



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Το καθιερωμένο πρότυπο των
στοιχειωδών σωματιδίων, τα
πρότυπα $SU(5)$ και Pati-Salam

Σαραντής Δημήτρης
Επιβλέπων καθηγητής: Νίκος Τράκας

Περιεχόμενα

1	Σχετικότητα και κβαντομηχανική	5
1.1	Εξίσωση Shrodinger	6
1.2	Εξίσωση συνέχειας	7
1.3	Στοιχεία σχετικότητας	8
1.4	Εξίσωση Klein-Gordon	11
1.5	Εξίσωση Dirac	14
1.6	Λύσεις εξίσωσης Dirac	18
2	Λαγκρανζιανός φορμαλισμός	27
2.1	Λαγκρανζιανή σε θεωρία πεδίου	29
2.2	Νόμοι διατήρησης και συμμετρίες - Θεώρημα Noether	31
2.3	Μετασχηματισμοί βαθμίδας	34
2.4	Συμμετρίες και στοιχεία θεωρίας ομάδων	38
2.4.1	Συνεχείς και διακριτές ομάδες	39
2.5	Αβελιανές και μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας	40
3	Καθιερωμένο πρότυπο	45
3.1	Εισαγωγή	45
3.2	Αυθόρμητο σπάσιμο διακριτής συμμετρίας	46
3.3	Αυθόρμητο σπάσιμο ολικής συμμετρίας	48
3.4	Αβελιανή περίπτωση - Μηχανισμός Higgs	51
3.5	Μη αβελιανή περίπτωση	55
3.6	Θεωρίες βαθμίδας	58
3.6.1	Ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις	59
3.6.2	Ασθενείς/Ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις	59
3.6.3	Ισχυρές αλληλεπιδράσεις	61
3.7	Το μοντέλο των Weinberg-Salam	63
3.8	Φορτισμένα και αφόρτιστα ρεύματα	69
3.9	Μάζες φερμιονίων	72
3.10	Ανάμιξη γενιών	74
3.11	Υπολογισμός της γωνίας θ συναρτήσει των μαζών των κουάρκ	77

4	Η ομάδα SU(5)	81
4.1	Εισαγωγή	81
4.2	Υπενθυμίσεις-Προβλήματα	82
4.3	Σταθερές σύζευξης	85
4.4	Προβλήματα	87
4.5	Κίνητρο για μεγαλοενοποίηση	87
4.6	Συμβολισμός	88
4.7	Άλγεβρες Lie	89
4.8	Αναπαραστάσεις	89
4.8.1	Αναπαραστάσεις της SU(n)	89
4.8.2	Θεμελιώδεις αναπαραστάσεις της SU(n)	92
4.9	Μεγαλο-ενοποίηση με SU(5)	92
4.9.1	Διανυσματικά μποζόνια	93
4.10	Κβάντωση του φορτίου	95
4.11	Προβλέψεις	98
4.12	Διάσπαση του πρωτονίου	101
4.13	Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας	103
4.14	Ενοποίηση συζεύξεων Yukawa	106
4.15	Συμπεράσματα της SU(5)	107
5	Το πρότυπο των Pati-Salam	109
5.1	Εισαγωγή	109
5.2	Το βασικό μοντέλο και οι παραλλαγές του	110
5.3	Φερμιόνια	110
5.4	Τα μεσόνια του βασικού μοντέλου	111
5.4.1	Φωτόνιο	112
5.4.2	Παραλλαγές του βασικού μοντέλου	113
5.5	Όρια στην μάζα των μεσονίων	114
5.6	Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας	116
5.6.1	Η λαγκρανζιανή του μοντέλου	117
5.6.2	Ο πίνακας μάζας	118
5.7	Μάζες φερμιονίων	120
5.7.1	Ο φερμιονικός όρος μάζας	120
5.7.2	Τα άμαζα νετρίνα	121
5.8	Πειραματικές συνέπειες	122
5.8.1	Η οκτέτα χρώματος των γλουονίων V(8)	122
5.8.2	Οι συνιστώσες χρώματος του φωτονίου U^0	122
5.8.3	Παραβίαση της parity	123
5.8.4	Παραβίαση διατήρησης βαρυονικού και λεπτονικού αριθμού 123	

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά στοιχεία σχετικότητας και κβαντομηχανικής

Η κβαντομηχανική θεωρία βασίζεται στα εξής αξιώματα[1] :

1)Κάθε φυσικά πραγματοποιήσιμη κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος περιγράφεται πλήρως από μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη κυματοσυνάρτηση Ψ .

2)Κάθε φυσικό μέγεθος που αφορά το σωματίδιο αντιπροσωπεύεται από έναν ερμιτιανό τελεστή \hat{A} .

3)Το μόνο δυνατό αποτέλεσμα της μέτρησης μιάς φυσικής ποσότητας είναι μία από τις ιδιοτιμές του τελεστή \hat{A} που την αντιπροσωπεύει.

4)Η πιθανότητα να μετρηθεί η ιδιοτιμή a_n ισούται με το απόλυτο τετράγωνο της προβολής της κατάστασης Ψ στην ιδιοκατάσταση του \hat{A} που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή a_n .

5)Μετά την μέτρηση που έδωσε την ιδιοτιμή a_n η κατάσταση του συστήματος γίνεται αυτόματα η Ψ_n .

6)Η χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης περιγράφεται από την εξίσωση Schrodinger.

1.1 Εξίσωση Shrodinger

Στην κλασική φυσική η σχέση που συνδέει την ενέργεια με την ορμή ενός σωματιδίου είναι η

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (1.1)$$

Επιλέγουμε ως τελεστές για την ενέργεια και την ορμή τους

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{και} \quad \hat{p} = -i\hbar \hat{\nabla}. \quad (1.2)$$

Αντικαθιστώντας αυτούς τελεστές στην εξίσωση ενέργειας-ορμής παίρνουμε :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \quad (1.3)$$

Μια πρώτη γενίκευση είναι να θεωρήσουμε την παρουσία δυναμικού. Σε αυτή την περίπτωση η σχέση ενέργειας και ορμής γίνεται

$$E = \frac{p^2}{2m} + V. \quad (1.4)$$

Αντικαθιστώντας και πάλι τους τελεστές παίρνουμε την εξίσωση :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = V\Psi \quad (1.5)$$

Ο τελεστής

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \quad (1.6)$$

ονομάζεται χαμιλτονιανή και στην περίπτωση όπου $V = 0$ η χαμιλτονιανή ονομάζεται ελεύθερη. Βλέπουμε πως $\hat{H}\Psi = \hat{E}\Psi$ δηλαδή οι ιδιοτιμές της χαμιλτονιανής αποτελούν τις δυνατές τιμές ενέργειας του συστήματος. Μια σημαντική παρατήρηση εδώ είναι πως λόγω της γραμμικότητας του τελεστή ανάδελτα και της παραγώγου κάθε γραμμικός συνδυασμός λύσεων της εξίσωσης Schrodinger είναι επίσης λύση της. Από την παρουσία μιγαδικών συντελεστών στην εξίσωση Schrodinger καταλαβαίνουμε πως οι κυματοσυναρτήσεις δεν αποτελούν παρατήρησιμα κύματα. Φυσική σημασία έχει το τετράγωνο της απόλυτης τιμής της Ψ καθώς μας δίνει την πιθανότητα ανά μονάδα όγκου να βρεθεί το σωματίδιο σε ένα σημείο ή περιοχή του χώρου.

Δηλαδή

$$P = |\Psi|^2 d^3x \quad (1.7)$$

με την συνολική πιθανότητα να είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 d^3x \quad (1.8)$$

που πρέπει προφανώς να ισούται με την μονάδα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 d^3x = 1 \quad (1.9)$$

Η παραπάνω συνθήκη ονομάζεται συνθήκη κανονικοποίησης και για να έχει ισχύ θα πρέπει η συνάρτηση να συγκλίνει. Συναρτήσεις με αυτή την ιδιότητα ονομάζονται τετραγωνικά ολοκληρώσιμες. Η πυκνότητα πιθανότητας εξαρτάται από τον χρόνο. Αυτό σημαίνει πως αύξηση της P σε μια περιοχή του χώρου συνεπάγεται μείωση της σε κάποια άλλη. Ένα κλασσικό ανάλογο είναι η κίνηση ασυμπίεστου ρευστού καθώς κάθε μεταβολή στην πυκνότητα μάζας σε μια περιοχή του χώρου επιφέρει μια αντισταθμιστική εισροή ή εκροή ρευστού από μια συνοριακή επιφάνεια. Όσο αφορά φυσική σημασία πάνω στις εξισώσεις το j μας δείχνει το πως γίνεται η μεταφορά πιθανότητας από την μια περιοχή του χώρου στην άλλη καθώς η χρονική εξέλιξη προκαλεί την διαρκή ανακατανομή της.

1.2 Εξίσωση συνέχειας

Ο ρυθμός ελάττωσης της πυκνότητας σε δεδομένο όγκο είναι

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int p dV \quad (1.10)$$

και ισούται με την ολική ροή σωματιδίων που βγαίνουν από αυτόν τον όγκο σε μια συνοριακή επιφάνεια.

Δηλαδή

$$\int \vec{j} \vec{d}s = \int \vec{j} \hat{n} ds \quad (1.11)$$

και λόγω του θεωρήματος Gauss ισχύει

$$\int \vec{j} \hat{n} ds = \int \hat{\nabla} \cdot \vec{j} dV. \quad (1.12)$$

Άρα

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int p dV = \int \hat{\nabla} \cdot \vec{j} dV \quad (1.13)$$

και τελικά

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \hat{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (1.14)$$

Θα βρούμε τώρα το ρεύμα πιθανότητας j που επάγεται από την μεταβολή της πυκνότητας σε έναν όγκο.

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (1.3) με $(i\Psi^*)$ και προσθέτωντας την ποσότητα $(i\Psi)(1.3)^*$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
(i\Psi)^* \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) + (i\Psi) \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi^* - i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) &= 0 \\
i \frac{\hbar^2}{2m} \Psi^* \nabla^2 \Psi + \hbar \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + i \frac{\hbar^2}{2m} \Psi \nabla^2 \Psi^* + \hbar \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial(\Psi\Psi^*)}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) &= 0 \\
\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(-\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*) \right) &= 0
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Και συγκρίνοντας με την αρχική εξίσωση συνέχειας βλέπουμε πως

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*). \tag{1.16}$$

1.3 Στοιχεία σχετικότητας

Γίνεται προφανές πως στην πράξη θα πρέπει να αντιμετωπίσουμε σωματίδια που κινούνται με σχετικιστικές ταχύτητες. Ένα πρώτο ερώτημα που πρέπει να απαντήσουμε εδώ είναι πως σχετίζονται οι συντεταγμένες σωματιδίων μεταξύ αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Θυμίζουμε πως[2] ως αδρανειακά θεωρούμε τα συστήματα αναφοράς που διαφέρουν μεταξύ τους κατά στροφές, μετατοπίσεις και ομαλές κινήσεις. Υποθέτουμε ότι ένα σωματίδιο έχει σε ένα ΑΣΑ ταχύτητα $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ και σε ένα άλλο το οποίο κινείται με ταχύτητα u κατά τον θετικό ημιάξονα x σε σχέση με το πρώτο, έχει ταχύτητα $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$. Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου τα ασα σχετίζονται ως εξής

$$\begin{aligned}
x' &= x - ut \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= t
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Για τις ταχύτητες αντίστοιχα θα έχουμε

$$\begin{aligned}
u'_x &= u_x - u \\
u'_y &= u_y \\
u'_z &= u_z
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως κανόνας πρόσθεσης ταχυτήτων του Newton. Αυτός ο μετασχηματισμός υποδηλώνει πως οι εξισώσεις του Maxwell

είναι έγκυρες μόνο σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, αφού προβλέπουν μόνο μία ταχύτητα για το φως. Επίσης παρατηρούμε ότι υπάρχει μία μοναδική και ενιαία αντίληψη του χρόνου για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές, κάτι που αποτελεί κέντρική θεώρηση της Νευτώνειας μηχανικής. Αυτή η θεώρηση του απόλυτου χρόνου εγκαταλείπεται στην ειδική σχετικότητα, όπου η αντίληψη του χρόνου διαφοροποιείται από το ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο άλλο. Για να περιγράψουμε ένα σημείο στην σχετικότητα χρειαζόμαστε τέσσερις συντεταγμένες, τρεις χωρικές και μία χρονική. Η ενοποίηση του χώρου και του χρόνου στον ορίζει ένα χώρο που ονομάζεται χωρόχρονος. Πριν διατυπώσουμε τις συσχετίσεις μεταξύ αυτών των συντεταγμένων θα δούμε πως γίνεται η σχετικιστική διατύπωση για την θέση, την ταχύτητα κλπ.

Το τετραδιάνυσμα της απειροστής μετατόπισης είναι

$$dx^\mu = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) = (cdt, dx, dy, dz) \quad (1.19)$$

Διανύσματα που έχουν άνω δείκτες τα ονομάζουμε ανταλλοίωτα ενώ αυτά που έχουν κάτω δείκτες ονομάζονται συναλλοίωτα.

Αντίστοιχα για το συναλλοίωτο

$$dx_\mu = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) = (cdt, -dx, -dy, -dz) \quad (1.20)$$

Ανάλογα με τον χώρο που βρισκόμαστε υπάρχει και ένας ταυιστής(πίνακας) η γνώση του οποίου αρκεί για να βρούμε το στοιχειώδες μήκος. Στον τετραδιάστατο χώρο Minkowski αυτός ο πίνακας είναι ο

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Το στοιχειώδες μήκος γράφεται ως

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.22)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τον πίνακα $g_{\mu\nu}$ έχουμε

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (1.23)$$

Εδώ χρησιμοποιείται η σύμβαση Einstein που μας λέει πως οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται. Ο πίνακας $g_{\mu\nu}$ δεν είναι τυχαίος άλλα έχει κάποιες ιδιότητες. Είναι πίνακας διαγώνιος και συμμετρικός ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) και επίσης ισούται με τον αντίστροφο του $(g_{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. Μια σημαντική παρατήρηση εδώ είναι πως διαφορετικοί παρατηρητές διαφωνούν ως προς τις συντεταγμένες

αλλά συμφωνούν ως προς το μήκος.

Ο ταυσιτής $g_{\mu\nu}$ επιδρά σε ένα διάνυσμα του τετραδιάστατου χώρου ως εξής

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (1.24)$$

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (1.25)$$

με

$$g^{\nu\rho} g_{\rho\mu} = \delta_\mu^\nu \quad (1.26)$$

Η χρήση του έγκειται στο να ανεβοκατεβάζει δείκτες. Η σταθερότητα του μήκους δεν είναι τυχαία, γι' αυτό άλλωστε λέμε πως το μήκος είναι ένα αναλλοίωτο μέγεθος. Αυτό συμβαίνει καθώς για κάθε άνω δείκτη υπάρχει και ο αντίστοιχος κάτω δείκτης. Γυρνάμε τώρα στο αρχικό μας πρόβλημα, δηλαδή την συσχέτιση αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Θεωρούμε ένα ΑΣΑ Σ που κινείται με σχετική ταχύτητα u_x ως προς ένα άλλο ασα Σ' . Οι συντεταγμένες ως προς το άλλο σύστημα θα δίνονται με την βοήθεια των μετασχηματισμών Lorentz ως εξής :

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^{1'} &= \gamma(-\beta x^0 - x^1) \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned} \quad (1.27)$$

όπου $\beta = \frac{u}{c}$ και $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. Κάθε σύνολο τεσσάρων ποσοτήτων που μετασχηματίζεται όπως το x^μ κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz ονομάζεται τετραδιάνυσμα.

Για παράδειγμα ο διαφορικός τελεστής 4 συνιστωσών

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \quad (1.28)$$

και το τετράνυσμα της τετραορμής

$$p^\mu = (E/c, \vec{p}) = (p^0, p^1, p^2, p^3) \quad (1.29)$$

Παρατήρηση : Το εσωτερικό γινόμενο παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz οι οποίοι ονομάζονται και ωθήσεις (boosts) ενώ στο όριο $u/c \ll 1$ οι μετασχηματισμοί ανάγονται σε αυτούς του Γαλιλαίου. Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα είναι πως λόγω των παραπάνω η μάζα ηρεμίας είναι ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς. Αυτό προκύπτει αφού

$$p^2 = pp = p^\mu p_\mu = p_0^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (1.30)$$

Θέλωντας να γράψουμε τους μετασχηματισμούς Lorentz σε μορφή πίνακα έχουμε

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Η ύπαρξη μη διαγώνιων στοιχείων μας δείχνει την συσχέτιση χώρου και χρόνου. Γενικά ένας μετασχηματισμός δίνεται από την σχέση

$$X^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\nu}^{\mu'} X^{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} X^{\nu} \quad (1.32)$$

όπου και πάλι εννοείται άθροιση στους επαναλαμβανόμενους δείκτες λόγω της σύμβασης Einstein .

1.4 Εξίσωση Klein-Gordon

Παρά την χρησιμότητα της εξίσωσης Schrodinger μπορούμε εύκολα να δούμε πως κρίνεται ανεπαρκής για την γενικότερη περιγραφή του μικρόκοσμου. Το πρώτο βασικό πρόβλημα είναι πως ως παραχθείσα από την μη σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής δεν μπορεί να περιγράψει σωματίδια με ταχύτητα συγκρίσιμη με αυτή του φωτός. Το δεύτερο είναι πως δεν μπορεί να περιγράψει, ούτε καν να προβλέψει την ύπαρξη έναν καθαρά κβαντικού βαθμού ελευθερίας, του σπιν. Η παραγωγή μίας νέας εξίσωσης κρίνεται αναγκαία. Βλέποντας την διαδικασία που ακολουθήσαμε για την παραγωγή της εξίσωσης Schrodinger εύκολα σκεπτόμαστε να χρησιμοποιήσουμε την σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής για την παραγωγή μιας εξίσωσης που δεν θα παράγει τα ίδια προβλήματα με την αρχική.

Ξεκινάμε λοιπόν με την σχέση

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (1.33)$$

όπου για ευκολία θεωρήσαμε $\hbar = 1 = c$.

Και πάλι αντικαθιστώντας $E = i\frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{p} = i\nabla$ παίρνουμε

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi + \nabla^2\Psi = m^2\Psi \quad (1.34)$$

Αυτή ονομάζεται εξίσωση Klein-Gordon και περιγράφει την κίνηση σωματιδίου μάζας m του οποίου η ταχύτητα είναι συγκρίσιμη με αυτή του φωτός. Όπως

είδαμε και πριν

$$p^\mu = (E, \vec{p}) = (i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla}) = i(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}) = i\partial^\mu \quad (1.35)$$

και ορίζοντας τον τελεστή του D'alembert ως

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (1.36)$$

μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση στην εξής μορφή

$$(\square + m^2)\Psi = 0 \quad (1.37)$$

Για να βρούμε το διατηρούμενο ρεύμα ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτή της εξίσωσης Schrodinger και καταλήγουμε στην έκφραση

$$i\Phi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi - i\Phi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi^* - i\Phi^* \nabla^2 \Phi + i\Phi \nabla^2 \Phi^* = 0 \quad (1.38)$$

Δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial t} [i(\Phi^* \frac{\partial}{\partial t} \Phi - \Phi \frac{\partial}{\partial t} \Phi^*)] + \vec{\nabla} [-i(\Phi^* \vec{\nabla} \Phi - \Phi \vec{\nabla} \Phi^*)] = 0 \quad (1.39)$$

Μία ενδιαφέρουσα παρατήρηση εδώ είναι πως η ποσότητα (p, \vec{J}) μετασχηματίζεται κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz όπως το διάνυσμα x^μ δηλαδή είναι τετραδιάνυσμα και το συμβολίζουμε ως

$$J^\mu = (p, \vec{J}) \quad (1.40)$$

Συγκρίνοντας με την (1.35) βρίσκουμε τις εκφράσεις για τα p, \vec{J} ως

$$p = i(\Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial t}) \quad (1.41)$$

και

$$\vec{J} = [-i(\Phi^* \vec{\nabla} \Phi - \Phi \vec{\nabla} \Phi^*)] \quad (1.42)$$

Με αντικατάσταση αυτών στην έκφραση (1.36) παίρνουμε

$$J^\mu = (p, \vec{J}) = i(\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^*) \quad (1.43)$$

Που ικανοποιεί την συναλλοίωτη μορφή της εξίσωσης συνέχειας

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (1.44)$$

Η εξίσωση Klein-Gordon για ελεύθερο σωματίδιο έχει λύσεις επίπεδα κύματα

$$\Psi(t, \vec{x}) = N e^{i(\vec{p}\vec{x} - Et)} = N e^{-ipx} \quad (1.45)$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις λύσεις στις εκφράσεις (1.37) και (1.38) παίρνουμε

$$p = 2 |N|^2 E \quad (1.46)$$

και

$$\vec{J} = 2 |N|^2 \vec{p} \quad (1.47)$$

Σε πιο συμπαγή μορφή έχουμε

$$J^\mu = (2 |N|^2 E, 2 |N|^2 \vec{p}) = 2 |N|^2 (E, \vec{p}) = 2 p^\mu |N|^2 \quad (1.48)$$

Βλέπουμε πως το πρόσημο της πυκνότητας πιθανότητας είναι ίδιο με αυτό της ιδιοτιμής της ενέργειας. Αν αντικαταστήσουμε την (1.33) στην (1.25) παίρνουμε την αναμενόμενη σχέση για την ενέργεια

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (1.49)$$

Μπορούμε να δούμε τώρα τα προβλήματα που η εξίσωση Klein-Gordon αντιμετωπίζει. Αρχικά λόγω των αρνητικών ενεργειών, λόγω της εξίσωσης (1.45), έχουμε την ύπαρξη αρνητικών πυκνοτήτων πιθανότητας που είναι αδύνατο να ερμηνευτούν καθώς και την δυνατότητα μεταπτώσεων σε όλο και χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες. Δεν είναι δυνατό να αγνοήσουμε τις 'προβληματικές' καταστάσεις με $E < 0$ καθώς πρέπει να υφίσταται πλήρες σύνολο ιδιοκαταστάσεων. Το πρόβλημα προκύπτει καθώς η εξίσωση Klein-Gordon είναι δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο και άρα είναι απαραίτητη η γνώση τόσο της τιμής της συνάρτησης για $t = 0$ όσο και της πρώτης παραγώγου για τον ίδιο χρόνο. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με βασική αρχή της κβαντομηχανικής ότι η κυματοσυνάρτηση περιέχει όλες τις πειραματικά ελέγξιμες πληροφορίες για ένα φυσικό σύστημα και επομένως η γνώση της σε μια ορισμένη χρονική στιγμή θα πρέπει να επαρκεί για τον πλήρη καθορισμό της μελλοντικής του εξέλιξης. Ο δευτεροτάξιος χαρακτήρας της εξίσωσης έχει και άλλες συνέπειες. Οι λύσεις της εξίσωσης δεν είναι απαραίτητο να έχουν την μιγαδική μορφή που είδαμε νωρίτερα αλλά μπορεί να είναι και της μορφής

$$\psi(x) \cos(Et) \quad \text{ή} \quad \psi(x) \sin(Et) \quad (1.50)$$

το οποίο βέβαια αποκλείει κάθε πιθανότητα αν ερμηνευθεί το

$$|\psi(x, t)|^2 \quad (1.51)$$

ως πυκνότητα πιθανότητας αφού για λύσεις όπως οι (1.49) θα υπάρχουν χρονικές στιγμές για τις οποίες η πιθανότητα θα είναι παντού μηδενική! Βλέπουμε δηλαδή πως τα προβλήματα που δημιουργούνται καθιστούν την φυσική ερμηνεία αδύνατη. Μία νέα προσέγγιση κρίνεται αναγκαία.

