ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Το θεώρημα Hille-Yosida

Θεωρία και εφαρμογές

Διπλωματική εργασία του Χαράλαμπου Φιλιππατου
Αθήνα, Φεβρουάριος 2021

Μεγιστικοί Μονότονοι Τελεστές

Πλειότιμοι και μη γραμμικοί

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Στους αείμνηστους παππού και γιαγιά μου,
Μπάμπη και Σοφία.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Περίληψη

Το παρόν κείμενο επικεντρώνεται στο Θεώρημα Hille-Yosida, το οποίο αποτελεί πολύ ισχυρό εργαλείο για την μελέτη και την επίλυση προβλημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων. Το όνομα του το έχει πάρει απο τους μαθηματικούς Einar Hille και Kosaku Yosida, οι οποίοι εργάστηκαν και ανακάλυψαν το εν λόγω αποτέλεσμα κάπου το 1948.

Η ανάλυση που ακολουθεί χωρίζετια σε τρία κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο, εισάγονται έννοιες απαραίτητες για την απόδειξη και μελέτη του θεωρήματος και των εφαρμογών του. Το δεύτερο κεφάλαιο επικεντρώνεται αποκλειστικά στη θεωρητική ανάπτυξη του θεωρήματος Hille-Yosida, αποδεικνύοντας την ύπαρξη, την μοναδικότητα και την ομαλότητα της λύσεως του προβλήματος που μελετάται, καθώς και σημαντικών πορισμάτων και αποτελεσμάτων αυτού. Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται και αποδεικνύονται αναλυτικά τρείς εφαρμογές του θεωρήματος σε προβλήματα του κόσμου της φυσικής.

Ευχαριστίες

Με την παρούσα διπλωματική εργασία ολοκληρώνεται η φοίτηση μου στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου. Θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου Νίκο Γιαννακάκη για την άριστη συνεργασία μας, τις γνώσεις που μου παρείχε και την πολύτιμη βοήθεια του, καθώς και τους καθηγητές Νίκο Παπαγεωργίου και Γεώργιο Σμυρλή - μέλη της τριμελούς μου επιτροπής. Επίσης - ανεξαρτήτως με την παρούσα εργασία, θέλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους καθηγητές Ιωάννη Τσινιά και Ιάσονα Καραφύλλη όχι μόνο για τη συνεργασία μας τα χρόνια αυτά, αλλά και για τις φιλικές και μαθηματικές συμβουλές τους.

Επιπλέον, θέλω να ευχαριστήσω τον πατέρα μου και επιστήμονα Βαγγέλη, που πάντοτε αποτελούσε είδωλο για μένα και την επίσης επιστήμονα και μητέρα μου Ράνια, που πάντοτε με στήριζε.

Για να φτάσω στο πανεπιστήμιο συνέβαλλαν πολλοί δάσκαλοι στη ζωή μου, όμως θέλω να ξεχωρίσω δύο: τον αείμνηστο μαθηματικό μου Στέφανο Μπαλαφούτη που έφυγε πρόωρα και την αγαπημένη μου θεία και φιλόλογο Κατερίνα, για όλα όσα έκανε για εμένα.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ επίσης στον στενό μου φίλο και μοναδικό μυαλό Μάριο Παπαχρήστου για τις αμέτρητες ”ακαδημαϊκές συζητήσεις” μας και συμβουλές του καθώς και στη σύντροφο μου Ειρήνη Παπανίκου που ήταν πάντοτε στο πλευρό μου στα φοιτητικά μου χρόνια.

Τέλος, επέλεξα να αφιερώσω την διπλωματική μου εργασία στους δύο πιο υπέροχους ανθρώπους που γνώρισα ποτέ μου, τον παππού μου Μπάμπη και τη γιαγιά μου Σοφία. Δεν είναι πλέον κοντά μας αλλά τους οφείλω τα πάντα στη ζωή μου.

Συμβολισμοί

X^*	δυϊκός του χώρου X
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	δυϊκό ζεύγος (duality pairing)
$D(A)$	πεδίο ορισμού του τελεστή A
$G(A)$	γράφημα του τελεστή A
$N(A)$	πυρήνας του τελεστή A - αλλίως $\ker(A)$
$\mathcal{L}(H)$	ο χώρος όλων των γραμμικών τελεστών απο το H στο H
$R(A)$	εικόνα του τελεστή A
J	δυϊκή απεικόνιση $J : X \to 2^{X^*}$
J_λ	επιλύων του A
A_λ	ομαλοποιημένος Yosida ή εκτίμηση του A
A^0	στοιχείο ελαχίστης νόρμας στο Ax, δηλαδή $\|A^0x\| = \|Ax\|$
$\to$	ισχυρή σύγκλιση
$\xrightarrow{w}$	ασθενής σύγκλιση
2^X	δυναμοσύνολο του X (το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X)
$\overline{\mathrm{conv}X}$	κυρτή θήκη του συνόλου $\overline{X}$

Σημειώνεται πως εάν χρειαστεί να δείξουμε πράξη εσωτερικού γινομένου, θα συμβολίζεται επίσης με $\langle\cdot,\cdot\rangle$ αλλά θα αναφέρεται ρητά.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Μεγιστικοί Μονότονοι Τελεστές

Αρχικά, σημειώνεται ότι στο παρόν κείμενο θα επικεντρωθούμε στους μονότιμους τελεστές (single valued operators) για την ανάλυση μας. Παρ'όλα αυτά, για λόγους γενίκευσης, αναφέρεται ότι ένας τελεστής πολλαπλών τιμών (multi-valued operator) ορισμένος σε ένα χώρο X μπορεί να θεωρηθεί ως υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X \times X$. Στην περίπτωση αυτή, οι ακόλουθοι ορισμοί μετασχηματίζονται κατάλληλα.

Ορισμός (Πεδίο ορισμού τελεστή): Έστω X, Y δύο χώροι Banach και A ένας τελεστής απο τον X στον Y. Ονομάζουμε πεδίο ορισμού $D(A) \subset X$ του τελεστή A το σύνολο

$$D(A) = \{x \in X : Ax \in Y\}.$$

Ορισμός (Μη φραγμένος, γραμμικός τελεστής): Έστω X, Y δύο χώροι Banach. Ονομάζουμε μη φραγμένο, γραμμικό τελεστή απο το X στον Y κάθε γραμμική απεικόνιση $A : D(A) \subset X \to Y$ ορισμένη σε ένα γραμμικό υπόχωρο $D(A) \subset X$ με τιμές στον Y. Το $D(A)$ είναι το πεδίο ορισμού, όπως ορίστηκε παραπάνω.

Παρατήρηση 1.1.1: Σημείωνεται ότι αν υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $\|Ax\| \leq M\|\|$, λέμε ότι ο A είναι φραγμένος.

Παραθέτουμε τώρα τρεις ακόμα σημαντικούς ορισμούς συνόλων για έναν τελεστή.

Ορισμός (Γράφημα τελεστή): Έστω X, Y δύο χώροι Banach και $A : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Ονομάζουμε γράφημα του A το σύνολο:

$$G(A) = \bigcup_{x \in D(A)} \langle x, Ax \rangle \subset X \times Y.$$

Ορισμός (Εικόνα τελεστή): Έστω X, Y δύο χώροι Banach και $A : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Ονομάζουμε εικόνα του A το σύνολο:

$$R(A) = \bigcup_{x \in D(A)} Ax \subset Y.$$

Ορισμός (Πυρήνας τελεστή): Έστω X, Y δύο χώροι Banach και $A : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Ονομάζουμε πυρήνα του A το σύνολο:

$$N(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\} \subset X.$$

Στη συνέχεια με H συμβολίζουμε έναν χώρο Hilbert και αναπτύσουμε έτσι τους αντίστοιχους ορισμούς καθώς στην ανάλυση του Θεωρήματος Hille-Yosida θα εργαστούμε σε τέτοιους χώρους.

Ορισμός (Μονότονος τελεστής): Έστω $A : D(A) \subset H \to H$ ένας γραμμικός τελεστής. Λέμε ότι ο A είναι μονότονος, αν $\langle Au, u\rangle \geq 0,\ \forall u \in D(A)$. Ορισμένοι συγγραφείς, αντί για μονότονος, λένε ότι ο A είναι αυξητικός (accretive) ή ότι ο $-A$ είναι διασκορπιστικός (dissipative).

Ορισμός (Μεγιστικός μονότονος τελεστής): Έστω $A : D(A) \subset H \to H$ ένας γραμμικός τελεστής. Λέμε ότι ο A είναι μεγιστικός μονότονος, αν είναι μονότονος και επιπλέον $R(I + A) = H$, δηλαδή αν

$$\forall h \in H,\ \exists u \in D(A) : u + Au = h.$$

Πρόταση 1.1.1: Έστω A ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής. Τότε:

(α′) το πεδίο ορισμού του $D(A)$ είναι πυκνό στον H

(β′) ο A είναι κλειστός

(γ′) Για κάθε $\lambda > 0$, ο τελεστής $(I + \lambda A)$ είναι αμφιμονοσήμαντος απο το $D(A)$ επί του H ενώ ο $(I + \lambda A)^{-1}$ φραγμένος με $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1$.

Απόδειξη:

(α′) Έστω $h \in H$ τέτοιο ώστε $\langle h, u\rangle = 0,\ \forall u \in D(A)$. Για να αποδείξουμε ότι το $D(A)$ είναι πυκνό στον H, αρκεί να δείξουμε ότι $h = 0$. Αφού ο A είναι μεγιστικός μονότονος, εξ' ορισμού υπάρχει $u_0 \in D(A)$ τέτοιο ώστε $u_0 + Au_0 = h$. Τότε, βάσει της αρχικής υπόθεσης, είναι $\langle h, u_0\rangle = 0$. Όμως:

$$\langle h, u_0\rangle = \|u_0\|^2 + \langle Au_0, u_0\rangle \geq \|u_0\|^2 \xRightarrow{\langle h,u_0\rangle=0} u_0 = 0.$$

Επομένως και $h = 0$.

(β′) Αρχικά, θα δείξουμε ότι για κάθε $h \in H$ υπάρχει μοναδικό $u \in D(A)$ τέτοιο ώστε $u+Au = h$. Πράγματι, έστω $\bar{u}$ μια άλλη λύση. Τότε, θα έχουμε:

$$(u - \bar{u}) + A(u - \bar{u}) = 0 \Rightarrow \|u - \bar{u}\|^2 + \langle A\left(u - \bar{u}\right), u - \bar{u}\rangle = 0.$$

Όμως, ο A είναι και μονότονος, δηλαδή θα είναι $\langle A\left(u - \bar{u}\right), u-\bar{u}\rangle \geq 0$. Απο την προηγούμενη σχέση, αυτό συνεπάγεται και ότι $\|u - \bar{u}\|^2 = 0 \Leftrightarrow u - \bar{u} = 0$.
Τώρα, είναι $\|u\|^2+\langle Au, u\rangle = \langle h, u\rangle \Rightarrow \|u\|^2 \leq \langle h, u\rangle \implies \|u\| \leq \|h\|$. Επομένως, ο τελεστής $h \mapsto u$ υπό τον συμβολισμό $(I + A)^{-1}$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής απο τον H στον H με $\|(I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.
Για να δείξουμε τώρα ότι ο A είναι κλειστός, έστω $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$ με $u_n \to u$ και $Au_n \to h$. Ισχύει ότι $u_n + Au_n \to u + h$ και άρα έχουμε:

$$u_n = (I + A)^{-1}(u_n + Au_n) \to (I + A)^{-1}(u + h).$$

Όμως $u_n \to u$ και συνεπώς τα δύο όρια θα πρέπει να ταυτίζονται, δηλαδή $u = (I+A)^{-1}(u+h)$. Άρα παίρνουμε ότι $u \in D(A)$ και $u + Au = u + h$, δηλαδή ο A κλειστός.

(γ′) Έστω ότι για κάποιο $\lambda_0 > 0$ έχουμε $R(I + \lambda_0 A) = H$. Μέσω της υπόθεσης αυτής, θα δείξουμε ότι για κάθε $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$ είναι $R(I + \lambda A) = H$. Ομοίως με την περίπτωση (β'), για κάθε $h \in H$ υπάρχει μοναδικό $u \in D(A)$, τέτοιο ώστε $u + \lambda_0 Au = h$.

Τώρα, ο τελεστής $h \mapsto u$ είναι ο $(I+\lambda_0 A)^{-1}$ και έχουμε

$$u + \lambda_0 Au = h \Rightarrow \|u\|^2 + \lambda_0 \langle Au, u\rangle = \langle h, u\rangle \implies \|u\| \leq \|h\|,$$

δηλαδή είναι φραγμένος με $\|(I+\lambda_0 A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.
Ενδιαφερόμαστε πλέον να λύσουμε την εξίσωση $u + \lambda Au = h$ με $\lambda > 0$ και εργαζόμαστε ως εξής :

$$\begin{aligned} u + \lambda Au = h &\overset{\cdot \lambda_0/\lambda}{\iff} \frac{\lambda_0}{\lambda} u + \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} h \\ &\Leftrightarrow u + \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} h + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u \\ &\Leftrightarrow u = (I + \lambda_0 A)^{-1} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda} h + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u\right]. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν $\left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| < 1 \implies \lambda > \frac{\lambda_0}{2}$, τότε η τελευταία μετασχηματισμένη μορφή της εξίσωσης, απο το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach[1], έχει μοναδική λύση.
Συμπεραίνουμε έτσι οτι αν ο A είναι ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής, τότε ο $I + A$ είναι επί. Απο τα παραπάνω, ο $I + \lambda A$ είναι επίσης επί για $\lambda > \frac{1}{2}$. Εν συνεχεία, έπεται ότι ο $I + \lambda A$ είναι εν τέλει επί για κάθε $\lambda > 0$. □

Παρατήρηση 1.1.2: Έστω A και B δύο μεγιστικοί μονότονοι τελεστές. Ο λA είναι μεγιστικός μονότονος για $\lambda > 0$ αλλά ο $A + B$ (ορισμένος στο $D(A) \cap D(B)$) δεν είναι απαραίτητα μεγιστικός μονότονος.

Ορισμός (Επιλύων): Έστω A ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής. Ονομάζουμε επιλύων του A τον τελεστή $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ με $\lambda > 0$. Όπως αποδείξαμε προηγουμένως, είναι $\|J_\lambda\| = \|(I + \lambda A)^{-1}\| \leq 1$.

Ορισμός (Ομαλοποιημένος Yosida): Έστω A ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής. Ονομάζουμε ομαλοποιημένο Yosida του A τον τελεστή $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$.

Πρόταση 1.1.2: Έστω A ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής. Ισχύουν τα εξής :

(α′) $A_\lambda u = A(J_\lambda u)$, $\forall u \in H$ και $\forall \lambda > 0$

(β′) $A_\lambda u = J_\lambda(Au)$, $\forall u \in D(A)$ και $\forall \lambda > 0$

(γ′) $\|A_\lambda u\| \leq \|Au\|$, $\forall u \in D(A)$ και $\forall \lambda > 0$

(δ′) $J_\lambda u \xrightarrow{\lambda \to 0} u$, $\forall u \in H$

(ε′) $A_\lambda u \xrightarrow{\lambda \to 0} Au$, $\forall u \in D(A)$

(στ′) $\langle A_\lambda u, u\rangle \geq 0$, $\forall u \in H$ και $\forall \lambda > 0$

(ζ′) $\|A_\lambda u\| \leq \frac{1}{\lambda}\|u\|$, $\forall u \in H$ και $\forall \lambda > 0$.

Απόδειξη:

(α′) Είναι:

$$A_\lambda u = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda) u = \frac{1}{\lambda} u - \frac{1}{\lambda} J_\lambda u \Leftrightarrow u = J_\lambda u + \lambda A_\lambda u.$$

[1]Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach: Έστω (X, d) ένας μη κενός μετρικός χώρος και $T : X \to X$ μια συστολική απεικόνιση. Τότε, ο T έχει μοναδικό σταθερό σημείο $x^* \in X$.

(β′) Έστω A μεγιστικός μονότονος και $u \in H$. Τότε:

$$\begin{aligned} Au &= \frac{1}{\lambda}\left(u - u + \lambda Au\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(Iu - u + \lambda Au\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[\left(I + \lambda A\right)u - u\right] \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(I + \lambda A\right)\left(u - J_\lambda u\right). \end{aligned}$$

Όμως $(I + \lambda A) = J_\lambda^{-1}$ και εφαρμόζοντας τον τελεστή και στα δύο μέλη, λαμβάνουμε:

$$J_\lambda Au = \frac{1}{\lambda}\left(u - J_\lambda u\right) = \frac{1}{\lambda}\left(I - J_\lambda\right)u = A_\lambda u.$$

Δηλαδή $A_\lambda u = J_\lambda(Au)$.

(γ′) Όπως αναφέραμε στον ορισμό του επιλύοντος τελεστή, είναι $\|J_\lambda\| \leq 1$. Συνεπώς, απο το (β') προκύπτει:

$$A_\lambda u = J_\lambda(Au) \Rightarrow \|A_\lambda u\| = \|J_\lambda(Au)\| \leq \|J_\lambda\|\|Au\| \leq \|Au\|.$$

(δ′) Έστω ότι $u \in D(A)$. Τότε, απο το (γ'), παίρνουμε:

$$\|\left(I - J_\lambda\right)u\| = \lambda\|A_\lambda u\| \leq \lambda\|Au\|.$$

Συνεπώς: $\|\left(I - J_\lambda\right)u\| \xrightarrow{\lambda\to 0} 0 \Leftrightarrow J_\lambda u \xrightarrow{\lambda\to 0} u$.
Έστω τώρα, γενικότερα, ότι $u \in H$. Νωρίτερα, δείξαμε ότι ο $D(A)$ είναι πυκνός στον H $\left(\overline{D(A)} = H\right)$ και επομένως υπάρχει $u' \in D(A)$, τέτοιο ώστε για $\varepsilon > 0$ να είναι $\|u - u'\| \leq \varepsilon$. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} \|J_\lambda u - u\| &= \|J_\lambda u - J_\lambda u' + J_\lambda u' - u' + u' - u\| \\ &\leq \|J_\lambda u - J_\lambda u'\| + \|J_\lambda u' - u'\| + \|u' - u\| \\ &\leq \|J_\lambda\|\|u - u'\| + \|J_\lambda u' - u'\| + \|u - u'\| \\ &\leq 2\|u - u'\| + \|J_\lambda u' - u'\| \\ &\leq 2\varepsilon + \|J_\lambda u' - u'\|. \end{aligned}$$

Άρα :

$$\limsup_{\lambda\to 0}\|J_\lambda u - u\| \leq 2\varepsilon \implies \|J_\lambda u - u\| \xrightarrow{\lambda\to 0} 0 \Leftrightarrow J_\lambda u \xrightarrow{\lambda\to 0} u.$$

(ε′) Στο (β') δείξαμε ότι $A_\lambda u = J_\lambda\left(Au\right)$ ενώ στο (δ') δείξαμε ότι $J_\lambda u \xrightarrow{\lambda\to 0} u$. Θέτουμε $u := Au$ στη δεύτερη και έτσι λαμβάνουμε $J_\lambda\left(Au\right) \xrightarrow{\lambda\to 0} Au$. Άμεσα έπεται τώρα απο την πρώτη σχέση, ότι $A_\lambda u \xrightarrow{\lambda\to 0} Au$.

(στ′) Έστω $u \in H$. Τότε:

$$\begin{aligned} \langle A_\lambda u, u\rangle &= \langle A_\lambda u, u - J_\lambda u + J_\lambda u\rangle \\ &\leq \langle A_\lambda u, u - J_\lambda u\rangle + \langle A_\lambda u, J_\lambda u\rangle \\ &= \langle A_\lambda u, (I - J_\lambda)u\rangle + \langle J_\lambda(Au), J_\lambda u\rangle \\ &= \lambda\|A_\lambda u\|^2 + \langle A\left(J_\lambda u\right), J_\lambda u\rangle. \end{aligned}$$

Επομένως άμεσα παρατηρούμε ότι: $\langle A_\lambda u, u\rangle \geq \lambda\|A_\lambda u\|^2 \geq 0$.

(ζ′) Αξιοποιώντας τη σχέση που μόλις δείξαμε και κάνοντας χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz, έχουμε:

$$\langle A_\lambda u, u\rangle \geq \lambda \|A_\lambda u\|^2 \xRightarrow{C-S} \|A_\lambda u\|\|u\| \geq \lambda \|A_\lambda u\|^2 \Leftrightarrow \|A_\lambda u\| \leq \frac{1}{\lambda}\|u\|.$$

$\square$

Δύο χρήσιμα συμπεράσματα :

1. Όπως είδαμε απο το (ε'), η οικογένεια των ομαλοποιημένων Yosida του A, $\{A_\lambda\}_{\lambda>0}$ είναι μια οικογένεια φραγμένων τελεστών που προσεγγίζουν τον A όταν $\lambda \to 0$.

2. Παρατηρούμε ότι η νόρμα του ομαλοποιημένου Yosida $\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)}$ "εκρήγνυται" καθώς $\lambda \to 0$, αφού:
$$\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)} = \frac{1}{\lambda}\|I - J_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)} \xrightarrow{\lambda\to 0} \infty.$$

1.2 Ανοιχτά σύνολα τάξεως C^m

Για δεδομένο $x \in \mathbb{R}^N$, γράφουμε

$$x = (x', x_N) \quad \text{με} \quad x' \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad x' = (x_1, \ldots, x_{N-1})$$

και θέτουμε:

$$|x'| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Έπειτα, ορίζουμε τους εξής χώρους:

$$\begin{aligned}
R_+^N &= \left\{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\right\}, \\
Q &= \left\{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : |x'| < 1 \quad \text{και} \quad |x_N| < 1\right\}, \\
Q_+ &= Q \cap R_+^N, \\
Q_0 &= \left\{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : |x'| < 1 \quad \text{και} \quad x_N = 0\right\}.
\end{aligned}$$

Ορισμός: Λέμε ότι ένα ανοιχτό σύνολο Ω είναι τάξεως C^m αν για κάθε $x \in \Gamma = \partial\Omega$ υπάρχει περιοχή U_x του x στον $\mathbb{R}^N$ και μια απεικόνιση $H : Q \to U_x$ αμφιμονοσήμαντη και επί, τέτοια ώστε:

$$H \in C^m\left(\overline{Q}\right), \quad H^{-1} \in C^m\left(\overline{U_x}\right), \quad H\left(Q_+\right) = U_x \cap \Omega, \quad H\left(Q_0\right) = U_x \cap \Gamma.$$

1.3 Χώροι Sobolev

Έστω Ω ένα ανοικτό, μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $p \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε το χώρο

$$C_c^k(\Omega) = \left\{\phi \in C^k(\Omega) : \text{supp}\,\phi \text{ συμπαγές στο } \Omega\right\}$$

όπου $\text{supp}\,\phi = \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}}$.

Έστω τώρα $1 \leq p \leq \infty$. Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) \,\middle|\, \exists g_1, \ldots, g_n \in L^p(\Omega) : \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi,\ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Για $p = 2$, γράφουμε $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$. Ο χώρος $W^{1,p}$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{1,p}} &= \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} \\ &= \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}\end{aligned}$$

ή με την ισοδύναμη νόρμα

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{1,p}} &= \left[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p\right]^{1/p} \\ &= \left[\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p\right]^{1/p}.\end{aligned}$$

Ο χώρος H^1 που ορίσαμε προηγουμένως είναι εφοδιασμένος με την αντίστοιχη νόρμα που προκύπτει απο τα παραπάνω για $p = 2$ καθώς και με το εσωτερικό γινόμενο:

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle_{H^1} &= \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle u', v'\rangle_{L^2} \\ &= \langle u, v\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2} \\ &= \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \\ &= \int_\Omega uv + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \\ &= \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.\end{aligned}$$

Πρόταση 1.3.1: Ο χώρος $W^{1,p}$ είναι Banach για $1 \le p \le \infty$, ανακλαστικός για $1 < p < \infty$ και διαχωρίσιμος για $1 \le p < \infty$. Ο χώρος H^1 είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

Απόδειξη: Βλέπε [1] και [2].

Θα ασχοληθούμε τώρα με την επίλυση δύο προβλημάτων ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξης, που θα μας δώσουν αποτελέσματα απαραίτητα για τη μελέτη των εφαρμογών του θεωρήματος Hille-Yosida.

Ομογενές πρόβλημα Dirichlet: Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο και ανοιχτό. Ψάχνουμε συνάρτηση $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, που ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u + & u = f \quad \text{στο } \Omega \\ & u = 0 \quad \text{στο } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

όπου $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ η Λαπλασιανή της u και f μια δεδομένη συνάρτηση πάνω στο Ω. Η συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο Γ καλείται συνθήκη Dirichlet.

Κλασσική λύση του προβλήματος (1.1) ονομάζεται μια συνάρτηση $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ που το ικανοποιεί. **Ασθενής** λύση του προβλήματος (1.1) ονομάζεται μια συνάρτηση $u \in H_0^1(\Omega)$ που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Θεώρημα 1.2.1: Για κάθε $f \in L^2(\Omega)$, υπάρχει $u \in H_0^1(\Omega)$ που αποτελεί μοναδική ασθενή λύση του προβλήματος (1.1). Η u είναι επίσης λύση του προβλήματος:

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\|\nabla u\|^2 + v^2 \right) - \int_\Omega fv \right\}.$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται αρχή Dirichlet.

Απόδειξη: Βλέπε [1] και [2].

