ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL
OF APPLIED MATHEMATICAL
AND PHYSICAL SCIENCES

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

ΔΕΛΑΤΟΛΑΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Επιβλέπων Καθηγητής: Α. Χαραλαμπόπουλος

ΤΡΙΜΕΛΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Καθηγητής ΕΜΠ (ΣΕΜΦΕ)

Α. Χαραλαμπόπουλος

Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ (ΣΕΜΦΕ)

Ν. Γιαννακάκης

Επίκουρη Καθηγήτρια ΕΜΠ (ΣΕΜΦΕ)

Β. Δούκα

ΑΘΗΝΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2021

Η Παρούσα Διπλωματική Εργασία

Εκπονήθηκε Στα Πλαίσια Των Σπουδών

Για Την Απόκτηση Του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Που Απονέμει Το

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL
OF APPLIED MATHEMATICAL
AND PHYSICAL SCIENCES

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Διπλωματική Εργασία

του

ΔΕΛΑΤΟΛΑ ΘΕΟΔΩΡΟΥ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την ……………………..

(Υπογραφή) …………………… **Α. Χαραλαμπόπουλος** **Καθηγήτης ΕΜΠ** Επιβλέπων Καθηγητής	*(Υπογραφή)* …………………… **Ν. Γιαννακάκης** **Αναπληρωτής Καθηγητής** **ΕΜΠ**	*(Υπογραφή)* …………………….. **Β. Δούκα** **Επίκουρη Καθηγήτρια** **ΕΜΠ**

Αθήνα, ………………………. 2021

Ευχαριστίες

Με ιδιαίτερη χαρά εκφράζω τις θερμές μου ευχαριστίες προς τον επιβλέποντα Καθηγητή μου, Α. Χαραλαμπόπουλο, που με άφησε να ασχοληθώ με τις «Γενικευμένες Συναρτήσεις και τους Ολοκληρωτικούς Μετασχηματισμούς». Οι πολύτιμες παρατηρήσεις του και οι συμβουλές του αποτέλεσαν τα θεμέλια για την εκπόνηση και τη διαμόρφωση της διπλωματικής μου εργασίας υπό την παρούσα μορφή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αναπληρωτή καθηγητή Ν. Γιαννακάκη και την επίκουρη καθηγήτρια Β. Δούκα που υπήρξαν, μαζί με τον επιβλέποντα καθηγητή μου, την επιτροπή αξιολόγησής μου.

Πρόλογος

Η ανάπτυξη της επιστήμης, απαιτεί για την θεωρητική της βάση, όλο και περισσότερα «υψηλά μαθηματικά», όπως είναι οι γενικευμένες συναρτήσεις, π.χ η συνάρτηση Dirac, και οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί, π.χ. ο μετασχηματισμός Fourier. Η θεωρία των παραπάνω συναρτήσεων σχετίζεται με τη Φυσική και τα Μαθηματικά, καθώς έχει μια σειρά από αξιοσημείωτες ιδιότητες που επεκτείνουν τις δυνατότητες της κλασσικής Μαθηματικής Ανάλυσης, επεκτείνουν το φάσμα των προβλημάτων που εξετάζονται και επίσης οδηγούν σε σημαντικές απλοποιήσεις στους υπολογισμούς, αυτοματοποιώντας τις στοιχειώδες λειτουργίες.

Σκοπός αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας είναι να δημιουργηθεί ένα σύγγραμα που να είναι ευκολοδιάβαστο, χωρίς να περιέχει δύσκολες έννοιες, ενώ τα παραδείγματα είναι κλιμακώμενης δυσκολίας. Η εργασία αυτή χωρίζεται σε τρία κεφάλαια, τα οποία είναι:

Το $1^{ο}$ Κεφάλαιο, που αναφέρεται στις γενικευμένες συναρτήσεις, εξετάζει α) τη συνάρτηση βαθμίδος Heaviside και β) τη συνάρτηση Dirac ή συνάρτηση δέλτα.

Το $2^{ο}$ Κεφάλαιο, στο οποίο ορίζουμε τον Μετασχηματισμό Κατά Fourier (μ.κ.F.) και τον Αντίστροφο Μετασχηματισμό Κατά Fourier (α.μ.κ.F). (α) Διατυπώνονται και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες αυτών. (β) Υπολογίζονται οι μετασχηματισμοί Fourier στοιχειωδών συναρτήσεων και (γ) Επιλύονται Προβλήματα Αρχικών/Συνοριακών Τίμων και συγκεκριμένα τα προβλήματα: (i) της θερμαινόμενης ράβδου και ii) της παλλόμενης χορδής.

Το $3^{ο}$ Κεφάλαιο, μελετάει τα συστήματα, μέσω ενός μετασχηματισμού που μετασχηματίζει ένα σήμα σε ένα άλλο σήμα. Ορίζουμε τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων. (α) Διατυπώνονται και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές της. (β) Βρίσκεται η συνέλιξη δύο συναρτήσεων μέσω των γραφικών προσδιορισμών αυτών (γ) Διατυπώνεται το θεώρημα της συνέλιξης και επιλύονται διάφορες συνήθεις και μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Λέξεις Κλειδιά: γενικευμένες συναρτήσεις. συνάρτηση Dirac - Delta. Heaviside. μετασχηματισμός Fourier. συνέλιξη. εξίσωση θερμότητας. εξίσωση παλλόμενης χορδής. μερικές διαφορικές εξισώσεις, Μ.Δ.Ε.

Abstract

The development of science requires for its theoretical basis more and more "high mathematics", such as generalized functions, e.g. the Dirac function, and complete transformations, e.g. the Fourier transformation. The theory of the above functions is related to Physics and Mathematics, as it has a number of remarkable properties that expand the possibilities of classical Mathematical Analysis, expand the range of problems examined and also lead to significant simplifications in calculations, automation of elementary functions. The purpose of this postgraduate work is to create a link that is easy to read, without containing difficult concepts, while the examples are of escalating difficulty. This work is divided into three chapters, which are:

Chapter 1, which refers to generalized functions, examines (a) the Heaviside step function and (b) the Dirac function or the Dirac function.

Chapter 2, in which we define The Fourier Transformation (M.C.F.) and the Fourier Reverse Transformation (A.M.C.F.). (a) The basic properties of these shall be formulated and demonstrated. (b) Fourier transformations of elementary functions are calculated and (c) Problems of Initial/Border Prices are resolved, namely problems: (i) the heated rod and (ii) the pulsating string.

Chapter 3 studies systems through a transformation that transforms one signal into another signal. We define the convolution of two functions. (a) Its basic properties are formulated and demonstrated. (b) The convolution of two functions is located through these graphical definitions (c) The theorem of the convolution is formulated and various common and some differential equations are resolved.

Keywords: generalized functions. Dirac - delta. Heaviside. Fourier transformation. convolution. heat equation. the vibrating string. partial different equations. p.d.e.

Πίνακας Περιεχομένων

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 1ο

Γενικευμένες Συναρτήσεις

Εισαγωγή

Θεωρούμε την κλάση όλων των οικογενειών (άρα και ακολουθιών) $\{h_n(t)\}$ από συνήθεις συναρτήσεις $h_n(t)$ που έχουν άπειρους παραγώγους, συνεχείς στο R (απείρως λείες συναρτήσεις) και έχουν την ιδιότητα να συγκλίνουν ασθενώς προς ένα σημειοσύνολο που αποτελείται από τα όρια όλων των ακολουθιών της παραπάνω κλάσης. Οικογένειες αυτής της μορφής είναι γνωστές ως **γενικευμένες συναρτήσεις**.

Ορισμός: Μια γενικευμένη συνάρτηση f(t) μπορεί να οριστεί και ως μια ακολουθία καλών συναρτήσεων $h_n(t)$, έτσι ώστε για κάθε καλή συνάρτηση g(x), το όριο:

$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)g(x)dx =: \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$ να υπάρχει.

Ορισμός: Καλή συνάρτηση ορίζεται αυτή που είναι παραγωγίσιμη παντού και οι παράγωγοί τους μηδενίζονται καθώς |x| → ∞, γρηγορότερα από την οποιαδήποτε δύναμη του $1/_{|x|}$.

Παραδείγματα

1. Θεωρούμε την $h_n(t) = \frac{n}{1+n^2t^2}$. Προφανώς η $h_n(t)$ είναι απείρως λεία συνάρτηση και $\lim_{n\to\infty} h_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+n^2t^2} = \begin{cases} 0, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ t \neq 0 \\ \infty, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ t = 0 \end{cases}$

Οι οικογένειες όπως του παραπάνω παραδείγματος καλούνται οικογένειες **Dirac**, για τις οποίες θα μιλήσουμε αργότερα.

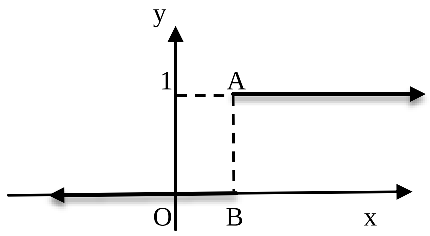
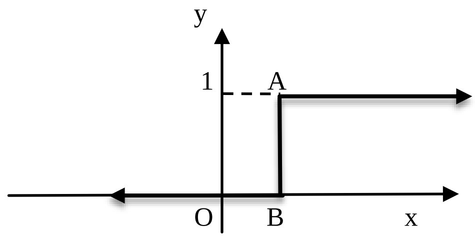
2. Θεωρούμε την $h_n(t) = \frac{1}{2}[1 + \frac{nt}{\sqrt{1+n^2t^2}}]$. Προφανώς η $h_n(t)$ είναι απείρως λεία συνάρτηση και $\lim_{n\to\infty} h_n(t) = \lim_{n\to\infty} [\frac{1}{2} + \frac{nt}{2\sqrt{1+n^2t^2}}] = \begin{cases} 0, \acute{o}\tau\alpha\nu\ t < 0 \\ \frac{1}{2}, \acute{o}\tau\alpha\nu\ t = 0 \\ 1, \acute{o}\tau\alpha\nu\ t > 0 \end{cases}$

Οι οικογένειες όπως του παραπάνω παραδείγματος καλούνται οικογένειες **Heaviside**, για τις οποίες θα μιλήσουμε παρακάτω.

Δύο κανονικές συναρτήσεις, έτσι όπως τις ξέρουμε, είναι ίσες: όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και λαμβάνουν τις ίδιες τιμές σε αυτό το πεδίο ορισμού. Αυτός ο ορισμός δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις γενικευμένες συναρτήσεις, διότι δεν ορίζονται η τιμή τους για ορισμένες τιμές του πεδίου ορισμού τους. Άρα:

Δύο γενικευμένες συναρτήσεις φ και y είναι ίσες όταν για κάθε συνεχή και παραγωγίσιμη δοκιμαστική συνάρτηση α(t) ισχύει: $\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\varphi(t)a(t)dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{y(t)a(t)dt}$**.**

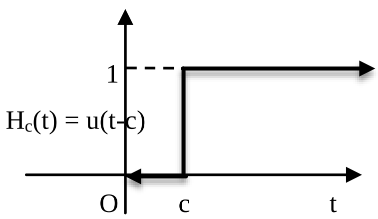
Η γραφική παράσταση μιας γενικευμένης συνάρτησης π.χ της συνάρτησης Heaviside, συμπληρώνεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που είναι κάθετο στον άξονα των x΄x.

	
Συνήθης Συνάρτηση Heaviside	Γενικευμένη Συνάρτηση Heaviside

Α. Συνάρτηση Βαθμίδος Heaviside

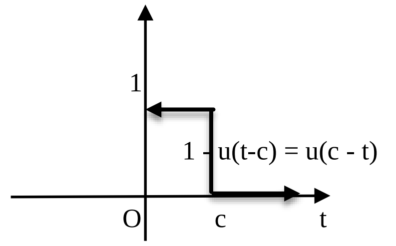
Έστω ότι θέλουμε να γενικεύσουμε τον ορισμό της διαφορισιμότητας συναρτήσεων, με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί σε συναρτήσεις που έχουν άλματα ασυνέχειας. Στην πραγματικότητα προσπαθούμε να ορίσουμε την παράγωγο σε μια συνάρτηση που έχει άλματα ασυνέχειας, όπως η συνάρτηση Heaviside, την οποία θα ορίσουμε παρακάτω. Τη συνάρτηση Heaviside τη συμβολίζουμε ως H(t) ή u(t) ή θ(t)...

Δεχόμαστε ότι για όλα τα $t \neq c$, όπου c μια σταθερά, έχουμε $u'(t) = 0$, είναι καλώς ορισμένη, με την κλασσική έννοια, και μας λέει πως η γραφική παράσταση της $y = u(t - c)$ έχει κλίση μηδέν για όλες τις τιμές t που είναι διάφορες της σταθεράς c. Αν $t = c$ τότε έχει άλμα ασυνέχειας, οπότε ο κλασσικός ορισμός της παραγώγου είναι λανθασμένος.

Ορισμός : Έστω $t \geq 0$, τότε ορίζουμε τη συνάρτηση μοναδιαίου βήματος, τη συνάρτηση Heaviside ως εξής: $H_c(t) = u(t - c) = u_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος (ή Heaviside) φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.	

Ορισμός: Έστω t ≥ 0, τότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση αρνητικού μοναδιαίου βήματος, τη συνάρτηση u(c - t) ως εξής :

u(c - t) = 1 - u(t - c) = $\begin{cases} 1, & 0 \leq t < c \\ 0, & t \geq c \end{cases}$



Ιδιότητες Συνάρτησης Heaviside

(α) Η ιδιότητα της κλιμάκωσης: Έστω α θετικός πραγματικός αριθμός, το γινόμενο H(x - α)·f(x) είναι η συνάρτηση

$$H(x - \alpha)\cdot f(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ f(x - \alpha) & x > \alpha \end{cases}$$

Αν α = 0 τότε το γινόμενο H(x)·f(x) είναι η συνάρτηση:

$$H(x)\cdot f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ f(x) & x > 0 \end{cases}$$

(β) Από τη φύση του ο τελεστής Heaviside είναι ένας γραμμικός τελεστής, δηλαδή για τις πραγματικές συναρτήσεις f και g και τους τυχαίους αριθμούς λ και μ θα είναι:

$$H(x)\cdot[\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda H(x)\cdot f(x) + \mu H(x)\cdot g(x)$$

(γ) Ισχύει ότι u(-t) = $\begin{cases} 0, \text{όταν } t > 0 \\ 1, \text{όταν } t < 0 \end{cases}$.

(i) Εάν αφαιρέσουμε τις u(t) και u(-t), προκύπτει:

$$u(t) - u(-t) = \begin{cases} -1, \text{όταν } t < 0 \\ 0, \text{όταν } t = 0 \\ 1, \text{όταν } t > 0 \end{cases} = \operatorname{sgn}(t)$$

Η οποία ονομάζεται συνάρτηση προσήμου, επειδή επιστρέφει τις τιμές +1, 0, -1, αν η τιμή της είναι θετική ή μηδενική ή αρνητική, αντίστοιχα.

(ii) Εάν προσθέσουμε τις u(t) και u(-t), προκύπτει ότι:

u(t) + u(-t) = 1, για κάθε t ϵ R.

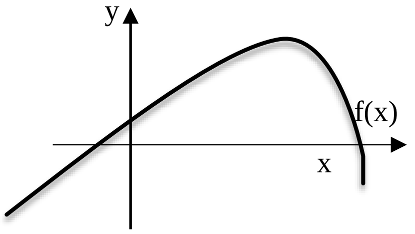
(iii) Γνωρίζουμε ότι: u΄(x) = δ(ω) και u΄(-x) = - δ(ω) (όπου δ(ω) η συνάρτηση Dirac)

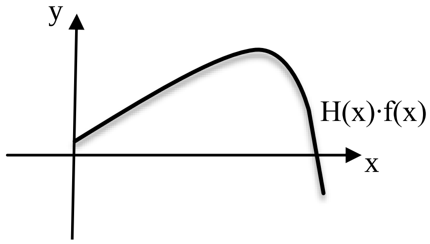
Αφαιρώντας τις τελευταίες εξισώσεις λαμβάνουμε ότι : u΄(x) - u΄(-x) =2δ(ω).

(οι παραπάνω τύποι θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμη στην εύρεση του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης Heaviside, κάτι που θα μελετήσουμε στο 2^{ο} Κεφάλαιο).

1. Γραφική Πράσταση Της Συνάρτησης Heaviside

Γραφικά: Η συνάρτηση Heaviside, όταν ενεργεί, ενεργεί πολλαπλασιαστικά σε συναρτήσεις f(x), με $-\infty < x < +\infty$. Δηλαδή μηδενίζει τον κλάδο τους για $x < 0$, αλλά αφήνει αναλλοίωτο τον κλάδο τους για $x \geq 0$.

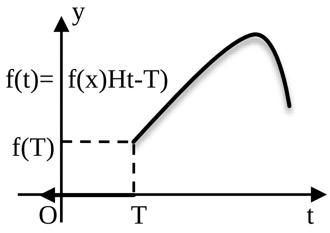




Το γινόμενο f(t)H(t - T) παίρνει τιμές:

H(t -T)·f(t) = $\begin{cases} 0, & όταν\ t < T \\ f(t), & όταν\ t \geq T \end{cases}$

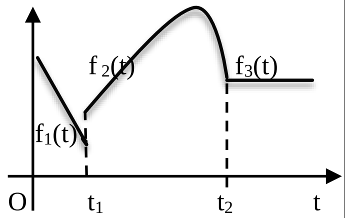
Η αντίστοιχη γραφική παράσταση φαίνεται δίπλα.



Γενικά η συνάρτηση f(t) = $\begin{cases} f_1(t), 0 \leq t < t_1 \\ f_2(t), t_1 \leq t < t_2 \\ f_3(t), \quad t \geq t_2 \end{cases}$ εκφράζεται με τη βοήθεια της συνάρτησης Heaviside όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

f(t) = $f_1(t)[H(t) - H(t - t_1)] + f_2(t)[H(t-t_1) - H(t - t_2)] + f_3(t)H(t - t_2)$ ⇔

f(t) = $f_1(t)H(t) + [f_2(t)-f_1(t)]H(t-t_1) + [f_3(t)-f_2(t)]H(t-t_2)$



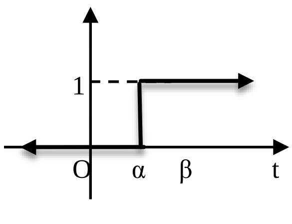
Παραδείγματα

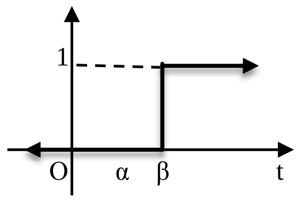
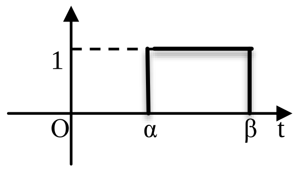
3. α) Να σχεδιάσετε το γράφημα της συνάρτησης h(t) = $u_α(t) - u_β(t)$ όταν 0 < α < β.

β) Να σχεδιάσετε το γράφημα της συνάρτησης h(t) = $u_π(t) - u_{2π}(t)$.

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της $u_α(t)$, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Η γραφική παράσταση της $u_β$(t), φαίνεται στο διπλανό σχήμα.	
Η γραφική παράσταση της h(t) = $u_α$(t) – $u_β$(t) όταν 0 < α < β φαίνεται δίπλα.	

β) Αν θέσουμε στο α) ερώτημα όπου α = π και β = 2π, τότε

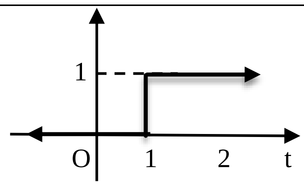
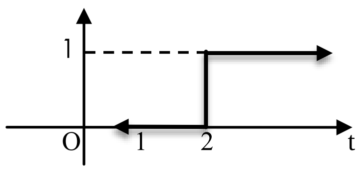
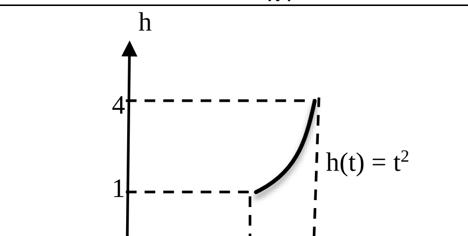
h(t) = u_{π}(t) – $u_{2\pi}$(t) = $\begin{cases} 0, & -\infty \leq t < \pi \\ 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & 2\pi \leq t < \infty \end{cases}$

Το γράφημα της h λέγεται **τετραγωνικός παλμός.**

4. Να σχεδιάσετε το γράφημα της συνάρτησης h(t) = t^2 [H(t - 1) – H(t - 2)].

Λύση

Αρχικά θα βρούμε το γράφημα της H(t - 1) (σχ. α) και στη συνέχεια της H(t - 2) (σχ.β)

 σχ.α	 σχ.β
Επομένως το γράφημα της t^2 θα περιοριστεί μόνο στο διάστημα [1,2), αφού στα διαστήματα (-∞, 1) και [2, +∞) της h(t) είναι μηδέν	

5. Να γράψετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνάρτηση Heaviside και στη συνέχεια να σχεδιάσετε το γράφημα της f(t) = $\begin{cases} \mathbf{2t+2,} & \mathbf{0 \leq t < 1} \\ \mathbf{-2,} & \mathbf{1 \leq t < 2} \\ \mathbf{-t^2,} & \mathbf{t \geq 2} \end{cases}$ **.**

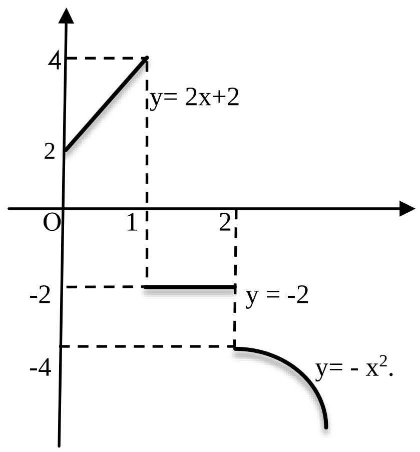
Λύση

Η συνάρτηση f γράφεται ως προς τη συνάρτηση Heaviside, όπως παρακάτω:

$f(t) = (2t + 2)[H(t) – H(t - 1)] – 2[H(t - 1) - H(t - 2)] – t^2H(t - 2)$

$\quad = (2t + 2)H(t) – (2t + 4)H(t - 1) + 2H(t - 2) – t^2H(t - 2).$

Το γράφημα της f φαίνεται παρακάτω.

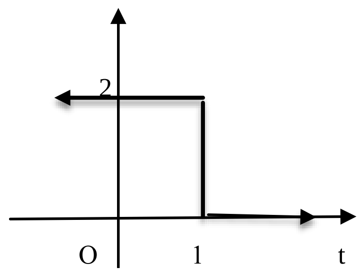
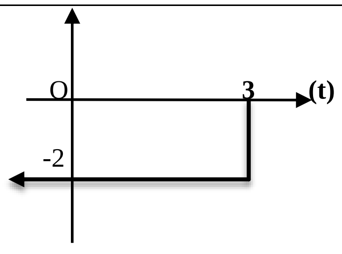
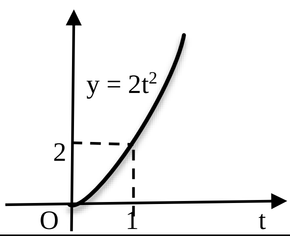


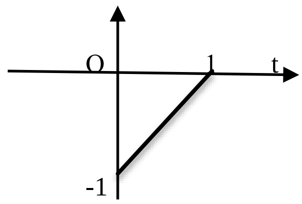
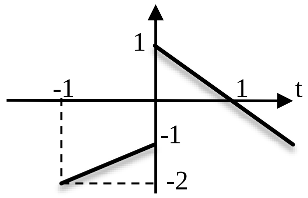
6. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.

(α) 2θ(1 - t) **(β) -2θ(3 - t)** **(γ) $2t^2θ(t)$**

(δ) (t - 1)[θ(t) - θ(t - 1)] **(ε) (t - 1)[θ(t + 1) - θ(2t)]**

Λύση

(α) $2θ(1 - t) = 2[1 - θ(t - 1)] = 2 - 2θ(t – 1)$	
(β) Η γραφική παράσταση της $f(t) = -2θ(3 - t)$ φαίνεται δίπλα.	
(γ) Καταλαβαίνουμε ότι η ζητούμενη γραφική παράσταση της $f(t) = 2t^2$ είναι μια παραβολή (κοίτα τη διπλανή παραβολή)	

(δ) Η γραφική παράσταση της $(t – 1)[θ(t) - θ(t - 1)]$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία (0,-1) και (1,0).	
(ε) Η συνάρτηση $(t - 1)[θ(t + 1) - θ(2t)]$ γίνεται : $(t - 1)[θ(t + 1) - θ(t) - θ(t)] = (t - 1)θ(t + 1) – 2(t-1)θ(t) =$ $(t - 1)[θ(t + 1) – θ(t)] – (t - 1)θ(t) =$ $(t - 1)[θ(t + 1) – θ(t)] + (1 - t)θ(t)$	

7. Να εκφραστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης Heaviside η συνάρτηση

$$\mathbf{h(t)} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \mathbf{0 \le t < 2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2 \le t < 3} \\ \mathbf{-t^2} & \mathbf{t \ge 3} \end{cases}$$

Λύση

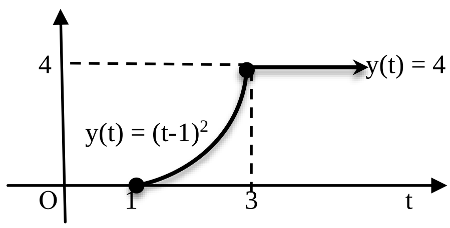
Η γραφική παράσταση της h είναι όμοια με τη γραφική παράσταση του παραδείγματος 5.

$h(t) = 1[(H(t) – H(t - 2)] – 3[H(t - 2) – H(t - 3)] – t^2H(t - 3)$

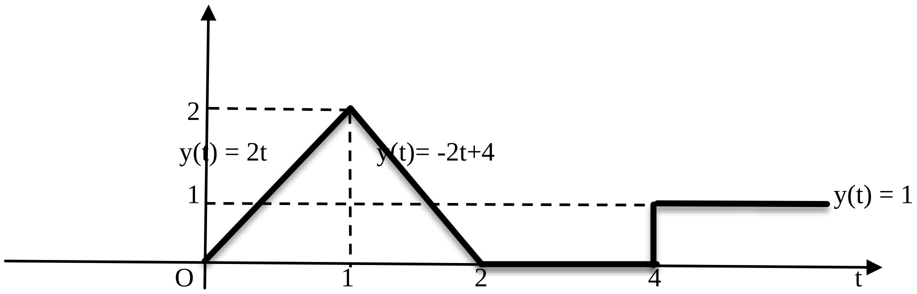
$h(t) = H(t) – 4H(t - 2) + (3 - t^2)H(t - 3)$.

8. Να σχεδιάσετε το γράφημα της συνάρτησης $f(t) = (t - 1)^2[H_1(t) – H_3(t)] + 4H_3(t)$.

Λύση

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, πράγματι η f γράφεται: $f(t) = \begin{cases} (t-1)^2, & t\epsilon[1,3) \\ 4, & t\epsilon[3,+\infty) \end{cases}$	

9. Να βρείτε τη συνάρτηση y(t) που ικανοποιεί την παρακάτω γραφική παράσταση και να γράψετε αυτή με τη βοήθεια της συνάρτησης Heaviside.



Λύση

- Αν t ϵ [0,1) τότε η συνάρτηση που απεικονίζεται στο διάστημα αυτό είναι η y(t) = 2t.
- Αν t ϵ [1,2) τότε η ζητούμενη συνάρτηση είναι η y(t) = - 2t + 4.
- Αν t ϵ [2,4] η ζητούμενη συνάρτηση είναι η y(t) = 0.
- Αν t > 4 τότε y(t) = 1.

Με τη βοήθεια της συνάρτησης Heaviside η y γράφεται

y(t)=2t[H(t) – H(t-1)] + (4-2t)[H(t-1) – H(t-2)] + 0[H(t-2) – H(t-3)]+1[H(t-3)]

y(t) = 2tH(t) + (4-4t) H(t-1) + (4-2t)H(t-2) + 1[H(t-3)].

2. Ολοκλήρωση Της Συνάρτησης Heaviside.

Ορισμός : Ισχύει ότι :

$$\int f(t)H(t-T)dt = [F(t) - F(T)]H(t - T) + C = G(t)H(t - T) + C$$

Βρίσκουμε μια παράγουσα F της f και στη συνέχεια υπολογίζουμε την παράσταση G(t) = F(t) - F(T) με G(T) = 0 και C μια σταθερά.

Παράδειγμα

10. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\boldsymbol{\int (t-T)^p u(t-T)dt,}$ **p > -1** **(b)**$\boldsymbol{\int_{-2}^{2}[H(t+3)-2tH(t-1)]dt}$ **(c)** $\boldsymbol{\int \frac{\theta(1-t)}{1+t^2}dt}$

Όπου u, H, θ συμβολίζουμε τη συνάρτηση Heaviside

Λύση

(α) Στο παραπάνω ολοκλήρωμα έχω τη συνάρτηση f(t) = $(t-T)^p$, η οποία έχει παράγουσα την F(t) = $\frac{(t-T)^{p+1}}{p+1}$ με p > -1.

Επομένως , $\int (t-T)^p u(t-T)dt$ = [F(t) – F(T)]u(t - T) + C = $\frac{(t-T)^{p+1}}{p+1}$u(t - T) + C, p > -1

(b) $\int_{-2}^{2}[H(t+3)-2tH(t-1)]dt$

Χωρίζουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα σε δυο ολοκληρώματα..

$\int_{-2}^{2}[H(t+3)-2tH(t-1)]dt$ = $\int_{-2}^{2}H(t+3)dt$ - $\int_{-2}^{2}2tH(t-1)dt.$

Ένα ολοκλήρωμα είναι το I_1 = $\int H(t+3)dt$. Προφανώς είναι f(t) = 1, η οποία f έχει παράγουσα την F(t) = t και T= - 3, άρα F(t) - F(-3) = t + 3.

I_1 = $\int H(t+3)dt$ = [F(t) – F(-3)]H(t + 3) + C = (t + 3)H(t + 3) + C.

Στο ολοκλήρωμα $I_2 = \int 2tH(t-1)dt$ είναι g(t) = 2t, η οποία g έχει παράγουσα την $G(t) = t^2$ και T = 1 άρα $G(t) – G(T) = t^2 - 1$.

$I_2 = \int 2tH(t-1)dt = [G(t) – G(-3)]H(t - 1) + C = (t^2 - 1)H(t - 1) + C$.

$I = [I_1 + I_2]_{-2}^{+2} = [(t+3)H(t+3) - (t^2-1)H(t-1)]_{-2}^{2} =$

$= 5H(5) – 3H(1) – H(1) + 3H(-3) = 5 – 3 – 1 + 0 = 1$.

(c) $I = \int \frac{\theta(1-t)}{1+t^2}dt = \int \frac{1-\theta(t-1)}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{1+t^2}dt - \int \frac{\theta(t-1)}{1+t^2}dt.$

Επειδή η $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ έχει παράγουσα την F(t) = arctan(t) και για T = 1 τότε η παράγουσα είναι: $F(1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Το ολοκλήρωμα I γίνεται : $I = \arctan(t) – [\arctan(t) - \frac{\pi}{4}]\theta(t - 1) + C$

Β. Συνάρτηση Dirac ή Δελτα ή Κρουστική Συνάρτηση

Εισαγωγή

Σε πολλά φυσικά φαινόμενα εμφανίζονται μεγέθη τα οποία για πολύ μικρό χρονικό διάστημα (σχεδόν στιγμιαία) παρουσιάζουν τιμές πολύ μεγάλες π.χ το λάκτισμα μιας μπάλας. Για να αντιμετωπίσει τις περιπτώσεις αυτές ο Dirac εισήγαγε την ομώνυμη συνάρτηση, που συμβολίζεται με το γράμμα δ.

Η συνάρτηση Dirac ή Κρουστική Συνάρτηση ή συνάρτηση Delta είναι μαθηματική αναπαράσταση μιας ποσότητας που περιγράφει κάποιο φαινόμενο που μοιάζει με αυτό της κρούσης. Η μεταβλητή αυτή ποσότητα παρουσιάζει ελάχιστη διακύμανση, σε όλη της διάρκεια του χρόνου πριν και μετά τη στιγμή της κρούσης, ενώ τη στιγμή της κρούσης αυξάνεται ακαριαία μέχρι τη μέγιστη τιμής της.

Ορισμός: Ορίζουμε ως συνάρτηση Dirac τη γενικευμένη συνάρτηση:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & όταν\ \ t \neq 0 \\ +\infty, & όταν\ \ t = 0 \end{cases}$$

Για την οποία δεχόμαστε ότι, για κάθε συνάρτηση f, συνεχής στο 0, να ισχύει:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

Προφανώς, αν f(t) = 1 έχουμε $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$.

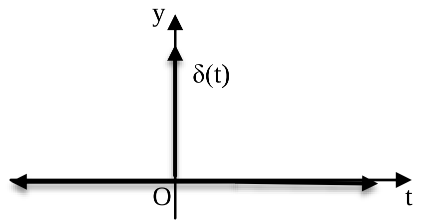
Η συνάρτηση Dirac χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να ορίσουμε συναρτήσεις που έχουν τιμή μόνο σε σημεία και παντού αλλού είναι μηδέν.

Για παράδειγμα η συνάρτηση f(t) = $\begin{cases} -5, & όταν\ t = -3 \\ +2 & όταν\ t = -2 \\ +4 & όταν\ t = 6 \\ 0, όταν\ t\ αλλού \end{cases}$ είναι μια συνάρτηση Dirac, η οποία γράφεται f(t) = -5δ(t + 3) + 2δ(t + 2) + 4δ(t - 6).

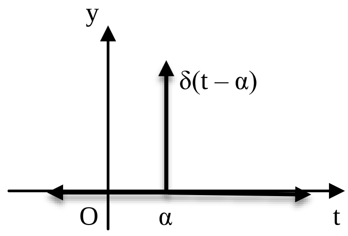
Από τον ορισμό της συνάρτησης δ – Dirac προκύπτουν τα παρακάτω:

- δ(t) ≥ 0. για -∞ ≤ t ≤ ∞
- Η δ(t) δεν ορίζεται για t = 0.
- $\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt = \begin{cases} 1, & αν\ t_1 < 0 < t_2 \\ 0, & αλλού \end{cases}$ γενικότερα $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$.

Προσοχή: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Dirac δεν είναι το R αλλά το σύνολο των συναρτήσεων φ που έχουν παραγώγους συνεχείς, $\varphi^{(\kappa)}$ κάθε τάξης του k, σε όλα τα σημεία του R, δηλαδή το σύνολο των ομαλών συναρτήσεων. Επομένως, ο συμβολισμός δ(x) είναι λάθος. Όπως λάθος είναι και ο συμβολισμός $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx$.



γραφική παράσταση της δ(t)

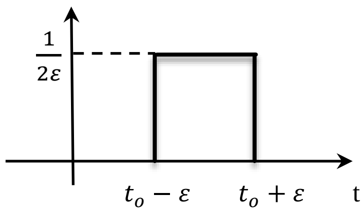


γραφική παράσταση της δ(t – α)

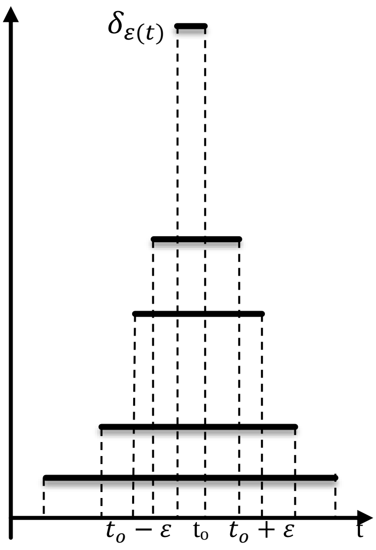
1. Η Συνάρτηση Dirac Ως Όριο Συναρτήσεων.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & t_o - \varepsilon < t < t_o + \varepsilon \\ 0, & t \le t_o - \varepsilon \; και \; t \ge t_o + \varepsilon \end{cases}$ όπου $t_o > 0$ και ε μια θετική σταθερά (ε→0), τέτοια ώστε το $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$ να ισούται με το σημειοσύνολο $\delta(t) = \begin{cases} 0, & όταν \; t \neq 0 \\ +\infty, & όταν \; t = 0 \end{cases}$. Τότε η συνάρτηση δ(t) λέγεται συνάρτηση ώθησης ή συνάρτηση δ- Dirac ή κρουστική συνάρτηση. Προφανώς η δ(t) είναι μία γενικευμένη συνάρτηση.

Η απεικόνιση της συνάρτησης $\delta_\varepsilon(t)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν της διπλανής γραφικής παράστασης με τον χ΄χ άξονα, είναι ίσο με 1 για κάθε t_0.



Η συμπεριφορά της δ_ε καθώς το ε→0, φαίνεται στο, διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι το πλάτος της συνάρτησης συνεχώς μειώνεται αλλά αυξάνεται το ύψος δ_ε.



Ορισμός (Με τη μορφή ορίου): Εάν δ είναι η κλάση όλων των οικογενειών (άρα και όλων των ακολουθιών) $\{\delta_\varepsilon(t)\}$ από συνήθεις συναρτήσεις $\delta_\varepsilon(t)$, που είναι απείρως λείες κατά τμήματα στο R, έχουν την ιδιότητα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$ για κάθε συνάρτηση f συνεχής στο 0 και είναι τέτοιες, ώστε οι οικογένειες τις οποίες απαρτίζουν, να συγκλίνουν ασθενώς προς το σημειοσύνολο:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & όταν\ \ t \neq 0 \\ +\infty, & όταν\ \ t = 0 \end{cases}.$$

Τότε οι οικογένειες αυτής της μορφής είναι γνωστές ως οικογένειες Dirac.

Η συνάρτηση Dirac, όπως είδαμε, μπορεί να γραφεί ως όριο συναρτήσεων. Σε αυτό το εδάφιο θα παρουσιάσουμε γνωστές συναρτήσεις που το όριό τους ικανοποιούν τον ορισμό της συνάρτησης Dirac.

(i) Τριγωνική συνάρτηση

Η συνάρτηση δ γράφεται με τη μορφή ορίου: $\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot[1-\frac{|x|}{\varepsilon}]$, $|x| < \varepsilon$. Πράγματι ολοκληρώνοντας το όριο, λαμβάνουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot[1-\frac{|x|}{\varepsilon}]dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot[\int_{-\varepsilon}^{0}(1+\frac{x}{\varepsilon})dx + \int_{0}^{\varepsilon}(1-\frac{x}{\varepsilon})dx] = 1.$$

Η τριγωνική συνάρτηση έχει ύψος $\frac{1}{\varepsilon}$ και πλατός 2ε. Άρα το εμβαδόν της είναι $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot 2\varepsilon = 1$. Εύκολα υπολογίζεται ότι όταν $\varepsilon \to 0$, το ύψος του παλμού είναι άπειρο ενώ το πλάτος είναι μηδενικό.

(ii) Εκθετική συνάρτηση.

Η συνάρτηση δ γράφεται με τη μορφή ορίου: $\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot e^{\frac{-2|x|}{\varepsilon}}$.

Πράγματι, ολοκληρώνοντας το όριο λαμβάνουμε ότι :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot e^{\frac{-2|\chi|}{\varepsilon}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot[\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{2x}{\varepsilon}}dx + \int_{0}^{\infty}e^{-\frac{2x}{\varepsilon}}dx] = 1.$$

(iii) Gaussian συνάρτηση (γκαουσιανή συνάρτηση).

