ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διπλωματική Εργασία

Κοσμολογία σε θεωρίες τροποποιημένης βαρύτητας με στρέψη

Χαράλαμπος Θεοφίλης

Επιβλέπων: Εμμανουήλ Σαριδάκης
Κύριος Ερευνητής Ε.Α.Α.

Φεβρουάριος 2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κοσμολογία σε θεωρίες τροποποιημένης βαρύτητας με στρέψη

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Χαράλαμπου Θεοφίλη

Επιβλέπων: Εμμανουήλ Σαριδάκης
Κύριος Ερευνητής Ε.Α.Α.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 22α Φεβρουαρίου 2021.

....	....	....
Αλέξανδρος Κεχαγιάς	Γεώργιος Κουτσούμπας	Εμμανουήλ Σαριδάκης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Κύριος Ερευνητής Ε.Α.Α.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2021

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία έχει ως αντικείμενο την βαρύτητα με στρέψη και κοσμολογία στις τροποποιημένες εκδοχές αυτής. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία σύντομη ανασκόπηση στη βαρύτητα, στα κοσμολογικά προβλήματα που υπάρχουν σήμερα και σε κάποιες πιθανές λύσεις τους. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρονται συνοπτικά όλα τα μαθηματικά εργαλεία που είναι απαραίτητα στις κλασικές θεωρίες βαρύτητας σε μη επίπεδους χωροχρόνους. Το τρίτο κεφάλαιο αφορά την Γενική Θεωρία Σχετικότητας, ενώ στο τέταρτο γίνεται μία νύξη στην f(R) βαρύτητα. Το πέμπτο και το έκτο κεφάλαιο αποτελούν τα κυρίως κεφάλαια της εν λόγω εργασίας. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το γεωμετρικό στήσιμο της βαρύτητας με στρέψη, οι εννοιολογικές διαφορές που έχει με την Γενική Θεωρία Σχετικότητας αλλά και η ισοδυναμία των δύο θεωριών. Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η f(T) βαρύτητα και η κοσμολογία ύστερης περιόδου σε συγκεκριμένα μοντέλα της θεωρίας. Κλείνουμε την παρούσα εργασία με μία σύντομη σύνοψη του κάθε κεφαλαίου.

Abstract

The subject of the present thesis is torsional gravity and cosmology in it's modified versions. In the first chapter we briefly review the gravity, today's cosmological problems and some plausible solutions to them. In the second chapter all the mathematical tools necessary for clasical theories of gravity in non-flat spacetimes are concisely presented. The third chapter is about General Theory of Relativity (GR) and in the fourth chapter we make a hint in f(R) gravity. The fifth and the sixth are the main chapters of this thesis. In the fifth chapter we display the geometrical setting of torsional gravity, the conceptual differences between the former and GR but also the equivalence of the two theories. In the sixth chapter we present f(T) gravity and late-time cosmology in specific models of the theory. We end the present thesis with a brief synopsis of every chapter.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής ξεχωριστά. Πρώτα πρώτα τον Κύριο Ερευνητή του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών κύριο Σαριδάκη που μου εμφύσησε το ενδιαφέρον για την βαρύτητα και ειδικότερα για την βαρύτητα με στρέψη. Κάθε εβδομάδα συγγραφής της Διπλωματικής μου Εργασίας με καθοδηγούσε και με συμβούλευε για τη δομή και το περιεχόμενο. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της επιτροπής, τον Καθηγητή κύριο Κεχαγιά και τον Καθηγητή κύριο Κουτσούμπα, που συνέδραμαν στην εκπαίδευσή μου ως φυσικού μέσα από τα μαθήματα που δίδαξαν στη ΣΕΜΦΕ κατά τη διάρκεια της φοίτησής μου σε αυτή.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το 1905 ο Einstein παρουσίασε την Ειδική Θεωρία Σχετικότητας. Ένα από τα πορίσματα της θεωρίας ήταν ότι οι έννοιες το απόλυτου χώρου και χρόνου πρέπει να εγκαταλειφθούν, αφού διαφορετικοί παρατηρητές δύνανται να τους βιώνουν διαφορετικά. Λίγα χρόνια αργότερα ο Minkowski παρατήρησε ότι στη γλώσσα της Σχετικότητας ο τρισδιάστατος Ευκλείδειος χώρος συνδυάζεται με τον χώρο και συναποτελούν τον επίπεδο χωρόχρονο ο οποίος έκτοτε καλείται χώρος Minkowksi. Το 1915 ήταν πάλι ο Enstein που παρουσίασε μία νέα θεωρία για την βαρύτητα, την Γενική Θεωρία Σχετικότητας. Η ΓΘΣ στηρίζεται σε κάποιες παραδοχές οι οποίες επιγραμματικά είναι οι εξής:
1)Η «*Αρχή της Σχετικότητας*» - δεν υπάρχει προτιμητέο αρδανειακό σύστημα αναφοράς.
2)Η «*Αρχή της Ισοδυναμίας*» - τα φαινόμενα λόγω αδράνειας είναι σε τοπική κλίμακα μη διακρίσιμα από τα βαρυτικά φαινόμενα πράγμα που σημαίνει πως οποιοδήποτε βαρυτικό πεδίο μπορεί τοπικά να ακυρωθεί.
3)Η «*Γενική Αρχή Συναλλοιότητας*» - οι πεδιακές εξισώσεις πρέπει να είναι γραμμένες σε συναλλοίωτη μορφή και να είναι αναλλοίωτες κάτω από χωροχρονικούς διαφορομορφισμούς.
4)Η «*Αρχή της Αιτιότητας*» - κάθε σημείο στον χωροχρόνο πρέπει να δέχεται μία καθολικά ισχύουσα έννοια του παρελθόντος, του παρόντος και του μέλλοντος.
5)Η «*Συναλλοιότητα Lorentz*» - τα πειραματικά αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα του προσανατολισμού ή της σχετικής ταχύτητας του εργαστηρίου.

Σε αυτή τη θεωρία ο χωροχρόνος έχει αντικειμενική υπόσταση και δυναμική εξέλιξη, ενώ η βαρυτική αλληλεπίδραση είναι πλήρως γεωμετρικοποιημένη, δηλαδή στα σώματα δεν ασκείται καμία δύναμη, απλώς ακολουθούν τις συντομότερες διαδρομές (γεωδαισιακές) σε έναν καμπυλωμένο χωροχρόνο. Σε τεχνικό επίπεδο, αυτό επιτυγχάνεται μέσω της επιλογής του Einstein να χρησιμοποιήσει την Levi-Civita Connection. Συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι η ύλη λέει στον χωροχρόνο πώς θα καμπυλωθεί και ο χωροχρόνος λέει στην ύλη πώς θα κινηθεί. Η πηγή της καμπύλωσης του χωροχρόνου είναι οτιδήποτε έχει ενέργεια ή μάζα.

Η Γενική Θεωρία Σχετικότητας έχει συγκεντρώσει έναν μεγάλο όγκο θετικής ευρετικής, στη γλώσσα του Lakatos, που προέρχεται φυσικά από τον μεγάλο αριθμό παρατηρησιακών δεδομένων που συμφωνούν μαζί της. Η μετατόπιση του περιηλίου του Ερμή, η καμπύλωση των ηλιακών ακτίνων, η βαρυτική μετατόπιση προς το ερυθρό, η ύπαρξη μελανών οπών, η ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων και η επιτυχής πρόβλεψη της ταχύτητάς τους είναι μόνο μερικοί από τους θριάμβους της θεωρίας. Έτσι, δικαίως αποτέλεσε αλλαγή παραδείγματος, στη γλώσσα του Kuhn, στη βαρυτική θεωρία, αντικατέστησε την θεωρία βαρύτητας του Newton και θεωρείται ένας από τους ακρογωνιαίους λίθους της σύγχρονης φυσικής.

Ο έτερος ακρογωνιαίος λίθος είναι το Καθιερωμένο Πρότυπο των στοιχειωδών αλληλεπιδράσεων. Ακολουθώντας την ευδόκιμη περιγραφή της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης ως θεωρίας βαθμίδας, το Καθιερωμένο Πρότυπο περιγράφει με τον ίδιο τρόπο και τις άλλες δύο στοιχειώδεις αλληλεπιδράσεις που διέπουν τα φαινόμενα του μικρόκοσμου, την ασθενή πυρηνική και την ισχυρή πυρηνική. Παρά την αρχική δυσπιστία, το ΚΠ μετράει ήδη μισό αιώνα ορθών προβλέψεων και συνεχούς επιβεβαίωσης.

Όπως έχει τονιστεί μέχρι τώρα, ΓΘΣ και ΚΠ συνιστούν, ξεχωριστά, θριάμβους της θεωρητικής φυσικής. Ωστόσο, αποτυγχάνουν να περιγράψουν από κοινού την ιστορία του σύμπαντος. Παρατηρησιακά δεδομένα που προέρχονται τόσο από τις πρώτες στιγμές του σύμπαντος όσο και από μεταγενέστερες εποχές δεν δύνανται να ερμηνευθούν από τις δύο αυτές θεωρίες. Πιο συγκεκριμένα, γνωρίζουμε ότι το σύμπαν έχει υποστεί δύο φάσεις επιτάχυνσης. Η πρώτη καλείται πληθωρισμός και θεωρείται πως έλαβε χώρα πριν την εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας. Η υπόθεση του πληθωρισμού είναι αναγκαία όχι μόνο για να λύσει το πρόβλημα της επιπεδότητας και του ορίζοντα αλλά και για να ερμηνεύσει το σχεδόν επίπεδο φάσμα της θερμοκρασιακής ανισοτροπίας που παρατηρείται στο Μικροκυματικό Υπόβαθρο Ακτινοβολίας (CMB). Η δεύτερη φάση επιτάχυνσης ξεκίνησε μετά την περίοδο κυριαρχίας της μάζας και είναι η φάση στην οποία βρίσκεται το σύμπαν σήμερα. Το άγνωστο στοιχείο που τροφοδοτεί την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος ονομάζεται σκοτεινή ενέργεια.

Μεταξύ άλλων υπάρχουν δύο πιθανές λύσεις στα προβλήματα αυτά. Η μία είναι να υποθέσει κανείς πως η ΓΘΣ είναι σωστή και να τροποποιήσει τη θεωρία των στοιχειωδών αλληλεπιδράσεων. Οι κοσμολογικές επιπτώσεις μίας τέτοιας θεώρησης ενσωματώνονται στο πρότυπο ΛCDM, ένα αρκετά επιτυχημένο πρότυπο που περιγράφει ικανοποιητικά την συμπεριφορά του σύμπαντος.

Η κοσμολογική σταθερά Λ είναι μία παλιά ιδέα που όμως χρησιμοποιείται πλέον για διαφορετικό λόγο από αυτόν για τον οποίο εισήχθη. Από πρώτα χρόνια της κοσμολογίας, όπου δεν υπήρχαν ακόμα συναφή παρατηρησιακά δεδομένα, ήταν σαφές από τις εξισώσεις ότι το σύμπαν πρέπει να διαστέλλεται. Για φιλοσοφικούς λόγους ο Einstein πίστευε ότι σύμπαν είναι στατικό, επομένως εισήγαγε ad hoc στις εξισώσεις μία παράμετρο που ονόμασε κοσμολογική σταθερά Λ και δίνοντάς της συγκεκριμένη τιμή έπαιρνε στατικές, ωστόσο μη ευσταθείς, λύσεις. Όμως αργότερα, ο Hubble είχε στα χέρια του δεδομένα που έδειχναν κατηγορηματικά ότι το σύμπαν διαστέλλεται και έτσι η κοσμολογική σταθερά βγήκε από το παιχνίδι. Το 1998 ήρθε η αναπάντεχη ανακάλυψη της επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος και έτσι επανήλθε η ιδέα της κοσμολογικής σταθεράς που θα μπορούσε να τροφοδοτήσει την διαδικασία αυτή.

Η σκοτεινή ύλη (Dark Matter) είναι μία ονομασία για μορφή ύλης που δεν αλληλεπιδρά μέσω της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης. Το κίνητρο πίσω από την θεώρηση σκοτεινής ύλης ήρθε αρχικά από δεδομένα από κάποιους γαλαξίες τα οποία έδειξαν πως η συνήθης (βαρυονική) ύλη δεν επαρκεί για την συγκρότηση των γαλαξιών αυτών. Επιπλέον στοιχεία υπέρ της ύπαρξης της σκοτεινής ύλης έρχονται από φαινόμενα βαρυτικής εστίασης που παρατηρούνται. Στην κοσμολογία χρησιμοποιείται κυρίως το πρότυπο της Ψυχρής Σκοτεινής Ύλης (Cold Dark Matter), όπου ο χαρακτηρισμός «ψυχρή» δηλώνει ότι η ταχύτητα των σωματιδίων που την απαρτίζουν είναι μικρή σε σχέση με την τατύχητα του φωτός. Υπάρχει πληθώρα θεωριών που φιλοδοξούν να εξηγήσουν την φύση της σκοτεινής ύλης χωρίς μέχρι σήμερα να έχει επιβεβαιωθεί κάποια από αυτές.

Το σημαντικότερο πρόβλημα που αντιμετωπίζει το πρότυπο ΛCDM είναι η αδυναμία ικανοποιητικής εξήγησης της κοσμολογικής σταθεράς. Παρ΄ όλο που η κβαντική θεωρία πεδίου εν πρώτοις προβλέπει την ύπαρξη ενέργειας του κενού, δηλαδή κοσμολογικής σταθεράς, ο υπολογισμός δίνει τιμή 120 τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από αυτή που μπορεί να εξηγήσει την επιτάχυνση του σύμπαντος που παρατηρείται σήμερα, γεγονός που συνιστά την χειρότερη πρόβλεψη στην ιστορία της φυσικής.

Για να απαλλαγεί κανείς από το πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς μπορεί να τροποποιήσει την θεωρία της βαρύτητας. Κάθε τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας (όπως και η ίδια η ΓΘΣ) πρέπει να πληροί κάποιες προϋποθέσεις. Πρώτον, πρέπει να αναπαράγει την Νευτώνεια θεωρία στο όριο όπου το πεδίο είναι ασθενές, συνεπώς να εξηγεί τις κινήσεις των πλανητών και τον δομών που δημιουργούνται λόγω της βαρύτητας στους γαλαξίες. Επιπλέον, πρεπει να περνάει τα τεστ από παρατηρήσεις σε επίπεδο ηλιακού συστήματος. Τέλος, σε κοσμολογική κλίμακα πρέπει να είναι σε θέση να αναπαράγει τις συνήθεις κοσμολογικές παραμέτρους, όπως τον ρυθμό διαστολής, τους παράγοντες πυκνότητας κλπ με αυτοσυνεπή τρόπο.

