ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ ΤΕΛΕΙΟΦΟΙΤΟΥ
ΖΑΒΙΤΣΑΝΟΥ ΧΡΗΣΤΟΥ

ΟΙ ΝΟΜΟΙ ΤΩΝ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ
ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ 2011

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή:

ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ : ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΦΟΥΣΚΑΚΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ : ΛΕΚΤΟΡΑΣ ΕΜΠ

ΣΠΗΛΙΩΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ : ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

Περιεχόμενα

1 Μαθηματική Εισαγωγή

§ 1.1 Μέση τιμή τυχαίων μεταβλητών

Υπενθυμίζουμε κάποιες βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων :

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ συνάρτηση . Τότε η X καλείται τυχαία μεταβλητή αν και μόνο αν είναι μετρήσιμη , δηλαδή αν $X^{-1}(A) \in F$, $\forall A \in B$ όπου B τα Borel του $\mathbb{R}$.

Επομένως αν η X είναι τυχαία μεταβλητή τότε η $P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in A)$ έχει νόημα $\forall A \in B$. Η συγκεκριμένη πιθανότητα καλείται κατανομή της X ή το επαγόμενο από την X μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Επίσης η X μέσω της κατανομής της επάγει μια συνάρτηση κατανομής F_X ως εξής: $F_X(x) = P(X \leq x)$. Αν υπάρχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, δηλαδή μια $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ τέτοια ώστε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

και

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

τότε η F_X καλείται απολύτως συνεχής συνάρτηση κατανομής και η X συνεχής τυχαία μεταβλητή. Τότε η μέση τιμή της X ορίζεται ως:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx$$

Αν η είναι τυχαία μεταβλητή X έχει πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο τιμών τότε καλείται διακριτή . Ομοίως και η συνάρτηση κατανομής που επάγει η X ως εξής:

$$F_X(x) = P(X = x)$$

Ενώ, η μέση τιμή της ορίζεται ως:

$$E(X)=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\omega)$$

Στην πραγματικότητα υπάρχουν πολλές τυχαίες μεταβλητές που δεν είναι ούτε συνεχείς ούτε διακριτές. Υπήρξε λοιπόν η αναγκαιότητα να δοθεί ένας γενικότερος ορισμός της μέσης τιμής, ο οποίος να καλύπτει όλες τις περιπτώσεις τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 1.1.1

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και $X:\Omega\to\mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Τότε η μέση τιμή της X συμβολίζεται με $E(X)$ ή EX και ορίζεται ως εξής:

$$E(X)=\int_{\Omega}XdP$$

με την έννοια του ολοκληρώματος Lebesque. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται σταδιακά, ξεκινώντας από την πιο απλή μορφή τυχαίας μεταβλητής πού είναι η δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου, μέχρι να καταλήξουμε στη γενική περίπτωση μιας τυχαίας μεταβλητής.

Έχουμε λοιπόν τα εξής βήματα :

i. ολοκλήρωμα δείκτριας συνάρτησης.

Υπενθυμίζουμε ότι η δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου A ορίζεται ως:

$$1_A(\omega)=\begin{cases}1 & ,\forall\,\omega\in A\\ 0 & ,\forall\,\omega\notin A\end{cases}$$

Η 1_A είναι τυχαία μεταβλητή αν και μόνο αν το $A\in F$ και τότε η μέση τιμή της ορίζεται ως:

$$E\left[1_A(\omega)\right]=\int_{\Omega}1_A\,dp=P(A)$$

ii. ολοκλήρωμα απλής συνάρτησης.

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ καλείται απλή αν,

$$s=a_1 1_{A_1}+\cdots+a_n 1_{A_n}=\sum_{k=1}^{n}a_k 1_{A_k}$$

όπου τα $a_k \in \mathbb{R}$ και τα A_k μια διαμέριση του $\mathbb{R}$ (δηλαδή $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$ και $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \mathbb{R}$).

Εντελώς ανάλογα ορίζεται η απλή συνάρτηση $s:\Omega \to \mathbb{R}$ σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) και είναι τυχαία μεταβλητή αν και μόνο αν τα $A_k \in F$. Τότε η μέση τιμή της s ορίζεται ως:

$$E(s) = \int_{\Omega} s\, dP = \sum_{k=1}^{n} a_k P(A_k)$$

iii. ολοκλήρωμα μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής.

Καθοριστικής σημασίας για τον ορισμό του ολοκληρώματος μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής είναι το παρακάτω θεώρημα το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη .

Θεώρημα 1.1.2

Έστω $X \geq 0$ τυχαία μεταβλητή, τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών τυχαίων μεταβλητών $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε :

$$0 \leq s_n \leq X \text{ και } \lim_{n\to\infty} s_n = X \,.$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής : έστω $X \geq 0$ τυχαία μεταβλητή, τότε η μέση τιμή της ορίζεται ως:

$$E(X) = \sup\left\{E(Y) : 0 \leq Y \leq X \ \sigma.\beta., \text{Y } \alpha\pi\lambda\acute{\eta}\right\}$$

όπου $Y \leq X \ \sigma.\beta. \Leftrightarrow P(Y \leq X) = 1$.

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή μιας γενικής τυχαίας μεταβλητής.

iv. ολοκλήρωμα γενικής τυχαίας μεταβλητής.

Έστω X τυχαία μεταβλητή, τότε ορίζουμε τις:

$$X^{+} = \max\{X, 0\}$$

και

$$X^{-} = \max\{-X, 0\}$$

οπότε έχουμε ότι $X^+, X^- \geq 0$, $|X| = |X^+| + |X^-|$ και $X = X^+ - X^-$.

Τότε η μέση τιμή της X ορίζεται ως:

$$E(X) = E\left(X^+\right) - E\left(X^-\right)$$

Αν τουλάχιστον μία εκ των X^+, X^- έχει πεπερασμένη μέση τιμή τότε η μέση τιμή της X υπάρχει (μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός ή ∞), ενώ αν

$$E\left(X^+\right) = E\left(X^-\right) = \infty$$

τότε η μέση τιμή της X δεν υπάρχει. Η X καλείται ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν:

$$E(|X|) < \infty \Leftrightarrow E\left(X^+\right) < \infty \text{ και } E\left(X^-\right) < \infty$$

Ορισμός 1.1.3

Έστω τυχαία μεταβλητή X τέτοια ώστε $E(X^2) < \infty$. Τότε η διασπορά της X ορίζεται ως εξής:

$$\operatorname{var}(X) = \int_\Omega (X - EX)^2 dP = E\left[(X - EX)^2\right]$$

Πρόταση 1.1.4

Ισχύει ότι: $\operatorname{var}(X) = EX^2 - (EX)^2$.

Απόδειξη: Έχουμε,

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X) &= E\left[(X - EX)^2\right] = E[X^2 - 2XEX + (EX)^2] \\ &= EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2\end{aligned}$$

Είναι άμεσο ότι $\operatorname{var}(X) \leq EX^2$. □

Ορισμός 1.1.5

Η τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ανήκει στον $L_p(\Omega, F, P)$ αν και μόνο αν: $E(|X|^p) < \infty$. Συνεπώς η τυχαία μεταβλητή $X \in L_1(\Omega) \Leftrightarrow E(|X|) < \infty$.

Πρόταση 1.1.6

Αν $0 < q < p$ τότε $L_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$.

Απόδειξη : Έστω τυχαία μεταβλητή $X \in L_p \Leftrightarrow E(|X|^p) < \infty$. Τότε:

$$E(|X|^q) = E\left[|X|^q \left(1_{(|X|\le 1)} + 1_{(|X|>1)} \right) \right] = E\left(|X|^q 1_{(|X|\le 1)} \right) + E\left(|X|^q 1_{(|X|>1)} \right) \le$$

$$E\left(1_{(|X|\le 1)} \right) + E\left(|X|^p 1_{(|X|>1)} \right) \le P(|X| \le 1) + E(|X|^p) \le$$

$$1 + E(|X|^p) < \infty \Rightarrow X \in L_q \Rightarrow L_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$$

□

Οι ιδιότητες της μέσης τιμής είναι παρόμοιες με αυτές του ολοκληρώματος Lebesque και τις παραθέτουμε χωρίς απόδειξη. Στα παρακάτω υποθέτουμε ότι οι X, Y είναι γενικές τυχαίες μεταβλητές και οι a, b πραγματικές σταθερές. Ισχύουν λοιπόν τα εξής:

(i) Αν $X \ge 0$ σ.β. τότε $E(X) \ge 0$

(ii) Αν $X \ge Y$ σ.β. τότε $E(X) \ge E(Y)$

(ii) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

(iv) Αν $A \subset \Omega$ τότε $\int_A X\, dP = \int_\Omega X 1_A\, dP = E\left(X 1_A \right)$

(v) Αν $A, B \subset \Omega$ με $A \cap B = \varnothing$ τότε $\int_{A \cup B} X\, dP = \int_A X\, dP + \int_B X\, dP$ ή αλλιώς

$E\left(X 1_{A\cup B} \right) = E\left(X 1_A \right) + E\left(X 1_B \right)$

Πρόταση 1.1.7

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή .Έστω επίσης $\Lambda \subset \Omega$ με $\Lambda \in F$ και a, b πραγματικές σταθερές. Αν $a \le X \le b$ σ.β. στο Λ τότε ισχύει ότι :

$$aP(\Lambda) \le \int_\Lambda X\, dP \le bP(\Lambda)$$

Απόδειξη : Έχουμε ότι :

$$a \le X \le b \Rightarrow a 1_\Lambda(\omega) \le X 1_\Lambda(\omega) \le b 1_\Lambda(\omega) \Rightarrow \int_\Omega a 1_\Lambda(\omega) dP \le \int_\Omega X 1_\Lambda(\omega) dP \le \int_\Omega b 1_\Lambda(\omega) dP \Rightarrow$$

$$aP(\Lambda) \le \int_\Lambda X\, dP \le bP(\Lambda)$$

§ 1.2 Βασικά θεωρήματα θεωρίας πιθανοτήτων

Θεώρημα 1.2.1 (Λήμμα Fatou)

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $X_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, και $X_n \to X$ σχεδόν βεβαίως, δηλαδή $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X, \kappa.\sigma.) = 1$ όπου X τυχαία μεταβλητή. Τότε ισχύει ότι:

$$E[X] \leq \liminf E[X_n]$$

Θεώρημα 1.2.2 (Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης)

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $X_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, και $X_n \to X$ σχεδόν βεβαίως , δηλαδή $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X, \kappa.\sigma.) = 1$ όπου X τυχαία μεταβλητή. Τότε αν $X_n \leq X$ $, \forall n \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι:

$$E[\lim X_n] = \lim E[X_n]$$

Απόδειξη : Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Λήμματος Fatou οπότε έχουμε :

$$E[X] \leq \liminf E[X_n] \qquad (1)$$

Τώρα από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$X_n \leq X \Rightarrow E[X_n] \leq E[X] \Rightarrow \limsup E[X_n] \leq E[X] \qquad (2)$$

αφού δε γνωρίζουμε αν υπάρχει το $\lim$. Για μια ακολουθία πραγματικών αριθμών ξέρουμε ότι ισχύει : $\liminf \leq \limsup$ οπότε οι $(1),(2)$ δίνει τελικά:

$$\liminf E[X_n] = \limsup E[X_n] = \lim E[X_n] = E[X] \Rightarrow E[\lim X_n] = \lim E[X_n] \quad \square$$

Θεώρημα 1.2.3 (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης)

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $X_n \to X$ σχεδόν βεβαίως, όπου X τυχαία μεταβλητή. Έστω επίσης ότι υπάρχει Y τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $Y \geq 0$, $E[Y] < \infty$ και $|X_n| \leq Y$. Τότε ισχύει ότι:

$$E[\lim X_n] = \lim E[X_n]$$

Θεώρημα 1.2.4 (Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης)

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $X_n \to X$ σχεδόν βεβαίως, όπου X τυχαία μεταβλητή. Έστω επίσης ότι $|X_n| \leq M \in \mathbb{R}$.Τότε

$$E\left(\lim X_n\right) = \lim E\left(X_n\right)$$

Απόδειξη: Αν ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή $Y = M$ τότε $E\left(Y\right) = M < \infty$ οπότε οι υποθέσεις του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης ικανοποιούνται και έχουμε:

$$E\left(\lim X_n\right) = \lim E\left(X_n\right)$$ □

Θεώρημα 1.2.5 (Ανισότητα Chebysev)

Έστω $\varphi(x) > 0$ και αύξουσα στο $(0,+\infty)$ τέτοια ώστε $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Έστω επίσης X τυχαία μεταβλητή. Τότε ισχύει $\forall a \in \mathbb{R}^+$, ότι:

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(\varphi(X))}{\varphi(a)} \qquad (1)$$

Παρατήρηση: πολλές φορές συναντάται στη βιβλιογραφία σαν ανισότητα Chebysev η ειδική περίπτωση κατά την οποία έχουμε αντικαταστήσει στην άνωθεν ανισότητα $X = (Y - EY)$ και $\varphi(x) = x^2$ οπότε προκύπτει ότι:

$$P(|(Y-EY)| \geq a) \leq \frac{E(|(Y-EY)|^2)}{a^2} = \operatorname{var}\left(Y\right)/a^2$$

Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε στην ανισότητα Chebysev εννοούμε την γενική μορφή του θεωρήματος, δηλαδή τη σχέση (1).

Πρόταση 1.2.6 (Ανισότητα Jensen)

Έστω X τυχαία μεταβλητή και $f\left(x\right)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση τέτοιες ώστε X, $f\left(X\right) \in L_1(\mathbb{R})$. Τότε ισχύει ότι:

$$f\left(E\left[X\right]\right) \leq E\left[f\left(X\right)\right]$$

Απόδειξη: Αφού,

$$X \in L_1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow E(|X|) < \infty \Leftrightarrow EX < \infty$$

Θέτουμε:

$$EX = x_0 \in \mathbb{R}$$

και καθώς η f είναι κυρτή ικανοποιεί το εξής:

$$f(x) \geq f(x_0) + c(x - x_0)$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ μια πραγματική σταθερά . Θέτουμε όπου x την τυχαία μεταβλητή X και παίρνοντας την μέση τιμή στα δύο μέλη της ανισότητας έχουμε:

$$E\left[f(x)\right] \geq f(x_0) + c(EX - x_0) = f\left[E(X)\right] + c(EX - EX) = f\left[E(X)\right] \qquad \square$$

Πόρισμα 1.2.7

Έστω X τυχαία μεταβλητή με $X \in L_1(\mathbb{R})$. Τότε ισχύει ότι :

$$\left|E[X]\right| \leq E\left[|X|\right] \qquad (1)$$

Πράγματι η σχέση (1) προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο θεώρημα για την $f(x) = |x|$.

