ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΥΓΕΝΙΑ ΛΩΛΟΥ
ΑΜ: ge15135

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ
ΠΑΥΛΟΠΟΥΛΟΥ ΚΑΛΛΙΑ

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ

ΠΑΥΛΟΠΟΥΛΟΥ ΚΑΛΛΙΑ
Ε.ΔΙ.Π., Ε.Μ.Π.

ΚΑΡΩΝΗ ΧΡΥΣΗΙΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ, Ε.Μ.Π.

ΣΤΕΦΑΝΕΑΣ ΠΕΤΡΟΣ
ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ, Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2021

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το άπειρο είναι μια έννοια που έχει προβληματίσει τον άνθρωπο εδώ και χιλιάδες χρόνια, έχει πυροδοτήσει πολλές συζητήσεις και έχει οδηγήσει σε αρκετές σχετικές έρευνες στο χώρο της εκπαίδευσης.

Στην παρούσα εργασία διερευνώνται οι πεποιθήσεις των μαθητών Λυκείου και των φοιτητών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου σχετικά με την έννοια του απείρου. Ειδικότερα διερευνώνται ο τρόπος που προσεγγίζεται το άπειρο (δυνητικό/πραγματικό) και τα εργαλεία (διαισθητικά/μαθηματικά) που οι μαθητές και οι φοιτητές χρησιμοποιούν για να τεκμηριώσουν τις πεποιθήσεις τους. Επίσης αποτυπώνονται τυχόν διαφοροποιήσεις στις πεποιθήσεις τους και στον τρόπος σκέψης τους όταν μεταβαίνουν από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, αν και το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό για γενικευμένες συγκρίσεις.

Από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι στις πεποιθήσεις τόσο των μαθητών όσο και των φοιτητών για το άπειρο, κυριαρχεί η διαίσθηση. Αμφότεροι (ακόμη και οι φοιτητές του Πολυτεχνείου) χρησιμοποιούν σε μικρό ποσοστό μαθηματικά εργαλεία στην προσέγγιση του απείρου. Γενικά οι πεποιθήσεις όλων χαρακτηρίζονται σε πολλές περιπτώσεις από αντιφατικότητα και σύγχυση. Το άπειρο αντιμετωπίζεται άλλοτε ως μια τετελεσμένη οντότητα -ενεργό (πραγματικό)- και άλλοτε ως μια διαδικασία που δεν τελειώνει ποτέ -εν δυνάμει (δυνητικό).

Λέξεις – Κλειδιά: Άπειρο, Απειροσύνολα, Παράδοξα του Απείρου, Μαθητές, Φοιτητές, Εκπαιδευτική Έρευνα, Πεποιθήσεις για το Άπειρο

THESIS TITLE: Beliefs of High School students and students of National Technical University of Athens regarding to the concept of infinity.

ABSTRACT

Infinity is a concept that has been discussed for thousands of years. It has led to several researches in the field of education.

The present research investigates the beliefs of High School students and students of the National Technical University of Athens regarding to the concept of infinity. In particular, the way that students approach infinity (potential / real) is examined and the tools (intuitive / mathematical) that students use to substantiate their beliefs are explored. In addition, any differences in their beliefs and ways of thinking when graduating from secondary to higher education are examined, although the sample is not representative of generalized comparisons.

The results show that the beliefs of both groups students about infinity are dominated by intuition. Both groups (even the students of the National Technical University of Athens) use a small percentage of mathematical tools in the approach of infinity. In general, everyone's beliefs are in many cases contradictory and confusing. Infinity is sometimes seen as an accomplished entity - active (real) - and sometimes as a process that never ends - potentially (potential).

Keywords: Infinity, Infinite Sets, Paradoxes of Infinity, Students, Educational Research, Beliefs regarding to the Infinity

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας μου στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την άμεση ή έμμεση συμβολή κάποιων ανθρώπων, που βοήθησαν ο καθένας με το δικό του τρόπο και αισθάνομαι την ανάγκη να τους μνημονεύσω.

Οφείλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κυρία Παυλοπούλου Κάλλια για την πολύτιμη υποστήριξή της, τις εποικοδομητικές υποδείξεις της, την ουσιαστική της καθοδήγηση σε όλα τα στάδια της εργασίας, την άψογη συνεργασία και το ειλικρινές ενδιαφέρον της από την αρχή μέχρι το τέλος.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κυρία Καρώνη Χρυσηίδα και τον κύριο Στεφανέα Πέτρο, για την τιμή που μου έκαναν να συμμετέχουν στην τριμελή επιτροπή της διπλωματικής μου.

Ακόμα, ευχαριστώ θερμά τον κύριο Αντωνόπουλο Ματθαίο, πτυχιούχο της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. και υποψήφιο διδάκτορα της Διδακτικής των Μαθηματικών στο Ε.Κ.Π.Α., του οποίου η συμβουλευτική παρέμβαση, όποτε χρειάστηκε, ήταν καθοριστική, άμεση και καταλυτική.

Επιπλέον, ευχαριστώ τους Διευθυντές και τους Καθηγητές των Σχολείων που προώθησαν τα ερωτηματολόγια στους μαθητές τους, τους μαθητές και τους φοιτητές των Σχολών του Ε.Μ.Π. για τη συμμετοχή τους στην έρευνά μας και για το χρόνο που διέθεσαν, καθώς και οποιονδήποτε άλλον συνέβαλε στην ολοκλήρωση της έρευνάς μας και βοήθησε στην πραγματοποίησή της, παρά τις δύσκολες συνθήκες της πανδημίας.

Τέλος, θα ήθελα ολόψυχα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και ιδιαίτερα τη μητέρα μου Κωνσταντίνα για την υποστήριξή της με κάθε τρόπο σε κάθε μου βήμα και την

καθημερινή της συμπαράσταση όλα τα χρόνια των σπουδών μου, καθώς και τους φίλους μου των οποίων η ψυχολογική ενθάρρυνση ήταν καθοριστικής σημασίας στο ταξίδι αυτό.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι πεποιθήσεις όλων μας διαμορφώνονται από συνειδητούς ή και υποσυνείδητους κανόνες, ιδέες, γνώσεις, από εμπειρίες και βιώματα και από τη μαθηματική μας παιδεία.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση των πεποιθήσεων των μαθητών Λυκείου και των φοιτητών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου σχετικά με την έννοια του απείρου. Ειδικότερα διερευνώνται ο τρόπος που προσεγγίζεται το άπειρο (δυνητικό/πραγματικό) και τα εργαλεία (διαισθητικά/μαθηματικά) που οι μαθητές και οι φοιτητές χρησιμοποιούν για να τεκμηριώσουν τις πεποιθήσεις τους σχετικά με το άπειρο.

Αναλυτικότερα:

Στο 1^{ο} και το 2^{ο} κεφάλαιο προσεγγίζεται η έννοια του απείρου μέσα από τις σχετικές αντιλήψεις διαφόρων φιλοσόφων-ερευνητών κατά την αρχαιότητα (Ίωνες, Πυθαγόρειοι, Αριστοτέλης κ.α.) και κατά τα νεότερα χρόνια (Cantor, Hilbert, κ.α.).

Το 3^{ο} κεφάλαιο αναφέρεται στη διδασκαλία της έννοιας του απείρου στην εκπαίδευση και παρουσιάζει τα επιστημολογικά προβλήματα που προκύπτουν κατά τη διδασκαλία του.

Το 4^{ο} κεφάλαιο περιέχει μια ανασκόπηση των προγενέστερων ερευνών σχετικά με το άπειρο.

Το 5^{ο} κεφάλαιο αναφέρεται στο ερευνητικό πλαίσιο, στον σκοπό και στη μεθοδολογία της έρευνάς μας.

Στο 6^{ο} κεφάλαιο αναλύονται και σχολιάζονται τα επιμέρους αποτελέσματα της έρευνας σε κάθε ερώτηση.

Τέλος, στο 7^{ο} κεφάλαιο παρατίθενται τα γενικά συμπεράσματα της έρευνάς μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

Το άπειρο είναι αφηρημένη έννοια που περιγράφει κάτι χωρίς κανένα όριο και έχει σημασία σε μια σειρά από επιστήμες, κυρίως τα μαθηματικά και τη φυσική. Η λέξη άπειρο προέρχεται από το στερητικό πρόθεμα "α-" και τη λέξη "πέρας" που σημαίνει τέλος.

Ο συμβολισμός του απείρου ∞ είναι σχετικά πρόσφατος και για πρώτη φορά χρησιμοποιήθηκε από τον Άγγλο μαθηματικό John Wallis (1616-1703), ο οποίος χρησιμοποίησε και το «$\frac{1}{\infty}$» για να συμβολίσει τα απειροστά ή nonquanta όπως τα ονομάζει (Boyer, 1959).

Κατά την αρχαιότητα ασχολήθηκαν με το άπειρο πολλοί και διάφοροι ερευνητές όπως οι Ίωνες Φιλόσοφοι, οι εκπρόσωποι της Ελεατικής φιλοσοφικής σχολής στην κάτω Ιταλία, οι Πυθαγόρειοι, ο Αριστοτέλης και πολλοί άλλοι φιλόσοφοι.

Στην περιοχή της Ιωνίας εμφανίστηκε για πρώτη φορά η φιλοσοφική σκέψη. Οι **Ίωνες Στοχαστές** τον 6ο π.Χ αι. προκειμένου να εξηγήσουν το φαινόμενο της μεταβολής και της πολλαπλότητας του κόσμου, θεώρησαν τον κόσμο ως μια αρχή η οποία διασπάστηκε σε πολλά μέρη.

Ο **Αναξίμανδρος** ο Μιλήσιος (611-546 π.Χ.), εισήγαγε πρώτος τη έννοια του υλικού απείρου. Επίκεντρο της φιλοσοφίας του Αναξίμανδρου είναι το άπειρον, ένα άπειρο όμως που πιθανώς προσλαμβάνει δύο ερμηνείες: (Καρλοβασίτης, 2016)

- άπειρον α+πέρας = χωρίς τέλος
- άπειρον α+περάω =αδιαπέραστο

Σε κάθε περίπτωση φαίνεται πως εννοούσε μια πρωταρχική αιτία δίχως όρια στον χώρο. Το «άπειρον» είναι απεριόριστο στον χώρο και ποιοτικά ακαθόριστο, καθώς δεν προσδιορίζεται μορφικά ως ένα από τα τέσσερα στοιχεία. Στο «άπειρον», ο Αναξίμανδρος δεν είδε μόνον την πρωταρχική ύλη και την αρχική κατάσταση του κόσμου αλλά και την αιτία της κοσμικής τάξης. Σε αυτή την πρωταρχική ουσία απέδωσε θεϊκές ιδιότητες, χαρακτηρίζοντας το άπειρο ως «αθάνατον, ανώλεθρον και θείον». Θεωρούσε ότι η αδυναμία της ανθρώπινης διάνοιας να καθορίσει το άπειρο ποσοτικά και ποιοτικά το καθιστά απεριόριστη πηγή και κατευθυντήρια δύναμη του κόσμου.

Κατ’ αυτόν, το άπειρο ήταν η αρχή του Κόσμου, η αρχή όλων των πραγμάτων, αυτό που είναι πίσω από την απέραντη ποικιλία και τις διαφορετικές τους ιδιότητες. Το άπειρο το προσδιόριζε ως στοιχείο αγέννητο, άφθαρτο και αθάνατο. Ισχυριζόταν ότι το άπειρο δεν είναι μείγμα των υλικών στοιχείων ούτε άυλη νοητική αρχή: είναι ύλη που περιέχει τα πάντα. Από το άπειρο αποσπώνται οι αντίθετες ύλες "ψυχρόν" και "θερμόν" και από την ανάμιξη τους το νερό. Από το νερό προκύπτουν τα άλλα στοιχεία, η γη, ο αέρας και η φωτιά. Από τον αέρα και τη φωτιά θεωρούσε ότι σχηματίζονται τα αστέρια που έχουν τη λάμψη της φωτιάς και τη ρυθμική κίνηση των ρευμάτων του αέρα. Έτσι, η αρχική πηγή των όντων κατ' αυτόν ήταν το "άπειρον". Το "άπειρον", πίστευε ότι είναι κάτι το υλικό που κινείται αλλά με τέτοιας φύσεως κίνηση, ώστε να μην υποπίπτει στις αισθήσεις μας. Ένα σύνολο δηλαδή ενεργειακών ιδιοτήτων ή κάτι σαν την ενέργεια, χωρίς όρια. Είναι σαφές ότι ο Αναξίμανδρος ήταν βαθύτατα γοητευμένος από τις διαμετρικά αντίθετες δυνάμεις που ενεργούν στη Φύση. Οι αντίθετες δυνάμεις, υποστήριζε ότι συνεχίζουν τον αιώνιο χορό τους, χάρη στο «άπειρον» που είναι χωρίς πέρας χωρικό και χρονικό. Κατά αυτόν, το «άπειρον» δεν έχει χαρακτηριστικά, δεν έχει κατηγορήματα. Κατά κάποιον τρόπο όμως, είναι η πηγή και το στήριγμα των όσων έχουν ευδιάκριτα χαρακτηριστικά, όπως ο αέρας και η φωτιά (Ρωμανίδης, 2013, Windelband & Heimsoeth, 2001).

Ο **Αναξιμένης** ο Μιλήσιος (570-526 π.Χ.), θεωρούσε ότι ο αέρας περιέχει όλο τον κόσμο ως μια άπειρη χωρικά μάζα και οπωσδήποτε απροσδιόριστη. Υποστήριξε ότι μία είναι η υποκείμενη φύση των πραγμάτων και ότι είναι άπειρη (Κάλφας & Ζωγραφίδης).

Για τον **Αναξαγόρα** (500-428 π.Χ.) η ύλη έχει συνθετικό χαρακτήρα και αποτελείται από απείρως διαιρετά στοιχεία τα οποία θεωρεί ότι προϋπήρχαν. Ο Σιμπλίκιος (Υπόμνημα εις την Αριστοτέλους Φυσικής Ακρόασιν 35, 3) αναφέρει ότι ο Αναξαγόρας πίστευε στην ύπαρξη άπειρων κόσμων, όπως και ο Λεύκιππος και ο Δημόκριτος (Θεοδοσίου, 2006).

Ο **Λεύκιππος** (φιλόσοφος του 5^{ου} αιώνα π.Χ.) όπως και ο **Δημόκριτος** (480-370 π.Χ.), θεωρούσε ότι τα πρώτα στοιχεία ονομάζονται «άτομα», επειδή είναι πάρα πολύ μικρά και δεν μπορούν να υποστούν «τομή και διαίρεση». Κατά το Δημόκριτο, τα πρωταρχικά στοιχεία, τα οποία ονομάζει «άτομα», είναι άπειρα στο πλήθος και αδιαίρετα στο μέγεθος. Ο **Επίκουρος** (341-270 π.Χ.) ισχυρίστηκε ότι τα πρωταρχικά στοιχεία ονομάζονται αδιαίρετα, άτομα, νιοστά εξαιτίας της απάθειάς τους (Δημόκριτος, 2004).

Οι **Πυθαγόρειοι φιλόσοφοι** τον 6ο αιώνα π.Χ., θεωρούσαν ότι ο κόσμος αποτελεί σύνθεση αντιθέτων και ότι δημιουργήθηκε από κάτι άπειρο, προσέθεταν, όμως, την ιδέα της επιβολής ενός πέρατος στο άπειρο και την έννοια της μουσικής αρμονίας στο Σύμπαν (Θεοδοσίου, 2006). Ασχολήθηκαν με το άπειρο σε ένα θεωρητικό επίπεδο, καθώς θεωρούσαν ότι τα πάντα αντιστοιχούν σε έναν αριθμό και ότι το άπειρο δημιουργήθηκε από το ένα "1" μετά την διαίρεση του. Πίστευαν ότι το άπειρο εισβάλει στο αδιαφοροποίητο "είναι" και το διασπά δημιουργώντας τη δυάδα. Έτσι, ο κόσμος κυριολεκτικά δημιουργείται από το δίπολο «πέρας- άπειρο». Αρχικά υπήρχε το δίπολο. Το "είναι" ήταν αδιαφοροποίητο, ενιαίο και πεπερασμένο για τους Πυθαγορείους ταυτόσημο με τον αριθμό ένα. Το «μη είναι» ήταν ισχυρότατα συνδεδεμένο με το κενό. Το πεπερασμένο αδιαφοροποίητο ον, ισχυρίζονταν ότι περιορίζεται από το κενό που επεκτείνεται επ' άπειρον. Αυτό το άπειρο εισβάλει στην αρχή της πυθαγόρειας κοσμογονίας και διασπά το πεπερασμένο "είναι" παρεμβαλλόμενο ανάμεσα στα δύο του κομμάτια. Δημιουργείται από τη μονάδα η δυάδα, από αυτήν η τριάδα κ.τ.λ. με τρόπο ώστε το πυθαγόρειο σύμπαν να αποτελεί ένα αντίγραφο αυτού που σήμερα θα λέγαμε σύνολο φυσικών αριθμών. Οι Πυθαγόρειοι ταύτιζαν το άρτιο με το άπειρο και το περιττό με το πεπερασμένο. Αυτό συμβαίνει διότι το περιττό αποτελεί σύνολο με αρχή μέση και τέλος ενώ το άρτιο είναι διαιρετό επ' άπειρον (Ρωμανίδης, 2013, Windelband & Heimsoeth, 2001).

Ο **Αριστοτέλης** (384-322 π.Χ.) θεωρούσε ότι υπάρχουν πολλά χαρακτηριστικά του κόσμου που υποστηρίζουν την ύπαρξη του απείρου έτσι επινόησε την έννοια του δυνάμει απείρου για να το αντιδιαστέλλει προς την έννοια του ενεργεία απείρου. Μπορούμε κατά τον Αριστοτέλη να έχουμε ένα άπειρο σύμπαν χωρίς ποτέ να αδράξουμε ένα άπειρο αντικείμενο. Το άπειρο ενός τέτοιου σύμπαντος είναι δυνητικό. Για την ακρίβεια, ο Αριστοτέλης υποστήριξε ότι ο χώρος του σύμπαντός μας είναι σφραγισμένος και πεπερασμένος. Αντιμετωπίζοντας το ερώτημα "τι βρίσκεται έξω από την σφαίρα αυτή;", υποστήριξε ότι αυτό που περιορίζεται, δεν περιορίζεται σε σχέση με κάτι που το περιβάλει. Για τον Αριστοτέλη, η αναζήτηση για το άπειρο προέρχεται από την πίστη μας ότι ο χρόνος είναι άπειρος, από τη δυνατότητα συνεχούς τμήσης εκτεταμένων μεγεθών, από την αέναη παρουσία της γέννησης και της φθοράς, από την αντίληψη ότι καθετί οριοθετείται από κάτι άλλο ώστε η ολότητα να μην έχει όρια (Αναπολιτάνος, 2005).

Στην πραγματεία του «Φυσικά» παρέχει την ερμηνεία του απείρου και των απειροστών. Διακρίνει το «άπειρον δυνάμει» και το «άπειρον ενεργεία». Για το πρώτο παρουσιάζει ως παράδειγμα το όριο φθίνουσας γεωμετρικής προόδου. Έτσι κατά τον Αριστοτέλη, υποθέτουμε ότι έχουμε μία ράβδο μίας μονάδας μήκους. Από τη ράβδο παίρνουμε το ½ του μήκους, από το υπόλοιπο παίρνουμε το μισό, δηλαδή το ¼ του αρχικού μήκους κ.ο.κ. επ' άπειρον. Σύμφωνα με τον φιλόσοφο η άπειρη λήψη δεν θα βγει από το πεπερασμένο μήκος της ράβδου, δηλαδή μετά από άπειρες λήψεις θα προκύψει ολόκληρη η ράβδος της μίας μονάδας μήκους. Τις άπειρες αυτές λήψεις τις ονομάζει «άπειρον δυνάμει», διότι το άπειρο αυτό υπάρχει στην πραγματικότητα μέσα σε πεπερασμένο μέγεθος. Όσον αφορά στο «άπειρον ενεργεία», ο Αριστοτέλης ισχυρίζεται ότι νοείται αλλά δεν υπάρχει στην πραγματικότητα. Εάν π.χ. αριθμούμε 1,2,3,4,5, κ.τ.λ. θα μετρούμε επ' άπειρον χωρίς να συλλαμβάνουμε αυτό το άπειρο. Επομένως δεν υπάρχει άπειρος αριθμός (Σπανδάγος, Σπανδάγου & Τραυλού, 2000).

Ο **Πλάτων** (427-347 π.Χ.) διέκρινε στη δομή όλου του κόσμου τέσσερα είδη όντος: α) το άπειρο, β) το πέρας, γ) το μείγμα απείρου και πέρατος και δ) την αιτία του μείγματος αυτού. Το άπειρο και εδώ σημαίνει το αδιακόσμητο και απροσδιόριστο (Θεοδοσίου, 2006).

Ο **Ξενοφάνης** ο Κολοφώνιος (565-488 π.Χ.) θεωρούσε το Σύμπαν αιώνιο, χωρίς αρχική δημιουργία. Δίδασκε ότι μόνον τα επιμέρους μέρη του (οι Κόσμοι) υφίστανται συνεχή μεταβολή. Σύμφωνα με τον Διογένη τον Λαέρτιο, ο Ξενοφάνης υποστήριζε ότι υπάρχουν άπειροι πανομοιότυποι κόσμοι: «Κόσμους δέ απείρους, ου παραλλακτούς δέ» (Θεοδοσίου, 2006).

Ο **Μέλισσος** ο Σάμιος (5ος π.Χ. αιώνας), μαθητής του Παρμενίδη, όπως γράφει ο Διογένης ο Λαέρτιος, θεωρούσε ότι το Σύμπαν είναι ένα, άπειρο, πλήρες, αναλλοίωτο, ακίνητο και ομοιογενές: «Εδόκει δέ αυτώ τό παν άπειρον είναι καί αναλλοίωτον καί ακίνητον καί έν καί όμοιον εαυτώ και πλήρες» (Θεοδοσίου, 2006).

Κατά τον **Πρόκλο** (412-485 π.Χ.), το άπειρο αποτελεί το αίτιο της παραγωγής του πλήθους (Δέμης, 1988).

Κατά τον **Ευκλείδη** (325-265 π.Χ.), υπάρχουν περισσότεροι πρώτοι αριθμοί από αυτούς που περιέχονται σε κάθε δεδομένη συλλογή πρώτων αριθμών. Ο ίδιος ο Ευκλείδης απέφευγε τον όρο άπειρο, γιατί αποτελούσε μια πολύ αφηρημένη έννοια και γεννούσε περαιτέρω ερωτήματα πάνω σε αυτό. Γι' αυτό το λόγο δεν χρησιμοποιούσε το άπειρο στα θεωρήματα και στα συμπεράσματα του (Ρωμανίδης, 2013).

Ο **Αρχιμήδης** (288-212 π.Χ.) ασχολήθηκε με την έννοια των απειροστών, χρησιμοποιώντας την αποδεικτική μέθοδο της εξάντλησης, απέφευγε όμως να χρησιμοποιήσει «επίσημα» την έννοια του απείρως μεγάλου και του απειροστού. Η Αρχιμήδεια ιδιότητα στα σύγχρονα Μαθηματικά προσδιορίζει τη δομή της πραγματικής ευθείας του $\mathbb{R}$ (Στεργίου, 2014).

1.1 ΖΗΝΩΝ Ο ΕΛΕΑΤΗΣ

Ο Ζήνων ο Ελεάτης (490–425 π.Χ.) ήταν ένας από τους αρχαίους Έλληνες προσωκρατικούς φιλοσόφους στην Κάτω Ιταλία και μέλος της Ελεατικής σχολής, που ίδρυσε ο Παρμενίδης. Ήταν μαθητής του μεγάλου προσωκρατικού φιλοσόφου Παρμενίδη και είναι ευρέως γνωστός για τα μαθηματικά του παράδοξα. Ανέπτυξε κυρίως μεθόδους της τυπικής λογικής, την επαγωγή, την εις' άτοπων απαγωγή, κ.λ.π. και με τη βοήθεια των περίφημων παραδόξων του, επιχείρησε να αναιρέσει τη δυνατότητα της κίνησης. Η διαλεκτική στο Ζήνωνα συρρικνώνεται στους κανόνες του διαλέγεσθαι και στην ανάδειξη λογικών αντιφάσεων (Πατέλης, 2013).

Ο Παρμενίδης δίδασκε πως ο κόσμος των αισθήσεων είναι μια ψευδαίσθηση επειδή αποτελείται από κίνηση (ή αλλαγή) και πολλαπλότητα. Το Πραγματικό Όν είναι απολύτως ένα και δεν υπάρχει πολλαπλότητα σε αυτό. Είναι στατικό και αμετάβλητο. Η κοινή λογική λέει πως υπάρχει και κίνηση και πολλαπλότητα. Αυτή είναι και η Πυθαγόρεια αντίληψη της πραγματικότητας ενάντια στην οποία επιχειρηματολογούσε ο Ζήνωνας. Ο Ζήνων έδειξε πως η κοινή αντίληψη της πραγματικότητας οδηγεί σε παράδοξα και οξύμωρα (Βικιπαίδεια).

1.1.1. ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΟΥ ΑΧΙΛΛΕΑ ΚΑΙ ΤΗΣ ΧΕΛΩΝΑΣ

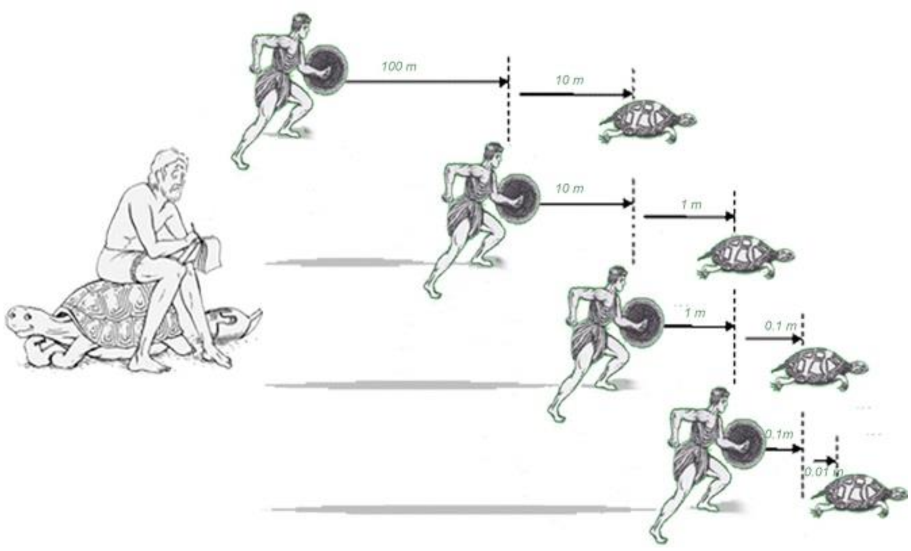
δεύτερος δ' ὁ καλούμενος Ἀχιλλεύς· ἔστι δ' οὗτος, ὅτι τὸ βραδύτατον οὐδέποτε καταληφθήσεται θέον ὑπὸ τοῦ ταχίστου· ἔμπροσθεν γὰρ ἀναγκαῖον ἐλθεῖν τὸ διῶκον ὅθεν ὥρμησεν τὸ φεῦγον, ὥστε ἀεί τι προέχειν ἀναγκαῖον τὸ βραδύτερον. ἔστιν δὲ καὶ οὗτος ὁ αὐτὸς λόγος τῷ διχοτομεῖν, διαφέρει δ' ἐν τῷ διαιρεῖν μὴ δίχα τὸ προσλαμβανόμενον μέγεθος. τὸ μὲν οὖν μὴ καταλαμβάνεσθαι τὸ βραδύτερον συμβέβηκεν ἐκ τοῦ λόγου, γίγνεται δὲ παρὰ ταὐτὸ τῇ διχοτομίᾳ (ἐν ἀμφοτέροις γὰρ συμβαίνει μὴ ἀφικνεῖσθαι πρὸς τὸ πέρας διαιρουμένου πως τοῦ μεγέθους· ἀλλὰ πρόσκειται ἐν τούτῳ ὅτι οὐδὲ τὸ τάχιστον τετραγῳδημένον ἐν τῷ διώκειν τὸ βραδύτατον), ὥστ' ἀνάγκη καὶ τὴν λύσιν εἶναι τὴν αὐτήν

Αριστοτέλης, Φυσικά 239b 14-26

Είναι γεγονός ότι ο Αχιλλέας εκτός των άλλων αρετών που είχε όπως αναφέρει ο Όμηρος φημιζόταν και για την ταχύτητά του. Ο Όμηρος συγκεκριμένα τον χαρακτήριζε «γοργοπόδαρο». Ωστόσο, ο Ζήνωνας ισχυριζόταν ότι ο Αχιλλέας δεν μπορεί να φτάσει ποτέ μια χελώνα η οποία προπορεύεται σε απόσταση.

Αυτό συμβαίνει διότι προτού την προσπεράσει θα πρέπει να φτάσει στο σημείο όπου βρισκόταν η χελώνα στην αρχή της κίνησης. Όταν όμως φτάσει στο σημείο αυτό, τότε η χελώνα ήδη θα έχει προχωρήσει και επομένως θα εξακολουθεί να προπορεύεται. Αυτή η διαδικασία συνεχίζει να συμβαίνει επ' άπειρον και παρόλο που η διαφορά μεταξύ τους γίνεται όλο και μικρότερη, εντούτοις ποτέ δεν μηδενίζεται (Φίλη, 2010).

Έτσι ο Αχιλλέας δεν θα καταφέρει ποτέ να διανύσει όλες τις αποστάσεις που απαιτείται μέχρι να ολοκληρωθεί η διαδρομή, γιατί όσες επιμέρους αποστάσεις και αν διανύσει σε κάθε στιγμή, πάντοτε θα είναι περισσότερες αυτές που απομένουν να διανυθούν (McKirahan, 2005).



Αναλυτικότερα, όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα, αν υποθέσουμε ότι η χελώνα προπορεύεται του Αχιλλέα 100 m και ότι η ταχύτητα $υ_A$ του Αχιλλέα είναι $υ_A$=10 m/sec και της χελώνας, $υ_x$, είναι $υ_x$=1 m/sec, τότε ο Αχιλλέας σε χρόνο t_1=10 sec θα διανύσει την απόσταση (AX_1)=100 m, την οποία τον προσπερνούσε η χελώνα. Κατά τη διάρκεια αυτού του χρόνου t_1 η χελώνα θα διανύσει το διάστημα (X_1X_2) =10 m. Στη συνέχεια για να διατρέξει αυτή την απόσταση ο Αχιλλέας θα χρειαστεί χρόνο t_2 =1 sec. Κατά το χρόνο t_2 η χελώνα θα διανύσει το διάστημα (X_2X_3) =1 m και ο Αχιλλέας θα το διατρέξει σε χρόνο t_3 =1/10 sec. Η κίνηση αυτή θα συνεχίζεται επ' άπειρο. «Ο ταχύτερος ποτέ δεν θα προσπεράσει τον βραδύτερο» (Καρακώστας).

Ο Αριστοτέλης αντιτίθεται σε αυτήν την παραπάνω γενικότερη συλλογιστική. Θεωρεί ότι ο συλλογισμός του Ζήνωνα ξεκινά από λάθος βάση όταν δέχεται ότι ένα πράγμα δεν μπορεί να περάσει από άπειρα άλλα πράγματα ή να έρθει σε επαφή με καθένα από αυτά χωριστά σε πεπερασμένο χρόνο.

Η διαπίστωση του Αριστοτέλη είναι ότι το άπειρο διασχίζεται σε άπειρο και όχι σε πεπερασμένο χρόνο και η επαφή με τα άπειρα γίνεται σε άπειρους και όχι σε πεπερασμένο τον αριθμό χρόνους (Kirk, Raven & Schofield, 2001).

Στην πράξη όμως γνωρίζουμε ότι ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται ο Αχιλλέας είναι ένας πεπερασμένος αριθμός και δίνεται απ' τη σχέση: (Καρακώστας)

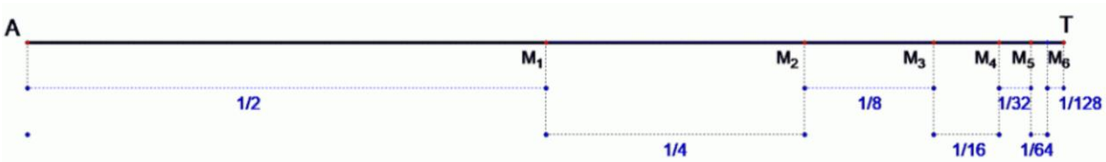
$$\text{Τολικός} = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots = \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9}$$

1.1.2. ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΙΑΣ

τέτταρες δ' εἰσὶν οἱ λόγοι περὶ κινήσεως Ζήνωνος οἱ παρέχοντες τὰς δυσκολίας τοῖς λύουσιν, πρῶτος μὲν ὁ περὶ τοῦ μὴ κινεῖσθαι διὰ τὸ πρότερον εἰς τὸ ἥμισυ δεῖν ἀφικέσθαι τὸ φερόμενον ἢ πρὸς τὸ τέλος, περὶ οὗ διείλομεν ἐν τοῖς πρότερον λόγοις.

Αριστοτέλης, Φυσικά 239b 9-14

Σύμφωνα με το Ζήνωνα, ό,τι κινείται δε πρόκειται ποτέ να φτάσει στον προορισμό του. Στη «διχοτομία» η υποτιθεμένη κίνηση συμβαίνει στον χώρο ενός σταδίου και πρωταγωνιστής του επιχειρήματος είναι ένας δρομέας ο οποίος πρέπει να διασχίσει μια συγκεκριμένη διαδρομή ΑΒ κινούμενος σε ευθεία γραμμή από το Α προς το Β. Για να φτάσει όμως από το σημείο εκκίνησης Α στο σημείο τερματισμού Β θα πρέπει πρώτα να έχει φτάσει στο σημείο Α1, το οποίο είναι το μέσον της απόστασης ΑΒ. Για να φτάσει στο ΑΑ1 θα πρέπει πρώτα να έχει περάσει από το σημείο ΑΑ2 το οποίο αποτελεί το μέσον της ΑΑ1 απόστασης και ούτω καθεξής. Με άλλα λόγια για να φτάσουμε στο τελικό σημείο μιας απόστασης θα πρέπει πρώτα να έχουμε διανύσει το μισό της, που και σε αυτό θα φτάσουμε μόνο αν έχουμε διανύσει πρωτίστως το μισό της, με αποτέλεσμα να χρειάζεται να διανύσουμε άπειρο αριθμό μισών διαστημάτων, πράγμα το οποίο δεν είναι εφικτό. Αυτή η αδυναμία μας να διανύσουμε άπειρο αριθμό διαστημάτων μας δίνει να καταλάβουμε ότι δεν πρόκειται ποτέ να φτάσουμε στο σημείο του τερματισμού, δεν πρόκειται ποτέ να ολοκληρώσουμε την διαδρομή. Με μια αντίστοιχη εναλλακτική ερμηνεία της «διχοτομίας» ο Ζήνωνας καταλήγει στο ότι δεν πρόκειται καν να ξεκινήσουμε από το σημείο Α. Και στις δυο περιπτώσεις το συμπέρασμα που καταλήγουμε είναι ότι η κίνηση αποδεικνύεται αδύνατη «καθώς κάθε κίνηση συνεπάγεται την εκτέλεση μιας άπειρης ακολουθίας πράξεων» (McKirahan, 2005).



Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, αν ένα κινητό ξεκινήσει από τη θέση Α και κινείται πάνω σε μία ευθεία τροχιά για να φτάσει στο σημείο Τ τότε θα πρέπει να περάσει από το μέσον της διαδρομής Μ1. Για να διανύσει την απόσταση Μ1Τ θα πρέπει να περάσει από το μέσον της Μ2. Για να διανύσει την Μ2Τ θα πρέπει να περάσει από το μέσον Μ3 κ.ο.κ. Αφού λοιπόν κάθε φορά πρέπει να περνάει από το μέσον της υπόλοιπης απόστασης δε θα φτάσει ποτέ στο τέλος Τ.

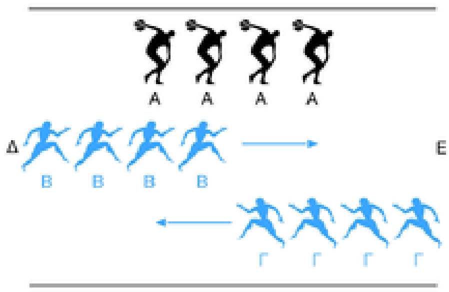
Στην πράξη όμως, γνωρίζουμε ότι το κινητό θα φτάσει στον προορισμό του και θα διανύσει απόσταση ίση με S= $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$, δηλαδή όσο είναι το μήκος ΑΤ (Σκαρδανάς, 2018).

Ο Αριστοτέλης στηρίζεται σε δύο άξονες: α) Την πλήρη ασυμβατότητα του απείρου και του πεπερασμένου σε όποιο συνδυασμό και αν εφαρμοστεί και β) τα χρονικά σημεία, τα νυν, δεν αποτελούν διαιρέσεις του χρόνου και άρα δεν νοείται σε αυτά κίνηση αφού είναι αδιάστατα. Σε κάθε παράδοξο του Ζήνωνα εφαρμόζοντας κατάλληλα τις δύο παραπάνω αρχές και με την εξαιρετική αποδεικτική άνεση εξηγεί και καταρρίπτει την ισχύ του παραδόξου. Η κύρια αστοχία των παραδόξων του Ζήνωνα κατά Αριστοτέλη βρίσκεται στη λανθασμένη θέση της προϋπόθεσης ως δεδομένο ότι ο χρόνος αποτελείται από τα εκάστοτε νυν: ο Φιλόσοφος όμως δεν δέχεται ως αληθές κάτι τέτοιο, αντίθετα δέχεται μόνο την κίνηση στο συνεχές του χρόνου μέσα στον οποίο το εκάστοτε νυν είναι δυνητικό, όχι πραγματικό. Διακρίνει κανείς καθαρά ότι μόνο η διάρκεια είναι πραγματικός χρόνος και μόνο εκεί μπορεί να δεχτεί κανείς κίνηση, όχι στο μεμονωμένο χρονικό σημείο (Κασουρίδης, 2019).

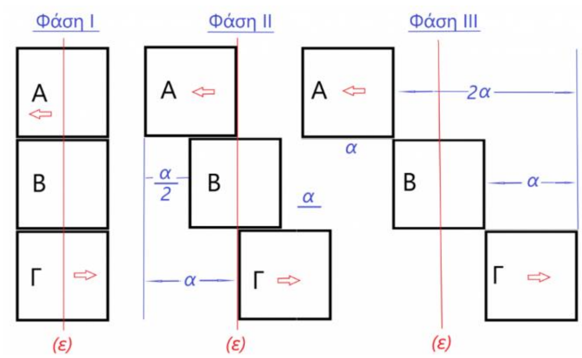
Ο Αριστοτέλης δέχεται και για τον χρόνο ότι είναι άπειρος δυνητικά με κάπως διαφορετικό τρόπο από το δυνητικά άπειρο του χώρου, με την έννοια ότι κυλά συνεχώς, δηλαδή της διαδικασίας, αν και ένα τμήμα του χρόνου είναι συνεχές και άρα διαιρείται επ' άπειρον, όπως γίνεται και στη συνέχεια των μεγεθών. Με τη βοήθεια της κατανόησης του χρόνου σε σχέση με τον χώρο, συναντά κανείς την πρώτη επιθετική τοποθέτηση στο Ζ΄ βιβλίο κατά των θέσεων του Ζήνωνα ισχυριζόμενος ότι στο μισό χρόνο ένα κινητό διανύει το μισό διάστημα, άρα τοποθετεί ως επιχείρημα την αναλογία χώρου – χρόνου για να εξάγει το συμπέρασμα ότι και τα δύο μεγέθη είναι συνεχή. Οπότε, αν το ένα γίνει άπειρο, θα γίνει και το άλλο, ενώ αν διαιρεθεί επ' άπειρον ο χρόνος, αντίστοιχα θα διαιρεθεί και το διάστημα. Ο στόχος εδώ καταλήγει να είναι ο Ελεάτης Ζήνωνας, αφού ο Αριστοτέλης αναφωνεί ότι σε πεπερασμένο χρόνο αποκλείεται ένα κινητό να διέλθει άπειρα διαστήματα ή να κατορθώσει να έρθει σε επαφή με το καθένα από τα άπειρα, διευκρινίζοντας ότι ο χρόνος, το μήκος και γενικότερα κάθε συνεχές μέγεθος είναι άπειρο και κατά τη διαίρεση και ως προς τα έσχατα όριά του (Σιάσος, 1989).