Θεώρημα 1.3.2: Έστω Ω ένα ανοιχτό σύνολο τάξεως C^2 με $\Gamma = \partial\Omega$ φραγμένο, διαφορετικά $\Omega = \mathbb{R}_+^n$. Έστω επίσης $f \in L^2(\Omega)$ και $u \in H_0^1(\Omega)$, τα οποία ικανοποιούν την:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi + \int_\Omega u\phi = \int_\Omega f\phi \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Τότε $u \in H^2(\Omega)$ και $\|u\|_H^2 \leq C\|f\|_{L^2}$, όπου $C \in \mathbb{R}$ σταθερά που εξαρτάται μόνο απο το Ω. Επιπρόσθετα, εάν το Ω είναι τάξεως C^{m+2} και $f \in H^m(\Omega)$, τότε:

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \quad \text{με} \quad \|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^m}.$$

Ειδικότερα, αν $m > \dfrac{N}{2}$, τότε $u \in C^2(\Omega)$ και τέλος, αν το Ω είναι τάξεως C^∞ και $f \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, τότε $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Απόδειξη: Βλέπε [1] και [2].

Παρατήρηση 1.3.1: Έστω $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Τότε, υπάρχει μοναδικό $f = f_u \in L^2(\Omega)$, τέτοιο ώστε $-\Delta u + u = f_u$. Απο το θεώρημα 1.2.2, έχουμε ότι $\|u\|_{H^2} \leq C\|f_u\|_{L^2}$ για κάποια σταθερά $C \in \mathbb{R}$ που εξαρτάται απο το Ω. Αντικαθιστώντας το $f_u = -\Delta u + u$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2} \leq C\|-\Delta u + u\|_{L^2} \Leftrightarrow \|u\|_{H^2}^2 &\leq C^2\|-\Delta u + u\|_{L^2}^2 \\ &\leq 2C^2\left(\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2\right) \end{aligned}$$

Επιπλέον, αν $u \in H^{m+2}(\Omega)$ θα είναι $\Delta u \in H^m(\Omega)$. Στην περίπτωση αυτή $f_u = -\Delta u + u \in H^m(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι το Ω είναι τάξεως C^{m+2} και τότε απο το θεώρημα 1.3.2 θα είναι $\|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f_u\|_{H^m}$. Παρομοίως με πριν, αντικαθιστώντας το f_u, λαμβάνουμε:

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq 2C^2\left(\|\Delta u\|_{H^m}^2 + \|u\|_{H^m}^2\right).$$

1.4 Ενσφηνώσεις χώρων Sobolev σε χώρους L^p

Στην ενότητα αυτή θα παραθέσουμε μερικά αποτελέσματα που αφορούν τις συνεχείς ενσφηνώσεις χώρων Sobolev σε χώρους L^p, τα οποία θα χρειαστούμε στη συνέχεια. Υποθέτουμε ότι ο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ είναι ανοικτό σύνολο τάξεως C^1 και ότι το $\Gamma = \partial\Omega$ είναι φραγμένο, διαφορετικά $\Omega = R_+^N$.

Πρόταση 1.4.1: Έστω $m \geq 1$ ακέραιος και $1 \leq p < \infty$. Τότε, ισχύουν

$$\begin{aligned} &\text{αν} \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0, \quad \text{τότε} \quad W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^q\left(\mathbb{R}^N\right), \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}, \\ &\text{αν} \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0, \quad \text{τότε} \quad W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^q\left(\mathbb{R}^N\right), \ \forall q \in [1, +\infty), \\ &\text{αν} \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0, \quad \text{τότε} \quad W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \end{aligned}$$

και αποτελούν συνεχείς ενσφηνώσεις.

Επιπλέον, αν ο αριθμός $m - \frac{N}{p} > 0$ δεν είναι ακέραιος, τότε θέτουμε

$$k = \left[m - \frac{N}{p}\right] \quad \text{και} \quad \theta = \left(m - \frac{N}{p}\right) - k.$$

Έτσι, για κάθε $u \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, έχουμε $W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset C^k\left(\mathbb{R}^N\right)$ και:

$$\left\|D^a u\right\|_{L^\infty} \leq C\left\|u\right\|_{W^{m,p}} \quad \forall a \quad \text{με} \quad |a| \leq k$$

και

$$\left|D^a u(x) - D^a u(y)\right| \leq C\left\|u\right\|_{W^{m,p}} |x-y|^\theta \quad \text{σ.π.} \quad x, y, \in \mathbb{R}^N \quad \text{και} \quad \forall a \quad \text{με} \quad |a| = k.$$

Πρόταση 1.4.2: Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Ισχύουν τα

$$\begin{array}{llll} \text{αν} & 1 \leq p < N, & \text{τότε} & W^{1,p} \subset L^{p^*}(\Omega), \ \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}, \\ \text{αν} & p = N, & \text{τότε} & W^{1,p} \subset L^q(\Omega), \ \forall q \in [p, +\infty), \\ \text{αν} & p > N, & \text{τότε} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \end{array}$$

και αποτελούν συνεχείς ενσφηνώσεις.
Επιπλεόν, αν $p > N$ για κάθε $u \in W^{1,p}(\Omega)$, είναι

$$|u(x) - u(y)| \leq C\left\|u\right\|_{W^{1,p}} |x-y|^a \quad \text{σ.π.} \quad x, y, \in \Omega,$$

όπου τα $a = 1 - \frac{N}{p}$ και $C \in \mathbb{R}$ εξαρτώνται μόνο απο τα Ω, p και N. Ειδικά, $W^{1,p}(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$.

Πόρισμα 1.4.1: Έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε, υπάρχει ακέραιος $m > k$, έτσι ώστε η $W^{m,2}(\Omega) \subset C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ να αποτελεί συνεχή ενσφήνωση.

Για τις αποδείξεις των παραπάνω, βλέπε [1] και [2].

Κεφάλαιο 2

Το θεώρημα Hille-Yosida

2.1 Κίνητρο

Μέσω του επόμενου, πολύ χρήσιμου και σημαντικού θεωρήματος για τη μελέτη των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, ξεκινάμε τη μελέτη των εξελικτικών προβλημάτων που θα μας απασχολήσουν.

Θεώρημα 2.1.1: Έστω E ένας χώρος Banach και $F : E \to E$ απεικόνιση, τέτοια ώστε:

$$\|Fu - Fv\| \leq L\|u - v\|, \ \ \forall u, v \in E \text{ και } L \geq 0.$$

Τότε, για κάθε $u_0 \in E$ υπάρχει **μοναδικό** $u \in C^1\left([0, \infty), E\right)$, τέτοιο ώστε:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Fu \quad \text{στο } [0, \infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Η σταθερά $L \geq 0$ καλείται συχνά σταθερά Lipschitz και το θεώρημα αναφέρεται συχνά με τα ονόματα των μελετητών του : Cauchy, Lipschitz, Picard.

Απόδειξη:

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη την εξίσωση του προβλήματος απο 0 έως $t \in [0, \infty)$, παρατηρούμε ότι η επίλυση του προβλήματος ισοδυναμεί με την εύρεση $u \in C\left([0, \infty), E\right)$, τέτοιου ώστε:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F\left(u(s)\right) \mathrm{d}s.$$

Μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση για την απόδειξη του θεωρήματος προτείνεται απο τον H.Brezis[1], ορίζοντας και δουλεύοντας στο χώρο

$$X = \left\{ u \in C\left([0, \infty), E\right) : \sup_{t \geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| < \infty \right\}$$

για δεδομένο $k > 0$, που σταθεροποιούμε στη συνέχεια. Σκοπός μας είναι να χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη της ύπαρξης, το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach.

- Ο χώρος X με τη νόρμα $\|u\|_X = \sup_{t \geq 0} e^{-kt}\|u(t)\|$ είναι Banach. Πράγματι, έστω (u_n) μια Cauchy ακολουθία στον X. Έστω $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε :

$$\|u_n - u_m\|_X < \varepsilon, \ \forall n, m \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{-kt}\|u_n(t) - u_m(t)\| < \varepsilon, \ \forall n, m \geq n_0.$$

Έστω τώρα $\varepsilon := \varepsilon e^{-kt}$ για κάποιο $t \geq 0$. Τότε, υπάρχει εκ νέου $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_X < \varepsilon e^{-kt} &\Leftrightarrow \sup_{t\geq 0} e^{-kt} \|u_n(t) - u_m(t)\| < \varepsilon e^{-kt} \\ &\Leftrightarrow e^{-kt} \|u_n(t) - u_m(t)\| < \varepsilon e^{-kt}, \forall t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \|u_n(t) - u_m(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή, η (u_n) είναι Cauchy ακολουθία και στον E. Αφού όμως ο E είναι χώρος Banach, η (u_n) θα συγκλίνει σε κάποιο όριο στο E, έστω $u(t)$. Τότε, θα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n > n_1$, να είναι:

$$\|u_n(t) - u(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Παρομοίως, η $(u_n(t_0))$ συγκλίνει σε κάποιο όριο, έστω $u(t_0)$. Επομένως, θα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n > n_2$, να είναι:

$$\|u_n(t_0) - u(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Η u_n είναι επίσης συνεχής, άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε εάν είναι $|t - t_0| < \delta$, να συνεπάγεται:

$$\|u_n(t) - u_n(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Έτσι, για $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n > \max\{n_1, n_2\}$, όταν $|t - t_0| < \delta$, θα είναι:

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(t_0)\| &= \|u(t) - u_n(t) + u_n(t) - u_n(t_0) + u_n(t_0) - u(t_0)\| \\ &\leq \|u_n(t) - u(t)\| + \|u_n(t_0) - u(t_0)\| + \|u_n(t) - u_n(t_0)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς η u είναι συνεχής, δηλαδή $u \in C\left([0, \infty), E\right)$.

Έστω τώρα κάποιο $t \geq 0$ και επιλέγουμε επαρκώς μεγάλο $n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε

$$\|u_n(t) - u(t)\| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Η ακολουθία (u_n) ανήκει στο X και άρα:

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt} \|u_n(t)\| < \infty \implies e^{-kt} \|u_n(t)\| < M, \forall t \geq 0, \text{ για κάποιο } M > 0.$$

Έτσι, παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &= \|u(t) - u_n(t) + u_n(t)\| \\ &\leq \|u_n(t) - u(t)\| + \|u_n(t)\| \\ &< \varepsilon + Me^{tk}, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Έτσι για $\varepsilon \to 0^+$, έχουμε $\|u(t)\| < Me^{tk}$, που συνεπάγεται $\sup_{t\geq 0} e^{-tk} \|u(t)\| < \infty$, δηλαδή ότι $u \in X$.

Παρόμοια με νωρίτερα, αφού η ακολουθία (u_n) είναι Cauchy στο X, έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε $n, m > n_0$:

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| < \varepsilon e^{tk}, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{και} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Αφήνουμε τώρα το $m \to \infty$ και παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{m\to\infty} \|u_n(t) - u_m(t)\| = \|u_n(t) - u(t)\| < \varepsilon e^{tk}$$
$$\Rightarrow$$
$$\sup_{t\geq 0} e^{-tk} \|u_n(t) - u(t)\| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\|u_n - u\|_X < \varepsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Δηλαδή, ο χώρος X με τη νόρμα $\|\cdot\|_X$ είναι Banach.

- Για κάθε $u \in X$, η συνάρτηση $(\Phi u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))\mathrm{d}s$ ανήκει στον X. Πράγματι, παρατηρούμε πως για κάθε $u \in X$, είναι:

$$\begin{aligned}
\|(\Phi u)(t)\| &= \left\| u_0 + \int_0^t F(u(s))\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s)) - F(u_0) + F(u_0)\|\,\mathrm{d}s \\
&\leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s)) - F(u_0)\|\,\mathrm{d}s + \int_0^t \|F(u_0)\|\,\mathrm{d}s \\
&\leq \|u_0\| + L\int_0^t \|u(s) - u_0\|\,\mathrm{d}s + t\,\|F(u_0)\| \\
&\leq \|u_0\| + Lt\,\|u_0\| + L\int_0^t \|u(s)\|\,\mathrm{d}s + t\,\|F(u_0)\|\,. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|(\Phi u)(t)\| < \infty$. Γι' αυτό και δείχνουμε τις παρακάτω ανισότητες για τους όρους που απαρτίζουν την έκφραση $e^{-kt}\|(\Phi u)(t)\|$.
Αρχικά, είναι:

$$\begin{aligned}
L\int_0^t \|u(s)\|\,\mathrm{d}s &= L\int_0^t e^{-sk}e^{sk}\|u(s)\|\,\mathrm{d}s \\
&\leq L\,\|u\|_X \int_0^t e^{sk}\mathrm{d}s \\
&= L\,\|u\|_X \frac{e^{tk}-1}{k}. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Απο τη (2.2), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
e^{-tk}L\int_0^t \|u(s)\|\,\mathrm{d}s &= e^{-tk}L\,\|u\|_X \frac{e^{tk}-1}{l} \\
&= L\,\|u\|_X \frac{1-e^{-tk}}{K} \\
&\leq \frac{L}{k}\|u\|_X\,. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Επιπλέον, ισχύει ότι $e^{tk} > tk \Leftrightarrow e^{-tk} < \dfrac{1}{tk}$ και επομένως:

$$e^{-tk}Lt\,\|u_0\| < \frac{1}{tk}Lt\,\|u_0\| = \frac{L}{k}\|u_0\| \qquad (2.4)$$

$$e^{-tk}t\,\|F(u_0)\| < \frac{1}{tk}t\,\|F(u_0)\| = \frac{1}{k}\|F(u_0)\|\,. \qquad (2.5)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη (2.1) με e^{-kt} και χρησιμοποιώντας τις (2.3),(2.4) και (2.5) άμεσα βλέπουμε ότι $\|(\Phi u)(t)\|_X = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|(\Phi u)(t)\| < \infty$, δηλαδή η $(\Phi u)(t)$ ανήκει στον X για κάθε $u \in X$.

- Ισχύει ότι : $\|\Phi u - \Phi v\|_X \leq \frac{L}{k}\|u-v\|_X$ για κάθε $u, v \in X$. Όντως, εργαζόμενοι ως εξής, καταλήγουμε:

$$\begin{aligned}
\|\Phi u - \Phi v\|_X &= \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\left\| u_0 - u_0 + \int_0^t (F(u(s)) - F(v(s)))\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \sup_{t\geq 0}\left\{ e^{-kt}\int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\|\,\mathrm{d}s \right\} \\
&\leq \sup_{t\geq 0}\left\{ Le^{-kt}\int_0^t \|u(s) - v(s)\|\,\mathrm{d}s \right\} \\
&= \sup_{t\geq 0}\left\{ Le^{-kt}\int_0^t e^{sk}e^{-sk}\|u(s) - v(s)\|\mathrm{d}s \right\} \\
&\leq \sup_{t\geq 0}\left\{ Le^{-kt}\|u-v\|_X\int_0^t e^{sk}\mathrm{d}s \right\} \\
&= \sup_{t\geq 0}\left\{ L\frac{1-e^{-kt}}{k}\|u-v\|_X \right\} \\
&\leq \frac{L}{k}\|u-v\|_X.
\end{aligned}$$

Για $k > L$, η Φ έχει ένα σταθερο σημείο (απο το θεώρημα του Banach) το οποίο αποτελεί λύση της $u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))\mathrm{d}s$, συνεπώς δείξαμε την **ύπαρξη**.

Ως προς τη **μοναδικότητα**, υποθέτουμε ότι οι u και $\overline{u}$ αποτελούν λύσεις του προβλήματος. Έστω $\phi(t) = \|u(t) - \overline{u}(t)\|$. Τότε, έχουμε :

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \|u(t) - \overline{u}(t)\| \\
&= \left\| \int_0^t (F(u(s)) - F(\overline{u}(s)))\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq L\int_0^t \|u(s) - \overline{u}(s)\|\mathrm{d}s \\
&= L\int_0^t \phi(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Άρα $\phi(t) = 0$, δηλαδή $u(t) = \overline{u}(t)$ και η λύση είναι **μοναδική**. □

Το θεώρημα Cauchy-Lipschitz-Picard αποτελεί πολύ σημαντικό εργαλείο για τη μελέτη των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, όμως είναι πρακτικά άχρηστο για την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Το χρησιμοποιούμε λοιπόν ως "κίνητρο", για να παρουσιάσουμε ένα πολύ αποτελεσματικό εργαλείο για την επίλυση των **εξελικτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων**, που αποτελεί και το κεντρικό θέμα της εργασίας αυτής.

2.2 Η διατύπωση του θεωρήματος

Παρατήρηση 2.2.1: Αν H χώρος Hilbert και $\phi \in C^1([0,\infty), H)$, τότε:

$$\|\phi\|^2 \in C^1([0,\infty), H) \text{ και } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\phi\|^2 = 2\left\langle \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}, \phi \right\rangle.$$

Απόδειξη : Αρχικά, είναι $\|\phi\|^2 = \langle \phi, \phi \rangle$. Εν συνεχεία :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\phi\|^2 &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{|\phi(t+h)|^2 - |\phi(t)|^2}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\langle \phi(t+h), \phi(t+h)\rangle - \langle \phi(t), \phi(t)\rangle}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\langle \phi(t+h)-\phi(t), \phi(t+h)\rangle + \langle \phi(t+h)-\phi(t), \phi(t)\rangle}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left\langle \frac{\phi(t+h)-\phi(t)}{h}, \phi(t+h)\right\rangle + \lim_{h\to 0}\left\langle \frac{\phi(t+h)-\phi(t)}{h}, \phi(t)\right\rangle \\
&= 2\left\langle \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}, \phi\right\rangle.
\end{aligned}$$

Επαληθεύσαμε και ότι $\|\phi\|^2 \in C^1([0,\infty), H)$.

Λήμμα 2.2.1: Έστω H χώρος Hilbert και $w \in C^1([0,\infty), H)$ τέτοια ώστε:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + A_\lambda w = 0 \text{ στο } [0,\infty).$$

Τότε οι συναρτήσεις $t \to \|w(t)\|$ και $t \to \left\|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t)\right\| = \|A_\lambda w(t)\|$ είναι φθίνουσες στο $[0,\infty)$.

Απόδειξη:

Έχουμε $\left\langle \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}, w\right\rangle + \langle A_\lambda w, w\rangle = 0$ και απο την Πρόταση 1.1.2, είναι $\langle A_\lambda w, w\rangle \geq 0$. Συνεπώς, για να ικανοποιείται η αρχική εξίσωση θα πρέπει $\left\langle \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}, w\right\rangle \leq 0$ και αφού είναι $\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\|w\|^2 = \left\langle \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}, w\right\rangle$, τότε $\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\|w\|^2 \leq 0$. Δηλαδή, η $|w|^2$ είναι φθίνουσα συνάρτηση στο $[0,\infty)$ και συνεπώς η $\|w\| = \left(\|w\|^2\right)^{1/2}$ είναι επίσης φθίνουσα στο $[0,\infty)$.
Τώρα, ο A_λ είναι γραμμικός φραγμένος τελεστής και απο τη δοθείσα εξίσωση του λήμματος, παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right) + A_\lambda\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right) = 0.$$

Εργαζόμενοι ακριβώς όπως παραπάνω, καταλήγουμε ότι και η $t \mapsto \left\|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t)\right\| = \|A_\lambda w(t)\|$ είναι φθίνουσα στο $[0,\infty)$.

Λήμμα 2.2.2: Έστω A μεγιστικός μονότονος και $u_0 \in D(A)$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\overline{u}_0 \in D(A^2)$, τέτοιο ώστε $\|u_0 - \overline{u}_0\| < \varepsilon$ και $\|Au_0 - A\overline{u}_0\| < \varepsilon$. Δηλαδή, ο $D(A^2)$ είναι πυκνός στον $D(A)$, για τη νόρμα του γραφήματος $(\|u\| + \|Au\|)$.

Απόδειξη: Έστω $u_0 \in D(A)$. Σημειώνεται ότι $D(J_\lambda) = H$ και $R(J_\lambda) = D(A)$. Θέτουμε $\overline{u}_0 = J_\lambda u_0 = (I+\lambda A)^{-1} u_0$, συνεπώς $\overline{u}_0 \in D(A)$ και $\overline{u}_0 + \lambda A\overline{u}_0 = u_0$. Επομένως, $\lambda A\overline{u}_0 = u_0 - \overline{u}_0 \in D(A)$, δηλαδή $A\overline{u}_0 \in D(A)$. Αλλά τότε αφού $\overline{u}_0 \in D(A)$ και $A\overline{u}_0 \in D(A)$, συμπεραίνουμε ότι $\overline{u}_0 \in D(A^2)$. Τώρα, απο την Πρόταση 1.1.2, έχουμε $J_\lambda(Au) = A(J_\lambda u)$ και $J_\lambda u \xrightarrow{\lambda\to 0} u$ για κάθε $u \in D(A), \lambda > 0$ και $u \in H$ αντίστοιχα.

Έτσι, για $\lambda > 0$ επαρκώς μικρό, παίρνουμε τα εξής:

$$\|\overline{u}_0 - u_0\| = \|J_\lambda u_0 - u_0\| < \varepsilon$$

και

$$\|J_\lambda(Au_0) - Au_0\| < \varepsilon \Leftrightarrow \|A(J_\lambda u_0) - Au_0\| < \varepsilon \Rightarrow \|A\overline{u}_0 - Au_0\| < \varepsilon.$$

Ο $D(A^2)$ λοιπόν, είναι πυκνός στον $D(A)$.

Θεώρημα (Hille-Yosida): Έστω A ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής σε έναν χώρο *Hilbert*, H. Τότε, για κάθε $u_0 \in D(A)$ υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $u \in C^1([0,\infty), H) \cap C([0,\infty), D(A))$[1], τέτοια ώστε :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = 0, \quad \text{στο } [0,\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Επιπλέον, είναι :

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad \text{και} \quad \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Απόδειξη:

Ξεκινάμε δείχνοντας την ύπαρξη της λύσης. Θα αντικαταστήσουμε τον τελεστή A με τον ομαλοποιημένο τελεστή Yosida A_λ. Σκοπός μας είναι μας είναι να αποδείξουμε διάφορες εκτιμήσεις, ανεξάρτητες του λ και να ολοκληρώσουμε το σκεπτικό μας αξιοποιώντας την ιδιότητα $A_\lambda u \xrightarrow{\lambda\to 0} Au$ που αποδείξαμε στην εισαγωγή. Θεωρούμε u_λ τη λύση του προβλήματος, το οποίο τώρα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t} + A_\lambda u_\lambda = 0, \quad \text{στο } [0,\infty) \\ u_\lambda(0) = u_0 \in D(A). \end{cases}$$

Η u_λ υπάρχει, ως άμεση εφαρμογή του θεωρήματος **Cauchy-Lipschitz-Picard**, θεωρώντας όπου $F = -A_\lambda u$. Παρατηρούμε τώρα, ότι

$$\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t) + A_\lambda u_\lambda(t) = 0 \Rightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}\right\| = \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \leq \|A_\lambda u_0\|.$$

αφού σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.1 η απεικόνιση είναι φθίνουσα και συνεπώς για κάθε $t \geq 0$ ισχύει $\|A_\lambda u_\lambda\| \leq \|A_\lambda u_\lambda(0)\| = \|A_\lambda u_0\|$. Η ανισότητα που δείξαμε θα μας φανεί χρήσιμη παρακάτω, όπου επιχειρούμε να δείξουμε ότι η $u_\lambda(t)$ όχι μόνο συγκλίνει όταν $\lambda \to 0$ αλλά η σύγκλιση αυτή είναι επιπλέον και ομοιόμορφη ως προς t σε οποιοδήποτε διάστημα $[0,T]$.

Έστω λοιπόν $u(t)$ το όριο της $u_\lambda(t)$, δηλαδή $u_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda\to 0} u(t)$ και $\mu > 0$. Τότε, έχουμε:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t} + A_\lambda u_\lambda = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}t} + A_\mu u_\mu = 0 \end{cases} \overset{(-)}{\Longrightarrow} \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}t} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}(u_\lambda - u_\mu)}{\mathrm{d}t} = -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu).$$

[1] Ο χώρος $D(A)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα του γραφήματος $\|u\|_{D(A)} = \|u\| + \|Au\|$ ή με την ισοδύναμη νόρμα Hilbert $\|u\|_{D(A),H} = \left(\|u\|^2 + \|Au\|^2\right)^{1/2}$

Παρομοίως με την Παρατήρηση 2.2.1, θα είναι:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_\lambda - u_\mu\|^2 = \left\langle \frac{\mathrm{d}(u_\lambda - u_\mu)}{\mathrm{d}t}, u_\lambda - u_\mu \right\rangle = -\langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu \rangle . \tag{2.7}$$

Εργαζόμαστε τώρα με τον δεύτερο όρο της εξίσωσης, ως εξής :

$$\begin{aligned}\langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu\rangle &= \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu\rangle \\ &= \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\rangle + \langle A\left(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu\right), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu\rangle \\ &\geq \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\rangle . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Το τελευταίο προκύπτει, καθώς ισχύει $\langle A\left(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu\right), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu\rangle \geq 0$ αφού ο A είναι μεγιστικός μονότονος. Εν συνεχεία, απο τις (2.7) και (2.8) και με τη βοήθεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_\lambda - u_\mu\|^2 &= -\langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu\rangle \\ &\leq -\langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\rangle \\ &= -\lambda\langle A_\lambda u_\lambda, A_\lambda u_\lambda\rangle + \mu\langle A_\mu u_\mu, A_\mu u_\mu\rangle + \lambda\langle A_m u u_m u, A_\lambda u_\lambda\rangle - \mu\langle A_\mu u_\mu, A_\mu u_\mu\rangle \\ &= (\lambda+\mu)\langle A_\lambda u_\lambda, A_\mu u_\mu\rangle - \lambda|A_\lambda u_\lambda|^2 - \mu|A_\mu u_\mu|^2 \\ &\leq (\lambda+\mu)\langle A_\lambda u_\lambda, A_\mu u_\mu\rangle + \lambda|A_\lambda u_\lambda|^2 + \mu|A_\mu u_\mu|^2 \\ &\leq (\lambda+\mu)|A_\lambda u_\lambda||A_\mu u_\mu| + \lambda|A_\lambda u_\lambda|^2 + \mu|A_\mu u_\mu|^2 \\ &\leq 2(\lambda+\mu)|Au_0|^2 .\end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε τώρα την ανισότητα που δείξαμε κατά μέλη:

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_\lambda - u_\mu\|^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^t 4(\lambda+\mu)\|Au_0\|^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\|u_\lambda - u_\mu\|^2 \leq 4(\lambda+\mu)\|Au_0\|^2 t$$

$$\Rightarrow$$

$$\|u_\lambda - u_\mu\| \leq 2\sqrt{(\lambda+\mu)\,t}\,\|Au_0\|$$

Δηλαδή για κάθε $t \geq 0$ η ακολουθία $(u_\lambda(t))_\lambda$ είναι Cauchy και άρα συγκλίνει όταν $\lambda \to 0^+$, σε κάποιο όριο, έστω $u(t)$. Δείχνουμε τώρα ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Πράγματι, αφήνοντας το $\mu \to 0^+$, έχουμε:

$$\lim_{\mu\to o^+}\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| = \|u_\lambda(t) - u(t)\| \leq 2\sqrt{\lambda t}\,\|Au_0\| .$$

Ακόμα, είναι $u_\lambda \in C\left([0,\infty), H\right)$ και επομένως απο το θεώρημα ομοιόμορφων ορίων $u \in C\left([0,\infty), H\right)$.