Θεώρημα 1.2.8 (Θεώρημα μετασχηματισμού)

Έστω $(\Omega, F, P), (\Omega', F', P')$ χώροι πιθανότητας και $T : \Omega \to \Omega'$ τυχαία μεταβλητή, όπου το P' είναι το επαγόμενο από την T μέτρο πιθανότητας στην F', δηλαδή ισχύει ότι $P'(A') = P(T^{-1}(A'))$, $A' \in F'$. Έστω επίσης η πραγματική τυχαία μεταβλητή $X : (\Omega', F') \to (\mathbb{R}, B(R))$. Τότε η $X \circ T : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι επίσης τυχαία μεταβλητή λόγω σύνθεσης και ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $X \geq 0$, τότε:

$$\int_{\Omega} X(T(\omega)) P(d\omega) = \int_{\Omega'} X(\omega') P'(d\omega')$$

(ii) $X \in L_1(\Omega')$ αν και μόνο αν $X \circ T \in L_1(\Omega)$, στην οποία περίπτωση ισχύει ότι:

$$\int_{T^{-1}(A')} X(T(\omega)) P(d\omega) = \int_{A'} X(\omega') P'(d\omega'), \; A' \in F'$$

Πρόταση 1.2.9

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή. Αν P' είναι το επαγόμενο από την Y μέτρο πιθανότητας στην $B(\mathbb{R})$, η κατανομή δηλαδή της Y, τότε ισχύει ότι:

$$E(Y) = \int_{\Omega} Y(\omega) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x P'(dx)$$

Απόδειξη: Θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας το θεώρημα μετασχηματισμού.
Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $X : (\Omega', F') = (\mathbb{R}, B(R)) \to (\mathbb{R}, B(R))$ με $X(\omega') = X(x) = x$ και θέτουμε $T = Y$. Τότε ισχύει ότι:

$$\int_{\Omega} X(T(\omega)) P(d\omega) = \int_{\Omega'} X(\omega') P'(d\omega') \Rightarrow \int_{\Omega} Y(\omega) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x P'(dx) \qquad \square$$

Πρόταση 1.2.10

Έστω $(\Omega, F, P), (\Omega', F', P')$ χώροι πιθανότητας και $X : \Omega \to \Omega'$ τυχαία μεταβλητή, όπου το P' είναι το επαγόμενο από την X μέτρο πιθανότητας στην F', η κατανομή δηλαδή της X. Έστω επίσης μια μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή $g : (\Omega', F') \to (\mathbb{R}, B(R))$. Τότε η μέση τιμή της $g \circ X$ είναι:

$$E(g(X)) = \int_{\Omega} g(X(\omega)) P(d\omega) = \int_{x \in \Omega'} g(x) P'(dx)$$

Οι παραπάνω προτάσεις δείχνουν τη σημασία του θεωρήματος μετασχηματισμού καθώς μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίζουμε τη μέση τιμή πάνω στο $\mathbb{R}$ αντί για τον συνήθως αφηρημένο χώρο Ω.

§ 1.3 Ανώτερο και κατώτερο όριο ακολουθίας ενδεχομένων

Υπενθυμίζουμε ότι αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τότε το ανώτερο όριο $(\limsup)$ και το κατώτερο όριο της ακολουθίας ορίζονται ως εξής :

$$\limsup a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right)$$

$$\liminf a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geq n} a_k \right)$$

και ισχύουν τα εξής :

$$(i) \quad \lim a_n = a \Leftrightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = a$$

$$(ii) \quad \liminf a_n \le \limsup a_n$$

Αντίστοιχα ορίζεται το ανώτερο όριο και το κατώτερο όριο μιας ακολουθίας ενδεχομένων.

Ορισμός 1.3.1

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ενδεχομένων του Ω.

Τότε ορίζουμε:

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

και ισχύουν τα εξής :

$$(i) \quad \lim A_n = A \Leftrightarrow \limsup A_n = \liminf A_n = A$$

$$(ii) \quad \liminf A_n \le \limsup A_n$$

$$(iii) \quad \limsup A_n = \left(\liminf A_n^{C}\right)^{C}$$

Πρόταση 1.3.2

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ενδεχομένων του Ω.

Τότε ισχύουν τα εξής :

(i) $\limsup A_n = \{\omega \in \Omega : \textit{τα ω ανήκουν σε άπειρα το πλήθος } A_n\}$

(ii) $\liminf A_n = \{\omega \in \Omega : \textit{τα ω ανήκουν σε όλα τα } A_n \textit{ εκτός από πεπερασμένα το πλήθος}\}$

Απόδειξη :

(i) Έστω

$$\begin{aligned}\omega \in \limsup A_n &\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \left(\omega \in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right) \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) (\exists m \in \mathbb{N}\, \tau.\omega. \forall m \geq n \;\; \omega \in A_m) \\ &\Leftrightarrow \omega \in A_n \textit{ για άπειρα το πλήθος } n\end{aligned}$$

ή αλλιώς λέμε ότι τα A_n συμβαίνουν απείρως συχνά (α.σ) και συνήθως γράφουμε

$$\limsup A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \;\; \alpha.\sigma\}$$

ή πιο απλά $\limsup A_n = \{A_n \;\; \alpha.\sigma\}$.

(ii)

$$\begin{aligned}\omega \in \liminf A_n &\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) \left(\omega \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \right) \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) (\forall m \in \mathbb{N}\, \tau.\omega.\; m \geq n, \omega \in A_m) \\ &\Leftrightarrow \omega \in A_n \textit{ για όλα τα n εκτός από πεπερασμένα το πλήθος}\end{aligned}$$

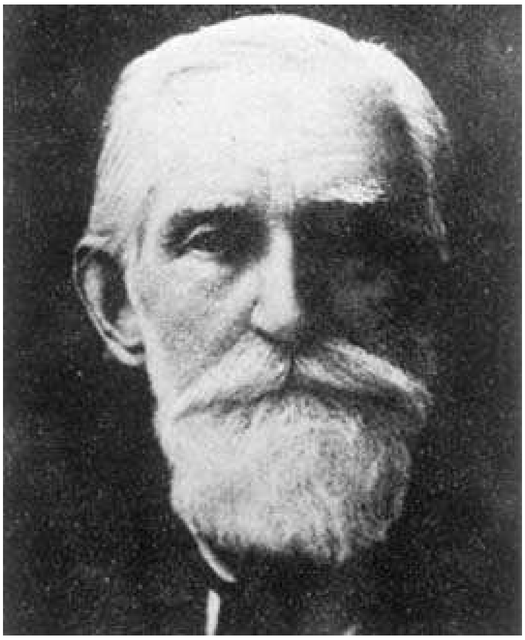
ή αλλιώς λέμε ότι τα A_n συνέβησαν όλα εκτός από πεπερασμένα το πλήθος ή συνέβησαν όλα τελικά και συνήθως γράφουμε:

$$\liminf A_n = \{\omega \in \Omega : \textit{τα } \omega \textit{ ανήκουν σε όλα τα } A_n \textit{ τελικά}\}$$

ή $$\liminf A_n = \{\omega \in \Omega : \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \tau.\omega.\; \forall n \geq n_0 \textit{ συμβαίνει το } A_n\}$$

ή πιο απλά $$\liminf A_n = \{A_n \textit{ τελικά}\}.$$ □

\



N. Chebyshev

2 Ανεξαρτησία-Θεώρημα Fubini-Σύγκλιση τυχαίων μεταβλητών

§ 2.1 Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

Υπενθυμίζουμε ότι δύο ενδεχόμενα A, B ορισμένα στον χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) είναι ανεξάρτητα αν και μόνον αν $P(A \cap B) = P(A)(B)$. Επίσης αν τα A, B είναι ανεξάρτητα, τότε και τα ενδεχόμενα $\{A^C, B\}, \{A^C, B^C\}, \{A, B^C\}$ είναι ανεξάρτητα.

Η ανεξαρτησία επεκτείνεται και για μεγαλύτερο αριθμό ενδεχομένων σύμφωνα με τους παρακάτω ορισμούς .

Ορισμός 2.1.1

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και A_1, A_2, A_3 ενδεχόμενα. Τότε τα A_1, A_2, A_3 είναι (ολικά) ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)(A_2)(A_3) \qquad (1)$$

και

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)(A_2) \qquad (2)$$

και

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)(A_3) \qquad (3)$$

και

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)(A_3) \qquad (4)$$

Αν τα ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 ικανοποιούν τις σχέσεις $(2),(3),(4)$ αλλά όχι την (1), τότε καλούνται ανά δύο ανεξάρτητα. Είναι προφανές ότι ανεξάρτητα ενδεχόμενα είναι και ανά δύο ανεξάρτητα. Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε ανεξάρτητα ενδεχόμενα, θα εννοούμε ενδεχόμενα ολικά ανεξάρτητα, που ικανοποιούν δηλαδή και τις τέσσερις παραπάνω ισότητες.

Ορισμός 2.1.2

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ενδεχόμενα (πεπερασμένα το πλήθος). Τότε τα A_n είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύει ότι:

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)=\prod_{i\in I} P\left(A_i\right)$$

για κάθε πεπερασμένο σύνολο δεικτών $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$.

Ορισμός 2.1.3

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και $\{A_i\}_{i\in I}$ οικογένεια ενδεχομένων. Τότε η οικογένεια καλείται ανεξάρτητη αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη συλλογή στοιχείων της αποτελείται από ανεξάρτητα ενδεχόμενα .

Πρόταση 2.1.4

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων. Τότε και τα ενδεχόμενα

$$\bigcup_{j=1}^{k} A_j,\ \bigcup_{j=k+1}^{\infty} A_j$$

είναι ανεξάρτητα.

Ορισμός 2.1.5

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και C_1, C_2 κλάσεις ενδεχομένων του Ω με $C_1, C_2\in F$. Οι C_1, C_2 καλούνται ανεξάρτητες αν $\forall A_1\in C_1$ και $\forall A_2\in C_2$ τα A_1, A_2 είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα . Ομοίως οι κλάσεις $C_1, C_2, \ldots, C_n$ καλούνται ανεξάρτητες αν $\forall A_1\in C_1, \forall A_2\in C_2, \ldots, \forall A_n\in C_n$ τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Τέλος η συλλογή κλάσεων $\{C_i\}_{i\in I}$ καλείται ανεξάρτητη αν $\forall A_i\in C_i$ τα $A_i,\ i\in I$, είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Πρόταση 2.1.6

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και C_1, C_2 κλάσεις ενδεχομένων του Ω με $C_1, C_2\in F$. Αν οι C_1, C_2 είναι ανεξάρτητες και κλειστές στην τομή, τότε οι σ-άλγεβρες $\sigma(C_1), \sigma(C_2)$ είναι ανεξάρτητες. Αναλόγως ισχύει η πρόταση τόσο για μια πεπερασμένη όσο και για μία τυχαία συλλογή κλάσεων ενδεχομένων.

Ορισμός 2.1.7 (Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών)

Έστω X, Y πραγματικές τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας (Ω, F, P). Τότε οι X, Y καλούνται ανεξάρτητες αν και μόνο αν:

$$P(X \in A_1, Y \in A_2) = P(X \in A_1) P(Y \in A_2), \qquad \forall A_1, A_2 \in B$$

όπου B τα Borel του $\mathbb{R}$. Αναλόγως ορίζεται η ανεξαρτησία για μια πεπερασμένη συλλογή καθώς και για μια άπειρη οικογένεια τυχαίων μεταβλητών σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.1.8

Η πεπερασμένη συλλογή τυχαίων μεταβλητών $(X_i)_{i=1}^n$ καλείται (ολικά) ανεξάρτητη αν και μόνο αν για κάθε πεπερασμένη συλλογή Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ισχύει ότι :

$$P\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i \in I} P\{X_i \in A_i\}$$

για κάθε πεπερασμένο σύνολο δεικτών $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, όπου $(A_i)_{i=1}^n \in B(\mathbb{R})$.

Τέλος μια άπειρη οικογένεια τυχαίων μεταβλητών καλείται (ολικά) ανεξάρτητη αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη συλλογή στοιχείων της αποτελείται από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές .

Πρόταση 2.1.9

Ισοδύναμα με τον προηγούμενο ορισμό ισχύει ότι η οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X_i, i \in I,$ είναι ανεξάρτητη αν και μόνο αν για κάθε πεπερασμένο σύνολο δεικτών $J \subset I$ και για κάθε $a_i \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$P\left(\bigcap_{i \in J} \{X_i \le a_i\}\right) = \prod_{i \in J} P(X_i \le a_i)$$

Όπως ορίσαμε την ανά δύο ανεξαρτησία ενδεχομένων, με παρόμοιο τρόπο ορίζεται και για τυχαίες μεταβλητές.

Ορισμός 2.1.10

Έστω η οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X_i,\ i \in I$.Τότε οι X_i καλούνται ανά δύο ανεξάρτητες αν $\forall i, j \in I$ με $i \neq j$ ισχύει ότι:

$$P\left(X_i \in A_1, X_j \in A_2\right) = P\left(X_i \in A_1\right) P\left(X_j \in A_2\right), \quad \forall A_1, A_2 \in B(\mathbb{R})$$

Είναι προφανές ότι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές είναι και ανά δύο ανεξάρτητες. Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, θα εννοούμε τυχαίες μεταβλητές ολικά ανεξάρτητες.

Πρόταση 2.1.11

Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας (Ω, F, P), τέτοιες ώστε οι $X\ , Y$ να είναι ανεξάρτητες, και f, g μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε, οι $f(X), g(Y)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Απόδειξη : Αφού οι $X\ , Y$ είναι ανεξάρτητες ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
&P\left(X \in A_1, Y \in A_2\right) = P\left(X \in A_1\right) P\left(Y \in A_2\right) \\
\Leftrightarrow\ &P\left\{X^{-1}\left(A_1\right), Y^{-1}\left(A_2\right)\right\} = P\left\{X^{-1}\left(A_1\right)\right\} P\left\{Y^{-1}\left(A_2\right)\right\}, \qquad \forall A_1, A_2 \in B
\end{aligned}$$

όπου B τα Borel του $\mathbb{R}$. Τώρα για τις $f(X), g(Y)$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
P\left\{f(X) \in A_1, g(Y) \in A_2\right\} &= P\left\{(f \circ X)^{-1}\left(A_1\right), (g \circ Y)^{-1}\left(A_2\right)\right\} \\
&= P\left\{\left(X^{-1} \circ f^{-1}\right)\left(A_1\right), \left(Y^{-1} \circ g^{-1}\right)\left(A_2\right)\right\} \\
&= P\left\{X^{-1}\left[f^{-1}\left(A_1\right)\right], Y^{-1}\left[g^{-1}\left(A_2\right)\right]\right\} \quad (X, Y\ \alpha\nu\varepsilon\xi\acute{\alpha}\rho\tau\eta\tau\varepsilon\varsigma) \\
&= P\left\{X^{-1}\left[f^{-1}\left(A_1\right)\right]\right\} P\left\{Y^{-1}\left[g^{-1}\left(A_2\right)\right]\right\} \\
&= P\left\{f(X) \in A_1\right\} P\left\{f(X) \in A_1\right\}
\end{aligned}$$

Συνεπώς οι $f(X), g(Y)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Αναλόγως ισχύει η πρόταση για μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Τότε αν η

$\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, ισχύει ότι και η $\left(f_n(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 2.1.12

Έστω $X:(\Omega,F)\to(\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$ τυχαία μεταβλητή .Τότε η σ-άλγεβρα που παράγεται από τη X ορίζεται ως :

$$\sigma(X)=X^{-1}\left(B(\mathbb{R})\right)=\left\{\omega\in\Omega: X(\omega)\in A, A\in B(\mathbb{R})\right\}$$

Πρόταση 2.1.13

Έστω $X,Y:(\Omega,F)\to(\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$ τυχαίες μεταβλητές. Τότε οι X,Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν οι σ-άλγεβρες $\sigma(X),\sigma(Y)$ είναι ανεξάρτητες.

Απόδειξη : Έστω $A_1\in\sigma(X)$ και $A_2\in\sigma(Y)$. Τότε $A_1=X^{-1}(C_1)$ και $A_2=Y^{-1}(C_2)$ για κάποια $C_1,C_2\in B(\mathbb{R})$. Είναι άμεσο από την ανεξαρτησία των X,Y ότι τα $X^{-1}(C_1)$, $Y^{-1}(C_2)$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα , άρα $\sigma(X),\sigma(Y)$ ανεξάρτητες. Αντιστρόφως, έστω $\sigma(X),\sigma(Y)$ ανεξάρτητες . Τότε ισχύει ότι:

$$X^{-1}\left(B(\mathbb{R})\right),Y^{-1}\left(B(\mathbb{R})\right)$$

ανεξάρτητες, δηλαδή $X^{-1}(A),Y^{-1}(C)$ ανεξάρτητα για κάθε $A,C\in B(\mathbb{R})$. Συνεπώς X,Y είναι ανεξάρτητες. Αναλόγως ισχύει η πρόταση και για μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_i\}_{i\in I}$.