Υπάρχουν δεκάδες οικογένειες τροποποιήσεων της ΓΘΣ. Η πιο απλή τροποποίηση είναι η λεγόμενη f(R) βαρύτητα, όπου στην δράση, το βαθμωτό Ricci R αντικαθίσταται από μία συνάρτηση του $f(R)$. Αν και η θεωρία $f(R)$ προτάθηκε αρχικά για να εξηγήσει τον πληθωρισμό, πλέον χρησιμοποιείται και στην κοσμολογία ύστερης περιόδου. Επιλέγοντας κανείς συγκεκριμένες συναρτήσεις μπορεί να πάρει τα ίδια αποτελέσματα με το πρότυπο ΛCDM χωρίς να προβληματίζεται για την ύπαρξη και την τιμή κάποιας κοσμολογικής σταθεράς. Φαινομενικά, οι εξισώσεις πεδίου είναι προβληματικές, καθώς εν γένει είναι τέταρτης τάξης ως προς την μετρική. Όμως, με την χρήση σύμμορφου μετασχηματισμού και υπό την προϋπόθεση ότι η παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial R}$ είναι θετική αίρεται το πρόβλημα. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι, από βαρυτικής άποψης, το πρότυπο ΛCDM μπορεί να θεωρηθεί υποπερίπτωση της f(R) βαρύτητας με $f(R) = R - 2\Lambda$.

Η βαρύτητα με στρέψη προέκυψε από την απόπειρα του Einstein να ενοποιήσει τον ηλεκτρομαγνητισμό με την βαρύτητα. Η προσπάθεια αυτή μπορεί να απέτυχε, όμως οδήγησε στο Τηλεπαράλληλο Ισοδύναμο της Γενικής Σχετικότητας (TEGR). Η TEGR είναι μία θεωρία πλήρως ισοδύναμη με την ΓΘΣ, όμως εννοιολογικά εντελώς διαφορετική. Αυτή τη φορά το γεωμετρικό στήσιμο γίνεται σε έναν στρεβλωμένο χωροχρόνο, πράγμα που τεχνικά επιτυγχάνεται μέσω της επιλογής του Weitzenbock Connection, και η έννοια της δύναμης, που λείπει πλήρως στην ΓΘΣ, επιστρέφει για να περιγράψει μαζί με την γεωμετρία την βαρυτική αλληλεπίδραση. Επιπλέον, ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα της TEGR είναι ότι μπορεί να θεωρηθεί θεωρία βαθμίδας με γεννήτορα την ομάδα των μετατοπίσεων στον εφαπτόμενο χώρο. Επίσης, η βαρύτητα με στρέψη παρουσιάζει το (μέχρι τώρα αποκλειστικά θεωρητικό) ενδιαφέρον χαρακτηριστικό να μπορεί να σταθεί ως αυτοσυνεπής θεωρία ακόμα και στο υποθετικό σενάριο όπου δεν ισχύει η αρχή της ισοδυναμίας.

Μιμούμενος κανείς το παράδειγμα της f(R) βαρύτητας μπορεί να προχωρήσει στη διατύπωση της f(T) βαρύτητας με το βαθμωτό στρέψης T να δίνει την θέση του σε μία συνάρτηση f(T). Παρ΄όλο που οι ΓΘΣ και TEGR είναι εντελώς ισοδύναμες δεν ισχύει το ίδιο για τις τροποποιημένες εκδοχές τους. Έτσι, η f(T) θεωρία αποτελεί ένα εντελώς διαφορετικό και ανεξάρτητο πεδίο έρευνας για την βαρύτητα. Το κύριο πλεονέκτημα που έχει η f(T) βαρύτητα είναι ότι οι εξισώσεις πεδίου παραμένουν πάντα **δεύτερης τάξης**, χαρακτηριστικό που λείπει από τις περισσότερες οικογένειες τροποποιημένης βαρύτητας και αποτελεί εγγενή παθογένεια των θεωριών αυτών.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικά Εργαλεία

2.1 Μετρική

Θεωρούμε έναν χώρο M διάστασης n. Κατ΄ αναλογία με την περίπτωση του ευκλείδειου τρισδιάστατου χώρου ορίζουμε το στοιχείο μήκους ως:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.1}$$

Όπου το αντικείμενο $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ καλείται μετρική του χώρου. Η μετρική είναι συμμετρική στην εναλλαγή των δεικτών της $\mu \leftrightarrow \nu$. Στην περίπτωση όπου μπορεί να διαγωνιοποιηθεί και τα στοιχεία της διαγωνίου είναι όλα θετικά λέμε ότι ο χώρος μας είναι ρημάννειος, ενώ αν υπάρχει έστω και ένα αρνητικό πρόσημο λέμε ότι ο χώρος είναι ψευδορημάννειος.

Ιδιαίτερα χρήσιμη θα μας φανεί και η αντίστροφη μετρική $g^{\mu\nu}$ που ορίζεται από την σχέση:

$$g_{\kappa\nu} g^{\mu\nu} = \delta^\mu_\kappa \tag{2.2}$$

2.2 Μετασχηματισμοί

Θεωρούμε έναν μετασχηματισμό από ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο ο οποίος στη γενικότερή του μορφή γράφεται ως

$$T : x^\mu \to x'^\mu \tag{2.3}$$

Από τον κανόνα αλυσίδας έπεται ότι τα dx^μ και $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ μετασχηματίζονται ως εξής:

$$dx^\mu \to dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{2.4}$$

και

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \to \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{2.5}$$

Ορίζουμε τανυστές ως προς τους μετασχηματισμούς T :

1)Βαθμωτά μεγέθη $\Phi(x)$ αυτά τα οποία μένουν αναλλοίωτα κάτω από τους μετασχηματισμούς T

$$\Phi'(x') = \Phi(x) \tag{2.6}$$

2)Ανταλλοίωτα διανύσματα V^μ (πάνω δείκτες) τα οποία μετασχηματίζονται όπως τα dx^μ

$$V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(x) \tag{2.7}$$

3)Συναλλοίωτα διανύσματα V_μ (κάτω δείκτες) τα οποία ματασχηματίζονται όπως τα $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$

$$V'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu(x) \tag{2.8}$$

4)Μεικτοί τανυστές $A^\kappa{}_{\lambda\mu}$ οι οποίοι μετασχηματίζονται ως:

$$A'^\kappa{}_{\lambda\mu}(x') = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} A^\alpha{}_{\beta\gamma}(x) \tag{2.9}$$

Απαιτούμε κάτω από τους μετασχηματισμούς T το στοιχείο μήκους να παραμένει αναλλοίωτο, δηλαδή $ds'^2 = ds^2$, απ΄ όπου προκύπτει η σχέση μετασχηματισμού της μετρικής

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} \tag{2.10}$$

Δηλαδή, η μετρική είναι συναλλοίωτος τανυστής δεύτερης τάξης.

Αντίστοιχα, αποδεικνύεται ότι η αντίστροφη μετρική είναι ανταλλοίωτος τανυστής δεύτερης τάξης.

2.3 Συναλλοίωτη παράγωγος

Θεωρούμε μία βαθμωτή συνάρτηση Φ . Μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\Phi \equiv \partial_\mu \Phi$ και να εξατάσουμε πώς μετασχηματίζονται κάτω από τον μετασχηματισμό T . Έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\Phi' = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi \tag{2.11}$$

Δηλαδή, οι ποσότητες $\partial_\mu \Phi$ συναποτελούν ένα συναλλοίωτο διάνυσμα.

Έστω τώρα ένα συναλλοίωτο διάνυσμα V_μ. Κάτω από τον μετασχηματισμό T έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\nu} V'_\mu = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \partial_\mu V_\lambda + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} V_\lambda \tag{2.12}$$

Δηλαδή, πλην της περίπτωσης όπου πρόκειται για γραμμικό μετασχηματισμό, το αντικείμενο $\partial_\nu V_\mu$ δεν μετασχηματίζεται συναλλοίωτα και επομένως δεν αποτελεί τανυστή.

Προκειμένου να επανακτήσουμε την συναλλοιότητα ορίζουμε την συναλλοίωτη παράγωγο που δρα σε συναλλοίωτο διάνυσμα ως:

$$\nabla_\mu V_\nu \equiv \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu} V_\kappa \tag{2.13}$$

Όπου το αντικείμενο $\Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}$ ονομάζεται αφινική συνοχή. Απαιτώντας το $\nabla_\mu V_\nu$ να μετασχηματίζεται ως τανυστής έχουμε:

$$\nabla'_\mu V'_\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'_\kappa} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \nabla_\alpha V_\beta \Rightarrow \tag{2.14}$$

$$\Gamma'^\kappa{}_{\nu\mu} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\beta\alpha} + \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \tag{2.15}$$

Με ανάλογο τρόπο οδηγούμαστε στον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου που δρα σε ανταλλοίωτο διάνυσμα.

$$\nabla_\mu V^\nu \equiv \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu{}_{\kappa\mu} V^\kappa \tag{2.16}$$

Είμαστε ελεύθεροι να επιβάλλουμε επιπλέον περιορισμούς στην αφινική συνοχή. Θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο η συναλλοίωτη παράγωγος της μετρικής να είναι μηδέν (συνθήκη συμβατότητας με την μετρική). Έχουμε :

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} = 0 \Rightarrow \tag{2.17}$$

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu} - (\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\kappa{}_{\lambda\mu}) g_{\kappa\nu} + T^\kappa{}_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} + T^\kappa{}_{\nu\mu} g_{\kappa\lambda} = 0 \tag{2.18}$$

Όπου έχουμε ορίσει τον τανυστή $T^\alpha{}_{\beta\gamma} \equiv \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$.

2.4 Τετράδες

Θεωρούμε Ψευδορημάννειο χώρο M σε $n = 4$ διαστάσεις. Σε κάθε σημείο x μπορούμε να εισαγάγουμε μία ορθοκανονική βάση διανυσμάτων

$$\{h^a{}_\mu(x)\}, a = 0, ..., 3 \tag{2.19}$$

Η οποία ανήκει στον εφαπτόμενο χώρο $T_x M$. Ο πρώτος δείκτης ονομάζεται αλγεβρικός ή εφαπτομενικός. Για τους εφαπτομενικούς δείκτες ισχύει η σχέση:

$$h^a{}_\mu h_b{}^\mu = \delta^a_b \tag{2.20}$$

Ενώ για τους χωροχρονικούς δείκτες ισχύει η σχέση:

$$h^a{}_\mu h_a{}^\nu = \delta^\nu_\mu \tag{2.21}$$

Ο εφαπτόμενος χώρος είναι χώρος Minkowski επομένως ισχύει η σχέση:

$$\eta_{ab} = h_a{}^\mu h_{b\mu} = g_{\mu\nu} h_a{}^\mu h^\nu_b \tag{2.22}$$

Και αντίστροφα:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu \tag{2.23}$$

Παίρνοντας την ορίζουσα στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης βρίσκουμε ότι:

$$h = \sqrt{-g} \tag{2.24}$$

Όπου $h = det(h^a{}_\mu)$ και $g = det(g_{\mu\nu})$.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του στοιχείου μήκους ds^2 και τα νέα μας μαθηματικά εργαλεία έχουμε:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} h^a h^b \tag{2.25}$$

Όπου στην συγκεκριμένη περίπτωση ορίσαμε: $h^a \equiv h^a{}_\mu dx^\mu$

Από τις σχέσεις ορθογωνιότητας $h^a h_b = \delta^a_b$ και $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$ προκύπτει ότι $h_a = h_a{}^\mu \partial_\mu$

Μπορούμε να γράψουμε κάθε διάνυσμα του χώρου συναρτήσει του αντίστοιχου διανύσματος του εφαπτόμενου χώρου και αντίστροφα, χρησιμοποιώντας ως βάση τα $\{h^a{}_\mu\}$ και $\{h_a{}^\mu\}$, δηλαδή:

$$\Phi^\mu = h_a{}^\mu \Phi^a \tag{2.26}$$

και

$$\Phi^a = h^a{}_\mu \Phi^\mu \tag{2.27}$$

Αν ο χώρος μας είναι Minkowski τότε η διαδικασία είναι τετριμμένη, αφού ο εφαπτόμενος χώρος ταυτίζεται παντού με τον αρχικό χώρο. Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε τις (τετριμμένες) τετράδες ως $e^a{}_\mu$ και ισχύουν οι σχέσεις

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu \tag{2.28}$$

και αντίστροφα

$$\eta_{ab} = \eta_{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu \tag{2.29}$$

2.5 Spin Συνοχή

Κατ΄ αναλογία με την περίπτωση των χωροχρονικών δεικτών ορίζουμε την συναλλοίωτη παράγωγο που δρα στους εφαπτομενικούς δείκτες ως:

$$\mathscr{D}_\mu \Phi^c \equiv \partial_\mu \Phi^c + A^c{}_{d\mu} \Phi^d \tag{2.30}$$

Όπου το $A^c{}_{d\mu}$ καλείται Spin συνοχή (Spin Connection). Απαιτούμε να ισχύει η σχέση

$$\mathscr{D}_\mu \Phi^d = \mathscr{D}_\mu (h^d{}_\rho \Phi^\rho) = h^d{}_\rho \nabla_\mu \Phi^\rho \tag{2.31}$$

η οποία είναι ισοδύναμη με τις:

$$\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = h_a{}^{\rho}\partial_{\mu}h^a{}_{\nu} + h_a{}^{\rho}A^a{}_{b\mu}h^b{}_{\nu} = h_a{}^{\rho}\mathscr{D}_{\mu}h^a{}_{\nu} \tag{2.32}$$

και

$$A^a{}_{b\mu} = h^a{}_{\nu}\partial_{\mu}h_b{}^{\nu} + h^a{}_{\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\rho\mu}h_b{}^{\rho} = h^a{}_{\nu}\nabla_{\mu}h_b{}^{\nu} \tag{2.33}$$

Στην πραγματικότητα οι σχέσεις (2.31) και (2.32),(2.33) είναι διαφορετικοί τρόποι να εκφράσουμε την ιδιότητα της τετράδας να έχει συνολική συναλλοίωτη παράγωγο μηδέν, δηλαδή:

$$\partial_{\mu}h^a{}_{\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}h^a{}_{\rho} + A^a{}_{b\mu}h^b{}_{\nu} = 0 \tag{2.34}$$

Χρησιμοποιώντας την συμβατότητα της συνοχής $\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}$ με την μετρική και τις σχέσεις (2.32) και (2.33) καταλήγουμε στην σχέση

$$\partial_{\mu}\eta_{ab} - A^d{}_{a\mu}\eta_{db} - A^d{}_{b\mu}\eta_{ad} = 0 \tag{2.35}$$

ή

$$A_{ba\mu} = -A_{ab\mu} \tag{2.36}$$

2.6 Τανυστές Καμπυλότητας και Στρέψης

Θεωρούμε την δράση του μεταθέτη δύο συναλλοίωτων παραγώγων σε ένα συναλλοίωτο διάνυσμα. Έχουμε:

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V_{\kappa} = \nabla_{\mu}(\nabla_{\nu}V_{\kappa}) - (\mu \leftrightarrow \nu) = \partial_{\mu}(\nabla_{\nu}V_{\kappa}) - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}\nabla_{\rho}V_{\kappa} - \Gamma^{\rho}{}_{\kappa\mu}\nabla_{\nu}V_{\rho} - (\mu \leftrightarrow \nu) = (\partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\kappa\mu} - \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\kappa\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\eta\nu}\Gamma^{\eta}{}_{\kappa\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\eta\mu}\Gamma^{\eta}{}_{\kappa\nu})V_{\rho} - (\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu})\nabla_{\rho}V_{\kappa}$$

Ορίζουμε τον τανυστή καμπυλότητας Riemann

$$R^{\rho}{}_{\kappa\nu\mu} \equiv \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\kappa\mu} - \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\kappa\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\eta\nu}\Gamma^{\eta}{}_{\kappa\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\eta\mu}\Gamma^{\eta}{}_{\kappa\nu} \tag{2.37}$$

Και τον τανυστή στρέψης

$$T^{\rho}{}_{\mu\nu} \equiv \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} \tag{2.38}$$

Επομένως έχουμε:

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V_{\kappa} = R^{\rho}{}_{\kappa\nu\mu}V_{\rho} - T^{\rho}{}_{\mu\nu}\nabla_{\rho}V_{\kappa} \tag{2.39}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $R^a{}_{b\nu\mu} = h^a{}_{\rho}h_b{}^{\lambda}R^{\rho}{}_{\lambda\nu\mu}$ και $T^a{}_{\nu\mu} = h^a{}_{\rho}T^{\rho}{}_{\nu\mu}$, τις σχέσεις ορισμού των $R^{\rho}{}_{\lambda\nu\mu}$ και $T^{\rho}{}_{\nu\mu}$ και την σχέση (2.32) έχουμε:

$$R^a{}_{b\nu\mu} = \partial_{\nu}A^a{}_{b\mu} - \partial_{\mu}A^a{}_{b\nu} + A^a{}_{e\nu}A^e{}_{b\mu} - A^a{}_{e\mu}A^e{}_{b\nu} \tag{2.40}$$

και

$$T^a{}_{\nu\mu} = \partial_{\nu}h^a{}_{\mu} - \partial_{\mu}h^a{}_{\nu} + A^a{}_{e\nu}h^e{}_{\mu} - A^a{}_{e\mu}h^e{}_{\nu} = \mathscr{D}_{\nu}h^a{}_{\mu} - \mathscr{D}_{\mu}h^a{}_{\nu} \tag{2.41}$$

Παρατηρούμε ότι οι τανυστές καμπυλότητας και στρέψης είναι αντισυμμετρικοί στην εναλλαγή των δύο τελευταίων χωροχρονικών δεικτών.

2.7 Τοπικοί Μετασχηματισμοί Lorentz

Εφόσον ο εφαπτόμενος χώρος είναι Mikowski μπορούμε να αλλάξουμε την βάση $h^a{}_\mu \to h'^a{}_\mu$ χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Lorentz, δηλαδή:

$$h'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b(x) h^b{}_\mu \tag{2.42}$$

Προκειμένου να ισχύει η σχέση $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu = \eta_{ab} h'^a{}_\mu h'^b{}_\nu$ θα πρέπει οι μετασχηματισμοί Lorentz να ικανοποιούν την σχέση:

$$\eta_{ab} \Lambda^a{}_c(x) \Lambda^b{}_d(x) = \eta_{cd} \tag{2.43}$$

. Κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς Lorentz το spin connection μετασχηματίζεται ως

$$A'^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c(x) A^c{}_{d\mu} \Lambda_b{}^d(x) + \Lambda^a{}_c \partial_\mu \Lambda_b{}^c(x) \tag{2.44}$$

Ενώ τα $T^a{}_{\nu\mu}$ και $R^a{}_{b\nu\mu}$ μετασχηματίζονται με συναλλοίωτο τρόπο:

$$T'^a{}_{\nu\mu} = \Lambda^a{}_b(x) T^b{}_{\nu\mu} \tag{2.45}$$

και

$$R'^a{}_{b\nu\mu} = \Lambda^a{}_c(x) \Lambda_b{}^d(x) R^c{}_{d\nu\mu} \tag{2.46}$$

Απ΄ όπου εύκολα προκύπτει ότι οι ποσότητες με χωροχρονικούς δείκτες $\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}$, $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ και $R^\rho{}_{\lambda\nu\mu}$ είναι αναλλοίωτες κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς Lorentz.

2.8 Ταυτότητες Bianchi

Δεδομένου ενός Spin Connection $A^a{}_{b\mu}$ η στρέψη και η καμπυλότητα που του αντιστοιχούν ικανοποιούν δύο ταυτότητες οι οποίες ονομάζονται ταυτότητες Bianchi. Υπάρχει μία ταυτότητα για την στρέψη,

$$\mathscr{D}_\mu T^a{}_{\nu\rho} + \mathscr{D}_\nu T^a{}_{\rho\mu} + \mathscr{D}_\rho T^a{}_{\mu\nu} = R^a{}_{\mu\nu\rho} + R^a{}_{\nu\rho\mu} + R^a{}_{\rho\mu\nu}, \tag{2.47}$$

η οποία συνήθως καλείται πρώτη ταυτότητα Bianchi,και μία ταυτότητα για την καμπυλότητα,

$$\mathscr{D}_\mu R^a{}_{b\nu\rho} + \mathscr{D}_\nu R^a{}_{b\rho\mu} + \mathscr{D}_\rho R^a{}_{b\mu\nu} = 0, \tag{2.48}$$

η οποία συνήθως καλείται δεύτερη ταυτότητα Bianchi. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, καθώς και τις σχέσεις μεταξύ των χωροχρονικών και εφαπτομενικών συνιστωσών των τανυστών καμπυλότητας και στρέψης, η πρώτη ταυτότητα Bianchi παίρνει την μορφή

$$\nabla_\mu T^\lambda{}_{\nu\rho} + \nabla_\nu T^\lambda{}_{\rho\mu} + \nabla_\rho T^\lambda{}_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\nu\rho} + R^\lambda{}_{\nu\rho\mu} + R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} + T^\lambda{}_{\mu\sigma} T^\sigma{}_{\nu\rho} + T^\lambda{}_{\nu\sigma} T^\sigma{}_{\rho\mu} + T^\lambda{}_{\rho\sigma} T^\sigma{}_{\mu\nu} \tag{2.49}$$

ενώ, η δεύτερη ταυτότητα Bianchi παίρνει την μορφή

$$\nabla_\mu R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu} + \nabla_\rho R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} = R^\lambda{}_{\sigma\mu\theta} T^\theta{}_{\nu\rho} + R^\lambda{}_{\sigma\nu\theta} T^\theta{}_{\rho\mu} + R^\lambda{}_{\sigma\rho\theta} T^\theta{}_{\mu\nu}. \tag{2.50}$$

2.9 Τανυστής Contorsion

Οποιαδήποτε αφινική συνοχή $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα της μοναδικής συνοχής συμβατής με την μετρική με ταυτοτικά μηδενική στρέψη, της Levi-Civita συνοχής $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}$, και ενός τανυστή που ονομάζεται τανυστής Contorsion. Δηλαδή, έχουμε

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} + K^{\rho}{}_{\mu\nu} \tag{2.51}$$

Απαιτώντας η τυχαία συνοχή να είναι συμβατή με την μετρική έχουμε

$$K^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} + T_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu} - T^{\rho}{}_{\mu\nu}) \tag{2.52}$$

Για το spin connection ισχύει αντίστοιχη σχέση

$$A^{a}{}_{bc} = \overset{\circ}{A}{}^{a}{}_{bc} + K^{a}{}_{bc} \tag{2.53}$$

όπου $A^{a}{}_{bc} = h_{c}{}^{\nu} A^{a}{}_{b\nu}$

Έχουμε ολοκληρώσει την παρουσίαση των μαθηματικών αντικειμένων που μας χρειάζονται και είμαστε πανέτοιμοι να προχωρήσουμε στην Φυσική.

Κεφάλαιο 3

Γενική Θεωρία Σχετικότητας (ΓΘΣ)

3.1 Μαθηματικός φορμαλισμός

Ανακαλούμε τη σχέση που μας δίνει τους τανυστές καμπυλότητας και στρέψης:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V_\kappa = R^\rho{}_{\kappa\nu\mu}V_\rho - T^\rho{}_{\mu\nu}\nabla_\rho V_\kappa \tag{3.1}$$

Όπου

$$R^\rho{}_{\kappa\nu\mu} \equiv \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\kappa\mu} - \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\kappa\nu} + \Gamma^\rho{}_{\eta\nu}\Gamma^\eta{}_{\kappa\mu} - \Gamma^\rho{}_{\eta\mu}\Gamma^\eta{}_{\kappa\nu} \tag{3.2}$$

και

$$T^\rho{}_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \tag{3.3}$$

Επιλέγουμε την συνοχή μας έτσι ώστε ο τανυστής στρέψης να είναι ταυτοτικά μηδέν.

$$\mathring{T}^\rho{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} - \mathring{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \mathring{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} = \mathring{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} \tag{3.4}$$

Η παραπάνω σχέση μας ορίζει κατά το ήμισυ το διάσημο Levi-Civita connection.Το δεύτερο μισό του ορισμού έρχεται χρησιμοποιώντας την συνθήκη συμβατότητας με την μετρική. Τελικώς, έχουμε για το Levi-Civita connection:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu} - (\mathring{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda} + \mathring{\Gamma}^\kappa{}_{\lambda\mu})g_{\kappa\nu} + \mathring{T}^\kappa{}_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} + \mathring{T}^\kappa{}_{\nu\mu}g_{\kappa\lambda} = 0 \Rightarrow \tag{3.5}$$

$$\mathring{\Gamma}^\kappa{}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\kappa\nu}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) \tag{3.6}$$

Αρκετά συχνά τα $\mathring{\Gamma}^\kappa{}_{\lambda\mu}$ καλούνται σύμβολα Christoffel.

Ο τανυστής καμπυλότητας έχει τώρα τις εξής ιδιότητες:
1)$\mathring{R}_{\rho\kappa\nu\mu} = -\mathring{R}_{\rho\kappa\mu\nu}$(όπως πάντα)
2)$\mathring{R}_{\rho\kappa\nu\mu} = -\mathring{R}_{\kappa\rho\nu\mu}$
3)$\mathring{R}_{\rho\kappa\nu\mu} = +\mathring{R}_{\nu\mu\rho\kappa}$

Ενώ, οι ταυτότητες Bianchi γίνονται

$$\mathring{R}^{\rho}{}_{\kappa\nu\mu} + \mathring{R}^{\rho}{}_{\nu\mu\kappa} + \mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\kappa\nu} = 0 \tag{3.7}$$

για την πρώτη ταυτότητα Bianchi, και

$$\mathring{\nabla}_{\mu}\mathring{R}^{\lambda}{}_{\sigma\nu\rho} + \mathring{\nabla}_{\nu}\mathring{R}^{\lambda}{}_{\sigma\rho\mu} + \mathring{\nabla}_{\rho}\mathring{R}^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} = 0 \tag{3.8}$$

για την δεύτερη ταυτότητα Bianchi.

Από τις ιδιότητες 1) 2) 3) και από την πρώτη ταυτότητα Bianchi προκύπτει ότι από τις $4^4 = 256$ (για $n = 4$ αριθμό διαστάσεων) συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας ανεξάρτητες είναι μόνο οι 20, αριθμός που ταυτίζεται με τον αριθμό των δεύτερων παραγώγων της μετρικής.

Προχωρούμε στην κατασκευή επιπλέον μαθηματικών αντικειμένων που θα μας φανούν πολύ χρήσιμα στη συνέχεια. Ορίζουμε τον τανυστή Ricci ως:

$$\mathring{R}_{\mu\nu} \equiv \mathring{R}^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \tag{3.9}$$

και το βαθμωτό Ricci ως:

$$\mathring{R} \equiv g^{\mu\nu}\mathring{R}_{\mu\nu} \tag{3.10}$$

Λόγω των συμμετριών του τανυστή καμπυλότητας, το βαθμωτό Ricci είναι η μόνη ανεξάρτητη βαθμωτή ποσότητα που μπορεί να καταστευαστεί από συστολλές δεικτών του τανυστή καμπυλότητας.

3.2 Εξισώσεις κίνησης δοκιμαστικού σωματιδίου

Θεωρούμε ένα δοκιμαστικό σωματίδιο, δηλαδή σωματίδιο του οποίου η μάζα είναι αρκετά μικρή ώστε να μην διαταράσσει τον χωροχρόνο γύρω του. Για να βρούμε την εξίσωση κίνησής του αρκεί να σκεφτούμε ότι στην περιγραφή μας η βαρυτική αλληλεπίδραση είναι πλήρως γεωμετρικοποιημένη, δηλαδή δεν ασκείται καμία δύναμη πάνω στα σωματίδια και τα σωματίδια κινούνται πάνω στη συντομότερη διαδρομή (γεωδαισιακή) σε έναν καμπυλωμένο χωροχρόνο. Επομένως, η τετραεπιτάχυνσή του θα είναι μηδενική. Έχουμε

$$\mathring{a}^{\rho} \equiv u^{\nu}\mathring{\nabla}_{\nu}u^{\rho} = 0 \Rightarrow u^{\nu}(\partial_{\nu}u^{\rho} + \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\kappa\nu}u^{\kappa}) = 0 \Rightarrow \tag{3.11}$$

$$\frac{du^{\rho}}{d\tau} + \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\kappa\nu}u^{\kappa}u^{\nu} = 0 \tag{3.12}$$

Η τελευταία σχέση είναι η περίφημη γεωδαισιακή εξίσωση.

Στην περίπτωση όπου το σωματίδιο εκτός από το βαρυτικό αλληλεπιδρά και με κάποιο άλλο πεδίο το δεξί μέρος της εξίσωσης κίνησης δεν είναι μηδέν. Αν για παράδειγμα το σωματίδιο έχει φορτίο q και αλληλεπιδρά με κάποιο εξωτερικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο η εξίσωση κίνησης παίρνει την μορφή

$$\frac{du^\rho}{d\tau} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\kappa\nu} u^\kappa u^\nu = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu \tag{3.13}$$

Όπου $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ο τανυστής έντασης πεδίου του ηλεκτρομαγνητισμού.

Για να λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης πρέπει να γνωρίζουμε την μετρική του χώρου, ώστε να υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel. Η μετρική αποτελεί λύση των εξισώσεων πεδίου με τις οποίες θα ασχοληθούμε αμέσως μετά.