Έστω τώρα $u_0 \in D(A^2)$, τότε $u_0 \in D(A)$ και $Au_0 \in D(A)$. Ομοίως με πριν, θα δείξουμε ότι και η $\dfrac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)$ συγκλίνει όταν $\lambda \to 0^+$ για κάθε $t \geq 0$ ομοιόμορφα ως προς t σε κάθε διάστημα $[0,T]$ φραγμένο. Στην απόδειξη του Λήμματος 2.2.1, είδαμε ότι:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}\right) + A_\lambda\left(\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}\right) = 0.$$

Θέτουμε τώρα $v_\lambda = \dfrac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}$. Τότε $v_\lambda \in C\left([0,\infty), H\right)$ και:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_\lambda}{\mathrm{d}t} + A_\lambda v_\lambda = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}v_\mu}{\mathrm{d}t} + A_\mu v_\mu = 0 \end{cases} \stackrel{(-)}{\Longrightarrow} \frac{\mathrm{d}\left(v_\lambda - v_\mu\right)}{\mathrm{d}t} = -\left(A_\lambda v_\lambda - A_\mu v_\mu\right).$$

Ξανά, παρομοίως με την Παρατήρηση 2.2.1, θα είναι:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|v_\lambda - v_\mu\right\|^2 = \left\langle \frac{\mathrm{d}\left(v_\lambda - v_\mu\right)}{\mathrm{d}t}, v_\lambda - v_\mu \right\rangle = -\left\langle A_\lambda v_\lambda - A_\mu v_\mu, v_\lambda - v_\mu\right\rangle. \tag{2.9}$$

Εργαζόμενοι ακριβώς όπως νωρίτερα, βρίσκουμε ότι

$$\left\langle A_\lambda v_\lambda - A_\mu v_\mu, v_\lambda - v_\mu\right\rangle \geq \left\langle A_\lambda v_\lambda - A_\mu v_\mu, \lambda A_\lambda v_\lambda - \mu A_\mu v_\mu\right\rangle \tag{2.10}$$

και τώρα απο τη (2.9) και τη (2.10), χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, καταλήγουμε ότι:

$$\frac{1}{2}\left\|v_\lambda - v_\mu\right\|^2 \leq \left(\|A_\lambda v_\lambda\| + \|A_\mu v_\mu\|\right)\left(\lambda\|A_\lambda v_\lambda\| + \mu\|A_\mu v_\mu\|\right).$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η $\left|\dfrac{\mathrm{d}v_\lambda}{\mathrm{d}t}\right|$ είναι φθίνουσα στο $[0,\infty)$ απο το Λήμμα 2.2.1, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|v_\lambda - v_\mu\right\|^2 &\leq \left(\|A_\lambda v_\lambda\| + \|A_\mu v_\mu\|\right)\left(\lambda\|A_\lambda v_\lambda\| + \mu\|A_\mu v_\mu\|\right) \\
&\leq \left(\|A_\lambda v_\lambda(0)\| + \|A_\mu v_\mu(0)\|\right)\left(\lambda\|A_\lambda v_\lambda(0)\| + \mu\|A_\mu v_\mu(0)\|\right) \\
&= \left(\|A_\lambda A_\lambda u_0\| + \|A_\mu A_\mu u_0\|\right)\left(\lambda\|A_\lambda A_\lambda u_0\| + \mu\|A_\mu A_\mu u_0\|\right) \\
&= \left(\|J_\lambda A J_\lambda A u_0\| + \|J_\mu A J_\mu A u_0\|\right)\left(\lambda\|J_\lambda A J_\lambda A u_0\| + \mu\|J_\mu A J_\mu A u_0\|\right) \\
&= \left(\left\|J_\lambda^2 A^2 u_0\right\| + \left\|J_\mu^2 A^2 u_0\right\|\right)\left(\lambda\left\|J_\lambda^2 A^2 u_0\right\| + \mu\left\|J_\mu^2 A^2 u_0\right\|\right) \\
&\leq \left(\left\|J_\lambda^2\right\|\left\|A^2 u_0\right\| + \left\|J_\mu^2\right\|\left|A^2 u_0\right|\right)\left(\lambda\left\|J_\lambda^2\right\|\left\|A^2 u_0\right\| + \mu\left\|J_\mu^2\right\|\left\|A^2 u_0\right\|\right) \\
&\leq \left(\left\|A^2 u_0\right\| + \left\|A^2 u_0\right\|\right)\left(\lambda\left\|A^2 u_0\right\| + \mu\left\|A^2 u_0\right\|\right) \\
&= 2\left(\lambda + \mu\right)\left\|A^2 u_0\right\|^2.
\end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι $\|J_\lambda^2\| \leq \|J_\lambda\|\,\|J_\lambda\| = 1$, όπου και χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή της τελικής ανισότητας. Ολοκληρώνουμε τώρα κατα μέλη, ως προς t:

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|v_\lambda - v_\mu\right\|^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^t 2\left(\lambda + \mu\right)\left\|A^2 u_0\right\|^2 \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow$$

$$\left\|v_\lambda - v_\mu\right\| \leq 2\sqrt{\left(\lambda + \mu\right)t}\left\|A^2 u_0\right\|.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ομοίως με πριν, ότι η $v_\lambda(t) = \dfrac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)$ συγκλίνει καθώς $\lambda \to 0^+$ σε κάποιο όριο v, για κάθε $t \geq 0$ και επιπλέον η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη ως προς t σε κάθε διάστημα $[0,T]$ φραγμένο. Αφού $v_\lambda \in C\left([0,\infty), H\right)$ τότε και $v \in C\left([0,T), H\right)$ για κάθε $T > 0$ και επομένως $v \in C\left([0,\infty), H\right)$.

Επιπρόσθετα, αφού $\dfrac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t} \in C\left([0,\infty), H\right)$ και $v = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ είναι το ομοιόμορφο όριο αυτής καθώς $\lambda \to 0^+$, τότε και $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in C\left([0,\infty), H\right)$, δηλαδή $u \in C^1\left([0,\infty), H\right)$.

Παρατηρούμε τώρα, ότι :

$$\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t) + A_\lambda u_\lambda(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t) + A\left(J_\lambda u_\lambda(t)\right) = 0.$$

Είναι $J_\lambda u_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda\to 0^+} u(t)$, καθώς $J_\lambda u \xrightarrow{\lambda\to 0^+} u$ απο την Πρόταση 1.1.2 και:

$$\begin{aligned} \|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)\| &\le \|J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)\| + \|J_\lambda u(t) - u(t)\| \\ &\le \|J_\lambda\|\,\|u_\lambda - u(t)\| + \|J_\lambda u(t) - u(t)\| \xrightarrow{\lambda\to 0^+} 0. \end{aligned}$$

Ο A έχει κλειστό γράφημα και συνεπώς $u(t) \in D(A)$ για κάθε $t \ge 0$, ενώ:

$$\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t) + A\left(J_\lambda u_\lambda(t)\right) \xrightarrow{\lambda\to 0} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + Au(t) = 0.$$

Επιπλέον, είναι $u \in C^1\left([0,\infty), H\right)$ που συνεπάγεται ότι $Au(t) = -\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in C\left([0,\infty), H\right)$.
Βλέπουμε τότε, ότι:

$$\|u(t) - u(t_0)\|_{D(A)} = \|u(t) - u(t_0)\| + \|Au(t) - Au(t_0)\| \to 0.$$

Συμπεραίνουμε έτσι, ότι $u \in C^1\left([0,\infty), D(A)\right)$.

Σημειώνουμε επίσης ότι απο τις εκτιμήσεις $\|u_\lambda(t)\| \le \|u_0\|$ και $\left\|\dfrac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right\| = \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \le \|Au_0\|$ που δείξαμε, αφήνοντας $\lambda \to 0^+$, παίρνουμε $\|u(t)\| \le \|u_0\|$ και $\left\|\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right\| = \|Au(t)\| \le \|Au_0\|$.

Επικαλούμενοι τώρα το Λήμμα 2.2.2 και αφού ο $D(A^2)$ είναι πυκνός στον $D(A)$, για κάθε $u_0 \in D(A)$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία (u_{0n}) στον $D(A^2)$, τέτοια ώστε $\|u_{0n} - u_0\|_{D(A)} \to 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή: $\|u_{0n} - u_0\| \to 0$ και $\|A(u_{0n}) - Au_0\| \to 0$.

Απο το κύριο μέρος του προβλήματος, για κάθε $(u_{0n}) \in D(A^2)$ υπάρχει μια λύση, έστω u_n, του ακόλουθου προβλήματος

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} + Au_n = 0, \text{ στο } [0,\infty) \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases}$$

που ικανοποιεί τις αντίστοιχες παραπάνω εκτιμήσεις. Έστω τώρα $v = u_n - u_m$ και παρατηρούμε ότι η v αποτελεί λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) + Av(t) = 0, \text{ στο } [0,\infty) \\ v(0) = u_{0n} - u_{0m}. \end{cases}$$

Επομένως, για κάθε $t \ge 0$, θα είναι:

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \le \|u_{0n}(t) - u_{0m}(t)\| \tag{2.11}$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t}\right\| \le \|Au_{0n} - Au_{0m}\|. \tag{2.12}$$

Αφού $u_{0n} \to u_0$, η (u_{0n}) είναι Cauchy ακολουθία στον H. Συνεπώς, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \le \|u_{0n} - u_{0m}\| < \varepsilon, \ \forall n, m \ge n_0.$$

Δηλαδή, η $u_n(t)$ είναι επίσης Cauchy ακολουθία στον H και αφού ο H είναι πλήρης ως Hilbert, θα έχει όριο, έστω $u(t)$. Τότε, απο τη (2.11), έχουμε:

$$\lim_{m\to\infty} \|u_n(t) - u_m(t)\| \leq \lim_{m\to\infty} \|u_{0n} - u_{0m}\| \Rightarrow \|u_n(t) - u_0\| \leq \|u_{0n} - u_0\|$$
$$\Longrightarrow$$
$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\| \leq \|u_{0n} - u_0\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Άρα η $u_n(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $u(t)$ ως προς t σε κάθε διάστημα $[0,T]$ όπου $T \geq 0$, δηλαδή $u_n(t) \to u(t)$ ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$.

Παρομοίως, τώρα, αφού $Au_{0n} \xrightarrow{n\to\infty} Au_0$, η (Au_{0n}) είναι Cauchy ακολουθία στον H. Για κάθε $\varepsilon > 0$, λοιπόν, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$\|Au_n(t) - Au_m(t)\| \leq \|Au_{0n} - Au_{0m}\| < \varepsilon,\ \forall n, m \geq m_0.$$

Συνεπώς η $Au_n(t)$ είναι κι αυτή Cauchy ακολουθία στον H και θα συγκλίνει σε κάποιο όριο, έστω $Au(t)$. Τότε, είναι:

$$\lim_{m\to\infty} \|Au_n(t) - u_m(t)\| \leq \lim_{m\to\infty} \|Au_{0n} - Au_{0m}\| \Rightarrow \|Au_n(t) - Au(t)\| \leq \|Au_{0n} - Au_0\|$$
$$\Longrightarrow$$
$$\sup_{t\in[0,T]} \|Au_n(t) - Au(t)\| \leq \|Au_{0n} - Au_0\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

και η $Au_n(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $Au(t)$ ως προς t σε κάθε διάστημα $[0,T]$ όπου $T \geq 0$, δηλαδή $Au_n(t) \to Au(t)$ ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$. Όμως, είναι

$$\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t) = -Au_n(t) \Rightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t)\right\| = \|Au_n(t)\|$$

και άμεσα έπεται ότι όσα ισχύουν για την $Au_n(t)$ ισχύουν και για την $\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t)$, δηλαδή εν τέλει ότι $\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} \to \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$. Τώρα, απο τη στιγμή που η u_n είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,T]$ για κάθε $T \geq 0$, απο το θεώρημα ομοιόμορφων ορίων, συνεχές θα είναι και το ομοιόμορφο όριο της $u(t)$ στα $[0,T]$ για κάθε $T \geq 0$, οπότε $u \in C\left([0,\infty), H\right)$. Επιπλέον, απο το Λήμμα 2.2.1 είναι και παραγωγίσιμη, άρα $u \in C^1\left([0,\infty), H\right)$.

Ακριβώς αντίστοιχα, θα είναι και $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in C\left([0,\infty), H\right)$.

Βλέπουμε τώρα, ότι

$$\begin{cases} Au_n(t) = -\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t) \to \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \\ u_n(t) \to u(t) \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + Au(t) = 0$$

και αφού ο A έχει κλειστό γράφημα, τότε $u(t) \in D(A)$. Επίσης, επειδή $Au(t) = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$ τότε και $Au(t) \in C\left([0,\infty), H\right)$. Τότε, καθώς $|t - t_0| \to 0$ για κάθε $t_0 \geq 0$, παίρνουμε:

$$\|u(t) - u_0\|_{D(A)} = \|u(t) - u_0\| + \|Au(t) - Au_0\| \to 0.$$

Καταλήγουμε δηλαδή, ότι $u \in C\left([0,\infty), D(A)\right)$ και αφού είναι και $u \in C^1\left([0,\infty), H\right)$, τότε:

$$\boxed{u \in C^1\left([0,\infty), H\right) \cap C\left([0,\infty), D(A)\right).}$$

Κλείνουμε την απόδειξη με τον ισχυρισμό της **μοναδικότητας**. Έστω u και $\overline{u}$ δύο διαφορετικές λύσεις του προβλήματος (2.6). Τότε, είναι:

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u-\overline{u}), u-\overline{u} \right\rangle = -\langle A(u-\overline{u}), u-\overline{u}\rangle \leq 0.$$

Παρατηρούμε τώρα, ότι αν $\phi \in C^1\left([0,\infty), H\right)$, τότε απο την Παρατήρηση 2.2.1:

$$\|\phi\| \in C^1\left([0,\infty), H\right) \quad \text{και} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\phi\|^2 = 2\left\langle \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}, \phi \right\rangle.$$

Δηλαδή, είναι :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)-\overline{u}(t)\|^2 &= \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u(t)-\overline{u}(t)\right), u(t)-\overline{u}(t) \right\rangle \\ &= \langle A(u(t)-\overline{u}(t)), u(t)-\overline{u}(t)\rangle \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $t \mapsto \|u(t)-\overline{u}(t)\|^2$ είναι φθίνουσα στο $[0,\infty)$. Τότε, για κάθε $t \geq 0$, είναι :

$$\|u(t)-\overline{u}(t)\|^2 \leq \|u(0)-\overline{u}(0)\|^2 = 0 \implies u(t) = \overline{u}(t).$$

Δηλαδή, η λύση είναι **μοναδική**. $\square$

Παρατήρηση 2.2.2: Έστω A ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής, $\lambda \in \mathbb{R}$ και το πρόβλημα :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au + \lambda u = 0, \text{ στο } [0,\infty) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $v(t) = e^{\lambda t}u(t)$, λαμβάνουμε $v(0) = u(0) = u_0$ και:

$$\frac{\mathrm{d}\left(e^{-\lambda t}v(t)\right)}{\mathrm{d}t} + A\left(e^{-\lambda t}v(t)\right) + \lambda e^{-\lambda t}v(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$-\lambda e^{-\lambda t}v(t) + e^{-\lambda t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + e^{-\lambda t}Av + \lambda e^{-\lambda t}v(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Av = 0.$$

Καταλήξαμε έτσι στη γνωστή μορφή του προβλήματος (2.6):

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Av = 0, \text{ στο } [0,\infty) \\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

2.3 Η ομαλότητα των λύσεων

Ολοκληρώνοντας την απόδειξη του θεωρήματος Hille Yosida, καταλήξαμε ότι $u \in C^1([0,\infty), H)$. Συμπληρώνουμε τώρα το αποτέλεσμα αυτό, αποδεικνύοντας ότι η λύση u του προβλήματος (2.6) είναι η πιο ομαλή, λαμβάνοντας υπ'όψιν πρόσθετες υποθέσεις για την αρχική τιμή u_0.

Πρόταση 2.3.1: Ο χώρος $D\left(A^k\right) = \left\{u \in D\left(A^{k-1}\right) : Au \in D\left(A^{k-1}\right)\right\}$ όπου $k \in \mathbb{Z} \geq 2$, που ορίζεται επαγωγικά, είναι Hilbert για το εσωτερικό γινόμενο $\langle u, v\rangle_{D\left(A^k\right)} = \sum_{j=0}^{k}(A^j u, A^j v)$.

Απόδειξη: Η νόρμα του χώρου είναι η έκφραση:

$$\|u\|_{D\left(A^k\right)} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{D\left(A^k\right)}} = \left(\sum_{j=0}^{k}\left\|A^j u\right\|^2\right)^{1/2}.$$

Έστω (u_n) μια Cauchy ακολουθία στον $D\left(A^k\right)$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε:

$$\|u_n - u_m\|_{D\left(A^k\right)} < \varepsilon,\ \forall n, m \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\sum_{j=0}^{k}\left\|A^j(u_n - u_m)\right\|^2\right)^{1/2} < \varepsilon,\ \forall n, m \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=0}^{k}\left\|A^j(u_n - u_m)\right\|^2 < \varepsilon^2,\ \forall n, m \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\|u_n - u_m\|^2 + \|A(u_n - u_m)\|^2 + \cdots + \left\|A^k(u_n - u_m)\right\|^2 < \varepsilon^2,\ \forall n, m \geq n_0.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε όρο του αριστερού μέλους, ισχύει:

$$\|u_n - u_m\|^2 < \varepsilon^2,\ \|A(u_n - u_m)\|^2 < \varepsilon^2, \ldots,\ \left\|A^k(u_n - u_m)\right\|^2 < \varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon,\ \|A(u_n - u_m)\| < \varepsilon, \ldots,\ \left\|A^k(u_n - u_m)\right\| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, κάθε μια απο τις ακολουθίες $(u_n), (Au_n), \ldots, \left(A^k u_n\right)$ είναι Cauchy στον H και έστω ότι συγκλίνουν σε όρια $u_0, u_1, \ldots, u_k$ αντίστοιχα.
Σημειώνεται ότι $u_n \in D\left(A^k\right) \Rightarrow u_n \in D\left(A^j\right),\ \forall j = 0, \ldots, k$. Δηλαδή, $(u_n) \in D(A),\ u_n \to u_0 \in H$ και $Au_n \to u_1 \in H$. Όμως, ο τελεστής A είναι μεγιστικός μονότονος και συνεπώς έχει κλειστό γράφημα, συνεπώς $u_0 \in D(A)$ και $Au_0 = u_1$.
Αντίστοιχα, $(u_n) \in D(A^2)$ και $A^2 u_n \to u_2$. Αλλά, $A^2 u_n = A(Au_n)$ και δεδομένου ότι είδαμε πριν ότι $Au_n \to Au_0$, αφού ο A έχει κλειστό γράφημα, θα είναι $Au_0 \in D(A)$ και $A^2 u_0 = u_2$.
Δουλεύοντας επαγωγικά, συμπεραίνουμε ότι $A^j u_0 = u_j$ και $A^j u_0 \in D(A)$ για κάθε $j = 0, \ldots, k$. Αυτό συνεπάγεται ότι, $u_0 \in D\left(A^k\right)$, δηλαδή $u_n \to u_0 \in D\left(A^k\right)$ και άρα ο χώρος $D\left(A^k\right)$ είναι πλήρης ως προς την αντίστοιχη νόρμα του δοθέντος εσωτερικού γινομένου (Hilbert). □

Θεώρημα 2.3.1: Έστω $u_0 \in D\left(A^k\right),\ k \geq 2$. Τότε για την λύση u του προβλήματος (2.6) που δίνει το θεώρημα Hille-Yosida, ισχύει επιπλέον, ότι:

$$u \in C^{k-j}\left([0,\infty), D\left(A^j\right)\right),\ j = 0, 1, \ldots, k.$$

Απόδειξη: Έστω $k=2$ και $H_1 = D(A)$ ο Hilbert χώρος εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο $\langle u,v\rangle_{D(A)} = \langle u,v\rangle + \langle Au, Av\rangle$. Θεωρούμε τον τελεστή $A_1 : D(A_1) \subset H_1 \to H_1$ με $D(A_1) = D(A^2)$ που ορίζεται ως $A_1 u = Au$ για $u \in D(A_1)$. Θα δείξουμε ότι είναι μεγιστικός μονότονος στον H_1.

Έστω $u \in D(A_1) = D(A^2) \subset D(A)$. Αφού ο A είναι μονότονος, ισχύει : $\langle A_1 u, u\rangle = \langle Au, u\rangle \geq 0$, δηλαδή και ο A_1 μονότονος. Ο A είναι μεγιστικός μονότονος, συνεπώς υπάρχει $u \in H_1 = D(A)$ τέτοιο ώστε $u + Au = f$ για κάθε $f \in H_1 = D(A)$, δηλαδή $Au = f - u \in H_1$. Όμως $u \in D(A)$ και $Au \in D(A) \implies u \in D(A^2) = D(A_1)$. Επομένως, για κάθε $f \in H_1$ βρήκαμε $u \in D(A_1)$, τέτοιο ώστε $u + A_1 u = u + Au = f$, δηλαδή ο A_1 είναι ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής στον H_1.

Ο A_1 πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Hille-Yosida, άρα για κάθε $u_0 \in H_1$ υπάρχει μια συνάρτηση $u \in C^1([0,\infty), H_1) \cap C([0,\infty), D(A_1))$, τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A_1 u = 0, \ \text{στο } [0,\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Είναι $D(A_1) \subset D(A)$ και $A_1 u = Au$, συνεπώς η u ικανοποιεί το πρόβλημα (2.6). Απο τη μοναδικότητα της λύσης, που αποδείξαμε, αποτελεί τη λύση του (2.6). Θα δείξουμε τώρα ότι $u \in C^1([0,\infty), H_1)$.

Έστω $v \in H_1$ με $\|v\|_{H_1} = 1$, τότε $\|v\|_{H_1} = \langle v,v\rangle_{H_1} = 1 \Leftrightarrow \|v\|^2 + \|Av\|^2 = 1 \implies \|Av\| \leq 1$. Δηλαδή $A \in \mathcal{L}(H_1, H)$. Τώρα, είναι $u \in C([0,\infty), H_1)$ και άρα $Au \in C([0,\infty), H)$. Έχουμε :

$$u \in C([0,\infty), H_1) \Rightarrow u(t) \in D(A_1) = D\left(A^2\right) \Rightarrow Au(t) \in D(A) \Rightarrow -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \in D(A) = H_1.$$

Συνεπώς $u \in C^1([0,\infty), H_1)$.

Επιπλέον, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Au) &= \lim_{h\to 0} \frac{Au(t+h) - Au(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} A\left(\frac{u(t+h) - u(t)}{h}\right) \\ &= A\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) \end{aligned}$$

και $Au \in C^1([0,\infty), H)$. Παράλληλα, αφού $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -Au$, ισχύει ότι :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-Au) = -A\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in C^1([0,\infty), H) \Leftrightarrow u \in C^2([0,\infty), H).$$

Δηλαδή, ικανοποιείται η εξίσωση:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) + A\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) = 0, \ \text{στο } [0,\infty).$$

Έστω τώρα $k \geq 3$ και μελετάμε τη γενική περίπτωση, εργαζόμενοι με επαγωγή ως προς k. Θεωρούμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $k-1$ και $u_0 \in D\left(A^k\right)$ όπως υποδεικνύεται απο την υπόθεση του θεωρήματος.
Απο τα παραπάνω ξέρουμε πλέον ότι για την λύση u του προβλήματος (2.6), ισχύει:

$$u \in C^2([0,\infty), H) \bigcap C^1([0,\infty), D(A)).$$

Έστω $v = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ με $v(0) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = -Au(0) - Au_0$ και τότε η v ικανοποιεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Av = 0, \text{ στο } [0,\infty) \\ v(0) = -Au_0. \end{cases}$$

Δηλαδή η v αποτελεί λύση του προβλήματος (2.6) με αρχική τιμή $v_0 = -Au_0$.

