

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



**Δ.Π.Μ.Σ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**«Υπολογιστική και Αναλυτική Μελέτη Δοκού από
Σύνθετα Υλικά σε Ασύμμετρη Κάμψη.»**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

Δρ. Ευστάθιος Θεοτόκογλου

Καθηγητής ΕΜΠ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΣ ΦΟΙΤΗΤΗΣ:

Κων/νος Ηλίας Τσούτσουρας

ΑΘΗΝΑ 2021

.....

Κων/νος Ηλίας Τσούτσουρας

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

... Η παρούσα εργασία αφιερώνεται στην οικογένεια μου όπου δείχνουν διαρκώς την απεριόριστη αγάπη τους και στην σύντροφο μου Δήμητρα για την υπομονή της και την συμπαράσταση της στην διάρκεια του Μεταπτυχιακού.

Περιοχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	9
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	10
ABSTRACT	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ^ο	13
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ.....	13
1.1 Γενικά περί συνθέτων υλικών	13
1.1.1 Ιστορική εξέλιξη των συνθετών υλικών	13
1.1.2 Γενικός ορισμός σύνθετου υλικού.	15
1.1.3 Ταξινόμηση των σύνθετων υλικών.	16
1.2 Ινώδη σύνθετα υλικά	16
1.2.1 Γενικά περί ινωδών σύνθετων υλικών	16
1.2.2 Κατηγοριοποίηση ινών.....	17
1.2.3 Παρασκευή ινώδων σύνθετων υλικών	19
1.2.4 Ποιοτικός έλεγχος	20
1.2.5 Πλεονεκτήματα των ινωδών σύνθετων υλικών	21
1.2.6 Σύνθετα υλικά με διακεκομμένες ίνες τυχούσης διευθύνσεως.....	22
1.3 Κάμψη της δοκού	24
1.3.1 Ορισμός	24
1.3.2 Ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων	24
1.3.3 Κάμψη τεσσάρων σημείων	29
1.4 Προς Μελέτη Σύνθετα Υλικά	31
1.5 Αντικειμενικός Σκοπός της Εργασίας	33
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ^ο	35
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΜΕ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	35
2.1 Αντικείμενο της ελαστικότητας.....	35
2.1.1 Επίπεδη Θεωρία Ελαστικότητας	36
2.1.2 Τασική συνάρτηση του Airy	36
2.1.3 Επίλυση διαφορικής εξίσωσης με την χρήση πολυωνύμου	39
2.2 Ανισότροπη Ελαστικότητα	41
2.2.1 Γενικά.....	41
2.2.2 Βασική έννοια.....	42

2.2.3	Διαφορική εξίσωση για ανισότροπο υλικό στο επίπεδο	44
2.3	Επίλυση της κάμψης τριών σημείων με χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας	46
2.3.1	Επιλογή πουωνύμου ως τασική συνάρτηση	46
2.3.2	Οριακές συνθήκες και Τασική συνάρτηση κάμψης τριών σημείων	47
2.3.3	Βέλος λόγω κάμψης για 3PB	48
2.3.4	Βέλος λόγω διάτμησης-Συνολικό βέλος για 3PB	51
2.4	Επίλυση της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων με χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας	52
2.4.1	Επιλογή τασικής συνάρτησης για 4PB	52
2.4.2	Οριακές συνθήκες και Τασική συνάρτηση 4PB.....	54
2.4.3	Βέλος λόγω κάμψης για 4PB	58
2.4.4	Βέλος λόγω διάτμησης-Συνολικό βέλος για 4P.....	60
2.5	Συγκριση παραμέτρων για 4PB με χρήση Θεωρίας Ελαστικότητας	61
2.5.1	Σύγκριση μήκους δοκιμίου με βέλος κάμψης	62
2.5.2	Συγκριση πάχους δοκιμίου με βέλος κάμψης	63
2.5.3	Συγκριση ασκούμενης δύναμης με βέλος κάμψης.....	64
2.5.4	Σύγκριση συντελεστή λ με βέλος κάμψης	65
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ^ο		67
ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ		67
3.1	Εισαγωγή στα Πεπερασμένα Στοιχεία	67
3.2	Αντικείμενο της Ανάλυσης με Π.Σ.	68
3.3	Κάνναβος Δοκού για Ανάλυση με Π.Σ.....	69
3.4	Ανάλυση Π.Σ. με το ANSYS	70
3.5	Ανάλυση Ποιότητας Διακριτοποίησης για 4PB.....	70
3.6	Μοντελοποίηση στο ANSYS για 4PB	73
3.7	Εξαγωγή Αποτελεσμάτων από την ανάλυση με Π.Σ.	78
3.7.1	Ορθές Τάσεις σ_x	78
3.7.2	Ορθές Τάσεις σ_y	82
3.7.3	Διατμητικές Τάσεις τ_{xy}	85
3.7.4	Βέλος Κάμψης	89
3.8	Ανάλυση Ποιότητας Διακριτοποίησης για 3PB.....	93
3.9	Μοντελοποίηση στο ANSYS 3PB	96

3.10	Εξαγωγή Αποτελεσμάτων από την ανάλυση με Π.Σ. 3PB.....	97
3.11	Σύγκριση 3PB με 4PB.....	101
3.11.1	Ορθές τάσεις σ_x	102
3.11.2	Ορθές τάσεις σ_y	103
3.11.3	Ορθές τάσεις τ_{xy}	105
3.11.4	Βέλος κάμψης.....	106
3.12	Σύγκριση παραμέτρων για 4PB με χρήση Πεπερασμένων Στοιχείων	108
3.12.1	Σύγκριση μήκους δοκιμίου με βέλος κάμψης	108
3.12.2	Σύγκριση πάχους δοκιμίου με βέλος κάμψης	109
3.12.3	Σύγκριση ασκούμενου φορτίου με βέλος κάμψης.....	110
3.12.4	Σύγκριση συντελεστή λ με βέλος κάμψης	111
3.12.5	Σύγκριση τάσης ως προς άξονα x και γωνίας ινών	112
3.12.6	Σύγκριση τάσης ως προς το επίπεδο xy και γωνίας ινών	113
3.13	Σύγκριση της κατανομής των τάσεων σε διαφορετικό σημείο από την θέση φόρτισης 114	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ^ο		117
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ		117
4.1	Γενικά.....	117
4.2	Σύνθετο υλικό τυχούσας Διευθύνσεως 4PB	118
4.2.1	Σύνθετο υλικό τυχούσας διευθύνσεως για $\lambda=1.8$	118
4.2.2	Σύνθετο υλικό τυχούσας διευθύνσεως για $\lambda=2.1$	119
4.2.3	Σύνθετο υλικό τυχούσας διευθύνσεως για $\lambda=3.5$	120
4.2.4	Σύνθετο υλικό τυχούσας διευθύνσεως για $\lambda=5.2$	121
4.2.5	Σύνθετο υλικό τυχούσας διευθύνσεως για $\lambda=6$	122
4.2.6	Σύνθετο υλικό τυχούσας διευθύνσεως για $\lambda=10$	123
4.3	Σύνθετο υλικό με ίνες μιας διευθύνσεως 4PB.....	124
4.3.1	Σύνθετο υλικό με ίνες διευθύνσεως 0°	125
4.3.2	Σύνθετο υλικό με ίνες διευθύνσεως 30°	130
4.3.3	Σύνθετο υλικό με ίνες διευθύνσεως 45°	136
4.3.4	Σύνθετο υλικό με ίνες διευθύνσεως 60°	142
4.3.5	Σύνθετο υλικό με ίνες διευθύνσεως 90°	148
4.4	Σύνθετο υλικό με ίνες μιας διευθύνσεως 3PB.....	154

4.4.1	Σύνθετο υλικό με ίνες 0° και 90° μοιρών για 3PB με πειραματικά δεδομένα...	155
4.4.2	Σύνθετο υλικό με ίνες μιας διεθύνσεως για 3PB	157
4.5	Σύγκριση τιμών μεταξύ 3PB-4PB.....	160
4.5.1	Σύγκριση βέλους κάμψης.....	161
4.5.2	Σύγκριση των τάσεων.....	166
4.6	Συγκριση τιμών βέλους κάμψης και γωνίας ινών για 4PB.....	172
4.7	Σύγκριση τιμών βέλους κάμψης και γωνίας ινών για 3PB.....	173
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5°		175
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ		175
5.1	Συμπεράσματα	175
5.2	Δυνατότητες Περαιτέρω Μελέτης	178
Βιβλιογραφία		179

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η συγκεκριμένη εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της φοίτησης μου στο Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών “Υπολογιστική Μηχανική” με κατεύθυνση ροής στα Στερεά του Ε.Μ.Π. με συντονίζουσα τη σχολή των Χημικών Μηχανικών του Ε.Μ.Π..

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Εργασία έχει δύο σκέλη. Στο πρώτο σκέλος έχει γίνει αναλυτική μελέτη και έχει βρεθεί λύση με την μέθοδο της Θεωρίας Ελαστικότητας για το πρόβλημα της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων για σύνθετο υλικό με ίνες μίας διεύθυνσεως, ώστε να υπολογιστούν ορθές και διατμητικές τάσεις στην δοκό με παράμετρο τον συντελεστή λ , καθώς και των παραμέτρων που αφορούν σε γεωμετρικά χαρακτηριστικά.

Κατά το δεύτερο σκέλος, έγινε προσομοίωση του πειράματος ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων σε δοκό η οποία αποτελείται από σύνθετο υλικό με ίνες μιας διεύθυνσεως με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, με απώτερο στόχο την σύγκριση της μηχανικής συμπεριφοράς του εν λόγω υλικού με την αντίστοιχη συμπεριφορά που προβλέπει η Θεωρία Ελαστικότητας.

Η εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την επίβλεψη του Καθηγητή Ε.Μ.Π. κ. Ε. Ε. Θεοτόκογλου, τον οποίο και ευχαριστώ θερμά για την πολύτιμη βοήθειά του και τον χρόνο που μου αφιέρωσε καθ’ όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον καθηγητή κ. Α. Σιδερίδη για την βοήθεια του στο κομμάτι της αναλυτικής μελέτης των σύνθετων υλικών και για την γενικότερη συμβολή του στην υλοποίηση της παρούσας εργασίας. Επίσης θα ήθελα να τον ευχαριστήσω ως άνθρωπο για τις πολύτιμες συμβουλές, το ακόρεστο ενδιαφέρον και την απέραντη αισιοδοξία και αγάπη που πρόσφερε απλόχερα σε όλο αυτό το χρονικό διάστημα που συνεργαστήκαμε σε αυτή την Μεταπτυχιακή Εργασία.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Όπως έχει γίνει ήδη αντιληπτό αυτή η εργασία μελετά την ασύμμετρη κάμψη 4 σημείων σε σύνθετες δοκούς με ίνες μιας διευθύνσεως. Παρακάτω παρουσιάζεται συνοπτικά η δομή της εργασίας με το περιεχόμενο του κάθε κεφαλαίου.

Κεφάλαιο 1: Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μια εισαγωγή στα σύνθετα υλικά, με έμφαση στα ινώδη υλικά, τα οποία αποτελούν και το αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας. Γίνεται επίσης μια σύντομη ανάλυση της μηχανικής των υλικών αυτών και στην συνέχεια γίνεται αναφορά στο κομμάτι Αντοχής των Υλικών όπου είναι μια πρώτη εκτίμηση του προβλήματος που πραγματεύεται η συγκεκριμένη εργασία.

Κεφάλαιο 2: Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο γίνεται μια ανάλυση της Θεωρίας Ελαστικότητας, η οποία είναι η πρώτη μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε για να λύσουμε το πρόβλημα. Επίσης υπάρχει και η λύση της κάμψης τριών σημείων καθώς είναι παρόμοια προβλήματα και είναι μια προκαταρκτική μελέτη που απαιτείται για να πάμε στην κάμψη τεσσάρων σημείων.

Κεφάλαιο 3: Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη παρουσίαση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων και της χρήσης της από τους μηχανικούς. Ακολούθως διεξάγονται υπολογισμοί για όλες τις περιπτώσεις που εξετάζονται στην παρούσα εργασία με την βοήθεια του λογισμικού πακέτου «ANSYS Mechanical APDL». Επιπλέον παρατίθενται οι χρωματικές απεικονίσεις των μεγεθών που υπολογίζονται από το ANSYS έτσι ώστε να γίνει αντιληπτή η κατανομή τους στο δοκίμιο.

Κεφάλαιο 4. Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί την σύγκριση των μεθόδων που περιγράφονται στα τρία προηγούμενα. Παρατίθενται κοινά διαγράμματα με τα αποτελέσματα των ανωτέρω μεθόδων έτσι ώστε να γίνει εμφανές το μέγεθος της σύγκλισης που παρουσιάζουν. Ακόμη, πραγματοποιείται σχολιασμός των διαγραμμάτων και προσπάθεια ερμηνείας τυχόν αποκλίσεων μεταξύ των αποτελεσμάτων.

Κεφάλαιο 5: Στο τελευταίο κεφάλαιο περιγράφονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα που εξήχθησαν σε όλα τα προηγούμενα κεφάλαια τυποποιημένα και αριθμημένα ώστε να επιτευχθεί καλύτερα η σύγκριση. Τέλος, αναφέρονται οι δυνατότητες που υπάρχουν για μελλοντική έρευνα, συμπληρωματική στην εργασία αυτή.

ABSTRACT

This thesis is a study of the asymmetric four-point bending on unidirectional fiber composite beams. Written below is a synopsis of the thesis' structure accompanied by each chapters' content.

Chapter 1: In this chapter, an introduction on composition is shown, emphasizing on the main subject of this study which is the fiber ones. There is also a brief analysis of the behavior of those materials and subsequently, a reference to the mechanics of the materials, that constitutes of the first estimate of the assigned task.

Chapter 2: In this stage, a dissection of the Elasticity Theory takes place as the first solving method that is used. Additionally there is the solution to the problem of the three-point bending, as it is similar to the four-point one and also is required to continue later on.

Chapter 3: This chapter is a short presentation of the Finite Element Method and its' usage by the engineers. Moreover, calculations are conducted for each case in the form of chromatic visuals with the help of the "ANSYS Mechanical ABDL" software, in order to be comprehensible.

Chapter 4: This chapter is a comparison of all the methods presented so far. Common charts with the calculated results are displayed so that the level of their convergence can be obvious. Furthermore, comments on the charts are made along with an attempt to explain any possible divergence of the results.

Chapter 5: The last chapter is an aggregated of the results that were abstracted from all the previous chapters, both numbered and standard data, so that the comparison is understood. Finally it is mentioned that there is potential of further research complementary to this thesis.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

1.1 Γενικά περί συνθέτων υλικών

1.1.1 Ιστορική εξέλιξη των συνθετών υλικών

Σύνθετα υλικά κατασκευασμένα από άνθρωπο προϋπάρχουν εδώ και χιλιάδες έτη. Η υψηλή τεχνολογία τους, βεβαίως, εξελίχθηκε στην αεροδιαστημική βιομηχανία μόνον τα τελευταία σαράντα χρόνια. Οι δεξαμενές και τα μεγάλα δοχεία τα οποία κατασκευάζονται με τη μέθοδο περιτυλίξεως ινών ύαλου υπήρξαν η πρώτη εφαρμογή χρήσεως των μοντέρνων συνθετών υλικών [1].

Στην συνέχεια, κατά την δεκαετία του 1960 εισήλθαν οι ίνες βορίου οι οποίες συντέλεσαν στη δημιουργία προγραμμάτων για την προώθηση της κατασκευής αεροσκαφών από σύνθετα υλικά για την αεροπορία των Η.Π.Α. Στην αρχή της δεκαετίας του 1980 το νεοκατασκευασθέν Boeing 767 περιείχε σχεδόν δυο τόνους συνθέτου υλικού στις δοκούς δαπέδου και σε όλες τις επιφάνειες ελέγχου, ενώ το γιγαντιαίο Σοβιετικό μεταγωγικό Antonov 124 περιείχε συνολικά 5,5 τόνους συνθέτου υλικού. Έκτοτε σχεδόν όλα τα εμφανιζόμενα αεροσκάφη κάνουν εκτεταμένη χρήση των σύνθετων υλικών.

Τα σύνθετα υλικά και η εξέλιξη του τρόπου επεξεργασίας τους αποτέλεσαν έναν σημαντικό παράγοντα για την ανάπτυξη της σύγχρονης τεχνολογίας. Ίνες γραφίτη και αραμιδίου έγιναν εμπορεύσιμες στην αρχή της δεκαετίας 1970. Οι εποξιδικές ρητίνες διατίθενται για πολλές χρήσεις, ενώ πιο πρόσφατα, μήτρες υψηλής θερμοκρασίας και θερμοπλαστικά έκαναν την εμφάνιση τους για πλέον απαιτητικές εφαρμογές και τα οποία προτίθενται να καλύψουν και τις πλέον δύσκολες απαιτήσεις των εφαρμογών του μέλλοντος.

Εκτός από την αεροπορική βιομηχανία, τα υψηλής τεχνολογίας σύνθετα υλικά βρίσκουν εφαρμογές και σε άλλους τομείς της σύγχρονης βιομηχανίας. Ναυτικά σκάφη, κουπιά, ποδήλατα, κάθε είδους αθλητικά είδη (ρακέτες τένις, κοντάρια γκολφ κ.λ.π.) και σχεδόν κάθε εξάρτημα όπου το βάρος, η ακαμψία και η αντοχή παίζουν σημαντικό ρολό στην

λειτουργικότητα του, είναι κατασκευασμένα από σύνθετα υλικά. Το 1985 στην διάσκεψη της Εταιρείας Μηχανικών που έλαβε χώρα στο Detroit των ΗΠΑ, εκφράστηκε η άποψη ότι η χρήση των σύνθετων υλικών στην βιομηχανία αυτοκίνητων θα είναι τόσο μεγάλη όσο και των ηλεκτρονικών συστημάτων. Για όλα αυτά κρίνεται χρήσιμο να κάνουμε μια ιστορική αναδρομή και να παρακολουθήσουμε την σταδιακή εξέλιξη των υλικών αυτών δια μέσου των αιώνων, η οποία παρουσίασε μια αλματώδη πρόοδο κατά τη διάρκεια των τελευταίων 40 ετών.

Ένας πρώτος ορισμός της έννοιας του σύνθετου υλικού μπορεί να δοθεί διαισθητικά ως εξής: "Ένα υλικό χαρακτηρίζεται ως σύνθετο, εξεταζόμενο μακροσκοπικά, όταν σχηματίζεται από το συνδυασμό δυο ή περισσότερων υλικών και έχει ιδιότητες διάφορες των αρχικών υλικών που το δημιούργησαν" [1]. Συνήθως τα υλικά αυτά παρουσιάζουν βελτίωση των ιδιοτήτων των επί μέρους υλικών που το αποτελούν ή και εντελώς διαφορετικές ιδιότητες από αυτά.

Με τη βοήθεια αυτού του ορισμού θα γίνει μια συνοπτική αναφορά στην σταδιακή εξέλιξη των σύνθετων υλικών και τη χρήση τους από τον άνθρωπο δια μέσου των αιώνων.

Στην Βίβλο αναφέρεται ότι οι Εβραίοι χρησιμοποίησαν άχυρο για να δώσουν μεγαλύτερη αντοχή στα λασπότουβλα. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν ένα είδος "κόντρα πλακέ" όταν κατάλαβαν ότι στρώματα ξύλου έχουν τη δυνατότητα να συνδυαστούν καταλλήλως ώστε να παρουσιάσουν ικανοποιητική αντοχή σε διάφορες κατευθύνσεις και να είναι ανθεκτικά στην διόγκωση και στην στρέβλωση, οι οποίες προκαλούνται από την υγρασία. Επίσης, στην Αίγυπτο και στην Μεσοποτάμια εμφανίστηκαν σχεδίες από καλάμι παύρου "δεμένο" με άσφαλο. Οι Ασσύριοι κατασκεύασαν πλωτές γέφυρες με σανίδες εμποτισμένες με αδιάβροχη άσφαλο. Το Μεσαίωνα κατασκευάστηκαν σπαθιά, ασπίδες και θώρακες από συνδυασμούς στρωμάτων διαφόρων μετάλλων και πρόσφατα ινώδη σύνθετα υλικά τα οποία έχουν μεγάλους λόγους αντοχής/βάρους και ακαμψία/βάρους χρησιμοποιήθηκαν σε κατασκευές όπου το μικρό βάρος αποτελεί σημαντικό παράγοντα όπως π.χ. αεροσκάφη.

Είναι εμφανές με όσα αναφέρονται παραπάνω ότι ο άνθρωπος από τα πρώτα χρόνια της υπάρξεως του στη γη είχε ενστικτωδώς αντιληφθεί την έννοια του σύνθετου υλικού, δηλαδή είχε "διαισθανθεί" ότι ο συνδυασμός δυο η περισσότερων υλικών, μακροσκοπικά

έδινε τη δυνατότητα κατασκευής ενός τρίτου, σύνθετου, το οποίο ικανοποιούσε ορισμένες "ποιοτικές απαιτήσεις" της κατασκευής στην οποία επρόκειτο να χρησιμοποιηθεί.[2]

Η χρήση των σύνθετων υλικών σε κάθε είδους κατασκευαστικές εφαρμογές έχει αυξηθεί εντυπωσιακά την τελευταία εικοσαετία και καθίσταται πλέον αναγκαία η βασική κατανόηση της μηχανικής συμπεριφοράς τους από τους μηχανικούς που καλούνται να επιλέξουν ανάμεσα στην πληθώρα τύπων σύνθετων υλικών για τις ανάγκες σχεδιασμού και κατασκευής προηγμένων εφαρμογών [3].

1.1.2 Γενικός ορισμός σύνθετου υλικού.

Σύνθετο υλικό ορίζεται εκείνο το υλικό το οποίο αποτελείται από δύο ή περισσότερα υλικά συνδεδεμένα μακροσκοπικά ή μικροσκοπικά, έτσι ώστε να προκύπτει ένα πολυφασικό σύστημα -το σύνθετο υλικό- με φυσικές ιδιότητες διαφορετικές από τις φυσικές ιδιότητες των αρχικών υλικών, τα οποία δύνανται όμως σε πολλές περιπτώσεις να διατηρούν αρκετές από τις αρχικές τους φυσικές ιδιότητες [4]. Δηλαδή κατά την κατασκευή ενός σύνθετου υλικού, μερικές φορές, συμβαίνει χημική αντίδραση μεταξύ των συνιστωσών υλικών, έτσι ώστε η μια φάση να διαφέρει από τα αρχικά υλικά.

Ο όρος "φάση" χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει ένα οποιοδήποτε ομογενές τμήμα του σύνθετου υλικού. Ένα ή περισσότερα υλικά μέσα στο σύνθετο υλικό είναι δυνατόν να αποτελούν αντιστοιχώς, μια ή περισσότερες συνεχείς φάσεις οι οποίες λέγονται μήτρες, ενώ τα υπόλοιπα υλικά τα οποία είναι δυνατόν να είναι και αυτά ένα ή περισσότερα, θα αποτελούν αντιστοιχώς, μια ή περισσότερες ασυνεχείς ή διάχυτες φάσεις οι οποίες λέγονται εγκλείσματα. Στα σύνθετα υλικά επίσης, παρατηρείται μια περιοχή μεταξύ των ορίων των δυο φάσεων η οποία εμφανίζει φυσικές ιδιότητες διαφορετικές των αρχικών υλικών. Η περιοχή αυτή ονομάζεται ενδιάμεσος φάση.

Κατά την χρήση ενός σύνθετου υλικού η μήτρα και το εγκλείσμα αναλαμβάνουν διαφορετικά καθήκοντα. Η μήτρα είναι το συνδετικό υλικό το οποίο συνδέει, προστατεύει και υποστηρίζει την ασυνεχή φάση, το εγκλείσμα. Επίσης, παίζει σπουδαίο ρόλο επειδή μεταφέρει τις τάσεις μέσα στο σύνθετο υλικό. Τα υλικά τα οποία χρησιμοποιούνται ως μήτρες έχουν συνήθως σημαντικά μικρότερη πυκνότητα, αντοχή

και ακαμψία από τα υλικά τα οποία χρησιμοποιούνται ως ίνες. Το έγκλεισμα συνεισφέρει στην αντοχή και την ακαμψία του σύνθετου υλικού. Η συνεργασία αυτή, της μήτρας και του εγκλείσματος δίνει στο σύνθετο υλικό ιδιότητες οι οποίες σε πάρα πολλές εφαρμογές το καθιστούν ανώτερο και καταλληλότερο από τα κοινά υλικά.

1.1.3 Ταξινόμηση των σύνθετων υλικών.

Κατά τον πλέον γενικό τρόπο, τα σύνθετα υλικά δύνανται να ταξινομηθούν αναλόγως με τις ιδιότητες της μήτρας ή του εγκλείσματος.

Ως προς την μήτρα διακρίνονται σε :

- α. Σύνθετα υλικά με μεταλλική μήτρα.
- β. Σύνθετα υλικά με μη μεταλλική μήτρα.

ενώ ως προς το έγκλεισμα σε :

- α. Σύνθετα υλικά με έγκλεισμα υπό μορφή κόκκων (κοκκώδη σύνθετα υλικά).
- β. Σύνθετα υλικά με έγκλεισμα υπό μορφή φύλλων.
- γ. Σύνθετα υλικά με έγκλεισμα υπό μορφή ινών (ινώδη σύνθετα υλικά).

1.2 Ινώδη σύνθετα υλικά

1.2.1 Γενικά περί ινωδών σύνθετων υλικών

Τα ινώδη σύνθετα υλικά αποτελούνται από έγκλεισμα υπό μορφή ινών μέσα σε μια μήτρα, η οποία δύναται να είναι ένα οποιοδήποτε υλικό. Η πλέον συνήθης εμπορική μορφή ενός ινώδους υλικού είναι η μορφή φύλλου η στρώσεως (στρώματος). Η στρώση αυτή δύναται να είναι επίπεδη ή μερικές φορές και καμπύλη επιφάνεια. Οι ίνες μέσα στη στρώση δύνανται να είναι διατεταγμένες κατά διάφορες μορφές, δηλαδή να έχουν όλες την ίδια διεύθυνση ή να υπάρχουν διάφορες ομάδες ινών με διαφορετικές κατευθύνσεις, πλεγμένες μεταξύ τους. Επίσης είναι δυνατόν πολλές φορές οι ίνες και η μήτρα να διατίθενται χωριστά στο εμπόριο.

Σημαντικό πρόβλημα στην κατασκευή των σύνθετων υλικών υπό μορφή στρώσεων, δηλαδή των πολυστρωμάτων (laminates) είναι η ύπαρξη διατμητικών τάσεων μεταξύ των φύλλων (στρωμάτων). Οι διατμητικές τάσεις δημιουργούνται από το γεγονός ότι κάθε στρώμα τείνει να παραμορφωθεί ανεξαρτήτως από τα γειτονικά του. Αυτό συμβαίνει γιατί κάθε στρώμα έχει διαφορετικές ιδιότητες αφού αυτές εξαρτώνται από τον προσανατολισμό των ινών του. Αυτές οι διατμητικές τάσεις είναι πολύ μεγάλες στα άκρα ενός πολυστρώματος και δύνανται να προκαλέσουν αποκόλληση των στρωμάτων (delamination) [5]. Το ίδιο φαινόμενο είναι δυνατόν να δημιουργήσουν και οι ορθές τάσεις οι οποίες αναπτύσσονται μεταξύ των στρωμάτων.

1.2.2 Κατηγοριοποίηση ινών

Μια ίνα χαρακτηρίζεται από τον πολύ μεγάλο λόγο μήκους προς διάμετρο. Έχει αποδειχτεί ότι οι ίνες διαφόρων υλικών είναι πλέον άκαμπτες και ανθεκτικές από τα αντίστοιχα υλικά στη συνήθη μορφή τους. Για παράδειγμα, τα συνηθισμένα φύλλα ύαλου θραύονται σε τάσεις μόνο μερικών δεκάδων MN/m^2 ενώ ίνες ύαλου δύνανται να έχουν αντοχή η οποία ανέρχεται από 2.76 GN/m^2 έως 4.83 GN/m^2 όταν αυτές διατίθενται στο εμπόριο, με όριο μέχρι και 6.89 GN/m^2 όταν αυτές έχουν παρασκευαστεί στο εργαστήριο. Είναι προφανές λοιπόν ότι η γεωμετρία μιας ίνας είναι αποφασιστικής σημασίας για τον υπολογισμό της αντοχής της και θα πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψη στις σχετικές εφαρμογές. Το παράδοξο μιας ίνας η οποία έχει διαφορετικές ιδιότητες από αυτές τις οποίες έχει το υλικό όταν δεν είναι διαμορφωμένο σε μορφή ίνας οφείλεται στην πλέον τέλεια δομή της. Έτσι, εντός της ίνας οι κρύσταλλοι του υλικού είναι ευθυγραμμισμένοι κατά τον διαμήκη άξονα της και επιπλέον υπάρχουν λιγότερες εσωτερικές ατέλειες στην ίνα σε σχέση με αυτές οι οποίες υπάρχουν στο ίδιο υλικό το οποίο έχει άλλη τυχαία διαμόρφωση.

Οι ίνες δύνανται να διακριθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία (fibers) περιλαμβάνει ίνες με πολύ μεγάλο λόγο μήκους προς διάμετρο και με διάμετρο της τάξεως του μεγέθους των κρυστάλλων. Στον Πίνακα 1.1 [3] δίνονται τα χαρακτηριστικά διαφόρων ινών από τα συνήθη υλικά.

Υλικό Ίνας	Πυκνότητα (kN/m ³)	Εφελκυστική Αντοχή (GN/m ²)	Αντοχή/ Πυκνότητα (km)	Εφελκυστικό Μέτρο Ελαστικότητας (GPa)	Λόγος Ακαμψίας/ Πυκνότητα (Mm)
Αργίλιο	26.3	0.62	24	73	2.8
Τιτάνιο	46.1	1.9	41	115	2.5
Χάλυβας	76.6	4.1	54	207	2.7
Ε-γυαλί	25.0	3.4	136	72	2.9
S-γυαλί	24.4	4.8	197	86	3.5
Άνθρακας	13.8	1.7	123	190	14.0
Βηρύλλιο	18.2	1.7	93	300	16.0
Βόριο	25.2	3.4	137	400	16.0
Γραφίτης	13.8	1.7	123	250	18.0

Πίνακας 1.1 : Ιδιότητες των ινών της πρώτης κατηγορίας (fibers)

Η δεύτερη κατηγορία (whiskers) περιλαμβάνει ίνες οι οποίες κυρίως έχουν διαμέτρους της αυτής τάξεως με τις πρώτες ύλες, δηλαδή της τάξεως μεγέθους των κρυστάλλων, έχουν όμως πολύ μικρότερο μήκος σε σχέση με τις πρώτες παρά το γεγονός ότι ο λόγος μήκους προς διάμετρο τους δύναται να φθάσει σε μερικές εκατοντάδες. Οι ίνες αυτές λαμβάνονται με αποκρυστάλλωση σε πολύ μικρότερη κλίμακα σε σχέση με τις πρώτες και χαρακτηριστικό τους είναι η σχεδόν τέλεια ευθυγράμμιση των κρυστάλλων τους.

Ως συνέπεια αυτού του γεγονότος παρουσιάζουν πολύ ανώτερες ιδιότητες από αυτές τις οποίες παρουσιάζουν οι τυχαίες διαμορφώσεις των αντίστοιχων υλικών. Για παράδειγμα, υλικά όπως ο χάλυβας έχουν αντοχή 20 GPa η οποία υπολογίζεται από την κρυσταλλική τους δομή, ενώ ο κοινός δομικός χάλυβας έχει στην πράξη αντοχή η οποία κυμαίνεται μεταξύ 0.52 και 0.69 GPa.

Η δεύτερη κατηγορία ινών (whiskers) έχει το χαρακτηριστικό ότι οι ασυνέχειες στην κρυσταλλική δομή περιορίζονται στο ελάχιστο. Έτσι η αντοχή τους αν και δεν φτάνει την θεωρητική, υπερβαίνει κατά πολύ την αντοχή του αντίστοιχου υλικού το οποίο έχει τυχαία διαμόρφωση. Για παράδειγμα, η αντοχή αυτή για τον χάλυβα δύναται να φτάσει μέχρι τα 13 GPa. Παραδείγματα αυτής της κατηγορίας των ινών δίνονται στον πίνακα 1.2 [6].

Υλικό Ίνας	Πυκνότητα (kN/m ³)	Θεωρητική Αντοχή (GN/m ²)	Πειραματική Αντοχή (GN/m ²)	Λόγος πειραματικής Αντοχής/πυκν. (Km)	Εφελκυστικό Μέτρο Ελαστικότητας (GPa)	Λόγος Ακαμψιάς/ Πυκνότητα (Mm)
Χαλκός	87.4	12	3.0	34	124	1.4
Νικέλιο	87.9	21	3.9	44	215	2.4
Χάλυβας	76.8	20	13.0	170	200	2.6
Άνθρακας	16.3	98	21.0	1300	980	60.0

Πίνακας 1.2 : Ιδιότητες των ινών της δεύτερης κατηγορίας (whiskers)

Επίσης οι ίνες μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο διαφορετικές κατηγορίες.

α. Ανόργανες ίνες.

β. Οργανικές ίνες.

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι ίνες ύαλου, άνθρακα, γραφίτη, βορίου, κ.λπ., ενώ στην δεύτερη οι ίνες Kevlar.

1.2.3 Παρασκευή ινώδων σύνθετων υλικών

Σε αντίθεση με τα κοινά υλικά υπάρχει μια πολύ στενή σχέση μεταξύ της κατασκευής ενός σύνθετου υλικού και της τελικής του χρήσεως. Σε πολλές περιπτώσεις μάλιστα η κατασκευή του σύνθετου υλικού αποτελεί ένα τμήμα της κατασκευής του εξαρτήματος στο οποίο χρησιμοποιείται το σύνθετο υλικό [4]. Εδώ περιοριζόμαστε να αναφέρουμε ότι οι ίνες και η μήτρα συνδέονται μεταξύ τους για να δώσουν ένα στρώμα ινώδους υλικού. Δύο κυρίως στάδια διακρίνουμε σε αυτή τη τελική διαδικασία : Στο πρώτο, οι ίνες διατάσσονται έτσι ώστε να λάβουν την τελική μορφή την οποία θα έχουν μέσα στο στρώμα. Στο δεύτερο, το υλικό της μήτρας εκχύνεται σε υγρή κατάσταση, μετά πολυμερίζεται (όταν υπάρχει πλαστική μήτρα) και ξηραίνεται ούτως ώστε να δημιουργήσει έναν σταθερό δεσμό μεταξύ των ινών. Ο πολυμερισμός μπορεί να υποβοηθηθεί με άσκηση πίεσεως ή με θέρμανση [6].

Τα υλικά των ινών και της μήτρας διατίθενται στο εμπόριο ξεχωριστά το καθένα ή ενωμένα υπό μορφή στρώματος. Οι ίνες συνήθως διατίθενται στο εμπόριο διαβρεγμένες με ρητινώδες υλικό όπως πολυεστερική ρητίνη η οποία δύναται να χρησιμοποιηθεί μετά

και ως μήτρα. Η παραπάνω διαδικασία αναφέρεται ως προεμποτισμός (preimpregnation) και αυτή η μορφή των προεμποτισμένων ινών καλείται prepreg. Για παράδειγμα, ίνες μιας διευθύνσεως μέσα σε εποξειδική ρητίνη διατίθενται υπό την μορφή ταινίας (prepreg tape), όπου οι ίνες βρίσκονται κατά μήκος της ταινίας. Ομοίως, διατίθενται προεμποτισμένα πλέγματα στα οποία οι ίνες υφαίνονται και μετά εμποτίζονται με ρητίνη. Για την παρασκευή του σύνθετου υλικού ακολουθείται η εξής διαδικασία [7].

Στρώματα prepreg τοποθετούνται το ένα πάνω στο άλλο υπό μορφή τεμαχίου εντός κατάλληλων τύπων (καλουπιών) ώστε να επιτευχθεί το επιθυμητό πάχος. Εν συνεχεία γίνεται πολυμερισμός της ρητίνης κάτω από κατάλληλες συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσεως με αποτέλεσμα την ενσωμάτωση των ινών σε ένα συμπαγές ανομοιογενές υλικό. Κατά την διάρκεια αυτής της διαδικασίας το πάχος του prepreg ελαττώνεται κατά 25% λόγω της ροής της ρητίνης.

Στα πλέον εξελιγμένα σύνθετα υλικά το πάχος είναι κρίσιμος παράγοντας. Η περιεκτικότητα ινών και οι μηχανικές ιδιότητες εξαρτώνται άμεσα από το τελικό πάχος του υλικού.

Συνοπτικά, οι βασικές μέθοδοι παρασκευής σύνθετων υλικών είναι οι εξής [6]:

- α. Η αυτόκλαστη μέθοδος (autoclave).
- β. Η μέθοδος της υπό συμπίεση προσαρμοσμένης μεταλλικής μήτρας (press mounted matched metal die).
- γ. Η μέθοδος της περιτυλίξεως νήματος (filament winding).
- δ. Η μέθοδος της επιστρώσεως σε ταινία (tape laying).
- ε. Η μέθοδος της εξωθήσεως με έλξη (pultrusion).

Η κάθε μέθοδος έχει τα πλεονεκτήματα και τους περιορισμούς της. Η καταλληλότητα της κάθε μεθόδου εξαρτάται από την διαμόρφωση των υπό κατασκευή τεμαχίων και τις απαιτήσεις της παράγωγης.

1.2.4 Ποιοτικός έλεγχος

Η φύση των σύνθετων υλικών υποχρεώνει τον παρασκευαστή να είναι ενήμερος επί ορισμένων ατελειών τους οι οποίες λαμβάνουν χώρα κατά την διάρκεια της παρασκευής

του σύνθετου υλικού. Αυτές οι ατέλειες συνδέονται άμεσα με την τελική αντοχή και ακαμψία του υλικού.

Μερικές από τις συνηθισμένες ατέλειες οι οποίες πρέπει να ελέγχονται και οι οποίες επηρεάζουν την απόδοση του σύνθετου υλικού είναι οι εξής [7]:

- α. Ενδιάμεσα κενά τα οποία οφείλονται σε παγίδευση αέρα, αποκόλληση στρωμάτων ή έλλειψη ρητίνης.
- β. Ατελής πολυμερισμός της ρητίνης.
- γ. Υπερβολική ύπαρξη ρητίνης μεταξύ των στρωμάτων.
- δ. Κενά μήτρας και πόρωση.
- ε. Κατεστραμμένες ίνες.
- στ. Λάθος διεύθυνση ινών στις στρώσεις.
- ζ. Εγκλείσματα από ξένα σώματα.
- η. Ανισομερής μεταβολή στο πάχος.
- θ. Μη αποδεκτές συνδέσεις στα στρώματα.
- ι. Ρυτίδες-ζαρώματα και εξογκώματα τα οποία δημιουργούνται από περιτύλιξη ινών και ευθυγράμμιση στρώσεων.

Η εκτίμηση της φύσεως των ατελειών αυτών μπορεί να γίνει δια της αμέσου παρατηρήσεως κατά την παρασκευή των ινωδών σύνθετων υλικών.

1.2.5 Πλεονεκτήματα των ινωδών σύνθετων υλικών

Οι ιδιότητες κάθε υλικού συμβατικού ή σύνθετου οι οποίες είναι σημαντικές από δομικής απόψεως μπορούν να διακριθούν σε μηχανικές και μη μηχανικές ιδιότητες ενός υλικού είναι η ακαμψία, η αντοχή, η ολκιμότητα, η σκληρότητα και η συμπεριφορά του υλικού σε κόπωση, ερπυσμό και χαλάρωση. Οι μη μηχανικές ιδιότητες ενός υλικού περιλαμβάνουν κυρίως την πυκνότητα, την θερμική συμπεριφορά και την αντίσταση σε διάβρωση του υλικού.

Τα σύνθετα υλικά έχουν το πλεονέκτημα ότι συνήθως διαθέτουν τις καλύτερες ιδιότητες των υλικών από τα οποία αποτελούνται, ενώ επιπλέον διαθέτουν και ιδιότητες τις οποίες κανένα από τα αρχικά υλικά δεν διέθετε. Οι επιδιωκόμενες ιδιότητες των σύνθετων υλικών ώστε να καταστούν ανώτερα από τα συμβατικά είναι οι εξής : αντοχή, ακαμψία,

αντίσταση σε διάβρωση, αντίσταση σε κάθε είδους φθορά κατά τη χρήση τους, χαμηλό κόστος, μικρό βάρος, καλύτερη συμπεριφορά σε κόπωση, θερμική μόνωση, θερμική αγωγιμότητα και ακουστική μόνωση.

Κάθε σύνθετο υλικό κατασκευάζεται έτσι ώστε να διαθέτει μερικές από αυτές τις ιδιότητες.

Αναφορικά με τα ινώδη σύνθετα υλικά, οι ιδιότητες οι οποίες τα καθιστούν πολύ σημαντικά είναι η αυξημένη ακαμψία και αντοχή, το μικρό βάρος και το κόστος τους.

Οι λόγοι αντοχή/πυκνότητα και ακαμψία/πυκνότητα φθάνουν σε πάρα πολύ υψηλές τιμές για ίνες διαφόρων υλικών. Η ιδιότητα αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η πλέον σημαντική ιδιότητα των ινωδών υλικών. Επίσης τα υλικά αυτά απαιτούν απλή τοποθέτηση συνήθως για τις εφαρμογές που χρησιμοποιούνται. Συνέπεια αυτής της απλής τοποθέτησεως είναι η μεγάλη ταχύτητα κατασκευής η οποία γίνεται ακόμη μεγαλύτερη όταν τα υλικά έχουν ως μήτρα ρητίνη η οποία μπορεί να πολυμεριστεί στον τόπο κατασκευής. Άλλη μία σημαντική παράμετρος για τα ινώδη είναι ο λόγος κόστους/πυκνότητας του υλικού. Η παράμετρος αυτή εξαρτάται από παράγοντες όπως η εμπειρία που έχει αποκτηθεί και η τεχνολογία επί μιας μεθόδου κατασκευής του υλικού. Ο λόγος αυτός αποτελεί καθοριστικό κριτήριο για την εμπορική «βιωσιμότητα» κάθε σύνθετου υλικού. Με κριτήριο το συνολικό κόστος τα ινώδη υλικά έχουν αποδειχτεί σε πολλές περιπτώσεις περισσότερο αποτελεσματικά από τα συμβατικά.

1.2.6 Σύνθετα υλικά με διακεκομμένες ίνες τυχούσης διεύθυνσεως

Σύνθετο υλικό με ίνες τυχούσης διεύθυνσεως ορίζεται ένα υλικό ενισχυμένο με ίνες οι οποίες κείνται με τυχαίο προσανατολισμό πάνω σε ένα επίπεδο υπό γωνία -90° έως $+90^\circ$. Μερικώς τυχούσης διεύθυνσης καλείται όταν ο προσανατολισμός των ινών είναι από $-\theta$ έως $+\theta$ όπου $\theta < 90^\circ$.

Αν και τα σύνθετα υλικά ενισχυμένα με ίνες έχουν εφαρμογή ευρύτατη τα τελευταία χρόνια, οι περισσότερες μελέτες περιορίζονται στα σύνθετα υλικά με συνεχείς ίνες μιας διεύθυνσεως. Η εφαρμογή υλικών ενισχυμένων με διακεκομμένες ίνες τυχούσης διεύθυνσεως είναι πιο πρόσφατη. Οι θεωρητικές και πειραματικές εργασίες σε αυτόν τον τομέα είναι λιγότερες και οι καταστατικές εξισώσεις των υλικών αυτών δεν είναι ακόμη

πλήρως προσδιορισμένες. Σε γενικές γραμμές, οι ελαστικές σταθερές σύνθετου υλικού με διακεκομμένες ίνες τυχούσης διεύθυνσεως μπορούν να προέλθουν από αυτές των σύνθετων υλικών με ασυνεχείς ίνες μιας διεύθυνσεως δια μέσου μιας διαδικασίας ολοκληρώσεως. Η δυσκολία υπάρχει στο να βρεθούν απλές και ακριβείς εκφράσεις για τις ελαστικές σταθερές των σύνθετων υλικών ενισχυμένων με ασυνεχείς ίνες μιας διεύθυνσεως συναρτήσει του μήκους της ίνας.

Στις κατασκευές (σωλήνες, δεξαμενές κ.λπ.) από σύνθετο υλικό ρητίνης και ίνες ύαλου τυχαίας διεύθυνσης θεωρείται δεδομένο ένα λογικό ποσοστό ολκιμότητας. Οι παραμορφώσεις αστοχίας σε μια δοκιμή εφελκυσμού για τα συμβατικά υλικά (μέταλλα) είναι 20% ή περισσότερο, το μεγαλύτερο τμήμα των οποίων είναι πλαστική παραμόρφωση. Οπουδήποτε είναι δυνατή η πλαστική θραύση (όπως στην περίπτωση εξαρτημάτων μαλακού χάλυβα σε χαμηλές θερμοκρασίες) λαμβάνονται ειδικές προφυλάξεις στα στάδια σχεδιασμού και κατασκευής για να εξασφαλιστεί ασφαλής λειτουργία των εξαρτημάτων.

Το διάγραμμα φορτίου - επιμηκύνσεως το οποίο προκύπτει από πείραμα εφελκυσμού σύνθετου υλικού ενισχυμένου με ίνες ύαλου διαφέρει από τις τυπικές καμπύλες των μετάλλων σε τρία σημαντικά σημεία.

Η κλίση της ελαστικής περιοχής της καμπύλης είναι αρκετά μικρότερη, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η ακαμψία του υλικού που εκφράζεται με το μέτρο ελαστικότητας είναι μικρότερη.

Δημιουργούνται ανωμαλίες στην καμπύλη σε σχετικά χαμηλές τιμές των παραμορφώσεων (γύρω στο 0.3%) πράγμα το οποίο σημαίνει ότι αρχίζει να φθείρεται το σύνθετο υλικό, που αποτελείται από στρώματα, είτε λόγω αποκόλλησης ινών είτε λόγω ρηγμάτωσης της ρητίνης.

Στην πλαστική περιοχή το φορτίο αυξάνει συνεχώς μέχρι την θραύση, ενώ συμβαίνει συνεχής φθορά του σύνθετου υλικού. Η παραμόρφωση θραύσεως είναι πολύ χαμηλότερη από αυτήν για ένα τυπικό όλκιμο υλικό.

1.3 Κάμψη της δοκού

1.3.1 Ορισμός

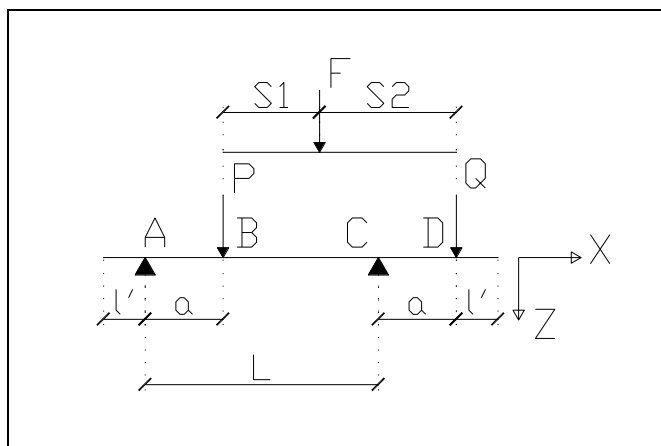
Κάμψη καλείται η εντατική κατάσταση στην οποία βρίσκεται μια δοκός που υποβάλλεται σε εγκάρσια φόρτιση. Για παράδειγμα αν ασκηθεί σε μια αμφιέριστη δοκό ένα εγκάρσιο φορτίο τότε η δοκός παραμορφώνεται κατά την διεύθυνση του επιβαλλόμενου φορτίου και ο άξονάς της θα καμφθεί με αποτέλεσμα να προκύπτει μια θλιβόμενη (άνω) ζώνη και μια εφελκυσόμενη (κάτω) ζώνη [8].

Το φαινόμενο αυτού του είδους καταπόνησης ονομάζεται κάμψη. Στην κάμψη αναπτύσσονται καμπτικές ροπές οι οποίες προκαλούν καμπύλωση της δοκού καθώς και τάσεις εντός του υλικού. Οπότε, κάμψη εννοούμε τόσο τις τάσεις που εμφανίζονται όσο και τις παραμορφώσεις που προκαλούνται, τα λεγόμενα βέλη κάμψης. Στην παρούσα εργασία μελετώνται τόσο οι τάσεις όσο και τα βέλη κάμψεως.

Τα σύνθετα υλικά αποτελούνται από επαλληλία στρώσεων του υλικού ενωμένων μεταξύ τους. Λόγω της μη ύπαρξης κενών μεταξύ των στρωμάτων η μετάβαση από την θλίψη στον εφελκυσμό γίνεται βαθμιαία, επομένως διάφορες ίνες σε ενδιάμεσες θέσεις της διατομής δεν καταπονούνται ούτε σε θλίψη ούτε σε εφελκυσμό αλλά σε διάτμηση η οποία πραγματοποιείται από την ολίσθηση κάθε οριζοντίου στρώματος σε σχέση με τα εκατέρωθέν του. Επομένως, η κάμψη μπορεί να αναλυθεί σε εφελκυσμό, θλίψη καθώς και διάτμηση. Οι ίνες που καταπονούνται μόνο σε διάτμηση ονομάζονται ουδέτερες με το επίπεδο που αποτελούν να ονομάζεται ουδέτερο [9].

1.3.2 Ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων

Στο Σχήμα 1.2 που ακολουθεί παρουσιάζεται η περίπτωση δοκού που υποβάλλεται σε ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων [5].



Σχήμα 1.2

Στα σημεία A και B βρίσκονται οι στηρίξεις, στο σημείο B επιβάλλεται η φόρτιση P και στο σημείο C η φόρτιση Q.

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$P + Q = F \quad (1.1)$$

$$P(s_1 + s_2) - Fs_2 = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{s_2}{s_1} = \lambda \quad (1.3)$$

$$Q(L + \alpha) - PL + P\alpha = 0 \Leftrightarrow P = \frac{L + \alpha}{L - \alpha} Q \quad (1.4)$$

$$\alpha = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} L \quad (1.5)$$

Όπου :

L: η απόσταση μεταξύ των στηρίξεων.

α: η απόσταση μεταξύ στήριξης και σημείου επιβολής φόρτισης.

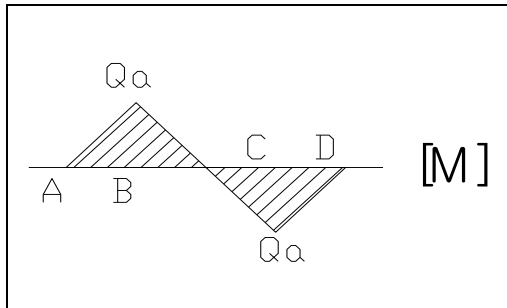
λ: συντελεστής φόρτισης.

Η τάση σε κάθε σημείο της δοκού μπορεί να εκτιμηθεί αναλυτικά με την θεωρία της αντοχής υλικών κατά μια απλουστευμένη προσέγγιση. Οι βασικές παραδοχές είναι οι εξής:

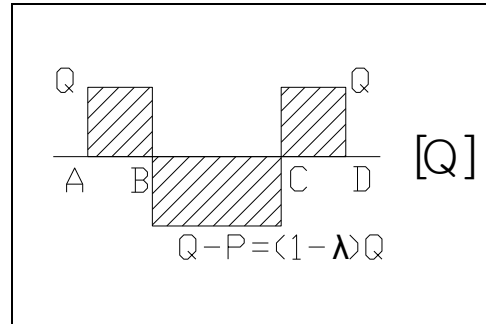
Οι εξωτερικές φορτίσεις υποβάλλονται κατά μήκος γραμμών και όχι πεπερασμένων επιφανειών, για τις ορθές τάσεις ισχύει $\sigma_y = \sigma_z = 0$ και $\sigma_x = E\varepsilon_x$. Επίσης, για τις

διατμητικές τάσεις σε δοκούς μικρού πάχους $\tau_{xy} \ll 0$ (στις επιφάνειες τις δοκού) και η τ_{xz} είναι ανεξάρτητη της y .

Τα διαγράμματα καμπτικών ροπών και διατμητικών δυνάμεων δίνονται παρακάτω στα Σχήματα 1.3 και 1.4 αντιστοίχως.



Σχήμα 1.3



Σχήμα 1.4

Όπως φαίνεται στα Σχήματα 1.3 και 1.4 ισχύουν τα εξής :

Στα τμήματα AB και CD η τέμνουσα δύναμη είναι σταθερή και ισούται με την τιμή του επιβαλλόμενου φορτίου Q. Στο τμήμα BC η τέμνουσα δύναμη είναι σταθερή και ισούται με την τιμή της διαφοράς των επιβαλλόμενων φορτίων Q-P. Η ροπή λαμβάνει την μέγιστη τιμή της στα σημεία B, όπου επιβάλλεται το φορτίο P, και C όπου βρίσκεται η δεύτερη στήριξη.

Θεωρώντας ισότροπο υλικό, από την απλή θεωρία κάμψης η ορθή τάση σ_x λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στα σημεία με την αριθμητικά μέγιστη τιμή της ροπής κάμψεως και είναι [13] :

$$\max \sigma_x = \frac{6F(\lambda - 1)L}{(\lambda + 1)^2 bt^2} \quad (1.6)$$

Όπου :

b: το πλάτος και t το πάχος της δοκού.

Η μέγιστη τιμή της διατμητικής τάσης τ_{xz} παρουσιάζεται στον ουδέτερο άξονα. Η τιμή της εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου λ .

Για $\lambda < 2$ είναι [13] :

$$\max \tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{F}{(1 + \lambda)bt} \quad (1.7)$$

και συναντάται στο τμήμα AB (ή CD) της δοκού.

Για $\lambda > 2$ είναι [13] :

$$\max \tau_{xz} = \frac{3 \left| (1 - \lambda) \right| F}{2 (1 + \lambda) bt} \quad (1.8)$$

και συναντάται στο τμήμα BC της δοκού.

Όπως γίνεται αντιληπτό το αν θα συμβεί καμπτική ή διατμητική αστοχία εξαρτάται από τις κρίσιμες τιμές των σ_x και τ_{xz} , καθώς και από τους λόγους λ και L/t . Αναμένεται για μικρές τιμές του λόγου L/t να έχουμε διατμητική αστοχία, ενώ για μεγάλες τιμές καμπτική αστοχία. Ομοίως, για μεγάλες τιμές του λ αναμένεται διατμητική αστοχία, ενώ για μικρές καμπτική. Επομένως από τον συνδυασμό αυτών των δύο παραμέτρων θα εξαρτηθεί τελικώς ο τύπος αστοχίας.

Παρατηρείται ότι: Για $1 < \lambda < 2$ η διατμητική τάση είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου φόρτισης λ . Επίσης αναμένεται η ορθή τάση να λάβει τη μέγιστη τιμή της για $\lambda = 3$.

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{\sigma_x}{\tau_{xz}} = \frac{4L}{(1 + \lambda)t} \quad (1.9)$$

Θεωρείται ότι η τάση αστοχίας είναι σ_F και τ_F για καμπτική και διατμητική αστοχία αντιστοίχως. Θεωρώντας ελαστική συμπεριφορά και τις μέγιστες τάσεις σ_M και τ_M , υποθέτουμε ότι ο λόγος των τάσεων αυτών για ένα υλικό είναι σταθερός :

$$C = \frac{\sigma_m}{\tau_m} \quad (1.10)$$

Με βάση τα παραπάνω, για λεπτές δοκούς και υποθέτοντας διαδοχικά ότι μία από αυτές τις τιμές ισούται με την τάση αστοχίας ενώ ταυτοχρόνως η άλλη παραμένει μικρότερη από την αντίστοιχη της τάση αστοχίας, προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

Εάν

$$C < \frac{4L}{(\lambda + 1)t} \quad (1.11)$$

θα έχουμε διατμητική αστοχία.

Εάν

$$C > \frac{4L}{(\lambda + 1)t} \quad (1.12)$$

θα έχουμε καμπτική αστοχία.

Επομένως η παράμετρος C μπορεί να εκτιμηθεί υπολογίζοντας τον λόγο $\frac{4L}{(\lambda + 1)t}$.

Σύμφωνα με την θεωρία Bernoulli – Euler το ελαστικό βέλος κάμψης στο σημείο με την μέγιστη ροπή κάμψης υπολογίζεται [10] :

$$\delta_f = \frac{8\lambda(\lambda - 1)^2 FL^3}{E(\lambda + 1)^5 bt^3} \quad (1.13)$$

Το ελαστικό βέλος λόγω διάτμησης στο ίδιο σημείο είναι :

$$\delta_s = \frac{12\lambda(\lambda - 1)FL}{5G(\lambda + 1)^3 bt} \quad (1.14)$$

Ο λόγος του μέτρου διατμήσεως προς το μέτρο ελαστικότητας στα σύνθετα υλικά είναι πολύ χαμηλότερος από ότι στα μέταλλα, για παράδειγμα, με αποτέλεσμα η διατμητική παραμόρφωση να είναι σημαντικότερη σε αυτά.

Το συνολικό βέλος δ_t είναι το άθροισμα των βελών λόγω κάμψης και διάτμησης, δηλαδή :

$$\delta_t = \delta_f + \delta_s = \frac{4\lambda(\lambda - 1)FL}{E(\lambda + 1)^3 bt} \left\{ \frac{2(\lambda - 1)}{E(\lambda + 1)^2} \left(\frac{L}{t} \right)^2 + \frac{3}{5G} \right\} \quad (1.15)$$

Και ο λόγος τους :

$$\frac{\delta_s}{\delta_f} = \frac{3}{10} \left(\frac{E}{G} \right) \left(\frac{t}{L} \right)^2 \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda - 1} \quad (1.16)$$

Παρατηρείται ότι ο λόγος αυτός δεν εξαρτάται μόνο από το λόγο του μέτρου ελαστικότητας προς το μέτρο διατμήσεως και από τον λόγο L/t, όπως στις περιπτώσεις κάμψης τριών σημείων και συμμετρικής τεσσάρων, αλλά και από τον συντελεστή φόρτισης λ. Το μέτρο ελαστικότητας μπορεί να υπολογιστεί εύκολα υποθέτοντας ότι το ολικό βέλος οφείλεται μόνο σε κάμψη, από την σχέση :

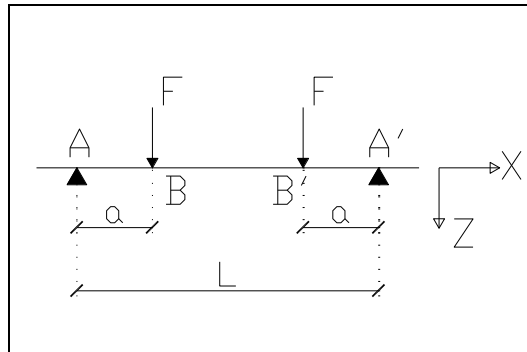
$$E_a = \frac{8\lambda(\lambda - 1)^2 FL^3}{\delta_f (\lambda + 1)^5 bt^3} \quad (1.17)$$

Προκειμένου το υπολογισθέν από την (1.17) να είναι περίπου ίσο με το πραγματικό μέτρο ελαστικότητας, θα πρέπει να ισχύει :

$$\frac{\delta_s}{\delta_f} = 1 \quad (1.18).$$

1.3.3 Κάμψη τεσσάρων σημείων

Στο Σχήμα 1.5 που ακολουθεί παρουσιάζεται η περίπτωση δοκού που υποβάλλεται σε συμμετρική κάμψη τεσσάρων σημείων.



Σχήμα 1.5

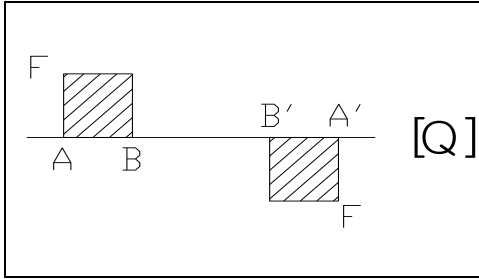
Θεωρείται μια δοκός που φορτίζεται από δύο κατακόρυφα φορτία F σε απόσταση a από τις στηρίξεις αυτής. Στα 4 σημεία (A, A', B, B') ασκούνται ίσες και αντίθετες δυνάμεις έντασης F που προκαλούν στο κεντρικό φάτνωμα καθαρή κάμψη, σταθερής έντασης :

$$M = Fa \quad (1.19)$$

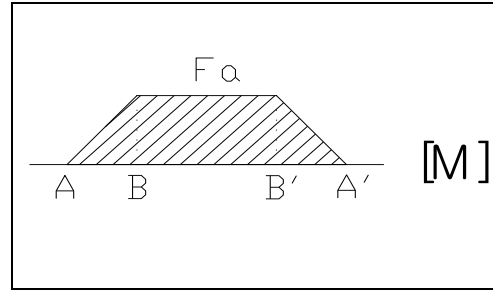
Επίσης, στα φαινόμενα μεταξύ στηρίξεων και σημείων επιβολής φόρτισης επιβάλλεται τέμνουσα δύναμη με σταθερή τιμή :

$$Q = F \quad (1.20)$$

Τα διαγράμματα καμπτικών ροπών και διατμητικών δυνάμεων δίνονται παρακάτω στα Σχήματα 1.6 και 1.7 αντιστοίχως.



Σχήμα 1.6



Σχήμα 1.7

Από την απλή θεωρία κάμψης η ορθή τάση σ_x λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στα σημεία με την αριθμητικά μέγιστη τιμή της ροπής κάμψεως και είναι:

$$\sigma_x = \frac{M}{I} z = 12 \frac{Fa}{bt^3} z \quad (1.21)$$

όπου b το πλάτος και t το πάχος της δοκού.

Προφανώς στις ακραίες ίνες τις διατομής για $z = t/2$ η μέγιστη ορθή τάση υπολογίζεται :

$$\max \sigma_x = 6 \frac{Fa}{bt^2} \quad (1.22)$$

Η μέγιστη τιμή της διατμητικής τάσης τ_{xz} συναντάται στον ουδέτερο άξονα στα σημεία με την αριθμητικά μέγιστη τιμή της τέμνουσας δύναμης. Για πρισματική δοκό με πλήρη συμμετρική και ορθογωνική διατομή υπολογίζεται :

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y(z)}{I b(z)} = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{bt} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \quad (1.23)$$

όπου S η στατική ροπή.

Η μέγιστη τιμή που λαμβάνει, λοιπόν, είναι:

$$\max \tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{F}{bt} \quad (1.24)$$

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{\max \sigma_x}{\max \tau_{xz}} = \frac{4a}{t} \quad (1.25)$$

Θεωρείται ότι η τάση αστοχίας είναι σ_F και τ_F για καμπτική και διατμητική αστοχία αντιστοίχως. Θεωρώντας ελαστική συμπεριφορά και τις μέγιστες τάσεις σ_M και τ_M , υποθέτουμε ότι ο λόγος των τάσεων αυτών για ένα υλικό στη γραμμική ελαστικότητα είναι σταθερός :

$$C' = \frac{\sigma_m}{\tau_m} \quad (1.26)$$

Με βάση τα παραπάνω και υποθέτοντας διαδοχικά ότι μία από αυτές τις τιμές ισούται με την τάση αστοχίας ενώ ταυτοχρόνως η άλλη παραμένει μικρότερη από την αντίστοιχη της τάση αστοχίας, προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

Θα έχουμε διατμητική αστοχία εάν :

$$C' < \frac{4\alpha}{t} \quad (1.27)$$

Θα έχουμε καμπτική αστοχία εάν

$$C' > \frac{4\alpha}{t} \quad (1.28)$$

Επομένως η παράμετρος C' μπορεί να εκτιμηθεί υπολογίζοντας τον λόγο $\frac{4\alpha}{t}$.

Η βύθιση σε κάποιο σημείο της δοκού υπολογίζεται:

$$E I w(x) = -F\alpha \frac{x^2}{2} + F \langle x - \alpha \rangle \frac{3}{6} + \frac{F\alpha L}{2} - F x \frac{\left(\frac{L}{2} - \alpha\right)^2}{2} \quad (1.29)$$

Όπου : L το μήκος μεταξύ των στηρίξεων και α η απόσταση μεταξύ στήριξης και σημείου επιβολής φόρτισης.

1.4 Προς Μελέτη Σύνθετα Υλικά

Στην παρούσα εργασία θα γίνει μοντελοποίηση δύο διαφορετικών σύνθετων υλικών. Στην αρχή θα πραγματοποιηθεί μοντελοποίηση για σύνθετο υλικό με ίνες τυχούσας διευθύνσεως ενώ στην συνέχεια για σύνθετο υλικό με ίνες μιας διευθύνσεως. Στην δεύτερη περίπτωση θα γίνει αναλυτική μελέτη για κάθε διεύθυνση ινών. Ακολούθως παρουσιάζονται οι πίνακες με τα χαρακτηριστικά κάθε υλικού που χρησιμοποιήθηκε. Στον πίνακα 1.3 παρουσιάζονται υλικά για σύνθετο με ίνες τυχούσας διευθύνσεως ενώ στον πίνακα 1.4 υλικά για ίνες μιας διευθύνσεως.

Properties	Symbol	Units	Glass/Epoxy	
			Lam D	Lam T2
Mean elastic modulus	E_m	GPa	12.74	8.54
Mean Poisson's ratio	V_m		0.261	0.309
Mean Shear modulus	G_m	GPa	0.69	0.7
Flexure stress at failure	σ_F	MPa	126.3	97.3
Flexure stress at failure	τ_F	MPa	34.3	45.9

Πίνακας 1.3

Properties	Symbol	Units	Glass/Epoxy	
			Lam D	Lam T2
Fiber volume fraction	V_f		0.45	0.65
Longitudinal elastic modulus	E_1	GPa	38.6	49.73
Transverse elastic modulus	E_2	GPa	8.27	17.22
Major Poisson's ratio	V_{12}		0.26	0.249
Shear modulus	G_{12}	GPa	4.14	6.45
Ultimate longitudinal tensile strength	$(\sigma_1^T)_{ult}$	MPa	1062	1241
Ultimate longitudinal compressive strength	$(\sigma_1^C)_{ult}$	MPa	610	730
Ultimate transverse tensile strength	$(\sigma_2^T)_{ult}$	MPa	31	64
Ultimate transverse compressive strength	$(\sigma_2^C)_{ult}$	MPa	118	124
Ultimate in-plane shear strength	$(\tau_{12})_{ult}$	MPa	72	80

Πίνακας 1.4

1.5 Αντικειμενικός Σκοπός της Εργασίας

Η κατανόηση σε βάθος, της μηχανικής συμπεριφοράς των κατασκευών με σύνθετα υλικά είναι βασικής σημασίας, και ως εκ τούτου ένας σημαντικός αριθμός μελετητών και επιστημόνων έχουν ασχοληθεί με το συγκεκριμένο φαινόμενο. Ιδιαίτερη σημασία παρουσιάζουν τα σύνθετα υλικά με ίνες είτε πολλών διευθύνσεων είτε μιας διεύθυνσεως. Στην παρούσα Μεταπτυχιακή εργασία θα επικεντρωθούμε κυρίως σε σύνθετα με ίνες μιας διεύθυνσεως και συγκεκριμένα θα λύσουμε το πρόβλημα της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων αναλυτικά με την μέθοδο της Θεωρίας Ελαστικότητας και υπολογιστικά με την χρήση των Πεπερασμένων Στοιχείων.

Η μελέτη η οποία θα γίνει θα αφορά κυρίως στο πως επηρεάζονται το βέλος κάμψης και οι τάσεις όταν μεταβάλλονται διάφοροι παράμετροι του προβλήματος, όπως γεωμετρικά χαρακτηριστικά, το σημείο άσκησης του φορτίου καθώς και η διεύθυνση των ινών του σύνθετου.

Στα πλαίσια της συγκεκριμένης διπλωματικής δεν λαμβάνει μέρος της έρευνας κάποιο πείραμα, επομένως τα πειραματικά δεδομένα είναι υποτιπώδη και ουσιαστικά η έρευνα εστιάζεται στις διαφορές που παρατηρούμε στην χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας και των Πεπερασμένων Στοιχείων.

Στην συνέχεια ξεκινάει το ερευνητικό κομμάτι της διπλωματικής όπου γίνεται λύση των διαφορικών εξισώσεων για τον τομέα της Θεωρίας Ελαστικότητας και της μοντελοποίησης για την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΜΕ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

2.1 Αντικείμενο της ελαστικότητας.

Η ελαστικότητα είναι μια ιδιαίτερη μέθοδος η οποία πραγματεύεται τον καθορισμό των τάσεων, των τροπών καθώς και την κατανομή των μετατοπίσεων ενός στερεού ελαστικού σώματος, όταν βρίσκεται απο την επήρεια εξωτερικών δυνάμεων. Ακολουθώντας την σύννητη υπόθεση της γραμμικής θεωρίας και της θεωρίας των μικρών μετατοπίσεων, διατυπώθηκε ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο επιτρέπει την επίλυση προβλημάτων τα οποία έχουν εφαρμογή σε πολλά πεδία των μηχανικών και επιστημόνων.

- Εφαρμογές Πολιτικού μηχανικού περιλαμβάνουν σημαντικές κατανομές των τάσεων και τις αποκλίσεις για κατασκευές όπως ράβδους, δοκούς , κελύφη και πλαίσια. Επιπρόσθετα, εφαρμογές βρίσκονται και στο πεδίο της γαιομηχανικής όπου περιλαμβάνουν τον υπολογισμό των τάσεων σε βραχώδη έδαφος, άσφαλτο ή σκυρόδεμα.
- Εφαρμογές Μηχανολόγου μηχανικού περιλαμβάνουν ένα μεγάλο αριθμό προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν με την θεωρία της ελαστικότητας που έχουν ως στόχο τον σχεδιασμό και την ανάλυση των επιμέρους στοιχείων μηχανών. Κάποιες από αυτές τις εφαρμογές περιλαμβάνουν γενική τασική ανάλυση, υπολογισμό τάσεων λόγω επαφών, υπολογισμό θερμικών τάσεων, θραυστομηχανική και κόπωση.
- Εφαρμογές της επιστήμης των υλικών όπου χρησιμοποιείται η ελαστικότητα για να καθοριστεί το πεδίο των τάσεων σε κρυσταλλικές δομές, ανάμεσα σε δομικές ατέλειες και σε υλικά με μικροδομές.
- Εφαρμογές στον τομέα της αεροναυπηγικής και αεροδιαστημικής περιλαμβάνουν υπολογισμό των τάσεων, θραύσης, κόπωσης και ανάλυσης των δομών.

