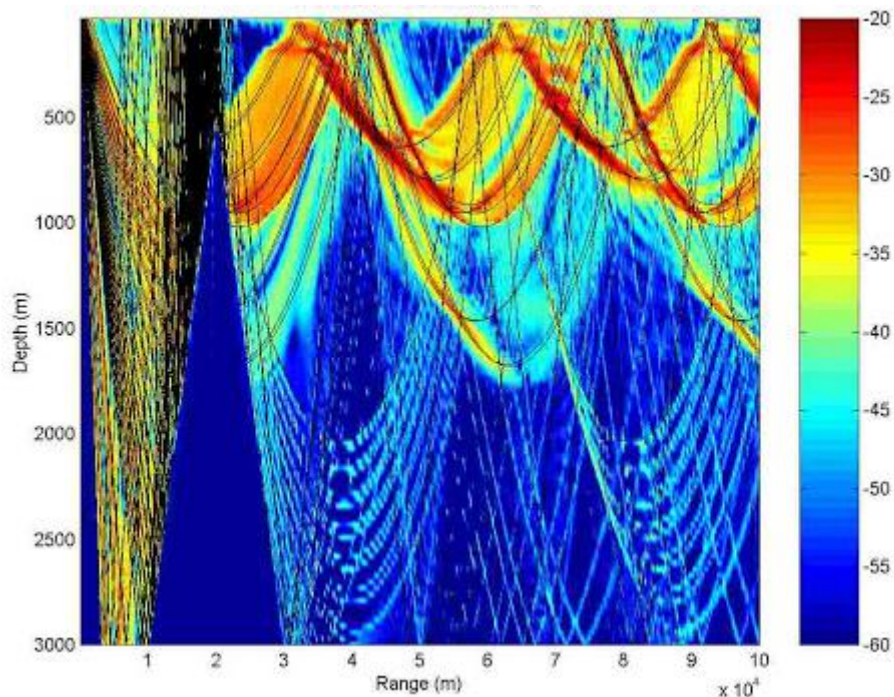


**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΝΑΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑΣ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ**



**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**«ΝΑΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ»**

**Υπολογισμός ακουστικού πεδίου σε θαλάσσιο κυματοδηγό**  
**με εφαρμογή της θεωρίας ακτίνων**



Όνοματεπώνυμο Φοιτητή: **Αθανάσιος Ναούμ**

Επιβλέπων Καθηγητής: **Κ. Α. Μπελιμπασάκης, Καθ. ΕΜΠ**

Επιτροπή: **Γ.Α. Αθανασούλης, Καθ. ΕΜΠ**

**Γ. Τριανταφύλλου, Καθ. ΕΜΠ**

**ΑΘΗΝΑ, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2021**



## Περίληψη

Η παρούσα εργασία έχει ως θέμα την ανάπτυξη και εφαρμογή μοντέλου που βασίζεται στη θεωρία ακτίνων για τον υπολογισμό ακουστικού πεδίου σε θαλάσσιο κυματοδηγό. Η διάδοση των ακουστικών κυμάτων βρίσκει πολλές και σημαντικές εφαρμογές στη θάλασσα. Το θαλάσσιο περιβάλλον αποτελεί ένα φυσικό κυματοδηγό, ο οποίος περιορίζεται άνωθεν από την ελεύθερη επιφάνεια και κάτωθεν από το θαλάσσιο πυθμένα. Λόγω του γεγονότος αυτού, και επειδή η απορρόφηση της ακουστικής ενέργειας (ισχύος) από το θαλασσινό νερό είναι πολύ μικρή, τα ακουστικά κύματα μπορούν να διαδοθούν σε μεγάλες αποστάσεις μέσα στη θάλασσα. Γι' αυτό το λόγο, τα ακουστικά κύματα χρησιμοποιούνται στη θάλασσα για βαθυμετρήσεις, ανίχνευση και παρακολούθηση αντικειμένων, υποθαλάσσια τηλεπικοινωνία και μετάδοση πληροφοριών, τομογραφική διερεύνηση των θαλασσίων μαζών και του πυθμένα της θάλασσας και πολλές άλλες εφαρμογές, βλ. π.χ., Frisk (1994), Jensen (2011). Η παρούσα εργασία αφορά στην ανάπτυξη και εφαρμογή μεθοδολογίας που βασίζεται στη θεωρία ακτίνων για την επίλυση προβλημάτων κυματικής διάδοσης σε θαλάσσιο κυματοδηγό με τη παρουσία ανομοιογενειών λόγω μεταβαλλόμενου δείκτη διάθλασης και μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας.



## **Abstract**

The present thesis is the development and application of ray-theory model for the calculation of sound propagation in the ocean waveguide. The propagation of acoustic waves has been used in many and significant application in the ocean. The ocean is an acoustic waveguide limited above by the sea surface and below by the seafloor. In addition to this, the absorption of acoustic energy (power) by seawater is very small. Thus, the acoustic waves can propagate through the ocean at longrange. For this reason, the acoustic waves have been used in the ocean for bathymetric measurements, object detection and tracking, underwater acoustic communication and information transmission, acoustic tomographic measurements of water mass and the seafloor and other applications; see e.g. Frisk (1994), Jensen et al (2011). The present thesis concerns the development and application of a method, which is based on ray-theory model, for the problem solving that are relate to the acoustic wave propagation in an inhomogeneous ocean waveguide because of the variable index of refraction and the variable bathymetry.



## Περιεχόμενα

<b>1. Εισαγωγή</b> .....	<b>2</b>
<b>1.1</b> Καμπύλωση ακτίνων σε στρωματοποιημένα μέσα .....	<b>3</b>
<b>1.2</b> Ακουστικές παράμετροι θαλάσσιου περιβάλλοντος .....	<b>7</b>
<b>1.3</b> Χαρακτηριστικές δομές ακουστικού πεδίου στη θάλασσα .....	<b>11</b>
<b>2. Η ακουστική εξίσωση για τη πρόβλεψη ακουστικής διάδοσης στη θάλασσα</b> .....	<b>13</b>
<b>2.1</b> Το πρόβλημα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Helmholtz .....	<b>15</b>
<b>2.2</b> Η υψίσυχη ασυμπτωτική προσέγγιση της λύσης.....	<b>18</b>
<b>2.3</b> Παραγωγή της εξίσωσης της εικόνας από το συναρτησιακό του στάσιμου χρόνου .....	<b>19</b>
<b>2.4</b> Επιλύοντας την εξίσωση της εικόνας .....	<b>26</b>
<b>2.5</b> Η εξίσωση μεταφοράς. Εκτίμηση της έντασης του ηχητικού πεδίου από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ηχητικού σωλήνα .....	<b>30</b>
<b>2.6</b> Παραδείγματα αναλυτικών λύσεων των εξισώσεων των ακτίνων .....	<b>34</b>
<b>3. Αριθμητικό σχήμα επίλυσης των εξισώσεων των ακτίνων</b> .....	<b>40</b>
<b>3.1</b> Μέθοδοι ολοκλήρωσης μη γραμμικών διαφορικών συστημάτων .....	<b>41</b>
<b>3.2</b> Η μέθοδος Adams-Moulton-Bashford .....	<b>46</b>
<b>3.3</b> Αριθμητικό πρόγραμμα m .....	<b>55</b>
<b>4. Παραδείγματα εφαρμογής</b> .....	<b>59</b>
<b>5. Συμπεράσματα – προτάσεις για μελλοντική εργασία</b> .....	<b>62</b>
Βιβλιογραφικές Αναφορές .....	<b>64</b>
Παραρτήματα .....	<b>65</b>
<b>A.</b> Παραγωγή της εξίσωσης της εικόνας από την εξίσωση Helmholtz.....	<b>65</b>
<b>B.</b> Παραγωγή των εξισώσεων μεταφοράς από την εξίσωση Helmholtz.....	<b>67</b>
<b>Γ.</b> Δημιουργία καυστικών ζωνών.....	<b>79</b>

## 1. Εισαγωγή

Τα μοντέλα που αφορούν τις ακτίνες χρησιμοποιούνται για πολλά χρόνια στην υποβρύχια ακουστική. Η μοντελοποίηση αυτή, τα πρώτα χρόνια, βασιζόταν κυρίως στην καταγραφή των ακτίνων. Χρησιμοποιούνται εκτενέστερα στο επιχειρησιακό περιβάλλον, όπου η ταχύτητα διάδοσης είναι ένας σημαντικός παράγοντας. Η περιβαλλοντική αβεβαιότητα βέβαια αποτελεί εμπόδιο για την επίτευξη της μέγιστης δυνατής ακρίβειας (κυρίως στη μελέτη των υψηλών συχνοτήτων). Επίσης, μεγάλο μέρος της γνώσης που προκύπτει από τη μελέτη της θεωρίας των ακτίνων είναι σημαντική για την ερμηνεία αποτελεσμάτων άλλων μοντέλων.

Ιστορικά, είναι ενδιαφέρον να αναφερθεί ότι η συμπεριφορά των διαδρομών της ακτίνας κατανοήθηκε αρκετό καιρό πριν η θεωρία ακτίνων επισημοποιηθεί μαθηματικά. Η θεωρία ακτίνων, προέρχεται από την οπτική, όπου χρησιμοποιήθηκε για να κατανοηθεί η διάδοση του φωτός πριν ακόμα γίνουν γνωστές οι περισσότερες θεμελιώδεις εξισώσεις για την διάδοση του φωτός (εξισώσεις Maxwell). Πράγματι, η διάδοση και η ανάκλαση των ακτίνων αρχικά μελετήθηκε από τον Ευκλείδη, ενώ ο νόμος του Snell που αφορά τη διάθλαση των ακτίνων χρονολογείται το 1926. Οι πρώτες αναφορές σχετικά με την ανίχνευση ακτίνων στην υποβρύχια ακουστική έγιναν από τον Hugo Lichte, ο οποίος σύγκρινε αποτελέσματα μοντέλων με μετρήσιμα δεδομένα για περιοχές ρηχού νερού. Η αναφορά του προβλέπει, επίσης, τη διάδοση ενός ηχητικού κύματος σε μεγάλη απόσταση, το οποίο επιτυγχάνεται σε κανάλια SOFAR (οριζόντια στρώματα νερού στον ωκεανό σε βάθος όπου η ταχύτητα του ήχου είναι η ελάχιστη). Σήμερα, η θεωρία ακτίνων είναι χρήσιμη σε όλα τα πεδία κυματικής διάδοσης συμπεριλαμβάνοντας τα οπτικά, τα ηλεκτρομαγνητικά και τα σεισμικά.

Η παρούσα εργασία διαρθρώνεται με ένα εισαγωγικό κεφάλαιο, όπου περιγράφονται τα φαινόμενα διάθλασης των ακτίνων, ο ορισμός τους καθώς και οι ακουστικές παράμετροι του θαλάσσιου περιβάλλοντος.

Το δεύτερο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην επεξεργασία της ακουστικής εξίσωσης στις υψηλές συχνότητες με σκοπό την πρόβλεψη της ακουστικής διάδοσης στη θάλασσα. Αναλύεται το πρόβλημα των συνοριακών τιμών για την εξίσωση Helmholtz, παράγονται οι εξισώσεις εικόνας (eikonal) και μεταφοράς και προσδιορίζεται η ένταση του ηχητικού πεδίου μέσω των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του ηχητικού σωλήνα. Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζεται το μοντέλο που βασίζεται στη θεωρία ακτίνων σε μαθηματική βάση. Παρουσιάζεται το αριθμητικό σχήμα για την επίλυση των εξισώσεων των ακτίνων με εφαρμογή της μεθόδου Adams-Moulton-Bashford.

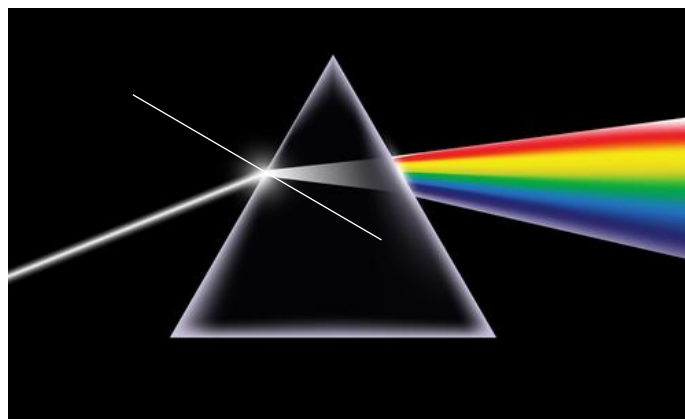
Τα επόμενα δύο κεφάλαια περιέχουν παραδείγματα εφαρμογής (τέταρτο κεφάλαιο) της θεωρίας των ακτίνων και εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα (πέμπτο κεφάλαιο).

Τέλος, γίνεται λόγος για κάποιες βιβλιογραφικές αναφορές και δίνονται παραρτήματα, τα οποία περιγράφουν εκτενέστερα την παραγωγή των εξισώσεων εικόνας και μεταφοράς και το φαινόμενο των καυστικών ζωνών.



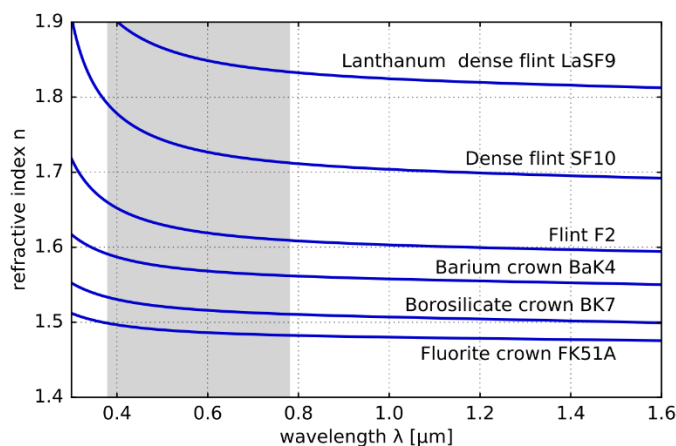
## 1.1 Καμπύλωση ακτίνων σε στρωματοποιημένα μέσα

Από τις εφαρμογές της οπτικής είναι πολύ γνωστή η ιδέα της ακτίνας του φωτός που μπορεί να διαθλαστεί. Ένα πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η περίπτωση του πρίσματος στο Σχήμα 1.1, που οδηγεί ταυτόχρονα στην ανάλυση του λευκού φωτός και εκτός του φαινομένου της διάθλασης παρουσιάζει και το φαινόμενο της διασποράς.



**Σχήμα 1.1:** Διάθλαση λευκού φωτός εντός πρίσματος και χρωματική ανάλυση

Καθώς το λευκό φως διαδίδεται στο κενό και στον αέρα, όλες οι συχνότητες που το συνθέτουν διαδίδονται με την ίδια σταθερή ταχύτητα. Εντός του πρίσματος από γυαλί (οπτικό μέσο), οι φασικές ταχύτητες της πολυχρωματικής σύνθεσης διαδίδονται με διαφορετική ταχύτητα για κάθε συχνότητα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την τροποποίηση των γωνιών διάδοσης (ανάλογα με τη συχνότητα) εντός του πρίσματος, όπως ορίζει ο νόμος του Snell (θα αναλυθεί εκτενέστερα στη συνέχεια), οδηγώντας στην ανάλυση της δέσμης. Το φαινόμενο αυτό μεγθύνεται επιπλέον από τη δεύτερη διάθλαση στην έξοδο του πρίσματος καταλήγοντας στη χαρακτηριστική ανάλυση του φωτός πίσω από το πρίσμα. Αξιοσημείωτη είναι η παρατήρηση του φαινομένου σε συνδυασμό με τη διακύμανση της ταχύτητας διάδοσης (άρα και του δείκτη διάθλασης) των Η/Μ κυμάτων στο γυαλί, για κάθε μέσο (τύπο γυαλιού) εντός του οπτικού φάσματος (σκιασμένη περιοχή), όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1.2. Η εξάρτηση της ταχύτητας αυτής και του δείκτη διάθλασης από το μήκος κύματος ονομάζεται διασκεδασμός.



[https://en.wikipedia.org/wiki/Refractive\\_index](https://en.wikipedia.org/wiki/Refractive_index)

**Σχήμα 1.2:** Δείκτης διάθλασης σε γυαλί (διαφόρων τύπων) συναρτήσεως του μήκους κύματος

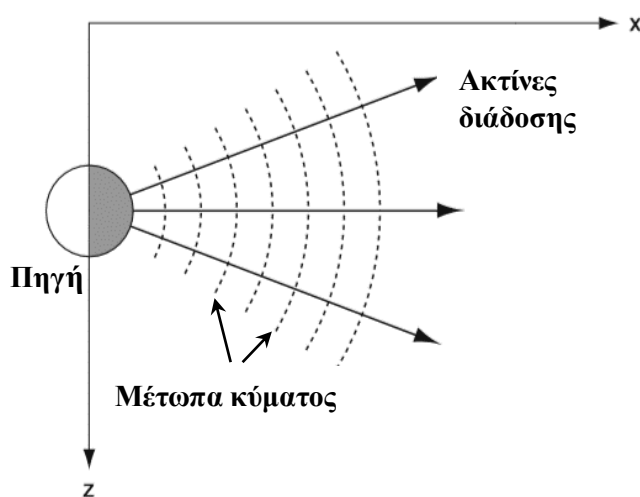
Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε την διάδοση των ηχητικών κυμάτων σε μια ανομοιογενή θαλάσσια επιφάνεια. Οπότε οφείλουμε να αναφέρουμε κάποιες βασικές έννοιες όπως μέτωπο κύματος και ακτίνα διάδοσης.

Η έννοια του μετώπου κύματος είναι μια από τις βασικότερες έννοιες της κυματικής. Ο ορισμός του εξαρτάται από το είδος της κυματικής διαταραχής. Το είδος της διαταραχής που θα εξετάσουμε είναι η χρονικώς αρμονική διαταραχή. Σε αυτό το είδος της διαταραχής μελετάμε τα κυματικά φαινόμενα στο πεδίο συχνοτήτων. Η πηγή (αιτία της διαταραχής) έχει χρονικώς περιοδική υφή και δρα διαρκώς (δηλαδή για μεγάλο χρονικό διάστημα), οπότε και το αποτέλεσμα (κυματική διαταραχή) είναι χρονικώς περιοδικό. Η διαταραχή αυτή καταλαμβάνει ολόκληρο το πεδίο (χώρο) στον οποίο μπορεί να διαδοθεί, πεπερασμένο ή άπειρο.

Επομένως, ως μέτωπο κύματος ορίζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (για τις δύο διαστάσεις θα μιλάμε για γραμμή), επί του οποίου οι τιμές της κυματικής διαταραχής βρίσκονται σε συμφωνία φάσης (σταθερή φάση).

Σε διαδοχικές χρονικές στιγμές, καθώς δηλαδή διαδίδεται το ηχητικό κύμα, οι διαδοχικές θέσεις του μετώπου του κύματος αποτελούν μια οικογένεια γραμμών (σε δύο διαστάσεις). Οι γραμμές αυτές δεν τέμνονται μεταξύ τους. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε μια άλλη οικογένεια γραμμών, όπου η κάθε μια τέμνει κάθετα το μέτωπο κύματος (κάθε χρονική στιγμή). Η δεύτερη οικογένεια γραμμών ονομάζονται ακτίνες διάδοσης, ή απλά ακτίνες.

Επομένως, η ανίχνευση των ακτίνων μας βοηθάει να κατανοήσουμε πως αυτές καμπυλώνουν ή διαθλώνται και έτσι να ερμηνεύσουμε την διάδοση των μετώπων κύματος. Μπορούμε να φανταστούμε ακτίνες που διαδίδονται σε κάθε κατεύθυνση στον ελεύθερο χώρο. Όμως, μόνο αυτές που εμείς ανιχνεύουμε μας βοηθάνε να κατανοήσουμε την διάδοσή τους από μια συγκεκριμένη πηγή. Συνεπώς, τα επίπεδα κύματα και τα σφαιρικά κύματα στον ελεύθερο χώρο γίνονται κατανοητά από τα διαφορετικά μέτωπα κύματος και τις διαφορετικές ακτίνες. Το Σχήμα 1.3 αναπαριστά μια σημειακή πηγή, η οποία παράγει ένα πεδίο κυμάτων. Οι ακτίνες είναι κάθετες στα μέτωπα του κύματος και ευθείες γραμμές.

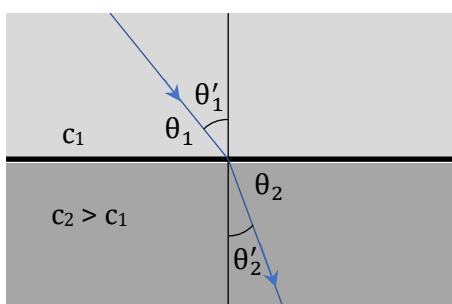


**Σχήμα 1.3:** Ακτίνες διάδοσης και μέτωπα κύματος

Στην συνέχεια, ας θεωρούμε μια διεπιφάνεια ρευστών. Γνωρίζουμε ότι ένα κύμα προκαλεί ανακλώμενα και μεταδιδόμενα κύματα. Επιπλέον, από το Νόμο του Snell γνωρίζουμε ότι:

$$\sin\theta'_1/c_1 = \sin\theta'_2/c_2 \quad (1.1)$$

όπου  $\theta'_1$  είναι η γωνία πρόσπτωσης και  $\theta'_2$  η γωνία μετάδοσης (διάθλασης), όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4.



**Σχήμα 1.4:** Νόμος του Snell μεταξύ δύο ομογενών μέσων με ταχύτητες διάδοσης  $c_1$  και  $c_2 > c_1$ , αντίστοιχα, που διαχωρίζονται από οριζόντια διεπιφάνεια

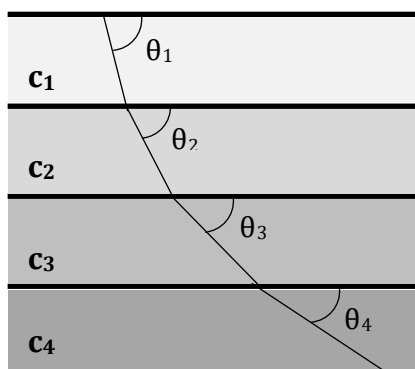
Το παραπάνω αποτέλεσμα εκφράζεται ισοδύναμα χρησιμοποιώντας τις γωνίες διάδοσης  $\theta_1$  και  $\theta_2$ , αντίστοιχα, που είναι οι συμπληρωματικές ως προς τη γωνία πρόσπτωσης και τη γωνία μετάδοσης:

$$c_1 \cdot \cos\theta_1 = c_2 \cdot \cos\theta_2 \quad (1.2)$$

συσχετίζοντας την γωνία του προσπίπτοντος κύματος  $\theta_1$  με τη γωνία του μεταδιδόμενου κύματος  $\theta_2$ . Τώρα, διαισθητικά μπορούμε να φανταστούμε μια στοίβα στρωμάτων (Σχήμα 1.5) και να ακολουθήσουμε το μεταδιδόμενο κύμα διαμέσου της στοίβας. Όσο το μεταδιδόμενο κύμα γίνεται προσπίπτον στο επόμενο κατώτερο στρώμα, ο Νόμος του Snell παραμένει σε ισχύ, έτσι ώστε

$$c_2 \cdot \cos\theta_2 = c_3 \cdot \cos\theta_3 \quad (1.3)$$

και ούτω καθεξής.



**Σχήμα 1.5:** Ακτίνα μεταδιδόμενη διαμέσου των στρωμάτων ρευστού

Αν εμείς τώρα φανταστούμε ότι η διακριτή στοίβα στρωμάτων προσεγγίζει ένα ρευστό με μια συνεχώς μεταβαλλόμενη ταχύτητα διάδοσης  $c(z)$ , τότε μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση ως:

$$c(z_1) \cdot \cos\theta(z_1) = c(z_2) \cdot \cos\theta(z_2) \quad (1.4)$$

Τα ανακλώμενα κύματα αγνοούνται καθώς η μελέτη της διεπιφάνειας μεταξύ των ρευστών έδειξε ότι το ανακλώμενο κύμα γίνεται σταδιακά ασθενέστερο όσο η ταχύτητα του ήχου γίνεται ασθενέστερη.

Σε αυτό το σημείο, έχουμε όλες τις εξισώσεις που χρειαζόμαστε για να ανιχνεύσουμε ακτίνες σε ένα στρωματοποιημένο μέσο. Υποθέτουμε ότι δίνεται ένα σημείο εκκίνησης της ακτίνας, αποτελούμενο από την πηγή της ακτίνας  $z_0$  και τη γωνία απόκλισης της  $\theta_0$ . Τότε, η γωνία της ακτίνας σε συγκεκριμένο βάθος  $z_r$  είναι:

$$\theta(z_r) = \arccos \left[ \frac{c(z_0)}{c(z_r)} \cos\theta(z_0) \right] \quad (1.5)$$

Επίσης, από το Σχήμα 1.5 μπορούμε να δούμε ότι στο τυχαίο στρώμα  $i$  του ρευστού,

$$\frac{\Delta r}{\Delta z} = \cot\theta_i \quad (1.6)$$

Συνεπώς, υπολογίζοντας ξανά το όριο ενός άπειρου αριθμού λεπτών στρωμάτων, παίρνουμε μια διαφορική εξίσωση για το πεδίο της ακτίνας ως συνάρτηση του βάθους,

$$\frac{dr}{dz} = \cot\theta(z) \quad (1.7)$$

Αυτή, έπειτα, μπορεί να ολοκληρωθεί και να δώσει,

$$r(z) = \int_{z_0}^{z_r} \cot\theta(z) dz \quad (1.8)$$

Σε αυτό το σημείο, έχουμε ουσιαστικά μια πλήρη μεθοδολογία για να ανιχνεύουμε μια ακτίνα διαμέσου ενός στρωματοποιημένου μέσου. Η ολοκλήρωση της τροχιάς της ακτίνας πραγματοποιείται μέσα από τις μικρές αυξήσεις σε βάθος. Φανταστείτε το προφίλ της ταχύτητας του ήχου, το οποίο αυξάνεται συνεχώς με το βάθος όπως υπονοείται από τη τροχιά της ακτίνας στο Σχήμα 1.5. Η ακτίνα συνεχώς διαθλάται, προφανώς κατευθυνόμενη μακριά από τα μέρη υψηλότερης ταχύτητας του μέσου. Στην πράξη, για έναν παρατηρητή που βλέπει στην κατεύθυνση της ακτίνας διάδοσης, τα μέτωπα του κύματος αριστερά της ακτίνας είναι σε ένα πιο αργό μέσο από ό,τι εκείνα δεξιά της ακτίνας. Άρα, το μέτωπο της ακτίνας στρέφεται συνεχώς, όπως η ρόδα ενός βαγονιού στη λάσπη. Τελικά, η ακτίνα θα φτάσει στο σημείο, όπου θα γίνει οριζόντια. Η ολοκλήρωση της ακτίνας, έπειτα, πρέπει να αντιστραφεί με βήματα  $dz$ , τα οποία γίνονται αρνητικά.

Θέτοντας  $\theta(z_2) = 0$  (για μια οριζόντια ακτίνα) στο Νόμο του Snell, έχουμε:

$$c(z_1) \cdot \cos\theta(z_1) = c(z_2) \quad (1.9)$$

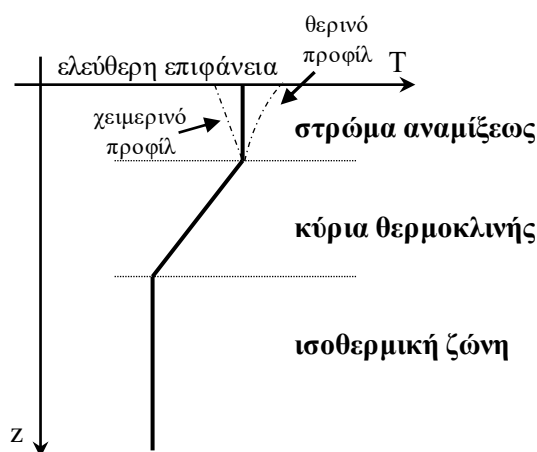
Από αυτήν την εξίσωση, μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία εκκίνησης  $\theta(z_1)$  μιας ακτίνας που στρέφεται σε ένα δεδομένο βάθος. Αυτό είναι χρήσιμο όταν θέλουμε να βρούμε τη γωνία εκκίνησης μιας ακτίνας που γυρίζει στον πυθμένα του ωκεανού.

## 1.2 Ακουστικές παράμετροι θαλάσσιου περιβάλλοντος

Η διάδοση των ακουστικών κυμάτων στη θάλασσα επηρεάζεται από κάποιες φυσικές παραμέτρους. Οι παράμετροι αυτοί σχετίζονται με τη θερμοκρασία του θαλασσινού νερού, την αλατότητά του, την ταχύτητα του ήχου στο νερό. Σημαντικές, επίσης, παράμετροι αποτελούν η πυκνότητα του νερού και η ύπαρξη διαστρωματώσεων της στήλης του νερού, η γεωμορφολογία και η σύσταση του θαλάσσιου πυθμένα καθώς και η κατάσταση της θάλασσας (κυματισμοί). Οι φυσικές παράμετροι εξετάζονται εκτενέστερα στην συνέχεια.

### Θερμοκρασία του θαλασσινού νερού

Γενικά, η θερμοκρασία παρουσιάζει μια μεταβλητότητα στη στήλη του θαλασσινού νερού. Στο Σχήμα 1.6 παρουσιάζεται μια τυπική μορφή της κατανομής της θερμοκρασίας σε σχέση με το βάθος.



**Σχήμα 1.6:** Μορφή κατακόρυφης κατανομής θερμοκρασίας θαλασσινού νερού

Όπως φαίνεται από το Σχήμα, η θερμοκρασία παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού.

Κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια εμφανίζεται το πρώτο στρώμα (στρώμα αναμίξεως) με πάχος μερικές δεκάδες έως περίπου 100 μέτρα. Στην περιοχή αυτή, η επίδραση των θαλάσσιων κυματισμών εξισορροπεί την θερμοκρασία του νερού σε σταθερά επίπεδα. Τα επίπεδα αυτά διαφοροποιούνται ανάλογα με την εποχή και την ώρα της ημέρας. Συγκεκριμένα, κατά τους θερινούς μήνες και τις θερμότερες ώρες της ημέρας, το κατακόρυφο προφίλ της θερμοκρασίας του θαλασσινού νερού παρουσιάζει μια τοπική αύξηση κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια (θερινό προφίλ). Αντίθετα, κατά τους χειμερινούς μήνες, η μέση θερμοκρασία του θαλασσινού νερού στο στρώμα αναμίξεως παραμένει σταθερή με μια πολύ μικρή τάση ελάττωσης κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια.

Κάτω από το στρώμα αναμίξεως επεκτείνεται η κύρια θερμοκλιική ζώνη με πάχος αρκετών εκατοντάδων μέτρων. Σε αυτή την περιοχή, η θερμοκρασία ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό, λόγω της αύξησης του βάθους και κατ' επέκταση της ελάττωσης της ροής της θερμότητας από την ελεύθερη επιφάνεια.

Σε μεγαλύτερα βάθη, κάτω από την κύρια θερμοκλιική ζώνη, βρίσκεται η ισοθερμική ζώνη. Στην περιοχή αυτή, η θερμοκρασία του νερού είναι σταθερή στους 3°C περίπου και οφείλεται στην θερμοδυναμική ισορροπία του θαλασσινού νερού σε πολύ μεγάλη πίεση.

### **Αλατότητα του θαλασσινού νερού**

Η αλατότητα του θαλασσινού νερού εκφράζει τη μέση περιεκτικότητα των διαλυμένων αλάτων σε αυτό και κυμαίνεται από 30‰ έως 45‰. Η αλατότητα έχει την τάση να ελαττώνεται με το βάθος χωρίς όμως να παρουσιάζει την έντονη διαστρωμάτωση της κατακόρυφης κατανομής της θερμοκρασίας. Επίσης, η αλατότητα εξαρτάται άμεσα από την ευρύτερη γεωγραφική περιοχή, δηλ. η μέση επιφανειακή αλατότητα του Ατλαντικού (34-36‰) είναι μικρότερη από την αντίστοιχη της Μεσογείου (36‰ στις δυτικές περιοχές, 39‰ στις ανατολικές περιοχές) και η τελευταία είναι σημαντικά μικρότερη από την αλατότητα της Ερυθράς θάλασσας. Ακόμη, η αλατότητα παρουσιάζει εντονότερη διακύμανση στην παράκτια ζώνη π.χ. στις εκβολές μεγάλων ποταμών, όπου το θαλασσινό νερό εμπλουτίζεται με γλυκό νερό με αποτέλεσμα την έντονη πτώση της αλατότητας.

### **Ταχύτητα του ήχου στη θάλασσα**

Τα φαινόμενα διάδοσης του ήχου στη θάλασσα επηρεάζονται σε μέγιστο βαθμό από τη κατανομή της ταχύτητας του ήχου στη θάλασσα μάζα. Γενικά, η ταχύτητα διάδοσης του ήχου σε οποιοδήποτε ακουστικό μέσο είναι ένα μέγεθος που σχετίζεται με την πυκνότητα και την συμπιεστότητα του ακουστικού μέσου. Στη θάλασσα, η πυκνότητα του νερού επηρεάζεται κυρίως από τη στατική πίεση, την αλατότητα και τη θερμοκρασία του νερού.

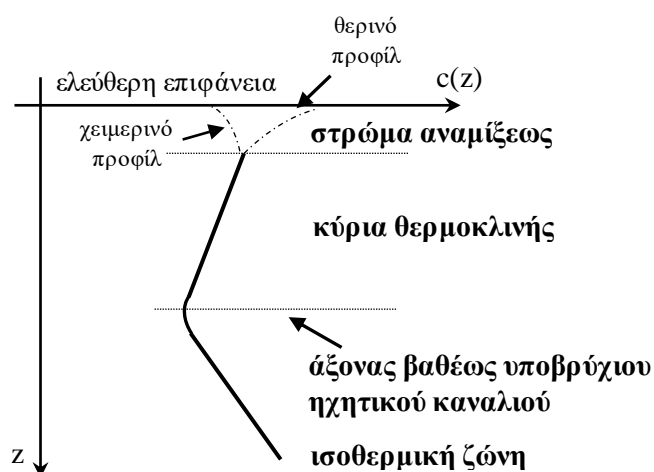
Επομένως, μια απλή έκφραση για την εξάρτηση της ταχύτητας του ήχου στη θάλασσα από αυτές τις παραμέτρους δίνεται από την σχέση των Clay και Medwin (1977),

$$c = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + (1.34 - 0.01T)(S - 35) + 0.016z \quad (1.10)$$

όπου  $c$  η ταχύτητα του ήχου στο θαλασσινό νερό σε m/sec,  $T$  η θερμοκρασία του νερού σε βαθμούς Κελσίου,  $S$  η αλατότητα του νερού σε ποσοστό επί τοις χιλίοις (‰) και  $z$  το βάθος σε m. Όπως προκύπτει και από την παραπάνω σχέση, η ταχύτητα του ήχου στο θαλασσινό νερό παρουσιάζει μικρές διακυμάνσεις λαμβάνοντας τιμές από  $c = 1450$  m/s έως  $c = 1570$  m/s. Παρόλο αυτά, οι διακυμάνσεις αυτές έχουν ως αποτέλεσμα σημαντικές τροποποιήσεις στη μορφή διάδοσης του ήχου στη θάλασσα. Το γεγονός αυτό οφείλεται, κυρίως, στα φαινόμενα διάθλασης, τα οποία σχετίζονται άμεσα με τις μεταβολές της ταχύτητας του ήχου.

Επιπλέον, η κατανομή της ταχύτητας του ήχου στο θαλασσινό νερό παρουσιάζει συγκεκριμένη εποχιακή και ημερήσια μεταβλητότητα όπως και γεωγραφική μεταβλητότητα.