Τώρα, αφού $u_0 \in D\left(A^k\right)$, θα είναι $v_0 = -Au_0 \in D\left(A^{k-1}\right)$. Εξ'υποθέσεως της επαγωγής, γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{gathered} v \in C^{k-1-j}\left([0,\infty), D\left(A^j\right)\right),\ j = 0,1,\ldots,k-1 \\ \Rightarrow \\ u \in C^{k-j}\left([0,\infty), D\left(A^j\right)\right),\ j = 0,1,\ldots,k-1. \end{gathered}$$

Για $j = k-1$ λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} u \in C^1\left([0,\infty), D\left(A^{k-1}\right)\right) &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in C\left([0,\infty), D\left(A^{k-1}\right)\right) \\ &\Rightarrow -Au \in C\left([0,\infty), D\left(A^{k-1}\right)\right) \\ &\Rightarrow Au \in C\left([0,\infty), D\left(A^{k-1}\right)\right). \end{aligned}$$

Άρα, έχουμε $u(t) \in D\left(A^{k-1}\right)$ ενώ παράλληλα $Au(t) \in D\left(A^{k-1}\right)$, επομένως $u(t) \in D\left(A^k\right)$ για κάθε $t \geq 0$. Για να ολοκληρώσουμε, μένει να επαληθεύσουμε ότι $u \in C\left([0,\infty), D\left(A^k\right)\right)$. Απο τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου στους χώρους $D\left(A^k\right)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(t_0)\|^2_{D(A^k)} &= \sum_{j=0}^{k} \left\|A^j\left(u(t) - u(t_0)\right)\right\|^2 \\ &= \|u(t) - u(t_0)\| + \sum_{j=1}^{k} \left\|A^j\left(u(t) - u(t_0)\right)\right\|^2 \end{aligned}$$

καθώς και

$$\begin{aligned} \|Au(t) - Au(t_0)\|^2_{D(A^{k-1})} &= \sum_{j=0}^{k-1} \left\|A^j\left(Au(t) - Au(t_0)\right)\right\|^2 \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \left\|A^{j+1}\left(u(t) - u(t_0)\right)\right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left\|A^j\left(u(t) - u(t_0)\right)\right\|^2. \end{aligned}$$

Συνεπώς, παρατηρούμε ότι

$$\|u(t) - u(t_0)\|_{D(A^k)} = \left(\|u(t) - u(t_0)\|^2 + \|Au(t) - Au(t_0)\|^2_{D(A^{k-1})}\right)^{1/2} \xrightarrow{t \to t_0} 0$$

αφού $u \in C\left([0,\infty), H\right)$ και $Au \in C\left([0,\infty), D\left(A^{k-1}\right)\right)$.

Καταλήξαμε λοιπόν, ότι $u \in C\left([0,\infty), D\left(A^k\right)\right)$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

2.4 Η περίπτωση του αυτοσυζυγούς τελεστή

Μια πολύ σημαντική και διαδεδομένη κλάση τελεστών, είναι οι αυτοσυζυγείς τελεστές, συνεπώς προκύπτει το ενδιαφέρουν μελέτης τους παράλληλα με τους μεγιστικούς μονότονους αλλά και με την εφαρμογή αυτών στο θεώρημα Hille-Yosida. Ξεκινώντας ορίζοντας τους, θα δούμε πως μπορούμε να να διατυπώσουμε και αποδείξουμε ένα παρόμοιο θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας.

Ορισμός (Συμμετρικός τελεστής): Έστω $A : D(A) \subset H \to H$. Λέμε ότι ο A είναι συμμετρικός αν $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ για κάθε $u, v \in D(A)$.

Ορισμός (Συζυγής τελεστής): Έστω $A : D(A) \subset H \to H$. Ονομάζουμε συζυγή του A τον τελεστή $A^* : H \to D(A)$ που ικανοποιεί τη σχέση $\langle Ah_1, h_2\rangle_{D(A)} = \langle h_1, A^*h_2\rangle_H$, για κάθε $h_1 \in D(A), h_2 \in H$. Αν τώρα ο A είναι γραμμικός τελεστής με $\overline{D(A)}$, τότε ταυτίζοντας το χώρο Hilbert H με τον δυϊκό του $H^* = H$, μπορούμε να θεωρήσουμε τον A^* ως τελεστή στον H.

Ορισμός (Αυτοσυζυγής τελεστής): Έστω $A : D(A) \subset H \to H$. Ο A ονομάζεται αυτοσυζυγής, αν $A^* = A$. Προφανώς, συνεπάγεται ότι $D(A^*) = D(A)$.

Παρατήρηση 2.4.1: Αν $A \in \mathcal{L}(H)$ η διάκριση μεταξύ συμμετρικού και αυτοσυζυγούς τελεστή δεν έχει νόημα. Αντιθέτως, εαν ο A είναι μη φραγμένος, είναι σημαντικό να επιμείνουμε στις λεπτομέρειες των διαφορών τους. Είναι προφανές ότι A αυτοσυζυγής $\implies$ A συμμετρικός. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει, καθώς ο A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $D(A) \subset D(A^*)$ με $A = A^*$ στον $D(A)$, πράμα που δεν ισχύει πάντοτε καθώς στην περίπτωση του συμμετρικού, μπορεί να είναι $A \subsetneqq A^*$. Παρ' όλα αυτά, εξαίρεση στα παραπάνω αποτελεί η περίπτωση του όταν ο A είναι μεγιστικός μονότονος.

Πρόταση 2.4.1: Έστω χώρος Hilbert H με $H^* = H$ και $A : D(A) \subset H \to H$ γραμμικός τελεστής, με $\overline{D(A)} = H$. Ο A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $D(A) \subset D(A^*)$ και $A = A^*$ στον $D(A)$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Ο A είναι συμμετρικός, δηλαδή $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ για κάθε $u, v \in D(A)$. Έστω $x \in D(A)$ και g συναρτησιακό με $g \mapsto \langle x, Ag\rangle$. Τότε $\langle x, Ag\rangle = \langle Ax, g\rangle$ για κάθε τέτοιο $g \in D(A)$. Ορίζουμε τώρα το συναρτησιακό T, ως:

$$Tg = \langle Ax, g\rangle, \forall g \in D(A).$$

Ξανά, αφού ο A είναι συμμετρικός, θα είναι:

$$Tg = \langle Ax, g\rangle = \langle x, Ag\rangle, \forall g \in D(A).$$

Συνεπώς, το T αποτελεί επέκταση του $g \mapsto \langle x, Ag\rangle$ σε όλο το H. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$|Tg| = |\langle Ax, g\rangle| \leq \|Ax\| \cdot \|g\|, \forall g \in D(A)$$

και άρα το T είναι ένα γραμμικό φραγμένο συναρτησιακό. Επομένως $x \in D(A^*)$ και αφού η επιλογή του ήταν τυχαία, τότε $D(A) \subseteq D(A^*)$.
Τώρα, απο το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $h \in H$, τέτοιο ώστε $Tg = \langle h, g\rangle$ για κάθε $g \in H$. Τότε $A^*x = h$ εξ' ορισμού του συζυγούς τελεστή και έτσι, για κάθε $x \in D(A)$ έχουμε:

$$Tg = \langle Ax, g\rangle = \langle h, g\rangle = \langle A^*x, g\rangle \implies A^* = A.$$

($\Leftarrow$) Είναι $D(A) \subseteq D(A^*)$ και $A = A^*$ στο $D(A)$. Επομένως, για κάθε $u \in D(A)$ είναι και $u \in D(A^*)$ και κάθε συναρτησιακό $g \mapsto \langle u, Ag \rangle$ μπορεί να επεκταθεί σε όλο το H ως $Tg = \langle A^* u, g \rangle$, για κάθε $g \in H$. Αφού $A^* = A$, τότε $Tg = \langle Au, g \rangle$ και επίσης αφού το T είναι επέκταση του g, τότε $Tg = \langle u, Ag \rangle$. Επομένως, θα είναι:

$$\langle Ag, u \rangle = \langle u, Ag \rangle, \forall g, u \in D(A) \Rightarrow \text{ Ο Α συμμετρικός.}$$

□

Πόρισμα 2.4.1: Εάν ο A είναι αυτοσυζυγής τελεστής, τότε είναι και συμμετρικός.

Απόδειξη: Άμεση βάσει της Πρότασης 2.4.1, αφού $A = A^* \implies D(A) = D(A^*)$.

Λήμμα 2.4.2: Έστω $A \in \mathcal{L}(H)$ όπου H χώρος Hilbert με $H^* = H$. Τότε, ο A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν είναι αυτοσυζυγής.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Ο A είναι συμμετρικός και έτσι, για κάθε $u, v \in H$, έχουμε:

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle = \langle A^* u, v \rangle$$

Δηλαδή, για κάθε $u, v \in H$, είναι

$$\langle Au, v \rangle - \langle A^* u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (A - A^*) u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow A = A^*,$$

επομένως ο A είναι και αυτοσυζυγής.

Πρόταση 2.4.2: Έστω A ένας μεγιστικός μονότονος και συμμετρικός τελεστής. Τότε, ο A είναι αυτοσυζυγής.

Απόδειξη: Έστω $J_1 = (I + A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ αφού $\left\| (I + A)^{-1} \right\| \leq 1$ και $u_1 = J_1 u,\ v_1 = J_1 v$. Αφού ο J_1 είναι γραμμικός και φραγμένος τελεστής, αρκεί να δείξουμε ότι είναι συμμετρικός. Αρχικά, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} u_1 + Au_1 &= J_1 u + A(J_1 u) \\ &= (I + A)^{-1} u + A(I + A)^{-1} u \\ &= (I + A)^{-1} (I + A) u \\ &= u. \end{aligned}$$

Ομοίως $v_1 + Av_1 = v$. Δηλαδή, είναι:

$$\begin{aligned} Au_1 &= u - u_1 \\ Av_1 &= v - v_1. \end{aligned}$$

Ο A είναι συμμετρικός, επομένως:

$$\begin{gathered} \langle u_1, Av_1 \rangle = \langle Au_1, v_1 \rangle \\ \Leftrightarrow \\ \langle u_1, v - v_1 \rangle = \langle u - u_1, v_1 \rangle \\ \Leftrightarrow \\ \langle u_1, v \rangle - \langle u_1, v_1 \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle - \langle u_1, v_1 \rangle \\ \Rightarrow \\ \langle J_1 u, v \rangle = \langle u, J_1 v \rangle. \end{gathered}$$

Έστω τώρα $u \in D(A^*)$ και $f = u + A^*u$. Άμεσα βλέπουμε, ότι:

$$\begin{aligned} \langle f, v \rangle &= \langle u + A^*u, v \rangle \\ &= \langle (I + A^*) u, v \rangle \\ &= \langle u, (I + A^*)^* v \rangle \\ &= \langle u, v + Av \rangle . \end{aligned}$$

Θέτουμε όπου $v = J_1 w$ για $w \in H$ και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \langle f, J_1 w \rangle &= \left\langle u, (I + A)^{-1} w + A (I + A)^{-1} w \right\rangle \\ &= \left\langle u, (I + A)^{-1} (I + A) w \right\rangle \\ &= \langle u, w \rangle , \forall w \in H. \end{aligned}$$

Επομένως $u = J_1 f$ και εξ' ορισμού του J_1 θα είναι $u \in D(A)$. Όμως, έχουμε πάρει τέτοιο u ώστε $u \in D(A^*)$, συνεπώς $D(A) = D(A^*)$ και άρα ο A θα είναι αυτοσυζυγής. □

Πρόταση 2.4.3: Προσοχή οφείλουμε να δείξουμε στο γεγονός ότι αν ο A είναι συμμετρικός και μονότονος, τότε δεν συνεπάγεται απαραίτητα ότι ο A^* είναι επίσης μονότονος. Όμως, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Ο A είναι μεγιστικός μονότονος.
2. Ο A^* είναι μεγιστικός μονότονος.
3. Ο A είναι κλειστός, το $D(A)$ πυκνό και οι A, A^* μονότονοι.

Απόδειξη: Όπως συνηθίσαμε στο πρώτο κεφάλαιο, έτσι και τώρα, θα δείξουμε τις παραπάνω ισοδυναμίες στην περίπτωση όπου $A : D(A) \subset H \to H$ με H χώρο Hilbert και $H^* = H$. Παρ' όλα αυτά, σημειώνεται ότι η απόδειξη μπορεί να γενικευτεί σε χώρους Banach, δηλαδή για την περίπτωση όπου $A : D(A) \subset E \to E^*$, E ανακλαστικός χώρος Banach (βλέπε [1] και [3]).

((1) $\Rightarrow$ (3)) Θεωρούμε πως ο A είναι μεγιστικός μονότονος. Για κάθε $f \in H$ υπάρχει $u \in D(A)$, τέτοιο ώστε $u + Au = f$. Έστω $f = A^*u$ και τότε:

$$u + Au = A^*u \Leftrightarrow Au = A^*u - u$$

Ο A είναι μονότονος, οπότε:

$$\langle Au, u \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle A^*u - u, u \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle A^*u, u \rangle - \|u\|^2 \geq 0 \Leftrightarrow \langle Au, u \rangle \geq \|u\|^2 .$$

Επομένως $\langle A^*u, u \rangle \geq 0$ για κάθε $u \in D(A) \cap D(A^*)$. Τώρα, έστω $v \in D(A^*)$ με $v \notin D(A)$ και $f \in H^* = H$. Τότε, για $u \in D(A)$, θα είναι:

$$\langle Au - f, u - v \rangle < 0.$$

Θέτουμε τώρα $f = -A^*v$ και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \langle Au + A^*v, u - v \rangle < 0 &\Leftrightarrow \langle Au, u \rangle - \langle A^*v, v \rangle < 0 \\ &\Leftrightarrow \langle A^*v, v \rangle > \langle Au, u \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς $\langle A^*v, v \rangle \geq 0$ για κάθε $v \in D(A^*)$, δηλαδή ο A^* είναι μονότονος.

Τώρα, απο την Πρόταση 1.1.1, αφού ο A είναι μεγιστικός μονότονος, έχουμε ότι το $D(A)$ είναι πυκνό στο H και ότι είναι και κλειστός.

($(1) \Leftarrow (3)$) Θεωρούμε τώρα πως ισχύει ο ισχυρισμός (3). Θα δείξουμε και την αντίστροφη κατεύθυνση. Ο A^* είναι μονότονος και αφού ο A είναι κλειστός, τότε $A = (A^*)^*$. Έτσι, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το εξής θεώρημα των Brezis και Browder [3], προσαρμόζοντας το στα δεδομένα των χώρων Hilbert, στους οποίους δουλεύουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Θεώρημα (Brezis-Browder): Έστω X ανακλαστικός χώρος Banach και L_0, L_1 δύο γραμμικοί μονότονοι τελεστές απο το X στο 2^{X^*}, τέτοιοι ώστε $L_0 \subseteq L_1^*$. Τότε, υπάρχει ένας γραμμικός και μεγιστικός μονότονος τελεστής L, τέτοιος ώστε:

$$L_0 \subseteq L \subseteq L_1^*.$$

Έτσι, απο το παραπάνω θεώρημα, μπορούμε να δείξουμε ότι θα υπάρχει γραμμικός μονότονος τελεστής A', τέτοιος ώστε:

$$A \subseteq A' \subseteq (A^*)^* = A$$

Δηλαδή $A = A'$ και άρα ο A είναι μεγιστικός μονότονος.

Η απόδειξη για το $(2) \Leftrightarrow (3)$ γίνεται με παρόμοιο τρόπο. □

Θεώρημα 2.4.1: Έστω A ένας μεγιστικός μονότονος και αυτοσυζυγής τελεστής. Τότε, για κάθε $u_0 \in H$[2], υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση

$$u \in C([0,\infty), H) \cap C^1((0,\infty), H) \cap C((0,\infty), D(A))$$

τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = 0, \text{ στο } [0,\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Επιπλέον, είναι:

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad \text{και} \quad \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right\| = \|Au(t)\| \leq \frac{1}{t}\|u_0\|, \ \forall t > 0$$

$$u \in C^k\left((0,\infty), D\left(A^\ell\right)\right), \forall k, \ell \in \mathbb{Z}^+.$$

Απόδειξη: Ξεκινάμε μελετώντας τον ισχυρισμό της **ύπαρξης**. Έστω ότι $u_0 \in D(A^2)$ και u η λύση της (2.6) που δίνει το θεώρημα Hille-Yosida. Εργαζόμαστε αρχικά, δείχνοντας την εκτίμηση:

$$\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right| = |Au(t)| \leq \frac{1}{t}|u_0|, \forall t > 0.$$

Ο A είναι αυτοσυζυγής και συνεπώς συμμετρικός, αφού ειναι μεγιστικός μονότονος, συνεπώς απο την Πρόταση 2.4.2, παίρνουμε:

$$J_\lambda^* = J_\lambda \quad \text{και} \quad A_\lambda^* = A_\lambda, \forall \lambda > 0.$$

Στην απόδειξη της Πρότασης 2.4.2, δείξαμε ότι ο τελεστής J_1 είναι συμμετρικός. Με παρόμοιο τρόπο, δείχνεται ότι και ο J_λ είναι συμμετρικός. Επομένως, απο το Λήμμα 2.4.2 έπεται ότι ο J_λ θα είναι και αυτοσυζυγής.

[2] Είναι σημαντικό να σημειώσουμε τη διαφορά μεταξύ του θεωρήματος αυτού και του θεωρήματος Hille-Yosida, καθώς εδώ είναι $u_0 \in H$ (αντί για $u_0 \in D(A)$ και έτσι λαμβάνουμε ασθενέστερο συμπέρασμα, με το ενδεχόμενο "έκρηξης" της $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$ όταν $t \to 0$.

Τώρα, είναι:

$$\begin{aligned}\langle A_\lambda u, v\rangle &= \left\langle \frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda)u, v\right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\langle u,v\rangle - \frac{1}{\lambda}\langle J_\lambda, v\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\langle u,v\rangle - \frac{1}{\lambda}\langle u, J_\lambda v\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\left\langle u, \frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda)v\right\rangle \\ &= \langle u, A_\lambda v\rangle .\end{aligned}$$

Δηλαδή, ο A_λ είναι συμμετρικός και απο το Λήμμα 2.4.2 έπεται ότι είναι και αυτοσυζυγής. Θεωρούμε τώρα την προσέγγιση μέσω εκτιμήσεων για διάφορα λ, όπου η u_λ αποτελεί λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t} + A_\lambda u_\lambda = 0, \ \text{στο } [0,\infty) \\ u_\lambda(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Έχουμε ότι:

$$\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t} = -A_\lambda u_\lambda \Rightarrow \left\langle \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}, u_\lambda\right\rangle = -\langle A_\lambda u_\lambda, u_\lambda\rangle .$$

Παίρνοντας εσωτερικό γινόμενο με u_λ στη (2.14) και επικαλούμενοι την Παρατήρηση 2.2.1, βλέπουμε ότι:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_\lambda(t)\|^2 = \left\langle \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t), u_\lambda(t)\right\rangle = -\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\rangle .$$

Ολοκληρώνοντας τώρα κατά μέλη ως προς t στο $[0,T]$, έχουμε:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_\lambda(t)\|^2\,\mathrm{d}t + \int_0^T \langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\rangle\,\mathrm{d}t = 0 \\ \Rightarrow &\frac{1}{2}\left(\|u_\lambda(T)\|^2 - |u_\lambda(0)|^2\right) + \int_0^T \langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\rangle\,\mathrm{d}t = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{2}\|u_\lambda(T)\|^2 + \int_0^T \langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\rangle\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|u_0\|^2 . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Εν συνεχεία, παίρνοντας ξανά εσωτερικό γινόμενο με $t\dfrac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}$ στη (2.14) και ολοκληρώνοντας ως προς t στο $[0,T]$, βρίσκουμε:

$$\int_0^T \left\|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2 t\mathrm{d}t + \int_0^T \left\langle A_\lambda u_\lambda(t), \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right\rangle t\mathrm{d}t = 0. \tag{2.16}$$

Για τον όρο εντός του δεύτερου ολοκληρώματος, είναι:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\left\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\right\rangle &= \lim_{h\to 0}\frac{\left\langle A_\lambda u_\lambda(t+h), u_\lambda(t+h)\right\rangle - \left\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\right\rangle}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left\langle A_\lambda u_\lambda(t+h) - A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t+h)\right\rangle - \left\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)\right\rangle}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\langle A_\lambda\left(\frac{u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)}{h}\right), u_\lambda(t+h)\right\rangle + \lim_{h\to 0}\left\langle A_\lambda u_\lambda(t), \frac{u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)}{h}\right\rangle\\
&= \left\langle A_\lambda\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t), u_\lambda(t)\right\rangle + \left\langle A_\lambda u_\lambda(t), \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right\rangle\\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t), A_\lambda u_\lambda\right\rangle + \left\langle A_\lambda u_\lambda, \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right\rangle \qquad \text{(αφού ο } A_\lambda \text{ αυτοσυζυγής)}\\
&= 2\left\langle A_\lambda u_\lambda(t), \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right\rangle. \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Επομένως, για τον δεύτερο όρο της (2.16), κάνοντας χρήση της (2.17) και ολοκληρώνοντας με παράγοντες, παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \left\langle A_\lambda u_\lambda(t), \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right\rangle \mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\right\rangle t\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\left[t\left\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\right\rangle\right]_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T \left\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\right\rangle \mathrm{d}t\\
&= \frac{T}{2}\left\langle A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)\right\rangle - \frac{1}{2}\int_0^T \left\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\right\rangle \mathrm{d}t. \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

Απο το Λήμμα 2.2.1, η συνάρτηση $t \mapsto \left\|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right\|$ είναι φθίνουσα και έτσι:

$$
\int_0^T \left\|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2 t\mathrm{d}t \geq \left\|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(T)\right\|^2 \int_0^T t\mathrm{d}t = \left\|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(T)\right\|^2 \frac{T^2}{2}. \qquad (2.19)
$$

Τώρα, απο τη (2.18) και αξιοποιώντας την ανισότητα (2.19), έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \left\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\right\rangle \mathrm{d}t &= T\left\langle A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)\right\rangle - 2\int_0^T \left\langle A_\lambda u_\lambda(t), \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right\rangle \mathrm{d}t\\
&= T\left\langle A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)\right\rangle + 2\int_0^T \left|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right|^2 t\mathrm{d}t \qquad \text{(απο τη (2.5))}\\
&\geq T\left\langle A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)\right\rangle + \left|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(T)\right|^2 \frac{T^2}{2}. \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, απο τη (2.15):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|u_\lambda(T)\right|^2+\int_0^T\langle A_\lambda u_\lambda(t),u_\lambda(t)\rangle\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left|u_0\right|^2\\
&\Rightarrow\frac{1}{2}\left|u_\lambda(T)\right|^2+T\left\langle A_\lambda u_\lambda(T),u_\lambda(T)\right\rangle+T^2\left|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(T)\right|^2\le\frac{1}{2}\left|u_0\right|^2\quad(\text{απο τη }(2.10))\\
&\Leftrightarrow\left|u_\lambda(T)\right|^2+2T\left\langle A_\lambda u_\lambda(T),u_\lambda(T)\right\rangle+2T^2\left|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(T)\right|^2\le\left|u_0\right|^2\\
&\Rightarrow\left|u_\lambda(T)\right|^2+2T\left\langle A_\lambda u_\lambda(T),u_\lambda(T)\right\rangle+T^2\left|A_\lambda u_\lambda(T)\right|^2+T^2\left|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(T)\right|^2\le\left|u_0\right|^2\quad\left(\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}=-A_\lambda u_\lambda\right)\\
&\Rightarrow\left|u_\lambda(T)+T\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(T)\right|^2+T^2\left|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(T)\right|^2\le\left|u_0\right|^2\implies\left|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(T)\right|\le\frac{1}{T}\left|u_0\right|\quad\forall T,\lambda>0.
\end{aligned}\tag{2.21}$$

Στην απόδειξη του θεωρήματος Hille-Yosida, δείξαμε ότι $\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}\xrightarrow{\lambda\to 0^+}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ ομοιόμορφα, επομένως για την (2.21) είναι:

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\left\|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(T)\right\|=\left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(T)\right\|\le\frac{1}{T}\left\|u_0\right\|\quad\forall T>0.$$

Τώρα, απο το Λήμμα 2.2.2, έχουμε ότι ο $D(A^2)$ είναι πυκνός στον $D(A)$. Όμως ο $D(A)$ είναι επίσης πυκνός στο H, άρα και ο $D(A^2)$ θα είναι πυκνός στο H. Συνεπώς, για κάθε $u_0\in H$ θα υπάρχει ακολουθία $\{u_{0n}\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq D(A^2)$, τέτοια ώστε $u_{0n}\xrightarrow{n\to\infty}u_0$.
Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}+Au_n=0,\ \text{στο }\ [0,\infty)\\ u_n(0)=u_{0n}.\end{cases}$$

όπου γνωρίζουμε απο το θεώρημα Hille-Yosida ότι υπάρχει μοναδική λύση

$$u_n\in C^1([0,\infty),H)\cap C([0,\infty),D(A))$$

και επιπλέον έχουμε τις εκτιμήσεις $\|u_n(t)\|\le\|u_{0n}\|$ και $\left\|\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t)\right\|\le\frac{1}{t}\|u_{0n}\|$.
Παρατηρούμε τώρα πως η

$$(u_n-u_m)\in C^1([0,\infty),H)\cap C([0,\infty),D(A))$$

αποτελεί λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}(u_n-u_m)}{\mathrm{d}t}+A(u_n-u_m)=0,\ \text{στο }\ [0,\infty)\\ (u_n-u_m)(0)=u_{0n}-u_{0m}.\end{cases}$$

Επομένως, λαμβάνουμε τις αντίστοιχες εκτιμήσεις με παραπάνω, ως:

$$\|u_n(t)-u_m(t)\|\le\|u_{0n}-u_{0m}\|\quad\forall m,n\in\mathbb{N},\forall t\ge 0\tag{2.22}$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t)-\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t}(t)\right\|\le\frac{1}{t}\|u_{0n}-u_{0m}\|\quad\forall m,n\in\mathbb{N},\forall t\ge 0.\tag{2.23}$$

