ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΙΤΑΚΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Επιβλέπων: Τσινιάς Ιωάννης

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Τριμελής επιτροπή: Ι. Καραφύλλης Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π

Β. Κοκκίνης Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

Ι. Τσινιάς Καθηγητής Ε.Μ.Π (Επιβλέπων)

ΑΘΗΝΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2021

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του προγράμματος σπουδών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Το θέμα που αναπτύσσεται στην εργασία, είναι το Θεώρημα Κεντρικής Πολλαπλότητας και οι εφαρμογές του στην ευστάθεια και τη σταθεροποίηση μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Το δυναμικό σύστημα, είναι ένα σύστημα, στο οποίο μία συνάρτηση περιγράφει την εξάρτηση της θέσης ενός σημείου από το χρόνο, σε συγκεκριμένο γεωμετρικό χώρο. Οι ρίζες της έννοιας αυτής προέρχονται από τη Νευτώνεια Μηχανική. Η εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος, περιγράφεται από μία σχέση, η οποία μας δίνει την κατάσταση του συστήματος για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. Η σχέση αυτή είναι συνήθως μία διαφορική εξίσωση.

Η έννοια της ευστάθειας σε ένα δυναμικό σύστημα, σχετίζεται με τη συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος ως προς τα σημεία ισορροπίας, στην εξέλιξη του χρόνου. Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας, παρουσιάζονται αναλυτικά οι έννοιες της ευστάθειας, καθώς και διάφορες μέθοδοι (ευστάθεια Lyapunov, μέθοδος γραμμικοποίησης) μέσω των οποίων μπορούμε να διαπιστώσουμε το είδος της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της γραμμικοποίησης, θα διαπιστώσουμε ότι σε μία ειδική περίπτωση, δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια.

Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνεται η απάντηση σε αυτό το ερώτημα μέσω του Θεωρήματος Κεντρικής Πολλαπλότητας. Οι συνέπειες του θεωρήματος είναι καθοριστικές, προκειμένου να διαπιστώσουμε την ευστάθεια. Επίσης, παρατίθενται εφαρμογές στις οποίες η μέθοδος της γραμμικοποίησης αποτυγχάνει, γεγονός που υποδεικνύει τη χρήση του Θεωρήματος Κεντρικής Πολλαπλότητας, το οποίο εφαρμόζεται για να επιλυθεί το πρόβλημα.

Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται άλλη μία εφαρμογή του εν λόγω θεωρήματος. Πρόκειται για τη σταθεροποίηση μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Μετασχηματίζοντας το αρχικό μη γραμμικό σύστημα και κάνοντας χρήση της θεωρίας για σταθεροποίηση γραμμικών δυναμικών συστημάτων, προκύπτει μία μορφή, στην οποία μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα Κεντρικής Πολλαπλότητας. Προς το τέλος του κεφαλαίου, υπάρχουν παραδείγματα στα οποία γίνεται εμφανής η χρησιμότητα του θεωρήματος.

Ευχαριστίες

Πριν την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε ορισμένους ανθρώπους, των οποίων η βοήθεια ήταν σημαντική, για τη διεκπεραίωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ιωάννη Τσινιά (Καθηγητή Ε.Μ.Π), του οποίου η καθοδήγηση ήταν καταλυτική, καθ' όλη τη διάρκεια συγγραφής της εργασίας, και μάλιστα κάτω από τις δύσκολες συνθήκες της πανδημίας.

Επίσης, οφείλω να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, Ι. Καραφύλλη (Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Μ.Π) και Β. Κοκκίνη (Επίκουρο Καθηγητή Ε.Μ.Π) που με τίμησαν με την παρουσία τους.

Τέλος, ευχαριστώ τους γονείς μου, Μιχάλη και Μαρία, οι οποίοι μου στάθηκαν σε όλες τις δύσκολες στιγμές που αντιμετώπισα κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, και συνεχίζουν να με στηρίζουν σε οποιαδήποτε πρόκληση ή στόχο θέσω για τον εαυτό μου.

Περιεχόμενα

Πρόλογος....2
Ευχαριστίες....3
Περιεχόμενα....4
Κεφάλαιο 1ο
Εισαγωγή στην Ευστάθεια
1.1 Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης....6
1.2 Ευστάθεια (Stability)....6
1.3 Ευστάθεια Lyapunov (Lyapunov Stability)....12
1.4 Γραμμικοποίηση (Linearization)....24
Κεφάλαιο 2ο
Η θεωρία της Κεντρικής Πολλαπλότητας
2.1 Το θεώρημα Κεντρικής Πολλαπλότητας (Center Manifold Theorem)....33
2.2 Οι συνέπειες του Θεωρήματος Κεντρικής Πολλαπλότητας....47
2.3 Εφαρμογές....56
Κεφάλαιο 3ο
Σταθεροποίηση μη γραμμικών συστημάτων μίας εισόδου
3.1 Αναγωγή του προβλήματος σταθεροποίησης σε σύστημα κατώτερης τάξης....67
3.2 Παραδείγματα....71
Βιβλιογραφία....77

Κεφάλαιο 1ο

Εισαγωγή στην Ευστάθεια

1.1 Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης

Έστω το σύστημα[1]:

$$(\Sigma_{1.1}):\ \begin{Bmatrix} \dot{x}=f(x) \\ x(0,x_0)=x_0 \end{Bmatrix}$$

όπου $x\in\mathbb{R}^n$ και $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Είναι γνωστό από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης, ότι για κάθε $x_0\in\mathbb{R}^n$ υπάρχει μοναδική λύση $x(t,x_0)$ με αρχική συνθήκη:

$$x(0,x_0)=x_0$$

που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\dot{x}(t,x_0)=f(x(t,x_0)) \qquad \forall t \text{ κοντά στο μηδέν}$$

Ορισμός 1.1.1: Σημεία ισορροπίας του ($\Sigma_{1.1}$) ονομάζονται τα σημεία τα οποία αποτελούν πραγματικές λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$.

Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το $0\in\mathbb{R}^n$ αποτελεί σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.1}$). Τότε ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.1.2: Το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.1}$) αν και μόνο αν ισχύει ότι $x(t,0)=0 \quad \forall t$ κοντά στο μηδέν.

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης.

□

1.2 Ευστάθεια (Stability)

Έστω το σύστημα:

$$(\Sigma_{1.2}):\ \dot{x}=f(x)$$

όπου $x\in\mathbb{R}^n$ και $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση.

1 Τα συστήματα που μελετάμε σε αυτή την εργασία είναι δυναμικά συστήματα.

Ένα σημείο ισορροπίας χαρακτηρίζεται **ευσταθές (stable)**, όταν οι λύσεις του ($\Sigma_{1.2}$) που ξεκινούν από γειτονικά σημεία του, παραμένουν κοντά με την πάροδο του χρόνου, σε αντίθετη περίπτωση είναι **ασταθές (unstable)**. Είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές (asymptotically stable)**, αν είναι ευσταθές και επιπλέον οι λύσεις τείνουν στο σημείο ισορροπίας καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο.

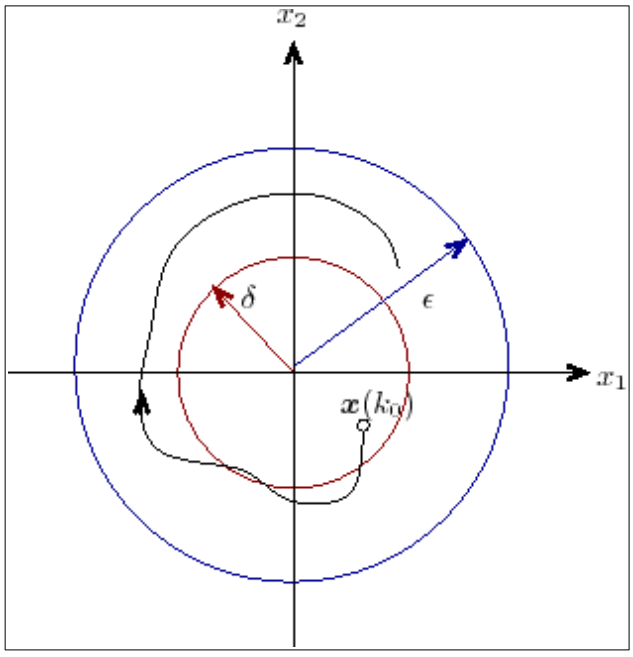
Θα εξετάσουμε αναλυτικότερα τις παραπάνω έννοιες στους ορισμούς που ακολουθούν, θεωρώντας χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.2}$) είναι το $0 \in \mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.2.1: Το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι:

- **ευσταθές** , αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε:

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$ [2]

- **ασταθές** , αν δεν είναι ευσταθές.



Εικόνα 1.2.2:Γεωμετρική αναπαράσταση του ορισμού 1.2.1

2 Με το συμβολισμό $\|.\|$ εννοούμε τη συνήθη νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.2.3: Το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι **ελκυστής (attractor)** αν υπάρχει περιοχή S του μηδενός ώστε:

$$\lim_{t \to \infty} x(t, x_0) = 0.$$

Ορισμός 1.2.4: Το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι **global attractor** αν ισχύει ο προηγούμενος ορισμός με $S = \mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.2.5: Το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν είναι ευσταθές και attractor.

Ορισμός 1.2.6: Το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι **ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές (globally asymptotically stable)** αν είναι ευσταθές και global attractor.

Από τα παραπάνω μπορούμε να εξάγουμε το ακόλουθο συμπέρασμα:

Πόρισμα 1.2.7: Αν έχουμε ευστάθεια του σημείου ισορροπίας τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \text{ η λύση } x(t, x_0) \text{ του } (\Sigma_{1.2}) \text{ ορίζεται } \forall t \geq 0.$$

Μία πολύ σημαντική ιδιότητα (που θα μας φανεί πολύ χρήσιμη[3] στο επόμενο κεφάλαιο αυτής της εργασίας) είναι ότι οι παραπάνω ιδιότητες της ευστάθειας που αναφέραμε, παραμένουν αναλλοίωτες μέσω αλλαγής συντεταγμένων γύρω από το σημείο ισορροπίας. Το γεγονός αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.2.8: Έστω το $0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο ισορροπίας του $(\Sigma_{1.2})$. Εφαρμόζουμε την αλλαγή συντεταγμένων $z = T(x)$, όπου $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μία συνάρτηση ορισμένη σε μια περιοχή του μηδενός, με $T(0) = 0$, η οποία μαζί με την αντίστροφη T^{-1}, είναι συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις. Το μετασχηματισμένο σύστημα γράφεται ως εξής:

$$\dot{z} = \hat{f}(z) \quad \text{όπου} \quad \hat{f}(z) = \frac{\partial T}{\partial x}(x) f(x) \Big|_{x = T^{-1}(z)}$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- Το $x = 0$ είναι μεμονωμένο σημείο ισορροπίας αν και μόνο αν το $z = 0$ είναι μεμονωμένο σημείο ισορροπίας.
- Το $x = 0$ είναι ευσταθές, ασυμπτωτικά ευσταθές, ασταθές αν και μόνο αν το $z = 0$ είναι αντίστοιχα ευσταθές, ασυμπτωτικά ευσταθές, ασταθές.

3 Η χρησιμότητα της ιδιότητας γίνεται εμφανής στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.5 του επόμενου κεφαλαίου όπου τα συστήματα $(\Sigma_{2.2})$ και $(\Sigma_{2.6})$ έχουν τις ίδιες ιδιότητες ευστάθειας.

Απόδειξη:

- Υποθέτουμε ότι το $x=0$ είναι μεμονωμένο σημείο ισορροπίας. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι το $z=0$ δεν είναι μεμονωμένο. Τότε θα υπάρχει κάποιο σημείο $\bar{z}\neq 0$ ώστε $\hat{f}(\bar{z})=0$.Επίσης, $\bar{x}=T^{-1}(\bar{z})$ και $f(\bar{x})=\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]^{-1}\hat{f}(\bar{z})$, συνεπώς έχουμε ότι και το $\bar{x}$ είναι σημείο ισορροπίας. Επειδή η συνάρτηση $T^{-1}(.)$ είναι συνεχής, μπορούμε να θεωρήσουμε το $\bar{x}$ όσο αυθαίρετα κοντά στο μηδέν θέλουμε, γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι το $x=0$ είναι μεμονωμένο σημείο ισορροπίας. Συνεπώς το $z=0$ είναι μεμονωμένο. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και το αντίστροφο.

- Έστω τώρα ότι το $x=0$ είναι ευσταθές.

  Τότε $\forall \varepsilon_1>0 \quad \exists \delta_1>0$ ώστε:

  $$\|x_0\|<\delta_1 \Rightarrow \|x(t)\|<\varepsilon_1 \quad \forall t\geq 0$$

  Λόγω συνέχειας της $T(.)$ έχουμε ότι $\forall \varepsilon_2>0 \quad \exists r>0$ ώστε:

  $$\|x(t)\|<r \Rightarrow \|z(t)\|<\varepsilon_2 \quad \forall t\geq 0$$

  Άρα $\exists \delta>0$ ώστε:

  $$\|x_0\|<\delta \Rightarrow \|x(t)\|<r \Rightarrow \|z(t)\|<\varepsilon_2 \quad \forall t\geq 0$$

  Λόγω συνέχειας της $T^{-1}(.) \quad \exists \delta_2>0$ ώστε:

  $$\|z(t)\|<\delta_2 \Rightarrow \|x(t)\|<\delta \quad \forall t\geq 0$$

  Συνεπώς:

  $$\|z_0\|<\delta_2 \Rightarrow \|x_0\|<\delta \Rightarrow \|x(t)\|<r \Rightarrow \|z(t)\|<\varepsilon_2 \quad \forall t\geq 0$$

  Επομένως το $z=0$ είναι ευσταθές. Όμοια αποδεικνύεται και το αντίστροφο.

  Έπειτα, για να αποδείξουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια του $z=0$ υποθέτουμε ότι το $x=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, δηλαδή ότι $x(t)\to 0$ καθώς $t\to\infty$. Τότε $\exists T_1>0$ ώστε για $\varepsilon_1>0$ να ισχύει:

  $$\|x(t)\|<\varepsilon_1 \quad \forall t>T_1$$

  Λόγω συνέχειας της $T(.)$ έχουμε ότι $\exists r>0$ ώστε $\forall \varepsilon_2>0$ να ισχύει ότι:

  $$\|x(t)\|<r \Rightarrow \|z(t)\|<\varepsilon_2 \quad \forall t\geq 0$$

  Άρα $\exists T_2>0$ ώστε:

$$\|x(t)\|<r \Rightarrow \|z(t)\|<\varepsilon_2 \quad \forall t>T_2$$

ή ισοδύναμα ότι $z(t)\to 0$ καθώς $t\to\infty$. Συνεπώς, το $z=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και το αντίστροφο.

Τέλος, για την περίπτωση της αστάθειας, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο ισχυρισμός:

$$x=0 \text{ είναι ευσταθές } \Leftrightarrow \quad z=0 \text{ είναι ευσταθές}$$

είναι ισοδύναμος με τον ισχυρισμό:

$$x=0 \text{ είναι ασταθές } \Leftrightarrow \quad z=0 \text{ είναι ασταθές.}$$

□

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ελκυστικότητα (attractivity) ενός σημείου ισορροπίας, δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκην ευστάθεια ή αστάθεια του σημείου αυτού. Κάτι τέτοιο γίνεται εμφανές από τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1.2.9:

Έστω

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1=0 \\ \dot{x}_2=-x_2 \end{Bmatrix}$$

όπου $x_0=(x_{1_0},x_{2_0})^T$. Άρα $x_1(t)=x_{1_0}$ και $x_2(t)=x_{2_0}\mathrm{e}^{-t}$. Επομένως, το $0\in\mathbb{R}^2$ δεν είναι attractor, αφού η λύση $x(t)=(x_1(t),x_2(t))^T$ δεν τείνει στο $0\in\mathbb{R}^2$ καθώς $t\to\infty$, αλλά είναι ευσταθές.

Παράδειγμα 1.2.10:

Έστω

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=-x_1 \end{Bmatrix}$$

όπου $x=(x_1,x_2)^T$. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$$

Έχουμε $\dot{V}(x_1,x_2)=\nabla V(x)\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}=2(x_1,x_2)\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}=0\Rightarrow V(x_1,x_2)=c, c\geqslant 0\Rightarrow x_1^2(t)+x_2^2(t)=c$

επομένως το $0\in\mathbb{R}^2$ δεν είναι attractor, αλλά είναι ευσταθές.

Παράδειγμα 1.2.11:

Έστω

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}_1=-x_1\\ \dot{x}_2=x_2\end{array}\right\}$$

όπου $x_0=(x_{1_0},x_{2_0})^T$. Άρα $x_1(t)=x_{1_0}\mathrm{e}^{-t}$ και $x_2(t)=x_{2_0}\mathrm{e}^{t}$.

Οπότε:

$$x_1(t)\cdot x_2(t)=x_{1_0}\cdot x_{2_0}$$

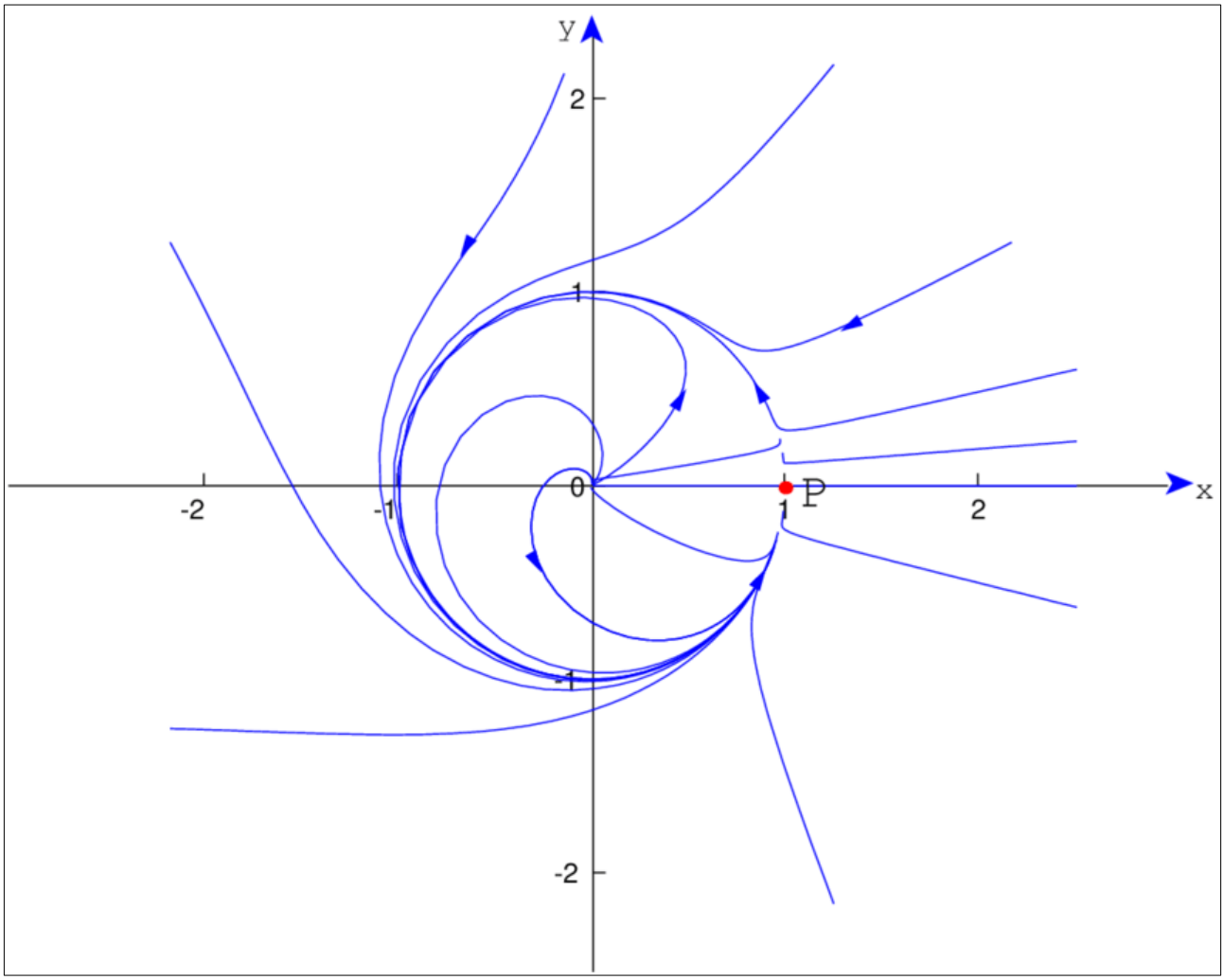
Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι το $0\in\mathbb{R}^2$ δεν είναι attractor και είναι ασταθές.

Παράδειγμα 1.2.12:

Έστω

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{r}=r(1-r)\\ \dot{\theta}=\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\end{array}\right\}$$

Έχουμε δύο σημεία ισορροπίας, το $0\in\mathbb{R}^2$ και το σημείο P(1,0). Το σημείο P όπως φαίνεται στην εικόνα 1.2.13 είναι attractor, αλλά δεν είναι ευσταθές.



Εικόνα 1.2.13: Παράδειγμα 1.2.12

1.3 Ευστάθεια Lyapunov (Lyapunov Stability)

Έστω το σύστημα:

$$(\Sigma_{1.3}): \quad \dot{x}=f(x)$$

όπου $x\in\mathbb{R}^n$ και $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση με $f(0)=0$.

Θεώρημα 1.3.1:

Αν υπάρχει συνάρτηση[4] $V\in C^1, V:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$ μία περιοχή του μηδενός, που ικανοποιεί τις παρακάτω υποθέσεις:

(1) $V(0)=0$ και $V(x)>0 \quad \forall x\in D/\{0\}$

(2) $\dot{V}(x):=\nabla V(x)f(x)\le 0 \quad \forall x\in D$

τότε το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας του $(\Sigma_{1.3})$.