Η θεωρία της ελαστικότητας καθιέρωσε ένα μαθηματικό μοντέλο για το πρόβλημα του παραμορφώσιμου στερεού και αυτό απαιτεί ένα μαθηματικό υπόβαθρο για να γίνει κατανοητή η διαδικασία της επίλυσης [11]. Οι συνήθειες μερικές διαφορικές εξισώσεις έχουν αναπτυχθεί χρησιμοποιώντας ως βάση την αρχή του συνεχούς μέσου και διατυπώνοντας τα μεγέθη σε μορφή διανυσμάτων και ταυσιτών. Οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται για να λύσουν αυτό το σύστημα εξισώσεων είναι οι σειρές Fourier, μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών, μιγαδικές συναρτήσεις, θεωρία του δυναμικού, μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων κτλ. Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα γίνει

επίλυση του προβλήματος της ασύμμετρης κάμψεως με την μέθοδο του δυναμικού και των πεπερασμένων στοιχείων.

2.1.1 Επίπεδη Θεωρία Ελαστικότητας

Εξαιτίας της πολυπλοκότητας του πεδίου εξισώσεων της ελαστικότητας, οι λύσεις κλειστής μορφής σε πλήρη τρισδιάστατα προβλήματα είναι πολύ δύσκολο να πραγματοποιηθούν. Για τον λόγο αυτό οι περισσότερες λύσεις έχουν αναπτυχθεί για μειωμένης δυσκολίας προβλήματα που περιλαμβάνουν αξονοσυμμετρία ή δισδιάστατη μορφή για να απλοποιηθεί η πρακτική όψη της μοντελοποίησης και της λύσης. Είναι επιθυμητό να γίνει μια εξέταση και μια μοντελοποίηση σε ένα πρόβλημα που μπορεί να θεωρηθεί δύο διαστάσεων. Η αρχική μοντελοποίηση θα έχει αποτελέσματα για ένα δισδιάστατο πρόβλημα, δηλαδή στο επίπεδο xy χρησιμοποιώντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες. Εξαιτίας του ότι όλα τα αληθινά προβλήματα της ελαστικότητας είναι τρισδιάστατα, οι θεωρίες και οι λύσεις που εξάγονται είναι προσεγγιστικές. Η φύση και η ακρίβεια της προσέγγισης εξαρτάται από το πρόβλημα και την γεωμετρία της φόρτισης. Υπάρχουν δύο θεωρίες οι οποίες, ουσιαστικά, επιλύουν επίπεδα προβλήματα και οδηγούν σε παρόμοια πεδία λύσεων και εξισώσεων. Οι δύο θεωρίες μπορούν να μειωθούν σε μία διαφορική εξίσωση με μία μόνο άγνωστη τασική συνάρτηση. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται τασική συνάρτηση του Airy και είναι η μέθοδος που ακολουθήθηκε ώστε να λυθεί η διαφορική εξίσωση [11].

2.1.2 Τασική συνάρτηση του Airy

Μια αριθμητική επίλυση για το πρόβλημα της επίπεδης παραμόρφωσης και επίπεδης καταπόνησης μπορεί να καθοριστεί χρησιμοποιώντας μια πρακτική τεχνική της τασικής συνάρτησης. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί την τασική συνάρτηση του Airy και μειώνει την γενική διατύπωση του σε μία κύρια εξίσωση με μόνο έναν άγνωστο. Τα αποτελέσματα της διαφορικής εξίσωσης είναι πλέον ορατά μετά από μερικές μαθηματικές εξισώσεις και με αυτό τον τρόπο πολλά προβλήματα μπορούν να έχουν αναλυτική λύση. Η διατύπωση της τασικής συνάρτησης είναι βασισμένη στη γενική ιδέα ότι αναπτύσσουμε μια αναπαράσταση του τασικού πεδίου όπου ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας και μας οδηγεί στην διαφορική εξίσωση από τις εξισώσεις του συμβιβαστού [11]. Αυτή η μέθοδος ξεκινάει από τις εξισώσεις ισορροπίας για ένα επίπεδο πρόβλημα και θεωρούμε ότι υπάρχουν βαρυτικές δυνάμεις και είναι παράγωγοι ενός δυναμικού έτσι ώστε:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.2)$$

Αυτή η υπόθεση δεν είναι καθόλου περιοριστική καθώς πολλές αδρανειακές δυνάμεις υπάρχουν στην εφαρμογή όπως για παράδειγμα οι βαρυτικές δυνάμεις οι οποίες ανήκουν σε αυτή την κατηγορία. Από την ανωτέρω μορφή οι επίπεδες εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\frac{\partial(\sigma_x - V)}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y - V)}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

Είναι φανερό ότι αυτές οι εξισώσεις μπορούν ικανοποιηθούν πανομοιότυπα διαλέγοντας μια αναπαράσταση όπως αυτή:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + V \quad (2.5)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V \quad (2.6)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (2.7)$$

Όπου $\varphi = \varphi(x, y)$ είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση η οποία ονομάζεται τασική συνάρτηση του Airy. Με τις εξισώσεις ισορροπίας να ικανοποιούνται, δίνουμε τώρα έμφαση να παραμείνει το πεδίο των εξισώσεων στην μορφή των τάσεων, αλλά και οι σχέσεις των εξισώσεων του συμβιβαστού σε όρους τάσεων. Έτσι οι εξισώσεις συμβιβαστού με όρους τάσεων θα είναι:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = -(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.9)$$

Το οποίο μπορεί να γραφτεί ως:

$$\nabla^4 \varphi = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \nabla^2 V \quad (2.10)$$

$$\nabla^4 \varphi = -(1-\nu) \nabla^2 V \quad (2.11)$$

Εάν τώρα θεωρήσουμε αμελητέες τις βαρυτικές δυνάμεις, οι δύο σχέσεις ταυτίζονται και έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \nabla^4 \varphi \quad (2.12)$$

Αυτή η σχέση ονομάζεται διαρμονική εξίσωση και η επίλυσή της είναι γνωστή ως διαρμονική συνάρτηση. Με αυτό τον τρόπο το επίπεδο πρόβλημα έχει μειωθεί σε μια και μόνο διαφορική εξίσωση με όρους της τασικής συνάρτησης του Airy. Αυτή η συνάρτηση καθορίζει μια δισδιάστατη περιοχή με συγκεκριμένα όρια και οριακές συνθήκες. Οι οριακές συνθήκες είναι απαραίτητες για να ολοκληρωθεί η επίλυση του προβλήματος. Οι οριακές συνθήκες θα δώσουν μια συγκεκριμένη μορφή στις δεύτερες παραγώγους της τασικής συνάρτησης. Ολοκληρώνοντας, στην συνέχεια, τις σχέσεις και αντικαθιστώντας τις στις εξισώσεις εντατικής κατάστασης, είναι εύκολο να βρεθούν οι τροπές και μετέπειτα οι μετατοπίσεις.

Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση των μηδενικών βαρυτικών δυνάμεων η διαφορική εξίσωση της τασικής συνάρτησης του Airy είναι ανεξάρτητη από τις ελαστικές σταθερές και ίδια τόσο για την επίπεδη παραμόρφωση όσο για την επίπεδη ένταση. Για τον λόγο αυτόν, εάν η περιοχή είναι απλά συνδεδεμένη και οι οριακές συνθήκες ορίζουν την μετάδοση, τότε το τασικό πεδίο για επίπεδη τάση και επίπεδη παραμόρφωση θα είναι ταυτόσημο και ανεξάρτητο από τις ελαστικές σταθερές. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι θα έχουν τις ίδιες τροπές και τις ίδιες μετατοπίσεις καθώς υπάγονται σε διαφορετικές μορφές του νόμου του Hooke. Προβλήματα με πολλαπλές

περιοχές σύνδεσης ή οριακές συνθήκες μετατόπισης φέρουν επιπλέον σχέσεις μετατοπίσεων στην διατύπωση της λύσης και έτσι δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το τασικό πεδίο θα είναι το ίδιο και θα παραμείνει ανεξάρτητο από τις ελαστικές σταθερές [11].

2.1.3 Επίλυση διαφορικής εξίσωσης με την χρήση πολυωνύμου

Θα ξεκινήσουμε την επίλυση του δισδιάστατου προβλήματος ελαστικότητας χωρίς βαρυτικές δυνάμεις και θεωρώντας ότι βρισκόμαστε σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Όταν λαμβάνουμε υπόψη τις οριακές συνθήκες, το καρτεσιανό σύστημα είναι πολύ χρήσιμο για τετραγωνικές διατομές. Η μέθοδος είναι βασισμένη στην αντίστροφη διαδικασία όπου υποθέτουμε την λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \nabla^4 \varphi = 0 \quad (2.13)$$

και στην συνέχεια προσπαθούμε να καθορίσουμε ποιο πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με το συγκεκριμένο πολυώνυμο [11]. Η υπόθεση της μορφής της λύσης για την τασική συνάρτηση του Airy είναι γενικά ένα πολυώνυμο σε επίπεδες συντεταγμένες που είναι πολύ βολικό να εκφράζεται με δυναμικές σειρές:

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} x^m y^n \quad (2.14)$$

Όπου το A_{mn} είναι σταθεροί συντελεστές που πρέπει να καθοριστούν. Χρησιμοποιώντας την τασική συνάρτηση μπορούμε να υπολογίσουμε τις τάσεις για μηδενικές βαρυτικές δυνάμεις:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + V \quad (2.15)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V \quad (2.16)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (2.17)$$

Σημειώνεται ότι οι τρεις χαμηλότερου βαθμού όροι της τασικής συνάρτησης με $m + n \leq 1$ δεν περιέχονται στις τάσεις και για τον λόγο αυτό παραλείπονται. Είναι εμφανές ότι οι δευτέρου βαθμού όροι παράγουν ένα σταθερό τασικό πεδίο και οι όροι τρίτου βαθμού δίνουν μια γραμμική κατανομή των τάσεων. Με τον ίδιο τρόπο για όρους με μεγαλύτερο βαθμό αναμένουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα όσον αφορά στο τασικό πεδίο.

Όροι με $m + n \leq 3$ αυτόματα ικανοποιούν την διαρμονική εξίσωση για κάθε περίπτωση των σταθερών A_{mn} . Ωστόσο για υψηλότερους όρους όπου $m + n > 3$ οι σταθερές A_{mn} πρέπει να συσχετίζονται ώστε να ικανοποιούν την διαρμονική εξίσωση. Για παράδειγμα ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού με όρους $A_{40}x^4 + A_{22}x^2y^2 + A_{04}y^4$ δεν θα ικανοποιεί την διαρμονική εξίσωση εάν δεν ισχύει $3A_{40} + A_{22} + 3A_{04} = 0$. Αυτή η συνθήκη ορίζει ότι η μια σταθερά αποτελείται από άλλες δύο αντίστοιχα. Έτσι έχουμε δύο σταθερές που θα καθοριστούν από τις οριακές συνθήκες.

Λαμβάνοντας υπόψη την γενική περίπτωση και αντικαθιστώντας τις σειρές στην διαφορική εξίσωση οδηγούμαστε στα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=4}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m(m-1)(m-2)(m-3)A_{mn}x^{m-4}y^n + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} m(m-1)n(n-1)A_{mn}x^{m-4}y^{n-2} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)A_{mn}x^m y^{n-4} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Συλλέγοντας τις δυνάμεις των x και y , η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=3}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} [(m+2)(m+1)m(m-1)A_{m+2,n-2} + 2m(m-1)n(n-1)A_{mn} \\ & + (n+2)(n+1)n(n-1)A_{m-2,n+2}]x^{m-2}y^{n-2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Για τον λόγο ότι αυτή η σχέση πρέπει να ικανοποιείται για όλες τις τιμές των x και y , οι συντελεστές στις αγκύλες πρέπει να εξαφανιστούν, ώστε να δώσει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$(m + 2)(m + 1)m(m - 1)A_{m-2,n-2} + 2m(m - 1)n(n - 1)A_{mn} + (n + 2)(n + 1)n(n - 1)A_{m-2,n+2} = 0 \quad (2.20)$$

Για κάθε ζευγάρι m, n της ανωτέρω σχέσης είναι η γενική μορφή που πρέπει να ικανοποιηθεί για να είμαστε σίγουροι ότι το πολυώνυμο που βρήκαμε είναι διαρμονικό. Εξαιτίας του ότι αυτή η μέθοδος παράγει πολυωνυμικές κατανομές τάσεων δεν περιμένουμε ότι αυτό το σχέδιο ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες. Ωστόσο, αυτός ο περιορισμός μπορεί να παρακαμφτεί τροποποιώντας τις οριακές συνθήκες και χρησιμοποιώντας την αρχή του Saint-Venant [11]. Αυτό επιτυγχάνεται αντικαθιστώντας μια περίπλοκη μη πολυωνυμική οριακή συνθήκη με μια αντίστοιχη πολυωνυμική συνθήκη. Η επίλυση του τροποποιημένου προβλήματος θα είναι ακριβής στα επαρκώς απομακρυσμένα σημεία σε σύγκριση με την οριακή συνθήκη που έγινε η παραδοχή. Συνήθως αυτή η μέθοδος έχει εφαρμογή σε προβλήματα με τετραγωνική διατομή όπου η μία διάσταση έχει πολύ μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με τις άλλες. Αυτό μπορεί να περιλαμβάνει μια ποικιλία από προβλήματα που περιλαμβάνουν δοκούς.

2.2 Ανισότροπη Ελαστικότητα

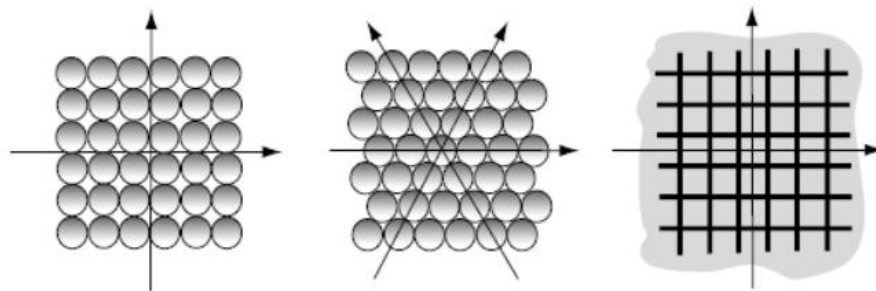
2.2.1 Γενικά

Είναι πλέον γνωστό και κοινώς αποδεκτό ότι η παραμορφωτική συμπεριφορά για πολλά υλικά, εξαρτάται από την διεύθυνση στην οποία καταπονείται. Από αυτό προκύπτει ότι η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων που μας δίνει ένα υλικό στη μία διεύθυνση θα διαφέρει εάν εφαρμόσουμε μια δύναμη σε μία άλλη διεύθυνση. Η συμπεριφορά αυτή των υλικών αναφέρεται με τον όρο ανισοτροπία και χρησιμοποιείται για να περιγραφεί αυτή η συμπεριφορά των υλικών. Τα πρώτα στερεά που χαρακτηρίστηκαν ανισότροπα είναι το ξύλο και τα κρυσταλικά στερεά. Σήμερα είναι ευρέως διαδεδομένα τα σύνθετα υλικά τα οποία που έχουν φέρει πολλούς συνδυασμούς ίνας και μήτρας και έχουν τις περισσότερες φορές ανισοτροπικές ιδιότητες. Η γνώση της παραμόρφωσης και της κατανομής των τάσεων είναι πολύ σημαντική για την κατάλληλη χρήση και εφαρμογή υλικών υψηλών επιδόσεων σε κατασκευές. Η προηγούμενη αναφορά για την σχέση τάσεων παραμορφώσεων για γραμμικά ομογενή ισοτροπικά θα τροποποιηθεί και θα μας

δώσει τις αντίστοιχες ανιστροπικές σχέσεις. Σημαντική προσφορά της μελέτης και μοντελοποίησης των ανισότροπων υλικών ήταν του Lekhnitski [13] της οποίας θα κάνουμε στην συνέχεια χρήση της διαφορικής του εξίσωσης.

2.2.2 Βασική έννοια

Η διαφορετική συμπεριφορά στην κατεύθυνση που συναντάται στα ανισότροπα στερεά σώματα είναι απόρροια πρακτικά της μικροδομής που παρατηρείται μέσα στο υλικό. Το ισοτροπικό μοντέλο δεν έχει αυτή την συμπεριφορά και επομένως συμπεριφέρεται το ίδιο σε όλες τις κατευθύνσεις του. Συνήθως τα υλικά που μας ενδιαφέρουν παρουσιάζουν ένα είδος συμμετρίας που αφορά τις δύο από τις τρεις κατευθύνσεις του. Τα υλικά αυτά τα ονομάζουμε ορθότροπα και είναι και τα υλικά που θα μας απασχολήσουν στην παρούσα μελέτη. Μπορούμε να καταλάβουμε ποιοτικά αυτή την ιδέα από μερικές δισδιάστατες περιπτώσεις που εμφανίζονται στην επόμενη εικόνα. Στην εικόνα παρουσιάζονται ιδανικές εσωτερικές μικροδομές από δυο κρυσταλλικά στερεά και από ένα ινώδες σύνθετο υλικό.



Εικόνα 2. 1
Τα βέλη δείχνουν την κατεύθυνση της συμμετρίας του υλικού
α) Απλός κυβικός κρύσταλλος
β) εξάγωνος κρύσταλλος
γ) ινώδες σύνθετο υλικό.

Οι δύο κρυσταλλικές δομές είναι έτσι κατανομημένες ώστε να οδηγούν στην ιδανική περίπτωση όπου έχουν κατευθύνσεις όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ινώδες σύνθετο υλικό έχει ίνες οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους και παρέχει μια ιδανική συμπεριφορά στο σχεδιασμό των κατευθύνσεων. Πολλές άλλες διαμορφώσεις και συμμετρίες υπάρχουν και για πιο σύνθετες μικροδομές και μερικές ακολουθούν το κυλινδρικό σύστημα αναφοράς όπως είναι το ξύλο. Αυτές οι συμμετρίες οδηγούν σε μείωση της πολυπλοκότητας των τάσεων παραμορφώσεων και της καταστατικής εξίσωσης [11]. Σε γενικές γραμμές πλέον ο νόμος του Hooke μας δίνει:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} \quad (2.21)$$

Ο τανυστής τετάρτης τάξης C_{ijkl} περιέχει όλες τις ελαστικές σταθερές και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες λόγω συμμετρίας:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (2.22)$$

Οι πρώτες δύο ισότητες από την ανωτέρα σχέση προέρχονται από την συμμετρία των τανυστών τάσεων και παραμορφώσεων, ενώ η τελική σχέση προκύπτει από την συνάρτηση ενέργειας. Ο τανυστής C_{ijkl} μειώνεται από τις 81 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές στις 21 για την γενική περίπτωση. Εμείς θα θεωρήσουμε ότι το υλικό είναι ομογενές και για τον λόγο αυτό το υλικό είναι ανεξάρτητο από το σημείο που θα διαλέξουμε. Μπορούμε να αντιστρέψουμε την σχέση (2.21) και να προκύψουν εξής οι παραμορφώσεις σε όρους τάσεων:

$$e_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (2.23)$$

Όπου S_{ijkl} είναι ένας ελαστικός συμμορφωμένος τανυστής με ταυτόσημες ιδιότητες όπως αυτές του τανυστή C_{ijkl} . Εξαιτίας των προηγούμενων συμμετριών οι σχέσεις των τάσεων παραμορφώσεων περιέχουν πολλούς περιττούς όρους και εξισώσεις. Με το σκεπτικό να αποφύγουμε αυτό, έχει αναπτυχθεί ένας πιο βολικός τρόπος διατύπωσης, όπως φαίνεται στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{16} \\ C_{21} & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ C_{61} & \cdot & \dots & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ 2e_{yz} \\ 2e_{zx} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Ή με μια άλλη διατύπωση:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}e_{kl} \quad (2.25)$$

Όπου σ_i και e_j είναι ορισμένες από την σχέση (2.21) και (2.22). Σημειώνεται ότι η συμμετρία απορρέει από την ενέργεια παραμόρφωσης και ο πίνακας γίνεται 6×6 και συμμετρικός. Άρα ισχύει $C_{ij}=C_{ji}$ και άρα υπάρχουν πάλι 21 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές. Τα δύο μητρώα δυσκαμψίας σχετίζονται με την ακόλουθη έκφραση:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ \cdot & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ \cdot & \cdot & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{3131} & C_{3112} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Το ίδιο μπορεί να γίνει και για τον συμμορφωμένο πίνακα S_{ij} και να οριστεί ως:

$$e_i = S_{ij}\sigma_j \quad (2.27)$$

2.2.3 Διαφορική εξίσωση για ανισότροπο υλικό στο επίπεδο

Κατά αντιστοιχία με την επίπεδη παραμόρφωση και επίπεδη ένταση για ισότροπο υλικό, έχουμε εξισώσεις για ανισότροπο υλικό τις οποίες τις έχει υπολογίσει ο Lekhnitski [13]. Αυτές οι εξισώσεις σύμφωνα με τον Lekhnitskii είναι:

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} \quad (2.28)$$

$$\varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} \quad (2.29)$$

$$\gamma_{xy} = a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy} \quad (2.30)$$

Όπου τα a_{ij} είναι οι παράμετροι του πίνακα συμμόρφωσης. Τα στοιχεία αυτού του πίνακα είναι:

$$a_{11} = S_{11} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \sin^4 \theta \quad (2.31)$$

$$a_{12} = S_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (2.32)$$

$$a_{22} = S_{11} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \cos^4 \theta \quad (2.33)$$

$$a_{16} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \quad (2.34)$$

$$a_{26} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \quad (2.35)$$

$$a_{66} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta - S_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \quad (2.36)$$

Επιπλέον οι τροπές δίνονται ως γνωστών ως:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = a_{11} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + a_{12} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + a_{16} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = a_{12} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + a_{26} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = a_{16} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + a_{26} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} + a_{66} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.40)$$

Στην συνέχεια εάν αντικατίστησουμε τις σχέσεις (2.38) έως (2.40) στην (2.37) και τις τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} με τις τις σχέσεις (2.5), (2.6) και (2.7) αντίστοιχα. Τότε καταλήγουμε

στην αντίστοιχη διαφορική εξίσωση του Lekhnitskii, η οποία αφορά ορθότροπο υλικό σε επίπεδη εντατική κατάσταση:

$$a_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \quad (2.41)$$

Με την χρήση των ανωτέρω εξισώσεων μπορεί να γίνει η επίλυση γνωστών επίπεδων προβλημάτων. Στην παρούσα διπλωματική θα λύσουμε το πρόβλημα κάμψης της δοκού με τρία και τέσσερα σημεία.

2.3 Επίλυση της κάμψης τριών σημείων με χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει λύση του προβλήματος κάμψης τριών σημείων με την μέθοδο της Θεωρίας της Ελαστικότητας. Επισημαίνεται ότι η επίλυση αυτή έχει πραγματοποιηθεί και από τον Esendemir [15] όπου έχουμε εξάγει τα ίδια αποτελέσματα όπως φαίνονται στην συνέχεια.

2.3.1 Επιλογή πουωνύμου ως τασική συνάρτηση

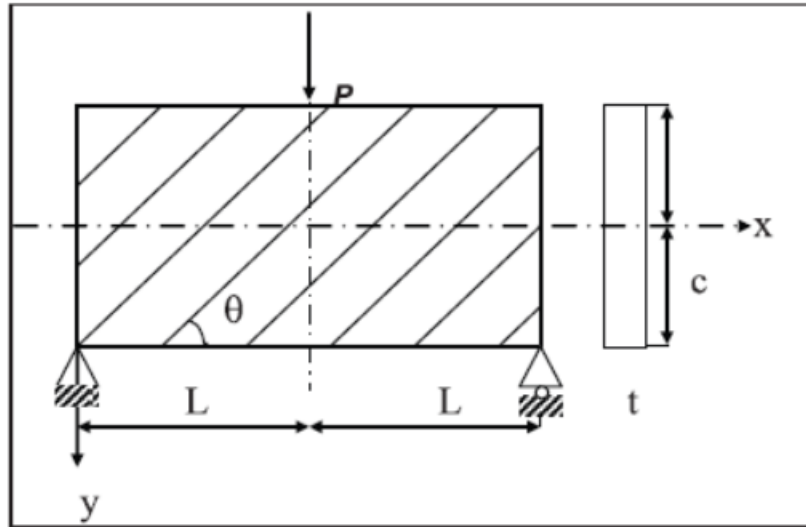
Μετά από αρκετές απόπειρες και διερευνήσεις καταλήξαμε ότι το πολύωνυμο το οποίο είναι υποψήφιο για να λύσουμε το πρόβλημα κάμψης τριών σημείων και να είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι ένα άθροισμα πολυωνύμων τρίτου και τετάρτου βαθμού. Για να βρεθεί η τασική συνάρτηση θεωρούμε λοιπόν αυθαίρετα το ακόλουθο πολυώνυμο:

$$F = Ax^4 + Bx^3y + \Gamma x^2y^2 + \Delta x y^3 + Ey^4 + Zx^3 + Hx^2y + \Theta x y^2 + Iy^3 \quad (2.42)$$

Επομένως στόχος είναι να βρούμε του συντελεστές που είναι με ελληνικά κεφαλαία γράμματα με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση και τις οριακές συνθήκες.

2.3.2 Οριακές συνθήκες και Τασική συνάρτηση κάμψης τριών σημείων

Όταν αναφερόμαστε στην κάμψη τριών σημείων εννοούμε μία σύνθετη δοκό που είναι στηριγμένη στα δύο άκρα με μια στήριξη και μία κύλιση. Ενώ στο κεντρικό της σημείο εφαρμόζεται μια δύναμη. Όπως ακριβώς φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Εικόνα 2. 2
Σχηματική απεικόνιση κάμψης τριών σημείων

Επομένως οι οριακές συνθήκες που έχει αυτό το πρόβλημα είναι:

$$\sigma_y = 0 \text{ στο } y = \pm c \quad (2.43)$$

$$\tau_{xy} = 0 \text{ στο } y = \pm c \quad (2.44)$$

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} t dy = \frac{P}{2} \text{ στο } x = 0 \quad (2.45)$$

$$\int_{-c}^c \sigma_x t dy = 0 \text{ στο } x = 0 \quad (2.46)$$

$$\int_{-c}^c \sigma_x t y dy = 0 \text{ στο } x = 0 \quad (2.47)$$

Άρα λύνοντας το σύστημα υπολογίζουμε όλους τους συντελεστές της τασικής συνάρτησης και προκύπτει η επόμενη τασική συνάρτηση [14]:

$$F = \frac{P}{2L} \left[\frac{xy^3}{6} - \frac{h^2xy}{8} - \frac{a_{16}}{24a_{11}} (h^2y^2 - 2y^4) \right] \quad (2.48)$$

Όπου

$$h = 2c \quad (2.49)$$

$$n = \frac{a_{16}}{a_{11}} \quad (2.50)$$

Έαν αντικαταστήσουμε τώρα στην γνωστή σχέση τότε θα προκύψουν οι τάσεις [15]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (2.51)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (2.52)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (2.53)$$

$$\sigma_x = \frac{P}{2L} \left[xy - n \left(\frac{c^2}{3} - y^2 \right) \right] \quad (2.54)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (2.55)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{4L} (y^2 - c^2) \quad (2.56)$$

2.3.3 Βέλος λόγω κάμψης για 3PB

Έχοντας υπολογίσει τις τάσεις μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις κάθετες και οριζόντιες μετατοπίσεις λόγω κάμψης, εάν αντικαταστήσουμε τις τάσεις στην εξίσωση (2.28) και στην εξίσωση (2.29) και στην συνέχεια ολοκληρώσουμε. Τότε προκύπτει:

$$u = \frac{3P}{4tc^3} a_{11} \left(\frac{x^2y}{2} + ry^2x - \frac{rc^2x}{3} \right) + \frac{3P}{8tc^3} a_{16} (c^2x - y^2x) + f(y) \quad (2.57)$$

$$v_{flexure} = \frac{3P}{4tc^3} a_{12} \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{ry^3}{3} - \frac{rc^2y}{3} \right) + \frac{3P}{8tc^3} a_{26} \left(c^2y - \frac{y^3}{3} \right) + g(x) \quad (2.58)$$

Από τις ανωτέρω εξισώσεις βλέπουμε ότι έχουμε δύο αγνώστους το $f(y)$ και $g(x)$. Καταλαβαίνουμε ότι για να βρούμε το βέλος λόγω κάμψης τότε πρέπει να υπολογίσουμε το $g(x)$. Για να γίνει αυτό πρέπει να εξισώσουμε την σχέση (2.30) με την σχέση (2.39). Τότε προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{3P}{4tc^3} a_{16} \left(xy + ry^2 - \frac{rc^2}{3} + xy \right) + \frac{3P}{8tc^3} a_{66} (c^2 - y^2) - \frac{3P}{4tc^3} a_{11} \left(\frac{x^2}{2} + 2ryx \right) \\ - \frac{3P}{4tc^3} a_{12} \left(\frac{y^2}{2} \right) - g'(x) + f'(y) = 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Εξαιτίας του ότι η εξίσωση πρέπει να ισούται με το μηδέν για κάθε περίπτωση των μεταβλητών, τότε θα πρέπει το άθροισμα των όρων του x , το άθροισμα των όρων του y και το άθροισμα των όρων των xy πρέπει να ισούται με ξεχωριστές σταθερές. Άρα:

$$A(x) - g'(x) = b \quad (2.60)$$

Όπου:

$$A(x) = -\frac{3P}{4tc^3} a_{11} \left(\frac{x^2}{2} \right) \quad (2.61)$$

Από τις δύο εξισώσεις παίρνουμε:

$$g(x) = \int [(A(x) - b)] dx \quad (2.62)$$

Επομένως εάν ολοκληρώσουμε, τότε προκύπτει:

$$g(x) = -\frac{3P}{4tc^3} a_{11} \left(\frac{x^3}{6} \right) - bx + c \quad (2.63)$$

Όπου c είναι μια σταθερά της ολοκλήρωσης. Αντικαθιστώντας την $g(x)$ στο $v_{flexure}$ τότε έχουμε την επόμενη εξίσωση με αυτούς του σταθερούς άγνωστους όρους:

$$v_{flexure} = \frac{3P}{4tc^3} a_{12} \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{ry^3}{3} - \frac{rc^2y}{3} \right) + \frac{3P}{8tc^3} a_{26} \left(c^2y - \frac{y^3}{3} \right) - \frac{3P}{24tc^3} a_{11} x^3 - bx + e \quad (2.64)$$

Οι οροι αυτοί θα υπολογιστούν με την χρήση των οριακών συνθηκών. Δηλαδή έχουμε:

$$v = 0 \text{ στο } x = 0, y = 0 \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ στο } x = L, y = 0 \quad (2.66)$$

Άρα λύνοντας το σύστημα προκύπτει:

$$e = 0 \quad (2.67)$$

$$b = -\frac{3P}{8tc^3} a_{11} L^2 \quad (2.68)$$

Επομένως πλέον γνωρίζουμε όλους τους όρους του βέλους λόγω κάμψης και μπορούμε να το υπολογίσουμε σε κάθε σημείο της δοκού με την ακόλουθη σχέση [15]:

$$v_{flexure} = \frac{3P}{4tc^3} a_{12} \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{ry^3}{3} - \frac{rc^2y}{3} \right) + \frac{3P}{8tc^3} a_{26} \left(c^2y - \frac{y^3}{3} \right) - \frac{3P}{24tc^3} a_{11} x^3 + \frac{3P}{8tc^3} a_{11} L^2 x \quad (2.69)$$

Όμως για να βρούμε το βέλος στο κεντρικό σημείο που μας ενδιαφέρει πρέπει να αντικαταστήσουμε το $x=L$ και $y=0$. Τότε το βέλος λόγω κάμψης είναι:

$$v_{flexure} = \frac{P}{4tc^3} a_{11} L^3 \quad (2.70)$$

2.3.4 Βέλος λόγω διάτμησης-Συνολικό βέλος για 3PB

Για να βρούμε το βέλος λόγω διάτμησης θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τις τάσεις στην εξίσωση (2.30). Τότε εάν πολλαπλασιάσουμε με ένα πολύ μικρό μήκος της δοκού θα έχουμε μια πολύ μικρή απόκλιση διάτμησης. Εάν τώρα ολοκληρώσουμε από $x=0$ έως $x=2L$ ως προς x θα έχουμε την απόκλιση λόγω διάτμησης της δοκού και θα προκύψει η ακόλουθη εξίσωση:

$$v_{shear} = \frac{3P}{4tc^3} a_{16} \left(2L^2y + 2ry^2L - \frac{2rc^2L}{3} - \frac{x^2y}{2} - ry^2x + \frac{rc^2x}{3} \right) + \frac{3P}{8tc^3} a_{66} (2c^2L - 2y^2L - c^2x + y^2x) \quad (2.71)$$

Προκειμένου να βρούμε την απόκλιση λόγω διάτμησης στο κεντρικό σημείο της δοκού θα πρέπει να αντικαταστήσουμε στην προηγούμενη εξίσωση με $x=L$ και $y=0$. Τότε θα έχουμε την ακόλουθη σχέση:

$$v_{shear} = \frac{3P}{4tc^3} a_{16} \left(-\frac{rc^2L}{3} \right) + \frac{3P}{8tc^3} a_{66} (c^2L) \quad (2.72)$$

Για να βρούμε το συνολικό βέλος κάμψης απλά θα προσθέσουμε το v_{shear} με το $v_{flexure}$ έτσι ώστε:

$$v_{total} = v_{flexure} + v_{shear} \quad (2.73)$$

Επομένως το συνολικό βέλος στο κέντρο της δοκού θα είναι:

$$v_{total} = \frac{P}{4tc^3} a_{11} L^3 + \frac{3P}{4tc^3} a_{16} \left(-\frac{rc^2L}{3} \right) + \frac{3P}{8tc^3} a_{66} (c^2L) \quad (2.74)$$

2.4 Επίλυση της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων με χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας

Η κάμψη τεσσάρων σημείων είναι ένα πρόβλημα αρκετά πιο πολύπλοκο σε σχέση με την κάμψη τριών σημείων. Ειδικά εάν προσπαθήσουμε να το επιλύσουμε με θεωρία ελαστικότητας. Τότε παρουσιάζονται αρκετά άτοπα σημεία στην προσπάθεια μας να βρούμε την τασική συνάρτηση και να εφαρμόσουμε την ίδια μεθοδολογία με την κάμψη τριών σημείων. Παρ' όλα αυτά βρέθηκε λύση που δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα ειδικά σε περιοχές μακριά από την στήριξη. Επισημαίνεται ότι δεν βρέθηκε πουθενά στην βιβλιογραφία κάτι αντίστοιχο. Δεν έχει παρατηρηθεί προσπάθεια επίλυσης της κάμψης τεσσάρων σημείων με την χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας τόσο για ισότροπα υλικά όσο και για ανισότροπα όπως στην παρούσα εργασία. Στην συνέχεια γίνεται βήμα προς βήμα η μέθοδος που ακολουθήθηκε ώστε να καταλήξουμε σε αποτέλεσμα.

2.4.1 Επιλογή τασικής συνάρτησης για 4PB

Το πιο απαιτητικό έργο της συγκεκριμένης εργασίας ήταν να βρεθεί μια τασική συνάρτηση όπου θα μας οδηγήσει στις τάσεις και θα εξάγει τα ίδια αποτελέσματα με την αντοχή των υλικών. Το έργο αυτό ήταν απαιτητικό καθώς τα περισσότερα πολυώνυμα κατέληγαν σε άτοπο όταν εφαρμόζαμε τις οριακές συνθήκες, όπως ακριβώς κάναμε νύξη στην κάμψη τριών σημείων. Οι επιλογές τασικής συνάρτησης που έχουν άθροισμα πολυωνύμου ή πολυωνύμου μεγαλύτερου βαθμού από τετάρτου δεν απέσπασε. Η λύση του ανωτέρου προβληματισμού ήρθε με την χρήση μιας τασικής συνάρτησης που προτείνει ο Hashin [12]. Όπου ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$F(x, y) = \sum_{m=0}^{m=M} \sum_{n=0}^{n=M+3} C_{mn} x^m y^n \quad (2.75)$$

$$m + n \leq M + 3 \quad (2.76)$$

Αυτός ο τύπος είναι η αιτία που βρέθηκε η τασική συνάρτηση η οποία χρησιμοποιήθηκε. Συγκεκριμένα η παράμετρος M είναι αυτή που καθορίζει πόσες παραμέτρους θα χρησιμοποιήσουμε. Για παράδειγμα εφόσον έχουμε ένα σταθερό φορτίο το M θα είναι $M=1$. Για φορτίο που είναι ίσα κατανεμημένο θα είναι ίσο $M=2$. Άρα οι σχέσεις για

τα m, n θα είναι $m=1$ και 4 και $m=2$ και $n=5$ αντίστοιχα. Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται πως μπορεί να γίνει χρήση των συντελεστών για $M=6$.

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	C_{00}	C_{01}	C_{02}	C_{03}	C_{04}	C_{05}	C_{06}	C_{07}	C_{08}	C_{09}	---
1	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}	---
2	C_{20}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}	C_{27}	C_{28}	C_{29}	---
3	C_{30}	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{38}	C_{39}	---
4	C_{40}	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}	C_{45}	C_{46}	C_{47}	C_{48}	C_{49}	---
5	C_{50}	C_{51}	C_{52}	C_{53}	C_{54}	C_{55}	C_{56}	C_{57}	C_{58}	C_{59}	---
M = 6	C_{60}	C_{61}	C_{62}	C_{63}	C_{64}	C_{65}	C_{66}	C_{67}	C_{68}	C_{69}	---
7	C_{70}	C_{71}	C_{72}	C_{73}	C_{74}	C_{75}	C_{76}	C_{77}	C_{78}	C_{79}	---
											+

Εικόνα 2.3
Επιλογή συντελεστών τασικής συνάρτησης

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για την περίπτωση που μας ενδιαφέρει δηλαδή για την ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων θα έχουμε $M=1$. Άρα $m=1$ και $n=4$. Με αυτά τα μεγέθη και την βοήθεια του ανωτέρου πίνακα θα έχουμε την ακόλουθη αυθαίρετη πιθανή τασική συνάρτηση:

$$F = Ay^2 + By^3 + \Gamma y^4 + \Delta x y + Ex y^2 + Zx y^3 \quad (2.77)$$

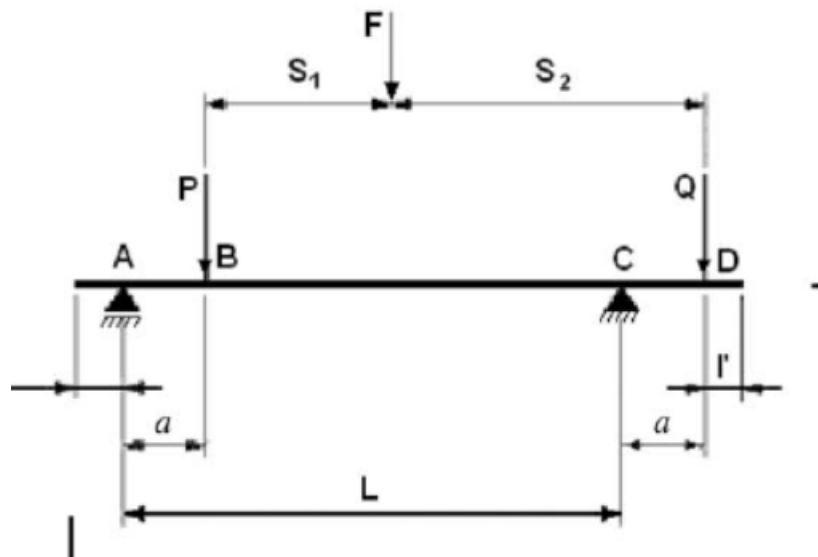
Τέλος για να υπολογίσουμε πόσες εξισώσεις χρειαζόμαστε ώστε να λύσουμε το σύστημα υπάρχει ο ακόλουθος κανόνας που η τιμή της μεταβλητής καθορίζει τον αριθμό των εξισώσεων.

$$B = 4(M + 1) \quad (2.78)$$

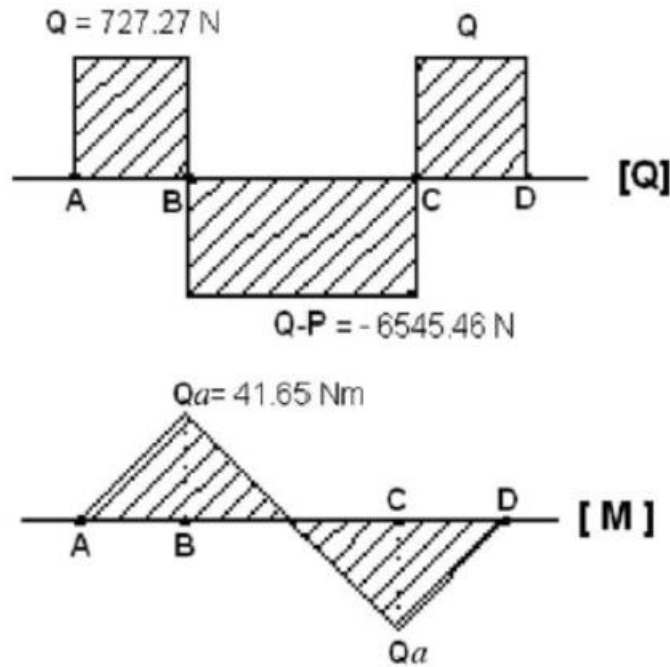
Αυτή η εξίσωση πρέπει να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες καθώς και την διαφορική εξίσωση του Lekhnitskii, ώστε να περιγράφει σωστά τις τάσεις .

2.4.2 Οριακές συνθήκες και Τασική συνάρτηση 4PB

Η ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων αφορά σε μια σύνθετη δοκό όπου το αριστερό άκρο είναι σε άρθρωση ενώ σε απόσταση L από αυτό το σημείο υπάρχει μία κύλιση. Οι δυνάμεις που θα ασκούνται θα είναι ανάλογες μεταξύ τους και την αναλογία αυτή θα εξαρτάται από τον συντελεστή λ . Το σημείο άσκησης τους θα εξαρτάται πάλι από τον συντελεστή λ . Επίσης η μία δύναμη θα ασκείται μεταξύ των στηρίξεων και σε απόσταση a ενώ για την δεύτερη δύναμη το σημείο άσκησης θα είναι στην θέση $L+a$. Στην ακόλουθη εικόνα φαίνονται σχηματικά όσα περιγράφηκαν.



Εικόνα 2. 4
Σχηματική απεικόνιση της κάμψης τεσσάρων σημείων



Εικόνα 2.5

Απεικονίζεται το διάγραμμα ροπών κάμψως και το διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων

Έχοντας σαν οδηγό την παραπάνω απεικόνιση μπορούμε να ορίσουμε τις οριακές συνθήκες οι οποίες είναι:

$$y = \pm c \rightarrow \sigma_y = 0 \quad (2.79)$$

$$y = \pm c \rightarrow \tau_{xy} = 0 \quad (2.80)$$

$$x = 0 \rightarrow \int_{-c}^{+c} \tau_{xy} t \, dy = Q \quad (2.81)$$

$$x = L \rightarrow \int_{-c}^{+c} \tau_{xy} t \, dy = P \quad (2.82)$$

$$x = 0 \rightarrow \int_{-c}^{+c} \sigma_x t \, dy = 0 \quad (2.83)$$

$$x = L + a \rightarrow \int_{-c}^{+c} \sigma_x t dy = 0 \quad (2.84)$$

$$x = 0 \rightarrow \int_{-c}^{+c} \sigma_x t y dy = 0 \quad (2.85)$$

$$x = L + a \rightarrow \int_{-c}^{+c} \sigma_x t y dy = 0 \quad (2.86)$$

$$x = a \rightarrow \int_{-c}^{+c} \tau_{xy} t dy = P \quad (2.87)$$

Γίνεται κατανοήτο ότι δεν θα χρειαστούμε όλες τις οριακές συνθήκες για να υπολογίσουμε την διαφορική εξίσωση καθώς έχει μόνο έξι αγνώστους. Πρέπει να γίνει υπενθύμιση και να επισημάνουμε ότι εκτός από τις οριακές συνθήκες, είναι απαραίτητο να ικανοποιείται και η διαφορική εξίσωση του Lekhnitskii. Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι οι σταθερές της αυθαίρετης τασικής συνάρτησης που ορίσαμε υπολογίζονται ως:

$$A = -\frac{\alpha_{16}Q}{4\alpha_{11}tc} \quad (2.88)$$

$$B = 0 \quad (2.89)$$

$$\Gamma = \frac{\alpha_{16}Q}{8\alpha_{11}tc^3} \quad (2.90)$$

$$\Delta = -\frac{3Q}{4tc} \quad (2.91)$$

$$E = 0 \quad (2.92)$$

$$Z = \frac{Q}{4tc^3} \quad (2.93)$$

Επομένως εάν θέσουμε ως $R=a_{16}/a_{11}$ η τασική συνάρτηση που προκύπτει είναι :

$$F = \frac{Q}{tc} \left[-Ry^2 + \frac{Ry^3}{8c^2} - \frac{3xy}{4} + \frac{xy^3}{4c^2} \right] \quad (2.94)$$

Κάνοντας χρήση της ακόλουθης σχέσης προκύπτουν οι τάσεις για την κάμψη τεσσάρων σημείων:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (2.95)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (2.96)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (2.97)$$

$$\sigma_x = \frac{3Q}{2tc^3} \left(-\frac{Rc^2}{3} + Ry^2 + xy \right) \quad (2.98)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (2.99)$$

$$\tau_{xy} = \frac{3Q}{4tc^3} (c^2 - y^2) \quad (2.100)$$

Στο σημείο αυτό είναι θεμιτό να πούμε ότι οι τάσεις που βρήκαμε ανταποκρίνονται με αυτά που υπολογίζουμε με την μέθοδο της αντοχής των υλικών. Επίσης μια αντίστοιχη εργασία έχει γίνει από τον κύριο Πανταβό όπου μελετάει σύνθετο υλικό τυχούσας διευθύνσεως για την κάμψη τεσσάρων σημείων. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι εάν θεωρήσουμε $R=0$ δηλαδή ότι το υλικό είναι ορθότροπο και δεν έχουμε επιρροή της διεύθυνσης των ινών τότε η λύση μας ταυτίζεται με αυτή του Πανταβού [16].

2.4.3 Βέλος λόγω κάμψης για 4PB

Έχοντας υπολογίσει τις τάσεις μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις κάθετες και οριζόντιες μετατοπίσεις λόγω κάμψης εάν αντικαταστήσουμε τις τάσεις στην εξίσωση (2.28) και στην εξίσωση (2.29) και στην συνέχεια ολοκληρώσουμε. Τότε προκύπτει:

$$u = \frac{3Q}{2tc^3} a_{11} \left(-\frac{Rc^2x}{3} + Ry^2x + \frac{x^2y}{2} \right) + a_{16} \frac{3Q}{4tc^3} (c^2x - y^2x) + f(y) \quad (2.101)$$

$$v_{flexure} = a_{12} \frac{3Q}{2tc^3} \left(-\frac{Rc^2}{3} + \frac{Ry^2}{3} + \frac{xy^2}{2} \right) + a_{26} \frac{3Q}{4tc^3} \left(c^2y - \frac{y^3}{3} \right) + g(x) \quad (2.102)$$

Από τις ανωτέρω εξισώσεις βλέπουμε ότι έχουμε δύο αγνώστους το $f(y)$ και $g(x)$. Καταλαβαίνουμε ότι για να βρούμε το βέλος λόγω κάμψης τότε πρέπει να υπολογίσουμε το $g(x)$. Για να γίνει αυτό πρέπει να εξισώσουμε την σχέση (2.30) με την σχέση (2.39). Τότε προκύπτει:

$$a_{16} \frac{3Q}{2tc^3} \left(-\frac{Rc^2}{3} + Ry^2 - 2xy - Ry^2 \right) - a_{66} \frac{3Q}{4tc^3} (c^2 - y^2) + \frac{3Q}{2tc^3} a_{11} \left(2Ryx + \frac{x^2}{2} + a_{12} \frac{3Q}{4tc^3} y^2 + g'(x) + f'(y) \right) = 0 \quad (2.103)$$

Εξαιτίας του ότι η εξίσωση πρέπει να ισούται με το μηδέν για κάθε περίπτωση των μεταβλητών, τότε θα πρέπει το άθροισμα των όρων του x , το άθροισμα των όρων του y και το άθροισμα των όρων των xy πρέπει να ισούται με ξεχωριστές σταθερές. Άρα:

$$A(x) - g'(x) = b \quad (2.104)$$

Όπου:

$$A(x) = \frac{3Q}{4tc^3} a_{11} x^2 \quad (2.105)$$

Από τις δύο εξισώσεις παίρνουμε:

$$g(x) = \int [(A(x) - b)] dx \quad (2.106)$$

Επομένως εάν ολοκληρώσουμε τότε προκύπτει:

$$g(x) = \frac{3Q}{12tc^3} a_{11}x^3 - bx + e \quad (2.107)$$

Όπου e είναι μια σταθερά της ολοκλήρωσης. Αντικαθιστώντας την $g(x)$ στο $v_{flexure}$ τότε έχουμε την επόμενη εξίσωση με αυτούς του σταθερούς άγνωστους όρους:

$$v_{flexure} = a_{12} \frac{3Q}{2tc^3} \left(-\frac{Rc^2}{3} + \frac{Ry^2}{3} + \frac{xy^2}{2} \right) + a_{26} \frac{3Q}{4tc^3} \left(c^2y - \frac{y^3}{3} \right) + \frac{3Q}{12tc^3} a_{11}x^3 - bx + e \quad (2.108)$$

Για να βρούμε τους συντελεστές b και e πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις οριακές συνθήκες. Σε αυτό το σημείο όμως ξεκινά ένας προβληματισμός. Η πρώτη συνοριακή συνθήκη που θα χρησιμοποιήσουμε και είμαστε βέβαιοι για αυτό είναι ότι στο σημείο $x=0$ όλες οι μετατοπίσεις θα είναι μηδέν, είτε κάθετες είτε οριζόντιες. Το πρόβλημα που δημιουργείται είναι το τι θα πάρουμε για δεύτερη οριακή συνθήκη. Δοκιμάσαμε να επιλύσουμε την εξίσωση και να βρούμε τους αγνώστους και με τους δύο τρόπους, δηλαδή αφενός πήραμε σαν οριακή συνθήκη ότι στο μέγιστο βέλος κάμψης η κλίση θα είναι μηδέν και σαν σημείο μέγιστης κλίσης θεωρήσαμε το σημείο $x=a$ και αφετέρου επιλέξαμε σαν οριακή συνθήκη στο σημείο $x=L$ όπου υπάρχει η κύλιση όπου η κάθετη μετατόπιση θα είναι $v=0$. Αυτό που παρατηρήσαμε είναι ότι ο δεύτερος τρόπος εξήγαγε πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα και πιο κοντά στην μέθοδο της αντοχής των υλικών. Ως εκ τούτου στην συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα με χρήση των ακόλουθων οριακών συνθηκών:

$$x = 0, y = 0 \rightarrow v = 0 \quad (2.109)$$

$$x = L, y = 0 \rightarrow v = 0 \quad (2.110)$$

Όπου προκύπτει:

$$e = 0 \quad (2.111)$$

$$b = \frac{Q}{4tc^3} a_{11}L^2 \quad (2.112)$$

Επομένως πλέον γνωρίζουμε όλους τους όρους του βέλους λόγω κάμψης και μπορούμε να το υπολογίσουμε σε κάθε σημείο της δοκού με την ακόλουθη σχέση:

$$v_{flexure} = a_{12} \frac{3Q}{2tc^3} \left(-\frac{Rc^2}{3} + \frac{Ry^2}{3} + \frac{xy^2}{2} \right) + a_{26} \frac{3Q}{4tc^3} \left(c^2y - \frac{y^3}{3} \right) + \frac{3Q}{12tc^3} a_{11}x^3 - \frac{Q}{4tc^3} a_{11}L^2x \quad (2.113)$$

Όμως για να βρούμε το βέλος στο κεντρικό σημείο που μας ενδιαφέρει πρέπει να αντικαταστήσουμε το $x=a$ και $y=0$. Τότε το βέλος λόγω κάμψης μετά από απλοποίηση και ανικαθιστώντας το Q με την γενική δύναμη F προκύπτει ότι είναι:

$$v_{flexure} = -\frac{\lambda FL^3(\lambda-1)}{Ec^3t(\lambda+1)^4} \quad (2.114)$$

Παρατηρούμε ότι ο ανωτέρω τύπος μοιάζει με τον αντίστοιχο τύπο της αντοχής υλικών αλλά δεν είναι ίδιος και αυτή είναι η αιτία όπου θα έχουμε μεγάλες αποκλίσεις για μικρές τιμές του λ καθώς ο αντίστοιχος τύπος από την αντοχή των υλικών είναι:

$$v_{flexure_Αντοχή_Υλικών} = -\frac{\lambda FL^3(\lambda-1)^2}{Ec^3t(\lambda+1)^5} \quad (2.115)$$

Επομένως είναι φανερό ότι όσο αυξάνεται το λ το σφάλμα θα μειώνεται και η διαφορά των τιμών θα γίνεται σταδιακά αμελητέα. Η διαφορά στους τύπους δεν σημαίνει αυτομάτως λάθος αλλά προϋδεάζει ότι όσο βρισκόμαστε κοντά στην αριστερή άρθρωση θα έχουμε αλλοίωση των αποτελεσμάτων όπως βέβαια είναι γνωστό από την αρχή Saint-Venian.

2.4.4 Βέλος λόγω διάτμησης-Συνολικό βέλος για 4PB

Για να βρούμε το βέλος λόγω διάτμησης θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τις τάσεις στην εξίσωση (2.30). Τότε εάν πολλαπλασιάσουμε με ένα πολύ μικρό μήκος της δοκού θα έχουμε μια πολύ μικρή απόκλιση διάτμησης. Εάν τώρα ολοκληρώσουμε από $x=x$ έως $x=L+a$ ως προς x θα έχουμε την απόκλιση λόγω διάτμησης της δοκού και θα προκύψει η ακόλουθη εξίσωση:

$$v_{shear} = a_{16} \frac{3Q}{2tc^3} \left(-\frac{Rc^2}{3}(L+a) + Ry^2(L+a) + \frac{(L+a)^2}{2}y + \frac{Rc^2}{3}x - Ry^2x - \frac{x^2}{2}y \right) + a_{66} \frac{3Q}{4tc^3} (c^2(L+a) - y^2(L+a) - c^2x - y^2x) \quad (2.116)$$

Προκειμένου να βρούμε την απόκλιση λόγω διάτμησης στο κεντρικό σημείο της δοκού θα πρέπει να αντικαταστήσουμε στην προηγούμενη εξίσωση με $x=a$ και $y=0$. Τότε θα έχουμε την ακόλουθη σχέση:

$$v_{shear} = -a_{16} \frac{QRL}{2tc} + a_{66} \frac{3QL}{4tc} \quad (2.117)$$

Για να βρούμε το συνολικό βέλος κάμψης απλά θα προσθέσουμε το v_{shear} με το $v_{flexure}$ έτσι ώστε:

$$v_{total} = v_{shear} + v_{flexure} \quad (2.118)$$

Επομένως το συνολικό βέλος στο κέντρο της δοκού θα είναι:

$$v_{total} = -\frac{\lambda FL^3(\lambda-1)}{Ec^3t(\lambda+1)^4} - a_{16} \frac{FRL}{2tc(\lambda+1)} + a_{66} \frac{3FL}{4tc(\lambda+1)} \quad (2.119)$$

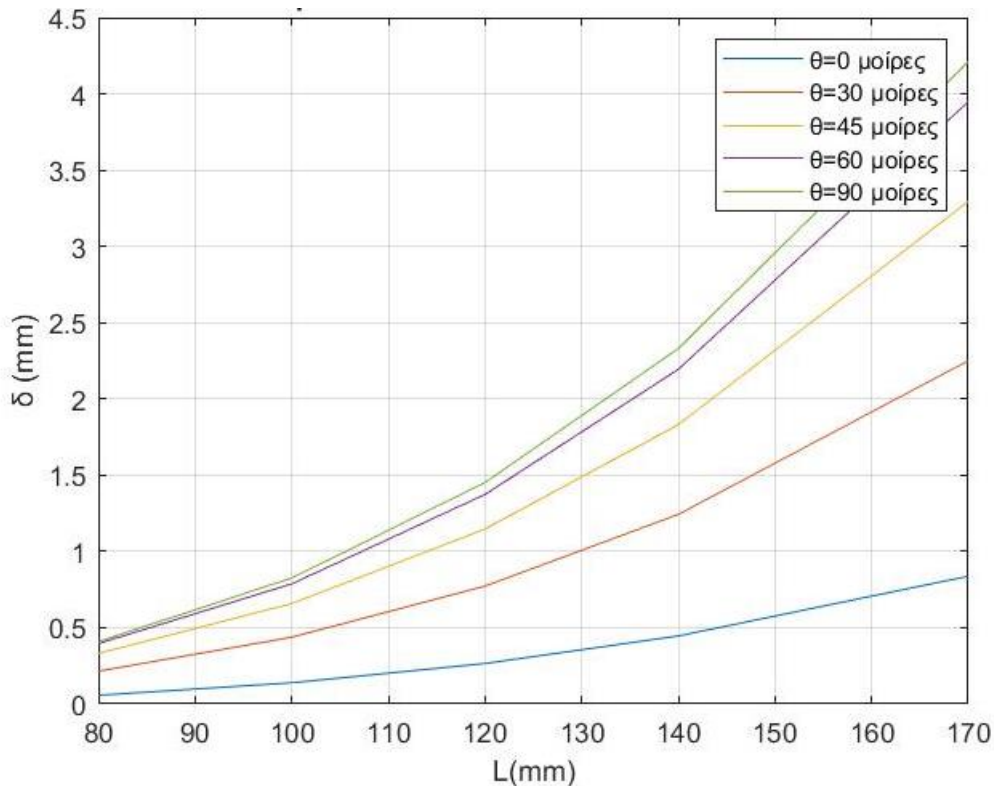
Επισημαίνεται ότι τα αποτελέσματα καθώς και όλη η ανάλυση της Θεωρίας θα γίνει στο κεφάλαιο της σύγκρισης αποτελεσμάτων. Εκεί θα φανεί πως κυμαίνονται οι τιμές και πως επηρεάζεται το βέλος κάμψης στην αλλαγή παραμέτρων όπως το μήκος του δοκιμίου, του πάχους του δοκιμίου, της αλλαγής διεύθυνσης των ινών κτλ. Η σύγκριση των τιμών αυτών θα γίνει με την σύγκριση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων η οποία θα αναλυθεί και θα εξεταστεί αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

2.5 Σύγκριση παραμέτρων για 4PB με χρήση Θεωρίας Ελαστικότητας

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα γίνει απεικόνιση του βέλους κάμψης για μεταβολές διαφορετικών παραμέτρων ώστε να γίνει ανάλυση και παρατήρηση της επίδρασης που δέχεται. Οι παράμετροι οι οποίοι θα μεταβληθούν είναι το πάχος του δοκιμίου, το μήκος του δοκιμίου, η ασκούμενη δύναμη καθώς και ο συντελεστής λ . Επίσης σε κάθε διάγραμμα θα απεικονίζονται όλες οι πιθανές γωνίες διεύθυνσης των ινών για περαιτέρω ανάλυση των αποτελεσμάτων.

2.5.1 Σύγκριση μήκους δοκιμίου με βέλος κάμψης

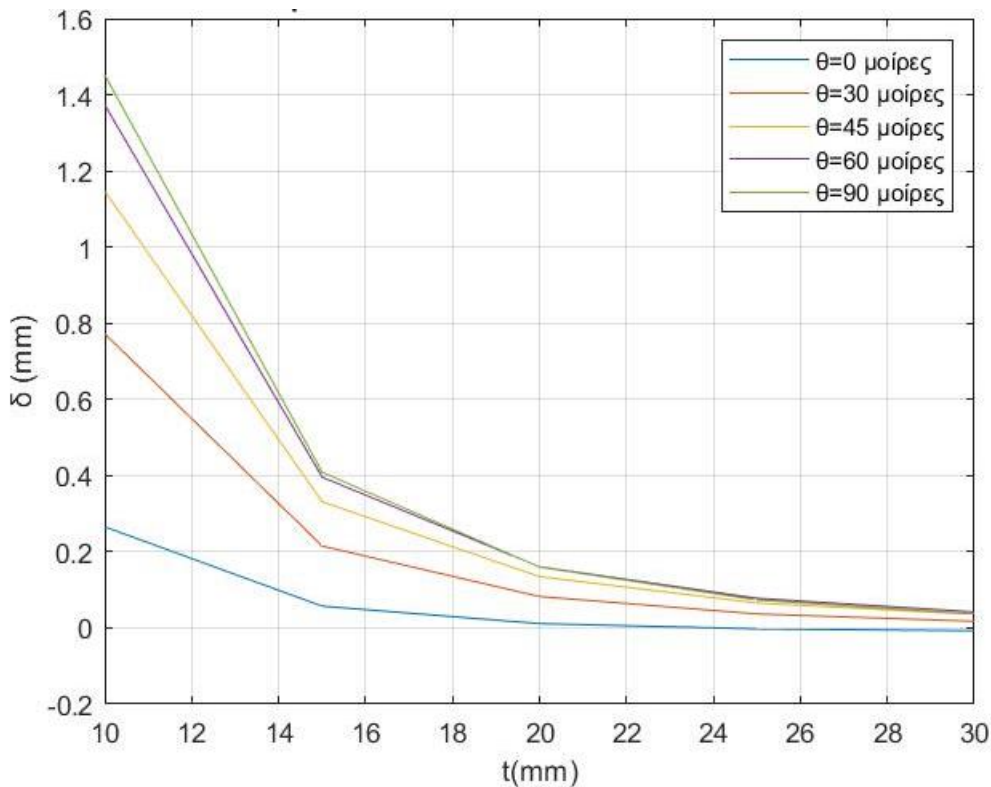
Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται μια σύγκριση του μήκους δοκιμίου με το βέλος κάμψης. Επίσης για αυτό το διάγραμμα έχουμε θεωρήσει συντελεστή $\lambda=6$ πάχος δοκιμίου $t=10$ mm και η ασκούμενη δύναμη $F=4$ kN. Επομένως μπορούμε να παρατηρήσουμε στο διάγραμμα ότι όσο αυξάνεται το μήκος του δοκιμίου τότε αυξάνεται και το βέλος κάμψης. Μάλιστα αυξάνεται ανεξάρτητα από την γωνία ινών. Επίσης είναι φανερό ότι η γωνία ινών επηρεάζει το ποσοστό αύξησης του βέλους κάμψης. Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι για γωνία ινών 90 μοίρες έχουμε πιο ραγδαία αύξηση των τιμών σε σχέση με γωνίες ινών ίσες με 0 μοίρες. Δηλαδή η κλίση της αύξησης του βέλους κάμψης αυξάνεται κλιμακωτά από τις 0 μοίρες έως τις 90. Τέλος οι γωνίες που παρουσιάζονται στα διαγράμματα οφείλονται στο ότι έχουμε διαλέξει πέντε σημεία παρατήρησης. Ως εκ τούτου εάν διαλέγαμε περισσότερα τότε θα είχαμε πιο ξεκάθαρες καμπύλες, όμως παρ' όλα αυτά είναι ολοφάνερη η πρόθεση κίνησης των τιμών.



Διάγραμμα 2. 1:
Μεταβολή βέλους κάμψης σε σχέση με την αύξηση του μήκους δοκού
για $\lambda=6$, $F=4$ kN, $t=10$ mm, $b=30$ mm

2.5.2 Συγκριση πάχους δοκιμίου με βέλος κάμψης

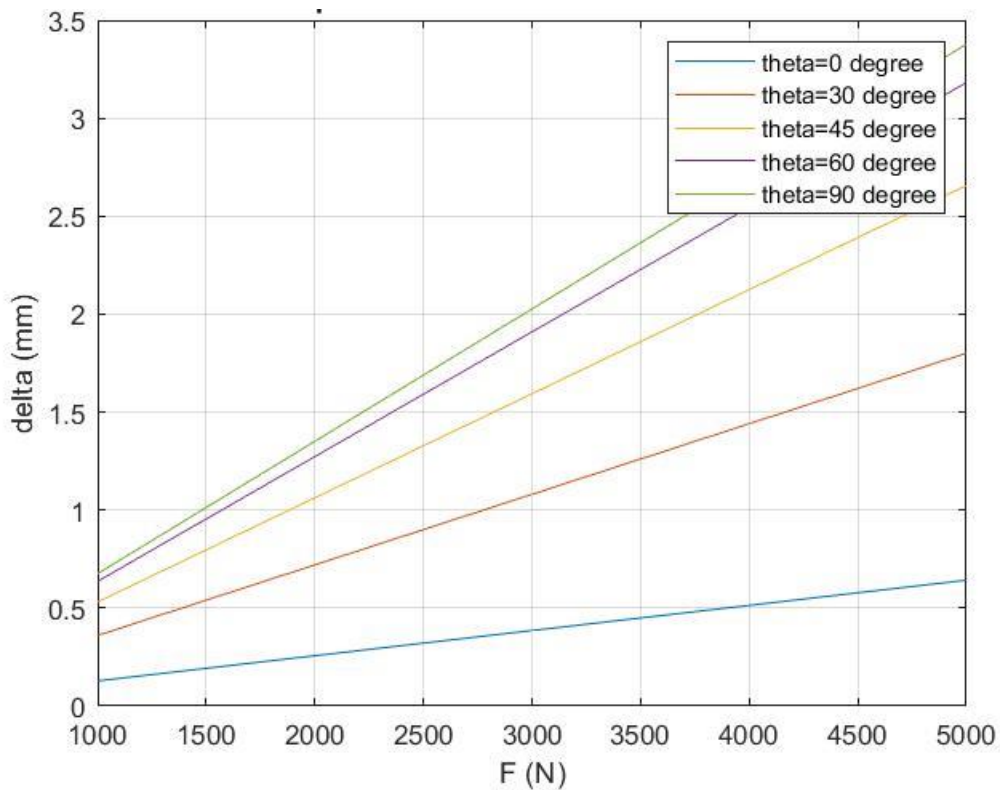
Το επόμενο διάγραμμα αφορά την σύγκριση του πάχους του δοκιμίου με την τιμή του βέλους κάμψης. Για την συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε επιλέξει μήκος δοκιμίου $L=120$ mm, συντελεστή $\lambda=6$ και ασκούμενη δύναμη ίση με $F=4$ kN. Η πρώτη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι όσο αυξάνεται το πάχος του δοκιμίου τόσο μειώνεται το βέλος κάμψης. Επίσης βλέπουμε ότι για μικρές τιμές του πάχους έχουμε σημαντική επιρροή στο βέλος κάμψης, για παράδειγμα, το βέλος κάμψης στις 90 μοίρες διεύθυνσης γωνιών το βέλος κάμψης είναι σχεδόν το οχταπλάσιο σε σχέση με τις 0 μοίρες διεύθυνσης ινών. Ενώ για μεγάλο πάχος δοκιμίου βλέπουμε ότι υπάρχει μια σύγκλιση τιμών και η επιρροή της γωνίας διεύθυνσης των ινών σχεδόν εξαλείφεται. Έτσι με ένα λογικό συνειρμό μπορούμε να πούμε ότι για περαιτέρω αύξηση του πάχους δοκιμίου οι τιμές θα ταυτίζονται ανεξαρτήτως γωνίας διεύθυνσης ινών. Τέλος, οι γωνίες που παρουσιάζονται στα διαγράμματα οφείλονται στο ότι έχουμε διαλέξει πέντε σημεία παρατήρησης. Ως εκ τούτου εάν διαλέγαμε περισσότερα τότε θα είχαμε πιο ξεκάθαρες καμπύλες, όμως παρ' όλα αυτά είναι ολοφάνερη η πρόθεση κίνησης των τιμών.



Διάγραμμα 2. 2
Μεταβολή βέλους κάμψης σε σχέση με την αύξηση του πάχους δοκού
για $\lambda=6$, $F=4$ kN, $t=10$ mm, $b=30$ mm

2.5.3 Συγκριση ασκούμενης δύναμης με βέλος κάμψης

Το επόμενο διάγραμμα αφορά την σύγκριση του βέλους κάμψης σε σχέση με την ασκούμενη δύναμη. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε δοκίμιο πάχους $t=10\text{mm}$, με μήκος $L=120\text{ mm}$ και συντελεστή $\lambda=6$. Επομένως παρατηρούμε από το διάγραμμα ότι όσο αυξάνεται η δύναμη αυξάνεται και το βέλος κάμψης. Στις συγκεκριμένες περιπτώσεις φαίνεται ότι η αύξηση είναι γραμμική καθώς δεν έχουμε λάβει υπόψη μη γραμμικότητες. Επίσης είναι φανερό για ακόμα μία φορά πως το βέλος κάμψης εξαρτάται από την γωνία διεύθυνσης των ινών. Συγκεκριμένα για γωνία ινών ίση με 90 μοίρες έχουμε μεγαλύτερο βέλος κάμψης από ότι για γωνία διεύθυνσης ινών ίση με 0 μοίρες. Επίσης παρατηρούμε ότι η γωνία διεύθυνσης των ινών επηρεάζει το ρυθμό αύξησης των τιμών. Δηλαδή για γωνία διεύθυνσης ινών ίση με 90 μοίρες έχουμε πολύ μεγαλύτερη αύξηση του βέλους κάμψης σε σχέση με τις 0 μοίρες γωνίας ινών. Αντίστοιχα και για τις ενδιάμεσες τιμές γωνίας διεύθυνσης ινών.

