

Βαρυτικά Κύματα σε Βιώσιμες $f(R)$ Θεωρίες
Βαρύτητας

Χάρης Τσάκωνας

20 Φεβρουαρίου 2021

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	6
2	Γενική Σχετικότητα	10
2.1	Γενικά Στοιχεία	10
2.1.1	Πολλαπλότητες	11
2.1.2	Διανύσματα και Συνδιανύσματα	12
2.1.3	Η Μετρική	16
2.1.4	Συναλλοίωτη Παράγωγος, Σύμβολα Christoffel και Συνοχή Levi-Civita	17
2.1.5	Οι τανυστές Riemann, Ricci και Einstein	19
2.2	Η Δράση Einstein-Hilbert και οι Εξισώσεις Πεδίου	21
2.3	Η λύση Schwarzschild	24
3	Τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας	27
3.1	Γιατί να τροποποιήσουμε τη Γενική Σχετικότητα	27
3.2	Εναλλακτικές Θεωρίες	29
3.2.1	Αντικαθιστώντας το βαθμωτό Ricci με πιο σύνθετες συναρτήσεις: Οι $f(R)$ θεωρίες	30
3.2.2	Δυναμική Ισοδυναμία με τη Θεωρία Brans-Dicke	30
3.2.3	Ο Σύμμορφος Μετασχηματισμός	32
3.2.4	Θεωρία Horndeski	34
4	Αστέρες Νετρονίων	35
4.1	Γενικές Πληροφορίες	35
4.2	Εσωτερική Δομή και Καταστατική Εξίσωση	37
5	Βαρυτικά Κύματα και Tidal Love Numbers	41
5.1	Τα Βαρυτικά Κύματα	41
5.1.1	Βαρυτικές Διαταραχές σε μη Επίπεδο Υπόβαθρο	41
5.1.2	Βαρυτικές Διαταραχές σε Υπόβαθρο Minkowski	43
5.2	Οι Παλιρροϊκοί Αριθμοί	47

6	Tidal Love Numbers Αστέρων Νετρονίων για την $f(R) = R - \beta R_E(1 - e^{-R/R_E})$	52
6.1	Μαθηματικό Υπόβαθρο της Επιλεγθείσας $f(R)$	53
6.2	Υπολογισμός Παλιρροϊκών Αριθμών	56
6.2.1	Πολικοί Παλιρροϊκοί Αριθμοί	56
6.2.2	Αξονικοί Παλιρροϊκοί Αριθμοί	59
7	Επίλογος	61

Περίληψη

Κεντρική στόχευση της παρακάτω μελέτης είναι η άρση των εκφυλισμών στην καταστατική εξίσωση των αστέρων νετρονίων που προκύπτουν λόγω της εγγενούς αβεβαιότητας στις παραμέτρους της καταστατικής εξίσωσης από τη μία, και στην αβεβαιότητα που προκύπτει λόγω εμπρόθετης τροποποίησης της Γενικής Σχετικότητας (που ποσοτικοποιείται επίσης μέσω παραμέτρων απόκλισης από αυτήν). Ξεκινώντας, παρουσιάζεται η Γενική θεωρία της Σχετικότητας, τα βασικότερα θεωρητικά της γνωρίσματα, εξάγονται οι εξισώσεις κίνησης και μία λύση αυτών -η λύση Schwarzschild. Στη συνέχεια, μελετώνται οι εναλλακτικές θεωρίες βαρύτητας, οι λόγοι που προσφεύγουμε σε αυτές έναντι της Γενικής Σχετικότητας και γίνεται ειδική μνεία στις $f(R)$ θεωρίες. Το τέταρτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στους αστέρες νετρονίων, που θα αποτελέσουν το «εργαστήριο» αναφοράς της όλης μελέτης, στην εσωτερική τους δομή και την καταστατική τους εξίσωση. Στο επόμενο κεφάλαιο αναλύονται τα βαρυτικά κύματα και οι παλιρροϊκοί αριθμοί συμπαγών σωμάτων, οι δύο βασικές έννοιες της πειραματικής και θεωρητικής μας ανάλυσης. Τέλος, γίνεται η αριθμητική επίλυση -μέχρι ενός σημείου- του προβλήματος που τέθηκε, για μια συγκεκριμένη υποκατηγορία $f(R)$ θεωρίας, παρουσιάζοντας κάποια αποτελέσματα και αναφέροντας θεωρητικές προεκτάσεις αυτών.

Abstract

The main objective of the following study is to remove the degeneracies in the equation of state of neutron stars that arise due to the inherent uncertainty in the parameters of the equation of state on the one hand, and the uncertainty that arises due to intentional modification of General Relativity (also quantified by parameters of divergence). To begin with, the General Theory of Relativity is presented, alongwith its basic theoretical features, the equations of motion and also, one solution is derived - the Schwarzschild solution. Next, the alternative theories of gravity are studied, the reasons we use them instead of General Relativity, and special mention is made to the $f(R)$ theories. The fourth chapter is dedicated to the Neutron Stars, which will be the main "laboratory" of the whole study, their internal structure and the equation of state describing them. The next chapter analyzes gravitational waves and tidal numbers of solid bodies, the two basic concepts of our experimental and theoretical analysis. Finally, the problem is solved numerically - up to a point - for a specific subcategory of $f(R)$ theories, presenting some results and mentioning theoretical extensions of them.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στις 25 Νοεμβρίου 1915 ο Albert Einstein (1879-1955) παρουσιάζει στην Πρωσική Ακαδημία Επιστημών τις εξισώσεις πεδίου της Γενικής Σχετικότητας. Έναν και πλέον αιώνα αργότερα, η Γενική Σχετικότητα εξακολουθεί να δίνει ακριβή πειραματικά αποτελέσματα σχετικά με τα βαρυτικά φαινόμενα, εκτός πολύ συγκριμένων ειδικών περιπτώσεων. Παρόλαυτα, μπορούμε με βεβαιότητα να ισχυριστούμε πως δεν αποτελεί την τελική θεωρία βαρύτητας. Κατά πάσα πιθανότητα, η Γενική Σχετικότητα θα γίνει μέρος μιας ευρύτερης -κατά το λογικό πλάτος- θεωρίας της οποίας και θα αποτελεί οριακή περίπτωση.

Οι αδυναμίες της Γενικής Σχετικότητας μπορούν να διακριθούν σε θεωρητικής και πειραματικής φύσεως. Ξεκινώντας από την πρώτη κατηγορία, ο κυριότερος θεωρητικός στόχος που έχει να αντιμετωπίσει η θεωρία του Einstein είναι η εναρμόνισή της με την πλέον αποδεκτή πεδιακή θεωρία που διέπει την ύλη, τις θεμελιώδεις δυνάμεις και τις αλληλεπιδράσεις τους, την Κβαντική Θεωρία Πεδίου.

Όντας μια κλασική πεδιακή θεωρία, η Γενική Σχετικότητα θα έπρεπε να «κβαντώνεται» με τη χρήση των συνήθων μεθόδων (όπως λ.χ. ο Ηλεκτρομαγνητισμός, όπου το ομόλογο κβαντικό πεδίο ζει στον χώρο Minkowski): κάτι τέτοιο όμως αποδεικνύεται ανέφικτο, καθώς εφ' ενός δεν είναι επανακανονικοποιήσιμη (renormalizable) (σε όλες τις κλίμακες και ενέργειες) και αφ' ετέρου γιατί το τοπολογικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο αναπτύσσεται η βαρυτική αλληλεπίδραση, ταυτίζεται με τους βαθμούς ελευθερίας της. Η βαρύτητα ενσαρκώνεται ως γεωμετρία.

Η έτερη κατηγορία-κίνητρο για την τροποποίηση της Γενικής Σχετικότητας, συνάγεται από την απόπειρα ερμηνείας της κοσμολογικής εξέλιξης του σύμπαντος και τον συγκερασμό της θεωρίας με τα πειραματικά δεδομένα. Το σύμπαν φαίνεται να έχει περάσει δύο φάσεις επιταχυνόμενης διαστολής. Για την πρώτη περίοδο, την καλούμενη και πληθωρισμό (inflation), δεν υπάρχει σαφής πειραματική επιβεβαίωση, αποτελεί όμως ένα γενικά αποδεκτό μοντέλο που ερμηνεύει διάφορα θεωρητικά προβλήματα και φέρεται να έλαβε χώρα από $10^{-36}s$ έως περίπου $10^{-33}s$ μετά τη Μεγάλη Έκρηξη (Big Bang). Η δεύτερη περίοδος

επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος ξεκίνησε πριν περίπου 4 δισεκατομμύρια έτη και συνεχίζει ως τις μέρες μας. Σε αντίθεση με το πληθωριστικό μοντέλο, η ύστερη επιταχυνόμενη διαστολή επιβεβαιώθηκε πειραματικά από το 1998 και πλέον, εφόσον κατά πάσα πιθανότητα είναι ένα βαρυτικής προέλευσης φαινόμενο, καλείται να ερμηνευτεί μέσω της αποδεκτής θεωρίας βαρύτητας.

Η περίοδος του πληθωρισμού εξηγείται συνήθως με την εισαγωγή ενός βαθμωτού πεδίου (inflaton) [1]. Η ύστερη επιταχυνόμενη φάση, σύμφωνα με το Καθιερωμένο Πρότυπο (Standard Model) και τις εξισώσεις της Γενικής Σχετικότητας, εξηγείται μέσω της θετικής κοσμολογικής σταθεράς Λ , η οποία εμφανίζεται ως ενέργεια του κενού χώρου. Τόσο όμως η αυθαίρετη εισαγωγή ενός βαθμωτού πεδίου, όσο και οι πειραματικές αναντιστοιχίες (κανένα από τα υπάρχοντα θεωρητικά μοντέλα που προσδίδουν συγκεκριμένη τιμή στην ενέργεια του κενού δεν συμφωνεί με την πειραματική τιμή της κοσμολογικής σταθεράς Λ), ωθούν την ανάπτυξη εναλλακτικών θεωριών, οι οποίες ως αφετηρία τους έχουν την τροποποίηση του βαρυτικού μέλους των εξισώσεων πεδίου της Γενικής Σχετικότητας και όχι την προσθήκη σκοτεινών πηγών ενέργειας [2] [η κοσμολογική σταθερά καλείται -και ερμηνεύεται ως- σκοτεινή ενέργεια (dark energy)].

Προς την κατεύθυνση αυτήν, η πλέον απλή, εναλλακτική προσέγγιση προκύπτει από τον εμπλουτισμό της δράσης Einstein-Hilbert μέσω της αντικατάστασης του βαθμωτού Ricci με πιο σύνθετες συναρτήσεις αυτού της μορφής $f(R)$ [3, 4]. Ακόμη, μπορούν να κατασκευαστούν περιπλοκότερες θεωρίες με επιπλέον βαθμούς ελευθερίας, που να περιλαμβάνουν ανώτερης τάξης αναλλοίωτα μεγέθη, όπως η θεωρία Gauss-Bonnet (ή συναρτήσεις αυτής [5, 6]), η προσέγγιση του Lovelock [7, 8] περί βαρύτητας σε περισσότερες διαστάσεις, η προσθήκη όρων του Weyl [9], κ.ά. Εναλλακτικά, ξεκινώντας από βαρύτητα με στρέψη (torsion) υπάρχουν διάφορες πιθανές τροποποιήσεις όπως η $f(T)$ βαρύτητα [10, 11], η $f(T, T_G)$ [12] κ.ά.

Το επακόλουθο, κομβικό ερώτημα που προκύπτει από τα παραπάνω είναι πιο πείραμα ή/και παρατήρηση μπορεί να αποτελέσει το μέσο επιβεβαίωσης μιας εκ των αναρίθμητων πιθανών τροποποιήσεων της βαρύτητας και, συνακόλουθα -αν πράγματι η «σωστή» θεωρία ανήκει π.χ. στην κλάση θεωριών $f(R)$ - ποια διαδικασία μπορεί να οδηγήσει στον καθορισμό της ζητούμενης συνάρτησης.

Μέχρι πρότενος, τα βασικά εργαλεία της επιστημονικής κοινότητας για την αντιμετώπιση αυτών των προκλήσεων ήταν αφ' ενός κοσμολογικές παρατηρήσεις που σχετίζονται με την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος, προερχόμενα από τις Εκρήξεις Υπερκαινοφανών τύπου Ia (Supernovae type Ia), την Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου (Cosmic Microwave Background), τις Βαρυονικές Ακουστικές Ταλαντώσεις (Baryonic Acoustic Oscillations), τις μετρήσεις της σταθεράς του Hubble, κ.λπ., και, αφ' ετέρου, δεδομένα διαταρακτικής θεωρητικής προέλευσης όπως η Δομή Μεγάλης Κλίμακας (Large Scale Structure), η παράμετρος $f\sigma_8$, το θερμοκρασιακό φάσμα της Κοσμικής Ακτινοβολίας Υποβάθρου κ.ά. Μέσω αντιπαράθεσης των πολυάριθμων εναλλακτικών τροποποιήσεων με τα παραπάνω δεδομένα αποκλείεται ένας μεγάλος όγκος πιθανών

θεωριών. Όσες απομένουν θεωρούνται -μέχρι αποδείξεως του εναντίου- πειραματικά βιώσιμες [13–17].

Όμως το 2015 άνοιξε ένα νέο κεφάλαιο στην παρατηρησιακή ιστορία ολόκληρης της Φυσικής. Επιβεβαιώθηκαν οι θεωρητικές προβλέψεις του Einstein και οι (2ης γενιάς) ανιχνευτές βαρυτικών κυμάτων εντόπισαν βαρυτικά κύματα προερχόμενα από συγχώνευση δύο μελανών οπών [18] και, δύο χρόνια αργότερα, από τη συγχώνευση δύο αστέρων νετρονίων [19].

Ορισμένως, τα βαρυτικά κύματα από συγχωνεύσεις δυαδικών συστημάτων (binary systems) είναι μια νέα λεωφόρος παρατηρησιακών δεδομένων, ύστερα από 400 και πλέον χρόνια λήψης αποκλειστικά και μόνον ηλεκτρομαγνητικής φύσεως πληροφοριών. Τα καταγραφόμενα γεγονότα, αν και ευάριθμα προς το παρόν, αναμένεται να αυξηθούν σε τάξεις των χιλιάδων τα επόμενα χρόνια.

Είναι σαφές, πως η ανάλυση των βαρυτικών κυμάτων είναι σε άμεση συνάρτηση με την επιλογή της βαρυτικής θεωρίας που επιστρατεύεται. Έτσι, τα δεδομένα των βαρυτικών διαταραχών αποτελούν ένα καινοφανές πεδίο δοκιμασίας των διαφόρων εναλλακτικών θεωριών βαρύτητας [20–34].

Συμπερασματικά, το σημαντικότερο απότοκο της ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων είναι πως πλέον δύναται να λαμβάνονται δύο «ειδών» πληροφορίες από ένα και μόνο γεγονός, οι οποίες είναι θεωρητικά ανεξάρτητες μεταξύ τους [λόγω αυτού η επικείμενη παρατηρησιακή εποχή καλείται και Περίοδος της Πολυμηνυματικής Αστρονομίας (Era of Multimessenger Astronomy)]: ηλεκτρομαγνητικές (λ.χ. ακτίνες γ, νετρίνα κ.λπ.) και βαρυτικές (βαρυτικά κύματα). Τα ηλεκτρομαγνητικά δεδομένα είναι ανεξάρτητα από τη βαρυτική θεωρία που θα χρησιμοποιηθεί και δύναται να αντιπαρατεθούν προς τα -εξαρτώμενα από τη θεωρία- βαρυτικά, ώστε να επαληθεύσουν ή να διαψεύσουν προβλέψεις εναλλακτικών θεωριών βαρύτητας -ή και της ίδια ακόμη της Γενικής Σχετικότητας.

Στην κάτωθι εργασία, επιλέγονται ως πειραματικά αντικείμενα προς μελέτη τα δυαδικά συστήματα νετρονίων. Οι αστέρες νετρονίων -σε αντίθεση με τις μελανές οπές που είναι σχετικά απλά ως προς τις παραμέτρους χαρακτηρισμού τους αστρικά σώματα- παρουσιάζουν σημαντική αβεβαιότητα σε παραμέτρους τους όπως -κατά κύριο λόγο- η καταστατική τους εξίσωση. Τονίζεται, πως λόγω του ότι τα βαρυτικά κύματα που έχουν ως τώρα εντοπιστεί προέρχονται από συγχωνεύσεις σφαιρικών αντικειμένων, ένα σημαντικό μερίδιο της σχετικής βιβλιογραφίας [35–62] αφιερώνεται στη μελέτη σφαιρικά συμμετρικών λύσεων για τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας, μια κατεύθυνση που θα ακολουθηθεί και στην παρούσα εργασία για τους αστέρες νετρονίων.

Ως παράμετρος της μελέτης μας επιλέγονται οι παλιρροϊκοί αριθμοί [63, 64]. Είναι ίσως η πλέον προσιτή προς ανάλυση παράμετρος των αστέρων νετρονίων και δύναται να μετρηθεί πειραματικά [65–71, 103, 105] μέσω του φάσματος των βαρυτικών κυμάτων που εκπέμπονται κατά τη φάση της περιδίνησης (inspiral) ή/και της συγχώνευσης (merger) ενός δυαδικού συστήματος αλλά και να υπολογιστεί θεωρητικά (σαφώς, σε άμεση εξάρτηση με την επιλεχθείσα βαρυτική θεωρία).

Οι παλιρροϊκοί αριθμοί είναι σταθερές αναλογίας που εκφράζουν τη συσχέτι-

ση μεταξύ του ασκούμενου τετραπολικού πεδίου από το ένα άστρο του ζεύγους και της τετραπολικής απόκρισης του άλλου άστρου έναντι της τάσης αυτής. Γίνεται εύκολα αντιληπτό, πως οι σταθερές αυτές εμπεριέχουν πληροφορίες και συναρτώνται άμεσα από την εσωτερική δομή του αστεριού. Μέσω αυτών λοιπόν μπορούμε να καθορίσουμε ακριβέστερα τα όρια της απροσδιοριστίας στους παράγοντες των διαφόρων καταστατικών εξισώσεων που προτείνονται για την περιγραφή του άστρου.

Όμως, το πρόβλημα που ανακύπτει όταν λαμβάνουμε λ.χ. μια $f(R)$ θεωρία αντί της Γενικής Σχετικότητας, είναι η αλληλεπικάλυψη-εκφυλισμός στο φάσμα της απροσδιοριστίας καθώς η αιτία του εύρους της άγνοιάς μας ενδέχεται να οφείλεται τόσο στην πολυπαραγοντική αδυναμία προσδιορισμού της ακριβούς καταστατικής εξίσωσης, όσο και στις πιθανές τροποποιήσεις της αφετηριακής βαρυτικής θεωρίας [72–75, 114].

Σκοπός μας λοιπόν, στο ερευνητικό κομμάτι της εργασίας, θα είναι ο υπολογισμός των παλιρροϊκών αριθμών ενός εκ των δύο αστέρων νετρονίων σε ένα δυαδικό σύστημα, εκκινώντας από μια εκ των πλέον πειραματικά αποδεκτών-βιώσιμων εναλλακτικών θεωριών βαρύτητας, το εκθετικό μοντέλο βαρύτητας (exponential gravity model) [113]. Μέσω αυτής της μελέτης, ευελπιστούμε να άρουμε -ως έναν βαθμό- τους εκφυλισμούς μεταξύ των επιδράσεων της εναλλακτικής θεωρίας και της εγγενούς απροσδιοριστίας των παραμέτρων της καταστατικής εξίσωσης των αστέρων. Κατά αυτόν τον τρόπο, όταν υπάρχουν διαθέσιμα περισσότερα δεδομένα από βαρυτικά κύματα, θα είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε τα υπολογιστικά μας δεδομένα με τα πειραματικά και να αποφανθούμε και για την εγκυρότητα της υπό εξέταση εναλλακτικής θεωρίας βαρύτητας.

Έχουν γίνει ήδη κάποιες μελέτες παλιρροϊκών αριθμών για $f(R)$ θεωρίες [76–78], όπως και για κλάσεις θεωριών βαθμωτού-τανυστή [79, 80] και βαρύτητα Chern-Simons [72, 73]. Παρόλαυτα, η προσέγγιση των μέχρι τώρα εργασιών είναι επικεντρωμένη σε απλά, δοκιμαστικά μοντέλα εναλλακτικών θεωριών και όχι σε πειραματικά βιώσιμες θεωρίες. Λόγω αυτού, παρόλο που είναι χρήσιμες για την αποσαφήνιση ποιοτικών έστω χαρακτηριστικών της θεωρίας, δεν έχουν ποσοτική σημασία καθώς βασίζονται σε μη ρεαλιστικές τιμές παραμέτρων απόκλισης από τη Γενική Σχετικότητα.

Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να εφαρμόσουμε μια «δοκιμασμένη συνταγή», στο βιώσιμο όμως εκθετικό μοντέλο $f(R)$ βαρύτητας. Οι τιμές των παραμέτρων που λαμβάνονται προϋδεάζουν σαφώς για εξαιρετικά μικρές αποκλίσεις από την κλασική θεωρία (γί' αυτό εζ' άλλου είναι και πειραματικά αποδεκτές).

Κεφάλαιο 2

Γενική Σχετικότητα

Πριν την οποιαδήποτε απόπειρα τροποποίησης της καθεστηκυίας θεωρίας, οφείλουμε να παρουσιάσουμε την τρέχουσα, συνεπή με τα πειραματικά δεδομένα (σαφώς, σε συγκεκριμένο εύρος και κλίμακα, όπως θα αναφερθεί παρακάτω) θεωρία βαρύτητας, τη Γενική Σχετικότητα. Εισηγητής της θεωρίας είναι ο Albert Einstein (1879-1955), ενώ η μαθηματική της θεμελίωση οφείλεται, κατά κύριο λόγο, στον David Hilbert (1862-1943).

2.1 Γενικά Στοιχεία

Η πρώτη απόπειρα επιστημονικής στοιχειοθέτησης των παρατηρήσεων των αποτελεσμάτων της βαρύτητας και ένταξή τους σε μία συνολική θεωρία έγινε από τον Isaac Newton (1643-1727). Η Γενική Σχετικότητα είναι τρόπος τινά γενίκευση της Νευτώνειας Θεωρίας με τη δεύτερη να αποτελεί οριακή περίπτωση της πρώτης.

Ειδοποιός διαφορά της Νευτώνειας θεωρίας και της Γενικής Σχετικότητας είναι ο χαρακτήρας-ερμηνεία που προσδίδει καθεμία στη βαρύτητα. Κατά τον Newton η βαρύτητα είναι δύναμη που δρα ακαριαία από απόσταση. Κατά τον Einstein, η βαρύτητα ερμηνεύεται ως γεωμετρία του χώρου και δεν υφίσταται πλέον ακαριαία δράση καθώς όλες οι ταχύτητες αλληλεπίδρασης έχουν ως ανώτατο όριο την ταχύτητα του φωτός. Έτσι, η Γενική Σχετικότητα αποτελεί μία (κλασική) θεωρία πεδίου, που ταύτισε τη βαρύτητα με τη γεωμετρία του χωροχρόνου αποστερώντας της τον χαρακτήρα της δύναμης που μέχρι πρότεινος είχε.

Ο Einstein με αφετηριακή σκέψη την Αρχή της Ισοδυναμίας (Principle of Equivalence) βαρυτικής και αδρανειακής μάζας, και νοητικά πειράματα που αυτή υπαγορεύει, κατέληξε στο συμπέρασμα πως η βαρύτητα δεν μπορεί να είναι τίποτε άλλο από γεωμετρία, δηλαδή ένα εγγενές χαρακτηριστικό του χωροχρόνου, εφόσον επηρεάζει με τον ίδιο τρόπο καθετί στο σύμπαν.

Κάτι τέτοιο δεν ισχύει για καμία άλλη πεδιακή θεωρία. Για παράδειγμα, μπορούμε σε οσοδήποτε μικρή περιοχή του χωροχρόνου να αντιληφθούμε αν

υπάρχει ηλεκτρομαγνητικό πεδίο τοποθετώντας ένα φορτισμένο σωματίδιο και χαρτογραφώντας την πορεία που ακολουθεί. Αν στον κόσμο του Ηλεκτρομαγνητισμού υπήρχαν μονάχα νετρόνια τότε θα είχαμε μία ομόλογη συνθήκη με αυτήν της βαρύτητας. Το ίδιο ισχύει και για άλλες θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις όπως η ασθενής και η ισχυρή πυρηνική δύναμη, οι οποίες αλληλεπιδρούν διαφορετικά με την εκάστοτε κλάση είδους ύλης.

Συμπερασματικά, πρέπει να κατανοηθεί η έννοια της καμπυλότητας (κριτήριο που χαρακτηρίζει τη γεωμετρία) ώστε να μελετηθεί ο χωροχρόνος και εν συνεχεία, να καταδειχθεί πώς η καμπυλότητα μεταφράζεται σε αυτό που αντιλαμβανόμαστε ως βαρύτητα. Με τη συνεισφορά του γνωσιοθεωρητικού υποβάθρου της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας (θεωρία δημοσιευμένη από το, *annus mirabilis* του Einstein, 1905), ο χωροχρόνος λαμβάνεται ως μία τετραδιάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα (manifold) που πληροί συγκεκριμένες προϋποθέσεις [ο χωροχρόνος πρέπει να διαθέτει έναν ομαλό και μέγιστο άτλαντα (atlas), στον οποίο επιλέγουμε μία συνοχή (connection) με μηδενική στρέψη (torsionless), η οποία είναι συμβατή με μια, χρονικά προσανατολισμένη, μετρική τύπου Lorentz] και η γεωμετρία του προσδιορίζεται, ανάλογα με την ενέργεια και την ορμή στην εκάστοτε περίπτωση, από τις εξισώσεις πεδίου του Einstein.

Δεν θα γίνει αναλυτική θεμελίωση των πυρηνικών εννοιών που οικοδομούν τη θεωρία της Γενικής Σχετικότητας, παρά μόνο μία σύντομη παρουσίαση των σημαντικότερων εξ αυτών. Θα αναφερθούμε στις έννοιες της πολλαπλότητας (manifold), των ανταλλοιώτων (contravariant) και συναλλοιώτων (covariant) διανυσμάτων, της μετρικής (metric), της συναλλοιώτης παραγώγου (covariant derivative), της συνοχής Levi-Civita και των συμβόλων Christoffel (Christoffel symbols), του ταυυστή Riemann (Riemann tensor), του ταυυστή Ricci (Ricci tensor), και του ταυυστή Einstein (Einstein tensor), ώστε να φτάσουμε, με αυτές τις έννοιες γνωστές, στο επόμενο υποκεφάλαιο, τη δράση Einstein Hilbert, από την οποία προκύπτουν και οι εξισώσεις κίνησης (εξισώσεις Einstein).

