ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΕ FRACTALS

ΔΗΜΗΤΡΑ ΣΤΡΑΤΗΓΟΠΟΥΛΟΥ

Επιβλέπων: Αντώνιος Χαραλαμπόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Φεβρουάριος 2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διαφορικοί Τελεστές σε Fractals

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Δήμητρας Στρατηγοπούλου

Επιβλέπων: Αντώνιος Χαραλαμπόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 25η Φεβρουαρίου 2021.

....	....	....
Αλέξανδρος Αρβανιτάκης	Πέτρος Στεφανέας	Αντώνιος Χαραλαμπόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2021

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία έχει ως αντικείμενο την κατασκευή ενέργειας σε μορφοκλασματικά σύνολα και την επέκταση της έννοιας της ενέργειας για την κατασκευή του τελεστή Laplace στα ίδια σύνολα. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή σε βασικές έννοιες της πραγματικής ανάλυσης και της Συμβολικής Δυναμικής. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύεται η έννοια της αυτοομοιότητας και δίνονται παραδείγματα αυτοόμοιων συνόλων. Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της ενέργειας και εφαρμόζεται στο μοναδιαίο διάστημα. Με μία παρόμοια τεχνική κατασκευάζεται η ενέργεια στο Sierpinski Gasket και μελετάται η σύγκλιση της. Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο δίνονται δύο ισοδύναμες διατυπώσεις του τελεστή Laplace στο μοναδιαίο διάστημα και στο Sierpinski Gasket καθώς και η διατύπωση της σχέσης Gauss-Green.

Abstract

The subject of the present thesis is the construction of the energy on fractals and the extension of the notion of energy for the construction of the Laplacian on the same sets. The first chapter is an introduction in the basic notions of real analysis and Symbolic Dynamics. In the second chapter the notion of self-similarity is investigated and examples of self-similar sets are given. In the third chapter the notion of energy is introduced, and is applied on the unit interval. Following a similar technique the energy on the Sierpinski Gasket is constructed and its convergence is examined. In the fifth and last chapter two equivalent formulations of the Laplace operator are given on the unit interval and Sierpinski Gasket, as well as the formulation of the Gauss-Green formula.

0.1 Εισαγωγή

Ο σκοπός της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι η μελέτη των συνόλων fractals με εφαρμογή σε δύο βασικά σύνολα: το μοναδιαίο διάστημα I και το Sierpinski Gasket. Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό SG και I για να αναφερόμαστε σε αυτά τα σύνολα. Σίγουρα το μοναδιάιο διάστημα δεν μπορεί να είναι ένα fractal σύνολο. Αλλά είναι αυτοόμοιο σύνολο, που παράγεται απο τις απεικονίσεις $\psi_1(x) = \frac{1}{2}x$ και $\psi_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ που κάνουν τα δύο ημιδιαστήματα $[0, \frac{1}{2}]$ και $[\frac{1}{2}, 1]$ όμοια με ολόκληρο το διάστημα. Το σύνολο SG, παράγεται απο τρεις απεικονίσεις στο επίπεδο, καθέ μια απο τις οποίες είναι ομοιότητα με αναλογία $\frac{1}{2}$ και σταθερά σημεία τις κορυφές του τριγώνου. Επομένως θα ελεγέ κανεις πως υπάρχει μια ισχυρή σχέση ανάμεσα σε αυτά τα δύο παραδείγματα με τον εξής τρόπο: ξεκινάμε με μια γνωστή αναλυτική δομή στο I, βρίσκουμε έναν τρόπο να την ανασχηματίσουμε σε όρους της αυτοόμοιας δομής, και μετά προσπαθούμε να γενικεύσουμε την ανασχηματισμένη δομή στο SG.

Στο πρώτο κεφάλαιο θα δώσουμε κάποιες εισαγωγικές έννοιες ανάλυσης που θα μας φανούν χρήσιμες για την κατανόηση των υπολοίπων κεφαλαίων. Ανάμεσα σ'αυτές θα διατυπώσουμε ένα εισαγωγικό Θεώρημα που θα μας βοηθήσει στο δεύτερο κεφάλαιο να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός αυτοόμοιου συνόλου. Θα αφιερώσουμε μία ενότητα στην Συμβολική Δυναμική. Σ'αυτήν την ενότητα θα δούμε κάποια παραδείγματα στο μοναδιαίο διάστημα, ένα σύνολο που θα το χρησιμοποιήσουμε πολύ και στην συνέχεια. Στο δεύτερο κεφάλαιο, λοιπόν, θα συζητήσουμε για τα αυτοόμοια σύνολα. Θα αναφέρουμε βασικές αρχές της αυτοομοιότητας, θα μιλήσουμε για τον χώρο μετατόπισης και κάποιες βασικές ιδιότητες του. Αυτό θα μας φανεί εξαιρετικά χρήσιμο καθώς μέσω ενός συμβολισμού πεπερασμένων λέξεων θα μπορέσουμε να δώσουμε μία εναλλακτική αναπαράσταση του αυτοόμοιου συνόλου. Και θα δούμε ότι ο χώρος αυτός με το αυτοόμοιο σύνολο που αποδείξαμε ότι υπάρχει συνδέονται μέσω μίας απεικόνισης. Στο τέλος θα δούμε κάποια παραδείγματα αυτοόμοιων συνόλων.

Τα επόμενα τρία κεφάλαια είναι το κυρίως θέμα αυτής της εργασίας. Στόχος μας είναι να ορίσουμε μια Dirichlet μορφή στα σύνολα I και SG και να την ελαχιστοποίησουμε. Μία Dirichlet μορφή είναι κάποιου είδους 'ενέργεια', δηλαδή είναι κατά κάποιο τρόπο μια γενίκευση του Dirichlet ολοκληρώματος $u \mapsto \int |gradu|^2$ ορισμένο για u σε ανοικτές περιοχές του $\mathbb{R}^n$. Η έρευνα της Dirichlet μορφής στα fractals ξεκίνησε μαζί με την κατασκευή της Brownian κίνησης σε fractals. Είναι επίσης στενά συνδεδεμένη με την κατασκευή της Λαπλασιανής, ή με άλλα λόγια με τον ορισμό των αρμονικών συναρτήσεων σε ένα fractal. Κατά κάποιο τρόπο στα fractals, οι έννοιες της Dirichlet μορφής, της Brownian κίνησης, και των αρμονικών συναρτήσεων είναι, στην πραγματικότητα, τρεις διαφορετικές οπτικές της ίδιας έννοιας. Θα ορίσουμε, λοιπόν, αυτην την ενέργεια στα σύνολα μας αλλά θα ακολουθήσουμε διαφορετική προσέγγιση σε κάθε ένα. Αρχικά, θα δούμε πως μπορούμε να προσεγγίσουμε ένα αυτοόμοιο σύνολο μέσω γράφων. Η εναλλακτική προσέγγιση σε αυτό θα είναι να μιλήσουμε απλά για ορισμό ενέργειας σε δύο διαφορετικά σημεία του συνόλου, μη εξετάζοντας αν ανήκουν σε κάποιον κοινό γράφο. Θα δούμε στην περίπτωση του SG ότι θα καταλήξουμε στα ίδια αποτελέσματα παρόλο που υπάρχει αυτή η διαφορά στις προσεγγίσεις.

Στην προσέγγιση του I θα κατασκευάσουμε την ενέργεια, θα εξετάσουμε πως αλλάζει η ενέργεια όταν μετακινούμαστε σε έναν γράφο επομένου επιπέδου και θα καταλήξουμε στο να πάρουμε το όριο της ενέργειας. Πριν καν να βρούμε ποια θα είναι τελικά η ενέργεια στο I θα κάνουμε μία υπόθεση βασει της οποίας θα κινηθούμε για να βρούμε την ενέργεια. Αυτή είναι ότι θα υποθέσουμε ότι η ενέργεια σε μία επέκταση της αρχικής συνάρτησης μας, που όμως ελαχιστοποιεί την ενέργεια, είναι ίση με ένα πολλαπλάσιο της ενέργειας στον προηγούμενο γράφο. Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου, θα εξετάσουμε εάν το όριο της ενέργειας είναι πεπερασμένο ή μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$ και θα δούμε κάποιες ιδιότητες του συνόλου των συναρτήσεων με πεπερασμένη ενέργεια.

Στο ίδιο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τον ορισμού ενός μέτρου σε ένα αυτοόμοιο σύνολο. Θα αποφύγουμε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια του μέτρου στην κατασκευή ενέργειας στο SG. Ωστόσο, ο λόγος ορισμού του μέτρου είναι να μπορούμε να κάνουμε ολοκλήρωση συναρτήσεων. Αυτό είναι κάτι που θα μας οριστεί στο τέλος, όταν θα ορίσουμε την Λαπλασιανή.

Το SG είναι αυτό που λέμε ένα πεπερασμένα διακλαδώμενο fractal, αφού τα αντίγραφα μπορούν να έχουν πεπρασμένο αριθμό (γενικά πλήθους το πολύ ένα) κοινών σημείων. Πως θα το προσεγγίσουμε: Θα ορίσουμε την ενέργεια της επέκτασης σε ένα επόμενο επίπεδο του συνόλου SG και θα προσπαθήσουμε να το ελαχιστοποιήσουμε δίχως την υπόθεση που κάναμε στην περίπτωση του I. Θα το πετύχουμε αυτό ορίζοντας έναν τελεστή ελαχιστοποίησης. Κατα την διάρκεια αυτής της κατασκευής θα δείξουμε σε τι αποτελέσματα θα καταλήγαμε αν υιοθετούσαμε την μέθοδο που είχαμε για την κατασκευή ενέργειας στο I. Θα πάρουμε το όριο αυτής της ενέργειας. Στο ίδιο κεφάλαιο θα δούμε πως μπορεί να κατασκευαστεί μία τέτοια ενέργεια σε ένα γενικό fractal. Θα κάνουμε κάποιες παραδοχές για τα fractals που θα μελετήσουμε σε αυτήν την ενότητα.

Στο τελευταίο κεφάλαιο, θα μιλήσουμε για την Λαπλασιανή. Θα δούμε δύο διατυπώσεις της Λαπλασιανής, ωστόσο η δεύτερη μπορεί να αποδείξει την πρώτη. Θα έχουμε υποθέσει μία συνάρτηση η οποία εξαφανίζεται στο σύνορο του συνόλου μας. Όμως μετά θα εξετάσουμε και την περίπτωση που δεν εξαφανίζεται στο σύνορο. Στο τέλος θα εξετάσουμε την σχέση Gauss-Green. Ωστόσο ήδη στις προηγούμενες ενότητες θα έχουμε δει κάποιες ειδικές περιπτώσεις της.

Κεφάλαιο 1

Θεμελιώδεις Έννοιες Ανάλυσης και Συμβολική Δυναμική

1.1 Θεμελιώδεις Έννοιες Ανάλυσης

Ορισμός 1.1. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο και η συνάρτηση ρ:$X \times X \mapsto \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Οι τιμές της ρ είναι μη αρνητικές: $\rho(x, y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.*
2. *Η συνάρτηση ρ είναι συμμετρική: $\rho(x, y) =\rho(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$.*
3. *Ικανοποιείται η τριγωνική ανισότητα: $\rho(x, y) \leq\rho(x, z)+\rho(z, y)$ για κάθε $x, y, z \in X$.*

Η ρ καλείται μετρική στο X και το ζεύγος (X,ρ) θα καλείται μετρικός χώρος. Τα στοιχεία του X θα καλούνται σημέια του X και για $x, y \in X$ ο μη αρνητικός αριθμός $\rho(x, y)$ θα καλέιται αποσταση των σημείων x, y.

Ορισμός 1.2. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $D \supseteq X$. Το D θα καλείται **πυκνό** στο X αν και μόνο αν $\overline{D} = X$. Επίσης, αν A μη κενό υποσύνολο του X τέτοιο ώστε $D \supseteq A$, το D θα καλείται πυκνό στο A αν και μόνο αν το D είναι πυκνό στον μετρικό υπόχωρο $(A, \rho|_A)$.*

Θεώρημα 1.1. *χαρακτηρισμός πυκνών υποσυνόλων* *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και υποσύνολο D του X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *το D είναι πυκνό στο X: $\overline{D} = X$,*
2. *για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακολουθία (x_n) του D που συγκλίνει στο X.*

Ορισμός 1.3. *Μία ομογενής συνάρτηση είναι αυτή που έχει πολλαπλασιαστικά κλιμακούμενη συμπεριφορά: αν όλα τα ορίσματα της πολλαπλασιάζονται με έναν παράγοντα, τότε η τιμή της πολλαπλασιάζεται με μία δύναμη αυτού του παράγοντα. Συγκεκριμένα, μια ομογενής συνάρτηση πραγματικών τιμών δύο μεταβητών x και y είναι μία συνάρτηση πραγματικών τιμών η οποία ικανοποιεί την συνθήκη:*

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k f(x, y) \tag{1.1}$$

για κάποια σταθερά k και όλους του πραγματικούς αριθμούς a. Το k καλείται βαθμός ομοιογένειας.

Ορισμός 1.4. *Ένας χώρος Banach $(H, ||\cdot||)$ λέγεται χώρος Hilbert αν η νόρμα του ορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον H, δηλαδή υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $<,>$ στον H ώστε $||x|| =< x, x >^{1/2}$ για κάθε $x \in H$.*

Ορισμός 1.5. *Έστω X μη κενό σύνολο και (f_n) ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων στο X. Θα λέμε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά σημείο ή σημειακά στην συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))$ του $\mathbb{R}$ συγκλίνει στο $f(x)$ στην συνήθη μετρική, δηλαδή για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να είναι $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Πρόταση 1.1. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $x_1, ..., x_n \in X$. Τότε ισχύει:*

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + ... + d(x_{n-1}, x_n). \tag{1.2}$$

Απόδειξη. Αποδυκνείουμε το ζητούμενο με επαγωγή για $n \geq 3$. Για $n = 1, 2$ ισχύει τετριμμένα. Για $n = 3$ η σχέση ισχύει αφου είναι η γνωστή μας τριγωνική ανισότητα στα σημεία x_1, x_3 με το x_2 να παρεμβάλλεται. Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για n το πλήθος σημεία και θεωρούμε τα $n + 1$ το πλήθος σημεία $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ του X. Απο την τριγωνική ανισότητα θα είναι $d(x_1, x_{n+1}) \leq d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1})$ και απο την επαγωγική υπόθεση, για τα n το πλήθος σημεία $x_1, ..., x_n$ θα είναι $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + ... + d(x_{n-1}, x_n)$, οπότε διαπιστώνουμε το ζητούμενο. □

Ορισμός 1.6. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του χώρου X. Η διάμετρος του συνόλου A, συμβολισμός $diam(A)$, ορίζεται ως:*

$$diam(A) = sup\{d(x, y) : x, y \in A\} \tag{1.3}$$

Συμβολισμός 1.1. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Θα συμβολίζουμε την* ***κλειστή σφαίρα*** *στον X με κέντρο x και ακτίνα r ως εξής:*

$$\mathcal{B}_r(x) = \{y \,:\, y \in X, d(x, y) \leq r\}$$

Ορισμός 1.7. *Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και έστω K ένα υποσύνολο του X.*

1. *Ένα πεπερασμένο σύνολο $A \subset K$ καλείται ένα $r - net$ του K αν και μόνο αν $\cup_{x\in A}\mathcal{B}_r(x) \supseteq K$.*
2. *Το K λέγεται ότι είναι πλήρως φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει ένα $r - net$ του K για οποιοδήποτε $r > 0$.*

Πρόταση 1.2. *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και μη κενό κλειστό υποσύνολο K του X. Τότε το K είναι πλήρες σύνολο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχαία ακολουθία Cauchy (x_n) του K και θα αποδείξουμε ότι η (x_n) συγκλίνει στο K. Επειδή ο (X, ρ) είναι πλήρης, υπάρχει το όριο $x_0 \in X$ της (x_n) και επιπλέον, $x_0 \in K$. Πράγματι, το x_0 ως όριο ακολουθίας του K είναι στοιχείο του $\overline{K}$. Όμως το K κλειστό και άρα $\overline{K} = K$, ώστε $x_0 \in K$. □

Θεώρημα 1.2. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *ο (X, ρ) είναι συμπαγής,*

2. *ο (X, ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής,*

3. *ο (X, ρ) είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.*

Θεώρημα 1.3. ***(Γενικευμένο Θεώρημα Heine-Borel)*** *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος. Τότε ένα υποσύνολο του X είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και ολικά φραγμένο.*

Απόδειξη. Η ευθεία κατεύθυνση ισχύει διότι αν το K είναι συμπαγές, τότε είναι πλήρες, άρα κλειστό και ολικά φραγμένο (Θεώρημα 1.1). Αντίστροφα, αν το K είναι κλειστό και ολικά φραγμένο υποσύνολο του πλήρους (X, ρ), τότε είναι επιπλέον πλήρες, ως κλειστό υποσύνολο πλήρους μετρικού χώρου (Πρόταση 1.1), άρα συμπαγές (Θεώρημα 1.1). □

Ορισμός 1.8. *Έστω $(X, d_x), (Y, d_y)$ μετρικοί χώροι.Μία απεικόνιση $f : X \mapsto Y$ λέγεται ότι είναι (ομοιόμορφα) Lipschitz συνεχής στον X ως προς τις d_x, d_y αν:*

$$\mathcal{L} = \sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{d_y(f(x), f(y))}{d_x(x, y)} < \infty \tag{1.4}$$

Η παραπάνω σταθερά L καλείται Lipschitz σταθερά της f και συμβολίζεται με Lip(f).

Ορισμός 1.9. *Ο τελεστής ορίζεται ως μία συνάρτηση που δρα πάνω σε κάποια άλλη συνάρτηση, μετασχηματίζοντάς την κατά ένα καθορισμένο τρόπο. Μπορεί να θεωρηθεί γενίκευση της έννοιας της συνάρτησης, καθώς οι συναρτήσεις δρουν συνήθως πάνω σε μεμονωμένα «αντικείμενα», ενώ ένας τελεστής μπορεί να δράσει πάνω στη «μορφή» μιας συνάρτησης ως σύνολο και να δώσει μια άλλη συνάρτηση.*

Ορισμός 1.10. *Έστω $(X, \rho), (Y, d)$ μετρικοί χώροι, $x_0 \in X$ και απεικόνιση $f : (X, \rho) \to (Y, d)$. Θα λέμε ότι η f είναι* ***συνεχής στο*** *x_0 αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta$ να είναι $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Επίσης θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο X αν και μόνο αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in X$.*

Ορισμός 1.11. *Ομοιομορφισμός είναι μια συνεχής συνάρτηση μεταξύ τοπολογικών χώρων που έχει μια συνεχή αντίστροφη συνάρτηση. Οι ομοιομορφισμοί είναι ισομορφισμοί στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων, δηλαδή, είναι οι αντιστοιχίσεις που διατηρούν όλες τις τοπολογικές ιδιότητες ενός δεδομένου χώρου. Δύο χώροι με ομοιομορφισμό μεταξύ τους ονομάζονται ομοιομορφικοί χώροι, καθώς από τοπολογική άποψη είναι ίδιοι.*

Ορισμός 1.12. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Αν $f : X \mapsto X$ είναι Lipschitz συνεχής στο X ως προς d και $Lip(f) < 1$, τότε η f καλείται συστολή ως προς την μετρική d με αναλογία συστολής $Lip(f)$. Ειδικότερα μια συστολή με αναλογία συστολής r καλείται ομοιότητα αν*

$$d(f(x), f(y)) = rd(x, y)$$

για όλα τα $x, y \in X$.

Ορισμός 1.13. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία του X. Η (x_n) θα καλείται ακολουθία Cauchy στον X αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός n_0 ώστε για κάθε $m \geq n \geq n_0$ να ισχύει $d(x_n, x_m) < \epsilon$.*

Ορισμός 1.14. *Έστω X μη κενό σύνολο και (f_n) ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων στο X. Θα λέμε ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα ή ότι είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στην συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ στο X αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$ να είναι $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Ορισμός 1.15. *Ορίζουμε την ταλάντωση (oscillation) μίας συνάρτησης f σε ένα σύνολο A την διαφορά μεταξύ του μεγίστου και του ελαχίστου των τιμών της f στο A. Δηλαδή:*

$$Osc_A f = sup_{x,y\in A}|f(x) - f(y)| = sup_A f - inf_A f. \tag{1.5}$$

Ορισμός 1.16. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ο (X, d) θα καλείται* **πλήρης** *αν και μόνο αν κάθε ακολουθία Cauchy του (X, d) είναι συγκλίνουσα στον X. Αν ο (X, d) είναι πλήρης, τότε η d θα καλείται* **πλήρης μετρική** *του X. Επίσης, το μη κενό υποσύνολο του (X, d) θα καλείται* **πλήρες** *αν και μόνο αν ο μετρικός υπόχωρος $(K, d|_K)$ του X είναι πλήρης μετρικός χώρος ως προς την μετρική $d|_K$ που επάγει ο X στο K.*

Ορισμός 1.17. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $K \supseteq X$. Τότε το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων $(G_i)_{i\in I}$ του (X, ρ) τέτοια ώστε $K \supseteq \bigcup_{i\in I} G_i$, υπάρχει πεπερασμένο σύνολο δεικτών $J \supseteq I$ ώστε $K \supseteq \bigcup_{i\in J} G_i$.*

Θεώρημα 1.4 (Θεώρημα Συστολής). *Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $f : X \mapsto X$ μια συστολή ως προς την μετρική d. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο της f, με άλλα λόγια υπάρχει μια μοναδική λύση της εξίσωσης*

$$f(x) = x$$

Επιπλέον αν x_* είναι το σταθερό σημείο της f, τότε η ακολουθία $\{f^n(a)\}_{n\geq 0}$ συγκλίνει στο x_* για όλα τα $a \in X$ όπου f^n είναι η n-οστή επανάληψη της f.

Απόδειξη. Αν r είναι η αναλογία της συστολής f τότε θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{f^n(a)\}_{n\geq 0}$ είναι Cauchy και επομένως θα συγκλίνει σε κάποιο σημείο του X λόγω της πληρότητας. Απο την γενικευμένη τριγωνική ανισότητα για $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} d(f^n(a), f^m(a)) &\leq d(f^n(a), f^{n+1}(a)) + ... + d(f^{m-1}(a), f^m(a)) \\ &\leq (r^n + ... + r^{m-1})d(a, f(a)) \leq \frac{r^n}{1-r} d(a, f(a)) \end{aligned}$$

Επομένως η ακολουθία $\{f^n(a)\}_{n\geq 0}$ είναι Cauchy και επειδή ο (X, d) πλήρης θα υπάρχει κάποιο σημείο $x_* \in X$ με $f^n(a) \to x_*$ καθώς $n \to \infty$. Όμως επειδή η f^n είναι η n-οστή επανάληψη της f θα ισχύει ότι $f^{(n+1)}(a) = f(f^{(n)}(a))$ και επομένως μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι $f(x_*) = x_*$ δηλαδή ότι το x_* είναι σταθερό σημείο της f. Για την μοναδικότητα υποθέτουμε ότι η f έχει δύο σταθερά σημεία και θα καταλήξουμε στο ότι ταυτίζονται. Έστω $f(x) = x$ και $f(y) = y$ για δύο σημεία $x, y \in X$. Τότε: $d(f(x), f(y)) = d(x, y) \leq rd(x, y)$. Για να ισχύει αυτό πρέπει $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Επομένως το σταθερό σημείο είναι μοναδικό. □

1.2 Εισαγωγή στην Συμβολική Δυναμική

Ο τομέας της Συμβολικής Δυναμικής αναδύθηκε ως εργαλείο για την ανάλυση γενικών δυναμικών συστημάτων και έχει να κάνει με την διακριτοποίηση του χώρου. Ας φανταστούμε ένα σημείο που ακολουθεί μια τροχιά σε έναν χώρο. Διαμερίζουμε τον χώρο σε πεπερασμένο πλήθος τμημάτων, και κάθε ένα το ονοματίζουμε με ένα διαφορετικό σύμβολο. Αυτό μας αποδίδει μια *συμβολική τροχιά* αν γράψουμε την ακολουθία συμβόλων που αντιστοιχεί στα στοιχεία που επισκέφτηκε το σημείο στην τροχιά του. Θα αναρωτηθούμε: Η συμβολική τροχιά ορίζει πλήρως την τροχιά του σημείου; Μπορούμε να βρούμε μια απλή περιγραφή του συνόλου όλων των δυνατών συμβολικών τροχιών; Και, το πιο σημαντικό, μπορούμε να μάθουμε οτιδήποτε σχετικά με την δυναμική του συστήματος διερευνώντας τις συμβολικές του τροχιές; Οι απαντήσεις σἀυτές τις ερωτήσεις εξαρτώνται όχι μόνο απο την φύση του συστήματος, αλλά και απο την συνετή επιλογή της διαμέρισης που θα επιλέξουμε.

Θα δούμε δύο απλά παραδείγματα στο μοναδιαίο διάστημα I που θα μελετήσουμε και στο επόμενο κεφάλαιο. Θεωρούμε την συνάρτηση f που στέλνει το $x \in I$ στο $\{2x\}$ το κλασματικό μέρος του $2x$. Μας ενδιαφέρει η τροχιά $x, f(x), f(x)^2 = f(f(x)), \ldots$. Αν θέλαμε να ανιχνεύσουμε αυτήν την τροχιά σε μία οθόνη υπολογιστή θα αρχίζαμε αναλύοντας το διάστημα σε 2^{10} pixels. Παρόλα αυτά, θα ικανοποιηθούμε με μία πιό χονδροειδή διακριτοποίηση του χώρου: θα χωρίσουμε το I σε δύο μέρη, το $I_0 = [0, \frac{1}{2})$ και το $I_1 = [\frac{1}{2}, 1)$. Δίνουμε στο x μία συμβολική τροχιά $x_0x_1x_2...$ όπου το x_i είναι 0 ή 1 ανάλογα με το αν η $f(x)^i$ βρίσκεται στο I_0 ή I_1. Μία μικρή θεώρηση της συμβολικής τροχιάς που υποθέσαμε θα μας δείξει ότι η έκφραση $.x_0x_1x_2...$ είναι απλά μια δυαδική επέκταση του αριθμού x. Ως εκ τούτου το x ορίζεται πλήρως απο την συμβολική του τροχιά. Βλέπουμε τώρα ότι μπορούμε να ανακτήσουμε το συνεχές I απο την χονδροειδή δίτιμη διαμέριση μας, αν παρατηρήσουμε την εξέλιξη του συστήματος μας για όλο τον χρόνο.

Τι συμβολικές τροχιές θα εμφανιστούν σε αυτό το σχήμα; Όλες οι δυαδικές ακολουθίες εκτός αυτών που τελειώνουν σε 111.... Αυτή η περίεργη όμως εξαίρεση μπορεί να αρθεί δουλεύοντας αντ'αυτού με κλειστά διαστήματα $I = [0, 1], I_0 = [0, \frac{1}{2}], I_1 = [\frac{1}{2}, 1]$, και απεικονίζοντας ακολουθίες σε σημεία αντί για το αντίθετο. Αρχίζοντας με μία δυαδική ακολουθία $x_0x_1x_2...$, μπορούμε να την αντιστοιχήσουμε με ένα μοναδικό σημείο:

$$x = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-i}(I_{x_i}) \tag{1.6}$$

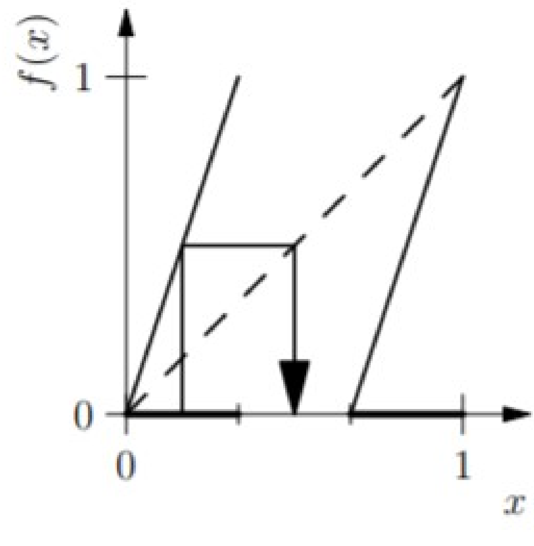
που έχει αυτό το συμβολικό δρομολόγιο. Τότε, για παράδειγμα, το $\frac{1}{2}$ θα προκύψει απο δύο συμβολικές τροχιές, που αντιστοιχούν σε δύο συμβολικές επεκτάσεις $\frac{1}{2} = .1000\cdots = .0111\cdots$. Είναι κοινή πρακτική στην εφαρμογή των συμβολικών τεχνικών, να θυσιάζεται η αυστηρή 1-1 αντιστοιχία για μία απλούστερη περιγραφή του συνόλου των συμβολικών τροχιών.

Η απεικόνιση μας τώρα έχει μία πολύ ευχάριστη συμβολική αναπαράσταση. Αν $x = .x_0x_1x_2...$ τότε $f(x) = \{2x\} = .x_1x_2x_3....$ Μετατοπίζουμε την συμβολική ακολουθία προς τα αριστερά και αφαιρούμε το αρχικό σύμβολο. Το κλειδί στην χρησιμότητα των συμβολικών δυναμικών είναι ότι η δυναμική δίνεται απο μία απλή μετατόπιση συντεταγμένων. Οι δυναμικές ιδιότητες που μπορεί να μας φάνηκαν ανέφικτες στην αρχική μας τοποθέτηση τώρα φαίνονται υλοποιήσιμες. Για παράδειγμα, μπορούμε άμεσα να αναγνωρίσουμε τα σημεία της περιόδου 3 (δηλαδή όταν $f^3(x) = x$). Είναι τα οχτώ σημεία με επαναλαμβανόμενες συμβολικές τροχιές $x_0x_1x_2x_0x_1x_2....$ Να σημειώσουμε ότι το σύνολο των σημείων με συμβολική αναπαράσταση που αρχίζει με κάποια σταθερή αρχική συμβολοσειρά $x_0x_1x_2...x_n$ είναι το δυαδικό διάστημα $[k/2^{n+1}, (k+1)/2^{n+1}]$, όπου $k = x_0 2^n + x_1 2^{n-1} + \cdots + x_n$. Η τροχιά ενός σημείου είναι πυκνή στο I, και επισκέπτεται κάθε διάστημα, ασχέτως του πόσο μικρό είναι, αν και μόνο αν η συμβολική ακολουθία περιέχει όλες τις πιθανές πεπερασμένες συμβολοσειρές απο 0 και 1.

Ως παραλλαγή του πρώτου παραδείγματος, θεωρούμε την απεικόνιση $g(x) = \{\gamma x\}$ στο I, όπου $\gamma = (1+\sqrt{5})/2$. Υποθέτουμε ότι $I_0 = [0, \frac{1}{\gamma}]$ και $I_1 = [\frac{1}{\gamma}, 1]$. Αφού $\gamma = 1 + \frac{1}{\gamma}$, έχουμε $g(I_0) = I$ και $g(I_1) = I_0$. Ένα σημείο που προσγειώνεται στο I_1 με κάποια επανάληψη της g πρέπει να μετακινηθεί στο I_0 στην επόμενη επανάληψη. Στην πραγματικότητα, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι το σύνολο των συμβολικών τροχιών είναι ακριβώς το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών που δεν περιέχουν την συμβολοσειρά 11.

Η συμβολική τροχιά $x_0x_1x_2...$ αντιστοιχεί σε μία επέκταση σειράς $x = x_0\gamma^{-1} + x_1\gamma^{-2} + \cdots$. Επεκτάσεις αριθμών ως προς μία μη ακέραια βάση β καλούνται *beta επεκτάσεις*.

Στο εξής και μέχρι το τέλος αυτού του κεφαλαίου θα μιλήσουμε για ένα fractal σύνολο, το σύνολο Cantor. Στο επόμενο κεφάλαιο, θα συνεχίσουμε την ανάλυση μας σε αυτό το σύνολο όταν μιλήσουμε για τον χώρο μετατόπισης. Ισώς, και μέχρι αυτήν την στιγμή δεν έχει δοθεί ξεκάθαρα η έννοια του fractal. Είναι κατά κάποιο τρόπο ένα σύνολο που περιέχει αντίγραφα του εαυτού του, σε αυθαίρετα μικρές κλίμακες. Το σύνολο Cantor είναι ίσως το πρώτο παράδειγμα που θα μελετήσει κάποιος όταν αρχίζει να ασχολείται με fractals, εξαιτίας της απλότητας τους.



Σχήμα 1.1: Μία κατά τμήματα συνεχής απεικόνιση.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, την απεικόνιση f η οποία φαίνεται στην εικόνα (1.1), η οποία ορίζεται γραμμικά σε κάθε ένα απο τα διαστήματα $I_1 = [0, \frac{1}{3}]$ και $I_2 = [\frac{2}{3}, 1]$ ούτως ώστε οι εικόνες και των δύο διαστημάτων να είναι το σύνολο $f(I_1) = f(I_2) = [0,1]$. Έτσι το πεδίο ορισμού της f είναι το $D = I_1 \cup I_2$, και το σύνολο τιμών της το $[0,1]$. Να σημειώσουμε ότι το σύνολο τιμών δεν είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού-το σύνολο $I_1 \cup I_2$ δεν μένει ίδιο υπό την επίδραση της f, και επομένως η f δεν ορίζεται σε κάθε σημείο του συνόλου τιμών. Το διάγραμμα της εικόνας δείχνει μία επανάληψη στην τροχιά του σημείου 1/6, του οποίου η εικόνα βρίσκεται εκτός του πεδίου ορισμού της f, και ως εκ τούτου δεν μπορεί να γίνει καμία επιπλέον επανάληψη αυτού.

Αν δεν μπορούμε να κάνουμε επαναλήψεις δεν μπορούμε να μελετήσουμε την δυναμική της f, επομένως χρειάζεται να εξετάσουμε ποια σημεία επιδέχονται μία δεύτερη επανάληψη. Δηλαδή, ποιο είναι το πεδίο ορισμού στο οποίο η απεικόνιση $f^2 = f \circ f$ είναι ορισμένη;

Ουτως ώστε η τιμή $f^2(x_0)$ να είναι ορισμένη, και το x_0 και το $f(x_0)$ πρέπει να βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της f· δηλαδή, πρέπει να έχουμε:

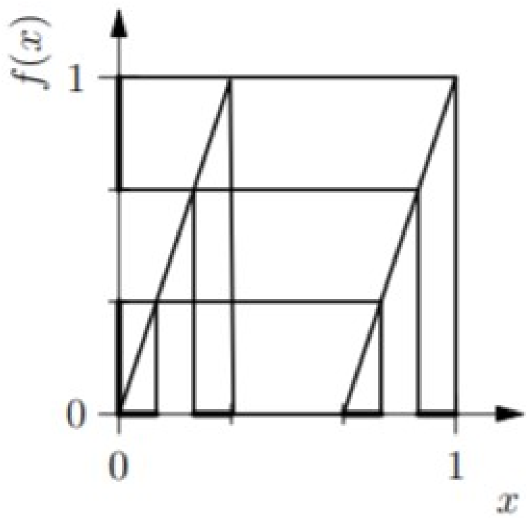
$$x_0 \in D \cap f^{-1}(D) = \{x | x \in D \text{ και } f(x) \in D\}. \tag{1.7}$$

Αυτό φαίνεται γραφικά στην Εικόνα (1.2), τοποθετόντας το πεδίο ορισμού D στον κάθετο άξονα, βρίσκουμε την εικόνα $f^{-1}(D)$ ακολουθώντας κάθε οριζόντια γραμμή μέσω του D σε *όλα* τα σημεία που τέμνεί το γράφημα της f, και μετά κοινούμενοι κάθετα απο αυτά τα σημεία τομής στον $x-$άξονα. Βλέπουμε ότι το πεδίο ορισμού της f^2 είναι ορισμένο απο τα τέσσερα κλειστά διαστήματα, κάθε ένα απ'αυτά με μήκος 1/9. Συμβολίζουμε αυτά τα διαστήματα ως:

$$\begin{array}{l} I_{11}\left[0, \ \ \frac{1}{9}\right], I_{21}\left[\frac{2}{3}, \ \ \frac{7}{9}\right] \\ I_{12}\left[\frac{2}{9}, \ \ \frac{1}{3}\right], I_{21}\left[\frac{8}{9}, \ \ 1\right] \end{array} \tag{1.8}$$

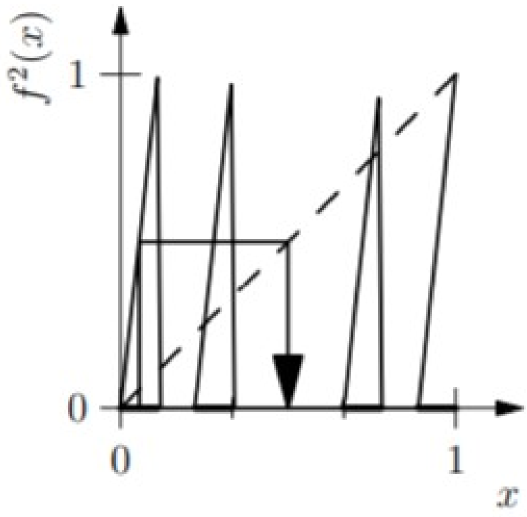
και βλέπουμε ότι $f(I_{11}) = f(I_{21}) = I_1$ και $f(I_{12}) = f(I_{22}) = I_2$, και ότι $f^2(I_{11}) = f^2(I_{12}) = f^2(I_{21}) = f^2(I_{22}) = [0, 1]$. Παρατηρούμε ότι τα διαστήματα $I_{i_1 i_2}$ μπορούν να οριστούν σε όρους της δράσης της f ως εξής:

$$I_{i_1 i_2} = I_{i_1} \cap f^{-1}(I_{i_2}). \tag{1.9}$$



Σχήμα 1.2: Μία κατά τμήματα συνεχής απεικόνιση.

Αποδώσαμε το πεδίο ορισμού της f αφαιρώντας το (ανοικτό) μεσαίο τρίτο απο το διάστημα [0,1], και αφήνοντας τα δύο κλειστά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3}$. Το πεδίο ορισμού της f^2 αποδίδεται αφαιρώντας το (ανοικτό) μεσαίο τρίτο καθενός διαστήματος, και αφήνοντας τα τέσσερα κλειστά διαστήματα μήκους 1/9. Το γράφημα της f^2 φαίνεται στην Εικόνα (1.3). Σε αυτήν την εικόνα ήδη αναγνωρίζουμε τις αρχές της αυτοομοιότητας, και είναι εύκολο να δούμε ότι το πεδίο ορισμού της f^3 θα περιέχει οκτώ κλειστά διαστήματα μήκους 1/27.



Σχήμα 1.3: Η δεύτερη επανάληψη της f.