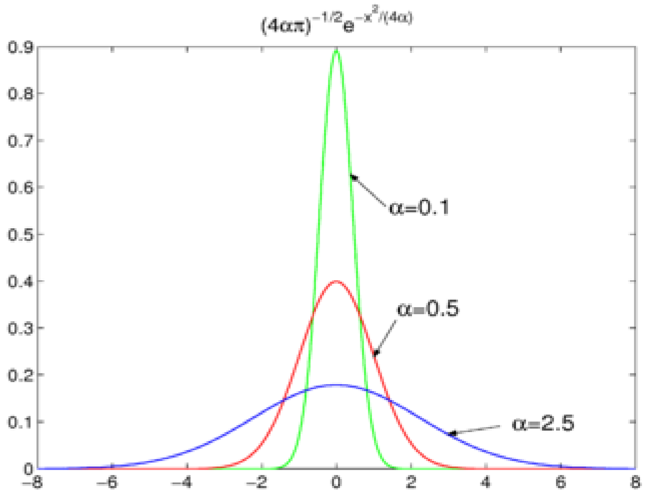
Η συνάρτηση δ γράφεται με τη μορφή ορίου: $\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot e^{-\pi(\frac{x}{\varepsilon})^2}$.

Πράγματι, ολοκληρώνοντας το όριο, λαμβάνουμε ότι :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot e^{-\pi(\frac{x}{\varepsilon})^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\pi(\frac{x}{\varepsilon})^2}dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}dx = 1.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ.

Όμοια για τη γκαουσιανή συνάρτηση $\frac{1}{\sqrt{4\alpha\pi}}e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$. Όσο το α προσεγγίζει το μηδέν, τόσο και η συνάρτηση προσεγγίζει τη συνάρτηση Dirac.



(iv) Η συνάρτηση δ(x) = $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right)}{\frac{\pi x}{\varepsilon}}$, εκφράζει τη συνάρτηση Dirac. Πράγματι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right)}{\pi x} dx$ = ... = 1. Επομένως $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right)}{\pi x} dx$ = 1. Στον υπολογισμό του ολοκληρώματος, θέσαμε αρχικά όπου t = $\frac{\pi x}{\varepsilon}$ και στη συνέχεια θεωρήσαμε ότι είναι γνωστό το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{sinx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (κοίτα παράδειγμα 6 του 2ου Κεφαλαίου).

(v) Η συνάρτηση δ(x) = $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right)}{\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right)^2}$, εκφράζει τη συνάρτηση Dirac. Πράγματι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right)}{\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right)^2} dx$ = ... = 1. Επομένως:

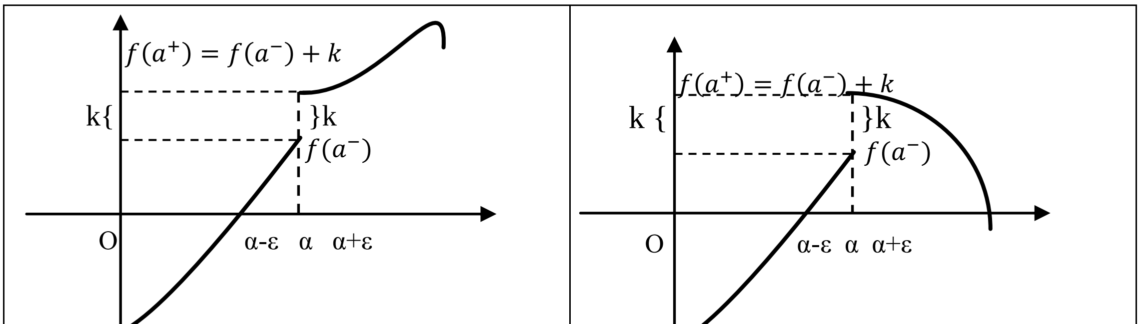
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right)}{\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right)^2} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right)}{\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right)^2} dx = \cdots = 1$$

Στον υπολογισμό του ολοκληρώματος, θέσαμε αρχικά όπου t = $\frac{\pi x}{\varepsilon}$ και στη συνέχεια θεωρήσαμε ότι είναι γνωστό το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ (κοίτα παράδειγμα 9 του 2ου Κεφαλαίου).

2. Γενικευμένη Παράγωγος Συνάρτησης.

Έστω f διαφορίσιμη συνάρτηση στα διαστήματα της μορφής (α - ε, α) και (α , α + ε), όπου ε > 0, με την κλασσική έννοια, Θεωρούμε:

g(t) = $\begin{cases} f(t), & \alpha-\varepsilon < t \le \alpha \\ f(t)+k, & \alpha < t < \alpha+\varepsilon \end{cases}$ όπου k = $|f(a^+) - f(a^-)|$.



σχ.α σχ.β

Εάν, k ≠ 0, τότε η g είναι ασυνεχής στο α.

Επομένως, όταν k > 0, δηλαδή $f(a^+) > f(a^-)$ (κοίτα γραφικές παραστάσεις των σχημάτων α και β).

Η g γράφεται ως γενικευμένη συνάρτηση, όπως: g(t) = f(t)u(α – t) + [f(t) + k]u(t - α) (1)

Η γενικευμένη παράγωγος $g^{[1]}(t)$ της g, είναι:

$g^{[1]}(t)$ = u(α - t)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}f(t)$ + f(t)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}u(a-t)$ + u(t - α)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[f(t)+k]$ + [f(t) + k]$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}u(t-a)$

$g^{[1]}(t)$ = u(α - t)$f^{(1)}(t)$ + f(t)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}u(a-t)$ + u(t - α)$f^{(1)}$(t) +$[f(t)+k]$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}u(t-a)$

όπου $f^{(1)}(t)$ η παράγωγος της f με την κλασσική έννοια.

Όμως $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}u(t-a)$ = $\frac{du(t-a)}{d(t-a)}\frac{d(t-a)}{dt}$ = δ(t - α) = δ_α(t) και

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}u(\alpha-t)$ = $\frac{du(a-t)}{d(a-t)}\frac{d(a-t)}{dt}$ = - δ(α - t) = -δ_α(t)

Επομένως: $g^{[1]}(t)$ = $f^{(1)}(t)$ + k$\delta_\alpha(t)$.

Όμοια θα καταλήξουμε και όταν έχουμε : $f(a^-) > f(a^+)$.

Όταν έχουμε k = 0, δηλαδή $f(a^+)$ = $f(a^-)$, τότε οι συναρτήσεις f , g είναι συνεχής στο α. Η γενικευμένη παράγωγος της f ταυτίζεται με τη παράγωγο της f, κατά την κλασσική έννοια.

Παραδείγματα

11. Βρείτε την πρώτη παράγωγο (με την κλασσική έννοια) των γενικευμένων συναρτήσεων.

(α) f(x) = u(α + x) - u (β + x) ,

(β) f(t) = [1 - u(t)] cost,

(γ) f(t) = [u(t - $\frac{\pi}{2}$) – u(t - $\frac{3\pi}{2}$)]sin(t).

Λύση

(α) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x) = u'(\alpha + x) - u'(\beta + x) = \delta(\alpha + x) - \delta(\beta + x)$

(β) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = - u'(t)\cos t - [1 - u(t)]\sin(t) = [u(t) - 1]\sin(t) - \delta(t)\cos 0 = [u(t) - 1]\sin(t) - \delta(t)$

(γ) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = [(u'\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - u'\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)]\sin t + [u(t - \frac{\pi}{2}) - u(t - \frac{3\pi}{2}]\cos t \Leftrightarrow$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = [(\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)|]\sin t + [u(t - \frac{\pi}{2}) - u(t - \frac{3\pi}{2})]\cos t \Leftrightarrow$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) + [u(t - \frac{\pi}{2}) - u(t - \frac{3\pi}{2})]\cos t.$

12. Βρείτε τη γενικευμένη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

(α) f(x) = [u(t) – u(t - 1)]t + 2u(t - 1).

(β) $\mathbf{f(t)} = \begin{cases} \mathbf{2t + 1}, & ό\boldsymbol{\tau\alpha\nu}\ \mathbf{0 \le t < 1} \\ \mathbf{1}, & ό\boldsymbol{\tau\alpha\nu}\ \mathbf{1 \le t < 2} \\ \mathbf{-t + 3}, & ό\boldsymbol{\tau\alpha\nu}\ \mathbf{2 \le t < 3} \\ \mathbf{0}, & ό\boldsymbol{\tau\alpha\nu}\ \mathbf{t \ge 3} \end{cases}$

Λύση

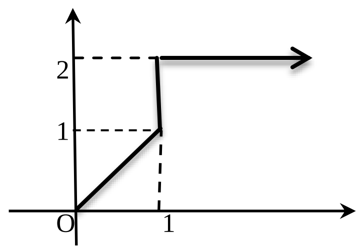
(α) Η κανονική παράγωγος της συνάρτησης f , του διπλανού σχήματος είναι:

$f^{(1)}(t) =$ u(t)– u(t - 1) + [δ(t) – δ(t – 1)]t + 2δ(t - 1).

$f^{(1)}(t) =$ u(t)– u(t - 1) + tδ(t) – tδ(t – 1) + 2δ(t - 1).

Από ιδιότητα της συνάρτησης Dirac:

f(t)δ(t – α) = f(α)δ(t - α) έχουμε:



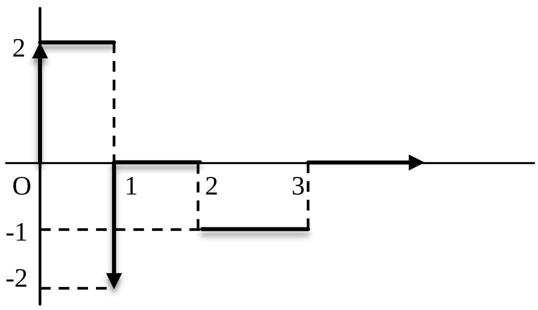
$f^{(1)}(t) =$ u(t) – u(t - 1) + δ(t)0 – 1δ(t – 1) + 2δ(t - 1) ⇔ $f^{(1)}(t)$ = u(t) – u(t-1) + δ(t–1).

Η γενικευμένη παράγωγος της f(t) είναι:

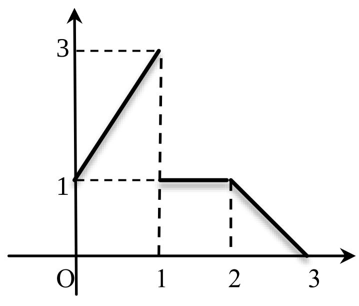
$f^{[1]}(t) = f^{(1)}(t) + [f(1+) - f(1-)]\delta(t - 1)$ = u(t) – u(t – 1) + δ(t - 1) + (2 - 1)δ(t - 1)

$f^{[1]}(t)$= u(t) – u(t – 1) + 2δ(t – 1) .

(β) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται παρακάτω στο σχήμα 1.



Σχ. 2



Σχ.1

Αρχικά γράφουμε την κανονική παράγωγο της f για κάθε t εκτός t = 0, 1, 2, 3

$f^{(1)}(t) = 2[u(t) – u(t – 1)] - [u(t – 2) – u(t – 3)]$.

Η γενικευμένη παράγωγος της f είναι: $f^{[1]}(t) = f^{(1)}(t) + k\delta_{\alpha}(t)$

$f^{[1]}(t) = 2[u(t) – u(t – 1)] - [u(t – 2) – u(t – 3)] + [f(0^+) – f(0^-)]\delta(t) + [f(1^+) – f(1^-)]\delta(t – 1)$

$f^{[1]}(t) = 2[u(t) – u(t – 1)] - [u(t – 2) – u(t – 3)] + (2 – 0)\delta(t) + (0 – 2)\delta(t – 1)$ ⇔

$f^{[1]}(t) = 2[u(t) – u(t – 1)] - [u(t – 2) – u(t – 3)] + 2\delta(t) – 2\delta(t – 1)$.

Η γραφική παράσταση της γενικευμένης παράγωγος $f^{[1]}$ της f φαίνεται στο σχήμα 2.

3. Βασικές Ιδιότητες

(i) Η συνάρτηση δ είναι άρτια συνάρτηση, δηλαδή ισχύει $\delta(-t) = \delta(t)$ και $\delta(T- t) = \delta(t -T)$.

(ii) Ισχύει ότι : $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = H(t)$ όταν $t \neq 0$, όπου H(t) η συνάρτηση Heaviside.

Απόδειξη

Ολοκληρώνουμε τη σχέση $\delta(t) = \frac{dH(t)}{dt}$, όταν $t \neq 0$.

(iii) Ισχύει : $f(t)\delta(t - T) = f(T)\delta(t - T)$

Αν T = 0 έχουμε $f(t)\delta(t) = f(0)\,\delta(t)$.

(iv) Αν $\delta_{\alpha}(t) = \delta(t - \alpha)$ τότε $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_{\alpha}(t)dt = f(\alpha)$ όπου f συνεχής στο α.

Απόδειξη

$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_{\alpha}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \alpha)dt$

Από την ιδιότητα (iii) έχω:

$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\delta(t - \alpha)dt = f(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \alpha)dt = f(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)du = f(\alpha)\cdot 1 = f(\alpha)$.

Αντικαταστήσαμε στο τελευταίο ολοκλήρωμα: u = t – α και du = dt και επειδή ισχύει :

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \alpha)dt = 1$, βρίσκουμε $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_{\alpha}(t)dt = f(\alpha)$.

Π.χ. $\int_{0}^{\infty} t sint\delta(t - a)dt = a sina$.

(v) Ισχύει $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$, με $\alpha \neq 0$ και $-\infty < t < +\infty$.

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι για κάθε συνάρτηση φ(t): $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha t)\varphi(t)dt = \frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t)dt$ και

επειδή ισχύει για κάθε συνάρτηση φ θα ισχύει και ότι $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$.

Γνωρίζουμε ότι: $\frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t)dt = \frac{1}{|\alpha|}\varphi(0)$. (ιδιότητα iv)

Περιπτώσεις για το α.

- Εάν α > 0 τότε α = |α|:

Θέτουμε στο ολοκλήρωμα$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha t)\varphi(t)dt$ όπου αt = s με t = $\frac{s}{a}$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\frac{s}{a})\delta(s)\frac{ds}{a} = \frac{1}{a}\varphi(0) = \frac{1}{|a|}\varphi(0)$. (1)

- Εάν α < 0 τότε α = -|α|:

Θέτουμε στο ολοκλήρωμα$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha t)\varphi(t)dt$ όπου αt = s με t = $\frac{s}{a}$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha t)\varphi(t)dt = \int_{+\infty}^{-\infty} \varphi(\frac{s}{a})\delta(s)\frac{ds}{a} = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s)\varphi(\frac{s}{a})\frac{ds}{a} = -\frac{1}{a}\varphi(0) = \frac{1}{|a|}\varphi(0)$ (2)

Για κάθε συνάρτηση φ(t) ισχύει: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha t)\varphi(t)dt = \frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t)dt$

Επομένως $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$, με $\alpha \neq 0$ και $-\infty < t < +\infty$.

Παρατήρηση: Από την παραπάνω ιδιότητα προκύπτει ότι:

$\delta(at - t_0) = \delta(\alpha(t - \frac{t_0}{a})) = \frac{1}{|a|}\delta(t - \frac{t_0}{a})$.

Η απόδειξη είναι να θέσουμε στην αρχή ότι $u = at - t_0$.

(vi) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0)$ ή $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta'(t-\alpha)dt = -f'(\alpha)$

Απόδειξη

Με χρήση της παραγοντικής ολοκλήρωσης, έχουμε ;

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = [f(t)\delta(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t)dt = 0 - 0 - f'(0) = -f'(0)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-\alpha)dt = [f(t)\delta(t-\alpha)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t-\alpha)dt = -f'(\alpha)$

Γενικότερα για m ≥ 1 (κοίτα ιδιότητα (x)), έχουμε :

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^m\delta(\chi)}{dx^m} f(x)dx = (-1)^m \frac{d^m f(x)}{dx^m}\Big|_{x=0} = (-1)^m f^{(m)}(0)$ και

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^m\delta_a(x)}{dx^m} f(x)dx = (-1)^m \frac{d^m f(x-\alpha)}{dx^m} = (-1)^m f^{(m)}(a)$

Για f(t) = 1, τότε $f^{(m)}(0) = 0$, οπότε: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(t)dt = 0$ (m = 1 ,2 ,…, n)

(vii) xδ(x) = 0.

Απόδειξη

Κοίτα ιδιότητα (iii).

(viii) $\int_{-\infty}^{\alpha} \delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\alpha - t)\delta(t)\mathrm{d}t = u(\alpha)$ για κάθε $\alpha \neq 0$.

Γενικά ισχύει ότι : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)du(t-T) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-T))dt = f(T)$, όπου T ϵ R και η f θεωρείται συνεχής. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως shifting (μετατόπιση) της μονάδος της ώθησης. Με την παραπάνω ιδιότητα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι δεν έχει σημασία πόσο μπερδεμένη είναι η συνάρτηση f για να βρούμε το ολοκλήρωμα της f(t)δ(t - T) το μόνο που κάνουμε είναι να αντικαταστήσομε τη μεταβλητή t με τον αριθμό T.

Προσοχή : $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)du(t-T) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\delta(t-T)dt = f(T)$ μόνο όταν $\alpha < T < \beta$.

(ix) Βασική ιδιότητα: Εάν μια συνάρτηση έχει αριθμήσιμο πλήθος ριζών ρ_i (δηλαδή $f(p_i) = 0$) και $f'(p_i) = \frac{df}{dp_i} \neq 0$ τότε ισχύει : $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-\rho_i)}{|f'(p_i)|}$.

Παρατηρήσεις:

Εύκολα αποδεικνύεται ότι: $\delta[(x - \alpha)(x - b)] = \frac{\delta[(x-a)]+\delta[(x-b)]}{|b-a|}$.

Εάν b > 0 και α = - b, τότε: $\delta(x^2 - b^2) = \frac{\delta[(x+b)]+\delta[(x-b)]}{2|b|}$.

(x) Αν n και m θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Αν f συνάρτηση που έχει συνεχή παράγωγο το λιγότερο τη n-νιοστή παράγωγο σε μία περιοχή κοντά στο x = α, και το λιγότερο τη m-ιοστή μία περιοχή κοντά στο σημείο x = b, τότε
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)[\delta_a^{(n)}(t) + \delta_b^{(m)}(t)]dt = (-1)^n f^{(n)}(\alpha) + (-1)^m f^{(m)}(b)$.

Απόδειξη

Σπάμε το ολοκλήρωμα σε δύο ολοκληρώματα και εφαρμόζουμε την ιδιότητα (vi). Στη συνέχεια με εις άτοπο επαγωγή καταλήγουμε στο ζητούμενο.

(xi). Έστω συνάρτηση φ με συνεχή παράγωγο σε μία περιοχή επί της αρχής, τότε από την ιδιότητα (vi) είναι:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)[\varphi(t)\delta'(t)]dt' = \int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)\varphi(t)]\delta'(t)dt' - f'(0)\varphi(0) - f(0)\varphi'(0)$

Απόδειξη

$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)\varphi(t)]\delta'(t)dt' = -\left[\frac{d}{dt}[f(t)\varphi(t)\right]_{t=0} = - f'(0)\varphi(0) - f(0)\varphi'(0)$

Γενικότερα: φ(t)δ΄(t - T) = φ(T)δ ΄(t - T) – δ(t - T)φ΄(T).

Απόδειξη

Ισχύει: $[\varphi(t)\delta(t-T)]' = \varphi'(t)\delta(t-T) + \varphi(t)\delta'(t-T)$.

Από ιδιότητα (iii) έχουμε: $\varphi(t)\delta(t-T) = \varphi(T)\delta(t-T)$. Επομένως,

$\varphi(T)\delta'(t-T) = \varphi'(T)\delta(t-T) + \varphi(t)\delta'(t-T)$.

Λύνουμε ως προς $\varphi(t)\delta'(t-T)$.

$\varphi(t)\delta'(t-T)$ = φ(T)δ ΄(t - T) – φ΄(T)δ(t - T)

Για T = 0, έχουμε: φ(t)δ΄(t) = φ(0)δ΄(t) – δ(t)φ΄(0).

Παρατήρηση: Εάν φ(t) = t, εξάγουμε ότι: tδ΄(t) = – δ(t)φ΄(0) ⇔ tδ΄(t) + δ(t) = 0.

(xii) Έστω φ μία συνάρτηση με συνεχή παράγωγο (ως την n - ιοστή) τότε :
$\varphi(t)\delta^{(n)}(t) = \varphi(0)\delta^{(n)}(t) - n\varphi'(0)\delta^{(n-1)}(t) + \frac{n(n-1)}{2!}\varphi^{(2)}(0)\delta^{(n-2)}(t) - \ldots + (-1)^n\varphi^{(n)}(0)\delta(t)$.

(**xiii**) Αν φ(t) μονότονη συνάρτηση, με φ(c)=0 και φ΄ (c) ≠0, τότε: $\delta(\varphi(t)) = \frac{1}{|\varphi'(c)|}\delta(t - c)$

Παρατήρηση: Αν φ(t) μονότονη σε ένα διάστημα [α,b], με φ(c) = 0, φ΄(c) ≠ 0 και π.χ. η φ αύξουσα (ή φθίνουσα), δηλαδή φ(α) < φ(c) < φ(b) (ή φ(b) < φ(c) < φ(α)) τότε:
$\int_a^b f(t)\delta[\varphi(t)]dt = \frac{1}{|\varphi'(c)|}f(c)$.

Απόδειξη

(α) Έστω φ(t) μια αύξουσα συνάρτηση όταν α ≤ t ≤ b. Έστω ακόμη ότι για κάποιο c ∈ (α , b) είναι φ(c) = 0. Επειδή η φ είναι αύξουσα, αντιστρέφεται με c = $\varphi^{-1}(0)$ και επειδή φ αύξουσα στο (α , b) τότε: φ(α) < φ(c) < φ(b).

Θέτω x = φ(t) ⇔ $t = \varphi^{-1}(x)$ με $dt = \frac{d}{dx}[\varphi^{-1}(x)] = 1\Big/\frac{d}{dx}[\varphi(x)]$.

Εχουμε: $\int_a^b f(t)\delta[\varphi(t)]dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(b)} f[\varphi^{-1}(x)]\delta(x)[\varphi^{-1}(x)]'dx$

Από ιδιότητα (vi) και ότι $c = \varphi^{-1}(0)$ με $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$:

$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(b)} f[\varphi^{-1}(x)]\delta(x)[\varphi^{-1}(x)]'dx = f[\varphi^{-1}(0)][\varphi^{-1}(x)]'_{x=\varphi(c)=0} = \frac{1}{\varphi'(c)}f(c)$.

Όμοια καταλήγουμε όταν η φ είναι γνησίως φθίνουσα.

Οπότε λαμβάνουμε ότι: $\int_a^b f(t)\delta[\varphi(t)]dt = \frac{1}{|\varphi'(c)|}f(c)$.

Παραδείγματα

13. Να αποδείξετε ότι η προσεταιριστική ιδιότητα, για τη συνάρτηση Dirac, δεν ισχύει.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις συναρτήσεις α(x) και β(x), απείρως παραγωγίσιμες. Θα δείξουμε ότι:

$$[\alpha(x)\beta(x)]\delta(x) \neq \alpha(x)[\beta(x)\delta(x)]$$

Πράγματι, για $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ και β(x) = x έχουμε $\delta(x) = (\frac{1}{x}\cdot x)\delta(x)$. Αν ίσχυει η προσεταιριστική ιδιότητα, τότε θα έπρεπε να ισχύει $\delta(x) = (\frac{1}{x}\cdot x)\delta(x) = \frac{1}{x}\cdot(x\delta(x))$, όμως xδ(x) = 0 (από ιδιότητα (vii)). Άρα $\delta(x) = \frac{1}{x}\cdot(x\delta(x)) = 0$. Άτοπο, αφού $\delta(x) = (\frac{1}{x}\cdot x)\delta(x) \neq 0 = \frac{1}{x}\cdot(x\delta(x))$, δηλαδή δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, αφού η δ(x) δεν είναι η μηδενική συνάρτηση.

14. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(t)[\varphi(t)\delta'(t)]dt}$, όταν φ(t) = sint και f(t)= t ^{2} + 2t +1.

Λύση

Από την ιδιότητα (vi) έχουμε:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)[\varphi(t)\delta'(t)]dt = \int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)\varphi(t)]\delta'(t)dt = -\frac{d}{dt}[(t^2 + 2t + 1)\text{sint}]_{t=0} = 1$

15. Βρείτε τους παραγώγους, με την κλασσική έννοια, των συναρτήσεων f΄ και f΄΄ χρησιμοποιώντας τη σχέση δ(t) = $\boldsymbol{\frac{dH(t)}{dt}}$ όταν f(t) = |t|, όπου H(t) η συνάρτηση Heaviside.

Λύση

Η f γράφεται με τη βοήθεια της συνάρτησης Heaviside.

f(t) = -t[1 - H(t)] + tH(t) = 2tH(t) – t.

Παραγωγίζοντας έχουμε : f΄(t) = 2H(t) + 2tδ(t) – 1. (1)

Σύμφωνα με την ιδιότητα (vii) έχουμε : tδ(t) = 0

Επομένως η (1) γίνεται: f ΄(t) = 2H(t) – 1 (2)

Παραγωγίζοντας την (2) βρίσκουμε: f ΄΄(t) = 2δ(t).

16. Βρείτε την παράγωγο f ΄ καθώς και την f΄΄ (κατά την κλασσική έννοια) χρησιμοποιώντας τη σχέση δ(x) = $\boldsymbol{\frac{dH(x)}{dx}}$, όταν f(x) = |x^2 – 1|, όπου H(x) η συνάρτηση Heaviside.

Λύση

f(x) = (x^2 – 1)H(x - 1) + (1 - x^2)[H(x + 1) – H(x - 1)] + (x^2 – 1)[1 - H(x + 1)]
 = (x^2 – 1)H(x - 1) + (1 - x^2)[H(x + 1) – H(x - 1)] + (x^2 – 1)[1 - H(x + 1)]
 = (x^2 – 1)[2H(x - 1) - 2H(x + 1) + 1]
f ΄(x) = 2x[2H(x – 1) – 2H(x + 1) + 1] + (x^2 – 1)[2δ(x - 1) – 2δ(x + 1)]
Όμως (x^2 – 1)δ(x – 1) = (1^2 – 1)δ(x – 1) = 0 (ιδιότητα (iii))
Όμοια (x^2 – 1)δ(x + 1) = [(-1)^2 – 1]δ(x + 1) = 0
Επόμενως f ΄(x) = 2x[2H(x – 1) – 2H(x + 1) +1]

f ΄΄(x) = 2[2H(x – 1] – 2H(x + 1) + 1] + 2x·2δ(x - 1) – 2x·2δ(x + 1)
 = 2[2H(x – 1] – 2H(x + 1) + 1] + 4x·δ(x - 1) – 4x·δ(x + 1) =
 = 2[2H(x – 1] – 2H(x + 1) + 1] + 4·1 δ(x - 1) – 4(-1) δ(x + 1) =
 = 2[2H(x – 1] – 2H(x + 1) + 1] + 4δ(x - 1) + 4δ(x + 1)

17. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (iii) να αποδείξετε ότι $\boldsymbol{\int_1^{\infty}(t^2+2)\delta(t)dt}$ = 0 και $\boldsymbol{\int_{-1}^{\infty}(t^2+2)\delta(t)dt = 2}$

Λύση

Έστω f(t) = t^2 + 2, τότε είναι f(0) = 2. Όμως ισχύει ότι f(t)δ(t) = f(0)δ(t). Άρα

$\int_1^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_1^{\infty}(t^2+2)\delta(t)dt = \int_1^{\infty} f(0)\delta(t)dt = \int_1^{\infty} 2\delta(t)dt$.

Επειδή, στο παραπάνω ολοκλήρωμα, το μηδέν δεν ανήκει στο σύνολο ολοκλήρωσης, αφού A= [1,+∞). Άρα: $\int_1^{\infty} \delta(t)dt = 0$

Για το άλλο ολοκλήρωμα : το ένα άκρο του ολοκληρώματος είναι ίσο με -1, οπότε το μηδέν ανήκει στο διάστημα [-1, +∞]. Έτσι έχουμε :

$\int_{-1}^{\infty}(t^2+2)\delta(t)dt = \int_{-1}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-1}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = \int_{-1}^{\infty} 2\delta(t)dt$

Αφού 0 ϵ [-1 , ∞), έχουμε ότι : $\int_{-1}^{\infty} 2\delta(t)dt = 2$

18. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-5}^{\infty} t^2\delta'(t+3)dt$

Λύση

Α τρόπος: Χρησιμοποιούμε την παραγοντική ολοκλήρωση και βρίσκουμε ότι :

$\int_{-5}^{\infty} t^2\delta'(t+3)dt = [t^2\delta(t+3)]_{-5}^{\infty} - \int_{-5}^{\infty} 2t\delta(t+3)dt$ (1)

Από ιδιότητα (iii) είναι: $t^2\delta(t+3) = (-3)^2\delta(t+3) = 9\delta(t+3)$.

Άρα $\lim_{t\to\infty} t^2\delta(t+3) = \lim_{t\to\infty} 9\delta(t+3) = 0$ και δ(-5 + 3) = δ(-2) = 0.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι: $\int_{-5}^{\infty} t^2\delta'(t+3)dt = 0 - 0 - \int_{-5}^{\infty} 2t\delta(t+3)dt$.

Θεωρώ την f(t) = 2t και T = -3, έτσι από την ιδιότητα (vi):

2tδ(t + 3) = 2(-3)δ(t + 3) = -6δ(t + 3)

Τελικά είναι $\int_{-5}^{\infty} t^2\delta'(t+3)dt = -\int_{-5}^{\infty} 2t\delta(t+3)dt = -\int_{-5}^{\infty} -6\delta(t+3)dt = 6$.

Β τρόπος : Θέτουμε όπου ω = t + 3 και στη συνέχεια εφαρμόζουμε την ιδιότητα (vi).

19. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

- **i)** $\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-2t}+sint)\delta(t)dt.$
- **ii)** $\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(t-1)-\delta(t+1)]e^{-i\alpha t}dt.$
- **iii)** $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}\delta(t-T))dt.$
- **(iv)** $\int_{0}^{+\infty}(t^2+3t-1)\delta^{(3)}(t-T))dt.$
- **(v)** $\int_{0}^{+\infty}(t^2+2)\delta\left(\frac{t}{2}-1\right)dt.$

Λύση

(i) θέτουμε f(t) = $e^{-2t}+sint$, και επειδή ισχύει ότι : f(t)δ(t) = f(0)δ(t). Επομένως

$\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-2t}+sint)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\ \ \delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1.$

Το ολοκλήρωμα μπορεί να βρεθεί και με την ιδιότητα (iv).

(ii) Αρχικά χωρίζουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα σε δύο και υπολογίζω το καθένα ξεχωριστά : $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-1)e^{-i\alpha t}dt$ και $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+1)e^{-i\alpha t}dt$

Α τρόπος:

Ισχύει ότι : f(t)δ(t - 1) = f(1)δ(t - 1). (1)

Θέτουμε f(x) = $e^{-i\alpha t}$ τότε f(1) = e^{-ia}.

Επομένως ισχύει : $e^{-i\alpha t}$δ(t - 1) =e^{-ia} δ(t - 1) (2)

$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-1)e^{-i\alpha t}dt = e^{-ia}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-1)dt = e^{-ia}$

$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+1)e^{-i\alpha t}dt = e^{ia}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+1)dt = e^{ia}$

Άρα I = $I_1 - I_2 = e^{-ia} - e^{ia}$ = cosα - isinα – cosα - isinα = - 2isinα.

Β τρόπος:

Από την ιδιότητα (iv) έχουμε:

$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-1)e^{-i\alpha t}dt = e^{-ia}$ και $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+1)e^{-i\alpha t}dt = e^{ia}$

Άρα I = $I_1 - I_2 = e^{-ia} - e^{ia}$ = cosα - isinα – cosα - isinα = - 2isinα.

(iii) Επειδή ισχύει ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-T))dt = f(T)$, αντικαθιστούμε στη συνάρτηση $f(t) = e^{-j\omega t}$ όπου t το T, οπότε: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-T))dt = e^{-j\omega T}$= cosωT + jsinωT.

(iv) Σύμφωνα με την ιδιότητα (x), το ζητούμενη ολοκλήρωμα γίνεται:

$\int_{0}^{+\infty}(t^2+3t-1)\delta^{(3)}(t-T))dt = (-1)^3[t^2+3t-1]^{(3)}{}_{t=T}$ =… = 0.

(v) $\int_{0}^{+\infty}(t^2+2)\delta\left(\frac{t}{2}-1\right)dt = \int_{\mathbf{0}}^{+\infty}(t^2+2)\delta\left(\frac{t-2}{2}\right)dt =$

$\frac{1}{1/2}\int_{0}^{+\infty}(t^2+2)\delta(t-2)dt = 2(2^2+2) = 12.$

Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε το ολοκλήρωμα, είναι να θέσουμε x = $\frac{t}{2} - 1$ και να λύσουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (iv).

20. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty}[\boldsymbol{cos(t)} + \boldsymbol{sin(t)}]\boldsymbol{\delta'(t^3+t^2+t)dt}$.

Λύση

Η συνάρτηση φ(t) = t^3+t^2+t είναι αύξουσα συνάρτηση με φ(0) = 0, άρα από την ιδιότητα (xiii)(α), έχουμε:

δ[φ(t)] = δ(t^3+t^2+t) $= \frac{1}{|\varphi'(0)|}$δ(t - 0) = $\frac{1}{3\cdot 0^2+2\cdot 0+1}\delta(t)$ = δ(t). (1)

Είναι δ΄[φ(t)] = $\frac{\mathrm{d}\delta[\varphi(t)]}{\mathrm{d}\varphi(t)} = \frac{\mathrm{d}\delta[\varphi(t)]}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi(t)} = \frac{\mathrm{d}\delta[\varphi(t)]}{\mathrm{d}t}.\frac{1}{d\varphi(t)/_{dt}} = \frac{\mathrm{d}\delta[\varphi(t)]}{\mathrm{d}t}.\frac{1}{3t^2+2t+1}$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ δ΄[φ(t)] = $\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}.\frac{1}{3t^2+2t+1} = \frac{\delta'(t)}{3t^2+2t+1}$ (2)

Το ολοκλήρωμα: $\int_{-\infty}^{\infty}[cos(t) + sin(t)]\delta'(t^3 + t^2 + t)dt$ σύμφωνα με την (2) γίνεται:

$\int_{-\infty}^{\infty}[cos(t) + sin(t)]\frac{\delta'(t)}{3t^2+2t+1}dt$ και από ιδιότητα (vi) έχουμε:

$\int_{-\infty}^{\infty}[cos(t) + sin(t)]\frac{\delta'(t)}{3t^2+2t+1}dt =$ - $\left[\frac{\cos(t)+\sin(t)}{3t^2+2t+1}\right]'_{t=0}$ = … = 1.

21. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\delta(x^3 - x)e^{-x}dx}$.

Λύση

Θέτω το g(x) = x^3 – x, οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται της μορφής $\int_{-\infty}^{\infty}\delta\big(g(x)\big)f(x)dx$.

Οι ρίζες της g(x) είναι το x_1=0, το x_2 = 1 και το x_3 = -1. Στα σημεία αυτά η g΄(x_i) ≠ 0, με i = 1, 2, 3. Άρα από την ιδιότητα (ix) έχουμε: δ(g(x)) = $\sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x)|}$.

Οπότε: δ(x^3 – x) = $\frac{\delta(x)}{|-1|} + \frac{\delta(x-1)}{2} + \frac{\delta(x+1)}{2}$

Το ολοκλήρωμα γράφεται :

$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x^3 - x)e^{-x}dx.= \int_{-\infty}^{\infty}[\frac{\delta(\chi)}{|-1|} + \frac{\delta(\chi-1)}{2} + \frac{\delta(\chi+1)}{2}]e^{-x}dx$ = 1 + $\frac{e}{2}$ + $\frac{e^{-1}}{2}$.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2^{Ο}

Μετασχηματισμός Fourier

Εισαγωγή

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας μαθηματικός μετασχηματισμός, που μετατρέπει μια συνάρτηση του χρόνου f(t), σε μια νέα συνάρτηση που τη συμβολίζουμε με $\boldsymbol{F}$, της οποίας η μονάδα μέτρησης είναι η συχνότητα, με την οποία εμφανίζουν μονάδες $^{κύκλου}/_{δευτερόλεπτα}$ (Hertz) ή ακτίνια ανά δευτερόλεπτο. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια αντιστρέψιμη συνάρτηση, επομένως, μπορούμε με γνωστή τη συνάρτηση $\boldsymbol{F}$ να εμφανίσουμε την f. Δηλαδή, ο συνεχής μετασχηματισμός κατά Fourier (μ.κ.F.), με τον οποίο και θα ασχοληθούμε, απεικονίζει πραγματικές ή μιγαδικές συναρτήσεις f (t) του χρόνου t, που δεν είναι κατά ανάγκη περιοδικές, σε μιγαδικές συναρτήσεις $\boldsymbol{F}$(ω) της κυκλικής συχνότητας ω.

Τα ολοκληρώματα και οι μετασχηματισμοί Fourier έχουν ευρεία εφαρμογή στην επίλυση των συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζεται η έννοια του μετασχηματισμού κατά Fourier (μ.κ.F) και του αντίστροφου μετασχηματισμού κατά Fourier (α.μ.κ.F), διατυπώνονται οι βασικές ιδιότητές τους, υπολογίζονται οι μετασχηματισμοί Fourier στοιχειωδών συναρτήσεων και επεξεργάζονται ορισμένες βασικές εφαρμογές.

Α. Ορισμός Μετασχηματισμού Fourier.

Ορισμός: Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί μιας συνάρτησης f(x) σε ένα διάστημα [α,β], ορίζονται ως μετασχηματισμοί της μορφής.

F(s) = $\int_a^b \Pi(s,x)f(x)dx.$

όπου η συνάρτηση F(s) ονομάζεται ολοκληρωτικός μετασχηματισμός της f(x), ενώ η συνάρτηση Π(s,x) λέγεται πυρήνας του μετασχηματισμού.

Ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός συναρτήσεων είναι αυτός του Fourier, ο τελεστής του θα συμβολίζεται με $\boldsymbol{F}$ ή **F** και ο οποίος, σε μιγαδική εν γένει συνάρτηση f αντιστοιχίζει μιγαδική επίσης συνάρτηση $\boldsymbol{F}$(ω)

Ορισμός: Έστω f : R → C, μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση (f ∈ L^1(R)). Ορίζουμε ως **Μετασχηματισμένη Κατά Fourier** (μ.κ.F) συνάρτηση της f(x) και γράφουμε: $\boldsymbol{F}[f(x)](\omega) = \boldsymbol{F}(\omega)$, ω ϵ R, τη συνάρτηση:$\boldsymbol{F}[f(x)](\omega) = \boldsymbol{F}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}\,dx$ (1)

Ορισμός: Ο **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Κατά Fourier** της $\boldsymbol{F}$(ω), που τον συμβολίζουμε με $\boldsymbol{F}^{-1}$, ορίζεται ως :

$$\boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{F}(x)](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(x)e^{j\omega x}dx = f(\omega) \tag{2}$$

Οι τύποι (1) και (2) αποτελούν το λεγόμενο « **ζεύγος μετασχηματισμών κατά Fourier**»

Παρατήρηση: Η αντίστροφη μετασχηματισμένη συνάρτηση για να ορίζεται πρέπει να ικανοποιεί κάποιες προϋποθέσεις. Είναι πιθανό μια τμηματικά συνεχής, απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση f να έχει μ.κ.F μια συνάρτηση $\boldsymbol{F}$, η οποία δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Έτσι η αντίστροφη μ.κ.F. δεν ορίζεται (κοίτα παράδειγμα 1). Για να ορίζεται η αντίστροφη μετασχηματισμένη συνάρτηση $\boldsymbol{F}^{-1}$ της $\boldsymbol{F}$ πρέπει να ορίζεται στο R, να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη σε κάθε συμπαγές διάστημα και $\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{F}(x)|dx < \infty$.

Παρακάτω αναφέρουμε τις συνθήκες Dirichlet, που εξασφαλίζουν την ύπαρξη του Μετασχηματισμού Κατά Fourier (μ.κ.F.) $\boldsymbol{F}$(ω) και του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Κατα Fourier (α.μ.κ.F) $\boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{F}(x)](\omega)$.