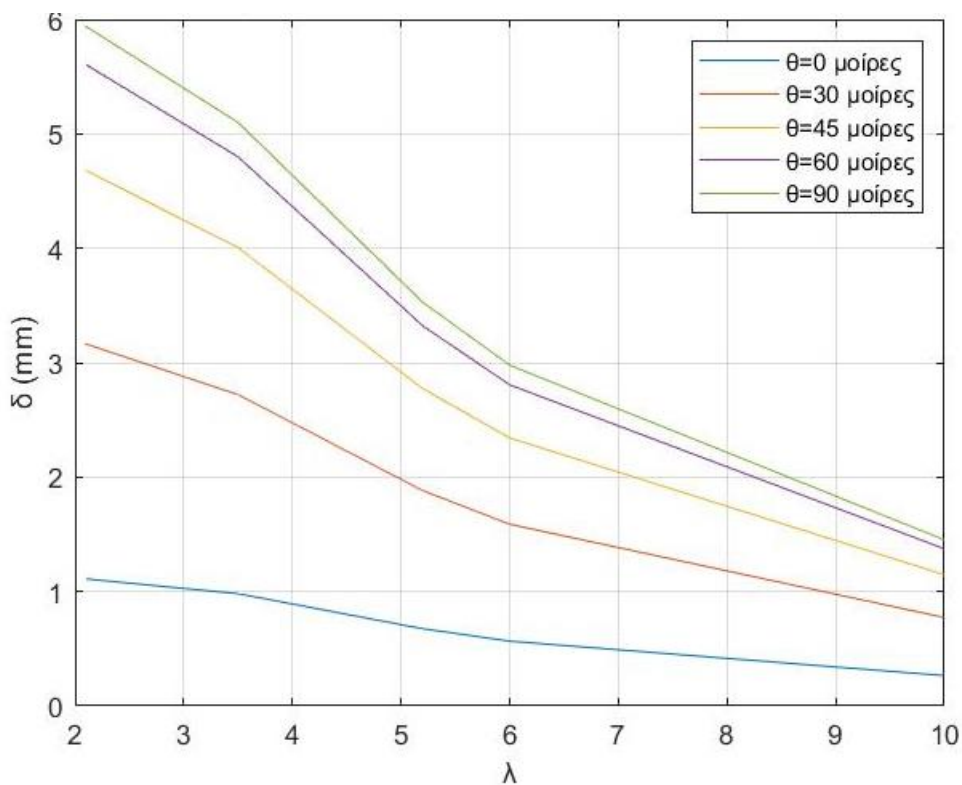


Διάγραμμα 2. 3

Μεταβολή βέλους κάμψης σε σχέση με την αύξηση του επιβαλλόμενου φορτίου στη δοκό για $\lambda=6$, $L=120\text{mm}$, $t=10\text{mm}$, $b=30\text{mm}$

2.5.4 Σύγκριση συντελεστή λ με βέλος κάμψης

Στο επόμενο διάγραμμα γίνεται σύγκριση του βέλους κάμψης και του συντελεστή λ. Για το επόμενο διάγραμμα έχουμε θεωρήσει σαν ασκούμενη δύναμη $F=2 \text{ kN}$, πάχος δοκιμίου $t=10 \text{ mm}$, πλάτος δοκιμίου $b=30 \text{ mm}$ και μήκος δοκιμίου $L=120 \text{ mm}$. Παρατηρούμε από το διάγραμμα ότι όσο αυξάνεται ο συντελεστής λ μειώνεται το βέλος κάμψης. Εδώ φαίνεται και η αδυναμία της μεθόδου για μικρά λ καθώς έπρεπε να έχουμε μια πτώση για λ μικρότερη του 3 όπως έδειξε και η μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων. Για ακόμα μια φορά βλέπουμε ότι η κλίση των καμπυλών αυξάνεται με την αύξηση των γωνιών διεύθυνσης των ινών. Παρατηρούμε ότι για γωνία ινών 0 μοίρες η κλίση είναι σχεδόν αμελητέα.



Διάγραμμα 2. 4
Μεταβολή βέλους κάμψης σε σχέση με την αύξηση του συντελεστή λ
για $L=120\text{mm}$, $F=4\text{kN}$, $t=10\text{mm}$, $b=30\text{mm}$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

3.1 Εισαγωγή στα Πεπερασμένα Στοιχεία

Η μηχανική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών με ίνες μίας ή και περισσότερων διευθύνσεων είναι πολύπλοκο να λυθεί σε μια κλειστή μορφή. Η χρήση αριθμητικών μεθόδων επιτρέπει την προσέγγιση των λύσεων των παραπάνω εξισώσεων σε τυχαίες γεωμετρίες, με σημαντικότερη τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (Π.Σ.) [17]. Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα δημοφιλής κυρίως για τρεις λόγους. Πρώτον, λόγω της μεγάλης γενικότητας και αποτελεσματικότητάς της, δηλαδή της δυνατότητας που παρέχει για επίλυση με ικανοποιητική ακρίβεια προβλημάτων από πολλές διαφορετικές περιοχές της μαθηματικής φυσικής και των τεχνολογικών εφαρμογών. Δεύτερον, λόγω της σχετικής απλότητας στην ανάπτυξή της (στην βασική της διατύπωση) καθώς μπορεί να χωριστεί σε μια αλληλουχία από λογικά βήματα και τρίτον, στην δυνατότητα εισαγωγής των προαναφερθέντων «βημάτων» σε κάποιο πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή με αποτέλεσμα την ταχύτατη επίλυση ενός ευρέως φάσματος προβλημάτων απλώς αλλάζοντας κάποιες από τις εισαχθέντες παραμέτρους (στοιχεία που ορίζουν τον χώρο, φυσικές ιδιότητες υλικού, αρχικές και συνοριακές συνθήκες) [17].

Επίσης δύο ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μεθόδου των Π.Σ. είναι τα εξής: Ο χώρος προσομοιώνεται ως ένας κάρναβος Πεπερασμένων Στοιχείων. Γίνεται λοιπόν μία διακριτοποίηση του χώρου σε μη επικαλυπτόμενους απλούς υποχώρους, δηλαδή τα Π.Σ. Η μέθοδος των Π.Σ. επινοήθηκε από μηχανικούς και διαμορφώθηκε αρχικά με βάση κυρίως φυσικές αρχές για την αντιμετώπιση απαιτητικών κατασκευαστικών προβλημάτων αεροναυπηγικής, εφαρμόστηκε δε με μεγάλη επιτυχία για αρκετές δεκαετίες χωρίς αυστηρή μαθηματική θεμελίωση. Στη συνέχεια, η μαθηματική ανάλυση και θεμελίωσή της κατέστησε δυνατή την επέκταση της χρήσης της, πέραν της στατικής και δυναμικής ανάλυσης των κατασκευών, για την επίλυση προβλημάτων που ανακύπτουν σε πλειάδα διαφορετικών επιστημονικών κλάδων όπως η εμβιομηχανική, η

κβαντομηχανική, η μηχανική των ρευστών, ο ηλεκτρομαγνητισμός, η μηχανική των συζευγμένων πεδίων, κλπ.

Πολύ συχνά, η μαθηματική μοντελοποίηση των φυσικών και τεχνολογικών προβλημάτων οδηγεί σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες ή ισοδύναμα, σε μια ολοκληρωτική εξίσωση (συναρτησιακό) με μια συνθήκη στασιμότητας (μέγιστου, ελάχιστου ή σαγματοειδούς σημείου). Στην τελευταία περίπτωση, το συναρτησιακό συνήθως εκφράζει κάποια ποσότητα με φυσική σημασία (π.χ. δυναμική ενέργεια για στατικά προβλήματα) και η στασιμοποίησή του συνδέεται με κάποια φυσική αρχή (π.χ. αρχή των δυνατών έργων). Η συνάρτηση που στασιμοποιεί το συναρτησιακό είναι και η ακριβής λύση του μαθηματικού μοντέλου του εκάστοτε προβλήματος και συνήθως είναι αδύνατο να βρεθεί αναλυτικά. Αυτός είναι και ο λόγος που αναζητείται μια προσεγγιστική, αλλά ικανή, λύση αντί της ακριβούς [18].

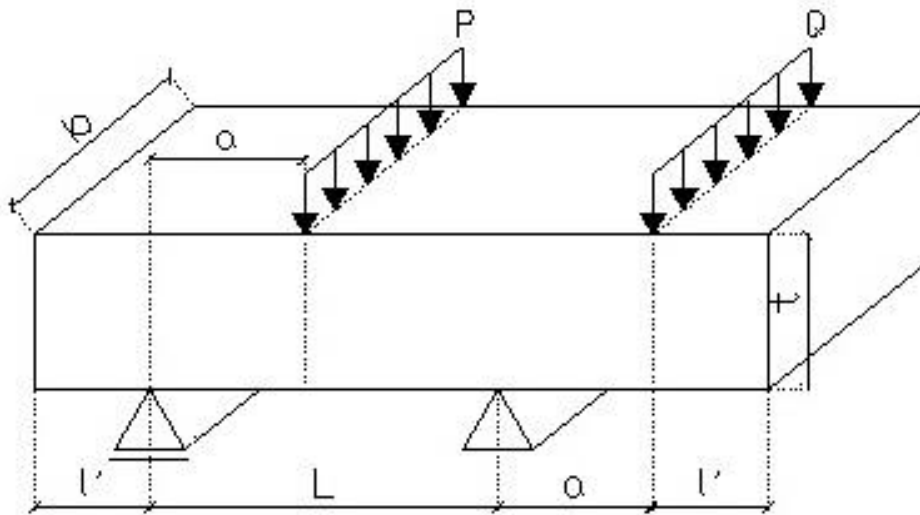
3.2 Αντικείμενο της Ανάλυσης με Π.Σ.

Αντικείμενο του δεύτερου σκέλους της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί η προσομοίωση, με λογισμικό Πεπερασμένων Στοιχείων, της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων σε πολύστρωτες δοκούς σύνθετων υλικών που αποτελούνται από μήτρα ρητίνης, ενισχυμένων με έγκλεισμα από ίνες ύαλου μιας διευθύνσεως.

Η επίλυση των μοντέλων που σχεδιάζονται (τρισεδιάστατα) παρέχει τη δυνατότητα μελέτης των κατανομών καθώς και τη συγκέντρωση των τάσεων στα άκρα της δοκού, καθώς και στα σημεία στήριξης και φόρτισης.

Η μελέτη και ερμηνεία των παραπάνω αποτελεσμάτων σε συνδυασμό με τις εντατικές καταστάσεις που προκύπτουν συντελούν στο να διαπιστωθούν διαφορές και αποκλίσεις μεταξύ της αναλυτικής μεθόδου της Θεωρίας Ελαστικότητας και των Πεπερασμένων Στοιχείων για σύνθετα υλικά με ίνες μίας διευθύνσεως.

3.3 Καννάβος Δοκού για Ανάλυση με Π.Σ.



Εικόνα 3.1
Τρισδιάστατη απεικόνιση της κάμψης τεσσάρων σημείων

Στο Σχήμα 3.1 παρουσιάζονται τα γενικά χαρακτηριστικά του καννάβου της τρισδιάστατης δοκού σε ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων, για την ανάλυση με Π.Σ., όπου :

L : η απόσταση μεταξύ των στηρίξεων

a : η απόσταση μεταξύ στήριξης – επιβαλλόμενης φόρτισης

b : το πλάτος της δοκού

t : το πάχος της δοκού

L' : η απόσταση μεταξύ στήριξης – άκρου δοκού

P και Q : τα επιβαλλόμενα φορτία

Η ιδιαιτερότητα που παρουσιάζει η προσομοίωση του πειράματος της ασύμμετρης κάμψης είναι το γεγονός ότι ενώ η απόσταση L μεταξύ των στηρίξεων πρέπει να παραμένει σταθερή σε κάθε δοκίμιο, μεταβάλλοντας τον λόγο « λ » ο οποίος είναι σημαντική παράμετρος για την μελέτη μας, αλλάζει και το συνολικό μήκος του δοκιμίου που χρειαζόμαστε. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε περίπτωση απαιτείται μήκος δοκού ίσο με $L+a$. Έτσι, προκύπτουν κάθε φορά δύο περιοχές αριστερά και δεξιά του δοκιμίου, μήκους L οι οποίες είναι ελεύθερες τάσεων και παραμορφώσεων. Στα άκρα αυτών των περιοχών παρατηρούνται όμως τα μέγιστα βέλη κάμψεως, τα οποία αγνοούνται καθώς δεν μας ενδιαφέρουν στην παρούσα ανάλυση.

3.4 Ανάλυση Π.Σ. με το ANSYS

Η μοντελοποίηση του ανωτέρω πειράματος και η επίλυση του με Π.Σ. έγινε μέσω του λογισμικού πακέτου ANSYS Student, το οποίο προσφέρει την δυνατότητα δωρεάν χρήσης για φοιτητές, εισάγοντας ωστόσο ορισμένους περιορισμούς οι οποίοι δεν δυσκόλεψαν την παρούσα μελέτη. Το ANSYS είναι ένα από τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα προγράμματα με Π.Σ. παγκοσμίως και εκτός από την στατική δομική ανάλυση που χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά στην παρούσα εργασία, διαθέτει και πληθώρα άλλων εργαλείων, ικανά να χρησιμοποιηθούν σε όλες τις πτυχές της επιστήμης του μηχανικού και όχι μόνο. Για τις ανάγκες της παρούσας μελέτης έγινε χρήση αποκλειστικά του υποπακέτου ANSYS Mechanical APDL.

Λαμβάνοντας υπόψη τις ανάγκες της παρούσας διπλωματικής και έχοντας υπόψη την απαίτηση για προσομοίωση διαφορετικών διευθύνσεων ινών, καταλήξαμε στην δημιουργία ενός τρισδιάστατου μοντέλου. Το μοντέλο αυτό θα έχει σαν στοιχεία τα SOLID 185 τα οποία χρησιμοποιούνται για τρισδιάστατα μοντέλα και περιέχουν 8 κόμβους, με τρεις βαθμούς ελευθερίας για κάθε κόμβο. Το στοιχείο αυτό κρίθηκε το πιο κατάλληλο για την εν λόγω εργασία. Η καταλληλότητα του στοιχείου κρίθηκε για δύο λόγους. Αφενός μοντελοποιήθηκε σύνθετο τυχούσας διεύθυνσης στο οποίο είχαμε πειραματικά δεδομένα και εξάγαμε αποτελέσματα με πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικότητας, αφετέρου, το στοιχείο αυτό εμποδίζει την εμφάνιση του Shear Locking, φαινόμενο σύνηθες για δοκούς σε κάμψη.

Η κατασκευή του μοντέλου έγινε με διαφορετικές διαστάσεις πάχους, μήκους και του συντελεστή λ , οπότε κάθε φορά θα έχουμε διαφορές στο Meshing. Η επιλογή του αριθμού των στοιχείων έγινε με την ακόλουθη διεργασία.

3.5 Ανάλυση Ποιότητας Διακριτοποίησης για 4PB

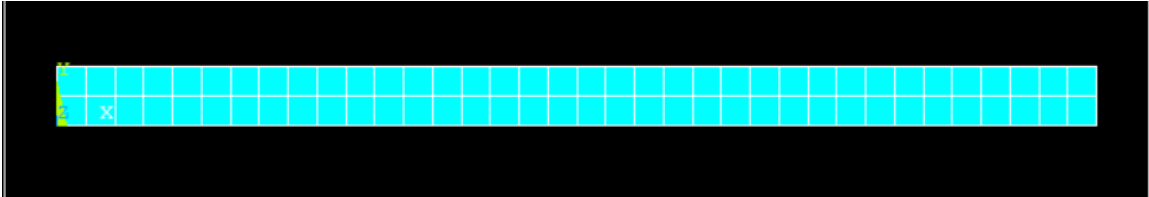
Για λόγους πληρότητας της μελέτης, παρουσιάζεται μια σύντομη ανάλυση της επάρκειας της ακρίβειας των αποτελεσμάτων που παρέχει η διακριτοποίηση που επιλέξαμε για την παρούσα εργασία.

Γενικά, ως λογικό συμπέρασμα της θεωρίας των Π.Σ. προκύπτει πως όσο πιο πυκνή είναι η διακριτοποίηση ενός μοντέλου (όσο περισσότερα Π.Σ και αντίστοιχα κόμβοι υπάρχουν στο μοντέλο), τόσο μεγαλύτερη είναι η ακρίβεια των παραγόμενων αποτελεσμάτων. Αυτό συμβαίνει γιατί έτσι προσεγγίζεται όλο και περισσότερο η συνεχής λύση, η οποία θεωρητικά (αν και θα ήταν δυνατό να βρεθεί) θα ήταν η ακριβέστερη [19]. Η αύξηση όμως στοιχείων και κόμβων οδηγεί σε αντίστοιχη αύξηση του αριθμού και της πολυπλοκότητας των εξισώσεων που πρέπει να λύσει ο Η/Υ. Επομένως θα απαιτηθεί περισσότερος χρόνος και επεξεργαστική ισχύς για την εξαγωγή αποτελεσμάτων. Συμπερασματικά, πριν από κάθε ανάλυση με Π.Σ. θα πρέπει να γίνεται μια αντιστοίχιση

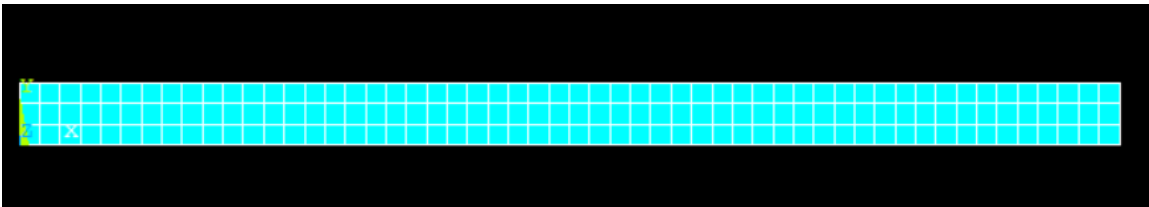
της απαιτούμενης ακρίβειας των αποτελεσμάτων με τους διαθέσιμους πόρους του υπολογιστικού συστήματος και τον χρόνο που μπορεί να αναλωθεί.

Επειδή στην συγκεκριμένη προσομοίωση το κύριο μέγεθος που μας ενδιαφέρει να εξάγουμε είναι το βέλος κάμψης, θα αναλύσουμε την ποιότητα του πλέγματος βάσει αυτού.

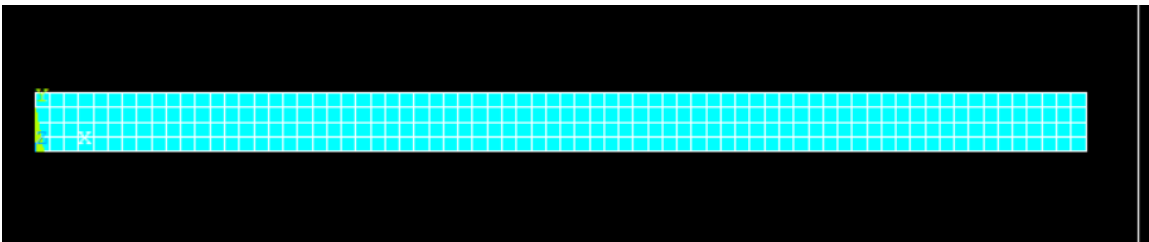
Για τον σκοπό αυτό έγιναν πέντε διαφορετικές διακριτοποιήσεις του μοντέλου για την περίπτωση της δοκού με $L=120\text{mm}$ και $\lambda=3$ με διεύθυνση ινών 45 μοίρες.



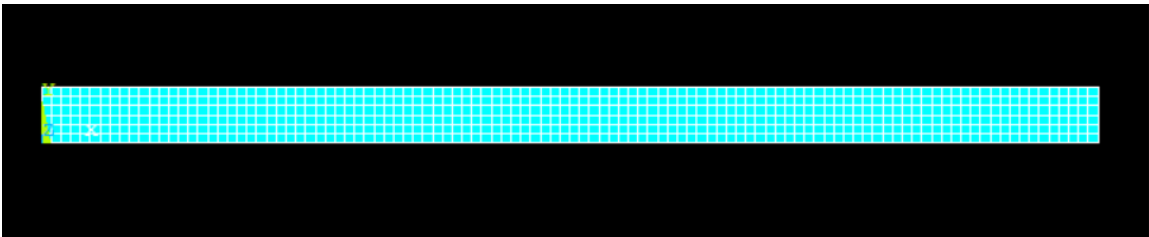
Εικόνα 3. 2
Διακριτοποίηση με 24 στοιχεία κατά μήκος της δοκού και 2 στοιχεία κατά πλάτος



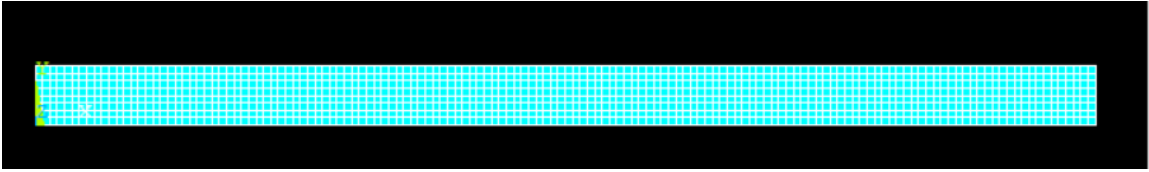
Εικόνα 3. 3
Διακριτοποίηση με 36 στοιχεία κατά μήκος της δοκού και 9 στοιχεία κατά πλάτος



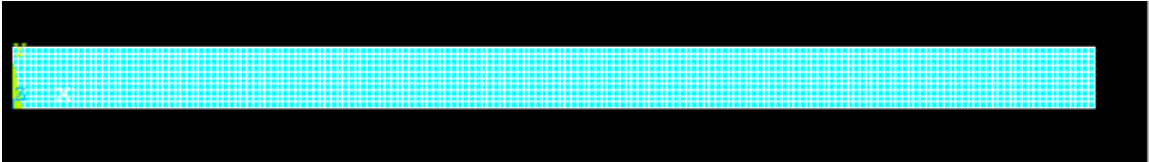
Εικόνα 3. 4
Διακριτοποίηση με 48 στοιχεία κατά μήκος της δοκού και 12 στοιχεία κατά πλάτος



Εικόνα 3. 5
Διακριτοποίηση με 72 στοιχεία κατά μήκος της δοκού και 18 στοιχεία κατά πλάτος

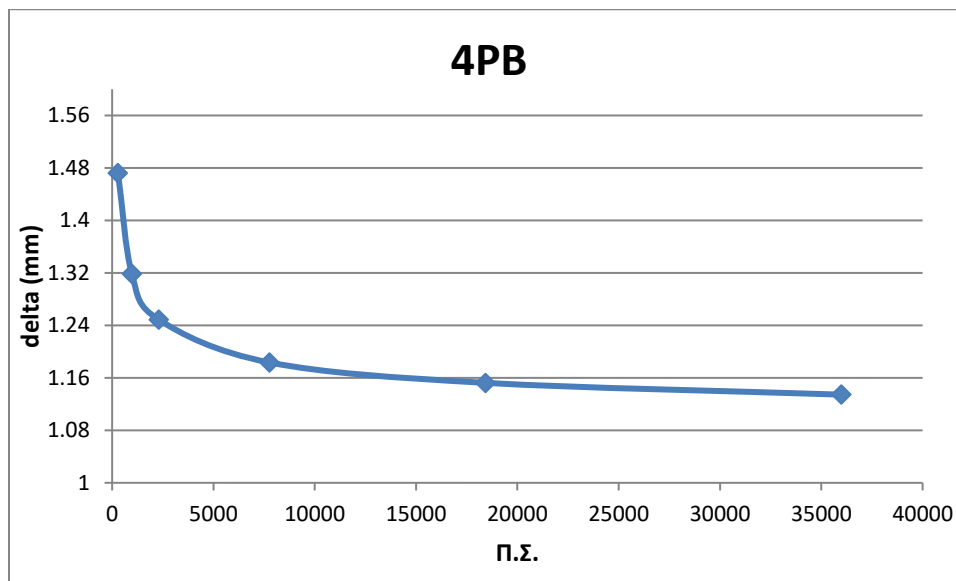


Εικόνα 3. 6
Διακριτοποίηση με 96 στοιχεία κατά μήκος της δοκού και 24 στοιχεία κατά πλάτος



Εικόνα 3. 7
Διακριτοποίηση με 120 στοιχεία κατά μήκος της δοκού και 30 στοιχεία κατά πλάτος

Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις εξετάζονται τα βέλη κάμψης στο σημείο $x=a$ όπου ασκείται η δύναμη Q . Στην συνέχεια φαίνονται τα διαγράμματα για κάθε περίπτωση επίλυσης ώστε να δούμε σε ποιον αριθμό πεπερασμένων στοιχείων θα γίνει η σύγκλιση τιμών.



Διάγραμμα 3. 1
Μεταβολή του βέλους κάμψης με την αύξηση των Π.Σ.

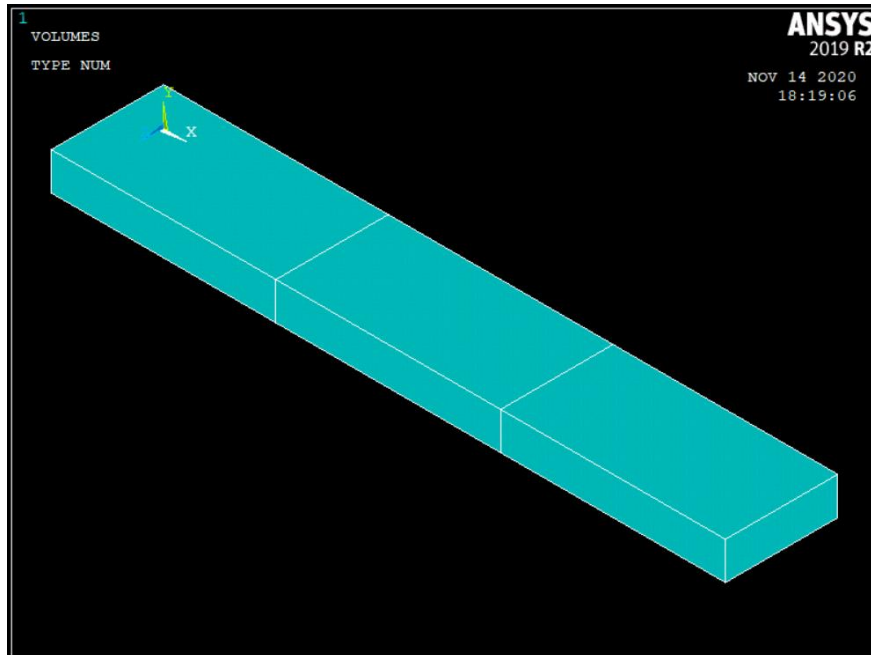
Είναι εμφανές ότι από την διακριτοποίηση με τα 72 στοιχεία κατά μήκος της δοκού θα μπορούσε κάποιος να θεωρήσει ικανοποιητικά τα αποτελέσματα και να μην επιλέξει την περαιτέρω αύξηση στοιχείων – κόμβων. Ετσι λοιπόν θα επιλέξουμε τα 72 στοιχεία κατά μήκος και 18 κατά πλάτος λόγω ικανοποιητικού αποτελέσματος καθώς και την αποφυγή του επιπλέον υπολογιστικού κόστους. Ο συνολικός αριθμός των Π.Σ. θα είναι 77766.

3.6 Μοντελοποίηση στο ANSYS για 4PB

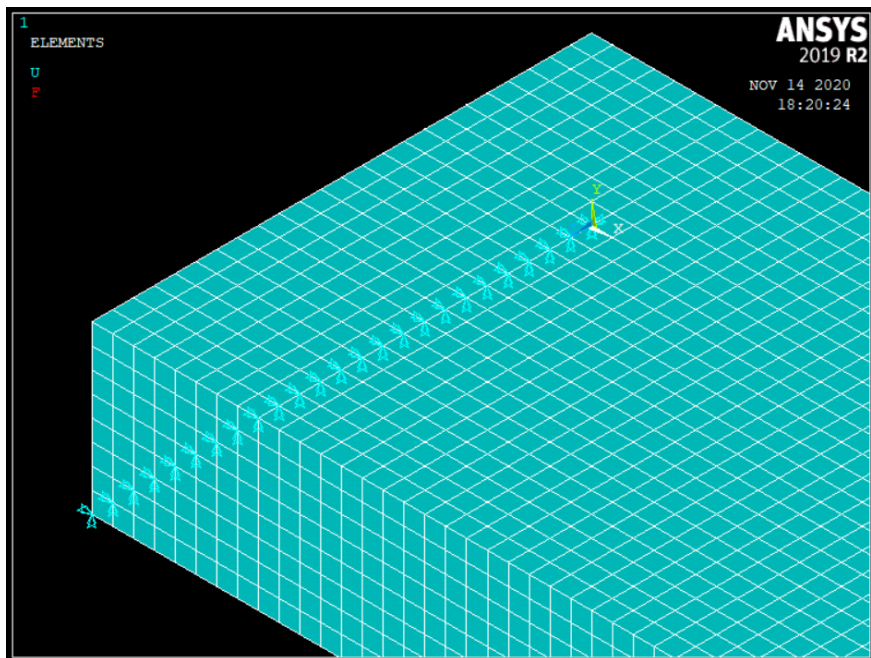
Όπως προαναφέρθηκε και στα ανωτέρω, μοντελοποίηση της κάμψης τεσσάρων σημείων θα γίνει στο ANSYS Mechanical APDL. Το συγκεκριμένο πρόγραμμα παρέχει την δυνατότητα να φτιάξουμε ένα κώδικα σε αρχείο txt και να το εκτελέσουμε όσες φορές χρειαστεί, αλλάζοντας τις παραμέτρους που μας ενδιαφέρουν. Στο υποκεφάλαιο αυτό θα γίνει περιγραφή του τρόπου με τον οποίο εκτελέστηκε η μοντελοποίηση ώστε να φτάσουμε στην εξαγωγή των αποτελεσμάτων.

Για να αποφύγουμε να κάνουμε το πλέγμα πολύ πυκνό ώστε σε κάθε αλλαγή των παραμέτρων να αναζητούμε κόμβους και την κατάλληλη τοποθέτηση των οριακών συνθηκών (φορτία και στηρίξεις), θα χωρίσουμε την κατασκευή σε 3 Block όπου θα χωρίζονται σε μήκη a και $L-a$. Με αυτό τον τρόπο θα ξέρουμε ότι πάντα στο σημείο που μας ενδιαφέρει θα υπάρχει κόμβος. Επίσης στην παρούσα κατάσταση δεν έχει νόημα να απεικονίσουμε όλες τις πιθανές παραλλαγές του προβλήματος καθώς τα αποτελέσματα φαίνονται αναλυτικά στο τέλος του κεφαλαίου. Για τον λόγο αυτό θα γίνει μια ενδεικτική παρουσίαση για $L=120\text{mm}$ και συντελεστή $\lambda=3$ και για $L=80\text{mm}$ και συντελεστή $\lambda=3$.

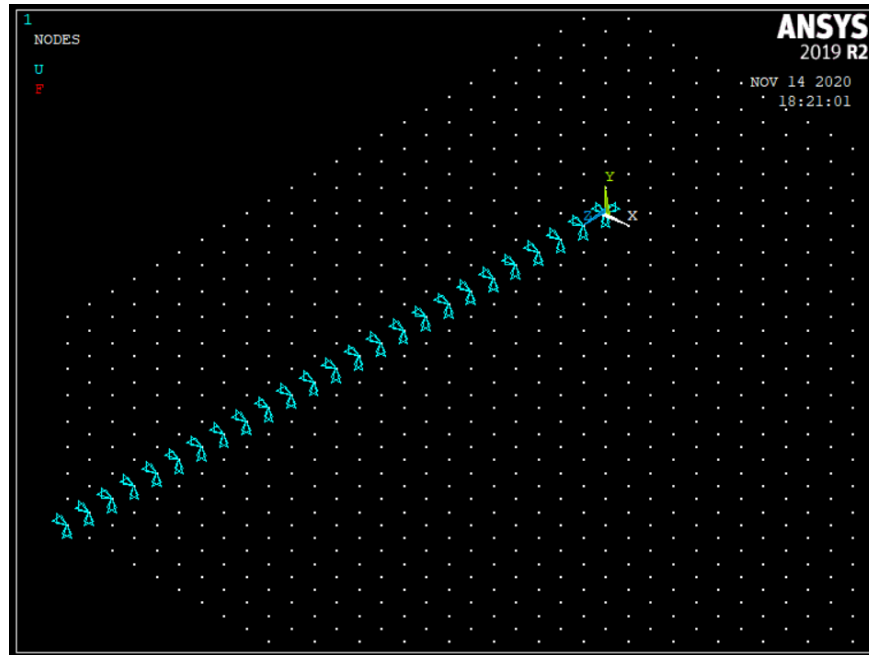
Ως εκ τούτου στις θέσεις $x=0$, $y=0$ και σε όλες τις τιμές του z θα έχουμε περιορισμό κίνησης ως προς τον άξονα x και των άξονα y . Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να στηρίζουμε και τον κόμβο που βρίσκεται στην θέση $(0,0,0)$ ως προς την διεύθυνση z , αλλιώς το πρόγραμμα θα θεωρεί την κατασκευή μας ως μηχανισμό, ανεξάρτητα που δεν θα έχουμε δυνάμεις προς αυτήν την διεύθυνση. Η παραπάνω περιγραφή γίνεται πιο κατανοητή με τις επόμενες εικόνες όπου γίνεται σταδιακά μεγέθυνση.



Εικόνα 3. 8
Χωρισμός της κατασκευής σε τρία Block

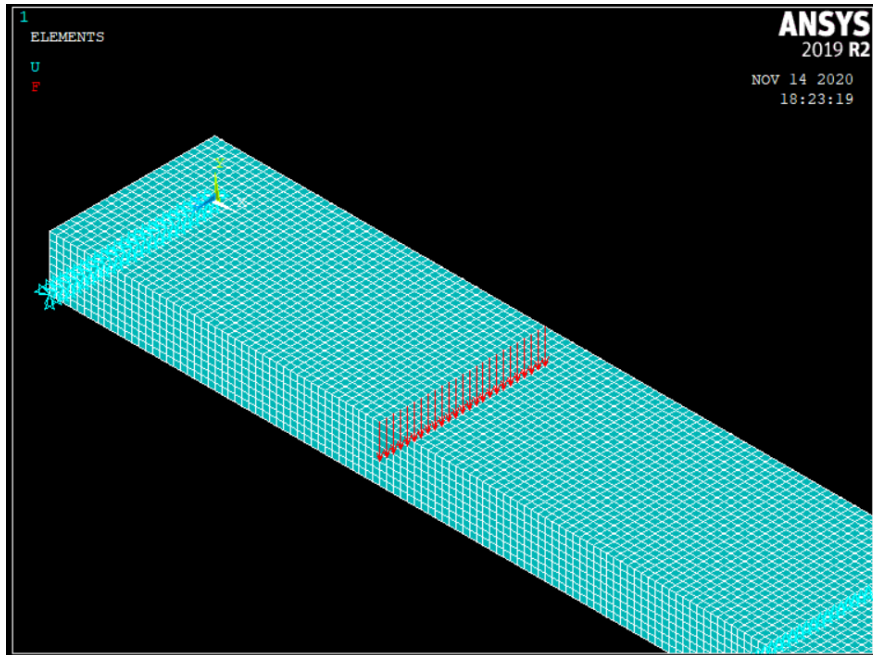


Εικόνα 3. 9
Στήριξη του αριστερού άκρου στις δύο κατευθύνσεις x και y



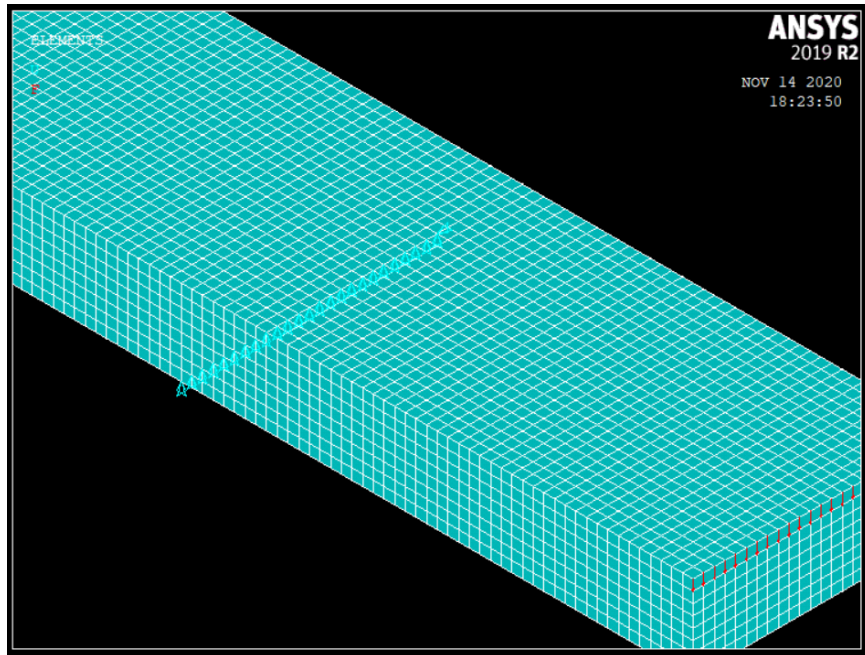
Εικόνα 3. 10
Στήριξη του αριστερού άκρου στην θέση (0,0,0) ως προς την διεύθυνση z

Τώρα στο σημείο $x=a$, $y=t$ και σε όλο το μήκος του z κατανέμουμε το φορτίο του Q σε όλους τους κόμβους ώστε να υπάρχει ομοιομορφία. Έτσι το άθροισμα των δυνάμεων σε αυτούς τους κόμβους θα είναι ίσο με Q .

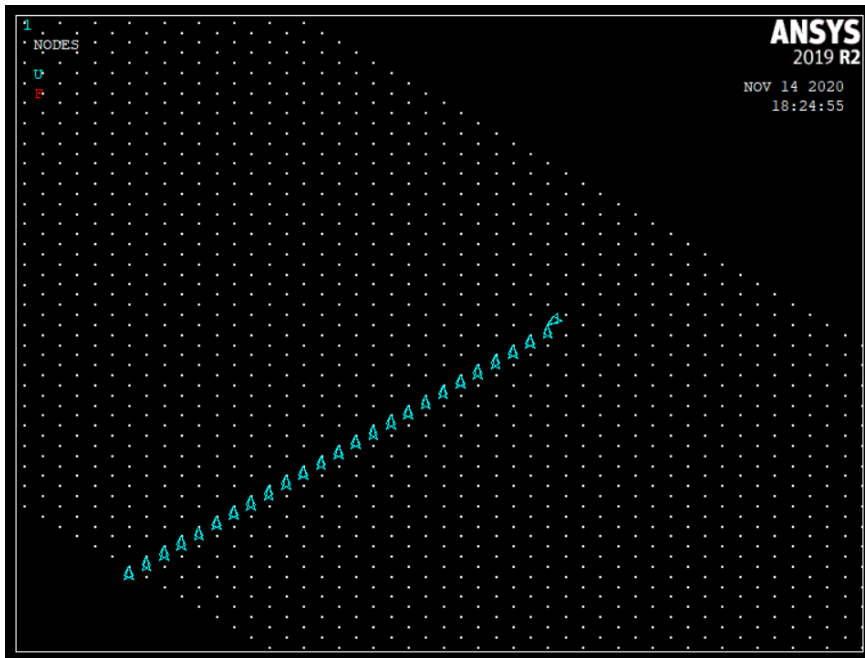


Εικόνα 3. 11
Κατανομή του φορτίου Q στην θέση $x=a$ και $y=t$

Όπως ακριβώς και με την άρθρωση στην θέση $(L,0,z)$ έτσι και τώρα θα εφαρμόσουμε την κύλιση στην θέση $x=L$. Συγκεκριμένα όλες οι θέσεις έχουν περιορισμό κίνησης ως προς την κατεύθυνση y , ενώ το σημείο $(L,0,0)$ θα έχει περιορισμό και ως προς τον άξονα z καθώς το πρόβλημα θα δέχεται την κατασκευή μας σαν μηχανισμό και δεν θα το επιλύει. Αυτό γίνεται πιο κατανοητό με τις ακόλουθες εικόνες.

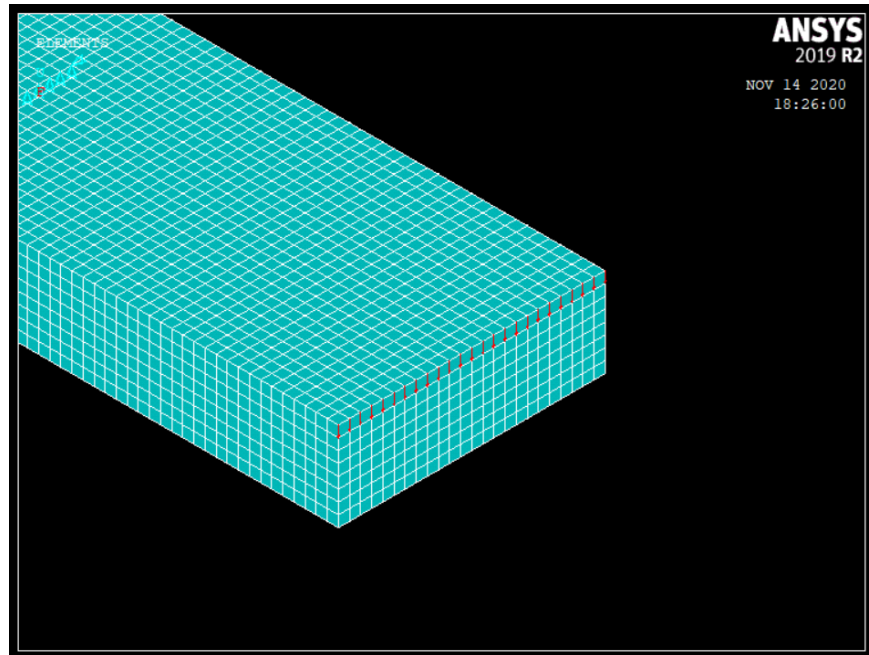


Εικόνα 3. 12
Κύλιση στην θέση $x=L$ όπου εμποδίζεται η κίνηση ως προς y



Εικόνα 3. 13
Ο κόμβος στην θέση $(L,0,0)$ περιορίζεται ως προς την κίνηση στον άξονα z

Τέλος, για το φορτίο στην θέση $(L+a,t,z)$ έχουμε ακριβώς την ίδια μεθοδολογία με το προηγούμενο φορτίο. Δηλαδή κατανέμεται το φορτίο σε όλους τους κόμβους έτσι ώστε το άθροισμα τους να μας δίνει το φορτίο P σε αυτή την περίπτωση. Αυτό φαίνεται πιο κατανοητά στην ακόλουθη εικόνα.



Εικόνα 3.14
Κατανομή της δύναμης P στο άκρο της δοκού

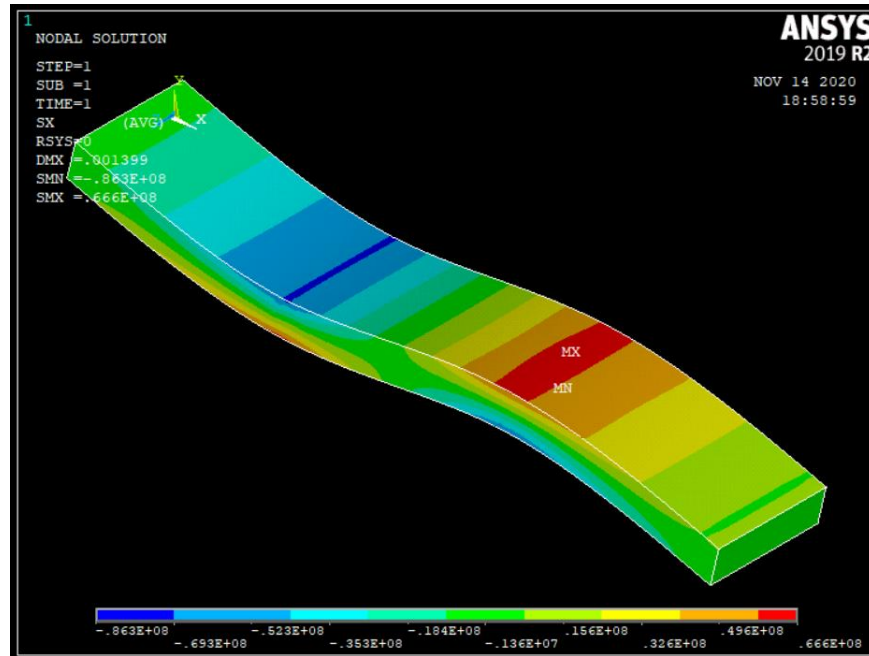
3.7 Εξαγωγή Αποτελεσμάτων από την ανάλυση με Π.Σ.

Αφού κάνουμε την μοντελοποίηση του προβλήματος εντός του λογισμικού ANSYS και ο H/Y ολοκληρώσει την λύση του, έχουμε διάφορες επιλογές σχετικά με την παρουσίαση των παραγόμενων αποτελεσμάτων. Η πρώτη επιλογή που θα κάνει συνήθως ο μηχανικός θα είναι να ζητήσει ένα χρωματικό διάγραμμα (Contour Plot) έτσι ώστε να πάρει μια πρώτη εικόνα της κατανομής του μεγέθους που τον ενδιαφέρει.. Έπειτα, μας δίνεται η δυνατότητα να ζητήσουμε την τιμή του μεγέθους που μας ενδιαφέρει στον κόμβο της επιλογής μας (Query Result). Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι αν ζητήσουμε την τιμή ενός μεγέθους σε έναν συγκεκριμένο κόμβο στο επίπεδο x-y για όλο το πάχος ξεχωριστά, τότε θα μπορούσαμε να σχηματίσουμε την κατανομή του ως προς το πάχος του συνθέτου.

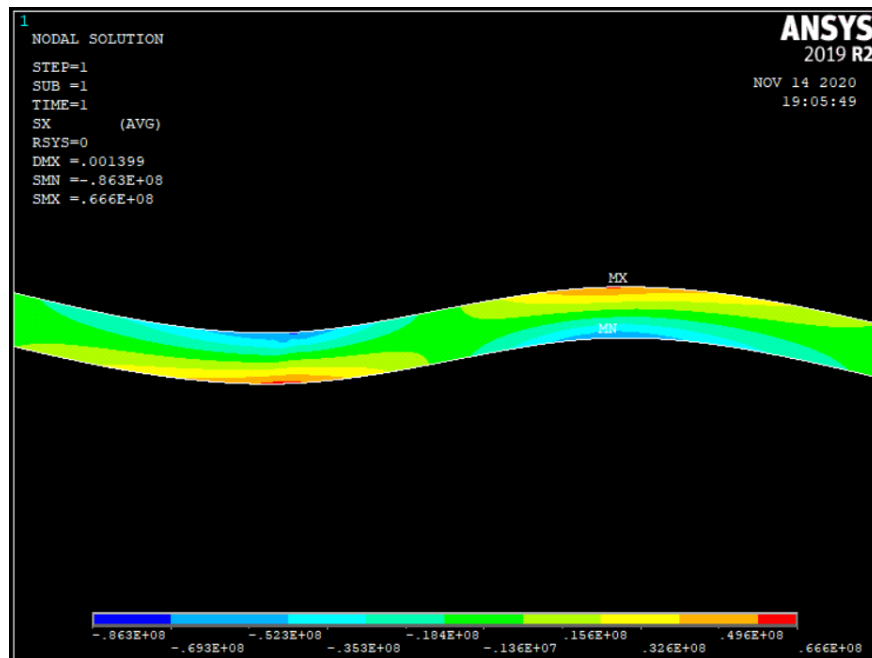
3.7.1 Ορθές Τάσεις σχ

Όπως ήταν αναμενόμενο από την θεωρία, στη δοκό με $L=120\text{mm}$ δημιουργούνται ορθές τάσεις μεγαλύτερες από ότι στη δοκό με $L=80\text{mm}$. Οι μέγιστες τάσεις σε όλες τις περιπτώσεις παρουσιάζονται στα άνω και κάτω άκρα στα σημεία B και C. Παρατηρείται

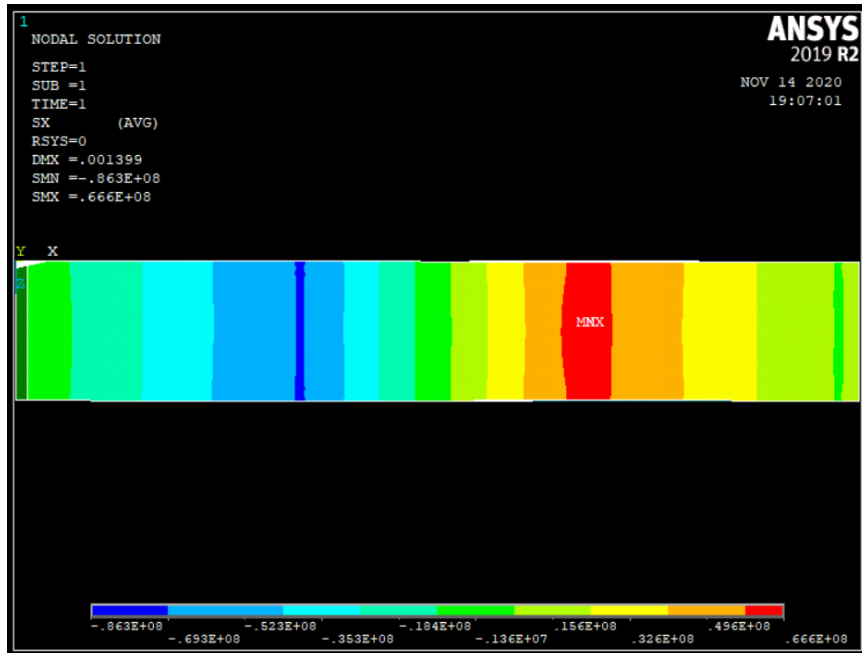
η αντισυμμετρία που περιμέναμε και οι τάσεις στο κέντρο του σύνθετου να είναι πολύ μικρές εάν όχι μηδέν όπως προβλέπει η θεωρία.



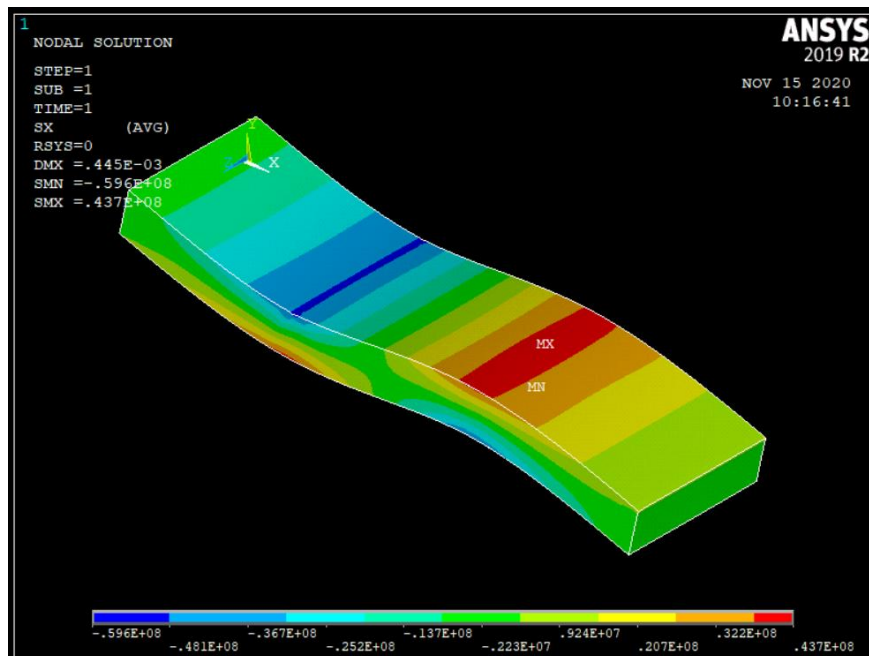
Εικόνα 3.15
Κατανομή ορθών τάσεων σ_x στο σύνολο του σύνθετου για ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=120\text{mm}$
Διακρίνονται τα σημεία μέγιστων εφελκυστικών και θλιπτικών τάσεων



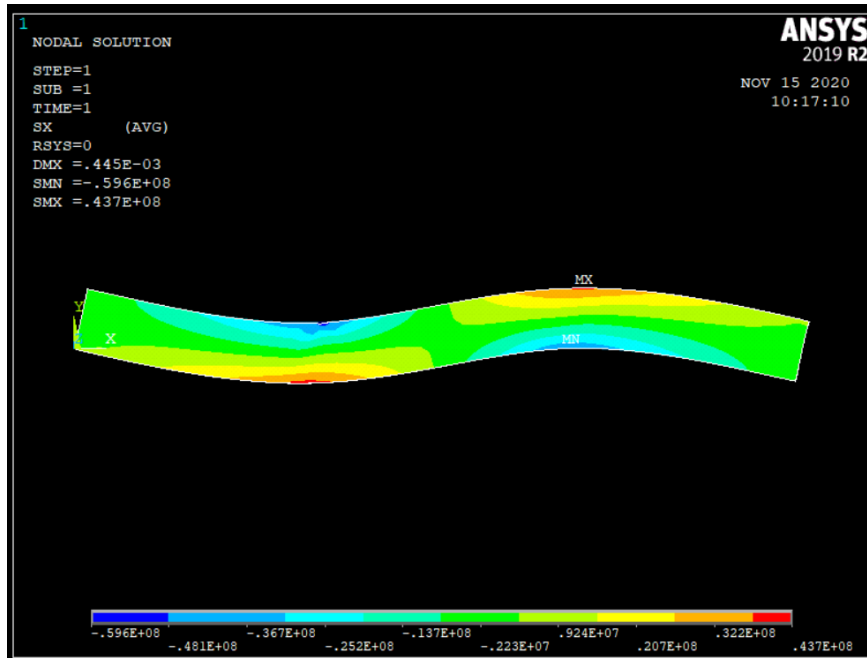
Εικόνα 3.16
Κατανομή ορθών τάσεων σ_x κατά το πάχος του σύνθετου για ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=120\text{mm}$ Διακρίνεται η μη συνεχής κατανομή των τάσεων μεταξύ του πάχους



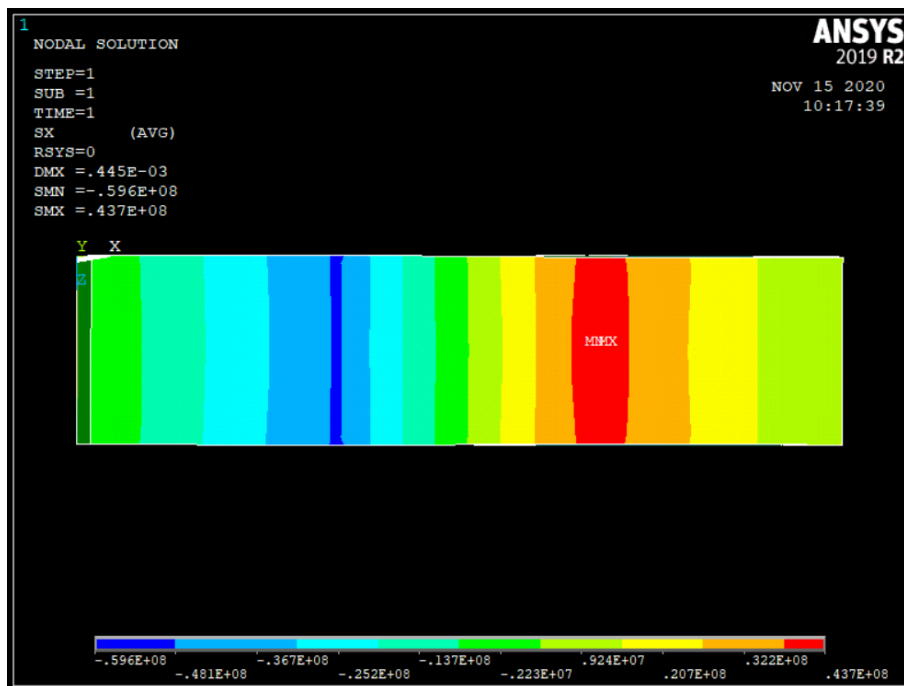
Εικόνα 3.17
Κατανομή ορθών τάσεων σ_x στο επίπεδο x-y της άνω στρώσης για
ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=120\text{mm}$
Διακρίνονται τα σημεία μέγιστων εφελκυστικών και θλιπτικών τάσεων



Εικόνα 3.18
Κατανομή ορθών τάσεων σ_x στο σύνολο του
σύνθετου για ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=80\text{mm}$
Διακρίνονται τα σημεία μέγιστων εφελκυστικών και θλιπτικών τάσεων



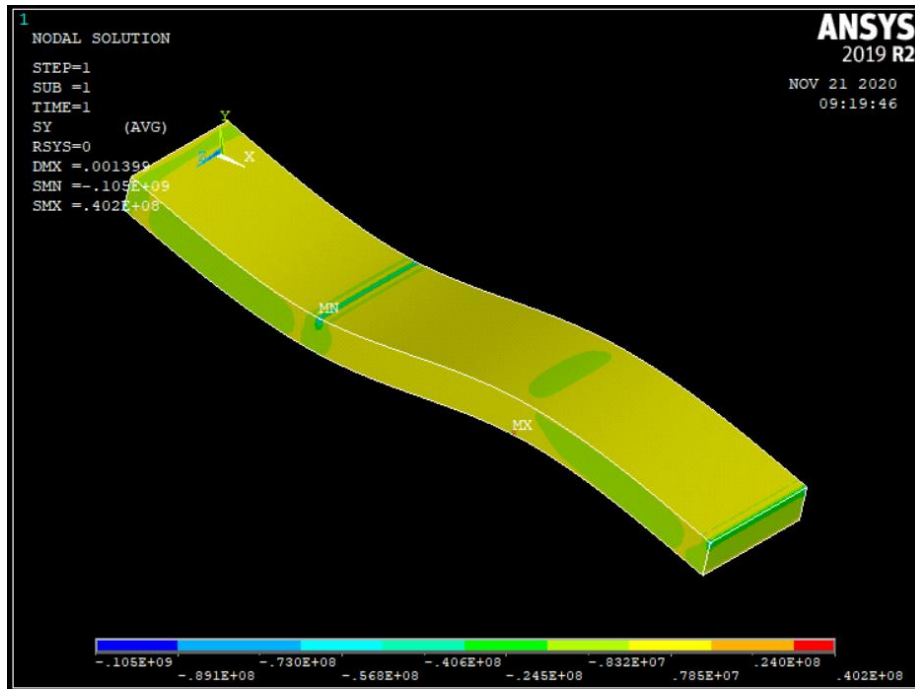
Εικόνα 3. 19
Κατανομή ορθών τάσεων σ_x κατά το πάχος του σύνθετου για
ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=80\text{mm}$
Διακρίνεται η μη συνεχής κατανομή των τάσεων μεταξύ του πάχους.



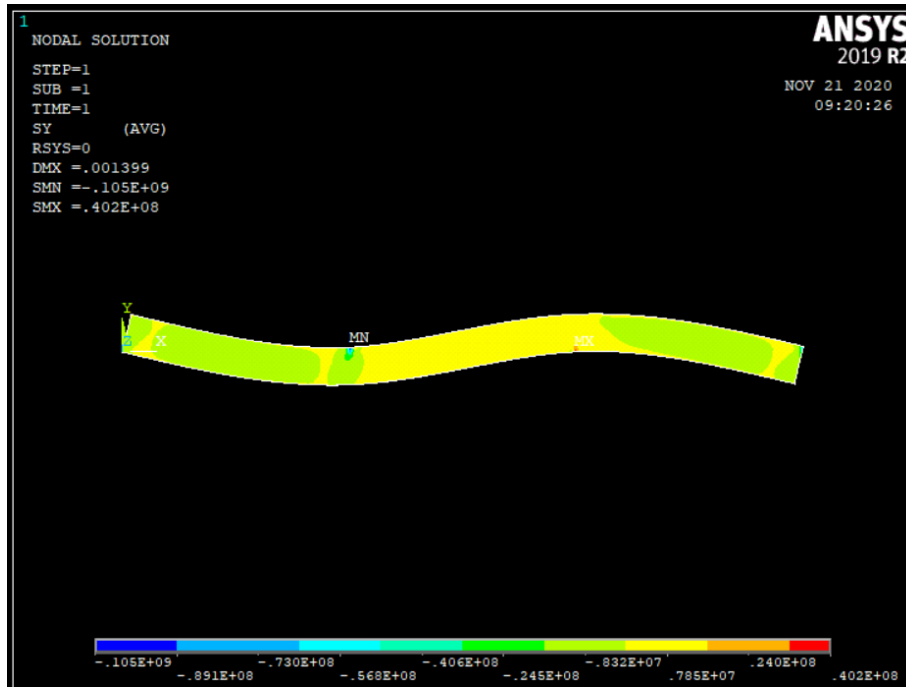
Εικόνα 3. 20
Κατανομή ορθών τάσεων σ_x στο επίπεδο x-y της άνω στρώσης για
ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=80\text{mm}$
Διακρίνονται τα σημεία μέγιστων εφελκυστικών και θλιπτικών τάσεων

3.7.2 Ορθές Τάσεις σ_y

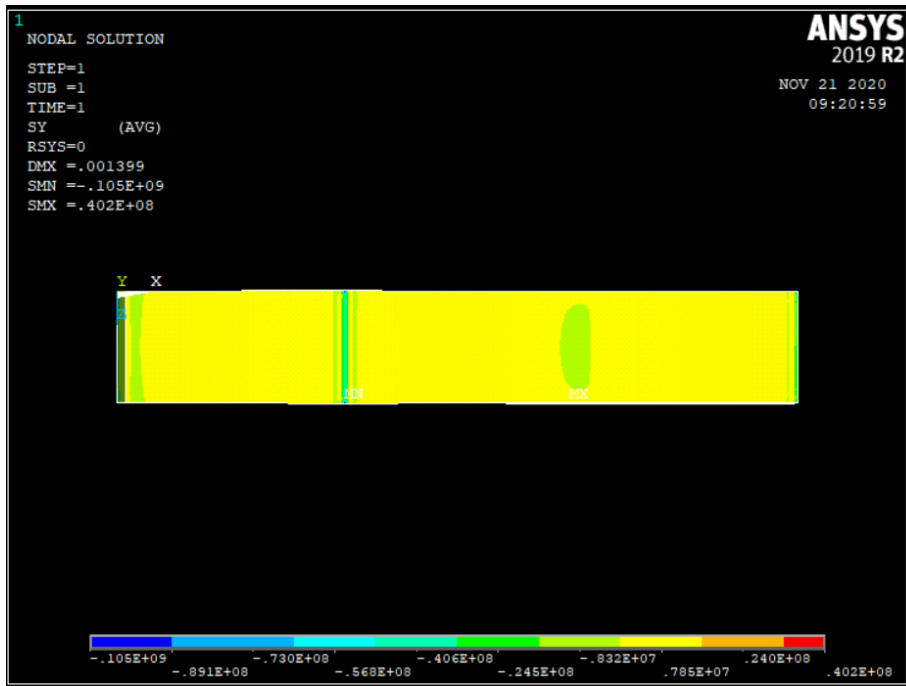
Οι ορθές τάσεις σ_y δεν προβλέπονται από την Θεωρία της Ελαστικότητας καθώς αποδείξαμε ότι έχουμε $\sigma_y=0$. Παρ' όλα αυτά στα Πεπερασμένα Στοιχεία παρατηρούμε ότι υπάρχουν συγκριτικά με τις ορθές τάσεις σ_x πολύ μικρότερες. Στην συνέχεια φαίνονται τα ακόλουθα διαγράμματα με Contour Plot για τις ορθές τάσεις σ_y .



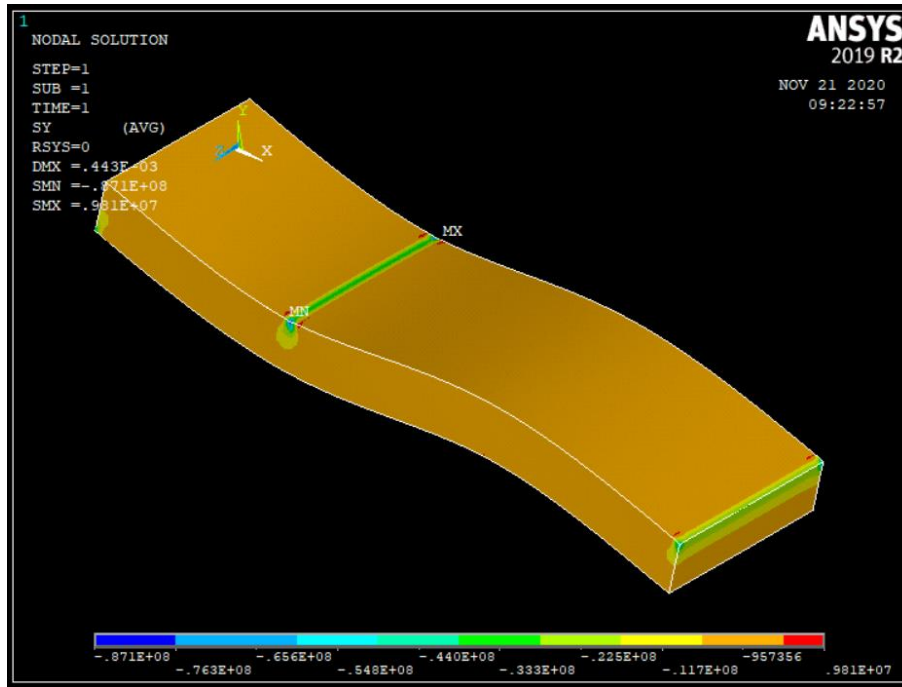
Εικόνα 3. 21
Κατανομή ορθών τάσεων σ_y στο σύνολο του
σύνθετου για ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=120\text{mm}$



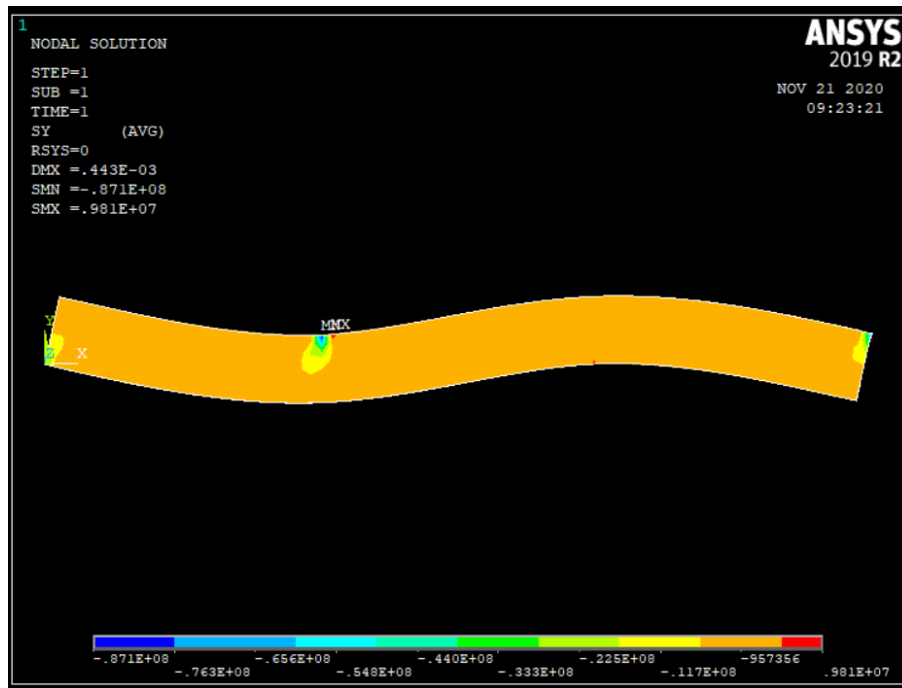
Εικόνα 3. 22
Κατανομή ορθών τάσεων σ_y στο πάχος του
σύνθετου για ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=120\text{mm}$



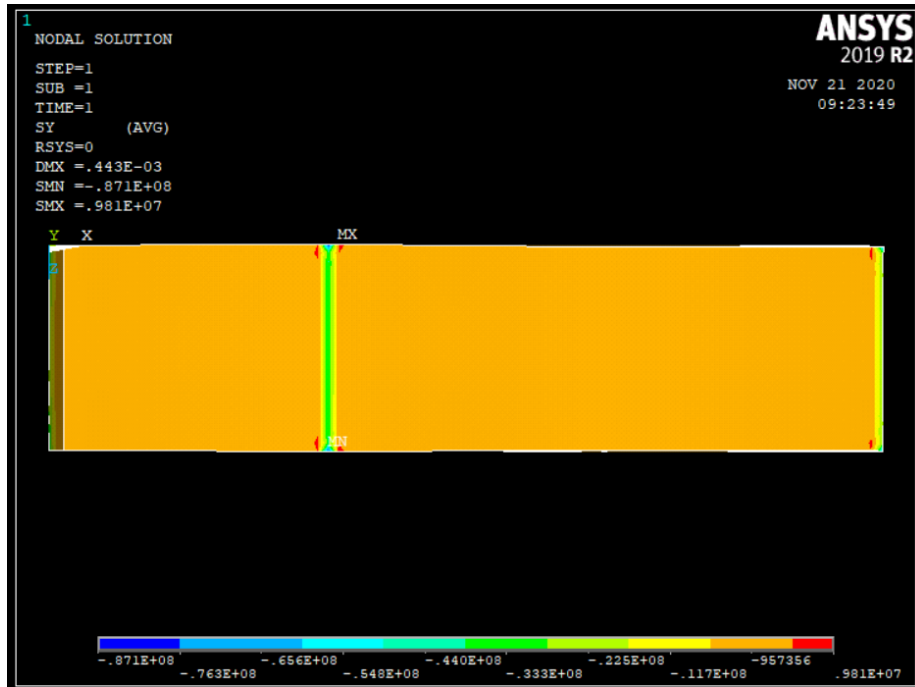
Εικόνα 3. 23
Κατανομή ορθών τάσεων σ_y στο άνω άκρο του
σύνθετου για ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=120\text{mm}$



Εικόνα 3. 24
Κατανομή ορθών τάσεων σ_y στο σύνολο του
σύνθετου για ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=80\text{mm}$



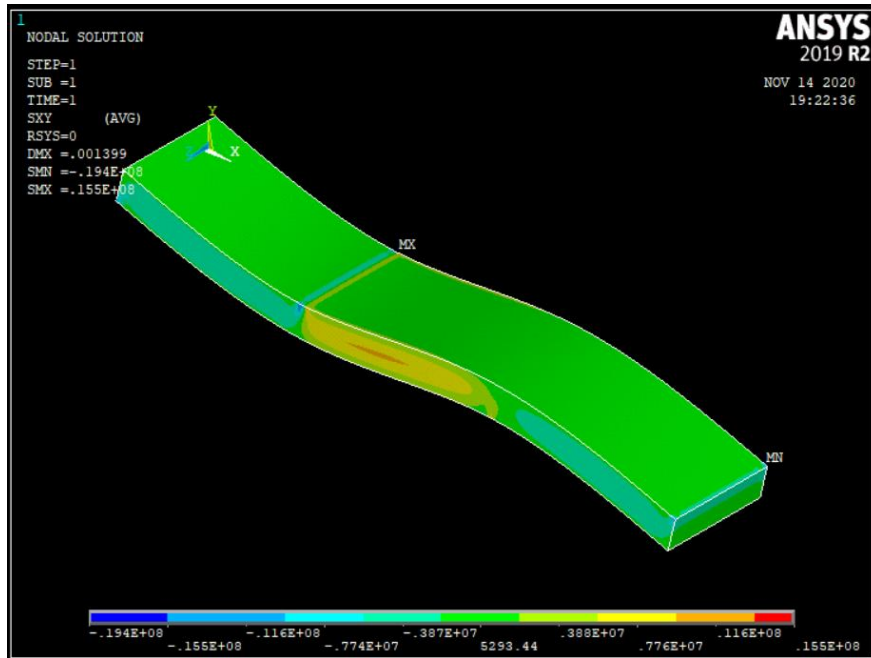
Εικόνα 3. 25
Κατανομή ορθών τάσεων σ_y στο πάχος του
σύνθετου για ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=80\text{mm}$



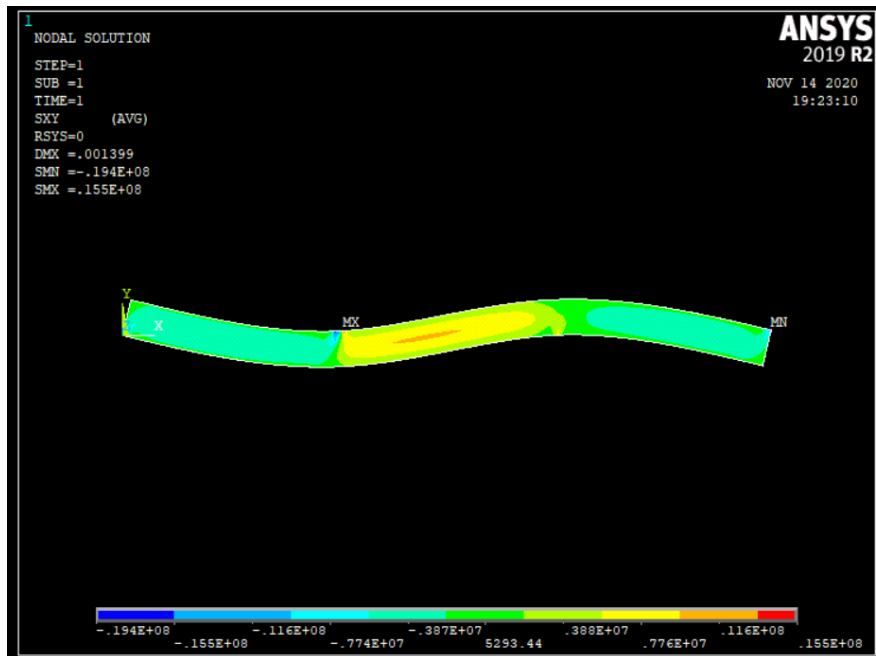
Εικόνα 3. 26
Κατανομή ορθών τάσεων σ_y στο άνω άκρο του
σύνθετου για ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=80\text{mm}$

3.7.3 Διατμητικές Τάσεις τ_{xy}

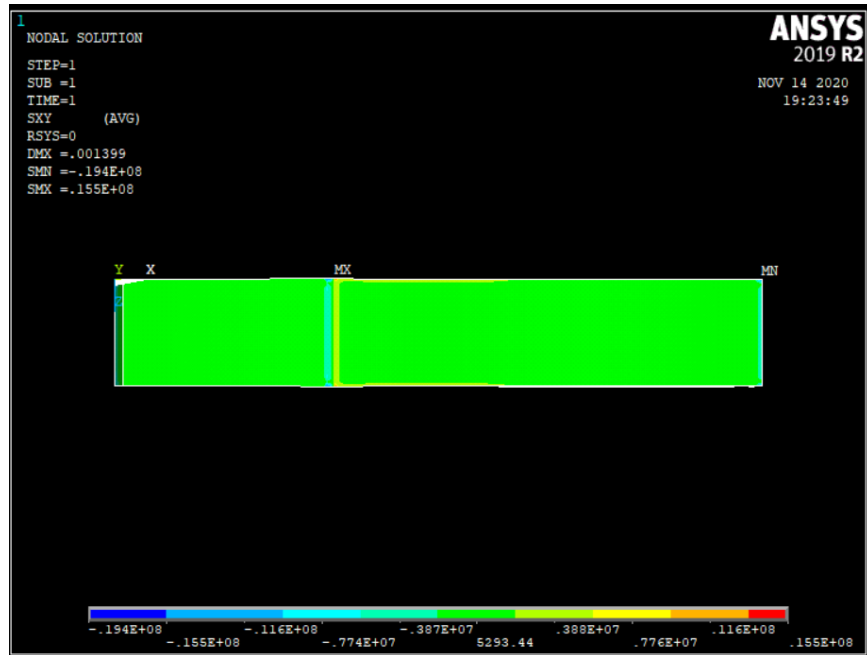
Στις διατμητικές τάσεις παρατηρούμε ότι στην επιφάνεια του σύνθετου είναι σχεδόν μηδέν όπως και περιμέναμε ενώ βλέπουμε τις μέγιστες τιμές στο κέντρο του σύνθετου. Επίσης μπορούμε να δούμε ότι οι τάσεις στην περιοχή μεταξύ $x=a$ και $x=L$ είναι μεγαλύτερες. Γεγονός το οποίο είναι αναμενόμενο. Τέλος μπορούμε να δούμε ότι οι διατμητικές τάσεις είναι ίδιες και στις δύο περιπτώσεις.