1.1.3. ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΟΥ ΣΤΑΔΙΟΥ

οὗτοι μὲν οὖν οἱ δύο λόγοι, τρίτος δ' ὁ νῦν ῥηθείς,
ὅτι ἡ ὀϊστὸς φερομένη ἕστηκεν.
συμβαίνει δὲ παρὰ τὸ λαμβάνειν τὸν χρόνον συγκεῖσθαι
ἐκ τῶν νῦν· μὴ διδομένου γὰρ τούτου οὐκ ἔσται ὁ συλλογισμός.
Αριστοτέλης, Φυσικά 239b 29-33



Στο παράδοξο του «σταδίου», παρουσιάζονται μια σειρά από δρομείς οι οποίοι κινούνται με την ίδια ταχύτητα μέσα σε ένα στάδιο αλλά προς αντίθετες κατευθύνσεις, η μια σειρά από το τέλος του σταδίου και η άλλη από την μέση, περνώντας μπροστά από άλλους ισάριθμους ακίνητους δρομείς. Ο Ζήνωνας καταλήγει μέσω απλών μαθηματικών πράξεων, ότι σε αυτήν την περίπτωση ο μισός χρόνος είναι ίσος με τον διπλάσιό του και παράλληλα υποθέτει ότι τα πράγματα που τρέχουν με ίδια ταχύτητα χρειάζονται τον ίδιο χρόνο για να προσπεράσουν ένα κινούμενο και ένα ακίνητο σώμα με το ίδιο μέγεθος (Kirk, Raven & Schofield, 2001).



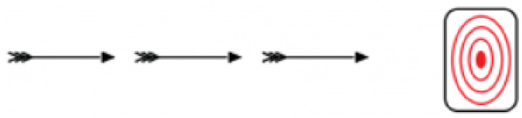
Αναλυτικότερα ας υποθέσουμε ότι τρεις κύβοι με ίδιο όγκο (ίδιες δηλαδή διαστάσεις), οι Α, Β, Γ, βρίσκονται στοιχισμένοι στην ίδια ευθεία, ο ένας πίσω από τον άλλο και ακίνητοι, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Οι πλευρές τους έχουν (και για τους τρεις) το ίδιο μήκος **μ**. Μετακινούμε τον μπροστινό κύβο Α προς τα αριστερά με σταθερή ταχύτητα και ταυτόχρονα τον τελευταίο κύβο Γ προς τα δεξιά, με την ίδια (και σταθερή) ταχύτητα.

Στον ίδιο χρόνο που ο Α έχει μετακινηθεί κατά μισή πλευρά (=μ/2) προς τα αριστερά ως προς τον ακίνητο Β, ο Γ έχει μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά το ίδιο διάστημα (μισή πλευρά ή μ/2) ως προς τον ακίνητο Β. Στον ίδιο επίσης χρόνο ο Α έχει μετακινηθεί κατά μ (=μια πλευρά κύβου) ως προς τον Γ. Στον διπλάσιο χρόνο, ο Α και ο Γ έχουν ο καθένας μετακινηθεί κατά επίσης μ (=μια πλευρά κύβου) σε σχέση με τον Β. Συνεπώς «ο μισός χρόνος ισούται με τον διπλάσιό του». Η ταχύτητα γίνεται πλέον σχετικό μέγεθος, εξαρτώμενο από τον παρατηρητή και το πώς αυτός κινείται σε σχέση με το παρατηρούμενο (Βικιπαίδεια).

Ο Ζήνων ισχυρίζεται ότι όπως ένα σώμα δεν αποτελείται από πλήθος σημείων, ούτε ο χρόνος αποτελείται από πλήθος χρονικών στιγμών, αλλά ούτε μία κίνηση δεν αποτελείται από πλήθος κινήσεων. Διότι εάν τα παραπάνω διαιρούνται επ' άπειρο δεν είναι δυνατόν παρά να φτάσουμε τελικά στο μηδέν. Έτσι, εάν θελήσουμε να επανέλθουμε εκεί από όπου ξεκινήσαμε προσθέτοντας τα επιμέρους τμήματα, τότε αφού το τελευταίο απειροστό μέρος της διαίρεσης είναι μηδέν, πρέπει αν το πολλαπλασιάζουμε συνεχώς να φτάσουμε στο αρχικό όλον. Όμως άθροισμα πολλών μηδενικών μας δίνει αποτέλεσμα μηδέν (Αρβανίτη).

1.1.4. ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΟΥ ΒΕΛΟΥΣ

τέταρτος δ' ὁ περὶ τῶν ἐν τῷ σταδίῳ κινουμένων ἐξ ἐναντίας ἴσων ὄγκων παρ' ἴσους, τῶν μὲν ἀπὸ τέλους τοῦ σταδίου τῶν δ' ἀπὸ μέσου, ἴσῳ τάχει, ἐν ᾧ συμβαίνειν οἴεται ἴσον εἶναι χρόνον τῷ διπλασίῳ τὸν ἥμισυν.
Αριστοτέλης, Φυσικά 239b 33-40



Όσον αφορά στο παράδοξο του «ιπτάμενου βέλους», φαίνεται ότι σε κάθε χρονική στιγμή, σε κάθε τώρα, ένα κινούμενο βέλος που υποτιθέμενα εκτοξεύεται για να διανύσει μια απόσταση, καταλαμβάνει μια θέση ίση με το μέγεθός του και επομένως σε αυτήν την δεδομένη χρονική στιγμή, σε αυτό το τώρα, μην αλλάζοντας θέση, βρίσκεται σε κατάσταση ακινησίας. Εάν ο χρόνος αποτελείται από το άθροισμα διαδοχικών χρονικών στιγμών, τότε το βέλος βρίσκεται συνεχώς σε αυτήν την κατάσταση ακινησίας (Kirk, Raven & Schofield, 2001).

Ο Αριστοτέλης υποστηρίζει ότι υπάρχουν θεμελιώδη λάθη στον ζηνώνειο συλλογισμό για τα δυο παραπάνω παράδοξα του «βέλους» και του «σταδίου». Γι’ αυτόν είναι απλώς αδύνατον ένα πράγμα να ηρεμεί σε μια στιγμή και υποστηρίζει ότι η κίνηση συμβαίνει σε ένα διάστημα χρόνου και όχι σε ένα σημείο του χρόνου (McKirahan, 2005).

Επιπρόσθετα αν η ηρεμία είναι απουσία κίνησης παρατηρείται επίσης να συμβαίνει μέσα σε χρονικά διαστήματα και όσο είναι δυνατόν να ηρεμεί κάτι σε μια στιγμή, άλλο τόσο είναι δυνατόν και να κινείται σε μια στιγμή. Υποστηρίζει ότι τα συμπεράσματα του Ζήνωνα απορρέουν από την αρχική υπόθεση ότι ο χρόνος αποτελείται από στιγμές κι αν αυτή η υπόθεση δεν ισχύει, τότε το ζηνώνειο συμπέρασμα καταρρίπτεται (McKirahan, 2005).

Για τον Αριστοτέλη φυσικά κι αυτή η αρχική υπόθεση δεν ισχύει, αφού ο χρόνος δεν αποτελείται από αδιαίρετα τώρα, ούτε άλλωστε αυτό μπορεί να συμβαίνει και με κανένα άλλο μέγεθος (Kirk, Raven & Schofield, 2001).

Ειδικά όσον αφορά στο «στάδιο», ο Αριστοτέλης υποστηρίζει ότι το λάθος του Ζήνωνα ήταν πως δέχθηκε πως κάθε κινούμενο σώμα πρέπει να βρίσκεται, για ίσα χρονικά διαστήματα, αντίκρυ στα σώματα που προσπερνάει (Kirk, Raven & Schofield, 2001).

Σύμφωνα, με τον Αναπολιτάνο (1985), η σημασία των παραδόξων αυτών είναι σημαντική, γιατί συνδέεται με την οντολογική υφή του συνεχούς και την αδυναμία του ανθρώπινου όντος να περατώσει μια οποιαδήποτε άπειρη διαδικασία σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Επίσης ο Αριστοτέλης θεωρεί το άπειρο και το συνεχές ουσιωδώς συναρτημένα έτσι, ώστε οποιαδήποτε προσπάθεια ανάλυσης ή μελέτης του δευτέρου να απαιτεί αναγκαστικά και σύγχρονη προσπάθεια ανάλυσης ή μελέτης του πρώτου (Παπαϊωάννου, 2015).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΣΤΑ ΝΕΟΤΕΡΑ ΧΡΟΝΙΑ

Ο **Galileo** (1564-1642) συνέβαλλε σημαντικά στην επιστημονική επανάσταση του 17ου αιώνα. Το 1638 σε μια από τις πιο σημαντικές του εργασίες χρησιμοποίησε τα απειροστά και τα αδιαίρετα. Για τον Γαλιλαίο τα αδιαίρετα ήταν απλά μη ποσότητες, δεν είχαν τις ιδιότητες των μετρήσιμων μεγεθών, θεωρούσε ότι «είναι πάρα πολύ μικρά που ξεπερνούν την φαντασία μας» ενώ το άπειρο το θεωρούσε ακατανόητο από τον δικό μας πεπερασμένο νου: *«Προσπαθούμε να εξετάσουμε το άπειρο με τον δικό μας πεπερασμένο νου αποδίδοντας σε αυτό ιδιότητες που δίνουμε στο πεπερασμένο και το ορισμένο. Αυτό είναι λάθος γιατί δεν μπορούμε να μιλάμε για τα άπειρα μεγέθη σαν να ήταν το ένα μεγαλύτερο ή μικρότερο από το άλλο ή ίσο».* Είναι γνωστό και το παράδοξο του Γαλιλαίου. Ο Γαλιλαίος δεν αρνιόταν την ύπαρξη των άπειρων αριθμών απλά θεωρούσε ότι δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε αυτούς έννοιες όπως μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο χωρίς τροποποιήσεις και αυτές τις τροποποιήσεις κατόρθωσε 200 χρόνια αργότερα ο Cantor (Ρωμανίδης, 2013).

Γύρω στο 1600, έκανε μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς 1,2,3,…, όταν τους χώρισε σε δύο κατηγορίες: α) τα τέλεια τετράγωνα 1,4,9,16,25,… και β) τους αριθμούς που δεν είναι τετράγωνα φυσικών αριθμών. Δεδομένου ότι τα τέλεια τετράγωνα είναι ένα υποσύνολο στη συλλογή όλων των φυσικών αριθμών 1,2,3,…, φαίνεται σαν να υπάρχουν λιγότεροι από αυτούς, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα: (Δαρίβας, 2017)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1			4					9							16	

Ωστόσο, όπως παρατήρησε ο Galileo, αν παρατάξουμε τα τέλεια τετράγωνα όπως στο επόμενο σχήμα, μπορούμε να ταιριάξουμε το κάθε τέλειο τετράγωνο με ένα φυσικό αριθμό, καθώς και κάθε φυσικό αριθμό με ένα τέλειο τετράγωνο, δημιουργώντας δύο σύνολα που έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Το συμπέρασμα του Galileo ήταν ότι, όταν πρόκειται για άπειρα σύνολα, τα πράγματα δεν είναι το ίδιο όπως για πεπερασμένα σύνολα.

1	2	3	4	5	...	n	...
↕	↕	↕	↕	↕	...	↕	...
1	4	9	16	25	...	n^2	...

Ο Γερμανός μαθηματικός, αστρονόμος και αστρολόγος **Johannes Kepler** (1571-1630), έκανε χρήση των εννοιών των απείρως μεγάλων και των απειροστών ποσοτήτων. Με τη χρήση «πολύ λεπτών» δίσκων και πολύ λεπτών τριγώνων έκανε να φανεί η διαφορά ανάμεσα στην «μέθοδο των απειροστών» όπως αυτή τελικά ονομάστηκε και στην διαδικασία που χρησιμοποίησε ο Galileo, την οποία ονόμασε «μέθοδο των αδιαίρετων». Σύμφωνα με την μέθοδο των απειροστών του Kepler, ένα γεωμετρικό σχήμα ή σώμα αντίστοιχα (γεωμετρικό αντικείμενο όπως το αποκαλούσε), αποτελούνταν από αντικείμενα μιας μικρότερης διάστασης, έτσι όπως και ο Αρχιμήδης θεώρησε τα επίπεδα σχήματα αποτελούμενα από γραμμές και τα σώματα αντίστοιχα από επιφάνειες (Βώκος, 2008).

Ο **Leibniz** (1646-1716) ανέπτυξε κανόνες και ερμηνευτικούς συμβολισμούς έχοντας σαν στόχο να βάλει τις απειροστές θεωρήσεις κάτω από μια αλγοριθμική διαδικασία. Για τον Leibniz τα μαθηματικά ήταν η επιστήμη των ποσοτήτων, άποψη η οποία δεν θα μπορούσε να συμβιβαστεί με τις προτάσεις για μη-ποσότητες του Galileo. Ερμήνευσε τις άπειρα μικρές ποσότητες ως ποσότητες που είναι μικρότερες από οποιαδήποτε δοσμένη, αλλά μεγαλύτερες από το μηδέν ενώ τις άπειρα μεγάλες ποσότητες μεγαλύτερες από οποιαδήποτε δοσμένη. Σύμφωνα με τον Leibniz και τα δύο είδη ποσοτήτων αυτών θα πρέπει να είναι μεταβλητές ποσότητες. Το αξιοπερίεργο είναι ότι παρόλο που οι ποσότητες αυτές είναι δημιούργημα της φαντασίας, είναι αναμφισβήτητα υπαρκτές ποσότητες. Ο Leibniz δίνοντας σαφώς έμφαση στην αυστηρότητα και στην ακρίβεια των μαθηματικών αποδείξεων, έθεσε τα απειροστά ή τις άπειρα μικρές ποσότητες σε μια ασφαλή πεπερασμένη βάση μέσα από την οποία μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν οι ποσότητες αυτές (Ρωμανίδης, 2013).

Ο Leibniz, ως προς το άπειρο, εμφανίζεται να αποδέχεται και το δυνητικό άπειρο, με την έννοια της ατέρμονης άπειρης διαιρετότητας εκτεταμένων αντικειμένων και το πραγματικό. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω απόσπασμα: (Ζωιτσάκος, 2010).

«Είμαι τόσο υπέρ του πραγματικού απείρου ώστε, αντί να δεχθώ πως η φύση το απεχθάνεται, πιστεύω πως την επηρεάζει παντού έτσι ώστε να καταδεικνύει την τελειότητα του Δημιουργού. Έτσι πιστεύω πως κάθε μέρος της ύλης, είναι δεν λέω διαιρετό αλλά πράγματι διαιρεμένο και επομένως και το πιο μικρό σωματίδιο θα πρέπει να θεωρείται σαν ένας κόσμος γεμάτος από μια απειρία όντων».

Ο **Berkeley** (1685-1753) δεν υιοθετούσε την έννοια του πραγματικού απείρου γιατί αποδοχή ύπαρξης ενός τέτοιου νοητού αντικειμένου θα σήμαινε αποδοχή μιας απειρίας ιδεών (μια για κάθε φυσικό αριθμό) συναρθρωμένων σε μια ολότητα στον πεπερασμένο ανθρώπινο νου. Επίσης αρνιόταν την άπειρη διαιρετότητα πεπερασμένα εκτατών αντικειμένων (Ζωιτσάκος, 2010).

Σύμφωνα με τα λεγόμενά του: «Κάθε συγκεκριμένο, πεπερασμένο, εκτατό αντικείμενο που μπορεί να είναι το αντικείμενο της σκέψης μας είναι μια ιδέα που υπάρχει αποκλειστικά στο νου μας και επομένως κάθε μέρος της πρέπει να γίνεται αντιληπτό. Κατά συνέπεια, το ότι δεν μπορώ να αντιληφθώ άπειρα μέρη σε μια πεπερασμένη έκταση σημαίνει για μένα με βεβαιότητα ότι τα άπειρα αυτά μέρη δεν υπάρχουν, είναι προφανές ότι δεν μπορώ να διακρίνω άπειρα μέρη σε οποιαδήποτε συγκεκριμένη γραμμή ή επιφάνεια ή σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο στερεό, που είτε αντιλαμβάνομαι με τις αισθήσεις μου είτε αναπαριστώ μέσα μου: έτσι συμπεραίνω πως δεν υπάρχουν άπειρα μέρη. Τίποτε δεν μου είναι καθαρότερο από την αντίληψη πως οι πεπερασμένες εκτάσεις που επιθεωρώ δεν είναι τίποτε άλλο παρά δικές μου ιδέες και δεν μου είναι λιγότερο καθαρό ότι δεν μπορώ να αναλύσω οποιαδήποτε από τις ιδέες μου σε άπειρα πολλές άλλες ιδέες, πράγμα που σημαίνει πως δεν είναι άπειρα διαιρετές» (Αναπολιτάνος, 1985).

Για τον **Kant** (1724-1804), η έννοια του πραγματικού απείρου δεν είναι κατασκευάσιμη στα πλαίσια του χωρόχρονου δεν πρέπει όμως να εξοβελιστεί από το εννοιολογικό μας σύμπαν. Μπορεί δηλαδή να θεωρηθεί αντικείμενο μαθηματικής επεξεργασίας και ως τέτοια λέγεται αναλύσιμη. Στο σημείο αυτό ο Kant ερχόταν σε αντίθεση με την αριστοτελική σκέψη σύμφωνα με την οποία, επειδή άπειρα αντικείμενα δεν υπάρχουν στη φύση δεν μπορούν να αποτελούν αντικείμενα ενασχόλησης του νου (Ζωιτσάκος, 2010).

Ο Kant όμως συμφωνούσε με τον Αριστοτέλη στη διάκριση δυνητικού και πραγματικού απείρου. Δεν δεχόταν την ακολουθία ως τελειωμένο αντικείμενο γιατί χωροχρονικά είναι αδύνατη η ολοκλήρωσή της. Αντίθετα θεωρούσε ότι είναι δυνατή η ύπαρξη κατασκευαστικού αλγορίθμου της ακολουθίας (Ζωιτσάκος, 2010).

Ο **Gauss** (1777-1855), αν και εναντιώθηκε έντονα στη χρήση του πραγματικού απείρου στα μαθηματικά, το χρησιμοποίησε τελικά στις θεωρητικές εργασίες του. Για πρώτη φορά στην ιστορία μελετήθηκαν συστηματικά από τον Gauss οι άπειρες σειρές (αθροίσματα άπειρων όρων) και μάλιστα εκείνες που συγκλίνουν, έναν τομέα με τον οποίο απέφυγαν να ασχοληθούν τόσο οι αρχαίοι Έλληνες (με εξαίρεση τον Ζήνωνα), όσο και οι περισσότεροι μαθηματικοί μέχρι την εποχή του Newton και του Leibniz (Ρωμανίδης, 2013).

Ο **Cauchy** (1789-1857) ονόμαζε άπειρο: "μια μεταβλητή ποσότητα τις οποίας οι διαδοχικές τιμές μπορούν να γίνουν μεγαλύτερες από κάθε αριθμό, οσοδήποτε μεγάλο" (Ζωιτσάκος, 2010).

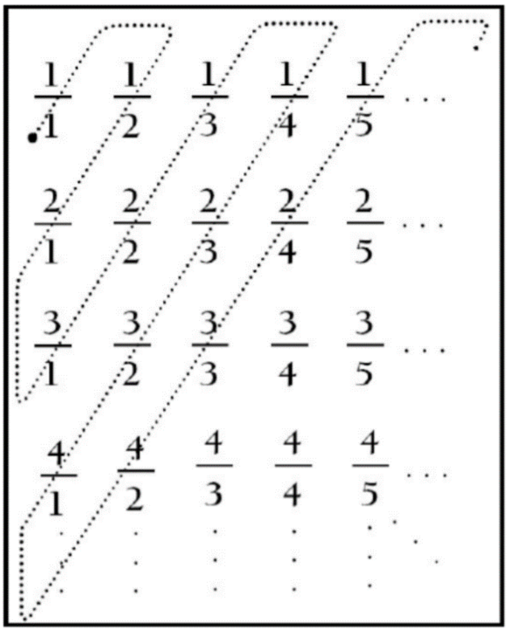
Ο **Frege** (1848-1925) και ο **Dedekind** (1831-1916), δύο μαθηματικοί που φημίζονται για τις εργασίες τους στη θεμελίωση των Μαθηματικών, χρησιμοποίησαν, ο ένας ανεξάρτητα από τον άλλο, το ενεργεία άπειρο για να θεμελιώσουν την αριθμητική, ανεξάρτητα από την εποπτεία ή την εμπειρία. Η θεμελίωση αυτή βασιζόταν στην καθαρή λογική και δεν χρησιμοποιούσε παρά μόνο την καθαρά λογική παραγωγή. Ο Dedekind μάλιστα έφτασε στο σημείο να μην αντλήσει την έννοια του πεπερασμένου αριθμού από την εποπτεία, αλλά να την παραγάγει λογικά χρησιμοποιώντας την έννοια του άπειρου συνόλου (Πλατάρος, 2002).

Ο **Boyer** (1906-1976) αναφερόμενος στον ορισμό του απείρου από τον Cauchy επισήμανε τη μεταβλητότητα θεωρώντας ότι παραδέχθηκε μόνο το δυνητικό άπειρο του Αριστοτέλη και αντιδιαστέλει με τον Bolzano ο οποίος σκεπτόμενος με όρους συσσώρευσης είχε συμπεράνει την πιθανότητα πραγματικού απείρου (Ζωιτσάκος, 2010).

Τέλος, ο **Edward Nelson** (1932-2014) τοποθετεί το δυνητικό άπειρο, του οποίου ήταν υπέρμαχος ως εξής: «Οι αριθμοί συνιστούν ένα δυνητικό άπειρο. Φανταστείτε τώρα αυτό το δυνητικό άπειρο ολοκληρωμένο. Φανταστείτε την ατέρμονη διαδικασίας της κατασκευής των αριθμών κατά κάποιον τρόπο τελειωμένη και έστω το σύνολο όλων των αριθμών, ας το συμβολίζουμε με $\mathbb{N}$. Τότε το $\mathbb{N}$ πρέπει να είναι το πραγματικό ή ολοκληρωμένο άπειρο. Αυτή είναι μια περίεργη ορολογία, αφού η ετυμολογία της λέξης άπειρο είναι "όχι ολοκληρωμένο"» (Nelson, 2007).

2.1 CANTOR

Ο Cantor (1845-1918), κατά τα τέλη του 19ου και στις αρχές του 20ου αιώνα, κατάφερε να κινηθεί πρώτος σε μαθηματικά μονοπάτια που δεν είχαν ανακαλυφθεί. Προσπάθησε να διασαφηνίσει την έννοια του απείρου και δημιούργησε έναν ολοκαίνουργιο κλάδο των μαθηματικών, τη Θεωρία Συνόλων. Με το θεώρημά του υπέδειξε την ύπαρξη του άπειρου, άλλοτε μετρήσιμου και άλλοτε υπεραριθμήσιμου, προάγοντας τα μαθηματικά από επιστήμη του σχήματος και του αριθμού σε επιστήμη του απείρου (Davis & Hersh, 1981). Η έμπνευση του Cantor ήταν ότι ακόμα και αν δεν μπορούμε να μετρήσουμε άπειρα σύνολα, μπορούμε να πούμε αν έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων εφαρμόζοντας τον “κανόνα των δακτύλων”. Ο Cantor όρισε τον πληθάριθμο ενός συνόλου ως το “μέγεθος” του συνόλου. Αν ένα σύνολο μπορεί να τοποθετηθεί σε αντιστοιχία ένα-προς-ένα με τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, …το “μέγεθος” του συνόλου ονομάζεται αριθμήσιμο άπειρο και αυτά τα είδη των συνόλων λέμε ότι έχουν πληθάριθμο $\aleph_0$ (aleph-null). Ο Cantor στη συνέχεια αναρωτήθηκε αν όλα τα απειροσύνολα έχουν τον ίδιο πληθάριθμο. Δηλαδή, υπάρχουν μεγαλύτερα απειροσύνολα; Το επόμενο απειροσύνολο που δοκίμασε ο Cantor ήταν οι ρητοί αριθμοί. Εάν μαντεύαμε, θα μπορούσαμε να μπούμε στον πειρασμό να πούμε



ότι υπάρχουν περισσότεροι ρητοί αριθμοί από ακέραιους δεδομένου ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι ένα υποσύνολο των ρητών αριθμών. Αν το κάναμε όμως, θα ήταν λάθος, αφού ο Cantor βρήκε μία έξυπνη αντιστοίχιση (όπως το παράδειγμα με τα δάχτυλα) μεταξύ των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, …και όλων των θετικών ρητών αριθμών, όπως στο προηγούμενο σχήμα (Δαρίβας, 2017).

Ο Cantor ασχολήθηκε με τον πληθάριθμο των άπειρων συνόλων. Εισήγαγε τον πληθάριθμο για να μπορέσει να συγκρίνει το μέγεθος των άπειρων συνόλων και απέδειξε ότι ο πληθάριθμος του συνόλου των φυσικών αριθμών είναι αυστηρά μικρότερος από αυτόν του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Ωστόσο οι αποδείξεις που έδωσε δεν έδειχναν τι γίνεται ανάμεσα στους δύο πληθάριθμους. Έτσι εισήγαγε την υπόθεση του συνεχούς, η οποία λέει ότι δεν υπάρχει σύνολο του οποίου ο πληθάριθμος να βρίσκεται αυστηρά μεταξύ αυτού των φυσικών αριθμών και αυτού των πραγματικών αριθμών. Προσπάθησε για πολλά χρόνια να το αποδείξει, αλλά μάταια (Γκρίτζαλη, 2009).

Μεταξύ των ετών 1879 και 1884, ο Cantor πραγματοποίησε 6 δημοσιεύσεις (Με τον τίτλο «Περί Άπειρων Γραμμικών Πολλαπλοτήτων/Συνόλων Σημείων») προκειμένου να εισάγει τα βασικά στοιχεία της νέας του θεωρίας συνόλων. Τα τέσσερα πρώτα δημοσιεύματα καταπιάνονταν με μαθηματικά προβλήματα στα οποία έβρισκαν τα σύνολά του εφαρμογή. Στο πέμπτο, άρχισε να ασχολείται και με τα φιλοσοφικά θέματα που άπτονταν της ερμηνείας του απείρου (Αρμάος, 2012).

Ο Cantor εισήγαγε τους υπερπεπερασμένους αριθμούς, οι οποίοι διακρίνονται από τους πραγματικούς. Μέχρι τότε, σε όλα τα μαθηματικά, το άπειρο χρησιμοποιούνταν ως εν δυνάμει ή δυνητικό. Οι υπερπεπερασμένοι αριθμοί όμως χρησιμοποιούν το ολοκληρωμένο, το εν ενεργεία άπειρο. Έτσι, ο Cantor μπορούσε να κάνει συγκεκριμένες ακριβείς παρατηρήσεις σχετικά με τις δυνάμεις των μη αριθμήσιμων απείρων συνόλων. Ο ορισμός των υπερπεπερασμένων αριθμών ήταν το πρώτο βήμα προς μια πιο διεξοδική περιγραφή των δυνάμεων των άπειρων συνόλων γενικά (Αρμάος, 2012).

Κατά τον Cantor, το δυνητικό άπειρο (potential infinity) αναφέρεται σε μία διαδικασία που προσεγγίζει όλο και πιο κοντά, αλλά ποτέ δεν φτάνει στο τέλος του απείρου. Για παράδειγμα, η ακολουθία αριθμών 1,2,3,4,… γίνεται όλο και μεγαλύτερη, αλλά δεν έχει τέλος, ποτέ δεν φτάνει το άπειρο. Το άπειρο είναι μια ένδειξη κατεύθυνσης· είναι κάτι έξω από την απόσταση. Κυνηγώντας αυτό το είδος του απείρου είναι σαν να κυνηγάει κανείς το ουράνιο τόξο στην άκρη του κόσμου: νομίζει κανείς ότι το βλέπει, αλλά όταν πηγαίνει εκεί που νόμιζε ότι ήταν το τέλος, καταλαβαίνει ότι είναι ακόμη πολύ μακριά (Κασουρίδης, 2019).

Το πραγματικό ή ολοκληρωμένο άπειρο (actual ή completed infinity) είναι ένα άπειρο που μπορεί κανείς να φτάσει, μια διαδικασία περατωμένη. Για παράδειγμα, αν τοποθετήσει κανείς άγκιστρα στην προηγούμενη ακολουθία αριθμών: {1,2,3,4,…} τότε έχει ορίσει το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων κι αυτό είναι ένα μόνο αντικείμενο με απείρως πολλά στοιχεία. Με αυτό δεν εννοούμε ένα μεγάλο πεπερασμένο σύνολο που ολοένα προσθέτει νέα μέλη, αλλά έχει ήδη άπειρα μέλη (Κασουρίδης, 2019).

Ο ίδιος ο Cantor σε ένα γράμμα του στον A. Eulenburg το Φεβρουάριο του 1886 λέει: «Με τον όρο πραγματικό άπειρο πρέπει να αντιληφθούμε μία ποσότητα που δεν είναι μεταβλητή αλλά ολοκληρωμένη και καθορισμένη, σαν μια σταθερά, αλλά επίσης εκτεινόμενη κάθε πεπερασμένης ποσότητας κάποιου μεγέθους, από το ίδιο είδος μεγέθους». Ο ίδιος ο Cantor δεν κουραζόταν να υπερασπίζεται το πραγματικό άπειρο σε οποιονδήποτε, οπουδήποτε και οποτεδήποτε μπορούσε: «Εξ' αιτίας της σημαντικής διαφοράς μεταξύ των εννοιών του δυνητικού και πραγματικού απείρου, όπου το πρώτο είναι ένα μεταβλητό πεπερασμένο μέγεθος, που αυξάνεται πέρα κάθε ορίου, ενώ το δεύτερο είναι μια σταθερή ποσότητα ολοκληρωμένη στον εαυτό της αλλά μεγαλύτερο από όλα τα πεπερασμένα μεγέθη, συμβαίνει πολύ συχνά κανείς να μπερδεύει το ένα με το άλλο» (Cantor, 1932).

2.2. HILBERT

Ο **David Hilbert** (1862–1943) ήταν γερμανός μαθηματικός ο οποίος επινόησε και ανέπτυξε ένα ευρύ φάσμα από νέες ιδέες, στο οποίο συμπεριέλαβε την αμετάβλητη θεωρία και τα Αξιώματα Hilbert. Επίσης διατύπωσε τη θεωρία του «Χώρου Hilbert», η οποία είναι ένα από τα θεμέλια της συναρτησιακής ανάλυσης. Υιοθέτησε και υπερασπίστηκε θερμά τη θεωρία του Cantor και των υπερπερασμένων αριθμών (Βικιπαίδεια).

Στην περίφημη διάλεξή του “UberdasUnendliche” το 1926 αναφέρει χαρακτηριστικά: «Χάρις τον Cantor το άπειρο ανήλθε στον θρόνο του και απήλαυσε τον απόλυτο θρίαμβό του. Κατά την τολμηρή του πτήση, το άπειρο έφτασε σε ιλιγγιώδη ύψη επιτυχίας. Κανείς δεν θα μπορέσει να μας διώξει από τον παράδεισο που δημιούργησε για μας ο Cantor.» Παρ’ όλα αυτά όμως προσπάθησε να οριοθετήσει το άπειρο. «Το δικαίωμα να εργαζόμαστε με το άπειρο μπορεί να εξασφαλιστεί μόνο μέσα από το πεπερασμένο» αναφέρει (Ρωμανίδης, 2013).

Σε προηγούμενη διάλεξή του, την 4η Ιουλίου του 1925, στο συνέδριο της μαθηματικής εταιρίας του Westphalian προς τιμήν του Karl Weierstrass, το αντικείμενό του ήταν το άπειρο, και πιο συγκεκριμένα, η ιδέα των «λογικών προϊόντων του απείρου» δηλαδή των διαζεύξεων οι οποίες περιέχουν απείρως πολλές ενότητες. Όπως αναφέρει, η σημασία του απείρου ποτέ δεν έχει διευκρινιστεί πλήρως (Πλατάρος, 2002).

Σύμφωνα με τον Hilbert, τίποτα στη φύση δεν είναι άπειρο. Αυτό αναμφίβολα είναι ένας παρακινδυνευμένος ισχυρισμός. Ακόμη και σήμερα εβδομήντα χρόνια μετά, δεν μπορούμε να δώσουμε μια σίγουρη απάντηση στο ζήτημα αυτό. Η κβαντική μηχανική μας ωθεί, με κάποια βεβαιότητα να πιστέψουμε πως δεν υπάρχει τίποτα που να είναι άπειρα μικρό. Ωστόσο η κβαντική μηχανική χρησιμοποιεί ως επί το πλείστον διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες προϋποθέτουν ότι ο χρόνος στη φύση είναι συνεχής. Έτσι λοιπόν κάποιος θα μπορούσε να υποστηρίξει πως υπάρχει ένας άπειρος αριθμός «στιγμών» το δευτερόλεπτο, αφού στην έρευνα μας για το φυσικό άπειρο δεν περιοριζόμαστε μόνο σε «μήκη». Με το να αρνούμαστε ότι ο χρόνος είναι συνεχής, αρνούμαστε την εγκυρότητα του θεμελιώδους εργαλείου της κβαντικής μηχανικής και ως εκ τούτου χάνουμε την επιστημονική απόδειξη ότι τίποτα δεν είναι άπειρα μικρό. Με δεδομένη την τεράστια επιτυχία της κβαντικής μηχανικής, φαίνεται ότι είτε ο χρόνος είναι συνεχής είτε έχει μία φύση που είναι συνεχής για «πρακτικούς λόγους», έτσι ώστε οι διαφορικές εξισώσεις να επιτυγχάνουν μία εκπληκτικά ακριβή προσέγγιση της πραγματικότητας. Είναι σαφώς ενδιαφέρον να βλέπουμε το ξεχωριστό να προσεγγίζεται από το συνεχές και όχι από τον αντίστροφο, όπως συμβαίνει συνήθως. Αξίζει να σημειώσουμε ότι έχουν γίνει εκτιμήσεις που υποστηρίζουν ότι κανένα χρονικό διάστημα μικρότερο από 10-24 sec δεν θα μπορέσει ποτέ να μετρηθεί πειραματικά. Όσο για το άπειρα μεγάλο, αυτό είναι πολύ λιγότερο σίγουρο. Παρά τις τεράστιες προόδους της αστρονομίας, η τοπολογία του σύμπαντος παραμένει μυστήριο. Φαίνεται όντως απίθανο το σύμπαν να είναι άπειρο, όμως αυτό δεν αποδεικνύεται με κανένα μέσο. Από μία κβαντική άποψη, εάν αποστάσεις, μάζες και (πιθανώς) χρόνοι μετρηθούν σε δεόντως μικρές μονάδες, θα δώσουν (θεωρητικώς) ακέραια μεγέθη.

Φαίνεται ότι το πραγματικό πρόβλημα που προκύπτει κατά την προσέγγιση της έννοιας του απείρου είναι το εξής. Έχουμε μία καλή ενστικτώδη αντίληψη «μη πραγματικών» αντικειμένων, όπως είναι οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί γιατί αποτελούν το φυσικό τρόπο να σκεφτόμαστε για τον κόσμο που μας περιβάλλει. Ό,τι ξέρουμε για την πραγματική φύση του κόσμου είναι έντονα ενστικτώδες, απείρως διαφορετικό από αυτό που θα μπορούσαμε να αποκαλέσουμε «ενστικτώδη άποψή» μας. Το άπειρο από την άλλη πλευρά δεν έχει θέση στη μέση αντίληψή μας για τον κόσμο, αλλά αποτελεί επέκτασή του, ασχέτως με το αν υπάρχει στη φύση ή όχι. Για παράδειγμα αντιλαμβανόμαστε τους φυσικούς αριθμούς γιατί βλέπουμε γύρω μας αριθμούς πραγμάτων. Κατανοούμε πως δεν υπάρχει λόγος να υπάρχει «ένα περισσότερο» από τον οποιοδήποτε δοθέντα αριθμό και έτσι οδηγούμαστε στην σύλληψη του πρώτου απείρου, στο θεμελιώδες σύνολο των φυσικών αριθμών. Ομοίως, σκεφτόμαστε μια γραμμή ως συνεχή, είναι απλώς ο φυσικός τρόπος για μας να σκεφτόμαστε. Έτσι οδηγούμαστε να επινοήσουμε τους πραγματικούς, δηλαδή ένα άλλο άπειρο (Πλατάρος, 2002).

2.2.1. ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΟΥ ΞΕΝΟΔΟΧΕΙΟΥ ΤΟΥ HILBERT

Το ασυνήθιστο ξενοδοχείο του Hilbert (Vilenkin, 1997, Clegg, 2003, Smullyan, 2003, Rucker, 2004, Barrow, 2007), είναι ένα ξενοδοχείο με άπειρο το πλήθος δωματίων τα οποία όλα είναι κατειλημμένα. Το ξενοδοχείο δημιουργεί το εξής παράδοξο: Είναι μεν πλήρες, αλλά όμως όταν έρθει ένας νέος επισκέπτης υπάρχουν κενές θέσεις.

Ας προσπαθήσουμε να φιλοξενήσουμε πρόσθετους πελάτες σε ένα φανταστικό ξενοδοχείο του οποίου όλα τα δωμάτια είναι κατειλημμένα, χωρίς να καταφύγουμε σε διπλοκρατήσεις και χωρίς να έχουμε αναχωρήσεις.

Αυτό που θα έκανε ο διευθυντής, θα ήταν να ζητήσει από κάθε ένοικο να μετακομίσει στο αμέσως επόμενο προς τα δεξιά του δωμάτιο. Με λίγα λόγια ο ένοικος του δωματίου

1 να πάει στο δωμάτιο 2, ο ένοικος του δωματίου 2 στο δωμάτιο 3,..., ο ένοικος του δωματίου n στο δωμάτιο n+1. Έτσι το δωμάτιο 1 θα έμενε άδειο.

Ακόμα κι αν έρχονταν n το πλήθος καθυστερημένοι, όπου n φυσικός αριθμός, θα έπρεπε κάθε ένοικος να μετακινηθεί n δωμάτια προς τα δεξιά, αφήνοντας ελεύθερα τα πρώτα n δωμάτια για τους νέους πελάτες.

Έστω ότι θα έρχονταν άπειροι πελάτες. Αυτήν τη φορά το πρόβλημα θα ήταν πολύ πιο δύσκολο. Θα υπήρχε μετακίνηση των ενοίκων ως εξής: ο ένοικος του δωματίου 1 στο δωμάτιο 2, του δωματίου 2 στο δωμάτιο 4, του δωματίου 3 στο δωμάτιο 6,…, του δωματίου n στο δωμάτιο με αριθμό 2n. Έτσι θα ελευθερωνόταν το απειροσύνολο των δωματίων με περιττό αριθμό.

Όμως με αυτή τη διαδικασία τα μισά δωμάτια θα ήταν πλέον άδεια, με συνέπεια οικονομικό κόστος. Οπότε η λύση θα ήταν να μεταφερθούν οι πελάτες σε διπλανά δωμάτια, έτσι ώστε να γεμίσει ολόκληρο το ξενοδοχείο. Οι πελάτες που διέμεναν στα δωμάτια με περιττό αριθμό και μόνο σ’ αυτά: 1,3,5,7,9, κλπ., θα μπορούσαν να μετακινηθούν ως εξής: ο πελάτης του δωματίου 1 να παραμείνει στη θέση του, ο αριθμός 3 να μετακομίσει στον αριθμό 2, ο αριθμός 5 στον αριθμό 3, ο αριθμός 7 στον αριθμό 4, κ.ο.κ. Στο τέλος, όλα τα δωμάτια θα ήταν και πάλι γεμάτα, μολονότι δεν θα είχε αφιχθεί ούτε ένας νέος πελάτης.