4 C^1: Το σύνολο όλων των συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων.

Απόδειξη:
Αρκεί να δείξουμε ότι $\forall \varepsilon>0$ υπάρχει $U\subset D$ ώστε:

$$x(t,U)\subset S[0,\varepsilon] \tag{1.3.2}$$

όπου $S[0,\varepsilon]$ κλειστή σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$ κέντρου 0 και ακτίνας ε.
Έστω:

$$m=min\{V(x),\|x\|=\varepsilon\} \tag{1.3.3}$$

και

$$U=\{x\in S[0,\varepsilon]: V(x)\leq m/2\} \tag{1.3.4}$$

Από την (1) έπεται ότι $m>0$. Πράγματι, ισχύει η (1.3.2) διότι σε αντίθετη περίπτωση λόγω συνέχειας της $x(t,x_0)$ θα υπήρχε κάποιο $x_0\in U$ και $T>0$ ώστε:

$$\|x(t,x_0)\|<\varepsilon \qquad \forall t\in[0,T) \tag{1.3.5}$$

και

$$\|x(T,x_0)\|=\varepsilon \tag{1.3.6}$$

Όμως από την υπόθεση (2) έχουμε ότι:

$$V(x(t,x_0))-V(x_0)=\int_0^t \dot{V}(x(s,x_0))ds=\int_0^t \nabla V(x(s,x_0))f(x(s,x_0))ds\leq 0$$

Άρα

$$V(x(t,x_0))\leq V(x_0) \qquad \forall t\geq 0 \tag{1.3.7}$$

έχοντας προνοήσει ότι οι ιδιότητες (1),(2) ισχύουν για κάθε x στη σφαίρα $S[0,\varepsilon]$.

Από τις σχέσεις (1.3.3), (1.3.4), (1.3.5), (1.3.6), (1.3.7) έπεται ότι:

$$m\leq V(x(T,x_0))\leq V(x_0)\leq m/2$$

που είναι άτοπο. Συνεπώς $x(t,U)\subset S[0,\varepsilon]$ και επομένως το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ευσταθές.

□

Ορισμός 1.3.8: Μία συνάρτηση $V\in C^1, V:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$ μία περιοχή του μηδενός, που ικανοποιεί τις υποθέσεις (1) και (2) ονομάζεται **συνάρτηση Lyapunov**.

Παράδειγμα 1.3.9:

Έστω

$$\left\{\begin{array}{c} \dot{x_1}=-x_2 \\ \dot{x_2}=x_1-ax_2^3 \end{array}\right\}$$

όπου $a\geq 0$. Επιλέγουμε τη συνάρτηση:

$$V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$$

Παρατηρούμε ότι:

$$V(0,0)=0$$

και

$$V(x)=V(x_1,x_2)>0 \quad \text{για} \quad x\neq 0$$

Επίσης:

$$\dot{V}(x)=\nabla V(x)\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1-ax_2^3 \end{pmatrix}=2(x_1,x_2)\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1-ax_2^3 \end{pmatrix}=-2ax_2^4\leq 0$$

Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος 1.3.1 συνεπώς το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ευσταθές.

Στη συνέχεια προκειμένου να αποδείξουμε τα θεωρήματα La Salle και Lyapunov για ασυμπτωτική ευστάθεια του $0\in\mathbb{R}^n$,θα χρειαστούμε την έννοια του οριακού συνόλου L_{x_0} ,το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$L_{x_0}=\{x\in\mathbb{R}^n:\exists t_n\to\infty:\lim_{t_n\to\infty}x(t_n,x_0)=x\}$$

όπου $x(t,x_0)$ η λύση του συστήματος ($\Sigma_{1.3}$).

Οι ιδιότητες του συνόλου L_{x_0} είναι οι εξής:

i. Είναι χρονικά αναλλοίωτο

   <u>Απόδειξη</u>: Αρκεί να δείξουμε ότι:

   $$x(t,L_{x_0})\subset L_{x_0} \quad \forall t\geq 0$$

   Έστω λοιπόν $z\in L_{x_0}$ τότε $\exists\{t_n\}$ με $t_n\to\infty$ ώστε:

   $$x(t_n,x_0)\to z$$

   Λόγω συνέχειας της λύσης $x(t_n,x_0)$ και της ιδιότητας της ημιομάδας έχουμε ότι:

   $$x(t,z)=\lim_{t_n\to\infty}x(t,x(t_n,x_0))=\lim_{t_n\to\infty}x(t+t_n,x_0)\Rightarrow x(t,z)\in L_{x_0}$$

Συνεπώς $x(t, L_{x_0}) \subset L_{x_0} \quad \forall t \geq 0$ και επομένως το L_{x_0} είναι χρονικά αναλλοίωτο.

□

ii. Έστω S ένα οριακό σύνολο και $x_0 \in S$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $V: S \to \mathbb{R}^+$ με την ιδιότητα:

$$\dot{V}(x) := \nabla V(x) f(x) \leq 0 \quad \forall x \in S \tag{1.3.10}$$

Τότε ισχύει ότι $V(y) = V(z) \quad \forall y, z \in L_{x_0}$

Απόδειξη: Έστω $y, z \in L_{x_0}$ τότε $\exists \{t_n\}, \{\tau_n\}$ και θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $t_n \geq \tau_n$ με $t_n \to \infty$ και $\tau_n \to \infty$ ώστε:

$$x(t_n, x_0) \to y$$

και

$$x(\tau_n, x_0) \to z$$

Τότε έχουμε ότι:

$$V(y) \leftarrow V(x(t_n, x_0)) = V(x(t_n - \tau_n), x(\tau_n)) \overset{(1.3.10)}{\leq} V(x(\tau_n), x_0) \to V(z) \Rightarrow V(y) \leq V(z)$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $V(z) \leq V(y)$ θεωρώντας ότι $\tau_n \geq t_n$.
Συνεπώς, $V(y) = V(z)$.

□

iii. $\dot{V}(z) = 0 \quad \forall z \in L_{x_0}$

Απόδειξη:
Έστω $z \in L_{x_0}$ τότε από την ιδιότητα (¡) έχουμε ότι:

$$x(t, z) \in L_{x_0}$$

και από την ιδιότητα (¡¡) ότι:

$$V(x(t, z)) = V(z) \quad \forall t \geq 0$$

Αν παραγωγίσουμε την τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$0 = \nabla V(x(t, z)) \dot{x}(t, z) = \nabla V(x(t, z)) f(x(t, z)) = \frac{dV(z)}{dt} \quad \forall t \geq 0$$

Για $t = 0$ προκύπτει το ζητούμενο.

□

iv. Έστω $\{x(t, x_0), t \geq 0\}$ μία φραγμένη τροχιά. Τότε το L_{x_0} είναι μη κενό σύνολο, κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη: Το γεγονός ότι το L_{x_0} είναι μη κενό σύνολο είναι άμεση απόρροια του θεωρήματος Bolzano-Weierstrass. Έστω τώρα ότι δεν είναι φραγμένο. Τότε έπεται ότι $\exists\{y_n\}\in L_{x_0}$ με $\|y_n\|\to\infty$ και $\exists\{t_n\}$ με $t_n\to\infty$ ώστε:

$$\|y_n - x(t_n,x_0)\|\le\frac{1}{n}\quad\forall n\in\mathbb{N}^* \tag{1.3.11}$$

Επίσης, από υπόθεση:

$$\|x(t_n,x_0)\|\le k,k>0 \tag{1.3.12}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε ότι:

$$\|y_n\|=\|y_n-x(t_n,x_0)+x(t_n,x_0)\|\le\|y_n-x(t_n,x_0)\|+\|x(t_n,x_0)\|\overset{(1.3.11),(1.3.12)}{\le}\frac{1}{n}+k$$

Επομένως, οδηγούμαστε σε άτοπο αφού $\|y_n\|\to\infty$. Συνεπώς το L_{x_0} είναι φραγμένο.

Για να δείξουμε τώρα την κλειστότητα του συνόλου παίρνουμε $\{a_n\}\in L_{x_0}$ με την ιδιότητα $a_n\to a$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι $a\in L_{x_0}$.
Έχουμε ότι αν:

$a_1\in L_{x_0}$ $\exists\{t_{n_1}\}$ με $t_{n_1}\to\infty$ ώστε $x(t_{n_1},x_0)\to a_1$
$a_2\in L_{x_0}$ $\exists\{t_{n_2}\}$ με $t_{n_2}\to\infty$ ώστε $x(t_{n_2},x_0)\to a_2$
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
$a_k\in L_{x_0}$ $\exists\{t_{n_k}\}$ με $t_{n_k}\to\infty$ ώστε $x(t_{n_k},x_0)\to a_k$

Επιλέγουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας $\{t_{n_k}\}$ ώστε:

$$\|a_k-x(t_{n_k},x_0)\|\le\frac{1}{k}\quad\forall k\in\mathbb{N}^*$$

Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα:

$$\|a-x(t_{n_k},x_0)\|=\|a-a_k+a_k-x(t_{n_k},x_0)\|\le\|a-a_k\|+\underbrace{\|a_k-x(t_{n_k},x_0)\|}_{k\to\infty}\to 0\Rightarrow a\in L_{x_0}$$

□

v. Έστω $\{x(t,x_0),t\ge 0\}$ φραγμένη τροχιά. Τότε:

$$\lim_{t\to\infty}x(t,x_0)=0\,\forall t\ge 0\Leftrightarrow L_{x_0}=\{0\}$$

Απόδειξη:
$(\Rightarrow)$ Από υπόθεση $x(t_n,x_0)\to 0$ για $t_n\to\infty$ επομένως $L_{x_0}=\{0\}$.

$(\Leftarrow)$ Έστω $L_{x_0}=\{0\}$. Τότε $x(t,x_0)\to 0$ γιατί σε αντίθετη περίπτωση επειδή η τροχιά είναι φραγμένη θα $\exists\{t_n\}$ με $x(t_n,x_0)\to\lambda\neq 0$. Τότε όμως:

$$0\neq\lambda\in L_{x_0}$$

που είναι άτοπο, αφού $L_{x_0}=\{0\}$.

□

<u>Θεώρημα 1.3.13(La Salle)</u>:

- Αν υπάρχει συνάρτηση $V\in C^1, V:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$ μία περιοχή του μηδενός, που ικανοποιεί τις υποθέσεις (1),(2) του θεωρήματος 1.3.1 και επιπλέον τη συνεπαγωγή:

$$(3)\quad \dot{V}(x(t,x_0))=0\Rightarrow x_0=0 \qquad \forall t\in[0,t_0]$$

για $t_0>0$ αρκετά μικρό.
Τότε το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.3}$).

- Επίσης, αν υπάρχει συνάρτηση $V\in C^1, V:D\to\mathbb{R}$, $D=\mathbb{R}^n$, που ικανοποιεί τις υποθέσεις (1),(2),(3) και επιπλέον την:

$$(4)\quad \lim_{\|x\|\to\infty} V(x)=+\infty \quad \text{(proper)}$$

Τότε το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.3}$).

<u>Απόδειξη</u>:

- Το γεγονός ότι υπάρχει συνάρτηση $V\in C^1, V:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$ μία περιοχή του μηδενός, που ικανοποιεί τις υποθέσεις (1),(2) του θεωρήματος 1.3.1, εξασφαλίζει την ευστάθεια του $0\in\mathbb{R}^n$. Άρα $\forall\varepsilon>0$ έχουμε ότι $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ώστε:

$$x(t,S[0,\delta])\subset S[0,\varepsilon] \qquad (1.3.14)$$

Οπότε έπεται ότι $\emptyset\neq L_{x_0}\subset S[0,\varepsilon]$.
Επειδή έχουμε εξασφαλίσει την ευστάθεια του $0\in\mathbb{R}^n$, αρκεί να δείξουμε ότι αυτό είναι attractor (δες ορισμό 1.2.5). Δηλαδή:

$$\lim_{t\to\infty} x(t,x_0)=0 \qquad \forall x_0\in S[0,\delta] \qquad (1.3.15)$$

Πράγματι, ισχύει η (1.3.15) διότι σε αντίθετη περίπτωση από την (1.3.14), η λύση του συστήματος $x(t,x_0)$ είναι φραγμένη, άρα $\exists\{t_n\}$ ώστε $x(t_n,x_0)\to\lambda\neq 0$ και προφανώς $\lambda\in L_{x_0}$. Τότε όμως, από την ιδιότητα (¡) του οριακού συνόλου έχουμε ότι:

$$x(t,\lambda)\in L_{x_0}$$

και από την ιδιότητα (¡¡¡) ότι:

$$\dot{V}(x(t,\lambda))=0$$

Όμως λόγω της υπόθεσης (3):

$$\dot{V}(x(t,\lambda))=0\Rightarrow\lambda=0$$

που είναι άτοπο, αφού $\lambda\neq 0$.

- Εφόσον έχουμε εξασφαλισμένη την ευστάθεια του $0\in\mathbb{R}^n$, για να είναι αυτό ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές αρκεί να δείξουμε ότι είναι global attractor (δες ορισμό 1.2.6). Δηλαδή:

$$\lim_{t\to\infty} x(t,x_0)=0 \qquad \forall\, x_0\in\mathbb{R}^n \tag{1.3.16}$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι $\forall\{t_n\}\geq 0$ η τροχιά $\{x(t_n,x_0),\{t_n\}\geq 0\}$ είναι φραγμένη. Πράγματι, ισχύει κάτι τέτοιο γιατί σε αντίθετη περίπτωση θα $\exists\{\tau_n\}\subset\{t_n\}$ ώστε:

$$\left\|x(\tau_n,x_0)\right\|\to\infty \tag{1.3.17}$$

Τότε από την υπόθεση (4) έπεται ότι:

$$V(x(\tau_n,x_0))\to\infty \tag{1.3.18}$$

Όμως από την υπόθεση (2) προκύπτει:

$$V(x(\tau_n,x_0))\leq V(x_0) \tag{1.3.19}$$

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις (1.3.18) και (1.3.19) οδηγούν σε άτοπο. Επομένως, η τροχιά $\{x(t_n,x_0),\{t_n\}\geq 0\}$ είναι φραγμένη.

Έστω τώρα ότι δεν ισχύει η (1.3.16). Τότε επειδή η τροχιά $\{x(t_n,x_0),\{t_n\}\geq 0\}$ είναι φραγμένη, έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\{\xi_n\}\subset\{t_n\}$ με $\xi_n\to\infty$ τέτοια ώστε $x(\xi_n,x_0)\to k\neq 0$ και επομένως $k\in L_{x_0}$. Τότε όμως, από την ιδιότητα (¡) του οριακού συνόλου έχουμε:

$$x(t,k)\in L_{x_0}$$

και από την ιδιότητα (¡¡¡):

$$\dot{V}(x(t,k))=0$$

Όμως λόγω της υπόθεσης (3):

$$\dot{V}(x(t,k))=0\Rightarrow k=0$$

που είναι άτοπο, αφού $k\neq 0$. □

<u>Παράδειγμα 1.3.20 (Ταλαντωτής με τριβή)</u>:

Έστω

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=-ax_2-\sin(x_1) \end{Bmatrix}$$

όπου $a>0$. Θα μελετήσουμε την ευστάθεια του $0\in\mathbb{R}^2$. Επιλέγουμε τη συνάρτηση:

$$V(x_1,x_2)=(1-\cos(x_1))+\frac{1}{2}x_2^2 \quad , \quad (x_1,x_2)\in\Pi$$

όπου:

$$\Pi=\left\{-\frac{\pi}{2}<x_1<\frac{\pi}{2}, x_2\in\mathbb{R}\right\}$$

Άρα:

$$V(0,0)=0$$

και

$$V(x)=V(x_1,x_2)>0 \qquad \forall x=((x_1,x_2)\in\Pi/\{0\})$$

Επίσης:

$$\dot{V}(x)=\nabla V(x)\begin{pmatrix} x_2 \\ -ax_2-\sin(x_1)\end{pmatrix}=(\sin(x_1),x_2)\begin{pmatrix} x_2 \\ -ax_2-\sin(x_1)\end{pmatrix}=-ax_2^2\leq 0$$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος 1.3.1 άρα έχουμε εξασφαλίσει την ευστάθεια του $0\in\mathbb{R}^2$. Όμως, έχουμε επιπλέον ότι:

$$\dot{V}(x)=0\Rightarrow x_2(t)=0\Rightarrow\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t)=0 \\ \sin(x_1(t))=0\end{Bmatrix}\Rightarrow x_1(t)=0\Rightarrow x_0=(x_{1_0},x_{2_0})^T=(0,0)=0\in\mathbb{R}^2$$

Άρα ικανοποιείται και η επιπλέον συνεπαγωγή του θεωρήματος La Salle (θεώρημα 1.3.13), συνεπώς το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

<u>Παράδειγμα 1.3.21</u>:

Ας επιστρέψουμε τώρα στο παράδειγμα 1.3.9 όπου:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1=-x_2 \\ \dot{x}_2=x_1-ax_2^3\end{Bmatrix}$$

για $a\geq 0$. Είχαμε επιλέξει τη συνάρτηση $V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$, η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 1.3.1 και είχαμε δείξει την ευστάθεια του $0\in\mathbb{R}^2$. Θα δούμε μάλιστα ότι το σημείο $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές καθώς:

$$\dot{V}(x)=\nabla V(x)\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1-ax_2^3\end{pmatrix}=2(x_1,x_2)\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1-ax_2^3\end{pmatrix}=-2ax_2^4=0\Rightarrow x_2(t)=0\Rightarrow x_1(t)=0$$

Άρα $x_0=(x_{1_0},x_{2_0})^T=(0,0)=0\in\mathbb{R}^2$.

Επιπλέον είναι proper καθώς $\lim_{\|x\|\to\infty} V(x)=+\infty$.

Συνεπώς ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος La Salle (θεώρημα 1.3.13) και επομένως το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε το Θεώρημα Lyapunov για ασυμπτωτική ευστάθεια του $0\in\mathbb{R}^n$, ως άμεση απόρροια του Θεωρήματος La Salle.

<u>Θεώρημα 1.3.22 (Lyapunov)</u>:

- Αν υπάρχει συνάρτηση $V\in C^1, V:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$ μία περιοχή του μηδενός, που ικανοποιεί την υπόθεση (1) του θεωρήματος 1.3.1 και την:

  (5) $\dot{V}(x)<0 \quad \forall x\in D/\{0\}$

  τότε το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.3}$).
- Αν υπάρχει συνάρτηση $V\in C^1, V:D\to\mathbb{R}$, $D=\mathbb{R}^n$, η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις (1),(5) και επιπλέον την (4), δηλαδή είναι proper, τότε το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.3}$).

  <u>Απόδειξη</u>:
- Έστω ότι $\dot{V}(x(t,x_0))=0$. Επειδή από την υπόθεση (5) έχουμε:

  $$\dot{V}(x)<0 \quad \forall x\in D/\{0\}$$

  έπεται ότι:

  $$\dot{V}(x(t,x_0))=0\Rightarrow x(t,x_0)=0\Rightarrow x(0,x_0)=x_0=0$$

  Συνεπώς ικανοποιείται η συνεπαγωγή La Salle (υπόθεση (3) του θεωρήματος 1.3.13) και άρα από το θεώρημα La Salle, το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.3}$).
- Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο, όπως και στην απόδειξη του πρώτου σκέλους του θεωρήματος, δείχνοντας ότι ισχύει η συνεπαγωγή La Salle. Επιπλέον, από υπόθεση, η V είναι proper, και άρα από θεώρημα 1.3.13 το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.3}$).

□

Ορισμός 1.3.23: Μία συνάρτηση $V \in C^1, V: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ μία περιοχή του μηδενός, που ικανοποιεί τις υποθέσεις (1) και (5) ονομάζεται **αυστηρή (strict) συνάρτηση Lyapunov**.

Παράδειγμα 1.3.24:
Έστω

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 = -x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{Bmatrix}$$

Επιλέγουμε τη συνάρτηση:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Παρατηρούμε ότι:

$$V(0,0) = 0$$

και

$$V(x) = V(x_1, x_2) > 0 \quad \text{για} \quad x \neq 0$$

Επίσης:

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \begin{pmatrix} -x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} = 2(x_1, x_2) \begin{pmatrix} -x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} = -2(x_1^2 + x_2^2)^2 < 0 \qquad \forall\, x \neq 0$$

Επιπλέον η V είναι proper, δηλαδή $\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = +\infty$, και επομένως από το θεώρημα Lyapunov (θεώρημα 1.3.22), το $0 \in \mathbb{R}^2$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Το θεώρημα που ακολουθεί, είναι πολύ χρήσιμο για να διαπιστώσουμε την αστάθεια του $0 \in \mathbb{R}^n$. Πρόκειται για το θεώρημα αστάθειας του Chetaev.

Θεώρημα 1.3.25 (Chetaev):
Έστω μία συνάρτηση $V \in C^1, V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ορισμένη σε μια περιοχή του μηδενός με $V(0) = 0$. Αν $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $0 \in \partial U$ ώστε:

- $V(x) = 0 \quad \forall\, x \in \partial U$ (1.3.26)
- $V(x) > 0 \quad \forall\, x \in U$ (1.3.27)
- $\dot{V}(x) > 0 \quad \forall\, x \in U$ (1.3.28)

τότε το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.3}$).