3.3 Η δράση και οι εξισώσεις πεδίου

Όπως σε όλες τις θεωρίες της Φυσικής, έτσι και στη Γενική Θεωρία Σχετικότητας, οι εξισώσεις κίνησης θα προκύψουν από την αρχή της ελάχιστης δράσης, δηλαδή την απαίτηση να παρουσιάζει ακρότατα στην μεταβολή ως προς το δυναμικό πεδίο η ποσότητα

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \hat{\mathscr{L}} \tag{3.14}$$

Πρέπει να βρούμε την κατάλληλη Λαγκρανζιανή $\hat{\mathscr{L}}$. Θα πρέπει να είναι βαθμωτή ποσότητα και οι εξισώσεις κίνησης που θα προκύψουν να είναι το πολύ δεύτερης τάξης ως προς την μετρική (πρόβλημα Cauchy). Ο Hilbert ήταν ο πρώτος που ανακάλυψε ότι η βαθμωτή ποσότητα που πληροί τις παραπάνω προϋποθέσεις είναι το βαθμωτό Ricci. Επομένως η δράση της θεωρίας μας είναι η :

$$\overset{\circ}{S}_H = \int d^4x \sqrt{-g} \overset{\circ}{R} \tag{3.15}$$

της οποίας τις μεταβολές ως προς την μετρική θα μας δώσουν τις εξισώσεις κίνησης. Έχουμε:

$$\delta \overset{\circ}{S}_H = \delta \left(\int d^4x \sqrt{-g} \overset{\circ}{R} \right) = (\delta S)_1 + (\delta S)_2 + (\delta S)_3 \tag{3.16}$$

όπου

$$(\delta S)_1 = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \overset{\circ}{R}_{\mu\nu} \tag{3.17}$$

$$(\delta S)_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \overset{\circ}{R}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{3.18}$$

$$(\delta S)_3 = \int d^4x \overset{\circ}{R} \delta \sqrt{-g} \tag{3.19}$$

Ας ασχοληθούμε με τον πρώτο όρο. Για να υπολογίσουμε την μεταβολή του τανυστή Ricci πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα την μεταβολή του τανυστή Riemann. Θυμόμαστε ότι

$$\overset{\circ}{R}{}^\rho{}_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\nu\mu} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\lambda\sigma} \overset{\circ}{\Gamma}{}^\sigma{}_{\nu\mu} - (\lambda \leftrightarrow \nu) \tag{3.20}$$

απ΄ όπου έπεται ότι

$$\delta\mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda \delta\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu} + \mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\nu\mu}\delta\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda\sigma} + \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda\sigma}\delta\mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\nu\mu} - (\lambda \leftrightarrow \nu) \tag{3.21}$$

Κατά την μεταβολή $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ η συνοχή μεταβάλλεται κατά $\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu} \to \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu} + \delta\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}$ Υπολογίζοντας την συναλλοίωτη παράγωγο του $\delta\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}$ έχουμε

$$\mathring{\nabla}_\lambda(\delta\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}) = \partial_\lambda(\delta\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}) + \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda\sigma}\delta\mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\nu\mu} - \mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\lambda\nu}\delta\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\mu} - \mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\lambda\mu}\delta\mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\nu\sigma} \tag{3.22}$$

Αποτελεί άμεση παρατήρηση ότι

$$\delta\mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} = \mathring{\nabla}_\lambda(\delta\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}) - \mathring{\nabla}_\nu(\delta\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda\mu}) \tag{3.23}$$

Επομένως έχουμε

$$\delta\mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{\nabla}_\lambda(\delta\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\mu}) - \mathring{\nabla}_\nu(\delta\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda\mu}) \tag{3.24}$$

Άρα, το $(\delta S)_1$ γράφεται

$$(\delta S)_1 = \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}[\mathring{\nabla}_\lambda(\delta\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\mu}) - \mathring{\nabla}_\nu(\delta\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda\mu})] = \int d^4x\sqrt{-g}\mathring{\nabla}_\sigma[g^{\mu\nu}(\delta\mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\nu}) - g^{\mu\sigma}(\delta\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda\mu})] \tag{3.25}$$

Θα χρειαστεί τώρα να εκφράσουμε τα $\delta\mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ συναρτήσει του $\delta g^{\mu\nu}$. Με απλή αντικατάσταση προκύπτει ότι

$$\delta\mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}[g_{\lambda\mu}\mathring{\nabla}_\nu(\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\nu}\mathring{\nabla}_\mu(\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\mathring{\nabla}^\sigma(\delta g^{\alpha\beta})] \tag{3.26}$$

Τελικά το $(\delta S)_1$ γράφεται

$$(\delta S)_1 = \int d^4x\sqrt{-g}\mathring{\nabla}_\sigma[g_{\mu\nu}\mathring{\nabla}^\sigma(\delta g^{\mu\nu}) - \mathring{\nabla}_\lambda(\delta g^{\sigma\lambda})] \tag{3.27}$$

Παρατηρούμε ότι το $(\delta S)_1$ είναι ολοκλήρωμα της συναλλοίωτης απόκλισης ενός διανύσματος ως προς τον αναλλοίωτο όγκο, επομένως από το Θεώρημα του Gauss ισούται με μία συνεισφορά στο σύνορο (άπειρο) η οποία μπορεί να μηδενιστεί απαιτώντας η μεταβολή της μετρικής να μηδενίζεται στο σύνορο. Άρα, μετά από όλες αυτές τις πράξεις, καταλήγουμε στη σχέση

$$(\delta S)_1 = 0 \tag{3.28}$$

Ο όρος $(\delta S)_2$ είναι γραμμένος σε βολική μορφή. Ας ασχοληθούμε με τον όρο $(\delta S)_3$. Κάνοντας χρήση της ταυτότητας

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{3.29}$$

έχουμε

$$(\delta S)_3 = \int d^4x\sqrt{-g}(-\frac{1}{2})g_{\mu\nu}\mathring{R} \tag{3.30}$$

Συνολικά η δS_H γράφεται

$$\delta \mathring{S}_H = \int d^4x\sqrt{-g}[\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R}]\delta g^{\mu\nu} \tag{3.31}$$

Απαιτώντας να παρουσιάζει ακρότατο στις μεταβολές $\delta g^{\mu\nu}$ έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta \mathring{S}_H}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow \tag{3.32}$$

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R} = 0 \tag{3.33}$$

Η τελευταία σχέση ονομάζεται εξίσωση Einstein στο κενό.

Στην περίπτωση όπου θέλουμε να λάβουμε την γενικότερη εξίσωση κίνησης παίρνουμε μεταβολές ως προς την μετρική της δράσης

$$S = \frac{1}{16\pi G}\mathring{S}_H + S_M \tag{3.34}$$

Όπου S_M η δράση για την ύλη. Ο παράγοντας $\frac{1}{16\pi G}$ πολλαπλασιάζει την δράση Hilbert έτσι ώστε στην περίπτωση ασθενούς και στατικού βαρυτικού πεδίου να επανακτήσουμε τον νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με πριν έχουμε

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.35}$$

όπου $T_{\mu\nu} \equiv -2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$ ο τανυστής ενέργειας-ορμής.
Οι εξισώσεις Einstein μπορούν να εξαχθούν και από την δεύτερη ταυτότητα Bianchi. Πραγματοποιώντας δύο φορές συστολές δεικτών και κάνοντας χρήση των συμμετριών του τανυστή Riemann έχουμε:

$$\mathring{\nabla}_\nu(\mathring{R}_\mu{}^\nu - \frac{1}{2}g_\mu{}^\nu\mathring{R}) = 0 \tag{3.36}$$

Στην παραπάνω σχέση είμαστε ελεύθεροι να προσθέσουμε στο δεξί μέλος οποιαδήποτε διατηρούμενη ποσότητα, δηλαδή ποσότητα για την οποία ισχύει $\mathring{\nabla}_\nu \kappa T_\mu{}^\nu = 0$. Για $\kappa = 8\pi G$ και κάνοντας χρήση του θεωρήματος Gauss έχουμε και πάλι.

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.37}$$

3.4 Κοσμολογία σε FRW μετρική

Θεωρούμε ότι το σύμπαν είναι ομογενές και ισότροπο. Στην γενικότερη περίπτωση η μετρική λαμβάνει την μορφή

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right) \tag{3.38}$$

Όπου η παράμετρος k καθορίζει την χωρική καμπυλότητα τους σύμπαντος. Για $k = 0$ το σύμπαν είναι επίπεδο, για $k = 1$ θετικά καμπυλωμένο και για $k = -1$ αρνητικά καμπυλωμένο.

Η έννοια του τέλειου ρευστού, δηλαδή ενός ρευστού που για να το περιγράψουμε αρκεί να ξέρουμε την πίεση και την ενεργειακή του πυκνότητα, είναι κεντρικής σημασίας στην κοσμολογία. Για ένα ιδανικό ρευστό ο τανυστής ενέργειας-ορμής έχει την μορφή

$$T_{\mu\nu} = -(\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} \tag{3.39}$$

όπου P η πίεση του τέλειου ρευστού, ρ η ενεργειακή του πυκνότητα και u^μ η τετραταχύτητά του.

Τα τρία είδη τέλειου ρευστού που θα μας απασχολήσουν είναι η ύλη, η ακτινολοβία και το κενό. Για να μπορέσουμε να εξετάσουμε το καθένα ξεχωριστά εισάγουμε την καταστατική εξίσωση $P = w\rho$. Εύκολα προκύπτει ότι θα πρέπει να είναι $w = 0$ για την ύλη, $w = \dfrac{1}{3}$ για την ακτινοβολία και $w = -1$ για το κενό.

Από την εξίσωση διατήρησης $\overset{\circ}{\nabla}_\mu T^{\mu\nu} = 0$ για $\nu = 0$ προκύπτει η σχέση

$$\partial_0 \rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 \tag{3.40}$$

και κάνοντας χρήση της καταστατικής εξίσωσης έχουμε ότι

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + w)\frac{\dot{a}}{a} \tag{3.41}$$

Το επόμενο βήμα είναι να βάλουμε την μετρική στην εξίσωση Einstein. Από αυτή τη διαδικασία προκύπτουν δύο εξισώσεις, οι

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2} \tag{3.42}$$

και

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + 3P_m + \rho_r + 3P_r + \rho_\Lambda + 3P_\Lambda) \tag{3.43}$$

Οι οποίες είναι γνωστές ως εξισώσεις Friedmann. Με ρ_m και P_m συμβολίζουμε την ενεργειακή πυκνότητα και την πίεση της ύλης, με ρ_r και P_r τα αντίστοιχα μεγέθη για την ακτινοβολία και ρ_Λ και P_Λ τα μεγέθη για το κενό.

Μία πολύ χρήσιμη ποσότητα είναι η «σταθερά» του Hubble ορίζεται ως

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \tag{3.44}$$

Χρησιμοποιώντας την σταθερά Hubble οι εξισώσεις Friedmann μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2} \tag{3.45}$$

και

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + 3P_m + \rho_r + 3P_r + \rho_\Lambda + 3P_\Lambda) \tag{3.46}$$

Τέλος, αρκετά χρήσιμη στην κοσμολογία είναι η παράμετρος επιβράδυνσης q που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \tag{3.47}$$

Λέμε ότι η διαστολή του σύμπαντος είναι επιταχυνόμενη αν $\ddot{a} > 0$, πράγμα που σημαίνει ότι $q < 0$. Το εύλογο ερώτημα που προκύπτει είναι για ποιόν λόγο υπάρχει το πρόσημο «-» στον ορισμό της παραμέτρου επιβράδυνσης και γιατί δεν κάνουμε λόγο για «παράμετρο επιτάχυνσης». Η εξήγηση είναι ότι την εποχή του ορισμού της παραμέτρου πίστευαν ότι το σύμπαν διαστέλλεται με επιβραδυνόμενο ρυθμό, επομένως το πρόσημο «-» θα έδινε θετική τιμή στο q.

Η χρονική παράγωγος της σταθεράς Hubble μπορεί να γραφεί συναρτήσει της παραμέτρου επιβράδυνσης ως

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -(1+q) \tag{3.48}$$

Όλα τα παραπάνω επαρκούν για να περιγράψουν την κοσμολογία της ύστερης περιόδου. Όμως, η αναγωγή της σκοτεινής ενέργειας σε ενέργεια του κενού (δηλαδή κοσμολογική σταθερά) αντιμετωπίζει το πρόβλημα η μετρούμενη τιμή της να αποκλίνει από την θεωρητική πρόβλεψη μέσω της κβαντικής θεωρίας πεδίου κατά 120 τάξεις μεγέθους και απαιτεί ad hoc ακριβή προσαρμογή (fine tuning). Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζεται μία εναλλακτική προσέγγιση στο πρόβλημα της σκοτεινής ενέργειας μέσω της τροποποίησης της θεωρίας της βαρύτητας.

Κεφάλαιο 4

Τροποποιημένη f(R) βαρύτητα

4.1 Η δράση και οι εξισώσεις πεδίου

Θεωρούμε μία δράση της μορφής

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}f(\mathring{R}) + \int d^4x\mathscr{L}(g_{\mu\nu}, \Psi_M) \tag{4.1}$$

Όπου $f(\mathring{R})$ μια γενική συνάρτηση του τανυστή Ricci και μόνο για το παρόν κεφάλαιο $\kappa^2 = 8\pi G$. Διενεργώντας κατά τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση της δράσης της ΓΘΣ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$F(\mathring{R}) - \frac{1}{2}f(\mathring{R})g_{\mu\nu} - \mathring{\nabla}_\mu\mathring{\nabla}_\nu F(R) + g_{\mu\nu}\mathring{\Box}F(\mathring{R}) = \kappa^2 T_{\mu\nu} \tag{4.2}$$

όπου $F(\mathring{R}) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial \mathring{R}}$ και $\mathring{\Box} \equiv g^{\mu\nu}\mathring{\nabla}_\mu\mathring{\nabla}_\nu$ με $\mathring{\Box}F = \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu F)$. Παρατηρούμε ότι, πλην της περίπτωσης όπου η συνάρτηση $f(R)$ είναι γραμμική ως προς τον τανυστή Ricci ($F(R) = 1$), οι εξισώσεις πεδίου είναι τέταρτης τάξης ως προς την μετρική. Αυτό μπορεί να εισαγάγει αστάθειες και φαντάσματα (ghosts) στη θεωρία. Όμως, αποδεικνύεται με την χρήση σύμμορφου μετασχηματισμου πως οι επιπλέον βαθμοί ελευθερίας είναι φαινομενικοί και δεν υπάρχουν τέτοιου είδους προβλήματα στη θεωρία. Ας δούμε πώς επιτυγχάνεται αυτό.