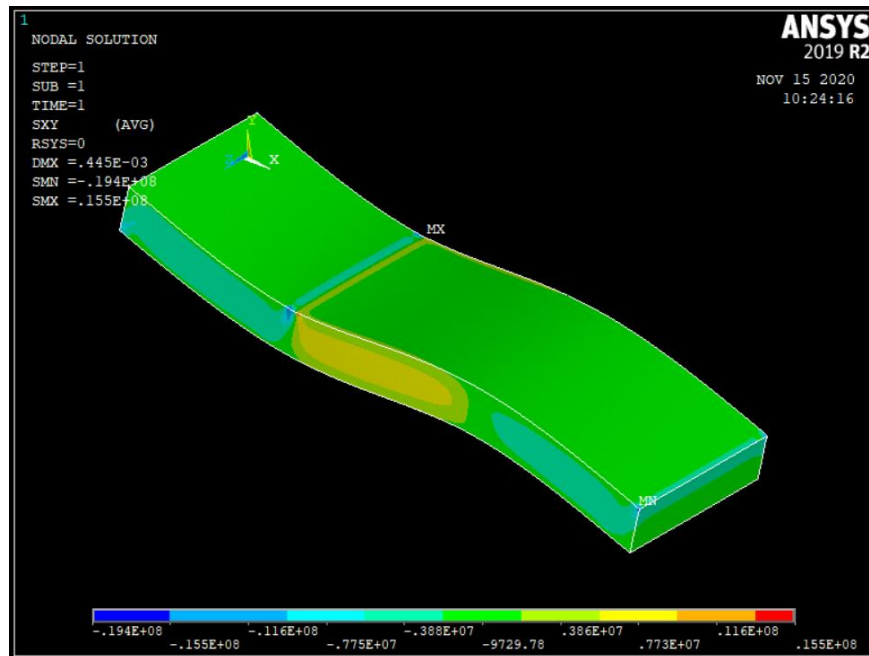
Εικόνα 3. 27
Κατανομή διατμητικών τάσεων τ_{XY} στο σύνολο σύνθετου για
Γίρες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=120\text{mm}$



Εικόνα 3. 28
Κατανομή διατμητικών τάσεων τ_{XY} στο πάχος σύνθετου για
Γίρες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=120\text{mm}$
Διακρίνεται η αύξηση των διατμητικών τάσεων από τα ακριανά στο μεσαίο στρώμα.



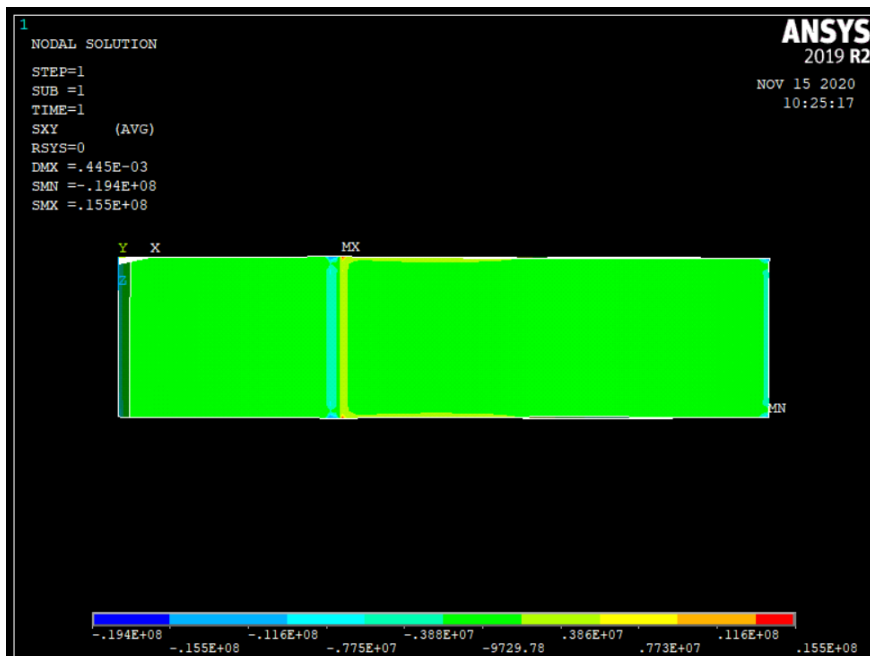
Εικόνα 3. 29
Κατανομή διατμητικών τάσεων τ_{XY} στο άνω στρώμα του σύνθετου για ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=120\text{mm}$



Εικόνα 3. 30
Κατανομή διατμητικών τάσεων τ_{XY} στο σύνολο σύνθετου για ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=80\text{mm}$



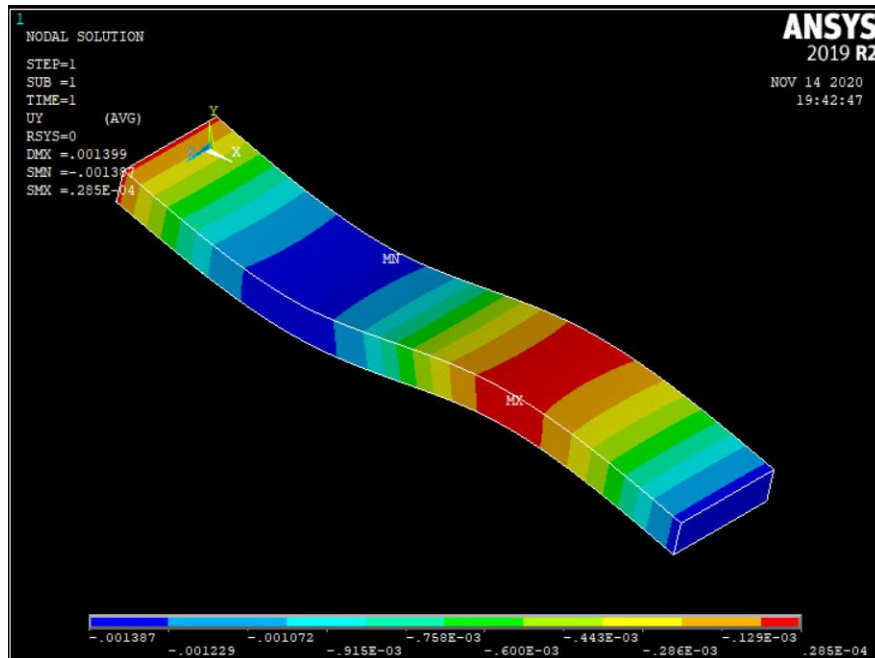
Εικόνα 3. 31
Κατανομή διατμητικών τάσεων τ_{Xy} στο πάχος σύνθετου για ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=80\text{mm}$
Διακρίνεται η αύξηση των διατμητικών τάσεων από τα ακριανά στο μεσαίο στρώμα



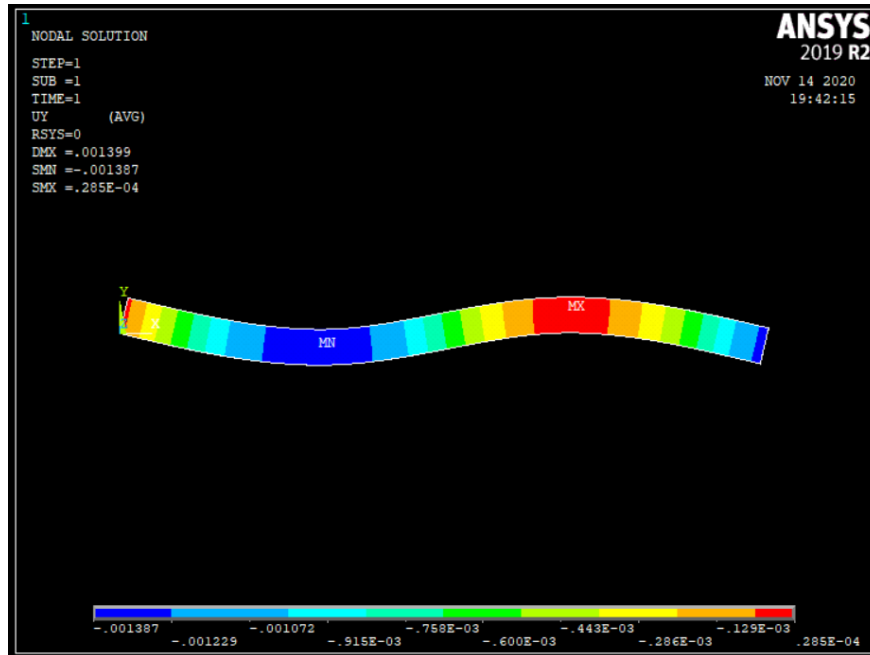
Εικόνα 3. 32
Κατανομή διατμητικών τάσεων τ_{Xy} στο άνω στρώμα του σύνθετου για ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=80\text{mm}$

3.7.4 Βέλος Κάμψης

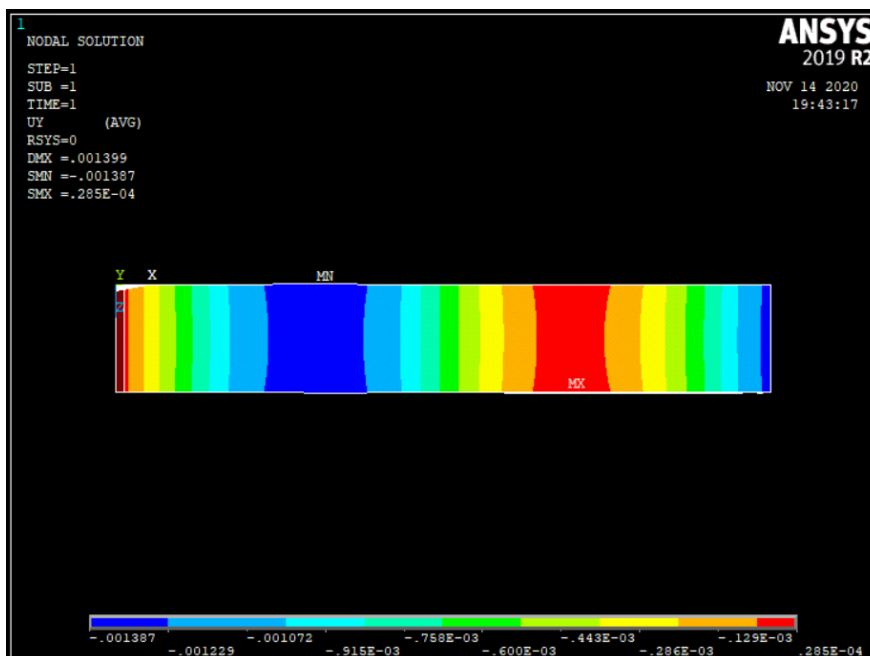
Το βέλος κάμψης, όπως προβλέπεται και από την θεωρία γίνεται μέγιστο στο σημείο B για $\lambda=3$. Επίσης, όπως είναι προφανές, το βέλος κάμψης είναι μεγαλύτερο για τη δοκό με $L=120\text{mm}$ από ότι για τη δοκό με $L=80\text{mm}$



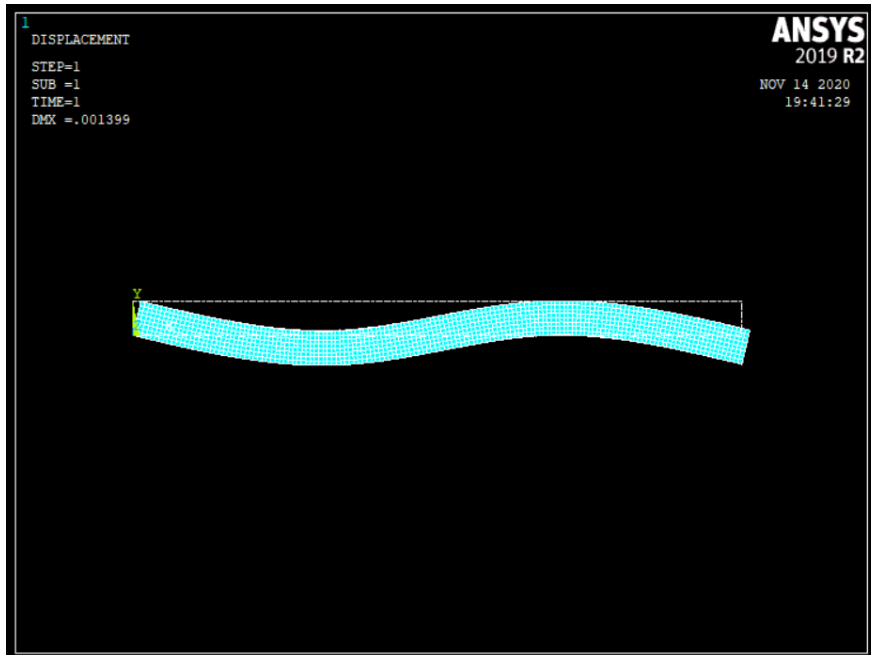
Εικόνα 3.33
Κατανομή των μετακινήσεων ως προς τον άξονα y στο
σύνολο του σύνθετου για
ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=120\text{mm}$



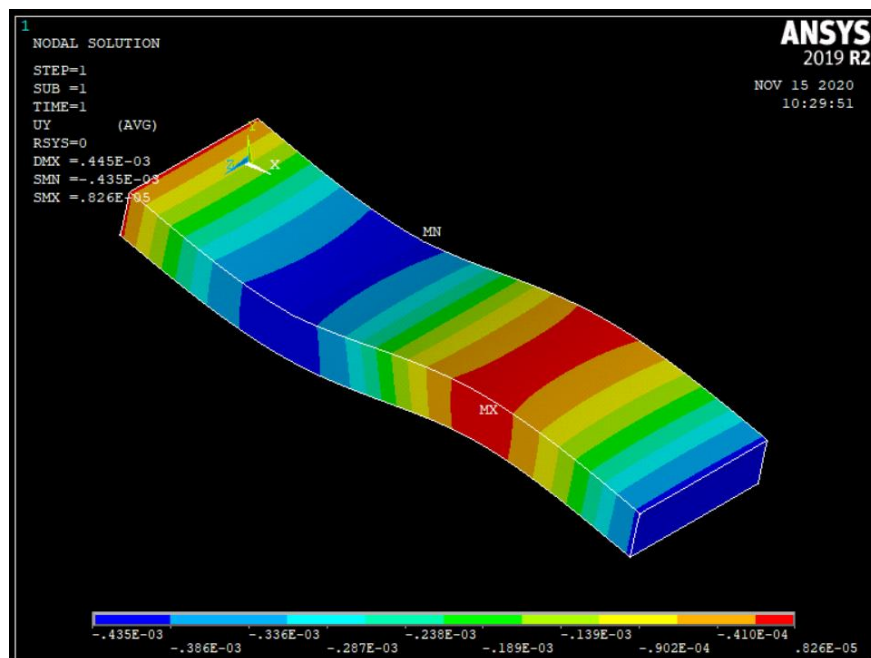
Εικόνα 3. 34
Κατανομή των μετακινήσεων ως προς τον άξονα y στο
πάχος του σύνθετου για
ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=120\text{mm}$



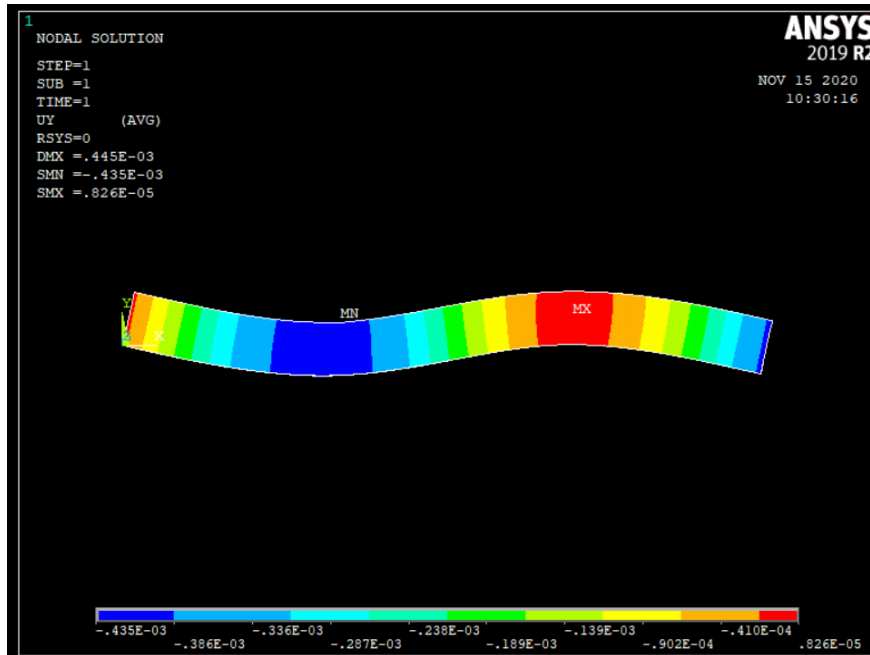
Εικόνα 3. 35
Κατανομή των μετακινήσεων ως προς τον άξονα y στο
Άνω στρώμα του σύνθετου για
ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=120\text{mm}$



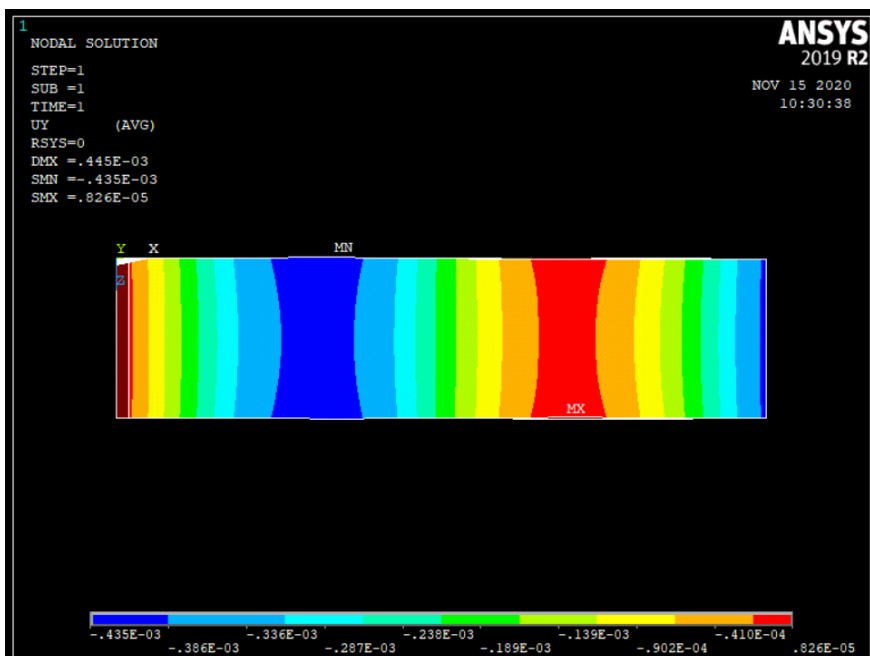
Εικόνα 3. 36
Το μέγιστο βέλος ως προς τον άξονα y στο
σύνολο του σύνθετου για
ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=120\text{mm}$



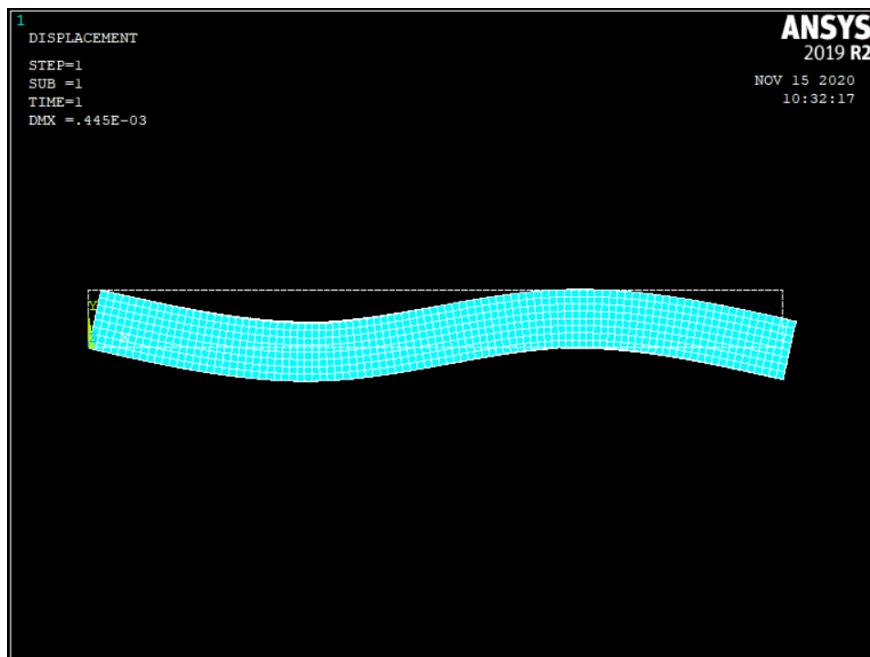
Εικόνα 3. 37
Κατανομή των μετακινήσεων ως προς τον άξονα y στο
σύνολο του σύνθετου για
ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=80\text{mm}$



Εικόνα 3. 38
Κατανομή των μετακινήσεων ως προς τον άξονα y στο
πάχος του σύνθετου για
ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=80\text{mm}$



Εικόνα 3. 39
Κατανομή των μετακινήσεων ως προς τον άξονα y στο
Άνω στρώμα του σύνθετου για
ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=80\text{mm}$



Εικόνα 3. 40
Το μέγιστο βέλος ως προς τον άξονα y στο
σύνολο του σύνθετου για
ίνες 45 μοιρών $\lambda = 3$, $L=80\text{mm}$

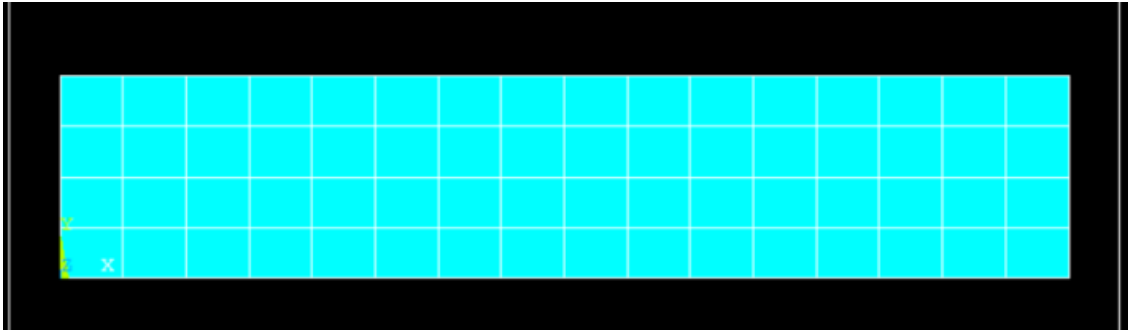
3.8 Ανάλυση Ποιότητας Διακριτοποίησης για 3PB

Με την ίδια λογική που χειριστήκαμε το θέμα των τεσσάρων σημείων κάμψης, θα χειριστούμε και την κάμψη τριών σημείων. Έτσι για λόγους πληρότητας και σε αυτή την μελέτη, παρουσιάζεται μια σύντομη ανάλυση της επάρκειας της ακρίβειας των αποτελεσμάτων που παρέχει η διακριτοποίηση που επιλέξαμε για την παρούσα εργασία.

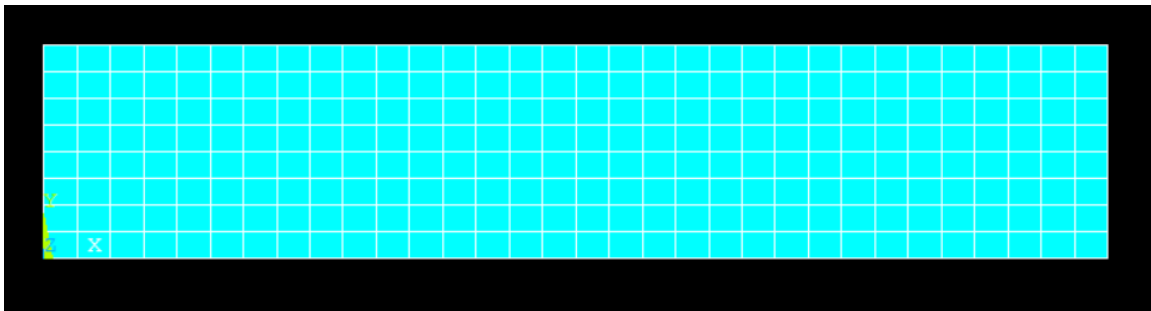
Γενικά, ως λογικό συμπέρασμα της θεωρίας των Π.Σ. προκύπτει πως όσο πιο πυκνή είναι η διακριτοποίηση ενός μοντέλου (όσο περισσότερα Π.Σ και αντίστοιχα κόμβοι υπάρχουν στο μοντέλο), τόσο μεγαλύτερη είναι η ακρίβεια των παραγόμενων αποτελεσμάτων. Αυτό συμβαίνει γιατί έτσι προσεγγίζεται όλο και περισσότερο η συνεχής λύση, η οποία θεωρητικά (αν και θα ήταν δυνατό να βρεθεί) θα ήταν η ακριβέστερη. Όμως η αύξηση στοιχείων και κόμβων οδηγεί σε αντίστοιχη αύξηση του αριθμού και της πολυπλοκότητας των εξισώσεων που πρέπει να λύσει ο Η/Υ. Επομένως θα απαιτηθεί περισσότερος χρόνος και επεξεργαστική ισχύς για την εξαγωγή αποτελεσμάτων. Συμπερασματικά, πριν από κάθε ανάλυση με Π.Σ. θα πρέπει να γίνεται μια αντιστοίχιση της απαιτούμενης ακρίβειας των αποτελεσμάτων με τους διαθέσιμους πόρους του υπολογιστικού συστήματος και τον χρόνο που μπορεί να αναλωθεί.

Επειδή στην συγκεκριμένη προσομοίωση το κύριο μέγεθος που μας ενδιαφέρει να εξάγουμε είναι το βέλος κάμψης, θα αναλύσουμε την ποιότητα του πλέγματος βάσει αυτού.

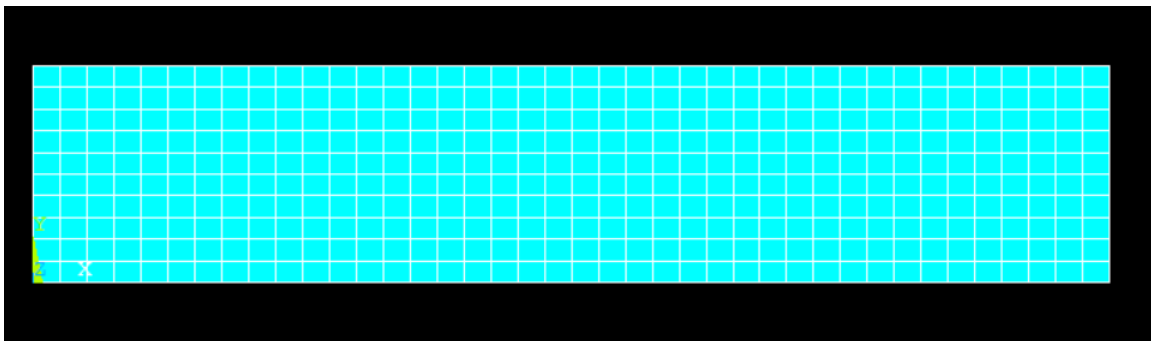
Για τον σκοπό αυτό έγιναν πέντε διαφορετικές διακριτοποιήσεις του μοντέλου για την περίπτωση της δοκού με $L=32.5\text{mm}$ και με διεύθυνση ινών 45 μοίρες.



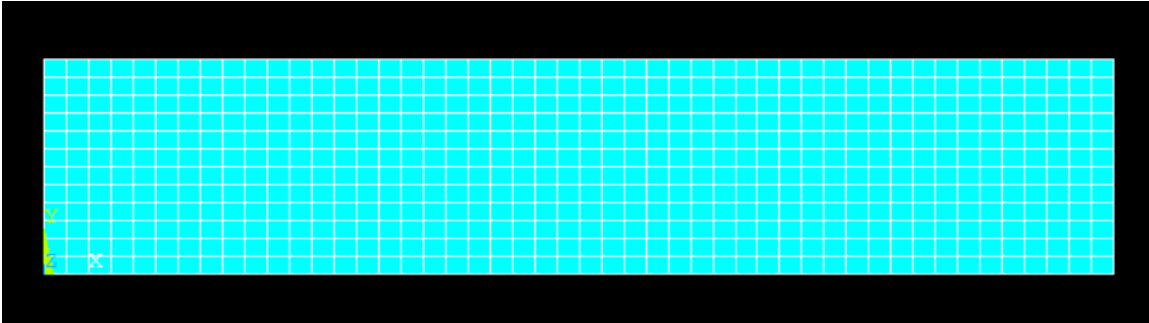
Εικόνα 3. 41
Διακριτοποίηση με 16 στοιχεία κατά μήκος της δοκού και 8 στοιχεία κατά πλάτος



Εικόνα 3. 42
Διακριτοποίηση με 24 στοιχεία κατά μήκος της δοκού και 12 στοιχεία κατά πλάτος

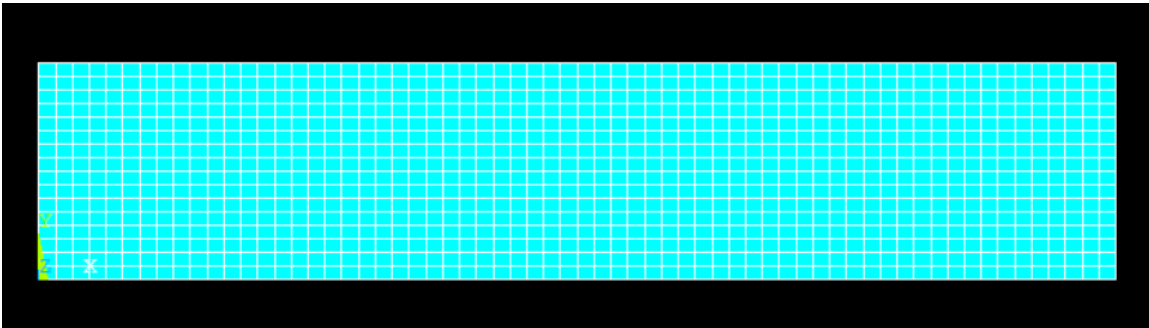


Εικόνα 3. 43
Διακριτοποίηση με 32 στοιχεία κατά μήκος της δοκού και 16 στοιχεία κατά πλάτος



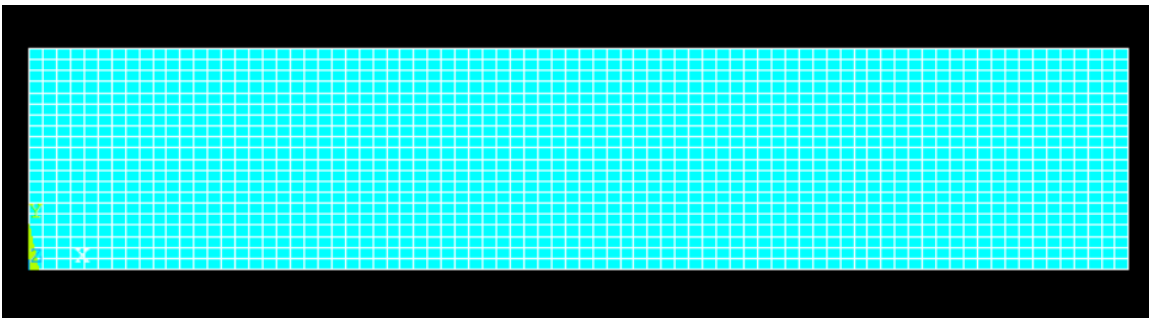
Εικόνα 3. 44

Διακριτοποίηση με 40 στοιχεία κατά μήκος της δοκού και 20 στοιχεία κατά πλάτος



Εικόνα 3. 45

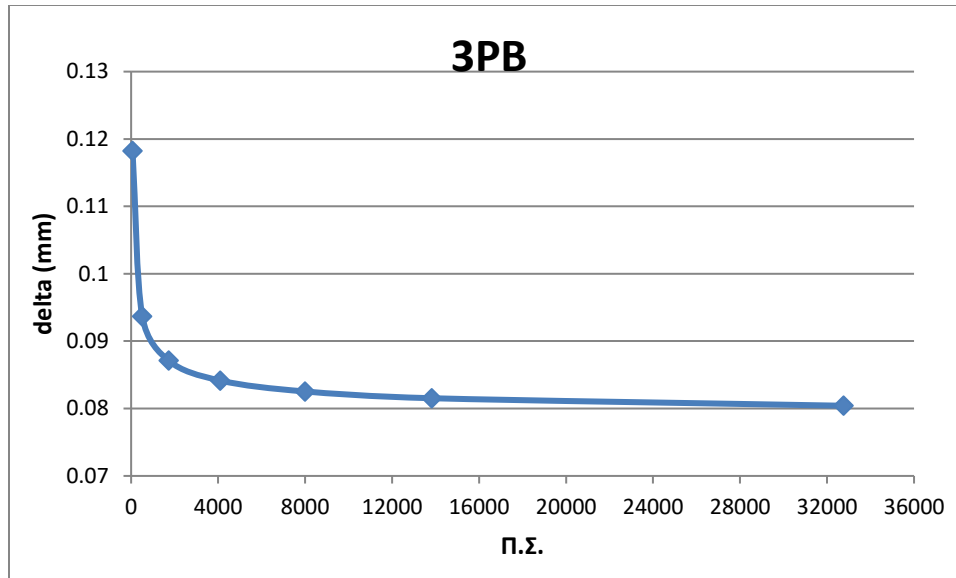
Διακριτοποίηση με 48 στοιχεία κατά μήκος της δοκού και 24 στοιχεία κατά πλάτος



Εικόνα 3. 46

Διακριτοποίηση με 64 στοιχεία κατά μήκος της δοκού και 32 στοιχεία κατά πλάτος

Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις εξετάζονται τα βέλη κάμψης στο σημείο $x=a$ όπου ασκείται η δύναμη F . Στην συνέχεια φαίνονται τα διαγράμματα για κάθε περίπτωση επίλυσης ώστε να δούμε σε ποιον αριθμό πεπερασμένων στοιχείων θα γίνει η σύγκλιση τιμών.



Διάγραμμα 3.2
Μεταβολή βέλους κάμψης σε σύγκριση με την αύξηση των Π.Σ. για 3PB

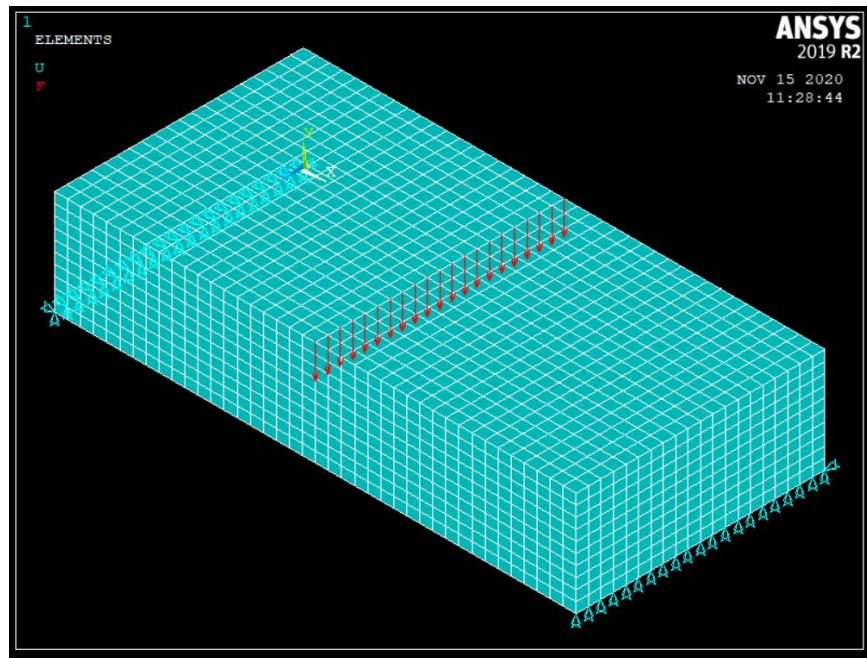
Είναι εμφανές ότι από την διακριτοποίηση με τα 48 στοιχεία κατά μήκος της δοκού θα μπορούσε κάποιος να θεωρήσει ικανοποιητικά τα αποτελέσματα και να μην επιλέξει την περαιτέρω αύξηση στοιχείων – κόμβων. Έτσι λοιπόν θα επιλέξουμε τα 48 στοιχεία κατά μήκος και 24 κατά πλάτος καθώς και αποφυγή του επιπλέον υπολογιστικού κόστους. Ο συνολικός αριθμός των Π.Σ. θα είναι 8000.

3.9 Μοντελοποίηση στο ANSYS 3PB

Όπως προαναφέρθηκε και στα ανωτέρω, μοντελοποίηση της κάμψης τεσσάρων σημείων θα γίνει στο ANSYS Mechanical APDL. Το συγκεκριμένο πρόγραμμα παρέχει την δυνατότητα να φτιάξουμε ένα κώδικα σε αρχείο txt και να το εκτελέσουμε όσες φορές χρειαστεί, αλλάζοντας τις παραμέτρους που μας ενδιαφέρουν. Στο υποκεφάλαιο αυτό θα γίνει περιγραφή του τρόπου με τον οποίο εκτελέστηκε η μοντελοποίηση ώστε να φτάσουμε στην εξαγωγή των αποτελεσμάτων.

Για να αποφύγουμε να κάνουμε το πλέγμα πολύ πυκνό ώστε σε κάθε αλλαγή των παραμέτρων να αναζητούμε κόμβους και την κατάλληλη τοποθέτηση των οριακών συνθηκών (φορτία και στηρίξεις), θα χωρίσουμε την κατασκευή σε 2 Block όπου θα χωρίζονται σε ίσα μήκη L. Με αυτό τον τρόπο θα ξέρουμε ότι πάντα στο σημείο που μας

ενδιαφέρει θα υπάρχει κόμβος. Επίσης στην παρούσα κατάσταση δεν έχει νοήμα να απεικονίσουμε όλες τις πιθανές παραλλαγές του προβλήματος καθώς τα αποτελέσματα φαίνονται αναλυτικά στο κεφάλαιο 5. Επίσης δεν είναι θεμιτό να δείξουμε βήμα προς βήμα την διαδικασία μοντελοποίησης καθώς είναι όμοια με την κάμψη τεσσάρων σημείων, μάλιστα αρκετά πιο απλή. Γίνεται δηλαδή το ίδιο μοντέλο όμως το σύνθετο υλικό σταματάει στην κύλιση ενώ η δύναμη ασκείται κατανεμημένα στο κέντρο της δοκού.



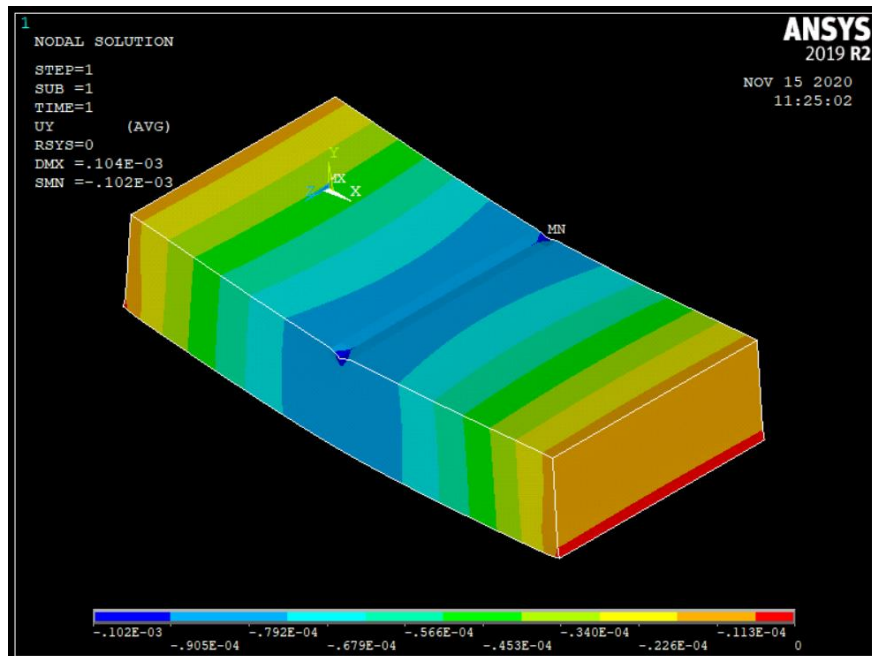
Εικόνα 3. 47
Μοντελοποίηση κάμψης τριών σημείων

3.10 Εξαγωγή Αποτελεσμάτων από την ανάλυση με Π.Σ. 3PB

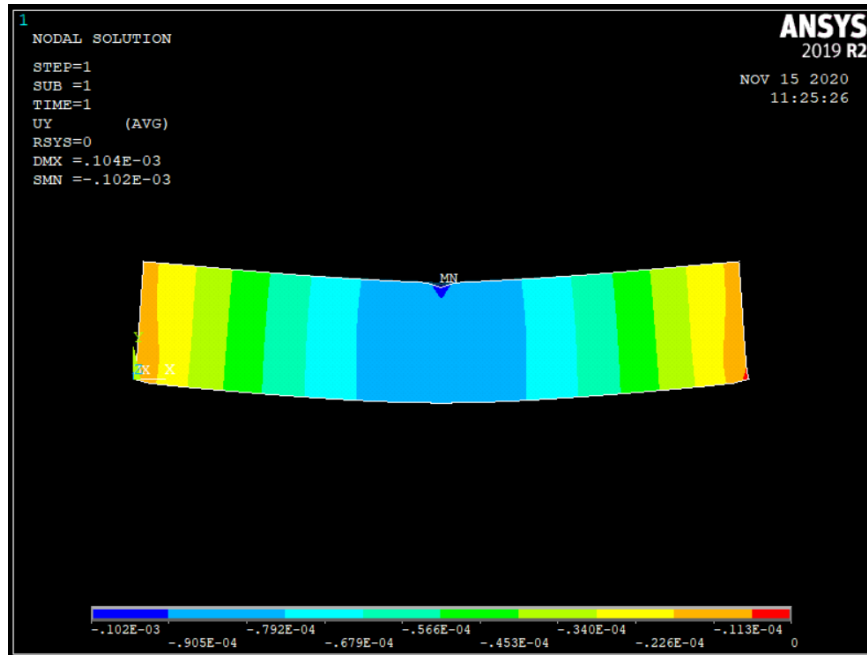
Αφού κάνουμε την μοντελοποίηση του προβλήματος εντός του λογισμικού ANSYS και ο H/Y ολοκληρώσει την λύση του, έχουμε διάφορες επιλογές σχετικά με την παρουσίαση των παραγόμενων αποτελεσμάτων. Η πρώτη επιλογή που θα κάνει συνήθως ο μηχανικός θα είναι να ζητήσει ένα χρωματικό διάγραμμα (Contour Plot) έτσι ώστε να πάρει μια πρώτη εικόνα της κατανομής του μεγέθους που τον ενδιαφέρει [20]. Έπειτα, μας δίνεται η δυνατότητα να ζητήσουμε την τιμή του μεγέθους που μας ενδιαφέρει στον κόμβο της επιλογής μας (Query Result). Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι αν ζητήσουμε την τιμή ενός μεγέθους σε έναν συγκεκριμένο κόμβο στο επίπεδο x-y για όλο το πάχος ξεχωριστά, τότε θα μπορέσουμε να σχηματίσουμε την κατανομή του ως προς το πάχος του σύνθετου. Ως εκ τούτου θα κάνουμε μια σύντομη σύγκριση αποτελεσμάτων για σύνθετο υλικό με διεύθυνση ινών στις 0 και στις 90 μοίρες με Contour Plot και μια

σύγκριση μόνο για το βέλος κάμψης αφού μόνο το συγκεκριμένο μέγεθος χρησιμοποιήσαμε στην παρούσα διπλωματική.

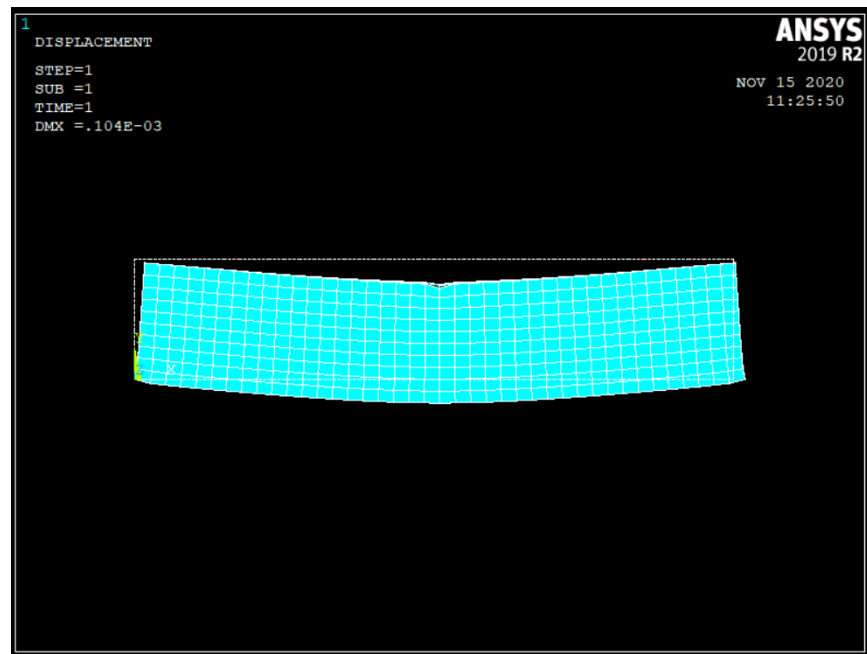
Όπως ήταν αναμενόμενο από την θεωρία, στην δοκό με $L=32.5\text{mm}$ και γωνία ινών 0 μοίρες δημιουργείται μικρότερο βέλος κάμψης από ότι στην δοκό με ίνες 90 μοίρες. Προφανώς και στις δύο περιπτώσεις η μέγιστη βύθιση θα παρατηρείται στο κέντρο της δοκού που ασκείται και το επιβαλλόμενο φορτίο.



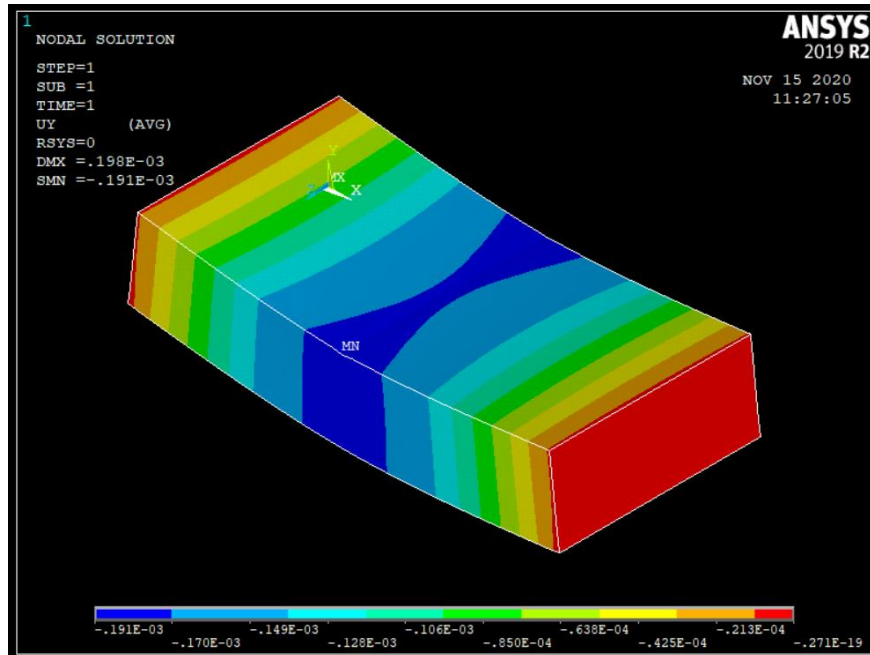
Εικόνα 3. 48
Κατανομή των μετακινήσεων ως προς τον άξονα y στο
σύνολο του σύνθετου για
ίνες 0 μοιρών και $L=32.5\text{mm}$



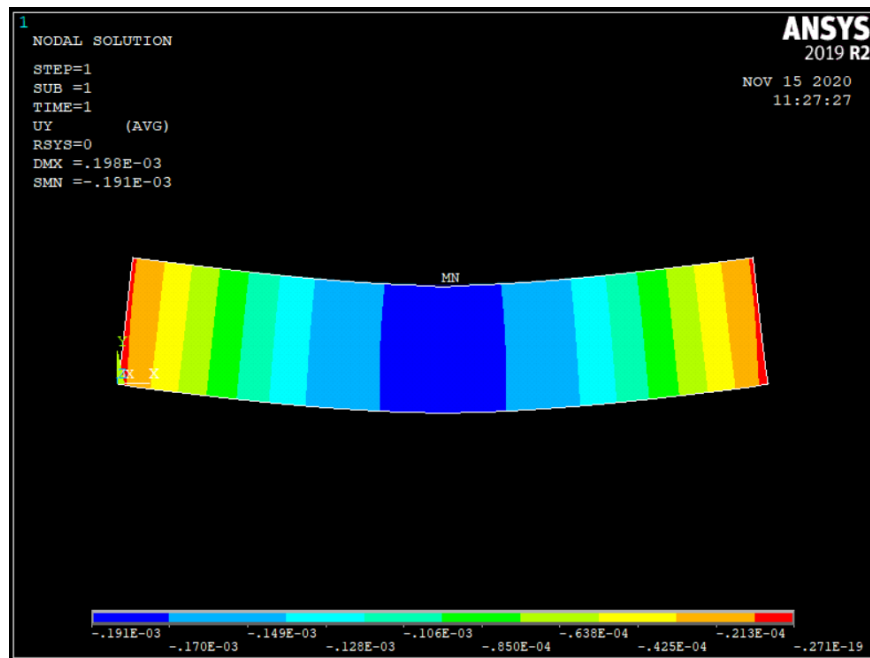
Εικόνα 3. 49
Κατανομή των μετακινήσεων ως προς τον άξονα y στο
πάχος του σύνθετου για
ίνες 0 μοιρών και L=32.5mm



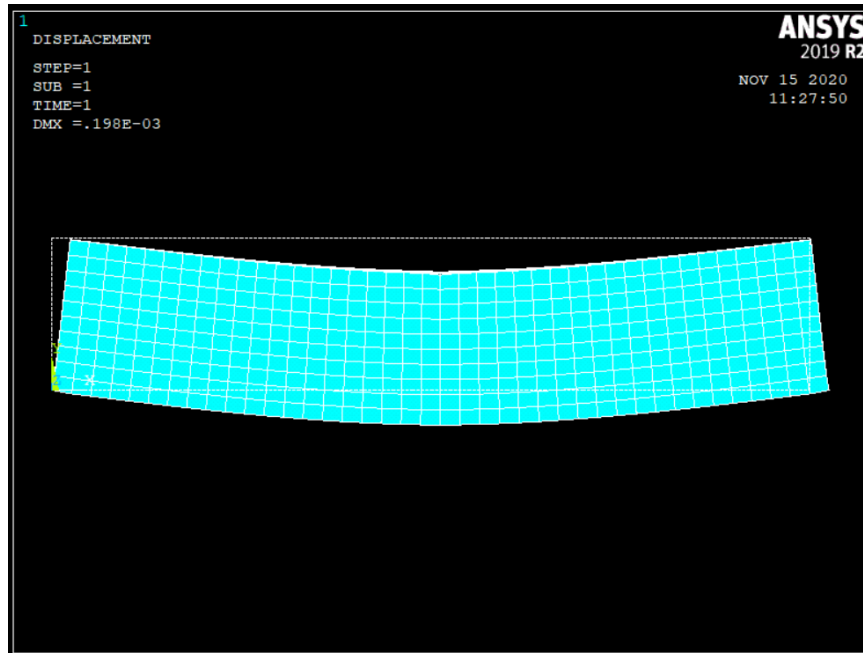
Εικόνα 3. 50
Μέγιστο βέλος κάμψης ως προς τον άξονα y στο
πάχος του σύνθετου για
ίνες 0 μοιρών και L=32.5mm



Εικόνα 3. 51
Κατανομή των μετακινήσεων ως προς τον άξονα y στο
σύνολο του σύνθετου για
ίνες 90 μοιρών και L=32.5mm



Εικόνα 3. 52
Κατανομή των μετακινήσεων ως προς τον άξονα y στο
πάχος του σύνθετου για
ίνες 90 μοιρών και L=32.5mm



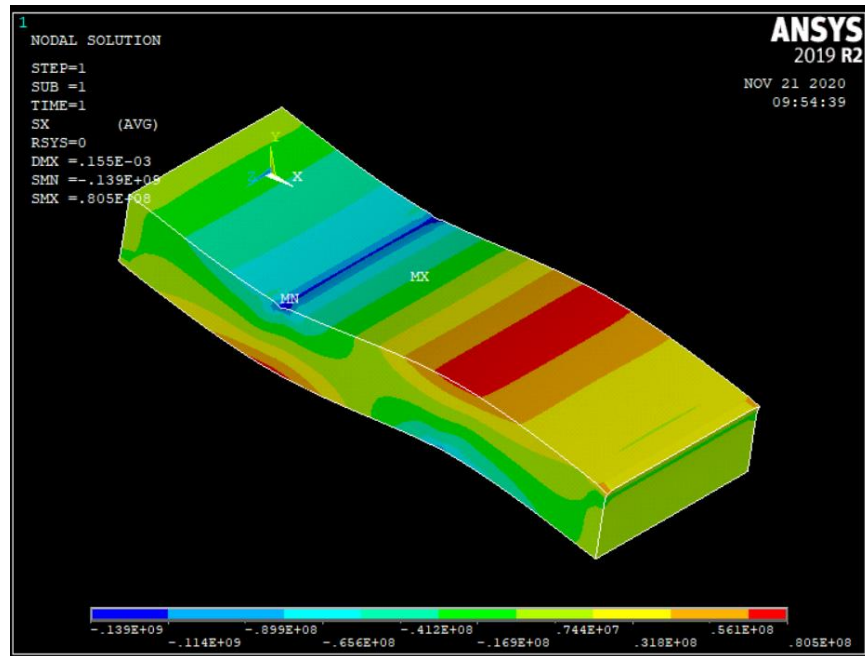
Εικόνα 3. 53
Μέγιστο βέλος κάμψης ως προς τον άξονα y στο
πάχος του σύνθετου για
ίνες 90 μοιρών και $L=32.5\text{mm}$

3.11 Σύγκριση 3PB με 4PB

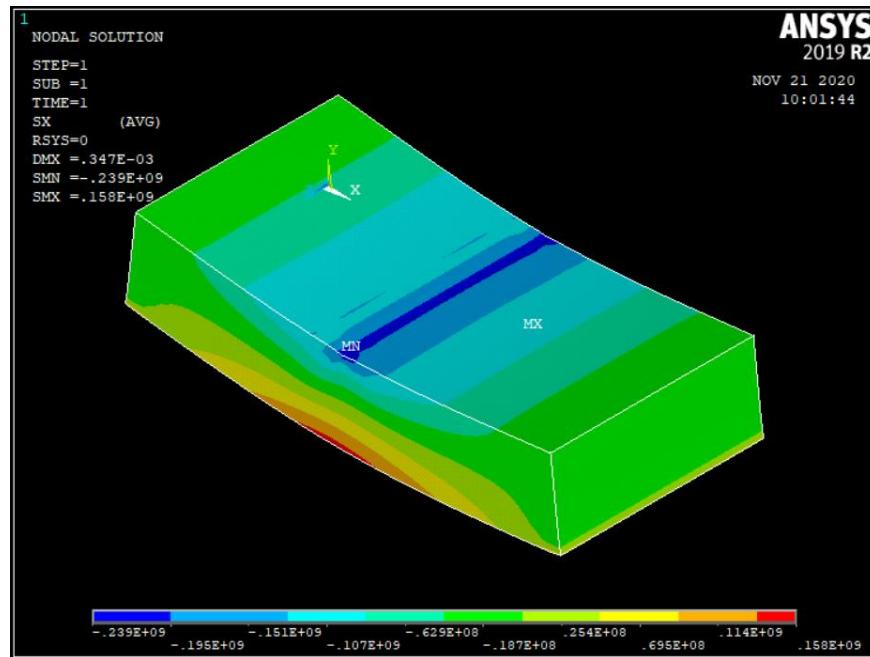
Σε αυτό το σημείο θα γίνει μια σύντομη σύγκριση της κάμψης τριών σημείων με την ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων. Ο λόγος για τον οποίο θα είναι σύντομη είναι ότι στο κεφάλαιο 4 φαίνονται αναλυτικά όλες οι συγκρίσεις για όλες τις γωνίες ινών των σύνθετων. Όμως σε αυτό το σημείο η σύγκριση θα φανεί χρωματικά με την χρήση του Contour Plot που προσφέρει το ANSYS Mechanical APDL. Η σύγκριση θα γίνει μεταξύ των βελών κάμψης και των τάσεων των δύο πειραμάτων. Επίσης θα κάνουμε πάλι χρήση των ελαστικών σταθερών και γεωμετρικών στοιχείων από την εργασία του κ. Σαραγά [21]. Η σύγκριση θα γίνει με βάση την τεχνική του A.C. Manallo [22], όπου θεωρούμε και για τις δύο μεθόδους $L=2a$ ενώ για την μέθοδο της ασύμμετρης κάμψης έχουμε συντελεστή $\lambda=3$. Επομένως και στις δύο περιπτώσεις η δύναμη θα ασκείται στο σημείο $x=a$. Έτσι για την σύγκριση θα έχουμε ίδια γεωμετρικά χαρακτηριστικά, ίδιες ελαστικές σταθερές και διαφορετικά πειράματα. Στην συνέχεια φαίνονται τα αποτελέσματα από αυτή την σύγκριση.

3.11.1 Ορθές τάσεις σ_x

Για την σύγκριση των ορθών τάσεων ως προς τον άξονα x παρατηρούμε ότι στην κάμψη τριών σημείων έχουμε μεγαλύτερες τάσεις σε σύγκριση με την ασύμμετρη κάμψη τριών σημείων. Το ανωτέρω συμπέρασμα φαίνεται στην συνέχεια από τις δύο εικόνες όπου είναι οι λύσεις του προβλήματος με την χρήση του ANSYS.



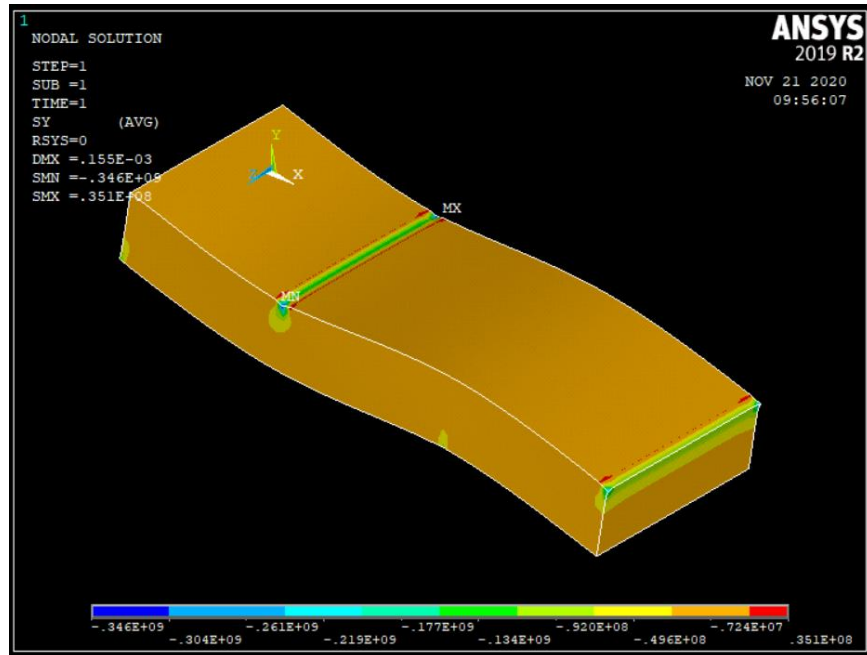
Εικόνα 3. 54
Κατανομή των τάσεων σ_x στο σύνολο του σύνθετου για 4PB
ίνες 45 μοιρών και $L=32.5\text{mm}$



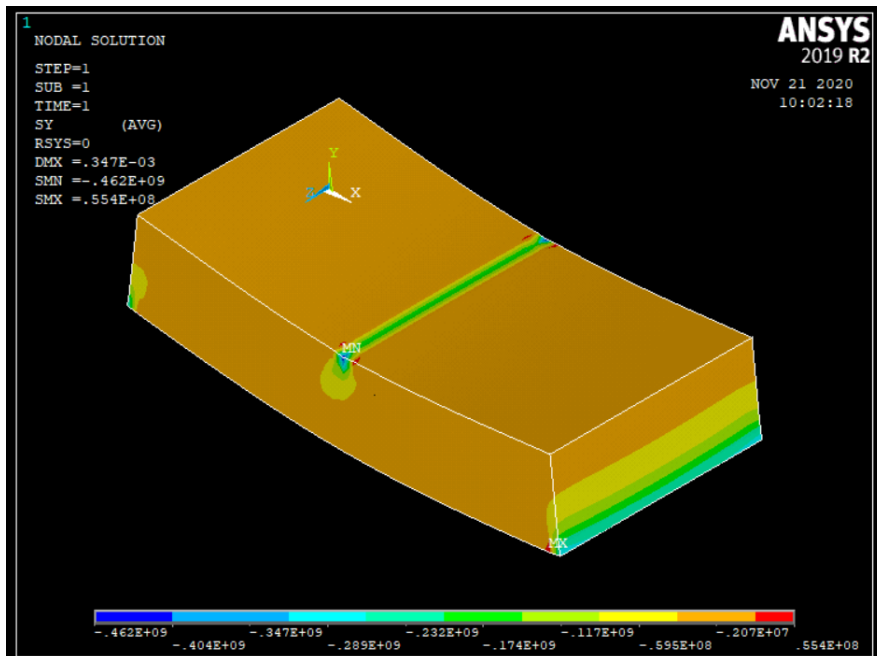
Εικόνα 3.55
Κατανομή των τάσεων σ_x στο σύνολο του σύνθετου για 3PB
ίνες 45 μοιρών και $L=32.5\text{mm}$

3.11.2 Ορθές τάσεις σ_y

Όσον αφορά την τις ορθές τάσεις σ_y παρατηρούμε και στις δύο περιπτώσεις ότι είναι μικρότερες συγκριτικά με τις τάσεις που έχουμε ως προς τον άξονα x . Γενικά δεν είναι το μέγεθος που μας ενδιαφέρει άμεσα αλλά το παρατηρούμε για γενίκευση των γνώσεων μας.



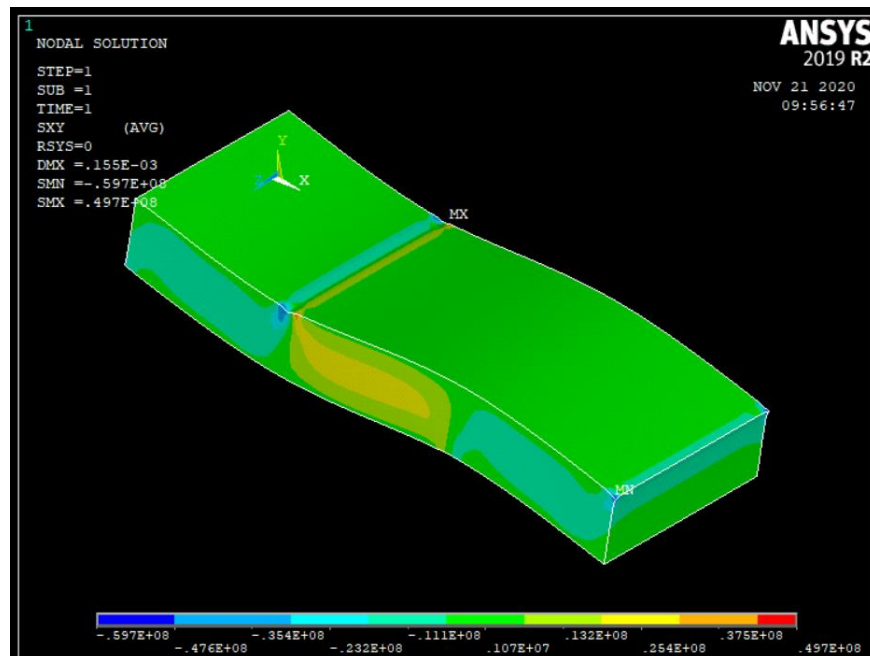
Εικόνα 3. 56
Κατανομή των τάσεων σ_y στο σύνολο του σύνθετου για 4PB
ίνες 45 μοιρών και $L=32.5\text{mm}$



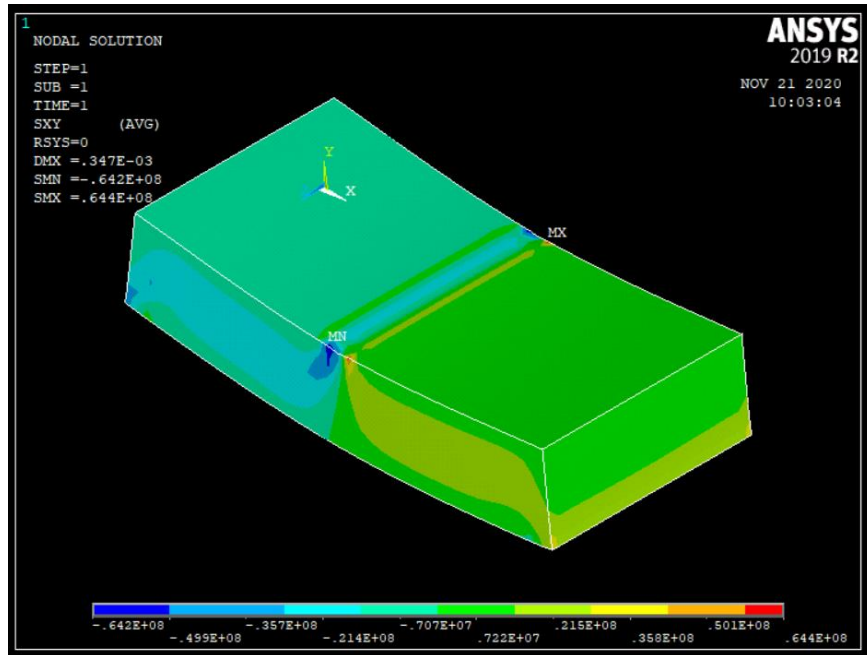
Εικόνα 3. 57
Κατανομή των τάσεων σ_y στο σύνολο του σύνθετου για 3PB
ίνες 45 μοιρών και $L=32.5\text{mm}$

3.11.3 Ορθές τάσεις τ_{xy}

Στις διατμητικές τάσεις παρατηρούμε ότι έχουμε αρκετά κοντινές τιμές στην συγκεκριμένη περίπτωση. Όμως στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα γίνει αναλυτική νύξη για όλες τις γωνίες ινών θα παρατηρήσουμε ότι η κατανομή των τάσεων στην ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων, έχει μεγαλύτερες τιμές συγκριτικά με την κάμψη τριών σημείων. Εδώ όμως μπορούμε να δούμε αναλυτικά τις περιοχές τις οποίες καταπονούνται σε κάθε περίπτωση, όπως φαίνεται στις ακόλουθες εικόνες.