2.1.1 Πολλαπλότητες

Πολλαπλότητα, εν γένει στην τοπολογία και όχι μόνο στην σπουδή της Γενικής Σχετικότητας, νοείται [81] ως ένας συνεχής χώρος που τοπικά παρουσιάζεται ως Ευκλείδειος, όμως συνολικά ενδέχεται να είναι καμπυλωμένος. Οι πολλαπλότητες είναι κατ' ουσίαν οι χώροι προς μελέτη στη Γενική Σχετικότητα, στους οποίους δίνεται ο απαραίτητος τοπολογικός φορμαλισμός.

Σε μαθηματική ορολογία, C^∞ πολλαπλότητα n -διαστάσεων είναι ένα σύνολο M που συνοδεύεται από έναν μέγιστο άτλαντα, ο οποίος περιέχει κάθε συμβατό διάγραμμα (chart). Η έννοια του διαγράμματος μπορεί, εδώ, να ταυιστεί με το σύστημα συντεταγμένων σε κάποιο ανοιχτό σύνολο (αυτό συνεπάγεται και την επακόλουθη αυθαιρεσία στην επιλογή του, καθώς το σύστημα συντεταγμένων είναι κάτι που αποσκοπεί αποκλειστικά στη μελέτη κάποιου φυσικού συστήματος, στερούμενο φυσικής σημασίας). Άτλαντας είναι ένα σύνολο διαγραμμάτων

που είναι ομαλά συνδεδεμένα στις περιοχές αλληλεπικάλυψης. Αξίζει να αναφερθεί, πως οι πολλαπλότητες μάς εξασφαλίζουν την έννοια της συνέχειας του τοπολογικού χώρου, κάτι που, αν μη τι άλλο, φαντάζει απαραίτητο για την περιγραφή ενός αληθινού συστήματος (δεν υπάρχουν ασυνέχειες, π.χ. στην τροχιά ενός σωματιδίου).

Η επιφάνεια μίας σφαίρας είναι μία πολλαπλότητα, όπως και κάθε m -διάστατο «υπερεπίπεδο» μέσα σε ένα n -διάστατο Ευκλείδιο χώρο ($m \leq n$). Με άλλα λόγια, πολλαπλότητα είναι κάθε σύνολο που δύναται να παραμετροποιηθεί κατά ένα συνεχή τρόπο. Ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων μάς δίνει τη διάσταση, ενώ οι ίδιες οι παράμετροι είναι οι συντεταγμένες της πολλαπλότητας. Η αντιστοίχιση σημείων σε αριθμητικές τιμές των παραμέτρων τους μπορεί να θεωρηθεί ως μία απεικόνιση των σημείων της πολλαπλότητας σε σημεία ενός Ευκλείδιου χώρου με τις κατάλληλες διαστάσεις. Κατά αυτόν τον τρόπο λοιπόν, μία πολλαπλότητα παρουσιάζει, τοπικά, τα χαρακτηριστικά του Ευκλείδιου χώρου: είναι ομαλή και έχει συγκεκριμένες διαστάσεις. Η ολική τοπολογία, όμως, μίας πολλαπλότητας μπορεί κάλλιστα να διαφέρει από τον Ευκλείδιο χώρο. Για παράδειγμα, τοπολογικά, μια σφαίρα δεν είναι Ευκλείδια επιφάνεια. Τοπικά όμως, η αντιστοιχία είναι ικανοποιητική: μια μικρή περιοχή της επιφάνειας της σφαίρας μπορεί να απεικονισθεί 1:1 στο εφαπτόμενο στην περιοχή αυτήν επίπεδο. Συμπερασματικά, όπως προαναφέρθηκε, η πολλαπλότητα είναι ένας χώρος ο οποίος τοπικά μεν είναι Ευκλείδιος, αλλά συνολικά μπορεί να εμφανίζει στρέψεις, κάμψεις και γενικώς, παραμορφώσεις οιασδήποτε μορφής (αρκεί κάτω από αυτές ο χώρος να παραμένει συνεχής).

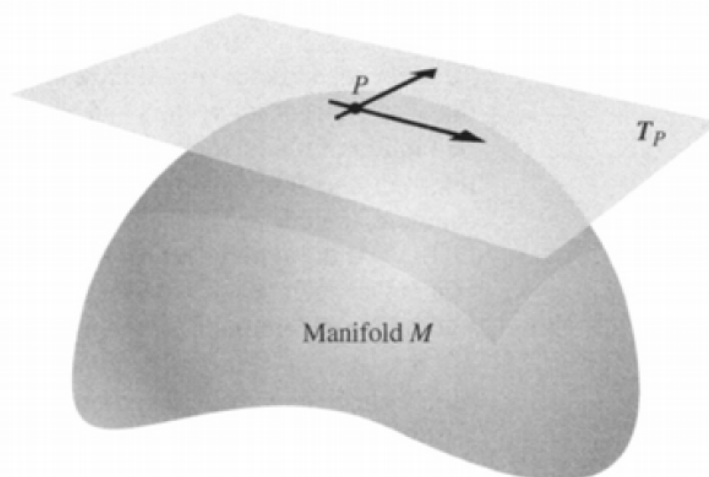
Για τις ανάγκες μελέτης της Γενικής Σχετικότητας οι πολλαπλότητες πρέπει να μελετηθούν παράλληλα με την έννοια της μετρικής. Τονίζεται, πως μία πολλαπλότητα δύναται να ορισθεί και χωρίς τη χρήση μετρικής. Η μετρική είναι ένα τανυστικό πεδίο που «επιβάλλεται» εξωτερικά και δίνει δομή στο άμορφο σύνολο σημείων που είναι η πολλαπλότητα. Μέσω της μετρικής υπολογίζονται οι αποστάσεις (στοιχειώδες μήκος) και οι γωνίες μεταξύ των σημείων, ενώ αυτή καθορίζει πλήρως την καμπυλότητα της πολλαπλότητας (η καμπυλότητα, εν γένει, μπορεί να ορισθεί και χωρίς τη χρήση μετρικής όμως στο πλαίσιο της Γενικής Σχετικότητας γίνεται, εμπρόθετα, η επιλογή να μελετηθούν αποκλειστικά οι πολλαπλότητες των οποίων η καμπυλότητα ορίζεται μέσω μίας μετρικής). Μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα, επάνω στην οποία έχει επιλεγεί ένα συμμετρικό, $(0,2)$ τανυστικό πεδίο $g_{\mu\nu}$ που λειτουργεί ως μετρική σε κάθε σημείο, ονομάζεται πολλαπλότητα Riemann. Με αυτό το είδος πολλαπλοτήτων θα ασχοληθούμε αποκλειστικά από εδώ και πέρα. Η έννοια της μετρικής μελετάται εκτενέστερα σε προσεχές υποκεφάλαιο.

2.1.2 Διανύσματα και Συνδιανύσματα

Η υπόθεση περί συνέχειας και διαφορισιμότητας που απαιτήσαμε συνεπάγεται τη δυνατότητα ορισμού διανυσμάτων [83], τόσο συναλλοίωτων (covariant) όσο και ανταλλοίωτων (contravariant), στην εκάστοτε πολλαπλότητα. Όταν ανα-

φερόμαστε σε ανταλλοίωτο διάνυσμα θα αρκούμαστε στον όρο «διάνυσμα», ενώ για τα συναλλοίωτα διανύσματα θα χρησιμοποιούμε τον όρο «συνδιάνυσμα».

Σε αντίθεση με τον τρισδιάστατο επίπεδο χώρο, τα διανύσματα σε πολλαπλότητες σχετίζονται με συγκεκριμένα σημεία του χωροχρόνου και δεν τίθενται με την παραδοσιακή τεχντροπία «από ένα σημείο έως ένα άλλο». Αντ' αυτού λοιπόν, στον χώρο Minkowski, συσχετίζεται με κάθε σημείο του, p , το σύνολο όλων των πιθανών διανυσμάτων που δύνανται να ξεκινούν από αυτό. Το σύνολο αυτό καλείται εφαπτόμενος χώρος (tangent space) στο σημείο p και συμβολίζεται ως T_p .



Σχήμα 2.1: Εφαπτόμενος χώρος T_p σε ένα σημείο p της πολλαπλότητας.
Πηγή: Παραπομπή [3], σελίδα 16

Για κάθε διανυσματικό χώρο (όπως ο προαναφερθείς εφαπτόμενος) υπάρχουν απειράριθμες πιθανές βάσεις στις οποίες μπορεί να αναλυθεί κάθε διάνυσμα. Ο χώρος (πολλαπλότητα) στη Γενική Σχετικότητα είναι τετραδιάστατος και ίσων διαστάσεων θα είναι και η αντίστοιχη βάση. Κατά αυτόν τον τρόπο, αναλύουμε κάθε αφηρημένο διάνυσμα στον επίπεδο χώρο Minkowski ως γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων βάσης:

$$A = A^\mu \hat{e}_\mu. \quad (2.1)$$

Όπου A^μ (με $\mu=0,1,2,3$) οι συνιστώσες του διανύσματος στη βάση \hat{e}_μ . Το κλασικότερο παράδειγμα διανύσματος στον χωροχρόνο είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα σε μία καμπύλη. Μία καμπύλη παραμετροποιημένη έστω ως προς έναν παράγοντα λ , σε ένα σύστημα αναφοράς, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση των

συντεταγμένων ως προς την παράμετρο, για παράδειγμα, $x^\mu(\lambda)$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα $V(\lambda)$ έχει συνιστώσες:

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (2.2)$$

Τα διανύσματα, υπό τον περιορισμό γραμμικού μετασχηματισμού των συντεταγμένων τους, θα υπακούν στην τεχντροπία των μετασχηματισμών Lorentz. Οι συνιστώσες τους μετασχηματίζονται ως ακολούθως:

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} V^\mu. \quad (2.3)$$

Στη συνέχεια, ξεφεύγοντας από τα όρια του επίπεδου χώρου, θα χρειαστεί να γενικεύσουμε την προσέγγισή μας. Είναι προφανές ότι για την αναπαράσταση (Σχήμα 2.1) του εφαπτόμενου χώρου T_p , αναγκαστήκαμε να προσφύγουμε στην εμβάπτιση τόσο αυτού όσο και της πολλαπλότητας σε ένα ανώτερης διάστασης χώρο. Μπορούμε όμως να διαπραγματευτούμε την έννοια του διανύσματος μέσω των υφιστάμενων στοιχείων της πολλαπλότητας, με επιπλέον πλεονεκτήματα. Θα μελετήσουμε κατ' ουσία τον διανυσματικό χώρο από τον οποίο διέρχονται όλες οι παράγωγοι των ευθειών που περνάνε από το σημείο p (τον ίδιο δηλαδή εφαπτόμενο χώρο T_p) και καθορίζουν την κατεύθυνση της κάθε ευθείας. Όλες αυτές οι παράγωγοι πληρούν τις προϋποθέσεις που συγκροτούν έναν διανυσματικό χώρο. Η εναλλακτική μας αντιμετώπιση έγγυται στην επιλογή της ανάλυσης των διανυσμάτων του χώρου αυτού σε βάσεις εξαρτώμενες από τις συντεταγμένες.

Έστω ένα σύστημα συντεταγμένων x^μ . Οι μερικές παράγωγοι ∂_μ στο σημείο p συγκροτούν μία καλά ορισμένη βάση για την ανάπτυξη των διανυσμάτων. Αυτό μας εξασφαλίζει πως η ανάλυσή μας δεν απαιτεί την προσφυγή σε εμβάπτισεις σε ανώτερης διάστασης χώρους· με την εισαγωγή των μερικών παραγώγων ως βάση του διανυσματικού χώρου μπορούμε να παραμετροποιήσουμε ως προς αυτές κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα σε μία καμπύλη. Άρα η μόνη διαφορά με τον επίπεδο χώρο είναι πως τα διανύσματα βάσης είναι τα $\hat{e}_\mu = \partial_\mu$. Σε ό,τι αφορά τον κανόνα μετασχηματισμού των συνιστωσών των διανυσμάτων βάσης, μέσω της χρήσης του κανόνα της αλυσίδας, έχουμε:

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu. \quad (2.4)$$

Ενώ ο μετασχηματισμός των συνιστωσών των διανυσμάτων δίνεται μέσω του τύπου:

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^\mu. \quad (2.5)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός των διανυσμάτων είναι γενικότερος από τον μετασχηματισμό Lorentz. Για την ακρίβεια, ο γραμμικός μετασχηματισμός Lorentz του επίπεδου χώρου είναι υποπερίπτωση αυτού.

Έχοντας ορίσει τον εφαπτόμενο χώρο, είμαστε σε θέση να εισάγουμε έναν άμεσα συσχετισμένο και ίσης διάστασης με αυτόν χώρο, τον δυϊκό ή συνεφαπτόμενο χώρο (dual space/cotangent space). Πρόκειται για το σύνολο των γραμμικών χαρτών (maps) που πραγματώνουν τη μετάβαση από τον υφιστάμενο εφαπτόμενο χώρο, στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Οι χάρτες αυτοί εν συνόλω, συγκροτούν και οι ίδιοι έναν καλά ορισμένο διανυσματικό χώρο και, έχοντας ορίσει ως βάσεις του εφαπτόμενου χώρου στο χώρο Minkowski τις \hat{e}_μ , μία βολική -αλλά αυθαίρετη- σύμβαση είναι να θέσουμε ως βάσεις του δυϊκού χώρου αυτές που ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$\hat{\theta}^\nu(\hat{e}_\mu) = \delta_\mu^\nu. \quad (2.6)$$

Τα διανύσματα που «ζουν» στον συνεφαπτόμενο χώρο καλούνται συνδιανύσματα (ή 1-μορφές ή συναλλοίωτα διανύσματα) και, έχοντας επιλέξει βάση, αναλύονται στις συνιστώσες τους ως:

$$\omega = \omega_\nu \hat{\theta}^\nu. \quad (2.7)$$

Πρόκειται για διανύσματα των οποίων η δράση στα διανύσματα του εφαπτόμενου χώρου δίνει βαθμωτές ποσότητες. Φέρουν εις πέρας δηλαδή τη μετάβαση από τον διανυσματικό χώρο στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, μέσω γραμμικών μετασχηματισμών. Τυπικό παράδειγμα συνδιανύσματος είναι η βαθμίδα (gradient) μιας βαθμωτής συνάρτησης, η οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων αναλύεται ως:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \hat{\theta}^\mu. \quad (2.8)$$

Στον επίπεδο χώρο τα συνδιανύσματα μετασχηματίζονται γραμμικά μέσω του μετασχηματισμού Lorentz ως:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu'}} = \Lambda_{\mu'}^\mu \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}. \quad (2.9)$$

Άροντας τον περιορισμό της επιπεδότητας και προχωρώντας την ανάλυση σε γενικότερες πολλαπλότητες, θα συγχρονήσουμε την προσέγγισή μας με αυτήν που ακολουθήθηκε για τον εφαπτομενικό χώρο. Όπως οι μερικές παράγωγοι αποτελούσαν γι' αυτόν μία φυσική βάση ανάλυσης των διανυσμάτων, έτσι και η βαθμίδες των συνιστωσών αποτελούν μία ανάλογη προσέγγιση για την ανάλυση των συνδιανυσμάτων σε συνιστώσες. Κάνοντας μία ανάλογη αυτή του επίπεδου χώρου σύμβαση ($\hat{\theta}^\nu(\hat{e}_\mu) = \delta_\mu^\nu$) για τη σχέση μεταξύ των δύο βάσεων λαμβάνουμε:

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (2.10)$$

Έτσι, οι βαθμίδες $[dx^\mu]$ είναι μία κατάλληλη βάση των συνδιανυσμάτων, η οποία μετασχηματίζεται ως:

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu. \quad (2.11)$$

Ενώ οι συντελεστές των συνδιανυσμάτων μετασχηματίζονται:

$$\omega_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \omega_\mu. \quad (2.12)$$

Σημειώνεται πως οι τένσορες, που θα μελετηθούν εκτενώς στη συνέχεια, είναι απλές γενικεύσεις των διανυσμάτων και συνδιανυσμάτων και οι μετασχηματισμοί των συνιστωσών τους συνάγονται εύκολα από την υπάρχουσα γνώση:

$$T_{\nu'_1 \dots \nu'_k}^{\mu'_1 \dots \mu'_k} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_k}}{\partial x^{\nu'_k}} T_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_k}. \quad (2.13)$$

2.1.3 Η Μετρική

Η μετρική είναι ένας (0,2) συμμετρικός τανυστής που παρέχει όλες τις πληροφορίες για τον πλήρη χαρακτηρισμό του χωροχρόνου. Πρόκειται πιθανώς για την κομβικότερη εννοιολογικά έννοια στον μαθηματικό formalισμό της Γενικής Σχετικότητας. Ένα απάνθισμα [83] μερικών μόνο από τις ιδιότητες της μετρικής είναι:

- Παρέχει τη δυνατότητα προσδιορισμού του παρελθόντος και του μέλλοντος ενός γεγονότος στον χωροχρόνο.
- Επιτρέπει τον υπολογισμό αποστάσεων και ιδιοχρόνου (proper time).
- Καθορίζει την «ελάχιστη απόσταση» μεταξύ δύο σημείων και, συνακόλουθα, την κίνηση σωματιδίων.
- Αντικαθιστά το βαρυτικό πεδίο ϕ της Νευτώνιας Θεωρίας.
- Φέρει εις πέρας την υπόθεση περί τοπικών αδρανειακών συστημάτων (local inertial frames).
- Καθορίζει την αιτιότητα (causality) του χωροχρόνου, θεσπίζοντας την ταχύτητα του φωτός ως τη μέγιστη δυνατή ταχύτητα που μπορεί να φτάσει οποιοδήποτε ταξιδεύον σήμα.
- Αντικαθιστά το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο σε τρεις διαστάσεις της Νευτώνιας Μηχανικής.

Έχει προαναφερθεί πως κάθε πολλαπλότητα ενδέχεται να εμφανίζει οσοδήποτε εξωτικά χαρακτηριστικά, όμως τοπικά μπορεί να ληφθεί ως επίπεδη. Αυτό, σε μαθηματική ορολογία, εκφράζεται ως η δυνατότητα μία αυθαίρετη μετρική $g_{\mu\nu}$ να μετατραπεί, σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας ξεχωριστά, στη Minkowski μετρική $\eta_{\mu\nu}$ του επίπεδου χώρου. Η φυσική σημασία αυτού του συμπεράσματος είναι πως σε κάθε γεγονός του χωροχρόνου είναι πάντα δυνατή η κατασκευή ενός τοπικά αδρανειακού συστήματος αναφοράς (σύστημα αναφοράς Lorentz). Η ύπαρξη τοπικών συστημάτων Lorentz ισοδυναμεί με

το γεγονός πως σε κάθε σημείο ενός καμπυλωμένου χώρου «εφάπτεται» ένας επίπεδος χώρος. Αποδεικνύεται (η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στη βιβλιογραφία [81]) πως μια αυθαίρετη μετρική δεν χαρακτηρίζεται σε ένα σημείο ούτε από την τιμή που λαμβάνει εκεί (μπορεί πάντα να μετατραπεί στη μετρική $\eta_{\mu\nu}$), ούτε από τις πρώτες παραγώγους της στο σημείο αυτό (μπορούν πάντοτε να μηδενισθούν), αλλά από τις 20 δεύτερες παραγώγους της, οι οποίες δεν μπορούν να μηδενιστούν (για οποιαδήποτε αυθαίρετη πολλαπλότητα). Αυτές είναι τα στοιχεία που καθορίζουν την καμπυλότητα και αποτελούν συνιστώσες του ταυυστή Riemann που θα παρουσιαστεί παρακάτω.

2.1.4 Συναλλοίωτη Παράγωγος, Σύμβολα Christoffel και Συνοχή Levi-Civita

Η γεωμετρία [83] του χωροχρόνου αποτελεί το αντικείμενο προς μελέτη για τη Γενική Σχετικότητα, από τη στιγμή που η έννοια της βαρύτητας ταυτίστηκε με αυτήν. Η παρουσία ύλης (σημειακής ή/και πεδιακής) και ενέργειας τροποποιεί-διαστρεβλώνει την υφιστάμενη (επίπεδη) γεωμετρία του χωροχρόνου με αποτέλεσμα την καμπύλωσή του. Πρέπει λοιπόν να αναπτυχθούν τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία που να ποσοτικοποιούν αυτήν την απόκλιση από τον επίπεδο χώρο. Τον ρόλο αυτόν θα διαδραματίσει κατά κύριο λόγο ο ταυυστής Riemann που αναπτύσσεται παρακάτω. Για να μπορεί όμως να ορισθεί πρέπει πρώτα να τεθούν έννοιες όπως η συνοχή (connection) και η συναλλοίωτη παράγωγος (covariant derivative) σε μία μετρική πολλαπλότητα.

Όπως σε οποιαδήποτε σπουδή φυσικών φαινομένων, έτσι και στη Γενική Σχετικότητα, ενδιαφερόμαστε για τους ρυθμούς μεταβολής ποικίλων μεγεθών. Είναι λοιπόν επόμενο πως πρέπει να γενικευτεί σε μη επίπεδους χώρους η έννοια της μερικής παραγώγου (η ίδια η μερική παράγωγος κρίνεται ανεπαρκής, καθώς οι συνιστώσες της δεν μετασχηματίζονται σαν συνιστώσες ταυυστή, άρα δεν είναι ανεξάρτητες του συστήματος συντεταγμένων).

Η ειδοποιός διαφορά ανάμεσα σε παραγωγή στις καρτεσιανές συντεταγμένες και στην παραγωγή στις υπόλοιπες, πιο γενικευμένες, είναι πως πλέον απαιτείται και η παραγωγή ως προς μία μη σταθερή βάση. Σε επίπεδο χώρο, που περιγράφεται από καρτεσιανές συντεταγμένες, η παραγωγή ως προς τα εκάστοτε διανύσματα βάσης είναι πάντοτε μηδέν καθώς παραμένουν τα ίδια σε κάθε σημείο του χωροχρόνου. Άρα, η γενίκευση της μερικής παραγώγου, που καλείται συναλλοίωτη παράγωγος, θα αποτελείται από την ίδια τη μερική παράγωγο, στην οποία θα προστείθεται και κάποιος γραμμικός μετασχηματισμός που συνοψίζει την μεταβολή των διανυσμάτων βάσης. Λαμβάνοντας, για παράδειγμα, τη συναλλοίωτη παράγωγο ενός διανύσματος V^μ θα έχουμε:

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda. \quad (2.14)$$

Όπου $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ είναι οι συντελεστές της συνοχής στην πολλαπλότητα. Αποδεικνύεται πως, οι συντελεστές αυτοί, παρ' ότι μοιάζουν με ταυυστή, οι συνιστώσες

τους δεν μετασχηματίζονται αναλόγως. Ανεξάρτητα από αυτό όμως, είναι προφανές πως για τον καθορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου πρέπει να προσδιοριστούν τα $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$, δηλαδή οι συντελεστές (σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων) της προς επιλογή συνοχής.

Το γεωμετρικό ομόλογο της έννοιας της συνοχής είναι ο προσδιορισμός του τρόπου μεταφοράς διανυσμάτων από έναν εφαπτόμενο χώρο σε κάποιον άλλον. Λόγω της ενδεχόμενης παρουσίας καμπυλότητας η μεταφορά ενός διανύσματος παύει να είναι μονοσήμαντα καθορισμένη όπως στον Ευκλείδειο χώρο. Ο δρόμος που θα επιλεγεί για τη μεταφορά ενός διανύσματος από ένα σημείο A σε ένα σημείο B, επιδρά στην τελική του μορφή. Είναι πρόδηλο, πως υπάρχουν αναρίθμητοι πιθανοί τρόποι για τη μετακίνηση ενός διανύσματος με βάση οποιαδήποτε σύμβαση περί διατήρησης της παραλληλίας ή/και του μέτρου του διανύσματος. Στη Γενική Σχετικότητα όμως επιβάλλοντας τις δύο ακόλουθες συνθήκες στη συνοχή αποδεικνύεται πως τα σύμβολα Γ και άρα και η ίδια η συνοχή θα είναι μία και μοναδική: η Levi-Civita συνοχή ή συνοχή Christoffel ή -σπανιότερα- συνοχή Riemann. Οι εν λόγω συνθήκες είναι:

- i. Τα σύμβολα $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ να είναι συμμετρικά ως προς τους δύο κάτω δείκτες τους ($\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}$). Η απαίτηση αυτή ισοδυναμεί με την απουσία στρέψης (torsion) στην πολλαπλότητα.
- ii. Η συναλλοίωτη παράγωγος της μετρικής να είναι παντού μηδενική: $\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} = 0$. Η συνθήκη αυτή καλείται συμβατότητα της μετρικής (metric compatibility).

Έτσι, από τις απειράριθμες πιθανές επιλογές συνοχής, απαιτώντας την ι-σχύ των i. και ii., καταλήγουμε πάντα στην Levi-Civita συνοχή της Γενικής Σχετικότητας, της οποίας οι συντελεστές $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ καλούνται σύμβολα Christoffel. Βασιζόμενοι σε απορρέουσες ιδιότητες των συνθηκών καταλήγουμε και στον τύπο υπολογισμού των συμβόλων Christoffel:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(\frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}}\right). \quad (2.15)$$

Στην παραδοσιακή Σχετικότητα λοιπόν, η συνοχή προκύπτει-εξαρτάται άμεσα από τη μετρική του χώρου. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει γενικώς, αλλά κατέστη δυνατόν μέσω συγκεκριμένων περιορισμών που θέσαμε. Άρα και η καμπυλότητα, που εξαρτάται a priori από τη συνοχή, εξαρτάται ουσιαστικά από τη μετρική.

Στην έννοια της συνοχής βασίζεται ακόμη ο καθορισμός της γεωδαισιακής εξίσωσης (η γενίκευση της έννοιας της ευθείας γραμμής σε αυθαίρετη πολλαπλότητα). Γεωδαισιακή είναι μία παραμετροποιημένη (εδώ, ως προς λ) καμπύλη της οποίας το εφαπτόμενο διάνυσμα πραγματοποιεί παράλληλη μετατόπιση καθ' όλη τη διαδρομή της. Η συνθήκη αυτή μεταφράζεται ως:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0. \quad (2.16)$$

Η εξίσωση βασίζεται στην έννοια της παράλληλης μεταφοράς, δηλαδή της μετακίνησης ενός διανύσματος κρατώντας το σταθερό σε όλη τη διαδρομή. Σε αντίθεση με ό,τι ισχύει στον επίπεδο χώρο, όταν υπάρχει καμπυλότητα, η τελική μορφή του διανύσματος εξαρτάται από τη διαδρομή που επιλέχθηκε κατά την παράλληλη μεταφορά του. Η Levi-Civita συνοχή μάς εξασφαλίζει τον μονοσήμαντο καθορισμό αυτής της παράλληλης μετατόπισης.