Πρόταση 1: Οι (ικανές αλλά όχι αναγκαίες) συνθήκες που εξασφαλίζουν την ύπαρξη μετασχηματισμού Fourier για μια συνάρτηση f είναι οι συνθήκες Dirichlet, οι οποίες είναι:

(α) να συγκλίνει το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < \infty$, δηλαδή $f \in L^1(R)$,

(β) η συνάρτηση f να έχει πεπερασμένο αριθμό ακροτάτων σε κάθε πεπερασμένο διάστημα.

(γ) η συνάρτηση f να έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών σε κάθε πεπερασμένο διάστημα, πεπερασμένου ύψους.

Προσοχή: Η εναλλαγή ολοκληρώματος του ορίου με το όριο ολοκληρώματος δεν ισχύει πάντοτε. Παρακάτω δίνουμε ένα θεώρημα με το οποίο αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του, τότε μπορούμε να εναλλάξουμε ολοκλήρωμα με όριο.

Θεώρημα 2 (Κυριαρχημένης Σύγκλισης): Έστω $f_n \in L^1$, ώστε:

(i) $f_n \to f$ σχεδόν παντού
(ii) υπάρχει g ≥ 0, g ∈ L^1 ώστε $|f_n| \leq$ g, για κάθε n ∈ N
Τότε f ∈ L^1 και $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση f που ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet (πρόταση 1), τότε ο μετασχηματισμός Fourier ***F*** (μ.κ.f) και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier $\boldsymbol{F}^{-1}$ (α.μ.κ.F), σύμφωνα με τα παραπάνω, πρέπει να είναι:

$$\boldsymbol{F}[f(x)](\omega) = \boldsymbol{F}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x}\, dx$$

$$\boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{F}(x)](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(x) e^{j\omega x} dx = f(\omega)$$

Για να έχει ύπαρξη η συνάρτηση ***F*** θα πρέπει το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$ να υπάρχει για κάθε x ∈ R και f ∈ L^1. Πράγματι:
$|\boldsymbol{F}\ [f(x)](\omega)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \cdot |e^{-i\omega x}|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty$, αφού f ∈ L^1 . Δηλαδή η $\boldsymbol{F}$[f(x)](ω) ικανοποιεί τη Πρόταση 1 (συνθήκες Dirichlet).

Παρατηρήσεις

(i) Ένας γρήγορος τρόπος για να δείτε αν μια συνάρτηση έχει μετασχηματισμό Fourier είναι να δείτε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Αν το εμβαδόν μεταξύ της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα είναι πεπερασμένο, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier και μπορεί να υπολογιστεί με βάση τον ορισμό.

(ii) Μια συνάρτηση f που πληρεί τις υποθέσεις της πρότασης 1 αναπαράγεται από τον μετασχηματισμό Fourier της ***F*** μέσου του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier, σύμφωνα με τη σχέση (2).

(iii) Υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες υπάρχει ο Μ.F. χωρίς αυτές να είναι απολύτως ολοκληρώσιμες, π.χ. οι συναρτήσεις f(x) = 1 (άσκ. 17), g(x)= u(x) (άσκ. 18),h(x)= $\frac{\sin(at)}{t}$.

Επίσης, υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν Μ.F., δηλαδή το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ist}dt$ δεν υπάρχει ή έχει άπειρη τιμή, π.χ. η e^t ή $e^t \cdot cost \cdot u(t)$.

(iv) Η συνάρτηση $\boldsymbol{F}$ είναι η απεικόνιση $\boldsymbol{F}$: f $\rightarrow$ $\boldsymbol{F}$= $\boldsymbol{F}$(f), της οποίας το πεδίο ορισμού είναι ένας χώρος συναρτήσεων.

Παρακάτω παραθέτουμε δυο θεωρήματα που θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμα στον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier και του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier.

Θεώρημα 3: Ο μετασχηματισμός Fourier $\boldsymbol{F}$ μιας συνάρτησης f είναι μια συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη

Έχουμε $\boldsymbol{F}$(x + h) - $\boldsymbol{F}$(x) = $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x+h)t} f(t)dt$ - $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x)t} f(t)dt$ =

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}e^{-iht} f(t)dt$ - $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt$ = $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}(e^{-iht} - 1) f(t)dt$.

Οπότε |$\boldsymbol{F}$(x + h) – $\boldsymbol{F}$(x)| ≤ $|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}(e^{-iht} - 1) f(t)dt| \leq$

$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-ixt}||e^{-iht} - 1| |f(t)|dt$ $\qquad |e^{-ixt}|$ = 1

|$\boldsymbol{F}$(x + h) – $\boldsymbol{F}$(x)| ≤ $\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-iht} - 1| |f(t)|dt$ (1)

Όμως $|e^{-iht} - 1| \cdot |f(t)| \leq [|e^{-iht}| + |1|] \cdot |f(t)|$ = $[|e^{-iht}| \cdot |f(t)| + 1 \cdot |f(t)| \leq$ 2|f(t)|

και $\lim_{h\to 0} |e^{-iht} - 1| \cdot |f(t)| = 0$. (2)

Σύμφωνα με το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, μπορούμε να εναλλάξουμε το όριο ενός ολοκληρώματος με το ολοκλήρωμα του ορίου. Επομένως:

$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-iht} - 1| \cdot |f(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{h\to 0} |e^{-iht} - 1| \cdot |f(t)| = 0$ από τη σχέση (2)

Άρα $\int_{-\infty}^{+\infty} [|\boldsymbol{F}(x+h) - \boldsymbol{F}(x)|]dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} [|\boldsymbol{F}(x+h) - \boldsymbol{F}(x)|]dx = 0 \Leftrightarrow$ $\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(x+h)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(x)dx$

Θεώρημα 4 (Lebesgue – Riemann): Αν f ϵ L^1, τότε:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \boldsymbol{F}(x)dx = \lim_{x\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt = 0$$

Απόδειξη

Ο μετασχηματισμός Fourier $\boldsymbol{F}$ της συνάρτησης f είναι:

$\boldsymbol{F}[f(x)](x) = \boldsymbol{F}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\, dt$. (1)

- $\boldsymbol{F}$(x) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-1)e^{-ixt}\,dt$ ⇔ ($e^{\iota\pi}$ = cosπ + isinπ)

- $\boldsymbol{F}$(x):= $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\pi}e^{-ixt}\,dt$ ⇔

- $\boldsymbol{F}$(x):= $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ix(t-\frac{\pi}{x})}\,dt.$

Θέτω στο τελευταίο ολοκλήρωμα: ω = t - $\frac{\pi}{x}$ και dω = dt. Άρα

- $\boldsymbol{F}$(x):= $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega+\frac{\pi}{x})e^{-i\omega x}\,d\omega$ = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\frac{\pi}{x})e^{-ixt}\,dt$ (2)

(Στο τελευταίο ολοκλήρωμα αντικαταστήσαμε όπου ω το t)

Αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2):

2$\boldsymbol{F}$(x) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\,dt$ - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\frac{\pi}{x})e^{-ixt}\,dt$ ⇔

2$\boldsymbol{F}$(x) = $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)-f(t+\frac{\pi}{x})]e^{-ixt}\,dt.$

2|$\boldsymbol{F}$(x)| = $|\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)-f(t+\frac{\pi}{x})]e^{-ixt}\,dt| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{x}\right)|\cdot|e^{-ixt}|\,dt$

Όμως $|e^{-ixt}|$=1, άρα

2|$\boldsymbol{F}$(x)| ≤ $|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{x}\right)dt| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{x}\right)|\,dt.$

$\lim_{x\to\pm\infty} 2|\boldsymbol{F}(x)|dx \leq \lim_{x\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{x}\right)|\,dt.$

Όμως f ∈ L^1, τότε: $\lim_{x\to\pm\infty} 2|\boldsymbol{F}(x)|dx \leq \lim_{x\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{x}\right)|\,dt = 0.$

$\lim_{x\to\pm\infty} 2|\boldsymbol{F}(x)|dx \leq 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\boldsymbol{F}(x)dx = 0.$

Πολλά βιβλία ορίζουν λίγο διαφορετικά τον μετασχηματισμό Fourier. Ορισμένα χρησιμοποιούν το 2π πριν το jωx του εκθέτη, μερικά το $(2\pi)^{-1}$ ή το $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ μπροστά από το ολοκληρώματα του μ.κ.F και του α.μ.κ.F. Πρέπει οι σταθεροί συντελεστές του μ.κ.F. και του α.μ.κ.F (προ του ολοκληρώματος) να έχουν γινόμενο $\frac{1}{2\pi}$. Π.χ μπορεί οι συντελεστές των παραπάνω ολοκληρωμάτων να είναι $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ τόσο για τον μ.κ.F. όσο και του α.μ.κ.F. Η βασική θεωρία είναι η ίδια σε κάθε περίπτωση. Για αυτό και εμείς θα παίρνουμε όποιον τύπο μας βολεύει για να λύσουμε το πρόβλημα που μας δίνεται.

Πολλές φορές θα συμβολίζουμε την $\boldsymbol{F}$[f(x)](s) με $\boldsymbol{F}$(s) και την $\boldsymbol{F}^{-1}$[$\boldsymbol{F}$(x)](s) με $\boldsymbol{F}^{-1}$(s), αν δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα σύγχυσης.

Πρόταση 5: Έστω f : R → C τοπικά ολοκληρώσιμη, τμηματικά συνεχής και τοπικά τμηματικά C^1 συνάρτηση της οποίας υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$. Τότε ισχύει :

$$F^{-1}[F(f(x)](t) = \frac{f(t^+)+\ f(t^-)}{2}, \quad \text{για κάθε } t \in R$$

Θεώρημα 6: Αν δύο συναρτήσεις συνεχής, με τους παραγώγους τους τμηματικά συνεχής, έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό Fourier τότε αυτές οι συναρτήσεις θα είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω f, g : R → R συνεχής με f΄, g΄κατά τμήματα συνεχής και $\boldsymbol{F}[f](s) = \boldsymbol{F}(s)$, $\boldsymbol{G}[g](s) = \boldsymbol{G}(s)$ για κάθε s ϵ R οι μετασχηματισμοί Fourier των παραπάνω συναρτήσεων, τέτοιοι ώστε $\boldsymbol{F}(s) = \boldsymbol{G}(s)$. Τότε έχουμε ότι f(t) = g(t).

Πράγματι, σύμφωνα με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier έχουμε:

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{F}(s)e^{jts}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{G}(s)e^{jts}ds = g(t).$

Παρατήρηση: Εάν f, g συναρτήσεις με τον ίδιο μετασχηματισμό Fourier τότε στα σημεία που η f ή/και η g δεν είναι συνεχής (σύμφωνα με την παραπάνω Πρόταση 5) ισχύει: $\frac{f(t^+)+\ f(t^-)}{2} = \frac{g(t^+)+\ g(t^-)}{2}$.

Παραδείγματα

1. Εάν α > 0, να βρεθεί η μετασχηματισμένη κατά Fourier της συνάρτησης f(x) = H(x) e^{-ax} , όπου H(x) η συνάρτηση μοναδιαίας βαθμίδας (συνάρτηση Heaviside). Στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη μετασχηματισμένη κατά Fourier συνάρτηση F^{-1}, αν υπάρχει.

Λύση

Εάν f(x) = e^{-ax}, τότε έχουμε ότι H(x)·f(x) = $\begin{cases} 0, & , αν\ x < 0 \\ e^{-ax} & αν\ x > 0 \end{cases}$.

Προφανώς η H(x)·f(x) είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, άρα ορίζεται ο μ.κ.F.

Άρα $\boldsymbol{F}[f(t)](s) = \boldsymbol{F}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ist}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-ist}dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-(a+is)t}dt =$

$$= -\frac{1}{\alpha+is}\lim_{x\to\infty}[e^{-(\alpha+is)t}]_0^x = -\frac{1}{\alpha+is}\lim_{x\to\infty}[e^{-(\alpha+is)x} - 1] = \frac{1}{a+is}.$$

Η αντίστροφη μετασχηματισμένη $\boldsymbol{F}^{-1}$ δεν υπάρχει, αφού η $\boldsymbol{F}(s) = \frac{1}{a+is}$ δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη.

2. Να βρεθεί ο μ.κ.F της συνάρτησης f(x) = $\begin{cases} \boldsymbol{1 - x^2}, \acute{o}\boldsymbol{\tau\alpha\nu}\ |\boldsymbol{x}| \leq \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0}, \qquad \acute{o}\boldsymbol{\tau\alpha\nu}|\boldsymbol{x}| > \boldsymbol{1} \end{cases}$. Στη συνέχεια δείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \boldsymbol{cos\frac{x}{2} \cdot \frac{x \cdot cosx - sinx}{x^3} dx} = -\frac{3\pi}{16}$

Λύση

Ο μ.F. δίνεται από τον τύπο:

$\boldsymbol{F}$(s) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}dx$ = $\int_{-1}^{+1}(1 - x^2)e^{-isx}dx$ ⇔

$\boldsymbol{F}$(s) = $\int_{-1}^{+1}(1 - x^2)[\cos(sx) - isin(sx)]dx$ ⇔

$\boldsymbol{F}$(s) = $\int_{-1}^{+1}(1 - x^2)\cos(sx)dx - \int_{-1}^{1}(1 - x^2)isin(sx)\,dx$ ⇔

Η υπολοκληρώσιμη συνάρτηση του 1ου ολοκληρώματος είναι άρτια, ενώ του 2ου ολοκληρώματος είναι περιττή, δηλαδή $\int_{-1}^{1}(1 - x^2)isin(sx)\,dx$ = 0. Άρα:

$\boldsymbol{F}$(s) = $\int_{-1}^{1}(1 - x^2)\cos(sx)dx$ = $2\int_0^1(1 - x^2)\cos(sx)dx$.

Χρησιμοποιούμε την παραγοντική ολοκλήρωση (δις) και καταλήγουμε:

$\boldsymbol{F}$(s) = $-4[\frac{scos(s) - \sin(s)}{s^3}]$.

Από τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier είναι:

$\boldsymbol{F^{-1}}$**[**$\boldsymbol{F}$(s)**]**(x) = $\boldsymbol{F^{-1}}$(x) = $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(s)e^{isx}ds = f(x)$ ⇔

f(x) = $-\frac{4}{2\pi}\int_{-1}^{+1}[\frac{s \cdot cos(s) - \sin(s)}{s^3}]e^{isx}ds$ ⇔

f(x) = $-\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}[\frac{s \cdot cos(s) - \sin(s)}{s^3}]e^{isx}ds$ ⇔

f(x) = $-\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}[\frac{s \cdot cos(s) - \sin(s)}{s^3}][\cos(sx) + isin(sx)]ds$⇔

f(x) = $-\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}[\frac{s \cdot cos(s) - \sin(s)}{s^3}]\cos(sx)dx - \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}[\frac{s \cdot cos(s) - \sin(s)}{s^3}]isin(sx)\,ds$.

Η υπολοκληρώσιμη αυνάρτηση του 1ου ολοκληρώματος είναι άρτια, ενώ του 2ου ολοκληρώματος είναι περιττή, δηλαδή $\int_{-1}^{1}[\frac{s \cdot cos(s) - \sin(s)}{s^3}]isin(sx)\,ds$ = 0. Άρα:

f(x) = $-\frac{2}{\pi}2\int_0^1[\frac{s \cdot cos(s) - \sin(s)}{s^3}]cos(sx)\,ds$ ⇔

f(x) = $-\frac{4}{\pi}\int_0^1[\frac{s \cdot cos(s) - \sin(s)}{s^3}]cos(sx)\,ds$.

Για x = $\frac{1}{2}$, τότε: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - (\frac{1}{2})^2$ = $\frac{3}{4}$

f($\frac{1}{2}$) = $-\frac{4}{\pi}\int_0^1[\frac{s \cdot cos(s) - \sin(s)}{s^3}]cos(\frac{s}{2})\,ds$ ⇔ f($\frac{1}{2}$) = $\frac{3}{4}$ = $-\frac{4}{\pi}\int_0^1[\frac{s \cdot cos(s) - \sin(s)}{s^3}]cos(\frac{s}{2})\,ds$.

Έτσι έχουμε: $-\frac{3\pi}{16}$ = $\int_0^1[\frac{scos(s) - \sin(s)}{s^3}]cos(\frac{s}{2})\,ds$.

3. Έστω f(t) = H(t + L) – H(t - L), όπου H η συνάρτηση Heaviside, δηλαδή η συνάρτηση μοναδιαίου παλμού. Επομένως είναι f(t) = $\begin{cases} \mathbf{1}, \acute{o}\boldsymbol{\tau\alpha\nu}\ |\boldsymbol{t}| < \boldsymbol{L} \\ \mathbf{0}, \acute{o}\boldsymbol{\tau\alpha\nu}\ |\boldsymbol{t}| > \boldsymbol{L} \end{cases}$**.**

(α) Να βρείτε τη μ.κ.F της f.

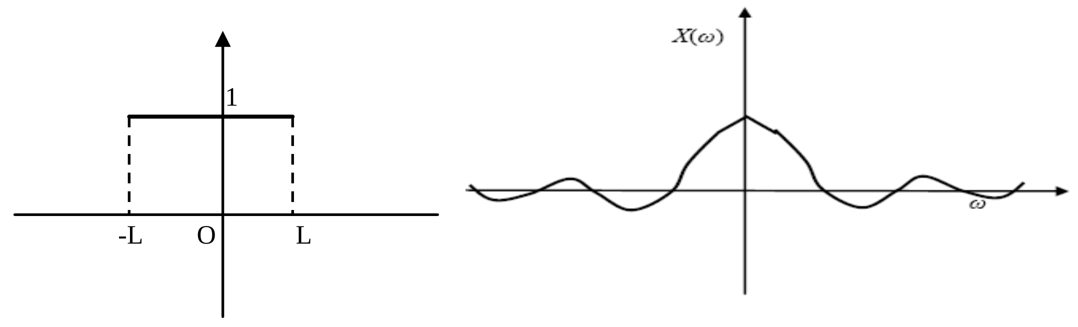
(β) Υπολογίστε το *F*[f(t)](0).

(γ) Είναι η μ.κ.F συνάρτηση f συνεχής στο [-L,L];

Λύση

(α) Η f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη στο [-L,L], άρα έχει νόημα η εύρεση του μ.κ.F.

$\boldsymbol{F}$(s) = $\boldsymbol{F}$[f(t)](s) = $\int_{-\infty}^{-\infty} f(t)e^{-ist}dt$ = $\int_{-L}^{L} e^{-ist}\,dt$ = $\frac{e^{isL}-e^{-isL}}{is}$ ⇔ $\boldsymbol{F}$(s) = $2\,\frac{\sin(sL)}{s}$.



Μοναδιαίου παλμού

Μετασχηματισμός Fourier

β) Για s = 0 είναι:

$\boldsymbol{F}$(0) = $\boldsymbol{F}$[f(t)](0) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i0t}dt$ = $\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$ = $\int_{-L}^{L} 1\,dt$ = 2L.

Επομένως: $\boldsymbol{F}$(s) = $\begin{cases} \frac{2\sin(\mathrm{sL})}{\mathrm{s}}, \acute{o}\tau\alpha\nu\ \mathrm{s} \neq 0 \\ 2\mathrm{L}, \quad \acute{o}\tau\alpha\nu\ \mathrm{s} = 0 \end{cases}$

(γ) Θα δείξουμε ότι ο μ.κ.F είναι συνεχής στο 0.

$\lim_{s\to 0} \boldsymbol{F}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2\sin(sL)}{s} =$ 2L και επειδή $\boldsymbol{F}(0)$ = 2L, έχουμε ότι η μ.κ.F. είναι συνεχής στο [-L,L].

4. Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης Dirac. η οποία ορίζεται από τον τύπο $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t}-\alpha)\mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ = $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})$.

Λύση

Η συνάρτησης Dirac ορίζεται από τον τύπο $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t}-\alpha)\mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ = f(α) όπου α σταθερός αριθμός και f μία οποιοδήποτε συνάρτηση.

Αν θέσουμε όπου α = 0 και f (t) = $\mathrm{e}^{-\mathrm{ist}}$ έχουμε:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-ist}dt = e^{-is0} = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{F}[\delta(s)] = 1.$

5. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\begin{cases} e^{-\alpha x}, \acute{o}\tau\alpha\nu\ \chi \geq 0 \\ e^{\alpha x}, \acute{o}\tau\alpha\nu\ \chi < 0 \end{cases}$ με α > 0. Να βρείτε τη μετασχηματισμένη κατά Fourier συνάρτηση της f.

Λύση

Είναι f(x) = $\begin{cases} e^{-\alpha x}, \acute{o}\tau\alpha\nu\ \chi \geq 0 \\ e^{\alpha x}, \acute{o}\tau\alpha\nu\ \chi < 0 \end{cases} = e^{\alpha x}H(-x) + e^{-\alpha x}H(x)$, όπου H(x) η συνάρτηση Heaviside.

Έστω g(x) = $e^{\alpha x}H(-x)$, με x < 0 και α > 0. Τότε:

$|\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx| = |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x}H(-x)\,dx| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{\alpha x}H(-x)\,|dx = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}\,dx = \ldots = \frac{1}{\alpha}.$

Άρα η g είναι απολύτως ολοκληρώσιμη.

Έστω h(x) = $e^{-\alpha x}H(x)$, με x > 0 και α > 0. Τότε:

$|\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx| = |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x}H(x)\,dx| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{\alpha x}H(x)\,|dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \ldots = \frac{1}{\alpha}.$

Άρα η h είναι απολύτως ολοκληρώσιμη.

Επομένως η f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, αφού:

|f(x)| = $|e^{\alpha x}H(-x) + e^{-\alpha x}H(x)|$ = |g(x) + h(x)| ≤ |g(x)| + |h(x)|

Άρα έχει νόημα η εύρεση του μ.κ.F.

Είναι $\boldsymbol{F}[f(x)](s) = \boldsymbol{F}(s) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}e^{-isx}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}e^{-isx}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - is)x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+is)x}\,dx = \ldots = [(\frac{1}{\alpha - is} - 0) - (0 - \frac{1}{\alpha+is})] = \frac{2\alpha}{\alpha^2+s^2}$

6. (Κοίταξε παράδειγμα 3). Έστω α > 0, ορίζουμε τη συνάρτηση

$p_\alpha(t) = \begin{cases} 1, \acute{o}\tau\alpha\nu\ |x| \leq \frac{\alpha}{2} \\ 0, \quad \acute{\alpha}\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$

Να βρείτε τη μετασχηματισμένη κατά Fourier συνάρτηση της $p_\alpha(t)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{0}^{+\infty} \frac{sins}{s}\,ds.$

Λύση

Η συνάρτηση $p_\alpha(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, άρα έχει νόημα η εύρεση του μετασχηματισμού κατά Fourier.

Για s ≠ 0, έχουμε :

$\boldsymbol{F}$[$p_α$(t)](s) = $\int_{-\infty}^{+\infty} p_a(t)e^{-ist}dt$ = $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ist}dt$= … = $\frac{2\sin(\frac{a}{2}s)}{s}$ (1)

Για s = 0 έχουμε :

$\boldsymbol{F}$[$p_α$(t)](0) = $\int_{-\infty}^{+\infty} p_a(t)e^{-i0t}dt$ = $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 1dt$ = α.

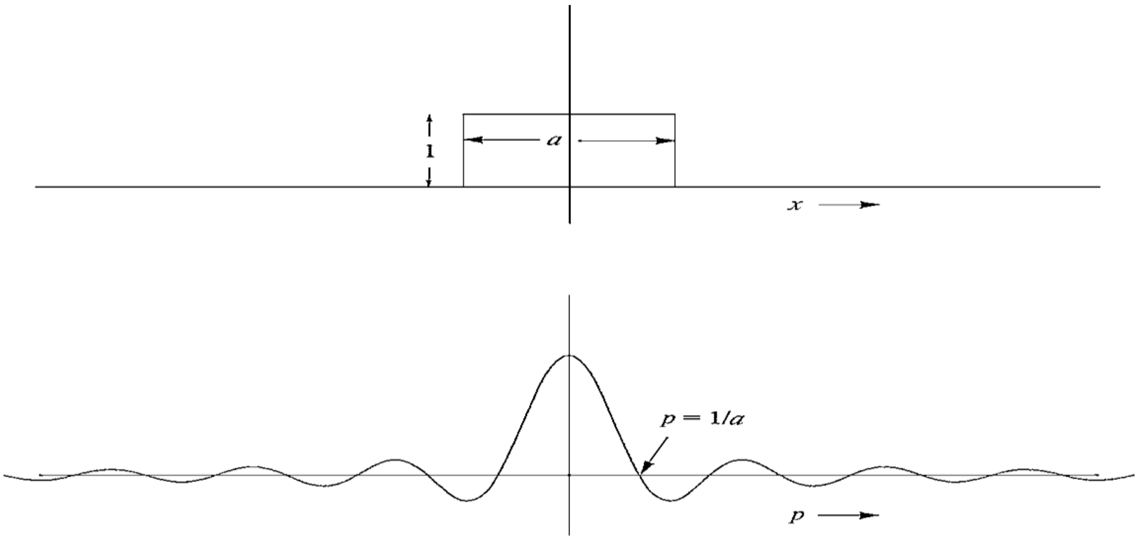
Επομένως $\boldsymbol{F}$[$p_α$(t)](s) = $\begin{cases} \frac{2sin\frac{as}{2}}{s}, & s \neq 0 \\ \alpha, & s = 0 \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι η $\boldsymbol{F}$[$p_α$(t)](s) είναι συνεχής στο s = 0 αφού:

$\lim_{s\to 0} \boldsymbol{F}[p_\alpha(\text{t})](\text{s})$ = $\lim_{s\to 0}\frac{2\sin(\frac{as}{2})}{s}$ = α ⇔ $\boldsymbol{F}$[$p_α$(t)](0) = α

Επομένως η $\boldsymbol{F}$[$p_α$(t)](s) είναι συνεχής, ενώ η $p_α$(t) δεν είναι.

Η γραφική παράσταση του μ.κ.F. της $p_α$(t) φαίνεται παρακάτω.



Για α = 2, η συνάρτηση p_2(t) = p(t) = $\begin{cases} 1, όταν\ |x| \leq 1 \\ 0, \quad αλλού \end{cases}$ έχει την μετασχηματισμένη κατά Fourier συνάρτηση: $\boldsymbol{F}$[p(t)](s) = $\begin{cases} \frac{2sins}{s}, & s \neq 0 \\ 2, & s = 0 \end{cases}$. Σύμφωνα με τον ορισμό της αντίστροφης μετασχηματισμένης κατά Fourier συνάρτησης είναι:

p(t) = $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(s)e^{ist}dt$ = $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2sins}{s}e^{ist}ds$ = $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sins}{s}e^{ist}ds.$

Για t = 0 έχουμε: p(0) = $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sins}{s}ds$ ⇔ 1 = $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sins}{s}ds.$

Η ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι άρτια συνάρτηση, επομένως:

$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sins}{s}ds$ = $\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{sins}{s}ds$ = 1 ⇔ $\int_{0}^{+\infty} \frac{sins}{s}ds$ = $\frac{\pi}{2}$.

7. Να βρεθεί ο μ.κ.F της συνάρτησης f (t) = $e^{-|t|}$, t ϵ R. Χρησιμοποιήστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ και (ii) $\int_0^\infty \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt$.

Λύση

(i) Προφανώς ορίζεται ο μ.κ.F.

$\boldsymbol{F}$[f(t)](s) = $\boldsymbol{F}$(s) = $\int_R e^{-|t|}e^{-ist}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(1+is)t}\,dt + \int_{-\infty}^0 e^{(1-is)t}\,dt.$

Σύμφωνα με το παράδειγμα 5 (για α = 1) έχουμε:

$\boldsymbol{F}$[f(t)](s) = $\boldsymbol{F}$(s) = $\frac{1}{1+is} + \frac{1}{1-is} = \frac{2}{1+s^2}$.

Επομένως $\boldsymbol{F}[e^{-|x|}]$(s) = $\frac{2}{1+s^2}$

Από τον αντίστροφο μ.κ.F. έχουμε :

$\boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{F}(t)](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(t)e^{itx}dt = f(x) \Leftrightarrow f(x) = e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{2e^{ixt}}{1+t^2}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2e^{ixt}}{1+t^2}dt.$

Θέτω στο 1ο ολοκλήρωμα u = - t και du = - dt, επομένως έχουμε :

$e^{-|x|} = -2\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{0}\frac{e^{-ixu}}{1+u^2}du + 2\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{ixt}}{1+t^2}\,dt = 2\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ixt}}{1+t^2}dt + 2\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{ixt}}{1+t^2}\,dt$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ixt}+e^{ixt}}{1+t^2}dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-ixt}+e^{ixt}}{2(1+t^2)}dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt \Leftrightarrow$

$e^{-|x|} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$ (1)

Για x = 0 στην τελευταία εξίσωση, λαμβάνουμε ότι :

$e^{-|0|} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(0)}{1+t^2}dt \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$

(ii) Θα δείξουμε ότι: $\int_0^\infty \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt = \frac{1}{4}e^{-x}$.

Παραγωγίζουμε ως προς x την (1) και επειδή x ≥ 0.

$(e^{-x})' = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt \Leftrightarrow -e^{-x} = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt \Leftrightarrow \frac{\pi e^{-x}}{2} = \int_0^{\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt.$

8. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και ο μετασχηματισμός κατά Fourier είναι:

$$\boldsymbol{F}[f(x)](s) = \boldsymbol{F}(s) = \frac{\ln(1+s^2)}{s^2}.$$

(α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ και

(β) Να βρείτε το f (0).

Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι για s = 0 έχουμε: $\boldsymbol{F}(0) = \lim_{s\to 0}\frac{\ln(1+s^2)}{s^2}$. Με τη χρήση του κανόνα του Del Hospital βρίσκουμε ότι το παραπάνω όριο ισούται με το 1, δηλαδή $\boldsymbol{F}(0) = 1$.

Από τον ορισμό του μ.κ.F. έχουμε: $\boldsymbol{F}$(x) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-isx}ds.$

Για x = 0 βρίσκουμε $\boldsymbol{F}(0)$ = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-is0}ds$ = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)ds$ ⇔ 1 = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)ds$

(β) Εύρεση του f(0).

Από τον αντίστροφο μ.κ.F. έχουμε: $\boldsymbol{F}^{-1}$[$\boldsymbol{F}$(s)](x) = f(x) = $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(s)e^{isx}ds.$

Για x = 0 λαμβάνουμε: f(0) = $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(s)e^{i0s}ds$ = $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ln(1+s^2)}{s^2}ds.$

Η συνάρτηση $\boldsymbol{F}$(s) είναι, προφανώς, άρτια συνάρτηση, άρα:

$$f(0) = 2\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{ln(1+s^2)}{s^2}ds = 2\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{ln(1+s^2)}{s}\right]_0^{+\infty} + 2\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{[ln(1+s^2)]'}{s}ds$$

$$= -\frac{1}{\pi}\lim_{s\to\infty}\frac{ln(1+s^2)}{s} + \frac{1}{\pi}\lim_{s\to 0}\frac{ln(1+s^2)}{s} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{s}\cdot\frac{2s}{1+s^2}ds \quad (\text{παρ.7: } \int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+s^2}ds = \frac{\pi}{2})$$

$$= 0 + 0 + \frac{2}{\pi}[\arctan s]_0^{+\infty} = 0 + 0 + \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2} - 0) = 1.$$

Επομένως f(0) =1.

9. Έστω α > 0, ορίζουμε τη συνάρτηση q_α(t) = $\begin{cases} \boldsymbol{1 - \frac{|t|}{a}}, \boldsymbol{ό\tau\alpha\nu\ |x| \le a} \\ \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{ά\lambda\lambda o\upsilon} \end{cases}$ **να βρείτε τον μετασχηματισμό κατά Fourier της q_α(t) και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}\frac{sin^2 s}{s^2}ds$.**

Λύση

Η συνάρτηση q_α(t) είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, άρα έχει νόημα η εύρεση του μετασχηματισμού Fourier.

Για s ≠ 0, έχουμε :

$$\boldsymbol{F}[q_\alpha(t)](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_a(t)e^{-ist}dt = \int_{-a}^{a}(1-\frac{|t|}{a})e^{-ist}dt = \dots = \frac{4\sin^2(\frac{a}{2}s)}{as^2} \qquad (1)$$

Για s = 0 έχουμε :

$$\boldsymbol{F}[q_\alpha(t)](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_a(t)e^{-i0t}dt = \int_{-a}^{a}(1-\frac{|t|}{a})dt = \alpha.$$

Επομένως $\boldsymbol{F}[q_\alpha(t)](s) = \begin{cases} \frac{4sin^2(\frac{as}{2})}{as^2}, & s \neq 0 \\ \alpha, & s = 0 \end{cases}$

Η $\boldsymbol{F}[q_\alpha(t)](s)$ είναι συνεχής στο s = 0 αφού:

$$\lim_{s\to 0}\boldsymbol{F}[q_\alpha(t)](s) = \lim_{s\to 0}\frac{4\sin^2(\frac{as}{2})}{as^2} = \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{F}[q_\alpha(t)](0) = \alpha$$

Από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και για α = 2, είναι:

$$q(x) = \boldsymbol{F^{-1}F}[q(s)](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2sin^2(s)}{s^2}e^{isx}ds = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{sin^2(s)}{s^2}e^{isx}ds \Leftrightarrow$$

q(x) = $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{sin^2(s)}{s^2}e^{isx}ds$

Για x = 0 είναι: 1 = $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{sin^2(s)}{s^2}ds \Leftrightarrow \int_0^{+\infty}\frac{sin^2(s)}{s^2}ds = \frac{\pi}{2}$.

1. Βασικές Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier.

Αν οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ με $-\infty < x < +\infty$ ορίζουν τις μετασχηματισμένες κατά Fourier συναρτήσεις $\boldsymbol{F}(x)$, $\boldsymbol{G}(x)$ αντίστοιχα, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

(α) Γραμμικότητα: Εάν λ, μ μιγαδικοί αριθμοί, τότε ο μετασχηματισμός κατά Fourier (μ.κ.F) της $\lambda f(x) + \mu g(x)$ είναι:

$\boldsymbol{F}[\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda\boldsymbol{F}[f(x)] + \mu\boldsymbol{G}[g(x)] = \lambda\boldsymbol{F}(x) + \mu\boldsymbol{G}(x)$.

(β) Για κάθε α ϵ R, έχουμε :

(β1) Μετασχηματισμένη Μετατόπιση (χρόνου):

$\boldsymbol{F}[f(x - \alpha)](s) = e^{-is\alpha}\boldsymbol{F}[f](s) = e^{-is\alpha}\boldsymbol{F}(s)$.

(β2) Μετατόπιση συχνότητας:

$\boldsymbol{F}[e^{i\alpha x}f(x)](s) = \boldsymbol{F}(s - \alpha)$

$\boldsymbol{F}[e^{-i\alpha x}f(x)](s) = \boldsymbol{F}(s + \alpha)$

(γ) Κλιμάκωση Χρόνου ή Αλλαγή Κλίμακας:

Αν $c \neq 0$, τότε έχουμε : $\boldsymbol{F}[f(cx)](s) = \frac{1}{|c|}\boldsymbol{F}(\frac{s}{c})$

Ισχύει : $\boldsymbol{F}[f(-x)](s) = \boldsymbol{F}(-s)$.

(δ) Αν η f είναι συνεχής, κατά τμήματα λεία και $f\,' \in L^1$. Τότε:

(δ1) Παραγώγιση στο χρόνο ή Μετασχηματισμός Κατά Fourier Της Παραγώγου:

$\boldsymbol{F}[f\,'(x)](\xi) = i\xi\boldsymbol{F}(\xi)$.

Δηλαδή, η παραγώγιση μιας συνάρτησης στο πεδίο του χρόνου ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό της με το iξ στο πεδίο των συχνοτήτων.

Μία διαφορετική διατύπωση είναι η παρακάτω.

Έστω f συνεχής, ολοκληρώσιμη και $\boldsymbol{F}$ είναι ο μ.κ.F., τότε αν $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ θα ισχύει: $\boldsymbol{F}[f\,'(x)](\omega) = i\omega\boldsymbol{F}(\omega)$.

Γενικά: Αν f και $f^{(\kappa)}$, k = 1, 2, …, n - 1 είναι κατά τμήματα λεία (απείρως διαφορίσιμη) με $\lim_{x\to\pm\infty} f^{(k)}(x) = 0$ και αν η f και οι παράγωγοι αυτής για πάνω από την νιοστή παράγωγο είναι ολοκληρώσιμες, τότε:

$\boldsymbol{F}[f^{(n)}(x)](\xi) = (i\xi)^n \boldsymbol{F}[f(x)](\xi) = (i\xi)^n \boldsymbol{F}(\xi)$.   για κάθε ξ ϵ R.

(δ2) $\boldsymbol{F}[xf(x)](\xi) = i\boldsymbol{F}'(\xi)$ $(= i\frac{d}{d\xi}\boldsymbol{F}[f(x)](\xi))$.

Γενικά: αν f και $x^n f$ ολοκληρώσιμες, τότε $\boldsymbol{F}[x^n f(x)](\xi) = i^n \boldsymbol{F}^{(n)}(\xi)$.

(ε) Συμμετρική: Είναι $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{F}(x)](\omega) = 2\pi f(-\omega)$.

(στ) Για κάθε p ϵ R ισχύει:

$\boldsymbol{F}[f(x)\cos px](\omega) = \frac{1}{2}\boldsymbol{F}(\omega - \rho) + \frac{1}{2}\boldsymbol{F}(\omega + \rho) = \frac{1}{2}[\delta(\omega-\rho) + \delta(\omega+\rho)]$.

(ζ) Συζυγής : Έστω μια συνάρτηση f και $\boldsymbol{F}(\omega)$ ο μ.κ.F, τότε ο μετασχηματισμός της $\bar{f}(t)$ είναι η συνάρτηση $\overline{\boldsymbol{F}(-\boldsymbol{\omega})}$. Δηλαδή $\boldsymbol{F}[\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}](\mathbf{s}) = \overline{\boldsymbol{F}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]}(-\omega)$.

(η) Ισχύει $\boldsymbol{F}[\int_a^x f(t)dt](s) = \frac{F(s)}{is}$.

Δηλαδή, η ολοκλήρωση μιας συνάρτησης στο πεδίο του χρόνου ισοδυναμεί με διαίρεσή της με το is στο πεδίο της συχνότητας.

Αποδείξεις

(α) Η ιδιότητα αυτή απορρέει από τη γραμμικότητα του γενικευμένου ολοκληρώματος, με το οποίο ορίζεται η μ.κ.F.

(β1) Από τον ορισμό έχουμε :

$\boldsymbol{F}[f(x-\alpha)](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)e^{-isx}dx$

Θέτω x – α = y, άρα x = α + y και dx = dy.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται:

$\boldsymbol{F}[f(y)](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-is(y+a)}dy = e^{-isa}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-isy}dy = e^{-isa}\boldsymbol{F}(s)$

(β2) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό έχουμε:

$\boldsymbol{F}[e^{iax}f(x)](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}f(x)e^{-isx}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i(s-a)x}dx = \boldsymbol{F}[f(x)](s-\alpha) = \boldsymbol{F}(s-\alpha)$.

Εάν θέσουμε όπου α το – α, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$\boldsymbol{F}[e^{-iax}f(x)](s) = \boldsymbol{F}(s+\alpha)$.

(γ) Έχουμε: $\boldsymbol{F}[f\,(\mathrm{cx})](\mathrm{s}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(cx)e^{-iscx}dx$.

Έστω c > 0, τότε, θέτω $cx = y$, έτσι είναι $dx = \frac{1}{c}\,dy$, επομένως :

$\boldsymbol{F}[f\,(\mathrm{cx})](\mathrm{s}) = \boldsymbol{F}[f\,(\mathrm{y})](\mathrm{s}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\frac{y}{c}s}\,\frac{1}{c}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\frac{s}{c}y}\,\frac{1}{c}\,dy = \frac{1}{c}\boldsymbol{F}(\frac{s}{c})$

Προσοχή: Αν c < 0 τότε είναι :

$\boldsymbol{F}[f\,(\text{-cx})] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\frac{s}{-c}y}\,\frac{1}{-c}\,dy = \frac{1}{-c}\boldsymbol{F}(\frac{s}{c})$.

Γενικά γράφουμε : $\boldsymbol{F}[f\,(\mathrm{cx})](\mathrm{s}) = \frac{1}{|c|}\boldsymbol{F}(\frac{s}{c})$.