Θεώρημα 2.1.14

Έστω $\{F_i\}_{i\in I}$ ανεξάρτητη οικογένεια σ-αλγεβρών και J ένα σύνολο δεικτών με $J\subset I$. Υποθέτουμε ότι $\forall\, j\in J$, $I_j\subset I$ και $\forall\, j_1,j_2\in J$ με $j_1\neq j_2$ ισχύει ότι $I_{j_1}\bigcap I_{j_2}=\varnothing$. Αν $F_{I_j}=\bigcup_{i\in I_j}F_i$, τότε η $\left\{F_{I_j}\right\}_{j\in J}$ είναι ανεξάρτητη οικογένεια σ-αλγεβρών.

Απόδειξη: Ορίζουμε τη οικογένεια κλάσεων ενδεχομένων $C_{I_j} = \left\{ \bigcap_{i \in I_j} A_i \right\}$. Τότε, η C_{I_j} είναι κλειστή στην τομή και αποτελείται από ανεξάρτητες κλάσεις. Άρα, από την πρόταση $(2.1.6)$, οι σ-άλγεβρες $\sigma\left(\left\{C_{I_j}, j \in J\right\}\right)$ είναι ανεξάρτητες. Όμως, η οικογένεια C_{I_j} περιέχει το Ω και τις F_{I_j}, οπότε $\sigma\left(C_{I_j}\right) = F_{I_j} = \bigcup_{i \in I_j} F_i$.

Πρόταση 2.1.15

Έστω X_i ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $f_i : A \to \mathbb{R}$ πραγματικές μετρήσιμες συναρτήσεις, με $1 \le i \le n$ και $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Αν η $\{k_i\}_{i=0}^{n}$ είναι μια επιλογή φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $0 = k_0 < 1 \le k_1 < k_2 \cdots < k_{n-1} < k_n = n$, τότε οι $f_1\left(X_1, \ldots, X_{k_1}\right), f_2\left(X_{k_1+1}, \ldots, X_{k_2}\right), \ldots, f_n\left(X_{k_{n-1}+1}, \ldots, X_{k_n}\right)$ είναι ανεξάρτητες.

Απόδειξη: Θέτουμε $F_i = \sigma(X_i)$ και $C_i = \sigma\left(\bigcup_{i=k_{i-1}+1}^{k_i} F_i \right)$. Τότε, $f_i\left(X_{k_{i-1}+1}, \ldots, X_{k_i}\right) \in C_i$, οπότε από το θεώρημα $(2.1.14)$ και την πρόταση $(2.1.11)$ οι f_i είναι ανεξάρτητες.

Πρόταση 2.1.16

Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών .Τότε ισχύουν τα εξής :

(i) οι σ-άλγεβρες $\sigma\left(X_j, j \le n\right), \sigma\left(X_j, j > n\right)$ είναι ανεξάρτητες

(ii) οι τυχαίες μεταβλητές $\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=n+1}^{n+k} X_i$ είναι ανεξάρτητες

(iii) οι τυχαίες μεταβλητές $\max_{1 \le i \le n} X_i, \max_{n+1 \le i \le n+k} X_i$ είναι ανεξάρτητες

Οι αποδείξεις προκύπτουν άμεσα από το θεώρημα $(2.1.14)$ και την πρόταση $(2.1.15)$.

§ 2.2 Ισόνομες τυχαίες μεταβλητές-Θεώρημα Fubini

Ορισμός 2.2.1

Οι πραγματικές τυχαίες μεταβλητές X , Y ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) καλούνται ισόνομες αν και μόνο αν ακολουθούν την ίδια κατανομή, δηλαδή αν ισχύει ότι :

$$P(X \in A) = P(Y \in A) \quad , \ \forall A \in B$$

όπου B τα Borel του $\mathbb{R}$. Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι οι X , Y είναι ισόνομες αν ισχύει ότι :

$$P(X \leq x) = P(Y \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Αναλόγως δίνεται ο ορισμός για μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών

Ορισμός 2.2.2

Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Οι X_n καλούνται ισόνομες αν και μόνο αν ακολουθούν την ίδια κατανομή, δηλαδή αν ισχύει ότι :

$$P(X_1 \in A) = P(X_2 \in A) = \ldots = P(X_n \in A) = \ldots, \forall A \in B$$

όπου B τα Borel του $\mathbb{R}$, ή ισοδύναμα αν ισχύει ότι :

$$P(X_1 \leq x) = P(X_2 \leq x) = \ldots = P(X_n \leq x) = \ldots, \forall x \in \mathbb{R}$$

Πρόταση 2.2.3

Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) , τέτοιες ώστε οι X , Y να είναι ισόνομες, και f, g μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε και οι $f(X)$, $f(Y)$ είναι ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Απόδειξη : Αφού οι X , Y είναι ισόνομες συνεπάγεται ότι :

$$P(X \in A) = P(Y \in A) \Leftrightarrow P\{X^{-1}(A)\} = P\{Y^{-1}(A)\} \ \ \forall A \in F \qquad (1).$$

Τώρα για τις $f(X)$, $f(Y)$ έχουμε ότι :

$$P\{f(X) \leq x\} = P\{(f \circ X)^{-1}(-\infty, x]\} = P\{X^{-1}(f^{-1}(-\infty, x])\} = P\{Y^{-1}(f^{-1}(-\infty, x])\}$$
$$= P\{(f \circ Y)^{-1}(-\infty, x]\} = P\{f(Y) \leq x\}$$

σύμφωνα με τη σχέση (1) για $A = f^{-1}(-\infty, x] \in F$, καθώς η f μετρήσιμη συνάρτηση. Συνεπώς οι $f(X), f(Y)$ είναι ισόνομες τυχαίες μεταβλητές . Αναλόγως ισχύει η πρόταση για μια ακολουθία ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.Τότε αν η f είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση, ισχύει ότι και η $\left(f(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία ισόνομων τυχαίων μεταβλητών.

Πρόταση 2.2.4

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Αν η f είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση και η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, ισχύουν τα εξής :

(i) η $\left(f(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών.

(ii) η $\left(f_n(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων (αλλά όχι ισόνομων) τυχαίων μεταβλητών.

Η απόδειξη είναι άμεση από τις προτάσεις $(2.2.3),(2.1.11)$.Η συγκεκριμένη πρόταση είναι πολύ σημαντική και θα αναφερόμαστε συχνά σε αυτήν καθώς οι ακολουθίες ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα στα επόμενα κεφάλαια.

Τώρα, έστω $(\Omega_1, F_1, P_1), (\Omega_2, F_2, P_2)$ χώροι πιθανότητας. Αν $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ και $F = \sigma(F_1 \times F_2) = \sigma(\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 : \mathrm{A}_1 \in F_1, \mathrm{A}_2 \in F_2)$, τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας στην F ώστε να ισχύει ότι $P(\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2) = P(\mathrm{A}_1)P(\mathrm{A}_2)$, όπου $\mathrm{A}_1 \subset \Omega_1, \mathrm{A}_1 \in F_1$ και $\mathrm{A}_2 \subset \Omega_2, \mathrm{A}_2 \in F_2$. Το P λέγεται μέτρο γινόμενο των P_1, P_2 και ο χώρος πιθανότητας (Ω, F, P) λέγεται χώρος γινόμενο των $(\Omega_1, F_1, P_1), (\Omega_2, F_2, P_2)$. Σε έναν τέτοιο χώρο πιθανότητας ισχύει το παρακάτω πολύ σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.5 (Θεώρημα του Fubini)

Έστω $f : (\Omega, F, P) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f \geq 0$ ή $f \in L_1(\Omega)$, τότε ισχύει ότι:

$$\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2} f(x,y)P_2(dy)\right]P_1(dx)=\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\,dP=\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1} f(x,y)P_1(dx)\right]P_2(dy)$$

όπου P το μέτρο γινόμενο των P_1, P_2.

Θεώρημα 2.2.6

Έστω X,Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομές μ,ν αντίστοιχα.

Αν η $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $h\geq 0$ ή $E\left|h(X,Y)\right|<\infty$, τότε:

$$Eh(X,Y)=\iint h(x,y)\mu(dx)\nu(dy)$$

Πιο ιδιαίτερα, αν $h(x,y)=f(x)g(y)$ με $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f,g\geq 0$ ή $E\left|f(X)\right|<\infty$ και $E\left|g(Y)\right|<\infty$, τότε ισχύει ότι:

$$E\left[f(X)g(Y)\right]=Ef(X)\cdot Eg(Y)$$

Απόδειξη: Από το θεώρημα μετασχηματισμού (θεώρημα 1.2.8) και το θεώρημα του Fubini, έχουμε ότι:

$$Eh(X,Y)=\int_{\mathbb{R}^2} h\,d(\mu\times\nu)=\iint h(x,y)\mu(dx)\nu(dy) \qquad (1)$$

Στη περίπτωση κατά την οποία $h(x,y)=f(x)g(y)$ με $f,g\geq 0$, τότε από το θεώρημα $(1.2.8)$ και τη σχέση (1) την οποία αποδείξαμε προηγουμένως, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}E\left[f(X)g(Y)\right]&=\iint f(x)g(y)\mu(dx)\nu(dy)=\int g(y)\left[\int f(x)\mu(dx)\right]\nu(dy)\\&=\int Ef(X)g(y)\nu(dy)=Ef(X)\cdot Eg(Y)\end{aligned}$$

Αν ισχύει ότι $E\left|f(X)\right|<\infty$ και $E\left|g(Y)\right|<\infty$, τότε επαναλαμβάνοντας την προηγούμενη διαδικασία προκύπτει ότι $E\left|f(X)g(Y)\right|=E\left|f(X)\right|\cdot E\left|g(Y)\right|<\infty$. Άρα κάνοντας άλλη μία φορά την προηγούμενη διαδικασία, καταλήγουμε πάλι ότι:

$$E\left[f(X)g(Y)\right]=Ef(X)\cdot Eg(Y)$$

\

Πόρισμα 2.2.7

Έστω X,Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει άμεσα ότι:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Επίσης, αν οι $X_1, X_2, \ldots X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $X_i \geq 0,\ \forall i = 1,\ldots,n$ ή $E|X_i| < \infty,\ \forall i = 1,\ldots,n$ τότε από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} EX_i$$

§ 2.3 Σύγκλιση τυχαίων μεταβλητών

Ορισμός 2.3.1

Η ακολουθία συναρτήσεων κατανομής πιθανότητας $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται ότι συγκλίνει ασθενώς στη συνάρτηση κατανομής F, $F_n \xrightarrow{w} F$, αν $\lim_{n\to+\infty} F_n = F$ για κάθε σημείο συνέχειας της F.

Ορισμός 2.3.2

Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται ότι συγκλίνει κατά νόμο στην τυχαία μεταβλητή X, $X_n \xrightarrow{D} X$,όταν $F_{X_n} \xrightarrow{w} F_X$ όπου $(F_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία συναρτήσεων κατανομής πιθανότητας των X_n και F_X η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της X.

Ορισμός 2.3.3

Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται ότι συγκλίνει κατά πιθανότητα στην τυχαία μεταβλητή X, $X_n \xrightarrow{p} X$, αν $\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.

Ορισμός 2.3.4

Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται ότι συγκλίνει σχεδόν βεβαίως στην τυχαία μεταβλητή X, $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$, αν $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X, \kappa.\sigma.) = 1$.

Ορισμός 2.3.5

Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται ότι συγκλίνει κατά τετραγωνικό μέσο στην τυχαία μεταβλητή X, $X_n \xrightarrow{L^2} X$, αν $\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^2) = 0$.

Πρόταση 2.3.6

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $X_n \xrightarrow{p} X$, όπου X τυχαία μεταβλητή. Τότε $X_n \xrightarrow{D} X$.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} P(X_n \le t) &= P\left(\{X_n \le t\} \cap \{|X_n - X| \le \varepsilon\}\right) + P\left(\{X_n \le t\} \cap \{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) \\ &\le P(X \le t + \varepsilon) + P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Γνωρίζουμε ότι η $X_n \xrightarrow{p} X$. Θα δείξουμε ότι:

$$X_n \xrightarrow{D} X \Leftrightarrow F_{X_n} \xrightarrow{w} F_X, \forall x \in \mathbb{R}$$

στο οποίο η F_X είναι συνεχής. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συνέχειας της F_X. Τότε από τη σχέση (1.2) για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει:

$$P(X_n \le a) \le P(X \le a + \varepsilon) + P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right)$$

και

$$P(X \le a - \varepsilon) \le P(X_n \le a) + P(|X_n - X| > \varepsilon)$$

Άρα,

$$P(X \le a - \varepsilon) - P(|X_n - X| > \varepsilon) \le P(X_n \le a) \le P(X \le a + \varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon)$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $n \to \infty$ έχουμε:

$$F_X(a - \varepsilon) \le \lim_{n\to\infty} P(X_n \le a) \le F_X(a + \varepsilon)$$

όπου, $F_X(a) = P(X \le a)$. Αφού η F_X είναι συνεχής στο ε τότε καθώς το $\varepsilon \to 0^+$ έπεται ότι: $F_X(a - \varepsilon) = F_X(a + \varepsilon) = F_X(a)$. Άρα, για $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \le a) = P(X \le a) \Rightarrow X_n \xrightarrow{D} X \qquad \square$$

Παρατήρηση: Το αντίστροφο εν γένει δεν ισχύει εκτός από την ειδική περίπτωση κατά την οποία η $X_n \xrightarrow{D} c, c \in \mathbb{R}$. Τότε $X_n \xrightarrow{p} c$.

Πρόταση 2.3.7

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$, όπου X τυχαία μεταβλητή. Τότε $X_n \xrightarrow{P} X$.

Απόδειξη : Φιξάρουμε ένα $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε τις ακολουθίες ενδεχομένων

$$A_n = \left\{ \left| X_n - X \right| \geq \varepsilon \right\} \text{ και } U_n = \bigcup_{m\geq n} A_m$$

Αφού, $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X \underset{\Pi\rho\acute{o}\tau\alpha\sigma\eta\;(\;)}{\Leftrightarrow} P\left(\limsup A_n\right) = 0$. Όμως $A_n \subset U_n$, U_n φθίνουσα και $\lim U_n = \limsup A_n$ οπότε έχουμε :

$$P\left(A_n\right) \leq P\left(U_n\right) \xrightarrow{n\to\infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) = P\left(\limsup A_n\right) = 0$$

άρα $\forall \varepsilon > 0$ η $P\left(A_n\right) = P\left(\left| X_n - X \right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{P} X$. □

Πρόταση 2.3.8

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $X_n \xrightarrow{P} X$, όπου X τυχαία μεταβλητή. Τότε υπάρχει υπακολουθία φυσικών αριθμών $\left\{n_k\right\}$ τέτοια ώστε $X_{n_k} \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$.

Απόδειξη: Αφού $X_n \xrightarrow{P} X$, ισχύουν τα εξής:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P(\left| X_n - X \right| > \varepsilon) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ P(\left| X_n - X \right| > \varepsilon) \leq \frac{1}{2^k}$$

για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ που εξαρτάται από το n. Το ίδιο ισχύει και για κάθε υπακολουθία $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της X_n, οπότε έχουμε ότι:

$$P(\left| X_{n_k} - X \right| > \varepsilon) \leq \frac{1}{2^k}$$

Παίρνοντας το άθροισμα στα δύο μέλη πάνω σε όλα τα $k \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} P(\left| X_{n_k} - X \right| > \varepsilon) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} < \infty$$

Συνεπώς, από το 1ο λήμμα Borel – Cantelli και την πρόταση (4.1.3.) (Κεφάλαιο 4) ισχύει ότι:

$$X_{n_k} \xrightarrow{\sigma.\beta.} X \qquad \square$$

Πρόταση 2.3.9

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $X_n \xrightarrow{L^2} X$, όπου X τυχαία μεταβλητή. Τότε $X_n \xrightarrow{P} X$.

