\colon F\longmapsto N$ είναι νηματικές δέσμες, με $\mathsf{L}(E,F)$ γράφουμε τη δέσμη των γραμμικών απεικονίσεων από την E στην F. Όταν F είναι τετριμμένη $\mathrm{N}\times\mathbf{V}$ θα γράφουμε απλά $\mathsf{L}(E,\mathbf{V})$

Αν $\mathbf{E},\mathbf{F},\mathbf{V}$ είναι τρεις διανυσματικοί χώροι, έχουμε τη σύνθεση:

$$\mathrm{Comp}\colon \mathsf{L}(\mathbf{F};\mathbf{V})\times\mathsf{L}(\mathbf{E};\mathbf{F})\longmapsto\mathsf{L}(\mathbf{E};\mathbf{V}) : (S,T)\longmapsto\mathrm{Comp}(S,T) = S\circ T$$

Η Comp είναι διαφορίσιμη ως διγραμμική και ισχύει

$$\mathsf{D}\,\mathrm{Comp}(S,T)\cdot(H,K) = \mathrm{Comp}(H,T) + \mathrm{Comp}(S,K) = H\circ T + S\circ K$$

για όλα τα $S, H \in \mathsf{L}(\mathbf{F}; \mathbf{V})$, $T, K \in \mathsf{L}(\mathbf{E}; \mathbf{F})$.

Ορισμός 2.40 (ανάκληση/pullback διαφορικής μορφής): Ας είναι M, N πολλαπλότητες, $f\colon N \longmapsto M$ μορφισμός (όχι κατ' ανάγκη με αντίστροφο) και $\eta \in \mathsf{L}(\mathsf{T}^{\oplus r} M; \mathbf{V})$. Ορίζουμε $f^*\eta\colon N \longmapsto \mathsf{L}(\mathsf{T}^{\oplus r} M; \mathbf{V}) : x \longmapsto f^*\eta(x) = \mathrm{Comp}\,(\eta \circ f(x), \mathsf{T}_x^{\oplus r} f)$, δηλαδή

$$f^*\eta(x)\colon \mathsf{T}_x^n N \longmapsto \mathbf{V} : \mathbf{u} = (u_1, ..., u_n) \longmapsto f^*\eta(x) \cdot u = \eta(f(x)) \cdot (\mathsf{T}f \cdot u_1, ..., \mathsf{T}f \cdot u_n)$$

Στην περίπτωση που $r = 0$ τότε $f^*\eta = \eta \circ f$.

Πρόταση 2.41: *Ας είναι M μία C^p πολλαπλότητα, ξ ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο, a η ροή αυτού και $\eta \in \mathsf{L}(\mathsf{T}^{\oplus r} M; \mathbf{V})$. Η απεικόνιση*

$$\mathcal{L}_\xi\, \eta\colon \mathrm{M} \longmapsto \mathsf{L}(\mathsf{T}^{\oplus r} M; \mathbf{V}) : x \longmapsto (\mathcal{L}_\xi\, \eta)(x) = \left.\frac{\partial}{\partial t} a_t^* \eta \right|_{t=0}$$

είναι μία C^{p-3} τομή της δέσμης των γραμμικών απεικονίσεων $\mathsf{L}(\mathsf{T}^{\oplus r} M; \mathbf{V})$.

Για κάθε $Y_1, Y_2, ..., Y_r\colon M \longmapsto \mathsf{T}M$ διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία θα ισχύει

$$\mathcal{L}_\xi\, (\eta \cdot (Y_1, ..., Y_r)) = \big(\mathcal{L}_\xi\, \eta\big) \cdot (Y_1, ..., Y_r) + \sum_{i=1}^{r} \eta \cdot \big(Y_1, ..., \mathcal{L}_\xi\, Y_i, ..., Y_r\big)$$

ενώ τοπικά σε έναν χάρτη (U, φ),

$$(\mathcal{L}_\xi\, \eta) \cdot (Y_1, ..., Y_r) = (\mathsf{D}\, \eta \cdot \xi) \cdot (Y_1, ..., Y_r) + \sum_{i=1}^{r} \eta \cdot (Y_1, ..., \mathsf{D}\, \xi \cdot Y_i, ..., Y_r)$$

Απόδειξη: Ας είναι $x \in M$ τυχόν και ορίζουμε

$$\begin{aligned} F(t) &= \eta(a(t,x)) \cdot (\mathsf{T}a_t \cdot Y_1(x), ..., \mathsf{T}a_t \cdot Y_r(x)) \\ H(y;t) &= \eta(y) \cdot (a_{-t*} Y_1(y), ..., a_{-t*} Y_r(y)) \ , \quad y \in M, |t| < \delta_y \\ G(y) &= H(y,0) = \eta(y) \cdot (Y_1(y), ..., Y_r(y)) \end{aligned}$$

Οι F, H είναι αμφότερες διαφορίσιμες. Παρατηρήστε ότι $F(t) = H(a(t,x), -t)$ και ότι για τυχόν $i = 1, ..., r$, ισχύει $a_{t*} Y_i(y) \in \mathsf{T}_y M$ επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα Leibniz για την παράγωγο και να πάρουμε ότι

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{L}_\xi\, \eta\big) \cdot (Y_1, ..., Y_r)\,(x) &= F'(0) \\ &= \mathsf{D}_1\, H(x,0) \cdot \xi(x) - \mathsf{D}_2\, H(x,0) = G'(0) - \left.\frac{\partial}{\partial t} H(x,t)\right|_{t=0} \\ &= \mathcal{L}_\xi\, (\eta \cdot (Y_1, ..., Y_r))\,(x) - \sum_{i=1}^{r} \eta \cdot \big(Y_1, ..., \mathcal{L}_\xi\, Y_i, ..., Y_r\big)\,(x) \end{aligned}$$

Αντικατάσταση με τις τοπικές παραστάσεις δίνει τον δεύτερο τύπο της πρότασης που αποδεικνύει και τη C^{p-3}–διαφορισιμότητα της $\mathcal{L}_\xi\, \eta$. //

Σημείωση 2.42: Σημειώστε και πάλι ότι για οποιονδήποτε ισομορφισμό φ,

$$\varphi^*(\mathcal{L}_\xi \eta) = \mathcal{L}_{\varphi^*\xi}(\varphi^*\eta)$$

Πρόταση 2.43 (εξωτερική παράγωγος): *Ας είναι M μία C^p–πολλαπλότητα και $\eta \in \Omega^r(M)$. Υπάρχει ακριβώς ένα $\mathrm{d}\eta \in \Omega^{r+1}(M)$ ώστε σε κάθε χάρτη (U, φ) και για κάθε $x \in \varphi(U)$, $u_0, u_1, ..., u_r \in \mathbf{F}$ να ισχύει*

$$(\mathrm{d}\eta)_\varphi(x) \cdot (u_0 \wedge u_1 \wedge ... \wedge u_k) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \left(\mathsf{D}\, \eta_\varphi(x) \cdot u_i\right) \cdot (u_0 \wedge ... \wedge \cancel{u_i} \wedge ...u_k)$$

Απόδειξη: Αρχικά υποθέτουμε ότι M είναι ο ευκλείδειος χώρος. Αν

$$f\colon f^{-1}(\varphi(U)) \subseteq \mathbf{E} \longmapsto \varphi(U)$$

είναι ένας μορφισμός τότε έχουμε ότι $f^*\eta = \mathrm{Comp}\,(\eta \circ f, \otimes^r \mathsf{D}\, f)$. Ας είναι $y \in f^{-1}(\varphi(U))$ και $v_0, v_1, ..., v_k \in \mathbf{E}$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(f^*\eta)(y) \cdot (v_0 \wedge ... \wedge v_k)\\
&\qquad = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \left(\mathsf{D}(f^*\eta)(y) \cdot v_i\right) \cdot \bigwedge_{j \neq i} v_j\\
&\qquad = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \left(\mathsf{D}(\mathrm{Comp}\,(\eta \circ f, \otimes^r \mathsf{D}\, f)\,(y)) \cdot v_i\right) \cdot \bigwedge_{j \neq i} v_j\\
&\qquad = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \left(\mathrm{Comp}(\mathsf{D}(\eta \circ f)(y) \cdot v_i, \otimes^r \mathsf{D}\, f(y))\right) \cdot \bigwedge_{j \neq i} v_j +\\
&\qquad\quad \sum_{\substack{i,j=0\\ j \neq i}}^{r} (-1)^i (\eta \circ f(y)) \cdot \left(\mathsf{D}\, f(y) \cdot v_0 \wedge ... \wedge \underbrace{\mathsf{D}^2 f(y) \cdot (v_i \vee v_j)}_{\substack{j\text{–θέση αν } j>i\\ (j+1)\text{–θέση αν } j<i}} \wedge ... \wedge \mathsf{D}\, f(y) \cdot v_r \right)\\
&\qquad\qquad \text{(το δεύτερο άθροισμα μηδενίζεται γιατί οι όροι του αλληλοαναιρούνται ανά δυο)}\\
&\qquad = \sum_{i=0}^{r} (-1)^j\, \mathrm{Comp}(\mathsf{D}\, \eta(f(y)) \circ \mathsf{D}\, f \cdot v_i, \otimes^r \mathsf{D}\, f(y)) \cdot \bigwedge_{j \neq i} v_j\\
&\qquad = \sum_{i=0}^{r} (-1)^j \left(\mathsf{D}\, \eta(f(y)) \cdot \mathsf{D}\, f(y) \cdot v_i\right) \cdot \bigwedge_{j \neq i} \mathsf{D}\, f(y) \cdot v_j\\
&\qquad = \left(f^*\, \mathrm{d}\eta\right)(y) \cdot (v_0 \wedge ... \wedge v_k)
\end{aligned}$$

Τώρα δείχνουμε ότι ο τύπος της εκφώνησης της πρότασης ορίζει πράγματι μία $(r+1)$–μορφή. Πράγματι, η $(\mathrm{d}\eta)_\varphi$ είναι C^{p-2} (εφόσον η η είναι C^{p-1}), $\mathbb{R}$–γραμμική, εναλλάσσουσα και επομένως ορίζει τοπικά πάνω από τον χάρτη (U,φ) μια $r+1$ μορφή. Πρέπει να δείξουμε ότι ο ορισμός της $(\mathrm{d}\eta)_\varphi$ είναι ανεξάρτητος από τον εκάστοτε χάρτη. Ας είναι λοιπόν (V,ψ) ένας άλλος χάρτης πάνω από το $p\in M$. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για το μονοσήμαντο του ορισμού ειναι η $\psi^*\ \mathrm{d}\eta_\psi = \varphi^*\ \mathrm{d}\eta_\varphi$, ισοδύναμα $\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)^*\ \mathrm{d}\eta_\psi = \ \mathrm{d}\eta_\varphi$ –και από το πρώτο σκέλος της απόδειξης, ισοδύναμα $\mathrm{d}\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)^*\eta_\psi = \ \mathrm{d}\eta_\varphi$ που ισχύει εφόσον $\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)^*\eta_\psi = \eta_\varphi$ στο $\varphi(U\cap V)$. //

Ορισμός 2.44: Ας είναι M μία C^p πολλαπλότητα και $\eta\in\Omega^r(\mathrm{M})$. Η $(r+1)$–μορφή της πρότασης 2.43 ονομάζεται ***εξωτερική παράγωγος***

Πρόταση 2.45 (ιδιότητες εξωτερικής παραγώγου): *Ας είναι M,N C^p πολλαπλότητες, $\eta\in\Omega^r(M)$, $\theta\in\Omega^s(M)$, $f\colon N\longmapsto M$ μορφισμός, και $X_1,X_2,...,X_r\colon M\longmapsto \mathsf{T}M$ διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία. Ισχύουν τα εξής:*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\eta\cdot X_1\wedge...\wedge X_r = &\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i\left[\eta\cdot(X_1\wedge...\wedge \cancel{X}_i\wedge...\wedge X_r)\right] + \\ &\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\,\eta\cdot\left(\mathcal{L}_{X_i}X_j\wedge X_0\wedge...\wedge\cancel{X}_i\wedge...\wedge\cancel{X}_j\wedge...\wedge X_r\right)\end{aligned}$$

[ED1] $\mathrm{d}\eta = \mathsf{D}\,\eta$ *όταν* $r=0$

[ED2] $\mathrm{d}^2\eta(=\ \mathrm{d}\ \mathrm{d}\eta)=0$

[ED3] $\mathrm{d}(\eta\wedge\theta) = \ \mathrm{d}\eta\wedge\theta + (-1)^{\deg\eta}\eta\wedge\ \mathrm{d}\theta$

[ED4] $f^*\ \mathrm{d}\eta = \ \mathrm{d}f^*\eta$

Απόδειξη: Όλες οι ιδιότητες προκύπτουν από τον τύπο της πρότασης 2.43. //

Πρόταση 2.46: *Ας είναι M μία C^p πολλαπλότητα, $\eta\in\Omega^r(M)$, $\theta\in\Omega^s(M)$ διαφορικές μορφές, $\xi,\zeta\colon M\longmapsto\mathsf{T}M$ διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία και $f\colon M\longmapsto\mathbb{R}$ μορφισμός. Τότε*

[LC1] $\mathcal{L}_\xi\,\eta = \ \mathrm{d}\,\imath_\xi\,\eta + \imath_\xi\ \mathrm{d}\eta$

[LC2] $\mathcal{L}_\xi(\eta\wedge\theta) = \left(\mathcal{L}_\xi\,\eta\right)\wedge\theta + \eta\wedge\left(\mathcal{L}_\xi\,\theta\right)$

[LC3] $\mathrm{d}\,\mathcal{L}_\xi\,\eta = \mathcal{L}_\xi\ \mathrm{d}\eta$ *και* $\imath_\xi\,\mathcal{L}_\xi\,\eta = \mathcal{L}_\xi\,\imath_\xi\,\eta$

[LC4] $\imath_{\mathcal{L}_\xi\zeta}\,\eta = \mathcal{L}_\xi\,\imath_\zeta\,\eta - \imath_\zeta\,\mathcal{L}_\xi\,\eta$

[LC5] $\mathcal{L}_{f\xi}\,\eta = f\,\mathcal{L}_\xi\,\eta + \ \mathrm{d}f\wedge\imath_\xi\,\eta$

Απόδειξη: Προκύπτει χρησιμοποιοώντας τις τοπικές εκφράσεις και τις ιδιότητες της παραγώγου Lie, της εξωτερικής παραγώγου και της συστολής. //

5. Πολλαλπλότητες με σύνορο

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε πολλαπλότητες με σύνορο. Αυτό σημαίνει πως οι πολλαπλότητες θα είναι ομοιομορφικές τοπικά, όχι με έναν ολόκληρο χώρο $\mathbf{F}$ αλλά με έναν ημίχωρο. Ας είναι $\lambda\in\mathbf{F}^*$, $\lambda\neq 0$. Ορίζουμε $\mathbf{F}^+ = [\lambda>0]$, $\overline{\mathbf{F}}^+ = [\lambda\geq 0]$ και $\partial\mathbf{F} = \ker\lambda$.

Ας είναι $\mu \in \mathbf{E}, \mu \neq 0$ και $\overline{\mathbf{E}}^+ = [\mu \geq 0]$. Η διαφορισιμότητα μίας $f\colon U \subseteq \overline{\mathbf{E}}^+ \longmapsto V \subseteq \overline{\mathbf{F}}^+$ ορίζεται κατά τα συνήθη. Αν τόσο η f όσο και η f^{-1} είναι διαφορίσιμες, τότε απεικονίζουν σημεία του $\partial\mathbf{E}$ σε σημεία του $\partial\mathbf{F}$. Πράγματι, ας είναι $x \in U \cap \mathbf{E}^+$ εσωτερικό σημείο και $y = f(x)$. Αν $y \in \partial\mathbf{F}$ τότε η $\mu \circ f \geq 0$ επιτυγχάνει ελάχιστο στο x, αφού $0 = \mu(y) = \mu \circ f(x)$. Καθώς το x είναι εσωτερικό σημείο στο πεδίο ορισμού της f τότε $\mathsf{D}(\mu \circ f)(x) = 0$ δηλαδή $\mu \circ \mathsf{D}\, f(x) = 0$ και άρα $\mu = 0$ (αφού η $\mathsf{D}\, f(x)$ είναι ισομορφισμός), άτοπο.

Ορισμός 2.47: Έστω M σύνολο και p κάποιος μή αρνητικός ακέραιος ή ∞.

Αν $U \subseteq M$, $\mathbf{F}$ είναι χώρος Banach, $\lambda \in \mathbf{F}^*, \lambda \neq 0$ και $\phi\colon U \subseteq M \longmapsto \overline{\mathbf{F}}^+$, το ζεύγος (U, ϕ) ονομάζεται χάρτης (chart) αν η ϕ είναι απεικόνιση 1-1 και το $\phi(U)$ είναι ανοικτό στον $\overline{\mathbf{F}}^+$. Αν το U είναι γνήσιο υποσύνολο του M, ο χάρτης ονομάζεται τοπικός, ενώ αν $U = M$ τότε ο χάρτης ονομάζεται ολικός. Η αντίστροφη απεικόνιση ϕ^{-1} ονομάζεται συντεταγμενική περιοχή (coordinate chart).