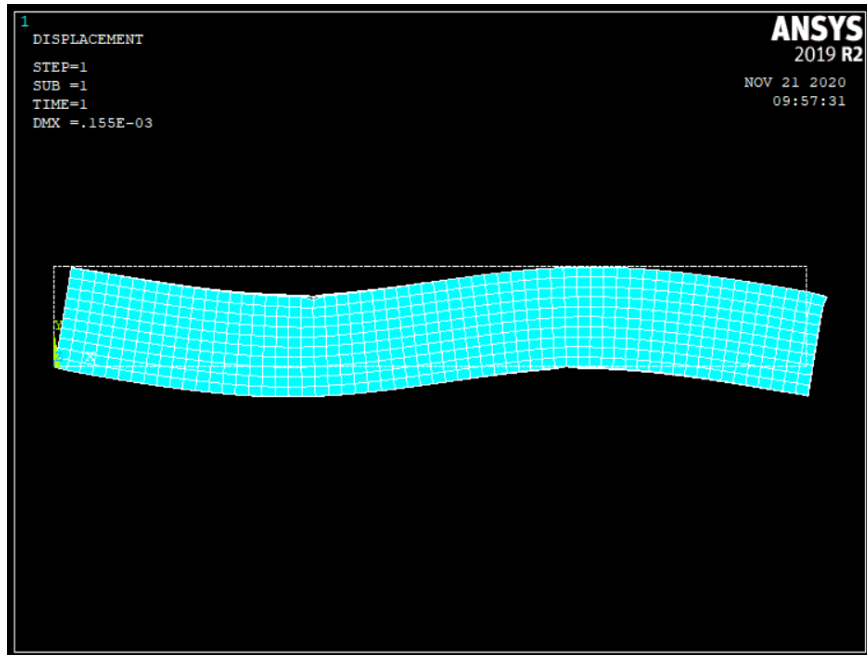
Εικόνα 3. 58
Κατανομή των τάσεων σ_{xy} στο σύνολο του σύνθετου για 4PB
ίνες 45 μοιρών και $L=32.5\text{mm}$



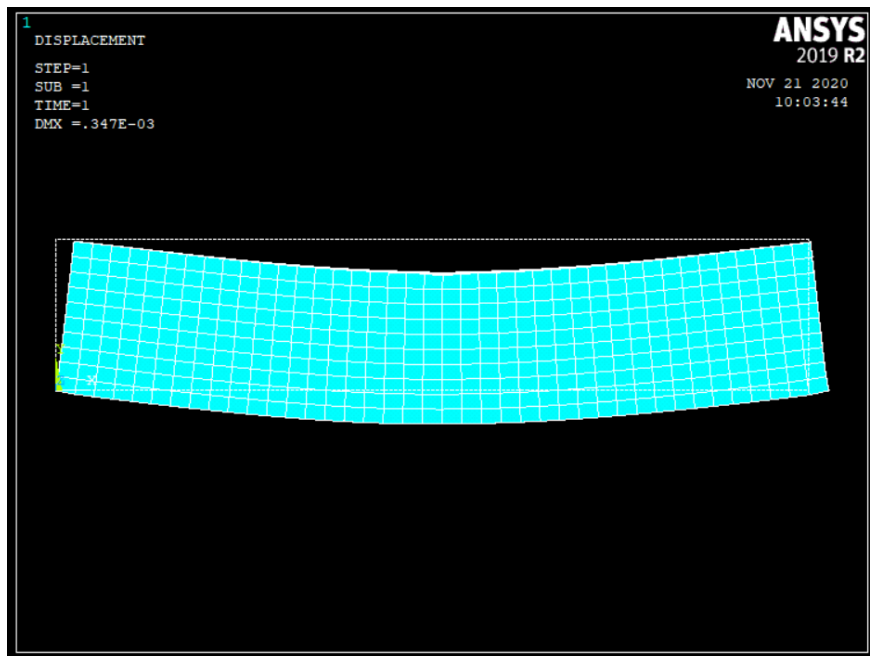
Εικόνα 3. 59
Κατανομή των τάσεων σχυ στο σύνολο του σύνθετου για 3PB
ίνες 45 μοιρών και L=32.5mm

3.11.4 Βέλος κάμψης

Το βέλος κάμψης είναι και το σημαντικότερο μέγεθος που μας ενδιαφέρει από την ανωτέρα σύγκριση καθώς και αυτός ήταν ο στόχος της. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι στην κάμψη τριών σημείων έχουμε μεγαλύτερη βύθιση σε σύγκριση με την ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων. Στις επόμενες εικόνες μπορεί να γίνει ορατό το σημείο της μέγιστης βύθισης σε κάθε περίπτωση.



Εικόνα 3. 60
Μέγιστο βέλος κάμψης ως προς τον άξονα y στο
πάχος του σύνθετου για
ίνες 45 μοιρών 4PB και L=32.5mm



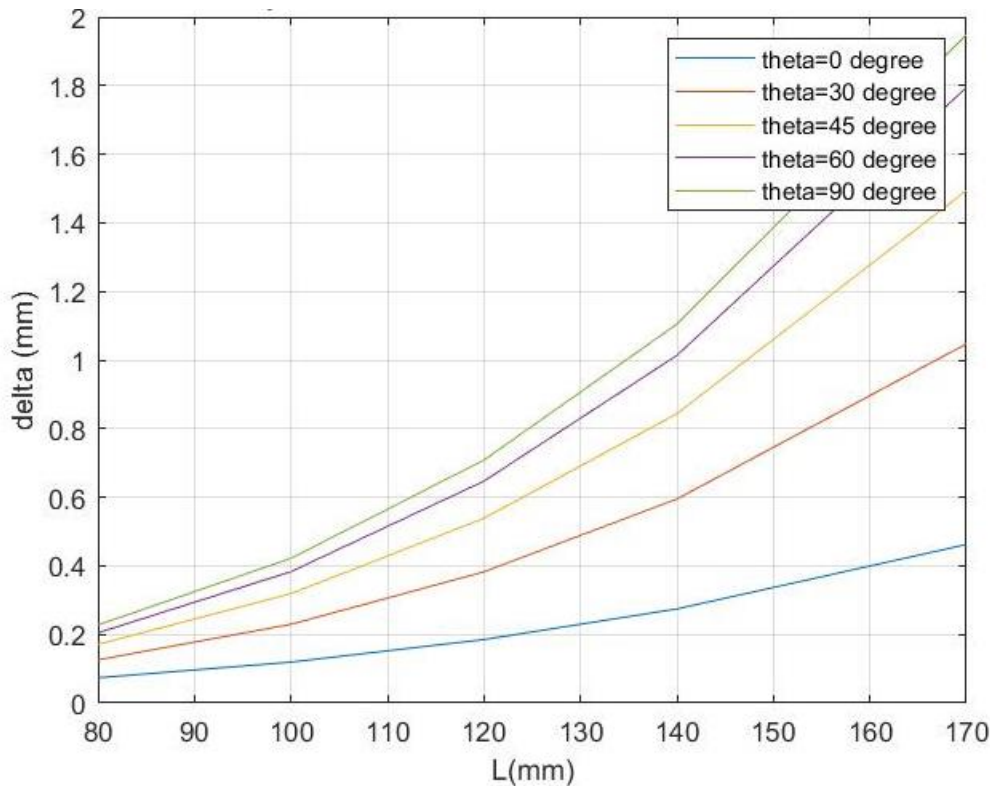
Εικόνα 3. 61
Μέγιστο βέλος κάμψης ως προς τον άξονα y στο
πάχος του σύνθετου για
ίνες 45 μοιρών 3PB και L=32.5mm

3.12 Σύγκριση παραμέτρων για 4PB με χρήση Πεπερασμένων Στοιχείων

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα γίνει απεικόνιση του βέλους κάμψης για μεταβολές διαφορετικών παραμέτρων με την επίλυση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων ώστε να γίνει ανάλυση και παρατήρηση της επίδρασης που δέχεται, καθώς και των τάσεων σε αυτή την περίπτωση καθώς παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον σε σχέση με την μέθοδο της Θεωρίας Ελαστικότητας. Οι παράμετροι οι οποίες θα μεταβληθούν είναι το πάχος του δοκιμίου, το μήκος του δοκιμίου, το ασκούμενο φορτίο καθώς και ο συντελεστής λ . Επίσης σε κάθε διάγραμμα θα απεικονίζονται όλες οι πιθανές γωνίες διεύθυνσης των ινών για περαιτέρω ανάλυση των αποτελεσμάτων.

3.12.1 Σύγκριση μήκους δοκιμίου με βέλος κάμψης

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται μια σύγκριση του μήκους δοκιμίου με το βέλος κάμψης. Επίσης για αυτό το διάγραμμα έχουμε θεωρήσει συντελεστή $\lambda=10$ πάχος δοκιμίου $t=10$ mm και η ασκούμενη δύναμη $F=2$ kN. Επομένως μπορούμε να παρατηρήσουμε στο διάγραμμα ότι όσο αυξάνεται το μήκος του δοκιμίου τότε αυξάνεται και το βέλος κάμψης. Μάλιστα αυξάνεται ανεξάρτητα από την γωνία ινών. Επίσης είναι φανερό ότι η γωνία ινών επηρεάζει το ποσοστό αύξησης του βέλους κάμψης. Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι για γωνία ινών 90 μοίρες έχουμε πιο ραγδαία αύξηση των τιμών σε σχέση με γωνίες ινών ίσες με 0 μοίρες. Δηλαδή η κλίση της αύξησης του βέλους κάμψης αυξάνεται κλιμακωτά από τις 0 μοίρες έως τις 90. Τέλος, οι γωνίες που παρουσιάζονται στα διαγράμματα οφείλονται στο ότι έχουμε διαλέξει πέντε σημεία παρατήρησης. Ως εκ τούτου εάν διαλέγαμε περισσότερα τότε θα είχαμε πιο ξεκάθαρες καμπύλες, όμως παρ' όλα αυτά είναι ολοφάνερη η πρόθεση κίνησης των τιμών.



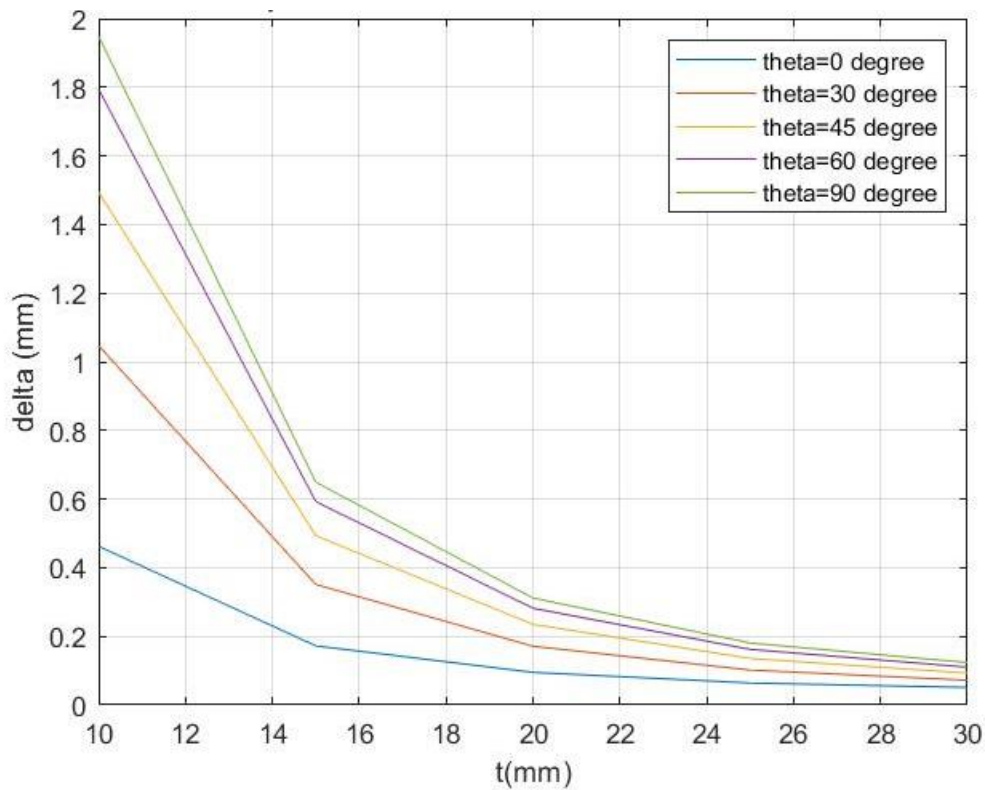
Διάγραμμα 3.3

Μεταβολή βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του μήκους της δοκού με συντελεστή $\lambda=10$, $F=2\text{kN}$, $t=10\text{mm}$ και $b=30\text{mm}$

3.12.2 Σύγκριση πάχους δοκιμίου με βέλος κάμψης

Το επόμενο διάγραμμα αφορά στην σύγκριση του πάχους του δοκιμίου με την τιμή του βέλους κάμψης. Για την συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε επιλέξει μήκος δοκιμίου $L=120\text{ mm}$, συντελεστή $\lambda=10$ και ασκούμενη δύναμη ίση με $F=2\text{ kN}$. Η πρώτη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι όσο αυξάνεται το πάχος του δοκιμίου τόσο μειώνεται το βέλος κάμψης. Επίσης βλέπουμε ότι για μικρές τιμές του πάχους έχουμε σημαντική επιρροή της γωνίας ινών στο βέλος κάμψης, για παράδειγμα το βέλος κάμψης στις 90 μοίρες διεύθυνσης γωνιών είναι σχεδόν οχτώ φορές μεγαλύτερο σε σχέση με τις 0 μοίρες διεύθυνσης ινών. Ενώ για μεγάλο πάχος δοκιμίου βλέπουμε ότι υπάρχει μια σύγκλιση τιμών και η επιρροή της γωνίας διεύθυνσης των ινών σχεδόν εξαλείφεται. Έτσι με ένα λογικό συνειρμό μπορούμε να πούμε ότι για περαιτέρω αύξηση του πάχους δοκιμίου οι τιμές θα ταυτίζονται ανεξαρτήτως γωνίας διεύθυνσης ινών. Τέλος, οι γωνίες που παρουσιάζονται στα διαγράμματα οφείλονται στο ότι έχουμε διαλέξει πέντε σημεία παρατήρησης. Ως εκ τούτου εάν διαλέγαμε περισσότερα τότε θα

είχαμε πιο ξεκάθαρες καμπύλες, όμως παρόλα αυτά είναι ολοφάνερη η πρόθεση κίνησης των τιμών.



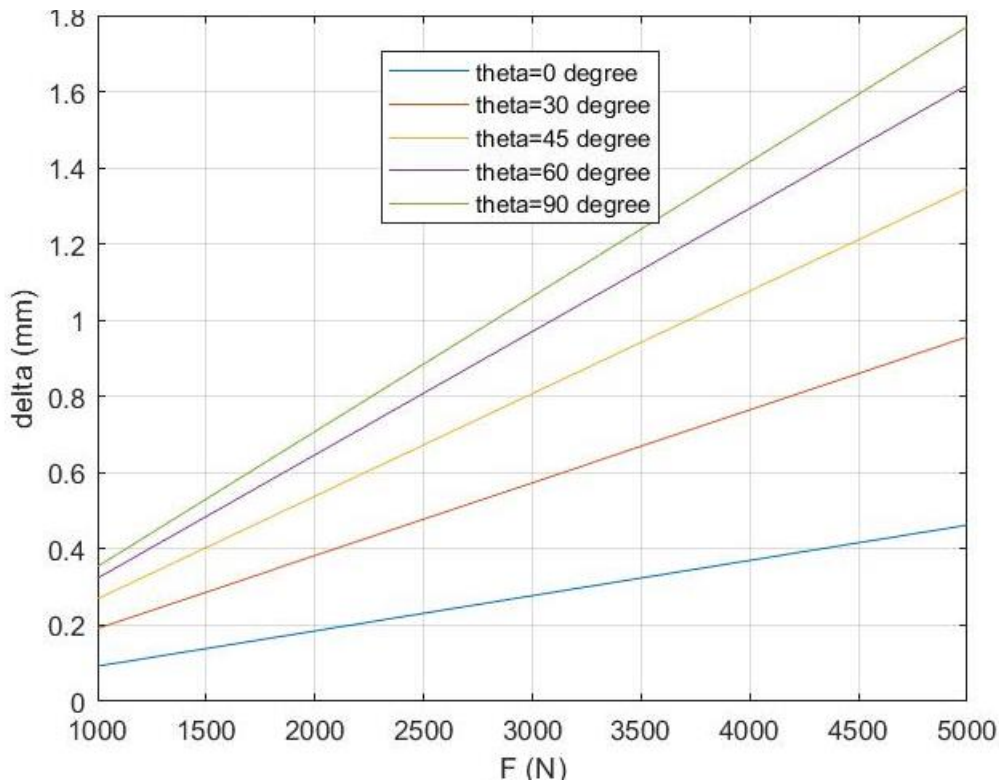
Διάγραμμα 3.4

Μεταβολή βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του πάχους της δοκού με συντελεστή $\lambda=10$, $F=2\text{kN}$, $t=10\text{mm}$ και $b=30\text{mm}$

3.12.3 Σύγκριση ασκούμενου φορτίου με βέλος κάμψης

Το επόμενο διάγραμμα αφορά στην σύγκριση του βέλους κάμψης σε σχέση με την ασκούμενη δύναμη. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε δοκίμιο πάχους $t=10\text{mm}$, με μήκος $L=120\text{mm}$ και συντελεστή $\lambda=10$. Επομένως παρατηρούμε από το διάγραμμα ότι όσο αυξάνεται η δύναμη αυξάνεται και το βέλος κάμψης. Στις συγκεκριμένες περιπτώσεις φαίνεται ότι η αύξηση είναι γραμμική καθώς δεν έχουμε λάβει υπόψη μη γραμμικότητες. Επίσης είναι φανερό για ακόμα μία φορά πως το βέλος κάμψης εξαρτάται από την γωνία διεύθυνσης των ιών. Συγκεκριμένα για γωνία ιών ίση με 90 μοίρες έχουμε μεγαλύτερο βέλος κάμψης από ότι για γωνία διεύθυνσης ιών ίση με 0 μοίρες. Επιπλέον παρατηρούμε ότι η γωνία διεύθυνσης των ιών επηρεάζει το ρυθμό αύξησης των τιμών. Δηλαδή για γωνία διεύθυνσης ιών ίση με 90 μοίρες έχουμε πολύ μεγαλύτερη αύξηση

του βέλους κάμψης σε σχέση με τις θ μοίρες γωνίας ινών. Αντίστοιχα και για τις ενδιάμεσες τιμές γωνίας διεύθυνσης ινών.

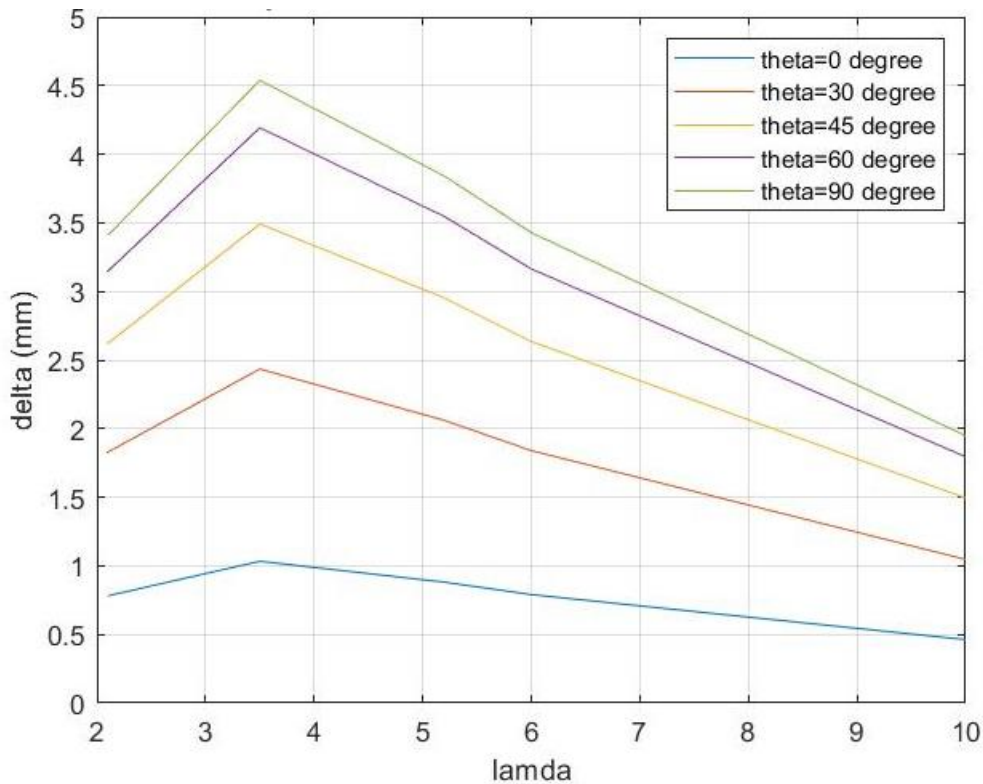


Διάγραμμα 3.5

Μεταβολή βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του επιβαλλόμενου φορτίου της δοκού με συντελεστή $\lambda=10$, $L=120\text{mm}$, $t=10\text{mm}$ και $b=30\text{mm}$

3.12.4 Σύγκριση συντελεστή λ με βέλος κάμψης

Στο επόμενο διάγραμμα γίνεται σύγκριση του βέλους κάμψης και του συντελεστή λ . Για το επόμενο διάγραμμα έχουμε θεωρήσει σαν ασκούμενη δύναμη $F=2\text{ kN}$, πάχος δοκιμίου $t=10\text{ mm}$, πλάτος δοκιμίου $b=30\text{ mm}$ και μήκος δοκιμίου $L=120\text{ mm}$. Παρατηρούμε από το διάγραμμα ότι όσο αυξάνεται ο συντελεστής λ μειώνεται το βέλος κάμψης. Εδώ φαίνεται και η διαφορά της μεθόδου για μικρά λ καθώς έχουμε μια πτώση για λ μικρότερη του 3 σε αντίθεση με την Θεωρία της Ελαστικότητας. Για ακόμα μια φορά βλέπουμε ότι η κλίση των καμπυλών αυξάνεται με την αύξηση των γωνιών διεύθυνσης των ινών. Παρατηρούμε ότι για γωνία ινών θ μοίρες η κλίση είναι σχεδόν αμελητέα.

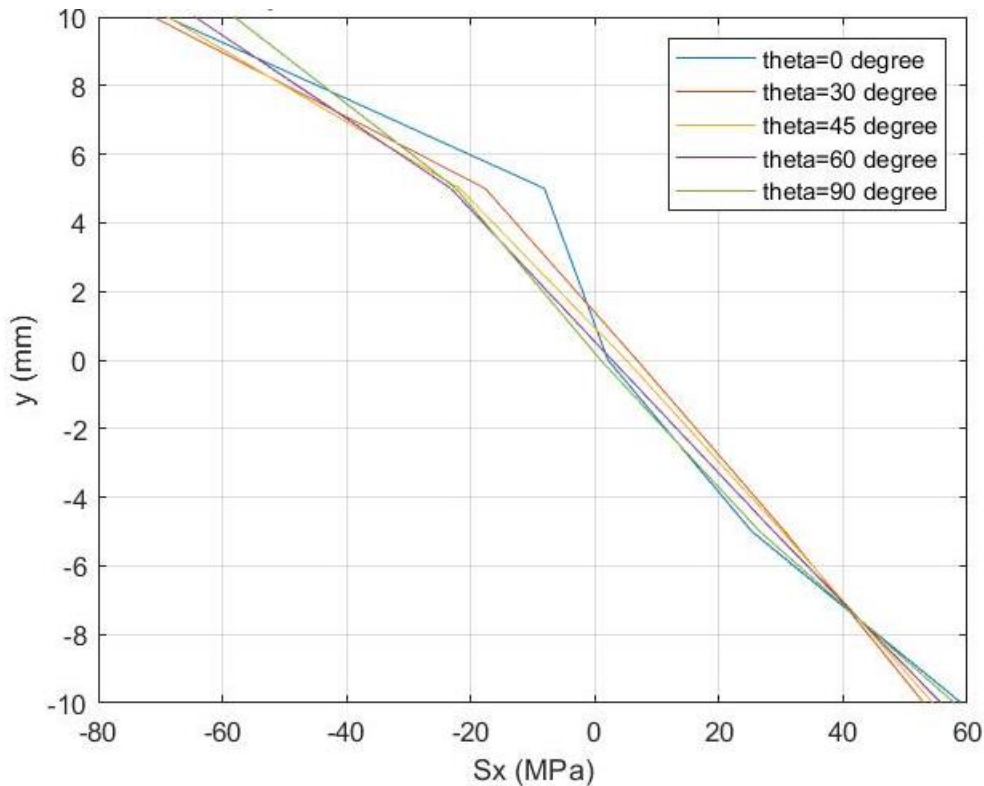


Διάγραμμα 3. 6

Μεταβολή βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του συντελεστή λ της δοκού L=120mm, F=2kN, t=10mm και b=30mm

3.12.5 Σύγκριση τάσης ως προς άξονα x και γωνίας ινών

Στο διάγραμμα που ακολουθεί μπορούμε να παρατηρήσουμε την τάση ως προς τον άξονα x για όλο το εύρος του πάχους του δοκιμίου. Επίσης διακρίνουμε την τάση για κάθε περίπτωση γωνίας διεύθυνσης ινών ξεχωριστά. Παρατηρούμε ότι για κάθε διαφορετική περίπτωση γωνίας ινών δεν έχουμε ουσιαστική μεταβολή των τάσεων. Ακόμη, είναι σημαντικό να δούμε ότι τηρείται η αντισυμμετρία που πρέπει να υπάρχει για αυτού του είδους την κάμψη. Τέλος, φαίνεται ότι στην θέση μηδέν οι τάσεις είναι μηδέν ή σχεδόν μηδέν. Οπότε μπορούμε να αντιληφθούμε ότι τα αποτελέσματα ακολουθούν την λογική της Αντοχής των Υλικών.

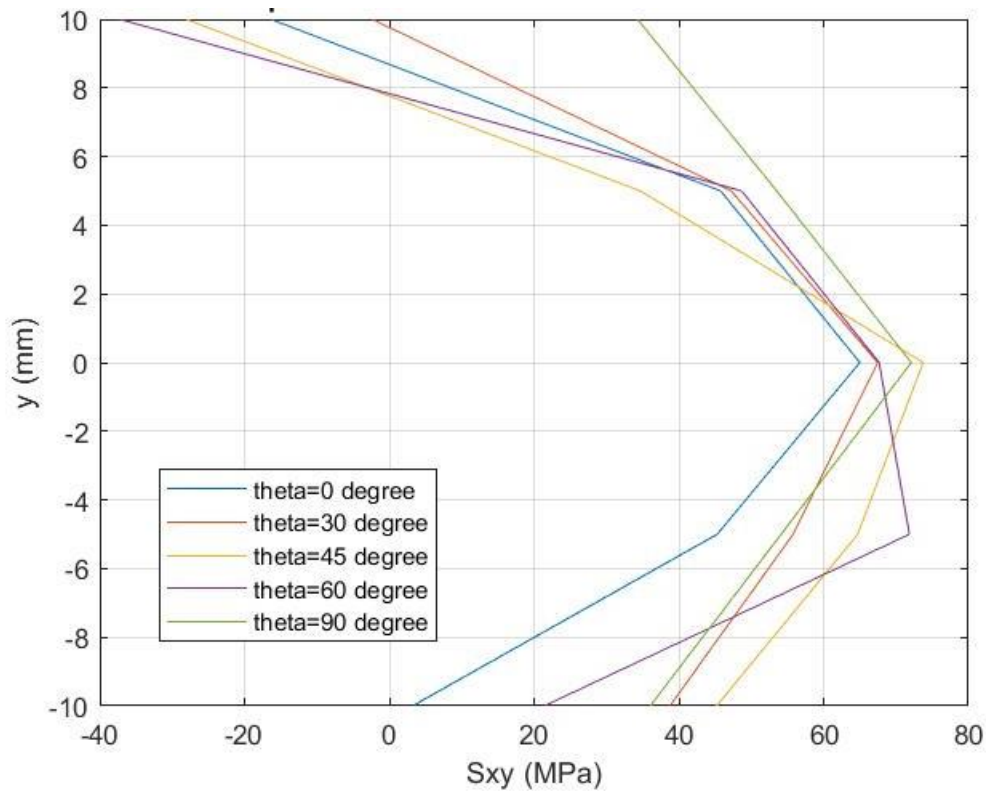


Διάγραμμα 3.7

Μεταβολή των ορθών τάσεων κατά πάχος της δοκού στην θέση του επιβαλλόμενου φορτίου για $F=2\text{kN}$, $\lambda=10$, $t=20\text{mm}$, $b=30\text{mm}$

3.12.6 Σύγκριση τάσης ως προς το επίπεδο xy και γωνίας ινών

Στο επόμενο διάγραμμα έχουμε απεικονίσει τις τάσεις ως προς το επίπεδο xy και το εύρος πάχους του δοκιμίου. Επίσης φαίνονται ξεχωριστά οι τάσεις για κάθε διαφορετική γωνία διεύθυνσης ινών. Παρατηρούμε ότι οι τιμές προσπαθούν να πάρουν την παραβολική τους μορφή όπως ορίζεται από την αντοχή των υλικών όμως στις ακραίες τιμές δεν έχουμε την τιμές μηδέν ειδικά για την περίπτωση της άνω επιφάνειας του δοκιμίου όπου εφαρμόζεται και η δύναμη. Γνωρίζουμε ότι στο σημείο που εφαρμόζεται η δύναμη έχουμε αλλοίωση των αποτελεσμάτων όπως και σε περιοχή κοντά σε αυτή. Τέλος, οι γωνίες που φαίνεται να εμφανίζονται στα διαγράμματα οφείλονται στο ότι έχουμε πάρει 6 τιμές παρατήρησης. Όπως γίνεται κατανοητό για περισσότερες τιμές θα είχαμε καλύτερη καμπύλη.

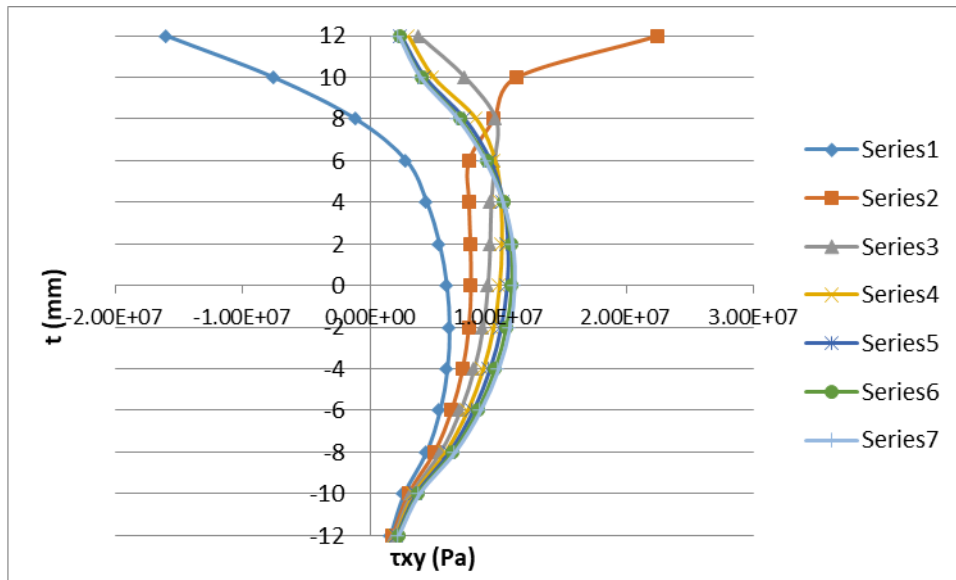


Διάγραμμα 3. 8

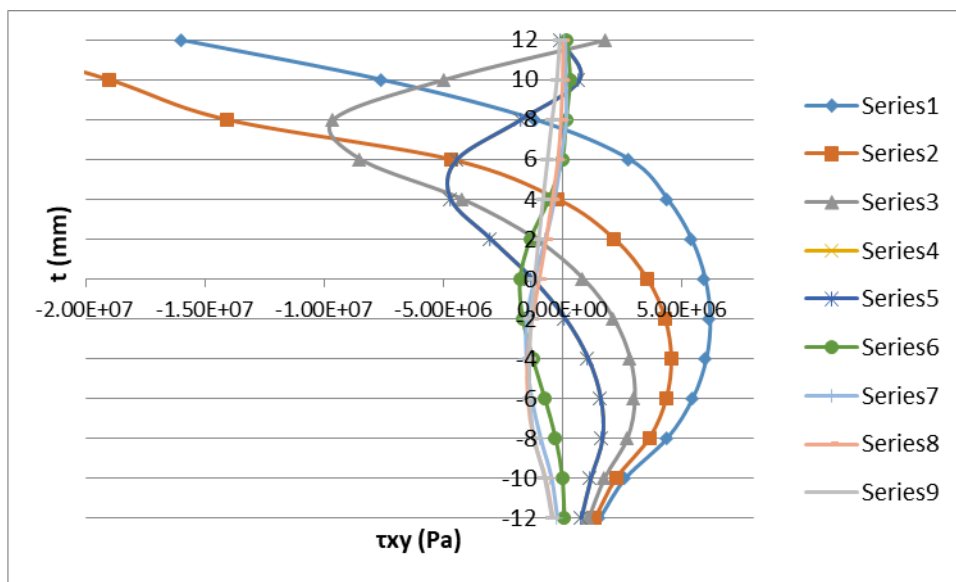
Μεταβολή των διατμητικών τάσεων κατα το πάχος της δοκού στην θέση που ασκείται το φορτίο για $F=2kN$, $t=20mm$, $b=30mm$, $\lambda=10$

3.13 Σύγκριση της κατανομής των τάσεων σε διαφορετικό σημείο από την θέση φόρτισης

Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο θα συγκρίνουμε την κατανομή των τάσεων σε θέσεις πιο απομακρυσμένες από το σημείο εφαρμογής του φορτίου. Ο λόγος ο οποίος θα γίνει αυτή η σύγκριση είναι για να παρατηρήσουμε πόσο επηρεάζει το επιβαλλόμενο φορτίο την κατανομή των τάσεων. Στα ακόλουθα διαγράμματα φαίνεται η κατανομή για διαφορετικές θέσεις για την διατμητική τάση. Έχει νόημα να δούμε μόνο τις διατμητικές τάσεις καθώς είναι σταθερές και όχι τις ορθές τάσεις καθώς μεταβάλλονται κατά μήκος της δοκού.



Διάγραμμα 3.9
Μεταβολή των διατμητικών τάσεων κατά το πάχος της δοκούς σε διάφορες θέσεις δεξιά από την εφαρμογή του φορτίου



Διάγραμμα 3.10
Μεταβολή των διατμητικών τάσεων κατά το πάχος της δοκούς σε διάφορες θέσεις αριστερά από την εφαρμογή του φορτίου

Παρατηρούμε από τα ανωτέρω διαγράμματα ότι όσο απομακρυνόμαστε από το σημείο εφαρμογής του φορτίου τόσο πιο αντιπροσωπευτικά γίνονται τα αποτελέσματα. Δηλαδή είναι εμφανής η επιρροή του φορτίου στην αξιοπιστία των αποτελεσμάτων από την θέση όπου παίρνουμε τις τάσεις. Επιπλέον παρατηρούμε ότι οι τάσεις αριστερά από την

εφαρμογή του φορτίου σταθεροποιούνται σε μεγαλύτερη απόσταση σε σχέση με τις τάσεις δεξιά από την εφαρμογή του φορτίου. Αυτό ίσως συμβαίνει για τον λόγο ότι είναι αρκετά μεγαλύτερες οι τάσεις στο δεξί μέρος από ότι στο αριστερό. Συγκεκριμένα είναι 4 φορές μεγαλύτερες, γεγονός που συμβαδίζει με την θεωρία.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

4.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει προσπάθεια σύγκρισης των αποτελεσμάτων που υπολογίστηκαν ανωτέρω μεταξύ των επιλύσεων, δηλαδή με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων και της Θεωρίας Ελαστικότητας. Συγκεκριμένα γίνεται σύγκριση κυρίως των βελών κάμψεως και τον τρόπο που αυτό το μέγεθος μεταβάλλεται όταν υπάρχει μεταβολή άλλων παραμέτρων (μήκος δοκιμίου, διεύθυνση ινών, μέγεθος δύναμης που ασκείται κτλ).

Εξαιτίας του ότι δεν υπάρχουν πειραματικά δεδομένα για σύνθετα υλικά μίας διευθύνσεως έχει γίνει μια προκαταρκτική μελέτη που αφορά σύνθετο υλικό τυχούσας διευθύνσεως [23] ώστε να εξαχθεί μια πρώτη εκτίμηση για να παρατηρήσουμε τις διαφορές των δύο μεθόδων. Στην συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται και σύγκριση με την Θεωρία της Αντοχής των υλικών για περαιτέρω ανάλυση.

Εν συνεχεία έχει πραγματοποιηθεί σύγκριση των αποτελεσμάτων της μοντελοποίησης του πειράματος ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων για σύνθετα υλικά με ίνες μίας διευθύνσεως. Σε αυτό το σημείο έχει πολύ μεγάλη σημασία ο συντελεστής λ ο οποίος καθορίζει την κατανομή της δύναμης καθώς και το σημείο άσκησης του φορτίου.

Επιπλέον στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε ανάλυση αποτελεσμάτων για την κάμψη τριών σημείων. Σε αυτού του είδους την μοντελοποίηση δεν γίνεται σημαντική σύγκριση των παραμέτρων αλλά στόχος είναι να παρατηρηθεί πως μεταβάλλεται το βέλος κάμψης συγκριτικά με το φορτίο που ασκείται. Επισημαίνεται ότι για αυτήν την μέθοδο υπάρχουν πειραματικά δεδομένα μόνο για 0 και 90 μοίρες διεύθυνση ινών.

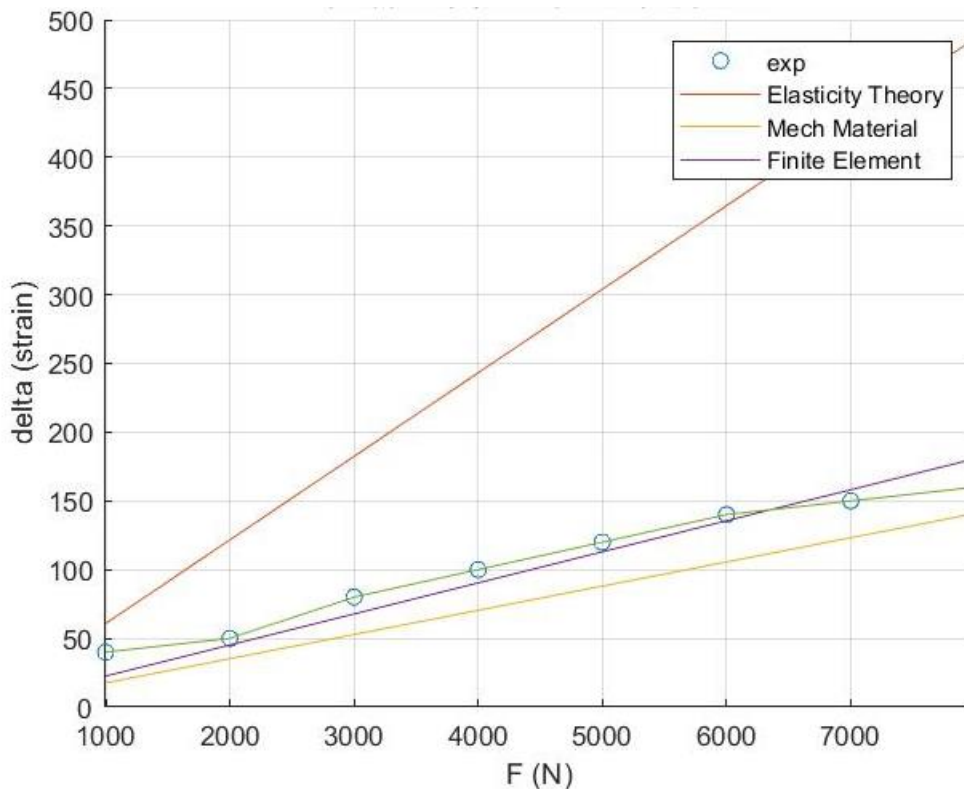
Τέλος θα ακολουθήσει σύγκριση των βελών κάμψης για την κάμψη τριών σημείων με την κάμψη τεσσάρων σημείων. Αυτό θα γίνει με την σύγκριση του λόγου βέλους κάμψης ως προς το μήκος όπου ασκείται η δύναμη. Καθώς θα γίνει και σύγκριση όλων των σύνθετων με διαφορετικές γωνίες ινών ως προς τις τάσεις στον άξονα x, τις διατμητικές τάσεις και των βελών κάμψης.

4.2 Σύνθετο υλικό τυχούσας Διευθύνσεως 4PB

Στην συγκεκριμένη μοντελοποίηση έγινε αναλύση για laminate τύπου D και T2 όπου αποτελούνται από ίνες γυαλιού και μήτρα ρητίνης. Το πείραμα που περιγράφεται είναι ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων και οι ίνες είναι τυχούσας διευθύνσεως. Το υλικό λειτουργεί ως ορθότροπο και στην συγκεκριμένη περίπτωση έχει σημασία ο συντελεστής λ . Έχουν μοντελοποιηθεί έξι πειράματα από την εργασία του κ. Αιμίλιου Σιδερίδη [23] όπου φαίνονται για $\lambda=1.8, 2.1, 3.5, 5.2, 6, 10$. Στην συνέχεια φαίνεται αναλυτικά η κάθε περίπτωση όπου δίνονται τα διαγράμματα με άξονα x η δύναμη που ασκείται και στον άξονα y το βέλος κάμψης διαιρεμένο με τον συντελεστή 0.0064 ώστε να ταυτίζονται οι τιμές με αυτές του καταγραφικού όπου έγινε το πείραμα. Επισημαίνεται ότι στην βιβλιογραφία το μέγεθος αυτό αναφέρεται ως strain και είναι αδιάστατο.

4.2.1 Σύνθετο υλικό τυχούσας διευθύνσεως για $\lambda=1.8$

Το ακόλουθο διάγραμμα αφορά laminate τύπου D με μήκος $L=40\text{mm}$ πλάτος $b=28.91\text{mm}$ και πάχος $t=10.01\text{mm}$. Επίσης ο συντελεστής $\lambda=1.8$. Παρατήρουμε αφενός ότι όσο αυξάνεται η δύναμη προφανώς αυξάνεται και το βέλος κάμψης αλλά αυτά που φαίνεται να έχει σημασία είναι ότι η Θεωρία Ελαστικότητας για χαμηλή τιμή του λ δεν δίνει καθόλου ικανοποιητικά αποτελέσματα, εκτός βεβαίως για τιμές με χαμηλή ποσότητα δύναμης. Από την άλλη πλευρά η μέθοδος της Αντοχής των Υλικών και των Πεπερασμένων στοιχείων δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα, με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων να είναι πιο ακριβής σε όλο το εύρος τιμών. Ο προφανής λόγος που δικαιολογεί τόσο άστοχη προσέγγιση είναι ότι η Θεωρία Ελαστικότητας δεν λειτουργεί αποτελεσματικά σε περιοχές κοντά στην στήριξη. Επομένως όταν ο συντελεστής λ είναι μικρός τότε η δύναμη και το βέλος που μετράμε στο σημείο αυτό θα είναι πιο κοντά στο σημείο στήριξης και έχουμε μεγάλη αλλοίωση αποτελεσμάτων. Αναμένουμε δηλαδή ότι όσο μεγαλώνει ο συντελεστής λ τόσο να βελτιώνονται οι τιμές, γεγονός που επαληθεύεται στην συνέχεια.

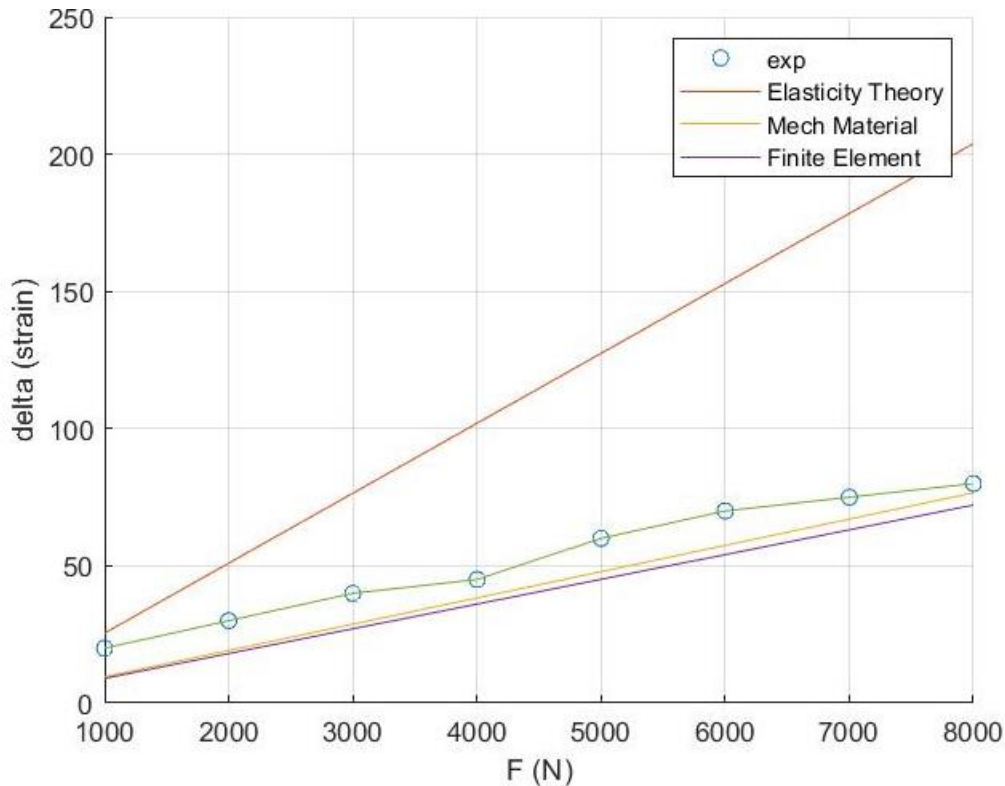


Διάγραμμα 4.1

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση της δύναμης για Laminate D για $\lambda=1.8$

4.2.2 Σύνθετο υλικό τυχούσας διευθύνσεως για $\lambda=2.1$

Το ακόλουθο διάγραμμα αφορά laminate τύπου D με μήκος $L=40\text{mm}$ πλάτος $b=30.02\text{ mm}$ και πάχος $t=9.89\text{ mm}$. Επίσης ο συντελεστής $\lambda=2.1$. Παρατήρουμε ξανά ότι όσο αυξάνεται η δύναμη προφανώς αυξάνεται και το βέλος κάμψης αλλά πάλι βλέπουμε για την Θεωρία Ελαστικότητας ότι για χαμηλή τιμή του λ δεν δίνει καθόλου ικανοποιητικά αποτελέσματα, εκτός πάλι βεβαίως για τιμές με χαμηλή ποσότητα δύναμης. Από την άλλη πλευρά η μέθοδος της Αντοχής των Υλικών και των Πεπερασμένων Στοιχείων δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα σε όλο το εύρος τιμών. Ο προφανής λόγος που δικαιολογεί την τόσο άστοχη προσέγγιση είναι ότι όπως ειπώθηκε η Θεωρία Ελαστικότητας δεν λειτουργεί αποτελεσματικά σε περιοχές κοντά στην στήριξη. Επομένως όταν ο συντελεστής λ είναι μικρός τότε η δύναμη και το βέλος που μετράμε στο σημείο αυτό θα είναι πιο κοντά στο σημείο στήριξης και έχουμε μεγάλη αλλοίωση αποτελεσμάτων.

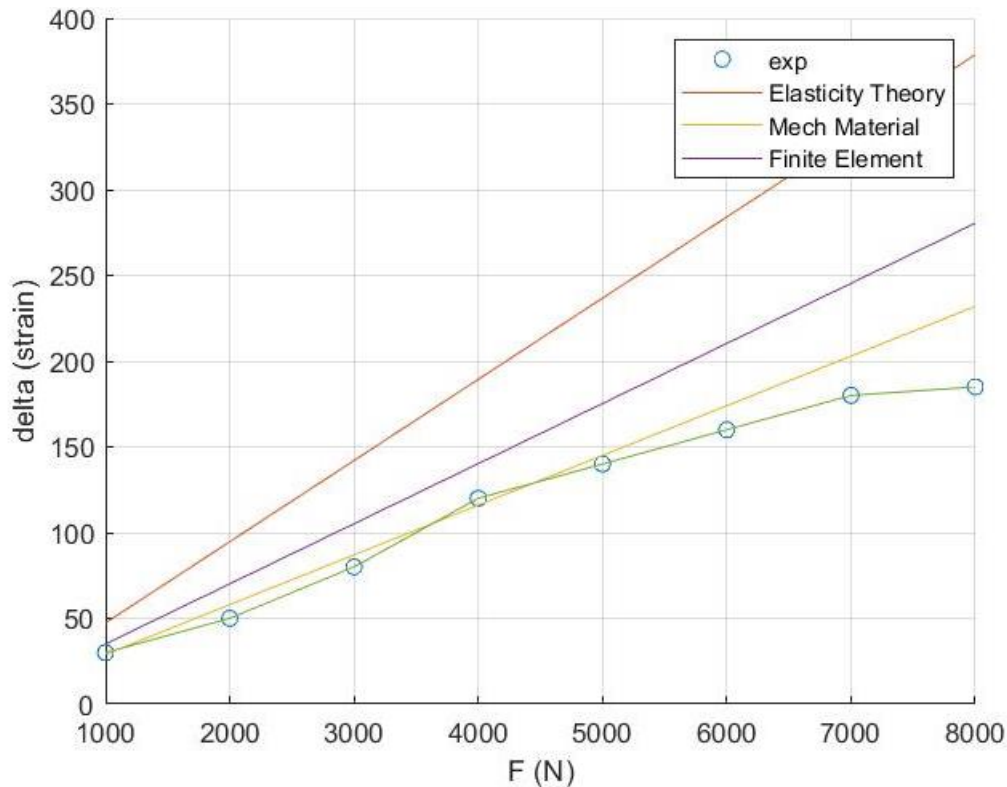


Διάγραμμα 4.2

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση της δύναμης για Laminate D για $\lambda=2.1$

4.2.3 Σύνθετο υλικό τυχούσας διευθύνσεως για $\lambda=3.5$

Το ακόλουθο διάγραμμα αφορά laminate τύπου D με μήκος $L=70\text{mm}$ πλάτος $b=29.61\text{ mm}$ και πάχος $t=10.01\text{ mm}$. Επίσης ο συντελεστής $\lambda=3.5$. Παρατήρουμε ξανά ότι όσο αυξάνεται η δύναμη προφανώς αυξάνεται και το βέλος κάμψης και τώρα βλέπουμε για την Θεωρία Ελαστικότητας ότι έχουν βελτιωθεί εντυπωσιακά τα αποτελέσματα σε σχέση με τα προηγούμενα διαγράμματα αλλά ξανά βλέπουμε μεγάλες αποκλίσεις όσο αυξάνεται η δύναμη μετά από μια τιμή. Από την άλλη πλευρά η μέθοδος της Αντοχής των Υλικών και των Πεπερασμένων στοιχείων δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα σε όλο το εύρος τιμών με μόνη διαφορά ότι η αντοχή των υλικών σε αυτή την περίπτωση έχει μεγαλύτερη ακρίβεια σε σχέση με τα Πεπερασμένα Στοιχεία. Παρατηρούμε ότι η άρθρωση έχει ακόμα μεγάλη επιρροή στα αποτελέσματα όχι όμως τόσο όσο στα προηγούμενα πειράματα.

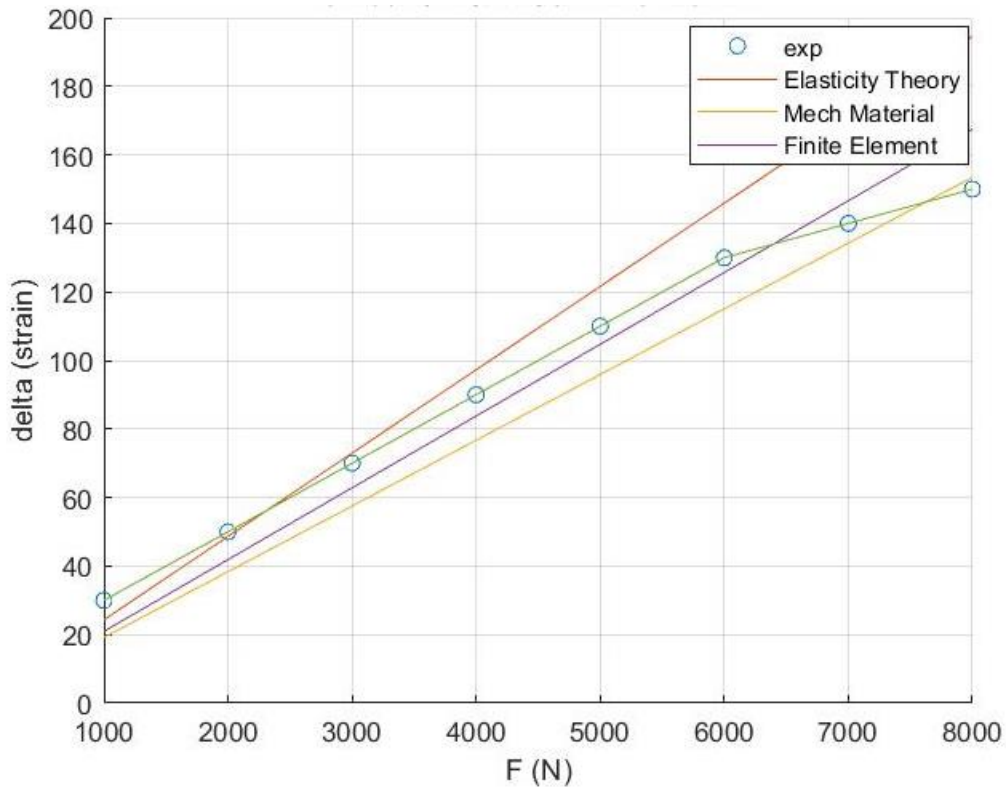


Διάγραμμα 4.3

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση της δύναμης για Laminate D για $\lambda=3.5$

4.2.4 Σύνθετο υλικό τυχούσας διευθύνσεως για $\lambda=5.2$

Το ακόλουθο διάγραμμα αφορά laminate τύπου D με μήκος $L=56\text{mm}$ πλάτος $b=29.49\text{mm}$ και πάχος $t=9.61\text{mm}$. Επίσης ο συντελεστής $\lambda=5.2$. Πλέον είναι φανερό ότι όλες οι μέθοδοι παρουσιάζουν μια σύγκλιση σε εύρος τιμών και όλες έχουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Πλέον η επίδραση της άρθρωσης έχει εξαλειφθεί και αναμένουμε ότι απο αυτή την τιμή του λ και μετά θα έχουμε αξιόπιστα αποτελέσματα και την μέθοδο επίλυσης με Θεωρία Ελαστικότητας. Για ακόμα μία φορά τα Πεπερασμένα Στοιχεία και η Αντοχή των Υλικών παρουσιάζουν αξιοπιστία στις τιμές τους και για ακόμα μια φορά τα Πεπερασμένα Στοιχεία έχουν μεγαλύτερη ακρίβεια και καλύτερη προσέγγιση σε σχέση με τις άλλες δύο μεθόδους. Παρατηρείται ότι και η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων επηρεάζεται από την επίδραση της άρθρωσης καθώς βλέπουμε ότι η ακρίβεια της αυξάνεται.

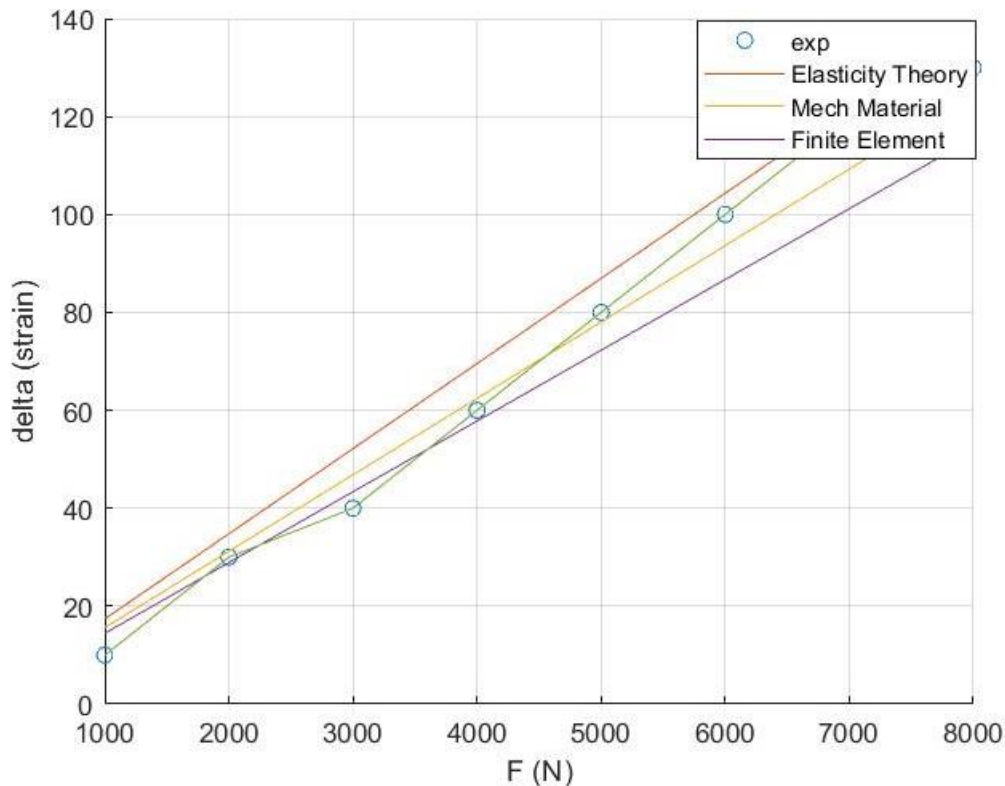


Διάγραμμα 4. 4

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση της δύναμης για Laminate D για $\lambda=5.2$

4.2.5 Σύνθετο υλικό τυχούσας διευθύνσεως για $\lambda=6$

Το ακόλουθο διάγραμμα αφορά laminate τύπου D με μήκος $L=40\text{mm}$ πλάτος $b=27.22\text{ mm}$ και πάχος $t=9.50\text{ mm}$. Επίσης ο συντελεστής $\lambda=6$. Είναι φανερό ότι όλες οι μέθοδοι παρουσιάζουν μια σύγκλιση σε εύρος τιμών, μάλιστα μικρότερο εύρος σε σχέση με μικρότερο λ και όλες έχουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Για ακόμα μία φορά τα Πεπερασμένα Στοιχεία και η Αντοχή των Υλικών παρουσιάζουν αξιοπιστία στις τιμές τους και για ακόμα μια φορά τα Πεπερασμένα Στοιχεία έχουν μεγαλύτερη ακρίβεια και καλύτερη προσέγγιση σε σχέση με τις άλλες δύο μεθόδους. Η Θεωρία Ελαστικότητας πλέον συμβαδίζει και έχει συνοχή στα αποτελέσματα της όπως και άλλες μέθοδοι και περιγράφουν με ακρίβεια το πείραμα των τεσσάρων σημείων.

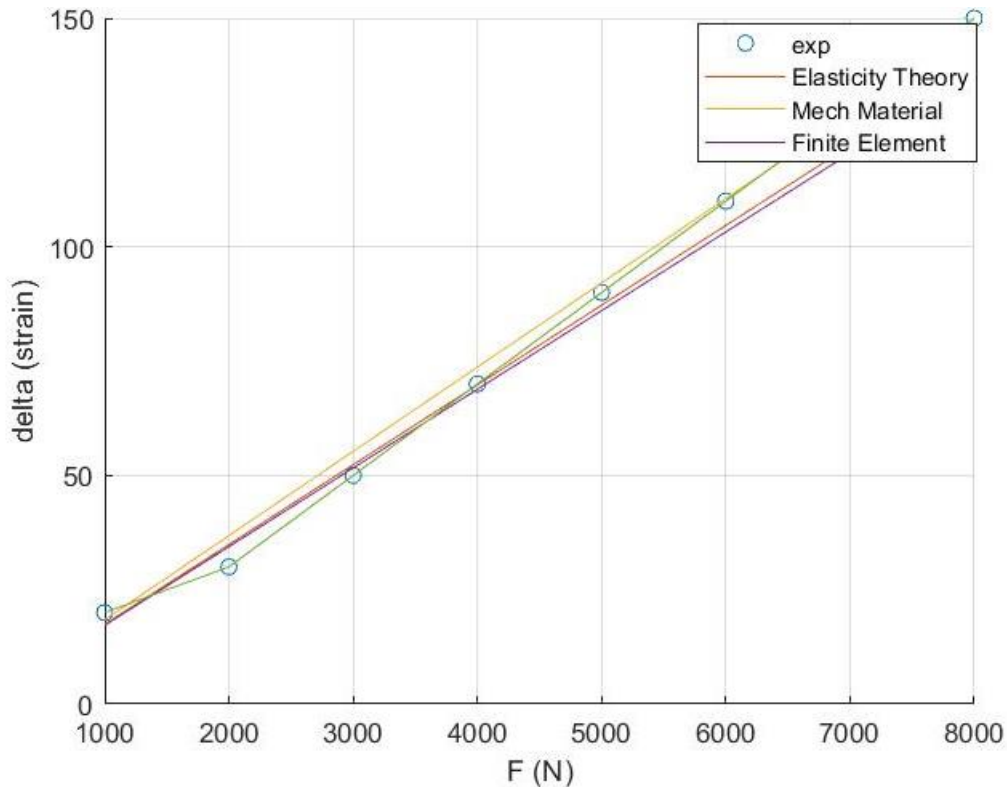


Διάγραμμα 4.5

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση της δύναμης για Laminate D για $\lambda=6$

4.2.6 Σύνθετο υλικό τυχούσας διεύθυνσεως για $\lambda=10$

Το ακόλουθο διάγραμμα αφορά laminate τύπου T2 με μήκος $L=70\text{mm}$ πλάτος $b=19.1\text{ mm}$ και πάχος $t=16.01\text{ mm}$. Επίσης ο συντελεστής $\lambda=10$. Πλέον βλέπουμε ότι υπάρχει ταύτιση με όλες τις μεθόδους. Όλες οι προσεγγίσεις είναι ακριβείς και περιγράφουν σε άριστο βαθμό τα πειραματικά δεδομένα. Είναι λογικό να πούμε πλέον ότι η άρθρωση επηρεάζει ελάχιστα τα μοντέλα και δεν αλλοιώνει τις μεθόδους επίλυσης. Εξαιτίας της μεγάλης ακρίβειας για συντελεστή $\lambda=10$ θα συγκρίνουμε στην συνέχεια και τα υπόλοιπα σύνθετα με μία διεύθυνση ινών σε αυτή την τιμή της παραμέτρου για να έχουν αντικειμενικότητα και ρεαλισμό οι συγκρίσεις.



Διάγραμμα 4.6

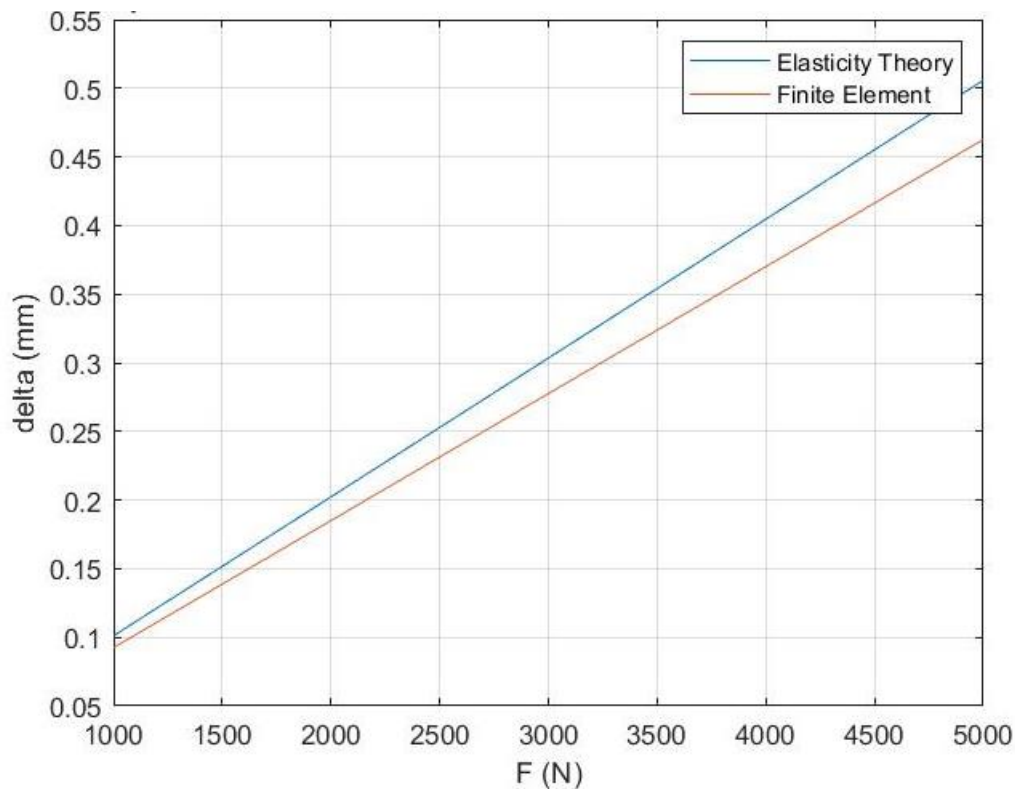
Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση της δύναμης για Laminate T2 για $\lambda=10$

4.3 Σύνθετο υλικό με ίνες μιας διεύθυνσεως 4PB

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα γίνει ανάλυση και σύγκριση των μεθόδων των Πεπερασμένων Στοιχείων και της Θεωρίας Ελαστικότητας για σύνθετο υλικό με ίνες μιας διεύθυνσεως. Στην παρούσα ανάλυση δεν υπάρχουν πειραματικά δεδομένα και για τον λόγο αυτό η σύγκριση περιορίζεται μόνο στις δύο μεθόδους όπου έχουμε και πολύ κοντινά αποτελέσματα. Το υλικό στο οποίο θα γίνει μοντελοποίηση είναι σύνθετο, με ίνες γυαλιού και εποξική ρητίνη. Το ποσοστό των ινών είναι 65% κατ'όγκο περιεκτικότητα ελαστική σταθερά στην διεύθυνση ένα $E_1=38.6 \text{ kN/mm}^2$ ενώ στην διεύθυνση δύο $E_2=8.27 \text{ kN/mm}^2$. Επίσης η σταθερά διάτμησης στην διεύθυνση 1-2 είναι $G_{12}=4.14 \text{ kN/mm}^2$ και ο λόγο Poisson $\nu_{12}=0.26$. Η σύγκριση των μεθόδων έχει πραγματοποιηθεί με την αλλαγή συγκεκριμένων παραμέτρων σε κάθε εκτέλεση και παρατηρούμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται κυρίως το βέλος κάμψης και συγκριτικά με την μεταβολή των παραμέτρων (π.χ. δύναμη, συντελεστής λ , μήκος δοκού, πάχος δοκου κτλ). Στην συνέχεια παρουσιάζεται αναλυτικά οι μεταβολές των μεγεθών για κάθε διεύθυνση των ινών ξεχωριστά.

4.3.1 Σύνθετο υλικό με ίνες διευθύνσεως 0°

Στο ακόλουθο διάγραμμα φαίνεται πως μεταβάλλεται το βέλος κάμψης συγκριτικά μεταξύ των Πεπερασμένων Στοιχείων και της Θεωρίας Ελαστικότητας ως προς την μεταβολή της συνολικής δύναμης. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το πάχος του δοκιμίου $t=10$ mm ενώ το μήκος του είναι $L=120$ mm. Επισημαίνεται ότι ο συντελεστής είναι $\lambda=10$ καθώς εκεί έχουμε και τα καλύτερα στοιχεία για την μέθοδο της Θεωρίας της Ελαστικότητας, καθώς όπως προαναφέρθηκε σε αυτό το σημείο υπάρχει μικρότερη επίδραση της άρθρωσης. Στο διάγραμμα φαίνεται ότι το βέλος κάμψης αυξάνεται όσο αυξάνεται η δύναμη και ότι για μικρές τιμές της δύναμης έχουμε μεγαλύτερη σύγκλιση τιμών σε σχέση με μεγαλύτερες τιμές.