Απόδειξη : Εφαρμόζοντας την ανισότητα Chebysev με $\varphi(x)=x^2$ παίρνουμε:

$$P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) \leq E\left(|X_n - X|^2\right)\Big/\varepsilon^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

καθώς $X_n \xrightarrow{L^2} X \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E(|X_n - X|^2) = 0$. Άρα $X_n \xrightarrow{P} X$. $\square$

Πρόταση 2.3.10

Έστω $p > z > 0$ και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $X_n \xrightarrow{L^P} X$, όπου X τυχαία μεταβλητή. Τότε $X_n \xrightarrow{L^Z} X$.

Απόδειξη : Εφαρμόζοντας την ανισότητα Jensen για την κυρτή συνάρτηση $\varphi(x) = |x|^r$ παίρνουμε ότι:

$$\varphi\big(E[Y]\big) \leq E\big[\varphi(Y)\big] \Rightarrow |EY|^r \leq E|Y|^r \text{ (πρέπει πάντα } Y, \varphi(Y) \in L_1)$$

Αν θέσουμε όπου $Y = |X_n - X|^z$ και $r = p/z$ έχουμε:

$$\left[E\left(|X_n - X|^z\right)\right]^r = \left[\left|E\left(|X_n - X|^z\right)\right|\right]^r \leq E\left[\left(|X_n - X|^z\right)\right]^r = E\left(|X_n - X|^p\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Από υπόθεση, επομένως:

$$\left[E\left(|X_n - X|^z\right)\right]^r \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow E\left(|X_n - X|^z\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^Z} X \qquad \square$$

W. Feller

3 Ασθενείς Νόμοι των Μεγάλων Αριθμών

§ 3.1 Ασθενής νόμος με πεπερασμένες διασπορές

Ορισμός 3.1.1

Έστω $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια τυχαίων μεταβλητών με $E(X_i^2)<\infty$. Τότε οι τυχαίες μεταβλητές λέγονται ασυσχέτιστες αν:

$$E(X_i X_j)=EX_i EX_j,\forall i\neq j \qquad (1)$$

Παρατήρηση: Αν η $(X_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών τότε από το πόρισμα $(2.2.7)$ ισχύει η σχέση (1) και συνεπώς οι X_i είναι ασυσχέτιστες. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει καθώς αν ισχύει η σχέση (1) δε συνεπάγεται ότι οι X_i είναι ανεξάρτητες.

Πρόταση 3.1.2

Έστω $X_1,X_2,\dots,X_n$ τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε: $E(X_i^2)<\infty$ και X_i ασυσχέτιστες, για κάθε $1\le i\le n$. Τότε:

$$\operatorname{var}\left(X_1+\ldots+X_n\right)=\operatorname{var}\left(X_1\right)+\ldots+\operatorname{var}\left(X_n\right)$$

Απόδειξη: Έστω $\mu_i=E\left(X_i\right)$ και $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$. Αφού,

$$ES_n=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(EX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu_\iota$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left(S_n\right)&=E\left[\left(S_n-ES_n\right)^2\right]=E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right)^2\right]=E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_i\right)\right)^2\right]=\\&=E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_i\right)\sum_{j=1}^{n}\left(X_j-\mu_j\right)\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_i-\mu_i\right)\left(X_j-\mu_j\right)\right]=\\&=\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i-\mu_i\right)^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}E\left(\left(X_i-\mu_i\right)\left(X_j-\mu_j\right)\right)=\\&=\operatorname{var}\left(X_1\right)+\ldots+\operatorname{var}\left(X_n\right)+B\end{aligned}$$

όπου $B = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} E\left(\left(X_i - \mu_i\right)\left(X_j - \mu_j\right)\right)$. Θα δείξουμε ότι $B = 0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} E\left(\left(X_i - \mu_i\right)\left(X_j - \mu_j\right)\right) &= EX_iX_j - \mu_i EX_j - \mu_j EX_i + \mu_i\mu_j \\ &= EX_iX_j - \mu_i\mu_j = EX_iEX_j - \mu_i\mu_j \\ &= \mu_i\mu_j - \mu_i\mu_j = 0 \end{aligned}$$

καθώς X_i, X_j ασυσχέτιστες $\Leftrightarrow EX_iX_j = EX_iEX_j$. □

Θεώρημα 3.1.3 (Ασθενής νόμος με πεπερασμένες διασπορές)

Έστω $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών με $EX_n = \mu$ και $\operatorname{var}\left(X_i\right) \le c < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$. Αν $\mathrm{S}_n = X_1 + ... + X_n$ τότε για $n \to \infty$ $\frac{S_n}{n} \longrightarrow \mu$ κατά L^2 και κατ' επέκταση και κατά πιθανότητα.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι: $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} \mu$, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} E(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right|^2) = 0$. Παρατηρούμε ότι: $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(EX_1 + ... + EX_n\right) = \frac{1}{n}n\mu = \mu$

Οπότε, χρησιμοποιώντας την πρόταση $(3.1.2)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E\left[\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)^2\right] &= E\left[\left(\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)^2\right] = \operatorname{var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\operatorname{var}\left(S_n\right) \\ &\underset{(3.1.2)}{=} \frac{1}{n^2}\left(\operatorname{var}\left(X_1\right) + ... + \operatorname{var}\left(X_n\right)\right) \\ &\le \frac{1}{n^2}cn = \frac{c}{n} \to 0 \end{aligned}$$

Άρα, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} \mu$ και από την πρόταση $(2.3.9)$ η $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \mu$.

□

Η πιο σημαντική ειδική περίπτωση του θεωρήματος $(3.1.3)$ συμβαίνει όταν η $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Τότε το θεώρημα μας λέει ότι αν $E\left(X_i^2\right) < \infty$ τότε:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \mu$$

όπου $\mu = E(X_i)$. Σε επόμενο θεώρημα θα δούμε ότι $E|X_i| < \infty$ είναι επαρκής υπόθεση.

§ 3.2 Τριγωνικοί Πίνακες & ΑΝΜΑ

Θεώρημα 3.2.1

Έστω τριγωνικός πίνακας τυχαίων μεταβλητών $X_{n,k}, 1 \le k \le n$. Έστω:

$S_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$, $\mu_n = ES_n$, $\sigma_n^2 = \operatorname{var}(S_n)$ και b_n αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Αν,

$$\frac{\sigma_n^2}{b_n^2} \to 0 \text{ τότε } \frac{S_n - \mu_n}{b_n} \xrightarrow{p} 0$$

Απόδειξη: Έχουμε $\mu_n = ES_n = E\left(X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}\right) = E\left(X_{n,1}\right) + \ldots + E\left(X_{n,n}\right)$.

Θέτουμε $z_n = \dfrac{S_n - \mu_n}{b_n}$ και παρατηρούμε ότι:

$$E|z_n|^2 = E(z_n)^2 = E\left(\frac{S_n - \mu_n}{b_n}\right)^2 = E\left(\frac{S_n - E(S_n)}{b_n}\right)^2 = \frac{\operatorname{var}(S_n)}{b_n^{\,2}} = \frac{\sigma_n^{\,2}}{b_n^{\,2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Chebysev για την z_n με $\varphi(x) = x^2, \varepsilon > 0$ παίρνουμε

$$P\left(|z_n| \ge \varepsilon\right) \le \frac{E\left(z_n^{\,2}\right)}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

όπως δείξαμε πριν. Άρα,

$$z_n \xrightarrow{p} 0 \Rightarrow \frac{S_n - \mu_n}{b_n} \xrightarrow{p} 0 \qquad \square$$

Θεώρημα 3.2.2 (Γενική μορφή του ασθενούς νόμου *)*

Έστω τριγωνικός πίνακας τυχαίων μεταβλητών $X_{n,k}, 1 \le k \le n$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να είναι ανεξάρτητες. Έστω b_n αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών και $\overline{X}_{n,k} = X_{n,k} 1_{\left(|X_{n,k}| \le b_n\right)}$. Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

i. $\sum_{k=1}^{n} P\left(\left|X_{n,k}\right| > b_n\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ii. $b_n^{-2}\sum_{k=1}^{n} E\left[\left(\bar{X}_{n,k}\right)^2\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Αν $\mathrm{S}_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$ και $a_n = \sum_{k=1}^{n} E\bar{X}_{n,k}$ τότε $\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{p} 0$.

Απόδειξη: Έστω $\bar{\mathrm{S}}_n = \bar{X}_{n,1} + \ldots + \bar{X}_{n,n}$ τότε έχουμε:

$$\left\{\left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\} = \left\{\left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\} \cap \left\{S_n = \bar{S}_n\right\} \cup \left\{\left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\} \cap \left\{S_n \neq \bar{S}_n\right\}$$

$$= \left\{\left|\frac{\bar{S}_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\} \cap \left\{S_n = \bar{S}_n\right\} \cup \left\{\left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\} \cap \left\{S_n \neq \bar{S}_n\right\}$$

$$\subset \left\{\left|\frac{\bar{S}_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\} \cup \left\{S_n \neq \bar{S}_n\right\}$$

Άρα,

$$P\left(\left\{\left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\}\right) \leq P\left(\left\{\left|\frac{\bar{S}_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\} \cup \left\{S_n \neq \bar{S}_n\right\}\right)$$

$$\leq P\left(\left\{\left|\frac{\bar{S}_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\}\right) + P\left(\left\{S_n \neq \bar{S}_n\right\}\right) \qquad (1)$$

Εξετάζοντας τους δύο όρους χωριστά στο δεύτερο μέλος της προηγούμενης ανισότητας έχουμε:

$$P\left(\left\{S_n \neq \bar{S}_n\right\}\right) = P\left(\sum_{k=1}^{n} X_{n,k} \neq \sum_{k=1}^{n} \bar{X}_{n,k}\right) = P\left(\sum_{k=1}^{n} X_{n,k} \neq \sum_{k=1}^{n} X_{n,k} 1_{\left(\left|X_{n,k}\right| \leq b_n\right)}\right) =$$

$$= P\left(\exists k_0 \in \mathbb{N} : 1 \leq k_0 \leq n \quad \tau.\omega: \left|X_{n,k_0}\right| > b_n\right)$$

$$= P\left(\left|X_{n,k_0}\right| > b_n\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P\left(\left|X_{n,k}\right| > b_n\right) \xrightarrow[\alpha\pi\acute{o}\,(i)]{n\to\infty} 0 \qquad (2)$$

Επίσης από ανισότητα Chebysev έχουμε:

$$P\left(\left\{\left|\frac{\bar{S}_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\}\right) \leq \varepsilon^{-2} E\left(\left|\frac{\bar{S}_n - a_n}{b_n}\right|^2\right) = \varepsilon^{-2}\,\frac{\operatorname{var}\left(\bar{S}_n\right)}{b_n^{\,2}} = \left(\varepsilon b_n\right)^{-2} \operatorname{var}\left(\bar{X}_{n,1} + \ldots + \bar{X}_{n,n}\right)$$

$$= \left(\varepsilon b_n\right)^{-2} \left(\operatorname{var}\left(\bar{X}_{n,1}\right) + \ldots + \operatorname{var}\left(\bar{X}_{n,n}\right)\right)$$

$$=\left(\varepsilon b_n\right)^{-2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{var}\left(\overline{X}_{n,k}\right)\leq\left(\varepsilon b_n\right)^{-2}\sum_{k=1}^{n}E\left[\left(\overline{X}_{n,k}\right)^2\right]\xrightarrow[\alpha\pi\acute{o}\,(ii)]{n\to\infty}0 \qquad (3)$$

καθώς από την πρόταση $(2.2.4)$ οι $\overline{X}_{n,k}$ είναι ανεξάρτητες, ενώ επίσης ισχύει ότι $\operatorname{var} X \leq E\left(X^2\right)$. Συνεπώς, από τις $(2),(3)$ η σχέση (1) δίνει ότι:

$$P\left(\left\{\left|\frac{S_n-a_n}{b_n}\right|>\varepsilon\right\}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0\Rightarrow\frac{S_n-a_n}{b_n}\xrightarrow{p}0. \qquad \square$$

Λήμμα 3.2.3

Έστω $X\geq 0$ τυχαία μεταβλητή και $p>0$. Τότε ισχύει ότι:

$$E\left(X^p\right)=\int_0^\infty py^{p-1}P\left(X>y\right)dy$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μέσης τιμής, το θεώρημα του Fubini για μη αρνητικές συναρτήσεις και υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα έχουμε:

$$\int_0^\infty py^{p-1}P\left(X>y\right)dy=\int_0^\infty py^{p-1}\left(\int_\Omega 1_{(X>y)}dP\right)dy=\int_0^\infty\int_\Omega py^{p-1}1_{(X>y)}dPdy$$
$$=\int_\Omega\left(\int_0^\infty py^{p-1}1_{(X>y)}dy\right)dP=\int_\Omega\left(\int_0^X py^{p-1}1_{(X>y)}dy+\int_X^\infty py^{p-1}1_{(X>y)}dy\right)dP$$

Όμως για $X<y<\infty$ η $1_{(X>y)}=0\Rightarrow\int_X^\infty py^{p-1}1_{(X>y)}dy=0$. Άρα,

$$\int_0^\infty py^{p-1}P\left(X>y\right)dy=\int_\Omega\int_0^X py^{p-1}1_{(X>y)}dydP$$
$$=\int_\Omega\int_0^X py^{p-1}1dydP=\int_\Omega\left[y^p\right]_0^X dP=\int_\Omega X^pdP=E\left[X^p\right]$$

$\square$

Θεώρημα 3.2.4 (Ο ασθενής νόμος του Feller χωρίς την υπόθεση της μέσης τιμής)

Έστω $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $xP\left(\left|X_n\right|>x\right)\xrightarrow{x\to\infty}0,\forall n\in\mathbb{N}$. Έστω $S_n=X_1+\ldots+X_n$ και $\mu_n=E\left(X_1 1_{(|X_1|\leq n)}\right)$.

Τότε:

$$\frac{S_n}{n} - \mu_n \xrightarrow{p} 0$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα $(3.2.2)$ για $X_{n,k} = X_n$, $b_n = n$ και $\overline{X}_{n,k} = X_n 1_{(|X_n| \le n)}$. Τώρα θα ελέγξουμε αν επαληθεύονται οι υποθέσεις του θεωρήματος. Για την (i) έχουμε ότι:

$$\sum_{k=1}^{n} P\left(|X_k| > n\right) = P\left(|X_1| > n\right) + \ldots + P\left(|X_n| > n\right) = nP\left(|X_i| > n\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

αφού οι X_n είναι ισόνομες.