2.1.5 Οι τανυστές Riemann, Ricci και Einstein

Η γεωμετρική οντότητα που καθορίζει πλήρως την καμπυλότητα μιας πολλαπλότητας είναι ο τανυστής Riemann [83]. Η υπόρρητη πρακτική τού τανυστή Riemann είναι η ποσοτικοποίηση της απόκλισης της εκάστοτε πολλαπλότητας από τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα του επίπεδου χώρου. Σε αυτά περιλαμβάνεται η αναλλοιοότητα ενός διανύσματος κατά την παράλληλη μεταφορά του εντός ενός κλειστού βρόγχου, η δυνατότητα αντιμετάθεσης των συναλλοίωτων παραγώγων τανυστών και η διατήρηση της παραλληλίας δύο αρχικά παράλληλων καμπυλών. Αξιοποιώντας μεθόδους-τεχνικές που προκύπτουν από αυτές τις ιδιότητες (συνήθως ο τανυστής Riemann παρουσιάζεται μέσω της μελέτης της παράλληλης μετατόπισης ενός διανύσματος σε έναν απειροστό βρόγχο και την απαίτηση το διάνυσμα να παραμένει ίδιο) καταλήγουμε στον τανυστή που «μετρά» την τοπική καμπυλότητα. Ορίζεται ως ένας (1,3) τανυστής και καλείται τανυστής Riemann ή τανυστής καμπυλότητας:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \quad (2.17)$$

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω τύπο, ο τανυστής Riemann δύναται να ορισθεί δίχως την απαίτηση περί ύπαρξης μετρικής. Το μόνο που απαιτείται είναι η επιλογή συνοχής πάνω στην πολλαπλότητα. Στη Γενική Σχετικότητα όμως επιλέγουμε τη συνοχή Levi-Civita που απορρέει από τη μετρική. Άρα η συσχετιζόμενη με τη συνοχή πολλαπλότητα (και η καμπυλότητά της) εξαρτάται και αυτή από τη μετρική. Μέσω αυτής της παραδοχής συνάγονται τα εξής δύο συμπεράσματα:

- Αν υπάρχει σύστημα συντεταγμένων στο οποίο οι συντελεστές της μετρικής να είναι σταθεροί, ο τανυστής Riemann μηδενίζεται.
- Αν ο τανυστής Riemann μηδενίζεται, μπορεί πάντοτε να βρεθεί ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο οι συντελεστές της μετρικής να είναι σταθεροί.

Ακόμη, από τις ιδιότητες της Levi-Civita συνοχής και της μετρικής που αυτή καθορίζει, περιορίζονται αναλόγως και οι ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή Riemann καθώς προκύπτουν επιπλέον συμμετρίες. Αξιοποιώντας τη μετρική κατεβάζουμε τον μοναδικό πάνω δείκτη του τανυστή Riemann και εξαγονται οι παρακάτω ιδιότητες:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}, \quad (2.18)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\nu\sigma\mu}, \quad (2.19)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (2.20)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0, \quad (2.21)$$

$$R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0, \quad (2.22)$$

$$R_{[\rho\sigma\mu\nu]} = 0. \quad (2.23)$$

Από αυτές συμπεραίνουμε πως οι ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή Riemann (σε ένα συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων μιας τετραδιάστατης πολλαπλότητας) μειώνονται σε 20.

Αναφέρεται ακόμη μία σημαντική ιδιότητα-ταυτότητα, γεωμετρικής αφετηρίας, που αφορά το μηδενισμό του αθροίσματος των κυκλικών εναλλαγών των τριών πρώτων δεικτών του τανυστή Riemann. Ονομάζονται ταυτότητες Bianchi και είναι οι ακόλουθες:

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0. \quad (2.24)$$

Η συστολή του πρώτου και του τρίτου δείκτη, με προϋπόθεση πως εργαζόμαστε υπό τη Levi-Civita συνοχή, είναι η μόνη ανεξάρτητη (στην έννοια: μη-τετριμμένη και μη-μηδενική) συστολή του τανυστή Riemann. Ορίζει έναν ξεχωριστό (0,2) συμμετρικό τανυστή, τον επονομαζόμενο τανυστή Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}, \quad (2.25)$$

όπου

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (2.26)$$

Το ίχνος του, που προκύπτει μέσω συστολής με τη μετρική, καλείται βαθμωτό Ricci (ή βαθμωτό καμπυλότητας) και ορίζεται ως:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Έχοντας ορίσει τα δύο αυτά γεωμετρικά μεγέθη, εισάγουμε μία ιδιαίτερως χρήσιμη σχέση που προέρχεται από τη διπλή συστολή των ταυτοτήτων Bianchi η οποία θα διαδραματίσει κομβικό ρόλο στις φυσικές προεκτάσεις των εξισώσεων πεδίου του Einstein:

$$\nabla^{\mu} R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_{\rho} R. \quad (2.28)$$

Ορίζουμε με βάση αυτήν τη σχέση, έναν νέο τανυστή, τον τανυστή Einstein, ως:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (2.29)$$

Οι ταυτότητες Bianchi, ύστερα από διπλή συστολή, γράφονται ως:

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0. \quad (2.30)$$

Ο τανυστής Einstein, που είναι και αυτός συμμετρικός λόγω της συμμετρίας του τανυστή Ricci, είναι κεντρικής σημασίας μέγεθος στη Γενική Σχετικότητα.

2.2 Η Δράση Einstein-Hilbert και οι Εξισώσεις Πεδίου

Οι εξισώσεις κίνησης κάθε κλασικής θεωρίας πεδίου, όπως η Γενική Σχετικότητα, θεμελιώνονται μαθηματικά στην Αρχή Ελάχιστης Δράσης. Πρέπει λοιπόν να βρεθεί η δράση της θεωρίας που η ελαχιστοποίησή της (μέσω του λογισμού των μεταβολών, ο μηδενισμός της μεταβολής της) να δίνει τις εξισώσεις που καθορίζουν το βαρυτικό πεδίο. Αφιερώνεται ξεχωριστό υποκεφάλαιο στην εξαγωγή [83, 84] των εξισώσεων κίνησης, καθώς η εναλλακτική θεωρία βαρύτητας που θα πραγματευτούμε στη συνέχεια, βασίζεται στην τροποποίηση της κλασικής δράσης που πρόκειται να παρουσιαστεί εδώ.

Αξίζει να αναφερθεί, πως ο Einstein κατέληξε στις πεδιακές εξισώσεις μέσω φυσικών επιχειρημάτων και σχέσεων αναλογικότητας, χτίζοντας τις εξισώσεις αυτές βήμα βήμα. Ο Hilbert -ο οποίος παρακολουθούσε στενά τη δουλειά του Einstein πάνω στη Σχετικότητα [81] και αντάλλαζε απόψεις μαζί του επί του θέματος [111]- κατέληξε κατά το ίδιο έτος στις ίδιες εξισώσεις, μέσω του λαγκραντζιανού φορμαλισμού.

Αρχικά, πρέπει να επιλεγεί ένα βαθμωτό μέγεθος, το οποίο να περιέχει το πολύ έως δευτέρου βαθμού παραγώγους της δυναμικής μεταβλητής (αυτής της οποίας θέλουμε να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης), που εν προκειμένω είναι η μετρική. Προσφεύγοντας στην πλέον προφανή-απλή λύση, ο Hilbert επέλεξε το βαθμωτό Ricci για την κατασκευή της λαγκρατζιανής. Έτσι, η δράση στην οποία κατέληξε είναι η:

$$S_H = \int \sqrt{-g} R d^n x. \quad (2.31)$$

Καλείται δράση Einstein-Hilbert και σύμφωνα με τον λογισμό των μεταβολών η διακύμανση αυτής ($\delta S = \int \sum_i (\frac{\delta S}{\delta \Phi^i} \delta \Phi^i) d^n x$) με βάση το πεδίο Φ^i προς μελέτη (εν προκειμένω, την αντίστροφη μετρική $g^{\mu\nu}$) θα πρέπει να είναι μηδενική ($\delta S / \delta \Phi^i = 0$). Άρα:

$$\delta S_H = 0. \quad (2.32)$$

$$\delta S_H = \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3. \quad (2.33)$$

$$\int \delta \sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} d^n x + \int \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^n x + \int \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} d^n x = 0. \quad (2.34)$$

Λαμβάνοντας ξεχωριστά τους τρεις όρους της συνολικής διακύμανσης έχουμε:

$$i) \delta S_1 = \int \delta \sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} d^n x.$$

$$\text{Όπου: } \delta(\sqrt{-g}) = \frac{-g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}}{2\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}.$$

Άρα:

$$\delta S_1 = \int d^n x \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

ii) $\delta S_2 = \int \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^n x.$

Ισχύει ότι:

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (2.36)$$

Και:

$$\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\kappa} + g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\kappa} = 0. \quad (2.37)$$

Άρα:

$$\delta S_2 = \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^n x = \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} (-g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\alpha\beta}) d^n x. \quad (2.38)$$

iii) $\delta S_3 = \int \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} d^n x.$

Για τον τρίτο, και πλέον δύστροπο από τους τρεις όρο, πρέπει να υπολογιστεί η διακύμανση του ταυυστή Ricci. Ξεκινάμε αναλύοντας τη διακύμανση του ταυυστή Riemann:

$$R_{\mu\lambda\nu}^\rho = \partial_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\rho + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma. \quad (2.39)$$

Η διακύμανση του ταυυστή Riemann εξαρτάται από τη διακύμανση της Levi-Civita συνοχής, άρα:

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^\rho = \partial_\lambda \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\rho + \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\sigma + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma. \quad (2.40)$$

Η διακύμανση των συμβόλων Christoffel είναι διαφορά μεταξύ δύο συντελεστών της Christoffel συνοχής, άρα συμπεριφέρεται ως ταυυστής. Δικαιούμαστε έτσι να υπολογίσουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο αυτού του μεγέθους:

$$\nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho) = \partial_\lambda (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho) + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho. \quad (2.41)$$

Παρατηρούμε πως η διακύμανση του ταυυστή Riemann είναι ίση με τη διαφορά δύο συναλλοίωτων παραγώγων όπως η παραπάνω, δηλαδή:

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^\rho = \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\lambda\mu}^\rho). \quad (2.42)$$

Συστέλλοντας τον πρώτο και τον τρίτο δείκτη του ταυυστή Riemann βρίσκουμε τη ζητούμενη διακύμανση, αυτή του ταυυστή Ricci.

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda). \quad (2.43)$$

Άρα όλος ο όρος δS_3 γίνεται:

$$\begin{aligned} \delta S_3 &= \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \\ &= \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)] d^n x = \\ &= \int \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - g^{\mu\nu} \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)] d^n x. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Εκμεταλλευόμενοι τη συμβατότητα της Levi-Civita συνοχής με τη μετρική και μετονομάζοντας μερικούς βωβούς δείκτες (το ρ σε σ και το ν σε μ) έχουμε:

$$\delta S_3 = \int \sqrt{-g} \nabla_\sigma (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) d^n x. \quad (2.45)$$

Όμως η παράσταση μέσα στην παρένθεση αποτελεί διάνυσμα και η απόκλιση διανύσματος παρουσία της ταυσιτικής πυκνότητας $\sqrt{-g}$ είναι ολικό διαφορικό. Μέσω του θεωρήματος του Stokes μπορεί να μετατραπεί σε επιφανειακό όρο και έτσι η συνεισφορά του να θεωρηθεί μηδενική στη διακύμανση με βάση τη μετρική καθώς κάνουμε την παραδοχή πως η διακύμανση μηδενίζεται στο άπειρο (δηλαδή, στο όριο, στην επιφάνεια). Άρα:

$$\delta S_3 = 0. \quad (2.46)$$

Συγκεντρώνοντας και τους τρεις όρους τους διακύμανσης, προκύπτει:

$$\delta S = 0 \quad (2.47)$$

$$\int d^n x \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - R^{\mu\nu} \right) = 0.$$

Από τη στιγμή που το $\delta g_{\mu\nu}$ αποτελεί μια τυχαία διακύμανση, πρέπει η παράσταση μέσα στην παρένθεση να μηδενίζεται.

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0. \quad (2.48)$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι ο ταυσιτής Einstein που ειδήχθη στο προηγούμενο υποκεφάλαιο. Άρα:

$$G^{\mu\nu} = 0. \quad (2.49)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση Einstein στο κενό, δηλαδή απουσία οποιασδήποτε μορφής μάζας ή/και ενέργειας. Αν θέλουμε να συμπεριλάβουμε πεδία ύλης πρέπει να αναπτύξουμε τη δράση ως:

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_H + S_M. \quad (2.50)$$

Επιστρατεύοντας ανάλογες τεχνικές με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω προκύπτει:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.51)$$

Όπου ορίζουμε ένα ακόμη μέγεθος, τον ταυσιτή ενέργειας-ορμής, ως:

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.52)$$

Καταλήγουμε έτσι στην ολοκληρωμένη μορφή της εξίσωσης Einstein (κατεβάζοντας τους δείκτες μέσω της μετρικής):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.53)$$

Όπου η σταθερά αναλογίας $8\pi G$ (όπου $c = 1$) επιλέγεται ώστε η Νευτώνια πεδιακή εξίσωση ($\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$) να αποτελεί οριακή περίπτωση της εξίσωσης Einstein.

Στις εξισώσεις αυτές περιλαμβάνεται συχνά και η κοσμολογική σταθερά Λ . Η παράμετρος Λ είναι ένα μέσο -από τα διάφορα που έχουν προταθεί κατά καιρούς- ώστε να ερμηνευτεί η επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος που επιβάλλεται από μια σειρά σύγχρονων πειραματικών δεδομένων. Τη συμπεριέλαβε αρχικά στις εξισώσεις του ο Einstein ώστε να συμφωνούν με το στατικό κοσμολογικό μοντέλο που ήταν θεωρητικό απότοκο των παρατηρησιακών δεδομένων της εποχής. Τα αποτελέσματα όμως των παρατηρήσεων του Edwin Hubble (1889-1953) επαναπροσδιόρισαν την εικόνα που έχουμε για τη δυναμική συμπεριφορά του σύμπαντος στην εποχή μας. Το σύμπαν είναι σε φάση επιταχυνόμενης διαστολής και η κοσμολογική σταθερά Λ εισάγεται ως παράμετρος προς προσδιορισμό στις εξισώσεις πεδίου ώστε να δικαιολογεί -έστω και ad hoc- τα εμπειρικά δεδομένα που διαθέτουμε. Η δράση -στις τέσσερις διαστάσεις- επαναπροσαρμόζεται ως:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + L_M \right]. \quad (2.54)$$

Ενώ οι εξισώσεις κινήσεις καταλήγουν στις:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.55)$$

2.3 Η λύση Schwarzschild

Το πρώτο κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση [83] της πλέον πολυμελετημένης, μη-επίπεδης λύσης της εξίσωσης Einstein -τη λύση Schwarzschild. Η λύση-μετρική αυτή περιγράφει το βαρυτικό πεδίο εξωτερικά μιας σφαιρικά συμμετρικής κατανομής μάζας (π.χ. εξωτερικά ενός αστέρα, ενός πλανήτη όπως η Γη, μίας μελανής οπής, κ.ο.κ.) η οποία παραμένει στατική (δεν εξελίσσεται με το πέρασμα του χρόνου).

Οι δύο αυτές παραδοχές -σφαιρική συμμετρία και στατική φύση του σώματος που είναι υπεύθυνο για την καμπύλωση του χωροχρόνου- επιστρατεύονται ως η βάση για την περαιτέρω ανάλυση. Η μεν απαίτηση περί στατικότητας υπαγορεύει ανεξαρτησία των συνιστωσών της υπό αναζήτηση μετρικής από τη χρονική συνιστώσα, καθώς και την απουσία μεικτών (π.χ. $dx^i dt + dt dx^i$) χωροχρονικών όρων. Η δε σφαιρική συμμετρία μάς επιτρέπει να ξεκινήσουμε την ανάλυση από

τη μετρική Minkowski σε πολικές συντεταγμένες, η οποία περιγράφει σφαιρικά συμμετρικό χώρο:

$$ds_{Minkowski}^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.56)$$

Έχοντας ως βάση τη μετρική Minkowski σε πολικές συντεταγμένες, επιλέγουμε αυθαίρετους συντελεστές, έναν για κάθε διαφορικό παράγοντα, ώστε να έχουμε την πλέον γενική μορφή σφαιρικά συμμετρικής μετρικής μιας πολλαπλότητας. Επιλέγουμε μάλιστα να εκφράσουμε τους συντελεστές αυτούς ως εκθετικές συναρτήσεις της ακτίνας ώστε η μετρική να διατηρεί πάντοτε τον λορεντζιανό της χαρακτήρα (οι συντελεστές να μην αλλάζουν πρόσημο).

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2. \quad (2.57)$$

Κάνοντας μάλιστα κατάλληλη επιλογή συντεταγμένων μπορούμε μάλιστα να την απλοποιήσουμε, καταλήγοντας στην:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.58)$$

Η σχέση (2.58) αποτελεί την πλέον γενική μορφή σφαιρικά συμμετρικής λύσης της εξίσωσης Einstein και θα χρησιμοποιηθεί κατά το υπολογιστικό μέρος της εργασίας, καθώς και εκεί θα λάβουμε ως παραδοχή σφαιρική συμμετρία και στατική φύση της μάζας.

Έχοντας πλέον τη γενική μορφή της μετρικής, καλούμαστε τη χρησιμοποιήσουμε ώστε να λύσουμε την εξίσωση Einstein και να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους $\alpha(r), \beta(r)$. Τα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel, που υπολογίζονται μέσω της εξίσωσης (2.15), για τη μετρική αυτή, είναι:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \partial_r \alpha = \Gamma_{rt}^t, & \Gamma_{tt}^r &= e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha, & \Gamma_{rr}^r &= \partial_r \beta, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} = \Gamma_{\theta r}^\theta, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2\beta}, & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} = \Gamma_{\phi r}^\phi, \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \Gamma_{\phi\theta}^\phi. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι μη μηδενικοί συντελεστές του ταυστή Riemann, μέσω της εξίσωσης (2.17):

$$R_{rtr}^t = \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2, \quad (2.60)$$

$$R_{\theta t\theta}^t = -r e^{-2\beta} \partial_r \alpha, \quad (2.61)$$

$$R_{\phi t\phi}^t = -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha, \quad (2.62)$$

$$R_{\theta r\theta}^r = r e^{-2\beta} \partial_r \beta, \quad (2.63)$$

$$R_{\phi r \phi}^r = r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta, \quad (2.64)$$

$$R_{\phi \theta \phi}^\theta = (1 - e^{-2\beta}) \sin^2 \theta. \quad (2.65)$$

Οι μη μηδενικοί συντελεστές του ταυνοστή Ricci υπολογίζονται μέσω συστολής πρώτου και τρίτου δείκτη του ταυνοστή Riemann:

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right], \quad (2.66)$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta, \quad (2.67)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1, \quad (2.68)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}. \quad (2.69)$$

Όπως προελέχθη, η ανάλυσή μας στοχεύει στην περιγραφή του βαρυτικού πεδίου εξωτερικά ενός τέλεια σφαιρικού σώματος, άρα πρέπει να λυθεί η εξίσωση Einstein στο κενό:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.70)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη την R_{tt} και την R_{rr} συνιστώσα του ταυνοστή Ricci (που μηδενίζονται ανεξάρτητα) και θέτοντας $t \rightarrow e^{-c} t$ για διευκόλυνση των πράξεων, επιλύουμε την $R_{\theta\theta} = 0$ και καταλήγουμε στην:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.71)$$

Η R_S προκύπτει ως σταθερά ολοκλήρωσης κατά την επίλυση της $R_{\theta\theta} = 0$ και καλείται ακτίνα Schwarzschild. Απαιτώντας η tt συνιστώσα της μετρικής να δίνει το κατάλληλο νευτώνιο όριο, η σταθερά R_S πρέπει ισούται με:

$$R_S = 2GM, \quad (2.72)$$

όπου M η νευτώνεια μάζα του σφαιρικού σώματος. Άρα, η τελική μορφή της λύσης Schwarzschild είναι η:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.73)$$

Παρατηρούμε πως καθώς $M \rightarrow 0$ (απουσία μάζας), η μετρική τείνει ορθά στη μετρική Minkowski. Το ίδιο ισχύει και όταν $r \rightarrow \infty$ (σε μεγάλη δηλαδή απόσταση από την πηγή και άρα απουσία καμπυλότητας). Το χαρακτηριστικό αυτό έχει μείζονα φυσική σημασία και καλείται ασυμπτωτική επιπεδότητα (asymptotic flatness).

Κεφάλαιο 3

Τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας

Η Γενική Σχετικότητα είναι θεωρία που διάγει καθ' όλα πετυχημένο «πειραματικό βίο». Ποσώ δε μάλλον, όντας η θεωρία που ήρε τις πειραματικές ασυνέπειες στην τροχιά του πλανήτη Ερμή (μέχρι τότε παρέμενε ανεξήγητη η μετάπτωση του περιηλίου του) και αναγνωρίστηκε καθολικά μέσω και πάλι των πειραματικών της πεπραγμένων με το πείραμα υπό τον Arthur Eddington (1882-1944) το 1919, που επιβεβαίωσε τις θεωρητικές της προβλέψεις περί κάμψης της πορείας του φωτός από το ηλιακό βαρυτικό πεδίο.

Εντούτοις, κάθε φυσική θεωρία έχει σαφώς καθορισμένα όρια ισχύος. Εν προκειμένω, παρόλο που η Γενική Σχετικότητα περνάει επιτυχώς όλα τα πειραματικά τεστ στο Ηλιακό Σύστημα (όπως αντίστοιχα η νευτώνεια θεωρία βαρύτητας όλα τα τεστ στην επιφάνεια της Γης) υπάρχουν σαφή κίνητρα για την αναζήτηση είτε μίας ακόμη πιο γενικής θεωρίας βαρύτητας, της οποίας όριο να είναι η Γενική Σχετικότητα, είτε για μία εντελώς νέα προσέγγιση που να ανατρέπει την έως τώρα εικόνα.

3.1 Γιατί να τροποποιήσουμε τη Γενική Σχετικότητα

Για την εναργέστερη παρουσίαση των κυριότερων λόγων προς αυτήν την κατεύθυνση, θα τους διαχωρίσουμε σε θεωρητικούς και πειραματικούς.

Ξεκινώντας από τα θεωρητικά κίνητρα, το πρώτο σημείο αναφοράς είναι ο, *primus inter pares*, στόχος της επιστημονικής κοινότητας ενασχόλησης με τα βαρυτικά φαινόμενα, η ανάπτυξη μιας ολοκληρωμένης θεωρίας Κβαντικής Βαρύτητας (Quantum Gravity). Με άλλα λόγια, η θεωρητική εναρμόνιση Κβαντικής Μηχανικής και Γενικής Σχετικότητας. Το κυριότερο εμπόδιο προς αυτήν την κατεύθυνση είναι η ίδια η φύση της βαρύτητας, η οποία καθορίζει τόσο τους βαθμούς ελευθερίας της ίδιας της βαρυτικής αλληλεπίδρασης όσο και,

όντας η ίδια εκδηλούμενη ως γεωμετρία, το υπόβαθρο στο οποίο «ζουν» αυτοί οι βαθμοί ελευθερίας. Άρα, στην περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας δεν μπορεί να εφαρμοστεί η δοκιμασμένη συνταγή της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου, όπου αναπτύσσουμε κβαντικά πεδία πάνω σε υπόβαθρο Minkowski. Η ίδια η ύπαρξη βαρύτητας καταργεί το θεωρούμενο υπόβαθρο.

Ακόμη, σε ό,τι αφορά τη δυνατότητα επανακανονικοποίησης της Κβαντικής Βαρύτητας, αυτή αποδεικνύεται [85] μη-επανακανονικοποιήσιμη στις αλληλεπιδράσεις βαρυτονίου-βαρυτονίου (διάγραμμα με 2 βρόγχους) και βαρυτονίου-ύλης (διάγραμμα ενός βρόγχου). Παρόλαυτα, μέσω της διαταρακτικής μεθόδου μπορούμε να κατασκευάσουμε μία κβαντική θεωρία βαρύτητας που να είναι επανακανονικοποιήσιμη μέχρι μονού βρόγχου διαγράμματα. Όμως με αυτό τον τρόπο περιοριζόμαστε στο πεδίο των χαμηλών ενεργειών. Η βαρύτητα είναι μη-επανακανονικοποιήσιμη θεωρία σε μεγάλες ενέργειες και μικρές κλίμακες (κοντά στην κλίμακα του Planck) και μεγαλύτερης τάξης κβαντικές συνεισφορές οδηγούν σε απειρισμούς.

Όμως, τόσο ως προς την επανακανονικοποίηση της βαρύτητας όσο και ως προς την ένταξή της σε πιο γενικές θεωρίες αλληλεπίδρασης (θεωρία χορδών κ.λπ.) υπάρχουν σαφείς ενδείξεις [86, 87] πως η προσθήκη ανώτερης τάξης αναλλοίωτων μεγεθών (πέραν του βαθμωτού Ricci) στη δράση συνδράμουν προς αυτούς τους στόχους. Μια τέτοια προσέγγιση θα ακολουθηθεί και στην παρούσα εργασία.

Σε ό,τι αφορά τα πειραματικά κίνητρα για την τροποποίηση της Γενικής Σχετικότητας, σημείο αναφοράς αποτελεί η ανακάλυψη της επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος. Το υπάρχον μοντέλο που εξηγεί τη συμπεριφορά αυτή, απαιτεί την ad hoc εισαγωγή της σκοτεινής έννοιας της σκοτεινής ενέργειας (dark energy). Στο πλαίσιο αυτό, η σκοτεινή ενέργεια εμφανίζεται με τη μορφή κοσμολογικής σταθεράς την οποία συμπεριλαμβάνουμε στη δράση Einstein-Hilbert και έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (αρνητική πίεση, δεν αλληλεπιδρά με την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία) που την καθιστούν υπεύθυνη για την παρατηρούμενη διαστολή του σύμπαντος. Το μοντέλο αυτό καλείται Λ CDM και περιλαμβάνει ένα ακόμη -άγνωστης φύσεως- κοσμικό ρευστό, τη σκοτεινή ύλη (dark matter). Σύμφωνα με τα υπάρχοντα δεδομένα από το φάσμα της μικροκυματικής ακτινοβολίας κοσμικού υποβάθρου (Cosmic Microwave Background) το ποσοστό της, γνώριμης σε μας, βαρυονικής ύλης ανέρχεται μόλις σε 5% της συνολικής ενεργειακής κατανομής του σύμπαντος. Η σκοτεινή ενέργεια αντιστοιχεί περίπου στο 75% και η σκοτεινή ύλη περίπου στο 20% [90]. Οι εξισώσεις κίνησης της Γενικής Σχετικότητας σε κοσμολογικά μεγέθη απαιτούν τη ρύθμιση παραμέτρων για τον συμβιβασμό των διεστώτων των πειραματικών και θεωρητικών προβλέψεων. Η τροποποίηση όμως του «γεωμετρικού κομματιού» της εξίσωσης του Einstein -δηλαδή της ίδιας της βαρύτητας- για πολλούς φαντάζει πιο εύλογο από την προσθήκη σκοτεινών μορφών μάζας ή/και ενέργειας. Προς αυτήν την κατεύθυνση θα κινηθούμε και εμείς.