Δύο χάρτες (U_i, ϕ_i) με $\phi_i\colon U_i \longmapsto \overline{\mathbf{F}}_i^+$ $\mathbf{F}_i$ χώροι Banach, $\lambda_i \in \mathbf{F}_i^*$, $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2$ ονομάζονται C^p–συμβιβαστοί μεταξύ τους αν α) $\phi_1(U_1 \cap U_2)$, $\phi_2(U_1 \cap U_2)$ είναι ανοικτά στους $\overline{\mathbf{F}}_1^+$ και $\overline{\mathbf{F}}_2^+$ αντίστοιχα και β) εφόσον $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, η απεικόνιση $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ είναι C^p–αμφιδιαφόριση.

Μία οικογένεια χαρτών $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ ονομάζεται C^p – άτλαντας (atlas) αν

AT1 η οικογένεια συνόλων $(U_i)_{i \in I}$ αποτελεί κάλυψη του M

AT2 Ανά δύο οι χάρτες του $\mathcal{A}$ ειναι C^p–συμβιβιστοί

Το ζεύγος $(M, \mathcal{A})$ ονομάζεται ***πολλαπλότητα με σύνορο*** (manifold with boundary). Το σύνολο $\partial M = \{x \in M : \exists (U_i, \phi_i)$ χάρτης: $\varphi_i(x) \in \partial\mathbf{F}_i\}$ ονομάζεται ***σύνορο*** της M.

Σημείωση 2.48:

1. Και πάλι, υπό την υπόθεση της συνεκτικότητας της M όλοι οι χώροι $\mathbf{F}_i$ μπορούν να ταυτιστούν με έναν κοινό χώρο $\mathbf{F}$, όπως επίσης και τα λ_i μέ έναν κοινό $\lambda \in \mathbf{F}^*$. Εφεξής θα θεωρούμε ότι η M είναι συνεκτική, και θα υιοθετούμε την ταύτιση αυτή.
2. Το ίδιο το σύνορο ∂M αποδεικνύεται ότι είναι μια πολλαπλότητα συνδιάστασης 1 και η φυσική ενσφήνωση $i\colon \partial M \longmapsto M$ κάνει την ∂M υποπολλαπλότητα της M. Άλλά $\partial(\partial M) = \emptyset$.
3. Η $\mathsf{T}M$ είναι επίσης μία πολλαπλότητα με σύνορο και μάλιστα $\partial \mathsf{T}M = \pi^{-1}(\partial M) = \bigcup_{x \in \partial M} \mathsf{T}_x M$.

Ορισμός 2.49: Ας είναι M μία C^p–πολλαπλότητα με σύνορο. Ένα $X \in \mathsf{T}M$ θα λέμε ότι ***δείχνει στο εσωτερικό*** της M αν υπάρχει χάρτης (U, φ) ώστε η τοπική του αναπαράσταση $\overline{\varphi}(\mathrm{X}) \in \partial\mathbf{F} \times \overline{\mathbf{F}}^+$.

Σημείωση 2.50: Η ιδιότητα ένα εφαπτόμενο διάνυσμα να δείχνει στο εσωτερικό, είναι ανεξάρτητη από τον χάρτη. Επίσης αποδεικνύεται ότι θετικοί γραμμικοί συνδυασμοί διανυσμάτων που δείχνουν στο εσωτερικό παραμένουν διανύσματα που δείχνουν στο εσωτερικό. Χρησιμοποιώντας διαμερίσεις της μονάδας μπορούμε να ορίσουμε ενα διανυσματικό πεδίο στη M που δείχνει στο εσωτερικό πάνω στο ∂M.

Πρόταση 2.51: *Ας είναι M μία C^p πολλαπλότητα με σύνορο και ξ είναι ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο στη M που δείχνει στο εσωτερικό πάνω στο ∂M. Τότε η ροή του ξ, $a\colon \mathcal{D}_\xi \subseteq \mathbb{R} \times M \longmapsto M$ είναι διαφορίσιμη, ορίζεται σε ανοιχτό υποσύνολο $\mathcal{D}_\xi \subseteq M \times (0, +\infty) \cup \partial M \times [0, +\infty)$*

Χρησιμοποποιώντας ένα διανυσματικό πεδίο που δείχνει προς τα μέσα και την προηγούμενη πρόταση μπορεί κανείς να δείξει το επόμενο θεώρημα γνωστό και ως θεώρημα "collar neighboorhood."

Θεώρημα 2.52 (collar neighboorhood): *Ας είναι M μία C^p παρασυμπαγής πολλαπλότητα με σύνορο. Τότε το ∂M έχει μία ανοιχτή περιοχή που είναι ισομορφική με το $\partial M \times [0, 1)$, δηλαδή υπάρχει ανοιχτό $U \subseteq M$ ώστε $\partial M \subseteq U$ και ένας διαφορομορφισμός $f\colon \partial M \times [0, 1) \longmapsto U$ ώστε $f(x, 0) = x$, για όλα τα $x \in \partial M$.*

Σημείωση 2.53: Επομένως η ∂M είναι κανονική υποπολλαπλότητα της M

6. Ολοκλήρωση διαφορικών μορφών

Σε αυτή την παράγραφο όλες οι πολλαπλότητες είναι συνεκτικές, δεύτερες αριθμήσιμες C^p και έχουν μοντέλο τον χώρο $\mathbf{F} = \mathbb{R}^m$, ώστε να είναι παρασυμπαγείς και να επιδέχονται λείες διαμερίσεις της μονάδας. Ο θετικός ακέραιος m είναι η διάσταση της πολλαπλότητας. Υπενθυμίζουμε ότι $e_1, e_2, ..., e_m \in \mathbb{R}^m$ είναι η συνήθης βάση. Γράφουμε για συντομία $\mathbf{x} = e_1 \wedge ... \wedge e_m$. Ο $\mathbb{R}^m$ είναι εφοδιασμένος με τη συνήθη μορφή όγκου $\mathrm{d}\mathbf{x} = e_1^* \wedge ... \wedge e_m^*$ (είναι σύμβολο και δεν δηλώνει κάποια εξωτερική παράγωγο):

$$\mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$$

Ορισμός 2.54: Ας είναι M μία C^p πολλαπλότητα. Ορίζουμε

$$\mathsf{Vol}(M) = \left\{ |\eta| \;\middle|\; \eta \in \bigwedge^m(M), \eta \neq 0 \right\}$$

Η $\mathsf{Vol}(M)$ δέχεται διαφορική δομή πολλαπλότητας τοπικά ισομορφικής προς την $\bigwedge^m(M)$ ώστε η φυσική προβολή να είναι συνεχής. Μία διαφορίσιμη τομή $\delta\colon M \longmapsto \mathsf{Vol}(M)$ ονομάζεται ***πυκνότητα*** (density) της M, ισοδύναμα, αν για κάθε $x \in M$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή $U \subseteq M$ και μία $\eta_x \in \Omega^m(U)$ ώστε $\delta(y) = |\eta(y)|$, $y \in U$.

Αν δοθεί πυκνότητα δ της M τότε είναι δυνατό να οριστεί ολοκλήρωμα μίας $f \in C_c(M; \mathbb{R})$ ως εξής: Για κάθε $x \in M$ βρίσκουμε έναν τοπικό χάρτη (U_x, φ_x), με $\overline{U}_x$ συμπαγές και μία m–μορφή $\omega_x \in \Omega^m(U_x)$ ώστε $\delta(y) = |\eta_x(y)|$. Αν $\operatorname{supp} f \subseteq U_x$ για κάποιο $x \in M$ τότε η f περιέχεται εξολοκλήρου σε έναν χάρτη και ορίζουμε

$$\int_M f\ \delta = \int_{U_x} f\ \delta = \int_{\varphi_x(U_x)} f \circ \varphi^{-1} \cdot \left| \left((\varphi^{-1})^* \eta_{x_n} \right) \cdot \mathbf{x} \right|$$

Είναι άμεση συνέπεια του τύπου της αλλαγής μεταβλητών στο ολοκλήρωμα ότι ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από τον χάρτη που χρησιμοποιήθηκε. Καθώς η M είναι δευτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος επιδέχεται αριθμήσιμη C^p–διαμέριση της μονάδας $(\rho_n : M \longmapsto [0,1])_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\operatorname{supp}\rho_n \subseteq U_{x_n}$. Τότε ορίζουμε

$$\int_M f\,\delta = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{U_{x_n}} \rho_n f$$

Καθώς η f έχει συμπαγή φορέα, το ανωτέρω άθροισμα έχει μόνο πεπερασμένους όρους που δε μηδενίζονται. Επίσης μπορεί να δειχθεί ότι ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από την διαμέριση της μονάδας. Τέλος δείχνεται ότι το ολοκλήρωμα όπως ορίστηκε ικανοποιεί τις βασικές ιδιότητες του τελεστή ολοκληρώματος. Για τις απαραίτητες τεχνικές λεπτομέριες παραπέμπουμε στο [Munkres, 1].

Πρόταση 2.55 (αλλαγή μεταβλητών στο ολοκλήρωμα, I): *Ας είναι* M, N *δύο* C^p *πολλαπλότητες,* $m = \dim M = \dim N$, $p \geq 2$ *και* $\varphi : N \longmapsto M$ *ένας διαφορομορφισμός. Υποθέτουμε ότι* δ *είναι μία πυκνότητα. Τότε για κάθε* $f \in C_{\mathrm{c}}(M;\mathbb{R})$

$$\int_{\varphi(N)} f\delta = \int_N f\circ\varphi\;\varphi^*\delta$$

Ορισμός 2.56: Ένας μορφισμός $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^m$ θα λέμε ότι ***διατηρεί τον προσανατολισμό*** στο U αν $\varphi^*\,\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} > 0$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι $\det \mathsf{D}\,\varphi > 0$ στο U

Ορισμός 2.57: Ας είναι $M \subseteq \mathbb{R}^m$ ένα ανοικτό σύνολο και ω μία μορφή όγκου. Τότε ορίζουμε

$$\int_M \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_M \omega\cdot\mathbf{x}$$

Πρόταση 2.58: *Ας είναι* $M \subseteq \mathbb{R}^m$ *ένα ανοικτό σύνολο και* ω *μία μορφή όγκου. Υποθέτουμε ότι* $\varphi : N \longmapsto M$ *είναι ένας* C^1 *διαφορομορφισμός μεταξύ των ανοικτών* M *και* N *του* $\mathbb{R}^m$ *που διατηρεί τον προσανατολισμό. Τότε*

$$\int_{\varphi(\mathrm{N})} \omega = \int_N \varphi^*\omega$$

Απόδειξη: Γράφουμε $y = (y_1, ..., y_m)$ και $x = (x_1, ..., x_m)$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{N}} \varphi^*\omega &= \int_N \omega(\varphi(y))\cdot \mathsf{D}\,\varphi(y)e_1 \wedge ... \wedge \mathsf{D}\,\varphi(y)e_m \;\mathrm{d}y_1\;\mathrm{d}y_2 ...\;\mathrm{d}y_m \\
&= \int_N \det \mathsf{D}\,\varphi(y)\;\omega(\varphi(y))\cdot e_1\wedge ...\wedge e_m \;\mathrm{d}y_1\;\mathrm{d}y_2...\;\mathrm{d}y_m \\
&= \int_N |\det \mathsf{D}\,\varphi(y)|\;\;\omega(\varphi(y))\cdot e_1\wedge ...\wedge e_m \;\mathrm{d}y_1\;\mathrm{d}y_2...\;\mathrm{d}y_m
\end{aligned}$$

(γιατί η φ διατηρεί τον προσανατολισμό)

$$= \int_{\varphi(N)} \omega(x) \cdot e_1 \wedge ... \wedge e_m \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 ... \, \mathrm{d}x_m \qquad \text{(αλλαγή μεταβλητών στο ολοκλήρωμα)}$$

//

Ορισμός 2.59: Ας είναι M μία C^p–πολλαπλότητα. Δύο χάρτες (U, φ) και (V, ψ) λέμε ότι διατηρούν τον προσανατολισμό αν στο $U \cap V$ η $\psi \circ \varphi^{-1}$ διατηρεί τον προσανατολισμό.

Η πολλαπλότητα M ονομάζεται προσανατολισμένη αν υπάρχει ένας άτλαντας $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ ώστε κάθε δύο χάρτες του διατηρούν τον προσανατολισμό.

Αν M, N είναι δύο προσανατολισμένες πολλαπλότητες και $f\colon M \longmapsto N$ ένας διαφορομορφισμός Αν σε κάθε δύο προσανατολισμένους χάρτες (U, φ), (V, ψ) των M και N αντίστοιχα η τοπική παράσταση $f_{\psi\varphi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \longmapsto \psi(f(U) \cap V)$ διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε θα λέμε ότι ο f διατηρεί τον προσανατολισμό.

Πρόταση 2.60: *Ας είναι M μία παρασυμπαγής πολλαπλότητα, $m \dim M$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Υπάρχει ένα $\Omega \in \Omega^m(M)$ που δε μηδενίζεται πουθενά.*
2. *Η M είναι προσανατολισμένη.*

Απόδειξη: $(1 \Rightarrow 2)$: Ας είναι $\Omega \in \Omega^m(M)$ ώστε $\Omega(x) \neq 0$ για κάθε $x \in M$. Παίρνουμε $(U_i, \psi_i)_{i \in I}$ έναν οποιονδήποτε άτλαντα. Ας είναι $T\colon \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^m : (x_1, x_2, ..., x_m) = (-x_1, x_2, ..., x_m)$. Έστω $i \in I$. Η τοπική παράσταση της Ω θα είναι $\Omega_i = (\psi_i^{-1})^* \Omega = \lambda_i \, \mathrm{d}\mathbf{x}$, όπου $\lambda_i\colon \phi_i(U_i) \longmapsto \mathbb{R}$ είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί $\lambda_i(y) \neq 0, \forall y \in \psi_i(U_i)$. Άρα η λ_i διατηρεί το πρόσημό της. Αν $\lambda_i > 0$ ορίζουμε $\varphi_i = \psi_i$ αλλιώς ορίζουμε $\varphi_i = T \circ \psi_i$ ώστε η νέα τοπική παράσταση $\Omega_{1i} = T^* \Omega_i = -(\lambda_i \circ T) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \mu_i \, \mathrm{d}\mathbf{x}$ να έχει $\mu_i > 0$. Ας είναι τώρα $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Γράφουμε $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$, τότε $\Omega_{1j} = \varphi_{ij}^* \Omega_{1i}$ (στο U_{ij}), δηλαδή $\mu_j = \det \mathsf{D}\, \varphi_{ij} \; \mu_i \circ \varphi_{ij}$, από όπου προκύπτει ότι $\det \mathsf{D}\, \varphi_{ij} > 0$.

Αντιστρόφως $(1 \Rightarrow 2)$, αν $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ είναι ένας άτλαντας που διατηρεί τον προσανατολισμό, παίρνουμε μία διαμέριση της μονάδας $(\rho_i\colon M \longmapsto [0,1])_{i \in I}$ υποκείμενη στον άτλαντα της υπόθεσης και ορίζουμε $\Omega = \sum_{i \in I} \rho_i \; \varphi_i^* \, \mathrm{d}\mathbf{x}$. Τότε η τοπική παράσταση της Ω πάνω από έναν χάρτη (U_j, φ_j) είναι $\Omega_j = \sum_{i \in I} \rho_i \; \varphi_{ij}^* \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \underbrace{\left(\sum_{i \in I} \rho_i \; \det \mathsf{D}\, \varphi_{ij} \right)}_{>0} \mathrm{d}\mathbf{x}$ που οδηγεί στο ζητούμενο. //

Επαναλαμβάνοντας ακόμα μια φορά τα επιχειρήματα για τον ορισμό του ολοκληρώματος μίας συνάρτησης, μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μίας m–μορφής. Είναι αναγκαίο όμως η πολλαπλότητα M να είναι προσανατολισμένη γιατί εδώ, δεν υπάρχει η απόλυτη τιμή να προστατέψει από τις αλλαγές προσήμου εξ αιτίας πιθανής αντιστροφής του προσανατολισμού.