Γενικά, ένα επαναληπτικό επιχείρημα δείχνει ότι το πεδίο ορισμού της f^n θα αποτελείται απο 2^n κλειστά διαστήματα κάθε ένα με μήκος 3^{-n}. Σύμφωνα με την (1.9), μπορούμε να τα συμβολίσουμε ως:

$$I_{i_1 i_2 \ldots i_n} = I_{i_1} \cap f^{-1}(I_{i_2}) \cap \cdots \cap f^{-(n-1)}(I_{i_n}), \tag{1.10}$$

όπου κάθε i_k είναι 1 ή 2. Για μία σταθερή τιμή του n, κάθε δύο τέτοια διαστήματα είναι ξένα· αυτό απεικονίζεται ως:

$$I_{i_1 \ldots i_n} \cap I_{j_1 \ldots j_n} = \emptyset \tag{1.11}$$

όποτε $(i_1, ..., i_n) \neq (j_1, ..., j_n)$. Αυξάνοντας το n κατά 1, βλέπουμε απο την κατασκευή ότι:

$$I_{i_1 \ldots i_n} = I_{i_1 \ldots i_n 1} \cup I_{i_1 \ldots i_n 2}. \tag{1.12}$$

Έτσι το πεδίο ορισμού της $n-$οστής επανάληψης της f, δηλαδή η f^n μπορεί να γραφτεί ως:

$$D_n = \bigcup_{(i_1, \ldots, i_n)} I_{i_1 \ldots i_n} \tag{1.13}$$

όπου η ένωση θεωρείται σε όλες τις $n-$πλειάδες με τιμές στο σύνολο δεικτών $\{1, 2\}$. Αφήνοντας το n να πάει στο άπειρο, βλέπουμε ότι το πεδίο ορισμού στο οποίο *κάθε* f^n ορίζεται είναι:

$$C = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{(i_1, \ldots, i_n)} I_{i_1 \ldots i_n} \tag{1.14}$$

που είναι το σύνολο Cantor. Όσον αφορά την δυναμική της απεικόνισης f, η ιδιότητα κλειδί του C είναι ότι είναι το μεγαλύτερο σύνολο που δεν υπόκειται σε κάποια δράση, αντίθετα με τις προσεγγίσεις D_n, για τις οποίες έχουμε $f(D_n) = D_{n+1} \nsubseteq D_n$· ενώ για το σύνολο Cantor έχουμε ότι $f(C) = C$. Επιπλέον, αν $A \subset D$ είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο που δεν υπόκειται σε καμία δράση, όταν $f(A) \subset A$, πρέπει να έχουμε ότι $A \subset C$.

Έτσι αν θέλουμε να μελετήσουμε την δυναμική της f, το 'κατάλληλο' πεδίο ορισμού που θα θεωρούσαμε θα ήταν το σύνολο Cantor. Για να έχουμε μία πρώτη εικόνα του πως συμπεριφέρεται η δυναμική της $f : C \to C$, θεωρούμε δύο διακριτά σημεία $x, y \in C$ που βρίσκονται πολύ κοντά, ουτως ώστε η τιμή $d(x, y)$ να είναι πολύ μικρή. Πόσο μακριά βρίσκονται οι εικόνες τους; Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι έχουμε:

$$d(f(x), f(y)) = 3d(x, y), \tag{1.15}$$

δηλαδή η απόσταση των x, y αυξάνεται κατά έναν παράγοντα 3. Για $n-$οστές επαναλήψεις έχουμε:

$$d(f^n(x), f^n(y)) = 3^n d(x, y), \tag{1.16}$$

δεδομένου ότι οι τροχιές έχουν μείνει κοντά μέχρι τότε· ειδικότερα, αυτό θα ισχύει αν $f^k(x)$ και $f^k(y)$ βρίσκονται στο ίδιο διάστημα I_1 ή I_2 για κάθε $1 \leq k < n$.

Κεφάλαιο 2

Αυτοομοιότητα

2.1 Ύπαρξη αυτοόμοιου συνόλου

Με βάση το Θεώρημα Συστολής της προηγούμενης ενότητας θα αποδείξουμε ότι σε έναν πλήρη μετρικό χώρο, δοθέντος πλήθους συναρτήσεων που είναι συστολές, μπορούμε να διασφαλίσουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα ενός αυτοόμοιου συνόλου.

Θεώρημα 2.1. *Έστω (X,d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $\psi_i : X \mapsto X$ συστολή ως προς την μετρική $d, \forall i = 1, ..., N$. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό μη κενό συμπαγές υποσύνολο K του X που ικανοποιεί την σχέση:*

$$K = \psi_1(K) \cup \psi_2(K) \cup ... \cup \psi_N(K) \tag{2.1}$$

Η παραπάνω σχέση καλείται αυτοόμοια ταυτότητα και το σύνολο K το fractal-γενόμενο απο το σύνολο των συστολών ή το αυτοόμοιο σύνολο ως προς το πεπερασμένο σύνολο συστολών $\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_N\}$. Στο εξής θα το αποκαλούμε αυτοόμοιο σύνολο.

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα βασιζόμενοι στην παρακάτω ιδέα. Θα ορίσουμε την συνάρτηση:

$$\Psi(A) = \bigcup_{1 \leq j \leq N} \psi_j(A), \forall A \subseteq X \tag{2.2}$$

και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό σταθερό σημείο της Ψ, το οποίο θα είναι το αυτοόμοιο σύνολο. Για να το κάνουμε αυτό θα διαλέξουμε ένα κατάλληλο πεδίο ορισμού για την Ψ: $C(X) = \{A :$το A να είναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $X\}$ και άρα η Ψ θα απεικονίζει το $C(X)$ στον εαυτό του.

Πρόταση 2.1 (Hausdorff μετρική). *Αν $A, B \in C(X)$ ορίζουμε:*

$$\delta(A,B) = inf\{r > 0 : B \subseteq U_r(A) \text{ και } A \subseteq U_r(B)\} \tag{2.3}$$

όπου $U_r(A) = \{x \in X : d(x,y) \leq r \text{ για κάποια } y \in A\} = \cup_{y \in A} B_r(y)$. Θα δείξουμε ότι η δ είναι μετρική στον $C(X)$ και επιπλέον ότι αν ο (X,d) είναι πλήρης τότε και ο $(C(X), \delta)$ είναι πλήρης.

Απόδειξη. Οι τιμές της μετρικής δ είναι πάντα θετικές καθώς μιλάμε για το infimum θετικών ποσοτήτων. Θα δείξουμε ότι $\delta(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

- $A = B \Rightarrow \delta(A,B) = 0$.Είναι προφανές.

- $\delta(A,B)=0 \Rightarrow A=B$.Αφού $\delta(A,B)=0$ έπεται ότι για οποιοδήποτε n οσοδήποτε μικρό $A \subseteq U_{1/n}(B)$. Επομένως για οποιοδήποτε $x \in A \Rightarrow x \in U_{1/n}(B)$ και άρα μπορούμε να διαλέξουμε $x_n \in B$ τέτοιο ώστε $d(x,x_n) \leq 1/n$. Όμως το B είναι κλειστό άρα $x \in B$.Επομένως $A \subseteq B$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $B \subseteq A$.

- Για την τριγωνική ανισότητα: Αν $r > \delta(A,B)$ και $s > \delta(B,C)$ τότε $C \subseteq U_{r+s}(A)$ και $A \subseteq U_{r+s}(C)$. Ως εκ τούτου $r+s \geq \delta(A,C)$ και απο αυτό έπεται ότι $\delta(A,B)+\delta(B,C) \geq \delta(A,C)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι αν ο (X,d) είναι πλήρης τότε και ο $(C(X),\delta)$ είναι πλήρης. Έστω η ακολουθία $\{A_n\}_{n\geq 1}$ στον $(C(X),\delta)$. Για την $\{A_n\}_{n\geq 1}$ ορίζουμε $B_n = \overline{\cup_{k\geq n} A_k}$. Πρώτα θα δείξουμε ότι το $B_n \forall n$ είναι συμπαγές. Αφού η B_n είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων αρκεί να δείξουμε ότι το B_1 είναι συμπαγές. Για κάθε $r>0$ μπορούμε να διαλέξουμε m έτσι ώστε $A_k \subseteq U_{r/2}(A_m)$ $\forall k > m$. Αφού το A_m συμπαγές υπάρχει ένα $r/2$-net P του A_m. Μπορούμε άμεσα να πιστοποιήσουμε ότι $\cup_{k\geq n} A_k \subseteq U_{r/2}(A_m) \subseteq \cup_{x\in P}(B_r(x))$. Αφού το σύνολο $\cup_{x\in P}(B_r(x))$ είναι κλειστό, είναι εύκολο να δούμε ότι το P είναι ένα $r-net$ του B_m. Προσθέτοντας $r-nets$ των $A_1, A_2, ..., A_{m-1}$ στο P μπορούμε να παράξουμε ένα $r-net$ του B_1. Ως εκ τούτου το B_1 είναι πλήρως φραγμένο. Επίσης, το B_1 είναι πλήρες επειδη είναι κλειστό υποσύνολο του πλήρους μετρικού χώρου X. Έτσι προκύπτει ότι το B_n είναι συμπαγές. Τώρα καθώς η B_n είναι μια μονοτονικά φθίνουσα ακολουθία απο μη κενά συμπαγή σύνολα, $A = \cap_{n\geq 1}(B_n)$ είναι συμπαγές και μη κενό. Για οποιοδήποτε $r>0$ μπορούμε να διαλέξουμε m έτσι ώστε $A_k \subseteq U_r(A_m)$ για όλα τα $k \geq m$. Τότε $A \subseteq B_m \subseteq U_r(A_m)$. Απο την άλλη πλευρά $A_m \subseteq B_m \subseteq U_r(A)$ για αρκούντως μεγάλο m. Έτσι έχουμε ότι $\delta(A,A_m) \leq r$ για αρκούντως μεγάλα m. Ως εκ τούτου $A_m \to A$ για $m \to \infty$ ως προς την Hausdorff μετρική. Άρα ο $(C(X),\delta)$ είναι πλήρης. □

Χρησιμοποιώντας την Hausdorff μετρική το θεώρημα μπορεί να αναδιατυπωθεί με τον εξής τρόπο:

Θεώρημα 2.2. *Έστω ο (X,d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $\psi_i : X \to X$ συστολή $\forall i = 1,...,n$. Ορίζουμε $\Psi : C(X) \mapsto C(X)$ ως $\Psi(A) = \bigcup_{1\leq i\leq n} \psi_i(A)$. Τότε η Ψ έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο K. Επιπλέον, για οποιοδήποτε $A \in C(X)$, η ακολουθία $\{\Psi^n(A)\}$ συγλίνει στο K καθώς $n \to \infty$ ως προς την Hausdorff μετρική.*

Λήμμα 2.1. *Για $A_1, A_2, B_1, B_2 \in C(X)$,*

$$\delta(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) = max\{\delta(A_1,B_1), \delta(A_2,B_2)\} \tag{2.4}$$

Απόδειξη. Αν $r > max\{\delta(A_1,B_1), \delta(A_2,B_2)\}$ τότε $B_1 \subseteq U_r(A_1)$ και $B_2 \subseteq U_r(A_2)$. Ως εκ τούτου $B_1 \cup B_2 \subseteq U_r(A_1 \cup A_2)$. Απο ένα παρόμοιο επιχείρημα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $A_1 \cup A_2 \subseteq U_r(B_1 \cup B_2)$. Επομένως $r \geq \delta(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$ και αυτό συμπληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα 2.2. *Αν ψ συστολή με αναλογία συστολής r τότε για οποιαδήποτε $A, B \in C(X), \delta(\psi(A),\psi(B)) \leq r\delta(A,B)$.*

Απόδειξη. Αν $B \subseteq U_s(A)$ και $A \subseteq U_s(B)$, $\psi(B) \subseteq \psi(U_s(A)) \subseteq U_{sr}(\psi(A))$. Επίσης απο το ίδιο επιχείρημα προκύπτει ότι $\psi(A) \subseteq U_{sr}(\psi(B))$. Επομένως $\delta(\psi(A),\psi(B)) < rs$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Επομένως η απόδειξη του Θεωρήματος 2.2 θα είναι:

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1 επαναλαμβανόμενα παίρνουμε ότι:

$$\delta(\Psi(A), \Psi(B)) = \delta(\cup_{1\leq j\leq N}\psi_j(A), \cup_{1\leq j\leq N}\psi_j(B)) \leq max_{1\leq j\leq N}\delta(\psi_j(A), \psi_j(B)). \tag{2.5}$$

Απο Λήμμα 2.2 $\delta(\psi_i(A), \psi_i(B)) \leq r_i\delta(A, B)$ όπου r_i είναι η αναλογία συστολής της ψ_i. Αν $r = max_{1\leq i\leq N}r_i$ τότε $\delta(\Psi(A), \Psi(B)) \leq r\delta(A, B)$. Επομένως η Ψ προκύπτει ότι είναι συστολή σε σχέση με την Hausdorff μετρική. Απο Πρόταση 2.1, έχουμε δει ότι ο $(C(X), \delta)$ είναι πλήρης.Και τώρα το Θεώρημα Συστολής υποννοεί άμεσα το Θεώρημα 2.2. □

2.2 Χώρος Μετατόπισης

Ορισμός 2.1. *Η συλλογή όλων των πεπερασμένων λέξεων στο σύνολο συμβόλων $\{1, 2, ..., N\}$ με μήκος $m, m \geq 1$ ορίζεται ως:*

$$W_m = \{1, 2, ..., N\}^m = \{w_1w_2...w_m : w_i \in \{1, 2, ..., N\}\}, \tag{2.6}$$

όπου $w = w_1w_2...w_m, w_i \in \{1, 2, ..., N\}$, είναι η πεπερασμένη λέξη μήκους m στο σύνολο συμβόλων $\{1, 2, ..., N\}$ για οποιοδήποτε $N \in \mathbb{N}$. Αποκαλούμε ως $\emptyset$ την κενή λέξη και $W_0 = \emptyset$. Ορίζουμε επίσης:

$$W_* = \bigcup_{m\geq 1} W_m. \tag{2.7}$$

Ορισμός 2.2. *Η συλλογή όλων των άπειρων ακολουθιών στο σύνολο συμβόλων $\{1, 2, ..., N\}$ είναι:*

$$\Sigma = \{1, 2, ..., N\}^{\mathbb{N}} = \{\omega_1\omega_2... : \omega_i \in \{1, 2, ..., N\}\} \tag{2.8}$$

καλείται χώρος μετατόπισης με N σύμβολα.

Ορισμός 2.3. *(Κλάδοι του Σ) Ορίζουμε τους κλάδους του Σ ως:*

$$\Sigma_k = \{k\omega_2\omega_3...|\omega_2\omega_3... \in \Sigma\} \text{ όπου } k \in \{1, 2, ..., N\}. \tag{2.9}$$

Ορισμός 2.4. *Για οποιαδήποτε ακολουθία $\omega = \omega_1\omega_2... \in \Sigma$ ορίζουμε την προς τα πίσω μετατόπιση:*

$$\sigma : \Sigma \to \Sigma, \sigma(\omega) = \omega_2\omega_3... \tag{2.10}$$

Τότε η απεικόνιση σ καλείται απεικόνιση μετατόπισης. Ορίζουμε επίσης τις προς τα εμπρός μετατοπίσεις $\sigma_k : \Sigma \to \Sigma, k \in \{1, 2, ..., N\}$ με $\omega = \omega_1\omega_2... \in \Sigma$ ως:

$$\sigma_k : \Sigma \to \Sigma, \sigma_k(\omega) = k\omega_1\omega_2... \tag{2.11}$$

2.3 Τοπολογία του Χώρου Μετατόπισης

Σε αυτήν την ενότητα θα ορίσουμε μια μετρική στον χώρο μετατόπισης Σ που θα τον κάνει έναν πλήρη μετρικό χώρο.

Ορισμός 2.5. *Έστω οι ακολουθίες $\omega = \omega_1\omega_2...$, $\tau = \tau_1\tau_2... \in \Sigma$ και $0 < r < 1$. Τότε ορίζουμε:*

$$\rho_r(\omega, \tau) = r^m \tag{2.12}$$

όπου $m + 1 \in \mathbb{N}$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $\omega_1\omega_2...\omega_m = \tau_1\tau_2...\tau_m$ και $\omega_{m+1} \neq \tau_{m+1}$. Επίσης ορίζουμε $\rho_r(\omega, \tau) = 0$ για $\omega = \tau$.

Θεώρημα 2.3. *Η ρ_r είναι μια μετρική στον Σ.*

Απόδειξη. Έστω $\omega, \tau, \kappa \in \Sigma$. Τότε:

1. $\rho_r \geq 0$ εξ' ορισμού.
2. $\omega = \tau \Rightarrow \rho_r(\omega, \tau) = 0$ εξόρισμού. Για την άλλη διεύθυνση αν πάρουμε $\rho_r(\omega, \tau) = 0$ τότε $\omega = \tau$ εξ' ορισμού.
3. $\rho_r(\omega, \tau) = \rho_r(\tau, \omega)$ προφανώς.
4. Έστω $\omega, \tau, \sigma \in \Sigma$ τέτοια ώστε $\omega_1...\omega_k = \tau_1...\tau_k$ με $\omega_{k+1} \neq \tau_{k+1}$ και $\tau_1...\tau_m = \kappa_1...\kappa_m$ με $\tau_{m+1} \neq \kappa_{m+1}$.
   - Περίπτωση 1: Έστω $k > m$. Τότε, $\omega_1\omega_2...\omega_m = \kappa_1\kappa_2...\kappa_m$. Ως εκ τούτου:
   $$\rho_r(\omega, \kappa) = r^m \leq r^k + r^m = \rho_r(\omega, \tau) + \rho_r(\tau, \kappa). \tag{2.13}$$
   - Περίπτωση 2: Έστω $m > k$. Τότε, $\omega_1\omega_2...\omega_k = \kappa_1\kappa_2...\kappa_k$. Ως εκ τούτου:
   $$\rho_r(\omega, \kappa) = r^k \leq r^k + r^m = \rho_r(\omega, \tau) + \rho_r(\tau, \kappa). \tag{2.14}$$
   - Περίπτωση 3: Έστω $k = m$. Τότε:
   $$\rho_r(\omega, \kappa) = r^m \leq r^m + r^m = \rho_r(\omega, \tau) + \rho_r(\tau, \kappa) \tag{2.15}$$

   Επομένως σε οποιαδήποτε περίπτωση:
   $$\rho_r(\omega, \kappa) \leq \rho_r(\omega, \tau) + \rho_r(\tau, \kappa). \tag{2.16}$$

□

Πρόταση 2.2. *Ο Σ είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος ως προς την μετρική ρ_r.*

Απόδειξη. Αφού η ακολουθιακή συμπάγεια χαρακτηρίζει την συμπάγεια σε έναν μετρικό χώρο, θα δείξουμε ότι ο Σ είναι ακολουθιακά συμπαγής ως προς την μετρική ρ_r. Έστω $(\omega^{(n)})_{n\geq 1}$ μια ακολουθία στον Σ. Τότε, διαλέγουμε $\tau = \tau_1\tau_2... \in \Sigma$ επαγωγικά με τον παρακάτω τρόπο. Αρχικά, αφού το σύνολο συμβόλων $\{1, 2, ...N\}$ είναι πεπερασμένο, υπάρχει $\tau_1 \in \{1, 2, ..., N\}$ και ένα άπειρο υποσύνολο $I_1 \subseteq \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\omega_1^{(n)} = \tau_1, \forall n \in I_1$. Έστω n_1 ο ελάχιστος αυτού του άπειρου συνόλου. Τότε, υπάρχει

$\tau_2 \in \{1, 2, ..., N\}$ και ένα άπειρο υποσύνολο $I_2 \subseteq I_1$ τέτοιο ώστε $\omega_2^{(n)} = \tau_2 \forall n \in I_2$. Συνεχίζουμε με επαγωγή και βρίσκουμε $\tau = \tau_1\tau_2... \in \Sigma$ και μια υπακολουθία $(\omega^{(n_i)})_{n_i \geq 1}$ τέτοια ώστε:

$$\omega^{(n_1)} = \tau_1 \omega_2^{(n_1)} \omega_3^{(n_1)} ...$$

$$\omega^{(n_2)} = \tau_1 \tau_2 \omega_3^{(n_2)} ...$$

$$\vdots$$

$$\omega^{(n_i)} = \tau_1 \tau_2 ... \tau_i ...$$

$$\vdots$$

Αφού $\lim_{i\to\infty} \rho_r(\omega^{(n_i)}, \tau) = 0$ η $\omega^{(n_i)}$ συγκλίνει στο $\tau \in \Sigma$. Επομένως για κάθε ακολουθία στον Σ υπάρχει μια υπακολουθία που είναι συγκλίνουσα σε κάποιο στοιχείο του Σ. Άρα ο Σ είναι συμπαγής. □

Πρόταση 2.3. *Ο (Σ, ρ_r) είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος.*

Απόδειξη. Αφού ο (Σ, ρ_r) είναι συμπαγής, θα είναι πλήρης και πλήρως φραγμένος. □

2.4 Αυτοομοιότητα του Χώρου Μετατόπισης Σ

Θεώρημα 2.4. *Θεωρούμε τον πλήρη μετρικό χώρο (Σ, ρ_r). Τότε η σ_i είναι συστολή για κάθε $i \in \{1, 2, ..., N\}$. Επιπλέον, ο Σ είναι ένα αυτοόμοιο σύνολο ως προς το σύνολο των συστολών $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N\}$.*

Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε ότι η σ_i είναι μια συστολή ως προς την ρ_r. Αν $\omega, \tau \in \Sigma$ και $\omega \neq \tau$, τότε:

$$\frac{\rho_r(\sigma_i(\omega), \sigma_i(\tau))}{\rho_r(\omega, \tau)} = \frac{\rho_r(i\omega, i\tau)}{\rho_r(\omega, \tau)} = r \tag{2.17}$$

όπου $\omega_1...\omega_m = \tau_1...\tau_m$ και $\omega_{m+1} \neq \tau_{m+1}$. Επομένως, $sup_{\omega,\tau\in\Sigma} \frac{\rho_r(\sigma_i(\omega),\sigma_i(\tau))}{\rho_r(\omega,\tau)} = r$, για κάποιο σταθερό $0 < r < 1$. Επομένως, η σ_i είναι συστολή για κάθε $i \in \{1, 2, ..., N\}$. Τώρα, αφού το $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N\}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο συστολών στον (Σ, ρ_r), υπάρχει ένα μοναδικό μη κενό συμπαγές υποσύνολο $K \subseteq \Sigma$ απο το Θεώρημα 2.2. Όμως επειδή:

$$\Sigma = \sigma_1(\Sigma) \cup \sigma_2(\Sigma) \cup ... \cup \sigma_N(\Sigma), \tag{2.18}$$

έπεται ότι το $K = \Sigma$ είναι το αυτοόμοιο σύνολο. □

2.5 Σχέση μεταξύ των Σ και K

Απο δω και στο εξής το K θα είναι το αυτοόμοιο σύνολο ως προς το σύνολο συστολών $\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_N\}$ στον πλήρη μετρικό χώρο X.

Ορισμός 2.6. *Για οποιαδήποτε λέξη $w \in W_*$, ορίζουμε:*

$$K_w = \psi_{w_1 w_2 ... w_m}(K), \tag{2.19}$$

όπου $\psi_w = \psi_{w_1} \circ \psi_{w_2} \circ ... \circ \psi_{w_m}$ για $w = w_1 w_2 ... w_m$.

Ορισμός 2.7. *Για οποιαδήποτε λέξη* $\omega = \omega_1\omega_2... \in \Sigma$ *ορίζουμε* $\pi : \Sigma \to K, \omega \mapsto \{\pi(\omega)\} = \cap_{k\geq 1} K_{\omega_1\omega_2...\omega_k}$.

Πρόταση 2.4. *Η* π *είναι συνάρτηση.*

Απόδειξη. Ας δείξουμε για αρχή ότι το σύνολο $\cap_{k\geq 1} K_{\omega_1\omega_2...\omega_k}$ είναι μη κενό. Γνωρίζουμε ότι:

$$K_{\omega_1\omega_2...\omega_k} = \psi_{\omega_1\omega_2...\omega_k}(K) \tag{2.20}$$

Αφού $\psi_{\omega_1\omega_2...\omega_k}(\psi_{\omega_{k+1}}(K)) \subseteq \psi_{\omega_1...\omega_k}(K)$, το $K_{\omega_1...\omega_k}$ είναι εμφωλευμένη φθίνουσα ακολουθία συνόλων για όλα τα $k \in \mathbb{N}$. Επίσης $K_w = \psi_w(K), w = \omega_1...\omega_k$ είναι συμπαγές αφού το K είναι συμπαγές και η ψ_w συνεχής. Απο *Ιδιότητα Πεπερασμένης Τομής* το σύνολο:

$$\cap_{k\geq 1} K_{\omega_1\omega_2...\omega_k} \tag{2.21}$$

είναι μη κενό. Δεύτερον, θα δείξουμε ότι το σύνολο $\cap_{k\geq 1} K_{\omega_1\omega_2...\omega_k}$ περιέχει μόνο ένα σημείο. Για αυτό, θα χρειαστεί να δείξουμε ότι $diam(\cap_{k\geq 1} K_{\omega_1\omega_2...\omega_k}) = 0$. Έστω r_i η αναλογία συστολής της συστολής $\psi_i, i \in \{1, 2, ..., N\}$ και $R = max_{i=1,2,...,N} r_i$. Αφού $diam(\psi_i(K)) \leq r_i diam(K), i \in \{1, 2, ..., N\}$,

$$diam(\psi_i(K)) \leq R diam(K) \tag{2.22}$$

Επομένως, $diam(\psi_{\omega_1...\omega_{k-1}}(\psi_{\omega_k}(K))) \leq R^k diam(K)$. Αν πάρουμε το όριο και των δύο πλευρών καθώς $k \to \infty$, χρησιμοποιώντας το Κριτήριο Παρεμβολής παίρνουμε:

$$\lim_{k\to\infty} diam(K_{\omega_1...\omega_k}) = 0. \tag{2.23}$$

Επίσης, αφού:

$$\lim_{k\to\infty} diam(K_{\omega_1...\omega_k}) = diam(\lim_{k\to\infty} K_{\omega_1...\omega_k}) \tag{2.24}$$

και:

$$\lim_{k\to\infty} K_{\omega_1...\omega_k} = \cap_{k\geq 1} K_{\omega_1...\omega_k} \tag{2.25}$$

έχουμε:

$$diam(\cap_{k\geq 1} K_{\omega_1...\omega_k}) = 0. \tag{2.26}$$

□

Θεώρημα 2.5. *Η* π *είναι μια επί, συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε να μετατίθεται το παρακάτω διάγραμμα,*

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[d, "\pi"'] & \Sigma \arrow[d, "\pi"] \\ K \arrow[r, "\psi_i"'] & K \end{tikzcd} \tag{2.27}$$

δηλαδή, για κάθε $i = 1, 2, ..., N$ *να έχουμε* $\pi \circ \sigma_i = \psi_i \circ \pi$.

Απόδειξη. Ας δείξουμε για αρχή ότι για κάθε $i \in \{1, 2, ..., N\}$ και για κάθε $\omega \in \Sigma$, έχουμε:

$$\pi \circ \sigma_i(\omega) = \psi_i \circ \pi(\omega) \tag{2.28}$$

Πράγματι, απο τον Ορισμό 2.6 έχουμε:

$$\pi(\sigma_i(\omega)) = \cap_{k\geq 1} K_{i\omega_1\omega_2...\omega_k} = \cap_{k\geq 1} \psi_i(\psi_{\omega_1\omega_2...\omega_k}(K)). \tag{2.29}$$

Αφού $\psi_i(\cap_{k\geq 1}K_{\omega_1\omega_2...\omega_k}) \subseteq \cap_{k\geq 1}\psi_i(K_{i\omega_1\omega_2...\omega_k}) = \{x\}$ για κάποιο $x \in K$, προκύπτει ότι:

$$\psi_i(\cap_{k\geq 1}K_{\omega_1\omega_2...\omega_k}) = \cap_{k\geq 1}\psi_i(K_{\omega_1\omega_2...\omega_k}) \tag{2.30}$$

ως εκ τούτου, λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\cap_{k\geq 1}K_{\omega_1\omega_2...\omega_k} = \{\pi(\omega)\}$ έχουμε:

$$\pi(\sigma_i(\omega)) = \psi_i(\cap_{k\geq 1}K_{\omega_1\omega_2...\omega_k}) = \psi_i(\pi(\omega)). \tag{2.31}$$

Τώρα ας δείξουμε ότι η π είναι συνεχής. Έστω, για $\omega, \tau \in \Sigma, \rho_r(\omega,\tau) \leq r^k$. Τότε, $\omega_1\omega_2...\omega_k = \tau_1\tau_2...\tau_k$, και $\omega_{k+1} \neq \tau_{k+1}$ απο τον ορισμό της ρ_r. Για $w = \omega_1...\omega_k = \tau_1...\tau_2$ έχουμε:

$$d(\pi(\omega),\pi(\tau)) = d(\pi(w\omega_{k+1}...),\pi(w\tau_{k+1}...)) = d(\psi_w(\pi(\omega')),\psi_w(\pi(\tau'))), \tag{2.32}$$

όπου $\omega' = \omega_{k+1}\omega_{k+2}...$, και $\tau' = \tau_{k+1}\tau_{k+2}...$. Επίσης, αφού οι ψ_i είναι συστολές για κάθε $i \in \{1,2,...,N\}$, $\psi_{\omega_1...\omega_k}$ είναι επίσης συστολές. Για τις αναλογίες συστολής r_i των ψ_i, έστω $R = max_i r_i$. Τότε, για οποιαδήποτε $k_1, k_2 \in K$:

$$d(\psi_i(k_1),\psi_i(k_2)) \leq Rd(k_1,k_2), \tag{2.33}$$

και:

$$d(\psi_w(\pi(\omega')),\psi_w(\pi(\tau'))) \leq R^k d(\pi(\omega'),\pi(\tau')). \tag{2.34}$$

Επομένως,

$$d(\psi_w(\pi(\omega')),\psi_w(\pi(\tau'))) \leq R^k diam(K). \tag{2.35}$$

Αφού, η διάμετρος $diam(K)$ είναι πεπερασμένη απο το γεγονός ότι ο K είναι συμπαγής, η π είναι συνεχής. Τελικά θα δείξουμε ότι η π είναι επί. Είναι σαφές ότι:

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup ... \cup \Sigma_N. \tag{2.36}$$

Τότε:

$$\pi(\Sigma) = \pi(\sigma_1(\Sigma) \cup \sigma_2(\Sigma) \cup ... \cup \sigma_N(\Sigma)). \tag{2.37}$$

Αφού,

$$\pi(\sigma_1(\Sigma) \cup \sigma_2(\Sigma) \cup ... \cup \sigma_N(\Sigma)) = \pi(\sigma_1(\Sigma)) \cup \pi(\sigma_2(\Sigma)) \cup ... \cup \pi(\sigma_N(\Sigma)), \tag{2.38}$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} \pi(\Sigma) &= \pi(\sigma_1(\Sigma)) \cup \pi(\sigma_2(\Sigma)) \cup ... \cup \pi(\sigma_N(\Sigma)) \\ &= \psi_1(\pi(\sigma_1(\Sigma))) \cup \psi_2(\pi(\sigma_2(\Sigma))) \cup ... \cup \psi_N(\pi(\sigma_N(\Sigma))) \end{aligned} \tag{2.39}$$

Απο το γεγονός ότι το K είναι το μοναδικό αυτοόμοιο σύνολο ως προς το σύνολο συστολών $\{\psi_1,\psi_2,...,\psi_N\}$, παίρνουμε ότι $\pi(\Sigma) = K$. Προκύπτει έτσι ότι η π είναι επί.

□

Πρόταση 2.5. *Αν η π είναι 1-1, τότε είναι ομοιομορφισμός μεταξύ των Σ και K.*

Απόδειξη. Έστω η π 1-1. Αφού η π είναι επί, η π^{-1} υπάρχει. Γνωρίζουμε επίσης ότι η π είναι συνεχής συνάρτηση. Αφου ο Σ συμπαγής και η π συνεχής, και η π^{-1} είναι συνεχής επίσης. Επομένως, η π είναι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ των Σ και K. □

Σχόλιο 2.1. *Το αυτοόμοιο σύνολο K είναι ο χώρος πηλίκο του Σ με την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ορισμένη απο την π. Αν ορίσουμε την σχέση $\sim$ τέτοια ώστε: $\omega \sim \tau \Leftrightarrow \pi(\omega) = \pi(\tau)$, τότε ο χώρος πηλίκο του Σ είναι ομοιομορφικός στον K.*

2.6 Το Σύνολο Επικάλυψης

Ορίζοντας το αυτοόμοιο σύνολο K, μπορεί να ισχύει: $\psi_i(K) \cap \psi_j(K) \neq \emptyset$ για $i \neq j \in S = \{1, 2, ..., N\}$. Με άλλα λόγια, μπορεί να υπάρξουν επικαλύψεις. Τώρα θα ορίσουμε το σύνολο επικάλυψης και κάποια άλλα σύνολα σχετιζόμενα με αυτό.

Ορισμός 2.8. *Έστω K το αυτοόμοιο σύνολο ως προς την συνάρτηση ψ_i, όπου $i \in S = \{1, 2, ..., N\}$. Μετά ορίζουμε τα σύνολα:*

$$\begin{aligned} C_k &= \cup_{i,j \in S, i \neq j}(\psi_i(K) \cap \psi_j(K)), \\ \mathcal{C} &= \pi^{-1}(C_k), \\ \mathcal{P} &= \cup_{n \geq 1} \sigma^n(\mathcal{C}) \text{ και} \\ \mathcal{V}_0 &= \pi(\mathcal{P}) \end{aligned} \tag{2.40}$$

Το C_k είναι το σύνολο επικάλυψης για το K, το $\mathcal{C}$ καλείται κρίσιμο σύνολο και το $\mathcal{P}$ καλείται μετα-κρίσιμο σύνολο.

Τώρα θα χαρακτηρίσουμε την σχέση των συνόλων του συνόλου επικάλυψης C_k με το αυτοόμοιο σύνολο K.

Πρόταση 2.6. *Έστω K το αυτοόμοιο σύνολο ως προς 1-1 συναρτήσεις ψ_i, για $i \in \{1, 2, ..., N\}$ και έστω $\omega, \tau \in \Sigma$ τέτοια ώστε $\omega_1\omega_2...\omega_k = \tau_1\tau_2...\tau_k$ και $\omega_{k+1} \neq \tau_{k+1}$. Τότε $\pi(\omega) = \pi(\tau)$ αν και μόνο αν $\pi(\sigma^k\omega) = \pi(\sigma^k\tau)$.*

Απόδειξη. Έστω $\pi(\omega) = \pi(\tau)$, όπου $\omega, \tau \in \Sigma$ και $\omega_1\omega_2...\omega_k = \tau_1\tau_2...\tau_k$. Τότε, χρησιμοποιώντας την ψ_i k φορές (βλ. Θεώρημα 2.5), έχουμε:

$$\psi_{\omega_1...\omega_k}(\pi(\omega_{k+1})) = \psi_{\omega_1...\omega_k}(\pi(\tau_{k+1})) \tag{2.41}$$

Επειδή οι συναρτήσεις ψ_i είναι 1-1:

$$\pi(\omega_{k+1}) = \pi(\tau_{k+1}) \tag{2.42}$$

και άρα εφαρμόζοντας k φορές την προς τα πίσω μετατόπιση:

$$\pi(\sigma^k\omega) = \pi(\sigma^k\tau) \tag{2.43}$$

Για την άλλη κατεύθυνση, έστω $\pi(\sigma^k\omega) = \pi(\sigma^k\tau)$. Αν πάρουμε την εικόνα και των δύο πλευρών υπο την συνάρτηση $\psi_{\omega_1...\omega_k}$ έχουμε: $\pi(\omega) = \pi(\tau)$. □

Σχόλιο 2.2. *Έστω K το αυτοόμοιο σύνολο ως προς τις 1-1 συστολές $\psi_1, ..., \psi_n$. Αν $\pi(\omega) = \pi(\tau)$ για $\omega, \tau \in \Sigma, \omega \neq \tau$, τότε $\pi(\sigma^n(\omega)) = \pi(\sigma^n(\tau)) \in C_k$, όπου $\omega_1...\omega_n = \tau_1...\tau_n$.*

2.7 Χαρακτηρισμός του Αυτοόμοιου Συνόλου K απο Επαναλαμβανόμενες Συναρτήσεις

Ορισμός 2.9. *Θα ορίσουμε την λέξη $\dot{w}$ ως:*

$$\dot{w} = www... \tag{2.44}$$

όπου $w \in W_* \setminus W_0$.

Θεώρημα 2.6. *Το $\pi(\dot{w})$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της ψ_w. Επιπλέον, το σύνολο των $\pi(\dot{w})$ όπου $w \in W_* \setminus W_0$, είναι πυκνό στο K.*

Απόδειξη. Αφού η ψ_w είναι συστολή σε έναν πλήρη μετρικό χώρο X, έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο απο το Θεώρημα Απεικόνισης Συστολής.

Χρησιμοποιώντας την ισότητα που αποδείξαμε στο Θεώρημα 2.5:

$$\pi(w\dot{w}) = \psi_w(\pi(\dot{w})) \tag{2.45}$$

Επομένως, το $\pi(\dot{w})$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της ψ_w. Τώρα θα δείξουμε ότι το σύνολο των σταθερών σημείων $\pi(\dot{w}), w \in W_*$ είναι πυκνό στο K. Έστω $\omega = \omega_1\omega_2... \in \Sigma$, και $w = \omega_1\omega_2...\omega_k \in W_*$. Αφού, $w = w_1w_2...w_k = \omega_1\omega_2...\omega_k, \rho_r(\omega, \dot{w}) \leq r^k$. Καθώς $k \to \infty$, έχουμε:

$$\rho_r(\omega, \dot{w}) = 0. \tag{2.46}$$

Αφού η π συνεχής $d(\pi(\omega), \pi(\dot{w})) = 0$ καθώς $k \to \infty$. Δηλαδή για οποιοδήποτε $\omega \in \Sigma$ υπάρχει $\pi(\dot{w}), w = \omega_1...\omega_k \in W_*$ τέτοια ώστε $\pi(\dot{w}) \to \pi(\omega), k \to \infty$. Αφού $\pi(\Sigma) = K$:

$$K = \overline{\{\pi(\dot{w}) : w \in W_*, w \neq \emptyset\}}. \tag{2.47}$$

□

2.8 Παραδείγματα Αυτοόμοιων Συνόλων

Σύνολο Cantor Όταν ο Georg Cantor επινόησε το ομώνυμο σύνολο, ήλπιζε στην διευθέτηση της υπόθεσης του συνεχούς κατασκευάζοντας ένα υποσύνολο του διαστήματος του οποίου η cardinality βρισκόταν αυστηρά μεταξύ σε αυτής των ακεραίων και αυτής της γραμμής των πραγματικών. Ενώ δεν επιτεύχθηκε αυτός ο στόχος, όπως θα δούμε το σύνολο Cantor είναι ένα αντικείμενο μεγάλης σημαντικότητας που έχει χρησιμοποιηθεί σε διάφορες περιοχές στα μαθηματικά.