Επομένως, η $u_n(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποιο όριο $u(t)$ στο $[0,T)$, για κάθε $T \geq 0$, δηλαδή $u \in C([0,\infty), H)$. Τώρα, απο την (2.23) βλέπουμε ότι η u είναι παραγωγίσιμη στο $[\delta, T+\delta]$ για κάθε $\delta > 0$ και $T > 0$ και επίσης η $\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποιο όριο $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ στο $C([\delta, T+\delta], H)$ για κάθε $\delta > 0$ και $T > 0$, συνεπώς $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \in C([0,\infty), H)$. Δηλαδή $u \in C^1((0,\infty), H)$ και παίρνουμε:

$$u \in C([0,\infty), H) \cap C^1((0,\infty), H).$$

Τέλος, αφού ο A είναι κλειστός, απο την εξίσωση $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = 0$ στο $(0,\infty)$ άμεσα βλέπουμε ότι $u(t) \in D(A)$ και εν τέλει, συνολικά θα έχουμε:

$$u \in C([0,\infty), H) \cap C^1((0,\infty), H) \cap C((0,\infty), D(A)). \tag{2.24}$$

Ολοκληρώσαμε έτσι την ύπαρξη και τις συνθήκες της συνάρτησης u που ικανοποιεί το πρόβλημα (2.13). Συνεχίζουμε δείχνοντας ότι η λύση είναι ομαλή, δηλαδή $u \in C^k\left((0,\infty), D\left(A^\ell\right)\right), \forall k, \ell \in \mathbb{Z}^+$.
Αρχικά, δείχνουμε επαγωγικά, ότι:

$$u \in C^{k-j}\left((0,\infty), D\left(A^j\right)\right) \quad \forall j = 0, 1, \ldots, k. \tag{2.25}$$

Απο τη (2.24), βλέπουμε πως:

$$\|u(t) - u(t_0)\|_{D(A)} = \|u(t) - u(t_0)\| + \|Au(t) - Au(t_0)\| \xrightarrow{|t-t_0|\to 0} 0 \quad \forall t_0 > 0.$$

Επομένως η (2.25) ισχύει για $j = 1$. Έστω τώρα ότι η (2.25) ισχύει για κάθε $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Τότε θα είναι $u \in C\left((0,\infty), D\left(A^{k-1}\right)\right)$. Σύμφωνα με το θεώρημα 2.3.1, για να δείξουμε ότι ισχύει η (2.16) αρκεί να επαληθεύσουμε ότι $u \in C\left((0,\infty), D\left(A^k\right)\right)$. Γι' αυτόν τον σκοπό, έστω ο χώρος Hilbert $\tilde{H} = D\left(A^{k-1}\right)$ με τη νόρμα που ορίσαμε στην απόδειξη της πρότασης 2.3.1 και θεωρούμε τον τελεστή $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset \tilde{H} \to \tilde{H}$ με $D(\tilde{A}) = D\left(A^k\right)$ και $\tilde{A} = A$.
Ο $\tilde{A}$ όπως τον ορίσαμε, είναι μεγιστικός μονότονος. Πράγματι, για κάθε $v \in D(\tilde{A}) = D\left(A^k\right)$, είναι:

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{A}v, v \right\rangle_{\tilde{H}} &= \left\langle \tilde{A}v, v \right\rangle_{D\left(A^{k-1}\right)} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \left\langle A^j\big(\tilde{A}v\big), A^j v \right\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \left\langle A\left(A^j\right), A^j v \right\rangle && \text{(αφού } \tilde{A} = A \text{ στο } D(\tilde{A})\text{)} \\
&\geq 0. && \text{(αφού ο A είναι μονότονος)}
\end{aligned}$$

Άρα και ο $\tilde{A}$ είναι μονότονος.
Έστω τώρα $f \in \tilde{H} = D\left(A^{k-1}\right)$. Τότε, $f \in H$ και αφού ο A ειναι μεγιστικός μονότονος, θα είναι $R(I + A) = H$. Δηλαδή, υπάρχει $v \in D(A)$ τέτοιο ώστε $v + Av = f$. Επιπλέον, αφού είναι $f \in D\left(A^{k-1}\right) \subseteq D(A)$ και $v \in D(A)$, τότε και $Av = f - v \in D(A)$ και άρα $v \in D(A^2)$. Επαγωγικά και με παρόμοια επιχειρηματολογία, έπεται ότι $v \in D\left(A^{k-1}\right)$ και $f \in D\left(A^{k-1}\right)$. Επομένως $Av = f - u \in D\left(A^{k-1}\right)$ και έτσι θα είναι $v \in D\left(A^k\right) = D(\tilde{A})$.
Συνεπώς, για κάθε $f \in \tilde{H}$ υπάρχει $v \in D(\tilde{A})$, τέτοιο ώστε $(I + \tilde{A})v = f$, δηλαδή $R(I + \tilde{A}) = \tilde{H}$ και άρα ο $\tilde{A}$ είναι μεγιστικός μονότονος. Σημειώνεται τώρα πως για κάθε $v \in D(\tilde{A}) = D\left(A^k\right)$, είναι

$$\left\langle \tilde{A}, v \right\rangle = \langle Av, v \rangle = \langle v, Av \rangle = \left\langle v, \tilde{A}v \right\rangle$$

αφού $\tilde{A} = A$ στο $D(\tilde{A})$. Ο $\tilde{A}$ δηλαδή είναι συμμετρικός και αφού ειναι και μεγιστικός μονότονος, τότε απο την Πρόταση 2.4.2, θα είναι και αυτοσυζυγής. Επομένως, απο τον κύριο ισχύρισμο του θεωρήματος, για κάθε $v_0 \in \tilde{H}$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση

$$v \in C\left([0,\infty), \tilde{H}\right) \cap C^1\left((0,\infty), \tilde{H}\right) \cap C\left((0,\infty), D(\tilde{A})\right)$$

η οποία να αποτελεί λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \tilde{A}v = 0 \quad \text{στο } (0,\infty) \\ (0) = v_0. \end{cases}$$

Απ' την υπόθεση της επαγωγής, για τη λύση u του προβλήματος (2.13) είναι $u(\varepsilon) \in D\left(A^{k-1}\right)$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Εάν τώρα ορίσουμε $u_\varepsilon(t) = u(t+\varepsilon)$ για κάθε $t > 0$ και θέσουμε $v(0) = u(\varepsilon)$, τότε η $u_\varepsilon(t)$ θα αποτελεί μοναδική λύση για το πρόβλημα (2.16) και επομένως θα είναι:

$$u_\varepsilon \in C\left([0,\infty), \tilde{H}\right) \cap C^1\left((0,\infty), \tilde{H}\right) \cap C\left((0,\infty), D(\tilde{A})\right).$$

Ειδικότερα, έχουμε:

$$\begin{aligned} & u \in C\left((0,\infty), D(\tilde{A})\right) = C\left((0,\infty), D\left(A^k\right)\right) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow & u \in C\left((\varepsilon,\infty), D\left(A^k\right)\right) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow & u \in C\left((0,\infty), D\left(A^k\right)\right). \end{aligned}$$

Άρα $u_0 \in D\left(A^k\right)$ και η u αποτελεί λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = 0, \ \text{στο } [0,\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Απο το θεώρημα 2.2.1 για την u αυτή θα είναι:

$$u \in C^{k-j}\left((0,\infty), D\left(A^j\right)\right) \quad \forall j = 0,1,\ldots,k \tag{2.26}$$

Επαγωγικά, η (2.26) θα ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{Z}^+$ με $k \geq 2$ και συνενεπώς, θα είναι:

$$u \in C^k\left((0,\infty), D\left(A^\ell\right)\right) \quad \forall k, \ell \in \mathbb{Z}^+.$$

Τελειώνουμε τώρα την απόδειξη του θεωρήματος, δείχνοντας τη **μοναδικότητα** της λύσης. Έστω u και $\overline{u}$ δύο διαφορετικές λύσεις του προβλήματος (2.13). Τότε, έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t} + Au - A\overline{u} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}(u-\overline{u})}{\mathrm{d}t} = -A(u-\overline{u})$$

$$\xRightarrow{\cdot(u-\overline{u})}$$

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}(u-\overline{u})}{\mathrm{d}t}, u-\overline{u} \right\rangle = -\left\langle A(u-\overline{u}), u-\overline{u} \right\rangle \leq 0.$$

Έστω τώρα $\phi(t) = u(t) - \overline{u}(t)$. Τότε, απο την Παρατήρηση 2.2.1, θα είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\phi(t)\right|^2 &= 2\left\langle \frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}, \phi(t) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\mathrm{d}(u-\overline{u})}{\mathrm{d}t}, u-\overline{u} \right\rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η $\phi(t)$ είναι φθίνουσα στο $(0,\infty)$. Απο τη στιγμή που $u, \overline{u} \in C\left([0,\infty), H\right)$, η συνάρτηση $\phi(t)$ θα είναι συνεχής στο $[0,\infty)$ και επομένως για κάθε $h \geq 0$ και $t \geq 0$, έχουμε:

$$\left|\phi(t+h)\right|^2 \leq \left|\phi(h)\right|^2 \Rightarrow \left|\phi(t)\right|^2 \leq \left|\phi(0)\right|^2 = 0 \implies \phi \equiv 0 \text{ στο } [0,\infty).$$

Δηλαδή $u = \overline{u}$ και άρα η λύση είναι μοναδική. □

2.5 Σχόλια

Παρακάτω παραθέτουμε μερικά αποτελέσματα και παρατηρήσεις με αρκετό ενδιαφέρον, επί του Κεφαλαίου 2 και όλης της θεωρίας που αναπτύχθηκε. Επειδή το περιεχόμενο τους δεν ανταποκρίνεται στα πλαίσια του κειμένου αυτού, θα αποφύγουμε να αναπτύξουμε αποδείξεις.

Ημιομάδες συστολών

Έστω $t \geq 0$ και $u(t)$ η λύση του προβλήματος (2.6) που δίνει το θεώρημα Hille-Yosida. Θεωρούμε τη γραμμμική απεικόνιση απο το $D(A)$ στο $D(A)$ με $u_0 \mapsto u(t)$. Δεδομένου ότι $\|u(t)\| \leq \|u_0\|$ και αφού ο χώρος $D(A)$ είναι πυκνός στον H, μπορούμε να επεκτείνουμε την απεικόνιση αυτή μέσω συνέχειας σε έναν φραγμένο τελεστή απο το H στον εαυτό του. Συμβολίζουμε την επέκταση αυτή με $S_A(t)$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α′) Για κάθε $t \geq 0$, η $S_A(t) : H \to H$ είναι ενας γραμμικός φραγμένος τελεστής (δηλαδή $S_A \in \mathcal{L}(H)$) και $\|S_A(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$

(β′) Για κάθε $t_1, t_2 \geq 0$, ικανοποιεί:

$$\begin{cases} S_A(t_1 + t_2) = S_A(t_1) \circ S_A(t_2)) \\ S_A(0) = I \end{cases}$$

(γ′) Είναι $\lim_{t \to 0^+} \|S_A(t)u_0 - u_0\| = 0$ για κάθε $u_0 \in H$.

Μια τέτοια οικογένεια $\{S_A(t)\}_{t \geq 0}$ τελεστών απο το H στον εαυτό του, ικανοποιώντας τις παραπάνω συνθήκες, ονομάζεται μια συνεχής ημιομάδα συστολών.

Οι Hille και Yosida έδειξαν πως αντίστροφα, δοθείσας μιας συνεχής ημιομάδας συστολών $S(t)$ στον H, υπάρχει ένας μοναδικός μεγιστικός μονότονος τελεστής A, τέτοιος ώστε $S(t) = S_A(t)$ για κάθε $t \geq 0$. Ορίζεται έτσι μια αμφιμονοσήμαντη και επί αντιστοιχία μεταξύ των μεγιστικών μονότονων τελεστών και των ημιομάδων συνεχών συστολών.

Το θεώρημα Hille-Yosida σε χώρους Banach

Στην Ενότητα 2.2 του κεφαλαίου, αναπτύξαμε το κύριο σημείο της εργασίας αυτής, το θεώρημα Hille-Yosida. Όπως όλη η ανάλυση στο κείμενο αυτό, η διατύπωση του και η απόδειξη του βασίστηκε πάνω σε χώρους Hilbert. Βλέπουμε τώρα πως μπορεί να επεκταθεί και σε χώρους Banach.

Έστω E ένας χώρος Banach και $A : D(A) \subset E \to E$ ένας μη φραγμένος γραμμικός τελεστής. Λέμε ότι ο A είναι m-αυξητικός εάν $\overline{D(A)} = E$ και εάν για κάθε $\lambda > 0$, ο $(I + \lambda A)$ είναι αμφιμονοσήμαντος τελεστής απο τον $D(A)$ επί του E με $\left\|(I + \lambda A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$.

Θεώρημα (Hille-Yosida): Έστω A ένας m-αυξητικός τελεστής στον E. Τότε για κάθε $u_0 \in D(A)$, υπάρχει μοναδική συνάρτηση

$$u \in C^1([0, \infty), E) \cap C([0, \infty), D(A))$$

τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = 0, \ \text{στο} \ [0, \infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.27}$$

Επιπλέον, έχουμε τις εκτιμήσεις:

$$\|(u(t)\| \leq \|u_0\| \quad \text{και} \quad \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\| \quad \forall t \geq 0.$$

Ο τελεστής $u_0 \mapsto u(t)$, εκτεταμένος μέσω συνέχειας στο χώρο Banach E, συμβολίζεται με $S_A(t)$ και είναι μια συνεχής ημιομάδα συστολών, όπως ορίσαμε προηγουμένος. Αντίστροφα, παρομοίως με πριν, δοθείσας οποιασδήποτε συνεχούς ημιομάδας συστολών $S(t)$, υπάρχει ένας μοναδικός m-αυξητικός τελεστής A, τέτοιος ώστε $S(t) = S_A(t)$ για κάθε $t \geq 0$.

Υπάρχουν αρκετές αριθμητικές-επαναληπτικές μέθοδοι για την επίλυση του προβλήματος (2.27). Αναφέρουμε μια βασική εξ' αυτών.

Θεώρημα (Εκθετικός τύπος): Υποθέτουμε πως ο A είναι m-αυξητικός τελεστής. Τότε, για κάθε $u_0 \in D\,(A)$, η λύση του προβλήματος (2.27) δίνεται απο τον εκθετικό τύπο:

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-1} \right]^n u_0. \tag{2.28}$$

Ο τύπος (2.28) αντιστοιχεί στη σύγκλιση ενός πεπλεγμένου σχήματος διακριτοποιήσεως ως προς t για το πρόβλημα (2.27) (Αριθμητική Ανάλυση).
Ειδικότερα, σταθεροποιούμε το $t > 0$ και διαμερίζουμε το διάστημα $[0, t]$ σε n ίσα διαστήματα, μήκους $\Delta t = \frac{t}{n}$. Προχωρούμε στη διαδοχική επίλυση των εξισώσεων

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta t} + A u_{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

αρχίζοντας απο το u_0. Έτσι, η λύση δίνεται απο τον τύπο

$$u_n = (I + \Delta t A)^{-n} u_0 = \left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} u_0,$$

όπου η u_n συγκλίνει στη $u(t)$ καθώς $n \to \infty$.

Μη ομογενείς και μη γραμμικές εξισώσεις

Θεώρημα: Υποθέτουμε ότι ο A είναι m-αυξητικός. Τότε, για κάθε $u_0 \in D\,(A)$ και κάθε $f \in C^1\left([0, T], E\right)$, υπάρχει μοναδική συνάρτηση

$$u \in C^1\left([0, T], E\right) \cap C\left([0, T], D\,(A)\right)$$

που λύνει το πρόβλημα:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + A u(t) = f(t), \text{ στο } [0, T] \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.29}$$

Επιπλέον, η u δίνεται απο τον τύπο

$$u(t) = S_A(t) u_0 + \int_0^t S_A(t-s) f(s) \mathrm{d}s, \tag{2.30}$$

όπου $S_A(t)$ συμβολίζει ημιομάδα, όπως ορίστηκε νωρίτερα. Σημειώνεται ότι αν $f \in C^1\left((0, T), E\right)$, η (2.30) έχει πάντα νόημα και μπορεί να θεωρηθεί ώς η γενικευμένη λύση του προβλήματος (2.29).

Σε εφαρμογές, είναι πολυ συνηθισμένο να συναντάμε ημιγραμμικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A u = F(u),$$

όπου F είναι ένας μη γραμμικός τελεστής $F : E \to E$ στον χώρο Banach E. Έτσι, αξίζει να αναφέρουμε ότι αρκετά απο τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού επιδέχονται μη γραμμική εκδοχή σε χώρους Banach.

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογές: Εξελικτικά προβλήματα

3.1 Η εξίσωση θερμότητας

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο με σύνορο Γ. Θέτουμε Q και Σ, έτσι ώστε:

$$Q = \Omega \times (0, +\infty)\,, \quad \Sigma = \Gamma \times (0, +\infty)\,.$$

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x,t), μπορούμε να φανταστούμε το Q ως έναν κύλινδρο με το Σ να παριστάνει το πλευρικό του σύνορο.

Θεωρούμε τώρα το ακόλουθο πρόβλημα:

Να ευρεθεί συνάρτηση $u(x,t) : \overline{\Omega} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{στο} \quad Q \\ \qquad u = 0 & \text{στο} \quad \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{στο} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

όπου $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ο τελεστής Laplace ως προς τις χωρικές μεταβλητές, t η χρονική μεταβλητή και $u_0(x)$ μια δεδομένη συνάρτηση.

Η εξίσωση του προβλήματος καλείται **εξίσωση θερμότητας**, καθώς προτυποποιεί την κατανομή της θερμοκρασίας u στο πεδίο Ω τη χρονική στιγμή t και αποτελεί το απλούστερο παράδειγμα παραβολικής μερικής διαφορικής εξίσωσης ενώ η μελέτη αυτής παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς παραλλαγές αυτής εμφανίζονται συχνά σε πολλά φαινόμενα διαχύσεως. Η συνθήκη $u = 0$ αποτελεί συνοριακή συνθήκη Dirichlet αλλά μπορεί να αντικατασταθεί και με κατάλληλη συνθήκη Neumann, ενώ η $u(x,0) = u_0(x)$ αποτελεί αρχική συνθήκη Cauchy.

Θα μελετήσουμε το ως άνω πρόβλημα θεωρώντας την $u(x,t)$ ως συνάρτηση ορισμένη στο $[0, +\infty)$ με πεδίο τιμών σε έναν χώρο H, όπου H ένας χώρος συναρτήσεων που εξαρτώνται μόνο απο τη μεταβλητή x, ώστε να μπορούμε να αξιοποιήσουμε το θεώρημα Hille-Yosida. Για περαιτέρω απλούστευση της ανάλυσης, υποθέτουμε σε όλα τα παρακάτω ότι το Ω είναι τάξεως C^{∞}[1].

[1] Η υπόθεση αυτή μπορεί να "εξασθενηθεί" σημαντικά εάν ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε αποκλειστικά ασθενείς λύσεις του προβλήματος.

Θεώρημα 3.1.1: Υποθέτουμε ότι $u_0 \in L^2(\Omega)$. Τότε, υπάρχει συνάρτηση $u(x,t)$ που αποτελεί μοναδική λύση του προβλήματος 3.1 και ικανοποιεί:

$$u \in C\left([0,\infty), L^2(\Omega)\right) \cap C\left((0,\infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right), \tag{3.2}$$

$$u \in C^1\left((0,\infty), L^2(\Omega)\right). \tag{3.3}$$

Επίσης, είναι:

$$u \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [\varepsilon,\infty)\right), \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{3.4}$$

Τέλος, είναι $u \in L^2\left((0,\infty), H_0^1(\Omega)\right)$ και ισχύει:

$$\frac{1}{2}|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T |\nabla u(T)|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}|u_0|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall T > 0^2. \tag{3.5}$$

Απόδειξη: Σκοπός μας είναι να αξιοποιήσουμε το θεώρημα Hille-Yosida. Ορίζουμε τον μη φραγμένο γραμμικό τελεστή $A : D(A) \subset H \to H$, όπου:

$$\begin{cases} H = L^2(\Omega) \\ D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ Au = -\Delta u. \end{cases}$$

Σημειώνεται εδώ πως η συνοριακή συνθήκη του προβλήματος ($u = 0$ στο Σ) ενσωματώνεται στον ορισμό του $D(A)$, αφού $u \in D(A) \subset H_0^1(\Omega) \implies u\big|_\Gamma = 0$. Τώρα, αποδεικνύοντας ότι ο A είναι μεγιστικός μονότονος και αυτοσυζυγής, θα μπορέσουμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.4.1.

Έστω $u \in D(A)$. Τότε, θα είναι

$$\langle Au, u\rangle_{L^2} = \int_\Omega (-\Delta u)\, u\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0$$

και άρα ο A είναι πράγματι **μονότονος**. Επιπλέον, από τα θεωρήματα 1.3.1 και 1.3.2, για κάθε $f \in L^2$ υπάρχει $u \in H^2 \cap H_0^1$ που αποτελέι μοναδική λύση της εξίσωσης $u - \Delta u = f$, δηλαδή $(A+I)u = f$ και άρα $R(I+A) = L^2 = H$, συνεπώς ο A είναι **μεγιστικός μονότονος**.

Για να δείξουμε επιπλέον πως είναι αυτοσυζυγής, απο την πρόταση 2.4.2 αρκεί να δείξουμε ότι είναι συμμετρικός. Έστω λοιπόν $u, v \in D(A)$ και απο την ταυτότητα του Green, έχουμε:

$$\langle Au, v\rangle_{L^2} = \int_\Omega (-\Delta u)\, v\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \nabla v,$$

$$\langle u, Av\rangle_{L^2} = \int_\Omega u\,(-\Delta v)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \nabla v.$$

Επομένως $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ και άρα ο A είναι συμμετρικός και κατ' επέκταση αυτοσυζυγής.

[2]Για τους συμβολισμούς της εξίσωσης 3.5, είναι:

$$|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x,T)|^2\,\mathrm{d}x \quad \text{και} \quad |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x$$

Έχοντας μετασχηματίσει πλέον το αρχικό πρόβλημα στη μορφή

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = 0 & \text{στο } (0, \infty)\,, \\ u(0) = u_0 \in H \end{cases}$$

και έχοντας αποδείξει ότι ο A είναι μεγιστικός μονότονος και αυτοσυζυγής, κάνοντας χρήση του θεωρήματος 2.4.1 καταλήγουμε ότι για τη λύση u, έχουμε:

$$u \in C\left([0, \infty), L^2(\Omega)\right) \cap C\left((0, \infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right),$$

$$u \in C^k\left((0, \infty), D\left(A^l\right)\right).$$

Για το πεδίο ορισμού του τελεστή A, ισχύει:

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^2(\Omega) : u = 0 \text{ στο } \Gamma\right\}.$$

Ας υποθέσουμε ότι:

$$D\left(A^{l-1}\right) = \left\{u \in H^{2l-2}(\Omega) : u = \Delta u = \cdots = \Delta^{l-2} u = 0 \text{ στο } \Gamma\right\}. \tag{3.6}$$

Τώρα, επικαλούμαστε την εξής σχέση για το $D\left(A^l\right)$:

$$D\left(A^l\right) = \left\{u \in D\left(A^{l-1}\right) | Au \in D\left(A^{l-1}\right)\right\}.$$

Για το $u \in D\left(A^{l-1}\right)$ έχουμε την (3.6), ενώ αφού $Au \in D\left(A^{l-1}\right)$, τότε:

$$\Delta u \in H^{2l-2}(\Omega) : \Delta u = \Delta^2 u = \cdots = \Delta^{l-1} u = 0 \text{ στο } \Gamma. \tag{3.7}$$

Απο την παρατήρηση 1.2.1, θα υπάρχει μοναδικό f_u, τέτοιο ώστε $-\Delta u + u = f_u \in H^{2l-2}(\Omega)$ και $u \in H^{2l}(\Omega)$. Επομένως, απο τις (3.6) και (3.7), καταλήγουμε ότι:

$$D\left(A^l\right) \subset \left\{u \in H^{2l}(\Omega) : u = \Delta u = \cdots = \Delta^{l-1} u = 0 \text{ στο } \Gamma\right\}. \tag{3.8}$$

Απο τη (3.8) και επειδή $Au = -\Delta u$, θα είναι:

$$Au = -\Delta u \in H^{2l-2}(\Omega) : Au = \cdots = \Delta^{l-2}(Au) = 0 \text{ στο } \Gamma.$$

Συνεπώς, απο την αρχική υπόθεση (3.6) που κάναμε, συμπεραίνουμε ότι

$$\left\{u \in H^{2l}(\Omega) : u = \Delta u = \cdots = \Delta^{l-1} u = 0 \text{ στο } \Gamma\right\} \subseteq D\left(A^l\right)$$

και απο την (3.8), αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε ακέραιο $l \geq 1$, είναι:

$$D\left(A^l\right) = \left\{u \in H^{2l}(\Omega) : u = \Delta u = \cdots = \Delta^{l-1} u = 0 \text{ στο } \Gamma\right\}.$$

Τώρα, θα δείξουμε ότι η $D\left(A^l\right) \subset H^{2l}$ είναι μια συνεχής ενσφήνωση για κάθε ακέραιο $l \geq 1$. Για το σκοπό αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι $\|u\|_{H^{2l}} \to 0$ όταν $\|u\|_{D(A^l)} \to 0$ για κάθε ακέραιο $l \geq 1$.