Συνεπώς, αν M είναι μία προσανατολισμένη πολλαπλότητα, $\omega \in \Omega^m(M)$ μία m–μορφή, (U, ϕ) τοπικός χάρτης ώστε $\operatorname{supp} \omega \subseteq U$, τότε μπορούμε άμεσα να ορίσουμε

$$\int_M \omega = \int_U \omega \overset{\text{def}}{=} \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega.$$

Αν δοθεί $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$ ένας προσανατολισμένος άτλαντας και $(\rho_n\colon M\longmapsto[0,1])_{n\in\mathbb{N}}$ μία τοπικά πεπερασμένη διαμέριση της μονάδας ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ να υπάρχει $i_n\in I$ ώστε $\overline{\operatorname{supp}\rho_n}\subseteq U_{i_n}$ μπορούμε να ορίσουμε για μία m–μορφή $\omega\in\Omega^m(M)$ με συμπαγή φορέα $\overline{\operatorname{supp}\omega}$

$$\int_M\omega\overset{\text{def}}{=}\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{U_{i_n}}\rho_n\omega$$

και ο ορισμός αυτός είναι καλός, και ανεξάρτητος από τον άτλαντα και τη διαμέριση της μονάδας που χρησιμοποιήθηκε.

Πρόταση 2.61 (αλλαγή μεταβλητών στο ολοκλήρωμα, ΙΙ): *Ας είναι* M, N *δύο* C^p *προσανατολισμένες πολλαπλότητες,* $m=\dim M=\dim N$, $p\geq 2$ *και* $f\colon N\longmapsto M$ *ένας διαφορομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό. Υποθέτουμε ότι* $\omega\in\Omega^m(M)$ *είναι μία* m*–μορφή. Τότε*

$$\int_{f(N)}\omega=\int_N f^*\omega$$

Πρόταση 2.62:

Αν M *είναι μία προσανατολισμένη πολλαπλότητα με σύνορο, και η* ∂M *είναι προσανατολισμένη.*

Απόδειξη: Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι η M είναι συνεκτική. Ας είναι $\mathcal{A}$ ένας προσανατολισμένος άτλαντας της M και $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}\subseteq\mathcal{A}$ μία κάλυψη της ∂M, ώστε $U_i\cap\partial M\neq\emptyset$ για $i\in I$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας χώρος Banach $\mathbf{F}$ με $\dim\mathbf{F}=m>1$ και $\lambda\in\mathbf{F}^*$, $\lambda\neq 0$ ώστε $\mathbf{F}=\mathbf{F}_0\times\mathbb{R}$, όπου $\mathbf{F}_0=\ker\lambda$. Επομένως όλοι χάρτες έχουν τις εικονες τους μέσα στο $\overline{\mathbf{F}}^+=[\lambda\geq 0]=\mathbf{F}_0\times[0,+\infty)$. Γράφουμε $\varphi_{1i}=\mathrm{pr}_{\mathbf{F}_0}\circ\varphi_i\big|_{\partial M}$ και $U_{1i}=\partial M\cap U_i$ ώστε ο $(U_{1i},\varphi_{1i})_{i\in I}$ να είναι άτλαντας της ∂M. Ισχυριζόμαστε οτι είναι και προσανατολισμένος.

Ας είναι $e_1,e_2,...,e_{m-1}$ μία βάση του $\mathbf{F}_0$, $e_1^*,e_2^*,...,e_{m-1}^*$ η δυική αυτής και $\mathbf{n}=\left(0_{\mathbf{F}_0},1\right)$ ώστε $\lambda\cdot\mathbf{n}=1$. Τότε η $\mathbf{n},e_1,e_2,...,e_{m-1}$ είναι βάση του $\mathbf{F}=\mathbf{F}_0\times\mathbb{R}$ και η $\lambda,e_1^*,e_2^*,...,e_{m-1}^*$ είναι η δυϊκή της. Γράφουμε $\mathbf{x}_0=e_1\wedge...\wedge e_{m-1}$, $\mathrm{d}\mathbf{x}_0=e_1^*\wedge...\wedge e_{m-1}^*$ και ισχύει $(\lambda\wedge\mathrm{d}\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{n}\wedge\mathbf{x}_0)=1$

Ας είναι $i,j\in I$ με $U_{ij}=U_i\cap U_j\neq\emptyset$ και $x\in\partial M\cap U_{ij}$, $x_i=\varphi_i(x),x_j=\varphi_j(x)$. Η συνθήκη $\varphi_{ji}(\varphi_i(U_{ij})\cap\mathbf{F}_0)=\varphi_j(U_{ij})\cap\mathbf{F}_0$ επιβάλλει ότι $\mathsf{D}\,\varphi_{ji}(x)(\mathbf{F}_0)=\mathbf{F}_0$ και άρα $\ker\lambda\circ\mathsf{D}\,\varphi_{ji}(x)=\mathbf{F}_0$. Άρα $\lambda\circ\mathsf{D}\,\varphi_{ji}(x)\cdot\mathbf{n}\neq 0$. Από την άλλη, για $t>0$ επαρκώς μικρό, το $x_i+t\mathbf{n}$ ανήκει στο εσωτερικό του $\varphi_i(U_{ij})$ και επομένως το $\varphi_{ji}(x_i+t\mathbf{n})$ θα ανήκει στο εσωτερικό του $\varphi_j(U_{ij})$, άρα $\lambda\circ\varphi_{ji}(x_i+t\mathbf{n})>0$. Άρα $\lambda\circ\mathsf{D}\,\varphi_{ji}(x_i)\cdot\mathbf{n}>0$ Επίσης $\mathsf{D}\,\varphi_{ji}(x_i)=\mathsf{D}\,\varphi_{1,ji}(x_i)$ πάνω στο $\mathbf{F}_0$. Και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}0&<\varphi_{ji}^*(\lambda\wedge\mathrm{d}\mathbf{x}_0)(x_i)\cdot(\mathbf{n}\wedge\mathbf{x}_0)=(\lambda\circ\mathsf{D}\,\varphi_{ji}(x_i)\cdot\mathbf{n})\cdot(\varphi_{ji}^*\,\mathrm{d}\mathbf{x}_0\cdot\mathbf{x}_0)\\&=(\lambda\circ\mathsf{D}\,\varphi_{ji}(x_i)\cdot\mathbf{n})\cdot(\varphi_{1,ji}^*\,\mathrm{d}\mathbf{x}_0(x_i)\cdot\mathbf{x}_0)\end{aligned}$$

Άρα $\varphi_{1,ji}^*\,\mathrm{d}\mathbf{x}_0(x_i)\cdot\mathbf{x}_0>0$. Όμως το $x_i=\varphi_i(x)$ ήταν τυχόν και έτσι συνάγουμε ότι $\varphi_{1,ji}^*\,\mathrm{d}\mathbf{x}_0\cdot\mathbf{x}_0>0$ στο $\varphi_{1i}(U_{ij}\cap\partial M)$. //

Σημείωση 2.63: Επομένως αν δοθεί ένας προσανατολισμός στη M, τότε υπάρχουν δύο επιλογές για προσανατολισμό στην ∂M. Αν $x \in \partial M$ και Ω είναι μία τοπικά ορισμένη $m-$μορφή που ορίζει έναν προσανατολισμό πάνω στο U, τότε εκλέγουμε προσανατολισμό στην ∂M στο $U_1 = \partial M \cap U$ μέσω της $\imath_{-\mathbf{n}}\Omega$ όπου $\mathbf{n}$ ένα διανυσματικό πεδίο ορισμένο στο U που δείχνει προς το εσωτερικό στο U_1. Εφεξής, δοθέντος ενός προσανατολισμού στην M θα εφοδιάζουμε την ∂M τον ανωτέρω προσανατολισμό.

Το επόμενο θεώρημα, γνωστό και ως θεώρημα Stokes είναι θεμελιώδες στον ολοκληρωτικό λογισμό, και είναι η γενίκευση του $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$ στον $\mathbb{R}$. Αν η M είναι προσανατολισμένη με σύνορο, τότε και η ∂M είναι προσανατολισμένη και έχουμε το εξής:

Θεώρημα 2.64 (Stokes): *Ας είναι M μία προσανατολισμένη C^p–πολλαπλότητα, $p \geq 2$, με σύνορο (ενδεχομένως κενό) και $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ μία $(m-1)$–μορφή με συμπαγή φορέα. Τότε*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

7. Πολλαπλότητες Riemann

Ορισμός 2.65: Ας είναι M μία C^p, $p \geq 2$ πολλαπλότητα $m = \dim M$ και $g\colon M \longmapsto \mathsf{L}_{\mathrm{Sym}}(\mathsf{T}M;\mathbb{R})$ μορφισμός ώστε για κάθε $x \in M$ το $g(x)$ να είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο T_xM. Το ζεύγος (M,g) ονομάζεται ***πολλαπλότητα Riemann***.

Ορισμός 2.66: Ας είναι (M,g) (N,h) δύο πολλαπλότητες Riemann και $f\colon M \longmapsto N$ μορφισμός. Η f ονομάζεται ***ισομετρία*** αν $f^*h = g$.

Σημείωση 2.67: Πάνω σε έναν χάρτη (U,φ) η τοπική παράσταση φ_*g είναι ένας συμμετρικός $m \times m$ πίνακας g_φ ώστε αν $e_1, e_2, ..., e_m$ είναι η συνήθης βάση του στον $\mathbb{R}^m$, και $\frac{\partial}{\partial x_i} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi^* e_i$ τότε $g \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \vee \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = e_j^\top g_\varphi e_i = (g_\varphi)_{ij}$

Αν $u, v \in \mathsf{T}_xM, x \in M$ τότε πολύ συχνά θα γράφουμε $\langle u, v\rangle$ αντί $g \cdot (u \vee v)$.

Σύμφωνα με την πρόταση 1.24, ένα εσωτερικό γινόμενο τοπικά μπορεί να ορίσει μονοσήμαντα μία μορφή όγκου. Όλες οι μορφές όγκου που ορίζονται έτσι τοπικά, έχουν κοινή απόλυτη τιμή. Επομένως μία πολλαπλότητα Riemann έχει παντού ορισμένη πυκνότητα και εφόσον είναι προσανατολισμένη, έχει και μορφή όγκου:

Πρόταση 2.68 (όγκος σε πολλαπλότητα Riemann): *Ας είναι (M,g) μία συνεκτική πολλαπλότητα Riemann, $m = \dim M$. Τότε ορίζεται ακριβώς μία πυκνότητα δ_g με την ιδιότητα για κάθε $x \in M$ και ορθοκανονική βάση $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m \in \mathsf{T}_xM$ να ισχύει $\delta_g \cdot (\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_m) = 1$. Αν η M είναι και προσανατολισμένη, τότε ορίζεται και μοναδική μορφή όγκου Ω_g, ώστε για κάθε $x \in M$ και καθε θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m \in \mathsf{T}_xM$ να ισχύει $\Omega_g \cdot (\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_m) = 1$. Αν (U,φ) είναι χάρτης τότε η τοπική παράσταση της Ω_g (αντ. δ_g) είναι*

$$\varphi_*\Omega_g = \sqrt{\det g_\varphi}\ \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \Big(\text{αντ. } \varphi_*\delta_g = \sqrt{\det g_\varphi}\,|\,\mathrm{d}\mathbf{x}|\Big)$$

Ορισμός 2.69: Ας είναι M μία C^∞ πολλαπλότητα. Μία απεικόνιση $\nabla\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\longmapsto \mathfrak{X}(M)$ που ικανοποιεί τις

[C1] Είναι διγραμμική και C^∞–γραμμική στην πρώτη μεταβλητή της.

[C2] Ικανοποιεί τον κανόνα Leibniz: $\nabla_\xi(f\eta) = f\,\nabla_\xi\eta + \xi[f]\,\eta$, $\xi,\eta\in\mathfrak{X}(M)$, $f\in C^\infty(M)$

ονομάζεται αφφινική ***συνοχή*** (affine connection).

Αν $f\in C^\infty(M)$ και $\xi\in\mathfrak{X}(M)$ θα γράφουμε με $\nabla_\xi f = \xi[f]$.

Αν η M έχει εσωτερικό γινόμενο g, τότε η ∇ ονομάζεται συμβατή με το g αν για κάθε τρία διανυσματικά πεδία $\xi,\eta,\zeta\in\mathfrak{X}(M)$

$$\nabla_\xi(g(\eta,\zeta)) = g(\nabla_\xi\eta,\zeta)+g(\eta,\nabla_\xi\zeta)$$

Η ∇ ονομάζεται συμμετρική αν για κάθε δύο διανυσματικά πεδία $\xi,\eta\in\mathfrak{X}(M)$

$$\nabla_\xi\eta-\nabla_\eta\xi = \mathcal{L}_\xi\,\eta$$

Σημείωση 2.70: Υποθέτουμε ότι το μοντέλο $\mathbf{F}$ της M έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $0<r<s<+\infty$ υπάρχει $f\in C^\infty(\mathbf{F};\mathbb{R})$ ώστε $f(x)=1$ για $\|x\|\geq r$ και $f(x)=0$ για $\|x\|\geq s$. Αυτό ισχύει πάντα όταν $\dim M<+\infty$. Ας είναι $\xi,\eta\in\mathfrak{X}(M)$, $x\in M$ και (U,φ) χάρτης πάνω από το x. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\varphi(x)=0$. Βρίσκουμε $0<r<s$ ώστε $x\in B_r(0)\subseteq \overline{B}_r(0)\subseteq B_s(0)\subseteq \overline{B}_s(x)\subseteq \varphi(U)$ και $f_U\in C^\infty(\mathbf{F};\mathbb{R})$ ώστε $f_U=1$ στο $\overline{B}_r(0)$ και $f_U=0$ στο $B_s(0)^{\complement}$. Ισχύει ότι $\overline{\operatorname{supp} f_U}\subseteq\varphi(U)$ και μπορούμε να ορίσουμε $f\colon M\longmapsto\mathbb{R}$ ώστε $f\big|_U = f_U\circ\varphi$ και $f=0$ οπουδήποτε αλλού. Τότε η f είναι C^∞, σταθερή και ίση με 1 στο $V_r=\varphi^{-1}(B_r(0))$, σταθερή και ίση με 0 στο $M\setminus\varphi^{-1}(B_s(0))$. Επομένως $\mathrm{d}f=0$ στο V_r και

$$\nabla_{f\xi}(f\eta) = f^2\nabla_\xi\eta + f(\,\mathrm{d}f\cdot\xi)\,\eta = \nabla_\xi\eta \ \text{ στο } V_r$$

Συνεπώς, η $(\nabla_\xi\eta)(x)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές των ξ,η κοντά στο x και άρα είναι τοπική έννοια και μπορεί να υπολογιστεί πάνω σε χάρτες.

Από την άλλη αν $m=\dim\mathbf{F}=\dim M<+\infty$ μπορούμε πάντα να έχουμε μία τοπική βάση από διανυσματικά πεδία $u_1,u_2,\ldots,u_m$ πάνω από έναν χάρτη (U,φ): $u_i=\varphi^* e_i$ και γράφουμε το $\xi=\displaystyle\sum_{i=1}^m a_i u_i$ πάνω στο U. Τότε $\nabla_\xi\eta = \nabla_{\sum_{i=1}^m a_i u_i}\eta = \displaystyle\sum_{i=1}^m a_i\cdot\nabla_{u_i}\eta$ που συνεπάγεται ότι το $(\nabla_\xi\eta)(x)$ εξαρτάται μόνο από το $\xi(x)$.

Χρησιμοποιώντας ανάλογα επιχειρήματα και με ίδιες προϋποθέσεις (αλλά με αρκετές τεχνικές λεπτομέριες, βλ. [Lang, 1]) μπορεί κανείς να δείξει ότι ορίζεται ένας μορφισμός $\Gamma\colon \mathsf{T}M\times_M\mathsf{T}M\longmapsto\mathsf{T}^2M$ που είναι σε κάθε του μεταβλητή γραμμικός ώστε για κάθε δύο διανυσματικά πεδία ξ,η ισχύει $\mathsf{v}(\eta,\nabla_\xi\eta)=\mathsf{T}\eta\cdot\xi+\Gamma\cdot(\eta,\xi)$. Εδώ $\mathsf{v}\colon\mathsf{T}M\times_M\mathsf{T}M\longmapsto\mathsf{V}(\mathsf{T}M)$ είναι η φυσική ενσφήνωση στον κάθετο υπόχωρο με τοπική παράσταση ως προς κάθε χάρτη $\mathsf{v}(x,u)\cdot v=(x,u;0,v)$, $x\in\mathsf{T}M$, $u,v\in\mathsf{T}_xM$. Η διγραμμική απεικόνιση Γ ονομάζεται σύμβολο Christoffel της συνοχής και την ορίζει μονοσήμαντα.

