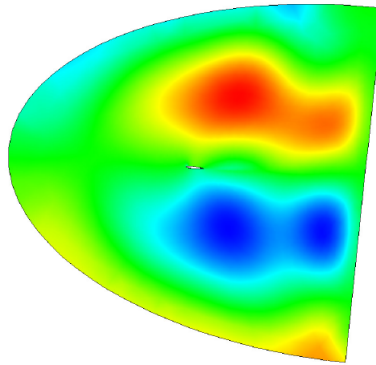


Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Διπλωματική Εργασία:

Αεροδυναμική ανάλυση ταλαντούμενων αεροτομών με
χρήση της μεθόδου POD

Reduced order modeling analysis of pitching airfoils
using Proper Orthogonal Decomposition



Τζαναβάρας Ρομπέρτο

Επιβλέπων Καθηγητής : Βουτσινάς Σπύρος

Οκτώβριος 2011

Ευχαριστίες

Την ώρα που γράφονται αυτές οι γραμμές ολοκληρώνεται η διπλωματική μου εργασία και ταυτόχρονα η φοίτηση μου στη σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβειου Πολυτεχνείου. Για μένα είναι η σημαντικότερη στιγμή της ζωής μου έως τώρα και δεν θα ξεχαστεί ποτέ διότι έφτασα εδώ με πολύ κόπο. Για πάνω από έναν χρόνο η διπλωματική εργασία ήταν το επίκεντρο της φοιτητικής και όχι μόνο ζωής μου. Δυσκολεύτηκα πολύ αλλά σε καμία περίπτωση δεν μετανοιώνω για την επιλογή μου. Ο τομέας της αεροδυναμικής είναι το πάθος μου και ελπίζω να μπορέσω να εμβαθύνω επιστημονικά στο μέλλον.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω κυρίως τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Σπύρο Βουτσινά για τις επιστημονικές του γνώσεις που απλόχερα μου μετέδωσε. Η βοήθειά του υπήρξε καταλυτική σε ένα τόσο απαιτητικό θέμα. Οι δυσκολίες που παρουσιάστηκαν κατά την εκπόνηση της διπλωματικής ήταν πολλές, θεωρητικές και πρακτικές αλλά για όλα βρέθηκαν λύσεις από τον εξάίρετο αυτό καθηγητή. Δίπλα του αναθεώρησα τον ορισμό της λέξης 'επιστήμονας' και όλα όσα έμαθα θα είναι ένα ισχυρό όπλο για τη μελλοντική μου, επιστημονική η μη, πορεία.

Άλλο ένα άτομο που χωρίς τη βοήθειά του η ολοκλήρωση της εργασίας δεν θα ήταν εφικτή είναι ο υποψήφιος διδάκτορας Γεώργιος Παπαδάκης. Τον ευχαριστώ θερμά για τον χρόνο που μου αφιέρωσε όλο αυτό τον καιρό σε ότι χρειάστηκε στα πλαίσια της εργασίας αλλά και στη μάχη ενάντια στο μόνιμο bug. Εκτός από τη βοήθεια, έμαθα πολλά δίπλα του που συγκαταλέγονται στα πλεονεκτήματα της επιλογής μου για τη συγκεκριμένη διπλωματική.

Ευχαριστώ θερμά τους γονείς μου που με στήριξαν όλο αυτό το διάστημα και τους το ανταποδίδω με το πτυχίο μου, την αδερφή μου Μάγκυ, τους συμφοιτητές φίλους μου που επίσης με στήριξαν και χωρίς τους οποίους η σχολή θα άφηνε άνοστες αναμνήσεις, τον 'γείτονά' Παντελή με το ψάρι του για την αλληλοϋποστήριξη των τελευταίων μηνών από το δίπλα γραφείο και το σύνολο των παραπάνω που όταν διέκριναν στο πρόσωπο μου σημάδια ψυχικής κόπωσης δεν ρωτούσαν πια 'πως πάει η διπλωματική'. Το περιβάλλον που δημιούργησαν γύρω μου, αφήνει τις καλύτερες αναμνήσεις από τη σχολή και με αυτές θα πορευτώ στη ζωή μου αγωνιώντας για το τι μου επιφυλάσσει.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	7
2	Αεροδυναμικό Μοντελο	11
2.1	Εξισώσεις Euler	11
2.2	Συνοριακές Συνθήκες	12
3	Μέθοδος POD	15
3.1	Περίληψη Μεθόδου	15
3.2	Proper Orthogonal Decoposition	15
3.3	Αναλυτική Μέθοδος POD	16
3.4	Snapshots POD	17
3.4.1	Proper Orthogonal Decomposition και Singular Value Decomposition	18
3.5	POD Μορφές , POD Modes	20
3.6	Κατασκευή του Reduced Order Model	28
3.6.1	Γραμμικοποίηση των εξισώσεων Euler	28
3.6.2	Διαχείριση Συνοριακών Συνθηκών	28
3.6.3	Τελικό Γραμμικοποιημένων Σύστημα Εξισώσεων	31
3.6.4	Προβολή στη Διανυσματική Βάση	31
3.6.5	Παράμετροι	33
4	Αποτελέσματα	35
4.1	Διερεύνηση Διαφοράς Φάσης και Εύρους	38
4.2	Εξωτερική Διέγερση Σε Διπλή Συχνότητα	99
4.2.1	Αποτελέσματα	99
4.3	Παραμετρική Μελέτη	105
4.3.1	Μεταβολή Στο Έυρος Ταλάντωσης	105
4.3.2	Μεταβολή Στη Συχνότητα Ταλάντωσης	112
4.3.3	Επίδραση Του Μεγέθους Του Δείγματος Στα Αποτελέσματα	122
5	Συμπεράσματα	125
A'	Αναπαράσταση modes	129

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει σκοπό τη μελέτη της μεθόδου POD (Proper Orthogonal Decomposition). Ο τομέας των δυναμικών συστημάτων μειωμένης τάξεως (Reduced Order Models) αναπτύσσεται ραγδαία στον χώρο της αεροδυναμικής και της αεροελαστικότητας. Η μέθοδος που μελετάται έχει αποδειχθεί ενδιαφέρουσα στον τομέα αυτό και ιδιαίτερα αποδοτική. Το μοντέλο που κατασκευάζεται βασίζεται στην επίλυση των εξισώσεων Euler με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων γύρω από αεροτομή. Η εξωτερική ροή ταλαντώνεται ημιτονοειδώς και μελετάται η συμπεριφορά της μεθόδου στο δυναμικό αυτό φαινόμενο της απόκρισης του συντελεστή άνωσης της αεροτομής. Η μελέτη επικεντρώνεται στον τομέα της κατασκευής του μοντέλου με στις ιδιαιτερότητες του και στα αποτελέσματά του χωρίς όμως να υπάρχουν όμοιες εφαρμογές στη βιβλιογραφία για επαλήθευση.

1 Εισαγωγή

Η αλματώδης εξέλιξη των υπολογιστών νέας γενιάς έδωσε τη δυνατότητα στην επιστημονική κοινότητα να αναδειξεί τις δυνατότητες της υπολογιστικής ρευστομηχανικής βελτιώνοντας την φυσική κατανόηση περίπλοκων μη-μόνιμων αεροδυναμικών ροών. Παρόλα αυτά το υπολογιστικό κόστος που σχετίζεται με την περιπλοκότητα της ροής ή της γεωμετρίας εκτοξεύεται κάνοντας απαγορευτικές ορισμένες εφαρμογές λόγω όγκου δεδομένων.

Η ελπίδα έρχεται από διάφορες τεχνικές που αναπτύχθηκαν και συνεχίζουν να αναπτύσσονται και αναφέρονται στην βιβλιογραφία με τον όρο 'Μοντελα μειωμένης τάξεως' (Reduced Order Models). Τα μοντελα αυτά έχουν ένα κύριο, κοινό και σημαντικό χαρακτηριστικό, μειώνουν το υπολογιστικό κόστος και επομένως και τον χρόνο επίλυσης δυναμικών γραμμικών ή μη, συστημάτων.

Στον τομέα της μη-μόνιμης αεροδυναμικής με ένα ROM μπορεί κανείς να προβλέψει με ακρίβεια την απόκριση ενός συστήματος σε διάφορες εισόδους όπως πχ. ένα ευρύ εύρος συχνοτήτων, διαφορετικούς αριθμούς Mach κ.α. Ο τομέας της αεροελαστικότητας μελετά το πεδίο αυτό με ιδιαίτερη προσοχή καθώς εκμεταλλεύεται την ακρίβεια και την οικονομία χρόνου.

Παρακάτω παρουσιάζονται περιληπτικά τα περισσότερα από αυτά ενώ στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μελετηθεί η μέθοδος Proper Orthogonal Decomposition. Η ελληνική μετάφραση είναι: Πρόσω Ορθογωνική Αποσύνθεση αλλά θα προτιμάται η συντομογραφία POD.

Δύο είναι οι κύριοι μέθοδοι κατασκευής ενός ROM στην αεροδυναμική. Ο πρώτος είναι η αναπαράσταση της ροής από έναν μικρό αριθμό καθολικών μορφών. Με τον όρο 'μορφή' εννοείται μια διανομή στον χώρο των ροϊκών μεταβλητών που αντιστοιχούν σε μια υψηλή ενεργειακή κίνηση του ρευστού. Ο πιο διαδεδομένος τρόπος είναι η ιδιοδιανυσματική ανάλυση αλλά με τη μέθοδο POD να προσφέρει μια εναλλακτική μέθοδο όμοια και εξίσου σημαντική. Η επόμενη μέθοδος βασίζεται στην ιδέα πως ένας μικρός αριθμός εισόδων και ένας μικρός αριθμός αντίστοιχων εξόδων σχετίζονται με ένα δυναμικό σύστημα. Έτσι γίνεται η προσπάθεια να κατασκευαστεί ένα μητρώο συναρτήσεων μεταφοράς με διάσταση που προσδιορίζεται από τον αριθμό εισόδων και εξόδων.

Η αριθμητική επίλυση ενός CFD μοντέλου απαιτείται και από τις δύο μεθόδους που προαναφέρθηκαν και είναι το αρχικό στάδιο από όπου ξεκινά η εφαρμογή τους.

Eigenmodes Decomposition

Η μέθοδος της ιδιοδιανυσματικής ανάλυσης βασίζεται στα εξής κύρια βήματα. Αρχικά εξάγονται οι ιδιομορφές του πλήρους δυναμικού συστήματος οι οποίες, λίγες στον αριθμό, χαρακτηρίζουν τη ροή. Η προβολή του συστήματος στις ιδιομορφές οδηγεί στην κατασκευή ενός ROM [1].

Η κύρια δυσκολία που παρουσιάζεται είναι το υπολογιστικό κόστος της ιδιοδιανυσματικής ανάλυσης σε συστήματα μεγάλης διάστασης. Για τα συστήματα αυτά μελετώνται εναλλακτικοί τρόποι εξαγωγής ιδιομορφών. Αρκετές μέθοδοι βασίζονται στον αλγόριθμο Lanczos.

Οι Hall, Florea, Lanzkron [2], παρουσιάζουν έναν αλγόριθμο για τη θεωρία δυναμικού. Οι Dowell και Romanowski, [3] μελέτησαν δύο τεχνικές υπολογισμού ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιομορφών μη συμμετρικών μητρώων μεγάλης διάστασης όπως είναι οι διακριτοποιημένες εξισώσεις Euler. Η πρώτη αναφέρεται με το όνομα 'Lancroz Reduction' και η δεύτερη ως 'Modified WYD Reduction'.

Σε 3D συνακτικές ροές απαιτούνται περαιτέρω μελέτες και προσπάθειες καταπολέμησης του μεγαλύτερου προβλήματος της μεθόδου, του υπολογιστικού κόστους. Για την πληρότητα των πληροφοριών αξίζει να αναφερθεί η ιδέα χρησιμοποίησης ιδιομορφών ενός απλούστερου μοντέλου σε ένα πιο πολύπλοκο, όπως η συνεκτική ροή γύρω από ένα αεροσκάφος.

Proper Orthogonal Decomposition (POD)

Αναφερόμενοι σε δυναμικά συστήματα που επιλύονται αριθμητικά αυτόματα γίνεται λόγος για τη διακριτή μέθοδο POD. Σημειώνεται στο σημείο αυτό πως η μέθοδος αρχικά αναπτύχθηκε σε αναλυτική μορφή

Η κύρια διαδικασία της διακριτής μεθόδου για ένα αεροδυναμικό πρόβλημα δεν διαφέρει πολύ από την ιδιοδιανυσματική ανάλυση και βασίζεται στην εξαγωγή μορφών που χαρακτηρίζουν τη ροή. Ο αριθμός των μορφών αυτών είναι μικρός σε σύγκριση με την διάσταση του πλήρους συστήματος, πχ εξισώσεις Euler. Επομένως η προβολή του πλήρους δυναμικού συστήματος στις μορφές αυτές που αποτελούν μια διανυσματική βάση, οδηγεί στην κατασκευή ενός ROM.

Ενώ οι εφαρμογές της μεθόδου απαντώνται κυρίως σε δυναμικά προβλήματα στο πεδίο του χρόνου, μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή είναι η μελέτη ενός δυναμικού συστήματος στο πεδίο των συχνοτήτων (Frequency Domain POD), Hall, K.C. και Thomas, J.P. και Dowell, E, [4] και Kim, T [5]. Οι Hall, K.C. και Thomas, J.P. και Dowell, E [6] πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα, εφήρμοσαν τη μέθοδο σε ροϊκό μοντέλο που περιλαμβάνει κινούμενα κύματα κρούσης και διχηθητικές συνθήκες.

Harmonic Balance

Με αυστηρούς εννοιολογικούς όρους η μέθοδος αυτή δεν υπάγεται στην κατηγορία των μεθόδων που μειώνουν την τάξη ενός δυναμικού συστήματος. Παρόλα αυτά παρέχει οικονομία υπολογιστικού χρόνου για μη γραμμικά συστήματα στο πεδίο του χρόνου, π.χ. μη-μόνιμη αεροδυναμική, όπως επίσης και ακρίβεια, χαρακτηριστικά που την κάνουν ελκυστική.

Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε αρχικά (Hayashi, [7]) για την ανάλυση της συμπεριφοράς αρμονικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Η κύρια ιδέα που τη διέπει είναι η εξής: Υποτίθεται μιά λύση σε μορφή σειράς Fourier με προκαθορισμένο αριθμό αρμονικών. Αντικαθιστάται η λύση αυτή στις συνήθεις διαφορικές εξι-

σώσεις και αλγεβρικά συλλέγονται όροι σε συχνότητες. Από εκείνους όσοι έχουν συχνότητα έξω από τη σειρά Fourier παραλείπονται. Κάθε αρμονική ισοροπείται (balanced) απαιτώντας ο όρος της να ικανοποιεί την ισότητα των εξισώσεων ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες συχνότητες.

Πρόσφατα οι Hall, K.C. και Thomas, J.P. και Clark, W.S , [8] προσάρμοσαν τη μέθοδο για CFD στις στροβιλομηχανές.

Θεωρία Volterra (Volterra Theory)

Η μέθοδος Volterra , [9] αναπτύχθηκε το 1930 , βασίζεται σε συναρτήσεις, ή συναρτήσεις άλλων συναρτήσεων και ακολουθώς γενικεύτηκε σε γραμμική περιελικτική ολοκληρωτική προσέγγιση (linear convolution integral approach) που εφαρμόζεται σε γραμμικά συστήματα.

Η κύρια ιδέα πίσω από τη μέθοδο αυτή είναι πως οποιοδήποτε μη-γραμμικό σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα άπειρο άθροισμα πολυδιάστατων περιελικτικών ολοκληρωμάτων (multidimensional convolution integrals) αυξανόμενης τάξης. Το άθροισμα αυτό ονομάζεται και σειρά Volterra.

Οι εφαρμογές που έχουν πραγματοποιηθεί έδειξαν ότι η μέθοδος είναι αποδοτική σε 'ελαφρώς' μη-γραμμικά συστήματα (weakly non-linear systems) , εξαιτίας των προβλημάτων που παρουσιάζει η μέθοδος Volterra κατά την σύγκλιση της.

Μέλλον στα ROMs

Τελευταία γίνονται προσπάθειες για την κατασκευή μη-γραμμικών ROMs. Μελέτη στο θέμα παρατηρείται από τον Hall ο οποίος μελέτησε τη μονοδιάστατη ταλάντωση κύματος κρούσης σε κανάλι. Παρόλαυτα ,διδιάστατη ροή γύρω από αεροτομή υπο ταλάντωση μεγάλου εύρους δεν έχει προσεγγιστεί ακόμα από ένα ROM

Η ανάπτυξη του τομέα υπόσχεται μοντέλα που θα περιγράψουν με ακρίβεια ισχυρές και 'βίαιες' κινήσεις ακόμα και ολόκληρων αεροσκαφών αλλά και περαιτέρω εξέλιξη στον τομέα της αεροακουστικής. Η τύρβη που κατέξοχην άφορα μοντέλα με τεράστιο υπολογιστικό κόστος βρίσκεται στο στόχαστρο των ROMs. Ήδη οι πλήρεις εξισώσεις Navier Stokes έστω και προσεγγιστικά λύνονται γύρω από υπεραπλουστευμένες γεωμετρίες με την βοήθεια μοντέλων μειωμένης τάξεως. Ελπίδα για το μέλλον είναι μέσω των μοντέλων αυτών να ξεπεραστούν αυτοί οι γεωμετρικοί περιορισμοί.

Γιατί POD

Η μέθοδος ανάλυσης ιδιοτιμών είναι η δημοφιλέστερη έως τώρα στον τομέα των ROMs όμως τελευταία η μέθοδος POD χρησιμοποιείται ως εναλλακτική η συμπληρωματική της πρώτης καθώς είναι υπολογιστικά οικονομικότερη και ευκολότερη στην εφαρμογή.

Όσο οι βαθμοί ελευθερίας ενός δυναμικού συστήματος αυξάνονται , φτάνοντας νούμερα της τάξεως 10^6 για διδιάστατη ροή και 10^9 για τριδιάστατα προβλήματα , η εξαγωγή ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιομορφών τους γίνεται δύσκολη έως αδύνατη εξαιτίας του τεράστιου όγκου δεδομένων. Το πρόβλημα αυτό βρίσκει μία από τις λύσεις του στη μέθοδο POD όπου παραλείπεται η απευθείας ιδιοδιανυσματική ανάλυση ενός δυναμικού συστήματος μεγάλης διάστασης , [10]. Το σημείο αυτό κάνει τη μέθοδο ενδιαφέρουσα καθώς παρακάμπτοντας το σημείο του υπολογιστικού φορτίου δίνεται έμφαση στις δυνατότητες της μεθόδου αυτές καθ' αυτές.

Άλλη μία ιδιότητα που συγκαταλέγεται στα πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι η βέλτιστη διανυσματική βάση η οποία κατασκευάζεται. Στη διεθνή βιβλιογραφία ιδιότητα αυτή αναφέρεται ως 'Optimality'

2 Αεροδυναμικό Μοντελο

2.1 Εξισώσεις Euler

Οι εξισώσεις Euler σε ολοκληρωτική μορφή γράφονται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{U} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{F}_c dS - \vec{F}_v) dS = \int_{\Omega} \vec{Q} d\Omega \quad (2.1)$$

όπου \vec{U} οι συντηρητικές μεταβλητές :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

\vec{F}_c , το διάνυσμα των συντηρητικών γενικευμένων παροχών (Convective Fluxes)

$$\vec{F}_c = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V + n_x p \\ \rho v V + n_y p \\ \rho w V + n_z p \\ \rho(E + \frac{p}{\rho}) V \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

και $V = \vec{u} \cdot \vec{n}$,
 \vec{F}_v ,

$$\vec{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} \\ n_x \tau_{yx} + n_y \tau_{yy} + n_z \tau_{yz} \\ n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z \tau_{zz} \\ n_x \Theta_x + n_y \Theta_y + n_z \Theta_z \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

το διάνυσμα των συνεχτικών παροχών (Viscous fluxes) και :

$$\begin{aligned} \Theta_x &= u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + k\frac{\partial T}{\partial x} \\ \Theta_y &= u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + k\frac{\partial T}{\partial y} \\ \Theta_z &= u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + k\frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

Το σύστημα των εξισώσεων ολοκληρώνεται με την καταστατική εξίσωση τελείων αερίων

$$p = (\gamma - 1)\rho[E - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}] \quad (2.5)$$

Η μέθοδος επίλυσης στην παρούσα εργασία είναι η μέθοδος πεπερασμένων όγκων. Οι μεταβλητές της ροής υπολογίζονται στα κέντρα των κελιών (Finite Volume-Cell Centered Scheme) . Θεωρώντας ότι ο όγκος των κελιών δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, οι εξισώσεις Euler γράφονται στη μορφή :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{U} d\Omega = \Omega \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \quad (2.6)$$

όπου :

$$\vec{U} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \vec{U}_{exact} d\Omega \quad (2.7)$$

Συνεπώς η εξίσωση 2.1 γίνεται :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega} \left[\oint_{\partial\Omega} (\vec{F}_c - \vec{F}_v) dS - \int_{\Omega} \vec{Q} d\Omega \right] \quad (2.8)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην παραπάνω εξίσωση προσεγγίζεται απο το άθροισμα των παροχών στις επιφάνειες (faces) που συνιστούν το εκάστοτε κελί.

Η εξίσωση 2.8 για ένα κελί I γράφεται :

$$\frac{d\vec{U}_I}{dt} = -\frac{1}{\Omega_I} \left[\underbrace{\sum_{m=1}^{N_f} (\vec{F}_c - \vec{F}_v)_m \Delta S_m}_{R_I} - (\vec{Q}\Omega)_I \right] \quad (2.9)$$

όπου N_f είναι ο αριθμός των επιφανειών που περιγράφουν το κελί και ΔS_m είναι η επιφάνεια της πλευράς 'm'. Ο όρος R_I ονομάζεται υπόλοιπο (residual) με αποτέλεσμα η τελική μορφή της διακριτοποιημένης εξίσωσης να γράφεται :

$$\frac{d\vec{U}_I}{dt} = -\frac{1}{\Omega_I} \vec{R}_I \quad (2.10)$$

2.2 Συνοριακές Συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες και ο τρόπος εφαρμογής τους παίζουν σημαντικό ρόλο στη σωστή επίλυση ενός προβλήματος υπολογιστικής ρευστομηχανικής είτε πρόκειται για προβλήματα εσωτερικής ή εξωτερικής αεροδυναμικής.

Dummy Cells

dummy cells ή ghost cells που σε ελληνική μετάφραση θα ονομαστούν φανταστικά κελιά , έχουν σκοπό την απλοποίηση του υπολογισμού των fluxes κατά μήκος των συνόρων. Αυτό πραγματοποιείται με την επέκταση του υπολογιστικού χωρίου πέρα από τα σύνορα.

Τα κελιά αυτά περιέχουν κατάλληλες συντηρητικές μεταβλητές οι οποίες καθορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες όποιες και αν είναι αυτές σε κάθε περίπτωση. Επίσης έχουν και συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες όπως ο όγκος του κελιού οι οποίες συνήθως ταυτίζονται με τις αντίστοιχες του συνοριακού κελιού στο οποίο αναφέρονται (Blazek , [11]).

Τύποι Συνοριακών Συνθηκών

Οι τύποι των συνοριακών συνθηκών που χρησιμοποιούνται είναι δύο :

- στερεό σύνορο
- εξωτερικό όριο (inflow, outflow)

Στερεό Σύνορο

Σε μη-συνεκτική ροή, η ταχύτητα του ρευστού έχει διεύθυνση παράλληλη με το στερεό σύνορο που σημαίνει πως το διάνυσμα της ταχύτητας είναι εφαπτομενικό του συνόρου στο σημείο αυτό. Αυτή η κατάσταση ταυτίζεται με το ότι δεν υπάρχει ροή κάθετη στην επιφάνεια και κοινώς αποκαλείται συνθήκη μη εισχώρησης.

$$\vec{u}\vec{n} = 0$$

όπου \vec{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα. Προκύπτει μετά από αυτό πως το διάνυσμα των συντηρητικών παροχών γίνεται :

$$(\vec{F}_c)_w = \begin{bmatrix} 0 \\ n_x p_w \\ n_y p_w \\ n_z p_w \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου p_w η πίεση στο στερεό σύνορο.

το πλέγμα που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία είναι 'unstructured cell centered', δηλαδή μη δομημένο πλέγμα με τριγωνικά κελιά και υπολογισμό των μεταβλητών στα κέντρα των κελιών (όγκων). Στο στερεό σύνορο προτείνεται η εφαρμογή μιας σειράς dummy cells. Η ταχύτητα στα κελιά αυτά ανακλα την ταχύτητα που έχουν τα συνοριακά κελιά.

$$\vec{u}_{dummy} = \vec{u}_b - 2V\vec{n}$$

όπου $V = u_b n_x + v_b n_y + w_b n_z$ η contravariant ταχύτητα, u_b, v_b, w_b οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας του συνοριακού κελιού και $\vec{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο στερεό σύνορο. Η πίεση και η πυκνότητα στα dummy cells ορίζονται ως ίσες με τα αντίστοιχα μεγέθη των αντίστοιχων συνοριακών κελιών.

Εξωτερικό Σύνορο

Η αριθμητική επίλυση της ροής σε περιπτώσεις εξωτερικής αεροδυναμικής όπως αεροτομές, πτέρυγες κλπ. απαιτεί συγκεκριμένο υπολογιστικό χωρίο, πλήρως ορισμένο. Οι συνοριακές συνθήκες στο σύνορο αυτό είναι απαραίτητες διότι χωρίς αυτές οι λύσεις είναι άπειρες. Δύο είναι οι κυρίες απαιτήσεις από τις συνθήκες αυτές. Αρχικά η οριοθέτηση της ροής δεν πρέπει να έχει επιρροή στην επίλυση της ροής συγκρινόμενης με το 'άπειρο' όριο. Επόμενη προϋπόθεση είναι οποιαδήποτε διαταραχή της ροής η οποία εξέρχεται, δεν πρέπει να ανακλαστεί πίσω στο υπολογιστικό χωρίο. Εξαιτίας της έλλειπτικής φύσεως των εξισώσεων τους, υποηχητικά και διηχητικά προβλήματα είναι ιδιαίτερα ευαίσθητα στις συνοριακές συνθήκες τους εξωτερικού ορίου. Ανεπαρκής εφαρμογή τους μπορεί να οδηγήσει σε καθυστέρηση στην σύγκλιση της μόνιμης κατάστασης. Ανάλογα με το πρόσημο των ιδιοτιμών των 'conservative flux Jacobians' η πληροφορία από τη ροή μεταφέρεται εντός η εκτός του υπολογιστικού χωρίου κατά μήκος των χαρακτηριστικών. Για παράδειγμα σε υποηχητική διδιάστατη ροή έχουμε την είσοδο τριών χαρακτηριστικών και την έξοδο μίας. Το αντίστροφο συμβαίνει στην υποηχητική έξοδο. Ο αριθμός των συνθηκών που εισάγονται στο σύνορο πρέπει να ισούται με το αριθμό των εισερχομένων χαρακτηριστικών. Οι υπόλοιπες πρέπει να υπολογιστούν με βάση τη λύση στο εσωτερικό του χωρίου.

Η ροή στο εξωτερικό σύνορο μπορεί είτε να εισέρχεται είτε να εξέρχεται από το χωρίο. Ο τοπικός αριθμός Mach καθορίζει τους τέσσερις τύπου συνοριακών συνθηκών.

- υποηχητική είσοδος
- υποηχητική έξοδος
- υπερηχητική είσοδος
- υπερηχητική έξοδος

Στην παρούσα εργασία η είσοδος και η έξοδος της ροής είναι υποηχητικές στο σύνολο των εφαρμογών.

Υποηχητική Είσοδος

Στην περίπτωση αυτή τρεις χαρακτηριστικές (στο 2D) εισέρχονται στο χωρίο και μία εξέρχεται. Επομένως τρεις μεταβλητές βασίζονται στην επ'άπειρον ροή. Οι εξισώσεις που περιγράφουν τα παραπάνω είναι:

$$p_b - \frac{1}{2} [p_\infty + p_i - \rho_o c_o [n_x(u_\infty - u_i) + n_y(v_\infty - v_i)]] = 0$$

$$-\rho_\infty + \rho_b - \frac{[p_b - p_\infty]}{c_o^2} = 0$$

$$-u_\infty + u_b + n_x \frac{p_\infty - p_b}{\rho_o c_o} = 0$$

$$-v_\infty + v_b + n_y \frac{p_\infty - p_b}{\rho_o c_o} = 0$$

όπου ο δείκτης ' ο ' αναφέρεται στην κατάσταση αναφοράς που συνήθως ορίζεται ίση με αυτή στο εσωτερικό συνοριακό κελί.

Οι δείκτες έχουν ως εξής:

- 'i' : συνοριακό κελί
- 'b' : συνοριακό 'ghost κελί
- 'inf' : ροή στο άπειρο

Στην υποηχητική έξοδο γίνεται το αντίστροφο της υποηχητικής εισόδου. Δηλαδή τρεις ροϊκές μεταβλητές υπολογίζονται με βάση το εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου. Αυτές είναι η πυκνότητα και οι δύο ταχύτητες της ροής , οριζόντια και κάθετη συνιστώσα. Η τέταρτη μεταβλητή που απομένει πρέπει να οριστεί εξωτερικά. Οι εξισώσεις είναι οι εξής :

Υποηχητική Έξοδος

$$p_b - p_\infty = 0$$

$$\rho_b - \rho_i - \frac{p_b - p_i}{c_o^2} = 0$$

$$u_b - u_i - n_x \frac{p_i - p_b}{\rho_o c_o} = 0$$

$$v_b - v_i - n_y \frac{p_i - p_b}{\rho_o c_o} = 0$$

3 Μέθοδος POD

3.1 Περίληψη Μεθόδου

Η μέθοδος POD (Proper Orthogonal Decomposition) χρησιμοποιείται στον τομέα της υπολογιστικής μηχανικής ρευστών ως ένα δυνατό εργαλείο για τη μείωση του υπολογιστικού κόστους επίλυσης δυναμικών συστημάτων

Ο στόχος αυτός επιτυγχάνεται μέσω της μείωσης της τάξης των συστημάτων. Για το λόγο αυτό απευθύνεται σε συστήματα μεγάλων διαστάσεων (> 5000) (Dowell, [12])

Κύρια λειτουργία της μεθόδου είναι η προβολή του αρχικού (πλήρους) δυναμικού συστήματος σε μια κατάλληλη διανυσματική βάση. Έτσι μειώνεται η τάξη του συστήματος καθώς αυτό που πρέπει να υπολογιστεί είναι οι συντελεστές των διανυσμάτων της βάσης (προσεγγιστικά < 50)

Δύο κύρια χαρακτηριστικά πρέπει να σημειωθούν.

Ο υπολογισμός της διανυσματικής βάσης διαχωρίζει την εξάρτηση του χώρου και του χρόνου από τα αρχικά δεδομένα. Αυτό συνοπτικά σημαίνει πως η βάση εξαρτάται μόνο από τον χώρο και οι συντελεστές αυτής μόνο από τον χρόνο.

Τα διανύσματα που αποτελούν τη βάση (ιδιομορφές ή αλλιώς PODmodes) είναι ορθοκανονικά. Το γεγονός αυτό δηλώνει πως κάθε ένα έχει 'απορροφήσει' τη μέγιστη δυνατή ενέργεια και είναι ανεξάρτητο (ενεργειακά) από τα υπόλοιπα. Το παραπάνω χαρακτηριστικό εξασφαλίζει πως η βάση αυτή είναι βέλτιστη.

Περισσότερα για τη μέθοδο και το μαθηματικό υπόβαθρο ακολουθούν στις επόμενες σελίδες.

3.2 Proper Orthogonal Decoposition

Οι Kari Karhunen και Michel Loeve ήταν οι πρώτοι ερευνητές οι οποίοι ξεκίνησαν τη μελέτη και την ανάπτυξη της μεθόδου. Στην βιβλιογραφία απαντάται και με τα ονόματα : Larhunen Loeve Decomposition , Principal Component Analysis , Singular System Analysis και Singular Value Decomposition Οι πρώτες πλήρεις μελέτες στο πεδίο της μηχανικής ρευστών αναφέρονται το 1967 [13] , [14] [15] στον τομέα της τύρβης. Παρόλο που αναπτύχθηκε στις δεκαετίες '70' και '80' δεν έλαβε την απαιτούμενη προσοχή της επιστημονικής κοινότητας εξαιτίας των υπολογιστικών απαιτήσεών της

Η 'διακριτή' μέθοδος POD , (*Snapshot Method*) η οποία μελετάται στη διπλωματική αυτή αναπτύχθηκε για πρώτη φορά το 1987 από τον Sirovich,L. [16] το 1987. Οι πρώτες μελέτες εφαρμόστηκαν στην εξαγωγή ροϊκών χαρακτηριστικών στο πρόβλημα Rayleigh-Benard [17]

Αργότερα το εύρος εφαρμογής της μεθόδου επεκτάθηκε στη ροή εντός καναλιού [18] , [19] [20] , στο τυρβώδες οριακό στρώμα [21] , [22] και στις ροές jet [23]. Το 1991 ο Ball,K. [18] χρησιμοποίησε τη μέθοδο των 'snapshots' χρησιμοποιώντας δεδομένα που υπολογίστηκαν αριθμητικά.

Η μέθοδος POD είναι μια γραμμική διαδικασία και όλοι οι υποχώροι στους οποίους αναφέρεται η θεωρία της είναι γραμμικοί ακόμα και αν τα σύστημα τα οποία ορίζονται σε αυτούς και τα δεδομένα από τα οποία κατασκευάζονται είναι μη γραμμικά. Όπως αναφέρουν οι Holmes,P. Lumley,J Berkooz,G. , [24] , η γραμμικότητα αυτή είναι ένα δυνατό σημείο της μεθόδου.

3.3 Αναλυτική Μέθοδος POD

Η αναλυτική μέθοδος POD περιέχει την θεωρία και τη βάση από την οποία ξεκίνησε και εξελίχθηκε. Η διακριτή μέθοδος POD που εφαρμόζεται στην παρούσα διπλωματική εργασία είναι η μετάβαση της αναλυτικής μεθόδου στον τομέα των αριθμητικών και πειραματικών επιλύσεων με πιο δημοφιλή πεδίο εκείνο της υπολογιστικής ρευστομηχανικής .

Θα γίνει προσπάθεια παρακάτω να παρουσιαστεί συνοπτικά αλλά χωρίς παραλείψεις η αναλυτική μέθοδος.

Υποθέτουμε πως έχουμε τις συναρτήσεις $y_1, \dots, y_n \in \mathbf{X}$ όπου $y_n = y_n(x)$, από τις οποίες αποτελείται ο χώρος $\mathbf{V} = \text{span}\{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathbf{R}^m$

Αναζητείται μια ικανοποιητική αναπαράσταση των μελών του \mathbf{V} οπότε και πρέπει προβληθεί ο \mathbf{V} σε μια κατάλληλη διανυσματική βάση. Άρα θεωρούμε πως τα μέλη του \mathbf{V} ανήκουν σε έναν ‘inner product’ χώρο. Αυτός είναι ο γραμμικός χώρος Hilbert άπειρης διάστασης ($L^2([0, 1])$) , αποτελούμενος από συναρτήσεις “square integrable (complex value)” , με εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g^*(x)dx \quad (3.1)$$

Στόχος της μεθόδου POD είναι να βρεθούν $l \leq \dim \mathbf{V}$ ορθοκανονικά διανύσματα $\{\Phi\}_{i=1}^l$ στον \mathbf{X} τα οποία είναι βέλτιστα , δηλαδή ελαχιστοποιούν το σφάλμα της προσέγγισης των $\{y_1, \dots, y_n\}$ και τα οποία στη μορφή ,

$$y_n(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j(x) \quad (3.2)$$

περιγράφουν τα μέλη του \mathbf{X} καλύτερα από κάθε άλλη βάση. Απαραίτητες συνθήκες ¹ για τα παραπάνω είναι :

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_i}(\Phi_1, \dots, \Phi_l, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{ll}) = 0 \in \mathbf{X} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_i}(\Phi_1, \dots, \Phi_l, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{ll}) = 0 \in \mathbf{X} \quad (3.4)$$

για $i = 1, \dots, l$

όπου

$$L(\Phi_1, \dots, \Phi_l, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{ll}) = J(\Phi_1, \dots, \Phi_l) + \sum_{i,j=1}^l \lambda_{ij}(\Phi_i^T \Phi_j - \delta_{ij})$$

Από την (3.3) προκύπτει:

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n y_j(y_j^T) \Phi_j = \lambda_{ii} \Phi_i$$

και $\lambda_{ij} = 0$ για $i \neq j$

¹ στην βιβλιογραφία αναφέρονται ως necessary optimality conditions

Από την (3.4) προκύπτει:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{ij}} = 0 \Leftrightarrow \Phi_i^T \Phi_j = \delta_{ij}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα δηλώνει την ορθοκανονικότητα της βάσης

Ορίζοντας $\lambda_i = \lambda_{ii}$ και $Y[y_1, \dots, y_n]$ προκύπτει :

$$YY^T \Phi_i = \lambda_i \Phi_i \quad (3.5)$$

για $i = 1, \dots, \lambda$

Που σημαίνει πως οι απαραίτητες συνθήκες ικανοποιούνται από ένα $[\mathbf{m} \times \mathbf{m}]$ συμμετρικό πρόβλημα ιδιοτιμών στο οποίο τα 'αριστερά ιδιοδιανύσματα' (left eigenvectors) είναι η ζητούμενη βέλτιστη διανυσματική βάση.

3.4 Snapshots POD

Σε προβλήματα στα οποία το αρχικό σετ δεδομένων δεν προέρχεται από αναλυτικές εκφράσεις αλλά από πειραματική ή αριθμητική επίλυση, εφαρμόζεται η μέθοδος POD χρονοσειρών (snapshots POD). Η υπολογιστική ρευστομηχανική επιλύει προβλήματα αριθμητικά, όπως και στη διπλωματική αυτή όπου τα δεδομένα υπολογίζονται από επίλυση των εξισώσεων συμπιεστού μη συνεκτικού ρευστού (εξισώσεις Euler)

Η κύρια δομή της μεθόδου των χρονοσειρών αποτελείται από μερικά διακριτά βήματα. Αρχικά η κατασκευή των χρονοσειρών από υπολογιστικό ή πειραματικό μοντέλο, δηλαδή η επίλυση και η συγκέντρωση των αποτελεσμάτων σε διακριτές χρονικές στιγμές.²

Στη συνέχεια υπολογίζεται η διανυσματική βάση με τη βοήθεια γραμμικής άλγεβρας. Το βήμα αυτό είναι και η εκπαίδευση των ιδιομορφών (Modes).

Το πλήρες δυναμικό σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων που, συνήθως είναι μη γραμμικό, (τάξεις άνω των 5000) προβάλεται στις ιδιομορφές και έτσι η τάξη του συστήματος μειώνεται και είναι πλέον ίση με τον αριθμό των ιδιομορφών που επιλέχθηκαν, σημαντικά μικρότερου της αρχικής τάξης. Στο σημείο αυτό το σύστημα είναι 'μειωμένης τάξης' (Reduced Order Model). Η λύση αυτού δίνει τους αντίστοιχους συντελεστές των ιδιομορφών στον χρόνο. Οι συντελεστές αυτοί είναι η επιροή της κάθε ιδιομορφής στην ανασύνθεση (ή ανακατασκευή) της λύσης. Επομένως κάθε μεταβλητή ή καλύτερα κάθε διάνυσμα μεταβλητών σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή 'n' (\vec{q}^n) περιγράφεται ως:

$$\vec{q}^n = \Phi \vec{a}^n \quad (3.6)$$

όπου

- Φ οι ιδιομορφές του μοντέλου
- \vec{a}^n οι συντελεστές των ιδιομορφών τη χρονική στιγμή 'n'

²θα μπορούσε να είναι επίλυση ενός δυναμικού συστήματος σε διακριτές συχνότητες, οπότε και γίνεται λόγος για POD στο πεδίο των συχνοτήτων, 'frequency domain POD'

Στο σημείο αυτό να σημειωθεί πως ο στόχος της μεθόδου στην παρούσα εργασία αλλά και σε μεγάλο ποσοστό του συνόλου των εφαρμογών της δεν είναι η ανακατασκευή του υπάρχοντος σετ δεδομένων αλλά ο υπολογισμός άλλου σετ, διαφορετικού που προέρχεται από διαφορετικές οριακές συνθήκες του προβλήματος. Για να γίνει πιο κατανοητό δίνεται στον αναγνώστη ένα παράδειγμα ταλαντούμενης αεροτομής ημιτονοειδώς σε γωνία πρόσπτωσης $0^\circ \pm 1^\circ$. Μια υποθετική περίπτωση που θα αναπαραχθεί από τη μέθοδο είναι η ίδια αεροτομή σε γωνία πρόσπτωσης $0^\circ \pm (1+x)^\circ$ όπου x , η διαφοροποίηση του ευρους της ταλάντωσης. Δηλώθηκε η μεταβλητή x και όχι ένα συγκεκριμένο νούμερο διότι οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει είναι επίσης ένα αντικείμενο μελέτης στην παρούσα εργασία.

Το παραπάνω είναι το σημείο όπου η μέθοδος POD 'ξεδιπλώνει' τις δυνατότητες της και αποδίδει καθώς χρειάζεται ένα και μοναδικό 'τρέξιμο' του πλήρους μοντέλου για την εκπαίδευση και κατασκευή των ιδιομορφών. Έτσι επιλύονται π.χ. 5 διαφορετικά σενάρια με τις ίδιες ιδιομορφές απαιτούνται συνολικά $[N \times T + 5 \times M \times T]$ λύσεις εξισώσεων, όπου N : η τάξη του πλήρους μοντέλου, T : τα χρονικά βήματα, M : ο αριθμός των ιδιομορφών που επιλέχθηκαν. Τα ίδια 5 σενάρια με επίλυση του πλήρους μοντέλου θα απαιτούσαν συνολικά $[5 \times N \times T]$ λύσεις διαφορικών εξισώσεων. Υπενθυμίζεται πως το πλήρες μοντέλο μπορεί να αποτελείται από 5000 διαφορικές εξισώσεις, ο αριθμός των χρονικών βημάτων για ένα δυναμικό σύστημα αγγίζει το 100 ενώ ο αριθμός των απαιτούμενων ιδιομορφών αναλόγως της πολυπλοκότητας των φαινομένων και την επιθυμητή ακρίβεια θα είναι $20 \div 100$.

3.4.1 Proper Orthogonal Decomposition και Singular Value Decomposition

Οι ροϊκές μεταβλητές που προκύπτουν από τις εξισώσεις Euler είναι οι συντηρητικές (conservative) :

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}$$

Έστω N το σύνολο των μεταβλητών σε όλα τα κελιά του πεπερασμένου υπολογιστικού χωρίου, σε κάθε χρονική στιγμή n . Σε m χρονικές στιγμές είναι γνωστές οι ροϊκές μεταβλητές q_i^n , όπου $i = 1, \dots, N$ και $n = 1, \dots, m$

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα κατασκευάζεται το σύνολο:

$$E = \begin{bmatrix} q_1^1 & \dots & q_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_N^1 & \dots & q_N^m \end{bmatrix}$$

Όπως προαναφέρθηκε, η διανυσματική βάση υπολογίζεται λύνοντας το ακόλουθο πρόβλημα ιδιοδιανυσματικής ανάλυσης

$$E^T E U = \Lambda U \quad (3.7)$$

όπου U μητρώο που περιέχει τα ζητούμενα ιδιοδιανύσματα και Λ διαγώνιος πίνακας που περιέχει τις ιδιοτιμές του $E^T E$. Η παράσταση (3.7) και ειδικότερα η πράξη $E^T E$ είναι υπολογιστικά ασύμφορη καθώς εμπεριέχει υπεράριθμο αριθμό πράξεων. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται μία μέθοδος προερχόμενη από τη γραμμική άλγεβρα και ονομάζεται *Singular Value Decomposition*, κατά την οποία ισχύει :

$$E = USV^T$$

Αναλύεται δηλαδή το μητρώο E σε γινόμενο τριών κάθε ένα από τα οποία έχει ξεχωριστές και ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

Το μητρώο U περιέχει τα αριστερά ιδιοδιανύσματα (left eigenvectors). Ταυτίζεται με το αντιστοιχο της παράστασης (3.7) και είναι διάστασης $[N \times M]$. Περιέχει τα ιδιοδιανύσματα τα οποία αποτελούν τη ζητούμενη διανυσματική βάση της μεθόδου POD. Τα ιδιοδιανύσματα αυτά (θα αναφέρονται συχνά και ως Modes , ιδιομορφές ή POD μορφές, είναι ορθοκανονικά , δηλαδή ισχύει : $U^T U = I$ (όπου I μοναδιαίος πίνακας

Στο σημείο αυτό να σημειωθεί πως σε μία εναλλακτική περίπτωση θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως βάση το γινόμενο $US^{1/2}$. Δεν αλλάζει κάτι στον τρόπο επίλυσης παρά μόνο το ότι τα διανύσματα δεν είναι πλέον ορθοκανονικά , γεγονός που μπορεί να βοηθήσει υπό προϋποθέσεις κατά την επίλυση. Στην περίπτωση αυτή οι ιδιομορφές ονομάζονται : 'Balanced Modes' . Το μητρώο S : (singular values matrix) είναι διαγώνιο διάστασης $[M \times M]$ και περιέχει τις singular values (αποφεύγεται η ελληνική μετάφραση) με φθίνουσα σειρά. Οι τιμές αυτές έχουν άμεση σχέση με τις ιδιοτιμές του συστήματος (3.7) καθώς ισχύει : $\sqrt{\sigma_i} = \lambda_i$ (σ.σ. όλες οι singular values είναι θετικές)

Τέλος το μητρώο V περιέχει τα δεξιά ιδιοδιανύσματα (right eigenvectors) και είναι διάστασης $[m \times m]$. Ταυτίζεται με τα ιδιοδιανύσματα της παράστασης : $E^T E V = \Lambda V$. Όπως και τα right eigenvectors είναι ορθοκανονικά , δηλαδή : $V^T V = I$

Παρουσιάστηκε ο τρόπος υπολογισμού των ιδιομορφών (Modes) POD και το επόμενο βήμα είναι να επιλεγεί το κατάλληλο πλήθος τους. Δηλαδή να επιλεγούν τόσα modes ώστε να μπορούν να περιγράψουν με μικρό σχετικό σφάλμα τη ροή. Το κριτήριο που εφαρμόζεται είναι ενεργειακό. Το μέτρο μιας singular value δηλώνει την ενεργειακή κατάσταση του αντίστοιχου mode , δηλαδή όσο υψηλότερη η τιμή μίας , τόσο υψηλότερη ενέργεια περιέχει ή αποδίδει το αντίστοιχο modes στην λύση.

Δεχόμαστε λοιπόν ικανοποιητικά modes τόσα , ώστε να διαθέτουν το 99% της συνολικής ενέργειας της ροής. :

$$\frac{\sum_{i=1}^k \sigma_i}{\sum_{i=1}^M \sigma_i} \simeq 99\% \quad (3.8)$$

Να σημειωθεί πως ανάλογα με την πολυκλοκότητα των φαινομένων της ροής η της επιθυμητής ακρίβειας το συγκεκριμένο κριτήριο μπορεί να αλλάξει, είτε με αύξηση είτε με μείωση του ποσοστού.

Στη διπλωματική αυτή χρησιμοποιήθηκε το πακέτο *LAPack* (*Linear Algebra Package*) για την μέθοδο 'singular value decomposition'

3.5 POD Μορφές, POD Modes

Παρουσιάστηκαν παραπάνω οι τρόποι υπολογισμού των Modes (προτιμάται η αγγλική λέξη έναντι της ελληνικής), το τι αντιπροσωπεύουν και το πως συνθέτουν τη λύση. Στην ενότητα αυτή θα επιδιωχθεί να δοθεί μία αναπαράσταση τους για να γίνει πιο κατανοητή η φύση τους.

Ένα Mode έχει διάσταση όση και η διάσταση της λύσης. Π.χ. σε ένα υπολογιστικό χωρίο 100 κελιών με 4 μεταβλητές ανά κελί, η λύση έχει διάσταση 400. Τα Modes θα είναι επίσης διαστάσεως 400 και κάθε ένα στοιχείο τους θα αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη μεταβλητή συγκεκριμένου κελιού. Η θεωρία αναφέρει πως τα modes περιέχουν 'τα κύρια ροϊκά χαρακτηριστικά' της ροής, με το πρώτο να περιέχει το μεγαλύτερο ποσοστό ενέργειας και τα υπολοιπα να ακολουθούν με φθίνουσα σειρά. Αυτό στην πράξη (και όχι μόνο) σημαίνει πως η σύνθεση της λύσης γίνεται πιο λεπτομερής με κάθε mode που προστίθεται καθώς όσο χαμηλότερα είμαστε στην επιλογή τους τόσο λιγότερη ενέργεια συμπεριλαμβάνεται στην λύση.

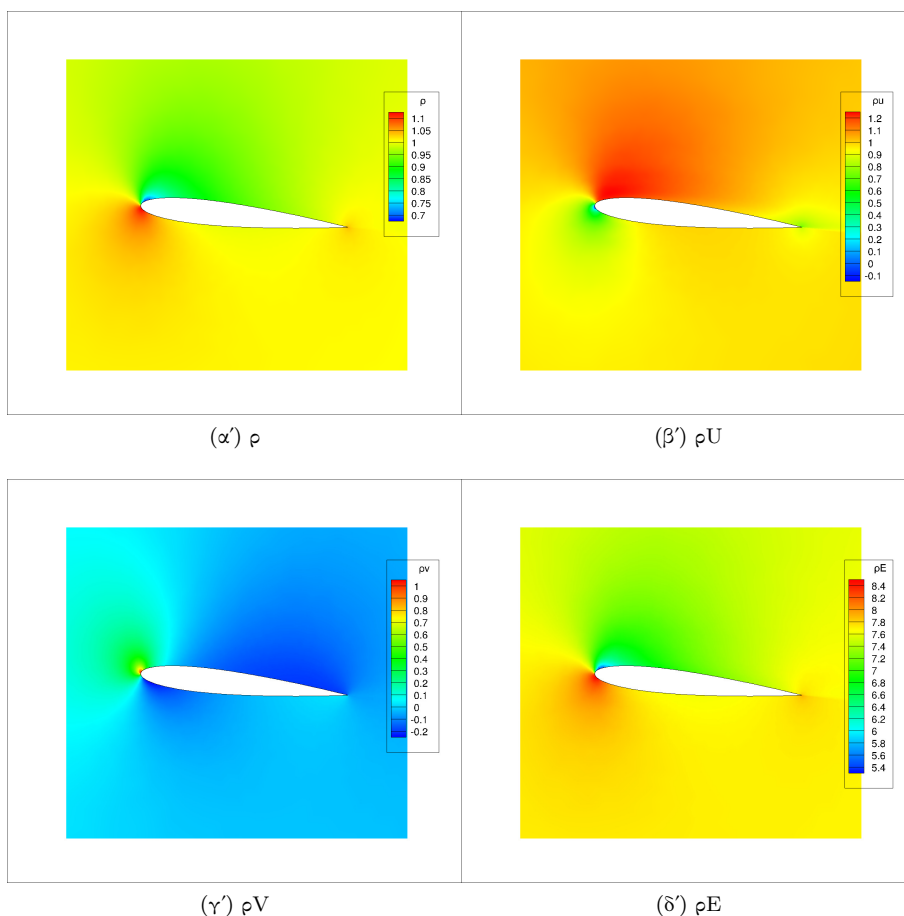
Στις παρακάτω εικόνες θα παρουσιαστεί γραφική αναπαράσταση των modes. Ο αριθμός τους και το πως υπολογίστηκαν δεν θα μας απασχολήσει σε αυτό το σημείο καθώς δεν είναι αυτός ο σκοπός της ενότητας και αναλύεται σε επόμενο κεφάλαιο. Η αντιστοίχιση των χρωμάτων σε αριθμητικές τιμές απουσιάζει εύλογα καθώς τα modes δεν έχουν μονάδες μέτρησης και το πόσο επηρεάζουν τη λύση τελικώς είναι άμεση σχέση των συντελεστών που κάθε ένα έχει (βλ. επόμενα κεφάλαια). Στόχος είναι να φανούν οι μορφές τους σε σύγκριση με την πλήρη λύση.

Στο σχήμα 1 παρουσιάζεται η λύση του πλήρους συστήματος σε μία τυχαία χρονική στιγμή για τις 4 συντηρητικές μεταβλητές: $[\rho, \rho U, \rho V, \rho E]$. Όμως τα modes έχουν προκύψει όπως θα αναφερθεί και παρακάτω όχι από τη λύση αυτή καθ' αυτή αλλά από τη διαταραχή της μη μόνιμης λύσης από την κατάσταση αναφοράς που στην περίπτωση μας είναι η μόνιμη λύση. Επομένως θα μας απασχολήσει η διαταραχή της πλήρους λύσης, οι γραφικές αποικονήσεις της οποίας παρουσιάζονται στο σχήμα 2

Δίνεται επίσης μία λεπτομερής εικόνα στην περιοχή κοντά στην ακμή πρόσπτωσης της αεροτομής όπου η ροή παρουσιάζει έντονη μεταβολή, εννοώντας σημείο ανακοπής, σημείο ελάχιστης πίεσης κ.α.

Στο σημείο αυτό λοιπόν θα παρουσιαστούν οι γραφικές αναπαραστάσεις των modes κατά ομάδες των συντηρητικών μεταβλητών: $[\rho, \rho U, \rho V, \rho E]$, αρχικά έχοντας όλο το υπολογιστικό χωρίο σε εικόνα και ύστερα εστιάζοντας στην ακμή πρόσπτωσης, τα σχετικά σχήματα είναι τα 5 και 6.