Στη συνέχεια μπορεί να ζητηθεί από το διευθυντή να δεχτεί όλους τους πελάτες από άπειρα ξενοδοχεία, καθένα από τα οποία είχε άπειρους πελάτες, σε ένα μοναδικό ξενοδοχείο, το οποίο όμως και αυτό είναι πλήρες.

Ο διευθυντής θα σκεφτόταν το εξής: Να βάλουμε τους πελάτες του πρώτου ξενοδοχείου στους αριθμούς 2,4,8,16,…, του δεύτερου στους αριθμούς 3,9,27,81,…, του τρίτου στους αριθμούς 5,25,125,625,…, του τέταρτου στους αριθμούς 7,49,343,..» «Και δεν θα τύχει έτσι να έχουμε δύο πελάτες στο ίδιο δωμάτιο;» «Όχι. Αν πάρουμε δύο τυχαίους πρώτους αριθμούς, όλες οι δυνάμεις τους με εκθέτη φυσικό αριθμό είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Αν οι p και q είναι πρώτοι αριθμοί, με p ≠ q και οι m,n είναι φυσικοί αριθμοί, τότε $p^m \neq q^n$».

Ο διευθυντής θα σκεφτόταν ότι απαραίτητοι ήταν μόνο οι πρώτοι αριθμοί 2 και 3. Θα μπορούσε να προτείνει, λοιπόν, να εγκατασταθεί ο πελάτης από το m-στο δωμάτιο του n-στου ξενοδοχείου στο δωμάτιο με αριθμό 2^m3^n. Αυτό θα ήταν αποτελεσματικό, διότι αν m ≠ p ή n ≠ q, τότε $2^m3^n \neq 2^p3^q$. Έτσι, δεν θα υπήρχε κανένα δωμάτιο με δύο ενοίκους. Εντούτοις δεν θα ήταν η βέλτιστη λύση, γιατί θα έμεναν πολλά δωμάτια ελεύθερα (όλα τα δωμάτια που ο αριθμός τους δεν ήταν δυνατόν να γραφεί στη μορφή 2^m3^n, όπως το 5ο, το 7ο, κλπ.).

Η καλύτερη λύση θα ήταν να σχηματίσουν έναν πίνακα: στις γραμμές του θα καταγράφονται οι αριθμοί των ξενοδοχείων (m) και στις στήλες οι αριθμοί των δωματίων (n). Παρακάτω φαίνεται αυτή η πινακοποιημένη ταξινόμηση (στην πραγματικότητα, μόνο το πάνω αριστερό τμήμα της, διότι η πλήρης καταγραφή της απαιτεί άπειρες γραμμές και στήλες):

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	….	(1,n)	….
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	….	(2,n)	….
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	….	(3,n)	….
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	….	(4,n)	….
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	….	(5,n)	….
………	……..	…..…	……..	…..…	….	…….	….
(m,1)	(m,2)	(m,3)	(m,4)	(m,5)	….	(m,n)	….

Η τακτοποίηση των πελατών θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί με βάση τα τετράγωνα, ως εξής: στον αριθμό 1 να τοποθετηθεί ο πελάτης από το (1,1), δηλαδή από το πρώτο δωμάτιο του πρώτου ξενοδοχείου, στον αριθμό 2 ο πελάτης από το (1,2), δηλαδή από το δεύτερο δωμάτιο του πρώτου ξενοδοχείου· στον αριθμό 3 ο πελάτης από το (2,2), δηλαδή από το δεύτερο δωμάτιο του δεύτερου ξενοδοχείου, και στο 4 ο πελάτης από το (2,1), το πρώτο δωμάτιο του δεύτερου ξενοδοχείου. Με αυτόν τον τρόπο θα έχουμε τακτοποιήσει τους πελάτες του πάνω αριστερά τετραγώνου «πλευράς 2». Κατόπιν, θα τακτοποιούσαμε τον πελάτη από το (1,3) στον αριθμό 5, από το (2,3) στον αριθμό 6, από το (3,3) στον αριθμό 7, από το (3,2) στον αριθμό 8, από το (3,1) στον αριθμό 9. (Αυτά τα δωμάτια συμπληρώνουν το τετράγωνο με «πλευρά 3»). Και συνεχίζουμε έτσι:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) & & (1,5) & & \dots & & (1,n) & & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
(2,1) & \Leftarrow & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & (2,5) & & \dots & & (2,n) & & \dots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
(3,1) & \Leftarrow & (3,2) & \Leftarrow & (3,3) & & (3,4) & & (3,5) & & \dots & & (3,n) & & \dots \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
(4,1) & \Leftarrow & (4,2) & \Leftarrow & (4,3) & \Leftarrow & (4,4) & & (4,5) & & \dots & & (4,n) & & \dots \\
 & & & & & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
(5,1) & \Leftarrow & (5,2) & \Leftarrow & (5,3) & \Leftarrow & (5,4) & \Leftarrow & (5,5) & & \dots & & (5,n) & & \dots \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow & & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
(n,1) & \Leftarrow & (n,2) & \Leftarrow & (n,3) & \Leftarrow & (n,4) & \Leftarrow & (n,5) & \Leftarrow & \dots & & (n,n) & & \dots
\end{array}
$$

«Αλήθεια, θα υπάρξει χώρος για όλους;» Ο διευθυντής αμφέβαλε. «Βέβαια. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, τακτοποιούμε τους πελάτες από τα πρώτα n δωμάτια των πρώτων n ξενοδοχείων στα πρώτα n^2 δωμάτια. Έτσι, αργά ή γρήγορα κάθε πελάτης θα πάρει ένα δωμάτιο. Για παράδειγμα, ο πελάτης του δωματίου 136 από το ξενοδοχείο με αριθμό 217 θα πάρει δωμάτιο στο $217^{ο}$ βήμα. Είναι εύκολο να υπολογίσουμε ποιο δωμάτιο ακριβώς. Θα έχει τον αριθμό 2172 – 136 + 1. Γενικότερα, ένας πελάτης που μένει στο n δωμάτιο του m -οστού ξενοδοχείου, θα καταλύσει στον αριθμό $(n-1)^2 + m$, αν $n \geq m$, ή στον αριθμό $m^2 - n$ +1, αν $n > m$.».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

3.1 ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ

Υπάρχει η τάση το άπειρο να θεωρείται ως ένας πολύ μεγάλος αριθμός, μεγαλύτερος από οποιονδήποτε θα μπορούσαμε να σκεφτούμε, αλλά αν θελήσουμε να εμβαθύνουμε στην έννοια του άπειρου, πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι η διαφορά του από τους πεπερασμένους αριθμούς, δεν είναι μόνο ποσοτική αλλά και ποιοτική (Barrow, 2007).

Είναι δύσκολο στους μαθητές να κατανοήσουν και να συλλάβουν την έννοια του απείρου. Ο όρος διαίσθηση χρησιμοποιείται για να περιγράψει τις άμεσες, σφαιρικές και αυταπόδεικτες μορφές γνώσης. Η εις βάθος διαίσθηση του απείρου δεν αντανακλάται στην επίλυση προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών και το γεγονός αυτό δε συμβάλλει στην προσπάθεια κατανόησης της πολυδιάστατης φύσης του απείρου από τους μαθητές (Καραγιάννης, 2019).

Στην έρευνα των Fischbein κ.α. (1979) ερευνήθηκε αυτό που ονομάζουμε διαίσθηση του απείρου. Τα ευρήματα της έρευνας επιβεβαίωσαν εν μέρει την πρόβλεψη ότι η διαίσθηση του απείρου παραμένει αναλλοίωτη από την επίδραση της ηλικίας των μαθητών. Ως την ηλικία των 12 ετών που αρχίζει το επίσημο λειτουργικό στάδιο των μαθητών, οι διαισθητικές αντιλήψεις και ερμηνείες της έννοιας του απείρου είναι στο στάδιο σχηματισμού. Η ανάπτυξη της διαισθητικής ερμηνείας πραγματοποιείται σε σχέση με τη γενική πνευματική ανάπτυξη. Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των διαισθητικών αντιλήψεων και ερμηνειών της έννοιας του απείρου είναι η σταθερότητά τους, η αντίστασή τους από την ηλικία των 12 ετών και άνω και η αντοχή τους στις διδακτικές επιρροές και παρεμβάσεις. Αυτό σημαίνει ότι η έννοια του απείρου μπορεί να αναπτυχθεί η ίδια μέσω της διδακτικής και εκπαιδευτικής παρέμβασης, ενώ οι διαισθήσεις του απείρου παραμένουν απαράλλακτες, ξεκινώντας από την ηλικία των 12 ετών και άνω. Η εις βάθος διαίσθηση του απείρου δεν εξαρτάται από την ηλικία καθώς οι παρανοήσεις και τα σφάλματα αλλά και οι σωστοί συλλογισμοί που σχετίζονται με την τυπική γνώση, είναι παραπλήσια για όλο το ηλικιακό φάσμα των μαθητών. Εν ολίγοις, η μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών ενώ ενδυναμώνει τους υπάρχοντες λογικούς συλλογισμούς που είναι αυθεντικά πεπερασμένοι, φαίνεται να επηρεάζει επιφανειακά την κατανόηση της έννοιας του απείρου και καθόλου τη διαίσθηση αυτού.

3.2. ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Τα επιστημολογικά προβλήματα που προκύπτουν κατά τη διδασκαλία του απείρου σύμφωνα με τον Πλατάρο (2016) είναι τα εξής:

α) Το άπειρο ως έννοια

Όταν προσπαθούμε να κατανοήσουμε το άπειρο, συνήθως μας έρχεται στο νου είτε μια αόριστη ποσότητα της οποίας το μέγεθος έχει υπερβεί κάθε όριο είτε μια συγκεκριμένη ποσότητα, την οποία φανταζόμαστε ότι μεγαλώνει αδιάκοπα, αλλά πάντα αυτή μένει μικρότερη από αυτήν που λέμε άπειρη.

β) Το άπειρο δεν είναι αριθμός

Ο ορισμός της έννοιας του αριθμού είναι αρκετά δύσκολος, αφού ξεκινάμε από τους φυσικούς, πάμε στους ακεραίους, στους ρητούς, μετά στους άρρητους και στους πραγματικούς, επεκτεινόμαστε στους μιγαδικούς, αλλά μπορούμε να φθάσουμε μέχρι και στην (φιλοσοφική) έννοια των διατακτικών αριθμών. Έτσι έχουμε αρκετά είδη αριθμών.

Για να αποκλείσουμε το άπειρο από τα είδη των αριθμών θα πρέπει να του αφαιρέσουμε μια χαρακτηριστική ιδιότητα που έχουν όλοι οι αριθμοί, «να υπάρχει πάντα κάποιος μεγαλύτερός τους». Ο μαθητής μπορεί εύκολα να καταλάβει ότι για κάθε φυσικό υπάρχει ένας μεγαλύτερός του. Αν όμως έχει κατά νου το μοντέλο των φυσικών, δηλαδή ως ένα σύνολο μονάδων για το οποίο υπάρχει μεγαλύτερο, τότε παύει το άπειρο να έχει αυτή την ιδιότητα των αριθμών. Άρα δεν είναι αριθμός. δηλαδή, δεν υπάρχει μεγαλύτερος «αριθμός» από το άπειρο.

γ) Το άπειρο δεν είναι ποσότητα

Η ποσότητα επιδέχεται ελάττωση κι αύξηση. Το άπειρο όμως ούτε μπορεί να αυξηθεί επειδή είναι πάνω από κάθε ποσότητα, ούτε μπορεί να ελαττωθεί, επειδή έτσι γίνεται κι αυτό ποσότητα πεπερασμένη. Βεβαίως δεν είναι ποσότητα, αλλά συνάπτεται με την ποσότητα.

Για παράδειγμα αν έχουμε στο μυαλό μας το μοντέλο του απείρου με τους φυσικούς αριθμούς , τότε το άπειρο συγκρίνεται με κάθε φυσικό κι είναι μεγαλύτερό του, άρα είναι «ομοιογενές» (όχι ομοειδές!) με τους αριθμούς. Αν στο μυαλό μας έχουμε την ευθεία ως «απεριόριστο ευθύγραμμο τμήμα» τότε πάλι έχω την έννοια του απείρου να συνάπτεται με το πεπερασμένο (ευθύγραμμο τμήμα) ως την «ομοιογενή» ευθεία.

δ) Το άπειρο είναι κριτήριο για το πεπερασμένο;

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε, ότι έχουμε το πρόβλημα να εκτιμήσουμε αν οι κόκκοι της άμμου όλων των θαλασσών της Γης είναι άπειροι ή πεπερασμένοι.

Μπορούμε να παραθέσουμε το εξής επιχείρημα: (i) Όλοι γνωρίζουμε ότι η γη είναι πεπερασμένη. (ii) Αρχίζουμε με μια μεγάλη ταχύτητα να βγάζουμε άμμους από την Γη προς το διάστημά, μέσα από μηχανές απαρίθμησης. Στην ανάγκη φανταζόμαστε εκατομμύρια τέτοιες μηχανές που λειτουργούν με μεγάλη ταχύτητα. Η διαδικασία αυτή, γίνεται αντιληπτό, ότι θα μας οδηγήσει σε πέρας και σε απαρίθμηση.

Κατόπιν του ανωτέρω επιχειρήματος δεν υπάρχει σχεδόν κανείς άνθρωπος να αμφιβάλει περί τούτου, αφού το ανθρώπινο πνεύμα συλλαμβάνει την ιδέα ότι κάτι που κατανέμεται σε πεπερασμένο χώρο, δεν μπορεί παρά να είναι πεπερασμένο.

Στην ουσία όμως το παραπάνω επιχείρημα είναι δίκοπο μαχαίρι, αφού άνετα μπορεί να πείσει κάποιον ότι οι κόκκοι της άμμου όλων των θαλασσών είναι πεπερασμένοι, από την άλλη όμως μπορεί να τον παγιδέψει στην λογική των επιχειρημάτων του Ζήνωνα του Ελεάτη. Κοινός παρονομαστής των παραδόξων του Ζήνωνα είναι η προφανής αδυναμία του ανθρωπίνου πνεύματος να παραδεχθεί ως προφανές ότι το άπειρο μπορεί να ενυπάρχει στο πεπερασμένο.

Κατόπιν τούτου, αν τεθεί το ερώτημα ακόμα και σε τελειόφοιτους των μαθηματικών με ένα κατάλληλο καμουφλάρισμα: «Αν προσθέσω άπειρους στο πλήθος θετικούς αριθμούς, τι αποτέλεσμα θα πάρω; Άπειρο ή πεπερασμένο;» Η συντριπτική πλειονότητα των απαντήσεων εδώ θα είναι του τύπου «προφανώς άπειρο!»

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΕΡΕΥΝΩΝ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

4.1 ΕΡΕΥΝΕΣ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ

Η έννοια του απείρου αποτελεί μία από τις μεγαλύτερες προκλήσεις για την ανθρώπινη νόηση. Δεδομένου ότι οι καθημερινές μας εμπειρίες λαμβάνουν χώρα σε έναν κόσμο με πεπερασμένες ποσότητες, το άπειρο δεν φαίνεται να έχει καμία θέση στην πραγματική ζωή. Για αυτό το λόγο, όταν ερχόμαστε αντιμέτωποι με την κάθε άλλο παρά κατανοητή για μας φύση του, τα ηνία παίρνει η διαίσθησή μας που θέτει στο νου τα όρια τού τι είναι λογικό και τι όχι· τι συνάδει με τα βιώματά μας και τι αποκλίνει από αυτά. Στο πεδίο όμως που εισέρχεται το άπειρο η διαίσθηση δεν είναι καλός οδηγός. Η λογική που το διαπερνά δεν ταυτίζεται με τη δική μας και δημιουργούνται έτσι συγκρούσεις και εκπλήξεις (Tsamir & Dreyfus, 2002).

Στα σχολικά βιβλία οι αριθμοί δεν ορίζονται αλλά δίνονται οι διάφορες αναπαραστάσεις τους με αποτέλεσμα οι μαθητές να σχηματίζουν την εικόνα έννοιας αυτών σαν ορισμό. Άλλωστε δεν θα μπορούσε να διδαχθεί στα σχολικά μαθηματικά ο αυστηρός αξιωματικός ορισμός της κατασκευής των πραγματικών αριθμών (Νιτσοτόλης, 2014).

Έτσι οι μαθητές σε ισότητες όπως η $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2$ που περιέχουν ένα άπειρο άθροισμα δυσκολεύονται να αποδεχθούν ότι αυτό το άθροισμα είναι ίσο με το 2 αλλά το θεωρούν μικρότερο. Για να αποδεχθούν την παραπάνω ισότητα θα πρέπει διαισθητικά να συλλάβουν το ενεργεία άπειρο. Από τα παραπάνω αντιλαμβανόμαστε πόση σημαντική σημασία έχει η έννοια του απείρου και των άπειρων διαδικασιών στην έννοια του πραγματικού αριθμού (Νιτσοτόλης, 2014).

Κατά την Μπαμπίλη (2010), για τους μαθητές είναι δύσκολη η κατανόηση της έννοιας του απείρου και σε κάθε περίπτωση, οι αντιλήψεις τους δείχνουν σταθερές και δύσκολα μεταβαλλόμενες, γεγονός που αναδεικνύει τη δυσκολία ενασχόλησής τους με το –αντιφατικής φύσης– άπειρο.

Σε έρευνα των Fischbein, Tirosh και Hess (1979) ζητήθηκε από μαθητές της Πρωτοβάθμιας να συγκρίνουν το σύνολο των φυσικών με αυτό των άρτιων αριθμών.

Τα αποτελέσματά τους έδειξαν ότι το 70% των μαθητών δήλωσαν ότι οι φυσικοί είναι περισσότεροι από τους άρτιους αριθμούς καθώς το σύνολο των φυσικών περιλαμβάνει αυτό των άρτιων, ενώ μόνο το 0,4% αποφαίνεται ότι τα σύνολα είναι ίσα με βάση την '1-1' αντιστοιχία (Σπανού, 2019).

Ο Duval (1983), πραγματοποίησε μια έρευνα σε μαθητές 12-13 ετών, διαπίστωσε ότι οι αποφάσεις των μαθητών σχετικά με την ισοδυναμία δύο άπειρων συνόλων, επηρεάζονται από τον τρόπο παρουσίασης αυτών των συνόλων (Tsamir, 1999).

Ο Nunez (1994), ερεύνησε το ''μικρό άπειρο'' εμπνεόμενος από το παράδοξο της διχοτομίας του Ζήνωνα. Η έρευνά του πραγματοποιήθηκε σε 32 μαθητές αγόρια και κορίτσια 8, 10, 12 και 14 ετών, οι οποίοι έδειξαν να εκφράζουν μια δυσκολία κατανόησης της παραδοξολογίας του θέματος. Το πρόβλημα που τους δόθηκε ήταν το εξής: «Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να πάμε από την μια πλευρά του τραπεζιού στην άλλη και ότι μας δίνεται η οδηγία να καλύψουμε στην αρχή τη μισή απόσταση και στη συνέχεια τη μισή της υπολειπόμενης κ.ο.κ. Θα φτάσουμε τελικά στην άκρη του τραπεζιού;». Στο παράδοξο του Ζήνωνα παρατηρούμε δυο χαρακτηριστικά: τον αριθμό των βημάτων και την απόσταση που καλύπτεται από κάθε βήμα. Το είδος των επαναλήψεων είναι διαφορετικό για κάθε ένα από τα χαρακτηριστικά αυτά: ο αριθμός των βημάτων αυξάνει, ενώ η καλυπτόμενη απόσταση φθίνει. Από την άλλη μεριά η φύση του περιεχομένου του χαρακτηριστικού που επαναλαμβάνεται είναι επίσης διαφορετική για κάθε ένα από αυτά: ο αριθμός των βημάτων αναφέρεται στην πληθικότητα (πλήθος βημάτων) ενώ η καλυπτόμενη απόσταση αναφέρεται στο χώρο. Ο συνδυασμός αυτών των ετερογενών χαρακτηριστικών στο παράδοξο του Ζήνωνος, το καθιστά ποιοτικά περίπλοκο. Οι απαντήσεις των παιδιών, ανεξαρτήτως φύλλου, μπορούν να χωριστούν σε τρείς κύριες κατηγορίες: α) θα φτάσει στον προορισμό β) δεν θα φτάσει στον προορισμό, είτε γιατί η διαδικασία θα «κολλήσει» είτε γιατί απλώς θα πλησιάζει (θα τείνει) στον προορισμό και γ) διστάζουν να τοποθετηθούν σαφώς υπέρ της μιας ή της άλλης άποψης υιοθετώντας και τις δύο ταυτόχρονα (στην πραγματικότητα θα φτάσει, αλλά θεωρητικά δεν θα φτάσει). Στην τελευταία κατηγορία κατατάσσονται οι απαντήσεις μόνο των μεγαλύτερων σε ηλικία παιδιών.

Ο Monaghan (2001), διερεύνησε μαθητές 16 έως 18 ετών σχετικά με τις πεποιθήσεις τους για την έννοια του ορίου και του απείρου και συμπέρανε ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται το άπειρο ως μια διεργασία που συνεχίζεται στο διηνεκές και ότι η αντίληψή τους χαρακτηρίζεται από αστάθεια και αντιφατικότητα.

Οι Singer και Voica είναι από τους ερευνητές που μελέτησαν σε βάθος και για μεγάλο χρονικό διάστημα τις ιδέες των παιδιών ή των ενηλίκων σχετικά με τη σύγκριση απειροσυνόλων. Σε μία έρευνά τους (Singer & Voica, 2003) ζήτησαν από μαθητές να συγκρίνουν τα εξής σύνολα: {1, 2, 3,… } και { -1, -2, -3, … }; {0, 1, 2, 3, 4, … } και {0, 2, 4, 6, 8, … }; {0, 2, 4, 6, … } και {1, 3, 5, 7, … }. Τα παιδιά αρχικά επιχειρηματολόγησαν στη βάση σύγκρισης πεπερασμένων συνόλων ακολουθώντας τη διαίσθησή τους και ανέφεραν επιχειρήματα όπως: «όταν συγκρίνω τους θετικούς ακέραιους με τους περιττούς οι θετικοί ακέραιοι είναι περισσότεροι γιατί είναι διπλάσιοι» ή «οι ακέραιοι είναι περισσότεροι από τους περιττούς γιατί αν μετρήσεις μέχρι το 10 υπάρχουν περισσότεροι ακέραιοι από περιττούς». Μερικά παιδιά όμως εντόπισαν την ‘1-1’ αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των συνόλων και δημιούργησαν μάλιστα και έναν κανόνα με βάση τον οποίο τα στοιχεία του δεύτερου συνόλου προκύπτουν από τα αντίστοιχα του πρώτου. Οι ερευνητές επισημαίνουν ότι παρόλο που η διαίσθηση του απείρου έχει ήδη διαμορφωθεί στο μυαλό ενός δεκάχρονου παιδιού, στοχευμένες συζητήσεις και ανοιχτό κλίμα μπορούν να την αποκαλύψουν και να τη θέσουν σε αμφισβήτηση. Σε άλλη έρευνα των ίδιων (Singer & Voica, 2008) με 11χρονους μαθητές της Ε΄ Δημοτικού, φάνηκε ότι κάποια παιδιά προκειμένου να απαντήσουν στην ερώτηση για το αν οι ρητοί αριθμοί αποτελούν άπειρο σύνολο σημείωσαν την ‘1-1’ αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των φυσικών και του συνόλου των ρητών, παρόλο που δεν είχαν διδαχθεί επίσημα κάτι σχετικό ούτε είχαν έρθει σε επαφή με τέτοιου είδους αναπαραστάσεις (Σπανού, 2019).

Η Tirosh έκανε μία έρευνα σε 1381 μαθητές 11 έως 17 ετών, καλώντας τους να συγκρίνουν απειροσύνολα όπως τους άρτιους με τους περιττούς αριθμούς, του φυσικούς με τους άρτιους, τους φυσικούς με τους ρητούς αλλά και σύνολα σε γεωμετρικό πλαίσιο όπως όλα τα σημεία ενός ευθύγραμμου τμήματος με όλα τα σημεία ενός τετραγώνου (Tsamir & Tirosh, 2006). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές όλων των ηλικιών χρησιμοποιούν τα ίδια διαισθητικά κριτήρια στη σύγκριση απειροσυνόλων και συνήθως αποφαίνονται ότι τα σύνολα δεν είναι ίσα. Για να αιτιολογήσουν την απάντησή τους χρησιμοποιούν επιχειρήματα όπως: «ένα υποσύνολο ενός συνόλου έχει λιγότερα στοιχεία από το αρχικό, για παράδειγμα οι άρτιοι αριθμοί είναι λιγότεροι από τους φυσικούς». Αυτή η δήλωση ότι «το όλο είναι μεγαλύτερο των μερών του» δείχνει ότι οι μαθητές γενικεύουν και χρησιμοποιούν στη σύγκριση απειροσυνόλων στρατηγικές που εφαρμόζονται στη σύγκριση πεπερασμένων συνόλων. Η γενίκευση αυτή δεν φαίνεται μάλιστα να προβληματίζει καθόλου τους μαθητές. Οι μαθητές που αποφάσισαν ότι τα απειροσύνολα είναι ίσα μεταξύ τους ανέφεραν ότι «όλα τα άπειρα σύνολα είναι ίσα, έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων», κάτι που έχει τις ρίζες του στην άποψη ότι το άπειρο είναι κάτι ανεξάντλητο. Μόνο ελάχιστοι μαθητές (λιγότεροι του 1%) στρέφονται στην ‘1-1’ αντιστοιχία για να συγκρίνουν τις πληθικότητες δύο συνόλων (Σπανού, 2019).

Συνολικά, οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές μπορούν να συνοψιστούν ως εξής: α) το μέρος-όλο, ότι δηλαδή ένα υποσύνολο ενός συνόλου έχει λιγότερα στοιχεία από το αρχικό σύνολο, κάτι που εμπίπτει στις εμπειρίες και τη διαίσθηση β) το ενιαίο άπειρο, ότι όλα τα άπειρα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων καθώς το άπειρο είναι ένα και ανεξάντλητο γ) το άπειρο είναι μια ποσότητα που δεν μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο σύγκρισης δ) την ‘1-1’ αντιστοιχία ε) τις αποστάσεις μεταξύ των στοιχείων, δηλαδή για παράδειγμα το σύνολο των άρτιων αριθμών {2, 4, 6, 8...} έχει περισσότερα στοιχεία από το σύνολο των τέλειων τετραγώνων {1, 4, 9, 16...} διότι δύο διαδοχικά στοιχεία του δεύτερου συνόλου έχουν περισσότερα στοιχεία ανάμεσά τους από ότι αυτά του πρώτου (Tsamir & Tirosh, 1999, Tsamir, 1999a, Tall & Tirosh, 2001, Tsamir & Dreyfus, 2002).

Η Σπηλιοπούλου (2004) πραγματοποίησε έρευνα σε μαθητές των τριών τάξεων του Λυκείου και σε φοιτητές σχετικά με τις αντιλήψεις τους για το άπειρο και πώς αυτές μεταβάλλονται με την πάροδο των ετών. Συμπέρανε ότι οι αντιλήψεις των μαθητών είναι λανθασμένες και στο πέρασμα των χρόνων αν και μεταβάλλονται σημαντικά, δεν καταφέρνουν να ανταποκριθούν ορθώς στην έννοια του απείρου.

Η Hannula et al (2006), μελέτησαν την κατανόηση του απείρου από διάφορες τάξεις μαθητών. Συμπέραναν ότι στην πέμπτη τάξη, όπως και στην πρώτη γυμνασίου οι περισσότεροι μαθητές δεν έχουν ιδέα για το άπειρο, αν και υπάρχει μια προφανής εξέλιξη στην κατανόηση της έννοιας στο διάστημα αυτό. Επισήμαναν ότι το άπειρο είναι κάτι πολύ δύσκολο να συλληφθεί ακόμα και στις τάξεις του λυκείου και του πανεπιστημίου.

Οι Βαμβακούση & Βοσνιάδου (2007), σε έρευνα που πραγματοποίησαν σε μαθητές της Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου με ερωτήσεις της μορφής «πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς» βρήκαν ότι ένα μεγάλο μέρος των αυτής της ηλικίας δεν έχουν κατακτήσει την ιδέα ότι υπάρχει άπειρο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών, αντίθετα, θεωρούν ότι οι ρητοί αριθμοί είναι, παρόμοια με τους φυσικούς, διακριτοί.

Το εργαλείο του άπειρου ξενοδοχείου του Hilbert, χρησιμοποιήθηκε σε έρευνα του Αντωνόπουλου, κ.ά., (2014), όπου ερευνήθηκαν οι αντιλήψεις των μαθητών της Α΄ Λυκείου για το άπειρο. Η έρευνα επικεντρώθηκε στη διαίσθηση των μαθητών για το άπειρο, τα μαθηματικά εργαλεία που οι μαθητές χρησιμοποιούν για να τεκμηριώσουν τους ισχυρισμούς τους και τη σταθερότητα των αντιλήψεών τους σχετικά με το άπειρο. Επιβεβαιώθηκε ότι το άπειρο γίνεται αντιληπτό περισσότερο ως δυνητικό παρά ως πραγματικό, ενώ τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούν οι μαθητές συμβάλλουν κατά περίπτωση και στις δύο πτυχές του απείρου.

Τέλος, οι Τσαμπουράκη & Καφούση (2014), πραγματοποίησαν έρευνα με τη συμμετοχή μαθητών της ΣΤ΄ τάξης δημοτικού για την μαθηματική έννοια του ‘‘άπειρου’’, με την οποία οι μαθητές δεν έχουν ασχοληθεί στη διάρκεια του μαθήματος των μαθηματικών, σύμφωνα με τα Δ.Ε.Π.Σ. και Α.Π.Σ. Σκοπός της έρευνας ήταν η διερεύνηση και καταγραφή των πεποιθήσεών τους, όπως υποβάλλονται από συνειδητούς ή και υποσυνείδητους κανόνες, ιδέες, γνώσεις, αναπαραστάσεις και ερμηνείες σε έμμεση ή άμεση σχέση με την καθαρά μαθηματική εμπειρία. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι το άπειρο γίνεται αντιληπτό από τους μαθητές αυτής της ηλικίας με ποικίλους τρόπους σε διαφορετικά πλαίσια.

4.2. ΕΡΕΥΝΕΣ ΣΕ ΦΟΙΤΗΤΕΣ

Οι Mamolo & Zazkis (2008), διερεύνησαν τις αντιλήψεις φοιτητών για το άπειρο μέσω της εμπλοκής τους με παράδοξα όπως το «ξενοδοχείο του Χίλμπερτ». Οι φοιτητές έδειξαν μεγάλη δυσκολία να δεχτούν την ιδέα ότι ένα άπειρων δωματίων ξενοδοχείο είναι γεμάτο. Επικεντρώθηκαν στη α) στη διερεύνηση των αντιλήψεων των φοιτητών για το άπειρο μέσω της εμπλοκής τους με παράδοξα και β) στην αλληλεπίδραση πρακτικών και μαθηματικών εμπειριών. Ειδικά, το ενδιαφέρον τους επικεντρώνεται στη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιούν δύο ομάδες φοιτητών διαφορετικού μαθηματικού υπόβαθρου την έννοια του απείρου στην προσπάθειά τους να επιλύσουν δύο γνωστά παράδοξα: «το ξενοδοχείο του Hilbert» και «τον γρίφο του ping-pong ball» πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την διδασκαλία. Παρουσιάζουν τις αρχικές αντιδράσεις των φοιτητών, καθώς αντιμετωπίζουν διαφορετικές εννοιολογικές προκλήσεις όταν εμπλέκονται με τα παράδοξα και διερευνούν τον βαθμό που η διαλεύκανση των παραδόξων επηρέασε τις διαισθητικές τοποθετήσεις τους για το άπειρο. Χρησιμοποιούν δύο σχετιζόμενα μεταξύ τους θεωρητικά πλαίσια για να ερμηνεύσουν τις απαντήσεις των φοιτητών καθώς επίσης και τις αναδυόμενες απόψεις τους για το άπειρο. Οι 36 φοιτητές που συμμετείχαν στην έρευνα, χωρίστηκαν σε δύο ομάδες. Η πρώτη ομάδα (G1) περιλαμβάνει 16 καθηγητές που διδάσκουν μαθηματικά στο γυμνάσιο και παρακολουθούν ένα μεταπτυχιακό πρόγραμμα στη διδακτική των μαθηματικών. Έχουν παρακολουθήσει επίσης ένα μάθημα που αφορά στα θεμέλια των μαθηματικών, όπου είχαν την ευκαιρία να έρθουν σε επαφή με την θεωρία του Cantor για τους υπερπεπερασμένους αριθμούς καθώς επίσης και με σπουδαία θεωρήματα, όπως εκείνο που αποδεικνύει ότι το σύνολο των ρητών είναι ισοδύναμο με εκείνο των φυσικών αριθμών. Η δεύτερη ομάδα (G2) αποτελείται από 20 φοιτητές κοινωνικών επιστημών, των οποίων οι μαθηματικές γνώσεις είναι εκείνες που είχαν όταν τελείωσαν το σχολείο. Παρακολούθησαν μια σειρά διαλέξεων που αφορούσαν στα θεμέλια της αριθμητικής. Η έννοια του απείρου συζητήθηκε στο πλαίσιο των διαλέξεων αυτών, με σκοπό να παρουσιαστούν στους φοιτητές κάποιες θεμελιώδεις ιδέες των μαθηματικών. Και στις δύο ομάδες η χρήση των παραδόξων αποσκοπούσε στην ανάδειξη των ιδεών των φοιτητών και στην πρόκληση συζήτησης γύρω από τις ιδιότητες του μαθηματικού απείρου. Συμπερασματικά: α) οι φοιτητές δεν επέλεξαν την μαθηματικά ορθή λύση στα προβλήματα και βρήκαν καταφύγιο σε μη-μαθηματικές θεωρήσεις. Εμμένοντας στην πρακτικά αδύνατη πραγματοποίηση των διαδικασιών, η γνωστική σύγκρουση μάλλον αποφεύχθηκε β) οι φοιτητές προσπάθησαν να συμφιλιώσουν την ορθή λύση με τις δικές τους απόψεις. Στην περίπτωση αυτή εμφανίζεται γνωστική σύγκρουση η οποία δημιούργησε μια αισθητή απογοήτευση και γ) οι φοιτητές διαχώρισαν τις δικές τους απόψεις από την μαθηματικά ορθή λύση.

Οι Luis, Moreno και Waldegg (1991) έκαναν την έρευνά τους σε φοιτητές Μαθηματικού Τμήματος εξετάζοντας τη δημιουργία και επίλυση των αντιφάσεων που δημιουργούνται λόγω της εφαρμογής συγκρουόμενων μεταξύ τους στρατηγικών. Οι ερωτήσεις τους εστίασαν στη σύγκριση των φυσικών αριθμών με το σύνολο των τέλειων τετραγώνων και των άρτιων αριθμών. Οι απαντήσεις των φοιτητών έδειξαν ότι οι περισσότεροι διαλέγουν τη στρατηγική «το όλο μεγαλύτερο του μέρους», αρκετοί πιστεύουν ότι «όλα τα άπειρα είναι ίσα» και μόνο ελάχιστοι απαντούν με όρους ‘1-1’ αντιστοιχίας. Οι αντιφάσεις μεταξύ των στρατηγικών δεν φαίνεται να γίνονται αντιληπτές από τα άτομα ούτε σε αυτή την ηλικιακή ομάδα (Tsamir, 1999a).

Σύμφωνα με την έρευνα του Ζωιτσάκη (2010) σε 114 φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος του Ε.Κ.Π.Α., τους οποίους θα μπορούσαμε να τους χαρακτηρίσουμε ως εν δυνάμει καθηγητές Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, αρκετοί φοιτητές αντιμετωπίζουν το άπειρο μόνο με τη δυνητική του μορφή και θεωρούν ότι το άθροισμα άπειρων θετικών αριθμών δεν μπορεί να είναι αριθμός (Σπανού, 2019).

Η Falk (1994) πραγματοποίησε έρευνα σε φοιτητές ψυχολογίας θέτοντας ένα ερώτημα, με δοσμένες τις απαντήσεις. Στο πρώτο σκέλος της δοκιμασίας τονίζεται ότι οι άρτιοι αποτελούν μέρος του συνόλου των φυσικών και άρα μικρότερο από αυτούς σύνολο ενώ στο δεύτερο επισημαίνεται η ‘1-1’ αντιστοιχία και αναφέρεται ότι τα δύο σύνολα είναι ίσα. Οι φοιτητές κλήθηκαν να επιλέξουν ποιο από τα δύο επιχειρήματα ήταν ορθό και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Οι μισοί από τους φοιτητές διάλεξαν το πρώτο επιχείρημα, ενώ οι άλλοι μισοί φάνηκαν να πείθονται από το δεύτερο, ένα μικρό όμως ποσοστό αιτιολόγησε την απάντησή του. Η ερευνήτρια διαπίστωσε πως από ψυχολογικής σκοπιάς είναι σημαντική η υπέρβαση της διαισθητικής μας σκέψης «το όλο είναι μεγαλύτερο από το μέρος» και η αντικατάστασή της από μια επιχειρηματολογία που θα βασίζεται στην ‘1-1’ αντιστοιχία. Η αντίφαση που δημιουργείται μεταξύ της «φυσικής» και της «τυπικής» έννοιας του απείρου αποτελεί ένα από τα μεγαλύτερα εμπόδια στο να ξεπεραστεί η διαισθητική γνώση και να κατακτηθεί η τυπική (Σπανού, 2019).

4.3. ΕΡΕΥΝΕΣ ΣΕ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ

Τις ίδιες διαισθητικές στρατηγικές με τους μαθητές φαίνεται να χρησιμοποιούν και οι εκπαιδευτικοί. Στην έρευνα των Kolar και Čadež (2012), σχετικά με σύγκριση απειροσυνόλων, κανείς δεν εφάρμοσε την '1-1' αντιστοιχία στη σύγκριση των φυσικών με τους άρτιους αριθμούς. Αντίθετα, οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί απάντησαν ότι «όλα τα άπειρα είναι ίσα».

Έρευνα σε εκπαιδευτικούς (Sbaragli, 2006) αναφέρει ότι οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να συγκρίνουν απειροσύνολα (για παράδειγμα φυσικοί-άρτιοι, φυσικοί-περιττοί, άρτιοι-περιττοί) και τελικά χρησιμοποιούν τις ίδιες στρατηγικές που εφαρμόζονται και στη σύγκριση πεπερασμένων συνόλων. Με επικρατέστερη τη στρατηγική «το όλο είναι μεγαλύτερο του μέρους», φαίνεται ότι και αυτοί υποπίπτουν στην υπεργενίκευση των χαρακτηριστικών των πεπερασμένων συνόλων και στα απειροσύνολα (Tsamir, 1999a).

Η Kattou et al. (2009) πραγματοποίησε έρευνα σε δασκάλους 43 δημοτικών σχολείων στην Κύπρο και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι αντιλαμβάνονται το άπειρο σαν μια διαδικασία χωρίς όρια.

4.4. ΕΡΕΥΝΕΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ – ΑΣΑΦΕΙΕΣ – ΑΝΤΙΦΑΣΕΙΣ

Οι μαθητές ξεκινούν να μαθαίνουν χτίζοντας πάνω στις έννοιες που ήδη γνωρίζουν. Οι έννοιες αυτές αποτελούν τις προ – μάθησης πεποιθήσεις τους. Μεταξύ αυτών των εννοιών υπάρχουν αυτές που έρχονται σε αντίθεση με τις αντίστοιχες επιστημονικές και ως εκ τούτου αποκαλούνται παρανοήσεις. Παρανόηση είναι η νόηση ή η αντίληψη οποιουδήποτε φιλολογικού ζητήματος με τρόπο αντιφατικό προς την ομόφωνη γνώμη των ειδικών. Οι παρανοήσεις είναι πραγματικά επικίνδυνες, δεδομένου ότι επισκιάζουν τις πραγματικές έννοιες που σχετίζονται με το ίδιο φαινόμενο. Το να μην έχεις καθόλου γνώση ενός θέματος είναι, σε κάποιες περιπτώσεις προτιμότερο από το να έχεις παρανοήσεις σχετικά με αυτό (Βλάχος, 2015).