Αρχικά γράφουμε ξανά την εξίσωση (4.2) ελαφρύνοντας τον συμβολισμό

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu}\Box F(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu} \tag{4.3}$$

Παίρνοντας το ίχνος της εξίσωσης πεδίου βρίσκουμε ότι

$$3\Box F(R) + F(R)R - 2f(R) = \kappa^2 T \tag{4.4}$$

απ΄ όπου είναι φανερό ότι υπάρχει ένας βαθμωτός βαθμός ελευθερίας $\varphi \equiv F(R)$ που διαδίδεται.

Πραγματοποιούμε τον σύμμορφο μετασχηματισμό

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \tag{4.5}$$

Όπου το Ω^2 ονομάζεται σύμμορφος παράγοντας και το tilde δηλώνει τις ποσότητες στο λεγόμενο σύστημα Einstein. Τα βαθμωτά Ricci R και $\tilde{R}$ συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης

$$R = \Omega^2(\tilde{R} + 6\tilde{\Box}\omega - 6\tilde{g}_{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega) \tag{4.6}$$

όπου ορίσαμε $\omega \equiv \ln\Omega$.

Ξαναγράφουμε την δράση (4.1) στη μορφή

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa^2}FR - U\right) + \int d^4x\mathscr{L}(g_{\mu\nu}, \Psi_M) \tag{4.7}$$

όπου

$$U = \frac{FR - f}{2\kappa^2} \tag{4.8}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.6) και την σχέση $\sqrt{-g} = \Omega^{-4}\sqrt{-\tilde{g}}$ η δράση (4.7) μετασχηματίζεται ως

$$S = \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\left[\frac{1}{2\kappa^2}F\Omega^{-2}(\tilde{R} + 6\tilde{\Box}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega) - \Omega^{-4}U\right] + \int d^4x\mathscr{L}_M(\Omega^{-2}\tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi_M) \tag{4.9}$$

Επιλέγουμε

$$\Omega^2 = F \tag{4.10}$$

που έχει φυσικά νόημα μόνο στην περίπτωση όπου $F > 0$. Εισαγάγουμε ένα νέο βαθμωτό πεδίο ϕ που ορίζεται ως

$$\kappa\phi \equiv \sqrt{3/2}\ln F \tag{4.11}$$

το οποίο, από τον ορισμό του ω, ισούται με $\omega = \kappa\phi/\sqrt{6}$. Επιπλέον, ο όρος $\int d^4x\sqrt{-g}\tilde{\Box}\omega$ στη δράση εξαφανίζεται κάνοντας χρήση του θεωρήματος Gauss. Με βάση όλα αυτά η δράση γράφεται στην μορφή

$$S = \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\left[\frac{1}{2\kappa^2}\tilde{R} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right] + \int d^4x\mathscr{L}_M(F^{-1}\tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi_M) \tag{4.12}$$

όπου

$$V(\phi) = \frac{U}{F^2} = \frac{FR - f}{2\kappa^2 f^2} \tag{4.13}$$

Δηλαδή, βλέπουμε ότι στο σύστημα Einstein η δράση της $f(R)$ βαρύτητας σπάει στην γνωστή δράση Hilbert συν την δράση ενός βαθμωτού πεδίου. Άρα, βλέπουμε ότι ο αρχικός σκόπελος των εξισώσεων τετάρτης τάξεως υπερκεράστηκε με την χρήση του σύμμορφου μετασχηματισμού μαζί με την συνθήκη $F > 0$.

4.2 Κοσμολογία σε FRW μετρική

Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο όπως στην ΓΘΣ. Θεωρούμε την μετρική FRW αυτή τη φορά για χωρικά επίπεδο σύμπαν

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{4.14}$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις πεδίου λαμβάνουμε τις τροποποιημένες εξισώσεις Friedmann

$$3H^2 = 8\pi G(\rho_m + \rho_r + \rho_{DE}) \tag{4.15}$$

και

$$-2\dot{H}F = 8\pi G[\rho_m + (4/3)\rho_r + \rho_{DE} + P_{DE}] \tag{4.16}$$

όπου ορίσαμε

$$8\pi G\rho_{DE} \equiv (1/2)(FR - f) - 3H\dot{F} + 3H^2(1 - F) \tag{4.17}$$

και

$$8\pi G P_{DE} \equiv \ddot{F} + 2H\dot{F} - (1/2)(FR - f) - (3H^2 + 2\dot{H})(1 - F) \tag{4.18}$$

Από την καταστατική εξίσωση προκύπτει ότι

$$w_{DE} = \frac{\ddot{F} + 2H\dot{F} - (1/2)(FR - f) - (3H^2 + 2\dot{H})(1 - F)}{(1/2)(FR - f) - 3H\dot{F} + 3H^2(1 - F)} \tag{4.19}$$

Αναφέρουμε συνοπτικά ότι επιλέγοντας κατάλληλες συναρτήσεις $f(R)$ και ρυθμίζοντας τις παραμέτρους της συνάρτησης με κατάλληλο τρόπο μπορεί να λάβει κανείς κοσμολογική εξέλιξη που συμφωνεί με τα παρατηρησιακά δεδομένα.

Κεφάλαιο 5

Τηλεπαράλληλο Ισοδύναμο της Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας (TEGR)

5.1 Μαθηματικός Φορμαλισμός

Ανακαλούμε τη σχέση που μας δίνει τους τανυστές καμπυλότητας και στρέψης με εφαπτομενικούς δείκτες

$$R^a{}_{b\nu\mu} = \partial_\nu A^a{}_{b\mu} - \partial_\mu A^a{}_{b\nu} + A^a{}_{e\nu} A^e{}_{b\mu} - A^a{}_{e\mu} A^e{}_{b\nu} \tag{5.1}$$

και

$$T^a{}_{\nu\mu} = \partial_\nu h^a{}_\mu - \partial_\mu h^a{}_\nu + A^a{}_{e\nu} h^e{}_\mu - A^a{}_{e\mu} h^e{}_\nu = \mathscr{D}_\nu h^a{}_\mu - \mathscr{D}_\mu h^a{}_\nu \tag{5.2}$$

Αναζητούμε ένα spin connection του οποίου ο τανυστής Riemann να είναι ταυτοτικά μηδέν. Αυτό το spin connection ονομάζεται Weitzenbock και γενικά έχει την μορφή

$$\dot{A}^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_e(x) \partial_\mu \Lambda_b{}^e(x) \tag{5.3}$$

Μπορούμε να πραγματοποιήσουμε έναν μετασχηματισμό Lorentz και να πάμε σε κάποιο αδρανειακό σύστημα για το οποίο ισχύει $\dot{A}^a{}_{b\mu} = 0$. Τότε έχουμε

$$\dot{T}^a{}_{\nu\mu} = \partial_\nu h^a{}_\mu - \partial_\mu h^a{}_\nu \tag{5.4}$$

και

$$\partial_\mu h^a{}_\nu - \dot{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} h^a{}_\rho = 0 \Rightarrow \dot{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu \tag{5.5}$$

5.2 Η βαρύτητα ως θεωρία Βαθμίδας

Θα προσπαθήσουμε να φτιάξουμε μία θεωρία βαθμίδας για την Βαρύτητα. Θεωρούμε ένα γενικό πεδίο $\Psi = \Psi(x^a(x^\mu))$. Κάτω από στοιχειώδεις μετατοπίσεις στον εφαπτόμενο χώρο ,δηλαδή $x^a \to x^a + \epsilon^a$, το πεδίο μεταβάλλεται κατά

$$\delta\Psi = \epsilon^a \partial_a \Psi \tag{5.6}$$

Αν το ϵ^a είναι σταθερό τότε η παράγωγος του πεδίου μεταβάλλεται συναλλοίωτα:

$$\delta(\partial_\mu \Psi) = \epsilon^a \partial_a (\partial_\mu \Psi) \tag{5.7}$$

Όμως, για τοπικούς μετασχηματισμούς $\epsilon^a = \epsilon^a(x)$ η παράγωγος δεν μετασχηματίζεται πλέον συναλλοίωτα

$$\delta(\partial_\mu \Psi) = \epsilon^a \partial_a (\partial_\mu \Psi) + (\partial_\mu \epsilon^a) \partial_a \Psi \tag{5.8}$$

Για να επανακτήσουμε την συναλλοιότητα κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς αναβαθμίζουμε την παράγωγο στην συναλλοίωτη παράγωγο

$$h_\mu \equiv \partial_\mu + B_\mu \tag{5.9}$$

Όπου το $B_\mu = B^a{}_\mu \partial_a$ το διανυσματικό πεδίο βαθμίδας. Απαιτώντας τώρα η νέα παράγωγος να μετασχηματίζεται συναλλοίωτα έχουμε

$$\delta(h_\mu \Psi) = \epsilon^a \partial_a (h_\mu \Psi) \tag{5.10}$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι το διανυσματικό πεδίο μετασχηματίζεται ως

$$\delta B^a{}_\mu = -\partial_\mu \epsilon^a \tag{5.11}$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$h_\mu = h^a{}_\mu \partial_a \tag{5.12}$$

Όπου το

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + B^a{}_\mu \tag{5.13}$$

Είναι μία μη τετριμμένη τετράδα, δηλαδή $h^a{}_\mu \neq e^a{}_\mu$ Επομένως η συνταγή για τη σύζευξη μέσω μετατοπίσεων είναι η

$$e^a{}_\mu \to h^a{}_\mu \tag{5.14}$$

5.3 Σύζευξη μέσω Μετατοπίσεων σε γενικό Σύστημα Αναφοράς

Μέχρι τώρα εξετάσαμε τοπικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς στα οποία το spin connection ήταν μηδέν. Για να πάμε σε ένα γενικό σύστημα αναφοράς πραγματοποιούμε έναν τοπικό μετασχηματισμό Lorentz

$$x^a \to \Lambda^a{}_b(x) x^b \tag{5.15}$$

κάτω από τον οποίο το Ψ μετασχηματίζεται ως

$$\Psi \to U(\Lambda)\Psi \tag{5.16}$$

όπου το $U(\Lambda)$ είναι ένα στοιχείο της ομάδας Lorentz σε αναπαράσταση κατάλληλη για το πεδίο Ψ.
Το διανυσματικό πεδίο βαθμίδας $B^a{}_\mu$ μετασχηματίζεται ως

$$B^a{}_\mu \to \Lambda^a{}_b(x) B^b{}_\mu \tag{5.17}$$

Μπορούμε να δούμε άμεσα ότι η συναλλοίωτη παράγωγος $h_\mu = h^a{}_\mu \partial_a$ γράφεται τώρα μέσω της τετράδας

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b + B^a{}_\mu \tag{5.18}$$

ή αλλιώς

$$h^a{}_\mu = e^a{}_\mu + B^a{}_\mu \tag{5.19}$$

όπου το

$$e^a{}_\mu \equiv \partial_\mu x^a + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b = \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu x^a \tag{5.20}$$

είναι το τετριμμένο (δηλαδή μη συσχετιζόμενο με την βαρύτητα) μέρος της τετράδας. Σε αυτή την κλάση συστημάτων αναφοράς το πεδίο $B^a{}_\mu$ μετασχηματίζεται ως:

$$\delta B^a{}_\mu = -\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu \epsilon^a \tag{5.21}$$

Μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί ότι η τετράδα είναι αναλλοίωτη κάτω από τις απειροστές μετατοπίσεις στον εφαπτομενικό χώρο συν την μεταβολή του διανυσματικού πεδιού βαθμίδας, δηλαδή

$$\delta h^a{}_\mu = 0 \tag{5.22}$$

5.4 Τανυστής έντασης πεδίου

Όπως σε όλες τις θεωρίες βαθμίδας, έτσι και στην περίπτωσή μας, η σχέση μετάθεσης των συναλλοίωτων παραγώγων θα μας δώσει τον τανυστή έντασης πεδίου. Από τον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου προκύπτει άμεσα ότι

$$[h_\mu, h_\nu] = F^a{}_{\mu\nu} \partial_a \tag{5.23}$$

όπου

$$F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a{}_\mu + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} B^b{}_\nu - (\nu \leftrightarrow \mu) \tag{5.24}$$

Ο τανυστής έντασης πεδίου μπορεί να γραφεί στην πιο συμπαγή μορφή

$$F^a{}_{\mu\nu} = \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu B^a{}_\nu - \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\nu B^a{}_\mu \tag{5.25}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την σχέση

$$\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu (\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\nu x^a) - \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\nu (\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu x^a) = [\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu, \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\nu]\, x^a = 0 \tag{5.26}$$

Προσθέτοντάς την στο δεξί μέλος του τανυστή έντασης πεδίου παίρνουμε

$$F^a{}_{\mu\nu} = \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu (\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\nu x^a + B^a{}_\nu) - \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\nu (\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu x^a + B^a{}_\mu) \tag{5.27}$$

και ενθυμούμενοι ότι

$$h^a{}_\mu = \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu x^a + B^a{}_\mu \tag{5.28}$$

γράφουμε τον τανυστή έντασης πεδίου στην μορφή

$$F^a{}_{\mu\nu} = \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu h^a{}_\nu - \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\nu h^a{}_\mu \equiv \overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu} \tag{5.29}$$

Δηλαδή, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι ο τανυστής έντασης πεδίου είναι ο τανυστής στρέψης της Weitzenbock connection. Από αυτό το αποτέλεσμα αναδεικνύεται ο ρόλος της στρέψης στην θεώρηση της βαρύτητας ως θεωρίας βαθμίδας.