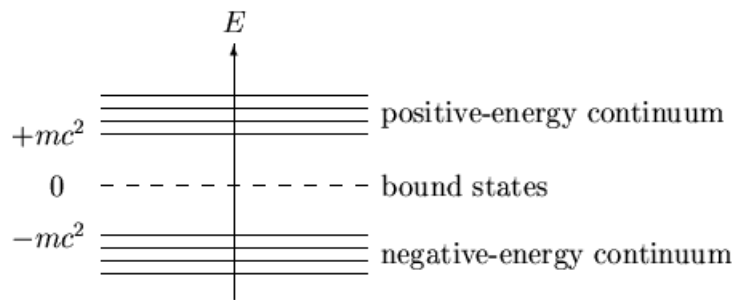
1.5 Εξίσωση Dirac

Θα προσπαθήσουμε τώρα να κατασκευάσουμε μία εξίσωση που

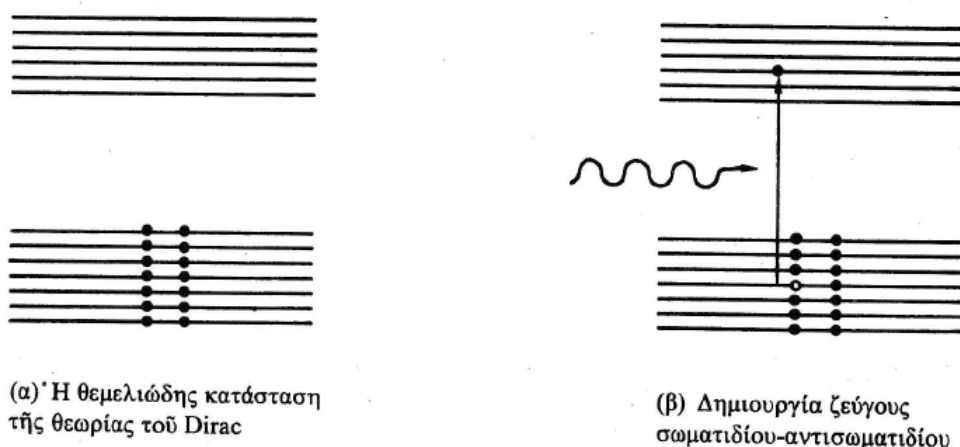
- 1) Να είναι σχετικιστική
- 2) Να είναι γραμμική ως προς χωρική και χρονική παράγωγο
- 3) Να περιγράφει σωματίδια με *spin* 1/2
- 4) Να ερμηνεύει τις καταστάσεις με $E < 0$
- 5) Οι κυματοσυναρτήσεις να ικανοποιούν την εξίσωση Klein-Gordon

Ο Dirac ξεπέρασε το πρόβλημα των αρνητικών ενεργειών εισάγοντας το εξής αξίωμα: Στο κενό όλες οι καταστάσεις με $E < 0$ είναι κατειλημένες με ηλεκτρόνια. Αυτό έλυσε το πρόβλημα των μεταπτώσεων σε όλο και χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες αφού λόγω της απαγορευτικής αρχής του Pauli δύο ηλεκτρόνια δεν μπορούν να βρίσκονται στην ίδια κβαντική κατάσταση. Αν κάποιο από τα ηλεκτρόνια με $E < 0$ διεγερθεί και καταλάβει μία ενεργειακή στάθμη $E > 0$ τότε αυτομάτως δημιουργείται μία οπή στην στάθμη με ενέργεια $-E$. Η απουσία του ηλεκτρονίου με $E < 0$ ερμηνεύεται ως παρουσία ενός αντισωματιδίου με θετικό φορτίο και θετική ενέργεια. Το αποτέλεσμα της διέγερσης είναι η παραγωγή του ζεύγους σωματιδίων $e^-(E') + e^+(E)$ όπου προφανώς πρέπει $|E| + E' \geq 2m$.

Σχηματικά για τις ενέργειες έχουμε



Ενώ για την διέγερση αντισωματιδίων σχηματικά έχουμε



Σχήμα 1

[3] Οι Pauli και Weisskopf αναβίωσαν την Klein-Gordon εισάγοντας το φορτίο $-e$ στο J^μ και ερμηνεύοντας το ως πυκνότητα φωτρίου ρεύματος του αρνητικά φορτισμένου σωματιδίου. Δηλαδή

$$J^\mu = -ie(\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^*) = (J^0, J^1, J^2, J^3) \quad (1.52)$$

Όπου τώρα το $\rho = J^0$ είναι η πυκνότητα φορτίου και όχι πυκνότητα πιθανότητας. Η συνταγή για την μεταχείριση των αρνητικών ενεργειών προτάθηκε από τους Stuckelberg και Feynman. Η βασική ιδέα είναι πως η λύση με αρνητική ενέργεια περιγράφει ένα σωματίδιο που διαδίδεται πίσω στο χρόνο ή ισοδύναμα ένα αντισωματίδιο που διαδίδεται προς τα εμπρός στο χρόνο. Γενικά η εκπομπή (απορρόφηση) αντισωματιδίου τετραορμής p^μ αντιστοιχεί σε απορρόφηση (εκπομπή) σωματιδίου τετραορμής $-p^\mu$. Από τις προουποθέσεις που θέσαμε παραπάνω καταλήγουμε σε μία εξίσωση της μορφής

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (-i \vec{a} \vec{\nabla} + \beta m) \Psi \quad (1.53)$$

Πρέπει τώρα να προσδιορίσουμε τους συντελεστές α, β Υψώνοντας την (1.39) στο τετράγωνο και συγκρίνοντας με την Klein-Gordon παίρνουμε :

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 &= (-i \vec{a} \vec{\nabla} + \beta m)(-i \vec{a} \vec{\nabla} + \beta m) \\ &= - \sum_{i=1}^3 a_i^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2 - \sum_{i,j=1}^3 (a_i a_j + a_j a_i) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\right) + im \sum_{i=1}^3 (a_i \beta + \beta a_i) \frac{\partial}{\partial x^i} + \beta^2 m^2 \end{aligned} \quad (1.54)$$

Πρέπει δηλαδή

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 = -\sum_{i=3}^3\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2 + m^2 \quad (1.55)$$

Οι ενδιάμεσοι όροι της (1.40) πρέπει να είναι μηδέν, ενώ ο πρώτος και ο τελευταίος όχι. Εξισώνοντας έχουμε

$$\begin{aligned} a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = \beta^2 = 1 \\ a_i\beta + \beta a_i = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad \{a_i, \beta\} = 0 \\ a_i a_j + a_j a_i = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad \{a_j, a_i\} = 0 \quad \text{με} \quad i \neq j \end{aligned} \quad (1.56)$$

Αφού τα a, β δεν μετατίθενται δεν μπορούν να θεωρηθούν αριθμοί. Επίσης δεδομένου ότι η χαμιλτονιανή είναι ερμιτιανός τελεστής και τα a, β θα είναι ερμιτιανοί, θα ισχύει

$$Tr(\alpha\beta) = Tr(\beta\alpha) \quad (1.57)$$

Βάση αυτού μπορούμε να δείξουμε ότι a, β θα είναι άγχοι. Έχουμε

$$a_i a_j + a_j a_i = 0 \Rightarrow a_j = -a_i^{-1} a_j a_i \quad (1.58)$$

Άρα

$$Tr(a_j) = Tr(-a_i^{-1} a_j a_i) = -Tr(-a_i^{-1} a_j a_i) = -Tr(a_j) \Rightarrow Tr(a_j) = 0 \quad (1.59)$$

Παρομοίως

$$a_i \beta + \beta a_i = 0 \Rightarrow \beta = -a_i^{-1} \beta a_i \quad \text{άρα} \quad Tr(\beta) = 0 \quad (1.60)$$

Βλέπουμε πως οι ιδιοτιμές των a, β είναι ίσες με ± 1 . Η μικρότερη δυνατή διάσταση πινάκων για τους οποίους ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις είναι 4. Η επιλογή των a_i, β δεν είναι μοναδική. Μία συμβατική επιλογή είναι των Dirac-Pauli και δίνεται ως

$$a_i = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & \sigma_i \\ \sigma_i & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

Όπου σ_i οι πίνακες του Pauli.

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

Μια προσεκτική μελέτη αυτών μας δείχνει ένα πιθανό πρόβλημα. Αφού οι a, β είναι πίνακες 4×4 τότε οι λύσεις Ψ θα είναι πίνακες στήλη 4×1 δηλαδή θα έχουμε 4 βαθμούς ελευθερίας σε κάθε σωματίδιο ενώ οι δυνατές καταστάσεις για το σπιν είναι 2, σπιν πάνω και σπιν κάτω. Θα δούμε παρακάτω ότι οι δύο παραπάνω

δεν αποτελούν πρόβλημα καθώς περιγράφουν το αντίστοιχο αντισωματίδιο. Θα γράψουμε τώρα την εξίσωση Dirac σε συνναλοιώτη μορφή. Πολλαπλασιάζουμε την (1.39) από αριστερά με β και έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\Psi + \beta^2 m \Psi i\beta \frac{\partial \Psi}{\partial t} + i\beta \vec{a} \vec{\nabla}\Psi - m\Psi &= 0 \\ i(\beta, \beta \vec{a}) \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \Psi - m\Psi &= 0 \\ i\beta \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -i\beta \vec{a} \end{aligned} \quad (1.63)$$

Θέτοντας

$$(\beta, \beta \vec{a}) = \gamma^\mu \quad \text{και} \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \quad (1.64)$$

έχουμε

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \quad (1.65)$$

ενώ ορίζοντας

$$(\gamma^\mu \partial_\mu) = \not{\partial} \quad \text{και} \quad \gamma^\mu p_\mu = \not{p} \quad (1.66)$$

Καταλήγουμε

$$(i\not{\partial} - m)\Psi = 0 \quad \text{ή} \quad (\not{p} - m)\Psi = 0 \quad (1.67)$$

Παρατήρηση: Θεωρήσαμε στις πράξεις πως οι ποσότητες $(\beta, \beta \vec{a})$ σαν τετραδιάνυσμα παρόλο που δεν μετασχηματίζονται σαν το x_μ κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Για να βρούμε το διατηρούμενο ρεύμα ακολουθούμε διαδικασία αντίστοιχη με την $K - G$ μόνο που τώρα δεν θα θεωρήσουμε την μιγαδική συζυγή της εξίσωσης αλλά την ερμιτιανή συζυγή, αφού δουλεύουμε με πίνακες. Έχουμε

$$\begin{aligned} (i\gamma^0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} + i\gamma^\kappa \frac{\partial \Psi}{\partial x^\kappa} - m\Psi)^\dagger &= 0 \\ i\frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \gamma^{0\dagger} - i\frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial x^\kappa} (\gamma^\kappa)^\dagger - m\Psi^\dagger &= 0 \\ -i\frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 - i\frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial x^\kappa} (-\gamma^\kappa) - m\Psi^\dagger &= 0 \end{aligned} \quad (1.68)$$

Πολλαπλασιάζουμε από δεξιά με γ^0

$$\begin{aligned} -i\frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 \gamma^0 - i\frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial x^\kappa} (-\gamma^\kappa \gamma^0) - m\Psi^\dagger \gamma^0 &= 0 \\ -i\frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} (\gamma^0)^2 - i\frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial x^\kappa} \gamma^0 \gamma^\kappa - m\Psi^\dagger \gamma^0 &= 0 \end{aligned} \quad (1.69)$$

Και θεωρώντας τον πίνακα γραμμής

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 \quad (1.70)$$

παίρνουμε

$$i\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0 \quad (1.71)$$

Πολλαπλασιάζω την εξίσωση Dirac από αριστερά με $\bar{\Psi}$ και με Ψ την (1.53) από δεξιά και προσθέτω

$$\begin{aligned} i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi} \Psi + i\partial_\mu \bar{\Psi} \partial^\mu \Psi \bar{\Psi} &= 0 \\ \bar{\Psi} \partial^\mu \partial_\mu \Psi + \partial_\mu \bar{\Psi} \partial^\mu \Psi &= 0 \\ \partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) &= 0 \end{aligned} \quad (1.72)$$

Συγκρίνοντας με την συναλλοίωτη μορφή της εξίσωσης συνέχειας

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.73)$$

έχουμε πως

$$j^\mu = \bar{\Psi} \partial^\mu \Psi \quad (1.74)$$

Η πυκνότητα πιθανότητας p θα είναι λοιπόν

$$p = j^0 = \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \Psi = \Psi^\dagger (\gamma^0)^2 \Psi = \Psi^\dagger \Psi = \sum_{i=1}^4 |\Psi_i| \quad (1.75)$$

Βλέπουμε δηλαδή πως ένα βασικό πρόβλημα της εξίσωσης $K - G$ αντιμετωπίζεται πλήρως με την εξίσωση Dirac αφού εδώ η πυκνότητα πιθανότητας είναι θετική και μάλιστα ανεξάρτητη από το πρόσημο της ενέργειας. Μπορούμε επίσης, όπως είχαν κάνει οι Pauli και Weisskopf, να πολλαπλασιάσουμε με το $-e$ για να πάρουμε το τετραδιάνυσμα του ηλεκτρονιακού ρεύματος

$$j^m = -e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (1.76)$$

1.6 Λύσεις εξίσωσης Dirac

Οι λύσεις της εξίσωσης Dirac για ελεύθερο σωματίδιο δίνονται ως

$$\Psi = \omega e^{-ipx} \quad (1.77)$$

Όπου ω ο σπίνορας 4 συνιστωσών. Θεωρούμε επίσης για ευκολία

$$\omega = \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

Όπου ϕ, χ σπίνορες 2 συνιστωσών

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \chi = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} \quad (1.79)$$

Έχουμε

$$H\Psi = E\Psi(\vec{a}\vec{p} + \beta m)\omega e^{ipx} = E\omega e^{-ipx} \quad (1.80)$$

Θα διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις, για $\vec{p} = 0$ και $\vec{p} \neq 0$

1) Για ακίνητο σωματίδιο $\vec{p} = 0$

$$\begin{aligned} (\vec{a}\vec{p} + \beta m)\omega e^{-ipx} &= E\omega e^{-ipx} \beta m\omega \\ &= E\omega\beta m \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\phi \\ E\chi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.81)$$

Άρα

$$\begin{bmatrix} mI\phi \\ -mI\chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\phi \\ E\chi \end{bmatrix} \quad (1.82)$$

Παίρνουμε λοιπόν τις δύο εξισώσεις

$$E\phi = mI\phi \quad (1.83)$$

και

$$E\chi = mI\chi \quad (1.84)$$

Και γράφοντας τις εξισώσεις σε μορφή πινάκων

$$E \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

$$E \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} \quad (1.86)$$

Καταλήγουμε στις ισότητες

$$\begin{aligned} E\phi_1 &= m\phi_1 \\ E\phi_2 &= m\phi_2 \\ E\chi_1 &= -m\chi_1 \\ E\chi_2 &= -m\chi_2 \end{aligned} \quad (1.87)$$

Οι ιδιοτιμές της ενέργειας είναι δηλαδή

$$E = m, m, -m, -m \quad (1.88)$$

Η ιδιοτιμή $E = m$ αντιστοιχεί στο σωματίδιο e^- θετικής ενέργειας με ιδιοκαταστάσεις

$$\begin{aligned} E\phi &= mI\phi \\ m \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.89)$$

Και άρα

$$\phi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \phi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \chi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \omega^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \omega^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.90)$$

Η ιδιοτιμή με $E = -m$ αντιστοιχεί στο αντισωματίδιο e^+ θετικής ενέργειας με ιδιοκαταστάσεις

$$E\chi = -mI\chi$$

$$\begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix} \chi = -m\chi \quad (1.91)$$

Και άρα

$$\chi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \chi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \omega^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \omega^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.92)$$

2) Για σωματίδιο με $\vec{p} \neq 0$

$$(\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m)\omega e^{-ipx} = E\omega e^{-ipx}$$

$$\left(\begin{bmatrix} \alpha & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \vec{p} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} m \right) \omega = E\omega$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{bmatrix} \right) \omega = E\omega \quad (1.93)$$

$$\begin{bmatrix} mI\phi & \vec{\sigma}\vec{p}\chi \\ \vec{\sigma}\vec{p}\phi & -mI\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\phi \\ E\chi \end{bmatrix}$$

Παίρνουμε λοιπόν τις εξισώσεις

$$\vec{\sigma}\vec{p}\chi = (E - m)\phi$$

$$\vec{\sigma}\vec{p}\phi = (E + m)\chi \quad (1.94)$$

Και άρα

$$\phi = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E - m}\chi$$

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E + m}\phi \quad (1.95)$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E-m} \chi \quad (1.96)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$(\vec{\sigma}\vec{p})^2 = \vec{p}^2 I \quad (1.97)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} (E-m)(E+m)\chi &= \vec{p}^2 \chi \\ (E^2 - m^2)\chi &= \vec{p}^2 \chi \\ E &= \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \end{aligned} \quad (1.98)$$

Βλέπουμε δηλαδή πως σε κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχούν δύο λύσεις

$$\begin{aligned} \text{Για } E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \omega^{(1),(2)} &= N \left[\begin{array}{c} \phi^{(1),(2)} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m} \phi^{(1),(2)} \end{array} \right] \\ \text{Για } E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \omega^{(3),(4)} &= N \left[\begin{array}{c} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E-m} \chi^{(1),(2)} \\ \chi^{(1),(2)} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (1.99)$$

Υπάρχει δηλαδή ένας εκφυλισμός τάξης δύο, αφού οι λύσεις αφορούν τόσο το σωματίδιο όσο και το αντισωματίδιο του. Ο τρόπος άρσης αυτού του εκφυλισμού είναι να βρούμε ένα μέγεθος ή αλλιώς ερμιτιανό τελεστή ο οποίος να μετατίθεται με την χαμιλτονιανή και την ορμή, οι ιδιοτιμές του οποίου θα αποτελούν καλό κβαντικό αριθμό για την διάκριση των λύσεων. Στην περίπτωση της μη σχετικιστικής κβαντομηχανικής ορίζεται ένα μέγεθος που ονομάζεται ελικότητα και αποτελεί την προβολή του σπιν στην κατεύθυνση της κίνησης.

Ορίζεται ως

$$\lambda = \vec{s}\hat{p} = \vec{s} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (1.100)$$

Όπου s ο τελεστής του σπιν

$$\vec{s} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \quad (1.101)$$

Αντικαθιστώντας

$$\lambda = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (1.102)$$

Οπότε για σωματίδιο που κινείται στον άξονα z δηλαδή

$$\vec{p} = (0, 0, p) \quad (1.103)$$

η ιδιοκατάσταση $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\frac{1}{2}$. Έχουμε

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_z p}{p} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.104)$$

Παρομοίως

$$\lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.105)$$

Προφανώς πρέπει τώρα να γενικεύσουμε στις τέσσερις διαστάσεις αφού οι πίνακες του Pauli είναι 2×2 διαστάσεων. Για πίνακες τεσσάρων διαστάσεων ο τελεστής της ελικότητας ορίζεται ως εξής

$$\lambda = \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (1.106)$$

όπου

$$\vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} \quad (1.107)$$

ο τελεστής του σπιν σε διαστάσεις 4×4 . Προφανώς ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \Sigma_x, \frac{1}{2} \Sigma_y \right] &= \frac{i}{2} \Sigma_z \\ \left(\frac{1}{2} \vec{\Sigma} \right)^2 &= \frac{3}{4} I \end{aligned} \quad (1.108)$$

Ο τελεστής $\vec{\Sigma}$ διαχωρίζει τις λύσεις στο σύστημα μάζας ηρεμίας ($\vec{p} = 0$) αφού μετατίθεται με την χαμιλτονιανή η οποία πλέον γίνεται

$$H_D = \beta m \quad (1.109)$$

Υπολογίζουμε

$$[H_D, \vec{\Sigma}] = [\beta m, \vec{\Sigma}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.110)$$

Οπότε, αν δράσει ο τελεστής $\vec{\Sigma}$ πάνω στους σπίνορες $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$ που έχουν την ίδια ιδιοτιμή, όταν δράσει η H_D θα δώσει διαφορετική ιδιοτιμή. Έστω σπιν στον άξονα z . Έχουμε

$$\frac{1}{2} \vec{\Sigma} \omega^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \omega^{(1)} \quad (1.111)$$

Αντίστοιχα

$$\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\omega^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\omega^{(2)} \quad (1.112)$$

Ο τελεστής του σπιν $\vec{\Sigma}$ αίρει τον εκφυλισμό των καταστάσεων με ενέργεια $E = +m$. Παρομοίως και για αυτές με $E = -m$. Πρέπει να εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου $\vec{p} \neq 0$

Υπολογίζουμε

$$[H_D, \frac{1}{2}\vec{\Sigma}] = \frac{1}{2}[\vec{a}\vec{p}, \vec{\Sigma}] + \frac{1}{2}[\beta m, \vec{\Sigma}] = \frac{1}{2}[\vec{a}\vec{p}, \vec{\Sigma}] \quad (1.113)$$

Αφού όπως δείξαμε πριν

$$\frac{1}{2}[\beta m, \vec{\Sigma}] = 0 \quad (1.114)$$

Λόγω του ότι οι πίνακες \vec{a} και \vec{p} περιέχουν τους πίνακες του Pauli, καθώς και ότι ισχύει η μεταθετική σχέση

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (1.115)$$

ο όρος

$$\frac{1}{2}[\vec{a}\vec{p}, \vec{\Sigma}] \quad (1.116)$$

δεν μηδενίζεται.