Παρατήρηση: Ισχύει ότι για c = -1 έχουμε: $\boldsymbol{F}[f\,(\text{-x})](\mathrm{s}) = \boldsymbol{F}(\text{-s})$

(δ₁) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μ.κ.F. και την παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

$\boldsymbol{F}[f\,'(\mathrm{x})](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,'(x)e^{-i\xi x}dx = \left[f(x)e^{-i\xi x}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-i\xi)e^{-i\xi x}dx =$

$$= \left[f(x)e^{-i\xi x}\right]_{-\infty}^{+\infty} + i\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx = 0 + \mathrm{i}\xi\boldsymbol{F}[\mathrm{f(x)}](\xi). \qquad (1)$$

Ισχύει ότι $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ και $|e^{\pm i\xi x}| = 1$.

Όμως, επειδή $f \in L^1$, έχουμε το όριο:

$\mathrm{I} = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 + \int_0^{+\infty} f\,'(x)dx$

Το παραπάνω όριο υπάρχει και επειδή $f\,' \in L^1$ το όριο Ι θα είναι ίσο με το μηδέν. Όμοια είναι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Έτσι έχουμε: $\left[f(x)e^{-i\xi x}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ και από (1): $\boldsymbol{F}[f\,'(\mathrm{x})](\xi) = (\mathrm{i}\xi)\boldsymbol{F}(\xi)$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι: $\boldsymbol{F}[f^{(n)}(\mathrm{x})](\xi) = (\mathrm{i}\xi)^n\,\boldsymbol{F}(\xi)$.

(δ₂) Για πιο αναλυτική απόδειξη κοίτα θεώρημα 12.

Αφού $\frac{d}{d\xi}\,e^{-i\xi x} = (\text{-ix})\,e^{-i\xi x} \Leftrightarrow \mathrm{x}e^{-i\xi\chi} = \mathrm{i}\frac{d}{d\xi}\,e^{-i\xi x}$ έχουμε:

$\boldsymbol{F}[\mathrm{x}f\,(\mathrm{x})](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-i\xi x}dx = \mathrm{i}\frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx = \mathrm{i}\boldsymbol{F}'(\xi)$.

(ε) Από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier:

$\boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{F}(\omega)](\mathrm{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(\omega)e^{j\omega x}\mathrm{d}\omega = f\,(\mathrm{x})$.

Θέτουμε αντί x το –x και λαμβάνουμε :

$f\,(\text{-x}) = \boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{F}(\omega)](\text{-x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(\omega)e^{j\omega(-x)}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(\omega)e^{-j\omega x}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{F}[\boldsymbol{F}(\omega)](\mathrm{x})$

$\Leftrightarrow\ 2\pi f\,(\text{-x}) = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{F}(\omega)](\mathrm{x})$

(στ) Για κάθε p ϵ R ισχύει : $\cos(px) = \frac{e^{ipx} + e^{-ipx}}{2} = \frac{e^{ipx}}{2} + \frac{e^{-ipx}}{2}$.

$\boldsymbol{F}[f(x)\cos px](s) = \boldsymbol{F}[f(x)\frac{e^{ipx}}{2}](s) + \boldsymbol{F}[f(x)\frac{e^{-ipx}}{2}](s) =$

$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ipx}e^{-isx}dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ipx}e^{-isx}dx =$

$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i(s-p)x}dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i(p+s)x}dx = \frac{1}{2}\boldsymbol{F}(s - p) + \frac{1}{2}\boldsymbol{F}(s + p)$.

Με χρήση της συνάρτησης Dirac έχουμε :

$\boldsymbol{F}[f(x)\cos px](\omega) = \frac{1}{2}[\delta(\omega - p) + \delta(\omega + p)]$.

Όπως παραπάνω με χρήση της ταυτότητας $\sin(px) = \frac{e^{ipx} - e^{-ipx}}{2i} = \frac{e^{ipx}}{2i} - \frac{e^{-ipx}}{2i}$ λαμβάνουμε:

$\boldsymbol{F}[f(x)\sin(px)] = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i(s-p)x}dx - \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i(p+s)x}dx =$

$= \frac{1}{2i}\boldsymbol{F}(s - p) - \frac{1}{2i}\boldsymbol{F}(s + p)$.

(z) $\boldsymbol{F}(\bar{f})(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)}e^{-i\omega t}dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega x}dt} = \overline{\mathbf{F}(-\boldsymbol{\omega})}$.

(η) Έστω $g(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt \Leftrightarrow g'(x) = f(x)$ (1)

Από την ιδιότητα (δ_1) έχουμε: $\boldsymbol{F}[g'](s) = is\boldsymbol{F}[g(x)](s)$ (2)

Λόγω της (1) η (2) γίνεται:

$is\boldsymbol{F}[g(x)](s) = is\mathbf{F}(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt) = \boldsymbol{F}[g'](s) = \boldsymbol{F}[f(x)](s) \Leftrightarrow \mathbf{F}[\int_{\alpha}^{x} f(t)dt](s) = \frac{\mathbf{F}[f(x)](s)}{is}$

Παράδειγμα

10. Ο μ.κ.F. μιας συνάρτησης f(t) δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{F}(s) = \frac{4}{3+is}$. Να βρεθεί ο μ.κ.F. καθεμίας από τις παρακάτω συναρτήσεις.

(α) f(-2t) (b) f(t – 5) (c) f(8t – 2) (d) $t^3 \cdot f(t)$ (e) $e^{6si}f(t)$

Λύση

Έστω $\boldsymbol{F}(s)$ ο μ.κ.F. της f σε κάθε μια από τα παραπάνω ερωτήματα.

(α) Προφανώς έχουμε αλλαγή κλίμακας. Σύμφωνα με την ιδιότητα (γ) και για c = -2 έχουμε: $\boldsymbol{F}[-2t](s) = \frac{1}{|-2|}\mathbf{F}(\frac{s}{-2}) = \frac{1}{2}\frac{4}{3+i\frac{s}{-2}} = \frac{4}{6-is}$.

(b) Προφανώς έχουμε χρονική μετατόπιση. Σύμφωνα με την ιδιότητα (β_1) είναι $\mathbf{F}[f(t-5)](s) = e^{-is5}\frac{4}{3+is}$.

(c) Για την εύρεση του μ.κ.F. της f(8t - 2) βρίσκουμε πρώτα τον μ.κ.F. της f(8t). Σύμφωνα με την ιδιοτητα της χρονικής κλίμακας (γ) είναι:

$\boldsymbol{F}[8t](s) = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3+i\frac{s}{8}} = \frac{4}{24+is}$.

Το σήμα f(8t - 2) προκύπτει από την μ.κ.f. της f(8t) με χρονική μετατόπιση (ιδιότητα β_1) κατά 2. Άρα

$\boldsymbol{F}[f(8t - 2)](s) = e^{-is2}\mathbf{F}(s) = e^{-2is}\frac{4}{24+is}$.

(d) Σύμφωνα με την ιδιότητα (δ_2) έχουμε:

$\boldsymbol{F}[t^3 f(t)](s) = i^3\mathbf{F}^{(3)}(s) = - i[\frac{4}{3+is}]^{(3)} = \ldots = \frac{-24}{(3+is)^4}$.

(e) Προφανώς έχουμε μεταφορά συχνότητας. Σύμφωνα με την ιδιότητα (β_2) είναι:

$\boldsymbol{F}[e^{i6x}f(x)](s) = \mathbf{F}(s-6) = \frac{4}{3+i(s-6)}$.

2. Ταυτότητα Και Θεώρημα Parseval

Πόρισμα 7: (Ταυτότητα Parseval). Έστω δύο συναρτήσεις f και g τμηματικές λείες. Υποθέτουμε ότι οι f και $\overline{g}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες όπως και το γινόμενό τους. Υποθέτουμε επίσης ότι οι μετασχηματισμοί Fourier F και G των f και g αντίστοιχα είναι τέτοιοι ώστε οι F και $\overline{G}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε ισχύει η ταυτότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(t)\overline{g(t)}dt} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F(x)\overline{G(x)}\,dx}$$

Επίσης ισχύει για f(t) = g(t): $\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{f(t)}|^2 \boldsymbol{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{F(t)}|^2\, \boldsymbol{dt}$.

Απόδειξη

Είναι $g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)e^{ixt}dx$. Άρα $\overline{g(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G(x)}e^{-ixt}dx$.

Είναι: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(x)}e^{-ixt}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{G(x)}e^{-ixt}dx\,dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{G(x)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt\,dx$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\overline{G(x)}\,dx$

Θεώρημα 8 (Parseval): Αν $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{f}(x)](s) = \boldsymbol{F}(s)$ και $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{\varphi}(x)](s) = \boldsymbol{\Phi}(s)$ τότε ισχύει :

$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)\Phi(x)dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F(x)\varphi(x)}dx$.

Απόδειξη

Με βάση τον ορισμό έχουμε :

$\boldsymbol{F}$(x) = $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt$ και $\boldsymbol{\Phi}$(x) = $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \varphi(t)dt$

Έτσι είναι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\boldsymbol{\Phi}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\varphi(t)\,dt\right]dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(x)\,dx\right]dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\boldsymbol{F}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\boldsymbol{F}(x)\,dx$$

Παραδείγματα

11. Έστω $f(t) = \int_{0}^{1} \sqrt{|\omega|}\, e^{\omega^2}\cos(\omega t)d\omega$, υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 dt$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι στο διάστημα [-1,1] η συνάρτηση $\sqrt{|\omega|}e^{\omega^2}\cos(\omega t)$ είναι άρτια. Άρα,

f(t) = $\int_{0}^{1} \sqrt{|\omega|}e^{\omega^2}\cos(\omega t)d\omega = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{|\omega|}e^{\omega^2}[\cos(\omega t) + isin(\omega t)]d\omega$ (1)

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση g(ω) = $\sqrt{|\omega|}e^{\omega^2}sin(\omega t)$ είναι μία περιττή συνάρτηση, οπότε το ολοκλήρωμα $\int_{-\alpha}^{\alpha} g(\omega)d\omega$ είναι ίσο με μηδέν. Δηλαδή:

$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{|\omega|}e^{\omega^2}[i \cdot sin(\omega t)]d\omega = 0.$

Ακόμη ισχύει ότι: $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + isin(\omega t)$

Και η (1) γίνεται: f(t) = $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{|\omega|}e^{\omega^2}e^{i\omega t}d\omega$ (2)

Από τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, έχουμε:

$\boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{F}(\omega)](t)$ = f(t) = $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$ (3)

Επειδή (2) = (3) είναι: $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{|\omega|}e^{\omega^2}e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$

Από την τελευταία σχέση λαμβάνουμε ότι: $\boldsymbol{F}(\omega) = \begin{cases} \pi\sqrt{|\omega|}e^{\omega^2}, & για\ |\omega| \leq 1 \\ 0, & για\ |\omega| > 1 \end{cases}.$ (4)

Από ταυτότητα Parseval έχω:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{F}[f'(\omega)]|^2\, d\omega$ (5)

Από την ιδιότητα (δ_1) έχουμε: $\boldsymbol{F}[f\,'(\omega)] = i\omega\boldsymbol{F}[f(\omega)] = i\omega\boldsymbol{F}(\omega)$. (6)

Η (5) σύμφωνα με την (6) γίνεται:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |i\omega\boldsymbol{F}(\omega)|^2 d\omega =$

$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2\pi}\pi^2\omega^2|\omega|e^{2\omega^2}d\omega = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \omega^2|\omega|e^{2\omega^2}d\omega$ (7)

Η ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι άρτια, επομένως η (7) γίνεται:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 dt = 2\frac{\pi}{2}\int_{0}^{1} \omega^2|\omega|e^{2\omega^2}d\omega = \pi\int_{0}^{1} \omega^2|\omega|e^{2\omega^2}d\omega.$

Θέτουμε $2\omega^2 = u$ με $4\omega d\omega = du$ και το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 dt = \pi\int_0^2 \frac{u}{2}\cdot\frac{1}{4}e^u du = \frac{\pi}{8}\int_0^2 ue^u du = \ldots = \frac{\pi}{8}(e^2+1).$

12. Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Parseval, να βρεθεί η μ.κ.F. της συνάρτησης δ(x) του Dirac, η συνάρτηση κρουστικού παλμού (-∞ < x < +∞). (κοίτα παράδειγμα 4)

Λύση

Θέτουμε f(x) = δ(x) και $\boldsymbol{F}$[δ(t)](x) = $\boldsymbol{F}$(x). Τότε, για κάθε συνάρτηση φ(x) με -∞ < χ < +∞ και μ.κ.F. $\boldsymbol{\Phi}$[φ(t)](x) = $\boldsymbol{\Phi}$(x), θα ισχύει ο τύπος του Parseval:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\boldsymbol{F}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\boldsymbol{\Phi}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\boldsymbol{\Phi}(x)\,dx = \boldsymbol{\Phi}(0)$ (1)

Όμως $\boldsymbol{\Phi}$(x) = $\boldsymbol{F}$[φ(t)](x) = $\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-itx}dt\right]$ (2)

Για x = 0, η (2) γίνεται :

$\boldsymbol{\Phi}$(0) = $\boldsymbol{F}$[φ(t)](0) = $\left[\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot\varphi(t)dt\right]$ (3)

Λόγω της (1) είναι: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\boldsymbol{\Phi}(x)\,dx$ = $\boldsymbol{\Phi}$(0) = $\left[\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot\varphi(x)dx\right]$ (4)

Από (1) = (4) είναι: $\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(x)\varphi(x)\,dx.$

Επομένως $\boldsymbol{F}$(x) = $\boldsymbol{F}$[δ(t)](x) = 1.

Παρατήρηση: Ισχύει $\boldsymbol{F}$[δ(t – α)] = $e^{-it\alpha}$.(ιδιότητα β_1 σελίδα 46). Προφανώς για α = 0 είναι: $\boldsymbol{F}$[δ(t)] = 1 κάτι που αναμενόταν.

13. Εάν 0 < α ≤ b, να αποδείξετε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{siny\cdot sin(\frac{b}{a}y)}{y^2}dy = \frac{\pi}{2}$.

Απόδειξη

Από την ταυτότητα του Parseval ισχύει: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2\,dx.$

Θέτουμε: $p_a(t) = \begin{cases} 1, & όταν\ |t| \le \frac{a}{2} \\ 0, & αλλού \end{cases}$ και $p_b(t) = \begin{cases} 1, & όταν\ |t| \le \frac{b}{2} \\ 0, & αλλού \end{cases}$ με 0 < α < b

Επειδή $-\frac{b}{2} < -\frac{a}{2} < 0 < \frac{a}{2} < \frac{b}{2}$, έχουμε:

Για |t| ≤ $\frac{a}{2}$: $p_a(t) = p_b(t)$ άρα $|p_a(t)|^2 = p_a(t)\cdot p_b(t) = 1$. (1)

Όμως ο μ.κ.F. είναι: $\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} p_a(t)e^{-ist}dt = \frac{2sin(^{as}/_2)}{s}$ (παράδειγμα 6)

Από την ταυτότητα Parseval είναι:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |p_a(t)|^2 dt = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} p_a(t)p_b(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2sin(^{at}/_2)}{t}\cdot\frac{2sin(^{bt}/_2)}{t}dt \Leftrightarrow$ (2)

$\int_{-\infty}^{+\infty} |p_a(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4sin(^{at}/_2)\cdot \sin(^{bt}/_2)}{t^2}dt$ (3)

Το ολοκλήρωμα του 1ου μέλους είναι:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |p_a(t)|^2 dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} |p_a(t)|^2 dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 1 dt = \alpha$ (4)

Η ολοκληρώσιμη συνάρτηση του 2ου μέλους της (3) είναι άρτια, άρα:

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4sin(at/2)\cdot\sin(bt/2)}{t^2} dt = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{sin(at/2)\cdot\sin(bt/2)}{t^2} dt$ (5)

Η (3) λόγω της (4) και (5) γίνεται:

$\alpha = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{sin(at/2)\cdot\sin(bt/2)}{t^2} dt \Leftrightarrow \frac{\pi\alpha}{4} = \int_{0}^{+\infty} \frac{sin(at/2)\cdot\sin(bt/2)}{t^2} dt$

Θέτουμε y = $\frac{at}{2}$ και προκύπτει ότι: $\frac{\pi}{2} = \int_{0}^{+\infty} \frac{sin(y)\cdot\sin(by/a)}{y^2} dy$.

14. Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f (t) είναι: F(s) = $\frac{1-is}{1+is}\cdot\frac{\sin(s)}{s}$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|^2 ds$.

Λύση

Από την ταυτότητα του Parseval παίρνουμε:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|^2 ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(s)|^2 ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1-is}{1+is}\right|^2 \cdot \frac{(sins)^2}{s^2} ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(sins)^2}{s^2} ds$ **(1)**

Εδω χρησιμοποιήσαμε ότι: $\left|\frac{1-is}{1+is}\right|^2 = 1$.

Σύμφωνα με τη συνάρτηση μοναδιαίου παλμού f(t) = $\frac{H(t+1)-H(t-1)}{2}$ και από το παράδειγμα 3, χρησιμοποιώντας πάλι την ταυτότητα Parseval έχουμε:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[H(s+1)-H(s-1)]^2}{4} ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(sins)^2}{s^2} ds \Leftrightarrow$

$\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 1 ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(sins)^2}{s^2} ds \Leftrightarrow$ (2)

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(sins)^2}{s^2} ds = \frac{1}{2}$.

Από (1) είναι: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|^2 ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(sins)^2}{s^2} ds = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|^2 ds = \frac{1}{2}$.

15. Υπολογίστε τον μ.κ.F. της συνάρτησης f (t) = $\int_0^2 \frac{\sqrt{\omega}}{1+\omega} e^{i\omega t} d\omega$ και στη συνέχεια υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) cost dt$ **(β) $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$**

Λύση

Από τον ορισμό του αντίστροφου μ.κ.F. έχουμε:

f(t) = $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \Leftrightarrow \int_0^2 \frac{\sqrt{\omega}}{1+\omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$.

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με το 2π στο ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους.

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{F}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2}\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{1+\omega}e^{i\omega t}d\omega.$

Άρα, $\boldsymbol{F}(\omega) = \begin{cases}\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{1+\omega}, \text{για } 0 < \omega < 2 \\ 0, \quad \text{αλλού}\end{cases}$ (1)

(α) Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier έχω: $\boldsymbol{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$.

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)cost dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{e^{it}}{2}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{e^{-it}}{2}dt =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{e^{-i(-1)t}}{2}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{e^{-i\cdot 1\cdot t}}{2}dt.$

Όμως $\boldsymbol{F}[f(t)](-1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(-1)t}dt \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(-1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(-1)t}dt.$

και $\boldsymbol{F}[f(t)](1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\cdot 1\cdot t}dt \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\cdot 1\cdot t}dt.$

Άρα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)cost dt = \frac{\boldsymbol{F}[f(-1)] + \boldsymbol{F}[f(1)]}{2} = \frac{\boldsymbol{F}(-1)+\boldsymbol{F}(1)}{2}.$ (2)

Από την (1) για ω = -1 έχω: $\boldsymbol{F}[f(-1)] = 0$ (αφού -1 < 0) και

για ω = 1 έχω: $\boldsymbol{F}[f(1)] = \pi$.

Επομένως η (2) μας δίνει το ζητούμενο: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)cost dt = \frac{\pi}{2}$.

(β) Από την ταυτότητα του Parseval, έχουμε:

$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\boldsymbol{F}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2}\frac{(2\pi)^2\omega}{(1+\omega)^2}d\omega.$

Θέτουμε στο τελευταίο ολοκλήρωμα u = 1 + ω, με du = dω, οπότε:

$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\omega)|^2 d\omega = 2\pi\int_{1}^{3}\frac{u-1}{u^2}du = 2\pi\int_{1}^{3}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)du = \ldots = 2\pi(\ln 3 - \frac{2}{3}).$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-\pi x^2}$ να βρείτε την μετασχηματισμένη κατά Fourier συνάρτηση της f.

Λύση

Είναι $f'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2} = -2\pi x f(x) \Leftrightarrow f'(x) = -2\pi x f(x)$

Μετασχηματίζουμε την τελευταία εξίσωση: $\boldsymbol{F}[f'(x)](s) = -2\pi\boldsymbol{F}[xf(x)](s).$ (1)

Από την ιδιότητα δ_2 έχουμε:

$\boldsymbol{F}[x\cdot f(x)](s) = i\frac{d}{ds}\boldsymbol{F}[f(x)](s)$ (= $i\boldsymbol{F}'(s)$), όπου $x\cdot f(x) \in L^1(R)$. (2)

Από την ιδιότητα δ_1 έχουμε:

$\boldsymbol{F}[f'(x)](s) = is\boldsymbol{F}[f(x)](s) = is\boldsymbol{F}(s).$ (3)

Η (1) λόγω της (2) και της (3) γίνεται: $is\boldsymbol{F}(s) = -2\pi i\boldsymbol{F}'(s) \Leftrightarrow 2\pi\boldsymbol{F}'(s) + s\boldsymbol{F}(s) = 0$ (4)

Λύνοντας την παραπάνω δ.ε. (την (4)) βρίσκουμε: $\boldsymbol{F}(\mathrm{s}) = \mathrm{k}e^{-\frac{s^2}{4\pi}}$, όπου k σταθερά η οποία υπολογίζεται σχετικά εύκολα.

Πράγματι, είναι: $\mathrm{k} = \boldsymbol{F}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(0)x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1$. (Παράρτημα Γ)

Οπότε $\boldsymbol{F}(\mathrm{s}) = e^{-\frac{s^2}{4\pi}} = e^{-\pi\left(\frac{s}{2\pi}\right)^2} = f(\frac{s}{2\pi})$.

Β τρόπος: Χρησιμοποιούμε τον ορισμό του μ.κ.F. και με παραγοντική ολοκλήρωση καταλήγουμε στη συνήθη διαφορική εξίσωση που έχουμε παραπάνω.

17. Να βρείτε τον μ.κ.F της συνάρτησης f (x) = 1.

Λύση

Η πρώτη εντύπωση που έχουμε είναι ότι ο μ.κ.F δεν υπάρχει, αφού η συνάρτηση f δεν δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, δηλαδή δεν ανήκει στο $L^1(R)$.

Για να βρούμε τον μ.κ.F. στηριζόμαστε στην ταυτότητα Parseval.

Έστω $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Phi}$ είναι οι μετασχηματισμένες κατά Fourier των f και φ αντίστοιχα. Τότε

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\boldsymbol{\Phi}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(x)\varphi(x)\mathrm{dx}$. (1)

Είναι f(x) = 1, άρα η (1) γίνεται: $\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(x)\varphi(x)\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Phi}(x)dx$. (2)

Η αντίστροφη μ.κ.F. της φ είναι η $\varphi(s) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}[\boldsymbol{\Phi}(x)](s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Phi}(x)e^{isx}dx$.

Για s = 0 είναι $\varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Phi}(x)e^{i0x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Phi}(x)dx$ (3)

Από (2) και (3) είναι $\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(x)\varphi(x)\mathrm{dx} = 2\pi\varphi(0)$. (4)

Όμως από ιδιότητα της δ(x) ισχύει: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\mathrm{dx} = \varphi(0)$ (5)

Από (4) και (5) λαμβάνουμε ότι: $\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(x)\varphi(x)\mathrm{dx} = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\mathrm{dx}$. (6)

Άρα $\boldsymbol{F}(x) = 2\pi\delta(x)$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}dx = 2\pi\delta(s) = 2\pi\delta(\chi)$ (7)

Όμως $f(x) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{F}[f(x)](s) = \boldsymbol{F}(1) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}dx = \boldsymbol{F}(1)$. (8)

Από (7) και (8) έχουμε: $\boldsymbol{F}(1) = 2\pi\delta(x)$

18. Να βρεθεί η μ.κ.F, αν υπάρχει, της συνάρτησης f(x) = u(x), όπου u(x) η συνάρτηση μοναδιαίας βαθμίδας (συνάρτηση Heaviside).

Λύση

Θυμίζουμε ότι $u(t) = \begin{cases} 0, & , \alpha\nu\ t < 0 \\ 1, & \alpha\nu\ t > 0 \end{cases}$.

Είναι $\boldsymbol{F}$(ω) = $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-i\omega t}dt$ = $\int_{0}^{+\infty} e^{-i\omega t}dt$ = $\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-i\omega t}dt$

Αφού $(e^{-i\omega t})'$= - iω$e^{-i\omega t}$, τότε έχουμε :

$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{-i\omega}\lim_{x\to\infty}\left[e^{-i\omega t}\right]_0^x = \frac{i}{\omega}[\lim_{x\to\infty} e^{-i\omega x} - 1]$.

Το παραπάνω όριο δεν υπάρχει, αφού τα όρια $\lim_{x\to\infty}\cos(\omega x)$ και $\lim_{x\to\infty} sin(\omega x)$ δεν υπάρχουν (Θυμίζουμε ότι : $e^{-i\omega t}$ = cos(ωt) – isin(ωt)).

Όμως χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ιδιότητες του μ.κ.F. καταφέρνουμε να ξεπεράσουμε το εμπόδιο αυτό:

Θεωρούμε τη συνάρτηση u(-t) = $\begin{cases} 1, & , \alpha\nu\ t < 0 \\ 0, & \alpha\nu\ t > 0 \end{cases}$.

Είναι προφανές ότι : u(t) + u(-t) = 1, για κάθε t ϵ R.

Έτσι προκύπτει :

$\boldsymbol{F}$[u(x) + u(-x)](ω) = $\boldsymbol{F}$[1] = 2πδ(ω) (από το προηγούμενο παράδειγμα) ⇔

$\boldsymbol{F}$[u(x)](ω) + $\boldsymbol{F}$[u(-x)](ω) = 2πδ(ω). (1)

Είναι γνωστό από το Κεφ. 1^o ότι: u΄(x) = δ(ω) και u΄(-x) = - δ(ω).

Αφαιρώντας τις τελευταίες εξισώσεις λαμβάνουμε ότι : u΄(x) - u΄(-x) =2δ(ω). Άρα έχουμε $\boldsymbol{F}$[u΄(x)](ω) - $\boldsymbol{F}$[u΄(-x)](ω) = 2$\boldsymbol{F}$[δ(ω)] = 2·1 = 2.

Όμως από την ιδιότητα δ_1 είναι:

iω$\boldsymbol{F}$[u(x)](ω) – iω$\boldsymbol{F}$[u(-x)](ω) = 2 ⇔ $\boldsymbol{F}$[u(x)](ω) – $\boldsymbol{F}$[u(-x)](ω) = $\frac{2}{i\omega}$ (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε :

$\boldsymbol{F}$[u(x)](ω) = $\frac{1}{i\omega}$ + πδ(ω).

19. Βρείτε την μ.κ.Fourier της f (t) = sign(t) = $\frac{d|t|}{dt}$ = $\begin{cases} \boldsymbol{-1}, ό\boldsymbol{\tau\alpha\nu}\ \boldsymbol{t < 0} \\ \boldsymbol{1},\ ό\boldsymbol{\tau\alpha\nu}\ \boldsymbol{t \geq 0} \end{cases}$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση Heaviside u(t) = $\begin{cases} 0, ό\tau\alpha\nu\ t < 0 \\ 1,\ ό\tau\alpha\nu\ t \geq 0 \end{cases}$.

Γράφουμε: sign(t) = u(t) + (-1)(1 – u(t)) = 2u(t) – 1.

Στα παραπάνω παραδείγματα δείξαμε ότι: $\boldsymbol{F}$[1](ω) = δ(ω) και $\boldsymbol{F}$[u(t)](ω) = πδ(ω)+$\frac{1}{i\omega}$. Άρα $\boldsymbol{F}$[sign(t)](ω) = 2$\boldsymbol{F}$[u(t)](ω) - $\boldsymbol{F}$[1](ω) = 2πδ(ω) + $\frac{2}{i\omega}$ – 2πδ(ω) = $\frac{2}{i\omega}$.

20. (α) Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

f(t) = $\begin{cases} \boldsymbol{sint}, ό\boldsymbol{\tau\alpha\nu}\ \boldsymbol{0 \leq t \leq \pi} \\ \boldsymbol{0},\ ό\boldsymbol{\tau\alpha\nu}\ \boldsymbol{\pi \leq t, t\ \leq 0} \end{cases}$

(β) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f(t)cos(2t).

Λύση

(α) Ο μετασχηματισμός Fourier της f(t) βρίσκεται στο Παράρτημα Στ και είναι: $\boldsymbol{F}$[f(t)](s) = $\boldsymbol{F}$(s) = $\frac{1+e^{-i\pi s}}{1-s^2}$. (1)

(β) Ο μετασχηματισμός Fourier της g(t) = f(t)·cos2t είναι:

$\boldsymbol{F}[g(t)](s) = \boldsymbol{F}[f(t)\frac{e^{2ti}+e^{-2ti}}{2}](s) = \frac{1}{2}\boldsymbol{F}[f(t)e^{2ti}](s) + \frac{1}{2}\boldsymbol{F}[f(t)e^{-2ti}](s)$.

Σύμφωνα με την ιδιότητα (στ), έχουμε ότι:

$\boldsymbol{F}[g(t)](s) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{F}(s+2) + \boldsymbol{F}(s-2)] \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{F}[g(t)](s) = \frac{1}{2}\frac{1+e^{-i\pi(s-2)}}{1-(s-2)^2} + \frac{1}{2}\frac{1+e^{-i\pi(s+2)}}{1-(s+2)^2}$.

3. Μετασχηματισμοί Fourier Ημιτόνου –Συνημιτόνου.

Ορισμός: Έστω συνάρτηση $f \in L^1[0,+\infty)$, τότε ο συνημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier της f και ο ημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier της f είναι οι συναρτήσεις $F_{\cos}[f](s)$ και $F_{\sin}[f](s)$, αντίστοιχα, στο [0,+∞) οι οποίες ορίζονται όπως παρακάτω:

$$\boldsymbol{F_{cos}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(x)\, cos(sx)\, dx} \quad \textit{και} \quad \boldsymbol{F_{sin}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(x)\, sin(sx)\, dx.}$$

Ορισμός: Η f(s) καλείται **αντίστροφος συνημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier**, όταν $f(s) = \boldsymbol{F^{-1}}[\boldsymbol{F_{cos}}(x)](s) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \boldsymbol{F_{cos}}(x)\, cos(sx)dx$, με s > 0.

Ορισμός: Η f(s) καλείται **αντίστροφος ημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier**, όταν $f(s) = \boldsymbol{F^{-1}}[\boldsymbol{F_{sin}}(x)](s) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \boldsymbol{F_{sin}}(x)\, cos(sx)dx$, με s > 0.

Πρόταση 9:

(i) Έστω f_a μια άρτια συνάρτηση τότε, ο συνημιτονικός μετασχηματισμός Fourier $F_\alpha(f_\alpha)(s)$) είναι και αυτός μια συνάρτηση άρτια, τέτοιος ώστε :

$$\boldsymbol{F_\alpha(f_\alpha)(s) = 2\int_0^{\infty} f_\alpha(t)\cos(st)\, dt.}$$

(ii) Αν τώρα f_π μια περιττή συνάρτηση τότε ο ημιτονικός μετασχηματισμός Fourier $F_\pi(f_\pi)(s)$) είναι και αυτός περιττός, τέτοιος ώστε :

$$\boldsymbol{F_\pi(f_\pi)(s) = -2i\int_0^{+\infty} f_\pi(t)\sin(st)dt.}$$

Απόδειξη

(i) Θα δείξουμε ότι: Αν f_a είναι άρτια συνάρτηση τότε ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης είναι $\boldsymbol{F}_\alpha(f_\alpha)(s) = 2\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\cos(st)\,dt$, ο οποίος λέγεται **συνημιτονικός μετασχηματισμός** και είναι και αυτός άρτια συνάρτηση .

Είναι γνωστό ότι ισχύει:

$\boldsymbol{F}_\alpha(f_\alpha)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty}[f_\alpha(t)e^{-ist}]dt = \int_{-\infty}^{+\infty}[f_\alpha(t)\cos(st) - if_\alpha(t)\sin(st)]dt.$

Επειδή η συνάρτηση $f_\alpha(t)\sin(st)$ είναι μια περιττή συνάρτηση, τότε το ολοκλήρωμα αυτής είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή $\int_{-\infty}^{+\infty}[if_\alpha(t)\sin(st)dt] = 0$.

Άρα $\boldsymbol{F}_\alpha(f_\alpha)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty}[f_\alpha(t)e^{-ist}]dt = \int_{-\infty}^{+\infty}[f_\alpha(t)\cos(st)]dt.$

Επειδή η συνάρτηση $f_\alpha(t)\cos(st)$ είναι μια άρτια συνάρτηση, τότε για $s \to -s$ έχουμε:

$\boldsymbol{F}_\alpha(f_\alpha)(-s) = \int_{-\infty}^{+\infty}[f_\alpha(t)e^{ist}]dt = \int_{-\infty}^{+\infty}[f_\alpha(t)\cos(-st)]dt \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{F}_\alpha(f_\alpha)(-s) = \int_{-\infty}^{+\infty}[f_\alpha(t)\cos(-st)]dt = \int_{-\infty}^{+\infty}[f_\alpha(t)\cos(st)]dt = \boldsymbol{F}_\alpha(f_\alpha)(s) \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{F}_\alpha(f_\alpha)(-s) = \boldsymbol{F}_\alpha(f_\alpha)(s)$.

Δηλαδή η $\boldsymbol{F}_\alpha(f_\alpha)(s)$ είναι μια άρτια συνάρτηση. Άρα

$\boldsymbol{F}_\alpha(f_\alpha)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t)\cos(st)\,dt = 2\int_0^{\infty} f_\alpha(t)\cos(st)\,dt.$

(ii) Αν f είναι περιττή συνάρτηση τότε ο μετασχηματισμός κατά Fourier αυτής είναι $\boldsymbol{F}_\pi(f_\pi)(s) = -2i\int_0^{+\infty} f_\pi(t)\sin(st)dt$ ο οποίος λέγεται **ημιτονικός μετασχηματισμός**.

(κοίτα παράδειγμα 22).

Απόδειξη

(ii) Η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη του συνημιτονικού μετασχηματισμού Fourier.

Παρατήρηση.

Εάν f_α είναι η άρτια επέκταση μιας συνάρτησης στο R, τότε η συνάρτηση $\boldsymbol{F}_{\cos}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(x)\cos(sx)\,dx$ αποτελεί τον περιορισμό της f_α στο $[0, +\infty)$ και ισούται με $\frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{F}_\alpha$.

$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(s) = 2\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\cos(sx)\,dx = 2\boldsymbol{F}_{\cos}[f_\alpha](s) \Leftrightarrow \boldsymbol{F}_{\cos}[f_\alpha](s) = \frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{F}_\alpha(s).$

Εάν η f_π είναι η περιττή επέκταση της συνάρτησης f στο R τότε η συνάρτηση $\boldsymbol{F}_{\sin}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(x)\sin(sx)dx$ αποτελεί τον περιορισμό της f στο $[0, +\infty)$ και ισούται με $\frac{i}{2}\cdot\boldsymbol{F}_\pi$.

$\boldsymbol{F}_\pi(s) = -2i\int_0^{+\infty} f_\pi(x)\sin(sx)\,dx = -2i\,\boldsymbol{F}_{\sin}[f](s) = \frac{2}{i}\boldsymbol{F}_{\sin}[f](s) \Leftrightarrow \boldsymbol{F}_{\sin}[f](s) = \frac{i}{2}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\pi}}(s).$

Θεώρημα 10: Έστω f(x) συνεχής και απολύτως ολοκληρώσιμη. Έστω f΄ μια τμηματικά συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα και έστω f(x) → 0 όταν x → +∞. Τότε ισχύουν τα εξής:

F_{cos}[f ΄(x)](s) = sF_{sin}[f(x)](s) – f(0) και F_{sin}[f ΄(x)](s) = - sF_{cos}[f(x)](s).

F_{cos}[f ΄΄(x)](s) = - s$^2F_{cos}$[f(x)](s) – f ΄(0) και F_{sin}[f ΄΄(x)](s) = - s$^2F_{sin}$[f(x)](s) + sf(0).

Απόδειξη

Η πρώτη ισότητα αποδεικνύεται όπως παρακάτω.

Είναι $\boldsymbol{F_{cos}}$[f ΄(x)](s) = $\int_0^{\infty} f'(t)\, cos(st)\, dt$.

Με τη χρήση της παραγοντικής ολοκλήρωσης καταλήγουμε:

$\boldsymbol{F_{cos}}$[f ΄(x)](s) = $[f(x)\cos(sx)]_0^{+\infty}$ + s$\int_0^{\infty} f(t)\sin(st)\,dt$ =

$$= \lim_{x\to+\infty} f(x)\cos(sx) - f(0) + s\int_0^{\infty} f(t)\sin(st)\,dt$$

$$= 0 - f(0) + s\boldsymbol{F_{sin}}[f(x)](s) =$$

$$= s\boldsymbol{F_{sin}}[f(x)](s)-f(0).$$

Η δεύτερη εξίσωση αποδεικνύεται όπως παρακάτω.

Είναι $\boldsymbol{F_{sin}}$[f ΄(x)](s) = $\int_0^{\infty} f'(t)\, sin(st)\, dt$

Με τη χρήση της παραγοντικής ολοκλήρωσης καταλήγουμε:

$\boldsymbol{F_{sin}}$[f ΄(x)](s) = 0 - s$\int_0^{\infty} f(t)\cos(st)\,dt = -s\boldsymbol{F_{cos}}[f(x)](s)$

Με τη χρήση δύο φορές την παραγοντική ολοκλήρωση αποδεικνύονται και οι δύο άλλες εξισώσεις.

Παραδείγματα

21. Να υπολογίσετε τον συνημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier και τον ημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης f(x) = e^{-x}.

Λύση

Ο συνημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier είναι: $\boldsymbol{F_{cos}}$[*f*](s) = $\int_0^{+\infty} f(x)\, cos(sx)\, dx$

Άρα $\boldsymbol{F_{cos}}$[*f*](s) = $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, cos(sx)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, \frac{e^{isx}+e^{-isx}}{2}\, dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(1-is)x}dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(1+is)x}dx = \dots = \frac{1}{1+s^2}$$

Ο ημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier είναι: $\boldsymbol{F_{sin}}$[f](s) = $\int_0^{+\infty} f(x)\sin(sx)\,dx$.

Άρα $\boldsymbol{F_{sin}}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(sx)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{e^{isx}-e^{-isx}}{2i}dx =$

$= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{-(1-is)x}dx - \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{-(1+is)x}dx = \ldots = \frac{s}{1+s^2}.$

22. Έστω α > 0 και $q_\alpha(t)$ = $\begin{cases} \mathbf{1-\frac{|t|}{\alpha}}, \text{ό}\boldsymbol{\tau\alpha\nu}\ \boldsymbol{-\alpha\le t\le \alpha} \\ \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{\alpha\lambda\lambda o}\text{ύ} \end{cases}$ **να βρείτε τον συνημιτονικό μετασχηματισμό κατά Fourier της συνάρτησης της $q_\alpha(t)$.**

Λύση

Αφού η $q_\alpha(t)$ είναι άρτια, τότε σύμφωνα με την πρόταση 9 έχουμε:

$\boldsymbol{F_\alpha}(q_\alpha)(s) = 2\int_0^{+\infty} q_\alpha(t)\cos(st)\,dt = 2\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)\cos(st)dt$

- Για s ≠ 0, χρησιμοποιούμε την ολοκλήρωση κατά παράγοντες και λαμβάνουμε:

  $\boldsymbol{F_\alpha}(q_\alpha)(s) = \frac{2}{s}\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)[\sin(st)]'dt = \ldots = 4\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha s}{2}\right)}{\alpha s^2}.$
- Για s = 0 είναι : $\boldsymbol{F_\alpha}(q_\alpha)(0) = \alpha$

Επομένως $\boldsymbol{F_\alpha}[q_\alpha(t)](s) = \begin{cases} \frac{4\sin^2\left(\frac{\alpha s}{2}\right)}{\alpha s^2}, & s\neq 0 \\ \alpha, & s=0 \end{cases}$

23. Βρείτε τον ημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier της $f(x) = \frac{e^{-ax}}{x}$.