Αν (U_i, φ_i) είναι χάρτης τότε ορίζουμε Γ_i τη δεύτερη συντεταγμένη της τοπικής παράστασης της Γ –η πρώτη συντεταγμένη της $\Gamma(\eta, \xi)$ είναι πάντα ξ. Ώστε τοπικά στον χάρτη (U_i, φ_i), ισχύει $\nabla_\xi \eta(x) = \mathsf{D}\,\eta \cdot \xi + \Gamma_i(x) \cdot (\eta, \xi)$. Είναι άμεσο ότι η συνοχή είναι συμμετρική αν και μόνον αν η Γ είναι συμμετρική. Αν (U_j, φ_j) είναι ένας άλλος χάρτης της M, τότε οι τοπικές παραστάσεις Γ_i, Γ_j συνδέονται:

$$\Gamma_j(\varphi_{ji}(x)) \cdot (\mathsf{D}\,\varphi_{ji}(x) \cdot u, \mathsf{D}\,\varphi_{ji}(x) \cdot h) = \mathsf{D}\,\varphi_{ji}(x) \cdot (\Gamma_i(x) \cdot (u, h)) + \mathsf{D}^2\,\varphi_{ji}(x) \cdot (h, u)$$
$$x \in \varphi_i(U_i \cap U_j), u, h \in \mathbf{F}$$

η τελευταία εξίσωση δείχνει ότι η συναλλοίωτη παράγωγος ουσιαστικά αλλάζει χάρτες ως διάνυσμα του δεύτερου εφαπτόμενου χώρου και όχι ως εφαπτόμενο διάνυσμα, αντίθετα από ότι συστήνει ο ορισμός της.

Θεώρημα 2.71 (Levi–Civita): *Ας είναι (M, g) μία C^∞ πολλαπλότητα Riemann. Τότε υπάρχει μοναδική αφφινική συνοχή ∇ που είναι συμβατή με το εσωτερικό γινόμενο g και συμμετρική.*

Απόδειξη: Αν $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{X}(M)$ τότε μπορούμε να υπολογίσουμε ότι μία συνοχή που είναι συμμετρική και συμβατή με το εσωτερικό γινόμενο αναγκαστικά ικανοποιεί (πράξεις από το δεξί μέλος στο αριστερό)

$$\left\langle \zeta, \nabla_\eta \xi \right\rangle = \frac{1}{2} \Big\{ \xi \left\langle \eta, \zeta \right\rangle + \eta \left\langle \zeta, \xi \right\rangle - \zeta \left\langle \xi, \eta \right\rangle - \left\langle \mathcal{L}_\xi\, \zeta, \eta \right\rangle - \left\langle \mathcal{L}_\eta\, \zeta, \xi \right\rangle - \left\langle \mathcal{L}_\xi\, \eta, \zeta \right\rangle \Big\}$$

Όμως αυτή η εξίσωση είναι και ικανή για να ορίσει μία συνοχή. //

Σημείωση 2.72: Αν βασιστούμε στο προηγούμενο θεώρημα, βλέπουμε πως πάνω σε έναν τοπικό χάρτη (U_i, φ_i) το σύμβολο Christoffel ικανοποιεί:

$$2 \left\langle \Gamma_i(x) \cdot (u, h), g_i(x) \cdot z \right\rangle = \left\langle (\mathsf{D}\,g(x) \cdot u) \cdot h, z \right\rangle + \left\langle (\mathsf{D}\,g(x) \cdot h) \cdot u, z \right\rangle - \left\langle (\mathsf{D}\,g(x) \cdot z) \cdot u, \cdot h \right\rangle$$
$$x \in \varphi_i(U_i), u, h, z \in \mathbf{F}$$

8. Χρονοεξαρτώμενα διανυσματικά πεδία

Ορισμός 2.73: Ας είναι M μία C^p πολλαπλότητα. Ένας μορφισμός $\xi\colon \mathbb{R} \times M \longmapsto \mathsf{T}M$ ονομάζεται ***χρονοεξαρτώμενο διανυσματικό πεδίο*** (time dependent vector field). Μία διαφορίσιμη καμπύλη $J \ni t \longmapsto a(t) \in \mathsf{T}M$ ονομάζεται ολοκληρωτική καμπύλη του ξ όταν $a'(t) = \xi(t, a(t))$, $t \in J$. Ροή για το ξ ονομάζεται μία διαφορίσιμη απεικόνιση $a\colon \mathcal{D}_\xi \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times M) \longmapsto M$ ορισμένη σε ένα ανοικτό $\mathcal{D}_\xi \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times M)$, ώστε

$$\frac{\partial}{\partial t} a(t; s, x) = \xi(t; a(t; s, x)) \text{ και } a(s; s, x) = x \text{ οποτεδήποτε } (t; s, x) \in \mathcal{D}_\xi$$

Ένα χρονοεξαρτώμενο διανυσματικό πεδίο $\xi\colon \mathbb{R} \times M \longmapsto M$ ανάγεται εύκολα σε ένα χρονονανεξάρτητο διανυσματικό πεδίο προσθέτοντας μία διάσταση στην πολλαπλότητα:

$$\tilde{\xi}\colon \mathbb{R} \times M \longmapsto \mathsf{T}(\mathbb{R} \times M) = \mathsf{T}\mathbb{R} \times \mathsf{T}M : (s,x) \longmapsto \tilde{\xi}(s,x) = (\mathbf{1}, \xi(s,x))$$

Ας είναι $\tilde{a} = (a_1, a_2)\colon \mathcal{D}_{\tilde{\xi}} \subseteq \mathbb{R}\times(\mathbb{R} \times M) \longmapsto \mathbb{R}\times M$ η ροή αυτού. Τότε για κάθε $(t; s, x) \in \mathcal{D}_{\tilde{\xi}}$ θα ισχύει

$$(\mathbf{1}, \xi(\tilde{a}(t;s,x))) = \tilde{\xi}(\tilde{a}(t;s,x)) = \frac{\partial}{\partial t} a(t;s,x) = \left(\frac{\partial a_1(t;s,x)}{\partial t}, \frac{\partial a_2(t;s,x)}{\partial t} \right)$$

αλλά και ότι $(0; s, x) \in \mathcal{D}_{\tilde{\xi}}$ και $\tilde{a}(0;s,x) = (a_1(0;s,x), a_2(0;s,x)) = (s,x)$. Επομένως $a_1(t;s,x) = t + s$, για κάθε $(t;s,x) \in \mathcal{D}_{\tilde{\xi}}$. Τώρα ορίζουμε $\mathcal{D}_{\xi} = \left\{ (t+s; s, x) \middle| (t;s,x) \in \mathcal{D}_{\tilde{\xi}} \right\}$ που είναι ανοιχτό και

$$a\colon \mathcal{D}_{\xi} \longmapsto \mathrm{M} : (t;s,x) \longmapsto a(t;s,x) = a_2(t-s;s,x)$$

είναι η ροή για το χρονοεξαρτώμενο ξ

3 Διανυσματική ανάλυση

1. Απόκλιση, στροβιλισμός

Ας είναι $U \subseteq \mathbb{R}^3$ κάποιο ανοιχτό και $X \in \mathfrak{X}(U)$ ένα διαφορίσιμο χρονοανεξάρτητο διανυσματικό πεδίο στο U. Γράφουμε με $\mathcal{I}(X) \ni (x,t) \longmapsto a(x,t) \in U$ τη ροή αυτού. Έστω $x \in U$ και $V \subseteq U$ περιοχή του x ώστε η ροή να ορίζεται στο $V \times (-\delta, \delta)$. Για κάθε σταθερό t η μερική απεικόνιση $V \ni y \longmapsto a_t(y) \in U$ ορίζει μια αμφιδιαφόριση από το V στο $a_t(V)$, και μάλιστα $a_0 = \mathrm{Id}$. Για επαρκώς μικρό $h \in \mathbb{R}^3$ και $t \in \mathbb{R}$ έχουμε την προσέγγιση

$$a(x+h,t) \cong x + h + X(x)t + t\nabla_h X(x) + \frac{t^2}{2}\nabla_X X(x) + \frac{1}{2}\,\mathsf{D}_x^2\, a_t(x)\cdot(h,h)$$

$$\mathsf{D}_x\, a_t(x) \cong \mathrm{Id} + t\nabla X(x)$$

ενώ

$$\mathsf{D}_t\,\mathsf{D}_x\, a(x,0) = \nabla X(x)$$

Η απεικόνιση $\mathbb{R}^3 \ni h \longmapsto \nabla_h X(x) \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$, δίνει δηλαδή τον ρυθμό μεταβολής των διαφορομορφισμών a_t στο σημείο $t=0$.

Χρησιμοποιούμε την ανάλυση

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \ni M \longmapsto \underbrace{\frac{1}{2}\left(M + M^\top\right) - \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n + \overbrace{\frac{1}{2}\left(M - M^\top\right)}^{\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})}}_{\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})} + \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n$$

Το $\frac{1}{2}\left(M+M^\top\right)-\frac{1}{n}\operatorname{tr}(M)\mathrm{I}_n$ είναι ο απειροστικός γεννήτορας ενός μετασχηματισμού που δεν έχει ίχνος και είναι συμμετρικος. Επομένως διατηρεί τον όγκο και εισάγει διατμητική παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση των ιδιοδιανυσμάτων του. Το $\frac{1}{n}\operatorname{tr}(M)\mathrm{I}_n$ είναι το μέρος του μετασχηματισμού που εξηγεί τη μεταβολή του όγκου. Τέλος το $\frac{1}{2}\left(M+M^\top\right)$ είναι ο απειροστικός γεννήτορας μιας ισομετρίας. Ιδιαιτέρως στον $\mathbb{R}^3$ ερμηνεύεται ως στροφή.

Επομένως αν το X είναι πεδίο ταχυτήτων κάποιου ρευστού για παράδειγμα, τότε ένας πολύ μικρός όγκος ρευστού V περί του x, εκτελεί τέσσερα είδη κινήσεων: Πρώτον, μία μεταφορική κίνηση που είναι η ίδια η ταχύτητα $X(x)$, δεύτερον "φουσκώνει" κατά έναν συντελεστή ίσο με την ορίζουσα $|\det\nabla X|$, τρίτον στρέφεται όσο δείχνει το αντισυμμετρικό μέρος του ∇X και τέταρτον περαμορφώνεται διατμητικά κατά άξονες όπως εξηγεί το συμμετρικό μέρος του ∇X.

Λήμμα 3.1: *Ας είναι (M,g) μία πολλαπλότητα Riemann, $\dim M=n$. Υποθέτουμε ότι (U,φ) είναι ένας χάρτης πάνω από το $p\in M$ και $\Gamma_U\in\mathsf{L}_{\mathrm{sym}}(\mathsf{T}M\times_M\mathsf{T}M;\mathsf{T}M)$ είναι το σύμβολο Christoffel. Τότε για $u\in\mathbb{R}^n$*

$$\operatorname{tr}(u\longmapsto\Gamma_U(u,v))=\frac{1}{2}\mathsf{D}\left(\ln\det g\right)\cdot v=\frac{1}{\sqrt{\det g}}\mathsf{D}\left(\sqrt{\det g}\right)\cdot v$$

Απόδειξη: Ας είναι $x=\varphi(p)$. Με $\langle\cdot,\cdot\rangle$ συμβολίζουμε το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, δηλαδη $\langle w,z\rangle=z^\top w$. Για κάθε $u,v,z\in\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\langle\Gamma_U(u,v),z\rangle&=\frac{1}{2}\Big(\big\langle(\mathsf{D}\,g(x)\cdot v)\cdot u,\ g^{-1}(x)\cdot z\big\rangle+\big\langle(\mathsf{D}\,g(x)\cdot u)\cdot v,\ g^{-1}(x)\cdot z\big\rangle-\\&\qquad-\big\langle(\mathsf{D}\,g(x)\cdot(g^{-1}(x)\cdot z))\cdot u,\ v\big\rangle\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big(\big\langle g^{-1}(x)\cdot(\mathsf{D}\,g(x)\cdot v)\cdot u,\ z\big\rangle+\big\langle\mathsf{D}(g\cdot v)(x)\cdot u,\ g^{-1}(x)\cdot z\big\rangle\\&\qquad-\big\langle((\mathsf{D}\,g\cdot v)(x)\cdot(g^{-1}(x)\cdot z))\,,\ u\big\rangle\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big(\big\langle g^{-1}(x)\cdot(\mathsf{D}\,g(x)\cdot v)\cdot u,\ z\big\rangle+\big\langle g^{-1}(x)\cdot\mathsf{D}(g\cdot v)(x)\cdot u,\ z\big\rangle\\&\qquad-\big\langle g^{-1}(x)\cdot(\mathsf{D}(g\cdot v)(x))^\top\cdot u,\ z\big\rangle\Big)\end{aligned}$$

από όπου συνάγουμε ότι

$$\Gamma_U(u,v)=\frac{1}{2}g^{-1}(x)\circ\left((\mathsf{D}\,g(x)\cdot v)+\mathsf{D}(g\cdot v)(x)-(\mathsf{D}(g\cdot v)(x))^\top\right)\cdot u$$

και έχοντας υπόψιν ότι $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(A^\top)$ για οποιονδήποτε $A\in\mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ και κάνοντας χρήση της ταυτότητας Jacobi: $\mathsf{D}\ln\det G\cdot T=\operatorname{tr}(G^{-1}T)$, για $G\in\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ και $T\in\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$

$$\operatorname{tr}(\Gamma_U(\cdot,v))=\frac{1}{2}\ \operatorname{tr}\left(g^{-1}(x)\circ\mathsf{D}\,g(x)\cdot v\right)=\mathsf{D}\ln\det g\circ\mathsf{D}\,g(x)\cdot v=\mathsf{D}\ln\det g(x)\cdot v$$

αλλά το $x=\varphi(p)$ ήταν τυχόν, αρα το αριστερό σκέλος της αποδεικτέας ισχύει σε όλο το U. //

Θα υπολογίσουμε τώρα τις δύο βασικές συνιστώσες της κινησης του διανυσματικού πεδίου.

Ορισμός 3.2: Ας είναι M μία πολλαπλότητα προσανατολισμένη, Ω η μορφή όγκου της και $X \in \mathfrak{X}(M)$. Ορίζουμε την ***απόκλιση*** του X:

$$\operatorname{div} X \colon M \longmapsto \mathbb{R} \text{ με την ιδιότητα } (\operatorname{div} X)\, \Omega = \mathcal{L}_X \Omega \text{ στο } M$$

Πρόταση 3.3: *Ας είναι (M, g) μια προσανατολισμένη πολλαπλότητα Riemann, Ω η μορφή όγκου της και $X \in \mathfrak{X}(M)$. Τότε*

$$\operatorname{div} X\, \Omega = \operatorname{tr}(Y \longmapsto \nabla_Y X)\ \Omega = \mathrm{d}(\imath_X \Omega)$$

Σε τοπικές συντεταγμένες επίσης, αν $X = \sum_{i=1}^n X^i e_i$, τότε

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(X^i \sqrt{\det g} \right)$$

Απόδειξη: Εργαζόμαστε τοπικά. Ας είναι (U, φ) ένας τοπικός χάρτης, $e_1, e_2, ..., e_m$ μία βάση του $\mathbf{F}$ και $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, ..., \mathrm{d}x_m$ η δυική αυτής. Γράφουμε για συντομία $\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n$ και $\mathrm{d}\mathbf{x}_i = (-1)^{i+1}\, \imath_{e_i}\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \cancel{\mathrm{d}x_i} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_m$. Τότε $\Omega = \sqrt{\det g}\ \mathrm{d}\mathbf{x}$, $\imath_X \Omega = \sum_{i=1}^n X^i\, \imath_{e_i} \Omega = \sum_{i=1}^m X^i \sqrt{\det g}\ \mathrm{d}\mathbf{x}_i$, $\delta_{ij}\ \mathrm{d}\mathbf{x} = (-1)^{i+1}\ \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}\mathbf{x}_i$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X \Omega &= \imath_X\ \mathrm{d}\Omega + \mathrm{d}\, \imath_X \Omega = \mathrm{d}\, \imath_X \Omega \\
&= \sum_{i=1}^m \mathrm{d}\left((-1)^{i+1} X^i \sqrt{\det g}\ \mathrm{d}\mathbf{x}_i \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^m (-1)^{i+1} \frac{\partial (X^i \sqrt{\det g})}{\mathrm{d}x_j}\ \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}\mathbf{x}_i \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(X^i \sqrt{\det g} \right) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(X^i \sqrt{\det g} \right) \Omega
\end{aligned}$$

που οδηγεί στο ζητούμενο.