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο $\vec{\Sigma}$ δεν διαχωρίζει τις λύσεις αφού δεν μετατίθεται με την χαμιλτονιανή. Το μέγεθος που μετατίθεται με την χαμιλτονιανή είναι η ελικότητα, η οποία αίρει τον εκφυλισμό. Θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας και πάλι ορμή στον άξονα z . Έχουμε ότι

$$\lambda\omega^{(1),(2)} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \begin{bmatrix} \phi^{(1),(2)} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m}\phi^{(1),(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{(1),(2)} \\ \frac{\sigma_z p}{E+m}\phi^{(1),(2)} \end{bmatrix} \quad (1.117)$$

Δουλεύουμε την κάθε λύση ξεχωριστά

$$\lambda\omega^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{(1)} \\ \frac{\sigma_z p}{E+m}\phi^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_z p}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.118)$$

Και άρα

$$\lambda\omega^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_z p}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.119)$$

Για την δεύτερη έχουμε

$$\lambda\omega^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{(2)} \\ \frac{\sigma_z p}{E+m} \phi^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_z p}{E+m} \end{bmatrix} \quad (1.120)$$

Και άρα

$$\lambda\omega^{(2)} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_z p}{E+m} \end{bmatrix} \quad (1.121)$$

Βλέπουμε δηλαδή των διαχωρισμό των εκφυλισμένων καταστάσεων $\omega^{(1),(2)}$ μέσω του τελεστή της ελικότητας σε μία με θετική ελικότητα, σπιν πάνω, και σε μία με αρνητική ελικότητα, σπιν κάτω. Αντίστοιχα σπάει και ο εκφυλισμός των καταστάσεων $\omega^{(3),(4)}$. Οι λύσεις αρνητικής ενέργειας, όπως αναφέραμε αντιστοιχούν σε αντισωματίδια. Όλα όμως τα αντισωματίδια και τα σωματίδια πρέπει να έχουν θετική ενέργεια και ορμή. Έτσι αλλάζω τα πρόσημα $(-E, -\vec{p}) = -p^\mu$ ώστε οι λύσεις αρνητικής ενέργειας σωματιδίων να ερμηνευτούν σαν λύσεις θετικής ενέργειας αντισωματιδίων. Έχουμε για την κυματοσυνάρτηση

$$\Psi = \omega^{(3),(4)}(-E, -\vec{p})e^{-i(-p)x} = \omega^{(3),(4)}(-E, -\vec{p})e^{ipx} \quad (1.122)$$

Παίρνουμε λοιπόν τους σπίνορες

$$v^{(1)}(E, \vec{p}) = \omega^{(4)}(-E, -\vec{p}) = N \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}(-\vec{p})}{-E-m} \chi^{(1)} \\ \chi^{(1)} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}(\vec{p})}{E+m} \chi^{(1)} \\ \chi^{(1)} \end{bmatrix} \quad (1.123)$$

και

$$v^{(2)}(E, \vec{p}) = \omega^{(3)}(-E, -\vec{p}) = N \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}(-\vec{p})}{-E-m} \chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}(\vec{p})}{E+m} \chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{bmatrix} \quad (1.124)$$

Γενικά η κυματοσυνάρτηση γράφεται

$$\psi = \omega(E, \vec{p})e^{ipx} \quad (1.125)$$

Με την αντικατάσταση

$$\vec{p} = -\vec{p}, E = -E \quad (1.126)$$

ισχύουν

$$\begin{aligned} \omega^{(3)}(-E, -\vec{p}) &= v^{(2)}(E, \vec{p}) \\ \omega^{(4)}(-E, -\vec{p}) &= v^{(1)}(E, \vec{p}) \end{aligned} \quad (1.127)$$

Η εξίσωση Dirac για αντισωματίδια είναι

$$\begin{aligned} (-\not{p} - m)\omega^{(3),(4)}(-E, -\vec{p}) &= 0 \\ (\not{p} + m)v^{(2),(1)}(E, \vec{p}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.128)$$

Θεωρήσαμε ότι

$$\begin{aligned} \omega^{(1)} &= u^{(1)} \\ \omega^{(2)} &= u^{(2)} \\ \omega^{(3)} &= v^{(2)} \\ \omega^{(4)} &= v^{(1)} \end{aligned} \quad (1.129)$$

Που σημαίνει ακριβώς πως απουσία e^- με αρνητική ενέργεια και σπίν πάνω συνεπάγεται την παρουσία e^+ θετικής ενέργειας με σπίν κάτω. Καταλαβαίνουμε εδώ πως η εξίσωση Dirac καθώς και ο τρόπος αντιμετώπισης των λύσεων αρνητικής ενέργειας δεν αναφέρονται σε ένα σωματίδιο. Πρέπει λοιπόν εδώ να ερμηνεύσουμε αυτά τα φαινόμενα μέσω μιάς κβαντικής θεωρίας πεδίου.

Κεφάλαιο 2

Λαγκρανζιανός φορμαλισμός

Θα προσπαθήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο να βρούμε μία γενικότερη αρχή από την οποία να προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης τις οποίες γνωρίζουμε εμπειρικά. Η ιδέα προέρχεται από την αρχή του Fermat που μας λέει πως το φως ακολουθεί πάντα τον πιο σύντομο, οπτικά, δρόμο.

Στην κλασσική μηχανική, η λαγκρανζιανή ορίζεται ως

$$L = T - V \quad (2.1)$$

όπου T η κινητική ενέργεια και V η δυναμική ενέργεια του συστήματος.

Η λαγκρανζιανή είναι συνάρτηση των συντεταγμένων q και των παραγώγων τους.

Δηλαδή

$$L = L(\dot{q}(t), q(t)) \quad (2.2)$$

Ορίζουμε την ποσότητα

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}(t), q(t)) dt \quad (2.3)$$

ως δράση και η πραγματική τροχιά είναι αυτή που την ελαχιστοποιεί. Αυτό σημαίνει πως θα έπρεπε να υπολογίσουμε αυτή την ποσότητα για όλες τις τροχιές προκειμένου να βρούμε την πραγματική, κάτι που είναι πρακτικά αδύνατο. Θα χρησιμοποιήσουμε λογισμό μεταβολών προκειμένου να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα. Θεωρούμε την πραγματική τροχιά, μία καμπύλη που διαφέρει λίγο από αυτήν και απαιτούμε να μην δημιουργείται αλλαγή στην δράση σε προσέγγιση πρώτης τάξης.

Θεωρούμε δηλαδή την μεταβολή

$$q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) + \delta q(t) \quad (2.4)$$

Η αλλαγή στην δράση θα είναι

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q}(t) \right) dt \quad (2.5)$$

Όμως ισχύει πως

$$\delta \dot{q}(t) = \frac{d(\delta u(t))}{dt} \quad (2.6)$$

Άρα θα έχουμε

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \frac{d\delta q(t)}{dt} \right) dt \quad (2.7)$$

Ολοκληρώνοντας τον δεύτερο όρο κατα μέλη έχουμε

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} dt \quad (2.8)$$

Επειδή όλες οι πιθανές τροχιές ξεκινούν και καταλήγουν στα ίδια σημεία ισχύει πως

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (2.9)$$

Και άρα έχουμε

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q(t) \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] dt = 0 \quad (2.10)$$

Επειδή πρέπει να ισχύει για οποιοδήποτε δq έχουμε

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (2.11)$$

που αποτελούν τις εξισώσεις Euler-Lagrange, οι λύσεις των οποίων μας δίνουν την πραγματική τροχιά. Μπορούμε τώρα να δείξουμε τώρα γιατί ισχύει ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα και να αποφύγουμε την αξιωματική εισαγωγή του όπως κάναμε στην κλασσική μηχανική.

Θεωρούμε την λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \quad (2.12)$$

Κάνοντας τις παραγωγές παίρνουμε

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F \quad (2.13)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Euler-Lagrange παίρνουμε

$$F - m\ddot{x} = 0 \quad (2.14)$$

Σημείωση: Εδώ προφανώς έχουμε μία μόνο εξίσωση Euler-Lagrange αφού υπάρχει ένα μόνο $q = x$. Πρέπει να κάνουμε τώρα την μετάβαση από τον διακριτό (σωματίδιο) στο συνεχές (πεδίο).

2.1 Λαγκρανζιανή σε θεωρία πεδίου

Για να κάνουμε την μετάβαση θα θεωρήσουμε σύστημα με N βαθμούς ελευθερίας και θα πάρουμε το όριο $N \rightarrow \infty$. Γι' αυτό το πεδίο η μετατόπιση σε κάθε σημείο θα δίνεται από την συνεχή συνάρτηση $\phi(\vec{x}, t)$.

Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε

$$L = \int \mathcal{L} dx \quad (2.15)$$

όπου

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi, \dot{\phi}, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \quad \text{δηλαδή} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.16)$$

Και άρα η δράση θα είναι

$$S = \int L dt = \int \left(\int \mathcal{L} d^3x \right) dt = \int \mathcal{L} d^4x. \quad (2.17)$$

Θα ξεκινήσουμε από την μία διάσταση και θα γενικεύσουμε στις τρεις. Ανάλογα με πριν θεωρούμε την μεταβολή

$$\phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (2.18)$$

Για την μεταβολή της δράσης θα έχουμε:

$$\delta S = \int dt \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta\dot{\phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)} \delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx = 0 \quad (2.19)$$

άρα

$$\delta S = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi dt dx + \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta\dot{\phi} dt dx + \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)} \delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dt dx = 0 \quad (2.20)$$

Εδώ πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν ότι

$$\delta\dot{\phi} = \delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\phi + \delta\phi) - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial t} \quad (2.21)$$

καθώς και ότι

$$\delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial \phi'}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\phi + \delta\phi) - \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial x} \quad (2.22)$$

Άρα για την μεταβολή της δράσης θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi dt dx + \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial t})} \frac{\partial}{\partial t} \delta \phi dt dx + \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial x})} \frac{\partial}{\partial x} \delta \phi dt dx \\
&= \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi dt dx + \int \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial t})} \delta \phi \right] dt dx - \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial t})} \right) \delta \phi dt dx + \int \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial x})} \delta \phi \right] dt dx \\
&= \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial x})} \right) \delta \phi dt dx \\
&= \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi dt dx + \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial t})} \delta \phi \right] - \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial t})} \right) \delta \phi dt dx + \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial x})} \right]_{x_1}^{x_2} dt - \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial x})} \right) \delta \phi dt dx \\
&= \int \delta \phi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial t})} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial x})} \right) \right) dt dx \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Όπου χρησιμοποίησαμε παραγοντική ολοκλήρωση και αγνοήσαμε τους επιφανειακούς όρους. Για να ισχύει η ισότητα πρέπει η ποσότητα μέσα στην παρένθεση να ισούται με μηδέν. Άρα θα έχουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial x})} = 0 \tag{2.24}$$

που αποτελεί την εξίσωση Euler-Lagrange για πεδίο σε μία διάσταση. Και ανάλογα στις τρεις διαστάσεις θα έχουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \phi)} \right) = 0 \tag{2.25}$$

Σε αναλλοίωτη μορφή γράφουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \tag{2.26}$$

Για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε την λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{2.27}$$

Λόγω των επαναλαμβανόμενων δεικτών η λαγκρανζιανή γράφεται

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_0 \phi \partial^0 \phi + \partial_1 \phi \partial^1 \phi + \partial_2 \phi \partial^2 \phi + \partial_3 \phi \partial^3 \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{2.28}$$

Θα κάνουμε τώρα τις παραγωγίσεις

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(-\frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) = -m^2 \phi \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) \right) = \partial^\mu \phi \quad (2.30)$$

Αναλυτικά οι πράξεις στην δεύτερη παραγωγή

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) &= \frac{\partial (\partial_\mu \phi)}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial^\mu \phi) = \\ \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi g^{\mu\nu} \frac{\partial (\partial_\nu \phi)}{\partial (\partial_\mu \phi)} &= \partial^\mu \phi + \partial^\nu \phi \delta_\nu^\mu = \partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi = 2\partial^\mu \phi \end{aligned} \quad (2.31)$$

Αντικαθιστώντας στην $E - L$ παίρνουμε

$$(\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi) = 0 \quad (2.32)$$

που είναι η εξίσωση Klein-Gordon.

2.2 Νόμοι διατήρησης και συμμετρίες - Θεώρημα Noether

Το θεώρημα της Noether μας λέει πως κάθε συμμετρία της φύσης συνεπάγεται ένα νόμο διατήρησης και αντίστροφα κάθε νόμος διατήρησης αποκαλύπτει την ύπαρξη μιας υποκείμενης συμμετρίας. Όσο αφορά τα προηγούμενα η ύπαρξη μιας συμμετρίας σημαίνει ότι η δράση S είναι αναλλοίωτη κάτω από έναν μετασχηματισμό συμμετρίας. Ισοδύναμα η λαγκρανζιανή θα είναι αναλλοίωτη κάτω από τον αντίστοιχο μετασχηματισμό συμμετρίας. Για παράδειγμα η διατήρηση της ορμής προκύπτει από την ανεξαρτησία την λαγκρανζιανής από την αρχή των συντεταγμένων και η διατήρηση της ενέργειας από την ανεξαρτησία της λαγκρανζιανής από την αρχική χρονική στιγμή. Θεωρούμε τώρα μία λαγκρανζιανή κλασικής μηχανικής σωματιδίων. Θέλουμε να δούμε αν υπάρχουν διατηρούμενα φορτία. Θεωρούμε την μεταβολή

$$q'(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t) \quad (2.33)$$

και γράφουμε

$$\delta q(t) = X(q(t)) \epsilon \quad (2.34)$$

όπου $X(q(t))$ κάποια συνάρτηση που καθορίζεται από την εκάστοτε μεταβολή $\delta q(t)$ και ϵ μία απειροστή σταθερά. Αν $\delta \mathcal{L} = 0$ κάτω από αυτή την μεταβολή, τότε ονομάζεται μετασχηματισμός συμμετρίας. Θα δείξουμε τώρα ότι η αναλλοίωτητα της L συνεπάγεται διατήρηση του φορτίου. Αξιωνούμε $\delta \mathcal{L} = 0$, ότι υπάρχει δηλαδή μετασχηματισμός συμμετρίας. Έχουμε

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = 0 \quad (2.35)$$

Με απλή παραγωγήιση θα ισχύει

$$\dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}(t) + \frac{d}{dt}(\delta q(t)) \quad (2.36)$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη έχουμε

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt}(\delta q) = 0 \quad (2.37)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε εδώ την εξίσωση $E - L$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad (2.38)$$

Με αντικατάσταση έχουμε

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt}(\delta q) = 0 \quad (2.39)$$

Και άρα

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right) = 0 \quad (2.40)$$

όπου η ποσότητα μέσα στην παρένθεση είναι το διατηρούμενο ρεύμα. Έχουμε

$$\epsilon Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Rightarrow \epsilon Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \epsilon X(q(t)) \quad (2.41)$$

Και τελικά

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} X \quad (2.42)$$

Για παράδειγμα μπορούμε εδώ να δούμε την διατήρηση της ορμής. Έστω $L = L(\dot{q})$. Τότε η λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό

$$q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) + \epsilon \quad (2.43)$$

όπου ϵ μια οποιαδήποτε σταθερά. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε

$$\epsilon Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \epsilon \Rightarrow Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = p \quad (2.44)$$

δηλαδή διατήρηση της ορμής. Πρέπει τώρα να δούμε τι γίνεται στην περίπτωση που πρέπει να αντιμετωπίσουμε μια λαγκρανζιανή πυκνότητα πεδίου. Σε αυτή την περίπτωση οι συμμετρίες που αφήνουν την λαγκρανζιανή αναλλοίωτη συνεπάγονται την ύπαρξη διατηρούμενων ρευμάτων. Δηλαδή ένα διατηρούμενο ρεύμα

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.45)$$

2.2. ΝΟΜΟΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ - ΘΕΩΡΗΜΑ NOETHER 33

συνεπάγεται ένα διατηρούμενο φορτίο Q

$$Q(t) = \int_V j^0(t, \vec{x}) d^3x = \int_V \rho(t, \vec{x}) d^3x \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (2.46)$$

Αυτό συμβαίνει καθώς η σχέση

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.47)$$

είναι ισοδύναμη με την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial j^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.48)$$

και άρα θα έχουμε

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial j^0}{\partial t} d^3x = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3x = - \int_A \vec{j} d\vec{A} \quad (2.49)$$

Θεωρούμε ότι ο όγκος V είναι τόσο μεγάλος όπου δεν υπάρχει ροή ρεύματος διαμέσου της επιφάνειας A . Τότε το φορτίο Q είναι ανεξάρτητο από το χρόνο και διατηρείται

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (2.50)$$

Θεωρούμε τώρα μία μεταβολή του πεδίου

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (2.51)$$

όπου όπως και πριν θεωρούμε $\delta\phi(x) = \epsilon H(\phi(x))$ με την $H(\phi(x))$ μία συνάρτηση που καθορίζεται κάθε φορά από το είδος την μεταβολής και ϵ μια απειροστή ποσότητα. Η μεταβολή της $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ θα είναι

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0 \quad (2.52)$$

δεδομένου ότι ισχύει

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi) \quad (2.53)$$

θα έχουμε

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu(\delta\phi) = 0 \quad (2.54)$$

Γράφοντας το παραπάνω ως παράγωγο γινομένου έχουμε

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right] = 0 \quad (2.55)$$

Ορίζουμε τώρα την ποσότητα μέσα στην παρένθεση ως ϵj^μ και αντικαθιστούμε το $\delta\phi$. Έχουμε

$$\epsilon j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \epsilon H \quad (2.56)$$

και άρα

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} H \quad (2.57)$$

Σημείωση: Για την ύπαρξη διατηρούμενου ρεύματος δεν είναι απαραίτητο να έχουμε μεταβολή της λαγκρανζιανής ίση με μηδέν. Υπάρχει μία σχετική ελευθερία καθώς η δράση μπορεί να αλλάζει κατά ένα επιφανειακό όρο αφού εξαλείφεται κατά την εξαγωγή της εξίσωσης κίνησης. Πιο αναλυτικά θεωρούμε την μεταβολή

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu I^\mu \quad (2.58)$$

για κάποιο τυχαίο I^μ . Σε αυτή την περίπτωση η μεταβολή

$$\delta \mathcal{L} = \alpha \partial_\mu I^\mu \quad (2.59)$$

δεν είναι ίση με μηδέν. Από την σχέση

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] \quad (2.60)$$

θα έχουμε

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu)} \delta \phi - I^\mu \quad (2.61)$$

2.3 Μετασχηματισμοί βαθμίδας

Οι μετασχηματισμοί διαδραματίζουν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην διατύπωση μιας κβαντικής θεωρίας πεδίου καθώς και στην περιγραφή των αλληλεπιδράσεων. Θα μελετήσουμε για παράδειγμα το αναλλοίωτο της λαγκρανζιανής

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.62)$$

κάτω από τον μετασχηματισμό

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi \quad (2.63)$$

(εναλλακτικά θα μπορούσαμε να δούμε και τον $\psi^* \rightarrow \psi^{*'} = e^{-i\alpha} \psi^*$) Η λαγκρανζιανή είναι της μορφής

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}) \quad (2.64)$$

άρα θα ισχύει

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta(\partial_\mu \psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} \delta \bar{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \delta(\partial_\mu \bar{\psi}) \\ &= \dots \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \delta \bar{\psi} \right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

όπου

$$\delta\psi = \psi' - \psi = i\alpha\psi \quad (2.66)$$

και

$$\delta\bar{\psi} = \bar{\psi}' - \bar{\psi} = -i\alpha\bar{\psi} \quad (2.67)$$

Υπολογίζουμε τώρα την \mathcal{L}' κάτω από τον μετασχηματισμό

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha}\psi \quad (2.68)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi' \\ &= ie^{-i\alpha}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(e^{i\alpha}\psi) - me^{-i\alpha}\bar{\psi}e^{i\alpha}\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Αφού

$$\delta\mathcal{L} = 0 \quad (2.70)$$

θα υπάρχει διατηρούμενο ρεύμα. Από τον τύπο για το $\delta\mathcal{L}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \partial_\mu(i\bar{\psi}\gamma^\mu(i\alpha\psi) + 0(-i\alpha\bar{\psi})) &= 0 \\ \partial_\mu(-\alpha\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) &= 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

Και άρα

$$j^\mu = -\alpha\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (2.72)$$

Το διατηρούμενο φορτίο θα είναι

$$Q = \int j^0 d^3x \quad (2.73)$$

$$Q = \int -\alpha\bar{\psi}\gamma^0\psi d^3x \Rightarrow Q = -\alpha \int \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi d^3x \quad (2.74)$$

δηλαδή

$$Q = -\alpha \int \psi^\dagger\psi d^3x = -\alpha \quad (2.75)$$

Έστω τώρα $\alpha = e$ τότε $Q = -e$ και άρα το ηλεκτρικό φορτίο είναι ανεξάρτητο από το χρόνο. Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι γνωστοί ως μετασχηματισμοί βαθμίδας πρώτου είδους ή εκτεταμένοι μετασχηματισμοί βαθμίδας (global gauge transformations) επειδή η παράμετρος α είναι σταθερά. Το ερώτημα τώρα είναι τι συμβαίνει στην περίπτωση που το α δεν είναι σταθερά αλλά έχει εξάρτηση από το x . Θα έχουμε δηλαδή

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi \quad (2.76)$$

ή εναλλακτικά

$$\psi^* \rightarrow \psi'^* = e^{-i\alpha(x)}\psi^* \quad (2.77)$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι γνωστοί ως μετασχηματισμοί βαθμίδας δεύτερου είδους ή τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας (local gauge transformations). Ανάλογα με πριν έχουμε

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}\end{aligned}\quad (2.78)$$

Επίσης

$$\partial_\mu\psi \rightarrow \partial\psi' = \partial_\mu(e^{i\alpha(x)}\psi) = (\partial_\mu e^{i\alpha(x)})\psi + e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi = i\partial_\mu\alpha(x)e^{i\alpha(x)}\psi + e^{i\alpha(x)}\partial\psi \quad (2.79)$$

Θέλουμε τώρα να δούμε αν η λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη κάτω από αυτό τον μετασχηματισμό. Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi' \\ &= ie^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}\gamma^\mu(e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi + ie^{i\alpha(x)}\psi\partial_\mu\alpha) - e^{i\alpha(x)}e^{i\alpha(x)}m\bar{\psi}\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha \\ &= \mathcal{L} - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha\end{aligned}\quad (2.80)$$