Το κυριότερο συμπέρασμα που προκύπτει από το σχήμα 5 είναι η ομοιότητα της πλήρους λύσης με το πρώτο mode. Όπως έχει αναφερθεί προηγουμένως η ενεργειακή κλάση ενός mode είναι ανάλογη της τιμής της singular value που αντιστοιχεί σε αυτό. Παρατηρώντας το σχήμα 4 παρατηρείται η ραγδαία μείωση της τιμής αυτής μετά τα πρώτα modes με το πρώτο να βρίσκεται με διαφορά στην κορυφή. Έτσι γίνεται επιτυχημένα η σύνδεση της θεωρίας με την γραφική απεικόνιση του σχήματος 5 όπου το πρώτο mode 'σχεδόν' αναπαράγει τη λύση. Φυσικά και δεν

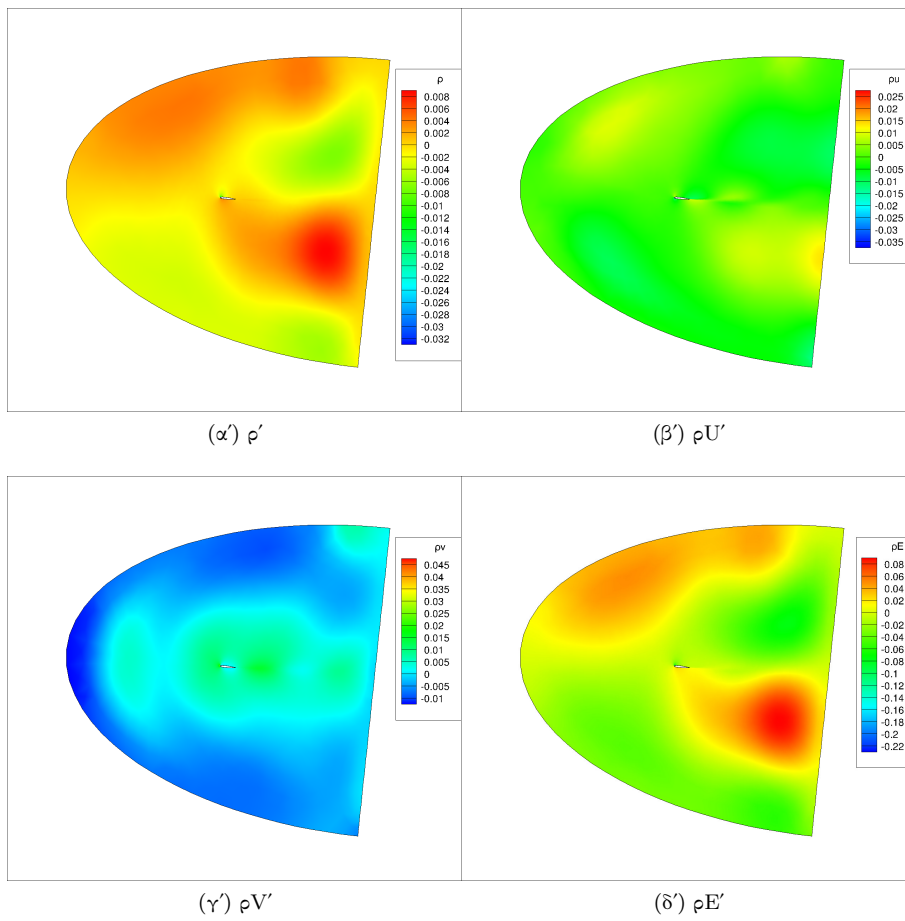


Σχήμα 1: Λύση πλήρους μοντέλου

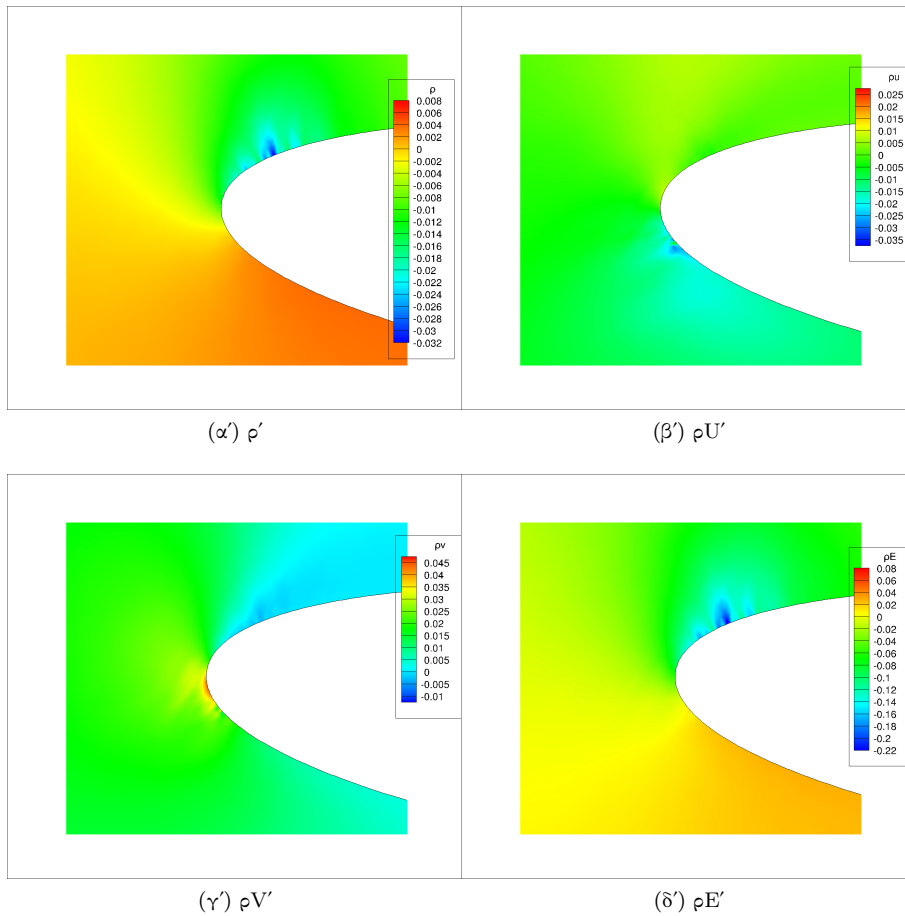
αρκεί μόνο το πρώτο καθώς σημαντικά φαινόμενα λαμβάνουν χώρα κοντά στην αεροτομή και σε μικρή κλίμακα και για αυτά απαιτούνται περισσότερα modes τα οποία εισάγουν όλο και λιγότερη ενέργεια στην σύνθεση της λύσης αλλά παρέχουν την απαιτούμενη λεπτομέρεια η οποία απουσιάζει από το πρώτο mode. Αυτό γίνεται κατανοητό από τα σχήματα 5θ', 5ι', 5ια'.

Στο σχήμα 6 εξάγεται το ίδιο συμπέρασμα συγκρίνοντας τις εικόνες 6α' 6β' όπου η μορφή του πρώτου mode είναι κατά μεγάλο ποσοστό όμοια με τη μορφή της πλήρους λύσης κοντά στην ακμή πρόσπτωσης της αεροτομής.

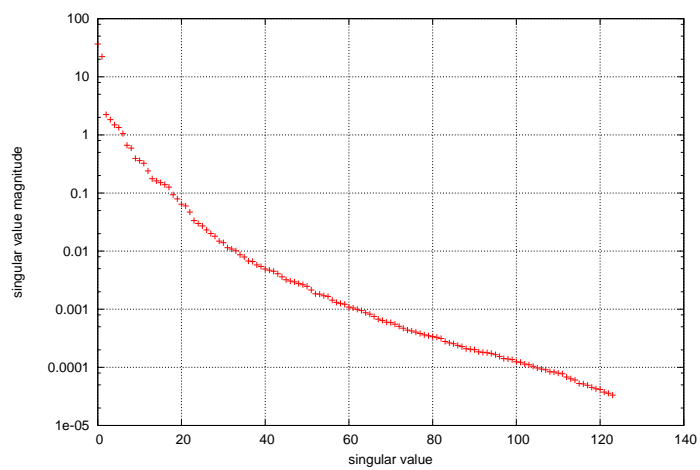
Αναφέρθηκε παραπάνω πως τα modes χαμηλής ενεργειακής κλάσης συμβάλουν στην ακρίβεια της τελικής λύσης και μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητό παρατηρώντας τις εικόνες 5θ' 6θ'. Στην πρώτη είναι η μορφή του εικοστού mode σε όλο το υπολογιστικό χωρίο όπου δεν περιέχει έντονη διαταραχή της ροής, στην δεύτερη όμως φαίνεται η συμβολή του καθώς παρουσιάζει διαταραχές κοντά στην ακμή πρόσπτωσης.



Σχήμα 2: Διαταραχή λύσης πλήρους μοντέλου



Σχήμα 3: Διαταραχή λύσης πλήρους μοντέλου

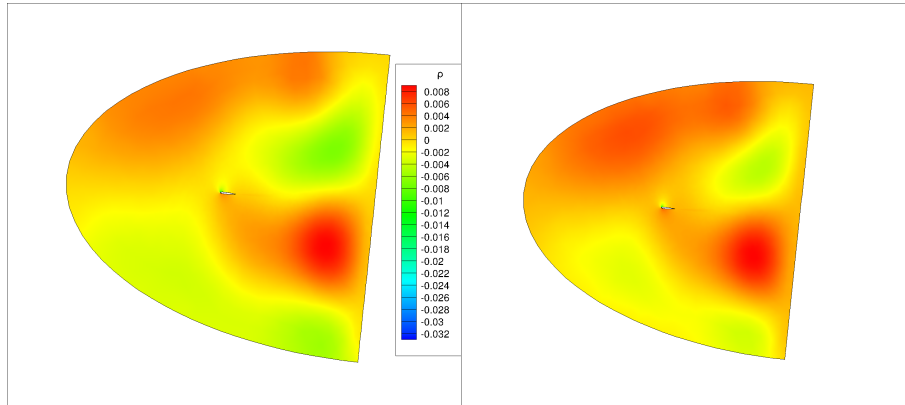


Σχήμα 4: Τιμή των Singular Values

Σχήμα 5: Πλήρης λύση και modes πυκνότητας

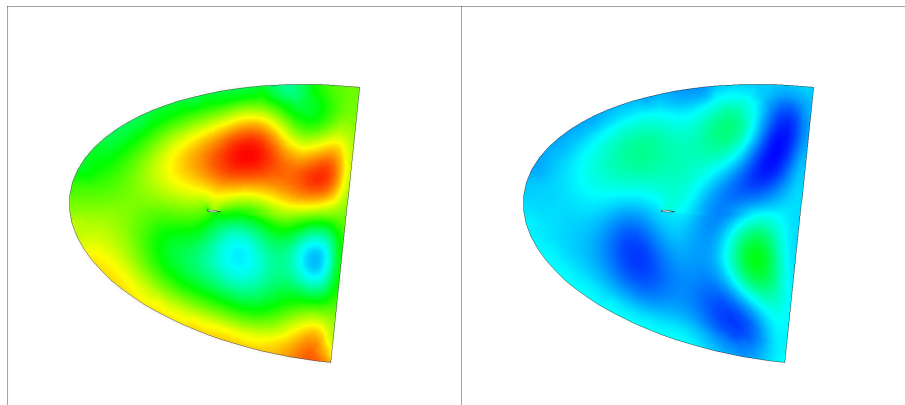
(α) πλήρης λύση

(β) πρώτο mode



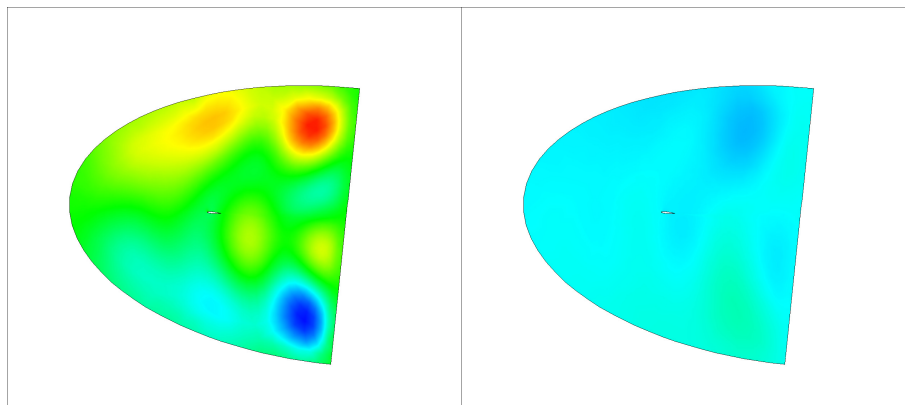
(γ) δεύτερο mode

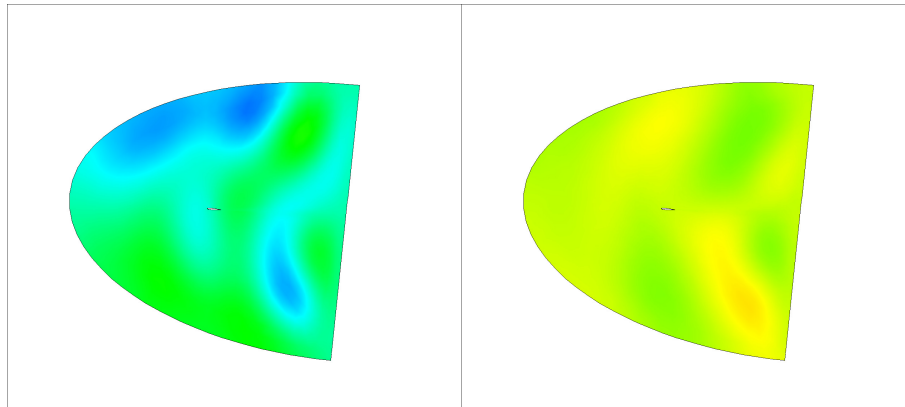
(δ) τρίτο mode



(ε) τέταρτο mode

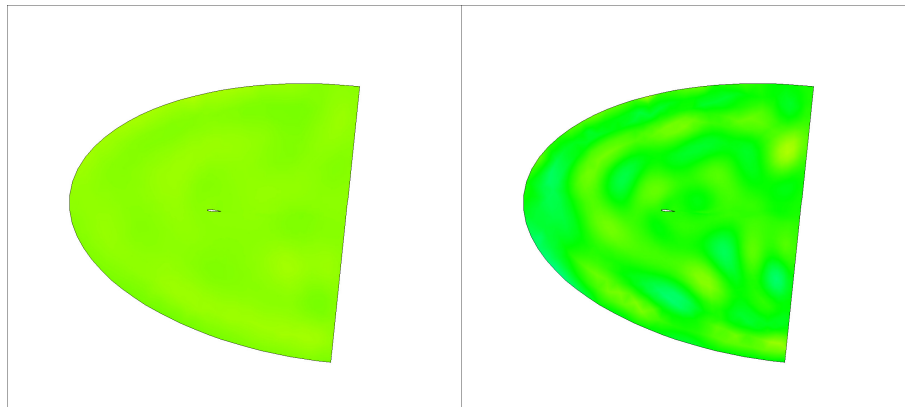
(ζ) πέμπτο mode





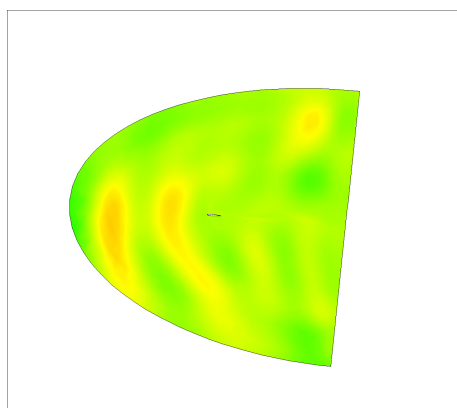
(ζ) έβδομο mode

(η') δέκατο mode



(θ) εικοστό mode

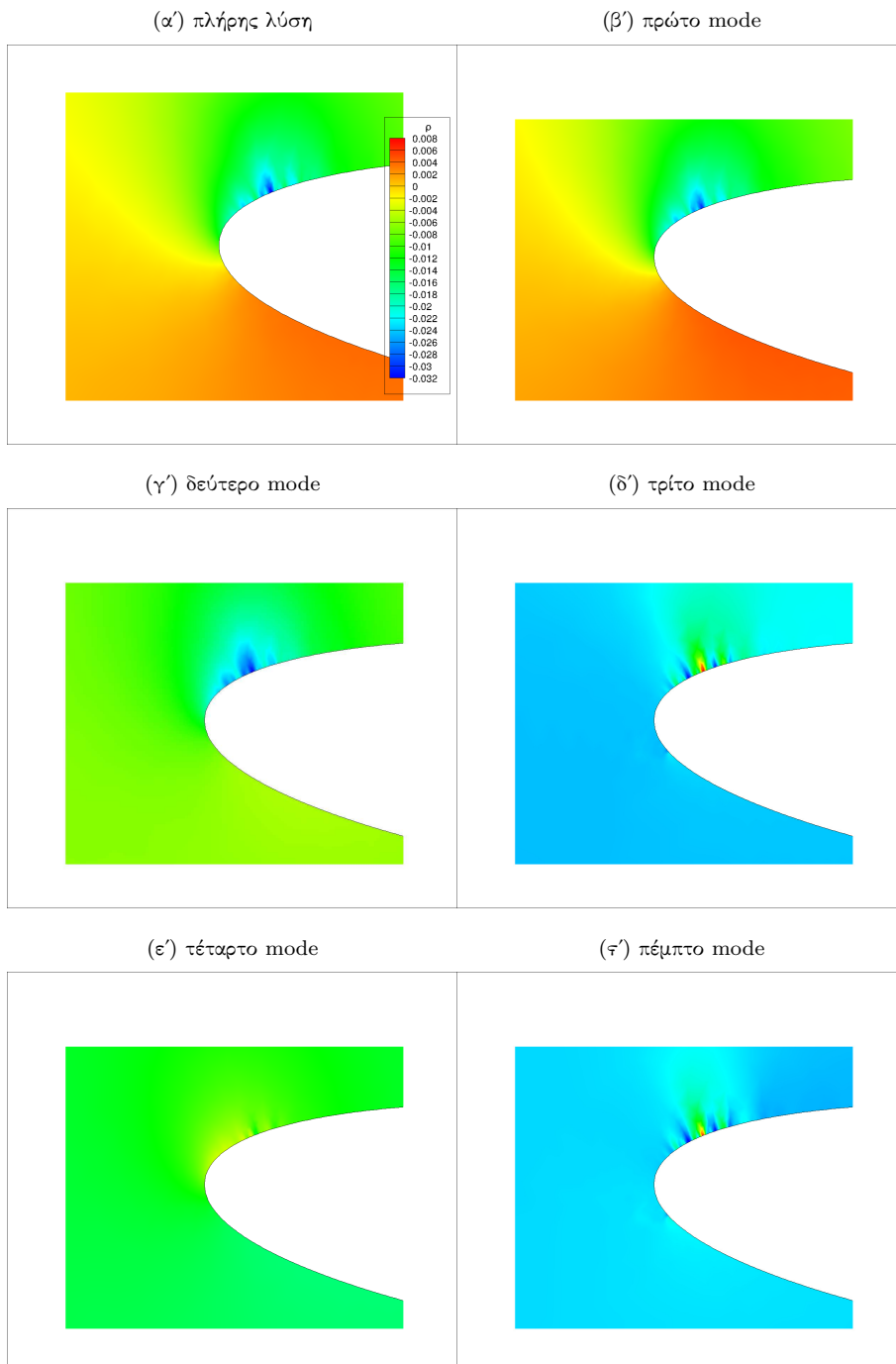
(ι') τριακοστό mode

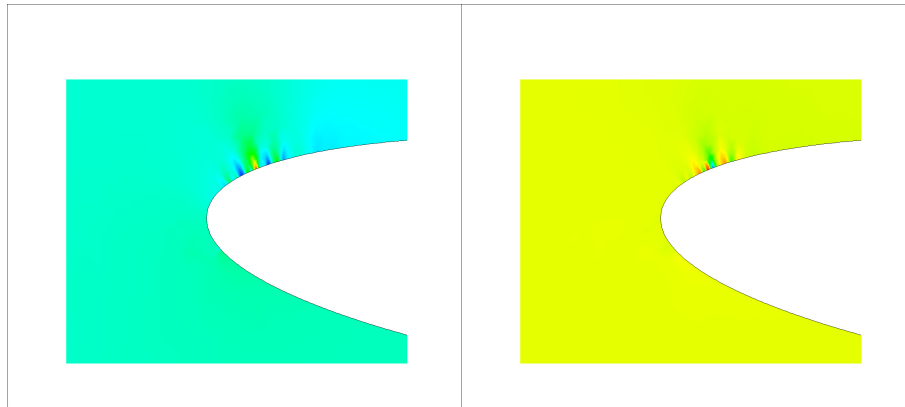


(ια') τεσσαρακοστό πρώτο mode

Σχήμα 5: Πλήρης λύση και modes πυκνότητας

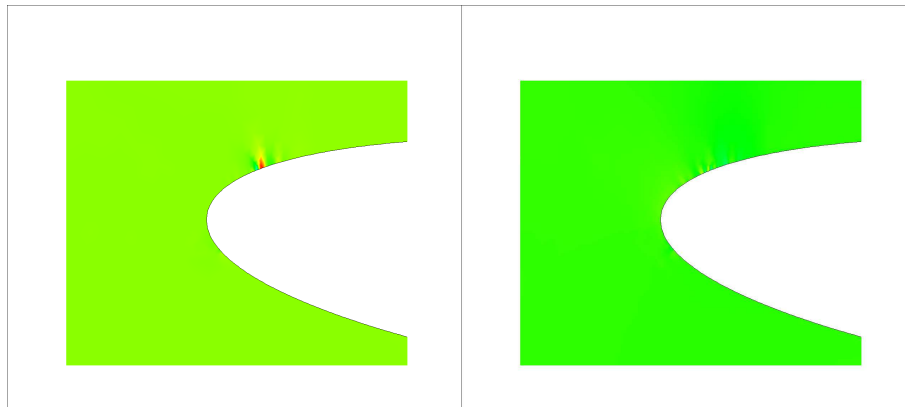
Σχήμα 6: Πλήρης λύση και modes πυκνότητας , περιοχή ακμής πρόσπτωσης





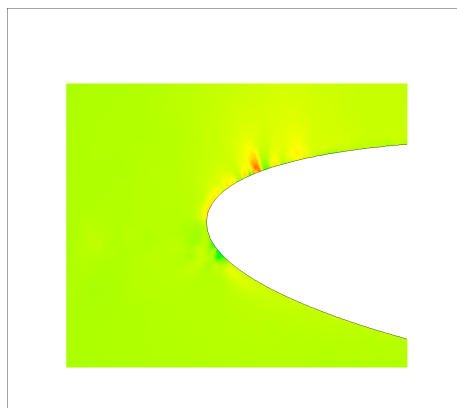
(ζ) έβδομο mode

(η) δέκατο mode



(θ) εικοστό mode

(ι) τριακοστό mode



(ια) τεσσαρακοστό πρώτο mode

Σχήμα 6: Πλήρης λύση και modes πυκνότητας , περιοχή ακμής πρόσπτωσης

3.6 Κατασκευή του Reduced Order Model

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω η μέθοδος που μελετάται είναι γραμμική ως προς την επίλυση και εύρεση των συντελεστών των modes όπως φαίνεται και στην εξίσωση (3.6). Πρώτο βήμα στην κατασκευή του μοντέλου είναι η γραμμικοποίηση των εξισώσεων Euler όπως παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα. Στη συνέχεια το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων θα προβληθεί στην διανυσματική βάση με αποτέλεσμα να πέσει η τάξη του συστήματος.

3.6.1 Γραμμικοποίηση των εξισώσεων Euler

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = R(\vec{q}, \vec{q}_e) \quad (3.9)$$

Για να εφαρμοστεί η μέθοδος POD, ο μη γραμμικός τελεστής R (Residual) της εξίσωσης (3.9) πρέπει να γραμμικοποιηθεί και για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται η σειρά Taylor γύρω από μια μέση τιμή η οποία είναι μια 'κατάσταση' αναφοράς και πιο συγκεκριμένα μια κατάσταση μόνιμης ροής γύρω από την οποία ταλαντώνεται η εξωτερική διέγερση. Προκύπτει:

$$R(\vec{q}, \vec{q}_e) = R(\vec{q}_0, \vec{q}_{e0}) + \frac{\partial R}{\partial \vec{q}}(\vec{q}_0, \vec{q}_{e0})\Delta\vec{q} + \frac{\partial R}{\partial \vec{q}_e}(\vec{q}_0, \vec{q}_{e0})\Delta\vec{q}_e \quad (3.10)$$

Σημειώνεται πως όροι δεύτερης και μεγαλύτερης τάξης παραλείπονται. Ο όρος $R(\vec{q}_0, \vec{q}_{e0})$ ισούται με μηδέν διότι στην κατάσταση αναφοράς που είναι η μόνιμη κατάσταση ισχύει :

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = 0 \Rightarrow R(\vec{q}_0, \vec{q}_{e0}) = 0$$

Η (3.9) μέσω της (3.10) γίνεται

$$\frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = \frac{\partial R}{\partial \vec{q}}(\vec{q}_0, \vec{q}_{e0})\Delta\vec{q} + \frac{\partial R}{\partial \vec{q}_e}(\vec{q}_0, \vec{q}_{e0})\Delta\vec{q}_e = A\vec{q}' + B\vec{q}'_e \quad (3.11)$$

3.6.2 Διαχείριση Συνοριακών Συνθηκών

Οι δείκτες έχουν ως εξής:

e : exterior
 i : interior
 ∞ : far field

Θεωρούμε ότι οι συνοριακές συνθήκες περιγράφονται από τη μορφή :

$$P(\vec{q}, \vec{q}_e, \vec{q}_{inf}) = 0 \quad (3.12)$$

όπου \vec{q} οι ροϊκές μεταβλητές στο εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου, \vec{q}_e στα ghost κελιά στο όριο του υπολογιστικού χωρίου και \vec{q}_{inf} οι τιμές στο άπειρο όπως ο αριθμός Mach, η συχνότητα της ταλάντωσης της διέγερσης κ.α

Με τη βοήθεια της σειράς Taylor γύρω από μία τιμή, η αλλιώς κατάσταση αναφοράς³ θα αναλυθεί η (3.12) ως εξής :

$$P(\vec{q}, \vec{q}_e, \vec{q}_\infty) = 0$$

$$\Rightarrow P(\vec{q}, \vec{q}_e, \vec{q}_\infty) = P(\vec{q}_0, \vec{q}_{e0}, \vec{q}_{\infty 0}) + \frac{\partial P}{\partial \vec{q}} \Delta \vec{q} + \frac{\partial P}{\partial \vec{q}_e} \Delta \vec{q}_e + \frac{\partial P}{\partial \vec{q}_\infty} \Delta \vec{q}_\infty = 0$$

Ισχύει πως $P(\vec{q}_0, \vec{q}_{e0}, \vec{q}_{\infty 0}) = 0$ άρα καταλήγουμε:

$$\Rightarrow \vec{q}'_e = -\frac{\partial P^{-1}}{\partial \vec{q}_e} \frac{\partial P}{\partial \vec{q}} - \frac{\partial P^{-1}}{\partial \vec{q}_e} \frac{\partial P}{\partial \vec{q}_\infty} \Rightarrow \vec{q}'_e = \mathbf{C} \vec{q}' + \mathbf{D} \vec{q}'_\infty \quad (3.13)$$

όπου:

$$\mathbf{C} = -\frac{\partial P^{-1}}{\partial \vec{q}_e} \frac{\partial P}{\partial \vec{q}}$$

$$\mathbf{D} = -\frac{\partial P^{-1}}{\partial \vec{q}_e} \frac{\partial P}{\partial \vec{q}_\infty}$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (3.13) οι παραπάνω όροι πρέπει να παραγοντοποιηθούν ως προς τις ροϊκές μεταβλητές του εσωτερικού και εξωτερικού χωρίου και τις μεταβλητές διέγερσης.

Η μορφή των εξισώσεων μας οδηγεί στο να τις παραγωγίσουμε ως προς τις πρωτογενείς μεταβλητές $[\rho \ u \ v \ p]$ για λόγους ευκολίας και στη συνέχεια θα εφαρμοστεί ο κανόνας της αλυσίδας :

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{q}} = \frac{\partial P}{\partial \vec{w}} \frac{\partial \vec{w}}{\partial \vec{q}} \quad (3.14)$$

Το αποτέλεσμα της πράξης αυτής είναι :

inflow

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{w}} = \begin{bmatrix} -\frac{p_e - p_\infty}{\gamma p} & 0 & 0 & \frac{p_e - p_\infty}{2\gamma p^2} \\ -\frac{n_x(p(\infty) - p_e)}{2\rho\sqrt{\gamma\rho p}} & 0 & 0 & -\frac{n_x(p_\infty - p_e)}{2p\sqrt{\gamma\rho p}} \\ -\frac{n_y(p_\infty - p_e)}{2\rho\sqrt{\gamma\rho p}} & 0 & 0 & -\frac{n_y(p_\infty - p_e)}{2p\sqrt{\gamma\rho p}} \\ \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} [n_x(u_\infty - u) + n_y(v_\infty - v)] & \frac{-n_x\sqrt{\gamma\rho p}}{2} & \frac{-n_y\sqrt{\gamma\rho p}}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\rho\gamma}}{4\sqrt{p}} [n_x(u_\infty - u) + n_y(v_\infty - v)] \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

³η ίδια κατάσταση αναφοράς που αναφέρθηκε παραπάνω κατά την γραμμικοποίηση των εξισώσεων Euler

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{w}_e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{\rho}{\gamma p} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{n_x}{\sqrt{\gamma \rho p}} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n_y}{\sqrt{\gamma \rho p}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{w}_\infty} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{\rho}{\gamma p} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{n_x}{\sqrt{\gamma \rho p}} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{n_y}{\sqrt{\gamma \rho p}} \\ 0 & \frac{n_x(\sqrt{\gamma \rho p})}{2} & \frac{n_y(\sqrt{\gamma \rho p})}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

outflow

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{w}} = \begin{bmatrix} -1 - \frac{p_e - p}{\gamma p} & 0 & 0 & \frac{\rho p_e}{\gamma p^2} \\ n_x \frac{p - p_e}{2\rho\sqrt{\gamma \rho p}} & -1 & 0 & -\frac{n_x}{2\sqrt{\gamma \rho p}} - \frac{n_x p_e}{2p\sqrt{\rho p}} \\ \frac{n_y(p - p_e)}{2\rho\sqrt{\gamma \rho p}} & 0 & -1 & -\frac{n_y}{2\sqrt{\gamma \rho p}} - \frac{n_y p_e}{2p\sqrt{\rho p}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{w}_e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{\rho}{\gamma p} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{n_x}{\sqrt{\rho \gamma p}} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n_y}{\sqrt{\rho \gamma p}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{w}_\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

στερεό σύνορο

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{w}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + 2n_x^2 & 2n_x n_y & 0 \\ 0 & -1 + 2n_y^2 & 2n_x n_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{w}_e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{w}_e} = \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

3.6.3 Τελικό Γραμμικοποιημένων Σύστημα Εξισώσεων

Αντικαθιστώντας την (3.13) στην (3.11) προκύπτει το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων :

$$\frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = \mathbf{A}_{eq} \vec{q}' + \mathbf{B}_{eq} \vec{q}'_{inf} \quad (3.25)$$

όπου:

$$\mathbf{A}_{eq} = [\mathbf{A} + \mathbf{BC}]$$

$$\mathbf{B}_{eq} = [\mathbf{BC}]$$

Λόγω του δευτέρου μέλους της 3.6.3 , όπου βρίσκονται οι διαταραχές των μεταβλητών από την κατάσταση αναφοράς q' , θα αλλάξει ο συμβολισμός και στο πρώτο μέλος ως εξής :

$$\Delta q \equiv \Delta q'$$

3.6.4 Προβολή στη Διανυσματική Βάση

Επόμενο βήμα είναι η προβολή του πλήρους συστήματος στην διανυσματική βάση όπως αυτή υπολογίστηκε στην ενότητα 3.4.1. Υπενθυμίζεται πως συμβολίζεται με Φ και έχει διάσταση $[N \times Modes]$, όπου :

- N η διάσταση του πλήρους συστήματος \equiv βαθμοί ελευθερίας
- Modes ο αριθμός των επιλεγμένων POD μορφών $\leq m$
- m χρονικά βήματα επίλυσης του πλήρους μοντέλου

Αντικαθιστάται η σχέση 3.6 στην εξίσωση 3.25 και προκύπτει

$$\frac{\Delta \Phi \vec{a}}{\Delta t} = \mathbf{A}_{eq} \Phi \vec{a} + \mathbf{B}_{eq} \vec{q}'_{\infty} \quad (3.26)$$

Όπως έχει αναφερθεί παραπάνω , με τη μέθοδο αυτή οι μεταβλητές αποσυντίθενται σε χώρο και χρόνο , με τις POD μορφές να έχουν τον χωρικό χαρακτήρα της ροής και οι συντελεστές αυτών τον χρονικό . Επομένως ο όρος Φ από το πρώτο

μέλος της σχέσης 3.26 'βγαίνει' από το κλάσμα καθώς δεν υφίσταται χρονική διακριτοποίηση του.

$$\Phi \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \mathbf{A}_{eq} \Phi \vec{a} + \mathbf{B}_{eq} \vec{q}'_{\infty} \quad (3.27)$$

Στο σημείο αυτό το σύστημα που έχει προκύψει είναι γραμμικό και έχει τη διάσταση του πλήρους συστήματος των εξισώσεων Euler. Πολλαπλασιασμός των εξισώσεων από 'αριστερά' με το ανάστροφο της διανυσματικής βάσης είναι το επόμενο βήμα και προκύπτει :

$$\Phi^T \Phi \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \Phi^T \mathbf{A}_{eq} \Phi \vec{a} + \Phi^T \mathbf{B}_{eq} \vec{q}'_{\infty} \quad (3.28)$$

Υπενθυμίζεται η ορθογωνιότητα των διανυσμάτων της βάσης

$$\Phi^T \Phi = I \quad (3.29)$$

και εφαρμογή της 3.29 στην 3.28 δίνει

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} &= \Phi^T \mathbf{A}_{eq} \Phi \vec{a} + \Phi^T \mathbf{B}_{eq} \vec{q}'_{\infty} \Rightarrow \\ \dot{\vec{a}} &= \Phi^T \mathbf{A}_{eq} \Phi \vec{a} + \Phi^T \mathbf{B}_{eq} \vec{q}'_{\infty} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Το σύστημα 3.30 έχει διάσταση ίση με τον αριθμό των μορφών που επιλέχθηκε ως ικανοποιητικός στην αναπαράσταση των μεταβλητών του αρχικού συνόλου. Επόμενο βήμα είναι η χρονική διακριτοποίηση του πρώτου μέλους όπου οι πεπερασμένες διαφορές πρώτης τάξεως παρέχουν ικανοποιητική ακρίβεια.

$$\dot{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \frac{\vec{a}^{n+1} - \vec{a}^n}{\Delta t}$$

Με γνωστούς τους συντελεστές στην χρονική στιγμή n ο μόνος άγνωστος στο σύστημα είναι το διάνυσμα \vec{a}^{n+1} το οποίο υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} \frac{\vec{a}^{n+1} - \vec{a}^n}{\Delta t} &= \Phi^T \mathbf{A}_{eq} \Phi \vec{a}^n + \Phi^T \mathbf{B}_{eq} \vec{q}'_{\infty} \Rightarrow \\ \vec{a}^{n+1} &= [\Delta t \Phi^T \mathbf{A}_{eq} \Phi + I] \vec{a}^n + \Delta t \Phi^T \mathbf{B}_{eq} \vec{q}'_{\infty} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Έχοντας σε κάθε χρονική στιγμή τους συντελεστές a έχουμε αυτόματα τις ζητούμενες μεταβλητές του πλήρους συστήματος που μελετάται με σύνθεση (composition) των μορφών και των συντελεστών τους με την πράξη 3.6

$$\vec{q}^n = \Phi \vec{a}^n$$

Υπενθυμίζεται πως όταν γίνεται αναφορά στις μεταβλητές που προκύπτουν μετά την σύνθεση μορφών και συντελεστών εννοούνται οι διαταραχές από μία κατάσταση αναφοράς.

Η διάσταση των POD μορφών και των διανυσμάτων των μεταβλητών είναι ίδια και εκτός αυτού σχετίζονται και τα σημεία που βρίσκονται στην ίδια θέση μεταξύ τους. Π.χ. η τιμή στη θέση 100 μιας POD μορφής , σχετίζεται με την τιμή της μεταβλητής στην θέση 100 του διανύσματος μεταβλητών. Επομένως η σχέση 3.6 μπορεί να γίνει πιο συμφέρουσα απο την πλευρά του χρόνου αν καποιος συνθέσει μόνο τις μεταβλητές που τον ενδιαφέρουν γνωρίζοντας ακριβώς ποια σημεία των μορφών αντιστοιχούν σε αυτές. Στη μελέτη της μεταβολής της άνωσης μιας αεροτομής σε διδιάστατη συμπιεστή ροή με ένα ROM που έχει προκύψει από ένα υπολογιστικό πλέγμα 10000 κελιών είναι σπατάλη χρόνου να γίνει ανασύνθεση και των 10000 μεταβλητών του χωρίου μιας και η άνωση υπολογίζεται ως ολοκλήρωση των πιέσεων μόνο γύρω από την αεροτομή.

3.6.5 Παράμετροι

Μετά την κατασκευή του συστήματος μειωμένης τάξης ακολουθεί η εφαρμογή του. Ο σκοπός που μελετώνται τα μοντέλα αυτά είναι να μπορέσει να γίνει παραμετρική μελέτη ταχύτερα σε σχέση με την επίλυση των πλήρους τάξεως συστημάτων. Οι παράμετροι που μπορούν να μεταβληθούν είναι πολλές αλλά όχι προκαθορισμένες. Επίσης το ποσοστό μεταβολής τους απασχολεί τον επιστημονικό τομέα. Τα δύο αυτά στοιχεία είναι και τα αντικείμενα μελέτης στην παρούσα διπλωματική εργασία , με περισσότερες λεπτομέρειες να ακολουθούν στο επόμενο κεφάλαιο. Αρκεί να σημειωθεί πως στο πρόβλημα της αεροτομής που βρίσκεται σε ταλαντούμενη εξωτερική διέγερση οι παράμετροι που αξίζει να μελετηθούν αρχικά είναι το εύρος της ταλάντωσης και η συχνότητα. Εν συνεχεία η μεταβολή του αριθμού Mach παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον στην συμπεριφορά του ROM , ακόμα και η γεωμετρία της αεροτομής θεωρείται παράμετρος που έχει αξία σε προβλήματα βελτιστοποίησης με δεδομένο τους μικρούς χρόνους επίλυσης ενός ROM.

4 Αποτελέσματα

Είναι αναγκαίο στο σημείο αυτό να γίνουν οι εξής παρατηρήσεις. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου αποδείχθηκε πως το σύστημα μειωμένης τάξης που προέκυψε είναι πολλές φορές ασταθές. Πιο συγκεκριμένα όσο περισσότερες POD μορφές συμπεριλαμβάνονται το σύστημα μπαίνει σε αστάθεια με θετικό πραγματικό μέρος μερικών (ή πολλών) ιδιοτιμών. Όμως πολλές φορές με ακόμα περισσότερες μορφές το σύστημα ξαναγίνεται ευσταθές και αυτή η αλληλουχία μπορεί να συνεχιστεί ως ένα σημείο. Σε καμία των περιπτώσεων δεν προέκυψε ευσταθές σύστημα με αριθμό μορφών πάνω από 100. Με την ιδιότητα αυτή χάνεται η ευκαιρία να δοκιμαστεί η πρόταση της θεωρίας POD που αναφέρει πως ROM με όλες τις μορφές προσεγγίζει σχεδόν στο 100 τοις εκατό τις αρχικές μεταβλητές.

Το επόμενο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό των εφαρμογών είναι το γεγονός πως όσο περισσότερες POD μορφές χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση του δείγματος, δεν προσεγγίζεται συνεχώς καλύτερα μία συγκεκριμένη λύση. Ορισμένες φορές συμβαίνει αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις που ένας μεγάλος αριθμός μορφών αυξάνει πολύ το εύρος της ταλάντωσης του cl τη στιγμή που λιγότερες παρέχουν καλύτερα αποτελέσματα.

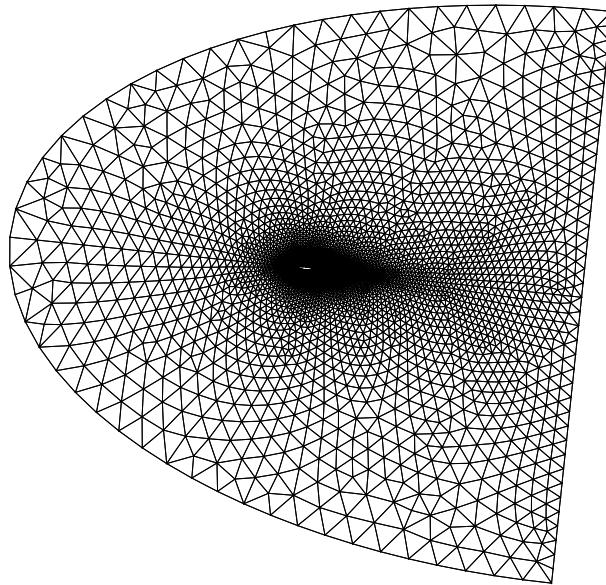
Τέλος παρατηρείται μια διαφορά φάσης σε όλα τα αποτελέσματα η οποία είναι ευαίσθητη στη μεταβολή διαφόρων παραμέτρων παρόλο που η συχνότητα της ταλάντωσης του cl ταυτίζεται με εκείνη του πλήρους μοντέλου και προφανώς με τη συχνότητα της ταλάντωσης της διέγερσης.

Οι λόγοι εμφάνισης της διαφοράς φάσης και της διαφοράς του εύρους καθώς και η συμπεριφορά τους μελετώνται στο κεφάλαιο αυτό. Ο λόγος ύπαρξης της είναι πιθανώς αδυναμία των POD μορφών να αναπαράγουν επαρκώς την μεταφορά της πληροφορίας από το εξωτερικό όριο στην αεροτομή στην εκκίνηση του προβλήματος. Το γεγονός αυτό δικαιολογείται από το ότι σε ένα σύνολο χρονοσειρών που συγκεντρώνεται κατά τη δειγματοληψία για την εφαρμογή της μεθόδου και περιλαμβάνει πχ. 70 περιόδους ταλάντωσης ελάχιστες χρονοσειρές αντιστοιχούν στις αρχικές χρονικές στιγμές και οι μορφές συγκεντρώνουν κυρίως πληροφορία για την ταλάντωση της εξωτερικής ροής και του cl . Επίσης στην αρχική περιοχή αυτή παρατηρείται και η διαφοροποίηση της φάσης η οποία σταθεροποιείται γρήγορα και παραμένει σταθερή όσο μεγάλο και να είναι η χρονική διάρκεια επίλυσης του ROM

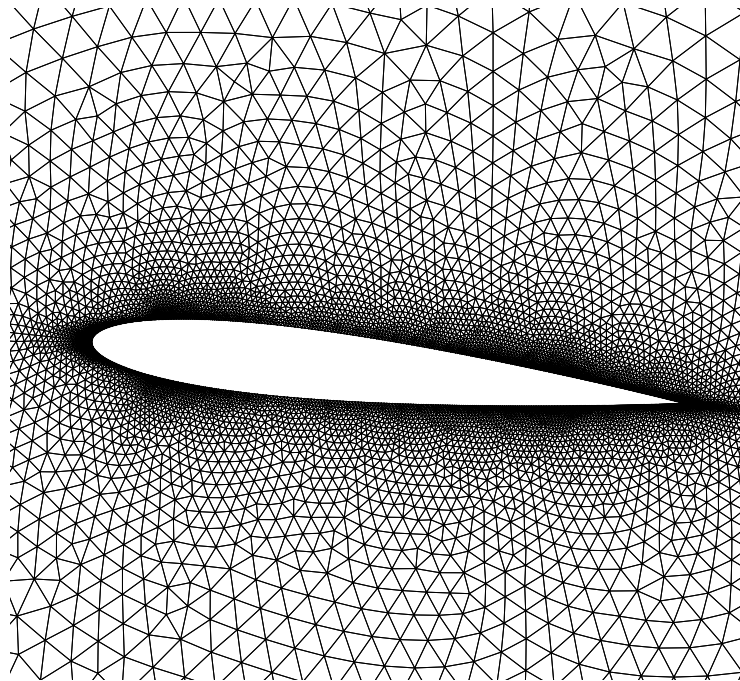
Από τα παραπάνω λοιπόν προκύπτει πως η επιλογή των POD μορφών για την κατασκευή του ROM είναι περίπλοκη και σίγουρα δεν μπορεί κανείς να βασιστεί στο ενεργειακό κριτήριο που αναφέρεται στη θεωρία τις μεθόδου. Για το λόγο αυτό λοιπόν η παρουσίαση των αποτελεσμάτων ξεκινά από μια συνολική μελέτη του προβλήματος παρατηρώντας τη συμπεριφορά του καθώς από αυτό εξάγονται συμπεράσματα για την καταλληλότητα η μη των POD μορφών.

Στην ενότητα 4.1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μεθόδου POD αλλάζοντας παραμέτρους όπως την μέση γωνία της ταλάντωσης, και την πυκνότητα των χρονοσειρών εννοώντας την χρονική απόσταση της δειγματοληψίας. Έπειτα στην ενότητα 4.2 δίνεται έμφαση στην διαφορά φάσης μεταξύ των αποτελεσμάτων του πλήρους συστήματος και αυτού της μειωμένης τάξης με την εφαρμογή εξωτερικής διέγερσης που περιέχει δύο συχνότητες. Τέλος πραγματοποιείται παραμετρική μελέτη στην ενότητα 4.3, όπου στο 4.3.1 αλλάζει το εύρος της ταλάντωσης διέγερσης και παρατηρείται η συμπεριφορά του ROM στην προσέγγιση των πραγματικών μεταβλητών. Στη συνέχεια γίνεται μια αναφορά στο 4.3.3 για το πως το μέγεθος του αρχικού δείγματος από το οποίο κατασκευάζονται οι POD μορφές επηρεάζει τα αποτελέσματα

Κατά την διάρκεια κατανόησης της μεθόδου, κατασκευής και επίλυσης του συστήματος χρησιμοποιήθηκε αεροτομή NACA 0012 με μη δομημένο πλέγμα γύρω της αποτελούμενο από τριγωνικά στοιχεία 21554 στον αριθμό. Σχετικές εικόνες είναι οι 7 και 8 .



Σχήμα 7: NACA 0012



Σχήμα 8: NACA 0012

4.1 Διερεύνηση Διαφοράς Φάσης και Εύρους

Για κάθε περίπτωση δίνεται αρχικά μια ποσοτική ένδειξη της μεταβολής του εύρους σε συνάρτηση με τον αριθμό των επιλεγμένων μορφών και την απόσταση της δειγματοληψίας του δείγματος. Η διαφορά φάσης έχει εξαλειφθεί σκόπιμα ώστε να γίνεται πιο εύκολα αντιληπτή η διαμόρφωση του εύρους. Οι μορφές που βρίσκονται στα διαγράμματα αυτά δεν είναι όλες για τις οποίες το σύστημα είναι ευσταθές αλλά εκείνες οι οποίες παρέχουν αποτελέσματα που αντιπροσωπεύουν πιστά τη συνολική συμπεριφορά του συστήματος υπό τις συγκεκριμένες συνθήκες (απόσταση δειγματοληψίας , μέση γωνία ταλάντωσης κλπ.). Επίσης και για λόγους εύκολης παρατήρησης που θα χανόταν αν συμπεριλαμβάνονταν όλοι οι αριθμοί μορφών. Με τον όρο Full Order εννοείται η ταλάντωση του $c1$ που έχει προκύψει από τον κώδικα Euler από τον οποίο προέκυψε και το δείγμα για την εφαρμογή της μεθόδου POD

Έπειτα παρουσιάζονται διαγράμματα με το ποσοστιαίο σχετικό σφάλμα του εύρους και στη συνέχεια η διαφορά φάσης σε αδιάστατα δευτερόλεπτα σε συνάρτηση με τον αριθμό των επιλεγμένων μορφών.

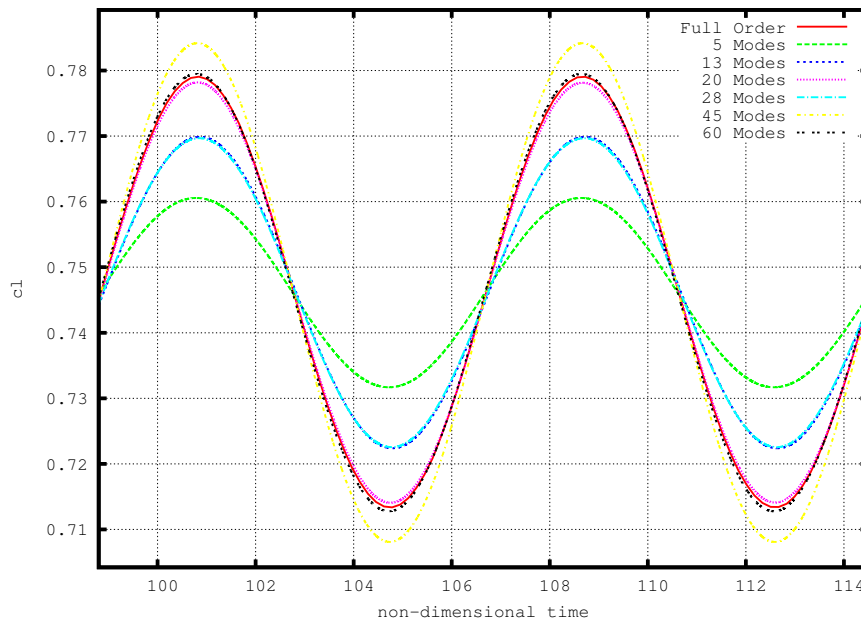
Ταλάντωση $6^\circ \pm 1^\circ$

Το πρόβλημα που μελετάται είναι το εξής:

- Αεροτομή NACA 0012
- Αριθμός Mach = 0.5
- Μέση γωνία ταλάντωσης = 6°
- Εύρος ταλάντωσης = 1°
- Περίοδος = 7.85 αδιάστατα δευτερόλεπτα

Στα σχήματα από 9 ως 26 παρατηρείται αρχικά αυτό που αναφέρθηκε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου , πως ο αριθμός των μορφών που επιλεγονται ως κατάλληλες για την αναπαράσταση των ροϊκών μεταβλητών δεν υπακούουν ή τουλάχιστον δεν φαίνεται εκ πρώτης όψεως να υπακούουν στο ενεργειακό κριτήριο. Φτάνοντας σε αριθμό της τάξεως 40-50 ή 60 μορφών το αποτέλεσμα που προκύπτει δεν είναι προβλέψιμο. Στα σχήματα 24 και 21 οι 46 POD μορφές αυξάνουν το εύρος έντονα τη στιγμή που οι 31 και 30 μορφές αντίστοιχα παρέχουν καλά αποτελέσματα. Σε αντίθετη περίπτωση στο σχήμα 15 οι 45 μορφές μειώνουν κάπως το εύρος της ταλάντωσης. Στο σχήμα 15 καταλήγουμε σε ευσταθές σύστημα με επιλογή 60 μορφών και το οποίο αποδίδει πολύ καλά αποτελέσματα την ίδια στιγμή που και οι 20 μορφές παρέχουν σχεδόν τα ίδια αποτελέσματα. Αναφερόμαστε πάντα στο εύρος της ταλάντωσης του συστήματος μειωμένης τάξης σε σύγκριση με το πλήρες δυναμικό σύστημα.

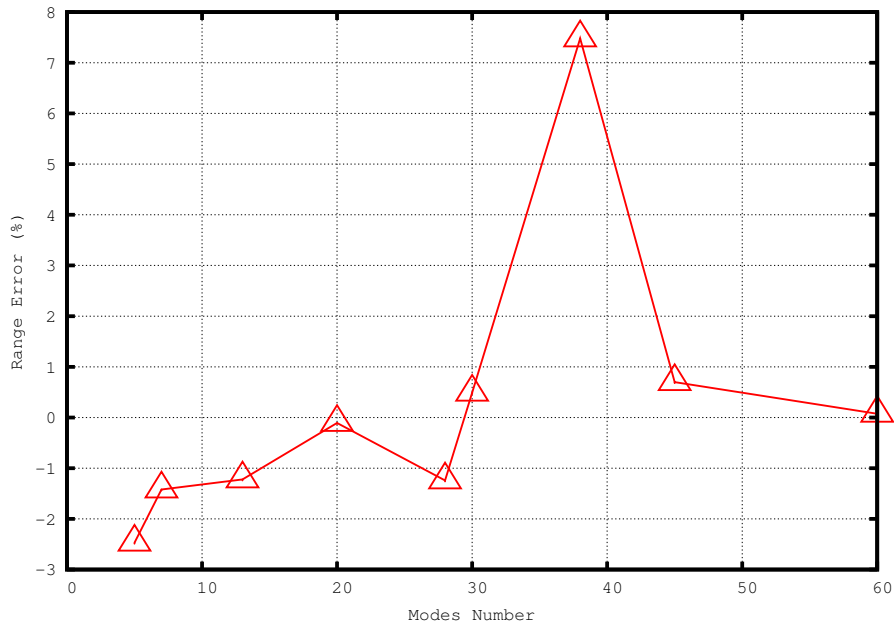
Στην πλευρά των καλών αποτελεσμάτων τώρα στα σχήματα 15 , 18 , 21 και 24 παρέχουν πολύ καλό εύρος ταλάντωσης με 30 μορφές στο πρώτο και το τελευταίο και 32 στα δύο ενδιάμεσα. Το αποτέλεσμα αυτό είναι μία ένδειξη πως το σύστημα δείχνει εκ του αποτελέσματος τον κατάλληλο αριθμό μορφών για τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Η άποψη αυτή ενισχύεται από τα αντίστοιχα διαγράμματα ποσοστιαίου σφάλματος του εύρους όπου υπάρχουν σχεδόν όλες οι μορφές για τις οποίες προέκυψε ευσταθές σύστημα. Σε αυτά λοιπόν όλη η περιοχή γύρω από την τιμή



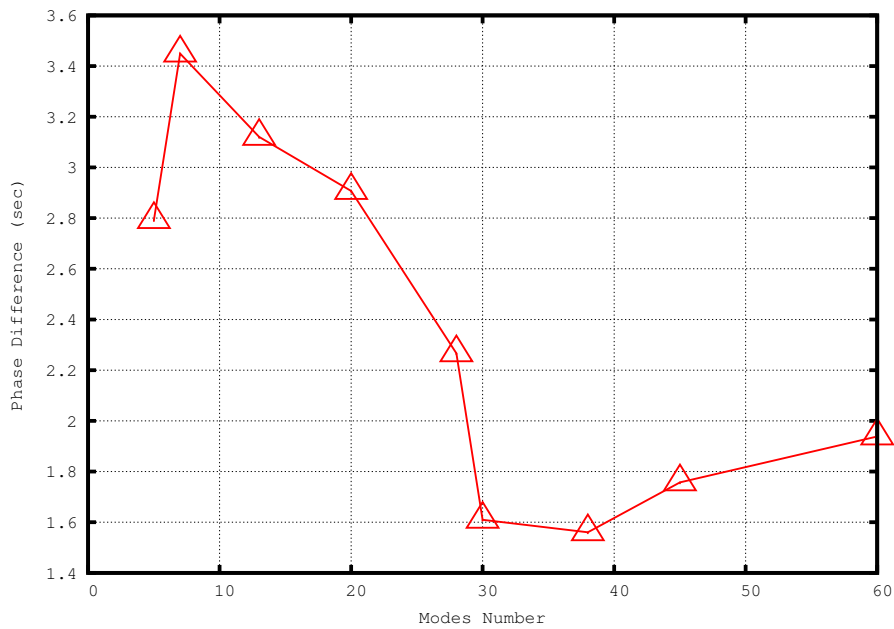
Σχήμα 9: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.