Απόδειξη:

Έστω το σύνολο $W=U\cap S[0,r]$, όπου έχουμε επιλέξει $r>0$ αρκετά μικρό, ώστε να ικανοποιούνται οι υποθέσεις (1.3.26),(1.3.27),(1.3.28) του θεωρήματος. Έστω επίσης ότι $x_0\in W$ και ορίζουμε:

$$\xi := inf\{\dot{V}(x): x\in W: V(x)\geq V(x_0)\} \tag{1.3.29}$$

Τότε έχουμε:

$$V(x(t,x_0))=V(x_0)+\int_0^t \dot{V}(x(s,x_0))ds \overset{(1.3.29)}{\geq} V(x_0)+\xi.t \tag{1.3.30}$$

Η σχέση (1.3.30) μας δείχνει ότι η λύση $x(t,x_0)$ εγκαταλείπει το χωρίο W , αφού αυτό είναι φραγμένο. Αυτό όμως θα συμβεί κάποια χρονική στιγμή $T>0$ ώστε:

$$x(t,x_0)\in W \qquad \forall t\in[0,T) \tag{1.3.31}$$

και

$$x(T,x_0)\in S[0,r] \tag{1.3.32}$$

δηλαδή η λύση $x(t,x_0)$ εγκαταλείπει το χωρίο W μέσω της σφαίρας $S[0,r]$. Πράγματι, αυτός είναι ο μοναδικός τρόπος για να εγκαταλείψει η λύση το χωρίο W διότι σε αντίθετη περίπτωση, θα έπρεπε υποχρεωτικά:

$$x(t,x_0)\in W \qquad \forall t\in[0,T) \quad , \quad x(T,x_0)\notin S[0,r]$$

και

$$x(T,x_0)\in \partial U$$

Τότε όμως από υπόθεση (1.3.26) έπεται ότι:

$$V(x(T,x_0))=0$$

που είναι άτοπο, διότι από υπόθεση (1.3.28) προκύπτει:

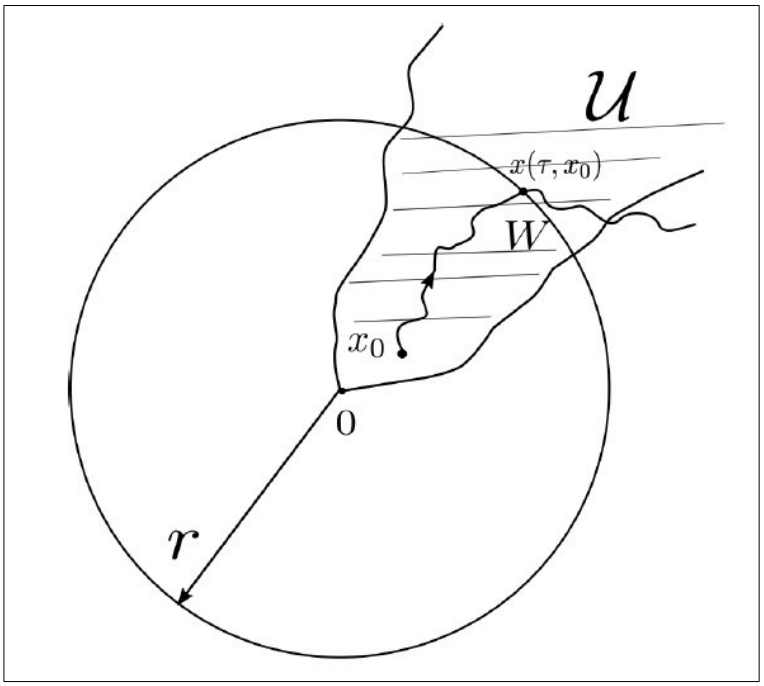
$$V(x(t,x_0))>V(x_0)\overset{(1.3.27)}{>}0 \qquad \forall t\geq 0$$

Άρα δείξαμε ότι για κάθε $r>0$ υπάρχει x_0 αυθαίρετα κοντά στο μηδέν ώστε:

$$\left\|x(T,x_0)\right\|\geq r \quad \text{, για κάποιο } T>0$$

Δηλαδή το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.3}$).

□



Εικόνα 1.3.33: Θεώρημα Chetaev

<u>Παράδειγμα 1.3.34</u>:
Έστω

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 = x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 x_1^2 + x_1 \end{Bmatrix}$$

Επιλέγουμε τη συνάρτηση:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

και θεωρούμε το σύνολο:

$$U = \{(x_1, x_2) : x_1^2 - x_2^2 > 0\} = \{(x_1, x_2) : |x_1|^2 > |x_2|^2\}$$

Έχουμε ότι:

$$V(0,0) = 0$$

$$V(x) = V(x_1, x_2) = 0 \qquad \forall\, x \in \partial U$$

$$V(x) = V(x_1, x_2) > 0 \qquad \forall\, x \in U$$

και

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2 \\ x_2 x_1^2 + x_1 \end{pmatrix} = 2(x_1, -x_2) \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2 \\ x_2 x_1^2 + x_1 \end{pmatrix} = 2 x_1^2 (x_1^2 - x_2^2) > 0 \qquad \forall\, x \in U$$

Επομένως ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Chetaev (θεώρημα 1.3.25) και άρα το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.

1.4 Γραμμικοποίηση (Linearization)

Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ότι ένας τρόπος για να μελετήσουμε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας ενός συστήματος, είναι η μέθοδος Lyapunov, επιλέγοντας κατάλληλη συνάρτηση η οποία να ικανοποιεί τις υποθέσεις των θεωρημάτων που συζητήσαμε. Στην παράγραφο αυτή, θα δούμε έναν ακόμη τρόπο με τον οποίο μπορούμε να διαπιστώσουμε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας, για την περίπτωση που το σύστημά μας είναι μη γραμμικό. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι σημείο ισορροπίας του μη γραμμικού μας συστήματος είναι το $0\in\mathbb{R}^n$. Θα δούμε ότι μπορούμε να διαπιστώσουμε το είδος της ευστάθειας του, μελετώντας ένα γραμμικό σύστημα που προκύπτει σε μια περιοχή του μηδενός. Αρχικά, ας θυμηθούμε πως μπορούμε να διαπιστώσουμε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας ενός γραμμικού συστήματος.

Έστω λοιπόν το γραμμικό σύστημα:

$$(\Sigma_{1.4}):\quad \dot{x}=Ax$$

όπου $x\in\mathbb{R}^n$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ και σημείο ισορροπίας του αποτελεί το $0\in\mathbb{R}^n$.

Η λύση του ($\Sigma_{1.4}$) είναι της μορφής:

$$x(t)=x_0\exp(At) \tag{1.4.1}$$

όπου για κάθε πίνακα A υπάρχει μη μοναδιαίος πίνακας P ο οποίος μετασχηματίζει τον πίνακα A στην Jordan μορφή του:

$$P^{-1}AP=J=block\,diag\{J_1,J_2,.....,J_r\} \tag{1.4.2}$$

όπου:

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_i\end{pmatrix}_{m\times m}$$

λ_i οι ιδιοτιμές του πίνακα A και $m>1$.

Άρα, από την (1.4.2) έχουμε:

$$\exp(At)=P\exp(Jt)P^{-1}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i}t^{k-1}\exp(\lambda_i t)R_{ik} \qquad (1.4.3)$$

Είναι κατανοητό λοιπόν, ότι για να είναι το $0\in\mathbb{R}^n$ ευσταθές σημείο ισορροπίας θα πρέπει η λύση (1.4.1) του ($\Sigma_{1.4}$) να είναι φραγμένη $\forall t\geq 0$. Ειδικότερα, η εκθετική συνάρτηση $\exp(At)$ να είναι φραγμένη. Παρατηρώντας τη σχέση (1.4.3), μπορούμε να διακρίνουμε ότι αυτό συμβαίνει όταν $\Re e(\lambda_i)\leq 0$, διότι σε αντίθετη περίπτωση, αν έχουμε $\Re e(\lambda_i)>0$, τότε για $t\to\infty$ η συνάρτηση $\exp(At)$ δεν είναι φραγμένη και συνεπώς το ίδιο ισχύει και για τη λύση (1.4.1). Μάλιστα, για την περίπτωση που οι ιδιοτιμές έχουν $\Re e(\lambda_i)=0$, για να παραμείνει η λύση φραγμένη, θα πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει $q_i\geq 2$ και $rank(A-\lambda_i I)=q_i-n$, όπου q_i είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα των ιδιοτιμών λ_i και n η διάσταση του πίνακα A. Αν βέβαια έχουμε ότι $\Re e(\lambda_i)<0$, τότε για $t\to\infty$ προκύπτει $\exp(At)\to 0$ και επομένως το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.4}$). Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα:

<u>Θεώρημα 1.4.4</u>: Το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.4}$) αν και μόνο αν για όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα A ισχύει ότι $\Re e(\lambda_i)\leq 0$,και για κάθε ιδιοτιμή που έχει $\Re e(\lambda_i)=0$ ισχύει ότι $q_i\geq 2$ και $rank(A-\lambda_i I)=q_i-n$. Μάλιστα, στην περίπτωση που $\Re e(\lambda_i)<0$, το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.4}$).

Έστω τώρα το μη γραμμικό σύστημα:

$$(\Sigma_{1.5}):\ \dot{x}=f(x)$$

όπου $x\in\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}^n$ μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση με $f(0)=0$ και $D\subset\mathbb{R}^n$ μία περιοχή του μηδενός.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι:

$$f_i(x)-f_i(0)=x\frac{\partial f_i}{\partial x}(\xi_i) \qquad (1.4.5)$$

όπου ξ_i είναι κάποιο σημείο ανάμεσα στο 0 και το x.

Επειδή το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.5}$) από την (1.4.5) παίρνουμε:

$$f_i(x)=x\frac{\partial f_i}{\partial x}(\xi_i)=x\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}(\xi_i)-\frac{\partial f_i}{\partial x}(0)+\frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right)=x\frac{\partial f_i}{\partial x}(0)+x\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}(\xi_i)-\frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right)=Ax+g(x)$$

όπου:

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x)\Big|_{x=0}$$

και

$$g_i(x)=x\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}(\xi_i)-\frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right)$$

Λόγω συνέχειας της $\frac{\partial f}{\partial x}$, έχουμε ότι:

$$\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x}(\xi_i)-\frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right\|<\varepsilon \quad \text{, για} \quad \varepsilon>0$$

Επομένως

$$\|g_i(x)\|=\left\|x\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}(\xi_i)-\frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right)\right\|=\|x\|\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x}(\xi_i)-\frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right\|<\varepsilon\|x\|\Rightarrow\frac{\|g_i(x)\|}{\|x\|}<\varepsilon$$

Συνεπώς

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|}\to 0 \quad \text{καθώς} \quad x\to 0$$

Άρα, σε μια περιοχή του μηδενός προκύπτει το γραμμικό σύστημα:

$$\dot{x}=Ax$$

με

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x)\Big|_{x=0}$$

Επομένως για να μελετήσουμε την ευστάθεια του $0\in\mathbb{R}^n$, σαν σημείο ισορροπίας του γραμμικού συστήματος που προκύπτει σε μια περιοχή του μηδενός, θα χρειαστεί όπως δείξαμε παραπάνω, να εξετάσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A=\frac{\partial f}{\partial x}(x)\Big|_{x=0}$.

Θα δούμε μέσω του θεωρήματος γραμμικοποίησης, ότι αν τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του πίνακα A είναι αρνητικά, τότε το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.5}$). Επίσης, αν ο πίνακας A έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή με θετικό πραγματικό μέρος, τότε το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.5}$). Προτού όμως αποδείξουμε το θεώρημα γραμμικοποίησης, θα χρειαστούμε ένα θεώρημα που αφορά τους πίνακες Hurwitz (δηλαδή τους πίνακες που έχουν ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη) το οποίο διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε παρακάτω.

Θεώρημα 1.4.6: Έστω A ένας πίνακας Hurwitz. Τότε για κάθε πίνακα Q , συμμετρικό και θετικά ορισμένο, υπάρχει μοναδικός πίνακας P συμμετρικός και θετικά ορισμένος ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση:

$$PA+A^TP=-Q \quad \text{(εξίσωση Lyapunov)} \tag{1.4.7}$$

Απόδειξη:

Έστω:

$$P=\int_0^\infty \exp(A^Tt)Q\exp(At)\,dt$$

Προφανώς, ο πίνακας P είναι συμμετρικός. Επίσης, είναι θετικά ορισμένος, διότι σε αντίθετη περίπτωση, θα υπήρχε διάνυσμα x με $x\neq 0$ ώστε $x^TPx=0$. Δηλαδή:

$$\int_0^\infty x^T\exp(A^Tt)Q\exp(At)\,x\,dt=0\Rightarrow \exp(At)\,x=0\Rightarrow x\equiv 0 \quad \text{Άτοπο}$$

Ακόμα, ο πίνακας P ικανοποιεί την εξίσωση (1.4.7) καθώς:

$$PA+A^TP=\int_0^\infty \exp(A^Tt)Q\exp(At)\,A\,dt+\int_0^\infty A^T\exp(A^Tt)Q\exp(At)\,dt=\int_0^\infty \frac{d}{dt}[\exp(A^Tt)Q\exp(At)]\,dt$$

$$=\exp(A^Tt)Q\exp(At)\Big|_0^\infty=-Q$$

Τέλος, μένει να αποδείξουμε ότι ο πίνακας P είναι μοναδικός. Έστω λοιπόν δύο πίνακες P και $\widetilde{P}$ με $P\neq\widetilde{P}$ που ικανοποιούν την εξίσωση (1.4.7). Τότε προκύπτει ότι:

$$(P-\widetilde{P})A+A^T(P-\widetilde{P})=0\Rightarrow \exp(A^Tt)[(P-\widetilde{P})A+A^T(P-\widetilde{P})]\exp(At)=0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}[\exp(A^Tt)(P-\widetilde{P})\exp(At)]=0\Rightarrow \exp(A^Tt)(P-\widetilde{P})\exp(At)=c \quad , \quad c\in\mathbb{R} \quad , \quad \forall\, t$$

Επειδή $\exp(A0)=I$ έχουμε ότι:

$$P-\widetilde{P}=\exp(A^Tt)(P-\widetilde{P})\exp(At)\xrightarrow[t\to\infty]{} 0\Rightarrow P=\widetilde{P}$$

Επομένως, ο πίνακας P είναι μοναδικός.

□

Τώρα, είμαστε σε θέση να δείξουμε το θεώρημα γραμμικοποίησης.

Θεώρημα 1.4.8: Έστω ότι έχουμε το σύστημα ($\Sigma_{1.5}$) και $A=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x)\Big|_{x=0}$. Αν

- ο πίνακας A είναι Hurwitz, τότε το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.5}$).

- ο πίνακας A έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή με θετικό πραγματικό μέρος, τότε το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{1.5}$).

  Απόδειξη:

- Ο πίνακας A είναι Hurwitz, άρα σύμφωνα με το θεώρημα 1.4.6 υπάρχει μοναδικός πίνακας P συμμετρικός και θετικά ορισμένος ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση:

$$PA+A^TP=-I \tag{1.4.9}$$

  Το ($\Sigma_{1.5}$) όπως είδαμε παραπάνω γράφεται:

$$\dot{x}=Ax+g(x)=f(x)$$

  όπου $\frac{\|g(x)\|}{\|x\|}\to 0$ καθώς $x\to 0$.

  Επιλέγουμε ως συνάρτηση Lyapunov την:

$$V(x)=x^TPx$$

  Άρα έχουμε:

$$\dot{V}(x)=x^TPf(x)+f^T(x)Px=x^TP(Ax+g(x))+(x^TA^T+g^T(x))Px$$

$$=x^T(PA+A^TP)x+2x^TPg(x)\overset{(1.4.9)}{=}-\|x\|^2+2x^TPg(x) \tag{1.4.10}$$

  Επειδή $\frac{\|g(x)\|}{\|x\|}\to 0$ καθώς $x\to 0$, έχουμε ότι $\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0$ ώστε:

$$\|g(x)\|<\varepsilon\|x\| \qquad \forall\|x\|<\delta \tag{1.4.11}$$

  Άρα, από τις σχέσεις (1.4.10) και (1.4.11) παίρνουμε:

$$\dot{V}(x)<-\|x\|^2+2\varepsilon\|P\|\|x\|^2 \tag{1.4.12}$$

  Επομένως, για $\varepsilon=\frac{1}{2\|P\|}$ από τη σχέση (1.4.12) έπεται ότι:

$$\dot{V}(x)<0\ ,\ x \text{ κοντά στο } 0.$$

  Συνεπώς, από το Θεώρημα Lyapunov (θεώρημα 1.3.22) έχουμε ότι το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

- Το ($\Sigma_{1.5}$) γράφεται:

$$\dot{x}=Ax+g(x)$$

όπου $\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \to 0$ καθώς $x \to 0$.

Υποθέτουμε ότι:

$\Re e(\lambda_i) \neq 0$ για κάθε ιδιοτιμή λ_i του πίνακα A και ότι οι ιδιοτιμές είναι διακριτές (1.4.13)

Μέσω γραμμικού μετασχηματισμού των συντεταγμένων[5] το σύστημα γράφεται ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + g_1(x) \\ \dot{x}_2 = -A_2 x_2 + g_2(x) \end{array} \right\} \quad (1.4.14)$$

όπου:

$$x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, n_1 + n_2 = n$$

και

$$\frac{\|g_1(x)\|}{\|x\|} \to 0 \quad , \quad \frac{\|g_2(x)\|}{\|x\|} \to 0 \quad \text{καθώς} \quad x \to 0.$$

Επίσης οι A_1, A_2 είναι Hurwitz, ώστε να ικανοποιείται η υπόθεση (1.4.13), ο πίνακας A_1 περιέχει τις ιδιοτιμές του A με θετικό πραγματικό μέρος, και αντίστοιχα ο A_2 τις ιδιοτιμές του A με αρνητικό πραγματικό μέρος. Αφού αμφότεροι οι A_1, A_2 είναι Hurwitz, τότε από θεώρημα 1.4.6 υπάρχουν μοναδικοί πίνακες P_1, P_2 συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση:

$$P_i A_i + A_i^T P_i = -I_{n_i}, i = 1,2 \quad (1.4.15)$$

όπου $I_{n_1} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, I_{n_2} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$.

Επιλέγουμε τη συνάρτηση:

$$V(x) = x_1^T P x_1 - x_2^T P x_2$$

Παρατηρούμε ότι $V(x) > 0$ σε ένα σύνολο U με υπόχωρο $x_2 = 0$. Ορίζουμε:

$$W = \{x : \|x\| \leq \varepsilon : V(x) > 0\} = U \cap S[0, \varepsilon]$$

και μέσω της (1.4.15) προκύπτει ότι:

$$\dot{V}(x) = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + x^T g(x)$$

5 Ο γραμμικός μετασχηματισμός γίνεται μέσω του Θεωρήματος Jordan.

Άρα $\dot{V}(x)>0 \quad \forall x$ κοντά στο μηδέν, και επομένως από το θεώρημα Chetaev (θεώρημα 1.3.25), για αρκετά μικρό $\varepsilon>0$, το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας. Θα δείξουμε τώρα, ότι το παραπάνω ισχύει και χωρίς την υπόθεση (1.4.13). Πράγματι, είδαμε με την ανάλυση που προηγήθηκε, ότι η υπόθεση (1.4.13) μας εξασφαλίζει την ύπαρξη συμμετρικού και θετικά ορισμένου πίνακα P ώστε:

$$PA+A^T P=+I \tag{1.4.16}$$

Για τη μορφή (1.4.14) του συστήματος, η σχέση (1.4.16) είναι ισοδύναμη με την (1.4.15) όταν $P=\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{pmatrix}$ και $A=\begin{pmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, όπου η ιδιότητα (1.4.16) είναι αυτή που εξασφαλίζει την αστάθεια με $V(x)=x^T Px$ και εφαρμογή του θεωρήματος του Chetaev.

Έστω τώρα ότι δεν ικανοποιείται η υπόθεση (1.4.13) για τον πίνακα A , τότε μπορούμε να επιλέξουμε $\delta>0$ αρκετά μικρό, ώστε ο πίνακας $A+\delta I$ να πληροί την υπόθεση (1.4.13) και επομένως να υπάρχει πίνακας P συμμετρικός και θετικά ορισμένος ώστε:

$$P(A+\delta I)+(A+\delta I)^T P=+I$$

Στη συνέχεια, με $V(x)=x^T Px$ και εφαρμογή του θεωρήματος του Chetaev, προκύπτει ότι το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.

□

<u>Παράδειγμα 1.4.17(Ταλαντωτής με τριβή)</u>:

Έστω

$$\begin{Bmatrix} \dot{x_1}=x_2 \\ \dot{x_2}=-ax_2-\sin(x_1) \end{Bmatrix}$$

όπου $a>0$ και $x=(x_1,x_2)^T$.

Είχαμε μελετήσει το σύστημα αυτό, στο παράδειγμα 1.3.20, όπου δείξαμε με τη βοήθεια του θεωρήματος La Salle ότι το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας. Θα δείξουμε το ίδιο χρησιμοποιώντας το θεώρημα γραμμικοποίησης (θεώρημα 1.4.6). Έχουμε ότι αν:

$$f(x)=\begin{pmatrix} x_2 \\ -ax_2-\sin(x_1) \end{pmatrix}$$

τότε:

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x)\Big|_{x=0}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\cos(x_1) & -a\end{pmatrix}\Big|_{(0,0)}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -a\end{pmatrix}$$

Επομένως

$$det(A-\lambda I)=0\Rightarrow \lambda^2+a\lambda+1=0 \qquad (1.4.18)$$

Η διακρίνουσα του πολυωνύμου είναι $\Delta=a^2-4$, η οποία είναι θετική στην περίπτωση που $a>2$, αρνητική για $0<a<2$, και μηδενική για $a=2$. Για $a>2$ οι λύσεις της (1.4.18) είναι:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$$

οι οποίες είναι αρνητικές $\forall a\in(2,+\infty)$.
Για $0<a<2$ έχουμε δύο μιγαδικές λύσεις:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{4-a^2}i}{2}$$

όπου $\Re e(\lambda_{1,2})=-\frac{a}{2}<0 \quad \forall a\in(0,2)$.
Τέλος, για $a=2$:

$$\lambda_{1,2}=-1<0$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση $\Re e(\lambda_{1,2})<0$,δηλαδή ο πίνακας A είναι Hurwitz, επομένως από το θεώρημα 1.4.8 το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Το παραπάνω σύστημα έχει επίσης σημείο ισορροπίας το $(\pi,0)$ αφού παρατηρούμε ότι $f(\pi,0)=0$. Ας εξετάσουμε την ευστάθεια του, χρησιμοποιώντας το θεώρημα γραμμικοποίησης. Έχουμε ότι:

$$\widetilde{A}=\frac{\partial f}{\partial x}(x)\Big|_{(x_1,x_2)=(\pi,0)}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\cos(x_1) & -a\end{pmatrix}\Big|_{(\pi,0)}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -a\end{pmatrix}$$

Άρα:

$$det(\widetilde{A}-\lambda I)=0\Rightarrow \lambda^2+a\lambda-1=0 \qquad (1.4.19)$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta=a^2+4>0$. Οι λύσεις της (1.4.19) είναι:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$$

Είναι φανερό ότι η ιδιοτιμή $\lambda_1=\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ είναι θετική, ενώ η $\lambda_2=\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2}$ είναι αρνητική $\forall a\in(0,+\infty)$. Συνεπώς, υπάρχει μία θετική ιδιοτιμή και άρα από το θεώρημα 1.4.8 το $(\pi,0)$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.