Μία πρώτη ερώτηση είναι: Πόσο μεγάλο είναι το σύνολο Cantor; Φυσικά, χρειάζεται να προσδιορίσουμε την έννοια του 'μεγάλου'. Αφού κάθε βήμα στην κατασκευή περιλαμβάνει διαστήματα, θα δοκιμάσουμε πρώτα την έννοια του μήκους. Στην πρώτη επανάληψη βλέπουμε ότι το D_1 συνίσταται απο δύο διαστήματα μήκους 1/3, και επομένως έχει ολικό μήκος 2/3. Στην επόμενη επανάληψη, τέσσερα διαστήματα μήκους 1/9 δίνουν το D_2 με ολικό μήκος 4/9. Γενικά, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το D_n είναι μία ένωση διαστημάτων με ολικό μήκος $(2/3)^{n}\cdot$ αφού αυτό πάει στο 0 για $n \to \infty$, θα πρεπε να θεωρήσουμε το μήκος του C ως 0. Εναλλακτικά, μπορούμε να κοιτάξουμε τα μήκη των διαστημάτων που αφαιρούνται σε κάθε βήμα, και να δούμε ότι αθροίζουν στο 1.

Από μία πιθανοτική σκοπιά, αυτό σημαίνει ότι αν διαλέξουμε ένα σημείο στο διάστημα [0,1] τυχαία, η πιθανότητα να διαλέξουμε ένα σημείο στο σύνολο Cantor είναι συγκεκριμένα μηδέν. Άρα ίσως το μήκος δεν είναι ο κατάλληλος τρόπος να μετρήσουμε το πόσο μεγάλο είναι το C.

Αφού το C δεν είναι αρκετά μεγάλο ούτως ώστε να έχει θετικό μήκος, μπορούμε να προσπαθήσουμε να το μετρήσουμε με διαφορετικό τρόπο, μετρώντας τον αριθμό των σημείων που περιέχει. Αμέσως βλέπουμε ότι περιέχει άπειρα πολλά σημεία, και επομένως η επόμενη ερώτηση μας είναι το αν είναι αριθμήσιμο η μη αριθμήσιμο. Για να απαντήσουμε σε αυτήν την ερώτηση, παρατηρούμε ότι κάθε σημείο $x \in C$ ορίζει μοναδικά μια ακολουθία $i_1, i_2, ...$, όπου κάθε i_k είναι 1 ή 2, σύμφωνα με τον κανόνα:

$$x \in I_{i_1} \cap I_{i_1 i_2} \cap \cdots \cap I_{i_1 \cdots i_n} \cap \cdots , \tag{2.48}$$

όπου αυτό που κάνουμε είναι να αναρωτηθούμε ποιό διάστημα $I_{i_1 \cdots i_n}$ περιέχει το x σε κάθε βήμα n της επανάληψης. Αυτό ορίζει μία απεικόνιση απο το C στον χώρο των συμβολικών ακολουθιών:

$$\Sigma_2^+ = \{1,2\}^{\mathbb{N}} = \{(i_k)_{k=1}^{\infty} | i_k = 1 \text{ ή } 2, \forall k \geq 1\}. \tag{2.49}$$

Επιπλέον, η αντιστοιχία είναι 1-1 -και δοθέντος μίας οποιασδήποτε ακολουθίας βλέπουμε ότι η τομή:

$$\bigcap_{n=1}^{N} = I_{i_1 \cdots i_n} = I_{i_1 \cdots i_n} \tag{2.50}$$

είναι ένα διάστημα του οποίου το μήκος πάει στο 0 καθώς $N \to \infty$, και επομένως:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} = I_{i_1 \cdots i_n} = \{x\} \tag{2.51}$$

Προκύπτει ότι η ακολουθία $i_1, i_2, ...$ προέρχεται απο ακριβώς ένα σημείο x, και έχουμε δείξει ότι η ακόλουθη *απεικόνιση* είναι 1-1:

$$\begin{aligned} &\pi : \Sigma_2^+ \to C, \\ &\omega = (i_1, i_2, ...) \mapsto \bigcap_{n \geq 1} \bigcap_{n=1} I_{i_1 \cdots i_n}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Στην πραγματικότητα, η απεικόνιση h κάνει πολλά περισσότερα απο το να εγκαθιδρύει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των Σ_2^+ και C, το οποίο μόνο δείχνει ότι τα σύνολα αυτά είναι ίδια απο μία συνολοθεωρητική οπτική. Η αντιστοιχία βρίσκεται πολύ πιο κάτω απ'αυτό, σε μία ισοδυναμία μεταξύ της *δυναμικής* των δύο συνόλων.

Φυσικά, σε αυτό το σημείο δεν έχουμε θέσει καμία δυναμική στο σύνολο Σ_2^+, και έτσι ορίζουμε μια απεικόνιση $\sigma : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$ ουτως ώστε ο προηγούμενος ισχυρισμός να βγάζει νόημα. Ανακαλώντας τον ορισμό των $I_{i_1 \cdots i_n}$ απο την σχέση (1.10), βλέπουμε ότι η κωδικοποίηση ενός σημείου $\omega = (i_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma_2^+$ μπορεί να γραφτεί ως:

$$\pi(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-(n-1)}(I_{i_n}) = I_{i_1} \cap f^{-1}(I_{i_2}) \cap f^{-2}(I_{i_3}) \cap \cdots \tag{2.53}$$

και επομένως:

$$f(\pi(\omega)) = I_{i_2} \cap f^{-1}(I_{i_3}) \cap f^{-2}(I_{i_4}) \cap \cdots = h'(\omega) \tag{2.54}$$

όπου γράφουμε $\omega' = (i_2, i_3, ...)$, και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $f(I_{i_1}) = [0,1]$, και επίσης ότι $f(f^{-1}(X)) = X$ για οποιοδήποτε σύνολο X στο εύρος τιμών της f. Η απεικόνιση η οποία πηγαίνει το ω στο ω' είναι η *απεικόνιση μετατόπισης*:

$$\begin{aligned} &\sigma : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+ \\ &(i_1, i_2, ...) \mapsto (i_2, i_3, ...) \end{aligned} \tag{2.55}$$

με την οποία η (2.54), όπως έχουμε δείξει στην ενότητα 2.5, μπορεί να γραφτεί ως:

$$f \circ h = h \circ \sigma. \tag{2.56}$$

Η σχέση μεταξύ των f, σ που δίνεται απο την σχέση (2.56) μας επιτρέπει να βγάζουμε συμπεράσματα για την δυναμική της f βασισμένα σε ανάλογα αποτελέσματα για την δυναμική της σ.

Για παράδειγμα, μπορεί να αναρωτηθούμε πόσα περιοδικά σημεία έχει η f, δηλαδή πόσες λύσεις υπάρχουν για την εξίσωση $f^m(x) = x$ για έναν σταθερό ακέραιο m. Δύο προφανή περιοδικά σημεία είναι τα 0 και 1, τα οποία είναι σταθερά σημεία της f και άρα είναι άμεσα περιοδικά. Δεν είναι προφανές τι μπορεί να συμβαίνει για μεγάλες τιμές του m, αλλά μπορούμε να πάρουμε τις απαντήσεις σχετικά εύκολα περνώντας στον συμβολικό χώρο. Εδώ βλέπουμε ότι για οποιοδήποτε σταθερό σημείο πρέπει να ισχύει ότι $i_2 = i_1$, και παρόμοια $i_{n+1} = i_n$ για κάθε n. Έτσι τα μόνα σταθερά σημεία είναι τα (1,1,1,...) και (2,2,2,...) που αντιστοιχούν στα 0 και 1, αντίστοιχα. Για $m = 2$, η εξίσωση $\sigma^2(\omega) = \omega$ μας λέει ότι μπορούμε να διαλέξουμε τα i_1 και i_2 να είναι είτε 1 είτε 2, αλλά ότι μετά απ'αυτό θα πρέπει να έχουμε:

$$i_n = \begin{cases} i_1, & n \text{ μονός} \\ i_2, & n \text{ ζυγός} \end{cases} \tag{2.57}$$

Έτσι υπάρχουν τέσσερα σημεία με $\sigma^2(\omega) = \omega$-σε αντίθεση με τα δύο που αναφέρθηκαν παραπάνω, τα (1,2,1,2,...) και (2,1,2,1,...).

Γενικά, οποιαδήποτε ακολουθία ω η οποία επαναλαμβάνεται μετά απο m ψηφία θα ικανοποιεί την σχέση $f^m(\omega) = \omega$, και αφού υπάρχουν 2^m τέτοιες ακολουθίες, έχουμε 2^m περιοδικά σημεία περιόδου m. Περνώντας στο C μέσω της π βλέπουμε ότι η f έχει 2^m περιοδικά σημεία περιόδου m, και επομένως το σύνολο των περιοδικών σημείων είναι μετρήσιμο.

Sierpinski Gasket Ας θεωρήσουμε το σύνολο $X = \mathbb{C}$ με την Ευκλείδεια απόσταση. Ας αρχίσουμε με ένα ισοσκελές τρίγωνο T και έστω $\{P_1, P_2, P_3\}$ οι κορυφές του. Ας ορίσουμε επίσης τις συναρτήσεις $\psi_i(z) = \frac{z-P_i}{2} + P_i, i = 1, 2, 3$. Πρώτα, παρατηρούμε ότι $\psi_i(P_i) = P_i$ και $\psi_i(P_j) = \frac{P_i+P_j}{2}$. Μπορούμε να δούμε ότι αυτός ο μετασχηματισμός στέλνει τις δύο κορυφές σε σημεία στην μέση τους ενώ σταθεροποιεί την μια απο τις κορυφές. Οι ψ_i είναι ομοιότητες. Τότε, μπορούμε να δούμε ότι $\bigcup_{i\in\{1,2,3\}} \psi_i(T) \subset T$. Επομένως $K \subset T$. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευής, στο πρώτο βήμα αφαιρούμε το εσωτερικό του μεσάιου τριγώνου και παραμένουν τρία ισοσκελή τρίγωνα. Αν συνεχίσουμε την διαδικασία για κάθε τρίγωνο ξεχωριστά, το σύνολο που παίρνουμε ως όριο είναι το Sierpinski gasket. Τώρα θα εξηγήσουμε τι έχουμε πετύχει με τον συμβολισμό που ορίσαμε. Καθώς το P_i είναι το σταθερό σημείο της ψ_i, όπου $i \in \{1, 2\}, P_i = \pi(\dot{i})$. Επομένως, $P_1 = \pi(\dot{1})$ και $P_2 = \pi(\dot{2})$. Αν αποκαλέσουμε το μέσαιο σημείο του τμήματος $\overline{P_1P_2}$ του T ως q_3, τότε $f_1(\pi(\dot{2})) = f_2(\pi(\dot{1})) = q_3$. Άρα, $\{1\dot{2}, 2\dot{1}\} \subseteq \pi^{-1}(q_3)$. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $\pi^{-1}(q_3) \subseteq \{1\dot{2}, 2\dot{1}\}$. Επομένως,

$$\pi^{-1}(q_3) = \{1\dot{2}, 2\dot{1}\}. \tag{2.58}$$

Με τον ίδιο τρόπο,

$$\pi^{-1}(q_2) = \{1\dot{3}, 3\dot{2}\} \text{ και } \pi^{-1}(q_1) = \{2\dot{3}, 3\dot{2}\}. \tag{2.59}$$

Τώρα, απ'όλα αυτά μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για $\omega, \tau \in \Sigma, \omega \neq \tau$ τέτοια ώστε $\pi(\omega) = \pi(\tau)$, υπάρχει $w \in W_*$ τέτοια ώστε:

$$\{\omega, \tau\} = \{w1\dot{2}, w2\dot{1}\} \text{ ή } \{w1\dot{3}, w3\dot{2}\} \text{ ή } \{w2\dot{3}, w3\dot{2}\} \tag{2.60}$$

Hata's Tree-like Set Ας θεωρήσουμε $X = \mathbb{C}$ με την Ευκλείδεια απόσταση. Ας ορίσουμε επίσης $f_1(z) = c\overline{z}, f_2(z) = (1-|c|^2)\overline{z} + |c|^2$ για όλα τα $z \in \mathbb{C}$ και $|c|, |1-c| \in (0,1)$. Το αυτοόμοιο σύνολο K ως προς το σύνολο συναρτήσεων $\{f_1, f_2\}$ καλείται Hata's tree-like set. Αφού οι f_1 και f_2 είναι ομοιότητες, μπορούμε να τις αναπαραστήσουμε με πίνακες. Για $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ και $c = c_1 + ic_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$f_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & -c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, f_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-|c|^2 & 0 \\ 0 & |c|^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} |c|^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.61}$$

Σημειώνουμε ότι αφού οι f_1, f_2 είναι ομοιότητες, απεικονίζουν ευθείες γραμμές σε ευθείες γραμμές. Για την προσέγγιση του Hata's tree-like set, ας ορίσουμε:

$$A = \{t | 0 \leq t \leq 1\} \cup \{ct | 0 \leq t \leq 1\}, \text{ όπου } |c|, |1-c| \in (0,1). \tag{2.62}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} &f_1(0) = 0 = \pi(\dot{1}), \text{ και } f_2(1) = 1 = \pi(\dot{2}), \\ &f_1(1) = c = \pi(1\dot{2}), f_2(0) = |c|^2 = \pi(2\dot{1}) = \pi(11\dot{2}) = f_1(c), \\ &f_2(c) = (1-|c|^2)\overline{c} + |c|^2 = \pi(21\dot{2}). \end{aligned} \tag{2.63}$$

Ως εκ τούτου: $A \subset f_1(A) \cup f_2(A)$. Τώρα αν ορίσουμε:

$$A_m = \bigcup_{w \in W_m} f_w(A), \tag{2.64}$$

τότε, η A_m είναι μια μονοτονικά αύξουσα ακολουθία και το οριακό σύνολο:

$$K = \overline{\bigcup_{m \geq 0} A_m} \tag{2.65}$$

είναι το Hata's tree-like set. Τώρα, έστω $k_1, k_2 \in K$. Τότε, υπάρχει $(x_m)_{m\geq 0}, (y_m)_{m \geq 0} \in \bigcup_{m\geq 0} A_m$ τέτοια ώστε $x_m \to k_1$ και $y_m \to k_2$ καθώς $m \to \infty$. Αφού το A είναι φραγμένο και η f_w συστολή, το A_m είναι φραγμένο. Επομένως, $d(x_m, y_m) \leq diam(A_m) \forall m \geq 0$. Τώρα απο Τριγωνική Ανισότητα:

$$d(k_1, k_2) \leq d(k_1, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, k_2) \leq \epsilon, \tag{2.66}$$

για αρκούντως μεγάλο m. Επομένως, το K είναι φραγμένο. Αφού επίσης το K είναι κλειστό, είναι και συμπαγές.

Koch Curve Έστω $X = \mathbb{C}$ και T ένα τριγωνικό πεδίο με το σύνορο του. Έστω επίσης και το σύνολο των κορυφών T $\{0, a, 1\}$, όπου $a \in \{z | z \in \mathbb{C}, |z|^2 + |1-z|^2 < 1\}$. Ας ορίσουμε τώρα $f_1(z) = a\overline{z}$ και $f_2(z) = (1-a)(\overline{z} - 1) + 1$.

Η κατασκευή της καμπύλης του Koch αρχίζει χωρίζοντας κάθε γραμμικό τμήμα σε τρία ίσα τμήματα αντικαθιστώντας το μεσαίο τμήμα με δύο πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου στο οποίο οι πλευρές έχουν το ίδιο μήκος όπως το τμήμα που αφαιρέθηκε. Η καμπύλη Koch είναι το οριακό σύνολο που είναι μια πραγματική καμπύλη αφού υπάρχει ένας ομοιομορφισμός μεταξύ του διαστήματος $[0,1]$ (για $a = \frac{1}{2}$) και του εαυτού του. Επομένως, είναι συμπαγές.

Τώρα:

$$\begin{aligned} &f_1(0) = 0, f_1(a) = |a|^2, f_1(1) = a, \text{ και} \\ &f_2(0) = a, f_2(1) = 1, f_2(a) = |1-a|^2 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Από αυτά, μπορούμε να δούμε ότι $f_1(T) \cup f_2(T) \subseteq T$. Ως εκ τούτου, το αυτοόμοιο σύνολο $K_a \subseteq T$. Επίσης:

$$\begin{aligned} &\pi(\dot{1}) = 0, \pi(\dot{2}) = 1 \text{ και} \\ &\pi(1\dot{2}) = \pi(2\dot{1}) = a. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Για $a = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}}$ το K_a καλείται καμπύλη Koch.

Κεφάλαιο 3

Μέτρο και Ενέργεια

3.1 Προσέγγιση αυτοόμοιων συνόλων

Στον συνήθη διαφορικό λογισμό μαθαίνουμε ότι οι συνεχείς δομές μπορούν να προσεγγιστούν απο διακριτές. Για παράδειγμα, η παράγωγος είναι το όριο των διαφορικών πηλίκων, το ολοκλήρωμα είναι το όριο των αθροισμάτων Riemann, κ.ο.κ. Η αρχική μας διαίσθηση είναι ότι οι διακριτές δομές είναι απλούστερες απο τις συνεχείς, αλλά σύντομα διαπιστώνουμε το αντίθετο: οι κανόνες παραγώγισης είναι απλούστεροι απο τους αντίστοιχους κανόνες παραγώγισης για διαφορικά πηλίκα, και το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού μας επιτρέπει να υπολογίζουμε πολύ εύκολα τα περισσότερα ολοκληρώματα. Στα σύνολα μας, λοιπόν, θα χρησιμοποιήσουμε την τακτική των διακριτών προσεγγίσεων. Το σχέδιο μας είναι να αναπτύξουμε αυτήν την προσέγγιση ταυτόχρονα για τα δύο παραδείγματα που ήδη αναφέραμε: το μοναδιαίο διάστημα I το Sierpinski Gasket SG.

Ο συνήθης ορισμός των παραγώγων περιλαμβάνει αυθαίρετες προσαυξήσεις, και τα αθροίσματα Riemann στον ορισμό του ολοκληρώματος επιτρέπουν αυθαίρετες υποδιαιρέσεις του διαστήματος. Στην περίπτωση μας αρκεί να μπορούμε να ασχοληθούμε με τα δυαδικά σημεία $k/2^m$ όπου $0 \leq k \leq 2^m$ και $0 \leq m \leq \infty$. Αυτά τα σημεία είναι πυκνά στο διάστημα όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο, και αφού όλες οι συναρτήσεις με τις οποίες έχουμε να κάνουμε είναι συνεχείς, αρκεί να γωρίζουμε τις τιμές τους σε αυτά τα σημεία. Για να δούμε πως αυτά τα δυαδικά σημεία προκύπτουν φυσικά χρειάζεται να εξετάσουμε την αυτοόμοια δομή του I και αργότερα του SG.

Δείξαμε ήδη ότι αν θεωρήσουμε ως $C(X)$ το σύνολο όλων των μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και εφοδιάσουμε αυτό το σύνολο με την μετρική Haussdorf $\delta(C_1, C_2)$, όπου $C_1, C_2 \in C(X)$, όπως περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι ο μετρικός χώρος $(C(X), \delta)$ είναι πλήρης. Επίσης αν θεωρήσουμε την απεικόνιση $\Psi : C(X) \to\ C(X)$ ορισμένη ως:

$$\Psi(C) = \bigcup_{i=1}^{k} \psi_i(C) \tag{3.1}$$

ισχύει το Θεώρημα Συστολής:

Θεώρημα 3.1. *Η Ψ είναι μια συστολή του $(C(X), \delta)$, ως εκ τούτου έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο K, και επιπλέον, $\Psi^n(A) \to K, n \to +\infty$ για κάθε $A \in C(X)$.*

Επομένως είμαστε στην εξής κατάσταση: Μας έχει δοθεί πεπερασμένο πλήθος ομοιοτήτων $\psi_1, ..., \psi_k$ στον $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, οι οποίες είναι συστολές δηλαδή έχουν παράγοντες $r_1, ..., r_k < 1$. Τότε υπάρχει $K \subseteq \mathbb{R}^n$ μη κενό και συμπαγές για το οποίο ισχύει ότι $K = \bigcup_{i=1}^{k} \psi_i(K)$. Έστω συμβολίζουμε με T το αρχικό μας σύνολο (I ή SG). Σε κάποιες περιπτώσεις, μπορούμε να δώσουμε έναν καλύτερο χαρακτηρισμό της ακολουθίας $\Psi^n(A)$. Για παράδειγμα, αν $T \in C(X)$ είναι τέτοιο ώστε $\Psi(T) \subseteq T$, εύκολα βλέπουμε από αναδρομή ότι η $\Psi^n(T)$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία απο σύνολα. Προκύπτει ότι $\bigcap_{n=0}^{\infty} \Psi^n(T) = K$. Αν επιπλέον θέσουμε όπου $\Psi^n(T) = K_n$ βρίσκουμε ότι $K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$. Επομένως, είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε τις παρακάτω ισότητες, τουλάχιστον για τα σύνολα που έχουμε αναφέρει ως τώρα:

$$K_0 = T, K_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{k} \psi_i(K_n), K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n \tag{3.2}$$

Ας προσεγγίσουμε, για αρχή το I. Οι συναρτήσεις ψ_1 και ψ_2 που έχουμε ήδη προαναφέρει είναι συστολικές ομοιότητες με αναλογία $\frac{1}{2}$ και σταθερά σημεία 0 και 1. Οι εικόνες $\psi_1(I)$ και $\psi_2(I)$ τέμνονται στο σημείο $\frac{1}{2}$. Η αυτοόμοια ταυτότητα στην περίπτωση του I είναι:

$$I = \psi_1(I) \cup \psi_2(I). \tag{3.3}$$

Η παραπάνω ταυτότητα δεν είναι η μόνη αυτοόμοια ταυτότητα για το I. Αν $w = (w_1, w_2, ..., w_m)$ είναι η πεπερασμένη λέξη μήκους $m = |w|$ μπορούμε να αποδώσουμε το σύνολο I ως:

$$I = \bigcup_{|w|=m} \psi_w(I) \tag{3.4}$$

για κάθε $m \geq 1$. Η συνάρτηση ψ_w είναι η ήδη γνωστή μας, απο τον Ορισμό 2.6, $\psi_w = \psi_{w_1} \circ ... \circ \psi_{w_m}$. Αποκαλούμε την σχέση αυτή *αποσύνθεση επιπέδου* m και η (3.4) δεν είναι τίποτα άλλο απο την αποσύνθεση του I σε δυαδικά διαστήματα $[k/2^m, (k+1)/2^m]$. Το $\psi_w(I)$ καλείται *κελί επιπέδου* m. Τα δυαδικά σημεία είναι απλά τα συνοριακά σημεία των κελιών διαφόρων επιπέδων. Αλλά μπορούμε να εκφράσουμε το κελί και με τον εξής τρόπο: Αν ορίσουμε το σύνολο των συνοριακών σημείων του I ως $V = V^{(0)} = \{P_1, P_2\}$ όπου $P_1 = 0, P_2 = 1$ τότε τα σύνολα:

$$V_{i_1,...,i_n} = \psi_{i_1,...,i_n}(V^{(0)}) \tag{3.5}$$

για $i_1, ..., i_n = 1, 2$, όπου $\psi_{i_1,...,i_n}$ είναι μια συντόμευση της συνάρτησης $\psi_{i_1} \circ \psi_{i_2} \circ ... \circ \psi_{i_n}$, είναι τα n-κελιά, και είναι κατά κάποιο τρόπο μικρά αντίγραφα του $V^{(0)}$, και πιο συγκεκριμένα τα αντίγραφα του $V^{(0)}$ στο $n-$οστό βήμα. Μπορούν επίσης να ερμηνευθούν και ως τα σύνολα των συνοριακών σημείων των διαστημάτων ή των κορυφών των τριγώνων $\psi_{i_1,...,i_n}(T)$, που είναι τα αντίγραφα του T στο $n-$οστό βήμα. Πιο γενικά, αν θέσουμε $A_{i_1,...,i_n} = \psi_{i_1,...,i_n}(A)$ για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Θα αποκαλούμε $A_{i_1,...,i_n}$ το ($n^{th}A$) αντίγραφο.

Μετά απ' αυτούς τους ορισμούς μπορούμε να ορίσουμε τα σύνολα:

$$V^{(n)} = \bigcup_{i_1,...,i_n=1}^{2} V_{i_1,...,i_n}, V^{(\infty)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} V^{(n)} \tag{3.6}$$

ή επαγωγικά μπορούμε να δούμε ότι στο $n-$επίπεδο το σύνολο $V^{(n)}$ για το I δίνεται ως:

$$V^{(n)} = \bigcup_{i=1}^{2} \psi_i(V^{(n-1)}) \tag{3.7}$$

ή ισοδύναμα:

$$V^{(n)} = \bigcup_{|w|=n} \bigcup_{i=1}^{2} \psi_w(P_i) \tag{3.8}$$

Από την σχέση (3.7) βλεπουμε επίσης ότι $V^{(n)} \subseteq V^{(n+1)}$. Αν συμβολίσουμε με F το σύνολο των σταθερών σημείων των ψ_i αν $\emptyset \neq V \subseteq F$, βλέπουμε ότι $V \subseteq \Psi(V)$, επομένως η $\Psi^n(V) =: V^{(n)}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία, και έτσι βλέπουμε ότι:

$$K = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} V^{(n)}}. \tag{3.9}$$

Επομένως είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει:

$$V^{(0)} \subseteq K \subseteq T. \tag{3.10}$$

Εκτός απο τα συνοριακά σημεία, δηλαδή το σύνολο $V^{(0)}$, κάθε σημείο στο $V^{(m)}$ έχει δύο διευθύνσεις, $x = \psi_w(P_1) = \psi_{w'}(P_2)$, για κατάλληλες επιλογές λέξεων w και w', επομένως το x είναι το αριστερό συνοριακό σημείο του ενός κελιού και το δεξί ενός γειτονικού κελιού. Αποκαλούμε αυτά τα σημεια γειτονικά σημεία (στο εξής junction points).

Ένας γράφος στο $m-$επίπεδο είναι ένα ζεύγος $(V^{(m)}, \Gamma_m)$ όπου το $V^{(m)}$ είναι ένα μη κενό σύνολο και το Γ_m είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των υποσυνόλων του $V^{(m)}$ που έχουν ακριβώς δύο στοιχεία. Τα στοιχεία του Γ_m καλούνται πλευρές του γράφου. Θα λέμε ότι τα $P, Q \in V^{(m)}$ είναι κοντά (στον $(V^{(m)}, \Gamma_m)$) αν το $\{P, Q\}$ είναι πλευρά. Θα λέμε ότι τα $P, Q \in V^{(m)}$ είναι συνδεδεμένα (στον $(V^{(m)}, \Gamma_m)$) αν υπάρχουν $n = 1, 2, ..., P_1, ..., P_n \in V$ τέτοια ώστε $P_1 = P, P_n = Q$, και $\{P_i, P_{i+1}\} \in \Gamma_m$ για $i = 1, ..., n-1$. Σε μία τέτοια περίπτωση, θα πούμε ότι το $(P_1, ..., P_n)$ είναι ένα μονοπάτι που συνδέει τα P και Q (στον $(V^{(m)}, \Gamma_m)$) και έχει μήκος n.Θα λέμε ότι ο $(V^{(m)}, \Gamma_m)$ είναι συνδεδεμένος, αν οποιαδήποτε δύο σημεία στο $V^{(m)}$ είναι συνδεδεμένα. Όταν το $V^{(m)}$ δεν περιέχει ενδιάμεσα σημεία μπορούμε να το αποκαλούμε ως Γ_m, και να λέμε για παράδειγμα ότι ο Γ_m είναι συνδεδμένος.

Θα θεωρήσουμε τα σύνολα $V^{(m)}$ ως τις κορυφές του γράφου Γ_m, με πλευρές που ικανοποιούν την σχέση $x \sim_m y$ δεδομένου ότι $x = k/2^m$ και $y = (k+1)/2^m$. Ισοδύναμα $x \sim_m y$ αν υπάρχει κάποιο κελί του επιπέδου m που να περιέχει και το x και το y (ως συνοριακά σημεία). Επαγωγικά, χτίζουμε τον γράφο Γ_m απο τον γράφο Γ_{m-1} παίρνοντας τις δύο εικόνες $\psi_1(\Gamma_{m-1})$ και $\psi_2(\Gamma_{m-1})$ και αναγνωρίζοντας την κοινή τους κορυφή $\frac{1}{2}$. Παρόλα αυτά, οι σχέσεις των πλευρών αλλάζουν: Αν τα σημεία x, y ανήκουν στο $V^{(m)}$ και $x \sim_m y$, τότε τα x, y ανήκουν και τα δύο στο $V^{(m+1)}$ αλλά δεν είναι συνδεδεμένα απο μία μόνο πλευρά στον γράφο Γ_{m+1}. Επίσης αυτό που παρατηρούμε είναι ότι κάθε junction point στον γράφο Γ_m του I έχει ακριβώς δύο γειτονικά σημεία στο $V^{(m)}$.

Ας δούμε τώρα την περίπτωση του SG. Η αυτοόμοια δομή του SG μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν μια φυσική γενίκευση της αυτοόμοιας δομής του I. Αυτήν την φορά δουλεύουμε στο επίπεδο και θεωρούμε ένα σύνολο τριών απεικονίσεων $\psi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, i = 1, 2, 3$, ορισμένες ως:

$$\psi_i(x) = P_i + \frac{1}{2}(x - P_i) \tag{3.11}$$

όπου $\{P_i\}$ οι κορυφές ένος τριγώνου (οποιοδήποτε μη εκφυλισμένο τρίγωνο ταιριάζει στην περίπτωση μας). Τότε το SG ικανοποιεί την αυτοόμοια ταυτότητα:

$$SG = \bigcup_{i=1}^{3} \psi_i(SG) \tag{3.12}$$

Όπως στην περίπτωση του I, η απεικόνιση ψ_i είναι μία συστολική ομοιότητα με αναλογία συστολής $\frac{1}{2}$ και σταθερό σημείο P_i. Επίσης, το SG είναι το μοναδικό μη κενό συμπαγές σύνολο που ικανοποιεί την σχέση (3.12). Τα τρία κελιά στο δεξί μέλος της (3.12) τέμνονται ανά ζεύγη σε ξεχωριστά σημεία. Αυτό σημαίνει ότι ενώ το SG είναι συνδεδεμένο, ουσιαστικά δεν είναι. Αν αφαιρούσαμε απλά αυτά τα τρία junction points θα κατέληγε μη συνδεδεμένο.

Είναι σημαντικό να έχουμε κατά νου ότι αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ είναι μόνο η τοπολογική δομή, και όχι η γεωμετρική δομή που κληρονομήθηκε απο την ενσωμάτωση του SG στο επίπεδο. Γι΄ αυτό δεν μας ενδιαφέρει με ποιο τρίγωνο θα ξεκινήσουμε. Ειδικότερα, παρότι το SG περιέχει γραμμικά τμήματα, δεν χρησιμοποιούμε ιδέες του συνήθη λογισμού που προέρχονται απο περιορισμό των συναρτήσεων στο SG σε αυτά τα γραμμικά τμήματα. Ίσως θα μπορούσαμε να εισάγουμε μια φυσική μετρική στο SG που να μην είναι ισοδύναμη με την Ευκλείδεια μετρική (σε οποιαδήποτε ενσωμάτωση σε οποιονδήποτε Ευκλείδειο χώρο). Επίσης, παρότι η 'Ευκλείδεια' διαίσθηση μας βλέπει ως σύνορο του SG το τρίγωνο (αφού το SG δεν έχει εσωτερικό, ή με αλλά λόγια το εσωτερικό του είναι κενό, η τοπολογική έννοια του συνόλου δεν είναι σχετική με αυτήν που ισως νομίζουμε), θα ορίσουμε το σύνορο να είναι το σύνολο $\{P_1, P_2, P_3\}$ των κορυφών του τριγώνου.

Για να μπορούμε να συζητήσουμε τα σύνολα I και SG ταυτόχρονα, θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το σύμβολο K με το οποίο θα συμβολίζουμε ένα (είτε αργότερα και άλλα) αυτοόμοιο σύνολο. Οι αυτοόμοιες ταυτότητες (3.3) και (3.12) μπορούν να συνδυαστούν ως:

$$K = \bigcup_{i} \psi_i(K) \tag{3.13}$$

Με επανάληψη έχουμε:

$$K = \bigcup_{|w|=m} \psi_w(K), \tag{3.14}$$

όπου η ψ_w είναι ορισμένη όπως πριν, αλλά σε αυτήν την περίπτωση τα γράμματα w_j της λέξης w μπορούν να πάρουν τις τιμές $\{1, 2, 3\}$. Αυτή θα είναι η αποσύνθεση μας του K σε κελιά του επιπέδου m. Στην περίπτωση του SG όπως και στο I, διαφορετικά κελιά του επιπέδου m είναι είτε ξένα είτε τέμνονται σε ένα σημείο· αυτά τα σημεία θα είναι τα junction points μας. Αντιθέτα με το μοναδιαίο διάστημα, τα junction points είναι τοπολογικά ξεχωριστά απο τα γενικότερα σημεία. Για το SG παίρνουμε ως $V^{(0)} = \{P_1, P_2, P_3\}$. Οι σχέσεις (3.7) και (3.8) μπορούν να μετασχηματιστούν ανάλογα για να ορίζουν το $V^{(n)}$ και στην περίπτωση του SG:

$$V^{(n)} = \bigcup_{i=1}^{3} \psi_i(V^{(n-1)}) \tag{3.15}$$

και ισοδύναμα:

$$V^{(n)} = \bigcup_{|w|=n} \bigcup_{i=1}^{3} \psi_w(P_i) \tag{3.16}$$

Να σημειώσουμε ότι κάθε σημείο στο $V^{(n)} \setminus V^{(0)}$ είναι ένα junction point με δύο διευθύνσεις, $x = \psi_w(P_i) = \psi_{w'}(P_{i'})$ για κατάλληλες επιλογές λέξεων w, w'(πάντα με $i \neq i'$). Ειδικότερα τα,

$$\psi_1(P_2) = \psi_2(P_1), \psi_2(P_3) = \psi_3(P_2), \psi_3(P_1) = \psi_1(P_3) \tag{3.17}$$

είναι τα τρία junction points στο $V^{(1)} \setminus V^{(0)}$ στην περίπτωση του SG. Κατασκευάζουμε έναν γράφο Γ_m με κορυφές $V^{(m)}$ ορίζοντας μια σχέση πλευρών $x \sim_m y$ αν υπάρχει ένα κελί επιπέδου m που να περιέχει και το x και το y (ισοδύναμα αν υπάρχει w με $|w| = m$ και i, j τέτοια ώστε $x = \psi_w(P_i)$ και $y = \psi_w(P_j)$). Στην περίπτωση του SG, ο γράφος Γ_m αποδίδεται παίρνοντας τα τρία αντίγραφα $\psi_i(\Gamma_{m-1})$ του Γ_{m-1} και αναγνωρίζοντας τα σημεία της εξίσωσης (3.17).

Στο SG κάθε κορυφή στο $V^{(m)}$, εκτός των τριών συνοριακών σημείων, έχει ακριβώς τέσσερις γειτονιές στο $V^{(m)}$. Υπάρχουν φορές που η ύπαρξη του συνόρου είναι τεχνικά ενοχλητική, άλλα μπορούμε εύκολα να την ξεφορτωθούμε περνώντας στο διπλό κάλυμμα $\widetilde{K}$. Δηλαδή να πάρουμε δύο αντίγραφα του K και να τα ενώσουμε στα κοινά τους συνοριακά σημεία. Αν το κάνουμε αυτό για το I θα πάρουμε έναν κύκλο, δηλαδή μια μονοδιάστατη πολλαπλότητα χωρίς σύνορο. Τα ενωμένα συνοριακά σημεία στο $\widetilde{SG}$ έχουν γειτονιές που είναι ομοιομορφικές με γειτονιές οποιουδήποτε junction point στο SG. Με αυτόν τον τρόπο, το $\widetilde{SG}$ είναι το παράδειγμα μιας 'fractal-πολλαπλότητας' χωρίς σύνορο μοντελοποιημένης στο SG. Στους γράφους $\widetilde{\Gamma}_m$ (δύο αντίγραφα του γράφου Γ_m ενωμένα μαζί στα αντίστοιχα συνοριακά σημεία τους), κάθε κορυφή έχει ακριβώς τέσσερις γειτονιές. Με άλλα λόγια, ο γράφος είναι τετρα-κανονικός.

3.2 Αυτοόμοια μέτρα

Η έννοια ενός γενικού μέτρου είναι μια γενίκευση εννοιών όπως το μήκος, το εμβαδόν, ο όγκος και η πιθανότητα. Εξαιτίας της αυτοόμοιας δομής του K και της δήλωσης μας ότι θα αχοληθούμε με ολοκλήρωση μόνο σε συνεχείς συναρτήσεις, καλύτερα να μιμηθούμε τα ολοκληρώματα του Cauchy και Riemann παρά το ολοκλήρωμα του Lebesque.

Θέλουμε να εξετάσουμε τι είναι αυτό που αποκαλούμε *κανονικό μέτρο πιθανότητας μ στο σύνολο K*. Μιλώντας πιο απλά, η συνάρτηση μ αποδίδει βάρη $\mu(C)$ σε όλα τα κελιά C του K με μια προσθετική τάση. Συγκεκριμένα, απαιτούμε η μ να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

$$\mu(C) > 0 \text{ (θετικότητα)} \tag{3.18}$$

αν $C = \bigcup_{j=1}^{N} C_j$ όπου τα κελιά $\{C_j\}$ τέμνονται μόνο σε συνοριακά σημεία, τότε

$$\mu(C) = \sum_{j=1}^{N} \mu(C_j) \text{ (προσθετικότητα)} \tag{3.19}$$

$$\mu(C) \longrightarrow 0 \text{ για } C \longrightarrow 0 \text{ (συνέχεια)} \tag{3.20}$$

$$\mu(K) = 1 \text{ (πιθανότητα)} \tag{3.21}$$

Η συνθήκη (3.20) μας λέει ότι τα σημέια έχουν μέτρο 0, και αυτό μας αφήνει να αγνοούμε τις τομές των σημείων στην συνθήκη (3.19). Μπορούμε να επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού της μ έτσι ώστε να περιλαμβάνει πεπερασμένες ενώσεις κελιών: Αν

$$A = \bigcup_{j=1}^{N} C_j \tag{3.22}$$

είναι μια πεπερασμένη ένωση κελιών, μη συνδεδεμένων εκτός των σημείων τομής, ορίζουμε:

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{N} \mu(C_j) \tag{3.23}$$

Η συνθήκη (3.19) μας εγγυάται ότι όντως συμβαίνει το παραπάνω: Μια διαφορετική αποσύνθεση σε κελιά θα απέδιδε το ίδιο μέτρο. Για να το δούμε αυτό, πρώτα παρατηρούμε ότι υπάρχει μια μοναδική κανονική αποσύνθεση του A σε μια ένωση κελιών μεγίστου μεγέθους (δηλαδή ένα κελί έστω C να μην περιέχεται σε κάποιο μεγαλύτερο κελί στο A). Πράγματι, εξαιτίας της ιδιότητας εμφώλευσης (nesting property), τα μεγαλύτερα σε μέγεθος κελιά στο A είναι μη συνδεδεμένα (εκτός απο τις τομές σημείων) και η ένωση τους είναι το A. Επομένως κάθε άλλη αναπαράσταση του A παράγεται με υποδιαίρεση των μέγιστων κελιών με κάποιο τρόπο, και η (3.19) μας λέει ότι το μέτρο διατηρείται στην διαδικασία. Η συνθήκη προσθετικότητας (3.19) συνεχίζει να ισχύει για σύνολα που μπορούν να αναπαρασταθούν ως μια πεπερασμένη ένωση συνόλων.