Μία ακόμη παραδοχή που έρχεται να προστεθεί στο μοντέλο Λ CDM είναι ο πληθωρισμός (inflation). Πρόκειται στην ουσία για μία συγκεκριμένη χρονική

περίοδο της ζωής του πρώιμου σύμπαντος, η οποία έλαβε χώρα από τα $10^{-36}s$ μέχρι τα $10^{-33}s$ μετά τη μεγάλη έκρηξη (Big Bang) και κατά την οποία το σύμπαν υπέστη εκθετική διαστολή. Μέσω αυτού του σεναρίου επιχειρούμε να εξηγήσουμε:

- i) Το λεγόμενο πρόβλημα του ορίζοντα (horizon problem). Πού οφείλεται η σχεδόν απόλυτη ταύτιση των ιδιοτήτων περιοχών του σύμπαντος, μεταξύ των οποίων δεν υπάρχει αιτιώδης συσχέτιση (σημεία σε αντίθετες κατευθύνσεις) άρα είναι φαινομενικά αδύνατο να αλληλοεπηρεάστηκαν κάποτε στο παρελθόν.
- ii) Τη φαινομενική επιπεδότητα του σύμπαντος.
- iii) Το πρόβλημα των μαγνητικών μονοπόλων. Θα έπρεπε να υπάρχει κάποιος αριθμός μαγνητικών μονοπόλων, κάτι που δεν έχει ως τώρα παρατηρηθεί.
- iv) Τη δημιουργία της δομής μεγάλης κλίμακας του σύμπαντος (large scale structure), δηλαδή των γαλαξιών, των συστάδων γαλαξιών κ.λπ. Συγκεκριμένα, μέσω του μοντέλου του πληθωρισμού, θεωρούμε πως μικροσκοπικού πλάτους ταλαντώσεις διογκώθηκαν απότομα, ώστε αποτέλεσαν κατά κάποιο τρόπο τους «σπόρους» για τη γέννηση όλων των γνωστών μορφών ύλης του σύμπαντος.

Οι εξισώσεις κίνησης όμως δεν προβλέπουν τον πληθωρισμό. Άρα και πάλι καλούμαστε να βρούμε μοντέλα που να προβλέπουν μία τέτοια διεργασία. Συνήθως ο πληθωρισμός αποδίδεται σε ένα βαθμωτό πεδίο (το λεγόμενο inflaton) και διάφορες θεωρίες μοντελοποιούν την ύπαρξή του.

3.2 Εναλλακτικές Θεωρίες

Ακόμα και χωρίς τα όψιμα θεωρητικά και πειραματικά κίνητρα για την τροποποίηση της Γενικής Σχετικότητας, πήρε στην επιστημονική κοινότητα μόλις τέσσερα χρόνια από την έλευσή της για να κάνουν την εμφάνισή τους οι πρώτες θεωρητικές αναζητήσεις σχετικά με τα όρια ισχύος της αλλά και τη μοναδικότητά της ως προς τη δυνατότητα περιγραφής των βαρυτικών φαινομένων. Πλέον, ύστερα και από την απόφαση περί επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος το 1998 (που, δεκατρία χρόνια αργότερα, έδωσε το Νόμπελ Φυσικής στους Saul Perlmutter, Brian Schmidt και Adam Riess [88]), έχουμε σαφείς λόγους να πιστεύουμε πως η Γενική Σχετικότητα δεν είναι η τελική θεωρία βαρύτητας.

Οι προτεινόμενες ως τώρα τροποποιήσεις είναι αναρίθμητες. Αν και οι πρώιμες απόπειρες γενίκευσης της θεωρίας του Einstein αποδείχθηκαν μη βιώσιμες [87], έχει αναπτυχθεί από τότε πληθώρα πειραματικά βιώσιμων θεωριών. Οι πιο διάσημες και πλέον πολυμελετημένες είναι οι θεωρίες βαθμωτού-ταυυστή (scalar-tensor theories). Σε αυτές, υποθέτουμε πως η βαρυτική αλληλεπίδραση περιλαμβάνει την ύπαρξη επιπλέον βαθμωτών πεδίων, πέραν του

τανυστικού μετρικού πεδίου (ή, σε γλώσσα κβαντικής θεωρίας πεδίου, του άμαζου βαρυτονίου με spin 2). Η πλέον γενική τέτοιου είδους θεωρία που εγγυάται δευτέρας τάξης εξισώσεις κίνησης [89] είναι η θεωρία Horndeski, στην οποία -για λόγους πληρότητας- αφιερώνεται ξεχωριστό υποκεφάλαιο. Στην παρούσα εργασία, θα ασχοληθούμε με τις καλούμενες $f(R)$ θεωρίες βαρύτητας οι οποίες, όπως θα αναφερθεί παρακάτω, παρουσιάζουν δυναμική ισοδυναμία με τις θεωρίες βαθμωτού-τανυστή.

3.2.1 Αντικαθιστώντας το βαθμωτό Ricci με πιο σύνθετες συναρτήσεις: Οι $f(R)$ θεωρίες

Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 2.2., ο Hilbert κατέφυγε στην εισαγωγή του βαθμωτού Ricci στη βαρυτική δράση ως την πλέον προφανή-απλή λύση. Πέρα από κριτήρια πραξιακής δυσχέρειας και πιθανώς αισθητικής (αλλά και μερικά ακόμα θεωρητικά ζητούμενα όπως η αποφυγή ασταθειών κ.ά., στα οποία θα αναφερθούμε στη συνέχεια), τίποτα δεν μας εμποδίζει από το να επιλέξουμε -για την εξαγωγή των πεδιακών εξισώσεων- αντί του βαθμωτού Ricci, μία πιο σύνθετη-γενικευμένη συνάρτηση αυτού. Η δράση λοιπόν των $f(R)$ θεωριών θα γίνει:

$$S_{f(R)} = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} f(R) d^4x + S_M(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (3.1)$$

Όπου G η βαρυτική σταθερά, g η ορίζουσα του μετρικού τανυστή, $f(R)$ μια αυθαίρετη συνάρτηση του βαθμωτού Ricci και ψ το σύνολο των πεδίων ύλης.

Μέσω τεχνικών παρόμοιων με αυτών που ακολουθήθηκαν κατά τη διακύμανση της συνήθους δράσης Einstein-Hilbert, καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις κίνησης:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f'(R) = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Όπου, κατά τα γνωστά:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.3)$$

Ο τόνος αναφέρεται σε παραγώγιση ως προς R και $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$. Πρέπει να τονιστεί πως, σε αντίθεση με την κλασική δράση Einstein-Hilbert, οι επιφανειακοί όροι που εμφανίζονται κατά τη διακύμανση της $f(R)$ δράσης δεν συνιστούν ολικό διαφορικό κάποιας ποσότητας, συνεπώς δεν μπορούν να απαλοιφθούν απερίσκεπτα. Αντιθέτως, υπάρχουν υπόρρητα θεωρητικά άλματα [87] για την αποφυγή του εμποδίου αυτού και διαφορετικές προσεγγίσεις [91] επί αυτών, ένα θέμα με το οποίο δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω.

3.2.2 Δυναμική Ισοδυναμία με τη Θεωρία Brans-Dicke

Ένα από τα πρώτα μοντέλα βαθμωτού-τανυστή που εισήχθησαν, είναι το μοντέλο Brans-Dicke [92]. Στο υποκεφάλαιο αυτό, θα δείξουμε πώς οι $f(R)$

θεωρίες μπορούν να παρασταθούν ως μια υποπερίπτωση του μοντέλου αυτού, άρα ως ένα μοντέλο βαθμωτού-τανυστή (μια διαδικασία που θα αποτελέσει ενδιαμέσο βήμα στη μαθηματική επεξεργασία του μοντέλου μας στο τελευταίο κεφάλαιο). Πρόκειται κατ' ουσίαν για έναν επαναπροσδιορισμό της δράσης σε μια ισοδύναμη απεικόνιση που καταλήγει στις ίδιες πεδιακές εξισώσεις¹. Ξεκινάμε από τη γνωστή δράση των $f(R)$ θεωριών:

$$S_{f(R)} = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} f(R) d^4x + S_M(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (3.4)$$

Μπορούμε να εισάγουμε ένα νέο πεδίο χ και να επαναπαύξουμε τη δράση ως:

$$S_{f(R)} = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} [f(\chi) + f'(\chi)(R - \chi)] d^4x + S_M(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (3.5)$$

Διακύμανση της δράσης αυτής προς το νέο πεδίο χ καταλήγει στην εξίσωση:

$$f''(\chi)(R - \chi) = 0. \quad (3.6)$$

Συνεπώς, υπό την προϋπόθεση πως $f''(\chi) \neq 0$, καταλήγουμε πως $R = \chi$, επανακτώντας τη δράση (3.4). Άρα βρήκαμε ήδη μία ισοδύναμη απεικόνιση. Αν επιπλέον επαναπροσδιορίσουμε τις μεταβλητές μας ως $\phi = f'(\chi)$ και θέτοντας

$$V(\phi) = \chi(\phi)\phi - f(\chi(\phi)), \quad (3.7)$$

η δράση παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$S_{f(R)} = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} [\phi R - V(\phi)] d^4x + S_M(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (3.8)$$

Για να γίνει φανερή η ισοδυναμία με τη θεωρία Brans-Dicke, γράφουμε τη γενική μορφή της δράσης μιας θεωρίας βαθμωτού-τανυστή (υποπερίπτωση της οποίας αποτελεί η θεωρία Brans-Dicke) που περιλαμβάνει ένα βαθμωτό πεδίο λ και τις συναρτήσεις-παραμέτρους $f(\lambda)$, $h(\lambda)$, $U(\lambda)$:

$$S_{(S_C-T)} = \int \sqrt{-g} [f(\lambda)R - \frac{1}{2}h(\lambda)g^{\mu\nu}(\partial_\mu\lambda)(\partial_\nu\lambda) - U(\lambda)] d^4x + S_M(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (3.9)$$

Με βάση αυτήν τη δράση, η θεωρία Brans-Dicke είναι η ειδική περίπτωση στην οποία ισχύουν οι ακόλουθες επιλογές παραμέτρων:

$$f(\lambda) = \frac{\lambda}{16\pi}, \quad h(\lambda) = \frac{\omega}{8\pi\lambda}, \quad U(\lambda) = 0.$$

¹Η δράση από την οποία και προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης δεν αποτελεί μετρήσιμο μέγεθος. Αν δύο ή περισσότερες δράσεις δίνουν τις ίδιες εξισώσεις κίνησης τότε είναι ισοδύναμες αναπαράστασεις του πεδίου υπό μελέτη. Παρουσιάζουν δηλαδή δυναμική ισοδυναμία.

Άρα, η δράση Brans-Dicke είναι η:

$$S_{(BD)} = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} [\lambda R - \omega g^{\mu\nu} \frac{(\partial_\mu \lambda)(\partial_\nu \lambda)}{\lambda}] d^4x + S_M(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (3.10)$$

Όπου ω είναι ένας αδιάστατος παράγοντας σύζευξης που ονομάζεται παράμετρος Brans-Dicke. Για $\omega \rightarrow \infty$ επανακατάται η κλασική θεωρία της Γενικής Σχετικότητας [83]. Ως κάτω όριο της παραμέτρου Brans-Dicke ω , με βάση σύγχρονα πειράματα στο Ηλιακό Σύστημα, προβλέπεται $\omega > 40.000$ [95].

Επανερχόμενοι λοιπόν στην αρχική μας στόχευση, την κατάδειξη της δυναμικής ισοδυναμίας μεταξύ $f(R)$ και Brans-Dicke θεωρίας, παρατηρούμε πως η $f(R)$ δράση -υπό τη μορφή (3.8)- αποτελεί υποπερίπτωση της Brans-Dicke για την ακόλουθη επιλογή παραμέτρων:

$$f(\lambda) = \phi, \quad \omega = 0, \quad U(\lambda) = V(\phi)$$

Έτσι, η δράση (3.8) αποτελεί αναπαράσταση σε φορμαλισμό Brans-Dicke με παράμετρο $\omega = 0$ και μη μηδενικό δυναμικό για το βαθμωτό πεδίο. Όλη αυτή η διαδικασία έγινε με απώτερο σκοπό τον μετασχηματισμό της δράσης αυτής από το καλούμενο πλαίσιο Jordan στο οποίο αναπαρίσταται, στο πλαίσιο Einstein. Αποτέλεσμα κατ' ουσίαν ενδιάμεσο βήμα καθώς επιλέξαμε να μην πάμε κατευθείαν από μια δράση της μορφής (3.4) στο ζητούμενο πλαίσιο Einstein (αν και υπάρχουν βιβλιογραφικές αναφορές πως αυτό είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί [93] [94]). Για να μεταβούμε στο -προσιτότερο πραξιακά- πλαίσιο Einstein θα πρέπει να προβούμε σε έναν σύμμορφο μετασχηματισμό, που είναι και το θέμα του επόμενου υποκεφαλαίου.

3.2.3 Ο Σύμμορφος Μετασχηματισμός

Μία συνήθης τεχνική που επιστρατεύεται κατά την πραγμάτευση θεωριών βαθμωτού-τανυστή, είναι η επιτέλεση ενός σύμμορφου μετασχηματισμού (conformal transformation). Απώτερος σκοπός είναι να επαναφέρουμε τη δράση σε μορφή αντίστοιχη της κλασικότροπης Γενικής Σχετικότητας, όπου το βαθμωτό Ricci δεν συνοδεύεται από κάποιον πολλαπλασιαστικό παράγοντα [όπως, εν προκειμένω, το βαθμωτό πεδίο ϕ στη δράση (3.8)].

Ο σύμμορφος μετασχηματισμός είναι [83] κατ' ουσία ένας τοπικός μετασχηματισμός κλίμακας. Εφόσον οι αποστάσεις και οι γωνίες μετρώνται μέσω της μετρικής, ο μετασχηματισμός αυτός πραγματοποιείται μέσω του πολλαπλασιασμού αυτής με μια -εξαρτώμενη από τη θέση x - συνάρτηση $\omega(x)$:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \omega^2(x) g_{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

Κατά αυτόν τον τρόπο, ο χώρος $(M, g_{\mu\nu})$ που κωδικοποιείται από τη μετρική g και ο χώρος $(M, \tilde{g}_{\mu\nu})$ που αντιστοιχίζεται στη μεταβληθής μετρική \tilde{g} έχουν κοινή αιτιώδη δομή (causal structure). Δηλαδή, αν για παράδειγμα ένα διάστημα είναι χρονοειδές, χωροειδές ή φωτοειδές με βάση τη μετρική $g_{\mu\nu}$ θα είναι και

πάλι χρονοειδές, χωροειδές ή φωτοειδές με βάση τη μετρική $\tilde{g}_{\mu\nu}$, με διαφορετικό όμως μέτρο [96]. Με άλλα λόγια, ένας σύμμορφος μετασχηματισμός είναι ένας μετασχηματισμός της γεωμετρίας που αφήνει όμως αναλλοίωτους τους κώνους φωτός. Η χρησιμότητά του έγκειται στο ότι μάς δίνει την ευκαιρία να μεταχειριστούμε διαφορετικές δυναμικές μεταβλητές για την περιγραφή της βαρυτικής αλληλεπίδρασης.

Ορισμένως, υπάρχουν απειράριθμοι πιθανοί σύμμορφοι μετασχηματισμοί, όσες δηλαδή και οι πιθανές επιλογές του παράγοντα ω στη σχέση μετατροπής (3.11). Όπως αναφέραμε όμως, από το σύνολο αυτών μάς ενδιαφέρει ο μετασχηματισμός που «ελευθερώνει» το βαθμωτό R στη δράση της θεωρίας μας. Η υποκατηγορία αυτών των σύμμορφων μετασχηματισμών οδηγεί σε μία διαφορετική αναπαράσταση της ίδιας θεωρίας², το καλούμενο πλαίσιο Einstein (Einstein frame).

Στην γενική περίπτωση μιας θεωρίας βαθμωτού-τανυστή όπου η δράση, στο καλούμενο πλαίσιο Jordan (Jordan frame), είναι:

$$S_{(Sc-T)} = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ \frac{1}{16\pi G} \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right] - V(\phi) + \alpha_m L^{(m)} \right\}, \quad (3.12)$$

όπου α_m η σταθερά σύζευξης με την ύλη, ϕ ένα βαθμωτό πεδίο, $\omega(\phi)$ ένας παράγοντας σύζευξης που εξαρτάται από την εκάστοτε περίπτωση και $V(\phi)$ το δυναμικό του πεδίου, οι τύποι του σύμμορφου μετασχηματισμού είναι:

$$\omega = \sqrt{G\phi}, \quad (3.13)$$

$$d\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{2\omega(\phi) + 3}{16\pi G}} \frac{d\phi}{\phi}. \quad (3.14)$$

Με βάση αυτούς, προκύπτει η δράση στο πλαίσιο Einstein ως:

$$S_{(Sc-T)} = \int \sqrt{-\tilde{g}} d^4x \left[\frac{\tilde{R}}{16\pi G} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\phi} - U(\tilde{\phi}) + \tilde{\alpha}_m(\phi) L^{(m)} \right]. \quad (3.15)$$

Ενώ το δυναμικό του νέου βαθμωτού πεδίου και ο παράγοντας σύζευξης $\tilde{\alpha}_m(\phi)$ δίνονται από τους τύπους:

$$U(\tilde{\phi}) = \frac{V[\phi(\tilde{\phi})]}{(G\phi)^2}. \quad (3.16)$$

²Το ερώτημα περί του ποιο εκ των Jordan και Einstein πλαισίου είναι και το φυσικό-πραγματικό πλαίσιο έχει μακρά διαλεκτική πορεία και απέχει παρά σάγκας από την οριστική διευθέτησή του. Η συνήθης άποψη είναι [85] πως τα δύο πλαίσια είναι ισοδύναμες απεικονίσεις της ίδιας θεωρίας (δεν έχει όμως αποδειχθεί για όλα τα φυσικά συστήματα, π.χ. απάδει σε δεδομένα προερχόμενα από τύπου Ia υπερκαινοφανείς αστέρες), χωρίς όμως να εκλείπουν και εναντιώσεις επ' αυτού. Σε ό,τι μας αφορά, θα θεωρήσουμε τα δύο πλαίσια ισοδύναμα, εργαλειοποιώντας τη μετάβαση στο πλαίσιο Einstein, απλώς και μόνο για να μας διευκολύνει στις πράξεις.

$$\tilde{\alpha}_m(\tilde{\phi}) = \frac{\alpha_m}{(G\phi)^2}. \quad (3.17)$$

Κατά αντίστοιχο τρόπο τελείται και ο σύμμορφος μετασχηματισμός για τη θεωρία Brans-Dicke, προσαρμόζοντας δηλαδή τους τύπους μετατροπής στην αντίστοιχη δράση. Ο λόγος που αναπτύχθηκε ο σύμμορφος μετασχηματισμός, για τη μετάβαση από το πλαίσιο Jordan στο πλαίσιο Einstein, είναι γιατί θα επιστρατευθεί κατά την αριθμητική πραγμάτευση του μοντέλου μας στο κεφάλαιο 6. Θα το χρησιμοποιήσουμε για να εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης στο πλαίσιο που ομοιάζει της κλασικής Γενικής Σχετικότητας (εξ ου και πλαίσιο Einstein), καθώς είναι πιο προσιτό κατά τη μαθηματική διαπραγμάτευση.

3.2.4 Θεωρία Horndeski

Για λόγους γνωσιοθεωρητικής πληρότητας, και εφόσον πραγματευόμαστε θεωρίες βαθμωτού-τανυστή, θα αναφερθούμε αναπόφευκτα στη θεωρία Horndeski. Η θεωρία Horndeski περιέχει την πιο γενική μορφή λαγκραζιανής πυκνότητας θεωρίας βαθμωτού-τανυστή, που να οδηγεί σε εξισώσεις κίνησης δεύτερης τάξης ως προς παραγώγους της μετρικής ή/και του βαθμωτού πεδίου. Δράσεις με λαγκραζιανές οι οποίες καταλήγουν σε εξισώσεις κίνησης μεγαλύτερης τάξης υποπίπτουν στην καλούμενη αστάθεια Ostrogradsky [97, 98]. Άρα, η θεωρία Horndeski είναι η πιο γενική θεωρία βαθμωτού-τανυστή που υπερπηδά το θεωρητικό σκόπελο της αστάθειας Ostrogradsky (στις τέσσερις διαστάσεις) και έτσι όλες οι υπόλοιπες -κινητικά βιώσιμες- θεωρίες βαθμωτού-τανυστή αποτελούν υποπερίπτωσης αυτής. Σαφώς, οι f(R) θεωρίες που μελετάμε, από τη στιγμή που παρουσιάζουν δυναμική ισοδυναμία και μπορούν να παρασταθούν ως θεωρίες βαθμωτού-τανυστή, αποτελούν υποπερίπτωση της θεωρίας Horndeski. Θα περιοριστούμε στην καταγραφή της λαγκραζιανής της θεωρίας, χωρίς περαιτέρω ανάλυση.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\square\phi + G_4(\phi, X)R + \frac{\partial G_4}{\partial X}[(\square\phi)^2 - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}] \\ & + G_5(\phi, X)G^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} - \frac{1}{6}\frac{\partial G_5}{\partial X}[(\square\phi)^3 - 3\square\phi\phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} + 2\phi_{\mu\nu}\phi^{\nu\lambda}\phi_{\lambda}^{\mu}]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Όπου ϕ είναι ένα βαθμωτό πεδίο, για τον παράγοντα X ισχύει $X = -g^{\mu\nu}\phi_{\mu}\phi_{\nu}/2$, ενώ οι συντελεστές G_2, G_3, G_4, G_5 είναι αυθαίρετες συναρτήσεις των ϕ και X .

Κεφάλαιο 4

Αστέρες Νετρονίων

Οι αστέρες νετρονίων και τα βαρυτικά κύματα που δημιουργούνται από δυαδικά συστήματα αυτών, θα είναι ο κύριος άξονας του ερευνητικού κομματιού της εργασίας. Στο παρόν κεφάλαιο, γίνεται παρουσίαση των βασικών χαρακτηριστικών των αστρικών αυτών καταλοίπων, του τρόπου δημιουργίας τους και της δομής τους.

4.1 Γενικές Πληροφορίες

Οι τρεις πιθανές συμπαγείς δομές ενός αποθνήσκοντος άστρου είναι ο λευκός νάνος (white dwarf), ο αστέρας νετρονίων (neutron star) και η μαύρη τρύπα (black hole). Και στις τρεις αυτές περιπτώσεις, τα «καύσιμα», που μέσω πυρηνικής σύντηξης και επακόλουθης δημιουργίας θερμικής πίεσης αντιστέκονται στη βαρυτική κατάρρευση, έχουν σχεδόν αποσωθεί. Έτσι, οι δομές αυτές διαφέρουν από τα ενεργά άστρα ως προς το ότι δεν δύνανται πλέον να υπερνικήσουν τις βαρυτικές δυνάμεις που ασκούνται από την ίδια τους τη μάζα. Αντιθέτως, οι λευκοί νάνοι σταθεροποιούνται, ως συμπαγής δομή, μέσω της πίεσης των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων (η προέλευσή της άπτεται της Απαγορευτικής Αρχής του Pauli που υπαγορεύει πως δύο ηλεκτρόνια δεν μπορούν να έχουν ίδια τετράδα κβαντικών αριθμών), οι αστέρες νετρονίων μέσω της πίεσης των εκφυλισμένων νετρονίων (η Αρχή του Pauli -στη γενικευμένη της εκδοχή- ισχύει για όλα τα φερμιόνια, άρα και για νετρόνια), ενώ οι μαύρες τρύπες δεν έχουν κανένα μέσο αντίστασης στη βαρυτική κατάρρευση οπότε και συνθλίβονται σε μία μοναδικότητα (singularity) του χωροχρόνου. Οι τρεις αυτές δομές είναι (εκτός ελαχίστων εξαιρέσεων) στατικές και αποτελούν έτσι το σύνολο των πιθανών τελικών σταδίων της αστρικής εξέλιξης.

Ο καθοριστικός παράγοντας για την κατάληξη σε μια από τις τρεις αυτές τελικές μορφές για ένα άστρο, είναι η μάζα του. Η πλέον κοινή κατάληξη για ένα συνήθους μεγέθους άστρο όπως ο Ήλιος, είναι σε λευκό νάνο. Αν όμως το αστέρι έχει επαρκώς παραπάνω μάζα, τότε θα φτάσει στο όριο Chandrasekhar, όπου η πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων αδυνατεί να αντισταθεί

στη βαρυτική συμπίεση. Το όριο αυτό τοποθετείται [83] στα $1,4M_{\odot}$ (όπου $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}g$, η μάζα του Ήλιου). Εάν το άστρο υπερβεί αυτό το όριο μάζας, καταρρέει μειώνοντας έτι περαιτέρω την ακτίνα του. Τότε, ευνοείται θερμοδυναμικά η αντίδραση ηλεκτρονίων και πρωτονίων προς παραγωγή νετρονίων και νετρίνων, μέσω αντίστροφης διάσπασης-β (inverse beta decay). Το απότοκο αυτής της διεργασίας είναι και το θέμα του παρόντος κεφαλαίου, ένας αστέρας νετρονίων. Εν συνεχεία, αν το άστρο νετρονίων που σχηματίστηκε έχει αρκετά μεγάλη μάζα, η πίεση των εκφυλισμένων νετρονίων -που αποτελεί τώρα το μέσο αντίστασης στη βαρύτητα- θα είναι αδύνατο να το κρατήσει σε ισορροπία. Το ανώτατο αυτό όριο καλείται όριο Oppenheimer-Volkoff και υπάρχει σημαντική αβεβαιότητα σχετικά με την ακριβή τιμή του. Συνήθως [83,99] τοποθετείται στα 3-4 M_{\odot} . Αν η μάζα του αστέρα υπερβαίνει και αυτό το όριο, τότε θεωρούμε πως συντελείται πλήρης βαρυτική κατάρρευση, με κατάληξη μια μαύρη τρύπα.

Οι αστέρες νετρονίων έχουν ακτίνα κοντά στα 10km και πολύ υψηλή πυκνότητα που οφείλεται στην υπέρμετρη συμπίεση μάζας που περιγράφηκε. Έχουν χαμηλή φωτεινότητα και περιστρέφονται με μεγάλη ταχύτητα, ενώ διαθέτουν πανίσχυρα μαγνητικά πεδία. Ο συνδυασμός των δύο τελευταίων χαρακτηριστικών έχει ως παρεπόμενο οι αστέρες νετρονίων να καλούνται -στην παρατηρησιακή αργκό- πάλσαρς (pulsars=:PULSating stARS). Τα πάλσαρς είχαν εντοπιστεί από την Joselyn Bell από το 1967, όμως μόλις τις τελευταίες δεκαετίες ταυτοποιήθηκαν ως αστέρες νετρονίων.