Λύση

Ο ημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier είναι:

$\boldsymbol{Fsin}(s) = \int_0^{+\infty} f(x)\sin(sx)dx = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{x}\sin(sx)dx$ (1)

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς s και λαμβάνουμε:

$\frac{d}{ds}\boldsymbol{F_{sin}}(s) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{x}x\cos(sx)dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(sx)dx = \ldots = \frac{a}{a^2+s^2} \Leftrightarrow$

$\frac{d}{ds}\boldsymbol{F_{sin}}(s) = \frac{a}{a^2+s^2}$ (2)

Ολοκληρώνουμε την (2): $\boldsymbol{F_{sin}}(s) = \int\frac{a}{a^2+x^2}dx = \ldots = a\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{s}{a}\right) + c = \tan^{-1}\left(\frac{s}{a}\right) + c$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{F_{sin}}(s) = \tan^{-1}\left(\frac{s}{a}\right) + c.$ (3)

Για s = 0, η (1) γίνεται: $\boldsymbol{F_{sin}}(0) = 0$. Επομένως η (3) μας δίνει: c = 0.

Τέλος ο ημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier είναι: $\boldsymbol{F_{sin}}(s) = \tan^{-1}\left(\frac{s}{a}\right)$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Να βρείτε:

(α) τον συνημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier της f.

(β) τον ημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier της $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

(γ) τον ημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier της h(s) = $\frac{x}{(1+x^2)^2}$

Λύση

(α) Ο συνημιτονοειδής Μ.F. της f γράφεται ως:

$\boldsymbol{F_{cos}}[f(x)](s) = \boldsymbol{F_{cos}}(s) = \int_0^{+\infty} f(x)\cos(sx)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\cos(sx)dx$

Για ευκολία θέτουμε: I(s) = $\boldsymbol{F_{cos}}(s)$ ⇔ I(s) = $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\cos(sx)dx$ (1)

$\frac{d}{ds}I(s) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}x(-\sin(sx))dx = -\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\sin(sx)dx \Leftrightarrow$

$\frac{d}{ds}I(s) = -\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x(1+x^2)}\sin(sx)dx \Leftrightarrow$ (πολλαπλασιάσαμε και διαιρέσαμε με το x)

$\frac{d}{ds}I(s) = -\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1-1}{x(1+x^2)}\sin(sx)dx = -\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x(1+x^2)}\sin(sx)dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}\sin(sx)dx$

$\frac{d}{ds}I(s) = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(sx)}{x}dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}\sin(sx)dx$

Από το παράδειγμα 6, έχουμε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(sx)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

Έτσι $\frac{d}{ds}I(s) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(sx)}{x(1+x^2)}dx$. (2)

Παραγωγίζουμε την $\frac{d}{ds}I(s)$ ως προς s και βρίσκουμε:

$\frac{d^2}{ds^2}I(s) = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos(sx)}{x(1+x^2)}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(sx)}{1+x^2}dx \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{d^2}{ds^2}I(s) = I(s) \Leftrightarrow \frac{d^2}{ds^2}I(s) - I(s) = 0$

Καταλήξαμε σε μια Σ.Δ.Ε που έχει γενική λύση (Παράρτημα Δ) την

I(s) = $c_1e^s + c_2e^{-s}$ (3)

$\frac{d}{ds}I(s) = c_1e^s - c_2e^{-s}$ (4)

Για s = 0 έχουμε: I(0) = $c_1 + c_2$ (5)

$\frac{d}{ds}I(s=0) = c_1 - c_2$ (6)

Θέτουμε s = 0 στην (1). Οπότε I(0) = $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = [tan^{-1}(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

Η (5) γίνεται: $c_1 + c_2 = \frac{\pi}{2}$

Θέτουμε s = 0 στην (2). Οπότε $\frac{d}{ds}I(s=0) = -\frac{\pi}{2}$.

Η (6) γίνεται: $c_1 - c_2 = -\frac{\pi}{2}$.

Έτσι έχουμε: $c_1 = 0$ και $c_2 = \frac{\pi}{2}$.

Λόγω της (3) είναι: I(s) = $\frac{\pi}{2}e^{-s} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\cos(sx)dx = \frac{\pi}{2}e^{-s}$ (7)

Η (7) είναι ο συνημιτονοειδής Μ.F. της ζητούμενης συνάρτησης f(x) = $\frac{1}{1+x^2}$.

(β) Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (7) ως προς s και έχουμε:

$\int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+}\,\boldsymbol{x^2}}(-xsin(sx))dx = -\frac{\pi}{2}e^{-s} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{1+}\,\boldsymbol{x^2}} sin(sx)dx = \frac{\pi}{2}e^{-s} \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{F_{sin}}[\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{1+}\,\boldsymbol{x^2}}](\boldsymbol{s}) = \frac{\pi}{2}e^{-s}$.

(γ) Ισχύει ότι $f'(x) = [\frac{1}{1+x^2}]' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

Από το θεώρημα (10) έχουμε ότι: $\boldsymbol{F_{sin}}$[f ΄(x)](s) = - s$\boldsymbol{F_{cos}}$[f(x)](s). Επομένως

$\boldsymbol{F_{sin}}[\frac{-2x}{(1+x^2)^2}]$(s) = - s$\boldsymbol{F_{cos}}[\frac{1}{1+x^2}]$(s) ⇔ $\boldsymbol{F_{sin}}[\frac{x}{(1+x^2)^2}]$(s) = $\frac{s}{2}\boldsymbol{F_{cos}}[\frac{1}{1+x^2}]$(s)

Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι: $\boldsymbol{F_{cos}}[\frac{1}{1+x^2}] = \frac{\pi}{2}e^{-s}$.

$\boldsymbol{F_{sin}}[\frac{x}{(1+x^2)^2}]$(s) = $\frac{\pi s e^{-s}}{4}$.

4. Ιδιότητες Parseval.

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

A. (i) $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \boldsymbol{F_{cos}}(s)\, \boldsymbol{G_{cos}}(s)ds = \int_0^{+\infty} f(s)g(s)ds.$

(ii) $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}[\boldsymbol{F_{cos}}(s)]^2\, ds = \int_0^{+\infty}[f(s)]^2 ds$

(iii) $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \boldsymbol{F_{sin}}(s)\, \boldsymbol{G_{sin}}(s)ds = \int_0^{+\infty} f(s)g(s)ds$

(iv) $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}[\boldsymbol{F_{sin}}(s)]^2\, ds = \int_0^{+\infty}[f(s)]^2 ds$

Απόδειξη

(i) $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \boldsymbol{F_{cos}}(s)\, \boldsymbol{G_{cos}}(s)ds = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \boldsymbol{F_{cos}}(s)\, [\int_0^{+\infty} g(t)\cos(st)\, dt]\, ds.$

Με εναλλαγή των ολοκληρωμάτων έχουμε:

$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \boldsymbol{F_{cos}}(s)\, \boldsymbol{G_{cos}}(s)ds = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} g(t)\, [\int_0^{+\infty} \boldsymbol{F_{cos}}(s)\cos(st)\, ds]\, dt \Leftrightarrow$

$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \boldsymbol{F_{cos}}(s)\, \boldsymbol{G_{cos}}(s)ds = \int_0^{+\infty} g(t)\, [\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \boldsymbol{F_{cos}}(s)\cos(st)\, ds]\, dt \Leftrightarrow$

$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \boldsymbol{F_{cos}}(s)\, \boldsymbol{G_{cos}}(s)ds = \int_0^{+\infty} f(s)g(s)ds.$

Όμοια αποδεικνύεται και η (iii) ιδιότηττα, ενώ στις άλλες θέτουμε g(x) = f(x).

B. (i) $\boldsymbol{F_{sin}}[f(x)sinax](s) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{F_{cos}}(s-a)$ - $\boldsymbol{F_{cos}}(s+a)]$

(ii) $\boldsymbol{F_{sin}}[f(x)cosax](s) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{F_{sin}}(s-a)$ + $\boldsymbol{F_{sin}}(s+a)]$.

(iii) $\boldsymbol{F_{cos}}[f(x)cosax](s) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{F_{cos}}(s-a) + \boldsymbol{F_{cos}}(s+a)]$.

(iv) $\boldsymbol{F_{cos}}[f(x)sinax](s) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{F_{sin}}(s+a) - \boldsymbol{F_{sin}}(s-a)]$.

Απόδειξη

(i) Ισχύει ότι: $\boldsymbol{F_{sin}}[f(x)](s) = \int_0^{+\infty} f(x)\sin(sx)\,dx$.

Άρα $\boldsymbol{F_{sin}}[f(x)\sin(ax)](s) = \int_0^{+\infty} f(x)\,sin(ax)\sin(sx)\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(s-a)\,xdx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(s+a)\,xdx \Leftrightarrow$$

$\boldsymbol{F_{sin}}[f(x)\sin(ax)](s) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{F_{cos}}(s-a) - \boldsymbol{F_{cos}}(s+a)]$.

Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ιδιότητες.

25. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες Parseval, να δείξετε ότι:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$$

Απόδειξη

Για f(x) = e^{-ax}, ο συνημιτονοειδές Μ.F. είναι: $\boldsymbol{F_{cos}}(s) = \frac{a}{(s^2+a^2)}$.

Για g(x) = e^{-bx}, ο συνημιτονοειδές Μ.F. είναι: $\boldsymbol{G_{cos}}(s) = \frac{b}{(s^2+b^2)}$.

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (Parseval) (i) που μας λέει ότι:

$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \boldsymbol{F_{cos}}(s)\,\boldsymbol{G_{cos}}(s)ds = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx \Leftrightarrow$

$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{a}{(s^2+a^2)}\,\frac{b}{(s^2+b^2)}.ds = \int_0^{+\infty} e^{-ax}e^{-bx}dx \Leftrightarrow$

$\frac{2ab}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}ds = \int_0^{+\infty} e^{-(a+b)x}dx \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$

$\frac{2ab}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}ds = \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}ds = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$

Β. Θεωρήματα Εύρεσης Μετασχηματισμού Fourier.

Θεώρημα 11: Έστω f μια τμηματικά συνεχής και απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο R. Τότε ισχύει ότι:

$F[f(x)](s) = 2\pi F^{-1}[f(x)](-s) = 2\pi F^{-1}[f(-x)](s)$ και

$F^{-1}[f(x)](s) = \frac{1}{2\pi}F[f(x)](-s) = \frac{1}{2\pi}F[f(-x)](s)$.

Απόδειξη

Προφανώς η f(-x) είναι τμηματικά συνεχής και απολύτως ολοκληρώσιμη.

(Γενικότερα: Αν μία συνάρτηση f είναι τμηματικά συνεχής και απολύτως ολοκληρώσιμη, τότε και για τις συναρτήσεις f(x - α) και f(αx) θα ισχύει το ίδιο)

- Θα αποδείξουμε την πρώτη ισότητα, δηλαδή την

$\boldsymbol{F}[\,f(\mathrm{x})](\mathrm{s}) = 2\pi\boldsymbol{F}^{-1}[\,f(\mathrm{x})](\mathrm{-s})$. (1)

Από τον ορισμό της μ.κ.F. συνάρτησης f(x) έχουμε:

$\boldsymbol{F}[f(\mathrm{x})](\mathrm{s}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i(-s)x}\,dx = 2\pi\boldsymbol{F}^{-1}[\,f(\mathrm{x})](\mathrm{-s})$

- Θα αποδείξουμε τη δεύτερη εξίσωση, δηλαδή την $\boldsymbol{F}^{-1}[\,f(\mathrm{x})](\mathrm{-s}) = \boldsymbol{F}^{-1}[\,f(\mathrm{-x})](\mathrm{s})$.

Θέτουμε στη συνάρτηση $\boldsymbol{F}^{-1}[\,f(\mathrm{x})](\mathrm{-s})$ όπου x = - α, οπότε:

$$\boldsymbol{F}^{-1}[\,f(\mathrm{x})](\mathrm{-s}) = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i(-s)x}\,dx \xrightarrow{x=-a} \frac{1}{2\pi}\int_{a=+\infty}^{-\infty} f(-a)e^{i(-s)(-a)}(-1)\,da =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{a=-\infty}^{+\infty} f(-a)e^{isa}\,da = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(-x)e^{isx}\,dx = \boldsymbol{F}^{-1}[\,f(\mathrm{-x})](\mathrm{s}).$$

Άρα, $\boldsymbol{F}^{-1}[\,f(\mathrm{x})](\mathrm{-s}) = \boldsymbol{F}^{-1}[\,f(\mathrm{-x})](\mathrm{s})$. (2)

Από την (1) και (2) έχουμε το $\boldsymbol{F}[\mathrm{f(x)}](\mathrm{s}) = 2\pi\boldsymbol{F}^{-1}[\mathrm{f(-x)}](\mathrm{s}) = 2\pi\,\boldsymbol{F}^{-1}[\mathrm{f(-x)}](\mathrm{s})$

Όμοια και οι αποδείξεις των άλλων εξισώσεων.

Παραδείγματα

26. Να βρείτε την αντίστροφη μετασχηματισμένη κατά Fourier συνάρτηση της $\boldsymbol{f(x) = e^{-ax}H(x)}$, α > 0 και H(x) η συνάρτηση Heaviside.

Λύση

Θυμίζουμε ότι H(x) = $\begin{cases} 0, & \mathrm{x} < 0 \\ 1, & \mathrm{x} > 0 \end{cases}$.

Είναι $f(x) = e^{-\alpha x}H(x) = \begin{cases} 0, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ x < 0 \\ e^{-\alpha x}, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ \chi > 0 \end{cases}$

Η μ.κ.F. είναι $\boldsymbol{F}[f(\mathrm{x})](\mathrm{s}) = \frac{1}{\alpha+is}$ (κοίτα παράδειγμα 1)

Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε:

$\boldsymbol{F}^{-1}[f(\mathrm{x})](\mathrm{s}) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{F}[f(\mathrm{x})](\mathrm{-s}) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\alpha+i(-s)} = \frac{1}{2\pi(\alpha-is)}$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = e^{(-a+ib)x}H(x)}$, με α,b πραγματικοί αριθμοί, α>0 και H(x) η συνάρτηση Heaviside.

(i) Με τη χρήση του ορισμού, να βρείτε τη μ.κ.F. συνάρτηση της f.

(ii) Να βρείτε τον μ.κ.F. της συνάρτησης g(x) = $\boldsymbol{e^{(-2+3\iota)x}H(x)}$, όταν x = 5.

(iii) Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα, να βρείτε την αντίστροφη μετασχηματισμένη κατά Fourier της f.

Λύση

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι η f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Είναι:

$|e^{(-\alpha+ib)x}| = |e^{-\alpha x}|\cdot|e^{ibx}| = |e^{-\alpha x}| = e^{-\alpha x}$ $\qquad (|e^{ibx}| = 1)$

$\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}\,dx = \int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{(-\alpha+ib)x}H(x)e^{-isx}\,dx = \int_{x=0}^{+\infty} e^{(-\alpha+ib)x}e^{-isx}\,dx.$

Επομένως

$|\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}\,dx| \leq \int_{x=0}^{+\infty} |e^{(-\alpha+ib)x}||e^{-isx}|\,dx = \int_{x=0}^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \ldots = \frac{1}{a} < \infty.$

Άρα η f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Έτσι ορίζεται και ο μετασχηματισμός Fourier.

(i) Είναι $f(x) = e^{(-a+ib)x}H(x) = \begin{cases} 0, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ x < 0 \\ e^{(-a+ib)x}, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ \chi > 0 \end{cases}$

$\boldsymbol{F}[f(\mathrm{x})](\mathrm{s}) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}\,dx = \int_{0}^{+\infty} e^{(-a+ib)x}e^{-isx}\,dx \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{F}[f(\mathrm{x})](\mathrm{s}) = \int_{0}^{+\infty} e^{(-a+ib)x-isx}\,dx \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{F}[f(\mathrm{x})](\mathrm{s}) = \int_{0}^{\infty} e^{(-a+bi-is)x}\,dx = \frac{1}{-\alpha+(b-s)i}\left[e^{-[a-(b-s)i]x}\right]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-\alpha+(b-s)i} = \frac{1}{\alpha-(b-s)i}.$

(ii) Από το (i) ερώτημα, έχουμε: $\boldsymbol{F}[f(\mathrm{x})](\mathrm{s}) = \frac{1}{\alpha-(b-s)i}.$

Οπότε για s = 5, α = 2 και β = 3, έχω:

$\boldsymbol{F}[e^{(-2+3i)5}H(x)](5) = \frac{1}{2-(3-5)i} = \frac{1}{2(1+i)}$

(iii) Από το θεώρημα 11 και το ερώτημα (i) έχουμε:

$\boldsymbol{F}^{-1}[f(\mathrm{x})](\mathrm{s}) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{F}[f(\mathrm{x})](\mathrm{-s}) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\alpha-(b+s)i} = \frac{1}{2\pi[\alpha-(b+s)i]}$

Θεώρημα 12:

(α) Έστω f μία άρτια, τμηματικά συνεχής και απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε οι συναρτήσεις $F[f(\mathrm{x})](\mathrm{s})$ και $F^{-1}[f(\mathrm{x})](\mathrm{s})$ είναι άρτιες και ισχύει:

$$F^{-1}[f(\mathrm{x})](\mathrm{s}) = \frac{1}{2\pi}F[f(\mathrm{x})](\mathrm{s})$$

(β) Έστω f μία περιττή, τμηματικά συνεχής και απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε οι συναρτήσεις $F[f(\mathrm{x})](\mathrm{s})$ και $F^{-1}[f(\mathrm{x})](\mathrm{s})$ είναι περιττές και ισχύει:

$$F^{-1}[f(\mathrm{x})](\mathrm{s}) = -\frac{1}{2\pi}F[f(\mathrm{x})](\mathrm{s})$$

Απόδειξη

Οι αποδείξεις των παραπάνω Προτάσεων είναι απλή εφαρμογή του Θεωρήματος 11.

Παράδειγμα

28. Α. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Ι = $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\alpha}{a^2+x^2}e^{ixs}dx$, με α ≠0.

Β. Να βρεθούν η μ.κ.F και η αντίστροφη μ.κ.F. της συνάρτησης h(x) = $\frac{1}{a^2+x^2}$ για κάθε x ϵ R.

Γ. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

I₁ = $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}cos(x)dx$ και I₂ = $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}sin(x)dx$

Λύση

Α. Από το παράδειγμα (5) έχουμε ότι ο μ.κ.F. της συνάρτησης $f(x) = e^{-a|x|}$ είναι: $\boldsymbol{F}[f(x)](s) = \boldsymbol{F}[e^{-\alpha|x|}](s) = \frac{2a}{a^2+s^2}$. Άρα,

$f(s) = \boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{F}(x)](s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\alpha}{a^2+x^2}e^{ixs}dx \Leftrightarrow f(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\alpha}{a^2+x^2}e^{ixs}dx = e^{-a|s|} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\alpha}{a^2+x^2}e^{ixs}dx = e^{-a|s|} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\alpha}{a^2+x^2}e^{ixs}dx = 2\pi e^{-a|s|}$.

Β. Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα 12 και επειδή η συνάρτηση h είναι άρτια, άρα και οι συναρτήσεις $\boldsymbol{F}[h(x)](s)$, $\boldsymbol{F}^{-1}[h(x)](s)$ θα είναι άρτιες, για τις οποίες ισχύει:

$\boldsymbol{F}^{-1}[h(x)](s) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{F}[h(x)](s)$.

Επειδή $\boldsymbol{F}^{-1}[h(x)](s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+x^2}e^{ixs}dx = \frac{1}{4\pi\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\alpha}{a^2+x^2}e^{ixs}dx = \frac{1}{4\pi\alpha}\cdot I$

όπου Ι το ολοκλήρωμα του Α ερωτήματος.

Επομένως $\boldsymbol{F}^{-1}[h(x)](s) = \frac{1}{4\pi\alpha}2\pi e^{-\alpha|s|} = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|s|}$.

Για α = 1, είναι: $\boldsymbol{F}^{-1}[h(x)](s) = \frac{1}{4\pi}2\pi e^{-|s|} = \frac{1}{2}e^{-|s|}$ (1)

Όμως, από παραπάνω είναι:

$\boldsymbol{F}^{-1}[h(x)](s) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{F}[h(x)](s) \Leftrightarrow \boldsymbol{F}[h(x)](s) = 2\pi\boldsymbol{F}^{-1}[h(x)](s) = 2\pi\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|s|} = \frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha|s|}$.

Γ. Σύμφωνα με την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos(x) = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}$, το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται:

$I' = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{xi}dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{-xi}dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{x\cdot 1\cdot i}dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{x(-1)i}dx$

$= \frac{1}{2}\boldsymbol{F}^{-1}[h(x)](1) + \frac{1}{2}\boldsymbol{F}^{-1}[h(x)](-1) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} I' = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-|1|}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-|-1|}}{2} = \frac{e^{-1}}{2}$

Το ολοκλήρωμα Ι΄΄ υπολογίζεται όπως το ολοκλήρωμα Ι΄ χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin(x) = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$.

Θεώρημα 13: Έστω f μία απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μ.κ.F. τη συνάρτηση F. Εάν η συνάρτηση t·f(t) είναι και αυτή απολύτως ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει η F'και μάλιστα F'(s) = - F[it f (t)](s).

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι η F(s) είναι διαφορίσιμη.

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(s+h)-F(s)}{h} = \lim \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{e^{-i(s+h)t}-e^{-ist}}{h}\,dt = \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}\,\frac{e^{-iht}-1}{h}\,dt$$

Έτσι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{-iht}-1}{h}$, με την εφαρμογή του Del'Hospital το όριο γίνεται: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{-iht}-1}{h}$ = - it.

Άρα $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(s+h)-F(s)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty}(-it)f(t)e^{-ist}dt$.

Σύμφωνα με την υπόθεση, η συνάρτηση tf(t) (και η –itf(t)) είναι απολύτως ολοκληρώσιμη που δηλώνει ότι το όριο υπάρχει. Αυτό σημαίνει ότι η $\boldsymbol{F}$(s) είναι διαφορίσιμη.

Παραγωγίζοντας τον τύπο $\boldsymbol{F}$[f(x)](s) = $\boldsymbol{F}$(s) = $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isx}f(x)dx$ παίρνουμε ότι :

$\frac{dF(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\frac{de^{-isx}}{ds} = \int_{-\infty}^{+\infty}(-ix)f(x)e^{-isx}dx$ = - $\boldsymbol{F}$[ix$f$ (x)](s) ⇔ $\frac{dF(s)}{ds}$ = -$\boldsymbol{F}$[ix$f$ (x)].

Διαισθητικά φαίνεται ότι αν η συνάρτηση t^n f (t) (n = 0, 1, 2, …, n) είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και n φορές παραγωγίσιμη, θα ισχύει ότι:

$\boldsymbol{F^{(n)}(x) = F[(-it)^n f(t)](x) = (-i)^n F[t^n f(t)](x)}$

Αποδεικνύεται επαγωγικά.

Παράδειγμα

29. Έστω α > 0, η συνάρτηση $p_\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0, & \text{άλλον} \end{cases}$ τότε η $tp_\alpha(t)$ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος, οπότε θα ισχύει :

$\boldsymbol{F[t\cdot p_\alpha(t)](s) = -\frac{1}{i}F'(s) = \frac{i a\cos(as/2)}{s} - \frac{2i\sin(as/2)}{s^2}}$.

Θεώρημα 14: Έστω f μία συνάρτηση στο R, υποθέτουμε ότι f, f΄ ϵ L^1(R) και υπάρχουν πεπερασμένα στον αριθμό σημεία $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ ϵ R στα οποία δεν ορίζεται η f΄. Τότε ισχύει:

$$\boldsymbol{F[f'(x)](s) = isF(s) - \sum_{n=1}^{\infty} J_f(x_n)} \qquad \textbf{(1)}$$

Όπου $j_f(x_n) = f(x_n^+) - f(x_n^-)$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση όταν N = 1 (στην περίπτωση αυτή η f΄ στο x_1 δεν ορίζεται). Θα το αποδείξουμε σε δύο βήματα:

Βήμα 1ο: Θα δείξουμε ότι η (1) ισχύει για s = 0, δηλαδή θα δείξουμε ότι:

$\boldsymbol{F}$[f ′(x)](0) = 0F(0) – $[f(x_1^+) - f(x_1^-)]$ = $f(x_1^-) - f(x_1^+)$

Πράγματι

$\boldsymbol{F}$[f ′(x)](0) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-\iota 0x}$dx = $\int_{-\infty}^{x_1} f'(x)$dx + $\int_{x_1}^{+\infty} f'(x)$dx ⇔

$\boldsymbol{F}$[f ′(x)](0) = $f(x_1^-) - f(x_1^+)$ (2)

Η τελευταία ισότητα ισχύει από την ιδιότητα (δ_1) στη σελίδα 46.

Βήμα 2ο: Έστω s ϵ R τυχαίο, ορίζουμε τη συνάρτηση h(x) = $e^{-isx}f(x)$.

Τότε από (2) έχουμε ότι:

$h(x_1^-) - h(x_1^+)$ = $\boldsymbol{F}$[h′(x)](0) = $\boldsymbol{F}$[-is$e^{-isx}f(x)$ + $e^{-isx}f'(x)$](0) =

= - is$\boldsymbol{F}[e^{-isx}f(x)]$(0) + $\boldsymbol{F}[e^{-isx}f'(x)]$(0).

= - is $\boldsymbol{F}[e^{i(-s)x}f(x)]$(0) + $\boldsymbol{F}[e^{i(-s)x}f'(x)]$(0)

= - is$\boldsymbol{F}[f(x)]$(0 – (-s)] + $\boldsymbol{F}[f'(x)]$(0 – (-s)) ⇔ (ιδιότητα β_2, σελ.46))

$h(x_1^-) - h(x_1^+)$ = - is$\boldsymbol{F}[f(x)]$(s) + $\boldsymbol{F}[f'(x)]$(s). (3)

Λόγω της h(x) = $e^{-isx}f(x)$ και τη συνέχεια μιας μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης έχω:

$h(x_1^-)$ = $e^{-isx_1}f(x_1^-)$ και $h(x_1^+)$ = $e^{-isx_1}f(x_1^+)$.

Άρα $h(x_1^-) - h(x_1^+)$ = $[f(x_1^-) - f(x_1^+)]e^{-isx_1}$. (4)

Από την (4) η (3) μας δίνει:

$\boldsymbol{F}[f'(x)]$(s) = is$\boldsymbol{F}$(s) - $[f(x_1^+) - f(x_1^-)]e^{-isx_1}$.

Παρατήρηση: Η τεχνική αυτή δεν εφαρμόζεται παντού. Εφαρμόζεται σε συναρτήσεις που είναι τμηματικά παραγωγίσιμες και σε αυτές που αναφέρονται παρακάτω:

- Σε αυτές που είναι τμηματικά πολυωνυμικές, βαθμού m ϵ Z^+ επειδή $f^{(m+1)}(x) = 0$.
- Σε αυτές που περιλαμβάνουν εκθετικές συναρτήσεις (και αυτό όχι πάντοτε)
- Σε αυτές που περιλαμβάνουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις (και αυτό όχι πάντοτε)

Παραδείγματα

30. Βρείτε την μετασχηματισμένη κατά Fourier συνάρτηση της

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{e^x(cos\sqrt{3}x + sin\sqrt{3}x)}, \text{ό}\boldsymbol{\tau\alpha\nu\ x \leq 0} \\ \boldsymbol{e^{-2x}}, \quad \text{ό}\boldsymbol{\tau\alpha\nu\ x \geq 0} \end{cases}$$

Λύση

$$f'(x) = \begin{cases} e^x((1+\sqrt{3})cos\sqrt{3}x + (1-\sqrt{3})sin\sqrt{3}x), ό\tau\alpha\nu\ x < 0 \\ -2e^{-2x}, \quad ό\tau\alpha\nu\ x > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \begin{cases} 2e^{x}\left((-1+\sqrt{3})cos\sqrt{3}x - (1+\sqrt{3})sin\sqrt{3}x\right), όταν\ x<0 \\ 4e^{-2x}, \qquad\qquad\qquad\qquad όταν\ x>0 \end{cases}$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}f''(x) = \begin{cases} -8e^{x}\left(cos\sqrt{3}x + sin\sqrt{3}x\right), όταν\ x<0 \\ -8e^{-2x}, \qquad\qquad όταν\ x>0 \end{cases} \tag{1}$$

Άρα $f'''(x) = -8f(x)$, όταν $x \neq 0$. (2)

Μετασχηματίζουμε κατά Fourier την (2) και χρησιμοποιώντας το θεώρημα 14 έχουμε:

-8$\boldsymbol{F}$[f(x)] = **F**[f΄΄΄(x)](s)

= is $\boldsymbol{F}$[f΄΄(x)](s) – $J_{f''(0)}$

= is$\left[is\boldsymbol{F}[f'(x)](s) - J_{f'(0)}\right]$– $J_{f''(0)}$]

= is$\left[is\left[is\boldsymbol{F}(s) - J_{f(0)}\right] - J_{f'(0)}\right]$– $J_{f''(0)}$]

= $-(is)^3\boldsymbol{F}(s) - (si)^2J_{f(0)}$ –is$J_{f\prime(0)} - J_{f\prime\prime(0)}$ (3)

Είναι: $J_{f(0)}$= 1 – 1 = 0, $J_{f\prime(0)} = -2-(1+\sqrt{3})$, $J_{f\prime\prime(0)} = 4 - 2\left(-1+\sqrt{3}\right) = 6 - 2\sqrt{3}$

Άρα η (3) γίνεται:

$\boldsymbol{F}$[f(x)](s) = $\boldsymbol{F}$(s) = … = $\frac{3-\sqrt{3}(is+2)}{8+is^3}$.

31. Βρείτε την μ.κ.F. συνάρτηση της f = $\boldsymbol{X}_{[-b,b]}$, b > 0.

Λύση

Το κλειδί σε αυτήν την άσκηση είναι ότι η f είναι παραγωγίσιμη τόσες φορές όσο η η-ιοστή παράγωγος της f (η $f^{(n)}$) να είναι ίσον με μηδέν (σχεδόν παντού).

Έχουμε $J_{f(-b)}$ = 1 – 0 = 1 και $J_{f(b)}$ = 0 – 1 = -1.

Αφού η f είναι τμηματικά σταθερή, τότε f'(x) = 0 (σχεδόν παντού). Η μ.κ.F. συνάρτηση f' είναι μηδέν, δηλαδή για s ≠ 0 έχουμε:

0 = $\boldsymbol{F}$[f ΄(x)](s) = is$\boldsymbol{F}$(s) – (1·$e^{-is(-b)}$+ (-1) ·e^{-isb}) ⇔$\boldsymbol{F}$(s) = $\frac{e^{isb} - \cdot e^{-isb}}{is}$ = $\frac{2\sin(bs)}{s}$

Για s = 0 λαμβάνουμε : $\lim\limits_{s\to 0}\boldsymbol{F}(s)$ = $\lim\limits_{s\to 0}\frac{2sinbs}{s}$ (Del Hospital) = 2b.

32. Βρείτε την μ.κ.F. της συνάρτησης

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 0, & \chi < -1 \\ 3-(1+x)^3, & -1 \leq \chi \leq 0 \\ 3-(1-x)^3, & 0 \leq \chi \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}}$$

Λύση

Το κλειδί σε αυτήν την άσκηση είναι ότι η f να είναι παραγωγίσιμη τόσες φορές όσο η η-ιοστή παράγωγος της f (η $f^{(n)}$) να είναι ίσον με μηδέν (σχεδόν παντού).

Η f είναι τμηματική πολυωνυμική, βαθμού 3, άρα $f^{(4)} = 0$, όπου αυτή ορίζεται. Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση έχουμε:

$J_{f'''(-1)} = 6 - 0 = 6$	$J_{f'''(0)} = 6 - (-6) = 12$	$J_{f'''(1)} = 0 - 6 = -6$
$J_{f''(-1)} = 0 - 0 = 0$	$J_{f''(0)} = -6 - (-6) = 0$	$J_{f''(1)} = 0 - 0 = 0$
$J_{f'(-1)} = 0 - 0 = 0$	$J_{f'(0)} = 3 - (-3) = 6$	$J_{f'(1)} = 0 - 0 = 0$
$J_{f(-1)} = 3 - 0 = 3$	$J_{f(0)} = 2 - 2 = 0$	$J_{f(1)} = 0 - 3 = -3$

Η μ.κ.F. της συνάρτησης $f^{(4)}(x)$ είναι μηδέν.

$0 = \boldsymbol{F}[f^{(n)}(x)](s) = is\,\boldsymbol{F}[f'''(x)](s) + 6(e^{is} + e^{-2is}) - 12$

$= is[2is\,\boldsymbol{F}[f''(x)](s)] + 6(e^{is} + e^{-is}) - 12$

$= - s^2\boldsymbol{F}[f''(x)](s) + 6(e^{is} + e^{-is}) - 12$

$= - s^2[is\boldsymbol{F}[f'(x)](s)] + 6s^2 + 6(e^{is} + e^{-is}) - 12$

$= - s^3 i\,\boldsymbol{F}[f'(x)](s) + 6s^2 + 6(e^{is} + e^{-is}) - 12$

$= - s^3 i\,[is\boldsymbol{F}\,[f'(x)](s)] - 3\,(e^{is} - e^{-is}) + 6s^2 + 6(e^{is} + e^{-is}) - 12$

$= - s^3 i\,[is\boldsymbol{F}[f\,(x)](s)] - 3\,(e^{is} - e^{-is}) + 6s^2 + 6(e^{is} + e^{-is}) - 12$

$= s^4\boldsymbol{F}(s) - 3\,(e^{is} - e^{-is}) + 6s^2 + 6(e^{is} + e^{-is}) - 12$

Λύνοντας ως προς τη μετασχηματισμένη κατά Fourier συνάρτηση F(s) την τελευταία εξίσωση λαμβάνουμε ότι: $\boldsymbol{F}(s) = \frac{12+6i\sin(s)-6s^2-12\cos(s)}{s^4}$.

Γ. Επίλυση Προβλημάτων Αρχικών Τιμών.

Πριν αναφερθούμε στη Μέθοδο Επίλυσης Αρχικών/Συνοριακών Τιμών, ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση u(x,t) η οποία εξαρτάται από δύο μεταβλητές, τότε ο μ.κ.F. ως προς μία μεταβλητή (π.χ. την x) θα υπολογίζεται θεωρώντας την άλλη μεταβλητή σταθερή (π.χ. την t).

Δίνεται u(x,t), με $-\infty < x < +\infty$ και $t > 0$, έχουμε:

- $\boldsymbol{F}[u_t(x,t)](s) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{F}(s,t)$.
- $\boldsymbol{F}[\frac{\vartheta^n}{\vartheta t^n}u(x,t)](s) = \frac{d^n}{dt^n}\boldsymbol{F}(s,t)$
- $\boldsymbol{F}[u_x(x,t)](s) = is\boldsymbol{F}(s,t)$
- $\boldsymbol{F}[\frac{\vartheta^n}{\vartheta x^n}u(x,t)](s) = (is)^n\boldsymbol{F}(s,t)$

Για να λύσουμε ένα Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ) ή ένα Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (ΠΣΤ) με τον μετασχηματισμό Fourier λαμβάνουμε υπόψιν τα παρακάτω, χωρίς αυτά να είναι δεσμευτικά.

Αν μας δίνεται:

(i) u(0,t) = f(x), όπου f(x) γνωστή συνάρτηση και t > 0. Τότε για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιούμε τον ημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier.

(ii) $u_x(0,t)$ = f(x), όπου f(x) γνωστή συνάρτηση και t > 0. Τότε για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιούμε τον συνημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier.

(iii) Αν $-\infty < x < +\infty$ τότε χρησιμοποιούμε τον μ.κ.F.

(iv) Όταν μας δίνεται ότι x > 0, τότε θα χρησιμοποιούμε τον συνημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier ή τον ημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier. Αυτό καθορίζεται από τους γνωστούς τύπους:

$\boldsymbol{F_{cos}[f''(x)](s) = -s^2 F_{cos}[f(x)](s) - f'(0)}$ **και** $\boldsymbol{F_{sin}[f''(x)](s) = -s^2 F_{sin}[f(x)](s) - sf(0)}$**.**

Εάν μας δίνεται ότι f ΄(0) = 0 τότε χρησιμοποιούμαι τον συνημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier.

Εάν μας δίνεται ότι f(0) = 0 τότε χρησιμοποιούμαι τον ημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier.

Παραδείγματα

33. Ας θεωρήσουμε μία ελαστική χορδή απείρου μήκους. Έστω u(x,t) η κατακόρυφη μετατόπιση της χορδής στο σημείο x και σε χρόνο t. Η κίνηση της χορδής u(x,t) δίνεται:

$\boldsymbol{u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0}$ **με $-\infty < x < +\infty$ και t > 0, όπου c^2 μία θετική σταθερά.** **(1)**

u(x,0) = g(x) **(2)**

Υποθέτουμε ότι ορίζεται ο μ.κ.F. για τη συνάρτηση g. Να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών, όταν η λύση είναι φραγμένη.

Λύση

Επειδή η μεταβλητή του x μεταβάλλεται σε όλο το R θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Fourier ως προς τη μεταβλητή x.

Βήμα 1° : Μετασχηματίζουμε κατά Fourier τις δοσμένες εξισώσεις (1) και (2).

Έτσι η (1) γίνεται:

$\boldsymbol{F}[u_{tt}] = c^2\boldsymbol{F}[u_{xx}] \Leftrightarrow$ (από ιδιότητα δ_1)

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{F}[u(x,t)](s)$ = - $c^2s^2\boldsymbol{F}$[u(x,t)](s) ⇔ $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{F}[u(s,t)]$= - $c^2s^2\boldsymbol{F}$[u(s,t)] (3)

Μετασχηματίζουμε την (2):

$\boldsymbol{G}$[u(x,0)](s) = $\boldsymbol{G}$[g(x)](s) = $\boldsymbol{G}$(s) (4)

όπου $\boldsymbol{G}$(s) ο μετασχηματισμός Fourier της g

Βήμα 2ο : Η (3) είναι μια Σ.Δ.Ε.

Η γενική λύση της εξίσωσης είναι:

$\boldsymbol{F}$[u(s,t)] = A(s)e^{cst} + B(s)e^{-cst}.

Όπου A(s) και B(s) σταθερές ως προς t.

Θα υπολογίσουμε τις A(s) και B(s).

Για να είναι η λύση φραγμένη για t → ∞ πρέπει να μην εμφανίζεται ο όρος e^{cst}, ο οποίος απειρίζεται για t → ∞. Έτσι γράφουμε A(s) = 0 και η λύση παίρνει τη μορφή $\boldsymbol{F}$[u(s,t)] = B(s)e^{-cst}. (5)

Εφαρμόζουμε την (4) στην (5) (δηλαδή αντικατάσταση t = 0 στην (5)) και βρίσκουμε:

B(s) = $\boldsymbol{G}$(s), οπότε είναι:

$\boldsymbol{F}$[u(x,t)](s) = $\boldsymbol{G}$(s)e^{-cst} ⇔ $\boldsymbol{F}$[u(s,t)] = $\boldsymbol{G}$(s)e^{-cst} (6)

Βήμα 3ο : Από τον ορισμό της α.μ.κ.F. είναι

$\boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{F}[u(s,t)]] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}[u(s,t)]\cdot e^{isx}ds \overset{(6)}{\Leftrightarrow}$

u(x,t) = $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{G}(s)e^{-cst}\cdot e^{isx}ds$

34. Ας θεωρήσουμε μία ελαστική χορδή απείρου μήκους. Έστω u(x,t) η κατακόρυφη μετατόπιση της χορδής στο σημείο x και σε χρόνο t. Η κίνηση της χορδής u(x,t) δίνεται:

$\boldsymbol{u_{tt} - c^2u_{xx} = 0}$ **με - ∞ < x < + ∞ και t > 0, όπου c^2 μία θετική σταθερά. (1)**

u(x,0) = f(x) (2)

$\boldsymbol{\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}}$ **= g(x) (3)**

Υποθέτουμε ότι ορίζονται οι μ.κ.F. για τις συναρτήσεις f και g. Να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών.

Λύση

Βήμα 1ο : Μετασχηματίζουμε κατά Fourier τις (1), (2) και (3).