Το Σχήμα 1.7 παρουσιάζει μια τυπική μορφή της κατακόρυφης κατανομής της ταχύτητας του ήχου στη θάλασσα. Παρατηρούμε πως η ταχύτητα του ήχου παρουσιάζει σημαντική μεταβολή κυρίως στο ανώτερο στρώμα του νερού. Στην περιοχή αυτή, η οποία κυμαίνεται από μερικά μέτρα έως μερικές δεκάδες μέτρα βάθους, η ταχύτητα του ήχου μεταβάλλεται σημαντικά τόσο κατά την διάρκεια της ημέρας όσο και εποχικά. Στις θερμότερες ώρες της ημέρας και κατά τους θερινούς μήνες, όταν η κατάσταση της θάλασσας είναι σχετικά ήρεμη (ελάχιστος κυματισμός), η τοπική αύξηση της θερμοκρασίας του νερού κοντά στην επιφάνεια έχει σαν αποτέλεσμα την αντίστοιχη αύξηση της ταχύτητας του ήχου.



**Σχήμα 1.7:** Μορφή κατακόρυφης κατανομής της ταχύτητας του ήχου στο θαλασσινό νερό

Στο πρώτο στρώμα νερού κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια (στρώμα αναμίξεως), η θερμοκρασία του νερού παραμένει σταθερή λόγω της δράσης των κυματισμών. Έτσι, η ταχύτητα του ήχου παραμένει σταθερή ή αυξάνεται ελάχιστα λόγω της αύξησης της υδροστατικής πίεσης με το βάθος.

Κάτω από το στρώμα αναμίξεως βρίσκεται η κύρια θερμοκλινης περιοχή όπου η θερμοκρασία του νερού, άρα και η ταχύτητα του ήχου ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό όσο το βάθος αυξάνεται.

Τέλος, σε αρκετά μεγάλα βάθη, στην ισοθερμική ζώνη, η θερμοκρασία σταθεροποιείται και δεν μεταβάλλεται με το βάθος. Εκεί, η ταχύτητα του ήχου αυξάνεται με μικρό και σταθερό ρυθμό με το βάθος, λόγω της διαρκούς αύξησης της υδροστατικής πίεσης.

Από το Σχήμα 1.7 παρατηρούμε, επίσης, την εμφάνιση δύο τοπικών ελαχίστων. Το πρώτο τοπικό ελάχιστο παρατηρείται στη θέση της ελεύθερης επιφάνειας και το δεύτερο τοπικό ελάχιστο παρατηρείται σε βάθος που αντιστοιχεί κοντά στο κατώτερο όριο της κύριας θερμοκλινοῦς ζώνης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μεταξύ της κύριας θερμοκλινοῦς ζώνης (όπου η ταχύτητα του ήχου ελαττώνεται με το βάθος) και της ισοθερμικής ζώνης (όπου η ταχύτητα του ήχου αυξάνεται με το βάθος) υπάρχει

κάποια θέση στην οποία η κατανομή της ταχύτητας του ήχου παρουσιάζει ελάχιστο. Το βάθος στο οποίο βρίσκεται η θέση αυτή ορίζει τον άξονα του βαθέως υποβρύχιου ακουστικού καναλιού (Deep Underwater Sound Channel - DSC). Είναι γνωστό, επίσης, ως κανάλι SOFAR (Sound Fixing and Ranging channel) ή κανάλι βαθιού ήχου.

### **Γεωμορφολογία και σύσταση θαλάσσιου πυθμένα**

Ο θαλάσσιος πυθμένας είναι μια επιφάνεια με σχετικά μικρή μέση κλίση στην περιοχή της υφαλοκρηπίδας (βάθος νερού μέχρι 200-300m), η οποία κυμαίνεται από 2% έως 3%. Όμως, στην περιοχή νερού μεγάλου βάθους, η κλίση μπορεί να φτάσει έως 50%. Η δομή του θαλάσσιου πυθμένα εξαρτάται κυρίως από τα τοπικά γεωλογικά χαρακτηριστικά της κάθε γεωγραφικής περιοχής. Σε κάθε περίπτωση, όμως, αποτελείται από μια σειρά (διαστρωμάτωση) από ιζήματα, τα οποία βρίσκονται πάνω από το στερεό υπόστρωμα της Γης.

Ο θαλάσσιος πυθμένας είναι ακουστικά ένα διαπερατό υλικό. Αυτό σημαίνει πως ένα τμήμα της ακουστικής ενέργειας που μεταφέρει ένα ηχητικό κύμα, το οποίο προσπίπτει στον πυθμένα, ανακλάται πίσω προς τη θαλάσσια μάζα ενώ το υπόλοιπο διαπερνά το θαλάσσιο πυθμένα και διαδίδεται μέσα σε αυτόν. Οι ακουστικές ιδιότητες των ιζημάτων καθορίζονται από την περιεκτικότητά τους σε άμμο, πηλό και άργιλο. Ο ήχος διαδίδεται ταχύτερα σε ένα υλικό με μεγάλη περιεκτικότητα σε άμμο (λόγω μεγαλύτερης πυκνότητας) από ό,τι σε ένα υλικό με μεγάλη περιεκτικότητα σε άργιλο.

### **Κατάσταση θάλασσας – Κυματισμοί**

Όταν ένα ακουστικό κύμα διαδίδεται στο θαλάσσιο περιβάλλον περιορίζεται από δύο φυσικά σύνορα: την ελεύθερη επιφάνεια και τον θαλάσσιο πυθμένα. Αυτά τα δυο σύνορα αποτελούν τον θαλάσσιο ακουστικό κυματοδηγό. Με αυτό τον τρόπο, υποστηρίζεται η διάδοση των ακουστικών κυμάτων σε μεγάλες οριζόντιες αποστάσεις στο θαλασσινό νερό (κυρίως στην περιοχή της υφαλοκρηπίδας).

Η ελεύθερη επιφάνεια αποτελεί γενικά ένα σύνορο με πολύ καλές ανακλαστικές ιδιότητες. Καθώς μια πηγή εκπέμπει ακουστικά κύματα, «χτυπώντας» στην ελεύθερη επιφάνεια ανακλώνται πλήρως ή μερικώς. Το ποσοστό απώλειας της ηχητικής ενέργειας εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από την κατάσταση της θάλασσας και το είδος των κυματισμών που επικρατούν.

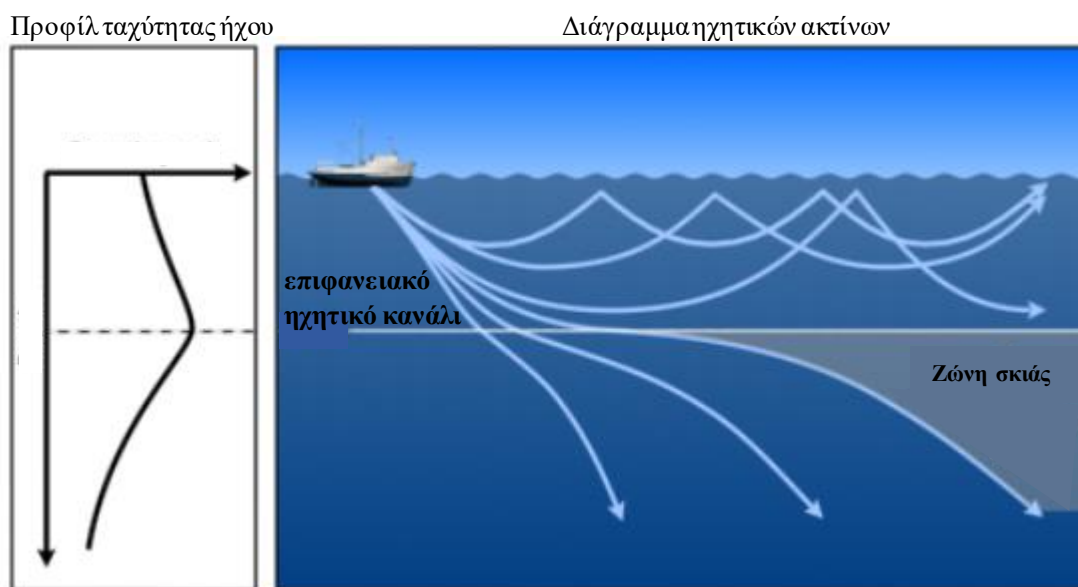
Συγκεκριμένα, όταν τα υδροακουστικά κύματα προσπίπτουν σε μια ήρεμη ελεύθερη επιφάνεια ανακλώνται πλήρως και έτσι η ακουστική ενέργεια δεν παρουσιάζει σημαντικές απώλειες συνεχίζοντας την διάδοσή της στη θαλάσσια μάζα.

Αντιθέτως, στην περίπτωση που η ελεύθερη επιφάνεια είναι ταραγμένη (λόγω επιφανειακών κυματισμών), η δημιουργία φυσαλίδων αέρα (από τη θραύση των κυματισμών και την ανάμειξη του αέρα) που παγιδεύονται σε στρώμα νερού μικρού πάχους οδηγεί σε τοπικές σκεδάσεις μέρους της ακουστικής ενέργειας. Παρόλο, όμως, που οι απώλειες αυξάνονται, σημαντικό μέρος της ηχητικής ενέργειας ανακλάται πίσω στη θαλάσσια μάζα.



### 1.3 Χαρακτηριστικές δομές ακουστικού πεδίου στη θάλασσα

Η σημασία των χαρακτηριστικών της κατακόρυφης κατανομής της ταχύτητας του ήχου στο θαλασσινό νερό φαίνεται καλύτερα στα Σχήματα 1.8 και 1.9. Σε αυτά απεικονίζεται το διάγραμμα ηχητικών ακτίνων με τη μορφή των χαρακτηριστικών γραμμών διάδοσης του ήχου στη θάλασσα. Κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα ηχητικό σήμα που εκπέμπει μια ηχητική πηγή με διαφορετικές γωνίες εκπομπής. Στο αριστερό μέρος κάθε σχήματος παριστάνεται το κατακόρυφο προφίλ της ταχύτητας του ήχου, το οποίο παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο στην ελεύθερη επιφάνεια και ένα ολικό ελάχιστο σε βάθος περίπου 800m. Στην οριζόντια διεύθυνση θεωρούμε την ταχύτητα αμετάβλητη. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 1.8, η ηχητική πηγή βρίσκεται σε μικρό βάθος (περίπου 10m) κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια και εκπέμπει μια δέσμη ηχητικών ακτίνων. Παρατηρούμε πως ένα σημαντικό μέρος της ηχητικής ενέργειας περιορίζεται κατά τη διάδοσή σε ένα στρώμα νερού πάχους περίπου 100m (όσο πάχος έχει το στρώμα ανάμιξης). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός επιφανειακού ηχητικού καναλιού, στο οποίο η ένταση του ηχητικού σήματος θα είναι αυξημένη. Δηλαδή, το ηχητικό σήμα μπορεί να διανύσει μεγάλη απόσταση πριν αποσβεσθεί. Το επιφανειακό ηχητικό κανάλι αποτελεί μια από τις χαρακτηριστικές δομές του ακουστικού πεδίου στη θάλασσα.

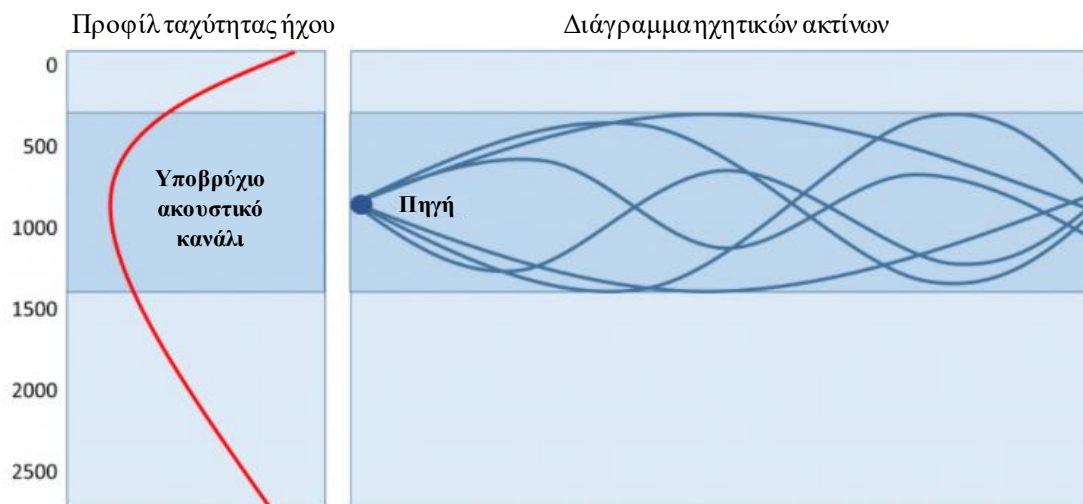


**Σχήμα 1.8:** Διάγραμμα ηχητικών ακτίνων που εκπέμπει σημειακή πηγή σε βάθος 10m

Επίσης, στο ίδιο σχήμα, παρατηρείται η ύπαρξη ενός άλλου χαρακτηριστικού φαινομένου κατά την διάδοση του ήχου στη θάλασσα, όπως η εμφάνιση ζώνης σκιάς. Λόγω της καμπύλωσης των ηχητικών ακτίνων εξαιτίας της διάθλασης, οι ακτίνες δεν διαδίδονται σε μια μεγάλη περιοχή, η οποία περιβάλλεται από την κύρια θερμοκλινη ζώνη.

Στο Σχήμα 1.9, η ηχητική πηγή βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος (περίπου 800m κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια) και εκπέμπει ηχητικά σήματα υπό διαφορετικές γωνίες εκπομπής. Το βάθος, στο οποίο βρίσκεται η πηγή αντιστοιχεί στη θέση του ολικού

ελαχίστου της ταχύτητας του ήχου, όπως φαίνεται και από το προφίλ της ταχύτητας του ήχου (αριστερά). Παρατηρούμε πως ένα σημαντικό τμήμα της ηχητικής ενέργειας από την πηγή περιορίζεται σε ένα στρώμα νερού που αποτελεί το υποβρύχιο ακουστικό κανάλι. Αυτό συνεπάγεται την αυξημένη ένταση του ηχητικού σήματος και την διάδοσή του σε μεγάλη απόσταση μέχρι την απόσβεσή του.



**Σχήμα 1.9:** Διάγραμμα ηχητικών ακτίνων που εκπέμπει σημειακή πηγή σε βάθος 800m

Αυτές οι τρεις χαρακτηριστικές δομές του ακουστικού πεδίου στο θαλάσσιο περιβάλλον αφορούν κυρίως το βαθύ νερό. Όσο το βάθος του νερού ελαττώνεται, η επίδραση του θαλάσσιου πυθμένα στη διάδοση του ήχου γίνεται όλο και πιο σημαντική. Δηλαδή, στη ζώνη της υφαλοκρηπίδας, η μορφή της διάδοσης του ήχου περιλαμβάνει πολλές ανακλάσεις των ηχητικών ακτίνων από την ελεύθερη επιφάνεια και τον πυθμένα.

## 2. Η ακουστική εξίσωση για τη πρόβλεψη ακουστικής διάδοσης στη θάλασσα

Η ακουστική εξίσωση προκύπτει εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Euler, διατήρησης της μάζας και ορμής για την περίπτωση ελαφρά συμπιεστού ρευστού, όπως το νερό, σε κατάσταση σταθερής θερμοκρασίας του μέσου. Θεωρούμε δύο καταστάσεις: (i) τη κατάσταση υποβάθρου πριν τη διέγερση και διάδοση της ακουστικής διαταραχής (χάριν απλότητας το θεωρούμε στάσιμο μέσο) και (ii) τη κατάσταση που αντιστοιχεί στο συνολικό πεδίο και χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τα συνολικά μεγέθη πίεσης, πυκνότητας και ταχύτητας  $p_T, \rho_T, \mathbf{u}_T$  και αντίστοιχα για τα μεγέθη υποβάθρου  $p_0, \rho_0, \mathbf{u}_0$  και τα μεγέθη ακουστικής διαταραχής  $p, \rho, \mathbf{u}$ . Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση έχουμε

$$p_T = p_0 + p, \quad \rho_T = \rho_0 + \rho \quad \text{και} \quad \mathbf{u}_T = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

Παρόμοιες σχέσεις μπορούμε να έχουμε και για άλλα φυσικά μεγέθη. Οι εξισώσεις Euler ικανοποιούνται για τα συνολικά μεγέθη και για τα μεγέθη υποβάθρου. Γράφοντας τις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής για τις δύο καταστάσεις, και αφαιρώντας αμοιβαία κατά μέλη, λαμβάνουμε προσεγγιστικές εξισώσεις για τα ακουστικά μεγέθη θεωρώντας ότι το ακουστικό πεδίο είναι πολύ μικρό και άρα οι εμπλεκόμενοι μη γραμμικοί όροι μπορούν να θεωρηθούν μικροί ανώτερης τάξης και κατά συνέπεια μπορούν να παραληφθούν προσεγγιστικά. Με τη διαδικασία αυτή προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις ως προς τα ακουστικά μεγέθη

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p \quad (2.2)$$

Στη συνέχεια, παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο τη πρώτη εξίσωση και λαμβάνοντας την κλίση της δεύτερης παραπάνω εξίσωσης προκύπτουν

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \nabla \left( \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \nabla^2 p = 0 \quad (2.3)$$

Χρησιμοποιώντας, ακολούθως, τη καταστατική εξίσωση στην απλή της εκδοχή, δηλαδή

$$p = c^2 \rho,$$

όπου  $c$  η ταχύτητα διάδοσης της ακουστικής διαταραχής στο μέσο, καταλήγουμε στη κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p = 0, \quad (2.4)$$

και τις αντίστοιχες εξισώσεις για τα υπόλοιπα μεγέθη. Η εξίσωση (2.4) είναι γνωστή ως εξίσωση D'Alembert και οι λύσεις που παράγονται σε ομογενές μέσο χαρακτηρίζονται από απλουστευμένη κινηματική.

Η εξίσωση μετατρέπεται από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας θεωρώντας για το (οποιοδήποτε) πεδιακό μέγεθος ότι αναπαρίσταται ως αρμονική συνάρτηση του χρόνου, για μια ορισμένη συχνότητα  $\omega$  (μονοχρωματικό κύμα). Έτσι, η κυματική διαταραχή μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$p(\mathbf{x}, t) = p_c(\mathbf{x}) \cdot \cos\omega t + p_s(\mathbf{x}) \cdot \sin\omega t = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\} \quad (2.5)$$

όπου

$$\overset{\circ}{p}(\mathbf{x}) = p_c(\mathbf{x}) + jp_s(\mathbf{x})$$

είναι το μιγαδικό πλάτος (ή μιγαδικό πεδίο) του χρονικά αρμονικού κύματος. Η χρήση του μιγαδικού αυτού πλάτους δεν έχει κάποια ιδιαίτερη φυσική σημασία, αλλά αποτελεί απλώς ένα βολικό τρόπο μαθηματικού χειρισμού της χρονικά αρμονικής εξάρτησης. Παραγωγίζοντας το πεδιακό μέγεθος  $p$ , αρχικά μια φορά και στη συνέχεια δύο φορές ως προς το χρόνο, θα έχουμε:

$$p_t(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left\{ (-j\omega) \cdot \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\}$$

$$p_{tt}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left\{ (-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\}$$

Επίσης, παραγωγίζοντας δύο φορές τη σχέση (2.5) ως προς τη χωρική μεταβλητή  $\mathbf{x}$ , θα έχουμε:

$$p_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{p}_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\}$$

Αξιοποιώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, η διαφορική εξίσωση (2.4) γράφεται στη μορφή

$$\text{Re} \left\{ (-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\} - c^2 \cdot \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{p}_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\} = 0 \Rightarrow \text{Re} \left\{ \left[ (-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}) - c^2 \cdot \overset{\circ}{p}_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}) \right] \cdot e^{-j\omega t} \right\} = 0$$

Η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη

$$(-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}) - c^2 \cdot \overset{\circ}{p}_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}) = 0$$

Δεδομένου ότι  $|e^{-j\omega t}| = 1$ , ο παράγοντας  $e^{-j\omega t}$  μπορεί να απλοποιηθεί. Οπότε, λαμβάνουμε

$$(-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}) - c^2 \cdot \overset{\circ}{p}_{xx}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}) + \frac{c^2}{\omega^2} \cdot \overset{\circ}{p}_{xx}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \overset{\circ}{p}_{xx}(\mathbf{x}) + \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}) = 0$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί την διαφορική εξίσωση Helmholtz. Διαπιστώνουμε άμεσα ότι είναι μια μερική διαφορική εξίσωση ως προς τη χωρική μεταβλητή  $\mathbf{x}$ , με συντελεστές εξαρτώμενους τόσο από τον αντίστοιχο συντελεστή  $c$  της αρχικής κυματικής εξίσωσης (εξίσωση D' Alembert), όσο και από την κυκλική συχνότητα  $\omega$  της κυματικής διαταραχής. Εναλλακτικά, η εξίσωση Helmholtz μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$\nabla^2 \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}) + k^2 \cdot \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.6)$$

ως προς το μιγαδικό πεδίο  $p(\mathbf{x}, \omega) = \overset{\circ}{p}(x_1, x_2, x_3, \omega)$  στις 3 διαστάσεις, όπου  $k = \omega/c$  είναι ο κυματαριθμός ή κυματική παράμετρος. Σημειώνεται ότι στη συνέχεια, για απλούστευση στην παρουσίαση, παραλείπεται το σύμβολο για το μιγαδικό πλάτος του πεδίου. Με βάση τα ανωτέρω, η κυματική ακουστική εξίσωση στο πεδίο του χρόνου (εξίσωση D' Alembert) έχει μετατραπεί σε μια κυματική εξίσωση στο πεδίο συχνοτήτων (εξίσωση Helmholtz). Αξίζει να σημειώσουμε ακόμη ότι, από μαθηματική άποψη, οι εξισώσεις (2.4) και (2.6) ανήκουν σε διαφορετικές οικογένειες διαφορικών εξισώσεων. Η εξίσωση D' Alembert είναι υπερβολικού τύπου και τα αντίστοιχα προβλήματα διάδοσης ανήκουν στην κατηγορία των προβλημάτων αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών, ενώ η εξίσωση Helmholtz είναι ελλειπτικού τύπου και τα αντίστοιχα προβλήματα διάδοσης ανήκουν στην κατηγορία των προβλημάτων συνοριακών συνθηκών.

## 2.1 Το πρόβλημα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Helmholtz

Η μαθηματική μοντελοποίηση των κυματικών προβλημάτων διαφοροποιείται ανάλογα με το είδος της χρονικής εξάρτησης της διαταραχής. Στην περίπτωση των χρονικώς αρμονικών φαινομένων που μελετάμε, η χρονική εξάρτηση είναι τελείως συγκεκριμένης μορφής και απαλείφεται από τα αντίστοιχα μαθηματικά προβλήματα (όπως αποδείξαμε προηγουμένως).

Καθώς τα κυματικά φαινόμενα εκτείνονται στο χώρο, δέχονται την επίδραση των συνοριακών επιφανειών, οι οποίες περιορίζουν το χωρικό πεδίο καθώς και των διεπιφανειών, οι οποίες προσδιορίζουν ασυνέχειες παραμέτρων μέσα στο πεδίο. Κατά συνέπεια, τα μαθηματικά προβλήματα, μέσω των οποίων μοντελοποιείται η κυματική κίνηση, είναι προβλήματα συνοριακών τιμών (boundary value problems), στα οποία (ενδεχομένως) υπεισέρχονται και συνθήκες συναρμογής (matching conditions) στις διεπιφάνειες.

Θεωρούμε μια σημειακή πηγή, η οποία εκπέμπει ηχητικά κύματα στη θάλασσα με γωνιακή συχνότητα  $\omega$  και ταχύτητα διάδοσης  $c$ . Η διάδοση των κυμάτων περιγράφεται από την εξίσωση Helmholtz

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \cdot p(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad (2.7)$$

όπου  $p$  η ηχητική πίεση.

Τα ηχητικά κύματα διαδίδονται εντός δύο φυσικών συνόρων, της ελεύθερης επιφάνειας και του θαλάσσιου πυθμένα. Εξαιτίας αυτών των δύο συνόρων εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες στη μαθηματική μοντελοποίηση των κυματικών προβλημάτων.

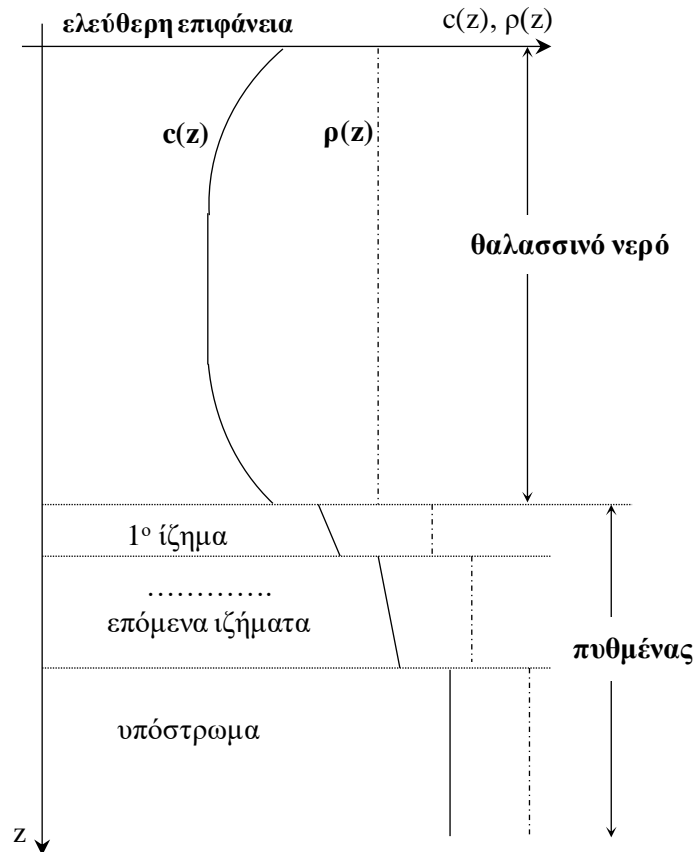
### Συνοριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας

Η ελεύθερη επιφάνεια της θάλασσας, όπως αναφέρθηκε και στο 1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, αποτελεί ένα φυσικό σύνορο (παλαβό σύνορο, όπως διαφορετικά αποκαλείται) με πολύ καλές ανακλαστικές ιδιότητες. Τα υδροακουστικά κύματα «χτυπούν» την ελεύθερη επιφάνεια και ανακλώνται σχεδόν πλήρως, είτε παρουσιάζονται κυματισμοί είτε όχι. Η συνοριακή συνθήκη που εφαρμόζεται στην επίλυση κυματικών προβλημάτων (σε πεδίο με κυλινδρική συμμετρία) είναι

$$p(r, z = 0) = 0 \quad (2.8)$$

δηλαδή η ηχητική πίεση είναι μηδέν στην ελεύθερη επιφάνεια.

### Συνοριακές συνθήκες θαλάσσιου πυθμένα



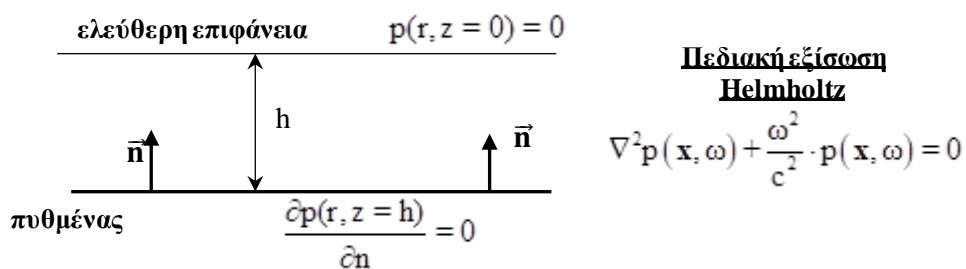
**Σχήμα 2.1:** Πολυστρωματοποιημένο ακουστικό μοντέλο θαλάσσιου περιβάλλοντος

Ο θαλάσσιος πυθμένας είναι το δεύτερο φυσικό σύνορο στο θαλάσσιο περιβάλλον. Η κλίση του μεταβάλλεται ανάλογα το βάθος του νερού. Αποτελείται από διαφορετικά στρώματα ιζημάτων, οπότε η μοντελοποίηση του θα πρέπει να γίνει λαμβάνοντας υπόψη αυτή τη διαστρωμάτωση. Με αυτό τον τρόπο, γνωρίζοντας τις ακουστικές ιδιότητες του κάθε ιζήματος, μπορούμε να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την διάδοση των κυμάτων μέσα στο θαλάσσιο πυθμένα. Στο Σχήμα 2.1 παρουσιάζεται ένα πολυστρωματοποιημένο ακουστικό μοντέλο του θαλάσσιου περιβάλλοντος, όπου έχει καταγραφεί η πυκνότητα του μέσου και η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.

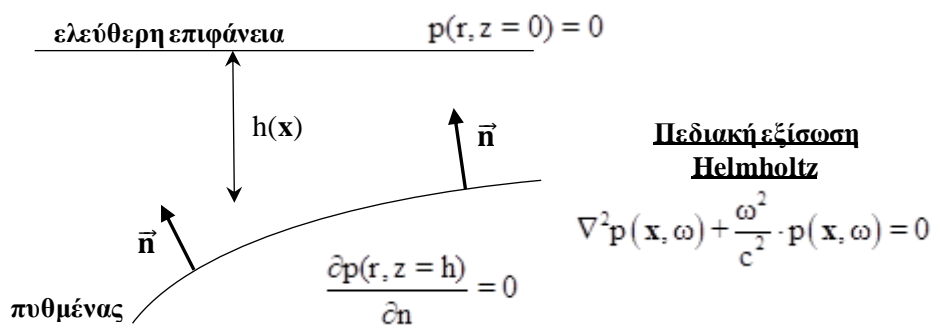
Αν και ο θαλάσσιος πυθμένας είναι διαπερατό υλικό, στην εργασία μας θα τον προσεγγίσουμε ως ένα ακουστικά σκληρό και πλήρως ανακλαστικό σύνορο. Δηλαδή, θεωρούμε την ιδανική περίπτωση όπου το σύνορο συμπεριφέρεται σαν ένας αδιαπέραστος σκεδαστής από το κυματικό πεδίο. Η τελευταία υπόθεση μοντελοποιείται από τη συνοριακή συνθήκη (σε πεδίο με κυλινδρική συμμετρία) της μορφής

$$\frac{\partial p(r, z = h)}{\partial n} = 0, \quad (2.9)$$

όπου  $\mathbf{n}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στον πυθμένα-σκεδαστή. Η συνθήκη αυτή ονομάζεται συνθήκη Neumann και είναι μια συνοριακή συνθήκη που εφαρμόζεται όταν ο πυθμένας προσεγγίζεται ως ένα οριζόντιο σκληρό τείχος σε βάθος  $h$ . Μας παρέχει γνώση για την μερική παράγωγο του πεδίου επί της συνοριακής επιφάνειας (κατά την κάθετη διεύθυνση στο σύνορο). Το Σχήμα 2.2 απεικονίζει τα σύνορα του θαλάσσιου κυματοδηγού και τις συνοριακές συνθήκες που εφαρμόζονται.



(α) ομογενές περιβάλλον



(β) ανομοιογενές περιβάλλον

**Σχήμα 2.2:** Απεικόνιση θαλάσσιου κυματοδηγού με συνοριακές συνθήκες σε (α) ομογενές περιβάλλον (σταθερής βαθυμετρίας) και (β) σε ανομοιογενές περιβάλλον (μεταβαλλόμενη βαθυμετρίας)

Στην πρώτη εκδοχή του σχήματος φαίνεται η περίπτωση του ομογενούς περιβάλλοντος, όπου τα σύνορα του θαλάσσιου κυματοδηγού είναι οριζόντια. Στη δεύτερη εκδοχή του σχήματος παρουσιάζεται η περίπτωση του ανομοιογενούς περιβάλλοντος, όπου το σύνορο της ελεύθερης επιφάνειας είναι οριζόντιο ενώ το σύνορο του πυθμένα είναι καμπύλο.

## 2.2 Η υψίσυχη ασυμπτωτική προσέγγιση της λύσης

Στόχος αυτού του εδαφίου είναι να αξιοποιήσουμε την κυματική εξίσωση Helmholtz

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \cdot p(\mathbf{x}, \omega) = 0,$$

η οποία είναι μια μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ) και να παράγουμε ένα σετ εξισώσεων ακτίνων, η λύση των οποίων θα είναι πιο εύκολη και θα μας πληροφορεί για την διάδοση του ακουστικού πεδίου στο θαλάσσιο περιβάλλον. Για αυτό το σκοπό, θεωρούμε ως λύση της εξίσωσης Helmholtz με τη μορφή

$$p(\mathbf{x}) = e^{i\omega\tau(\mathbf{x})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j(\mathbf{x})}{(i\omega)^j} \quad (2.10)$$

όπου  $\tau(\mathbf{x})$  η φάση της ακτίνας και  $A(\mathbf{x})$  το πλάτος της ακτίνας. Η λύση αυτής της μορφής καλείται σειρά ακτίνας. Είναι μια αποκλίνουσα σειρά αλλά σε κάποιες περιπτώσεις αποτελεί ασυμπτωματική προσέγγιση της ακριβούς λύσης. Παραγωγίζοντας δυο φορές ως προς τη χωρική μεταβλητή  $\mathbf{x}$ , θα λάβουμε:

$$p_{\mathbf{xx}} = e^{i\omega\tau} \left\{ \left[ -\omega^2 (\tau_{\mathbf{x}})^2 + i\omega\tau_{\mathbf{xx}} \right] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + 2i\omega\tau_{\mathbf{x}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j,\mathbf{x}}}{(i\omega)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j,\mathbf{xx}}}{(i\omega)^j} \right\} \quad (2.11)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.10) και (2.11) στη εξίσωση Helmholtz (2.7), καταλήγουμε σε μια άπειρη ακολουθία εξισώσεων για τις συναρτήσεις  $\tau(\mathbf{x})$  και  $A(\mathbf{x})$ , συλλέγοντας τους όρους όμοιας τάξης της γωνιακής συχνότητας  $\omega$ . Συγκεκριμένα:

$$\text{Όροι } 2^{\text{ης}} \text{ τάξης } (\omega^2) \quad : \quad |\nabla\tau|^2 = c^{-2}(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

$$\text{Όροι } 1^{\text{ης}} \text{ τάξης } (\omega) \quad : \quad 2\nabla\tau \cdot \nabla A_0 + (\nabla^2\tau)A_0 = 0 \quad (2.13)$$

$$\text{Όροι } (1-j)^{\text{ης}} \text{ τάξης } (\omega^{1-j}) \quad : \quad 2\nabla\tau \cdot \nabla A_j + (\nabla^2\tau)A_j = -\nabla^2 A_{j-1}, j=1,2,\dots \quad (2.14)$$

Η εξίσωση (2.12) που προκύπτει από τους όρους  $2^{\text{ης}}$  τάξης της γωνιακής συχνότητας  $\omega$  είναι γνωστή ως εξίσωση της εικόνας και αφορά την συνάρτηση της φάσης  $\tau(\mathbf{x})$ . Οι υπόλοιπες εξισώσεις (2.13) και (2.14) είναι γνωστές ως εξισώσεις μεταφοράς και αφορούν την συνάρτηση του πλάτους  $A_j(\mathbf{x})$ .

Σε αυτό το στάδιο, έχουμε μετατρέψει μια απλή γραμμική μερική διαφορική εξίσωση (εξίσωση Helmholtz) σε μια μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση (εξίσωση



εικόνας) και μια άπειρη σειρά γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (εξισώσεις μεταφοράς). Στη συνέχεια, κρατάμε την εξίσωση μεταφοράς που προκύπτει από τους όρους 1<sup>ης</sup> τάξης της γωνιακής συχνότητας  $\omega$  (εξίσωση 2.13), η οποία αφορά την υψίσυχη προσέγγιση. Ακολούθως, θα δείξουμε ότι η λύση της εξίσωσης της εικόνας και της πρώτης εξίσωσης μεταφοράς είναι μια σχετικά εύκολη διαδικασία.

Οι αποδείξεις της εξίσωσης της εικόνας και της εξίσωσης μεταφοράς παρουσιάζονται εκτενέστερα στα Παραρτήματα Α και Β, αντίστοιχα.