Τα διαισθητικά κριτήρια που χρησιμοποιούν οι μαθητές έρχονται σε αντίθεση το ένα με το άλλο και οδηγούν σε αντιφατικές απαντήσεις. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ότι μπορεί να δηλώσουν σε μία δοκιμή ότι όλα τα άπειρα είναι ίσα και στην επόμενη ότι ένα απειροσύνολο αποτελείται από λιγότερα στοιχεία από ένα άλλο. Μόνο ελάχιστοι αντιλαμβάνονται τις αντιφάσεις ανάμεσα στις διαισθητικές τους αντιλήψεις και την επίσημη θεωρία, αντιφάσεις που αποτελούν εμπόδιο στην απόκτηση της επίσημης γνώσης (Σπανού, 2019).

Έρευνες δείχνουν πως ακόμη και μετά από εκπαιδευτικές παρεμβάσεις τέτοιες ιδέες αντιστέκονται σθεναρά στην αλλαγή και επηρεάζουν τους μαθητές κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων. Μια έρευνα που εστίασε στις αντιφάσεις και στον τρόπο αντιμετώπισής τους από τους μαθητές έγινε από τους Tsamir & Dreyfus (2002). Οι ερευνητές δημιούργησαν τις συνθήκες έτσι ώστε ένας 8χρονος ταλαντούχος μαθητής να συγκρίνει απειροσύνολα χρησιμοποιώντας όμως αντιφατικές στρατηγικές, με σκοπό να μελετήσουν τον τρόπο που θα ξεπερνούσε ένα τέτοιο εμπόδιο. Αυτός αντιλήφθηκε την ανεπαρκή επιχειρηματολογία του και τελικά έλυσε την αντίφαση υποστηρίζοντας ότι έπρεπε να βρεθεί μια και μόνο στρατηγική για να συγκριθούν τα σύνολα. Σε επόμενη έρευνά τους οι ερευνητές δηλώνουν πως κατέληξε σε αυτό το συμπέρασμα επιδεικνύοντας άνεση και αυτοπεποίθηση (Dreyfus & Tsamir, 2004). Παρόμοια αποτελέσματα προέκυψαν και σε έρευνες που έγιναν για το ίδιο ζήτημα σε ενήλικες.

Η Sierpinska (1987) επιχείρησε κάτι αντίστοιχο σε φοιτητές των ανθρωπιστικών επιστημών σχετικά με τις έννοιες του ορίου και του απείρου. Επισήμανε πως οι φοιτητές μπορούν να ξεπεράσουν εν μέρει τα γνωστικά εμπόδια που προκύπτουν και ταυτόχρονα έχουν επίγνωση των γνωστικών συγκρούσεων που συντελούνται. Η ερευνήτρια εντοπίζει στο γεγονός αυτό μια καλή αφετηρία για την κατασκευή του νοήματος των δυσνόητων αυτών εννοιών. Προτάσεις για μια πιο συστηματική διδασκαλία σχετικά με την έννοια του απείρου κάνουν οι Tsamir ήδη από το 1999, Narli (2011) και Narli και Baser (2008). Οι έρευνές τους δείχνουν ότι μια παρέμβαση που λαμβάνει υπόψη τις διαισθητικές ιδέες των μαθητών ή φοιτητών και την τάση τους να γενικεύουν τα χαρακτηριστικά των πεπερασμένων συνόλων στα απειροσύνολα μπορεί να συμβάλει στη συνειδητοποίηση εκ μέρους τους ότι χρησιμοποιούν αντιφατικές στρατηγικές (Σπανού, 2019).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Προκειμένου να οργανωθεί και να διεκπεραιωθεί η συγκεκριμένη έρευνα, θεωρήθηκε χρήσιμο να μελετηθούν τα χαρακτηριστικά μιας επιστημονικής έρευνας.

Ο όρος έρευνα στις καθημερινές εκφράσεις συνδέεται με πολλά αντικείμενα εφαρμογής. Περισσότερο ωστόσο συνάδει με μια εξειδικευμένη σημασία, δηλαδή τη συστηματική, αντικειμενική και εξακριβωμένη αναζήτηση πληροφοριών προς επίλυση κάποιου προβλήματος. Μεταξύ τους οι διάφορες έρευνες διαφέρουν ως προς τις προθέσεις, τα μέσα αλλά και στο βαθμό σεβασμού των επιστημονικών αρχών εκ μέρους των διαφόρων ερευνητών (Βικιπαίδεια).

Σύμφωνα με τον Παρασκευόπουλο (1993), έρευνα είναι:

- Η εργασία που έχει σαν σκοπό την προαγωγή της επιστημονικής γνώσης, σύμφωνα με διεθνώς αποδεκτές επιστημονικές θεωρίες ή η επεξεργασία νέων θεωριών, ικανών να γίνουν αποδεκτές από τη διεθνή επιστημονική κοινότητα.
- Μια συστηματική και καλώς σχεδιασμένη διαδικασία για την επίλυση προβλημάτων βάσει της εμπειρικής πραγματικότητας.
- Η συστηματική εφαρμογή επιστημονικής γνώσης, βάσει συγκεκριμένου σκοπού, για τη βελτίωση των επιτευγμάτων του ανθρώπου.

Υπάρχουν διάφοροι τύποι/είδη έρευνας, ανάλογα με το κριτήριο διάκρισης (Παρασκευόπουλος, 1993):

1. Ως προς τον επιδιωκόμενο επιστημονικό σκοπό (περιγραφική, διερευνητική, ερμηνευτική, παρεμβατική, πειραματική, προκαταρκτική-πιλότος).

Οι τρεις βασικές κατηγορίες ερευνών είναι οι διερευνητικές, οι περιγραφικές και οι πειραματικές (Τσακίρη):

α) Διερευνητικές Έρευνες: Οι διερευνητικές έρευνες αποβλέπουν στη διατύπωση ενός προβλήματος με σκοπό την εξέταση ή διατύπωση υποθέσεων, την ιεράρχηση προτεραιοτήτων και την ανάλυση αποκαλυπτικών καταστάσεων. Οι διερευνητικές έρευνες έχουν σαν κύριο σκοπό την ανακάλυψη και την καινοτομία, γι’ αυτό και βασικό χαρακτηριστικό τους αποτελεί η ευελιξία. Σημαντική συμβολή για την επιτυχία των ερευνών αυτών θεωρείται η εμπειρία και η συμμετοχή εμπειρογνωμόνων.

β) Περιγραφικές Έρευνες: Οι περιγραφικές έρευνες έχουν ως σκοπό τον προσδιορισμό και την εκτίμηση των χαρακτηριστικών μιας δεδομένης κατάστασης. Για την επιτυχία των ερευνών αυτών απαιτείται: η προσοχή για τυχόν μεροληψία και το να είναι περισσότερο οργανωμένες, προδιαγραμμένες και σχεδιασμένες.

γ) Πειραματικές Έρευνες: Οι πειραματικές έρευνες αποσκοπούν στον έλεγχο της ορθότητας των υποθέσεων. Δηλαδή, με τις έρευνες αυτές ελέγχεται αν μεταξύ δύο μεταβλητών υπάρχει συστηματική σχέση, π.χ. ελέγχεται αν: η μια μεταβλητή εμφανίζεται πάντα με κάποια άλλη, οι μεταβολές μιας μεταβλητής συνοδεύονται από μεταβολές μιας άλλης. Οι πειραματικές έρευνες στηρίζονται στο πείραμα: φυσικό ή τεχνικό, μέσω του οποίου ο ερευνητής ελέγχει το παραδεκτό μιας υπόθεσης.

Οι σκοποί θέτουν τα όρια, το βάθος και το πλάτος της ερευνητικής πρότασης. Πρέπει να συνδέονται διαλεκτικά με τα αποτελέσματα και η σύνδεση να αναλύεται στα συμπεράσματα (Λαγουμιντζής, Βλαχόπουλος & Κουτσογιάννης, 2015).

2. Ως προς το είδος των εμπειρικών δεδομένων (ποιοτική, ποσοτική, ανάμεικτη).

Η ποσοτική έρευνα είναι αριθμητική, εφαρμόζει στατιστικές ή μαθηματικά. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε πίνακες /γραφήματα. Καταλήγει. Η ποιοτική έρευνα είναι μη-αριθμητική. Στόχος να περιγράψει την κατάσταση. Είναι διερευνητική.

3. Ως προς το είδος της χρησιμοποιούμενης λογικής ανάλυσης (απαγωγική, επαγωγική).

4. Ως προς το είδος της χρησιμοποιούμενης ερευνητικής μεθόδου (ιστορική, γενετική, κλινική, εθνογραφική, διαπολιτισμική, διαχρονική, συγχρονική).

5. Ως προς τον αριθμό των εξεταζόμενων ατόμων (δειγματοληπτική, δημοσκόπηση, ατομική περίπτωση).

6. Ως προς το χώρο που διενεργείται (εργαστηριακή, επιτόπια, βιβλιογραφική).

Μια ερευνητική διαδικασία έχει ως αφορμή έναν προβληματισμό και προσπαθεί να απαντήσει σε ένα ερευνητικό ερώτημα. Η εκπαιδευτική έρευνα αποτελεί σημαντικό παράγοντα υποστήριξης και ανατροφοδότησης της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Η εκπαίδευση ως παγκόσμιο, πολυπαραγοντικό και συστημικό φαινόμενο διερευνάται δύσκολα και κάθε ερευνητικό συμπέρασμα αφορά συγκεκριμένο χώρο και χρόνο. Στόχοι μιας εκπαιδευτικής έρευνας μπορεί να είναι η:

- Περιγραφή /Διερεύνηση/ Σύγκριση των εκπαιδευτικών φαινομένων
- Εξήγηση / Ερμηνεία (κατανόηση) των εκπαιδευτικών φαινομένων
- Αλλαγή των εκπαιδευτικών φαινομένων

Υπάρχουν τρεις διακριτές φάσεις κατά τις οποίες συντελείται η επιστημονική έρευνα (Creswell, 2002, Cohen & Manion, 1997):

Προπαρασκευαστική φάση: Αρχικά, γίνεται επιλογή και διατύπωση του ερευνητικού προβλήματος (ερευνητική ιδέα) καθώς επίσης και καθορισμός της ερευνητικής διαδικασίας για τη συλλογή του εμπειρικού, αποδεικτικού υλικού (σχεδιασμός προσέγγιση προβλήματος).

Εκτελεστική φάση: Σε αυτή τη φάση πραγματοποιείται η συλλογή των εμπειρικών δεδομένων (αναζήτηση βιβλιογραφίας) και η ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων (ερευνητικό-πειραματικό στάδιο).

Κοινοποίηση αποτελεσμάτων: Στο τελευταίο στάδιο γίνεται η συγγραφή της ερευνητικής μελέτης και η κοινολόγησή της στην επιστημονική κοινότητα (δημοσιεύσεις-συνέδρια).

Η επιλογή, η οριοθέτηση του αντικειμένου της έρευνας και η οριστική διατύπωση του θέματος ή του τίτλου της εργασίας αποτελούν μια αρκετά δύσκολη και απαιτητική διανοητική διεργασία.

Οι παράγοντες που ενδέχεται να επηρεάσουν την τελική διαμόρφωση και επιλογή του θέματος είναι πολλοί, αλλά κατά βάσιν είναι συναρτώμενοι (Δαρβίρη, 2009):

- της προσωπικότητας του ερευνητή,
- του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο κινείται και εργάζεται,
- των προσωπικών του κινήτρων, κλίσεων και ενδιαφερόντων.

Επιπλέον, σημαντικά κριτήρια και κίνητρα επιλογής του ερευνητικού προβλήματος, θα πρέπει να είναι (εκτός από τα παραπάνω):

- η πρωτοτυπία του θέματος,

• η αναφορά του θέματος σε κάποιο σημαντικό πρόβλημα,

• η δυνατότητα εξέτασης του θέματος με επιστημονική, ερευνητική μέθοδο,

• η δυνατότητα πραγματοποίησης της έρευνας (αντικειμενικοί-εξωτερικοί παράγοντες, ατομικοί-προσωπικοί παράγοντες).

Μια έρευνα μπορεί να θεωρηθεί χρήσιμη όταν τα αποτελέσματά της βοηθούν στην ολοκλήρωση των ειδικών μεθόδων και μέσων διδασκαλίας και όταν χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό της αποτελεσματικότητας της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Μια επιτυχής έρευνα είναι απαραίτητο να περάσει από τα ακόλουθα στάδια: (Τσομπανίδου, 2013)

- Προσδιορισμός της αναγκαιότητας της έρευνας.
- Προσδιορισμός του τομέα έρευνας.
- Γνωριμία με την απαραίτητη βιβλιογραφία.
- Προσδιορισμός της ιδιαιτερότητας των ερευνούμενων διδακτικών προβλημάτων.
- Τοποθέτηση της υπόθεσης την οποία η έρευνα επρόκειτο να αποδείξει.
- Προσδιορισμός του τρόπου συγκέντρωσης των πληροφοριών.
- Δημιουργία και εφαρμογή του πλάνου για τη συγκέντρωση των πληροφοριών.
- Βοηθητικές, αν υπάρχουν, έρευνες.
- Συμπεράσματα από την έρευνα.
- Εξάπλωση των αποτελεσμάτων της έρευνας.

5.1. ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Οι ποιοτικές έρευνες στο χώρο της εκπαίδευσης, ίσως πολύ περισσότερο από τις ποσοτικές έρευνες, έτυχαν και συνεχίζουν να τυγχάνουν πολύ μεγάλης κριτικής για την εγκυρότητα και αξιοπιστία τους. Οι ποιοτικές έρευνες έχουν κατηγορηθεί ότι χρησιμοποιούν “soft” (μαλακές, θαμπές) ερευνητικές διαδικασίες, ότι τα ευρήματά τους είναι “αποκυήματα φαντασίας και όχι επιστήμη” και ότι οι ερευνητές που τις διεξάγουν “δεν έχουν κανένα τρόπο να επιβεβαιώσουν εάν το τι δηλώνουν είναι αληθινό ή όχι” (Denzin & Lincoln, 2000).

Σύμφωνα με τον Hammersley (1992), «η ποιοτική έρευνα αποτελεί μια εναλλακτική μορφή έρευνας σε σχέση με την ποσοτική έρευνα των κοινωνικών επιστημών». Επομένως, πρέπει να αναπτυχθούν ειδικά κριτήρια αξιολόγησης για την ποιοτική έρευνα. Παρόλο που οι ειδικοί διαφωνούν για το ποια είναι τα καταλληλότερα κριτήρια, συμφωνούν στο ότι σίγουρα πρέπει να είναι διαφορετικά από αυτά της ποσοτικής έρευνας. Έτσι, προτείνουν ότι η αξιολόγηση κάθε επιστημονικής ποιοτικής έρευνας πρέπει να γίνεται σύμφωνα :

(α) με το εάν αυτή προσφέρει στη θεωρία,

(β) με το εάν είναι επιστημονικά αξιόπιστη κι εμπειρικά βασισμένη,

(γ) με το εάν τα ευρήματα μπορούν να γενικευθούν ή να μεταφερθούν και σε άλλες καταστάσεις και

(δ) με το αν παίρνει υπόψη την επίδραση του ερευνητή και της ερευνητικής στρατηγικής στα ευρήματα της έρευνας.

Είναι σημαντικό να κατανοηθεί η διαφορά ανάμεσα στις έννοιες «αξιοπιστία» και «εγκυρότητα». Η υψηλή αξιοπιστία ενός εργαλείου μέτρησης συνδέεται με την ελαχιστοποίηση του τυχαίου σφάλματος. Επιπρόσθετα, αναφέρεται στη «συνοχή», στη «συνέπεια» και στη «σταθερότητα» που εμφανίζει ένα ερευνητικό εργαλείο, ώστε η μεταβλητότητα των αποτελεσμάτων να είναι μικρή, αν επαναληφθεί η μέτρηση κάτω από όμοιες ή σχεδόν όμοιες συνθήκες. Η εγκυρότητα αναφέρεται στο κατά πόσο ένα όργανο μέτρησης μετράει ό,τι υποστηρίζει ότι μετράει. Ο Oppenheim χρησιμοποιεί το παράδειγμα του ρολογιού για να αποσαφηνίσει τη σχέση μεταξύ εγκυρότητας και αξιοπιστίας. Ένα ρολόι θεωρείται ότι είναι έγκυρο όταν δείχνει τη σωστή ώρα και αξιόπιστο όταν δείχνει σταθερά σωστή ώρα καθόλη τη διάρκεια της λειτουργίας του. Ο παραλληλισμός της εγκυρότητας και της αξιοπιστίας με την ώρα που δείχνει ένα ρολόι, βοηθάει επίσης να κατανοηθεί ότι ένα εργαλείο μέτρησης μπορεί να έχει υψηλή αξιοπιστία αλλά σε μερικές περιπτώσεις μειωμένη εγκυρότητα. Για παράδειγμα, ένα ρολόι που δείχνει σταθερά την ώρα κατά 10 λεπτά πιο μπροστά είναι αξιόπιστο, γιατί με συνέπεια και σταθερότητα δείχνει 10 λεπτά πάντα πιο μπροστά από την ακριβή ώρα. Ωστόσο, δεν είναι έγκυρο γιατί δε δείχνει ποτέ τη σωστή ώρα. Συνεπώς, ο βαθμός αξιοπιστίας ενός εργαλείου μέτρησης δε διασφαλίζει και το βαθμό εγκυρότητάς του (Ουζούνη & Νακάκης, 2011).

Η αξιοπιστία (credibility) σε μια ποιοτική έρευνα αναφέρεται στην ισχύ του μεθοδολογικού σχεδιασμού, στην ποιότητα των δεδομένων τα οποία συλλέχθηκαν κατά τη διάρκειά της και στο πώς αυτός ο σχεδιασμός και τα συγκεκριμένα δεδομένα οδηγούν σε αληθινά και άξια εμπιστοσύνης ευρήματα, υπό την έννοια ότι αναπαριστούν την πραγματικότητα (Levin & O' Donnel, 1999, Lincoln, 2001).

Η εγκυρότητα αναφέρεται στο εάν η έρευνα πράγματι μετρά αυτό που λέει ότι μετράει. Η εγκυρότητα προσδίδει κύρος στα συμπεράσματα και στις προτάσεις μας. Η αξιοπιστία δε συνεπάγεται και εγκυρότητα. Για παράδειγμα, εγκυρότητα ενός ερωτηματολογίου είναι η ιδιότητά του να μετρά αυτό ακριβώς που ισχυρίζεται ότι μετρά, ενώ αξιοπιστία είναι να καταλήγει το ερωτηματολόγιο σε σταθερά αποτελέσματα όταν πραγματοποιούνται επαναληπτικές μετρήσεις κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Παράγοντες που μειώνουν την αξιοπιστία μιας έρευνας είναι (Τσομπανίδου, 2013):

- Λάθη στη συμπλήρωση του τεστ.
- Απαντήσεις στη τύχη (π.χ. σε ερωτήματα τύπου σωστό/λάθος).
- Μικρός αριθμός συμμετεχόντων.
- Ερωτήματα που δεν είναι ξεκάθαρα και μπορούν να μπερδέψουν τους συμμετέχοντες.
- Οδηγίες που δεν είναι ακριβείς και ξεκάθαρες.
- Σφάλμα που οφείλεται στους συμμετέχοντες (π.χ. επιδράσεις διάθεσης, κινήτρων, κούραση, πλήξη κ.τ.λ.).
- Χαμηλή εγκυρότητα όψης.
- Μεταβολές στις συνθήκες.

Συνηθισμένα λάθη που μειώνουν την αξιοπιστία μιας έρευνας, είναι (Τσομπανίδου, 2013):

- Μικρό μέγεθος δείγματος (<200). Για τον καλύτερο υπολογισμό του δείκτη αξιοπιστίας και την ελαχιστοποίηση του σφάλματος απαιτούνται μεγάλα δείγματα.

- Χρήση μη αντιπροσωπευτικών και μη κατάλληλων δειγμάτων.
- Συμπτωματική συσχέτιση δεδομένων. Κάποια αντικείμενα μπορεί να συσχετίζονται συμπτωματικά μεταξύ τους και συνεπώς να προκύπτει υψηλός δείκτης αξιοπιστίας, αλλά σαν σύνολο να μη μετριέται η έννοια που μας ενδιαφέρει.
- Η τεχνική του «ψαρέματος». Όταν ενδιαφερόμαστε να πραγματοποιήσουμε μια αξιόπιστη έρευνα είναι συνετό να έχουμε ένα θεωρητικό υπόβαθρο που να μας κατευθύνει και να αποφεύγουμε την τεχνική του 'ψαρέματος' των δεδομένων.

5.2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Σε μια επιστημονική έρευνα, σύμφωνα με τον Κουρλιούρο (1989), η μέθοδος προσέγγισης ενός φαινομένου θέτει μια σειρά από σημαντικά ερωτήματα σχετικά με:

• Τι πρέπει να γίνει γνωστό, σε ποιες πλευρές δηλαδή του φαινομένου πρέπει να επικεντρωθεί η γνωστική προσπάθεια;

• Γιατί πρέπει να γίνει γνωστό, ποια θα είναι δηλαδή η κοινωνική χρησιμότητα της παραγόμενης γνώσης;

• Πώς πρέπει να γίνει γνωστό, δηλαδή μέσα από ποιο θεωρητικό πλαίσιο θα πρέπει να διατυπωθούν τα ερευνητικά ερωτήματα ή οι υποθέσεις;

• Ποια είναι τα πλέον κατάλληλα μέσα – τεχνικές και εργαλεία– για την υλοποίηση της γνωστικής διαδικασίας;

Η μέθοδος, κατά συνέπεια, συνιστά μια γενεσιουργό συνθήκη, καθότι δημιουργεί τις αρχικές προϋποθέσεις για τη συλλογή και οργάνωση των δεδομένων του υπό διερεύνηση φαινομένου. Στη διαδικασία αυτή υπάρχει μια ποικιλία θεωρητικών προσανατολισμών, μεθόδων και προσεγγίσεων των υπό διερεύνηση κοινωνικών φαινομένων. Η επιλογή κάποιας μεθόδου και η απόρριψη κάποιων άλλων μεθόδων ωθεί σε έναν συγκεκριμένο τρόπο θέασης του κόσμου, στην υιοθέτηση συγκεκριμένων ερευνητικών ερωτημάτων και υποθέσεων, στη χρησιμοποίηση συγκεκριμένων τεχνικών και εργαλείων ανάλυσης και ερμηνείας των δεδομένων και κατ' επέκταση, στην εξαγωγή συμπερασμάτων με συγκεκριμένο προσανατολισμό. Με τον όρο της μεθοδολογίας, που λειτουργεί σε ένα πιο αφαιρετικό επίπεδο από τον όρο της μεθόδου, εννοούμε τις θεωρητικές παραδοχές και αξίες που υποφώσκουν σε μια συγκεκριμένη ερευνητική προσέγγιση. Είναι επίσης η θεωρητική θεμελίωση της χρήσης των μεθόδων και των ειδών της γνώσης που μπορούν αυτές να παράγουν (Ίσαρη & Πούρκος, 2015).

Για τη μεθοδολογία μιας έρευνας έχουν διαμορφωθεί ορισμένες βασικές αρχές, που καθορίζουν την πορεία της έρευνάς μας και αποτελούν τους ιχνηλάτες της συλλογής υλικού. Αυτές είναι οι εξής (Παππάς, 2002):

- Η ανάλυση των δεδομένων καθορίζεται εκ των προτέρων από τον προβληματισμό της έρευνάς μας. Πρέπει να προσαρμόσουμε τη μεθοδολογία έρευνας, που θα ακολουθήσουμε, σε αυτό που ψάχνουμε και όχι το αντίστροφο. Οι ερωτήσεις που θέτουμε είναι: «Ποιο είναι το βασικό ερώτημα της έρευνάς μου;» «Ποιες είναι οι πληροφορίες που θα πρέπει να έχω στο τέλος της έρευνας;»

- Συχνά η διατύπωση του προβληματισμού και η ανάλυση των δεδομένων διαμορφώνονται κατά τη διάρκεια της έρευνας. Ωστόσο, είναι απαραίτητο να διατυπωθούν από την αρχή.

- Είναι απαραίτητο να διευκρινίσουμε διεξοδικά τις ερευνητικές υποθέσεις, γιατί είναι αυτές που καθορίζουν, όχι μόνο τα ερευνητικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε, αλλά και την ανάλυση που θα πραγματοποιήσουμε.

- Όλα τα ερευνητικά εργαλεία και μέθοδοι έχουν πλεονεκτήματα αλλά και μειονεκτήματα. Η χρήση ενός ερευνητικού εργαλείου δεν αποκλείει τη χρήση ενός δεύτερου ή και ενός τρίτου. Αυτό σημαίνει ότι ο ερευνητής μπορεί να χρησιμοποιήσει διαφορετικά ερευνητικά εργαλεία και να διασταυρώσει τα αποτελέσματα, εάν οι ανάγκες της εργασίας το απαιτούν.

- Η μεθοδολογία της συλλογής δεδομένων συνδέεται με το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας, τον προβληματισμό, και τις ερευνητικές υποθέσεις.

- Υπάρχουν τριών ειδών πηγές πληροφοριών για τη διεξαγωγή έρευνας:

   i. ο λόγος (συνέντευξη, ερωτηματολόγιο),
   ii. τα γεγονότα (παρατήρηση),

iii. τα «ίχνη» (γραπτά, στατιστικές).

Κάθε ερευνητής καλείται να σχεδιάσει τη μεθοδολογία που θα υιοθετήσει σε σχέση με τον προβληματισμό του και σε συνάρτηση με το υπό εξέταση πεδίο και θέμα του. Η μεθοδολογία έρευνας αναφέρεται στις παραμέτρους της ερευνητικής προσπάθειας του ερευνητή, οι οποίες αφορούν στις γενικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις, στις μεθόδους, στις τεχνικές, στα μέσα, στα υλικά και στις διαδικασίες που θα επιλέξει για τη διεξαγωγή της έρευνάς του (Δημητρόπουλος, 2004).

5.2.1. ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Το ερωτηματολόγιο περιλαμβάνει μια σειρά δομημένων ερωτήσεων στις οποίες ο ερωτώμενος καλείται να απαντήσει με μία συγκεκριμένη σειρά. Με τα ερωτηματολόγια συλλέγονται δεδομένα ζητώντας από ανθρώπους να απαντήσουν στο ίδιο ακριβώς σύνολο ερωτήσεων. Χρησιμοποιούνται συνήθως στα πλαίσια μιας ερευνητικής στρατηγικής, προκειμένου να συλλεχθούν περιγραφικά και επεξηγηματικά, δεδομένα για απόψεις, συμπεριφορές, χαρακτηριστικά, στάσεις κ.λπ. (Λαγουμιντζής, Βλαχόπουλος & Κουτσογιάννης, 2015).

Για τη δημιουργία ενός ερωτηματολογίου πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ορισμένα χαρακτηριστικά, ώστε να οδηγηθούμε σε μια επιτυχημένη και ορθή έρευνα. Το ερωτηματολόγιο πρέπει να έχει (Λαγουμιντζής, Βλαχόπουλος, Κουτσογιάννης, 2015):

- Πληρότητα: Η πληρότητα αναφέρεται στην ανάγκη κάλυψης όλων των πτυχών του ερευνώμενου χαρακτηριστικού και ήδη έχει γίνει εκτενής αναφορά για αυτή.
- Σαφήνεια: Η σαφήνεια δεν αναφέρεται μόνο στο περιεχόμενο των πληροφοριών, αλλά και στο άτομο το οποίο καλείται να δώσει τις απαντήσεις.
- Συνοχή: Η συνοχή αναφέρεται στην ανάγκη οργανικής σύνδεσης των επιμέρους ερωτημάτων μεταξύ τους. Συγγενή ερωτήματα πρέπει να εμφανίζονται στο ερωτηματολόγιο ομαδοποιημένα και να ερωτώνται μαζί, προκειμένου η σκέψη και η μνήμη του ερωτώμενου να κατευθύνεται ευκολότερα στις σωστές απαντήσεις.

- Κατάλληλη δομή: Η κατάλληλη δομή του ερωτηματολογίου, δηλαδή η σειρά με την οποία θα τεθούν οι ομάδες ερωτήσεων, είναι επίσης υψίστης σημασίας για την αύξηση του βαθμού ανταπόκρισης του κοινού. Είναι αυτονόητο, αλλά δεν εφαρμόζεται πάντοτε, ότι προσωπικές ή γενικότερα ερωτήσεις, στις οποίες το κοινό δεν απαντά εύκολα (εισόδημα, ύπαρξη διαζυγίου, κ.λπ.) δεν τίθενται στην αρχή ενός ερωτηματολογίου.

Επίσης:

- Να είναι όσο το δυνατόν πιο σύντομο. Ερωτηματολόγια τα οποία επεκτείνονται σε μεγάλο αριθμό ερωτημάτων, κουράζουν τον ερωτώμενο ή του δημιουργούν την αίσθηση ότι θα χάσει πολύ χρόνο και είναι πιθανό να μην ολοκληρωθούν.
- Να έχει αρτιότητα παρουσίασης από τεχνικής πλευράς.
- Να περιλαμβάνει βασικές οδηγίες συμπλήρωσης και εννοιολογικές επεξηγήσεις.
- Να επιδέχεται κωδικογραφική και μηχανογραφική επεξεργασία.

Οι κυριότεροι τύποι ερωτηματολογίων υλοποιούνται (ανάλογα με τη μέθοδο που εφαρμόζουμε για τη συλλογή των δεδομένων) (Λαγουμιντζής, Βλαχόπουλος, Κουτσογιάννης , 2015):

α) μέσω ταχυδρομείου,

β) μέσω τηλεφώνου,

γ) με προσωπική συνέντευξη,

δ) με άμεση παράδοση και παραλαβή και

ε) μέσω διαδικτύου.

Τα πλεονεκτήματα της διαδικτυακής έρευνας είναι (Λιναδρής, Παπαγιαννόπουλος & Καλησπεράτη, 2011) :

- η εξοικονόμηση πόρων (χρημάτων, ανθρώπινου δυναμικού, αναλώσιμων κ.ά.),
- η εξάλειψη σφαλμάτων κατά την εισαγωγή των δεδομένων (data entry), αφού η εισαγωγή γίνεται από τους ίδιους τους ερωτώμενους,
- η αποτελεσματικότητα: γρήγορη συλλογή και αποθήκευση δεδομένων,

- η εύκολη εύρεση ατόμων με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και ενδιαφέροντα, για παράδειγμα άτομα τα οποία συμμετέχουν σε συγκεκριμένα περιβάλλοντα στο Internet, όπως: forums, chat rooms με συγκεκριμένες θεματικές,
- η ελκυστικότητα υπολογιστών σε νέες ηλικιακές ομάδες,
- η απουσία μεροληπτικότητας από τον συνεντευκτή,
- η επιλογή του χρόνου και τόπου συμπλήρωσης των ερωτηματολογίων από τους ερωτώμενους,
- η εύκολη προσέγγιση ατόμων από διαφορετικές χώρες,
- η πρόσβαση σε γεωγραφικά κατανεμημένους πληθυσμούς,
- η εύκολη διαχείριση του skip logic στα ερωτηματολόγια,
- η συμμετοχή ατόμων με αποκλίνουσες συμπεριφορές λόγω της ανωνυμότητας που επικρατεί στο διαδίκτυο.

Τα μειονεκτήματα της διαδικτυακής έρευνας είναι:

- τα τεχνικά προβλήματα που μπορεί να δημιουργηθούν κατά τη διεξαγωγή της έρευνας,
- η δυσκολία στον καθορισμό του δείγματος καθώς και στην αντιπροσωπευτικότητα αυτού,
- ο ρυθμός απόκρισης (response rate), ο οποίος συνήθως είναι μικρότερος από τις συμβατικές έρευνες,
- η απουσία προσωπικής επαφής με τον ερωτώμενο,
- τα ζητήματα ασφάλειας κατά τη χρήση του διαδικτύου.

Το πιλοτικό ερωτηματολόγιο, δηλαδή αυτό που ονομάζουμε δοκιμή του σχεδίου του ερωτηματολογίου, έχει ως κύριο σκοπό τη διαπίστωση της αποτελεσματικότητας του «εργαλείου» που σχεδιάσαμε. Στο δοκιμαστικό στάδιο πρόκειται να μετρηθεί ο βαθμός κατανόησης, «αποδοχής» και ερμηνείας του ερωτηματολογίου. Αυτό το στάδιο είναι απολύτως απαραίτητο. Στο πιλοτικό ερωτηματολόγιο προσπαθούμε να εξακριβώσουμε εάν:

- οι χρησιμοποιούμενοι όροι γίνονται εύκολα αντιληπτοί,
- η σειρά των ερωτήσεων δεν προκαλεί τάσεις πιθανής σύγχυσης,

- η διατύπωση των ερωτήσεων επιτρέπει τη συλλογή των επιθυμητών στοιχείων,
- το ερωτηματολόγιο έχει την κατάλληλη έκταση, δηλαδή δεν είναι ιδιαίτερα εκτενές, προκαλώντας την αδιαφορία ή τον εκνευρισμό των ερωτώμενων.

Στη «δοκιμή» αυτή, το ερωτηματολόγιο υποβάλλεται σε έναν περιορισμένο αριθμό ατόμων, ανάλογα με την έρευνα και πρέπει το σύνολο αυτό να μην είναι ιδιαίτερα ομοιογενές (Λαγουμιντζής, Βλαχόπουλος & Κουτσογιάννης Κ, 2015).

5.2.2. ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

Δειγματοληψία είναι η απογραφή ορισμένων συγκεκριμένων χαρακτηριστικών ενός τμήματος του πληθυσμού. Το τμήμα του πληθυσμού που απογράφεται ονομάζεται δείγμα. Σκοπός τώρα των δειγματοληπτικών ερευνών είναι να προσδιορίσουμε όσο γίνεται ακριβέστερα ιδιότητες του πληθυσμού, μελετώντας απογραφικά τα στοιχεία του δείγματος. Η συνέπεια της επέκτασης των συμπερασμάτων που προέρχονται από τη μελέτη των χαρακτηριστικών του δείγματος, σε ολόκληρο τον πληθυσμό, εξαρτάται από τη μέθοδο δειγματοληψίας που εφαρμόζουμε, καθώς από τη ποιότητα του δείγματος εξαρτάται κατά πολύ η σημαντικότητα των εκτιμήσεων. Οι εκτιμήσεις των δειγματοληψιών δεν δίνουν ακριβείς τιμές αλλά προσεγγίσεις για το σύνολο του πληθυσμού (Λαγουμιντζής, Βλαχόπουλος & Κουτσογιάννης, 2015).

Οι τεχνικές δειγματοληψίας διακρίνονται σε δύο κατηγορίες, τη δειγματοληψία με πιθανότητες ή αντιπροσωπευτική δειγματοληψία και τη δειγματοληψία χωρίς πιθανότητες ή δειγματοληψία κρίσης (Φίλιας, 2001).

Η δειγματοληψία με πιθανότητα γίνεται σύμφωνα με τους νόμους των πιθανοτήτων, είναι ελεγχόμενη ως προς τις παραμέτρους της και δίνει τη δυνατότητα να γενικευτούν τα συμπεράσματα που εξάγονται από ένα δείγμα, για αυτό και δίνει επιπλέον τη δυνατότητα να υπολογίσουμε και το σφάλμα εκτίμησης. Η δειγματοληψία χωρίς πιθανότητα γίνεται σε περιπτώσεις που δεν είναι εφικτή η δειγματοληψία με πιθανότητα ή όταν ενδιαφέρει να γίνει γρήγορα μια εφαρμογή της έρευνας, για παράδειγμα σε μια πιλοτική μελέτη. Τα αποτελέσματα μιας έρευνας που έχει γίνει με δειγματοληψία χωρίς πιθανότητα δεν είναι γενικεύσιμα, ούτε δύναται να υπολογισθεί το σφάλμα εκτίμησης και ως εκ τούτου είναι περιορισμένης χρήσης και εφαρμογής και θα πρέπει να χρησιμοποιούνται προσεκτικά (Λαγουμιντζής, Βλαχόπουλος & Κουτσογιάννης, 2015).

Όσο μεγαλύτερο είναι το δείγμα τόσο καλύτερα αντιπροσωπεύει τον πληθυσμό. Το μεγάλο μέγεθος ωστόσο, δεν είναι ικανό να εγγυηθεί την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Σημασία έχει η σύνθεση του δείγματος, δηλαδή να αντιπροσωπεύονται σε αυτό όλα τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού. Εάν υπάρχει ανομοιογένεια στον πληθυσμό, χρειαζόμαστε μεγαλύτερο δείγμα. Σε μικρού μεγέθους δείγματα, βελτίωση στην ακρίβεια επιτυγχάνεται με σχετικά μικρή αύξηση του μεγέθους (2% βελτίωση στην ακρίβεια με αύξηση 56 ατόμων). Το αντίθετο ισχύει για τα μεγάλα δείγματα, όπου βελτίωση στην ακρίβεια επιτυγχάνεται με μεγάλη αύξηση του μεγέθους (0,5% βελτίωση στην ακρίβεια με αύξηση 900 ατόμων) (Λαγουμιντζής, Βλαχόπουλος & Κουτσογιάννης, 2015).

Η ακρίβεια της γενίκευσης των αποτελεσμάτων ενός δείγματος στον πληθυσμό από τον οποίο προέρχεται, εξαρτάται από την αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος. Για να μπορούν να γενικευτούν τα αποτελέσματα μιας έρευνας από το δείγμα που μελετήθηκε στο συνολικό πληθυσμό, πρέπει να έχουν ακολουθηθεί οι αρχές της δειγματοληψίας (sampling). Η αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος καθορίζεται από δύο στοιχεία κυρίως: α) τη μέθοδο επιλογής των υποκειμένων που θα αποτελέσουν το δείγμα και β) το μέγεθος του δείγματος. Επομένως, τα βασικά προβλήματα που καλείται να αντιμετωπίσει ένας ερευνητής σχετικά με τη δειγματοληψία είναι: α) να είναι το δείγμα όσο το δυνατόν πιο όμοιο με τον πληθυσμό ώστε να εξασφαλίζεται μια ικανοποιητικότερη προσέγγιση στις εκτιμήσεις για την αληθή τιμή του πληθυσμού β) να επιλέξει το μέγεθος του δείγματος έτσι ώστε να είναι εφικτή η έρευνά του (π.χ. από πλευράς κόστους, χρόνου) (Μάρκος, 2014).

5.3. Η ΕΡΕΥΝΑ ΜΑΣ

Η συγκεκριμένη έρευνα παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον διότι πραγματεύεται την έννοια του απείρου που κατά κάποιο τρόπο υπάρχει παντού γύρω μας και οι καθημερινές εμπειρίες οδηγούν τον κάθε άνθρωπο να διαμορφώσει σχετικές αντιλήψεις για την έννοιά του από μικρή ίσως ηλικία. Η καθολικότητα αυτή σε συνδυασμό με τον ιδιαίτερα σπουδαίο χαρακτήρα της ίδιας της έννοιας του απείρου στη μαθηματική σκέψη θεωρείται ότι καθιστούν τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής χρήσιμα. Η έννοια του απείρου αποτελεί μία από τις μεγαλύτερες προκλήσεις για την ανθρώπινη νόηση.

Δεδομένου ότι οι καθημερινές μας εμπειρίες λαμβάνουν χώρα σε έναν κόσμο με πεπερασμένες ποσότητες, το άπειρο δεν φαίνεται να έχει καμία θέση στην πραγματική ζωή. Για αυτό το λόγο, όταν ερχόμαστε αντιμέτωποι με την κάθε άλλο παρά κατανοητή για μας φύση του, τα ηνία παίρνει η διαίσθησή μας που θέτει στο νου τα όρια τού τι είναι λογικό και τι όχι· τι συνάδει με τα βιώματά μας και τι αποκλίνει από αυτά. Στο πεδίο όμως που εισέρχεται το άπειρο η διαίσθηση δεν είναι καλός οδηγός. Η λογική που το διαπερνά δεν ταυτίζεται με τη δική μας και δημιουργούνται έτσι συγκρούσεις και εκπλήξεις (Tsamir & Dreyfus, 2002).

Η έρευνα δεν σκοπεύει να εξαντλήσει το πεδίο της μελέτης των πεποιθήσεων των μαθητών/φοιτητών για την έννοια του απείρου και της σύγκρισης απειροσυνόλων. Μπορεί να αποτελέσει όμως το έναυσμα για περεταίρω έρευνα, αφού πρώτα συμβάλλει η ίδια με τα αποτελέσματά της όσο το δυνατόν περισσότερο.