Ο επικρατέστερος μηχανισμός δημιουργίας αστέρων νετρονίων είναι μέσω μιας τύπου II έκρηξης υπερκαινοφανούς (type II supernova), της οποίας αποτελούν απομεινάρια. Υπολογίζεται πως η αρχική μάζα των αστέρων που θα καταλήξουν μετά την έκρηξη σε αστέρα νετρονίων είναι από $8M_{\odot}$ έως $20-30M_{\odot}$. Η κεντρική ιδέα αυτού του μηχανισμού είναι η εξής. Η πυρηνική σύντηξη στο εσωτερικό του αστεριού φτάνει μέχρι το άτομο του σιδήρου, καθώς είναι η πρώτη, στις διαδοχικές συντήξεις που συντελούνται, ενδόθερμη αντίδραση και άρα απαιτείται ενέργεια για την πραγματοποίησή της, με αποτέλεσμα ο πυρήνας να φύχεται αντί να θερμαίνεται και η πίεση να μειώνεται. Η σύντηξη δεν ευνοείται πλέον θερμοδυναμικά και έτσι, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, δεν παράγεται πλέον η αντίρροπη της βαρύτητας θερμική πίεση που διατηρούσε το άστρο σε ισορροπία. Σε αυτό το σημείο, τα εσωτερικά σφαιρικά στρώματα του άστρου συστέλλονται κι άλλο, δημιουργώντας έναν βαρύ πυρήνα νετρονίων ενώ η τεράστια βαρυτική δύναμη των εξωτερικών στρωμάτων τα συνθλίβει πάνω σε αυτόν τον υπέρπυκνο πυρήνα οδηγώντας ακαριαία σε μία έκρηξη υπερκαινοφανούς που διασκορπίζει τα συστατικά του άστρου στο σύμπαν. Το εάν ο εναπομείναντας αστέρας νετρονίων θα αποφύγει την απόλυτη βαρυτική κατάρρευση σε μαύρη τρύπα ή θα σταθεροποιηθεί, εξαρτάται, όπως αναφέραμε, από τη μάζα του.

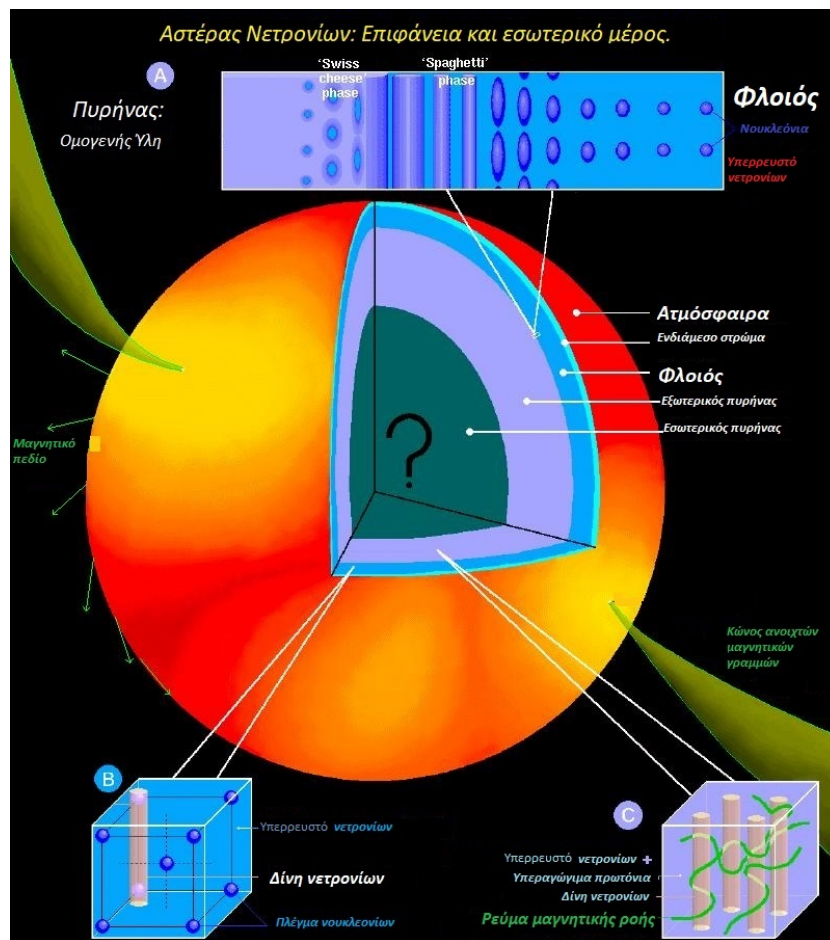
4.2 Εσωτερική Δομή και Καταστατική Εξίσωση

Για κάθε σώμα στερεό, ρευστό ή άλλης συμπαγούς (ή οιωνεί συμπαγούς) δομής χρησιμοποιείται η καταστατική εξίσωση (equation of state) ως μέσο κωδικοποίησης της συμπεριφοράς των μερών του. Η καταστατική εξίσωση μάς δείχνει κατ' ουσίαν πόσο «συμπιέσιμο» είναι ένα σώμα. Για παράδειγμα, ο ατμοσφαιρικός αέρας στην επιφάνεια της Γης (και σε συνήθεις θερμοκρασίες) συμπιέζεται εύκολα, ακόμα και υπό μικρή πίεση. Αντίθετα, το νερό (και πάλι, σε συνήθεις θερμοκρασίες) είναι πρακτικά ασυμπιέστο ακόμα και υπό την άσκηση υψηλών πιέσεων. Η γνώση όμως αυτής της συμπεριφοράς, προϋποθέτει τη γνώση των εσωτερικών φυσικοχημικών συσχετισμών της υπό μελέτη δομής.

Για τους αστέρες νετρονίων, υπάρχει μεγάλη αβεβαιότητα περί της καταστατικής τους εξίσωσης. Για να την καταδείξουμε θα χαρτογραφήσουμε, αδρομερώς, τα εσωτερικά του τμήματα. Στην εικόνα 4.1, δίνεται το περίγραμμα που θα ακολουθηθεί κατά την παρακάτω ανάλυση.

Ξεκινώντας από την επιφάνεια, το υφιστάμενο βαρυτικό πεδίο, λόγω της υπερσυμπιεσμένης μάζας του καταρρεύσαντος αστεριού, είναι περίπου 10^{11} φορές επί το βαρυτικό πεδίο της Γης. Παράλληλα, το μαγνητικό πεδίο στην επιφάνεια υπολογίζεται στα 10^{12} Gauss, ένταση ικανή να αποσυνθέσει σε μεγάλο βαθμό τους ατομικούς πυρήνες. Στην ατμόσφαιρα (atmosphere) και το ανώτερο τμήμα του φλοιού (crust) υπάρχουν ακόμη «φυσιολογικοί» πυρήνες, δηλαδή δεν έχει ακόμη επέλθει η ολοκληρωτική κυριαρχία των νετρονίων. Στην κορυφή του φλοιού, την πλειοψηφία των πυρήνων αποτελούν ο σίδηρος 56 (Fe^{56}) και κάποια ελαφρύτερα στοιχεία, όμως όσο προχωράμε εσώτερα η πίεση είναι αρκετή ώστε να αυξηθούν τα ατομικά βάρη ισορροπίας και εν τέλει να συναντάμε όλο και περισσότερα στοιχεία με περίσσεια νετρονίων (π.χ. $Z=40$ και $A=120$ κ.ο.κ.). Σε πυκνότητα περίπου $10^6 g/cm^3$, τα ηλεκτρόνια γίνονται εκφυλισμένα και δύναται να μοντελοποιηθούν ως ιδανικό αέριο Fermi (αέριο φερμιονίων όπου τα φερμιόνια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους). Η πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων είναι η αντίρροπη της βαρυτικής συμπίεσης δύναμη που αναπτύσσεται στους λευκούς νάνους και τους διατηρεί σε ισορροπία.

Πιο εσωτερικά, σε πυκνότητα περίπου $4 \cdot 10^{11} g/cm^3$ φτάνουμε στο σημείο πυρηνικής διαφυγής των νετρονίων (neutron drip). Σε αυτήν την πυκνότητα, ευνοείται ενεργειακά η απόσπαση των νετρονίων από τον πυρήνα και η ελεύθερη κίνησή τους εξωτερικά αυτού. Από εκεί και ύστερα συναντάμε κυρίως ελεύθερα νετρόνια, ενώ το ποσοστό ηλεκτρονίων και πρωτονίων ανέρχεται πλέον στο ισχνό 5-10%, καθώς έχουν επέλθει ήδη αντιδράσεις αντίστροφης β-διάσπασης. Καθώς η ύλη γίνεται ακόμη πυκνότερη, συναντάμε την ακολουθία που καλείται “pasta-antipasta”. Στο κατώτερα επίπεδο πυκνότητας αυτού του υπέρπυκνου φάσματος (περίπου $10^{12} g/cm^3$), τα νουκλεόνια είναι διασκορπισμένα σε σχετική απόσταση μεταξύ τους. Σε υψηλότερες πυκνότητες συγχωνεύονται και δημιουργούν μακαρονοειδή νήματα και εν συνεχεία, ακόμα βαθύτερα στον πυ-



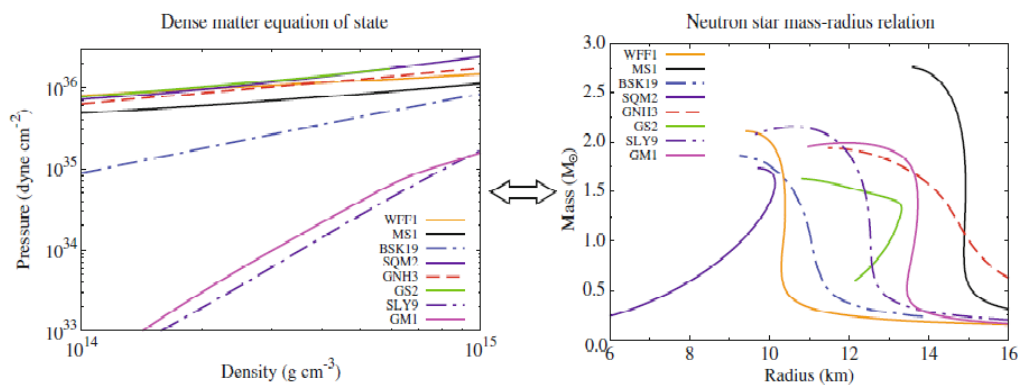
Σχήμα 4.1: Αστέρων νετρονίων. Επιφάνεια και εσωτερικό μέρος.
 Πηγή: <http://www.astrosceu.unam.mx/neutrones/NS-picture/NStar/NStar-I.gif>.

ρήνα του άστρου, μοιάζουν με φύλλα (η φάση αυτή καλείται “lasagna phase”). Προχωρώντας κι άλλο, παρατηρούμε μια αντιστροφή της προαναφερθείσας ακολουθίας και πλέον δημιουργούνται κατά σειρά φύλλα και μετά ξεχωριστά νουκλεόνια, σε ένα σχεδόν ομογενές όμως μίγμα (η φάση αυτή, βιβλιογραφικά, παρομοιάζεται συνήθως με τυρί με τρύπες και καλείται “Swiss cheese phase”).

Τέλος, καταλήγουμε στον διμερή πυρήνα του αστέρα νετρονίων, όπου οι πυκνότητες είναι υψηλότερες από αυτές του ατομικού πυρήνα [στα $2.8 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$, επονομαζόμενη και πυκνότητα πυρηνικού κορεσμού (nuclear saturation density)], μια κατάσταση της ύλης για την οποία έχουμε σχεδόν πλήρη άγνοια (πρόκειται για φάσμα απρόσιτο σε επίγεια πειράματα) και διάφορα μοντέλα έχουν προταθεί για την περιγραφή της. Ο πυρήνας του αστέρα αποτελεί το κυριότερο ως προς τη μάζα κομμάτι του, καταλαμβάνοντας περίπου το 99% αυτής [100]. Όπως αναφέραμε ήδη είναι διμερής, αποτελούμενος από ένα εξωτερικό και ένα

εσωτερικό μέρος. Ο εξωτερικός καταλαμβάνει το φάσμα πυκνότητας $\sim 1-2$ φορές επί την πυκνότητα πυρηνικού κορεσμού και αποτελείται κυρίως από εκφυλισμένα νετρόνια και απειροελάχιστο ποσοστό πρωτονίων και ηλεκτρονίων, τα οποία αναμένεται να έχουν ιδιότητες υπερρευστού. Στο εσωτερικό μέρος του πυρήνα, η πυκνότητα, ανάλογα με την καταστατική εξίσωση, ενδέχεται να γίνει $\sim 10-15$ μεγαλύτερη της πυκνότητας πυρηνικού κορεσμού. Σε αυτές τις τιμές πυκνότητας, ίσως καθίσταται ευνοϊκή ενεργειακά η εμφάνιση εξωτικών σωματιδίων αντί των υπάρχοντων ηλεκτρονίων, πρωτονίων και νετρονίων. Για παράδειγμα, ενδέχεται να σχηματιστούν υπερόνια (hyperons), πιόνια (pions) ή/και καόνια (kaons). Μια άλλη πιθανή συνθήκη, είναι η πυκνότητα να γίνει τόσο υψηλή, που η ελκτική δύναμη μεταξύ των κουάρκ να είναι πλέον αμελητέα (λόγω στοιχειωδών αποστάσεων της υπέρπυκνης ύλης) και αυτά να μην υπόκεινται πλέον στους συνήθεις χωρικούς περιορισμούς: να έχουμε δηλαδή ένα άμορφο μίγμα κουάρκ (ή ύλη κουάρκ).

Όλα αυτά όμως αποτελούν υποθέσεις αλλά και μέτρο της ελλειπούς γνώσης περί της καταστατικής εξίσωσης της υπέρπυκνης αυτής ύλης. Μέσω αυτής, καθορίζονται οι μακροσκοπικές ιδιότητες των αστέρων νετρονίων, όπως η μέγιστη πιθανή μάζα των, καθώς και η αντίστοιχη ακτίνα. Λόγω της περιπλοκότητας των θεωρητικών υπολογισμών και της αδυναμίας τέλεσης πειραμάτων υπό τέτοιες τιμές πυκνότητας της ύλης, διάφορα μοντέλα καταστατικών εξισώσεων, με μεγάλο εύρος παραμέτρων, έχουν κατασκευαστεί κατά καιρούς [100], όπως φαίνεται στο αριστερό διάγραμμα του σχήματος 4.2.



Σχήμα 4.2: Αντιστοίχιση μεταξύ καταστατικών εξισώσεων (EOS) και διαγραμμάτων συσχέτισης μάζας-ακτίνας αστέρων νετρονίων. Απεικονίζονται διάφορες προτεινόμενες καταστατικές εξισώσεις της βιβλιογραφίας. Πηγή: Παραπομπή [20].

Όντας τα πυκνότερα -άμεσα παρατηρήσιμα- αντικείμενα του σύμπαντος, οι αστέρες νετρονίων αποτελούν φυσικά εργαστήρια για τη μελέτη της συμπεριφοράς της ύλης σε υπερπυρηνικές πυκνότητες. Ένα εκ των σημαντικότερων αναπάντητων ερωτημάτων της σύγχρονης Φυσικής είναι πώς αντιδρά η βαρυο-

νική ύλη σε τέτοιες πυκνότητες όπου η αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων υπόκειται στην ισχυρή πυρηνική δύναμη. Για παράδειγμα, διατηρεί η ύλη τον «νουκλεονικό» της χαρακτήρα ή μετασχηματίζεται σε πιο εξωτικές μορφές; Έχει η ύλη ιδιότητες υπερρευστού σε πυκνότητες μεγαλύτερες αυτών του πυρήνα; Όπως ήδη αναφέραμε, όλες οι απαντήσεις περί της σωματιδιακής αλληλεπίδρασης και της συμπεριφοράς της υπέρπυκνης ύλης απολήγουν σε μια αυστηρά καθορισμένη σχέση μεταξύ πίεσης και ενεργειακής πυκνότητας που καλείται καταστατική εξίσωση. Ο καθορισμός αυτής της σχέσης είναι και το «τέλος του δρόμου» αυτών των θεωρητικών προκλήσεων.

Στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας πορευόμαστε προς αυτήν τη θεωρητική στόχευση, καθώς θα προσπαθήσουμε να άρουμε τους εκφυλισμούς στην απροσδιοριστία των πιθανών καταστατικών εξισώσεων αστέρων νετρονίων που ενδέχεται να οφείλονται -εκτός από τις γνωστές μας αδυναμίες ακριβούς προσδιορισμού- σε τροποποιήσεις της βαρυτικής θεωρίας και διαστήματα εμπιστοσύνης που αυτή επιβάλλει.

Κεφάλαιο 5

Βαρυτικά Κύματα και Tidal Love Numbers

Φτάνοντας στο τέλος της κατασκευής του θεωρητικού υποβάθρου της εργασίας, εισάγουμε τις έννοιες των βαρυτικών κυμάτων (gravitational waves) και των παλιρροϊκών αριθμών του Love (tidal Love numbers). Στις δύο αυτές έννοιες θα βασιστεί η αριθμητική επεξεργασία του τελευταίου κεφαλαίου της εργασίας.

5.1 Τα Βαρυτικά Κύματα

Η θεωρητική βάση των βαρυτικών κυμάτων είναι η θεωρία των διαταραχών. Κατά τις συνήθεις προσεγγίσεις, τα βαρυτικά κύματα λαμβάνονται ως ασθενείς διαταραχές ενός επίπεδου υποβάθρου (χώρος Minkowski), μια παραδοχή που δεν απέχει πολύ από την πραγματικότητα. Για λόγους πληρότητας, θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση από μια γενική, συναλλοίωτη θεωρία ασθενών βαρυτικών διαταραχών που διαδίδονται σε ένα μη επίπεδο, βαρυτικό πεδίο $g_{\mu\nu}$ [109].

5.1.1 Βαρυτικές Διαταραχές σε μη Επίπεδο Υπόβαθρο

Έστω μια αυθαίρετη μετρική $g_{\mu\nu}$, η οποία ύστερα από μια -αρκούντως μικρή- διαταραχή $\delta g_{\mu\nu}$, μετατρέπεται στην $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$. Σε προσέγγιση πρώτης τάξης ως προς $\delta g_{\mu\nu}$, ο τανυστής Ricci είναι:

$$\delta R_{\mu\kappa} = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} + \delta \Gamma_{\kappa\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} - \delta \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}. \quad (5.1)$$

Όροι της μορφής $\delta \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda}$ εκφράζουν τη μεταβολή στη συνοχή της πολλαπλότητας και ισούνται με:

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = -g^{\lambda\rho} \delta g_{\rho\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left[\frac{\partial \delta g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \delta g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \delta g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right]. \quad (5.2)$$

Η μεταβολή $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, όντας διαφορά δύο συμβόλων Christoffel, είναι ένας καλά ορισμένος τανυστής που εκφράζεται ως:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}[(\delta g_{\rho\mu})_{;\nu} + (\delta g_{\rho\nu})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\rho}]. \quad (5.3)$$

Από τη στιγμή μάλιστα που το $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ είναι τανυστής, η μεταβολή στον τανυστή Ricci μπορεί επίσης να γραφτεί με όρους συναλλοίωτων παραγώγων ως:

$$\delta R_{\mu\kappa} = (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)_{;\kappa} - (\delta\Gamma_{\mu\kappa}^\lambda)_{;\lambda}. \quad (5.4)$$

Και τροποποιώντας τους όρους ως προς τη μεταβολή της μετρικής:

$$\delta R_{\mu\kappa} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}[(\delta g_{\lambda\rho})_{;\mu;\kappa} - (\delta g_{\rho\mu})_{;\kappa;\lambda} - (\delta g_{\rho\kappa})_{;\mu;\lambda} + (\delta g_{\mu\kappa})_{;\rho;\lambda}]. \quad (5.5)$$

Υπό την προϋπόθεση πως οι πεδιακές εξισώσεις του Einstein ικανοποιούνται από τα αδιατάραχτα μεγέθη $g_{\mu\nu}$ και $T_{\mu\nu}$, τις επιλύουμε και για τα διαταραγμένα μεγέθη $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ και $T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}$, καταλήγοντας στην:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}[(\delta g_{\lambda\rho})_{;\mu;\kappa} - (\delta g_{\rho\mu})_{;\kappa;\lambda} - (\delta g_{\rho\kappa})_{;\mu;\lambda} + (\delta g_{\mu\kappa})_{;\rho;\lambda}] \\ &= -8\pi G[\delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\delta T_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\eta}T^{\lambda\eta} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}T^\lambda_\lambda]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ορισμένως, ο όρος $\delta T_{\mu\nu}$ υπακούει στην αρχή διατήρησης ενέργειας-ορμής:

$$(\delta T^{\nu\mu})_{;\mu} + T^{\nu\lambda}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\mu + T^{\lambda\mu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\nu = 0. \quad (5.7)$$

Γενικώς, κατά τη σπουδή των βαρυτικών κυμάτων (σε επίπεδο ή καμπυλωμένο υπόβαθρο), είναι κρίσιμο να διαχωρίσουμε τις υπό μελέτη διαταραχές από απλές, τετρμιμένες αλλαγές στο σύστημα συντεταγμένων, που αντιστοιχούν σε μετασχηματισμούς βαθμίδας. Για το λόγω αυτό, θεωρούμε μια αυθαίρετη, απειροστή μεταβολή στο σύστημα συντεταγμένων ως:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu(x). \quad (5.8)$$

Ως $\epsilon^\mu(x)$ ορίζεται ως ένα αυθαίρετο, απειροστό διανυσματικό πεδίο. Οι μερικές παράγωγοι με βάση τους κανόνες μετατροπής είναι:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \epsilon^\mu(x)}{\partial x^\nu}. \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta_\mu^\nu + \frac{\partial \epsilon^\nu(x)}{\partial x^\mu} + O(\epsilon^2). \quad (5.10)$$

Από τη στιγμή που οι εξισώσεις του Einstein είναι συναλλοίωτες και η $g_{\mu\nu}(x)$ είναι λύση για τον τανυστή ενέργειας-ορμής $T_{\mu\nu}(x)$, έπεται πως και η $g'_{\mu\nu}(x)$ θα είναι λύση για τον τανυστή ενέργειας-ορμής $T'_{\mu\nu}(x)$, όπου:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x) &= g'_{\mu\nu}(x') + \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}\epsilon^\lambda(x) + O(\epsilon^2) \\ &= g_{\mu\nu}(x) + g_{\lambda\nu}(x)\frac{\partial \epsilon^\lambda(x)}{\partial x^\mu} + g_{\lambda\mu}(x)\frac{\partial \epsilon^\lambda(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}\epsilon^\lambda(x). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Αντίστοιχες σχέσεις ικανοποιούνται και από τον ταυυστή ενέργειας-ορμής $T'_{\mu\nu}(x)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως και η

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + \Delta_\epsilon g_{\mu\nu}(x), \quad (5.12)$$

είναι λύση της εξίσωσης Einstein για τον ταυυστή ενέργειας-ορμής:

$$T'_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(x) + \Delta_\epsilon T_{\mu\nu}(x), \quad (5.13)$$

όπου:

$$\Delta_\epsilon g_{\mu\nu}(x) \equiv \epsilon_{\mu;\nu} + \epsilon_{\nu;\mu}, \quad (5.14)$$

και

$$\Delta_\epsilon T_{\mu\nu}(x) \equiv T_\mu^\lambda \epsilon_{\lambda;\nu} + T_\nu^\lambda \epsilon_{\lambda;\mu} + T_{\mu\nu;\lambda} \epsilon^\lambda. \quad (5.15)$$

Συμπερασματικά, η $\delta g_{\mu\nu} = \Delta_\epsilon g_{\mu\nu}$ είναι λύση της πεδιακής εξίσωσης (5.6) για μια διαταραχή της πηγής $\delta T_{\mu\nu} = \Delta_\epsilon T_{\mu\nu}$. Όμως η (5.6) είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση και, άρα, δοθείσης κάποιας λύσης $\delta g_{\mu\nu}$, μπορούμε πάντοτε να βρούμε άλλες λύσεις της μορφής $\delta g_{\mu\nu} + \Delta_\epsilon g_{\mu\nu}$ με ακριβώς το ίδιο φυσικό περιεχόμενο. Η δυνατότητα να προσθέτουμε πεπερασμένους όρους της μορφής $\Delta_\epsilon g_{\mu\nu}$ για αυθαίρετες συναρτήσεις $\epsilon^\mu(x)$, είναι η προαναφερθείσα ελευθερία βαθμίδας και θα αναλυθεί περαιτέρω στην επόμενη υποενότητα.

5.1.2 Βαρυτικές Διαταραχές σε Υπόβαθρο Minkowski

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα γίνει παρουσίαση των διαταραχών τού επίπεδου χωροχρόνου, που προσδιορίζονται ως ασθενή βαρυτικά κύματα. Η παρακάτω ανάλυση θα βασιστεί στις παραπομπές [81], [83].