### 2.3 Παραγωγή της εξίσωσης της εικόνας από το συναρτησιακό του στάσιμου χρόνου

Για τον προσδιορισμό των ακτίνων διάδοσης μιας κυματικής διαταραχής είναι απαραίτητη η διατύπωση και η αξιοποίηση της Αρχής του Στάσιμου Χρόνου ή Αρχή των Ήρωνος-Fermat. Η Αρχή αυτή αποτελεί την πρώτη μεταβολική αρχή της Φυσικής και ισχύει για κάθε περίπτωση κυματικής κίνησης, όπου ορίζεται η ακτίνα διάδοσης του κύματος. Αυτό συμβαίνει όταν το μήκος κύματος είναι μικρό (ή ισοδύναμα η συχνότητα υψηλή) σε σχέση με τις χαρακτηριστικές διαστάσεις των ανομοιογενειών του πεδίου. Δεν απαιτείται λεπτομερής γνώση των φυσικών νόμων που διέπουν το εκάστοτε εξεταζόμενο κυματικό φαινόμενο αλλά μόνο η γνώση της τοπικής ταχύτητας διάδοσης της κυματικής διαταραχής. Στη σύγχρονη μορφή της, η Αρχή του Στάσιμου Χρόνου διατυπώνεται με τη γλώσσα του λογισμού των μεταβολών, οδηγώντας στην παραγωγή διαφορικών εξισώσεων, μέσω των οποίων μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ακτίνες διάδοσης.

Η Αρχή του Στάσιμου Χρόνου αποτελεί μια γενίκευση της Αρχής του Ελαχίστου Χρόνου, η οποία διατυπώνεται συνοπτικά ως εξής:

*«Τα κύματα ακολουθούν διαδρομές ελαχίστου χρόνου»*

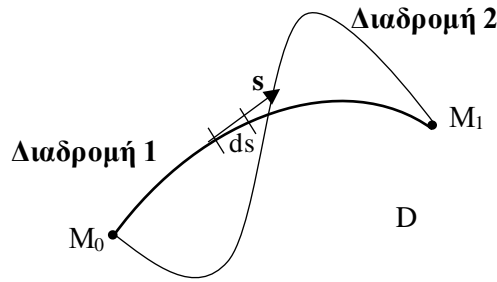
Η μόνη προϋπόθεση που πρέπει να ληφθεί είναι ότι η συνθήκη ελαχιστοποίησης ισχύει ως προς γειτονικές μεταξύ τους διαδρομές, δηλαδή διαδρομές που περνούν από τα ίδια μέσα και παρουσιάζουν τον ίδιο αριθμό ανακλάσεων και διαθλάσεων.

#### **Φραστική διατύπωση της Αρχής του Στάσιμου Χρόνου σε ανομοιογενή μέσα**

Έστω  $D$  μια περιοχή του χώρου στην οποία διαδίδεται μια κυματική διαταραχή. Το μέσο μπορεί να είναι ομογενές ή ανομοιογενές με συνεχώς ή ασυνεχώς κατανομημένες παραμέτρους. Η μοναδική παράμετρος που μας ενδιαφέρει είναι η τοπική ταχύτητα διάδοσης της κυματικής διαταραχής  $c = c(M)$ , σε κάθε σημείο  $M = (x_1, x_2, x_3)$  του χώρου  $D$ .

Αν θεωρήσουμε ότι η κυματική διαταραχή ξεκινάει ή περνάει από το σημείο  $M_0$  και φθάνει στο σημείο  $M_1$  (Σχήμα 2.3), τότε η Αρχή του Στάσιμου Χρόνου διατυπώνεται ως εξής:

*«Η κυματική διαταραχή οδεύει από το σημείο  $M_0$  στο σημείο  $M_1$  μέσω εκείνου του δρόμου που καθιστά στάσιμο το χρόνο διάδοσης»*



**Σχήμα 2.3:** Διαδρομές που συνδέουν τα σημεία \$M\_0\$ και \$M\_1\$

Η στασιμότητα εξετάζεται ως προς γειτονικές μεταξύ τους διαδρομές. Φυσικά, μπορεί να υπάρχουν αρκετές ακτίνες που ικανοποιούν την Αρχή του Στάσιμου Χρόνου.

### Μαθηματική διατύπωση της Αρχής του Στάσιμου Χρόνου σε ανομοιογενή μέσα

Για να μαθηματικοποιήσουμε την παραπάνω Αρχή, αρχικά, θα πρέπει να εκφράσουμε μαθηματικά την ποσότητα που πρέπει να στασιμοποιηθεί, δηλαδή το χρόνο διάδοσης της κυματικής διαταραχής.

Έστω \$\gamma\$ μια οποιαδήποτε καμπύλη που συνδέει τα σημεία \$M\_0\$ και \$M\_1\$. Αν \$ds\$ είναι το στοιχειώδες τμήμα (μήκος τόξου) επί της \$\gamma\$ και \$dt\$ ο χρόνος στον οποίο η διαταραχή διατρέχει το \$ds\$, τότε θα ισχύει

$$dt = ds/c(M)$$

Ο χρόνος που απαιτείται ώστε η κυματική διαταραχή να διαδοθεί από το σημείο \$M\_0\$ μέχρι το σημείο \$M\_1\$, υπολογίζεται αθροίζοντας τους χρόνους \$dt\$, δηλαδή ολοκληρώνοντας κατά μήκος της καμπύλης \$\gamma\$:

$$\tau(\gamma) = \int_{M_0}^{M_1} \frac{ds}{c(M)} \quad (2.15)$$

Αν θεωρήσουμε διάφορες καμπύλες που συνδέουν τα σημεία \$M\_0\$ και \$M\_1\$, το παραπάνω ολοκλήρωμα θα μας δώσει διαφορετικές τιμές για το χρόνο διάδοσης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι έχουμε διαφορετικό μήκος διαδρομής κάθε φορά αλλά και η ταχύτητα διάδοσης παίρνει διαφορετική τιμή για κάθε διαδρομή.

Η σχέση (2.15) λέμε ότι ορίζει ένα συναρτησιακό, το οποίο ονομάζεται συναρτησιακό του χρόνου ή συναρτησιακό του Fermat.

Το πεδίο ορισμού του συναρτησιακού του χρόνου είναι ο χώρος \$D\$, μέσα στον οποίο εκδηλώνεται η κυματική διαταραχή, με ακραία σημεία (αρχή και τέλος) τα \$M\_0\$ και \$M\_1\$. Επίσης, επειδή το συναρτησιακό \$\tau(\gamma)\$ εξαρτάται από το πεδίο ταχύτητας \$c(\mathbf{x})\$, για να είναι καλά ορισμένο πρέπει να καθορίσουμε τις συνθήκες λειότητας για το πεδίο \$c(\mathbf{x})\$. Αν θεωρήσουμε το πεδίο ταχύτητας \$c(\mathbf{x})\$ λείο, τότε οι καμπύλες δεν προσπίπτουν σε καμία επιφάνεια ασυνέχειας (δεν παρουσιάζονται διαθλάσεις-ανακλάσεις).

Ορίζοντας αυστηρά το συναρτησιακό του χρόνου  $\tau(\gamma)$ , μπορούμε να συνεχίσουμε με την προσπάθεια κατανόησης της έννοιας της στασιμότητας του  $\tau(\gamma)$ , δηλαδή να εκφράσουμε μαθηματικά την Αρχή του Στάσιμου Χρόνου.

Θεωρούμε ότι η καμπύλη  $\gamma$  περιγράφεται με τη βοήθεια πεπερασμένου πλήθους παραμέτρων, π.χ.  $\alpha_n$  ( $n=1,2,3,\dots,N$ ). Τότε, η ποσότητα  $\tau(\gamma)$  μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μια συνάρτηση  $\varphi = \varphi(\mathbf{a}) = \tau(\gamma(\mathbf{a}))$ , με  $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ . Υπό την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση  $\varphi$  είναι παραγωγίσιμη, προκύπτει ότι η συνάρτηση  $\varphi$  είναι στάσιμη στη θέση  $\mathbf{a}$  αν και μόνο αν

$$\nabla\varphi(\mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\varphi(\mathbf{a})}{\partial\alpha_n} = 0, n = 1, 2, \dots, N \quad (2.16)$$

Η σχέση (2.16) αποτελεί την μαθηματική έκφραση της Αρχής του Στάσιμου Χρόνου. Δηλαδή για να μπορέσουμε να ποσοτικοποιήσουμε τις μεταβολές του  $\tau(\gamma)$ , εισάγαμε μια κατάλληλη μαθηματική δομή στο σύνολο των καμπυλών. Αυτή είναι η έννοια της παραγώγου (κλίσης, gradient) του συναρτησιακού  $\tau(\gamma)$  ως προς  $\gamma$ .

Η στασιμότητα εξετάζεται, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ως προς γειτονικές μεταξύ των καμπυλών, διαδρομές. Γειτονικές καμπύλες ονομάζονται αυτές που παρουσιάζουν τον ίδιο αριθμό ασυνεχειών (διαθλάσεων-ανακλάσεων) και οι αποστάσεις των αντίστοιχων σημείων τους είναι πολύ μικρές.

Κάθε καμπύλη  $\gamma$  μπορεί να περιγραφεί παραμετρικά από μια εξίσωση της μορφής  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma)$  ή ισοδυνάμως,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\sigma) \\ x_2 &= x_2(\sigma) , \\ x_3 &= x_3(\sigma) \end{aligned} \quad (2.17)$$

όπου η παράμετρος  $\sigma \in [\sigma_0, \sigma_1]$ ,  $M_0 = \mathbf{x}(\sigma_0)$  και  $M_1 = \mathbf{x}(\sigma_1)$ . Το στοιχειώδες μήκος  $ds$  της καμπύλης δίνεται από τη σχέση

$$ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2} = \sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_3)^2} d\sigma, \quad (2.18)$$

όπου  $\dot{x}_i = dx_i/d\sigma$ ,  $i = 1,2,3$ . Δεδομένου ότι  $c(M) = c(x_1, x_2, x_3)$ , το συναρτησιακό του χρόνου (2.15) γράφεται, με τη βοήθεια της (2.18), στη μορφή:

$$\tau(\gamma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{\|\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\|}{c(\mathbf{x}(\sigma))} d\sigma = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{\sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_3)^2}}{c(x_1, x_2, x_3)} d\sigma, \quad (2.19\alpha)$$

ή

$$\tau(\gamma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} L(x_1(\sigma), \dot{x}_1(\sigma)) d\sigma = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) d\sigma, \quad (2.19\beta)$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση, δηλαδή η συνάρτηση

$$L(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma)) = \frac{\|\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\|}{c(\mathbf{x}(\sigma))} = \frac{\sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_3)^2}}{c(x_1, x_2, x_3)}, \quad (2.20)$$

ονομάζεται Lagrangian συνάρτηση.

Οπότε, με τη βοήθεια παραμετρικών εξισώσεων μετατρέψαμε ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε ένα συνηθισμένο ολοκλήρωμα στο διάστημα  $[\sigma_0, \sigma_1]$ .

### **Αναλλοιωτότητα του συναρτησιακού του χρόνου ως προς την παραμετροποίηση των ακτίνων**

Η παραμετροποίηση (2.17) των εξισώσεων των ακτίνων είναι αυθαίρετη. Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε άλλη επιτρεπτή παράμετρος  $u$  αντί της  $\sigma$ , η οποία θα οδηγούσε σε παραμετρικές εξισώσεις της ίδιας καμπύλης, της μορφής:

$$x_i = x_i(u), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.21)$$

όπου η παράμετρος  $u \in [u_0, u_1]$ ,  $M_0 = \mathbf{x}(u_0)$  και  $M_1 = \mathbf{x}(u_1)$ .

Υπενθυμίζουμε ότι δύο επιτρεπτές παραμετροποιήσεις της ίδιας καμπύλης, μέσω των παραμέτρων  $\sigma$  και  $u$ , οφείλουν να ικανοποιούν την συνθήκη

*Υπάρχει συνάρτηση  $\sigma = \varphi(u)$ , τέτοια ώστε  $\sigma_0 = \varphi(u_0)$ ,  $\sigma_1 = \varphi(u_1)$ , και  $\varphi'(u) > 0$  για κάθε  $u \in [u_0, u_1]$ .*

Η συνθήκη αναλλοιωτότητας του συναρτησιακού του χρόνου κάτω από επιτρεπτές αλλαγές της παραμετροποίησης των εξισώσεων των ακτίνων διατυπώνεται συνοπτικά στη μορφή

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} L(x_i(\sigma), \dot{x}_i(\sigma)) d\sigma = \int_{u_0}^{u_1} L(\tilde{x}_i(u), \dot{\tilde{x}}_i(u)) du \quad (2.22)$$

Η συνθήκη αναλλοιωτότητας (2.22) εξαρτάται από τις ιδιότητες της Lagrangian συνάρτησης. Άρα, για να εξασφαλίζεται η συνθήκη θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα

$$L(x_i, \alpha \dot{x}_i) = \alpha L(x_i, \dot{x}_i), \quad \text{για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.23)$$

δηλαδή, η συνάρτηση  $L$  είναι ομογενής πρώτης τάξης ως προς  $\dot{x}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Η παραπάνω ιδιότητα αποτελεί το Θεώρημα Weierstrass.

### **Πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού του χρόνου όταν $c(\mathbf{x})$ είναι λείο.**

#### **Συνθήκη στασιμότητας.**

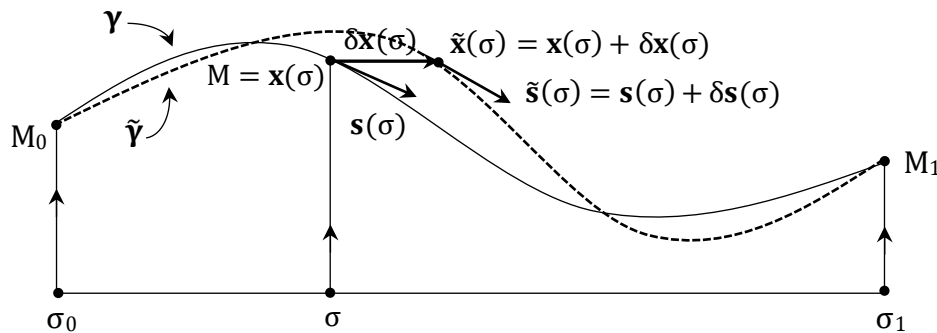
Στο εδάφιο αυτό θα υπολογίσουμε τη μεταβολή του συναρτησιακού του χρόνου,  $\delta\tau(\gamma) = \tau(\tilde{\gamma}) - \tau(\gamma)$ , που προκύπτει από τη μεταβολή  $\gamma \rightarrow \tilde{\gamma}$ , όταν οι δύο καμπύλες  $\gamma: \mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma)$  και  $\tilde{\gamma}: \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\sigma)$  είναι λείες γειτονικές, δηλαδή οι παράγωγοι  $\dot{\mathbf{x}}(\sigma)$  και  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\sigma)$  ορίζονται για κάθε  $\sigma \in [\sigma_0, \sigma_1]$  και ισχύει  $\|\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\| \cdot \|\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\sigma)\| \neq 0$ .

Επίσης, υποθέτουμε ότι και το πεδίο  $c(\mathbf{x}) = c(x_1, x_2, x_3)$  είναι λείο, τουλάχιστον στην περιοχή του χώρου, από όπου διέρχονται οι καμπύλες  $\gamma$  και  $\tilde{\gamma}$ , δηλαδή σε μια γειτονιά της καμπύλης  $\gamma$ .

Η παραμετροποίηση των δύο καμπυλών μπορεί να γίνει με την ίδια παράμετρο  $\sigma$ , στο διάστημα  $[\sigma_0, \sigma_1]$ , εφ' όσον υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων τους. Τότε έχουμε

$$\tilde{\mathbf{x}}(\sigma) = \mathbf{x}(\sigma) + \delta\mathbf{x}(\sigma) \quad \text{και} \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\sigma) = \dot{\mathbf{x}}(\sigma) + \delta\dot{\mathbf{x}}(\sigma), \quad (2.24)$$

όπου οι ποσότητες  $\delta\mathbf{x}(\sigma)$  και  $\delta\dot{\mathbf{x}}(\sigma)$  μπορούν να θεωρηθούν ως απειροστά πρώτης τάξης, εφ' όσον οι καμπύλες  $\gamma$  και  $\tilde{\gamma}$  είναι γειτονικές. Στο Σχήμα 2.4 είναι σχεδιασμένες οι καμπύλες  $\gamma$  και  $\tilde{\gamma}$  εντός των σημείων  $M_0$  και  $M_1$ .



**Σχήμα 2.4:** Λείες γειτονικές διαδρομές  $\gamma$  και  $\tilde{\gamma}$  που συνδέουν τα σημεία  $M_0$  και  $M_1$

Έστω  $L$  η Lagrangian που αντιστοιχεί στην καμπύλη  $\gamma$  και  $\tilde{L}$  η Lagrangian που αντιστοιχεί στην καμπύλη  $\tilde{\gamma}$ , τότε

$$\tilde{L} = L(\tilde{\mathbf{x}}(\sigma), \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\sigma)) = L(\mathbf{x}(\sigma) + \delta\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma) + \delta\dot{\mathbf{x}}(\sigma)) \quad (2.25)$$

Υποθέτοντας ότι η  $L$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως προς τις έξι μεταβλητές της  $x_i(\sigma), \dot{x}_i(\sigma), i=1,2,3$  και εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα Taylor στην  $L(\mathbf{x}(\sigma) + \delta\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma) + \delta\dot{\mathbf{x}}(\sigma))$ , γύρω από το σημείο  $(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma))$ , παίρνουμε:

$$\tilde{L} = L(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma)) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma))}{\partial x_i} \cdot \delta x_i(\sigma) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma))}{\partial \dot{x}_i} \cdot \delta \dot{x}_i(\sigma) + O(\|\delta\mathbf{x}(\sigma)\|^2, \|\delta\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\|^2)$$

Άρα, η μεταβολή του συναρτησιακού του χρόνου που αντιστοιχεί στη μεταβολή  $\gamma \rightarrow \tilde{\gamma}$

$$\delta\tau(\gamma) = \tau(\tilde{\gamma}) - \tau(\gamma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} (\tilde{L} - L) d\sigma$$

εκφράζεται ως εξής:

$$\delta\tau(\gamma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_i} \cdot \delta x_i(\sigma) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \cdot \delta \dot{x}_i(\sigma) \right\} d\sigma + \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} O\left(\|\delta \mathbf{x}(\sigma)\|^2, \|\delta \dot{\mathbf{x}}(\sigma)\|^2\right) d\sigma \quad (2.26)$$

Ο δεύτερος όρος μέσα στην αγκύλη του πρώτου ολοκληρώματος μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \cdot \delta \dot{x}_i(\sigma) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \cdot \delta \left( \frac{dx_i(\sigma)}{d\sigma} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \cdot \frac{d}{d\sigma} (\delta x_i)$$

Αξιοποιώντας τον τελευταίο μετασχηματισμό και κάνοντας παραγοντική ολοκλήρωση στο δεύτερο όρο του πρώτου ολοκληρώματος της (2.26), οδηγούμαστε στη σχέση

$$\delta\tau(\gamma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \left[ \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \cdot \delta x_i(\sigma) \right] d\sigma + \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i(\sigma) \right]_{\sigma_0}^{\sigma_1} + \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} O\left(\|\delta \mathbf{x}(\sigma)\|^2, \|\delta \dot{\mathbf{x}}(\sigma)\|^2\right) d\sigma$$

Όμως, τα σημεία  $M_0$  και  $M_1$  της καμπύλης  $\gamma$  δεν μεταβάλλονται. Άρα

$$\delta x_i(\sigma_0) = \delta x_i(\sigma_1) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

δηλαδή,

$$\delta\tau(\gamma) = \tau(\tilde{\gamma}) - \tau(\gamma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \left[ \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \cdot \delta x_i(\sigma) \right] d\sigma + \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} O\left(\|\delta \mathbf{x}(\sigma)\|^2, \|\delta \dot{\mathbf{x}}(\sigma)\|^2\right) d\sigma$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης είναι απειροστό δευτέρας τάξης ως προς τη μεταβολή  $\gamma \rightarrow \tilde{\gamma}$  της καμπύλης  $\gamma$ .

Κατά συνέπεια, η συνθήκη στασιμότητας για το συναρτησιακό του χρόνου  $\tau(\gamma)$  παίρνει την μορφή

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \left[ \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \cdot \delta x_i(\sigma) \right] d\sigma = 0, \quad (2.27)$$

η οποία ισοδυναμεί με τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma))}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma))}{\partial x_i} = 0, \quad \sigma \in [\sigma_0, \sigma_1], \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.28)$$

Οι εξισώσεις (2.28) ονομάζονται εξισώσεις Euler-Lagrange του συναρτησιακού (2.15) και αποτελούν την κατάλληλη γενίκευση της συνθήκης στασιμότητας (2.16) στην περίπτωση του συναρτησιακού  $\tau(\gamma)$ .

Οι διαφορικές εξισώσεις (2.28) προέκυψαν υπό την προϋπόθεση ότι

$$\mathbf{x}(\sigma_0) = M_0 \quad \text{και} \quad \mathbf{x}(\sigma_1) = M_1 \quad (2.29)$$

όπου  $M_0, M_1$  είναι δύο καθορισμένα σημεία του χώρου  $D$ . Οι σχέσεις (2.28) και (2.29) αποτελούν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών και η λύση του προβλήματος αυτού ορίζει την ακτίνα που συνδέει το σημείο  $M_0$  με το σημείο  $M_1$  (ιδιοακτίνα, eigenray). Στην

περίπτωση που έχουμε περισσότερες από μια λύσεις σημαίνει πως η κυματική διαταραχή οδεύει από το σημείο  $M_0$  στο σημείο  $M_1$  μέσω πολλαπλών διαδρομών, κάτι που συμβαίνει σε αρκετές περιπτώσεις στη φύση και προβλέπεται από την Αρχή του Στάσιμου Χρόνου (ή τη θεωρία ακτίνων).

Για την ευκολότερη επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών, διατυπώνεται και επιλύεται αρχικά ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για τις εξισώσεις ακτίνων (2.28), από το οποίο προσδιορίζουμε τις ακτίνες που ξεκινούν από το αρχικό σημείο  $M_0$ , με προκαθορισμένη κατεύθυνση.

Οι λύσεις των εξισώσεων (2.28) μας δίνουν καμπύλες (ακτίνες), οι οποίες καθιστούν το χρόνο διάδοσης της κυματικής διαταραχής στάσιμο. Λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$L(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma)) = \frac{\sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_3)^2}}{c(x_1, x_2, x_3)} \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma))}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\dot{x}_i(\sigma)}{\sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_3)^2} \cdot c(\mathbf{x}(\sigma))} = \frac{\dot{x}_i(\sigma)}{\|\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\| \cdot c(\mathbf{x}(\sigma))},$$

οι εξισώσεις (2.28) γράφονται

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\dot{x}_i(\sigma)}{\|\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\| \cdot c(\mathbf{x}(\sigma))} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\|\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\|}{c(\mathbf{x}(\sigma))} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.30)$$

Θεωρώντας ότι η παράμετρος σ ταυτίζεται με το μήκος της καμπύλης ( $\sigma =$  μήκος τόξου  $M_0M$ , Σχήμα 2.4), τότε  $\dot{\mathbf{x}}(\sigma) = \mathbf{s}(\sigma)$  είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης με  $\|\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\| = 1$ . Η εξίσωση (2.30) γίνεται

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{s_i(\sigma)}{c(\mathbf{x}(\sigma))} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{c(\mathbf{x}(\sigma))} \right) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.31)$$

και σε διανυσματική μορφή,

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\mathbf{s}(\sigma)}{c(\mathbf{x}(\sigma))} \right) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{c(\mathbf{x}(\sigma))} \right) = 0 \quad (2.32)$$

Απλούστερα, μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\mathbf{s}}{c} \right) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{c} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\mathbf{s}}{c} \right) = \nabla \cdot \left( \frac{1}{c} \right) \Rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\mathbf{s}}{c} \right) = -c^{-2} \cdot \nabla c \quad (2.33)$$

Η εξίσωση (2.33) είναι γνωστή ως εξίσωση Eikonal (εξίσωση εικόνας) και αποτελεί μια συνήθης διαφορική εξίσωση 2<sup>ης</sup> τάξης για τις μεταβλητές  $x_i(\sigma)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Η λύση αυτής της εξίσωσης προσδιορίζει τη διαδρομή των ακτίνων διαμέσου του εκάστοτε μέσου. Είναι, ουσιαστικά, η τροχιά της ακτίνας και δικαίως χαρακτηρίζεται ως η  $F = m \cdot a$  της οπτικής. Η εξίσωση (2.33) αποτελεί μια εναλλακτική έκφραση της εξίσωσης (2.12), η οποία είχε αποδειχθεί σε προηγούμενο εδάφιο.

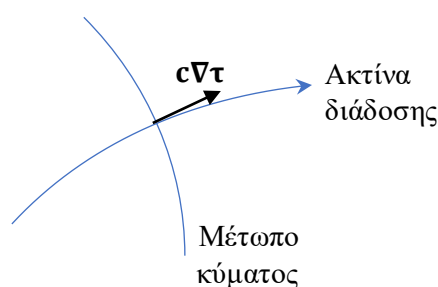
## 2.4 Επιλύοντας την εξίσωση της εικόνας

Για να υπολογιστεί το ακουστικό πεδίο (πεδίο πίεσης) απαιτείται η φάση και το πλάτος της ακτίνας. Η φάση της ακτίνας προσδιορίζεται από τη λύση της εξίσωσης της εικόνας, η οποία όπως αποδείχθηκε από την εξίσωση (2.12), δίνει

$$|\nabla\tau|^2 = c^2(\mathbf{x}) \Rightarrow |\nabla\tau|^2 = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})}$$

Πριν προχωρήσουμε στη λύση, αξίζει να δείξουμε πως από την εξίσωση (2.12) προκύπτει η εξίσωση (2.33). Αρχικά, εισάγουμε μια οικογένεια ακτίνων, οι οποίες είναι κάθετες στα μέτωπα του κύματος. Αυτή η οικογένεια των ακτίνων ορίζει ένα νέο σύστημα συντεταγμένων σε σχέση με το μήκος τόξου  $\sigma$ .

Από την εξίσωση Eikonai συμπεραίνουμε ότι ο όρος  $c \cdot \nabla\tau$  είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Αυτό το διάνυσμα πρέπει να είναι κάθετο στο μέτωπο του κύματος και εφαπτόμενο στην ακτίνα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5.



**Σχήμα 2.5:** Απεικόνιση του μοναδιαίου διανύσματος κατά τη διάδοση της ακτίνας

Δεδομένου ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης είναι  $\mathbf{s}(\sigma)$  (Σχήμα 2.3), λαμβάνουμε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = c \cdot \nabla\tau \quad (2.34)$$

Το μέτρο της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$\left| \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} \right|^2 = c^2 \cdot |\nabla\tau|^2 = 1 \quad (2.35)$$

Παραγωγίζοντας την (2.34) ως προς  $\sigma$  θα έχουμε:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = c \cdot \nabla\tau \Rightarrow \frac{1}{c} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \nabla\tau \Rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{c} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} \right) = \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial\tau}{\partial\mathbf{x}} \right) \quad (2.36)$$

Ο προσδιορισμός των ακτίνων βασίζεται στη συνάρτηση  $\tau(\mathbf{x})$ , η οποία είναι ακόμα άγνωστη. Θεωρώντας πρώτα για τη μεταβλητή  $x_1(\sigma)$ , η εξίσωση (2.36) γράφεται:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{c} \cdot \frac{dx_1}{d\sigma} \right) = \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial\tau}{\partial x_1} \right) \quad (2.37)$$



Ισχύει, επίσης,

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial \tau}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \sigma} \quad (2.38)$$

Από τη σχέση (2.34) παίρνουμε

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = c \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x_1}, \quad \frac{dx_2}{d\sigma} = c \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \quad \text{και} \quad \frac{dx_3}{d\sigma} = c \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x_3} \quad (2.39)$$

Αξιοποιώντας τις εξισώσεις (2.38) και (2.39), από την (2.37) λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{c} \cdot \frac{dx_1}{d\sigma} \right) &= \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial \tau}{\partial x_1} \right) \Rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{c} \cdot \frac{dx_1}{d\sigma} \right) = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \sigma} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{c} \cdot \frac{dx_1}{d\sigma} \right) = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2} c \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_2} c \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_3} c \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x_3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{c} \cdot \frac{dx_1}{d\sigma} \right) = c \cdot \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2} \frac{\partial \tau}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \tau}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial \tau}{\partial x_3} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{c} \cdot \frac{dx_1}{d\sigma} \right) = \frac{c}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \left( \frac{\partial \tau}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau}{\partial x_3} \right)^2 \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της εικόνας (σχέση 2.12) στο δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης, θα έχουμε

$$\Rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{c} \cdot \frac{dx_1}{d\sigma} \right) = \frac{c}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{c^2} \right) \Rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{c} \cdot \frac{dx_1}{d\sigma} \right) = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_1}$$

Εφαρμόζοντας αυτή τη διαδικασία για τις υπόλοιπες μεταβλητές  $x_2$  και  $x_3$ , λαμβάνουμε την ακόλουθη διανυσματική σχέση, μέσω της οποίας προσδιορίζουμε τις τροχιές των ακτίνων,

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{c} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} \right) = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \mathbf{x}} \Rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\mathbf{s}}{c} \right) = \nabla \cdot \left( \frac{1}{c} \right) \Rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\mathbf{s}}{c} \right) = -c^{-2} \cdot \nabla c \quad (2.40)$$

Με αυτό τον τρόπο αποδείξαμε την εξίσωση (2.33) μέσω της (2.12).

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη φάση της ακτίνας, ξεκινώντας από την εξίσωση (2.12). Δηλαδή,

$$\begin{aligned} |\nabla \tau|^2 = c^{-2} &\Rightarrow \nabla \tau^2 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow \nabla \tau \cdot \nabla \tau = \frac{1}{c^2} \Rightarrow \nabla \tau \cdot \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \frac{1}{c^2} \Rightarrow \nabla \tau \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \frac{1}{c} \Rightarrow d\tau = \frac{1}{c} d\sigma \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_0^{\sigma} d\tau = \int_0^{\sigma} \frac{1}{c(\sigma)} d\sigma \Rightarrow \tau(\sigma) - \tau(0) = \int_0^{\sigma} \frac{1}{c(\sigma)} d\sigma \Rightarrow \tau(\sigma) = \tau(0) + \int_0^{\sigma} \frac{1}{c(\sigma)} d\sigma \quad (2.41) \end{aligned}$$

Ο ολοκληρωτέος όρος στην εξίσωση (2.41) αντιστοιχεί στο χρόνο διάδοσης (travel time) κατά μήκος της ακτίνας, δηλαδή το χρόνο που χρειάζεται ώστε η ακτίνα να φτάσει σε ένα σημείο. Έτσι, η φάση του κύματος καθυστερεί σύμφωνα με το χρόνο αυτό.

### Παραγωγή κανονικών (διαφορικών) εξισώσεων ακτίνων

Αρχικά, θέτοντας  $\mathbf{s}/c = \xi$ , θα έχουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$\frac{\mathbf{s}}{c} = \xi \Rightarrow \mathbf{s} = c \cdot \xi \Rightarrow \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = c \cdot \xi \quad (2.42)$$

Επίσης, από την εξίσωση (2.40), θα έχουμε

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\mathbf{s}}{c} \right) = -c^{-2} \cdot \nabla c \Rightarrow \frac{d\xi}{d\sigma} = -c^{-2} \cdot \nabla c \quad (2.43)$$

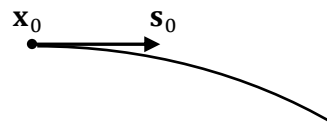
Επομένως, οι παραπάνω σχέσεις, συγκεντρωτικά, θα είναι οι ακόλουθες

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = c \cdot \xi \quad \text{και} \quad \frac{d\xi}{d\sigma} = -c^{-2} \cdot \nabla c \quad (2.44)$$

Οι εξισώσεις (2.44) αποτελούν ένα σύστημα δύο διανυσματικών εξισώσεων 1ης τάξης, οι οποίες ονομάζονται κανονικές (διαφορικές) εξισώσεις ακτίνων. Το σύστημα αυτό επιλύεται μονοσήμαντα με τη βοήθεια αρχικών συνθηκών για τις άγνωστες συναρτήσεις  $\mathbf{x}(\sigma)$  και  $\xi(\sigma)$ . Οι κατάλληλες αρχικές συνθήκες είναι οι τιμές  $\mathbf{x}(\sigma_0)$  και  $\xi(\sigma_0)$  των άγνωστων συναρτήσεων στο σημείο εκκίνησης της ακτίνας. Δηλαδή, το σημείο εκκίνησης της ακτίνας  $\mathbf{x}_0$  και η αρχική κατεύθυνση (αρχικό μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα) της ακτίνας  $\mathbf{s}_0$ . Οι αρχικές συνθήκες, επομένως, θα είναι

$$\mathbf{x}(\sigma_0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{και} \quad \xi(\sigma_0) = \mathbf{s}_0 / c(\mathbf{x}_0) \quad (2.45)$$

Οι εξισώσεις (2.44) και (2.45) συνθέτουν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών και η επίλυση του προσδιορίζει τις ακτίνες διάδοσης σε γενικό ανομοιογενές μέσο  $c = c(\mathbf{x})$ . Οι αρχικές συνθήκες απεικονίζονται στο Σχήμα 2.6.



**Σχήμα 2.6:** Αρχικές συνθήκες των εξισώσεων των ακτίνων

Στην περίπτωση όπου η κατανομή της ταχύτητας διάδοσης παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία, είναι καλύτερο να χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Δηλαδή, θα ισχύουν οι σχέσεις

$$c = c(r, z) \quad \text{και} \quad \nabla c = \left( \frac{\partial c}{\partial r}, \frac{\partial c}{\partial z} \right), \quad (2.46)$$

Οπότε, οι διαφορικές εξισώσεις των ακτίνων λαμβάνουν την μορφή

$$\frac{d\mathbf{x}(\sigma)}{d\sigma} = c(r, z) \cdot \boldsymbol{\xi}(\sigma) \quad \text{και} \quad \frac{d\boldsymbol{\xi}(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{1}{c^2(r, z)} \cdot \nabla c \quad (2.47)$$

όπου  $\sigma$  είναι το μήκος τόξου. Θέτοντας

$$\mathbf{x}(\sigma) = (R(\sigma), Z(\sigma)) \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\xi}(\sigma) = (\xi(\sigma), \zeta(\sigma)), \quad (2.48)$$

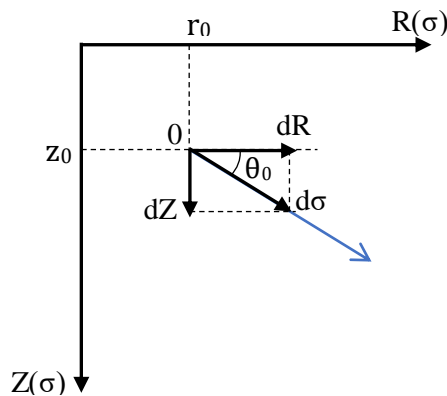
οι εξισώσεις (2.47) γίνονται ως εξής

$$\frac{dR(\sigma)}{d\sigma} = c(r, z) \cdot \xi(\sigma), \quad \frac{dZ(\sigma)}{d\sigma} = c(r, z) \cdot \zeta(\sigma) \quad (2.49 \alpha, \beta)$$

$$\frac{d\xi(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{1}{c^2(r, z)} \cdot \frac{\partial c(r, z)}{\partial r}, \quad \frac{d\zeta(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{1}{c^2(r, z)} \cdot \frac{\partial c(r, z)}{\partial z} \quad (2.49 \gamma, \delta)$$

όπου  $[R(\sigma) = r, Z(\sigma) = z]$  είναι το επίπεδο ακτίνας-βάθους. Έχουμε εισάγει τις βοηθητικές μεταβλητές  $\xi(\sigma)$  και  $\zeta(\sigma)$ , ώστε να διαχειριστούμε εξισώσεις 1<sup>ης</sup> τάξης.

Αυτό το σύστημα των 4 διαφορικών εξισώσεων επιλύεται αριθμητικά. Όμως, για τον προσδιορισμό των ακτίνων χρειάζεται να ορίσουμε αρχικές συνθήκες. Οι αρχικές συνθήκες περιγράφουν την ακτίνα τη στιγμή της αφετηρίας. Δηλαδή, η ακτίνα  $\mathbf{x}(\sigma)$  ξεκινάει από τη θέση της πηγής  $(r_0, z_0)$  με μια καθορισμένη γωνία εκκίνησης (αρχική κλίση)  $\theta_0$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.7.