Απο την παρατήρηση 1.2.1, δεδομένου ότι $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, υπάρχει μοναδικό $f_u \in L^2(\Omega)$, τέτοιο ώστε $-\Delta u + u = f_u$. Επιπλέον, για το u αυτό, ισχύει ότι

$$\|u\|_{H^2}^2 \leq 2C^2\left(\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2\right),$$

όπου C είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο απο το Ω.

Θα εργαστούμε με επαγωγή. Παρατηρούμε ότι για $l = 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\|u\|_{D(A)} \to 0 &\Rightarrow \|u\|_{L^2}, \|\Delta u\|_{L^2} \to 0 \\ &\Rightarrow \|u\|_{H^2} \to 0.\end{aligned}$$

Επομένως, η $D(A) \subset H^2(\Omega)$ είναι μια συνεχής ενσφήνωση. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $l-1$, δηλαδή ότι η $D\left(A^{l-1}\right) \subset H^{2l-2}(\Omega)$ είναι μια συνεχής ενσφήνωση και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για l. Έστω $u \in D\left(A^l\right) \subset H^{2l}(\Omega) \subset H^{2l-2}(\Omega)$ και τότε $-\Delta u \in H^{2l-2}(\Omega)$. Σε αυτήν την περίπτωση, θα είναι $f_u = -\Delta u + u \in H^{2l-2}(\Omega)$. Ως εκ τούτου, απο το θεώρημα 1.2.2 και την παρατήρηση 1.2.1, συμπεραίνουμε ότι:

$$\|u\|_{H^{2l}}^2 \leq 2C^2 \left(\|\Delta u\|_{H^{2l-2}}^2 + \|u\|_{H^{2l-2}}^2\right). \tag{3.9}$$

Για τη νόρμα $\|u\|_{D(A^l)}$, είναι:

$$\begin{aligned}\|u\|_{D(A^l)}^2 &= \sum_{k=0}^{l} \left\|A^k u\right\|_{L^2}^2 \\ &= \|u\|_{L^2}^2 + \|Au\|_{D(A^{l-1})}^2 \\ &= \|u\|_{D(A^{l-1})}^2 + \|Au\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Άρα, λαμβάνοντας υπ' όψιν την υπόθεση της επαγωγής και την ανισότητα (3.9), λαμβάνουμε πως:

$$\begin{aligned}\|u\|_{D(A^l)} \to 0 &\Rightarrow \|u\|_{H^{2l-2}}, \|\Delta u\|_{H^{2l-2}} \to 0 \\ &\Rightarrow \|u\|_{H^{2l}} \to 0.\end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν πως η $D\left(A^l\right) \subset H^{2l}(\Omega)$ είναι συνεχής. Τότε, αφού $u \in C^k\left((0,\infty), D\left(A^l\right)\right)$, θα είναι και:

$$u \in C^k\left((0,\infty), H^{2l}(\Omega)\right) \quad \forall k, l \in \mathbb{N}.$$

Απο το πόρισμα 1.4.1, δοθέντος $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει $l > k$ τέτοιο ώστε η $H^l(\Omega) \subset C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ να είναι συνεχής και ένα προς ένα. Τότε, αφού $H^{2l}(\Omega) \subset H^l(\Omega) \subset C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, έχουμε:

$$u \in C^k\left((0,\infty), C^k\left(\overline{\Omega}\right)\right) \implies u \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [\varepsilon, \infty)\right).$$

Θα δείξουμε τη σχέση (3.5). Έστω η συνάρτηση $\phi(t) = \dfrac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2$. Αφού $u \in C^1\left((0,\infty), L^2(\Omega)\right)$, τότε και η ϕ θα είναι C^1 συνάρτηση στο $(0,\infty)$. Επομένως, για κάθε $t > 0$, είναι:

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \left\langle u(t), \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right\rangle_{L^2} = \langle u(t), \Delta u(t)\rangle_{L^2} \\ &= \int_\Omega u(t)\Delta u(t) = -\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\nabla u(t) = -\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

Τώρα, ολοκληρώνοντας την $\phi'(t)$ στο $[\varepsilon, T]$, παίρνουμε:

$$\int_\varepsilon^T \phi'(t)\mathrm{d}t = -\int_\varepsilon^T \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow$$

$$\phi(T) - \phi(\varepsilon) = -\int_\varepsilon^T \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t. \tag{3.10}$$

Αφού $u \in C\left([0,\infty), L^2(\Omega)\right)$, τότε για $\varepsilon \to 0$ θα είναι:

$$\phi(\varepsilon) \to \phi(0) = \frac{1}{2}\|u(0)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 . \tag{3.11}$$

Επίσης, ο όρος $\phi(T)$, εξ' ορισμού της ϕ, ισούται με:

$$\phi(T) = \frac{1}{2}\|u(T)\|_{L^2}^2 . \tag{3.12}$$

Συνεπώς, συνδυάζοντας τις (3.10), (3.11) και (3.12) καταλήγουμε στην επιθυμητή εξίσωση (3.5):

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 \quad \forall T > 0.$$

Τέλος, δείχνουμε ότι $u \in L^2\left((0,\infty), H_0^1(\Omega)\right)$. Απο τον ορισμό της νόρμας στο χώρο $H^1(\Omega)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H_0^1}^2 &= \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \|u(t)\|_{L^2}^2 \\
&\Rightarrow \\
\int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1}^2 \,\mathrm{d}t &= \int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t + 2\int_0^T \phi(t)\mathrm{d}t \\
&\le \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^T \phi(t)\mathrm{d}t. && \text{(από την (3.5))}
\end{aligned}$$

Συνεπώς $u \in L^2\left((0,\infty), H_0^1(\Omega)\right)$ και η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώθηκε. □

Για να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα, θα χρειαστούμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1.1: Έστω H χώρος Hilbert και $A : D(A) \subset H \to H$ ένας αυτοσυζυγής και μεγιστικός μονότονος τελεστής. Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $\tilde{H} = D(A)$ με το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle u, v\rangle_{\tilde{H}} = \langle u, v\rangle_H + \langle Au, Av\rangle_{\tilde{H}} .$$

Τότε, ο τελεστής $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset \tilde{H} \to \tilde{H}$ που ορίζεται ως

$$\begin{cases} D(\tilde{A}) = D(A^2) \\ \tilde{A}u = Au \end{cases}$$

είναι επίσης αυτοσυζυγής και μεγιστικός μονότονος.

Απόδειξη: Αρχικά, αφού $u \in D(\tilde{A}) = D(A^2)$ τότε και $u \in D(A), Au \in D(A)$. Επομένως:

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{A}u, u \right\rangle_{\tilde{H}} &= \langle Au, u\rangle_{\tilde{H}} \\
&= \langle Au, u\rangle_H + \langle A(Au), Au\rangle_H \\
&\ge 0. && \text{(αφού ο } A \text{ είναι μονότονος)}
\end{aligned}$$

Άρα, ο $\tilde{A}$ είναι επίσης μονότονος. Έστω τώρα $f \in \tilde{H} = D(A) \subset H$. Τότε, αφού ο A είναι μεγιστικός μονότονος, θα υπάρχει $u \in D(A)$ τέτοιο ώστε $u + Au = f$. Συνεπάγεται ότι

$Au = f - u \in D(A)$ και άρα $u \in D(A^2) = D(\tilde{A})$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι $R(I + \tilde{A}) = \tilde{H}$, δηλαδή ότι ο $\tilde{A}$ είναι μεγιστικός μονότονος.

Τελειώνουμε τώρα την απόδειξη δείχνοντας ότι ο $\tilde{A}$ είναι συμμετρικός, αφού αυτό αρκεί για να δείξουμε ότι είναι αυτοσυζυγής, επικαλούμενοι την πρόταση 2.4.2. Έστω $u, v \in D(\tilde{A}) = D(A^2)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{A}u, v \right\rangle_{\tilde{H}} &= \langle Au, v\rangle_H + \langle A(Au), Av\rangle_H \\ &= \langle u, Av\rangle_H + \langle Au, A(Av)\rangle_H && \text{(ο } A \text{ αυτοσυζυγής)} \\ &= \left\langle u, \tilde{A}v \right\rangle_{\tilde{H}}.\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.1.2:

(α′) Έστω $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Τότε, η λύση u του προβλήματος (3.1), ικανοποιεί

$$u \in C\left([0,\infty), H_0^1(\Omega)\right) \cap L^2\left((0,\infty), H^2(\Omega)\right) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2\left((0,\infty), L^2(\Omega)\right).$$

Ισχύει επίσης η εξίσωση:

$$\int_0^T \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|_{L^2(\Omega)}^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left|\nabla u(t)\right|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2}\left|\nabla u_0\right|_{L^2(\Omega)}^2.$$

(β′) Έστω τώρα ότι $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Τότε, ισχύουν:

$$u \in C\left([0,\infty), H^2(\Omega)\right) \cap L^2\left((0,\infty), H^3(\Omega)\right) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2\left((0,\infty), H^1(\Omega)\right).$$

(γ′) Ας υποθέσουμε τώρα ότι $u \in H^k(\Omega)$ για κάθε k και ότι η u_0 ικανοποιεί τις σχέσεις συμβατότητας:

$$u_0 = \Delta u_0 = \cdots = \Delta^j u_0 = \cdots = 0 \quad \text{στο } \Gamma, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Τότε $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$.

Απόδειξη (α'):

Ο χώρος $H_1 = H_0^1(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle u, v\rangle_{H_1} = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv.$$

Θεωρούμε τον μη φραγμένο τελεστή $A_1 : D(A_1) \subset H_1 \to H_1$, ως εξής:

$$\begin{cases} D(A_1) & = \left\{u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \Delta u \in H_0^1(\Omega)\right\} \\ A_1 u & = -\Delta u \end{cases}.$$

Για να αξιοποιήσουμε το θεώρημα Hille-Yosida, θα επαληθεύσουμε ότι ο A_1 είναι μεγιστικός μονότονος και αυτοσυζυγής.

Έστω $u \in D(A_1)$. Ο A είναι μονότονος, καθώς:

$$\langle A_1 u, u\rangle_{H_1} = \int_\Omega \nabla(-\nabla u)\nabla u + \int (-\Delta u) u = \int_\Omega |\Delta u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0.$$

Έστω τώρα $f \in H_0^1(\Omega)$. Απο το θεώρημα 1.3.2 και την παρατήρηση 1.3.1, γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδικό $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε $-\Delta u + u = f$. Αφού $f \in H_0^1(\Omega)$, αυτό σημαίνει ότι $\Delta u \in H_0^1(\Omega)$ και επομένως $u \in D(A_1)$. Άρα, παρατηρούμε πως ισχύει $R(A_1 + I) = H_1$, δηλαδή ο A_1 είναι μεγιστικός μονότονος.

Για να δείξουμε ότι είναι αυτοσυζυγής, σύμφωνα με την πρόταση 2.4.2 αρκεί να δείξουμε ότι είναι συμμετρικός. Έστω λοιπόν $u, v \in D(A_1)$ και εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Green, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\langle A_1 u, v\rangle)_{H_1} &= \int_\Omega \nabla(-\Delta u)\nabla v + \int_\Omega (-\Delta u) v \\
&= \int_\Omega (\Delta u)(\Delta v) + \int_\Omega \nabla u \nabla v \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla(-\Delta v) + \int_\Omega u(-\Delta v) \\
&= \langle u, A_1 v\rangle_{H_1}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς ο A_1 είναι συμμετρικός και άρα αυτοσυζυγής.

Επαληθεύσαμε τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 2.4.1 και καταλήγουμε ότι για $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ υπάρχει μοναδική λύση u του προβλήματος

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A_1 u = 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

η οποία ικανοποιεί:

$$u \in C([0,\infty), H_1) \cap C^1((0,\infty), H_1) \cap C((0,\infty), D(A_1)) \tag{3.13}$$

και

$$u \in C^k\left((0,\infty), D\left(A^l\right)\right),\ \forall k, l \in \mathbb{N}.$$

Συγκεκριμένα, έχουμε ότι:

$$u \in C^k\left((0,\infty), H_0^1(\Omega)\right) \implies u \in C^\infty((0,\infty)).$$

Έστω τώρα η συνάρτηση $\phi(t) = \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2$. Παρατηρούμε πως $\phi \in C^\infty((0,\infty))$. Επίσης, είναι:

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \left\langle \nabla u(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla u(t)) \right\rangle_{L^2} = \int_\Omega \left[\nabla u(t) \cdot \nabla \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right] \mathrm{d}t \\
&= -\int_\Omega \left[\Delta u(t) \cdot \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right] \mathrm{d}t = \int_\Omega \left[\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right] \mathrm{d}t \\
&= -\left\|\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας την $\phi'(t)$ στο $[\varepsilon, T]$, παίρνουμε:

$$\int_\varepsilon^T \phi'(t)\mathrm{d}t = -\int_\varepsilon^T \left\|\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^2} \mathrm{d}t \Rightarrow \phi(T) - \phi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^T \left\|\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^2} \mathrm{d}t = 0. \tag{3.14}$$

Απο την (3.13), έχουμε ότι $u \in C([0,\infty), H_1)$ και επομένως για κάθε $t_0 \in [0,\infty)$ με $|t - t_0| \to 0$ θα είναι $\|u(t) - u(t_0)\|_{H_1} \to 0$. Όμως, για την προαναφερθείσα νόρμα, ισχύει ότι:

$$\|u(t) - u(t_0)\|_{H_1}^2 = \|\nabla(u(t)) - \nabla(u(t_0))\|_{L^2}^2 + \|u(t) - u(t_0)\|_{L^2}^2.$$

Άρα, όταν $\|u(t)-u(t_0)\|_{H_1} \to 0$ τότε και $\|\nabla(u(t))-\nabla(u(t_0))\|_{L^2}^2 \to 0$ για κάθε $t_0 \in [0,\infty)$, δηλαδή $\nabla u \in C([0,\infty), L^2(\Omega))$. Έπεται λοιπόν ότι $\phi(\varepsilon) \to \phi(0)$ όταν το $\varepsilon \to 0$. Έτσι, παίρνοντας το όριο στην (3.14) για $\varepsilon \to 0$, λαμβάνουμε την επιθυμητή εξίσωση:

$$\phi(T)-\phi(0)+\int_0^T \left\|\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t = 0. \tag{3.15}$$

Απο την (3.15), για κάθε $T>0$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\Delta u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t &= \int_0^T \left\|\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t \\ &= \phi(0)-\phi(T) \\ &\le \phi(0). && (\text{αφού } \phi(T)\ge 0, \forall T>0)\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, $\Delta u \in L^2((0,\infty), L^2(\Omega))$ και αφού απο το θεώρημα 3.1.1 έχουμε $u \in L^2((0,\infty), H_0^1(\Omega))$, έπεται ότι $u \in L^2((0,\infty), L^2(\Omega))$.

Επικαλούμαστε τώρα την παρατήρηση 1.3.1, που μας δίνει ότι

$$\|u\|_{H^2}^2 \le 2C^2\left(\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2\right)$$

όπου $C \in \mathbb{R}$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο απο το Ω.

Αξιοποιώντας την ανισότητα αυτή, για κάθε $T>0$ θα είναι:

$$\int_0^T \|u\|_{H^2}^2 \,\mathrm{d}t \le 2C^2\left(\int_0^T \|\Delta u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t\right) < \infty.$$

Συνεπώς $u \in L^2((0,\infty), H^2(\Omega))$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του (α'). □

Απόδειξη (β'):

Τώρα θα εργαστούμε στο χώρο $H_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle u, v\rangle_{H^2} = \langle \Delta u, \Delta v\rangle_{L^2} + \langle u, v\rangle_{L^2}.$$

Θεωρούμε στον H_2 τον μη φραγμένο τελεστή $A_2 : D(A_2) \subset H_2 \to H_2$ που ορίζεται με

$$\begin{cases} D(A_2) &= \{u \in H^4(\Omega) : u \in H_0^1(\Omega) \text{ και } \Delta u \in H_0^1(\Omega)\} \\ A_2 u &= -\Delta u. \end{cases}$$

Απο το θεώρημα 3.1.1, ο τελεστής $A : D(A) \subset H \to H$ στο $H = L^2(\Omega)$ που ορίζεται ως

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ Au = -\Delta u, \end{cases}$$

είναι αυτοσυζυγής και μεγιστικός μονότονος.

Παρατηρούμε τώρα, ότι:

$$\begin{aligned} D(A_2) &= \left\{u \in H^4(\Omega) : u, \Delta u \in H_0^1(\Omega)\right\} \\ &= \left\{u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \Delta u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right\} \\ &= \{u \in D(A) : Au \in D(A)\} \\ &= D\left(A^2\right). \end{aligned}$$

Επιπλέον, είναι:

$$\langle u,v\rangle_{H_2}=\langle u,v\rangle_{L^2}+\langle \Delta u,\Delta v\rangle_{L^2}=\langle u,v\rangle_{L^2}+\langle Au,Av\rangle_{L^2}.$$

Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα της πρότασης 3.1.1 και να αποφανθούμε ότι ο A_2 είναι μεγιστικός μονότονος. Εν συνεχεία, απο το θεώρημα 2.4.1, η λύση u του προβλήματος

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+A_2u=0 \text{ στο } (0,\infty)\\ u(0)=u_0\in H_2\end{cases}$$

ικανοποιεί:

$$u\in C\left([0,\infty),H_2\right)\cap C^1\left((0,\infty),H_2\right)\cap C\left((0,\infty),D\left(A_2\right)\right), \tag{3.16}$$

$$u\in C^k\left((0,\infty),D\left(A^l\right)\right),\ \forall k,l\in\mathbb{N}. \tag{3.17}$$

Ειδικότερα, $u\in C^k\left((0,\infty),H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\implies u\in C^\infty(0,\infty)$.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $\phi(t)=\dfrac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2$, η οποία είναι C^∞ στο $(0,\infty)$. Για την παράγωγό της, έχουμε:

$$\begin{aligned}\phi'(t)&=\left\langle \Delta u(t),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Delta u(t)\right)\right\rangle_{L^2}\\&=\left\langle \Delta u(t),\Delta\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\right)\right\rangle_{L^2}\\&=\left\langle \Delta u(t),\Delta^2u(t)\right\rangle_{L^2} && \left(\text{αφού } \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-\Delta u=0\right)\\&=-\int_\Omega\left[\nabla\left(\Delta u(T)\right)\cdot\nabla\left(\Delta u(t)\right)\right] && (\text{ταυτότητα Green})\\&=-\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας την $\phi'(t)$ στο $[\varepsilon,T]$, παίρνουμε:

$$\phi(T)-\phi(\varepsilon)=-\int_\varepsilon^T\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t. \tag{3.18}$$

Απο την (3.16), έχουμε ότι $u\in C\left([0,\infty),H_2\right)$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\|u(t)-u(t_0)\|_{H^2}\to 0$ για οποιοδήποτε $t_0\in[0,\infty)$ τέτοιο ώστε $|t-t_0|\to 0$.

Η νόρμα στον H^2, ισούται με:

$$\|u(t)-u(t_0)\|_{H^2}=\|\Delta u(t)-\Delta u(t_0)\|_{L^2}^2+\|u(t)-u(t_0)\|_{L^2}^2.$$

Άμεσα παρατηρούμε ότι $\|u(t)-u(t_0)\|_{H^2}\to 0 \implies \|\Delta u(t)-\Delta u(t_0)\|_{L^2}$ για κάθε $t_0\in[0,\infty)$ τέτοιο ώστε $|t-t_0|\to 0$. Άρα $\Delta u\in C\left([0,\infty),L^2(\Omega)\right)$ και ως εκ τούτου $\phi(\varepsilon)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\phi(0)$.

Παίρνοντας το όριο για $\varepsilon\to 0$ στην (3.18), λαμβάνουμε:

$$\phi(T)-\phi(0)=-\int_0^T\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t. \tag{3.19}$$

Τότε, απο την (3.19) και την εξίσωση (3.5) του θεωρήματος 3.1.1, έχουμε για κάθε $T > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\Delta u(t)\|_{H^1}^2 \,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u_0\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\left[\|\nabla u(T)\|_{L^2}^2 + \|\Delta u(T)\|_{L^2}^2\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u_0\|_{L^2}^2 .\end{aligned}$$

Συνεπώς, θα είναι $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \in L^2\left((0,\infty), H^1(\Omega)\right)$. Επικαλούμενοι τώρα την παρατήρηση 1.3.1, έχουμε:

$$\|u(t)\|_{H^3}^2 \leq 2C^2\left[\|u(t)\|_{H^1}^2 + \|\Delta u(t)\|_{H^1}^2\right].$$

Εν τέλει, για κάθε $T > 0$, είναι:

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u(t)\|_{H^3}^2 \,\mathrm{d}t &\leq 2C^2\left[\int_0^T \|u(t)\|_{H^1}^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^T \|\Delta u(t)\|_{H^1}^2 \,\mathrm{d}t\right] \\ &\leq 2C^2\left[\int_0^T \|u(t)\|_{H^2}^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^T \|\Delta u(t)\|_{H^1}^2 \,\mathrm{d}t\right] \\ &\leq \infty.\end{aligned}$$

Το τελευταίο σκέλος των ανισοτήτων ισχύει καθώς $u \in L^2\left((0,\infty), H^2(\Omega)\right)$ (θεώρημα 3.1.2) και $\Delta u \in L^2\left((0,\infty), H^1(\Omega)\right)$. Επομένως $u \in L^2\left((0,\infty), H^3(\Omega)\right)$.

Απόδειξη (γ'): Θεωρούμε τον μεγιστικό μονότονο τελεστή $A : D(A) \subset H \to H$ στον $H = L^2(\Omega)$ που ορίζεται ως:

$$\begin{cases} D(A) & = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ Au & = -\Delta u. \end{cases}$$

Τότε, απο το θεώρημα 2.3.1, δεδομένου ότι $u_0 \in D\left(A^k\right)$, θα υπάρχει μοναδική λύση u στο πρόβλημα

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = 0 \text{ στο } [0,\infty) \\ u(0) = u_0 \in D\left(A^k\right), \end{cases}$$

για την οποία ισχύει ότι $u \in C^{k-j}\left([0,\infty), D\left(A^j\right)\right)$ για κάθε $j = 0, 1, \ldots, k$.

Απο την απόδειξη του θεωρήματος 3.1.1, έχουμε ότι:

$$D\left(A^k\right) = \left\{u \in H^{2k}(\Omega) : u = \Delta u = \cdots = \Delta^{k-1} u = 0 \text{ στο } \Gamma\right\}.$$

Απο τις συνθήκες συμβατότητας της υποθέσεως (γ') έπεται ότι $u_0 \in D\left(A^k\right)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ως εκ τούτου:

$$u \in C^{k-j}\left([0,\infty), D\left(A^j\right)\right),\ \forall j = 0, 1, \ldots, k \text{ και } \forall k \in \mathbb{N}.$$

Εν συνεχεία, ακολουθώντας παρόμοια βήματα με την απόδειξη του θεωρήματος 3.1.1 καταλήγουμε ότι $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$. □

Σχόλια

1. Τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν επίσης - με ορισμένες τροποποιήσεις - και για το πρόβλημα Cauchy με συνθήκες Neumann.

2. Όταν το σύνολο Ω είναι φραγμένο, το πρόβλημα (3.1) δύναται να επιλυθεί με ανάλυση ως προς μια βάση Hilbert του $L^2(\Omega)$. Συμφέρει να επιλέξουμε βάση $\{e_i(x)\}_{i\geq 1} \subset L^2(\Omega)$ που αποτελείται απο ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $-\Delta$ με συνθήκη Dirichlet, δηλαδή:

$$\begin{cases} -\Delta e_i &= \lambda_i e_i \quad \text{στο } \Omega, \\ \quad e_i &= 0 \qquad \text{στο } \Gamma. \end{cases}$$

Ζητούμε μια λύση του προβλήματος (3.1) της μορφής:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) e_i(x).^3$$

Για τις συναρτήσεις $a_i(t)$, παρατηρούμε πως αναγκαστικά θα πρέπει να ισχύει:

$$a_i'(t) + \lambda_i a_i(t) = 0 \implies a_i(t) = a_i(0) e^{-\lambda_i t}.$$

Οι σταθερές $a_i(0)$ προσδιορίζονται αξιοποιώντας την αρχική συνθήκη, ως εξής:

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0) e_i(x).$$

Συνοψίζοντας, η λύση του προβλήματος (3.1) δίνεται απο τη σχέση

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0) e^{-\lambda_i t} e_i(x).$$

όπου οι σταθερές $a_i(0)$ είναι οι συνιστώσες της $u_0(x)$ ως προς τη βάση $\{e_i\}_{i\geq 1}$.

Τέλος, σημειώνεται η ομοιότητα της μεθόδου αυτής με γνώριμες τεχνικές απο τη βασική θεωρία των συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων.

3. Οι σχέσεις συμβατότητας $u_0 = \Delta u_0 = \cdots = \Delta^j u_0 = \cdots = 0$ στο θεώρημα 3.1.2 (γ') αποτελούν αναγκαίες συνθήκες για να ανήκει η λύση u του προβλήματος (3.1) στον χώρο $C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$ - δηλαδή για την ομαλότητα της λύσης.

Η ως άνω παρατήρηση εύκολα επαληθεύεται. Έστω $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$. Αυτό σημαίνει ότι η u είναι απείρως συνεχώς παραγωγίσιμη, δηλαδή ότι:

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \in C\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right), \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

Όμως είναι $u = 0$ στο $\Gamma \times [0,\infty)$ και επομένως $\dfrac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0$ στο $\Gamma \times [0,\infty)$. Παρατηρούμε τώρα επαγωγικά, ότι στο $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$, είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \Delta^2 u \Rightarrow \cdots \Rightarrow \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = \Delta^j u.$$

Μέσω της συνέχειας λοιπόν καταλήγουμε ότι $\dfrac{\partial^j u}{\partial t^j} = \Delta^j u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ στο $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$. Τέλος, επειδή $u_0 \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ με $u_0 = 0$ στο Γ και λαμβάνοντας υπόψιν την (3.20), συμπεραίνουμε πως $\Delta^j u_0 = 0$ στο Γ για κάθε $j \in \mathbb{N}$.