Για την (ii) πρέπει να δείξουμε ότι: $n^{-2}\sum_{k=1}^{n} E\left[\left(\overline{X}_k\right)^2\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} n^{-2}\sum_{k=1}^{n} E\left[\left(\overline{X}_k\right)^2\right] &= n^{-2}\sum_{k=1}^{n} E\left[\left(X_k 1_{(|X_k| \le n)}\right)^2\right] = n^{-2}\sum_{k=1}^{n} E\left[X_k^2 1_{(|X_k| \le n)}\right] = \\ &= n^{-2}\left(E\left[X_1^2 1_{(|X_1| \le n)}\right] + \ldots + E\left[X_n^2 1_{(|X_n| \le n)}\right]\right) = \\ &= n^{-2}\left(E\left[\overline{X}_1^2\right] + \ldots + E\left[\overline{X}_n^2\right]\right) = n^{-2} n E\left[\overline{X}_1^2\right] \\ &= E\left[\overline{X}_1^2\right] / n \end{aligned}$$

καθώς οι $\overline{X}_k^2$ ανεξάρτητες και ισόνομες. Τώρα θα εφαρμόσουμε το Λήμμα $(3.2.3)$ για την $\overline{X}_1 = X_1 1_{(|X_1| \le n)}$ και για $p = 2$. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} E\left(\overline{X}_1^{\,2}\right) &= \int_0^\infty 2y^{2-1} P\left(\left|\overline{X}_1\right| > y\right) dy = \int_0^\infty 2yP\left(|X_1| 1_{(|X_1| \le n)} > y\right) dy = \int_0^n 2yP\left(|X_1| 1_{(|X_1| \le n)} > y\right) dy + \\ &\int_n^\infty 2yP\left(|X_1| 1_{(|X_1| \le n)} > y\right) dy = \int_0^n 2yP\left(|X_1| 1_{(|X_1| \le n)} > y\right) dy \qquad (1) \end{aligned}$$

καθώς $P\left(|X_1| 1_{(|X_1| \le n)} > y\right) = P\left(\{|X_1| \le n\} \cap \{|X_1| > y\}\right)$, οπότε για $y \ge n$:

$$P\left(|X_1| 1_{(|X_1| \le n)} > y\right) = 0$$

ενώ για $y \le n$:

$$P\left(|X_1| 1_{(|X_1| \le n)} > y\right) = P\left(\{|X_1| > y\} / \{|X_1| > n\}\right) = P\left(|X_1| > y\right) - P\left(|X_1| > n\right) \le P\left(|X_1| > y\right)$$

οπότε τελικά η (1) δίνει:

$$E\left(\bar{X}_1^{\,2}\right)=\int_0^n 2yP\left(|X_1|1_{(|X_1|\le n)}>y\right)dy=\int_0^n 2y\left[P\left(|X_1|>y\right)-P\left(|X_1|>n\right)\right]dy\le\int_0^n 2yP\left(|X_1|>y\right)dy$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $yP\left(|X_1|>y\right)\xrightarrow{y\to\infty}0$.

Ισχυριζόμαστε ότι αυτό επάγει ότι:

$$E\left(\bar{X}_1^{\,2}\right)\Big/n\le\frac{1}{n}\int_0^n 2yP\left(|X_1|>y\right)dy\xrightarrow{n\to\infty}0$$

Απόδειξη ισχυρισμού: Έστω $g(y)=2yP\left(|X_1|>y\right)$ τότε ισχύουν τα εξής :

$0\le g(y)\le 2y$ και $g(y)\xrightarrow{y\to\infty}0\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists y_0>0\ \tau.\omega.\ \forall y>y_0\ \ g(y)<\varepsilon$.

Θέτουμε λοιπόν, $M=\sup g(y)<\infty$ και $E_K=\sup\left\{g(y):y>K\right\}$. Έχουμε ότι:

$$E_K=\sup\left\{g(y):y>K\right\}\le M=\sup g(y)<\infty$$

Τώρα χωρίζουμε το ολοκλήρωμα :

$$\int_0^n 2yP\left(|X_1|>y\right)dy=\int_0^K 2yP\left(|X_1|>y\right)dy+\int_K^n 2yP\left(|X_1|>y\right)dy\le MK+E_K(n-k)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{n}\int_0^n 2yP\left(|X_1|>y\right)dy\le MK/n+E_K(n-k)/n$$

παίρνοντας το $\limsup$ στα δύο μέλη, αφού δεν ξέρουμε αν υπάρχει το $\lim$, έχουμε:

$$\limsup\frac{1}{n}\int_0^n 2yP\left(|X_1|>y\right)dy\le E_k\xrightarrow{K\to\infty}o\Rightarrow$$

$$\limsup\frac{1}{n}\int_0^n 2yP\left(|X_1|>y\right)dy\le 0$$

και καθώς $a_n=\frac{1}{n}\int_0^n 2yP\left(|X_1|>y\right)dy\ge 0$ και $0\le\liminf a_n\le\limsup a_n=0$

καταλήγουμε ότι,

$$\frac{1}{n}\int_0^n 2yP\left(|X_1|>y\right)dy\xrightarrow{n\to\infty}0$$

Άρα,

$$E\left(\bar{X}_1^{\,2}\right)\big/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Οπότε επαληθεύονται οι υποθέσεις του θεωρήματος $(3.2.2)$ άρα ισχύει ότι

$$\frac{S_n}{n}-\mu_n \xrightarrow{p} 0 \qquad \square$$

§ 3.3 Κλασσικός ασθενής νόμος

Τώρα, παραθέτουμε τον ασθενή νόμο του Khintchin με την υπόθεση της μέσης τιμής, τον αποκαλούμενο και ως ‘κλασσικό ασθενή νόμο’.

Θεώρημα 3.3.1 (Κλασσική μορφή του Α.Ν.Μ.Α.)

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $E|X_i|<\infty$. Έστω $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ και $\mu = EX_1$. Τότε:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \mu$$

Απόδειξη: Θα εφαρμόσουμε την ανισότητα Chebysev για την τυχαία μεταβλητή $X_1 1_{(|X_1|>x)}$ και τη συνάρτηση $\varphi(x)=|x|$. Έχουμε λοιπόν :

$$P\left(|X_1|1_{(|X_1|>x)} > x\right) \le E\left(|X_1|1_{(|X_1|>x)} > x\right)\Big/|x| \Rightarrow xP\left(|X_1|1_{(|X_1|>x)} > x\right) \le E\left(|X_1|1_{(|X_1|>x)}\right) \qquad (1)$$

Όμως $1_{(|X_1|>x)} \xrightarrow{x\to\infty} 0$ και αφού $E|X_i|<\infty$ εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης με:

$$X_n = X_1 1_{(|X_1|>n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \sigma.\beta, Y=|X_1|, EY = E|X_1|<\infty$$

και

$$|X_n| = |X_1|1_{(|X_1|>n)} \le |X_1| = Y$$

τότε ισχύει ότι:

$$E\left(|X_1|1_{(|X_1|>n)}\right) = EX_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Άρα η σχέση (1) δίνει:

$$xP\left(\left|X_1\right|1_{(|X_1|>x)} > x\right) = xP\left(\left|X_1\right| > x\right) \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

οπότε ικανοποιείται η υπόθεση του θεωρήματος $(3.2.4)$.

Επίσης αν $\mu_n = E\left(X_1 1_{(|X_1|\le n)}\right)$ τότε αν εφαρμόσουμε πάλι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης με :

$$X_n = X_1 1_{(|X_1|\le n)} \xrightarrow{n\to\infty} X_1 \; \sigma.\beta, Y = \left|X_1\right|, EY = E\left|X_1\right| < \infty, \left|X_n\right| \le \left|X_1\right| = Y$$

τότε ισχύει ότι:

$$EX_n \xrightarrow{n\to\infty} EX_1 \Rightarrow \mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \mu \qquad (2)$$

Συνεπώς, από το θεώρημα $(3.2.4)$ έχουμε ότι:

$$\frac{S_n}{n} - \mu_n \xrightarrow{p} 0$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2) καταλήγουμε ότι:

$$\frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow{p} 0$$

Παρατήρηση: αν ισχύει ότι $E\left|X_i\right| < \infty$ τότε χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebysev μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$xP\left(\left|X_1\right| > x\right) \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

Πράγματι, αν θέσουμε $Y = \left|X_i\right|1_{(|X_i|>n)}$ τότε , με $\varphi(x) = |x|$, παίρνουμε:

$$P\left(|Y| > n\right) \le E\left(|Y|\right)/n \Rightarrow nP\left(\left|\left|X_i\right|1_{(|X_i|>n)}\right| > n\right) \le E\left(|Y|\right) \Rightarrow nP\left(\left|X_i\right| > n\right) \le E\left(|Y|\right)$$

και καθώς $E\left|X_i\right| < \infty$ οπότε και $E\left(|Y|\right) \le \infty$ καταλήγουμε ότι:

$$nP\left(\left|X_i\right| > n\right) \le E\left(\left|X_i\right|1_{(|X_i|>n)}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει , δηλαδή αν $xP\left(\left|X_i\right| > x\right) \xrightarrow{x\to\infty} 0$ τότε δεν μπορούμε να δείξουμε ότι $E\left|X_i\right| < \infty$, μπορούμε όμως, χρησιμοποιώντας το Λήμμα $(3.2.3)$ για $p = 1-\varepsilon$, να δείξουμε ότι $E\left|X_i\right|^{1-\varepsilon} < \infty$. Άρα η υπόθεση του θεωρήματος $(3.2.4)$ δεν είναι πολύ ασθενέστερη από αυτή της πεπερασμένης μέσης τιμής . □

A. Khinchin

4 Ισχυροί νόμοι μεγάλων αριθμών

§ 4.1 Λήμμα των Borel-Cantelli

Λήμμα 4.1.1 (1ο λήμμα Borel - Cantelli)

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και A_n ακολουθία ενδεχομένων τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$. Τότε ισχύει ότι: $P(\limsup A_n) = 0$.

Απόδειξη: $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, όπου $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Τότε ισχύουν τα εξής:

i. B_n φθίνουσα, δηλαδή $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \dots$.

ii. $B_n \in F, \forall n \in \mathbb{N}$.

iii. $P(B_1) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$ (από υπόθεση).

Από γνωστή ιδιότητα του μέτρου πιθανότητας ισχύει ότι:

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) \Leftrightarrow P(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

$$\Rightarrow P(\limsup A_n) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \qquad (1)$$

Όμως, από υπόθεση έχουμε: $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$. Άρα, από την (1) έχουμε ότι: $P(\limsup A_n) = 0$. □

Λήμμα 4.1.2 (2ο λήμμα Borel - Cantelli)

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και A_n ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. Τότε ισχύει ότι: $P(\limsup A_n) = 1$.

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $e^x \ge 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}^+ \ (1)$.

Έστω $A = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ τότε B_m φθίνουσα ακολουθία ενδεχομένων.

Έστω $A^C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m{}^C = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m{}^C$ τότε $B_m{}^C$ αύξουσα ακολουθία ενδεχομένων.

Συνεπώς, αφού τα $A_m{}^C$ ανεξάρτητα, έχουμε:

$$P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m{}^C \right) \le P\left(\bigcap_{m=n}^{z} A_m{}^C \right) = \prod_{n=m}^{z} P\left(A_m{}^C\right) = \prod_{n=m}^{z} \left[1 - P\left(A_m\right)\right]$$

$$\underset{\alpha\pi\acute{o}\,(1)}{\le} \prod_{n=m}^{z} e^{-P(A_m)} = e^{-\sum_{n=m}^{z} P(A_m)}, \forall z \ge n, \quad z > 0$$

και για $z \to \infty$ ισχύει ότι: $e^{-\sum_{n=m}^{z} P(A_m)} \xrightarrow{z \to \infty} 0$. Άρα, $P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m{}^C \right) = 0$ και καθώς $P\left(A^C\right) \le \sum_{m=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_n{}^C \right) = 0$ καταλήγουμε ότι $P\left(A\right) = P\left(\limsup A_n\right) = 1$. □

Πρόταση 4.1.3

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και $A_n = \left\{ \left| X_n - X \right| \ge \varepsilon \ , \varepsilon > 0 \right\}$ ακολουθία ενδεχομένων . Τότε αν $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X \Leftrightarrow P\left(\limsup A_n\right) = 0$.

Απόδειξη : Θα δείξουμε πρώτα το ευθύ . Έστω ότι $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$, τότε το σύνολο $B = \left\{ \omega \in \Omega : \lim X_n\left(\omega\right) \ne X\left(\omega\right) \right\}$ έχει $P(B) = 0$.

Τώρα, $\forall \omega \in B^C$ ισχύει ότι :

$$\lim X_n\left(\omega\right) = X\left(\omega\right) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \tau.\omega. \forall n \ge n_0 \ \left| X_n\left(\omega\right) - X\left(\omega\right) \right| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\forall n \ge n_0 \ \ \omega \notin \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \Rightarrow \forall n \ge n_0 \ \ \omega \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \Rightarrow$$
$$\omega \notin \limsup A_n$$

Αφού, $\forall \omega \in B^C$ το $\omega \notin \limsup A_n$ συμπεραίνουμε ότι :

$$B^C \cap \limsup A_n = \varnothing \Rightarrow \limsup A_n \subseteq B$$
$$\Rightarrow P\left(\limsup A_n\right) \le P\left(B\right) = 0 \Rightarrow P\left(\limsup A_n\right) = 0$$

Τώρα το αντίστροφο . Έστω ότι $P\left(\limsup A_n\right)=0$ τότε $P\left(\liminf A_n^{C}\right)=1$ οπότε έχουμε :

$$\begin{aligned}P\left(\liminf A_n^{C}\right) &= P\left(\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \tau.\omega.\ \forall n \geq n_0\ \sigma\upsilon\mu\beta\alpha\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota\,\tau o\, A_n^{C}\right)\\ &= P\left(\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \tau.\omega.\ \forall n \geq n_0 : \left|X_n - X\right| < \varepsilon\right)\\ &= P\left(X_n \xrightarrow{n\to\infty} X\ \ \kappa.\sigma.\right)=1 \Rightarrow X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X\end{aligned}$$

□

Ορισμός 4.1.4

Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται σχεδόν βέβαια Cauchy αν $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει ότι:

$$P\left(\sup_{m,n\geq M}\left|X_m - X_n\right| > \varepsilon\right)=0 \Rightarrow P\left(\sup_{m,n\geq M}\left|X_m - X_n\right| \xrightarrow{M\to\infty} 0\right)=1$$

§ 4.2 Ο ΙΝΜΑ με ισχυρές υποθέσεις

Θεώρημα 4.2.1 (Ο Ι.Ν.Μ.Α με την υπόθεση της πεπερασμένης ροπής 4ης τάξης)
Έστω $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $EX_i=\mu$ και $EX_i^4<\infty$. Τότε αν $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ισχύει ότι:

$$\frac{S_n}{n}-\mu \xrightarrow{\sigma.\beta} 0$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\mu=0$, (μπορούμε να θέσουμε $Y_i = X_i - EX_i$ οπότε παίρνουμε $EY_i=0$). Τότε:

$$\begin{aligned}E\left(S_n^{4}\right) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^4\right]=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{j=1}^{n}X_j\sum_{k=1}^{n}X_k\sum_{l=1}^{n}X_l\right)=E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}X_iX_jX_kX_l\right)\\ &= E\left(\sum_{1\leq i,j,k,l\leq n}X_iX_jX_kX_l\right)=\sum_{1\leq i,j,k,l\leq n}\left(E\left[X_iX_jX_kX_l\right]\right)\end{aligned}$$

Οι όροι στο άθροισμα που είναι της μορφής $E\left(X_i^3X_j\right)$ και $E\left(X_iX_jX_kX_l\right)$ με $i\neq j\neq k\neq l$ είναι μηδενικοί αφού, λόγω ανεξαρτησίας έχουμε

$$E\left(X_i^3X_j\right)=E\left(X_i^3\right)E\left(X_j\right)=0$$

και

$$E\left(X_i X_j X_k X_l\right) = E\left(X_i\right) E\left(X_j\right) E\left(X_k\right) E\left(X_l\right) = 0$$

Συνεπώς, στο άθροισμα μένουν μόνο οι όροι: $E\left(X_i^{\,4}\right), E\left(X_i^{\,2} X_j^{\,2}\right) = \left(E\left(X_i^{\,2}\right)\right)^2, n$ και $3n(n-1)$ φορές αντίστοιχα. Οπότε $E\left(S_n^{\,4}\right) = nE\left(X_i^{\,4}\right) + 3n(n-1)\left(E\left(X_i^{\,2}\right)\right)^2 \le Cn^2$, όπου $0 < C < \infty$. Η ανισότητα Chebysev δίνει:

$$P\left(\left|S_n\right| > n\varepsilon\right) \le \frac{E\left(S_n^{\,4}\right)}{(n\varepsilon)^4} \le C/n^2\varepsilon^4$$