**Σχήμα 2.7:** Αναπαράσταση τυχαίας ακτίνας σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Επομένως, θα έχουμε:

$$R(\sigma = 0) = r_0, \quad Z(\sigma = 0) = z_0 \quad (2.50 \alpha, \beta)$$

$$\frac{dR(\sigma = 0)}{d\sigma} = \cos\theta_0, \quad \frac{dZ(\sigma = 0)}{d\sigma} = \sin\theta_0 \quad (2.50 \gamma, \delta)$$

Εναλλακτικά, οι αρχικές συνθήκες για την κλίση της ακτίνας, κάνοντας χρήση των εξισώσεων (2.49 α, β) και (2.50 γ, δ), μπορούν να γραφούν στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή

$$\xi(\sigma = 0) = \frac{\cos\theta_0}{c(r_0, z_0)}, \quad \zeta(\sigma = 0) = \frac{\sin\theta_0}{c(r_0, z_0)} \quad (2.51)$$

Συμπεραίνουμε πως διαφορετική γωνία εκκίνησης (διαφορετική αρχική κλίση) θα δώσει διαφορετική πορεία (διεύθυνση) της ακτίνας.

Επομένως, στις κυλινδρικές συντεταγμένες, η εξίσωση Eikonal συνοψίζεται σε ένα μη γραμμικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$dX_i(\sigma) = F_i(X_1(\sigma), X_2(\sigma), X_3(\sigma), X_4(\sigma)), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.52)$$

όπου

$$X_1(\sigma) = R(\sigma), \quad X_2(\sigma) = Z(\sigma), \quad X_3(\sigma) = \xi(\sigma), \quad X_4(\sigma) = \zeta(\sigma) \quad (2.53)$$

## 2.5 Η εξίσωση μεταφοράς. Εκτίμηση της έντασης του ηχητικού πεδίου από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ηχητικού σωλήνα

Μέχρι στιγμής, έχουμε ασχοληθεί με την πορεία της ακτίνας, δηλαδή τη διεύθυνση στην οποία διαδίδεται η ακτίνα. Αυτό το μέρος αντιπροσωπεύει μόνο το «σκελετό» του ακουστικού πεδίου. Για να έχουμε πλήρη εικόνα για τις ακτίνες διάδοσης, χρειάζεται να έχουμε γνώση για το πεδίο της πίεσης ή την απώλεια μετάδοσης κατά την διάδοση της ακτίνας. Για να ελέγξουμε το πεδίο της πίεσης, πρέπει να υπολογίσουμε το πλάτος της ακτίνας. Επομένως, θα πρέπει να επιλυθεί η εξίσωση της μεταφοράς, όπως διατυπώθηκε σε προηγούμενο εδάφιο, δηλαδή η εξίσωση

$$2\nabla\tau \cdot \nabla A_0 + (\nabla^2\tau)A_0 = 0, \quad (2.54)$$

η οποία μπορεί να γραφεί και στην ακόλουθη μορφή

$$\nabla \cdot (A_0^2 \nabla \tau) = 0 \quad (2.55)$$

Ο όρος  $\nabla \cdot (A_0^2 \nabla \tau)$  αποτελεί την απόκλιση της συνάρτησης  $A_0^2 \nabla \tau$ , δηλαδή τη μεταβολή της στο χώρο. Η εξίσωση (2.55) εκφράζει σωληνοειδές διάνυσμα.

Θεωρούμε έναν ιδεατό χώρο μέσα στον οποίο πραγματοποιείται ροή ρευστού. Έστω ότι η  $\mathbf{F}(x, y, z)$  είναι μια διανυσματική συνάρτηση που περιγράφει την ταχύτητα του ρευστού στη θέση  $(x, y, z)$  του χώρου αυτού. Σύμφωνα με το Θεώρημα της απόκλισης (Θεώρημα Gauss), το τριπλό ολοκλήρωμα της απόκλισης διανυσματικής συνάρτησης σε όγκο  $V$  ισοδυναμεί με το διπλό ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης σε στοιχειώδη όγκο  $\partial V$  (ή επιφάνεια  $S$  που περιβάλλει τον όγκο  $V$ ), δηλαδή

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.56)$$

ή

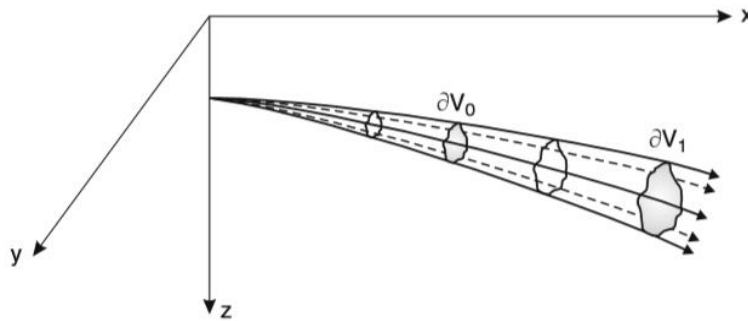
$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.57)$$

όπου  $\mathbf{n}$  είναι ένα εξερχόμενο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα. Λόγω της (2.55) καταλήγουμε ότι

$$\iint_{\partial V} A_0^2 \nabla \tau \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (2.58)$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε ένα σωλήνα ακτίνων, όπου ο όγκος περικλείεται από μια οικογένεια ακτίνων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.8. Παρατηρούμε ότι στην περιφέρεια του σωλήνα, η ακτίνα αποτελεί το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n}$ . Υπενθυμίζουμε ότι σε προηγούμενο εδάφιο είχαμε αναφέρει ότι ο όρος  $c \cdot \nabla \tau$  είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στο μέτωπο του κύματος και εφαπτόμενο στην ακτίνα. Οπότε

$$c \cdot \nabla \tau = \mathbf{n} \Rightarrow c \cdot \nabla \tau \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow c \cdot \nabla \tau \cdot \mathbf{n} = 1 \Rightarrow \nabla \tau \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{c} \quad (2.59)$$



**Σχήμα 2.8:** Κατασκευή ενός σωλήνα ακτίνων

Άρα, λαμβάνουμε την ακόλουθη Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας:

$$\iint_{\partial V_0} \frac{A_0^2}{c} dS = \iint_{\partial V_1} \frac{A_0^2}{c} dS = \text{σταθ.}, \quad (2.60)$$

όπου  $\partial V_0$ ,  $\partial V_1$  είναι οι στοιχειώδεις όγκοι (ή, εναλλακτικά, οι επιφάνειες  $S_0$ ,  $S_1$ ) του σωλήνα. Το παραπάνω αποτέλεσμα μας επιβεβαιώνει πως διαδίδεται η ενέργεια εντός ενός σωλήνα ακτίνων. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.8, το πλάτος της ακτίνας μπορεί να μεταβάλλεται (αυξάνεται ή μειώνεται) όσο μεταβάλλεται η διάσταση του σωλήνα (συρρικνώνεται ή επεκτείνεται).

Συγκεκριμένα, για να ορίσουμε το πλάτος της ακτίνας σε κάθε θέση θα πρέπει να εισάγουμε μια ποσότητα, η οποία είναι ανάλογη του εμβαδού διατομής του σωλήνα ακτίνων και ονομάζεται Ιακωβιανή ποσότητα. Για ένα τρισδιάστατο πρόβλημα, η ποσότητα  $J$  είναι

$$J = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\sigma, \theta_0, \varphi_0)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \sigma} & \frac{\partial x}{\partial \theta_0} & \frac{\partial x}{\partial \varphi_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} & \frac{\partial y}{\partial \theta_0} & \frac{\partial y}{\partial \varphi_0} \\ \frac{\partial z}{\partial \sigma} & \frac{\partial z}{\partial \theta_0} & \frac{\partial z}{\partial \varphi_0} \end{vmatrix}, \quad (2.61)$$

όπου  $\theta_0$  και  $\varphi_0$  είναι, αντίστοιχα, οι αποκλίνουσες και αζιμουθιακές γωνίες έναρξης της ακτίνας.

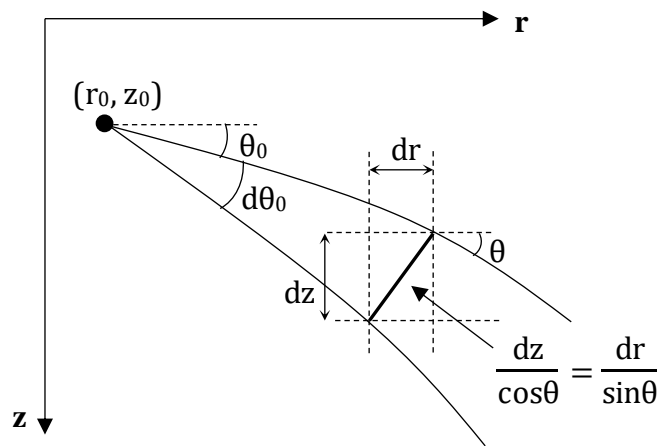
Στην ειδική περίπτωση της σημειακής πηγής σε πεδίο με κυλινδρική συμμετρία, θεωρούμε αρχικά ένα σωλήνα ακτίνων που σχηματίζεται από δύο ακτίνες, οι οποίες ξεκινούν από γειτονικές γωνίες έναρξης, διαφοράς  $d\theta_0$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.9.

Η μορφή της Ιακωβιανής απλοποιείται σε

$$J = r \left( \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial z}{\partial \theta_0} - \frac{\partial z}{\partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial \theta_0} \right) \quad (2.62)$$

ή

$$J = r \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial \theta_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial \theta_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.63)$$



**Σχήμα 2.9:** Η εγκάρσια διατομή ενός σωλήνα ακτίνων

Το εμβαδό διατομής είναι απλά η υποτείνουσα  $Jd\theta_0$ , όπου  $J$  η Ιακωβιανή. Ο επιπλέον παράγοντας  $r$  οφείλεται στο γεγονός ότι έχουμε θεωρήσει κυλινδρική συμμετρία έτσι ώστε το Σχήμα 2.8 να δείχνει πραγματικά σαν ένα μέρος μέσα από τον σωλήνα, ο οποίος περιστρέφεται γύρω από τον άξονα  $z$ . Λόγω γεωμετρίας, μπορούμε να διακρίνουμε ότι οι ακόλουθες μορφές είναι ισοδύναμες:

$$J = \frac{r}{\cos \theta} \frac{\partial z}{\partial \theta_0} = \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial r}{\partial \theta_0}, \quad (2.64)$$

όπου  $\theta$  είναι η γωνία της ακτίνας σε τυχαία θέση. Συνήθως, αξιοποιούμε την εξίσωση, η οποία είναι πιο κατάλληλη για αριθμητικές εφαρμογές.

Σε πολύ παλιούς κώδικες, το εμβαδό διατομής υπολογιζόταν χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών. Για παράδειγμα, η δεύτερη εξίσωση της (2.64) δίνει την προσέγγιση:

$$J(\sigma) = \frac{r_1(\sigma) r_{i+1}(\sigma) - r_1(\sigma)}{\sin\theta \delta\theta_0}, \quad (2.65)$$

όπου  $r_1(\sigma) = r(\sigma, \theta_0)$  και  $r_{i+1}(\sigma) = r(\sigma, \theta_0 + \delta\theta_0)$  είναι διαδοχικές ακτίνες σχηματίζοντας ένα σωλήνα ακτίνων.

Επανερχόμενοι στην επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς, υπενθυμίζουμε ότι οι ακτίνες προσδιορίζονται από την εξίσωση (2.34), όντας κάθετες στα μέτωπα κύματος. Χρησιμοποιώντας αυτή την εξίσωση, η (2.54) ξαναγράφεται στη μορφή

$$2\nabla\tau \cdot \nabla A_0 + (\nabla^2\tau) A_0 = 0 \Rightarrow \frac{2}{c} \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} \cdot \nabla A_0 + (\nabla^2\tau) A_0 = 0 \quad (2.66)$$

Ο πρώτος όρος της (2.66) αντιπροσωπεύει μια κατά διεύθυνση παράγωγο κατά μήκος της διαδρομής της ακτίνας, επομένως μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{2}{c} \frac{dA_0}{d\sigma} + (\nabla^2\tau) A_0 = 0 \quad (2.67)$$

Η παραπάνω εξίσωση δηλώνει ότι το πλάτος κατά μήκος μιας ακτίνας αλλάζει σε σχέση με την εξάπλωση του σωλήνα ακτίνων.

Επίσης, η Ιακωβιανή ικανοποιεί τη σχέση

$$\nabla^2\tau = \frac{1}{J} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{J}{c} \right), \quad (2.69)$$

Έτσι, η εξίσωση (2.67) μπορεί να γραφτεί, μέσω της (2.69), ως

$$\frac{2}{c} \frac{dA_0}{d\sigma} + \left[ \frac{1}{J} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{J}{c} \right) \right] A_0 = 0 \Rightarrow 2 \frac{dA_0}{d\sigma} + \left[ \frac{c}{J} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{J}{c} \right) \right] A_0 = 0 \quad (2.70)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.70), παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα για την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς, δηλαδή

$$A_0(\sigma) = A_0(0) \sqrt{\frac{c(\sigma) J(0)}{c(0) J(\sigma)}}, \quad (2.71)$$

θεωρώντας ως αρχικό πλάτος (πλάτος αναφοράς) το  $A_0(\sigma=0)$  και  $A_0(\sigma)$  το πλάτος για τυχαίο  $\sigma$  (μήκος καμπύλης).

## 2.6 Παραδείγματα αναλυτικών λύσεων των εξισώσεων των ακτίνων

Σε προηγούμενο εδάφιο εκφράσαμε την εξίσωση Eikonal ως ένα σύστημα 4 διαφορικών εξισώσεων 1<sup>ης</sup> τάξης. Στη συνέχεια, εισάγοντας και τις αρχικές συνθήκες (θέση εκκίνησης και γωνία εκκίνησης), καταλήξαμε σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, το οποίο μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά. Θα εστιάσουμε στην επίλυση του προβλήματος αυτού για τις περιπτώσεις όπου η ταχύτητα μεταβάλλεται με το βάθος  $z$ , δηλαδή  $c = c(z)$ . Αυτό σημαίνει πως η ταχύτητα δεν θα εξαρτάται από την κυλινδρική συντεταγμένη  $r$ , δηλαδή  $\partial c / \partial r = 0$ . Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση (2.49γ) δίνει

$$\frac{d\xi(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{1}{c^2(r, z)} \cdot \frac{\partial c(r, z)}{\partial r} = 0 \Rightarrow \xi(\sigma) = \text{σταθερά} = \xi(\sigma = 0)$$

Τότε, από την εξίσωση (2.49α), σε συνδυασμό με την εξίσωση (2.50γ) για τυχαία θέση  $\sigma$ , λαμβάνουμε ότι

$$\frac{dR(\sigma)}{d\sigma} = c(r, z) \cdot \xi(\sigma) \Rightarrow \cos\theta(\sigma) = c(r, z) \cdot \xi(\sigma) \Rightarrow \xi(\sigma) = \frac{\cos\theta(\sigma)}{c(r, z)} = q = \text{σταθ.} \quad (2.72)$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει το νόμο του Snell για στρωματοποιημένο ανομοιογενές μέσο. Με βάση την εξίσωση (2.72), σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (2.49α,β) και (2.51) για τυχαία θέση  $\sigma$ , λαμβάνουμε

$$\frac{dR(\sigma)}{d\sigma} = c(z) \cdot \xi(\sigma) \Rightarrow \frac{1}{c(z)} \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} = \xi(\sigma) \Rightarrow \frac{1}{c(z)} \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} = \frac{\cos\theta}{c(z)} = q \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{dZ(\sigma)}{d\sigma} &= c(z) \cdot \zeta(\sigma) = c(z) \cdot \frac{\sin\theta}{c(z)} = c(z) \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}{c(z)} = c(z) \cdot \frac{\sqrt{1 - q^2 \cdot c^2(z)}}{c(z)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{c(z)} \frac{dZ(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{c(z)} \sqrt{1 - q^2 \cdot c^2(z)} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Υπενθυμίζοντας ότι  $Z(\sigma) = z$ , διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (2.73) και (2.74), παίρνουμε ότι

$$\frac{dR}{dZ} = \frac{q}{\frac{1}{c(Z)} \sqrt{1 - q^2 \cdot c^2(Z)}} \Rightarrow \frac{dR}{dZ} = \frac{q \cdot c(Z)}{\sqrt{1 - q^2 \cdot c^2(Z)}} \quad (2.75)$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση προσδιορίζει την ακτίνα με αρχικές συνθήκες  $z_0, \theta_0$ . Είναι τύπου χωριζομένων μεταβλητών και επιλύεται με απ' ευθείας ολοκλήρωση

$$\int_{r_0}^R dr = \int_{z_0}^Z \frac{q \cdot c(z)}{\sqrt{1 - q^2 \cdot c^2(z)}} dz \Rightarrow R(Z) - r_0 = \int_{z_0}^Z \frac{q \cdot c(z)}{\sqrt{1 - q^2 \cdot c^2(z)}} dz, \quad (2.76)$$

με την προϋπόθεση ότι η  $c = c(z)$  μπορεί να εκφραστεί μέσω γνωστών συναρτήσεων. Θα αναφέρουμε δύο είδη γνωστών συναρτήσεων.



### A. Γραμμική κατανομή της ταχύτητας διάδοσης

Σε αυτή την περίπτωση, το προφίλ της ταχύτητας διάδοσης  $c$  μεταβάλλεται γραμμικά κατά την κατακόρυφη διεύθυνση  $z$ , δηλαδή είναι της μορφής

$$c = c(z) = \alpha \cdot z + c_0, \quad (2.77)$$

με  $c_0$ ,  $\alpha$  σταθερές. Έτσι, το πρόβλημα αρχικών τιμών μπορεί να επιλυθεί εύκολα με χρήση της εξίσωσης (2.72). Ξεκινώντας από την εξίσωση εκείνη και παραγωγίζοντας ως προς  $z$ , λαμβάνουμε

$$\frac{\cos\theta(\sigma)}{c(z)} = q \Rightarrow \cos\theta(\sigma) = q \cdot c(z) \Rightarrow -\sin\theta(\sigma) \cdot \frac{d\theta}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dz} = q \cdot \frac{dc}{dz} = q \cdot \alpha$$

Αξιοποιώντας αντίστροφα την εξίσωση (2.50δ) για τυχαία θέση  $\sigma$ , τότε καταλήγουμε ότι

$$-\sin\theta(\sigma) \cdot \frac{d\theta}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dz} = q \cdot \alpha \Rightarrow -\sin\theta(\sigma) \cdot \frac{d\theta}{d\sigma} \cdot \frac{1}{\sin\theta(\sigma)} = q \cdot \alpha \Rightarrow \frac{d\theta(\sigma)}{d\sigma} = -q \cdot \alpha = \text{σταθ.} \quad (2.78)$$

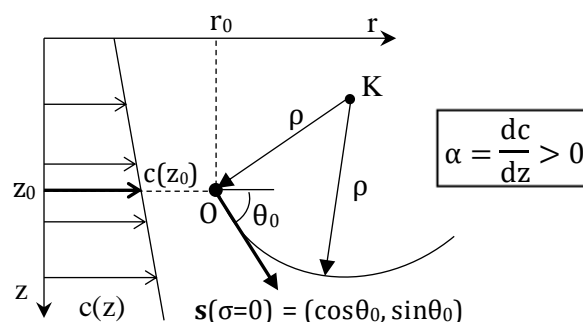
Η ποσότητα  $\frac{d\theta(\sigma)}{d\sigma}$  παριστάνει την καμπυλότητα  $\kappa(\sigma)$  της ακτίνας, οπότε

$$\kappa(\sigma) = \frac{d\theta(\sigma)}{d\sigma} = -q \cdot \alpha = \text{σταθ.} \quad (2.79)$$

Έτσι, η ακτίνα διάδοσης  $\mathbf{x}(\sigma)$  είναι τόξο κύκλου ακτίνας

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|} = \frac{1}{|q \cdot \alpha|} = \frac{1}{\left| \frac{\cos\theta_0}{c(z_0)} \cdot \alpha \right|} = \frac{c(z_0)}{|\alpha \cdot \cos\theta_0|} = \text{σταθερά} \quad (2.80)$$

Οι παραπάνω παρατηρήσεις μας δίνουν τη δυνατότητα να επιλύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών γεωμετρικά, αποφεύγοντας την πιο απαιτητική επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων με αρχικές συνθήκες.



**Σχήμα 2.10:** Γεωμετρία ακτίνας σε περιβάλλον με γραμμική αύξηση της ταχύτητας διάδοσης

Στο Σχήμα 2.10 παριστάνεται η πορεία της ακτίνας σε περιβάλλον όπου η ταχύτητα διάδοσης αυξάνεται γραμμικά με το βάθος  $z$ . Διαπιστώνουμε πως η τιμή της καμπυλότητας της ακτίνας είναι

$$\kappa = -\rho\alpha = -\frac{\cos\theta_0}{c(z_0)} \cdot \alpha < 0 \text{ αφού } \cos\theta_0 > 0 \text{ και } \alpha = \frac{dc}{dz} > 0$$

Λόγω της αρνητικής καμπυλότητας, η ακτίνα στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10. Έτσι, γνωρίζοντας την τιμή της καμπυλότητας  $\kappa$ , υπολογίζουμε την ακτίνα  $\rho = |\kappa|^{-1}$  και προσδιορίζουμε το κέντρο  $K$  του κύκλου ακτίνας  $\rho$ , ο οποίος διέρχεται από το σημείο  $O$  και έχει εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο αυτό  $s(\sigma = 0)$ .

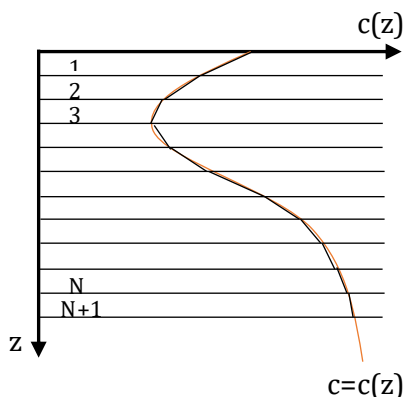
Παρομοίως, εργαζόμαστε στην περίπτωση που η ταχύτητα διάδοσης μειώνεται γραμμικά με το βάθος  $z$ , δηλαδή  $\alpha = \frac{dc}{dz} < 0$ . Η τιμή της καμπυλότητας είναι θετική

και η ακτίνα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

Έτσι, επαληθεύουμε τη γενική αρχή που έχει διατυπωθεί σε προηγούμενα εδάφια, ότι δηλαδή οι κυματικές ακτίνες καμπυλώνονται στρεφόμενες προς την περιοχή στην οποία η ταχύτητα διάδοσης ελαττώνεται.

Συμπερασματικά, μπορούμε να αναφέρουμε έναν εύχρηστο αλγόριθμο που κατασκευάζει προσεγγιστικά ακτίνες σε περιβάλλοντα με συνεχή κατακόρυφη κατανομή της ταχύτητας διάδοσης,  $c(z)$ . Ο αλγόριθμος αυτός συνοψίζεται σε δύο βήματα, τα οποία είναι τα εξής:

- i) Διαχωρίζουμε την περιοχή ενδιαφέροντος σε οριζόντια στρώματα στοιχειώδους εύρους, ώστε για το καθένα από αυτά να θεωρούμε τη μεταβολή της ταχύτητας διάδοσης γραμμική, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.11.



**Σχήμα 2.11:** Οριζόντιος διαχωρισμός του μέσου

- ii) Προσδιορίζουμε την ακτίνα διάδοσης, σύμφωνα με τη μέθοδο που αναφέραμε προηγουμένως (περίπτωση γραμμικής κατανομής της ταχύτητας διάδοσης), για κάθε στρώμα χωριστά. Αρχικά, θεωρούμε ένα σημείο εκκίνησης και μια γωνία

εκκίνησης. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία μέχρι και το τελευταίο στρώμα.

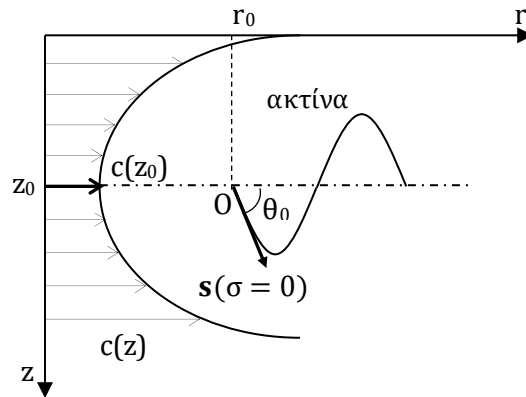
Η παραπάνω γεωμετρική μέθοδος κατασκευής ακτίνων είναι σχετικά εύκολη, αρκετά γρήγορη και με εξαιρετική ακρίβεια. Επίσης, η μέθοδος αυτή είναι εφαρμόσιμη και για περιπτώσεις όπου η ταχύτητα διάδοσης μεταβάλλεται και ως προς την οριζόντια διεύθυνση  $c(r, z)$ , όπως και σε περιπτώσεις που παρουσιάζονται τοπικές ασυνέχειες από περιοχή σε περιοχή. Δηλαδή, ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε οποιοδήποτε ανομοιογενές μέσο.

## B. Ταχύτητα διάδοσης τύπου υπερβολικού συνημιτόνου

Στο παρόν εδάφιο θα περιγράψουμε την πορεία της ακτίνας σε περιβάλλον όπου η ταχύτητα διάδοσης μεταβάλλεται κατακόρυφα (σε συνάρτηση με το βάθος  $z$ ) υπό τη μορφή υπερβολικού συνημιτόνου. Η περίπτωση αυτή θα επιλυθεί αναλυτικά καθώς πρόκειται να χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία για έλεγχο της ακρίβειας αριθμητικής μεθόδου, η οποία βασίζεται σε κατάλληλες μεθόδους ολοκλήρωσης του διαφορικού συστήματος των ακτίνων. Η ταχύτητα διάδοσης είναι της μορφής

$$c = c(z) = A \cosh[B(z - z_0)] \quad \text{με } A, B = \text{σταθερές} \quad (2.81)$$

Στο Σχήμα 2.12 απεικονίζεται το προφίλ της ταχύτητας καθώς και η πορεία της ακτίνας με σημείο εκκίνησης (σημείο εκπομπής) που αντιστοιχεί στη θέση του τοπικού ελαχίστου της ταχύτητας διάδοσης.



**Σχήμα 2.12:** Προφίλ της ταχύτητας διάδοσης και σχηματισμός της ακτίνας

Η εξίσωση (2.72) για την θέση εκκίνησης και τη γωνία έναρξης παίρνει τη μορφή

$$q = \frac{\cos\theta_0}{c(z_0)} = \frac{\cos\theta_0}{A}$$

Επίσης, η εξίσωση (2.76) γίνεται ως εξής

$$R - r_0 = \int_{z_0}^z \frac{q \cdot c(z)}{\sqrt{1 - q^2 \cdot c^2(z)}} dz = \int_{z_0}^z \frac{\cos\theta_0 \cdot \cosh[B(z - z_0)]}{\sqrt{1 - \cos^2\theta_0 \cdot \cosh^2[B(z - z_0)]}} dz \quad (2.82)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσης

$$\int \frac{\alpha \cdot \cosh x}{\sqrt{1-\alpha^2 \cdot \cosh^2 x}} dx = \arcsin\left(\frac{\alpha \cdot \sinh x}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right), \text{ όπου } \alpha^2 \cdot \cosh^2 x < 1 \quad (2.83)$$

Έτσι, θεωρώντας ότι  $\alpha = \cos\theta_0$ , η εξίσωση (2.82) παίρνει τη μορφή

$$R - r_0 = \arcsin\left\{\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0} \cdot \sinh[B(Z - z_0)]\right\},$$

ή

$$\sin[B(R - r_0)] = \tan^{-1}\theta_0 \cdot \sinh[B(Z - z_0)] \quad (2.84)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να λυθεί μονοσήμαντα ως προς  $Z$ , αφού η συνάρτηση  $\sinh$  είναι αμφιμονοσήμαντη στο  $\mathbb{R}$  και έχει μονότιμη αντιστροφή:

$$Z - z_0 = \frac{1}{B} \sinh^{-1}\left\{\tan\theta_0 \cdot \sin[B(R - r_0)]\right\} \quad (2.85)$$

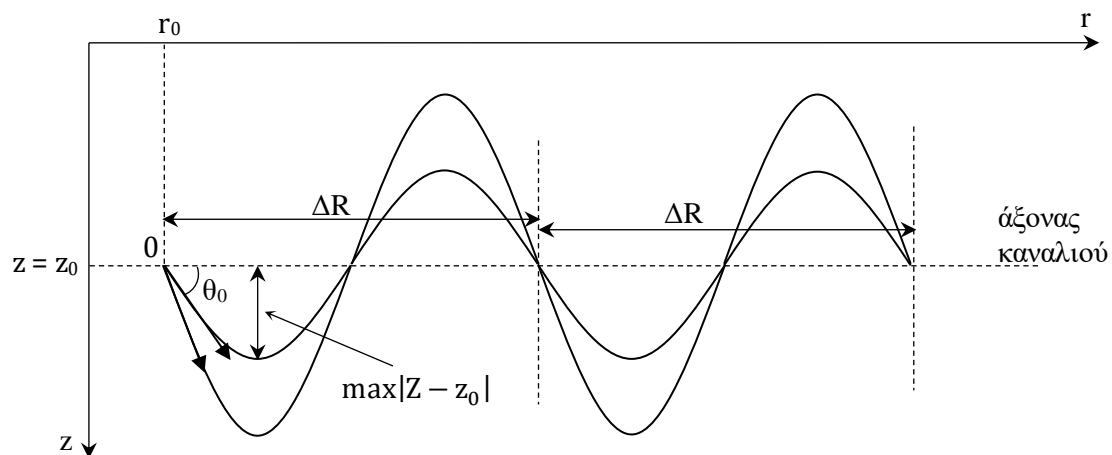
Από την γενική λύση (2.85) μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για το μήκος κύματος καθώς και για το πλάτος της ακτίνας.

Το μήκος κύματος είναι  $\Delta R = 2\pi/B$ , δηλαδή, ενώ η ακτίνα ξεκινάει από το σημείο  $O$ , στη θέση  $z = z_0$ , θα επιστρέφει στο ίδιο ύψος μετά από διάστημα  $2\pi/B$ .

Το πλάτος της ακτίνας, δηλαδή η μέγιστη απομάκρυνση  $\max|Z - z_0|$ , εξαρτάται από τη σταθερά  $B$ . Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (2.85), όπου  $B(r - r_0) = \pi/2$ , τότε λαμβάνουμε ότι

$$\max|Z - z_0| = \frac{1}{B} \sinh^{-1}(\tan\theta_0)$$

Στο Σχήμα 2.13 απεικονίζεται η γεωμετρία δύο ακτίνων για δύο διαφορετικές γωνίες έναρξης. Οι ακτίνες διάδοσης καμπυλώνονται γύρω από τον άξονα  $z = z_0$ .



**Σχήμα 2.13:** Γεωμετρία των ακτίνων σε περιβάλλον με ταχύτητα διάδοσης τύπου υπερβολικού συνημιτόνου

Παρατηρούμε, επίσης, ότι όσο αυξάνεται η αρχική γωνία κλίσης  $\theta_0$ , αυξάνεται παράλληλα και η μέγιστη απομάκρυνση από τον άξονα  $z = z_0$ . Ακόμη, το πλάτος της ακτίνας μειώνεται καθώς αυξάνεται η καμπυλότητα του προφίλ της ταχύτητας διάδοσης. Τέλος, παρατηρούμε ότι σε ένα περιβάλλον με κατακόρυφη κατανομή  $c(z)$  που παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε κάποια θέση  $z = z_0$ , οι ακτίνες εγκλωβίζονται δημιουργώντας ένα «κανάλι διάδοσης». Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι ακτίνες να διαδίδονται σε πολύ μεγάλες αποστάσεις, εφόσον βρεθούν μέσα σε αυτό το κανάλι. Στην περίπτωση της διάδοσης του ήχου στη θάλασσα μιλάμε για το λεγόμενο «υποβρύχιο ηχητικό κανάλι».

### 3. Αριθμητικό σχήμα επίλυσης των εξισώσεων των ακτίνων

Μέχρι και σήμερα έχει αναπτυχθεί, σε μεγάλο βαθμό, μια πληθώρα επιλογών από αριθμητικά σχήματα (εξειδικευμένοι αλγόριθμοι και κώδικες H/Y) που βασίζονται στη θεωρία ακτίνων. Οι κώδικες αυτοί διατίθενται σε ελεύθερη χρήση και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για υδροακουστικές εφαρμογές διαφόρων συχνοτήτων.

Στο εδάφιο αυτό παρουσιάζεται συνοπτικά η αριθμητική ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων των ακτίνων ως πρόβλημα αρχικών τιμών στις δύο διαστάσεις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Adams-Moulton-Bashford, η οποία θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία και θα εξεταστεί αναλυτικότερα στα επόμενα εδάφια. Η μέθοδος Adams-Bashford-Moulton (ή πιο απλά, μέθοδος ABM) υλοποιείται από τη συνάρτηση `adbra.m` του προγράμματος MATLAB.

Ορίζουμε, αρχικά, τη γενικευμένη μεταβλητή

$$\mathbf{X}(s) = [r(s), z(s), \xi(s), \zeta(s)]^T, \quad (3.1)$$

όπου  $s$  η παράμετρος που εκφράζει το μήκος της καμπύλης ή γενικά το φυσικό μήκος της ακτίνας (στα προηγούμενα κεφάλαια είναι εκφρασμένο ως  $\sigma$ ). Έτσι, το σύστημα των εξισώσεων των ακτίνων γράφεται στη μορφή

$$\frac{d\mathbf{X}(s)}{ds} = \mathbf{F}(\mathbf{X}; s) \quad (3.2)$$

Το δεξιό μέλος του συστήματος εξισώσεων (3.2) είναι

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}; t) = [c\xi, c\zeta, -c^2 dc / dr, -c^2 dc / dz]^T \quad (3.3)$$

Το παραπάνω σύστημα ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας ως αρχικές συνθήκες, τη θέση εκκίνησης (θέση της πηγής)

$$(r_0, z_0) = (r(s_0), z(s_0)) \quad (3.4)$$

και την αρχική κλίση της ακτίνας

$$(r'(s_0), z'(s_0)) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0)) \quad (3.5)$$

Επίσης, η αριθμητική ολοκλήρωση πραγματοποιείται σε περιβάλλον όπου η ταχύτητα διάδοσης  $c$  χαρακτηρίζεται από κατακόρυφη μεταβολή τύπου υπερβολικού συνημιτόνου, δηλαδή της μορφής

$$c(z) = A \cosh(B(z - z_0)),$$

για την οποία η αναλυτική λύση έχει παρουσιαστεί στο εδάφιο 2.6.