5.5 Εξισώσεις κίνησης δοκιμαστικού σωματιδίου

Σε αντίθεση με την ΓΘΣ όπου η βαρύτητα είναι πλήρως γεωμετρικοποιημένη και απουσιάζει η έννοια της δύναμης, η TEGR μπορεί να θεωρηθεί θεωρία βαθμίδας. Επομένως, δεν μπορούμε να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης ενός δοκιμαστικού σωματιδίου θέτοντας $\overset{\bullet}{a}^{\mu} = 0$, εφόσον στο δοκιμαστικό σωματίδιο ασκείται δύναμη. Πρέπει να εργαστούμε με διαφορετικό τρόπο.
Ξεκινάμε εκφράζοντας τον ιδιόχρονο σε κατάλληλη μορφή. Έχουμε

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = \eta_{ab}h^a{}_{\mu}h^b{}_{\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = \eta_{ab}h^a{}_{\mu}h^b{}_{\nu}u^{\mu}d\tau dx^{\nu} \Rightarrow d\tau = \eta_{ab}h^a{}_{\mu}h^b{}_{\nu}u^{\mu}dx^{\nu} \Rightarrow \tag{5.30}$$

$$d\tau = \eta_{ab}u^a h^b = u_a h^a \tag{5.31}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $d\tau = ds, u^{\mu} \equiv \dfrac{dx^{\mu}}{d\tau}, h^a = h^a{}_{\mu}dx^{\mu}$. Η δράση του σωματιδίου είναι

$$S = \int_A^B d\tau = \int_A^B u_a h^a \tag{5.32}$$

Πραγματοποιώντας την αντικατάσταση

$$h^a = dx^a + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}x^b dx^{\mu} + B^a{}_{\mu}dx^{\mu} \tag{5.33}$$

έχουμε

$$S = \int_A^B u_a(dx^a + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}x^b dx^{\mu} + B^a{}_{\mu}dx^{\mu}) \tag{5.34}$$

Κάτω από μία χωροχρονική μεταβολή $x^{\mu} \to x^{\mu} + \delta x^{\mu}$ έχουμε

$$\delta S = \int_A^B (h^a\delta u_a + u_a d\delta x^a + u_a\delta\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}x^b dx^{\mu} + u_a\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}\delta x^b dx^{\mu} + u_a\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}x^b d\delta x^{\mu} + u_a\delta B^a{}_{\mu}dx^{\mu} + u_a B^a{}_{\mu}d\delta x^{\mu}) \tag{5.35}$$

Παρατηρούμε ότι από την σχέση

$$ds^2 = \eta_{ab}h^a h^b \tag{5.36}$$

προκύπτει άμεσα ότι

$$\delta(ds) = u_a\delta h^a \tag{5.37}$$

Όμως από την σχέση

$$ds = u_a h^a \tag{5.38}$$

έχουμε ότι

$$\delta(ds) = u_a\delta h^a + h^a\delta u_a \tag{5.39}$$

Επομένως παίρνουμε ότι

$$h^a\delta u_a = 0 \tag{5.40}$$

Η μεταβολή στη δράση γράφεται ως

$$\delta S = \int_A^B (u_a d\delta x^a + u_a\delta\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}x^b dx^{\mu} + u_a\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}\delta x^b dx^{\mu} + u_a\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}x^b d\delta x^{\mu} + u_a\delta B^a{}_{\mu}dx^{\mu} + u_a B^a{}_{\mu}d\delta x^{\mu})$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη τους όρους που περιέχουν τα διαφορικά των μεταβολών και μηδενίζοντας τους επιφανειακούς όρους έχουμε

$$\delta S = -\int_A^B [du_a \delta x^a - u_a \delta \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b dx^\mu - u_a \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \delta x^b dx^\mu + d(u_a \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b)\delta x^\mu - u_a \delta B^a{}_\mu dx^\mu + d(u_a B^a{}_\mu)\delta x^\mu] \tag{5.41}$$

Πραγματοποιώντας τις διαφορίσεις και τις μεταβολές, αντικαθιστώντας τις εκφράσεις

$\delta x^a = \partial_\mu x^a \delta x^m$,$\delta \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = \partial_\rho \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \delta x^\rho$,$\delta B^a{}_\mu = \partial_\rho B^a{}_\mu \delta x^\rho$

και λαμβάνοντας υπόψιν ότι η καμπυλότητα της Weitzenbock connection είναι μηδέν έχουμε

$$\delta S = -\int_A^B [h^a{}_\mu (\frac{du_a}{d\tau} - \overset{\bullet}{A}{}^b{}_{a\rho} u_b u^\rho) - \overset{\bullet}{T}{}^b{}_{\mu\rho} u_b u^\rho] \delta x^\mu d\tau \tag{5.42}$$

Απαιτώντας η μεταβολή στην δράση να είναι μηδέν και δεδομένου του ότι τα δx^μ είναι αυθαίρετα καταλήγουμε στην μορφή εξίσωση κίνησης

$$\frac{du_a}{d\tau} - \overset{\bullet}{A}{}^b{}_{a\rho} u_b u^\rho = \overset{\bullet}{T}{}^b{}_{a\rho} u_b u^\rho \tag{5.43}$$

ή σε ανταλλοίωτη μορφή

$$\frac{du^a}{d\tau} + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\rho} u^b u^\rho = \overset{\bullet}{T}{}_b{}^a{}_\rho u^b u^\rho \tag{5.44}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\overset{\bullet}{T}{}_b{}^a{}_\rho u^b u^\rho = \overset{\bullet}{K}{}^a{}_{b\rho} u^b u^\rho \tag{5.45}$$

η οποία προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του τανυστή Contorsion έχουμε

$$\frac{du^a}{d\tau} + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\rho} u^b u^\rho = \overset{\bullet}{K}{}^a{}_{b\rho} u^b u^\rho \tag{5.46}$$

Πραγματοποιώντας συστολές με τις τετράδες και χρησιμοποιώντας την σχέση (2.33) που συνδέει το spin connection με την αφινική συνοχή, οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφούν σε πλήρως χωροχρονική μορφή ως

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \overset{\bullet}{\Gamma}{}^\mu{}_{\rho\nu} u^\rho u^\nu = \overset{\bullet}{K}{}^\mu{}_{\rho\nu} u^\rho u^\nu \tag{5.47}$$

Ενθυμούμενοι ότι $\overset{\bullet}{\Gamma}{}^\mu{}_{\rho\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^\mu{}_{\rho\nu} + \overset{\bullet}{K}{}^\mu{}_{\rho\nu}$ η εξίσωση κίνησης στην TEGR είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\mu{}_{\rho\nu} u^\rho u^\nu = 0 \tag{5.48}$$

η οποία όμως είναι η εξίσωση κίνησης των σωματιδίων στη Γενική Θεωρία Σχετικότητας. Με άλλα λόγια δείξαμε πως τα σωματίδια κινούνται στις ίδιες τροχιές ανεξάρτητα αν θεωρούμε τον χώρο καμπυλωμένο (ΓΘΣ) ή στρεβλωμένο (TEGR). Μολονότι οι δύο θεωρήσεις είναι ισοδύναμες είναι εντελώς διαφορετικές. Στη ΓΘΣ στα σωματίδια δεν ασκείται καμία δύναμη και ακολουθούν τις γεωδαισιακές σε έναν καμπυλωμένο χωροχρόνο. Από την άλλη, στην TEGR τα σωματίδια κινούνται σε έναν στρεβλωμένο χωροχρόνο και τους ασκείται δύναμη μέσω της στρέψης. Η θεώρηση της TEGR είναι πιο «φυσική» υπό την έννοια ότι προσιδιάζει στην θεωρία της παγκόσμιας έλξης του Newton με την οποία είμαστε πιο εξοικειωμένοι λόγω της καθημερινής εμπειρίας.

5.6 Η δράση και οι εξισώσεις πεδίου

Θεωρούμε μία δράση της μορφής

$$S = \int d^4x h \overset{\bullet}{T} \tag{5.49}$$

Όπου πρέπει να προσδιορίσουμε το βαθμωτό της στρέψης. Σε αντίθεση με την ΓΘΣ, όπου η επιλογή του βαθμωτού Ricci είναι μονόδρομος, στην βαρύτητα με στρέψη το βαθμωτό της στρέψης έχει γενικά τη μορφή

$$\overset{\bullet}{T} = c_1 \overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} \overset{\bullet}{T}{}_{\rho}{}^{\mu\nu} + c_2 \overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\rho} + c_3 \overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\rho} \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\nu} \tag{5.50}$$

Για λόγους που θα εξηγηθούν στην συνέχεια επιλέγουμε $c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = -1$, επομένως το βαθμωτό στρέψης της TEGR είναι

$$\overset{\bullet}{T} = \frac{1}{4} \overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} \overset{\bullet}{T}{}_{\rho}{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\rho} - \overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\rho} \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\nu} \tag{5.51}$$

και μπορεί να γραφεί στην επίσης χρήσιμη μορφή

$$\overset{\bullet}{T} = (\overset{\bullet}{K}{}^{\mu\nu\rho} \overset{\bullet}{K}{}_{\rho\nu\mu} - \overset{\bullet}{K}{}^{\mu\rho}{}_{\mu} \overset{\bullet}{K}{}^{\nu}{}_{\rho\nu}) \tag{5.52}$$

Προτού προχωρήσουμε στην εξαγωγή των εξισώσεων πεδίου θα εξετάσουμε κάτι άλλο. Θυμόμαστε ότι ο τανυστής καμπυλότητας της Weitzenbock connection είναι ταυτοτικά μηδέν, δηλαδή

$$\overset{\bullet}{R}{}^{\rho}{}_{\lambda\nu\mu} = \partial_\nu \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\lambda\mu} + \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\eta\nu} \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\eta}{}_{\lambda\mu} - (\nu \leftrightarrow \mu) = 0 \tag{5.53}$$

Αντικαθιστώντας την σχέση

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} + \overset{\bullet}{K}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} \tag{5.54}$$

βρίσκουμε ότι

$$\overset{\bullet}{R}{}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} = \overset{\circ}{R}{}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} + \overset{\bullet}{Q}{}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} = 0 \tag{5.55}$$

όπου ορίσαμε τον τανυστή $\overset{\bullet}{Q}{}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu}$ ως

$$\overset{\bullet}{Q}{}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} \equiv \partial_\mu \overset{\bullet}{K}{}^{\rho}{}_{\theta\nu} + \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\sigma\mu} \overset{\bullet}{K}{}^{\sigma}{}_{\theta\nu} + \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\sigma}{}_{\theta\nu} \overset{\bullet}{K}{}^{\rho}{}_{\sigma\mu} + \overset{\bullet}{K}{}^{\rho}{}_{\sigma\nu} \overset{\bullet}{K}{}^{\sigma}{}_{\theta\mu} - (\nu \leftrightarrow \mu) \tag{5.56}$$

Πραγματοποιώντας τις κατάλληλες συστολές έχουμε

$$-\overset{\circ}{R} = \overset{\bullet}{Q} = (\overset{\bullet}{K}{}^{\mu\nu\rho} \overset{\bullet}{K}{}_{\rho\nu\mu} - \overset{\bullet}{K}{}^{\mu\rho}{}_{\mu} \overset{\bullet}{K}{}^{\nu}{}_{\rho\nu}) + \frac{2}{h} \partial_\mu (h \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\nu}) \tag{5.57}$$

ή

$$-\overset{\circ}{R} = \overset{\bullet}{T} + \frac{2}{h} \partial_\mu (h \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\nu}) \tag{5.58}$$

Δηλαδή, το βαθμωτό της στρέψης της TEGR διαφέρει από το βαθμωτό Ricci της ΓΘΣ κατά μία παράγωγο, επομένως, οι εξισώσεις πεδίου είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις Einstein και η TEGR δικαιολογεί το όνομά της. Αυτός είναι ο κύριος λόγος που επιλέξαμε το βαθμωτό στρέψης που ορίζεται από τις τιμές $c_1 = \dfrac{1}{4}, c_2 = \dfrac{1}{2}, c_3 = -1$ καθώς μόνο για αυτή την τριάδα λαμβάνουμε ισοδύναμες εξισώσεις πεδίου με την ΓΘΣ, η οποία είναι αρκετά επιτυχημένη θεωρία. Επιπλέον, έχει αποδειχθεί πως η σφαιρικά συμμετρική λύση (Schwarschild) υπάρχει μόνο στην περίπτωση όπου $c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = -1$. Τέλος, η θεώρηση της TEGR ως θεωρίας βαθμίδας, όπου το βαθμωτό $\overset{\bullet}{T}$ αντιπροσωπεύει τον κινητικό όρο του πεδίου βαθμίδας $B^a{}_\mu$, είναι εφικτή μόνο για την συγκεκριμένη τριάδα σταθερών.

Ας καθυστερήσουμε λίγο ακόμα την εξαγωγή των εξισώσεων πεδίου, που όπως δείξαμε θα είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις Einstein, και ας εξετάσουμε τον ρόλο του Spin connection στην TEGR. Θεωρούμε δύο βαθμωτά στρέψης της ίδιας τετράδας, ένα με Spin Connection $\overset{\bullet}{T}(h^a{}_\mu, \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu})$, και ένα χωρίς Spin Connection $\overset{\bullet}{T}(h^a{}_\mu, 0)$. Από την σχέση (5.58) ξέρουμε ότι θα αντιστοιχούν στο ίδιο βαθμωτό Ricci. Επομένως, γράφουμε

$$\overset{\bullet}{T}(h^a{}_\mu, \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}) + \frac{2}{h}\partial_\mu(hT^\mu(h^a\mu, \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu})) = \overset{\bullet}{T}(h^a{}_\mu, 0) + \frac{2}{h}\partial_\mu(h\overset{\bullet}{T}{}^\mu(h^a{}_\mu, 0)) \tag{5.59}$$

όπου για ευκολία ορίσαμε

$$\overset{\bullet}{T}{}^\mu \equiv \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\nu \tag{5.60}$$

Από τον ορισμό του τανυστή στρέψης και πραγματοποιώντας συστολές με τα $h_a{}^\nu$ έχουμε ότι

$$\overset{\bullet}{T}_\mu(h^a{}_\mu, \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}) = h_a{}^\nu\partial_\mu h^a{}_\mu - h_a{}^\nu\partial_\nu h^a{}_\mu - \overset{\bullet}{A}_\mu = \overset{\bullet}{T}_\mu(h^a{}_\nu, 0) - \overset{\bullet}{A}_\mu \tag{5.61}$$

όπου ορίσαμε

$$\overset{\bullet}{A}_\mu \equiv h_a{}^\nu \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\nu} h^b{}_\mu \tag{5.62}$$

Αντικαθιστώντας την (5.61) στην (5.59) έχουμε ότι

$$\overset{\bullet}{T}(h^a{}_\mu, \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}) - \frac{2}{h}\partial_\mu(h\overset{\bullet}{A}{}^\mu) = \overset{\bullet}{T}(h^a{}_\mu, 0) \tag{5.63}$$

Δηλαδή, τα δύο βαθμωτά στρέψης διαφέρουν κατά μία παράγωγο, επομένως μπορούμε να δουλεύουμε σε συστήματα στα οποία το Spin Connection είναι μηδέν, όπως και θα πράξουμε για να βρούμε τις εξισώσεις πεδίου.

Η Λαγκρανζιανή της TEGR είναι

$$\overset{\bullet}{\mathscr{L}} = \frac{h}{2\kappa}(\frac{1}{4}\overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}_\rho{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\rho - \overset{\bullet}{T}{}^\rho{}_{\mu\rho}\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\nu) \tag{5.64}$$

Για να βρούμε τις εξισώσεις πεδίου θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για το πεδίο βαθμίδας $B^a{}_\rho$ ή ισοδύναμα για την τετράδα $h^a{}_\rho$, δηλαδή

$$\frac{\partial\overset{\bullet}{\mathscr{L}}}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma\frac{\partial\overset{\bullet}{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} = 0 \tag{5.65}$$

Ας ξεκινήσουμε με τον όρο $\dfrac{\partial \overset{\bullet}{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)}$. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι ούτε η τετράδα ούτε η μετρική εξαρτώνται από τις παραγώγους της τετράδας έχουμε ότι

$$\frac{\partial \overset{\bullet}{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} = \frac{h}{2\kappa}\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)}\left(\frac{1}{4}\overset{\bullet}{T}{}^b{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}_b{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overset{\bullet}{T}{}^b{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}_b{}^{\nu\mu} - \overset{\bullet}{T}{}^\nu{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}^{\lambda\mu}{}_\lambda\right) \tag{5.66}$$

Δουλεύουμε με κάθε όρο ξεχωριστά.