Παίρνοντας το άθροισμα στα δυο μέλη της ανισότητας έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|S_n\right| > n\varepsilon\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} C/n^2\varepsilon^4 < \infty$$

Από το 1ο λήμμα Borel – Cantelli και την πρόταση $(4.1.3)$ έχουμε:

$$P\left(\limsup\left|S_n\right| > n\varepsilon\right) = 0 \Rightarrow P\left(\left|S_n\right| > n\varepsilon \;\; \alpha.\sigma\right) = 0 \Rightarrow P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon \;\; \alpha.\sigma\right) = 0$$

$$\Rightarrow P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0\right) = 1 \Rightarrow \frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow{\sigma.\beta} 0$$

□

Θεώρημα 4.2.2 (Ο Ι.Ν.Μ.Α με την υπόθεση της πεπερασμένης διασποράς)

Έστω $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\operatorname{var} X_i = C$ και $EX_i^{\,2} < \infty$. Τότε αν $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ισχύει ότι:

$$\frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow{\sigma.\beta} 0$$

Απόδειξη : Υποθέτουμε ότι $EX_i = 0$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$, οπότε

$$E\left(S_n^{\,2}\right) = \operatorname{var} S_n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var} X_i = nC$$

και από την ανισότητα Chebysev έχουμε ότι :

$$P\left(\left|S_n\right| > n\varepsilon\right) \le \frac{E\left(S_n^{\,2}\right)}{(n\varepsilon)^2} = C/n\varepsilon^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|S_n\right| > n\varepsilon\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} C/n\varepsilon^2$$

όμως η σειρά στο δεύτερο μέλος αποκλίνει. Θα εφαρμόσουμε πάλι την ανισότητα Chebysev, αυτή τη φορά για την υπακολουθία φυσικών αριθμών $\{n^2\}$. Έχουμε λοιπόν :

$$P\left(\left|S_{n^2}\right| > n^2\varepsilon\right) \le \frac{E\left(S_{n^2}{}^2\right)}{\left(n^2\varepsilon\right)^2} = \frac{Cn^2}{n^4\varepsilon^2} = \frac{C}{n^2\varepsilon^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|S_n\right| > n\varepsilon\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} C/n^2\varepsilon^2 < \infty .$$

Συνεπώς από το 1ο λήμμα Borel – Cantelli έχουμε ότι

$$\frac{S_{n^2}}{n^2} - \mu \xrightarrow{\sigma.\beta} 0 \qquad (1) \ .$$

Τώρα θα ελέγξουμε τους φυσικούς αριθμούς που βρίσκονται ενδιάμεσα από τους όρους της υπακολουθίας $\{n^2\}$ ως εξής, θέτουμε:

$$D_n = \max_{n^2 \le k \le (n+1)^2} \left|S_k - S_{n^2}\right|$$

δηλαδή τη μεγαλύτερη απόκλιση από τον όρο S_{n^2} που μπορεί να υπάρξει όταν το k βρίσκεται ανάμεσα στο n^2 και στο $(n+1)^2$. Τότε ισχύει ότι:

$$D_n{}^2 = \max_{n^2 \le k \le (n+1)^2} \left|S_k - S_{n^2}\right|^2 \le \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \left(S_k - S_{n^2}\right)^2$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $\max\{|x|,|y|\} \le |x| + |y|$, και συνεπώς

$$E\left(D_n{}^2\right) \le \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} E\left[\left(S_k - S_{n^2}\right)^2\right]$$

Όμως, ισχύει ότι:

$$E\left[\left(S_k - S_{n^2}\right)^2\right] = \left(k - n^2\right) \operatorname{var} X_i \le 2nC$$

καθώς $n^2 \le k \le (n+1)^2$, ενώ υπάρχουν $2n$ όροι στο άθροισμα. Οπότε έχουμε ότι:

$$E\left(D_n{}^2\right) \le (2n)2nC = 4n^2C$$

Εφαρμόζουμε τώρα την ανισότητα Chebysev για την D_n:

$$P\left(D_n > n^2\varepsilon\right) \le \frac{E\left(D_n^2\right)}{\left(n^2\varepsilon\right)^2} \le \frac{Cn^2}{n^4\varepsilon^2} = \frac{4C}{n^2\varepsilon^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P\left(D_n > n\varepsilon\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} 4C/n^2\varepsilon^2 < \infty$$

Συνεπώς, από το 1ο λήμμα Borel – Cantelli ισχύει ότι:

$$\frac{D_n}{n^2} - \mu \xrightarrow{\sigma.\beta} 0 \qquad (2)$$

Τώρα για $n^2 \le k \le (n+1)^2$ έχουμε ότι:

$$\left|\frac{S_k}{k}\right| \le \frac{\left|S_{n^2}\right| + D_n}{k} \le \frac{\left|S_{n^2}\right| + D_n}{n^2} \xrightarrow{(1),(2)} 0 \ \sigma.\beta. \qquad \square$$

§ 4.3 Απόδειξη Kolmogorov για τον ΙΝΜΑ

Θεώρημα 4.3.1

Για κάθε πραγματική τυχαία μεταβλητή ισχύει ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X| \ge n\right) \le E|X| \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X| \ge n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(|X| \ge n\right)$$

οπότε η X είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X| \ge n\right)$ συγκλίνει .

Απόδειξη: Αν ισχύει η ανισότητα της υπόθεσης τότε είναι άμεσο ότι:

$$E|X| < \infty \Leftrightarrow X \in L_1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X| \ge n\right)$$

Θα δείξουμε ότι η ανισότητα πράγματι αληθεύει . Υποθέτουμε ότι $X \ge 0$, (αλλιώς μπορούμε να το δείξουμε χωριστά για τις X^+, X^-). Ορίζουμε την ακολουθία ενδεχομένων

$$A_n = \{n \le X \le n+1\}$$

Τότε τα A_n είναι ανά δύο ξένα και $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega$, άρα:

$$EX = \int_{\Omega} X dP = \int_{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n} X dP = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} X dP \qquad (1)$$

Από τον ορισμό των A_n και από την πρόταση $(1.1.7)$ ισχύει ότι:

$$nP(A_n) \le \int_{A_n} X dP \le (n+1) P(A_n) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP(A_n) \le \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} X dP \le \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P(A_n) \underset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP(A_n) \le EX \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} nP(A_n) \qquad (2)$$

Τώρα θέτουμε $B_n = \{X \ge n\, ,\ n = 0,1,2\ldots\}$ και έχουμε ότι :

$$(i)\ B_n \text{ φθίνουσα, δηλαδή } B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \ldots$$

$$(ii)\ B_n \xrightarrow{n\to\infty} \{\varnothing\}$$

$$(iii)\ A_n = B_n / B_{n+1}$$

οπότε $\forall m \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$\sum_{n=1}^{m} nP(A_n) \underset{(iii)}{=} \sum_{n=1}^{m} nP(B_n) - \sum_{n=1}^{m} nP(B_{n+1}) =$$

$$\sum_{n=1}^{m} nP(B_n) - \sum_{n=1}^{m} (n-1)P(B_n) - mP(B_{m+1}) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{m} nP(A_n) + mP(B_{m+1}) = \sum_{n=1}^{m} P(B_n) \qquad (3)$$

Όμως, αν $X \in L_1$:

$$0 \le mP(B_{m+1}) \le (m+1)P(B_{m+1}) \le \int_{B_{m+1}} XdP \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

σύμφωνα με τις ιδιότητες (i) και (ii) της B_n. Οπότε αν $X \in L_1$ προκύπτει ότι:

$$mP(B_{m+1}) \xrightarrow{m\to\infty} 0 \underset{(3)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} nP(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Λήμμα 4.3.2

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ασυσχέτιστων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $EX_i = \mu$ και $E|X_i| < \infty$. Αν $Y_n = X_n 1_{(|X_n| \le n)}$ τότε ισχύουν τα εξής:

$$(i)\ P(X_n = Y_n \ \ \textit{τελικά}) = 1$$

$$(ii)\ EY_n \xrightarrow{n\to\infty} \mu$$

$$(iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var}(Y_n)/n^2 < \infty$$

Απόδειξη (i) : Έστω η ακολουθία ενδεχομένων $E_n = \{X_n \ne Y_n\} = \{|X_n| > n\}$. Τότε, αφού οι X_n είναι ισόνομες έχουμε ότι $P(|X_n| > n) = P(|X_1| > n)$.

Επίσης από το λήμμα $(4.3.1)$ ισχύει ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|X_n\right| > n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|X_1\right| > n\right) \le EX_1 < \infty$$

και το 1ο λήμμα Borel – Cantelli δίνει:

$$P\left(\limsup E_n\right) = 0 \Rightarrow P\left(\liminf {E_n}^c\right) = 1 \Rightarrow P\left(\liminf \left\{X_n = Y_n\right\}\right) = 1 \Rightarrow P\left(X_n = Y_n \ \ \tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\alpha}\right) = 1$$

Απόδειξη (ii) : Αφού η $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία ισόνομων τυχαίων μεταβλητών ισχύει ότι:

$$EY_n = E\left(X_n 1_{\left(\left|X_n\right|\le n\right)}\right) = E\left(X_1 1_{\left(\left|X_1\right|\le n\right)}\right)$$

Τότε, αν εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (θεώρημα 1.3) με :

$$X_1 1_{\left(\left|X_1\right|\le n\right)} \xrightarrow{n\to\infty} X_1 \ \sigma.\beta, \ Y = \left|X_1\right|, \ EY = E\left|X_1\right| < \infty, \ \left|X_1 1_{\left(\left|X_1\right|\le n\right)}\right| \le \left|X_1\right| = Y$$

ισχύει ότι:

$$EY_n = E\left[X_1 1_{\left(\left|X_1\right|\le n\right)}\right] \xrightarrow{n\to\infty} EX_1 = \mu$$

Απόδειξη (iii) : Είναι $\operatorname{var}\left(Y_n\right) \le E\left({Y_n}^2\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var}\left(Y_n\right)/n^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} E\left({Y_n}^2\right)/n^2$ οπότε

αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} E\left({Y_n}^2\right)/n^2 < \infty$. Από την πρόταση $(2.2.4)$ έχουμε λοιπόν :

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left({Y_n}^2\right)/n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} E\left({Y_1}^2\right)/n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} E\left({X_1}^2 1_{\left(\left|X_1\right|\le n\right)}\right)/n^2 =$$

$$E\left[{X_1}^2\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\left(\left|X_1\right|\le n\right)}/n^2\right)\right] \qquad (1)$$

Θα υπολογίσουμε το $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\left(\left|X_1\right|\le n\right)}/n^2$ χωρίζοντας το σε δύο :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\left(\left|X_1\right|\le n\right)}/n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 1_{\left(\left|X_1\right|\le n\right)} 1_{\left(\left|X_1\right|\le 1\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 1_{\left(\left|X_1\right|\le n\right)} 1_{\left(\left|X_1\right|> 1\right)} \qquad (2)$$

και θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τα δύο αθροίσματα. Το πρώτο είναι :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 1_{\left(\left|X_1\right|\le n\right)} 1_{\left(\left|X_1\right|\le 1\right)} = 1_{\left(\left|X_1\right|\le 1\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 1_{\left(\left|X_1\right|\le n\right)} \le 1_{\left(\left|X_1\right|\le 1\right)} \cdot 2$$

Το δεύτερο άθροισμα είναι :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 1_{\left(\left|X_1\right|\le n\right)} 1_{\left(\left|X_1\right|> 1\right)} = 1_{\left(\left|X_1\right|> 1\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 1_{\left(\left|X_1\right|\le n\right)} = 1_{\left(\left|X_1\right|> 1\right)} \sum_{n\ge\left|X_1\right|}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (3)$, καθώς οι όροι του αθροίσματος για τους οποίους ισχύει ότι $\left|X_1\right| > n$ είναι μηδενικοί. Επίσης ισχύει ότι:

$$\frac{1}{n^2} \le \int_n^{n+1} \frac{2}{x^2}\, dx \Rightarrow \sum_{n \ge |X_1|}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le 2 \sum_{n \ge |X_1|}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2}\, dx \qquad \text{αφού}$$

$$\frac{1}{n^2} \le \int_n^{n+1} \frac{2}{x^2}\, dx \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \le 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \le \frac{2}{n(n+1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{n} \le \frac{2}{n+1} \Leftrightarrow n+1 \le 2n \Leftrightarrow 1 \le n$$

οπότε η σχέση (3) δίνει:

$$1_{(|X_1|>1)} \sum_{n \ge |X_1|}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le 1_{(|X_1|>1)}\, 2 \sum_{n \ge |X_1|}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2}\, dx \le 1_{(|X_1|>1)}\, 2 \int_{|X_1|}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1_{(|X_1|>1)} \frac{2}{|X_1|}$$

Άρα από τη σχέση (2) έχουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_{(|X_1| \le n)} \big/ n^2 \le 1_{(|X_1| \le 1)} \cdot 2 + 1_{(|X_1|>1)} \frac{2}{|X_1|} = 2\left(1_{(|X_1| \le 1)} + \frac{1_{(|X_1|>1)}}{|X_1|}\right)$$

και επιστρέφοντας στη σχέση (1) παίρνουμε ότι:

$$E\left[X_1{}^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{(|X_1| \le n)} \big/ n^2\right)\right] \le 2E\left[X_1{}^2 \left(1_{(|X_1| \le 1)} + \frac{1_{(|X_1|>1)}}{|X_1|}\right)\right] \le 2\left[E|X_1| 1_{(|X_1| \le 1)} + E|X_1| 1_{(|X_1|>1)}\right] =$$

$$= 2E|X_1| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E\left(Y_n{}^2\right) \big/ n^2 < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var}(Y_n) \big/ n^2 < \infty$$

□

Λήμμα 4.3.3

Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $EX_i = \mu$ και $E|X_i| < \infty$. Αν $Y_n = X_n 1_{(|X_n| \le n)}$ τότε ισχύουν τα εξής:

(i) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - Y_n)$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως

(ii) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως

(iii) αν υπάρχουν ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, με την a_n να είναι αύξουσα και $a_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$, και X τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε:

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{n \to \infty} X$$

τότε επίσης ισχύει ότι:

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{n\to\infty} X$$

και αντιστρόφως .

Απόδειξη (i) : Από το λήμμα (4.3.2) (i) έχουμε ότι :

$$P\left(X_n = Y_n \ \ \tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\alpha}\right)=1 \Rightarrow P\left(\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \ \tau.\omega.\ \forall n\geq n_0\ \ X_n = Y_n\right)=1\Rightarrow$$
$$\forall\omega\in\liminf\left(X_n = Y_n\right)\ ,\forall n\geq n_0\ \ X_n(\omega)=Y_n(\omega)\,\sigma.\beta$$

οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(X_n - Y_n\right)$ έχει σχεδόν βεβαίως πεπερασμένους το πλήθος μη μηδενικούς όρους , συνεπώς συγκλίνει σχεδόν βεβαίως

Απόδειξη (ii) : Είναι άμεσο από το προηγούμενο ερώτημα καθώς

$$\forall n\geq n_0\ \ X_n(\omega)=Y_n(\omega)\,\sigma.\beta\Rightarrow\sum_{n=n_0}^{\infty}X_n(\omega)=\sum_{n=n_0}^{\infty}Y_n(\omega)\ \ \sigma.\beta$$

Απόδειξη (iii):

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}Y_i=\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i+X_i-X_i\right)=\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-X_i\right)\xrightarrow{n\to\infty}X+0=X \qquad \square$$

Θεώρημα 4.3.4 (Ανισότητα Kolmogorov)

Έστω $X_1, X_2,\ldots X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $EX_i = 0$ και $\operatorname{var} X_i =$ $EX_i^{\,2} < \infty$. Αν $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ τότε $\forall\varepsilon > 0$ ισχύει ότι :

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|S_k\right|\geq x\right)\leq\frac{\operatorname{var} S_n}{x^2}$$

Παρατήρηση : Με τις ίδιες υποθέσεις η ανισότητα Chebysev δίνει μόνο ότι:

$$P\left(\left|S_n\right|\geq x\right)\leq\frac{\operatorname{var} S_n}{x^2}$$

Απόδειξη: Θέτουμε $A_k = \left\{\left|S_k\right|\geq x\right\}\bigcap\left\{\left|S_j\right|< x,\ \forall j<k\right\}$ για $1<k\leq n$ και για $k=1$ $A_1 = \left\{\left|S_1\right|\geq x\right\}$, δηλαδή την πρώτη φορά που το $\left|S_k\right|$ υπερβαίνει το x, και $A=\left\{\max_{1\leq k\leq n}\left|S_k\right|\geq x\right\}$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) τα A_k είναι ξένα

(ii) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A$.