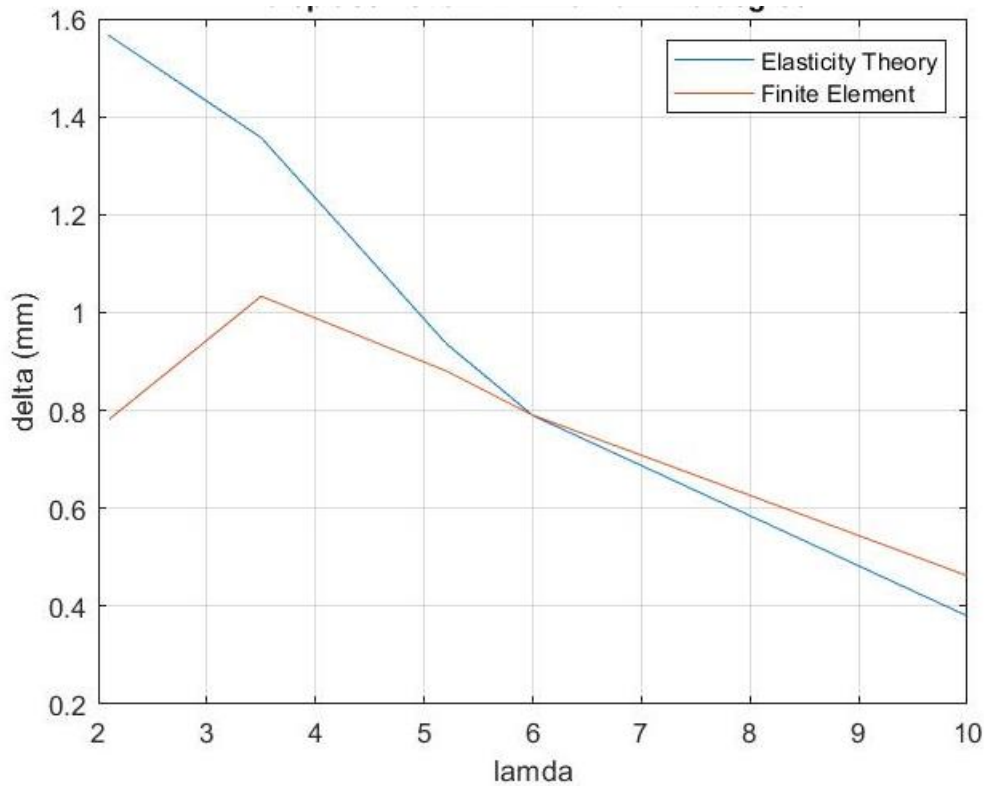


Διάγραμμα 4.7

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση της δύναμης για σύνθετο με ίνες 0 μοιρών $t=10$ mm, $L=120$ mm, $\lambda=10$ και $b=30$ mm

Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή του βέλους κάμψης σε σύγκριση με τον συντελεστή λ ο οποίος είναι υπεύθυνος για την κατανομή της δύναμης καθώς και του σημείου όπου ασκείται η δύναμη. Η δύναμη που ασκείται στο συγκεκριμένο διάγραμμα θεωρείται σταθερή στα $F=2$ kN με πάχος $t=10$ mm ενώ το μήκος του δοκιμίου είναι $L=120$ mm. Πλέον είναι φανερό και σε μορφή διαγράμματος, αυτό που έχουμε αναφέρει

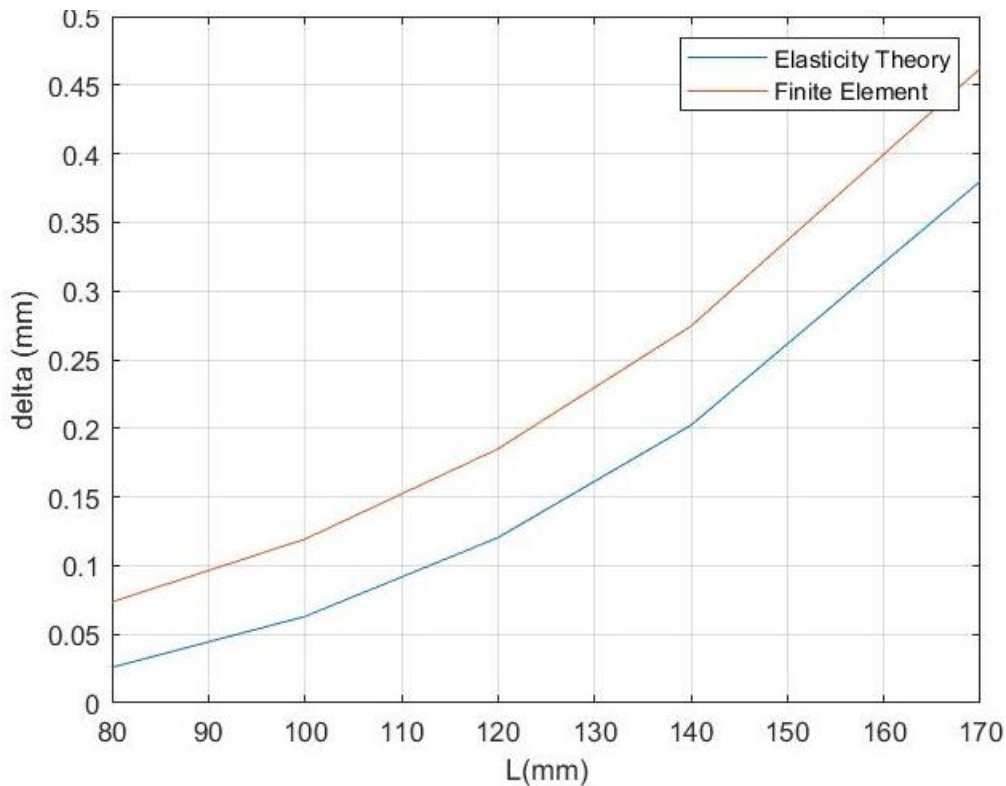
πολλές φορές ήδη, δηλαδή ότι για μικρές τιμές λ η θεωρία της ελαστικότητας δεν έχει καλές προσεγγίσεις καθώς επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από την άρθρωση η οποία έχει τοποθετηθεί στο αριστερό άκρο του δοκιμίου. Επίσης φαίνεται ότι όσο αυξάνεται το λ βλέπουμε βελτίωση των τιμών του βέλους κάμψης που προκύπτουν από την Θεωρία Ελαστικότητας. Συγκεκριμένα μετά την τιμή για $\lambda=5$ μπορούμε να πούμε ότι έχουμε αξιόπιστα αποτελέσματα όπως βεβαίως έδειξε και η σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα από το σύνθετο υλικό με ίνες τυχούσας διεύθυνσεως.



Διάγραμμα 4. 8

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του συντελεστή λ για σύνθετο με ίνες 0 μοιρών $t=10\text{mm}$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$

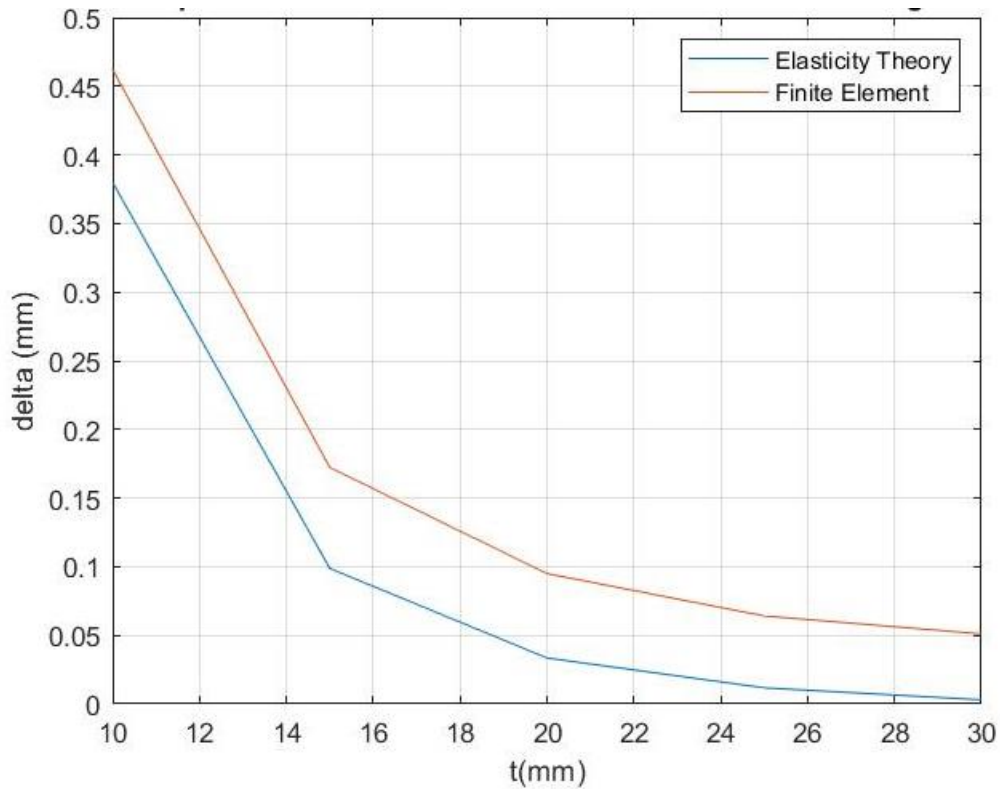
Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται η μεταβολή του βέλους κάμψης όταν έχουμε αντίστοιχη μεταβολή του μήκους του δοκιμίου. Είναι φανερό ότι δεν βλέπουμε ιδιαίτερη μεταβολή μεταξύ των δύο μεθόδων. Συγκεκριμένα φαίνονται οι δύο λύσεις να συνεχίζουν ασυμπτωτικά. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε σταθερή δύναμη $F=2\text{ kN}$ με πάχος $t=10\text{mm}$ ενώ ο συντελεστής $\lambda=10$. Είναι γεγονός ότι θα περιμέναμε με την αύξηση του μήκους του δοκιμίου να έχουμε κάποια σύγκλιση των τιμών πράγμα που δεν συμβαίνει τουλάχιστον για τις μηδέν μοίρες διεύθυνση ινών.



Διάγραμμα 4.9

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του μήκους για σύνθετο με ίνες 0 μοιρών $t=10\text{mm}$, $L=\lambda=10$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$

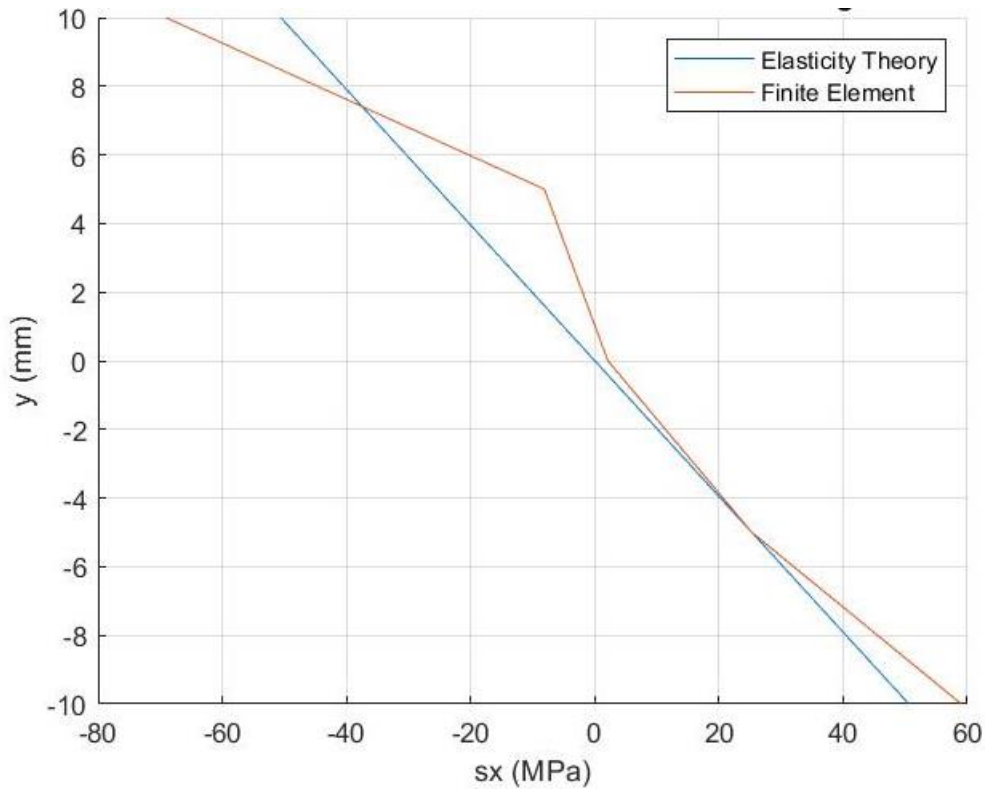
Στην συνέχεια γίνεται σύγκριση μεταξύ του πάχους του δοκιμίου και του βέλους κάμψης, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Όπως ήταν αναμενόμενο όσο αυξάνεται το πάχος του δοκιμίου τόσο μειώνεται και το βέλος κάμψης. Για την συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε σταθερή την δύναμη $F=2\text{ kN}$ το μήκος του δοκιμίου $L=120\text{ mm}$ και τον συντελεστή $\lambda=10$. Βλέπουμε ξανά τις δύο λύσεις να κυμαίνονται σχεδόν ασυμπτωτικά με σταθερό λάθος. Στην πραγματικότητα όσο μικραίνει το πάχος του δοκιμίου μειώνεται και η απόκλιση των δύο μεθόδων και το αντίστροφο.



Διάγραμμα 4. 10

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του πάχους για σύνθετο με ίνες 0 μοιρών $\lambda=10$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$

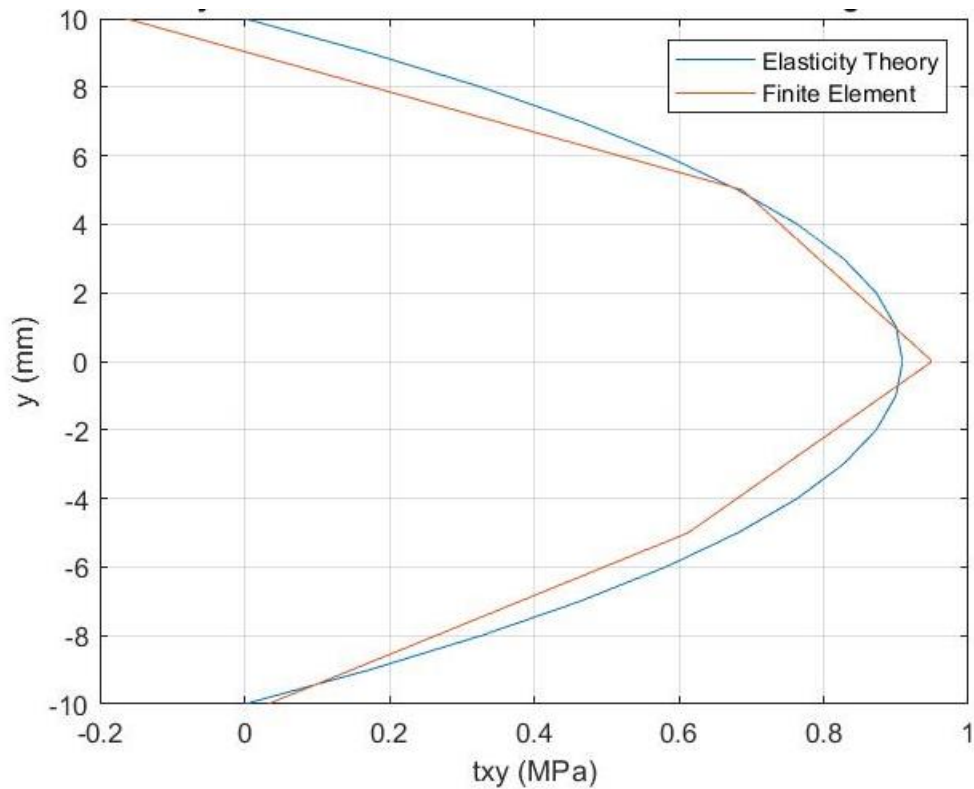
Το ακόλουθο διάγραμμα αφορά στη σύγκριση των τάσεων ως προς τον άξονα x μεταξύ των δύο μεθόδων. Επισημαίνεται ότι θεωρούμε σταθερή την δύναμη $F=2\text{ kN}$ με πάχος δοκιμίου $t=10\text{ mm}$ και μήκος $L=140\text{ mm}$ ενώ ο συντελεστής $\lambda=10$. Γενικά βλέπουμε μια ταύτιση των τάσεων ειδικά μετά την τιμή $y=0$ και κάτω. Το γεγονός αυτό είναι λογικό και έχει να κάνει με το ότι στο σημείο που εφαρμόζεται η δύναμη τα Πεπερασμένα Στοιχεία επηρεάζονται και αλλοιώνουν τα αποτελέσματα. Έτσι, στο σημείο που εφαρμόζεται η δύναμη και γύρω από αυτή την περιοχή δεν θα έχουμε ταύτιση των αποτελεσμάτων, όπως δηλαδή φαίνεται και στο διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι τηρείται η αντισυμμετρία όπως θα περιμέναμε να δούμε από την θεωρία. Δηλαδή οι ακραίες τιμές είναι κατα απόλυτη τιμή 60 MPa και κυμαίνονται από -60 έως 60 MPa .



Διάγραμμα 4. 11

Μεταβολή των ορθών τάσεων σε σχέση με το πάχος για σύνθετο με ίνες 0 μοιρών $t=20\text{mm}$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$ και $\lambda=10$

Στο διάγραμμα που ακολουθεί απεικονίζονται στον άξονα των x οι διατμητικές τάσεις που δέχεται το σύνθετο υλικό με ίνες μιας διεύθυνσεως στην θέση $x=a$ όπου ασκείται και η δύναμη Q ενώ στον άξονα y απεικονίζεται το ύψος του πάχους που βρισκόμαστε στο δοκίμιο. Παρατηρούμε μια πολύ καλή προσέγγιση των διατμητικών τάσεων και παραδόξως δεν βλέπουμε μεγάλη αλλοίωση των αποτελεσμάτων στο ανώτερο σημείο του δοκιμίου όπου ασκείται η δύναμη όπως συνηθίζει να συμβαίνει. Επίσης φαίνεται ότι τα Πεπερασμένα Στοιχεία προσπαθούν να ακολουθήσουν μια παραβολή όπως γνωρίζουμε ότι θα έπρεπε να συμβαίνει από την αντοχή των υλικών. Επομένως είναι αναμενόμενο ότι εάν αυξήσουμε τους κατακόρυφους κόμβους θα έχουμε καλύτερη καμπύλη. Δεν έγινε όμως απόπειρα για περισσότερους κόμβους λόγω των δυνατοτήτων του H/Y.

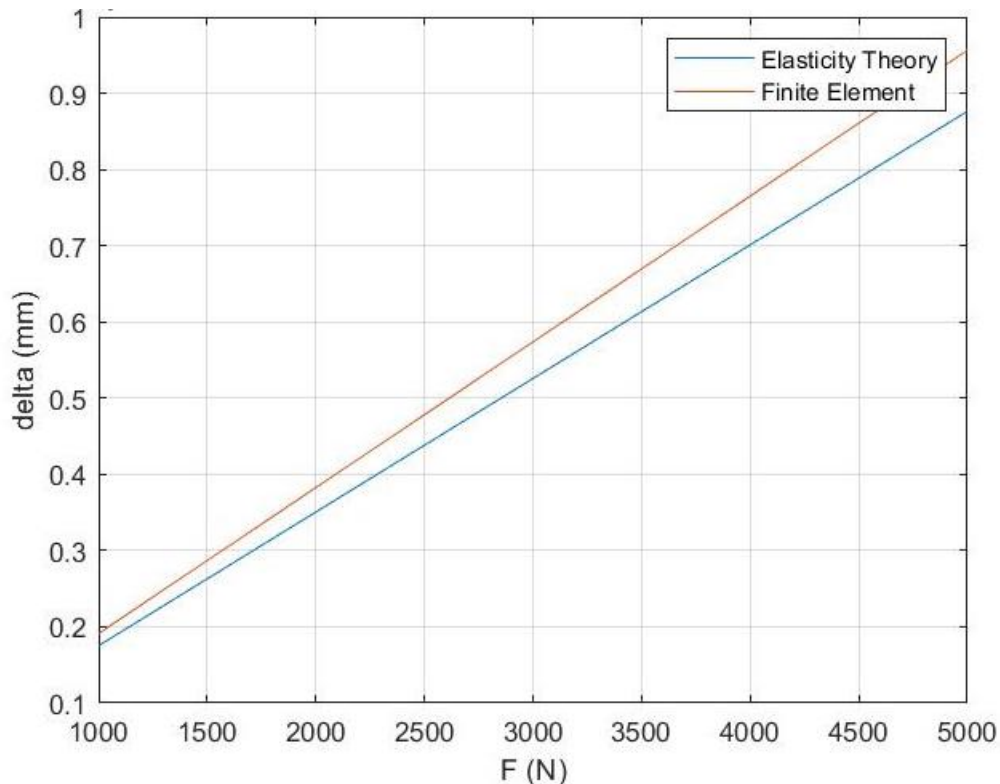


Διάγραμμα 4. 12

Μεταβολή των διατμητικών τάσεων σε σχέση με το πάχος για σύνθετο με ίνες 0 μοιρών $t=20\text{mm}$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$ και $\lambda=10$

4.3.2 Σύνθετο υλικό με ίνες διευθύνσεως 30°

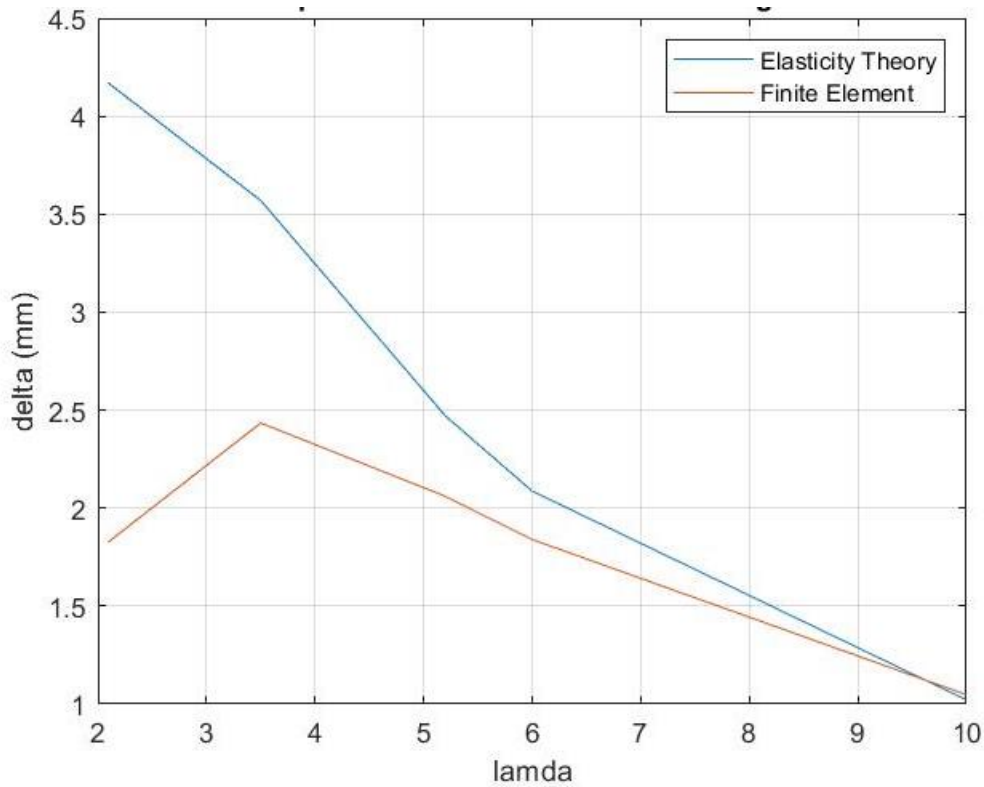
Στο ακόλουθο διάγραμμα φαίνεται πως μεταβάλλεται το βέλος κάμψης συγκριτικά μεταξύ των Πεπερασμένων Στοιχείων και της Θεωρίας Ελαστικότητας ως προς την μεταβολή της συνολικής δύναμης. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το πάχος του δοκιμίου $t=10\text{ mm}$ ενώ το μήκος του είναι $L=120\text{ mm}$. Επισημαίνεται ότι ο συντελεστής είναι $\lambda=10$ καθώς εκεί έχουμε και τα καλύτερα στοιχεία για την μέθοδο της Θεωρίας της Ελαστικότητας, καθώς όπως προαναφέρθηκε σε αυτό το σημείο υπάρχει μικρότερη επίδραση της άρθρωσης. Στο διάγραμμα φαίνεται ότι το βέλος κάμψης αυξάνεται όσο αυξάνεται η δύναμη και ότι για μικρές τιμές της δύναμης έχουμε μεγαλύτερη σύγκλιση τιμών σε σχέση με μεγαλύτερες τιμές. Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι έχουμε ελαφρώς μεγαλύτερη σύγκλιση σε σχέση με τις 0 μοίρες.



Διάγραμμα 4. 13

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση της δύναμης για σύνθετο με ίνες 30 μοιρών $t=10\text{mm}$, $L=120\text{mm}$, $\lambda=10$ και $b=30\text{mm}$

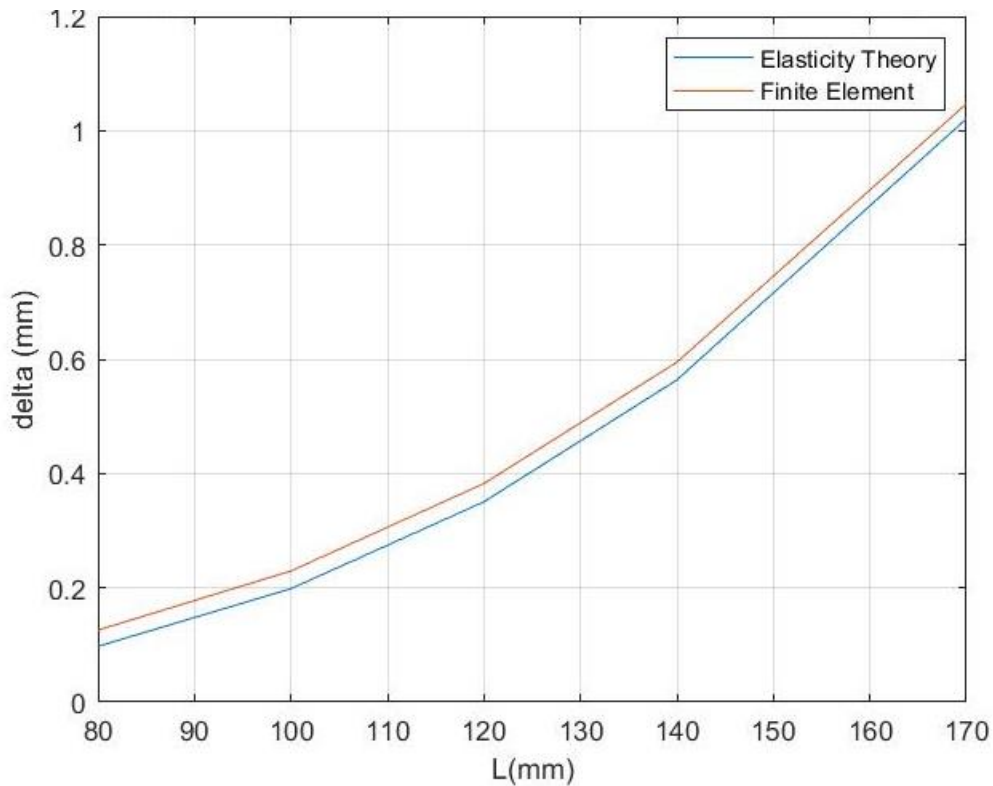
Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή του βέλους κάμψης σε σύγκριση με τον συντελεστή λ οποίος είναι υπεύθυνος για την κατανομή της δύναμης καθώς και του σημείου όπου ασκείται η δύναμη. Η δύναμη που ασκείται στο συγκεκριμένο διάγραμμα θεωρείται σταθερή $F=2\text{ kN}$ με πάχος δοκιμίου $t=10\text{ mm}$ ενώ το μήκος του δοκιμίου είναι $L=120\text{mm}$. Είναι φανερό ξανά και σε μορφή διαγράμματος, αυτό που έχουμε αναφέρει πολλές φορές ανωτέρω, δηλαδή ότι για μικρές τιμές λ η θεωρία της ελαστικότητας δεν έχει καλές προσεγγίσεις καθώς επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από την άρθρωση η οποία έχει τοποθετηθεί στο αριστερό άκρο του δοκιμίου. Επίσης φαίνεται ότι όσο αυξάνεται το λ βλέπουμε βελτίωση των τιμών του βέλους κάμψης που προκύπτουν από την Θεωρία Ελαστικότητας. Συγκεκριμένα μετά την τιμή για $\lambda=5$ μπορούμε να πούμε ότι έχουμε αξιόπιστα αποτελέσματα όπως βεβαίως έδειξε και η σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα από το σύνθετο υλικό με ίνες τυχούσας διεύθυνσεως.



Διάγραμμα 4. 14

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του συντελεστή λ για σύνθετο με ίνες 30 μοιρών $t=10\text{mm}$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$

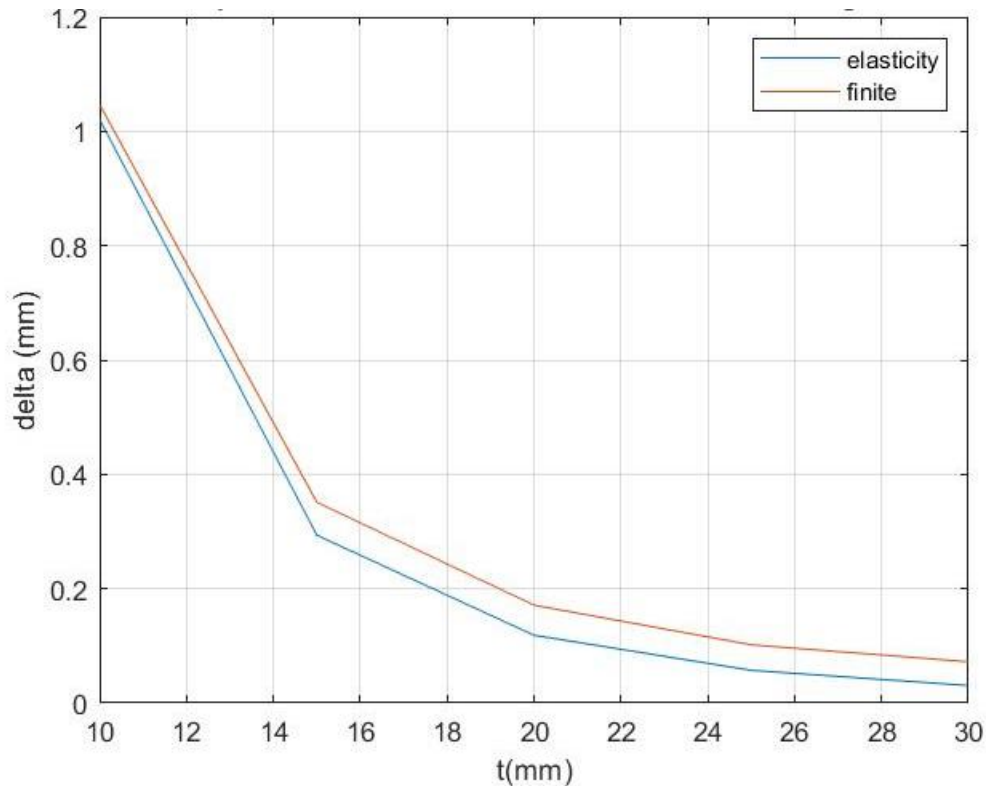
Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται η μεταβολή του βέλους κάμψης όταν έχουμε αντίστοιχη μεταβολή του μήκους του δοκιμίου. Είναι φανερό ότι δεν βλέπουμε ιδιαίτερη μεταβολή μεταξύ των δύο μεθόδων. Συγκεκριμένα φαίνονται οι δύο λύσεις να συνεχίζουν ασυμπτωτικά. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε σταθερή δύναμη $F=2\text{ kN}$ με πάχος $t=10\text{mm}$ ενώ ο συντελεστής $\lambda=10$. Είναι γεγονός ότι θα περιμέναμε με την αύξηση του μήκους του δοκιμίου να έχουμε κάποια σύγκλιση των τιμών γεγονός που δεν συμβαίνει.



Διάγραμμα 4.15

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του μήκους για σύνθετο με ίνες 30 μοιρών $t=10\text{mm}$, $L=\lambda=10$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$

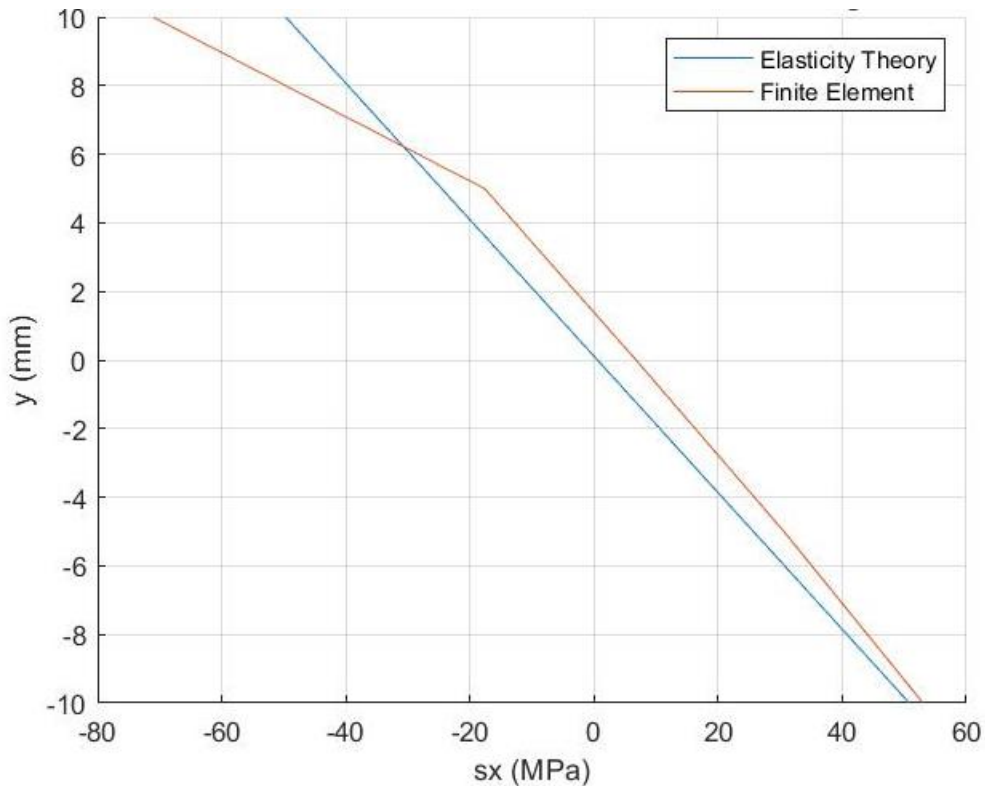
Στην συνέχεια γίνεται σύγκριση μεταξύ του πάχους του δοκιμίου και του βέλους κάμψης, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Όπως ήταν αναμενόμενο όσο αυξάνεται το πάχος του δοκιμίου τόσο μειώνεται και το βέλος κάμψης. Για την συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε σταθερή την δύναμη $F=2\text{ kN}$ το μήκος του δοκιμίου $L=120\text{ mm}$ και τον συντελεστή $\lambda=10$. Βλέπουμε ξανά τις δύο λύσεις να κυμαίνονται σχεδόν ασυμπτωτικά με σταθερό λάθος. Στην πραγματικότητα όσο μικραίνει το πάχος του δοκιμίου μειώνεται και η απόκλιση των δύο μεθόδων και το αντίστροφο.



Διάγραμμα 4. 16

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του πάχους για σύνθετο με ίνες 30 μοιρών $\lambda=10$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$

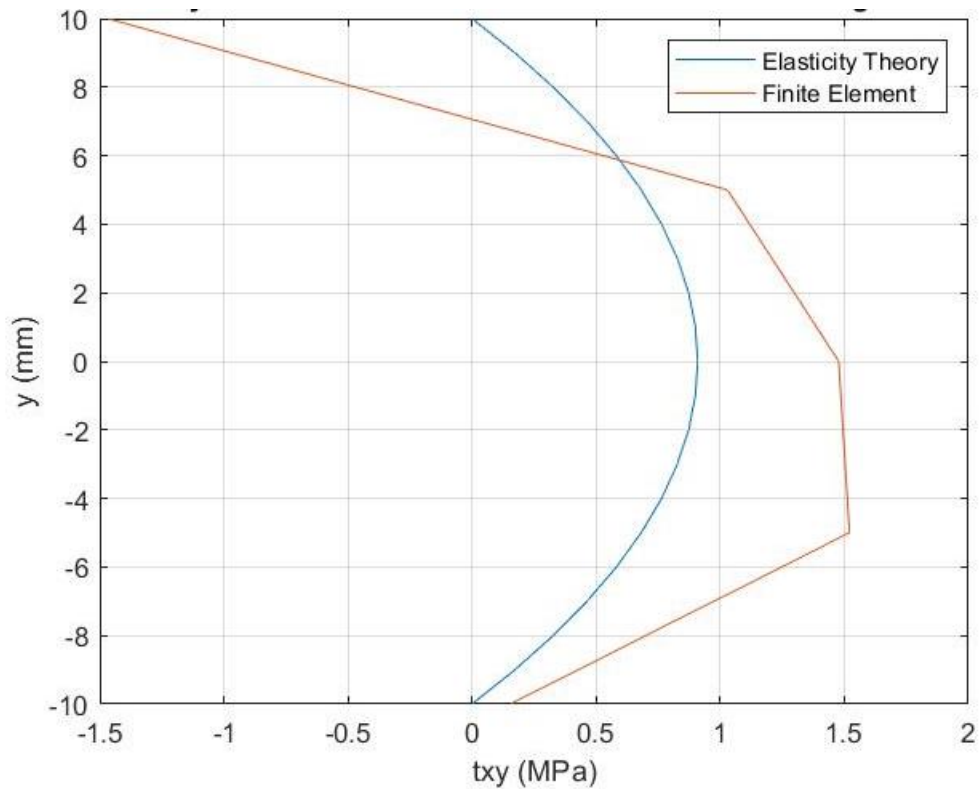
Το ακόλουθο διάγραμμα αφορά στη σύγκριση των τάσεων ως προς τον άξονα x μεταξύ των δύο μεθόδων. Επισημαίνεται ότι θεωρούμε σταθερή την δύναμη $F=2\text{ kN}$ με πάχος δοκιμίου $t=10\text{ mm}$ και μήκος $L=140\text{ mm}$ ενώ ο συντελεστής $\lambda=10$. Γενικά βλέπουμε μια ταύτιση των τάσεων ειδικά μετα την τιμή $y=0$ και κάτω. Το γεγονός αυτό είναι λογικό και έχει να κάνει με το ότι στο σημείο που εφαρμόζεται η δύναμη τα Πεπερασμένα Στοιχεία επηρεάζονται και αλλοιώνουν τα αποτελέσματα. Έτσι στο σημείο που εφαρμόζεται η δύναμη και γύρω από αυτή την περιοχή δεν θα έχουμε ταύτιση των αποτελεσμάτων, όπως δηλαδή φαίνεται και στο διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι τηρείται η αντισυμμετρία όπως θα περιμέναμε να δούμε από την θεωρία. Δηλαδή οι ακραίες τιμές είναι κατά απόλυτη τιμή 60 MPa και κυμαίνονται από -60 έως 60 MPa .



Διάγραμμα 4. 17

Μεταβολή των ορθών τάσεων σε σχέση με το πάχος για σύνθετο με ίνες 30 μοιρών $t=20\text{mm}$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$ και $\lambda=10$

Στο διάγραμμα που ακολουθεί απεικονίζονται στον άξονα των x οι διατμητικές τάσεις που δέχεται το σύνθετο υλικό με ίνες μιας διεύθυνσεως στην θέση $x=a$ όπου ασκείται και η δύναμη Q ενώ στον άξονα y απεικονίζεται το ύψος του πάχους που βρισκόμαστε στο δοκίμιο. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι στο άνω άκρο του δοκιμίου έχουμε μεγάλη αλλοίωση των αποτελεσμάτων καθώς επηρεάζονται οι περιοχές όπου βρίσκονται κοντά στην δύναμη. Πέρα από αυτή την αλλοίωση βλέπουμε ότι οι τιμές προσπαθούν να ακολουθήσουν μια καμπύλη όχι όμως με τόση ακρίβεια όσο συμβαίνει στις 0 και 90 μοίρες. Το κάτω άκρο της καμπύλης των Πεπερασμένων Στοιχείων βλέπουμε ότι προσεγγίζουν το μηδέν, γεγονός που είναι και επιθυμητό.

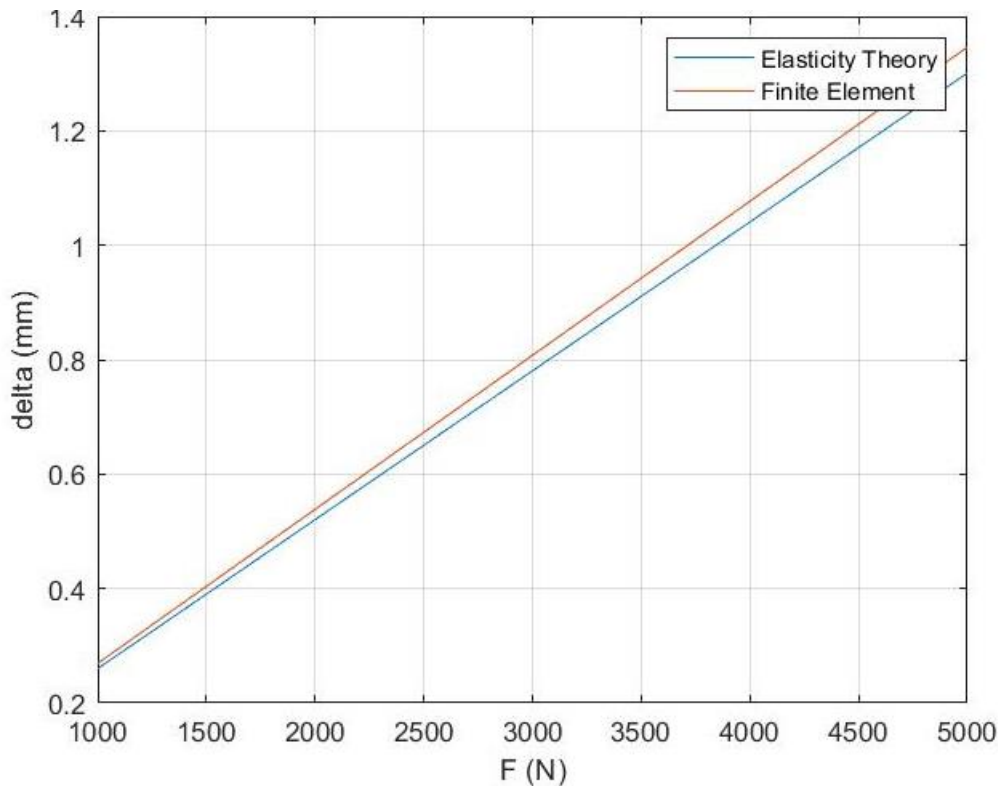


Διάγραμμα 4. 18

Μεταβολή των διατμητικών τάσεων σε σχέση με το πάχος για σύνθετο με ίνες 30 μοιρών $t=20\text{mm}$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$ και $\lambda=10$

4.3.3 Σύνθετο υλικό με ίνες διευθύνσεως 45°

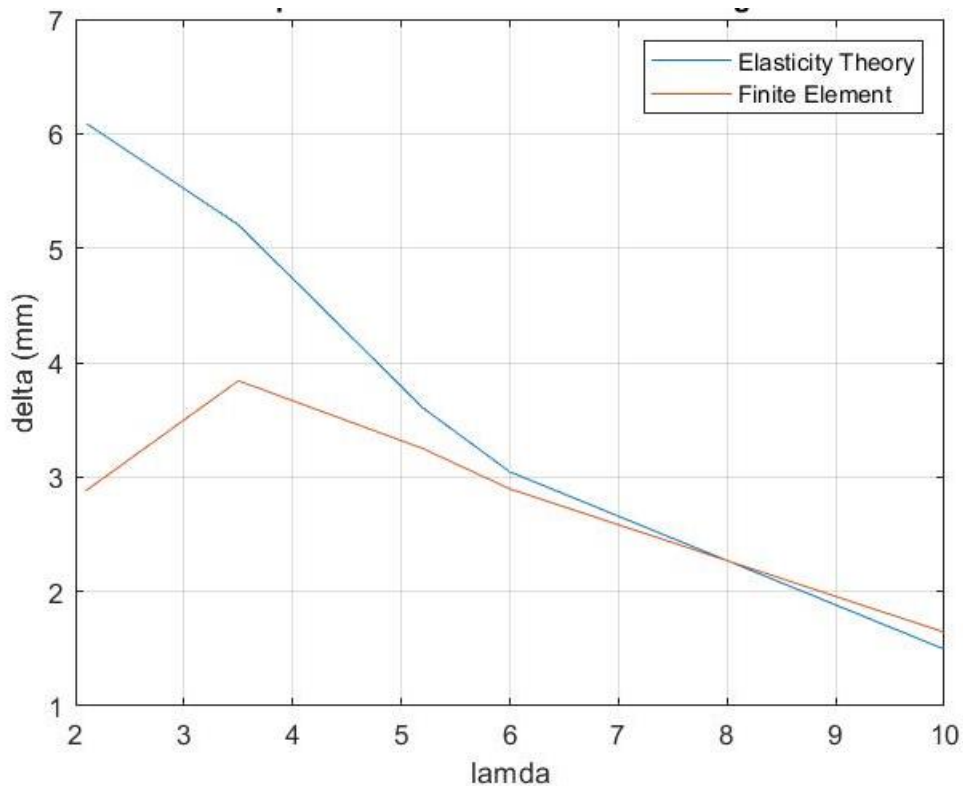
Στο ακόλουθο διάγραμμα φαίνεται πως μεταβάλλεται το βέλος κάμψης συγκριτικά μεταξύ των Πεπερασμένων Στοιχείων και της Θεωρίας Ελαστικότητας ως προς την μεταβολή της συνολικής δύναμης. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το πάχος του δοκιμίου $t=10\text{ mm}$ ενώ το μήκος του είναι $L=120\text{ mm}$. Επισημαίνεται ότι ο συντελεστής είναι $\lambda=10$ καθώς εκεί έχουμε και τα καλύτερα στοιχεία για την μέθοδο της Θεωρίας της Ελαστικότητας, καθώς όπως προαναφέρθηκε σε αυτό το σημείο υπάρχει μικρότερη επίδραση της άρθρωσης. Στο διάγραμμα φαίνεται ότι το βέλος κάμψης αυξάνεται όσο αυξάνεται η δύναμη και ότι για μικρές τιμές της δύναμης έχουμε μεγαλύτερη σύγκλιση τιμών σε σχέση με μεγαλύτερες τιμές. Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι έχουμε τις καλύτερες τιμές σε σχέση με τις άλλες διευθύνσεις ινών.



Διάγραμμα 4.19

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση της δύναμης για σύνθετο με ίνες 45 μοιρών t=10mm, L=120mm, λ=10 και b=30mm

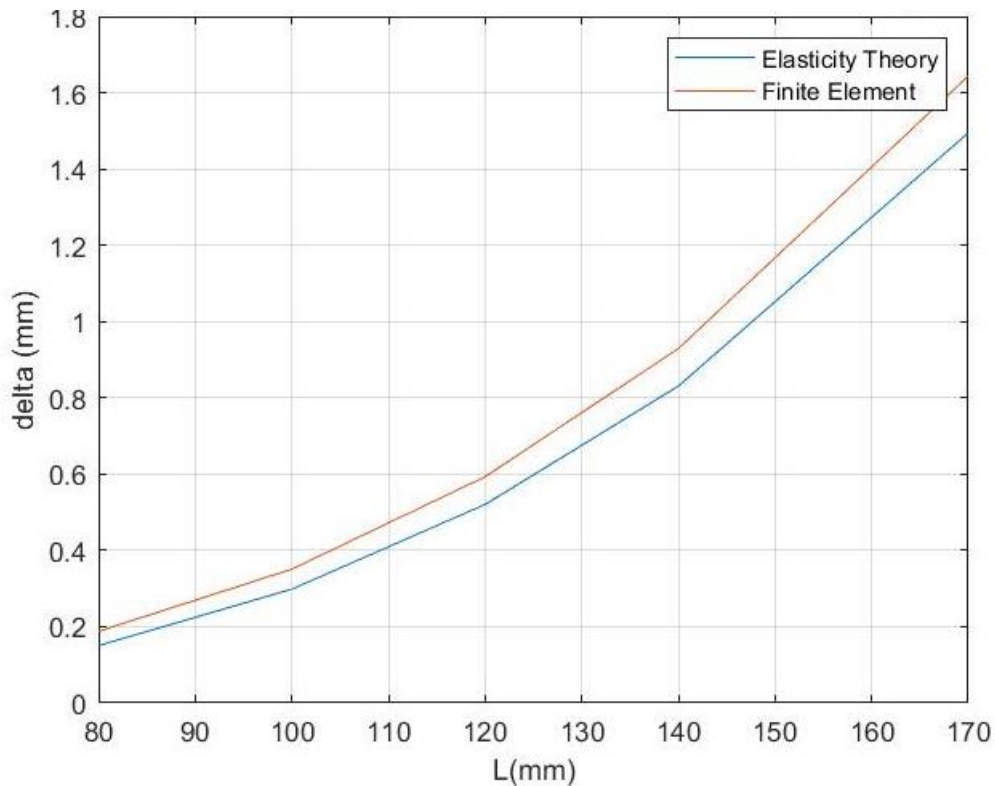
Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή του βέλους κάμψης σε σύγκριση με τον συντελεστή λ . Η δύναμη που ασκείται στο συγκεκριμένο διάγραμμα θεωρείται σταθερή $F=2 \text{ kN}$ με πάχος δοκιμίου $t=10 \text{ mm}$ ενώ το μήκος του δοκιμίου είναι $L=120\text{mm}$. Είναι φανερό ξανά και σε μορφή διαγράμματος, αυτό που έχουμε αναφέρει πολλές φορές ανωτέρω, δηλαδή ότι για μικρές τιμές λ η θεωρία της ελαστικότητας δεν έχει καλές προσεγγίσεις καθώς επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από την άρθρωση η οποία έχει τοποθετηθεί στο αριστερό άκρο του δοκιμίου. Επίσης φαίνεται ότι όσο αυξάνεται το λ βλέπουμε βελτίωση των τιμών του βέλους κάμψης που προκύπτουν από την Θεωρία Ελαστικότητας. Συγκεκριμένα μετά την τιμή για $\lambda=5$ μπορούμε να πούμε ότι έχουμε αξιόπιστα αποτελέσματα όπως βεβαίως έδειξε και η σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα από το σύνθετο υλικό με ίνες τυχούσας διεύθυνσεως.



Διάγραμμα 4. 20

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του συντελεστή λ για σύνθετο με ίνες 45 μοιρών $t=10\text{mm}$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$

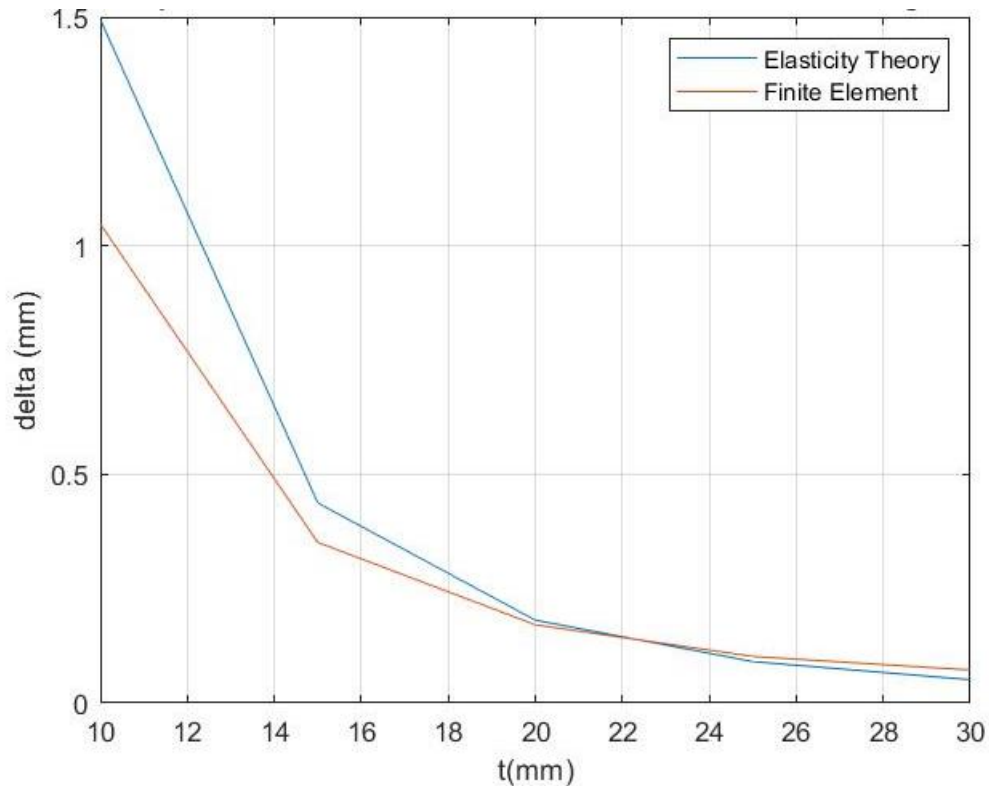
Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται η μεταβολή του βέλους κάμψης όταν έχουμε αντίστοιχη μεταβολή του μήκους του δοκιμίου. Είναι φανερό ότι δεν βλέπουμε ιδιαίτερη μεταβολή μεταξύ των δύο μεθόδων. Συγκεκριμένα φαίνονται οι δύο λύσεις να συνεχίζουν ασυμπτωτικά. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε σταθερή δύναμη $F=2\text{ kN}$ με πάχος $t=10\text{mm}$ ενώ ο συντελεστής $\lambda=10$. Είναι γεγονός ότι θα περιμέναμε με την αύξηση του μήκους του δοκιμίου να έχουμε κάποια σύγκλιση των τιμών γεγονός που δεν συμβαίνει.



Διάγραμμα 4. 21

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του μήκους για σύνθετο με ίνες 45 μοιρών $t=10\text{mm}$, $L=\lambda=10$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$

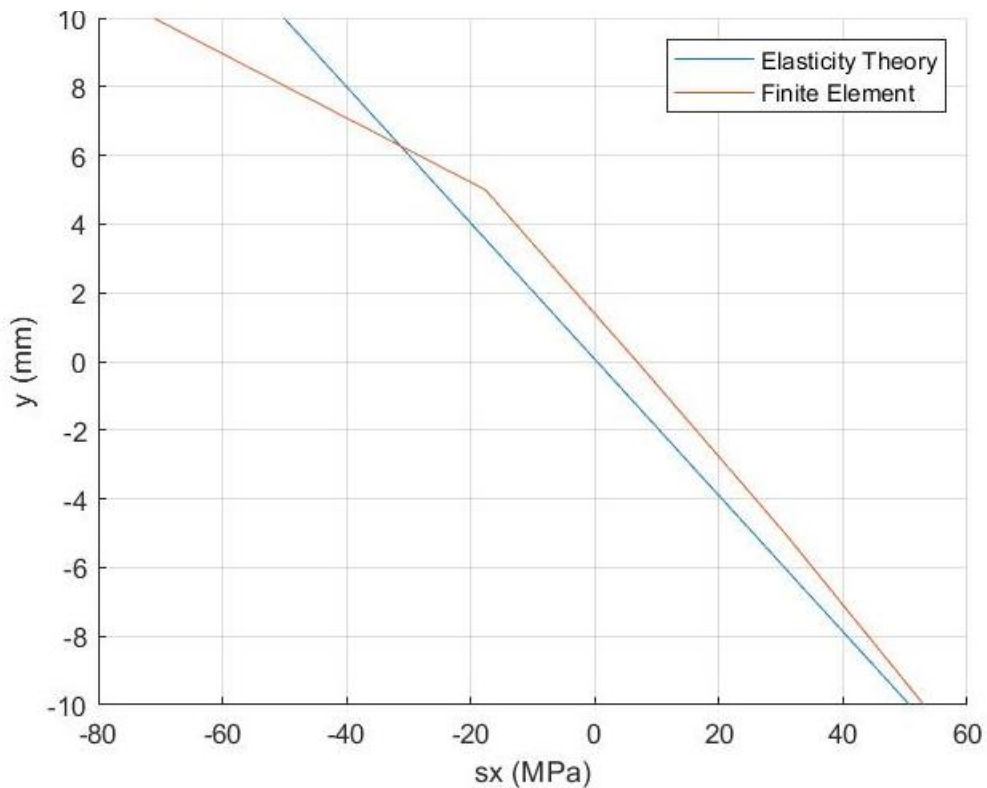
Στην συνέχεια γίνεται σύγκριση μεταξύ του πάχους του δοκιμίου και του βέλους κάμψης, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Όπως ήταν αναμενόμενο όσο αυξάνεται το πάχος του δοκιμίου τόσο μειώνεται και το βέλος κάμψης. Για την συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε σταθερή την δύναμη $F=2\text{ kN}$ το μήκος του δοκιμίου $L=120\text{ mm}$ και τον συντελεστή $\lambda=10$. Παρατηρούμε ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση με γωνία ινών 45 μοίρες βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται το πάχος του δοκιμίου τόσο μεγαλύτερη σύγκλιση γίνεται στις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε.



Διάγραμμα 4. 22

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του πάχους για σύνθετο με ίνες 45 μοιρών $\lambda=10$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$

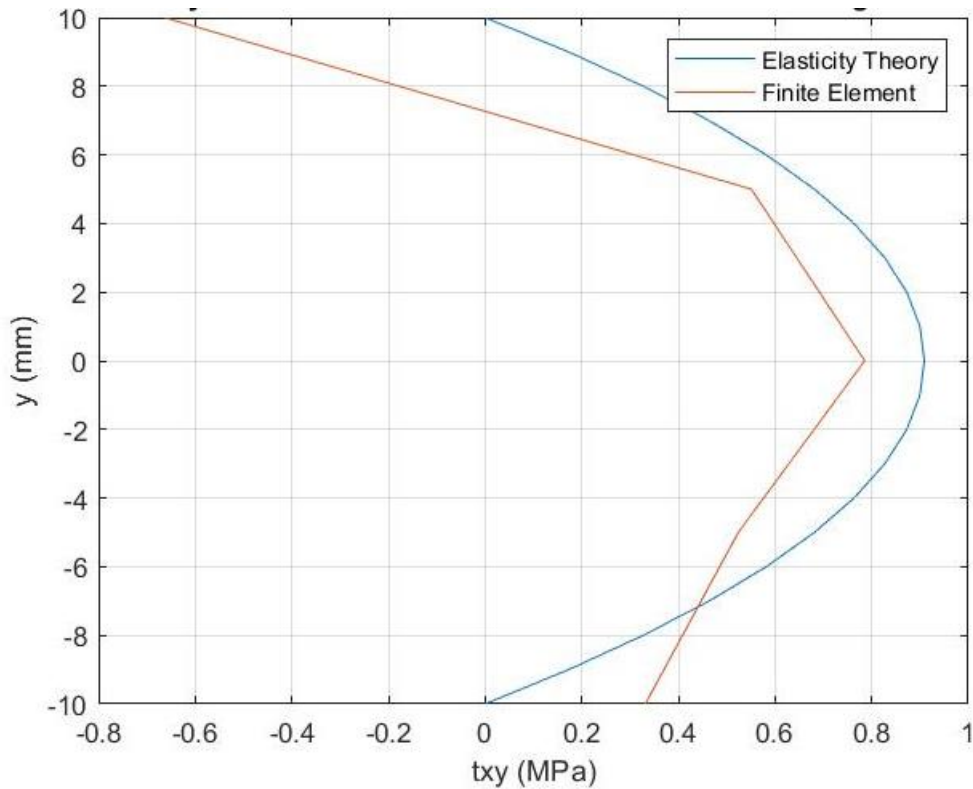
Το ακόλουθο διάγραμμα αφορά στην σύγκριση των τάσεων ως προς τον άξονα x μεταξύ των δύο μεθόδων. Επισημαίνεται ότι θεωρούμε σταθερή την δύναμη $F=2\text{ kN}$ με πάχος δοκιμίου $t=10\text{ mm}$ και μήκος $L=140\text{ mm}$ ενώ ο συντελεστής $\lambda=10$. Γενικά βλέπουμε μια ταύτιση των τάσεων ειδικά μετα την τιμή $y=0$ και κάτω. Το γεγονός αυτό είναι λογικό και έχει να κάνει το ότι στο σημείο που εφαρμόζεται η δύναμη τα Πεπερασμένα Στοιχεία επηρεάζονται και αλλοιώνουν τα αποτελέσματα. Έτσι στο σημείο που εφαρμόζεται η δύναμη και γύρω από αυτή την περιοχή δεν θα έχουμε ταύτιση των αποτελεσμάτων, όπως δηλαδή φαίνεται και στο διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι τηρείται η αντισυμμετρία όπως θα περιμέναμε να δούμε από την θεωρία. Δηλαδή οι ακραίες τιμές είναι κατά απόλυτη τιμή 60 MPa και κυμαίνονται από -60 έως 60 MPa .



Διάγραμμα 4. 23

Μεταβολή των ορθών τάσεων σε σχέση με το πάχος για σύνθετο με ίνες 45 μοιρών t=20mm, L=120mm, F=2kN και b=30mm και λ=10

Στο διάγραμμα που ακολουθεί απεικονίζεται στον άξονα των x οι διατμητικές τάσεις που δέχεται το σύνθετο υλικό με ίνες μιας διευσθύνσεως στην θέση $x=a$ όπου ασκείται και η δύναμη Q ενώ στον άξονα y απεικονίζεται το ύψος του πάχους που βρισκόμαστε στο δοκίμιο. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι στο άνω άκρο του δοκιμίου έχουμε μεγάλη αλλοίωση των αποτελεσμάτων καθώς επηρεάζονται οι περιοχές όπου βρίσκονται κοντά στην δύναμη. Πέρα από αυτή την αλλοίωση παρατηρούμε ότι οι τιμές των μεθόδων κυμαίνονται σε κοντινά επίπεδα με μικρό εύρος σφάλματος. Είναι γεγονός ότι εάν αυξήσουμε τους κόμβους τα αποτελέσματα θα είναι πιο ικανοποιητικά αλλά δεν επιτεύχθηκε λόγω υπολογιστικού κόστους.

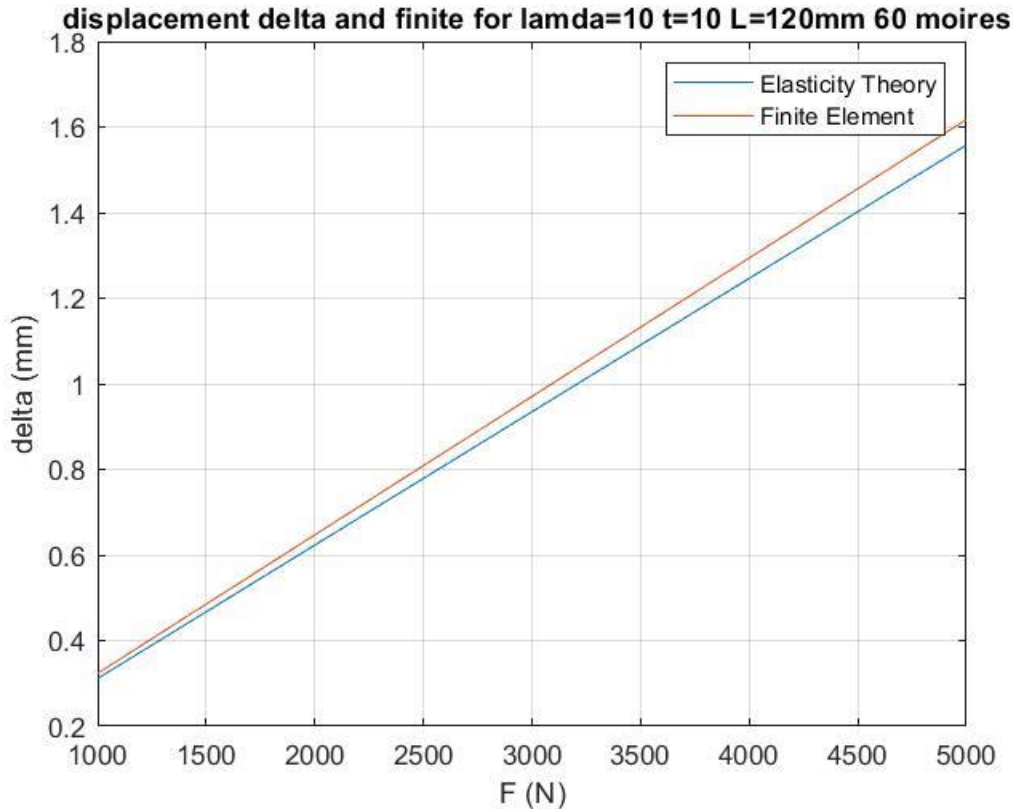


Διάγραμμα 4. 24

Μεταβολή των διατμητικών τάσεων σε σχέση με το πάχος για σύνθετο με ίνες 45 μοιρών $t=20\text{mm}$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$ και $\lambda=10$

4.3.4 Σύνθετο υλικό με ίνες διευθύνσεως 60°

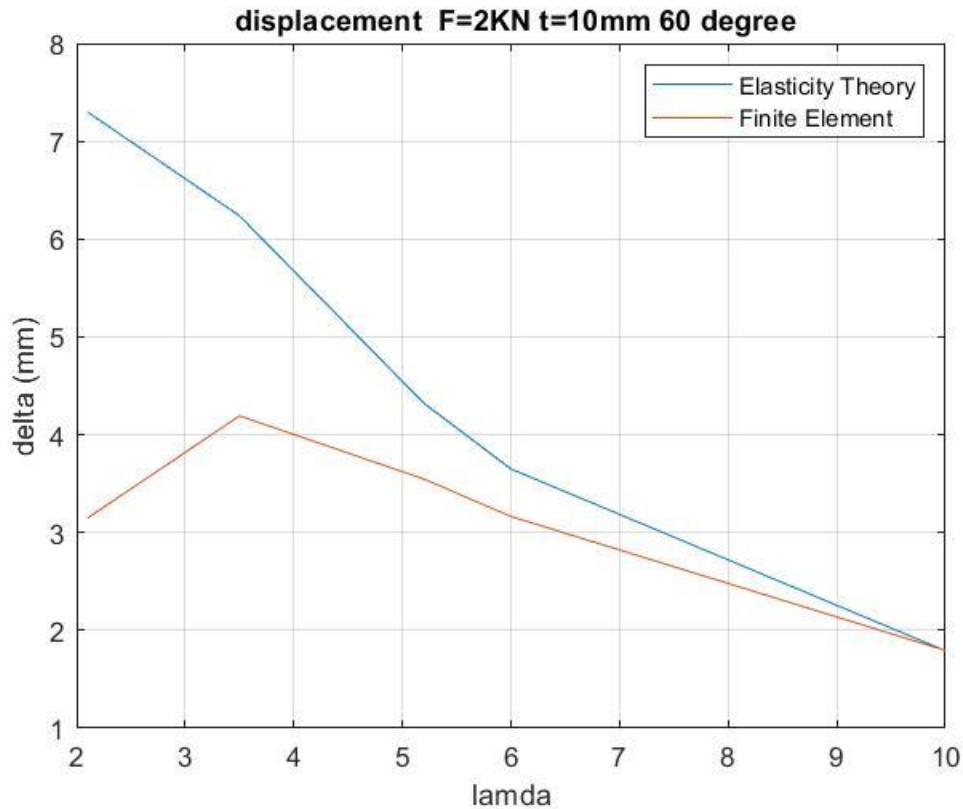
Στο ακόλουθο διάγραμμα φαίνεται πως μεταβάλλεται το βέλος κάμψης συγκριτικά μεταξύ των Πεπερασμένων Στοιχείων και της Θεωρίας Ελαστικότητας ως προς την μεταβολή της συνολικής δύναμης. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το πάχος του δοκιμίου $t=10\text{ mm}$ ενώ το μήκος του είναι $L=120\text{ mm}$. Επισημαίνεται ότι ο συντελεστής είναι $\lambda=10$ καθώς εκεί έχουμε και τα καλύτερα στοιχεία για την μέθοδο της Θεωρίας της Ελαστικότητας, καθώς όπως προαναφέρθηκε σε αυτό το σημείο υπάρχει μικρότερη επίδραση της άρθρωσης. Στο διάγραμμα φαίνεται ότι το βέλος κάμψης αυξάνεται όσο αυξάνεται η δύναμη και ότι για μικρές τιμές της δύναμης έχουμε μεγαλύτερη σύγκλιση τιμών σε σχέση με μεγαλύτερες τιμές. Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι έχουμε από τις καλύτερες τιμές σε σχέση με τις άλλες διευθύνσεις ινών όπως και στις 45 μοίρες.