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)}\left(\frac{1}{4}\overset{\bullet}{T}{}^b{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}_b{}^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\overset{\bullet}{T}{}_b{}^{\mu\nu}\frac{\partial \overset{\bullet}{T}{}^b{}_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} = \overset{\bullet}{T}{}_a{}^{\sigma\rho} \tag{5.67}$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)}\left(\frac{1}{2}\overset{\bullet}{T}{}^b{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}_b{}^{\nu\mu}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_b}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)}\overset{\bullet}{T}{}^b{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial \overset{\bullet}{T}{}^b{}_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)}\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_b = \overset{\bullet}{T}{}^{\rho\sigma}{}_a - \overset{\bullet}{T}{}^{\sigma\rho}{}_a \tag{5.68}$$

$$-\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)}\left(\overset{\bullet}{T}{}^\nu{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}^{\lambda\mu}{}_\lambda\right) = -2\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\nu\frac{\partial \overset{\bullet}{T}{}^\lambda{}_{\mu\lambda}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} = -2\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_\nu h_b{}^\lambda\frac{\partial \overset{\bullet}{T}{}^b{}_{\mu\lambda}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} = -2\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\sigma}{}_\nu h_a{}^\rho + 2\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\rho}{}_\nu h_a{}^\sigma \tag{5.69}$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overset{\bullet}{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} &= \frac{h}{\kappa}\left[\frac{1}{2}(\overset{\bullet}{T}{}_a{}^{\sigma\rho} + \overset{\bullet}{T}{}^{\rho\sigma}{}_a - \overset{\bullet}{T}{}^{\sigma\rho}{}_a) - \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\sigma}{}_\nu h_a{}^\rho + \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\rho}{}_\nu h_a{}^\sigma\right] \\
&= -\frac{h}{\kappa}\left[\frac{1}{2}(\overset{\bullet}{T}{}_a{}^{\rho\sigma} + \overset{\bullet}{T}{}^{\rho a}{}_\sigma - \overset{\bullet}{T}{}^{\sigma a}{}_\rho) + \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\sigma}{}_\nu h_a{}^\rho - \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\rho}{}_\nu h_a{}^\rho\right] \\
&= -\frac{h}{\kappa}(\overset{\bullet}{K}{}^{\sigma\rho}{}_a + \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\sigma}{}_\nu h_a{}^\rho - \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\rho}{}_\nu h_a{}^\sigma) \\
&= -\frac{h}{\kappa}\overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\sigma\rho}
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Όπου ορίσαμε

$$\overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\sigma\rho} \equiv \overset{\bullet}{K}{}^{\sigma\rho}{}_a + \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\sigma}{}_\nu h_a{}^\rho - \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\rho}{}_\nu h_a{}^\sigma = -\overset{\bullet}{S}{}_a{}^{\rho\sigma} \tag{5.71}$$

Συνεχίζουμε εξετάζοντας τον όρο $\dfrac{\partial \overset{\bullet}{\mathscr{L}}}{\partial h^a{}_\rho}$. Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις $\dfrac{\partial h}{\partial h^a{}_\rho} = h h_a{}^\rho$, $\dfrac{\partial h_c{}^\nu}{\partial h^a{}_\rho} = -h_a{}^\nu h_c{}^\rho$, $\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} = -g^{\rho\nu}h_a{}^\mu - g^{\rho\mu}h_a{}^\nu$ και $\dfrac{\partial \overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} = 0$. Η τελεταία σχέση είναι απόρροια της επιλογής μας να δουλέψουμε θέτοντας $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overset{\bullet}{\mathscr{L}}}{\partial h^a{}_\rho} &= \frac{1}{2\kappa}\frac{\partial h}{\partial h^a{}_\rho}\left(\frac{1}{4}\overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}_c{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}_c{}^{\nu\mu} - \overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\mu c}\overset{\bullet}{T}{}^{b\mu}{}_b\right) + \frac{h}{2\kappa}\frac{\partial}{\partial h^a{}_\rho}\left(\frac{1}{4}\overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}_c{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}_c{}^{\nu\mu} - \overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\mu c}\overset{\bullet}{T}{}^{b\mu}{}_b\right) \\
&= \frac{h}{2\kappa}\frac{\partial}{\partial h^a{}_\rho}\left(\frac{1}{4}\overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}_c{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}_c{}^{\nu\mu} - \overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\mu c}\overset{\bullet}{T}{}^{b\mu}{}_b\right) + h_a{}^\rho\overset{\bullet}{\mathscr{L}}
\end{aligned} \tag{5.72}$$

Εξετάζοντας έναν έναν τους όρους έχουμε

$$\frac{1}{4}\frac{\partial(\overset{\bullet}{T}{}^{c}{}_{\mu\nu}T_{c}{}^{\mu\nu})}{\partial h^{a}{}_{\rho}} = -\overset{\bullet}{T}{}^{c\rho\lambda}\overset{\bullet}{T}{}_{ca\lambda} \tag{5.73}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(\overset{\bullet}{T}{}^{c}{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{c})}{\partial h^{a}{}_{\rho}} = -\overset{\bullet}{T}{}^{\lambda\kappa}{}_{a}\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\kappa\lambda} - \overset{\bullet}{T}{}^{\lambda}{}_{\kappa\rho}\overset{\bullet}{T}{}^{\kappa}{}_{\lambda a} \tag{5.74}$$

$$-\frac{\partial(\overset{\bullet}{T}{}^{c}{}_{\mu c}\overset{\bullet}{T}{}^{b\mu}{}_{b})}{\partial h^{a}{}_{\rho}} = 2\overset{\bullet}{T}{}^{c\rho}{}_{c}\overset{\bullet}{T}{}^{b}{}_{ab} \tag{5.75}$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{\partial\overset{\bullet}{\mathscr{L}}}{\partial h^{a}{}_{\rho}} = h_{a}{}^{\rho}\overset{\bullet}{\mathscr{L}} + \frac{h}{2\kappa}h_{c}{}^{\sigma}\overset{\bullet}{T}{}^{c}{}_{\nu a}\overset{\bullet}{S}{}_{\sigma}{}^{\rho\nu} \equiv -h\overset{\bullet}{j}{}_{a}{}^{\rho} \tag{5.76}$$

Όπου το $\overset{\bullet}{j}{}_{a}{}^{\rho}$, όπως θα δούμε αμέσως, είναι διατηρούμενο ρεύμα.

Επιτέλους είμαστε σε θέση να γράψουμε τις εξισώσεις πεδίου. Αυτές έχουν την μορφή

$$\partial_{\sigma}(h\overset{\bullet}{S}{}_{a}{}^{\sigma\rho}) - \kappa(h\overset{\bullet}{j}{}_{a}{}^{\rho}) = 0 \tag{5.77}$$

Λόγω της αντισυμμετρικότητας του $\overset{\bullet}{S}{}_{a}{}^{\sigma\rho}$ στους δύο τελευταίους δείκτες προκύπτει άμεσα ότι

$$\partial_{\rho}(h\overset{\bullet}{j}{}_{a}{}^{\rho}) = 0 \tag{5.78}$$

Γεγονός που δικαιολογεί την ονομασία που δώσαμε στο $\overset{\bullet}{j}{}_{a}{}^{\rho}$.

Παρουσία πηγών οι εξισώσεις πεδίου παίρνουν την μορφή

$$\partial_{\sigma}(h\overset{\bullet}{S}{}_{a}{}^{\sigma\rho}) - \kappa(h\overset{\bullet}{j}{}_{a}{}^{\rho}) = \kappa h\Theta_{a}{}^{\rho} \tag{5.79}$$

Όπου ο τανυστής ενέργειας-ορμής $\Theta_{a}{}^{\rho}$ δίνεται από την σχέση

$$h\Theta_{a}{}^{\rho} \equiv -\left(\frac{\partial\mathscr{L}_{s}}{\partial h^{a}{}_{\rho}} - \partial_{\mu}\frac{\partial\mathscr{L}_{s}}{\partial_{\mu}\partial h^{a}{}_{\rho}}\right) \tag{5.80}$$

Με $\mathscr{L}_{s}$ την Λαγκρανζιανή των πηγών.

Για προφανείς λόγους η κοσμολογία της TEGR είναι ίδια ακριβώς με την κοσμολογία της ΓΘΣ.

Κεφάλαιο 6

Τροποποιημένη f(T) βαρύτητα

6.1 Η δράση και οι εξισώσεις πεδίου

Εμπνεόμενοι από την τροποιημένη f(R) βαρύτητα, στην περίπτωση της καμπυλότητας, προχωρούμε στην διατύπωση μιας θεωρίας τροποποιημένης βαρύτητας με στρέψη. Η Λαγκρανζιανή θα έχει την γενική μορφή

$$\overset{\bullet}{\mathscr{L}} = \frac{h}{2\kappa} f(\overset{\bullet}{T}) \tag{6.1}$$

Προτού προχωρήσουμε σε πράξεις ας εξετάσουμε κάποια πράγματα. Όπως έχουμε δείξει οι ΓΘΣ και TEGR είναι ισοδύναμες θεωρίες, αφού ισχύει

$$-\overset{\circ}{R} = \overset{\bullet}{T} + \frac{2}{h}\partial_\mu(h\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\nu}) \tag{6.2}$$

Όμως, δεν μπορεί να ειπωθεί το ίδιο για τις f(R) και f(T) θεωρίες. Δηλαδή, οι τροποποιημένες εκδοχές των ΓΘΣ και TEGR διαφέρουν μεταξύ τους.

Το δεύτερο σημαντικό θέμα που πρέπει να θίξουμε είναι ο ρόλος του Spin Connection στην f(T). Όπως είδαμε, το Spin Connection δεν παίζει κανένα ρόλο στην TEGR, γεγονός που προέκυψε από την ισοδυναμία της θεωρίας με την ΓΘΣ. Αλλά, όπως αναφέραμε, δεν υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ f(R) και f(T). Άρα, η σωστή τροποποίηση της βαρύτητας με στρέψη πρέπει να περιέχει μία συνάρτηση του βαθμωτού στρέψης με μη μηδενικό Spin Connection, καθώς σε διαφορετική περίπτωση οι εξισώσεις πεδίου δεν είναι αναλλοίωτες κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς Lorentz. Αυτή η διαδικασία έχει γίνει,όμως η εύρεση λύσεων αποδεικνύεται δύσκολη. Εδώ θα ακολουθήσουμε την πιο αφελή τροποποίηση με αντίτιμο να χάσουμε την αναλλοιότητα κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς Lorentz.

Είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στις εξισώσεις πεδίου. Για πρακτικούς λόγους γράφουμε την δράση μας ως

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x h(T + f(T)) + S_m + S_r \tag{6.3}$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο όπως στην TEGR και χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας προκύπτουν οι εξισώσεις πεδίου

$$h^{-1}\partial_\mu(hh_a{}^\rho S_\rho{}^{\mu\nu})(1+f_T)+h_a{}^\rho S_\rho{}^{\mu\nu}\partial_\mu(T)f_{TT}-(1+f_T)h_a{}^\lambda T^\rho{}_{\mu\lambda}S_\rho{}^{\nu\mu}+\frac{1}{4}h_a{}^\nu(T+f(T)) = 4\pi G h_a{}^\rho \Theta_\rho{}^\nu \tag{6.4}$$

όπου συμβολίσαμε $f_T \equiv \dfrac{\partial f}{\partial T}$ και $f_{TT} \equiv \dfrac{\partial^2 f}{\partial T^2}$. Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις είναι δεύτερης τάξης ως προς την τετράδα, επομένως δεν χρειάζεται να ανησυχούμε για την ύπαρξη ασταθειών.

6.2 Κοσμολογία σε FRW μετρική

Εργαζόμαστε για μηδενική χωρική καμπυλότητα. Σε αυτή την περίπτωση η τετράδα παίρνει την μορφή

$$h^a{}_\mu = diag(1, a, a, a) \tag{6.5}$$

Απ΄ όπου εύκολα προκύπτει η γνωστή FRW μετρική

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{6.6}$$

Βάζοντας την τετράδα στις εξισώσεις πεδίου προκύπτουν οι τροποποιημένες εξισώσεις Friedman

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r) - \frac{f}{6} + \frac{T f_T}{3} \tag{6.7}$$

$$\dot{H} = -\frac{4\pi G(\rho_m + P_m + \rho_r + P_r)}{1 + f_T + 2T f_{TT}} \tag{6.8}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε την πολύ χρήσιμη σχέση

$$T = -6H^2 \tag{6.9}$$

που προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του βαθμωτού στρέψης για την περίπτωση του FRW σύμπαντος.