Μελετώντας το θεώρημα 1.4.8 είναι λογικό να μας δημιουργηθεί το εξής ερώτημα:
Τι γίνεται όταν ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές με $\Re e(\lambda_i) \leq 0$; Δηλαδή την περίπτωση, που κάποιες από τις ιδιοτιμές του πίνακα έχουν μηδενικό και άλλες αρνητικό πραγματικό μέρος. Τότε η γραμμικοποίηση αποτυγχάνει να αποφανθεί για την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας, και την απάντηση στο ερώτημα, μπορεί να δώσει το Θεώρημα Κεντρικής Πολλαπλότητας (Center Manifold Theorem), το οποίο είναι το κύριο αντικείμενο αυτής της εργασίας και της ανάλυσης που ακολουθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 2ο

Η θεωρία της Κεντρικής Πολλαπλότητας

2.1 Το θεώρημα Κεντρικής Πολλαπλότητας (Center Manifold Theorem)

Έστω το μη γραμμικό σύστημα:

$$(\Sigma_{2.1}): \quad \dot{x}=f(x)$$

όπου $x\in\mathbb{R}^n$ και $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση με $f(0)=0$.

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο μέσω της μεθόδου της γραμμικοποίησης, αν οι ιδιοτιμές του πίνακα $A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right|_{x=0}$ έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε το σημείο ισορροπίας $0\in\mathbb{R}^n$ του ($\Sigma_{2.1}$) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, ενώ αν έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή με θετικό πραγματικό μέρος τότε το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασταθές. Το ερώτημα που τίθεται είναι τι γίνεται στην περίπτωση που ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές για τις οποίες ισχύει ότι $\Re e(\lambda_i)\le 0$. Σε αυτήν την περίπτωση το θεώρημα της γραμμικοποίησης αδυνατεί να δώσει απάντηση. Θα δούμε ότι μέσω του Θεωρήματος της Κεντρικής Πολλαπλότητας, θα μπορέσουμε να διαπιστώσουμε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $0\in\mathbb{R}^n$, μελετώντας ένα σύστημα κατώτερης τάξης από το ($\Sigma_{2.1}$), και συγκεκριμένα ένα σύστημα του οποίου η τάξη ισούται με το πλήθος των ιδιοτιμών του πίνακα A με μηδενικά πραγματικά μέρη.

Αρχικά θα ορίσουμε την έννοια της k-διάστατης πολλαπλότητας (manifold), ως τη λύση της εξίσωσης:

$$\eta(x)=0$$

όπου $\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-k}$ είναι μία απείρως συνεχώς διαφορίσιμη (λεία) συνάρτηση.

Για παράδειγμα ο μοναδιαίος κύκλος στον $\mathbb{R}^2$:

$$\{x\in\mathbb{R}^2: x_1^2+x_2^2=1\}$$

είναι μία μονοδιάστατη πολλαπλότητα ενώ στον $\mathbb{R}^n$:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$$

είναι μία (n-1)-διάστατη πολλαπλότητα.

<u>Ορισμός 2.1.1</u>: Μία πολλαπλότητα $\{\eta(x)=0\}$ είναι αναλλοίωτη (invariant) για το ($\Sigma_{2.1}$) αν:

$$\eta(x_0)=0 \Rightarrow \eta(x(t))=0 \qquad \forall t \in [0,t_1) \subset \mathbb{R}$$

όπου $[0,t_1)$ ένα οποιοδήποτε χρονικό διάστημα στο οποίο ορίζεται η λύση $x(t,x_0)$.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η f είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη, το ($\Sigma_{2.1}$) γράφεται ως εξής:

$$\dot{x} = Ax + \left(f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(0)x \right)$$

όπου η συνάρτηση:

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(0)\,x$$

είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη και

$$\tilde{f}(0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0) = 0.$$

Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στην περίπτωση που η γραμμικοποίηση αποτυγχάνει. Συγκεκριμένα, έστω ότι ο πίνακας A έχει k ιδιοτιμές με μηδενικά πραγματικά μέρη και $m=n-k$ το πλήθος ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη. Τότε, με κατάλληλο μετασχηματισμό ομοιότητας T ,ο πίνακας A μετασχηματίζεται στην παρακάτω μορφή (block diagonal matrix):

$$TA\,T^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

όπου ο A_1 είναι ένας $k \times k$ πίνακας, του οποίου οι ιδιοτιμές έχουν μηδενικά πραγματικά μέρη, και ο A_2 είναι ένας $m \times m$ πίνακας ο οποίος είναι Hurwitz.

Στη συνέχεια κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = Tx$$

όπου $y \in \mathbb{R}^k, z \in \mathbb{R}^m$. Προκύπτει το σύστημα:

$$(\Sigma_{2.2}):\ \begin{Bmatrix} \dot{y}=A_1 y+g_1(y,z) \\ \dot{z}=A_2 z+g_2(y,z) \end{Bmatrix}$$

όπου οι συναρτήσεις g_1, g_2 έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τη συνάρτηση $\tilde{f}$, δηλαδή είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες και:

$$g_i(0,0)=\frac{\partial g_i}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial g_i}{\partial z}(0,0)=0 \qquad i=1,2 \tag{2.1.2}$$

<u>Ορισμός 2.1.3</u>: Έστω η απείρως συνεχώς διαφορίσιμη (λεία) συνάρτηση $h:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. Αν υποθέσουμε ότι η πολλαπλότητα $z=h(y)$ είναι αναλλοίωτη για το ($\Sigma_{2.2}$) και επιπλέον ότι:

$$h(0)=\frac{\partial h}{\partial y}(0)=0$$

τότε η $z=h(y)$ καλείται **κεντρική πολλαπλότητα** για το ($\Sigma_{2.2}$).

Προκειμένου να προχωρήσουμε στη διατύπωση και απόδειξη του Θεωρήματος Κεντρικής Πολλαπλότητας, θα χρειαστούμε ορισμένα προαπαιτούμενα, τα οποία έχουν καθοριστικό ρόλο στην απόδειξη.

<u>Θεώρημα 2.1.4 (Contraction Mapping Theorem)</u>:
Έστω X ένας χώρος Banach και $S \subset X$ ένα κλειστό υποσύνολό του. Αν θεωρήσουμε ότι $T: S \to S$ είναι μία απεικόνιση η οποία πληροί την ιδιότητα:

$$\|T(x)-T(y)\| \le \rho \|x-y\| \quad [6] \quad \forall x, y \in S \ , \ 0 \le \rho < 1$$

τότε η T έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x^* \in S$ ώστε να ισχύει $x^* = T(x^*)$.

<u>Πρόταση 2.1.5 (Ανισότητα Gronwall-Bellman)</u>:
Έστω οι συναρτήσεις $\lambda:[a,b] \to \mathbb{R}$ και $\mu:[a,b] \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι συνεχείς και μη αρνητικές. Αν η συνεχής συνάρτηση $y:[a,b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$y(t) \le \lambda(s) + \int_a^t \mu(s)\, y(s) ds \quad \text{για} \quad a \le t \le b$$

τότε ικανοποιεί επίσης την ακόλουθη:

---

6 Μία απεικόνιση $T: S \to S$ η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα $\|T(x)-T(y)\| \le \rho \|x-y\|$ $\forall x, y \in S$ και $0 \le \rho < 1$ καλείται συστολή.

$$y(t) \le \lambda(s) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s)\exp\left(\int_s^t \mu(\tau)\,d\tau\right)ds$$

Πρόταση 2.1.6: Αν A_1 είναι ένας πίνακας του οποίου όλες οι ιδιοτιμές έχουν μηδενικά πραγματικά μέρη, τότε $\forall a>0$ υπάρχει μία θετική σταθερά $M(a)$ με $M(a)\to\infty$ καθώς $a\to 0$, ώστε για $s\in\mathbb{R}$ να ισχύει:

$$\left\|\exp(A_1 s)\right\| \le M(a)\exp(a|s|)$$

Πρόταση 2.1.7: Αν A_2 είναι ένας πίνακας Hurwitz τότε υπάρχουν θετικές σταθερές C,β ώστε για $s\leqslant 0$ να ισχύει ότι:

$$\left\|\exp(-A_2 s)\right\| \le C\exp(\beta s)$$

Θεώρημα 2.1.8 (Κεντρικής Πολλαπλότητας):
Αν g_1, g_2 είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση (2.1.2), οι ιδιοτιμές του πίνακα A_1 έχουν μηδενικά πραγματικά μέρη και ο πίνακας A_2 είναι Hurwitz, τότε υπάρχει $\delta>0$ και μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $h(y)$ ορισμένη $\forall \|y\|<\delta$, έτσι ώστε η $z=h(y)$ να είναι κεντρική πολλαπλότητα για το ($\Sigma_{2.2}$).

Απόδειξη:

Μας εξυπηρετεί καλύτερα να δείξουμε την ύπαρξη κεντρικής πολλαπλότητας, όταν οι λύσεις σε αυτήν ορίζονται για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Η κεντρική πολλαπλότητα για το ($\Sigma_{2.2}$) μπορεί γενικότερα να είναι μόνο τοπική, δηλαδή η λύση στην πολλαπλότητα να ορίζεται μόνο για ένα διάστημα $[0,t_1)\subset\mathbb{R}$. Επομένως, η κύρια ιδέα που χρησιμοποιείται στην απόδειξη είναι η εξής: θεωρούμε ένα τροποποιημένο σύστημα το οποίο ταυτίζεται με το ($\Sigma_{2.2}$) σε μία περιοχή του μηδενός, και το οποίο έχει κάποιες ολικές ιδιότητες που μας βεβαιώνουν ότι η λύση στην κεντρική πολλαπλότητα θα ορίζεται για κάθε χρονική στιγμή $t\in\mathbb{R}$. Αποδεικνύουμε την ύπαρξη κεντρικής πολλαπλότητας για το τροποποιημένο σύστημα. Αφού τα δύο συστήματα συμπίπτουν σε μία περιοχή του μηδενός, αυτό αποδεικνύει την ύπαρξη τοπικής κεντρικής πολλαπλότητας για το αρχικό μας σύστημα.

Έστω η λεία συνάρτηση $\eta:\mathbb{R}^k\to[0,1]$ με τύπο:

$$\eta(y)=1 \quad \text{για} \quad \|y\|\le 1$$

και

$$\eta(y)=0 \quad \text{για} \quad \|y\|\ge 2$$

Ορίζουμε τις δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις G_1, G_2 με τύπους:

$$G_1(y,z)=g_1\left(y\eta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right),z\right)$$

και για $\varepsilon>0$

$$G_2(y,z)=g_2\left(y\eta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right),z\right)$$

οι οποίες μαζί με τις πρώτες μερικές παραγώγους τους, είναι συναρτήσεις ολικά φραγμένες ως προς y. Αυτό σημαίνει ότι, οποτεδήποτε $\|z\|\le k_1$, η συνάρτηση είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}^k$.

Έστω το σύστημα:

$$(\Sigma_{2.3}):\ \begin{cases}\dot{y}=A_1y+G_1(y,z)\\ \dot{z}=A_2z+G_2(y,z)\end{cases}$$

Αποδεικνύουμε την ύπαρξη κεντρικής πολλαπλότητας για το ($\Sigma_{2.3}$).

Ορίζουμε ως X το χώρο όλων των συναρτήσεων $h:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ οι οποίες είναι ολικά φραγμένες και συνεχείς. Αν εφοδιάσουμε το χώρο X με τη νόρμα $\sup_{y\in\mathbb{R}^k}\|h(y)\|$ τότε αυτός είναι Banach. Έστω οι θετικές σταθερές c_1,c_2,c_3 και $S\subset X$ ο χώρος ο οποίος περιέχει όλες τις συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις $h:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ οι οποίες ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

$$h(0)=\frac{\partial h}{\partial y}(0)=0 \tag{2.1.9}$$

$$\|h(y)\|\le c_1 \tag{2.1.10}$$

$$\left\|\frac{\partial h}{\partial y}(y)\right\|\le c_2 \tag{2.1.11}$$

και

$$\left\|\frac{\partial h}{\partial y}(y)-\frac{\partial h}{\partial y}(x)\right\|\le c_3\|y-x\| \tag{2.1.12}$$

για όλα τα $x,y\in\mathbb{R}^k$.

Θα δείξουμε ότι το S είναι κλειστό.

Αρκεί να θεωρήσουμε μία συγκλίνουσα ακολουθία $h_i(y)\subset S$ και να δείξουμε ότι συγκλίνει στο σύνολο S , δηλαδή αν $h_i(y)\underset{i\to\infty}{\to}h(y)$ τότε $h(y)\in S$. Επομένως αυτό που αρκεί να δείξουμε είναι ότι η $h(y)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Οι υπόλοιπες ιδιότητες

του συνόλου S μπορούν να δειχθούν εύκολα με εις άτοπο απαγωγή. Επειδή η συνεχής διαφορισιμότητα μπορεί να δειχθεί για κάθε συνιστώσα της διανυσματικής συνάρτησης h , θα το δείξουμε θεωρώντας ότι είναι βαθμωτή συνάρτηση. Έστω λοιπόν ένα αυθαίρετο διάνυσμα v στον $\mathbb{R}^k$ με $\|v\|=1$.
Από το θεώρημα Μέσης Τιμής προκύπτει ότι:

$$\left.\begin{aligned} h_i(y+\mu v)-h_i(y)&=\mu v\frac{\partial h_i}{\partial y}(y+a_i\mu v)\\ h_j(y+\mu v)-h_j(y)&=\mu v\frac{\partial h_j}{\partial y}(y+a_j\mu v)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned} \mu v\frac{\partial h_i}{\partial y}(y)&=h_i(y+\mu v)-h_i(y)+\mu v\left[\frac{\partial h_i}{\partial y}(y)-\frac{\partial h_i}{\partial y}(y+a_i\mu v)\right]\\ \mu v\frac{\partial h_j}{\partial y}(y)&=h_j(y+\mu v)-h_j(y)+\mu v\left[\frac{\partial h_j}{\partial y}(y)-\frac{\partial h_j}{\partial y}(y+a_j\mu v)\right]\end{aligned}\right\}\overset{(-)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\mu v\left[\frac{\partial h_i}{\partial y}(y)-\frac{\partial h_j}{\partial y}(y)\right]=\mu v\left[\frac{\partial h_i}{\partial y}(y)-\frac{\partial h_i}{\partial y}(y+a_i\mu v)\right]-\mu v\left[\frac{\partial h_j}{\partial y}(y)-\frac{\partial h_j}{\partial y}(y+a_j\mu v)\right]+$$

$$+[h_i(y+\mu v)-h_j(y+\mu v)]-[h_i(y)-h_j(y)] \qquad (2.1.13)$$

όπου $a_i,a_j\in(0,1)$ και $\mu>0$.

Επειδή η $\{h_i\}$ είναι συγκλίνουσα μπορούμε να βρούμε $i_0,j_0\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε:

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^k}\|h_i(y)-h_j(y)\|<\frac{\varepsilon^2}{16c_3} \qquad (2.1.14)$$

για κάθε $i>i_0$ και $j>j_0$.

Από τη σχέση (2.1.12) έχουμε ότι:

$$\left\|\frac{\partial h_k}{\partial y}(y)-\frac{\partial h_k}{\partial y}(y+a_i\mu v)\right\|\le c_3\|-a_i\mu v\|=c_3\|a_i\mu v\|\overset{a_i<1}{\underset{\|v\|=1}{\le}}\mu c_3\ ,\ k=i,j \qquad (2.1.15)$$

Από τη σχέση (2.1.13) μέσω των σχέσεων (2.1.14) και (2.1.15) παίρνουμε ότι:

$$\left\|\frac{\partial h_i}{\partial y}(y)-\frac{\partial h_j}{\partial y}(y)\right\|<2\mu c_3+\frac{\varepsilon^2}{8\mu c_3} \qquad (2.1.16)$$

Για $\mu=\frac{\varepsilon}{4c_3}$ από τη (2.1.16) έχουμε:

$$\left\|\frac{\partial h_i}{\partial y}(y)-\frac{\partial h_j}{\partial y}(y)\right\|<\varepsilon \qquad (2.1.17)$$

για κάθε $i>i_0$ και $j>j_0$.

Επομένως, η ακολουθία $\frac{\partial h_i}{\partial y}$ είναι Cauchy, στο χώρο Banach των ολικά φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων από το $\mathbb{R}^k$ στο $\mathbb{R}^k$. Συνεπώς, συγκλίνει σε μία συνεχή συνάρτηση $J(y)$. Άρα, η $h(y)$ είναι διαφορίσιμη και $\frac{\partial h}{\partial y}=J(y)$.

Για δοσμένο $h\in S$ θεωρούμε το σύστημα:

$$(\Sigma_{2.4}):\ \begin{cases}\dot{y}=A_1y+G_1(y,h(y)) & (2.1.18)\\ \dot{z}=A_2z+G_2(y,h(y)) & (2.1.19)\end{cases}$$

Επειδή οι $h(y)$ και $\left[\frac{\partial h}{\partial y}\right]$ είναι φραγμένες, το δεξί μέλος της (2.1.18) είναι Lipschitz ως προς y. Άρα από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης, για κάθε αρχική συνθήκη $y_0\in\mathbb{R}^k$, η (2.1.18) έχει μοναδική λύση η οποία ορίζεται για κάθε t. Ορίζουμε τη λύση ως $y(t)=\pi(t;y_0,h)$ με $y_0=\pi(0;y_0,h)$, παραμετροποιημένη ως προς h. Επειδή η διαφορική εξίσωση (2.1.19) είναι γραμμική ως προς z, η λύση της δίνεται ως εξής:

$$z(t)=\exp[A_2(t-\tau)]z(\tau)+\int_\tau^t \exp[A_2(t-\lambda)]G_2(\pi(\lambda-\tau;y(\tau),h),h(\pi(\lambda-\tau;y(\tau),h)))d\lambda$$

$$\Rightarrow z(\tau)=\exp[-A_2(t-\tau)]z(t)-\int_\tau^t \exp[A_2(\tau-\lambda)]G_2(\pi(\lambda-\tau;y(\tau),h),h(\pi(\lambda-\tau;y(\tau),h)))d\lambda$$

$$\overset{s=\lambda-\tau}{\Rightarrow} z(\tau)=\exp[-A_2(t-\tau)]z(t)+\int_{t-\tau}^0 \exp(-A_2s)G_2(\pi(s;y(\tau),h),h(\pi(s;y(\tau),h)))ds \qquad (2.1.20)$$

Η σχέση (2.1.20) ισχύει $\forall t\in\mathbb{R}$. Οπότε για $t\to-\infty$:

$$z(\tau)=\int_{-\infty}^0 \exp(-A_2s)G_2(\pi(s;y(\tau),h),h(\pi(s;y(\tau),h)))ds \qquad (2.1.21)$$

Το δεξί μέλος της σχέσης (2.1.21) έχει νόημα, αφού η συνάρτηση G_2 είναι συνεχής και φραγμένη, και ας το ονομάσουμε $(Ph)(y)$, όπου έχουμε αντικαταστήσει το $y(\tau)$ με το y δηλαδή:

$$(Ph)(y)=\int_{-\infty}^{0}\exp(-A_2 s)G_2(\pi(s;y,h),h(\pi(s;y,h)))ds \qquad (2.1.22)$$

Με βάση τη σχέση (2.1.22), η (2.1.21) μας δίνει ότι $z(\tau)=(Ph)(y(\tau))$ για κάθε τ. Ως εκ τούτου, η $z=(Ph)(y)$ ορίζει μία αναλλοίωτη πολλαπλότητα για το ($\Sigma_{2.4}$). Θεωρώντας τώρα το σύστημα ($\Sigma_{2.3}$), με $h(y)$ να είναι ένα σταθερό σημείο της απεικόνισης $(Ph)(y)$ δηλαδή:

$$h(y)=(Ph)(y) \qquad (2.1.23)$$

τότε η $z=h(y)$ είναι κεντρική πολλαπλότητα για το ($\Sigma_{2.3}$). Για να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό, πρέπει χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (2.1.9) της συνάρτησης $h\in S$ και το γεγονός ότι το $y=0$ είναι σημείο ισορροπίας της (2.1.18), να διαπιστώσουμε από τη σχέση (2.1.22) ότι:

$$(Ph)(0)=\frac{\partial(Ph)}{\partial y}(0)=0 \qquad (2.1.24)$$

Επίσης, αφού η $z=(Ph)(y)$ είναι αναλλοίωτη πολλαπλότητα για το ($\Sigma_{2.4}$), έπεται ότι η $(Ph)(y)$ ικανοποιεί την ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial(Ph)}{\partial y}(y)[A_1 y+G_1(y,(Ph)(y))]=A_2(Ph)(y)+G_2(y,(Ph)(y)) \qquad (2.1.25)$$

Επομένως, αν $h(y)=(Ph)(y)$ τότε προφανώς έχουμε ότι και η $h(y)$ ικανοποιεί την ίδια μερική διαφορική εξίσωση και άρα είναι κεντρική πολλαπλότητα για το ($\Sigma_{2.3}$). Μένει να δείξουμε ότι η απεικόνιση (Ph) έχει σταθερό σημείο. Αυτό προκύπτει με χρήση του Contraction Mapping Theorem (Θεώρημα 2.1.4). Πρέπει επομένως να δείξουμε ότι πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.1.4, συγκεκριμένα ότι:

$$Ph:S\to S \quad \text{και ότι είναι συστολή στο } S.$$

Πράγματι, από τους ορισμούς των συναρτήσεων G_1, G_2 έπεται ότι υπάρχει μία μη αρνητική συνεχής συνάρτηση $\rho(\varepsilon)$ με $\rho(0)=0$ ώστε:

$$\left\|G_i(y,z)\right\|\le\varepsilon\rho(\varepsilon) \quad , \quad \left\|\frac{\partial G_i}{\partial y}(y,z)\right\|\le\rho(\varepsilon)$$

και $i=1,2$ (2.1.26)

$$\left\| \frac{\partial G_i}{\partial z}(y,z) \right\| \leq \rho(\varepsilon)$$

για όλα τα $y \in \mathbb{R}^k$ και $z \in \mathbb{R}^m$ με $\|z\| < \varepsilon$.