Λαμβάνουμε ξανά μια διαδιδόμενη ασθενή διαταραχή, αυτήν τη φορά όμως σε υπόβαθρο Minkowski, άρα απουσία βαρύτητας:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (5.16)$$

με

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (5.17)$$

Θα περιορίσουμε την ανάλυση σε συστήματα συντεταγμένων στα οποία ο ταυυστής $\eta_{\mu\nu}$ παίρνει τη διαγώνια μορφή $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Ακόμη, η υπόθεση πως το $h_{\mu\nu}$ είναι αρκούντως μικρό, δίνει τη δυνατότητα να αγνοήσουμε οποιαδήποτε ανώτερη τάξη στη διαταραχή αυτή και άρα να ανεβοκατεβάσουμε δείκτες στην εξίσωση (5.16) χρησιμοποιώντας τις $\eta_{\mu\nu}$ και $\eta^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (5.18)$$

Κατά βάση, επεξεργαζόμαστε τη γραμμικοποιημένη εκδοχή των εξισώσεων πεδίου του Einstein, η οποία αντιστοιχεί στη διάδοση ενός συμμετρικού ταυυστικού πεδίου (εν προκειμένω, του $h_{\mu\nu}$) πάνω στο επίπεδο Minkowski. Για το

ασθενές αυτό βαρυτικό πεδίο, ορίζεται ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων Lorentz της μορφής $x^{\mu'} = \Lambda_{\mu}^{\mu'} x^{\mu}$. Για μετασχηματισμούς Lorentz, η επίπεδη μετρική $\eta_{\mu\nu}$ παραμένει αναλλοίωτη, ενώ η διαταραχή $h_{\mu\nu}$ μετασχηματίζεται ως:

$$h_{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu}^{\mu'} \Lambda_{\nu}^{\nu'} h_{\mu\nu}. \quad (5.19)$$

Παρατηρούμε ότι σε ένα μετασχηματισμό Lorentz, το $h_{\mu\nu}$ μετασχηματίζεται σαν να ήταν αυτοτελής τανυστής (κάτι που δεν ισχύει καθώς το $h_{\mu\nu}$ είναι μέρος του τανυστή $g_{\mu\nu}$). Μέσω της θεώρησης αυτής, δικαιολογείται η λήψη ενός ασθενώς καμπυλωμένου χωροχρόνου ως επίπεδου, επί του οποίου ορίζεται ένας τανυστής $h_{\mu\nu}$. Έτσι, όλα τα γνωστά γεωμετρικά μεγέθη -όπως π.χ. ο τανυστής Riemann- θα ορισθούν με όρους $h_{\mu\nu}$ και θα προσομοιάζουν με πεδία σε ένα επίπεδο, χωροχρονικό υπόβαθρο. Φυσικά, ο χωροχρόνος είναι στην πραγματικότητα καμπυλωμένος και η παραπάνω θεώρηση είναι απότοκο μιας συγκεκριμένης επιλογής μετασχηματισμού συντεταγμένων που θα μελετηθεί παρακάτω. Στη συνέχεια, καλούμαστε να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης που ακολουθεί η διαταραχή $h_{\mu\nu}$. Άρα θα λύσουμε την εξίσωση Einstein εργαζόμενοι κατά τα γνωστά. Ξεκινώντας από τα σύμβολα Christoffel έχουμε:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} \left(\frac{\partial h_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Από τη στιγμή που οι συντελεστές της Levi-Civita συνοχής είναι ποσότητες πρώτης τάξης, η μόνη συνεισφορά στους συντελεστές του τανυστή Riemann θα προέρχεται από παραγώγους των συντελεστών Γ και όχι από όρους Γ^2 . Άρα, ο τανυστής Riemann είναι:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \eta_{\mu\lambda} \partial_{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \eta_{\mu\lambda} \partial_{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{\rho} \partial_{\nu} h_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma} \partial_{\mu} h_{\nu\rho} - \partial_{\sigma} \partial_{\nu} h_{\mu\rho} - \partial_{\rho} \partial_{\mu} h_{\nu\sigma}). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ο τανυστής Ricci υπολογίζεται μέσω συστολής πρώτου και τρίτου δείκτη του τανυστή Riemann και προκύπτει:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\sigma} \partial_{\nu} h_{\mu}^{\sigma} + \partial_{\sigma} \partial_{\mu} h_{\nu}^{\sigma} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} h - \square h_{\mu\nu}). \quad (5.22)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, υπάρχει το ίχνος της διαταραχής $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h_{\mu}^{\mu}$ και το σύμβολο του d'Alembert $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$. Μέσω μιας ακόμη συστολής, λαμβάνουμε το βαθμωτό Ricci:

$$R = \partial_{\mu} \partial_{\nu} h^{\mu\nu} - \square h. \quad (5.23)$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω λαμβάνουμε τον τανυστή Einstein:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{\sigma} \partial_{\nu} h_{\mu}^{\sigma} + \partial_{\sigma} \partial_{\mu} h_{\nu}^{\sigma} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_{\rho} \partial_{\lambda} h^{\rho\lambda} \\ &\quad + \eta_{\mu\nu} \square h). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις πεδίου του Einstein παρουσία ύλης/ενέργειας θα είναι $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, όπου ο ταυυστής ενέργειας ορμής $T_{\mu\nu}$ υπολογίζεται σε μηδενική τάξη ως προς $h_{\mu\nu}$. Δεν θα συμπεριληφθούν ανώτερης τάξης όροι στον ταυυστή $T_{\mu\nu}$, γιατί κάτι τέτοιο θα ήταν αντίθετο με την παραδοχή του ασθενούς πεδίου που λάβαμε εξ αρχής. Η διαταραχή στη γεωμετρία του χωροχρόνου $h_{\mu\nu}$ πρέπει να είναι ίδιας τάξης με τον ταυυστή ενέργειας ορμής.

Έχοντας καταστρώσει τις εξισώσεις πεδίου, για να προβούμε στη λύση τους, πρέπει να αντιμετωπίσουμε το ζήτημα της αναλλοιώτητας βαθμίδας (gauge invariance). Το ζήτημα αυτό αναφύεται λόγω του ότι η συνθήκη $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ (εξίσωση (5.16)) δεν καθορίζει μονοσήμαντα το σύστημα συντεταγμένων. Πιο συγκεκριμένα, δεν αποκλείει την ύπαρξη ενός άλλου συστήματος συντεταγμένων στο οποίο η μετρική μπορεί να γραφεί και πάλι ως το άθροισμα της μετρικής Minkowski και μιας ακούνητως ασθενούς διαταραχής, αλλά αυτή τη φορά η διαταραχή να είναι διαφορετική από την $h_{\mu\nu}$. Έστω δηλαδή η ακόλουθη αλλαγή συντεταγμένων:

$$x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu(x^\nu). \quad (5.25)$$

Η αλλαγή των συντεταγμένων συντελείται μέσω του διανύσματος ξ^μ , του οποίου οι συνιστώσες είναι συναρτήσεις της θέσης και υπό την απαίτηση $|\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}| \ll 1$ λαμβάνουμε:

$$\Lambda_{\nu'}^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (5.26)$$

$$\Lambda_{\nu'}^\mu = \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} + O(|\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}|^2). \quad (5.27)$$

Αποδεικνύεται εύκολα πως σε πρώτη τάξη ως προς τις μικρές ποσότητες:

$$g_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu}. \quad (5.28)$$

Αυτό σημαίνει ότι η αλλαγή συντεταγμένων έχει ως αποτέλεσμα τον επαναπροσδιορισμό του $h_{\mu\nu}$:

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu}. \quad (5.29)$$

Εφόσον τα $|\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}|$ είναι μικρά, τότε και το νέο $h_{\mu\nu}$ θα παραμείνει μικρό, άρα βρισκόμαστε ακόμη σε ένα αποδεκτό σύστημα συντεταγμένων. Η εξίσωση (5.29) παριστάνει έναν μετασχηματισμό βαθμίδας. Η ελευθερία επιλογής συντεταγμένων στην εξίσωση Einstein σημαίνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε ένα αυθαίρετο (αλλά μικρό) διάνυσμα ξ^μ στην (5.29). Οι μετασχηματισμοί βαθμίδας ορίζουν στην ουσία κλάσεις ισοδυναμίας μεταξύ όλων των συμμετρικών ταυυστών $h_{\mu\nu}$, με την έννοια ότι κάθε δύο $h_{\mu\nu}$ που σχετίζονται μέσω της (5.29), για κάποιο τυχαίο ξ^μ , θα παράγουν ισοδύναμα φυσικά φαινόμενα.

Έχουμε λοιπόν τη δυνατότητα να επιλέξουμε -κατά το δοκούν- μια βαθμίδα που θα απλοποιεί τις εξισώσεις κίνησης και ειδικότερα τον ταυυστή Einstein

της σχέσης (5.24). Συνήθως επιλέγεται η βαθμίδα Lorentz (καλούμενη και αρμονική βαθμίδα ή βαθμίδα de Donder), η οποία απαιτεί την ακόλουθη σχέση για τον «τανυστή αντίθετου ίχνους» $\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h$ (όπου $h = h^\mu_\mu$):

$$\frac{\partial \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial \nu} = 0. \quad (5.30)$$

Η συνθήκη αυτή δίνει τέσσερεις εξισώσεις, όσες είναι και οι ελεύθερες συναρτήσεις βαθμίδας ξ^μ . Είναι πάντα δυνατό να επιλέξουμε μια βαθμίδα τέτοια ώστε να ικανοποιείται η (5.30), καθώς αποδυναμώνεται πως υπάρχει πάντα κάποιο ξ^μ για το οποίο θα λαμβάνουμε τη βαθμίδα Lorentz από ένα αυθαίρετο $h_{\mu\nu}$. Στη βαθμίδα αυτή, οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις πεδίου του Einstein λαμβάνουν τη μορφή:

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu}. \quad (5.31)$$

Θα λύσουμε την εξίσωση (5.31) μακριά από μια μεταβαλλόμενη, σχετικιστική πηγή άρα με μηδενικό τανυστή ενέργειας-ορμής $T^{\mu\nu}$. Έτσι, γράφοντας αναλυτικά τον συντελεστή του d'Alembert, η εξίσωση (5.31) γίνεται:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) \bar{h}^{\mu\nu} = 0. \quad (5.32)$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται τριδιάστατη κυματική εξίσωση και έχει μια λύση της μορφής:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} \exp(ik_\mu x^\mu). \quad (5.33)$$

Όπου k_μ οι σταθερές συνιστώσες ενός συνδιανύσματος και $A^{\mu\nu}$ οι σταθερές συνιστώσες κάποιου τανυστή. Η εξίσωση (5.32) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial \alpha \partial \beta} = 0. \quad (5.34)$$

Από την (5.33) λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial \alpha} = ik_\alpha \bar{h}^{\mu\nu}. \quad (5.35)$$

Άρα μέσω των δύο παραπάνω σχέσεων λαμβάνουμε:

$$\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial \alpha \partial \beta} = -\eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \bar{h}^{\mu\nu} = 0. \quad (5.36)$$

Ο μηδενισμός αυτός είναι δυνατός μόνο αν:

$$\eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = k^\beta k_\beta = 0. \quad (5.37)$$

Άρα η εξίσωση (5.33) είναι λύση της εξίσωσης (5.32), αν το k_μ είναι ένα φωτοειδές συνδιάνυσμα ή, ισοδύναμα, το διάνυσμα k^μ είναι φωτοειδές, δηλαδή εφαπτόμενο στην κοσμική γραμμή ενός φωτονίου. Η εξίσωση (5.33) περιγράφει μια κυματοειδή λύση. Αποδεικνύεται πως το βαρυτικό κύμα διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός, με διεύθυνση διάδοσης που ορίζεται από το k^μ . Υπενθυμίζεται πως όλη η παραπάνω ανάλυση βασίστηκε στην λήψη της βαθμίδας Lorentz.

5.2 Οι Παλιρροϊκοί Αριθμοί

Για να πραγματευτούμε -θεωρητικά και υπολογιστικά- την έννοια των παλιρροϊκών αριθμών, θα ξεκινήσουμε από την έννοια της παλιρροϊκής δύναμης [81]. Μια παλίρροια (tide) δημιουργείται από την ανομοιόμορφη κατανομή του βαρυτικού πεδίου, είτε λόγω συνύπαρξης διάφορων πηγών μάζας ή/και ενέργειας, είτε από τη διαφορετική κατά τόπους βαθμίδα του βαρυτικού πεδίου στο ίδιο το υπό μελέτη σώμα, λόγω της εκάστοτε θέσης του. Η παλιρροϊκή δύναμη που ασκείται σε έναν πλανήτη από έναν δορυφόρο του θα είναι μεγαλύτερη στο εκάστοτε σημείο που είναι εγγύτερα σε αυτόν από το αντιδιαμετρικό του. Ένα οικείο στην εμπειρία μας παράδειγμα, είναι οι παλίρροιες της Γης, οι οποίες οφείλονται στη διαφορά μεταξύ των βαρυτικών πεδίων της Σελήνης και του Ήλιου κατά μήκος της διαμέτρου της.

Το μέγεθος της προκαλούμενης παραμόρφωσης εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από την εσωτερική ενεργειακή κατανομή του σώματος υπό μελέτη και έτσι η μέτρησή της παρέχει χρήσιμες πληροφορίες για τη δομή του. Προσαρμόζοντας τη μελέτη μας σε δυαδικά συστήματα αστερών νετρονίων, θα υπολογίσουμε τους παλιρροϊκούς τους αριθμούς, με απώτερο σκοπό να περιορίσουμε την αβεβαιότητα στην καταστατική τους εξίσωση, η οποία αποτελεί κατ'εξοχήν αποτύπωση της εσωτερικής τους δομής.

Οι ζητούμενες πληροφορίες για την εσωτερική δομή κωδικοποιούνται μέσω των αριθμών Love που θα συμβολίσουμε ως k_l . Τονίζεται πως υπάρχουν και άλλες παλιρροϊκές παράμετροι [110] οι οποίες σχετίζονται με άλλες ιδιότητες των άστρων όπως το spin, η μάζα του κ.λπ., όμως εδώ θα μας απασχολήσουν μόνο οι k_l [καλούνται και «μορφικοί» παλιρροϊκοί αριθμοί (shape Love numbers)]. Οι αριθμοί αυτοί χρωστούν το όνομά τους στον Βρετανό μαθηματικό και γεωφυσικό Augustus Edward Hough Love (1863-1940) ο οποίος τους εισήγαγε στις αρχές του 20ου αιώνα [101].

Θα παρουσιαστεί εδώ η μέθοδος υπολογισμού τους, η οποία και θα χρησιμοποιηθεί στο επόμενο κεφάλαιο. Για την παρακάτω ανάλυση θα βασιστούμε στην παραπομπή [103].

Έστω ένα στατικό, σφαιρικά συμμετρικό άστρο μάζας M , τοποθετημένο σε ένα στατικό, τετραπολικό παλιρροϊκό πεδίο ε_{ij} . Το παλιρροϊκό πεδίο θα παραμορφώσει το άστρο, «πολώνοντάς το» βαρυτικά, με αποτέλεσμα αυτό να αναπτύξει μια τετραπολική ροπή Q_{ij} . Στο τοπικά ασυμπτωτικό αδρανειακό σύστημα και για μεγάλες αποστάσεις r , ο συντελεστής tt της μετρικής αναπτύσσεται [102] στην παρακάτω ακολουθία:

$$\frac{(1 - g_{tt})}{2} = -\frac{M}{r} - \frac{3Q_{ij}}{2r^3} (n^i n^j - \frac{1}{3} \delta^{ij}) + O\left(\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} x^i x^j + O(r^3). \quad (5.38)$$

Όπου M η συνολική αστρική μάζα, $n^i = x^i/r$ το μοναδιαίο, ακτινικό διάνυσμα, r η ακτινική συντεταγμένη και x^i καρτεσιανές συντεταγμένες του αστεριού που εκκινούν ασυμπτωτικά από το κέντρο μάζας του. Υπάρχει ορισμένη αβεβαιότητα

και πιθανά σφάλματα (κυρίως σε ισχυρά σχετικιστικά συστήματα) όσον αφορά τις συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται κατά την ασυμπτωτική ανάπτυξη των συνιστωσών της μετρικής, ειδικά για αστρικούς σχηματισμούς μη απομονωμένους (όπως οι αστέρες νετρονίων που θα μελετήσουμε) [103, 104]. Το μέγεθός τους όμως μπορεί να προσδιοριστεί [104] και υπολογίζεται ως διόρθωση υψηλότερης μετα-Νευτώνειας (post-Newtonian) τάξης, και έτσι μπορεί να αμεληθεί. Εξάλλου, θα περιοριστούμε στην πρώτη μόνο τάξη του αναπτύγματος για το εξωτερικό παλιρροϊκό πεδίο ε_{ij} και στο όριο όπου η πηγή του ε_{ij} είναι αρκετά μακριά. Έτσι, η γραμμική σχέση που συνδέει το τετραπολικό παλιρροϊκό πεδίο ε_{ij} και την λόγω αυτού αναπτυχθείσα τετραπολική ροπή Q_{ij} , είναι:

$$Q_{ij} = -\lambda\varepsilon_{ij}. \quad (5.39)$$

Η σταθερά λ είναι ένας αριθμός που συνδέεται με τον $l = 2$ παλιρροϊκό αριθμό k_l του άστρου μέσω της¹:

$$k_2 = \frac{3}{2}G\lambda R^{-5}. \quad (5.40)$$

Όπου R η ακτίνα του άστρου, ενώ οι τανυστικές τετραπολικές ροπές Q_{ij} και ε_{ij} μπορούν να αναλυθούν σε σφαιρικές αρμονικές ως:

$$Q_{ij} = \sum_{m=-2}^2 Q_m Y_{ij}^{2m}. \quad (5.41)$$

και

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{m=-2}^2 \varepsilon_m Y_{ij}^{2m}. \quad (5.42)$$

όπου οι συμμετρικοί και με μηδενικό ίχνος τανυστές Y_{ij}^{2m} ορίζονται ως:

$$Y_{2m}(\theta, \phi) = Y_{ij}^{2m} n^i n^j. \quad (5.43)$$

όπου $n = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Έτσι, η σχέση (5.39) μπορεί να γραφτεί

ως:

$$Q_m = -\lambda\varepsilon_m. \quad (5.44)$$

Στη συνέχεια, αναλύουμε τη στατική κατάσταση του αστέρα νετρονίων. Η γεωμετρία ενός σφαιρικά συμμετρικού, στατικού αστέρα περιγράφεται από την παρακάτω μετρική:

$$ds_0^2 = g_{\alpha\beta}^{(0)} dx^\alpha dx^\beta = -e^{\psi(r)} dt^2 + e^{\Lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (5.45)$$

Ο τανυστής ενέργειας-ορμής, με τη συνήθη μοντελοποίηση του αστεριού ως ιδανικό ρευστό, δίνεται από την

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta}^{(0)}, \quad (5.46)$$

¹Τονίζεται πως βιβλιογραφικά [105] υπάρχουν περιπτώσεις όπου παλιρροϊκός αριθμός καλείται το λ και όχι το k_2 .

όπου $\vec{u} = e^{-\psi/2}\partial_t$ είναι η τετρααχύτητα του ρευστού, ενώ ρ και p είναι η ενεργειακή πυκνότητα και η πίεση αντίστοιχα. Η αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων Tolman-Oppenheimer-Volkhov [83], [106] για μοντέλα αστέρων νετρονίων που περιγράφονται από πολυτροπική καταστατική εξίσωση της μορφής

$$P = K\rho^{1+1/n}, \quad (5.47)$$

όπου K είναι μια σταθερά και n ο πολυτροπικός δείκτης, δίνει τις εξισώσεις που περιγράφουν την κατάσταση ισορροπίας ενός σφαιρικού σώματος ακτίνας R και συνολικής μάζας $M = m(R)$.

Με βάση τη μέθοδο της παραπομπής [107] θα αναπτύξουμε αριθμητικά τις στατικές, γραμμικές διαταραχές της παραπάνω μετρικής, λόγω της ύπαρξης ενός εξωτερικού (παλιρροϊκού) πεδίου. Η πλήρης μετρική του χωροχρόνου, συμπεριλαμβανομένης της διαταραχής είναι η

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{(0)} + h_{\alpha\beta}, \quad (5.48)$$

όπου $h_{\alpha\beta}$ είναι η εν λόγω -γραμμική- διαταραχή της μετρικής. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση των Regge και Wheeler [108] αναλύουμε τη γωνιακή εξάρτηση των συντελεστών της διαταραχής $h_{\alpha\beta}$ σε σφαιρικές αρμονικές. Περιορίζοντας την ανάλυσή μας στις $l = 2$, στατικές διαταραχές, θετικής ομοτιμίας και λαμβάνοντας ως βαθμίδα τη βαθμίδα Regge-Wheeler (Regge-Wheeler gauge) [108] η διαταραχή $h_{\alpha\beta}$ γράφεται ως:

$$h_{\alpha\beta} = \text{diag} \left[e^{-\psi(r)} H_0(r), e^{\Lambda(r)} H_2(r), r^2 K(r), r^2 \sin^2 \theta K(r) \right] Y_{2m}(\theta, \varphi). \quad (5.49)$$

Οι μη μηδενικοί συντελεστές του διαταραγμένου τανυστή ενέργειας-ορμής (5.46) του άστρου είναι οι $\delta T_0^0 = -\delta\rho = -(dp/d\rho)^{-1}\delta p$ και $\delta T_i^i = \delta p$. Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις αυτές καθώς και τη διαταραγμένη μετρική (5.49) στις γραμμικοποιημένες εξισώσεις Einstein, $\delta G_\alpha^\beta = 8\pi\delta T_\alpha^\beta$, συνδυάζοντας τους συντελεστές ως ακολούθως. Από την $\delta G_\theta^\theta - \delta G_\phi^\phi = 0$ προκύπτει $H_2 = H_0 \equiv H$ και από την $\delta G_\theta^r = 0$ λαμβάνουμε τη σχέση μεταξύ K' και H και χρησιμοποιώντας την $\delta G_\theta^\theta + \delta G_\phi^\phi = 16\pi\delta p$ απαλοίφουμε το δp . Τέλος, αφαιρούμε τον συντελεστή $r - r$ των εξισώσεων Einstein από τον συντελεστή $t - t$ και έτσι προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση για $H_0 \equiv H$ (και $l = 2$):

$$H'' + H' \left[\frac{2}{r} + e^\Lambda \left(\frac{2m(r)}{r^2} + 4\pi r (p - \rho) \right) \right] + H \left[-\frac{6e^\Lambda}{r^2} + 4\pi e^\Lambda \left(5\rho + 9p + \frac{\rho + p}{(dp/d\rho)} \right) - \psi'^2 \right] = 0. \quad (5.50)$$

Όπου υπάρχει τόνος εννοείται παραγωγή ως προς την ακτίνα. Επόμενο βήμα είναι η θέσπιση οριακών συνθηκών. Απαιτούμε ομαλότητα του H στο $r = 0$ και λύνοντας ως προς H κοντά στο $r = 0$, προκύπτει

$$H(r) = a_0 r^2 \left[1 - \frac{2\pi}{7} \left(5\rho(0) + 9p(0) + \frac{\rho(0) + p(0)}{(dp/d\rho)(0)} \right) r^2 + O(r^3) \right], \quad (5.51)$$

όπου a_0 είναι μια σταθερά.

Για να ξεχωρίσουμε μια μοναδική λύση από την οικογένεια λύσεων που παραμετροποιείται από τη σταθερά a_0 , απαιτούμε τη συνέχεια του $H(r)$ και της παραγώγου του στο $r = R$. Εξωτερικά του αστεριού, η εξίσωση (5.50) γίνεται:

$$H'' + \left(\frac{2}{r} - \Lambda'\right) H' - \left(\frac{6e^\Lambda}{r^2} + \Lambda'^2\right) H = 0. \quad (5.52)$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = (r/M - 1)$ σύμφωνα με την παραπομπή [107], η εξίσωση (5.52) λαμβάνει τη μορφή εξίσωσης Legendre με $l = m = 2$:

$$(x^2 - 1) H'' + 2xH' - \left(6 + \frac{4}{x^2 - 1}\right) H = 0. \quad (5.53)$$

Η γενική λύση της εξίσωσης (5.53) με βάση τις συναρτήσεις Legendre $Q_2^2(x)$ και $P_2^2(x)$ δίνεται από την

$$H = c_1 Q_2^2\left(\frac{r}{M} - 1\right) + c_2 P_2^2\left(\frac{r}{M} - 1\right), \quad (5.54)$$

όπου c_1 και c_2 είναι συντελεστές προς υπολογισμό. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τα $Q_2^2(x)$ και $P_2^2(x)$ λαμβάνουμε την εξωτερική λύση:

$$\begin{aligned} H = & c_1 \left(\frac{r}{M}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\ & \left[-\frac{M(M-r)(2M^2 + 6Mr - 3r^2)}{r^2(2M-r)^2} + \frac{3}{2} \log\left(\frac{r}{r-2M}\right) \right] \\ & + 3c_2 \left(\frac{r}{M}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της εξωτερικής λύσης (5.55) για μεγάλα r δίνεται από την

$$H = \frac{8}{5} \left(\frac{M}{r}\right)^3 c_1 + O\left(\left(\frac{M}{r}\right)^4\right) + 3 \left(\frac{r}{M}\right)^2 c_2 + O\left(\left(\frac{r}{M}\right)\right), \quad (5.56)$$

όπου οι σταθερές c_1 και c_2 υπολογίζονται μέσω των εξισώσεων (5.57), που προκύπτουν ταιριάζοντας την ασυμπτωτική λύση που περιγράφεται από την εξίσωση (5.56) στο ανάπτυγμα της εξίσωσης (5.38), χρησιμοποιώντας και την (5.39):

$$c_1 = \frac{15}{8} \frac{1}{M^3} \lambda \mathcal{E}, \quad c_2 = \frac{1}{3} M^2 \mathcal{E}. \quad (5.57)$$

Τέλος, λύνουμε ως προς λ την εξίσωση της διαταραχής H και της παραγώγου της στην επιφάνεια του άστρου ($r = R$) και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις

(5.57), (5.55) και (5.40) καταλήγουμε στην τελική, ζητούμενη εξίσωση για τον παλιρροϊκό αριθμό k_2 :

$$k_2 = \frac{8C^5}{5} (1 - 2C)^2 [2 + 2C(y - 1) - y] \times \quad (5.58)$$

$$\left\{ 2C(6 - 3y + 3C(5y - 8)) + 4C^3 [13 - 11y + C(3y - 2) + 2C^2(1 + y)] \right.$$

$$\left. + 3(1 - 2C)^2 [2 - y + 2C(y - 1)] \log(1 - 2C) \right\}^{-1}.$$

Ορίσαμε τη συμπάγεια του αστεριού ως $C \equiv M/R$ και τη μεταβλητή $y \equiv RH'(R)/H(R)$, η οποία προκύπτει από την ολοκλήρωση της εξίσωσης 5.50 στην περιοχή $0 < r < R$.

Κεφάλαιο 6

Tidal Love Numbers

Αστέρων Νετρονίων για την

$$f(R) = R - \beta R_E(1 - e^{-R/R_E})$$

Στο καταληκτήριο αυτό κεφάλαιο, θα χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες που περιγράφηκαν ως τώρα σε θεωρητική βάση, για ποσοτικούς υπολογισμούς. Στόχος μας είναι ο προσδιορισμός των παλιρροϊκών αριθμών ενός εκ των δύο αστέρων νετρονίων που βρίσκονται σε δυαδικό σύστημα αλληλεπίδρασης (binary system), εκκινώντας όμως από μια τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας και όχι από την κλασική Γενική Σχετικότητα. Θα χρησιμοποιήσουμε μια συγκεκριμένη, σύνθετη συνάρτηση $f(R)$ (θα αναφερθούν εδώ τα θεωρητικά και πειραματικά κίνητρα για την εν λόγω επιλογή, ενώ η σφαιρικότερη επισκόπηση των $f(R)$ θεωριών έγινε στο κεφάλαιο 3.2.1) στη δράση Einstein-Hilbert, αντί της χρήσης του ταυστή Ricci που ακολουθείται στη Γενική Σχετικότητα.

Το κυριότερο πειραματικό έναυσμα για την εν λόγω μελέτη αποτελεί η ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων [112] προερχόμενα από δυαδικό σύστημα αστέρων νετρονίων (που θα καταλήξει στη συγχώνευσή τους). Μέσω της ανάλυσης του σήματος των βαρυτικών κυμάτων υπολογίζονται οι παλιρροϊκοί αριθμοί των εν λόγω αστέρων νετρονίων. Στη συνέχεια, μέσω των παλιρροϊκών αριθμών, μπορούμε να θέσουμε περιορισμούς στην καταστατική εξίσωση του άστρου. Ο υπολογισμός όμως των παλιρροϊκών αριθμών είναι σε άμεση συνάρτηση με τη βαρυτική θεωρία που θα χρησιμοποιηθεί. Έτσι, το ζήτημα που αναφέρεται από τη χρήση μιας $f(R)$ θεωρίας (η συνάρτηση που θα ληφθεί παραμετροποιείται και η ίδια από δύο παράγοντες β , R_E) ή οποιαδήποτε άλλης εναλλακτικής θεωρίας βαρύτητας, είναι πως συναντάμε αποκλίσεις από τη Γενική Σχετικότητα όμοιες σε μέγεθος και χαρακτηριστικά με αυτές που οφείλονται στην υπάρχουσα αβεβαιότητα της καταστατικής εξίσωσης. Θα προσπαθήσουμε να άρουμε τους εν λόγω εκφυλισμούς στην αβεβαιότητα των χαρακτηριστικών των αστέρων νετρονίων, υπολογίζοντας τους παλιρροϊκούς αριθμούς μέσω μιας τροποποιημένης θεωρίας βαρύτητας.