Σκοπός της έρευνας είναι η διερεύνηση των πεποιθήσεων των μαθητών Λυκείου και των φοιτητών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου σχετικά με την έννοια του απείρου. Ειδικότερα διερευνώνται ο τρόπος που προσεγγίζεται το άπειρο (δυνητικό/πραγματικό) και τα εργαλεία (διαισθητικά/μαθηματικά) που οι μαθητές και οι φοιτητές χρησιμοποιούν για να τεκμηριώσουν τις πεποιθήσεις τους σχετικά με το άπειρο. Τυχόν διαφοροποιήσεις στις πεποιθήσεις και στον τρόπο σκέψης των μαθητών/φοιτητών όταν μεταβαίνουν από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, σχολιάζονται και συγκρίνονται και με άλλες έρευνες, αν και το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό για γενικευμένες συγκρίσεις.

Οι πεποιθήσεις υποβάλλονται από συνειδητούς ή και υποσυνείδητους κανόνες, ιδέες, γνώσεις, αναπαραστάσεις και ερμηνείες σε έμμεση ή άμεση σχέση με την καθαρά μαθηματική εμπειρία. Μπορεί να οριστούν ως η υποκειμενική γνώση του ατόμου, οι θεωρίες και οι αντιλήψεις του και περιλαμβάνουν οτιδήποτε κάποιος θεωρεί ως αληθινή γνώση, ακόμη και αν δεν μπορεί να παρέχει πειστικά στοιχεία προκειμένου να αποδείξει τούτο (Pehkonen, 2001).

Η αλλαγή των πεποιθήσεων είναι μια δυνατή αλλά όχι εύκολη υπόθεση. Η ανάπτυξη των συναισθηματικών ικανοτήτων μέσω της διδασκαλίας είναι ίσως το πιο σημαντικό βήμα. Για να αλλάξει κάποιος μια πεποίθηση πρέπει καταρχήν να γνωρίζει και να έχει συνειδητοποιήσει την ύπαρξη και το περιεχόμενό της. Σημαντική συνιστώσα των πεποιθήσεων είναι οι αυτοαναφορικές πεποιθήσεις που αναφέρονται στα πιστεύω που έχει ένα άτομο αναφορικά με προσωπικά του χαρακτηριστικά και ικανότητες και περιλαμβάνουν διαστάσεις όπως η αυτοϊδέα, η αυτεπάρκεια και η αυτοεκτίμηση (Καγκουρά Θ. κ.α., 2008).

Η συγκεκριμένη έρευνα είναι διερευνητική, ποιοτική, δειγματοληπτική και υλοποιήθηκε με ερωτηματολόγιο που στάλθηκε μέσω διαδικτύου. Εστιάζει στον τομέα των Μαθηματικών και επιδιώκει να συμβάλλει στην ανάπτυξη των επιστημονικών πεδίων που ασχολούνται με τα Μαθηματικά και γενικότερα στη βελτίωση της ποιότητας της εκπαίδευσης. Ο ρόλος των Μαθηματικών σε όλες τις επιστήμες είναι βοηθητικός. Όλες είναι βασισμένες στα Μαθηματικά και τα χρησιμοποιούν για να λύσουν τα δικά τους προβλήματα. Τα Μαθηματικά δεν αποτελούν ένα απλό μάθημα στο σχολείο, αλλά αποτελούν ένα μάθημα απαραίτητο σε κάθε άνθρωπο στην καθημερινή του ζωή.

Είναι γεγονός η δυσκολία πολλών μαθητών να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις των Μαθηματικών και στην απόκτηση των απαραίτητων δεξιοτήτων. Ίσως η ειδική ορολογία των Μαθηματικών και τα αφηρημένα σύμβολα να είναι αυτά που δυσκολεύουν τους μαθητές να κατακτήσουν τις διάφορες έννοιες. Ίσως η διδασκαλία των Μαθηματικών η οποία δεν προάγει την κατανόηση μέσω της ενεργητικής συμμετοχής των μαθητών και τη διαδικασία ανακάλυψης και κατασκευής της μαθηματικής γνώσης, να κατέχει ένα μεγάλο μερίδιο ευθύνης σε αυτό. Είναι γεγονός ότι μεγάλο μέρος μαθητών, ακόμα και ως μετέπειτα φοιτητές θετικής κατεύθυνσης, νιώθει άγχος και παρουσιάζει μειωμένη δεξιότητα όταν καλείται να επιλύσει δύσκολα μαθηματικά προβλήματα το οποίο μπορεί και να οφείλεται σε προγενέστερη άσχημη εμπειρία στα Μαθηματικά.

Η έρευνα αυτή επιχειρεί μια προσέγγιση στην ιδιαίτερα περίπλοκη και ασαφή για πολλούς μαθητές και φοιτητές «έννοια του απείρου» και μελετά τις πεποιθήσεις τους σχετικά με αυτό. Στα Μαθηματικά οι πεποιθήσεις μας αποτελούνται από το σύνολο των συνειδητών και υποσυνείδητων εννοιών, κανόνων, αναπαραστάσεων και εμπειριών που έχουν άμεση ή έμμεση σχέση με τα Μαθηματικά (Φιλίππου & Χρήστου, 2001).

Στη συγκεκριμένη έρευνα συμμετείχαν 51 μαθητές δύο Γενικών Λυκείων της Αττικής και 103, κυρίως πρωτοετείς, φοιτητές των Σχολών Πολιτικών Μηχανικών και Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Ε.Μ.Π. Η έρευνα διεξήχθη κατά την περίοδο του πρώτου τετραμήνου του σχολικού έτους 2020-21. Η περίοδος αυτή δεν ευνόησε την συμμετοχή των μαθητών διότι λόγω των αυστηρών μέτρων για την εξάπλωση του Covid-19 η επικοινωνία των καθηγητών με τους μαθητές ήταν εξ' αποστάσεως και η συμπλήρωση των ερωτηματολογίων έγινε προαιρετικά. Παρόλα αυτά από την πλευρά της ερευνήτριας έγιναν όλες οι δυνατές προσπάθειες ώστε να αποφευχθούν όλοι οι παράγοντες που πιθανόν θα μείωναν την αξιοπιστία και εγκυρότητα της έρευνας.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με την συμπλήρωση ερωτηματολογίου το οποίο δημιουργήθηκε μέσω του Google Forms, ένα κατάλληλο λογισμικό διαχείρισης ερευνών και το οποίο παρουσιάζεται στο παράρτημα της παρούσας εργασίας. Συμπληρώθηκε διαδικτυακά από μαθητές και των τριών τάξεων δύο Γενικών Λυκείων της Αττικής και από πρωτοετείς φοιτητές των Σχολών Πολιτικών Μηχανικών και Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Ε.Μ.Π.

Για τη δημιουργία του ερωτηματολογίου λήφθηκαν υπόψη όλα τα ανωτέρω χαρακτηριστικά μιας επιστημονικής έρευνας, ώστε να οδηγηθούμε σε μια όσο το δυνατόν πιο αξιόπιστη έρευνα, της οποίας όμως τα αποτελέσματα δεν μπορούν να γενικευθούν καθόσον το δείγμα που αξιοποιήθηκε δεν είναι αντιπροσωπευτικό του συνολικού πληθυσμού.

Το ερωτηματολόγιο δημιουργήθηκε με μεγάλη προσοχή ώστε να διαθέτει πληρότητα, σαφήνεια, συνοχή, κατάλληλη δομή, σαφείς επεξηγήσεις, άρτια εμφάνιση και να μην μακροσκελές. Πριν καταλήξουμε στην τελική μορφή του ερωτηματολογίου προηγήθηκε πιλοτική έρευνα με τη χρήση του πιλοτικού ερωτηματολογίου, το οποίο σύμφωνα με έρευνες που προαναφέραμε, οδηγεί στην αποτελεσματικότερη δομή του ερωτηματολογίου. Στην παρούσα πιλοτική έρευνα το ερωτηματολόγιο διανεμήθηκε σε 10 φοιτητές διαφορετικών σχολών για να διαπιστωθούν τυχόν δυσλειτουργίες/αδυναμίες του. Κατά τη διεξαγωγή της πιλοτικής έρευνας έγιναν οι απαραίτητες τροποποιήσεις στη διατύπωση των ερωτήσεων και στη σειρά των ερωτήσεων, ώστε να εξυπηρετηθεί η αποτελεσματικότητα του ερωτηματολογίου. Η τελική μορφή του ερωτηματολογίου η οποία αποτελεί το μέσο με το οποίο διερευνήσαμε το σκοπό της έρευνάς μας, αποτελείται από επτά ερωτήσεις σχετικά με την έννοια του απείρου. Οι ίδιες ερωτήσεις δόθηκαν και στους φοιτητές και στους μαθητές. Η μορφή των ερωτήσεων συνδύαζε δύο είδη: α) την επιλογή σωστής απάντησης (πολλαπλή επιλογή) και β) τη συμπλήρωση κενών. Δεν αρκεστήκαμε δηλαδή, εξαιτίας της εξ αποστάσεως διαδικασίας, να περιοριστούμε σε ερωτήσεις μόνο πολλαπλής επιλογής. Κάτι τέτοιο θα μείωνε την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων μας και δεν θα βοηθούσε στην πραγματοποίηση του σκοπού της έρευνας. Για να μπορέσουμε να υλοποιήσουμε το σκοπό μας και να αποκτήσουμε εικόνα των πεποιθήσεων του πληθυσμού μας χρειαζόμασταν την αναλυτικότερη σκέψη του. Για το λόγο αυτό ζητήσαμε σε όλες τις ερωτήσεις να αναλυθεί ο τρόπος σκέψης τεκμηριώνοντας τις απαντήσεις.

Ως προς τη δομή του, το ερωτηματολόγιο αποτελείται από τρία μέρη. Σε κάθε μέρος προσεγγίζουμε με διαφορετικό τρόπο την έννοια του απείρου με σκοπό να διερευνήσουμε τις πεποιθήσεις του πληθυσμού μας σε καθέναν από αυτούς. Το πρώτο μέρος αφορά στη σύγκριση απειροσυνόλων (ερώτηση 1 και 2), το δεύτερο στην έννοια του απείρου μέσω των παραδόξων του Ζήνωνα και του ξενοδοχείου του Hilbert (ερώτηση 3 και 4) και τα τρίτο μέρος αφορά σε πράξεις μεταξύ αριθμών με άπειρα δεκαδικά ψηφία (ερώτηση 5) και άθροισμα απείρων όρων (ερώτηση 6 και 7). Το ερωτηματολόγιο στην ακριβή μορφή που δόθηκε επισυνάπτεται στο παράρτημα της παρούσας εργασίας.

Τα δεδομένα της έρευνας, όπως προαναφέρθηκε, συλλέχθηκαν διαδικτυακά, δεδομένης της κατάστασης της πανδημίας λόγω Covid-19 και η αποδελτίωσή τους έγινε με μεγάλη προσοχή και με τη μέγιστη δυνατή προσπάθεια να μην επηρεαστούν από την υποκειμενικότητα της ερευνήτριας, η οποία όπως σε όλες τις έρευνες, θεωρείται δεδομένη αλλά δεν αντιμετωπίζεται ως εμπόδιο. Θεωρούμε ότι ο κάθε ερευνητής σ' ένα πλαίσιο αναστοχασμού είναι καλό να εξετάζει τη δική του υποκειμενικότητα, καθώς και εκείνη των συμμετεχόντων στην έρευνα, και να λαμβάνει υπόψη του τρόπους με τους οποίους οι προσωπικές θέσεις, επενδύσεις, αξίες, εμπειρίες και προσδοκίες και των δύο πλευρών επηρεάζουν την ερευνητική διαδικασία, την ανάλυση των δεδομένων και τα αποτελέσματα της έρευνας.

Η συλλογή των δεδομένων δεν πραγματοποιήθηκε από αντιπροσωπευτικό δείγμα, παρόλο που έγιναν πολλές προσπάθειες προσέγγισης μαθητών από σχολεία διαφόρων περιοχών. Έτσι είναι πιθανόν στα συμπεράσματα να εμφανίζεται μεροληψία ή σφάλμα (bias) ως αποτέλεσμα του μεροληπτικού δείγματος (biased sample). Πρέπει να τονιστεί ότι ο όρος "μεροληπτικό" δεν υπονοεί ανεντιμότητα της ερευνήτριας, αλλά μόνο ότι τα χαρακτηριστικά του δείγματος δεν είναι αντιπροσωπευτικά του πληθυσμού.

Το σφάλμα δειγματοληψίας δεν είναι απαραίτητα αποτέλεσμα σφαλμάτων που έχουν γίνει κατά τη διάρκεια της δειγματοληψίας. Αντίθετα, μπορεί να προκύψει και λόγω της τυχαίας επιλογής διαφορετικών ατόμων (Μάρκος, 2014).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΕΥΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Το παρόν ερωτηματολόγιο περιέχει εκτός των δημογραφικών στοιχείων, εφτά (7) ερωτήσεις. Από αυτές, οι δύο πρώτες ερωτήσεις είναι πολλαπλής επιλογής με αιτιολόγηση και εστιάζουν στη σύγκριση της πληθικότητας απείρων συνόλων. Οι δυο επόμενες είναι ερωτήσεις ανάπτυξης παραγράφου και αφορούν στα παράδοξα του απείρου και συγκεκριμένα στο παράδοξο της Διχοτομίας ή αλλιώς Διχοτόμησης του Ζήνωνα και στο παράδοξο του Ξενοδοχείου του Hilbert. Η πέμπτη ερώτηση αφορά σε ένα άθροισμα πραγματικών αριθμών με άπειρα δεκαδικά ψηφία και οι δύο τελευταίες ερωτήσεις περιλαμβάνουν αθροίσματα απείρων όρων.

Γενικά, θα αναλυθούν οι πεποιθήσεις των μαθητών και φοιτητών για το άπειρο, θα μελετηθεί η οπτική γωνία με την οποία το αντιμετωπίζουν, δηλαδή ως πραγματικό ή δυνητικό και το κατά πόσο χρησιμοποιούν μαθηματικούς τρόπους προσέγγισης του απείρου. Όπως έχει αναφερθεί, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, το άπειρο διαχωρίζεται σε εν δυνάμει (δυνητικό) άπειρο και εν ενεργεία (πραγματικό) άπειρο. Το πρώτο είναι εκείνο που εκφράζει συνεχιζόμενες διεργασίες ή κινήσεις άνευ τέλους, διαδικασίες που δεν τελειώνουν ποτέ. Αντίθετα, το ενεργό (πραγματικό) άπειρο αποτελεί μια τετελεσμένη οντότητα που είναι το αποτέλεσμα μιας άνευ τέλους διεργασίας. Προφανώς μια χωρίς τέλος διαδικασία δεν καταλήγει σε κάποιο έσχατο αποτέλεσμα ωστόσο μεταφορικά ο ανθρώπινος νους εννοιοποιεί το αποτέλεσμα αυτό με αναφορά σε μια διεργασία που έχει όντως τέλος (Σπανού, 2019).

Α. Δημογραφικά στοιχεία

Σε σύνολο 51 μαθητών που απάντησαν στο ερωτηματολόγιο, τα 34 άτομα ήταν αγόρια και τα 17 άτομα ήταν κορίτσια, δηλαδή ποσοστό 66,7% και 33,3% αντίστοιχα.

Σε σύνολο 103 φοιτητών που απάντησαν στο ερωτηματολόγιο, τα 69 άτομα ήταν αγόρια και τα 34 άτομα ήταν κορίτσια, δηλαδή ποσοστό 67% και 33% αντίστοιχα.

Όπως φαίνεται από την έρευνα τόσο στους μαθητές όσο και στους φοιτητές, συμμετείχε το διπλάσιο σχεδόν ποσοστό αγοριών από αυτό των κοριτσιών, διότι τα μαθηματικά θεωρούνται «ανδρικό» μάθημα, γι’ αυτό και στις πολυτεχνικές σχολές εισάγονται περισσότερα αγόρια.

Έχουν γίνει σχετικές έρευνες που δείχνουν ότι τα μαθηματικά, η χημεία και η φυσική, δηλαδή τα μαθήματα των θετικών επιστημών, θεωρούνται και από τα δύο φύλα ότι είναι «ανδρικά» μαθήματα, ενώ από την άλλη πλευρά οι ξένες γλώσσες και η ιστορία, δηλαδή τα θεωρητικά μαθήματα, «ανήκουν» στις γυναίκες. Παρά τη μεγάλη σειρά βημάτων που έχουν γίνει με σκοπό να επέλθει ισότητα ανάμεσα στα δύο φύλα (ακόμα και στο πεδίο της εκπαίδευσης), τα παιδιά ακόμη ενστερνίζονται στάσεις, αντιλήψεις, πεποιθήσεις και στερεότυπα διαχωρισμού των δύο φύλων στις ακαδημαϊκές επιδόσεις (Ψάλτη κ.ά., 2007).

Β. Σχολείο/Σχολή φοίτησης

Τα σχολεία φοίτησης των μαθητών του δείγματος είναι δύο Γενικά Λύκεια του νομού Αττικής και οι σχολές φοίτησης των φοιτητών είναι:

- Η Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
- Η Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Αμφότερες οι σχολές απαιτούν υψηλές επιδόσεις στα μαθήματα θετικής κατεύθυνσης και πάνω από 16.000 μόρια για να εισαχθεί κάποιος. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε για τους φοιτητές ότι έχουν σε μεγάλο βαθμό μαθηματική επάρκεια.

Ως μαθηματική επάρκεια ορίζεται η ικανότητα του ατόμου να διαθέτει κατάλληλες γνώσεις, σαφή και πλήρη αντίληψη, άποψη, δράση και αξιοποίηση των μαθηματικών στοιχείων σε ποικίλες περιστάσεις της καθημερινής ζωής. Ο όρος μαθηματική επάρκεια εμπεριέχει μεταξύ άλλων, ικανότητες όπως: (Niss & Hojgaard, 2011)

1. τη σκέψη με μαθηματικό τρόπο

2. την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων

3. την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού

Από σχετική έρευνα της Montoro (2005) που πραγματοποιήθηκε σε φοιτητές του τμήματος Αθλητισμού, Βιολογίας και Μαθηματικών στο Ρίο Νέγρο της Αργεντινής φάνηκε ότι οι φοιτητές που είχαν παρακολουθήσει μαθήματα μαθηματικού περιεχομένου απαντούσαν πιο σωστά στις ερωτήσεις για τη φύση του απείρου, ενώ εκείνοι που δεν είχαν μαθηματική εκπαίδευση συχνά συνέχεαν το άπειρο με το «πάρα πολύ».

Γ. Έτος φοίτησης

Το σύνολο των 51 μαθητών που απάντησαν, προέρχεται και από τις τρεις τάξεις του Λυκείου. Συγκεκριμένα: οι 18 είναι μαθητές της Α' Λυκείου, ποσοστό 35% οι 22 είναι της Β' Λυκείου, ποσοστό 43% και οι 11 είναι της Γ' Λυκείου, ποσοστό 22%.

Στο σύνολο των 103 φοιτητών που απάντησαν, οι 101 είναι πρωτοετείς, ποσοστό 98%, ένας είναι δευτεροετής, ποσοστό 1% και ένας κάνει μεταπτυχιακές σπουδές, ποσοστό 1%. Όπως προκύπτει, η συντριπτική πλειοψηφία του δείγματος είναι πρωτοετείς φοιτητές.

6.1. ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Η πρώτη ερώτηση που δόθηκε στους μαθητές και φοιτητές είναι η παρακάτω ερώτηση πολλαπλής επιλογής, η οποία στη συνέχεια έπρεπε να αιτιολογηθεί.

Εάν Α είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών (φυσικών, ακεραίων, ρητών και αρρήτων) και Β είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών, να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

- **Το Α περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Β**
- **Το Β περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Α**
- **Το Α περιέχει ίσο αριθμό στοιχείων με το Β**

Η αλληλεπίδρασή μας με τον πεπερασμένο κόσμο έχει δημιουργήσει μέσα μας την ιδέα ότι ένα σύνολο είναι μεγαλύτερο από ένα υποσύνολό του. Έτσι λοιπόν, όταν καλούμαστε να ασχοληθούμε με τα απειροσύνολα και τους υπερπεπερασμένους αριθμούς, πρέπει να νικήσουμε τις ισχυρές αυτές ιδέες. Πράγματι, η ιδέα της '1-1' αντιστοιχίας, ως κριτήριο σύγκρισης συνόλων, απαιτεί μια δραστική αλλαγή στη σκέψη: το όλο μπορεί τώρα να ισούται (όσον αφορά την πληθικότητά του) με ένα από τα μέρη που το αποτελούν. Σύμφωνα με τους Wijeratne και Zazkis (2016), ένα απειροσύνολο μπορεί να οριστεί ως ένα σύνολο που εμφανίζει ‘1-1’ αντιστοιχία με ένα υποσύνολό του, κάτι που οδηγεί φυσικά σε αποτελέσματα που έρχονται ενάντια στη διαίσθησή μας. Ακόμη και μεταξύ των μαθηματικών και των ερευνητών του δυνητικού και του πραγματικού απείρου, υπάρχει η τάση το πραγματικό άπειρο να ερμηνεύεται με όρους διαδικασιών, κάτι που είναι περισσότερο συμβατό με τη διαίσθησή μας από ότι η ‘1-1’ αντιστοιχία (Σπανού, 2019).

Α. ΜΑΘΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις ταξινομούνται σε τρεις βασικές κατηγορίες:

1ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι το Α περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Β, με βασική αιτιολόγηση ότι το Β παραλείπει κάποιους αριθμούς σε σχέση με το Α ή ότι είναι υποσύνολο του Α (38/51). Για παράδειγμα:

- *Το σύνολο Α περιέχει όλους τους πραγματικούς, όπως και τους φυσικούς, άρα θα περιέχει παραπάνω απ' το Β που περιέχει ΜΟΝΟ τους φυσικούς.*

2ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι το Α περιέχει ίδιο αριθμό στοιχείων με το Β με βασική αιτιολόγηση ότι και τα δυο σύνολα είναι άπειρα (10/51). Για παράδειγμα:

- *Οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι και οι πραγματικοί αριθμοί είναι άπειροι. Αφού δεν υπάρχουν μεγαλύτερος άπειρος και μικρότερος άπειρος, το Α περιέχει ίσο αριθμό στοιχείων με το Β.*

3ον) Απαντήσεις αντιφατικές (3/51), όπως:

- *Οι πραγματικοί αριθμοί είναι όλοι οι αριθμοί ενώ οι φυσικοί νομίζω είναι μόνο οι θετικοί. Τώρα που τελείωσα το τεστ και το ξαναβλέπω νομίζω η απάντηση είναι ότι είναι ίσο γιατί θα είναι και τα δύο άπειρα. Αλλά δεν μου φαίνεται λογικό όποτε το αφήνω.*

Β. ΦΟΙΤΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις ταξινομούνται σε τρεις βασικές κατηγορίες:

1ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται πως το Α περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Β, (79/103) με βασικές αιτιολογήσεις ότι:

- **Το Β παραλείπει κάποιους αριθμούς σε σχέση με το Α ή ότι είναι υποσύνολο του Α (56/103). Για παράδειγμα:**
    - *Προφανές, αφού το Β είναι υποσύνολο του Α δηλαδή το Α περιέχει όλα τα στοιχεία του Β και κάποια περισσότερα (όπως τις ρίζες).*
    - *Το σύνολο Α περιέχει φυσικούς, ακέραιους, ρητούς και άρρητους, ενώ το σύνολο Β περιέχει μόνο φυσικούς, οπότε είναι λογικό το Α να περιλαμβάνει περισσότερα στοιχεία από το Β.*
- **το Α είναι υπεραριθμήσιμο ενώ το Β είναι αριθμήσιμο (15/103). Για παράδειγμα:**
    - *Είναι ένα θέμα στη θεωρία των συνόλων και την πληθικότητα των συνόλων. Τα άπειρα σύνολα δεν είναι όλα τα ίδια όταν πρόκειται για τη μέτρηση των μεγεθών. Υπάρχουν άπειρα σύνολα που είναι απείρως περισσότερα από μερικά άπειρα σύνολα. Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι ένα μετρήσιμο σύνολο του οποίου ο απόλυτος αριθμός είναι aleph-null. Όμως το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι μη μετρήσιμο οπότε έχει μεγαλύτερο πληθάριθμο (aleph-one).*
    - *Η συγκεκριμένη αιτιολόγηση είναι η ενδεδειγμένη σύμφωνα με τον Cantor, ο οποίος απέδειξε ότι ο πληθάριθμος των πραγματικών αριθμών (άπειρα υπεραριθμήσιμο σύνολο) είναι μεγαλύτερος από τον πληθάριθμο των φυσικών (άπειρα αριθμήσιμο σύνολο).*
- **Δεν υπάρχει αντιστοίχιση κάθε στοιχείου του Α με του Β (8/103).**

  Στην συγκεκριμένη περίπτωση προφανώς οι φοιτητές στηρίχθηκαν στο γεγονός ότι εφόσον δεν υπάρχει ένα προς ένα αντιστοίχιση ανάμεσα στα δυο σύνολα, τότε τα σύνολα δεν είναι ισοπληθικά. Συνεπώς το ένα θα είναι μεγαλύτερο από το άλλο. Ωστόσο η αιτιολόγηση είναι ελλιπής διότι δεν διευκρινίζεται για ποιο λόγο το Α είναι μεγαλύτερο από το Β.

2ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι το Α περιέχει ίδιο αριθμό στοιχείων με το Β με βασική αιτιολόγηση ότι και τα δυο σύνολα είναι άπειρα (20/103).

Ενδεικτικές αιτιολογήσεις που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι εξής:

- *'Εστω πως το Β περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Α. Τότε το σύνολο των πραγματικών θα είχε άνω φράγμα το οποίο είναι άτοπο. Όμοια κ για την περίπτωση που το Α θα περιείχε περισσότερα στοιχεία από το Β.*
- *Και τα δύο σύνολα περιέχουν άπειρα στοιχεία, είναι μη αριθμήσιμα σύνολα.*

3ον) Απαντήσεις αντιφατικές (4/103) όπως:

- *Αυτή είναι προφανώς η πρώτη απάντηση που πιστεύω έρχεται στο μυαλό όλων, αφού το σύνολο Α περιέχει αριθμούς που το Β δεν συμπεριλαμβάνει, από την άλλη όμως οι αριθμοί και των δύο συνόλων είναι άπειροι (και οι φυσικοί είναι άπειροι αλλά και οι ρητοί, άρρητοι κ.λ.π), οπότε το ερώτημα ίσως είναι πιο περίπλοκο απ' ότι φαίνεται. Αν μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχουν διαφόρων μεγεθών άπειρα, τότε η απάντηση είναι αυτή που επέλεξα, μάλλον. Αν όχι, τότε δεν έχω ιδέα.*

Συγκεντρωτικά:

1. **Οι πεποιθήσεις των μαθητών βασίζονται πάνω σε δυο βασικές στρατηγικές σκέψης: α) την άποψη ότι το σύνολο Α περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Β με βασική αιτιολόγηση ότι το Β είναι υποσύνολο του Α (38/51), σε ποσοστό 74% και β) την άποψη ότι το Α περιέχει ίδιο αριθμό στοιχείων με το Β με βασική αιτιολόγηση ότι και τα δυο σύνολα είναι άπειρα (10/51), σε ποσοστό 20%. Τρεις μαθητές (3/51), σε ποσοστό 6%, έδωσαν αντιφατικές απαντήσεις.**
2. **Οι πεποιθήσεις των φοιτητών βασίζονται πάνω σε δυο βασικές στρατηγικές σκέψης: α) την άποψη ότι το Α περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Β, με βασικές αιτιολογήσεις ότι: 1ον) το Β είναι υποσύνολο του Α (56/103), σε ποσοστό 54%, 2ον) το Α είναι υπεραριθμήσιμο ενώ το Β είναι αριθμήσιμο (15/103), σε ποσοστό 15% και 3ον) δεν υπάρχει αντιστοίχιση κάθε στοιχείου του Α με του Β (8/103), σε ποσοστό 8% και β) την άποψη ότι το Α περιέχει ίδιο αριθμό στοιχείων με το Β με βασική αιτιολόγηση ότι και τα δυο σύνολα είναι άπειρα (20/103), σε ποσοστό 19%. Τέσσερις φοιτητές (4/103), δηλαδή ποσοστό 4%, έδωσαν αντιφατικές αιτιολογήσεις.**
3. **Το 74% του δείγματος των μαθητών (38/51) και το 54% του δείγματος των φοιτητών (56/103), αντιμετωπίζουν ξεκάθαρα το άπειρο ως πραγματικό.**

Δηλώνουν ότι το Β είναι υποσύνολο του Α και σκεπτόμενοι ότι «το όλο είναι μεγαλύτερο του μέρους», υπεργενικεύουν τα χαρακτηριστικά των πεπερασμένων συνόλων και στα απειροσύνολα.

4. **Το 20% των μαθητών (10/51) και των φοιτητών (20/103) αντιμετωπίζουν ξεκάθαρα το άπειρο ως δυνητικό. Δηλώνουν ότι και τα δύο σύνολα περιέχουν άπειρο αριθμό στοιχείων, γεγονός που σημαίνει ότι το άπειρο το αντιμετωπίζουν ως κάτι το ατελείωτο.**
5. **Οι φοιτητές διαφοροποιούν περισσότερο τις αιτιολογήσεις τους σε σχέση με τους μαθητές και τις αναπτύσσουν περισσότερο, προφανώς επειδή έχουν ανώτερο γνωστικό επίπεδο. Παρόλα αυτά όμως, μόνο ένα μικρό ποσοστό αυτών, δηλαδή το 15%, (15/103) έδωσε την ενδεδειγμένη αιτιολόγηση, δηλαδή ότι το Α είναι υπεραριθμήσιμο ενώ το Β είναι αριθμήσιμο σύμφωνα με το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor.**
6. **Τέλος ένα μικρό ποσοστό μαθητών 6% (3/51) και φοιτητών 4% (4/103) προσπαθούν να αιτιολογήσουν την επιλογή τους πέφτοντας σε αντιφάσεις. Τα διαισθητικά κριτήρια που χρησιμοποιούν για να αιτιολογήσουν την επιλογή της ορθής απάντησης αποδεικνύονται αντίθετα το ένα με το άλλο, γεγονός που αναδεικνύει την αδυναμία και τη δυσκολία κατανόησης του απείρου. Για το λόγο αυτό δηλώνουν ταυτόχρονα στην ίδια αιτιολόγηση αφενός μεν ότι το τα δύο σύνολα είναι ίσα και αφετέρου ότι το ένα σύνολο έχει περισσότερα στοιχεία από το άλλο.**

6.2 ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Η δεύτερη ερώτηση που δόθηκε στους μαθητές και φοιτητές είναι ερώτηση πολλαπλής επιλογής, η οποία έπρεπε επίσης να αιτιολογηθεί.

Δίνεται το σύνολο Γ= {1,2,3,4,....} και το σύνολο Δ={1,4,9,16,....}. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

- **Το Γ περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Δ**
- **Το Δ περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Γ**
- **Το Γ περιέχει ίσο αριθμό στοιχείων με το Δ**

Σύμφωνα με τη θεωρία του Cantor που πραγματεύεται τα απειροσύνολα και τη σύγκρισή τους, δηλαδή τους φυσικούς αριθμούς, τους ακεραίους, τους πρώτους αριθμούς, τα τετράγωνα των φυσικών αριθμών, τους πραγματικούς αριθμούς, εάν αναλογιστούμε ποιο από τα σύνολα αυτά είναι μεγαλύτερο, η διαίσθησή μας υπαγορεύει ότι για παράδειγμα το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι μικρότερο από αυτό των ακεραίων, ενώ είναι μεγαλύτερο από αυτό των τετραγώνων (Σπανού, 2019).

Η προκειμένη περίπτωση, απαιτούσε από τους μαθητές και τους φοιτητές να συγκρίνουν δύο απειροσύνολα όπου το δεύτερο περιλαμβάνει τα τετράγωνα των αριθμών του πρώτου. Οι αποστάσεις μεταξύ των στοιχείων φαίνεται να παίζουν σημαντικό ρόλο στη σκέψη των μαθητών και των φοιτητών θεωρώντας ότι η απόσταση ανάμεσα στους αριθμούς του συνόλου Δ είναι μεγαλύτερη από την απόσταση μεταξύ των αριθμών του συνόλου Γ, άρα από το Δ «λείπουν» περισσότεροι στοιχεία και γι΄αυτό έχει μικρότερη πληθικότητα από το Γ.

Αυτό έχει καταδειχθεί εξάλλου από διάφορες έρευνες, που μελέτησαν το ρόλο των αποστάσεων μεταξύ των στοιχείων, δηλαδή για παράδειγμα το σύνολο των άρτιων αριθμών {2, 4, 6, 8...} έχει περισσότερα στοιχεία από το σύνολο των τέλειων τετραγώνων {1, 4, 9, 16...} διότι δύο διαδοχικά στοιχεία του δεύτερου συνόλου έχουν περισσότερα στοιχεία ανάμεσά τους από ότι αυτά του πρώτου (Tsamir & Tirosh 1992, Tsamir, 1999a, Tall & Tirosh, 2001,Tsamir & Dreyfus, 2002).

Α. ΜΑΘΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις ταξινομούνται σε τρεις βασικές κατηγορίες:

1^{ον}) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι το Γ περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Δ με βασική αιτιολόγηση ότι το Δ παραλείπει κάποιους αριθμούς σε σχέση με το Γ ή ότι είναι υποσύνολο του Γ (24/51).

Οι μαθητές προφανώς θεωρούν ότι επειδή η απόσταση μεταξύ των στοιχείων του Δ είναι μεγαλύτερη από αυτή του Γ, το Δ περιέχει λιγότερα στοιχεία από το Γ και συνεπώς είναι υποσύνολό του.

2^{ον}) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι το Γ περιέχει ίσο αριθμό στοιχείων με το Δ με βασική αιτιολόγηση ότι:

- **Και τα δυο περιέχουν άπειρους αριθμούς (17/51).**
- **Υπάρχει 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα δύο σύνολα (7/51).**

Προφανώς οι μαθητές θεωρούν ότι τα δυο απειροσύνολα περιέχουν ίσο αριθμό στοιχείων είτε διότι τα δυο απειροσύνολα είναι ισοπληθικά, είτε διότι αντιστοιχίζοντας έναν προς έναν τους φυσικούς αριθμούς με τα τετράγωνα τους (1, 4, 9, 16...), προκύπτει ότι κάθε φυσικός αριθμός αντιστοιχίζεται με το τετράγωνό του και αντίστροφα, άρα το σύνολο των φυσικών αριθμών και το σύνολο των τετραγώνων τους είναι ισοπληθικά. Εδώ διαπιστώθηκαν δυο στρατηγικές σκέψης: α) η άποψη ότι όλα τα άπειρα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων καθώς το άπειρο είναι ένα και ανεξάντλητο και β) ότι υπάρχει μεταξύ των στοιχείων των απειροσυνόλων η ‘1-1’ αντιστοιχία.

3^{ον}) Απαντήσεις αντιφατικές (3/103) όπως:

- *Το Γ σύνολο είναι οι φυσικοί αριθμοί ενώ το Δ είναι ένα σύνολο που αποτελείται μόνο από τετράγωνα φυσικών αριθμών. Αν και τα δύο σύνολα είναι άπειρα το Γ σύνολο έχει περισσότερα στοιχεία καθώς περιέχει όλα τα στοιχεία του Δ και κάποια άλλα (αυτά που δεν είναι τετράγωνα αριθμών).*

Β. ΦΟΙΤΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες:

1^{ον}) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι το Γ περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Δ με βασική αιτιολόγηση ότι το Δ περιέχει μόνο μερικά από τα στοιχεία του Γ ή είναι υποσύνολο του Γ (40/103).

Όπως και στους μαθητές, η απόσταση μεταξύ των στοιχείων των συνόλων φαίνεται να παίζει σημαντικό ρόλο στις απαντήσεις των φοιτητών.

2^{ον}) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι το Γ περιέχει ίδιο αριθμό στοιχείων με το Δ (60/103) με βασική αιτιολόγηση ότι:

- **Και τα δυο περιέχουν άπειρα στοιχεία (20/103).**
- **Και τα δύο είναι άπειρα αριθμήσιμα (13/103). Π.χ.:**

«Και τα 2 σύνολα είναι αριθμήσιμα και άπειρα. Αυτό συμβαίνει γιατί το σύνολο Γ, που είναι το σύνολο των Φυσικών Αριθμών, είναι αριθμήσιμο (και μη φραγμένο), αλλά και άπειρο. Οπότε, αν υψώσουμε κάθε του στοιχείο στο τετράγωνο, παραμένει ένα άπειρο και αριθμήσιμο σύνολο που περιέχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Όμως Γ^2 ταυτίζεται με το Δ, άρα τα δύο σύνολα έχουν την ίδια πληθικότητα».

- **Υπάρχει 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα δύο σύνολα (27/103). Π.χ.:**

  «Για κάθε στοιχείο του Γ, έστω x, το στοιχείο x^2 ανήκει στο Δ. Αντίστροφα για κάθε στοιχείο y του Δ, το sqrt(y) ανήκει στο Γ. Άρα τα δύο σύνολα έχουν ίδιο αριθμό στοιχείων».

3ον) Απαντήσεις αντιφατικές (3/103), όπως:

«Όπως προηγουμένως, και στα δυο σύνολα παρατηρούμε ότι τα στοιχεία κάθε συνόλου είναι άπειρα, όμως το σύνολο Δ περιέχει μόνο μερικά από τα στοιχεία του Γ, όχι όλα».

Συγκεντρωτικά:

1. **Οι πεποιθήσεις των μαθητών βασίζονται πάνω σε δύο βασικές στρατηγικές σκέψης: α) την άποψη ότι το σύνολο Γ περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Δ, επειδή το Δ παραλείπει κάποιους αριθμούς σε σχέση με το Γ (24/51), σε ποσοστό 47% και β) την άποψη ότι και τα δυο σύνολα περιέχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων επειδή: είτε είναι και τα δυο άπειρα (17/51), σε ποσοστό 33%, είτε υπάρχει '1-1' αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους (7/51), σε ποσοστό 14%. Τρεις μαθητές (3/51), δηλαδή ποσοστό 6%, έδωσαν αντιφατικές απαντήσεις.**
2. **Οι πεποιθήσεις των φοιτητών βασίζονται κι αυτές πάνω σε δύο βασικές στρατηγικές σκέψης: α) την άποψη ότι το σύνολο Γ περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Δ, αφού το Δ περιέχει μόνο μερικά από τα στοιχεία του Γ ή είναι υποσύνολο του Γ (40/103), σε ποσοστό 39% και β) την άποψη ότι και τα δυο σύνολα περιέχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων επειδή: είτε είναι και τα δυο άπειρα (20/103), σε ποσοστό 19%, είτε είναι και τα δυο άπειρα αριθμήσιμα**

(13/103), σε ποσοστό 13%, είτε υπάρχει '1-1' αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους (27/103), σε ποσοστό 26%. Τρεις φοιτητές (3/103), δηλαδή ποσοστό 3%, έδωσαν αντιφατικές απαντήσεις.