Για να δείξουμε ότι $Ph : S \to S$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν c_1, c_2, c_3 θετικές σταθερές, τέτοιες ώστε αν η $h(y)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη και ικανοποιεί τις ανισότητες (2.1.10),(2.1.11) και (2.1.12), τότε και η $(Ph)(y)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη και ικανοποιεί τις ίδιες ανισότητες. Πράγματι, είναι φανερό από τη σχέση (2.1.22) ότι η $(Ph)(y)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Για να επαληθεύσουμε τις ανισότητες θα χρειαστούμε τις σχέσεις (2.1.26). Επιλέγοντας λοιπόν τη σταθερά c_1 ώστε $c_1 \in \left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right)$, από τη σχέση (2.1.22) μέσω της Πρότασης 2.1.7 και των σχέσεων (2.1.26) έχουμε:

$$\|(Ph)(y)\| \leq \int_{-\infty}^{0} \|\exp(-A_2 s)\| \|G_2\| ds \leq C\varepsilon\rho(\varepsilon) \int_{-\infty}^{0} \exp(\beta s) ds = \frac{C\varepsilon\rho(\varepsilon)}{\beta}$$

Άρα:

$$\|(Ph)(y)\| \leq \frac{C\varepsilon\rho(\varepsilon)}{\beta} \tag{2.1.27}$$

Με επιλογή κατάλληλου επαρκώς μικρού $\varepsilon > 0$ το παραπάνω άνω φράγμα είναι μικρότερο του c_1.

Έστω $\pi_y(t; y, h)$ η Ιακωβιανή της $\pi(t; y, h)$ ως προς y. Τότε αυτή ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{\pi}_y = \left[A_1 + \left(\frac{\partial G_1}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial G_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) \right] \pi_y \quad , \quad \pi_y(0; y, h) = I$$

όπου:

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial G_1}{\partial y}(\pi(t; y, h), h(\pi(t; y, h)))$$

με παρόμοιες εκφράσεις για τις $\frac{\partial G_1}{\partial z}$ και $\frac{\partial h}{\partial y}$.

Άρα για $t \leq 0$ έχουμε:

$$\pi_y(t; y, h) = \exp(A_1 t) - \int_t^0 \exp[A_1(t-s)] \left[\left(\frac{\partial G_1}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial G_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) \right] \pi_y(s; y, h) ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\|\pi_y(t;y,h)\right\|\le\left\|\exp(A_1 t)\right\|+\int_t^0\left\|\exp[A_1(t-s)]\right\|\left\|\left(\frac{\partial G_1}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial G_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right\|\left\|\pi_y(s;y,h)\right\|ds \quad (2.1.28)$$

Μέσω της Πρότασης 2.1.6 και των σχέσεων (2.1.11) και (2.1.26) από τη (2.1.28) έχουμε:

$$\left\|\pi_y(t;y,h)\right\|\le M(a)\exp(-at)+\int_t^0 M(a)\exp[a(s-t)]\rho(\varepsilon)(1+c_2)\left\|\pi_y(s;y,h)\right\|ds$$

$$\Rightarrow\exp(at)\left\|\pi_y(t;y,h)\right\|\le M(a)+\int_t^0 M(a)\exp(as)\rho(\varepsilon)(1+c_2)\left\|\pi_y(s;y,h)\right\|ds \quad (2.1.29)$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Gronwall-Bellman (Πρόταση 2.1.5) στη σχέση (2.1.29) προκύπτει ότι:

$$\exp(at)\left\|\pi_y(t;y,h)\right\|\le M(a)+\int_t^0 M^2(a)\rho(\varepsilon)(1+c_2)\exp\left[\int_t^s M(a)\rho(\varepsilon)(1+c_2)d\tau\right]ds=$$

$$=M(a)+M(a)\int_t^0 M(a)\rho(\varepsilon)(1+c_2)\exp\left[M(a)\rho(\varepsilon)(1+c_2)(s-t)\right]ds$$

$$=M(a)+M(a)\left(\exp\left[-M(a)\rho(\varepsilon)(1+c_2)t\right]-1\right)=M(a)\exp\left[-M(a)\rho(\varepsilon)(1+c_2)t\right]$$

Άρα:

$$\left\|\pi_y(t;y,h)\right\|\le M(a)\exp(-\gamma t) \quad (2.1.30)$$

όπου:

$$\gamma=a+M(a)\rho(\varepsilon)(1+c_2) \quad (2.1.31)$$

Από τη σχέση (2.1.22):

$$\left\|\frac{\partial(Ph)}{\partial y}(y)\right\|\le\int_{-\infty}^0\left\|\exp(-A_2 s)\right\|\left\|\left(\frac{\partial G_2}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial G_2}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right\|\left\|\pi_y(s;y,h)\right\|ds \quad (2.1.32)$$

Από τη σχέση (2.1.32) μέσω της Πρότασης 2.1.7 και των σχέσεων (2.1.11), (2.1.26), (2.1.30) παίρνουμε ότι:

$$\left\|\frac{\partial(Ph)}{\partial y}(y)\right\|\le CM(a)\rho(\varepsilon)(1+c_2)\int_{-\infty}^0\exp[(\beta-\gamma)s]ds$$

Άρα:

$$\left\|\frac{\partial(Ph)}{\partial y}(y)\right\|\leq\frac{CM(a)\rho(\varepsilon)(1+c_2)}{\beta-\gamma} \tag{2.1.33}$$

δεδομένου ότι τα a και ε είναι αρκετά μικρά ώστε $\beta>\gamma$. Ομοίως, για κατάλληλο επαρκώς μικρό $\varepsilon>0$ το παραπάνω φράγμα είναι μικρότερο του c_2.

Τέλος, για να δείξουμε ότι η Ιακωβιανή $\left[\frac{\partial(Ph)}{\partial y}(y)\right]$ είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz c_3 , σημειώνουμε ότι οι Ιακωβιανοί πίνακες $\left[\frac{\partial G_1}{\partial y}\right],\left[\frac{\partial G_1}{\partial z}\right],\left[\frac{\partial G_2}{\partial y}\right],\left[\frac{\partial G_2}{\partial z}\right]$ ικανοποιούν Lipschitz ανισότητες της μορφής:

$$\left\|\frac{\partial G_1}{\partial y}(y,z)-\frac{\partial G_1}{\partial y}(x,w)\right\|\leq L\left[\|y-x\|+\|z-w\|\right] \quad \text{με} \quad L>0 \tag{2.1.34}$$

για όλα τα $x,y\in\mathbb{R}^k$ και $z,w\in B_\varepsilon$ [7]

και επιπλέον με $\varepsilon<\varepsilon^*$ για κάποιο $\varepsilon^*>0$, μπορούμε να επιλέξουμε τη σταθερά Lipschitz L να είναι ανεξάρτητη του ε. Επίσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια σταθερά L και για τους τέσσερις Ιακωβιανούς πίνακες που αναφέρονται παραπάνω. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις ανισότητες της μορφής (2.1.34), καθώς και την ανισότητα Gronwall-Bellman (Πρόταση 2.1.5), μπορούμε να επαναλάβουμε τις προηγούμενες παραγωγίσεις για να δείξουμε ότι:

$$\left\|\pi_y(t;y,h)-\pi_y(t;x,h)\right\|\leq L_1\exp(-2\gamma t)\|y-x\| \tag{2.1.35}$$

για όλα τα $x,y\in\mathbb{R}^k$ και $t\leq 0$, όπου:

$$L_1=\left[(1+c_2)^2L+\rho(\varepsilon)c_3\right]\frac{M^3(a)}{\gamma}$$

Επίσης χρησιμοποιώντας την ανισότητα (2.1.35) και τη σχέση (2.1.22) μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\left\|\frac{\partial(Ph)}{\partial y}(y)-\frac{\partial(Ph)}{\partial y}(x)\right\|\leq\frac{CL_1(2\gamma-a)}{M(\beta-2\gamma)}\|y-x\|$$

όπου $\beta-2\gamma>0$ και επιλέγουμε a και ε αρκετά μικρά ώστε $\beta-2\gamma>\frac{\beta}{2}$. Τότε:

---

7 B_ε: ανοιχτή μπάλα ακτίνας ε

$$\left\|\frac{\partial(Ph)}{\partial y}(y)-\frac{\partial(Ph)}{\partial y}(x)\right\|\leq[L_2+\rho(\varepsilon)L_3c_3]\|y-x\| \qquad (2.1.36)$$

όπου τα L_2 και L_3 είναι ανεξάρτητα του ε και του c_3. Επιλέγοντας $c_3>L_2$, μπορούμε να επιλέξουμε αρκετά μικρό ε ώστε $L_2+\rho(\varepsilon)L_3c_3<c_3$. Συνεπώς, δείξαμε ότι για επαρκώς μικρό c_1 και επαρκώς μεγάλο c_3 έχουμε ότι πράγματι $Ph:S\to S$.

Δείχνουμε τώρα ότι είναι συστολή στο S. Θεωρούμε $h_1(y)$ και $h_2(y)$ δύο συναρτήσεις στο σύνολο S. Έστω επίσης $\pi_1(t),\pi_2(t)$ δύο αντίστοιχες λύσεις της εξίσωσης (2.1.18) οι οποίες ξεκινούν στο y, δηλαδή:

$$\pi_i(t)=\pi(t;y,h_i) \qquad i=1,2$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.1.26) μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\left\|G_i(\pi_1,h_1(\pi_1))-G_i(\pi_2,h_2(\pi_2))\right\|\leq\rho(\varepsilon)(1+c_2)\left\|\pi_1-\pi_2\right\|+\rho(\varepsilon)\sup_{y\in\mathbb{R}^k}\left\|h_1-h_2\right\| \qquad i=1,2 \qquad (2.1.37)$$

Από τη (2.1.18) για τη $\left\|\pi_1-\pi_2\right\|$ ισχύει ότι:

$$\left\|\pi_1(t)-\pi_2(t)\right\|\leq\int_t^0\left\|\exp[A_1(t-s)]\right\|\left\|G_1(\pi_1,h_1(\pi_1))-G_1(\pi_2,h_2(\pi_2))\right\|ds \qquad (2.1.38)$$

Η (2.1.38) μέσω της Πρότασης 2.1.6 και της σχέσης (2.1.37) γίνεται:

$$\left\|\pi_1(t)-\pi_2(t)\right\|\leq\int_t^0 M(a)\exp[a(s-t)]\left[\rho(\varepsilon)(1+c_2)\left\|\pi_1(s)-\pi_2(s)\right\|+\rho(\varepsilon)\sup_{y\in\mathbb{R}^k}\left\|h_1-h_2\right\|\right]ds$$

$$\leq\frac{M(a)}{a}\rho(\varepsilon)\exp(-at)\sup_{y\in\mathbb{R}^k}\left\|h_1-h_2\right\|+\int_t^0 M(a)\exp[a(s-t)]\rho(\varepsilon)(1+c_2)\left\|\pi_1(s)-\pi_2(s)\right\|ds$$

$$\Rightarrow\exp(at)\left\|\pi_1(t)-\pi_2(t)\right\|\leq\frac{M(a)}{a}\rho(\varepsilon)\sup_{y\in\mathbb{R}^k}\left\|h_1-h_2\right\|+\int_t^0 M(a)\rho(\varepsilon)(1+c_2)\exp(as)\left\|\pi_1(s)-\pi_2(s)\right\|ds$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\pi_1(0)=\pi_2(0)$.

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Gronwall-Bellman όπως και στη σχέση (2.1.29) παίρνουμε:

$$\left\|\pi_1(t)-\pi_2(t)\right\|\leq\frac{M(a)}{a}\rho(\varepsilon)\sup_{y\in\mathbb{R}^k}\left\|h_1-h_2\right\|\exp(-\gamma t) \qquad (2.1.39)$$

όπου $\gamma=a+M(a)\rho(\varepsilon)(1+c_2)$ όπως έχουμε ορίσει στη σχέση (2.1.31).

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (2.1.22) προκύπτει ότι:

$$\left\|(Ph_1)(y)-(Ph_2)(y)\right\| \le \int_{-\infty}^{0} \left\|\exp(-A_2 s)\right\| \left\|G_2(\pi_1, h_1(\pi_1)) - G_2(\pi_2, h_2(\pi_2))\right\| ds \qquad (2.1.40)$$

Από την Πρόταση 2.1.7 και τη σχέση (2.1.37), η (2.1.40) μετατρέπεται ως εξής:

$$\left\|(Ph_1)(y)-(Ph_2)(y)\right\| \le \int_{-\infty}^{0} C\exp(\beta s)\left[\rho(\varepsilon)(1+c_2)\left\|\pi_1(s)-\pi_2(s)\right\| + \rho(\varepsilon)\sup_{y\in\mathbb{R}^k}\left\|h_1-h_2\right\|\right] ds$$

$$\overset{(2.1.39)}{\le} \frac{C\rho(\varepsilon)}{\beta}\sup_{y\in\mathbb{R}^k}\left\|h_1-h_2\right\| + C\rho^2(\varepsilon)(1+c_2)\frac{M(a)}{a}\sup_{y\in\mathbb{R}^k}\left\|h_1-h_2\right\| \int_{-\infty}^{0} \exp[(\beta-\gamma)s]\, ds$$

$$= \frac{C\rho(\varepsilon)}{\beta}\sup_{y\in\mathbb{R}^k}\left\|h_1-h_2\right\| + C\rho^2(\varepsilon)(1+c_2)\frac{M(a)}{a(\beta-\gamma)}\sup_{y\in\mathbb{R}^k}\left\|h_1-h_2\right\|$$

$$= C\rho(\varepsilon)\sup_{y\in\mathbb{R}^k}\left\|h_1-h_2\right\|\left[\frac{1}{\beta} + \frac{\rho(\varepsilon)(1+c_2)M(a)}{a(\beta-\gamma)}\right]$$

$$\overset{(2.1.31)}{=} C\rho(\varepsilon)\sup_{y\in\mathbb{R}^k}\left\|h_1-h_2\right\|\left[\frac{1}{\beta} + \frac{\gamma-a}{a(\beta-\gamma)}\right] = b\sup_{y\in\mathbb{R}^k}\left\|h_1-h_2\right\|$$

όπου $b = C\rho(\varepsilon)\left[\frac{1}{\beta} + \frac{\gamma-a}{a(\beta-\gamma)}\right]$ και $b<1$ με επιλογή επαρκώς μικρού $\varepsilon>0$.

Επομένως, ως άμεση συνέπεια από το Θεώρημα 2.1.4 έχουμε ότι $h(y)=(Ph)(y)$ και άρα η $z=h(y)$ είναι κεντρική πολλαπλότητα για το ($\Sigma_{2.3}$).

□

Ως γενίκευση του παραπάνω θεωρήματος, χρησιμοποιώντας τις ίδιες συνθήκες, αποδεικνύουμε το παρακάτω λήμμα το οποίο θα χρειαστούμε αργότερα.

<u>Λήμμα 2.1.41</u>: Αν $\left\|g_2(y,0)\right\| \le k\left\|y\right\|^p$ για $\left\|y\right\| \le r$, όπου $k, r>0$ και $p>1$, τότε υπάρχει σταθερά $c>0$ ώστε:

$$\left\|h(y)\right\| \le c\left\|y\right\|^p \qquad (2.1.42)$$

<u>Απόδειξη</u>:
Έστω το κλειστό σύνολο:

$$Y = \{h\in S : \left\|h(y)\right\| \le c\left\|y\right\|^p\}$$

Επειδή από υπόθεση έχουμε ότι $\|g_2(y,0)\| \le k\|y\|^p$ τότε εξ' ορισμού της συνάρτησης G_2 θα έχουμε επίσης ότι:

$$\|G_2(y,0)\| \le k\|y\|^p \tag{2.1.43}$$

Για να αποδείξουμε το λήμμα, πρέπει να δείξουμε ότι το σταθερό σημείο της απεικόνισης Ph είναι στο Y. Το γεγονός αυτό θα συμβαίνει, αν μπορούμε να επιλέξουμε σταθερά c ώστε $Ph: Y \to Y$.
Εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις (2.1.26) για τη συνάρτηση G_2 και εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\|G_2(y,h(y))\| = \|G_2(y,h(y)) - G_2(y,0) + G_2(y,0)\| \le \|G_2(y,h(y)) - G_2(y,0)\| + \|G_2(y,0)\|$$

$$\overset{(2.1.42)}{\le} \rho(\varepsilon)\|h(y)\| + k\|y\|^p \le \rho(\varepsilon)c\|y\|^p + k\|y\|^p = [k + \rho(\varepsilon)c]\|y\|^p$$

Άρα:

$$\|G_2(y,h(y))\| \le [k + \rho(\varepsilon)c]\|y\|^p \tag{2.1.44}$$

Από τη σχέση (2.1.22) μέσω της Πρότασης 2.1.7 και της (2.1.44) έχουμε:

$$\|(Ph)(y)\| \le \int_{-\infty}^{0} C[k + \rho(\varepsilon)c]\exp(\beta s)\|\pi(s;y,h)\|^p ds \tag{2.1.45}$$

Έστω τώρα:

$$l(q) = q\,y$$

όπου $q \in \mathbb{R}$ ώστε $l(q) \in \mathbb{R}^k$.
Έστω επίσης ένα αυθαίρετο διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^m$ με $\|u\| = 1$ και μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(q) = u^T \pi(t; l(q), h)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $(0,1)$ βρίσκουμε $\xi \in (0,1)$ ώστε:

$$f(1) - f(0) = u^T[\pi(t;l(1),h) - \pi(t;l(0),h)] = u^T[\pi(t;y,h) - \pi(t;0,h)]$$

$$\overset{\pi(t;0,h)=0}{=} u^T \pi(t;y,h) = u^T \pi_y(t;l(\xi),h)\,y = f'(\xi)$$

Άρα:

$$u^T \pi(t;y,h) = u^T \pi_y(t;l(\xi),h)\,y \tag{2.1.46}$$

Επίσης:

$$\left\|\pi(t;y,h)\right\| \overset{\|u\|=1}{=} \left\|u^T\pi(t;y,h)\right\| \overset{(2.1.45)}{=} \left\|u^T\pi_y(t;l(\xi),h)\,y\right\| \underset{(2.1.30)}{\overset{H\ddot{o}lder}{\leq}} \|u\|M(a)\exp(-\gamma t)\|y\|$$

$$\overset{\|u\|=1}{=} M(a)\exp(-\gamma t)\|y\|$$

όπου έγινε χρήση της ανισότητας $H\ddot{o}lder$: $\left|z^T w\right| \leq \|z\|_p \|w\|_q$ με $p,q \in [1,\infty)$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

Οπότε:

$$\left\|\pi(t;y,h)\right\| \leq M(a)\exp(-\gamma t)\|y\| \qquad (2.1.47)$$

για $t \leq 0.$

Από τη (2.1.45) μέσω της (2.1.47):

$$\left\|(Ph)(y)\right\| \leq C[k+\rho(\varepsilon)c][M(a)]^p\|y\|^p \int_{-\infty}^{0} \exp[(\beta-p\gamma)s]\,ds = \frac{C[k+\rho(\varepsilon)c][M(a)]^p}{\beta-p\gamma}\|y\|^p = c_5\|y\|^p$$

όπου:

$$c_5 = \frac{C[k+\rho(\varepsilon)c][M(a)]^p}{\beta-p\gamma}$$

και $\beta-p\gamma>0$ για αρκετά μικρά a και ε.
Με επιλογή αρκετά μεγάλης σταθεράς c και αρκετά μικρού ε έχουμε ότι $c_5<c$ και άρα $Ph: Y \to Y$.

□

2.2 Οι συνέπειες του Θεωρήματος Κεντρικής Πολλαπλότητας

Δεδομένου ότι η $z=h(y)$ είναι κεντρική πολλαπλότητα για το ($\Sigma_{2.2}$), όπως δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο, τότε:

$$z_0 = h(y_0) \Rightarrow z(t) = h(y(t)) \qquad \forall\, t \geq 0$$

Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, η εξέλιξη του συστήματος στην κεντρική πολλαπλότητα περιγράφεται από την k-τάξης διαφορική εξίσωση:

$$(\Sigma_{2.5}): \quad \dot{y} = A_1 y + g_1(y, h(y))$$

που την αποκαλούμε **παραγόμενο σύστημα**.

Αν $z_0 \neq h(y_0)$ η διαφορά $z(t)-h(y(t))$ αναπαριστά την απόκλιση της τροχιάς από την κεντρική πολλαπλότητα, κάθε χρονική στιγμή t. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών:

$$\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z - h(y) \end{pmatrix}$$

το ($\Sigma_{2.2}$) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{y} = A_1 y + g_1(y, w + h(y)) \\ \dot{w} + \dot{y}\frac{\partial h}{\partial y}(y) = A_2(w + h(y)) + g_2(y, w + h(y)) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dot{y} = A_1 y + g_1(y, w + h(y)) \\ \dot{w} = -\frac{\partial h}{\partial y}(y)[A_1 y + g_1(y, w + h(y))] + A_2(w + h(y)) + g_2(y, w + h(y)) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (2.2.1) \\ (2.2.2) \end{array}$$

Παρατηρούμε όμως ότι η $w = 0$ είναι κεντρική πολλαπλότητα για το νέο μας σύστημα, άρα η εξέλιξη στην πολλαπλότητα περιγράφεται ως:

$$w(t) = 0 \Rightarrow \dot{w}(t) = 0$$

Με βάση αυτό, η σχέση (2.2.2) του παραπάνω συστήματος δίνει:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(y)[A_1 y + g_1(y, h(y))] - A_2(h(y)) - g_2(y, h(y)) = 0$$

Αφού η παραπάνω εξίσωση πρέπει να ικανοποιείται από κάθε λύση στην κεντρική πολλαπλότητα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει η συνάρτηση $h(y)$ να ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση:

$$N(h(y)) = \frac{\partial h}{\partial y}(y)[A_1 y + g_1(y, h(y))] - A_2(h(y)) - g_2(y, h(y)) = 0 \qquad (2.2.3)$$

με αρχική συνθήκη:

$$h(0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0) = 0$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2.2.2) και (2.2.3) παίρνουμε ότι:

$$\dot{w} = A_2 w + \frac{\partial h}{\partial y}(y)[g_1(y, h(y)) - g_1(y, w + h(y))] + [g_2(y, w + h(y)) - g_2(y, h(y))]$$

Άρα, η τελική μορφή του συστήματος είναι η ακόλουθη:

($\Sigma_{2.6}$): $\left\{ \begin{array}{c} \dot{y} = A_1 y + g_1(y, h(y)) + N_1(y, w) \\ \dot{w} = A_2 w + N_2(y, w) \end{array} \right\}$

όπου:

$$N_1(y, w) = g_1(y, w + h(y)) - g_1(y, h(y))$$

και

$$N_2(y,w)=g_2(y,w+h(y))-g_2(y,h(y))-\frac{\partial h}{\partial y}(y)N_1(y,w)$$

Είναι εύκολο να διακρίνουμε ότι οι N_1,N_2 είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις και $N_i(y,0)=\frac{\partial N_i}{\partial w}(0,0)=0$ για $i=1,2.$

Συνεπώς, στο σύνολο:

$$\left\|\begin{matrix}y\\w\end{matrix}\right\|<\rho \quad , \quad \rho>0$$

οι N_1,N_2 ικανοποιούν τη σχέση:

$$\left\|N_i(y,w)-N_i(y,0)\right\|=\left\|N_i(y,w)\right\|\le k_i\left\|w\right\| \quad , \quad i=1,2 \qquad (2.2.4)$$

όπου οι θετικές σταθερές k_1 και k_2 μπορούν να γίνουν αυθαίρετα μικρές επιλέγοντας αρκετά μικρό ρ.