Ο τύπος $\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(Y \longmapsto \nabla_Y X)\ \Omega$ είναι συνέπεια του λήμματος 3.1 και ότι η τοπική παράσταση του $\nabla_Y X$ ισούται με $\mathsf{D}\, X \cdot Y + \Gamma(Y, X)$ //

Ορισμός 3.4: Ας είναι (M, g) μία πολλαπλότητα Riemann, $n = \dim M$ και $X \in \mathfrak{X}(M)$ ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο. Ορίζουμε τον ***στροβιλισμό*** του X ως εξής

$$\operatorname{curl} X \text{ ή } \nabla \times X = \star\ \mathrm{d}(X^\flat)$$

Παράδειγμα 3.5: Ας είναι (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann διάσταση $n = \dim M$ και $X \in \mathfrak{X}(M)$ ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο. Υπολογίζουμε το $\operatorname{curl} X$. Ας είναι (U, φ) χάρτης πάνω από το $p \in U$ και έστω $x = \varphi(p)$ και g το εσωτερικό γινόμενο στον χάρτη αυτό. Γράφουμε την τοπική παράσταση του X πάλι με το ίδιο σύμβολο χάριν απλότητας.. Κατ' αρχήν βρίσκουμε το $\mathrm{d}X^\flat$. Ας είναι $u, v \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X^\flat(x) \cdot u \wedge v &= \mathsf{D} \langle gX, v \rangle (x) \cdot u - \mathsf{D} \langle gX, u \rangle (x) \cdot v \\ &= \langle \mathsf{D}(gX)(x) \cdot u, v \rangle - \langle \mathsf{D}(gX)(x) \cdot v, u \rangle\end{aligned}$$

Μπορούμε να γράψουμε σε μία βάση:

$$\mathrm{d}X^\flat(x) = \sum_{i<j} R^{ij} \, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \,, \quad R^{ij} = \left\langle \mathsf{D}(gX)(x) \cdot e_i, e_j \right\rangle - \left\langle \mathsf{D}(gX)(x) \cdot e_j, e_i \right\rangle$$

Θέτουμε $\mathbf{x} = e_1 \wedge ... \wedge e_n$, $\mathbf{x}_{ij} = \imath^{\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j} \, \mathbf{x} = (-1)^{i+j-1} e_1 \wedge ... \wedge \not{e}_i \wedge ... \wedge \not{e}_j \wedge ... \wedge e_n$, για $i < j$, , οπότε και θα έχουμε ότι $e_i \wedge e_j \wedge \mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}$ και $e_k \wedge e_l \wedge \mathbf{x}_{ij} = 0$ αν $\{k, l\} \neq \{i, j\}$. Επομένως

$$\star \, \mathrm{d}X^\flat(x) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \, \sum_{i<j} R^{ij} \, \mathbf{x}_{ij}$$

εφόσον

$$e_i \wedge e_j \wedge \star \, \mathrm{d}X^\flat(x) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \, R^{ij} \, \mathbf{x} = \mathrm{d}X^\flat(x) \cdot e_i \wedge e_j \, \Omega^\sharp$$

Ειδικά στον R^3 τυγχάνει να έχουμε ότι $\star$ (2-μορφή) = διάνυσμα, οπότε και

$$\begin{aligned}\star \, (\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2) &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} e_3 \\ \star \, (\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3) &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} e_1 \\ \star \, (\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1) &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} e_3\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.6: Ας είναι (M, g) πολλαπλότητα Riemann διάστασης $n = \dim M$ και $X \in \mathfrak{X}(M)$. Τότε ισχύει

$$\nabla_X X = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \|X\|^2 + \left(\imath_X \, \mathrm{d}X^\flat\right)^\sharp$$

Ας είναι $p \in M$. Αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο Z ορισμένο σε περιοχή του p,

$$\langle \nabla_X X, Z \rangle_g = \frac{1}{2} \left\langle \operatorname{grad} \|X\|^2 , Z \right\rangle_g + \mathrm{d}X^\flat \cdot X \wedge Z$$

Υπολογίζουμε,

$$\frac{1}{2}\left\langle \operatorname{grad}\|X\|^2, Z\right\rangle_g - \langle \nabla_X X, Z\rangle_g = \frac{1}{2} Z\langle X, X\rangle - \frac{1}{2}\Big(X\langle X, Z\rangle_g + X\langle X, Z\rangle_g - Z\langle X, X\rangle_g$$

$$- \langle [X, Z], X\rangle_g - \langle [X, Z], X\rangle - \langle [X, X], Z\rangle\Big)$$

$$\begin{aligned} &= -\left(X\langle X, Z\rangle - Z\langle X, X\rangle - \langle X, [X, Z]\rangle\right) \\ &= -\,\mathrm{d}X^\flat \cdot X \wedge Z \end{aligned}$$

που είναι ακριβώς το ζητούμενο.

Ειδικά όταν $n = 3$, έχουμε ότι για όλα τα Z όπως πιο πάνω

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{d}X^\flat \cdot X \wedge Z\right)\Omega^\sharp &= X \wedge Z \wedge \star\, \mathrm{d}X^\flat = -Z \wedge (X \wedge \operatorname{curl} X) \\ &= -Z \wedge \star\star\,(X \wedge \operatorname{curl} X) \qquad (\star\star = \mathrm{Id}) \\ &= -\left(\star\,(X \wedge \operatorname{curl} X) \cdot Z\right)\ \Omega^\sharp \\ &= -\left\langle \star\,(X \wedge \operatorname{curl} X)^\sharp, Z\right\rangle\ \Omega^\sharp \\ &= -\langle X \times \operatorname{curl} X, Z\rangle\ \Omega^\sharp \end{aligned}$$

επομένως

$$\nabla_X X = \frac{1}{2}\operatorname{grad}\|X\|^2 - X \times \operatorname{curl} X$$

Παράδειγμα 3.7: Στον $\mathbb{R}^n$ με την τετριμμένη μορφή όγκου $\Omega = \mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$, ας είναι $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο $X(x) = A \cdot x$. Η απεικόνιση

$$a\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^n : (x, t) \longmapsto a(x, t) = \exp(At) \cdot x$$

Τότε $\dfrac{\partial}{\partial t} a(x, t) = A \cdot \exp(At) \cdot x = X(a(x, t))$ και $a(x, 0) = x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Επομένως η a είναι η ροή του X. Θα είναι $\operatorname{div} X = \operatorname{tr} A$.

Θα προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε τον στροβιλισμό, σε αυτή την περίπτωση, όπου εργαζόμαστε στον $\mathbb{R}^n$, όπου $g = \mathrm{Id}$. Όπως είδαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα,

$$\mathrm{d}X^\flat \cdot u \wedge v = \langle \mathsf{D}\, X \cdot u, v\rangle - \langle \mathsf{D}\, X \cdot v, u\rangle = \left\langle (A - A^\top) \cdot u, v\right\rangle$$

Γράφουμε $R = A - A^\top$. Τότε $R \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$. Μπορούμε να επιλέξουμε μία ορθοκανονική βάση $\beta : f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbb{R}^n$ ώστε ο πίνακας της R να γράφεται

$$[R; \beta, \beta] = \begin{bmatrix} \lambda_1 J & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda_2 J & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r J & \\ & & & & \mathbf{0}_{(n-2r)\times(n-2r)} \end{bmatrix} \qquad \text{όπου } J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Κάθε block 2×2 $\lambda_i J$ αντιστοιχεί σε μία στροφή ρυθμού λ_i στο επίπεδο που ορίζουν τα f_{2i-1}, f_{2i}. Έτσι έχουμε ότι $R = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \; f_{2i-1} \wedge f_{2i}^\flat$ και επομένως $\mathrm{d}X^\flat = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \; f_{2i-1}^\flat \wedge f_{2i}^\flat$, δηλαδή

$$\star \; \mathrm{d}X^\flat = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \; f_1 \wedge \dots \wedge f_{2i-2} \wedge f_{2i+1} \wedge \dots \wedge f_n$$

όπου γεωμετρικά, τα διανύσματα $f_1, ..., f_{2i-2}, f_{2i+1}, ..., f_n$ παραμένουν αναλλοίωτα από την στροφή που παράγει το αντίστοιχο 2×2 block του R. Ειδικά στην περίπωση του $\mathbb{R}^3$, όπου $\star \; \mathrm{d}X^\flat$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο, το διάνυσμα $\star \; \mathrm{d}X^\flat = \operatorname{curl} X$ είναι ο άξονας της περιστροφής που παράγει ο R, και η αλγεβρική του τιμή είναι το μέτρο του ρυθμού της στροφής, κατά τη θετική ή αρνητική φορά αναλόγως το πρόσημο.

Μπορεί κανείς να ελέγξει εύκολα, ότι στην περίπτωση του $\mathbb{R}^3$, πως για τον πίνακα $R = r \begin{bmatrix} 0 & -\cos\theta & \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ και το $z = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, το $u = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ και το $v = \begin{bmatrix} -\cos\theta\cos\varphi \\ -\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει ότι τα $\{u, v, z\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, $Ru = v$, $Rv = -u$ και $z \in \ker R$. O R παράγει στροφή περί τον z, περιστρέφοντας το u προς το v. Γενικότερα, σε ένα διάνυσμα $z = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ αντιστοιχεί ένας μετασχηματισμός με πίνακα $[z]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$ και το εξωτερικο γινόμενο $u \times v$ αντιστοιχεί στην πραγματικότητα στον μεταθέτη των $[[u]_\times, [v]_\times]$

Ορισμός 3.8: Ένα διανυσματικό πεδίο X ονομάζεται ***αστρόβιλο*** αν $\operatorname{curl} X = 0$.

Πρόταση 3.9: *Ας είναι (M, g) πολλαπλότητα Riemann μη κενή, απλά συνεκτική και $X \in \mathfrak{X}(M)$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(1) $\operatorname{curl} X = 0$

(2) $\exists f \colon M \longmapsto \mathbb{R}$ *διαφορίσιμη ώστε* $X = \operatorname{grad} f$.

Απόδειξη: Η συνεπαγωγή (2) $\Longrightarrow$ (1) είναι εύκολη:

$$\operatorname{curl} X = \operatorname{curl} \operatorname{grad} f = \star \; \mathrm{d}(\operatorname{grad} f)^\flat = \star \; \mathrm{d} \; \mathrm{d}f = 0$$

Αντιστρόφως, από το (1) στο 2. Είναι συνέπεια του θεωρήματος Stokes. Ας είναι $a \in M$ τυχαίο αλλά σταθερό. Τότε για κάθε $p \in M$ υπάρχει μία καμπύλη διαφορίσιμη* $\gamma \colon [0, 1] \longmapsto$ M ώστε $\gamma(0) = a$ και $\gamma(1) = p$. Ορίζουμε $f(p) = \int_\gamma X^\flat$. Ο ορισμόςα αυτός είναι καλός, γιατί

* Η υπόθεση της συνεκτικότητας επιβεβαιώνει μόνο τη συνέχεια της καμπύλης, αλλά εργαζόμενοι τοπικά σε χάρτες μπορούμε να κάνουμε αυτή την καμπύλη ισοδύναμη προς κάποια διαφορίσιμη

αν $\gamma_1\colon [0,1] \longmapsto$ M είναι μια άλλη καμπύλη με την ιδια ιδιότητα, ότι $\gamma_1(0) = a, \gamma_1(1) = p$ τότε η καμπύλη $\gamma - \gamma_1$ είναι ομοτοπική προς το $0^\dagger$ μέσω μίας ομοτοπίας $h\colon [0,1] \times [0,1] \longmapsto M$ ώστε $h_0 = \gamma - \gamma_1$ και $h_1 = 0$ και από το θεώρημα του Stokes θα ισχύει

$$\int_\gamma X \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_{\gamma_1} X \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_\gamma X^\flat - \int_{\gamma_1} \mathrm{X}^\flat = \int_{\partial h([0,1]\times[0,1])} \mathrm{X}^\flat = \int_{h([0,1]\times[0,1])} \mathrm{dX}^\flat = 0$$

και επομένως η τιμή $f(p)$ είναι ανεξάρτητη της επιλεγείσας καμπύλης. Το ότι η f που ορίσαμε είναι διαφορίσιμη είναι επανάληψη της απόδειξης του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού και το παραλείπουμε. //

Σημείωση 3.10: Στην απόδειξη του πιο πάνω θεωρήματος η κατεύθυνση (2) $\Longrightarrow$ (1) δεν απαιτεί καμμία προϋπόθεση για τη συνεκτικότητα της M και ισχύει γενικά. Δηλαδή για κάθε διαφορίσιμη απεικόνιση $f\colon M \longmapsto \mathbb{R}$ ισχύει $\operatorname{curl}\operatorname{grad} f = 0$.

2. Λαπλασιανή

Ορισμός 3.11: Ας υποθέσουμε ότι (M, g) είναι μια C^p πολλαπλότητα Riemann και $f\colon M \longmapsto \mathbb{R}$ μία τουλάχιστον C^2 συνάρτηση. Ορίζουμε την **λαπλασιανή** της f,

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f$$

Μία C^2 συνάρτηση f που ικανοποιεί $\Delta f \geq 0$ (αντ. ≤ 0) ονομάζεται υποαρμονική (αντ. υπεραρμονική). Μία συνάρτηση που είναι υποαρμονική και υπεραρμονική ταυτόχρονα ονομάζεται αρμονική.

Σημείωση 3.12 (λαπλασιανή σε τοπικές συντεταγμένες): Ας είναι (M, g) μία πολλαπλότητα Riemann, $m = \dim M$ και $f\colon M \longmapsto \mathbb{R}$ μία C^2 συνάρτηση. Τότε σε τοπικές συντεταγμένες, πάνω από έναν χάρτη (U, φ) η λαπλασιανή έχει τοπική παράσταση

$$(\Delta f)_\varphi = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sqrt{\det g}\ \ \nabla f \cdot g^{-1} \cdot e_i \right\} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sqrt{\det g}\ \ g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\}$$

παρατηρούμε ότι τοπικά (ίσως περιορίζοντας περαιτέρω το ανοιχτό U), η λαπλασιανή είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης.

Ορισμός 3.13:Ας είναι $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ένα ανοιχτό συνεκτικό και $A = \left(a_{ij}\right)_{ij=1}^m \colon U \longmapsto \mathbb{R}^{m\times m}$ ώστε $A(x), x \in U$ να είναι συμμετρικός, $b = (b_i)_{i=1}^m \colon U \longmapsto \mathbb{R}^m$, $c\colon U \longmapsto \mathbb{R}$. Μία απεικόνιση

$$C^2(U) \ni u \longmapsto Lu = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, \mathsf{D}_{ij}\, u + \sum_{i=1}^{m} b_i\, \mathsf{D}_i\, u + cu$$

$\dagger$ και πάλι η ομοτοπία μπορεί να είναι διαφορίσιμη ονομάζεται γραμμικός **διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης**. Ο L ονομάζεται **ελλειπτικός** αν υπάρχει $\lambda\colon U \longmapsto (0,+\infty)$ ώστε για τον πίνακα A ισχύει $\langle A(x)\xi,\xi\rangle \geq \lambda(x)\cdot\|\xi\|^2,\ x\in U, \xi\in\mathbb{R}^m$ και $\sup\limits_U \dfrac{\|b\|}{\lambda} < +\infty$. Ο L ονομάζεται αυστηρά ελλειπτικός αν είναι ελλειπτικός και αν $\inf\limits_{x\in U}\lambda(x) > 0$. Ο L ονομάζεται ομοιόμορφα ελλειπτικός αν είναι αυστηρά ελλεπτικός και αν υπάρχει $\Lambda\colon U \longmapsto (0,+\infty)$ ώστε $\sup\limits_{x\in U}\dfrac{\Lambda(x)}{\lambda(x)} < +\infty$ και $\lambda(x)\|\xi\|^2 \leq \langle \mathrm{A}(x)\xi,\xi\rangle \leq \Lambda(x)\|\xi\|^2$ για $x\in U, \xi\in\mathbb{R}^m$.