3. **Το 47% των μαθητών (24/51) και το 39% των φοιτητών (40/103), αντιλαμβάνονται ξεκάθαρα το άπειρο ως πραγματικό και διαλέγουν τη στρατηγική «το όλο μεγαλύτερο του μέρους», υπεργενικεύοντας τα χαρακτηριστικά των πεπερασμένων συνόλων και στα απειροσύνολα.**
4. **Το 39% των μαθητών (20/51) και το 32% των φοιτητών (33/103) πιστεύουν ότι τα δύο σύνολα είναι άπειρα, άρα αντιλαμβάνονται ξεκάθαρα το άπειρο ως διαδικασία (δυνητικό).**
5. **Οι φοιτητές διαφοροποιούν και αναπτύσσουν περισσότερο τις αιτιολογήσεις τους σε σχέση με τους μαθητές, προφανώς επειδή έχουν ανώτερο μαθησιακό επίπεδο. Παρόλα αυτά λιγότεροι από τους μισούς, δηλαδή το 39%, (40/103) έδωσαν τις ενδεδειγμένες αιτιολογήσεις με βάση την ισοπληθικότητα των άπειρων αριθμήσιμων συνόλων και την '1-1' αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους.**
6. **Σχετικά με τους μαθητές, το 14% (7/51) έδωσε την ενδεδειγμένη απάντηση της 1-1 αντιστοιχίας. Από ψυχολογική άποψη είναι σημαντική η υπέρβαση της διαισθητικής σκέψης των μαθητών ότι «το όλο είναι μεγαλύτερο από το μέρος» και η αντικατάστασή της από μια επιχειρηματολογία που βασίζεται στην '1-1' αντιστοιχία, έστω και αν μόνο επτά (7) μαθητές την ενστερνίστηκαν.**

6.3. ΕΡΩΤΗΣΗ 3η

Η τρίτη ερώτηση που δόθηκε στους μαθητές και φοιτητές αναφέρεται στο παράδοξο της Διχοτομίας του Ζήνωνα και είναι ερώτηση ανάπτυξης παραγράφου με αιτιολόγηση. Ο Ζήνωνας βασίστηκε στην ιδέα ότι ο ανθρώπινος νους αδυνατεί να κατανοήσει το άπειρο ως αντικείμενο αλλά το αντιμετωπίζει μόνο ως διαδικασία και τα διάφορα αντιδιαισθητικά συμπεράσματα αντανακλούν τις γνωστικές δυσκολίες που συναντά κατά την ενασχόλησή του με το άπειρο με όρους της λογικής (Smullyan, 2012).

Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξε και ο Gauss ο οποίος διαπίστωσε ότι δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε ένα άπειρο μέγεθος ως μια τετελεσμένη ποσότητα -και άρα να αντιληφθούμε το άπειρο ως πραγματικό- αλλά το μυαλό μας το αναλογίζεται ως μια διαδικασία (Tall, 1992, Fischbein, 2001). Δόθηκαν τρεις σχετικές με το παράδοξο ερωτήσεις:

3α) Ο Δημήτρης θέλει να διανύσει απόσταση ίση με 1.000 μέτρα. Έστω ότι κάνει την πρώτη στάση του στο μέσο της διαδρομής (500 μ.), τη δεύτερη στάση του στο μέσο της υπόλοιπης διαδρομής (250 μ.), κ.ο.κ. Πόσες στάσεις θα κάνει συνεχίζοντας με τον ίδιο ρυθμό μέχρι να φτάσει στον προορισμό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Σύμφωνα με αυτό το παράδοξο κάποιος που κινείται πρέπει πρώτα να φτάσει στο μισό της απόστασης που θέλει να καλύψει. Πριν διανύσει το μισό, θα πρέπει πρωτύτερα να διανύσει το μισό αυτής και ούτω καθεξής έως το άπειρο. Αυτό συνεπάγεται, σύμφωνα με το Ζήνωνα, ότι οι στάσεις θα είναι άπειρες, γιατί πάντα θα υπάρχει το μισό της απόστασης που απομένει.

Α. ΜΑΘΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες:

1ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο αριθμός των στάσεων είναι άπειρος, αφού το διάστημα θα χωρίζεται στα δύο επ’ άπειρον (31/51).

Οι απαντήσεις των μαθητών είναι απλές χωρίς ιδιαίτερη αιτιολόγηση.

2ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο αριθμός των στάσεων είναι κάποιο αριθμητικό μέγεθος (13/51), όπως:

- *Θα χρειαστεί περίπου 38 στάσεις (με μικρή στρογγυλοποίηση). Μπορούμε να ορίσουμε έναν μετρητή στάσεων στα 750μ (συνολικά που έχει διανύσει) ο οποίος είναι ίσος με 2. Εάν φτιάξουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος θα υπολογίζει το μέσο της υπολειπόμενης διαδρομής Δ (Δ / 2 , ξεκινάμε από τα 250μ) και θα το προσθέτει στη συνολική διαδρομή που έχει διανύσει Χ και θα προσθέτει 1*

- *στον μετρητή μας, για κάθε στάση που κάνει. Αυτήν την διαδικασία θα την κάνει ώσπου ο Δημήτρης να διανύσει τα 1000μ (ή Χ = 1000). (Βέβαια χωρίς την στρογγυλοποίηση θα ήταν σχεδόν αδύνατον να προσδιοριστούν οι στάσεις).*
- *Αφού 1.000/500=2 και 500/250=2 τότε κάνουμε 250/2=125 και θα συνεχίσουμε να διαιρούμε έτσι μέχρι να φτάσουμε στον αριθμό μηδέν αυτό χρειάζεται στο περίπου έντεκα διαιρέσεις άρα έντεκα στάσεις.*

3ον) Απαντήσεις αντιφατικές, στις οποίες δεν προκύπτει ξεκάθαρα ούτε αριθμητικό μέγεθος, ούτε το άπειρο (7/51).

Ενδεικτικές απαντήσεις είναι οι εξής:

- *Θεωρητικά θα έκανε άπειρες στάσεις αλλά όταν φτάσει σε απόσταση μερικών εκατοστών δεν θα μπορεί να κινηθεί τόσο λίγο ώστε να μην διανύσει ολόκληρη την υπόλοιπη απόσταση.*
- *Πρακτικά άπειρες, όμως μετρήσιμες.*

Β. ΦΟΙΤΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις των φοιτητών μπορούν να ταξινομηθούν και αυτές σε τρεις παρόμοιες με των μαθητών, κατηγορίες:

1ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο αριθμός των στάσεων είναι άπειρος, αφού το διάστημα θα χωρίζεται στα δύο επ' άπειρον (62/103), όπως π.χ.:

- *Άπειρες. Η θέση του Δημήτρη μετά από n στάσεις δίνεται από τη σειρά: (i=1)(i=n)Σ 1000/(2^i) Η οποία συγκλίνει στο 1000 (όταν n->∞), επομένως θα προσεγγίζει τον προορισμό του επ' άπειρον, χωρίς ποτέ να βρεθεί στη θέση 1000μ.*
- *Θα κάνει άπειρες στάσεις, καθώς ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι ρητοί οπότε θα υπάρχει και ο (α+β)/2, όπου α το σημείο που βρίσκεται κάθε φορά ο Δημήτρης και β το τέλος της διαδρομής.*

2ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο αριθμός των στάσεων είναι κάποιο αριθμητικό μέγεθος (21/103), όπως π.χ.:

- *16 στάσεις γιατί αν διαιρέσουμε το 1000/2 16 φορές θα μας δώσει 0.01525878906, τόση δηλαδή θα είναι η απόσταση του Δημήτρη από την τελική απόσταση των 1000 μέτρων.*
- *1000 δια 2 = 500 άρα 1η στάση 500 διά 2 = 250 άρα 2η στάση και βρισκόμαστε στα 500+250= 750 μ. 250 διά 2 = 125 άρα 3η στάση και διάνυσε 750 + 125 = 875μ. 125 διά 2 =62.5 άρα 4η στάση και διάνυσε 875+62.5=937.5 μ. 62.5 δια 2 = 31.25 άρα 5η στάση και διάνυσε 937.5+31.25=968.75 μ. 31.25 διά 2 = 15.625 άρα 6η στάση και διένυσε 968.75+15.625 = 984.375 μ. 15.6 25 διά 2 = 7.8125 άρα 7η στάση και διένυσε 984.375 + 7.8125 = 992.1875 μ. 7.8125 διά 2 = 3.90625 άρα 8η στάση και διένυσε 992.1875 + 3.90625 = 996.09375 μ. 3.90625 διά 2 = 1.953125 άρα 9η στάση και διένυσε 996.09375 + 1.953125 = 998.046875 μ. 1.953125 διά 2 = 0.9765625 άρα 10η στάση και διένυσε 998.046875 + 0.9765625 =999.0234375 μ. 0.9765625 διά 2 = 0.48828125 άρα 11η στάση και διένυσε 999.0234375 + 0.48828125 = 999.5117188 μ. 0.48828125 διά 2 = 0.244140625 άρα 12η στάση και διένυσε 999.5117188 + 0.244140625 = 999.7558594 μ. 0.244140625 διά 2 = 0.1220703125 άρα 13η στάση και διένυσε 999.7558594 + 0.1220703125 = 999.8779297 μ. 0.1220703125 διά 2 = 0.06103515625 άρα 14η στάση και διένυσε 999.8779297 + 0.06103515625 = 999.9389649 μ. συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο .... 15η στάση 16η 17η 18η στάση.*

3ον) Απαντήσεις αντιφατικές, στις οποίες δεν προκύπτει ξεκάθαρα ούτε αριθμητικό μέγεθος, ούτε το άπειρο (20/103). Για παράδειγμα:

- *Αναλυτικά η γεωμετρική πρόοδος τείνει στο άπειρο, δηλαδή θα έπρεπε να κάνει άπειρες στάσεις μέχρι να φτάσει στον προορισμό του. Με πράξεις όμως καταλήγουμε πως για 14-16 στάσεις έχουμε μια καλή προσέγγιση για το πρώτο δεκαδικό ψηφίο και για 17-19 στάσεις για το 2ο.*
- *Άπειρες, διότι οι στάσεις γίνονται σύμφωνα με την εξίσωση f(x)=x/2 όπου x η απόσταση που απομένει διαιρώντας όμως έναν αριθμό διαρκώς με το 2 αυτός θεωρητικά δεν θα μηδενιστεί ποτέ. Στην πράξη θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι έχει φτάσει στον προορισμό του ενώ απέχει από αυτόν κατά x=0.0038m δηλαδή μετά από 18 στάσεις.*

3β) Πόσες στάσεις θα κάνει ο Δημήτρης συνεχίζοντας με τον ίδιο ρυθμό μέχρι να διανύσει άλλα 1.000 μ., δηλαδή να φτάσει στα 2.000 μ.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Πρόκειται για μια παραλλαγή της ερώτησης 3α, που στόχο είχε να διαπιστώσει αν υπάρχουν αλλαγές ή τροποποιήσεις στις αιτιολογήσεις των μαθητών και των φοιτητών, αν δηλαδή η διπλάσια απόσταση θα τους προβληματίσει και θα τους αλλάξει την οπτική γωνία με την οποία αιτιολόγησαν την 3α ερώτηση.

Α. ΜΑΘΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις των μαθητών μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες:

1ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο αριθμός των στάσεων είναι άπειρος (33/51).

Πρόκειται για τα άτομα, που είχαν δώσει την ίδια απάντηση στην 3α (δηλαδή «άπειρες στάσεις»)

Εντύπωση προκαλούν οι παρακάτω διαφοροποιήσεις:

- Μαθητής που στην 3α είχε δώσει την απάντηση «άπειρες στάσεις», τώρα απάντησε «θα κάνει άλλες τόσες».
- Μαθητής που στην 3α είχε δώσει την απάντηση «άπειρες στάσεις», τώρα απάντησε «+1».

2ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο αριθμός των στάσεων είναι αριθμητικό μέγεθος (18/51). Αναλυτικότερα:

I. **Διπλάσιο αριθμητικό μέγεθος σε σχέση με την 3α (7/51).** Πρόκειται για μαθητές που είχαν δηλώσει την 3α κάποιο αριθμητικό μέγεθος και θεώρησαν ότι διπλάσια απόσταση οδηγεί σε διπλάσιο αριθμό στάσεων.

II. **Τυχαίο αριθμητικό μέγεθος, χωρίς να δίνεται επαρκής αιτιολόγηση και χωρίς να υπάρχει κάποιου είδους σύνδεση με την απάντηση της 3α (11/51), όπως π.χ.:**
    - Ο Δημήτρης έχει διανύσει 750μ. Όταν θα ξανακάνει στάση θα έχει διανύσει 1250μ,στην επόμενη 1500μ και στην επόμενη θα έχει φτάσει

στον προορισμό του, σύμφωνα με τον ρυθμό κίνησής του. Άρα συνολικά θα κάνει 5 στάσεις από 0->2000μ.

- Ο Δημήτρης θα κάνει «81», «19», κ.τ.λ. στάσεις.

Β. ΦΟΙΤΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις των φοιτητών μπορούν να ταξινομηθούν στις εξής κατηγορίες:

1ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο αριθμός των στάσεων είναι άπειρος. Πρόκειται για τα άτομα, που είχαν δώσει την ίδια απάντηση στην 3α (δηλαδή «άπειρες στάσεις») (64/103).

Εντύπωση προκαλούν:

- Η απάντηση ενός φοιτητή ο οποίος ανέφερε ότι σε αυτή την περίπτωση οι στάσεις θα είναι **«πιο άπειρες»** σε σχέση με την προηγούμενη.
- Οι απαντήσεις δύο φοιτητών, οι οποίοι στην 3α ανέφεραν ότι ο Δημήτρης θα κάνει άπειρο αριθμό στάσεων και σε αυτή την ερώτηση απάντησαν ότι θα κάνει «**ακόμα μία στάση**».
- Οι απαντήσεις τριών φοιτητών, οι οποίοι αν και είχαν δώσει ως απάντηση κάποιο αριθμητικό νούμερο στην 3α, εδώ απάντησαν «άπειρες στάσεις».

2ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο αριθμός των στάσεων είναι κάποιο αριθμητικό μέγεθος (27/103). Πρόκειται για τα άτομα, που είχαν δώσει στην 3α ως απάντηση κάποιο αριθμητικό μέγεθος είτε αντιφατικές απαντήσεις. Πιο συγκεκριμένα δηλώνουν:

- **Συν μία στάση από την απάντηση στην 3α (13/103).**
- **Διπλάσιες στάσεις σε σχέση με την απάντηση στην 3α (12/103).**
- **Τυχαίο αριθμό στάσεων, χωρίς εξήγηση (2/103),** όπως: «4 στάσεις» και «log2(2000)».

3ον) Απαντήσεις διφορούμενες/αντιφατικές (12/103), όπως π.χ.:

- *Αν θεωρήσουμε πως όταν φτάνει οριακά στα 1.000 μέτρα και από εκείνη τη στιγμή και έπειτα, το πρόβλημα ξανά ξεκινάει και πρέπει να διανύσει άλλα 1.000 μέτρα και ισχύει το ίδιο σκεπτικό, δηλαδή, πως αρχικά θα διανύσει το μισό της* *απόστασης που του απομένει (άλλα 500μ.) τότε πάλι θα χρειαστεί άπειρες στάσεις και άπειρο χρόνο για να φτάσει στα 2.000 μέτρα (μάλιστα η απόστασή του ανά στάση από τον τερματισμό είναι ίδια με το 3α). Αν θεωρήσουμε πως συνεχίζει να μειώνει την απόστασή του ανά στάση διά δύο, όπως έκανε στο 3α, τότε προφανώς δεν θα φτάσει ποτέ στα 2.000 μέτρα, αφού οριακά θα καταφέρει να φτάσει μόνο στα 1.000 σε άπειρες στάσεις και άπειρο χρόνο.*

- *Εάν θεωρήσουμε πως από τη στιγμή που έχει φτάσει στον αρχικό προορισμό του (1000 μ.), τότε θέλει να διανύσει ακόμη 1000, χρειάζεται συνολικά διπλάσιες στάσεις από ότι στην προηγούμενη περίπτωση. Διαφορετικά εάν θεωρήσουμε πως θέλει από την αρχή να διανύσει συνολικά 2000 μ., θα κάνει μία παραπάνω στάση από ότι στην προηγούμενη περίπτωση, όταν δηλαδή έχει διανύσει 1000 μ.*
- *Όπως αναφέρω παραπάνω ο Δημήτρης θα χρειαστεί για την ίδια τακτική προσπέλασης ξανά άπειρες στάσεις σύμφωνα με την ανάλυση. Για μια καλή προσέγγιση όμως εάν προσπελαστούν τα διαστήματα διαδοχικά (δηλαδή ο Δημήτρης αποφασίσει να προσπελάσει τα άλλα 1000 μέτρα αφού έχει προσπελάσει τα πρώτα 1000) θα του χρειαστούν οι διπλάσιες στάσεις για να πετύχει τις προσεγγίσεις, δηλαδή 28-32 και 34-36. Εάν εξ αρχής αποφασίσει να διανύσει τα 2000μ με αυτή την τακτική θα του χρειαστεί μόνο μία επιπλέον στάση, δηλαδή 15-17 και 18-20 για τις προσεγγίσεις.*

3γ) Αν ο Δημήτρης χρειάζεται 10 λεπτά για να φτάσει στην πρώτη στάση, σε πόσο χρόνο θα φτάσει στην προτελευταία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α. ΜΑΘΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις των μαθητών μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις βασικές κατηγορίες:

1^{ον}) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο χρόνος είναι άπειρος, αφού ο Δημήτρης θα κάνει άπειρες στάσεις (17/51).

2^{ον}) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο χρόνος άφιξης του Δημήτρη στην προτελευταία στάση ισούται με κάποιο αριθμητικό μέγεθος (22/51).

Ενδεικτικές απαντήσεις είναι οι εξής:

- *Θα κάνει 30 λεπτά. 10 για τα 500μ γιατί είναι η πρώτη στάση που μας δίνεται από το ερώτημα και μετά το 250μ είναι το μισό του 500μ άρα και το αντίστοιχο και σε χρόνο άρα για να κάνει 250μ θα κάνει 5 λεπτά . Για την πρώτη στάση 10 για την δεύτερη 5 για την τρίτη 10 για την τέταρτη και την προτελευταία άλλα 5 άρα 10+5+10+5=30 λεπτά.*
- *20 λεπτά. Θέλω να πάω Μοναστηράκι, έχοντας δώσει ραντεβού στο περίπτερο. Για να ανέβω τις σκάλες του μετρό χρειάζομαι έστω 5 λεπτά. Αν όμως έχω ταξιδέψει άλλη μισή ώρα από τη Νερατζιώτισσα, στο μυαλό μου θα έχω ότι η διαδρομή είναι 30 λεπτά, γιατί τα 5 από τις σκάλες είναι αμελητέα μπροστά στα 30. Γι΄αυτό αυτός κάνει 20 λεπτά, γιατί η απόσταση προτελευταίας-τελευταίας είναι απειροελάχιστη.*
- *«9,9999999.... ή 10/3 επί 3 το οποίο κάνει 10», «Θα χρειαστεί 0,07 δευτερόλεπτα», «Θα φτάσει σε 60 λεπτά».*

3ον) Απαντήσεις τύπου «Δε γνωρίζω» (12/51).

Β. ΦΟΙΤΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις των φοιτητών μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις βασικές κατηγορίες:

1ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο χρόνος είναι άπειρος, αφού ο Δημήτρης θα κάνει άπειρες στάσεις (41/103).

2ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο χρόνος άφιξης του Δημήτρη στην προτελευταία στάση ισούται με κάποιο αριθμητικό μέγεθος (52/103). Πιο συγκεκριμένα:

I. Περίπου 10 λεπτά ή ισούται ακριβώς με 10 λεπτά (11/103).

Ενδεικτικές αιτιολογήσεις είναι οι εξής:

- *10λεπτά γιατί , 2000-1000=1000.*
- *Περίπου 10 λεπτά γιατί η ταχύτητα που διαθέτει είναι η ίδια με την ταχύτητα της πρώτης στάσης ενώ η απόσταση είναι περίπου η ίδια αφού η προτελευταία στάση απέχει απειροελάχιστη απόσταση από τον τελικό προορισμό που έχει σχεδόν μηδενική επίδραση στον χρόνο.*

II. **Περίπου 20 λεπτά ή ισούται ακριβώς με 20 λεπτά (26/103).**

Ενδεικτικές αιτιολογήσεις είναι οι εξής:

- *Ο χρόνος που χρειάζεται είναι (10 +10/2+5/2+2.5/2+...). Έχω, λοιπόν, γεωμετρική πρόοδο. Οπότε, toλ=10*(1/0.5)=20 λεπτά. Άρα ο ζητούμενος χρόνος t=toλ-κάτι πάρα πολύ μικρό, αφού ο χρόνος ανάμεσα στην προτελευταία και την τελευταία στάση είναι αμελητέος. Έτσι, t=20 λεπτά.*
- *Αν υποθέσουμε πως ο δρομέας τρέχει με σταθερή ταχύτητα, x= ut => 500 = 10u => u = 50 m/min. Στην προτελευταία στάση η απόσταση είναι περίπου x=1000m, άρα ο χρόνος θα είναι λίγο λιγότερος από t=x/u=20min.*

III. **Τυχαίο αριθμητικό μέγεθος (15/103).**

Ενδεικτικές αιτιολογήσεις είναι οι εξής:

- *Συνολικά χρειάζεται 20 λεπτά για να φτάσει στο τέρμα. Για να φτάσει από την προτελευταία στάση στην τελευταία θα χρειαστεί το ένα δέκατο-τρίτο του χρόνου αυτού, δηλαδή 20/13=1,538 περίπου. Άρα ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει στην προτελευταία στάση είναι 20-1,538 = 18,462 λεπτά, αν η ταχύτητα του Δημήτρη είναι σταθερή.*
- *19, 37 λεπτά 500μ-->10λ 968,75μ--> 19,37 λεπτά*
- *Η πρώτη στάση γίνεται στα 500 μέτρα. Επομένως διανύει 500 μέτρα σε 600 δευτερόλεπτα => κινείται με ταχύτητα: 5/6 m/s. Αν δεν υπολογίσουμε τις στάσεις, χρειάζεται τότε 20 λεπτά μέχρι το προορισμό. Η προτελευταία στάση(9η), γίνεται περίπου στα 1.95 μέτρα από το τέλος. επομένως μέχρι εκεί θα χρειάζεται 1200-1,92/(5/6)=1200-2,3=1197,7 δευτερόλεπτα. Αν σε κάθε στάση σταματά για Δt sec, και μέχρι την 9η στάση κάνει 8 ενδιάμεσα, τότε ο χρόνος για να φτάσει ο Δημήτρης στην προτελευταία στάση, είναι 1197,7+8Δt sec.*
- *Εάν κάνει ν στάσεις, για να φτάσει στην προτελευταία χρειάζεται συνολικά 10*2^(ν-2) λεπτά για να φτάσει την (ν-1)οστή στάση, διότι κάθε φορά για να φτάσει στην επόμενη στάση χρειάζεται διπλάσιο χρόνο.*

- *Στα 500 μ κάνει 10 λεπτά. συνεπώς στα 250 κάνει 5 λεπτά. ο Δημήτρης για να φτάσει στην προτελευταία στάση δηλαδή στα 1500 μ θα χρειαστεί 30 λεπτά. αν υποθέσουμε ότι η τελευταία στάση θα είναι στα 1750μ.*
- *Θέλει 1 λεπτό για κάθε 50m στη προτελευταία στάση φτάνει μετά από 0,0076m οπότε θα χρειαστεί 0,38 λεπτά.*
- *10 λεπτά 1η, 5 λεπτά η 2η, 2.5 λεπτά η 3η, άρα στην προτελευταία στάση θα θέλει σχεδόν χρόνο μηδέν.*

3^{ον}) Απαντήσεις τύπου «Δε γνωρίζω» (10/103).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσίασε η περίπτωση ενός φοιτητή, ο οποίος ενώ στις δύο πρώτες ερωτήσεις έδωσε την απάντηση «Άπειρες στάσεις», στην ερώτηση του χρόνου ανέφερε ότι ο χρόνος δίνεται από τη σχέση 1(n-1), συμβολίζοντας με n τον πεπερασμένο αριθμό των στάσεων.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί η παρακάτω αιτιολόγηση ενός φοιτητή :
«Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει αυτή η ερώτηση γιατί θα περίμενε κανείς να ζητάει τον χρόνο που θα έκανε για να φτάσει τα 1000 μ, ωστόσο μιλάει για την προτελευταία στάση, της οποίας η απόσταση δεν υπολογίζεται. Αλλά και πάλι, αν μιλούσε για 1000μ, η απάντησή, η δική μου τουλάχιστον, θα ήταν ίδια. [Είναι σαν να σου ζητάει τον προτελευταίο αριθμό πριν το 0, δεν μπορείς να το βρεις γιατί απλά δεν γίνεται]. Γίνεται να υπολογίσεις τον χρόνο που θα κάνει μέχρι να φτάσει στην 3η στάση για παράδειγμα, 10+5+2.5=17.5 λεπτά, όπως γίνεται, να υπολογίσεις και την εκατομμυριοστή πρώτη, αλλά όταν σου λέει "τελευταία" ή "προτελευταία", δεν γίνεται, διότι δεν γνωρίζεις τον αριθμό τους, και δεν γίνεται να τον υπολογίσεις. Επομένως, δεν υπολογίζεται κατά την άποψη μου ο χρόνος, ουσιαστικά δίνω την ίδια απάντηση που έδωσα και στις προηγούμενες δύο ερωτήσεις. Τέλος, αυτό που έγραψα στις αγκύλες, ήταν πιο πολύ μια σχετική κίνηση του μυαλού μου, κάπως το συνδύασα, αλλά τώρα και εγώ ο ίδιος το ξέχασα που κολλάει, αλλά το αφήνω.»

Συγκεντρωτικά:

1. **Στην ερώτηση 3α, το 61% των μαθητών (31/51) και το 60% των φοιτητών (62/103), δηλώνουν ότι ο Δημήτρης θα κάνει άπειρες στάσεις. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το άπειρο αντιμετωπίζεται ως συνεχιζόμενη**

διαδικασία χωρίς τέλος (δυνητικό άπειρο). Από τους υπόλοιπους, οι (13/51) μαθητές, σε ποσοστό 25% και οι (21/103) φοιτητές, σε ποσοστό 20%, δηλώνουν έναν αριθμό στάσεων, γεγονός που σημαίνει ότι αντιλαμβάνονται το άπειρο ως μέγεθος, ως μια τετελεσμένη ποσότητα, ως πραγματικό και άρα προσπαθούν να διαιρέσουν την απόσταση κι έτσι καταλήγουν σε αριθμητικό μέγεθος. Οι εναπομείναντες, (7/51) μαθητές, σε ποσοστό 14% και (20/103) φοιτητές, σε ποσοστό 20%, δίνουν αντιφατικές αιτιολογήσεις, ίσως επειδή οι διαισθητικές ερμηνείες που δίνουν στο άπειρο έρχονται σε σύγκρουση με τις μαθηματικές τους γνώσεις από την επίσημη εκπαίδευση.

2. Η ίδια εικόνα παρατηρείται και στην 3β, όπου οι 33/51 μαθητές, σε ποσοστό 65% και οι 64/103 φοιτητές, σε ποσοστό 62% συνεχίζουν να αντιμετωπίζουν το άπειρο ως δυνητικό. Από τους υπόλοιπους, οι 18/52 μαθητές, σε ποσοστό 35% και οι 27/103 φοιτητές, σε ποσοστό 26%, προσεγγίσουν το άπειρο ως πραγματικό, δίνοντας διάφορα αριθμητικά μεγέθη για το πλήθος των στάσεων. Τέλος, οι 12/103 φοιτητές, δηλαδή ποσοστό 12%, δίνουν διφορούμενες/αντιφατικές απαντήσεις.
3. Αρκετοί μαθητές και φοιτητές που είχαν δώσει αντιφατικές απαντήσεις στην 3α, βλέπουμε ότι στην 3β δίνουν ως απάντηση κάποιο αριθμητικό μέγεθος, ίσως επηρεασμένοι από τη διατύπωση της ερώτησης που αφορούσε στο διπλασιασμό της απόστασης.
4. Στην ερώτηση 3γ που ζητούσε χρόνο, δηλαδή το πότε θα φτάσει ο Δημήτρης στην προτελευταία στάση, η εικόνα των απαντήσεων των μαθητών και των φοιτητών άλλαξε πολύ. Πιο συγκεκριμένα, οι 17/51 μαθητές, σε ποσοστό 33% και οι 41/103 φοιτητές, σε ποσοστό 40%, έδωσαν την απάντηση «άπειρο χρόνο» (δυνητικό άπειρο) και οι 22/51 μαθητές, σε ποσοστό 43% και οι 52/103 φοιτητές, σε ποσοστό 50%, έδωσαν ως απάντηση κάποιο αριθμητικό μέγεθος, (πραγματικό άπειρο). Οι υπόλοιποι, 12/51 μαθητές, ποσοστό 24% και 10/103 φοιτητές, ποσοστό 10% δήλωσαν ότι δε ξέρουν την απάντηση.
5. Αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ στην 3α και στην 3β τα ποσοστά τόσο των μαθητών όσο και των φοιτητών που αναφέρθηκαν σε άπειρο αριθμό στάσεων ήταν πάνω από 60%, στην 3γ μειώθηκαν υπερβολικά τα αντίστοιχα

ποσοστά που αφορούσαν στον άπειρο χρόνο. Προφανώς, η διατύπωση της ερώτησης μετέβαλλε σημαντικά τον τρόπο σκέψης τους.

6.4 ΕΡΩΤΗΣΗ 4η

Η τέταρτη ερώτηση που δόθηκε στους μαθητές και φοιτητές αναφέρεται στο παράδοξο του ξενοδοχείου του Hilbert και είναι ερώτηση ανάπτυξης παραγράφου με αιτιολόγηση. Δόθηκαν τρεις σχετικές με το παράδοξο ερωτήσεις.

4α) Θεωρούμε ένα φανταστικό ξενοδοχείο με άπειρο πλήθος δωματίων τα οποία είναι όλα κατειλημμένα από πελάτες. Αν έρθει ένας καινούργιος πελάτης, μπορεί ο ξενοδόχος να του εξασφαλίσει τη διαμονή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Το συγκεκριμένο παράδοξο αφορά σε ένα ξενοδοχείο με άπειρο πλήθος δωματίων που ναι μεν είναι όλα κατειλημμένα, όταν όμως έρθει ένας επιπλέον ή περισσότεροι ή άπειροι επισκέπτες υπάρχουν πάντα κενές θέσεις.

Α.ΜΑΘΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις των μαθητών μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις βασικές κατηγορίες, με εξαίρεση 6 μαθητές (6/51) που απάντησαν ότι δεν γνωρίζουν:

1^{ον}) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο ξενοδόχος μπορεί να εξασφαλίσει τη διαμονή. Χωρίζονται σε δύο υποκατηγορίες (25/51):

Α. Σε απαντήσεις μαθητών, οι οποίοι γνώριζαν το παράδοξο του Ξενοδοχείου του Hilbert και το ανέφεραν, υποδεικνύοντας και τον τρόπο ανακατανομής των πελατών, δηλαδή τη μετακίνησή τους κατά ένα δωμάτιο (12/51). Π.χ.:

- *Στο παράδοξο του ξενοδοχείου η λύση είναι να μεταφερθεί ο κάθε υπάρχοντας πελάτης από το δωμάτιό του (x) στο x+1. Έτσι, ο νέος πελάτης θα πάει στο πρώτο.*

Β. Σε απαντήσεις μαθητών στις οποίες δεν προκύπτει αν οι μαθητές γνώριζαν το παράδοξο του Ξενοδοχείου του Hilbert, ωστόσο προκύπτει ότι αντιλαμβάνονται την ατέρμονη φύση του απείρου και το γεγονός ότι όποιος αριθμός και αν προστεθεί στο άπειρο θα προκύπτει πάλι το άπειρο (13/51).

Ενδεικτικές απαντήσεις μαθητών είναι οι εξής:

- *Καθώς το ξενοδοχείο έχει άπειρο πλήθος δωματίων και αφού το "άπειρο" δεν είναι συγκεκριμένος αριθμός ο οποίος μπορεί να προσδιοριστεί, τότε δεν προσδιορίζεται και το όριο, άρα μπορεί να εξυπηρετηθεί ο καινούργιος πελάτης.*
- *Εφόσον το πλήθος είναι άπειρο και οι πελάτες θα είναι και αυτοί άπειροι, αυτό σημαίνει πως μπορεί να κοιμηθεί κάπου αφού απειρο+1=άπειρο.*

2ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο ξενοδόχος δε μπορεί να εξασφαλίσει τη διαμονή, με βασική αιτιολογία ότι όλα τα δωμάτια είναι κατειλημμένα. (14/51).

3ον) Διφορούμενες απαντήσεις (6/51), όπως:

- *Αφού τα δωμάτια είναι άπειρα και είναι όλα κατειλημμένα αυτό σημαίνει ότι είναι και οι πελάτες άπειροι, άρα δεν υπάρχει άλλος χώρος. Ωστόσο αφού τα* μεγέθη δεν είναι πραγματικά τότε άπειρο+1=άπειρο και τότε ο πελάτης θα μπορεί να μείνει.
- *Όχι γιατί είναι όλα κατειλημμένα από πελάτες. Αν δεχτούμε ότι το ξενοδοχείο είναι φανταστικό και έχει άπειρα δωμάτια πάντα θα μπορεί αν φιλοξενήσει κι άλλους πελάτες διότι το άπειρο δεν είναι κάποιος συγκεκριμένος αριθμός.*

Β. ΦΟΙΤΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις των φοιτητών μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις βασικές κατηγορίες, με εξαίρεση 5 φοιτητές (5/103) που δήλωσαν ότι δεν το γνωρίζουν:

1ον) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο ξενοδόχος μπορεί να εξασφαλίσει τη διαμονή (62/103).

Χωρίζονται σε δύο υποκατηγορίες:

I. **Σε απαντήσεις φοιτητών, οι οποίοι γνώριζαν το παράδοξο του Ξενοδοχείου του Hilbert και το ανέφεραν, υποδεικνύοντας και τον τρόπο ανακατανομής των πελατών, όπως η μετακίνηση κατά ένα δωμάτιο (33/103). Π.χ.:**
   - *Ναι, ο ξενοδόχος μπορεί να του εξασφαλίσει τη διαμονή. Σε κάθε δωμάτιο πάντα υπάρχει ένα διπλανό δωμάτιο. Αν μετακινήσουμε ταυτόχρονα κάθε άτομο στο διπλανό δωμάτιο (#1--> #2, #2 --> #3, #3 --> #4 κλπ..), το πρώτο δωμάτιο #1 μένει άδειο και μπορεί ο ξενοδόχος να δώσει το δωμάτιο αυτό στον καινούργιο πελάτη (Hilbert's paradox of the Grand Hotel).*

II. **Σε απαντήσεις φοιτητών στις οποίες αν και δεν προκύπτει αν οι φοιτητές γνώριζαν το παράδοξο του Ξενοδοχείου του Hilbert, ωστόσο προκύπτει ότι σχεδόν όλοι, (με εξαίρεση 3/103 που δεν αιτιολόγησαν) αντιλαμβάνονται την ατέρμονη φύση του απείρου και το γεγονός ότι όποιος αριθμός και αν προστεθεί στο άπειρο θα προκύπτει πάλι το άπειρο (29/103).**

Ενδεικτικές απαντήσεις είναι οι εξής:

- *Ο πελάτης μπορεί να μείνει στο ξενοδοχείο. Εάν αυτό δεν ίσχυε τότε το άπειρο θα είχε άνω πέρας, δηλαδή θα ήταν ένα πεπερασμένο σύνολο, κάτι που είναι άτοπο (άπειρο + 1 = άπειρο).*
- *Αφού τα δωμάτια είναι άπειρα τότε σαφώς θα υπάρχει και άλλο δωμάτιο για πελάτη μιας και το άπειρο δεν είναι ορισμένος αριθμός αλλά μία ιδέα κάτι το ατελείωτο.*

2^{ον}) Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι ο ξενοδόχος δε μπορεί να εξασφαλίσει τη διαμονή, με βασική αιτιολογία ότι όλα τα δωμάτια είναι κατειλημμένα (21/103).

Ενδεικτικές απαντήσεις φοιτητών είναι οι εξής:

- *Η πρώτη απάντηση που έρχεται στο μυαλό μου είναι όχι. Το πρόβλημα αυτό δεν δίνει καμία σημασία στην πολυπλοκότητα του απείρου, νομίζω το εκλαμβάνει σαν έναν απλό αριθμό, και λέει πως υπάρχουν πελάτες τόσοι όσοι τα δωμάτια δηλαδή άπειροι. Αν συνεχίσουμε με αυτή την λογική, δεν βλέπω γιατί να μπορεί ο ξενοδόχος να δεχτεί κι άλλους πελάτες, όπως πχ δεν θα μπορούσε ένας ξενοδόχος με 100 πελάτες και 100 δωμάτια.*

- *Όχι, ο αριθμός των δωματίων είναι σταθερός, δεν μπορεί να εμφανιστεί ένα δωμάτιο κενό τη στιγμή που όλα είναι κατειλημμένα.*

3ον) Απροσδιόριστες απαντήσεις (15/103).

Ενδεικτικές απαντήσεις φοιτητών είναι οι εξής:

- *Εφόσον, έχει άπειρο αριθμό δωματίων πάντα θα υπάρχουν και άπειρα ελεύθερα. Δεν είναι δυνατόν να πούμε ότι είναι όλα κατειλημμένα διότι τότε θα ήταν πεπερασμένος ο αριθμός τους, άρα δεν θα ήταν άπειρα τα δωμάτια, άτοπο από εκφώνηση. Συνεπώς η απάντηση είναι, πως δεν είναι δυνατόν να είναι όλα κατειλημμένα, αλλά θα υπάρχουν πάντα άπειρα ελεύθερα.*
- *Προσωπικά δεν μπορώ να απαντήσω με βεβαιότητα. Από τη μία, η έκφραση "όλα κατειλημμένα από πελάτες" είναι απόλυτη και δηλώνει ξεκάθαρα πως δεν υπάρχουν διαθέσιμα δωμάτια. Από την άλλη, από μαθηματικής πλευράς , άπειρο+1 = άπειρο, δηλαδή από τη στιγμή που το ξενοδοχείο έχει άπειρα δωμάτια γιατί να μην έχει και ακόμη ένα πεπερασμένο πλήθος δωματίων, δηλαδή πάντοτε θα μπορεί να εξασφαλίζεται διαμονή σε πεπερασμένο πλήθος(ή και άπειρο αφού (+) άπειρο + (+) άπειρο = άπειρο) πελατών.*
- *Το ξενοδοχείο έχει άπειρα δωμάτια(άπειρο1).Οι πελάτες που εξυπηρετεί είναι επίσης, άπειροι(άπειρο2). Για να βρω πόσα δωμάτια είναι διαθέσιμα κάνω την πράξη (άπειρο1-άπειρο2) και έχω απροσδιόριστη μορφή. Η αφαίρεση μπορεί να δίνει αποτέλεσμα το μηδέν ή και θετικό αριθμό (όπως έχω δει σε ασκήσεις σε όρια). Δε δίνει, όμως, αρνητικό αφού πάντα άπειρο1>=άπειρο2. Έτσι, δε γνωρίζουμε αν μπορεί να εξυπηρετηθεί ο πελάτης.*
- *θεωρητικά δε μπορεί να δεχτεί άλλους πελάτες , σκέφτομαι μια περίπτωση όπου κάποιο δωμάτιο δεν είναι υπερπλήρες, δηλαδή πχ σε τρίκλινο δωμάτιο μένει ένας πελάτης επαγγελματίας και έρχεται και ο εν λόγω νέος πελάτης επίσης με το ίδιο προφίλ και από κοινού αποδεχτούν να το μοιραστούν, καθώς και οι δυο είναι μόνοι και έχουν έρθει για δουλειά και γιατί όχι να μην εξυπηρετήσουν ο ένας τον άλλον.*

Ερώτηση 4β: Εάν έρθουν δέκα καινούργιοι πελάτες στο φανταστικό ξενοδοχείο, μπορεί ο ξενοδόχος να τους εξασφαλίσει τη διαμονή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η προκειμένη ερώτηση αποτελεί παραλλαγή της προηγούμενης ερώτησης, της 4α και στόχο είχε να αναδείξει πιθανές διαφοροποιήσεις στις απαντήσεις των μαθητών και των φοιτητών σε σχέση με την προηγούμενη ερώτηση.

Α. ΜΑΘΗΤΕΣ

Οι μαθητές έδωσαν πανομοιότυπες με την 4α απαντήσεις, δηλαδή δε διαφοροποιήθηκαν ουσιωδώς.