Και άρα

$$\delta\mathcal{L} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha \neq 0 \quad (2.81)$$

Θέλουμε η συμμετρία βαθμίδας που αντιστοιχεί στην global περίπτωση να επεκτείνεται και στη local. Απαιτούμε η \mathcal{L} να είναι αναλλοίωτη κάτω από τον τοπικό μετασχηματισμό βαθμίδας ώστε ο όρος που περισσεύει να εξαφανιστεί. Θέλουμε δηλαδή

$$\partial_\mu\psi \rightarrow \partial_\mu\psi' - i\partial_\mu\alpha e^{i\alpha(x)}\psi + e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi \quad (2.82)$$

Άρα στην

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.83)$$

επιβάλλουμε την εξής μετατροπή στην παράγωγο

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (2.84)$$

όπου e ελεύθερη παράμετρος. Αυτό που κάναμε ήταν να ορίσουμε μία παράγωγο η οποία κάτω από τον μετασχηματισμό βαθμίδας παραμένει αναλλοίωτη, δηλαδή μετασχηματίζεται όπως το πεδίο. Δηλαδή

$$D_\mu\psi \rightarrow (D_\mu\psi)' = e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi \quad (2.85)$$

Ο όρος A_μ ονομάζεται διανυσματικό πεδίο βαθμίδας και μετασχηματίζεται ως εξής

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \quad (2.86)$$

Πιο αναλυτικά

$$\begin{aligned}
(D_\mu \psi)' &= (\partial_\mu + ieA'_\mu)\psi' = (\partial_\mu + ie(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x))e^{i\alpha(x)}\psi \\
&= e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi + i\partial_\mu\alpha(x)e^{i\alpha(x)}\psi + ieA_\mu e^{i\alpha(x)}\psi - i\partial_\mu\alpha(x)e^{i\alpha(x)}e^{i\alpha(x)}\psi \\
&= e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi = e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi
\end{aligned}
\tag{2.87}$$

Επομένως αντικαθιστώντας $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ στην λαγκρανζιανή παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= i\bar{\psi}'\gamma^\mu(D_\mu\psi)' - m\bar{\psi}'\psi' = ie^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}\gamma^\mu e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi - me^{i\alpha(x)}e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}\psi \\
&= i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\
&= \mathcal{L}
\end{aligned}
\tag{2.88}$$

Και άρα

$$\delta\mathcal{L} = 0 \tag{2.89}$$

Άρα η \mathcal{L} που περιγράφει ένα σωματίδιο Dirac μάζας m είναι η αναβαθμισμένη

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi \\
&= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi
\end{aligned}
\tag{2.90}$$

Για να είναι το A_μ διανυσματικό πεδίο που διαδίδεται θα πρέπει και αυτό να περιγράφεται από μία ελεύθερη λαγκρανζιανή. Για να είναι και αυτή αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς δεν θα πρέπει να περιέχει όρους μάζας,

$$\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \tag{2.91}$$

αλλά μόνο κινητικό όρο ο οποίος θα είναι και αναλλοίωτος κάτω από τον μετασχηματισμό του πεδίου. Ο μόνος υποψήφιος είναι ο ταυσιτής δύναμης πεδίου

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.92}$$

Άρα η πλήρης \mathcal{L} θα είναι

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \psi(i\gamma^\mu\bar{\partial}_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - j^\mu A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{2.93}$$

όπου ο πρώτος όρος είναι η ελεύθερη \mathcal{L} του φερμιονίου, ο δεύτερος είναι η αλληλεπίδραση του φερμιονίου με το διανυσματικό πεδίο και ο τρίτος η ελεύθερη \mathcal{L} του διανυσματικού πεδίου. Πρέπει τώρα να γενικεύσουμε τα παραπάνω στην περίπτωση όπου το σωματίδιο φέρει κάποιο άλλο φορτίο και η θεωρία αναλλοίωτη κάτω από κάποιους άλλους μετασχηματισμούς βαθμίδας. Τότε θα υπάρχουν ανυσματικά πεδία που ονομάζονται γενικά πεδία βαθμίδας και αντίστοιχα σωματίδια του πεδίου με σπιν

1, που ονομάζονται γενικά μποζόνια βαθμίδας. Θεωρούμε για παράδειγμα τον γενικό μετασχηματισμό για κάποιο πεδίο Ψ

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U\Psi \quad (2.94)$$

όπου U ένας μοναδιακός μετασχηματισμός συμμετρίας. Ορίζοντας την συναλλοίωτη παράγωγο

$$D_\mu\Psi = (\partial_\mu + igA_\mu)\Psi \quad (2.95)$$

όπου g η σταθερά ζεύξης και απαιτώντας αυτή να μετασχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως το πεδίο έχουμε

$$D_\mu\Psi \rightarrow (D_\mu\Psi)' = U(D_\mu\Psi) \quad (2.96)$$

με το πεδίο βαθμίδας A_μ να μετασχηματίζεται γενικά ως εξής

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \quad (2.97)$$

με τα U , A_μ να μην μετατίθενται γενικά. Σαν εφαρμογή μπορούμε να θεωρήσουμε

$$U = e^{i\alpha(x)}, g = q \quad (2.98)$$

για να βρούμε τον μετασχηματισμό βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

$$U = e^{i\alpha(x)}, g = q, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x) \quad (2.99)$$

2.4 Συμμετρίες και στοιχεία θεωρίας ομάδων

Είδαμε στα παραπάνω παραδείγματα ένα παράδειγμα ενός μοναδιακού μετασχηματισμού συμμετρίας. Ο μετασχηματισμός $U = e^{i\alpha(x)}$ αποτελεί μοναδιακό πίνακα διάστασης 1×1 , άρα ένα $U(1)$ τοπικό μετασχηματισμό βαθμίδας, και λέμε ότι η αντίστοιχη συμμετρία είναι μία $U(1)$ συμμετρία βαθμίδας. Όπως είδαμε οι νόμοι διατήρησης ενέργειας, ορμής κλπ δεν είναι τίποτε άλλο από την εκδήλωση της συμμετρίας των φυσικών νόμων κάτω από την ομάδα των μετασχηματισμών Poincare που περιλαμβάνουν τους μετασχηματισμούς Lorentz και τις μετατοπίσεις στο χωρόχρονο. Θα ξεκινήσουμε από τα θεμελιώδη.[4] Το σύνολο Π των πράξεων μιας συμμετρίας πάνω σε κάποιο σύστημα πρέπει να έχει τις εξής ιδιότητες:

1) **Κλειστότητα** : $\Pi_i\Pi_j = \Pi_k$, δηλαδή το γινόμενο δύο στοιχείων του συνόλου είναι στοιχείο του συνόλου

2) **Ταυτοτικότητα** : Υπάρχει στοιχείο I τέτοιο ώστε $I\Pi_i = \Pi_i I = \Pi_i$ για κάθε στοιχείο Π_i

3) **Αντίστροφο** : Για κάθε Π_i υπάρχει στοιχείο Π_i^{-1} τέτοιο ώστε $\Pi_i \Pi_i^{-1} = \Pi_i^{-1} \Pi_i = I$

4) **Προσεταιριστικότητα**: Ισχύει $\Pi_i(\Pi_j\Pi_k) = (\Pi_i\Pi_j)\Pi_k$
αυτές οι ιδιότητες ορίζουν μία ομάδα.

Για παράδειγμα ο μετασχηματισμός που είδαμε πριν $U = e^{i\alpha(x)}$ έχει όλες τις παραπάνω ιδιότητες. 1) $U(\alpha_1)U(\alpha_2) = e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} = U(\alpha_1 + \alpha_2)$

2) $U(0) = I$

3) $U^{-1}(\alpha) = U(-\alpha) : U(\alpha)U^{-1}(\alpha) = U^{-1}(\alpha)U(\alpha) = I$

4) $U(\alpha_1)[U(\alpha_2)U(\alpha_3)] = [U(\alpha_1)U(\alpha_2)]U(\alpha_3)$ και αποτελεί την ομάδα $U(1)$. Σε περίπτωση που για τα στοιχεία της ομάδας ισχύει και η αντιμεταθετικότητα των στοιχείων της τότε αυτή χαρακτηρίζεται ως αβελιανή. Η ομάδα $U(1)$ είναι για παράδειγμα μία αβελιανή ομάδα αφού: $U(\alpha_1)U(\alpha_2) = U(\alpha_2)U(\alpha_1)$

2.4.1 Συνεχείς και διακριτές ομάδες

Οι ομάδες ανάλογα με τον αριθμό των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν το κάθε στοιχείο διακρίνονται σε συνεχείς και διακριτές.

Διακριτές: Οι ομάδες, τα στοιχεία των οποίων χαρακτηρίζονται από ένα δείκτη που παίρνει ακέραιες τιμές. Παραδείγματα τέτοιων ομάδων είναι η ομοτιμία και η ομάδα συζυγίας φορτίου.

Συνεχείς: Οι ομάδες, τα στοιχεία των οποίων εξαρτώνται από μία ή περισσότερες συνεχείς παραμέτρους. Μία κατηγορία συνεχών ομάδων είναι οι ομάδες Lie.

Θεώρημα Wigner: Αν κάποιοι μετασχηματισμοί αποτελούν μετασχηματισμούς συμμετρίας ενός συστήματος τότε τα στοιχεία Π είναι μοναδιαίοι τελεστές.

Στην περίπτωση των συνεχών ομάδων τα στοιχεία Π εξαρτώνται από μία ή περισσότερες συνεχείς παραμέτρους. Οι συνεχείς ομάδες ονομάζονται και ομάδες Lie. Γενικότερα αν έχουμε n συνεχείς παραμέτρους $\epsilon_\alpha(x)$, $\alpha = 1, \dots, n$ τότε γράφουμε

$$\Pi(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = e^{i \sum_{\alpha=1}^n \epsilon_\alpha F_\alpha} \quad (2.100)$$

όπου ϵ_α οι παράμετροι και F_α οι λεγόμενοι γεννήτορες της ομάδας των αντίστοιχων μετασχηματισμών. Για απειροστές τιμές των παραμέτρων $\epsilon_\alpha \ll 1$ έχουμε

$$\Pi(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \sim I + i \sum_{\alpha=1}^n \epsilon_\alpha F_\alpha \quad (2.101)$$

εν γένει είναι $[F_\alpha, F_b] \neq 0$ πράγμα που σημαίνει ότι δεν είναι όλες οι ομάδες αβελιανές. Γενικά ισχύει

$$[F_\alpha, F_b] = i f_{abc} F_c \quad (2.102)$$

όπου οι αριθμοί f_{abc} ονομάζονται σταθερές δομής της ομάδας. Υποθέτουμε ότι από τους n από τους γεννήτορες, έστω κ , εξ αυτών μετατίθενται μεταξύ τους

$$[F_\kappa, F_\lambda] = 0 \quad \kappa, \lambda = 1, \dots, \kappa. \quad (2.103)$$

Ο αριθμός κ είναι γνωστός ως βαθμός της ομάδας. Τότε υπάρχουν κ προσθετικοί κβαντικοί αριθμοί οι οποίοι διατηρούνται. Οι περισσότερες ομάδες ενδιαφέροντος στη φυσική είναι ομάδες πινάκων. Στη σωματιδιακή φυσική, οι πιο συνηθισμένες ομάδες είναι οι ομάδες των μοναδιακών πινάκων $n \times n$ που μαθηματικά λέμε ότι αποτελούν

την ομάδα $U(n)$. Δηλαδή για αυτούς θα ισχύει $U^\dagger U = I$. Στην περίπτωση που έχουμε μοναδιακούς πίνακες με ορίζουσα 1 τότε έχουμε την ομάδα $SU(n)$. Ο αριθμός των παραμέτρων και των γεννητόρων της ομάδας $U(n)$ είναι n^2 και της ομάδας $SU(n)$ είναι $n^2 - 1$. Αντίστοιχα ο βαθμός της ομάδας $U(n)$ είναι n και της ομάδας $SU(n)$ είναι $n - 1$. Αν θεωρήσουμε πραγματικούς μοναδιακούς πίνακες $n \times n$, τότε έχουμε ορθογώνιους πίνακες $n \times n$ και μιλάμε για την ομάδα $O(n)$. Η ορθογωνιότητα σημαίνει πως $R^T R = I$. Εάν υποθέσουμε πως και η ορίζουσα των πινάκων είναι 1 τότε έχουμε την ομάδα $SO(n)$. Ο αριθμός των γεννητόρων των ομάδων $O(n)$ είναι $\frac{n(n-1)}{2}$ και ο βαθμός είναι $\frac{n}{2}$. Η ομάδα $SO(n)$ περιγράφει περιστροφές σε ένα χώρο n διαστάσεων. Κάθε ομάδα G μπορεί να αναπαρασταθεί με μια ομάδα πινάκων με τον όρο οι πίνακες να σέβονται την πράξη της ομάδας.

$$\sigma\tau = \omega \Rightarrow M_\sigma M_\tau = M_\omega \quad (2.104)$$

Προφανώς η αναπαράσταση δεν είναι μοναδική.

2.5 Αβελιανές και μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας

Οι απλούστερες ομάδες που είδαμε $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$ αποτελούν την βάση για την διατύπωση των θεωριών βαθμίδας που περιγράφουν τις βασικές αλληλεπιδράσεις και συνιστούν το καθιερωμένο πρότυπο. Ξεκινάμε από την αβελιανή θεωρία βαθμίδας $U(1)$. Για τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας έχουμε

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\theta(x)}\Psi \quad (2.105)$$

Εισάγουμε το ανυσματικό πεδίο βαθμίδας B_μ με συναλλοίωτη παράγωγο

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_1 B_\mu \quad (2.106)$$

όπου ονομάζουμε g_1 την σταθερά ζεύξης της θεωρίας βαθμίδας $U(1)$. Η συναλλοίωτη παράγωγος του πεδίου Ψ μετασχηματίζεται όπως το πεδίο

$$D_\mu \Psi \rightarrow (D_\mu \Psi)' = e^{i\theta(x)}(D_\mu \Psi) \quad (2.107)$$

Το πεδίο βαθμίδας B_μ μετασχηματίζεται ως εξής

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu - \frac{1}{g_1} \partial_\mu \theta(x) \quad (2.108)$$

και η λαγκρανζιανή είναι

$$L = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (2.109)$$

όπου

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.110)$$

Πάμε τώρα να δούμε μία μη αβελιανή θεωρία βαθμίδας, συγκεκριμένα την $SU(2)$. Για τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας γράφουμε τώρα

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\theta^i(x)\frac{\tau_i}{2}}\Psi \quad (2.111)$$

όπου $\theta^i(x)$ οι τρεις παράμετροι και $\frac{\tau_i}{2}$ οι τρεις γεννήτορες της ομάδας $SU(2)$. Συμβολίζουμε τώρα τους τρεις γεννήτορες της ομάδας $SU(2)$ με

$$\frac{\tau_i}{2} \quad \text{με} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.112)$$

για την μετάθεση τους ισχύει η σχέση

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}\right] = i\epsilon_{ijk}\frac{\tau_k}{2} \quad (2.113)$$

όπου τ_i οι τρεις πίνακες του Pauli

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος θα είναι

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_2\frac{\tau_i}{2}W_\mu^i \quad (2.115)$$

όπου g_2 η σταθερά ζεύξης μιας θεωρίας βαθμίδας $SU(2)$ και W_μ^i τα τρία πεδία βαθμίδας που αντιστοιχούν στους τρεις γεννήτορες της ομάδας $SU(2)$. Για να βρούμε το πως μετασχηματίζεται η συναλλοίωτη παράγωγος απαιτούμε να μετασχηματίζεται όπως το πεδίο Ψ , δηλαδή

$$D_\mu\Psi \rightarrow (D_\mu\Psi)' = e^{i\theta^i(x)\frac{\tau_i}{2}}(D_\mu\Psi) \quad (2.116)$$

Θεωρούμε απειροστούς μετασχηματισμούς

$$\theta^i(x) \ll 1 \quad (2.117)$$

και έχουμε

$$e^{i\theta^i(x)\frac{\tau_i}{2}} \sim 1 + i\theta^i(x)\frac{\tau_i}{2} \quad (2.118)$$

Γράφουμε

$$W_\mu^i \rightarrow W_\mu^i + \delta W_\mu^i \quad (2.119)$$

με αντικατάσταση στις προηγούμενες έχουμε

$$\delta W_\mu^i = -\frac{1}{g_2}\partial_\mu\theta^i(x) - \epsilon_{ijk}\theta^j(x)W_\mu^k \quad (2.120)$$

και τελικά ο νόμος μετασχηματισμού των πεδίων W_μ^i είναι

$$W_\mu^i \rightarrow W_\mu^i - \frac{1}{g_2} \partial_\mu \theta^i(x) - \epsilon_{ijk} \theta^j(x) W_\mu^k \quad (2.121)$$

Χρειάζεται τώρα να βρούμε την λαγκρανζιανή για τα πεδία W_μ^i . Ο τρόπος που θα ακολουθήσουμε βασίζεται στην χρήση του μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων. Παρατηρούμε ότι για την περίπτωση $U(1)$ έχουμε

$$[D_\mu, D_\nu] \Psi = ig_1 (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) \Psi \quad (2.122)$$

δηλαδή

$$[D_\mu, D_\nu] = ig_1 B_{\mu\nu} \quad (2.123)$$

Γενικά ισχύει

$$(D_\mu \Psi)' = U(D_\mu \Psi) \Rightarrow D'_\mu = U D_\mu U^{-1} \quad (2.124)$$

και άρα

$$[D'_\mu, D'_\nu] = U [D_\mu, D_\nu] U^{-1} \quad (2.125)$$

Με βάση την παραπάνω σχέση βλέπουμε αν η λαγκρανζιανή

$$L = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (2.126)$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από $U(1) = e^{i\theta(x)}$ μετασχηματισμούς. Έχουμε

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \rightarrow L = -\frac{1}{4} B'_{\mu\nu} B'^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} U B_{\mu\nu} U^{-1} U B^{\mu\nu} U^{-1} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ &= L \end{aligned} \quad (2.127)$$

Ανάλογα για τους

$$SU(2) = e^{i\theta^i(x) \frac{\tau_i}{2}} \quad (2.128)$$

έχουμε

$$[D_\mu, D_\nu] = ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_{\mu\nu}^i \quad (2.129)$$

με λαγκρανζιανή την

$$L = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} \quad (2.130)$$

είναι

$$[D'_\mu, D'_\nu] = U [D_\mu, D_\nu] U^{-1} = ig_2 (U \frac{\tau_i}{2} U^{-1}) (U W_{\mu\nu} U^{-1}) \quad (2.131)$$

και άρα

$$\begin{aligned}
 L &= -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} = -\frac{1}{4}\text{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) \rightarrow L' = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} \\
 &= -\frac{1}{4}\text{Tr}(W'_{\mu\nu}W'^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}\text{Tr}(UW_{\mu\nu}U^{-1}UW^{\mu\nu}U^{-1}) = -\frac{1}{4}\text{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) \\
 &= L
 \end{aligned} \tag{2.132}$$

Για την αλληλεπίδραση των $SU(2)$ πεδίων βαθμίδας W_μ^i με ένα σπινორιακό πεδίο ψ έχουμε

$$L = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} + \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi \tag{2.133}$$

Για την θεωρία βαθμίδας $SU(3)$ τώρα θα έχουμε

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\theta^i(x)\frac{\lambda_i}{2}}\Psi \tag{2.134}$$

όπου $\theta^i(x)$ και $\frac{\lambda_i}{2}$ οι οκτώ παράμετροι και γεννήτορες της $SU(3)$. Οι γεννήτορες της $SU(3)$ είναι

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \lambda_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.135}$$

για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις μετάθεσης

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda_i}{2}, i = 1, \dots, 8 \\
 \left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}\right] = if_{ijk}\frac{\lambda_k}{2}
 \end{aligned} \tag{2.136}$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος είναι

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_3\frac{\lambda_i}{2}G_\mu^i \tag{2.137}$$

όπου g_3 η σταθερά ζεύξης και G_μ^i τα οκτώ πεδία βαθμίδας που αντιστοιχούν στους γεννήτορες της $SU(3)$. Έχουμε

$$D_\mu\Psi \rightarrow (D_\mu\Psi)' = e^{i\theta^i(x)\frac{\lambda_i}{2}}(D_\mu\Psi) \tag{2.138}$$

ενώ ο ταυνοστής των πεδίων είναι

$$G_{\mu\nu}^i = \partial_\mu G_\nu^i - \partial_\nu G_\mu^i - g_3 f_{ijk} G_\mu^j G_\nu^k \quad (2.139)$$

και η λαγκρανζιανή θα είναι

$$L = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{\mu\nu i} \quad (2.140)$$

και έτσι για την αλληλεπίδραση των πεδίων βαθμίδας G_μ^i με ένα σπινωριακό πεδίο ψ έχουμε

$$L = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{\mu\nu i} + \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi \quad (2.141)$$

Οι μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας ονομάζονται και θεωρίες Yang-Mills. Οι φυσική σημασία των όρων που προκύπτουν στην λαγκρανζιανή από την μετάβαση μιας αβελιανής σε μία μη αβελιανή θεωρία βαθμίδας έγκειται στην ακόλουθη παρατήρηση. Για την $U(1)$ θεωρία βαθμίδας οι εξισώσεις Euler-Lagrange δίνουν τις εξισώσεις Maxwell

$$\partial_\nu B^{\mu\nu} = 0 \quad (2.142)$$

για τις $SU(2)$ και $SU(3)$ οι Euler-Lagrange δίνουν

$$\begin{aligned} \partial_\nu W^{\mu\nu i} &= g_2 \epsilon_{ijk} W_\nu^j W^{\mu\nu k} \\ \partial_\nu G^{\mu\nu i} &= g_3 f_{ijk} G_\nu^j G^{\mu\nu k} \end{aligned} \quad (2.143)$$

Δηλαδή αντίθετα με ότι ισχύει για ένα αβελιανό πεδίο, ένα μη αβελιανό συζεύγεται με τον εαυτό του, λειτουργώντας σαν πηγή του εαυτού του.