30 παρέχει ποσοστιαίο σχετικό σφάλμα στο εύρος κοντά στο μηδέν. Αρκεί να παρατηρηθούν και τα αντίστοιχα διαγράμματα διαφοράς φάσης σε συνάρτηση με τον αριθμό των μορφών, όπου στην περιοχή των 30 μορφών έχουμε αν όχι την ελάχιστη διαφορά φάσης, μικρά νούμερα. Κοιτώντας καθολικά τα διαγράμματα της διαφοράς φάσης υπάρχουν ομοιότητες μεταξύ τους π.χ. σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις οι διαφορές φάσεως με τις πρώτες 29 μορφές έχουν μεγάλες τιμές (2 – 3.5 αδιάστατα δευτερόλεπτα). Στη συνέχεια ακολουθείται πτωτική πορεία έως τις 40-50 μορφές όπου και έχουμε τη μικρότερη διαφορά φάσης σε όλες τις περιπτώσεις που μελετώνται. Παρόλο που δεν ήταν αναμενόμενο χαρακτηριστικό, μπορεί να θεωρηθεί πως τα διαγράμματα διαφοράς φάσης - αριθμού μορφών συμφωνούν ως προς τη μορφή τους, γεγονός που βεβαιώνει, τουλάχιστον αρχικά, πως δεν πρόκειται για δυσλειτουργία της μεθόδου που έπρεπε να απουσιάζει.

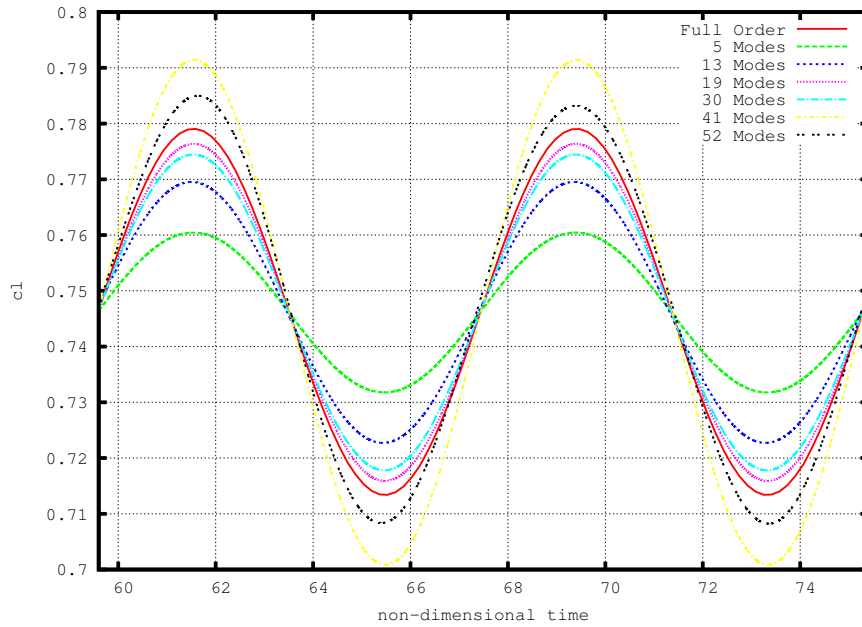
Να σημειωθεί στο σημείο αυτό πως η χρονική απόσταση της δειγματοληψίας δεν μπορεί να μειωθεί αρκετά διότι τότε υπάρχει ο κίνδυνος οι χρονοσειρές να είναι αρκετά όμοιες η μία με την επόμενη της, γεγονός που προκαλεί μεγάλο σφάλμα κατά την μέθοδο ‘Singular Value Decomposition’ και προκύπτουν αναξιόπιστα αποτελέσματα.



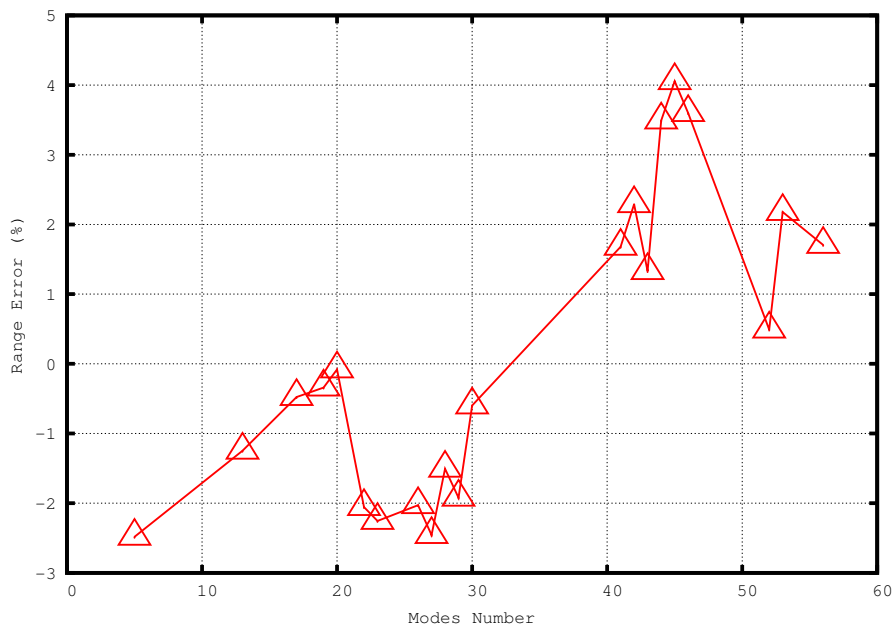
Σχήμα 10: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.



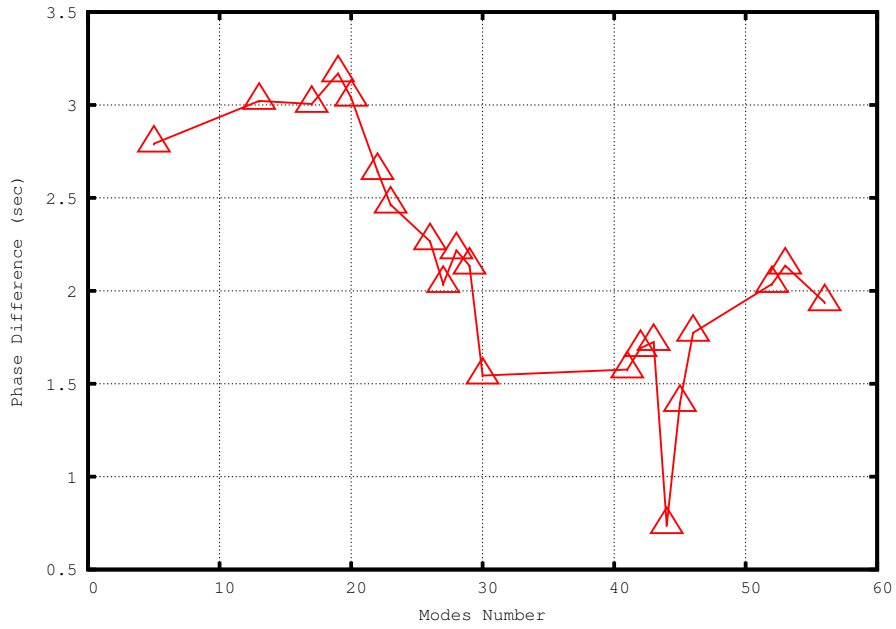
Σχήμα 11: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.



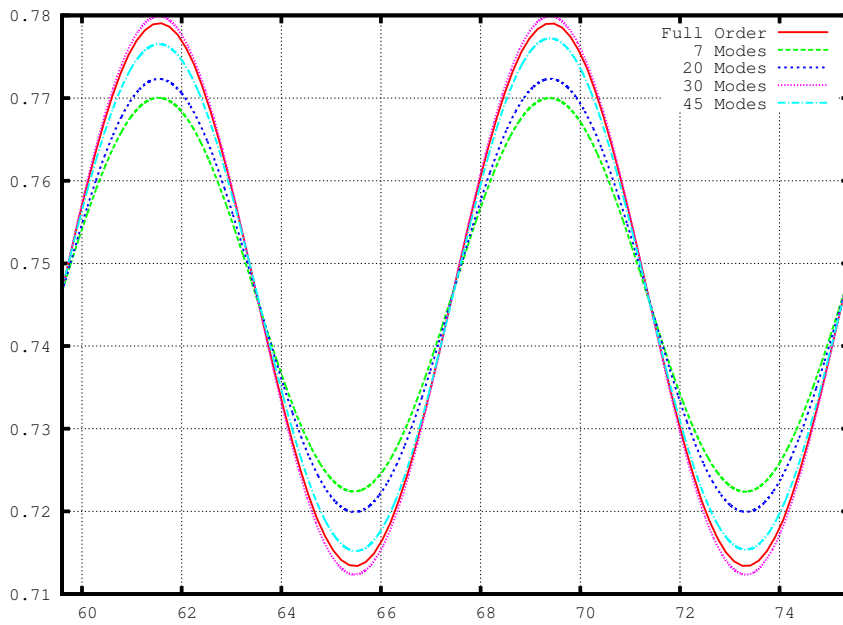
Σχήμα 12: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



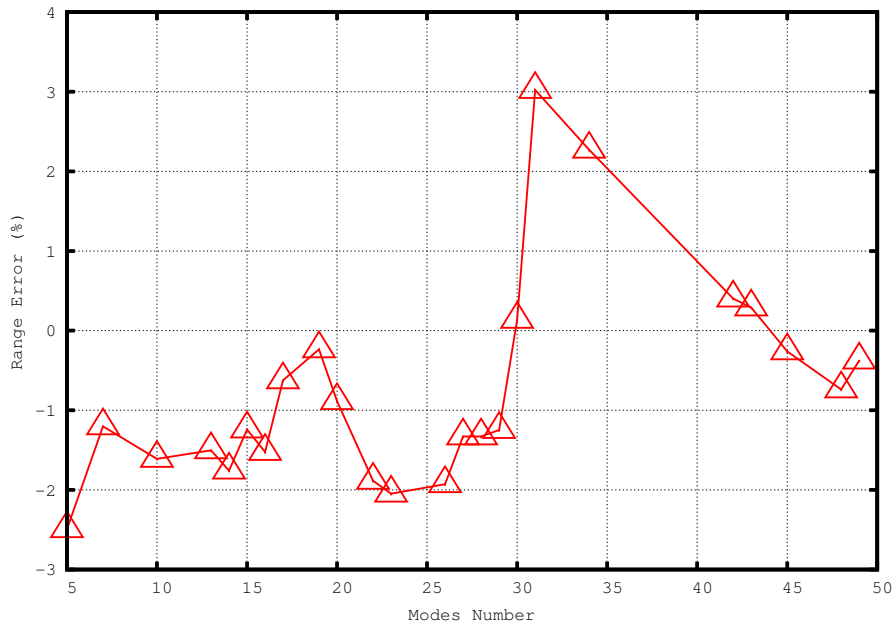
Σχήμα 13: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



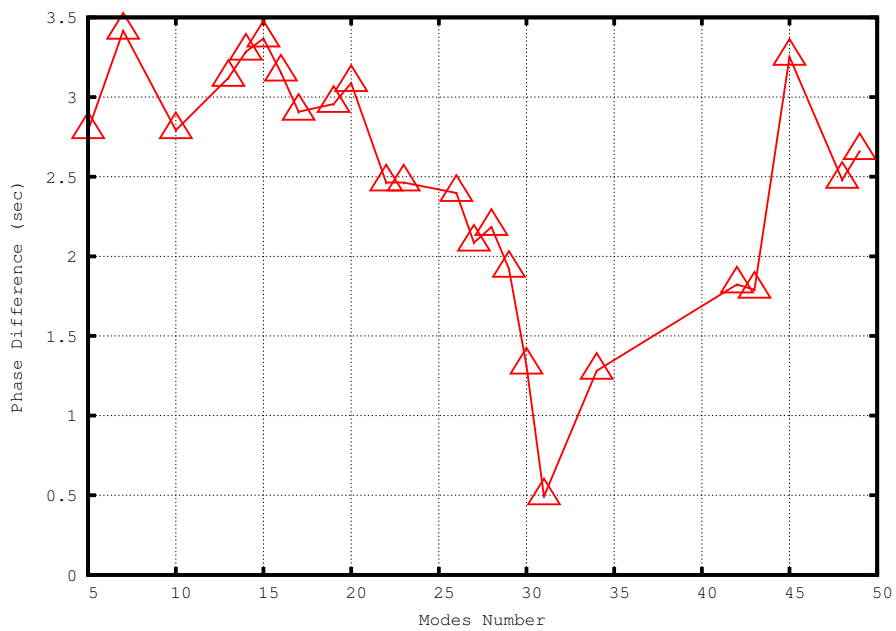
Σχήμα 14: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



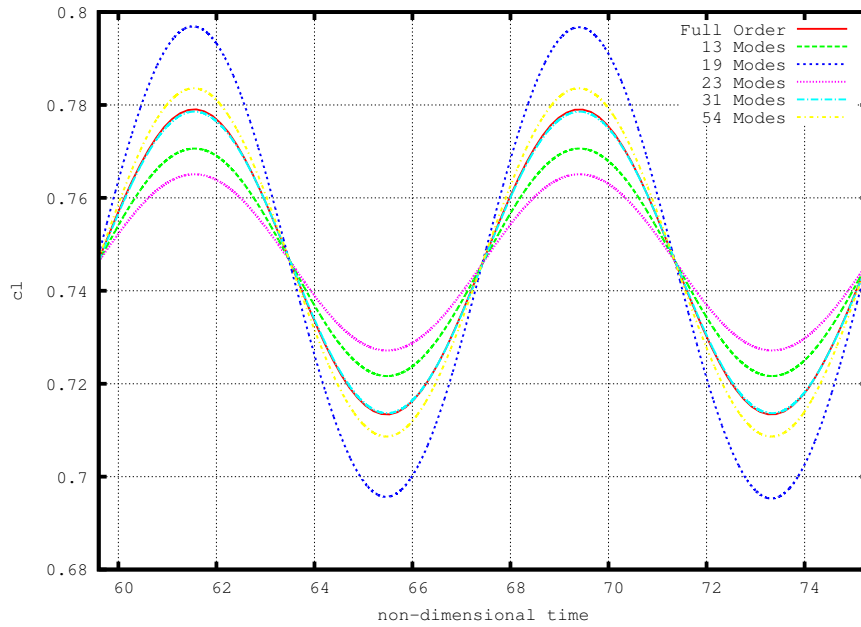
Σχήμα 15: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



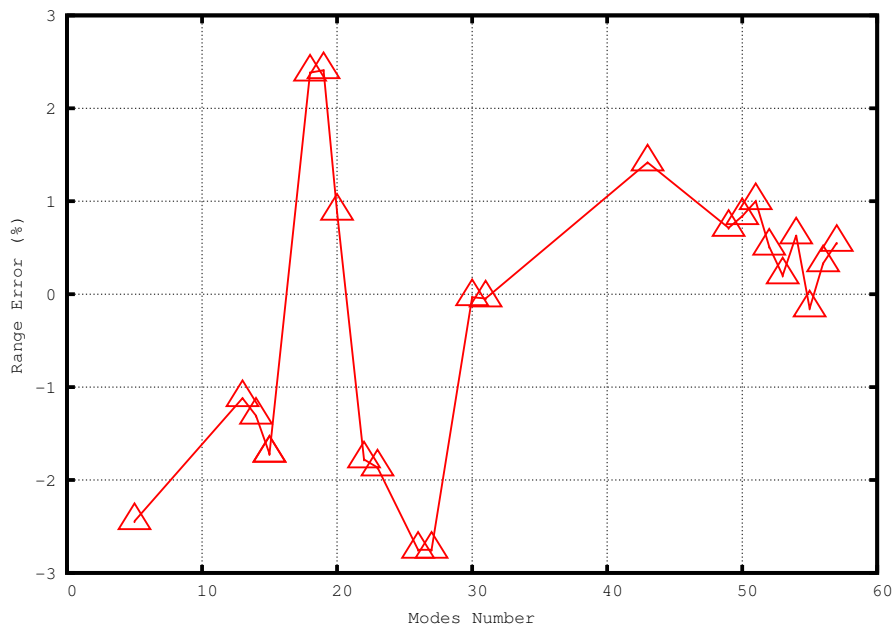
Σχήμα 16: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



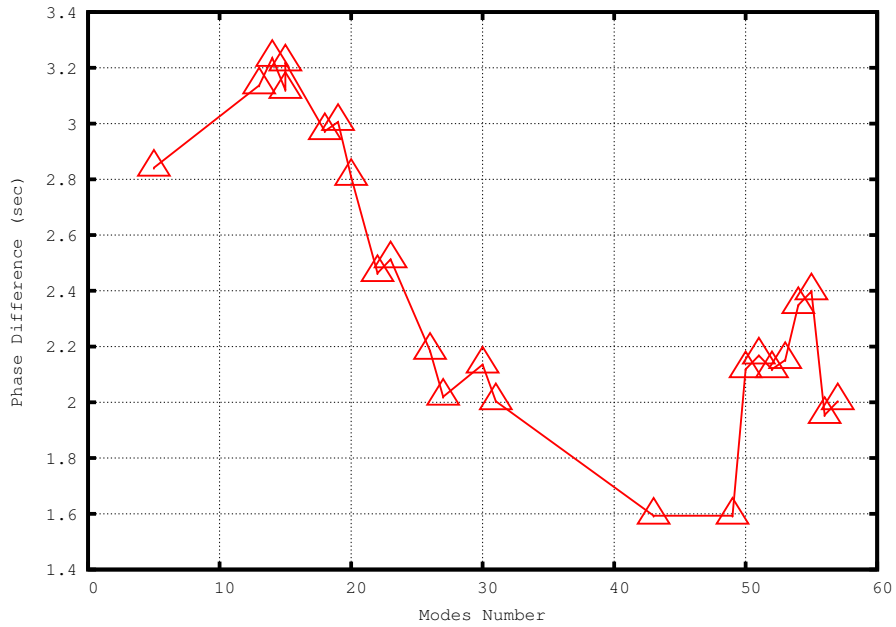
Σχήμα 17: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



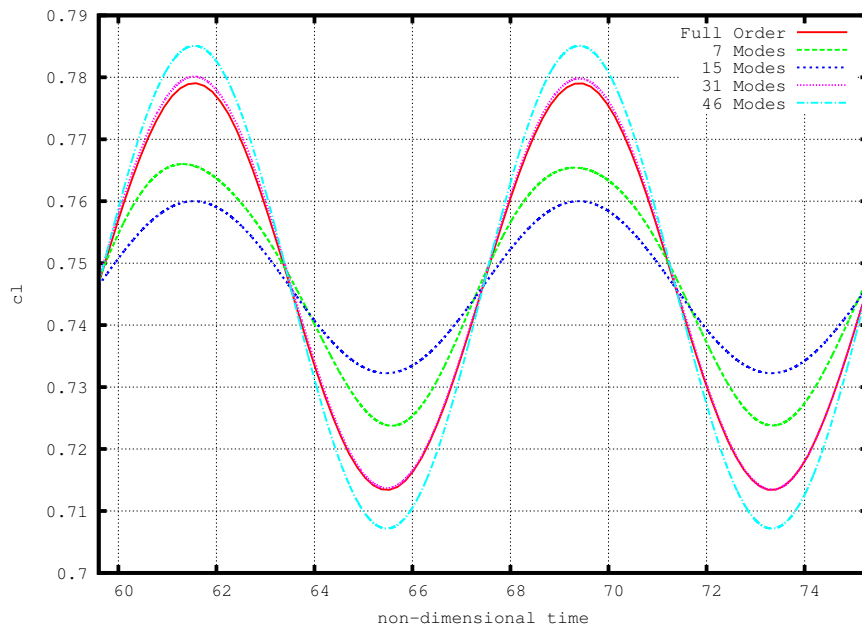
Σχήμα 18: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



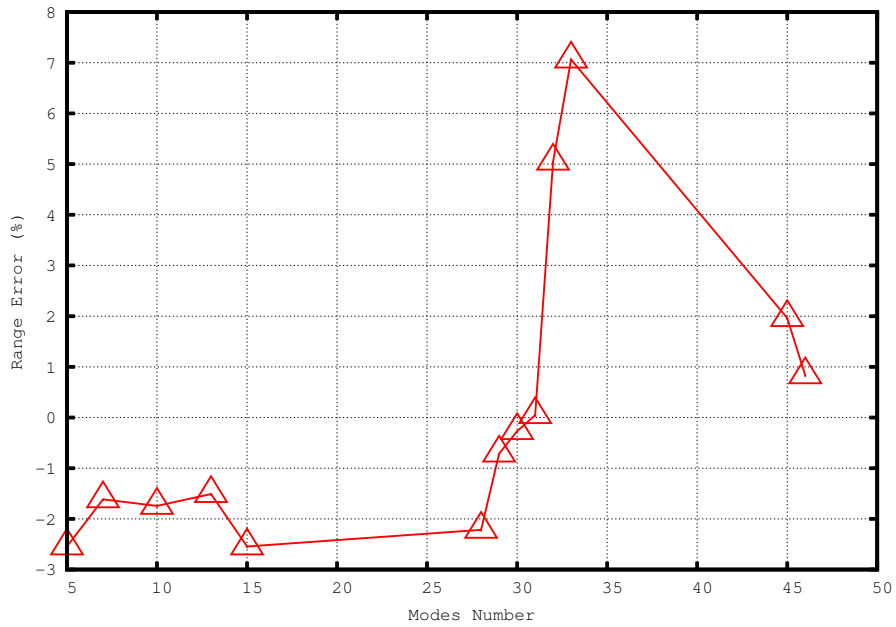
Σχήμα 19: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



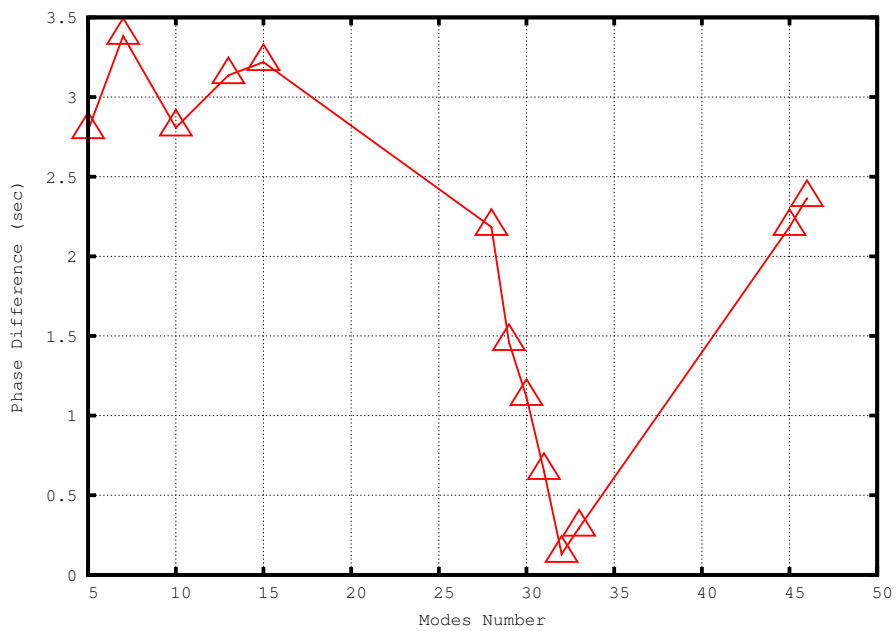
Σχήμα 20: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



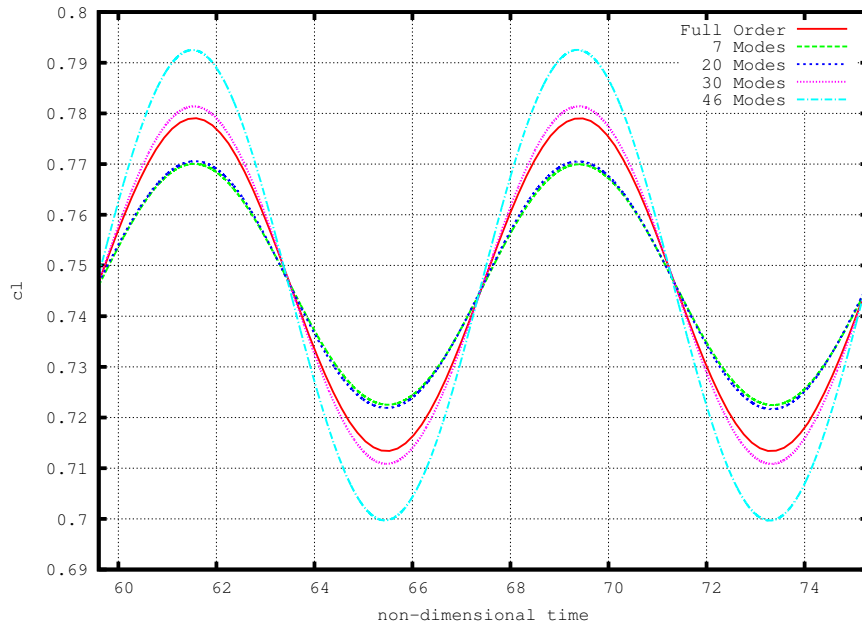
Σχήμα 21: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



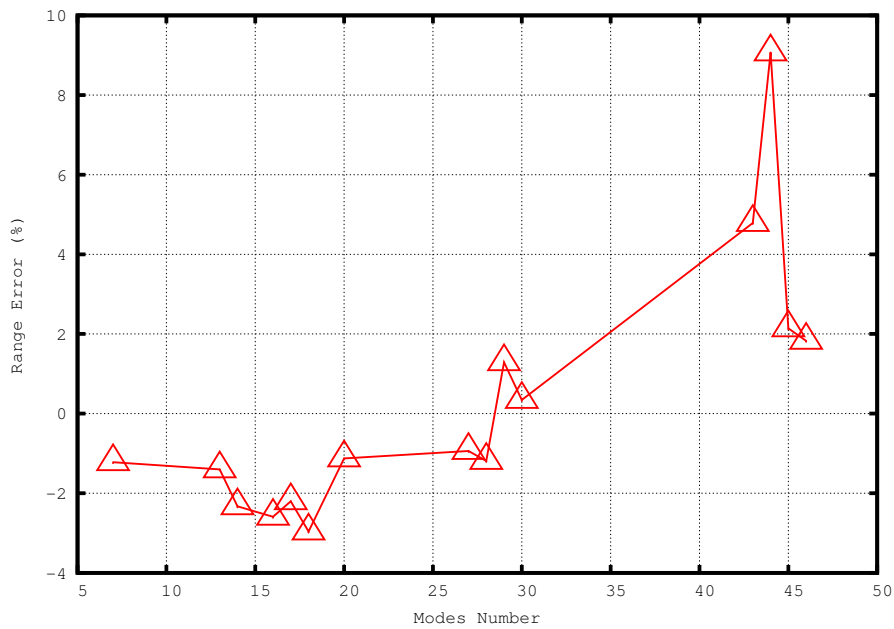
Σχήμα 22: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



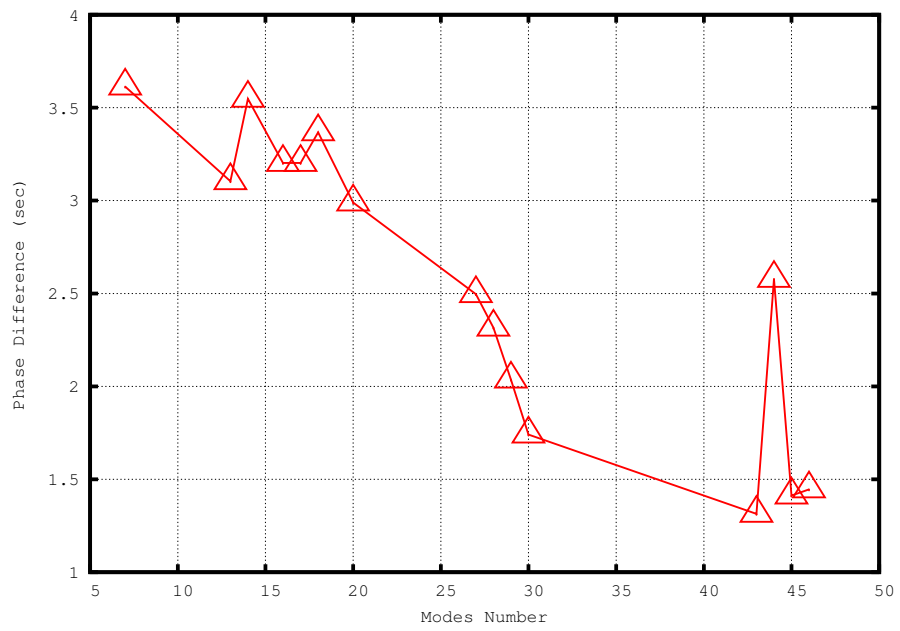
Σχήμα 23: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



Σχήμα 24: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.



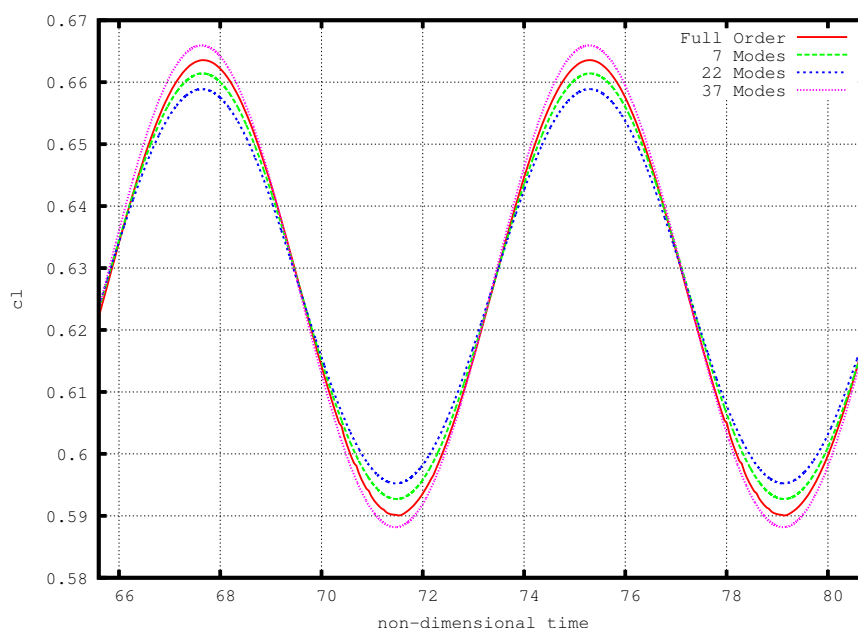
Σχήμα 25: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.



Σχήμα 26: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.

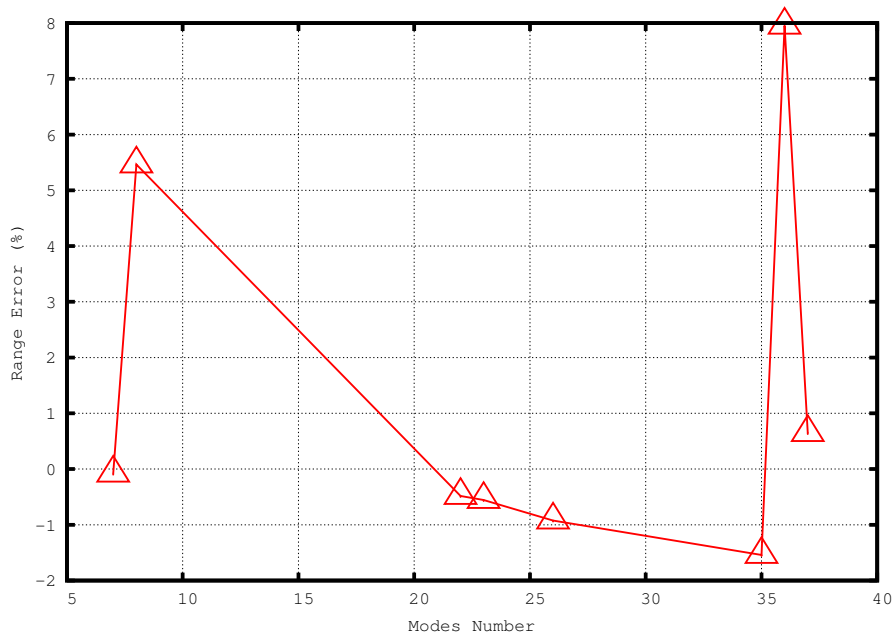
Ταλάντωση $5^\circ \pm 1^\circ$

- Αεροτομή NACA 0012
- Αριθμός Mach = 0.5
- Μέση γωνία ταλάντωσης = 5°
- Εύρος ταλάντωσης = 1°
- Περίοδος = 7.85 αδιάστατα δευτερόλεπτα

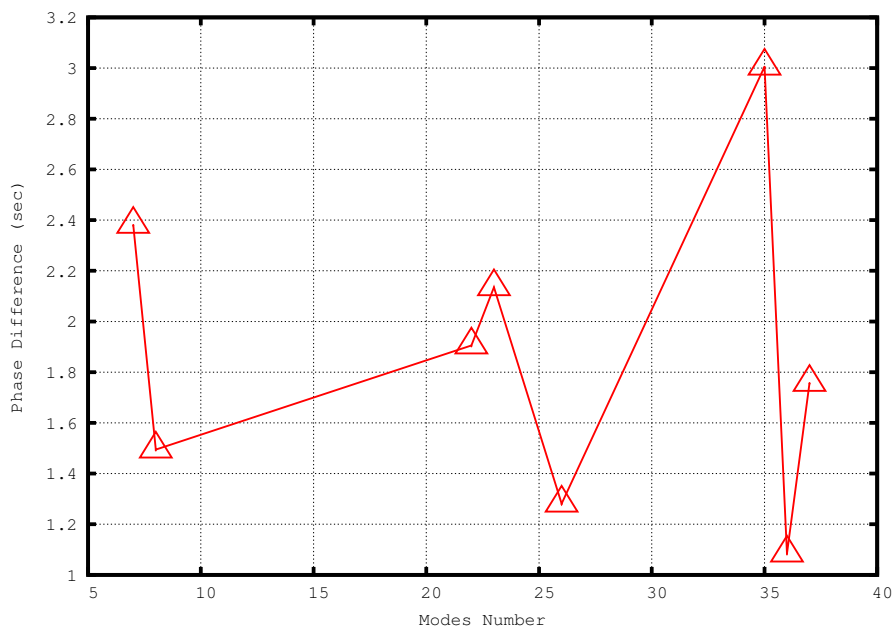


Σχήμα 27: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.

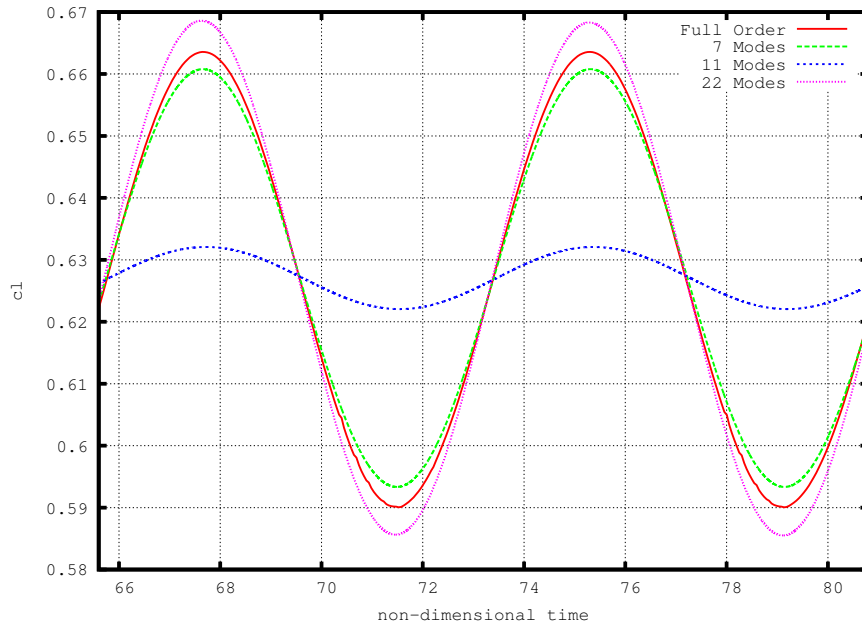
Στη συγκεκριμένη περίπτωση το σφάλμα στο εύρος σε συνάρτηση με τον αριθμό των μορφών που επιλέγονται δεν ακολουθεί ένα συγκεκριμένο μοτίβο παρατηρώντας τα αντίστοιχα διαγράμματα. Γενικά οι μορφές που παρέχουν ικανοποιητικά αποτελέσματα υπάρχουν άλλα δεν μπορούν να προβλεφθούν. Η μέθοδος δείχνει πως οι 7 ή οι 8 μορφές αναπαράγουν με ακρίβεια το εύρος της ταλάντωσης και αυτό είναι αξιοσημείωτο σκεπτόμενοι την προηγούμενη περίπτωση ($6^\circ \pm 1^\circ$) όπου το σύστημα ήταν ακριβές για αριθμό μορφών της τάξεως του 30. Ένα εντυπωσιακό χαρακτηριστικό παρατηρείται στα σχήματα 39 , 40 και 41 όπου δοκιμάζοντας μεγάλο αριθμό μορφών ενώ συνήθως από κάποιο σημείο και έπειτα καθώς ο αριθμός αυτός περνά ένα σημείο το σύστημα είναι και παραμένει ασταθές (συνήθως κάθε περίπτωση έχει μια περιοχή πέρα από την οποία το σύστημα είναι ασταθές και παραμένει όσο περισσότερες μορφές επιλέγονται) , στην περίπτωση αυτή και στη δοκιμή με 96 μορφές το σύστημα προκύπτει ευσταθές με πολύ καλά αποτελέσματα στο εύρος της ταλάντωσης του α αν και η διαφορά φάσης παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή της στο σημείο αυτό.



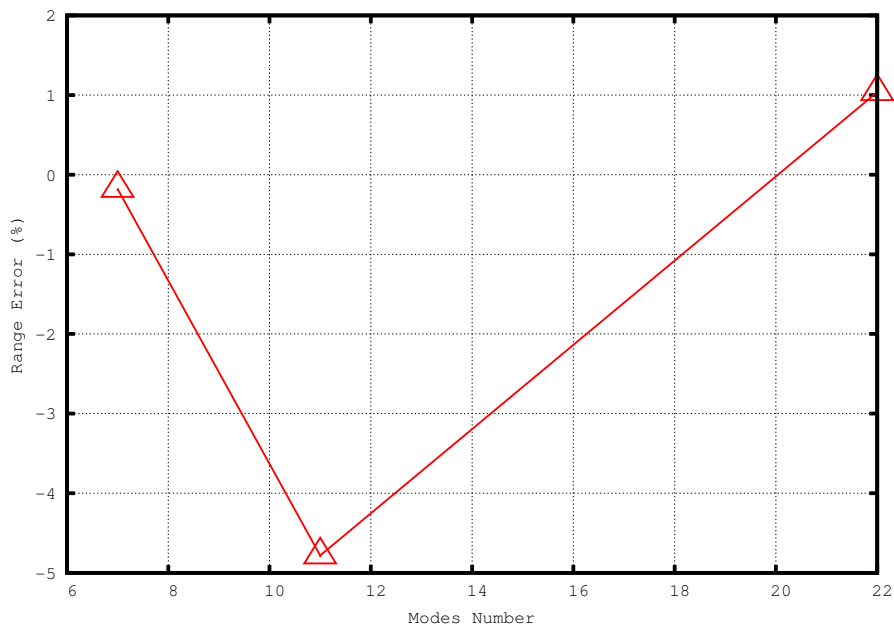
Σχήμα 28: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.



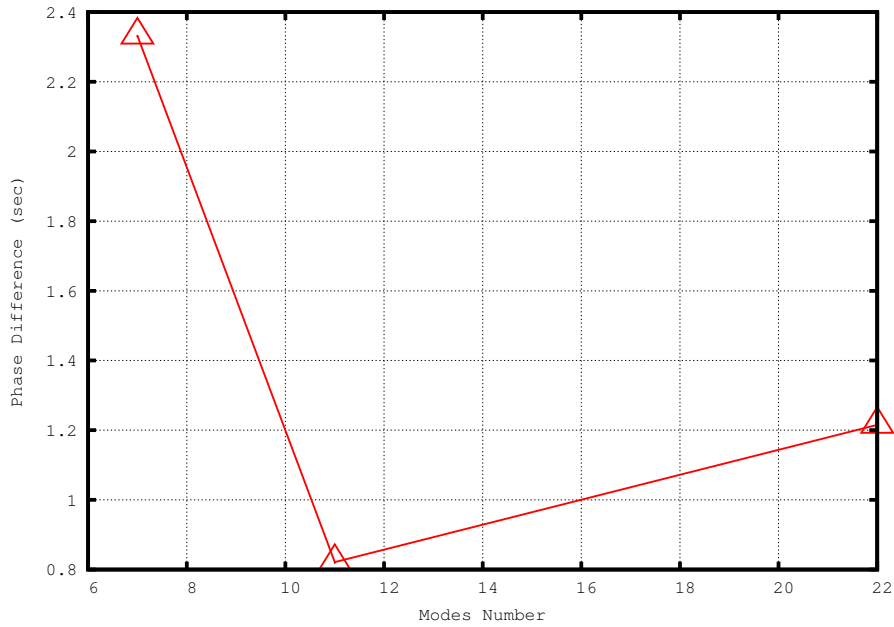
Σχήμα 29: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.



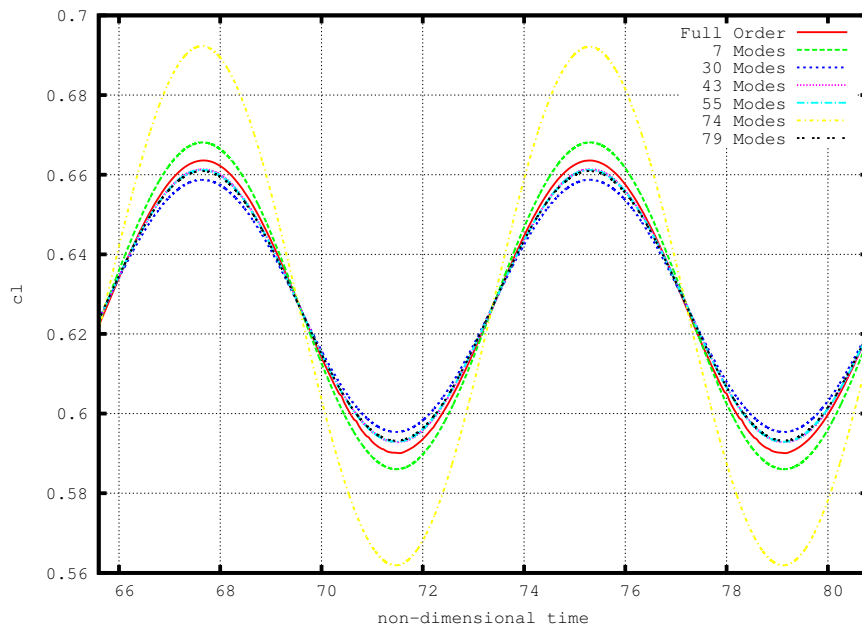
Σχήμα 30: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



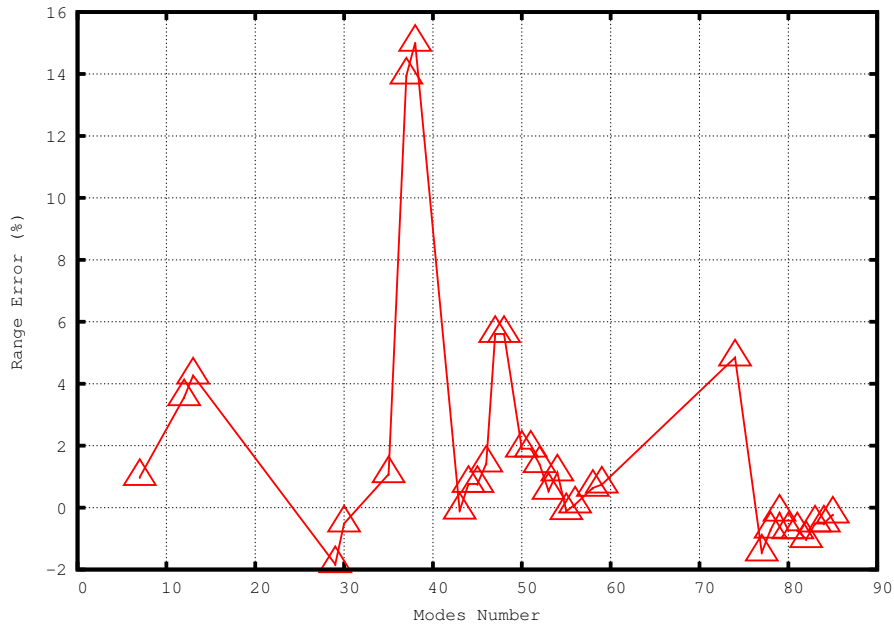
Σχήμα 31: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



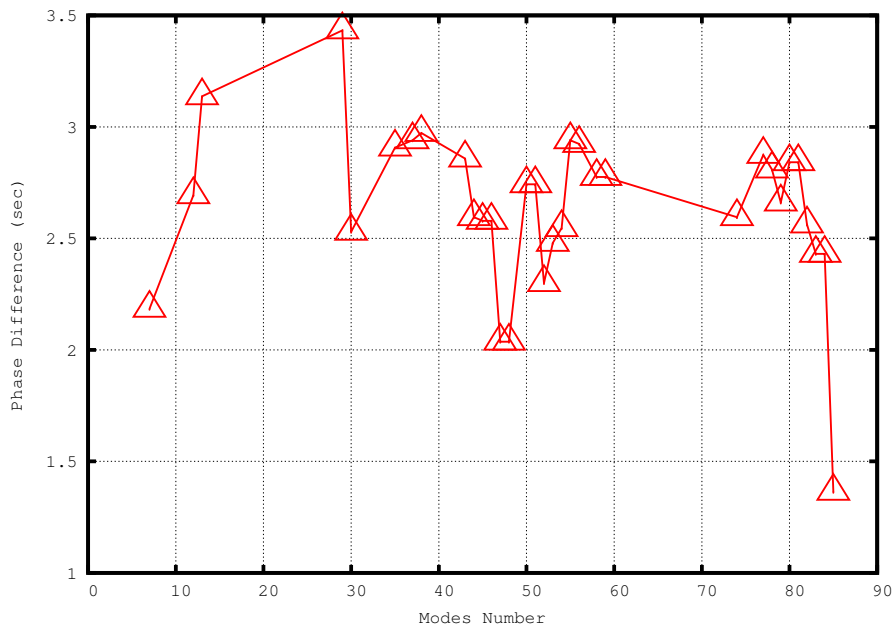
Σχήμα 32: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



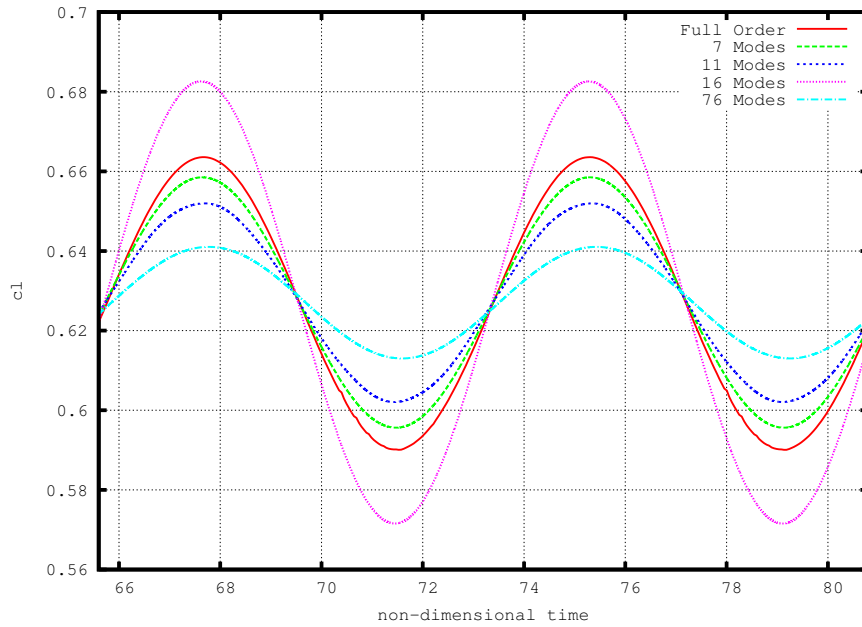
Σχήμα 33: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



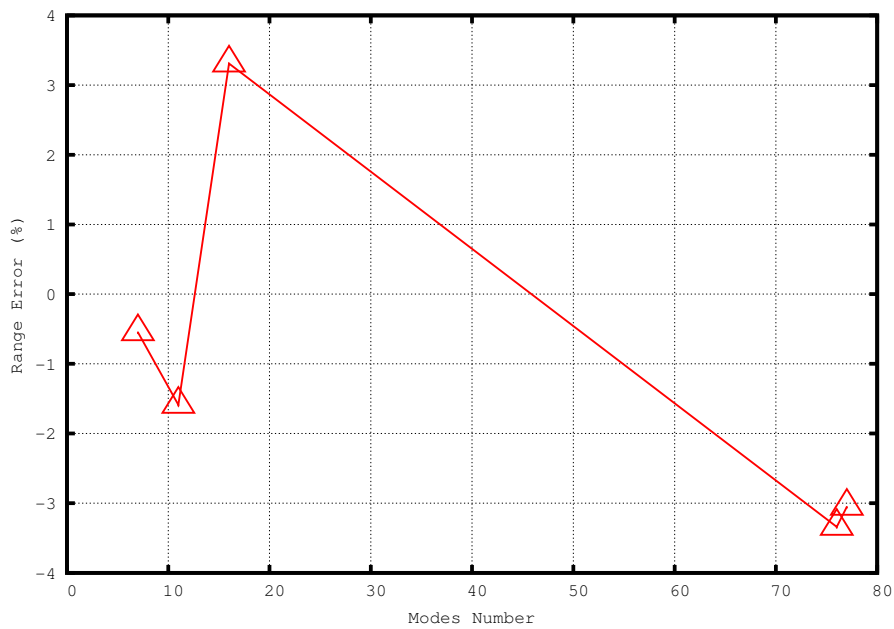
Σχήμα 34: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



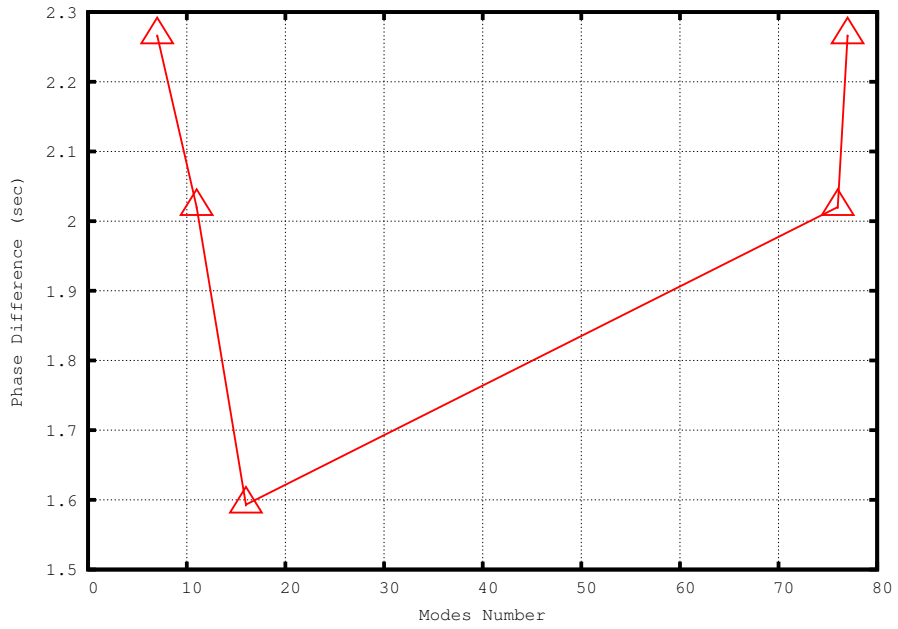
Σχήμα 35: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



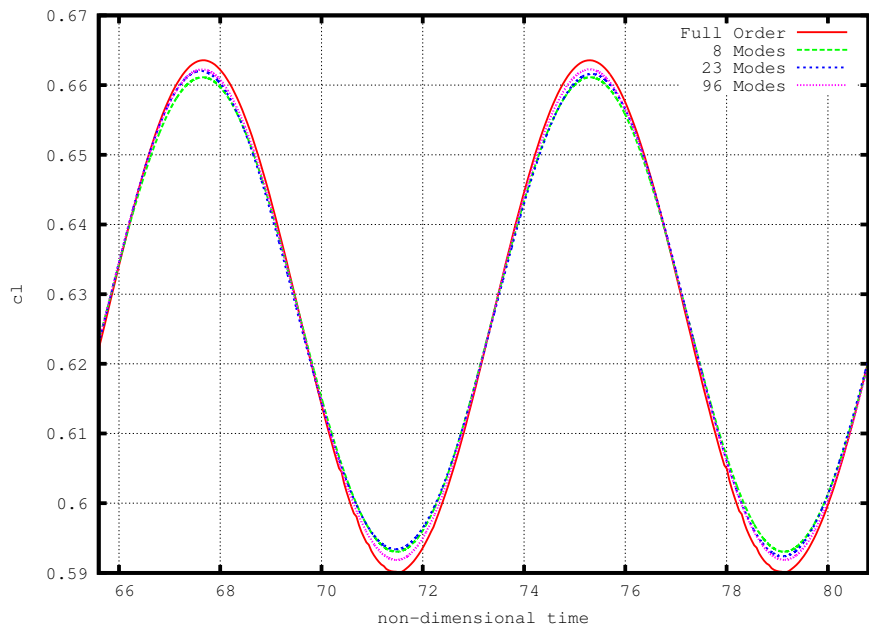
Σχήμα 36: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