Τα παρακάτω δύο αποτελέσματα είναι από τη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων και είναι γνωστά ως "ασθενής αρχή του μεγίστου". Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο κλασσικό βιβλίο [**GT98**]

Πρόταση 3.14 (ασθενής αρχή μεγίστου): *Ας είναι $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό φραγμένο και L είναι ένας ελλειπτικός τελεστής με $c = 0$ και για κάποια $u \in C^2(U)\cap C(\overline{U})$ ισχύει*

$$Lu \geq 0 \quad (\text{αντ. } Lu \leq 0)$$

τότε το μέγιστο (αντ. ελάχιστο) της u επιτυγχάνεται στο ∂U, δηλαδή

$$\sup_U u = \sup_{\partial U} u \quad (\text{αντ. } \inf_U u = \inf_{\partial U} u)$$

Πόρισμα 3.15: *Ας είναι $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό συνεκτικό φραγμένο και L είναι ένας ελλειπτικός τελεστής με $c \leq 0$ και $u \in C^2(U)\cap C(\overline{U})$ ώστε*

$$Lu \geq 0 \quad (\text{αντ. } Lu \leq 0)$$

Τότε για την $u^+ = \max(u,0)$ (αντ. $u^- = \min(u,0)$) ισχύει

$$\sup_U u \leq \sup_{\partial U} u^+ \quad (\text{αντ. } \inf_U u \geq \inf_{\partial U} u^-)$$

Ιδιαιτέρως, αν $Lu = 0$ τότε $\sup\limits_U |u| = \sup\limits_{\partial U}|u|$

Απόδειξη: Αν $u \leq 0$ δεν υπάρχει να δειχθεί κάτι. Αλλιώς το $U^+ = [u>0]\cap U$ είναι μη κενό ανοιχτό και στο U^+ ισχύει $L_0 u \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{i,j=1}^m a_{ij}\,\mathsf{D}_{ij}\,u + \sum\limits_{i=1}^m b_i\,\mathsf{D}_i\,u \geq -cu \geq 0$ επομένως εφαρμόζεται η προηγούμενη πρόταση και παίρνουμε ότι το maximum της u στο $\overline{U}^+$ επιτυγχάνεται στο ∂U^+. Επειδή όμως $\partial U^+ = \overline{U}^+ \cap \overline{(U^+)^{\complement}} \subseteq [u \geq 0] \cap \overline{(U^{\complement} \cup [u \leq 0])} \subseteq \partial U \cup [u = 0]$ και επειδή το μέγιστο της u^+ είναι αναγκαστικά > 0, τότε αυτό θα παρουσιάζεται στο ∂U. //

Η επόμενη πρόταση είναι γνωστή ως ισχυρή αρχή του μεγίστου:

Πρόταση 3.16 (ισχυρή αρχή μεγίστου): *Ας είναι $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό L είναι ένας ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής, $c = 0$. Ας είναι επιπλέον και $u \in C^2(U)$ ώστε $Lu \geq 0$ στο U (αντ. $Lu \leq 0$). Αν η u επιτυγχάνει μέγιστο (αντ. ελάχιστο) σε [εσωτερικό] σημείο του U τότε είναι σταθερη.*

Αν $c \leq 0$ και ο λόγος $\dfrac{c}{\lambda}$ είναι φραγμένος, τότε η u δε μπορεί να επιτύχει μη αρνητικό μέγιστο (αντ. μη θετικό ελάχιστο) στο [εσωτερικό] του U

Πόρισμα 3.17: *Ας είναι (M, g) συνεκτική πολλαπλότητα Riemann χωρίς σύνορο και $u\colon M \longmapsto \mathbb{R}$ μία υποαρμονική (αντ. υπεραρμονική) συνάρτηση. Αν η u επιτυγχάνει μέγιστο (αντ. ελάχιστο) τότε είναι σταθερή.*

Απόδειξη: Ας είναι $u^* = u(a) = \sup\limits_M u$. Θέτουμε $L = [u = u^*]$. Τότε το L είναι κλειστό μη κενό. Δείχνουμε ότι είναι και ανοιχτό: Ας είναι $x \in L$. Παίρνουμε έναν τοπικό χάρτη (U, φ) πάνω από το x. η τοπική παράσταση της Δ είναι –ενδεχομένως περιορίζοντας το U, ένας ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής, ισχύει $\Delta u \geq 0$ και από την ισχυρή αρχή του μεγίστου ισχύει ότι σε περιοχή του $\varphi(x)$ η $u \circ \varphi^{-1}$ είναι σταθερή και ίση με u^*. //

Πρόταση 3.18: *Ας είναι (M, g) μία προανατολισμένη πολλαπλότητα Riemann, με σύνορο ∂M (ενδεχομένως κενό), με μορφή όγκου Ω (προερχόμενη από το εσωτερικό γινόμενο g) και $X\colon M \longmapsto \mathsf{T}M$ ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο (τουλάχιστον C^2). Τότε*

$$\int_{\partial M} \langle \mathbf{n}, X\rangle\, \Omega_0 = \int_{\partial M} \imath_X\, \Omega = \int_M \operatorname{div} X\, \Omega$$

($\mathbf{n}$ είναι το κάθετο διάνυσμα που δείχνει στο εξωτερικό της M και Ω_0 η επαγόμενη μορφή όγκου στο ∂M)

Απόδειξη: Είναι το θεώρημα του Stokes, καθώς $\mathcal{L}_X\, \Omega = \mathrm{d}\, \imath_X\, \Omega = \operatorname{div} X\, \Omega$ //

Πόρισμα 3.19: *Ας είναι (M, g) μία προανατολισμένη πολλαπλότητα Riemann, με σύνορο ∂M (ενδεχομένως κενό). Ας είναι $f, g\colon M \longmapsto \mathbb{R}$ δύο C^3 συναρτήσεις. Τότε $\operatorname{div}(g \operatorname{grad} f) = \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle + g\, \Delta f$ και*

$$\int_{\partial M} g\, \imath_{\operatorname{grad} f}\, \Omega = \int_M \left(\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle + g \Delta f\right) \Omega$$

Απόδειξη: Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(g \operatorname{grad} f)\Omega &= \mathrm{d}\left(g\, \imath_{\operatorname{grad} f}\, \Omega\right) = \mathrm{d}g \wedge \imath_{\operatorname{grad} f}\, \Omega + g\ \mathrm{d}\, \imath_{\operatorname{grad} f}\, \Omega \\
&= (\,\mathrm{d}g \cdot \operatorname{grad} f)\Omega + g \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)\, \Omega \\
&= (\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle + g\, \Delta f)\, \Omega
\end{aligned}$$

Ο ζητούμενος τύπος είναι συνέπεια του θεωρήματος της απόκλισης //

Το επόμενο θεώρημα επιβεβαιώνει ότι δεν υπάρχουν υποαρμονικές συναρτήσεις σε συμπαγείς πολλαπλότητες και οφείλεται στον Hopf:

Πόρισμα 3.20: *Ας είναι (M, g) μία συμπαγής συνεκτική προανατολισμένη πολλαπλότητα Riemann χωρίς σύνορο και $u\colon M \longmapsto \mathbb{R}$ μία C^3 υποαρμονική συνάρτηση. Τότε $u =$ σταθερά.*

Απόδειξη: Υπολογίζουμε ότι $\displaystyle\int_M \Delta u\, \Omega = \int_{\partial M} \imath_{\operatorname{grad} u}\, \Omega = 0$, εφόσον $\partial M = \emptyset$. Επειδή η Δu έχει σταθερό πρόσημο και είναι συνεχής, πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $\Delta u = 0$, δηλαδή η u

είναι αρμονική. Επιπλέον υπολογίζουμε ότι $\Delta(u^2/2) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(u^2/2)) = \operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) = \|\operatorname{grad} u\|^2 + u\Delta u = \|\operatorname{grad} u\|^2$. Επομένως

$$\int_M \|\operatorname{grad} u\|^2 \, \Omega = \int_{\partial M} \imath_{\operatorname{grad}(u^2/2)} \, \Omega = 0$$

που συνεπάγεται ότι $\operatorname{grad} u \equiv 0$ παντού στο M. Η συνεκτικότητα της M αποδεικνύει το ζητούμενο.

Σημείωση 3.21: Επομένως δεν υπάρχουν μη σταθερές υποαρμονικές (ή και υπεραρμονικές: το προηγούμενο θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση υπεραρμονικής συνάρτησης) συναρτήσεις σε συμπαγείς πολλαπλότητες χωρίς σύνορο. Σε μία συμπαγή πολλαπλότητα με σύνορο όμως κάθε υποαρμονική συνάρτηση επιτυγχάνει το μέγιστό της στο σύνορο. Όταν η πολλαπλότητα είναι μη-συμπαγής χρειάζονται περαιτέρω προϋποθέσεις για αντίστοιχα συμπεράσματα.

Ισχύει όμως το εξής [**Schoen-Yau-I-1994**]:

Πρόταση 3.22: *Ας είναι (M, g) μία πλήρης πολλαπλότητα Riemann και $u\colon M \longmapsto \mathbb{R}$ μία μη αρνητική, υποαρμονική συνάρτηση ώστε $u \in L^p(M)$ για $p > 1$. Τότε η u είναι σταθερή.*

4 Υδροδυναμική

Οι φυσικές διαστάσεις των υλικών σωμάτων δεν παραμένουν σταθερές καθώς δύναμη ασκείται στα σώματα. Τα υλικά σώματα των οποίων οι διαστάσεις μεταβάλλονται χωρίς όριο κάτω από την επίδραση δυνάμεων ονομάζονται**ρευστά** και η απεριόριστη μεταβολή των φυσικών τους διαστάσεων ονομάζεται**ροή**.

1. Εξίσωση κίνησης του ρευστού

Σε όρους μαθηματικών ένα ρευστό περιγράφεται από τον γεωμτερικό τόπο των σημείων από τα οποία αποτελείται. Ο γεωμετρικός τόπος αυτός μπορεί να είναι σταθερός στο χρόνο ή και όχι. Για την περιγραφή της κίνησης του ρευστού θεωρούμε ότι αρκεί το πεδίο των ταχυτήτων q και η συνάρτηση πυκνότητας ϱ. Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να περιγράψουμε το υγρό μέσω μίας m–διάστατης διαφορικής πολλαπλότητας M. Τότε το πεδίο των ταχυτήτων q είναι ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο (πιθανώς χρονοεξαρτώμενο) $q\colon \mathbb{R}\times M \longmapsto \mathsf{T}M$, η πυκνότητα είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $\varrho\colon \mathbb{R}\times M \longmapsto \mathbb{R}$, Υποθέτουμε ότι η πολλαπλότητα M είναι εφοδιασμένη με εσωτερικό γινόμενο g, είναι προσανατολισμένη και έχει στοιχείο όγκου Ω.

Υποθέτουμε ότι ϱ, q είναι επαρκώς ομαλά ώστε η $\varrho\Omega$ να είναι διαφορίσιμη m-μορφή και το πεδίο q να έχει ροή $a\colon \mathbb{R}\left(\mathbb{R}\times M\right) \longmapsto M$.

Σε αντίθεση με την κλασσική μηχανική όπου μελετώνται οι συνιστώσες της κίνησης (ταχύτητα και ορμή) σε κάθε ζεύγος χρόνου-θέσης, στη Λαγκρανζιανή μηχανική, ένα υλικό σημείο παρακολουθείται καθ' όλη την πορεία της τροχιάς του. Έτσι ένα σημείο ενός συστήματος που ξεκίνησε τη στιγμή s από το σημείο x, ακολουθεί τροχιά $t \longmapsto a(t;s,x)$ ώστε $a'(t;s,x) = q(t, a(t;s,x))$. Η ροή του q είναι ουσιαστικά η αλλαγή συστήματος από τις Λαγκρανζιανές συντεταγμένες (configuration space) στις κλασσικές. Θα γράφουμε $a_{t,s}\colon M \longmapsto M : x \longmapsto a_{t,s}(x) = a(t;s,x)$ και $\mathcal{D}_{t,s}(q) = \{x \in M : (t;s,x) \in \mathcal{D}_q\}$. Όταν το s εννοείται εύκολα, θα γράφουμε a_t αντί του $a_{t,s}$ και $\mathcal{D}_t(q)$ αντί $\mathcal{D}_{t,s}(q)$.

Θα διατυπώσουμε στη συνέχεια μερικές βασικές αρχές που διέπουν την κίνηση του ρευστού.*

Πρόταση 4.1: *Για το ρευστό ισχύει η* ***εξίσωση της συνέχειας****: Για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$*

$$a^*_{t,s}\,(\varrho\,\Omega) = \varrho\Omega\,, \qquad \text{στο } \mathcal{D}_{t,s}(q)$$

Απόδειξη: Ας είναι $V \subseteq M$ ένας οποιοσδήποτε όγκος μέσα στη M. Ο V μπορεί να ακολουθήσει τη ροή του ρευστού, ως εξής $t \longmapsto a_t(V)$. Απαιτούμε η μάζα που περιέχεται στον $a_t(V)$ να παραμένει σταθερή δηλαδή

$$\int_V \varrho\Omega = \int_{a_t(V)} \varrho\Omega = \int_V a^*_t\,(\varrho\Omega)$$

Όμως το V ήταν τυχόν επομένως έχουμε το ζητούμενο. //

Πόρισμα 4.2: *Η εξίσωση της συνέχειας, στην χρονονοεξαρτώμενη περίπτωση, σε διαφορική μορφή γίνεται:*

$$\frac{\mathrm{D}(\varrho\Omega)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{D}\,\varrho}{\mathrm{d}t} + \varrho\ \operatorname{div} q\right)\Omega = 0$$

Απόδειξη: Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} a^*_{t,s}(\varrho(t,\cdot)\Omega)\Big|_{t=s}(x) = \frac{\partial}{\partial t}\varrho(t, a(t;s,x))\ a^*_{t,s}\Omega\Big|_{t=s}(x) \\ &= \left(\frac{\partial\varrho}{\partial t}(s,x) + \mathrm{d}\varrho(s,x)\cdot q(s,x) + \operatorname{div} q\right)\Omega \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. //

Πρόταση 4.3: *Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής $M = q\varrho\Omega$ είναι*

$$\frac{\mathsf{D}\,M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathsf{D}\,q}{\mathrm{d}t}\varrho\Omega$$

Απόδειξη: Έχουμε $\dfrac{\mathsf{D}\,M}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathsf{D}(q\varrho\Omega)}{\mathrm{d}t} = q\,\dfrac{\mathsf{D}(\varrho\Omega)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathsf{D}\,q}{\mathrm{d}t}\,\varrho\Omega = 0 + \dfrac{\mathsf{D}\,q}{\mathrm{d}t}\,\varrho\Omega$ //

Ορισμός 4.4: Η κάθετη δύναμη που ασκείται ανά μονάδα επιφάνειας εντός ρευστού ονομάζεται ***πίεση***.

* Ο αναγνώστης ας διαχωρίσει την έννοια της ροής όπως αυτή ορίστηκε ως “παραμόρφωση του ρευστού” και της ροής ενος διανυσματικού πεδίου.

Σημείωση 4.5: Η πίεση είναι μία [διαφορίσιμη] απεικόνιση $p\colon M \longmapsto \mathbb{R}$. Αν δοθεί (αρκετά μικρή) επιφάνεια $\sigma \in \bigwedge^2 \mathsf{T}_x M$ για κάποιο $x \in M$, τότε η δύναμη που ασκείται σε αυτή την επιφάνεια είναι $\mathbf{F} = p(x)\mathbf{n} \;\imath_{\mathbf{n}}\,\Omega \cdot \sigma$, όπου $\mathbf{n}$ το κάθετο μοναδιαίο στην προσανατολισμένη επιφάνεια σ. Αν θελήσουμε να δούμε τη δύναμη ως διάνυσμα του T^*M, τότε για κάθε $u \in \mathsf{T}_x M$ θα έχουμε ότι $\mathbf{F} \cdot u = p(x)\,\imath_u\,\Omega \cdot \sigma$.

Πρόταση 4.6: *Η πυκνότητα δύναμης που ασκείται ανά μονάδα μάζας εξ' αιτίας της πίεσης ενός ρευστού είναι*

$$-\frac{\operatorname{grad} p}{\varrho}\,\Omega$$

Απόδειξη: Ας είναι $x \in M$ και $u \in \mathsf{T}_x M$. Επεκτείνουμε σε ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο X τοπικά, σε κάποια περιοχή U του x, ώστε $X(x) = u$ και $\nabla X(x) = 0$. Τότε για $V \subseteq U$, η συνολική δύναμη που ασκείται στον όγκο V εξαιτίας της πίεσης, υφίσταται μονο στο σύνορο ∂V και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot X &= \int_{\partial V} -p \;\imath_X\,\Omega && \text{(Το $-$ γιατί το ρευστό ασκεί δύναμη από την εξω πλευρά)}\\
&= \int_V -\operatorname{div}(pX)\;\Omega = \int_V (-\;\mathrm{d}p \cdot X - p \operatorname{div} X)\,\Omega\\
&= \int_V (\langle -\operatorname{grad} p, X\rangle - p \operatorname{div} X)\,\Omega
\end{aligned}$$

Όμως $\nabla X(x) = 0$, άρα $\displaystyle\lim_{|V|\to 0} \frac{1}{|V|} \int_V p \operatorname{div} X\;\Omega = 0$ και άρα η πυκνότητα δύναμης ανά μονάδα μάζας στο x εξ' αιτίας της πίεσης είναι $-\operatorname{grad} p(x)/\varrho$ //

Πόρισμα 4.7: *Αν υποθέσουμε ότι το ρευστό κινείται χωρίς εσωτερική τριβή,* τότε η εξίσωση της κινησης είναι*

$$\frac{\mathrm{D}\,q}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{F} = -\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p + \mathbf{F}_{\text{εξωτ.}} \tag{M1}$$

$$\frac{\mathrm{D}(\varrho\,\Omega)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{C}$$

Τώρα εξετάζουμε τις μεταβολές της κινητικής ενέργειας ενός ρευστού. Έχουμε υπ' όψιν ότι η δύναμη της πίεσης που κινεί μια επιφάνεια S με ταχύτητα q έχει πυκνότητα ισχύος $p\;\imath_q\,\Omega$ και συνολική ισχύ πάνω στην S $\displaystyle\int_S p\;\imath_q\,\Omega$.