Από τις αρχικές συνθήκες (3.4) και (3.5) λαμβάνουμε αρχικά δεδομένα για τη γενικευμένη μεταβλητή, δηλαδή

$$\mathbf{X}(s=0) = \mathbf{X}(s_0) = [r(s_0), z(s_0), \xi(s_0), \zeta(s_0)]^T, \quad (3.6)$$

όπου

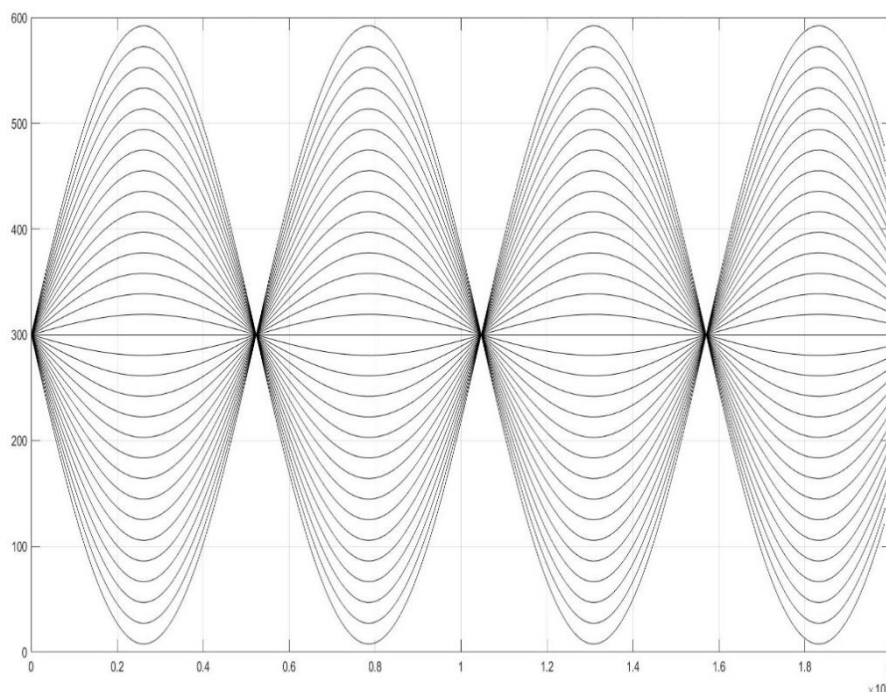
$$\xi(s_0) = \cos(\theta_0)/c_0, \quad \zeta(s_0) = \sin(\theta_0)/c_0, \quad c_0 = c(r_0, z_0) \quad (3.7)$$

Τέλος, λαμβάνουμε τις σταθερές A, B με τις αντίστοιχες τιμές τους

$$A = 1510 \text{m/s} \quad \text{και} \quad B = 6 \cdot 10^{-4} \text{m}^{-1},$$

καθώς και τη σημειακή πηγή στη θέση  $(r_0, z_0) = (0, 300)$  με αρχική γωνία κλίσης που κυμαίνεται μεταξύ  $10^\circ$  έως  $-10^\circ$  με βήμα  $1^\circ$ .

Το αποτέλεσμα της εφαρμογής της μεθόδου ABM, για περιβάλλον με κατακόρυφη κατανομή ήχου (δείκτη διάθλασης) που καθορίζεται από τη συνάρτηση υπερβολικού συνιμητόνου, απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1. Συγκρίνοντας την ανωτέρω αριθμητική λύση με την αναλυτική λύση που είχαμε παρουσιάσει στο εδάφιο 2.6 προκύπτει πολύ καλή ακρίβεια της μεθόδου ακόμη και για πολύ μεγάλες αποστάσεις – διαστήματα ολοκλήρωσης.



**Σχήμα 3.1:** Υπολογιζόμενες ακτίνες από σημειακή πηγή σε κατακόρυφο στρωματοποιημένο μέσο με  $c(z) = A \cosh(B(z - z_0))$

### 3.1 Μέθοδοι ολοκλήρωσης μη γραμμικών διαφορικών συστημάτων

Γενικά, οι αριθμητικές μέθοδοι για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις είναι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την εύρεση αριθμητικών προσεγγίσεων στις λύσεις των συνήθους διαφορικών εξισώσεων. Η χρήση τους είναι, επίσης, γνωστή ως «αριθμητική

ανάλυση», αν και ο όρος αυτός μπορεί να αναφέρεται και στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.

Πολλές διαφορικές εξισώσεις δεν μπορούν να επιλυθούν με τη χρήση συμβολικού υπολογισμού (ανάλυση). Σε αυτή την περίπτωση, μια αριθμητική προσέγγιση της λύσης είναι συχνά επαρκής. Οι αλγόριθμοι που θα αναφέρουμε στο παρόν εδάφιο μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό μιας τέτοιας προσέγγισης. Μια εναλλακτική μέθοδος είναι να χρησιμοποιούμε τεχνικές από το λογισμό για να λάβουμε μια σειρά αναπτύγματος της λύσης (π.χ. σειρά Taylor).

Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις εμφανίζονται σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους, όπως της Φυσικής, της Χημείας, της Βιολογίας και της Οικονομίας. Επιπλέον, μερικές μέθοδοι στις αριθμητικές μερικές διαφορικές εξισώσεις μετατρέπουν τη μερική διαφορική εξίσωση σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση, η οποία πρέπει στη συνέχεια να λυθεί.

Μια 1<sup>ης</sup> τάξης διαφορική εξίσωση αποτελεί ένα πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad (3.8)$$

όπου  $f$  είναι μια συνάρτηση  $f: [t_0, \infty] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  και η αρχική συνθήκη  $y_0 \in \mathbb{R}^d$  είναι ένα δοσμένο διάνυσμα. Με τον όρο «1<sup>ης</sup> τάξης» εννοούμε ότι μόνο η πρώτη παράγωγος του  $y$  εμφανίζεται στην εξίσωση και οι ανώτερης τάξης παράγωγοι απουσιάζουν.

Βέβαια, συστήματα ανώτερης τάξης μπορούν να μετατραπούν σε συστήματα εξισώσεων 1<sup>ης</sup> τάξης, αρκεί να εισάγουμε επιπλέον μεταβλητές. Για παράδειγμα, η 2<sup>ης</sup> τάξης εξίσωση  $y'' = -y$  μπορεί να ξαναγραφτεί με τη μορφή δύο εξισώσεων 1<sup>ης</sup> τάξης, δηλαδή

$$y' = z \quad \text{και} \quad z' = -y$$

Στο εδάφιο αυτό, περιγράφουμε αριθμητικές μεθόδους για προβλήματα αρχικών τιμών. Από την άλλη μεριά, τα προβλήματα συνοριακών τιμών απαιτούν διαφορετική τεχνική. Σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών, ένας ορίζει τιμές ή συνιστώσες της λύσης  $y$  σε περισσότερα από ένα σημεία. Εξαιτίας αυτού, πρέπει να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές μέθοδοι για την επίλυση των προβλημάτων συνοριακών τιμών. Για παράδειγμα, η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών είναι κατάλληλη για αυτή την κατηγορία προβλημάτων.

Οι αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών 1<sup>ης</sup> τάξης συχνά χωρίζονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες: οι γραμμικές μέθοδοι πολλαπλών βημάτων και οι μέθοδοι Runge-Kutta. Μια άλλη διαίρεση των αριθμητικών μεθόδων μπορεί να είναι ανάμεσα σε Implicit και Explicit. Η μετάφραση των δύο αυτών λέξεων στα ελληνικά είναι πεπλεγμένες και μη πεπλεγμένες (ή λελυμένες) μέθοδοι, αντίστοιχα. Η διαφοροποίηση των 2 μεθόδων έγκειται στον τρόπο επίλυσής τους. Έτσι, οι μεν Explicit μέθοδοι υπολογίζουν την κατάσταση του συστήματος σε επόμενη χρονική στιγμή από την δεδομένη ενώ αντίθετα οι Implicit μέθοδοι υπολογίζουν και την τωρινή κατάσταση του συστήματος αλλά και την μελλοντική. Άρα, αν θεωρήσουμε την τωρινή μας κατάσταση σαν  $X(t)$  και την μελλοντική κατάσταση μετά από χρόνο  $\Delta t$ , όπου  $\Delta t$



είναι ένα πολύ μικρό βήμα ολοκλήρωσης, τότε για τη μεν Explicit μέθοδο η λύση προκύπτει από την

$$X(t + \Delta t) = F(x(t))$$

ενώ για την Implicit μέθοδο προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης

$$G(X(t), X(t + \Delta t)) = 0$$

Ειδικότερα, για την επίλυση της προηγούμενης εξίσωσης συνήθως χρησιμοποιείται η μέθοδος Newton-Raphson. Θα σκεφτεί κάποιος λοιπόν ότι η επίλυση μιας Implicit μεθόδου απαιτεί περισσότερο υπολογιστικό χρόνο οπότε δεν θα πρέπει να προτιμάται. Κάτι τέτοιο, όμως, είναι ανακριβές διότι υπάρχουν εξισώσεις οι οποίες ονομάζονται stiff και οι οποίες έχουν ως χαρακτηριστικό τους ότι το βήμα  $\Delta t$  πρέπει να γίνει άπειρα μικρό προκειμένου να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση με Explicit μέθοδο. Αυτό καθιστά την επίλυση σχεδόν αδύνατη. Έτσι, σε αυτού του είδους τις περιπτώσεις οδηγούμαστε στην επιλογή των Implicit μεθόδων.

Συνδυάζοντας αυτές τις 4 κατηγορίες, προκύπτουν πολλές μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης. Για παράδειγμα, οι Implicit γραμμικές μέθοδοι πολλαπλών βημάτων περιλαμβάνουν τις μεθόδους Adams-Moulton και τις μεθόδους οπίσθιων διαφορών (BDF - Backward Differentiation Methods). Οι Implicit Runge-Kutta μέθοδοι περιλαμβάνουν τις διαγώνια Implicit Runge-Kutta μεθόδους και τις αριθμητικές μεθόδους Gauss-Radau (βασιζόμενες στον Γκαουσιανό τετραγωνισμό). Οι Explicit γραμμικές μέθοδοι πολλαπλών βημάτων περιλαμβάνουν τις μεθόδους Adams-Bashforth, ενώ οι Explicit Runge-Kutta μέθοδοι περιλαμβάνουν οποιαδήποτε μέθοδο Runge-Kutta, στην οποία ο πίνακας Butcher είναι άνω τριγωνικός. Ένας γενικός κανόνας αναφέρει ότι οι διαφορικές εξισώσεις stiff απαιτούν τη χρήση των Implicit διατάξεων ενώ οι διαφορικές εξισώσεις non-stiff μπορούν να λυθούν πιο αποτελεσματικά με Explicit διατάξεις. Τέλος, οι λεγόμενες γενικές γραμμικές μέθοδοι αποτελούν μια γενίκευση παραπάνω δύο μεγάλων κατηγοριών των μεθόδων (πολλαπλών βημάτων και Runge-Kutta).

### **Μέθοδος Euler**

Μια πολύ απλή μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης, η οποία στηρίζεται σε διαφορές είναι η μέθοδος Euler. Έστω ένα πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

Από το ανάπτυγμα Taylor προκύπτει ότι για ένα βήμα ολοκλήρωσης  $t_{n+1} = t_n + h$  ισχύει, κρατώντας μόνο 2 όρους, ότι

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

Βέβαια, καθώς μιλάμε για 1<sup>ης</sup> τάξης προσέγγιση είναι πολύ λογικό να έχουμε αρκετά μεγάλο σφάλμα. Αυτό μπορεί να υπολογιστεί με μια σύγκριση των αποτελεσμάτων μας με το ανάπτυγμα Taylor. Έτσι, από την μεν μέθοδο του Euler προκύπτει

$$O(h^3)$$

ενώ από το ανάπτυγμα προκύπτει ότι

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{1}{2}h^2y''(t_0) + O(h^3)$$

Συνεπώς, το σφάλμα είναι

$$\frac{1}{2}h^2y''(t_0) + O(h^3)$$

Η μέθοδος αυτή πήρε το όνομά της από τον Leonhard Euler που την περιέγραψε το 1768. Η μέθοδος αυτή είναι ένα παράδειγμα Explicit μεθόδου. Αυτό σημαίνει ότι η νέα τιμή  $y_{n+1}$  προσδιορίζεται με βάση τα πράγματα, τα οποία είναι ήδη γνωστά, όπως η  $y_n$ .

### Οπίσθια μέθοδος Euler (Backward Euler)

Η μέθοδος αυτή είναι προέκταση της μεθόδου Euler, η οποία αναφέρθηκε πιο πριν. Η οπίσθια μέθοδος είναι Implicit, δηλαδή πρέπει να λυθεί μια εξίσωση προκειμένου να βρεθεί το  $y_{n+1}$ , κάτι το οποίο επιτυγχάνεται με τη μέθοδο Newton-Raphson ή την επανάληψη σταθερού σημείου. Το πλεονέκτημα αυτών των μεθόδων είναι ότι είναι σταθερότερες, το οποίο σημαίνει ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί μεγαλύτερο βήμα ολοκλήρωσης αλλά απαιτείται μεγαλύτερος υπολογιστικός χρόνος. Η μέθοδος είναι ίδια με την προηγούμενη με τη διαφορά ότι πλέον ισχύει

$$y(t_0 - h) = y(t_0) - hf(t_0, y(t_0)) = y(t_0) - hy'(t_0)$$

### Μέθοδος Leap-Frog

Η μέθοδος Euler συχνά δεν είναι ακριβής, καθώς είναι 1<sup>ης</sup> τάξης. Αυτό το γεγονός έκανε τους μαθηματικούς να αναζητήσουν μεθόδους ανώτερης τάξης. Μια από αυτές τις μεθόδους είναι η μέθοδος Leap-Frog, η οποία είναι δεύτερης τάξης και θεωρείται πιο ακριβής. Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

Χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)),$$

όπου  $h$  είναι το εύρος του βήματος όπως προκύπτει από τον τύπο  $t_n = t_0 + nh$  και  $y_n = y_n(t_n)$  είναι η τιμή την οποία υπολογίζουμε. Οι υπολογισμοί γίνονται για χρόνο  $t = t_n + \frac{h}{2}$ , το οποίο είναι το ενδιάμεσο σημείο μεταξύ του  $t_n$ , στο οποίο είναι γνωστή η τιμή της  $y(t)$  και του  $t_{n+1}$ , στο οποίο ψάχνουμε την  $y$ .

Το σφάλμα σε κάθε βήμα είναι της τάξεως του  $O(h^3)$ , συνεπώς ακριβέστερα από τη μέθοδο Euler. Η μέθοδος αυτή είναι μια βελτίωση της μεθόδου Euler και προκύπτει με παρόμοιο τρόπο. Προκειμένου να προκύψει η μέθοδος Leap-Frog, η κύρια ανισότητα, στην οποία στηριζόμαστε, είναι η ακόλουθη

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)),$$

η οποία προκύπτει από την

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

Ακριβέστερα, υπάρχει ο τύπος

$$y'(t + \frac{h}{2}) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h},$$

όπου

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t + \frac{h}{2}, y(t + \frac{h}{2}))$$

Στη συνέχεια, με ανάπτυγμα Taylor προκύπτει ότι

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{h}{2}f(t, y(t)))$$

Βέβαια, ο τύπος αυτός μπορεί να γραφτεί και διαφορετικά αν έχουμε ως σημείο αναφοράς το μέσο του βήματος και όχι την αρχή του. Σε αυτή την περίπτωση, η μέθοδος γράφεται ως εξής:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(t_n, y_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Όπως είναι προφανές, το σημείο  $n+1$  είναι το σημείο το οποίο αντιστοιχεί στο βήμα  $h$ , το σημείο  $n-1$  είναι το αρχικό σημείο ενώ το σημείο  $n$  είναι το σημείο που αντιστοιχεί σε βήμα  $\frac{h}{2}$ .

Η μέθοδος αυτή ανήκει στις μεθόδους γραμμικών πολλαπλών βημάτων και βασίζεται σε δύο τιμές χρόνου.

### **Μέθοδος εκθετικού ολοκληρωτή 1<sup>ης</sup> τάξης**

Οι εκθετικοί ολοκληρωτές περιγράφουν μια μεγάλη κατηγορία ολοκληρωτών, οι οποίοι τελευταία έχουν μεγάλη ανάπτυξη. Χρονολογούνται τουλάχιστον από τη δεκαετία του 1960. Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε ότι η διαφορική εξίσωση είναι είτε της μορφής

$$y_{n+1} = e^{Ah} y_n + \int_0^h e^{(h-\tau)A} N(y(t_n + \tau)) d\tau$$

είτε έχει γραμμικοποιηθεί τοπικά για την παραγωγή ενός γραμμικού όρου  $-Ay$  και ενός μη γραμμικού όρου  $N(y)$ .

Οι εκθετικοί ολοκληρωτές κατασκευάζονται πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση με  $e^{At}$  και ολοκληρώνοντας σε ένα χρονικό διάστημα  $[t_n, t_{n+1} = t_n + h]$ :

$$y_{n+1} = e^{Ah}y_n + \int_0^h e^{(h-\tau)A} N(y(t_n + \tau)) d\tau$$

Αυτή η ολοκληρωτέα εξίσωση είναι ακριβής, αλλά δεν προσδιορίζει το ολοκλήρωμα. Ο εκθετικός ολοκληρωτής 1<sup>ης</sup> τάξης μπορεί να κατανοηθεί κρατώντας τον όρο  $N(y(t_n + \tau))$  σταθερό σε όλο το χρονικό διάστημα:

$$y_{n+1} = e^{-Ah}y_n + A^{-1}(1 - e^{-Ah})N(y(t_n))$$

### 3.2 Η μέθοδος Adams-Moulton-Bashford

Στο παρόν εδάφιο θα ασχοληθούμε εκτενέστερα με τη μέθοδο Adams-Moulton-Bashford (ABM). Η μέθοδος αυτή ανήκει στην κατηγορία των γραμμικών μεθόδων πολλαπλών βημάτων. Χρησιμοποιείται για την αριθμητική λύση των συνήθως διαφορικών εξισώσεων.

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

Λαμβάνουμε προσεγγιστικές λύσεις για την τιμή  $y(t)$  σε διακριτές χρονικές στιγμές  $t_i$ :

$$y_i \approx y(t_i), \quad \text{όπου } t_i = t_0 + ih,$$

με  $h$  να είναι το χρονικό βήμα (μερικές φορές αναφέρεται ως  $\Delta t$ ) και  $i$  είναι ένας ακέραιος αριθμός.

Οι μέθοδοι πολλαπλών βημάτων χρησιμοποιούν πληροφορίες από τα προηγούμενα  $s$  βήματα, ώστε να υπολογιστεί η επόμενη τιμή. Ειδικότερα, μια γραμμική μέθοδος πολλαπλών βημάτων χρησιμοποιεί ένα γραμμικό συνδυασμό του  $y_i$  και του  $f(t_i, y_i)$  για τον υπολογισμό της τιμής του  $y$  για το επιθυμητό τρέχον βήμα. Άρα, μια γραμμική μέθοδος πολλαπλών βημάτων είναι μια μέθοδος της μορφής:

$$\begin{aligned} & y_{n+s} + \alpha_{s-1} \cdot y_{n+s-1} + \alpha_{s-2} \cdot y_{n+s-2} + \dots + \alpha_0 \cdot y_n = \\ & = h \cdot (b_s \cdot f(t_{n+s}, y_{n+s}) + b_{s-1} \cdot f(t_{n+s-1}, y_{n+s-1}) + \dots + b_0 \cdot f(t_n, y_n)) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sum_{j=0}^s \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^s b_j f(t_{n+j}, y_{n+j}), \end{aligned}$$

με  $\alpha_s = 1$ . Οι συντελεστές  $\alpha_0, \dots, \alpha_{s-1}$  και  $b_0, \dots, b_s$  καθορίζουν την εκάστοτε μέθοδο. Ο σχεδιαστής της μεθόδου επιλέγει τους συντελεστές, εξισορροπώντας την ανάγκη να ληφθεί μια καλή προσέγγιση της πραγματικής λύσης έναντι της επιθυμίας να ληφθεί μια μέθοδος, η οποία είναι εύκολα εφαρμόσιμη. Συχνά πολλοί συντελεστές είναι μηδέν για να απλοποιείται η μέθοδος.

Είχαμε αναφέρει, σε προηγούμενα εδάφια, ότι οι μέθοδοι διακρίνονται σε Explicit (μη πεπλεγμένες) και Implicit (πεπλεγμένες) μέθοδοι. Αν  $b_s = 0$ , τότε η μέθοδος καλείται Explicit, αφού ο παραπάνω τύπος μπορεί υπολογίσει απευθείας το  $y_{n+s}$ . Αν  $b_s \neq 0$ , τότε η μέθοδος καλείται Implicit, αφού η τιμή  $y_{n+s}$  βασίζεται στη τιμή του  $f(t_{n+s}, y_{n+s})$  και η εξίσωση πρέπει να λυθεί για το  $y_{n+s}$ . Οι επαναληπτικές μέθοδοι, όπως η μέθοδος Newton, συχνά χρησιμοποιούνται για την επίλυση Implicit τύπου.

Μερικές φορές, μια Explicit μέθοδος πολλαπλών βημάτων χρησιμοποιείται για να προβλέψει την τιμή του  $y_{n+s}$ . Αυτή η τιμή χρησιμοποιείται έπειτα σε έναν Implicit τύπο για να διορθώσει την τιμή. Το αποτέλεσμα είναι μια μέθοδος πρόβλεψης – διόρθωσης, για την οποία θα μιλήσουμε στη συνέχεια.

Γενικά, οι γραμμικές μέθοδοι πολλαπλών βημάτων που χρησιμοποιούνται ευρέως είναι:

- i. η μέθοδος Adams-Bashforth,
- ii. η μέθοδος Adams-Moulton και
- iii. η μέθοδος οπίσθιας παραγωγίσης (Backward Differentiation formula – BDF)

### Μέθοδος Adams-Bashforth

Η μέθοδος Adams-Bashforth σχεδιάστηκε από τον John Couch Adams για την επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης μοντελοποιώντας την τριχοειδή δράση που μελετούσε ο Bashforth. Έπειτα, ο Bashforth δημοσίευσε τη θεωρία του καθώς και την αριθμητική μέθοδο του Adams.

Η μέθοδος Adams-Bashforth είναι μια Explicit μέθοδος. Οι συντελεστές είναι

$$\alpha_{s-1} = -1 \quad \text{και} \quad \alpha_{s-2} = \dots = \alpha_0 = 0,$$

ενώ οι  $b_j$  επιλέγονται έτσι ώστε οι μέθοδοι να έχουν τάξη  $s$  (αυτό προσδιορίζει τις μεθόδους αποκλειστικά).

Οι μέθοδοι Adams-Bashforth με  $s = 1, 2, 3, 4$  είναι:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad (\text{αυτή είναι η μέθοδος Euler})$$

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h \left( \frac{3}{2} f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{2} f(t_n, y_n) \right),$$

$$y_{n+3} = y_{n+2} + h \left( \frac{23}{12} f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{16}{12} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{5}{12} f(t_n, y_n) \right),$$

$$y_{n+4} = y_{n+3} + h \left( \frac{55}{24} f(t_{n+3}, y_{n+3}) - \frac{59}{24} f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{37}{24} f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{9}{24} f(t_n, y_n) \right)$$

### Μέθοδος Adams-Moulton

Παρόμοια με τη μέθοδο Adams-Bashforth είναι η μέθοδος Adams-Moulton. Η μέθοδος αυτή έχει, επίσης,

$$\alpha_{s-1} = -1 \quad \text{και} \quad \alpha_{s-2} = \dots = \alpha_0 = 0$$

Και σε αυτή την περίπτωση, οι συντελεστές  $b_j$  επιλέγονται ώστε η μέθοδος να έχει τη μέγιστη δυνατή τάξη. Όμως, η μέθοδος Adams-Moulton είναι Implicit μέθοδος. Καταργώντας τον περιορισμό  $b_s = 0$ , μια μέθοδος Adams-Moulton  $s$ -βημάτων μπορεί να φθάσει να είναι τάξης  $s+1$ , ενώ η μέθοδος Adams-Bashforth  $s$ -βημάτων μπορεί να είναι τάξης  $s$  μόνο.

Οι μέθοδοι Adams-Moulton με  $s = 0, 1, 2, 3$  είναι:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad (\text{αυτή είναι η οπίσθια μέθοδος Euler})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h \left( \frac{3}{2} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n) \right), \quad (\text{αυτός είναι ο κανόνας τραπεζίου})$$

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h \left( \frac{5}{12} f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{2}{3} f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{12} f(t_n, y_n) \right),$$

$$y_{n+3} = y_{n+2} + h \left( \frac{9}{24} f(t_{n+3}, y_{n+3}) + \frac{19}{24} f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{5}{24} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{1}{24} f(t_n, y_n) \right)$$

Η μέθοδος Adams-Moulton οφείλεται αποκλειστικά στον John Couch Adams. Το όνομα του Forest Ray Moulton συνδέθηκε με αυτές τις μεθόδους διότι συνειδητοποίησε ότι θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με τη μέθοδο Adams-Bashforth ως ένα ζεύγος πρόβλεψης διόρθωσης (predictor-corrector). Την ίδια ακριβώς ιδέα είχε και ο Milne (1926).

### Παραγωγή των μεθόδων Adams-Bashforth και Adams-Moulton

Υπάρχουν δύο τουλάχιστον τρόποι με τους οποίους μπορούν να παραχθούν οι μέθοδοι Adams-Bashforth και Adams-Moulton. Ο ένας είναι χρησιμοποιώντας πολυωνυμική παρεμβολή και ο άλλος είναι με τη χρήση Θεωρήματος Taylor. Θα παρουσιάσουμε και τους δύο τρόπους για τη μέθοδο Adams-Bashforth 2-βημάτων (ή 2<sup>ης</sup> τάξης).

#### A. Παραγωγή της μεθόδου Adams-Bashforth 2-βημάτων με χρήση πολυωνυμικής παρεμβολής

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού μπορούμε να πάρουμε

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt \quad (3.9)$$

Ορίζουμε

$$A = \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad (3.10)$$

Για να πάρουμε την τιμή του  $A$ , πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα πολυώνυμο παρεμβολής  $P(t)$  ως μια προσέγγιση του  $f(t, y(t))$ . Το πολυώνυμο παρεμβολής σε μορφή Lagrange είναι ένας γραμμικός συνδυασμός

$$L(x) := \sum_{j=0}^k y_j \ell_j(x),$$

όπου

$$\ell_j(x) := \prod_{\substack{0 \leq m \leq k \\ m \neq j}} \frac{x - x_m}{x_j - x_m}$$

Στη συνέχεια, η παρεμβολή μπορεί να είναι

$$P(t) = f(t_n, y_n) \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + f(t_{n-1}, y_{n-1}) \frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n}$$

Άρα, η (3.10) γίνεται

$$A = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( f(t_n, y_n) \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + f(t_{n-1}, y_{n-1}) \frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n} \right) dt \quad (3.11)$$

Ολοκληρώνοντας και απλοποιώντας, το δεξιό μέλος της εξίσωσης (3.11) γίνεται

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(t_n + t_{n+1})(f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})) - t_{n-1}f(t_n, y_n) + t_n f(t_{n-1}, y_{n-1}) = \\ & = \frac{1}{2}(t_n + t_{n+1} - 2t_{n-1})f(t_n, y_n) + \frac{1}{2}(2t_n - t_{n+1} - t_n)f(t_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

Αφού  $t_{n-1}$ ,  $t_n$  και  $t_{n+1}$  είναι ανάλογες τιμές, τότε  $t_n - t_{n-1} = t_{n+1} - t_n = h$ . Άρα, η τιμή του  $A$  είναι

$$A = \frac{3}{2} hf(t_n, y_n) - \frac{1}{2} hf(t_{n-1}, y_{n-1})$$

Βάζοντας την παραπάνω τιμή στην (3.9), λαμβάνουμε

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + \frac{3}{2} hf(t_n, y_n) - \frac{1}{2} hf(t_{n-1}, y_{n-1})$$

Επομένως, η εξίσωση

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{2}hf(t_n, y_n) - \frac{1}{2}hf(t_{n-1}, y_{n-1})$$

αποτελεί τη μέθοδο Adams-Bashforth 2-βημάτων.

### **B. Παραγωγή της μεθόδου Adams-Bashforth 2-βημάτων με χρήση Θεωρήματος Taylor**

Αρχικά, ορίζουμε ότι  $f_k = f(x_k, y_k)$ . Τότε, η γενική μορφή της μεθόδου Adams-Bashforth είναι

$$y_{n+r} = y_{n+r-1} + h \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{n+r-k}, \quad (3.12)$$

όπου  $\sum_{k=1}^r \lambda_k = 1$ . Για τη μέθοδο Adams-Bashforth 2-βημάτων μπορούμε να ορίσουμε επίσης  $\lambda_1 = 1 - \lambda$ ,  $\lambda_2 = \lambda$ . Τότε, η (3.12) γίνεται

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h((1-\lambda)f_{n+1} + \lambda f_n) = y(t_{n+1}) + h((1-\lambda)y'(t_{n+1}) + \lambda y'(t_n))$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Taylor, αναπτύσσουμε τον όρο  $y'(t_{n+1})$  και λαμβάνουμε

$$y_{n+2} = y(t_{n+1}) + h((1-\lambda)y'(t_{n+1}) + \lambda(y'(t_{n+1}) - hy''(t_{n+1}) + O(h^2)))$$

Έτσι, η απλοποιημένη μορφή είναι

$$y_{n+2} = y(t_{n+1}) + hy'(t_{n+1}) - \lambda h^2 y''(t_{n+1}) + O(h^3) \quad (3.13)$$

Αναπτύσσοντας τον όρο  $y(t_{n+2})$  στον  $y(t_{n+1})$  έχουμε

$$y(t_{n+2}) = y(t_{n+1}) + hy'(t_{n+1}) + \frac{1}{2}h^2 y''(t_{n+1}) + O(h^3) \quad (3.14)$$

Αντιστοιχίζοντας τις (3.13) και (3.14) λαμβάνουμε ότι  $\lambda = -\frac{1}{2}$ . Τότε, η μέθοδος Adams-Bashforth 2-βημάτων είναι

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{3}{2}hf(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{2}hf(t_n, y_n)$$

Αφού

$$y(t_{n+2}) - y_{n+2} = O(h^3),$$

το τοπικό σφάλμα είναι της τάξης  $O(h^3)$  και άρα η μέθοδος είναι 2<sup>ης</sup> τάξης.



## Μέθοδος Πρόβλεψης – Διόρθωσης

Για την επίλυση μιας συνήθη διαφορικής εξίσωσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο πρόβλεψης και διόρθωσης. Ουσιαστικά, πρόκειται για έναν αλγόριθμο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε δύο βήματα. Αρχικά, το βήμα πρόβλεψης υπολογίζει μια πρόχειρη προσέγγιση της επιθυμητής ποσότητας, συνήθως χρησιμοποιώντας μια Explicit μέθοδο (όπως η μέθοδος Adams-Bashforth). Στο τέλος, το βήμα του διορθωτή βελτιώνει την αρχική προσέγγιση χρησιμοποιώντας συνήθως μια Implicit μέθοδο (όπως είναι η μέθοδος Adams-Moulton).

Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Adams-Bashforth 4<sup>ης</sup> τάξης (4-βημάτων) και την αντίστοιχη μέθοδο Adams-Moulton, ο τύπος πρόβλεψης και διορθωτή θα είναι αντίστοιχα:

$$P_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55f(t_n, y_n) - 59f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 37f(t_{n-2}, y_{n-2}) - 9f(t_{n-3}, y_{n-3}))$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9f(t_{n+1}, P_{n+1}) + 19f(t_n, y_n) - 5f(t_{n-1}, y_{n-1}) + f(t_{n-2}, y_{n-2}))$$

Σημειώνουμε πως η μέθοδος Adams-Bashforth 4-βημάτων χρειάζεται 4 αρχικές συνθήκες για να ξεκινήσει ο υπολογισμός. Για να πάρει αυτές τις αρχικές συνθήκες, χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν άλλες μέθοδοι, όπως για παράδειγμα η μέθοδος Runge-Kutta.

### Επίλυση των εξισώσεων των ακτίνων με τη μέθοδο ABM predictor-corrector

Το διαφορικό σύστημα των εξισώσεων των ακτίνων

$$\frac{d\mathbf{X}(s)}{ds} = \mathbf{F}(\mathbf{X}; s)$$

επιλύεται αριθμητικά με διακριτοποίηση σταθερού βήματος  $\delta s$  που οδηγεί στον υπολογισμό των ποσοτήτων

$$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n, \mathbf{X}_{n+1}$$

οι οποίες αντιστοιχούν στις θέσεις του πλέγματος

$$s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}, \text{ όπου } s_n = n \cdot \delta s$$

Η μέθοδος προβλεψης-διόρθωσης ABM βασίζεται στην κατωτέρω πρόβλεψη

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \frac{\delta s}{24} \mathbf{A}_n, \text{ με}$$

$$\mathbf{A}_n = 55\mathbf{F}(\mathbf{P}_{n+1}; s_{n+1}) - 59\mathbf{F}(\mathbf{X}_n; s_n) + 37\mathbf{F}(\mathbf{X}_{n-1}; s_{n-1}) - 9\mathbf{F}(\mathbf{X}_{n-2}; s_{n-2}),$$

η οποία ακολουθείται από τη διόρθωση

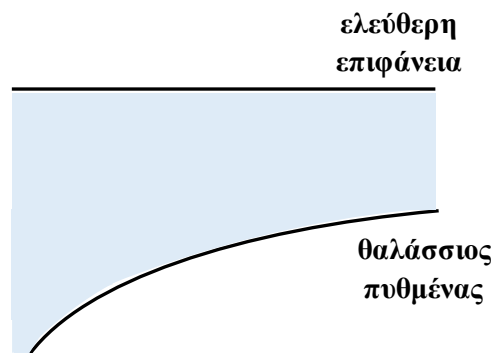
$$\mathbf{X}_{n+1} \equiv \mathbf{X}(s_{n+1}) = \mathbf{X}_n + \frac{\delta s}{24} \mathbf{B}_n, \text{ με}$$

$$\mathbf{B}_n = 9\mathbf{F}(\mathbf{P}_{n+1}; s_{n+1}) + 19\mathbf{F}(\mathbf{X}_n; s_n) - 5\mathbf{F}(\mathbf{X}_{n-1}; s_{n-1}) + \mathbf{F}(\mathbf{X}_{n-2}; s_{n-2})$$

Η διαδικασία ξεκινά από αρχικά δεδομένα και φτάνει μέχρι ένα καθορισμένο σημείο τερματισμού.

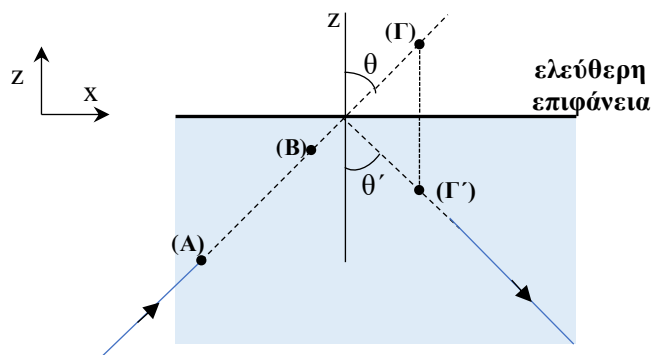
### Υπολογισμός φαινομένων ανάκλασης με κατοπτρισμό

Στην παρούσα εργασία, τα φαινόμενα ανάκλασης που παρατηρούνται, κατά τη διάδοση μιας ηχητικής ακτίνας, οφείλονται στην ύπαρξη δύο φυσικών συνόρων: της ελεύθερης επιφάνειας και του θαλάσσιου πυθμένα. Θα εξετάσουμε την περίπτωση που το σύνορο της ελεύθερης επιφάνειας θα είναι οριζόντιο και το σύνορο του πυθμένα θα είναι καμπύλο (κεκλιμένο τοπικά), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.



**Σχήμα 3.2:** Απεικόνιση του θαλάσσιου ακουστικού κυματοδηγού

Η ολοκλήρωση των εξισώσεων των ακτίνων πραγματοποιείται τμηματικά (με διακριτοποίηση), δηλαδή εξετάζοντας τη διάδοση της ακτίνας σημείο προς σημείο.

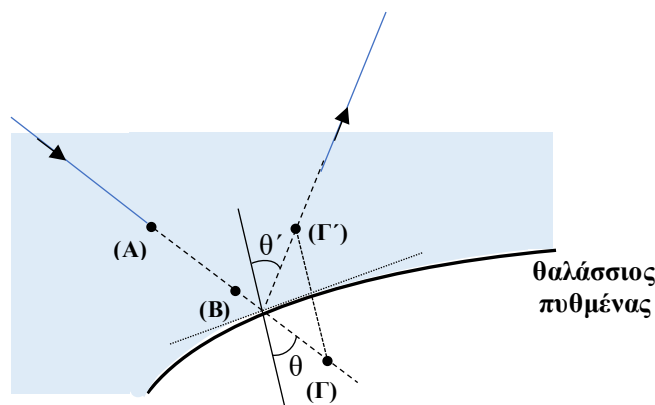


**Σχήμα 3.3:** Φαινόμενο ανάκλασης με κατοπτρισμό στην ελεύθερη επιφάνεια

Συγκεκριμένα, για την περίπτωση του οριζόντιου συνόρου της ελεύθερης επιφάνειας, όσο η ηχητική ακτίνα διαδίδεται στο μέσο κάποια στιγμή θα συναντήσει την ελεύθερη επιφάνεια. Στο Σχήμα 3.3 αναπαριστάται μια τυχαία ηχητική ακτίνα, η οποία μεταβάλλει συνεχώς τη θέση της (συντεταγμένες x και z). Δηλαδή, από το σημείο (A), μεταφέρεται στο σημείο (B) κτλ. Κάποια στιγμή, θα προκύψει ένα σημείο που θα

ξεπεράσει το όριο  $z = 0$  (πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια). Έστω, ότι αυτό το σημείο είναι το  $(\Gamma)$ . Θα διαπιστώσουμε ότι βγήκαμε εκτός ορίου, αν η συντεταγμένη  $z$  της θέσης  $(\Gamma)$  πάρει θετική τιμή.