Ορίζουμε την ενεργό πυκνότητα σκοτεινής ενέργειας ως

$$\rho_{DE} \equiv \frac{3}{8\pi G}\left(-\frac{f}{6} + \frac{T f_T}{3}\right) \tag{6.10}$$

και την ενεργό πίεση σκοτεινής ενέργειας ως

$$P_{DE} \equiv \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{f - f_T T + 2T^2 f_{TT}}{1 + f_T + 2T f_{TT}}\right) \tag{6.11}$$

Από την καταστατική εξίσωση προκύπτει ότι

$$w_{DE} = -\frac{f/T - f_T + 2T f_{TT}}{(1 + f_T + 2T f_{TT})(f/T - 2f_T)} \tag{6.12}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε την ποσότητα

$$E^2(z) \equiv \frac{H^2(z)}{H_0^2} = \frac{T(z)}{T_0} \tag{6.13}$$

όπου $T_0 \equiv H_0^2$. Επιπλέον, χρησιμοποιούμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή την μετατόπιση προς το ερυθρό $z = \frac{a_0}{a} - 1$ και ο δείκτης «0» δηλώνει ότι αναφερόμαστε στην τιμή των μεγεθών σήμερα (από εδώ και στο εξής θα θέσουμε $a_0 = 1$)). Το σήμερα αντιστοιχεί στην τιμή $z = 0$ και το $z = -1$ στο μακρινό μέλλον. Με βάση αυτά και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\rho_m = \rho_{m0}(1+z)^3$, $\rho_r = \rho_{r0}(1+z)^4$ γράφουμε την πρώτη εξίσωση Friedman ως

$$E^2(z) = \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{F0}y(z, \mathbf{r}) \tag{6.14}$$

με

$$\Omega_{F0} = 1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0} \tag{6.15}$$

όπου το $\Omega_{i0} = \frac{8\pi G\rho_{i0}}{3H_0^2}$ είναι η παράμετρος πυκνότητας σήμερα. Έτσι, το αποτέλεσμα της $f(T)$ βαρύτητας ποσοτικοποιείται από την συνάρτηση $y(z, \mathbf{r})$ (κανονικοποιημένη στην μονάδα σήμερα), η οποία εξαρτάται από τα Ω_{m0}, Ω_{r0} και από τις παραμέτρους $r_1, r_2, ...$ της συνάρτησης $f(T)$. Η συνάρτηση $y(z, r)$ έχει τη μορφή

$$y(z, \mathbf{r}) = \frac{1}{T_0\Omega_{F0}}(f - 2Tf_T) \tag{6.16}$$

Το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε τι συμβαίνει για συγκεκριμένα μοντέλα f(T).
1) Το πρότυπο Bengochea και Ferraro (power-law model) με

$$f(T) = \alpha(-T)^b \tag{6.17}$$

όπου τα α και b είναι οι δύο παράμετροι του προτύπου. Αντικαθιστώντας αυτό το f(T) στην τροποποιημένη εξίσωση Friedman (6.7) στο σήμερα έχουμε

$$\alpha = (6H_0^2)^{1-b}\frac{\Omega_{F0}}{2b-1} \tag{6.18}$$

ενώ η (6.16) δίνει

$$y(z, b) = E^{2b}(z, b) \tag{6.19}$$

2) Το πρότυπο Linder με

$$f(T) = \alpha T_0(1 - e^{-p\sqrt{T/T_0}}) \tag{6.20}$$

όπου τα α και b είναι οι δύο παράμετροι του προτύπου. Σε αυτή την περίπτωση από την (6.7) έχουμε

$$\alpha = \frac{\Omega_{F0}}{1 - (1+p)e^{-p}} \tag{6.21}$$

και από την (6.16)

$$y(z, p) = \frac{1 - (1 + pE)e^{-pE}}{1 - (1+p)e^{-p}} \tag{6.22}$$

3)Το εκθετικό πρότυπο με

$$f(T) = \alpha T_0(1 - e^{-pT/T_0}) \tag{6.23}$$

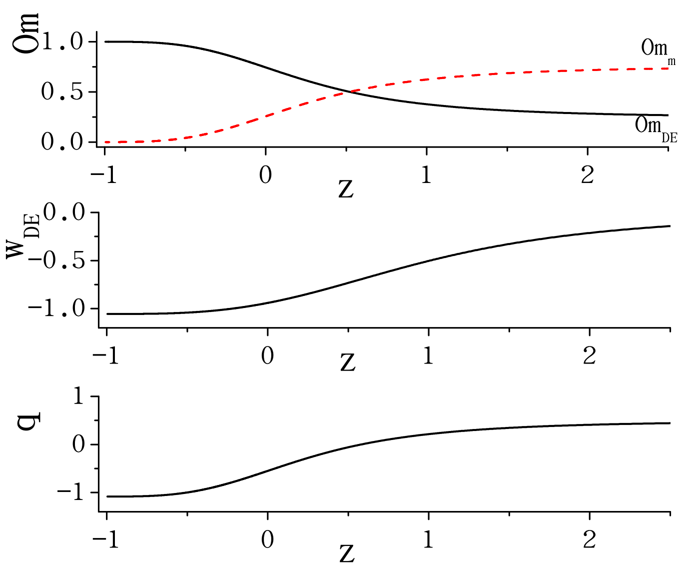
Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\alpha = \frac{\Omega_{F0}}{1 - (1+2p)e^{-p}} \tag{6.24}$$

και

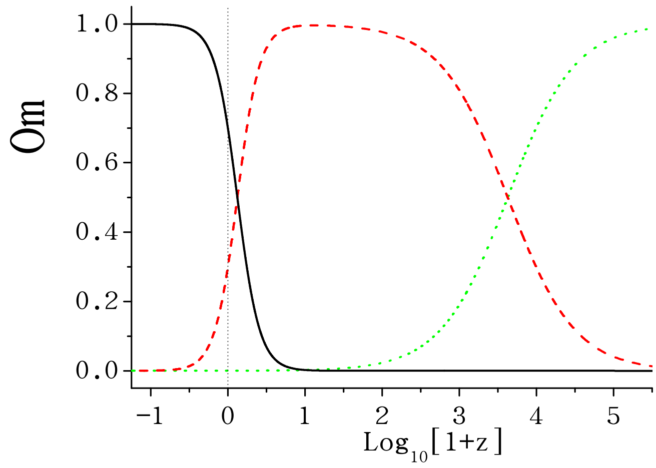
$$y(z,p) = \frac{1-(1+2pE^2)e^{-pE^2}}{1-(1+2p)e^{-p}} \tag{6.25}$$

Θα ασχοληθούμε λίγο παραπάνω με το power-law model. Θεωρούμε ότι οι σημερινές τιμές των παραμέτρων πυκνότητας είναι $\Omega_{m0} = 0.3$, $\Omega_{F0} = 0.7$, ενώ η παράμετρος πυκνότητας της ακτινοβολίας που έχει την τιμή $\Omega_{r0} = 10^{-4}$ είναι αμελητέα. Χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές των παραμέτρων μπορούμε να σχεδιάσουμε με αριθμητικές μεθόδους τις γραφικές παραστάσεις που μας ενδιαφέρουν στην κοσμολογία. Έτσι, έχουμε



Ας ερμηνεύσουμε τις γραφικές παραστάσεις. Από την πρώτη βλέπουμε ότι στο μέλλον η παράμετρος πυκνότητας της ύλης είναι ασυμπτωτικά μηδέν, ενώ η παράμετρος πυκνότητας της σκοτεινής ενέργειας είναι ασυμπτωτικά ίση με την μονάδα. Στο δεύτερο γράφημα βλέπουμε ότι στο μέλλον η παράμετρος καταστατικής εξίσωσης σκοτεινής ενέργειας τείνει προς το -1, δηλαδή προς την τιμή της κοσμολογικής σταθεράς. Στο τρίτο διάγραμμα βλέπουμε ότι η παράμετρος επιβράδυνσης τείνει στην τιμή -1, δηλαδή το σύμπαν θα εξακολουθεί να διαστέλλεται επιταχυνόμενα.

Τέλος, μπορούμε να δούμε σε ένα διάγραμμα την ιστορία εξέλιξης όλων των παραμέτρων τάξης.



Όπου η μαύρη γραμμή αντιστοιχεί στην σκοτεινή ενέργεια, η κόκκινη διακεκομμένη στην ύλη και η πράσινη διακεκομμένη στην ακτινοβολία.

Αξίζει να σημειωθεί ότι παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζουν και τα άλλα δύο πρότυπα. Επιπλέον, και τα τρία είναι πρακτικά μη διακρίσιμα από το πρότυπο ΛCDM, υπό την έννοια ότι δίνουν πανομοιότυπη κοσμολογία.

Κεφάλαιο 7

Επίλογος

Ας ανακεφαλαιώσουμε τα όσα παρουσιάστηκαν στην παρούσα εργασία. Στο πρώτο κεφάλαιο ξεκινήσαμε με μία σύντομη ιστορική αναδρομή στην Θεωρία της Σχετικότητας και δώσαμε τα αξιώματα της θεωρίας. Στη συνέχεια παρουσιάσαμε τις επιτυχίες της θεωρίας που την καθιστούν την καθιερωμένη θεωρία της βαρύτητας σήμερα. Έπειτα προχωρήσαμε στην σύνοψη των προβλημάτων στη σύγχρονη κοσμολογία που μας δίνουν κίνητρο για νέα Φυσική. Έγινε μία σύντομη αναφορά στο πρότυπο ΛCDM και στο αδύναμο σημείο του που είναι η φύση της κοσμολογικής σταθεράς. Ως απάντηση σε αυτό το πρόβλημα προτάξαμε την θεωρία $f(R)$ που μπορεί να εξηγήσει εξ΄ ίσου ικανοποιητικά τα παρατηρησιακά δεδομένα. Εν συνεχεία, αναφέραμε την TEGR, τις τεχνικές και εννοιολογικές διαφορές που έχει με την ΓΘΣ και την ισοδυναμία των δύο θεωριών. Τέλος, επισημάναμε ότι η τροποποίηση της TEGR, δηλαδή η $f(T)$ βαρύτητα, είναι ένας εντελώς ανεξάρτητος κλάδος έρευνας της βαρυτικής θεωρίας.

Το δεύτερο κεφάλαιο ήταν το πιο τεχνικό κεφάλαιο της εργασίας και αφιερώθηκε εξ ολοκλήρου στα μαθηματικά. Προχωρήσαμε στους ορισμούς των απαραίτητων μαθηματικών αντικειμένων για τις θεωρίες βαρύτητας, ήτοι μετρική, τανυστές, συναλλοίωτες παράγωγοι, τετράδες, Spin συνοχή, τανυστές καμπυλότητας και στρέψης, ταυτότητες Bianchi, τανυστής Contorsion.

Στο τρίτο κεφάλαιο ήρθε η σειρά της ΓΘΣ. Αρχικά, δείξαμε ότι σε τεχνικό κομμάτι η επιλογή της Levi-Civita συνοχής οδηγεί στην περιγραφή του χωροχρόνου μέσω της καμπυλότητας. Εν συνεχεία βρήκαμε τις εξισώσεις κίνησης των δοκιμαστικών σωματιδίων. Έπειτα με συνδυασμό μαθηματικών και φυσικών επιχειρημάτων οδηγηθήκαμε στην μορφή της δράσης της θεωρίας και παίρνοντας μεταβολές ως προς την μετρική καταλήξαμε στις εξισώσεις πεδίου που ονομάζονται εξισώσεις Einstein. Τέλος, εξετάσαμε την κοσμολογία που προβλέπει η ΓΘΣ θεωρώντας ως πηγές βαρύτητας τα τέλεια ρευστά ύλη, ακτινοβολία, κενό.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάσαμε συνοπτικά την θεωρία $f(R)$. Αρχικά, δείξαμε ότι οι εν πρώτοις προβληματικές τέταρτης τάξης ως προς την μετρική εξισώσεις πεδίου που προκύπτουν από την δράση είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις Einstein συν τις εξισώσεις κίνησης ενός βαθμωτού πεδίου. Για να το επιτύχουμε αυτό κάναμε χρήση του σύμμορφου μετασχηματισμού. Έπειτα δώσαμε τα βασικά της κοσμολογίας σε $f(R)$ βαρύτητα χωρίς να εξετάσουμε την συμπεριφορά συγκεκριμένων μοντέλων.

Από το πέμπτο κεφάλαιο και έπειτα ξεκινάει το κυρίως αντικείμενο της εργασίας. Πρώτα απ΄ όλα παρουσιάσαμε το πώς η επιλογή της Weitzenbock συνοχής ανοίγει το δρόμο στην περιγραφή του χωροχρόνου μέσω της στρέψης. Εν συνεχεία προβάλαμε το πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό της TEGR να μπορεί να θεωρηθεί θεωρία βαθμίδας με γεννήτορα τις μετατοπίσεις στον εφαπτόμενο χώρο. Ύστερα, παρουσιάσαμε τις εξισώσεις κίνησης ενός δοκιμαστικού σωματιδίου οι οποίες είναι μεν ισοδύναμες με τις εξισώσεις κίνησης της ΓΘΣ, όμως έχουν το πλεονέκτημα να περιλαμβάνουν όρο δύναμης και με αυτόν τον τρόπο να προσιδιάζουν στις εξισώσεις του Newton. Το κεφάλαιο ολοκληρώθηκε με την εξαγωγή των εξισώσεων πεδίου, αφού προτύτερα αποδείχθηκε η ισοδυναμία των τελευταίων με τις εξισώσεις Einstein και παρουσιάστηκε η δυνατότητα να απαλλαγούμε από το Spin Connection χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Στο έκτο κεφάλαιο προχωρήσαμε στην αφελή γενίκευση της $f(T)$ βαρύτητας, δηλαδή θεωρήσαμε μία συνάρτηση του βαθμωτού της στρέψης χωρίς Spin Connection. Οδηγηθήκαμε με εύκολο τρόπο στις πεδιακές εξισώσεις που παρουσιάζουν το πάρα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό να παραμένουν δεύτερης τάξης διαφορικές εξισώσεις ως προς την τετράδα ανεξαρτήτως της επιλογής συνάρτησης $f(T)$. Ακολούθησε η κοσμολογία σε FRW σύμπαν με μηδενική χωρική καμπυλότητα. Ορίσαμε την ενεργό πυκνότητα ενέργειας και πίεση σκοτεινής ενέργειας που προκύπτει ως αποτέλεσμα των επιπλέον όρων που προέρχονται από την συνάρτηση f και τις παραγώγους της πως προς το βαθμωτό στρέψης. Στη συνέχεια βρήκαμε πώς ποσοτικοποιείται η συνεισφορά της $f(T)$ στις εξισώσεις Friedman για τα πρότυπα Bengochea και Ferraro, Linder και για το εκθετικό πρότυπο. Τέλος, επιλέξαμε το πρότυπο Bengochea και Ferraro και απεικονίσαμε την κοσμολογία που προβλέπει.

Βιβλιογραφία

[1]S. Carroll, *Spacetime and Geometry*, Addison Wesly (2003)
[2]R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity*, Springer (2013)
[3]Y. F. Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis and E. N. Saridakis, $f(T)$ *teleparallel gravity and cosmology* (2016) [arXiv:1511.07586]
[4]M. Krssak, *Holographic Renormalization in Teleparallel Gravity* (2017) [arXiv:1510.06676]
[5]M. Krssak and E. N. Saridakis, *The covariant formulation of f(T) gravity* (2016) [arXiv:1510.08432]
[6]J. W. Maluf, *The teleparallel equivalent of general relativity*, (2013) [arXiv:1303.3897]
[7]S. Nesseris, S. Basilakos, E. N. Saridakis and L. Perivolaropoulos, *Viable f(T) models are practically indistinguishable from* ΛCDM (2013) [arXiv:1308.6142]
[8]E. V. Linder, *Einstein's Other Gravity and the Acceleration of the Universe* (2010) [arXiv:1005.3039]
[9]K. Bamba, C. Q. Geng, C. C. Lee and L. W. Luo, *Equation of state for dark energy in f(T) gravity* (2011) [arXiv:1011.0508]
[10]T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *f(R) theories of gravity* (2010) [arXiv:0805.1726]
[11]A. De Felice and S. Tsujikawa, *f(R) theories* (2010) [arXiv:1002.4928]
[12]J. G. Pereira and Y. N. Obukhov, *Gauge Structure of Teleparallel Gravity* (2019) [arXiv:1906.06287]
[13]Γεώργιος Κουτσούμπας, *Σημειώσεις στις Μαθηματικές Μεθόδους Φυσικής* (2017)
[14]J. B. Hartle, *Βαρύτητα Εισαγωγή στη Γενική Σχετικότητα του Einstein*, Τζιόλας (2012)