[3] Η μέθοδος αυτή καλείτε ''μέθοδος χωρισμού μεταβλητών'' ή ''μέθοδος Fourier''

3.2 Η κυματική εξίσωση

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο με σύνορο Γ. Ομοίως με την προηγούμενη ενότητα, συμβολίζουμε με Q και Σ τα σύνολα:

$$Q = \Omega \times (0, +\infty), \quad \Sigma = \Gamma \times (0, +\infty).$$

Θεωρούμε τώρα το ακόλουθο πρόβλημα:

Να ευρεθεί συνάρτηση $u(x,t) : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{στο } Q \\ u = 0 & \text{στο } \Sigma \\ u\,(x,0) = u_0(x) & \text{στο } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = v_0(x) & \text{στο } \Omega, \end{cases} \tag{3.21}$$

όπου Δ ο τελεστής Laplace, t η χρονική μεταβλητή και u_0, v_0 δεδομένες συναρτήσεις.

Η διαφορική εξίσωση του προβλήματος(3.12) καλείται **κυματική εξίσωση** και αποτελεί πρότυπο παράδειγμα υπερβολικής διαφορικής εξίσωσης. Σημειώνεται ότι ο τελεστής $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta\right)$ ονομάζεται τελεστής D'Alambert.

Όταν μελετάμε το ως άνω πρόβλημα στον $\mathbb{R}$, αυτό προτυποποιεί μικρές ταλαντώσεις χορδής χωρίς να υπόκειται σε εξωτερικές δυνάμεις και το γράφημα της συναρτήσεως $u(x,t)$ για κάθε $t \geq 0$ ταυτίζεται με το σχήμα της χορδής την αντίστοιχη χρονική στιγμή. Στον $\mathbb{R}^2$ προτυποποιεί τις μικρές ταλαντώσεις μιας ελαστικής μεμβράνης και γενικότερα στον $\mathbb{R}^N$ τη διάδοση ενός κύματος σε ένα ομογενές ελαστικό μέσο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Όπως και στην ενότητα 3.1, εξίσωση $u = 0$ είναι συνοριακή συνθήκη Dirichlet και εκφράζει το γεγονός ότι η χορδή είναι σταθεροποιημένη στο σύνορο Γ. Αντιθέτως, εάν αντικατασταθεί με συνθήκη Neumann τότε θα σημαίνει ότι η χορδή είναι ελεύθερη στα άκρα της. Οι τελευταίες δύο εξισώσεις του προβλήματος είναι οι συνθήκες της αρχικής κατάστασης του συστήματος που μελετάται ($u_0(x)$ το αρχικό σχήμα της χορδής και $v_0(x)$ η αρχική της ταχύτητα).

Για λόγους απλούστευσης, για όλη τη συνέχεια θεωρούμε ότι το σύνολο Ω είναι τάξης C^∞ και ότι το σύνορο του $\Gamma = \partial\Omega$ είναι φραγμένο.

Θεώρημα 3.2.1 (Ύπαρξη και Μοναδικότητα):

Έστω $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ και $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Τότε, υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος (3.12):

$$u \in C\left([0,\infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,\infty), H_0^1(\Omega)\right) \cap C^2\left([0,\infty), L^2(\Omega)\right).$$

Επιπλέον, ισχύει:

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0^4. \tag{3.22}$$

[4]Είναι:

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right\|^2 \mathrm{d}x, \quad \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x,t)\right\|^2 \mathrm{d}x$$

Απόδειξη: Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη διαφορική εξίσωση του προβλήματος (3.21), ως ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεσως:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v = 0 & \text{στο } Q \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta v = 0 & \text{στο } Q. \end{cases}$$

Θέτοντας $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, το ως άνω σύστημα μετασχηματίζεται στην εξίσωση $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + AU = 0$, όπου:

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix}.$$

Θα εφαρμόσουμε τώρα τη θεωρία Hille-Yosida στον χώρο $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, όπου αν τα $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ και $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ είναι δύο στοιχεία του, τότε το εσωτερικό γινόμενο με το οποίο εφοδιάζεται ορίζεται ως εξής:

$$\langle U_1, U_2 \rangle = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 \mathrm{d}x + \int_\Omega u_1 u_2 \mathrm{d}x + \int_\Omega v_1 v_2 \mathrm{d}x.$$

Θεωρούμε τώρα μη-φραγμένο τελεστή $A : D(A) \subset H \to H$, τέτοιον ώστε:

$$\begin{cases} D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \\ AU = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix}, \text{ όπου } U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Αρχικά, θα δείξουμε ότι ο τελεστής $(A + I)$ είναι μεγιστικός μονότονος. Για $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$, είναι:

$$\begin{aligned} \langle (A+I)U, U \rangle_H &= \langle AU, U \rangle_H + \langle U, U \rangle_H \\ &= \int_\Omega \nabla(-v) \cdot \nabla u + \int_\Omega -vu + \int_\Omega (-\Delta u)v + \|U\|_H^2 \\ &= -\int_\Omega vu + \int_\Omega u^2 + \int_\Omega \|\nabla u\|^2 + \int_\Omega v^2 && \text{(ταυτότητα Green)} \\ &\geq \int_\Omega \|\nabla u\|^2 + \int_\Omega (u^2 + v^2) - \int_\Omega \frac{u^2 + v^2}{2} && \text{(είναι } -vu \geq -(u^2+v^2)/2\text{)} \\ &= \int_\Omega \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega (u^2 + v^2) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Επομένως, ο A είναι μονότονος. Τώρα, για να δείξουμε ότι είναι μεγιστικός μονότονος, θα πρέπει να ισχύει ότι $R(A + 2I) = H$. Δηλαδή, δοθέντος $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$, αναζητούμε $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ έτσι ώστε $(A + 2I)U = F$. Παίρνουμε λοιπόν το σύστημα εξισώσεων στο Ω

$$\begin{cases} -v + 2u = f \\ -\Delta u + 2v = g, \end{cases} \tag{3.23}$$

με $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ και $v \in H_0^1(\Omega)$. Θέτοντας $v = 2u - f$, το σύστημα (3.23) ανάγεται στην εξίσωση:

$$-\Delta u + 4u = 2f + g. \tag{3.24}$$

Απο την παρατήρηση 1.3.1 της εισαγωγής η εξίσωση(3.24) έχει μοναδική λύση και συνεπώς επαληθεύσαμε ότι ο $(A+I)$ είναι μεγιστικός μονότονος.

Θέτουμε τώρα $A_1 = A + I$ και τότε είναι $D(A_1) = D(A)$. Απο το θεώρημα Hille Yosida, δοθέντος $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(A_1)$, υπάρχει μοναδική λύση V του προβλήματος

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + A_1 V = 0 \\ V(0) = U_0, \end{cases}$$

για την οποία ισχύει ότι $V \in C^1([0,\infty), H) \cap C([0,\infty), D(A_1))$.

Έστω τώρα $U(t) = e^t V(t)$. Τότε, για $t \in [0,\infty)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= e^t \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + e^t V(t) \\ &= e^t \left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + V(t) \right] \\ &= e^t \left[-AV(t) \right] \\ &= -AU(t). \end{aligned}$$

Δηλαδή, πήραμε ότι $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + AU(t) = 0$ και $U(0) = V(0) = U_0$. Επομένως, η $U(t) = e^t V(t)$ αποτελεί μοναδική λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + AU = 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

και ικανοποιεί $U \in C^1([0,\infty), H) \cap C([0,\infty), D(A))$, απ' όπου έπεται η συνθήκη για τη λύση u στη διατύπωση του θεωρήματος.

Τέλος, θα επαληθεύσουμε τη σχέση (3.22). Για τη νόρμα $\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$, έχουμε:

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x,t) \right\|^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x,t) \right\|^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x,t) \right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Επιπλέον, είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|^2_{L^2} &= 2 \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right\rangle_{L^2} = 2 \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right\rangle_{L^2} \\ &= 2 \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Επομένως, για την ποσότητα $\dfrac{\partial}{\partial t} \|\nabla u(t)\|^2_{L^2}$, έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\nabla u(t)\|^2_{L^2} = 2 \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) \mathrm{d}x = 2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \mathrm{d}x. \tag{3.25}$$

Επειδή $u(t) \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, τότε θα είναι $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in H^1_0(\Omega)$ και αυτό συνεπάγεται ότι $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ στο Γ. Εφαρμόζοντας την ταυτότητα Green στη σχέση (3.25), παίρνουμε ότι:

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\nabla u(t)\|^2_{L^2} = -\int_\Omega (\Delta u) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right). \tag{3.26}$$

Ακόμα, για $\dfrac{\partial u}{\partial t} = v(t) \in H_0^1$, είναι

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2\right) = \left\langle v, \frac{\partial v}{\partial t}\right\rangle_{L^2} = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right). \tag{3.27}$$

Προσθέτοντας τώρα τις εξισώσεις (3.26) και (3.27) κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2\right) &= \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - \int_\Omega (\Delta u)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\\ &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u\right)\\ &= 0. \qquad \left(\text{αφου } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u\right)\end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε τώρα κατά μέλη ως προς t στο $[0,T]$:

$$\begin{aligned}&\int_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2\right) = 0\\ \Rightarrow &\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(T)\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(T)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|v_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_{L^2}^2\\ \Rightarrow &\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(T)\right\|_{L^2}^2 + \|\nabla u(T)\|_{L^2}^2 = \|v_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Πράγματι λοιπόν, ισχύει η σχέση (3.22) του προβλήματος και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Θεώρημα 3.2.2 (Ομαλότητα):

Έστω ότι $u_0 \in H^k(\Omega)$ και $v_0 \in H^k(\Omega)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ενώ επιπλέον

$$u_0 = \Delta u_0 = \cdots = \Delta^k u_0 = \cdots = 0 \quad \text{στο } \Gamma,\ \forall j \in \mathbb{Z},$$

$$v_0 = \Delta v_0 = \cdots = \Delta^j v_0 = \cdots = 0 \quad \text{στο } \Gamma,\ \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Τότε, η λύση του προβλήματος (3.21) ανήκει στο χώρο $C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$.

Απόδειξη: Ορίζουμε D_k να είναι το σύνολο:

$$D_k = \left\{\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} u \in H^{k+1}(\Omega), \Delta^j u = 0 \ \text{στο } \Gamma \ \text{για } 0 \le j \le \left[\frac{k}{2}\right] \\ v \in H^k(\Omega), \Delta^j v = 0 \ \text{στο } \Gamma \ \text{για } 0 \le j \le \left[\frac{k-1}{2}\right]\end{array}\right\}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι $D\left(A^k\right) = D_k$ για κάθε ακέραιο $k \ge 1$. Πράγματι, για $k = 1$, έχουμε:

$$D(A) = \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \times H_0^1(\Omega) = \left\{\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} u \in H^2(\Omega), u = 0 \ \text{στο } \Gamma \\ v \in H^1(\Omega), v = 0 \ \text{στο } \Gamma\end{array}\right\} = D_1.$$

Εργαζόμενοι τώρα επαγωγικά, υποθέτουμε ότι $D\left(A^{k-1}\right) = D_k$. Παρατηρούμε τότε, ότι:

$$\begin{aligned} D\left(A^k\right) &= \left\{U \in D\left(A^{k-1}\right) \middle| AU \in D\left(A^{k-1}\right)\right\}\\ &= \left\{U \in D_{k-1} \middle| AU \in D_{k-1}\right\}. \qquad (\text{απο την υπόθεση της επαγωγής})\end{aligned}$$

Για $U = \begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix} \in D_{k-1}$, έχουμε:

$$u \in H^k(\Omega), \Delta^j u = 0 \ \text{ στο } \ \Gamma \ \text{ για ; } 0 \le j \le \left[\frac{k-1}{2}\right], \tag{3.28}$$

$$v \in H^{k-1}(\Omega), \Delta^j v = 0 \ \text{ στο } \ \Gamma \ \text{ για } 0 \le j \le \left[\frac{k-2}{2}\right]. \tag{3.29}$$

Αντίστοιχα, για $AU = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix} \in D_{k-1}$, έχουμε:

$$v \in H^k(\Omega), \Delta^j v = 0 \text{ στο } \Gamma \text{ για ; } 0 \leq j \leq \left[\frac{k-1}{2}\right], \tag{3.30}$$

$$\Delta u \in H^{k-1}(\Omega), \Delta^{j+1} u = 0 \text{ στο } \Gamma \text{ για } 0 \leq j \leq \left[\frac{k-2}{2}\right]. \tag{3.31}$$

Απο τις σχέσεις (3.28) και (3.31) συνεπάγεται ότι:

$$-\Delta u + u \in H^{k-1}(\Omega), \tag{3.32}$$

$$\Delta^j u = 0 \text{ στο } \Gamma \text{ για } 0 \leq j \leq \left[\frac{k-1}{2}\right]. \tag{3.33}$$

Χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα 1.3.1 και 1.3.2, απο την (3.32) παίρνουμε ότι $u \in H^{k+1}(\Omega)$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ'όψιν τις (3.30) και (3.33) συμπεραίνουμε ότι $U \in D_k$ όταν $U \in D(A^k)$, δηλαδή ότι $D(A^k) \subset D_k$. Εν συνεχεία, είναι

$$\begin{aligned} D_k &\subseteq \{U \in D_{k-1} | AU \in D_{k-1}\} = \left\{U \in D\left(A^{k-1}\right) | AU \in D\left(A^{k-1}\right)\right\} \\ &= D\left(A^k\right). \qquad \text{(απο την υπόθεση της επαγωγής)} \end{aligned}$$

Αφού δείξαμε λοιπόν ότι $D(A^k) \subset D_k$ και $D_k \subseteq D(A^k)$, τότε είναι $D_k = D(A^k)$ και επαγωγικά ισχύει το αποτέλεσμα για κάθε ακέραιο $k \geq 1$.

Συγκεκριμένα, έχουμε ότι $D(A^k) \subset H^{k+1}(\Omega) \times H^k(\Omega)$ και ισχυριζόμαστε ότι η εν λόγω ενσφήνωση είναι συνεχής. Για $k = 1$ είναι $D(A) \subset H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, ενώ η νόρμα στο $D(A)$:

$$\|U\|_{D(A)}^2 = \|U\|_H^2 + \|AU\|_H^2.$$

Αναλύοντας την παραπάνω έκφραση, λαμβάνουμε τα εξής:

$$\|U\|_H^2 = \|u\|_{H^1}^2 + \|v\|_{L^1}^2, \tag{3.34}$$

$$\|AU\|_H^2 = \|v\|_{H^1}^2 + \|\Delta u\|_{L^1}^2. \tag{3.35}$$

Επικαλούμενοι τώρα την παρατήρηση 1.3.1, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2} &\leq 2C^2\left(\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2\right) \\ &\leq 2C^2\left(\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^1}^2\right). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Έτσι, εάν $\|U\|_{D(A)} \to 0$, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \|U\|_{D(A)} \to 0 &\Rightarrow \|u\|_{H^1}, \|\Delta u\|_{L^2}, \|v\|_{H^1} \to 0 \qquad \text{(απο τις (3.34) και (3.35))} \\ &\Rightarrow \|u\|_{H^2}^2 + \|v\|_{H^1}^2 \to 0 \qquad \text{(απο την (3.36))} \\ &\Rightarrow \|U\|_{H^2 \times H^1} \to 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η ενσφήνωση $D(A) \subset H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ είναι συνεχής.
Υποθέτουμε τώρα ότι $D(A^{k-1}) \subset H^k(\Omega) \times H^{k-1}(\Omega)$ και εργαζόμαστε με επαγωγή. Σημειώνεται ότι η νόρμα στο χώρο $D(A^k)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \|U\|_{D(A^k)}^2 &= \sum_{j=0}^{k} \left\|A^j U\right\|_H^2 \\ &= \|U\|_{D(A^{k-1})}^2 + \left\|A^k U\right\|_H^2 \qquad (3.37) \\ &= \|U\|_H^2 + \|AU\|_{D(A^{k-1})}^2. \qquad (3.38) \end{aligned}$$

Ομοίως με πριν, εάν $\|U\|_{D(A^k)} \to 0$, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\|U\|_{D(A^k)} \to 0 &\Rightarrow \|U\|_{D(A^{k-1})} \to 0 && \text{(απο την (3.37))}\\ &\Rightarrow \|U\|_{H^k \times H^{k-1}} \to 0 && \text{(απο την υπόθεση της επαγωγής)}\\ &\Rightarrow \|u\|_{H^k}, \|v\|_{H^{k-1}} \to 0. && (3.39)\end{aligned}$$

Παρομοίως, έχουμε:

$$\begin{aligned}\|U\|_{D(A^k)} \to 0 &\Rightarrow \|AU\|_{D(A^{k-1})} \to 0 && \text{(απο την (3.38))}\\ &\Rightarrow \|AU\|_{H^k \times H^{k-1}} \to 0 && \text{(απο την υπόθεση της επαγωγής)}\\ &\Rightarrow \|v\|_{H^k}, \|\Delta u\|_{H^{k-1}} \to 0. && (3.40)\end{aligned}$$

Επικαλούμενοι και πάλι την παρατήρηση 1.3.1, είναι:

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^{k+1}} &\le 2C^2 \left(\|\Delta u\|^2_{H^{k-1}} + \|u\|^2_{H^{k-1}}\right)\\ &\le 2C^2 \left(\|\Delta u\|^2_{H^{k-1}} + \|u\|^2_{H^k}\right). \qquad (3.41)\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}\|U\|_{D(A^k)} \to 0 &\Rightarrow \|u\|_{H^{k+1}}, \|v\|_{H^k} \to 0 && \text{(απο τις (3.38), (3.39) και (3.40))}\\ &\Rightarrow \|U\|_{H^{k+1} \times H^k} \to 0. && \left(\text{αφού } \|U\|^2_{H^{k+1}\times H^k} = \|u\|^2_{H^{k+1}} + \|v\|^2_{H^k}\right)\end{aligned}$$

Επαληθεύσαμε λοιπόν μέσω επαγωγής ότι η $D\left(A^k\right) \subset H^{k+1}(\Omega) \times H^k(\Omega)$ είναι μια συνεχής ενσφήνωση για κάθε ακέραιο $k \ge 1$.

Παρατηρούμε τώρα ότι $D\left(A^k\right) = D\left(A_1^k\right)$ όπου $A_1 = A + I$. Επιπλέον, εύκολα αποδεικνύεται ότι οι νόρμες $\|\cdot\|_{D(A^k)}$ και $\|\cdot\|_{D(A_1^k)}$ είναι ισοδύναμες στον $D\left(A^k\right) = D\left(A_1^k\right)$. Απο το θεώρημα Hille-Yosida, δοθέντος $U_0 \in D\left(A^k\right)$, υπάρχει μοναδική λύση V στο πρόβλημα

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + A_1 V = 0 \quad \text{στο } [0,\infty)\\ V(0) = U_0,\end{cases}$$

για την οποία ισχύει ότι $V \in C^{k-j}\left([0,\infty), D\left(A_1^j\right)\right)$, για κάθε $j = 0, 1, \ldots, k$ και αφού $D\left(A^k\right) = D\left(A_1^k\right)$, τότε:

$$V \in C^{k-j}\left([0,\infty), D\left(A^j\right)\right) \quad \forall j = 0, 1, \ldots, k.$$

Τότε, η μοναδική λύση $U(t) = e^t V(t)$ του προβλήματος

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + AU = 0 \quad \text{στο } [0,\infty)\\ U(0) = U_0,\end{cases}$$

ικανοποιεί:

$$U \in C^{k-j}\left([0,\infty), D\left(A^j\right)\right) \quad \forall j = 0, 1, \ldots, k. \qquad (3.42)$$

Όμως, αφού $U_0 \in D\left(A^k\right)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η (3.42) επίσης θα ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Απο το πόρισμα 1.4.1, δοθέντος $l \in \mathbb{N}$, υπάρχει ακέραιος $m > l$ τέτοιος ώστε η ενσφήνωση $H^m(\Omega) \subset C^l\left(\overline{\Omega}\right)$ να είναι συνεχής. Προφανώς το ίδιο θα ισχύει και για την ενσφήνωση:

$$H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset C^l\left(\overline{\Omega}\right).$$

Έστω τώρα $k = l + m$ και $j = m$. Τότε, η (3.42) γράφεται ώς:

$$U \in C^l\left([0,\infty), H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega)\right) \Rightarrow U \in C^l\left([0,\infty), C^l\left(\overline{\Omega}\right) \times C^l\left(\overline{\Omega}\right)\right), \quad \forall l \in \mathbb{N}. \tag{3.43}$$

Αφού η (3.43) ισχύει για κάθε $l \in \mathbb{N}$ τότε ισχύει και για άπειρο, συνεπώς

$$U \in C^\infty\left([0,\infty), C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \times C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)\right) \Rightarrow u \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$$

και η απόδειξη του θεωρήματος 3.2.2 ολοκληρώθηκε. □

Σχόλια

1. Όπως και η εξίσωση της θερμότητας, όταν το Ω είναι φραγμένο το πρόβλημα (3.21) της κυματικής εξίσωσης μπορεί να λυθεί με ανάλυση ως προς μια βάση Hilbert. Για το σκοπό αυτό, επιλέγουμε μια βάση $\{e_i(x)\}_{i\geq 1} \subset L^2(\Omega)$ που αποτελείτα απο ιδιοσυναρτήσεις του $-\Delta$ με συνθήκη Dirichlet, δηλαδή:

$$\begin{cases} -\Delta e_i &= \lambda_i e_i \quad \text{στο } \Omega, \\ \quad e_i &= 0 \quad\quad \text{στο } \Gamma. \end{cases}$$

   Αναζητούμε λοιπόν μια λύση του προβλήματος (3.21) υπό την μορφή:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) e_i(x).$$

   Θα πρέπει να είναι $a_i''(t) + \lambda_i a_i(t) = 0$, το οποίο δίνει:

$$a_i(t) = a_i(0)\cos\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) + \frac{a_i'(0)}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(\sqrt{\lambda_i} t\right).$$

   Οι σταθερές $a_i(0)$ και $a_i'(0)$ του αποτελέσματος προσδιορίζονται αξιποιώντας τις αρχικές συνθήκες, απο τις σχέσεις:

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0) e_i(x) \quad \text{και} \quad v_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i'(0) e_i(x).$$

   Συνοψίζοντας, η λύση του προβλήματος (3.21) δίνεται απο τη σχέση

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[a_i(0)\cos\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) + \frac{a_i'(0)}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(\sqrt{\lambda_i} t\right)\right] e_i(x).$$

2. Οι σχέσεις συμβατότητας του θεωρήματος 3.2.2 για την ομαλότητα

$$u_0 = \Delta u_0 = \cdots = \Delta^k u_0 = \cdots = 0 \quad \text{στο } \Gamma, \ \forall j \in \mathbb{Z},$$

$$v_0 = \Delta v_0 = \cdots = \Delta^j v_0 = \cdots = 0 \quad \text{στο } \Gamma, \ \forall j \in \mathbb{Z},$$

   αποτελούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να ανήκει η λύση $u(x,t)$ του προβλήματος (3.21) στον χώρο $C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$. Η παρατήρηση αυτή επαληθεύεται εύκολα ακολουθώντας σκεπτικό ανάλογο με αυτό του σχολίου 3 της προηγούμενης ενότητας.

3. Οι τεχνικές και οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν στην παρούσα ενότητα εφαρμόζονται και για την εξίσωση Klein-Gordon:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = 0 \quad \text{στο} \quad Q \quad \text{με} \quad m \in \mathbb{R}, m \neq 0.$$

3.3 Συζευγμένη ροή ήχου και θερμότητας

Στην ενότητα αυτή θα κάνουμε χρήση του θεωρήματος Hille-Yosida για να παρουσιάσουμε αποτελέσματα για το πρόβλημα συνοριακών τιμών των γραμμικοποιημένων εξισώσεων συζευγμένης ροής ήχου και θερμότητας σε ένα φραγμένο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ με συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Το πρόβλημα αυτό είχε αναλυθεί απο τον A. Carasso [9] το 1975 αλλά μελετήθηκε εκ νέου απο τους Ayaka και Tomomi [10] το 2016, όπου παράθεσαν μια απλούστερη απόδειξη καθώς και εξέτασαν την ομαλότητα των λύσεων.

Η διατύπωση του προβλήματος

Σε ένα συμπιεστό ρευστό, κατά τη διάρκεια απειροστών κινήσεων του, η ενέργεια μεταφέρεται όχι μόνο εξαιτίας της κίνησης αλλά και λόγω θερμικής αγωγιμότητας. Λαμβάνοντας υπ'όψιν τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις διατήρησης μάζας, ροπής και ενέργειας του ρευστού (γραμμικοποιημένες εξισώσεις Navier-Stokes), ο A. Carasso καταλήγει στο σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = c\nabla \cdot \vec{u} \\ \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} = c\nabla w - c\nabla e \\ \dfrac{\partial e}{\partial t} = \sigma \Delta e - (\gamma - 1)\, c\nabla \cdot \vec{u}, \end{cases}$$

όπου c η ισοθερμική ταχύτητα, $\gamma \geq 1$ το πηλίκο συγκεκριμένων θερμοκρασιών και $\sigma > 0$ η θερμική αγωγιμότητα του ρευστού.