Ο επόμενος στόχος είναι να επαναφέρουμε την ακτίνα εντός του θαλάσσιου κυματοδηγού. Για να το πετύχουμε αυτό, επιβάλλουμε κατοπτρισμό. Δηλαδή, βρίσκουμε την κατοπτρική θέση του  $(\Gamma)$  κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια, δηλαδή το σημείο  $(\Gamma')$ . Διαπιστώνουμε, επίσης, ότι η γωνία  $\theta'$  που σχηματίζεται εντός του μέσου και μεταξύ της ακτίνας και του κάθετου, στην ελεύθερη επιφάνεια, άξονα  $z$  είναι η συμμετρική της γωνίας  $\theta$  που σχηματίζεται μεταξύ της ακτίνας και του άξονα  $z$  πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια. Με αυτό τον τρόπο διαχειριζόμαστε την οριζόντια ελεύθερη επιφάνεια και η ηχητική ακτίνα συνεχίζει την διάδοσή της εντός του μέσου. Με ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε και στην περίπτωση του πυθμένα. Στην περίπτωση όμως αυτή, το σύνορο δεν είναι οριζόντιο, όπως προηγουμένως, αλλά καμπυλώνεται, όπως είδαμε στο Σχήμα 3.2. Έτσι, η διεύθυνση της καθέτου στο σύνορο είναι άγνωστη (για την οριζόντια ελεύθερη επιφάνεια ήταν ο άξονας  $z$ ) και πρέπει να υπολογιστεί, ώστε να επιβάλλουμε τον κατοπτρισμό. Η μεθοδολογία που ακολουθούμε, όμως, είναι ταυτόσημη. Στο Σχήμα 3.4 αναπαριστάται μια τυχαία ηχητική ακτίνα, η οποία κατευθύνεται προς το όριο του πυθμένα.



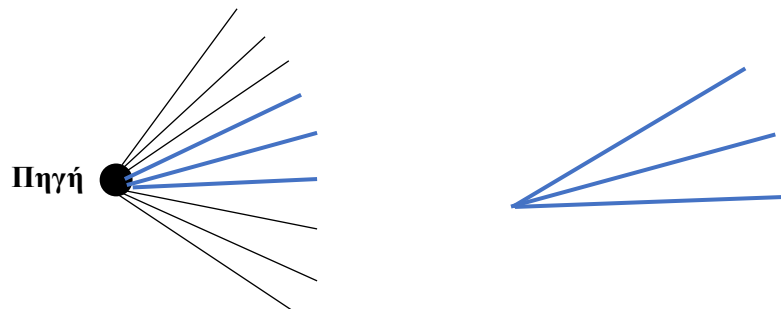
**Σχήμα 3.4:** Φαινόμενο ανάκλασης με κατοπτρισμό στο θαλάσσιο πυθμένα

Καθώς η ηχητική ακτίνα περνάει από τα σημεία (A) και (B), κάποια στιγμή βρίσκεται στο πέρασμά της το σημείο  $(\Gamma)$ , το οποίο βρίσκεται κάτω από τον θαλάσσιο πυθμένα και εκτός κυματοδηγού. Αυτό το σημείο δεν είναι σταθερό αλλά μεταβλητό. Γνωρίζοντας τις συντεταγμένες  $(x, z)$  αυτού του σημείου μπορούμε να δούμε σε ποια θέση είμαστε. Αν διαπιστώσουμε ότι η συντεταγμένη  $z$  είναι μεγαλύτερη από το τοπικό βάθος, το οποίο το υπολογίζουμε από τη βαθυμετρία που έχουμε, τότε συμπεραίνουμε ότι είμαστε έξω από το όριο. Στη συνέχεια, το μόνο που χρειάζεται να βρούμε είναι τη διεύθυνση της καθέτου σε εκείνη τη θέση ώστε να επιβάλλουμε τον κατοπτρισμό. Για να κάνουμε τον κατοπτρισμό, όμως, πρέπει να υπολογίσουμε την τοπική κλίση ώστε να αλλάξουμε τις συντεταγμένες. Αφού γίνει και αυτό το βήμα, τέλος, υπολογίζουμε τη κατοπτρική θέση του  $(\Gamma)$ , δηλαδή το σημείο  $(\Gamma')$ . Οι γωνίες  $\theta$  και  $\theta'$  που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα είναι συμμετρικές. Με αυτό τον τρόπο, έχουμε την καινούργια

διεύθυνση της ηχητικής ακτίνας, κατά μήκος της οποίας συνεχίζεται η διάδοση της πάνω από τον πυθμένα και εντός του μέσου.

### Υπολογισμός απολειών διάδοσης του ηχητικού σήματος

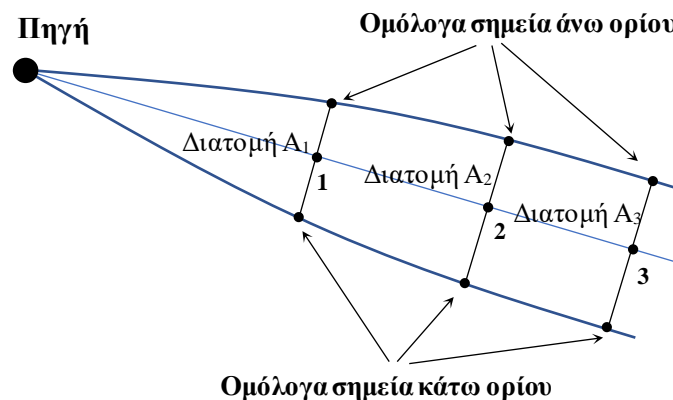
Κατά το υπολογιστικό μοντέλο γίνεται η επίλυση του διαφορικού συστήματος των ακτίνων με αρχικά δεδομένα για μια πυκνή δέσμη ακτίνων που ξεκινά από την σημειακή πηγή. Στην συνέχεια, αξιοποιούνται τα χαρακτηριστικά των ηχητικών σωλήνων σχηματίζοντας ομάδες τριών διαδοχικών ακτίνων. Δηλαδή, καθώς οι ακτίνες απομακρύνονται από την πηγή, τις συλλέγουμε ανά τρεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.5. Επομένως, η πυκνή δέσμη των ακτίνων μετατρέπεται σε ένα πλήθος ομάδων ακτίνων, όπου κάθε ομάδα παρομοιάζεται με έναν ηχητικό σωλήνα.



**Σχήμα 3.5:** Απεικόνιση ηχητικής δέσμης που εκπέμπεται από σημειακή πηγή και ενός ηχητικού σωλήνα

Από κάθε ομάδα, η μεσαία ακτίνα ονομάζεται κεντρική και παίζει το ρόλο του άξονα της ηχητικής δέσμης. Οι υπόλοιπες δύο, της ίδιας ομάδας, ονομάζονται πλευρικές και αποτελούν τα τοιχώματα του ηχητικού σωλήνα.

Ακολουθώντας, παρακολουθώντας τον άξονα του κάθε ηχητικού σωλήνα από την αρχή (σημειακή πηγή), σε κάθε θέση, κατα μήκος του, υπολογίζεται η απόσταση  $s$ , η οποία αποτελεί το φυσικό μήκος της ακτίνας που έχει διανυθεί (από την αρχή). Επίσης, γνωρίζοντας τις θέσεις των γειτονικών ακτίνων, μπορούμε για σημείο της κεντρικής ακτίνας να βρούμε τα ομόλογα σημεία των πλευρικών ακτίνων. Με αυτόν τον τρόπο,



**Σχήμα 3.6:** Απεικόνιση ηχητικού σωλήνα και υπολογισμός διατομής του για κάθε σημείο

έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε, σε κάθε σημείο, τη διατομή του ηχητικού σωλήνα μέσω της γεωμετρίας των άνω και κάτω ορίων του. Έτσι, έχοντας γνώση του μήκους  $s$  και της διατομής  $A(s)$ , μπορούμε να εκτιμήσουμε την ένταση του ακουστικού πεδίου στην αντίστοιχη θέση. Το Σχήμα 3.6 δείχνει τον ηχητικό σωλήνα και την εκτίμηση της διατομής για κάθε ανάλογο σημείο των ακτίνων.

Ο υπολογισμός της διατομής σε κάθε σημείο πραγματοποιείται προσεγγιστικά με αριθμητική διαδικασία. Η διατομή του σωλήνα σε κάθε θέση  $s$  αντιστοιχεί στο πλάτος  $A(s)$  της πίεσης του ηχητικού πεδίου. Υπολογίζοντας το τετράγωνο του πλάτους της πίεσης έχουμε εκτίμηση για την ένταση του ηχητικού πεδίου, αφού τα ποσά αυτά είναι ανάλογα. Με άλλα λόγια, η ένταση του ακουστικού σωλήνα σε τυχαία θέση  $s$  είναι η ένταση που εκπέμπεται στην αρχή επί το λόγο της διατομής  $A(s)$  στη θέση  $s$  προς τη διατομή  $A(0)$  στην αρχική θέση. Με αυτόν τον τρόπο, επιλύουμε προσεγγιστικά τη σχέση

$$A_s = A_0 \sqrt{\frac{c_s J_0}{c_0 J_s}},$$

από την οποία καταλήγουμε ότι

$$A_s = A_0 \sqrt{\frac{c_s J_0}{c_0 J_s}} \Rightarrow \frac{A_s}{A_0} = \sqrt{\frac{c_s J_0}{c_0 J_s}} \Rightarrow \left(\frac{A_s}{A_0}\right)^2 = \frac{c_s J_0}{c_0 J_s},$$

δηλαδή, ο λόγος της μεταβολής της Ιακωβιανής στην αρχή και στην τρέχουσα θέση  $s$  είναι ισοδύναμος με το λόγο  $\frac{A_s}{A_0}$ .

### 3.3 Αριθμητικό πρόγραμμα m

Το αριθμητικό πρόγραμμα που εφαρμόστηκε στην παρούσα εργασία είναι το ακόλουθο:

```
% ABM method for integrating ray equations from point source
% initial value problem
% Including reflection from free-surface and seabed
% and calculation of intensity of acoustic field (incoherent
summation)
clear all;close all;
r0=0;z0=300;c0=cspeed(r0,z0);

dt=5*10^(-0);tend=20000;itmax=tend/dt;
t=linspace(0,tend,itmax);
nrays=61; thcone=60;dthcone=1;
rray2=0.5*(nrays-1);dth2=2*dthcone;
```

```

figure
for i=1:nrays
    thdeg=-0.5*thcone+(i-1)*dthcone;
    th0=thdeg*pi/180;
    p0=cos(th0)/c0;
    q0=sin(th0)/c0;

    x1=[r0 z0 p0 q0]';F1=ray(t(1),x1);
    x2=[r0+c0*p0*dt z0+c0*q0*dt p0 q0]';F2=ray(t(2),x2);
    x3=[r0+2*c0*p0*dt z0+2*c0*q0*dt p0 q0]';F3=ray(t(3),x3);
    x4=[r0+3*c0*p0*dt z0+3*c0*q0*dt p0 q0]';F4=ray(t(4),x4);

    xold=[x1 x2 x3 x4];
    Fold=[F1 F2 F3 F4];

    %pause
    la(1,1)=x1(1);la(1,2)=x1(2);la(2,1)=x2(1);la(2,2)=x2(2);
    la(3,1)=x1(3);la(3,2)=x1(3);la(4,1)=x4(1);la(4,2)=x4(2);

    for it=5:itmax

        xnew=adbra(xold,Fold,t(it),dt);Fnew=ray(t(it),xnew);%Adams
        Brashford 4th order

        la(it,1)=xnew(1);la(it,2)=xnew(2);
        if xnew(2)>0, % reflection at FS
            xnew(2)=-xnew(2);xnew(4)=-xnew(4);
            if xnew(3)<0, xnew(3)=-xnew(3);end
        end
        hloc= 800-xnew(1)/30; %local depth: hloc=h(x)
        thloc=atan(1/30);%local depth slope: thloc=atan(-dh/dx)
        cloc=cspeed(xnew(1),xnew(2));%local cspeed

        if xnew(2)<-hloc, % reflection at BS

            sloc= atan2(cloc*xnew(4),cloc*xnew(3));
            xnew(2)=-2*hloc-xnew(2);
            xnew(3)=cos(-sloc+thloc)/cloc;
            xnew(4)=sin(-sloc+thloc)/cloc;
            % [sloc thloc -sloc+thloc]
        % pause
    end
end

```

```

end

xold=[xold(:,2) xold(:,3) xold(:,4) xnew];
Fold=[Fold(:,2) Fold(:,3) Fold(:,4) Fnew];

end

plot(la(:,1),la(:,2),'w');hold on
xray(:,i)=la(:,1);zray(:,i)=la(:,2);nray(i)=length(la(:,1));
end

rr=linspace(0,20000,101);
plot(rr,-800+rr/30,'w','linewidth',4);% bathymetry profile
plot(rr,0*rr,'w','linewidth',4);      % free-surface profile
grid on;axis([0 20000 -1000 100])

figure
zz=linspace(-1000,0,201);
for ii=1:201
    cc(ii)=cspeed(0,zz(ii));
end%% ssp
plot(cc,zz,'c','linewidth',2);
grid on;

for i=1:nray2
ii=2*i
xraym=xray(:,ii);      zraym=zray(:,ii);      %srayr=0*xraym;
irayr=srayr; irayr(1)=1;
xrup=xray(:,ii+1);zrup=zray(:,ii+1);xrdd=xray(:,ii-
1);zrdd=zray(:,ii-1);
xrayr(i,1)=xraym(1);zrayr(i,1)=zraym(1);srayr(i,1)=0;
irayr(i,1)=sqrt((xrup(2)-xrdd(2))^2+(zrup(2)-zrdd(1))^2);
for j=2:nray(ii)-100
    xrayr(i,j)=xraym(j);zrayr(i,j)=zraym(j);
    srayr(i,j)=srayr(i,j-1)+sqrt((xraym(j)-xraym(j-
1))^2+(zraym(j)-zraym(j-1))^2);
    irayr(i,j)=irayr(i,1)/sqrt((xrup(j)-xrdd(j))^2+(zrup(j)-
zrdd(j-1))^2);
%    [xrayr(i,j) zrayr(i,j) srayr(i,j) irayr(i,j)]
%    pause
end
end
end

```

```

figure
for i=1:3:nray2
scatter(xrayr(i,:),zrayr(i,:),4,10*log10(irayr(i,:))-10);hold
on;
end
colormap jet
colorbar
plot(rr,-800+rr/30,'w','linewidth',4);% bathymetry profile
plot(rr,0*rr,'w','linewidth',4);      % free-surface profile
grid on;axis([0 20000 -1000 100])
%-----

function xcor=adbra(xold,Fold,t,dt)
% ABM numerical integration
Xpre=xold(:,4)+(dt/24)*(55*Fold(:,4)-59*Fold(:,3)
+37*Fold(:,2) -9*Fold(:,1) );
Fpre=ray(t,Xpre);
xcor=xold(:,4)+(dt/24)*(9*Fpre+19*Fold(:,3)-5*Fold(:,2)+
+1*Fold(:,1) );
%-----

function f=cspeed(r,z)
% sound speed data
z0=-300;A=1510;B=6*10^(-4);
fa=A*cosh(B*(z-z0));
% zlim=-800+r/30;
% if z<zlim, fa=5000;end
f=fa;
%-----

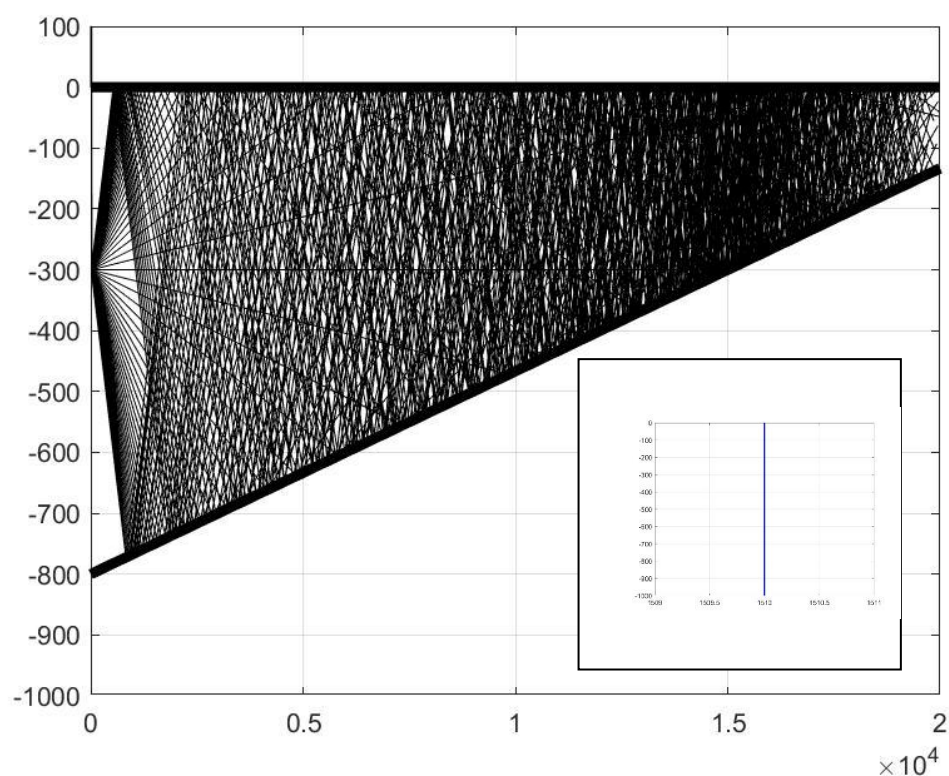
function f=csdz(r,z)
%sound speed derivative
z0=300;A=1510;B=6*10^(-4);
f=A*B*sinh(B*(z-z0));

```



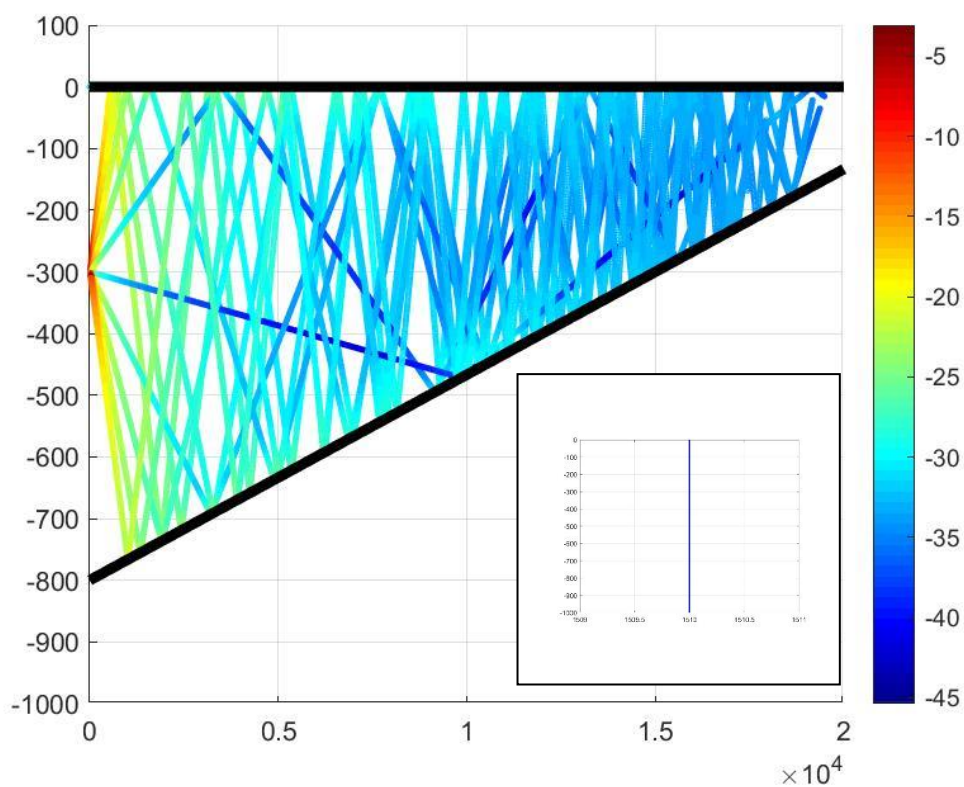
#### 4. Παραδείγματα εφαρμογής

Στο κεφάλαιο αυτό δείχνουμε κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα από τα αποτελέσματά μας. Αρχικά, είχαμε δείξει την περίπτωση ενός περιβάλλοντος χωρίς σύνορα. Στη συνέχεια, εξετάσαμε την επίδραση των δύο φυσικών συνόρων στη διάδοση των ακτίνων καθώς και στη μεταβολή της έντασης του ηχητικού πεδίου. Τα σύνορα που επιλέξαμε ήταν για την ελεύθερη επιφάνεια να είναι οριζόντια και για τον πυθμένα να είναι κεκλιμένος, με αμελητέα καμπύλη. Στο Σχήμα 4.1 απεικονίζεται η διάδοση των ηχητικών ακτίνων σε ομογενές μέσο διάδοσης, δηλαδή το προφίλ της ταχύτητας του ήχου να είναι σταθερό συναρτήσει του βάθους. Η σημειακή πηγή έχει οριστεί σε βάθος 300m από την ελεύθερη επιφάνεια. Παρατηρούμε ότι οι ηχητικές ακτίνες δεν καμπυλώνουν και παραμένουν ευθείες γραμμές.



**Σχήμα 4.1:** Διάδοση των ηχητικών ακτίνων σε ομογενές μέσο διάδοσης

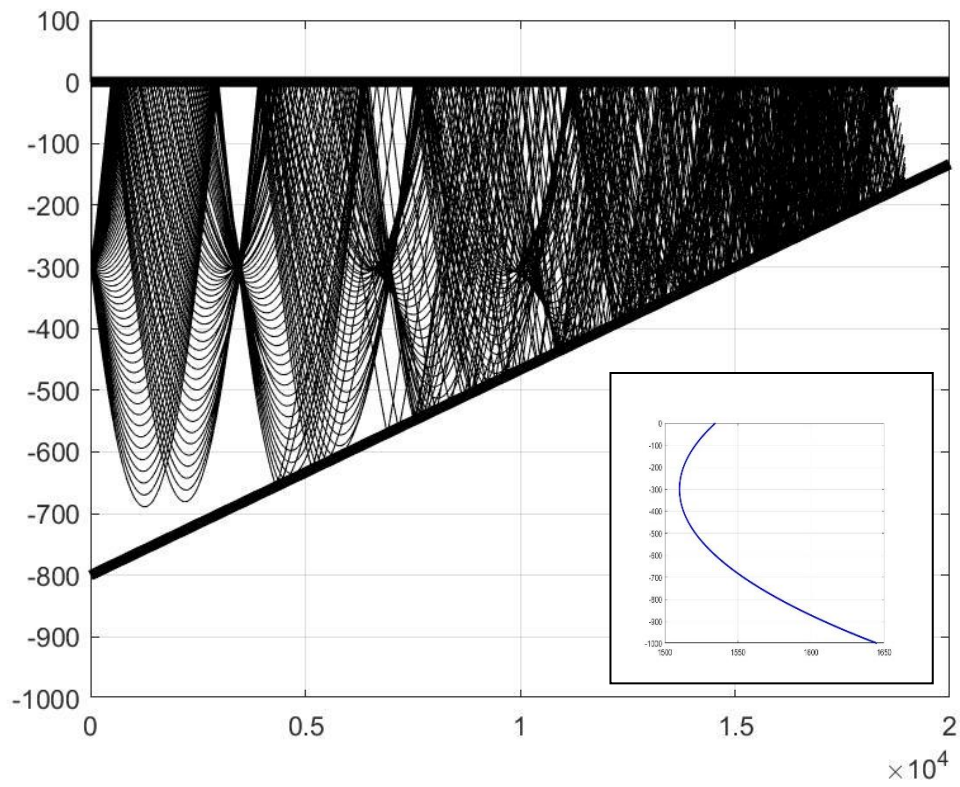
Στο Σχήμα 4.2 απεικονίζεται η απώλεια διάδοσης του ηχητικού σήματος πάλι σε ομογενές μέσο διάδοσης (σταθερή ταχύτητα συναρτήσει του βάθους  $z$ ). Παρατηρούμε πως η μονάδα μέτρησης που λήφθηκε είναι το decibel (dB), η οποία χρησιμοποιείται ευρέως στις υδροακουστικές εφαρμογές. Έχει αρνητικές τιμές και αυτό σημαίνει πως στις συγκεκριμένες εφαρμογές υπολογίζουμε την εξασθένηση της ηχητικής έντασης. Όσο απομακρυνόμαστε από τη σημειακή πηγή, η οποία βρίσκεται στα 300m βάθος, η εξασθένηση της έντασης είναι όλο και μεγαλύτερη για κάθε ηχητική ακτίνα. Κοντά στη σημειακή πηγή, η εξασθένηση είναι σαφώς μικρότερη.



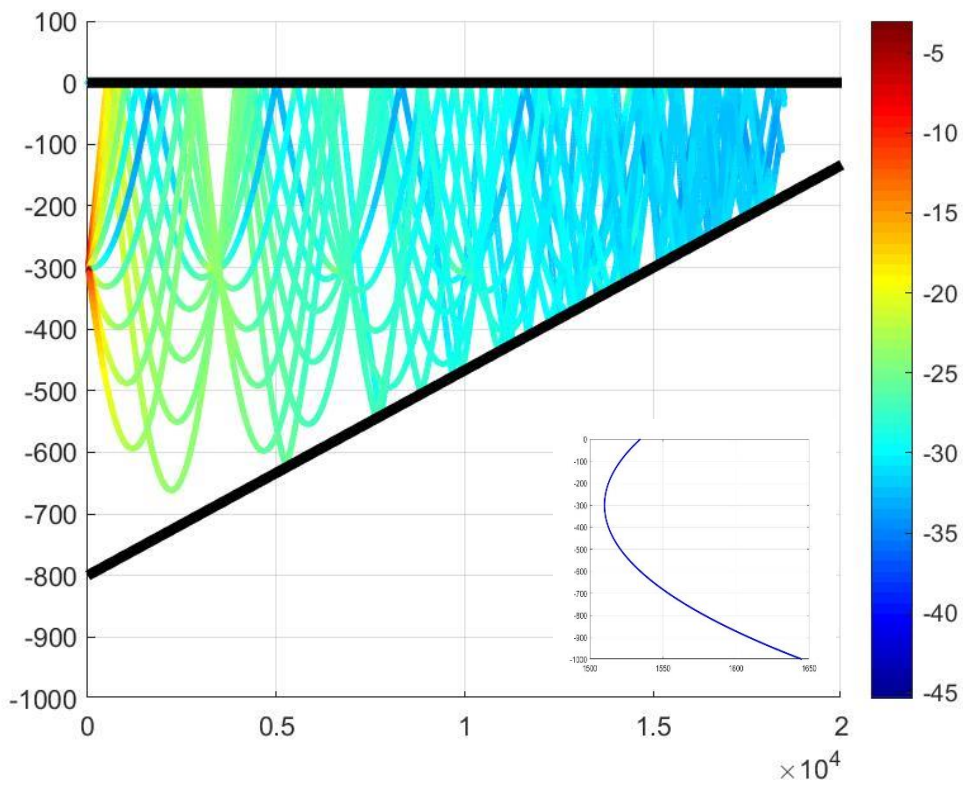
**Σχήμα 4.2:** Απεικόνιση απώλειας διάδοσης της ηχητικής ενέργειας σε ομογενές μέσο διάδοσης

Τα επόμενα δύο σχήματα (Σχήμα 4.3 και Σχήμα 4.4) δείχνουν την διάδοση των ακτίνων και την απώλεια διάδοσης της ηχητικής ενέργειας σε ανομοιογενές μέσο διάδοσης. Συγκεκριμένα, το προφίλ της ταχύτητας του ήχου είναι τύπου υπερβολικού συνημιτόνου που παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή του σε βάθος 300m, δηλαδή στο σημείο που έχουμε τοποθετήσει τη σημειακή πηγή. Παρατηρούμε από το Σχήμα 4.3 ότι οι ακτίνες διάδοσης καμπυλώνουν και εμφανίζεται το φαινόμενο της πλεξουδοποίησης. Επίσης, το γεγονός ότι η πηγή βρίσκεται στο σημείο όπου η ταχύτητα του ήχου είναι ελάχιστη έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία ηχητικού καναλιού. Δηλαδή, τη παγίδευση των ακτίνων σε έναν άξονα γύρω από τη θέση του ελαχίστου της ταχύτητας.

Στο Σχήμα 4.4, όπου απεικονίζεται η απώλεια διάδοσης της ηχητικής έντασης, παρατηρούμε πως οι απώλειες ναι μεν είναι μεγαλύτερες όσο απομακρυνόμαστε από τη σημειακή πηγή αλλά συγκριτικά με τη περίπτωση του ομογενους μέσου διάδοσης, οι απώλειες είναι σαφώς λιγότερες.



**Σχήμα 4.3:** Διάδοση των ηχητικών ακτίνων σε ανομοιογενές μέσο διάδοσης



**Σχήμα 4.4:** Απεικόνιση απώλειας διάδοσης της ηχητικής ενέργειας σε ανομοιογενές μέσο διάδοσης

## 5. Συμπεράσματα – προτάσεις για μελλοντική εργασία

Η θεωρία ακτίνων αποτελώντας μια υψίσυχη ασυμπτωτική επίλυση της εξίσωσης Helmholtz σε ανομοιογενή μέσα, τα οποία μπορεί να παρουσιάζουν διαστρωματώσεις και συνεχή μεταβολή του δείκτη διάθλασης, παρέχει ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για υπολογισμούς και εφαρμογές σε υψηλές συχνότητες, όπου οι μέθοδοι που βασίζονται στη αριθμητική επίλυση των αντίστοιχων προβλημάτων συνοριακών τιμών οδηγούν σε πολύ υψηλό υπολογιστικό κόστος. Σε συνδυασμό με μεγάλες εκτάσεις διάδοσης όπως συμβαίνει στην υδροακουστική στη θάλασσα μπορεί να οδηγήσει σε απαγορευτικές απαιτήσεις. Ο υπολογισμός της γεωμετρίας των ακτίνων σε συνδυασμό με την εξίσωση μεταφοράς για την εκτίμηση του πλάτους του ακουστικού πεδίου μας παρέχει μια χρήσιμη πληροφορία για την συνολική εικόνα του ακουστικού πεδίου στα θαλάσσια υδροακουστικά προβλήματα-εφαρμογές και των ειδικών χαρακτηριστικών που μπορεί να προκύψουν σε ό,τι αφορά το σχηματισμό καναλιών και ζωνών σκιάς.

Η διάδοση των ακουστικών κυμάτων βρίσκει πολλές και σημαντικές εφαρμογές στη θάλασσα. Το θαλάσσιο περιβάλλον αποτελεί ένα φυσικό κυματοδηγό, ο οποίος περιορίζεται άνωθεν από την ελεύθερη επιφάνεια και κάτωθεν από το θαλάσσιο πυθμένα. Λόγω του γεγονότος αυτού, και επειδή η απορρόφηση της ακουστικής ενέργειας (ισχύος) από το θαλασσινό νερό είναι πολύ μικρή, τα ακουστικά κύματα μπορούν να διαδοθούν σε μεγάλες αποστάσεις μέσα στη θάλασσα. Γι' αυτό το λόγο, τα ακουστικά κύματα χρησιμοποιούνται στη θάλασσα για βαθυμετρήσεις, ανίχνευση και παρακολούθηση αντικειμένων, υποθαλάσσια τηλεπικοινωνία και μετάδοση πληροφοριών, τομογραφική διερεύνηση των θαλασσιών μαζών και του πυθμένα της θάλασσας και πολλές άλλες εφαρμογές.

Στην εργασία αυτή έγινε ανάπτυξη και εφαρμογή μοντέλου που βασίζεται στη θεωρία ακτίνων για τον υπολογισμό ακουστικού πεδίου σε θαλάσσιο περιβάλλον με μεταβαλλόμενη βαθυμετρία, που αποτελεί πρόσθετη παράμετρο ανομοιογένειας και επηρεάζει σημαντικά το ακουστικό πεδίο ιδιαίτερα σε περιοχές κοντά στην ακτή, όπου το βάθος νερού μειώνεται και η αλληλεπίδραση με το πυθμένα καθίσταται πιο ισχυρή. Αναπτύχθηκε αριθμητικό μοντέλο ολοκλήρωσης των εξισώσεων των ακτίνων με τη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης Adams-Bashford-Moulton, η οποία είναι μέθοδος ανώτερης τάξης και παρέχει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα για μεγάλες αποστάσεις διάδοσης. Χάριν απλότητας, έγινε περιορισμός της εφαρμογής σε δισδιάστατα προβλήματα. Για τον έλεγχο ακρίβειας της αριθμητικής λύσης έγιναν συγκρίσεις σε παραδείγματα με αναλυτική λύση και διαπιστώθηκε η πολύ καλή συμπεριφορά του αριθμητικού σχήματος. Στην συνέχεια, εισήχθησαν οι επιδράσεις ανάκλασης από τα σύνορα (ελεύθερη επιφάνεια και πυθμένα) με τη τεχνική του κατοπτρισμού και έγινε εκτίμηση της έντασης του ακουστικού πεδίου για ηχητική εκπομπή από σημειακή πηγή με βάση τη τροποποίηση της διατομής του ηχητικού σωλήνα, η οποία αποτελεί έμμεσο τρόπο προσεγγιστικής επίλυσης της εξίσωσης μεταφοράς.

Θέματα μελλοντικής εργασίας αποτελούν η επέκταση του αριθμητικού σχήματος σε αξονοσυμμετρικά προβλήματα στις τρεις διαστάσεις με την εισαγωγή επιπρόσθετων απωλειών γεωμετρικής εξασθένησης και στο πλήρες τρισδιάστατο πρόβλημα. Επίσης,

μπορεί να εισαχθούν οι επιδράσεις εξασθένησης λόγω απορρόφησης της ενέργειας από το μέσο και της ανάκλασης από τον πυθμένα. Τέλος, σημαντικό θέμα επέκτασης αποτελεί η εισαγωγή ακουστικών δεσμών ως μια καλύτερη προσέγγιση της παραγόμενης λύσης ιδιαίτερα στις περιοχές ιδιομορφιών (καυστικές και όρια ζωνών σκιάς).

## Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Brekhovskikh, L.M., 1980 (2nd edition), *Waves in Layered Media*, Academic Press, Inc. Orlando, Florida.
- Brekhovskikh, L.M., O.A. Godin, 1992, *Acoustics of Layered Media*, Springer Series on Wave Phenomena, Springer-Verlag, Berlin.
- Brekhovskikh, L.M., Lysanov, Yu., 1982, *Fundamentals of ocean acoustics*, Springer-Verlag
- Clay, C.S., Medwin, H., 1997, *Acoustics: An introduction to its physical principles and applications*, Wiley-Interscience.
- D. Makarov, S. Prants, A. Virovlyansky & G. Zaslavsky, 2010, *Ray and Wave Chaos in Ocean Acoustics – Chaos in Waveguides*, World Scientific
- Etter, P.C., 1991, *Underwater acoustic modeling*, Elsevier
- Francois, R.W., Garrison, G.R., 1982, Sound absorption based on ocean measurements, *Journal of the Acoustical Soc. of America*, 72, pp. 1879-1890.
- Gelfand, I.M., S.V. Fomin, 1963, *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Jensen, F.B., Kuperman, W.A., Porter, M.B., Schmidt, H., 1994, *Computational ocean acoustics*, AIP Series in Modern Acoustics and Signal Processing (2<sup>nd</sup> Edition Springer 2011)
- Kratsov, Yu.A., Yu.I. Orlov, 1990, *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media*, Springer-Verlag, Berlin.
- Newcomb, W.A., 1983, "Generalized Fermat's principle", *Amer. J. Phys.*, 51, 338.
- Pierce, A.D., 1981, *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- Phillips, O.M., 1977, *The dynamics of the upper ocean*, Cambridge University Press.
- Sagan, H., 1992, *Introduction to the Calculus of Variations*, Dover Publications, Inc., New York (1969, McGraw-Hill Book Company).
- Shaw, J.H., 1965, "Fermat's principle and geometrical optics", *Amer. J. Phys.*, Vol. 33, pp. 40.
- Urick, R.J., 1983, *Principles of underwater sound*, Mc Graw Hill.
- Wentz, G.M., 1962, *Acoustic ambient noise in the ocean: spectra and sources*, *Journal of the Acoustical Soc. of America*, 34, pp. 1936-1956.