Β. ΦΟΙΤΗΤΕΣ

Η πλειοψηφία των φοιτητών έδωσε παρόμοιες απαντήσεις με την 4α, παρόλα αυτά 3 φοιτητές (3/103) διαφοροποίησαν την απάντησή τους. Αν και στην 4α είχαν αναφέρει ότι μπορεί να εξυπηρετηθεί ένας καινούργιος πελάτης, στην 4β θεώρησαν τους δέκα επιπλέον πελάτες μεγαλύτερο μέγεθος από τον έναν, άρα δυσκολότερο να εξυπηρετηθούν. Πιο συγκεκριμένα ανέφεραν:

- *Θεωρώ ότι δεν είναι σωστό να γίνει προσπάθεια να χωρέσουν άλλοι 10 άνθρωποι σε ένα υπέρπληρες ξενοδοχείο. Δεν είναι σωστό για πολλούς λόγους όπως λόγους ασφάλειας εξυπηρέτησης κλπ.*
- *Όχι γιατί δεν μπορεί να φτιάξει 10 δωμάτια, ενώ αν φτιάξει ένα, δηλαδή για ένα πελάτη δεν θα κάνει διαφορά αφού ήδη το ξενοδοχείο είναι φουλαρισμένο.*
- *Δεν έχω κάνει πιθανότητες. Ωστόσο υποψιάζομαι ότι θα είναι λιγότερες οι πιθανότητες να φύγουν 10 προηγούμενοι πελάτες. Δεν είμαι σίγουρη.*

Ερώτηση 4γ: Εάν έρθουν άπειροι καινούργιοι πελάτες στο φανταστικό ξενοδοχείο, μπορεί ο ξενοδόχος να τους εξασφαλίσει τη διαμονή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η ερώτηση αυτή αποτελεί κι αυτή παραλλαγή των προηγούμενων και στόχο είχε να διαπιστωθεί αν υπάρχουν περαιτέρω διαφοροποιήσεις στις αιτιολογήσεις.

Α. ΜΑΘΗΤΕΣ

Οι μαθητές έδωσαν ίδιες απαντήσεις με τις 4α και 4β σε γενικές γραμμές.

Ένας μαθητής (1/51) που διαφοροποιήθηκε, είχε απαντήσει στις 4α και 4β ότι μπορούν να φιλοξενηθούν ένας και δέκα επιπλέον επισκέπτες, στην ερώτηση αυτή έδωσε την παρακάτω απάντηση: *«Δεν νομίζω. Γιατί θα χρειάζεται να μετακινούνται συνεχώς και δεν πρόκειται να μείνουν σε κανένα δωμάτιο».*

Β. ΦΟΙΤΗΤΕΣ

Οι φοιτητές έδωσαν παρόμοιες απαντήσεις με τις 4α και 4γ.

Αρκετοί από τους φοιτητές που δήλωσαν ότι ο ξενοδόχος μπορεί να εξασφαλίζει επιπλέον δωμάτια στους καινούργιους άπειρους πελάτες, αναφέρθηκαν στη μετακίνηση των πελατών από το δωμάτιο n στο 2n, ώστε να μείνουν κενά τα δωμάτια με περιττό αριθμό, για τους καινούργιους πελάτες.

Εκτός των παραπάνω, υπήρξε και ένα μικρό ποσοστό φοιτητών (12/103), οι οποίοι διαφοροποίησαν τις απαντήσεις τους. Ειδικότερα, οι φοιτητές αυτοί, που στις προηγούμενες απαντήσεις τους 4α και 4β είχαν δηλώσει ότι είναι εφικτή η διαμονή επιπλέον πελατών όταν πρόκειται για αριθμητικό μέγεθος (έναν και δέκα), στη συγκεκριμένη περίπτωση τροποποίησαν την απάντησή τους. Π.χ.:

- *Εξαρτάται από το είδος του απείρου, (αριθμήσιμο; Υπεραριθμήσιμο;)*
- *Χωρίς να είμαι σίγουρος, θα έλεγα πως εξαρτάται. Αν οι άπειροι αυτοί πελάτες σχηματίζουν ένα άπειρο αλλά αριθμήσιμο σύνολο, τότε σίγουρα μπορεί να τους βολέψει. Στην περίπτωση όμως που αυτοί είναι άπειροι αλλά σαν τους πραγματικούς ή τους άρρητους αριθμούς, τότε δε νομίζω να μπορέσει. (How to count to infinity?)*
- *Προκύπτει απροσδιοριστία.*
- *Όχι, εάν δεν υπάρχει συνάρτηση 1-1 και επί από το σύνολο των δωματίων προς το σύνολο των πελατών ή αντίστροφα.*

- *Σε αυτό το σημείο πιστεύω εξαρτάται πόσο φανταστικό είναι το ξενοδοχείο. Όχι και ναι.*
- *Εάν έρθουν άπειροι πελάτες τα σύνολα είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους και γι' αυτό δεν είναι βέβαιο ότι ο ξενοδόχος θα εξασφαλίσει τη διαμονή όμως θεωρητικά και πάλι ο ξενοδόχος θα μπορούσε να εξασφαλίσει τη διαμονή τους.*
- *Είναι σαν δύο συναρτήσεις που φτάνουν στο άπειρο, το πλήθος των δωματίων και των ανθρώπων. Αν η συνάρτηση των δωματίων τείνει στο άπειρο με γρηγορότερο ρυθμό, τότε ναι.*

Συγκεντρωτικά:

1. **Από τις απαντήσεις στις ερωτήσεις 4α, 4β, 4γ, προκύπτει ότι οι μισοί περίπου μαθητές και φοιτητές θεωρούν ότι ο ξενοδόχος μπορεί να εξασφαλίσει τη διαμονή σε ένα, δέκα ή άπειρους πελάτες, επειδή προφανώς αναλογίζονται το άπειρο σαν μία ατέρμονη διαδικασία (δυνητικό άπειρο). Οι περισσότεροι από αυτούς, δήλωσαν ότι γνώριζαν το παράδοξο του Ξενοδοχείου του Hilbert. Το ένα τέταρτο περίπου τόσο των μαθητών όσο και των φοιτητών θεωρούν ότι ο ξενοδόχος δε μπορεί να εξασφαλίσει τη διαμονή σε ένα, δέκα ή άπειρους πελάτες, επειδή προφανώς αναλογίζονται το άπειρο ως μέγεθος, ως μια τετελεσμένη ποσότητα (πραγματικό άπειρο). Οι υπόλοιποι μαθητές και φοιτητές έδωσαν διφορούμενες/απροσδιόριστες απαντήσεις.**
2. **Στην ερώτηση 4β, μόνο 3 φοιτητές (3/103) διαφοροποίησαν τις απαντήσεις τους, ενώ στην 4γ, διαφοροποιήθηκαν ένας μαθητής (1/51) και περισσότεροι φοιτητές (12/103).**

Παρακάτω αναφέρονται κάποιες εκφράσεις που χρησιμοποίησαν οι μαθητές και φοιτητές για να περιγράψουν το άπειρο:

- ***Το άπειρο είναι μη μετρήσιμο.***
- ***Το άπειρο είναι ένα μη αριθμήσιμο σύνολο.***
- ***Το άπειρο δε μπορεί να γεμίσει, καθώς δε τελειώνει ποτέ.***
- ***Το άπειρο είναι απροσδιόριστο.***

- ***Το άπειρο δεν είναι ορισμένος αριθμός αλλά μία ιδέα κάτι το ατελείωτο.***
- ***Το άπειρο δεν έχει "τέλος".***
- ***Το άπειρο είναι κάτι που δεν έχει όριο.***
- ***Άπειρα δωμάτια σημαίνει απεριόριστο πλήθος δωματίων.***

6.5 ΕΡΩΤΗΣΗ 5η

Η πέμπτη ερώτηση αναφέρεται στο αποτέλεσμα μιας πράξης μεταξύ αριθμών με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Συγκεκριμένα, η ερώτηση είναι:

Ποιο είναι το αποτέλεσμα της πράξης 1,99999....-0,99999....; Να εξηγήσετε πώς το σκεφτήκατε.

Η ισότητα 0,999…=1 είναι αντικείμενο πολλών συζητήσεων και αμφισβητήσεων, ακόμα και αν υπάρχουν συγκεκριμένες μαθηματικές αποδείξεις. Σύμφωνα με τον Πλατάρο (2020), υπάρχουν είκοσι (20) τρόποι απόδειξης ότι το αποτέλεσμα της πράξης αυτής είναι 1. Το αποτέλεσμα 0,999…=1 δε γίνεται κατανοητό και πλήρως αποδεκτό από τον ανθρώπινο νου, όσο κι αν αποδεικνύεται μαθηματικά.

Α. ΜΑΘΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις των μαθητών με εξαίρεση δύο μαθητές (2/51), που απάντησαν είτε ότι δε γνωρίζουν είτε ότι δεν ορίζεται το αποτέλεσμα ταξινομούνται σε τρεις κατηγορίες:

1^{ον}) Ορθές απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι το αποτέλεσμα της πράξης είναι ίσο με 1 (43/51). Από αυτούς, πέντε μαθητές (5/51) δεν αιτιολόγησαν την επιλογή τους και οι υπόλοιποι παρέθεσαν αιτιολογήσεις όπως:

- **Αφαιρείται ο ίδιος αριθμός δεκαδικών ψηφίων και από τους δύο αριθμούς (33/51).**
- **Αποδεικνύεται μαθηματικά ως εξής (5/51):**
  - *Έστω 0,99...=χ => 0,99...*10=10*χ => 9,99...=10χ => 9+0,99...=10χ => 9+χ=10χ => 9=9χ => χ=1. Άρα η εξίσωση γίνεται 2-1=1 (4/51).*

- *Ωραία αυτό μας το έδειξαν μην νομίζεις ότι το ήξερα μόνη μου. Το έχουμε το 1/3 που είναι ίσο με 0.33333... όταν το πολλαπλασιάζουμε με 3 το κάνει 0.9999... ή αλλιώς 1. Άρα το αποτέλεσμα είναι 0.999... ή 1. Που είναι το ίδιο πράγμα (1/51).*

2ον) Λανθασμένες απαντήσεις (8/51):

- **στις οποίες αναφέρεται ότι το αποτέλεσμα είναι ένα αριθμητικό μέγεθος, εκτός του 1, χωρίς αιτιολόγηση (7/51),** όπως: «κοντά στο 1», *«2»*, *«10/9»*, κ.λ.π.
- **στην οποία δεν δίνεται ξεκάθαρη απάντηση (1/51), δηλαδή:**

  «Εάν υποθέσουμε πως το 9 συνεχίζεται να επαναλαμβάνεται εις το άπειρον, και τα ψηφία του ενός αριθμού με τα ψηφία του άλλου είναι ίσα τότε θα μπορούσε το αποτέλεσμα να είναι 1. Αλλιώς, εάν δεν είναι ίσος, ο συνδυασμός των δεκαδικών ψηφίων μεταξύ των δύο αριθμών είναι άπειρος (η σχέση μεταξύ τους, κατά πόσο διαφέρουν), άρα είναι και άπειρα τα αποτελέσματα».

Β. ΦΟΙΤΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις των φοιτητών ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες:

1ον) Ορθές απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι το αποτέλεσμα της πράξης είναι ίσο με 1 (93/103). Από αυτούς, τέσσερις φοιτητές (4/51) δεν αιτιολόγησαν την επιλογή τους και οι υπόλοιποι παρέθεσαν αιτιολογήσεις όπως:

- **Αφαιρείται ο ίδιος αριθμός δεκαδικών και από τους δύο αριθμούς, θεωρώντας τα δεκαδικά ψηφία είτε άπειρα, είτε πεπερασμένα (44/103).**
- **Αποδεικνύεται μαθηματικά (15/103), π.χ.:**
  - *Ο αριθμός 0,999... είναι το 3 * (1/3) = 1 και αντίστοιχα 1,999... = 1 + (3*(1/3)) = 2. Οπότε έχουμε 1,999... - 0,999... = 2 - 1 = 1. (9/103)*
  - *Έχουμε τους όρους 0.9, 0.09, 0.009...-> γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο 0.9 και |λ| = 1/10 < 1. Άρα, το άθροισμα 0,9 + 0.09 + 0.009+.... = (0.9) / 1-(0.1) = 1 (2/103).*
  - *Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι 0,9999...=1 διότι αν χ=0,9999... ισχύει 10χ=9,9999...=9+0,99999...=9+χ άρα 9χ=9 δηλαδή χ=1. Αντίστοιχα μπορούμε να αποδείξουμε ότι 1,9999...=2. Συνεπώς 1.9999...-0.9999...=1 (4/103).*
- **Άλλη αιτιολόγηση (30/103) :**

- *1, αφού 1.99999... τείνει στο 2 και 0.9999999... τείνει στο 1, άρα 2-1=1.* **(30/103 φοιτητές έδωσαν παρεμφερή αιτιολόγηση)**

2ον) Λανθασμένες απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι το αποτέλεσμα είναι ένα αριθμητικό μέγεθος, εκτός του 1 (10/103), όπως:

- Το αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός κοντά στο 1 (8/103)
- -2.8889 γιατί είναι 1.99999-0.99999-0.9999-0.999-0.99-0.9-0
- 0,9999.000..1....< ρ <1,00000...9.....

Συγκεντρωτικά:

1. **Η πλειονότητα των μαθητών (43/51), σε ποσοστό 84%, έδωσε την ορθή απάντηση, δηλαδή ότι το αποτέλεσμα της πράξης 1,999…-0,999… ισούται με 1. Σε σχέση με την τεκμηρίωση των απαντήσεων:**
   - **οι 5/51, ποσοστό 10%, δεν τεκμηρίωσαν την απάντησή τους,**
   - **οι 5/51, ποσοστό 10%, παρέθεσαν μαθηματικές αποδείξεις,**
   - **οι 33/51, ποσοστό 64%, ανέφεραν ότι αφαιρείται ο ίδιος αριθμός δεκαδικών ψηφίων και από τους δύο αριθμούς.**

Εκτός αυτών, οι 8/51 μαθητές (ποσοστό 16%), έδωσαν λανθασμένη απάντηση, δηλαδή είτε κάποιο αριθμητικό μέγεθος εκτός του 1, είτε μη ξεκάθαρη απάντηση.

Σχεδόν όλοι οι φοιτητές (93/103), σε ποσοστό 90%, έδωσαν την ορθή απάντηση. Σε σχέση με την τεκμηρίωση των απαντήσεων τους:

- **οι 4/103, ποσοστό 4%, δεν αιτιολόγησαν την απάντησή τους,**
- **οι 15/103, ποσοστό 15%, παρέθεσαν μαθηματικές αποδείξεις,**
- **οι 43/103, ποσοστό 42%, ανέφεραν ότι αφαιρείται ο ίδιος αριθμός δεκαδικών ψηφίων και από τους δύο αριθμούς (43/103),**
- **οι 30/103, ποσοστό 29%, ανέφεραν ότι το 1.99999... τείνει στο 2 και 0.9999999... τείνει στο 1, άρα 2-1=1.**

Πέρα από αυτούς, υπάρχουν οι 10/103 φοιτητές, δηλαδή ποσοστό 10%, που έδωσαν λάθος απάντηση, δηλαδή κάποιο αριθμητικό μέγεθος, εκτός του 1.

6.6. ΕΡΩΤΗΣΗ 6η

Η έκτη ερώτηση αναφέρεται στο αποτέλεσμα μιας πράξης με άπειρους όρους. Πρόκειται για τη γεωμετρική σειρά 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16+..., η οποία συγκλίνει στο R και το άθροισμά της, όπως αποδεικνύεται μαθηματικά είναι 1.

Συγκεκριμένα, η ερώτηση είναι:

Ποιο είναι το αποτέλεσμα της πράξης 1/2+1/4+1/8+1/16+....; Να εξηγήσετε πώς το σκεφτήκατε.

Α. ΜΑΘΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις των μαθητών, με εξαίρεση 7 μαθητές (7/51) που απάντησαν ότι δε γνωρίζουν την απάντηση, χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

1ον) Ορθές απαντήσεις στις οποίες οι μαθητές αναφέρουν ότι το αποτέλεσμα της πράξης είναι ίσο με το 1 (12/51).

- **Με μαθηματική απόδειξη (2/51), όπως:**
  - *Το αποτέλεσμα είναι 1. Έστω ότι το αποτέλεσμα της πράξης είναι Σ. Τότε 2Σ=2*(1/2+1/4+1/8+1/16+...) με επιμεριστική έχουμε 2Σ=1+1/2+1/4+1/8+... Την έκφραση αυτή του 2Σ παρατηρούμε πως είναι ίση με 1+Σ, αφού ως Σ ορίσαμε το άθροισμα 1/2+1/4+1/8+.... Άρα έχουμε 2Σ=1+Σ άρα Σ=1.*
- **Άλλη αιτιολόγηση (3/51), όπως π.χ.:**
  - *Η πράξη αυτή είναι η μαθηματική προσέγγιση της ερώτησης 3α, κάθε στοιχείο του αθροίσματος είναι το μισό από το προηγούμενό του. Γεωμετρικά, αν έχουμε ένα σχήμα εμβαδού 1, το πρώτο στοιχείο της πρόσθεσης θα γεμίσει την μισή επιφάνεια, το δεύτερο την μισή της μισής κτλ. Επομένως, αν έχουμε άπειρο πλήθος των στοιχείων της πρόσθεσης θα μπορούμε να γεμίσουμε καθένα από τα άπειρα τμήματα της επιφάνειας που εμφανίζονται. Άρα το αποτέλεσμα είναι 1.*
- **Χωρίς αιτιολόγηση (7/51).**

2ον) Λανθασμένες απαντήσεις (32/51), όπως:

- **Το αποτέλεσμα της πράξης ισούται με κάποιο τυχαίο αριθμητικό μέγεθος εκτός του 1 (18/51), π.χ.:**
    - *1/2 και το σκέφτηκα με τις προσεγγίσεις της χημείας*
    - *15/16 αφού τα κάνουμε ομώνυμα*
    - *Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των αριθμών 2,4,8,16, το οποίο είναι το 16. Το πολλαπλασιάζουμε με τα κλάσματα και προκύπτουν οι αριθμοί 8,4,2,1. Τους προσθέτουμε και βγαίνει αποτέλεσμα 15.*
    - *Το αποτέλεσμα της πράξης είναι ίσο με έναν αριθμό κοντά του 1 (7/51 μαθητές έδωσαν παρεμφερή απάντηση).*
- **Το αποτέλεσμα της πράξης είναι το άπειρο, με βασική αιτιολογία ότι οι αριθμοί που προστίθενται είναι άπειροι (12/51).**
- **«Δεν υπάρχει αποτέλεσμα», με την αιτιολογία ότι δε γνωρίζουν πόσα θα είναι τα στοιχεία που προστίθενται στο άθροισμα (2/51).**

Β. ΦΟΙΤΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις των φοιτητών, με εξαίρεση τέσσερις φοιτητές (4/103) που δήλωσαν ότι δε ξέρουν το αποτέλεσμα, χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

1ον) Ορθές απαντήσεις στις οποίες οι φοιτητές αναφέρουν ότι πρόκειται για μια γεωμετρική σειρά με άθροισμα 1 (51/103)

- **με μαθηματικές αποδείξεις (13/103), όπως:**
    - *Το αποτέλεσμα της πράξης σχετίζεται με το παράδοξο του Ζήνωνα και μπορούμε να αποδείξουμε ότι πλησιάζει άπειρα το 1. Το παραπάνω άθροισμα ορίζεται ως εξής: s = 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... + 1/(2^(n-1)) + 1/2^n όπου το n τείνει στο άπειρο. Πολλαπλασιάζοντας το s επί 2 προκύπτει: 2s = 1 + 1/2 + 1/4 +...+ 1/(2^(n-1)) = 1 + [s - 1/2^n] και αφαιρώντας από κάθε μέλος το s: s = 1 + 1/2^n και όσο το n προσεγγίζει το άπειρο, το άθροισμα γίνεται ίσο με 1.*
- **χωρίς μαθηματικές αποδείξεις (38/103)**

2ον) Λανθασμένες απαντήσεις, (48/103) όπως:

- **Η σειρά δίνει αποτέλεσμα το άπειρο (19/103),** με αιτιολογία π.χ. «*παρ' ότι τα κλάσματα όλο και μικραίνουν συνεχίζουν να προσθέτουν κάτι, άρα αφού είναι μια πράξη με άπειρους όρους που ο κάθε ένας προσθέτει κάτι, το αποτέλεσμα είναι το άπειρο*».
- **Η σειρά δίνει αποτέλεσμα κάποιο άλλο αριθμητικό μέγεθος, εκτός του 1 (29/103), όπως π.χ.:**
    - *Το αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός πολύ κοντά στο 1. Είναι αντίστοιχο ερώτημα με αυτό του Δημήτρη. Το άθροισμα ποτέ δεν θα φτάσει το 1, αλλά συνεχώς θα το πλησιάζει (5/103 έδωσαν παρεμφερή απάντηση με αυτή).*
    - *0, το άθροισμα μειώνεται συνεχώς και πλησιάζει το 0.*
    - *Η γεωμετρική σειρά συγκλίνει στον αριθμό 2. Παρατηρούμε ότι κάθε επόμενος όρος είναι το 1/2 του προηγουμένου έτσι τελικά όλοι οι όροι μετά τον πρώτο θα έχουν άθροισμα 1, καθώς είναι άπειροι στο πλήθος.*
    - *Προσεγγιστικά, η απάντηση της πράξης είναι αρκετά κοντά στο 1/2 αφού όλοι οι υπόλοιποι όροι είναι αρκετά μικρότεροι ιδίως όταν ν τείνει στο άπειρο (14/103 έδωσαν τέτοιο είδους απαντήσεις).*

Συγκεντρωτικά:

1. **Το 24% των μαθητών (12/51) απάντησε ορθά. Από αυτούς, μόνο το 4% (2/51) έδωσε μαθηματική τεκμηρίωση. Από τους υπόλοιπους που έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις, το 35% (18/51), έδωσε σαν αποτέλεσμα κάποιο αριθμητικό μέγεθος εκτός του 1, το 23% (12/51), ανέφερε ότι η σειρά δίνει αποτέλεσμα το άπειρο αφού αποτελείται από άπειρους όρους και το υπόλοιπο ποσοστό 18% (9/51), ανέφερε είτε ότι δε το γνωρίζει είτε ότι δεν υπάρχει αποτέλεσμα.**
2. **Σχετικά με τους φοιτητές, οι οποίοι διαθέτουν μεγαλύτερη μαθηματική επάρκεια, αναμενόταν να υπάρχει πολύ μεγάλο ποσοστό ορθών απαντήσεων και τεκμηριωμένων αιτιολογήσεων. Ωστόσο, μόνο οι μισοί περίπου φοιτητές (51/103), ποσοστό 50%, απάντησαν ορθώς, από τους οποίους μόνο οι 13/103, ποσοστό 13%, παρέθεσαν μαθηματικές αποδείξεις, ενώ οι υπόλοιποι 52/103,**

ποσοστό 50%, που απάντησαν λανθασμένα είτε δήλωσαν ότι δε γνωρίζουν την απάντηση (4/103), σε ποσοστό 4%, είτε ότι η σειρά απειρίζεται (19/103), σε ποσοστό 18%, είτε ότι η σειρά ισούται με κάποιο αριθμητικό μέγεθος εκτός του 1 (29/103), σε ποσοστό 28%.

6.7. ΕΡΩΤΗΣΗ 7η

Η έβδομη ερώτηση αναφέρεται στο αποτέλεσμα μιας πράξης με άπειρους όρους. Πρόκειται για την αρμονική σειρά 1+1/2+1/3+1/4+…, παρεμφερή με την προηγούμενη, η οποία όμως απειρίζεται θετικά. (βλέπε αποδείξεις σελ. 588-589 Ρασσιάς…..)

Συγκεκριμένα, η ερώτηση είναι:

Ποιο είναι το αποτέλεσμα της πράξης 1+1/2+1/3+1/4+1/5+....; Να εξηγήσετε πώς το σκεφτήκατε.

Α. ΜΑΘΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις των μαθητών, με εξαίρεση έντεκα μαθητές (11/51) που δήλωσαν ότι δε γνωρίζουν το αποτέλεσμα ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες:

1ον) Ορθές απαντήσεις, στις οποίες οι μαθητές αναφέρουν ότι αποτέλεσμα της σειράς είναι το άπειρο (17/51) με:

- **λανθασμένη τεκμηρίωση, δηλαδή ότι το αποτέλεσμα της πράξης είναι το άπειρο επειδή οι αριθμοί είναι άπειροι (14/51)**
- **ορθή τεκμηρίωση, χρησιμοποιώντας μαθηματικές αποδείξεις (3/51), όπως π.χ.:**
    - *Η πράξη τείνει στο συν άπειρο. Για να το δείξουμε αυτό θα δείξουμε πως είναι μεγαλύτερη από μία άλλη πράξη που σίγουρα τείνει στο συν άπειρο. Το άθροισμα των πρώτων 2 όρων είναι 1+1/2.Το άθροισμα των επόμενων 2 όρων είναι 1/3+1/4 που είναι μεγαλύτερο του 1/4+1/4= 1/2 αφού 1/3>1/4. Το άθροισμα των επόμενων 4 όρων είναι 1/5+1/6+1/7+1/8 θα είναι μεγαλύτερο του 1/8+1/8+1/8+1/8=1/2 αφού 1/5,1/6,1/7>1/8. Το άθροισμα των επόμενων 8 όρων θα είναι*

μεγαλύτερο του 1/2 κ.ο.κ. Συνεχίζοντας έτσι βλέπουμε πως όλη η αρχική πράξη είναι μεγαλύτερη του 1+1/2+1/2+1/2+... η οποία προφανώς τείνει στο συν άπειρο. Άρα πρέπει και η αρχική πράξη να τείνει στο συν άπειρο.

2^{ον}) Λανθασμένες απαντήσεις (23/51)όπως:

- **Απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι το αποτέλεσμα της πράξης είναι κάποιο αριθμητικό μέγεθος, χωρίς ιδιαίτερη αιτιολόγηση (18/51), π.χ.:**
    - *Ένας αριθμός κοντά στο 2 (5/51 μαθητές έδωσαν παρεμφερή απάντηση)*
- **Απαντήσεις τύπου «Δεν υπάρχει αποτέλεσμα» με βασική αιτιολογία ότι δε γνωρίζουν πόσα θα είναι τα στοιχεία που προστίθενται στο άθροισμα (5/51).**

Β. ΦΟΙΤΗΤΕΣ

Οι απαντήσεις των φοιτητών, με εξαίρεση οχτώ φοιτητές (8/103) που δήλωσαν ότι δε ξέρουν το αποτέλεσμα, χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

1^{ον}) Ορθές απαντήσεις στις οποίες οι φοιτητές αναφέρουν ότι αποτέλεσμα της σειράς είναι το άπειρο (69/103)

Α. Αναφέροντας ορθώς ότι πρόκειται για μια αρμονική σειρά που απειρίζεται θετικά (55/103)

- **με μαθηματικές αποδείξεις (9/103), όπως π.χ.:**
    - *Το παραπάνω άθροισμα αποκλίνει στο συν άπειρο. Το 1+ 1/2+1/3+1/4+1/5+1/6 + 1/7 +1/8... >= 1 + 1/2 + 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/8 +1/8 +1/8+... όμως το δεύτερο άθροισμα: 1+1/2 + (1/4+1/4) + (1/8+1/8+1/8+1/8)+...= 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2+... = + άπειρο. Οπότε αφού η αρχική σειρά είναι μεγαλύτερη από την σειρά που αποκλίνει στο συν άπειρο, τότε και η αρχική σειρά αποκλίνει στο συν άπειρο.*
- **χωρίς μαθηματικές αποδείξεις (46/103).**

Β. Αναφέροντας λανθασμένα ότι το αποτέλεσμα της πράξης είναι το άπειρο, καθώς οι αριθμοί που την αποτελούν είναι άπειροι (14/103).

2^{ον}) Λανθασμένες απαντήσεις, (26/103) όπως π.χ.:

- *Το αποτέλεσμα της σειράς είναι δύο, χωρίς κάποια συγκεκριμένη αιτιολόγηση (10/103).*
- *Το αποτέλεσμα της σειράς είναι 1, αναφέροντας «για τον ίδιο λόγο με την προηγούμενη ερώτηση» (3/103).*
- *1,000....1*
- *1 < αποτέλεσμα < 2*
- *περίπου 1*
- *Το παραπάνω εκφράζεται ως Σ(1/n) το οποίο αποδεικνύεται ότι συγκλίνει ως ακολουθία*

Συγκεντρωτικά:

- **Το 33% των μαθητών (17/51) απάντησε ορθώς, όμως μόνο οι 3/51, ποσοστό 6%, έδωσαν κάποια μαθηματική τεκμηρίωση. Από τους υπόλοιπους, οι 18/51, ποσοστό 35%, έδωσαν σαν αποτέλεσμα της πράξης κάποιο αριθμητικό μέγεθος και οι εναπομείναντες 16/51, ποσοστό 31%, ανέφεραν είτε ότι δε το γνωρίζουν είτε ότι δεν υπάρχει αποτέλεσμα.**
- **Πάνω από τους μισούς φοιτητές, δηλαδή οι 69/103 (ποσοστό 67%), απάντησαν ορθώς, ωστόσο μόνο οι 55/103 από αυτούς (ποσοστό 53%), έδωσαν τη σωστή αιτιολόγηση και από αυτούς μόνο οι 10/103, (ποσοστό 10%), παρέθεσαν και κάποια μαθηματική απόδειξη. Οι υπόλοιποι 34/103 φοιτητές (ποσοστό 33%), είτε απάντησαν ότι δε το γνωρίζουν (8/103), σε ποσοστό 8% είτε ανέφεραν ότι η σειρά ισούται με κάποιο αριθμητικό μέγεθος (26/103), σε ποσοστό 25%, χωρίς ουσιαστικές αιτιολογήσεις.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι πεποιθήσεις μας, δηλαδή η υποκειμενική γνώση που κατέχουμε, οι θεωρίες και οι αντιλήψεις μας και οτιδήποτε θεωρούμε ως αληθινή γνώση, αποτελούν το φίλτρο της αντίληψής μας και τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τις καταστάσεις γύρω μας.

Τα ερωτήματα της έρευνας γύρω από το άπειρο, επεδίωξαν να ερευνήσουν και να «φωτίσουν» τις σχετικές πεποιθήσεις των μαθητών και των φοιτητών. Το άπειρο ανέκαθεν προξενούσε και προξενεί αρκετές δυσκολίες και προβλήματα στον καθορισμό του όπως και στην κατανόησή του.

Στις απαντήσεις/αιτιολογήσεις τόσο των μαθητών όσο και των φοιτητών φαίνεται να κυριαρχεί η διαίσθηση όταν καλούνται να αναλογιστούν το άπειρο και να έρθουν αντιμέτωποι με προβληματικές καταστάσεις όπου εμπλέκεται το άπειρο.

Σε γενικές γραμμές τόσο οι μαθητές όσο και οι φοιτητές έδωσαν παρεμφερείς απαντήσεις/αιτιολογήσεις, διότι προφανώς οι πρωτογενείς διαισθητικές αντιλήψεις τους δεν τροποποιούνται εύκολα από την συστηματική διδασκαλία και την εκπαιδευτική παρέμβαση και σταθεροποιούνται σε σχετικά μικρή ηλικία, παρουσιάζοντας μεγάλη αντοχή στις διδακτικές παρεμβάσεις. Οι αιτιολογήσεις των φοιτητών παρουσίασαν μεγαλύτερο βαθμό μαθηματικής επάρκειας σε σχέση με αυτές των μαθητών, δηλαδή ήταν πιο πλήρεις και εμπεριστατωμένες διότι ως φοιτητές και μάλιστα Πολυτεχνείου έχουν μαθηματικές γνώσεις υψηλότερου επιπέδου.

Το άπειρο αντιμετωπίστηκε άλλοτε ως μια τετελεσμένη οντότητα -ενεργό (πραγματικό)- και άλλοτε ως μια διαδικασία που δεν τελειώνει ποτέ -εν δυνάμει (δυνητικό)- ακόμα και από τα ίδια άτομα που σε διαφορετικά υποερωτήματα της ίδιας ερώτησης άλλαζαν την οπτική τους γωνία. Αρκετοί μαθητές και φοιτητές έδωσαν αντιφατικές και διφορούμενες απαντήσεις και αιτιολογήσεις ιδιαίτερα στα παράδοξα του απείρου. Στις πράξεις όπου υπήρχε το στοιχείο του απείρου αν και τα ποσοστά ορθών απαντήσεων ήταν αρκετά υψηλά, τα ποσοστά μαθηματικών τεκμηριώσεων των απαντήσεων ήταν εξαιρετικά χαμηλά.

Αναλυτικότερα:

Στην πρώτη ερώτηση που αφορούσε στη σύγκριση απειροσυνόλων, το 74% των μαθητών και το 54% των φοιτητών έδωσαν την ορθή απάντηση, **ότι το σύνολο Α περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Β.** Η βασική αιτιολόγηση ότι το Β σύνολο είναι υποσύνολο του Α μας δείχνει ότι το άπειρο αντιμετωπίστηκε κυρίως ως ενεργό (πραγματικό), αφού κυριάρχησε η σκέψη ότι «το όλο είναι μεγαλύτερο του μέρους» και υπεργενικεύτηκαν τα χαρακτηριστικά των πεπερασμένων συνόλων και στα απειροσύνολα. Η ενδεδειγμένη απάντηση δόθηκε μόνο από ένα σχετικά μικρό ποσοστό των φοιτητών (15%) που δήλωσε ότι το Α είναι υπεραριθμήσιμο ενώ το Β είναι αριθμήσιμο σύμφωνα με το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor.

Στη δεύτερη ερώτηση που αφορούσε επίσης στη σύγκριση απειροσυνόλων, το 47% περίπου των μαθητών και το 58% των φοιτητών έδωσαν την ορθή απάντηση, **ότι και τα δυο σύνολα, Γ και Δ, περιέχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.** Το 33% των μαθητών και το 20% των φοιτητών φαίνεται ότι εξέλαβαν το άπειρο ως ατέρμονη διαδικασία (δυνητικό άπειρο), θεωρώντας ότι και τα δύο σύνολα που είχαν να συγκρίνουν είναι άπειρα, δεν τελειώνουν ποτέ. Οι ενδεδειγμένες αιτιολογήσεις με βάση την ισοπληθικότητα των αριθμήσιμων συνόλων και την '1-1' αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους, δόθηκαν από το 14% των μαθητών που αιτιολόγησε την απάντησή του μόνο με την 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των συνόλων και το 39% των φοιτητών που έδωσαν και τις δυο ανωτέρω αιτιολογήσεις. Είναι σημαντικό ότι οι υπόλοιποι μαθητές και φοιτητές, όπως και στην προηγούμενη σύγκριση απειροσυνόλων, ακολούθησαν την ίδια στρατηγική σκέψης ότι «το όλο μεγαλύτερο του μέρους», δηλαδή αναλογίστηκαν το άπειρο ως ενεργό (πραγματικό).

Στην τρίτη ερώτηση, που αφορούσε στο παράδοξο της διχοτόμησης του Ζήνωνα, τα υποερωτήματα 3α και 3β αφορούσαν στο *«πόσες στάσεις θα κάνει ο Δημήτρης για να φτάσει στον προορισμό του σε μια απόσταση 1000 και 2000 μέτρων»* (διπλάσια). Το άπειρο αντιμετωπίστηκε κυρίως ως συνεχιζόμενη διαδικασία χωρίς τέλος (δυνητικό άπειρο) από τα 2/3 περίπου τόσο των μαθητών (61%) όσο και των φοιτητών (60%) που απάντησαν ότι ο Δημήτρης θα κάνει άπειρες στάσεις, άρα δε θα φτάσει στον προορισμό του. Από τους υπόλοιπους το άπειρο αντιμετωπίστηκε είτε ως ενεργό (πραγματικό) δηλαδή ως μέγεθος, ως μια τετελεσμένη ποσότητα αφού έγινε προσπάθεια να προσεγγισθεί με αριθμητικά μεγέθη είτε με αντιφατικές και διφορούμενες αιτιολογήσεις, διότι προφανώς τα διαισθητικά κριτήρια που χρησιμοποίησαν τόσο οι μαθητές όσο και οι φοιτητές για να αιτιολογήσουν την επιλογή απάντησής τους ήταν αντίθετα το ένα με το άλλο. Είναι ενδιαφέρον ότι αρκετοί μαθητές και φοιτητές που είχαν δώσει αντιφατικές απαντήσεις στην 3α, έδωσαν στην 3β ως απάντηση κάποιο αριθμητικό μέγεθος, ίσως επηρεασμένοι από τη διατύπωση της ερώτησης που αφορούσε στο διπλασιασμό της απόστασης. Στο υποερώτημα 3γ, που αφορούσε στο *«πότε θα φτάσει ο Δημήτρης στην προτελευταία στάση* το 33% των μαθητών και το 40% των φοιτητών έδωσε την απάντηση «ο χρόνος είναι άπειρος, αφού ο Δημήτρης θα κάνει άπειρες στάσεις, άρα δε θα φτάσει στην προτελευταία στάση», άρα φάνηκε να αντιμετωπίζει το άπειρο ως δυνητικό. Ένα μεγαλύτερο ποσοστό (43% μαθητές και 50% φοιτητές) έδωσε ως απάντηση κάποιο αριθμητικό μέγεθος, άρα φάνηκε να αντιμετωπίζει το άπειρο ως πραγματικό και ένα ποσοστό (24% μαθητές και 10% φοιτητές) ουσιαστικά δεν απάντησε στην ερώτηση. Μέσα στις αιτιολογήσεις τους αποτυπώνεται η σύγκρουση της διαίσθησης με τη λογική, που έχει σαν αποτέλεσμα ασαφείς, διφορούμενες, αντιφατικές απαντήσεις.

Στην τέταρτη ερώτηση που αφορούσε στο παράδοξο του ξενοδοχείου του Hilbert και συγκεκριμένα αναφερόταν σε ένα φανταστικό ξενοδοχείο με άπειρο πλήθος δωματίων τα οποία είναι όλα κατειλημμένα από πελάτες. Ζητούσε να απαντηθεί «αν έρθει ένας καινούργιος ή δέκα ή άπειροι πελάτες, αν θα μπορεί ο ξενοδόχος να τους εξασφαλίσει τη διαμονή». Το συγκεκριμένο παράδοξο πολλοί δήλωσαν ότι το γνώριζαν. Οι μισοί περίπου μαθητές και φοιτητές απάντησαν ότι ο ξενοδόχος μπορεί να εξασφαλίσει τη διαμονή σε ένα, δέκα ή άπειρους πελάτες, επειδή προφανώς αναλογίσθηκαν το άπειρο σαν μία ατέρμονη διαδικασία (δυνητικό άπειρο), το 1/4 τόσο των μαθητών όσο και των φοιτητών απάντησε ότι ο ξενοδόχος δε μπορεί να εξασφαλίσει τη διαμονή επειδή προφανώς αναλογίσθηκαν το άπειρο ως μέγεθος, ως μια τετελεσμένη ποσότητα (πραγματικό άπειρο) και οι υπόλοιποι έδωσαν αντιφατικές/διφορούμενες απαντήσεις και αιτιολογήσεις.

Στις τρεις επόμενες ερωτήσεις που αφορούσαν σε πράξεις με το άπειρο, διαπιστώθηκε ότι αν και δόθηκαν σε αρκετές περιπτώσεις ικανοποιητικά ποσοστά ορθών απαντήσεων τόσο από τους μαθητές όσο και από τους φοιτητές, τα ποσοστά ορθών και τεκμηριωμένων αιτιολογήσεων ήταν πενιχρά, λόγω του γεγονότος ότι οι περισσότεροι λειτούργησαν με οδηγό τη διαίσθηση. Αναλυτικά:

Στην πέμπτη ερώτηση που ζητούσε το αποτέλεσμα της πράξης 1,999….-0,999…. η πλειονότητα των μαθητών (84%) και των φοιτητών (90%) έδωσαν τη σωστή απάντηση «1». Όμως μόνο 10% των μαθητών το 15% των φοιτητών τεκμηρίωσαν την απάντησή τους με μαθηματική απόδειξη.

Στην έκτη ερώτηση, που αφορούσε στο αποτέλεσμα της γεωμετρικής σειράς 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16+…, η οποία συγκλίνει στο R και το άθροισμά της είναι 1, το 24% των μαθητών και το 50% των φοιτητών απάντησαν ορθώς. Όμως μόνο το 4% των μαθητών και το 13% των φοιτητών τεκμηρίωσαν την απάντησή τους με μαθηματική απόδειξη.