Παρόμοια επιχειρηματολογία δείχνει ότι αντί της σχέσης (3.19) αρκεί να πιστοποιήσουμε για κάθε κελί $\psi_w(K)$ ότι:

$$\mu(\psi_w(K)) = \sum_{i} \mu(\psi_w(\psi_i(K))) \tag{3.24}$$

δηλαδή την προσθετικότητα για την αποσύνθεση του $\psi_w(K)$ σε κελιά του επομένου επιπέδου. Η κατασκευή της συνάρτησης μ μπορεί μετά να σχηματιστεί ως εξής: Δίνουμε βάρος 1 στο SG, το κελί του επιπέδου 0. Επαγωγικά, έχοντας δώσει βάρος σε όλα τα κελιά του επιπέδου m, αποφασίζουμε πως θα διαμερίσουμε το βάρος του κάθε τέτοιου κελιού όταν το υποδιαιρούμε σε κελιά στο επίπεδο $m+1$. Οι μόνοι περιορισμοί είναι ότι οι σχέσεις (3.24) και (3.18) ισχύουν για την διαμέριση και η (3.20) ισχύει για το όριο. Επομένως είναι εύκολη η δυνατότητα επιλογής ενός μέτρου.

Η πιο απλή επιλογή είναι να γίνουν όλες οι διαμερίσεις ομοιόμορφα. Στην περίπτωση του I, κάθε κελί του επιπέδου m έχει μέτρο 2^{-m}, το συνήθες μήκος του. Βασικά, αν το A είναι οποιοδήποτε διάστημα με δυαδικά συνοριακά σημεία, τότε η τιμή $\mu(A)$

είναι το μήκος του A. Στην περίπτωση του SG, κάθε κελί του επιπέδου m θα έχει μέτρο 3^{-m}. Αναφερόμαστε σε αυτό το μέτρο ώς το *τυπικό μέτρο (στο ϵξής standard measure)*.

Το *standard measure* είναι μια ειδική περίπτωση ενός *αυτοόμοιου* μέτρου. Για να ορίσουμε ένα αυτοόμοιο μέτρο διαλέγουμε ένα σύνολο απο βάρη πιθανοτήτων $\{\mu_i\}$ στο σύνολο δεικτών $\{1,2\}$ ή $\{1,2,3\}$, όπου για τα βάρη ισχύει:

$$\sum_i \mu_i = 1 \text{ με } \mu_i > 0, \tag{3.25}$$

και μετά θέτουμε:

$$\mu(\psi_w(K)) = \prod_{j=1}^{m} \mu_{w_j} \text{ για } |w| = m \tag{3.26}$$

Για απλότητα γράφουμε μ_w για το δεξί μέλος της (3.26). Ένας άλλος τρόπος να το πούμε αυτό είναι ότι χρησιμοποιούμε βάρη $\{\mu_i\}$ για να ολοκληρώσουμε την διαμέριση (3.24). Το standard measure παράγεται διαλέγοντας όλα τα μ_i ίσα, έτσι ώστε $\mu_i = \frac{1}{2}$ για το I και $\mu_i = \frac{1}{3}$ για το SG.

Για ένα αυτοόμοιο μέτρο, κάθε απεικόνιση ψ_i απεικονίζει μέτρα συνόλων σε έναν παράγοντα μ_i,

$$\mu(\psi_i(A)) = \mu_i \mu(A) \tag{3.27}$$

κάτι που είναι προφανές για τα κελιά απο την (3.26). Ένας άλλος τρόπος να εκφραστεί αυτό είναι πάιρνοντας ένα σύνολο A και χωρίζοντας το σε $\bigcup_i A \cap \psi_i(K)$, και μετά απο προσθετικότητα,

$$\mu(A) = \sum_i \mu(A \cap \psi_i(K)) \tag{3.28}$$

Όμως $\psi_i^{-1}(A) = \psi_i^{-1}(A \cap \psi_i(K))$ και $A \cap \psi_i(K) = \psi_i(\psi_i^{-1}(A \cap \psi_i(K)))$, επομένως $\mu(A \cap \psi_i(K)) = \mu_i \mu(\psi_i^{-1}(A \cap \psi_i(K)))$ απο (3.27). Τα τελευταία μαζί δείχνουν πως $\mu(A \cap \psi_i(K)) = \mu_i \mu(\psi_i^{-1}(A))$. Με αντικατάσταση στην (3.28) παίρνουμε την αυτοόμοια ταυτότητα:

$$\mu(A) = \sum_i \mu_i \mu(\psi_i^{-1}(A)) \tag{3.29}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η (3.29) υποδηλώνει την (3.27)(αν αντικαταστήσουμε το A με $\psi_i(A)$, τότε μόνο ένας όρος επιβιώνει στο δεξί μέλος) και ως εκ τούτου την (3.26), έτσι η αυτοόμοια ταυτότητα (3.29)(και η συνθήκη πιθανότητας (3.21) ορίζουν μοναδικά το μέτρο μ.

Ένας απο τους κύριους λόγους για να θέλουμε να έχουμε ένα μέτρο είναι για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Αφού οι συναρτήσεις που πρόκειται να ολοκληρώσουμε είναι συνήθως συνεχείς, αυτό είναι εύκολα επιτεύξιμο μιμούμενοι τα συνήθη ολοκληρώματα στον λογισμό: Υποδιαιρούμε τον χώρο σε μια ένωση απο ουσιαστικά αποσυνδεδεμένα μικρά σύνολα $\{A_j\}$ και παίρνουμε το όριο των αθροισμάτων $\sum_j f(x_j)\mu(A_j)$, όπου $x_j \in A_j$. Αφού η f είναι συνεχής, και ως εκ τούτου ομοιόμορφα συνεχής στο συμπαγές σύνολο K, η επιλογή του σημείου $x_j \in A_j$ δεν έχει σημασία για τον υπολογισμό του ορίου.

Στις προϋποθέσεις μας υπάρχει μια φυσική επιλογή απο υποδιαιρέσεις,

$$K = \bigcup_{|w|=m} \psi_w(K) \tag{3.30}$$

που είναι μια διαμέριση σε όλα τα κελιά του επιπέδου m. Τότε:

$$\int_K f d\mu = \lim_{m\to\infty} \sum_{|w|=m} f(x_w)\mu(\psi_w(K)) \tag{3.31}$$

για $x_w \in \psi_w(K)$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε οτι το όριο υπάρχει και ικανοποιεί τις συνήθεις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων: δηλαδή την γραμμικότητα στην συνάρτηση f και την εκτίμηση:

$$\min_K f \le \int_K f d\mu \le \max_K f \tag{3.32}$$

Αν A είναι μια πεπερασμένη ένωση κελιών, μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_A f d\mu$ περιορίζοντας σε κελιά που περιέχονται στο A στο δεξί μέλος της σχέσης (3.31). Σε αναλογία με τον συνήθη τραπεζοειδή κανόνα μπορούμε να αντικαταστήσουμε την τιμή $f(x_w)$ με τον μέσο όρο των τιμών της f στα συνοριακά σημεία του κελιού,

$$\int_K f d\mu = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \sum_{|w|=m} f(\psi_w(P_i))\mu(\psi_w(K)) \tag{3.33}$$

στην περίπτωση του SG. Αυτό είναι το πλεονέκτημα της έκθεσης ενός ολοκληρώματος ως όριο ολοκληρωμάτων σε διακριτούς γράφους. Δοθέντος ενός γράφου, αν δώσουμε πιθανότητες $v(x)$ στις κορυφές, γράφουμε:

$$\int_\Gamma f dv = \sum_{x\in V} f(x)v(x) \tag{3.34}$$

Τότε η (3.33) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\int_K f d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_{\Gamma_m} f dv_m \tag{3.35}$$

όπου ως $v_m(x)$ ορίζουμε:

$$\frac{1}{3}(\mu(\psi_w(K)) + \mu(\psi_{w'}(K))) \text{ αν } x \in V^{(m)} \setminus V^{(0)} \tag{3.36}$$

και το σημείο x έχει τις διευθύνσεις $x = \psi_w(P_i) = \psi_{w'}(P_j)$ και $\frac{1}{3}\mu(\psi_i^m(K))$ αν $x = P_i$. Για το standard measure αυτό είναι απλά ίσο με:

$$\int_{\Gamma_m} f dv_m = 3^{-m} \left(\frac{2}{3} \sum_{x\in V^{(m)}/V^{(0)}} f(x) + \frac{1}{3} \sum_{x\in V^{(0)}} f(x) \right) \tag{3.37}$$

Θα μπορούσαμε να αφαιρέσουμε τους όρους του αθροίσματος στα συνοριακά σημεία αφού αυτά τα αθροίσματα πηγαίνουν στο 0 όταν εφαρμόζουμε το όριο. Παρόλα αυτά είναι σημαντικό να τους συμπεριλάβουμε. Ο παράγοντας $\frac{2}{3}$ στο δεξί μέλος της (3.37) θα παίξει έναν σημαντικό ρόλο στην σημειακή σχέση για την Λαπλασιανή.

Στην περίπτωση του διαστήματος I, αν χρησιμοποιήσουμε το standard measure παίρνουμε το συνήθες ολοκλήρωμα. Για άλλες περιπτώσεις μέτρων παίρνουμε διαφορετικά ολοκληρώματα. Υπάρχει ένα θεώρημα που λέει ότι $\int_I f d\mu = \int_0^1 f \circ \theta(x) dx$ για μια βολική επιλογή μιας συνεχούς συνάρτησης θ (που εξαρτάται μόνο απο το μ), αλλά αυτή η συνάρτηση θα είναι πολύ μη κανονική και σίγουρα όχι διαφορίσιμη.

Αν θεωρήσουμε την συγκεκριμένη περίπτωση μιας συνάρτησης f τέτοιας ώστε: $\int_K f d\mu = 1$, τότε η συνάρτηση:

$$v(A) = \int_A f d\mu \tag{3.38}$$

ορίζει ένα διαφορετικό μέτρο. Το μέτρο v καλείται *απόλυτα συνεχές* ως προς μ. Βασικά, ο σωστός ορισμός απαιτεί να επιτρέψουμε μια ευρύτερη κλάση συναρτήσεων, που να περιλαμβάνουν μη συνεχείς και μη φραγμένες συναρτήσεις. Είναι εύλογο το ερώτημα αν μπορούμε με μια τέτοια κατασκευή να περάσουμε απο το ένα αυτοόμοιο μέτρο στο άλλο, αλλά βασικά αυτό δεν είναι πιθανό. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτό είναι απίθανο χρησιμοποιώντας μια φραγμένη συνάρτηση f, αφού υπάρχουν πολλά κελιά με την αναλογία $\mu'(C)/\mu(C)$ να είναι μεγαλύτερη απο οποιαδήποτε καθορισμένη σταθερά, αν τα μ και μ' είναι διαφορετικά αυτοόμοια μέτρα.

Παρατηρούμε ότι είναι πιθανό να μετασχηματίσουμε την αυτοόμοια ταυτότητα (3.29) σε μια ταυτότητα που να περιλαμβάνει ολοκληρώματα συναρτήσεων. Πράγματι, αν $f = \chi_A$, η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A (όχι πραγματικά συνεχής, άλλα έχοντας μόνο ένα πεπερασμένο σύνολο ασυνεχειών, έτσι ώστε το ολοκλήρωμα να μπορεί να οριστεί όπως προηγουμένως), τότε η σχέση:

$$\int_K f d\mu = \sum_i \mu_i \int_K f \circ \psi_i d\mu \tag{3.39}$$

είναι ίδια με την (3.29) ($f \circ \psi_i = \chi_{\psi_i^{-1}A}$). Παίρνοντας γραμμικούς συνδυασμούς και περνώντας στο όριο, προκύπτει ότι η σχέση (3.39) ισχύει για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις.

3.3 Κατασκευή Ενέργειας στο I

Δοθέντος μιας συνάρτησης $u : V^{(0)} \to \mathbb{R}$ ορίζουμε την ενέργεια σε δύο σημεία του συνόλου να είναι ίση με:

$$E(u) = \sum_{1 \le j_1 \le j_2 \le 2} (u(P_{j_1}) - u(P_{j_2}))^2. \tag{3.40}$$

Αν έστω G ένας πεπερασμένος, συνδεδεμένος γράφος, σύμφωνα με την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ που έχουμε ορίσει για τα σημεία του γράφου στην ενότητα 3.1 μπορούμε να γράψουμε την ενέργεια του γράφου ως:

$$E_G(u) = \sum_{x \sim y} (u(x) - u(y))^2 \tag{3.41}$$

Εδώ το άθροισμα εκτείνεται σε όλες τις πλευρές του γράφου. Εάν επρόκειτο να αθροίσουμε πρώτα σε όλες τις κορυφές x και μετά σε όλες τις γειτονικές κορυφές y τότε κάθε πλευρά θα αθροιζόταν 2 φορές και θα έπρεπε να αποζημιώσουμε πολλαπλασιάζοντας με τον παράγοντα $\frac{1}{2}$. Η ενέργεια είναι τετραγωνική μορφή στην u οπότε για ζεύγη συναρτήσεων μπορούμε να ορίσουμε την διγραμμική μορφή:

$$E_G(u, v) = \sum_{x \sim y} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) \tag{3.42}$$

Σημειώνουμε εδώ ότι $E(u) \geq 0$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η u είναι σταθερή. Το ευθύ είναι προφανές. Το αντίστροφο στην περίπτωση των γράφων ισχύει υποθέτοντας ότι ο γράφος G είναι συνδεδεμένος. Φυσικά ισχύει ότι $E_G(u,u) = E_G(u)$, και μπορούμε να ανακτήσουμε την διγραμμική μορφή απο την τετραγωνική μορφή και την συνήθη πολική ταυτότητα:

$$E_G(u,v) = \frac{1}{4}(E_G(u+v) - E_G(u-v)) \tag{3.43}$$

Στο εξής θα κάνουμε την κατασκευή της ενέργειας στο μοναδιαίο διάστημα χρησιμοποιώντας την ενέργεια σε έναν γράφο, ορισμένη όπως στην σχέση (3.41). Ωστόσο στο επόμενο κεφάλαιο θα κατασκευάσουμε την ενέργεια στο SG χρησιμοποιώντας την σχέση (3.40) ως ενέργεια. Και στις δύο περιπτώσεις θα αποδείξουμε ότι η Dirichlet μορφή που κατασκευάσαμε είναι μία καλή Dirichlet μορφή. Θα δώσουμε στην επόμενη ενότητα τον ορισμό μίας καλής Dirichlet μορφής.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο γράφους, G και G', τέτοιους ώστε $V \subseteq V'$. Θα σκεφτούμε τον G ως έναν υπογράφο του G'. (Δεν κάνουμε καθόλου υποθέσεις όσον αφορά τις πλευρές των G και G').Δοθέντος μιας συνάρτησης u' στο V', μπορούμε πάντα να την περιορίσουμε για να πάρουμε μια συνάρτηση $u = u'|_V$ στο V. Δεν υπάρχει προς το παρόν καμία προφανής σχέση μεταξύ των ενεργειών $E_{G'}(u')$ και $E_G(u)$. Αν πάρουμε την άλλη κατεύθυνση, αρχίζοντας με την u ορισμένη στο V, υπάρχουν πολλές πιθανές επεκτάσεις στο V'. Είναι σαφές ότι υπάρχει τουλάχιστον μια επέκταση που ελαχιστοποιεί την ενέργεια $E_{G'}(u')$. Θα συμβολίζουμε ως $\widetilde{u}$ μια τέτοια επέκταση που ελαχιστοποιεί την ενέργεια και θα την αποκαλούμε *αρμονική επέκταση (harmonic extension)* (στα παραδείγματα που θα μελετήσουμε θα υπάρχει μια μοναδική τέτοια επέκταση): $\widetilde{u}|_V = u$ και $E_{G'}(\widetilde{u}) \leq E_{G'}(u')$ για όλες τις u' για τις οποίες ισχύει $u'|_V = u$. Θα αποκαλούμε την $E_{G'}(\widetilde{u})$ *περιορισμό (restriction)* της $E_{G'}$ στο G.

Τώρα, μπορεί αν είμαστε τυχεροί, ο περιορισμός της $E_{G'}$ στο G να είναι ίσος με ένα πολλαπλάσιο της E_G δηλαδή:

$$E_{G'}(\widetilde{u}) = rE_G(u) \tag{3.44}$$

για όλες τις συναρτήσεις u στο $V^{(0)}$. Αποκαλούμε την σχέση (3.44) εξίσωση επανακανονικοποίησης (*renormalization equation*). Γενικά $0 < r < 1$. Αυτό σημαίνει ότι αν κανονικοποιήσουμε τον ορισμό της ενέργειας στο G' πολλαπλασιάζοντας με $1/r$, ο περιορισμός στην G δίνει την ίδια τιμή, $r^{-1}E_{G'}(\widetilde{u}) = E_G(u)$, και αφού η $\widetilde{u}$ είναι μια συνάρτηση ελαχιστοποίησης, έχουμε:

$$r^{-1}E_{G'}(u') \geq E_G(u) \tag{3.45}$$

για κάθε επέκταση u' της u. Με άλλα λόγια, η ενέργεια αυξάνεται με την επέκταση, εκτός της περίπτωσης της αρμονικής επέκτασης, οπου παραμένει ίδια.

Είναι αρκετά βολικό να κάνουμε την παραπάνω παραδοχή για την ενέργεια, και η υπόθεση βρίσκει εφαρμογή στον γράφο Γ_m και στο I και στο SG. Θα δούμε όπως είπαμε την περίπτωση του I για αρχή. Ο πρώτος γράφος Γ_0 απλά αποτελείται απο τις κορυφές $\{0,1\}$ συνδεδεμένες με μια πλευρά, ενώ ο Γ_1 αποτελείται απο τις τρείς κορυφές $\{0,\frac{1}{2},1\}$ συνδεδεμένες ακολουθιακά. Άρα η ενέργεια στον γράφο Γ_0 δίνεται ξεκάθαρα απο την σχέση:

$$E_0(u) = (u(1) - u(0))^2 \tag{3.46}$$

και αν θεωρήσουμε την u' ως επέκταση της u:

$$E_1(u') = \left(u'(1) - u'\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(u'\left(\frac{1}{2}\right) - u'(0)\right)^2 \tag{3.47}$$

Στόχος μας είναι να βρούμε την αρμονική επέκταση για την οποία αναφέραμε πιο πριν ότι $\widetilde{u}|_V = u$, επομένως $\widetilde{u}(1) = u(1)$ και $\widetilde{u}(0) = u(0)$, και άρα το μόνο θέμα μας είναι ποια είναι η τιμή του $\widetilde{u}\left(\frac{1}{2}\right)$. Για να ελαχιστοποιήσουμε την $E_1(u')$ και άρα να παράξουμε την αρμονική επέκταση, φαίνεται ξεκάθαρα ότι θα πρέπει να έχουμε την τιμή:

$$\widetilde{u}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(u(1) + u(0)) \tag{3.48}$$

δηλαδή την γραμμική επέκταση (θέτουμε όπου $x = u'(\frac{1}{2})$ και βρίσκουμε την τιμή όπου η παράγωγος ως προς x μηδενίζεται). Αν αντικαταστήσουμε αυτήν την τιμή στην σχέση (3.47) θα διαπιστώσουμε ότι προκύπτει η εξίσωση επανακανονικοποίησης με $r = \frac{1}{2}$:

$$E_1(\widetilde{u}) = \frac{1}{2}E_0(u). \tag{3.49}$$

Με επαγωγή ας δούμε τι συμβαίνει όταν πάμε απο τον γράφο Γ_m στον γράφο Γ_{m+1}. Το σύνολο $V^{(m+1)}$ αποτελείται απο όλα τα σημεία της μορφής $\frac{k}{2^{m+1}}$, και ανάμεσα σ' αυτά, αυτά τα οποία έχουν k ζυγό αριθμό ανήκουν στο $V^{(m)}$ ενώ αυτά με k μονό είναι νέα σημεία. Αν η u είναι ορισμένη στο $V^{(m)}$, η ερώτηση για την αρμονική επέκταση είναι, ποιά είναι η τιμή $\widetilde{u}\left(\frac{k}{2^{m+1}}\right)$ όταν το k είναι μονός αριθμός. Διαλέγουμε έναν μονό αριθμό, έστω $k = 2j + 1$. Τότε ο όρος $\widetilde{u}\left(\frac{2j+1}{2^{m+1}}\right)$ εμφανίζεται μόνο 2 φορές στην τιμή $E_{m+1}(\widetilde{u})$, ειδικότερα στους όρους:

$$\left(u\left(\frac{2j+2}{2^{m+1}}\right) - \widetilde{u}\left(\frac{2j+1}{2^{m+1}}\right)\right)^2 + \left(\widetilde{u}\left(\frac{2j+1}{2^{m+1}}\right) - u\left(\frac{2j}{2^{m+1}}\right)\right)^2 \tag{3.50}$$

Αυτό είναι ακριβώς ίδιο πρόβλημα με την ελαχιστοποίηση της σχέσης (3.47), και έχει ακριβώς την ίδια λύση: Παρεμβάλλουμε γραμμικά,

$$\widetilde{u}\left(\frac{2j+1}{2^{m+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(u\left(\frac{2j+2}{2^{m+1}}\right) + u\left(\frac{2j}{2^{m+1}}\right)\right) \tag{3.51}$$

Τότε ο ίδιος υπολογισμός που μας έδωσε την σχέση (3.49) δείχνει ότι η σχέση (3.50) είναι ίση με την τιμή $\frac{1}{2}\left(u\left(\frac{2j+2}{2^{m+1}}\right) + u\left(\frac{2j}{2^{m+1}}\right)\right)^2$, και αθροίζοντας ως προς j έχουμε μια εξίσωση επανακανονικοποίησης με την ίδια σταθερά $r = \frac{1}{2}$:

$$E_{m+1}(\widetilde{u}) = \frac{1}{2}E_m(u) \tag{3.52}$$

Ενδιαφερόμαστε για το όριο της ενέργειας σε έναν γράφο. Όμως κάποιες δυσκολίες παρουσιάζονται. Πρώτα απ' όλα το όριο μπορεί να μην υπάρχει ή μπορεί να είναι 0 για κάποιες συναρτήσεις, όπως συμβαίνει για παράδειγμα στην περίπτωση των γραμμικών συναρτήσεων. Αντιθέτως εμείς απαιτούμε αυτό να συμβαίνει μόνο για τις σταθερές συναρτήσεις. Επομένως, στην περίπτωση των γράφων θα ορίσουμε τις επανακανονικοποιημένες ενέργειες ως:

$$\mathcal{E}_m(u) = r^{-m}E_m(u). \tag{3.53}$$

όπου $r = \frac{1}{2}$. Αργότερα θα δώσουμε μια διαφορετική προσέγγιση αυτού του μεγέθους.

Για οποιαδήποτε συνάρτηση u, η ακολουθία $\{\mathcal{E}_m(u)\}$ είναι μια μη φθίνουσα ακολουθία. Αν ορίσουμε:

$$\mathcal{E}_m(u) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-m} E_m(u) \tag{3.54}$$

τότε η επανακανονικοποιημένη ενέργεια παραμένει ίδια στην αρμονική επέκταση επομένως θα πρέπει να αυξάνει για οποιαδήποτε άλλη επέκταση:

$$\mathcal{E}_0(u) \leq \mathcal{E}_1(u) \leq \mathcal{E}_2(u) \leq ... \tag{3.55}$$

Η επανακανονικοποιημένη ενέργεια είναι βασικά σταθερή όταν η u είναι μια γραμμική συνάρτηση. Μία γραμμική συνάρτηση (τουλάχιστον στο σύνολο των ρητών αριθμών V_*) ορίζεται μοναδικά απο τις συνοριακές τιμές $u(0)$ και $u(1)$ με επαναλαμβανόμενη χρήση του τοπικού αλγόριθμου επέκτασης (3.51).

Η κανονικοποιημένη ενέργεια μπορεί να γραφτεί ως:

$$2^m \sum_{k=1}^{2^m} \left(u\left(\frac{k}{2^m}\right) - u\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right)^2 = \sum_{k=1}^{2^m} \left(\frac{u\left(\frac{k}{2^m}\right) - u\left(\frac{k-1}{2^m}\right)}{\frac{1}{2^m}}\right) \frac{1}{2^m} \tag{3.56}$$

Αν η u είναι συνεχώς διαφορίσιμη, το θεώρημα μέσης τιμής μας επιτρέπει να γράψουμε το παραπάνω ως:

$$\sum_{k=1}^{2^m} (u'(x_k))^2 \frac{1}{2^m} \tag{3.57}$$

για $\frac{k-1}{2^m} \leq x_k \leq \frac{k}{2^m}$,που είναι ένα άθροισμα Riemann για το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 u'(x)^2 dx \tag{3.58}$$

Έτσι σ΄ αυτήν την περίπτωση η $\mathcal{E}_m(u)$ συγκλίνει στο (3.58). Μπορούμε επίσης να δούμε την κανονικοποιημένη διγραμμική μορφή $\mathcal{E}_m(u,v) = r^{-m}E_m(u,v)$ και να δούμε ότι:

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_m(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \tag{3.59}$$

αν οι u και v είναι και οι δύο συνεχώς διαφορίσιμες. Ήδη γνωρίζουμε ότι αν η u είναι γραμμική τότε η $\mathcal{E}_m(u)$ είναι σταθερή, αλλά μπορούμε επίσης να επιβεβαιώσουμε ότι αυτό ισχύει και για οποιαδήποτε συνάρτηση v. Πράγματι τότε η $u'(x)$ είναι η σταθερή, και ίση με $u(1) - u(0)$, άρα:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = (u(1) - u(0)) \int_0^1 v'(x)dx = E_0(u,v) \tag{3.60}$$

και χωρίζοντας το ολοκλήρωμα στα σημεία $k/2^m$ παίρνουμε επίσης ότι $\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \mathcal{E}_m(u,v)$. Είναι επίσης άμεσο να παρατηρηθεί ότι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1(u,v) &= 2\left(u(1) - u\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(v(1) - v\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
&+ 2\left(u(\frac{1}{2}) - u(0)\right)\left(v\left(\frac{1}{2}\right) - v(0)\right) \\
&= (u(1) - u(0))\left[\left(v(1) - v\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \left(v\left(\frac{1}{2}\right) - v(0)\right)\right] \\
&= \mathcal{E}_0(u,v)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

αφού $u(1) - u\left(\frac{1}{2}\right) = u\left(\frac{1}{2}\right) - u(0) = \frac{1}{2}(u(1) - u(0))$, κλπ.

Τι έχουμε δει ως τώρα:

(i) δοθέντος μιας συνάρτησης u στο $V^{(m)}$ η αρμονική επέκταση $\widetilde{u}$ στο $V^{(m+1)}$ ελαχιστοποιεί την ενέργεια $\mathcal{E}_{m+1}(\widetilde{u})$ στην τιμή $\mathcal{E}_m(u)$, και

(ii) σε κάθε νέο σημείο $x \in V^{(m+1)} \setminus V^{(m)}$, η τιμή $u(\widetilde{u})$ είναι ο μέσος των τιμών των γειτονικών σημείων στο $V^{(m+1)}$

Μπορούμε να επεκτείνουμε την ισότητα στην σχέση (i) στην διγραμμική μορφή: Αν $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ είναι οι αρμονικές επεκτάσεις των u και v, τότε:

$$\mathcal{E}_{m+1}(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = \mathcal{E}_m(u, v) \tag{3.62}$$

απο την πολική ταυτότητα (3.43), αφού η αρμονική επέκταση είναι ένα γραμμικός μετασχηματισμός.

Λήμμα 3.1. *Έστω u, v ορισμένες στο $V^{(m)}$, $\widetilde{u}$ η αρμονική επέκταση της u, και έστω v' μια οποιαδήποτε επέκταση της v στο $V^{(m+1)}$. Τότε:*

$$\mathcal{E}_{m+1}(\widetilde{u}, v') = \mathcal{E}_m(u, v) \tag{3.63}$$

Απόδειξη. Εξαιτίας της σχέσης (3.62) αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{E}_{m+1}(\widetilde{u}, v'') = 0$ για $v'' = v' - \widetilde{v}$. Σημειώνουμε ότι η v'' εξαφανίζεται στο $V^{(m)}$. Εξ' ορισμού:

$$E_{m+1}(\widetilde{u}, v'') = \sum_{x \sim_{m+1} y} (\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y))(v''(x) - v''(y)) \tag{3.64}$$

Συλλέγουμε τώρα όλους τους όρους που περιέχουν την τιμή $v''(x)$ για ένα σταθερό x. Αν $x \in V^{(m)}$ τότε $v''(x) = 0$, άρα αυτοί οι όροι συνεισφέρουν συνολικά 0. Αλλά αν $x \in V^{(m+1)}$, τότε ο παράγοντας $v''(x)$ πολλαπλασιάζει τον όρο:

$$\sum_{y \sim_{m+1} x} (\widetilde{u}(x) - u(y)) \tag{3.65}$$

και αυτό εξαφανίζεται απο την συνθήκη μέσης τιμής (ii). Επομένως $E_{m+1}(\widetilde{u}, v'') = 0$ και ως εκ τούτου $\mathcal{E}_{m+1}(\widetilde{u}, v'') = 0$. □

Ορίζουμε μία *αρμονική* συνάρτηση h να είναι αυτή που ελαχιστοποιεί την $\mathcal{E}_m$ σε όλα τα επίπεδα για δοθείσες συνοριακές τιμές του συνόλου $V^{(0)}$. Με άλλα λόγια, δοθέντων $h(P_1), h(P_2)$ επαγωγικά βρίσκουμε τις τιμές $h|_{V^{(m+1)}}$ απο τις τιμές $h|_{V^{(m)}}$ χρησιμοποιώντας την σχέση (3.51). Αυτός είναι ένας αλγόριθμος τοπικής επέκτασης: Αν θέλουμε να μεγενθύνουμε μια μικρή γειτονιά σε μεγάλο βάθος, δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε την h σε όλο το σύνολο. Συγκεκριμένα, αν θέλουμε να γνωρίζουμε τις τιμές της h στο επίπεδο $m + k$ στο κελί $\psi_w(K)$ για $|w| = m$, χρειάζεται μόνο να υπολογίσουμε την h στα κελιά $\psi_{w_1}(K), \psi_{w_2}(K), \psi_{w_1 w_2}(K), ..., \psi_w(K)$ και μετά να υπολογίσουμε τις τιμές της h λεπτομερώς για k παραπάνω επίπεδα, για ένα σύνολο $m + 2^k$ βημάτων, σε σύγκριση με τα 2^{m+k} βήματα που θα κάναμε για τον υπολογισμό της h σε όλο το σύνολο.

Παρά το γεγονός ότι η h αρχικά ορίζεται μόνο στο V_*, είναι ομοιόμορφα συνεχής και έτσι επεκτείνεται σε μια συνεχή συνάρτηση στο K. Ικανοποιεί επίσης το αξίωμα μεγίστου: Το ελάχιστο και το μέγιστο πετυχαίνονται στο σύνορο (και μόνο στο σύνορο αν η συνάρτηση είναι μη σταθερή). Θα δείξουμε το αξίωμα μεγίστου στο επόμενο κεφάλαιο για την περίπτωση του SG. Στο τελευταίο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι οι αρμονικές συναρτήσεις είναι ακριβώς οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $\Delta h = 0$.

Οι τιμές των επανακανονικοποιημένων ενεργειών $\mathcal{E}_m(h)$ είναι ίδιες για κάθε m, ειδικότερα για $m = 0$, επομένως:

$$\mathcal{E}_m(h) = (h(P_1) - h(P_2))^2 \tag{3.66}$$

Ειδικότερα, $\mathcal{E}_m(h) > 0$ αν η h είναι μη σταθερή. Φυσικά, αν αρχίσουμε με h σταθερή στο $V^{(0)}$, τότε παραμένει σταθερή στο V_*, και έχει μηδενική ενέργεια απο την σχέση (3.66). Ειδικότερα, $h_1 + h_2 = 1$.

3.4 Ενέργεια

Στην προηγούμενη ενότητα κατασκευάσαμε για $K = I$ μία ακολουθία ενεργειών $\mathcal{E}_m$ στον γράφο Γ_m τέτοια ώστε η $\mathcal{E}_m(u)$ αύξουσα (μη φθίνουσα) για οποιαδήποτε συνάρτηση u ορισμένη στο V_*. Έχει νόημα να ορίσουμε το όριο της ακολουθίας των ενεργειών:

$$\mathcal{E}(u) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_m(u) \tag{3.67}$$

επιτρέποντας την τιμή $+\infty$. Επιπλέον, είναι σαφές ότι $\mathcal{E}(u) = 0$ αν και μόνο αν η u είναι σταθερή. Στην περίπτωση του SG στο επόμενο κεφάλαιο θα δώσουμε μία αναλυτική απόδειξη αυτής της δήλωσης, η οποία θα βασίζεται στις ιδιότητες των συνόλων $V^{(n)}$. Λέμε ότι $u \in dom\mathcal{E}$ (η u ανήκει στο πεδίο ορισμού της ενέργειας) αν και μόνο αν $\mathcal{E}(u) < \infty$. Επίσης λέμε ότι η u έχει *πεπερασμένη ενέργεια*. Ο ορισμός της ενέργειας περιλαμβάνει μόνο τις τιμές της u στο V_*, και θα θέλαμε η u να είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο K. Θα δούμε αργότερα ότι αν η u έχει πεπερασμένη ενέργεια τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο V_*, ως εκ τούτου έχει μια μοναδική συνεχή επέκταση στο K. Παρεπιμπτόντως, αυτό δεν ισχύει σε Ευκλείδειους χώρους ή σε πολλαπλότητες διάστασης 2 ή παραπάνω, άρα η μέθοδος προσέγγισης σε γράφους δεν λειτουργεί σε αυτά τα σενάρια.

Αντί να δείξουμε ότι $dom\mathcal{E} \subseteq C(K)$, θα δείξουμε ότι το σύνολο $dom\mathcal{E}$ είναι πυκνό στο $C(K)$, και άρα θα υπάρχει επαρκές πλήθος συναρτήσεων με πεπερασμένη ενέργεια. Είναι σαφές απο την προηγούμενη ενότητα ότι οι αρμονικές συναρτήσεις έχουν πεπερασμένη ενέργεια, και μια εύκολη επέκταση αυτής της ιδέας είναι ότι οι κατα τμήματα αρμονικές συναρτήσεις (αρχίζουμε με οποιεσδήποτε τιμές στο $V^{(m')}$ για κάποιο σταθερό m' και επεκτείνουμε αρμονικά για $m > m'$) έχουν επίσης πεπερασμένη ενέργεια. Βασικά, θα δείξουμε ότι οι κατα τμήματα αρμονικές συναρτήσεις ως υποσύνολο του $dom\mathcal{E}$ είναι πυκνές, και στο $C(K)$ και στο $dom\mathcal{E}$ με ανάλογο τρόπο. Αυτό είναι μία απο τις ιδιότητες που έχει μια καλή Dirichlet μορφή:

Ορισμός 3.1. *Λέμε ότι ένα συναρτησιακό $\mathcal{E}$ είναι μια καλή Dirichlet μορφή αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες: a)H $\mathcal{E}$ είναι μια τετραγωνική μορφή απο το $C(K)$ στο $[0, +\infty]$ με την έννοια ότι υπάρχει ένας γραμμικός υπόχωρος Z στο $C(K)$ τέτοιος ώστε $\mathcal{E}(v) < +\infty$ αν και μόνο αν $v \in Z$, και υπάρχει $\hat{\mathcal{E}}$:$Z \times Z \to \mathbb{R}$ διγραμμική και συμμετρική τέτοια ώστε:*

$$\mathcal{E}(v) = \hat{\mathcal{E}}(v, v) \geq 0 \tag{3.68}$$

για όλα τα $v \in Z$, *b)*$\mathcal{E}((v \wedge 1) \vee 0) \leq \mathcal{E}(v), \forall v \in C(K)$ *(ιδιότητα Markov), c)Η* $\mathcal{E}$ *είναι κάτω ημισυνεχής (ως προς την* L^∞ *τοπολογία), d)*$\mathcal{E}(v + C) = \mathcal{E}(v), \forall v \in C(K), \forall c \in \mathbb{R}$*,(έτσι η* $\mathcal{E}$ *είναι 0 σε όλες τις σταθερές συναρτήσεις), e)Η* $\mathcal{E}$ *είναι μη-ανηγμένη δηλαδή* $\mathcal{E}(v) = 0 \Rightarrow v$ *σταθερή, f)Υπάρχει ένα σύνολο* $\mathcal{H} \subseteq C(K)$ *τέτοιο ώστε το* $\mathcal{H}$ *πυκνό στο* $C(K)$ *ως προς την* L^∞ *τοπολογία, και* $\mathcal{E}(v) < +\infty$ *για κάθε* $v \in \mathcal{H}$*, g)*$\exists \rho > 0 : \mathcal{E}(v) = \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{k} \mathcal{E}(v \circ \psi_i)$.

Οι ιδιότητες a),b),c) του Ορισμού που έχουμε δώσει χαρακτηρίζουν τις Dirichlet μορφές, οι d),e),f) είναι κατά κάποιο τρόπο ιδιότητες κανονικότητας της Dirichlet μορφής, και η g) είναι η ιδιότητα αυτοομοιότητας.

Η ιδιότητα Markov μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής:

$$\mathcal{E}([u]) \leq \mathcal{E}(u) \text{ για } [u] = min\{1, max\{u, 0\}\} \tag{3.69}$$

και προκύπτει απο την αντίστοιχη ιδιότητα για $\mathcal{E}_m$ της μη κανονικοποιημένης ενέργειας: αν αντικαταστήσουμε την u απο το ελάχιστο (ή το μέγιστο) της συν μία σταθερά, η ενέργεια δεν αυξάνεται. Ο λόγος γι'αυτό είναι ότι κάθε όρος $(u(x) - u(y))^2$ είτε μένει ίδιος είτε μειώνεται.