6.1 Μαθηματικό Υπόβαθρο της Επιλεχθείσας $f(R)$

Ξεκινάμε αρχικά από την τροποποιημένη δράση Einstein-Hilbert στην οποία επεισέρεχεται η σύνθετη συνάρτηση του ταυυστή Ricci:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (6.1)$$

Όπου G η σταθερά του Newton, R το βαθμωτό Ricci ως προς τη μετρική του χωροχρόνου $g_{\mu\nu}$ και S_M είναι η δράση των πεδίων ύλης/ενέργειας τα οποία συμβολίζουμε ως ψ . Στη συνέχεια, πρέπει να λάβουμε δύο περιορισμούς [85,87] κοσμολογικής προέλευσης, ώστε να μην παρουσιάζει η θεωρία μας, πρώτων, ταχυονική αστάθεια και, δεύτερων, εξισώσεις κίνησης άνω της δευτέρας τάξης (ghosts). Για την αποφυγή του πρώτου απαιτούμε $d^2 f/dR^2 \geq 0$, ενώ για την αποφυγή του δεύτερου $df/dR \geq 0$. Ως συνάρτηση $f(R)$ θα επιλέξουμε την:

$$f(R) = R - \beta R_E (1 - e^{-R/R_E}), \quad (6.2)$$

Όπου β , R_E δύο παράμετροι της συνάρτησης και R το βαθμωτό Ricci. Αντίστοιχη με την παρούσα ανάλυση έχει γίνει [114] για την $f(R) = R + aR^2$, η οποία μοντελοποιεί εξαιρετικά το μοντέλο του πληθωρισμού, δεν είναι όμως συνεπής με τα πειραματικά δεδομένα σχετικά με την επιταχυνόμενη διαστολή του ύστερου σύμπαντος. Η επιλογή της (6.2), μία εκ των αναρίθμητων πιθανών επιλογών κάποιας $f(R)$, είναι συμβατή με τα παρατηρησιακά δεδομένα [113] που προέρχονται από πρόσφατες μετρήσεις του παράγοντα του Hubble, δεδομένα από εκρήξεις υπερκαινοφανών τύπου Ia, από τις βαρυονικές ακουστικές ταλαντώσεις κ.ά. Αποτελεί λοιπόν μία περίπτωση εναλλακτικής θεωρίας βαρύτητας που -όντας πειραματικά βιώσιμη- αξίζει να μελετηθεί.

Όπως αναφέρθηκε στο υποκεφάλαιο 3.2.2., μια συνήθης προσέγγιση κατά την εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης μέσω της δράσης κάποιας $f(R)$ θεωρίας, είναι να δουλέψουμε στην ισοδύναμη απεικόνιση μιας υποπερίπτωσης της δράσης Brans-Dicke, με παράγοντα $\omega_{BD} = 0$. Για να μεταβούμε σε αυτήν, θα χρησιμοποιήσουμε τις δύο ακόλουθες αντικαταστάσεις:

$$\Phi = \frac{df(R)}{dR}. \quad (6.3)$$

και

$$U(\Phi) = R \frac{df(R)}{dR} - f(R). \quad (6.4)$$

Έτσι, η δράση μας γίνεται:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [\Phi R - U(\Phi)] + S_{\text{matter}}(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (6.5)$$

Το δυναμικό $U(\Phi)$ για την (6.2), παίρνει τη μορφή:

$$U(\Phi) = -R + R(1 - e^{-R/R_E} \beta) + (1 - e^{-R/R_E}) \beta R_E. \quad (6.6)$$

Επόμενο βήμα είναι η μετάβαση στο λεγόμενο πλαίσιο Einstein, που περιγράφεται στο κεφάλαιο 3.2.3, η οποία πραγματώνεται μέσω ενός σύμμορφου μετασχηματισμού της μορφής:

$$g^*_{\mu\nu} = \Phi g_{\mu\nu}. \quad (6.7)$$

Έτσι, λαμβάνουμε δύο νέες εξισώσεις για το βαθμωτό πεδίο και το δυναμικό:

$$\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \Phi, \quad V = \frac{U(\Phi)}{\Phi^2}. \quad (6.8)$$

Και καταλήγουμε στη δράση στο πλαίσιο Einstein:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g^*} [R^* - 2g^{*\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi)] + S_{\text{matter}}(A^2(\varphi)g^*_{\mu\nu}, \psi), \quad (6.9)$$

όπου R^* είναι το βαθμωτό του Ricci με βάση τη μετρική $g^*_{\mu\nu}$ στο πλαίσιο Einstein. Παρατηρούμε πως σε αντίθεση με τη δράση (6.1), υπάρχει άμεση σύζευξη μεταξύ της ύλης και του βαθμωτού πεδίου, μέσω της σταθεράς σύζευξης $A^2(\varphi) = \Phi^{-1}(\varphi)$. Λαμβάνοντας υπ' όψη τη μορφή της $f(R)$, η σταθερά σύζευξης A και το δυναμικό του βαθμωτού πεδίου V παίρνουν την εξής μορφή:

$$A(\varphi) = e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\varphi}, \quad V(R) = \frac{-R + R(1 - e^{-R/R_E} \beta) + (1 - e^{-R/R_E}) \beta R_E}{(1 - e^{-R/R_E} \beta)^2}. \quad (6.10)$$

και

$$V(\varphi) = \frac{R_E \ln\left(\frac{1 - e^{\frac{2\phi}{\sqrt{3}}}}{\beta}\right) - R_E \ln\left(\frac{1 - e^{\frac{2\phi}{\sqrt{3}}}}{\beta}\right) e^{\frac{2\phi}{\sqrt{3}}} + (\beta - 1 + e^{\frac{2\phi}{\sqrt{3}}}) R_E}{e^{\frac{4\phi}{\sqrt{3}}}}. \quad (6.11)$$

Στη συνέχεια, εισάγουμε τη γενική μορφή μιας στατικής και σφαιρικά συμμετρικής μετρικής στο πλαίσιο Einstein, λαμβάνοντας την παραδοχή για μη περιστρεφόμενο αστέρι:

$$ds_*^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6.12)$$

Όλες οι παράμετροι της μετρικής εξαρτώνται μόνο από την ακτίνα r . Οι εξι-

σώσεις πεδίου στις οποίες καταλήγουμε [114] είναι οι ακόλουθες:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\Lambda})] = 8\pi G A^4(\varphi) \rho + e^{-2\Lambda} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} V(\varphi), \quad (6.13)$$

$$\frac{2}{r} e^{-2\Lambda} \frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\Lambda}) = 8\pi G A^4(\varphi) p + e^{-2\Lambda} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 - \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} V(\varphi), \\ & \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{2}{r} \right) \frac{d\varphi}{dr} = 4\pi G \alpha(\varphi) A^4(\varphi) (\rho - 3p) e^{2\Lambda} \\ & \quad + \frac{1}{4} \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} e^{2\Lambda}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

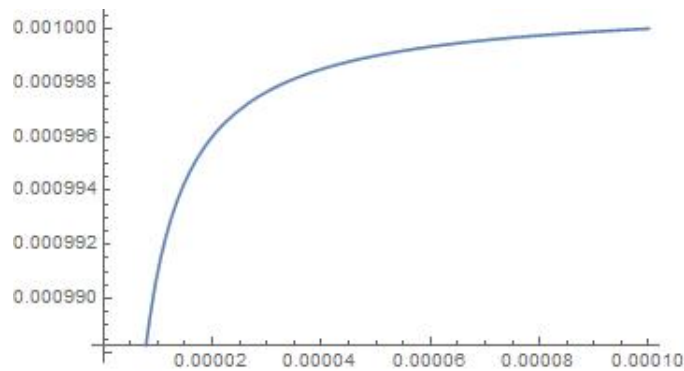
$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \left(\frac{d\psi}{dr} + \alpha(\varphi) \frac{d\varphi}{dr} \right). \quad (6.16)$$

Όπου χρησιμοποιήθηκαν η πίεση p και η ενεργειακή πυκνότητα ρ στο πλαίσιο Jordan, οι οποίες συνδέονται με τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις τους στο πλαίσιο Einstein μέσω των σχέσεων $p^* = A^4(\varphi)p$ και $\rho^* = A^4(\varphi)\rho$. Οι ποσότητες p και ρ συνδέονται, ορισμένως, μέσω της καταστατικής εξίσωσης του αστέρα νετρονίων $p = p(\rho)$. Ως καταστατική εξίσωση θα λάβουμε την APR4 [115] και η παραμετροποίησή της θα γίνει σύμφωνα με την ανάλυση της παραπομπής [116]. Η προκύπτουσα μορφή της καταστατικής εξίσωσης, με την επιλεχθείσα παραμετροποίηση είναι:

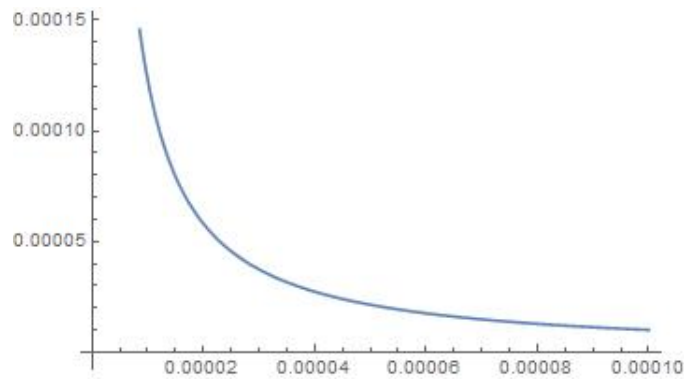
$$p = 0.0947\rho^2. \quad (6.17)$$

Θα ληφθούν επίσης οριακές συνθήκες περί ομαλότητας στο κέντρο του άστρου και ασυμπτωτικής επιπεδότητας στο άπειρο. Η ακτίνα του αστεριού υπολογίζεται υπό την απαίτηση του μηδενισμού της πίεσης στην αστρική επιφάνεια ενώ η μάζα λαμβάνεται από την ασυμπτωτική επέκταση των μετρικών μεταβλητών στο άπειρο.

Οι τιμές των παραμέτρων Re και β , που ποσοτικοποιούν την απόκλιση από τη Γενική Σχετικότητα, θα ληφθούν σε συνάρτηση με την τωρινή τιμή της σταθεράς του Hubble και συνακόλουθα το R_0 , την τρέχουσα τιμή του βαθμωτού Ricci στο σύμπαν. Τα στοιχεία ελήφθησαν από τη βιβλιογραφία [113]. Λόγω του ότι η τιμή του συντελεστή Re είναι 10^{-50} , και όντας μέτρο της απόκλισης από τη Γενική Σχετικότητα, δεν παρατηρούμε κάποια διαφοροποίηση στα διαγράμματα που αφορούν τους συντελεστές της μετρικής (στις αριθμητικές ολοκληρώσεις των εξισώσεων κίνησης). Παρατίθενται οι γραφικές παραστάσεις του παράγοντα λ της μετρικής και του βαθμωτού πεδίου -που προέρχεται από την τροποποιημένη θεωρία- σε σχέση με την ακτίνα του άστρου.



Σχήμα 6.1: Βαθμωτό πεδίο φ και ακτίνα.



Σχήμα 6.2: Συντελεστής λ της μετρικής και ακτίνα.

6.2 Υπολογισμός Παλιρροϊκών Αριθμών

Στο υποκεφάλαιο αυτό, θα χαρτογραφήσουμε τον τρόπο υπολογισμού των παλιρροϊκών αριθμών, χωρίς να προβούμε στον καθαυτό υπολογισμό, καθώς οι αποκλίσεις από τη Γενική Σχετικότητα είναι, όπως ήδη τονίστηκε, μη παρατηρήσιμες. Τα αποτελέσματα για το εκθετικό βαρυτικό μοντέλο θα είναι διαθέσιμα σε μελλοντική εργασία [119].

Για τον υπολογισμό των παλιρροϊκών αριθμών λαμβάνουμε τις στάσιμες διαταραχές ενός στατικού και σφαιρικά συμμετρικού άστρου, υπό το πρίσμα της βαρυτικής θεωρίας που ακολουθείται. Οι διαταραχές της μετρικής μπορούν να χωριστούν σε πολικές και αξονικές. Θα παρουσιαστεί ξεχωριστά ο τρόπος υπολογισμού για τις δύο αυτές περιπτώσεις.

6.2.1 Πολικοί Παλιρροϊκοί Αριθμοί

Οι πολικές διαταραχές της μετρικής στο πλαίσιο Einstein και λαμβάνοντας τη βαθμίδα Regger-Wheeler [108] είναι οι εξής:

$$H_{\mu\nu}^{polar} = \begin{pmatrix} -e^{2\psi_0} H_0(r) & H_1(r) & 0 & 0 \\ H_1(r) & e^{2\Lambda_0} H_2(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K(r)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K(r)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (6.18)$$

όπου $Y_{lm}(\theta, \phi)$ είναι οι σφαιρικές αρμονικές. Οι διαταραχές του βαθμωτού πεδίου, της ενεργειακής πυκνότητας και της πίεσης μπορούν να αναλυθούν με βάση αυτές ως: $\delta\varphi = \delta\tilde{\varphi}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$, $\delta\rho^* = \delta\tilde{\rho}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ και $\delta p^* = \delta\tilde{p}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$. Θεωρώντας πως ο αστέρας νετρονίων συμπεριφέρεται ως ιδανικό ρευστό, αποδεικνύεται πως για τις διαταραχές ισχύει $H_0 = -H_2$ και $H_1 = 0$. Ακόμη, τα μεγέθη K , $\delta\tilde{\rho}(r)$ και $\delta\tilde{p}(r)$ μπορούν να γραφούν ως συναρτήσεις των H_0 και $\delta\tilde{\varphi}$. Εν τέλει, καταλήγουμε σε δύο εξισώσεις για τα $H_0 = -H_2 = H$ και $\delta\tilde{\varphi}$ που περιγράφουν τις στάσιμες διαταραχές ενός στατικού και σφαιρικά συμμετρικού άστρου, εκκινώντας από μια $f(R)$ θεωρία βαρύτητας:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H}{dr^2} &+ \left\{ \frac{2}{r} + e^{2\Lambda_0} \left[\frac{1 - e^{-2\Lambda_0}}{r} \right. \right. \\ &+ \left. \left. 4\pi(p_0^* - \rho_0^*)r - \frac{1}{2}V(\varphi_0)r \right] \right\} \frac{dH}{dr} \\ &+ \left\{ -\frac{l(l+1)}{r^2} e^{2\Lambda_0} - 4\psi_0'^2 \right. \\ &+ \left. 4\pi e^{2\Lambda_0} \left[9p_0^* + 5\rho_0^* + \frac{\rho_0^* + p_0^*}{\tilde{c}_s^2} - \frac{1}{4\pi}V(\varphi_0) \right] \right\} H \\ &+ e^{2\Lambda_0} \left\{ -4\varphi_0' r \left[\frac{1 - e^{-2\Lambda_0}}{r^2} + 8\pi p_0^* + e^{-2\Lambda_0} \varphi_0'^2 - \frac{1}{2}V(\varphi_0) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{16\pi}{\sqrt{3}} [(\rho_0^* - 3p_0^*) \right. \\ &+ \left. (\rho_0^* + p_0^*) \frac{1 - 3\tilde{c}_s^2}{2\tilde{c}_s^2} \right] + V'(\varphi_0) \left. \right\} \delta\tilde{\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \delta \tilde{\varphi}}{dr^2} &+ \left(\psi'_0 - \Lambda'_0 + \frac{2}{r} \right) \frac{d\delta \tilde{\varphi}}{dr} \\
&- e^{2\Lambda_0} \left\{ \frac{l(l+1)}{r^2} + 4e^{-2\Lambda_0} \varphi_0'^2 + \frac{1}{4} V''(\varphi_0) \right. \\
&- \frac{8\pi}{3} \left[-2(\rho_0^* - 3p_0^*) + (\rho_0^* + p_0^*) \frac{1 - 3\tilde{c}_s^2}{2\tilde{c}_s^2} \right] \left. \right\} \delta \tilde{\varphi} \\
&+ e^{2\Lambda_0} \left\{ -2e^{-2\Lambda_0} \psi'_0 \varphi'_0 \right. \\
&- \frac{4\pi}{\sqrt{3}} [(\rho_0^* - 3p_0^*) \\
&+ \left. (\rho_0^* + p_0^*) \frac{1 - 3\tilde{c}_s^2}{2\tilde{c}_s^2} \right] + \frac{1}{4} V'(\varphi_0) \left. \right\} H = 0. \tag{6.20}
\end{aligned}$$

Όπου Λ_0 , ψ_0 , φ_0 , p_0^* και ρ_0^* είναι οι αντίστοιχες αδιατάραχτες μεταβλητές που ελήφθησαν από τις πεδριακές εξισώσεις για τη σφαιρικά συμμετρική μετρική και \tilde{c}_s είναι η ταχύτητα του ήχου στο πλαίσιο Jordan, που ορίζεται ως $\tilde{c}_s^2 = \partial p / \partial \rho$.

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της διαταραχής H περιγράφεται από την εξίσωση:

$$H = \frac{c_1}{r^{l+1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{l+2}}\right) + c_2 r^l + \mathcal{O}(r^{l-1}). \tag{6.21}$$

Ο παλιρροϊκός αριθμός k_2 σχετίζεται με τους συντελεστές c_1 και c_2 ως εξής:

$$k_l^{polar} = \frac{1}{2R_S^{2l+1}} \frac{c_1}{c_2}. \tag{6.22}$$

Όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 5.2, η ζητούμενη εξίσωση για τον τύπο υπολογισμού του παλιρροϊκού αριθμού k_2 , προκύπτει ταιριάζοντας λύνοντας την εξίσωση της διαταραχής, σε συνδυασμό με τη μη διαταραγμένη εξίσωση στην επιφάνεια του άστρου ($r = R$), και προκύπτει η σχέση (5.58). Κάτι τέτοιο δεν μπορεί να γίνει στη δική μας περίπτωση, καθώς οι εξισώσεις για τη διαταραχή H και το βαθμωτό πεδίο ϕ είναι πεπλεγμένες και, στη γενική περίπτωση, δεν μπορεί να βρεθεί αναλυτική εξωτερική λύση. Μολοταύτα, λόγω του ότι η μάζα του βαθμωτού πεδίου δεν είναι μηδενική και άρα το πεδίο δεν φτάνει μέχρι το άπειρο, αυτό μηδενίζεται σε κάποια απόσταση από το άστρο. Στο σημείο όπου «σβήνει» το βαθμωτό πεδίο θα πάρουμε το συνταίριασμα των λύσεών μας. Όταν το βαθμωτό πεδίο είναι μηδενικό, τότε έχουμε λύση της Γενικής Σχετικότητας. Το σημείο αυτό θα το αποκαλέσουμε r_{match} .

Η εξίσωση για τη διαταραχή H σε μεγάλη απόσταση από το κέντρο του άστρου, όπου το βαθμωτό πεδίο και η διαταραχή του είναι αμελητέα, λαμβάνεται αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (6.19), $p_0^* = \rho_0^* = \varphi_0 = \delta \tilde{\varphi} = 0$. Ο τελικός

τύπος υπολογισμού είναι:

$$k_2^{polar} = \frac{8C_1^5}{5}(1-2C)^2 [2+2C(y-1)-y] \times \left\{ 2C(6-3y+3C(5y-8)) + 4C^3 [13-11y+C(3y-2)+2C^2(1+y)] + 3(1-2C)^2 [2-y+2C(y-1)] \log(1-2C) \right\}^{-1}. \quad (6.23)$$

Όπου $y = R_S H' / H$, $C_1 = M / r_{\text{match}}$ είναι η συμπάγεια του άστρου $C = M / R_S$. Η τιμή του y υπολογίζεται μετά την αριθμητική επίλυση του πεπλεγμένου συστήματος εξισώσεων (6.19) και (6.20) για $r = 0$ μέχρι $r = r_{\text{match}}$.

6.2.2 Αξονικοί Παλιρροϊκοί Αριθμοί

Οι αξονικές διαταραχές της μετρικής δίνονται από:

$$H_{\mu\nu}^{axial} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h(r)S_{\theta}^{lm}(\theta, \phi) & h(r)S_{\phi}^{lm}(\theta, \phi) \\ 0 & 0 & h_1(r)S_{\theta}^{lm}(\theta, \phi) & h_1(r)S_{\phi}^{lm}(\theta, \phi) \\ h(r)S_{\theta}^{lm}(\theta, \phi) & h_1(r)S_{\theta}^{lm}(\theta, \phi) & 0 & 0 \\ h(r)S_{\phi}^{lm}(\theta, \phi) & h_1(r)S_{\phi}^{lm}(\theta, \phi) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

όπου $(S_{\theta}^{lm}(\theta, \phi), S_{\phi}^{lm}(\theta, \phi)) = (-\partial_{\phi} Y_{lm}(\theta, \phi) / \sin \theta, \sin \theta \partial_{\theta} Y_{lm}(\theta, \phi))$. Οι διαταραχές του βαθμωτού πεδίου, της ενεργειακής πυκνότητας και της πίεσης μηδενίζονται. Μέσω των πεδιακών εξισώσεων αποδεικνύεται ότι $h_1 = 0$. Απομένει μόνο μια εξίσωση για τη διαταραχή h της μετρικής:

$$\frac{d^2 h}{dr^2} - \left[4\pi(\rho_0^* + p_0^*)e^{2\Lambda_0} + \left(\frac{d\varphi_0}{dr} \right)^2 \right] r \frac{dh}{dr} + \left[-\frac{(l-1)(l+2)}{r^2} e^{2\Lambda_0} + 8\pi(\rho_0^* + p_0^*)e^{2\Lambda_0} + 2 \left(\frac{d\varphi_0}{dr} \right)^2 - \frac{2}{r^2} \right] h = 0. \quad (6.25)$$

Όπως και στην περίπτωση των πολικών διαταραχών, έτσι και εδώ δεν διαθέτουμε αναλυτική λύση για τη διαταραχή, λόγω την παρουσία του βαθμωτού πεδίου. Ακολουθώντας αντίστοιχη συλλογιστική θα κάνουμε συνταίριασμα των λύσεων (εσωτερικής και εξωτερικής) σε σημείο όπου το βαθμωτό πεδίο με μάζα m είναι αμελητέο και έτσι η λύση είναι αυτή της Γενικής Σχετικότητας. Η ασυμπτωτική εξίσωση για μεγάλες αποστάσεις είναι η:

$$\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{d^2 h}{dr^2} + \left[-\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{4M}{r^3} \right] h = 0. \quad (6.26)$$

και δύναται να λυθεί αναλυτικά για κάποιο l [117, 118]. Η συνάρτηση της διαταραχής h έχει την ακόλουθη ασυμπτωτική εξίσωση:

$$h \approx \frac{c_1}{r^l} + c_2 r^{l+1}. \quad (6.27)$$

Οι παλιρροϊκοί αριθμοί k_l^{axial} για τις αξονικές διαταραχές συνδέονται με τους συντελεστές c_1 και c_2 μέσω της:

$$k_l^{axial} = -\frac{l}{2(l+1)} \frac{c_1}{c_2} \frac{1}{R_S^{2l+1}}. \quad (6.28)$$

Κάνοντας το συνταίριασμα της αριθμητικής λύσης (που λαμβάνεται μετά την ολοκλήρωση της εξίσωσης της διαταραχής από το κέντρο του άστρου μέχρι το σημείο r_{match} όπου το βαθμωτό πεδίο είναι αμελητέο) με την αναλυτική ασυμπτωτική λύση για την περίπτωση $l = 2$ λαμβάνουμε τη σχέση υπολογισμού:

$$\begin{aligned} k_2^{axial} = & 1 - \frac{8C_1^5}{5} \{2C(y-2) - y + 3\} \{2C [2C^3(y+1) \\ & + 2C^2y + 3C(y-1) - 3y + 9] + 3 [2C(y-2) - y \\ & + 3] \log(1 - 2C)\}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Όπου $y = R_S h' / h$, $C_1 = M / r_{match}$ είναι η συμπάγεια του άστρου και $C = M / R_S$.

Κεφάλαιο 7

Επίλογος

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήσαμε την επίδραση μιας τροποποιημένης θεωρίας βαρύτητας στους παλιρροϊκούς αριθμούς αστέρων νετρονίων. Συμπεράναμε πως εκκινώντας από μια ρεαλιστική, συμβατή με όλα τα κρίσιμα παρατηρησιακά δεδομένα, εναλλακτική θεωρία βαρύτητας, οι αποκλίσεις σε σχέση με τη Γενική Σχετικότητα είναι μη ανιχνεύσιμες.

Προχωρώντας σε μια συνολική επισκόπηση του κειμένου, ξεκινήσαμε με μια σύντομη παρουσίαση της θεωρίας της Γενικής Σχετικότητας, αναλύοντας έννοιες θεμελιώδεις γι' αυτήν όπως οι πολλαπλότητες, τα διανύσματα και τα συνδιανύσματα, η μετρική, η συναλλοίωτη παράγωγος, τα σύμβολα Christoffel, η συνοχή μιας πολλαπλότητας (και ειδικά, η Levi-Civita συνοχή), οι ταυιστές Riemann, Ricci και Einstein, για να καταλήξουμε στη δράση Einstein-Hilbert και σε μία εκ των λύσεών της, τη λύση Schwarzschild.

Το κύριο θεωρητικό έναυσμα της όλης προσπάθειας είναι συγκεκριμένες αδυναμίες -θεωρητικής και πειραματικής φύσεως- της Γενικής Σχετικότητας, οι οποίες αποτελούν τους λόγους που ώθησαν στη μελέτη των τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας. Οι λόγοι αυτοί παρουσιάζονται αναλυτικά στο τρίτο κεφάλαιο, με τους κυριότερους εξ αυτών να είναι το πρόβλημα της επανακανονικοποίησης της Γενικής Σχετικότητας, το πρόβλημα της επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος (και η προσφυγή στην εισαγωγή της σκοτεινής ενέργειας-κοσμολογικής σταθεράς) και η φύση της σκοτεινής ύλης.

Εκ των απειράριθμων πιθανών τροποποιήσεων της βαρυτικής θεωρίας, θα επιλέξουμε τον «εμπλουτισμό» της δράσης Einstein-Hilbert, μέσω της αντικατάστασης τού βαθμωτού Ricci με μια πιο σύνθετη συνάρτηση αυτού. Αυτές, οι καλούμενες $f(R)$ θεωρίες αναλύονται, γίνεται αναφορά στη δυναμική ισοδυναμία που παρουσιάζουν με τις θεωρίες βαθμωτού-ταυιστή (και με μία ειδική περίπτωση αυτών, τη θεωρία Brans-Dicke) καθώς και στους σύμμορφους μετασχηματισμούς (ένας εκ των οποίων θα χρησιμοποιηθεί μετέπειτα, στη μαθηματική επεξεργασία).