Η (1) μας δίνει: $\boldsymbol{F}[u_{tt}] = c^2\boldsymbol{F}[u_{xx}] \Leftrightarrow$ (από ιδιότητα δ_1)

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{F}[u(x,t)](s)$ = - $c^2s^2\boldsymbol{F}$[u(x,t)](s) $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{F}[u(s,t)]$ = - $c^2s^2\boldsymbol{F}$[u(s,t)] (4)

Μετασχηματίζουμε την (2):

$\boldsymbol{F}$[u(x,0)](s) = $\boldsymbol{F}$[f(x)](s) = $\boldsymbol{F}$(s) (5)

Μετασχηματίζουμε την (3):

$\frac{\partial \boldsymbol{G}[u(x,0)](s)}{\partial t}$ = $\boldsymbol{G}$[g(x)](s) = $\boldsymbol{G}$(s) (6)

Βήμα 2ο: Η (4) είναι μια Σ.Δ.Ε. που η γενική της λύση είναι:

$\boldsymbol{F}$[u(s,t)] = A(s)cos(cst) + B(s)sin(cst). (7)

Όπου A(s) και B(s) σταθερές ως προς t.

Θα υπολογίσουμε τις A(s) και B(s).

Για t = 0 η (7) γίνεται: $\boldsymbol{F}$[u(x,0)](s) = A(s) $\overset{(5)}{\Leftrightarrow}$ $\boldsymbol{F}$(s) = A(s).

Παραγωγίζουμε την (7) ως προς t και έχουμε:

$\frac{\partial \boldsymbol{F}[u(s,t)]}{\partial t}$ = - A(s)(cs)sin(cst) + B(s)(cs)cos(cst).

Θέτουμε t = 0 και λαμβάνουμε: $\frac{\partial \boldsymbol{F}[u(s,0)]}{\partial t}$ = csB(s).

Όμως από (6) έχω: B(s) = $\frac{\boldsymbol{G}(s)}{cs}$.

Η (7) γίνεται: $\boldsymbol{F}$[u(s,t)] = $\boldsymbol{F}$(s)cos(cst) + $\frac{\boldsymbol{G}(s)}{cs}$sin(cst). (8)

Βήμα 3ο : Από τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier είναι:

$\boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{F}[u(s,t)](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}[u(s,t)]\cdot e^{isx}ds$

Η οποία λόγω της (8) γίνεται:

$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\boldsymbol{F}(s)\cos(cst) + \frac{\boldsymbol{G}(s)}{cs}\sin(cst)]\cdot e^{isx}ds \Leftrightarrow$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\boldsymbol{F}[f(x)](s)\cos(cst) + \frac{\boldsymbol{G}[g(x)](s)}{cs}\sin(cst)]\cdot e^{isx}ds$$

35. Ας θεωρήσουμε μία ελαστική χορδή απείρου μήκους. Έστω u(x,t) η κατακόρυφη μετατόπιση της χορδής στο σημείο x και σε χρόνο t. Η κίνηση της χορδής u(x,t) δίνεται:

$u_{tt} = c^2u_{xx}$ με $-\infty < x < +\infty$ και $t > 0$, όπου c^2 μία θετική σταθερά.

Αρχικά, η άπειρη χορδή είναι σε ηρεμία και η αρχική μετατόπιση είναι f(x). Υπολογίστε τη μετατόπιση u(x,t) της χορδής.

Λύση

Είναι $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ (1)

$u_t(x,0) = 0$ (2)

$u(x,0) = f(x)$ (3)

Βήμα 1ο: Μετασχηματίζουμε κατά Fourier τις (1), (2) και (3).

- Μετασχηματίζουμε την (1), θέτοντας όπου $\boldsymbol{F}[u(x,t)](s) = \boldsymbol{F}(s,t)$

$$\frac{d^2\boldsymbol{F}[u(x,t)](s)}{dt^2} = c^2(is)^2\boldsymbol{F}[u(x,t)](s) \Leftrightarrow \frac{d^2\boldsymbol{F}(s,t)}{dt^2} = c^2(is)^2\boldsymbol{F}(s,t) \quad (4)$$

- Μετασχηματίζουμε την (2).

$$\boldsymbol{F}[\frac{du(x,0)}{dt}](s) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{F}(s,0) = 0 \quad (5)$$

- Μετασχηματίζουμε την (3).

$$\boldsymbol{F}[u(x,0)](s) = \boldsymbol{F}[f(x)](s) \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(s,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}dx. \quad (6)$$

Βήμα 2ο: Λύνουμε τη Σ.Δ.Ε. (4), η οποία μας δίνει γενική λύση:

$$\boldsymbol{F}(s,t) = C_1\cos(cst) + C_2\sin(cst) \quad (7)$$

Παραγωγίζουμε την (7) ως προς t και σύμφωνα με την (5) βρίσκουμε: $C_2 = 0$.

Εφαρμόζουμε την (6) στην (7) και βρίσκουμε:

$$\boldsymbol{F}(s,0) = C_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}\,dx. \quad (8)$$

Η λύση της (4) είναι: $\boldsymbol{F}(s,t) = [\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}\,dx]\cos(cst)$ (9)

Βήμα 3ο : Εφαρμόζουμε τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier:

$$\boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{F}[u(x,t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}[u(s,t)]\cdot e^{isx}ds$$

Η οποία λόγω της (9) γίνεται:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-isy}\,dy]\cos(cst)\cdot e^{isx}ds.$$

36. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα

$u_{xx} + u_{yy} = 0$, όταν $0 < x < L$ και $0 < y < \infty$. **(1)**

$u(0, y) = e^{-2y}$, **(2)**

$u(L, y) = 0$, **(3)**

$u_y(x, 0) = 0$. **(4)**

Λύση

Αφού το x ϵ (0 , L) και το y > 0, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ημιτονοειδή ή τον συνημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier ως προς το y. Επειδή, όμως μας δίνεται ότι: $u_y(x, 0) = 0$, θα χρησιμοποιήσουμε τον συνημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier ως προς το y, αφού είναι γνωστό ότι: $u_{yy} = -s^2F_{cos}[u(x,y)](s) - u_y(x,0)(s)$.

Επομένως η (1) γίνεται:

$$\frac{d^2}{dx^2}\boldsymbol{F_{cos}}[u(x,y)](s) + \{-s^2\boldsymbol{F_{cos}}[u(x,y)](s) - [u_y(x,0)]\}(s) = 0. \quad (*)$$

Βήμα 1ο : Ο συνημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier των (1), (2) και (3) είναι:

Μετασχηματίζουμε την (1).

$\boldsymbol{F_{cos}}[u_{xx}] + \boldsymbol{F_{cos}}[u_{yy}] = 0$

Η (*) λόγω της (4) γίνεται:

$\frac{d^2}{dx^2}\boldsymbol{F_{cos}}[u(x,y)](s) - s^2\boldsymbol{F_{cos}}[u(x,y)](s) = 0.$ (5)

Μετασχηματίζουμε την (2).

$\boldsymbol{F_{cos}}[u(0,y)](s) = \boldsymbol{F_{cos}}(e^{-2y})(s) = \int_0^{+\infty} e^{-2y}\cos(sy)\,dy = \ldots = \frac{2}{4+s^2}$ (6)

Μετασχηματίζουμε την (3).

$\boldsymbol{F_{cos}}[u(L,y)] = \boldsymbol{F_{cos}}(0) = 0.$ (7)

Βήμα 2ο : Η (5) είναι μία συνήθη διαφορική εξίσωση, η λύση της οποίας είναι:

$\boldsymbol{F_{cos}}[u(x\,,s)] = A(s)\sinh sx + B(s)\cosh sx$ (8)

Εύρεση των A(s) και B(s).

Η (8) λόγω της (6) γίνεται:

$\boldsymbol{F_{cos}}[u(0,s)] = B(s) = \frac{2}{4+s^2}.$ (9)

Η (8) λόγω της (7) γίνεται:

$\boldsymbol{F_{cos}}[u(L,0) = A(s)\sinh sL + B(s)\cosh sL \Leftrightarrow 0 = A(s)\sinh sL + B(s)\cosh sL \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$A(s) = - B(s)\frac{\cosh sL}{\sinh sL} = - \frac{2}{4+s^2}\frac{\cosh sL}{\sinh sL}.$ (10)

Αντικαταστούμε τις (9) και (10) στην (8) και λαμβάνουμε την

$\boldsymbol{F_{cos}}[u(x,s)] = - \frac{2}{4+s^2}\frac{\cosh sL}{\sinh sL}\sinh sx + \frac{2}{4+s^2}\cosh sx$ (11)

Βήμα 3ο: Από τον ορισμό του αντίστροφου συνημιτονοειδή μετασχηματισμού Fourier και λαμβάνοντας υπόψιν την (11) βρίσκουμε:

$u(x,y) = \boldsymbol{F_{cos}^{-1}}[u(x,s)](y) = \boldsymbol{F_{cos}^{-1}}[\boldsymbol{F_{cos}}[u(x,s)]](y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\boldsymbol{F_{cos}}[u(x,s)]\cos(sy)ds.$

37. Η μεταβολή της θερμοκρασίας μιας ράβδου, απείρου μήκους, ομοιόμορφης διατομής και ομογενούς υλικού, δίνεται από την εξίσωση μεταβολής της θερμότητας, η οποία είναι η $c^2 \cdot u_{xx} = u_t$, όπου c^2 μία θετική σταθερά που εκφράζει τη θερμική αγωγιμότητα. Η αρχική συνθήκη της μ.δ.ε. είναι $u(x,0) = f(x)$, $-\infty < x < +\infty$ και $t > 0$ (δηλαδή η θερμοκρασία στα άκρα της ράβδου). Να βρείτε τη συνάρτηση της θερμοκρασίας $u(x,t)$, όταν γνωρίζετε ότι η λύση είναι πεπερασμένη για $|x| \to \infty$.

Λύση

Θα λύσουμε το πρόβλημα:

$c^2 \cdot u_{xx} = u_t$, $(- \infty < x < +\infty,\ t > 0)$ (1)

$u(x,0) = f(x)$ (2)

Βήμα 1ο : Μετασχηματίζουμε κατά Fourier τις εξισώσεις (1) και (2), οπότε:

$\boldsymbol{F}[\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)](s) = c^2\, \boldsymbol{F}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)](s)$

$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F}[u(x,t)](s) = c^2\, (is)^2\boldsymbol{F}[u(x,t)](s)$

$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F}[u(x,t)](s) = -\, c^2\, s^2\boldsymbol{F}[u(x,t)](s)$ (3)

Μετασχηματίζουμε την (2), οπότε:

$\boldsymbol{F}[u(x,0)](s) = \boldsymbol{F}[f(x)](s) = \boldsymbol{F}(s)$. (4)

Βήμα 2ο : Λύνουμε την (3), που είναι μια Σ.Δ.Ε. που η γενική της λύση είναι:

$\boldsymbol{F}[u(x,t)](s) = A(s)e^{-s^2c^2t} \Leftrightarrow \boldsymbol{F}[u(s,t)] = A(s)e^{-s^2c^2t}$ (5)

Η (5) για t = 0 γίνεται:

$\boldsymbol{F}[u(s,0)](s) = A(s)$ (6)

Και λόγω της (4), η (6) γίνεται:

$\boldsymbol{F}[f(x)](s) = A(s) \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(s) = A(s)$

Έτσι η (5) γίνεται:

$\boldsymbol{F}[u(s,t)] = \boldsymbol{F}(s)e^{-s^2c^2t}$ (7)

Βήμα 3ο : Αντιστρέφουμε κατά Fourier την (7) και έχουμε:

$u(x,t) = \boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{F}[u(s,t)] = \boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{F}(s)e^{-s^2c^2t}] \Leftrightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{F}(s)e^{-s^2c^2t}e^{isx}ds.$

Η $\boldsymbol{F}(s)$ δίνεται από την (4).

38. Να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα:

$2u_{xx} = u_t$, $(0 < x < +\infty,\ t > 0)$ (1)

$u(x,0) = f(x) = e^{-x}$ (2)

$u(0\ ,\ t) = 0$, με $t > 0$. (3)

Η u(x,t) θεωρείται φραγμένη για t > 0 και 0 < x < +∞.

Λύση

Θα επιλύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιούμε τον ημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier, αφού x > 0 και u(0 , t) = 0, με t > 0.

Θυμίζουμε ότι: $\boldsymbol{F}_{sin}[u_{xx}(x\ ,\ t)](s) = (is)^2\boldsymbol{F}_{sin}[u(x\ ,\ t)](s) + s\cdot u(0\ ,\ t)$ (*)

Βήμα 1ο : Χρησιμοποιούμε τον ημιτονικό μετασχηματισμό Fourier στις εξισώσεις (1), (2) και (3), οπότε:

$\boldsymbol{F_{sin}}[\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)](s) = 2\boldsymbol{F_{sin}}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)](s) \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$

$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F_{sin}}[u(x,t)](s) = 2[(is)^2\boldsymbol{F_{sin}}[u(x,t)](s) + s\cdot u(0 , t)]$.

Από την (3) είναι u(0 , t) = 0, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F_{sin}}[u(x,t)](s) = - 2s^2\boldsymbol{F_{sin}}[u(x,t)](s)$ (4)

Μετασχηματίζουμε την (2), οπότε:

$\boldsymbol{F_{sin}}[u(x,0)](s) = \boldsymbol{F_{sin}}[f(s)] = \int_0^{+\infty} f(x)\sin(sx)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(sx)\,dx \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{F_{sin}}[u(s,0)] = \ldots = \frac{s}{1+s^2}$. (5)

Βήμα 2ο : Λύνουμε την (4), που είναι μια Σ.Δ.Ε. με γενική λύση.

$\boldsymbol{F_{sin}}[u(s,t)] = A(s)e^{-2s^2t}$. (6)

Για t = 0 η (6) λόγο της (5) γίνεται:

$\boldsymbol{F_{sin}}[u(s,0)] = A(s) \Leftrightarrow A(s) = \int_0^{+\infty} u(x,0)\sin(sx)\,dx = \frac{s}{1+s^2}$ (7)

Από την (7), η (6) γίνεται:

$\boldsymbol{F_{sin}}[u(s , t)] = \frac{s}{1+s^2}\ e^{-2s^2t}$ (8)

Βήμα 3ο : Εφαρμόζουμε τον ορισμό του αντίστροφου ημιτονοειδή μετασχηματισμού Fourier στην (8) και έχουμε:

$\boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{F_{sin}}[u(x,t)](s) = \boldsymbol{F}^{-1}[\frac{s}{1+s^2}\ e^{-2s^2t}] \Leftrightarrow$

$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \boldsymbol{F_{sin}}[u(s,t)]\sin(sx)ds \Leftrightarrow$

$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{s}{1+s^2}\ e^{-2s^2t}\sin(sx)ds.$

39. Να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$u_{xx} = u_t$, $(0 < x < +\infty, t > 0)$ **(1)**

$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ **(2)**

$u_x(0 , t) = 0$, με $t > 0$. **(3)**

Η u(x,t) θεωρείται φραγμένη για t > 0 και 0 < x < +∞.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τον συνημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier. Θυμίζουμε ότι:

$\boldsymbol{F_{cos}}[u_{xx}(x , t)] = - s^2\boldsymbol{F_{cos}}[u(x , t)] – u_x(0 , t)$.

Βήμα 1ο : Μετασχηματίζουμε κατά Fourier τις εξισώσεις (1), (2) και (3), οπότε:

$\boldsymbol{F}_{cos}[\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)](s) = \boldsymbol{F}_{cos}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)](s)$

$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F}_{cos}[u(x,t)](s) = (is)^2\boldsymbol{F}_{cos}[u(x,t)](s) - u_x(0\ ,\ t).$

Από την (3) είναι $u_x(0\ ,\ t) = 0$, οπότε:

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F}_{cos}[u(x,t)](s) = -\ s^2\boldsymbol{F}_{cos}[u(x,t)](s) \quad (4)$$

Μετασχηματίζουμε την (2), οπότε:

$$\boldsymbol{F}_{cos}[u(x,0)](s) = \boldsymbol{F}_{cos}[f(x)](s) = \int_0^{+\infty} f(x)\cos(sx)\,dx = \ldots = \frac{sins}{s} + \frac{coss}{s^2} - \frac{1}{s^2} \quad (5)$$

Βήμα 2ο : Η (4) είναι μια Σ.Δ.Ε. που έχει γενική λύση.

$$\boldsymbol{F}_{cos}[u(s,t)] = A(s)e^{-s^2t} \quad (6)$$

Για t = 0 η (6) μας δίνει:

$$\boldsymbol{F}_{cos}[u(s,0)] = A(s) \overset{(5)}{\Leftrightarrow} A(s) = \frac{sins}{s} + \frac{coss}{s^2} - \frac{1}{s^2} \quad (7)$$

Από την (7), η (6) γίνεται:

$$\boldsymbol{F}_{cos}[u(s,t)] = [\frac{sins}{s} + \frac{coss}{s^2} - \frac{1}{s^2}]\ e^{-s^2t} \quad (8)$$

Βήμα 3ο : Αντιστρέφουμε κατά Fourier την (8) και έχουμε:

$\boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{F}_{cos}[u(s,t)] = \boldsymbol{F}^{-1}[[\frac{sins}{s} + \frac{coss}{s^2} - \frac{1}{s^2}]\ e^{-s^2t}] \Leftrightarrow$

$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}[\frac{sins}{s} + \frac{coss}{s^2} - \frac{1}{s^2}]\ e^{-s^2t}]\cos(sx)ds.$

40. Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα όταν - ∞ < x < +∞ και t > 0

$$u_{xxxx} - u_{tt} = 0, \quad \textbf{(1)}$$

$$u(x,0) = f(x) \text{ και} \quad \textbf{(2)}$$

$$u_t(x\ ,\ 0) = 0. \quad \textbf{(3)}$$

Λύση

Βήμα 1ο : Μετασχηματίζουμε κατά Fourier τις (1), (2) και (3).

Η (1) μας δίνει: $\boldsymbol{F}[u_{tt}] - \boldsymbol{F}[u_{xxxx}] = 0 \Leftrightarrow$ (από ιδιότητα δ_1)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{F}[u(x,t)](s) - s^4\boldsymbol{F}[u(x,t)](s) = 0 \quad (4)$$

Μετασχηματίζουμε την (2):

$$\boldsymbol{F}[u(x,0)](s) = \boldsymbol{F}[f(x)](s) = \boldsymbol{F}(s) \quad (5)$$

όπου $\boldsymbol{F}(s)$ ο μετασχηματισμός κατά Fourier της f(x)

Μετασχηματίζουμε την (3):

$\frac{\partial \boldsymbol{F}[\text{u(x,0)}](s)}{\partial \text{t}} = 0.$ (6)

Βήμα 2ο : Λύνουμε την (4), που είναι μια Σ.Δ.Ε. και έχει γενική λύση:

$\boldsymbol{F}$[u(x,t)](s) = A(s)e^{s^2t} + B(s)e^{-s^2t}. (7)

όπου A(s) και B(s) σταθερές ως προς t.

Θα υπολογίσουμε τις A(s) και B(s).

Εφαρμόζουμε τις συνθήκες (5) και (6) στην (7) και λαμβάνουμε:

A(s) + B(s) = $\boldsymbol{F}$(s) και A(s) – B(s) = 0

από την λύση του συστήματος αυτού βρίσκουμε:

A(s) = B(s) = $\frac{\boldsymbol{F}(s)}{2}$.

Οπότε η (7) μας δίνει:

$\boldsymbol{F}$[u(x,t)](s) = $\frac{e^{s^2t} - e^{-s^2t}}{2}\boldsymbol{F}$(s) (8)

Βήμα 3ο : Με σταθερό το t και μεταβλητή το s βρίσκουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της (8) που είναι:

u(x,t) = $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{s^2t} - e^{-s^2t}}{2} \boldsymbol{F}(s) e^{isx}$ds.

41. Χρησιμοποιήστε τον ημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier $\boldsymbol{F}_S$ για να βρείτε μια φραγμένη συνάρτηση u(x,y) που να επιλύει το πρόβλημα $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $-\infty < x < +\infty$, $y > 0$, με αρχικές συνθήκες u(0,y) = 0 και u(x,0) = $\frac{x}{x^2+1}$.

Λύση

Η επέκταση του ημιτονοειδούς μετασχηματισμού Fourier $\boldsymbol{F}_{sin}$ της συνάρτησης u(x,y), ως προς x, είναι:

u(x,y) = $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} z(s,y)\sin(sx)\,ds$ ⇔ (1)

u_{yy}(x,y) = $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} z_{yy}(s,y)\sin(sx)\,ds$ (2)

όπου z(s,y) = $\boldsymbol{F}_{sin}$[u(x,y)](s) = $\int_0^{+\infty} u(x,y)\sin(sx)\,dx$. (3)

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x και έχουμε:

u_x(x,y) = $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} z(s,y)\sin(sx)\,ds\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} z(s,y)\cdot s\cdot \cos(sx)\,ds$ (4)

Παραγωγίζουμε την τελευταία εξίσωση ως προς x και λαμβάνουμε:

u_{xx}(x,y) = $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} z(s,y)\,(-s^2)\cdot\sin(sx)\,ds = -\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} z(s,y)\cdot s^2\cdot\sin(sx)\,ds.$ (5)

Η δοσμένη διαφορική εξίσωση γράφεται:

$u_{xx} + u_{yy}$ = $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[z_{yy}(s,y) - s^2\cdot z(s,y)\right]$sin(sx)dx = 0 ⇔

$z_{yy}(s,y) - s^2\cdot z(s,y) = 0$ (6)

Η γενική λύση της συνήθης διαφορικής εξίσωσης που προέκυψε είναι:

z(s,y) = $C_1(s)e^{|s|y}+C_2(s)e^{-|s|y}$. (7)

Επειδή η λύση u(x,y) είναι μια φραγμένη συνάρτηση για 0 < y < ∞, τότε πρέπει να μην εμφανίζεται ο όρος $e^{|s|y}$, αφού απειρίζεται για y → +∞. Οπότε για να είναι φραγμένη η συνάρτηση z(s,y) πρέπει να ισχύει $C_1 = 0$. Έτσι είναι:

z(s,0) = $\boldsymbol{F_{sin}}$[u(x,0)](s) = $\boldsymbol{F_{sin}}[\frac{x}{x^2+1}](s) = C_2(s)$. (8)

Η συνάρτηση u(x,0) = $f_\pi(x) = \frac{x}{x^2+1}$ είναι περιττή συνάρτηση. Ισχύει:

$\boldsymbol{F}_\pi(s) = -2i\,\boldsymbol{F_{sin}}[f_\pi](s) = \frac{2}{i}\,\boldsymbol{F_{sin}}[f](s) \Leftrightarrow \boldsymbol{F_{sin}}[f](s) = \frac{i}{2}\,\boldsymbol{F_\pi}(s)$, (9)

Είναι γνωστό ότι: $\boldsymbol{F_{sin}}[f](s) = \frac{i}{2}\,\boldsymbol{F}_\pi[\frac{x}{x^2+a^2}](s) = \frac{i}{2}(-i)\mathrm{sign}(s)e^{-a|s|} = \frac{1}{2}\mathrm{sign}(s)e^{-a|s|}$ (10)

Θυμίζουμε ότι : sign(t) = $\frac{\mathrm{d|t|}}{\mathrm{dt}} = \begin{cases} -1, & όταν\ t < 0 \\ +1, & όταν\ t \geq 0 \end{cases}$

Για α = 1 είναι: $\boldsymbol{F_{sin}}[f](s) = \frac{i}{2}\,\boldsymbol{F}_\pi[\frac{x}{x^2+1}](s) = \frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(s)e^{-|s|}$

Επομένως $C_2(s) = \frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(s)e^{-|s|}$ και η (2) γίνεται :

z(s,y) = $\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(s)e^{-|s|}e^{-|s|y} = \frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(s)e^{-|s|(y+1)} = \boldsymbol{F_{sin}}$[u(x,y)](s)

Εάν τώρα θέσουμε στην (3) α = y + 1, έχουμε τη λύση: u(x,y) = $\frac{x}{x^2+(y+1)^2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3Ο

Συνέλιξη Συναρτήσεων

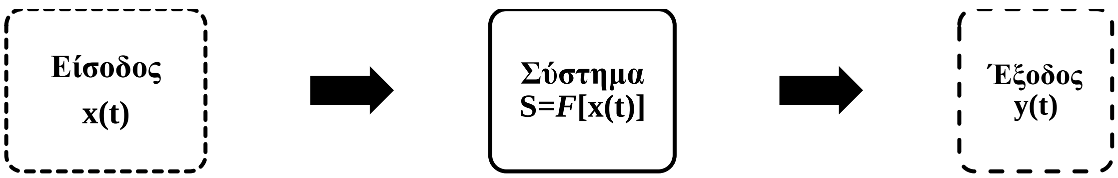
Α. Σήματα - Συστήματα

Ορισμός: Σήμα, ονομάζουμε τις τιμές που λαμβάνει μια ποσότητα y (εξαρτημένη μεταβλητή) η οποία μεταβάλλεται σε συνάρτηση μιας άλλης ποσότητας x (ανέξαρτητη μεταβλητή). Αν οι ποσότητες x και y λαμβάνουν συνεχείς τιμές (π.χ από ένα κλειστό διάστημα [α , β]) τότε το σήμα είναι μια συνάρτηση y(x) και χαρακτηρίζεται αναλογικό.

Ορισμός: Ως **σύστημα** ορίζεται η οντότητα εκείνη, η οποία επενεργώντας σε ένα σήμα (είσοδος) x(t) έχει ως αποτέλεσμα ένα άλλο σήμα (έξοδος) y(t), το οποίο ονομάζεται και απόκριση του συστήματος. Δηλαδή ένα σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μετασχηματισμός S που μετασχηματίζει ένα σήμα x(t), σε ένα άλλο σήμα y(t) = S[x(t)]. Η δράση ενός συστήματος περιγράφεται σχηματικά όπως φαίνεται παρακάτω:

Π.χ. το CD player είναι ένα σύστημα το οποίο διαβάζει τους αριθμούς, που είναι αποθηκευμένοι στον οπτικό δίσκο και αναπαράγει το ηχητικό σήμα, το οποίο μπορούμε και να ακούσουμε.

Ορισμός: Κρουστική απόκριση συστήματος ονομάζεται η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί η συνάρτηση Dirac. Στην πραγματικότητα είναι ένας παλμός που συμβαίνει τη χρονική στιγμή t = 0.



Ορισμός: Ένα σύστημα λέγεται **χρονικά αμετάβλητο** (αναλλοίωτο) (ΧΑ) όταν οι χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου μεταφράζεται σε αντίστοιχες χρονικές ολισθήσεις στην έξοδο. Δηλαδή $S[x(t - t_0)] = y(t - t_0)$. Δηλαδή ένα σύστημα που καθυστερεί την έξοδό του όσο καθυστερεί την είσοδό του είναι χρονικά αμετάβλητο.

Π.χ. Έστω το σύστημα μικρόφωνο – ηχείο με σταθερή καθυστέρηση. Αν καθυστερήσουμε να μιλήσουμε κατά t_0 δευτερόλεπτα θα καθυστερήσουμε να ακούσουμε τη φωνή μας κατά $t + t_0$ δευτερόλεπτα.

Παράδειγμα

1. Να εξετάσετε αν η είσοδος f(t) με έξοδο y(t) = tf(t - 2) είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση

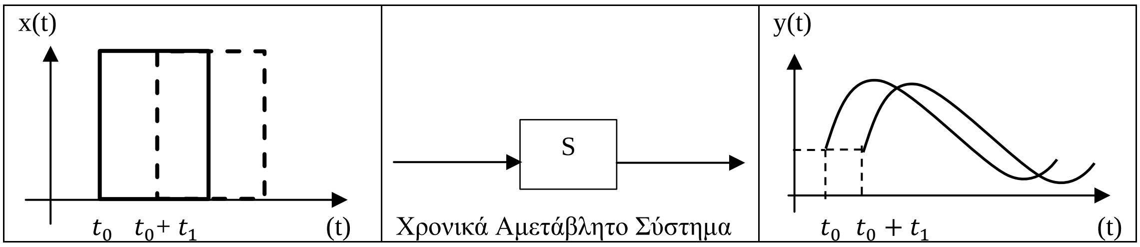
Για είσοδο f(t) τότε η έξοδος είναι: y(t) = tf(t – 2).

Για είσοδο $f(t - t_0)$ τότε η έξοδος είναι: $y_1(t) = tf(t - t_0 - 2)$.

Για έξοδο $y(t - t_0) = (t - t_0)f(t - t_0 - 2) \neq y_1(t)$.

Άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

Με λίγα λόγια, αν y(t) είναι η έξοδος (απόκριση) σε ένα σήμα εισόδου x(t), τότε για είσοδο $x(t - t_0)$ παράγεται η έξοδος $y(t - t_0)$. Δηλαδή το σήμα εξόδου παραμένει το ίδιο, ανεξάρτητα από το ποια χρονική στιγμή διεγείρεται η είσοδος. Το μόνο που υφίσταται είναι η αντίστοιχη χρονική μετατόπιση.



Β. Ορισμός Συνέλιξης

Για κάθε γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα συνεχούς χρόνου ισχύει ότι η απόκριση y(t), όταν αυτή διεγείρεται από είσοδο x(t), δίνεται από το ολοκλήρωμα $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) f(t-\tau) d\tau$, το οποίο ολοκλήρωμα έχει ως μεταβλητή το τ και ολοκληρώνεται ως προς αυτό (και όχι ως προς t). Το ολοκλήρωμα έχει δύο σήματα το x(τ) και f(t - τ). Το σήμα x(τ) δεν έχει υποστεί μεταβολή, ενώ το σήμα f(t - τ) έχει υποστεί δύο μεταβολές: την **ανάκλαση** και την **μετατόπιση**. Για να ακριβολογούμε το σήμα f(t - τ) έχει υποστεί μια ανάκλαση ως προς κατακόρυφο άξονα και ακολούθως μια μετατόπιση ως προς t (δεν πρέπει να παραβλέψουμε ότι το t στο ολοκλήρωμα είναι σταθερό, ενώ το τ είναι η μεταβλητή).

Η κρουστική απόκριση είναι σημαντική, διότι αν τη γνωρίζουμε μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο του συστήματος οποιαδήποτε και αν είναι η είσοδος σε αυτό. Ο υπολογισμός αυτός λέγεται **συνέλιξη**: $y(t) = x(t) * f(t)$, όπου x(t) η είσοδος, f(t) ο μετασχηματισμός όπως ορίσαμε παραπάνω, y(t) η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Λήμμα: Αν η συνάρτηση *f*(t) είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και η g(t) είναι φραγμένη για κάθε t ϵ R, τότε το ολοκλήρωμα y(t) = $\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau$ ορίζεται.

Απόδειξη

$|f * g|(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-y)|\cdot|g(\tau)|d\tau$

Επειδή η g είναι φραγμένη, θα ισχύει : |g(τ)| ≤ M, (όπου M > 0 μια σταθερά) για κάθε τ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g.

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-\tau)|\cdot|g(\tau)|d\tau \le M\cdot\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-\tau)|d\tau < \infty$ και αυτό γιατί η f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη.

Ορισμός Συνέλιξης: Αν f απολύτως ολοκληρώσιμη στο R και g φραγμένη συνάρτηση. Τότε ορίζουμε ως συνέλιξη των συναρτήσεων αυτών μια συνάρτηση y(t), την οποία γράφουμε f ∗ g και ορίζεται ως εξής,

$y(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)d\tau$ για κάθε x ϵ R.

Με μια αλλάγη της μεταβλητής έχουμε :

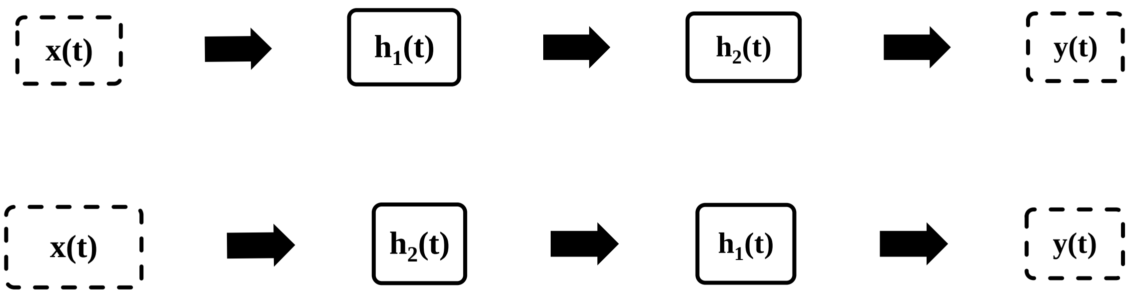
$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$ για κάθε x ϵ R.

1. Ιδιότητες Συνέλιξης

(α) Αντιμεταθετική Ιδιότητα

Αν δύο συστήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά, τότε η έξοδος είναι ανεξάρτητη από τη σειρά σύνδεσή τους.

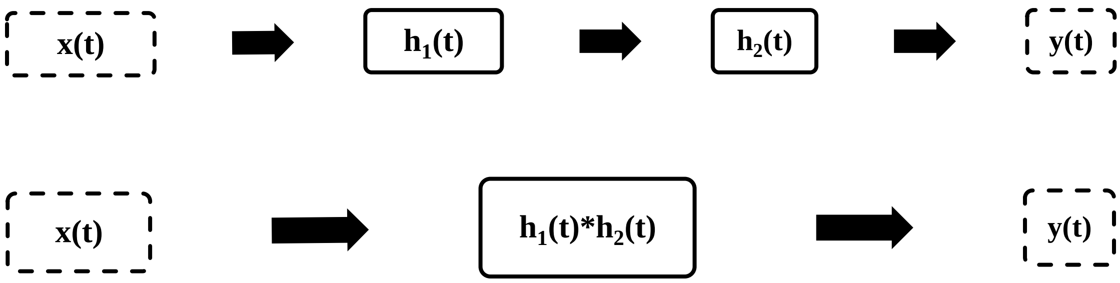
$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$



(β). Προσεταιριστική Ιδιότητα.

Το πρακτικό νόημα της ιδιότητας μας λέει ότι: όταν δύο συστήματα συνδέονται σε σειρά μπορούν να αντικατασταθούν με ένα τρίτο σύστημα, το οποίο έχει κρουστική απόκριση ίση με τη συνέλιξη των κρουστικών αποκρίσεων των δύο συστημάτων που έχουν συνδεθεί σε σειρά.

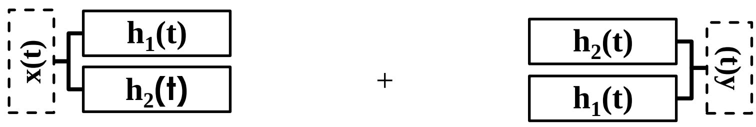
$$h_2(t) * [h_1(t) * x(t)] = [h_2(t) * h_1(t)] * x(t)$$



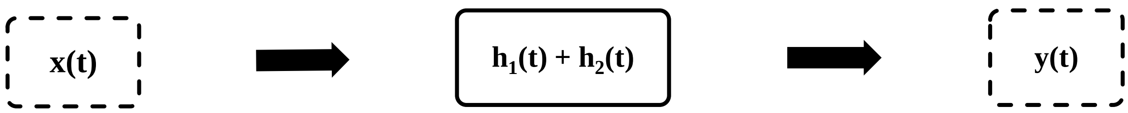
(γ). Επιμεριστική ιδιότητα.

Η γεωμετρική ερμηνεία της ιδιότητας αυτής είναι : Δύο συστήματα που έχουν συνδεθεί παράλληλα μπορούν να αντικασταθούν από ένα τρίτο σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση είναι ίση με το άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεών τους.

$$x(t) * [h_2(t) + h_1(t)] = [h_2(t) * x(t)] + [h_1(t) * x(t)] = y(t)$$



Το παραπάνω σχεδιάγραμμα συνοψίζετε στο παρακάτω σχήμα:



2. Διάφοροι Προβληματισμοί

(i) Η συνέλιξη έχει διαφορές με το γινόμενο δύο συναρτήσεων. Δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $f(t)*g(t) \neq f(t)g(t)$, όπως θα δούμε παρακάτω.

Παράδειγμα

2. Να βρείτε τη συνέλιξη των συναρτήσεων $f(t) = t^n$ και $g(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $f(t)*g(t) \neq f(t)g(t)$.

Λύση

Η συνέλιξη των δύο συναρτήσεων είναι:

(f∗g)(t) = $\int_0^1 (t-\tau)^n \cdot 2d\tau$ = $2\frac{t^{n+1}-(t-1)^{n+1}}{n+1}$, ενώ (fg)(t) = $2t^n$ δηλαδή (f∗g)(t) ≠ (fg)(t).

(ii) Το γινόμενο μιας συνάρτησης με τον εαυτό της είναι πάντα μη αρνητική, ενώ η συνέλιξη μιας συνάρτησης με τον εαυτό της μπορεί να είναι μη θετική.

Παράδειγμα

3. Να βρείτε τη συνέλιξη της συνάρτησης f(x) = $\begin{cases} x, -2 \le x \le 2 \\ 0, \quad αλλού \end{cases}$ με τον εαυτό της και στη συνέχεια να δείξετε ότι $f(x) * f(x) \neq f^2(x)$.

Λύση

Η συνέλιξη της συνάρτησης f με τον εαυτό της είναι:

$f(x) * f(x) = \int_{-2}^{2} \tau(x-\tau)d\tau$ = … = $-\frac{16}{3}$ < 0. Ενώ $f^2(x)$ = x^2 ≥ 0.

Άρα $f(x) * f(x) \neq f^2(x)$.

(iii) Δεν ισχύει f ∗ 1 = f.

Παράδειγμα

4. Να αποδείξετε ότι εάν $p_\alpha(t)$=$\begin{cases} 1, \ , όταν\ |t| \le \frac{\alpha}{2} \\ 0, \ όταν\ t\ αλλού \end{cases}$ με α > 0 τότε: (p_α∗1)(t) ≠ p_α(t).

Λύση

(p_α∗1)(t) =$\int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha(\tau) \cdot 1 d\tau$ = $\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} 1 d\tau = \alpha$. Άρα ($p_\alpha$∗1)(t) ≠ p_α(t).

(iv) Η προσεταιριστική ιδιότητα (f ∗g) ∗ h = f ∗ (g ∗ h) δεν ισχύει πάντα, ισχύει μόνο όταν ικανοποιείται τουλάχιστον μια από τις προϋποθέσεις της Πρότασης 1.

Πρόταση 1: Έστω f, g και h κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις. Ισχύει

(f ∗ g) ∗ h = f ∗ (g ∗ h) όταν ισχύει τουλάχιστον μια από τις παρακάτω προϋποθέσεις,

(α) g φραγμένη και f, h απολύτως ολοκληρώσιμες,

(β) f, g συνεχείς και g, h απολύτως ολοκληρώσιμες,

(γ) g, h φραγμένες και f, g απολύτως ολοκληρώσιμες,

(δ) υπάρχει πραγματικός s_0 τέτοιος ώστε: f(s), g(s), h(s) είναι μηδέν όταν s < s_0, (ε) για δύο συναρτήσεις (π.χ. f, g) υπάρχει παραγματικός s_0 τέτοιος ώστε να μηδενίζονται όταν |s| > s_0.

Σε αντίθετη περίπτωση η προσεταιριστική ιδιότητα δεν ισχύει. Όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x) = 1, g(x) = δ΄(x) και h(x) = u(x), όπου u(x) η συνάρτηση Heaviside. Να δείξετε ότι: (f(x) ∗ g(x)) ∗ h(x) ≠ f(x) ∗ (g(x) ∗ h(x)).

Λύση

- $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \delta'(\tau)d\tau = 0.$

Προφανώς $(f * g) * h = 0 * h = \int_{-\infty}^{+\infty} 0u(\tau)d\tau = \int_{0}^{+\infty} 0d\tau = 0.$

- $(g * h)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x-\tau)\, u(\tau)d\tau =$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(\tau - x)u(\tau)d\tau = u'(x) = \delta(x).$$

Αλλιώς $(g * h)(x) = (\delta' * u)(x) = u'(x) = \delta(x)$ (παράδειγμα 17(iii))

Προφανώς $f * (g * h) = 1 * \delta(x) = 1.$ (παράδειγμα 15)

Επομένως: $(f(x) * g(x)) * h(x) = 0 \neq 1 = f(x) * (g(x) * h(x)).$

(v) Δεν ισχύει πάντοτε ότι : [f(t) ∗ g(t)]΄= f(t) ∗ g΄(t).