Έστω u μία συνάρτηση πεπερασμένης ενέργειας. Τότε $\mathcal{E}_m(u) \leq \mathcal{E}(u)$, επομένως αν $x \sim_m y$ για $x, y \in V^{(m)}$ έχουμε ότι ισχύει $r^{-m}(u(x) - u(y))^2 \leq \mathcal{E}_m(u) \leq \mathcal{E}(u)$ αφού ο όρος $r^{-m}(u(x) - u(y))^2$ είναι ένας προσθετέος στον όρο $\mathcal{E}_m(u)$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$|u(x) - u(y)| \leq r^{m/2}\mathcal{E}(u)^{1/2} \tag{3.70}$$

Αυτό είναι ήδη μία σχέση που δείχνει συνέχεια. Τώρα ας θεωρήσουμε μια αλληλουχία σημείων $x_m, x_{m+1}, ..., x_{m+k}$ τέτοια ώστε $x_{m+j} \in V^{(m+j)}$ και $x_{m+j} \sim_{m+j+1} x_{m+j+1}$. Τότε έχουμε:

$$|u(x_m) - u(x_{m+k})| \leq r^{m/2}(1 + r^{1/2} + ... + r^{k/2})\mathcal{E}(u)^{1/2} \leq \frac{2r^{m/2}}{1 - r^{1/2}}\mathcal{E}(u)^{1/2} \tag{3.71}$$

προσθέτοντας τις εκτιμήσεις (3.70) διατρέχοντας την αλληλουχία σημείων. Απο την γεωμετρία του K είναι εύκολο να δούμε ότι αν $x, y \in V_*$ ανήκουν στα ίδια ή σε γειτονικά $m-$κελιά, τότε μπορούμε να συνδέσουμε το x στο y απο το μέγιστο δύο τέτοιες αλληλουχίες, επομένως:

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{2r^{m/2}}{1 - r^{1/2}}\mathcal{E}(u)^{1/2} \tag{3.72}$$

Η σχέση (3.72) είναι μια σχέση ομοιόμορφης συνέχειας αλλά επίσης και μια συνθήκη Holder. Στην περίπτωση του μοναδιαίου διαστήματος, αν $|x - y| \leq \frac{1}{2^m}$, τότε τα σημεία x, y ανήκουν στο ίδιο ή σε γειτονικό κελί. Αφού $r = \frac{1}{2}$, η σχέση (3.72) λέει:

$$|u(x) - u(y)| \leq M|x - y|^{1/2} \tag{3.73}$$

Στην περίπτωση του SG παίρνουμε επίσης μια συνθήκη Holder για την Ευκλείδεια μετρική με έναν εκθέτη που είναι ίσος με $log(\frac{5}{3})/log(2)$.

Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου, όλες οι συναρτήσεις θα υποτίθενται συνεχείς και ορισμένες σε όλο το K.

Λήμμα 3.2. *Έστω $u, v \in dom\mathcal{E}$. Τότε το όριο:*

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_m(u, v) = \mathcal{E}(u, v) \tag{3.74}$$

υπάρχει και ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $dom\mathcal{E} \setminus \{\text{σταθερές συναρτήσεις}\}$.

Απόδειξη. Ξεκινάμε με την polarization identity:

$$\mathcal{E}_m(u, v) = \frac{1}{4}(\mathcal{E}_m(u + v) - \mathcal{E}_m(u - v)) \tag{3.75}$$

στο επίπεδο m. Αφού το δεξί μέλος της (3.75) έχει όριο, όριο θα έχει και το αριστερό. Οι συνήθεις ιδιότητες ενός εσωτερικού γινομένου, εκτός του ότι μπορεί να προκύψει $\mathcal{E}(u) = 0$, ακολουθούν εύκολα. Αφού $\mathcal{E}(u) = 0$ έπεται ότι $\mathcal{E}_m(u) = 0$, που σημαίνει ότι η u είναι σταθερή στο $V^{(m)}$ για κάθε m, προκύπτει ότι η u πρέπει να είναι σταθερή. Εξαιρώντας τις σταθερές παίρνουμε ένα πραγματικό εσωτερικό γινόμενο. □

Θεώρημα 3.2. *Ο χώρος $dom\mathcal{E} \setminus \{\text{σταθερές συναρτήσεις}\}$ σχηματίζει έναν χώρο Hilbert με εσωτερικό γινόμενο (3.74).*

Απόδειξη. Μένει να δειχθεί η πληρότητα: Κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει. Μας βολέβει να ταυτίσουμε τον χώρο $dom\mathcal{E} \setminus \{\text{σταθερές συναρτήσεις}\}$ με τον χώρο: $\widetilde{\mathcal{E}} = \{u \in dom\mathcal{E} : u(P_1) = 0\}$. Έστω $\{u_n\}$ μια ακολουθία στον χώρο $\widetilde{\mathcal{E}}$ τέτοια ώστε: $\mathcal{E}(u_n - u_{n'}) \to 0$ καθώς $n, n' \to \infty$. Τότε για σταθερό m, $\mathcal{E}_m(u_n - u_{n'}) \to 0$ επίσης, αφού $\mathcal{E}_m(u_n - u_{n'}) \leq \mathcal{E}(u_n - u_{n'})$. Ακολουθεί εύκολα ότι το όριο:

$$\lim_{m\to\infty} u_n(x) \text{ υπάρχει για κάθε } x \in V^{(m)} \tag{3.76}$$

άρα μπορούμε να ορίσουμε την υ στο V_* όπως αυτό το όριο, και επιπλέον:

$$\mathcal{E}_m(u_n - u) = \lim_{n'\to\infty} \mathcal{E}_m(u_n - u_{n'}) \tag{3.77}$$

Παίρνοντας το n αρκετά μεγάλο, το δεξί μέλος της (3.77) μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε ανεξαρτήτως του m, επομένως $\mathcal{E}(u_n - u) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. □

Το να έχουμε να εξαιρέσουμε τις σταθερές είναι μια μικρή ενόχληση. Θα λέμε ότι $u_n \to u$ στην ενέργεια αν $\mathcal{E}(u_n - u) \to 0$ και επίσης $u_n \to u$ ομοιόμορφα (αρκεί να έχουμε $u_n \to u$ σε ένα μοναδικό σημείο της (3.70)). Συμβολίζουμε τον χώρο των αρμονικών συναρτήσεων με $\mathcal{H}_0$. Θα αποδείξουμε την ιδιότητα f) απο τον ορισμό μίας καλής Dirichlet μορφής.

Ορισμός 3.2. *Ο χώρος $\mathcal{S}(\mathcal{H}_0, V^{(m)})$ των τμηματικών αρμονικών συναρτήσεων παρεμβολής (splines) του επιπέδου m ορίζεται να είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων τέτοιων ώστε η συνάρτηση $u \circ \psi_w$ να είναι αρμονική για όλες τις λέξεις $|w| = m$.*

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο χώρος $\mathcal{S}(\mathcal{H}_0, V^{(m)})$ περιέχεται στον $dom\mathcal{E}$ και είναι ένας πεπερασμένης διάστασης χώρος με διάσταση $V^{(m)}$. Όλες αυτές οι συναρτήσεις αποδίδονται συγκεκριμενοποιώντας τις τιμές της u στο $V^{(m)}$ αυθαίρετα και μετά επεκτείνοντας αρμονικά στο $V^{(m')}$ για κάθε $m' > m$. Σαφώς ισχύει $\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}_m(u)$ για αυτές τις συναρτήσεις.

Θεώρημα 3.3. *Οποιαδήποτε συνάρτηση $u \in C(K)$ μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα απο μια ακολουθία $u_m \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_0, V^{(m)})$, με $u_m|_{V^{(m)}} = u|_{V^{(m)}}$. Επιπλέον, αν $u \in dom\mathcal{E}$ τότε η u_m συγκλίνει στο u στην ενέργεια.*

Απόδειξη. Δοθέντος $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε m τέτοιο ώστε $\mathrm{Osc}(u, \psi_w(K)) \leq \epsilon$ για όλα τα w με $|w| = m$. Τότε αφού $u_m|_{V^{(m)}} = u|_{V^{(m)}}$ έχουμε επίσης ότι: $\mathrm{Osc}(u_m, \psi_w(K)) \leq \epsilon$, επομένως:

$$\begin{aligned} |u_m(x) - u(x)| &\leq |u_m(x) - u_m(\psi_w(P_1))| + |u_m(\psi_w(P_1)) - u(\psi_w(P_1))| \\ &\quad + |u(\psi_w(P_1)) - u(x)| \\ &\leq 2\epsilon \text{ για } x \in \psi_w(K) \end{aligned} \tag{3.78}$$

επομένως $||u_m - u||_\infty \leq 2\epsilon$. Ακολούθως ας υποθέσουμε ότι $u \in dom\mathcal{E}$. Τότε $\mathcal{E}_m(u) = \mathcal{E}_m(u_m) \nearrow \mathcal{E}(u)$. Επίσης $\mathcal{E}(u, u_m) = \mathcal{E}_m(u, u_m) = \mathcal{E}_m(u_m)$ απο Λήμμα 3.1. Επομένως:

$$\mathcal{E}(u - u_m) = \mathcal{E}(u) - 2\mathcal{E}(u, u_m) + \mathcal{E}(u_m) = \mathcal{E}(u) - \mathcal{E}_m(u_m) \to 0 \tag{3.79}$$

□

Το επόμενο αποτέλεσμα εκφράζει την αυτοομοιότητα στην ενέργεια.

Θεώρημα 3.4. *Αν $u \in dom\mathcal{E}$ τότε $u \circ \psi_i \in dom\mathcal{E}$ για κάθε i, και:*

$$\mathcal{E}(u) = \sum_i r^{-1}\mathcal{E}(u \circ \psi_i) \tag{3.80}$$

Απόδειξη. Είναι σαφές απο τον ορισμό ότι:

$$\mathcal{E}_{m+1}(u) = \sum_i r^{-1}\mathcal{E}_m(u \circ \psi_i) \tag{3.81}$$

Παίρνοντας όριο παίρνουμε την σχέση (3.80), και αν το αριστερό μέλος είναι πεπερασμένο τότε κάθε όρος στο δεξί μέλος πρέπει να είναι επίσης πεπερασμένος. □

Φυσικά η ίδια ταυτότητα ισχύει για την διγραμμική μορφή $\mathcal{E}(u, v)$ και για διαφορετικές μορφές διαμερίσεων:

$$K = \bigcup_{w \in \mathcal{P}} \psi_w(K) \tag{3.82}$$

όπου το r^{-1} αντικατεστημένο με $r^{-|w|}$, για οποιοδήποτε υποδιαίρεση $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{E}(u) = \sum_{w \in \mathcal{P}} r^{-|w|}\mathcal{E}(u \circ \psi_w) \tag{3.83}$$

Ένας άλλος τρόπος να το πει κανείς αυτό είναι ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε μια συνάρτηση πεπερασμένης ενέργειας στο K ενώνοντας συναρτήσεις πεπερασμένης ενέργειας σε κελιά $\psi_w(K)$ δεδομένου ότι οι συναρτήσεις ταιριάζουν στα junction points.

Η προσθετικότητα στην σχέση (3.83) προτείνει ότι θα μπορούσαμε να σκεφτούμε την ενέργεια ως ένα μέτρο. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε ένα μέτρο v_u ως:

$$v_u(\psi_w(K)) = r^{-|w|}\mathcal{E}(u \circ \psi_w) \tag{3.84}$$

Ισοδύναμα, το μέτρο $v_u(\psi_w(K))$ αποδίδεται ως ένα όριο του όρου:

$$\sum_{x \sim_m y} r^{-m}(u(x) - u(y))^2 \tag{3.85}$$

όπου το άθροισμα περιορίζεται στις πλευρές που κείτονται στο κελί $\psi_w(K)$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι όλες οι συνθήκες για ένα κανονικό μέτρο ικανοποιούνται εκτός της αυστηρής θετικότητας (για ένα μέτρο πιθανότητας θα χρειαζόμασταν $\mathcal{E}(u) = 1$). Τότε:

$$\mathcal{E}(u) = v_u(K) = \int_K 1 dv_u \tag{3.86}$$

Κεφάλαιο 4

Σύγκλιση της Ενέργειας σε Πεπερασμένα Διακλαδώμενα Μορφοκλασματικά Σύνολα

4.1 Κατασκευή Ενέργειας στο SG

Έχουμε ήδη δει στην Ενότητα 3.1 ότι $V^{(0)} \subseteq K \subseteq T$ και $V^{(n)} \subseteq V^{(n+1)}$. Τώρα θέλουμε να ορίσουμε την ενέργεια στο K. Με άλλα λόγια θέλουμε να ορίσουμε ένα αντικείμενο που να είναι παρόμοιο με το ολοκλήρωμα Dirichlet. Παρόλα αυτά, επειδή το Gasket έχει κενό εσωτερικό δεν μπορούμε να ορίσουμε το μέγεθος της βαθμίδας σε αυτό. Όπως έχουμε πει $K = \overline{V^{(\infty)}}$. Επομένως η ιδέα είναι να ορίσουμε την ενέργεια πρώτα στο $V^{(0)}$, μετά στο $V^{(n)}$ ως άθροισμα των αντιγράφων του σε όλα τα $n-$κελιά, και τελικά σε όλο το K παίρνοντας κάποιους είδους όριο.

Θα ακολουθήσουμε μια παρόμοια διαδικασία με την προηγούμενη ενότητα. Αυτή την φορά η προσέγγιση μας θα είναι αρκετά πιο τεχνική. Έστω v μία συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο $V^{(n)}$. Θα υποθέσουμε ότι είναι η αρμονική επέκταση μίας συνάρτησης u ορισμένης στο $V^{(0)}$. Επομένως ορίζουμε στο επίπεδο 0 η ενέργεια να είναι ίση με E, δηλαδή ίση με την ενέργεια της συνάρτησης u όπως την ορίσαμε στην σχέση (3.40) και στο βήμα n θα είναι ίση με το άθροισμα των ενεργειών των σημείων στο $n-$οστό βήμα:

$$\begin{aligned} S_0(E) &= E \\ S_n(E)(v) &= \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{3} E(v \circ \psi_{i_1,\dots,i_n}) \text{ για } v \in \mathbb{R}^{V^{(n)}}, n \geq 1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

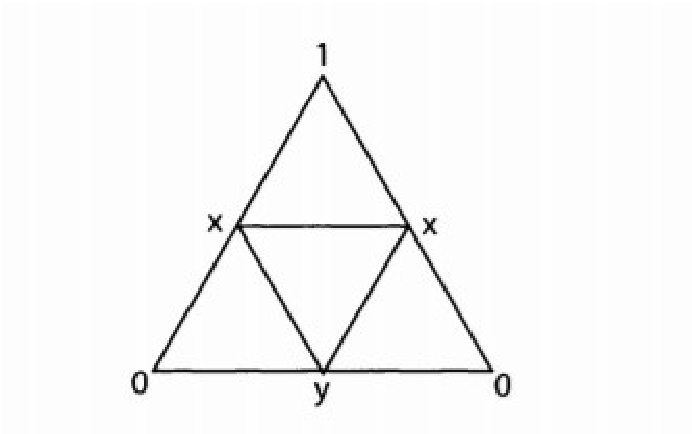
Καθε νέο σημείο στο $V^{(n+1)} \backslash V^{(n)}$ ανήκει σε ένα μοναδικό $n-$κελί $\psi_w(K)$ με $|w| = n$. Η ολική ενέργεια $S_{n+1}(E)(v')$ για οποιαδήποτε επέκταση v' της v είναι απλά το άθροισμα των συνεισφορών απο κάθε κελί $\psi_w(K)$:

$$\begin{aligned} S_{n+1}(E)(v') &= \sum_{|w|=n} (v'(\psi_w(\psi_1(P_1))) - v'(\psi_w(\psi_1(P_2))))^2 + \dots \\ &= \sum_{|w|=n} S_1(E)(v' \circ \psi_w) \end{aligned} \tag{4.2}$$

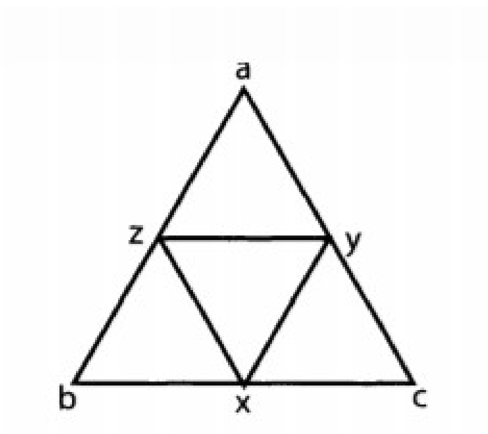
και κάθε συνεισφορά είναι απλά η ενέργεια $S_1(E)$ της συνάρτησης $v' \circ \psi_w$. Την ενέργεια αυτή μπορούμε να τη γράψουμε και ως:

$$S_n(E)(v) = \sum (v(Q) - v(Q'))^2 \text{ για } v \in \mathbb{R}^{V^{(n)}}, n \geq 1, \tag{4.3}$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλα τα ζεύγη σημείων $(Q, Q') \in V^{(n)} \times V^{(n)}$ που είναι κοντά εννοώντας ότι βρίσκονται στο ίδιο $n-$κελί. Λόγω των δυσκολιών που μας ανάγκασαν να ορίσουμε τις επανακανονικοποιημένες ενέργειες στην προηγούμενη ενότητα, για να ορίσουμε την ενέργεια στο Gasket θα πάρουμε και εδώ το όριο του παράγοντα $r^{-n} S_n(E)$. Στην παρούσα κατάσταση η τιμή του r δεν είναι αναμενόμενη. Όπως θα δούμε αργότερα, $r = \frac{3}{5}$.



Σχήμα 4.1: *Τιμές της* $\widetilde{u}$ *στο* $V^{(1)}$.

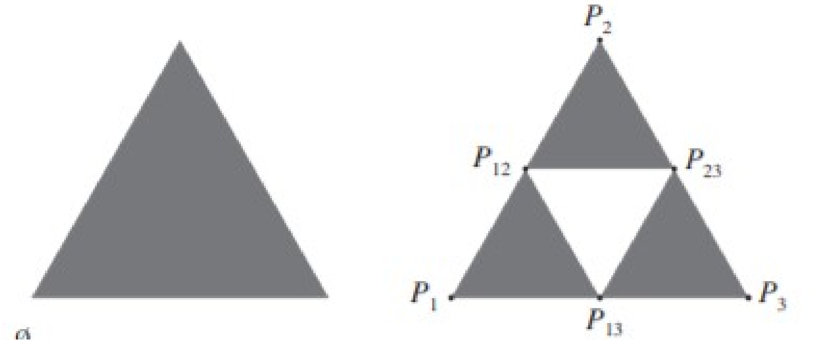


Σχήμα 4.2: *Τιμές στο* $V^{(1)}$.

Αν θεωρούσαμε την ενέργεια του γράφου, για $m = 0$ (Σχήμα 4.3) θα είχαμε ότι:

$$E_0(u) = \sum_{P_1 \sim_0 P_2} (u(x) - u(y))^2 + \sum_{P_2 \sim_0 P_3} (u(x) - u(y))^2 + \sum_{P_3 \sim_0 P_1} (u(x) - u(y))^2. \tag{4.4}$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε, εκμεταλλευόμενοι την συμμετρία, να θεωρήσουμε τις τιμές $u(P_2) = 1$ και $u(P_1) = u(P_3) = 0$ (Σχήμα 4.1). Τότε $E_0(u) = 2$ και άρα η κανονικοποιημένη ενέργεια θα είναι ίση με $\mathcal{E}_0(u) = 2$ επειδή είμαστε στο επίπεδο



Σχήμα 4.3: *Sierpinski Gasket.*

$m = 0$. Θέλουμε να επεκτείνουμε την u στο $V^{(1)}$ για να ελαχιστοποιήσουμε την ενέργεια. Έστω $\widetilde{u}$ η αρμονική επέκταση της u στο $V^{(1)}$. Εκμεταλλευόμενοι πάλι την συμμετρία, μπορούμε να ορίσουμε $\widetilde{u}(\psi_1(P_1)) = \widetilde{u}(\psi_1(P_3)) = x$ στα junction points κοντά στο P_1 και $\widetilde{u}(\psi_2(P_2)) = y$ απέναντι απο το P_2 στο $V^{(1)}$, όπου τα x, y πρόκειται να οριστούν. Άρα η ενέργεια που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι:

$$E_1(\widetilde{u}) = 2(x-1)^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2(x-y)^2 \tag{4.5}$$

Θέτοντας τις παραγώγους ως προς x και y ίσες με το 0, πάιρνουμε ένα ζεύγος γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} 4x = 1 + x + y \\ 4y = 2x \end{cases} \tag{4.6}$$

Αυτές οι εξισώσεις εκφράζουν την ιδιότητα της μέσης τιμής, ότι δηλαδή η τιμή της συνάρτησης σε κάθε ένα απο τα junction points είναι ο μέσος όρος των τιμών της συνάρτησης στα τέσσερα γειτονικά σημεία του γράφου. Η λύση $x = \frac{2}{5}, y = \frac{2}{5}$ είναι ξεκάθαρη. Απο συμμετρία θα παίρναμε την ίδια απάντηση αν βάζαμε την τιμή 1 σε κάθε μια απο τις κορυφές του συνόρου. Επίσης, αφου ελαχιστοποιούμε μια τετραγωνική μορφή, οι εξισώσεις ελαχιστοποίησης είναι γραμμικές. Επομένως αν οι αρχικές τιμές της u στο $V^{(0)}$ είναι a, b, c (Σχήμα 4.2), τότε η αρμονική επέκταση $\widetilde{u}$ ικανοποιεί τον ακόλουθο '$\frac{1}{5} - \frac{2}{5}$ κανόνα':

$$u(z) = \frac{2}{5}a + \frac{2}{5}b + \frac{1}{5}c \tag{4.7}$$

όπου z είναι το junction point μεταξύ των κορυφών όπου η u παίρνει τις τιμές a και b. Θα αναφερθουμε σ'αυτόν τον κανόνα ξανά στο Κεφάλαιο 5. Αυτό που μπορούμε να παρατηρήσουμε απο τους συντελεστές ενός junction point όπως αυτό προκύπτει απο την λύση του συστήματος είναι ότι η τιμή σε κάθε εσωτερικό σημείο είναι ένας μέσος με συντελεστές τα βάρη των σημείων με τα οποία συνορεύει το junction point. Τα σημεία που βρίσκονται πιο κοντά του έχουν συντελεστή 2/5 ενώ το πιο μακρινό σημείο 1/5. Η ιδιότητα αυτή θα φανεί πιο εύκολα σε λίγο που θα λύσουμε το ανάλογο σύστημα χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την συμμετρία του Gasket. Γραμμένη μ' αυτήν την μορφή η αρμονική επέκταση θα ικανοποιεί την σχέση (4.7) σε οποιοδήποτε κελί και σε οποιοδήποτε επίπεδο.

Μία πιο άμεση προσέγγιση είναι να ονομάσουμε τις τιμές στις κορυφές του $V^{(1)}$ όπως στο Σχήμα 4.2 και να ελαχιστοποιήσουμε την E_1 ως προς x, y, z. Οι διαφορικές εξισώσεις αποδίδουν τότε:

$$\begin{aligned} 4x &= y + z + b + c \\ 4y &= x + z + a + c \\ 4z &= x + y + a + b \end{aligned} \tag{4.8}$$

Για τον υπολογισμό του παράγοντα επανακανονικοποίησης r μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις τιμές που προέκυψαν απο το παραπάνω σύστημα, $x = \frac{2}{5}, y = \frac{1}{5}$, στην συνάρτηση της ενέργειας $E_1(\widetilde{u})$ και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} E_1(\widetilde{u}) &= 2\left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{5} - 0\right)^2 + 2\left(\frac{1}{5} - 0\right)^2 \\ &= \frac{18 + 2 + 8 + 2}{25} = \frac{6}{5} \end{aligned} \tag{4.9}$$

και επειδή $r^{-1}E_1(\widetilde{u}) = E_0(u) = 2$ έχουμε ότι $r = \frac{3}{5}$. Θα καταλήξουμε σε αυτήν την τιμή του r μέσω την διαφορετικής προσέγγισης μας στο τέλος αυτής της ενότητας.

Για να το πετύχουμε αυτό θα εισάγουμε έναν τελεστή ελαχιστοποίησης. Για $u : \mathbb{R}^{V^{(0)}} \to \mathbb{R}$, έστω:

$$M_n(E)(u) = inf\{S_n(E)(v) : v \in \mathcal{L}(n,u)\}, \forall u \in \mathbb{R}^{V^{(0)}} \tag{4.10}$$

όπου $\mathcal{L}(n,u) = \{v \in \mathbb{R}^{V^{(n)}} : v = u$ στο $V^{(0)}\}$. Θα δούμε στο εξής ότι σε αυτήν την σχέση το infimum είναι minimum. Για την ώρα ας μελετήσουμε μόνο το M_1. Θέτουμε $P_{12} = \psi_1(P_2) = \psi_2(P_1), P_{13} = \psi_1(P_3) = \psi_3(P_1), P_{23} = \psi_2(P_3) = \psi_3(P_2)$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} S_1(E)(v) = &(v(P_1) - v(P_{12}))^2 + (v(P_1) - v(P_{13}))^2 + (v(P_{12}) - v(P_{13}))^2 \\ &+ (v(P_2) - v(P_{12}))^2 + (v(P_2) - v(P_{23}))^2 + (v(P_{12}) - v(P_{23}))^2 \\ &+ (v(P_3) - v(P_{13}))^2 + (v(P_3) - v(P_{23}))^2 + (v(P_{13}) - v(P_{23}))^2 \end{aligned} \tag{4.11}$$

και το $M_1(E)(u)$ είναι το infimum του:

$$\begin{aligned} &(u(P_1) - x)^2 + (u(P_1) - y)^2 + (x - y))^2 \\ &+ (u(P_2) - x)^2 + (u(P_2) - z)^2 + (x - z)^2 \\ &+ (v(P_3) - y)^2 + (u(P_3) - z)^2 + (y - z)^2 \end{aligned} \tag{4.12}$$

για $x, y, z \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση επιτυγχάνει το ελάχιστο της στα σημεία στα οποία η βαθμίδα παίρνει την τιμή 0. Ως εκ τούτου, το (x, y, z) είναι ελάχιστο αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} 4x = y + z + u(P_1) + u(P_2) \\ 4y = x + z + u(P_1) + u(P_3) \\ 4z = x + y + u(P_2) + u(P_3) \end{cases} \tag{4.13}$$

δηλαδή καταλήξαμε στα ίδια αποτελέσματα που είχαμε όταν ακολουθήσαμε την προσέγγιση μέσω γράφων. Η μόνη διαφορά είναι ότι σε αυτήν την προσέγγιση δεν χρησιμοποιούμε κάποια ιδιότητα της συμμετρίας. Ένας απλός υπολογισμός μας δείχνει ότι:

$$\begin{cases} x = \frac{2u(P_1) + 2u(P_2) + u(P_3)}{5} \\ y = \frac{2u(P_1) + 2u(P_3) + u(P_2)}{5} \\ z = \frac{2u(P_2) + 2u(P_3) + u(P_1)}{5} \end{cases} \tag{4.14}$$

Θα συμβολίσουμε με $H_{(1;E)}(u) : V^{(1)} \to \mathbb{R}$ την λύση που αποδίδεται απο το παραπάνω σύστημα, δηλαδή, την μοναδική συνάρτηση $v \in \mathcal{L}(1,u)$ τέτοια ώστε $M_1(E)(u) = S_1(E)(v)$. Δοθέντος, λοιπόν, συνάρτησης $u : V^{(0)} \to \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι η $v := H_{(1;E)}(u)$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος που προέκυψε απο την ελαχιστοποίηση της ενέργειας όπου θεωρήσαμε $v(P_{12}) = x, v(P_{13}) = y, v(P_{23}) = z$. Η v είναι η αρμονική επέκταση της u στο $V^{(1)}$. Μία ανάλογη ιδιότητα με την ιδιότητα του μέσου των αρμονικών συναρτήσεων είναι ότι οι αρμονικές συναρτήσεις επίσης είναι κάποιου ε-ίδος ελάχιστο του Dirichlet ολοκληρώματος. Αντικαθιστώντας την τιμή $v = H_{(1;E)}(u)$, παίρνουμε:

$$M_1(E)(u) = \frac{3}{5}E(u) \tag{4.15}$$

και άρα το M_1 είναι πολλαπλάσιο του E όπως ήδη έχουμε δει στην Ενότητα 3.3. Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι τυχαίο. Η $H_{(1;E)}$ είναι γραμμική, επομένως η $M_1(E)(u)$ είναι τετραγωνική στην u, με άλλα λόγια είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των όρων μορφής $u(P_j)^2$ και όρων της μορφής $u(P_{j_1})u(P_{j_2})$. Επιπλέον, αφού, σαφώς $H_{(1;E)}(u+c) = H_{(1;E)}(u) + c$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $u(P_j)$ με $u(P_j) - u(P_1)$, και έτσι έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} M_1(E)(u) = \alpha(u(P_2) - u(P_1))^2 + b(u(P_3) - u(P_1))^2 \\ + d(u(P_2) - u(P_1))(u(P_3) - u(P_1)) \end{aligned} \tag{4.16}$$

και απο την γνωστή σχέση $\alpha\beta = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha - \beta)^2)$ με $\alpha = u(P_2) - u(P_1), \beta = u(P_3) - u(P_1)$,έχουμε:

$$M_1(E)(u) = \alpha'(u(P_2) - u(P_1))^2 + b'(u(P_3) - u(P_1))^2 + d'(u(P_2) - u(P_3))^2 \tag{4.17}$$

για κάποια α', b', d' και απο την συμμετρία του Gasket πρέπει να έχουμε $\alpha' = b' = d'$. Συμπερασματικά, υπάρχει ένας φυσικός λόγος για τον οποίο ο $M_1(E)$ είναι πολλαπλάσιο του E, και ο προηγούμενος υπολογισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί με μόνο σκοπό τον υπολογισμό του παράγοντα $\frac{3}{5}$. Απο τον ορισμό του $M_1(E)$ έχουμε:

$$S_1(E)(v) = M_1(E)(v) \tag{4.18}$$

για κάθε $v : V^{(1)} \to \mathbb{R}$ όπου αναγνωρίζουμε μια συνάρτηση $v : V^{(1)} \to \mathbb{R}$ με τον περιορισμό της στο $V^{(0)}$, και παρόμοια θα κάνουμε και σε παρακάτω περιπτώσεις. Ως εκ τούτου θέτοντας $r = \frac{3}{5}$ έχουμε:

$$\frac{S_1(E)(v)}{r} \geq \frac{M_1(E)(v)}{r} = E(v) = \frac{S_0(E)(v)}{r^0} \tag{4.19}$$

όπου η πρώτη ανισότητα ισχύει για οποιαδήποτε πιθανή επέκταση της συνάρτησης u, εκτός της αρμονικής επέκτασης. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $v : V^{(\infty)} \to \mathbb{R}$. Πρόκειται να αποδείξουμε αυτό που ήταν προφανές στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι δηλαδή η επανακανονικοποιημένη ενέργεια $\frac{S_n(E)(v)}{r^n}$ είναι αύξουσα ως προς n, άρα έχει όριο, το οποίο θα είναι η ενέργεια στο K. Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{n+1}}S_{n+1}(E)(v) = \frac{1}{r^n}\sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{3}\left(\frac{1}{\rho}\sum_{i_{n+1}=1}^{3}E(v\circ\psi_{1_1,\dots,i_n,i_{n+1}})\right) = \\ \frac{1}{r^n}\sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{3}\left(\frac{1}{r}S_1(E)(v\circ\psi_{i_1,\dots,i_n})\right) \geq \\ \frac{1}{r^n}\sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{3}E(v\circ\psi_{i_1,\dots,i_n}) = \frac{1}{r^n}S_n(E)(v). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Στην παραπάνω ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει την σχέση (4.19). Τώρα θέτουμε:

$$\mathcal{E}_n(v) = \frac{1}{r^n} S_n(E)(v) \text{ για } v \in \mathbb{R}^{V^{(n)}}, \mathcal{E}_\infty(v) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_n(v) \text{ για } v \in \mathbb{R}^K. \tag{4.21}$$

Έχουμε κατασκευάσει έτσι μια ενέργεια στο K. Φυσικά το όριο $\mathcal{E}_\infty(v)$ μπορεί να αθροίζει στο ∞. Ένα απροσδόκητο γεγονός είναι ότι οι γραμμικές μη σταθερές συναρτήσεις έχουν άπειρη ενέργεια. Βασικά, έστω $v : K \to \mathbb{R}$ γραμμική. Εύκολα βλέπουμε ότι $E(v \circ \psi_{i_1,\ldots,i_n}) = \left(\frac{1}{4}\right)^n E(v)$, επομένως $S_n(E)(v) = \left(\frac{3}{4}\right)^n E(v)$, και $\mathcal{E}_n(v) = \left(\frac{5}{4}\right)^n E(v)$. Προκύπτει ότι $\mathcal{E}_\infty(v) = +\infty$ εκτός εάν $E(v) = 0$, δηλαδή εάν η v είναι σταθερή. Έτσι το σύνολο των συναρτήσεων με πεπερασμένη ενέργεια είναι κατά κάποιο τρόπο τελείως διαφορετικό απο αυτό στην περίπτωση της περιοχής του $\mathbb{R}^n$. Επομένως, κάποιος θα μπορούσε να υποψιαστεί ότι η ενέργεια $\mathcal{E}_\infty$ είναι ταυτοτικά ίση με $+\infty$. Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας αποδυκνείουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Πιο συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε τις δύο ακόλουθες ιδιότητες της ενέργειας $\mathcal{E}_\infty$.

1. $\mathcal{E}_\infty(v) = 0$ αν και μόνο αν η v είναι σταθερή στο K.
2. Το σύνολο των $v \in C(K)$ τέτοιων ώστε $\mathcal{E}_\infty(v) < +\infty$ είναι πυκνό στο $C(K)$.

Για να αποδείξουμε το πρώτο χρειαζόμαστε ένα Λήμμα.

Λήμμα 4.1. *Αν $v : V^{(n)} \to \mathbb{R}$ και $\mathcal{E}_n(v) = 0$, τότε η v είναι σταθερή στο $V^{(n)}$.*

Απόδειξη. Απο τον ορισμό του $V^{(n)}$, έχουμε $V^{(n+1)} = \bigcup_{i=1}^3 \psi_i(V^{(n)})$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον $\emptyset \neq \psi_i(V^{(0)}) \cap \psi_j(V^{(0)}) \subseteq \psi_i(V^{(n)}) \cap \psi_j(V^{(n)})$. Έτσι, αν $n > 0$ και η v είναι μη σταθερή στο $V^{(n)}$, είναι επίσης μη σταθερή στο $\psi_i(V^{(n-1)})$, ή με άλλα λόγια, η $v \circ \psi_i$ είναι μη σταθερή στο $V^{(n-1)}$, για κάποια $i = 1, 2, 3$, και με ένα επαναληπτικό επιχείρημα, η $v \circ \psi_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ είναι μη σταθερή στο $V^{(0)}$ για κάποια $i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, 3$. Ως εκ τούτου απο τον ορισμό της $\mathcal{E}_n$, έχουμε ότι $\mathcal{E}_n(v) > 0$. □

Θεώρημα 4.1. *Αν $v \in C(K)$ και $\mathcal{E}_\infty(v) = 0$, τότε η v είναι σταθερή στο K.*

Απόδειξη. Συμπεράινουμε απο την υπόθεση: $\mathcal{E}_n(v) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ως εκ τούτου η v είναι σταθερή στο $V^{(\infty)}$ απο το Λήμμα 4.1. Καθώς $K = \overline{V^{(\infty)}}$, η v είναι σταθερή στο K. □

Τώρα θα δείξουμε το δεύτερο. Υπενθυμίζουμε ότι ισχύει:

$$\mathcal{E}_1(H_{(1;E)}(u)) = E(u). \tag{4.22}$$

αφού η $v = H_{(1;E)}(u)$ είναι η αρμονική επέκταση της u. Θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της αρμονικής επέκτασης για να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση v ορισμένη σε όλο το K επεκτείνοντας αρμονικά την u στο $V^{(1)}$, μετά θα εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία σε κάθε 1-κελί για να αποδώσουμε μια συνάρτηση ορισμένη στο $V^{(2)}$, μετά θα εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία σε κάθε 2-κελί, κ.ο.κ. Παρόλα αυτά, προκείμενου να γνωρίζουμε ότι έχουμε ορίσει μια συνεχή συνάρτηση, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι η oscillation στα $n-$κελιά τείνει στο 0. Η αρμονική επέκταση ικανοποιεί το παρακάτω αξίωμα μεγίστου:

Λήμμα 4.2. *Για κάθε $u \in \mathbb{R}^{V^{(0)}}$ έχουμε ότι:*

$$min_{V^{(0)}} u \leq H_{(1;E)}(u)(Q) \leq max_{V^{(0)}} u, \forall Q \in V^{(1)} \setminus V^{(0)} \tag{4.23}$$

(ασθενές αξίωμα μεγίστου). Επιπλέον, οι ανισότητες είναι αυστηρές αν η u δεν είναι σταθερή (ισχυρό αξίωμα μεγίστου).