Τέλος στην έβδομη ερώτηση, που αφορούσε στο αποτέλεσμα της αρμονικής σειράς 1+1/2+1/3+1/4+….. και η οποία όμως απειρίζεται θετικά, το 33% των μαθητών και το 67% των φοιτητών έδωσαν ορθές απαντήσεις. Από αυτούς το 6% των μαθητών και το 10% περίπου των φοιτητών τεκμηρίωσαν την απάντησή τους με μαθηματική απόδειξη.

Προκαλεί ενδιαφέρον το σχετικά μεγάλο ποσοστό των λανθασμένων αιτιολογήσεων σε όλες τις ερωτήσεις όχι τόσο των μαθητών αλλά περισσότερο των φοιτητών του Πολυτεχνείου από τους οποίους αναμένονταν μεγαλύτερα ποσοστά εμπεριστατωμένων και πληρέστερων τεκμηριώσεων λόγω του υψηλότερου επιπέδου της μαθηματικής τους επάρκειας. Προφανώς η διαισθητική προσέγγιση των παραπάνω πράξεων κυριάρχησε της λογικής μαθηματικής σκέψης και δημιούργησε σημαντικά γνωστικά εμπόδια στην προσέγγιση των πράξεων με μαθηματικό τρόπο.

Εν κατακλείδι, στη συγκεκριμένη εργασία επιχειρήθηκε η διερεύνηση και η καταγραφή των πεποιθήσεων των μαθητών και των φοιτητών σχετικά με το άπειρο. Τα αποτελέσματα της έρευνας ανέδειξαν τις γνωστικές δυσκολίες προσέγγισης του απείρου. Τα διαισθητικά κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν για να τεκμηριωθούν οι επιλογές των απαντήσεων άλλοτε οδηγούσαν στην αντιμετώπιση του απείρου ως δυνητικό, άλλοτε στην αντιμετώπισή του ως ενεργό και άλλοτε σε γνωστική σύγκρουση αφού ήταν αντίθετα το ένα με το άλλο και αντιφατικά.

Η έρευνα ευελπιστεί να συνεισφέρει στην υπάρχουσα βιβλιογραφία για το άπειρο και να θέσει ερωτήματα για περαιτέρω διερεύνηση και προβληματισμό εφόσον κοινός στόχος όλων των ερευνητών είναι η διαρκής βελτίωση της γνώσης. Οι περιορισμοί της αφορούν κυρίως στο δείγμα που χρησιμοποιήθηκε, το οποίο δεν αρκεί για να καταστήσει τα αποτελέσματα της έρευνας πλήρως γενικεύσιμα σε ευρύτερους πληθυσμούς, γεγονός που θα μπορούσε να ξεπεραστεί αν ήταν δυνατόν να σχεδιαστεί έρευνα με περισσότερους μαθητές και φοιτητές από διαφορετικές γεωγραφικά περιοχές κάτι που θα συνέβαλε σε έναν πιο γενικεύσιμο χαρακτήρα των ευρημάτων.

8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

8.1 ΕΛΛΗΝΙΚΗ

Αναπολιτάνος, Δ. Α. (1985,2005). *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδ. Νεφέλη.

Αντωνόπουλος, Μ., κ.ά. *Οι αντιλήψεις των μαθητών που δεν έχουν διδαχθεί Απειροστικό Λογισμό για το άπειρο.* Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο: https://scholarbook.webnode.gr/news/οι-αντιλήψεις-των-μαθητών-που-δεν-έχουν-διδαχ/ (15/04/2020).

Αρβανίτη, Αγγελική. *Περί Κίνησης.* Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο: ΕΛΠ 22, 3η Εργασία - ΕΛΠ22_ΓΕ3_2011 Περί Κίνησης - Ζήνωνας Αριστοτέλης | Angeliki G Arvaniti - Academia.edu (21/1/21).

Αρμάος, Κ. (2012). *Δικαιολόγηση συνολοθεωρητικών αξιωμάτων. Ιστορική και φιλοσοφική προσέγγιση.* Διπλωματική εργασία. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Βαμβακούση, Ξ., & Βοσνιάδου, Σ. (2007). *Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα…; Όψεις της κατανόησης των παιδιών για τους ρητούς αριθμούς και το συμβολισμό τους*. Στο Χ. Σακονίδης & Δ. Δεσλή (Επιμ.) Πρακτικά του 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών, σ. 145-155. Αθήνα: Εκδ. Τυπωθήτω.

Βλάχος, Ι. (2015). *Αντιλήψεις των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την έννοια του συνόλου.* Διπλωματική εργασία. Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Βώκος Γ. (2008). *1609, Γαλιλαίος, Κέπλερ: Από τον κλειστό κόσμο στο άπειρο σύμπαν*. Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο: https://www.tovima.gr/2008/12/28/society/1609-galilaios-kepler-apo-ton-kleisto-kosmo-sto-apeiro-sympan/ (21/04/2020).

Γκρίτζαλη, Ν. Γ. (2009). *Ιστορία των προβλημάτων στα Μαθηματικά*. Μεταπτυχιακή εργασία. Ηράκλειο: Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Δαρβίρη, Χ. (2009). *Μεθοδολογία έρευνας στο χώρο της υγείας*. Αθήνα: Εκδ. Χ. Πασχαλίδης.

Δαρίβας, Ι. (2017). *Μαθηματικά παράδοξα και πλάνες. Πηγή έμπνευσης και διασκέδασης.* Πτυχιακή εργασία. Καρλόβασι: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Δέμης, Α. (1988). *Η έννοια του απείρου κατά τον Πρόκλο διάδοχο.* Διπλωματική εργασία. ΕΚΠΑ.

Δημητρόπουλος, Ε., (2004). *Εισαγωγή στη μεθοδολογία της επιστημονικής έρευνας: προς ένα συστηματικό δυναμικό μοντέλο μεθοδολογίας επιστημονικής έρευνας.* Αθήνα: Εκδ. Έλλην.

Δημόκριτος (2004). *Μαθηματικά–Φυσικές Επιστήμες, Αστρονομία-Κοσμολογία Της Ατομικής Θεωρίας.* Θεσσαλονίκη: Εκδ. Ζήτρος.

Ζωιτσάκος, Σ. (2010). *Αντιλήψεις μελλοντικών καθηγητών μαθηματικών για ρητούς αριθμούς με δυο δεκαδικές αναπαραστάσεις*. Διπλωματική εργασία. Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ». Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Θεοδοσίου, Θ. Σ. (2006). *Από το άπειρον του Αναξιμάνδρου στην Αρχαία Ελλάδα Έως την απειρία των κόσμων στη σύγχρονη Κοσμολογία.* 11ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών «Οι νέοι ορίζοντες της φυσικής στον αιώνα μας». Λάρισα.

Ίσαρη Φ., Πούρκος Μ. (2015). *Ποιοτική Μεθοδολογία Έρευνας.* Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο: www.kallipos.gr (30-12-2020).

Καγκουρά, Θ., κ.α. (2008). *Αλλαγή των στάσεων και πεποιθήσεων των μαθητών για τα Μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.* Πρακτικά 10ου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρίας Κύπρου. Κύπρος.

Κάλφας, Β. & Ζωγραφίδης, Γ. Διαθέσιμο στον δικτυακό τόπο: https://www.greek-language.gr/digitalResources/ancient_greek/history/filosofia/page_010.html (25-11-2020).

Καραγιάννης, Δ. (2019). *Η έννοια του απείρου με βάση τη θεώρηση των Ενσώματων Μαθηματικών*. Διπλωματική εργασία. Πάτρα: ΕΑΠ.

Καρακώστας, Λ. Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο: http://users.sch.gr/lkarak/paradoxa.htm (28-11-2020).

Καρλοβασίτης, Ε. (2016). Η *συμβολή της αρχαίας Ελλάδας στη γέννηση και εξέλιξη των Μαθηματικών.* Πτυχιακή εργασία. ΤΕΙ Ηπείρου.

Κασουρίδης, Α. (2019). *Διενέξεις περί απείρου στην Ιστορία των Μαθηματικών και σήμερα*. Διπλωματική εργασία. Πάτρα: ΕΑΠ.

Κουρλιούρος, Η. (1989). *Ανάπτυξη του χώρου και χωροταξικός σχεδιασμός: Ζητήματα επιστημονικής μεθόδου, συστημάτων προσέγγισης και επιστημολογικής κριτικής του σχεδιασμού.* Αθήνα: Αδημοσίευτη Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Αρχιτεκτόνων ΕΜΠ.

Λιναδρής, Α., Παπαγιαννόπουλος, Κ., & Καλησπεράτη, Ε. (2011). *Η διαδικτυακή έρευνα. Πλεονεκτήματα, μειονεκτήματα και εργαλεία διεξαγωγής διαδικτυακών ερευνών.* Αθήνα: Εθνικό Κέντρο Κοινωνικών Ερευνών.

Λαγουμιντζής Γ., Βλαχόπουλος Γ., Κουτσογιάννης Κ. (2015). *Μεθοδολογία της Έρευνας στις Επιστήμες Υγείας.* Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο: www.kallipos.gr (30-12-2020).

Νιτσοτόλης, Β. (2014). *Άπειρες διαδικασίες στους πραγματικούς αριθμούς*. Διπλωματική εργασία. Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Μάρκος, Α. (2014). *ΚΛ.* Παρουσίαση. Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης. Διαθέσιμο στο διαδίκτυο: http://www.amarkos.gr/material/Week3-4.pdf (30-12-2020).

Μπαμπίλη, Α. Χ. (2010). *Το μαθηματικό άπειρο, τα παράδοξα και ο νους. Μια διερεύνηση των διαδρομών που ακολουθεί ο νους προσπάθεια προσέγγισης του απείρου*. Διπλωματική Εργασία. Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Ουζούνη, Χ. & Νακάκης, Κ. (2011). Η Αξιοπιστία και η Εγκυρότητα των Εργαλείων Μέτρησης σε Ποσοτικές Μελέτες. *Νοσηλευτική,* τ. 50 (2), σ. 231–239.

Παπαϊωάννου, Μ. (2015). *Αρχαία ελληνικά Μαθηματικά. Μια γενετική αναζήτηση*. Διπλωματική εργασία. Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Παρασκευόπουλος, Ι. (1993). *Μεθοδολογία επιστημονικής έρευνας*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.

Παρασκευόπουλος, Ι. (1999). *Ερωτηματολόγιο διαπροσωπικής και ενδοπροσωπικής προσαρμογής*. Αθήνα: Εκδ. Ελληνικά Γράμματα.

Πατέλης, Δ. (2013*). Εισαγωγή στη Φιλοσοφία. Κείμενα προβληματισμού*. Κρήτη: Πολυτεχνείο Κρήτης.

Παππάς, Θ. (2002). *Η μεθοδολογία της επιστημονικής έρευνας στις ανθρωπιστικές επιστήμες*. Αθήνα: Εκδ. Καρδαμίτσα.

Πλατάρος, Ι. (2002). *Μετάφραση-Σχόλια στο ιστορικό άρθρο του David Hilbert, «ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ» (On the infinite).* Μεταπτυχιακή εργασία. Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Πλατάρος, Ι. (2016). *Εισαγωγή μιας συστηματικότερης διδασκαλίας σε σχέση με τις έννοιες μέτρησης μεγάλου πλήθους ή του απείρου στο Γυμνάσιο - Λύκειο με ελκυστικούς τρόπους*. Μεταπτυχιακή Εργασία. Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Πλατάρος, Γ. (2020). Το «γιατί», το «πώς» και το «διότι» όλων των αποδείξεων ότι 0,999…=1 και η αντίληψη για το άπειρο και το απειροστό. *Νέος Παιδαγωγός*, τ. 20, σελ. 174-186.

Ρασσάς, Β. (2006). *Φιλοσοφικό Λεξικό «Θύραθεν».* Αθήνα: Εκδ. Πολιτεία.

Ρωμανίδης, Σ. (2013). *Ιστορική αναδρομή του απείρου*. Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο: http://eisatopon.blogspot.com/2013/11/blog-post_7.html (15/04-2020).

Σιάσος, Λ. (1989). *Η διαλεκτική στη φανέρωση της φύσης. Μελέτη στα Φυσικά του Αριστοτέλη*. Θεσσαλονίκη: Εκδ. Πουρναράς Π. Σ.

Σκαρδανάς, Η. (2018). *Λογική και Μαθηματικά.* Διαθέσιμο στον δικτυακό τόπο: http://mathologic.gr/rwhwlpilnd/dixotomia/ (25/11/2020).

Σπανδάγος, Ε. (2000). *Τα Μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων*. Αθήνα: Εκδ. Αίθρα.

Σπανδάγος, Ε., Σπανδάγου, Ρ. & Τραυλού, Δ. (2000). *Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας*. Αθήνα: Εκδ. Αίθρα.

Σπανού, Α. (2019). *Διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών Δημοτικού για την έννοια του απείρου: Η περίπτωση της σύγκρισης απειροσυνόλων.* Μεταπτυχιακή εργασία. Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο.

Σπηλιοπούλου, Χ. (2004). Αντιλήψεις των μαθητών για το Άπειρο. Διπλωματική εργασία. Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Στεργίου, Β. (2014). *Ερμηνευτική προσέγγιση της έννοιας του απειροστού από την αρχαιότητα μέχρι τη σύγχρονη εποχή.* Πρακτικά 7ου Επιστημονικού Συνεδρίου με διεθνή συμμετοχή. Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών.

Τσαγκαράκης, Γ. (2018). *Η κατανόηση της έννοιας του ορίου από φοιτητές Μαθηματικού τμήματος*. Διπλωματική εργασία. Μακεδονία: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Τσακίρη, Λ. *Σημειώσεις: Εισαγωγή στη Μεθοδολογία της Έρευνας*. Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο: http://dpms.csd.auth.gr/stuff/eis-meth-er.pdf (25/04/2020).

Τσαμπουράκη, Α., & Καφούση, Σ. (2014). *Η έννοια του απείρου-Σκέψεις και προσεγγίσεις από μαθητές της Στ΄ τάξης Δημοτικού.* Πρακτικά 31ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, σ. 940-949. Αθήνα.

Τσομπανίδου, Π. (2013). *Μαθητική αταξία και παραβατικότητα: αίτια και αντιμετώπιση.* Πτυχιακή εργασία. Καβάλα: Τ.Ε.Ι. Καβάλας.

Φίλιας, Β. (2001). *Εισαγωγή στη Μεθοδολογία και τις τεχνικές των Κοινωνικών Ερευνών.* Αθήνα: Εκδ. Gutenberg.

Φίλη, Χ. (2010). *Οι αρχαιοελληνικές καταβολές των σύγχρονων Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδ. Παπασωτηρίου.

Φιλίππου, Γ. & Χρήστου, Κ. (2001). *Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδ. Ατραπός.

Ψάλτη, Α., Σακκά, Δ. & Δεληγιάννη-Κουϊμτζή, Β. (2007). Ανδρικές και γυναικείες ταυτότητες στο σχολείο: εκπαιδευτικές επιλογές και φύλο. Όπως αναφέρεται στο: Δεληγιάννη-Κουϊμτζή, Β. & Σακκά, Δ. (Επιμ.). Από την Εφηβεία στην Ενήλικη ζωή: Μελέτες για της ταυτότητες φύλου στη σύγχρονη ελληνική πραγματικότητα. Αθήνα: Εκδ. Gutenberg.

8.2. ΞΕΝΗ

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer Pub.

Barrow, J. D. (2007). *Άπειρο: Τα μαθηματικά της αθανασίας*. Αθήνα: Εκδ. Τραυλός.

Boyer, B. C. (1959). *The history of the Calculus and its conceptual Development*. New York: Dover Pub.

Cantor, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Berlin: Springer Pub.

Clegg, B. (2003). *A brief history of Infinity*. London: Robinson Pub.

Cohen, L. & Manion, L. (1997). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Εκδ. Έκφραση.

Creswell, J. W. (2002). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative.* Upper Saddle River, N.J: Pearson/Merrill Prentice Hall Pub.

Davis, P.I., & Hersh, R. (1981). *Η μαθηματική εμπειρία.* Αθήνα: Εκδ Τροχαλία.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (2000). *Handbook of qualitative research* (2η έκδ.). Thousand Oaks, California: Sage Pub.

Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In *Advanced mathematical thinking* (σ. 95-126). Dordrecht: Springer.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In *The teaching and learning of mathematics at university level* (σ. 275-282). Dordrecht: Springer.

Duval, R. (1983). L’obstacle du dedoublement des objets mathematiques. *Educational Studies in Mathematics,* τ. 14, σ. 385- 414.

Hannula et al. (2006). Levels of students’ understanding on Infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science,* τ. 4/2, σ. 317–337.

Hammersley, M. (1992). *What's wrong with ethnography*? London: Routledge.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, τ. 10, σ. 3–40.

Kattou, M. et all. (2009). *Teachers perceptions about infinity: a process or an object?.* Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο: http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg10-09-kattou.pdf (14/11/20).

Kirk, G.S., Raven, J.E. & Schofield, M. (2001). *Οι Προσωκρατικοί φιλόσοφοι* (μτφ. Δ. Κούρτοβικ), Δ΄ έκδοση. Αθήνα: M.I.E.T.

Levin, J. R., & O’Donnell, A. M. (1999). What to do about educational research’s credibility gaps? *Issues in Education,* τ. 5(2), σ. 177-229.

Lincoln, Y. S. (2001). *Varieties of validity: Quality in qualitative research*. In J. Smart & W. G. Tierney (Eds.), Higher education: Handbook of theory and research (σ. 25-72). New York: Agathon Press.

Mamolo, A., & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education*, τ. 10(2), σ. 167-182.

Niss, M. & Hojgaard, T. (2011). Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. Denmark: Danish Ministry of Education.

Nunez, R. (1994). *Cognitive development and infinity in the small: Paradoxes and consensus.* Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο: http://www.cogsci.ucsd.edu/~nunez/web/publications.html (12/04/2020).

McKirahan, R.D. JR. (2005). *Ζήνωνας.* Στο Long A.A., Οι Προσωκρατικοί φιλόσοφοι. Συναγωγή συστατικών μελετημάτων (μτφ. Θ. Νικολαίδης – Τ. Τυφλόπουλος, επιμ. Δ.Ι. Ιακώβ) Αθήνα: Εκδ. Παπαδήμας.

Montoro, V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. *Infancia y aprendizaje,* τ. 28(4), σ. 409-427.

Nelson E. (2007). "*Hilbert's mistake". Online paper*. Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο: http://web.math.princeton.edu/~nelson/papers.html (1/11/20).

Pehkonen E. (2001). *A Hidden Regulating Factor in Mathematic Classrooms: Mathematics-Related Beliefs.* In Ahtee M, et all, Research on Mathematics and Science Education, (σ. 11-35). Institute for Educational Research University of Jyvaskyla.

Rucker, R. (2004). *Το άπειρο και ο νους.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Smullyan, R. (2003). *Ο Σατανάς, ο Cantor και το άπειρο*. Αθήνα: Εκδ. Κάτοπτρο.

SciencePedia. *Παράδοξο Ξενοδοχείου Hilbert*. Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο: https://science.fandom.cξom/el/wiki/Παράδοξο_Ξενοδοχείου_Hilbert (20/04/2020).

Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway, τ. 4, σ. 281–288.

Tall, D., & Tirosh, D. (2001). Infinity-the never-ending struggle. Educational Studies in Mathematics, 48(2), 129-136.

Tsamir, P. (1999). When 'the same' is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics,* τ. 38 , σ. 289-307.

Tsamir, P. (1999a). The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: Teaching prospective teachers. Educational Studies in Mathematics, τ. 38(1-3), σ. 209-234.

Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets - a process of abstraction: The case of Ben. *The Journal of Mathematical Behavior*, τ. 21(1), σ. 1-23.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1992). Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), Proc. of the 16th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education (τ. 3, σ. 90-97). USA: Durham.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education*, τ. 30(2), σ. 213-219.

Vilenkin, N.Ya. (1997). *Αναζητώντας το άπειρο.* Αθήνα: Εκδ. Κάτοπτρο.

Windelband, W. & Heimsoeth, H. (2001). *Εγχειρίδιο Ιστορίας της Φιλοσοφίας*, τ. Α'. Αθήνα: Εκδ. Πολιτεία.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

1.ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ

Το παρόν ερωτηματολόγιο δημιουργήθηκε στο πλαίσιο της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας του προπτυχιακού επιπέδου της Σχολής των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Το ερωτηματολόγιο είναι ανώνυμο και οι απαντήσεις σας θα χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά και μόνο για τους σκοπούς της έρευνας. Παρακαλώ, όπου ζητείται αιτιολόγηση, να δοθεί αναλυτικά.

Σας ευχαριστώ πολύ!

Ευγενία Λώλου

Φύλο

- Αγόρι
- Κορίτσι

Τάξη φοίτησης

- Α' Λυκείου
- Β' Λυκείου
- Γ' Λυκείου

Ερώτηση 1: Εάν Α είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών (φυσικών, ακεραίων, ρητών και αρρήτων) και Β είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών, να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

- Το Α περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Β
- Το Β περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Α
- Το Α περιέχει ίσο αριθμό στοιχείων με το Β

Να αιτιολογήσετε την απάντηση που δώσατε στην ερώτηση 1.

Ερώτηση 2: Δίνεται το σύνολο Γ= {1,2,3,4,....} και το σύνολο Δ={1,4,9,16,....}. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

- Το Γ περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Δ
- Το Δ περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Γ
- Το Γ περιέχει ίσο αριθμό στοιχείων με το Δ

Να αιτιολογήσετε την απάντηση που δώσατε στην ερώτηση 2.

Ερώτηση 3α: Ο Δημήτρης θέλει να διανύσει απόσταση ίση με 1.000 μέτρα. Έστω ότι κάνει την πρώτη στάση του στο μέσο της διαδρομής (500 μ.), τη δεύτερη στάση του στο μέσο της υπόλοιπης διαδρομής (250 μ.), κ.ο.κ. Πόσες στάσεις θα κάνει συνεχίζοντας με τον ίδιο ρυθμό μέχρι να φτάσει στον προορισμό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 3β: Πόσες στάσεις θα κάνει ο Δημήτρης συνεχίζοντας με τον ίδιο ρυθμό μέχρι να διανύσει άλλα 1.000 μ., δηλαδή να φτάσει στα 2.000 μ.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 3γ: Αν ο Δημήτρης χρειάζεται 10 λεπτά για να φτάσει στην πρώτη στάση, σε πόσο χρόνο θα φτάσει στην προτελευταία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 4α: Θεωρούμε ένα φανταστικό ξενοδοχείο με άπειρο πλήθος δωματίων τα οποία είναι όλα κατειλημμένα από πελάτες. Αν έρθει ένας καινούργιος πελάτης, μπορεί ο ξενοδόχος να του εξασφαλίσει τη διαμονή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 4β: Εάν έρθουν δέκα καινούργιοι πελάτες στο φανταστικό ξενοδοχείο, μπορεί ο ξενοδόχος να τους εξασφαλίσει τη διαμονή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 4γ: Εάν έρθουν άπειροι καινούργιοι πελάτες στο φανταστικό ξενοδοχείο, μπορεί ο ξενοδόχος να τους εξασφαλίσει τη διαμονή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 5: Ποιο είναι το αποτέλεσμα της πράξης 1,99999....-0,99999....; Να εξηγήσετε πώς το σκεφτήκατε.

Ερώτηση 6: Ποιο είναι το αποτέλεσμα της πράξης 1/2+1/4+1/8+1/16+....; Να εξηγήσετε πώς το σκεφτήκατε.

Ερώτηση 7: Ποιο είναι το αποτέλεσμα της πράξης 1+1/2+1/3+1/4+1/5+....; Να εξηγήσετε πώς το σκεφτήκατε.

2. ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΦΟΙΤΗΤΕΣ

Το παρόν ερωτηματολόγιο δημιουργήθηκε στο πλαίσιο της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας του προπτυχιακού επιπέδου της Σχολής των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Το ερωτηματολόγιο είναι ανώνυμο και οι απαντήσεις σας θα χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά και μόνο για τους σκοπούς της έρευνας. Παρακαλώ, όπου ζητείται αιτιολόγηση, να δοθεί αναλυτικά.

Σας ευχαριστώ πολύ!

Ευγενία Λώλου

Φύλο

- Άνδρας
- Γυναίκα

Σχολή

Έτος Φοίτησης

- 1ο έτος
- 2ο έτος
- 3ο έτος
- 4ο έτος
- 5ο έτος
- Άλλο

Ερώτηση 1: Εάν Α είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών (φυσικών, ακεραίων, ρητών και αρρήτων) και Β είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών, να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

- Το Α περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Β

- Το Β περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Α
- Το Α περιέχει ίσο αριθμό στοιχείων με το Β

Να αιτιολογήσετε την απάντηση που δώσατε στην ερώτηση 1.

Ερώτηση 2: Δίνεται το σύνολο Γ= {1,2,3,4,....} και το σύνολο Δ={1,4,9,16,....}. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

- Το Γ περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Δ
- Το Δ περιέχει περισσότερα στοιχεία από το Γ
- Το Γ περιέχει ίσο αριθμό στοιχείων με το Δ

Να αιτιολογήσετε την απάντηση που δώσατε στην ερώτηση 2.

Ερώτηση 3α: Ο Δημήτρης θέλει να διανύσει απόσταση ίση με 1.000 μέτρα. Έστω ότι κάνει την πρώτη στάση του στο μέσο της διαδρομής (500 μ.), τη δεύτερη στάση του στο μέσο της υπόλοιπης διαδρομής (250 μ.), κ.ο.κ. Πόσες στάσεις θα κάνει συνεχίζοντας με τον ίδιο ρυθμό μέχρι να φτάσει στον προορισμό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 3β: Πόσες στάσεις θα κάνει ο Δημήτρης συνεχίζοντας με τον ίδιο ρυθμό μέχρι να διανύσει άλλα 1.000 μ., δηλαδή να φτάσει στα 2.000 μ.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 3γ: Αν ο Δημήτρης χρειάζεται 10 λεπτά για να φτάσει στην πρώτη στάση, σε πόσο χρόνο θα φτάσει στην προτελευταία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 4α: Θεωρούμε ένα φανταστικό ξενοδοχείο με άπειρο πλήθος δωματίων τα οποία είναι όλα κατειλημμένα από πελάτες. Αν έρθει ένας καινούργιος πελάτης, μπορεί ο ξενοδόχος να του εξασφαλίσει τη διαμονή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 4β: Εάν έρθουν δέκα καινούργιοι πελάτες στο φανταστικό ξενοδοχείο, μπορεί ο ξενοδόχος να τους εξασφαλίσει τη διαμονή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 4γ: Εάν έρθουν άπειροι καινούργιοι πελάτες στο φανταστικό ξενοδοχείο, μπορεί ο ξενοδόχος να τους εξασφαλίσει τη διαμονή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 5: Ποιο είναι το αποτέλεσμα της πράξης 1,99999....-0,99999....; Να εξηγήσετε πώς το σκεφτήκατε.

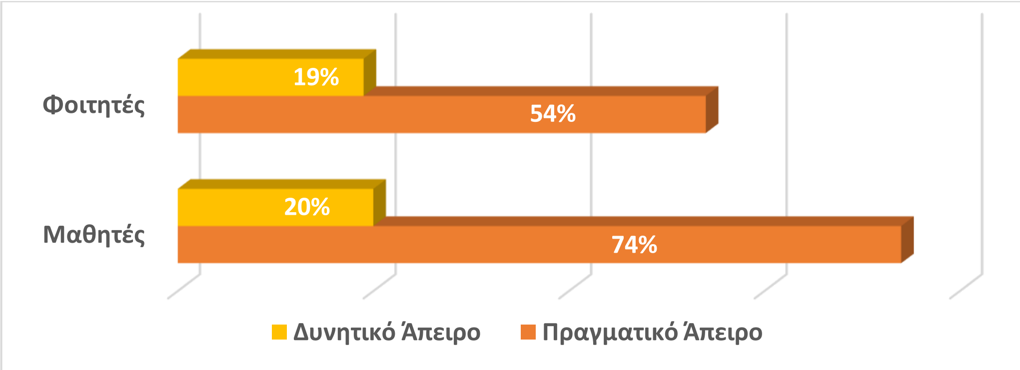
Ερώτηση 6: Ποιο είναι το αποτέλεσμα της πράξης 1/2+1/4+1/8+1/16+....; Να εξηγήσετε πώς το σκεφτήκατε.

Ερώτηση 7: Ποιο είναι το αποτέλεσμα της πράξης 1+1/2+1/3+1/4+1/5+....; Να εξηγήσετε πώς το σκεφτήκατε.

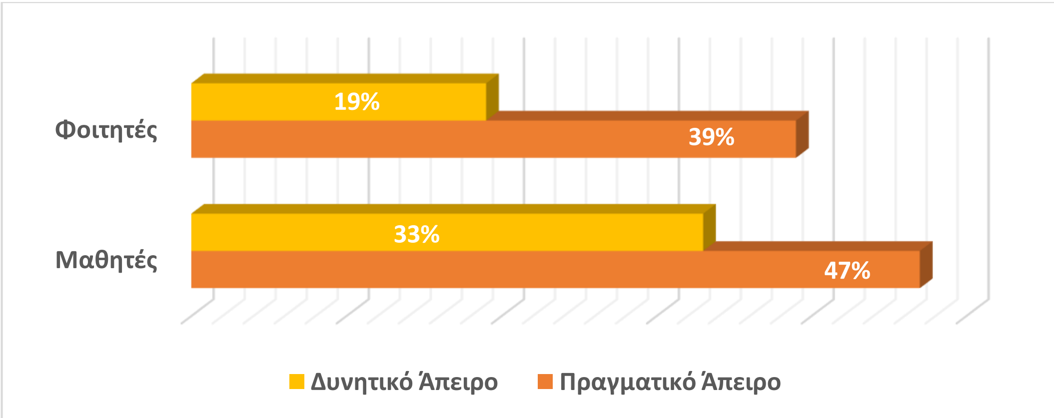
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

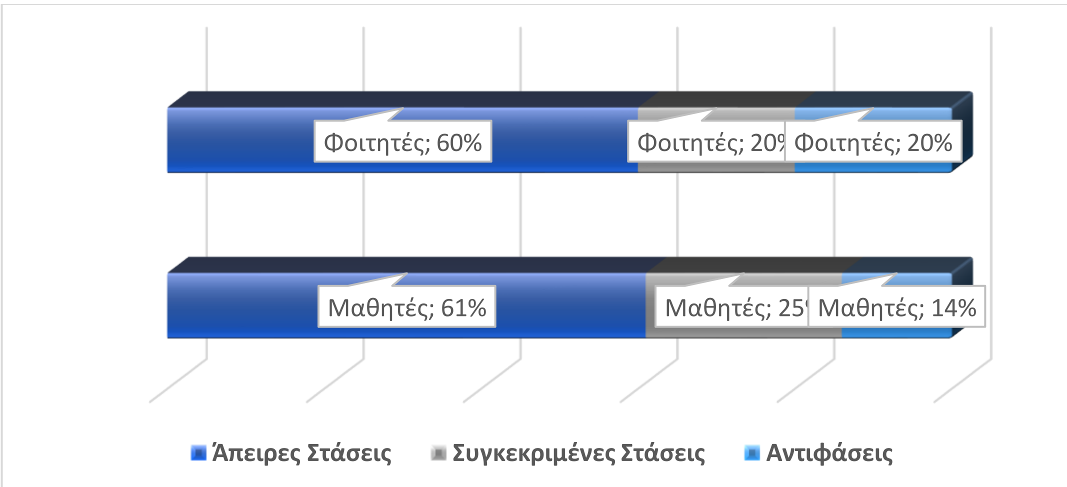
ΕΡΩΤΗΣΗ 1



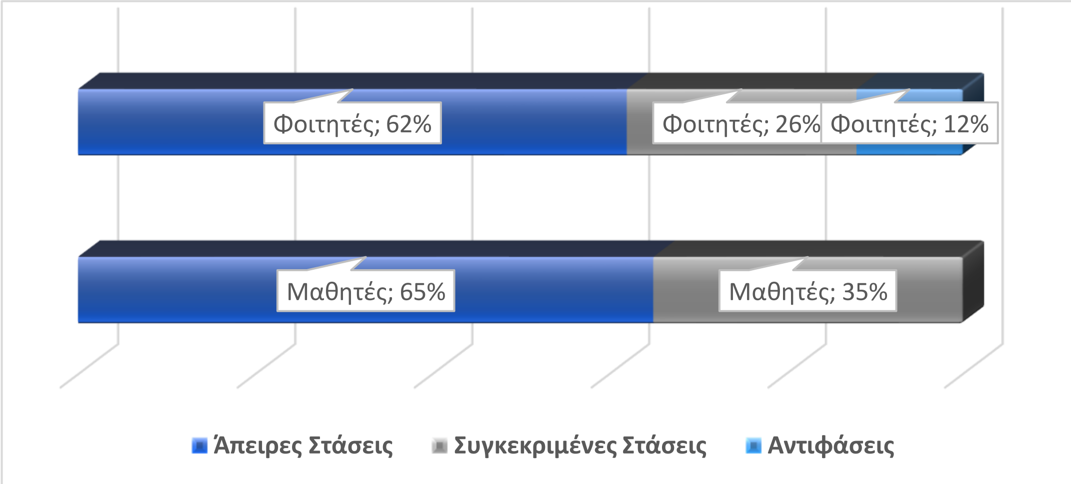
ΕΡΩΤΗΣΗ 2



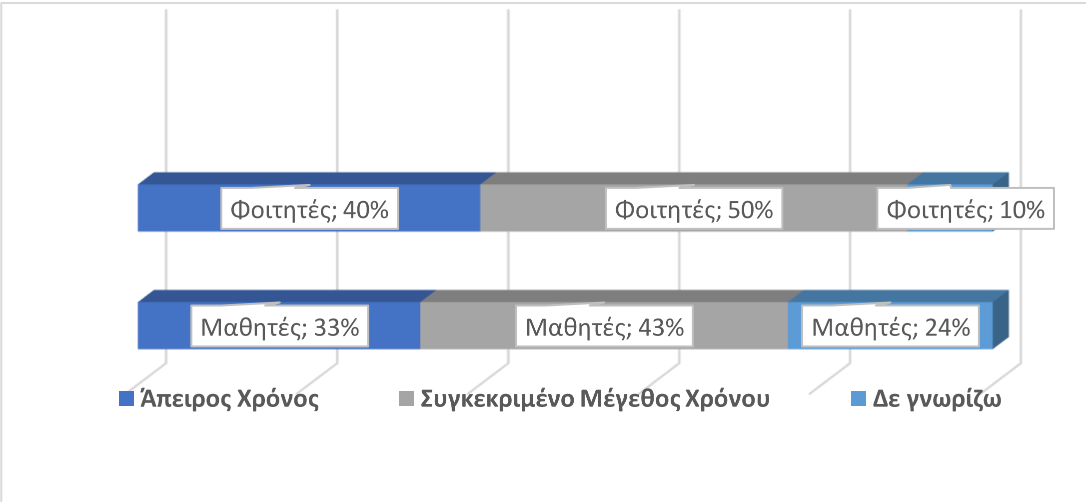
ΕΡΩΤΗΣΗ 3Α



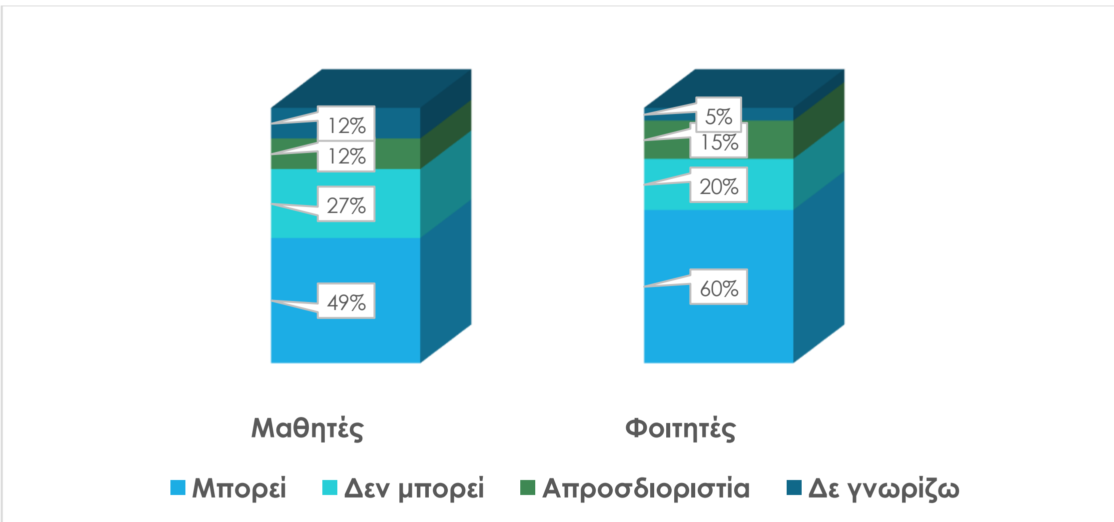
ΕΡΩΤΗΣΗ 3Β



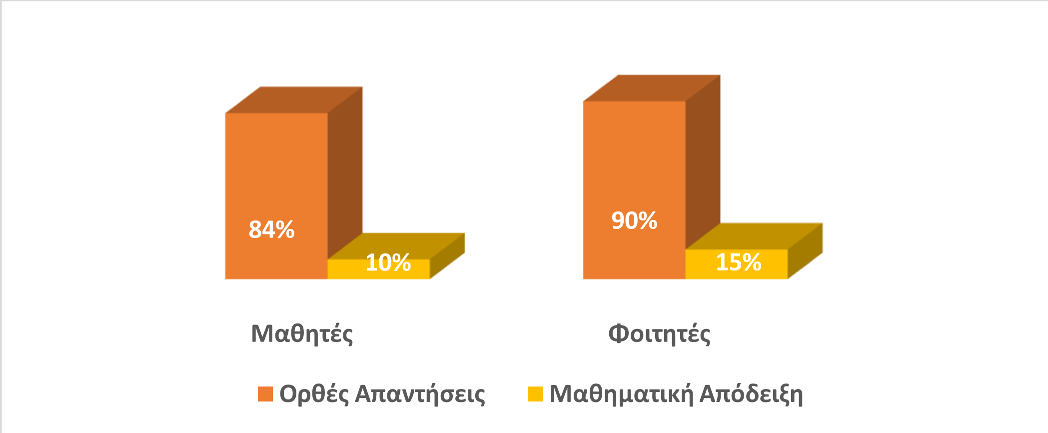
ΕΡΩΤΗΣΗ 3Γ



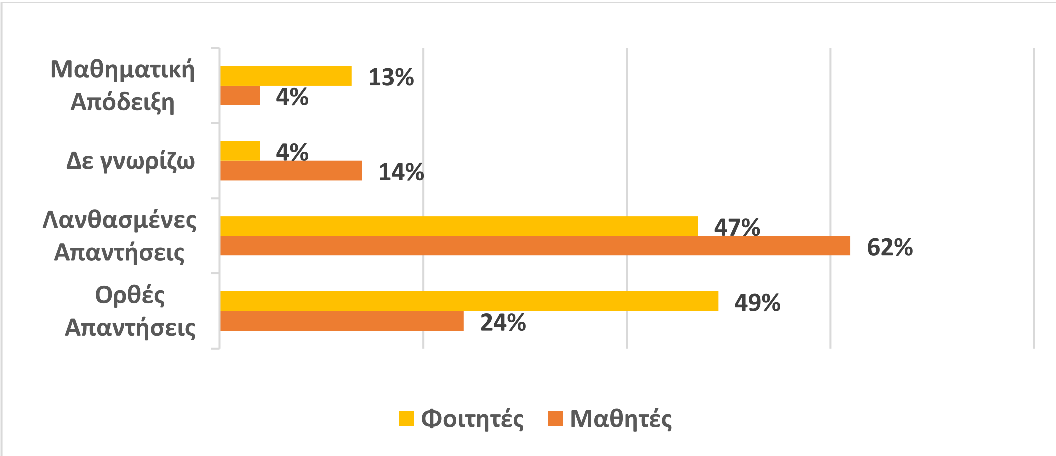
ΕΡΩΤΗΣΗ 4Α



ΕΡΩΤΗΣΗ 5



ΕΡΩΤΗΣΗ 6



ΕΡΩΤΗΣΗ 7