Απόδειξη (i) : Έστω $1 \le k_1, k_2 \le n$ με $k_1 < k_2$ και $\omega \in A_{k_1} \bigcap A_{k_2}$ (παρόμοια είναι η απόδειξη αν $k_1 > k_2$). Τότε αφού $\omega \in A_{k_2}$, ισχύει ότι:

$$\left\{\left|S_{k_2}(\omega)\right| \ge x\right\} \bigcap \left\{\left|S_j(\omega)\right| < x,\ \forall j < k_2\right\}$$

και αφού $k_1 < k_2$ έχουμε ότι:

$$\left\{\left|S_{k_2}(\omega)\right| \ge x\right\} \bigcap \left\{\left|S_{k_1}(\omega)\right| < x\right\} \qquad (1)$$

Όμως $\omega \in A_{k_1}$, συνεπώς:

$$\left\{\left|S_{k_1}(\omega)\right| \ge x\right\} \bigcap \left\{\left|S_j(\omega)\right| < x,\ \forall j < k_1\right\} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ προκύπτει ότι:

$$\left|S_{k_1}(\omega)\right| < x \text{ και } \left|S_{k_1}(\omega)\right| \ge x$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς τα A_k είναι ξένα.

Απόδειξη (ii) : Θα δείξουμε ότι $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq A$ και $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Έστω $\omega \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, τότε $\exists\ k_0 \in \mathbb{N}$ με $1 \le k_0 \le n$ ώστε $\omega \in A_{k_0}$. Άρα, έχουμε ότι:

$$\left\{\left|S_{k_0}(\omega)\right| \ge x\right\} \bigcap \left\{\left|S_j(\omega)\right| < x,\ \forall j < k_0\right\} \subseteq \left\{\left|S_{k_0}(\omega)\right| \ge x\right\} \subseteq \left\{\max_{1 \le k \le n}\left|S_k(\omega)\right| \ge x\right\}$$

δηλαδή $\omega \in A$, οπότε ισχύει ότι $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq A$. Έστω τώρα $\omega \in A$, τότε ισχύει ότι:

$$\left\{\max_{1 \le k \le n}\left|S_k(\omega)\right| \ge x\right\}$$

Τότε το maximum επιτυγχάνεται για κάποιο $k_0 \in \mathbb{N}$ με $1 \le k_0 \le n$, ισχύει δηλαδή ότι : $\left|S_{k_0}(\omega)\right| \ge x$ και $\left|S_{k_0}(\omega)\right| \ge \left|S_k(\omega)\right|$ $\forall k \ne k_0$ με $1 \le k \le n$. Τώρα, αν $\forall k \ne k_0$ ισχύει ότι $\left|S_k(\omega)\right| < x$, τότε και $\forall k < k_0$ ισχύει ότι $\left|S_k(\omega)\right| < x$. Άρα $\omega \in A_{k_0} \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Αν $\exists\ k_1 > k_0$ τέτοιο ώστε $\left|S_{k_1}(\omega)\right| \ge x$, τότε πάλι $\forall k < k_0$ ισχύει ότι $\left|S_k(\omega)\right| < x$ οπότε $\omega \in A_{k_0} \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Το ίδιο ισχύει αν $\forall k > k_0$ το $\left|S_k(\omega)\right| \ge x$. Αν τώρα $\exists\ k_2 < k_0$ ώστε

$\left|S_{k_2}(\omega)\right| \geq x$, τότε $\forall k < k_2$ ισχύει ότι $\left|S_k(\omega)\right| < x$ οπότε $\omega \in A_{k_2} \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Αν για κάθε k_3 με $2 \leq k_3 < k_0$ ισχύει ότι $\left|S_{k_3}(\omega)\right| \geq x$ τότε για $k < 2$, δηλαδή για $k = 1$, ισχύει ότι $\left|S_k(\omega)\right| < x$ οπότε $\omega \in A_2 \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Τέλος, αν $\left|S_1(\omega)\right| \geq x$, τότε $\omega \in A_1 \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ εξ' ορισμού του A_1. Συνεπώς ισχύει ότι $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Άρα $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A$.

Τώρα, αφού τα A_k είναι ξένα και $\left(S_n - S_k\right)^2 \geq 0$, έχουμε ότι:

$$E\left(S_n^{\,2}\right) = \int_{\Omega} S_n^{\,2}\, dP \geq \int_{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} S_n^{\,2}\, dP = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} S_n^{\,2}\, dP = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \left[S_k^{\,2} + 2S_k\left(S_n - S_k\right) + \left(S_n - S_k\right)^2 \right] dP \geq$$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} S_k^{\,2}\, dP + \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} 2S_k\left(S_n - S_k\right) dP = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} S_k^{\,2}\, dP + \sum_{k=1}^{n} \int 2S_k 1_{A_k}\left(S_n - S_k\right) dP \qquad (3)$$

Όμως $S_k 1_{A_k} \in \sigma\left(X_1, \ldots, X_k\right)$ και $S_n - S_k \in \sigma\left(X_{k+1}, \ldots, X_n\right)$ οι οποίες, από την πρόταση $(2.1.16)$, είναι ανεξάρτητες σ-άλγεβρες. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το θεώρημα $(2.2.6)$ προκύπτει ότι:

$$\int 2S_k 1_{A_k}\left(S_n - S_k\right) dP = E\left(2S_k 1_{A_k}\right) \cdot E\left(S_n - S_k\right) = 0$$

καθώς $E\left(S_n - S_k\right) = E\left(X_{k+1} + \cdots + X_n\right) = 0$ από υπόθεση. Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι $\left|S_k\right| \geq x$ πάνω στο A_k, τα A_k είναι ξένα και $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A$, η σχέση (3) δίνει ότι:

$$E\left(S_n^{\,2}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} S_k^{\,2}\, dP \geq \sum_{k=1}^{n} \int x^2 1_{A_k}\, dP = \sum_{k=1}^{n} x^2 P\left(A_k\right) = x^2 P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = x^2 P(A) \Rightarrow$$

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left|S_k\right| \geq x\right) \leq \frac{E\left(S_n^{\,2}\right)}{x^2} = \frac{\operatorname{var} S_n}{x^2}$$

Παρατήρηση: Η υπόθεση ότι οι $X_1, X_2, \ldots X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές συνεπάγεται ότι οι σ-άλγεβρες $\sigma\left(X_1, \ldots, X_k\right), \sigma\left(X_{k+1}, \ldots, X_n\right)$ είναι ανεξάρτητες, το οποίο είναι καθοριστικό για την απόδειξη του θεωρήματος. Αν εξασθενίσουμε την υπόθεση παίρνοντας τις X_n ανά δύο ανεξάρτητες, τότε οι σ-άλγεβρες δεν είναι πλέον ανεξάρτητες και συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση, το θεώρημα δεν ισχύει. □

Θεώρημα 4.3.5 (Κριτήριο Kolmogorov)

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $EX_i = 0$. Αν ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{var} X_i < \infty$$

τότε η σειρά

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i$$

συγκλίνει σχεδόν βεβαίως .

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων $S_N = \sum_{n=1}^{N} X_n$. Από την ανισότητα του Kolmogorov έχουμε ότι:

$$P\left(\max_{M \le n \le N} |S_m - S_M| > \varepsilon\right) \le \frac{\operatorname{var}(S_N - S_M)}{\varepsilon^2} = \varepsilon^{-2} \sum_{n=M+1}^{N} \operatorname{var}(X_n)$$

Παίρνοντας το όριο για $N \to \infty$ προκύπτει ότι:

$$P\left(\sup_{m \ge M} |S_m - S_M| > \varepsilon\right) \le \varepsilon^{-2} \sum_{n=M+1}^{\infty} \operatorname{var}(X_n) \xrightarrow{M \to \infty} 0 \qquad (1)$$

ως το υπόλοιπο της σειράς των διασπορών, που συγκλίνει από την υπόθεση. Τώρα, αν θέσουμε $a_M = \sup_{m,n \ge M} |S_m - S_n|$ τότε η a_M είναι φθίνουσα και ισχύει ότι:

$$|S_m - S_n| \le |S_m - S_M| + |S_M - S_n| \Rightarrow \sup_{m,n \ge M} |S_m - S_n| \le \sup_{m \ge M} |S_m - S_M| + \sup_{n \ge M} |S_M - S_n|$$

$$= 2\sup_{m \ge M} |S_m - S_M| \Rightarrow \sup_{m,n \ge M} |S_m - S_n| \big/ 2 \le \sup_{m \ge M} |S_m - S_M|$$

Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$P\left(\sup_{m,n \ge M} |S_m - S_n| \big/ 2 > 2\varepsilon\right) = P\left(\sup_{m,n \ge M} |S_m - S_n| > \varepsilon\right) \le P\left(\sup_{m \ge M} |S_m - S_M|\right) \xrightarrow{M \to \infty} 0$$

από τη σχέση (1). Οπότε, ισχύει ότι:

$$P(a_M > \varepsilon) \xrightarrow{M \to \infty} 0 \Rightarrow a_M \xrightarrow{P} 0$$

Αφού η a_M συγκλίνει κατά πιθανότητα στο 0, από την πρόταση $(2.3.8)$, υπάρχει υπακολουθία της a_{M_k} τέτοια ώστε:

$$a_{M_k} \xrightarrow{\sigma.\beta.} 0$$

Όμως η a_M είναι φθίνουσα και, αφού έχει υπακολουθία που συγκλίνει σχεδόν βεβαίως, στο ίδιο όριο συγκλίνει σχεδόν βεβαίως και η ίδια, δηλαδή:

$$a_M \xrightarrow{\sigma.\beta.} 0$$

Αυτό όμως συνεπάγεται ότι η ακολουθία $S_N(\omega)$ είναι σχεδόν βεβαίως Cauchy, οπότε το $\lim_{N\to\infty} S_N(\omega)$ υπάρχει με πιθανότητα ένα (αφού οι X_n είναι πραγματικές τυχαίες μεταβλητές), δηλαδή η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. □

Λήμμα 4.3.6 (Λήμμα του Kronecker)

Έστω x_n, a_n ακολουθίες πραγματικών αριθμών με την a_n να είναι αύξουσα, θετική και $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Αν η σειρά

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_n}{a_n}$$

συγκλίνει, τότε ισχύει ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} x_k \quad .$$

Τώρα μπορούμε να δώσουμε την απόδειξη του Kolmogorov για την αποκαλούμενη ως ‘κλασσική μορφή του Ισχυρού Νόμου των Μεγάλων Αριθμών’ .

Θεώρημα 4.3.7 (Κλασσική μορφή του ΙΝΜΑ)

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $EX_i = \mu$ και $E|X_i| < \infty$. Τότε αν $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ισχύει ότι:

$$\frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow{\sigma.\beta} 0$$

Απόδειξη : Θέτουμε $Y_n = X_n 1_{(|X_n|\le n)}$, $T_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ και από το λήμμα $(4.3.3)$ αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{T_n}{n} - \mu \xrightarrow{\sigma.\beta} 0$$

Θέτουμε $Z_n = Y_n - EY_n$ ούτως ώστε να ισχύει ότι $EZ_n = 0$. Τώρα έχουμε ότι :

$$\operatorname{var} Z_n = E\left(Z_n{}^2\right) - \left(EZ_n\right)^2 = E\left[\left(Y_n - EY_n\right)^2\right] = \operatorname{var} Y_n$$

οπότε από το λήμμα $(4.3.2)(iii)$ ισχύει ότι :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var}\left(Z_n\right) / n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var}\left(Y_n\right) / n^2 < \infty$$

Από το κριτήριο Kolmogorov έχουμε τώρα ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n / n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως και από το λήμμα του Kronecker έπεται ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Z_k = 0 \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k - EY_k \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \frac{T_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} EY_k \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Όμως από το λήμμα $(4.3.2)(ii)$ ισχύει ότι :

$$EY_n \xrightarrow{n\to\infty} \mu$$

Οπότε, από γνωστό θεώρημα της ανάλυσης προκύπτει ότι :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} EY_k \xrightarrow{n\to\infty} \mu$$

και συνεπώς καταλήγουμε ότι:

$$\frac{T_n}{n} - \mu \xrightarrow{\sigma.\beta} 0 \qquad \square$$

Τέλος, κλείνουμε αυτή την παράγραφο παραθέτοντας ένα πολύ σημαντικό θεώρημα για τη σύγκλιση σειρών τυχαίων μεταβλητών. Η απόδειξη του θεωρήματος οφείλεται στον Kolmogorov και , παρότι δεν θα το χρησιμοποιήσουμε σε αυτή την εργασία, οι εφαρμογές του είναι πολύ σημαντικές για κλάδους όπως η στατιστική ,οι στοχαστικές ανελίξεις κ.α. .

Θεώρημα 4.3.8 (Θεώρημα των τριών σειρών του Kolmogorov)

Έστω $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών και C θετική σταθερά. Αν $Y_n = X_n 1_{\left(|X_n| \le C\right)}$ τότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$$

συγκλίνει σχεδόν βεβαίως αν και μόνο αν για τις παρακάτω τρεις σειρές ισχύει ότι:

$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|X_n\right| > C\right) < \infty$

$(ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} EY_n < \infty$

$(iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var}\left(Y_n\right) < \infty$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε μόνο το ικανό, καθώς για την απόδειξη του αναγκαίου απαιτούνται γνώσεις που βρίσκονται έξω από το σκοπό αυτής της εργασίας.

Έχουμε λοιπόν τα εξής, θέτουμε $Z_n = Y_n - EY_n$ ούτως ώστε να ισχύει ότι: $EZ_n = 0$.

Τώρα, έχουμε ότι:

$$\operatorname{var} Z_n = E\left(Z_n{}^2\right) - \left(EZ_n\right)^2 = E\left[\left(Y_n - EY_n\right)^2\right] = \operatorname{var} Y_n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var}\left(Z_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var}\left(Y_n\right) < \infty$$

από την υπόθεση (iii).

Από το λήμμα $(4.3.3)(i)$ προκύπτει ότι η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(Y_n - EY_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n - \sum_{n=1}^{\infty} EY_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. Από την υπόθεση (ii) συνεπάγεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. Τέλος από την υπόθεση (i) και το λήμμα (4.3.3)(ii) καταλήγουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. □

§ 4.4 Απόδειξη Etemadi για τον INMA

Θεώρημα 4.4.1 (Απόδειξη Etemadi για τον I.N.M.A.)