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την πρώτη ανισότητα, η απόδειξη της δεύτερης είναι ανάλογη. Θέτουμε $v = H_{(1;E)}(u)$. Αν η v δεν πετυχαίνει το ελάχιστο της σε κανένα σημείο του $V^{(1)} \setminus V^{(0)}$, τότε έχουμε ότι $minv = v(Q) = u(Q) \geq minu$ για κάποιο $Q \in V^{(0)}$, και τότε η πρώτη ανισότητα είναι τετριμμένη. Ας υποθέσουμε, αντιθέτως, ότι υπάρχει κάποιο $Q \in V^{(1)} \setminus V^{(0)}$ στο οποίο η v πετυχαίνει το ελάχιστο. Απο την ισχύ του συστήματος (4.13), αφού $v(P) \geq v(Q) =: m$ για κάθε σημείο P κοντά στο Q, έχουμε πως $v(P) = v(Q)$ για κάθε σημείο P κοντά στο Q. Ειδικότερα, $v(P) = m$ για όλα τα $P \in V^{(1)} \setminus V^{(0)}$, έτσι μπορούμε να επαναλάβουμε το ίδιο επιχείρημα σε όλα τα σημεία $P \in V^{(1)} \setminus V^{(0)}$. Αλλά κάθε σημείο του $V^{(0)}$ είναι κοντά σε κάποιο σημείο στο $V^{(1)} \setminus V^{(0)}$. Έτσι, $v = m$ στο $V^{(1)}$, και ειδικότερα, αφού $v = u$ στο $V^{(0)}$, η u είναι σταθερή. □

Θα αποδείξουμε τώρα ένα απλό επακόλουθο του προηγούμενου αξιώματος, ότι η oscillation της αρμονικής επέκτασης της u σε κάθε 1-κελί εκτιμάται απο την oscillation της u στο $V^{(0)}$ πολλαπλασιασμένη με έναν σταθερό αριθμό φορών. Έστω:

$$\mathcal{S} := \{u \in \mathbb{R}^{V^{(0)}} : u(P_1) = 0, ||u|| = 1\}. \tag{4.24}$$

Συνέπεια 4.1. *Υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ τέτοιο ώστε για όλες τις συναρτήσεις $u : V^{(0)} \to \mathbb{R}$ να έχουμε $sup_{i=1,2,3} Osc_{V_i}(H_{(1;E)}(u)) \leq \gamma Osc_{V^{(0)}}(u)$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $u \in \mathbb{R}^{V^{(0)}}$ με u μη σταθερή. Τότε, απο ισχυρό αξίωμα μεγίστου, για κάθε $i = 1,2,3$ και για κάθε $P \in V^{(0)}$ έχουμε $min_{V^{(0)}} u \leq H_{(1;E)}(u)(\psi_i(P)) \leq max_{V^{(0)}} u$ με τις ανισότητες αυστηρές για κάθε $P \neq P_i$. Ως εκ τούτου, τουλάχιστον μία απο τις δύο ανισότητες είναι αυστηρή για κάθε $P \in V^{(0)}$, και $Osc_{V_i}(H_{(1;E)}(u)) \leq Osc_{V^{(0)}}(u)$ για $i = 1,2,3$. Έτσι θέτοντας:

$$\alpha(u) = \frac{sup_{i=1,2,3} Osc_{V_i}(H_{(1;E)}(u))}{Osc_{V^{(0)}}(u)}, \tag{4.25}$$

έχουμε ότι $\alpha(u) < 1$. Αφού η α είναι συνεχής έχει ένα μέγιστο $\gamma < 1$ στο $\mathcal{S}$. Αφού $\alpha(u + c) = \alpha(u)$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$, και η α είναι θετικά 0-ομοιογενής, έχουμε ότι:

$$\alpha(u) = a\left(\frac{u - u(P_1)}{||u - u(P_1)||}\right) \leq \gamma \tag{4.26}$$

για κάθε μη σταθερή $u \in \mathbb{R}^{V^{(0)}}$. □

Δοθέντος μιας συνάρτησης $u : V^{(0)} \to \mathbb{R}$, όπως υπαινίχθηκε παραπάνω, θέλουμε να την επεκτείνουμε σε μία συνάρτηση v στον $V^{(\infty)}$ με τον παρακάτω τρόπο. Θέτουμε $v = u$ στο $V^{(0)}$, μετά ορίζουμε την v αναδρομικά στο $V^{(n+1)} \setminus V^{(n)}$ για $n \geq 0$. Για $n = 0$, η v είναι η αρμονική επέκταση της u στο $V^{(1)}$. Πιο γενικά, ας υποθέσουμε ότι η v είναι ήδη ορισμένη στο $V^{(n)}$ και ας την επεκτείνουμε στο $V^{(n+1)}$. Υπενθυμίζουμε ότι $V^{(n+1)} = \bigcup_{i_1,\ldots,i_n=1}^{3} \psi_{i_1,\ldots,i_n}(V^{(1)})$. Επομένως, ορίζουμε την v χωριστά για κάθε $\psi_{i_1,\ldots,i_n}(V^{(1)})$. Έστω:

$$v(\psi_{i_1,\ldots,i_{n+1}}(P)) = H_{(1;E)}(v \circ \psi_{i_1,\ldots,i_n})(\psi_{i_{n+1}}(P)) \tag{4.27}$$

$\forall P \in V^{(0)}$,$\forall i_1, ..., i_{n+1} = 1, 2, 3$, με άλλα λόγια, $v \circ \psi_{i_1,...,i_{n+1}} = (v \circ \psi_{i_1,...,i_n}) \circ \psi_{i_{n+1}}$ στο $V^{(0)}$. Το δεξί μέλος της σχέσης βγάζει νόημα, καθώς έχουμε ήδη ορίσει την v στο $V^{(n)}$. Κατά κάποιο τρόπο, ταυτοποιώντας μια συνάρτηση στο $\psi_{i_1,...,i_n}(V^{(1)})$ με μία συνάρτηση στο $V^{(1)}$, η (4.27) ορίζει την v στο $\psi_{i_1,...,i_n}(V^{(1)})$ ως την αρμονική επέκταση του περιορισμού της v στο $\psi_{i_1,...,i_n}(V^{(0)})$. Το πρόβλημα στον ορισμό της v στο $V^{(n+1)}$ απο την (4.27), είναι ότι θα έπρεπε να υποψιαζόμαστε ότι ένα σημείο Q μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα σημείο του $V^{(n+1)}$ με διαφορετικούς τρόπους, όπως για παράδειγμα:

$$Q = \psi_{i_1,...,i_{n+1}}(P) = \psi_{i'_1,...,i'_{n+1}}(P'), \tag{4.28}$$

και ότι ο ορισμός της τιμής $v(Q)$ μέσω της (4.27) μπορεί να εξαρτάται απο μια τέτοια αναπαράσταση. Πρόκειται να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει αυτή η περίπτωση, και επομένως η (4.27) ορίζει μια συνάρτηση v. Ο γεωμετρικός λόγος γι'αυτό είναι ότι βλέπουμε ότι διαφορετικά (nthT) αντίγραφα μπορούν να έχουν ως κοινά σημεία μόνο τις κορυφές τους, έτσι ώστε τα σημεία Q στο σύνολο $V^{(n+1)} \setminus V^{(n)}$ μπορούν να αναπαρασταθούν με έναν μόνο τρόπο όπως στην σχέση (4.28). Ένα τέτοιο επιχείρημα μπορεί να θεωρηθεί επαρκώς πειστικό. Παρόλα αυτά υπάρχει και επίσημη απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι αν η (4.28) ισχύει, τότε:

$$H_{(1;E)}(v \circ \psi_{i_1,...,i_n})(\psi_{i_{n+1}}(P)) = H_{(1;E)}(v \circ \psi_{i'_1,...,i'_n})(\psi_{i'_{n+1}}(P')) \tag{4.29}$$

Αν $(i_1, ..., i_n) = (i'_1, ..., i'_n)$ τότε, όπως κάθε απεικόνιση ψ είναι 1-1, πρέπει απο (4.28), να ισχύει ότι $\psi_{i_{n+1}}(P) = \psi_{i'_{n+1}}(P')$, και έτσι η (4.29) ισχύει. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $(i_1, ..., i_n) \neq (i'_1, ..., i'_n)$. Τότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\psi_{i_{n+1}}(P), \psi_{i'_{n+1}}(P') \in V^{(0)}, \tag{4.30}$$

έτσι ώστε απο τον ορισμό της αρμονικής επέκτασης, να έχουμε:

$$\begin{aligned} H_{(1;E)}(v \circ \psi_{i_1,...,i_n})(\psi_{i_{n+1}}(P)) = v(\psi_{i_1,...,i_n}(\psi_{i_{n+1}}(P))) = \\ v(Q) = H_{(1;E)}(v \circ \psi_{i'_1,...,i'_n})(\psi_{i'_{n+1}}(P')) \end{aligned} \tag{4.31}$$

και η (4.29) ισχύει. Για να αποδείξουμε την σχέση (4.30) χρειαζόμαστε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 4.3. *Ας υποθέσουμε ότι* $(i_1, ..., i_n) \neq (i'_1, ..., i'_n)$. *Τότε:*

$$T_{i_1,...,i_n} \cap T_{i'_1,...,i'_n} \subseteq V_{i_1,...,i_n} \cap V_{i'_1,...,i'_n}. \tag{4.32}$$

Απόδειξη. Απο τον ορισμό των ψ_i, έχουμε $\psi_i(T) \cap \psi_{i'}(T) \subseteq \psi_i(V^{(0)}) \cap \psi_{i'}(V^{(0)})$ αν $i, i' = 1, 2, 3, i \neq i'$. Έτσι, αν $i_m \neq i'_m$, και $i_l = i'_l$ για όλα τα $l < m$, από το γεγονός ότι κάθε ψ_i απεικονίζει το T στον εαυτό του, έχουμε:

$$\psi_{i_m,...,i_n}(T) \cap \psi_{i'_m,...,i'_n}(T) \subseteq \psi_{i_m}(T) \cap \psi_{i'_m}(T) \subseteq \psi_{i_m}(V^{(0)}) \cap \psi_{i'_m}(V^{(0)}). \tag{4.33}$$

Σαφώς, κάθε απεικόνιση ψ_i απεικονίζει το συνολο $T \setminus V^{(0)}$ στον εαυτό του, επομένως το ίδιο κάνει και η απεικόνιση $\psi_{i_{m+1},...,i_n}$. Προκύπτει ότι:

$$\psi_{i_{m+1},...,i_n}(T) \cap V^{(0)} \subseteq \psi_{i_{m+1},...,i_n}(V^{(0)}) \tag{4.34}$$

ως εκ τούτου, χρησιμοποιώντας επίσης το γεγονός ότι κάθε ψ_i είναι 1-1:

$$\begin{aligned} \psi_{i_m,...,i_n}(T) \cap \psi_{i'_m,...,i'_n}(T) \subseteq \psi_{i_m,...,i_n}(T) \cap \psi_{i'_m}(V^{(0)}) \\ \psi_{i_m}(\psi_{i_{m+1},...,i_n}(T) \cap V^{(0)}) \subseteq \psi_{i_m,...,i_n}(V^{(0)}), \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}\psi_{i_m,...,i_n}(T) \cap \psi_{i'_m,...,i'_n}(T) &= \psi_{i_1,...,i_{m-1}}(\psi_{i_m,...,i_n}(T)) \cap \psi_{i_1,...,i_{m-1}}(\psi_{i'_m,...,i'_n}(T)) \\ &\subseteq \psi_{i_1,...,i_n}(V^{(0)}).\end{aligned} \tag{4.36}$$

Το ίδιο επιχείρημα ισχύει και για $i'_1, ..., i'_n$ στην θέση των $i_1, ..., i_n$ και έτσι έχουμε αποδείξει το Λήμμα. □

Τώρα, αφού έχουμε υποθέσει ότι $(i_1, ..., i_n) \neq (i'_1, ..., i'_n)$, και οι απεικονίσεις ψ_i είναι 1-1, απο την σχέση (4.28) και το Λήμμα 4.3, η (4.30) προκύπτει άμμεσα, και έτσι η (4.27) ορίζει μια συνάρτηση στο $V^{(\infty)}$. Τώρα θέλουμε να αποδείξουμε ότι η v είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $V^{(\infty)}$, και ως εκ τούτου μπορεί να επεκταθεί συνεχώς στο K. Αυτό το έχουμε ξαναδείξει στην περίπτωση του μοναδιαίου διαστήματος στην Ενότητα 3.4 θεωρώντας μια συνάρτηση u με πεπερασμένη ενέργεια. Τώρα θα το δείξουμε αποδυκνείοντας ότι η oscillation στα $n-$κελιά τείνει στο 0 καθώς $n \to \infty$. Ας δώσουμε τον παρακάτω ορισμό. Για $f : V^{(\infty)} \to \mathbb{R}$, ορίζουμε $Osc_{,n} f = sup_{i_1,...,i_n=1,2,3} Osc_{V^{(\infty)}_{i_1,...,i_n}} f$. Έχουμε:

Λήμμα 4.4. $Osc_{,n}(v) \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$

Απόδειξη. Απο (4.27) και Συνέπεια 4.1, έχουμε:

$$Osc_{V_{i_1,...,i_n}}(v) \leq \gamma Osc_{V_{i_1,...,i_n}}(v) \tag{4.37}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}, i_1, ..., i_{n+1} = 1, 2, 3$, και έτσι, για όλα τα $i_1, ..., i_n = 1, 2, 3$ έχουμε:

$$Osc_{V_{i_1,...,i_n}}(v) \leq \gamma^n Osc_{V^{(0)}}(u). \tag{4.38}$$

Τώρα, αν $P \in V^{(\infty)}_{i_1,...,i_n}$, έχουμε ότι $P = \psi_{i_1,...,i_n,i_{n+1},...,i_h}(Q)$ για κάποιο $Q \in V^{(0)}$ και $i_{n+1}, ..., i_h = 1, 2, 3$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την σχέση (4.27) ξανά και το Αξίωμα μεγίστου, ένα αναδρομικό επιχείρημα αποδίδει:

$$min_{V_{i_1,...,i_n}} v \leq v(P) \leq max_{V_{i_1,...,i_n}} v \tag{4.39}$$

και έτσι:

$$Osc_{V^{(\infty)}_{i_1,...,i_n}}(v) \leq Osc_{V_{i_1,...,i_n}}(v) \leq \gamma^n Osc_{V^{(0)}}(u). \tag{4.40}$$

Αφού αυτό ισχύει για όλα τα $i_1, ..., i_n$, έχουμε δείξει το Λήμμα. □

Συνέπεια 4.2. *Η v είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $V^{(\infty)}$.*

Απόδειξη. Έστω μας δίνεται $\epsilon > 0$. Έστω n τέτοιο ώστε $Osc_{,n}(v) < \frac{\epsilon}{2}$. Αφού:

$$V^{(0)} \subseteq V^{(\infty)} \subseteq T, \tag{4.41}$$

χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.3 παίρνουμε για κάθε $i_1, ..., i_n, i'_1, ..., i'_n = 1, 2, 3$, είτε ότι τα $V^{(\infty)}_{i_1,...,i_n}$ και $V^{(\infty)}_{i'_1,...,i'_n}$ έχουν μη κενή τομή, ή ότι τα $T_{i_1,...,i_n}$ και $T_{i'_1,...,i'_n}$ είναι ξένα, και επομένως αφού είναι συμπαγή έχουν θετική ελάχιστη απόσταση. Έστω $\delta > 0$ μικρότερο απο την ελάχιστη της απόστασης των ξένων $T_{i_1,...,i_n}$ και $T_{i'_1,...,i'_n}$. Αν $P, P' \in V^{(\infty)}$ και $d(P, P') < \delta$, έχουμε ότι $P \in V^{(\infty)}_{i_1,...,i_n}, P' \in V^{(\infty)}_{i'_1,...,i'_n}$ για κάποια $i_1, ..., i_n, i'_1, ..., i'_n$ και υπάρχει $Q \in V^{(\infty)}_{i_1,...,i_n} \cap V^{(\infty)}_{i'_1,...,i'_n}$. Ως εκ τούτου, $|v(P) - v(P')| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|v(P') - v(Q)| < \frac{\epsilon}{2}$, έτσι $|v(P) - v(P')| < \epsilon$. □

Θα αποκαλούμε την συνεχή επέκταση της v στο K που ορίζεται απο την σχέση (4.27), την *αρμονική επέκταση* της u στο K, και θα την συμβολίζουμε με $H_{(\infty;E)}(u)$.

Λήμμα 4.5. *Για κάθε $u : V^{(0)} \to \mathbb{R}$ έχουμε:*

$$minu \leq H_{(\infty;E)}(u) \leq maxu. \tag{4.42}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $v = H_{(\infty;E)}(u)$. Από (4.27) και το αξίωμα μεγίστου έχουμε:

$$min_{V_{i_1,\ldots,i_n}} v \leq min_{V_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}}} v \leq max_{V_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}}} v \leq max_{V_{i_1,\ldots,i_n}} v \tag{4.43}$$

επομένως, απο ένα αναδρομικό επιχείρημα παίρνουμε:

$$min_{V^{(0)}} u = min_{V^{(0)}} v \leq min_{V_{i_1,\ldots,i_n}} v \leq max_{V_{i_1,\ldots,i_n}} v \leq max_{V^{(0)}} v = max_{V^{(0)}} u, \tag{4.44}$$

ως εκ τούτου, $minu \leq v(P) \leq maxu$, για κάθε $P \in V^{(\infty)}$, και έτσι απο συνέχεια για κάθε $P \in K$. □

Η χρησιμότητα της αρμονικής επέκτασης φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.2. *Για κάθε $u \in \mathbb{R}^{V^{(0)}}$, έχουμε:*

$$\mathcal{E}_\infty(H_{(\infty;E)}(u)) = E(u). \tag{4.45}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $H_{(\infty;E)}(u) =: v$. Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.22), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n+1}(v) = \frac{1}{\rho^{n+1}} \sum_{i_1,\ldots,i_{n+1}=1}^{3} E(v \circ \psi_{i_1,\ldots,i_{n+1}}) = \\ \frac{1}{\rho^{n+1}} \sum_{i_1,\ldots,i_n}^{3} \left(\sum_{i_{n+1}}^{3} E(H_{(1;E)}(v \circ \psi_{i_1,\ldots,i_n}) \circ \psi_{i_{n+1}}) \right) = \\ \frac{1}{\rho^n} \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{3} E^{\Sigma}_{(1)}(H_{(1;E)}(v \circ \psi_{i_1,\ldots,i_n})) = \\ \frac{1}{\rho^n} \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{3} E(v \circ \psi_{i_1,\ldots,i_n}) = \mathcal{E}_n(v), \end{aligned} \tag{4.46}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, και έτσι $\mathcal{E}_n(H_{(\infty;E)}(u)) = E(u)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. □

Απο Θεώρημα 4.2 βλέπουμε ότι η $H_{(\infty;E)}(u)$ ελαχιστοποιεί την $\mathcal{E}_\infty$ μεταξύ των συναρτήσεων που είναι ορισμένες στο K οι οποίες αθροίζουν στην u στο $V^{(0)}$. Χρειαζόμαστε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 4.6. *Έχουμε ότι:*

$$K = \bigcup_{i_1,\ldots,i_n=1}^{3} \psi_{i_1,\ldots,i_n}(K). \tag{4.47}$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι $V^{(\infty)} = \bigcup_{i_1,\ldots,i_n=1}^{3} \psi_{i_1,\ldots,i_n}(V^{(\infty)})$. Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε ότι $K = \overline{V^{(\infty)}}$ και ότι οι $\psi_{i_1,\ldots,i_n}$ είναι συνεχείς. □

Δοθέντος μίας συνεχούς συνάρτησης v στο K, μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε για κάθε $m \in \mathbb{N}$, μία συνάρτηση που συμβολίζεται με $v_{(m;E)}$, ορισμένη στο K, που είναι κατά κάποιο τρόπο η αρμονική επέκταση του περιορισμού της v στο $V^{(m)}$. Για κάθε $P \in K$ θέτουμε:

$$v_{(m;E)}(\psi_{i_1,\dots,i_m}(P)) = H_{(\infty;E)}(v \circ \psi_{i_1,\dots,i_m})(P). \tag{4.48}$$

Εξαιτίας του Λήμματος 4.3, ένας τέτοιος ορισμός είναι σωστός, και η συνάρτηση $v_{(m;E)}$ είναι συνεχής, ο περιορισμός της σε κάθε $K_{i_1,\dots,i_m}$ είναι συνεχής και τα σύνολα $K_{i_1,\dots,i_m}$ είναι κλειστά υποσύνολα του K που καλύπτουν το K. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα παρόμοιο με αυτό του Θεωρήματος 4.2, έχουμε:

$$\mathcal{E}_\infty(v_{(m;E)}) = \mathcal{E}_m(v) < +\infty, \tag{4.49}$$

επομένως η $v_{(m;E)}$ έχει πεπερασμένη ενέργεια. Πρόκειται να δείξουμε ότι η $v_{(n;E)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ομοιόμορφα. Βασικά, για κάθε $Q \in K$ έστω $i_1,...,i_n = 1,2,3, P \in K$ τέτοιο ώστε $Q = \psi_{i_1,\dots,i_{n+1}}(P)$. Απο τον ορισμό της $v_{(n;E)}$ και το Λήμμα 4.5, έχουμε ότι $v_{(n;E)}(Q), v(Q) \in [inf_{K_{i_1,\dots,i_n}} v, sup_{K_{i_1,\dots,i_n}} v]$. Αφού:

$$diamK_{i_1,\dots,i_n} \leq (\frac{1}{2})^n diamK \tag{4.50}$$

(έχουμε βασικά την ισότητα στην σχέση (4.50)) και η v είναι ομοιόμορφα συνεχής, επομένως προκύπτει ότι $v_{(n;E)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, όπως ισχυρίστηκε. Συμπερασματικά,

Θεώρημα 4.3. *Το σύνολο των συναρτήσεων με πεπερασμένη ενέργεια είναι πυκνό στον $C(K)$.*

4.2 Dirichlet μορφές σε Πεπερασμένα Διακλαδώμενα Fractals

Σε αυτήν την ενότητα επεκτείνουμε την κατασκευή που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα απο την περίπτωση του Gasket στην περίπτωση των πιο γενικών fractals. Ποιος θα μπορούσε να είναι ένας πιο γενικός ορισμός του fractal; Στην προηγούμενη περίπτωση του Gasket το σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ αποδίδεται χρησιμοποιώντας ένα αρχικό σύνολο T και πεπερασμένα πολλές συστολικές (με παράγοντες < 1) ομοιότητες. Με μια ελάχιστα πιο βαθιά έρευνα αντιλαμβανόμαστε ότι το αρχικό σύνολο δεν είναι απαραίτητο σε αυτήν την κατασκευή, αφού, στην περίπτωση του Gasket για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να αρχίσουμε με το σύνολο $V^{(0)}$ αντί του T.

Στην ενότητα 3.1 κάναμε λόγο για το σύνολο των σταθερών σημείων των απεικονίσεων ψ_i, το οποίο συμβολίσαμε ως F, και θεωρήσαμε ένα υποσύνολο του V,που είναι το σύνολο κάποιων σταθερών σημείων των ψ_i. Γενικά δεν απαιτούμε το σύνολο V να αντιπροσωπεύει ολόκληρο το σύνολο F. Αυτή η διαπίστωση είναι σημαντική για τα παρακάτω. Θα λέμε και στην περίπτωση των γενικών fractals ότι το σύνολο K είναι το αυτοόμοιο σύνολο που παράγεται απο το σύνολο $\Psi = \{\psi_i : i = 1,...,k\}$ των συστολικών ομοιοτήτων. Να σημειώσουμε ότι ένα fractal μπορεί να παραχθεί και απο διαφορετικό σύνολο ομοιοτήτων. Παρόλα αυτά, για τα παρακάτω θεωρούμε το σύνολο K όπως στην ενότητα 3.1 με τις σχετικές ομοιότητες $\psi_1,...,\psi_k$, και θα αποκαλούμε ως P_i το σταθερό σημείο της ψ_i για $i = 1,...,k$. Επομένως, $F = \{P_i : i = 1,...,k\}$. Το πρόβλημα είναι πως να κατασκευάσουμε μία ενέργεια στην γενική περίπτωση. Θα το κάνουμε αυτό μιμούμενοι την ενέργεια στο Gasket. Παρόλα αυτά, όπως θα δούμε, αυτό το είδος κατασκευής δεν είναι δυνατό σε κάθε fractal, αλλά θα πρέπει να απαιτήσουμε κάποιες επιπρόσθετες προϋποθέσεις. Προτού αναλύσουμε τι ιδιότητες χρειαζόμαστε, πρόκειται να δώσουμε μια πιο συγκεκριμένη έννοια της λέξης *ενέργεια*. Απαιτούμε φυσικά, μια ενέργεια, να είναι ένα συναρτησιακό στο $C(K)$ που είναι μη αρνητική, τετραγωνική, και παίρνει την τιμή 0 σε σταθερές συναρτήσεις. Φαίνεται επίσης φυσικό να υποθέσουμε ότι είναι πεπερασμένη σε ένα πυκνό σύνολο συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον, φαίνεται φυσικό, να απαιτούμε μια ιδιότητα συμβασιμότητας με την fractal δομή. Η ανάγκη του ορισμού της έννοιας της ενέργειας γενικεύοντας το ολοκλήρωμα Dirichlet έχει οδηγήσει στην έννοια της *Dirichlet μορφής*. Συνήθως, μια Dirichlet μορφή ορίζεται σε έναν L^2 χώρο. Εδώ όμως, θα την ορίσουμε στο $C(K)$.

Το συναρτησιακό $\mathcal{E}_\infty$ κατασκευασμένο στο Gasket στην προηγούμενη ενότητα είναι μια καλή Dirichlet μορφή. Πράγματι, από τον ορισμό της καλής Dirichlet μορφής παρατηρούμε ότι η a) είναι τετριμμένη, η b) προκύπτει απο την ανάλογη ιδιότητα της συνάρτησης $(x, y) \mapsto (x-y)^2$ (δηλαδή αν $s(t) = (t \wedge 1) \vee 0$, τότε $(s(x) - s(y))^2 \leq (x-y)^2$); η c) προκύπτει απο το γεγονός ότι το συναρτησιακό $\mathcal{E}_\infty$ είναι το supremum των συνεχών συναρτησιακών $\mathcal{E}_n$, η d) είναι τετριμμένη, οι e) και f) έχουν αποδειχθεί στην προηγούμενη ενότητα, και η g) μπορεί εύκολα να αποδειχθεί με $r = \frac{3}{5}$ στην βάση του ορισμού της ακολουθίας $\mathcal{E}_n$. Προσπαθούμε τώρα να μιμηθούμε την κατασκευή του $\mathcal{E}_\infty$ σε ένα γενικό fractal. Για να το κάνουμε αυτό, πρέπει να περιορίσουμε το είδος των fractals που θεωρούμε, απαιτώντας να ισχύουν στα fractals μας ανάλογες ιδιότητες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στην κατασκευή για το Gasket. Εδώ, με σκοπό να απλοποιήσουμε την διαδικασία, δεν θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε το πιο ευρύ είδος των fractals, αλλά θα περιοριστούμε στην θεώρηση ενός είδους fractals που ταυτόχρονα είναι απλό να οριστεί και επαρκές ούτως ώστε να περιλαμβάνει τις πιο συνήθεις περιπτώσεις. Στην περίπτωση του Gasket, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\psi_i(T \setminus V) \subseteq T \setminus V$. Μια τέτοια ιδιότητα ήταν σημαντική στην κατασκευή της αρμονικής επέκτασης στο K μίας συνάρτησης ορισμένης στο V, η οποία μας επέτρεψε να αποδείξουμε την ιδιότητα f) του Ορισμού 3.1. Στο Κεφάλαιο 3, το εν λόγω σύνολο $\mathcal{H}$ ήταν το σύνολο των κατά τμήματα αρμονικών splines του επιπέδου m. Επίσης, χρησιμοποιήσαμε σιωπηρά το γεγονός ότι τα σημεία P_j είναι διαφορετικά το ένα απο το άλλο, και ότι τα σημεία $\psi_i(P_j)$ δεν βρίσκονται στο $V^{(0)}$ εκτός αν $i = j$. Επομένως οδηγούμαστε στο να απαιτήσουμε την ακόλουθη ιδιότητα η οποία περιλαμβάνει τις προηγούμενες δύο:

Ορισμός 4.1. *Λέμε ότι το K έχει την (ισχυρή) εμφωλευτική ιδιότητα αν $P_{j_1} \neq P_{j_2}$ όταν $j_1 \neq j_2$, και υπάρχει ένα σύνολο $V = V^{(0)} \subseteq F, V = \{P_1, ..., P_N\}, 2 \leq N \leq k$, τέτοιο ώστε αν θέσουμε $T = coV$, να έχουμε $\psi_i(T) \subseteq T$ και $\psi_i(x) \notin V^{(0)}$ αν $x \in T \setminus \{P_i\}$, και επιπλέον:*

$$\psi_i(T) \cap \psi_{i'}(T) = \psi_i(V) \cap \psi_{i'}(V) \text{ αν } i, i' = 1, ..., k, i \neq i'. \tag{4.51}$$

Έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει την σχέση (4.51) στο Λήμμα 4.3. Στην περίπτωση του Gasket, τα σύνολα V και T είναι όπως στην προηγούμενη ενότητα. Με την εμφωλευτική ιδιότητα απούσα, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το $\mathcal{E}_\infty$ είναι πεπερασμένο για κάποια μη σταθερή συνάρτηση. Προκύπτει ότι $\psi_i(T \setminus V^{(0)}) \subseteq T \setminus V^{(0)}$, για όλα τα $i = 1, ..., k$. Η εμφωλευτική ιδιότητα υπαινίσσεται ειδικότερα ότι κάθε $n-$κελί περιέχει το μέγιστο ένα σημείο του $V^{(0)}$ για $n > 0$. Επιπλέον,

$$P_h = \psi_i(P_j), h, j = 1, ..., N, i = 1, ..., k \Rightarrow i = j = h. \tag{4.52}$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε $P_h \in V^{(0)}$ ανηκει σε συγκεκριμένα ένα $1-$κελί, δηλαδή $V_h(:= \psi_h(V^{(0)}))$. Η φράση *ισχυρή εμφωλευτική ιδιότητα* είναι πιο κατάλληλη, αφού συνήθως η εμφωλευτική ιδιότητα έχει μια πιο αδύναμη σημασία, και ίσως είναι μια πιο αδύναμη έκδοση της (4.51), αλλά στο εξής ως σύμβαση θα παραλείπουμε την λέξη ισχυρή. Κατά κάποιο τρόπο, στον Ορισμό 4.1, η (4.51) είναι η πιο χαρακτηριστική ιδιότητα, στην οποία ξεχωρίζουν τα πιο συνήθη fractals. Στο παράδειγμα μας στο Gasket έχουμε $N = k = 3$ και έτσι έχουμε $N < k$. Μία άλλη ιδιότητα που έχουμε να απαιτήσουμε προέρχεται απο το σύνολο Cantor. Εκεί αν προσπαθήσουμε να μιμηθούμε τον ορισμό του $M_1(E)$ παίρνουμε 0, αφού, για κάθε συνάρτηση ορισμένη στο V, που σε αυτήν την περίπτωση είναι το σύνολο των συνοριακών σημείων του γραμμικού τμήματος, μπορεί να επεκταθεί στο $V^{(1)}$ σε μία συνάρτηση σταθερή σε κάθε $1-$κελί. Ο λόγος είναι ότι το σύνολο Cantor είναι αποσυνδεδεμένο, όχι τόσο με τοπολογική έννοια αλλά με τον συνδυαστικό τρόπο ότι τα $1-$κελιά είναι ξένα.

Τώρα ορίζουμε ως $A_{i_1,...,i_n} = \psi_{i_1,...,i_n}(A)$ για $A \subseteq K$ και $i_1, ..., i_n = 1, ..., k$, όπου η $\psi_{i_1,...,i_n}$ είναι μία συντόμευση για την συνάρτηση $\psi_{i_1} \circ \psi_{i_1} \circ ... \circ \psi_{i_n}$, και θέτουμε $V^{(n)} = \bigcup_{i_1,...,i_n=1}^{k} V_{i_1,...,i_n}, V^{(\infty)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} V^{(n)}$ όπως στην περίπτωση του Gasket. Σημειώνουμε ότι:

$$V^{(0)} \subseteq V^{(n)} \subseteq V^{(\infty)} \subseteq K \subseteq T \tag{4.53}$$

και η $V^{(n)}$ είναι αύξουσα ως προς n. Τότε λέμε ότι το fractal μας είναι συνδεδεμένο αν ο εξής γράφος είναι συνδεδεμένος: $\mathcal{G}_1 = (V^{(1)}, \Gamma_1)$ όπου Γ_1 είναι το σύνολο των $\{\psi_i(P_{j_1}), \psi_i(P_{j_2})\}$ με $i = 1, ..., k, j_1, j_2 = 1, ..., N, j_1 \neq j_2$. Με άλλα λόγια, απαιτούμε για κάθε $P, Q \in V^{(1)}$ να υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία $P_1, ..., P_m$ σημείων στο $V^{(1)}$ τέτοια ώστε, $P = P_1, Q = P_m$ και για κάθε $r = 1, ..., m-1$, τα P_r, P_{r+1} ανήκουν σε κάποιο $1-$κελί, ή επίσης, ότι οποιαδήποτε δύο σημεία στο $V^{(1)}$ μπορούν να είναι συνδεδεμένα απο ένα μονοπάτι στο $V^{(1)}$ του οποίου οι πλευρές περιέχονται σε κάποιο $1-$κελί (που εξαρτάται απο την πλευρά). Θα λέμε ότι ένα fractal είναι (ισχυρά) πεπερασμένα διακλαδώμενο αν έχει και την εμφωλευτική ιδιότητα και είναι συνδεδεμένο. Όσον αφορά την εμφωλευτική ιδιότητα, θα παραλείψουμε την λέξη ισχυρή προς απλότητα, παρότι, ο συνήθης ορισμός των πεπερασμένα διακλαδώμενων fractals είναι πιο γενικός.

Θα κατασκευάσουμε μια καλή Dirichlet μορφή στο fractal μας, που απο δω και στο εξής θα υποτεθεί πεπερασμένα διακλαδώμενο. Με την πρώτη ματιά, στην κατασκευή της προηγούμενης ενότητας χρησιμοποιήσαμε άλλες ιδιότητες του Gasket. Για παράδειγμα, στην απόδειξη του αξιώματος μεγίστου, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός, ότι κάθε σημείο στο $V^{(1)} \setminus V^{(0)}$ είναι κοντά σε ένα σημείο που είναι κοντά σε ένα σταθερό σημείο στο $V^{(0)}$. Παρόλα αυτά, αυτό μας λέει με άλλα λόγια ότι ένα σημείο στο $V^{(1)} \setminus V^{(0)}$ και ένα σημείο στο $V^{(0)}$ είναι συνδεδεμένα στον γράφο $\mathcal{G}_1$ απο ένα μονοπάτι μήκους ≤ 3, και η συνδεσιμότητα μπορεί εύκολα να αντικαταστήσει αυτήν την υπόθεση. Μια πιο σοβαρή δυσκολία είναι ότι, όταν δείξαμε ότι το $M_1(E)$ είναι ένα πολλαπλάσιο της E χρησιμοποιήσαμε την ισχυρή συμμετρία του Gasket. Με σκοπό να αποφύγουμε ένα τέτοιο πρόβλημα, θα θεωρήσουμε πιο γενικές τετραγωνικές μορφές στο $V^{(0)}$. Έστω ότι το K είναι ένα πεπερασμένα διακλαδώμενο fractal με ομοιότητες $\psi_1, ..., \psi_k$. Ορίζουμε ως $\mathcal{D}$ το σύνολο των συναρτησιακών απο το $\mathbb{R}^{V^{(0)}}$ στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα: *υπάρχει* $c_{j_1,j_2}(E)(= c_{j_1,j_2}) \geq 0 (j_1 \neq j_2)$ *με* $c_{j_1,j_2} = c_{j_2,j_1}$ *τέτοια ώστε:*

$$E(u) = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq N} c_{j_1,j_2}(u(P_{j_1}) - u(P_{j_2}))^2 \tag{4.54}$$

για όλες τις $u : V^{(0)} \to \mathbb{R}$.

Επιπλέον, ορίζουμε $\widetilde{\mathcal{D}}$ να είναι το σύνολο εκείνων των $E \in D$ που είναι μη-αναγόμενες, δηλαδή εκείνες για τις οποίες ισχύει ότι: $E(u) = 0$ αν και μόνο αν η u είναι σταθερή. Σκεπτόμενοι τους προηγούμενους ορισμούς, ενδιαφερόμαστε μόνο για το $\widetilde{\mathcal{D}}$. Παρόλα αυτά, σε κάποιες περιπτώσεις, θα χρειαστεί να θεωρήσουμε το σύνολο $\mathcal{D}$ που έχει το πλεονέκτημα κατά κάποιο τρόπο ότι είναι κλειστό σύνολο. Η διαφορά ως προς την περίπτωση του Gasket είναι ότι σε αυτήν την περίπτωση θεωρούμε μορφές με πιθανώς διαφορετικά ορίσματα. Τώρα ορίζουμε τα $S_n(E)$ και $M_n(E)$ όπως στην προηγούμενη ενότητα, με την προφανή αλλαγή ότι οι δείκτες στο άθροισμα στον ορισμό του $S_n(E)$ διαφέρουν απο 1 εώς k αντί απο 1 εως 3. Με σκοπό να μιμηθούμε την κατασκευή της προηγούμενης ενότητας, χρειαζόμαστε μια $E \in \widetilde{\mathcal{D}}$ τέτοια ώστε να υπάρχει $r > 0$ με $M_1(E) = rE$, με άλλα λόγια, πρέπει να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός ιδιοδιανύσματος για τον τελεστή $M_1 : \widetilde{\mathcal{D}} \to \widetilde{\mathcal{D}}$, το οποίο όπως θα δούμε, είναι γενικά, μη γραμμικό. Προτού συζητήσουμε το πρόβλημα, παρόλα αυτά, χρειαζόμαστε μια πιο λεπτομερή ανάλυση των προηγούμενων εννοιών. Για παράδειγμα, δεν έχουμε αποδείξει ότι ο M_1 απεικονίζει το $\widetilde{\mathcal{D}}$ στο $\widetilde{\mathcal{D}}$. Πρώτα απ'όλα, σημειώνουμε ότι τα ορίσματα της E είναι μοναδικά (αυτό μας κάνει να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $c_{j_1,j_2}(E)$). Αυτό είναι επακόλουθο του παρακάτω σχολίου.

Σχόλιο 4.1. *Δοθέντος σταθερών* $j_1, j_2 = 1, ..., N, j_1 \neq j_2$, *έστω* u_{j_1,j_2}, v_{j_1,j_2} *οι συναρτήσεις στο* $\mathbb{R}^{V^{(0)}}$ *που παίρνουν την τιμή 0 σε κάθε* P *διάφορετικό των* P_{j_1}, P_{j_2}, *και τέτοιες ώστε:*

$$u_{j_1,j_2}(P_{j_1}) = u_{j_1,j_2}(P_{j_2}) = v_{j_1,j_2}(P_{j_1}) = 1, v_{j_1,j_2}(P_{j_1}) = -1. \tag{4.55}$$

Τότε, αν η E *ορισμένη όπως στην σχέση (4.54) (χωρίς απαραίτητα να ισχύει* $c_{j_1,j_2} \geq 0$*), πρέπει να έχουμε ότι* $c_{j_1,j_2} = \frac{1}{4}(E(v_{j_1,j_2}) - E(u_{j_1,j_2})))$, *όπως μπορεί εύκολα να πιστοποιηθεί.*

Θέλουμε τώρα να αποδείξουμε ότι η M_1 απεικονίζει το $\widetilde{\mathcal{D}}$ στο $\widetilde{\mathcal{D}}$. Στην περίπτωση του Gasket, εκτιμήσαμε με ακρίβεια το $M_1(E)$. Το κάναμε αυτό λύνοντας ένα σύστημα. Σαφώς, αυτό δεν είναι δυνατό στην γενική περίπτωση. Παρόλα αυτά, δεν είναι απαραίτητο να λυθεί επακριβώς ένα τέτοιο σύστημα, αλλά αρκεί να αποδειχθεί ότι το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση. Για μία τέτοια περίπτωση, η λύση εξαρτάται γραμμικά απο την u και μπορούμε μετά να συνεχίσουμε όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο. Χρειαζόμαστε όμως κάποιες παραπάνω υποθέσεις για τους γράφους στο σύνολο $V^{(1)}$.