Κεφάλαιο 3

Το καθιερωμένο πρότυπο των στοιχειωδών σωματιδίων

3.1 Εισαγωγή

Είδαμε στα προηγούμενα πως η μορφή της λαγκρανζιανής των θεωριών μας υπαγορεύεται από εσωτερικές συμμετρίες που δεν εξαρτώνται από τον εξωτερικό χωρόχρονο. Είδαμε επίσης πως η απαίτηση της αναλλοιώτητας κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας οδήγησε σε απουσία όρων μάζας σε διανυσματικά πεδία. Αυτό δεν δημιουργεί προβλήματα σε ότι αφορά τις ηλεκτρομαγνητικές και τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις αφού τόσο τα φωτόνια όσο και τα γλουόνια είναι άμαζα. Δημιουργείται πρόβλημα όμως σε ότι αφορά τις ασθενείς καθώς τα μποζόνια της αλληλεπίδρασης αυτής έχουν μάζα περίπου ίση με 100 GeV . Σε περίπτωση τώρα που αγνοώντας αυτά βάζαμε στην λαγκρανζιανή έναν όρο μάζας

$$m^2 W_\mu W^\mu \quad (3.1)$$

θα αντιμετωπίζαμε μία σειρά από προβλήματα. Η θεωρία μας θα ήταν μη επανακανονικοποιήσιμη, δηλαδή θα αντιμετωπίζαμε μη διαχειρήσιμους απειρισμούς και θα έχανε την προβλεψιμότητα της. Το ερώτημα εδώ είναι αν μπορούμε να βρούμε έναν εναλλακτικό τρόπο εισαγωγής μάζας που να μην καταστρέφει την αναλλοιώτητα της λαγκρανζιανής. Ο τρόπος αυτός ονομάζεται αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας ή εναλλακτικά μηχανισμός Higgs. Όσο αφορά την γενική ιδέα μπορούμε να φανταστούμε ένα φυσικό σύστημα το οποίο διέπεται από κάποια συμμετρία. Αν για κάποιο λόγο η βασική κατάσταση (κενό) δεν υπακούει στην συμμετρία τότε έχουμε σπάσιμο αυτής της συμμετρίας. Λέγεται αυθόρμητο αφού γίνεται χωρίς την επέμβαση εξωτερικού παράγοντα. Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε πως για ένα σύστημα που περιγράφεται από κάποια λαγκρανζιανή και είναι αναλλοίωτο κάτω από κάποιο μετασχηματισμό βαθμίδας, μετά από το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας θα έχουμε άλλη κατάσταση ελάχιστης ενέργειας για την οποία

$$\delta\mathcal{L} \neq 0 \quad (3.2)$$

3.2 Αυθόρμητο σπάσιμο διακριτής συμμετρίας

Θεωρούμε ένα σύστημα πραγματικού βαθμωτού ϕ που υπακούει στην λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \left(\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \right) \quad (3.3)$$

και την αντικατάσταση

$$\phi \rightarrow \phi' = -\phi \quad (3.4)$$

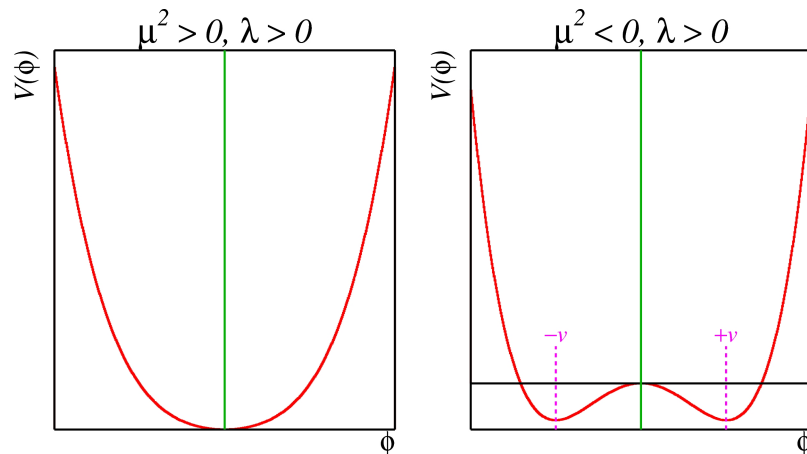
θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi')^2 - \left(\frac{1}{2} \mu^2 \phi'^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi'^4 \right) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu (-\phi))^2 - \left(\frac{1}{2} \mu^2 (-\phi)^2 + \frac{1}{4} \lambda (-\phi)^4 \right) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \left(\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \right) = \mathcal{L} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Το δυναμικό σε αυτή την περίπτωση είναι το εξής

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \quad (3.6)$$

με την μορφή του να εξαρτάται από το πρόσημο του μ^2 .



Μελετάμε και τις δύο περιπτώσεις αναζητώντας το ελάχιστο του δυναμικού, δηλαδή την θεμελιώδη κατάσταση. Έπειτα θα αναπτύξουμε γύρω από αυτές τις τιμές για να βρούμε τις διεγερμένες καταστάσεις, δηλαδή τα σωματίδια της θεωρίας. [5] Αν

$\mu^2 > 0$ τότε η λαγκρανζιανή περιγράφει σωματίδιο μάζας μ και αντιστοιχεί στην λαγκρανζιανή της εξίσωσης Klein-Gordon. Θα βρούμε τώρα την ελάχιστη ενέργεια

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \right) = \mu^2 \phi + \lambda \phi^3 = \phi (\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0 \quad (3.7)$$

και άρα

$$\phi = 0 \quad \text{ή} \quad \phi^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (3.8)$$

Επειδή όμως $\lambda > 0$, $\mu^2 > 0$, καταλήγουμε $\phi = 0$ Αν $\mu^2 < 0$ για την χαμηλότερη ενέργεια θα έχουμε

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \phi = 0 \quad \text{ή} \quad \phi^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \Rightarrow \phi = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad \text{ή} \quad \phi = \pm u \quad (3.9)$$

Για να βρω το φάσμα της θεωρίας, παίρνω μικρές διαταραχές γύρω από το σημείο ελάχιστης ενέργειας, έστω το $\phi = u$.

$$\phi(x) = u + \eta(x) \quad (3.10)$$

Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να είχαμε πάρει

$$\phi(x) = -u \quad (3.11)$$

για το κενό. Αντικαθιστούμε στην λαγκρανζιανή και έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2} (\partial_\mu (u + \eta))^2 - \left(\frac{1}{2} \mu^2 (u + \eta)^2 + \frac{1}{4} \lambda (u + \eta)^4 \right) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu u + \partial_\mu \eta)^2 - \left(\frac{1}{2} \mu^2 (u^2 + 2u\eta + \eta^2) + \frac{1}{4} (u^4 + 4u^3\eta + 6u^2\eta^2 + 4u\eta^3 + \eta^4) \right) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \left(\frac{1}{2} \mu^2 u^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 + \mu^2 u\eta + \frac{1}{4} \lambda u^4 + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \lambda u^3 \eta + \frac{3}{2} \lambda u^2 \eta^2 + \lambda u \eta^3 \right) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \lambda u^2 \eta^2 - \lambda u \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \text{σταθερός όρος} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Συγκρίνοντας με τον όρο $-\frac{1}{2} m_\eta^2 \phi^2$ της \mathcal{L} , έχουμε

$$\frac{1}{2} m_\eta^2 = \lambda u^2 \Rightarrow m_\eta = \sqrt{2\lambda u^2} = \sqrt{-2\mu^2} \quad (3.13)$$

Αυτός ο τρόπος αποκάλυψης μάζας ονομάζεται αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας. Στην περίπτωση λοιπόν που η παράμετρος μ^2 είναι αρνητική η λαγκρανζιανή περιγράφει ένα πεδίο με μάζα

$$m_\eta = \sqrt{-2\mu^2} \quad (3.14)$$

Πρέπει εδώ να κάνουμε κάποιες βασικές παρατηρήσεις:

1) Η μάζα της λαγκρανζιανής φάνηκε μόνο μετά την διαδικασία των διαταραχών γύρω

από το ελάχιστο της ενέργειας

2) Οι όροι υψηλότερης τάξης περιγράφουν αλληλεπιδράσεις του πεδίου με τον εαυτό του.

3) Η αρχική συμμετρία $\phi \rightarrow -\phi$ πλέον δεν ισχύει, παρότι οι δύο λαγκρανζιανές είναι ισοδύναμες.

3.3 Αυθόρμητο σπάσιμο ολικής συμμετρίας

Θεωρούμε ένα σύστημα με ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο (ή δύο πραγματικές)

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad (3.15)$$

που περιγράφεται από την λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (3.16)$$

Αυτή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον $U(1)$ μετασχηματισμό

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi \quad (3.17)$$

Η περίπτωση όπου η παράμετρος $\mu^2 > 0$ είναι τετριμμένη αφού ερμηνεύεται κατευθείαν σαν μάζα. Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου $\mu^2 < 0$ και $\lambda > 0$. Ελαχιστοποιούμε το δυναμικό

$$V = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (3.18)$$

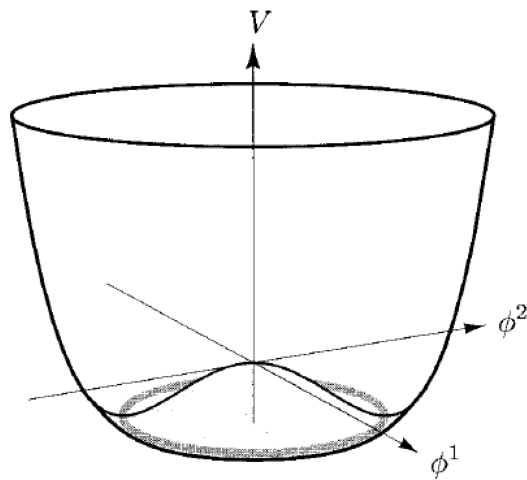
για να βρούμε τις τιμές των πεδίων που το ελαχιστοποιούν. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2) \\ &= \phi^* (\mu^2 + 2\lambda (\phi^* \phi)) = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Και άρα

$$\phi^* = 0 \quad \text{ή} \quad |\phi|^2 = \phi^* \phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \Rightarrow \phi_1^2 + \phi_2^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} = v \quad (3.20)$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που αποτελούν θεμελιώδεις καταστάσεις είναι ένας κύκλος στο επίπεδο ϕ_1, ϕ_2 με ακτίνα v .



Δύο τιμές που ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου είναι $\phi_1 = v$ $\phi_2 = 0$. Όπως και στην περίπτωση της διακριτής συμμετρίας, παίρνουμε ανάπτυγμα γύρω από το κενό μέσω μικρών διακυμάνσεων. Έχουμε

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x) + if(x)] \quad (3.21)$$

Αντικαθιστούμε στην λαγκρανζιανή και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= [\partial_\mu (\frac{v + \eta(\chi) + if(\chi)}{\sqrt{2}})^*] \partial^\mu [\frac{v + \eta(\chi) + if(\chi)}{\sqrt{2}}] \\
&\quad - [\mu^2 (\frac{v + \eta(\chi) + if(\chi)}{\sqrt{2}})^* (\frac{v + \eta(\chi) + if(\chi)}{\sqrt{2}}) \\
&\quad + \lambda [(\frac{v + \eta(\chi) + if(\chi)}{\sqrt{2}})^* (\frac{v + \eta(\chi) + if(\chi)}{\sqrt{2}})]^2] \\
&= \frac{1}{2} [\partial_\mu (\eta(\chi) + if(\chi))]^* \partial^\mu (\eta(\chi) + if(\chi)) \\
&\quad - \frac{\mu^2}{2} [v^2 + v\eta(\chi) + ivf(\chi) + v\eta(\chi) + \eta^2(\chi) \\
&\quad + i\eta(\chi)f(\chi) - ivf(\chi) - if(\chi)\eta(\chi) + f^2(\chi)] \\
&\quad - \frac{\lambda}{4} [v^2 + v\eta(\chi) + ivf(\chi) + v\eta(\chi) + \eta^2(\chi) \\
&\quad + i\eta(\chi)f(\chi) - ivf(\chi) - if(\chi)\eta(\chi) + f^2(\chi)]^2 \\
&= \frac{1}{2} [\partial_\mu \eta(\chi) - i\partial_\mu f(\chi)] [\partial^\mu \eta(\chi) + i\partial^\mu f(\chi)] \\
&\quad - \frac{\mu^2}{2} (v^2 + 2v\eta(\chi) + \eta^2 + f^2(\chi)) \\
&\quad - \frac{\lambda}{4} (v^2 + 2v\eta(\chi) + \eta^2(\chi) + f^2(\chi))^2 \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta(\chi))^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu f(\chi))^2 - \frac{\mu^2 v^2}{2} \\
&\quad - \mu^2 v\eta(\chi) - \frac{\mu^2}{2} \eta^2(\chi) - \frac{\mu^2}{2} f^2(\chi) \\
&\quad - \frac{\lambda}{4} (v^4 + 4v^3\eta(\chi) + 4v^2\eta^2(\chi) + 2v^2f^2(\chi) \\
&\quad + 4v\eta^3(\chi) + 4v\eta(\chi)f^3(\chi) + \eta^4(\chi) + 2\eta^2(\chi)f^2(\chi) + f^4(\chi)) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta(\chi))^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu f(\chi))^2 + \mu^2 \eta^2(\chi) + \text{σταθερές και 3ες, 4ες δυνάμεις των } \eta, f
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Βλέπουμε, και πάλι, πως η νέα λαγκρανζιανή δεν σέβεται την αρχική συμμετρία. Ο τρίτος της όρος είναι όρος πραγματικής μάζας αφού είναι της μορφής

$$\frac{1}{2} m_\eta^2 \eta(\chi) \tag{3.23}$$

Άρα η μάζα του $\eta(\chi)$ θα είναι

$$-\frac{1}{2} m_\eta^2 \eta(\chi) = \mu^2 \Rightarrow m_\eta = \sqrt{-2\mu^2} \tag{3.24}$$

Για το πεδίο $f(\chi)$ η λαγκρανζιανή δεν έχει όρο μάζας, έχει όμως κινητικό όρο, που σημαίνει πως το πεδίο είναι άμαζο. Αυτό το αποτέλεσμα ωφείλεται σε ένα γενικότερο

φαινόμενο που ονομάζεται θεώρημα Goldstone. Από το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας αναδύεται ένα άμαζο σωματίδιο που ονομάζεται σωματίδιο Goldstone. Αυτό φαίνεται αρχικά σαν πρόβλημα καθώς στην προσπάθεια μας να δούμε πως αποκτούν μάζα τα σωματίδια/φορείς των ασθενών αλληλεπιδράσεων καταλήξαμε στην εισαγωγή ενός άμαζου και μη παρατηρήσιμου σωματιδίου. Θα δούμε στα επόμενα πως η αναβάθμιση της συμμετρίας, σε τοπική, μπορεί να μας απαλλάξει από αυτά τα σωματίδια.

3.4 Αβελιανή περίπτωση - Μηχανισμός Higgs

Όταν μιλάμε για αβελιανές και μη περιπτώσεις αναφερόμαστε προφανώς στις ομάδες που αντιστοιχούν οι μετασχηματισμοί που επιβάλλουμε στην λαγκρανζιανή. Είδαμε στα προηγούμενα πως η (3.16) παραμένει αναλλοίωτη κάτω από $U(1)$ μετασχηματισμούς αν αναβαθμίσουμε την παράγωγο

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (3.25)$$

και εισάγουμε ένα άμαζο πεδίο που μετασχηματίζεται ως εξής

$$A_\mu \Rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \quad (3.26)$$

Η αναλλοίωτη \mathcal{L} θα είναι η

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi\mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.27)$$

Αν $\mu^2 > 0$ έχουμε την λαγκρανζιανή της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής ενός βαθμωτού σωματιδίου μάζας μ . Ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση όπου $\mu^2 < 0$. Σε αυτή την περίπτωση πηγαίνουμε το σύστημα σε νέο κενό, αναπτύσσουμε το πεδίο γύρω από το κενό και αντικαθιστούμε στην \mathcal{L} . Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \frac{1}{2}(\partial^\mu + ieA^\mu)(v\eta - if)(\partial_\mu - ieA_\mu)(v + \eta + if) - \\ & - \frac{\mu^2}{2}(v + \eta - if)(v + \eta + if) - \frac{\lambda}{4}[(v + \eta - if)(v + \eta + if)]^2 \\ & - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.28)$$

όπου η πρώτη γραμμή είναι ο κινητικός όρος και τον ονομάζουμε \mathcal{L}'_{kin} , η δεύτερη γραμμή είναι ο δυναμικός όρος και ονομάζεται \mathcal{L}'_{pot} ενώ ο τρίτος όρος είναι το μέρος που αναφέρεται στο μπόζόνιο. Η αναβάθμιση της παραγωγού δεν αλλάζει το δυναμικό της global περίπτωσης Άρα

$$\mathcal{L}'_{pot} = \frac{\mu^2}{2}(v + \eta - if)(v + \eta + if) + \frac{\lambda}{4}[(v + \eta - if)(v + \eta + if)]^2 \quad (3.29)$$

όπου μετά από πράξεις δίνει

$$\mathcal{L}'_{pot} = \mu^2 \eta^2 - \frac{\mu^2}{4\lambda} - \lambda v(v\eta - \eta^3 - \eta f^3) - \frac{\lambda}{4} \eta^4 - \frac{\lambda}{2} \eta^2 f^2 \quad (3.30)$$

Ο όρος \mathcal{L}'_{bos} δεν επηρεάζεται από την διαδικασία αφού δεν περιέχει το φ . Τέλος ο όρος \mathcal{L}'_{kin} είναι αυτός που διαφοροποιεί το αποτέλεσμα από την περίπτωση της global συμμετρίας αφού περιέχει όρους με την συνναλλοιώτη παράγωγο. Αναλυτικά θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{kin} &= \frac{1}{2}(\partial^\mu + ieA^\mu)(v + \eta - if)(\partial_\mu - ieA_\mu)(v + \eta + if) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\mu \eta - i\partial^\mu f + ievA^\mu + ieA^\mu \eta + eA^\mu f)(\partial_\mu \eta + i\partial_\mu f - ievA_\mu - ieA_\mu \eta + eA_\mu f) \\ &= \frac{1}{2}[(\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) + i\partial^\mu \eta \partial_\mu f - ievA_\mu \partial^\mu \eta - ieA_\mu \eta \partial^\mu \eta] \\ &\quad + e\partial^\mu \eta A_\mu f - i\partial^\mu f \partial_\mu \eta + (\partial^\mu f)(\partial_\mu f) - ev\partial^\mu f A_\mu \\ &\quad - e\partial^\mu f A_\mu \eta - ie\partial^\mu f A_\mu f + ievA^\mu \partial_\mu \eta + e^2 v^2 A_\mu A^\mu \\ &\quad - evA^\mu \partial_\mu f + e^2 v A^\mu A_\mu \eta + ie^2 v A^\mu A_\mu f + ieA_\mu \partial^\mu \eta \\ &\quad - e\partial_\mu f A^\mu \eta + e^2 v A^\mu A_\mu \eta + e^2 A_\mu A^\mu \eta^2 + ie^2 A^\mu A_\mu \eta f \\ &\quad + eA^\mu f \partial_\mu \eta + ie\partial_\mu f A^\mu f - ie^2 v A_\mu A^\mu f - ie^2 A^\mu A_\mu f \eta + e^2 A^\mu A_\mu f^2 \\ &= \frac{1}{2}[(\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) + (\partial^\mu f)(\partial_\mu f)] + eA_\mu f \partial^\mu \eta \\ &\quad - evA_\mu \partial^\mu f - eA_\mu \eta \partial^\mu f + \frac{1}{2}e^2 v^2 A^\mu A_\mu \\ &\quad + e^2 v A^\mu A_\mu \eta + \frac{1}{2}e^2 A_\mu A^\mu \eta^2 + \frac{1}{2}e^2 A^\mu A_\mu f^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Συνθέτοντας τα κομμάτια της \mathcal{L}' έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu f)^2 + \frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu A^\mu + e\partial^\mu \eta A_\mu f - ev\partial^\mu f A_\mu \\ &\quad - e\partial^\mu f A_\mu \eta + e^2 v A^\mu A_\mu \eta + \frac{1}{2}A_\mu A^\mu \eta^2 + \frac{1}{2}e^2 A^\mu A_\mu f^2 \\ &\quad + \mu^2 \eta^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda} - \lambda v(v\eta - \eta^3 - \eta f^3) - \frac{\lambda}{4} \eta^4 - \frac{\lambda}{2} \eta^2 f^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Το οποίο το γράφουμε στην μορφή

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu f)^2 + \frac{1}{2}e^2 v^2 A^\mu A_\mu \\ &\quad - \mu^2 \eta^2 - evA_\mu \partial^\mu f - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \text{όροι αλλ/σης} + \text{σταθεροί όροι} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Όσο αφορά τα σωματίδια που αυτή η λαγκρανζιανή προβλέπει έχουμε ένα άμαζο Goldstone μποζόνιο f , ένα βαθμωτό μποζόνιο η και ένα διανυσματικό μποζόνιο A_μ .