Διάγραμμα 4.25

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση της δύναμης για σύνθετο με ίνες 60 μοιρών t=10mm, L=120mm, λ=10 και b=30mm

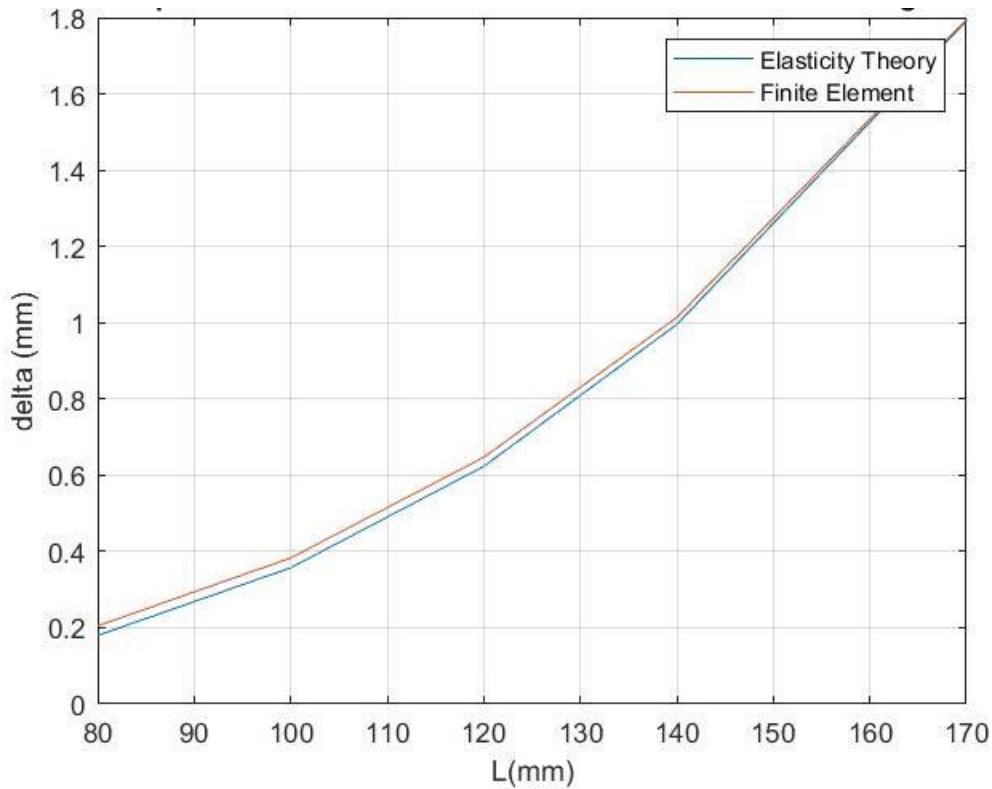
Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή του βέλους κάμψης σε σύγκριση με τον συντελεστή λ . Η δύναμη που ασκείται στο συγκεκριμένο διάγραμμα θεωρείται σταθερή $F=2$ kN με πάχος δοκιμίου $t=10$ mm ενώ το μήκος του δοκιμίου είναι $L=120$ mm. Είναι φανερό ξανά και σε μορφή διαγράμματος, αυτό που έχουμε αναφέρει πολλές φορές παραπάνω, δηλαδή ότι για μικρές τιμές λ η θεωρία της ελαστικότητας δεν έχει καλές προσεγγίσεις καθώς επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από την άρθρωση η οποία έχει τοποθετηθεί στο αριστερό άκρο του δοκιμίου. Επίσης φαίνεται ότι όσο αυξάνεται το λ βλέπουμε βελτίωση των τιμών του βέλους κάμψης που προκύπτουν από την Θεωρία Ελαστικότητας. Συγκεκριμένα μετά την τιμή για $\lambda=5$ μπορούμε να πούμε ότι έχουμε αξιόπιστα αποτελέσματα όπως βεβαίως έδειξε και η σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα από το σύνθετο υλικό με ίνες τυχούσας διευσθύνσεως.



Διάγραμμα 4.26

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του συντελεστή λ για σύνθετο με ίνες 60 μοιρών $t=10\text{mm}$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$

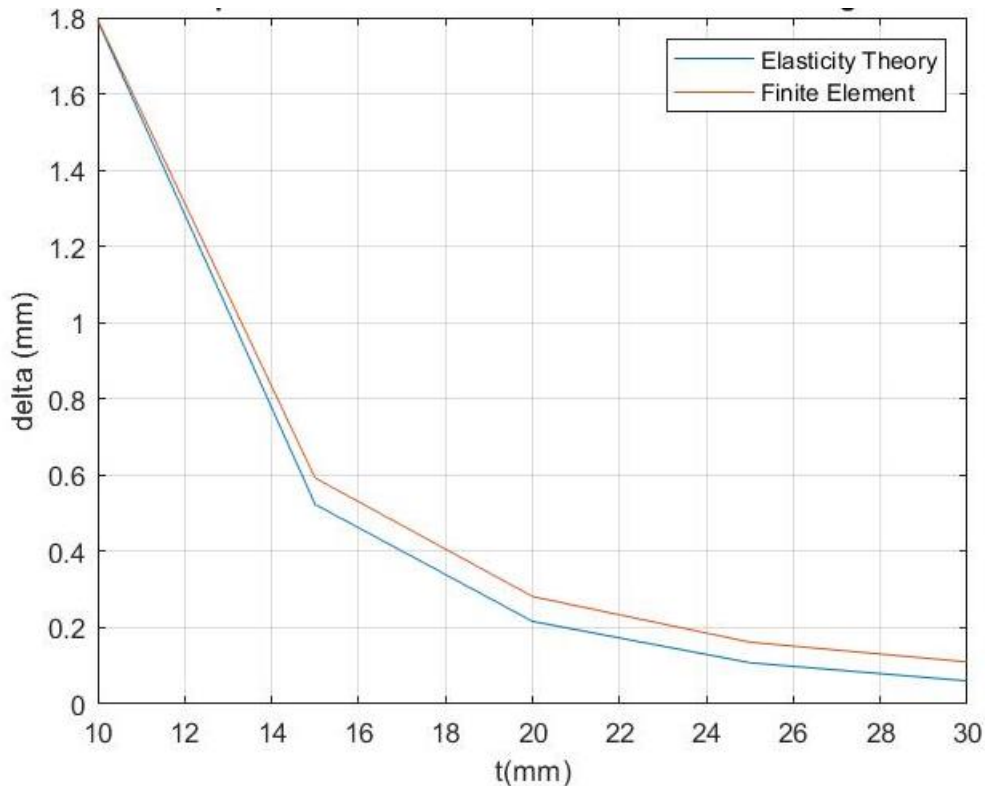
Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται η μεταβολή του βέλους κάμψης όταν έχουμε αντίστοιχη μεταβολή του μήκους του δοκιμίου. Είναι φανερό ότι δεν βλέπουμε ιδιαίτερη μεταβολή μεταξύ των δύο μεθόδων. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε σταθερή δύναμη $F=2\text{ kN}$ με πάχος $t=10\text{mm}$ ενώ ο συντελεστής $\lambda=10$. Πλέον είναι φανερό αυτό που περιμέναμε, δηλαδή ότι όσο αυξάνεται το μήκος του δοκιμίου τόσο πρέπει να συγκλίνουν οι τιμές των μεθόδων καθώς βελτιώνονται τα αποτελέσματα των μεθόδων. Ο λόγος που βελτιώνονται είναι ότι απομακρυνόμαστε από την άρθρωση και με αυτόν τον τρόπο δεν μας αλλοιώνει τα αποτελέσματα. Το ίδιο θα αναμέναμε και στις άλλες γωνίες ιών αλλά δεν παρατηρήθηκε στα διαγράμματα.



Διάγραμμα 4. 27

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του μήκους για σύνθετο με ίνες 45 μοιρών $t=10\text{mm}$, $L=\lambda=10$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$

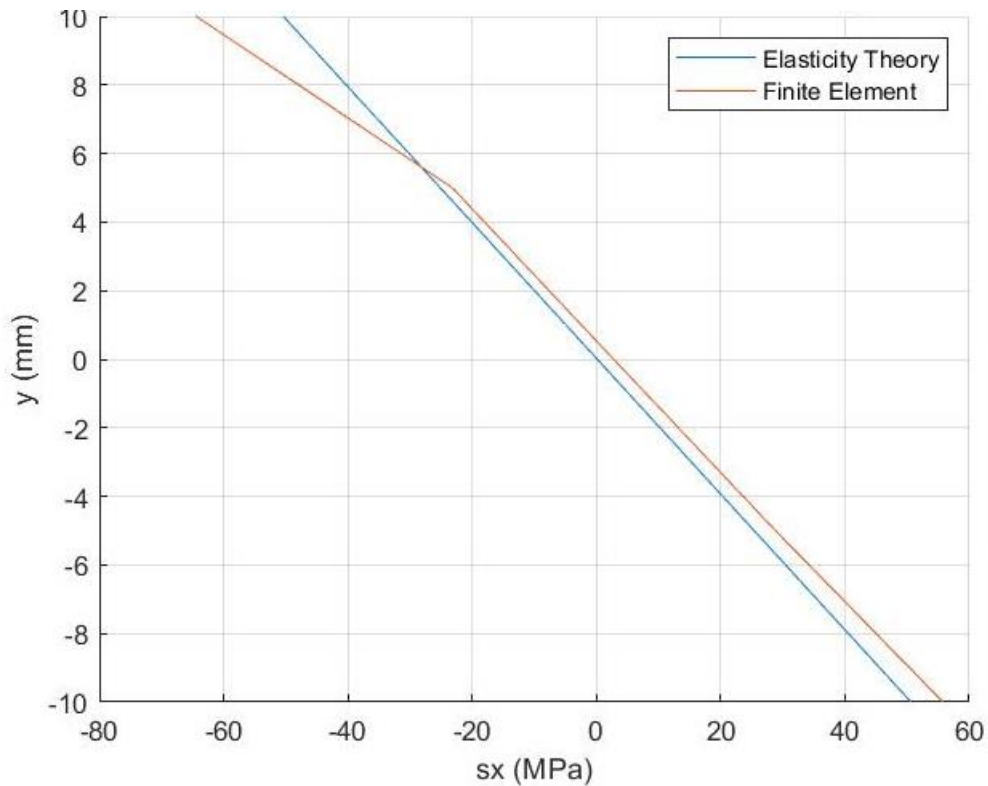
Στην συνέχεια γίνεται σύγκριση μεταξύ του πάχους του δοκιμίου και του βέλους κάμψης, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Όπως ήταν αναμενόμενο όσο αυξάνεται το πάχος του δοκιμίου τόσο μειώνεται και το βέλος κάμψης. Για την συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε σταθερή την δύναμη $F=2\text{ kN}$ το μήκος του δοκιμίου $L=120\text{ mm}$ και τον συντελεστή $\lambda=10$. Παρατηρούμε ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση με γωνία ινών 60 μοίρες ότι όσο αυξάνεται το πάχος του δοκιμίου τόσο μεγαλύτερη απόκλιση γίνεται στις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε. Είναι προφανής ο λόγος που συμβαίνει καθώς γνωρίζουμε ότι η Θεωρία ελαστικότητας επηρεάζεται από τον λόγο μήκους προς πάχους του δοκιμίου και όσο μεγαλύτερος είναι αυτός ο λόγος τόσο καλύτερα αποτελέσματα παρατηρούμε στα μεγέθη που μελετάμε.



Διάγραμμα 4. 28

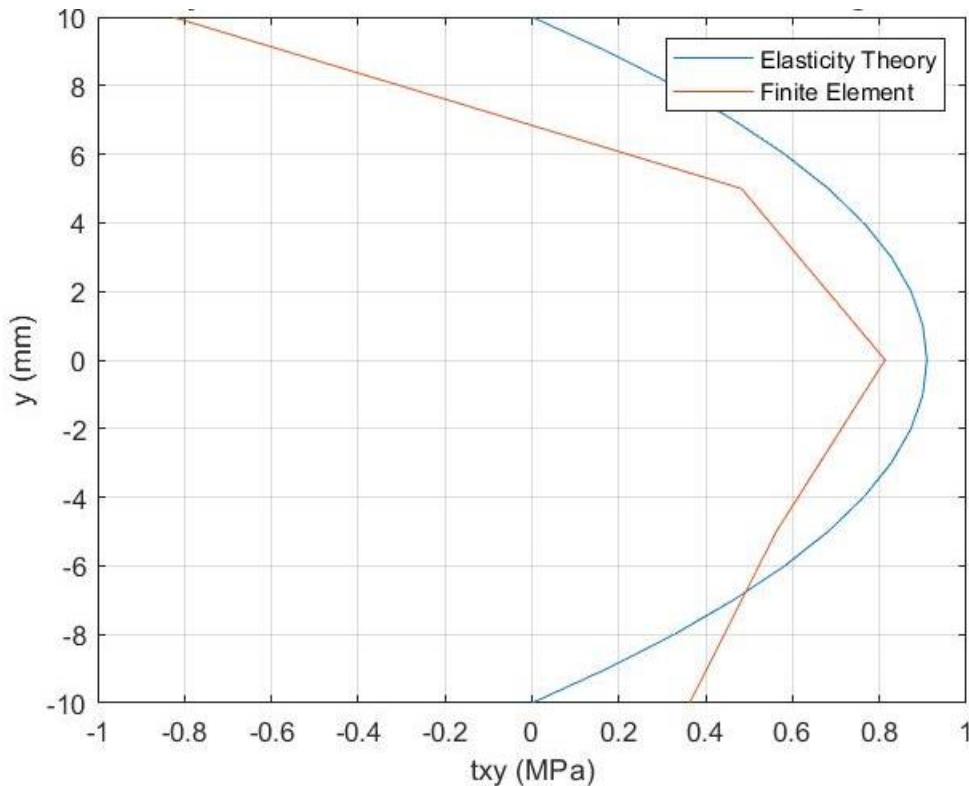
Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του πάχους για σύνθετο με ίνες 60 μοιρών $\lambda=10$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$

Το ακόλουθο διάγραμμα αφορά την σύγκριση των τάσεων ως προς τον άξονα x μεταξύ των δύο μεθόδων. Επισημαίνεται ότι θεωρούμε σταθερή την δύναμη $F=2\text{ kN}$ με πάχος δοκιμίου $t=10\text{ mm}$ και μήκος $L=140\text{ mm}$ ενώ ο συντελεστής $\lambda=10$. Γενικά βλέπουμε μια ταύτιση των τάσεων ειδικά μετά την τιμή $y=0$ και κάτω. Το γεγονός αυτό είναι λογικό και έχει να κάνει με το ότι στο σημείο που εφαρμόζεται η δύναμη τα Πεπερασμένα Στοιχεία επηρεάζονται και αλλοιώνουν τα αποτελέσματα. Έτσι στο σημείο που εφαρμόζεται η δύναμη και γύρω από αυτή την περιοχή δεν θα έχουμε ταύτιση των αποτελεσμάτων, όπως δηλαδή φαίνεται και στο διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι τηρείται η αντισυμμετρία όπως θα περιμέναμε να δούμε από την θεωρία. Δηλαδή οι ακραίες τιμές είναι κατά απόλυτη τιμή 60 MPa και κυμαίνονται από -60 έως 60 MPa .



Διάγραμμα 4.29
Μεταβολή των ορθών τάσεων σε σχέση με το πάχος για σύνθετο με ίνες 60 μοιρών $t=20\text{mm}$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$
και $b=30\text{mm}$ και $\lambda=10$

Στο διάγραμμα που ακολουθεί απεικονίζονται στον άξονα των x οι διαμητικές τάσεις που δέχεται το σύνθετο υλικό με ίνες μιας διεύθυνσεως στην θέση $x=a$ όπου ασκείται και η δύναμη Q ενώ στον άξονα y απεικονίζεται το ύψος του πάχους που βρισκόμαστε στο δοκίμιο. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι στο άνω άκρο του δοκιμίου έχουμε μεγάλη αλλοίωση των αποτελεσμάτων καθώς επηρεάζονται οι περιοχές όπου βρίσκονται κοντά στην δύναμη. Στο κάτω άκρο του δοκιμίου βλέπουμε μια καλύτερη προσέγγιση των τιμών σε σχέση με την άνω και είναι φανερή η πρόθεση των τιμών να σχηματίσουν μια παραβολή. Η προσομοίωση της διαμητικής τάσης δεν είναι τόσο ικανοποιητική όσο για σύνθετο υλικό με διεύθυνση ινών 0 και 90 μοίρες.

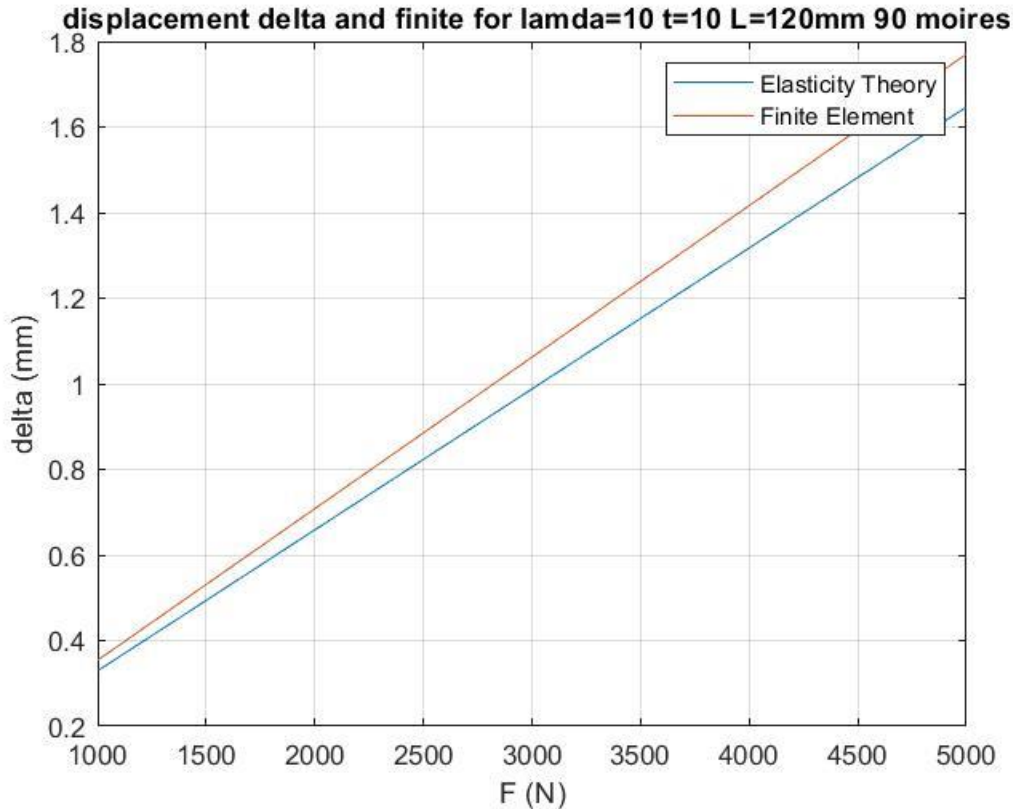


Διάγραμμα 4. 30

Μεταβολή των διατμητικών τάσεων σε σχέση με το πάχος για σύνθετο με ίνες 60 μοιρών $t=20\text{mm}$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$ και $\lambda=10$

4.3.5 Σύνθετο υλικό με ίνες διευθύνσεως 90°

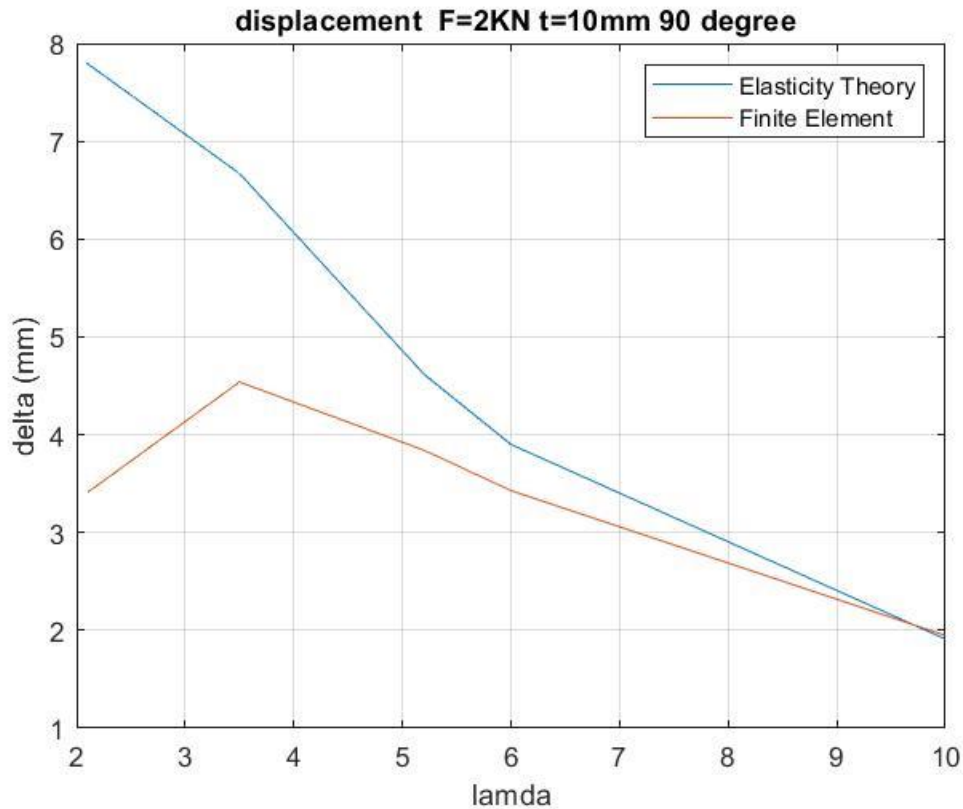
Στο ακόλουθο διάγραμμα φαίνεται πως μεταβάλλεται το βέλος κάμψης συγκριτικά μεταξύ των Πεπερασμένων Στοιχείων και της Θεωρίας Ελαστικότητας ως προς την μεταβολή της συνολικής δύναμης. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το πάχος του δοκιμίου $t=10\text{ mm}$ ενώ το μήκος του είναι $L=120\text{ mm}$. Επισημαίνεται ότι ο συντελεστής είναι $\lambda=10$ καθώς εκεί έχουμε και τα καλύτερα στοιχεία για την μέθοδο της Θεωρίας της Ελαστικότητας, καθώς όπως προαναφέρθηκε σε αυτό το σημείο υπάρχει μικρότερη επίδραση της άρθρωσης. Στο διάγραμμα φαίνεται ότι το βέλος κάμψης αυξάνεται όσο αυξάνεται η δύναμη και ότι για μικρές τιμές της δύναμης έχουμε μεγαλύτερη σύγκλιση τιμών σε σχέση με μεγαλύτερες τιμές. Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι έχουμε πάρομοιες προσεγγίσεις με σύνθετο υλικό με γωνία ινών μηδέν μοίρες. Ανάλογα είναι και όλα τα διαγράμματα για γωνία ινών 90 μοίρες.



Διάγραμμα 4.31

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση της δύναμης για σύνθετο με ίνες 90 μοιρών t=10mm, L=120mm, λ=10 και b=30mm

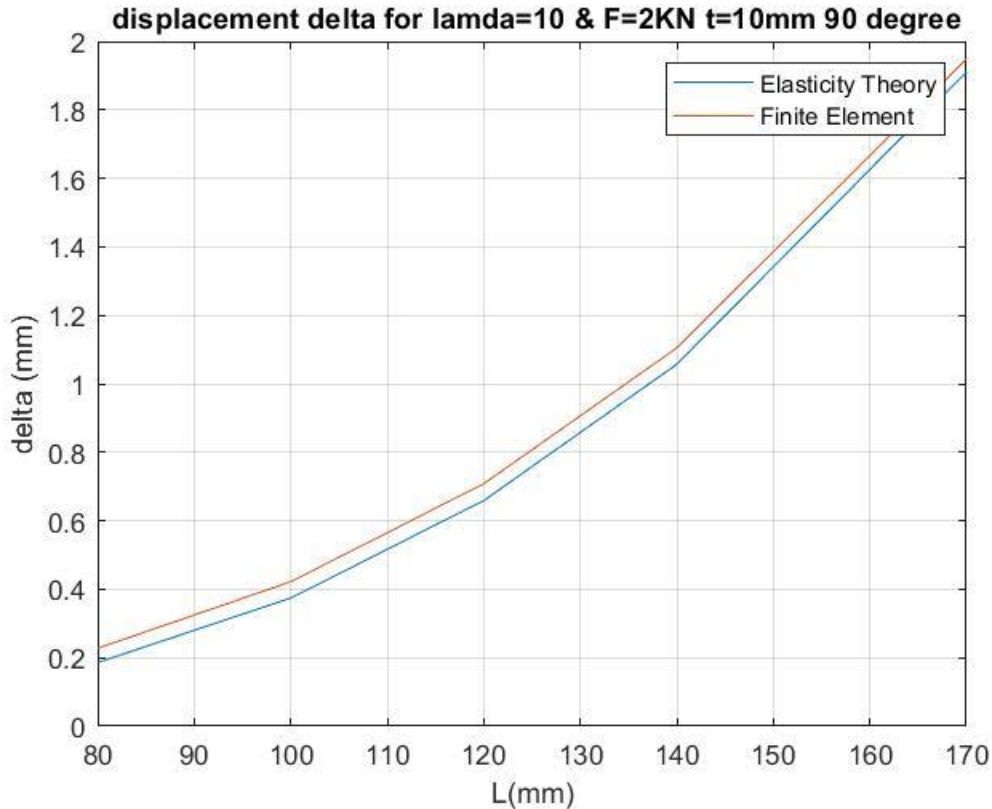
Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή του βέλους κάμψους σε σύγκριση με τον συντελεστή λ . Η δύναμη που ασκείται στο συγκεκριμένο διάγραμμα θεωρείται σταθερή $F=2 \text{ kN}$ με πάχος δοκιμίου $t=10 \text{ mm}$ ενώ το μήκος του δοκιμίου είναι $L=120\text{mm}$. Είναι φανερό ξανά και σε μορφή διαγράμματος, αυτό που έχουμε αναφέρει πολλές φορές ανωτέρω, δηλαδή ότι για μικρές τιμές λ η θεωρία της ελαστικότητας δεν έχει καλές προσεγγίσεις καθώς επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από την άρθρωση η οποία έχει τοποθετηθεί στο αριστερό άκρο του δοκιμίου. Επίσης φαίνεται ότι όσο αυξάνεται το λ βλέπουμε βελτίωση των τιμών του βέλους κάμψης που προκύπτουν από την Θεωρία Ελαστικότητας. Συγκεκριμένα μετά την τιμή για $\lambda=5$ μπορούμε να πούμε ότι έχουμε αξιόπιστα αποτελέσματα όπως βεβαίως έδειξε και η σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα από το σύνθετο υλικό με ίνες τυχούσας διευσθύνσεως.



Διάγραμμα 4.32

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του συντελεστή λ για σύνθετο με ίνες 90 μοιρών $t=10\text{mm}$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$

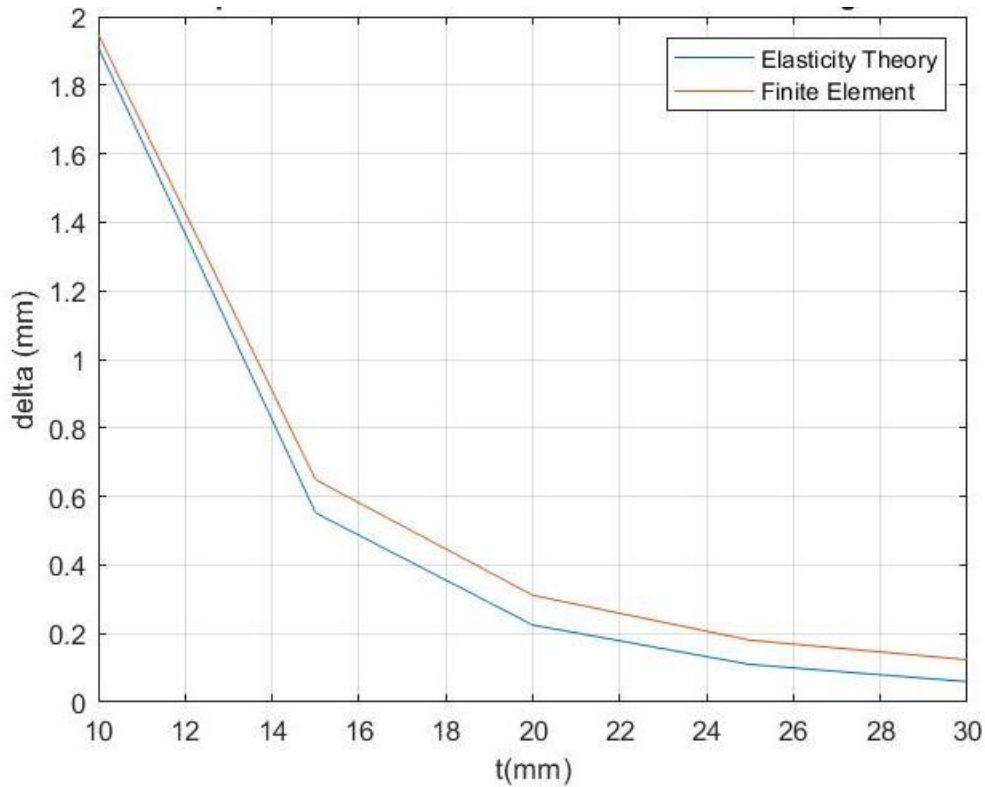
Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται η μεταβολή του βέλους κάμψης όταν έχουμε αντίστοιχη μεταβολή του μήκους του δοκιμίου. Είναι φανερό ότι δεν βλέπουμε ιδιαίτερη μεταβολή μεταξύ των δύο μεθόδων. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε σταθερή δύναμη $F=2\text{ kN}$ με πάχος $t=10\text{mm}$ ενώ ο συντελεστής $\lambda=10$. Είναι εμφανές αυτό που περιμέναμε, δηλαδή ότι όσο αυξάνεται το μήκος του δοκιμίου τόσο πρέπει να συγκλίνουν οι τιμές των μεθόδων καθώς βελτιώνονται τα αποτελέσματα των μεθόδων. Ο λόγος που βελτιώνονται είναι ότι απομακρυνόμαστε από την άρθρωση και με αυτό τον τρόπο δεν μας αλλοιώνει τα αποτελέσματα. Το ίδιο θα αναμέναμε και στις άλλες γωνίες ινών αλλά δεν παρατηρήθηκε στα διαγράμματα. Όπως επίσης αυξάνεται ο λόγος μήκους δοκιμίου προς πάχος δοκιμίου. Όσο μεγαλύτερος είναι αυτός ο λόγος τόσο καλύτερα τα αποτελέσματα με την μέθοδο της Θεωρίας της Ελαστικότητας.



Διάγραμμα 4.33

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του μήκους για σύνθετο με ίνες 90 μοιρών t=10mm, L=λ=10, F=2kN και b=30mm

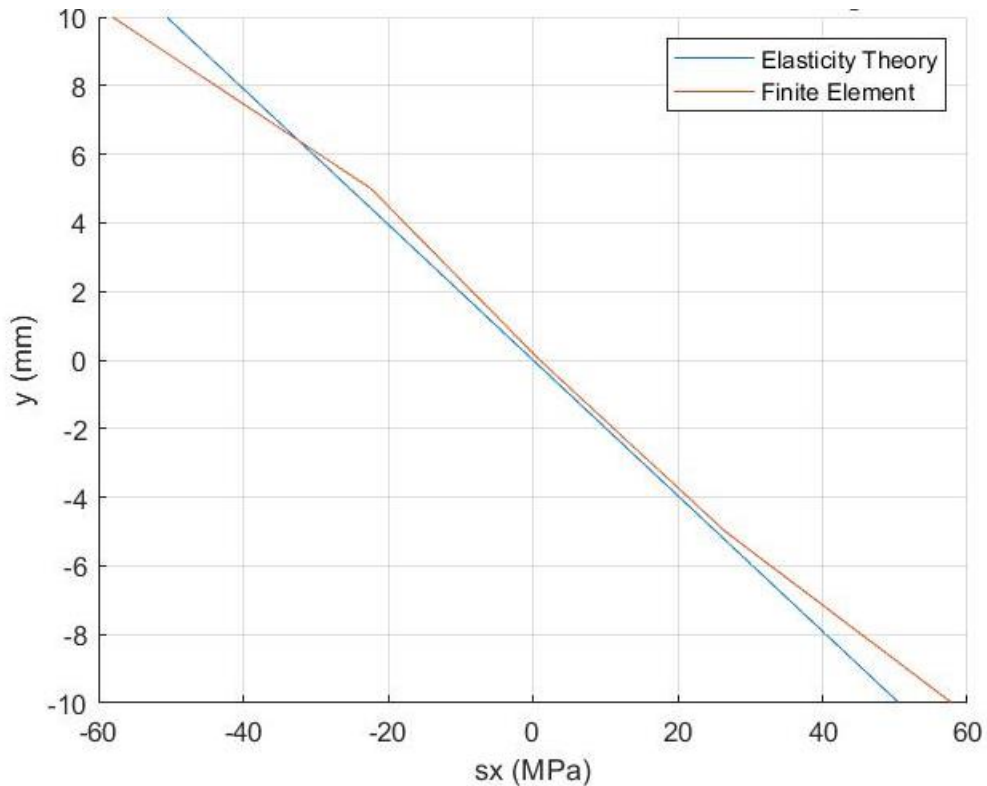
Στην συνέχεια γίνεται σύγκριση μεταξύ του πάχους του δοκιμίου και του βέλους κάμψης, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Όπως ήταν αναμενόμενο όσο αυξάνεται το πάχος του δοκιμίου τόσο μειώνεται και το βέλος κάμψης. Για την συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε σταθερή την δύναμη $F=2 \text{ kN}$ το μήκος του δοκιμίου $L=120 \text{ mm}$ και τον συντελεστή $\lambda=10$. Παρατηρούμε ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση με γωνία ινών 60 μοίρες ότι όσο αυξάνεται το πάχος του δοκιμίου τόσο μεγαλύτερη απόκλιση γίνεται στις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε. Είναι προφανής ο λόγος που συμβαίνει καθώς γνωρίζουμε ότι η Θεωρία Ελαστικότητας επηρεάζεται από τον λόγο μήκους προς πάχους του δοκιμίου και όσο μεγαλύτερος είναι αυτός ο λόγος τόσο καλύτερα αποτελέσματα παρατηρούμε στα μεγέθη που μελετάμε.



Διάγραμμα 4. 34

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του πάχους για σύνθετο με ίνες 90 μοιρών $\lambda=10$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$

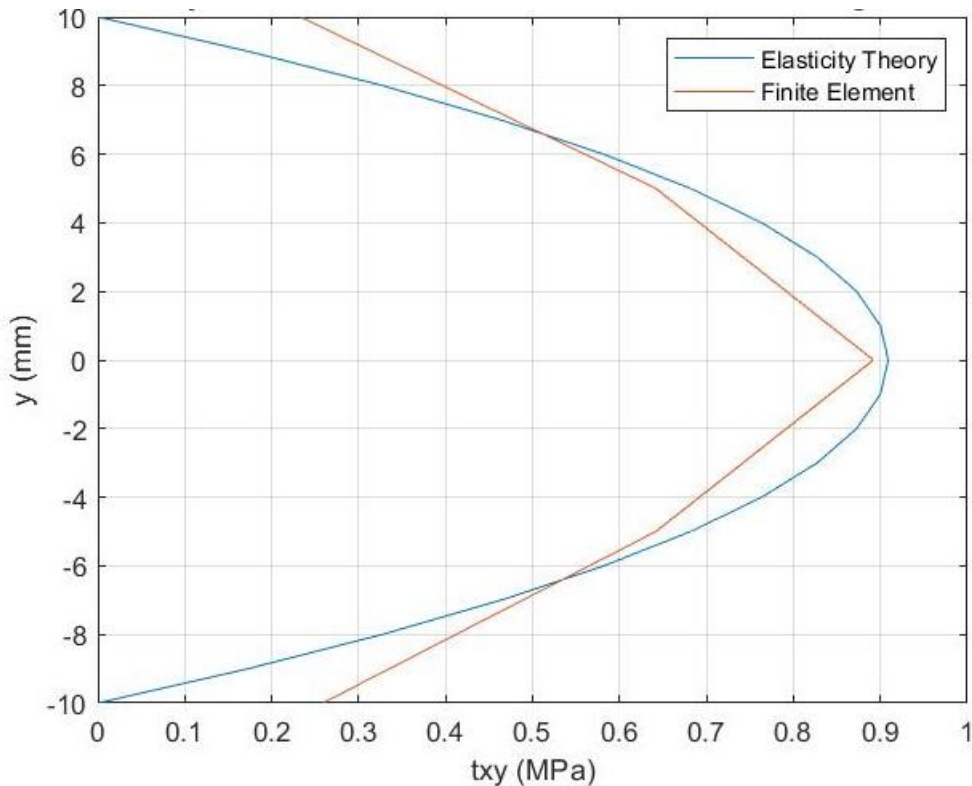
Το ακόλουθο διάγραμμα αφορά στην σύγκριση των τάσεων ως προς τον άξονα x μεταξύ των δύο μεθόδων. Επισημαίνεται ότι θεωρούμε σταθερή την δύναμη $F=2\text{ kN}$ με πάχος δοκιμίου $t=10\text{ mm}$ και μήκος $L=140\text{ mm}$ ενώ ο συντελεστής $\lambda=10$. Γενικά βλέπουμε μια ταύτιση των τάσεων ειδικά μετά την τιμή $y=0$ και κάτω. Το γεγονός αυτό είναι λογικό και έχει να κάνει στο ότι στο σημείο που εφαρμόζεται η δύναμη τα πεπερασμένα στοιχεία επηρεάζονται και αλλοιώνουν τα αποτελέσματα. Έτσι, στο σημείο που εφαρμόζεται η δύναμη και γύρω από αυτή την περιοχή δεν θα έχουμε ταύτιση των αποτελεσμάτων, όπως δηλαδή φαίνεται και στο διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι τηρείται η αντισυμμετρία όπως θα περιμέναμε να δούμε από την θεωρία. Δηλαδή οι ακραίες τιμές είναι κατά απόλυτη τιμή 60 MPa και κυμαίνονται από -60 έως 60 MPa .



Διάγραμμα 4.35

Μεταβολή των ορθών τάσεων σε σχέση με το πάχος για σύνθετο με ίνες 90 μοιρών t=20mm, L=120mm, F=2kN και b=30mm και λ=10

Στο διάγραμμα που ακολουθεί απεικονίζεται στον άξονα των x οι διατμητικές τάσεις που δέχεται το σύνθετο υλικό με ίνες μιας διευσθύνσεως στην θέση $x=a$ όπου ασκείται και η δύναμη Q ενώ στον άξονα y απεικονίζεται το ύψος του πάχους που βρισκόμαστε στο δοκίμιο. Παρατηρούμε μια πολύ καλή προσέγγιση των διατμητικών τάσεων και παραδόξως δεν βλέπουμε μεγάλη αλλοίωση των αποτελεσμάτων στο ανώτερο σημείο του δοκιμίου όπου ασκείται η δύναμη όπως συνηθίζει να συμβαίνει. Επίσης φαίνεται ότι τα Πεπερασμένα Στοιχεία προσπαθούν να ακολουθήσουν μια παραβολή όπως γνωρίζουμε ότι θα έπρεπε να συμβαίνει από την αντοχή των υλικών. Επομένως είναι αναμενόμενο ότι εάν αυξήσουμε τους κατακόρυφους κόμβους θα έχουμε καλύτερη καμπύλη. Δεν έγινε όμως απόπειρα για περισσότερους κόμβους λόγω των δυνατοτήτων του H/Y.



Διάγραμμα 4. 36

Μεταβολή των διατμητικών τάσεων σε σχέση με το πάχος για σύνθετο με ίνες 60 μοιρών $t=20\text{mm}$, $L=120\text{mm}$, $F=2\text{kN}$ και $b=30\text{mm}$ και $\lambda=10$

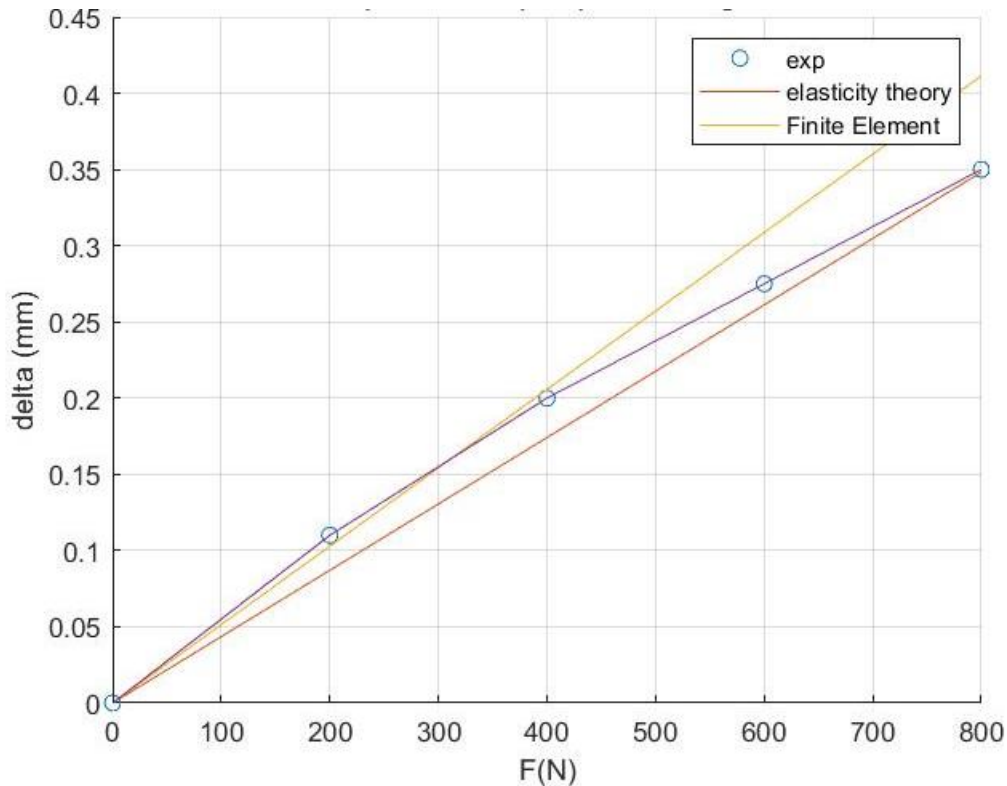
4.4 Σύνθετο υλικό με ίνες μιας διεύθυνσεως 3PB

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα γίνει ανάλυση και σύγκριση των μεθόδων των Πεπερασμένων Στοιχείων και της Θεωρίας Ελαστικότητας για σύνθετο υλικό με ίνες μιας διεύθυνσεως για την κάμψη τριών σημείων. Στην παρούσα ανάλυση υπάρχουν πειραματικά δεδομένα μόνο για 0 και 90 μοίρες γωνία ινών συμφώνως σχετικού [24]. Το σύνθετο υλικό το οποίο θα γίνει μοντελοποίηση είναι σύνθετο υλικό με ίνες γυαλιού και εποξική ρητίνη. Τα πρώτα δύο διαγράμματα τα οποία περιέχουν και πειραματικά δεδμένα αφορούν E-glass με περιεκτικότητα 56.7% κατ'όγκο περιεκτικότητα σε εποξική ρητίνη. Στην συνέχεια θα γίνει αντίστοιχη σύγκριση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων με την Θεωρία Ελαστικότητας κυρίως στην επίδραση και στην σύγκριση της άσκησης της δύναμης σε σχέση με την επίλυση των δύο μεθόδων. Η σύγκριση των μεθόδων θα γίνει με βάση υλικό απο την εργασία του κ. Σαραγά [21] όπου το σύνθετο υλικό θα είναι ίνες γυαλιού σε ρητίνη σε ποσοστό κατ'όγκου περιεκτικότητας 65%. Συγκεκριμένα η ελαστική σταθερά στην διεύθυνση ένα είναι $E_1= 49.73 \text{ kN/mm}^2$ στη διεύθυνση δύο θα είναι $E_2= 17.22 \text{ kN/mm}^2$ ενώ το μέτρο διάτμησης στο επίπεδο 1-2 θα είναι $G_{12}= 6.45$

kN/mm² και με συντελεστή Poisson $\nu_{12}=0.229$. Στην συνέχεια παρουσιάζονται η επίδραση της δύναμης για κάθε γωνία ινών συγκριτικά με τις δύο μεθόδους.

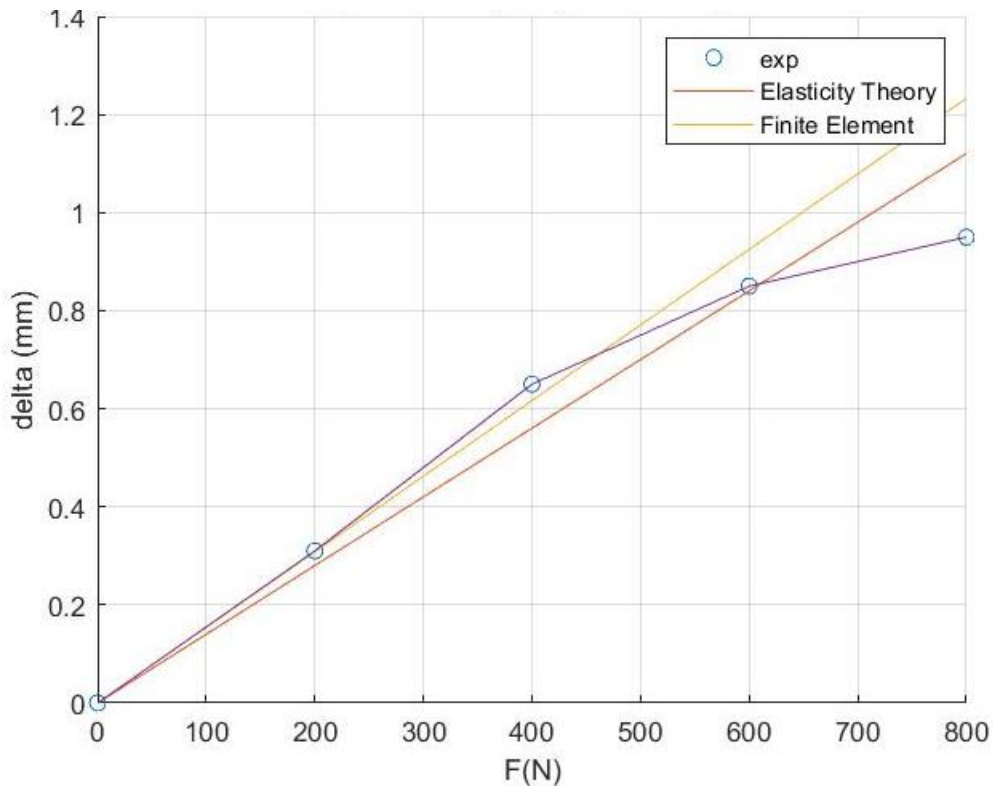
4.4.1 Σύνθετο υλικό με ίνες 0° και 90° μοιρών για 3PB με πειραματικά δεδομένα

Στο διάγραμμα που ακολουθεί απεικονίζεται το βέλος κάμψης σε σχέση με την ασκούμενη δύναμη για την κάμψη τριών σημείων. Παρατηρούμε ότι οι τιμές των Πεπερασμένων Στοιχείων για τιμή δύναμης έως 4000 N υπάρχει πλήρη ταύτιση. Από το σημείο αυτό και για μεγαλύτερη τιμή δύναμης παρατηρείται μια συνεχής απόκλιση. Το γεγονός αυτό δικαιολογείται καθώς είναι πιθανόν το δοκίμιο να μπαίνει σε πλαστική μη γραμμική περιοχή όπου στην παρούσα μελέτη δεν έχουμε λάβει καθόλου υπόψη. Αντίστοιχα για την λύση με Θεωρία Ελαστικότητας βλέπουμε μια απόκλιση σε σχέση με τις πειραματικές τιμές και από τα Πεπερασμένα Στοιχεία παρόμοια με τις αποκλίσεις που παρατηρήσαμε για την κάμψη τεσσάρων σημείων και την σύγκριση των δύο μεθόδων. Έτσι μπορούμε να εξάγουμε ένα λογικό συμπέρασμα για την αξιοπιστία των ανωτέρω υπολογισμών για κάμψη τεσσάρων σημείων όπου δεν είχαμε πειραματικά δεδομένα ώστε να συγκρίνουμε τις προσεγγίσεις. Έχει σημασία να πούμε ότι για ακόμα μια φορά τα Πεπερασμένα Στοιχεία παρουσιάζουν καλύτερη προσέγγιση της πραγματικότητας με καλύτερη σύγκλιση τιμών.



Διάγραμμα 4. 37
Μεταβολή του βέλους κάμψης για 3PB για σύνθετο με ίνες διεύθυνσης 0 μοιρών

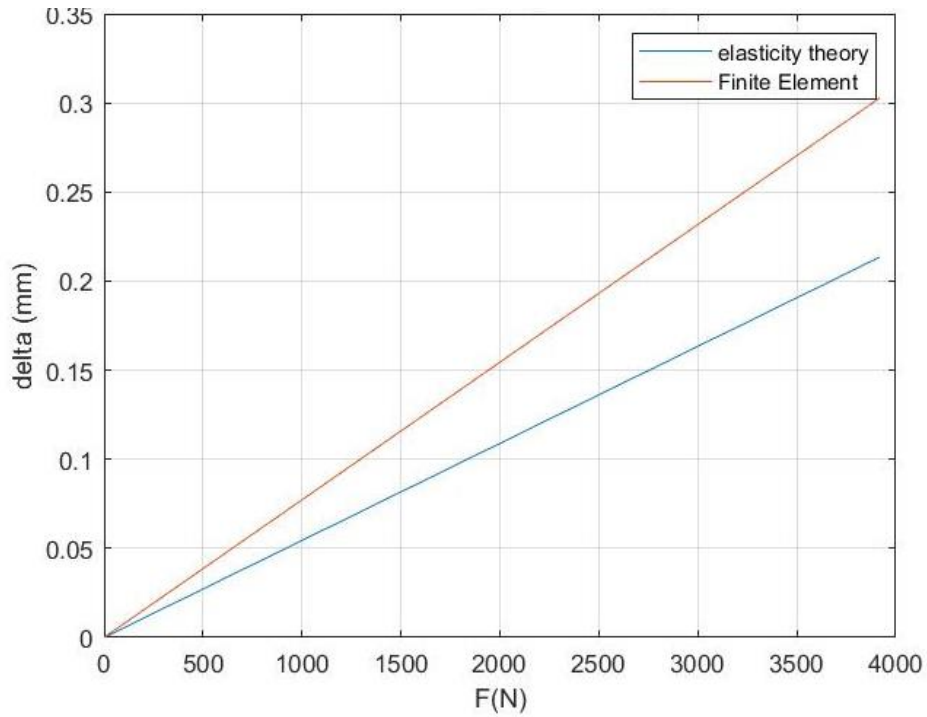
Στο επόμενο διάγραμμα εξάγουμε πανομοιότυπα συμπεράσματα με τα προηγούμενο διάγραμμα. Βλέπουμε μια ταύτιση των τιμών μεταξύ Πεπερασμένων Στοιχείων και πειραματικών δεδομένων, σχεδόν ξανά μέχρι την τιμή των 4000 N. Μετά από αυτήν την τιμή παρατηρούμε ότι αλλάζει η κλίση της καμπύλης όπου τα Πεπερασμένα Στοιχεία δεν την ακολουθούν καθώς δεν έχουμε λάβει υπόψη μη γραμμικότητες. Όσον αφορά τώρα στις λύσεις από την Θεωρία Ελαστικότητας, παρατηρούμε μικρότερη απόκλιση από ότι παρατηρούμε για γωνία ινών 0 μοίρες. Τα ανάλογα αποτελέσματα έχουμε παρατηρήσει και στην κάμψη των τεσσάρων σημείων όπου παρουσιάστηκαν ανωτέρω αλλά και από την δημοσίευση του κ. Esendemiir [15] όπου δίνει μεγαλύτερο σφάλμα για σύνθετο υλικό με διεύθυνση ινών 0 μοίρες από ότι για σύνθετο υλικό με διεύθυνση ινών 90 μοίρες. Επομένως, μπορούμε ξανά να πούμε με λογικό συνειρμό ότι στην κάμψη τεσσάρων σημείων όπου δεν έχουμε πειραματικά δεδομένα, έχουμε πιθανόν αξιόπιστα αποτελέσματα.



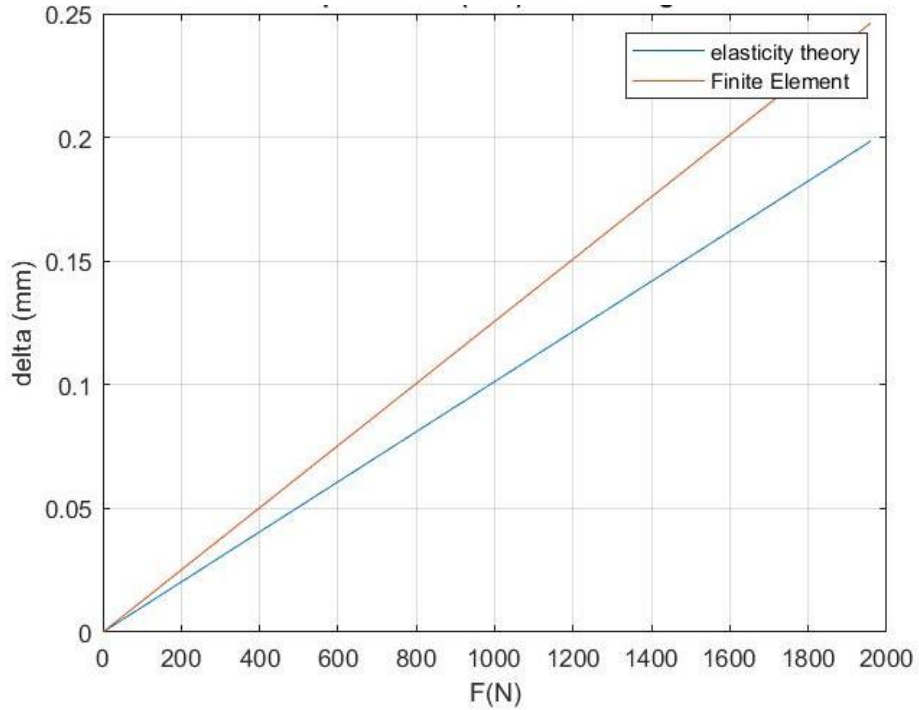
Διάγραμμα 4.38
Μεταβολή του βέλους κάμψης για 3PB για σύνθετο με ίνες διεύθυνσης 90 μοιρών

4.4.2 Σύνθετο υλικό με ίνες μιας διεύθυνσεως για 3PB

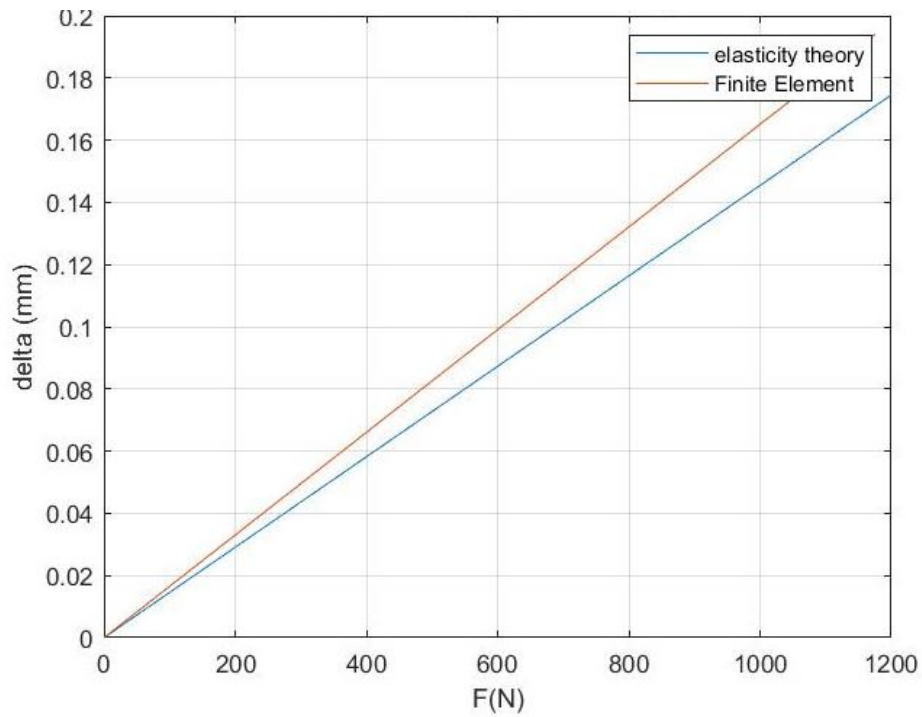
Στην συνέχεια ακολουθούν τα διαγράμματα του βέλους κάμψης ως προς την δύναμη που ασκείται για την μέθοδο κάμψης τριών σημείων. Στην παρούσα κατάσταση δεν χρειάζεται να αναλύσουμε κάθε διάγραμμα ξεχωριστά καθώς τα αποτελέσματα είναι όμοια με αυτά της μεθόδου με την ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων. Δηλαδή οι αποκλίσεις μεταξύ των Πεπερασμένων Στοιχείων και της Θεωρίας Ελαστικότητας είναι σχετικά σταθερές. Αναλυτικά βλέπουμε μικρότερο εύρος αποκλίσεων για γωνίες ινών 45 και 60 μοιρών. Για γωνία ινών 30 και 90 έχουμε περίπου ίδιο σφάλμα, ενώ το μεγαλύτερο σφάλμα το παρατηρούμε για γωνία ινών 0 μοίρες. Τα ακόλουθα αποτελέσματα συμβαδίζουν με τα αποτελέσματα του κ. Esendemir[15] όπου εξάγει παρόμοια αποτελέσματα όπου δυστυχώς δεν έχει δημοσιοποιήσει τα πειραματικά δεδομένα ώστε να πραγματοποιήσουμε ανάλογη σύγκριση. Επισημαίνεται ότι και στην παρούσα φάση με την κάμψη τριών σημείων έχουμε λάβει μόνο την γραμμική περιοχή του υλικού. Στα διαγράμματα φαίνεται ξεχωριστά το βέλος κάμψης για κάθε περίπτωση γωνίας ινών.



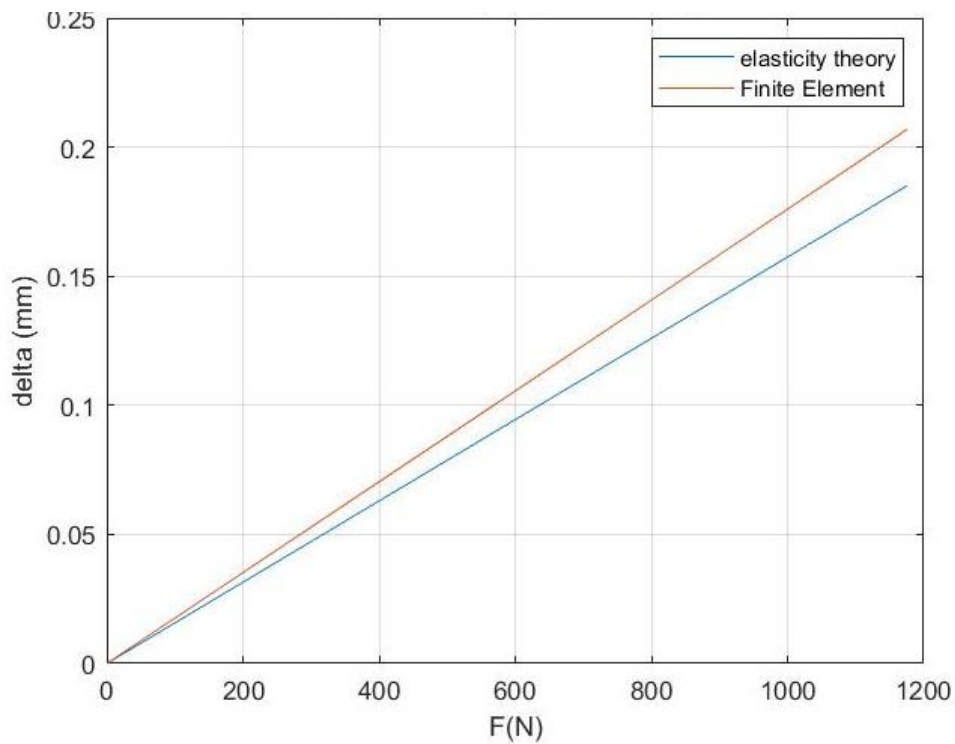
Διάγραμμα 4.39
Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του φορτίου για 3PB σε σύνθετο με ίνες διεύθυνσης 0 μοιρών.



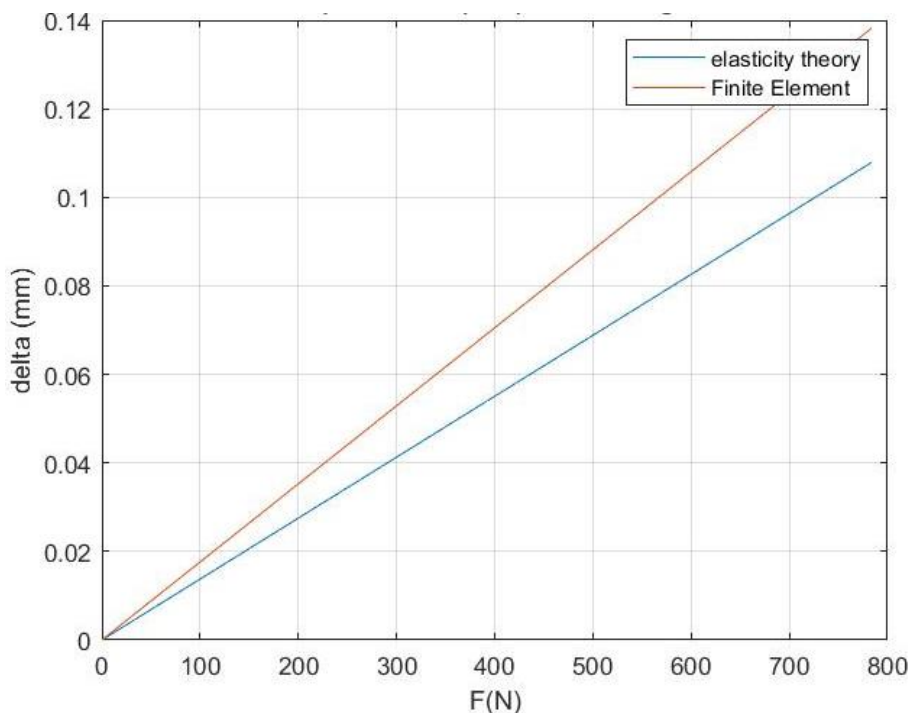
Διάγραμμα 4.40
Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του φορτίου για 3PB σε σύνθετο με ίνες διεύθυνσης 30 μοιρών.



Διάγραμμα 4.41
Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του φορτίου για 3PB σε σύνθετο με ίνες διεύθυνσης 45 μοιρών.



Διάγραμμα 4.42
Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του φορτίου για 3PB σε σύνθετο με ίνες διεύθυνσης 60 μοιρών.

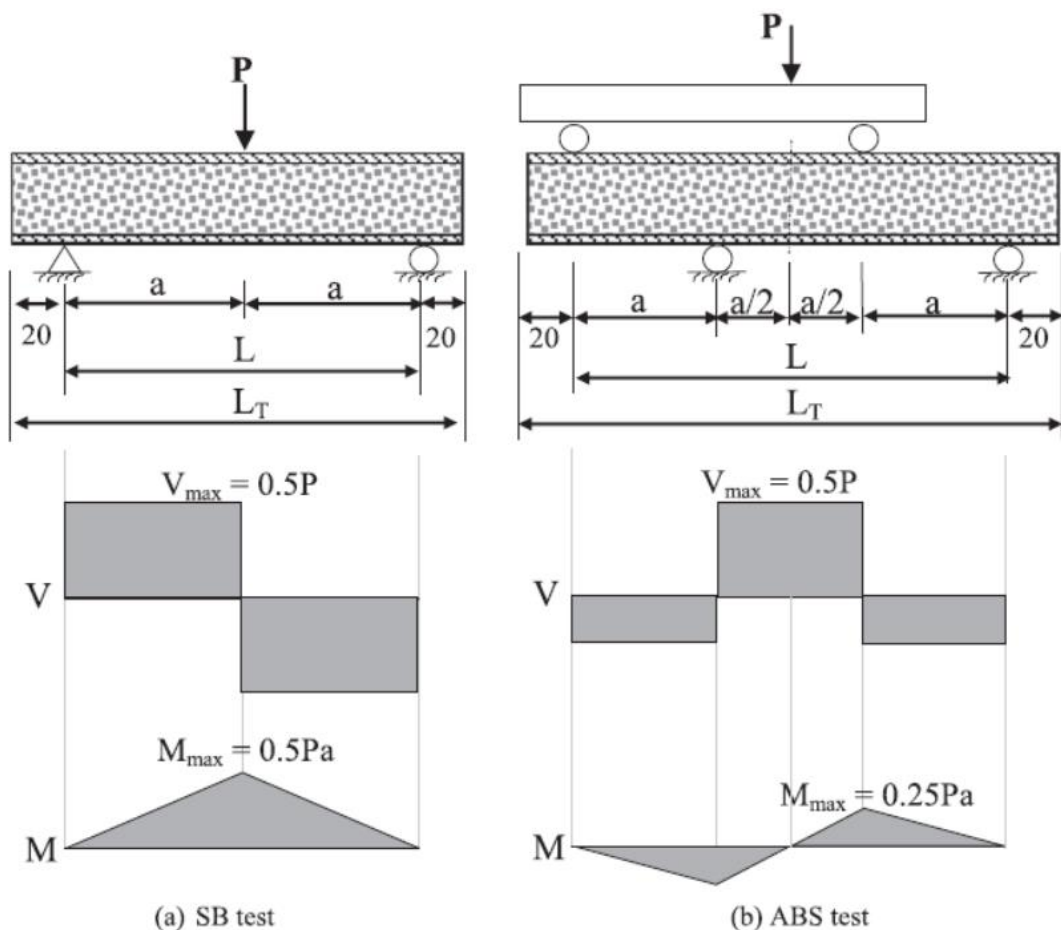


Διάγραμμα 4. 43

Μεταβολή του βέλους κάμψης συγκριτικά με την αύξηση του φορτίου για 3PB σε σύνθετο με ίνες διεύθυνσης 90 μοιρών.

4.5 Σύγκριση τιμών μεταξύ 3PB-4PB

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα γίνει σύγκριση μεταξύ του βέλους κάμψης της μεθόδου της κάμψης τριών σημείων και της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων. Η ιδέα αυτής της σύγκρισης έρχεται από την δημοσίευση του A.C. Manallo [22] όπου συγκρίνει για σύνθετο τύπου sandwich την αστοχία από τις δύο μεθόδους και το βέλος κάμψης μέχρι να αστοχήσει. Στην δική μας περίπτωση δεν μελετάμε μέχρι το σημείο αστοχίας αλλά παρατηρούμε εντός της ελαστικής περιοχής την μεταβολή που έχει το βέλος κάμψης στην εκάστοτε περίπτωση. Για να έχει ουσία η σύγκριση και η μελέτη που ακολουθεί πρέπει τα δύο δοκίμια να έχουν το ίδιο μήκος L το οποίο θα είναι με $2a$. Επομένως η δύναμη θα ασκείται στα σημεία a για την κάμψη τριών σημείων. Αντίστοιχα για την κάμψη τεσσάρων σημείων θα χρησιμοποιήσουμε ίδιο μήκος L και ο συντελεστής θα είναι $\lambda=3$. Επομένως στην κάμψη τεσσάρων σημείων πάλι η δύναμη Q θα ασκείται στο σημείο a . Ο ανωτέρω συλλογισμός γίνεται πιο κατανοητός με την χρήση του ακόλουθου σχήματος.



Εικόνα 4. 1

Απεικόνιση σύγκρισης 4PB-3PB και των αντίστοιγων ροπών κάμψης και διαγραμμάτων τεινουσών δυνάμεων

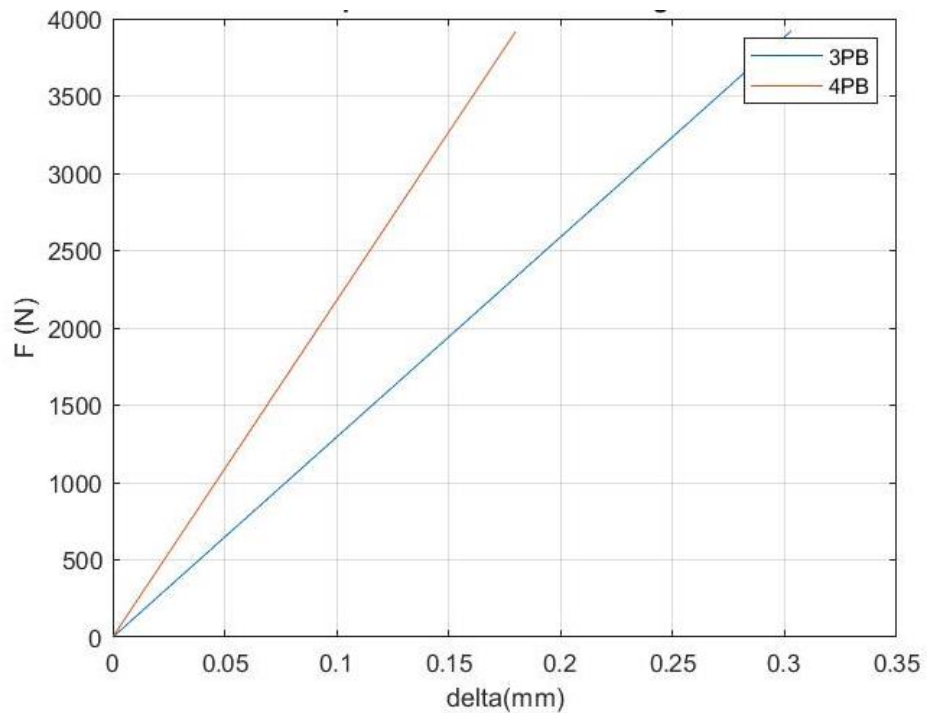
Σε αυτό το σημείο γίνεται φανερό ότι η σύγκριση δεν μπορεί να γίνει με την χρήση της Θεωρίας της Ελαστικότητας, καθώς όπως αποδείξαμε στα ανωτέρω υποκεφάλαια η θεωρία αυτή δεν έχει καλές τιμές για μικρά λ . Επομένως η σύγκριση έγινε μόνο με την χρήση των Πεπερασμένων Στοιχείων. Η δύναμη για κάθε διεύθυνση ινών διαφέρει καθώς ανάλογα με την διεύθυνση αλλάζει και η αντοχή που παρουσιάζει το υλικό. Βέβαια έχει ειπωθεί ξανά ότι στην παρούσα εργασία ενδιαφερόμαστε κυρίως για την γραμμική περιοχή επομένως αποφεύγουμε να ξεπεράσουμε κάποιο όριο.