Σχόλιο 4.2. *Είναι εύκολο να δούμε ότι η συνθήκη της μη-αναγωγής για* $E \in \mathcal{D}$ *αθροίζει στο γεγονός ότι ο γράφος στο* $V^{(0)}$, *του οποίου οι πλευρές είναι τα σύνολα* $\{P_{j_1}, P_{j_2}\}$ *τέτοια ώστε* $c_{j_1,j_2} > 0$, *είναι συνδεδεμένος. Θα συμβολίζουμε έναν τέτοιο γράφο ως* $\mathcal{G}(E)$. *Να σημειώσουμε ότι η συνθήκη της μη-αναγωγής αθροίζει στο γεγονός ότι δεν υπάρχουν τόσα πολλά ορίσματα ίσα με το 0. Για παράδειγμα, αν* $N = 3$ *αυτό σημαίνει ότι το πολύ ένα απο τα ορίσματα* $c_{1,2}, c_{1,3}, c_{2,3}$ *είναι 0.*

Έστω κάποιο συγκεκριμένο $E \in \widetilde{\mathcal{D}}$. Θα αποκαλούμε ως $\mathcal{G}_1(E)$ τον γράφο στο $V^{(1)}$ του οποίου οι πλευρές είναι τα σύνολα της μορφής $\{\psi_i(P_{j_1}), \psi_i(P_{j_2})\}$ με $i =$

$1, ..., k, j_1, j_2 = 1, ..., N, j_1 \neq j_2$ και $c_{j_1,j_2} > 0$. Λέμε ότι δύο σημεία Q και Q' είναι $V^{(1)}$ κοντά (αντ. $E-$κοντά) αν είναι κοντά στον $\mathcal{G}_1$ (αντ. στον $\mathcal{G}_1(E)$). Επομένως δύο διαφορετικά σημεία είναι κοντα αν βρίσκονται στο ίδιο κελί. Λέμε ότι τα Q και Q' είναι συνδεδεμένα (αντ. $E-$συνδεδεμένα) αν είναι συνδεδεμένα στον $\mathcal{G}_1$ (αντ. στον $\mathcal{G}_1(E)$), δηλαδή, αν υπάρχει ένα μονοπάτι $(Q_1, ..., Q_m)$ με $Q_1, ..., Q_m \in V^{(1)}, m \geq 1$, και $Q_1 = Q, Q_m = Q'$, και Q_i και Q_{i+1} κοντά (αντ. $E-$κοντά). Σε μία τέτοια περίπτωση λέμε ότι το μονοπάτι συνδέει (αντ. $E-$συνδέει) το Q στο Q'. Λέμε ότι τα Q και Q' είναι ισχυρά συνδεδεμένα (αντ. ισχυρά $E-$συνδεδεμένα), και ότι το μονοπάτι συνδέει ισχυρά (αντ. ισχυρά $E-$συνδέει) το Q στο Q', αν μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $Q_2, ..., Q_{m-1} \notin V^{(0)}$. Παρόλα αυτά, απο τις υποθέσεις μας προκύπτει ότι οποιαδήποτε δύο σημεία στο $V^{(1)}$ είναι συνδεδεμένα.

Σχόλιο 4.3. *Προκύπτει εύκολα απο το προηγούμενο σχόλιο ότι οποιαδήποτε δύο σημεία βρίσκονται στο ίδιο 1-κελί V_i είναι $E-$συνδεδεμένα από ένα μονοπάτι $(Q_1, ..., Q_m)$ με $Q_h \in V_i$ για κάθε h. Προκύπτει ότι, αν $i > N$, έτσι ώστε το V_i να μην περιέχει κανένα σημείο του $V^{(0)}$, τότε οποιαδήποτε δύο σημεία στο V_i είναι ισχυρά $E-$συνδεδεμένα. Αν, αντί γι'αυτό, $i \leq N$, έτσι ώστε το P_i να είναι το μοναδικό σημείο στο $V^{(0)} \cap V_i$, τότε οποιοδήποτε σημείο στο V_i είναι ισχυρά $E-$συνδεδεμένο με το P_i.*

Λήμμα 4.7. *Κάθε σημείο $Q \in V^{(1)}$ είναι ισχυρά $E-$συνδεδμένο με κάποιο σημείο του $V^{(0)}$.*

Απόδειξη. Έστω $Q' \in V^{(0)}$. Αφού το fractal είναι συνδεδεμένο, υπάρχουν $Q_1, ..., Q_m \in V^{(1)}$ τέτοια ώστε $Q_1 = Q, Q_m = Q'$ και για κάθε $h = 1, ..., m-1$, τα Q_h και Q_{h+1} είναι κοντά. Έτσι, από το προηγούμενο σχόλιο, τα Q_h και Q_{h+1} είναι $E-$συνδεδεμένα, και επομένως τα Q και Q' είναι $E-$συνδεδεμένα. Σε ένα μονοπάτι $(\widetilde{Q}_1, ..., \widetilde{Q}_l)$ που $E-$συνδέει τα Q και Q', έστω Q'' το πρώτο στοιχείο $\widetilde{Q}_h \in V^{(0)}$. Τότε τα Q και Q'' είναι ισχυρά $E-$συνδεδεμένα. □

Σημειώστε ότι, εκτός της περίπτωσης του Gasket, γενικά δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το Q είναι ισχυρά $E-$συνδεδεμένο με οποιοδήποτε σημείο του $V^{(0)}$. Όπως στην προηγούμενη ενότητα, ορίζουμε $\mathcal{L}(n, u) = \{v \in \mathbb{R}^{V^{(n)}} : v = u \text{ στο } V^{(0)}\}$. Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε το ελάχιστο σημείο του $M_1(E)$ στο $\mathcal{L}(1, u)$ όπως στην προηγούμενη ενότητα.

Λήμμα 4.8. *Αν $u \in \mathbb{R}^{V^{(0)}}$, τότε μια συνάρτηση $v \in \mathcal{L}(1, u)$ ικανοποιεί την σχέση $M_1(E)(u) = S_1(E)(v)$ αν και μόνο αν:*

$$\sum c_{j_1,j_2}(v(P) - v(\psi_i(P_{j_2}))) = 0, \forall P \in V^{(1)} \setminus V^{(0)} \tag{4.56}$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλα τα $i = 1, ..., k, j_1, j_2 = 1, ..., N$ τέτοια ώστε $j_1 \neq j_2$ και $P = \psi_i(P_{j_1})$.

Λήμμα 4.9. *Έστω $u \in \mathbb{R}^{V^{(0)}}$ και $v \in \mathcal{L}(1, u)$ που ικανοποιεί την σχέση $M_1(E)(u) = S_1(E)(v)$. Ας υποθέσουμε ότι $P \in V^{(1)} \setminus V^{(0)}$ και $v(P) = max v$ ή $v(P) = min v$. Τότε, έχουμε $v(Q) = v(P)$ όποτε το $Q \in V^{(1)}$ είναι ισχυρά $E-$συνδεδεμένο στο P.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι $v(P) = max v =: M$. Προκύπτει απο την υπόθεση ότι $v(P') = v(P)$ αν το P' είναι $E-$κοντά στο P, αφού, στην αντίθετη περίπτωση, το αριστερό μέλος της σχέσης (4.56) θα ήταν αυστηρά θετικό. Τώρα, έστω $(Q_1, ..., Q_m)$ ένα μονοπάτι που ισχυρά $E-$συνδέει το P στο Q. Απο αναδρομή, $v(Q_r) = M$ για όλα τα $r = 1, ..., m$, και ειδικότερα, $v(Q) = M$. □

Πρόταση 4.1. *Αν $u \in \mathbb{R}^{V^{(0)}}$ και $v \in \mathcal{L}(1, u)$ ικανοποιούν την σχέση $M_1(E)(u) = S_1(E)(v)$, τότε η v ικανοποιεί το αξίωμα μεγίστου: για κάθε $P \in V^{(1)}$:*

$$min_{V^{(0)}} u \le v(P) \le max_{V^{(0)}} u. \tag{4.57}$$

Απόδειξη. Αποδυκνείουμε για παράδειγμα την δεύτερη ανισότητα. Υποθέτουμε ότι $v(P) = maxv =: M$ για κάποιο $P \in V^{(1)} \setminus V^{(0)}$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.7 και το Λήμμα 4.9, συμπεραίνουμε ότι $v(Q)(= u(Q)) = M$ για κάποιο $Q \in V^{(0)}$. Έτσι, $M \le maxu$. □

Θεώρημα 4.4. *Αν $u \in \mathbb{R}^{V^{(0)}}$ υπάρχει μία μοναδική $v \in \mathcal{L}(1, u)$ που ικανοποιεί την σχέση $M_1(E)(u) = S_1(E)(v)$, την οποία θα συμβολίζουμε με $H_{(1;E)}(u)$.*

Απόδειξη. Σαφώς, δοθέντος $v : V^{(1)} \to \mathbb{R}, v \in \mathcal{L}(1, u)$ και ικανοποιεί την σχέση $M_1(E)(u) = S_1(E)(v)$, αν και μόνο αν η v ικανοποιεί τις εξισώσεις (4.56) και, επιπλέον, ισχύει $v(P) = u(P)$ για $P \in V^{(0)}$. Έτσι, έχουμε ένα γραμμικό σύστημα με $\#V^{(1)}$ εξισώσεις και $\#V^{(1)}$ αγνώστους $v(P), P \in V^{(1)}$. Επομένως, πρέπει να αποδείξουμε ότι το αντίστοιχο ομογενές σύστημα έχει μη τετριμμένες λύσεις. Αλλά το ομογενές σύστημα είναι το σύστημα που αντιστοιχεί στην $u = 0$. Απο το αξίωμα μεγίστου, η μοναδική λύση σε ένα τέτοιο σύστημα είναι η συνάρτηση $v = 0$. □

Είναι προφανές, ότι η $H_{(1;E)}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: a)η $H_{(1;E)}$ είναι γραμμική, και άρα συνεχής. b)$H_{(1;E)}(u + c) = H_{(1;E)}(u) + c$ για όλα τα $u \in \mathbb{R}^{V^{(0)}}$ και $c \in \mathbb{R}$.

Σχόλιο 4.4. *Το ισχυρό αξίωμα μεγίστου γενικά δεν ισχύει.*

Χρειαζόμαστε ένα ακόμη Λήμμα.

Λήμμα 4.10. *Αν $v : V^{(n)} \to \mathbb{R}$ και $S_n(E)(v) = 0$, τότε η v είναι σταθερή στο $V^{(n)}$.*

Απόδειξη. Μιμούμαστε την απόδειξη του Λήμματος 4.1. Παρατηρούμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$, αν $v : V^{(m+1)} \to \mathbb{R}$ έχει μία σταθερή τιμή c_i σε κάθε $\psi_i(V^{(m)}), i = 1, ..., k$, τότε η v είναι σταθερή στο $V^{(m+1)}$. Πράγματι, $v = c_i$ στο 1-κελί V_i. Αφού το fractal είναι συνδεδεμένο, η c_i είναι ανεξάρτητη του i, έστω $c_i = c$ για κάθε i, και αφού $V^{(m+1)} = \bigcup_{i=1}^{k} \psi_i(V^{(m)}), v = c$ στο $V^{(m+1)}$ όπως ισχυρίστηκε. Προκύπτει ότι, αν η v είναι μη σταθερή στο $V^{(n)}$, τότε η $v \circ \psi_{i_1, i_2, ..., i_n}$ είναι μη σταθερή στο $V^{(0)}$ για κάποια $i_1, i_2, ..., i_n = 1, ..., k$, και έτσι $S_n(E)(v) > 0$. □

Θεώρημα 4.5. $M_1(E) \in \widetilde{\mathcal{D}}$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με ένα επιχείρημα παρόμοιο με αυτό της προηγούμενης ενότητας, ο τελεστής $M_1(E)$ μπορεί να αναπαρασταθεί όπως στην σχέση (4.54) για βολικά ορίσματα $c'_{j_1, j_2}(= c'_{j_2, j_1}), j_1, j_2 = 1, ..., N, j_1 \ne j_2$. Μένει να αποδείξουμε ότι:

(α΄) η $M_1(E)$ είναι μη-αναγόμενη.

(β΄) $c'_{j_1, j_2} \ge 0$.

Ας αποδείξουμε το (α′). Έχουμε ότι $M_1(E)(u) = S_1(E)(H_{(1;E)}(u))$. Αν η u είναι μη σταθερή, το ίδιο είναι και η $H_{(1;E)}(u)$. Ως εκ τούτου, απο Λήμμα 4.10, $M_1(E)(u) > 0$. Ας αποδείξουμε το (β′). Έστω $j_1, j_2 = 1, ..., N, j_1 \neq j_2$, και u_{j_1,j_2}, v_{j_1,j_2} όπως στο Σχόλιο 4.1, και έστω $w = H_{(1;E)}(v_{j_1,j_2})$. Αφού $|w| \in \mathcal{L}(1, u_{j_1,j_2})$, από τον ορισμό του $M_1(E)$ έχουμε:

$$M_1(E)(u_{j_1,j_2}) \leq S_1(E)(|w|) \leq S_1(E)(w) = M_1(E)(v_{j_1,j_2}), \tag{4.58}$$

όπου η δεύτερη ανισότητα είναι άμεσο επακόλουθο της σχέσης:

$$(|a| - |b|)^2 \leq (a - b)^2. \tag{4.59}$$

Τώρα το (β′) προκύπτει απο το Σχόλιο 4.1. □

Ακολούθως, συζητάμε το αν υπάρχει $E \in \widetilde{\mathcal{D}}$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $M_1(E) = rE$. Σε μία τέτοια περίπτωση λέμε ότι η E είναι μια *ιδιομορφή* και r η *ιδιοτιμή* της. Σε πολλά fractals υπάρχει ιδιομορφή.

Θέτουμε $\overline{E}$ να είναι εκείνη η μορφή που έχει όλα τα ορίσματα της ίσα με 1.

Έχουμε δει ότι στο Gasket η $\overline{E}$ είναι μια ιδιομορφή. Έστω $a = c_{1,2}, b = c_{2,3}$. Στον ορισμό του M_1 ελαχιστοποιούμε το συναρτησιακό:

$$a(u(P_1)-x)^2+a(u(P_2)-x)^2+b(u(P_3)-y)^2+b(u(P_2)-y)^2+b(z-x)^2+a(t-y)^2, \tag{4.60}$$

όπου,η v είναι η συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση, και θέτουμε $P_{12} = \psi_1(P_2) = \psi_2(P_1), P_{23} = \psi_3(P_2) = \psi_2(P_3), P_4 = \psi_1(P_3), P_5 = \psi_3(P_1), x = v(P_{12}), y = v(P_{23}), z = v(P_4), t = v(P_5)$. Σαφώς, για την ελάχιστη τιμή της v πρέπει να έχουμε $x = z, y = t$, και πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε ξεχωριστά τις συναρτήσεις $a(u(P_1)-x)^2+a(u(P_2)-x)^2$ ως προς x και $b(u(P_3) - y)^2 + b(u(P_2) - y)^2$ ως προς y. Προφανώς το αποτέλεσμα είναι:

$$\frac{1}{2}a(u(P_1) - u(P_2))^2 + \frac{1}{2}b(u(P_3) - u(P_2))^2 = \frac{1}{2}E(u). \tag{4.61}$$

Εδώ, και γενικά, η απεικόνιση M_1,που θεωρείται μια απεικόνιση των ορισμάτων της E στα ορίσματα του $M_1(E)$, είναι μια λογική συνάρτηση. Αυτό, αφού η λύση $H_{(1;E)}(u)$ του συστήματος (4.56) δίνεται απο τα πηλίκα δυο παραγόντων που είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις των ορισμάτων του E, και $M_1(E)(u) = S_1(E)(H_{(1;E)}(u))$. Επομένως, δεν μπορούμε να αναμένουμε ότι το M_1 είναι γραμμικό, και όταν επιχειρήματα όπως η συμμετρία δεν δουλεύουν, το πρόβλημα της ύπαρξης μιας ιδιομορφής δεν είναι τετριμμένο. Ένα γνωστό αποτέλεσμα, διατυπώνει ότι σε κάθε εμφωλευμένο fractal υπάρχει μια ιδιομορφή. Ένα εμφωλευμένο fractal ορίζεται να είναι το fractal που έχει ιδιότητες παρόμοιες με αυτές ενός πεπερασμένα διακλαδώμενου fractal, και επιπλέον την ακόλουθη ιδιότητα συμμετρίας:

Αν $j_1, j_2 = 1, ..., N, j_1 \neq j_2$, τότε η συμμετρία ϕ_{j_1,j_2} ως προς $\Gamma_{m_{j_1,j_2}} = \{z : ||z - P_{j_1}|| = ||z - P_{j_2}||\}$, απεικονίζει $n-$κελιά σε $n-$κελιά για $n \geq 0$ και οποιοδήποτε $n-$κελί που περιέχει στοιχεία και στις δύο πλευρές του γράφου $\Gamma_{m_{j_1,j_2}}$ απεικονίζεται στον εαυτό του.

Είναι εύκολο να δούμε ότι το Gasket είναι εμφωλευμένο.

Απο δω και στο εξής, υποθέτουμε ότι στο fractal μας υπάρχει μια ιδιομορφή, και με $\hat{E}$ συμβολίζουμε μια σταθερή ιδιομορφή.

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι $r < 1$. Μπορούμε να επαναλάβουμε για την $\hat{E}$ την ίδια κατασκευή με αυτή του $\overline{E}$ στο Gasket και να χρησιμοποιήσουμε τους ίδιους ορισμούς για την $\hat{\mathcal{E}}_n$, και για την αρμονική επέκταση $H_{(\infty,\hat{E})}(u)$. Έχουμε:

Θεώρημα 4.6. *Για κάθε $v : K \to \mathbb{R}$, η $\hat{\mathcal{E}}_n$ είναι αύξουσα ως προς n. Αν θέσουμε $\hat{\mathcal{E}}_\infty(v) = \lim_{n\to\infty} \hat{\mathcal{E}}_n(v)$, τότε η $\hat{\mathcal{E}}_\infty$ είναι μια καλή Dirichlet μορφή στο K.*

Απόδειξη. Μιμούμαστε την απόδειξη της προηγούμενης ενότητας. Πρέπει να τροποποιήσουμε ελαφρώς την απόδειξη της Συνέπειας 4.1. Τότε, είπαμε ότι ο αριθμός γ είναι μικρότερος απο 1, και χρησιμοποιήσαμε το ισχυρό αξίωμα μεγίστου, το οποίο όπως είπαμε στο Σχόλιο 4.4, δεν είναι πλέον έγκυρο στην τωρινή κατάσταση. Παρόλα αυτά, μια μικρή τροποποίηση αυτού του επιχειρήματος, χρησιμοποιώντας ουσιαστικά το αξίωμα μεγίστου, είναι ακόμη δυνατή. Έχουμε να αποδείξουμε ότι $Osc_{V_i}(v) < Osc_{V^{(0)}}(u)$, όταν η u είναι μια μη σταθερή συνάρτηση απο το $V^{(0)}$ στο $\mathbb{R}$ και $v = H_{(1;\hat{\mathcal{E}})}(u), i = 1, ..., k$. Με αυτόν τον σκοπό, χρησιμοποιώντας το αξίωμα μεγίστου, αρκεί να αποδείξουμε ότι η v δεν μπορεί να πετύχει στο ίδιο 1-κελί V_i και το μέγιστο και το ελάχιστο στο $V^{(1)}$. Ας υποθέσουμε αντιθέτως, ότι $maxv = v(\psi_i(P_{j_1})), minv = v(\psi_i(P_{j_2})), j_1, j_2 = 1, ..., N$. Απο Σχόλιο 4.3, είτε $i > N$ και τα $\psi_i(P_{j_1}), \psi_i(P_{j_2})$ είναι ισχυρά $\hat{E}-$συνδεδεμένα, ή $i \leq N$ και τα $\psi_i(P_{j_1}), \psi_i(P_{j_2})$ είναι ισχυρά $\hat{E}-$συνδεδεμένα στο P_i. Απο Λήμμα 4.9, στην προηγούμενη μορφή $v(\psi_i(P_{j_1})) = v(\psi_i(P_{j_2}))$, και στην τελευταία περίπτωση $v(\psi_i(P_{j_1})) = v(P_i) = v(\psi_i(P_{j_2}))$. Ως εκ τούτου, $maxv = minv$, και η v, άρα και η u, είναι σταθερή, που είναι αντίθεση. □

Οποιοδήποτε θετικό πολλαπλάσιο μιας ιδιομορφής είναι επίσης ιδιομορφή. Επομένως, μια φυσιολογική ερώτηση είναι: είναι μοναδική η ιδιομορφή ως προς μια πολλαπλασιαστική σταθερά; Η απάντηση είναι ναι σε πολλές περιπτώσεις, αλλά όχι πάντα. Πρόκειται τώρα να αποδείξουμε ότι, ανεξάρτητα της μη μοναδικότητας, η ιδιοτιμή r δεν εξαρτάται απο την ιδιομορφή, αλλά έχει σχέση με το fractal. Χρειαζόμαστε κάποιες προϋποθετικές θεωρήσεις.

Λήμμα 4.11. *Για οποιαδήποτε $E, E' \in \widetilde{\mathcal{D}}$ η αναλογία:*

$$A(u) = \frac{E'(u)}{E(u)} \tag{4.62}$$

έχει θετικό ελάχιστο, το οποίο θα συμβολίζουμε με $\lambda_-(E, E')$, και μέγιστο, το οποίο θα συμβολίζουμε με $\lambda_+(E, E')$ στο σύνολο των μη σταθερών $u \in \mathbb{R}^{V^{(0)}}$. Είναι επίσης, το ελάχιστο και το μέγιστο του A στο σύνολο $\mathcal{S}$, όπως ορίστηκε στην σχέση (4.24).

Απόδειξη. Αφού $A(u) = A\left(\frac{u-u(P_1)}{||u-u(P_1)||}\right)$ για κάθε μη σταθερή $u \in \mathbb{R}^{V^{(0)}}$, επαρκεί να παρατηρήσουμε ότι η A είναι συνεχής, και έτσι έχει ελάχιστο και μέγιστο στο $\mathcal{S}$. □

Σχόλιο 4.5. *Σαφώς έχουμε:*

$$\lambda_-(E, E')E \leq E' \leq \lambda_+(E, E')E \tag{4.63}$$

για κάθε $E, E' \in \widetilde{\mathcal{D}}$.

Παραθέτουμε τώρα κάποιες απλές ιδιότητες των S_n και M_n τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα χωρίς ξεκάθαρη αναφορά. a)$S_n(\alpha E) = \alpha S_n(E), M_n(\alpha E) = \alpha M_n(E)$, b)$E \leq E' \Rightarrow S_n(E) \leq S_n(E'), M_n(E) \leq M_n(E')$, όπου $E, E' \in \widetilde{\mathcal{D}}, \alpha > 0$. Απο την έκφραση $E \leq E'$ εννοούμε ότι $E(u) \leq E'(u)$ για όλα τα $u \in \mathbb{R}^{V^{(0)}}$ και παρόμοια για $S_n(E)$ και $M_n(E)$. Σημειώνουμε ότι η σχέση $E \leq E'$ δεν αθροίζει στην $c_{j_1,j_2}(E) \leq c_{j_1,j_2}(E')$ για κάθε $j_1, j_2 = 1, 2, ..., N, j_1 \neq j_2$; για παράδειγμα, αν $N = 3$ και $c_{1,2}(E') = c_{1,3}(E') = 3, c_{2,3}(E') = 0$, και $c_{1,2}(E) = c_{1,3}(E) = c_{2,3}(E) = 1$, χρησιμοποιώντας την απλή ανισότητα $(\alpha+\beta)^2 \leq 2\alpha^2+2\beta^2$, έχουμε $E \leq E'$. Υπενθυμίζουμε ότι στις προηγούμενες υποθέσεις μας δεν απαιτούσαμε οι μορφές να είναι ιδιομορφές.

Λήμμα 4.12. *Αν E και E' είναι ιδιομορφές στο $\widetilde{\mathcal{D}}$, τότε έχουν την ίδια ιδιοτιμή.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $M_1(E) = rE$ και $M_1(E') = r'E'$ και αποδυκνείουμε ότι $r = r'$. Βασικά, έχουμε $\alpha E \leq E' \leq bE$ για κάποια $\alpha, b > 0$ απο το Σχόλιο 4.5. Χρησιμοποιώντας το a) και το b), παίρνουμε $M_1^n(E) = r^n E, M_1^n(E') = r'^n E'$, και $\alpha r^n E \leq r'^n E' \leq b r^n E$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ως εκ τούτου, αν $r \neq r'$, έχουμε ότι είτε η E είτε η E' είναι ταυτοτικά 0, που είναι αντίθετο με την υπόθεση ότι $E, E' \in \widetilde{\mathcal{D}}$. $\square$

Κεφάλαιο 5

Ο Τελεστής Laplace σε μορφοκλασματικούς χώρους

5.1 Ασθενής Διατύπωση

Είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε, σε λίγες γραμμές, μια Λαπλασιανή Δ και στους δύο αυτοόμοιους χώρους μας, I και SG, μέσω της ίδιας ασθενούς διατύπωσης. Για να το κάνουμε αυτό χρειαζόμαστε μόνο δύο συστατικά: την διγραμμική ενέργεια $\mathcal{E}(u,v)$ και ένα μέτρο κανονικής πιθανότητας μ. Για το μεγαλύτερο μέρος του κεφαλαίου θα θεωρήσουμε το μ να είναι το κανονικό αυτοόμοιο μέτρο, αλλά είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι μπορούμε να κάνουμε και άλλες επιλογές. Θα γράφουμε Δ_μ για να δηλώσουμε την εξάρτηση απο την επιλογή του μέτρου και Δ αν μ είναι το standard measure, στην οποία περίπτωση θα αποκαλούμε ως Δ την standard Laplacian. Η ιδέα πίσω απ΄ αυτόν τον ορισμό είναι η ολοκλήρωση κατά μέρη.

Έστω η συνάρτηση $v \in C^2$ που συνέβη να εξαφανίζεται στα συνοριακά σημεία. Τότε η εξίσωση:

$$\int_0^1 u''(x)v(x)dx = -\int_0^1 u'(x)v'(x)dx \tag{5.1}$$

ισχύει για $u \in C^2$, αλλά ισχύει και το αντίστροφο: Αν η $u \in C^1$ και υπάρχει μια συνεχής f τέτοια ώστε:

$$\int_0^1 f(x)v(x)dx = -\int_0^1 u'(x)v'(x)dx \tag{5.2}$$

για κάθε τέτοια v, τότε $u \in C^2$ και $u'' = f$. Έχουμε αποφύγει τους συνοριακούς όρους έχοντας υποθέσει ότι $v(0) = v(1) = 0$. Θα δούμε αργότερα την περίπτωση που θα υποθέσουμε το αντίθετο. Προς το παρόν μπορούμε να ξαναγράψουμε την σχέση (5.2) ως:

$$\mathcal{E}(u,v) = -\int_0^1 f(x)v(x)dx \text{ για όλα τα } v \in dom_0\mathcal{E} \tag{5.3}$$

(Ο δείκτης 0 σημαίνει ακριβώς ότι η συνάρτηση v εξαφανίζεται στο σύνορο). Η ολοκλήρωση κατά μέρη μας λέει λοιπόν ότι $u \in C^2$ και $u'' = f$ αν και μόνο αν $u \in dom\mathcal{E}$ και ισχύει η (5.3). Και μια διαπίστωση: $u \in dom\mathcal{E}$ είναι βασικά κάτι πιο ασθενές απο το ότι $u \in C^1$.

Ο παρακάτω ορισμός βγάζει νόημα και για $K = I$ και για SG.

Ορισμός 5.1. *Έστω $u \in dom\mathcal{E}$ και έστω f συνεχής. Τότε $u \in dom\Delta_\mu$ με $\Delta_\mu u = f$ αν:*

$$\mathcal{E}(u, v) = -\int_K f v d\mu \text{ για κάθε } v \in dom_0\mathcal{E} \tag{5.4}$$

Σημειώνουμε ότι η συνθήκη θετικότητας (3.18) μας χρειάζεται έτσι ώστε η σχέση (5.4) να ορίζει μοναδικά την f. Πιο γενικά, μόνο αν υποθέσουμε ότι $f \in L^2(d\mu)$ και ότι η (5.4) ισχύει, τότε λέμε ότι $u \in dom_{L^2}\Delta_\mu$ και $\Delta_\mu u = f$.

Ο ορισμός αυτός είναι η ασθενής διατύπωση. Αργότερα θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μια ισοδύναμη σημειακή διατύπωση. Κάποιος θα μπορούσε να ξεκινήσει με την σημειακή διατύπωση και να αποδείξει τον παραπάνω ορισμό ως θεώρημα. Παρόλα αυτά, αυτό δεν λειτουργεί για την ευρύτερη κλάση $dom_{L^2}\Delta_\mu$. (Αυτό κυρίως θα χρησιμοποιηθεί σε καταστάσεις όπου η f είναι κατά τμήματα συνεχής αλλά έχει κάποια άλματα ασυνέχειας). Παρόλο που η ασθενής διατύπωση φαίνεται πιο τεχνητή στην αρχή, αποδυκνείεται ότι είναι πιο χρήσιμη σε βάθος χρόνου.

Μία πηγή σύγχυσης στην περίπτωση $K = I$ είναι ότι η σχέση (5.4) είναι μια σχέση με δύο διαφορετικά μέτρα: στο αριστερό μέλος η ενέργεια είναι πάντα το ολοκλήρωμα $\int_0^1 u'(x)v'(x)dx$ ως προς το standard measure, το οποίο μπορεί να ναι διαφορετικό απο το μέτρο μ στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους. (Η πραγματική σημασία της σχέσης $\Delta_\mu u = f$ στην περίπτωση του $K = I$ και του μ ως γενικού μέτρου είναι όπως μιας κατανομής, $\frac{d^2}{dx^2}u = f d\mu$). Φυσικά, όταν $K = SG$ δεν υπάρχει ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της σχέσης (5.4).

Με σκοπό ο ορισμός να ειναι μαθηματικά ενδιαφέρον, δεν χρειάζεται μόνο να ακούγεται λογικός, αλλά πρέπει και να ισχύει για έναν επαρκή αριθμό περιπτώσεων. A priori, δεν είναι σαφές ότι δεν υπάρχουν μη τετριμμένες συναρτήσεις στο $dom\Delta_\mu$. Είναι σαφές ότι $0 \in dom\Delta_\mu$ με $\Delta 0 = 0$, ή πιο γενικά οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση, και επίσης ότι ο χώρος $dom\Delta_\mu$ σχηματίζει έναν διανυσματικό χώρο συναρτήσεων. Αλλά πέρα απ'αυτό (τουλάχιστον για το SG) θα χρειαστεί να κάνουμε κάποια δουλειά. Ίσως θα δούμε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση f υπάρχει $u \in dom\Delta_\mu$ τέτοια ώστε $\Delta_\mu u = f$ - αυτό είναι το καλύτερο που θα μπορούσαμε να ελπίζουμε. Για αρχή, θα δείξουμε ότι ο χώρος $dom\Delta_\mu$ περιέχει αρμονικές συναρτήσεις h, και $\Delta_\mu h = 0$. Σημειώστε ότι αυτό ισχύει για όλα τα μέτρα μ.

Θεώρημα 5.1. *Αν η h είναι αρμονική, τότε $h \in dom\Delta_\mu$ και $\Delta_\mu h = 0$. Αντίστροφα, αν $u \in dom\Delta_\mu$ και $\Delta_\mu u = 0$ τότε η u είναι αρμονική.*

Απόδειξη. Απο το Λήμμα 3.1, η $\mathcal{E}_m(h, v)$ είναι ανεξάρτητη του m, επομένως $\mathcal{E}(h, v) = \mathcal{E}_0(h, v)$. Αλλά $\mathcal{E}_0(h, v) = 0$ επειδή η συνάρτηση v εξαφανίζεται στο σύνορο. Αυτό δείχνει ότι $\Delta_\mu h = 0$. Για το αντίστροφο, κάνουμε μια ειδική επιλογή για την v. Δοθέντος m και ενός σημείου $x \in V^{(m)} \setminus V^{(0)}$, ορίζουμε με $\theta_x^{(m)}$ την κατά τμήματα αρμονική spline στον $\mathcal{S}(\mathcal{H}_0, V^{(m)})$ που ικανοποιεί την σχέση $\theta_x^{(m)}(y) = \delta_{xy}$ για $y \in V^{(m)}$. Σημειώνουμε ότι η $\theta_x^{(m)} \in dom_0\mathcal{E}$ επειδή $x \notin V^{(0)}$. Τότε $\mathcal{E}(u, \theta_x^{(m)}) = 0$ επειδή $\Delta_\mu u = 0$. Αλλά, ξανά απο Λήμμα 3.1 (αντιστρέφοντας τους ρόλους των u και v), έχουμε ότι $\mathcal{E}(u, \theta_x^{(m)}) = \mathcal{E}_m(u, \theta_x^{(m)})$. Παρόλα αυτά, η εξίσωση $\mathcal{E}_m(u, \theta_x^{(m)}) = 0$ είναι ακριβώς η συνθήκη:

$$\sum_{y\sim_m x}(u(x)-u(y))=0 \tag{5.5}$$

ότι δηλαδή η $u|_{V(m)}$ είναι αρμονική. Αφού αυτό ισχύει για κάθε m, η u είναι αρμονική. □

Μπορεί να φαίνεται εύλογο ότι μπορέσαμε εύκολα να δημιουργήσουμε άλλες συναρτήσεις στον χώρο $dom\Delta_\mu$ περνώντας σε ευρύτερες κλάσεις συναρτησεων σχετιζόμενων με αρμονικές συναρτήσεις. Για παράδειγμα, οι κατα τμήματα αρμονικές splines δεν βρίσκονται στον χώρο $dom\Delta_\mu$, και αυτό είναι ξεκάθαρο για $K=I$. Μια άλλη προσέγγιση θα ήταν να δοκιμάζαμε δυνάμεις και πολυώνυμα απο αρμονικές συναρτήσεις; ενώ αυτό μπορεί να γίνει για $K=I$, προκύπτει ότι για το SG αν $u\in dom\Delta_\mu$ έπεται ότι η u^2 $\delta\epsilon\nu$ ανήκει στο $dom\Delta_\mu$ (για το standard measure), όπως θα δούμε παρακάτω. Επομένως, για λίγο θα αναπτύξουμε κάποιες ιδιότητες του χώρου $dom\Delta_\mu$ προτού δείξουμε ότι στην πραγματικότητα υπάρχουν πολλές συναρτήσεις σε αυτον τον χώρο.

Η πρώτη ιδιότητα είναι η ιδιότητα κλιμάκωσης, η οποία ισχύει στην περίπτωση που το μ είναι ένα αυτοόμοιο μέτρο. Επομένως ας υποθέσουμε ότι η σχέση (3.37) ισχύει για κάποιες πιθανότητες $\{\mu_i\}$. Αυτή είναι η ιδιότητα κλιμάκωσης για το μέτρο. Έχουμε επίσης την ιδιότητα κλιμάκωσης για την ενέργεια:

$$\mathcal{E}(u,v)=\sum_i r^{-1}\mathcal{E}(u\circ\psi_i,v\circ\psi_i) \tag{5.6}$$

Αντικαθιστώντας την (3.37) και την προηγούμενη στην σχέση (5.3) παίρνουμε:

$$-\sum_i r^{-1}\mathcal{E}(u\circ\psi_i,v\circ\psi_i)=\sum_i \mu_i\int_K (f\circ\psi_i)(v\circ\psi_i)d\mu. \tag{5.7}$$

Τώρα δοθέντος μιας τιμής $i=j$ και $w\in dom_0\mathcal{E}$, κατασκευάζουμε $v\in dom_0\mathcal{E}$ τέτοια ώστε $v\circ\psi_j=w$ και $v\circ\psi_i=0$ για όλα τα $i\neq j$. Χρησιμοποιώντας αυτην την v στην (5.7) παίρνουμε:

$$-r^{-1}\mathcal{E}(u\circ\psi_j,w)=\mu_j\int f\circ\psi_j w d\mu \tag{5.8}$$

άρα σύμφωνα με τον ορισμό, $u\circ\psi_i\in dom\Delta_\mu$ και:

$$\Delta_\mu(u\circ\psi_j)=r\mu_j(\Delta_\mu u)\circ\psi_j. \tag{5.9}$$

Με επανάληψη παίρνουμε:

$$\Delta_\mu(u\circ\psi_w)=r_w\mu_w(\Delta_\mu u)\circ\psi_w \tag{5.10}$$

όπου $r_w=r^{|w|}$. Ειδικότερα, για το standard measure ο παράγοντας κλίμακας $r\mu$ για τις Λαπλασιανές είναι $\frac{1}{4}$ για $K=I$ και $\frac{1}{5}$ για $K=SG$.

Η εμφάνιση του παράγοντα κλίμακας $\frac{1}{5}$ στην Λαπλασιανή στο SG φαίνεται περίεργη. Η εξήγηση που έχουμε δώσει είναι ότι δεν είναι μια αμείωτη ποσότητα, αλλά ένα γινόμενο απο δύο παράγοντες, $\frac{3}{5}$ για την κλιμακοποίηση της ενέργειας και $\frac{1}{3}$ για την κλιμακοποίηση του μέτρου. Ωστόσο, φαίνεται ακόμη παράξενο. Ο παράγοντας κλίμακας για την Λαπλασιανή σε οποιοδήποτε Ευκλείδειο χώρο διάστασης $\mathbb{R}^n$ είναι πάντα $\frac{1}{4}$. Άρα η αρχική προσδοκία είναι ότι το SG είναι ένας χώρος κάποιας κλασματικής διάστασης, αλλά η διάσταση δεν θα έπρεπε να μας ενδιαφέρει. Μια πιο φιλοσοφημένη ανάλυση θα μπορούσε να δείξει ότι οι συστολές ψ_i έχουν παράγοντα κλίμακας $\frac{1}{2}$ ως προς την Ευκλείδεια μετρική, αλλά ουσιαστικά $\frac{3}{5}$ ως προς κάποια άλλη μετρική που θα μπορούσαμε να ορίσουμε. Αυτό οδηγεί σε μια αναμενόμενη τιμή ίση με $(\frac{3}{5})^2$ για τον παράγοντα κλίμακας της Λαπλασιανής, δηλαδή μία τιμή διάφορη του $\frac{1}{5}$. Η μόνη διέξοδος απ'αυτό το σύνορο είναι να αγνοήσουμε την ιδέα ότι η Λαπλασιανή είναι ένας τελεστής 2ης τάξης. Αργότερα θα δούμε περισσότερα στοιχεία για αυτή την υπόθεση.