Η παραπάνω ιδιότητα της παραγώγισης της συνέλιξης ισχύει μόνο όταν ικανοποιείται τουλάχιστον μία από τις προϋποθέσεις της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 2: Έστω f, g κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις στο R με g συνεχής και κατά τμήματα λεία. Τότε ισχύει η παραπάνω βασική ιδιότητα, όταν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

(α) η f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και g, g΄ φραγμένες,

(β) η f είναι φραγμένη και g, g΄απολύτως ολοκληρώσιμες,

(γ) μία από τις δύο συναρτήσεις μηδενίζεται έξω από ένα πεπερασμένο διάστημα,

(δ) υπάρχει πραγματική σταθερά s_0 τέτοιο ώστε οι f(s), g(s) να είναι μηδέν όταν s_0 < s.

(ε) υπάρχει πραγματική σταθερά s_0 τέτοιο ώστε οι f(s), g(s) να είναι μηδέν όταν s_0 > s.

Σε αντίθετη περίπτωση η παραγώγιση της συνέλιξης δεν ισχύει. Όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα

6. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f (x) = e^xu(x) και g(x) = u(x), όπου u(x) η συνάρτηση Heaviside. Να δείξετε ότι: (f ∗ g)΄≠ f ∗ g ΄.

Λύση

(f∗g)(x) = e^xu(x) ∗ u(x) = $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-\tau}u(x-\tau)u(t)d\tau$ = $e^x\int_{0}^{+\infty} e^{-\tau}u(x-\tau)d\tau$ =

= $e^x\int_{0}^{x} e^{-\tau}d\tau$ = … = 1.

Επομένως (f∗g)΄(x) = 1΄ = 0.

(f ∗ g΄)(x) = e^xu(x) ∗ u΄(x) = e^xu(x) ∗ δ(x) = e^xu(x) ⇔ (f ∗ g')(x) = e^xu(x).

Επειδή η ταυτοτική συνάρτηση της συνέλιξης δύο συναρτήσεων είναι η συνάρτηση Dirac, έχουμε:

(f ∗ g΄)(x) = e^xu(x) ≠ 0 = (f ∗ g)΄(x).

(vi) Δεν ισχύει ότι: $[\mathbf{f(x)} * \mathbf{g(x)}]_{x=x_0}$ = f($\boldsymbol{x_0}$) ∗ g($\boldsymbol{x_0}$), όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα

7. Θεωρούμε τις συναρτήσεις g(x) = $\boldsymbol{e^{3x}}$ και f(x) = $\begin{cases} \mathbf{2}, & \boldsymbol{ό\tau\alpha\nu\ |x| \le 2} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{ό\tau\alpha\nu\ x\ \alpha\lambda\lambda o ύ} \end{cases}$ να δείξετε ότι: $[\mathbf{f(x)} * \mathbf{g(x)}]_{(x=1)} \neq \mathbf{f(1)} * \mathbf{g(1)}$.

Λύση

- (f ∗ g)(x) = $\int_{-2}^{+2} 2e^{3(x-\tau)}\,d\tau$ = … = $\frac{2e^{3x}(e^{6}-e^{-6})}{3}$.

  Για x = 1, τότε: (f ∗ g)(1) = $\frac{2e^{3}(e^{6}-e^{-6})}{3}$.
- Εάν x = 1 τότε f(1) = 2 και g(1) = e^3.

  f(1) ∗ g(1) = $\int_{-2}^{+2} 2\cdot e^{3}\,d\tau$ = 8e^3.

Άρα $[f(x) * g(x)]_{x=1}$ ≠ f(1) ∗ g(1).

(vii) Αν η συνάρτηση g είναι μη μηδενική συνάρτηση και η συνέλιξη αυτής με μία συνάρτηση f είναι τέτοια ώστε να ισχύει f ∗ g = 0. Τότε η f δεν είναι αναγκαστικά η μηδενική συνάρτηση.

Παράδειγμα

8. Θεωρούμε τις συναρτήσεις g(x) = |x| - 1 και f(x) = $\begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{ό\tau\alpha\nu\ |x| \le 2} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{ό\tau\alpha\nu\ x\ \alpha\lambda\lambda o ύ} \end{cases}$ **να αποδείξετε ότι αν και f(x) ≠ 0, g(x) ≠ 0 η συνέλιξή τους f(x) ∗ g(x) ισούται με μηδέν.**

Απόδειξη

$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\tau)g(\tau)\, d\tau = \int_{-2}^{+2} 1 \cdot (|\tau| - 1)\, d\tau = 2\int_{0}^{+2} (\tau - 1)\, d\tau = \ldots = 0$

Άρα, για τις μη μηδενικές συναρτήσεις συναρτήσεις f(x) και g(x) έχουμε ότι η συνέλιξή τους να είναι ίση με μηδέν.

Γ. Γραφικός Προσδιορισμός Της Συνέλιξης

Η συνέλιξη δυο σημάτων (συναρτήσεων) x(τ) και h(x – τ) ορίζετε ως το ολοκλήρωμα του γινομένου των σημάτων (συναρτήσεων) αυτών: y(t) = $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$, για κάθε x ∈ R. Για να υπολογίσουμε την έξοδο y(t) ενός Γραμμικού Χρονικά Αμετάβλητου συστήματος (ΓΧΑ) ακολουθούμε τα βήματα:

<u>1ο Βήμα</u> : Ανάκλαση.

Σχεδιάζεται το σήμα h(- τ). Το h(-τ) δεν είναι παρά η ανάκλαση του σήματος h(τ) ως προς τον κατακόρυφο άξονα.

<u>2ο Βήμα</u> : Χρονική Μετατόπιση.
Σχεδιάζεται το σήμα h(t – T). Το σχήμα h(t – τ) προκύπτει από την μετατόπιση του σήματος h(-τ) κατά t.

<u>3ο Βήμα</u> : Πολλαπλασιασμός.

Προσδιορίζεται το γινόμενο x(τ)·h(t - τ).

<u>4ο Βήμα</u> : Ολοκλήρωση ή εμβαδομέτρηση.

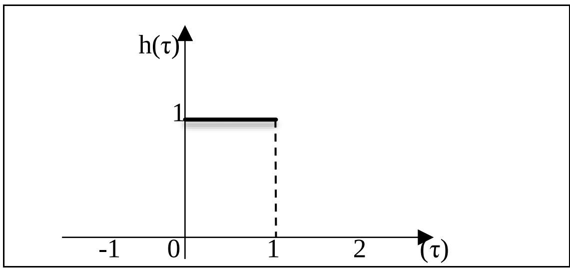
Ολοκληρώνεται το γινόμενο x(τ) h(t-τ) ή υπολογίζεται το εμβαδόν της αλληλοεπικάλυψης των σημάτων x(τ) και h(t - τ). Το αποτέλεσμα είναι ίσο με την έξοδο του συστήματος y(t) τη χρονική στιγμή t_1.

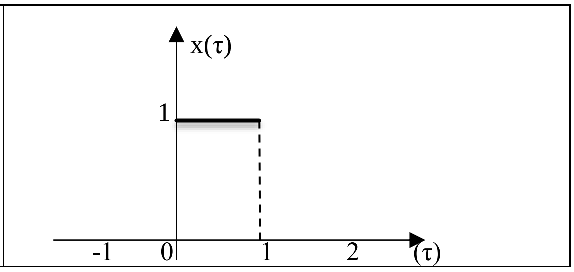
<u>5ο Βήμα:</u> Επανάληψη.

Επαναλαμβάνονται τα παραπάνω βήματα για τις διάφορες τιμές του χρόνου t και περιλαμβάνονται τα κατάλληλα όρια ολοκληρώσεως.

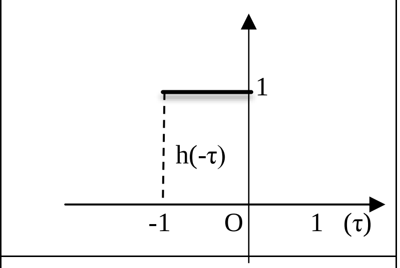
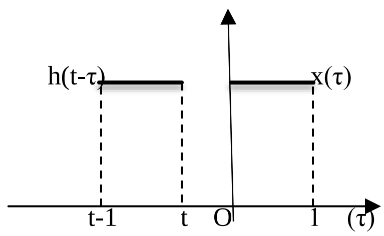
Παραδείγματα

9. Να προσδιοριστεί η συνέλιξη των σημάτων h(t) και x(t).





Λύση

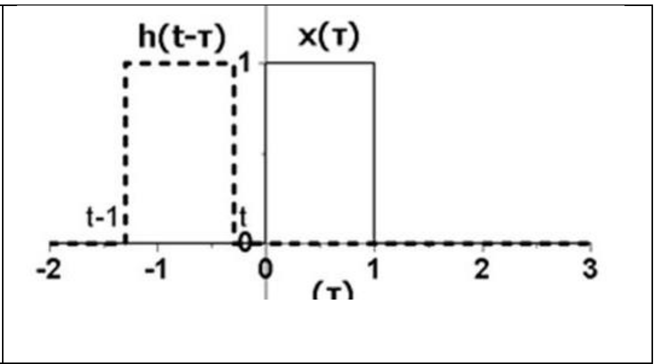
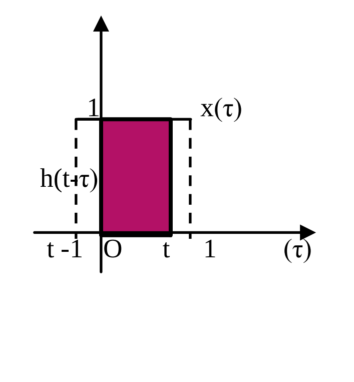
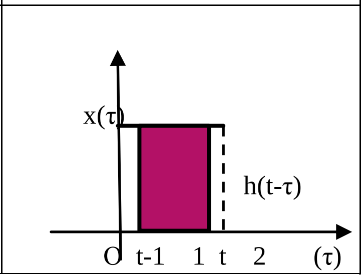
1ο Βήμα: Το βήμα αυτό περιλαμβάνει την **ανάκλαση**. Επιλέγουμε το απλούστερο σήμα, (στην περίπτωσή μας, όποιο και να πάρουμε είναι το ίδιο) και σχεδιάζουμε το συμμετρικό του ως προς τον κατακόρυφο άξονα.	
2ο Βήμα: Το βήμα αυτό περιλαμβάνει την **μετατόπιση**. Σε αυτό το σήμα h(-τ) μετατοπίζεται κατά t. Το t είναι μια σταθερά, αφού η μεταβλητή είναι το τ. Αυτό που πρέπει να παρατηρήσουμε είναι ότι το δεξί άκρο του σήματος έχει τετμημένη το t ενώ το αριστερό την t - 1.	

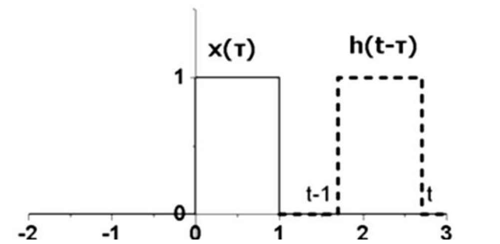
3ο Βήμα : Από τον ορισμό της συνέλιξης (y(t) = $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$), προκύπτει ότι η τιμή της συνάρτησης y(t) – δηλαδή η τιμή της συνέλιξης των δύο σημάτων τη χρονική στιγμή t – εξαρτάται από την αλληλοεπικάλυψη που έχουν τα δύο σήματα τη δοσμένη χρονική στιγμή. Επομένως για να υπολογιστεί η συνέλιξη για κάθε t, θα πρέπει να φανταστεί κανείς ότι το σήμα h(t-τ) ολισθαίνει και μετακινείται σε σχέση με την x(t).

4ο Βήμα: Ολοκλήρωση ή εμβαδομέτρηση.

Παρατηρώντας την αλληλοεπικάλυψη των x(τ) και h(t-τ) μπορούν να εντοπιστούν τα διαστήματα στα οποία μεταβάλλεται η ποσότητα t.

5ο Βήμα: Σε αυτό το βήμα βρίσκουμε τα κατάλληλα άκρα ολοκλήρωσης.

• Για t < 0: δεν υπάρχει αλληλοεπικάλυψη ανάμεσα στα δύο σήματα, άρα y(t) = 0.	
• Για 0 ≤ t < 1: Βλέπουμε από στο διπλανό σχήμα η αλληλοεπικάλυψη των δύο σημάτων είναι το γραμμοσκιασμένο ορθ. παραλ/μο, το οποίο έχει δεξί άκρο το άκρο της h(t-τ) που είναι το t και το αριστερό άκρο της x(τ) που είναι το μηδέν. Άρα, y(t) = $\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$. Τα δύο σήματα έχουν σταθερό πλάτος (ίσο με 1), οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται: y(t) = $\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ = $\int_0^t 1 \cdot 1 d\tau$ = t	
• Για 1 ≤ t < 2 , η h(t-τ) μετακινείται δεξιά, η αλληλοεπικάλυψη με την γραφική παράσταση της x(τ) (γραμμοσκιασμένο ορθ. παραλ/μο) μειώνεται και όταν t ≥ 2 δεν υπάρχει αλληλοεπικάλυψη μεταξύ των δυο γραφικών παραστάσεων. y(t) = $\int_{t-1}^{1} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ = $\int_{t-1}^{1} 1 \cdot 1 d\tau$ = 2 - t	

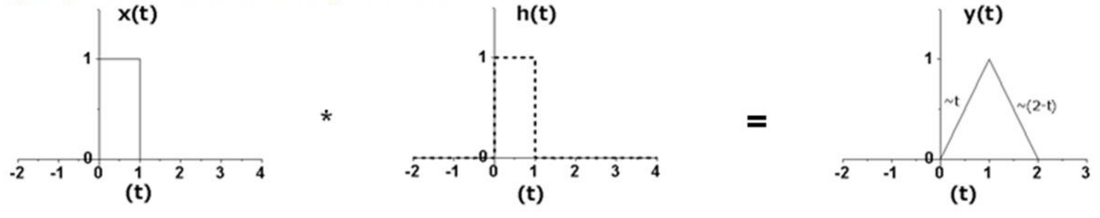


Το $h(t-\tau)$ βρίσκεται δεξιά του $x(t)$ και τα σήματα δεν έχουν καμία αλληλοεπικάλυψη. Αυτό συμβαίνει όταν $t > 2$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε ότι:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ t < 0 \\ t, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ 0 \le t < 1 \\ 2-t, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ 1 \le t < 2 \\ 0, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ t \ge 2 \end{cases}$$

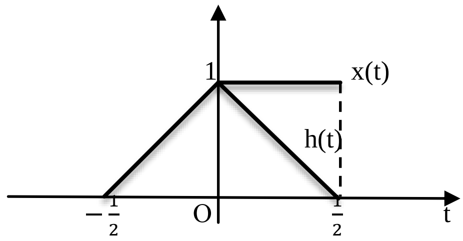
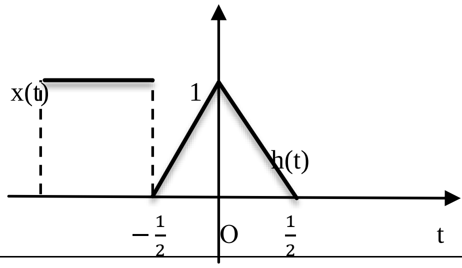
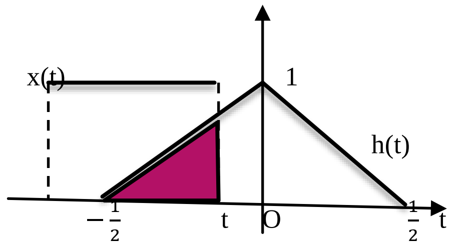
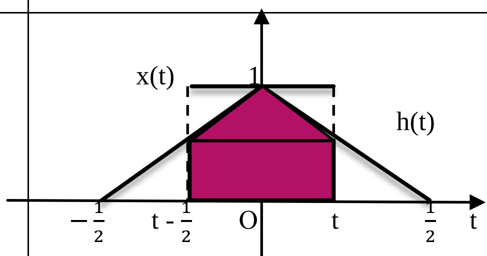
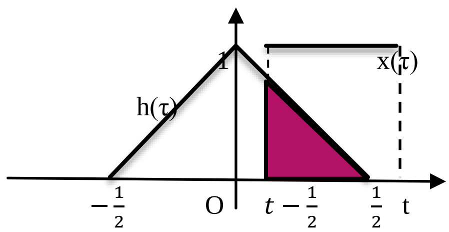
Γραφικά το αποτέλεσμα είναι:



10. Να υπολογίσετε τη συνέλιξη των σημάτων:

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \mathbf{0 \le t \le \frac{1}{2}} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{\alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}} \end{cases} \quad \textbf{και } \mathbf{h(t)} = \begin{cases} \mathbf{-2|t| + 1}, & \mathbf{|t| \le \frac{1}{2}} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{\alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}} \end{cases}$$

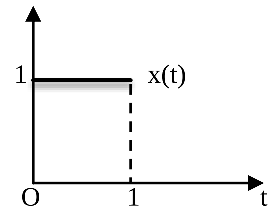
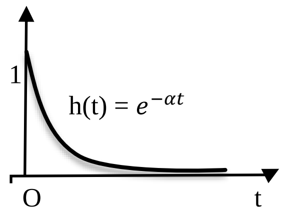
Λύση

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων x(t) και h(t) φαίνονται στο σχήμα Α. Σέρνουμε το γράφημα της x(t) πάνω στον οριζόντιο άξονα και λαμβάνουμε τις περιπτώσεις: Για t < $-\frac{1}{2}$ (σχ.Β) έχουμε : y(t) = 0. Βλέπουμε στο διπλανό σχήμα ότι δεν υπάρχει κάποια αλληλοεπικάλυψη των δύο γραφικών παραστάσεων.	 (σχ. Α) 
Για $-\frac{1}{2} \le$ t < 0 (σχ.Γ) έχουμε: y(t) = $\int_{-1/2}^{t}(2\tau+1)d\tau$ = t^2 + t + $\frac{1}{4}$. Βλέπουμε στο διπλανό σχήμα ότι η αλληλοεπικάλυψη των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το γραμμοσκιασμένο ορθ. τρίγωνο.	 (σχ. Γ)
Για 0 ≤ t < $\frac{1}{2}$ (σχ.Δ) έχουμε : y(t) = $\int_{t-\frac{1}{2}}^{0}(2\tau+1)d\tau + \int_{0}^{t}(-2\tau+1)d\tau$ = t - $\frac{1}{4}$.	 (σχ. Δ)
Για $\frac{1}{2} \le$ t < 1 (σχ.Ε) είναι: y(t) = $\int_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(-2\tau+1)d\tau$ = t^2 - 2t +1= $(t-1)^2$ Για t ≥ 1 είναι : y(t) = 0.	 (σχ.Ε)

Συνοπτικά: Η συνέλιξη y(t) των δύο σημάτων x(t) και h(t) είναι:

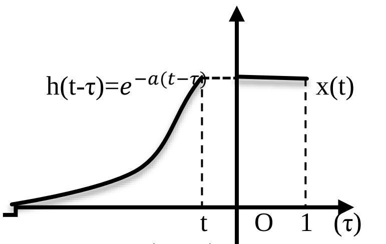
$$y(t) = \begin{cases} 0, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ t < -\dfrac{1}{2} \\ t^2 + t + \dfrac{1}{2}, & \acute{o}\tau\alpha\nu -\dfrac{1}{2} \le t < 0 \\ t - \dfrac{1}{4}, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ 0 \le t < \dfrac{1}{2} \\ t^2 - 2t + 1, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ \dfrac{1}{2} \le t \le 1 \\ 0, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ t > 1 \end{cases}$$

11. Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων α) και β), όπου α > 0.

α) 	β) 

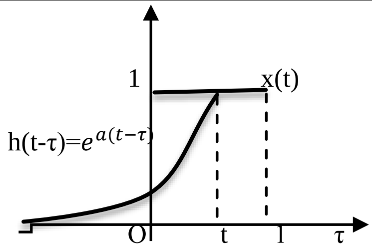
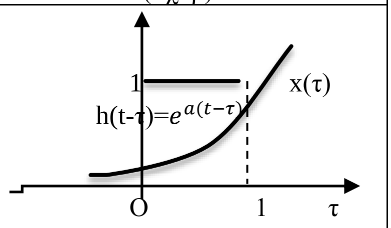
Λύση

Είναι y(t) = x(t)∗h(t) = $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$.

Σχεδιάζουμε τη συμμετρική ως προς τον y΄y άξονα γραφική παράσταση της h (δηλαδή την h(-τ)) και στη συνέχεια μετατοπίζουμε το σήμα κατά t (δηλαδή την h(t – τ)). Ολισθαίνουμε το σήμα h(t-τ) πάνω στον άξονα x΄x. (σχ. α)	 (σχ. α)

Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις.

(i) Εάν t < 0 τότε δεν υπάρχει κάποια αλληλοκάλυψη των σημάτων h(t – τ) και x(t) (σχ. α). Επομένως η συνέλιξη είναι μηδέν.

(ii) Αν 0 ≤ t < 1 τότε υπάρχει μια αλληλοκάλυψη μεταξύ των γραφικών παραστάσεων h(t-τ) και x(τ). Άρα: $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau \Leftrightarrow$ y(t) = $\int_0^t 1 \cdot e^{-\alpha(t-\tau)}$dτ ⇔ y(t) = $\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$	 (σχ. β)
(iii) Αν 1 ≤ t τότε υπάρχει αλληλοκάλυψη μεταξύ των γραφικών παραστάσεων h(t-τ) και x(τ). Άρα $y(t) = \int_0^1 h(t-\tau)x(\tau)d\tau$= $\int_0^1 1 \cdot e^{-\alpha(t-\tau)}$dτ ⇔ y(t) = $\frac{e^{-\alpha t}(e^{\alpha}-1)}{\alpha}$	 (σχ. γ)

Επομένως $y(t) = \begin{cases} 0, όταν\ t < 0 \\ \frac{1-e^{-at}}{a}, όταν\ 0\ \leq t < 1 \\ \frac{e^{-\alpha t}(e^{\alpha}-1)}{\alpha}, όταν\ t \geq 1 \end{cases}$

Δ. Έυρεση Της Συνέλιξης Με Τον Ορισμό

Σύμφωνα με τον ορισμό της συνέλιξης, έχουμε ότι: Αν f και g συναρτήσεις στο R, η συνέλιξη των συναρτήσεων αυτών είναι μια συνάρτηση, την οποία γράφουμε $f * g$ και ορίζουμαι ως εξής: $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$ για κάθε x ϵ R

Αν φυσικά το παραπάνω ολοκλήρωμα ορίζεται.

Έτσι με τη χρήση του ορισμού της συνέλιξης μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων χωρίς να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση αυτών.

12. Να βρείτε με τη βοήθεια του ορισμού της συνέλιξης δύο συναρτήσεων, τις συναρτήσεις y(t) και h(t).
(α) y(t) = u(t)∗u(t)
(β) h(t) = y(t)∗u(t)
Όπου u(t) η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος, Heaviside: u(t) = $\begin{cases} \mathbf{1}, ό\boldsymbol{ταν}\ \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, ό\boldsymbol{ταν}\ \boldsymbol{t} < \mathbf{0} \end{cases}$

Λύση

(α) y(t) = $\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u\,(t-\tau)d\tau = \int_0^t 1d\tau = [\tau]_0^t = t$.

Είναι y(t) = $\begin{cases} t,\ t \geq 0 \\ 0,\ t < 0 \end{cases}$, άρα y(t) = t·u(t).

(β) h(t) = y(t)∗u(t) = t·u(t)∗u(t) = $\int_{-\infty}^{\infty} \tau \cdot u(\tau) \cdot u\,(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau \cdot 1 \cdot 1d\tau = [\frac{\tau^2}{2}]_0^t = \frac{t^2}{2}$.

Επομένως h(t) = $\frac{t^2}{2}$u(t).

13. Να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα του παραδείγματος 11, με τη βοήθεια του ορισμού της συνέλιξης.

Λύση

Έχουμε x(t) = $\begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & αλλού \end{cases}$ που γράφεται ως εξής: x(t) = u(t) – u(t - 1), όπου u(t) η συνάρτηση Heaviside και τη συνάρτηση h(x) = e^{-ax}. Επομένως:

y(t)=x(t)∗h(t) = $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\ \tau)d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau-1)d\tau$

Θέτω $y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_0^t 1 \cdot h(\tau)d\tau = \int_0^t e^{-a\tau}d\tau = \ldots = \frac{1-e^{-at}}{a}u(t)$

Θέτω $y_2(t) = x(t) * u(t-1) = x(t) * [u(t) * \delta(t-1)] = [x(t) * u(t)] * \delta(t-1)$ ⇔

$\Leftrightarrow y_2(\mathrm{t}) = y_1(t) * \delta(t-1)$.

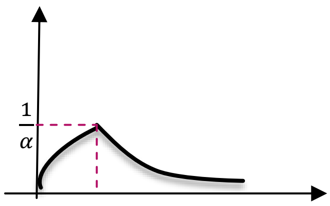
Από την ιδιότητα της συνάρτησης Dirac (delta): $y_1(t)*\delta(t - 1) = y_1(t - 1)$. Άρα

$y_2(\mathrm{t}) = y_1(t-1) \Leftrightarrow y_2(\mathrm{t}) = \frac{e^{-\alpha t}(e^{\alpha}-1)}{\alpha} u(t-1)$

Τελικά $y(t) = y_1(t) - y_2(t) \Leftrightarrow y(t) = ... =$

$= \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} u(t) - \frac{e^{-\alpha(t-1)}-e^{-\alpha t}}{\alpha} u(t-1)$

Τέλος, η κυματομορφή της συνέλιξης είναι αυτή που φαίνεται δίπλα.



14. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της συνέλιξης δύο συναρτήσεων, για να υπολογίσετε τις παρακάτω συνελίξεις, όταν x(t) = u(t - 3) – u(t - 5) και h(t) = e^{-3t}u(t).

(α) Υπολογίστε το y(t) = x(t)∗h(t).

(β) Υπολογίσετε την g(t) = $\frac{dx(t)}{dt}$ ∗h(t).

(γ) Να δείξετε ότι g(t) = $\frac{dy(t)}{dt}$.

Λύση

(α) Θα υπολογίσουμε τη συνέλιξη της h(t) και της x(t), μετά θα βρούμε τη y(t) μέσω των ιδιοτήτων της συνέλιξης.

$W(t) = h(t)*x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-3\tau}u(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-3\tau}d\tau$

$= -\frac{1}{3}(e^{-3t}-1)u(t) \Leftrightarrow W(t) = \frac{1}{3}(1-e^{-3t})u(t)$. (1)

$y(t) = x(t)*h(t) = [u(t - 3) – u(t - 5)]*h(t) = u(t -3)*h(t) - u(t - 5)*h(t)$. (2)

Από την (1) , (2) είναι :

$y(t) = W(t - 3) – W(t - 5) = \frac{1}{3}(1-e^{-3(t-3)})u(t - 3) - \frac{1}{3}(1-e^{-3(t-5)})u(t - 5)$

Θεωρώ ότι :

$y_1(t) = \frac{1}{3}(1-e^{-3(t-3)})u(t - 3)$ και $y_2(t) = \frac{1}{3}(1-e^{-3(t-5)})u(t - 5)$

Περιπτώσεις για τη μεταβλητή t:

(i) $-\infty < t < 3$ είναι : $y_1(t) = y_2(t) = 0$. Αφού $u(t – 3) = u(t - 5) = 0$

(ii) $3 \le t \le 5$ είναι: $u(t - 3) = 1$ και $u(t - 5) = 0$. Άρα, $y_2(t) = 0$ και $y_1(t) = \frac{1}{3}(1-e^{-3(t-3)})$.

Επομένως $y(t) = y_1(t) - y_2(t) = \frac{1}{3}(1-e^{-3(t-3)} - 0) = \frac{1}{3}(1-e^{-3(t-3)})$.

(iii) Για $5 < t$ είναι : $u(t-3) = 1$ και $u(t-5) = 1$. Άρα :

y(t) = y_1(t) - y_2(t) = $\frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-3)})$ - $\frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-5)})$ = $\frac{1}{3}[\ e^{-3(t-5)} - e^{-3(t-3)}] \Leftrightarrow$

y(t) = $\frac{1}{3}e^{-3(t-5)}\ (1 - \ e^{-6})$

Άρα

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \infty < t < 3 \\ \frac{1-e^{-3(t-3)}}{3} & 3 \le t \le 5 \\ \frac{e^{-3(t-5)}\ (1-\ e^{-6})}{3} & 5 < t < \ \infty \end{cases}$$

Ισχύει $\frac{du}{dx} = \delta(x)$

(β) $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[u(t-3) - u(t-5)] =$

$\frac{d}{dt}\Big[u(t-3)] - \frac{d}{dt}[u(t-5)\Big]$= δ(t - 3) – δ(t - 5)

g(t) = $\frac{dx(t)}{dt}$ ∗h(t) = [δ(t - 3) – δ(t - 5)]∗h(t) = δ(t - 3)∗h(t) - δ(t - 5)∗h(t) =

= h(t - 3) – h(t - 5) = $e^{-3(t-3)}u(t-3)$ - $e^{-3(t-5)}u(t-5)$.

(γ) Παραγωγίζουμε κατά μέλη την εξίσωση y(t) = y_1(t) – y_2(t) (από (α) ερώτημα) και έχουμε y΄(t) = y_1΄(t) – y_2΄(t).

Χρησιμοποιώντας την παραγοντική ολοκλήρωση θα βρούμε την παράγωγο:

y_1΄(t) =$\big[e^{-3(t-3)}u(t-3)\big]'$. Έχουμε:

y_1΄(t) = $\Big[\frac{[1-e^{-3(t-3)}}{3}u(t-3)\Big]' = \ \Big[\frac{[1-e^{-3(t-3)}}{3}\Big]'u(t-3)$ + $\Big[\frac{[1-e^{-3(t-3)}}{3}\Big]$u΄(t - 3) ⇔

y_1΄(t) = $-\frac{1}{3}(-3)e^{-3(t-3)}u(t-3)$ + $\frac{1-e^{-3(t-3)}}{3}$δ(t - 3) ⇔

y_1΄(t) = $e^{-3(t-3)}u(t-3) + f(3)\delta(t-3)$.

Τα παραπάνω ισχύουν από τις ιδιότητες Dirac, δηλαδή ισχύουν ότι: u΄(t - 3) = δ(t - 3) και f(t)δ(t - t_0) = f(t_0)δ(t - t_0), δηλ. f(t)δ(t – 3) = f(3)δ(t - 3).

Άρα y_1΄(t) = $e^{-3(t-3)}u(t-3) + f(3)\delta(t-3)$ ⇔ y_1΄(t) = $e^{-3(t-3)}u(t-3) + 0$

Όμοια έχω y_2΄(t) = $e^{-3(t-5)}$u(t – 5.)

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, λαμβάνουμε:

y΄(t) = $\frac{dy_1\ (t)}{dt} - \frac{dy_2\ (t)}{dt} = \ e^{-3(t-3)}$ u(t - 3) - $e^{-3(t-5)}$ u(t - 5) = g(t) ⇔ y΄(t) = g(t).

15. Αποδεικνύεται ότι η συνέλιξη της συνάρτησης Dirac με κάποια συνάρτηση φ παράγει την ίδια συνάρτηση φ.

Απόδειξη

Από γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης Dirac, έχουμε: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\varphi\ (t)dt = \varphi(0)$.

φ(t)∗δ(t) = $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-t)\varphi\ (t)dt$ = $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-x)\varphi\ (t)dt$ = φ(x) ⇔φ(t)∗δ(t) = φ(t).

Συμπέρασμα: Η συνάρτηση Dirac είναι η ταυτοτική συνάρτηση για τη συνέλιξη. Η συνέλιξη οποιουδήποτε σήματος με τη συνάρτηση Dirac είναι το αρχικό σήμα, δηλαδή όλα τα σήματα περνούν αναλλοίωτα από το σύστημα.

16. Να δείξετε ότι [f ∗ u]΄ = f, όπου u η συνάρτηση Heaviside

Λύση

Α τρόπος: Είναι [f∗u](t) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau$ = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)[1-u(\tau-t)]d\tau$ =

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(\tau-t)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)d\tau - \int_{t}^{+\infty} f(\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)d\tau + \int_{+\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau.$$

Άρα $[\mathrm{f} * \mathrm{u}]'(t)$ = f(t).

Β τρόπος: [f∗u](t) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau$ = $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$. Άρα $[\mathrm{f} * \mathrm{u}]'(t)$ = f(t).

Γ τρόπος: $[\mathrm{f} * \mathrm{u}]'(t)$ = $[\mathrm{f} * \mathrm{u}'](t)$ = f(t) ∗ $\delta(t)$ = f(t), αφού η συνάρτηση δέλτα είναι η ταυτοτική συνάρτηση της συνέλιξης

17. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες της συνέλιξης μιας συνάρτησης f με τη συνάρτηση Dirac

(i) δ(t - α) ∗ δ(t - β) = δ(t - (α+β))

(ii) f(t) ∗ δ(t - t_0) = δ(t) ∗ f(t - t_0) = f(t - t_0)

(iii) f(t) ∗ δ΄(t) = f ΄(t)

(iv) f(t) ∗ u(t) = $\int_{-\infty}^{t} f(\lambda)d\lambda$

(v) f(t) ∗ $\delta^{(k)}$(t) = $f^{(k)}$(t)

(vi) f(t) ∗ $\delta^{(k)}$(t - τ) = $f^{(k)}$(t - τ)

Απόδειξη

(i) Από τον ορισμό της συνέλιξης έχουμε:

δ(t - α) ∗ δ(t - b) = $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-\alpha)\cdot\delta(t-\tau-b)\,d\tau$ (1)

Από ιδιότητα της συνάρτησης Dirac που μας λέει ότι:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-\alpha)\cdot f(\tau)\,d\tau$ = f(α)

Η (1) γίνεται:

δ(t - α) ∗ δ(t - b) = $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-\alpha)\cdot\delta(t-\tau-b)\,d\tau$ = δ(t - α – b) = δ(t – (α + b)).

(ii) δ(t) ∗ f(t - t_0) = f(t - t_0), αφού η δ(x) είναι η ταυτοτική συνάρτηση της συνέλιξης.

f(t) ∗ δ(t - t_0) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\delta(\tau - t_0)d\tau$. (1)

Θέτω x = τ - t_0 με dx = dτ και η (1) γίνεται:

f(t) ∗ δ(t - t_0) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x-t_0)\delta(x)dx$ = f(t - t_0)

Επομένως ισχύει ότι: δ(t) ∗ f(t - t_0) = f(t - t_0) = f(t) ∗ δ(t - t_0).

(iii) f(t)∗δ ΄(t) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\delta'(\tau)d\tau$ = - f ΄(t – 0)(-1) = f ΄(t).

Η ιδιότητα αυτή μπορεί να αποδειχθεί όπως παρακάτω:

f(t)∗δ ΄(t) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta'(t-\tau)d\tau = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta'(\tau-t)d\tau$ = - [-f ΄(t – 0)] = f ΄(t).

Οι υπόλοιπες συνελίξεις αποδεικνύονται με επαγωγή εις άτοπο των (i) και (iii).

Ε. Θεώρημα Συνέλιξης

Θεώρημα (Συνέλιξης) 4: Έστω f, g κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις, οι οποίες είναι απολύτως ολοκληρώσιμες και φραγμένες. Έστω *F* και *G* οι μετασχηματισμένες Fourier της f και g αντίστοιχα. Τότε η συνέλιξη $f * g$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη με:

$$H(f * g)(s) = F(s)G(s)$$

όπου *H* ο μετασχηματισμός Fourier της συνέλιξης f ∗ g.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι και η συνάρτηση $f * g$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Πράγματι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) * g(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)g(t-x)|dx\right)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\cdot|g(t-x)|dx\right)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t-x)|dt\right)dx \quad (1)$$

Ονομάζω $I_1 = \int_{\infty}^{+\infty} |g(t-x)|dt$ και θέτω u = t – x και du = dt. Άρα $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|du$

Από (1) έχουμε: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) * g(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|du\right)dx < \infty$

Αφού f∗g απολύτως ολοκληρώσιμη, υπάρχει ο μ.κ.F. Έτσι είναι :

H(f ∗ g)(s) = $\int_{-\infty}^{+\infty}(f * g)(t)e^{-ist}dt$

H (f ∗ g)(s) =$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)e^{-ist}dx\right)dt$

H(f ∗ g)(s) =$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}g(t-x)e^{-is(t-x)}dt\right)dx$

Αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και

$\boldsymbol{H}(f * g)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-x)e^{-is(t-x)}dt\right)dx$

Θέτουμε t – x = u τότε du = dt

$\boldsymbol{H}\,(f * g)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-is(u)}du\right)dx$

$\boldsymbol{H}(f * g)(s) = \boldsymbol{G}(s)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ist}dx = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{F}(s).$

Παρατήρηση: Έστω ότι ισχύει h = f ∗ g και θέλουμε να βρούμε τη συνάρτηση f. τότε από το Θεώρημα Συνέλιξης, έχουμε Τότε, εάν οι συναρτήσεις ***H(s), G(s) και F***(s) οι μετασχηματισμοί των συναρτήσεων h, g και f αντίστοιχα έχουμε **H(s) = F(s)·G(s)**. Υποθέτουμε ότι G(s)≠0, άρα είναι F(s) $=\frac{H(s)}{G(s)}$. Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier βρίσκουμε τη συνάρτηση

Θεώρημα 5: Έστω *F* και *G* οι μετασχηματισμένες Fourier της f και g αντίστοιχα. Τότε ισχύουν ότι:

(i) (f ∗ g)(s) = $\boldsymbol{H}^{-1}[\boldsymbol{F}(s)\boldsymbol{G}(s)]$.

όπου $\boldsymbol{H}^{-1}$ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του γινομένου *F*(s)*G*(s).

(ii) $\boldsymbol{H}(f\cdot g)(s) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{F}(s) * \boldsymbol{G}(s)$.

όπου *H* ο μετασχηματισμός Fourier του γινομένου f · g.

Απόδειξη

(i) Η απόδειξη στηρίζεται στον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier και του Θεωρήματος Συνέλιξης. Πράγματι:

$$\boldsymbol{H}^{-1}[\boldsymbol{FG}](s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(\omega)\boldsymbol{G}(\omega)e^{i\omega s}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(\omega)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, e^{-iy\omega}dy\right)e^{i\omega s}d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(\omega)\, e^{i\omega(s-y)}d\omega\right)dy.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier για την f έχουμε: $\boldsymbol{H}^{-1}[\boldsymbol{F}(s)\boldsymbol{G}(s)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, f(s-y)dy$

Από τον ορισμό της συνέλιξης έχουμε: $\boldsymbol{H}^{--1}[\boldsymbol{F}(s)\boldsymbol{G}(s)]$ = (f∗g)(s).

(ii) Η απόδειξη στηρίζεται στο Θεώρημα Συνέλιξης και στον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier. Πράγματι:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}) * \boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(\tau)\boldsymbol{G}(s-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(\tau)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\, e^{-i(s-\tau)\omega}d\omega\right)d\tau =$$

$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-is\omega} (\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{F}(\tau)\, e^{i\omega\tau} d\tau) d\omega$

$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-is\omega} f(\omega)\, d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) f(\omega) e^{-is\omega}\, d\omega = 2\pi\boldsymbol{H}[f\cdot g](s)$.

Παραδείγματα

18. Να βρείτε τη συνάρτηση που έχει μ.κ.F. τη συνάρτηση $\boldsymbol{F}$(s) = $\frac{1}{(1+s^2)^2}$.