Οι μάζες θα είναι

$$\frac{1}{2}m_\eta^2 = -\mu^2 \Rightarrow m_\eta = \sqrt{-2\mu^2} \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{2}m_A^2 = \frac{1}{2}e^2v^2 \Rightarrow m_A = ev \quad (3.35)$$

Μέχρι στιγμής έχουμε καταφέρει να δώσουμε μάζα στο A_μ αλλά έχουμε ακόμη το άμαζο μποζόνιο Goldstone και τον περίεργο όρο $-ev\partial_\mu f A^\mu$. Αν προσπαθήσουμε να τον ερμηνεύσουμε σαν αλλ/ση τότε είναι ο όρος που μετατρέπει το f σε A πράγμα που θα σήμαινε πως η ταυτοποίηση των σωματιδίων που έχουμε κάνει μέχρι τώρα είναι λάθος. Αν μετρήσουμε τώρα τους βαθμούς ελευθερίας της λαγκρανζιανής βλέπουμε πως είναι τέσσερις. Δύο λόγω των ϕ, ϕ^* και δύο εγκάρσιες συνιστώσες για το άμαζο μποζόνιο βαθμίδας A_μ . Στην \mathcal{L}' οι βαθμοί ελευθερίας είναι πέντε. Δύο λόγω των η, f και τρεις οι βαθμοί πόλωσης του A_μ αφού πέρα από τις δύο εγκάρσιες συνιστώσες, έχουμε και την μάζα που είναι διαμήκης συνιστώσα. Αυτό δημιουργεί πρόβλημα καθώς αλλάζοντας τα πεδία δεν εξηγείται η αλλαγή στους βαθμούς ελευθερίας. Καταλαβαίνουμε πως η ερμηνεία για τους όρους της \mathcal{L}' είναι λάθος και άρα κάθε πεδίο δεν αντιστοιχεί σε ξεχωριστό σωματίδιο. Πρέπει λοιπόν να απαλλαγούμε από κάποιο. Για να μείνουν τα σωματίδια που πρέπει, δουλεύουμε ως εξής. Αρχικά γράφουμε τις διακυμάνσεις γύρω από το κενό σαν

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta + i\xi) \cong \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta)e^{i\frac{\xi}{v}} \sim (1 + i\frac{i\xi}{v} + \dots) \quad (3.36)$$

Συνεπώς αντικαθιστούμε στην αρχική \mathcal{L} με ένα διαφορετικό σετ πραγματικών πεδίων, τα $h(x), \theta(x), A_\mu(x)$. Άρα

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h)e^{i\theta} \quad (3.37)$$

όπου η h είναι αναλλοίωτη κάτω από $U(1)$ μετασχηματισμούς. Κάνοντας έναν μετασχηματισμό βαθμίδας

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\theta}\phi \quad (3.38)$$

Παίρνουμε λοιπόν

$$\phi \rightarrow \phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h)e^{i\theta}e^{-i\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h) \quad (3.39)$$

και

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu\theta \quad (3.40)$$

Κάναμε μία συγκεκριμένη επιλογή βαθμίδας έτσι ώστε το πεδίο να είναι πραγματικό. Περιμένουμε αποτελέσματα ανεξάρτητα από το πεδίο $\theta(x)$. Η λαγκρανζιανή που προκύπτει είναι η

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'' &= (\partial^\mu + ieA^{\mu'})\phi'^*(\partial_\mu - ieA'_\mu)\phi' \\ &- \mu^2\phi'\phi'^* - \lambda(\phi'\phi'^*)^2 \\ &- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.41)$$

όπου και πάλι ο πρώτος όρος είναι ο κινητικός όρος, ο δεύτερος είναι ο όρος δυναμικού και ο τρίτος το μποζόνιο. Ο δυναμικός όρος θα δώσει

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}''_{pot} &= \mu^2 \phi' \phi'^* + \lambda (\phi' \phi'^*)^2 \\
&= \frac{1}{2} \mu^2 (v+h)(v+h) + \frac{\lambda}{4} [(v+h)(v+h)]^2 \\
&= \frac{1}{2} \mu^2 v^2 + \frac{1}{2} \mu^2 h^2 + \mu^2 v h + \frac{\lambda}{4} [v^2 + 2v h + h^2]^2 \\
&= \frac{1}{2} \mu^2 \left(-\frac{\mu^2}{\lambda}\right) + \frac{1}{2} \mu^2 h^2 + \frac{\lambda}{4} (v^4 + 6v^2 h^2 + 4v^3 h + 4v h^3 + h^4) \\
&= -\frac{\mu^4}{2\lambda} + \frac{1}{2} \mu^2 h^2 + \frac{\lambda \mu^4}{4\lambda^2} + \lambda v^2 h^2 + \lambda v^2 h^2 + \lambda v^3 h + \frac{\lambda}{4} h^4 + \frac{1}{2} v^2 h^2 + \lambda v h^3 \\
&\quad - \frac{\mu^4}{4\lambda} - \mu^2 h^2 + \lambda v^3 h + \frac{\lambda}{4} h^4 + \lambda v h^3
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Ο όρος \mathcal{L}''_{bos} παραμένει αναλλοίωτος. Για τον κινητικό όρο θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}''_{kin} &= \frac{1}{2} [\partial^\mu + ie(A^\mu + \frac{1}{ev} \partial^\mu \theta)](v+h) [\partial_\mu - ie(A_\mu + \frac{1}{ev} \partial_\mu \theta)](v+h) \\
&= \frac{1}{2} [\partial^\mu v + \partial^\mu h + ieA^\mu v + ieA^\mu h + ie\frac{1}{ev} \partial^\mu \theta v + ie\frac{1}{ve} \partial^\mu \theta h] \\
&\quad [\partial_\mu v + \partial_\mu h - ieA_\mu v - ieA_\mu h - ie\frac{1}{ev} \partial_\mu \theta v - ie\frac{1}{ev} \partial_\mu \theta h]
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Κρατώντας μόνο τους χρήσιμους όρους έχουμε

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} e^2 A^\mu A_\mu h^2 + \frac{1}{2} (ieA^\mu h)(-ieA_\mu v) \\
&+ \frac{1}{2} ieA^\mu v (-ieA_\mu h) = \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} eA^\mu A_\mu h^2 + \\
&+ \frac{1}{2} e^2 v A_\mu A^\mu h + \frac{1}{2} e^2 v A^\mu h A_\mu = \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \frac{1}{2} e^2 v^2 A^\mu A_\mu + \frac{1}{2} eA^\mu A_\mu h^2 \\
&+ e^2 v A^\mu A_\mu h
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Συνθέτοντας όλα τα κομμάτια έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}''_{tot} &= \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \frac{1}{2} ev^2 A^\mu A_\mu + \frac{1}{2} eA^\mu A_\mu h^2 + e^2 v A^\mu A_\mu h \\
&\quad + \mu^2 h^2 - \lambda v^3 h - \frac{\lambda}{4} h^4 - \lambda v h^3 - \frac{\mu^4}{4\lambda} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Όπως περιμέναμε η θεωρία μας είναι ανεξάρτητη από το πεδίο θ και άρα το Goldstone μποζόνιο έχει εξαφανιστεί. Τώρα το σωματιδιακό φάσμα θα είναι: 1) Ένα φυσικό βαθμωτό πεδίο h με μάζα

$$m_h = \sqrt{-2\mu^2} \tag{3.46}$$

2) Ένα διανυσματικό πεδίο βαθμίδας A_μ με μάζα

$$m_A = ev \quad (3.47)$$

Τώρα έχουμε συνολικά τέσσερις βαθμούς ελευθερίας, τρεις του διανυσματικού πεδίου βαθμίδας A_μ και ένας του βαθμωτού πεδίου h . Ο παραπάνω βαθμός ελευθερίας που έβγαινε πριν ήταν ψεύτικος αφού απλά αντιστοιχεί στην ελευθερία επιλογής βαθμίδας. Οι \mathcal{L}' , \mathcal{L}'' είναι ισοδύναμες όμως κάνουμε την ταυτοποίηση των σωματιδίων μόνο από την δεύτερη. Σε αυτή το would be goldstone boson $\xi(x)$ έχει απορροφηθεί από το διανυσματικό πεδίο αναλαμβάνοντας το ρόλο της τρίτης (διαμήκου) κατάστασης πόλωσης. Όλη αυτή η διαδικασία είναι ο μηχανισμός Higgs και το h ονομάζεται σωματίδιο Higgs.

3.5 Αυθόρμητο σπάσιμο τοπικής συμμετρίας - Μη αβελιανή περίπτωση

Σε αντιστοιχία με πριν θα δουλέψουμε και την περίπτωση της μη αβελιανής περίπτωσης. Και πάλι τονίζουμε πως η αβελιανότητα ή μη της κάθε περίπτωσης σχετίζεται με την αβελιανότητα ή μη της ομάδας που ανήκει ο μετασχηματισμός με τον οποίο δουλεύουμε. Ξεκινούμε με την λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (3.48)$$

όπου

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Θέλουμε να βρούμε την \mathcal{L} που είναι αναλλοίωτη κάτω από $SU(2)$ μετασχηματισμούς. Αναβαθμίζουμε και πάλι την παράγωγο ως

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{T_i}{2} W_\mu^i \quad (3.50)$$

Τα πεδία μετασχηματίζονται ως

$$W_\mu^i \rightarrow W_\mu^{i'} = W_\mu^i - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta_i(x) - \epsilon_{ijk} \theta^j(x) W_\mu^k \quad (3.51)$$

και έχουμε

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g \epsilon_{ijk} \theta^j(x) W_\mu^k \quad (3.52)$$

Η αναλλοίωτη κάτω από τους $SU(2)$ τοπικούς μετασχηματισμούς θα είναι η

$$\mathcal{L}' = (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} \quad (3.53)$$

και πάλι πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις. Αν $\mu^2 > 0$ τότε η λαγκρανζιανή περιγράφει σύστημα τεσσάρων βαθμωτών πεδίων μάζας μ που αλληλεπιδρούν με τρία

διανυσματικά μποζόνια, τα οποία είναι άμαζα. Αυτή η περίπτωση δεν είναι ενδιαφέρουσα. Αν $\mu^2 < 0$ κατά τα γνωστά έχουμε

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (3.54)$$

Ελαχιστοποιώντας

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \mu^2 \phi^\dagger + 2\lambda \phi^{\dagger 2} = 0 \quad (3.55)$$

και άρα

$$\phi^\dagger (\mu^2 + 2\lambda \phi^\dagger \phi) = 0 \quad (3.56)$$

που δίνει

$$\phi^\dagger = 0 \quad (3.57)$$

ή

$$\phi^\dagger \phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \quad (3.58)$$

Πιο αναλυτικά

$$\phi^\dagger \phi = [\phi_1 + i\phi_2\phi_3 - i\phi_4] \begin{bmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{bmatrix} = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (3.59)$$

Ο γεωμετρικός τόπος των ελαχίστων είναι μία τετραδιάστατη σφαίρα. Ένα από τα άπειρα σημεία της τετραδιάστατης σφαίρας είναι

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0, \phi_3^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} = v^2 \quad (3.60)$$

Η κατάσταση του κενού είναι

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Αν εκτελούσαμε μικρές διαταραχές γύρω από το κενό, το πεδίο θα γραφόταν

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \eta_1(x) + i\eta_2(x) \\ v + \eta_3(x) + i\eta_4(x) \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Όμως με μία τυχαία επιλογή δεν θα απαλλαγούμε από τα άμαζα goldstone μποζόνια. Για αυτό παίρνουμε

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} e^{i\tau_i \theta_i / v} \quad (3.63)$$

η οποία δεν είναι τυχαία αλλά μία ποσότητα η οποία απλουστεύεται κάτω από ένα $SU(2)$ μετασχηματισμό. Έτσι αν καταλήξουμε σε ένα πεδίο ϕ , όπου τα τέσσερα πραγματικά πεδία θα είναι ανεξάρτητα και θα παραμετροποιούν πλήρως τη διαταραχή,

ϕ_0 , γύρω από το κενό, τότε η επιλογή θα είναι έγκυρη. Κάνοντας έπειτα έναν μετασχηματισμό βαθμίδας, τα δύο εκθετικά θα φύγουν και το διαταραγμένο πεδίο θα είναι

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Πιο αναλυτικά

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} e^{i \frac{\tau_i \theta_i}{v}} \cong \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} [1 + i \frac{\tau_i \theta_i(x)}{v}] \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\theta_i}{v} + i \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \frac{\theta_2}{v} + i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{\theta_3}{v} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + i \frac{\theta_3}{v} & i \frac{(\theta_1 - i\theta_2)}{v} \\ i \frac{\theta_1 + i\theta_2}{v} & 1 - i \frac{\theta_3}{v} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.65)$$

που τελικά κρατώντας τους όρους πρώτης τάξης

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \theta_2 + i\theta_1 \\ v + h - i\theta_3 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Εκτελούμε έναν $SU(2)$ μετασχηματισμό για να φύγει τελείως το θ_i έχουμε

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i \frac{\tau_i \theta_i}{v}} e^{i \frac{\tau_i \theta_i}{v}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Θα πρέπει να αντικαταστήσουμε στην \mathcal{L}' για να βγάλουμε τα αποτελέσματα της θεωρίας. Τονίζουμε ότι η ποσότητα

$$W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} \quad (3.68)$$

παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό και για την παράγωγο θα έχουμε

$$D_\mu \phi = U^{-1} D'_\mu \phi' \quad (3.69)$$

Τελικά η λαγκρανζιανή θα είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \frac{\mu^2}{2} (v + \eta)^2 - \frac{\lambda}{4} (v + \eta)^4 - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} \\ &= (\partial_\mu \phi' + ig \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \phi')^\dagger (\partial^\mu \phi' + ig \frac{\tau_i}{2} W^{\mu i} \phi') - \frac{\mu^2}{2} (v + h)^2 - \frac{\lambda}{4} (v + h)^4 - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Οι όροι μάζας στην \mathcal{L} θα είναι οι τετραγωνικοί όροι ως προς τα πεδία. Συνεπώς, αφού αντικαταστήσουμε το $W_\mu^{i'}$ προκύπτει το γινόμενο

$$\begin{aligned} (ig\frac{\tau_i}{2}W_\mu^i\phi)^\dagger(ig\frac{\tau_j}{2}W_\mu^j\phi) &= \frac{g^2}{8} \left[\begin{array}{cc} W_\mu^3 & W'_\mu - iW_\mu^2 \\ W'_\mu + iW_\mu^2 & W_\mu^3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} W_\mu^3 & W'_\mu - iW_\mu^2 \\ W'_\mu + iW_\mu^2 & W_\mu^3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \\ &= \frac{g^2}{8} (v(W_\mu^{1\dagger} - iW_\mu^{2\dagger})vW_\mu^{3\dagger} \left[\begin{array}{c} v(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ vW_\mu^3 \end{array} \right]) \\ &= \frac{g^2v^2}{8} [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 + (W_\mu^3)^2] \end{aligned} \quad (3.71)$$

Άρα η μάζα κάθε μποζονίου θα είναι

$$\frac{1}{2}mh^2 = \frac{g^2v^2}{8} \quad (3.72)$$

και τελικά

$$m_W = \frac{1}{2}gv \quad (3.73)$$

Ένας άλλος όρος μάζας προκύπτει από τους δυναμικούς όρους της \mathcal{L}

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{\mu^2}{2}(v+h)^2 + \frac{\lambda}{4}(v+h)^4 \\ &= \frac{\mu^4}{4\lambda} + \mu^2h^2 + \lambda v^3h + \frac{\lambda}{4}h^4 + \lambda vh^3 \end{aligned} \quad (3.74)$$

που δίνει

$$\frac{1}{2}m_h^2 = -\mu^2 \Rightarrow m_h = \sqrt{-2\mu^2} \quad (3.75)$$

Συμπερασματικά έχουμε καταλήξει σε τρία διανυσματικά πεδία W'_μ με μάζα

$$m_W = \frac{1}{2}gv \quad (3.76)$$

και ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο h με μάζα

$$m_h = \sqrt{-2\mu^2} \quad (3.77)$$

Καταφέραμε, τελικά, να ενσωματώσουμε τους βαθμούς ελευθερίας των $\theta_i(x)$ στα διανυσματικά μποζόνια ως την τρίτη διαμήκη κατάσταση πόλωσης.

3.6 Οι θεωρίες βαθμίδας του καθιερωμένου προτύπου

Θα δούμε τώρα συγκεκριμένα ποιές είναι οι ομάδες που χρησιμοποιούμε στο καθιερωμένο πρότυπο των στοιχειωδών σωματιδίων για κάθε αλληλεπίδραση.

3.6.1 Ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις

Εδώ χρησιμοποιούμε μία $U(1)$ συμμετρία βαθμίδας. Αυτή δεν είναι άμεσα ταυτόσημη με την $U(1)$ συμμετρία των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων. Το πως ακριβώς συνδέονται θα το δείξουμε στην συνέχεια. Το αντίστοιχο πεδίο βαθμίδας, B_μ , δεν είναι ταυτόσημο με το πεδίο του φωτονίου A_μ και ο αντίστοιχος κβαντικός αριθμός δεν είναι ταυτόσημος με το ηλεκτρικό φορτίο. Ονομάζουμε υπερφορτίο Y τον κβαντικό αριθμό της $U(1)$ συμμετρίας και για αυτό την συμβολίζουμε με $U(1)_Y$.

Γράφουμε τον $U(1)_Y$ τοπικό μετασχηματισμό βαθμίδας ως

$$U(1)_Y = e^{i\frac{Y}{2}\theta(x)} \quad (3.78)$$

και την συναλλοίωτη παράγωγο ως

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \quad (3.79)$$

3.6.2 Ασθενείς/Ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις

Εδώ χρησιμοποιούμε μία $SU(2)$ συμμετρία βαθμίδας. Αυτή είναι μια εσωτερική συμμετρία βαθμίδας που θα φανεί ότι συνδέεται τόσο με τις ασθενείς, όσο και με τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις. Αυτή η συμμετρία είχε αρχικά χρησιμοποιηθεί για να διακρίνει τις δύο καταστάσεις του νουκλεονίου, δηλαδή το πρωτόνιο και το νετρόνιο, που οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις δεν μπορούσαν να διακρίνουν. Έτσι ως προς μια $SU(2)$ συμμετρία το νουκλεόνιο

$$N = \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

αποτελούσε την θεμελιώδη αναπαράσταση με ισχυρό ισотоπικό σπιν

$$T = \frac{1}{2} \quad (3.81)$$

όπου το πρωτόνιο αντιστοιχούσε στην

$$T_3 = +\frac{1}{2} \quad (3.82)$$

συνιστώσα, ενώ το νετρόνιο στην

$$T_3 = -\frac{1}{2} \quad (3.83)$$

συνιστώσα. Ως προς την ίδια συμμετρία τα πιόνια π^\pm , π^0 αποτελούσαν την $T=1$ αναπαράσταση του ισχυρού ισотоπικού σπιν. Γράφουμε

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

με $T_3 = \pm 1, 0$ και ορίζουμε τις καταστάσεις

$$\pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \mp i\pi_2), \pi^0 = \pi_3 \quad (3.85)$$

σαν τις ηλεκτρικά φορτισμένες καταστάσεις. Επειδή θα χρησιμοποιήσουμε την $SU(2)$ για να περιγράψουμε τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις, εισάγουμε τον κβαντικό αριθμό του ασθενούς ισοτοπικού σπιν T . Ο τρόπος που συμπεριφέρονται τα στοιχειώδη σωματίδια ως προς τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις είναι ιδιόμορφος, καθώς σε αυτές παρατηρούμε την παραβίαση της ομοτιμίας. Έτσι οι δεξιόστροφες συνιστώσες

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}\psi \quad (3.86)$$

των λεπτονίων και κουάρκ αποτελούν τετριμμένες $T=0$ αναπαράστασεις

$$f : \begin{bmatrix} e_R^- & u_R & d_R \\ \mu_R^- & c_R & s_R \\ \tau_R^- & t_R & b_R \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

ενώ οι αριστερόστροφες συνιστώσες

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}\psi \quad (3.88)$$

των σωματιδίων ύλης συνιστούν θεμελιώδεις $T = \frac{1}{2}$ αναπαράστασεις

$$f_{eL} = \begin{bmatrix} \nu_e \\ e^- \end{bmatrix}_L \begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{bmatrix}_L \begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{bmatrix}_L \quad (3.89)$$

και

$$f_{qL} = \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}_L \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}_L \begin{bmatrix} t \\ b \end{bmatrix}_L \quad (3.90)$$

Τα πεδία βαθμίδας

$$W_\mu^i, i = 1, 2, 3 \quad (3.91)$$

της $SU(2)$ συμμετρίας βαθμίδας αποτελούν την $T=1$ αναπαράσταση

$$W_\mu = \begin{bmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \\ W_\mu^3 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

και οι ηλεκτρικά φορτισμένες καταστάσεις θα είναι

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (3.93)$$

και

$$W_\mu^0 = W_\mu^3 \quad (3.94)$$

Επειδή η $SU(2)$ συμμετρία βαθμίδας συνδέεται με τις αριστερόστροφες συνιστώσες των πεδίων ύλης, γράφουμε την συμμετρία $SU(2)_L$ και είναι

$$SU(2)_L = e^{i\frac{T_i}{2}\theta^i(x)}, i = 1, 2, 3 \quad (3.95)$$

με συναλλοίωτη παράγωγο

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2 \frac{T_i}{2} W_\mu^i, i = 1, 2, 3 \quad (3.96)$$

Σημειώνουμε εδώ πως το ηλεκτρικό φορτίο Q συνδέεται με το ασθενές ισотоπικό σπιν T_3 και το υπερφορτίο Y με την σχέση

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (3.97)$$

και η συμμετρία $U(1)_Q$ του ηλεκτρομαγνητισμού θα είναι

$$U(1)_Q = e^{iQ\theta(x)} \quad (3.98)$$

με συναλλοίωτη παράγωγο

$$D_\mu = \partial_\mu + iQeA_\mu \quad (3.99)$$

Το συνολικό αποτέλεσμα είναι το γινόμενο

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \quad (3.100)$$

των δύο συμμετριών βαθμίδας θα περιγράψει τις ασθενείς και τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις. Αυτό, το πρώτο, κομμάτι του καθιερωμένου προτύπου περιγράφει τις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις. Το γινόμενο αυτό προτάθηκε για πρώτη φορά το 1961 από τον Glashow και συμπληρώθηκε το 1968 από τον Weinberg και τον Salam οι οποίοι ενσωμάτωσαν το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας και τον μηχανισμό Higgs.

3.6.3 Ισχυρές αλληλεπιδράσεις

Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε μία $SU(3)$ θεωρία βαθμίδας που έχει σχέση με τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Ο αντίστοιχος κβαντικός αριθμός ονομάζεται χρώμα και αφορά μόνο τα κουαρκς, καθένα από τα οποία έρχεται σε τρία χρώματα σχηματίζοντας την θεμελιώδη αναπαράσταση ως προς $SU(3)$. Για την πρώτη και ομοίως για κάθε οικογένεια κουαρκς έχουμε

$$u_R = (u_1, u_2, u_3)_R, d_R = (d_1, d_2, d_3)_R \quad (3.101)$$

$$f_{qL} = \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}_L \quad (3.102)$$

Τα αντίστοιχα οκτώ πεδία βαθμίδας της $SU(3)$ είναι τα οκτώ γλιόνια $G_\mu^i, i = 1, \dots, 8$ και η αντίστοιχη θεωρία βαθμίδας ονομάζεται κβαντική χρωμοδυναμική. Την συμβολίζουμε με $SU(3)_C$ και αποτελεί το δεύτερο κομμάτι του καθιερωμένου προτύπου. Τα συνηθισμένα αδρόνια γίνονται από συνδυασμούς κουαρκ τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Καθένα από τα κουάρκ μεταφέρει κάποιο χρώμα αλλά οι συνδυασμοί γίνονται με τέτοιο τρόπο ώστε τα αδρόνια να μην έχουν χρώμα. Έτσι για τα μεσόνια έχουμε τους συνδυασμούς

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(q_1\bar{q}_1 + q_2\bar{q}_2 + q_3\bar{q}_3) \quad (3.103)$$

ενώ για τα βαρυόνια έχουμε τους συνδυασμούς

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\epsilon_{ijk}q_iq_jq_k, i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3.104)$$

Στο καθιερωμένο πρότυπο χρησιμοποιούμε την συμμετρία $SU(3)$ για την συμμετρία χρώματος της κβαντικής χρωμοδυναμικής $SU(3)_C$ για να περιγράψουμε τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Γράφουμε

$$SU(3)_C = e^{i\frac{\lambda_i}{2}\theta^i(x)} \quad (3.105)$$

με συναλλοίωτη παράγωγο την

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_3\frac{\lambda_i}{2}G_\mu^i, i = 1, \dots, 8 \quad (3.106)$$

Συνοψίζοντας οι θεωρίες βαθμίδας του καθιερωμένου προτύπου αποτελούνται από το γινόμενο

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \quad (3.107)$$

με συνολική συναλλοίωτη παράγωγο, που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στην ύλη και την ακτινοβολία

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1\frac{Y}{2}B_\mu + ig_2\frac{\tau_i}{2}W_\mu^i + ig_3\frac{\lambda_i}{2}G_\mu^i \quad (3.108)$$

Η λαγκρανζιανή του καθιερωμένου προτύπου μπορεί να γραφεί συμβολικά ως

$$\mathcal{L}_{SM} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^iW^{\mu\nu i} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^iG^{\mu\nu i} + \sum_f \bar{f}i\gamma^\mu D_\mu f \quad (3.109)$$

όπου το άθροισμα αναφέρεται στα φερμιόνια ύλης με τον όρο, οι όροι της συναλλοίωτης παραγωγού D_μ να δρουν πάντα στα φερμιόνια ίδιας αναπαράστασης, έτσι ώστε η λαγκρανζιανή να είναι αναλλοίωτη βαθμωτή ποσότητα.