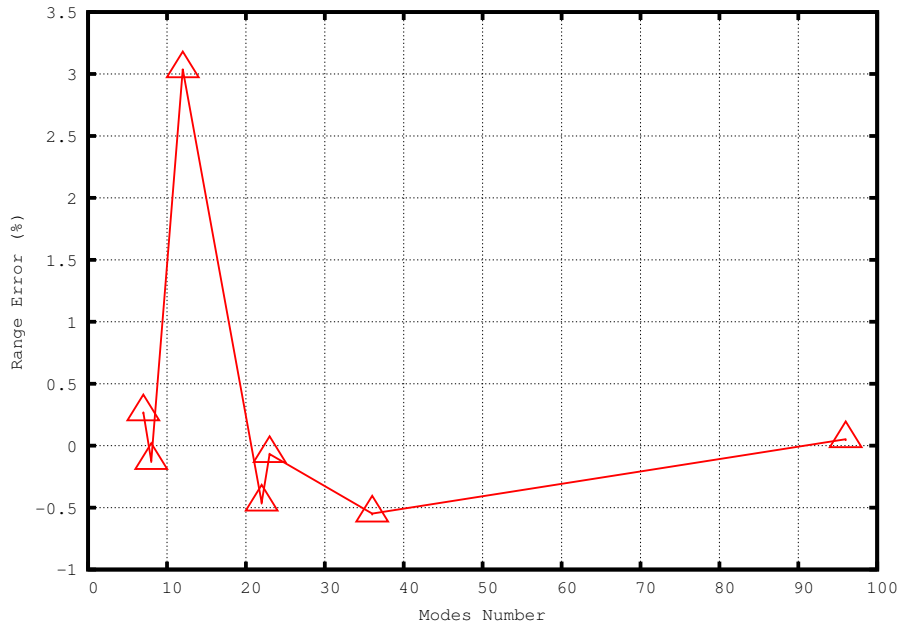
Σχήμα 37: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



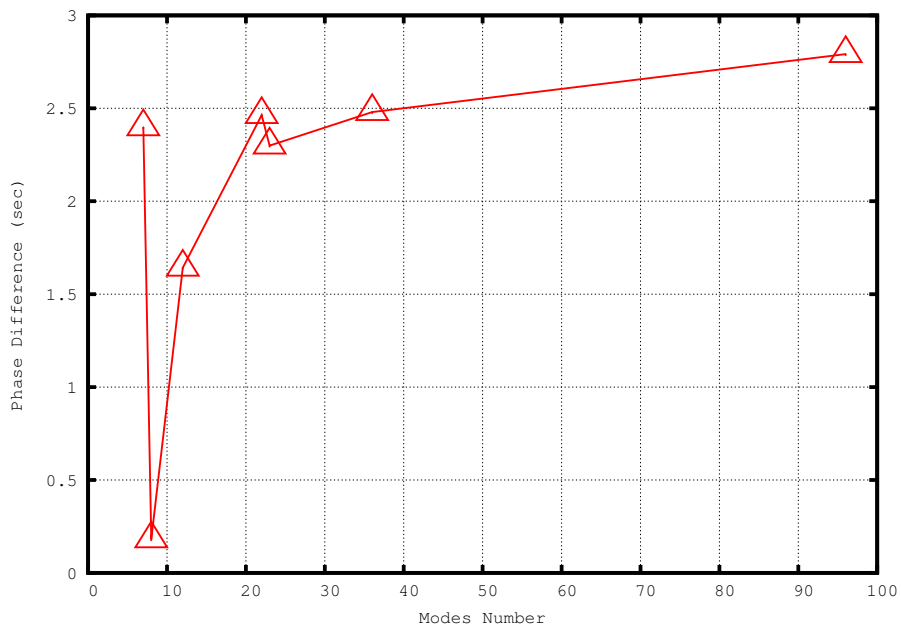
Σχήμα 38: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



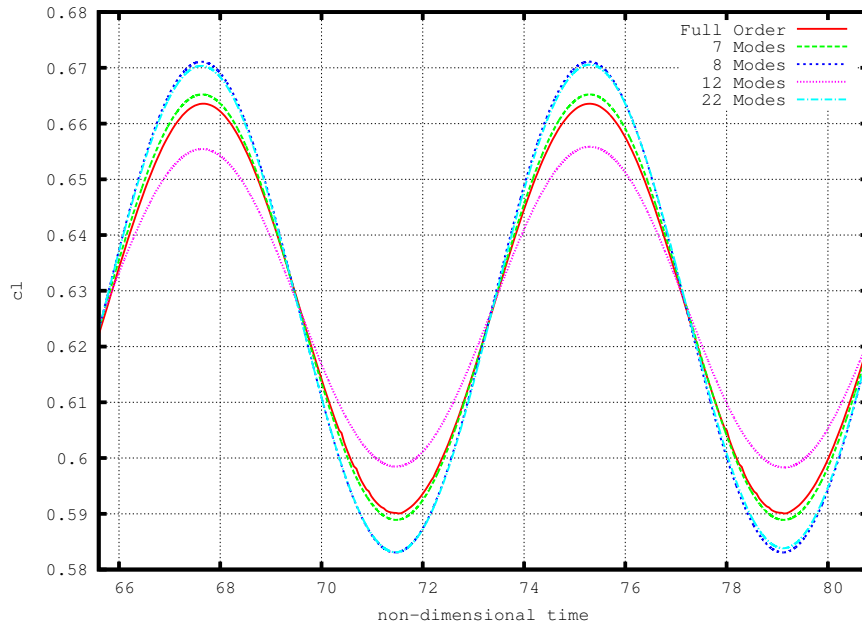
Σχήμα 39: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



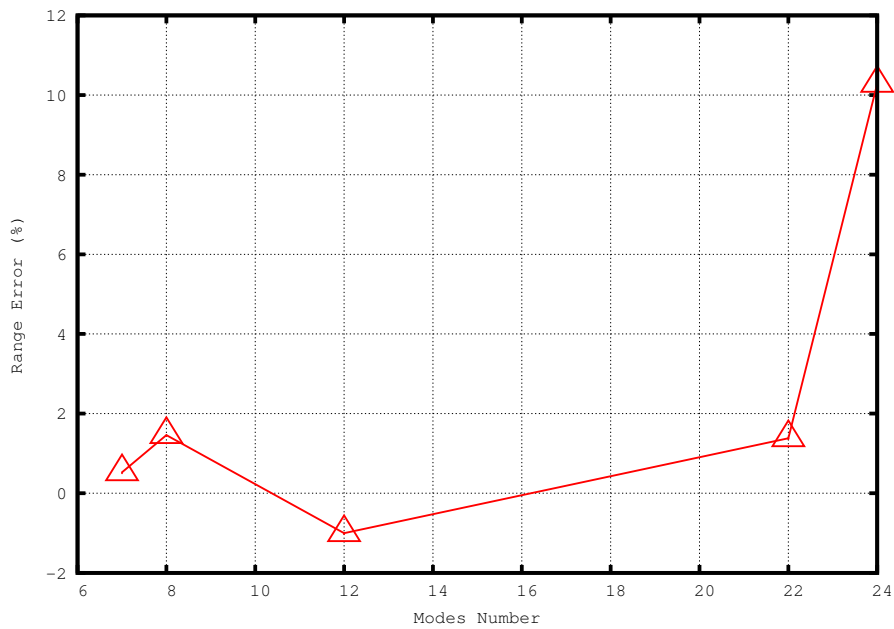
Σχήμα 40: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



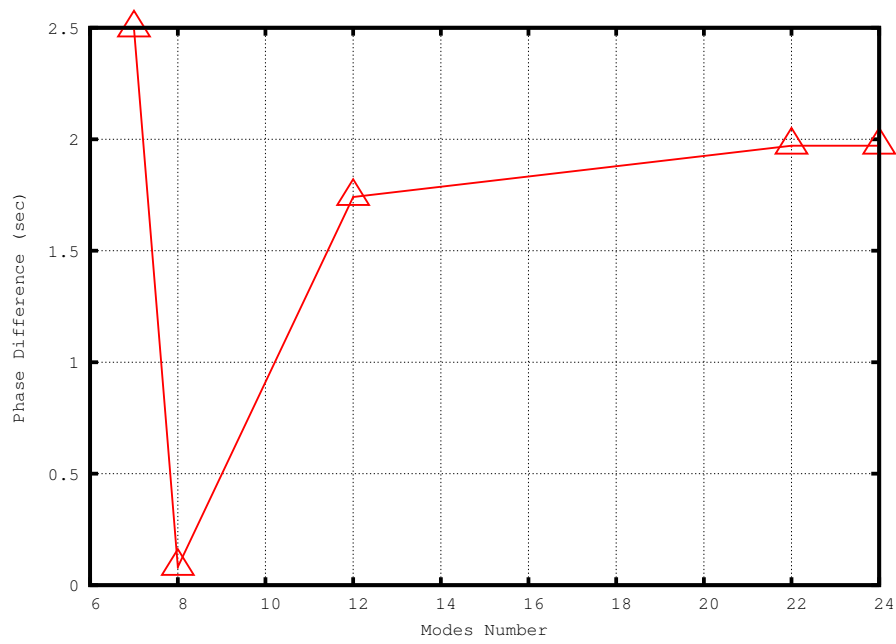
Σχήμα 41: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



Σχήμα 42: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.



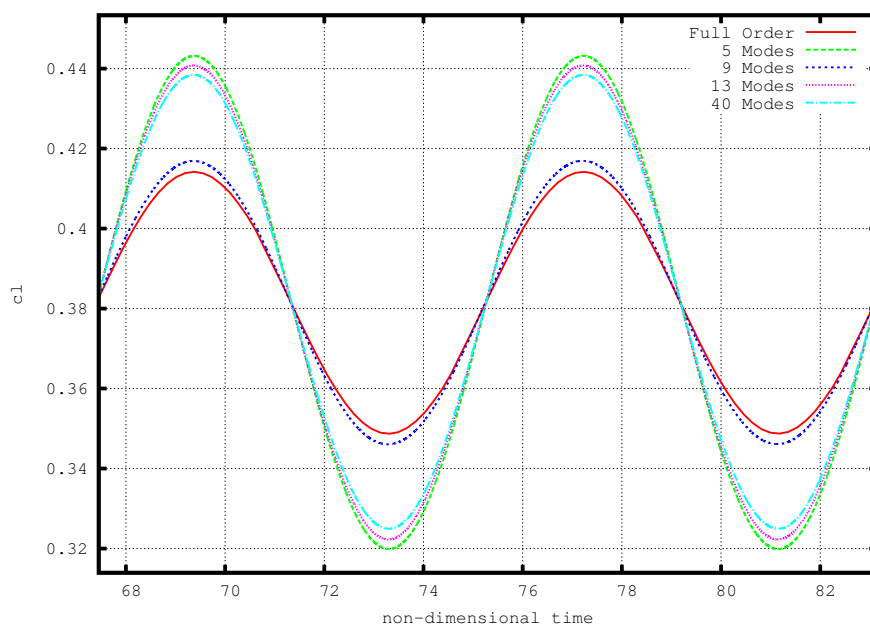
Σχήμα 43: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.



Σχήμα 44: $5^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.

Ταλάντωση $3^\circ \pm 1^\circ$

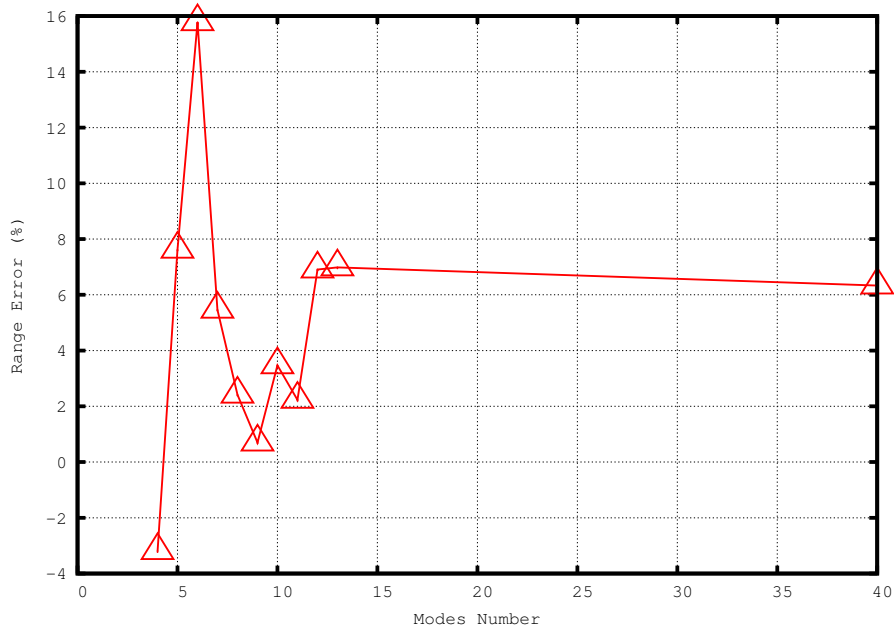
- Αεροτομή NACA 0012
- Αριθμός Mach = 0.5
- Μέση γωνία ταλάντωσης = 3°
- Εύρος ταλάντωσης = 1°
- Περίοδος = 7.85 αδιάστατα δευτερόλεπτα



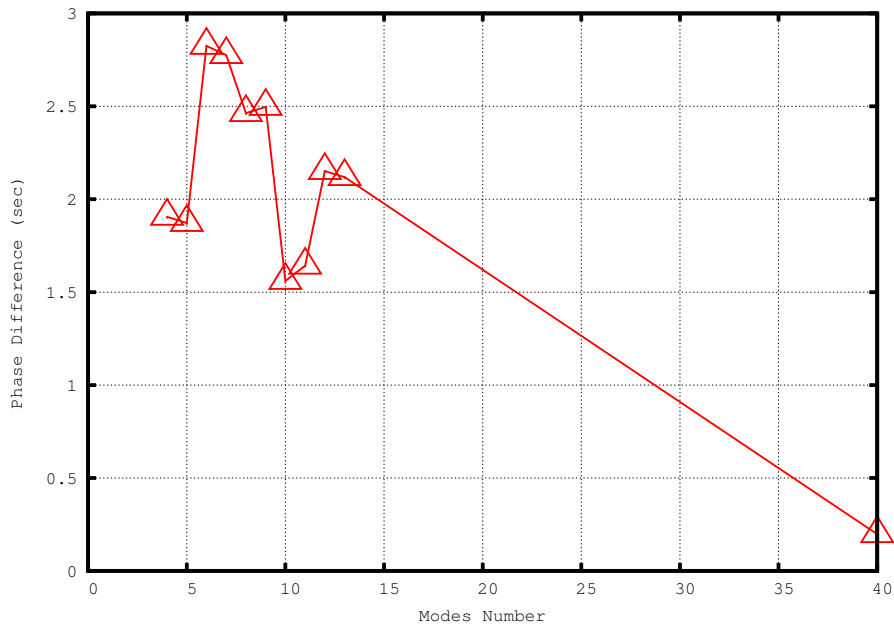
Σχήμα 45: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.

Σε αυτό το σετ αρχικών δεδομένων δεν διαφέρουν τα αποτελέσματα πολύ συγκρινόμενα με τις προηγούμενες περιπτώσεις . Αναφερόμαστε στο αν υπάρχει κάποιο μοτίβο στο σφάλμα του εύρους του α και της διαφοράς φάσης σε συνάρτηση με τον αριθμό των επιλεγμένων μορφών. Γενικά ένα κύριο χαρακτηριστικό που παρατηρείται από όλες τις δοκιμές στην απόσταση της δειγματοληψίας είναι πως όταν ο αριθμός των μορφών φτάσει πάνω από 40 και το σύστημα που κατασκευάζεται είναι ευσταθές τότε τα αποτελέσματα που προκύπτουν έχουν πολύ μικρό σφάλμα στο εύρος της ταλάντωσης και ταυτόχρονα μικρές τιμές στην διαφορά φάσης . ο αριθμός των μορφών ,όταν αυτές δίνουν ευσταθές σύστημα, που παράγουν ικανοποιητικά αποτελέσματα κινούνται γύρω από την περιοχή των 9 35 και 50 .

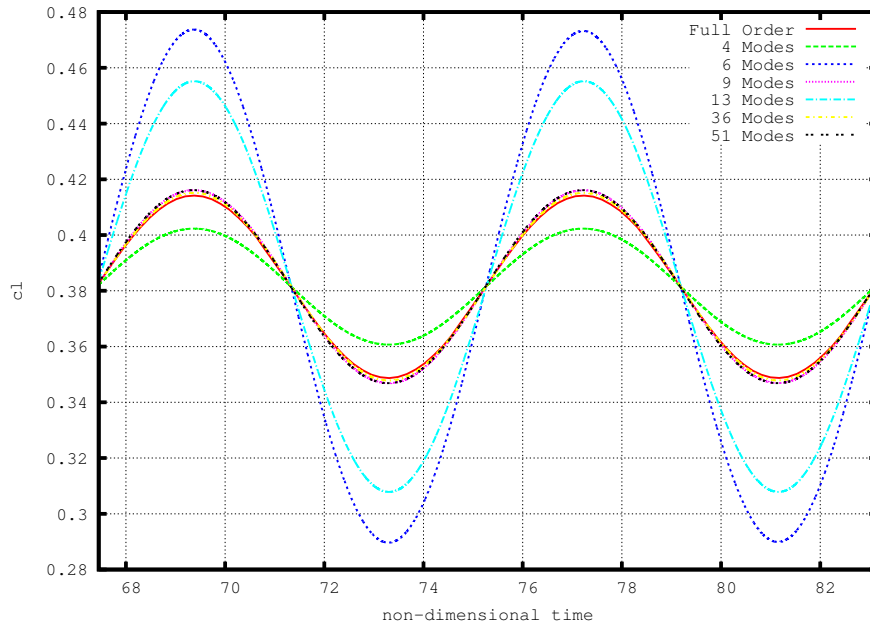
Μιά γενική σκοπιά στα διαγράμματα διαφοράς φάσης συναρτήσεως του αριθμού των μορφών δείχνει παρατηρείται μια άστατη συμπεριφορά στην αρχή (<9 μορφές) που μειώνεται γύρω στις 8-9 με αύξηση στη συνέχεια γύρω στις 15 και έπειτα σταδιακή μείωση έως τις τελευταίες , όποιες και αν είναι αυτές. Στην συγκεκριμένη περίπτωση την ίδια συμπεριφορά έχει και το σφάλμα του εύρους.



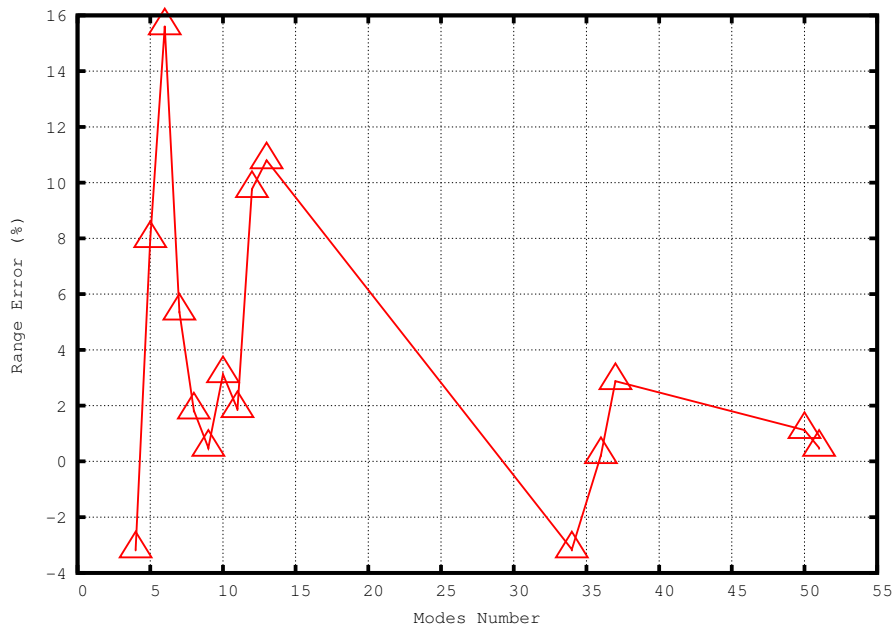
Σχήμα 46: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.



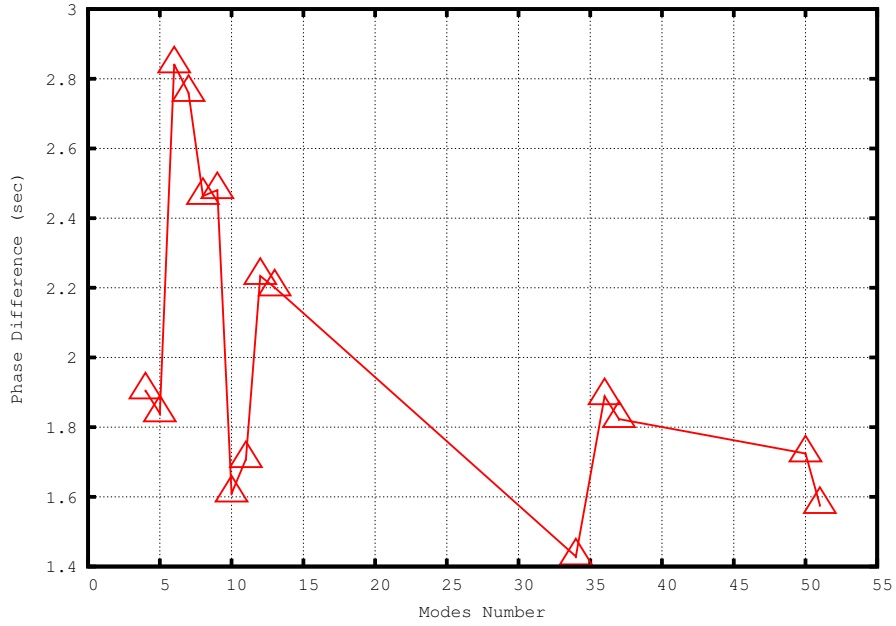
Σχήμα 47: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.



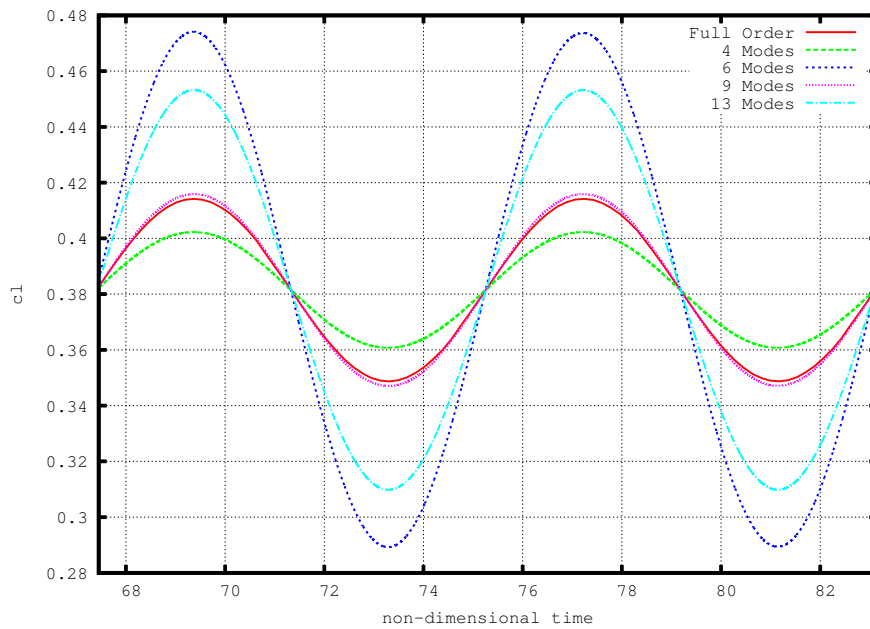
Σχήμα 48: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



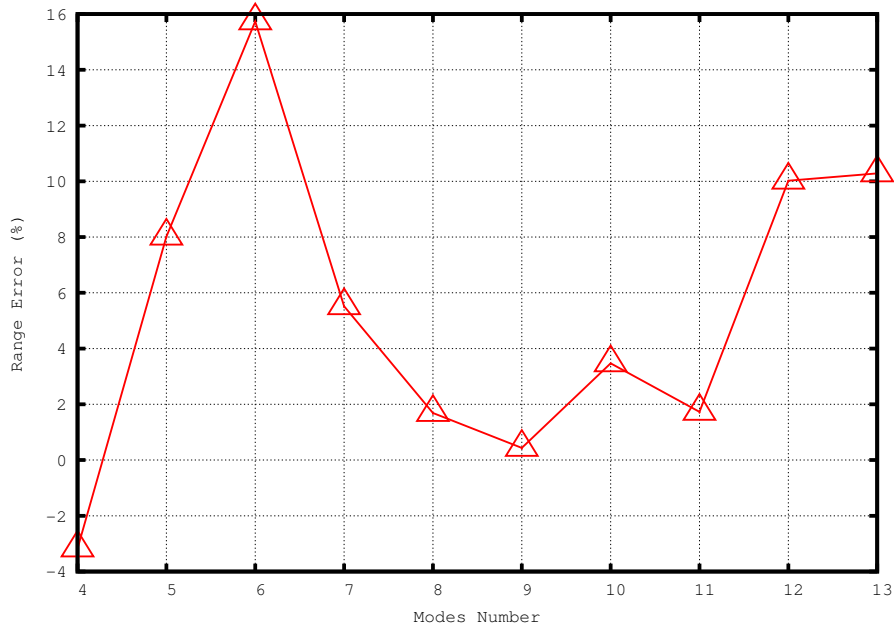
Σχήμα 49: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



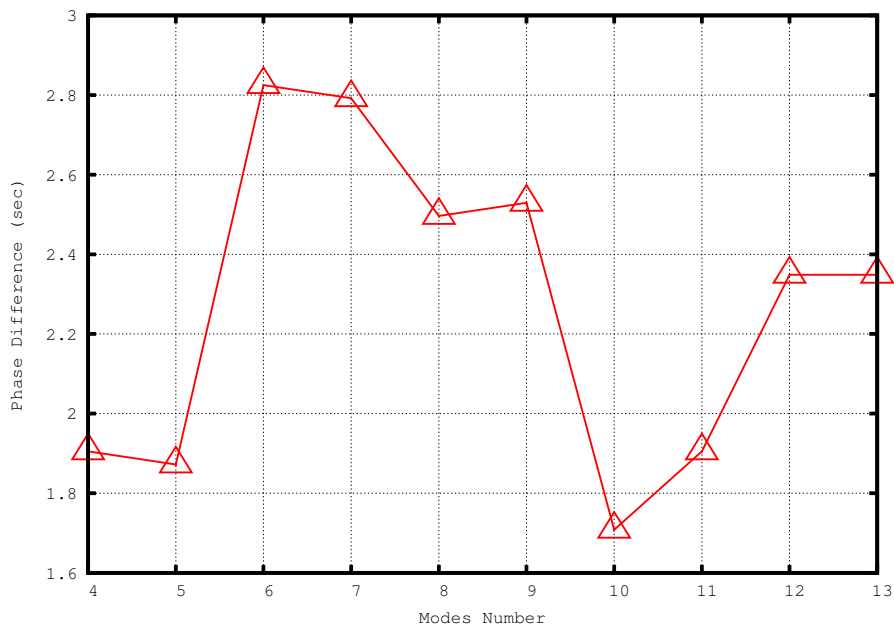
Σχήμα 50: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



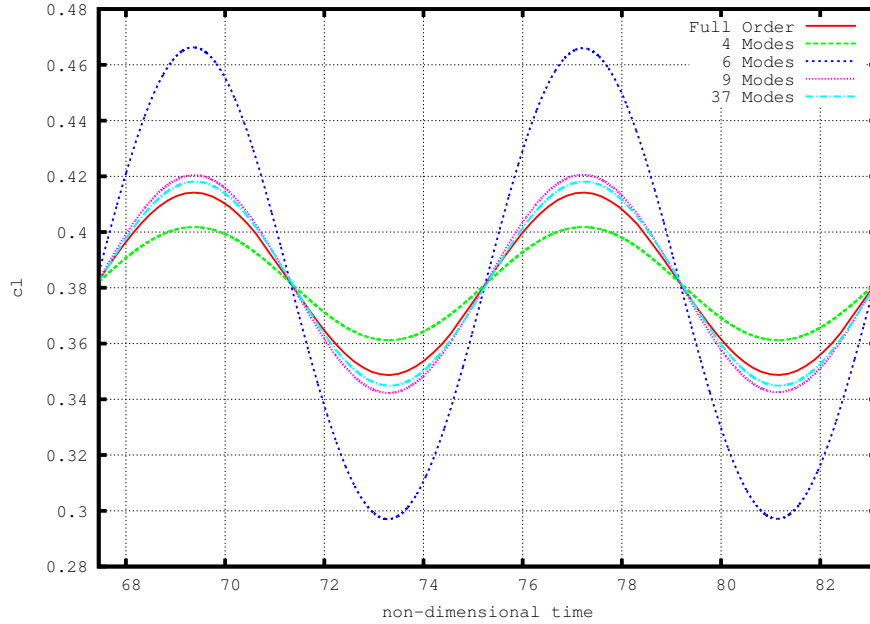
Σχήμα 51: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



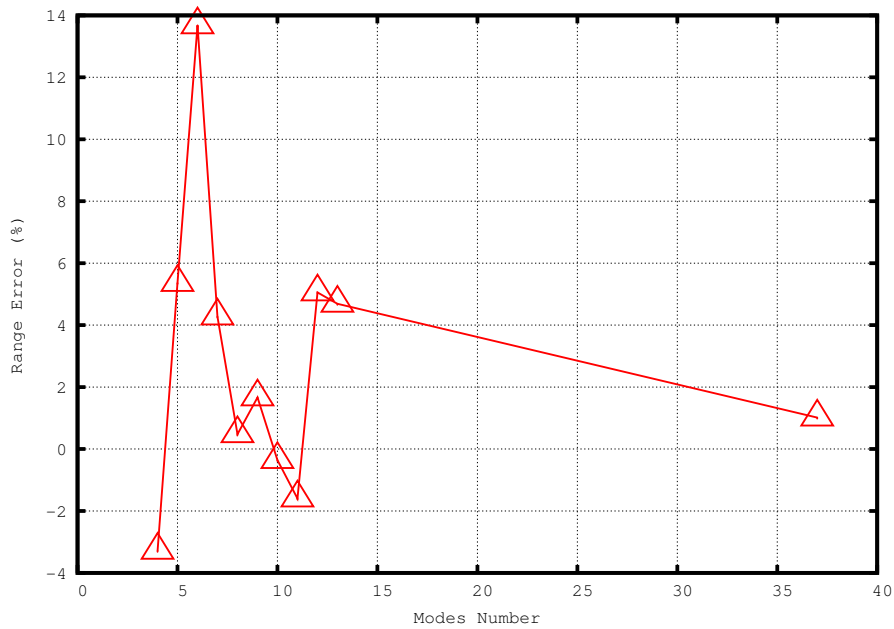
Σχήμα 52: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



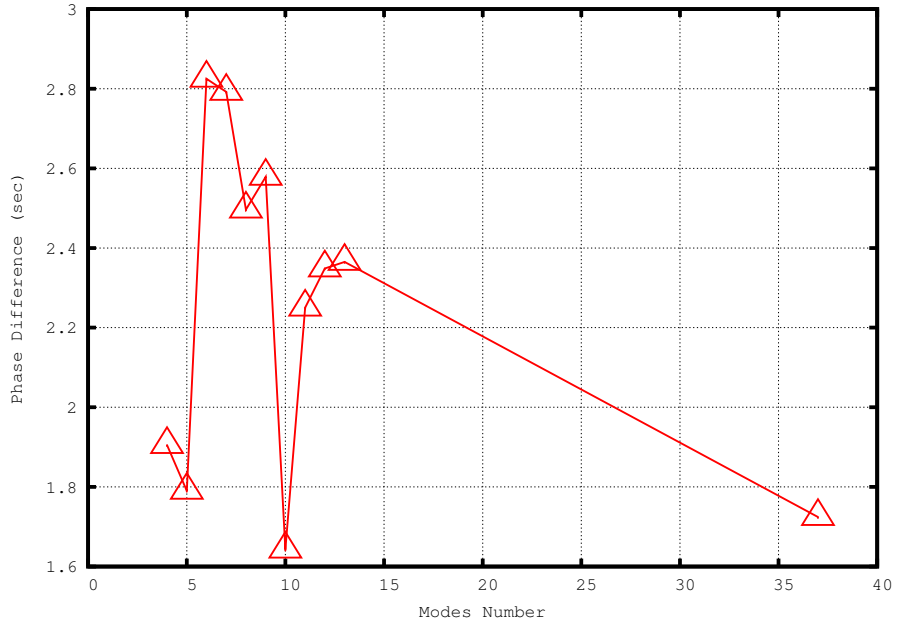
Σχήμα 53: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



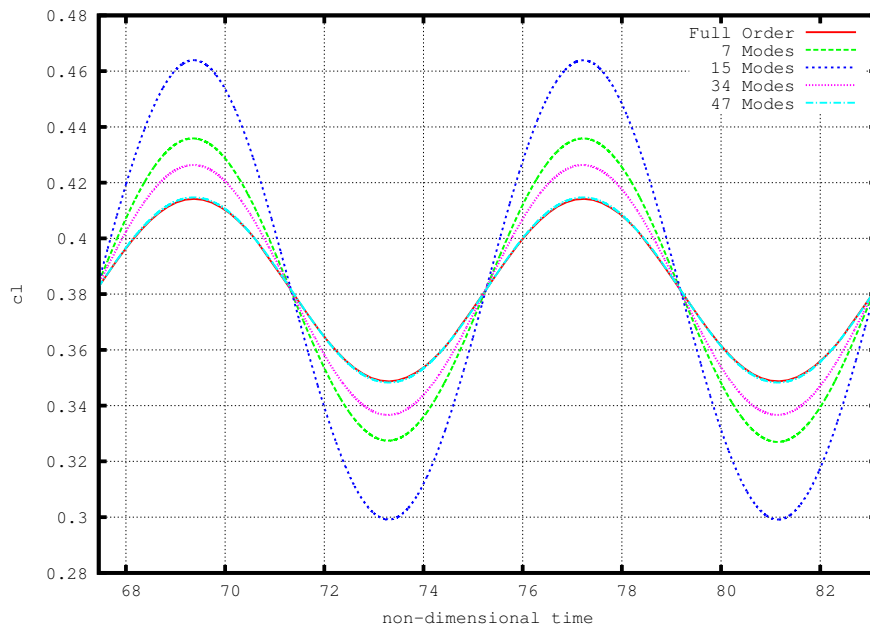
Σχήμα 54: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



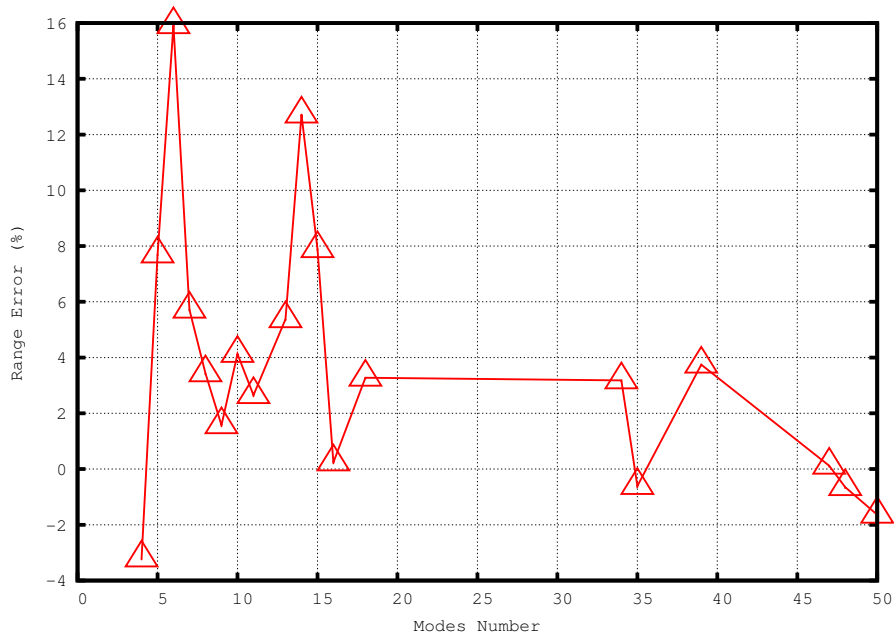
Σχήμα 55: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



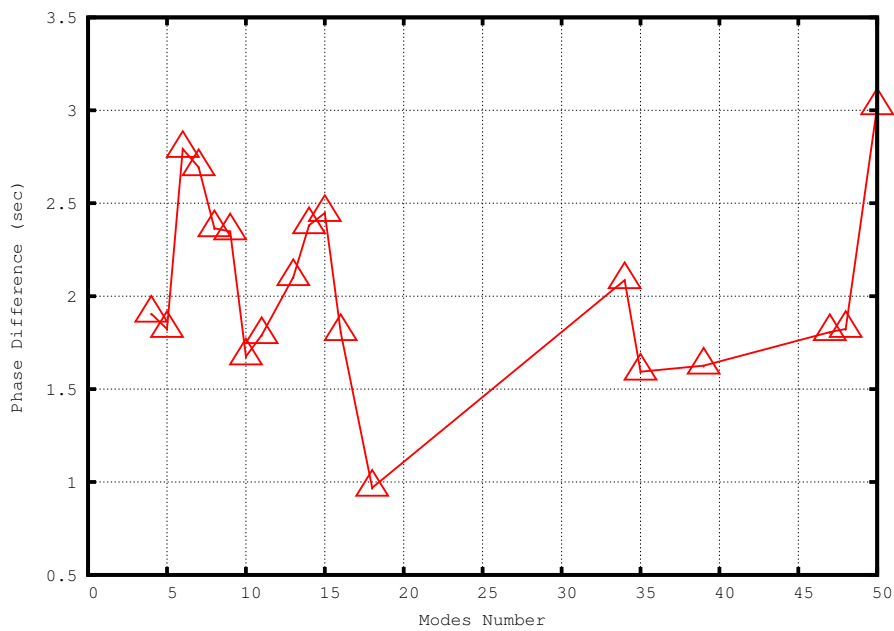
Σχήμα 56: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



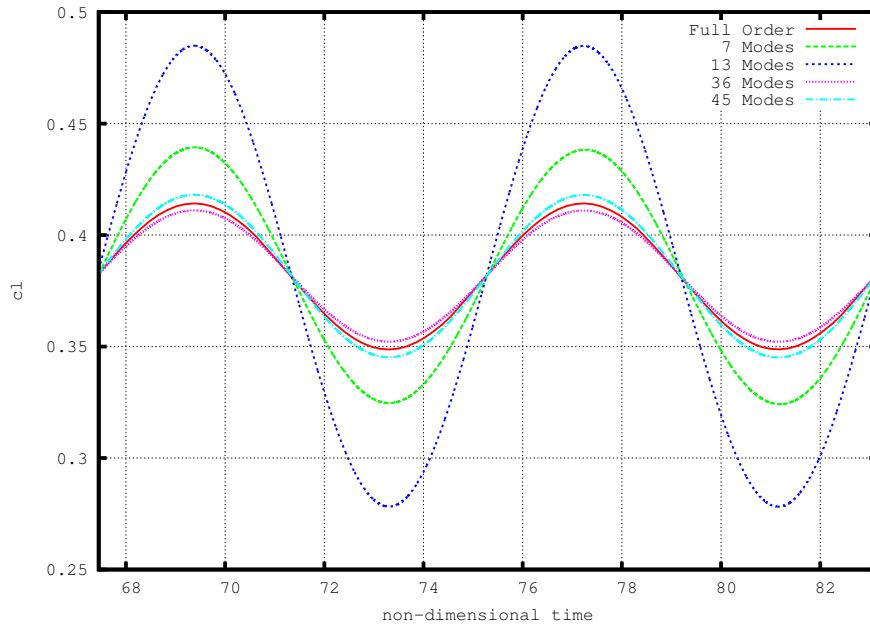
Σχήμα 57: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



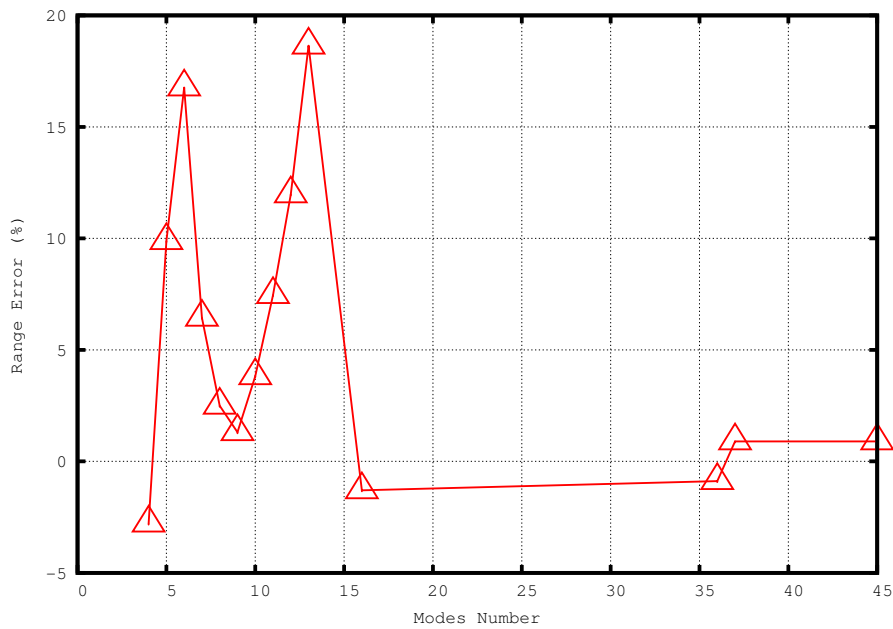
Σχήμα 58: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



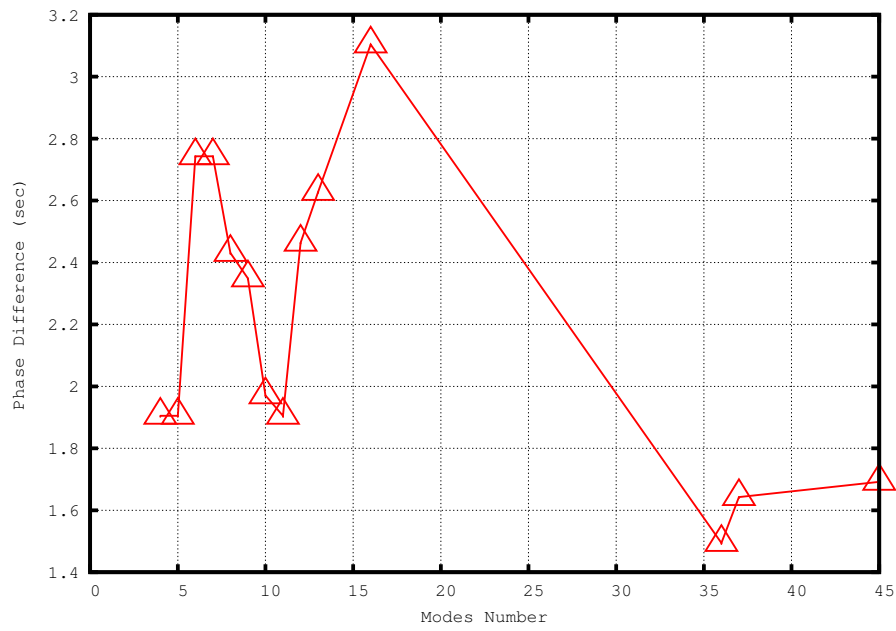
Σχήμα 59: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



Σχήμα 60: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.



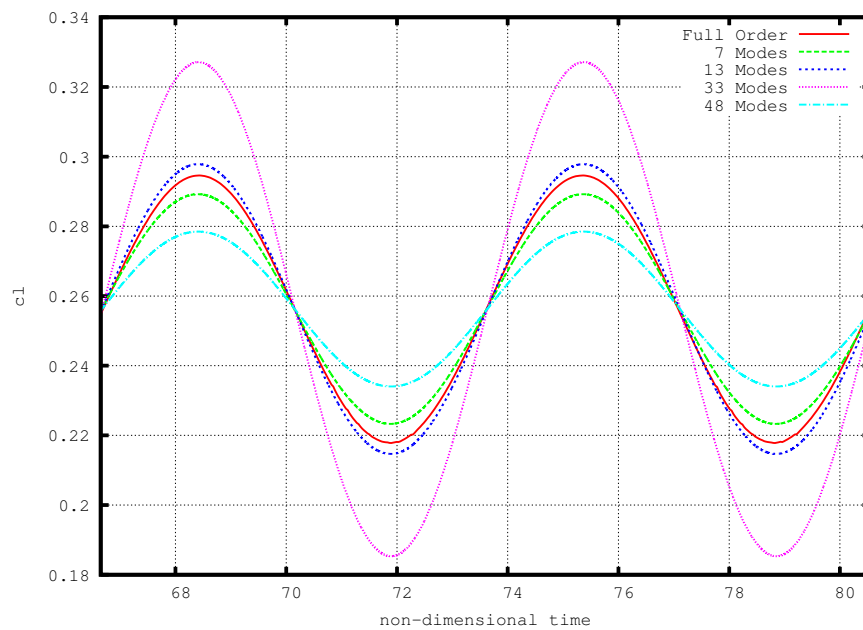
Σχήμα 61: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.



Σχήμα 62: $3^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.

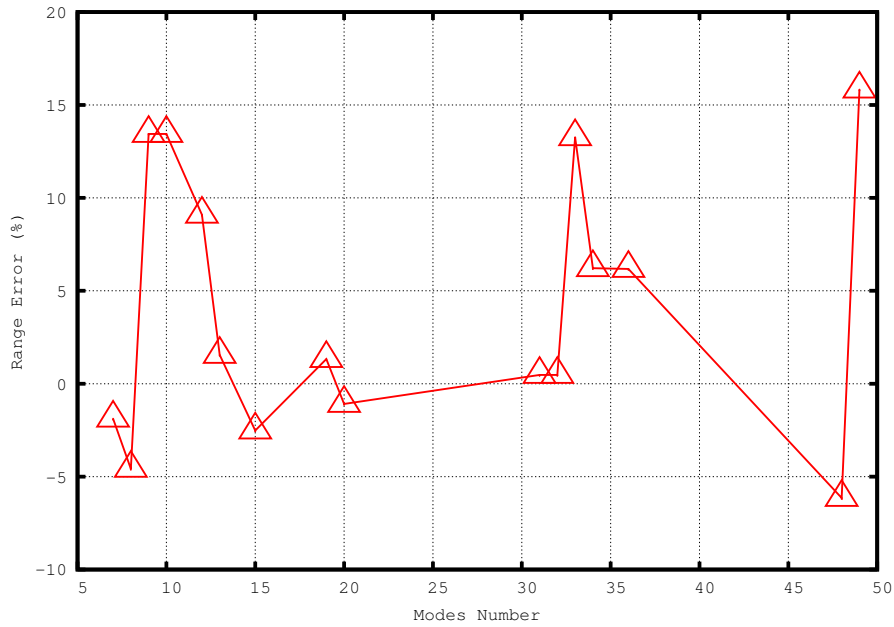
Ταλάντωση $2^\circ \pm 1^\circ$

- Αεροτομή NACA 0012
- Αριθμός Mach = 0.5
- Μέση γωνία ταλάντωσης = 2°
- Εύρος ταλάντωσης = 1°
- Περίοδος = 7.85 αδιάστατα δευτερόλεπτα

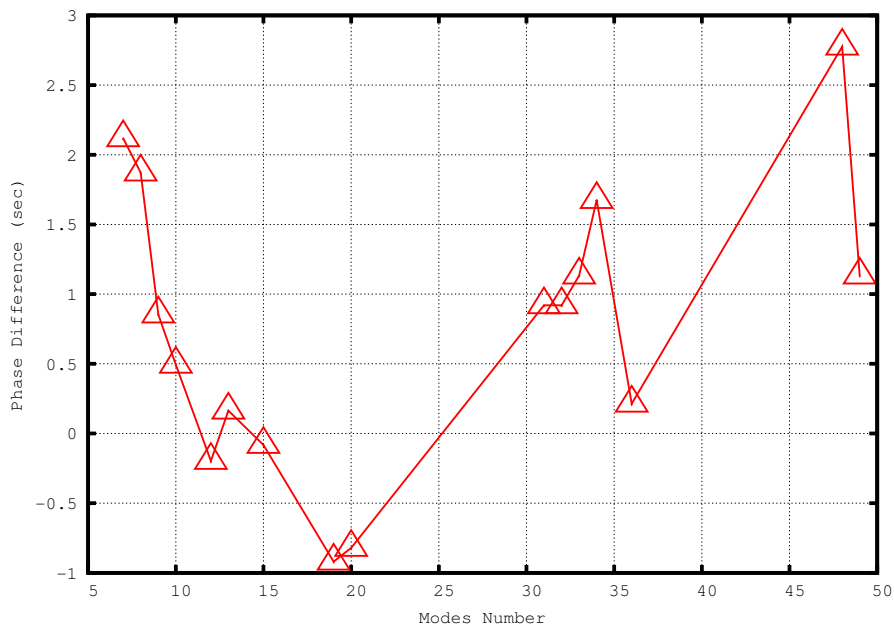


Σχήμα 63: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.

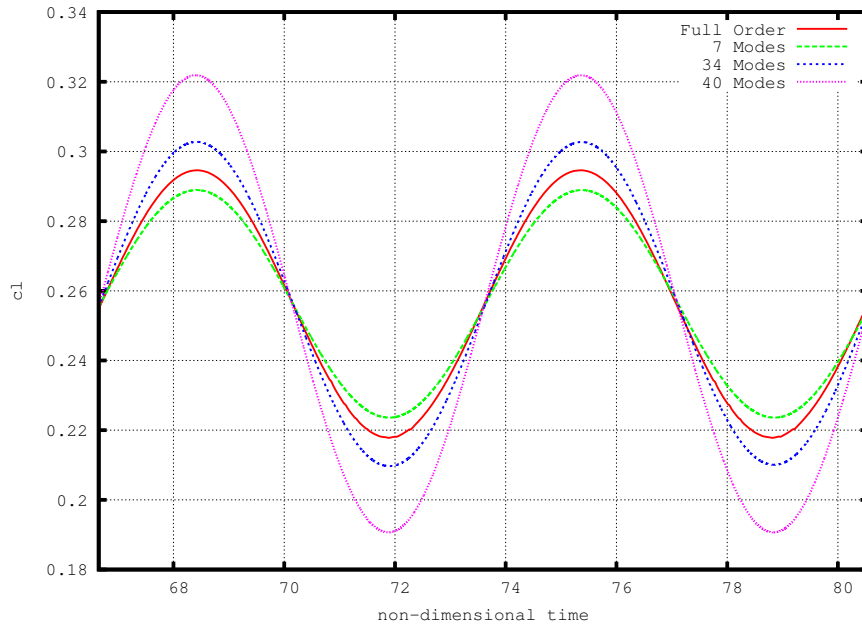
Το χαρακτηριστικό που μπορεί να εξαχθεί από τα διαγράμματα της ενότητας αφορά αυτά της διαφοράς φάσης η οποία σε όλες τις περιπτώσεις ξεκινά από μια περιοχή 2-2.5 sec σε χαμηλό αριθμό μορφών, μειώνεται σε νούμερα γύρω από το μηδέν στην περιοχή των 20 και αυξάνεται ξανά στις τελευταίες μορφές , όποιες και αν είναι αυτές.



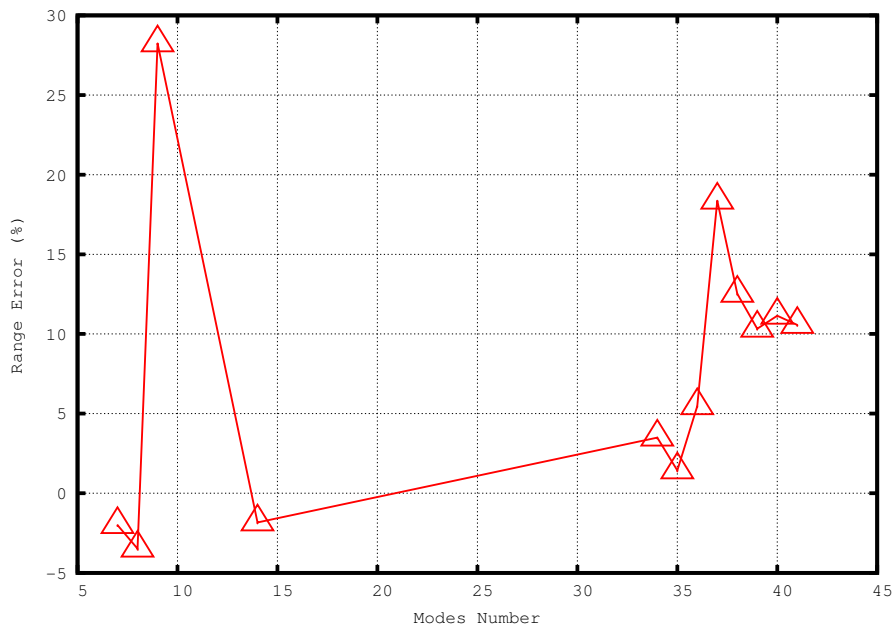
Σχήμα 64: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.



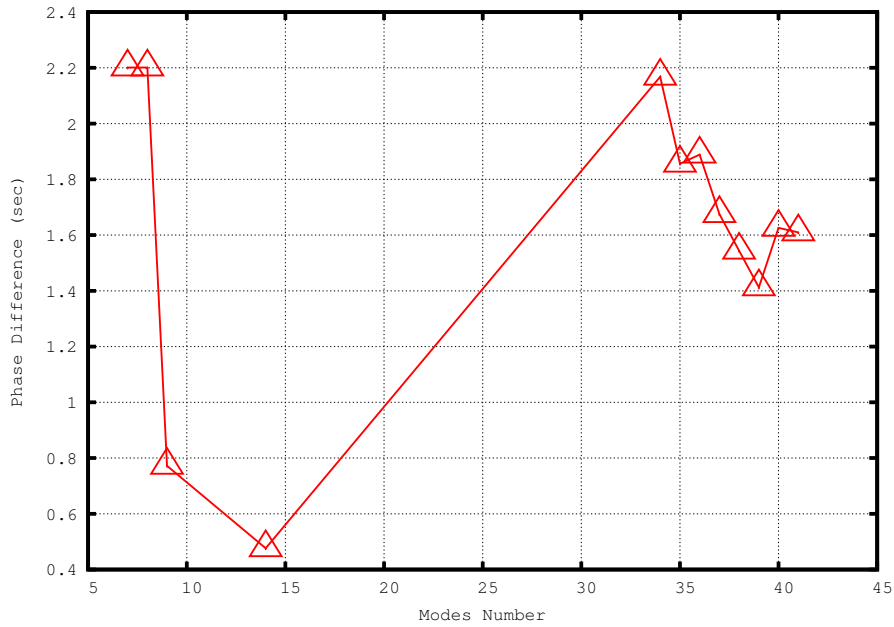
Σχήμα 65: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.