5.2 Σημειακή Διατύπωση

Ποια είναι η τιμή του $\Delta_\mu u(x)$ σε ένα συγκεκριμένο σημείο x; Θα μέναμε ικανοποιημένοι από μια απάντηση παρόμοια με αυτή ενός πηλίκου δεύτερης τάξης:

$$u''(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{u\left(x + \frac{1}{2^m}\right) - 2u(x) + u\left(x - \frac{1}{2^m}\right)}{\left(\frac{1}{2^m}\right)^2} \tag{5.11}$$

στο μοναδιαίο διάστημα. Ένας άλλος τρόπος να το δούμε αυτό είναι ότι υπάρχει κάποια Λαπλασιανή σε γράφο, ας την συμβολίσουμε Δ_m ορισμένη σε κάθε έναν απο τους γράφους Γ_m ως:

$$\Delta_m u(x) = \sum_{y\sim_m x} (u(y) - u(x)), x \in V^{(m)} \setminus V^{(0)} \tag{5.12}$$

άρα τουλάχιστον για $x \in V_*/V^{(0)}$, θα θέλαμε η τιμή $\Delta_\mu u(x)$ να είναι το κανονικοποιημένο όριο της $\Delta_m u(x)$. Μία τέτοια ιδιότητα θα υπονοούσε την τοπική ιδιότητα του τελεστή Δ_μ, δηλαδή, ότι η $\Delta_\mu u(x)$ ορίζεται απο τις τιμές της u σε οποιαδήποτε γειτονιά του x. Αυτή η ιδιότητα εκφράζεται μερικές φορές πιο επίσημα απο την ισότητα $u \cdot v \equiv 0$ που σημαίνει ότι $v\Delta_\mu u \equiv 0$.

Υπάρχει ένας πιο απλός τρόπος να παράξουμε μια τέτοια σημειακή σχέση απο την ασθενή διατύπωση; Είναι η ίδια ιδέα που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.1, δηλαδή η αντικατάσταση $v = \theta_x^{(m)}$ στον ορισμό. Ισχύει ότι $\mathcal{E}_m(u, \theta_x^{(m)}) = -r^{-m}\Delta_m u(x)$, αφού μόνο οι πλευρές που περιέχουν το x βλέπουν κάποια μεταβολή στην $\theta_x^{(m)}$. Επίσης απο το Λήμμα 3.1, ξέρουμε ότι $\mathcal{E}_m(u, \theta_x^{(m)}) = \mathcal{E}(u, \theta_x^{(m)})$. Έτσι η σχέση (5.3) λέει:

$$r^{-m}\Delta_m u(x) = \int_K f\theta_x^{(m)} d\mu \tag{5.13}$$

Αφού η f υποτίθεται συνεχής και το ενεργό πεδίο ορισμού της $\theta_x^{(m)}$ είναι κοντά στο x,

$$\int_K f\theta_x^{(m)} d\mu \approx f(x) \int_K \theta_x^{(m)} d\mu \tag{5.14}$$

Η σημειακή διατύπωση η οποία ψάχνουμε είναι:

$$\Delta_\mu u(x) = \lim_{m\to\infty} r^{-m} \left(\int_K \theta_x^{(m)} d\mu\right)^{-1} \Delta_m u(x) \tag{5.15}$$

Θεώρημα 5.2. *Έστω $u \in dom\Delta_\mu$. Τότε η σημειακή διατύπωση (5.15) ισχύει με το όριο ομοιόμορφο στο σύνολο $V_* \setminus V^{(0)}$. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η u είναι μια συνεχής συνάρτηση και το δεξί μέλος της (5.15) συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση στο $V_* \setminus V^{(0)}$. Τότε $u \in dom\Delta_\mu$ και η (5.15) ισχύει.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $u \in dom\Delta_\mu$ και $\Delta_\mu u = f$. Χρησιμοποιώντας την σχέση (5.13) βρίσκουμε:

$$r^{-m}\left(\int_K \theta_x^{(m)} d\mu\right)^{-1} \Delta_m u(x) = \frac{\int_K f\theta_x^{(m)} d\mu}{\int_K \theta_x^{(m)} d\mu} \tag{5.16}$$

για οποιοδήποτε $x \in V^{(m)} \setminus V^{(0)}$. Η ομοιόμορφη σύγκλιση του δεξιού μέλους της (5.16) στην τιμή $f(x)$ είναι ένα φυσικό επακόλουθο της συνέχειας της f.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το δεξί μέλος της σχέσης (5.15) συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση f. Για οποιαδήποτε $v \in dom_0\mathcal{E}$ έχουμε:

$$\mathcal{E}_m(u, v) = r^{-m} \sum_{x\sim_m y} (u(y) - u(x))(v(y) - v(x)) \tag{5.17}$$

Συλλέγουμε όλους τους όρους στο άθροισμα που περιέχουν τον παράγοντα $v(x)$ για ένα σταθερό $x \in V^{(m)} \setminus V^{(0)}$ (αφού η v εξαφανίζεται στο $V^{(0)}$, μπορούμε να εξαιρέσουμε τα συνοριακά σημεία). Ένας τέτοιος όρος θα πολλαπλασιάσει τον όρο $-(u(y) - u(x))$ για κάθε y που γειτονεύει με το x. Έτσι:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m(u, v) &= -r^{-m} \sum_{x\in V^{(m)}/V^{(0)}} v(x) \left(\sum_{y\sim_m x} (u(y) - u(x))\right) \\ &= - \sum_{x\in V^{(m)}/V^{(0)}} v(x) r^{-m} \Delta_m u(x) \end{aligned} \tag{5.18}$$

(Μπορεί να σκεφτόμαστε ότι έχουμε διώξει τους μισούς όρους στην σχέση (5.17), δηλαδή τους όρους με τον παράγοντα $v(y)$, αλλά κατά βάση κάθε γράφος Γ_m εμφανίζεται δις στην σχέση (5.18) και μόνο μια φορά στην σχέση (5.17)). Επομένως μπορούμε να ξαναγράψουμε την σχέση (5.12) ως εξής:

$$\mathcal{E}_m(u, v) = - \sum_{x\in V^{(m)}/V^{(0)}} v(x) \left(\int \theta_x^{(m)} d\mu\right) r^{-m} \left(\int \theta_x^{(m)} d\mu\right)^{-1} \Delta_m u(x) \tag{5.19}$$

Ορίζουμε ως $f_m(x) = r^{-m}(\int \theta_x^{(m)} d\mu)^{-1}\Delta_m u(x)$ στο $V^{(m)} \setminus V^{(0)}$. Τότε $f_m(x) \to f(x)$ ομοιόμορφα απο υπόθεση, και τότε η σχέση (5.19) γίνεται:

$$\mathcal{E}_m(u, v) = - \int \left(\sum_{x\in V^{(m)}/V^{(0)}} v(x) f_m(x) \theta_x^{(m)} \right) d\mu \tag{5.20}$$

Ένα συνήθες επιχείρημα δείχνει ότι το άθροισμα:

$$\sum_{x\in V^{(m)}/V^{(0)}} v(x) f_m(x) \theta_x^{(m)} \tag{5.21}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $v(x)f(x)$, επομένως μπορούμε να πάρουμε το όριο στην (5.20) για $m \to \infty$ για να παράξουμε την (5.4). □

Η αντίστροφη πρόταση δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση ότι το όριο είναι ομοιόμορφο.

Αφού το όριο είναι ομοιόμορφο μπορούμε να υποθέσουμε τι γίνεται για τιμές του x που δεν ανήκουν στο $V_* \setminus V^{(0)}$, δηλαδή:

$$\Delta_\mu u(x) = \lim_{m\to\infty} r^{-m} \left(\int \theta_{x_m}^{(m)} d\mu \right)^{-1} \Delta_m u(x_m) \tag{5.22}$$

όπου $\{x_m\}$ μια οποιαδήποτε ακολουθία $x_m \in V^{(m)} \setminus V^{(0)}$ με $\lim_{m\to\infty} x_m = x$. Ειδικότερα, αυτή είναι η μόνη σημειακή σχέση για $x \in V^{(0)}$.

Στην περίπτωση του standard measure, δεν είναι δύσκολο να υπολογίσουμε με ακρίβεια τον παράγοντα $\left(\int \theta_x^{(m)} d\mu\right)^{-1}$, και η απάντηση είναι ανεξάρτητη του x. Για την περίπτωση $K = I$, η $\theta_x^{(m)}$ είναι απλά μια συνάρτηση στέγη, επομένως η $\theta_x^{(m)}$ είναι απλά η περιοχή ενός τριγώνου ύψους 1 και βάσης $2\frac{1}{2^m}$. Επομένως, $\left(\int \theta_x^{(m)} dx\right)^{-1} = 2^m$ και $r^{-m} = 2^m$, και επομένως η σημειακή σχέση είναι ακριβώς η (5.11). Για την περίπτωση $K = SG$, η συνάρτηση $\theta_x^{(m)}$ υποστηρίζεται στα 2 m-κελιά που συναντώνται στο σημείο x. Αν $\psi_w(K)$ είναι ένα απ' αυτά τα κελιά με κορυφές x, y, z τότε η ποσότητα $\theta_x^{(m)} + \theta_y^{(m)} + \theta_z^{(m)}$ περιορισμένη στο κελί $\psi_w(K)$ είναι ταυτοτικά ίση με 1 (είναι αρμονική και παίρνει την τιμή 1 και στις 3 κορυφές). Έτσι:

$$\int_{\psi_w(K)} (\theta_x^{(m)} + \theta_y^{(m)} + \theta_z^{(m)}) d\mu = \mu(\psi_w(K)) = \frac{1}{3^m}. \tag{5.23}$$

Λόγω συμμετρίας και οι τρεις προσθετέοι έχουν το ίδιο αποτέλεσμα στην ολοκλήρωση, επομένως: $\int_{\psi_w(K)} \theta_x^{(m)} d\mu = \frac{1}{3^{m+1}}$. Με την συνεισφορά απο το άλλο m-κελί βρίσκουμε $\int \theta_x^{(m)} d\mu = \frac{2}{3}\frac{1}{3^m}$, ως εκ τούτου $\left(\int \theta_x^{(m)} d\mu\right)^{-1} = \frac{3}{2} \cdot 3^m$. Αφού $r^{-m} = (\frac{5}{3})^m$ σε αυτήν την περίπτωση, βρίσκουμε:

$$\Delta u(x) = \frac{3}{2} \lim_{m\to\infty} 5^m \Delta_m u(x) \tag{5.24}$$

Αυτή η συγκεκριμένη σημειακή διατύπωση θα παίξει έναν σημαντικό ρόλο αργότερα.

Υπάρχει κάποια αμφιβολία για την σημαντικότητα του παράγοντα επανακανονικοποίησης 5 στην σχέση (5.24), και σε έναν μικρότερο βαθμό για τον αρχικό παράγοντα $\frac{3}{2}$. Κάποιος θα μπορούσε απλά να θεωρήσει τον παράγοντα $\frac{3}{2}$ ως μια σταθερά κανονικοποίησης (παρά το γεγονός ότι όλο αυτό εξηγείται σε όρους της επιλογής των σταθερών κανονικοποίησης στην ενέργεια και στο μέτρο), και σαφώς δεν παίζει κανένα σημαντικό ρόλο στην θεωρία. Άλλα ο παράγοντας 5 είναι πολύ σημαντικός. Έστω ότι πάμε να τον αντικαταστήσουμε απο έναν διαφορετικό παράγοντα, έστω R. Αν $R < 5$, τότε:

$$\lim_{m\to\infty} R^m \Delta_m u(x) = 0 \text{ για κάθε } u \in dom\Delta \tag{5.25}$$

Επομένως θα καταλήγαμε με μια θεωρία στην οποία εικονικά κάθε συνάρτηση έχει Λαπλασιανή ταυτοτικά ίση με 0. Απο την άλλη πλευρά αν $R > 5$ τότε το όριο $\lim_{m\to\infty} R^m \Delta_m u(x)$ δεν υπάρχει για τις περισσότερες συναρτήσεις στον χώρο $dom\Delta$.

Είναι επίσης πιθανό να υπολογίσουμε τους παράγοντες με ακρίβεια στην περίπτωση που το μ είναι ένα αυτοόμοιο μέτρο. Σ'αυτήν την περίπτωση ο παράγοντας εξαρτάται απο το x.

5.3 Κανονικές Παραγώγοι

Ξεκινήσαμε το κεφάλαιο με την ολοκλήρωση κατα μέρη στην εξίσωση (5.1) η οποία δεν περιείχε τους συνοριακούς όρους απο την υπόθεση ότι η v εξαφανίζεται στο σύνορο. Αν διώξουμε αυτήν την υπόθεση, η ολοκληρωμένη σχέση είναι:

$$\int_0^1 u''(x)v(x)dx = -\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) \tag{5.26}$$

Για να ανακτήσουμε την συμμετρία μεταξύ των συνοριακών σημείων ορίζουμε τις κανονικές παραγώγους $\partial_n u(1) = u'(1)$ και $\partial_n u(0) = -u'(0)$ για να μετρήσουμε τον βαθμό της αλλαγής σε μια κατεύθυνση κινούμενη εξωτερικώς του I. Μετά μπορούμε να γράψουμε την σχέση (5.26) ως εξής:

$$\mathcal{E}(u,v) = -\int_I (\Delta u) v d\mu + \sum_{\partial I} v \partial_n u, \tag{5.27}$$

όπου μ είναι το standard measure. Σε αυτήν την μορφή είναι απλά μια ειδική περίπτωση της Gauss-Green formula:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\mu = -\int_\Omega (\Delta u) v d\mu + \int_{\partial\Omega} v \partial_n u d\sigma \tag{5.28}$$

για ένα ανοιχτό σύνολο Ω στον $\mathbb{R}^n$, με $d\sigma$ το μέτρο επιφάνειας στο $\partial\Omega$. Εδώ ψάχνουμε και μια Gauss-Green formula:

$$\mathcal{E}(u,v) = -\int_K (\Delta_\mu u) v d\mu + \sum_{V^{(0)}} v \partial_n u \tag{5.29}$$

και έναν ορισμό της $\partial_n u$ στα συνοριακά σημεία, έτσι ώστε η (5.29) να γίνει η (5.27) στην περίπτωση όπου $K = I$.

Θα γίνει προφανές ότι η Gauss-Green formula και ο ορισμός (και η ύπαρξη) των κανονικών παραγώγων συμβαδίζουν. Παρόλα αυτά, ο ορισμός των κανονικών παραγώγων εξαρτάται μόνο απο την ενέργεια. Έτσι έχουμε την παράδοξη κατάσταση ότι $u \in dom\Delta_\mu$ για οποιοδήποτε μέτρο μ σημαίνει την ύπαρξη των ίδιων κανονικών παραγώγων (ίσως ο σωστός τρόπος να το δούμε αυτό είναι ότι $u \in dom_{\mathcal{M}}\Delta$ είναι η συνθήκη που υπαινίσσεται την ύπαρξη των κανονικών παραγώγων). Στην περίπτωση $K = I$, η standard Λαπλασιανή είναι μια δεύτερη παράγωγος και οι κανονικές παράγωγοι είναι πρώτες παράγωγοι. Στην περίπτωση $K = SG$ ίσως να θέλαμε να σκεφτούμε την $\partial_n u$ ως μια πρώτη παράγωγο, άλλα σίγουρα δεν είναι ο περιορισμός στο σύνορο οποιουδήποτε παγκόσμια ορισμένου τοπικού τελεστή. Σε οποιοδήποτε βαθμό, θα είναι σαφές ότι η ύπαρξη των κανονικών παραγώγων είναι μια πιο αδύναμη συνθήκη απο την ύπαρξη της Λαπλασιανής. Επίσης, η ύπαρξη πεπερασμένης ενέργειας δεν σημαίνει την ύπαρξη των κανονικών παραγώγων.

Η ιδέα κλειδί είναι να επιστρέψουμε στην απόδειξη του θεωρήματος 5.2, αλλά τώρα να μην απαιτήσουμε η v να εξαφανίζεται στο σύνορο. Τότε συνεχίζουμε να έχουμε την σχέση (5.17), αλλά όταν αναδιατάσσουμε τους όρους όπως στην (5.18), θα έχουμε επίσης όρους με έναν παράγοντα $v(x)$ για $x \in V^{(0)}$, με τους οποίους ασχολούμαστε ξεχωριστά:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_m(u,v) = &- \sum_{x \in V^{(m)}/V^{(0)}} v(x) r^{-m} \Delta_m u(x) \\
&+ \sum_{x \in V^{(0)}} v(x) r^{-m} \left(\sum_{x \sim_m y} (u(x) - u(y)) \right)
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

Κάτα κάποιο τρόπο, αυτό είναι ενα διακριτό ανάλογο της Gauss-Green formula, με τον όρο:

$$
r^{-m} \left(\sum_{y \sim_m x} (u(x) - u(y)) \right) \tag{5.31}
$$

να παίζει τον ρόλο της κανονικής παραγώγου. Σημειώστε ότι ο αριθμός των προσθετέων στην σχέση (5.31) είναι μισός ο αριθμός στον ορισμό των διακριτών Λαπλασιανών, επειδή τα συνοριακά σημεία έχουν τον μισό αριθμό γειτονιών σαν γειτονικά σημεία. Επίσης, έχουμε αλλάζει τον όρο $u(y) - u(x)$ σε $u(x) - u(y)$, απορροφόντας το αρνητικό πρόσημο το όποιο βρίσκεται μπροστά απο τον πρώτο όρο στο δεξί μέλος της σχέσης (5.30). Θέλουμε να πάρουμε το όριο καθώς $m \to \infty$ στην σχέση (5.30), επομένως μας χρειάζεται να ορίσουμε την κανονική παράγωγο ως όριο της σχέσης (5.31).

Ορισμός 5.2. *Έστω $x \in V_0$ και u μια συνεχής συνάρτηση στο K. Λέμε ότι η $\partial_n u(x)$ υπάρχει αν το όριο της σχέσης (5.31) υπάρχει, και:*

$$
\partial_n u(x) = \lim_{m \to \infty} r^{-m} \sum_{y \sim_m x} (u(x) - u(y)) \tag{5.32}
$$

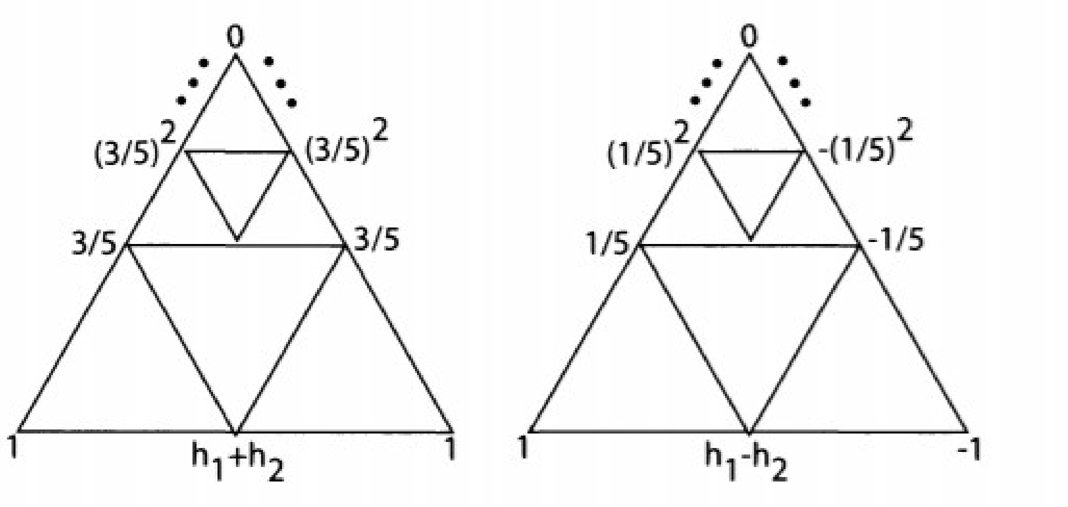
Θεώρημα 5.3. *Ας υποθέσουμε ότι $u \in dom\Delta_\mu$ για κάποιο μέτρο μ. Τότε η $\partial_n u(x)$ υπάρχει για όλα τα $x \in V^{(0)}$, και η Gauss-Green formula (5.29) ισχύει για όλα τα $v \in dom\mathcal{E}$.*

Απόδειξη. Πρώτα διαλέγουμε $v \in dom\mathcal{E}$ τέτοια ώστε $v(P_i) = 1$ και $v(P_j) = 0$ για $i \neq j$. Τότε στον δεύτερο όρο του δεξιού μέλους της (5.30), μόνο ένας προσθετέος επιβιώνει, δηλαδή ο όρος $r^{-m} \sum_{y \sim_m P_i} (u(P_i) - u(y))$. Τώρα το αριστερό μέλος συγκλίνει στην $\mathcal{E}(u,v)$, και ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους συγκλίνει στο $-\int v \Delta_\mu u d\mu$ όπως δείχθηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2. Προκύπτει ότι το όριο (5.32) υπάρχει στο $x = P_i$, επομένως η κανονική παράγωγος υπάρχει σε κάθε συνοριακό σημείο. Τελικά, για οποιαδήποτε $v \in dom\mathcal{E}$, μπορούμε να πάρουμε το όριο στην (5.30) για να παράξουμε την (5.29). □

Για $K = I$ αναγνωρίζουμε το όριο (5.32) σαν να ορίζουμε μια συνήθη πρώτη παράγωγο. Για $K = SG$, μπορούμε να γράψουμε την (5.32) ως:

$$
\partial_n u(P_i) = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{5}{3} \right)^m (2u(P_i) - u(\psi_i^m(P_{i+1})) - u(\psi_i^m(P_{i-1}))). \tag{5.33}
$$

Σημειώστε ότι ο παράγοντας $\left(\frac{5}{3}\right)^m$ στην σχέση (5.33) είναι μικρότερος απο τον παράγοντα 5^m στην σημειακή σχέση (5.22) για την Λαπλασιανή. Αυτό είναι σημαντικό για να υπενθυμίζει ότι η κανονική παράγωγος είναι μια ‘χαμηλότερης τάξης’ παράγωγος από ότι η Λαπλασιανή.



Σχήμα 5.1: *Symmetric και Skew-symmetric υπό την συμμετρία ανάκλασης*

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις κανονικές παραγώγους των αρμονικών συναρτήσεων στο SG. Για το SG έστω μας δίνονται οι τιμές $h(P_1), h(P_2), h(P_3)$, και επαγωγικά μπορούμε να βρούμε την συνάρτηση $h|_{V^{(m+1)}}$ απο την $h|_{V^{(m)}}$ χρησιμοποιώντας των '$\frac{1}{5}-\frac{2}{5}$ κανόνα'. Μία βάση του χώρου των αρμονικών συναρτήσεων για το SG θα είναι η $\{h_1, h_2, h_3\}$ η οποία θα αποδίδεται θεωρώντας $h_j(P_j) = 1$ και $h_j(P_k) = 0$ για $k \neq j$. Προς απλότητα κάνουμε τον υπολογισμό στο P_1. Αν ξεκινούσαμε με h σταθερή στο $V^{(0)}$ θα ίσχυε ότι $h_1 + h_2 + h_3 \equiv 1$ και οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\frac{3}{5}$ και $\frac{1}{5}$ είναι οι $h_2 + h_3$ και $h_2 - h_3$ για την απεικονίση $u \to u \circ \psi_1$ (Εικόνα 5.1). Προς απλότητα θα κάνουμε τον υπολογισμό στο P_1.

Για την σταθερή συνάρτηση όλες οι τιμές του όρου $\left(\frac{5}{3}\right)^m (2u(P_i) - u(\psi_i^m(P_{i+1})) - u(\psi_i^m(P_{i-1})))$ είναι μηδενικές, και επομένως η κανονική παράγωγος είναι μηδενική. Το ίδιο ισχύει για την skew-symmetric συνάρτηση $h_2 - h_3$, όπου $u(P_1) = 0$ και $u(\psi_1^m(P_3)) = -u(\psi_1^m(P_2))$. Επομένως ο μόνος ενδιαφέρον υπολογισμός είναι για την $u = h_2 + h_3$. Εδώ $u(P_1) = 0$ και $u(\psi_1^m(P_2)) = u(\psi_1^m(P_3)) = (\frac{3}{5})^m$, επειδή η ιδιοτιμή είναι $\frac{3}{5}$, επομένως $(\frac{5}{3})^m(2u(P_1) - u(\psi_1^m(P_2)) - u(\psi_1^m(P_3))) = -2(\frac{5}{3})^m(\frac{3}{5})^m = -2$, και επομένως $\partial_n u(P_1) = -2$. Και στις τρεις περιπτώσεις δεν χρειάζεται να πάρουμε το όριο για να υπολογίσουμε την κανονική παράγωγο επειδή η ακολουθία είναι σταθερή. Αυτό ισχύει για όλες τις αρμονικές συναρτήσεις απο γραμμικότητα:

$$\partial_n h(P_1) = 2h(P_1) - h(P_2) - h(P_3). \tag{5.34}$$

Μπορούμε επίσης να μεταφέρουμε τον ορισμό της κανονικής παραγώγου σε τοπικό επίπεδο. Έστω $\psi_w(K)$ οποιοδήποτε κελί, και έστω $x = \psi_w(P_i)$ ένα συνοριακό σημείο του κελιού. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την $\partial_n u(x)$ ως προς το κελί $\psi_w(K)$ χρησιμοποιώντας την σχέση (5.32), με την προϋπόθεση ότι οι γειτονιές y στο δεξί μέλος είναι περιορισμένες να βρίσκονται στο κελί $\psi_w(K)$ (επομένως υπάρχουν πάντα δύο γειτονιές στην περίπτωση του SG). Ένας άλλος τρόπος έκφρασης αυτού είναι:

$$\partial_n u(\psi_w(P_i)) = r^{-|w|} \partial_n (u \circ \psi_w)(P_i) \tag{5.35}$$

Αυτός ο συμβολισμός υποδηλώνει ότι εργαζόμαστε πάνω στο κελί $\psi_w(K)$. Αν το x είναι ένα γειτονικό σημείο τότε $x = \psi_{w'}(P_{i'})$ για κάποια άλλη λέξη w' με $|w'| = |w|$, και επομένως υπάρχει μια άλλη τοπική κανονική παράγωγος $\partial_n u(\psi_{w'}(P_{i'}))$ στο x ως προς το κελί $\psi_{w'}(P_{i'})$. Αυτές οι κανονικές παράγωγοι μπορεί να μην συσχετίζονται, αλλά στις ενδιαφέρουσες περιπτώσεις αθροίζουν στο 0, επομένως διαφέρουν απλά στο πρόσημο.

Θεώρημα 5.4. *Ας υποθέσουμε ότι* $u \in dom\Delta_\mu$. *Τότε σε κάθε γειτονικό σημείο* $x = \psi_w(P_i) = \psi_{w'}(P_{i'})$, *οι τοπικές κανονικές παράγωγοι υπάρχουν και:*

$$\partial_n u(\psi_w(P_i)) + \partial_n u(\psi_{w'}(P_{i'})) = 0. \tag{5.36}$$

Αυτή η συνθήκη καλείται συνθήκη συναρμογής για κανονικές παραγώγους στο x.

Απόδειξη. Η ύπαρξη προκύπτει απο την σχέση (5.35). Τώρα:

$$\partial_n u(\psi_w(P_i)) + \partial_n u(\psi_{w'}(P_{i'})) = \lim_{m\to\infty} r^{-m} \sum_{y\sim_m x} (u(x) - u(y)) \tag{5.37}$$

αφού οι γειτονιές y του x βρίσκονται είτε στο $\psi_w(K)$ είτε στο $\psi_{w'}(K)$. Αφού $u \in dom\Delta_\mu$ γνωρίζουμε ότι το όριο:

$$\lim_{m\to\infty} r^{-m} \left(\theta_x^{(m)} d\mu\right)^{-1} \Delta_m u(x) \tag{5.38}$$

υπάρχει, και αφού $\int \theta_x^{(m)} d\mu \to 0$ καθώς $m \to \infty$ (αυτό προκύπτει απο την συνθήκη συνέχειας του μέτρου) βλέπουμε ότι το όριο στο δεξί μέλος της (5.37) είναι 0, και έτσι αποδυκνείεται η σχέση (5.36). □

Μπορεί να φαίνεται ότι η τοπική κανονική παράγωγος σε όλα τα γειτονικά σημεία στο SG έρχεται πολύ κοντά σε μια παράγωγο ορισμένη σε ολόκληρο το SG, τουλάχιστον αν θεωρήσουμε $|\partial_n u(x)|$ για να αποφύγουμε την ασάφεια που έχει να κάνει με το πρόσημο. Αλλά αυτό είναι αποπροσανατολιστικό, καθώς η συνάρτηση $|\partial_n u(x)|$ συμπεριφέρεται με έναν πολύ ασυνεχή τρόπο για διάφορες τιμές του x, και έτσι δεν μπορεί να επεκταθεί σε σημεία που δεν ανήκουν στο V_*.

Παρόμοια, μπορούμε να διατυπώσουμε την Gauss-Green formula σε τοπικό επίπεδο σε οποιοδήποτε κελί $\psi_w(K)$, ως εξής:

$$\mathcal{E}_{\psi_w(K)}(u,v) = -\int_{\psi_w(K)} (\Delta_\mu u) v d\mu + \sum_{\partial\psi_w(K)} v\partial_n u \tag{5.39}$$

ή σε μια πεπερασμένη ένωση κελιών A από προσθετικότητα:

$$\mathcal{E}_A(u,v) = -\int_A (\Delta_\mu u) v d\mu + \sum_{\partial A} v\partial_n u \tag{5.40}$$

για κατάλληλο ορισμό του ∂A (σημειώνουμε ότι αν δύο κελιά στο A τέμνονται σε κάποιο γειτονικό σημείο x, τότε το x δεν θα βρίσκεται στο ∂A, αλλά οι συνεισφορές του x στο $v\partial_n u$ θα ακυρώσουν την συνθήκη συναρμογής (5.36)).

5.4 Σχέση Gauss-Green

Έχουμε ήδη δει μια έκδοση της Gauss-Green formula στο προηγούμενο κεφάλαιο, και στην γενική της μορφή (5.29) και στην τοπική της μορφή (5.40). Υπάρχει και κάποια άλλη, πιο συμμετρική έκδοση, η οποία δεν περιλαμβάνει την ενέργεια.

Θεώρημα 5.5. *Υποθέτουμε ότι οι u, v βρίσκονται στο $dom\Delta_\mu$. Τότε:*

$$\int_K u\Delta_\mu v d\mu - \int_K v\Delta_\mu u d\mu = \sum_{V^{(0)}}(u\partial_n v - v\partial_n u) \tag{5.41}$$

Τοπικά, αν με A συμβολίζεται μια πεπερασμένη ένωση κελιών με σύνορο ∂A,

$$\int_A u\Delta_\mu v d\mu - \int_A v\Delta_\mu u d\mu = \sum_{\partial A}(u\partial_n v - v\partial_n u) \tag{5.42}$$

Αυτή η έκδοση της Gauss-Green formula είναι ένα πολύπλευρο εργαλείο για την κατανόηση της Λαπλασιανής. Σε τυπικές εφαρμογές θα κάνουμε συγκεκριμένες επιλογές για την συνάρτηση v. Για παράδειγμα, αν διαλέξουμε $v \equiv 1$ τότε θα παράξουμε την σχέση:

$$\int_K \Delta_\mu u d\mu = \sum_{V^{(0)}} \partial_n u \tag{5.43}$$

ή την τοπική έκδοση:

$$\int_A \Delta_\mu u d\mu = \sum_{\partial A} \partial_n u \tag{5.44}$$

Στην ειδική περίπτωση στην οποία η u είναι αρμονική, το αριστερό μέλος είναι μηδέν. Ένα επακόλουθο είναι ότι αν η $u \in dom\Delta_\mu$ και $\partial_n u(x) = 0$ για κάθε $x \in V_*$, τότε η u είναι σταθερή. Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση $\int_{\psi_w(K)} \Delta_\mu u d\mu = 0$ για όλα τα κελιά $\psi_w(K)$, που σημαίνει ότι $\Delta_\mu u = 0$ επομένως η u είναι αρμονική. Αλλά γνωρίζουμε πως να υπολογίσουμε κανονικές παραγώγους αρμονικών συναρτήσεων σε συνοριακά σημεία, και δεν παίρνουμε όλους τους όρους μηδενικούς εκτός εάν η συνάρτηση είναι σταθερή. Παρόμοια, αν $\partial_n u(x) = 0$ για όλα τα $x \in A \cap V_*$, για ένα συνδεδεμένο σύνολο A, τότε η u είναι σταθερή στο A.

Η επόμενη εφαρμογή δίνει μια αναλυτική έκδοση της σημειακής διατύπωσης για την Λαπλασιανή.

Θεώρημα 5.6. *Αν $u \in dom\Delta_\mu$, τότε:*

$$r^{-m}\left(\theta_x^{(m)} d\mu\right)^{-1} \Delta_m u(x) = \frac{\int \theta_x^{(m)} \Delta_\mu u d\mu}{\int \theta_x^{(m)} d\mu} \tag{5.45}$$

για $x \in V^{(m)}/V^{(0)}$.

Απόδειξη. Δίνουμε το επιχείρημα για $K = SG$. Ας υποθέσουμε ότι $x = \psi_w(P_i) = \psi_{w'}(P_{i'})$ για $|w| = |w'| = m$. Θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (5.42) όπου $A =$

$\psi_w(K)$ και v είναι η αρμονική συνάρτηση με $v \circ \psi_w = h_i$, επομένως $v(\psi_w(P_j)) = \delta_{ij}, \partial_n v(\psi_w(P_i)) = 2r^{-m}$ και $\partial_n v(\psi_w(P_j)) = -r^{-m}$ για $j \neq i$. Έτσι:

$$\begin{aligned}\int_{\psi_w(K)} \theta_x^{(m)} \Delta_\mu u d\mu = \partial_n u(\psi_w(P_i)) - 2r^{-m} u(\psi_w(P_i)) \\ + r^{-m} u(\psi_w(P_{i+1})) + r^{-m} u(\psi_w(P_{i-1})).\end{aligned} \tag{5.46}$$

Κάνουμε έναν παρόμοιο υπολογισμό στο κελί $\psi_{w'}(K)$ με πρόσθεση των δύο. Σημειώνουμε ότι $\partial_n u(\psi_w(P_i)) + \partial_n u(\psi_{w'}(P_{i'})) = 0$ απο το Θεώρημα 5.4. Έτσι παίρνουμε:

$$\int \theta_x^{(m)} \Delta_\mu u d\mu = r^{-m} \Delta_m u(x) \tag{5.47}$$

που είναι ίδια σχέση με την (5.45). □

Το δεξί μέλος της σχέσης (5.45) είναι απλά ένας μέσος όρος της συνάρτησης $\Delta_\mu u$ σε ένα μικρό σύνολο supp $\theta_x^{(m)}$ που περιέχει το x, επομένως μπορούμε να ανακτήσουμε την σημειακή σχέση στο όριο. Παρόλα αυτά η σχέση (5.45) μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε το σφάλμα, και αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $\Delta_\mu u$ είναι λεία (όπως μια συνθήκη Holder) παίρνουμε έναν βαθμό σύγκλισης για την σημειακή σχέση.

Η ίδια επιχειρηματολογία θα δώσει έναν βαθμό σύγκλισης στον ορισμό της κανονικής παραγώγου. Για παράδειγμα, αν $x = P_0$ χρησιμοποιούμε την σχέση (5.46) στο $\psi_0^m(K)$ για να αποδώσουμε την σχέση:

$$r^{-m}(2u(P_1) - u(\psi_1^m(P_2)) - u(\psi_1^m(P_3))) = \partial_n u(P_1) - \int_{\psi_1^m(K)} \theta_{P_1}^{(m)} \Delta_\mu u d\mu \tag{5.48}$$

Για την standard Λαπλασιανή αυτό δίνει έναν βαθμό $O\left(\frac{1}{3^m}\right)$ για την σύγκλιση του αριστερού μέλους της σχέσης (5.48) στο $\partial_n u(P_1)$. Θα το εκφράζαμε αυτό και ως:

$$2u(P_1) - u(\psi_1^m(P_2)) - u(\psi_1^m(P_3)) = \left(\frac{3}{5}\right)^m \partial_n u(P_1) + O\left(\frac{1}{5^m}\right) \tag{5.49}$$

ή πιο συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned}2u(P_1) - u(\psi_1^m(P_2)) - u(\psi_1^m(P_3)) = \left(\frac{3}{5}\right)^m \partial_n u(P_1) \\ - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^m}\right) \Delta u(P_1) + o\left(\frac{1}{5^m}\right)\end{aligned} \tag{5.50}$$

για $u \in dom\Delta$.

Η συμμετρική μορφή της Gauss-Green formula μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι ο Δ_μ είναι ένας συμμετρικός τελεστής ως προς το εσωτερικό γινόμενο:

$$< u, v >= \int_K uv d\mu \tag{5.51}$$

δεδομένου ότι επιβάλλουμε βολικές συνοριακές συνθήκες. Για παράδειγμα, το Dirichlet domain του Δ_μ είναι ο υποδιάστασης 3 υπόχωρος του $dom\Delta_\mu$ των συναρτήσεων που εξαφανίζονται στο $V^{(0)}$. Να σημειώσουμε ότι αν οι u και v βρίσκονται στο Dirichlet domain τότε οι συνοριακοί όροι στην σχέση (5.41) εξαφανίζονται, επομένως αυτό μας αποδίδει:

$$< \Delta_\mu u, v > = < u, \Delta_\mu v > \tag{5.52}$$

Παρόμοια, το Neumann domain ορίζεται απο την εξαφάνιση των κανονικών παραγώγων στο σύνορο, και η σχέση (5.42) συνεχίζει να ισχύει αν και η u και η v βρίσκονται στο Neumann domain. Άλλες συνοριακές συνθήκες παράγουν επίσης συμμετρία, όπως το να θέτουμε Dirichlet συνθήκες σε κάποια συνοριακά σημεία και Neumann συνθήκες σε άλλα.

Βιβλιογραφία

[1] Robert S.Strichartz, *Differential Equations On Fractals,a Tutorial*, Princeton and Oxford, Princeton University Press 2006.

[2] Roberto Peirone, *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*, Dipartimento di Matematica, Universit‘a di Roma “Tor Vergata” via della Ricerca Scientifica.

[3] Jun Kigami, *Analysis On Fractals*, Cambridge University Press,2001.

[4] Yakov Pesin,Vaughn Climenhaga, *Elements of Fractal Geometry and Dynamics*, Department of Mathematics, Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania.

[5] Susan.G. Williams, *Introduction to Symbolic Dynamics*, University of South A-labama.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κύριο Αντώνη Χαραλαμπόπουλο για την υποστήριξη του καθόλη την διάρκεια συγγραφής της διπλωματικής μου. Κάθε συνάντηση μας με βοηθούσε να προχωράω στην υποστήριξη της εργασίας μου. Ακολούθως θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τον αδερφό μου που μου στάθηκαν υπέρμετρα σε αυτήν την προσπάθεια με όποιο τρόπο μπορούσαν μέχρι το τέλος. Και τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον πολύ καλό μου φίλο Χαράλαμπο για την υποστήριξη και την βοήθεια που μου παρείχε.