3.7 Το μοντέλο των Weinberg-Salam

Σε αυτό το μέρος θα ασχοληθούμε με τις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις. Παρότι η ενοποίηση των ηλεκτρομαγνητικών με τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις φαίνεται κάπως παράξενη θα δούμε πως μόνο ένα ενεργειακό κατώφλι μας εμποδίζει από το να τις ταυτίσουμε. Η λαγκρανζιανή που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ είναι

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin}^{matter} + \mathcal{L}_{kin}^{gauge} - V(\phi) + \mathcal{L}_{yuk} \quad (3.110)$$

με συναλλοίωτη παράγωγο

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_2 \tau^i W_\mu^i + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \quad (3.111)$$

Θα ασχοληθούμε με κάθε όρο ξεχωριστά, ξεκινώντας από τον $\mathcal{L}_{kin}^{matter}$ που είναι οι κινητικοί όροι των φερμιονίων του καθιερωμένου προτύπου.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{kin}^{matter} = & \sum_i i\bar{Q}_L^{(i)} \gamma^\mu (\partial_\mu - \frac{ig_2}{2} \tau^i W_\mu^i - i\frac{g_1}{6} B_\mu) \bar{Q}_L^{(i)} \\ & + i\bar{l}_L^{(i)} \gamma^\mu (\partial_\mu - \frac{ig_2}{2} \tau^i W_\mu^i + \frac{ig_1}{2} B_\mu) \bar{l}_L^{(i)} \\ & + i\bar{l}_R^{(i)} \gamma (\partial_\mu + g_1 B_\mu) l_R^{(i)} + i\bar{U}_R^{(i)} \gamma^\mu (\partial_\mu - i\frac{2}{3} g_1 B_\mu) U_R^{(i)} \\ & + i\bar{D}_R^{(i)} \gamma^\mu (\partial_\mu + i\frac{g_1}{3} B_\mu) D_R^{(i)} + \left| (\partial_\mu - i\frac{g_2}{2} \tau^i W_\mu^i - i\frac{g_1}{2} B_\mu) \phi \right|^2 \end{aligned} \quad (3.112)$$

ο τελευταίος όρος προκύπτει

$$\left| (\partial_\mu - i\frac{g_2}{2} \tau^i W_\mu^i - i\frac{g_1}{2} B_\mu) \phi \right|^2 = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) \quad (3.113)$$

Για τον όρο $\mathcal{L}_{kin}^{gauge}$ γράφουμε

$$\mathcal{L}_{kin}^{gauge} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g_2 \epsilon_{ijk} \theta^j(x) W_\mu^k)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 \quad (3.114)$$

Το δυναμικό θα είναι

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad \mu^2 > 0 \quad (3.115)$$

Τέλος για τον όρο \mathcal{L}_{yuk} έχουμε

$$\mathcal{L}_{yuk} = \sum f_l^{(ij)} \bar{l}_L^{(i)} \phi_R^{(j)} + f_\nu^{(ij)} \bar{Q}_L^{(i)} \tilde{\phi} U_R^{(j)} + f_D^{(ij)} \bar{Q}_L^{(i)} \phi D_R^{(j)} + h.c \quad (3.116)$$

Θα εφαρμόσουμε, κατά τα γνωστά, αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας. Χρησιμοποιούμε για βαθμωτό πεδίο την διπλέτα

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi^\dagger \\ \phi^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \phi_1 & i\phi_2 \\ \phi_3 & i\phi_4 \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Για την κατάσταση ελάχιστης ενέργειας

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = -\mu^2 \phi^\dagger + 2\lambda \phi^{\dagger 2} \phi = 0 \Rightarrow \phi^\dagger (-\mu^2 + 2\lambda \phi^\dagger \phi) = 0 \quad (3.118)$$

Που δίνει

$$\phi^\dagger = 0 \quad \text{ή} \quad |\phi|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \quad (3.119)$$

Από την δεύτερη έχουμε

$$\phi^\dagger \phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = \frac{\mu^2}{2\lambda} \quad (3.120)$$

Ένα από τα άπειρα σημεία είναι

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0 \quad , \quad \phi_3^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} = v^2 \quad (3.121)$$

Και άρα

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

Διαταράσσουμε το σύστημα

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

και αντικαθιστούμε στο δυναμικό

$$V = -\frac{\mu^2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{4} \left[\begin{bmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{bmatrix} \right]^2 \quad (3.124)$$

Και άρα

$$V = -\frac{\mu^2}{2} [0 \quad v + \eta] \begin{bmatrix} 0 \\ v + \eta \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{4} [v + \eta]^4 \quad (3.125)$$

Κρατώντας μόνο τους όρους μάζας(τετραγωνικούς) έχουμε

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -\frac{\mu^2}{2} \eta^2 + \frac{3}{2} \lambda v^2 \eta^2 \\ &= -\frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 + \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{v^2} \eta^2 \\ &= -\frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 + \frac{3}{2} \mu^2 \eta^2 \\ &= \mu^2 \eta^2 \end{aligned} \quad (3.126)$$

Ταυτοποιώντας

$$\frac{1}{2} m_h^2 = \mu^2 \Rightarrow m_h = \sqrt{2\mu} \quad (3.127)$$

που είναι η μάζα του βαθμωτού πεδίου Higgs. Ο τελευταίος όρος της (3.114) θα δώσει τους όρους μάζας των διανυσματικών πεδίων. Ονομάζοντας

$$D = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) \quad (3.128)$$

υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} D &= \phi^\dagger (\partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i + i \frac{g_1}{2} B_\mu) (\partial^\mu - ig_2 \frac{\tau_i}{2} W^{\mu i} - i \frac{g_1}{2} B^\mu) \phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [0 \quad v + \eta] (\partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i + i \frac{g_1}{2} B_\mu) (\partial^\mu - ig_2 \frac{\tau_i}{2} W^{\mu i} - i \frac{g_1}{2} B^\mu) \begin{bmatrix} 0 \\ v + \eta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.129)$$

Και κρατώντας τους όρους χωρίς παράγωγο

$$= \frac{1}{2} [0 \quad v + \eta] \left| g_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i + \frac{1}{2} g_1 B_\mu \right|^2 \begin{bmatrix} 0 \\ v + \eta \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

Κρατάμε τώρα τους τετραγωνικούς όρους

$$D = \frac{v^2}{2} [0 \quad 1] \left| g_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i + \frac{1}{2} g_1 B_\mu \right|^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά

$$\begin{aligned} \tau^i W_\mu^i &= \tau^1 W_\mu^1 + \tau^2 W_\mu^2 + \tau^3 W_\mu^3 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} W_\mu^1 + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} W_\mu^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} W_\mu^3 \\ &= \begin{bmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.132)$$

Άρα

$$g_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i + \frac{1}{2} g_1 B_\mu = \begin{bmatrix} \frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu & \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

Επιστρέφοντας στον αρχικό υπολογισμό

$$\begin{aligned} D &= \frac{v^2}{2} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu & \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu & \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu \end{bmatrix} \\ &= \frac{v^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{g_1}{2} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ -\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu \end{bmatrix} \\ &= \frac{v^2}{8} (g_2^2 (W_\mu^1)^2 + g_2^2 (W_\mu^2)^2 + g_2^2 (W_\mu^3)^2 + g_1^2 (B_\mu)^2 - 2g_1 g_2 B_\mu W_\mu^3) \end{aligned} \quad (3.134)$$

Αξιώνω ότι

$$D = M_W^2 W_\mu^\dagger W^{\mu-} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \quad (3.135)$$

δηλαδή έκφραση μόνο με τετραγωνικούς όρους. Στην προηγούμενη έκφραση περιέχονται και μη τετραγωνικοί όροι, δηλαδή ο πίνακας των μαζών δεν είναι διαγώνιος. Άρα διαγωνοποιούμε τον πίνακα μαζών για να φύγουν οι μη τετραγωνικοί όροι και να πάρουμε προβλέψεις για τις μάζες. Ταυτοποιώντας

$$M_W^2 W_\mu^\dagger W^{\mu-} = \frac{g_2^2 v^2}{8} [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] \quad (3.136)$$

Ορίζοντας

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp (W_\mu^2)^2) \quad (3.137)$$

παίρνουμε

$$M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} = \frac{g_2 v^2}{4} W_\mu^+ W^{\mu-} \quad (3.138)$$

Άρα η μάζα των φυσικών πεδίων W_μ^\pm είναι

$$M_W^2 = \frac{g_2^2 v^2}{4} \Rightarrow M_W = \frac{g_2 v}{2} \quad (3.139)$$

Επίσης

$$\frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu = \frac{v^2}{8} (g_2^2 (W_\mu^3)^2 + g_1^2 B_\mu^2 - 2g_1 g_2 W_\mu^3 B^\mu) \quad (3.140)$$

Για να γράψουμε την έκφραση σαν γινόμενο πινάκων, θεωρούμε ότι τα W_μ^3, B_μ αποτελούν στοιχεία μιας διπλέτας. Άρα

$$= \frac{v^2}{8} [W_\mu^3 \quad B_\mu] \begin{bmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

Σε αυτό το σημείο ορίζουμε μια διπλέτα των φυσικών πεδίων Z_μ, A_μ και απαιτούμε ο πίνακας των μαζών να είναι διαγώνιος και μάλιστα $M_{22} = 0$, αφού το φωτόνιο είναι άμαζο, δηλαδή

$$\frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu = [Z_\mu \quad A_\mu] \begin{bmatrix} M_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

Διαγωνοποιώντας τον πίνακα

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu &= \frac{v}{8} [W_\mu^3 \quad B_\mu] \begin{bmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{bmatrix} \\ &= \frac{v^2}{8} [W_\mu^3 \quad B_\mu] U U^{-1} \begin{bmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{bmatrix} U U^{-1} \begin{bmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.143)$$

όπου U είναι ο πίνακας στροφής

$$U = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, U^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

Για ευκολία θα ασχοληθούμε με το κάθε κομμάτι ξεχωριστά. Ξεκινώντας

$$\begin{aligned} [W_\mu^3 \quad B_\mu]U &= [W_\mu^3 \quad B_\mu] \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= [\cos(\theta)W_\mu^3 - \sin(\theta)B_\mu \quad \sin(\theta)W_\mu^3 + \cos(\theta)B_\mu] \end{aligned} \quad (3.145)$$

Στην συνέχεια έχουμε

$$\begin{aligned} M' &= U^{-1}MU = \frac{v^2}{8}U^{-1} \begin{bmatrix} g_2^2 & -g_1g_2 \\ -g_1g_2 & g_1^2 \end{bmatrix} U \\ &= \frac{v^2}{8} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_2^2 & -g_1g_2 \\ -g_1g_2 & g_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.146)$$

Τα στοιχεία του πίνακα που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό είναι

$$\begin{aligned} M'_{11} &= \frac{v^2}{8}(g_2^2\cos^2(\theta) + 2g_1g_2\sin(\theta)\cos(\theta) + g_1^2\sin^2(\theta)) \\ M'_{12} &= \frac{v^2}{8}(g_2^2\cos(\theta)\sin(\theta) - g_1g_2\cos^2(\theta) + g_1g_2\sin^2(\theta) - g_1^2\cos(\theta)\sin(\theta)) \\ M'_{21} &= \frac{v^2}{8}(g_2^2\sin(\theta)\cos(\theta) + g_1g_2\sin^2(\theta) - g_1^2\sin(\theta)\cos(\theta) - g_1g_2\cos^2(\theta)) \\ M'_{22} &= \frac{v^2}{8}(g_2^2\sin^2(\theta) - 2g_1g_2\sin(\theta)\cos(\theta) + g_1^2\cos^2(\theta)) \end{aligned} \quad (3.147)$$

Άρα θα έχουμε

$$U^{-1} \begin{bmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta)B^\mu \\ \sin(\theta)W^{\mu 3} & +\cos(\theta)B^\mu \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

Η συνθήκη $M'_{12} = M'_{21} = M'_{22} = 0$ θα μας δώσει την πληροφορία για την γωνία θ .

$$M'_{12} = M'_{21} = 0 \Rightarrow g_2\sin(\theta)(g_2\cos(\theta) + g_1\sin(\theta)) - g_1\cos(\theta)(g_2\cos(\theta) + g_1\sin(\theta)) = 0 \quad (3.149)$$

Που τελικά δίνει

$$\tan\theta = \frac{g_1}{g_2} \quad (3.150)$$

Η γωνία αυτή είναι γνωστή σαν γωνία Weinberg ή σαν γωνία μίξης των ασθενών αλληλεπιδράσεων και συμβολίζεται με θ_W και έχει βρεθεί πειραματικά $\sin^2\theta_W \approx 0.23$. Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.154), (3.146) παίρνουμε

$$(Z_\mu A_\mu) = (W_\mu^3 B_\mu)U \quad (3.151)$$

Και άρα

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos\theta_W W_\mu^3 - \sin\theta_W B_\mu \\ A_\mu &= \sin\theta_W W_\mu^3 + \cos\theta_W B_\mu \end{aligned} \quad (3.152)$$

Οι σχέσεις αυτές μαζί με τις

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp W_\mu^2) \quad (3.153)$$

συνδέουν τα πεδία βαθμίδας $W_\mu^{1,2,3}, B_\mu$ με τα φυσικά πεδία W_μ^\pm, A_μ, Z_μ . Χρησιμοποιώντας την σχέση $\tan\theta = \frac{g_1}{g_2}$ και την ταυτότητα $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ παίρνουμε τις σχέσεις για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συναρτήσει των σταθερών σύζευξης

$$\sin\theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \cos\theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (3.154)$$

Άρα οι (3.155) γίνονται

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \frac{g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \\ A_\mu &= \frac{g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \end{aligned} \quad (3.155)$$

Τέλος το στοιχείο M'_{11} είναι η μάζα του φυσικού μποζονίου Z_μ την οποία υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_Z^2 &= \frac{v^2}{8}(g_2^2 \cos^2\theta_W + 2g_1 g_2 \sin\theta_W + g_1^2 \sin^2\theta_W) \\ &= \frac{v^2}{8}(g_2 \cos\theta_W + g_1 \sin\theta_W)^2 \end{aligned} \quad (3.156)$$

Άρα

$$M_Z^2 = \frac{v^2}{8}(g_1^2 + g_2^2) \Rightarrow M_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g_1^2 + g_2^2} \quad (3.157)$$

και προφανώς $M_A = 0$ για το φωτόνιο.

Παρατήρηση: Διαιρώντας τις μάζες των μποζονίων

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{\frac{g_2 v}{2}}{\frac{v}{2}\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = \cos\theta_W \Rightarrow M_W = \cos\theta_W M_Z \quad (3.158)$$

Οι ανισότητα των $W_\mu^{\pm, Z}$ μποζονίων προκύπτει από την ανάμιξη των W_μ^3 και B_μ . Στο όριο $\theta_W = 0 \rightarrow M_Z = M_W$

3.8 Φορτισμένα και αφόρτιστα ρεύματα

Οι κινητικοί όροι της λαγκρανζιανής θα μας δώσουν τα ζητούμενα ρεύματα. Οι όροι που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ είναι

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kin}^{matter} &= \sum_i i\bar{Q}_L^{(i)}\gamma^\mu(\partial_\mu - \frac{ig_2}{2}\tau^i W_\mu^i - i\frac{g_1}{6}B_\mu)\bar{Q}_L^{(i)} \\
&+ i\bar{l}_L^{(i)}\gamma^\mu(\partial_\mu - \frac{ig_2}{2}\tau^i W_\mu^i + \frac{ig_1}{2}B_\mu)\bar{l}_L^{(i)} \\
&+ i\bar{l}_R^{(i)}\gamma(\partial_\mu + g_1 B_\mu)l_R^{(i)} \\
&+ i\bar{U}_R^{(i)}\gamma^\mu(\partial_\mu - i\frac{2}{3}g_1 B_\mu)U_R^{(i)} \\
&+ i\bar{D}_R^{(i)}\gamma^\mu(\partial_\mu + i\frac{g_1}{3}B_\mu)D_R^{(i)}
\end{aligned} \tag{3.159}$$

Για ευκολία θα ασχοληθούμε με κάθε γραμμή ξεχωριστά. Από τις δύο πρώτες γραμμές, χωρί αλληλεπιδράσεις με το B_μ θα πάρουμε τα ασθενή ρεύματα. Αναλυτικά, για τον πρώτο όρο έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{g_2}{2}\bar{Q}_L^{(i)}\gamma^\mu\tau^i W_\mu^i Q_L^{(i)} \\
&= \frac{g_2}{2}(\bar{u} \quad \bar{d})_L\gamma^\mu\tau^1 W_\mu^1 \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}_L + \frac{g_2}{2}(\bar{u} \quad \bar{d})_L\gamma^\mu\tau^2 W_\mu^2 \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}_L + \frac{g_2}{2}(\bar{u} \quad \bar{d})_L\gamma^\mu\tau^3 W_\mu^3 \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}_L \\
&= \frac{g_2}{2}(\bar{u} \quad \bar{d})_L\gamma^\mu \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} W_\mu^1 \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}_L + \frac{g_2}{2}(\bar{u} \quad \bar{d})_L\gamma^\mu \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} W_\mu^2 \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}_L + \frac{g_2}{2}(\bar{u} \quad \bar{d})_L\gamma^\mu \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} W_\mu^3 \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}_L \\
&= \frac{g_2}{2}(\bar{d}_L\gamma^\mu u_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L)W_\mu^1 + \frac{g_2}{2}(i\bar{d}_L\gamma^\mu u_L - i\bar{u}_L\gamma^\mu d_L)W_\mu^2 + \frac{g_2}{2}(\bar{u}_L\gamma^\mu u_L - \bar{d}_L\gamma^\mu d_L)W_\mu^3
\end{aligned} \tag{3.160}$$

και για τον δεύτερο

$$\begin{aligned}
&\frac{g_2}{2}\bar{l}_L^{(i)}\gamma^\mu\tau^i W_\mu^i l_L^{(i)} \\
&= \frac{g_2}{2}(\bar{l}_L\gamma^\mu\nu_L^e + \bar{\nu}_L^e\gamma^\mu l_L)W_\mu^1 + \frac{g_2}{2}(i\bar{l}_L\gamma^\mu\nu_L^e - i\bar{\nu}_L^e\gamma^\mu l_L)W_\mu^2 + \frac{g_2}{2}(\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L^e - \bar{l}_L^e\gamma^\mu l_L)W_\mu^3
\end{aligned} \tag{3.161}$$

Παρατήρηση: Δουλεύουμε μόνο με την πρώτη οικογένεια κουάρκ και λέπτονίων. Στην περίπτωση που θέλουμε το πλήρες αποτέλεσμα πρέπει να προσθέσουμε τους αντίστοιχους όρους για τις άλλες δύο οικογένειες. Αφού η λαγκρανζιανή των μποζονίων αλληλεπίδρασης της ασθενούς αλληλεπίδρασης με τα φερμιόνια γράφεται

$$\mathcal{L} = g_2 j^{\mu i} W_\mu^i = g_2 j^{\mu 1} W_\mu^1 + g_2 j^{\mu 2} W_\mu^2 + g_2 j^{\mu 3} W_\mu^3 \tag{3.162}$$

κάνοντας της ταυτοποίηση παίρνουμε

$$\begin{aligned} j^{\mu 1} &= \frac{1}{2}(\bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu l_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L) \\ j^{\mu 2} &= \frac{1}{2}(i\bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L^e - i\bar{\nu}_L^e \gamma^\mu l_L + i\bar{d}_L \gamma^\mu u_L - i\bar{u}_L \gamma^\mu d_L) \\ j^{\mu 3} &= \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L^e \gamma^\mu \nu_L^e - \bar{l}_L \gamma^\mu l_L + \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L) \end{aligned} \quad (3.163)$$

Με την αλλαγή των πεδίων, η \mathcal{L} θα γράφεται

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{charged} + \mathcal{L}_{uncharged} \quad (3.164)$$

όπου

$$\mathcal{L}_{charged} = \frac{g_2}{\sqrt{2}}(j^{\mu+} W_\mu^+ + j^{\mu-} W_\mu^-) \quad (3.165)$$

δηλαδή

$$j^{\mu\pm} = j^{\mu 1} \pm i j^{\mu 2} \quad (3.166)$$

Άρα

$$j^{\mu+} = \frac{1}{2}(\bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu l_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L - \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu l_L - \bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L) \quad (3.167)$$

Και άρα

$$j^{\mu+} = \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu l_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L \quad (3.168)$$

Αντίστοιχα

$$j^{\mu-} = \frac{1}{2}(\bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu l_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L^e - \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu l_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L - \bar{u}_L \gamma^\mu d_L) \quad (3.169)$$

Τελικά

$$j^{\mu-} = \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \quad (3.170)$$

Για το αφόρτιστο ρεύμα

$$\mathcal{L}_{uncharged} = g_2 j^{\mu 3} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} j^{\mu Y} B_\mu \quad (3.171)$$

που στην φυσική βάση γράφεται

$$\mathcal{L}_{uncharged} = e j_{em}^\mu A_\mu + \frac{g_2}{\cos\theta_W} j_0^\mu Z_\mu \quad (3.172)$$