Το «εργαστήριο» της μελέτης θα είναι οι αστέρες νετρονίων, στους οποίους είναι αφιερωμένο το επόμενο κεφάλαιο. Πέρα από τα γενικά τους χαρα-

κτηριστικά, γίνεται ιδιαίτερη μνεία στην εσωτερική τους δομή και στην εγγενή δυσκολία που εμπεριέχει ο καθορισμός της σχέσης των εσωτερικών μερών του (που συνήθως πραγματώνεται μέσω μιας καταστατικής εξίσωσης που συνδέει την ενεργειακή πυκνότητα του άστρου με την πίεσή του). Ο σημαντικός βαθμός απροσδιοριστίας στην περιγραφή της ύλης σε υπερπυρηνικές πυκνότητες, είναι και ο λόγος ύπαρξης πιθανών εκφυλισμών στο εύρος της αβεβαιότητας περί της καταστατικής εξίσωσης. Αυτό συμβαίνει καθώς υπάρχει αλληλεπικάλυψη στο εύρος της απροσδιοριστίας της -εν πολλοίς άγνωστης- καταστατικής εξίσωσης του αστέρα, που μπορεί να οφείλονται είτε στις εγγενείς δυσκολίες προσδιορισμού της, είτε στο εύρος της απόκλισης από τη Γενική Σχετικότητα -στο εύρος δηλαδή των συντελεστών που ποσοτικοποιούν αυτήν την απόκλιση.

Η πειραματική εξακρίβωση των υπολογισμών της εργασίας μπορεί να γίνει μέσω της ανάλυσης του σήματος βαρυτικών κυμάτων. Οι ταυσιτικές αυτές διαταραχές του χωροχρόνου θεμελιώνονται στο πέμπτο κεφάλαιο, τόσο σε μη επίπεδο υπόβαθρο, όσο και σε υπόβαθρο Minkowski. Είναι αξιοσημείωτο πως από το 2017 έχουμε πειραματικά δεδομένα από βαρυτικά κύματα που προέρχονται από δυαδικά συστήματα αστερών νετρονίων, μέσω των ανιχνευτών Advanced Ligo και Virgo. Στο ίδιο κεφάλαιο, εισάγονται και οι παλιρροϊκοί αριθμοί. Πρόκειται για σταθερές αναλογίας, που χαρακτηρίζουν την απόκριση ενός σώματος (εν προκειμένω, των αστερών νετρονίων) σε κάποιο εξωτερικό βαρυτικό πεδίο, όντας σαφώς σε άμεση εξάρτηση με την εσωτερική του δομή. Οι παλιρροϊκοί αριθμοί μπορούν να μετρηθούν πειραματικά μέσω ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων προερχόμενα από συγχωνεύσεις αστρικών σωμάτων (όπως, για παράδειγμα, δύο αστερών νετρονίων ή δύο μελανών οπών) αλλά και να υπολογιστούν θεωρητικά. Ο τρόπος υπολογισμού τους με βάση τη Γενική Σχετικότητα παρουσιάζεται επίσης στο κεφάλαιο αυτό.

Για την ανάλυση του τελευταίου κεφάλαιου βασιστήκαμε σε υπάρχουσες βιβλιογραφικές πηγές στις οποίες έγινε υπολογισμός των παλιρροϊκών αριθμών αστερών νετρονίων με βάση μία τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας. Οι προσπάθειες αυτές -μέχρι στιγμής- περιορίζονται στην επιλογή μη ρεαλιστικών τιμών των παραμέτρων των τροποποιημένων θεωριών, ως μέσο για την κατάδειξη της απόκλισης από τη Γενική Σχετικότητα και ως απόπειρα άρσης των εκφυλισμών στην καταστατική εξίσωση. Αποτελούν όμως χρήσιμες αναλύσεις καθώς αφθρώνεται ο μηχανισμός υπολογισμού ποσοτήτων που είναι επίσης άμεσα πειραματικά επαληθεύσιμες (εν προκειμένω, μέσω της ανάλυσης του σήματος βαρυτικών κυμάτων), ενώ αναμένεται σημαντική αύξηση των εν λόγω πειραματικών δεδομένων στο προσεχές μέλλον.

Με γνώμονα αυτά, χρησιμοποιήσαμε μια εναλλακτική θεωρία βαρύτητας (το εκθετικό μοντέλο), που περνά όλα τα σύγχρονα πειραματικά τεστ, όντας καθόλα βιώσιμη τόσο σε επίπεδο κοσμολογίας όσο και με βάση τα σημερινά αστρονομικά δεδομένα. Λύσαμε τις εξισώσεις κίνησης υποθέτοντας μια σφαιρικά συμμετρική και στατική μετρική, λαμβάνοντας τις κατάλληλες συνθήκες που αντιστοιχούν σε αστέρες νετρονίων. Τέλος, καταγράφηκε ο τρόπος υπολογισμού των παλιρροϊκών αριθμών -που είναι και το ζητούμενο- όμως δεν

προχωρήσαμε στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής στον υπολογισμό τους. Μπορούμε να δηλώσουμε πως δεν θα υπάρχει παρατηρήσιμη απόκλιση από τις τιμές που θα λαμβάναμε αν ξεκινούσαμε από την κλασική θεωρία της Γενικής Σχετικότητας, καθώς οι συντελεστές που ποσοτικοποιούν την απόκλιση αυτή, για να είναι συνεπείς με τα σύγχρονα πειραματικά δεδομένα, είναι εξαιρετικά μικροί σε απόλυτες τιμές. Η συνέχιση της εν λόγω έρευνας και η παρουσίαση των αποτελεσμάτων θα γίνει σε προσεχή μελέτη προς δημοσίευση [119].

Βιβλιογραφία

- [1] Olive, Keith A. “Inflation.” *Physics Reports* 190.6 (1990): 307-403.
- [2] Copeland, Edmund J., Mohammad Sami, and Shinji Tsujikawa. “Dynamics of dark energy.” *International Journal of Modern Physics D* 15.11 (2006): 1753-1935.
- [3] De Felice, Antonio, and Shinji Tsujikawa. “f (R) theories.” *Living Reviews in Relativity* 13.1 (2010): 3.
- [4] Nojiri, Shin’ichi, and Sergei D. Odintsov. “Unified cosmic history in modified gravity: from F (R) theory to Lorentz non-invariant models.” *Physics Reports* 505.2-4 (2011): 59-144.
- [5] Wheeler, James T. “Symmetric solutions to the Gauss-Bonnet extended Einstein equations.” *Nuclear Physics B* 268.3-4 (1986): 737-746.
- [6] Nojiri, Shin’ichi, and Sergei D. Odintsov. “Modified Gauss–Bonnet theory as gravitational alternative for dark energy.” *Physics Letters B* 631.1-2 (2005): 1-6.
- [7] Lovelock, David. “The Einstein tensor and its generalizations.” *Journal of Mathematical Physics* 12.3 (1971): 498-501.
- [8] Deruelle, Nathalie, and Luis Farina-Busto. “Lovelock gravitational field equations in cosmology.” *Physical Review D* 41.12 (1990): 3696.
- [9] Mannheim, Philip D., and Demosthenes Kazanas. “Exact vacuum solution to conformal Weyl gravity and galactic rotation curves.” *The Astrophysical Journal* 342 (1989): 635-638.
- [10] Ferraro, Rafael, and Franco Fiorini. “Modified teleparallel gravity: inflation without an inflaton.” *Physical Review D* 75.8 (2007): 084031.
- [11] Linder, Eric V. “Einstein’s Other Gravity and the Acceleration of the Universe.” *Physical Review D* 81.12 (2010): 127301.

- [12] Kofinas, Georgios, and Emmanuel N. Saridakis. “Teleparallel equivalent of Gauss-Bonnet gravity and its modifications.” *Physical Review D* 90.8 (2014): 084044.
- [13] Tsujikawa, Shinji. “Observational signatures of $f(R)$ dark energy models that satisfy cosmological and local gravity constraints.” *Physical Review D* 77.2 (2008): 023507.
- [14] Cognola, G., et al. “Class of viable modified $f(R)$ gravities describing inflation and the onset of accelerated expansion.” *Physical Review D* 77.4 (2008): 046009.
- [15] De Felice, Antonio, and Shinji Tsujikawa. “Construction of cosmologically viable $f(G)$ gravity models.” *Physics Letters B* 675.1 (2009): 1-8.
- [16] Nesseris, Savvas, Antonio De Felice, and Shinji Tsujikawa. “Observational constraints on Galileon cosmology.” *Physical Review D* 82.12 (2010): 124054.
- [17] Nesseris, Savvas, et al. “Viable $f(T)$ models are practically indistinguishable from Λ CDM.” *Physical Review D* 88.10 (2013): 103010.
- [18] Abbott, Benjamin P., et al. “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger.” *Physical review letters* 116.6 (2016): 061102.
- [19] Abbott, Benjamin P., et al. “GW170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral.” *Physical Review Letters* 119.16 (2017): 161101.
- [20] Ezquiaga, Jose María, and Miguel Zumalacárregui. “Dark energy after GW170817: dead ends and the road ahead.” *Physical review letters* 119.25 (2017): 251304.
- [21] Baker, Tessa, et al. “Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A.” *Physical review letters* 119.25 (2017): 251301.
- [22] Will, Clifford M. “Testing scalar-tensor gravity with gravitational-wave observations of inspiralling compact binaries.” *Physical Review D* 50.10 (1994): 6058.
- [23] Sotani, Hajime, and Kostas D. Kokkotas. “Probing strong-field scalar-tensor gravity with gravitational wave asteroseismology.” *Physical Review D* 70.8 (2004): 084026.

- [24] Ananda, Kishore N., S. Carloni, and P. K. S. Dunsby. “Evolution of cosmological gravitational waves in $f(R)$ gravity.” *Physical Review D* 77.2 (2008): 024033.
- [25] Capozziello, Salvatore, Christian Corda, and Maria Felicia De Laurentis. “Massive gravitational waves from $f(R)$ theories of gravity: Potential detection with LISA.” *Physics Letters B* 669.5 (2008): 255-259.
- [26] Alves, Marcio ES, Oswaldo D. Miranda, and Jose CN de Araujo. “Probing the $f(R)$ formalism through gravitational wave polarizations.” *Physics Letters B* 679.4 (2009): 401-406.
- [27] Bamba, Kazuharu, et al. “No further gravitational wave modes in $F(T)$ gravity.” *Physics Letters B* 727.1-3 (2013): 194-198.
- [28] Blázquez-Salcedo, Jose Luis, et al. “Perturbed black holes in Einstein-dilaton-Gauss-Bonnet gravity: Stability, ringdown, and gravitational-wave emission.” *Physical Review D* 94.10 (2016): 104024.
- [29] Arai, Shun, and Atsushi Nishizawa. “Generalized framework for testing gravity with gravitational-wave propagation. II. Constraints on Horndeski theory.” *Physical Review D* 97.10 (2018): 104038.
- [30] Gümrükçüoğlu, A. Emir, et al. “Gravitational wave signal from massive gravity.” *Classical and Quantum Gravity* 29.23 (2012): 235026.
- [31] Cai, Yi-Fu, et al. “ $f(T)$ gravity after GW170817 and GRB170817A.” *Physical Review D* 97.10 (2018): 103513.
- [32] Canizares, Priscilla, Jonathan R. Gair, and Carlos F. Sopuerta. “Testing Chern-Simons modified gravity with gravitational-wave detections of extreme-mass-ratio binaries.” *Physical Review D* 86.4 (2012): 044010.
- [33] Farrugia, Gabriel, et al. “Gravitational waves in modified teleparallel theories.” *Physical Review D* 97.12 (2018): 124064.
- [34] Soudi, Ismail, et al. “Polarization of gravitational waves in symmetric teleparallel theories of gravity and their modifications.” *Physical Review D* 100.4 (2019): 044008.
- [35] Aharony, Ofer, et al. “Large N field theories, string theory and gravity.” *Physics Reports* 323.3-4 (2000): 183-386.
- [36] Awad, Adel M., and Clifford V. Johnson. “Holographic stress tensors for Kerr-AdS black holes.” *Physical Review D* 61.8 (2000): 084025.

- [37] Cai, Yi-Fu, et al. “Charged black holes in nonlinear massive gravity.” *Physical Review D* 87.6 (2013): 064001.
- [38] Cisterna, Adolfo, and Cristián Erices. “Asymptotically locally AdS and flat black holes in the presence of an electric field in the Horndeski scenario.” *Physical Review D* 89.8 (2014): 084038.
- [39] Babichev, Eugeny, Christos Charmousis, and Mokhtar Hassaine. “Charged Galileon black holes.” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2015.05 (2015): 031.
- [40] El Hanafy, W., and G. G. L. Nashed. “Exact teleparallel gravity of binary black holes.” *Astrophysics and Space Science* 361.2 (2016): 68.
- [41] Brihaye, Yves, Adolfo Cisterna, and Cristián Erices. “Boson stars in biscalar extensions of Horndeski gravity.” *Physical Review D* 93.12 (2016): 124057.
- [42] Babichev, Eugeny, Christos Charmousis, and Mokhtar Hassaine. “Black holes and solitons in an extended Proca theory.” *Journal of High Energy Physics* 2017.5 (2017): 114.
- [43] Cisterna, Adolfo, et al. “Homogeneous black strings in Einstein–Gauss–Bonnet with Horndeski hair and beyond.” *The European Physical Journal C* 78.11 (2018): 982.
- [44] Gonzalez, P. A., Emmanuel N. Saridakis, and Yerko Vasquez. “Circularly symmetric solutions in three-dimensional Teleparallel, $f(T)$ and Maxwell- $f(T)$ gravity.” *Journal of High Energy Physics* 2012.7 (2012): 53.
- [45] Capozziello, Salvatore, et al. “Exact charged black-hole solutions in D-dimensional $f(T)$ gravity: torsion vs curvature analysis.” *Journal of High Energy Physics* 2013.2 (2013): 39.
- [46] Iorio, Lorenzo, and Emmanuel N. Saridakis. “Solar system constraints on $f(T)$ gravity.” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 427.2 (2012): 1555-1561.
- [47] Nashed, Gamal GL. “Spherically symmetric charged-dS solution in $f(T)$ gravity theories.” *Physical Review D* 88.10 (2013): 104034.
- [48] Aftergood, Joshua, and Andrew DeBenedictis. “Matter conditions for regular black holes in $f(T)$ gravity.” *Physical Review D* 90.12 (2014): 124006.
- [49] Paliathanasis, A., et al. “New Schwarzschild-like solutions in $f(T)$ gravity through Noether symmetries.” *Physical Review D* 89.10 (2014): 104042.

- [50] Kofinas, Georgios, Eleftherios Papantonopoulos, and Emmanuel N. Saridakis. “Self-gravitating spherically symmetric solutions in scalar-torsion theories.” *Physical Review D* 91.10 (2015): 104034.
- [51] Nashed, G. G. L., and W. El Hanafy. “Analytic rotating black-hole solutions in N-dimensional $f(T)$ gravity.” *The European Physical Journal C* 77.2 (2017): 1-9.
- [52] Cruz, Miguel, et al. “Global structure of static spherically symmetric solutions surrounded by quintessence.” *Classical and Quantum Gravity* 34.12 (2017): 125014.
- [53] Ahmed, Ayyesha K., et al. “Astrophysical flows near $f(T)$ gravity black holes.” *The European Physical Journal C* 76.5 (2016): 269.
- [54] Farrugia, Gabriel, Jackson Levi Said, and Matteo Luca Ruggiero. “Solar System tests in $f(T)$ gravity.” *Physical Review D* 93.10 (2016): 104034.
- [55] Koutsoumbas, George, Ioannis Mitsoulas, and Eleftherios Papantonopoulos. “Quantum effects in Galileon black holes.” *Classical and Quantum Gravity* 35.23 (2018): 235016.
- [56] Doneva, Daniela D., et al. “Charged Gauss-Bonnet black holes with curvature induced scalarization in the extended scalar-tensor theories.” *Physical Review D* 98.10 (2018): 104056.
- [57] Bejarano, Cecilia, Rafael Ferraro, and María José Guzmán. “McVittie solution in $f(T)$ gravity.” *The European Physical Journal C* 77.12 (2017): 825.
- [58] Abdalla, E., et al. “Instability of a Reissner-Nordström-AdS black hole under perturbations of a scalar field coupled to the Einstein tensor.” *Physical Review D* 99.10 (2019): 104065.
- [59] Nashed, G. G. L., and Emmanuel N. Saridakis. “Rotating AdS black holes in Maxwell- $f(T)$ gravity.” *Classical and Quantum Gravity* 36.13 (2019): 135005.
- [60] Destounis, Kyriakos, et al. “Strong cosmic censorship in Horndeski theory.” *Journal of High Energy Physics* 2019.10 (2019): 280.
- [61] Papantonopoulos, Eleftherios, and Christoforos Vlachos. “Wormhole solutions in modified Brans-Dicke theory.” *Physical Review D* 101.6 (2020): 064025.

- [62] Nashed, G. G. L., and Emmanuel N. Saridakis. “New rotating black holes in non-linear Maxwell $f(\mathcal{R})$ gravity.” arXiv preprint arXiv:2010.10422 (2020).
- [63] Murray, Carl D., and Stanley F. Dermott. “Solar system dynamics”. Cambridge university press, 1999.
- [64] Poisson, Eric, and Clifford M. Will. “Gravity: Newtonian, post-newtonian, relativistic.” Cambridge University Press, 2014.
- [65] Binnington, Taylor, and Eric Poisson. “Relativistic theory of tidal Love numbers.” *Physical Review D* 80.8 (2009): 084018.
- [66] Vines, Justin, Eanna E. Flanagan, and Tanja Hinderer. “Post-1-Newtonian tidal effects in the gravitational waveform from binary inspirals.” *Physical Review D* 83.8 (2011): 084051.
- [67] Damour, Thibault, and Alessandro Nagar. “Relativistic tidal properties of neutron stars.” *Physical Review D* 80.8 (2009): 084035.
- [68] Damour, Thibault, Alessandro Nagar, and Loic Villain. “Measurability of the tidal polarizability of neutron stars in late-inspiral gravitational-wave signals.” *Physical Review D* 85.12 (2012): 123007.
- [69] Del Pozzo, Walter, et al. “Demonstrating the feasibility of probing the neutron-star equation of state with second-generation gravitational-wave detectors.” *Physical review letters* 111.7 (2013): 071101.
- [70] Hinderer, Tanja, et al. “Effects of neutron-star dynamic tides on gravitational waveforms within the effective-one-body approach.” *Physical review letters* 116.18 (2016): 181101.
- [71] Maselli, Andrea, Leonardo Gualtieri, and Valeria Ferrari. “Constraining the equation of state of nuclear matter with gravitational wave observations: Tidal deformability and tidal disruption.” *Physical Review D* 88.10 (2013): 104040.
- [72] Yagi, Kent, and Nicolas Yunes. “I-Love-Q relations in neutron stars and their applications to astrophysics, gravitational waves, and fundamental physics.” *Physical Review D* 88.2 (2013): 023009.
- [73] Yagi, Kent, and Nicolas Yunes. “I-Love-Q: Unexpected universal relations for neutron stars and quark stars.” *Science* 341.6144 (2013): 365-368.
- [74] Kleihaus, Burkhard, Jutta Kunz, and Sindy Mojica. “Quadrupole moments of rapidly rotating compact objects in dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet theory.” *Physical Review D* 90.6 (2014): 061501.

- [75] Breu, Cosima, and Luciano Rezzolla. “Maximum mass, moment of inertia and compactness of relativistic stars.” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 459.1 (2016): 646-656.
- [76] Staykov, Kalin V., Daniela D. Doneva, and Stoytcho S. Yazadjiev. “Moment of inertia–compactness universal relations in scalar-tensor theories and \mathcal{R}^2 gravity.” arXiv preprint arXiv:1602.00504 (2016).
- [77] Yazadjiev, Stoytcho S., et al. “Non-perturbative and self-consistent models of neutron stars in R-squared gravity.” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2014.06 (2014): 003.
- [78] Yazadjiev, Stoytcho S., Daniela D. Doneva, and Kostas D. Kokkotas. “Tidal Love numbers of neutron stars in f (R) gravity.” *The European Physical Journal C* 78.10 (2018): 818.
- [79] Doneva, Daniela D., et al. “Universal IQ relations for rapidly rotating neutron and strange stars in scalar-tensor theories.” *Physical Review D* 90.10 (2014): 104021.
- [80] Cardoso, Vitor, et al. “Testing strong-field gravity with tidal Love numbers.” *Physical Review D* 95.8 (2017): 084014.
- [81] Schutz, Bernard. “A first course in general relativity.”, Cambridge university press, (2009).
- [82] Hughes, Scott A., et al. “New physics and astronomy with the new gravitational-wave observatories.” arXiv preprint astro-ph/0110349 (2001).
- [83] Carroll, S. “Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.”, Pearson Education, Limited, (2013).
- [84] https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein%E2%80%93Hilbert_action
- [85] Capozziello, Salvatore, and Mariafelicia De Laurentis. “Extended theories of gravity.” *Physics Reports* 509.4-5 (2011): 167-321.
- [86] Capozziello, Salvatore, A. Stabile, and A. Troisi. “Spherical symmetry in f (R)-gravity.” *Classical and Quantum Gravity* 25.8 (2008): 085004
- [87] Sotiriou, Thomas P., and Valerio Faraoni. “f (R) theories of gravity.” *Reviews of Modern Physics* 82.1 (2010): 451.
- [88] <https://www.eef.edu.gr/el/arthra/nompel-fysikis-gia-tin-skoteini-energeia/>
- [89] Bahamonde, Sebastian, et al. “Dynamical systems applied to cosmology: dark energy and modified gravity.” *Physics Reports* 775 (2018): 1-122.

- [90] Clifton, Timothy, et al. “Modified gravity and cosmology.” *Physics reports* 513.1-3 (2012): 1-189.
- [91] Sotiriou, Thomas P. “Modified actions for gravity: theory and phenomenology.” *arXiv preprint arXiv:0710.4438* (2007).
- [92] Brans, Carl, and Robert H. Dicke. “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation.” *Physical review* 124.3 (1961): 925.
- [93] Barrow, John D., and S. Cotsakis. “Inflation and the conformal structure of higher-order gravity theories.” *Physics Letters B* 214.4 (1988): 515-518.
- [94] Whitt, Brian. “Fourth-order gravity as general relativity plus matter.” *Physics Letters B* 145.3-4 (1984): 176-178.
- [95] https://en.wikipedia.org/wiki/Brans%E2%80%93Dicke_theory#cite_note-1
- [96] Faraoni, Valerio, Edgard Gunzig, and Pasquale Nardone. “Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology.” *arXiv preprint gr-qc/9811047* (1998).
- [97] T. Kobayashi, “Horndeski theory and beyond: a review,” *Rept. Prog. Phys.* **82**, no.8, 086901 (2019) doi:10.1088/1361-6633/ab2429 [arXiv:1901.07183 [gr-qc]].
- [98] M. Ostrogradsky, “Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres,” *Mem. Acad. St. Petersburg* **6**, no.4, 385-517 (1850)
- [99] J. M. Lattimer and M. Prakash, “The physics of neutron stars,” *Science* **304**, 536-542 (2004) doi:10.1126/science.1090720 [arXiv:astro-ph/0405262 [astro-ph]].
- [100] L. Rezzolla, P. Pizzochero, D. I. Jones, N. Rea and I. Vidaña, “The Physics and Astrophysics of Neutron Stars,” *Astrophys. Space Sci. Libr.* **457**, pp. (2018) doi:10.1007/978-3-319-97616-7
- [101] Poisson, E., & Will, C. “Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic.” Cambridge: Cambridge University Press, (2014).
- [102] Thorne, Kip S. “Tidal stabilization of rigidly rotating, fully relativistic neutron stars.” *Physical Review D* 58.12 (1998): 124031.
- [103] Hinderer, Tanja. “Tidal Love numbers of neutron stars.” *The Astrophysical Journal* 677.2 (2008): 1216

- [104] Thorne, Kip S., and James B. Hartle. “Laws of motion and precession for black holes and other bodies.” *Physical Review D* 31.8 (1985): 1815.
- [105] Flanagan, Éanna É., and Tanja Hinderer. “Constraining neutron-star tidal Love numbers with gravitational-wave detectors.” *Physical Review D* 77.2 (2008): 021502.
- [106] Misner, Charles W., et al. “Gravitation.” *PhT* 27.8 (1974): 47.
- [107] Thorne, Kip S., and Alfonso Campolattaro. “Non-radial pulsation of general-relativistic stellar models. I. Analytic analysis for $L_{\dot{\iota}}=2$.” *The astrophysical journal* 149 (1967): 591.
- [108] Regge, Tullio, and John A. Wheeler. “Stability of a Schwarzschild singularity.” *Physical Review* 108.4 (1957): 1063.
- [109] Weinberg, Steven. “Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity.” Vol. 1. New York: Wiley, 1972.
- [110] Damour, Thibault, and Alessandro Nagar. “Relativistic tidal properties of neutron stars.” *Physical Review D* 80.8 (2009): 084035.
- [111] François de Closets. «Μη λέτε στον Θεό τι πρέπει να κάνει. Η ζωή του Άλμπερτ Αϊνστάιν», Βιβλιοπωλείον της Εστίας, 2007.
- [112] Abbott, Benjamin P., et al. “GW170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral.” *Physical Review Letters* 119.16 (2017): 161101.
- [113] Nunes, Rafael C., et al. “New observational constraints on $f(R)$ gravity from cosmic chronometers.” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2017.01 (2017): 005.
- [114] Yazadjiev, Stoytcho S., Daniela D. Doneva, and Kostas D. Kokkotas. “Tidal Love numbers of neutron stars in $f(R)$ gravity.” *The European Physical Journal C* 78.10 (2018): 818.
- [115] Akmal, A., V. R. Pandharipande, and DG and Ravenhall. “Equation of state of nucleon matter and neutron star structure.” *Physical Review C* 58.3 (1998): 1804.
- [116] Read, Jocelyn S., et al. “Constraints on a phenomenologically parametrized neutron-star equation of state.” *Physical Review D* 79.12 (2009): 124032.
- [117] Damour, Thibault, and Alessandro Nagar. “Relativistic tidal properties of neutron stars.” *Physical Review D* 80.8 (2009): 084035.

- [118] Binnington, Taylor, and Eric Poisson. “Relativistic theory of tidal Love numbers.” *Physical Review D* 80.8 (2009): 084018.
- [119] Daniela D. Doneva, Georgios Pappas, Emmanuel Saridakis, Haris Tsakonas, Stoytcho S. Yazadjiev. “Tidal Love Numbers in Viable $f(R)$ Gravity” (Under Publication).