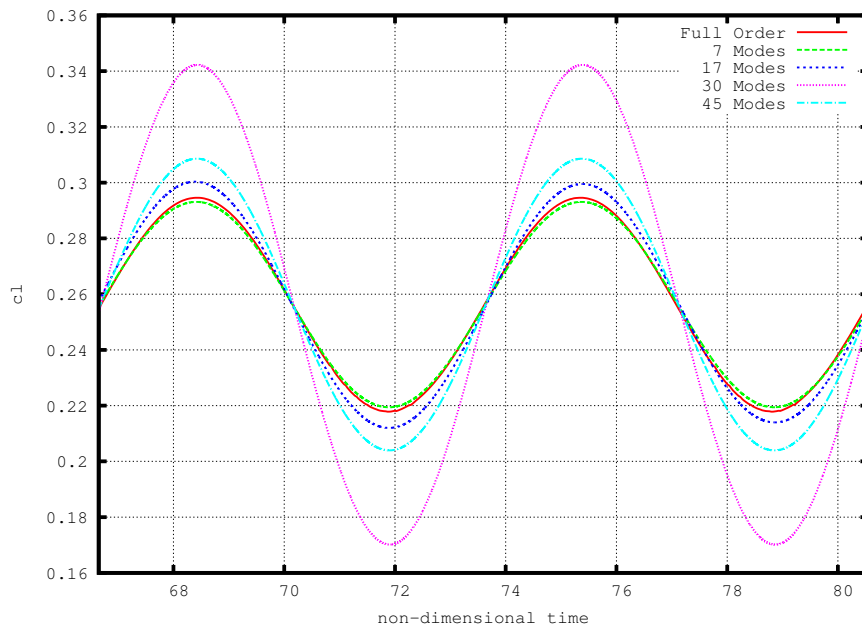
Σχήμα 66: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



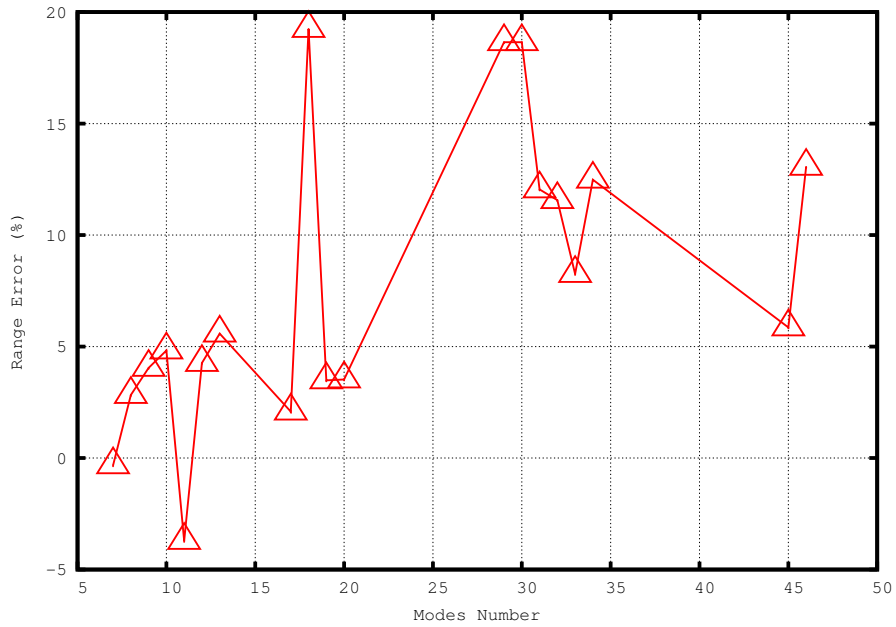
Σχήμα 67: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



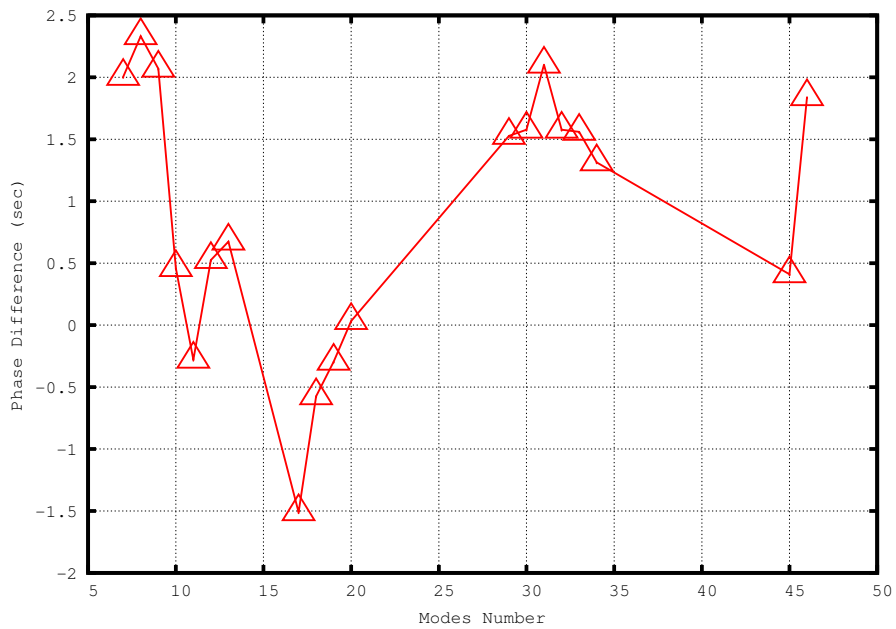
Σχήμα 68: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



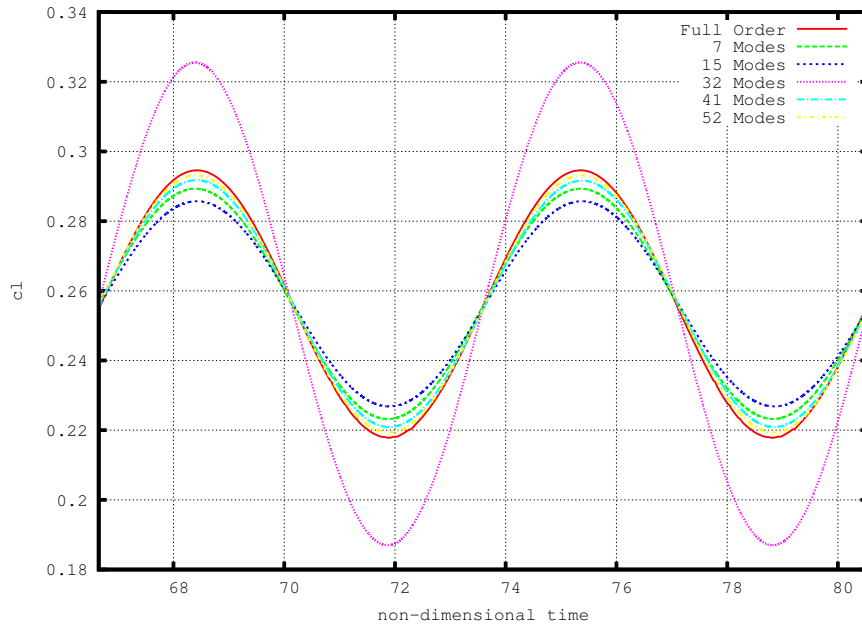
Σχήμα 69: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



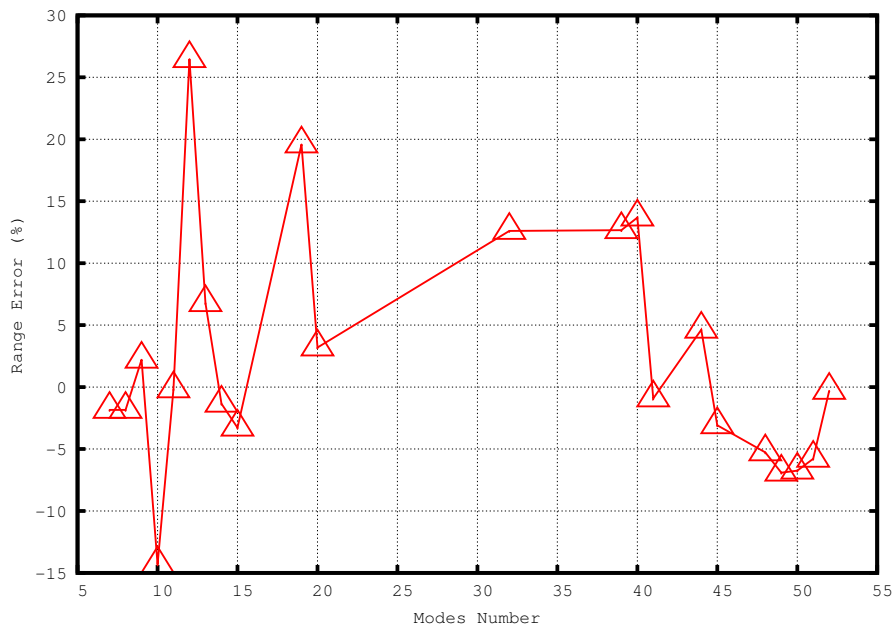
Σχήμα 70: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



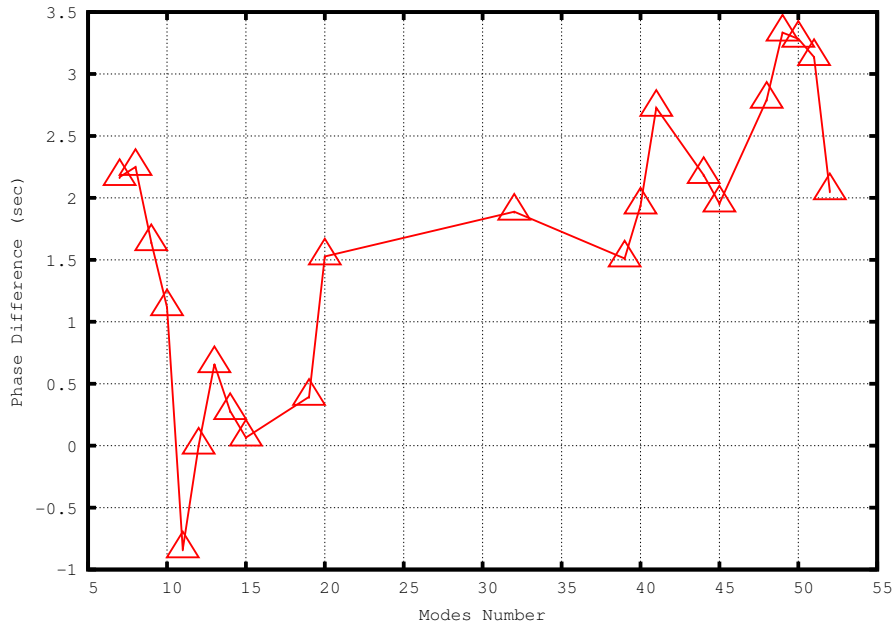
Σχήμα 71: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



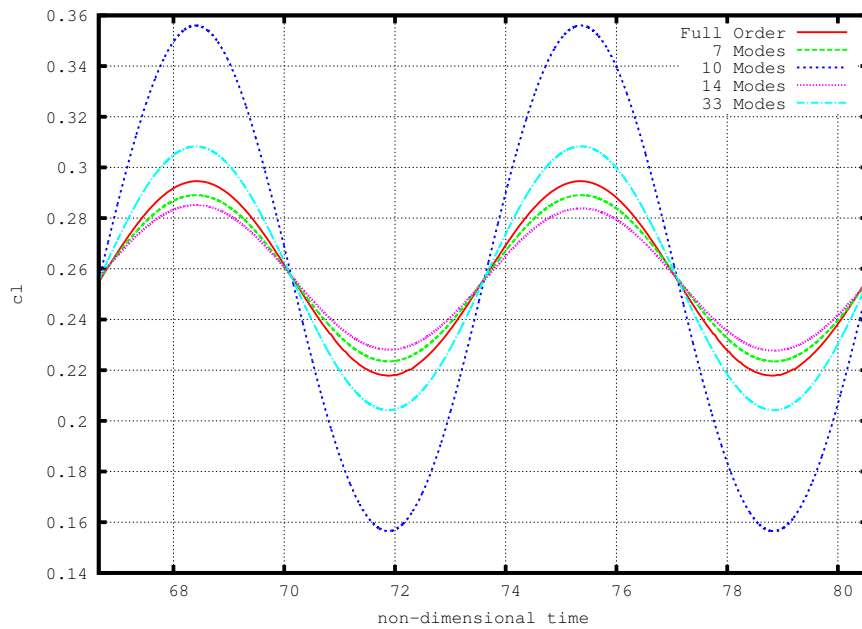
Σχήμα 72: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



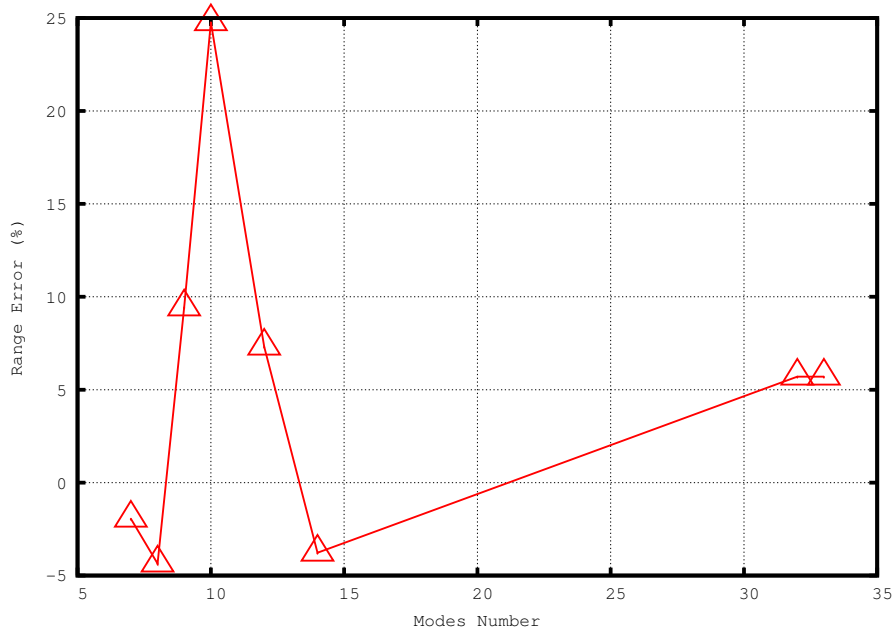
Σχήμα 73: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



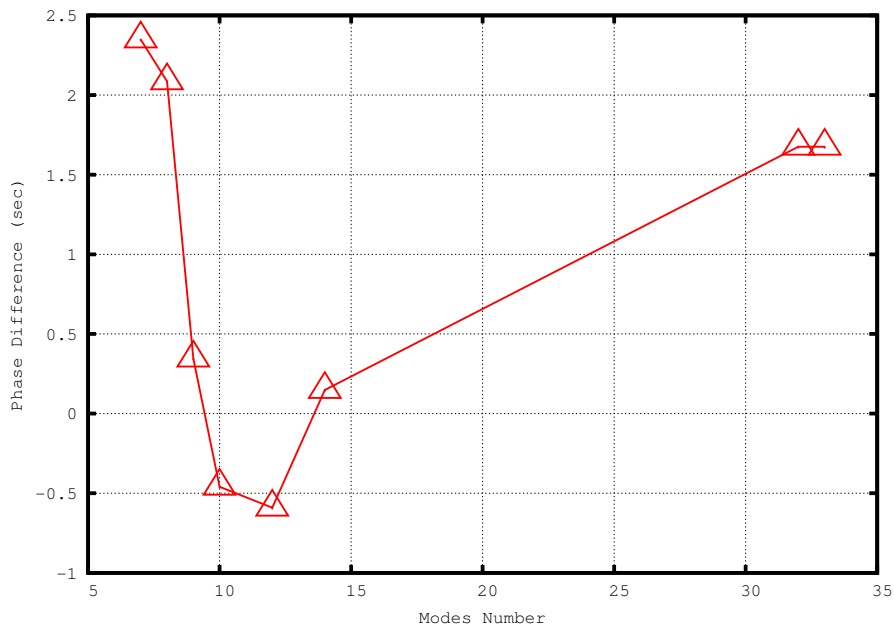
Σχήμα 74: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



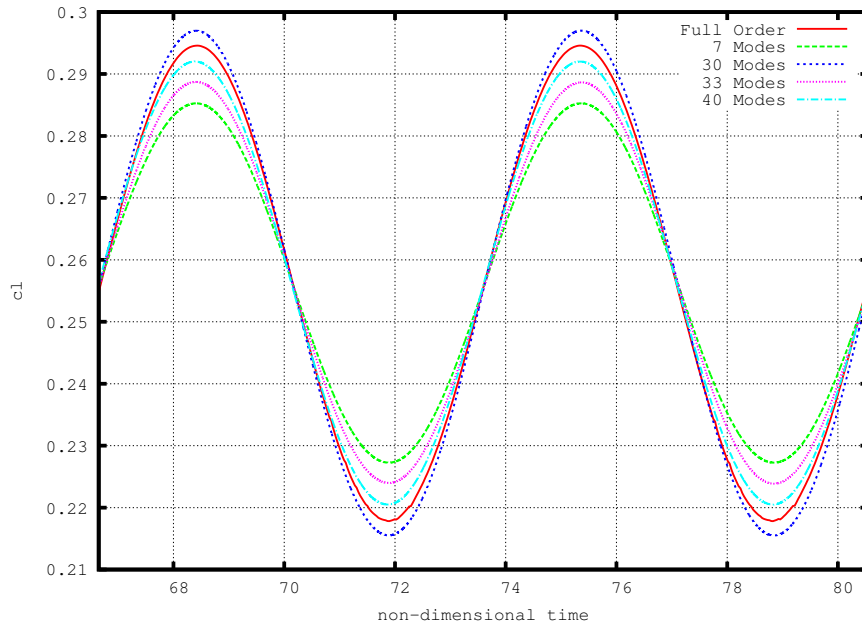
Σχήμα 75: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



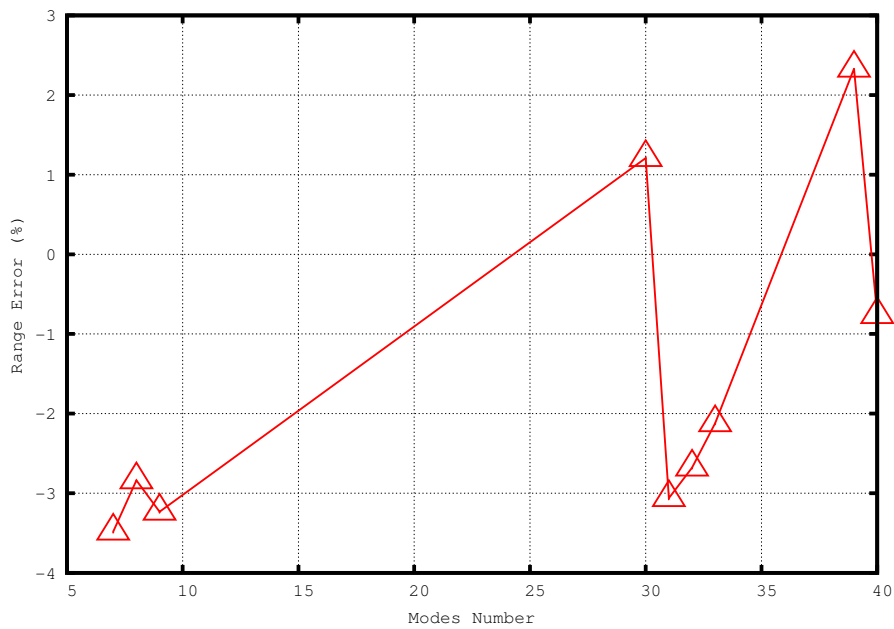
Σχήμα 76: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



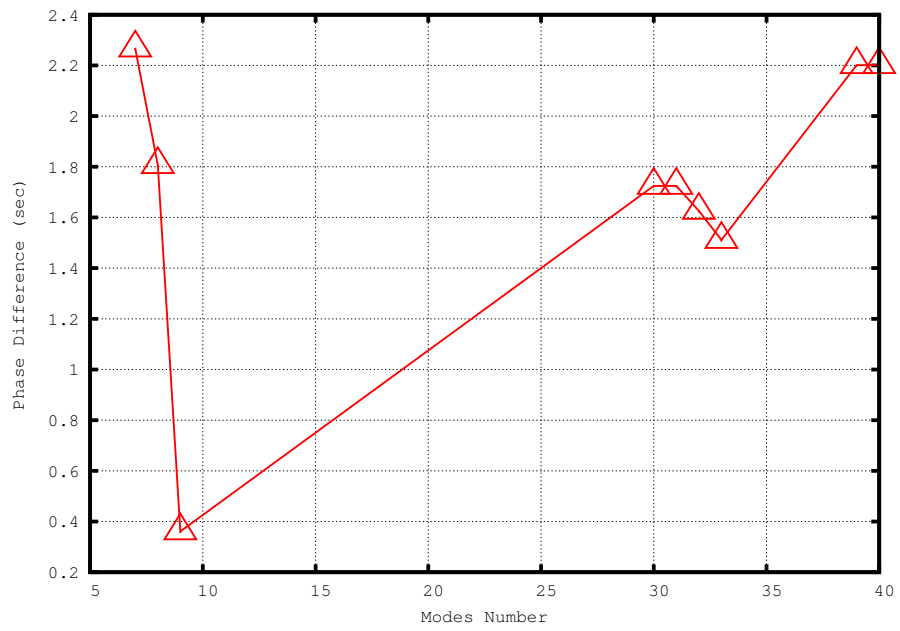
Σχήμα 77: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



Σχήμα 78: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.



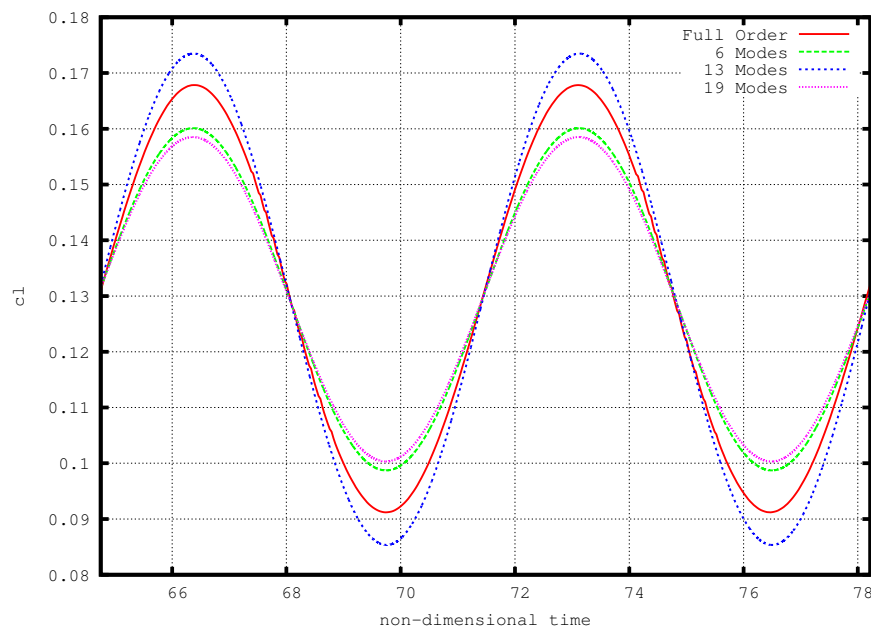
Σχήμα 79: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.



Σχήμα 80: $2^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.

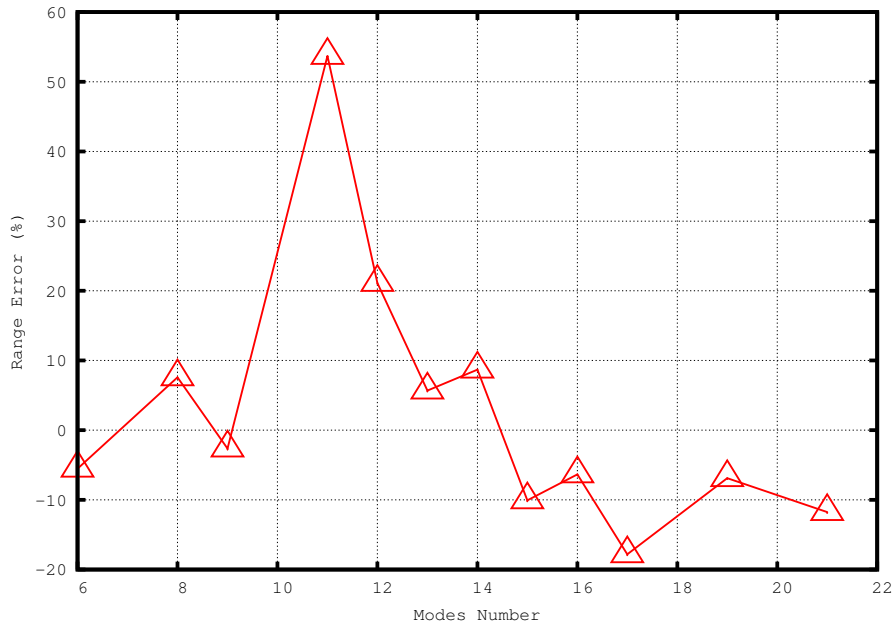
Ταλάντωση $1^\circ \pm 1^\circ$

- Αεροτομή NACA 0012
- Αριθμός Mach = 0.5
- Μέση γωνία ταλάντωσης = 1°
- Εύρος ταλάντωσης = 1°
- Περίοδος = 7.85 αδιάστατα δευτερόλεπτα

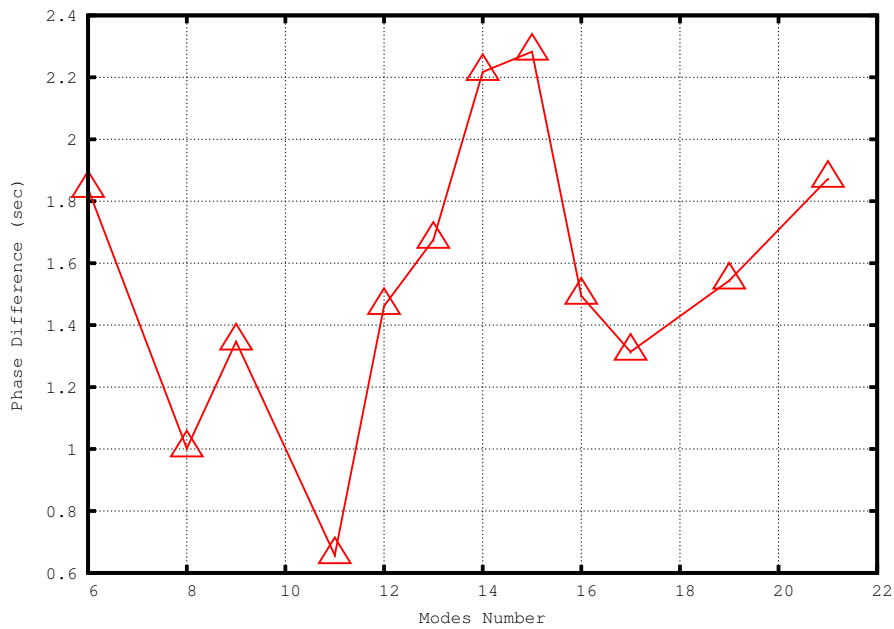


Σχήμα 81: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.

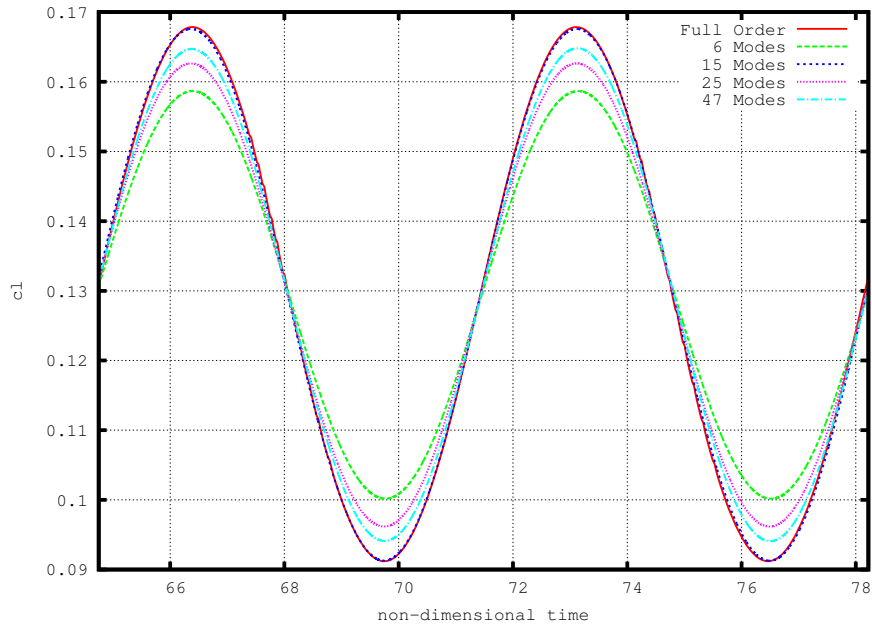
Αρκετές μορφές παρέχουν ακριβή αποτελέσματα αναφερόμενοι στο εύρος της ταλάντωσης με μικρότερη την τιμή 9 σε απόσταση δειγματοληψίας 0.82 δευτ. και αρκετές στην περιοχή 21 με 28 για χρονική απόσταση απόσταση πάνω από 1 δευτ. . Το εύρος ξεκινά χαμηλά για μορφές κάτω από 5 και εκτοξεύεται για πάνω από 5 με καλά νούμερα για 14-15 μορφές και πάνω. Η φάση ακολουθεί μία όμοια κατανομή με χαμηλές τιμές αρχικά , υψηλές τιμές ύστερα και σταθερές και ικανοποιητικές τιμές στη συνέχεια (περίπου 1 δευτ.) .



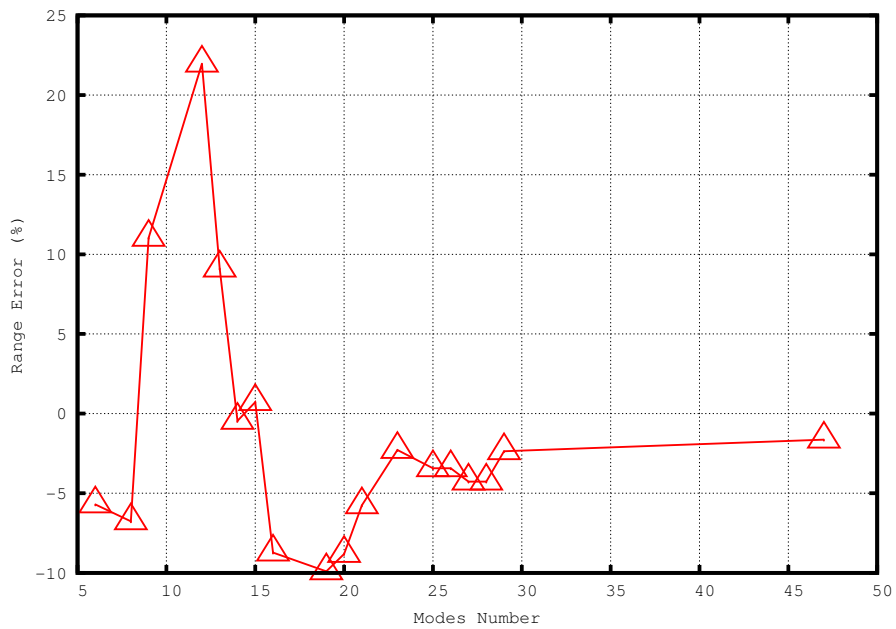
Σχήμα 82: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.



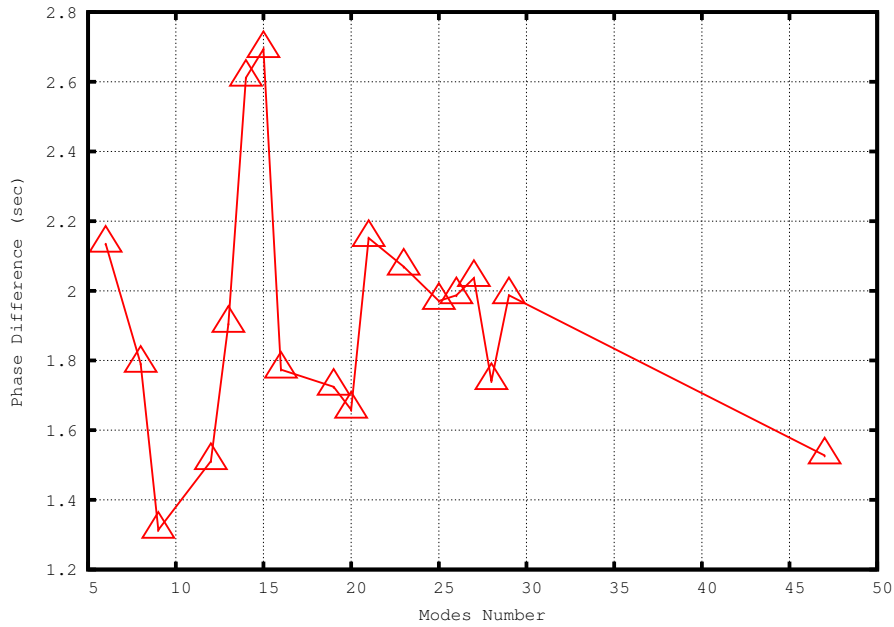
Σχήμα 83: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.



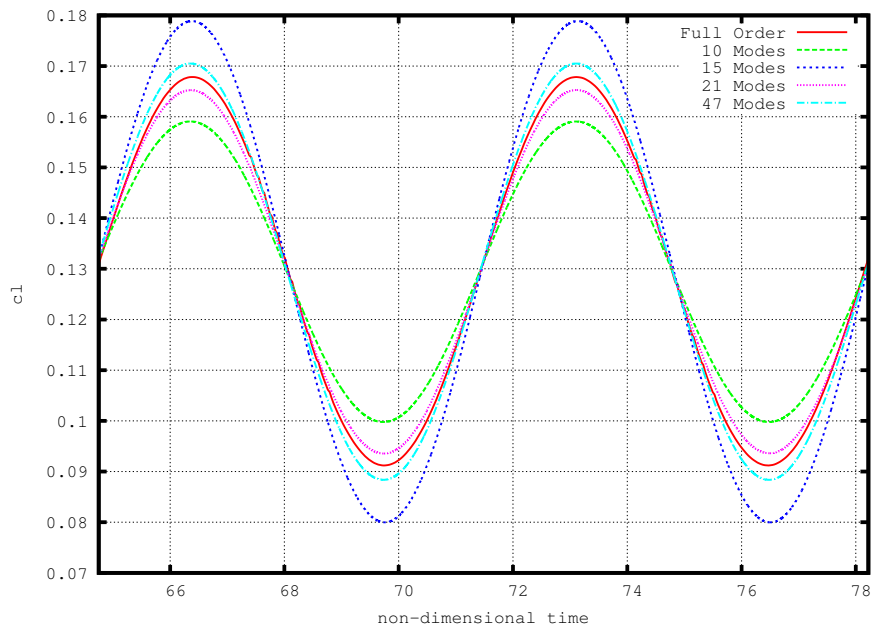
Σχήμα 84: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



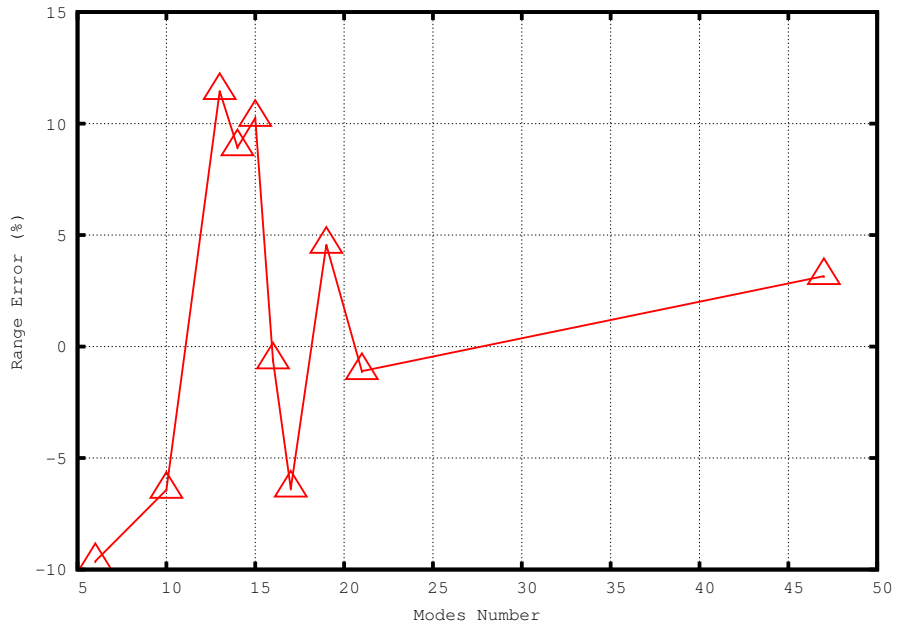
Σχήμα 85: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



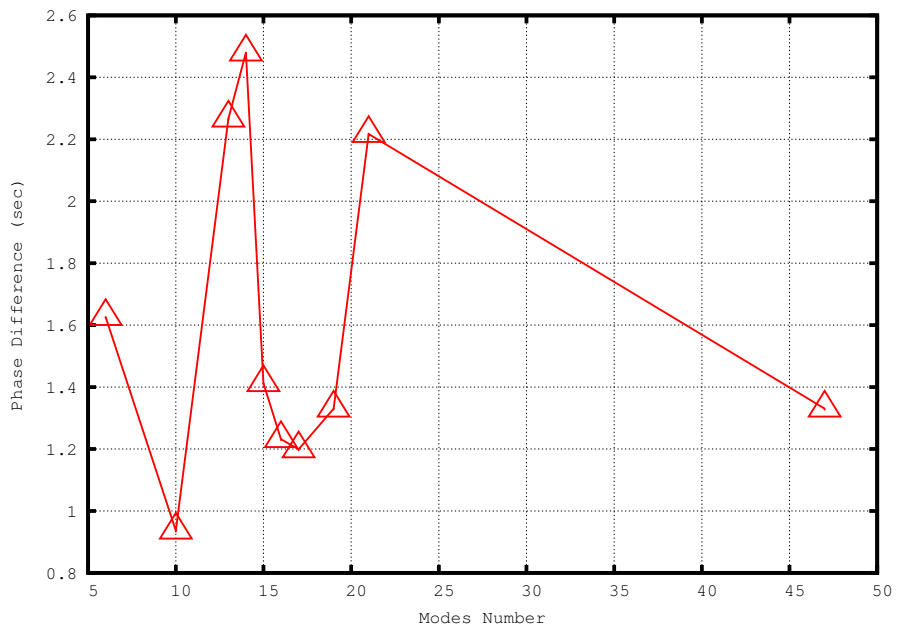
Σχήμα 86: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



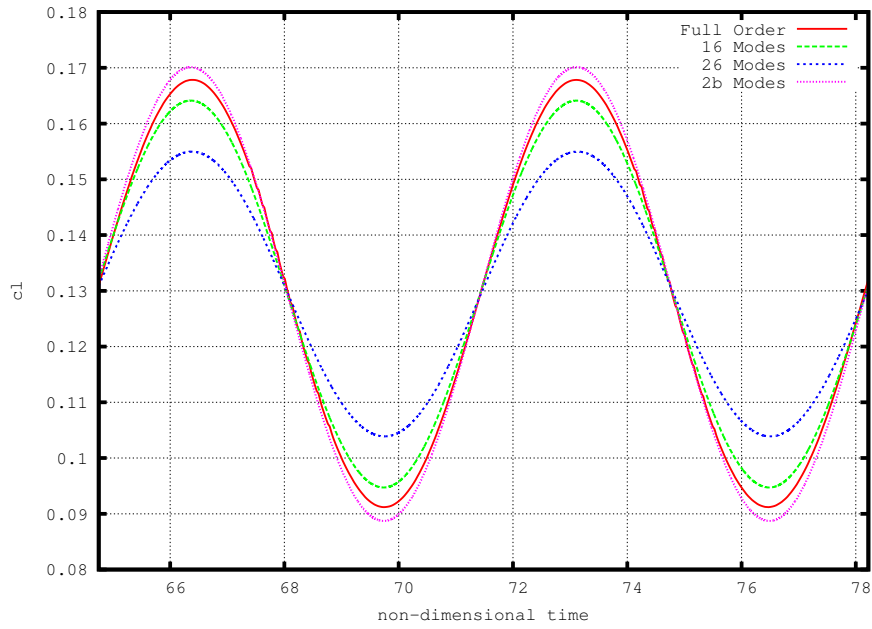
Σχήμα 87: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



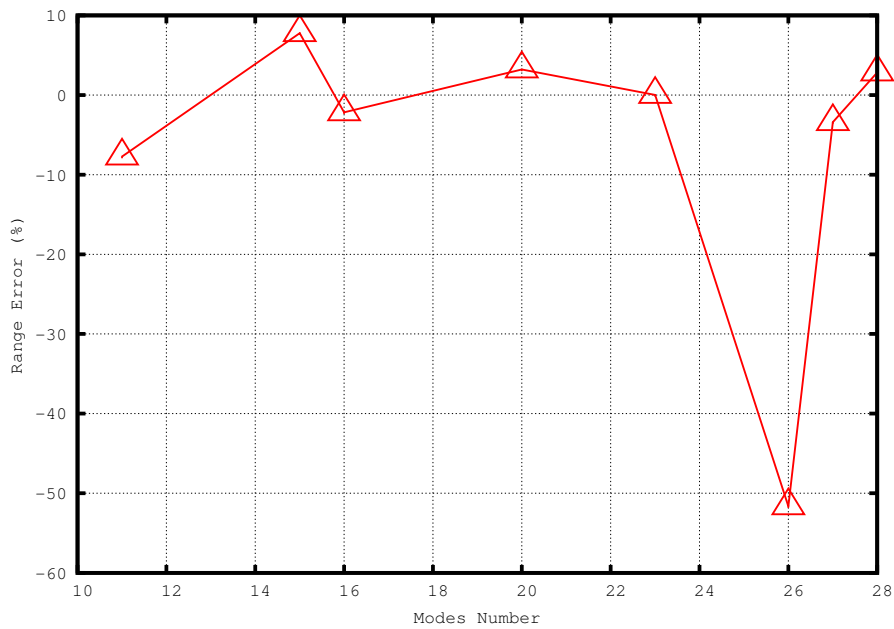
Σχήμα 88: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



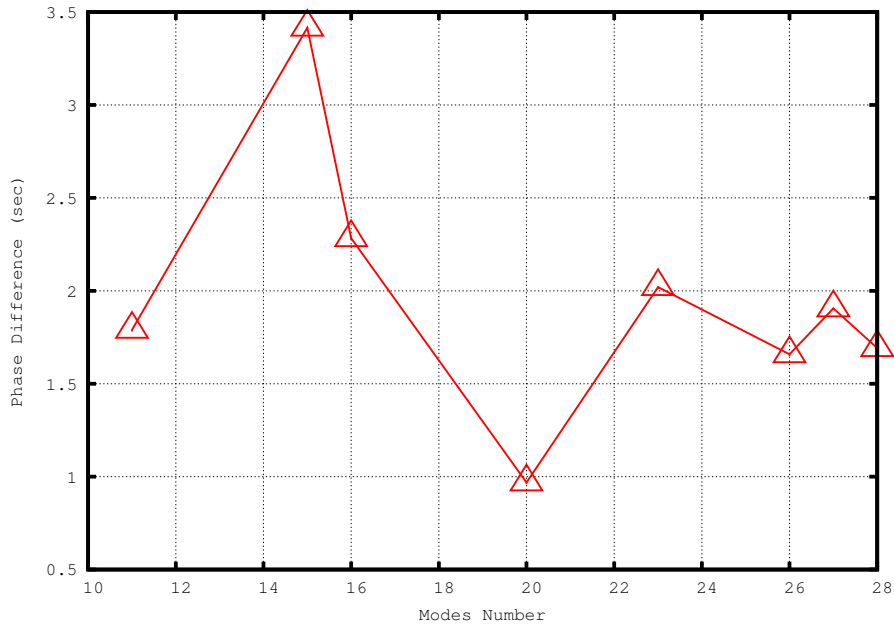
Σχήμα 89: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



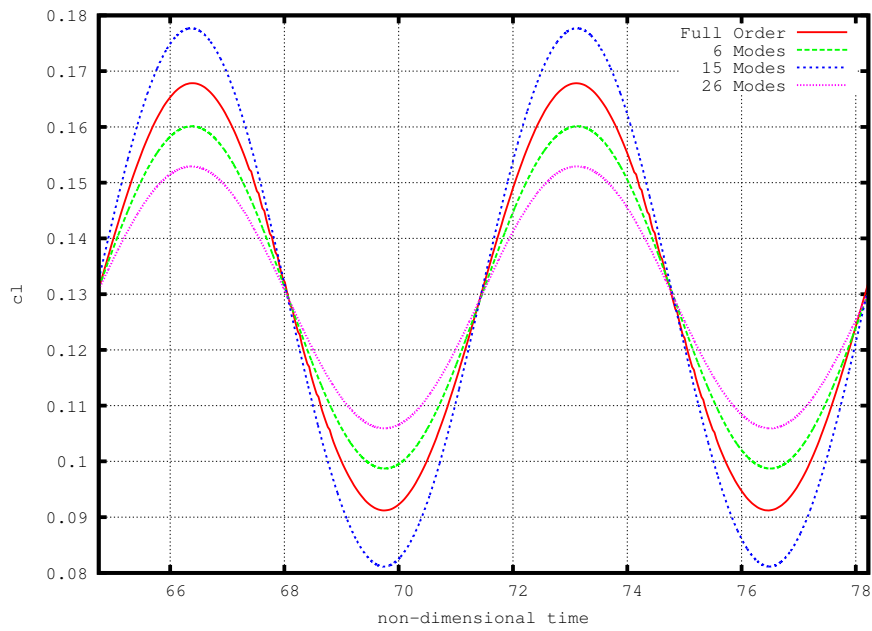
Σχήμα 90: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



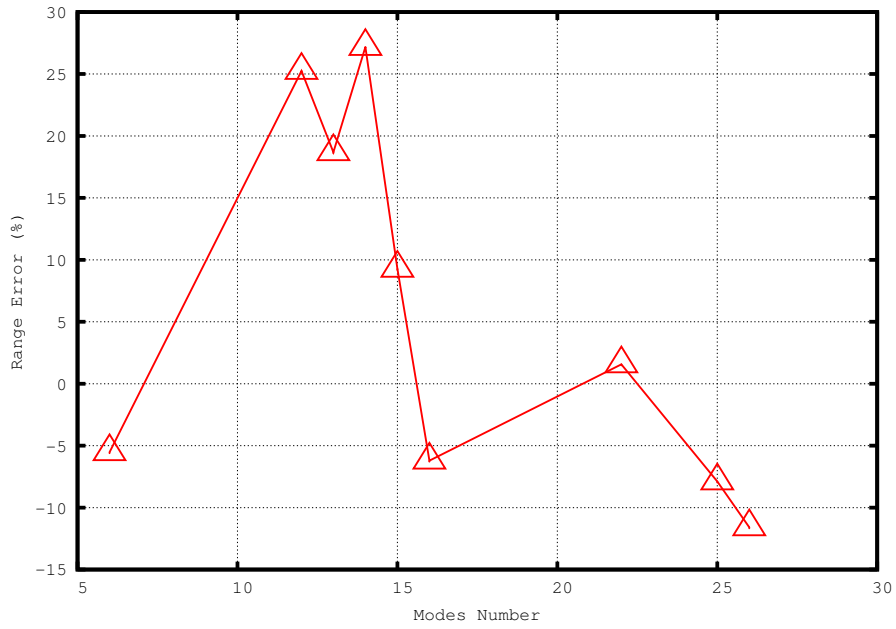
Σχήμα 91: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



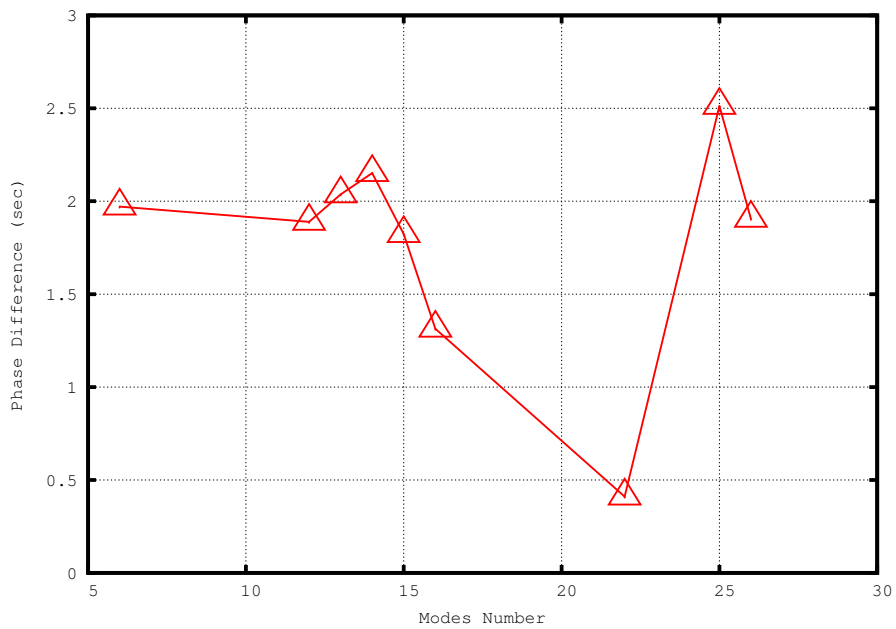
Σχήμα 92: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



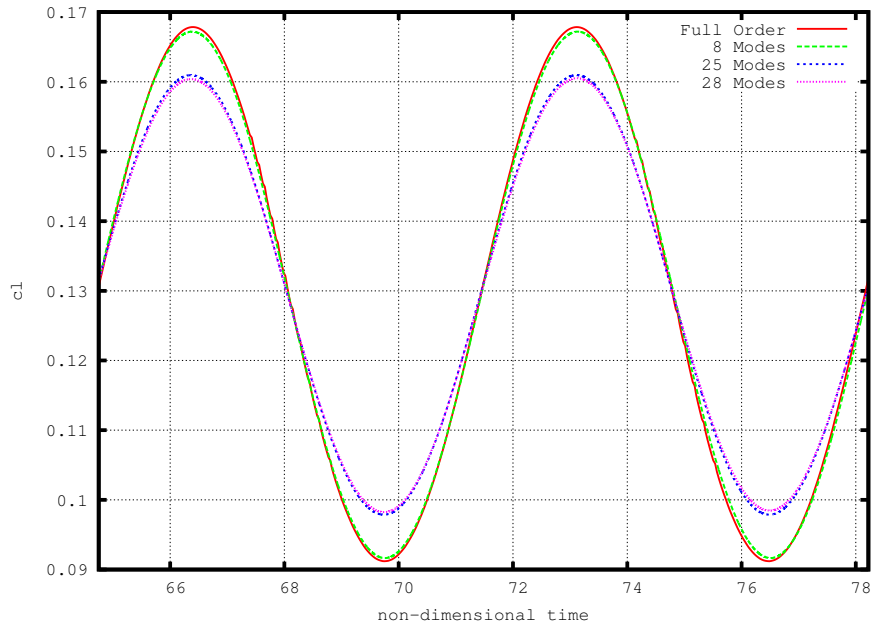
Σχήμα 93: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



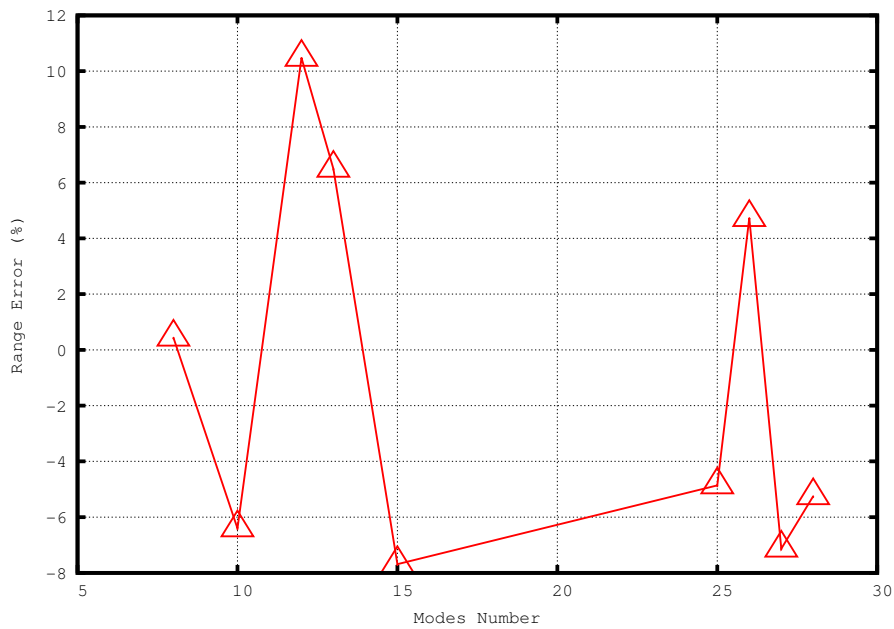
Σχήμα 94: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



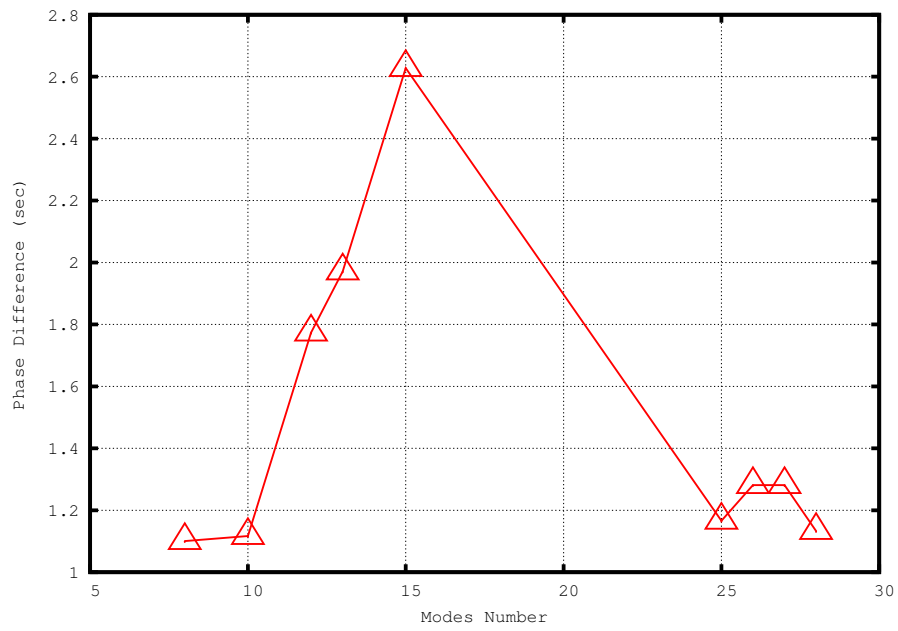
Σχήμα 95: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



Σχήμα 96: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.