Υποθέτουμε ότι η διαταραχή του ρευστού λαμβάνει χώρα σε κάποιο σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ και ότι οι συνθήκες του περιβάλλοντος χώρου συναντούνται στο σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$, συνεπώς $e = w = 0$ στο Γ για κάθε $t \geq 0$. Έπειτα απο απλές πράξεις και προσθέτοντας αρχικές συνθήκες, λαμβάνουμε τη γενικότερη μορφή του προβλήματος:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \Delta w - c^2 \Delta e + m^2 w & \text{στο } \Omega \times [0, \infty) \\ \dfrac{\partial e}{\partial t} = \sigma \Delta e - (\gamma - 1)\, \dfrac{\partial w}{\partial t} & \text{στο } \Omega \times [0, \infty) \\ e = w = 0 & \text{στο } \Gamma \times [0, \infty) \\ w(x, 0) = w_0(x), \dfrac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = v_0(x), e(x, 0) = e_0(x) & \text{στο } \Omega, \end{cases} \tag{3.44}$$

με $\sigma > 0, \gamma > 1, c > 0$ και $m \in \mathbb{R}$. Ο A. Carasso [9] εργάστηκε πάνω σε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων με $m = 0$. Οι Ayaka και Tomomi [10] όμως έδειξαν την ύπαρξη, μοναδικότητα και ομαλότητα των λύσεων για $m \in \mathbb{R}$ κάνοντας χρήση του θεωρήματος Hille-Yosida και η ανάλυση που ακολουθεί βασίζεται πάνω στα αποτελέσματα τους.

Θεώρημα 3.3.1 (Ύπαρξη και Μοναδικότητα):

Έστω $w_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), v_0 \in H_0^1(\Omega)$ και $e_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Τότε, υπάρχει μοναδική λύση (w, e) του προβλήματος (3.44) η οποία ικανοποιεί:

$$w \in C\left([0, \infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0, \infty), H_0^1(\Omega)\right) \cap C^2\left([0, \infty); L^2(\Omega)\right), \tag{3.45}$$

$$e \in C\left([0, \infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0, \infty), H_0^1(\Omega)\right) \cap C^2\left([0, \infty); L^2(\Omega)\right). \tag{3.46}$$

Επιπλέον, ισχύουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις για κάποιο $a > 0$:

$$\begin{aligned}
&\|w(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{c^2}\|v(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\gamma-1}\|e(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\leq e^{2\alpha t}\left(\|w_0\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{c^2}\|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\gamma-1}\|e_0\|^2_{H^1(\Omega)}\right) \quad \forall t \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
&\|v(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{c^2}\left\|c^2\Delta w(t) - c^2\Delta e(t) + m^2 w(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\gamma-1}\|\sigma\Delta e(t) - (\gamma-1)v(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \\
\leq& e^{2\alpha t}\left(\|v_0\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{c^2}\left\|c^2\Delta w_0 - c^2\Delta e_0 + m^2 w_0\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\gamma-1}\|\sigma\Delta e_0 - (\gamma-1)v_0\|^2_{H^1(\Omega)}\right) \quad \forall t \geq 0
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Απόδειξη: Θέτοντας $v := w_t$, μπορούμε να μετασχηματίσουμε το σύστημα (3.44) σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως, ως:

$$\begin{cases} w_t = v, \\ v_t = c^2\Delta w - c^2\Delta e + m^2 w, \\ e_t = \sigma\Delta e - (\gamma-1)v. \end{cases} \tag{3.49}$$

Γράφωντας το σύστημα σε μορφή πινάκων, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} w_t \\ v_t \\ e_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v \\ \left(c^2\Delta + m^2 I\right)w - c^2\Delta e \\ -(\gamma-1)\,v + \sigma\Delta e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ c^2\Delta + m^2 I & 0 & -c^2\Delta \\ 0 & -(\gamma-1)\,I & \sigma\Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ v \\ e \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ -c^2\Delta - m^2 I & 0 & c^2\Delta \\ 0 & (\gamma-1)\,I & -\sigma\Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ v \\ e \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Τώρα, θέτοντας

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ -c^2\Delta - m^2 I & 0 & c^2\Delta \\ 0 & (\gamma-1)\,I & -\sigma\Delta \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad U := \begin{pmatrix} w \\ v \\ e \end{pmatrix}$$

το σύστημα (3.49) αποκτάει τη μορφή:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + AU = 0 \\ U(0) = U_0, \end{cases} \qquad \text{όπου} \quad U_0 = \begin{pmatrix} w_0 \\ v_0 \\ e_0 \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε τώρα τον τελεστή $A : D(A) \subset H \to H$ με $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \times H^1_0(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$. Ο χώρος $H := H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ είναι *Hilbert* και είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle U_1, U_2 \rangle = \int_\Omega \nabla w_1 \nabla w_2 + \int_\Omega w_1 w_2 + \frac{1}{c^2}\int_\Omega v_1 v_2 + \frac{1}{\gamma-1}\int_\Omega \nabla e_1 \nabla e_2 + \frac{1}{\gamma-1}\int_\Omega e_1 e_2,$$

όπου $U_j = \begin{pmatrix} w_j \\ v_j \\ e_j \end{pmatrix}$ με $j = 1, 2$.

Διαφορετικά, το ως άνω εσωτερικό γινόμενο γράφεται ως:

$$\langle U_1, U_2 \rangle = \langle w \rangle_{H^1} + \frac{1}{c^2} \langle v_1, v_2 \rangle_{L^2} + \frac{1}{\gamma - 1} \langle e_1, e_2 \rangle_{H^1}.$$

Επομένως, η νόρμα στον H δίνεται ως:

$$\|U\|_H^2 = \|w\|_{H^1}^2 + \frac{1}{c^2} \|v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \|e\|_{H^1}^2.$$

Ενδιαφερόμαστε να ερευνήσουμε τώρα πότε ο τελεστής $(A + aI)$ είναι μονότονος, όπου a θετική σταθερά. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\langle AU, U \rangle = &\int_\Omega \nabla(-v) \cdot \nabla w + \int_\Omega (-v) w + \frac{1}{c^2} \int_\Omega \left(-c^2 \Delta w - m^2 w + c^2 \Delta e\right) v \\ &+ \frac{1}{\gamma - 1} \int_\Omega \nabla\left[(\gamma - 1) v - \sigma \Delta e\right] \cdot \nabla e + \frac{1}{\gamma - 1} \int_\Omega \left[(\gamma - 1) v - \sigma \Delta u\right] e.\end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας του Green, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\langle AU, U \rangle = &\int_\Omega v \Delta w - \int_\Omega v w + \frac{1}{c^2} \int_\Omega \left(-c^2 \Delta w - m^2 w + c^2 \Delta e\right) v \\ &- \frac{1}{\gamma - 1} \int_\Omega \left[(\gamma - 1) v - \sigma \Delta e\right] \Delta e + \frac{1}{\gamma - 1} \int_\Omega \left[(\gamma - 1) v - \sigma \Delta e\right] e \\ &= \int_\Omega v \Delta w - \int_\Omega v w - \int_\Omega v \Delta w - \frac{m^2}{c^2} \int_\Omega v w + \int_\Omega v \Delta e \\ &+ \frac{\sigma}{\gamma - 1} \int_\Omega |\Delta e|^2 - \int_\Omega v \Delta e - \frac{\sigma}{\gamma - 1} \int_\Omega e \Delta e + \int_\Omega v e \\ &= -\left(1 + \frac{m^2}{c^2}\right) \int_\Omega v w + \frac{\sigma}{\gamma - 1} \int_\Omega v |\Delta e|^2 + \int_\Omega v e - \frac{\sigma}{\gamma - 1} \int_\Omega e \Delta e \\ &= -\left(1 + \frac{m^2}{c^2}\right) \int_\Omega v w + \frac{\sigma}{\gamma - 1} \int_\Omega |\Delta e|^2 + \int_\Omega v e + \frac{\sigma}{\gamma - 1} \int_\Omega |\nabla e|^2 \\ &\geq -\left(1 + \frac{m^2}{c^2}\right) \int_\Omega v w + \int_\Omega v e.\end{aligned} \tag{3.50}$$

Απο την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, έχουμε ότι:

$$vw \leq |v|\,|w| \leq \frac{v^2 + w^2}{2} \quad \text{και} \quad ve \geq -|v|\,|e| \geq -\frac{v^2 + e^2}{2}. \tag{3.51}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.50) και (3.51), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\langle AU, U \rangle &\geq -\left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{2c^2}\right) \int_\Omega \left(v^2 + w^2\right) - \frac{1}{2} \int_\Omega \left(v^2 + e^2\right) \\ &= \left(1 + \frac{m^2}{2c^2}\right) \int_\Omega v^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{2c^2}\right) \int_\Omega w^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega e^2.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Έστω τώρα $a > \max\left\{|m|, \left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{2c^2}\right), c^2\left(1 + \frac{m^2}{2c^2}\right), \frac{\gamma - 1}{2}\right\}$. Τότε, απο την (3.52) καταλήγουμε ότι:

$$\begin{aligned}\langle (A + aI) U, U \rangle \geq &-\left(1 + \frac{m^2}{2c^2}\right) \int_\Omega v^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{2c^2}\right) \int_\Omega w^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega e^2 + a \int_\Omega |\nabla w|^2 \\ &+ a \int_\Omega w^2 + \frac{a}{c^2} \int_\Omega v^2 + \frac{a}{\gamma - 1} \int_\Omega |\nabla e|^2 + \frac{a}{\gamma - 1} \int_\Omega e^2 \\ &= \left[a - \left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{2c^2}\right)\right] \int_\Omega w^2 + \left[\frac{a}{c^2} - \left(1 + \frac{m^2}{2c^2}\right)\right] \int_\Omega v^2 + \left[\frac{a}{\gamma - 1} - \frac{1}{2}\right] \int_\Omega e^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Επομένως ο τελεστής $(A + aI)$ είναι μονότονος για κάθε θετική σταθερά a, τέτοια ώστε:

$$a > \max\left\{|m|, \left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{2c^2}\right), c^2\left(1 + \frac{m^2}{2c^2}\right), \frac{\gamma - 1}{2}\right\}.$$

Τώρα, θα δείξουμε ότι για θετική σταθερά $\beta > |m|$ ισχύει ότι $R(A + \beta I) = H$, δηλαδή ότι ο τελεστής $(A + \beta I)$ είναι μεγιστικός μονότονος. Έστω λοιπόν $F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \in H$. Θέλουμε να βρούμε $U = \begin{pmatrix} w \\ v \\ e \end{pmatrix} \in D(A)$ τέτοιο ώστε $(A + \beta I)U = F$, δηλαδή:

$$\begin{cases} -v + \beta w = f, \\ -c^2\Delta w - m^2 w + c^2\Delta e + \beta v = g, \\ (\gamma - 1)v - \sigma\Delta e + \beta e = h. \end{cases}$$

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως $v = \beta w - f$ και αντικαθιστώντας, παίρνουμε πλέον δύο εξισώσεις:

$$\begin{cases} -\Delta w + \left(\dfrac{\beta^2 - m^2}{c^2}\right) w + \Delta e = \dfrac{\beta f}{c^2} + \dfrac{g}{c^2}, \\ -\Delta e + \dfrac{\beta}{\sigma} e + \dfrac{\beta(\gamma - 1)}{\sigma} w = \dfrac{(\gamma - 1)}{\sigma} f + \dfrac{h}{\sigma}. \end{cases} \tag{3.53}$$

Σκοπός μας είναι να αξιοποιήσουμε την παρατήρηση 1.3.1 της εισαγωγής, δηλαδή να βρούμε σταθερές έτσι ώστε να εκφράσουμε τις εξισώσεις (3.53) στη μορφή $-\Delta\phi + k\phi = p$, όπου ϕ γραμμικός συνδυασμός των w και e - τότε απο την εν λόγω παρατήρηση, η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ για κάθε $p \in L^2(\Omega)$ και $k > 0$.

Για απλούστευση, γράφουμε τις (3.53) ως

$$\begin{cases} -\Delta w + \gamma_1 w + \Delta e = f_1, \\ -\Delta e + \gamma_2 e + \gamma_3 w + f_2, \end{cases}$$

όπου $\gamma_1 = \dfrac{\beta^2 - m^2}{c^2}$, $\gamma_2 = \dfrac{\beta}{\sigma}$, $\gamma_3 = \dfrac{\beta(\gamma - 1)}{\sigma}$, $f_1 = \dfrac{\beta}{c^2} f + \dfrac{g}{e^2}$, $f_2 = \dfrac{\gamma - 1}{\sigma} f + \dfrac{h}{\sigma}$. Έστω τωρα κάποια σταθερά a, την οποία θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια. Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση επί a και προσθέτοντας την στην δεύτερη, λαμβάνουμε την εξίσωση:

$$-\Delta[aw + (1 - a)e] + [(a\gamma_1 + \gamma_3)w + \gamma_2 e] = af_1 + f_2. \tag{3.54}$$

Θα ερευνήσουμε τώρα εάν υπάρχει σταθερά k, τέτοια ώστε $\phi = aw + (1 - a)e$ και $k\phi = (a\gamma_1 + \gamma_3)w + \gamma_2 e$. Έχουμε:

$$k[aw + (1 - a)e] = (a\gamma_1 + \gamma_3)w + \gamma_2 e.$$

Συγκρίνοντας τις σταθερές των w και e, θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{a\gamma_1 + \gamma_3}{a} = \frac{\gamma_2}{1 - a} = k.$$

Κρατώντας τα δύο πρώτα μέλη και κάνοντας απλές πράξεις, παίρνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$\gamma_1 a^2 + (\gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1)a - \gamma_3 = 0. \tag{3.55}$$

Η ορίζουσα D της (3.55) ισούται με $D = (\gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1)^2 + 4\gamma_1\gamma_3$. Εξ' ορισμού των γ_1, γ_2 και γ_3 εύκολα έπεται ότι $D > 0$, συνεπώς η εξίσωση (3.55) έχει δύο διακριτές, μη μηδενικές και πραγματικές λύσεις. Έστω a_1 και a_2 οι λύσεις αυτές:

$$a_1 = \frac{-(\gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1) + \sqrt{D}}{2\gamma_1},$$
$$a_2 = \frac{-(\gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1) - \sqrt{D}}{2\gamma_1}.$$

Είναι $a_1 > 0$ αφού $\sqrt{(\gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1)^2 + 4\gamma_1\gamma_2} > |\gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1|$. Τότε, έχουμε τις εξής τιμές για το k σε αντιστοιχία με αυτές των a_1 και a_2:

$$k_1 = \frac{a_1\gamma_1 + \gamma_3}{a_1} = \frac{\gamma_2}{1 - a_1},$$
$$k_2 = \frac{a_2\gamma_1 + \gamma_3}{a_2} = \frac{\gamma_2}{1 - a_2}.$$

Έτσι, έχουμε

$$k_1 = \frac{a_1\gamma_1 + \gamma_3}{a_1} > 0, \qquad \text{(αφού } a_1, \gamma_1, \gamma_3 > 0)$$
$$k_2 = \frac{\gamma_2}{1 - a_2} = \frac{2\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \sqrt{D}} > 0. \qquad \text{(αφου } \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0)$$

και ως εκ τούτου υπάρχουν θετικές σταθερές k_1 και k_2 που αντιστοιχούν στις a_1 και a_2. Απο την παρατήρηση 1.3.1, οι εξισώσεις

$$-\Delta\phi_1 + k_1\phi_1 = a_1 f_1 + f_2,$$
$$-\Delta\phi_2 + k_2\phi_2 = a_2 f_1 + f_2$$

έχουν μοναδικές λύσεις $\phi_1, \phi_2 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Όμως, απο την εξίσωση (3.54) οι $a_1 w + (1 - a_1) e$ και $a_2 w + (1 - a_2) e$ επίσης ικανοποιούν τις παραπάνω εξισώσεις, συνεπώς λόγω της μοναδικότητας των λύσεων, είναι:

$$\phi = a_1 w + (1 - a_1) e,$$
$$\phi_2 = a_2 w + (1 - a_2) e.$$

Απομονώνοντας τα w και e παρατηρούμε ότι $w, e \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ και συνεπώς πράγματικη βρήκαμε $U = \begin{pmatrix} w \\ v \\ e \end{pmatrix} \in D(A)$, τέτοιο ώστε $(A + \beta I) U = F \implies R(A + \beta I) = H$.

Επιλέγουμε λοιπόν

$$a > \max\left\{ |m|, \left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{2c^2}\right), c^2\left(1 + \frac{m^2}{2c^2}\right), \frac{\gamma - 1}{2} \right\}$$

και $\beta = a + 1$. Τότε $\beta > a > |m|$ και απο τα παραπάνω, ο τελεστής $A_1 = (A + aI)$ θα είναι μεγιστικός μονότονος. Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + A_1 V = 0 \quad \text{στο } [0, \infty), \\ V(0) = U(0) \in D(A_1) = D(A). \end{cases} \tag{3.56}$$

Τότε, απο το θεώρημα Hille-Yosida θα υπάρχει μοναδική λύση V στο πρόβλημα που ικανοποιεί:

$$V \in C^1\left([0,\infty), H\right) \cap C\left([0,\infty), D\left(A\right)\right).$$

Ακολουθώντας παρόμοια μεθοδολογία με το Λήμα 2.2.1 και σημείο της απόδειξης του θεωρήματος Hille-Yosida, παίρνουμε την εκτίμηση:

$$\left\|-Au(t) + au(t)\right\| \leq \left\|-Au_0 + au_0\right\|.$$

Επιπλέον, παίρνουμε ότι $\|V(t)\| \leq \|U_0\|$ και:

$$\begin{aligned}
&\left\|-A_1V(t) + aV(t)\right\| \leq \left\|-A_1U_0 + aU_0\right\| \\
&\Rightarrow \left\|-AV(T) - aV(t) + aV(t)\right\| \leq \left\|-AU_0 - aU_0 + aU_0\right\| \\
&\Rightarrow \left\|AV(t)\right\| \leq \left\|AU_0\right\|. \qquad (3.57)
\end{aligned}$$

Έστω τώρα $U(t) = e^{at}V(t)$ και έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= e^{at}\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + aV(t)\right] \\
&= e^{at}\left[-AV(t)\right] \\
&= -A\left[e^{at}V(t)\right] \\
&= -AU(t)
\end{aligned}$$

Έχουμε καταλήξει δηλάδη ότι η $U(t) = e^{at}V(t)$ αποτελεί μοναδική λύση του προβλήματος

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + AU(t) = 0 \quad \text{στο } [0,\infty) \\
U(0) = V(0) = U_0,
\end{cases}$$

ικανοποιώντας $U \in C^1\left([0,\infty), H\right) \cap C\left([0,\infty), D\left(A\right)\right)$ απ' όπου άμεσα παίρνουμε τις συνθήκες του θεωρήματος:

$$w \in C\left([0,\infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,\infty), H_0^1(\Omega)\right) \cap C^2\left([0,\infty); L^2(\Omega)\right),$$

$$e \in C\left([0,\infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,\infty), H_0^1(\Omega)\right) \cap C^2\left([0,\infty); L^2(\Omega)\right).$$

Τέλος, την $\|V(t)\| \leq \|U_0\|$ και την (3.57), λαμβάνουμε τις εξής εκτιμήσεις

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|^2 &= e^{2at}\|V(t)\|^2 \leq e^{2at}\|U_0\|^2, \\
\|AU(t)\|^2 &= e^{2at}\|AV(t)\|^2 \leq e^{2at}\|AU_0\|^2,
\end{aligned}$$

απο τις οποίες προκύπτουν οι (3.47) και (3.48) του θεωρήματος. □

Θέωρημα 3.3.2 (Ομαλότητα):

Έστω ότι $w_0, v_0, e_0 \in H^k(\Omega)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και επίσης ότι ισχύουνοι ακόλουθες συνθήκες συμβατότητας:

$$\begin{aligned}
\Delta^j w_0 &= 0 \quad \text{στο} \quad \Gamma, \forall j \in \mathbb{N}, \\
\Delta^j v_0 &= 0 \quad \text{στο} \quad \Gamma, \forall j \in \mathbb{N}, \\
\Delta^j e_0 &= 0 \quad \text{στο} \quad \Gamma, \forall j \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Τότε, η λύση (w,e) του προβλήματος (3.44) που δίνεται απο το Θεώρημα 3.3.1, ικανοποιεί:

$$(w,e) \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right) \times C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right).$$

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι ο $D\left(A^k\right)$ ορίζεται επαγωγικά, ως:

$$D\left(A^1\right) = D\left(A\right),\ D\left(A^k\right) = \left\{U \in D\left(A^{k-1}\right) \middle| AU \in D\left(A^{k-1}\right)\right\}.$$

Αρχικά, παρομοίως με το πρώτο σκέλος της απόδειξης του θεωρήματος 3.2.2, δείχνουμε επαγωγικά ότι:

$$D\left(A^k\right) \subseteq D_k = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ v \\ e \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} w \in H^{k+1}\left(\Omega\right), \Delta^j w = 0 \ \text{ στο } \ \Gamma,\ \forall j, 0 \leq j \leq \left[\frac{k}{2}\right] \\ v \in H^{k}\left(\Omega\right), \Delta^j v = 0 \ \text{ στο } \ \Gamma,\ \forall j, 0 \leq j \leq \left[\frac{k-1}{2}\right] \\ e \in H^{k+1}\left(\Omega\right), \Delta^j e = 0 \ \text{ στο } \ \Gamma,\ \forall j, 0 \leq j \leq \left[\frac{k}{2}\right] \end{array} \right\}.$$

Στη συνέχεια, ξανά παρομοίως με την απόδειξη του θεωρήματος 3.2.2 αλλά με το δεύτερο σκέλος αυτή τη φορά, αποδεικνύεται ότι η ενσφήνωση

$$D\left(A^k\right) \subseteq H^{k+1}\left(\Omega\right) \times H^{k}\left(\Omega\right) \times H^{k+1}\left(\Omega\right)$$

είναι συνεχής για κάθε ακέραιο $k \geq 1$.

Έστω τώρα $A_1 = A + aI$. Τότε, παρατηρούμε ότι $D\left(A^k\right) = D\left(A_1^k\right)$ και οι νόρμες $\|\cdot\|_{D(A^k)}, \|\cdot\|_{D(A_1^k)}$ είναι ισοδύναμες. Τώρα, δοθέντος $U_0 \in D\left(A^k\right)$, η μοναδική λύση V του προβλήματος

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + A_1 V = 0, \ \text{στο} \ [0,\infty), \\ V\left(0\right) = U_0 \end{cases}$$

ικανοποιεί $V \in C^{k-j}\left([0,\infty), D\left(A_1^j\right)\right)$ για κάθε $j = 0, 1, \ldots, k$. Αφού όμως $D\left(A_1^k\right) = D\left(A^k\right)$, τότε η παραπάνω φράση είναι ισοδύναμη με την:

$$V \in C^{k-j}\left([0,\infty), D\left(A^j\right)\right),\ \forall j = 0, 1, \ldots, k.$$

Τότε, η μοναδική λύση $U(t) = e^{at}V(t)$ του προβλήματος

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + AU = 0, \ \text{στο} \ [0,\infty), \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

ικανοποιεί $U \in C^{k-j}\left([0,\infty), D\left(A^j\right)\right)$ για κάθε $j = 0, 1, \ldots, k$. Εξ' υποθέσως όμως είναι $U_0 \in D\left(A^k\right)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και επομένως η παραπάνω έκφραση επίσης ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Τώρα, απο το πόρισμα 1.4.1, δοθέντος οποιουδήποτε $l \in \mathbb{N}$, υπάρχει ακέραιος $m > l$ τέτοιος ώστε η ενσφήνωση $H^m\left(\Omega\right) \subset C^l\left(\overline{\Omega}\right)$ να είναι συνεχής. Τότε, συνεχής θα είναι και η ενσφήνωση $H^{m+1}\left(\Omega\right) \subset H^m\left(\Omega\right) \subset C^l\left(\overline{\Omega}\right)$. Διαλέγουμε k και m, έτσι ώστε $k = l + m, j = m$ και έτσι:

$$\begin{aligned} &U \in C^l\left([0,\infty), H^{m+1}\left(\Omega\right) \times H^m\left(\Omega\right) \times H^{m+1}\left(\Omega\right)\right) \\ \Rightarrow &U \in C^l\left([0,\infty), C^l\left(\overline{\Omega}\right) \times C^l\left(\overline{\Omega}\right) \times C^l\left(\overline{\Omega}\right)\right),\ \forall l \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Αφού όμως η (3.58) ισχύει για κάθε $l \in \mathbb{N}$, θα ισχύει και για άπειρο, δηλαδή:

$$\begin{aligned} &U \in C^\infty\left([0,\infty), C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \times C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \times C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)\right) \\ \Rightarrow &\left(w, e\right) \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right) \times C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right). \end{aligned}$$

□

Βιβλιογραφία

[1] Haim Brezis, *Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία και Εφαρμογές.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1997.

[2] Haim Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer-Verlag New York, 2010.

[3] Erich H. Rothe, *Nonlinear Analysis: A collection of papers in Honor of Erich H. Rothe.* Academic Press, 1978.

[4] Martin Schechter, *Principles of Functional Analysis.* American Mathematical Society, 2002.

[5] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 2010.

[6] Amnon Pazy, *Semigrous of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag New York, 1983.

[7] Peter Lax, *Functional Analysis*, Wiley, 2002.

[8] Kosaku Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag New York, 1995

[9] Alfred Carasso, *Coupled Sound and Heat Flow and the Method of Least Squares*, Mathematics of Computation, 1975.

[10] Matsubara Ayaka & Yokota Tomomi, *Applications of the Hille-Yosida theorem to the linearized equations of coupled sound and heat flow*, AIMS Mathematics, 2016.

[11] Apratim De, *The Hille-Yosida Theorem and some Applications*, Central European University, 2015.

[12] Fabio Grassi, *The Hille-Yosida theorem and some applications*, Politecnico Di Torino, 2019.

[13] Χαράλαμπος Φιλιππάτος, *Μεγιστικοί Μονότονοι Τελεστές: Πλειότιμοι και μη γραμμικοί*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2020.