Η τελευταία σχέση θα μας φανεί πολύ χρήσιμη στην απόδειξη του θεωρήματος που ακολουθεί.

Θεώρημα 2.2.5: Αν το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (αντίστοιχα ασταθές) σημείο ισορροπίας για το παραγόμενο σύστημα ($\Sigma_{2.5}$), τότε είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (αντίστοιχα ασταθές) και για το ($\Sigma_{2.2}$).

Προκειμένου να προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.5, αξίζει να αναφέρουμε κάποιους ορισμούς και ένα πολύ βασικό θεώρημα, που θα μας βοηθήσουν ιδιαίτερα στην αποδεικτική διαδικασία.

Ορισμός 2.2.6: Μία συνάρτηση $a:[0,\alpha)\to[0,\infty)$ λέμε ότι ανήκει στην κλάση K αν είναι γνησίως αύξουσα και $a(0)=0.$ Επίσης λέμε ότι ανήκει στην κλάση K_∞ αν $\alpha=\infty$ και $a(\tau)\to\infty$ καθώς $\tau\to\infty$.

Ορισμός 2.2.7: Μία συνάρτηση $\beta:[0,\alpha)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ λέμε ότι ανήκει στην κλάση KL, αν για σταθερό s ισχύει ότι $\beta(r,s)\in K$ και για σταθερό r η απεικόνιση $\beta(r,s)$ είναι φθίνουσα με $\beta(r,s)\to 0$ καθώς $s\to\infty$.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αυτής της εργασίας, είδαμε πως αν υπάρχει μία συνάρτηση $V:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ συνεχώς διαφορίσιμη η οποία να ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες, μπορεί να μας φανερώσει μέσω των θεωρημάτων La Salle, Lyapunov και Chetaev το είδος της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας. Υπάρχουν όμως και αντίστροφα θεωρήματα και το Θεώρημα 2.2.8 που ακολουθεί είναι ένα από αυτά.

Θεώρημα 2.2.8:

Έστω ότι το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος:

$$\dot{x}=f(x)$$

όπου $x\in\mathbb{R}^n$ και $f:D\to\mathbb{R}^n$ μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και έστω:

$$D=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|<r\} \quad \text{για} \quad r>0$$

Έστω επίσης μία συνάρτηση $\beta(r,s)$ κλάσης KL και μία σταθερά $r_0>0$ ώστε να ισχύει $\beta(r_0,s)<r$. Αν θεωρήσουμε ότι:

$$D_0=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|<r_0\}$$

και υποθέσουμε ότι η λύση του συστήματος ικανοποιεί τη σχέση:

$$\|x(t)\|\le\beta\big(\|x(t_0)\|,t-t_0\big) \quad \forall\, x(t_0)\in D_0 \quad \text{και} \quad \forall\, t\ge t_0\ge 0$$

Τότε υπάρχει συνάρτηση $V\in C^1$ με $V:D_0\to\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(1) $a_1(\|x\|)\le V(x)\le a_2(\|x\|)$

(2) $\dot{V}(x)=\nabla V(x)f(x)\le -a_3(\|x\|)$

(3) $\|\nabla V(x)\|\le a_4(\|x\|)$

όπου a_1,a_2,a_3,a_4 είναι συναρτήσεις κλάσης K ορισμένες στο $[0,r_0]$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.5:

Η αλλαγή συντεταγμένων $(y,z)\to(y,w)$ δεν επηρεάζει τις ιδιότητες ευστάθειας του μηδενός (δες Πρόταση 1.2.8), επομένως αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για το ($\Sigma_{2.6}$). Αν έχουμε ότι το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας για το ($\Sigma_{2.5}$), τότε είναι εμφανές ότι είναι ασταθές και για το ($\Sigma_{2.6}$), καθώς αν $y(t)$ είναι η λύση του ($\Sigma_{2.5}$), η αντίστοιχη λύση του ($\Sigma_{2.6}$) είναι $(y(t),0)$.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι το $0\in\mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{2.5}$), τότε από το Θεώρημα 2.2.8 υπάρχει συνάρτηση $V\in C^1$ θετικά ορισμένη η οποία ικανοποιεί τις ανισότητες:

$$\dot{V}(y)=\nabla V(y)[A_1y+g_1(y,h(y))]\le -a_3(\|x\|) \tag{2.2.9}$$

και

$$\|\nabla V(y)\| \le a_4(\|y\|) < k \quad , \quad k>0 \tag{2.2.10}$$

σε μία περιοχή του μηδενός, όπου a_3, a_4 είναι συναρτήσεις κλάσης K.

Ο πίνακας A_2 είναι Hurwitz άρα υπάρχει μοναδικός πίνακας P συμμετρικός και θετικά ορισμένος που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$PA_2 + A_2^T P = -I \tag{2.2.11}$$

Έστω η συνάρτηση:

$$v(y,w) = V(y) + \sqrt{w^T P w}$$

Παρατηρούμε ότι την παραπάνω συνάρτηση μπορούμε να την ορίσουμε ως συνάρτηση Lyapunov για το ($\Sigma_{2.6}$) καθώς είναι θετικά ορισμένη και συνεχώς διαφορίσιμη παντού εκτός από το $w=0$.
Άρα:

$$\dot{v}(y,w) = \nabla V(y)[A_1 y + g_1(y,h(y)) + N_1(y,w)] + \frac{1}{2\sqrt{w^T P w}}[w^T P(A_{2w} + N_2(y,w)) + (w^T A_2^T + N_2^T(y,w))Pw]$$

$$= \nabla V(y)[A_1 y + g_1(y,h(y)) + N_1(y,w)] + \frac{1}{2\sqrt{w^T P w}}[w^T(PA_2 + A_2^T P)w + 2w^T P N_2(y,w)]$$

$$\overset{(2.2.11)}{=} \nabla V(y)[A_1 y + g_1(y,h(y)) + N_1(y,w)] + \frac{1}{2\sqrt{w^T P w}}[-\|w\|^2 + 2w^T P N_2(y,w)] \tag{2.2.12}$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή ανισότητα:

$$\lambda_{min}(P)\|w\|^2 \le w^T P w \le \lambda_{max}(P)\|w\|^2 \tag{2.2.13}$$

καθώς και τις σχέσεις (2.2.4),(2.2.9) και (2.2.10) προκύπτει από τη (2.2.12) ότι:

$$\dot{v}(y,w) \le -a_3(\|y\|) + k k_1 \|w\| - \frac{\|w\|^2}{2\sqrt{\lambda_{max}(P)}\|w\|} + \frac{k_2 \lambda_{max}(P)\|w\|^2}{\sqrt{\lambda_{min}(P)}\|w\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{v}(y,w) \le -a_3(\|y\|) + k k_1 \|w\| - \frac{\|w\|}{2\sqrt{\lambda_{max}(P)}} + \frac{k_2 \lambda_{max}(P)\|w\|}{\sqrt{\lambda_{min}(P)}}$$

$$\Rightarrow \dot{v}(y,w) \le -a_3(\|y\|) - \left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda_{max}(P)}} - k k_1 - \frac{k_2 \lambda_{max}(P)}{\sqrt{\lambda_{min}(P)}}\right)\|w\| \tag{2.2.14}$$

Αφού τα k_1, k_2 μπορούν να γίνουν αυθαίρετα μικρά, περιορίζοντας το σύνολο $\left\| \begin{matrix} y \\ w \end{matrix} \right\| < \rho$ γύρω από το μηδέν να είναι επαρκώς μικρό, μπορούμε να τα επιλέξουμε αρκετά μικρά ώστε να επιτύχουμε:

$$\frac{1}{2\sqrt{\lambda_{max}(P)}} - k k_1 - \frac{k_2 \lambda_{max}(P)}{\sqrt{\lambda_{min}(P)}} > 0$$

Άρα από τη (2.2.14) έπεται ότι $\dot{v}(y,w) < 0$ και συνεπώς από το Θεώρημα Lyapunov (Θεώρημα 1.3.22) το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το ($\Sigma_{2.6}$).

□

<u>Πόρισμα 2.2.15</u>:
Αν το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας για το ($\Sigma_{2.5}$) και υπάρχει συνάρτηση $V : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+, V \in C^1$ η οποία πληροί την ιδιότητα:

$$\nabla V(y)[A_1 y + g_1(y, h(y))] \leq 0 \qquad (2.2.16)$$

τότε το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας και για το ($\Sigma_{2.2}$).

<u>Απόδειξη</u>:
Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.5 αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για το ($\Sigma_{2.6}$) (δες Πρόταση 1.2.8). Θεωρούμε την ίδια συνάρτηση Lyapunov:

$$v(y,w) = V(y) + \sqrt{w^T P w}$$

Άρα:

$$\dot{v}(y,w) = \nabla V(y)[A_1 y + g_1(y, h(y)) + N_1(y,w)] + \frac{1}{2\sqrt{w^T P w}}[-\|w\|^2 + 2 w^T P N_2(y,w)] \qquad (2.2.17)$$

Από τη σχέση (2.2.17) μέσω των (2.2.4),(2.2.13) και (2.2.16) παίρνουμε ότι:

$$\dot{v}(y,w) \leq \nabla V(y)[A_1 y + g_1(y, h(y))] - \frac{\|w\|^2}{2\sqrt{\lambda_{max}(P)}\|w\|} + \frac{k_2 \lambda_{max}(P)\|w\|^2}{\sqrt{\lambda_{min}(P)}\|w\|} \leq$$

$$\overset{(2.2.16)}{\leq} -\frac{\|w\|}{2\sqrt{\lambda_{max}(P)}} + \frac{k_2 \lambda_{max}(P)\|w\|}{\sqrt{\lambda_{min}(P)}}$$

Οπότε:

$$\dot{v}(y,w) \le -\left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda_{max}(P)}} - \frac{k_2 \lambda_{max}(P)}{\sqrt{\lambda_{min}(P)}} \right) \|w\| \qquad (2.2.18)$$

Για $k_2 = \frac{1}{4\lambda_{max}(P)} \sqrt{\frac{\lambda_{min}(P)}{\lambda_{max}(P)}}$ από τη (2.2.18) έχουμε:

$$\dot{v}(y,w) \le -\frac{1}{4\sqrt{\lambda_{max}(P)}} \|w\| \le 0$$

Συνεπώς από το Θεώρημα 1.3.1, το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας για το ($\Sigma_{2.6}$).

□

<u>Πόρισμα 2.2.19</u>: Το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το παραγόμενο σύστημα ($\Sigma_{2.5}$) αν και μόνο αν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και για το ($\Sigma_{2.2}$).

<u>Απόδειξη</u>:

Στο Θεώρημα 2.2.5 δείξαμε ότι αν το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το παραγόμενο σύστημα ($\Sigma_{2.5}$), τότε είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και για το ($\Sigma_{2.2}$). Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε το αντίστροφο.

Έστω λοιπόν ότι το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το ($\Sigma_{2.2}$), αλλά δεν είναι για το ($\Sigma_{2.5}$). Όμως, η ασυμπτωτική ευστάθεια του $0 \in \mathbb{R}^n$ στο ($\Sigma_{2.2}$), εξασφαλίζει την ευστάθεια του σημείου αυτού και στα δύο συστήματα. Δηλαδή, έχουμε ότι το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας και για το ($\Sigma_{2.2}$) και για το ($\Sigma_{2.5}$). Άρα για το ($\Sigma_{2.5}$), το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές. Συνεπώς, υπάρχει μία φραγμένη λύση $y(t, y_0)$ για μικρό $\|y_0\|$ αλλά $\lim_{t \to \infty} y(t, y_0) \neq 0$. Το ίδιο θα ισχύει και για την αντίστοιχη λύση $(y(t), 0)$ του συστήματος ($\Sigma_{2.6}$). Άρα, το $0 \in \mathbb{R}^n$ δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για το ($\Sigma_{2.6}$) και επομένως και για το ($\Sigma_{2.2}$), αφού έχουν τις ίδιες ιδιότητες ευστάθειας. Άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το ($\Sigma_{2.2}$).

□

<u>Θεώρημα 2.2.20</u>:

Αν μπορούμε να βρούμε συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $\varphi(y)$ με:

$$\varphi(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0) = 0$$

τέτοια ώστε:

$$N(\varphi(y))=O\left(\|y\|^p\right)$$ [8] για $p>1$

τότε για επαρκώς μικρό $\|y\|$:

$$h(y)-\varphi(y)=O\left(\|y\|^p\right) \tag{2.2.21}$$

και το παραγόμενο σύστημα ($\Sigma_{2.5}$) παίρνει τη μορφή:

$$\dot{y}=A_1 y+g_1(y,\varphi(y))+O\left(\|y\|^{p+1}\right) \tag{2.2.22}$$

Απόδειξη:
Έστω

$$\mu(y)=h(y)-\varphi(y) \tag{2.2.23}$$

Έχουμε από τη σχέση (2.2.3) ότι:

$$N(h(y))=\frac{\partial h}{\partial y}(y)[A_1 y+g_1(y,h(y))]-A_2(h(y))-g_2(y,h(y))=0$$

και

$$N(\varphi(y))=\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y)[A_1 y+g_1(y,\varphi(y))]-A_2(\varphi(y))-g_2(y,\varphi(y))=O\left(\|y\|^p\right)$$

οι οποίες γράφονται ισοδύναμα ως εξής:

$$N(h(y))=\frac{\partial h}{\partial y}(y)[A_1 y+g_1(y,\mu(y)+\varphi(y))]-A_2(h(y))-g_2(y,\mu(y)+\varphi(y))=0 \tag{2.2.24}$$

$$N(\varphi(y))=\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y)[A_1 y+g_1(y,\mu(y)+\varphi(y))]-A_2(\varphi(y))-g_2(y,\varphi(y))-$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y)[g_1(y,\mu(y)+\varphi(y))-g_1(y,\varphi(y))] \tag{2.2.25}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (2.2.24) και (2.2.25) λαμβάνουμε τη σχέση:

$$N(h(y))-N(\varphi(y))=\frac{\partial}{\partial y}(h-\varphi)(y)[A_1 y+g_1(y,\mu(y)+\varphi(y))]-A_2[h(y)-\varphi(y)]-$$

$$-g_2(y,\mu(y)+\varphi(y))+g_2(y,\varphi(y))+\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y)[g_1(y,\mu(y)+\varphi(y))-g_1(y,\varphi(y))]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(h(y))=\frac{\partial \mu}{\partial y}(y)[A_1 y+M(y,\mu(y))]-A_2(\mu(y))-Q(y,\mu(y))=0 \tag{2.2.26}$$

8 Με τη σημειογραφία $O(.)$ εννοούμε ότι αν $f(y)=O(\|y\|^p)$ τότε $\|f(y)\|\le k\|y\|^p$.

όπου:

$$M(y,z)=g_1(y,\varphi(y)+z)$$

και

$$Q(y,z)=g_2(y,\varphi(y)+z)-g_2(y,\varphi(y))+N(\varphi(y))-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y)[g_1(y,\varphi(y)+z)-g_1(y,\varphi(y))]$$

Εφόσον η συνάρτηση $\mu(y)$ ικανοποιεί τη σχέση (2.2.26) είναι κεντρική πολλαπλότητα για το ($\Sigma_{2.2}$) με $g_1=M$ και $g_2=Q$.
Παρατηρούμε επίσης ότι:

$$Q(y,0)=N(\varphi(y))=O\left(\|y\|^p\right)$$

άρα από το Λήμμα 2.1.41 έπεται ότι η $\mu(y)$ ικανοποιεί τη σχέση (2.1.42) δηλαδή:

$$\|\mu(y)\|\le c\|y\|^p$$

η οποία είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\mu(y)=O\left(\|y\|^p\right) \tag{2.2.27}$$

Επομένως, $h(y)-\varphi(y)=O\left(\|y\|^p\right)$ και το παραγόμενο σύστημα γράφεται ως εξής:

$$\dot{y}=A_1y+g_1(y,\varphi(y))+g_1(y,h(y))-g_1(y,\varphi(y))$$

Επίσης, επειδή η g_1 είναι συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και οι πρώτες της μερικές παράγωγοι μηδενίζονται στο μηδέν έχουμε ότι:

$$\left\|\frac{\partial g_1}{\partial z}(y,z)\right\|\le k_1\|y\|+k_2\|z\| \quad \text{για} \quad k_1,k_2>0 \tag{2.2.28}$$

σε μια περιοχή του μηδενός.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση g_1 παίρνουμε:

$$g_{1_i}(y,h(y))-g_{1_i}(y,\varphi(y))=\frac{\partial g_{1_i}}{\partial z}(y,\xi(y))(h(y)-\varphi(y)) \tag{2.2.29}$$

Ακόμα:

$$\|\xi(y)\|\le\|h(y)\|=\|\varphi(y)+h(y)-\varphi(y)\|\overset{(2.2.22)}{=}\|\varphi(y)+\mu(y)\|\overset{(2.2.26)}{\le}k_3\|y\|^p\le k_3\|y\| \tag{2.2.30}$$

για $k_3>0$ και $\|y\|<1$.

Επομένως, από τη σχέση (2.2.29) έχουμε:

$$\|g_1(y,h(y))-g_1(y,\varphi(y))\|=\left\|\frac{\partial g_1}{\partial z}(y,\xi(y))\right\|\|\mu(y)\| \overset{(2.2.28)}{\leq} (k_1\|y\|+k_2\|\xi(y)\|)\|\mu(y)\|$$

$$\overset{(2.2.30)}{\leq} (k_1+k_2k_3)\|y\|\|\mu(y)\| \overset{k=k_1+k_2k_3}{=} k\|y\|\left\|O(\|y\|^p)\right\| \leq O(\|y\|^{p+1})$$

□

2.3 Εφαρμογές

Προτού προχωρήσουμε σε εφαρμογές, αξίζει να σημειωθεί ότι για τη μερική διαφορική εξίσωση κεντρικής πολλαπλότητας (2.2.3), δεν μπορεί τις περισσότερες φορές να βρεθεί ακριβής λύση. Για το λόγο αυτό, θα δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν, ότι κάνουμε προσέγγιση της λύσης μέσω των σειρών Taylor.

Σε αρκετά παραδείγματα, το παραγόμενο σύστημα ($\Sigma_{2.5}$) που θα προκύψει, θα είναι της μορφής:

$$\dot{x}=ax^p+O(|x|^{p+1})$$

Για να διαπιστώσουμε την ευστάθεια του μηδενός θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση που ακολουθεί:

Πρόταση 2.3.1:

Έστω η διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x}=ax^p+g(x)=f(x)$$

όπου $x\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{Z}^+$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι:

$$|g(x)|\leq k|x|^{p+1} \quad \text{για} \quad k>0 \tag{2.3.2}$$

Τότε αν:

- $a<0$ και p περιττός το μηδέν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας
- $a>0$ και p περιττός ή $a\neq 0$ και p άρτιος το μηδέν είναι ασταθές σημείο ισορροπίας

Απόδειξη:

Έστω $a<0$ και p περιττός. Τότε, κοντά στο μηδέν, ο όρος που κυριαρχεί και διαμορφώνει το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)$ είναι ο ax^p.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$V(x)=\frac{1}{2}x^2$$

για την οποία προφανώς ισχύει ότι $V(0)=0$ και $V(x)>0 \quad \forall x\neq 0$.

Έχουμε:

$$\dot{V}(x)=x(ax^p+g(x)) \overset{(2.3.2)}{\leq} ax^{p+1}+k|x|^{p+2} \tag{2.3.3}$$

Όμως σε μία περιοχή του μηδενός, κοντά στο μηδέν, ο όρος που κυριαρχεί και διαμορφώνει το πρόσημο του δεξιού μέλους της σχέσης (2.3.3) είναι ο ax^{p+1}. Άρα από τη σχέση (2.3.3) έπεται ότι $\dot{V}(x)<0$ και άρα από το Θεώρημα Lyapunov (Θεώρημα 1.3.22) το μηδέν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Έστω τώρα ότι $a>0$ και p περιττός. Τότε το πρόσημο της $f(x)$ καθορίζεται από το πρόσημο του x. Σε αυτήν την περίπτωση, μία τροχιά που ξεκινάει από το μηδέν, απομακρύνεται από αυτό με την πάροδο του χρόνου. Το ίδιο συμβαίνει και όταν ο αριθμός p είναι άρτιος, διότι ο όρος x^p θα είναι πάντα θετικός και $a>0$ ή $a<0$ εφόσον $a\neq 0$. Άρα, το μηδέν είναι ασταθές.

□

<u>Παράδειγμα 2.3.4</u>:

Έστω

$$\begin{Bmatrix} \dot{x_1}=x_2 \\ \dot{x_2}=-x_2+ax_1^2+bx_1x_2 \end{Bmatrix}$$

όπου $a,b\in\mathbb{R}$ και $a\neq 0$.