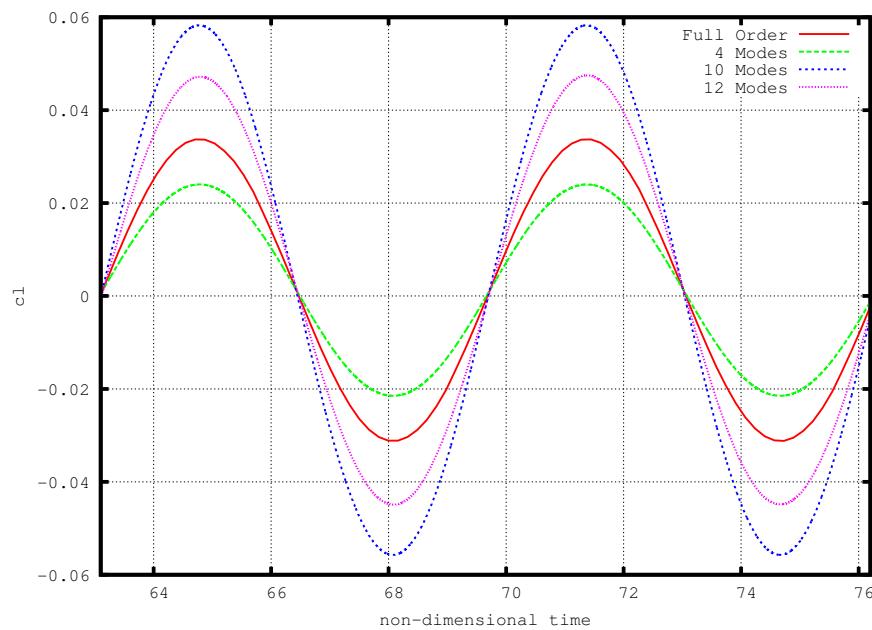
Σχήμα 97: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.



Σχήμα 98: $1^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.

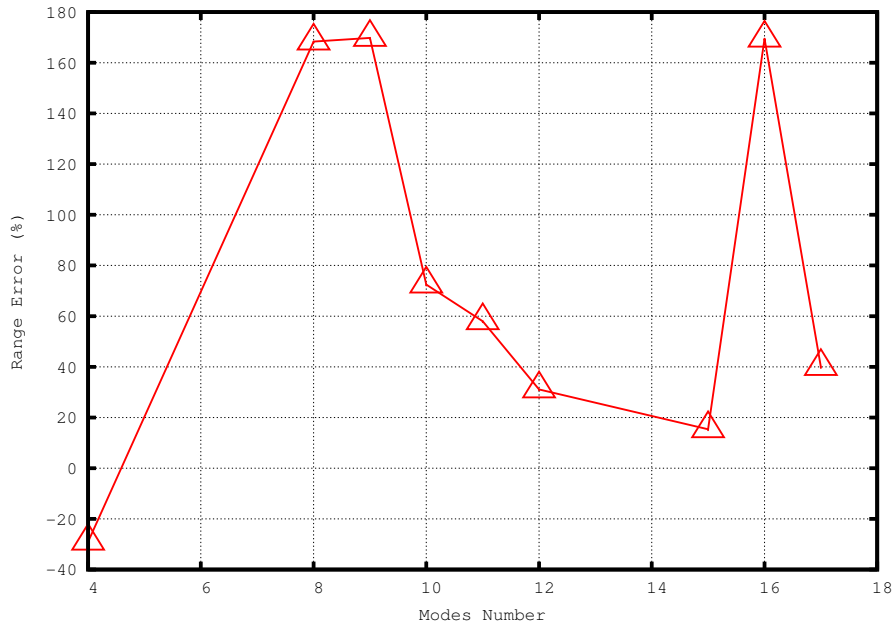
Ταλάντωση $0^\circ \pm 1^\circ$

- Αεροτομή NACA 0012
- Αριθμός Mach = 0.5
- Μέση γωνία ταλάντωσης = 0°
- Εύρος ταλάντωσης = 1°
- Περίοδος = 7.85 αδιάστατα δευτερόλεπτα

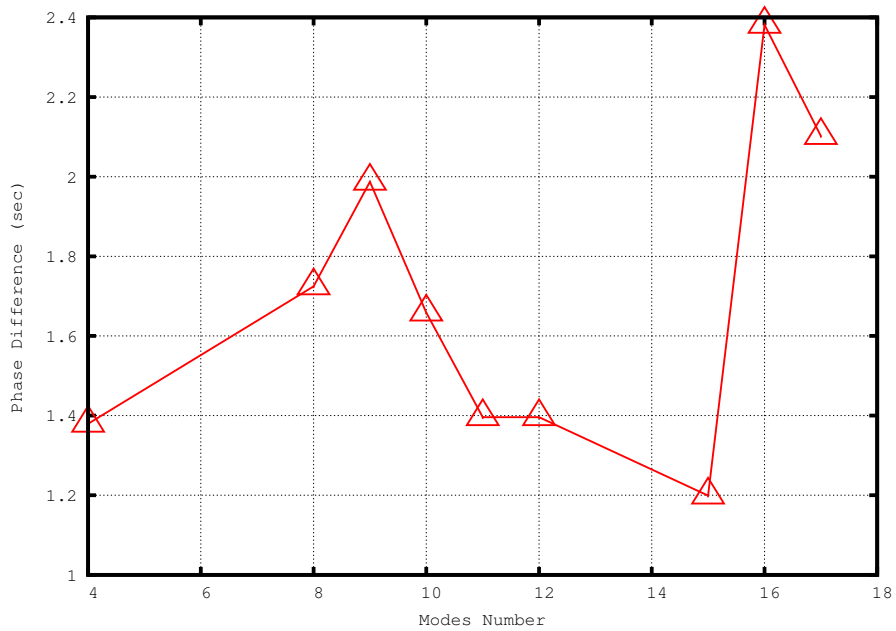


Σχήμα 99: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.

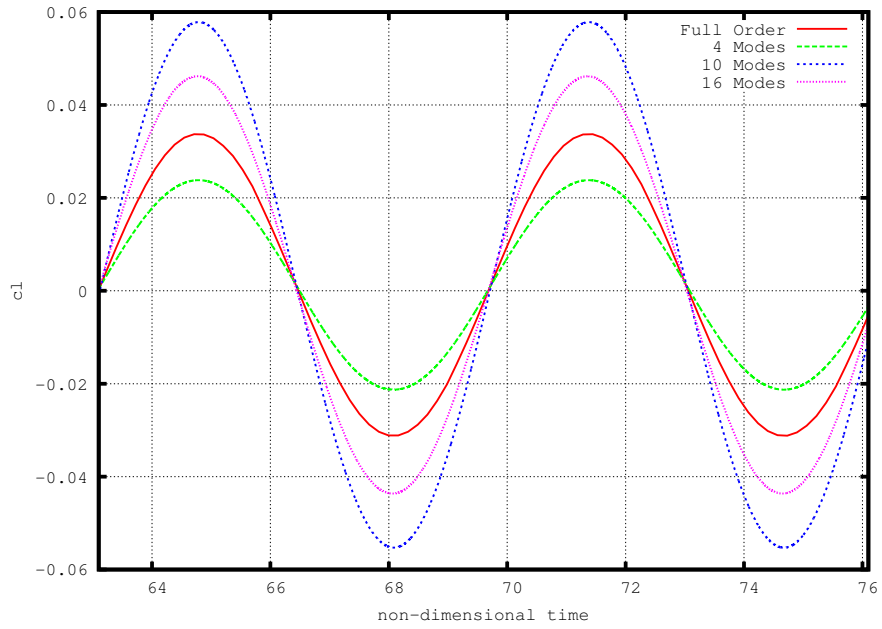
Κάποιες μορφές δίνουν αποτελέσματα που προσεγγίζουν το εύρος αλλά κανένας συνδυασμός δεν το ικανοποιεί όπως οι προηγούμενες εφαρμογές . Ένας λόγος ίσως είναι το γεγονός πως το ROM που δημιουργείται προκύπτει ασταθές για τιμές πάνω από 20 σε κάθε συνδυασμό χρονικής απόστασης δειγματοληψίας . Όσο αναφορά τη διαφορά φάσης αυτή φτάνει σχεδόν σε μηδενικές τιμές σε πολλές μορφές και όταν η απόσταση της δειγματοληψίας είναι σχετικά μεγάλη.



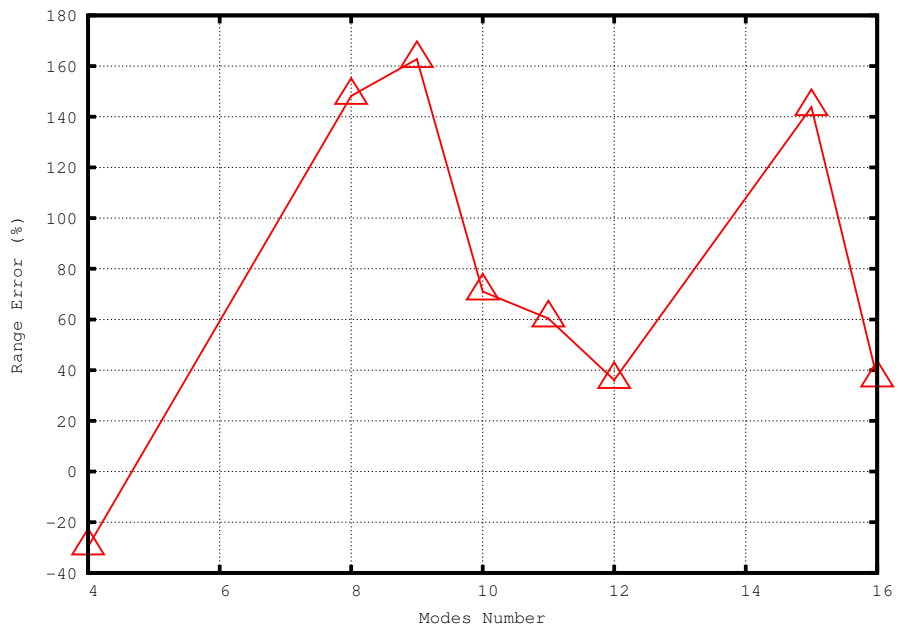
Σχήμα 100: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.



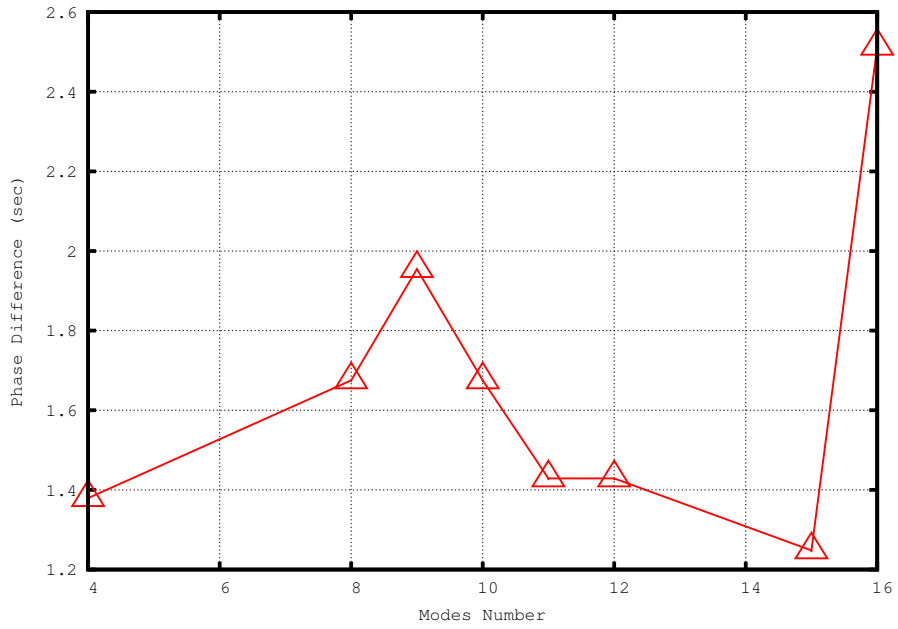
Σχήμα 101: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.82 δευτ.



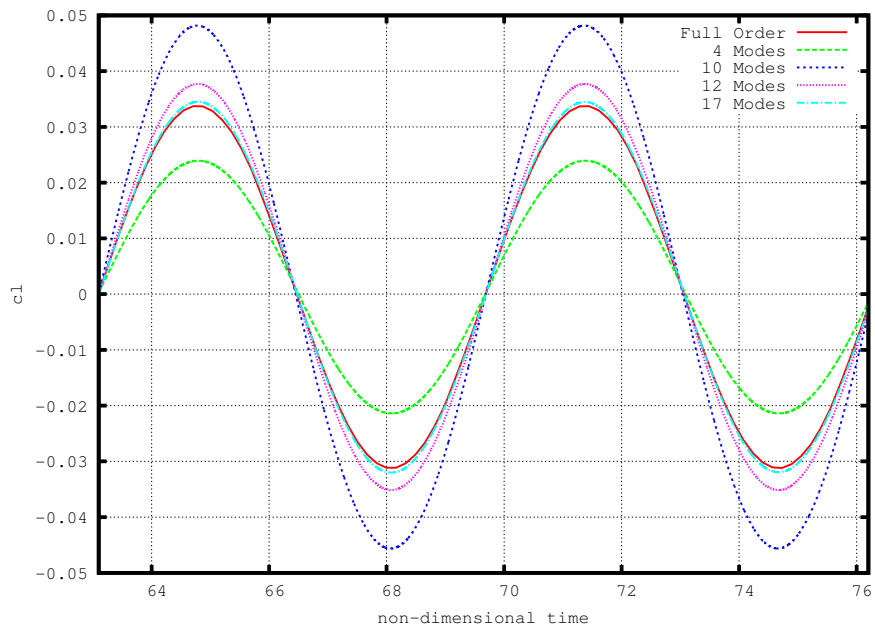
Σχήμα 102: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



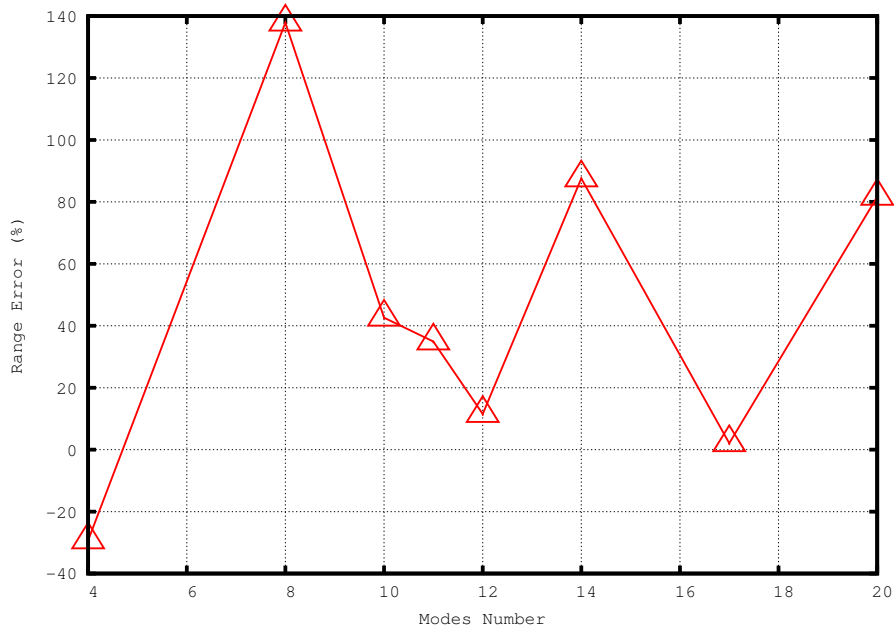
Σχήμα 103: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



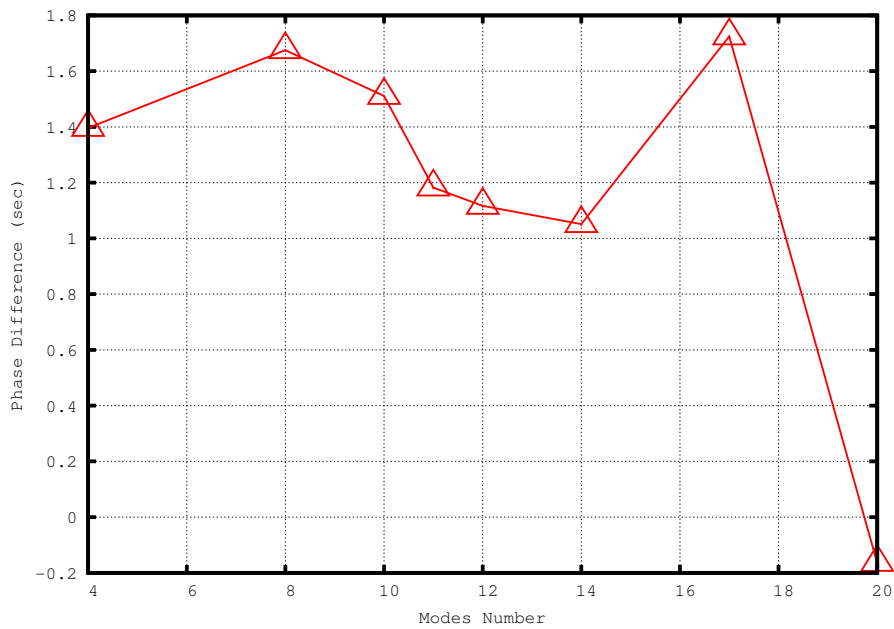
Σχήμα 104: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 0.98 δευτ.



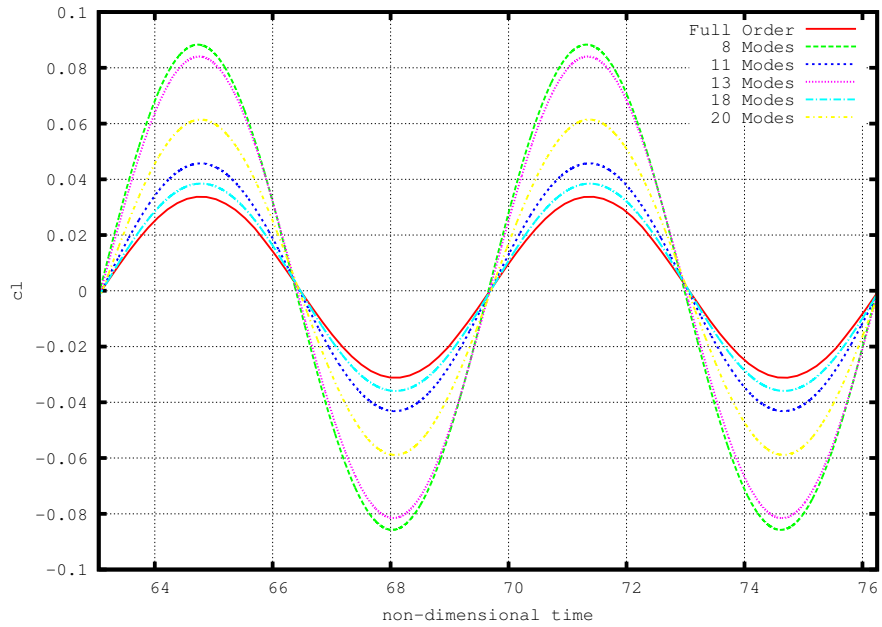
Σχήμα 105: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



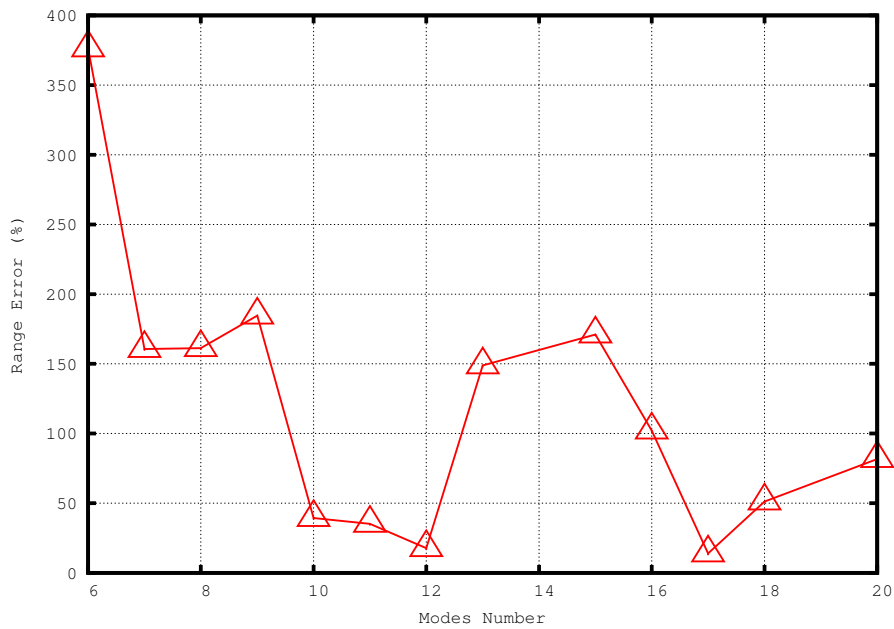
Σχήμα 106: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



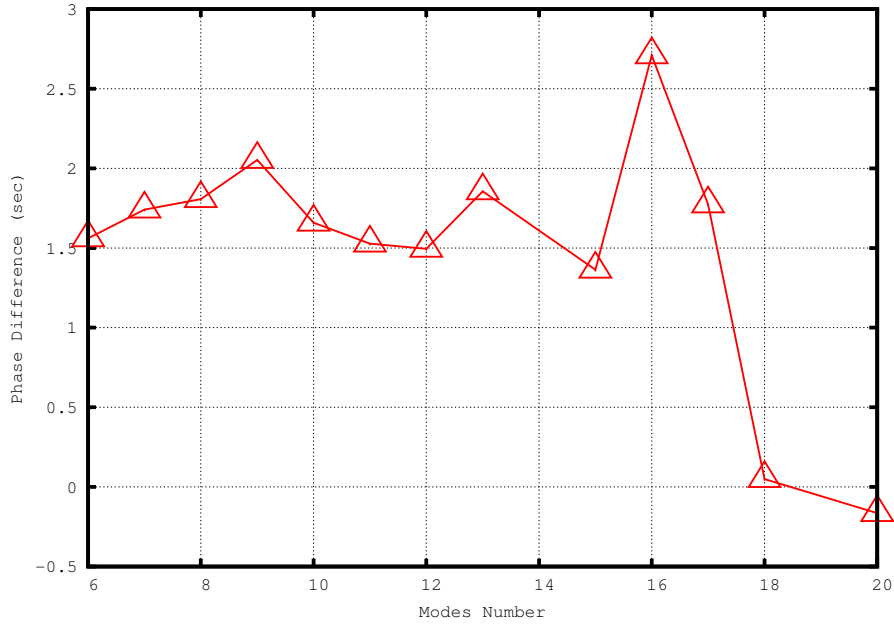
Σχήμα 107: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



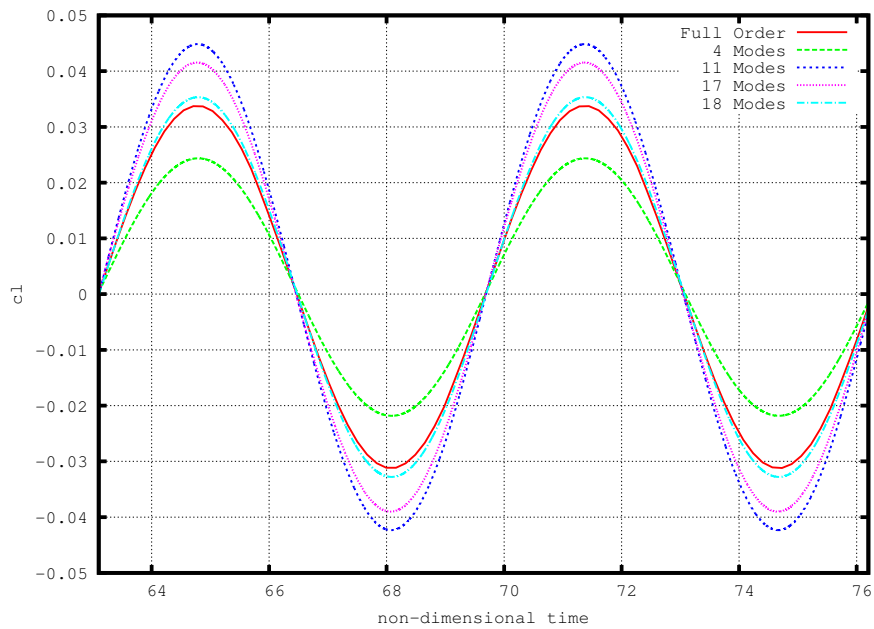
Σχήμα 108: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



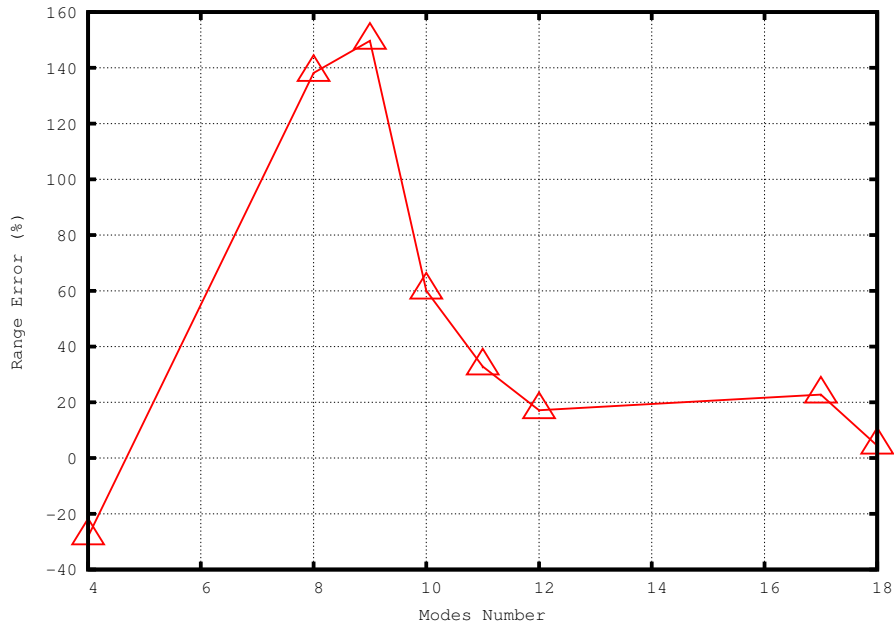
Σχήμα 109: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



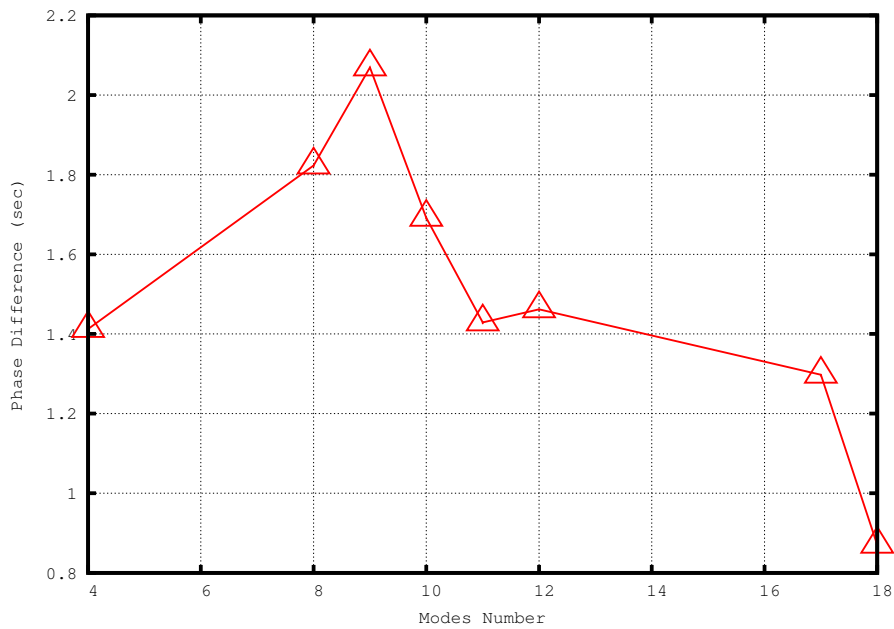
Σχήμα 110: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



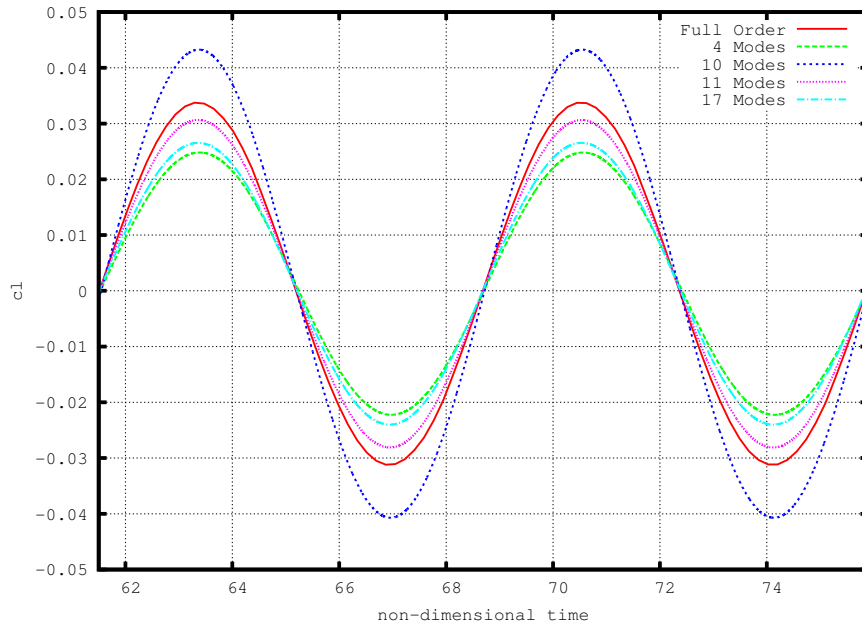
Σχήμα 111: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



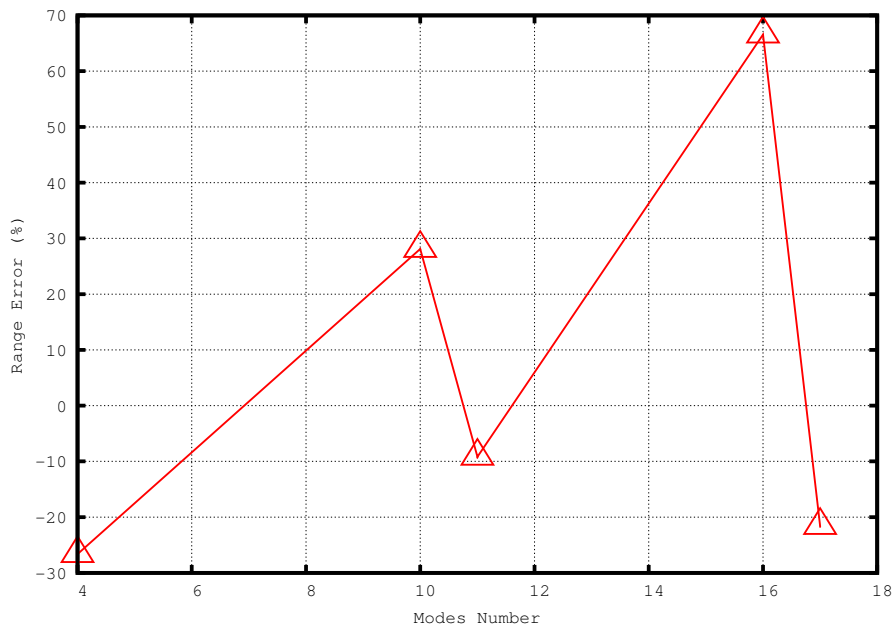
Σχήμα 112: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



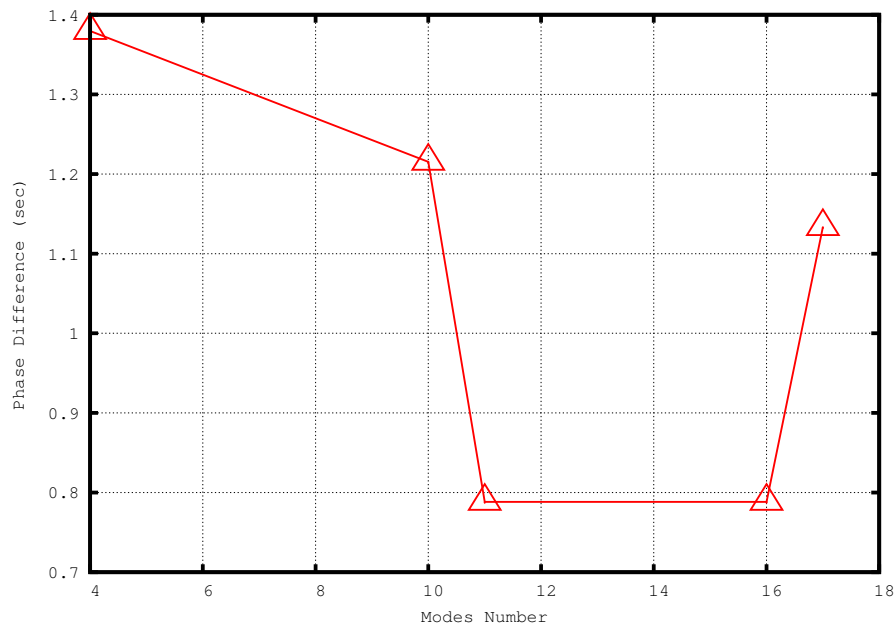
Σχήμα 113: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.62 δευτ.



Σχήμα 114: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.



Σχήμα 115: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.



Σχήμα 116: $0^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.

4.2 Εξωτερική Διέγερση Σε Διπλή Συχνότητα

Η εμφάνιση της διαφοράς φάσης στα αποτελέσματα του ROM και σε αυτά του κώδικα Euler απασχολούν ένα μεγάλο μέρος της μελέτης σε αυτή τη διπλωματική διότι είναι απροσδόκητο χαρακτηριστικό και χωρίς προβλέψιμη συμπεριφορά μιάς και από περίπτωση σε περίπτωση η διαφορά αυτή μπορεί να μεταβάλλεται από 0 σε 3.5 αδιάστατα δευτερόλεπτα τη στιγμή που η περίοδος μπορεί να είναι 7 δευτερόλεπτα. Στο κεφάλαιο 4.1 παρουσιάζεται η συμπεριφορά του ROM σε διάφορες μέσες γωνίες ταλάντωσης, χρονικές αποστάσεις δειγματοληψίας και αριθμό επιλεγμένων POD μορφών. Στην παρούσα ενότητα θα εφαρμοστεί η μέθοδος σε διέγερση η οποία περιέχει δύο συχνότητες με σκοπό να παρατηρηθεί αν οι συχνότητες αυτές μπλέκονται μεταξύ τους, πράγμα που κάνει αναξιόπιστη τη μέθοδο σε τέτοιου είδους προβλήματα.

Αναφέρθηκε παραπάνω πως ο τρόπος που θα επιλεγεί ο αριθμός των μορφών δεν είναι το ενεργειακό κριτήριο που βασίζεται στις singular values αλλά πρέπει να ελεγχθούν τα αποτελέσματα και ο αριθμός ο οποίος παρέχει ακριβή αποτελέσματα να χρησιμοποιηθεί για παραμετρική μελέτη. Γενικά η συμπεριφορά του συστήματος σε άλλο αριθμό μορφών μεταβάλλει το εύρος και τη διαφορά φάσης. Έχοντας εξωτερική ροή η οποία ταλαντώνεται με μία μόνο συχνότητα μας κάνει να αναζητούμε μορφές οι οποίες θα προσεγγίσουν ικανοποιητικά ένα εύρος και μία συχνότητα. Σε περίπτωση διπλής συχνότητας η εύρεση κατάλληλων μορφών είναι δυσκολότερη, πιο περίπλοκη και ορισμένες φορές αδύνατη. Ο λόγος είναι ότι το μοντέλο μειωμένης τάξης μεταχειρίζεται τις δύο συχνότητες σαν δύο μεμονωμένα προβλήματα. Με αυτό εννοούμε πως όπως τα αποτελέσματα προσεγγίζουν άλλες φορές το εύρος μιάς εκ των δύο ταλαντώσεων που συνθέτουν την διέγερση και άλλες το εύρος της άλλης. Έτσι οι μορφές που θα θεωρηθούν κατάλληλες για περαιτέρω μελέτη πρέπει να προσεγγίσουν τα δύο εύρη και να έχουν την ίδια διαφορά φάσης και για τις δύο συχνότητες. Παρόλο που η μέθοδος προσεγγίζει πάντα τις δύο συχνότητες ακριβώς, παρατηρείται διαφορετική διαφορά φάσης μεταξύ τους, αλλοιώνοντας πολύ τα αποτελέσματα. Αυτό κάνει την εύρεση κατάλληλων μορφών δύσκολη, διότι πρέπει να επιτευχθεί ίδια διαφορά φάσης στις δύο συχνότητες, η αλλιώς μηδενική διαφορά φάσης μεταξύ τους.

4.2.1 Αποτελέσματα

Μελετήθηκαν πολλές εφαρμογές σε διαφορετική μέση γωνία ταλάντωσης, διαφορετικές συχνότητες και διαφορές φάσης μεταξύ των δύο συχνοτήτων της εξωτερικής διέγερσης. Δεν προέκυψαν σε όλες ικανοποιητικά αποτελέσματα και για την ακρίβεια σε καμία δεν προσεγγίστηκε η μορφή του $c1$ του πλήρους μοντέλου ακριβώς. Παρόλα αυτά εμφανίστηκαν αποτελέσματα στα οποία φαίνεται καθαρά η ακεραιότητα των δύο συχνοτήτων. Προφανώς γίνεται λόγος για περιπτώσεις όπου η διαφορά φάσης είναι η ίδια για τις δύο συχνότητες, άρα μηδενική μεταξύ τους και τα εύρη των ταλαντώσεων κοντά στις πραγματικές τιμές με αποτέλεσμα να παρέχεται ένα ευδιάκριτο διάγραμμα. Σε διαφορετικές περιπτώσεις μια διαφορά φάσης μεταξύ των συχνοτήτων, μεγάλο ή μικρό εύρος σε μία εκ των δύο ταλαντώσεων περιπλέκει τα αποτελέσματα και καθιστά αδύνατη την εξαγωγή συμπερασμάτων από τα διαγράμματα. Το χαρακτηριστικό αυτό απουσιάζει σε προηγούμενες ενότητες όπου μελετάται μονή συχνότητα με πιο ευδιάκριτα διαγράμματα αποτελεσμάτων.

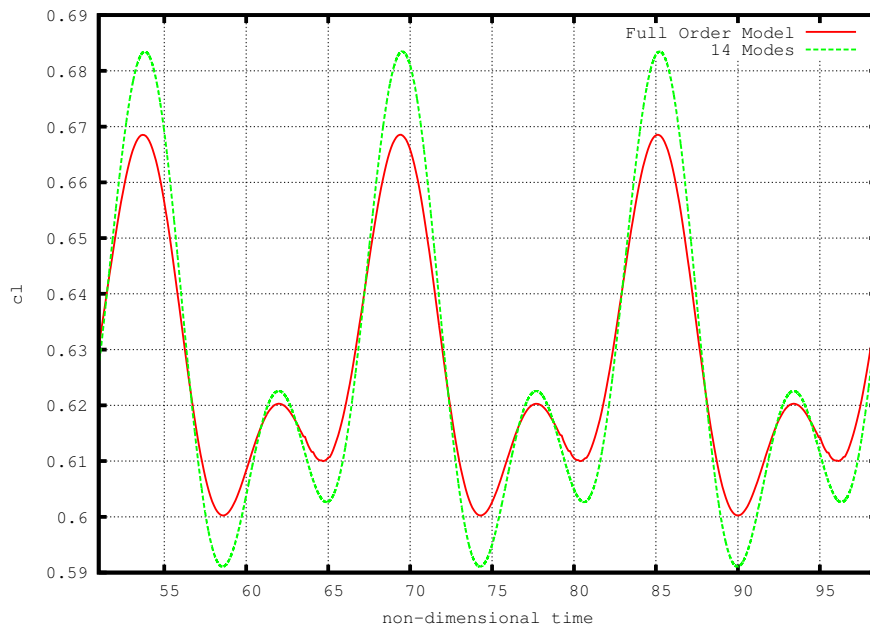
Σύνθεση $5^\circ \pm 0.5^\circ$ (reduced frequency = 0.8) και $5^\circ \pm 0.75^\circ$ (reduced frequency = 0.4) με διαφορά φάσης $\pi/3$

Μελετάται ταλάντωση της γωνίας της εξωτερική ροής ως εξής:

$$\alpha_{inf} = 0.5 \sin(0.8t) + 0.75 \sin(0.4t + \frac{\pi}{3}) \quad (4.1)$$

- Μέση γωνία 5°
- Αεροτομή NACA 0012
- Mach 0.5
- Περίοδος πρώτης ταλάντωσης 7.85 αδιάστατα δευτ.
- Περίοδος δεύτερης ταλάντωσης 15.7 αδιάστατα δευτ.
- Χρονικό βήμα πλήρους μοντέλου 0.1011 δευτ.
- Χρονικό βήμα μοντέλου μειωμένης τάξης 0.002022 δευτ.

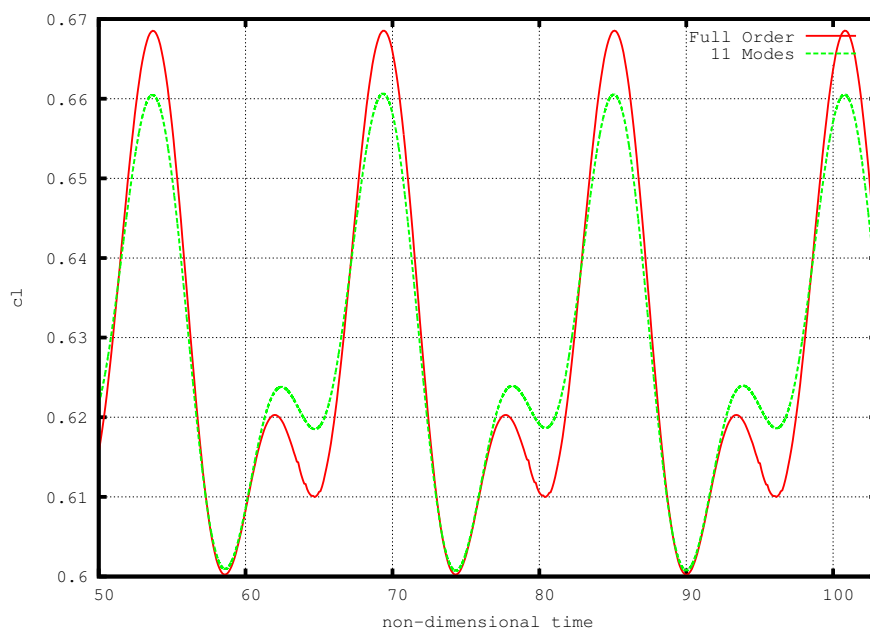
Αρχικά παρουσιάζεται το αποτέλεσμα 14 και 15 μορφών απο χρονοσειρές που απέχουν μεταξύ τους 0.81 αδιάστατα δευτερόλεπτα . Ο χρόνος προπόνησης των



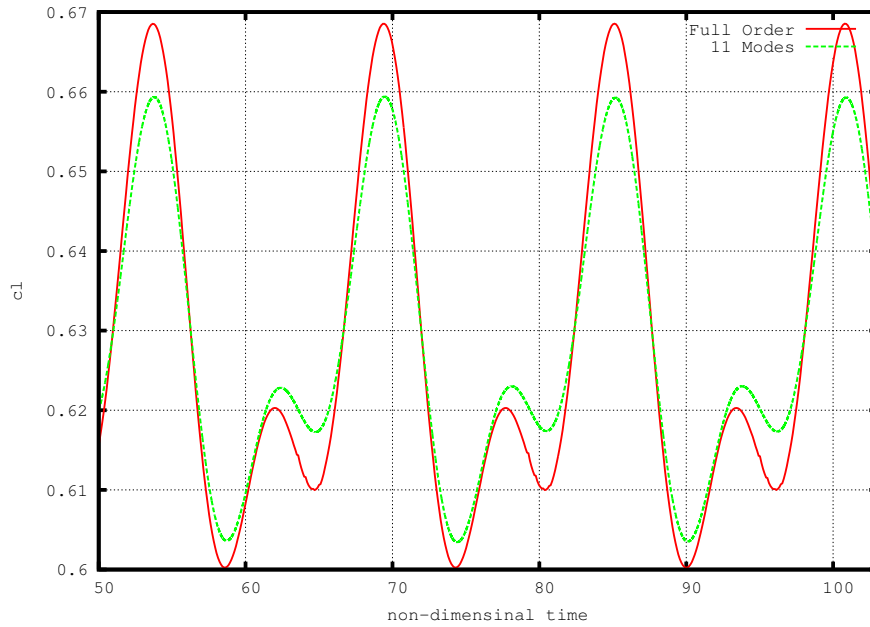
Σχήμα 117

Το συγκεκριμένο σετ αρχικών δεδομένων της μεθόδου παρέχει συνολικώς τα καλύτερα αποτελέσματα από όλες τις εναλλακτικές λύσεις οι οποίες δοκιμάστηκαν. Το γεγονός ότι τα συγκεκριμένα διαγράμματα είναι τα βέλτιστα δυνατά δείχνει πως εδώ η μέθοδος χάνει την ακρίβειά της. Παρόλα αυτά εκτός από τη μελέτη της ακρίβειας σε διπλή συχνότητα , άλλος ένας σκοπός ήταν να διαπιστωθεί αν η πολυδιατυπωμένη διαφορά φάσης οφείλεται σε σφάλμα κατά την κατασκευή του

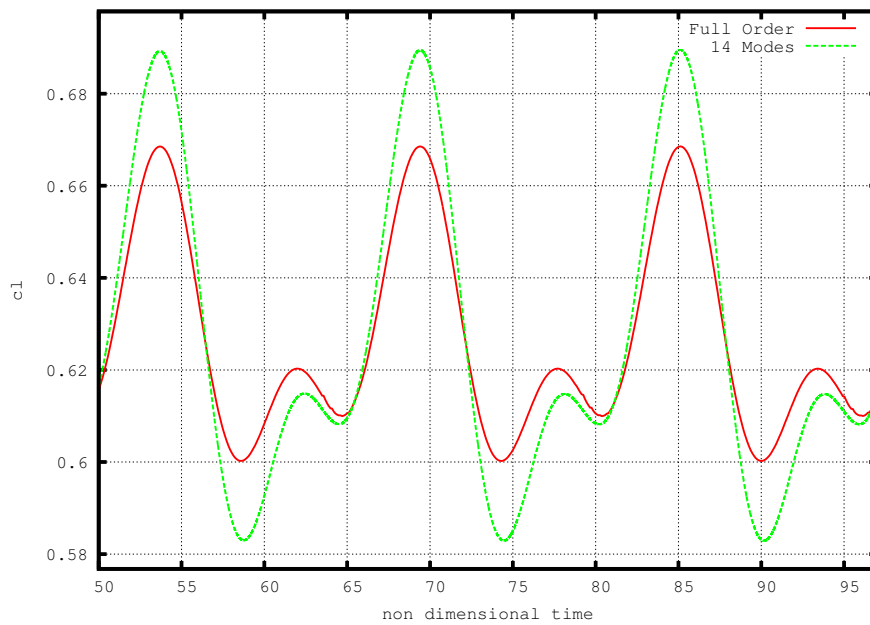
μοντέλου ή σε χαρακτηριστικό της μεθόδου αυτής καθ'αυτής. Παρατηρώντας λοιπόν τα σχήματα ;; και 117 δίνεται η απάντηση στην προηγούμενη πρόταση. Εφόσον οι δύο συχνότητες δεν επηρεάζουν η μία την άλλη , δηλαδή παραμένουν 15.7 και 7.85 δευτερόλεπτα τη στιγμή που μεταβάλλεται η φάση μεταξύ τους είναι ένδειξη πως δεν πρόκειται για σφάλμα που προέρχεται απο την κατασκευή του μοντέλου αλλά για σφάλμα άλλου είδους , ίσως η προπόνηση των μορφών να παίζει ρόλο ή ακόμα και η φύση του προβλήματος να είναι τέτοια που να δυσκολεύει τη μέθοδο. Επίσης καλά αποτελέσματα και κυρίως αντιπροσωπευτικά για το σκοπό της ενότητας βρίσκονται στα σχήματα 118 ,119 και 120 με τα ίδια σχόλια που αφορούν τα πρώτα δύο σχήματα.



Σχήμα 118: 11 Μορφές , Απόσταση Δειγματοληψίας 0.20 δευτ.



Σχήμα 119: 11 Μορφές , Απόσταση Δειγματοληψίας 0.30 δευτ.



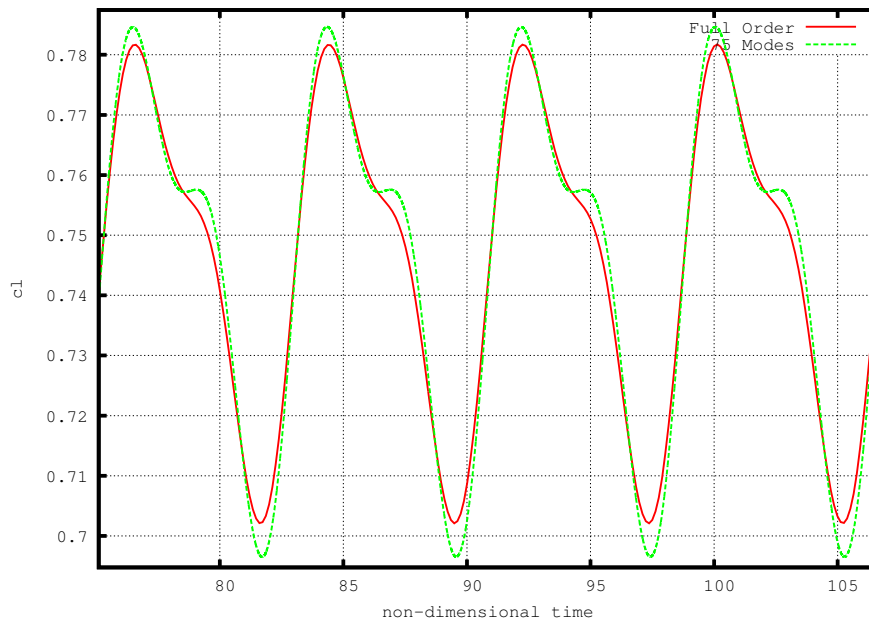
Σχήμα 120: 14 Μορφές , Απόσταση Δειγματοληψίας 0.81 δευτ.

Σύνθεση $6^\circ \pm 1^\circ$ (reduced frequency = 0.8) και $6^\circ \pm 1^\circ$ (reduced frequency = 1.6) με διαφορά φάσης 0

Στην εφαρμογή αυτή έχουμε το ίδιο εύρος ταλάντωσης στις δύο συχνότητες με μόνη διαφορά πως η μία εκ των δύο έχει συχνότητα διπλάσια της άλλης. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση δεν υπήρξε συνδυασμός μορφών και πυκνότητας δειγματοληψίας που έδωσαν αποτελέσματα ακριβή. Υπήρξαν όμως συνδυασμοί για τους οποίους τα διαγράμματα c1-χρόνου δίνουν εικόνα για το ότι το μοντέλο μειωμένης τάξης κρατά τις συχνότητες της διέγερσης ακέραιες. Μελετάται ταλάντωση της γωνίας της εξωτερική ροής ως εξής:

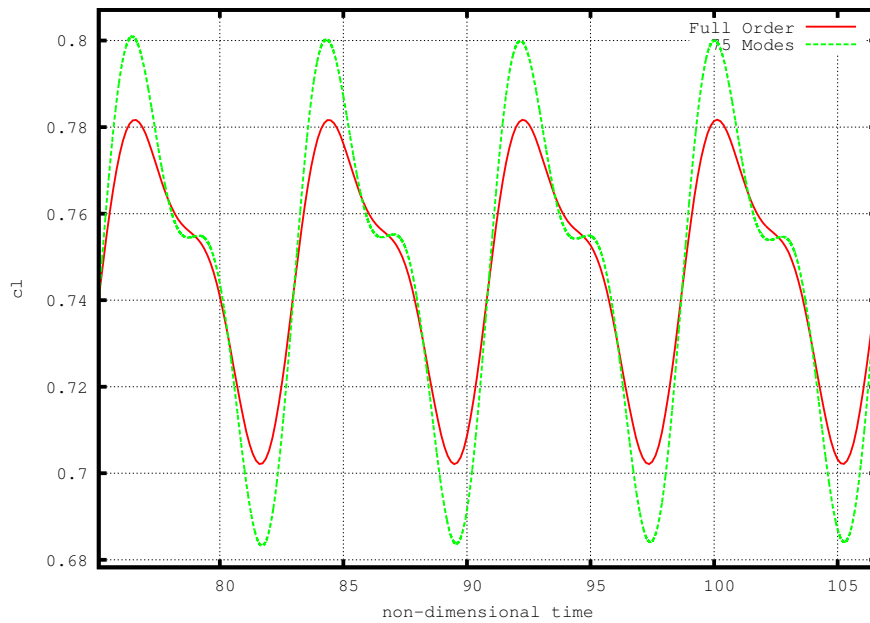
$$\alpha_{inf} = 1 \sin(0.8t) + 1 \sin(1.6t) \quad (4.2)$$

- Μέση γωνία 6°
- Αεροτομή NACA 0012
- Mach 0.5
- Περίοδος πρώτης ταλάντωσης 7.85 αδιάστατα δευτ.
- Περίοδος δεύτερης ταλάντωσης 3.92 αδιάστατα δευτ.
- Χρονικό βήμα πλήρους μοντέλου 0.1314 δευτ.
- Χρονικό βήμα μοντέλου μειωμένης τάξης 0.002628 δευτ.



Σχήμα 121: 75 Μορφές , Απόσταση Δειγματοληψίας 0.53 δευτ.