Λύση

Από το παράδειγμα 5 του προηγούμενου Κεφαλαίου, ο μ.κ.F. της g(x) = $e^{-|x|}$ είναι η συνάρτηση $\boldsymbol{G}$(s) = $\frac{2}{1+s^2}$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα συνέλιξης και έχουμε:

$\boldsymbol{F}[g * g] = \boldsymbol{G}(s) \cdot \boldsymbol{G}(s) = |\boldsymbol{G}(s)|^2 = \frac{4}{(1+s^2)^2} = 4\boldsymbol{F}(s) \Leftrightarrow \boldsymbol{F}[g * g] = 4\boldsymbol{F}[f](s)$

Άρα, $f = \frac{1}{4}(g * g)$.

Για 0 < x < s είναι |s - x| = s - x και για s – x < 0 ή x > s τότε |s – x |= -(s - x)

$4f(s) = (g * g)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s-x|} e^{x} dx$

$= \int_{-\infty}^{0} e^{-(s-x)} e^{x} dx + \int_{0}^{s} e^{-(s-x)} e^{-x} dx + \int_{s}^{+\infty} e^{s-x} e^{-x} dx = (1+ s)e^{-s} \Leftrightarrow$

$f(s) = \frac{1}{4}(1+s)e^{-s}$.

19. Αν $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ τότε να βρείτε τη $f * f$.

Λύση

Από το παράδειγμα 7 του Κεφαλαίου 2ου (σελ.44), έχουμε $\boldsymbol{F}[e^{-|t|}](s) = \frac{2}{1+s^2}$.

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, έχουμε:

$e^{-|s|} = \boldsymbol{F}^{-1}[\frac{2}{1+t^2}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+t^2} e^{ist} dt \Leftrightarrow e^{-|s|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{ist} dt.$

Θέτω όπου s το -s στην τελευταία εξίσωση. Οπότε

$e^{-|s|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{-ist} dt \Leftrightarrow \pi e^{-|s|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{-ist} dt.$ (1)

δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier της $\frac{1}{1+s^2}$ είναι ο $\pi e^{|s|} \Leftrightarrow \boldsymbol{F}[\frac{1}{1+t^2}] = \pi e^{|s|}$. (2)

Η (1) για 2t = y και dt = $\frac{dy}{2}$, γίνεται:

$\pi e^{-|s|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(\frac{y}{2})^2} e^{-is\frac{y}{2}} \frac{dy}{2} \Leftrightarrow \pi e^{-|s|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{4+y^2} e^{-\frac{isy}{2}} dy.$ (3)

Θέτω s το 2s και έχουμε: $\pi e^{-2|s|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{4+y^2} e^{-isy} dy.$ (4)

Από το θεώρημα συνέλιξης και τις σχέσεις (2), (4) έχουμε:

$\boldsymbol{F}[\,f * f\,](\mathrm{s}) = (\boldsymbol{F}(s))^2 = \pi^2\ e^{-2|s|} = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{-ist}}{4+t^2}dt \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{F}[\,f * f\,](\mathrm{s}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi e^{-ist}}{4+t^2}dt \Leftrightarrow f * f = \frac{2\pi}{4+y^2}.$

20. Η συνάρτηση f έχει μετασχηματισμό Fourier την $\boldsymbol{F[f}$(x)](s) = $\boldsymbol{F}$(s) = $\boldsymbol{\frac{1}{1+|s|^3}}$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} |f * f\,'|^2 dt}$.

Λύση

Έχουμε ότι $\boldsymbol{F}\ [f\,(\mathrm{x})](\mathrm{s}) = \boldsymbol{F}(\mathrm{s}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}dx.$

Από την ιδιότητα δ_1 του μ.κ.F του 2[ου] Κεφαλαίου λαμβάνουμε ότι:

$\boldsymbol{G}[f\,'(\mathrm{t})](\mathrm{s}) = (\mathrm{is})\boldsymbol{G}(\mathrm{s}) = \mathrm{is}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-isx}dt$, όπου $\boldsymbol{G}$(s) ο μ.κ.F. της f ΄. (1)

Από την ταυτότητα του Parseval, που στην περίπτωσή μας (σελίδα 50) μας λέει ότι:

Αν h = f ∗ f ΄ τότε $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{H}[h]|^2\,dt$, όπου $\boldsymbol{H}$ ο μ.κ.F. της h.

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f * f'|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{F}[f * f']|^2\,dt.$ (2)

Από το θεώρημα συνέλιξης έχουμε ότι:

$\boldsymbol{F}$(f∗f΄)(s) = $\boldsymbol{F}$[f](s)·$\boldsymbol{G}$(f ΄)(s), όπου $\boldsymbol{G}$(s) ο μ.κ.F. της f΄(s). (3)

Η (2) λόγω της (3) γίνεται:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f * f'|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{F}[f]\cdot\boldsymbol{G}[f']|^2\,dt$ (4)

Από την (1) η (4) γίνεται:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f * f'|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{F}[f]\cdot it\boldsymbol{G}[f]|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|it\frac{1}{1+|t|^3}\cdot\frac{1}{1+|t|^3}\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+|t|^3)^4}\quad dt$$

Όμως η ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι άρτια, άρα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f * f\,'|^2 dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+|t|^3)^4}\quad dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+|t|^3)^4}\quad dt$$

Θέτω στο τελευταίο ολοκλήρωμα: t^3 = z και dz = 3t²dt, οπότε :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f * f\,'|^2 dt = \frac{1}{3\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+z)^4}ds = \left[-\frac{1}{9\pi}(z+1)^{-3}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{9\pi}.$$

21. Να αποδείξετε ότι : $\boldsymbol{\int_{-1}^{1} \frac{sin(t-y)}{t-y}dy = \int_{-1}^{1} \frac{sin(y)}{y}e^{iyt}dy}$.

Απόδειξη

Έστω ότι: f(t) = H(t + 1) - H(t - 1) και g(t) = $\frac{sint}{t}$. Από το παράδειγμα 3 του 2ου Κεφαλαίου έχουμε: $\boldsymbol{F}$[f](s) = $\boldsymbol{F}$(s) = 2g(s) και $\boldsymbol{G}$ [g](s) = $\boldsymbol{G}$(s) = $\frac{1}{2}f(s)$.

Προφανώς $\boldsymbol{F}$[f](s) · $\boldsymbol{G}$ [g](s) = $\frac{1}{2}f(s)$ · 2g(s) = f(s)·g(s) (1)

Από τον ορισμό της συνέλιξης έχουμε:

(f∗g)(s) = $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(s-t)dt$ = $\int_{-1}^{1}\frac{\sin(s-t)}{s-t}dt$ (2)

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα συνέλιξης στην (1) και έχουμε:

$[\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{F}(t)](s)$ = $\boldsymbol{H}$(f∗g)(s) (3)

Σύμφωνα με το Θεώρημα (5) έχουμε:

f(s)∗g(s) = $\boldsymbol{H}^{-1}[\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{F}(t)](s) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ f(s)∗g(s) = $\boldsymbol{H}^{-1}[f\cdot g](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)e^{ist}dt \Leftrightarrow$

f(s)∗g(s) = $\int_{-1}^{1}\frac{\sin(t)}{t}e^{ist}dt$ (4)

Επειδή (2) = (4) παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση.

22. Να βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης h(s) = $\frac{1}{6+5is-s^2}$.

Απόδειξη

Η h(s) μπορεί να γραφεί με τη μορφή h(s) = $\frac{1}{(is+3)(is+2)}$. = $\frac{1}{(is+2)} - \frac{1}{(is+3)}$

Είναι γνωστό ότι για τις συναρτήσεις $f(s) = e^{-3s}u(s)$ και g(s) = $e^{-2s}u(s)$ οι μετασχηματισμοί Fourier αυτών είναι: $\boldsymbol{F}$(s) = $\frac{1}{is+3}$ και $\boldsymbol{G}$(s) = $\frac{1}{is+2}$ αντίστοιχα, όπου u(s) η συνάρτηση Heaviside. (κοίτα παράδειγμα 1 του 2ου Κεφαλαίου)

Από το Θεώρημα (5) έχουμε: g(s)∗f(s) = $\boldsymbol{H}^{-1}[\boldsymbol{F}(s)\boldsymbol{G}(s)]$ (1)

όπου $\boldsymbol{H}^{-1}$ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της h(s).

Από τον ορισμό της συνέλιξης έχουμε:

g(s)∗f(s) = $e^{-2s}u(s) * e^{-3s}u(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau}u(\tau)e^{-3(s-\tau)}u(s-\tau)d\tau$

= $\int_0^s e^{-2\tau}e^{-3(s-\tau)}d\tau$ = … = $e^{-2s} - e^{-3s}$. (2)

Άρα από (1) και (2) προκύπτει ότι:

h(s) = g(s)∗f(s) = $\boldsymbol{H}^{-1}[\boldsymbol{F}(s)\boldsymbol{G}(s)]$ = $\boldsymbol{H}^{-1}[\frac{1}{(is+2)} - \frac{1}{(is+3)}]$ = $e^{-2s}u(s) - e^{-3s}u(s)$.

23. Έστω ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας G(s) = $\frac{1}{3+is}$. Στην είσοδό του βρίσκεται ένα σήμα x(s), το οποίο έχει έξοδο y(s) = $e^{-s}u(s) - e^{-2s}u(s)$. Να βρείτε τη είσοδο x(s).

Λύση

Από το παράδειγμα (1) του $2^{ου}$ Κεφαλαίου έχουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $e^{-\alpha s}u(s)$ είναι η $\frac{1}{\alpha+is}$.

Επομένως ο μ.κ.F. $\boldsymbol{F}$(s) της y(s) είναι: $\boldsymbol{F}(s) = \frac{1}{1+is} - \frac{1}{2+is}$. (1)

Είναι y(s) = x(s)∗g(s), όπου g(s) η συνάρτηση που έχει μετασχηματισμό Fourier (M.F.) την $\boldsymbol{G}$(s).

Από το θεώρημα Συνέλιξης έχουμε: $\boldsymbol{F}[x*g](s) = \boldsymbol{X}(s)\boldsymbol{G}(s)$ ή $\boldsymbol{F}(s) = \boldsymbol{X}(s)\boldsymbol{G}(s)$ (2)
όπου X(s) ο μ.κ.F. της x(s).

Είσοδος x(s) ➡ **Σύστημα S=*X*[s]** ➡ **Έξοδος y(s)**

Ισχύει $\boldsymbol{F}(s) = \boldsymbol{X}(s)\boldsymbol{G}(s) \Leftrightarrow \boldsymbol{X}(s) = \frac{\boldsymbol{F}(s)}{\boldsymbol{G}(s)} = \frac{\frac{1}{1+is}-\frac{1}{2+is}}{\frac{1}{3+is}} = \frac{2}{1+is} - \frac{1}{2+is} \Leftrightarrow \boldsymbol{X}(s) = \frac{2}{1+is} - \frac{1}{2+is}$

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier λαμβάνουμε ότι:

$\boldsymbol{X}^{-1}[\boldsymbol{X}(s)] = \boldsymbol{X}^{-1}\left[\frac{2}{1+is} - \frac{1}{2+is}\right] \Leftrightarrow x(s) = 2e^{-s}u(s) - e^{-2s}u(s).$

Στ. Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων.

Για να λύσουμε διαφορικές εξισώσεις με τη χρήση του Θεωρήματος Συνέλιξης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

Βήμα $1^{ο}$: Μετασχηματίζουμε κατά Fourier τη διαφορική εξίσωση που μας δίνεται και με τη βοήθεια της ιδιότητας δ1 του $2^{ου}$ Κεφαλαίου (σελίδα 46), προκύπτει μια Σ.Δ.Ε. Στη συνέχεια, έαν μας δίνεται ΠΑΤ / ΠΣΤ, εφαρμόζουμε τον μ.κ.F. στη δοσμένες συνθήκες.

Βήμα $2^{ο}$: Λύνουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση του παραπάνω βήματος και με τη βοήθεια του θεωρήματος συνέλιξης φέρνουμε την $\boldsymbol{H}$[u](s) στη μορφή $\boldsymbol{H}$[u](s) = $\boldsymbol{H}$[f∗g] = $\boldsymbol{G}$[g](s)·$\boldsymbol{F}$[f](s), όπου ***H, F, G*** οι μ.κ.F. των συναρτήσεων u, f, g αντίστοιχα τέτοιες ώστε να ισχύει u = f ∗ g οι f, g γνωστές συναρτήσεις.

Βήμα $3^{ο}$: Χρησιμοποιούμε κατά σειρά: τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier στη σχέση που προέκυψε και στη συνέχεια τον ορισμό της συνέλιξης.

Παραδείγματα

24. Να λύσετε τη Συνήθη Διαφορική Εξίσωση $u'' - u = -f$, όπου f μια γνωστή συνάρτηση.

Λύση

Βήμα 1ο: Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της δοσμένης εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψιν την ιδιότητα (δ_1) του μ.κ.F. (του Κεφαλαίου 2ο) έχουμε:

$(is)^2$ $\boldsymbol{F}$[u](s) - $\boldsymbol{F}$[u](s) = - $\boldsymbol{F}$[f](s) ⇔ (- $s^2 - 1)\boldsymbol{F}$[u](s) = - $\boldsymbol{F}$[f](s) ⇔

$\boldsymbol{F}$[u](s) = $\frac{1}{s^2+1}$ $\boldsymbol{F}$[f](s). (1)

Βήμα 2ο: Όμως από το παράδειγμα (5) του προηγούμενου κεφαλαίου έχουμε:

$\boldsymbol{F}[\frac{1}{2}e^{-|t|}]$(s) = $\frac{1}{s^2+1}$. (2)

Άρα, από (1) και (2) λαμβάνουμε ότι: $\boldsymbol{F}$[u](s) = $\boldsymbol{F}[\frac{1}{2}e^{-|t|}]$(s)·$\boldsymbol{F}$[f](s). (3)

Σύμφωνα με το Θεώρημα Συνέλιξης η (3) γίνεται:

$\boldsymbol{F}$[u](s) = $\boldsymbol{F}[\frac{1}{2}e^{-|t|} *$ f(t)](s). (4)

Βήμα 3ο: Χρησιμοποιούμε τον α.μ.κ.F. στην (4) και στη συνέχεια τον ορισμό της συνέλιξης βρίσκουμε ότι:

u(t) = $\frac{1}{2}e^{|t|}*$f(t) ⇔ u(t) = $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|}f(\tau)d\tau$.

25. Η μεταβολή της θερμοκρασίας μιας ράβδου, ομοιόμορφης διατομής και ομογενούς υλικού, δίνεται από την εξίσωση μεταβολής της θερμότητας, η οποία είναι η k·u_{xx} = u_t όπου k μία σταθερά. Οι αρχικές συνθήκες της μ.δ.ε. είναι u(x,0) = f(x), - ∞ < x < +∞ και t > 0 (δηλαδή η θερμοκρασία στα άκρα της ράβδου). Να βρείτε τη συνάρτηση της θερμοκρασίας u(x,t).

Λύση

Από υπόθεση έχουμε: k·u_{xx} = u_t (1)

u(x,0) = f(x) (2)

Βήμα 1ο : Μετασχηματίζουμε τη διαφορική εξίσωση (1) που μας δίνεται, οπότε:

ku_{xx} = u_t ⇔ k·$\boldsymbol{F}[u_{xx}]$(s) = $\boldsymbol{F}[u_t]$(s). (3)

Έχουμε: $\boldsymbol{F}[u_t]$(s) = $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-ixs}dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-its}dx$ ⇔

$\boldsymbol{F}[u_t] = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F}[u(s,t)]$. (4)

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα δ_1 του Κεφαλαίου 2 (σελίδα 46), έχουμε:

$\boldsymbol{F}[u_{xx}](x=s) = (is)^2\boldsymbol{F}(s,t) = - s^2\boldsymbol{F}(s,t)$. (5)

Άρα από (4) και (5), η (3) γίνεται: $\frac{\partial \boldsymbol{F}(s,t)}{\partial t} = - ks^2\boldsymbol{F}(s,t)$. (6)

Επομένως, καταλήξαμε σε μια ΣΔΕ.

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier στη δοσμένη αρχική συνθήκη (2) και βρίσκουμε ότι για u(x,0) = f(x) είναι $\boldsymbol{F}[(f(x)](s) = \boldsymbol{F}[u(x,0)](s)$ (7)

Βήμα 2ο : Η γενική λύση της ΣΔΕ, που βρήκαμε, είναι: $\boldsymbol{F}[u(x,t)](x=s) = Ce^{-ks^2t}$. (8)

Για t = 0 στην (8) έχουμε $\boldsymbol{F}[u(x,0)](s) = C$.

Επομένως $\boldsymbol{F}[u(x,t)](s) = \boldsymbol{F}[u(x,0)](s)e^{-ks^2t} \overset{(7)}{\Leftrightarrow}$

$\boldsymbol{F}[u(x,t)](s) = \boldsymbol{F}[f(x)](s)e^{-ks^2t}$ (9)

Θα φέρουμε την $\boldsymbol{F}[u](s)$ στη μορφή $\boldsymbol{F}[u](s) = \boldsymbol{G}[g](s)\cdot\boldsymbol{F}[f](s)$, όπου g και f γνωστές συναρτήσεις και $\boldsymbol{G}$ ο μ.κ.F. της g(x).

Γνωρίζουμε ότι: $\boldsymbol{G}[e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}](s) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\frac{s^2}{2a}}$.

Θέτουμε: $\frac{1}{2\alpha} = kt \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2kt}$ και λαμβάνουμε ότι:

$\boldsymbol{G}[e^{-\frac{x^2}{4kt}}](s) = \sqrt{4\pi kt}\cdot e^{-ks^2t} \Leftrightarrow e^{-ks^2t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\cdot \boldsymbol{G}[e^{-\frac{x^2}{4kt}}](s)$.

Η (9) γίνεται της μορφής $\boldsymbol{F}[u](s) = \boldsymbol{G}[g](s)\cdot\boldsymbol{F}[f](s)$, όπου $g = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$ και f γνωστή συνάρτηση. Άρα:

$\boldsymbol{F}[u(x,t)](s) = \boldsymbol{F}[f(x)(s)\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\cdot \boldsymbol{G}[e^{-\frac{x^2}{4kt}}](s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\cdot\boldsymbol{G}(s)\cdot\boldsymbol{F}(s)$ (10)

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Συνέλιξης (δηλαδή $\boldsymbol{H}[f * g] = \boldsymbol{F}[f]\cdot\boldsymbol{G}[g]$, όπου $\boldsymbol{H}$ ο μ.κ.F. της συνέλιξης) η (10) γίνεται: $\boldsymbol{F}[u(x,t)](s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\cdot \boldsymbol{H}[f * g](s)$.

Βήμα 3ο : Χρησιμοποιώντας τον α.μ.κ.F. και στη συνέχεια τον ορισμό της συνέλιξης δύο συναρτήσεων λαμβάνουμε ότι:

$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}f(y)dy$.

26. Λύστε την εξίσωση Poisson: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $-\infty < x < +\infty$ και $t > 0$, με αρχική συνθήκη $u(x,0) = f(x)$, φραγμένη.

Λύση

Έχουμε: $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (1)
και $u(x,0) = f(x)$ (2)

Βήμα 1ο: Μετασχηματίζουμε κατά Fourier τις (1) και (2).

- Μετασχηματίζουμε την (1).

$\boldsymbol{F}[u_{xx}(x,y)](s) + \boldsymbol{F}[u_{yy}(x,y)](s) = 0$ (3)

Από την ιδιότητα ($δ_1$) του 2ου Κεφαλαίου (σελίδα (46) ισχύει:

$\boldsymbol{F}[u_{xx}(x,y)](s) = (is)^2\boldsymbol{F}[u(x,y)](s) = -s^2\boldsymbol{F}[u(x,y)](s)$ (4)

Ισχύει: $\boldsymbol{F}[u_{yy}(x,y)](s) = \frac{\partial^2 u[(x,y)](s)}{\partial y^2}$. (5)

Άρα η (3) λόγω της (4) και (5) γίνεται:

$- s^2\boldsymbol{F}[u(x,y)](s) + \frac{\partial^2 \boldsymbol{F}[\boldsymbol{u}(x,y)](s)}{(\partial y)^2} = 0$ (6)

Δηλαδή καταλήξαμε σε μια ΣΔΕ.

- Μετασχηματίζουμε κατά Fourier την αρχική συνθήκη (2):

$\boldsymbol{F}[u(x,0)](s) = \boldsymbol{F}[f(x)](s)$. (7)

Βήμα 2ο : Η γενική λύση της (6) είναι: $\boldsymbol{F}[u(x,y)](s) = C_1(s)e^{|s|y} + C_2(s)e^{-|s|y}$. (8)

Για να είναι φραγμένη η $\boldsymbol{F}[u(x,y)](s)$ θα πρέπει να ισχύει: $C_1(s) = 0$.

Θέτουμε $y = 0$ και χρησιμοποιώντας την (7), η (8) γίνεται:

$C_2(s) = \boldsymbol{F}[u(x,0)](s) \Leftrightarrow C_2(s) = \boldsymbol{F}[f(x)](s) = \mathbf{F}(s)$.

Άρα η (8) γίνεται: $\boldsymbol{F}[u(x,y)](s) = \boldsymbol{F}[u(x,0)](s)e^{-|s|y} = \boldsymbol{F}(s)e^{-|s|y}$ (9)

Είναι γνωστό ότι (παράδειγμα 5 του 2ου Κεφαλαίου):

$\boldsymbol{F}\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right](s) = \frac{1}{2y}e^{-y|s|} \Leftrightarrow \boldsymbol{F}\left[2y\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\right](s) = e^{-y|s|}$ (10)

Έτσι η (9) λόγο της (10) γίνεται: $\boldsymbol{F}[u(x,y)](s) = \boldsymbol{F}(s)\cdot\boldsymbol{F}\left[2y\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\right](s)$ (11)

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Συνέλιξης στην (11).

$\boldsymbol{F}[u(x,y)](s) = \boldsymbol{F}[f(s) * 2y\cdot\frac{1}{s^2+y^2}] = 2y\boldsymbol{F}[f(s) * \frac{1}{s^2+y^2}]$. (12)

Βήμα 3ο : Με τη χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier στην (12), έχουμε:

$u[(x,y)](s) = 2y[f(s) * \frac{1}{s^2+y^2}]$. (13)

Εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέλιξης και βρίσκουμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης Poisson:

$u(s,y) = 2y[f(s) * \left(\frac{1}{s^2+y^2}\right)] = 2y\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s-\tau)}{\tau^2+y^2}d\tau$.

27. Να βρεθεί μία λύση της διαφορικής εξίσωσης: $y'' - 2y' - 3y = 15e^{2t}$.

Λύση

Βήμα 1ο : Μετασχηματίζουμε κατά Fourier τη διαφορική εξίσωση. Έχουμε:

$\boldsymbol{F}[y''] - 2\boldsymbol{F}[y'] - 3\,\boldsymbol{F}[y] = 15\,\boldsymbol{F}[e^{2t}] \Leftrightarrow [(is)^2 - 2(is) - 3]\boldsymbol{F}(s) = 15\,\boldsymbol{F}[e^{2t}]$ (1)

Θα λύσουμε την εξίσωση $(is)^2 - 2is - 3 = 0 \Leftrightarrow (is - 3)(is + 1) = 0 \Leftrightarrow is = 3$ ή $is = -1$.

Στη συνέχεια θα «σπάσουμε» το κλάσμα: $\frac{1}{(is-3)(is+1)}$ σε απλούστερα. Υπάρχουν αριθμοί Α και Β τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$\frac{1}{(is-3)(is+1)} = \frac{A}{(is-3)} + \frac{B}{(is+1)} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow B = -\frac{1}{4}$ και $A = +\frac{1}{4}$

Η (1) γίνεται:

$[(is) - 3]\,[(is) + 1]\boldsymbol{F}(s) = 15\,\boldsymbol{F}[e^{2t}] \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(s) = \frac{15}{4(is-3)}\boldsymbol{F}[e^{2t}] - \frac{15}{4(is+1)}\boldsymbol{F}[e^{2t}] \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{F}(s) = -\frac{15}{4}\,[\frac{-1}{-3+is}\boldsymbol{F}[e^{2t}] + \frac{1}{1+is}\boldsymbol{F}[e^{2t}]$ (2)

Βήμα 2ο : Από το παράδειγμα 1 (Κεφάλαιο 2ο, σελίδα 39) έχουμε:

$\boldsymbol{F}[e^{-x}](s) = \frac{1}{1+is}$ και $\boldsymbol{F}[e^{3x}](s) = \frac{-1}{-3+is}$. (3)

Η (2) λόγο της (3) γίνεται: $\boldsymbol{F}(s) = -\frac{15}{4}\boldsymbol{F}[e^{3t}]\,\boldsymbol{F}[e^{2t}] + \frac{15}{4}\boldsymbol{F}[e^{-t}]\,\boldsymbol{F}[e^{2t}]$.

Άρα ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης: $[\frac{-1}{(-3+is)} + \frac{1}{(is+1)}]$ είναι:

$W(t) = \boldsymbol{F}^{-1}([\frac{-1}{(-3+is)} + \frac{1}{(is+1)}] = \begin{cases} e^{3t}, \text{όταν } t < 0 \\ e^{-t}, \text{όταν } t > 0 \end{cases}$

Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε την μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης από τη συνέλιξη,

$y(t) = W(t) * f(t) = W(t) * 15e^{2t} = -\frac{15}{4}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{3x}e^{2(t-x)}\,dx\right] - \frac{15}{4}\left[\int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{2(t-x)}\,dx\right] \Leftrightarrow$

$y(t) = -\frac{15}{2}e^{2t}$.

Από το Θεώρημα Συνέλιξης, έχουμε:

$\boldsymbol{F}(s) = -\frac{15}{4}\boldsymbol{F}[e^{3t} * e^{2t}] + \frac{15}{4}\boldsymbol{F}[e^{-t} * e^{2t}]$. (4)

Βήμα 3ο : Εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μ.κ.F. στην (4) και έχουμε:

$y(t) = -\frac{15}{4}[e^{3t} * e^{2t}] + \frac{15}{4}[e^{-t} * e^{2t}]$. (5)

Από τον ορισμό της συνέλιξης, ισχύει ότι:

$e^{-t} * e^{2t} = \int_{0}^{+\infty} e^{2(t-\tau)}e^{-\tau}\,d\tau = e^{2t}\int_{0}^{+\infty} e^{-2\tau}e^{-\tau}\,d\tau = \ldots = \frac{e^{2t}}{3}$ και

$e^{3t} * e^{2t} = \int_{-\infty}^{0} e^{2(t-\tau)}e^{3\tau}\,d\tau = e^{2t}\int_{-\infty}^{0} e^{-2\tau}e^{3\tau}\,d\tau = \ldots = e^{2t}$.

Επομένως η (5) γίνεται: y(t) = $-\frac{15}{4}[e^{2t}] + \frac{15}{4}[\frac{e^{2t}}{3}] = \ldots = -\frac{5}{2}e^{2t}$, που είναι και η μερική λύση της ΣΔΕ που μας δίνεται.

Η λύση της ομογενής εξίσωσης y´´ - 2y´- 3y = 0 είναι y = $c_1e^{-t} + c_2e^{3t}$, όπου $c_{1,2}$ σταθεροί αριθμοί.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

y = $c_1e^{-t}+c_2e^{3t} - \frac{15}{2}e^{2t}$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α
Τριγωνομετρικές Ταυτότητες
$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$
$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b – \cos a \cdot \sin b$
$2\sin a \cdot \sin b = \cos(a - b) – \cos(a + b)$
$2\cos a \cdot \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$
$2\sin a \cdot \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$
$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$
$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$
$\tan^2 a = \frac{1-cos2a}{1+cosa}$
$\cosh x = \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}, \; -\pi \leq x \leq \pi$
$\sinh x = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}, \; -\pi \leq x \leq \pi$
$\cos^2 ha - \cos^2 ha = 1$
$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+ e^{-i\theta}}{2}$
$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}- e^{-i\theta}}{2i}$
$e^{i\theta} = cos\theta + i \cdot sin\theta$
$e^{-i\theta} = cos\theta - i \cdot sin\theta$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Παραδείγματα Σειρών Fourier

1	f(x) = $\begin{cases} 1, όταν\ 0 < \chi < \pi \\ -1, όταν -\pi < \chi < 0 \end{cases}$	$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right)$
2	f(x) = |x|= $\begin{cases} x, όταν\ 0 < \chi < \pi \\ -x, όταν -\pi < \chi < 0 \end{cases}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{cos(x)}{1^2} + \frac{cos(3x)}{3^2} + \frac{cos(5x)}{5^2} + \cdots\right)$
3	f(x) = |sinx|, -π < x < π	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}(\frac{cos2x}{1 \cdot 3} + \frac{cos4x}{3 \cdot 5} + \frac{cos6x}{5 \cdot 7} + \ldots)$
4	f(x) = |cosx|, -π < x < π	$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}(-\frac{cos2x}{1-4 \cdot 1^2} + \frac{cos4x}{1-4 \cdot 2^2} - \frac{cos6x}{1-4 \cdot 3^2} + \ldots)$
5	f(x) = x^2, -π < x < π	$\frac{\pi^2}{3} - 4(\frac{cosx}{1^2} + \frac{cos2x}{2^2} + \frac{cos3x}{3^2} - \ldots)$
6	f(x) = x(π – x), 0 < x < π	$\frac{\pi^2}{6} - (\frac{cos2x}{1^2} + \frac{cos4x}{2^2} + \frac{cos6x}{3^2} - \ldots)$
7	f(x) = x(π – x)(π + x), -π < x < π	$12(\frac{sinx}{1^3} - \frac{sin2x}{2^3} + \frac{sin3x}{3^3} - \ldots)$
8	f(x) = $\begin{cases} sinx, όταν\ 0 < \chi < \pi \\ 0, όταν\ \pi < \chi < 2\pi \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} + \frac{sinx}{2} - \frac{2}{\pi}(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{cos6x}{5 \cdot 7} + \ldots)$
9	f(x) = $\begin{cases} cosx, όταν\ 0 < \chi < \pi \\ -cosx, όταν -\pi < \chi < 0 \end{cases}$	$\frac{8}{\pi}(\frac{sin2x}{1 \cdot 3} + \frac{2\sin 4x}{3 \cdot 5} + \frac{3sin6x}{5 \cdot 7} + \ldots)$
10	f(x) = c	c
11	f(x) = $\sin^2 x$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2x$
12	f(x) = $\cos^2 x$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ.

Εύρεση του Γκαουσιανού ολοκληρώματος

Θα αποδείξουμε ότι: I = $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Έχουμε:

I = $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \Leftrightarrow$ I^2 = I·I = $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy\right) \Leftrightarrow$

I^2 = $\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx\right) \cdot e^{-\alpha y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dxdy \overset{*}{\Leftrightarrow}$

I^2 = $\int_{0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\alpha\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\rho^2} \rho d\rho \Leftrightarrow$

I^2 = $2\pi \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\rho^2} \rho d\rho \overset{**}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{\alpha}\int_{0}^{\infty} e^{-u} du = \frac{\pi}{\alpha}\left[-e^{-u}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{\alpha} \Leftrightarrow$ I^2 = $\frac{\pi}{\alpha} \Leftrightarrow$ I = $\pm\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$,

όμως η f(x) = $e^{-\alpha x^2} > 0$, άρα και I > 0 επομένως I = $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

* Θέσαμε όπου x = ρcosθ και y = ρsinθ, οπότε $x^2 + y^2 = \rho^2$ και dxdy = ρdρdθ

Επειδή {(x,y) : - ∞ < x, y < ∞} τότε {(ρ,θ) : -π ≤ θ ≤ π, 0 ≤ ρ < ∞}.

** Θέσαμε όπου u = $\alpha\rho^2$ και du = 2αρdρ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Επίλυση της Δ.Ε. y'' + ky = 0.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε. είναι $\lambda^2 + k = 0$, που έχει ρίζες τις $\lambda_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{-4k}}{2} = \pm\sqrt{-k}$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) k > 0, τότε έχουμε τις μιγαδικές ρίζες $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k}$ και η γενική λύση της Δ.Ε δίνεται από τη σχέση:

$y = \alpha\cos(\sqrt{k}x) + b\sin(\sqrt{k}x)$

(ii) k < 0,τότε έχουμε δυο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες τις $\lambda_{1,2} = \sqrt{|k|}$και η γενική λύση είναι:

$y = \alpha e^{\sqrt{|k|}x} + be^{-\sqrt{|k|}x}$

(iii) k = 0 τότε προκύπτει η διπλή ρίζα λ = 0. Επομένως y = αx + β.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

Χρήσιμα Ζεύγη Συνέλιξης

x(t)	**y(t)**	**x(t)*y(t)**
x(t)	δ(t – T)	x(t - T)
x(t)	x(t)	t·x(t)
$\left(e^{at}x(t)\right)$	x(t)	$\frac{1-e^{at}}{-a}$x(t)
$e^{at}x(t)$	$e^{bt}x(t)$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$ ·x(t), a ≠ b
$te^{at}x(t)$	$e^{at}x(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{at}x(t)$
$te^{at}x(t)$	$e^{bt}x(t)$	$\frac{e^{bt}-e^{at}+(a-b)te^{at}}{(a-b)^2}$ ·x(t)
$e^{at}x(-t)$	$e^{bt}x(-t)$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{b-a}$ ·x(-t), a ≠ b
$e^{at}x(t)$	$e^{bt}x(-t)$	$\frac{e^{at}x(t)+e^{bt}x(-t)}{b-a}$ ·x(t), a ≠ b

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Στ

Μετασχηματισμένες Fourier

1	f(x) = $\begin{cases} 1, \text{ όταν } \lvert x\rvert < b \\ 0, \text{όταν } \lvert x\rvert > b \end{cases}$	***F***(s) = $\frac{2\sin(bs)}{s}$
2	f(x) = $\frac{1}{x^2+b^2}$	***F***(s) = $\frac{\pi e^{-bs}}{s}$
3	f(x) = $\frac{x}{x^2+b^2}$	***F***(s) = - $\frac{\pi i s e^{-bs}}{b}$
4	g(x) = $f^{(n)}(x)$	***G***(s) = $(is)^n F(s)$
5	g(x) = $x^n f(x)$	***G***(s) = $i^n \frac{F^n(s)}{(ds)^n}$
6	g(x) = f(bx)e^{itx}	***G***(s) = $\frac{1}{b} F\left(\frac{s-t}{b}\right)$
7	f(x) = $\begin{cases} \sin x, \text{όταν } 0 \leq x \leq \pi \\ 0, \text{όταν } x > \pi, x < 0 \end{cases}$	***F***(s) = $\frac{1+e^{-i\pi s}}{1-s^2}$
8	f(x) = $\delta^{(n)}(x)$	***F***(s) = $(is)^n$
9	f(x) = sign(t)	***F***(s) = $\frac{2}{is}$
10	$f(x) = e^{-ax} H(x)$, α > 0	***F***(s) = $\frac{1}{\alpha+is}$
11	f(x) = e^{-bx}	***F***(s) = $\frac{b}{b^2+s^2}$
13	f(x) = $\frac{2\sin(ax)}{x}$	***F***(s) = H(s + α) – H(s – α)
14	f(x) = -xe^{ax}H(-x), α > 0	***F***(s) = $\frac{1}{(a-is)^2}$

Συνημιτονοειδείς Μετασχηματισμένες Fourier

15	f(x) = $\begin{cases} 1, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ 0 < x < b \\ 0, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ \quad x > b \end{cases}$	$\boldsymbol{F_c}$(s) = $\frac{\sin(bs)}{s}$
16	f(x) = $\frac{1}{x^2+b^2}$	$\boldsymbol{F_c}$(s) = $\frac{\pi e^{-bs}}{2s}$
17	f(x) = e^{-bx^2}	$\boldsymbol{F_c}$(s) = $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-\frac{s^2}{4b}}$
18	f(x) = $x^{-\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{F_c}$(s) = $\sqrt{\frac{\pi}{2s}}$
19	f(x) = $\frac{\sin(bx)}{x}$	$\boldsymbol{F_c}$(s) = $\begin{cases} \pi/2, \acute{o}\tau\alpha\nu\ s < b \\ \pi/4, \acute{o}\tau\alpha\nu\ s = b \\ 0, \acute{o}\tau\alpha\nu\ s > b \end{cases}$

Ημιτονοειδείς Μετασχηματισμένες Fourier

20	f(x) = $\begin{cases} 1, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ 0 < x < b \\ 0, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ \quad x > b \end{cases}$	$\boldsymbol{F_s}$(s) = $\frac{1-\cos(bs)}{s}$
21	f(x) = $\frac{x}{x^2+b^2}$	$\boldsymbol{F_s}$(s) = $\frac{\pi e^{-bs}}{2}$
22	f(x) = xe^{-bx^2}	$\boldsymbol{F_s}$(s) = $\frac{1}{4b}\sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-\frac{s^2}{4b}}$
23	f(x) = $x^{-\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{F_s}$(s) = $\sqrt{\frac{\pi}{2s}}$
24	f(x) = $\frac{\cos(bx)}{x}$	$\boldsymbol{F_s}$(s) = $\begin{cases} \pi/2, \acute{o}\tau\alpha\nu\ s < b \\ \pi/4, \acute{o}\tau\alpha\nu\ s = b \\ 0, \acute{o}\tau\alpha\nu\ s > b \end{cases}$
25	f(x) = x^{-1}	$\boldsymbol{F_s}$(s) = $\frac{\pi}{2}$
26	f(x) = $\frac{\sin(bx)}{x^2}$	$\boldsymbol{F_s}$(s) = $\begin{cases} \frac{\pi s}{2}, \acute{o}\tau\alpha\nu\ s < b \\ \frac{\pi b}{2}, \acute{o}\tau\alpha\nu\ s > b \end{cases}$

Ξένη Βιβλιογραφία

[1] Fourier Series: Georgi Tolsov

[2] Principles of Fourier Analysis: Kenneth B. Howell

[3] Lectures Notes in Fourier Analysis: Mohammad Asadzaden (2008)

[4] Fourier Analysis and Its Applications: Anders Vretblad

[5] Handbook-of-Fourier-Analysis-its-Applications(1) FT: Robert J. Marks II (2006)

[6] Delta Functions Introductions to Generalised Functions (Second Editions): R.F.Hoskins.

[7] Applications-of-Fourier-Transform-to-Generalized-Founctios: M.Rahman.

[8] Partial Differential Equations and Boundary Value Problems (2004): Asmar N.H.

[9]Fourier Analysis an Introduction: Elias M. Stein & Rami Shakarchi

[10] Fourier and Wavelet Analysis: George Bachaman, Lawrence Narici, Edward Beckenstain.

[11] The Fourier Transorm And Its Applications: Ronald N. Bracewell.

[12] Ανάλυση Fourier: Murray R. Spiegel. (Μετάφραση: Σ. Κ. Περσίδης)

[13] Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών: William E. Bouche, Richard C. Diplima (10th edision).

[14] van Dijk G_Distribution Theory_Convolution, Fourier Transform and Laplace Transform_De Gruyter (2013)(2).

Ελληνική Βιβλιογραφία

[15] Μετασχηματισμοί Συναρτήσεων: Γερασ. Α. Λεγάτου

[16] Μετασχηματισμοί Fourier και Laplace: Νίκος Χαλιδιάς

[17] Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (Σειρές Fourier & Προβλήματα Συνοριακών Τιμών): Παύλος Μ. Χατζηκωνσταντίνου.

[18] Εφαρμοσμένα Μαθηματικά: Νικόλαος Λ. Τσίτσας.

[19] Εφαρμοσμένα Μαθηματικά - Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις: Γιάννης Β. Γκαρούτσος.

[20] Σήματα και Συστήματα Ι: Σημειώσεις Αθανασίου Σκόρδα (2016 – 2017)

[21] Σήματα και Συστήματα: Αναστασία Βελώνη.

[22] Κλασική Θεωρία Ελέγχου: Νικόλαος Καραμπετάκης.

[23] Ntekoume_undergradute_thesis.pdf (πτυχιακή εργασία)

Internet

[24] www.teiserron.gr

[25] www.ceidnotes.gr

[26] www.eclass.upatras.gr

[27] www.youtube.com/watch?v=GtXmS5YH7XM

[28] www.thalis.math.upatras.gr/~tasos/Κατανομές_Green.pdf

[29] www.opencourses.teiwest.gr

[30] www.el.wikipedia.org

[31] www.eclass.teipir.gr

[32] www.youtube/watch?=6mKykl0to