* *μηδενικό ιξώδες*

Πρόταση 4.8: *Υποθέτουμε ότι το ρευστό κινείται χωρίς την επίδραση εξωτερικών (συντηρητικών και μη) δυνάμεων. Τότε η κινητική ενέργεια στον όγκο V τη χρονική στιγμή t,* $T(t,V) = \displaystyle\int_{a_{t,s}(V)} \frac{\varrho}{2}\, \langle q, q\rangle\ \Omega$, *ικανοποιεί*

$$\frac{\partial T}{\partial t}(s,V) = -\int_V \mathrm{d}p \cdot q\ \Omega = -\int_{\partial V} p\ \imath_q\, \Omega + \int_V p\ \frac{\mathrm{D}\,\Omega}{\mathrm{d}t}$$

ή σε διαφορική μορφή

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\varrho}{2}\, \langle q, q\rangle\ \Omega\Big) = -\, \mathrm{d}p \cdot q\ \Omega = -\, \mathrm{d}\big(p\ \imath_q\, \Omega\big) + p\frac{\mathrm{D}\,\Omega}{\mathrm{d}t}$$

Απόδειξη: Εργαζόμαστε κατ' αρχήν τοπικά:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\varrho}{2}\, \langle q, q\rangle\ \Omega\Big) &= \frac{\mathrm{D}(\varrho\,\Omega)}{\mathrm{d}t}\ \frac{1}{2}\, \langle q, q\rangle + \Big\langle \frac{\mathrm{D}\, q}{\mathrm{d}t}\,, q\Big\rangle\ \varrho\,\Omega = \Big\langle \frac{\varrho\ \mathrm{D}\, q}{\mathrm{d}t}\,, q\Big\rangle\ \Omega \\ &= \langle -\operatorname{grad} p\,, q\rangle\,\Omega = -\ \mathrm{d}p \cdot q\ \Omega = -\ \mathrm{d}p \wedge \imath_q\,\Omega \\ &= -\ \mathrm{d}\big(p\ \imath_q\,\Omega\big) + p\ \mathrm{d}\,\imath_q\,\Omega = -\ \mathrm{d}\big(p\ \imath_q\,\Omega\big) + p\frac{\mathrm{D}\,\Omega}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Στο ολοκλήρωμα τώρα, για $t = s$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t}(s,V) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{a_t(V)} \frac{\varrho}{2}\, \langle q, q\rangle\ \Omega\,\Bigg|_{t=s} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} a_t^*\Big(\frac{\varrho}{2}\, \langle q, q\rangle\ \Omega\Big)\Bigg|_{t=s} \\ &= \int_V \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\Big\{\frac{\varrho}{2}\, \langle q, q\rangle\ \Omega\Big\}\Bigg|_{t=s} \\ &= -\int_V \mathrm{d}p \cdot q\ \Omega = -\int_V \mathrm{d}\big(p\ \imath_q\,\Omega\big) + \int_V p\ \frac{\mathrm{D}\,\Omega}{\mathrm{d}t} \\ &= -\int_{\partial V} p\ \imath_q\,\Omega + \int_V p\ \frac{\mathrm{D}\,\Omega}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. //

Ορισμός 4.9: Η ενέργεια που αποθηκεύει ένα ρευστό εξ' αιτίας της μη μεταφορικής κινησης των σωματιδίων που το αποτελούν ονομάζεται ***εσωτερική ενέργεια*** του ρευστού.

Σημείωση 4.10: Η εσωτερική ενέργεια δηλαδή, ενός ρευστού που ηρεμεί σε μακροσκοπικό επίπεδο, είναι ανάλογη της ποσότητας ύλης (moles) που περιέχει και της θερμοκρασίας του. Η εσωτερική ενέργεια ενός συστήματος συμβολίζεται με U, ενώ στην περίπτωση ρευστού, μας ενδιαφέρει η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας e και θα ισχύει ότι αυτή, στον όγκο V, είναι ίση με $U = \displaystyle\int_V \varrho e\ \Omega$.

Πόρισμα 4.11: *Αν υποθέσουμε ότι ένα ιδανικό ρευστό κινείται σε θερμικά απομονωμένο περιβάλλον ανταλλάσοντας έργο με το περιβάλλον του μέσω του συνόρου του, τότε*

$$\varrho\ \frac{\mathrm{D}\, e}{\mathrm{d}t}\ \Omega = -p\ \frac{\mathrm{D}\,\Omega}{\mathrm{d}t} \tag{E}$$

Απόδειξη: Ας είναι V ένας τυχών όγκος μέσα στο ρευστό, $T(t,V)$ η κινητική ενέργεια σε αυτόν τον όγκο του ρευστού, $U(t,V)$ η εσωτερική ενέργεια του ρευστού και $P(t,V)$ η ισχύς που μεταβιβάζεται από το ρευστό στο περιβάλλον του μέσω του συνόρου. Μπορούμε να θεωρήσουμε απομονωμένο αυτόν τον όγκο από το υπόλοιπο ρευστό και να εξετάσουμε τη μεταβολή στην ενέργεια μεταξύ του όγκου V και του υπόλοιπου ρευστού. Τότε $\dot{U}+\dot{T}=P(t,V)$. Επίσης $P(t,V)=-\int_{\partial V} p\ \imath_q \Omega$. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $\dot{T}(s,V)=P(s,V)+\int_V p\ \frac{\mathrm{D}\,\Omega}{\mathrm{d}t}$, επομένως $\dot{U}(s,V)=-\int_V p\ \frac{\mathrm{D}\,\Omega}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=s}$. Όμως $\dot{U}(s,V)= \frac{\partial}{\partial t}\int_{a_t(V)} \varrho e\ \Omega\Big|_{t=s} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} a_t^*\left(\varrho e\ \Omega\right)\Big|_{t=s} = \int_V \varrho\ \frac{\mathrm{D}\,e}{\partial t}\ \Omega + e\ \frac{\mathrm{D}(\varrho\,\Omega)}{\partial t}\Big|_{t=s} = \int_V \varrho\ \frac{\mathrm{D}\,e}{\partial t}\ \Omega\Big|_{t=s}$. Δείξαμε ότι για κάθε όγκο V έχουμε στο $t=s$ ότι $\int_V \varrho\ \frac{\mathrm{D}\,e}{\partial t}\ \Omega = -\int_V p\ \frac{\mathrm{D}\,\Omega}{\partial t}$ και άρα στο $t=s$

$$\varrho\ \frac{\mathrm{D}\,e}{\partial t}\ \Omega = -p\ \frac{\mathrm{D}\,\Omega}{\partial t}$$

//

Σημείωση 4.12: Το τελευταίο πόρισμα είναι συνέπεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας (πρώτος θερμοδυναμικός νόμος) και είναι μία ειδικότερη μορφή του $\mathrm{d}U = T\ \mathrm{d}S - p\ \mathrm{d}V$

Στο σημείο αυτό θέλουμε να δώσουμε δύο ισοδύναμες μορφές της αρχής διατήρησης της ορμής και την αντικατάσταση του $\nabla_q q$ από το ίσο του $\nabla_q q = \frac{1}{2}\operatorname{grad}|q|^2 - q\times\operatorname{curl} q$. Τότε η αντίστοιχη εξίσωση γίνεται

$$\dot{q} - q\times\operatorname{curl} q = -\frac{1}{2}\operatorname{grad}|q|^2 - \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p + \mathbf{F} \tag{M2}$$

Η άλλη μορφή έχει να κάνει με την εξέταση της 1-μορφής $q^\flat$. Υπολογίζουμε ότι $\mathcal{L}_q\, q^\flat = \mathrm{d}\ \imath_q\, q^\flat + \imath_q\ \mathrm{d}q^\flat$ και επομένως για κάθε διανυσματικό πεδίο Z,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_q\, q^\flat\cdot Z &= \mathrm{d}\ \imath_q\, q^\flat\cdot Z + \mathrm{d}q^\flat\cdot q\wedge Z\\
&= Z\left\langle q,q\right\rangle + q\left\langle q,Z\right\rangle - Z\left\langle q,q\right\rangle - \left\langle q,\mathcal{L}_q\, Z\right\rangle\\
&= q\left\langle q,Z\right\rangle - \left\langle q,\mathcal{L}_q\, Z\right\rangle = \left\langle \nabla_q q, Z\right\rangle + \left\langle q,\nabla_q Z\right\rangle - \left\langle q,\nabla_q Z - \nabla_Z q\right\rangle\\
&= \left\langle \nabla_q q, Z\right\rangle + \frac{1}{2}\ \mathrm{d}\,|q|^2\cdot Z
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}_q\, q^\flat = \left(\nabla_q q\right)^\flat + \frac{1}{2}\ \mathrm{d}\,|q|^2$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή $\flat$ στην εξίσωση της διατήρησης της ορμής παίρνουμε ότι

$$\frac{\mathrm{D}\,q^\flat}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^\flat + \mathcal{L}_q\, q^\flat = \frac{1}{2}\ \mathrm{d}\,|q|^2 - \frac{1}{\varrho}\ \mathrm{d}p + \mathbf{F}^\flat \tag{M3}$$

2. Το θεώρημα Bernoulli

Πολλές φορές μας ενδιαφέρει η περίπτωση που το ρευστό κινείται μέσα σε ένα διατηρητικό πεδίο δυνάμεων, οπότε υπάρχει συνάρτηση δυναμικού $\eta\colon M \longmapsto \mathbb{R}$, και η εξίσωση της κίνησης γίνεται

$$\frac{\mathrm{D}\,q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p - \operatorname{grad}\eta + \mathbf{F}$$

Στην περίπτωση στάσιμου πεδίου ταχυτήτων έχουμε το θεώρημα του Bernoulli:

Θεώρημα 4.13 (Bernoulli): *Υποθέτουμε ότι*

[**B**1] *το ρευστό κινείται σε συντηρητικό πεδίο δυνάμεων με δυναμικό* η

[**B**2] *η μορφή* $\mathrm{d}p/\varrho$ *είναι ακριβής, δηλαδή* $\exists f\colon M \longmapsto \mathbb{R}$ *ώστε* $\mathrm{d}f = \mathrm{d}p/\varrho$.

[**B**3] *το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού είναι στάσιμο, δηλαδή* $\dot{q} = 0$

Τότε η ποσότητα

$$\mathrm{H} = f + \frac{1}{2}\left|q\right|^2 + \eta$$

διατηρείται σταθερή κατά μήκος των γραμμών ροής του ρευστού αλλά και κατά μήκος της ροής του πεδίου στροβιλισμού του ρευστού.

Τέλος αν η ροή του ρευστού είναι αστρόβιλη, τότε η H *είναι σταθερή παντού.*

Απόδειξη: Στην στάσιμη περίπτωση, όπου $\dot{q} = 0$, θα έχουμε

$$q \times \operatorname{curl} q = \frac{1}{2}\operatorname{grad}\left|q\right|^2 + \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p + \operatorname{grad}\eta = \operatorname{grad}\mathrm{H}$$

ή ισοδύναμα ως εξίσωση μορφών

$$\imath_q\, \mathrm{d}q^\flat = -\,\mathrm{dH}$$

παίρνουμε αμέσως ότι $q \in \ker \mathrm{dH}$ αλλά και

$$\mathrm{d}q^\flat \cdot q \wedge \star\, \mathrm{d}q^\flat = \Omega \cdot (q \wedge \star\, \mathrm{d}q^\flat \wedge \star\, \mathrm{d}q^\flat) = 0$$

επομένως και $*\,\mathrm{d}q^b \in \ker \mathrm{dH}$, ή σε διανυσματική μορφή $\operatorname{curl} q \in \ker \mathrm{dH}$, κάτι που προκύπτει άλλωστε από το οτι $\operatorname{curl} q \perp \operatorname{grad}\mathrm{H}$.

Τέλος αν $\operatorname{curl} q = 0$ (ισοδύναμα $\mathrm{d}q^\flat = 0$), τότε $\mathrm{d}H = 0$ παντού και η H είναι σταθερή. //

Ορισμός 4.14: Ας είναι q το πεδίο των ταχυτήτων ενός ρευστού. Η 2-μορφή $\mathrm{d}q^\flat$ (ή ισοδύναμα το διάνυσμα $\operatorname{curl} q$) ονομάζεται ***στροβιλισμός του ρευστού***.

Σημείωση 4.15: Η συνθήκη [B2] μπορεί να αντικατασταθεί από την $\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}\varrho = 0$, με την προϋπόθεση ότι το ρευστό ρέει σε απλά συνεκτικό χωρίο. Πράγματι, υπό την υπόθεση της απλής συνεκτικότητας, έχουμε $\mathrm{d}(\,\mathrm{d}p/\varrho) = -1/\varrho^2\, \mathrm{d}\varrho \wedge \mathrm{d}p = 0$ και άρα η μορφή $\mathrm{d}p/\varrho$ είναι κλειστή και άρα ακριβής. Φυσικά ισχύει και το αντίστροφο.

Ποιά είναι όμως η 2-μορφή $-1/\varrho^2 \,\mathrm{d}\varrho \wedge \mathrm{d}p$; Η επιτάχυνση $\gamma = \dfrac{\mathrm{D}\, q}{\mathrm{d}t}$ όπως είδαμε, στην περίπτωση που το ρευστό κινείται εντός κάποιου συντηρητικού πεδίου, ικανοποιεί την εξίσωση $\gamma = -\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p - \operatorname{grad}\eta$ και επομένως $\mathrm{d}\gamma^\flat = \frac{1}{\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho \wedge \mathrm{d}p$. Επομένως η $-1/\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho \wedge \mathrm{d}p$ σχετίζεται με το $\operatorname{curl}\gamma$, (και η αντίστοιχη διανυσματική εξίσωση ειναι $\operatorname{curl}\gamma = \frac{1}{\varrho^2}\operatorname{grad}\varrho \times \operatorname{grad} p$) και επομένως περιγράφει την περιστροφή της επιτάχυνσης στο επίπεδο που ορίζουν τα $\mathrm{d}p$ και $\mathrm{d}\varrho$.

Επιπλέον, αν πάρουμε μία επιφάνεια S τότε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_{a_t(\partial S)} q\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{a_t(\partial S)} q^\flat = \int_{\partial S}\frac{\partial}{\partial t}a_t^* q^\flat = \int_{\partial S}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}q^\flat \\
&= \int_{\partial S}\dot{q}^\flat + \mathcal{L}_q\, q^\flat = \int_{\partial S}\dot{q}^\flat + (\nabla_q q)^\flat + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\,|q|^2 \\
&= \int_{\partial S}\gamma^\flat + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\,|q|^2 = \int_{\partial S}\gamma^\flat = \int_S \mathrm{d}\gamma^\flat = \int_S \frac{1}{\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho\wedge\mathrm{d}p
\end{aligned}$$

δηλαδή η 2-μορφή μεταφράζεται $1/\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho \wedge \mathrm{d}p$ ως ο ρυθμός μεταβολής της *κυκλοφορίας* του ρευστού.