Τα συμπεράσματα δεν διαφέρουν από εκείνα της ενότητας 4.2.1 . Και πάλι η μέθοδος αντιμετωπίζει τη διπλή συχνότητα διέγερσης σαν δύο μεμονωμένα προβλήματα με αποτέλεσμα σε κάποιους συνδυασμούς μορφών να προσεγγίζει το



Σχήμα 122: 90 Μορφές , Απόσταση Δειγματοληψίας 1.05 δευτ.

εύρος της μίας συχνότητας και σε άλλους το εύρος της άλλης. Στα σχήματα 121 και 122 παρατηρούνται δύο περιπτώσεις όπου η διαφορά φάσης και των δύο συχνοτήτων ως προς τη λύση του πλήρους μοντέλου είναι η ίδια , ή αλλιώς η διαφορά φάσης ανάμεσα στις δύο συχνότητες είναι μηδενική. Το γεγονός αυτό επιτρέπει να βγουν συμπεράσματα παρόλο που όπως φαίνεται το εύρος της ταλάντωσης του $c1$ δεν προσεγγίζεται ικανοποιητικά.

4.3 Παραμετρική Μελέτη

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, ο λόγος ύπαρξης των συστημάτων μειωμένης τάξης είναι η επίλυση προβλημάτων που διαφέρουν σε μία ή περισσότερα παραμέτρους από το αρχικό πρόβλημα από το οποίο και δημιουργούνται. Το ποιές παράμετροι και πόσο μπορεί να μεταβληθούν είναι ένα αντικείμενο προς μελέτη. Οι πρώτες παράμετροι οι οποίες προσφέρονται άμεσα προς διερεύνηση είναι το εύρος της ταλάντωσης και η συχνότητα αυτής. Το πόσο επιτρέπεται να μεταβληθούν χωρίς την έντονη αύξηση του σφάλματος δεν υπακούει σε κάποιο κανόνα και εξαρτάται από το κάθε πρόβλημα ξεχωριστά. Στην ενότητα 4.3.1 μελετάται η συμπεριφορά του συστήματος μειωμένης τάξης σε μεταβολή του εύρους της ταλάντωσης της εξωτερικής διέγερσης με εντυπωσιακά αποτελέσματα. Το μέγεθος του δείγματος δεν είναι αντικείμενο το οποίο ενδιαφέρει την επίλυση αυτή καθώς αυτή αλλά την σωστή κατασκευή του μοντέλου, για το λόγο αυτό γίνεται μια αναφορά στην ενότητα 4.3.3 για το πως επηρεάζει τα αποτελέσματα.

4.3.1 Μεταβολή Στο Έυρος Ταλάντωσης

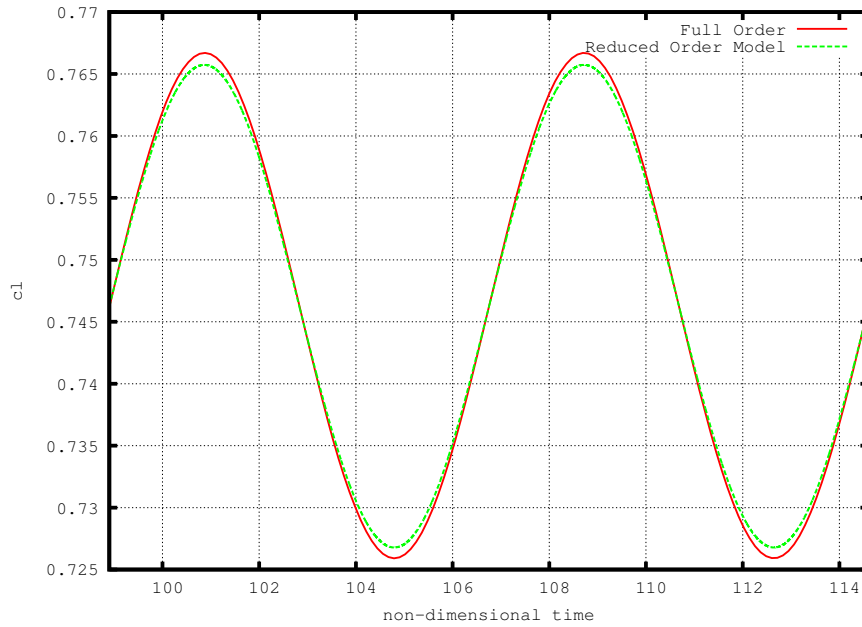
Μελετάται απόκριση του μοντέλου σε διαφορετικό εύρος ταλάντωσης της εξωτερικής διέγερσης από το αρχικό. Δοκιμάζεται αρχικά :

- NACA 0012
- 0.5 Mach
- μέση γωνία ταλάντωσης 6°
- εύρος που μεταβάλλεται από 0.6° ως 1.8°

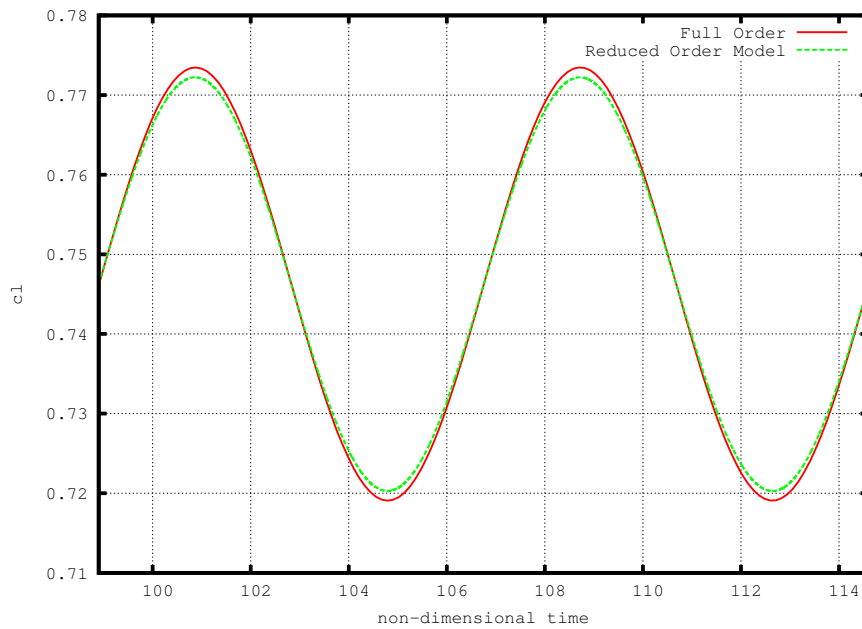
Το αρχικό δείγμα από το οποίο κατασκευάστηκαν οι POD μορφές προήλθε από την ίδια αεροτομή σε μέση γωνία 6° και εύρος 1° .

Στα σχήματα 123 ως 128 παρατηρείται η ακριβής αναπαραγωγή των δεδομένων από το σύστημα μειωμένης τάξης. Υπενθυμίζεται πως το μόνο που άλλαξε στα αρχικά δεδομένα ήταν το εύρος της ταλάντωσης της εξωτερικής ροής. Ακόμα και όταν το εύρος φτάνει στο 1.6° η μέθοδος POD λειτουργεί ικανοποιητικά μη έχοντας μεγαλύτερο σφάλμα από ότι στο 0.8° ή στο 1.2° όπου η απόκλιση είναι μικρή σε σχέση με το αρχικό σύστημα. Στην περίπτωση που έχουμε τη μέγιστη απόκλιση από την κατάσταση αναφοράς, δηλαδή σε εύρος 1.8° παρατηρείται αύξηση της απόστασης μεταξύ των πραγματικών αποτελεσμάτων και αυτών του ROM. Αυτό οφείλεται είτε καθαρά στον λόγο ότι πια το πρόβλημα αρχίζει να διαφοροποιείται αρκετά από την κατάσταση αναφοράς ή στην δημιουργία κυμάτων χρούσης τα οποία και η μέθοδος POD δεν μπορεί να αναπαραγάγει αν αυτά δεν εμφανίστηκαν στο δείγμα από το οποίο δημιουργήθηκαν οι POD μορφές.

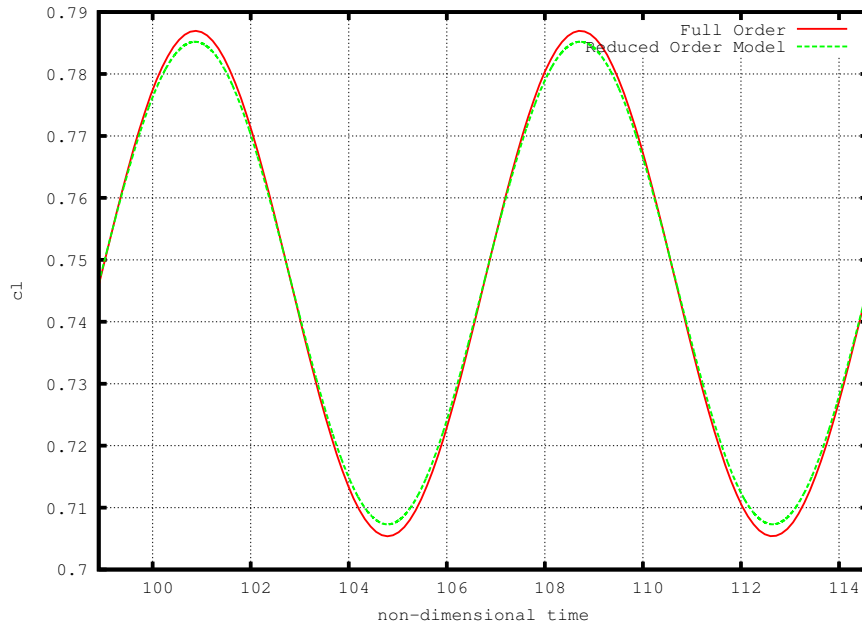
Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό που αντισταθμίζει την εμφάνιση διαφοράς φάσης σε όλες τις εφαρμογές είναι πως η όποια διαφορά φάσης υπάρχει και που στα αποτελέσματα έχει μηδενιστεί σκόπιμα, παραμένει σταθερή για όλα τα διαφορετικά εύρη που δοκιμάζονται.



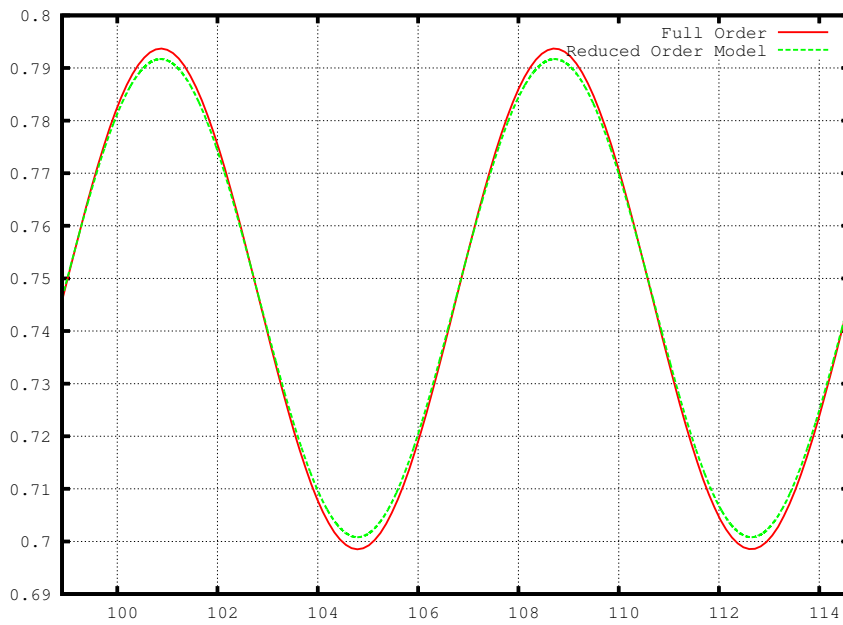
Σχήμα 123: $6^\circ \pm 0.6^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



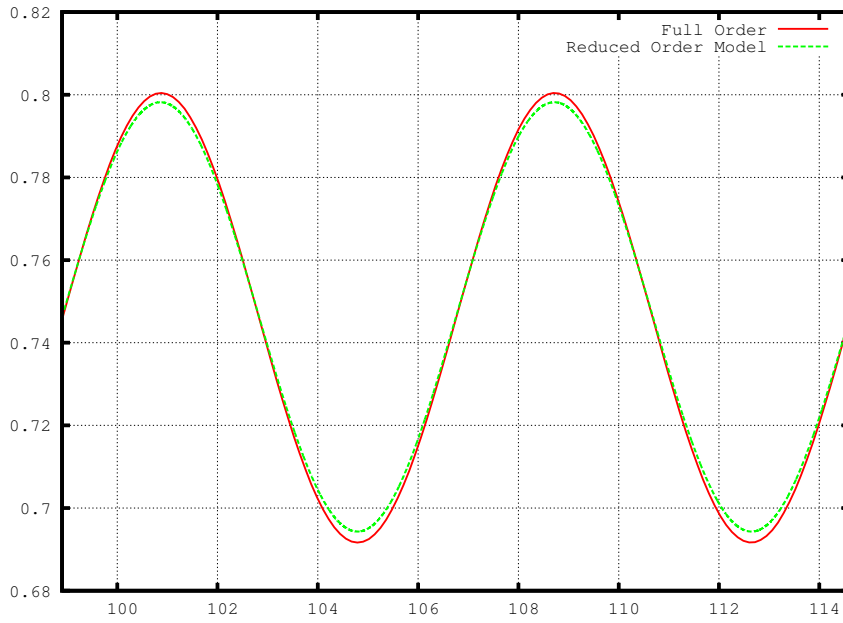
Σχήμα 124: $6^\circ \pm 0.8^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



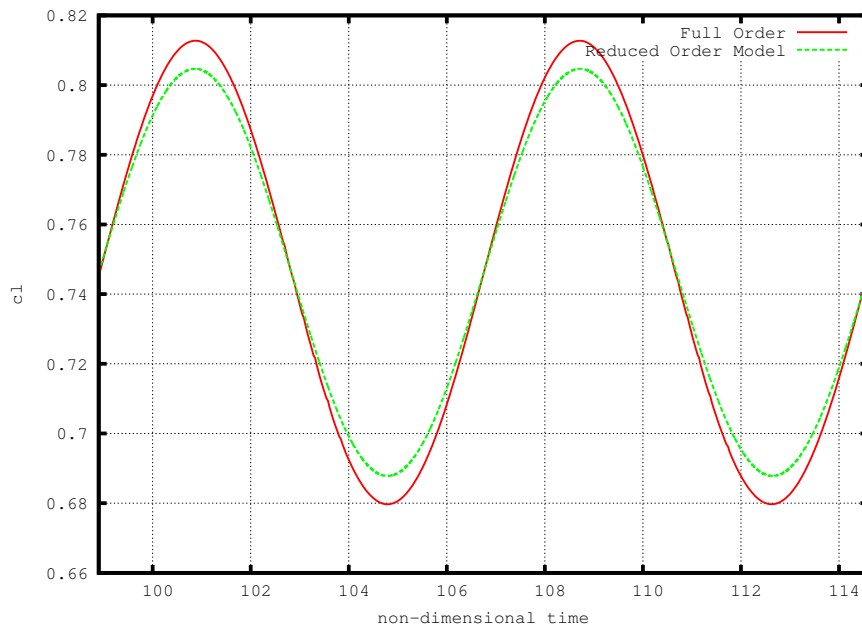
Σχήμα 125: $6^\circ \pm 1.2^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



Σχήμα 126: $6^\circ \pm 1.4^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.



Σχήμα 127: $6^\circ \pm 1.6^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.

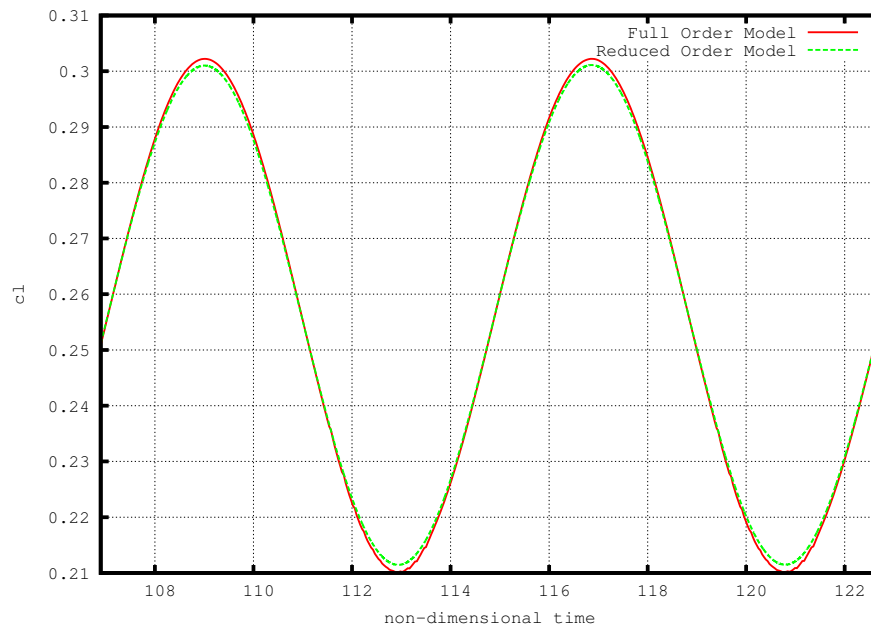


Σχήμα 128: $6^\circ \pm 1.8^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.15 δευτ.

Στη συνέχεια εφαρμόζεται η ίδια παραμετρική μελέτη στις εξής συνθήκες:

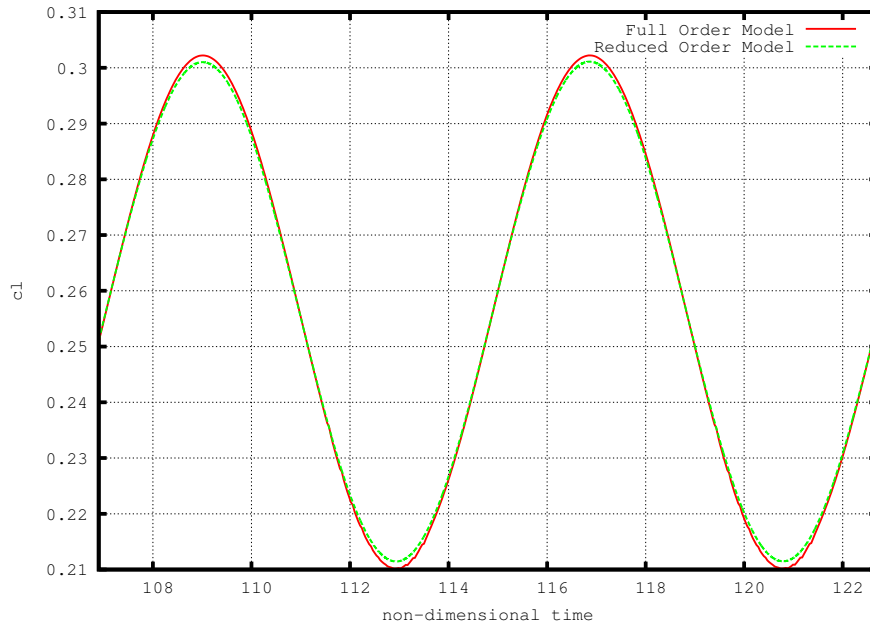
- NACA 0012
- 0.5 Mach
- μέση γωνία ταλάντωσης 2°
- εύρος που μεταβάλλεται από 0.8° ως 1.8°

Ο αριθμός των POD μορφών που επιλέγονται καθώς και η χρονική απόσταση μεταξύ των χρονοσειρών κατά τη δειγματοληψία προέκυψαν παρατηρώντας τα αποτελέσματα της ενότητας 4.1 και αυτά είναι : 11 μορφές , απόσταση δειγματοληψίας 1.31 αδιάστατα δευτερόλεπτα.

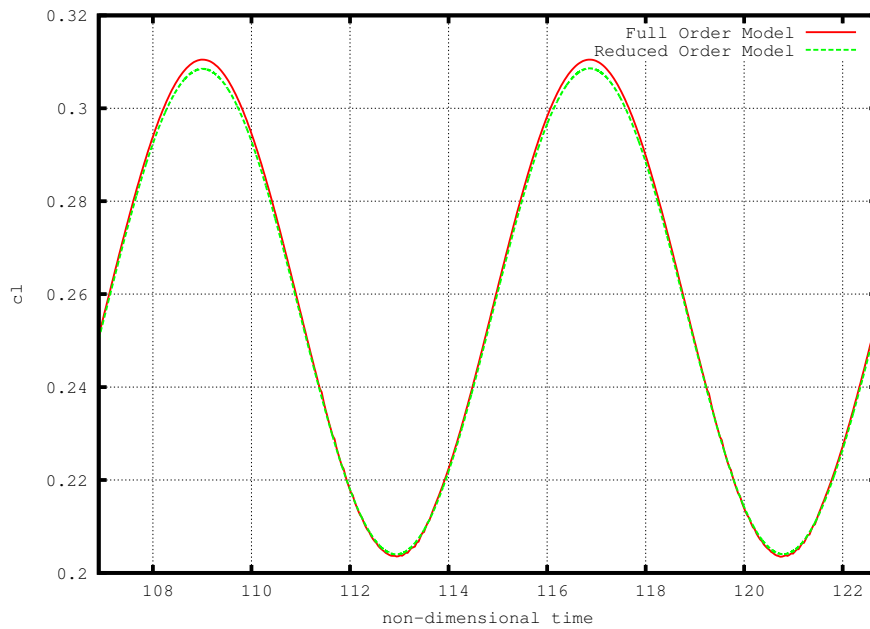


Σχήμα 129: $2^\circ \pm 0.8^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.

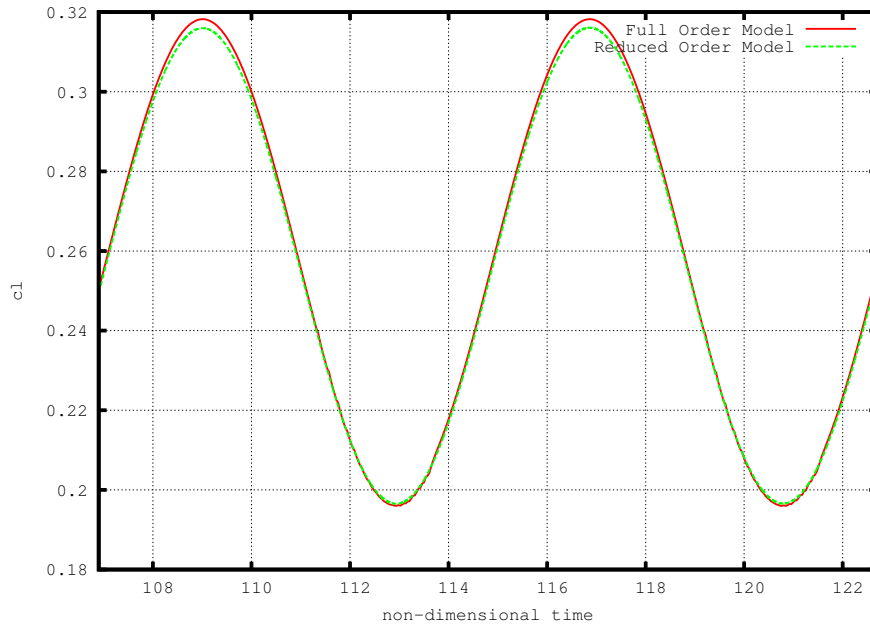
Όπως και στην πρώτη εφαρμογή έτσι και εδώ η μέθοδος POD ανταποκρίνεται πολύ καλά στη μεταβολή του εύρους της ταλάντωσης όπως φαίνεται και από τα σχήματα 129 ως 133 . Ακόμα και σε εύρος ταλάντωσης 1.8° που είναι η μεγαλύτερη απόκλιση από την κατάσταση αναφοράς , το μοντέλο κρατά το σφάλμα ιδιαίτερα χαμηλά. . Η διαφορά φάσης μηδενίστηκε εσκεμμένα ώστε να δοθεί έμφαση στην ακρίβεια του εύρους της ταλάντωσης . Είναι αξιοσημείωτο όμως πως η όποια διαφορά φάσης εμφανίστηκε παρέμεινε η ίδια σε όλες τις εφαρμογές με διαφορετικό εύρος στις οποίες δοκιμάστηκε το μοντέλο.



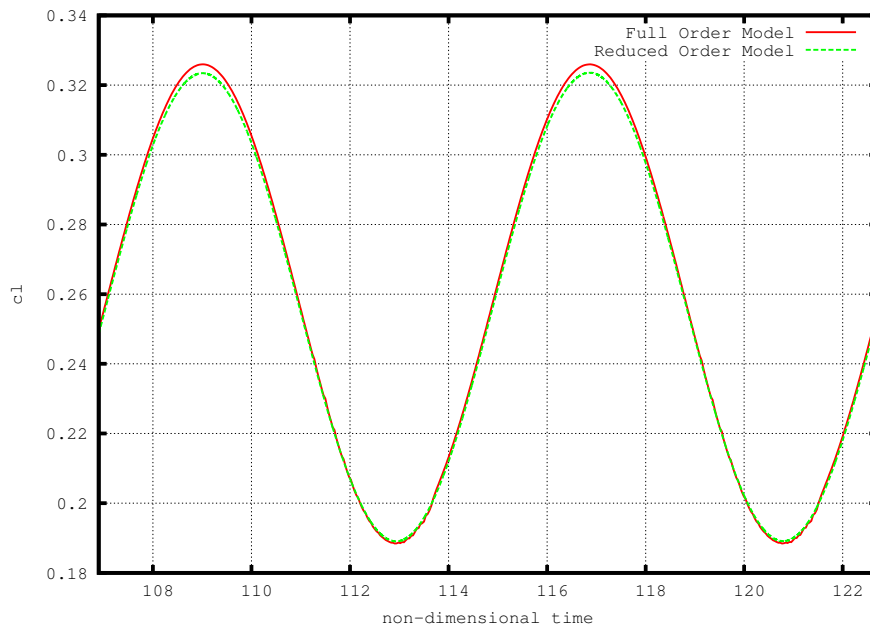
Σχήμα 130: $2^\circ \pm 1.2^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



Σχήμα 131: $2^\circ \pm 1.4^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.



Σχήμα 132: $2^\circ \pm 1.6^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.

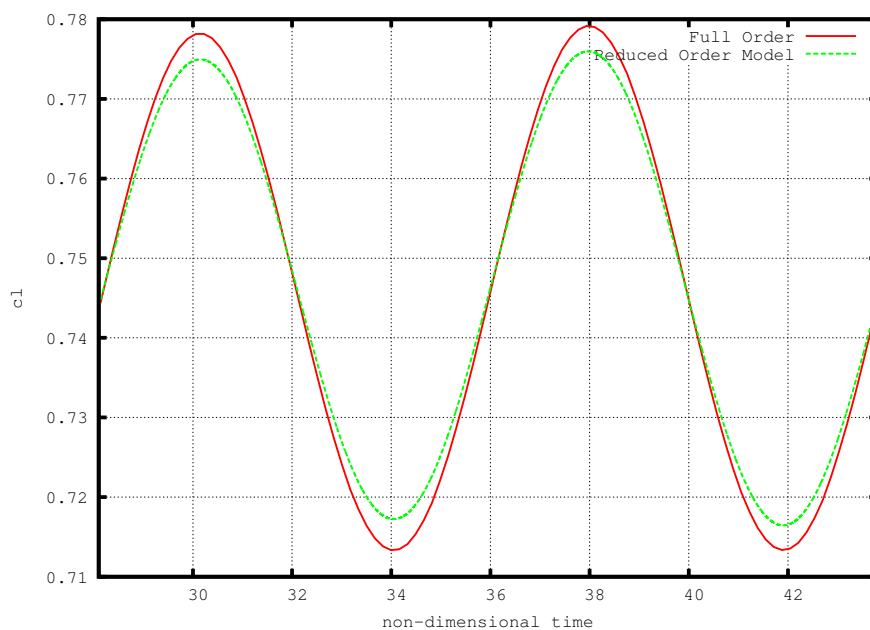


Σχήμα 133: $2^\circ \pm 1.8^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.31 δευτ.

4.3.2 Μεταβολή Στη Συχνότητα Ταλάντωσης

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθεί η συμπεριφορά του μοντέλου στη μεταβολή της συχνότητας διέγερσης. Το αρχικό σετ αρχικών δεδομένων από το οποίο προκύπτει η διανυσματική βάση είναι το εξής:

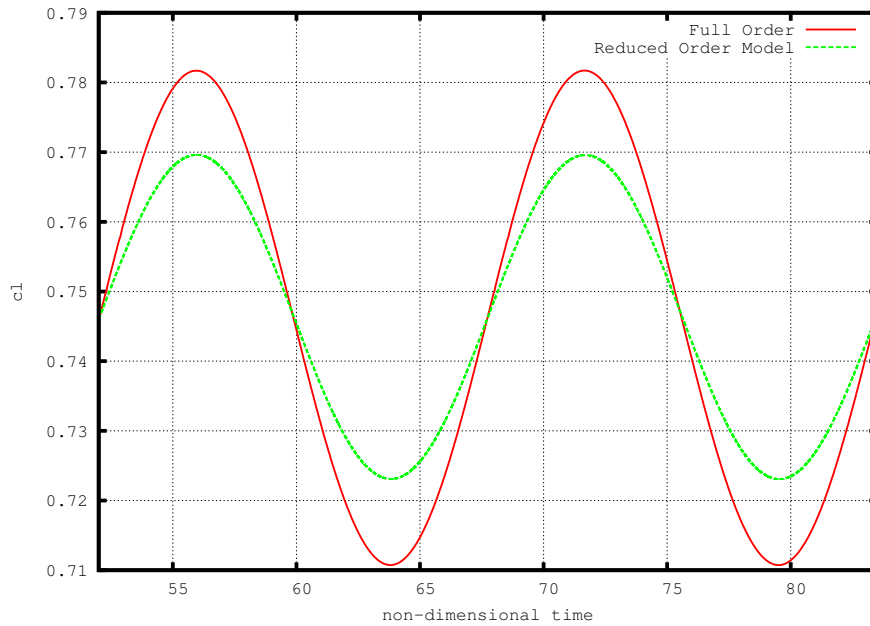
- NACA 0012
- 0.5 Mach
- μέση γωνία ταλάντωσης : 6°
- εύρος ταλάντωσης : 1°
- συχνότητα (reduced frequency) : 0.8
- περίοδος ταλάντωσης : 7.85 αδιάστατα δευτερόλεπτα
- απόσταση δειγματοληψίας : 1.97 αδιάστατα δευτερόλεπτα
- POD μορφές : 29



Σχήμα 134: $6^\circ \pm 1^\circ$, Συχνότητα = 0.8

Συχνότητα 0.4 (Περίοδος = 15.7 δευτ.)

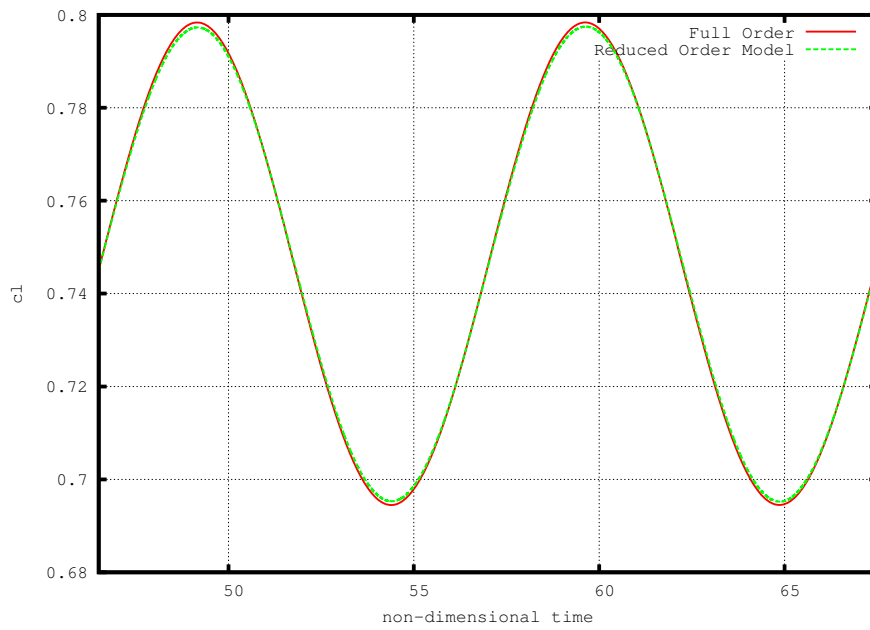
Με τη συχνότητα να έχει υποδιπλασιαστεί παρατηρείται μια μικρή αύξηση στο σφάλμα του εύρους της ταλάντωσης του συντελεστή άνωσης. Η περίοδος όμως προσεγγίζεται ακριβώς στην τιμή που έχει η περίοδος της διέγερσης και προφανώς και εκείνη του πλήρους μοντέλου.



Σχήμα 135: $6^\circ \pm 1^\circ$, Συχνότητα = 0.4

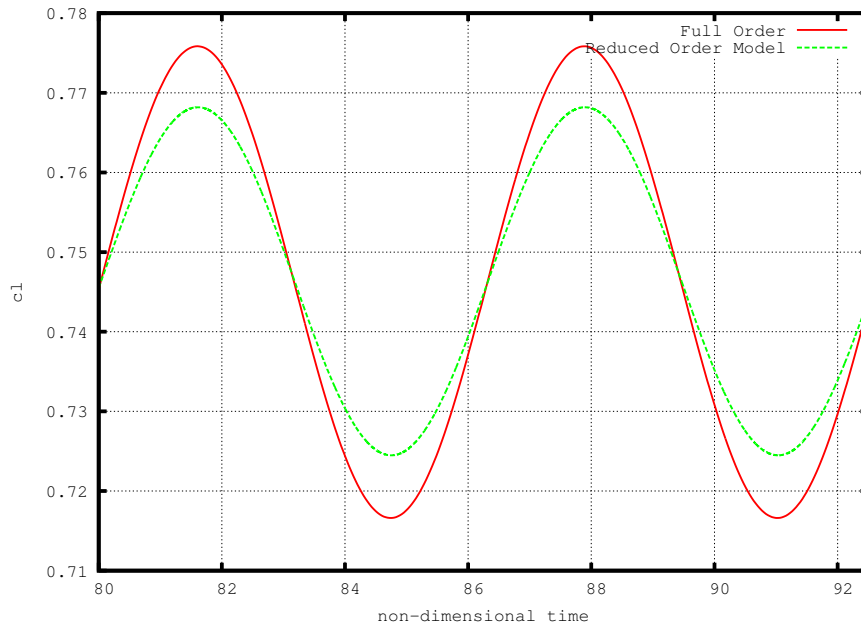
Συχνότητα 0.6 (Περίοδος = 10.46 δευτ.)

Η υποπερίπτωση αυτή παρουσιάζει το αξιοσημείωτο γεγονός πως το ROM προσεγγίζει ακριβώς την περίοδο της ταλάντωσης αλλά και με πολύ χαμηλότερο σφάλμα το εύρος, παρόλο που αυξήθηκε σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα.



Σχήμα 136: $6^\circ \pm 1^\circ$, Συχνότητα = 0.6

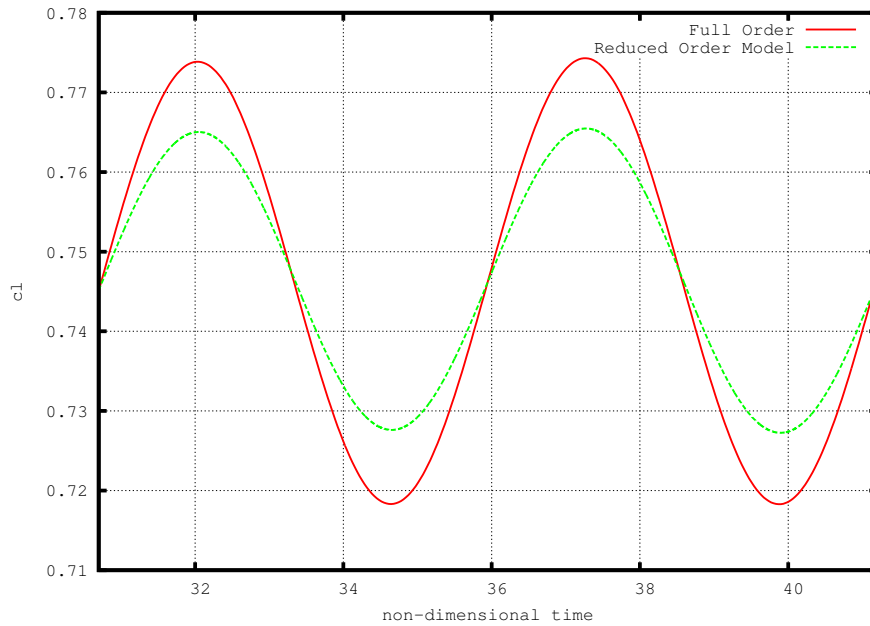
Συχνότητα 1.0 (Περίοδος = 6.28 δευτ.)



Σχήμα 137: $6^\circ \pm 1^\circ$, Συχνότητα = 1.0

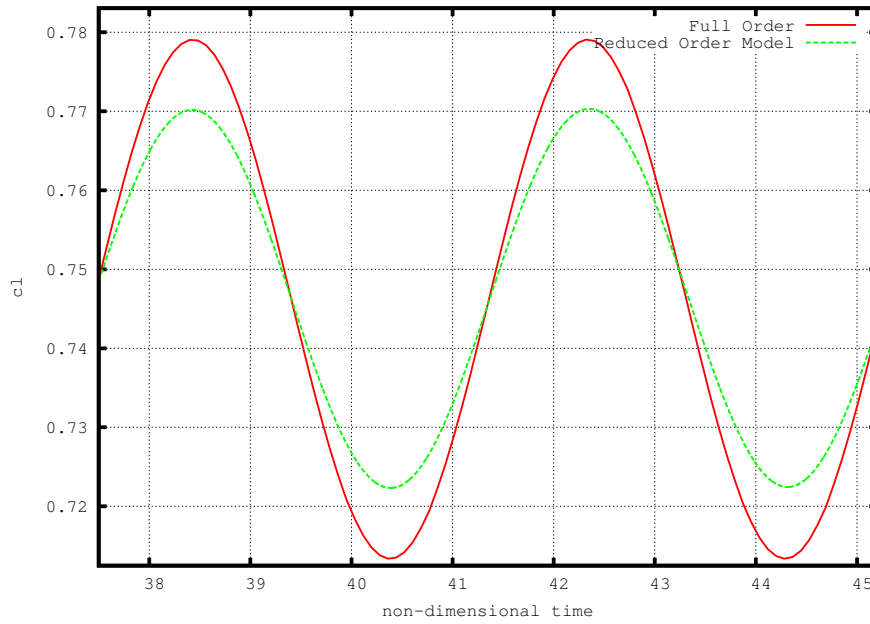
Συχνότητα 1.2 (Περίοδος = 5.23 δευτ.)

Στα σχήματα 137 και 138 οι παρατηρήσεις είναι οι ίδιες με την δοκιμή με συχνότητα 0.4. Το σφάλμα του εύρους έχει αυξηθεί αλλά για άλλη μια φορά η περίοδοι των ταλαντώσεων προσεγγίζονται ακριβώς. Σαν επόμενο βήμα θα δοκιμαστεί το μοντέλο σε διπλάσια συχνότητα από αυτή με την οποία ‘προπονήθηκε’.



Σχήμα 138: $6^\circ \pm 1^\circ$, Συχνότητα = 1.2

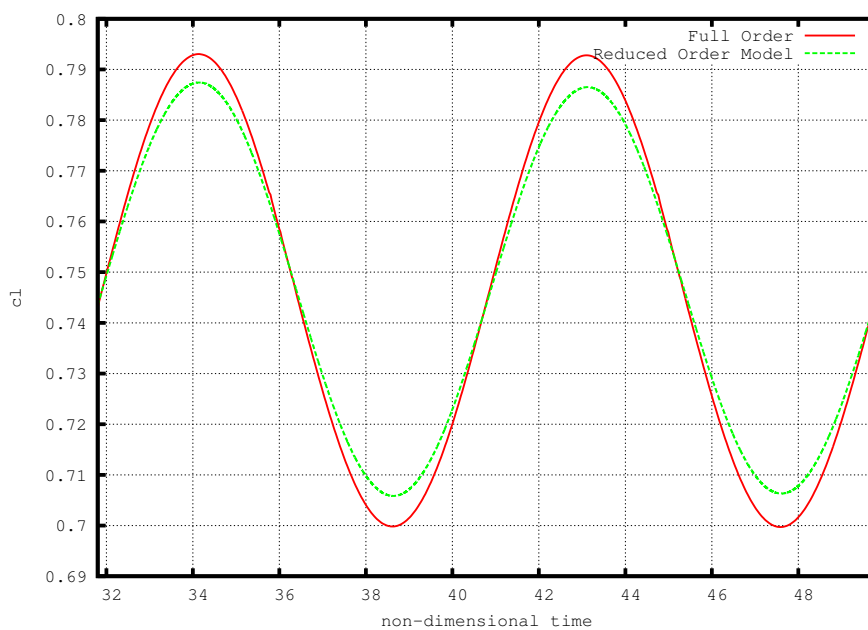
Συχνότητα 1.6 (Περίοδος = 3.92 δευτ.)



Σχήμα 139: $6^\circ \pm 1^\circ$, Συχνότητα = 1.0

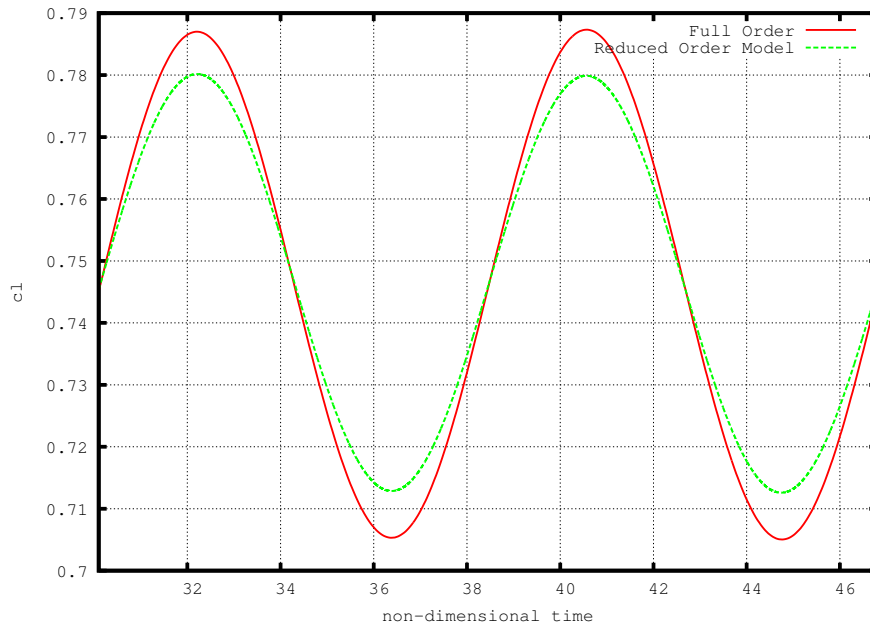
Οι μεταβολές στη συχνότητα της διέγερσης έδωσαν πολύ καλά αποτελέσματα στην απόκριση της συχνότητας. Η αστάθεια του σφάλματος του εύρους όμως δεν είναι αναμενόμενο φαινόμενο. Για το λόγο αυτό θα μελετηθεί το μοντέλο σε μικρότερες μεταβολές συχνότητων και συγκεκριμένα από 0.7 ως 0.9. Στα σχήματα 140 ως 143 παρατηρείται γενικά μικρότερο σφάλμα στο εύρος σε σχέση με τις περιπτώσεις που η συχνότητα μεταβλήθηκε αρκετά (εξαιρείται η περίπτωση με συχνότητα 0.6 όπου το σφάλμα εύρους σχεδόν μηδενίζεται). Η ενότητα αφορά την απόκριση του μοντέλου σε μεταβολή συχνότητας της εξωτερικής διέγερσης και σε αυτό τον τομέα το μοντέλο παρήχε αρκετή ακρίβεια. Ακόμα και όταν η συχνότητα διπλασιάστηκε (σχήμα 139) ή υποδιπλασιάστηκε (σχήμα 135) η περίοδος του πλήρους και του μειωμένου τάξης μοντελου ταυτίζονται. Όπως και στη μελέτη του σφάλματος του εύρους με σταθερή συχνότητα διέγερσης προέκυψε ακανόνιστη εμφάνιση και μεταβολή της διαφοράς φάσης, έτσι και στην ενότητα αυτή προκύπτει μια άστατη μεταβολή του σφάλματος του εύρους, ακόμα και αν παραμένει σε χαμηλές τιμές.

Συχνότητα 0.7 (Περίοδος = 8.97 δευτ.)



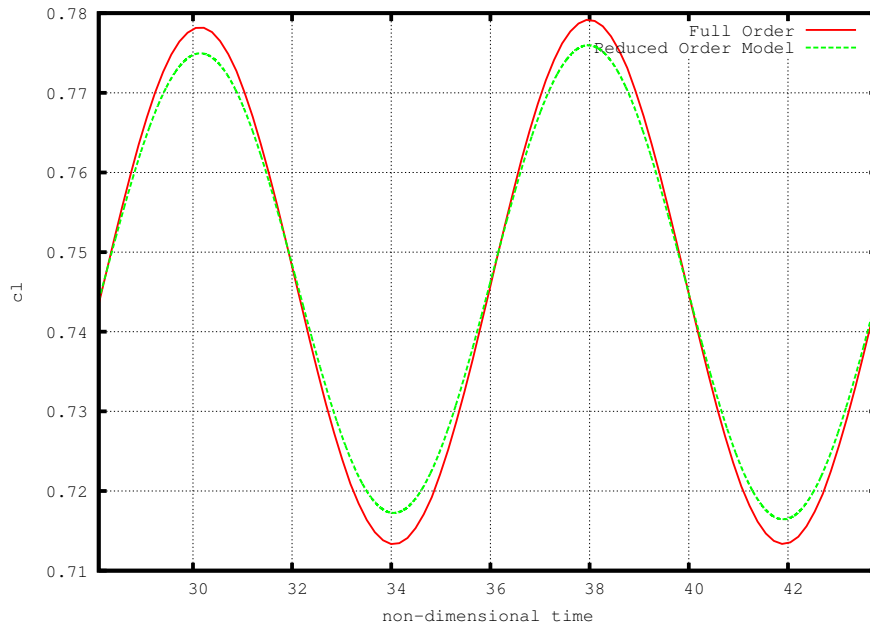
Σχήμα 140: $6^\circ \pm 1^\circ$, Συχνότητα = 0.7

Συχνότητα 0.75 (Περίοδος = 8.37 δευτ.)



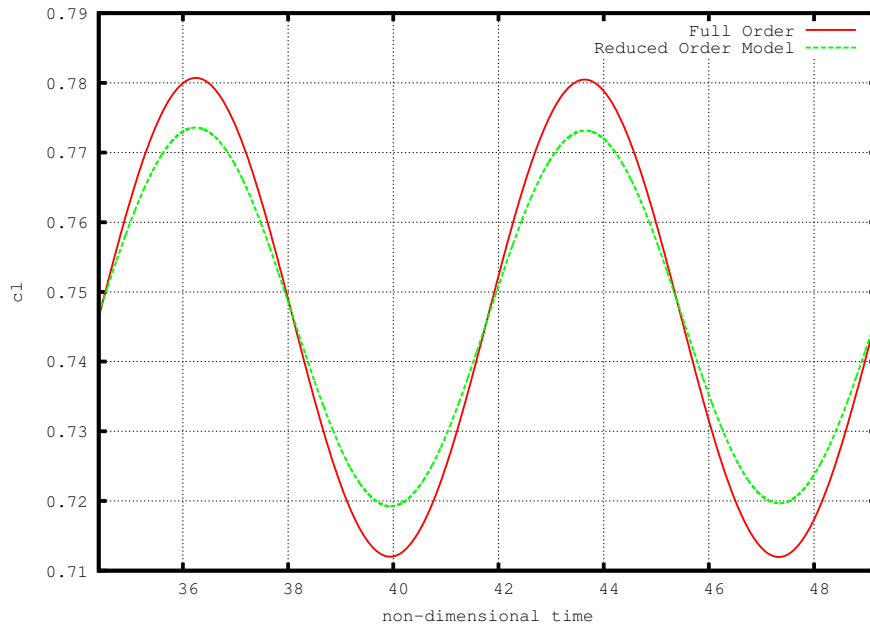
Σχήμα 141: $6^\circ \pm 1^\circ$, Συχνότητα = 0.75

Συχνότητα 0.85 (Περίοδος = 7.39 δευτ.)



Σχήμα 142: $6^\circ \pm 1^\circ$, Συχνότητα = 0.85

Συχνότητα 0.9 (Περίοδος = 6.98 δευτ.)



Σχήμα 143: $6^\circ \pm 1^\circ$, Συχνότητα = 0.9

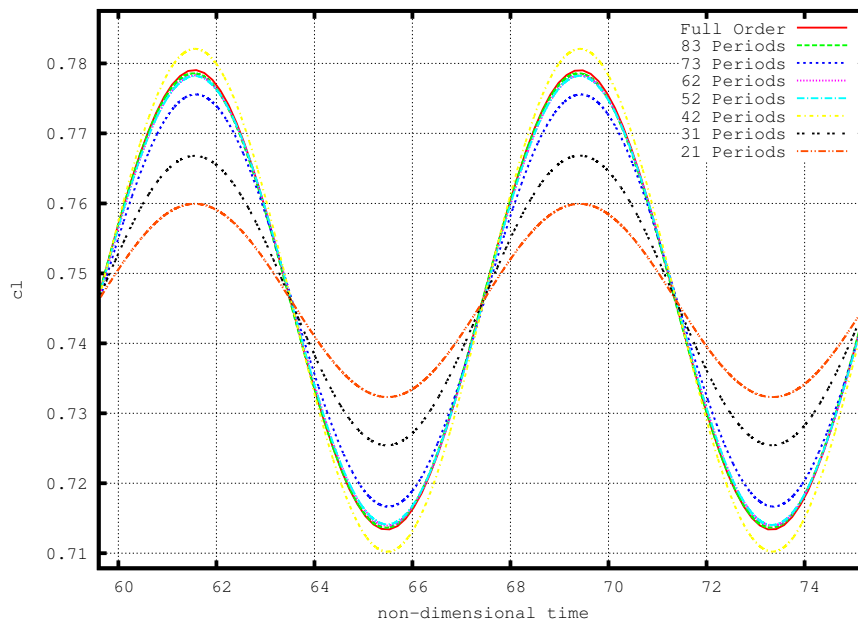
4.3.3 Επίδραση Του Μεγέθους Του Δείγματος Στα Αποτελέσματα

Το πώς οι POD μορφές λαμβάνουν την πληροφορία από το δείγμα των χρονοσειρών και πως διαμορφώνονται δεν είναι ξεκάθαρο και όπως αποδείχθηκε από τις εφαρμογές δεν είναι απλό, με την έννοια πως πιο άμεση σχέση μεταξύ του πλήρους δυναμικού συστήματος και του συστήματος μειωμένης τάξης βρίσκεται στην κατασκευή των μορφών. Επομένως χρήζει μεγάλης προσοχής. Στην ενότητα αυτή θα μελετηθεί η επίδραση του μεγέθους του δείγματος στα αποτελέσματα. Εφαρμόζεται το ίδιο σετ αρχικών συνθηκών στο ROM αλλά κάθε φορά οι μορφές έχουν προκύψει από διαφορετικό μέγεθος αρχικού συνόλου. Δηλαδή έχουν συμπεριληφθεί περισσότερες χρονοσειρές χωρίς να αλλάζει κάτι στα δεδομένα. Πρόκειται για αεροτομή NACA 0012 σε ταλαντούμενη εξωτερική ροή με μέση γωνία ταλάντωσης 6° και εύρος 1° σε 0.5 Mach. Οι μορφές που επιλέγονται προκύπτουν από την ενότητα 4.1. Δίνεται βάρος στο εύρος μιας και αυτό είναι η αρχική ένδειξη επάρκειας ή μη των αποτελεσμάτων. Έτσι παρατηρώντας το σχήμα 18 επιλέγεται η απόσταση της δειγματοληψίας και ο αριθμός των μορφών που θα συμπεριληφθούν στο ROM. Αυτά είναι

- 31 POD μορφές
- Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.

Με αυτά τα δεδομένα και χωρίς να μεταβληθούν θα διερευνηθεί η επίδραση του αριθμού των χρονοσειρών .

Είναι εμφανής ο ρόλος του μεγέθους του δείγματος στα αποτελέσματα. Οι



Σχήμα 144: $6^\circ \pm 1^\circ$, Απόσταση Δειγματοληψίας = 1.97 δευτ.

POD μορφές ‘προπονήθηκαν’ με 83 , 62 και 52 περιόδους και τα συστήματα που προέκυψαν έδωσαν αποτελέσματα που φαίνονται στο σχήμα 144 όπου τα αντίστοιχα

είναι σχεδόν συμπίπτουν μεταξύ τους. Με δείγμα που περιέχει 73 περιόδους παρατηρείται μια μικρή μείωση στο εύρος αλλά το αποτέλεσμα συνεχίζει να ικανοποιεί τη στιγμή που δείγμα των χρονοσειρών γίνεται μικρότερο φτάνοντας να περιέχει 31 και 21 περιόδους δίνει αποτελέσματα όπου το εύρος της ταλάντωσης είναι μικρότερο και συνεχίζει να μειώνεται με περεταίρω μείωσή του. Γίνεται κατανοητό πως άλλο ένα χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι πως απαιτεί όσο το δυνατόν περισσότερη πληροφορία από το πλήρες μοντέλο ακόμα και αν το πρόβλημα που μελετάται είναι περιοδικό όπως στην συγκεκριμένη περίπτωση .

5 Συμπεράσματα

Μετά την ολοκλήρωση των πρώτων κεφαλαίων τα συμπεράσματα αφορούν την κατασκευή και την εφαρμογή του μοντέλου. Η διακριτή θεωρία POD αποτελείται από συγκεκριμένα βήματα. Οι εφαρμογές που βρίσκονται στη βιβλιογραφία είναι αρκετές, όμως απουσιάζουν οι λεπτομέρειες και κάνουν την κατασκευή του μοντέλου μειωμένης τάξης αρκετά περίπλοκη γενικώς. Τα σημεία που εμφανίστηκαν δυσκολίες ήταν κυρίως η γραμμικοποίηση των εξισώσεων Euler καθώς και η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στο γραμμικοποιημένο σύστημα. Στην εφαρμογή του μοντέλου για επαλήθευση αλλά και κατά την παραμετρική μελέτη δεν υπάρχουν διαθέσιμες βιβλιογραφικές αναφορές για πλήρη και ευρεία διερεύνηση ενός μοντέλου βασισμένου στη μέθοδο POD όπως στην παρούσα διπλωματική εργασία. Έτσι δεν ήταν δυνατό να γίνει επαλήθευση αποτελεσμάτων με βάση άλλες μελέτες.