## Παραρτήματα

### ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. Παραγωγή της εξίσωσης της εικόνας από την εξίσωση Helmholtz

Από την εξίσωση Helmholtz

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0$$

χρησιμοποιώντας κατάλληλη ασυμπτωτική ανάπτυξη της μορφής

$$p(\vec{x}) = e^{i\omega\tau(\vec{x})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j(\vec{x})}{(i\omega)^j}$$

αποδεικνύουμε την εξίσωση της εικόνας.

Παραγωγίζοντας πρώτη φορά ως προς  $x$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} p_x &= e^{i\omega\tau} \cdot (i\omega) \cdot \tau_x \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + e^{i\omega\tau} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j,x}}{(i\omega)^j} \Rightarrow \\ \Rightarrow p_x &= e^{i\omega\tau} \left[ (i\omega) \cdot \tau_x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j,x}}{(i\omega)^j} \right] \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας δεύτερη φορά ως προς  $x$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} p_{xx} &= e^{i\omega\tau} \cdot (i\omega)^2 \cdot (\tau_x)^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + e^{i\omega\tau} \cdot (i\omega) \cdot \tau_{xx} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + e^{i\omega\tau} \cdot (i\omega) \cdot \tau_x \\ &\quad \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j,x}}{(i\omega)^j} + e^{i\omega\tau} \cdot (i\omega) \cdot \tau_x \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j,x}}{(i\omega)^j} + e^{i\omega\tau} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j,xx}}{(i\omega)^j} = \\ &= 2e^{i\omega\tau} \cdot (i\omega) \cdot \tau_x \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j,x}}{(i\omega)^j} + e^{i\omega\tau} \cdot (-\omega^2) \cdot (\tau_x)^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + e^{i\omega\tau} \cdot (i\omega) \cdot \tau_{xx} \\ &\quad \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + e^{i\omega\tau} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j,xx}}{(i\omega)^j} = \\ &= 2e^{i\omega\tau} \cdot (i\omega) \cdot \tau_x \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j,x}}{(i\omega)^j} - e^{i\omega\tau} \cdot \omega^2 \cdot (\tau_x)^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + e^{i\omega\tau} \cdot (i\omega) \cdot \tau_{xx} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} \\ &\quad + e^{i\omega\tau} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j,xx}}{(i\omega)^j} = \\ &= e^{i\omega\tau} \left[ 2i\omega\tau_x \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j,x}}{(i\omega)^j} - \omega^2 \cdot (\tau_x)^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + i\omega \cdot \tau_{xx} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j,xx}}{(i\omega)^j} \right] = \end{aligned}$$

$$= e^{i\omega\tau} \left\{ [-\omega^2 \cdot (\tau_x)^2 + i\omega \cdot \tau_{xx}] \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + 2i\omega\tau_x \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j,x}}{(i\omega)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j,xx}}{(i\omega)^j} \right\}$$

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας τελεστές, έχουμε

$$\nabla^2 p = e^{i\omega\tau} \left\{ [-\omega^2 \cdot |\nabla\tau|^2 + i\omega \cdot \nabla^2\tau] \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + 2i\omega\nabla\tau \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nabla A_j}{(i\omega)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nabla^2 A_j}{(i\omega)^j} \right\}$$

Η εξίσωση Helmholtz γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{i\omega\tau} \left\{ [-\omega^2 \cdot |\nabla\tau|^2 + i\omega \cdot \nabla^2\tau] \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + 2i\omega\nabla\tau \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nabla A_j}{(i\omega)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nabla^2 A_j}{(i\omega)^j} \right\} \\ &+ \frac{\omega^2}{c^2} e^{i\omega\tau} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{i\omega\tau} \left\{ [-\omega^2 \cdot |\nabla\tau|^2 + i\omega \cdot \nabla^2\tau] \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + 2i\omega\nabla\tau \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nabla A_j}{(i\omega)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nabla^2 A_j}{(i\omega)^j} \right. \\ &\left. + \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} \right\} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow [-\omega^2 \cdot |\nabla\tau|^2 + i\omega \cdot \nabla^2\tau] \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + 2i\omega\nabla\tau \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nabla A_j}{(i\omega)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nabla^2 A_j}{(i\omega)^j} + \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} \\ &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (-\omega^2 \cdot |\nabla\tau|^2) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + i\omega \cdot \nabla^2\tau \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} + 2i\omega\nabla\tau \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nabla A_j}{(i\omega)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nabla^2 A_j}{(i\omega)^j} \\ &+ \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(i\omega)^j} = 0 \end{aligned} \quad (A.1)$$

Από την παραπάνω εξίσωση (A.1) συλλέγουμε τους όρους 2<sup>ης</sup> τάξης του  $\omega$ , οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} (-\omega^2 \cdot |\nabla\tau|^2) \cdot A_0 + \frac{\omega^2}{c^2} A_0 &= 0 \Rightarrow \omega^2 \cdot A_0 \left( -|\nabla\tau|^2 + \frac{1}{c^2} \right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -|\nabla\tau|^2 + \frac{1}{c^2} &= 0 \Rightarrow |\nabla\tau|^2 = \frac{1}{c^2} \quad \text{εξίσωση εικόνας} \end{aligned}$$



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β. Παραγωγή των εξισώσεων μεταφοράς από την εξίσωση Helmholtz

Ακολουθώντας, από την ίδια εξίσωση (Α.1) συλλέγουμε τους όρους 1<sup>ης</sup> τάξης του  $\omega$ , οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
 & -\omega \cdot |\nabla\tau|^2 \cdot \frac{A_1}{i} + i\omega \cdot \nabla^2\tau \cdot A_0 + 2i\omega\nabla\tau \cdot \nabla A_0 + \frac{\omega}{c^2} \cdot \frac{A_1}{i} = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & i^2 \cdot \omega \cdot |\nabla\tau|^2 \cdot \frac{A_1}{i} + i\omega \cdot \nabla^2\tau \cdot A_0 + 2i\omega\nabla\tau \cdot \nabla A_0 - i^2 \cdot \frac{\omega}{c^2} \cdot \frac{A_1}{i} = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & i \cdot \omega \cdot |\nabla\tau|^2 \cdot A_1 + i\omega \cdot \nabla^2\tau \cdot A_0 + 2i\omega\nabla\tau \cdot \nabla A_0 - i \cdot \frac{\omega}{c^2} \cdot A_1 = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & i\omega \left( |\nabla\tau|^2 \cdot A_1 + \nabla^2\tau \cdot A_0 + 2\nabla\tau \cdot \nabla A_0 - \frac{1}{c^2} A_1 \right) = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & |\nabla\tau|^2 \cdot A_1 + \nabla^2\tau \cdot A_0 + 2\nabla\tau \cdot \nabla A_0 - \frac{1}{c^2} A_1 = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & |\nabla\tau|^2 \cdot A_1 + \nabla^2\tau \cdot A_0 + 2\nabla\tau \cdot \nabla A_0 - |\nabla\tau|^2 \cdot A_1 = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & \mathbf{\nabla^2\tau \cdot A_0 + 2\nabla\tau \cdot \nabla A_0 = 0} \quad \text{εξίσωση μεταφοράς}
 \end{aligned}$$

Έπειτα, από την ίδια εξίσωση συλλέγουμε τους όρους μηδενικής τάξης του  $\omega$ , οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
 & -|\nabla\tau|^2 \cdot \frac{A_2}{i^2} + i \cdot \nabla^2\tau \cdot \frac{A_1}{i} + 2i \cdot \nabla\tau \cdot \frac{\nabla A_1}{i} + \nabla^2 A_0 + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{A_2}{i^2} = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & |\nabla\tau|^2 \cdot A_2 + \nabla^2\tau \cdot A_1 + 2\nabla\tau \cdot \nabla A_1 + \nabla^2 A_0 - \frac{1}{c^2} \cdot A_2 = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & |\nabla\tau|^2 \cdot A_2 + \nabla^2\tau \cdot A_1 + 2\nabla\tau \cdot \nabla A_1 + \nabla^2 A_0 - |\nabla\tau|^2 \cdot A_2 = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & \mathbf{\nabla^2\tau \cdot A_1 + 2\nabla\tau \cdot \nabla A_1 = -\nabla^2 A_0} \quad \text{εξίσωση μεταφοράς}
 \end{aligned}$$

Ακολουθώντας, από την ίδια εξίσωση συλλέγουμε τους όρους -1<sup>ης</sup> τάξης του  $\omega$ , οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
 & |\nabla\tau|^2 \cdot \frac{A_3}{i\omega} - i \cdot \nabla^2\tau \cdot \frac{A_2}{\omega} - 2i \cdot \nabla\tau \cdot \frac{\nabla A_2}{\omega} + \frac{\nabla^2 A_1}{i\omega} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{A_3}{i\omega} = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & |\nabla\tau|^2 \cdot \frac{A_3}{i\omega} - i \cdot \nabla^2\tau \cdot \frac{A_2}{\omega} - 2i \cdot \nabla\tau \cdot \frac{\nabla A_2}{\omega} + \frac{\nabla^2 A_1}{i\omega} - |\nabla\tau|^2 \cdot \frac{A_3}{i\omega} = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & -i \cdot \nabla^2\tau \cdot \frac{A_2}{\omega} - 2i \cdot \nabla\tau \cdot \frac{\nabla A_2}{\omega} + \frac{\nabla^2 A_1}{i\omega} = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & -i \cdot \nabla^2\tau \cdot A_2 - 2i \cdot \nabla\tau \cdot \nabla A_2 + \frac{\nabla^2 A_1}{i} = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & -i \cdot \nabla^2\tau \cdot A_2 - 2i \cdot \nabla\tau \cdot \nabla A_2 + i \cdot \frac{\nabla^2 A_1}{i^2} = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & -i \cdot \nabla^2\tau \cdot A_2 - 2i \cdot \nabla\tau \cdot \nabla A_2 - i \cdot \nabla^2 A_1 = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & \nabla^2\tau \cdot A_2 + 2 \cdot \nabla\tau \cdot \nabla A_2 + \nabla^2 A_1 = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow & \mathbf{\nabla^2\tau \cdot A_2 + 2\nabla\tau \cdot \nabla A_2 = -\nabla^2 A_1} \quad \text{εξίσωση μεταφοράς}
 \end{aligned}$$

Γενικά για όρους 1-j τάξης, με  $j = 1, 2, 3, 4, \dots$ , του  $\omega$  θα ισχύει

$$\mathbf{\nabla^2\tau \cdot A_j + 2\nabla\tau \cdot \nabla A_j = -\nabla^2 A_{j-1}} \quad \text{εξίσωση μεταφοράς}$$

## B.1 Επιλύοντας την εξίσωση μεταφοράς

Στο μέρος αυτό περιγράφουμε την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς και μεθόδους υπολογισμού της έντασης του ακουστικού πεδίου. Χρησιμοποιήθηκε, ως βασική πηγή αναφοράς, το σύγγραμμα των Jensen et al (1994/2011).

Το τελικό βήμα στον υπολογισμό της πίεσης είναι να συνδυάσουμε ένα πλάτος με κάθε ακτίνα, με άλλα λόγια, να λύσουμε την εξίσωση μεταφοράς, η οποία είναι:

$$2\nabla\tau \cdot \nabla A_0 + (\nabla^2\tau)A_0 = 0$$

Αυτή μπορεί επίσης να γραφεί στη μορφή,

$$\nabla \cdot (A_0^2 \nabla\tau) = 0$$

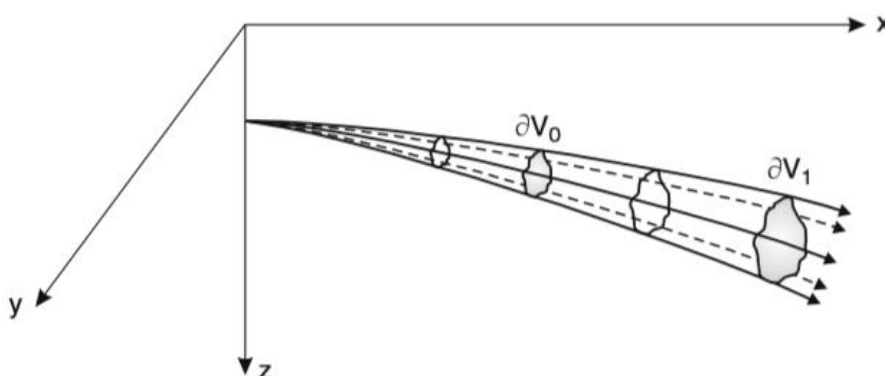
Θεωρούμε ένα τυχαίο πεδίο  $F$  και τυχαίο όγκο  $V$ . Υπενθυμίζουμε ότι το Θεώρημα του Gauss (το θεώρημα απόκλισης) εξισώνει το ολοκλήρωμα της απόκλισης του  $F$ , για όλο τον όγκο με τη ροή του μέσα από τον στοιχειώδες όγκο:

$$\int_V \nabla \cdot F dV = \int_{\partial V} F \cdot \mathbf{n} dS,$$

όπου  $\mathbf{n}$  είναι ένα εξερχόμενο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα. Από αυτό, καταλήγουμε:

$$\int_{\partial V} A_0^2 \nabla\tau \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε ένα σωλήνα ακτίνων όπου ο όγκος περικλείεται από μια οικογένεια ακτίνων, όπως δείχνεται στο Σχήμα B.1. Αφού οι ακτίνες είναι κάθετες στα



**Σχήμα B.1:** Κατασκευή ενός σωλήνα ακτίνων

μέτωπα φάσης, το γινόμενο  $\nabla\tau \cdot \mathbf{n}$  απαλείφεται στις άκρες του σωλήνα ακτίνων. Εν τω μεταξύ, στα άκρα του σωλήνα ακτίνων, η ίδια η ακτίνα είναι το κάθετο διάνυσμα:  $\mathbf{n} = \pm d\mathbf{x}/ds$  και έτσι είναι  $\nabla\tau \cdot \mathbf{n} = 1/c$ . Άρα, παίρνουμε την ακόλουθη αρχή διατήρησης της ενέργειας:

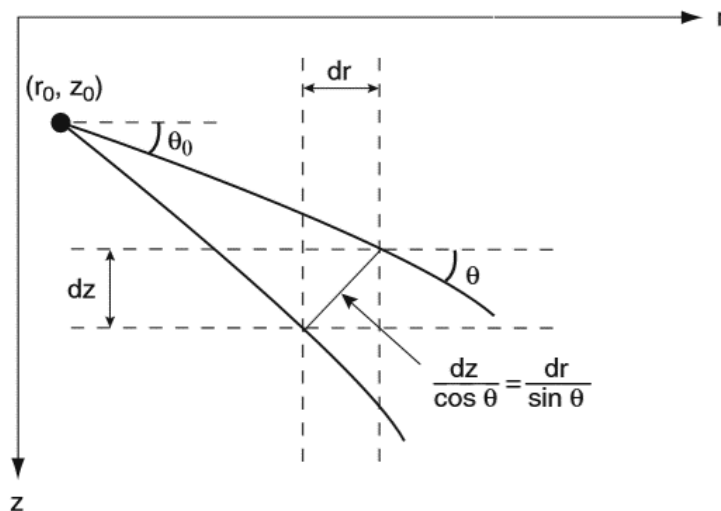
$$\int_{\partial V_0} \frac{A_0^2}{c} dS = \int_{\partial V_1} \frac{A_0^2}{c} dS = \text{const},$$

όπου  $\partial V_0$  και  $\partial V_1$  δηλώνουν τους στοιχειώδεις όγκους του σωλήνα, όπως δείχνεται στο Σχήμα Β.1. Αυτό είναι ένα σημαντικό αποτέλεσμα, το οποίο επιβεβαιώνει την διαισθητική όψη της διάδοσης της ενέργειας εντός ενός σωλήνα ακτίνων. Επιπρόσθετα, συνεπάγεται ένα ανοδικό ή πτωτικό πλάτος όσο ο σωλήνας συρρικνώνεται και επεκτείνεται. Πιο συγκεκριμένα, αν επιτρέψουμε τον σωλήνα ακτίνων να γίνει απειροελάχιστα μικρός και χρησιμοποιήσουμε τιμές σε ένα τυχαίο  $s=0$  ως αναφορά, καταλήγουμε ότι

$$A_0(s) = A_0(0) \sqrt{\frac{c(s) J(0)}{c(0) J(s)}},$$

όπου  $J(s)$  είναι μια οποιαδήποτε ποσότητα ανάλογη με το εμβαδό διατομής του σωλήνα ακτίνων. Θα δούμε αργότερα ότι αυτό το εμβαδό διατομής σχετίζεται επίσης με μια συγκεκριμένη Ιακωβιανή  $J$ . Τώρα θα μιλήσουμε ειδικά για την συχνή περίπτωση μιας σημειακής πηγής σε έναν κυλινδρικά συμμετρικό ωκεανό. Θεωρούμε έναν «σωλήνα ακτίνων» που σχηματίζεται από το σύνολο δύο ακτίνων, οι οποίες ξεκινούν με γειτονικές γωνίες έναρξης, διαφοράς  $d\theta_0$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα Β.2. Το εμβαδό διατομής είναι απλά η υποτείνουσα  $J d\theta_0$  με:

$$J = r \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial \theta_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial \theta_0} \right)^2 \right]^{1/2}$$



**Σχήμα Β.2:** Η εγκάρσια διατομή ενός σωλήνα ακτίνων

Ο επιπλέον παράγοντας  $r$  εξηγεί το γεγονός ότι έχουμε θεωρήσει κυλινδρική συμμετρία έτσι ώστε το Σχήμα Β.2 να δείχνει πραγματικά ένα κομμάτι μέσα από το σωλήνα, ο οποίος περιστρέφεται γύρω από τον άξονα  $z$ . Ξανά από την γεωμετρία, μπορούμε να δούμε ότι οι ακόλουθες μορφές είναι ισοδύναμες:

$$J = \frac{r}{\cos \theta_0} \frac{\partial z}{\partial \theta_0} = \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial r}{\partial \theta_0},$$

όπου  $\theta$  είναι η γωνία της ακτίνας στον δέκτη. Μερικές φορές η μία ή η άλλη από αυτές τις παραστάσεις είναι κατάλληλες για αριθμητικές εφαρμογές.

Σε πολύ παλιούς κώδικες, το εμβαδό διατομής υπολογιζόταν βάζοντας παχύμετρα στις τροχιές των ακτίνων, δηλαδή χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών. Για παράδειγμα, η τελευταία εξίσωση δίνει την προσέγγιση:

$$J(s) = \frac{r_i(s)}{\sin\theta} \frac{r_{i+1}(s) - r_i(s)}{\delta\theta_0},$$

όπου  $r_i(s) = r(s; \theta_0)$  και  $r_{i+1}(s) = r(s; \theta_0 + \delta\theta_0)$  είναι διαδοχικές ακτίνες σχηματίζοντας ένα σωλήνα ακτίνων.

## B.2 Πλάτη ακτίνων και Ιακωβιανές

Το Παράρτημα B.1 εκμεταλλεύεται το θεώρημα απόκλισης για να δώσει μια απλή και διαισθητική εικόνα για το πως αναπτύσσεται το πλάτος της ακτίνας. Είναι επίσης χρήσιμο να είμαστε ικανοί να βλέπουμε τις ακτίνες αλλάζοντας το σύστημα συντεταγμένων, του οποίου η Ιακωβιανή εκφράζει το πλάτος κατά μήκος της ακτίνας. Για να ερευνήσουμε αυτή τη προσέγγιση, υπενθυμίζουμε ότι οι ακτίνες είναι πάντα κάθετες στα μέτωπα κύματος. Αυτό μας επιτρέπει να ξαναγράψουμε την εξίσωση μεταφοράς ως

$$\frac{2}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \nabla A_0 + (\nabla^2 \tau) A_0 = 0$$

Ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει μια κατά διεύθυνση παράγωγο κατά μήκος της διαδρομής της ακτίνας έτσι ώστε

$$\frac{2}{c} \frac{dA_0}{ds} + (\nabla^2 \tau) A_0 = 0$$

Στη θεωρία, μπορούμε να υπολογίσουμε τον όρο  $\nabla^2 \tau$  και μετά να ολοκληρώσουμε αυτή την εξίσωση κατά μήκος μιας διαδρομής ακτίνας. Από την άλλη μεριά,

$$\nabla^2 \tau = \nabla \cdot \nabla \tau = \nabla \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds},$$

έτσι ο όρος  $\nabla^2 \tau$  δίνεται από την απόκλιση των ακτίνων. Δηλαδή, το πλάτος κατά μήκος μιας ακτίνας αλλάζει σε σχέση με την εξάπλωση του σωλήνα ακτίνων. Για να κάνουμε αυτή τη δήλωση ακριβή, εισάγουμε την Ιακωβιανή. Για ένα τρισδιάστατο πρόβλημα, έχουμε

$$J = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial (s, \theta_0, \varphi_0)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial \theta_0} & \frac{\partial x}{\partial \varphi_0} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial \theta_0} & \frac{\partial y}{\partial \varphi_0} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial \theta_0} & \frac{\partial z}{\partial \varphi_0} \end{vmatrix},$$

όπου  $\theta_0$  και  $\varphi_0$  είναι, αντίστοιχα, οι αποκλίνουσες και αζιμουθιακές γωνίες έναρξης της ακτίνας. Για ένα κυλινδρικά συμμετρικό πρόβλημα, η Ιακωβιανή απλοποιείται σε

$$J = r \left( \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial \theta_0} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \theta_0} \right),$$

ή

$$J = r \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial \theta_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial \theta_0} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Επίσης, η Ιακωβιανή ικανοποιεί τη σχέση

$$\nabla^2 \tau = \frac{1}{J} \frac{d}{ds} \left( \frac{J}{c} \right)$$

έτσι μπορούμε να γράψουμε για την εξίσωση μεταφοράς ότι

$$2 \frac{dA_0}{ds} + \left[ \frac{c}{J} \frac{d}{ds} \left( \frac{J}{c} \right) \right] A_0 = 0$$

Ολοκληρώνοντας αυτή την εξίσωση, παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα για τη λύση της εξίσωσης μεταφοράς, δηλαδή

$$A_0(s) = A_0(0) \left| \frac{c(s) J(0)}{c(0) J(s)} \right|^{1/2}$$

η οποία, φυσικά, συμφωνεί με το αποτέλεσμα που εξάγαμε προηγουμένως.

### B.3 Αρχικές Συνθήκες

Για να ολοκληρωθεί η λύση των εξισώσεων Eikonal και μεταφοράς, πρέπει να ορίσουμε τις αρχικές συνθήκες. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των προβλημάτων κανονικότητας: ένας κατασκευάζει ένα απλούστερο πρόβλημα για το οποίο η ακριβής λύση είναι γνωστή και οι αρχικές συνθήκες επιλέγονται έτσι ώστε το αποτέλεσμα της ακτίνας να συμφωνεί με την ακριβή λύση. Στην ωκεάνια ακουστική, ενδιαφερόμαστε γενικά για μια σημειακή πηγή και προτείνεται να λάβουμε το πρόβλημα της σημειακής πηγής σε ένα άπειρο ομογενές μέσο ως πρόβλημα κανονικότητας. Λαμβάνουμε τη ταχύτητα του ήχου στο ομογενές μέσο να είναι ίδια με εκείνη του αρχικού μη ομογενούς προβλήματος που εκτιμήθηκε στην πηγή, δηλαδή  $c_0 = c_{s=0}$ .

Η λύση σε αυτό το πρόβλημα δίνεται από τη σχέση

$$p^0(s) = \frac{e^{i\omega s/c_0}}{4\pi s},$$

όπου  $s$  είναι η απόσταση από τη πηγή. Συνεπώς, το πλάτος και η φάση που σχετίζονται με αυτή τη λύση, είναι

$$A^0(s) = \frac{1}{4\pi s}$$

$$\tau^0(s) = \frac{s}{c_0}$$

Τώρα, λαμβάνοντας  $s = 0$  έχουμε  $\tau(0) = 0$  ως αρχική συνθήκη για την εξίσωση Eikonal. Το πλάτος  $A^0(s)$  γίνεται άπειρο όταν  $s \rightarrow 0$  δημιουργώντας μια μικρή πολυπλοκότητα. Αυτή η δυσκολία επιλύεται θεωρώντας αρχικές συνθήκες για το γινόμενο  $A_0(0)|J(0)|^{1/2}$ , το οποίο μετατρέπεται σε μια φραγμένη ποσότητα.

Για να υπολογίσουμε την Ιακωβιανή, χρειαζόμαστε πρώτα τη λύση των εξισώσεων ακτίνων σε ένα ομογενές μέσο. Όταν η ταχύτητα του ήχου είναι σταθερή, οι εξισώσεις ακτίνων λύνονται εύκολα, δίνοντας

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + s(\cos\theta_0\cos\varphi_0, \cos\theta_0\sin\varphi_0, \sin\theta_0)$$

Έτσι, οι ακτίνες είναι απλά ευθείες γραμμές που εξαπλώνονται από τη σημειακή πηγή. Από τις ακτίνες, ο καθοριστικός παράγοντας της Ιακωβιανής υπολογίζεται ότι είναι

$$J(s) = -s^2\cos\theta_0$$

το οποίο φαίνεται να συμφωνεί με το εμβαδό διατομής του σωλήνα ακτίνων στο Σχήμα B.2.

Συνεπώς,

$$\lim_{s \rightarrow 0} A(s)|J(s)|^{1/2} = \frac{1}{4\pi} |\cos\theta_0|^{1/2}$$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε για το πλάτος σε τυχαία θέση  $s$ ,

$$A_0(s) = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{c(s)\cos\theta_0}{c(0)J(s)} \right|^{1/2}$$

Συνδυάζοντας αυτό το αποτέλεσμα με εκείνο για την εξίσωση Eikonal, λαμβάνουμε το πεδίο της πίεσης ως

$$p(s) = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{c(s)\cos\theta_0}{c(0)J(s)} \right|^{1/2} e^{i\omega \int_0^s \frac{1}{c(s')} ds'}$$

Έτσι, το πεδίο πίεσης λαμβάνεται διαιρώντας την ενέργεια της σημειακής πηγής ανάμεσα σε καθένα από τους σωλήνες ακτίνων (οι σωλήνες σχηματίζονται από ζεύγη γειτονικών ακτίνων). Η μεταβολή στην ένταση κατά μήκος ενός σωλήνα ακτίνων είναι τότε αντιστρόφως ανάλογη με τη διατομή εκείνου του σωλήνα. Τέλος, η φάση που συνδέεται με μια ακτίνα υπολογίζεται από το χρόνο κίνησης κατά μήκος μιας ακτίνας.

## B.4 Υπολογισμοί Έντασης

### Δυναμική Ανίχνευση Ακτίνας

Έχουμε δείξει ότι το πλάτος κατά μήκος μιας ακτίνας εξαρτάται από την μεταβολή στη περιοχή του σωλήνα ακτίνων. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μια απλή διαφορική εξίσωση, η οποία παρέχει πληροφορίες σχετικά με το πως αλλάζουν οι διαδρομές της ακτίνας για απειροελάχιστες διαταραχές είτε στη γωνία έναρξης της ακτίνας είτε στη σημειακή πηγή. Αυτές οι εξισώσεις σχηματίζουν την βάση της δυναμικής ανίχνευσης της ακτίνας και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του πλάτους κατά μήκος μιας ακτίνας. Εδώ, θα παρουσιάσουμε μόνο τα τελικά αποτελέσματα.

Οι δυναμικές εξισώσεις ακτίνων, σε εναλλακτική μορφή, είναι

$$\frac{dq}{ds} = cp(s) , \quad \frac{dp}{ds} = -\frac{c_{nn}}{c^2(s)}q(s),$$

όπου  $c_{nn}$  είναι η καμπυλότητα της ταχύτητας του ήχου σε μια διεύθυνση κάθετη στη διαδρομή της ακτίνας. Για να πάρουμε ένα τύπο για το  $c_{nn}$ , ξεκινάμε σημειώνοντας ότι η παράγωγος του  $c$  στην κάθετη διεύθυνση είναι

$$c_n = \nabla c \cdot \mathbf{n} ,$$

όπου  $\mathbf{n} = (n_{(r)}, n_{(z)})$  είναι το κάθετο διάνυσμα στην ακτίνα, το οποίο προβάλλεται ως μια σταθερή ποσότητα στις παραγώγους. Συνεπώς,

$$c_n(r, z) = c_r(r, z)n_{(r)} + c_z(r, z)n_{(z)}$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία, παίρνουμε:

$$c_{nn} = \nabla c_n(r, z) \cdot \mathbf{n} = c_{rr}(r, z)n_{(r)}^2 + 2c_{rz}n_{(r)}n_{(z)} + c_{zz}(r, z)n_{(z)}^2$$

Το κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  στην ακτίνα αποδίδεται, επίσης, με τους όρους των βοηθητικών μεταβλητών  $\xi$  και  $\zeta$ ,

$$c_{nn} = c^2 \left( \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \zeta^2 - 2 \frac{\partial^2 c}{\partial r \partial z} \zeta \xi + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \xi^2 \right)$$

Έτσι, έχουμε πάρει έναν απλό τύπο για την καμπυλότητα της ταχύτητας του ήχου στην κάθετη διεύθυνση, ο οποίος χρησιμοποιεί μόνο τις δεύτερες μερικές παραγώγους της ταχύτητας του ήχου σχετικά με τις καρτεσιανές συντεταγμένες  $r$  και  $z$ .

Οι αρχικές συνθήκες καθορίζουν το είδος της ακτινικής διαταραχής. Αν πάρουμε

$$q(0) = 0 , \quad p(0) = \frac{1}{c(0)} ,$$

τότε προκαλούμε διαταραχές στις ακτίνες σε σχέση με την γωνία και μπορεί να δειχθεί ότι

$$rq(s) = J(s)$$

Συνεπώς, το  $q$  είναι ανάλογο του παράγοντα της Ιακωβιανής. Τότε, μπορούμε να γράψουμε το πλάτος της ακτίνας ως

$$A_0(s) = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{c(s)\cos\theta_0}{rc(0)q(s)} \right|^{1/2}$$

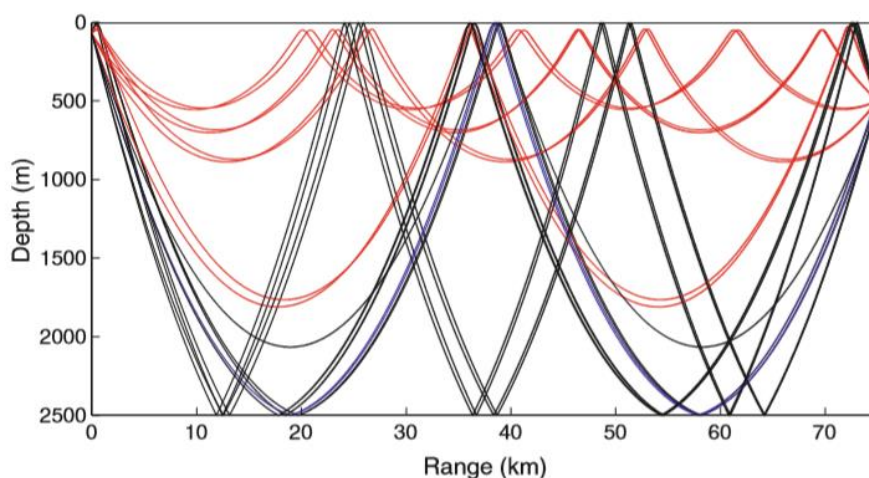
Συνοπτικά, η ένταση κατά μήκος μιας ακτίνας είναι αντιστρόφως ανάλογη με μια συνάρτηση  $q(s)$ , η οποία υπολογίζεται εύκολα ολοκληρώνοντας ένα επιπλέον ζεύγος διαφορικών εξισώσεων μαζί με τις εξισώσεις ακτίνων.

### Απώλεια Μετάδοσης (coherent)

Οι εκφράσεις που έχουμε εξάγει μέχρι στιγμής αποδίδουν τη πίεση που συσχετίζεται με μια μοναδική ακτινική διαδρομή. Το πεδίο της πίεσης σε κάθε σημείο συνεπάγεται την αναγνώριση όλων των ιδιοακτίνων, με άλλα λόγια, όλες τις ακτίνες οι οποίες περνάνε διαμέσου αυτού του σημείου. Για παράδειγμα, οι ιδιοακτίνες για ένα δέκτη στα 75km βεληνεκές και 500m βάθος στην περίπτωση της Ιβηρικής Θάλασσας δείχνεται στο Σχήμα Β.3. Μπορούμε να διακρίνουμε καθαρά τις διαφορετικές σειρές των διαθλώμενων ακτίνων και των ανακλώμενων στην επιφάνεια και στον πυθμένα ακτίνων, οι οποίες σχηματίζουν την διάταξη της ηχώς (ανακλώμενων ηχητικών κυμάτων) στην περιοχή του δέκτη.