Ακόμα, υπολογίζουμε ότι σε ένα ρευστό που ρέει εντός συντηρητικού πεδίου με δυναμικό η, ο στροβιλισμός $\zeta = \mathrm{d}q^\flat$ ικανοποιεί:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}\,\zeta}{\mathrm{d}t} &= \dot{\zeta} + \mathcal{L}_q\,\zeta = \mathrm{d}\dot{q}^\flat + \mathcal{L}_q\,\mathrm{d}q^\flat = \mathrm{d}\dot{q}^\flat + \mathrm{d}\,\mathcal{L}_q\, q^\flat \\
&= \mathrm{d}\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\,|q|^2 - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{d}p - \mathrm{d}\eta\right\} && \text{(λόγω της M3)} \\
&= \frac{1}{\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho\wedge\mathrm{d}p && (\mathbf{V}1)
\end{aligned}$$

Η εξίσωση V1 είναι η εξίσωση που ικανοποιεί ο στροβιλισμός. Προσέξτε ότι λόγω του ορισμού του, ο στροβιλισμός είναι πάντα ακριβής και άρα κλειστή μορφή (ισοδύναμα: το πεδίο του στροβιλισμού έχει μηδενική απόκλιση, είναι δηλαδή σωληνοειδές). Η εξίσωση V1 έχει και διανυσματική μορφή στον $\mathbb{R}^3$. Θα ισχύει ότι $\zeta = \star\operatorname{curl} q = \imath_{\operatorname{curl} q}\,\Omega = \imath_{\operatorname{curl} q/\varrho}\,\varrho\Omega$. Θέτουμε $w = \operatorname{curl} q/\varrho$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\star\frac{\mathrm{D}\,\zeta}{\mathrm{d}t} &= \star\left\{\dot{\zeta} + \mathcal{L}_q\,\zeta\right\} = \star\left\{\star\operatorname{curl}\dot{q} + \mathcal{L}_q\,\imath_w\,\varrho\Omega\right\} = \\
&= \operatorname{curl}\dot{q} + \star\left\{\imath_{\mathcal{L}_q w}\,\varrho\Omega + \imath_w\,\mathcal{L}_q\,\varrho\Omega\right\} \\
&= \operatorname{curl}\dot{q} + \star\left\{\imath_{\mathcal{L}_q w}\,\varrho\Omega - \imath_w\,\dot{\varrho}\Omega\right\} && \text{(εξίσωση συνέχειας)} \\
&= \varrho\left(\frac{\operatorname{curl}\dot{q}}{\varrho} - \dot{\varrho}\frac{\operatorname{curl} q}{\varrho^2}\right) + \varrho\,\mathcal{L}_q\, w \\
&= \varrho\left(\dot{w} + \mathcal{L}_q\, w\right) = \varrho\left(\dot{w} + \nabla_q w - \nabla_w q\right) = \varrho\left(\frac{\mathrm{D}\, w}{\mathrm{d}t} - \nabla_w q\right)
\end{aligned}$$

αντικαθιστούμε στο δεξί μέλος της V1 αφού εφαρμόσουμε κι εκεί τον συζυγή $\star$:

$$\varrho\left(\frac{\mathrm{D}\,w}{\mathrm{d}t}-\nabla_w q\right)=\frac{1}{\varrho^2}\operatorname{grad}\varrho\times\operatorname{grad}p \tag{$\mathbf{V}2$}$$

Η V2 είναι η εξίσωση για τον στροβιλισμό σε διανυσματική μορφή

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι σε δύο βασικές περιπτώσεις έχουμε ότι $\mathrm{d}\varrho\wedge\mathrm{d}p=0$. Η μία είναι όταν $\mathrm{d}\varrho=0$ και έχουμε [τοπικά] σταθερή πυκνότητα, όπως συμβαίνει στη ροή ενός ασυμπίεστου ρευστού. Η άλλη είναι όταν $\ker\mathrm{d}\varrho\subseteq\ker\mathrm{d}p$ και έχουμε***βαροτροπική ροή***. Δηλαδή, η βαροτροπική ροή ορίζεται η ροή στην οποία η πίεση είναι αμετάβλητη σε κάθε κατεύθυνση όπου η πυκνότητα είναι αμετάβλητη. Στην περίπτωση όπου σε κάποιο $x\in M$ $\mathrm{d}\varrho(x)\neq 0$, η $\varrho\colon M\longmapsto\mathbb{R}$ είναι καταβύθιση στο x και τοπικά βρίσκουμε έναν χάρτη $(U,\phi\colon U\longmapsto\mathbb{R}\times\ker\mathrm{d}\varrho(x))$ πάνω από το x ώστε για κάθε $(t,u)\in\phi(U)$ να ισχύει $\varrho(\phi^{-1}(t,u))=t$. Τότε η υπόθεση μας λέει ότι η $p\circ\phi^{-1}$ δε μεταβάλλεται καθόλου πάνω στο $\ker\mathrm{d}\varrho(x)$ και επομένως είναι συνάρτηση μόνο του t. Δηλαδή θα υπάρχει μία διαφορίσιμη απεικόνιση $\lambda\colon\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $(t,u)\in\phi(U)$ να ισχύει $p\circ\phi^{-1}(t,u)=\lambda(t)=\lambda\circ\varrho\circ\phi^{-1}(t,u)$ και άρα $p=\lambda\circ\varrho$ στο U. Δείξαμε ότι σε μία βαροτροπική ροή η πίεση είναι συνάρτηση της πυκνότητας, όταν αυτή είναι μη σταθερή. Η κλάση των βαροτροπικών ροών περιλαμβάνει όλα τα ιδανικά αέρια σε αδιαβατικές και αναστρέψιμες μεταβολές.

Τέλος, η 2-μορφή $1/\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho\wedge\mathrm{d}p$ ονομάζεται***βαροκλινής***

3. Αστρόβιλη ροή

Προχωράμε να εξετάσουμε την περίπτωση που το ρευστό κινείται με αστρόβιλη ροή σε συντηρητικό πεδίο δυνάμεων δυναμικού η και η $\mathrm{d}p/\varrho$ είναι ακριβής. Γράφουμε καταχρηστικά με $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}p}{\varrho}$ την συνάρτηση που ικανοποιεί $\displaystyle\mathrm{d}\int\frac{\mathrm{d}p}{\varrho}=\frac{\mathrm{d}p}{\varrho}$. Το αστρόβιλο της ροής συνεπάγεται ότι θα υπάρχει μία διαφορίσιμη $\phi\colon\mathbb{R}\times M\longmapsto\mathbb{R}$ ώστε $q=-\operatorname{grad}\phi$. Από την εξίσωση διατήρησης της ορμής (M2) ή (M3) παίρνουμε ότι η εξίσωση της κίνησης είναι

$$-\,\mathrm{d}\dot{\phi}=\frac{\partial q^\flat}{\partial t}=-\left(\frac{\mathrm{d}p}{\varrho}+\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\left|q\right|^2+\mathrm{d}\eta\right)$$

Αν το M ρέει σε συνεκτικό χωρίο, τότε η παραπάνω εξίσωση συνεπάγεται ότι υπάρχει μία διαφορίσιμη απεικόνιση $C\colon\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ ώστε

$$\dot{\phi}-C=\int\frac{\mathrm{d}p}{\varrho}+\frac{1}{2}\left|q\right|^2+\eta \tag{$\mathbf{P}1$}$$

Η απεικόνιση C μπορεί να απορροφηθεί στη συνάρτηση δυναμικού ϕ ώστε τελικα η εξίσωη να γίνει

$$\dot{\phi}=\int\frac{\mathrm{d}p}{\varrho}+\frac{1}{2}\left|\,\mathrm{d}\phi\right|^2+\eta \tag{$\mathbf{P}2$}$$

Οι ισοδύναμες εξισώσεις P1 ή P2 ονομάζονται εξίσωση πίεσης γιατί μπορεί να οδηγήσουν στην εύρεση της p, υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει η $\int \frac{\mathrm{d}p}{\varrho}$, κατά μείζονα λόγο ότι p είναι συνάρτηση της πυκνότητας ή ότι $\varrho =$ σταθερή. Στην τελευταία δε περίπτωση που αφορά σε όλα τα [ασυμπίεστα] υγρά, η εξίσωση της συνέχειας γίνεται $\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = 0$ δηλαδή $\Delta\phi = 0$, όπου και επεμβαίνουν οι μέθοδοι της αρμονικής ανάλυσης.

Στην περίπτωση που έχουμε στάσιμη ροή σε υγρό ($\varrho =$ σταθ.), χωρίς την επίδραση δυνάμεων, τότε η εξίσωση της πίεσης γίνεται

$$\frac{1}{2}\varrho\ |\nabla\phi|^2 + p = \varrho C$$

Το ολοκλήρωμα

$$E = \int_M \frac{1}{2}\varrho\ |\nabla\phi|^2\ \Omega\ \left(= \varrho\int_{\partial M}\phi\ \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\ \Omega_{\partial M}\right) \tag{$\star$}$$

είναι η συνολική κινητική ενέργεια του ρευστού και στην περίπτωση αστρόβιλης ροής υγρού, όπου $\Delta\phi = 0$ η ϕ είναι η συνάρτηση που ελαχιστοποιεί την ενέργεια, μεταξύ όλων των συναρτήσεων που ικανοποιούν την ίδια συνοριακή συνθήκη. Πράγματι, η E είναι κυρτή μη αρνητική, γιατί αν $\lambda, \mu \geq 0$ με $\lambda + \mu = 1$, τότε για $u, v \in C^2(M)$,

$$0 \leq \|\lambda\nabla u + \mu\nabla v\|^2 \leq \|\lambda\nabla u + \mu\nabla v\|^2 + \lambda\mu\,\|\nabla u - \nabla v\|^2 = \lambda\,\|\nabla u\|^2 + \mu\,\|\nabla u\|^2$$

επομένως τα κρίσιμα σημεία της είναι ακριβώς αυτά που την ελαχιστοποιούν. Από την άλλη αν $h \in C^2(M)$ που μηδενίζεται στο σύνορο, τότε εύκολα κανείς παρατηρεί ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E(u)\cdot h &= \varrho\int_M \langle\nabla u, \nabla h\rangle\ \Omega = \varrho\int_M \{\langle\nabla u, \nabla h\rangle + h\ \Delta u\ \}\,\Omega - \varrho\int_M h\ \Delta u\,\Omega\\ &= \int_{\partial M} h\ \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\ \Omega_{\partial M} - \varrho\int_M h\ \Delta u\,\Omega = -\varrho\int_M h\ \Delta u\,\Omega\end{aligned}$$

και ο μηδενισμός της $\mathrm{d}E$ ισοδυναμεί με λύση της εξίσωσης Laplace στο εσωτερικό της M. Στην πραγματικότητα μπορούμε να δείξουμε άμεσα οτι η E είναι ελάχιστη μεταξύ όλων των ενεργειών που προκύπτουν απο κατανομές ταχύτητας q που αφενός ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας: $\operatorname{div} q = 0$, αφετέρου έχουν κοινές συνοριακές συνθήκες: $\nabla\varphi = q$ στο ∂M. Συνεπώς η $z = q - \nabla\phi$ μηδενίζεται στο σύνορο, έχει μηδενική απόκλιση και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varrho\int_M |q|^2 &= \frac{1}{2}\varrho\int_M |z+\nabla\phi|^2 = \frac{1}{2}\varrho\int_M |z|^2 + \varrho\int_M \langle z, \nabla\phi\rangle + \frac{1}{2}\varrho\int_M |\nabla\phi|^2\\ &\geq \varrho\int_M \langle z, \nabla\phi\rangle + \frac{1}{2}\varrho\int_M |\nabla\phi|^2\\ &= \varrho\int_{\partial M}\phi\,\langle z, \mathbf{n}\rangle + E = E && (\text{θεώρημα Stokes})\end{aligned}$$

Σχολιάζοντας περαιτέρω, παρατηρούμε ότι η σχέση ($\star$) μας δείχνει οτι η συνολική κινητική ενέργεια ενός ασυμπίεστου ρευστού σε στάσιμη ροή εξαρτάται μόνο από τη συμπεριφορά της συνάρτησης δυναμικού στο σύνορο. Συνεπώς σε κλειστές συμπαγείς πολλαπλότητες (χωρίς σύνορο), δεν υπαρχουν μη-τετριμμένες λύσεις και η μόνη αποδεκτή ροή είναι η μηδενική. Ομοίως και αν δεν υπάρχει ροή στο σύνορο.

Αν η M είναι γεωδαισιακά πλήρης, τότε κάθε θετική υποαρμονική συναρτηση $v\colon M \longmapsto \mathbb{R}$ που επίσης ανήκει και στον $L^p(M)$, για κάποιο $p \in (1, +\infty)$, πρέπει να είναι σταθερή **[Yau]**. Ακόμα δε, ισχύει η ισότητα Bochner:

$$\Delta \left|\nabla\phi\right|^2 = \left|\mathrm{Hess}\,\phi\right|^2 + \mathrm{Ric}\cdot(\nabla\phi, \nabla\phi)$$

και άρα σε πολλαπλότητες με μη μη-αρνητική καμπυλότητα Ricci, η $\left|\nabla\phi\right|^2$ είναι υποαρμονική. Η υπόθεση $\nabla\phi \in L_2(M)$ επιβάλλει ότι η ϕ είναι σταθερή. Ειδικά όταν $\int_M \Omega = +\infty$, $\nabla\phi = 0$ παντού.

Εξειδικεύοντας, στην $M = \mathbb{R}^n$ ας υποθέσουμε ότι η $\nabla\phi$ σβήνει στο άπειρο, δηλαδή $\lim\limits_{R\longrightarrow+\infty} |\nabla\phi| = 0$. Τότε και πάλι η υποαρμονικότητα της $\left|\nabla\phi\right|^2$ και η ασθενής αρχή μεγίστου επιβάλλει ότι $\sup\limits_{B(0;R)} \left|\nabla\phi\right|^2 = \sup\limits_{\partial B(0;R)} \left|\nabla\phi\right|^2 \longrightarrow 0$ καθώς $R \longrightarrow +\infty$ (εναλλακτικά μπορούμε να επικαλεστούμε το θεώρημα Liouville για αρμονικές συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$ καθώς όλες οι μερικές παράγωγοι της ϕ είναι εξ' ίσου αρμονικές και εξ' υποθέσεως φραγμένες). Επομένως $\nabla\phi = 0$ και δεν υπάρχουν μη τετριμμένες στάσιμες ροές.

Ας είναι τώρα $M = \mathbb{R}^3 \setminus G$, όπου G είναι ένα ανοικτό συνεκτικό και φραγμένο σύνολο. Η M έχει σύνορο το $\partial M = \partial G$ επομένως δεν έιναι γεωδαισιακά πλήρης, και δε μπορούμε να εφαρμόσουμε κάτι από τα προηγούμενα. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας $\phi\colon M \longmapsto \mathbb{R}$ που ικανοποιεί κάποιες δεδομένες συνοριακές συνθήκες στο ∂M και $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |\nabla\phi|(x) = 0$.

Καθώς όλες οι μερικές παράγωγοι της ϕ είναι επίσης αρμονικές, θα είναι φραγμένες σε περιοχή του απείρου και άρα υπάρχει κάποια σταθερά $a \in \mathbb{R}^3$ ώστε $\lim\limits_{z\longrightarrow\infty} |z|\,\nabla\phi = a$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι και η ϕ είναι φραγμένη και άρα υπάρχουν σταθερές $C, L \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{z\longrightarrow\infty} |z|\,(\phi - C) = L$

Υπολογίζουμε τη συνολική κινητική ενέργεια του ρευστού. Ας είναι $R > 0$ αρκετά μεγάλο ώστε $\overline{G} \subseteq B(0;R)$

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{1}{2}\varrho \int_{B(0;R)} \left|\nabla\phi\right|^2 \Omega = \frac{1}{2}\varrho \int_{B(0;R)} \left|\nabla(\phi - C)\right|^2 \Omega \\ &= \frac{1}{2}\varrho \int_{S(0;R)} (\phi - C)\,\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\Omega_{S(0;R)} - \frac{1}{2}\varrho \int_{\partial G} (\phi - C)\,\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\Omega_{S(0;R)} \end{aligned}$$

Όμως $\displaystyle\int_{S(0;R)} (\phi - C)\,\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\Omega_{S(0;R)} \sim \int_{S(0;R)} \frac{|a|\,L}{|R|^2} = 4\pi\,|a|\,L$ για αρκετά μεγάλο R από όπου συμπαιρένουμε οτι $|\nabla\phi| \in L^2(M) \cap C(M)$. Ακόμα η $R \longmapsto f(R) = \displaystyle\int_{S(0;R)} \left|\nabla\phi\right|^2 \sim 4\pi\,|a|^2$

είναι ομοιόμορφα συνεχής και επομένως $\lim_{R\to+\infty}\int_{S(0;R)} |\nabla\phi|^2 = 0$ εφόσον $f \in L^1([0,+\infty))$ $(\|f\|_1 = \|\nabla\phi\|_2)$. Άρα $a = 0$ και $\lim_{R\to\infty}\int_{S(0;R)} (\phi - C)\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = 0$. Τελικά

$$E = -\int_{\partial G} (\phi - C)\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\Omega_{S(0;R)}$$

Παρατηρούμε ότι όταν η συνοριακή συνθήκη είναι τύπου Neumann στο σύνορο, δηλαδή $\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = 0$ στο ∂G τότε $E = 0$ και δεν υπάρχει μη τετριμμένη λύση πέραν της σταθερής.

A Ευρετήριο

H

A

B

Δ

Ε

Θ

Ι

Λ

Μ

N

O

Π

Ρ

Σ

Τ

Υ

B Βιβλιογραφία

[ABR94] Sheldon Axler, Paul Bourdon, and Wade Ramey. *Harmonic Function Theory*, volume 137 of *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, 1994.

[AK98] V. I. Arnold and B. A. Khesin. *Topological Methods in Hydrodynamics*. Springer-Verlag Berlin, 1998.

[Boo75] W. M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, New York, 1975.

[Car92] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry*. Birkhäuser, 1992.

[GT01] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[Lan99] Serge Lang. *Fundamentals of Differential Geometry*. Springer-Verlag New York, Inc, 1999.

[MT68] L. M. Milne-Thomson. *Theoretical Hydrodynamics*. MaCmillan Press, London, 5th edition, 1968.

[PRS05] Stefano Pigola, Marco Rigoli, and Alberto Giulio Setti. Maximum principles on riemannian manifolds and applications. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 174, 03 2005.

[SY97] Richard M. Schoen and S. T. Yau. *Lectures on Harmonic Maps*, volume II of *Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology*. International Press, Cambridge, MA, 1997.