Αν πρέπει να απαντηθεί μονολεκτικά η ερώτηση αν η μέθοδος 'δουλεύει', η απάντηση είναι καταφατική. Δύο ήταν οι στόχοι τους οποίους έπρεπε να πετύχει. Ο πρώτος είναι η ακριβής αναπαράσταση ροϊκών μεταβλητών του προβλήματος που μελετάται και ο δεύτερος είναι να επιτευχθεί αυτό σε υπολογιστικούς χρόνους που κάνουν τη μέθοδο συμφέρουσα.

Αρκετές διαφοροποιήσεις παρατηρήθηκαν σε σχέση με τη θεωρία της μεθόδου αλλά και σε σχέση με τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Δύο είναι τα σημεία που αξίζει να σταθούμε. Αρχικά η θεωρία αναφέρει πως όσο περισσότερες μορφές συμπεριλαμβάνονται στην επίλυση του μοντέλου και στην ανασύνθεση των ροϊκών μεταβλητών, τόσο καλύτερα προσεγγίζεται. Η πρόταση αυτή δεν επαληθεύεται από τα αποτελέσματα. Σε πολλές περιπτώσεις μεγάλως αριθμός POD μορφών οδήγησαν σε σύστημα μειωμένης τάξης ασταθές. Επίσης παρατηρώντας κάθε φορά την ταλάντωση του $c1$ της αεροτομής και συγκρίνοντας το με εκείνο του κώδικα Euler, αύξηση του αριθμού των μορφών που επιλέγονται οδηγεί πολλές φορές σε αύξηση του σφάλματος, άλλοτε σε μείωση και άλλοτε σε μια αλληλουχία αύξησης και μείωσης με ακανόνιστο ρυθμό. Άλλο ένα σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από το 4ο κεφάλαιο αφορά τη διαφορά φάσης, η εμφάνιση της οποίας δείχνει πως πρέπει να μελετηθεί παραπάνω το φαινόμενο. Στη διπλωματική αυτή μελετήθηκε καθολικά το φαινόμενο επιλύοντας το μοντέλο σε διάφορα σετ αρχικών δεδομένων, σε μία προσπάθεια να προκύψει κάποιο συμπέρασμα σχετικά με τον λόγο εμφάνισης της. Τελικώς το φαινόμενο δεν ακολουθεί κάποιο κανόνα που επιτρέπει να γίνει κάποιου είδους πρόβλεψη της εμφάνισης της διαφοράς φάσης, ούτε γίνεται πλήρως κατανοητή η αιτία ύπαρξής της. Για τον λόγο αυτό αποφασίστηκε να μελετηθεί η συμπεριφορά του POD μοντέλου σε εξωτερική διέγερση διπλής συχνότητας. Σκοπός ήταν να παρατηρηθεί αν το μοντέλο πλέκει τις δύο συχνότητες μεταξύ τους ή τις κρατά ακέραιες. Στην πρώτη περίπτωση το συμπέρασμα θα ήταν πως η μέθοδος με τον τρόπο που εφαρμόστηκε ήταν λανθασμένη. Τελικώς τα αποτελέσματα της ενότητας 4.2 δείχνουν πως οι δύο συχνότητες μένουν ακέραιες χωρίς να πλέκονται μεταξύ τους. Επομένως η διαφορά φάσης ανάμεσα στο $c1$ της μεθόδου POD και σε αυτό του κώδικα Euler δεν οφείλεται σε σφάλμα της μεθόδου ή του κώδικα.

Εφαρμόστηκε επίσης παραμετρική μελέτη στην ενότητα 4.3 όπου μεταβάλλεται το εύρος της ταλάντωσης της εξωτερικής διέγερσης και με POD μορφές που προέκυψαν από ένα πρόβλημα και χωρίς να υπολογιστούν ξανά. Τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά καθώς το μοντέλο αποκρίνεται σε αυτή τη μεταβολή του εύρους ειδικά σε χαμηλές τιμές. Αυτή η παραμετρική μελέτη είναι και ο λόγος ύπαρξης των μοντέλων μειωμένης τάξεως. Στην ίδια ενότητα εφαρμόζεται επίσης παραμετρική μελέτη με μόνη παράμετρο τη συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης.

Η αποκριση ελέγχεται παρατηρώντας την ταλάντωση του συντελεστή άνωσης της αεροτομής. Η μέθοδος σε αυτή τη μελέτη έδωσε αποτελέσματα με εξαιρετικά μικρό σφάλμα σε ότι αφορά την τιμή της αναμενόμενης περιόδου και αυτή που τελικώς προέκυψε. Μια παρατήρηση στην εν λόγω μελέτη είναι μια ακανόνιστη συμπεριφορά του σφάλματος του εύρους τη στιγμή που το εύρος της ταλάντωσης παρέμεινε το ίδιο. Το εύρος του συντελεστή άνωσης της αεροτομής που προέκυψε από την επίλυση του πλήρους συστήματος και που χρησιμοποιήθηκε για επαλήθευση δεδομένων, μεταβλήθηκε στις διάφορες συχνότητες και ίσως αυτός είναι ο λόγος που δεν παρέμενε σταθερό το σφάλμα του εύρους του ROM ή έστω δεχόμαστε ότι δεν θα έπρεπε να μένει σταθερό.

Άλλο ένα συμπέρασμα που προκύπτει από τις εφαρμογές είναι πως η μέθοδος είναι ευαίσθητη σε διάφορους παράγοντες πέρα από τις παραμέτρους του κάθε προβλήματος, όπως για παράδειγμα γύρω από ποιά κατάσταση αναφοράς γραμμικοποιούνται οι εξισώσεις Euler , την διάρκεια εκπαίδευσης κ.α. Το γεγονός αυτό είναι ένδειξη πως η κατασκευή και η εφαρμογή του μοντέλου πρέπει να γίνεται με βάση το πρόβλημα που μελετάται και δεν υπακούει σε προκαθορισμένα βήματα.

Οι ενδείξεις της διπλωματικής είναι πως η μέθοδος με μπορεί να δώσει ακριβή μοντέλα με τεράστια οικονομία υπολογιστικού χρόνου. Η ευαισθησία της σε διάφορες παραμέτρους την κάνει να χρήζει μεγάλης προσοχής στις εκάστοτε εφαρμογές, στον τρόπο που κατασκευάζεται και στον τρόπο που επιλύεται το μοντέλο που προκύπτει αλλά τελικώς προκύπτει αποδοτική και οι επιδώσεις της ξεχωρίζουν όσο η τάξη των δυναμικών συστημάτων που μελετώνται γίνεται μεγαλύτερη.

References

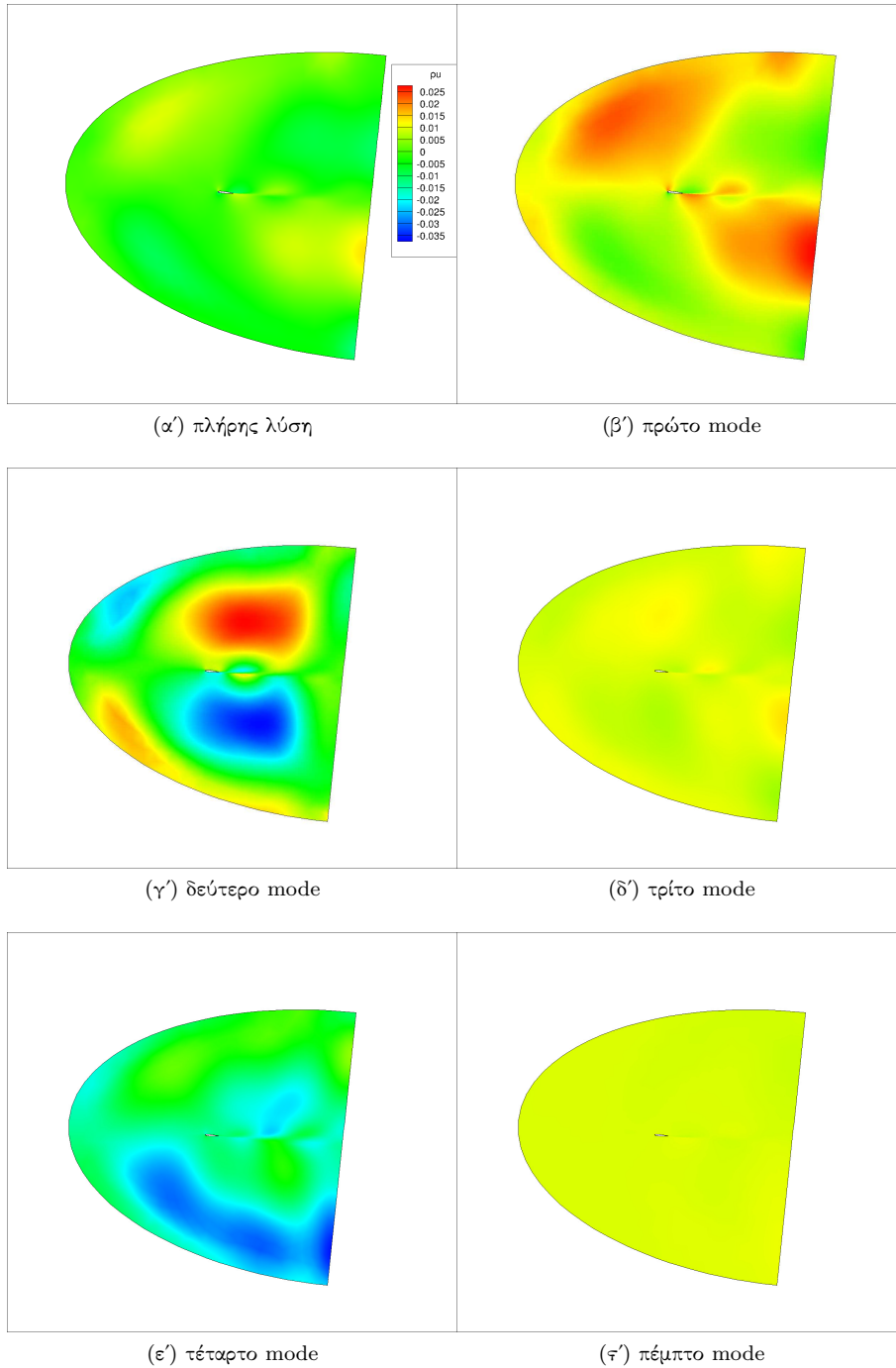
- [1] E. Dowell, K. Hall, and M. Romanowski, "Eigenmode analysis in unsteady aerodynamics: reduced order models," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 50, p. 371, 1997.
- [2] K. C. Hall, R. Florea, and P. J. Lanzkron, "A reduced order model of unsteady flows in turbomachinery," *Journal of Turbomachinery*, vol. 117, no. 3, pp. 375–383, 1995.
- [3] M. Romanowski and E. Dowell, "Reduced order euler equations for unsteady aerodynamic flows: numerical techniques.," *AIAA paper 96-0528*, 1996.
- [4] K. Hall, J. Thomas, and E. Dowell, "Reduced-order modelling of unsteady small-disturbance flows using a frequency-domain proper orthogonal decomposition technique," *identity*, vol. 5, no. 679, p. 8.
- [5] T. Kim, "Frequency-Domain Karhunen-Loeve Method and Its Application to Linear Dynamic Systems," *AIAA Journal*, vol. 36, pp. 2117–2123, Nov. 1998.
- [6] J. Thomas, K. Hall, and E. Dowell, "Reduced-order aeroelastic modeling using proper-orthogonal decompositions," in *Proceedings of the CEAS/AIAA/ICASE/NASA Langley International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, 1999.
- [7] C. Hayashi, . Shepard, Sam, I. Winkler, . Glenn, Scott, . Harris, Ed, D. Quaid, B. Hershey, P. Kaufman, R. Chartoff, and T. Wolfe, *Nonlinear oscillations in physical systems / Chihiro Hayashi*. New York : McGraw-Hill, rev. and enl. ed ed., 1964. First published in 1953 under title: Forced oscillations in non-linear systems.
- [8] K. Hall, J. Thomas, and W. Clark, "Computation of unsteady nonlinear flows in cascades using a harmonic balance technique," *AIAA journal*, vol. 40, no. 5, pp. 879–886, 2002.
- [9] G. Gripenberg, S. Londen, and O. Staffans, *Volterra integral and functional equations*, vol. 34. Cambridge Univ Pr, 1990.
- [10] C. Pettit and P. Beran, "Application of proper orthogonal decomposition to the discrete euler equations," *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 55, no. 4, pp. 479–497, 2002.
- [11] J. Blazek, *Computational fluid dynamics: principles and applications*, vol. 1. Elsevier, 2005.
- [12] E. Dowell and D. Tang, *Dynamics of very high dimensional systems*. World Scientific Pub Co Inc, 2003.
- [13] J. Lumley, "The structure of inhomogeneous turbulent flows," *Atmospheric turbulence and radio wave propagation*, pp. 166–178, 1967.
- [14] H. Bakewell Jr and J. Lumley, "Viscous sublayer and adjacent wall region in turbulent pipe flow," *Physics of fluids*, vol. 10, p. 1880, 1967.

- [15] F. Payne and J. Lumley, “Large eddy structure of the turbulent wake behind a circular cylinder,” *Physics of Fluids*, vol. 10, p. S194, 1967.
- [16] L. Sirovich, “Turbulence and the dynamics of coherent structures. part i: Coherent structures,” *Quarterly of applied mathematics*, vol. 45, no. 3, pp. 561–571, 1987.
- [17] L. Sirovich and H. Park, “Turbulent thermal convection in a finite domain: Part i. theory,” *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, vol. 2, p. 1649, 1990.
- [18] K. Ball, L. Sirovich, and L. Keefe, “Dynamical eigenfunction decomposition of turbulent channel flow,” *International journal for numerical methods in fluids*, vol. 12, no. 6, pp. 585–604, 1991.
- [19] D. Hilberg, W. Lazik, and H. Fiedler, “The application of classical pod and snapshot pod in a turbulent shear layer with periodic structures,” *Applied scientific research*, vol. 53, no. 3, pp. 283–290, 1994.
- [20] L. Pastur, F. Lusseyran, Y. Fraigneau, and B. Podvin, “Determining the spectral signature of spatial coherent structures in an open cavity flow,” *Physical review E*, vol. 72, no. 6, p. 065301, 2005.
- [21] A. Liberzon, R. Gurka, I. Tiselj, and G. Hetsroni, “Spatial characterization of the numerically simulated vorticity fields of a flow in a flume,” *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, vol. 19, no. 2, pp. 115–125, 2005.
- [22] D. Rempfer and H. Fasel, “Dynamics of three-dimensional coherent structures in a flat-plate boundary layer,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 275, pp. 257–284, 1994.
- [23] B. Pelliccia-Kraft and D. Watt, “Visualization of coherent structure in scalar fields of unsteady jet flows with interferometric tomography and proper orthogonal decomposition,” *Experiments in fluids*, vol. 30, no. 6, pp. 633–644, 2001.
- [24] P. Holmes, J. Lumley, and G. Berkooz, *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge Univ Pr, 1998.

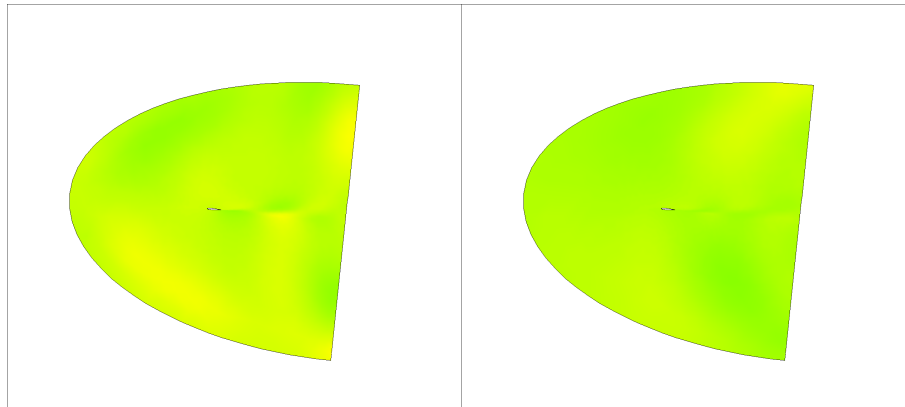
A' Αναπαράσταση modes

Παρουσιάζονται οι μορφές των modes που αντιστοιχούν στις μεταβλητές : $[\rho U, \rho V, \rho E]$ σε σύγκριση με την πλήρη λύση σε όλο το υπολογιστικό χωρίο και στην περιοχή γύρω από την ακμή πρόσπτωσης.

Οι παρατηρήσεις είναι όμοιες με εκείνες του κεφαλαίου 3.5 και επικεντρώνονται στην ομοιότητα της πλήρους λύσης με το πρώτο mode και στις χαμηλής ενέργειας μορφές των τελευταίων modes . Να υπενθυμίσουμε πως απουσιάζουν οι τιμές στις εικόνες των modes καθώς δεν έχουν ενδιαφέρον οι τιμές αυτές καθάυτες αλλά η σχέση μεταξύ τους.

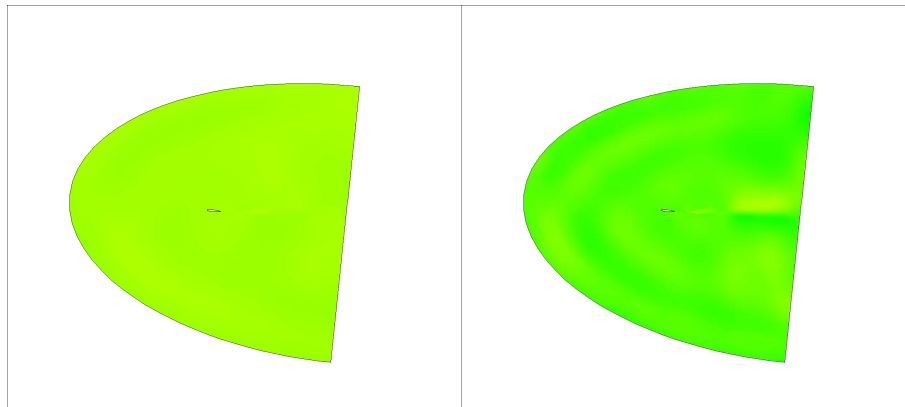


Σχήμα 145: Πλήρης λύση και modes ρU



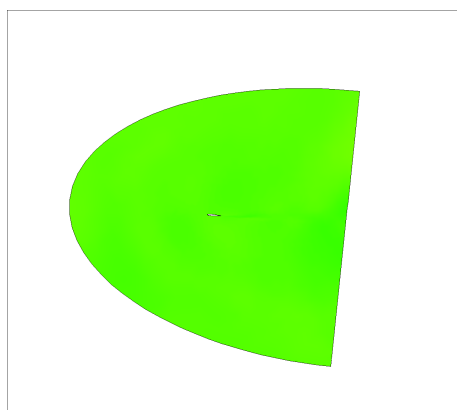
(ζ) έβδομο mode

(η) δέκατο mode



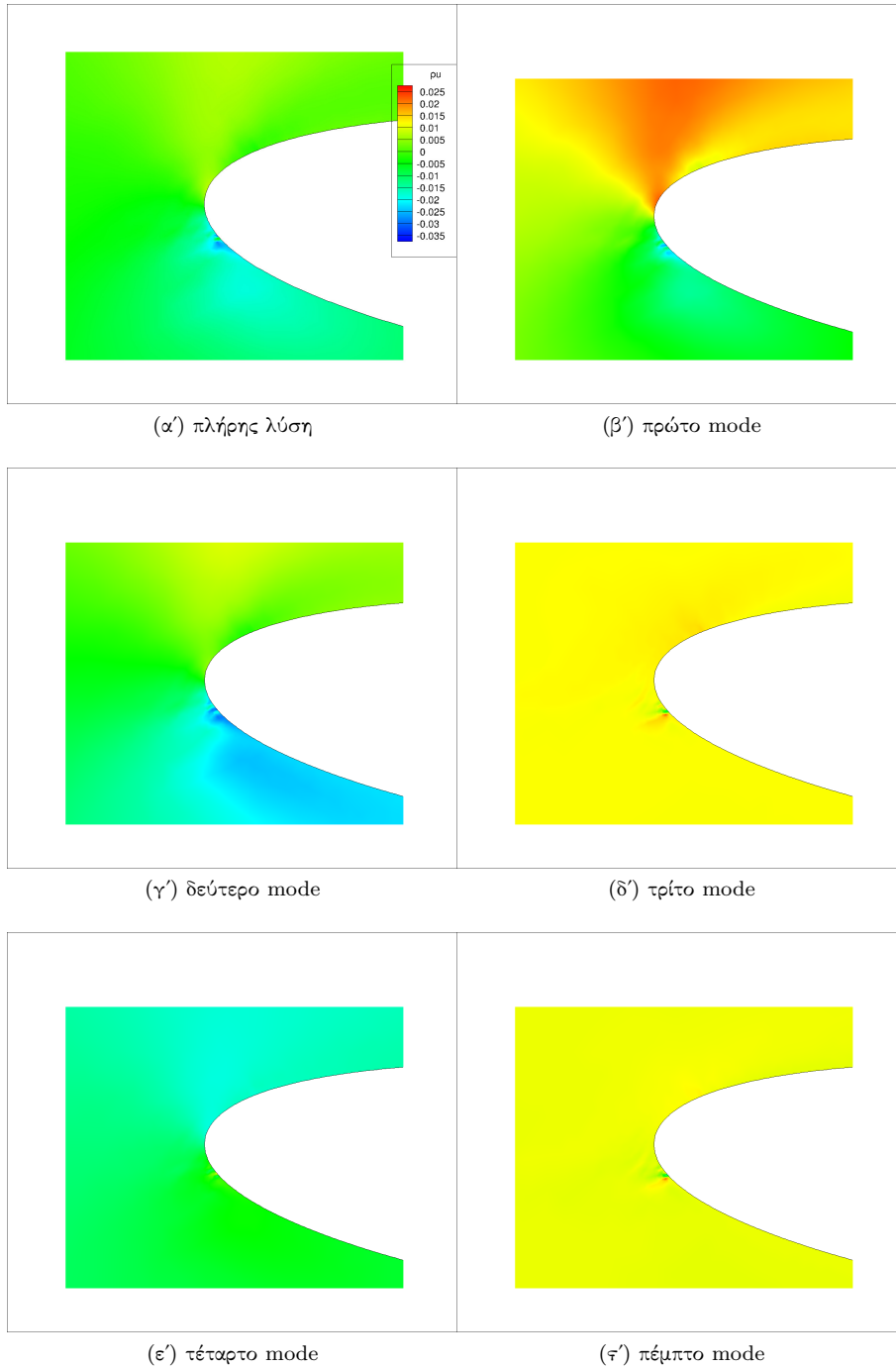
(θ) εικοστό mode

(ι) τριακοστό mode

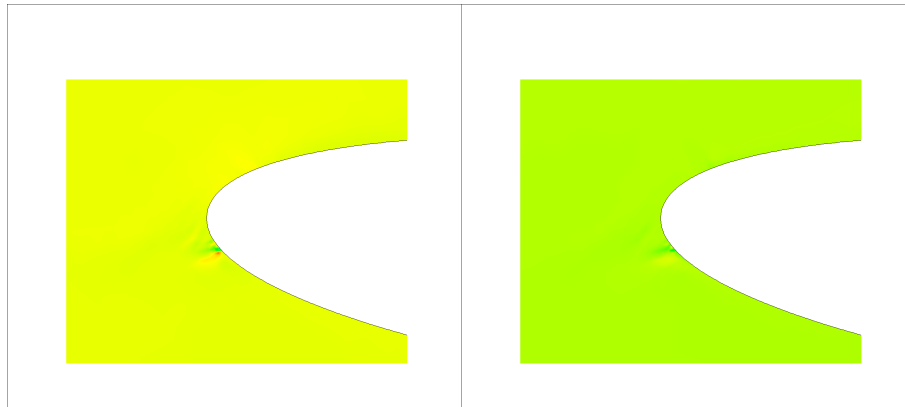


(ια) τεσσαρακοστό πρώτο mode

Σχήμα 145: Πλήρης λύση και modes ρU

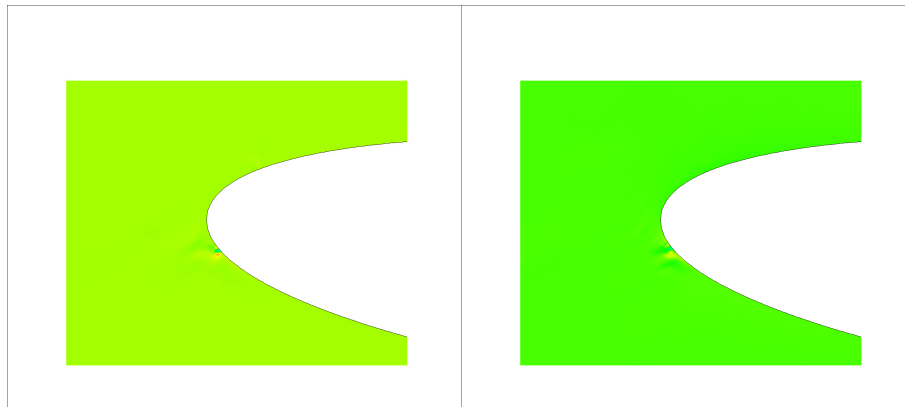


Σχήμα 146: Πλήρης λύση και modes ρU , περιοχή ακμής πρόσπτωσης



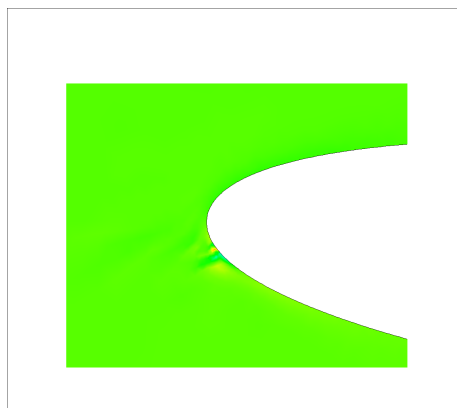
(ζ) έβδομο mode

(η) δέκατο mode



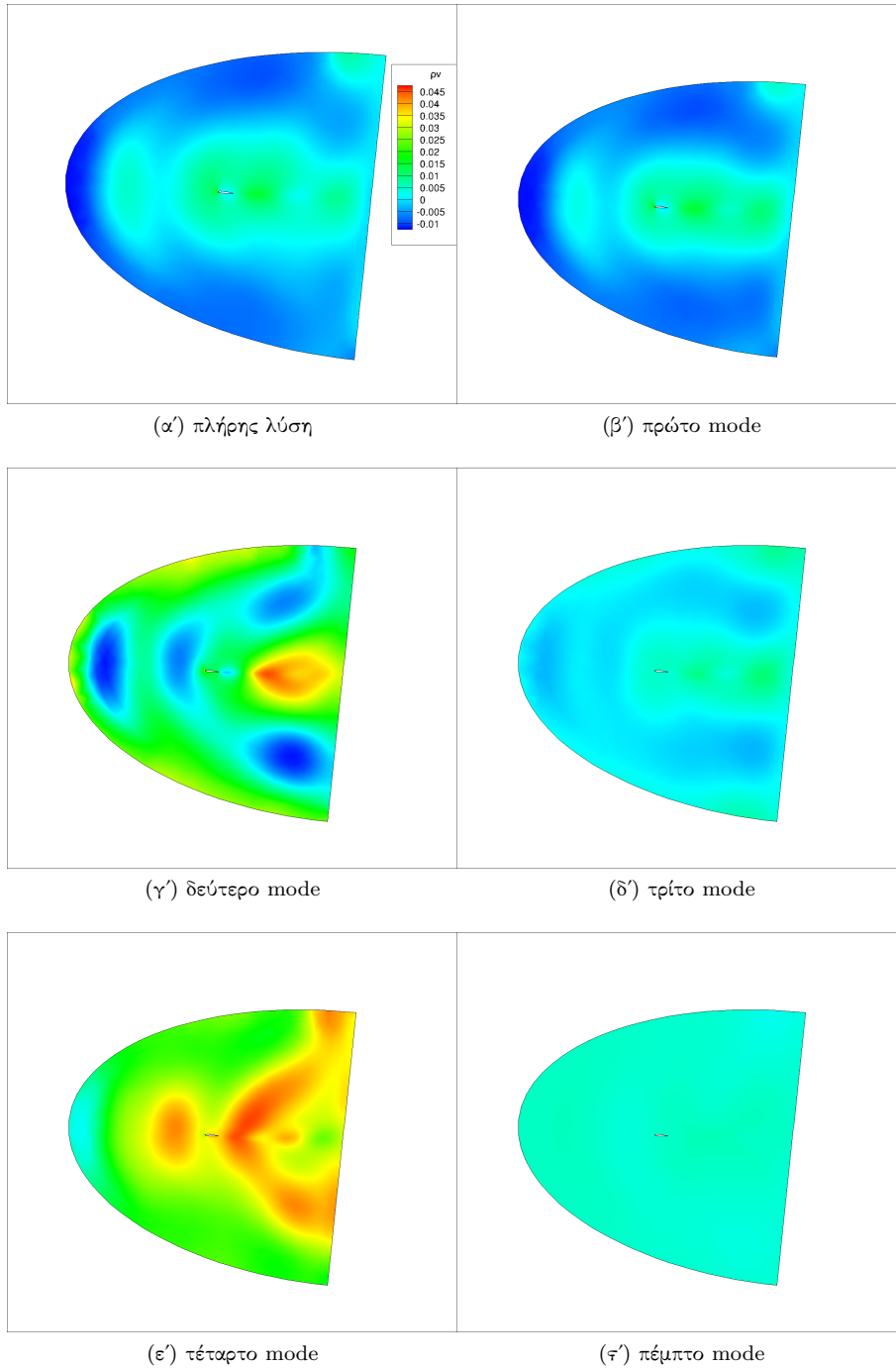
(θ) εικοστό mode

(ι) τριακοστό mode

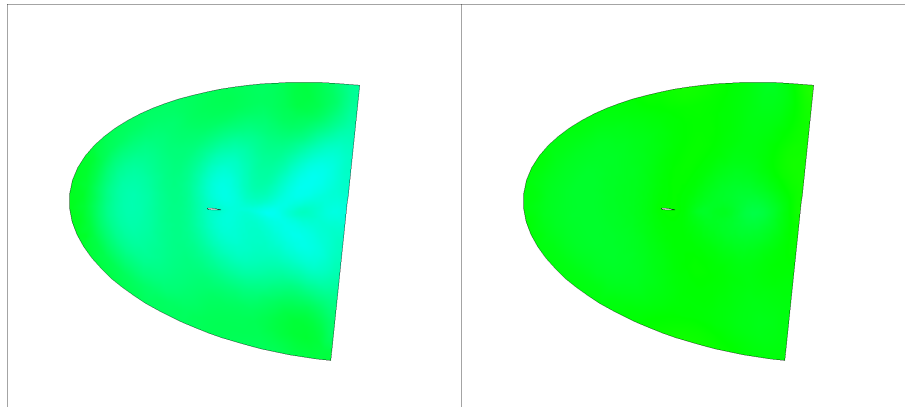


(ια') τεσσαρακοστό πρώτο mode

Σχήμα 146: Πλήρης λύση και modes ρU , περιοχή ακμής πρόσπτωσης

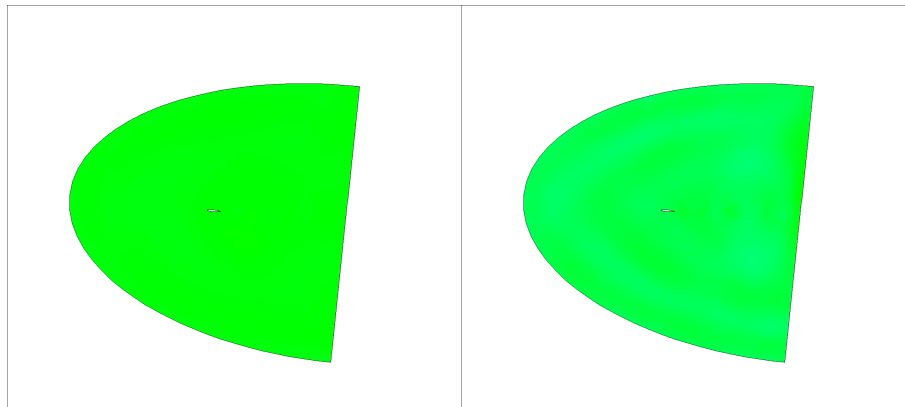


Σχήμα 147: Πλήρης λύση και modes ρV



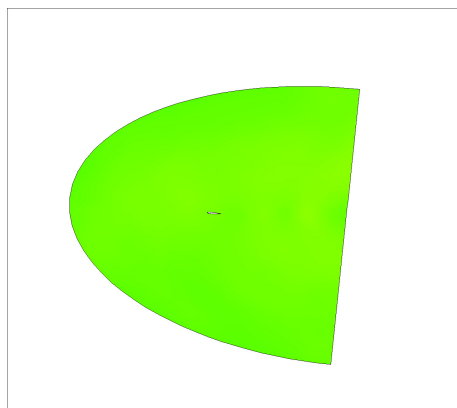
(ζ) έβδομο mode

(η) δέκατο mode



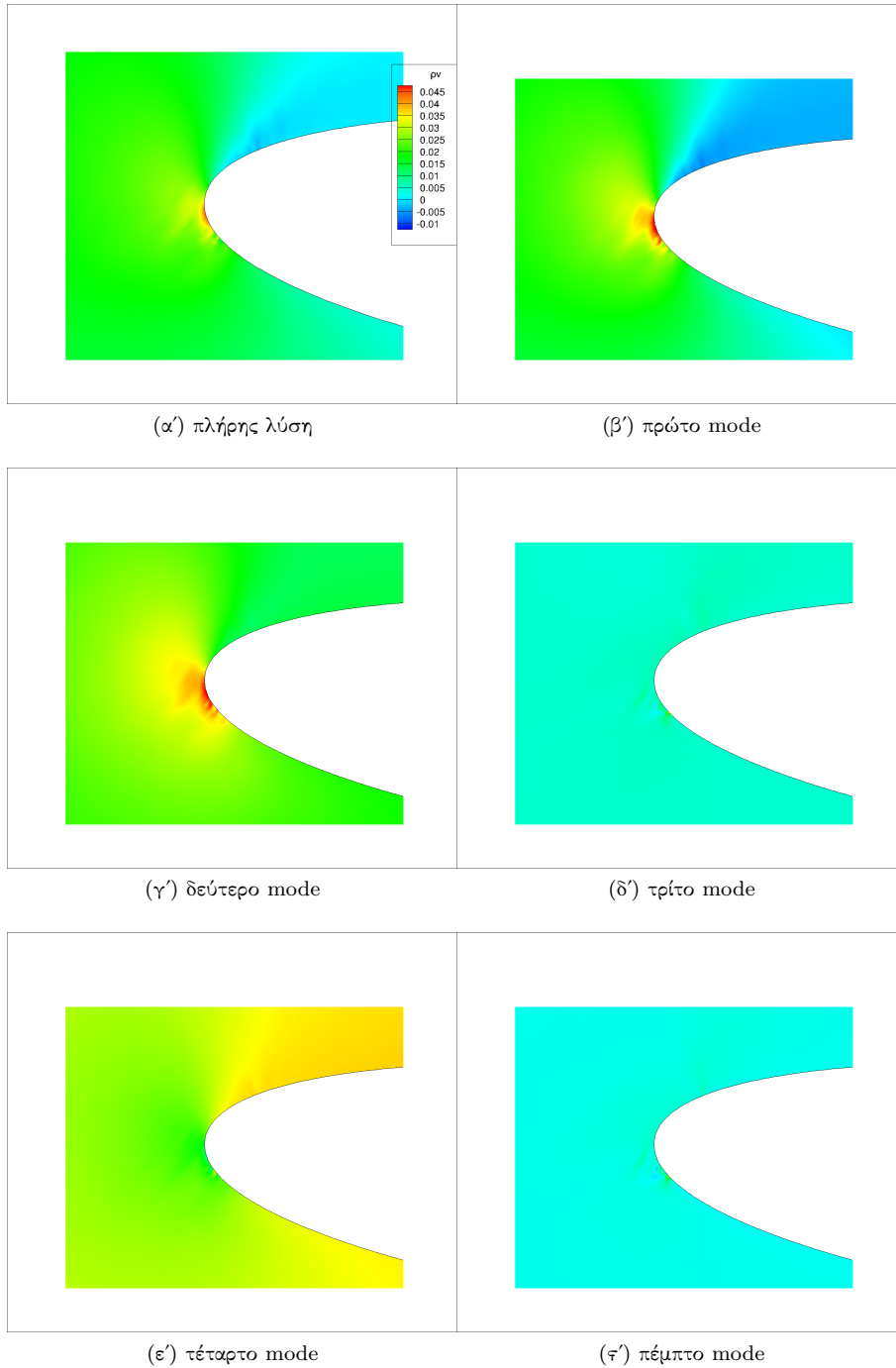
(θ) εικοστό mode

(ι) τριακοστό mode

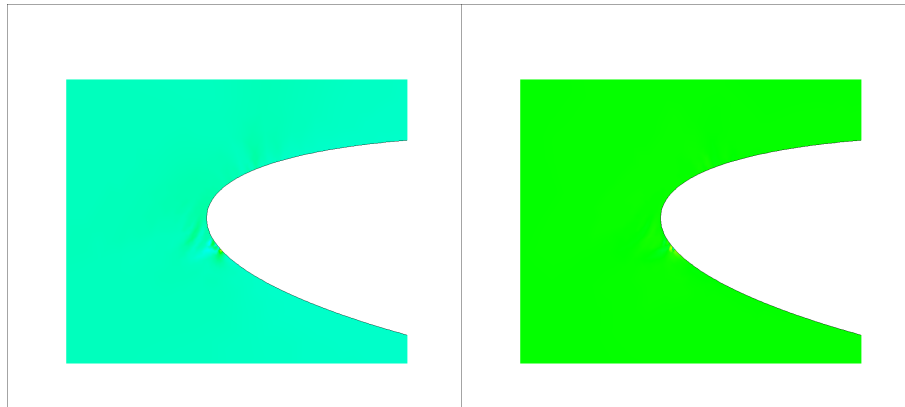


(ια') τεσσαρακοστό πρώτο mode

Σχήμα 147: Πλήρης λύση και modes ρV

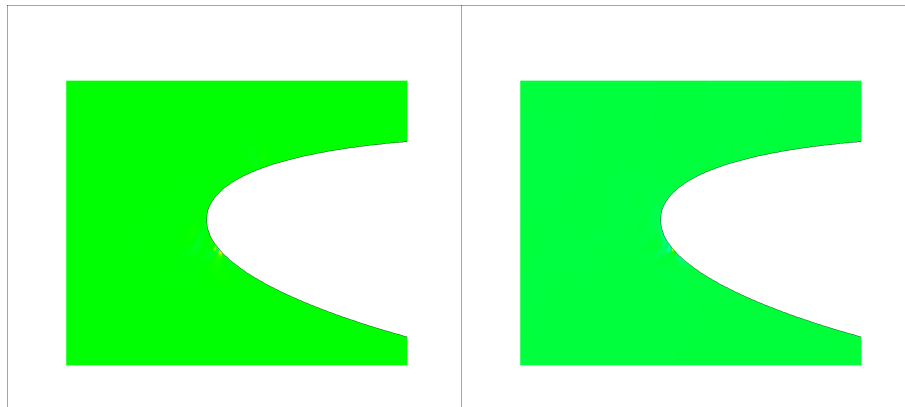


Σχήμα 148: Πλήρης λύση και modes ρV , περιοχή ακμής πρόσπτωσης



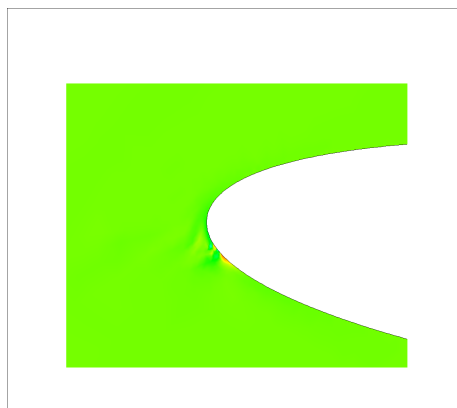
(ζ) έβδομο mode

(η) δέκατο mode



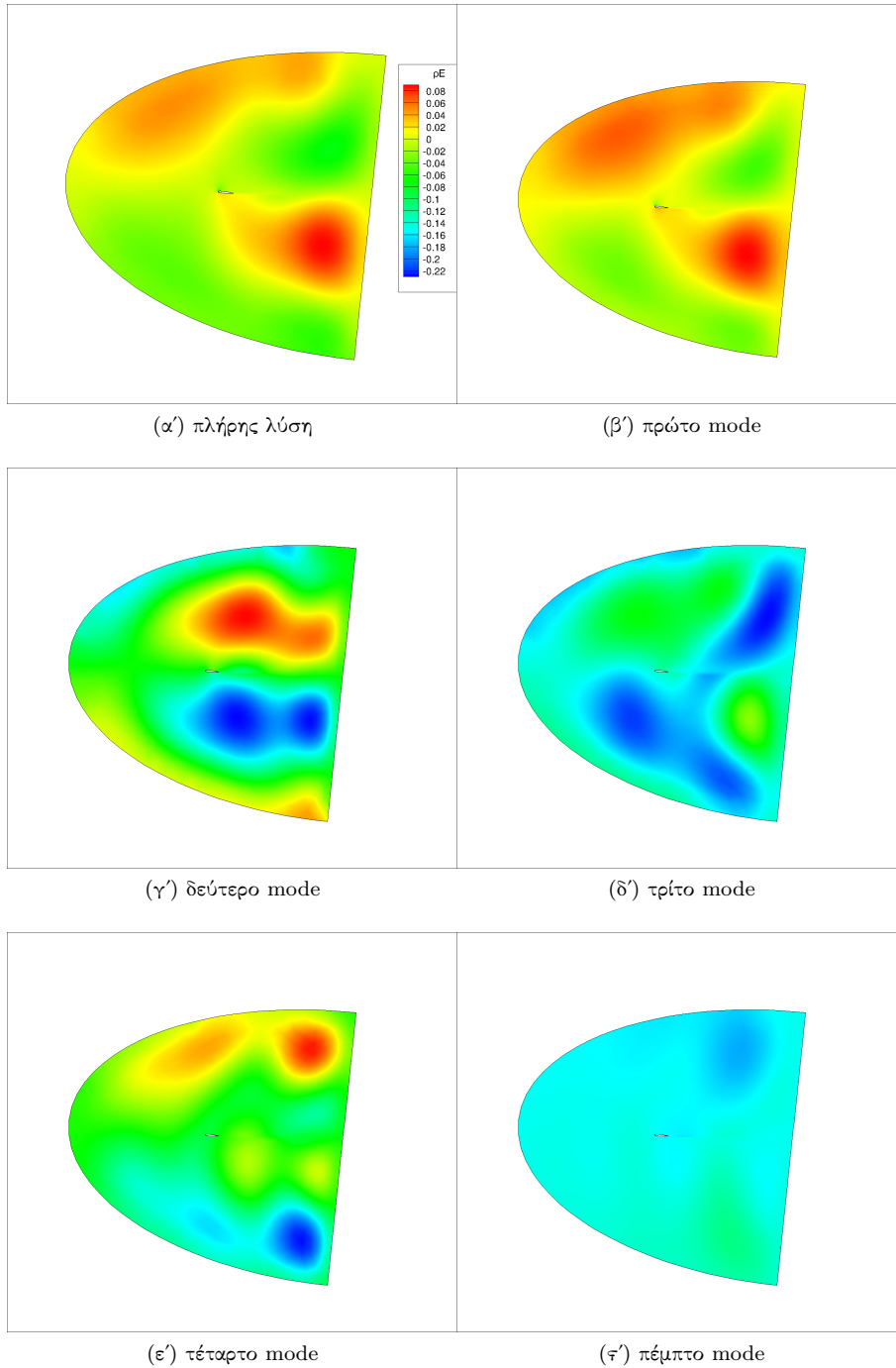
(θ) εικοστό mode

(ι) τριακοστό mode

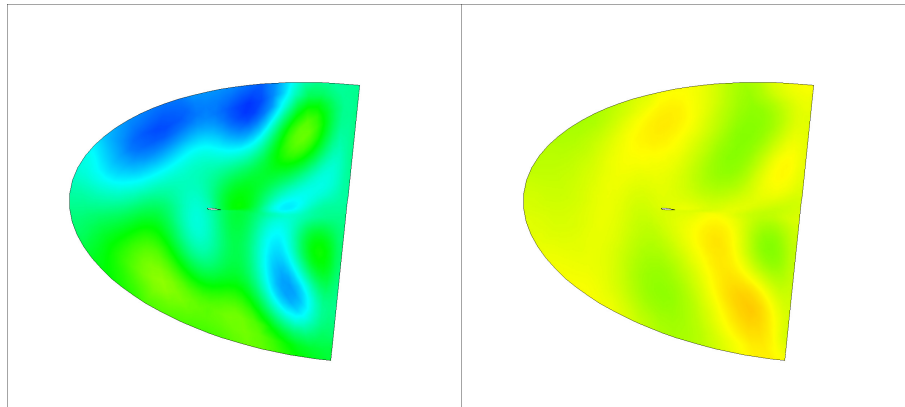


(ια) τεσσαρακοστό πρώτο mode

Σχήμα 148: Πλήρης λύση και modes ρV , περιοχή ακμής πρόσπτωσης

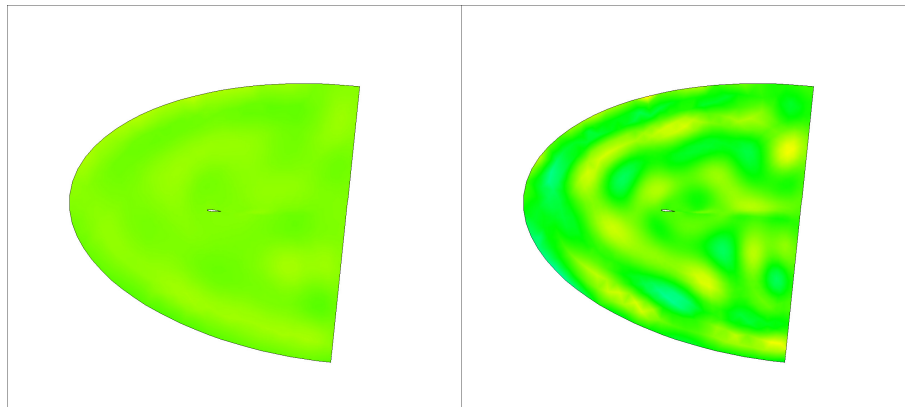


Σχήμα 149: Πλήρης λύση και modes ρE



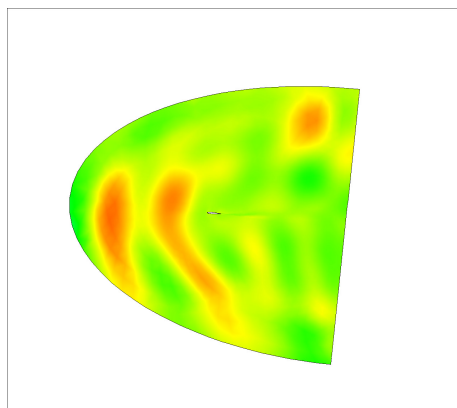
(ζ) έβδομο mode

(η) δέκατο mode



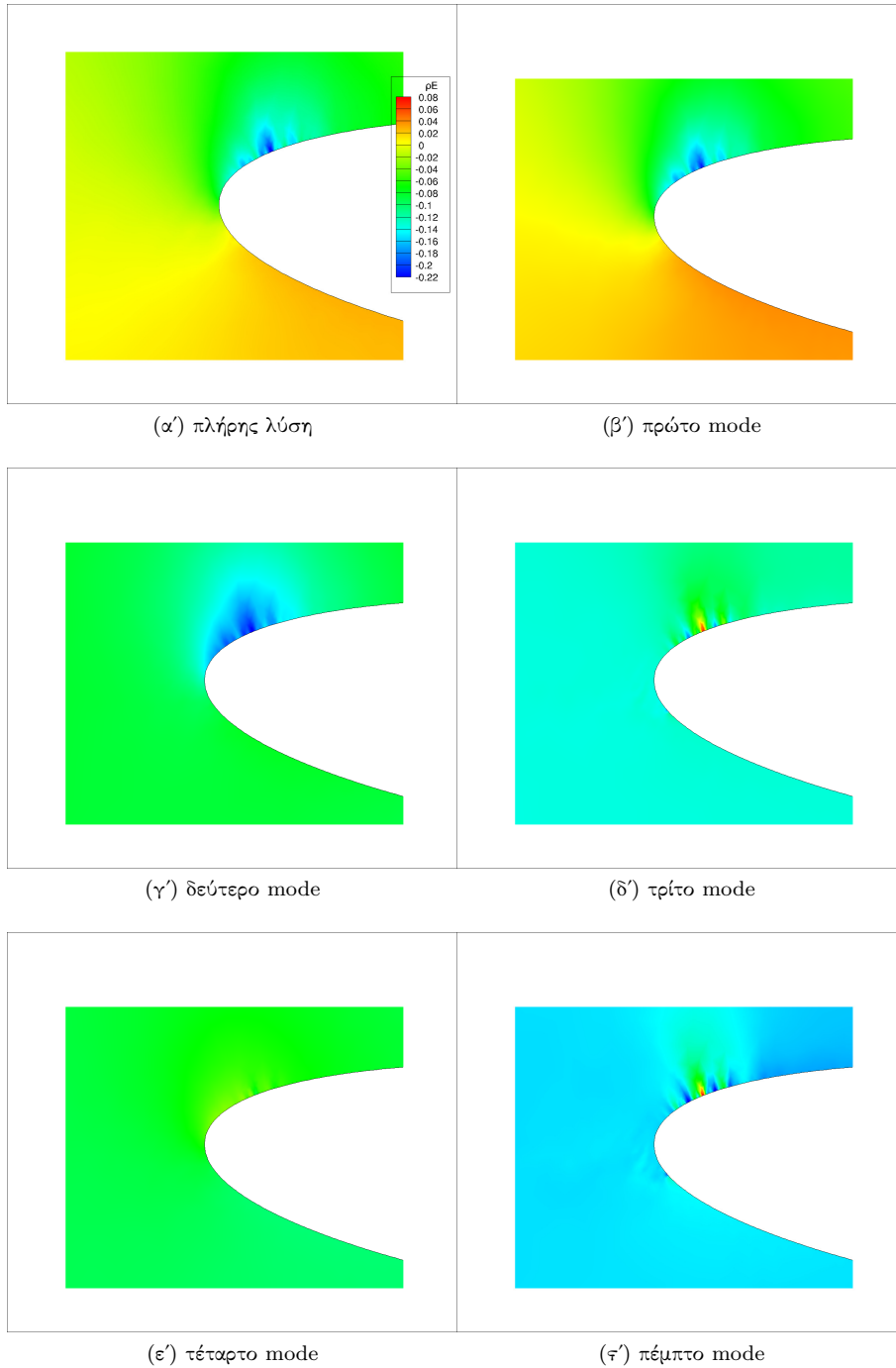
(θ) εικοστό mode

(ι) τριακοστό mode

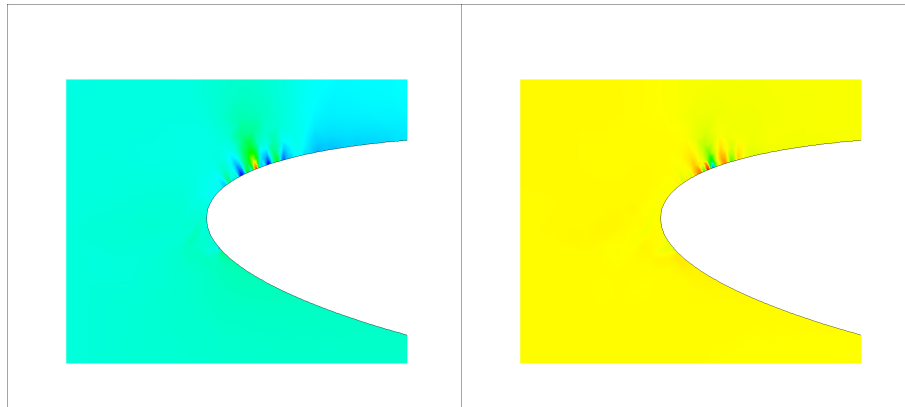


(ια) τεσσαρακοστό πρώτο mode

Σχήμα 149: Πλήρης λύση και modes ρE

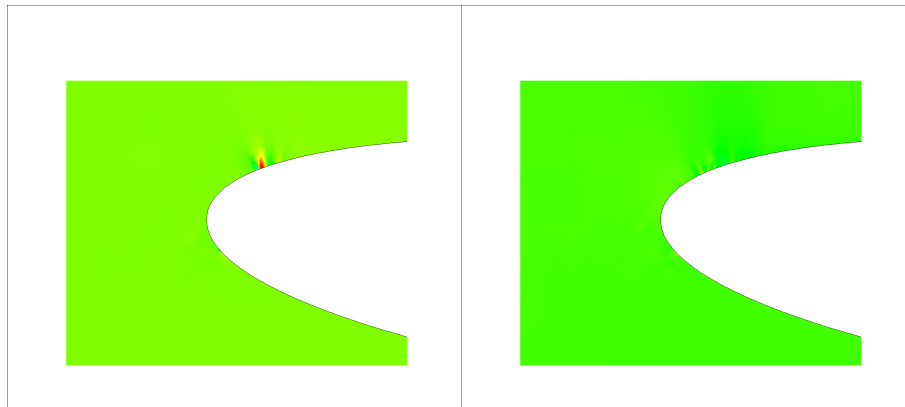


Σχήμα 150: Πλήρης λύση και modes ρE , περιοχή ακμής πρόσπτωσης



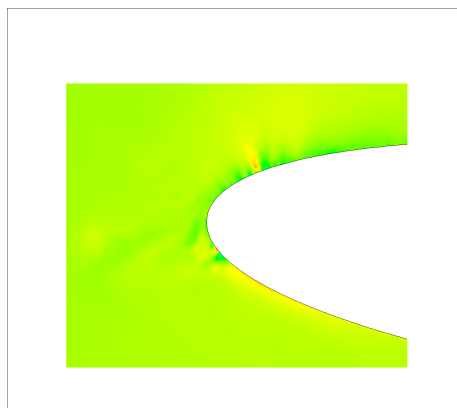
(ζ) έβδομο mode

(η) δέκατο mode



(θ) εικοστό mode

(ι) τριακοστό mode



(ια) τεσσαρακοστό πρώτο mode

Σχήμα 150: Πλήρης λύση και modes ρE , περιοχή ακμής πρόσπτωσης