4.5.1 Σύγκριση βέλους κάμψης

Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα διαγράμματα ξεχωριστά για κάθε γωνία ινών και για τις δύο μεθόδους. Εξαιτίας του ότι τα αποτελέσματα είναι πανομοιότυπα για οποιαδήποτε ανάλυση που θα περιγράψουμε περιγράψουμε ισχύει για όλα τα διαγράμματα. Συγκεκριμένα αυτό που παρατηρούμε και συμπίπτει και με τα

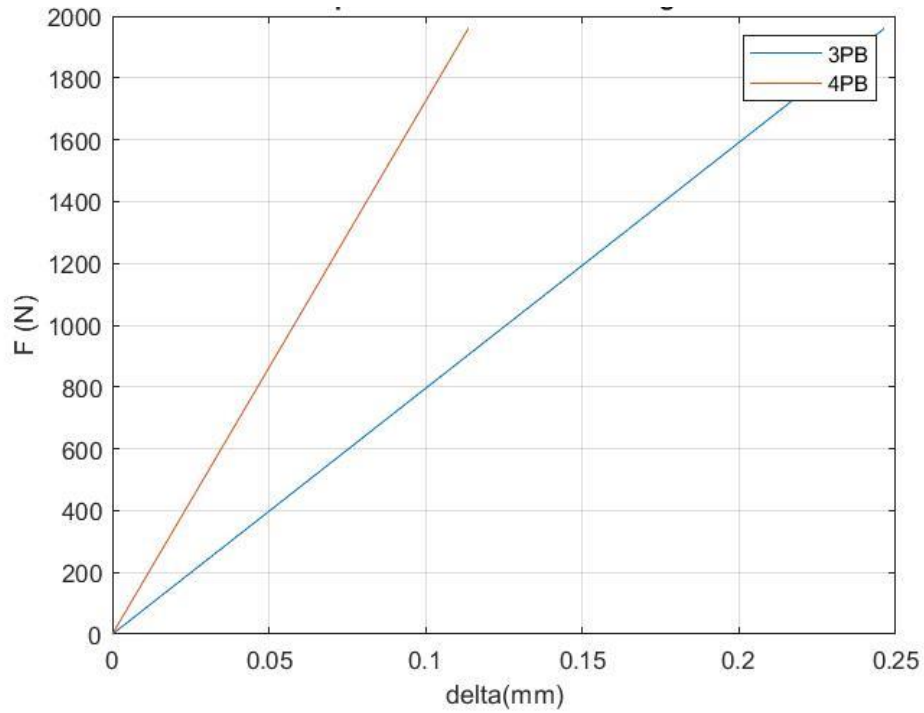
αποτελέσματα του A.C. Manallo [22] είναι ότι για δεδομένη δύναμη η κάμψη τριών σημείων έχει μεγαλύτερο βέλος κάμψης σε σύγκριση με την κάμψη τεσσάρων σημείων. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι από την φύση του προβλήματος της κάμψης των τεσσάρων σημείων η δύναμη που ασκείται χωρίζεται σε δύο σημεία και καταπονεί το δοκίμιο διαφορετικά, επομένως μπορεί να δικαιολογηθεί αυτή η μεταβολή στις τιμές.

Επίσης το δεύτερο σημείο άξιο προσοχής είναι ότι ανάλογα με την γωνία των ινών έχουμε διαφορετική τιμή βέλους κάμψης. Συγκεκριμένα για γωνία 90 μοιρών έχουμε την μεγαλύτερη μετατόπιση αναλογικά για 0 μοίρες να έχουμε την μικρότερη τιμή. Όλες οι υπόλοιπες τιμές των βελών μεταβάλλονται κλιμακωτά ανάλογα με την διεύθυνση των ινών. Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα.



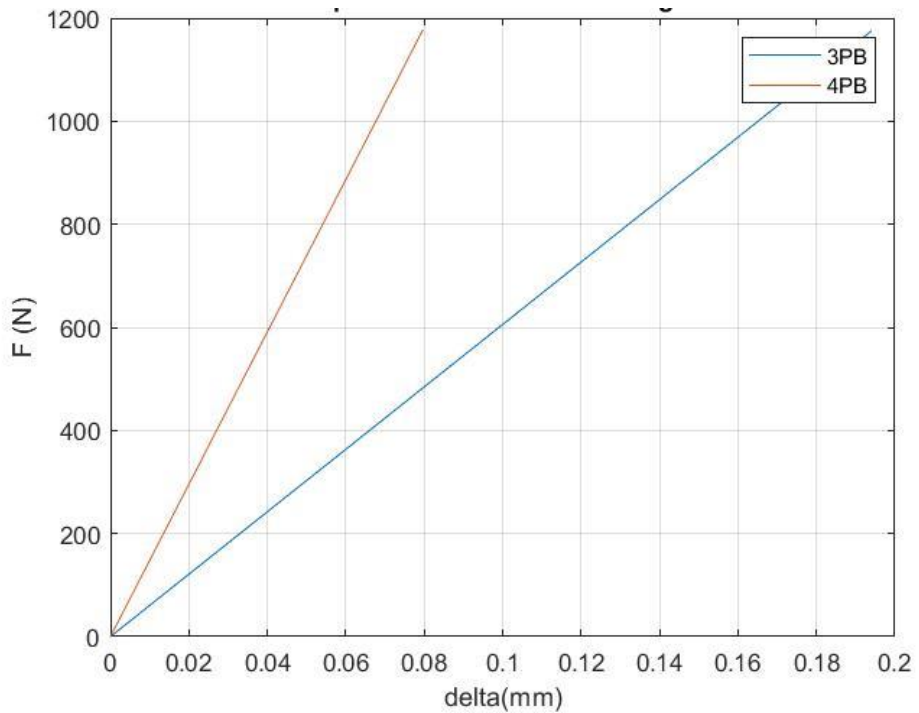
Διάγραμμα 4. 44

Σύγκριση βέλους κάμψης μεταξύ 3PB-4PB για σύνθετο υλικό με ίνες διεύθυνσης 0 μοιρών



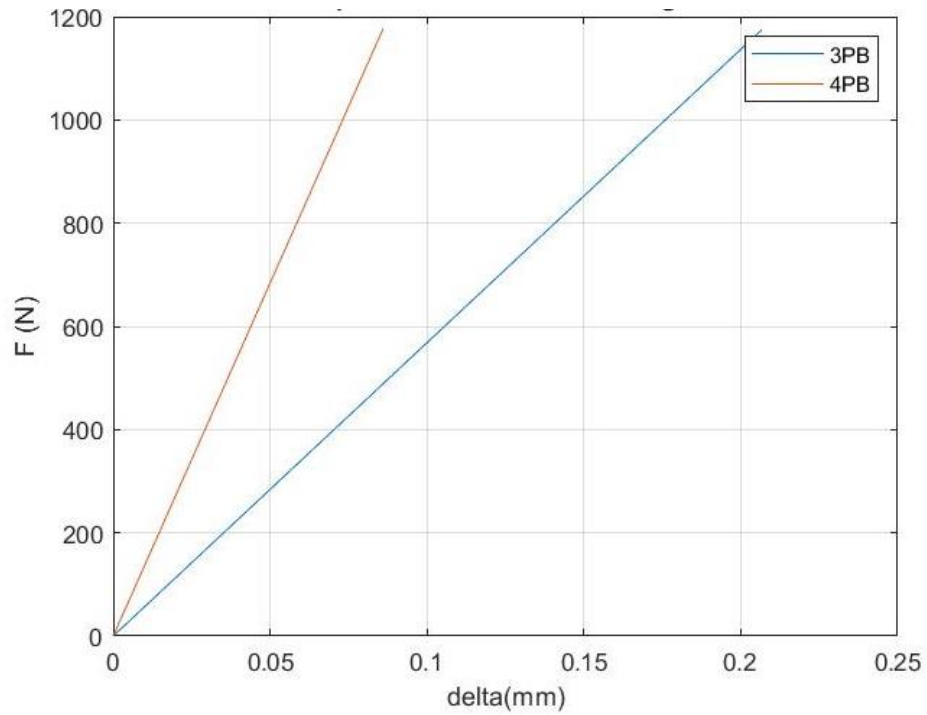
Διάγραμμα 4.45

Σύγκριση βέλους κάμψης μεταξύ 3PB-4PB για σύνθετο υλικό με ίνες διεύθυνσης 30 μοιρών



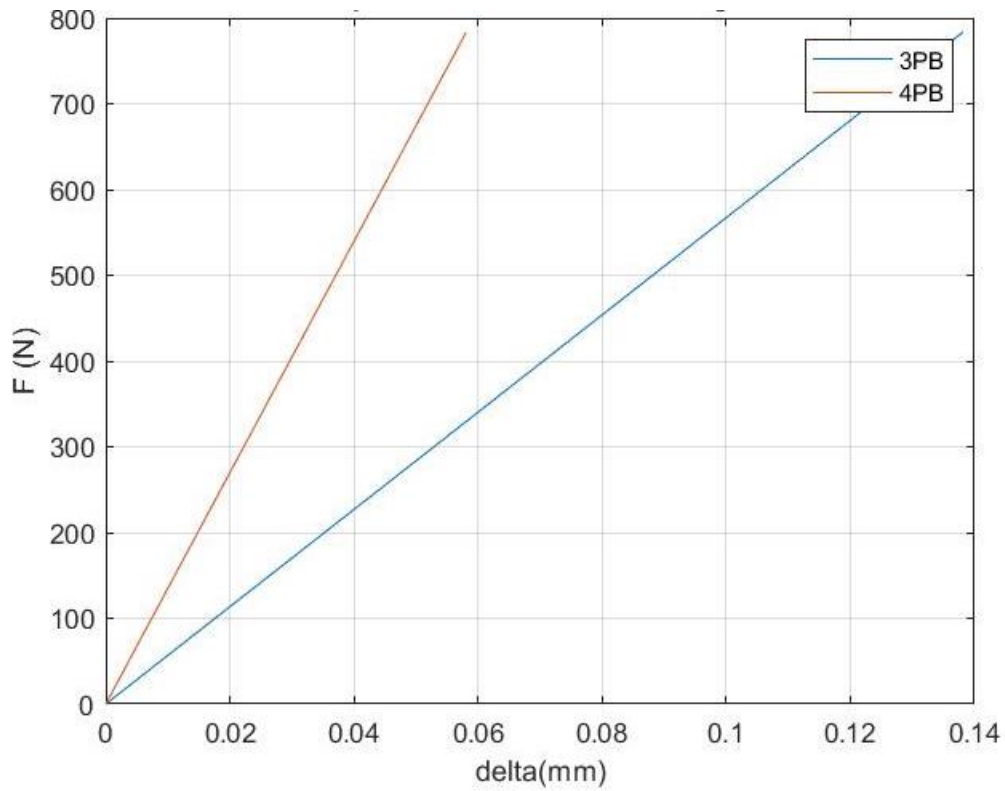
Διάγραμμα 4.46

Σύγκριση βέλους κάμψης μεταξύ 3PB-4PB για σύνθετο υλικό με ίνες διεύθυνσης 45 μοιρών



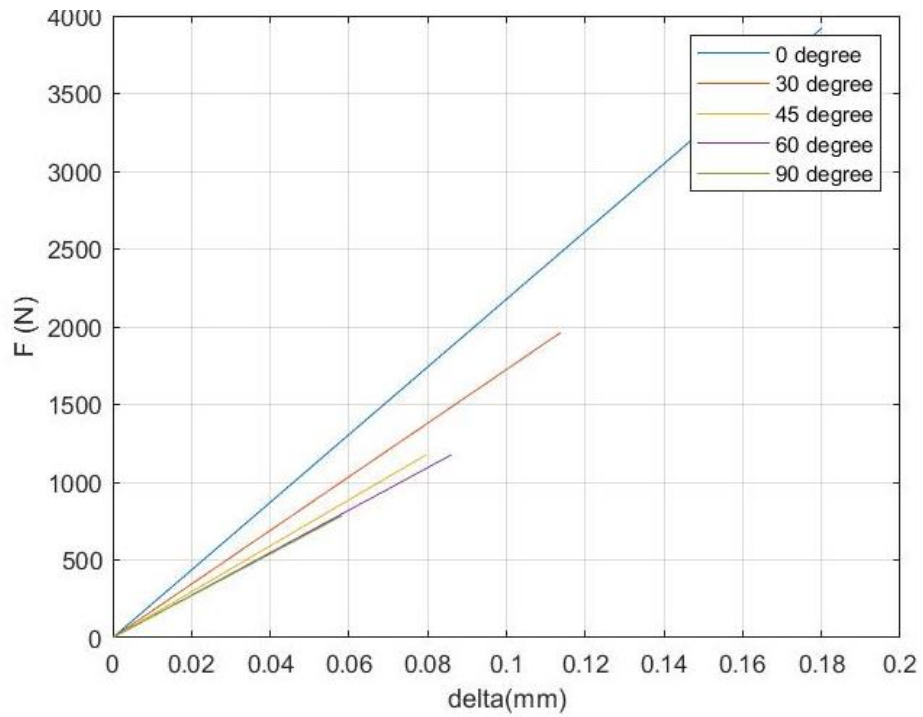
Διάγραμμα 4.47

Σύγκριση βέλους κάμψης μεταξύ 3PB-4PB για σύνθετο υλικό με ίνες διεύθυνσης 60 μοιρών

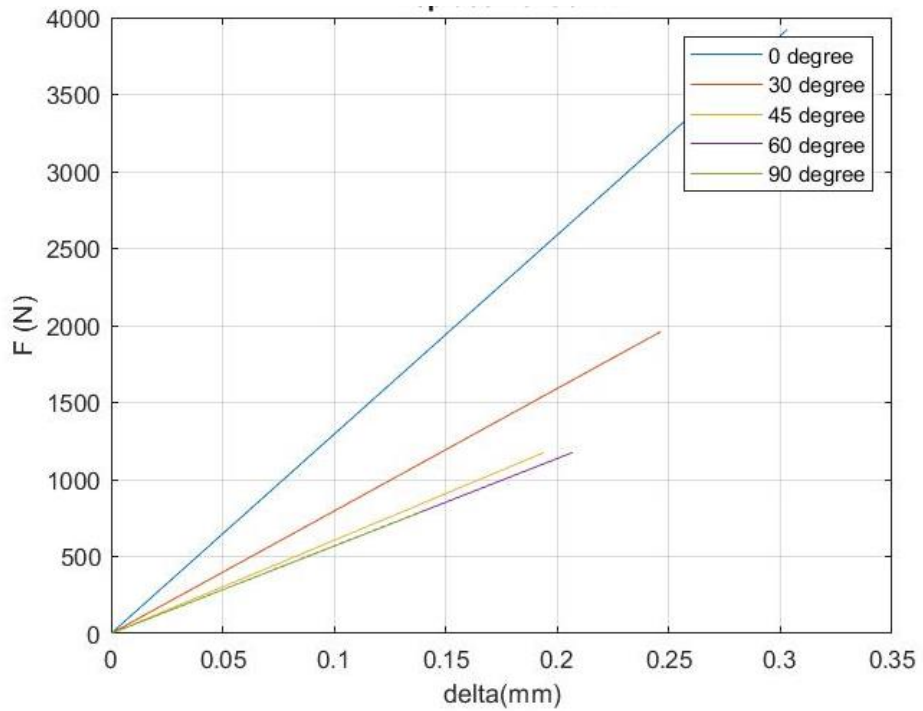


Διάγραμμα 4.48

Σύγκριση βέλους κάμψης μεταξύ 3PB-4PB για σύνθετο υλικό με ίνες διεύθυνσης 90 μοιρών



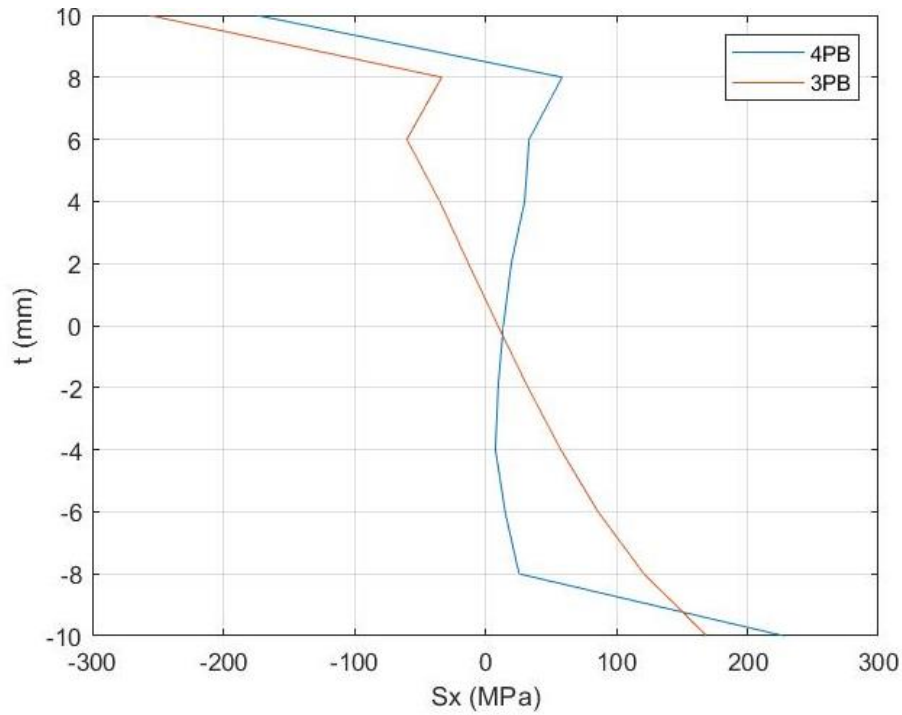
Διάγραμμα 4.49
Συνολική σύγκριση των βελών κάμψεως 4PB για όλες τις γωνίες ινών



Διάγραμμα 4.50
Συνολική σύγκριση των βελών κάμψεως 3PB για όλες τις γωνίες ινών

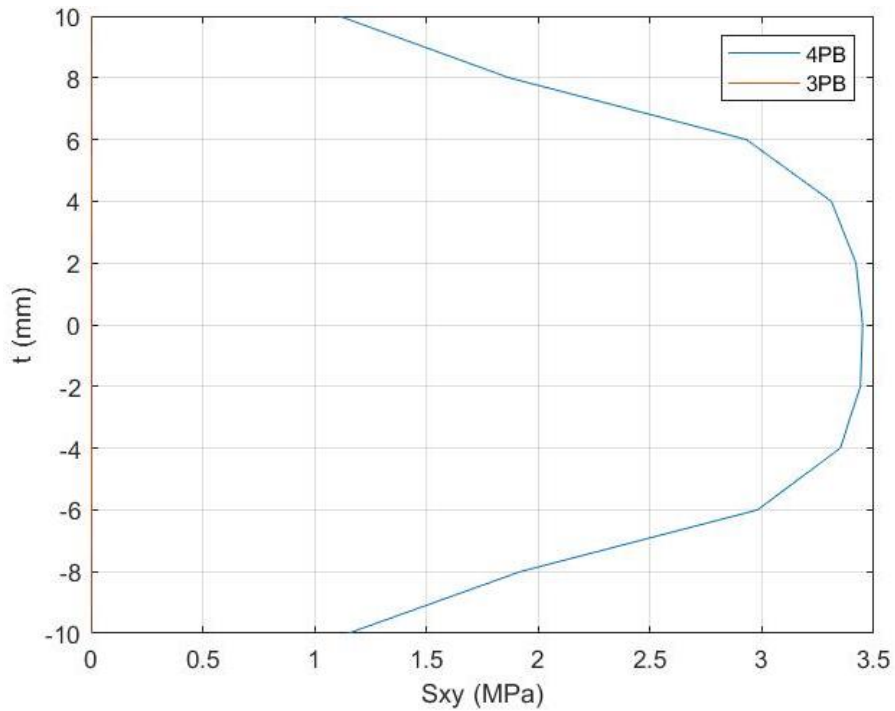
4.5.2 Σύγκριση των τάσεων

Στην συνέχεια θα γίνει σύγκριση μεταξύ των τάσεων για την κάμψη τριών σημείων και την ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων. Στην συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιήσαμε τις ελαστικές σταθερές από την εργασία του κ. Σαραγά [21]. Επίσης το μήκος θα είναι $L=32.5$ mm το πλάτος του δοκιμίου $b=16.5$ mm ενώ το πάχος θα είναι $t=20$ mm. Όπως ήταν αναμενόμενο παρατηρούμε ότι στην κάμψη τριών σημείων έχουμε μεγαλύτερες ορθές τάσεις στο σημείο που ασκείται το φορτίο Αυτό που έχει σημασία να δούμε είναι ότι ενώ στην μέθοδο επίλυσης με χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας οι διατμητικές τάσεις δεν επηρεάζονται από την γωνία διεύθυνσης των ινών, στα Πεπερασμένα Στοιχεία φαίνεται να υπάρχουν σημαντικές διαφορές. Οι διαφορές αυτές δεν εστιάζονται μόνο στο μέγεθος των τάσεων αλλά και στο κατά πόσο επηρεάζει την κατανομή των διατμητικών τάσεων. Συγκεκριμένα είναι εμφανέστατο ότι οι για σύνθετο υλικό με γωνία διεύθυνσης ινών 0 και 90 μοίρες φαίνεται να μην υπάρχει καθόλου επιρροή από την επίδραση του φορτίου και να μην έχουμε αλλοιώσεις στις τιμές των τάσεων. Παρατηρούμε και στα ακόλουθα διαγράμματα ότι οι διατμητικές τάσεις για 0 και 90 μοίρες είναι μια πολύ καλή παραβολή και ακόμη ότι δεν παρουσιάζονται ακραίες μεγάλες τιμές στο άνω άκρο του σύνθετου όπου και ασκείται το φορτίο. Επιπλέον εάν θεωρήσουμε αξιόπιστες τις τιμές των τάσεων από το σημείο 0 και κάτω (δηλαδή εκεί όπου είμαστε σίγουροι ότι δεν έχουμε αλλοίωση των αποτελεσμάτων λόγω του φορτίου) μπορούμε να πούμε ότι οι ορθές τάσεις για τις γωνίες ινών $30,45$ και 60 έχουν σε όλες τις περιπτώσεις μεγαλύτερες τάσεις στην κάμψη τριών σημείων. Ενώ όσο αφορά τις διατμητικές τάσεις υπάρχει κάποια υποτυπώδη συσχέτιση αλλά χωρίς να μπορούμε να πούμε ποιες είναι μεγαλύτερες. Όσον αφορά τώρα τις ορθές τάσεις των σύνθετων με γωνία διεύθυνσης 0 και 90 μοίρες βλέπουμε ότι οι ορθές τάσεις για την κάμψη τριών σημείων είναι πάλι μεγαλύτερες και οι διατμητικές των τεσσάρων σημείων είναι πολύ μικρότερες από αυτές των τριών σημείων. Φαινομενικά, εξαιτίας της μικρής τιμής του φαίνεται σαν ευθεία, όμως κάνοντας μια ξεχωριστή απεικόνιση παρατηρούμε ότι και αυτές οι τιμές έχουν ελάχιστη επίδραση από την αλλοίωση που προκαλεί το φορτίο. Δηλαδή είναι και αυτές οι καμπύλες παραβολικές όμως με πολύ μικρότερες τιμές. Σε αυτό το διάγραμμα φαίνεται πλέον ακόμα πιο καθαρά ότι για τα Πεπερασμένα Στοιχεία υπάρχει επίδραση των γωνιών διεύθυνσης των ινών για τις διατμητικές τάσεις, ενώ για την Θεωρία Ελαστικότητας καταλήξαμε ότι δεν υπάρχει κάποια επίδραση, αφού δεν περιέχονται πουθενά στους τύπους, τόσο για την κάμψη τριών σημείων όσο και για την ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων.



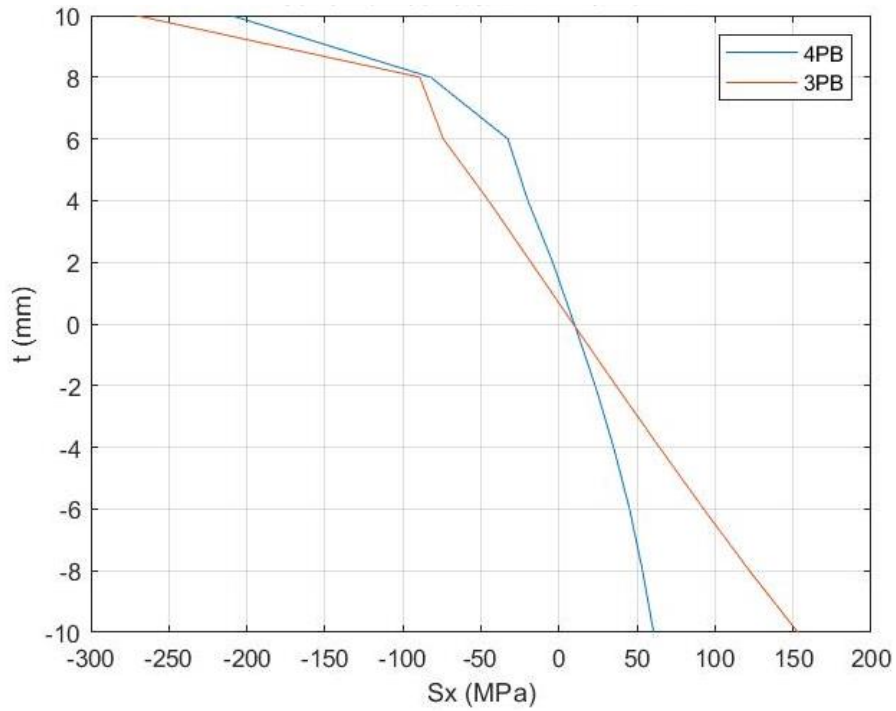
Διάγραμμα 4.51

Σύγκριση των ορθών τάσεων μεταξύ 3PB και 4PB για γωνία ινών 0 μοίρες

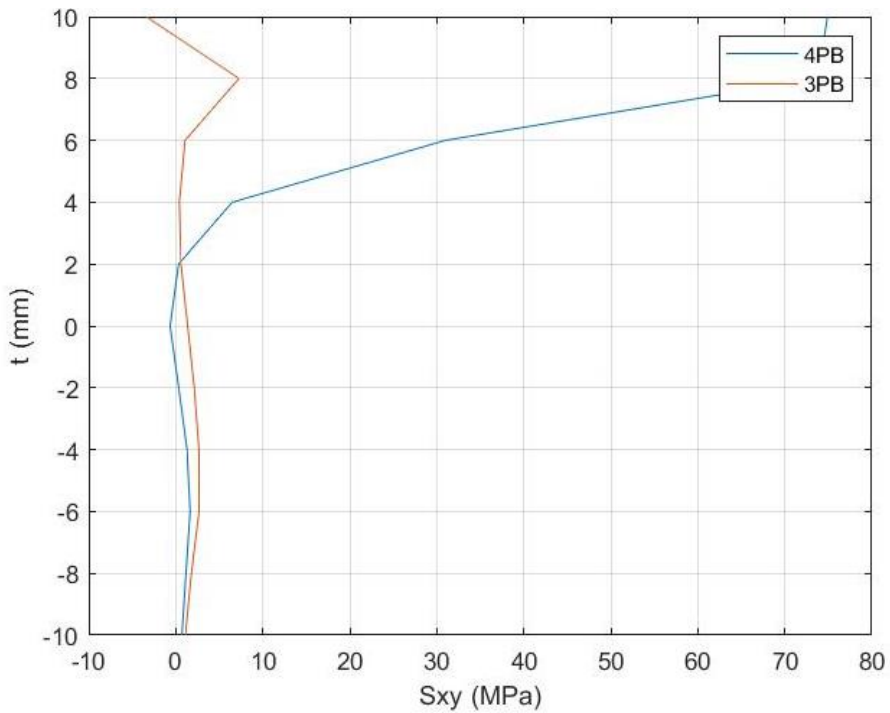


Διάγραμμα 4.52

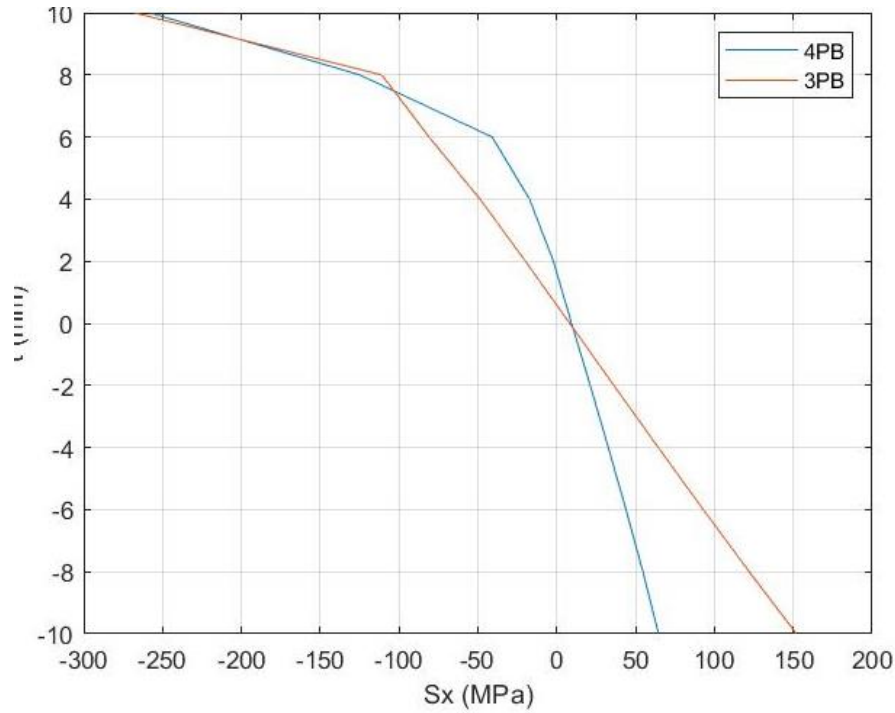
Σύγκριση των διατμητικών τάσεων μεταξύ 3PB και 4PB για γωνία ινών 0 μοίρες



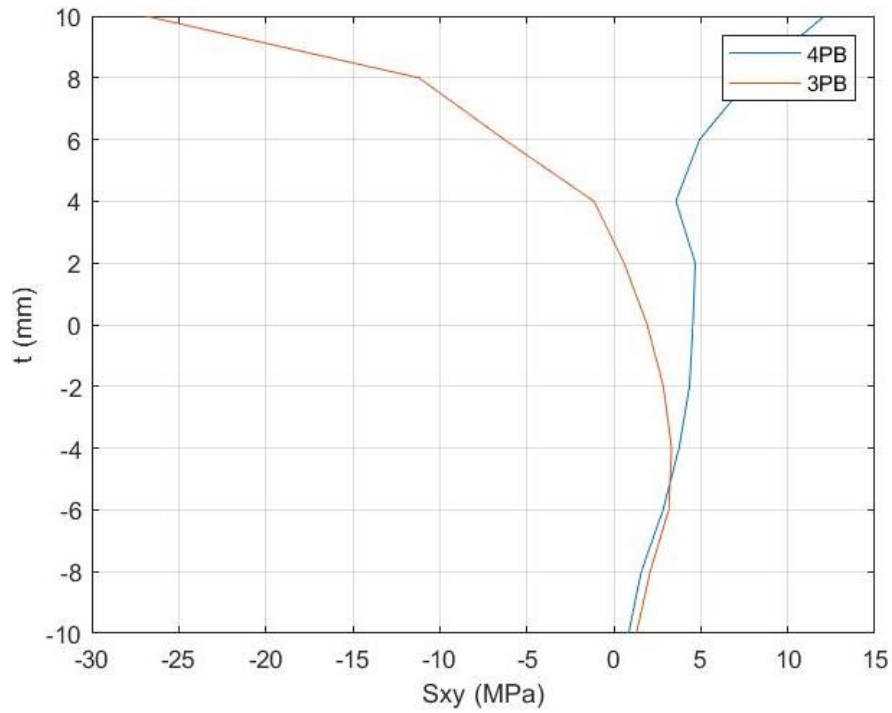
Διάγραμμα 4.53
Σύγκριση των ορθών τάσεων μεταξύ 3PB και 4PB για γωνία ινών 30 μοίρες



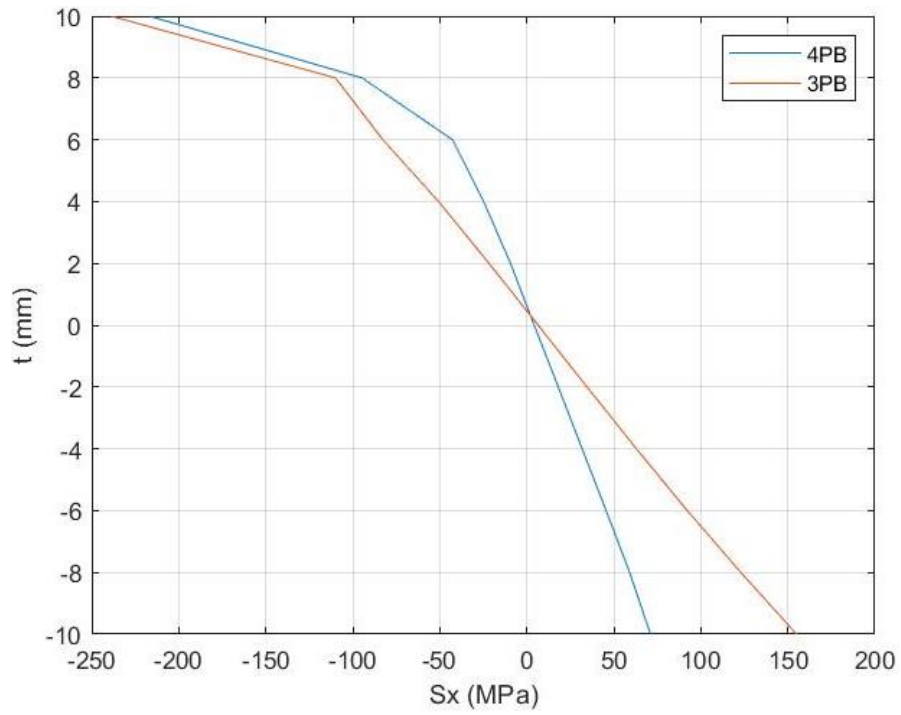
Διάγραμμα 4.54
Σύγκριση των διατμητικών τάσεων μεταξύ 3PB και 4PB για γωνία ινών 30 μοίρες



Διάγραμμα 4.55
Σύγκριση των ορθών τάσεων μεταξύ 3PB και 4PB για γωνία ινών 45 μοίρες

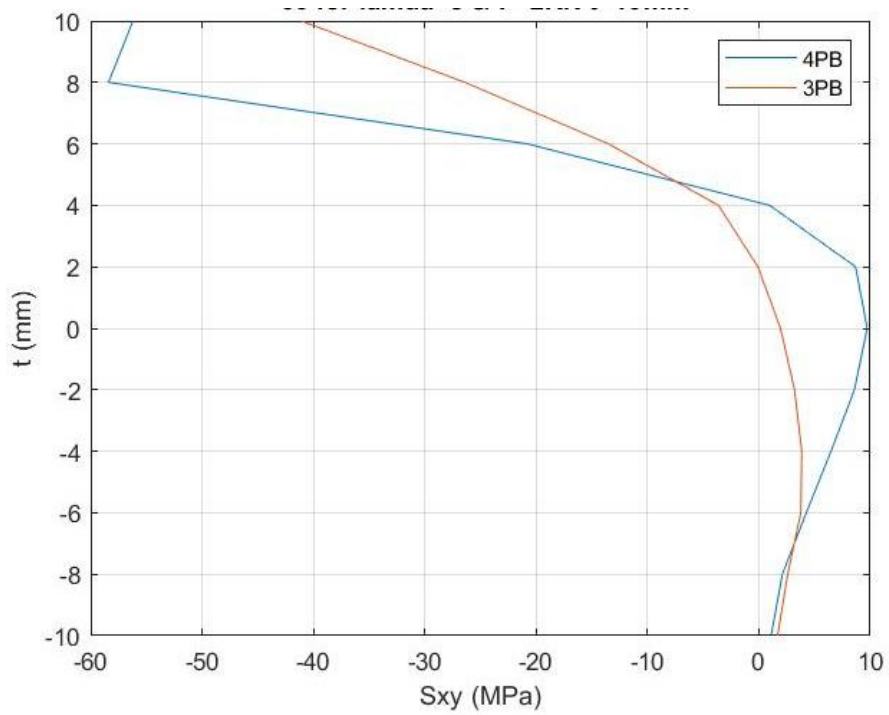


Διάγραμμα 4.56
Σύγκριση των διατμητικών τάσεων μεταξύ 3PB και 4PB για γωνία ινών 45 μοίρες



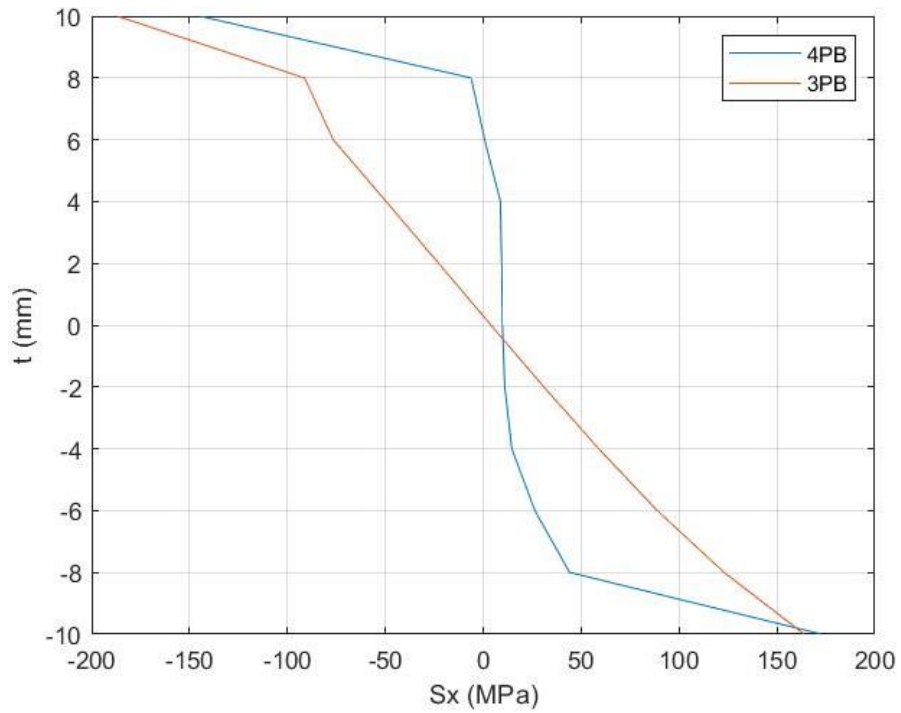
Διάγραμμα 4.57

Σύγκριση των ορθών τάσεων μεταξύ 3PB και 4PB για γωνία ινών 60 μοίρες

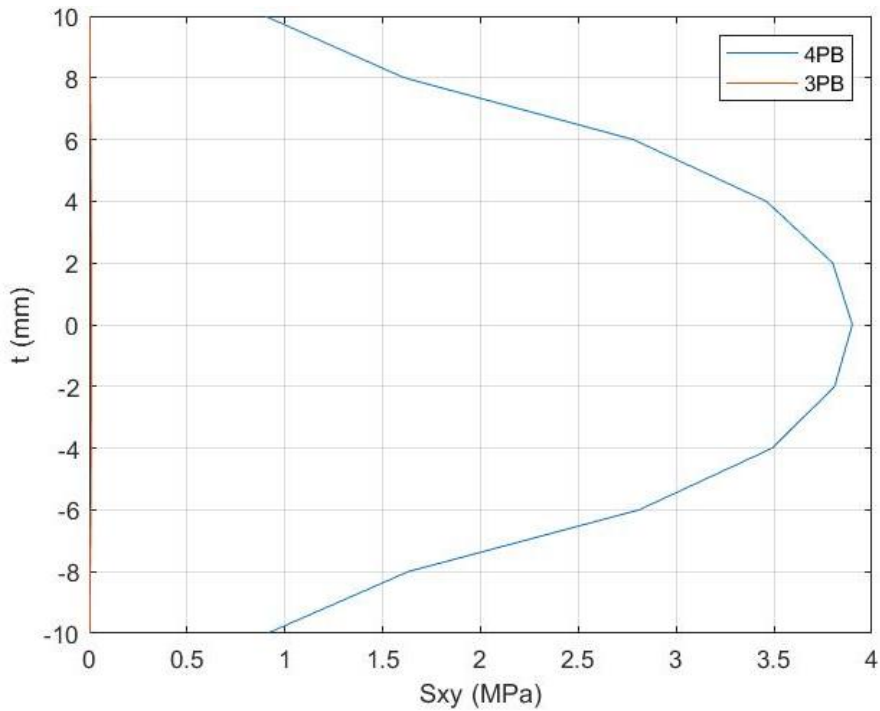


Διάγραμμα 4.58

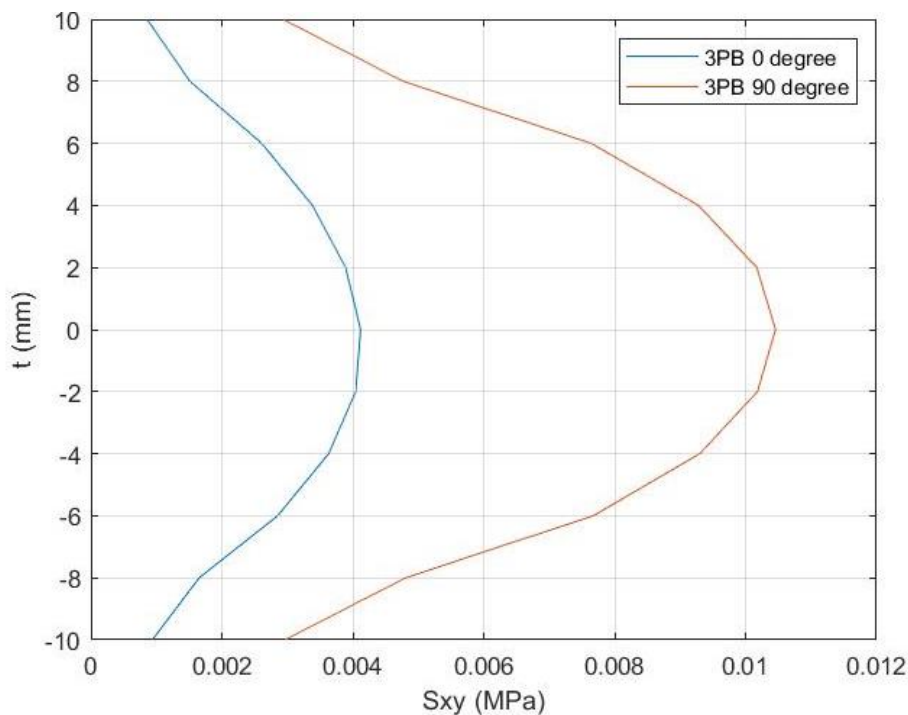
Σύγκριση των διατμητικών τάσεων μεταξύ 3PB και 4PB για γωνία ινών 60 μοίρες



Διάγραμμα 4.59
Σύγκριση των ορθών τάσεων μεταξύ 3PB και 4PB για γωνία ινών 90 μοίρες



Διάγραμμα 4.60
Σύγκριση των διατμητικών τάσεων μεταξύ 3PB και 4PB για γωνία ινών 90 μοίρες

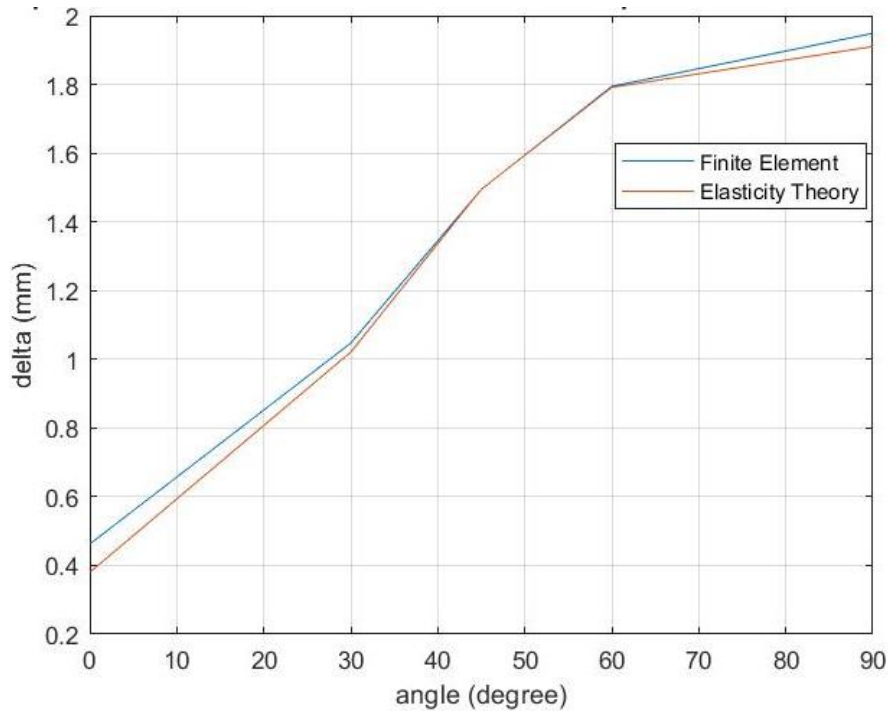


Διάγραμμα 4. 61

Σύγκριση των ορθών τάσεων μεταξύ 3PB για γωνία ινών 0 και 90 μοίρες

4.6 Σύγκριση τιμών βέλους κάμψης και γωνίας ινών για 4PB

Στο διάγραμμα που ακολουθεί γίνεται μια συνολική σύγκριση όλων των γωνιών των ινών του σύνθετου σε σχέση με το βέλος κάμψης. Επισημαίνεται ότι όλα τα αποτελέσματα έχουν παρθεί για συντελεστή $\lambda=10$, πάχος δοκιμίου $t=10\text{mm}$ μήκος δοκιμίου $L=120\text{mm}$, πλάτος δοκιμίου $b=30\text{mm}$ και η δύναμη που ασκείται είναι $F=2\text{ kN}$. Επίσης γίνεται σύγκριση και των μεθόδων επίλυσης, δηλαδή μεταξύ των Πεπερασμένων Στοιχείων και της Θεωρίας Ελαστικότητας. Παρατηρώντας το ακόλουθο διάγραμμα εξάγουμε το συμπέρασμα ότι για γωνία ινών ίση με μηδέν μοίρες έχουμε το μικρότερο βέλος κάμψης, ενώ για γωνία ινών ίση με 90 μοίρες έχουμε το μεγαλύτερο βέλος κάμψης. Επίσης για όλες τις ενδιάμεσες γωνίες ινών έχουμε σταδιακή αύξηση του βέλους από τις 0 μοίρες μέχρι να φτάσουμε τις 90 μοίρες. Μια δεύτερη παρατήρηση που μπορεί να ειπωθεί είναι ότι την καλύτερη σύγκλιση τιμών την παρατηρούμε στις 45 μοίρες και γενικά στην γύρω περιοχή. Ενώ αντίθετα στα άκρα (δηλαδή κοντά στις 90 μοίρες ή στις 0 μοίρες) βλέπουμε μεγαλύτερες αποκλίσεις γεγονός που εξηγήθηκε πιο αναλυτικά στα ανωτέρω διαγράμματα. Τέλος, παρατηρείται ότι το σφάλμα στις 0 μοίρες φαίνεται να είναι μεγαλύτερο από ότι το σφάλμα που μπορούμε να παρατηρήσουμε στις 90 μοίρες γωνίας ινών.

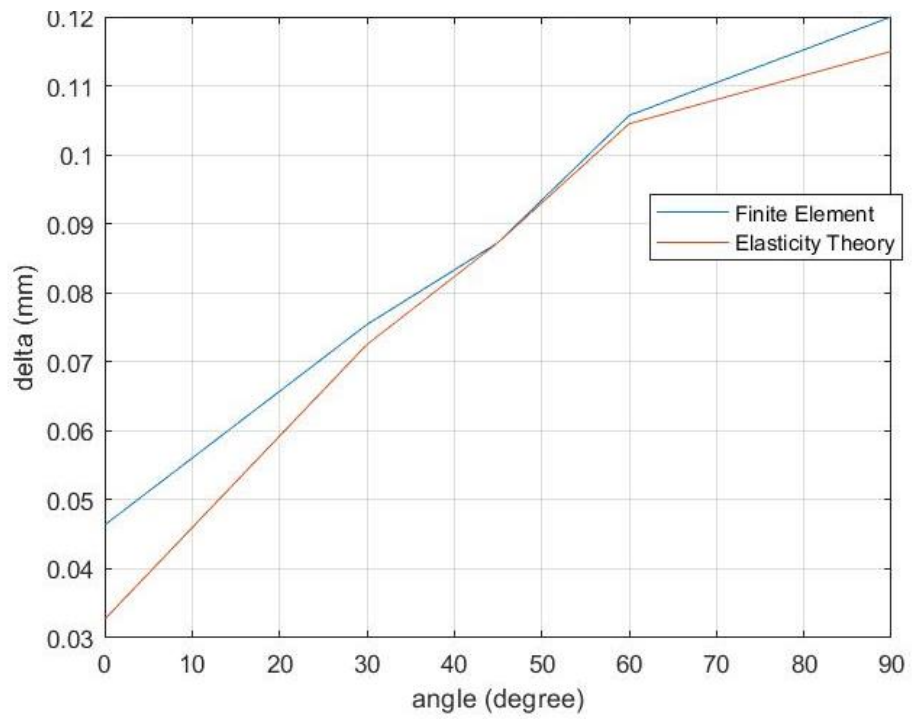


Διάγραμμα 4. 62

Σύγκριση βέλους κάμψης για δεδομένες συνθήκες για διάφορες γωνίες ινών σε 4PB

4.7 Σύγκριση τιμών βέλους κάμψης και γωνίας ινών για 3PB

Με την ίδια λογική που περιγράψαμε τα συνολικά αποτελέσματα για την κάμψη τεσσάρων σημείων, το ίδιο θα πραγματοποιηθεί για την κάμψη τριών σημείων. Σε αυτή την περίπτωση η δύναμη που ασκείται θα είναι $F=600\text{ N}$, το πάχος του δοκιμίου είναι $t=6\text{ mm}$, πλάτος δοκιμίου $b=16.5\text{ mm}$ και το μήκος του $L=32.5\text{ mm}$. Παρατηρούμε ξανά ότι για διεύθυνση ινών 0 μοίρες έχουμε το μικρότερο βέλος κάμψης ενώ το μεγαλύτερο βέλος κάμψης πραγματοποιείται για γωνία ινών ίση με 90 μοίρες. Ενώ βλέπουμε ότι για όλες τις ενδιάμεσες τιμές υπάρχει κλιμακωτή αύξηση του βέλους κάμψης ξεκινώντας από τις 0 μοίρες και καταλήγοντας στις 90 . Το επόμενο συμπέρασμα είναι ότι την μεγαλύτερη σύγκλιση τιμών έχουμε στις 45 μοίρες και στην γύρω περιοχή ενώ όσο πλησιάζουμε τα άκρα (δηλαδή 0 και 90 μοίρες) το σφάλμα αυξάνεται. Τέλος παρατηρούμε ότι στις 0 μοίρες το σφάλμα είναι αρκετά μεγαλύτερο από ότι στις 90 μοίρες, γεγονός που φαίνεται θεμιτό εάν λάβουμε υπόψη τις αντίστοιχες τιμές του Esndemir [22] για την αντίστοιχη μέθοδο.



Διάγραμμα 4.63

Σύγκριση βέλους κάμψης για δεδομένες συνθήκες για διάφορες γωνίες ινών σε 3PB

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**5.1 Συμπεράσματα**

Σε αυτό το Κεφάλαιο της Μεταπτυχιακής εργασίας θα παρατεθούν συγκεντρωτικά, τα συμπεράσματα τα οποία προέκυψαν από την μελέτη της μοντελοποίησης σύνθετης δοκού με ίνες μιας διεύθυνσεως η οποία καταπονείται με ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων. Συγκεκριμένα μας ενδιαφέρει η επίλυση του ανωτέρου προβλήματος με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων και της Θεωρίας Ελαστικότητας καθώς και η σύγκριση αυτών των δύο μεθόδων. Τα συμπεράσματα θα παρουσιαστούν διακριτά και απαριθμημένα. Επομένως τα εν λόγω συμπεράσματα είναι:

1. Η γωνία διεύθυνσης ινών έχει σημαντικό ρόλο στην επίρεια του βέλους κάμψης. Συγκεκριμένα για γωνία ινών 0 μοίρες έχουμε πολύ μικρότερες τιμές βέλους κάμψης σε σχέση με γωνία ινών 90 μοίρες. Επιπλέον όπως είναι λογικό το βέλος κάμψης αυξάνεται όσο αυξάνεται η γωνία διεύθυνσης ινών, δηλαδή έχουμε σταδιακή αύξηση του βέλους κάμψης μεταξύ των 0, 30, 45, 60, 90 μοιρών διεύθυνσης των ινών.
2. Όπως ήταν αναμενόμενο το βέλος κάμψης αυξάνεται αναλογικά με το επιβαλλόμενο φορτίο (Σημειώνεται ότι δεν έχουμε λάβει υπόψη μη γραμμικότητες στην παρούσα Μεταπτυχιακή Εργασία). Αυτό που έχει σημασία όμως στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι ότι η κλίση του διαγράμματος φορτίο – βέλος κάμψης αυξάνεται με ανάλογα με την διεύθυνση της γωνίας των ινών. Ως εκ τούτου για γωνία ινών 90 μοίρες έχουμε μεγαλύτερη κλίση αύξησης του βέλους σε σχέση με το φορτίο, ενώ αντίθετα για γωνία ινών 0 μοίρες έχουμε σχεδόν μηδαμινή κλίση. Αντίστοιχα για τις ενδιάμεσες γωνίες έχουμε σταδιακή αύξηση όσο αυξάνεται η γωνία των ινών.
3. Όσο αφορά τις διατμητικές τάσεις παρατηρούμε πως είναι ανεξάρτητες από την γωνία διεύθυνσης των ινών. Όπως είναι φανερό από τους τύπους που υπολογίστηκαν από την μέθοδο της Θεωρίας Ελαστικότητας δεν υπάρχει καμία παράμετρος που να επηρεάζεται από τις γωνίες διεύθυνσης ινών. Αντίστοιχα για τα Πεπερασμένα Στοιχεία παρατηρούμε ότι ισχύουν τα ίδια συμπεράσματα. Ειδικά όσον αφορά στην μέγιστη τάση, καθώς στο άνω άκρο του πάχους του σύνθετου όπου ασκείται το φορτίο έχουμε αλλοιώσεις στις τιμές ενώ όσο μετακινούμαστε προς το κάτω άκρο οι τιμές βελτιώνονται.
4. Στις τάσεις ως προς τον άξονα x παρατηρούμε μικρή διαφοροποίηση από γωνία σε γωνία διεύθυνσης ινών. Ακόμα και σε μεγάλες μεταβολές γωνιών όπως για

- παράδειγμα μεταξύ 0 και 90 μοίρες, δεν παρατηρείται μεγάλη απόκλιση. Κατά αντιστοιχία με την προηγούμενη παράγραφο η μέθοδος επίλυσης με Πεπερασμένα Στοιχεία παρουσιάζει μικρή απόκλιση για την μεταβολή των γωνιών διεύθυνσης ιών, όμως πάλι παρατηρείται στο άνω άκρο του πάχους του σύνθετου μια αλλοίωση αποτελεσμάτων που όπως προαναφέραμε οφείλεται στην επίδραση του επιβαλλόμενου φορτίου.
5. Η επίδραση του μήκους του σύνθετου και συγκεκριμένα του μήκους των στηρίξεων φαίνεται να έχει σημαντική επίδραση στο βέλος κάμψης. Επομένως, όσο αυξάνεται το μήκος της δοκού θα έχουμε με φαινομενικά εκθετική αύξηση του βέλους κάμψης. Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να αναφέρουμε την επίδραση που έχει η γωνία διεύθυνσης ιών στο βέλος κάμψης. Δηλαδή παρατηρείται ότι για γωνία διεύθυνσης ιών 90 μοίρες, υπάρχει πολύ μεγαλύτερη αύξηση στις κλίσεις των καμπυλών όταν αυξάνεται το μήκος της δοκού. Αντίθετα για γωνία ιών ίση με 0 μοίρες η αύξηση του βέλους κάμψης όταν υπάρχει η αντίστοιχη αύξηση του μήκους, είναι πολύ μικρότερη, όπως επίσης και η κλίση των καμπυλών. Προφανώς για όσο αυξάνεται η γωνία ιών από 0 έως 90 μοίρες παρατηρούνται τα ίδια σε ενδιάμεσες καταστάσεις.
 6. Μια άλλη παράμετρος η οποία μελετήθηκε ως προς την μεταβολή της είναι το πάχος του συνθέτου. Όσο αυξάνεται το πάχος του συνθέτου, όπως είναι λογικό παρατηρούμε μείωση του βέλους κάμψης. Όμως εδώ έχει σημασία ο συνδυασμός παρατήρησης με τις γωνίες διεύθυνσης ιών. Συγκεκριμένα βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται το πάχος του δοκιμίου καταλήγουμε σε μια σύγκλιση τιμών ανεξαρτήτου γωνίας ιών. Επομένως, το βέλος κάμψης για παχιές διατομές δεν επηρεάζεται από την διεύθυνση των ιών. Αντίθετα παρατηρούμε ότι για μικρά πάχη δοκιμίου η διεύθυνση των ιών έχει σημαντικό ρόλο και κατά τα γνωστά όσο αυξάνεται η γωνία διεύθυνσης των ιών τόσο αυξάνεται και το βέλος κάμψης. Επίσης είναι καλό να επαναλάβουμε ότι οι κλίσεις των καμπυλών είναι πολύ πιο μεγάλες για γωνίες ιών στις 90 μοίρες, ενώ μειώνονται όσο κινούμαστε προς τις 0 μοίρες.
 7. Ο σημαντικότερος παράγοντας που γίνεται το πείραμα άσυμμετρης κάμψης τεσσάρων είναι ο συντελεστής λ και η μελέτη του βέλους κάμψης και της αντοχής της δοκού όταν ο συντελεστής αυτός μεταβάλλεται. Ο συγκεκριμένος συντελεστής επηρεάζει το σημείο εφαρμογής του φορτίου καθώς και το μήκος της δοκού μετά από την δεξιά κύλιση. Παρατηρούμε ότι για $\lambda=3$ έχουμε το μεγαλύτερο βέλος κάμψης ενώ για τιμές μεγαλύτερες του $\lambda=3$ βλέπουμε ότι το βέλος κάμψης μειώνεται. Όπως επίσης και για τιμές μικρότερες του $\lambda=3$ έχουμε εξίσου μείωση των τιμών του βέλους κάμψης. Σε σύγκριση με τις γωνίες διεύθυνσης των ιών βλέπουμε πάλι να επηρεάζονται περισσότερο οι ίνες με γωνία διεύθυνσης 90 μοίρες σε σχέση με τις 0 μοίρες και βλέπουμε ξανά ότι έχουμε αύξηση της κλίσης όσο αυξάνεται η γωνία διεύθυνσης.

8. Όσον αφορά στην σύγκριση μεταξύ των μεθόδων παρατηρείται μεγάλη διαφορά όταν μεταβάλλεται ο συντελεστής λ . Δηλαδή για μικρές τιμές του λ έχουμε πολύ μεγάλες αποκλίσεις στις τιμές του βέλους κάμψης με την μέθοδο της Θεωρίας Ελαστικότητας. Όσο αυξάνεται όμως ο συντελεστής λ τόσο βελτιώνονται οι τιμές του βέλους κάμψης και γίνονται πιο ρεαλιστικές. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει το συγκεκριμένο γεγονός είναι ότι για μικρές του λ , το φορτίο ασκείται πιο κοντά στην άρθρωση σε σχέση με μεγαλύτερες τιμές του λ . Ως εκ τούτου έχουμε αλλοίωση των αποτελεσμάτων όπως είναι γνωστό από την αρχή Saint-Venant. Επομένως όσο απομακρυνόμαστε από την άρθρωση τα αποτελέσματα θα βελτιώνονται και θα προσεγγίζουν τα πειραματικά δεδομένα, όποτε υπάρχουν. Από την άλλη πλευρά η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων φαίνεται να έχει καλύτερες προσεγγίσεις σε όλο το εύρος των πιθανών μεταβολών των παραμέτρων.
9. Επιπλέον για την σύγκριση των δύο μεθόδων παρατηρούμε ότι στην Θεωρία της Ελαστικότητας έχουν σημασία τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της δοκού. Δυστυχώς αυτό δεν φάνηκε σε όλες τις αναλύσεις αλλά για 45 μοίρες γωνία ινών και 60 μοίρες γωνία ινών βλέπουμε ότι με την αύξηση του μήκους παρατηρείται μεγαλύτερη σύγκλιση για τις δύο μεθόδους, όπου αυτό ήταν το αναμενόμενο καθώς η Θεωρία Ελαστικότητας σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε λειτουργεί καλύτερα στα δισδιάστατα προβλήματα δοκού όταν ο λόγος μήκος προς το πάχος είναι μεγάλος. Επομένως όταν αυτός ο λόγος μεγαλώνει αυξάνεται και η ακρίβεια των αποτελεσμάτων.
10. Κατά την ίδια αντιστοιχία όταν αυξάνεται το πάχος της δοκού αναμένουμε τα αποτελέσματα να αποκλίνουν. Το γεγονός αυτό γίνεται ακριβώς για τον ίδιο λόγο που αναφέραμε στην παρατήρηση 9, δηλαδή μειώνεται ο λόγος μήκος προς πάχος και οι εξισώσεις της Θεωρίας της Ελαστικότητας δεν είναι τόσο αποτελεσματικές.
11. Συγκριτικά με τις μεθόδους, παρατηρούμε ότι οι λύσεις συγκλίνουν σε πολύ μεγάλο βαθμό. Με καλύτερη περίπτωση σύγκλισης σε γωνίες 45 και 60 μοιρών ενώ τα μεγαλύτερα σφάλματα παρουσιάζονται για τις ακραίες τιμές γωνιών, δηλαδή για τις 0 και 90 μοίρες γωνίας ινών.
12. Εξαιτίας του ότι υπήρχαν κάποια πειραματικά δεδομένα με την κάμψη τριών σημείων έγινε μια αντίστοιχη μοντελοποίηση με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων και της Θεωρίας Ελαστικότητας, όπου παρατηρήθηκαν τα ίδια αποτελέσματα σχετικά με την σύγκλιση και τις διαφορές στις τιμές. Δηλαδή παρατηρήθηκε καλύτερη σύγκλιση τιμών για τιμές γωνίας ινών ίσες με 45 μοίρες ενώ το μεγαλύτερο σφάλμα παρατηρήθηκε για τις ακραίες τιμές όπου η γωνία ινών είναι είτε 0 είτε 90 μοίρες. Ενώ μια μέση κατάσταση είχαμε για τις ενδιάμεσες γωνίες ινών.

13. Επιπροσθέτως έγινε σύγκριση μεταξύ των μεθόδων κάμψης τριών σημείων και της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων, ώστε να παρατηρήσουμε τις διαφορές ως προς την βύθιση του βέλους κάμψης. Προφανώς για να γίνει η σύγκριση σωστά έπρεπε να πάρουμε τιμές για τον συντελεστή $\lambda=3$, όπου για την Θεωρία της Ελαστικότητας δεν έχουμε καλές τιμές. Για τον λόγο αυτό η σύγκριση έγινε μόνο με Πεπερασμένα Στοιχεία. Επομένως, αυτό που παρατηρήθηκε είναι ότι για ίδιο επιβαλλόμενο φορτίο το βέλος κάμψης για την κάμψη τριών σημείων είναι αρκετά μεγαλύτερο από ότι το βέλος για την ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων. Επιπροσθέτως, για ακόμα μια φορά έχει επιρροή η διεύθυνση των ινών όπου για γωνία ινών 90 μοίρες έχουμε πολύ μεγαλύτερο βέλος και μικρότερο ασκούμενο φορτίο.

5.2 Δυνατότητες Περαιτέρω Μελέτης

Παρά το γεγονός ότι τα αποτελέσματα από την ανάλυση με τη μέθοδο των Π.Σ. της μεθόδου της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων σε σύνθετες δοκούς με ίνες μίας διεύθυνσης συγκλίνουν ικανοποιητικά ως προς τα αποτελέσματα των αναλυτικών μεθόδων, παραμένει η ανάγκη σύγκρισης όλων των παραπάνω με πειραματικά αποτελέσματα τα οποία δεν ήταν δυνατό να εκτελεστούν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

Επιπλέον, θα ήταν ενδιαφέρον να εξεταστεί με την Θεωρία Πολυστρωμάτων και η περίπτωση πολύστρωτου σύνθετου υλικού από στρώσεις με τον ίδιο προσανατολισμό ινών ώστε να υπάρχει σύγκριση των αποτελεσμάτων με μια ακόμα μέθοδο επίλυσης.

Ακόμη, ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η διερεύνηση της επιρροής κατασκευαστικών ατελειών σε αυτές τις δοκούς. Αυτό θα μπορούσε να διερευνηθεί είτε με την παραδοχή ύπαρξης ρωγμών, είτε με την παραδοχή ύπαρξης ενδιάμεσων στρωμάτων RRL μεταβλητού πάχους, πλάτους και μήκους σε διάφορες περιοχές της δοκού.

Τέλος, το μεγαλύτερο εύρος περαιτέρω μελέτης υπάρχει στον τομέα της ανάλυσης με Πεπερασμένα Στοιχεία. Πιο συγκεκριμένα, ο τομέας αυτός θα προσέφερε σημαντικά συμπεράσματα μελλοντικά εάν η ανάλυση του ίδιου πειράματος πραγματοποιούνταν με στοιχεία κελύφους και όχι 3D στερεά στοιχεία. Επίσης, για καλύτερη ακρίβεια θα μπορούσαν να σχεδιαστούν κυλινδρικά στελέχη φόρτισης και στήριξης, ώστε να μην εφαρμόζεται συγκεντρωμένο φορτίο αλλά οριακή συνθήκη μετατόπισης, καθώς και ένας πολύ πυκνός κάρναβος ο οποίος δεν θα αφήσει περιθώρια για μη ακριβή αποτελέσματα.

Βιβλιογραφία

1. S. W. Tsai, Composite Design, 4th ed., Think Composites, Dayton, 1988.
2. Γ. Τσαμασφύρος & Γ. Καντεράκης, Ειδικά Κεφάλαια Σύνθετων Υλικών, Ε.Μ.Π., 2004
3. Robert Matthews, Composite Materials Analysis, 2001
4. Α. Σιδερίδης, Επίδρασις της ενδιάμεσου φάσεως στις θερμοδυναμικές ιδιότητες των κοκκωδών και ινωδών υλικών, Διδακτορική διατριβή, Αθήνα, 1998
5. E. Sideridis, J. N. Ashton and R. Kitching, Measurement of the interlaminar shear strength of glass-reinforced plastics of different construction using the off-axis four-point bending test, Composite Structures 18, 1991, 139–161
6. Ε. Σπυριδοπούλου, Μελέτη σύνθετων υλικών (πολυστρωμάτων) ενισχυμένων με ίνες τυχούσης διευθύνσεως σε κάμψη, Διπλωματική Εργασία, Αθήνα, 1993
7. E. Sideridis, An Interlaminar Shear Strength for Fibre Reinforced Plastics, MSc Thesis, University of Manchester, 1986
8. Ι. Βαρδουλάκης, Τεχνική Μηχανική ΙΙ, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1998
9. D. F. Sims and H. E. Wilson, Distribution of shearing stresses in a composite beam under transverse loading, Composites, July, 1978, pp. 185-191.
10. E. Sideridis, J. N. Ashton and R. Kitching, The off-axis four-point bending method for the estimation of the interlaminar shear strength of fibre-reinforced composites, Phase Interaction in Composite Materials, Omega Scientific, Oxon, 1992, pp. 551-565
11. Martin H. Sadd, Elasticity Theory, Applications, and numeric, Third Edition 2014, Elsevier Rhode Island
12. Zvi Hashin, Plane Anisotropic Beams, University of Pennsylvania, June 1967
13. S. G. Lekhnitskii, Anisotropic Plates (translated from Russian_by E. Z. Stowell), American Iron and Steel Institute, New York, N. Y. , 1956
14. Onur Sayman and Umran Esendemir, An Elastic-Plastic Stress Analysis on a Thermoplastic Composite Beam of Arbitrary Orientation Supported from Two Ends Acted upon with a Force at the Midpoint, Department of Mechanical Engineering, Süleyman Demirel University, Isparta, Turkey

15. Umran Esendemir, Derivation for Flexural and Shear Deflection of Simply Supported, Isparta 06-02-2009.
16. Πανταβός Μιχαήλ, Μελέτη Στατικών, Δυναμικών και Ιξωδοελαστικών Ιδιοτήτων Σύνθετων Υλικών με ίνες Τυχούσης διεύθυνσεως, Αθήνα 2008
17. Γ. Τσαμασφύρος, Ε. Ε. Θεοτόκογλου, Η Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, Μεταπτυχιακή Εργασία, Αθήνα , 1994
18. Δ. Μανωλεδάκης, Επίλυση Σύνθετων Δοκών με Ίνες Τυχούσης Διευθύνσεως σε Ασύμμετρη Κάμψη με Υπολογιστικές και Αναλυτικές Μεθόδους, Μεταπτυχιακή Εργασία, Αθήνα, 2008
19. Νίκος Βιλλιότης, Μελέτη της Μηχανικής Συμπεριφοράς Δοκών από Σύνθετο Υλικό με ίνες μιας και δύο διευθύνσεων σε ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων με αναλυτικές μεθόδους και την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, Μεταπτυχιακή Εργασία, Αθήνα 2020.
20. Καλογεράς Σπυρίδων, Μελέτη μηχανικής συμπεριφοράς βραχείας δοκού συνθέτου Υλικού σε κάμψη με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.
21. Σαραγάς Σπυρίδων και Βαλβής Λάζαρος, Μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς των ινώδων συνθέτων υλικών σε διάτμηση με την μέθοδο βραχείας δοκού, Μεταπτυχιακή Εργασία. Αθήνα 1991.
22. A.C. Manalo, Behaviour of fibre composite sandwich structures under short and asymmetrical beam shear tests, Elsevier, 2012.
23. Emiliios Sideridis, An interlaminar shear test for fibre reinforced plastics, Applied Mechanics Division Department of mechanical Engineering university of Manchester institute of science and technology.
24. T. Seshaiyah & K. Vijaya Kumar Eddy, Effect of Fiber Orientation on the Mechanical Behavior of E-GLASS Fibre Reinforced EPOXY Composite Materials, *Department of Mechanical Engineering, JNTU College of Engineering, Kukatpally, Hyderabad, Telangana, India* 2018