Το παραπάνω σύστημα έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας το $0\in\mathbb{R}^2$. Επιλέγουμε να μελετήσουμε την ευστάθεια του με τη μέθοδο της γραμμικοποίησης. Επομένως, αν:

$$f(x)=\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2+ax_1^2+bx_1x_2 \end{pmatrix}$$

τότε:

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x)\Big|_{x=0}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2ax_1+bx_2 & -1+bx_1 \end{pmatrix}\Big|_{(0,0)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και

$$det(A-\lambda I)=\lambda(\lambda+1)=0 \qquad (2.3.5)$$

Οι λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (2.3.5) είναι $\lambda=0$ ή $\lambda=-1$. Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι 0 και -1. Παρατηρούμε ότι έχουμε μία μηδενική ιδιοτιμή, άρα η μέθοδος της γραμμικοποίησης αποτυγχάνει να αποφανθεί για την ευστάθεια του $0\in\mathbb{R}^2$. Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A είναι:

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad X_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Έστω M ένας πίνακας του οποίου οι στήλες είναι τα ιδιοδιανύσματα X_1, X_2.

Άρα:

$$M=[X_1|X_2]=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Έστω:

$$T=M^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$$

ώστε

$$TA\,T^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών:

$$\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\-x_2\end{pmatrix}$$

Άρα, το αρχικό μας σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\left\{\begin{array}{c}\dot{y}=a(y+z)^2-b(y+z)z\\ \dot{z}=-z-a(y+z)^2+b(y+z)z\end{array}\right\} \begin{array}{l}(2.3.6)\\(2.3.7)\end{array}$$

Επομένως, η εξίσωση κεντρικής πολλαπλότητας (2.2.3) για το παράδειγμά μας είναι:

$$h'(y)[a(y+h(y))^2-b(y+h(y))h(y)]+h(y)+a(y+h(y))^2-b(y+h(y))h(y)=0 \qquad (2.3.8)$$

με αρχική συνθήκη:

$$h(0)=h'(0)=0$$

Προσεγγίζουμε τη λύση της (2.3.8) ως σειρά Taylor της μορφής:

$$h(y)=h_2y^2+h_3y^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Η γενική μεθοδολογία που ακολουθούμε είναι η εξής:

Αρχικά θεωρούμε ότι $h(y)\approx 0$. Τότε $h(y)=O\left(|y|^2\right)$ και αντικαθιστούμε $z=h(y)$ στη σχέση (2.3.6). Αν στο παραγόμενο σύστημα που θα πάρουμε, μπορούμε να διαπιστώσουμε την ευστάθεια του μηδενός, τότε έχουμε τελειώσει. Αλλιώς, κάνουμε την προσέγγιση $h(y)\approx h_2 y^2$ δηλαδή $h(y)=h_2 y^2+O\left(|y|^3\right)$ και αντικαθιστούμε στη (2.3.8) για να υπολογίσουμε το συντελεστή h_2. Τη λύση που θα προκύψει την αντικαθιστούμε στη σχέση (2.3.6) και αν μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια του μηδενός από το παραγόμενο σύστημα, τότε σταματάμε. Αν όχι, κάνοντας ακόμα μία προσέγγιση, δηλαδή $h(y)\approx h_2 y^2+h_3 y^3$ παίρνουμε $h(y)=h_2 y^2+h_3 y^3+O\left(|y|^4\right)$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να μπορέσουμε να διαπιστώσουμε την ευστάθεια του μηδενός.

Στο παράδειγμά μας, αν $h(y)\approx 0$ τότε $h(y)=O\left(|y|^2\right)$ και αντικαθιστώντας στη (2.3.6) παίρνουμε ότι:

$$\dot{y}=ay^2+O\left(|y|^3\right) \quad [9] \qquad (2.3.9)$$

το οποίο είναι της μορφής:

$$\dot{y}=ay^p+O\left(|y|^{p+1}\right)$$

με $p=2$.

Αφού λοιπόν $a\neq 0$ και p άρτιος, από την Πρόταση 2.3.1 έπεται ότι το μηδέν είναι ασταθές για το παραγόμενο σύστημα και συνεπώς από το Θεώρημα 2.2.5, συμπεραίνουμε ότι το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας για το αρχικό μας σύστημα.

<u>Παράδειγμα 2.3.10</u>:

Έστω

$$\left\{\begin{array}{c}\dot{y}=yz\\ \dot{z}=-z+ay^2\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l}(2.3.11)\\(2.3.12)\end{array}$$

όπου $y,z\in\mathbb{R}$ και a σταθερά.

Το παραπάνω σύστημα έχει μετασχηματιστεί ήδη σε (y,z) συντεταγμένες. Επομένως, η εξίσωση κεντρικής πολλαπλότητας (2.2.3) παίρνει τη μορφή:

---

9 Το σφάλμα $O\left(|y|^2\right)$ που εμφανίζεται στη συνάρτηση $h(y)$ που βρήκαμε, γίνεται $O\left(|y|^3\right)$ στο δεξί μέλος του παραγόμενου συστήματος, διότι η συνάρτηση $g_1(y,z)$ που εμφανίζεται με τη μορφή $g_1(y,h(y))$ στο δεξί μέλος του ($\Sigma_{2.5}$) έχει μερική παράγωγο ως προς z που μηδενίζεται στο μηδέν.

$$h'(y)[yh(y)]+h(y)-ay^2=0 \tag{2.3.13}$$

με αρχική συνθήκη:

$$h(0)=h'(0)=0$$

Αν $h(y)\approx 0$ τότε $h(y)=O(|y|^2)$ και αντικαθιστώντας στη (2.3.11) έχουμε:

$$\dot{y}=O(|y|^3)$$

Προφανώς, από το σύστημα που προκύπτει δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια του μηδενός. Άρα, συνεχίζουμε κάνοντας την προσέγγιση $h(y)\approx h_2 y^2$ από την οποία μπορούμε να πάρουμε ότι $h(y)=h_2 y^2+O(|y|^3)$. Αντικαθιστώντας την τελευταία στη σχέση (2.3.13) και παραγοντοποιώντας τους όρους του y^2 , θα πρέπει ο συντελεστής να ισούται με μηδέν. Συνεπώς, προκύπτει ότι $h_2=a$.

Έπειτα, αντικαθιστώντας $z=h(y)=ay^2+O(|y|^3)$ στην εξίσωση (2.3.11) παίρνουμε το παραγόμενο σύστημα:

$$\dot{y}=ay^3+O(|y|^4) \tag{2.3.14}$$

που είναι της μορφής:

$$\dot{y}=ay^p+O(|y|^{p+1})$$

με $p=3$.

Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.1, αν $a<0$, το μηδέν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και, αν $a>0$, το μηδέν είναι ασταθές. Συνεπώς, από το Θεώρημα 2.2.5 το ίδιο θα ισχύει και για το αρχικό σύστημα. Αν όμως $a=0$ τότε η εξίσωση κεντρικής πολλαπλότητας γίνεται:

$$h'(y)[yh(y)]+h(y)=0 \tag{2.3.15}$$

με αρχική συνθήκη:

$$h(0)=h'(0)=0$$

η οποία έχει ακριβή λύση την $h(y)=0$.

Αντικαθιστώντας λοιπόν $z=h(y)=0$ στη σχέση (2.3.11) προκύπτει το παραγόμενο σύστημα:

$$\dot{y}=0 \tag{2.3.16}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$V(y)=y^2$$

η οποία είναι συνάρτηση Lyapunov καθώς:

$$V(0)=0$$

$$V(y)>0 \quad \forall\, y\neq 0$$

και

$$\dot{V}(y)=2\,y\,\dot{y}=0$$

άρα από το Θεώρημα 1.3.1 το μηδέν είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας για το παραγόμενο σύστημα (2.3.16) και συνεπώς από το Πόρισμα 2.2.15 το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ευσταθές και για το αρχικό μας σύστημα.

<u>Παράδειγμα 2.3.17</u>:

Έστω

$$\left.\begin{array}{c} \dot{y}_1=y_2-y_1^3 \\ \dot{y}_2=-y_1-y_2^3+z^2 \\ \dot{z}=-z+y_1^3-3\,y_1^5+3\,y_1^2 y_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (2.3.18) \\ (2.3.19) \\ (2.3.20) \end{array}$$

με $y=(y_1,y_2)^T\in\mathbb{R}^2$ και $z\in\mathbb{R}$ το οποίο επίσης έχει μετασχηματιστεί σε συντεταγμένες (y,z).

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με τα προηγούμενα παραδείγματα, ξεκινάμε κάνοντας την προσέγγιση $h(y)=h(y_1,y_2)\approx 0$ δηλαδή $h(y)=h(y_1,y_2)=O\left(\|y\|^2\right)$ και αντικαθιστώντας $z=h(y)=h(y_1,y_2)$ στις σχέσεις (2.3.18) και (2.3.19) παίρνουμε το παραγόμενο σύστημα:

$$\dot{y}=\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_2-y_1^3 \\ -y_1-y_2^3\end{pmatrix}+O\left(\|y\|^4\right)=f(y) \qquad (2.3.21)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$V(y)=V(y_1,y_2)=\frac{1}{2}\left(y_1^2+y_2^2\right)$$

για την οποία προφανώς ισχύει $V(0,0)=0$ και $V(y)>0 \quad \forall\, y\neq 0.$

Επίσης:

$$\dot{V}(y)=\nabla V(y)f(y)=(y_1,y_2)\begin{pmatrix} y_2-y_1^3 \\ -y_1-y_2^3 \end{pmatrix}+y^T O\left(\|y\|^4\right)=-(y_1^4+y_2^4)+y^T O\left(\|y\|^4\right)$$

$$\leq -\frac{(y_1^2+y_2^2)^2}{2}+k\|y\|^5=-\frac{\|y\|^4}{2}+k\|y\|^5 \qquad (2.3.22)$$

Για $k<\frac{1}{2\|y\|}$ από την (2.3.22) έπεται ότι:

$$\dot{V}(y)<0$$

Άρα από το Θεώρημα Lyapunov (Θεώρημα 1.3.22) έπεται ότι το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το παραγόμενο σύστημα (2.3.21) και συνεπώς από το Θεώρημα 2.2.5 το $0\in\mathbb{R}^3$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για το αρχικό μας σύστημα.

<u>Παράδειγμα 2.3.23</u>:

Έστω το μετασχηματισμένο σε (y,z) συντεταγμένες σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} \dot{y}_1=y_2-y_1^3 \\ \dot{y}_2=-y_2^3+z^2 \\ \dot{z}=-z+y_1^3-3y_1^5+3y_1^2y_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (2.3.24) \\ (2.3.25) \\ (2.3.26) \end{array}$$

όπου $y=(y_1,y_2)^T\in\mathbb{R}^2$ και $z\in\mathbb{R}$.

Αναζητούμε τη λύση της εξίσωσης κεντρικής πολλαπλότητας που για το παράδειγμά μας είναι μία συνάρτηση $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Η σχέση (2.2.3) μορφοποιείται ως εξής:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y_1},\frac{\partial h}{\partial y_2}\right)\begin{pmatrix} y_2-y_1^3 \\ -y_2^3+h^2(y) \end{pmatrix}+h(y)-y_1^3+3y_1^5-3y_1^2y_2=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y_1}(y_2-y_1^3)+\frac{\partial h}{\partial y_2}[-y_2^3+h^2(y)]+h(y)-y_1^3+3y_1^5-3y_1^2y_2=0 \qquad (2.3.27)$$

με αρχική συνθήκη:

$$h(0,0)=\frac{\partial h}{\partial y_1}(0,0)=\frac{\partial h}{\partial y_2}(0,0)=0$$

Η ακριβής λύση της (2.3.27) είναι η $h(y)=y_1^3$. Επομένως, κάνοντας την αντικατάσταση $z=h(y)=y_1^3$ στις σχέσεις (2.3.24) και (2.3.25) προκύπτει το παραγόμενο σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{y}_1=y_2-y_1^3=f_1(y) \\ \dot{y}_2=-y_2^3+y_1^6=f_2(y) \end{array}\right\} \tag{2.3.28}$$

το οποίο έχει δύο σημεία ισορροπίας το $(0,0)$ και το $(1,1)$. Εξετάσουμε ευστάθεια του μηδενός.

Έστω το σύνολο:

$$U=\{0\le y_1\le 1\}\cap\{y_2\ge y_1^3\}\cap\{y_2\le y_1^2\}$$

Στο σύνορο $y_2=y_1^2$ έχουμε ότι $f_1>0$ και $f_2=0$. Ως εκ τούτου, όλες οι τροχιές κινούνται στο σύνολο U. Επίσης, στο σύνορο $y_2=y_1^3$ έχουμε ότι $f_1=0$ και $f_2>0$. Οι τροχιές λοιπόν, κινούνται και πάλι στο U. Άρα, το U είναι θετικά αναλλοίωτο και οι συναρτήσεις f_1,f_2 παραμένουν θετικές στο σύνολο αυτό. Συνεπώς, τροχιές που ανήκουν στο U και ξεκινούν από το μηδέν, θα απομακρύνονται από αυτό με την πάροδο του χρόνου. Επομένως, το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας για το παραγόμενο σύστημα και άρα από το Θεώρημα 2.2.5 το $0\in\mathbb{R}^3$ είναι ασταθές για το αρχικό μας σύστημα.

<u>Παράδειγμα 2.3.29</u>:

Έστω το μετασχηματισμένο σε (y,z) συντεταγμένες σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{y}=yz+ay^3+byz^2 \\ \dot{z}=-z+cy^2+dy^2z \end{array}\right\} \begin{array}{l} (2.3.30) \\ (2.3.31) \end{array}$$

όπου $y,z\in\mathbb{R}$ και a,b,c,d σταθερές. Θα διερευνήσουμε την ευστάθεια του $0\in\mathbb{R}^2$ για τις διάφορες τιμές των σταθερών a,b,c,d. Η εξίσωση κεντρικής πολλαπλότητας για το παράδειγμά μας είναι η εξής:

$$h'(y)[yh(y)+ay^3+byh^2(y)]+h(y)-cy^2-dy^2h(y)=0 \tag{2.3.32}$$

με αρχική συνθήκη:

$$h(0)=h'(0)=0$$

Για $z=h(y)=O(|y|^2)$ δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για την ευστάθεια του μηδενός. Επομένως, συνεχίζουμε θεωρώντας $z=h(y)=h_2y^2+O(|y|^3)$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.3.32) και μηδενίζοντας το συντελεστή του όρου δεύτερης τάξης βρίσκουμε

ότι $h_2=c$. Άρα $z=h(y)=cy^2+O(|y|^3)$. Αντικαθιστώντας την τελευταία, στη σχέση (2.3.30), προκύπτει το παραγόμενο σύστημα:

$$\dot{y}=(a+c)y^3+O(|y|^4) \tag{2.3.33}$$

- Για $a+c>0$ από την Πρόταση 2.3.1 το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.
- Για $a+c<0$ από την Πρόταση 2.3.1 το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.
- Για $a+c=0$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια του μηδενός από το σύστημα (2.3.33). Άρα συνεχίζουμε, και για $z=h(y)=h_2y^2+h_3y^3+O(|y|^4)$ δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για την ευστάθεια του μηδενός. Επομένως, θεωρούμε $z=h(y)=h_2y^2+h_3y^3+h_4y^4+O(|y|^5)$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.3.32) και μηδενίζοντας τους συντελεστές των όρων δεύτερης, τρίτης και τέταρτης τάξης παίρνουμε ότι $h_2=c, h_3=0$ και $h_4=cd$. Άρα καταλήγουμε στη σχέση $z=h(y)=cy^2+cdy^4+O(|y|^5)$. Οπότε από την (2.3.30) προκύπτει το παραγόμενο σύστημα:

$$\dot{y}=(a+c)y^3+(cd+bc^2)y^5+O(|y|^6) \tag{2.3.34}$$

- Για $a+c=0$ και $cd+bc^2>0$, από την Πρόταση 2.3.1 το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.
- Για $a+c=0$ και $cd+bc^2<0$, από την Πρόταση 2.3.1 το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.
- Για $a+c=cd+bc^2=0$ δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα από το σύστημα (2.3.34). Συνεχίζοντας, για $z=h(y)=h_2y^2+h_3y^3+h_4y^4+h_5y^5+O(|y|^6)$, επίσης δεν προκύπτει κάποιο συμπέρασμα για την ευστάθεια, επομένως κάνοντας την αντικατάσταση $z=h(y)=h_2y^2+h_3y^3+h_4y^4+h_5y^5+h_6y^6+O(|y|^7)$ στη σχέση (2.3.32) και μηδενίζοντας τους συντελεστές των όρων δεύτερης, τρίτης, τέταρτης, πέμπτης και έκτης τάξης, βρίσκουμε ότι $h_2=c, h_3=0, h_4=cd, h_5=0$ και $h_6=cd^2$. Άρα $z=h(y)=cy^2+cdy^4+cd^2y^6+O(|y|^7)$ και αντικαθιστώντας στη σχέση (2.3.30) προκύπτει το παραγόμενο σύστημα:

$$\dot{y}=(a+c)y^3+(cd+bc^2)y^5+(cd^2+2bc^2d)y^7+O(|y|^8)$$

$$\overset{bc^2=-cd}{\Rightarrow}\ \dot{y}=(a+c)y^3+(cd+bc^2)y^5-cd^2y^7+O(|y|^8) \tag{2.3.35}$$

- Για $a+c=cd+bc^2=0, c<0$ και $d\neq0$, από την Πρόταση 2.3.1 το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.

- Για $a+c=cd+bc^2=0, c>0$ και $d\neq 0$, από την Πρόταση 2.3.1 το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

- Για $a+c=cd+bc^2=cd=0$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια του μηδενός από το σύστημα (2.3.35). Αφού $cd=0$ θα έχουμε $c=0$ ή $d=0.$ Στην περίπτωση που $c=0$, έπεται ότι και $a=0$ αφού $a+c=0.$ Επομένως, η εξίσωση κεντρικής πολλαπλότητας μετασχηματίζεται ως εξής:

$$h'(y)[yh(y)+byh^2(y)]+h(y)-dy^2h(y)=0$$

με αρχική συνθήκη:

$$h(0)=h'(0)=0$$

η οποία έχει ακριβή λύση την $h(y)=0.$ Άρα, αντικαθιστώντας $z=h(y)=0$ στη σχέση (2.3.30) παίρνουμε $\dot{y}=0.$

Στην περίπτωση που $d=0$, δηλαδή $c\neq 0$, θα έχουμε αναγκαστικά $b=d=0$ αφού $cd+bc^2=0.$ Άρα η εξίσωση κεντρικής πολλαπλότητας μετασχηματίζεται ως εξής:

$$h'(y)[yh(y)-cy^3]+h(y)-cy^2=0 \qquad (2.3.36)$$

με αρχική συνθήκη:

$$h(0)=h'(0)=0$$

και ακριβή λύση την $h(y)=cy^2.$ Με αντικατάσταση $z=h(y)=cy^2$ στην (2.3.30) παίρνουμε ξανά ότι $\dot{y}=0.$ Άρα και στις δύο περιπτώσεις, είτε $c=0$ είτε $c\neq 0$, μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$V(y)=y^2$$

η οποία είναι συνάρτηση Lyapunov καθώς:

$$V(0)=0$$

$$V(y)>0 \quad \forall\, y\neq 0$$

και

$$\dot{V}(y)=2y\dot{y}=0$$

άρα από το Θεώρημα 1.3.1 το μηδέν είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας και συνεπώς από το Πόρισμα 2.2.15, το $0\in\mathbb{R}^2$ είναι ευσταθές και για το αρχικό μας σύστημα.

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ	**ΕΙΔΟΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΤΟΥ ΜΗΔΕΝΟΣ**
$a+c>0$	ασταθές
$a+c<0$	ασυμπτωτικά ευσταθές
$a+c=0$ και $cd+bc^2>0$	ασταθές
$a+c=0$ και $cd+bc^2<0$	ασυμπτωτικά ευσταθές
$a+c=cd+bc^2=0, c<0$ και $d\neq 0$	ασταθές
$a+c=cd+bc^2=0, c>0$ και $d\neq 0$	ασυμπτωτικά ευσταθές
$a+c=cd+bc^2=cd=0$	ευσταθές

Πίνακας 2.3.36:

Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων του παραδείγματος 2.3.29, συνοψίζονται οι συνθήκες των παραμέτρων για τις οποίες μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια του μηδενός.

Κεφάλαιο 3ο

Σταθεροποίηση μη γραμμικών συστημάτων μίας εισόδου

3.1 Αναγωγή του προβλήματος σταθεροποίησης σε σύστημα κατώτερης τάξης

Το Θεώρημα Κεντρικής Πολλαπλότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για το πρόβλημα της σταθεροποίησης συστημάτων της μορφής:

$$(\Sigma_{3.1}): \quad \dot{x}=f(x)+u\,b$$

σε μία περιοχή ενός σημείου ισορροπίας της συνάρτησης $f(x)$, όπου $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη και $x\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}^{1\times n}$. Θα δούμε ότι με τη βοήθεια του θεωρήματος της Κεντρικής Πολλαπλότητας, ανάγουμε το πρόβλημα της σταθεροποίησης που έχουμε για το αρχικό μας σύστημα, σε ένα σύστημα χαμηλότερης τάξης. Αν αυτό είναι σταθεροποιήσιμο, τότε είναι και το αρχικό μας σύστημα. Προτού όμως προχωρήσουμε σε περαιτέρω ανάλυση, ας θυμηθούμε τις έννοιες της ελεγξιμότητας και της σταθεροποίησης για γραμμικά συστήματα εισόδου.

Έστω το σύστημα:

$$(\Sigma_{3.2}): \quad \dot{x}=Ax+Bu$$

όπου $x\in\mathbb{R}^n, A\in\mathbb{R}^{n\times n}, B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ και $u\in\mathbb{R}^m$.