Έστω $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανά δύο ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $EX_i = \mu$ και $E\left|X_i\right| < \infty$. Τότε αν $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ισχύει ότι:

$$\frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow{\sigma.\beta} 0$$

Απόδειξη: Θέτουμε $Y_n = X_n 1_{(|X_n|\le n)}$, $T_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ και από το λήμμα $(4.3.3)$ αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{T_n}{n} - \mu \xrightarrow{\sigma.\beta} 0$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X_n \ge 0$, αλλιώς το δείχνουμε για τις $X_n^{\,+}$, $X_n^{\,-}$ οι οποίες ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος. Σταθεροποιούμε ένα $a > 1$ και ορίζουμε την υπακολουθία φυσικών αριθμών $k_n = \left[a^n\right]$. Πρώτα θα δείξουμε ότι:

$$\frac{T_{k_n}}{k_n} - \mu \xrightarrow{\sigma.\beta} 0$$

Από την ανισότητα Chebysev έχουμε ότι:

$$P\left(\left|T_{k_n} - ET_{k_n}\right| > \varepsilon k_n\right) \le \operatorname{var} T_{k_n} \big/ \left(\varepsilon k_n\right)^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|T_{k_n} - ET_{k_n}\right| > \varepsilon k_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var} T_{k_n} \big/ \left(\varepsilon k_n\right)^2$$

$$= \varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} k_n^{\,-2} \sum_{m=1}^{k_n} \operatorname{var} Y_m = \varepsilon^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{var} Y_m \sum_{\{n:\, k_n \ge m\}} k_n^{\,-2} \qquad (1)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα του Fubini για να αλλάξουμε τη σειρά άθροισης μη αρνητικών όρων. Τώρα ισχύει ότι:

$$\left[a^n\right] \ge a^n \big/ 2 \,, \forall\ n \ge 1$$

οπότε παίρνοντας τα αθροίσματα των γεωμετρικών σειρών έχουμε :

$$\sum_{\{n:\, k_n \ge m\}} k_n^{\,-2} \le 4 \sum_{\{n:\, a^n \ge m\}} a^{-2n} \le 4\left(1 - a^{-2}\right)^{-1} m^{-2}$$

Επιστρέφοντας τώρα στη σχέση (1), επάγεται το εξής :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|T_{k_n} - ET_{k_n}\right| > \varepsilon k_n\right) \le \varepsilon^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{var} Y_m 4\left(1 - a^{-2}\right)^{-1} m^{-2} = \varepsilon^{-2} 4\left(1 - a^{-2}\right)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{var} Y_m\, m^{-2} < \infty$$

όπου για την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το λήμμα $(4.3.2)(iii)$. Συνεπώς, από το 1$^{\text{ο}}$ λήμμα Borel – Cantelli και την πρόταση (4.1.3.) ισχύει ότι:

$$\frac{T_{k_n} - ET_{k_n}}{k_n} \xrightarrow{\sigma.\beta} 0$$

Από το λήμμα (4.3.2)(ii) έχουμε όμως ότι:

$$EY_n \xrightarrow{n\to\infty} \mu$$

οπότε από γνωστό θεώρημα της ανάλυσης (θεώρημα Cesaro) προκύπτει ότι:

$$\frac{T_{k_n}}{k_n} - \mu \xrightarrow{\sigma.\beta} 0$$

Τώρα θα ελέγξουμε τις τιμές της T_n για τους φυσικούς αριθμούς πού βρίσκονται ενδιάμεσα των όρων της ακολουθίας k_n. Παρατηρούμε ότι για $k_n \le m \le k_{n+1}$ ισχύει ότι:

$$\frac{T_{k_n}}{k_{n+1}} \le \frac{T_{k_n}}{m} \le \frac{T_m}{m} \le \frac{T_{k_{n+1}}}{k_n} \qquad (2)$$

Όμως, ισχύει ότι:

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} a$$

και συνεπώς έχουμε:

$$\frac{T_{k_n}}{k_{n+1}} = \frac{T_{k_n}}{k_n}\frac{k_n}{k_{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{a}\mu$$

και επίσης:

$$\frac{T_{k_{n+1}}}{k_n} = \frac{T_{k_{n+1}}}{k_{n+1}}\frac{k_{n+1}}{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} a\mu$$

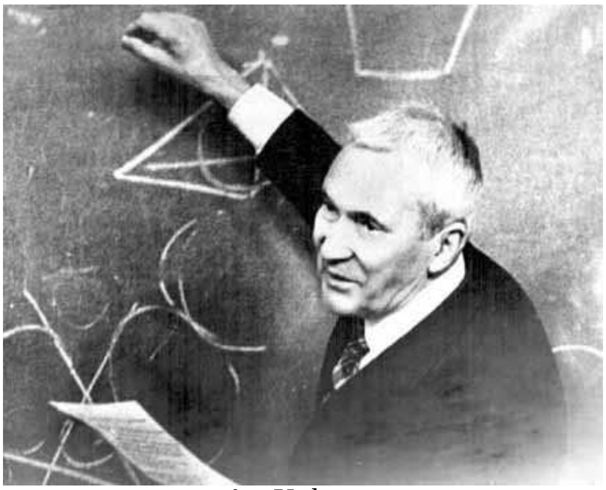
Άρα παίρνοντας το όριο για $n \to \infty$ στη σχέση (2) έχουμε:

$$\frac{1}{a}\mu \le \liminf \frac{T_m}{m} \le \limsup \frac{T_m}{m} \le a\mu$$

και αφού αυτό ισχύει $\forall a > 1$ παίρνοντας το όριο για $a \to 1$ καταλήγουμε ότι:

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow{\sigma.\beta} \mu$$ □

Παρατήρηση : Το συγκεκριμένο θεώρημα καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα με τον ισχυρό νόμο του Kolmogorov έχοντας ασθενέστερες υποθέσεις (ανά δύο ανεξαρτησία των X_n αντί για ολική ανεξαρτησία). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο Etemadi κατάφερε να παρακάμψει την ανισότητα του Kolmogorov στην όποια βασίζεται ο κλασσικός ισχυρός νόμος. Στην απόδειξη της ανισότητας αυτής επισημάναμε το γεγονός ότι οι X_n πρέπει να είναι ολικά ανεξάρτητες. Έτσι, ο Etemadi κατόρθωσε να αποδείξει τον ισχυρό νόμο για ακολουθία ανά δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών χρησιμοποιώντας μόνο το λήμμα (4.3.2) και την ακολουθία k_n.



A. Kolmogorov

5. Εφαρμογές του Ισχυρού νόμου των μεγάλων αριθμών

§ 5.1 Εφαρμογή στη Θεωρία Πληροφοριών και Κωδίκων

Έστω $(\Omega, F, P),(\Omega', F', P')$ χώροι πιθανότητας και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $X_n : \Omega \to \Omega'$, όπου $\Omega' = \{1,\ldots,r\}$. Εδώ, ο Ω' αποτελεί ένα αλφάβητο και οι τυχαίες μεταβλητές X_n διαδοχικά σύμβολα που παράγονται από μια πηγή. Η πιθανότητα με την οποία το i-οστό σύμβολο που παράγεται αντιστοιχεί σε κάποιο γράμμα του αλφαβήτου είναι $P(X_i = k),\ 1 \le k \le r,$ και αποτελεί την κατανομή των X_n (καθότι ισόνομες). Μας απασχολεί η πιθανότητα να εμφανιστεί ένα τυχαίο μήνυμα αποτελούμενο από n διαδοχικά γράμματα του αλφαβήτου. Το θεώρημα του Shannon δείχνει ότι η πιθανότητα αυτή συγκλίνει σε μια σταθερή τιμή.

Θεώρημα 5.1 (Θεώρημα του Shannon)

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $X_n : \Omega \to \Omega'$, όπου $\Omega' = \{1,\ldots,r\}$. Αν $P(X_i = k) = P'(k),\ 1 \le k \le r,$ είναι η κατανομή των X_n και $\pi_n(\omega) = P'(X_1(\omega)) \cdot P'(X_2(\omega)) \cdots P'(X_n(\omega))$, τότε ισχύει ότι:

$$-n^{-1}\log \pi_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} H = -\sum_{k=1}^{r} P'(k)\log P'(k) \ \ \sigma.\beta.$$

Απόδειξη: Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\pi_n(\omega) &= P'(X_1(\omega)) \cdot P'(X_2(\omega)) \cdots P'(X_n(\omega)) \Rightarrow \\
\log \pi_n(\omega) &= \log\left[P'(X_1(\omega)) \cdot P'(X_2(\omega)) \cdots P'(X_n(\omega))\right] \\
&= \log P'(X_1(\omega)) + \log P'(X_2(\omega)) + \cdots + \log P'(X_n(\omega))
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $Y_n = \log P'\left(X_n\left(\omega\right)\right)$, τότε από την πρόταση $\left(2.2.4\right)$ οι Y_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Συνεπώς, από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών $\left(4.3.7\right)$, ισχύει ότι:

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \xrightarrow{\sigma.\beta} EY_1$$

Όμως $EY_1 = EY_n = \sum_{k=1}^{r} P'\left(k\right)\log P'\left(k\right)$, οπότε καταλήγουμε ότι:

$$-n^{-1}\log \pi_n\left(\omega\right) \xrightarrow{n\to\infty} H = -\sum_{k=1}^{r} P'\left(k\right)\log P'\left(k\right) \;\; \sigma.\beta.$$

Η σταθερά H καλείται εντροπία της πηγής και αποτελεί μέτρο της αβεβαιότητας με την οποία παράγει σύμβολα η πηγή.

§ 5.2 Εφαρμογή στη Στατιστική

Έστω $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κοινή συνάρτηση κατανομής F. Η F συνήθως αναφέρεται ως ‘θεωρητική κατανομή’ και στη στατιστική θεωρείται άγνωστη. Για κάθε $\omega \in \Omega$ οι τιμές $X_n\left(\omega\right)$ καλούνται ως παρατηρούμενες τιμές ή παρατηρήσεις της κατανομής των X_n. Το ζητούμενο είναι να συλλέξουμε όσο το δυνατόν περισσότερες πληροφορίες για την F εξετάζοντας τις παρατηρήσεις. Ορίζουμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών:

$$F_n\left(x\right) = n^{-1}\sum_{m=1}^{n} 1_{\left(X_m \le x\right)}$$

Τότε η $F_n\left(x\right)$ αποτελεί την καταγεγραμμένη συχνότητα παρατηρούμενων τιμών που δε ξεπερνούν το x. Η $F_n\left(x\right)$ είναι μια φυσική εκτίμηση της συνάρτησης κατανομής F και καλείται συνάρτηση εμπειρικής κατανομής βασισμένη σε n το πλήθος παρατηρήσεις της F. Το παρακάτω θεώρημα το οποίο οφείλεται στους Glivenko-Canelli, αποδεικνύει ότι όσο μεγαλώνει το πλήθος των παρατηρήσεων τόσο καλύτερη εκτίμηση για την F αποτελεί η $F_n\left(x\right)$.

Θεώρημα 5.2 (Θεώρημα Glivenko-Cantelli)

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κοινή συνάρτηση κατανομής F. Αν η $F_n(x)$ αποτελεί την συνάρτηση εμπειρικής κατανομής των X_n, τότε ισχύει ότι:

$$\sup_x \left|F_n(x)-F(x)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \ \sigma.\beta.$$

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε ένα x και θέτουμε $Y_n = 1_{(X_n \le x)}$. Τότε από την πρόταση $(2.2.4)$ οι Y_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μέση τιμή:

$$EY_1 = EY_n = E1_{(X_n\le x)} = P(X_n \le x) = F(x)$$

Συνεπώς, από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών $(4.3.7)$, ισχύει ότι:

$$F_n(x) = \frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n} \xrightarrow{\sigma.\beta} EY_1 = F(x) \qquad (1)$$

Από την ανάλυση γνωρίζουμε ότι αν μια μη-φθίνουσα ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή και φραγμένη συνάρτηση, τότε η σύγκλιση είναι και ομοιόμορφη. Στην προκειμένη περίπτωση η $F_n(x)$ είναι μια μη-φθίνουσα ακολουθία τυχαίων μεταβλητών που συγκλίνει κατά σημείο στη φραγμένη τυχαία μεταβλητή $F(x)$. Το πρόβλημα εδώ είναι ότι η $F(x)$ δεν είναι εν γένει συνεχής, καθώς μπορεί να κάνει άλματα. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή ακολουθούμε την εξής διαδικασία για να δείξουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Σταθεροποιούμε πάλι ένα x και θέτουμε $Z_n = 1_{(X_n < x)}$. Τότε από την πρόταση $(2.2.4)$ οι Z_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μέση τιμή:

$$EZ_1 = EZ_n = E1_{(X_n<x)} = P(X_n < x) = F(x-) = \lim_{y\uparrow x} F(y)$$

Συνεπώς, από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών $(4.3.7)$, ισχύει ότι:

$$F_n(x-) = \frac{Z_1+\cdots+Z_n}{n} \xrightarrow{\sigma.\beta} EZ_1 = F(x-) \qquad (2)$$

Τώρα, για $1\le j\le k-1$ θέτουμε $x_{j,k} = \inf\left\{y : F(y) \ge j/k\right\}$. Η κατά σημείο σύγκλιση των $F_n(x)$ (σχέση 1) και $F_n(x-)$ (σχέση 2), μας επιτρέπει να επιλέξουμε $N_k(\omega)$ τέτοιο ώστε $\forall n \ge N_k(\omega)$ και για $1\le j\le k-1$ να ισχύει ότι:

$$\left|F_n(x_{j,k}) - F(x_{j,k})\right| < k^{-1}$$

και

$$\left|F_n\left(x_{j,k}-\right)-F\left(x_{j,k}-\right)\right|<k^{-1}$$

Αν το $x\in\left(x_{j-1,k},x_{j,k}\right)$ για $1\le j\le k-1$ και $n\ge N_k\left(\omega\right)$, τότε από τη μονοτονία των F_n και F, και αφού ισχύει ότι:

$$F\left(x_{j,k}-\right)-F\left(x_{j-1,k}\right)\le k^{-1}$$

προκύπτουν τα εξής:

$$F_n\left(x\right)\le F_n\left(x_{j,k}-\right)\le F\left(x_{j,k}-\right)+k^{-1}\le F\left(x_{j-1,k}\right)+2k^{-1}\le F\left(x\right)+2k^{-1}$$

και

$$F_n\left(x\right)\ge F_n\left(x_{j-1,k}\right)\ge F\left(x_{j-1,k}\right)-k^{-1}\ge F\left(x_{j,k}-\right)-2k^{-1}\ge F\left(x\right)-2k^{-1}$$

Άρα, έχουμε ότι:

$$F_n\left(x\right)-F\left(x\right)\le 2k^{-1}$$

και

$$F\left(x\right)-F_n\left(x\right)\le 2k^{-1}$$

Συνεπώς, $\forall x\in\left(x_{j-1,k},x_{j,k}\right)$ ισχύει ότι:

$$\left|F_n\left(x\right)-F\left(x\right)\right|\le 2k^{-1}\Rightarrow\sup_x\left|F_n\left(x\right)-F\left(x\right)\right|\le 2k^{-1}\xrightarrow{k\to\infty}0$$

δηλαδή η F_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην F. □

N. Etemadi

Βιβλιογραφία

1. I. Σπηλιώτης, Σημειώσεις θεωρίας πιθανοτήτων
2. W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications Vol I
3. W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications Vol II
4. K.L. Chung, A Course in Probability Third Edition
5. S. Ross, A Second Course In Probability
6. S.I. Resnick, A Probability Path
7. A.N. Kolmogorov, Foundations of The Theory of Probability, Second English Edition
8. R. Durrett, Probability Theory and Examples, Fourth Edition
9. P. Billingsley, Probability and Measure, Third Edition
10. C. Grinstead, Introduction to Probability
11. J.Walrand, Lecture Notes on Probability Theory and Random Processes
12. R.J. Boik, Lecture Notes on Probability
13. I.F. Wilde, Measure, Integration and Probability
14. R.F. Bass, Measure Theory
15. P.J. Cameron, Notes on Probability
16. O. Knill, Probability and Stochastic Processes with Applications
17. N. Etemadi, An Elementary Proof of The Strong Law of Large Numbers