Κάθε ιδιοακτίνα συνεισφέρει στο σύνθετο πεδίο πίεσης που βασίζεται στην έντασή του και τη φάση του σε εκείνο το σημείο. Η ένταση υπολογίζεται απλά, αθροίζοντας τις συνεισφορές της κάθε ιδιοακτίνας οδηγώντας σε

$$p^{(C)}(r, z) = \sum_{j=1}^{N(r,z)} p_j(r, z),$$



**Σχήμα Β.3:** Ιδιοακτίνες για δέκτη στα 75km βεληνεκές και 500m βάθος στην Ιβηρική Θάλασσα

όπου  $N(r, z)$  δηλώνει το πλήθος των ιδιοακτίνων που συνεισφέρουν στο πεδίο σε μια συγκεκριμένη τοποθεσία του δέκτη και  $p_j(r, z)$  είναι η πίεση εξαιτίας αυτής της

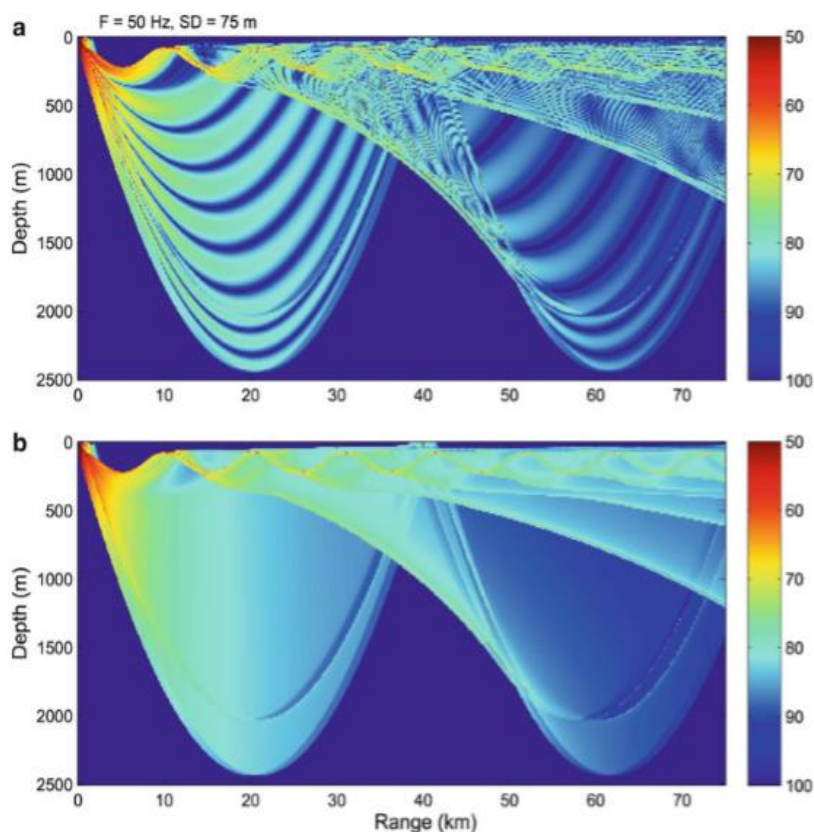


ιδιοακτίνας. Το πλήθος των συμβαλλόμενων ιδιοακτίνων μπορεί να διαφέρει αρκετά. Κοντά στην πηγή, υπάρχουν 3 σημαντικές ιδιοακτίνες: μια απευθείας ακτίνα, μια ακτίνα που χτυπάει στον πυθμένα και μια ακτίνα που χτυπάει στην επιφάνεια. Οι υπόλοιπες ιδιοακτίνες χτυπούν τον πυθμένα σε πιο «απότομες» γωνίες από την κρίσιμη γωνία και άρα εξασθενούν αρκετά. Σε μεγαλύτερα εύρη υπάρχουν συχνά συνεισφορές από διαδρομές, οι οποίες χτυπούν την επιφάνεια και τον πυθμένα αρκετές φορές ή ιδιοακτίνες που ακολουθούν διαφορετικές διαθλώμενες διαδρομές. Αφού έχουμε συσχετίσει τη φάση και την ένταση με τις διαδρομές της ακτίνας, μπορούμε να ολοκληρώσουμε τον υπολογισμό του πεδίου πίεσης. Τότε, η απώλεια μετάδοσης προσδιορίζεται ως

$$TL(s) = -20 \log \left| \frac{p(s)}{p^0(s=1)} \right|,$$

όπου  $p^0(s=1)$  είναι η πίεση για μια σημειακή πηγή στον ελεύθερο χώρο που εκτιμάται σε απόσταση 1 m από την πηγή. Συνεπώς,

$$p^0(s=1) = \frac{1}{4\pi}$$



**Σχήμα Β.4:** Αποτέλεσμα απώλειας μετάδοσης για την Ιβηρική Θάλασσα, (α) Θεωρία ακτίνων (coherent) και (β) Θεωρία ακτίνων (incoherent)

Η απώλεια μετάδοσης στην Ιβηρική Θάλασσα αποδίδεται στο Σχήμα Β.4. Κοντά στην πηγή, μπορούμε να διακρίνουμε το ρόλο της φάσης, όπου οι ανακλώμενες στην επιφάνεια και οι απευθείας ακτινικές διαδρομές συμβάλλουν ενισχυτικά και

αποσβεστικά για να σχηματίσουν την διάταξη του καθρέφτη του Lloyd. Σημειώνουμε ότι αυθαίρετα έχουμε αποκλείσει τις ακτίνες που χτυπούν στον πυθμένα, οι οποίες θα συνέβαλλαν περαιτέρω στο πεδίο ανάλογα με την ανακλασιμότητα του πυθμένα. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών αυτού του είδους συμφωνίας είναι πιο άμεσα συγκρίσιμα με τις λύσεις της κυματικής θεωρίας.

### **Απώλεια Μετάδοσης (incoherent)**

Οι μέθοδοι των ακτίνων χρησιμοποιούνται πιο συχνά για προβλήματα υψηλής συχνότητας: αυτές εξάγονται υπό αυτή την υπόθεση ενώ άλλες μέθοδοι χρησιμοποιούνται σε υψηλότερες συχνότητες. Όμως, όσο πηγαίνουμε σε υψηλές συχνότητες, τα στοιχεία της διάταξης της συμβολής είναι λιγότερο σταθερά, με την έννοια ότι είναι αναγκαία η εξαιρετικά λεπτομερής περιβαλλοντική γνώση για ακριβείς προβλέψεις και αυτή η γνώση γενικά λείπει. Από την άλλη μεριά, η αξιολόγηση της απόδοσης των συστημάτων sonar ίσως απαιτεί μόνο ένα ομαλοποιημένο αποτέλεσμα της απώλειας μετάδοσης.

Κάτω από αυτές τις συνθήκες, ένας υπολογισμός της απώλειας μετάδοσης (incoherent) ίσως είναι αποδεκτός, στον οποίο όμως η φάση της πίεσης που σχετίζεται με κάθε ιδιοακτίνα αγνοείται. Αυτό οδηγεί σε

$$p^{(I)}(r, z) = \left[ \sum_{j=1}^{N(r,z)} |p_j(r, z)|^2 \right]^{1/2}$$

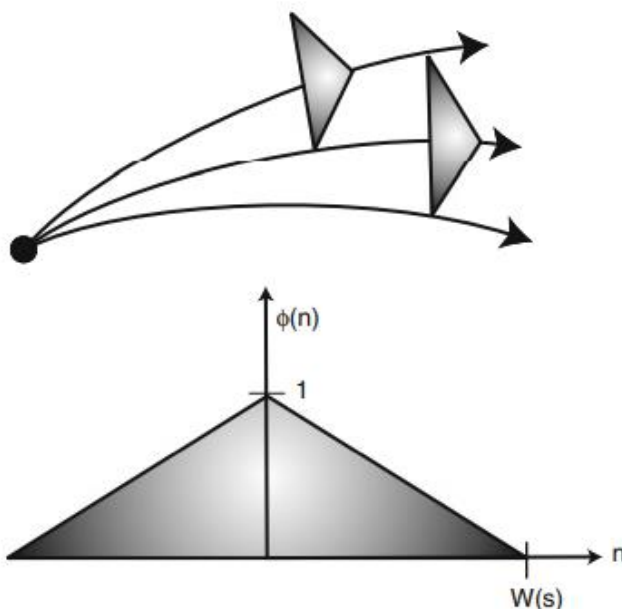
Αυτός ο τύπος, επίσης, έχει ορισμένα υπολογιστικά πλεονεκτήματα. Γενικά, η δειγματοληψία σε ό,τι αφορά το πλήθος των ακτίνων και το μέγεθος βήματος ακτίνας είναι λιγότερο κρίσιμη αφού ο όρος της φάσης, ο οποίος οδηγεί σε μια λεπτομερή διάταξη συμβολής χάνεται. Ένας υπολογισμός της απώλειας μετάδοσης incoherent για την Ιβηρική Θάλασσα φαίνεται στο Σχήμα B.4(b). Ξεκάθαρα, το αποτέλεσμα της ασυμφωνίας (incoherent) είναι περισσότερο ομαλό από το αποτέλεσμα της συμφωνίας.

### **Θεωρία δεσμών**

Η προσέγγιση της ακτίνας όπως περιγράφεται μέχρι στιγμής, επιλύει την εξίσωση κύματος εισάγοντας ένα νέο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων σχηματισμένο από τις ακτίνες. Η μαγεία αυτού του συστήματος συντεταγμένων είναι ότι κάποιος μπορεί εύκολα να φτιάξει χρόνους κίνησης και πλάτη απλά λύνοντας μια σειρά από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις κατά μήκος κάθε ακτίνας. Οι χρόνοι κίνησης και τα πλάτη, φυσικά, αποδίδουν αμέσως το πεδίο της πίεσης κατά μήκος κάθε ακτίνας. Όμως, ο χρήστης του ακτινικού μοντέλου συνήθως χρειάζεται το πεδίο σε ένα ορθογώνιο πλέγμα, του οποίου οι κόμβοι γενικά θα βρίσκονται ανάμεσα στο καμπυλόγραμμο πλέγμα που σχηματίζεται από τις ακτίνες («βεντάλια» ακτίνων).

Ένας απλός τρόπος να υπολογίσουμε με παρεμβολή από το ακτινικό πλέγμα πάνω στο πλέγμα του δέκτη είναι να κατασκευάσουμε μια δέσμη γύρω από κάθε ακτίνα. Δανειζόμενοι μια ιδέα από τη βιβλιογραφία πεπερασμένων στοιχείων, θεωρούμε τριγωνικές ή σε σχήμα καπέλου δέσμες όπως φαίνεται στο Σχήμα B.5. Το πλάτος

αυτών των δεσμών στενεύει ώστε να μεταβάλλεται γραμμικά από το  $A_0(s)$  στη κεντρική ακτίνα της δέσμης και να μειώνεται γραμμικά στο μηδέν σε κάθε πλευρά. Το μισό πλάτος  $W(s)$  της δέσμης προσδιορίζεται από την απόσταση από τη κεντρική ακτίνα. Αυτό το πλάτος επιλέγεται ακριβώς έτσι ώστε η ακτίνα να εξαφανίζεται στην περιοχή της γειτονικής του ακτίνας. (Άρα, το εύρος της δέσμης εξαρτάται από την πυκνότητα της «βεντάλιας» των ακτίνων που έχει επιλεγθεί.). Συνεπώς, η πίεση για την δέσμη δίνεται από τη σχέση



**Σχήμα Β.5:** Κατασκευή γεωμετρικών δεσμών γύρω από κάθε ακτίνα

$$p^{beam}(s, n) = A^{beam}(s) \varphi(s, n) e^{i\omega t(s)},$$

όπου  $\varphi(s, n)$  είναι η συνάρτηση σε σχήμα καπέλου:

$$\varphi(s, n) = \begin{cases} \frac{W(s) - n}{W(s)} & \text{για } n \leq W(s) \\ 0 & \text{για } n > W(s) \end{cases}$$

και  $n(s)$  είναι η κάθετη απόσταση από το δέκτη στη κεντρική ακτίνα της δέσμης.

Απαιτούμε ότι το πλάτος αυτής της δέσμης στην κεντρική του ακτίνα (όπου  $n = 0$ ) θα πρέπει να ταιριάζει με το αποτέλεσμα της γεωμετρικής θεωρίας ακτίνων, άρα το  $A^{beam} = A_0(s)$  προέρχεται απευθείας από τις δυναμικές εξισώσεις ακτίνων.

Το ερώτημα κλειδί που απομένει είναι πως να υπολογίσουμε το μισό πλάτος της δέσμης  $W(s)$ .

Κάποιος θεώρησε το πλάτος ως συνέπεια του εξαπλωνόμενου σωλήνα ακτίνων· όμως, κάποιος μπορεί να αντιστρέψει τη διαδικασία και να χρησιμοποιήσει το πλάτος για να υπολογίσει το εύρος του σωλήνα ακτίνων. Το αποτέλεσμα είναι:

$$W(s) = |q(s) \delta \theta_0|,$$

όπου  $\delta\theta_0$  είναι η γωνιακή απόσταση ανάμεσα σε γειτονικές ακτίνες και  $q(s)$  ο όρος διασποράς από τις δυναμικές εξισώσεις ακτίνων.

Σημειώνουμε ότι με αυτή την κατασκευή, έχουμε πετύχει μια τμηματική γραμμική παρεμβολή του πεδίου της πίεσης ανάμεσα στις ακτίνες· όμως, το πεδίο της κάθε δέσμης μπορεί να κατασκευαστεί ανεξάρτητα. Εμείς το αποκαλούμε Γεωμετρική Προσομοίωση Δέσμης, αφού η συμπεριφορά των δεσμών καθορίζεται από την γεωμετρία του πεδίου της ακτίνας. Όταν εκτελεστεί κατάλληλα, αυτή η προσέγγιση αναπαράγει ακριβώς ένα θεωρητικό αποτέλεσμα ακτίνων. Όμως, μικρά σφάλματα στην εφαρμογή μπορεί να προκαλέσουν μεγάλα προβλήματα, επειδή οι δέσμες που παράγονται πρέπει να έχουν ακριβώς το σωστό εύρος για να γεμίσουν το χώρο ανάμεσα στις γειτονικές δέσμες.

Ένας λίγο περισσότερο επιεικής σχηματισμός μπορεί να γίνει απλά αντικαθιστώντας τις παραπάνω συναρτήσεις με Γκαουσιανές μορφές:

$$\varphi(s, n) = e^{-\left(\frac{n}{W(s)}\right)^2}$$

Οι δέσμες που απορρέουν από τις Γκαουσιανές μορφές έχουν μια λίγο μεγαλύτερη ενσωματωμένη ενέργεια γύρω από μια δέσμη, έτσι το πλάτος κάθε δέσμης πρέπει να μειωθεί ανάλογα:

$$A^{\text{beam}}(s) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} \sqrt{\frac{\delta\theta_0 c(s)}{r} \frac{2\cos\theta_0}{c(0) W(s)}}$$

Η χρήση των Γκαουσιανών μορφών παράγει μικρή ομαλοποίηση του πεδίου της πίεσης. Οι επιστήμονες Weinberg και Keenan πρότειναν να περιορίσουν την ικανότητα δέσμης εστιάζοντας σε ένα σημείο, επιβάλλοντας ένα ελάχιστο εύρος δέσμης της τάξης του  $\lambda$ , όπου  $\lambda$  είναι το μήκος του κύματος. Αυτό το εμπειρικά εστιακό όριο εξουδετερώνει τα σημεία ανωμαλίας στις καυστικές και γενικά βελτιώνει την ακρίβεια. Αυτές οι τελευταίες προσεγγίσεις θεωρούνται ως παράγωγοι της Γκαουσιανής προσέγγισης για την προσομοίωση δέσμης που προτάθηκε από τον Bucker στις αρχές του 1970. Στην αρχική εργασία του Bucker, το εύρος της δέσμης επιλέχθηκε αρκετά αυθαίρετα. Όμως, αργότερα ο ίδιος πρότεινε μια προσέγγιση που βασίζεται στο μήκος τόξου της ακτίνας. Οι δέσμες απλά εξυπηρετούν για να παρεμβάλουν το πεδίο και δεν προορίζονται να προσεγγίσουν την φυσική μιας αληθινής Γκαουσιανής δέσμης που διαδίδεται στον ωκεανό.

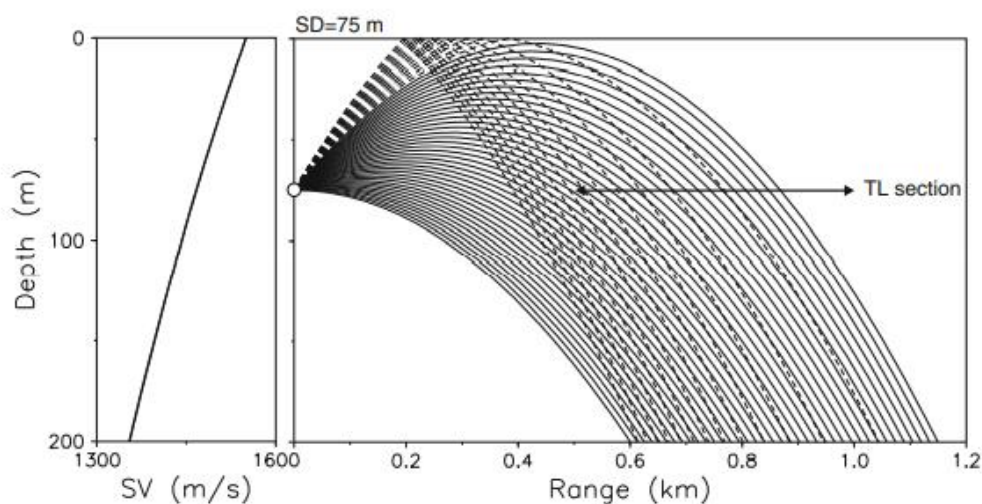
## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ. Δημιουργία καυστικών ζωνών

Στο παράρτημα αυτό περιγράφουμε διάφορες ιδιομορφίες της εφαρμογής της θεωρίας των ακτίνων για τον υπολογισμό του ακουστικού πεδίου σε μέσα με μεταβαλλόμενα χαρακτηριστικά (μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης, παρουσία ανομοιογενειών λόγω διεπιφανειών και συνόρων), εστιάζοντας σε εφαρμογές ακουστικής διάδοσης στο θαλάσσιο περιβάλλον. Χρησιμοποιήθηκε ως βασική πηγή αναφοράς το σύγγραμμα των Jensen et al (1994/2011).

Υπάρχουν λίγες ατέλειες στον υπολογισμό της απώλειας μετάδοσης στο Σχήμα Γ.1, οι οποίες είναι χαρακτηριστικές των αποτελεσμάτων της θεωρίας ακτίνων. Η πρώτη είναι η περίπτωση των ζωνών σκιάς, όπου καμιά ακτίνα δεν περνάει και άρα το πεδίο της πίεσης είναι μηδέν. Το δεύτερο είναι η περίπτωση των καυστικών, οι οποίες είναι καμπύλες, όπου η διατομή του σωλήνα ακτίνων εξαφανίζεται και άρα η προβλεπόμενη ένταση είναι άπειρη. Η ακριβή λύση της εξίσωσης κύματος γενικά είναι πεπερασμένη, άρα αυτό είναι ένα σφάλμα. Στην πράξη, αυτές οι καμπύλες της άπειρης έντασης κανονικά θα χαθούν εκτός αν ένας δέκτης τοποθετηθεί ακριβώς πάνω σε μια καυστική. Παρόλο αυτά, το πρόβλημα μπορεί να είναι σημαντικό, διότι η ένταση είναι υψηλή όχι μόνο στην καυστική αλλά και σε μια ζώνη γύρω από την καυστική. Επιπλέον, υπάρχει μια μεταβολή φάσης, η οποία συμβαίνει όταν μια ακτίνα περνάει μέσα από μια καυστική. Αγνοώντας αυτή τη μεταβολή της φάσης επιφέρεται ένα σφάλμα στις περιοχές που ακολουθούν, οι οποίες μπορεί να είναι μακριά από την καυστική. Για να αποτυπώσουμε αυτά τα σημεία, θεωρούμε ένα απλούστερο προφίλ της ταχύτητας του ήχου, στο οποίο το τετράγωνο του δείκτη διάθλασης μεταβάλλεται γραμμικά με το βάθος, δηλαδή  $n^2 = (c_0/c)^2 = \alpha + bz$ . Αυτό το είδος του προβλήματος μελετήθηκε με λεπτομέρεια από τους Jones, Pedersen και Gordon. Θεωρούμε τον τύπο

$$c(z) = \frac{c_0}{\sqrt{1 + 2.4 z/c_0}}$$

με  $c_0 = 1550$  m/s.

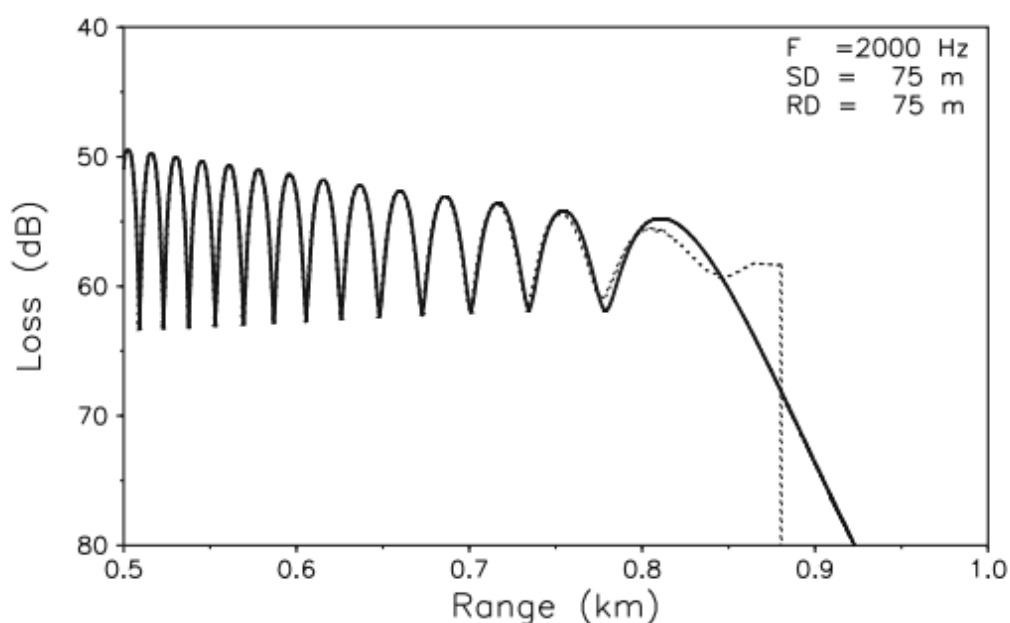


**Σχήμα Γ.1:** Προφίλ της ταχύτητας του ήχου και προσομοίωση ακτίνας με μια ρηχή πηγή

Το προφίλ της ταχύτητας του ήχου και η ιχνηλάτηση της ακτίνας που προκύπτει φαίνεται στο Σχήμα Γ.1 για μια πηγή σε βάθος 75m.

Η απώλεια μετάδοσης σε συχνότητα 2000Hz για ένα δέκτη τοποθετημένο σε βάθος 75m φαίνεται στο Σχήμα Γ.2, χρησιμοποιώντας μαζί μια φασματική αναπαράσταση και τη θεωρία ακτίνων.

Στο εύρος από το 0 μέχρι περίπου 0.88km, το πεδίο της πίεσης δημιουργείται από τη συμβολή της απευθείας ακτίνας και της ακτίνας που ανακλάται στην επιφάνεια. Αυτοί οι δύο τύποι ακτίνων συμβάλλουν ενισχυτικά και αποσβεστικά και παράγουν μια ταλαντευόμενη διάταξη απώλειας μετάδοσης. Πέρα από τα 0.88km, μπορούμε να δούμε καθαρά ότι εισερχόμαστε σε μια ζώνη σκιάς όπου δεν υπάρχουν καθόλου ακτίνες. Η ακτίνα, η οποία σχηματίζει το σύνορο ανάμεσα στη ζώνη σκιάς και την περιοχή των δύο ακτίνων καλείται οριακή ακτίνα. Στη ζώνη σκιάς, η απώλεια μεταφοράς που προβλέπεται από τη θεωρία ακτίνων μειώνεται απότομα ενώ η ακριβής λύση δείχνει μια βαθμιαία πτώση στην ενέργεια.



**Σχήμα Γ.2:** Απώλεια μετάδοσης με μια ρηχή πηγή. Συνεχή καμπύλη: Ακριβής λύση. Διακεκομμένη καμπύλη: Θεωρία ακτίνων

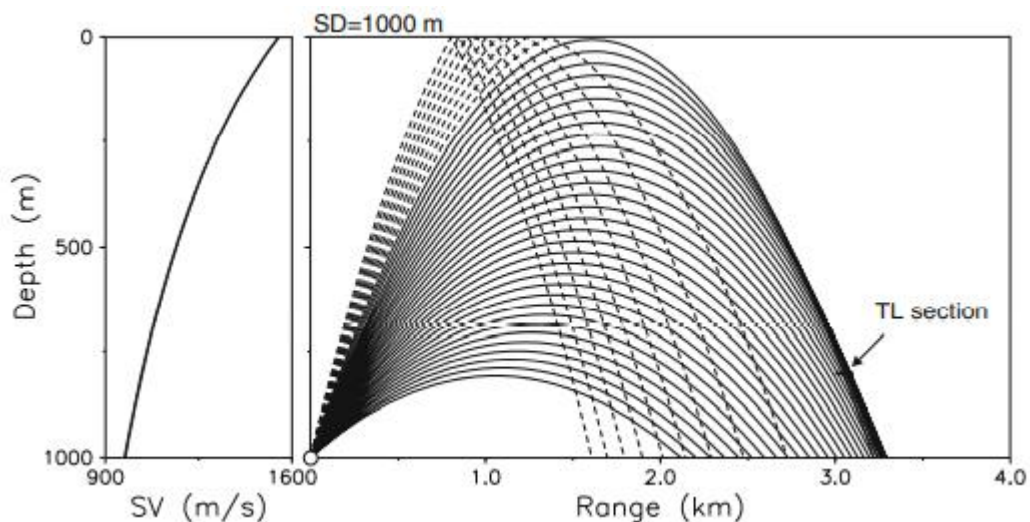
Στην πραγματικότητα, η ζώνη σκιάς είναι ένα τεχνικό σφάλμα της μεθόδου κατασκευής των ακτίνων. Η χάραξη της ακτίνας πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας μια συγκεκριμένη «βεντάλια» από γωνίες ακτίνων και περιορίζοντας την βεντάλια εμφανίζονται οι ζώνες σκιάς. Όμως, είναι ξεκάθαρο ότι ακόμα και με ένα μεγάλο εύρος γωνίας ( $\pm 90^\circ$ ), καμιά ακτίνα δεν θα μπορούσε να εισέλθει στη ζώνη σκιάς πιο πέρα από την οριακή ακτίνα. Αλλά γιατί πρέπει να περιοριστούμε σε πραγματικές γωνίες έναρξης; Στην πραγματικότητα, με περίπλοκες γωνίες ακτίνων βρίσκει κανείς ότι οι σύνθετες ιδιοακτίνες υπάρχουν σε αυτό που είχαμε πρώτα θεωρήσει ζώνη σκιάς. Αυτές οι σύνθετες ακτίνες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να συμπληρώσουν τα αποτελέσματα της θεωρίας ακτίνων και να δώσουν μια χρήσιμη πρόβλεψη μέσα στη ζώνη σκιάς. Όμως, σε προγράμματα προσομοίωσης ακτίνων, αυτές οι ακτίνες δεν

χρησιμοποιούνται σχεδόν ποτέ. Ο λόγος είναι ότι αυτές παρουσιάζουν μια αυξημένη πολυπλοκότητα στην αναγνώριση των ιδιοακτίνων.

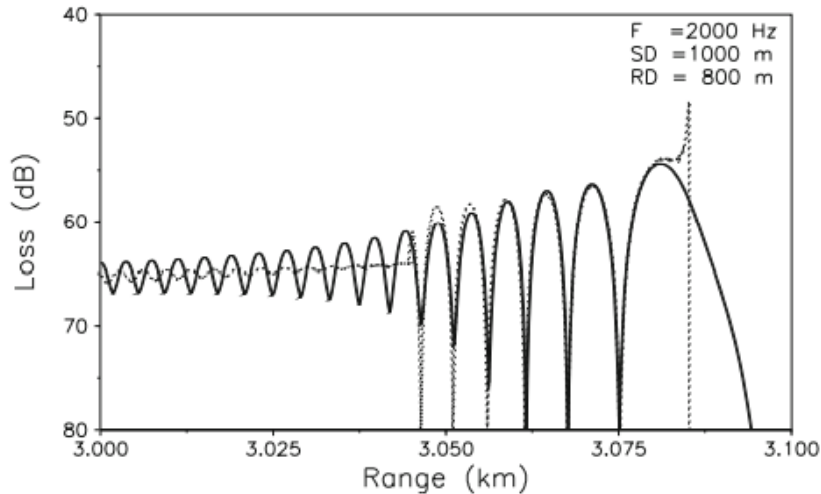
Για το σκοπό του σχηματισμού της αποτυπωμένης καυστικής, αυξάνουμε το βάθος της πηγής στα 1000m, αν και το συγκεκριμένο προφίλ μας θεωρεί μη ρεαλιστικές τιμές σε αυτά τα βάθη. Το προφίλ της ταχύτητας του ήχου και η προσομοίωση της ακτίνας φαίνεται στο σχήμα Γ.3. Εδώ, το βεληνεκές χωρίζεται σε 3 ζώνες, οι οποίες φαίνονται στο διάγραμμα της απώλειας μεταφοράς του Σχήματος Γ.4. Κοντά στην πηγή, μέχρι περίπου τα 3.04km, έχουμε μια διάταξη παρεμβολής δύο ακτίνων όπως πριν. Από τα 3.04km μέχρι τα 3.08km, η ακτίνα που ανακλάται στην επιφάνεια δεν παρουσιάζεται και η διάταξη παρεμβολής εμπεριέχει δύο ακτίνες, οι οποίες είναι και οι δύο διαθλώμενες. Πέρα από τα 3.08km, εισερχόμαστε ξανά σε μια ζώνη σκιάς, αλλά στο σύνορο της ζώνης σκιάς διακρίνουμε ότι το διάγραμμα απώλειας μεταφοράς έχει μια μντερή κορυφή. Αυτή η κορυφή εμφανίζεται στη καυστική και πραγματικά πιάνει μια απείρως μεγάλη τιμή. Στη προσομοίωση της ακτίνας, η καυστική είναι μια γραμμή, η οποία χωρίζει τη ζώνη του ήχου από τη ζώνη σκιάς. Η καυστική αρχίζει σε βάθος z ικανοποιώντας ότι

$$c^2(z) = c^2(0) - c^2(z_0),$$

δηλαδή, στα 400m περίπου. Πάνω από αυτό το βάθος, ο διαχωρισμός ανάμεσα στη ζώνη σκιάς και τη ζώνη διάδοσης του ήχου δημιουργείται από την οριακή ακτίνα, η οποία μόλις που αγγίζει την επιφάνεια. Η καμπύλη της καυστικής δεν αντιστοιχεί σε μία μόνο διαδρομή ακτίνας αλλά είναι το περίβλημα μιας οικογένειας ακτίνων.



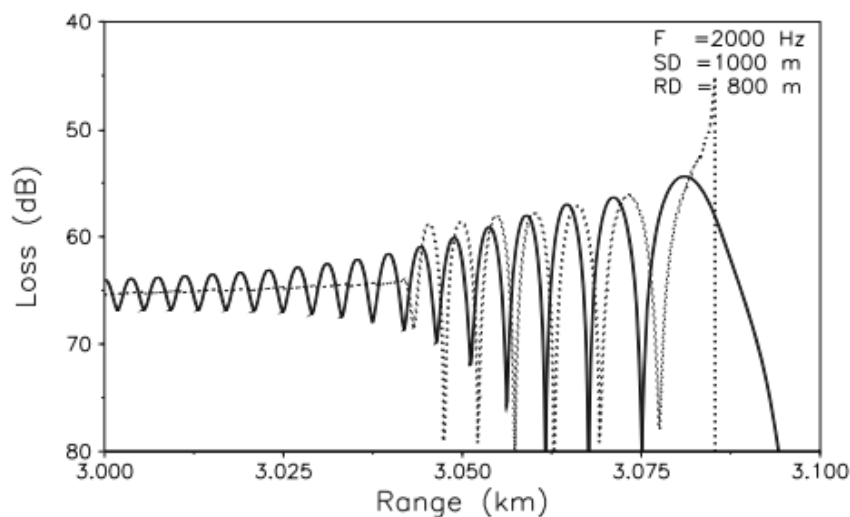
**Σχήμα Γ.3:** Προφίλ της ταχύτητας του ήχου και προσομοίωση ακτίνας με μια βαθιά πηγή



**Σχήμα Γ.4:** Απώλεια μετάδοσης με μια βαθιά πηγή. Συνεχή καμπύλη: Ακριβής λύση  
 Διακεκομμένη καμπύλη: Θεωρία ακτίνων

Από υπολογιστική οπτική γωνία, μια καυστική δημιουργείται όταν η Ιακωβιανή, η οποία εμφανίζεται στον όρο του πλάτους της, εξαφανίζεται. Όσο μια ακτίνα διέρχεται από μια καυστική, η Ιακωβιανή αλλάζει πρόσημο. Αυτό μας φέρνει σε ένα σημαντικό σημείο. Πως θα έπρεπε να συνεχιστεί το πλάτος της ακτίνας όσο διασχίζουμε ένα τέτοιο χαρακτηριστικό σημείο; Η ανάλυση είναι κάπως πολύπλοκη και θα δώσουμε μόνο τη τελική λύση. Το αποτέλεσμα είναι ότι μπορούμε να συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε την εξίσωση του πλάτους που γνωρίζουμε αλλά χρειάζεται να εισάγουμε μια μεταβολή φάσης  $\pi/2$  μέσα στη λύση. Συνεπώς, γράφουμε τη λύση της εξίσωσης πλάτους ως

$$A_0(s) = A_0(0)(-i)^{m(s)} \sqrt{\left| \frac{c(s)J(0)}{c(0)J(0)} \right|},$$



**Σχήμα Γ.5:** Απώλεια μετάδοσης με μια βαθιά πηγή. Συνεχή καμπύλη: Ακριβής λύση.  
 Διακεκομμένη καμπύλη: Θεωρία ακτίνων χωρίς διόρθωση για τη μεταβολή της φάσης στην καυστική.



όπου  $\sqrt{x}$  δηλώνει τη βασική τιμή, δηλαδή, ο κλάδος της τετραγωνικής ρίζας που αποδίδει μια θετική ποσότητα. Η ακέραια τιμή της συνάρτησης  $m(s)$  δίνει τον αριθμό του χρόνου, όπου η  $J(s)$  εξαφανίζεται στο διάστημα  $[0, s]$ , δηλαδή, τον αριθμό των καυστικών που συναντώνται από την ακτίνα. Αυτή η συνάρτηση μερικές φορές αποκαλείται δείκτης ΚΜΑΗ. Αν αυτή η διόρθωση δεν γίνει, η διάταξη παρεμβολής που προκύπτει είναι λανθασμένη, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα Γ.5.

Υπάρχουν κάποιες μέθοδοι που παράγουν βελτιωτικές προσεγγίσεις στο πεδίο στη περιοχή γύρω από τη καυστική. Όμως, οι καυστικές ταξινομούνται με ένα πεπερασμένο αριθμό τύπων, που κατηγοριοποιούνται χρησιμοποιώντας τη θεωρία καταστροφών. Μια ολοκληρωμένη θεωρία απαιτεί να ταξινομηθεί η καυστική και να εφαρμοστεί το κατάλληλο ενιαίο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα.

## Γ.2 Περιοχή Ευστάθειας της Ακτινικής Λύσης

Η προηγούμενη παράγραφος αποτύπωσε μερικούς τρόπους, στους οποίους η θεωρία ακτίνων μπορεί να αποτύχει. Δεδομένης της παραγωγίσιμης των εξισώσεων ακτίνων ως μια προσέγγιση υψηλής συχνότητας, είναι φυσικό να αναρωτιόμαστε πόσο υψηλή. Με άλλα λόγια, πόσο χαμηλή συχνότητα μπορούμε να υποθέσουμε ώστε η θεωρία ακτίνων να ισχύει. Προφανώς αυτή δεν είναι ερώτηση που μπορούμε να απαντήσουμε χωρίς να κάνουμε πρώτα κάποιες αναλύσεις για το τι συνιστά μια αρκετά ακριβής λύση. Δυστυχώς, ακόμα και με μια καλά προσδιορισμένη ανάλυση είναι δύσκολο να προβλέψουμε εκ των προτέρων αν η ακτινική λύση θα είναι επαρκής.

Ένας περίπλοκος παράγοντας είναι ότι πολλοί κώδικες ακτίνων παράγουν ένα αποτέλεσμα το οποίο διαφέρει από την παραπάνω περιγραφή της θεωρίας ακτίνων εξαιτίας σφαλμάτων εκτέλεσης, όπως αγνοώντας μεταβολές φάσης, αποτυγχάνοντας να προσδιοριστούν όλες οι πιθανές ιδιοακτίνες ή εισάγοντας λανθασμένες καυστικές.

Ένας δεύτερος παράγοντας είναι ότι οι κώδικες παραγωγής συχνά μεταβάλλονται για να παράγουν ομαλές καμπύλες απώλειας μετάδοσης. Αυτοί οι ομαλοί σχηματισμοί γίνονται με πολλούς τρόπους με σκοπό να παραχθούν πιο λογικά αποτελέσματα. Σε τελική ανάλυση, κάποιος μπορεί να καταλήξει με αρκετά διαφορετικά αποτελέσματα ανάλογα με τους κώδικες ακτίνων που χρησιμοποιούνται.

Παρόλο αυτά, υπάρχουν καθοδηγούμενες γραμμές, οι οποίες τουλάχιστον υποδεικνύουν ποιοι τύποι προβλημάτων πιθανόν να είναι περισσότερο δύσκολοι. Ένας συχνά μνημονικός κανόνας είναι ότι το ακουστικό μήκος κύματος θα πρέπει να είναι σημαντικά μικρότερος από οποιαδήποτε φυσική κλίμακα στο πρόβλημα. Με άλλα λόγια, το μήκος κύματος πρέπει να είναι μικρό συγκριτικά με το βάθος του νερού. Συχνά, βελτιωμένα αποτελέσματα μπορούν να ληφθούν ομαλοποιώντας διάφορα χαρακτηριστικά (βαθυμετρικά χαρακτηριστικά και εσωτερικά χαρακτηριστικά όπως επιφανειακοί αγωγοί διάδοσης) πριν γίνει η προσομοίωση της ακτίνας. Απλά, μικραίνοντας το προφίλ της ταχύτητας του ήχου μπορούμε να βελτιώσουμε την ακρίβεια και το χρόνο εκτέλεσης.