Ορισμός 3.1.1: Το $(\Sigma_{3.2})$ λέμε ότι είναι ελέγξιμο αν $dim\langle A|B\rangle=n$ ή ισοδύναμα ότι $\langle A|B\rangle=\mathbb{R}^n$ όπου $\langle A|B\rangle=span[B|AB|\ldots|A^{n-1}B]$. Η συνθήκη αυτή για γραμμικά συστήματα μίας εισόδου:

$$\dot{x}=Ax+u\,b$$

όπου $x\in\mathbb{R}^n, A\in\mathbb{R}^{n\times n}, b\in\mathbb{R}^{1\times n}$ και $u\in\mathbb{R}$, είναι ισοδύναμη με:

$$det(b, Ab\ldots, A^{n-1}b)\neq 0.$$

Ορισμός 3.1.2: Το $(\Sigma_{3.2})$ είναι σταθεροποιήσιμο αν υπάρχει $F\in\mathbb{R}^{n\times m}$ ώστε:

$$u=Fx$$

και

$$(\Sigma_{3.3}):\quad \dot{x}=Ax+Bu\big|_{u=Fx}=(A+BF)x$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη του $F\in\mathbb{R}^{n\times m}$, είναι το μηδέν που αποτελεί σημείο ισορροπίας του ($\Sigma_{3.3}$) να είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές. Συνεπώς, ο πίνακας $A+BF$ να είναι Hurwitz.

Πρόταση 3.1.3: Κάθε ελέγξιμο γραμμικό σύστημα μίας εισόδου είναι σταθεροποιήσιμο.

Έστω λοιπόν το ($\Sigma_{3.1}$) και θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το μηδέν αποτελεί σημείο ισορροπίας της $f(x)$, δηλαδή $f(0)=0.$ Κύριος στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε μία απείρως συνεχώς διαφορίσιμη (λεία) συνάρτηση $u(x)$, ώστε το μηδέν να αποτελεί ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας. Μπορούμε να γράψουμε το ($\Sigma_{3.1}$) ως εξής:

$$\dot{x}=Ax+bu+O(x)$$

όπου $A=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x)\Big|_{x=0}$ και $O(x)$ οι όροι ανώτερης τάξης της $f(x)$.

Με αλλαγή βάσης, το ($\Sigma_{3.1}$) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ 0\end{pmatrix}u+O(x)$$

με το (A_{11},b_1) να είναι ελέγξιμο ζευγάρι. Από την Πρόταση 3.1.3 έπεται ότι υπάρχει γραμμική είσοδος $u=k_1x_1$ ώστε ο πίνακας $A_{11}+b_1k_1$ να είναι Hurwitz. Κάνοντας την αντικατάσταση $u=k_1x_1+v$ παίρνουμε ότι:

$$(\Sigma_{3.4}):\quad \begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}+b_1k_1 & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ 0\end{pmatrix}v+O(x)$$

Άρα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι για να είναι το ($\Sigma_{3.1}$) σταθεροποιήσιμο με γραμμική είσοδο και να έχουμε ένα επιλύσιμο και μη τετριμμένο πρόβλημα, θα πρέπει για τις ιδιοτιμές του πίνακα A_{22} να ισχύει ότι $\Re e(\lambda_i)\le 0$, όπου οι ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος καλούνται **κρίσιμες**. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν ο πίνακας A_{22} έχει ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος, τότε είναι προφανές ότι το ($\Sigma_{3.1}$) δεν μπορεί να σταθεροποιηθεί.

Με κατάλληλη επιλογή του k_1 μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A_{11}+b_1k_1$ είναι διαφορετικές από αυτές του $A_{22}.$ Κάνοντας άλλη μία αλλαγή

βάσης (block diagonal matrix) στο γραμμικό μέρος του ($\Sigma_{3.4}$) και αλλάζοντας το συμβολισμό παίρνουμε το σύστημα:

$$(\Sigma_{3.5}):\ \left\{\begin{array}{c}\dot{x}_1=A_{11}x_1+f_1(x_1,x_2,x_3)\\ \dot{x}_2=A_{22}x_2+f_2(x_1,x_2,x_3)\\ \dot{x}_3=A_{33}x_3+f_3(x_1,x_2,x_3)+bu\end{array}\right\}$$

όπου ο πίνακας A_{11} έχει ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος, ενώ οι πίνακες A_{22} και A_{33} είναι Hurwitz. Επίσης:

$$f_1(0)=f_2(0)=f_3(0)=0$$

όπου f_1,f_2,f_3 είναι οι όροι ανώτερων τάξεων. Το ενδιαφέρον μας τώρα, επικεντρώνεται στην κατασκευή συνάρτησης $u=F(x_1,x_2,x_3)$ ώστε το μηδέν να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το ($\Sigma_{3.5}$).

Από το Θεώρημα Κεντρικής Πολλαπλότητας (Θεώρημα 2.1.8), έπεται ότι υπάρχει μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $h=(h_1,h_2)$ ορισμένη σε μία περιοχή του μηδενός, ώστε η $(x_2,x_3)=(h_1(x_1),h_2(x_1))$ να είναι κεντρική πολλαπλότητα για το ($\Sigma_{3.5}$). Επομένως το παραγόμενο σύστημα είναι της μορφής:

$$(\Sigma_{3.6}):\ \dot{x}_1=A_{11}x_1+f_1(x_1,h_1(x_1),h_2(x_1))$$

Έχουμε δείξει στο προηγούμενο κεφάλαιο, ότι ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες ευστάθειας μεταξύ του παραγόμενου και του αρχικού μας συστήματος. Άρα, προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα.

<u>Θεώρημα 3.1.4</u>: Αν το μηδέν είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το παραγόμενο σύστημα ($\Sigma_{3.6}$), τότε είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές και για το ($\Sigma_{3.5}$).

Στο σημείο αυτό, θα δείξουμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε την $h(x_1)$ ή τουλάχιστον να την προσεγγίσουμε. Αφού $x_2=h_1(x_1)$ και $x_3=h_2(x_1)$ έχουμε ότι:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=Dh(x_1)\dot{x}_1$$

Άρα η $h=(h_1,h_2)$ ικανοποιεί την ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση:

$$Dh(x_1)[A_{11}x_1+f_1(x_1,h_1(x_1),h_2(x_1))]=\begin{pmatrix}A_{22}h_1(x_1)+f_2(x_1,h_1(x_1),h_2(x_1))\\ A_{33}h_2(x_1)+f_3(x_1,h_1(x_1),h_2(x_1))+bF(x_1,h_1(x_1),h_2(x_1))\end{pmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$N(h(x_1))=Dh(x_1)[A_{11}x_1+f_1(x_1,h_1(x_1),h_2(x_1))]-\begin{pmatrix} A_{22}h_1(x_1)+f_2(x_1,h_1(x_1),h_2(x_1)) \\ A_{33}h_2(x_1)+f_3(x_1,h_1(x_1),h_2(x_1))+bF(x_1,h_1(x_1),h_2(x_1)) \end{pmatrix}$$

με αρχική συνθήκη:

$$h(0)=Dh(0)=0.$$

Με το θεώρημα που ακολουθεί, η λύση $h(x_1)$ μπορεί να προσεγγιστεί αυθαίρετα κοντά στο $x_1=0$ ως σειρά Taylor.

<u>Θεώρημα 3.1.5</u>: Αν υπάρχει συνάρτηση $\varphi(x_1)$ όπου $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ με:

$$\varphi(0)=D\varphi(0)=0$$

τέτοια ώστε:

$$N(\varphi(x_1))=O\left(\|x_1\|^p\right) \quad \text{για} \quad p>1$$

τότε:

$$h_1(x_1)=\varphi_1(x_1)+O\left(\|x_1\|^p\right)$$

$$h_2(x_1)=\varphi_2(x_1)+O\left(\|x_1\|^p\right)$$

Άρα, το παραγόμενο σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\dot{x}_1=A_{11}x_1+f_1\left(x_1,\varphi_1(x_1)+O\left(\|x_1\|^p\right),\varphi_2(x_1)+O\left(\|x_1\|^p\right)\right)$$

<u>Απόδειξη</u>: Είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.20.

<u>Πόρισμα 3.1.6</u>: Το μηδέν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το παραγόμενο σύστημα ($\Sigma_{3.6}$) αν και μόνο αν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και για το:

$$(\Sigma_{3.7}): \quad \dot{x}_1=A_{11}x_1+f_1\left(x_1,\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_1)\right)$$

Αφού οι φ_1,φ_2 εξαρτώνται από την $u=F(x_1,x_2,x_3)$, μέσω της μερικής διαφορικής εξίσωσης κεντρικής πολλαπλότητας, πρέπει να κατασκευάσουμε $F(x_1,x_2,x_3)$ ώστε το μηδέν να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για το ($\Sigma_{3.7}$). Η ικανότητα να το κάνουμε αυτό, εξαρτάται από τη δομή των συναρτήσεων f_1,f_2,f_3.

3.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 3.2.1:

Έστω το σύστημα:

$$(\Sigma_{3.8}):\quad \begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ g(x_1,x_2,y)\end{pmatrix} \qquad (3.2.2)$$

$$\dot{y}=ly+u \qquad (3.2.3)$$

$$(3.2.4)$$

όπου $x=(x_1,x_2)^T\in\mathbb{R}^2, y\in\mathbb{R}, u\in\mathbb{R}, l>0$ και η συνάρτηση $g(x_1,x_2,y)$ περιέχει όρους δεύτερης τάξης και άνω σε όλες τις μεταβλητές x_1,x_2,y.

Το πρόβλημά μας επικεντρώνεται στο να κατασκευάσουμε μία $u=F(x_1,x_2,y)$ ώστε το μηδέν του προκύπτοντος συστήματος να είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές. Η δυνατότητα αυτή εξαρτάται από τη δομή της συνάρτησης $g(x_1,x_2,y)$. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (3.2.2) δεν περιέχει όρους ανώτερης τάξης. Θα γίνει φανερό από τη Σημείωση 2 που ακολουθεί στο τέλος του παραδείγματος, ότι τα αποτελέσματα μας μπορούν να υιοθετηθούν και στην πιο γενική περίπτωση, όπου η εξίσωση (3.2.2) περιέχει όρους ανώτερης τάξης.

Αντικαθιστώντας $u=-ly-ky+w$ για $k>0$ στο ($\Sigma_{3.8}$) παίρνουμε ότι:

$$(\Sigma_{3.9}):\quad \begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ g(x_1,x_2,y)\end{pmatrix}$$

$$\dot{y}=-ky+w$$

Το ($\Sigma_{3.9}$) έχει την ίδια μορφή με το ($\Sigma_{3.5}$). Επίσης, θεωρούμε ότι η w είναι είσοδος της μορφής $w=w(x_1,x_2,y)$, περιέχοντας μόνο όρους δεύτερης τάξης και άνω σε όλες τις μεταβλητές. Συγκεκριμένα παίρνουμε:

$$w(x_1,x_2,y)=\alpha x_1^2+\beta x_1x_2+\gamma x_2^2 \qquad (3.2.5)$$

Επίσης έστω:

$$y=h(x_1,x_2)=ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2+O\left(\|x\|^3\right) \qquad (3.2.6)$$

Άρα, το παραγόμενο σύστημα είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ g(x_1,x_2,h(x_1,x_2))\end{pmatrix}$$

Επομένως, η μερική διαφορική εξίσωση κεντρικής πολλαπλότητας είναι:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1},\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1+g(x_1,x_2,h(x_1,x_2)) \end{pmatrix}+kh(x_1,x_2)-w(x_1,x_2,h(x_1,x_2))=0$$

$$\Rightarrow x_2\frac{\partial h}{\partial x_1}+[-x_1+g(x_1,x_2,h(x_1,x_2))]\frac{\partial h}{\partial x_2}+kh(x_1,x_2)-w(x_1,x_2,h(x_1,x_2))=0 \quad (3.2.7)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.2.5) και (3.2.6) στην (3.2.7), θα πρέπει ο συντελεστής των όρων κατώτερης τάξης (δηλαδή δευτέρας τάξης) να είναι μηδέν. Επομένως, προκύπτει ότι:

$$\begin{Bmatrix} 2a-2c+kb-\beta=0 \\ -b+ka-\alpha=0 \\ b+kc-\gamma=0 \end{Bmatrix}$$

Αφού $k\neq 0$, οι παράμετροι a,b,c μπορούν να πάρουν αυθαίρετα οποιεσδήποτε τιμές προσαρμόζοντας τις παραμέτρους α,β,γ. Με άλλα λόγια, με κατάλληλη μη γραμμική είσοδο w της μορφής (3.2.5), μπορούν να προσδιοριστούν οι συντελεστές των όρων κατώτερης τάξης (δευτέρας τάξης) της κεντρικής πολλαπλότητας (3.2.6).

Συνεπώς, από το Θεώρημα 3.1.4, το μηδέν είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το ($\Sigma_{3.9}$), αν είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές για το:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ g(x_1,x_2,ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2+O(\|x\|^3)) \end{pmatrix}$$

<u>Σημείωση 1</u>: Αν η συνάρτηση g περιέχει όρους της μορφής x_1y και/ή x_2y , μπορεί να δειχθεί ότι το ($\Sigma_{3.8}$) είναι σταθεροποιήσιμο (δηλαδή υπάρχει μία λεία συνάρτηση $u(x_1,x_2,y)$ ώστε το μηδέν του προκύπτοντος συστήματος να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές).

<u>Σημείωση 2</u>: Μπορούσαμε να δείξουμε ότι το παραπάνω σύστημα μπορεί να σταθεροποιηθεί και με γραμμική είσοδο. Οι υπολογισμοί όμως θα ήταν πιο πολύπλοκοι, αφού θα χρειαζόταν πρώτα ένας μετασχηματισμός (block diagonal matrix). Ως συνέπεια, η εξίσωση (3.2.2) θα είχε όρους ανώτερης τάξης, που από υπολογιστικής πλευράς επιμηκύνει την ανάλυση.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, το σύστημα που δίνεται δεν μπορεί να σταθεροποιηθεί με γραμμική είσοδο, αλλά είναι σταθεροποιήσιμο με μη γραμμική είσοδο.

<u>Παράδειγμα 3.2.8</u>:

Έστω το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}=xy \\ \dot{y}=u \end{Bmatrix}$$

όπου $x, y, u \in \mathbb{R}$.

Χρήση μη γραμμικής εισόδου:

Έστω $u = -y + ax^2$ όπου $a<0$. Τότε το σύστημα παίρνει τη μορφή του συστήματος που είχαμε στο Παράδειγμα 2.3.10 του Κεφαλαίου 2, στο οποίο είχαμε δείξει ότι για $a<0$ το μηδέν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας. Συνεπώς, το σύστημά μας είναι σταθεροποιήσιμο.

Χρήση γραμμικής εισόδου:

Έστω $u = -y + \beta x$ όπου $\beta \neq 0$. Τότε έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

Κάνοντας την αλλαγή συντεταγμένων:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

παίρνουμε:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1(\beta x_1 + y_1) \\ -\beta x_1(\beta x_1 + y_1) \end{pmatrix} \qquad (3.2.9)$$
$$(3.2.10)$$

Έστω $y_1 = h(x_1) \approx 0$ δηλαδή $y_1 = h(x_1) = O\left(|x_1|^2\right)$. Αντικαθιστώντας στην (3.2.9) προκύπτει το παραγόμενο σύστημα:

$$\dot{x}_1 = \beta x_1^2 + O\left(|x_1|^3\right)$$

το οποίο είναι της μορφής:

$$\dot{x}_1 = \beta x_1^p + O\left(|x_1|^{p+1}\right)$$

με $\beta \neq 0$ και $p = 2$. Άρα από την Πρόταση 2.3.1, το $0 \in \mathbb{R}^2$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας. Συνεπώς, το αρχικό μας σύστημα δεν σταθεροποιείται με γραμμική είσοδο.

Παράδειγμα 3.2.11:

Έστω το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} \dot{z} = xy \\ \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \end{Bmatrix}$$

όπου $x, y, z, u, v \in \mathbb{R}$.

Χρήση μη γραμμικών εισόδων:

Έστω $u=-x+\alpha z^2$ και $v=-y+\beta z^3$. Άρα έχουμε:

$$\begin{pmatrix}\dot{z}\\ \dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}xy\\ \alpha z^2\\ \beta z^3\end{pmatrix} \quad (3.2.12)$$
$$(3.2.13)$$
$$(3.2.14)$$

Αναζητούμε τη λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης κεντρικής πολλαπλότητας, η οποία για το παράδειγμά μας είναι μία συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ με $h(z)=(h_1(z),h_2(z))$. Θα θεωρήσουμε τις h_1,h_2 ως σειρές Taylor της μορφής:

$$h_1(z)=h_{11}z^2+h_{12}z^3+\ldots\ldots\ldots$$

και

$$h_2(z)=h_{21}z^2+h_{22}z^3+\ldots\ldots\ldots$$

Η μερική διαφορική εξίσωση κεντρικής πολλαπλότητας για το παράδειγμά μας είναι η εξής:

$$\begin{pmatrix}h_1'(z)\\ h_2'(z)\end{pmatrix}\dot{z}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}h_1'(z)\\ h_2'(z)\end{pmatrix}h_1(z)h_2(z)=\begin{pmatrix}-h_1(z)+\alpha z^2\\ -h_2(z)+\beta z^3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}h_1'(z)h_1(z)h_2(z)=-h_1(z)+\alpha z^2\\ h_2'(z)h_1(z)h_2(z)=-h_2(z)+\beta z^3\end{Bmatrix} \quad (3.2.15)$$

Για $x=h_1(z)\approx h_{11}z^2+h_{12}z^3$ και $y=h_2(z)\approx h_{21}z^2+h_{22}z^3$ παίρνουμε:

$$x=h_1(z)=h_{11}z^2+h_{12}z^3+O(|z|^4)$$

και

$$y=h_2(z)=h_{21}z^2+h_{22}z^3+O(|z|^4)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.2.15) και μηδενίζοντας τους συντελεστές των όρων κατώτερης τάξης, βρίσκουμε ότι $h_{11}=\alpha, h_{12}=0, h_{22}=\beta$. Επομένως:

$$x=h_1(z)=\alpha z^2+O(|z|^4)$$

και

$$y=h_2(z)=\beta z^3+O(|z|^4)$$

Άρα, από την (3.2.12) προκύπτει το παραγόμενο σύστημα:

$$\dot{z}=\alpha\beta z^5+O(|z|^6)$$

στο οποίο το $0\in\mathbb{R}^3$ είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας αν $\alpha\beta<0$. Άρα, από το Θεώρημα 3.1.4, δεδομένου ότι $\alpha\beta<0$, το αρχικό μας σύστημα είναι σταθεροποιήσιμο.

Χρήση γραμμικής εισόδου:

Έστω $u=-x+z$ και $v=-y-z^2$. Άρα παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{pmatrix}\dot{z}\\ \dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}xy\\ 0\\ -z^2\end{pmatrix}$$

Προκειμένου να φέρουμε το σύστημα στη μορφή του ($\Sigma_{3.8}$) και να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Κεντρικής Πολλαπλότητας, κάνουμε την εξής αλλαγή συντεταγμένων:

$$\begin{pmatrix}z\\ x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(x_1+x_2)x_3\\ -(x_1+x_2)x_3\\ -x_1^2\end{pmatrix}$$

$$(3.2.16)$$
$$(3.2.17)$$
$$(3.2.18)$$

Η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης κεντρικής πολλαπλότητας είναι μία συνάρτηση της μορφής $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ με $h(x_1)=(h_1(x_1),h_2(x_1))$. Θεωρούμε τις h_1,h_2 ως σειρές Taylor της μορφής:

$$h_1(x_1)=h_{11}x_1^2+h_{12}x_1^3+\ldots\ldots\ldots.$$

και

$$h_2(x_1)=h_{21}x_1^2+h_{22}x_1^3+\ldots\ldots\ldots.$$

Η μερική διαφορική εξίσωση κεντρικής πολλαπλότητας είναι:

$$\begin{pmatrix}h_1'(x_1)\\ h_2'(x_1)\end{pmatrix}\dot{x}_1=\begin{pmatrix}\dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}h_1'(x_1)\\ h_2'(x_1)\end{pmatrix}(x_1+h_1(x_1))h_2(x_1)=\begin{pmatrix}-h_1(x_1)-(x_1+h_1(x_1))h_2(x_1)\\ -h_2(x_1)-x_1^2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}h_1'(x_1)(x_1+h_1(x_1))h_2(x_1)=-h_1(x_1)-(x_1+h_1(x_1))h_2(x_1)\\ h_2'(x_1)(x_1+h_1(x_1))h_2(x_1)=-h_2(x_1)-x_1^2\end{Bmatrix}\qquad(3.2.19)$$

Για $x_2=h_1(x_1)\approx h_{11}x_1^2+h_{12}x_1^3$ και $x_3=h_2(x_1)\approx h_{21}x_1^2+h_{22}x_1^3$ παίρνουμε:

$$x_2=h_1(x_1)=h_{11}x_1^2+h_{12}x_1^3+O\left(|x_1|^4\right)$$

και

$$x_3=h_2(x_1)=h_{21}x_1^2+h_{22}x_1^3+O\left(|x_1|^4\right)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.2.19) και μηδενίζοντας τους συντελεστές των όρων κατώτερης τάξης, βρίσκουμε ότι $h_{11}=0, h_{12}=-1$. Επομένως, από την (3.2.16) παίρνουμε το παραγόμενο σύστημα το οποίο είναι της μορφής:

$$\dot{x}_1=(x_1+0.x_1^2+.....)(-x_1^2+.....)$$

δηλαδή

$$\dot{x}_1=-x_1^3+O(|x_1|^4)$$

για το οποίο το $0\in\mathbb{R}^3$ είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας. Συνεπώς, από το Θεώρημα 3.1.4 το αρχικό μας σύστημα είναι σταθεροποιήσιμο.

Βιβλιογραφία

[1] Khalil, Hassan K. Nonlinear Systems (Third Edition). New Jersey: Prentice Hall, 2002

[2] Hassan K. Khalil, Nonlinear control, global edition, Pearson Education 2015

[3] D. Aeyels, Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control, Dept. of Systems Dynamics, Grotesteenweg Noord 2 9710 Zwijnaarde Belgium

[4] Ι. Τσινιάς, Θεωρία Συστημάτων-Συμπληρωματικές σημειώσεις για τα κεφάλαια 1-7, 11 των σημειώσεων "Αρίστου Ελέγχου", ΕΜΠ