Πριν συνεχίσουμε πρέπει από την \mathcal{L}_{matter} να συμπεριληφθούν οι όροι αλληλεπίδρασης που περιέχουν το B_μ . Και πάλι θα ασχοληθούμε όρο προς όρο

$$\begin{aligned} i) \bar{Q}_L^{(i)} \gamma^\mu \frac{g_1}{6} B_\mu Q_L^{(i)} &= [\bar{u} \quad \bar{d}]_L \gamma^\mu \frac{g_1}{6} B_\mu \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}_L \\ &= \frac{g_1}{6} (\bar{u}_L \gamma^\mu B_\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu B_\mu d_L) = \frac{g_1}{6} (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L) B_\mu \end{aligned} \quad (3.173)$$

$$ii) -\bar{l}_L^{(i)}\gamma^\mu\frac{g_1}{2}B_\mu l_L^{(i)} = -(\bar{\nu}^e \quad e)_L\gamma^\mu\frac{g_1}{2}B_\mu \begin{bmatrix} \nu^e \\ e \end{bmatrix}_L \quad (3.174)$$

$$= -\frac{g_1}{2}(\bar{\nu}_L^e\gamma^\mu B_\mu\nu_L^e + \bar{e}_L\gamma^\mu B_\mu l_L) = -\frac{g_1}{2}(\bar{\nu}_L^e\gamma^\mu\nu_L^e + \bar{e}_L\gamma^\mu e_L)B_\mu$$

$$iii) -\bar{e}_R^{(i)}\gamma^\mu B_\mu e_R^{(i)} = -g_1\bar{e}_R\gamma^\mu B_\mu e_R = -g_1\bar{e}_R\gamma^\mu r_R B_\mu \quad (3.175)$$

$$iv) -\bar{v}_R^{(i)}\gamma^\mu\frac{g_1}{3}B_\mu D_R^{(i)} = -\frac{g_1}{3}\bar{d}_R\gamma^\mu B_\mu d_R = -\frac{g_1}{3}\bar{d}_R\gamma^\mu d_R B_\mu \quad (3.176)$$

Οπότε το $j^{\mu\nu}$ θα είναι

$$j^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\bar{u}_L\gamma^\mu u_L + \bar{d}_L\gamma^\mu d_L - \bar{\nu}_L^e\gamma^\mu\nu_L^e - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L - 2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R + \frac{4}{3}\bar{u}_R\gamma^\mu u_R - \frac{2}{3}\bar{d}_R\gamma^\mu d_R) \quad (3.177)$$

Για το αφορτιστο ρεύμα

$$\mathcal{L}_{uncharged} = g_2 j^{\mu 3} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} j^{\mu Y} B_\mu \quad (3.178)$$

που στην φυσική βάση γράφεται

$$\mathcal{L}_{uncharged} = e j_{em}^\mu A_\mu + \frac{g_2}{\cos\theta_W} j_0^\mu Z_\mu \quad (3.179)$$

Επειδή

$$\begin{bmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} W^{\mu 2} \\ B^\mu \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{bmatrix} \quad (3.180)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} W^{\mu 3} &= \cos\theta Z_\mu + \sin\theta A_\mu \\ B^\mu &= -\sin\theta Z_\mu + \cos\theta A_\mu \end{aligned} \quad (3.181)$$

Και αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στην (3.181) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{uncharged} &= g_2 j^{\mu 3} (\cos\theta Z_\mu + \sin\theta A_\mu) + \frac{g_1}{2} j^{\mu\nu} (-\sin\theta Z_\mu + \cos\theta A_\mu) \\ &= (g_2 j^{\mu 3} \sin\theta + \frac{g_1}{2} g^{\mu\nu} \cos\theta) A_\mu + (g_2 j^{\mu 3} \cos\theta - \frac{g_1}{2} j^{\mu\nu} \sin\theta) Z_\mu \end{aligned} \quad (3.182)$$

Παρατηρούμε τώρα πως αφού το A_μ είναι το πεδίο του φωτονίου, οι εκφράσεις $g_2 \sin\theta j^{\mu 3}$ και $\frac{g_1}{2} \cos\theta j^{\mu Y}$ θα πρέπει να συμπίπτουν με την $e j_{em}^\mu A_\mu$.

Αναλυτικά θα έχουμε

$$g_2 \sin\theta = g_1 \cos\theta = e \quad (3.183)$$

και

$$\mathcal{L}_{uncharged} = (e j^{\mu 3} + \frac{e}{2} j^{\mu\nu}) A_\mu + \frac{g_2}{\cos\theta} (\cos^2\theta j^{\mu 3} - \frac{\sin^2\theta}{2} j^{\mu Y}) Z_\mu \quad (3.184)$$

Ταυτοποιώντας με την έκφραση για τα ρεύματα στην φυσική βάση έχουμε

$$\begin{aligned} j_{em}^\mu &= j^{\mu 3} + \frac{1}{2}j^{\mu Y} \\ j_0^\mu &= \cos^2\theta j^{\mu 3} - \frac{\sin^2\theta}{2}j^{\mu Y} \end{aligned} \quad (3.185)$$

Λύνοντας την πρώτη ως προς $j^{\mu\nu}$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε

$$\begin{aligned} j_0^\mu &= \cos^2\theta j^{\mu 3} - \frac{\sin^2\theta}{2}j_{em}^\mu + \sin^2\theta j^{\mu 3} \\ j_o^\mu &= j^{\mu 3} - \sin^2\theta j_{em}^\mu \end{aligned} \quad (3.186)$$

Συμπερασματικά, από την \mathcal{L} που αποτελείται από τους κινητικούς όρους των φερμιονίων καταφέραμε να βρούμε τα φορτισμένα και ουδέτερα ρεύματα που δημιουργούνται λόγω της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης.

3.9 Μάζες φερμιονίων

Θα δουλέψουμε τώρα με τον όρο \mathcal{L}_{yuk} για να δούμε πως αποκτούν μάζα τα φερμιόνια. Κατά τα γνωστά θα εφαρμόσουμε ανθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας. Σε αυτή την περίπτωση η συμμετρία που θα εφαρμόσουμε την μέθοδο είναι η $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Για την πρώτη οικογένεια λεπτονίων (αντίστοιχα για τις άλλες) έχουμε

$$\mathcal{L}_{yuk}^l = f_l^{(11)} \left[[\bar{\nu}_e \quad \bar{e}]_L \begin{bmatrix} \phi^\dagger \\ \phi^0 \end{bmatrix} e_R + \bar{e}_R [\phi^- \quad \bar{\phi}^0] \begin{bmatrix} \nu^e \\ e \end{bmatrix}_L \right] \quad (3.187)$$

Η ελαχιστοποίηση του δυναμικού δίνει κατά τα γνωστά

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (3.188)$$

Με την διαταραχή θα έχουμε

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{bmatrix} \quad (3.189)$$

Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{yuk}^l &= \frac{f_l^{(11)}}{\sqrt{2}} \left[(\bar{\nu}^e \quad \bar{e})_L \begin{bmatrix} 0 \\ v + \eta \end{bmatrix} e_R + \bar{e}_R [0 \quad v + \eta] \begin{bmatrix} \nu^e \\ e \end{bmatrix}_L \right] \\ &= \frac{f_l^{(11)}}{\sqrt{2}} [\bar{e}_L (v + \eta) e_R + \bar{e}_R (v + \eta) e_L] \\ &= \frac{f_l^{(11)}}{\sqrt{2}} v [\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L] + \frac{f_l^{(11)}}{\sqrt{2}} \eta [\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L] \end{aligned} \quad (3.190)$$

Ο πρώτος όρος είναι ο όρος μάζας που προκύπτει

$$m_e = \frac{f^{(11)}v}{\sqrt{2}} \quad (3.191)$$

Θεωρώντας

$$m_e \bar{e}e = m_e(\bar{e}_{LE} + \bar{e}_{RE}) \quad (3.192)$$

προκύπτει

$$\mathcal{L}_{yuk}^l = m_e \bar{e}e + \frac{m_e}{v} h \bar{e}e \quad (3.193)$$

Ο δεύτερος όρος της (3.193) μας δίνει την σύζευξη το e με το η . Καθώς όμως η σταθερά σύζευξης $\frac{m_e}{v}$ είναι μικρή δεν δίνει ανιχνεύσιμο φαινόμενο στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Το ίδιο ισχύει και για τις υπόλοιπες οικογένειες. Θα δούμε τώρα πως αποκτούν μάζα οι οικογένειες των κουάρκ. Θα ασχοληθούμε πρώτα με τα (u, c, t) και μετά με τα (d, s, b) καθώς υπάρχει διαφοροποίηση μεταξύ τους. Αναλυτικά έχουμε

$$\mathcal{L}_{yuk}^d = f_d^{(11)} [[\bar{u} \quad \bar{d}]_L \begin{bmatrix} \phi^\dagger \\ \phi^0 \end{bmatrix} \bar{d}_R + [\phi^- \quad \bar{\phi}^0] \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}_L] \quad (3.194)$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία με πριν

$$\mathcal{L}_{yuk}^d = \frac{f_d^{(11)}}{\sqrt{2}} v [\bar{b}_L d_R + \bar{d}_R d_L] + \frac{f_d^{(11)}}{\sqrt{2}} h [\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L] \quad (3.195)$$

Πάλι ο πρώτος όρος είναι ο όρος μάζας

$$m_d = \frac{f_d^{(11)}v}{\sqrt{2}} \quad (3.196)$$

Και καταλήγουμε

$$\mathcal{L}_{yuk}^d = m_d \bar{d}d + \frac{m_d}{v} \bar{d}d h \quad (3.197)$$

Για τα κουάρκ του άλλου τύπου πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μία νέα διπλέτα

$$\tilde{\phi} = i\tau_2 \phi^* = i \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{+*} \\ \phi^{0*} \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \phi_1 & -i\phi_2 \\ \phi_3 & -i\phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \phi_1 & -i\phi_2 \\ \phi_3 & -i\phi_4 \end{bmatrix} \quad (3.198)$$

Το $\tilde{\phi}$ μετασχηματίζεται κάτω από τους $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ μετασχηματισμούς με τον ίδιο τρόπο αλλά με αντίθετο υπερφορτίο $Y = -1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{yuk}^u &= f_u^{(11)} \left[[\bar{u} \quad \bar{d}] \begin{bmatrix} \bar{\phi}^0 \\ -\phi^- \end{bmatrix} u_R + \bar{u}_R [\phi^0 \quad -\phi^+] \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}_L \right] \\ &= f_u^{(11)} \left[[\bar{u} \quad \bar{d}]_L \begin{bmatrix} v + \eta \\ 0 \end{bmatrix} u_R + \bar{u}_R [v + \eta \quad 0] \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}_L \right] \\ &= \frac{f_u^{(11)}}{\sqrt{2}} u [\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L] + \frac{f_u^{(11)}}{\sqrt{2}} [\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L] h \end{aligned} \quad (3.199)$$

Άρα ο όρος μάζας προκύπτει

$$m_u = \frac{f_u^{(11)}}{\sqrt{2}} \quad (3.200)$$

και η λαγκρανζιανή θα είναι

$$\mathcal{L}_{yuk}^u = m_u \bar{u}u + \frac{m_u}{v} \bar{u}uh \quad (3.201)$$

Άρα η λαγκρανζιανή για τα φερμιόνια πρώτης γενιάς θα είναι

$$\mathcal{L}_{f,h} = m_e \bar{e}e + m_d \bar{d}d + m_u \bar{u}u + \frac{m_e}{v} \bar{e}eh + \frac{m_d}{v} \bar{d}dh + \frac{m_u}{v} \bar{u}uh \quad (3.202)$$

Οι σταθερές $f_l^{(11)}$, $f_d^{(11)}$, $f_u^{(11)}$ είναι αυθαίρετες άρα δεν μπορούμε να έχουμε πρόβλεψη για τις μάζες. Παρατηρούμε επίσης πως οι όροι αλληλεπίδρασης έχουν εξάρτηση από την μάζα, που σημαίνει πως βαρύτερα f αλληλεπιδρούν πιο ισχυρά με το h .

3.10 Ανάμιξη γενιών

Όσο αφορά την σύζευξη των λεπτονίων με τα W^\pm , πραγματοποιείται πάντα εντός μιας οικογένειας, δηλαδή

$$\begin{aligned} e^- &\rightarrow \nu_e + W^- \\ \mu^- &\rightarrow \nu_\mu + W^- \\ \tau^- &\rightarrow \nu_\tau + W^- \end{aligned} \quad (3.203)$$

και όχι

$$e^- \not\rightarrow \nu_\tau + W^- \quad (3.204)$$

δεν υπάρχει δηλαδή ανάμιξη γενιών. Γι' αυτό το λόγο λέμε ότι ο λεπτονικός αριθμός των e^- , μ^- , τ^- διατηρείται. Όσο αφορά τα κουάρκ, η σύζευξη με τα W δεν σέβεται το ξεχωριστό των οικογενειών. Δεν υπάρχει, δηλαδή, διατήρηση κάποιου αριθμού που να απαγορεύει τετοιού είδους αντιδράσεις. Θεωρούμε τώρα την αντίδραση

$$\Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.205)$$

που σε επίπεδο κουάρκ γράφεται

$$s \rightarrow u + W^- \quad (3.206)$$

άρα στις W^\pm ασθενείς αλληλεπιδράσεις δεν διατηρείται η παραξενιά(strangeness). Είδαμε πριν ότι οι εκφράσεις για τα ρεύματα j_μ^0, j_μ^\pm έχουν όρους που δεν επιτρέπουν την σύζευξη μεταξύ των κουάρκ διαφορετικής γεύσης. Αυτό γίνεται γιατί όπως φαίνεται και στην $\mathcal{L}_{f,h}$, θεωρήσαμε ότι ο πίνακας των μαζών είναι διαγώνιος στην βάση των ρευμάτων, πράγμα που δεν ισχύει, αφού η ανάμιξη γενιών έχει παρατηρηθεί πειραματικά. Αυτό συμβαίνει καθώς δουλεύουμε στην βάση των ρευμάτων και

άρα βρήκαμε τις μάζες σαν να ήταν στη δικιά τους φυσική βάση. Πρέπει λοιπόν να διαφοροποιήσουμε τις ιδιοκαταστάσεις μάζας από αυτές της αλληλεπίδρασης. Με τις ιδιοκαταστάσεις της φυσικής βάσης περιγράφουμε ένα κουάρκ που διαδίδεται ελεύθερο ενώ με τις ιδιοκαταστάσεις της βάσης ένα κουάρκ κατά την αλληλεπίδραση του. Η εναλλαγή μεταξύ αυτών των ειδών ιδιοκαταστάσεων γίνεται μέσω του πίνακα Cabibo-Kombayashi-Maskawa. Ο πίνακας αυτός είναι μοναδιακός και που μας δίνει πληροφορίες για την ισχύ των διασπάσεων που αλλάζουν γεύση. Ιστορικά έχουμε δύο γενιές. Ο Cabibo πρότεινε ότι τα d, s κουάρκ που συμμετέχουν στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις αναμειγνύονται έχοντας στραφεί κατά γωνία θ . Η γωνία αυτή σχετίζεται με την πιθανότητα να 'σπάσει' για παράδειγμα το u σε d ή s . Στην ουσία το κουάρκ που αλληλεπιδρά με το u μέσω των ασθενών αλληλεπιδράσεων δεν είναι μόνο το d ή s αλλά ένας γραμμικός συνδυασμός τους

$$\begin{aligned} d' &= d\cos\theta_c + s\sin\theta_c \\ s' &= -d\sin\theta_c + s\cos\theta_c \end{aligned} \quad (3.207)$$

όπου θ_c η γωνία Cabibo μας δίνει την στροφή του διανύσματος της ιδιοκατάστασης μάζας σε ένα διάνυσμα των ασθενών ιδιοκαταστάσεων στη βάση των ρευμάτων. Η γωνία είναι $\theta_c = 13.08$ Αν θεωρήσουμε τις

$$\begin{bmatrix} d' \\ s' \end{bmatrix} \quad (3.208)$$

σαν ιδιοκαταστάσεις στον χώρο των ρευμάτων για τις $T_3 = -\frac{1}{2}$ συνιστώσες των κουάρκ των δύο οικογενειών. Η σύνδεση τους με τις ιδιοκαταστάσεις της μάζας

$$\begin{bmatrix} d \\ s \end{bmatrix} \quad (3.209)$$

γίνεται μέσω του πίνακα

$$\begin{bmatrix} d' \\ s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ s \end{bmatrix} \quad (3.210)$$

Άρα το W συζευγνύεται με τις στραμμένες κατά γωνία Cabibo καταστάσεις

$$\begin{bmatrix} u \\ d' \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} c \\ s' \end{bmatrix} \quad (3.211)$$

όπως κάνει και με τα λεπτονικά ζεύγη. Άρα οι συζεύξεις με τα φυσικά κουάρκ

$$\begin{bmatrix} u \\ d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ d\cos\theta_c + s\sin\theta_c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -d\sin\theta_c + s\cos\theta_c \end{bmatrix} \quad (3.212)$$

Παρατηρούμε πως η παραπάνω στροφή δεν επηρεάζει την δομή των ουδέτερων δευμάτων. Κρατώντας μόνο τους όρους που μας ενδιαφέρουν

$$j_0^\mu = \frac{\cos^2\theta}{2}(\bar{d}_L\gamma^\mu d_L + \bar{s}_L\gamma^\mu d_L + \bar{s}_L\gamma^\mu s_L) - \frac{\sin^2\theta}{4}(\bar{d}_L\gamma^\mu d_L + \bar{s}_L\gamma^\mu d_L + \bar{s}_L\gamma^\mu s_L - \frac{2}{3}\bar{d}_R\gamma^\mu d_R - \frac{2}{3}\bar{s}_R\gamma^\mu s_R) \quad (3.213)$$

Αντικαθιστώντας $d, s \rightarrow d', s'$ παίρνουμε

$$j_0^\mu = \frac{\cos^2\theta_W}{2}[(\bar{d}_L\cos\theta_c + \bar{s}_L\sin\theta_c)\gamma^\mu(d_L\cos\theta_c + s_L\sin\theta_c) + (-\bar{d}_L\sin\theta_c + \bar{s}_L\cos\theta_c)\gamma^\mu(-d_L\sin\theta_c + s_L\cos\theta_c)] + \dots = \dots = j_0^\mu \quad (3.214)$$

Άρα η απουσία μεταβάσεων ουδέτερων ρευμάτων αλλαγής γεύσης αποτελεί θεωρητική πρόβλεψη με πειραματική επιβεβαίωση. Στο καθιερωμένο πρότυπο έχουμε τρεις οικογένειες, άρα πρέπει να έχουμε έναν 3×3 πίνακα που να μας δίνει πληροφορίες για τις αλληλεπιδράσεις αλλαγής γεύσης. Είδαμε επίσης πως οι ιδιοκαταστάσεις στη βάση των μαζών είναι διαφορετικές από αυτές στην βάση των αλληλεπιδράσεων. Συμβατικά παίρνουμε τα u, c, t σαν καθαρές καταστάσεις και τις d, s, b σαν τις καταστάσεις που αναμιγνύονται μέσω του πίνακα CKM

$$\begin{bmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix} \quad (3.215)$$

Για να παραμετροποιήσουμε τον πίνακα πρέπει να καθορίσουμε τον αριθμό των παραμέτρων. Έχοντας N_g οικογένειες, δηλαδή $2N_g$ γεύσεις, έχουμε

1) Έναν $N \times N$ μοναδικακό πίνακα ($U^\dagger U = 1$) που απαιτεί $2N_g^2$ αλλά λόγω μοναδικότητας N_g^2

2) $2N_g - 1$ σχετικές φάσεις μεταξύ των πεδίων των κουάρκ, δηλαδή $N_g^2 - (2N_g - 1) = (N_g - 1)$ παρατηρήσιμες παράμετροι.

3) Από αυτές οι $N_g \frac{(N_g - 1)}{2}$ είναι οι γωνίες στροφής και λέγονται γωνίες ανάμιξης των οικογενειών.

4) Οι υπόλοιπες $(N_g - 1) \frac{N_g - 2}{2}$ είναι οι μιγαδικές φάσεις που είναι υπεύθυνες για την παραβίαση της CP συμμετρίας. Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε προφανώς $N_g = 3$.

Η καθιερωμένη παραμετροποίηση του πίνακα μετασχηματισμού με χρήση των γωνιών

3.11. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ θ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΩΝ ΜΑΖΩΝ ΤΩΝ ΚΟΥΑΡΚ77

Euler και της γωνίας $\delta_{1,3}$ δίνεται

$$\begin{aligned}
 V &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{12}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_{13}} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}s_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix} \quad (3.216)
 \end{aligned}$$

όπου $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$ και δ_{13} που παραμετροποιεί την CP . Οι $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ είναι οι γωνίες μίξης και θ_{12} η γωνία Cabibo θ_c .

3.11 Υπολογισμός της γωνίας θ συναρτήσει των μαζών των κουάρκ

Μπορούμε σε αυτή την ενότητα να υπολογίσουμε την γωνία θ_c συναρτήσει των μαζών των κουάρκ των οποίων την τιμή γνωρίζουμε από το πείραμα. Στην περίπτωση που έχουμε μόνο δύο οικογένειες κουάρκ, $N_g = 2$, έχουμε

$$f_{uL} = \begin{bmatrix} u \\ c \end{bmatrix}_L \quad \text{και} \quad f_{dL} = \begin{bmatrix} d \\ s \end{bmatrix}_L \quad (3.217)$$

με αντίστοιχους πίνακες μαζών στην βάση των ρευμάτων

$$M_U = \begin{bmatrix} 0 & n \\ n & n' \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad M_D = \begin{bmatrix} 0 & m \\ m & m' \end{bmatrix} \quad (3.218)$$

Η λαγκρανζιανή που εμπεριέχει τους όρους μάζας των κουάρκ στην βάση των αλληλεπιδράσεων είναι

$$\mathcal{L} = (\bar{d}_0 \quad \bar{s}_0)_L M_D \begin{bmatrix} d_0 \\ s_0 \end{bmatrix}_R + (\bar{u}_0 \quad \bar{c}_0)_L M_U \begin{bmatrix} u_0 \\ c_0 \end{bmatrix}_R + h.c \quad (3.219)$$

Ως προς τους συμβολισμούς έχουμε :

- P_L, P_R : Τα ιδιοδιανύσματα των στραμμένων κουάρκ της δεύτερης οικογένειας στη βάση των ρευμάτων

$$P_L = \begin{bmatrix} d_0 \\ s_0 \end{bmatrix}_L \quad \text{και} \quad P_R = \begin{bmatrix} d_0 \\ s_0 \end{bmatrix}_R \quad (3.220)$$

- N_L, N_R : Τα ιδιοδιανύσματα των στραμμένων κουάρκ της πρώτης οικογένειας στη βάση των ρευμάτων

$$N_L = \begin{bmatrix} u_0 \\ c_0 \end{bmatrix}_L \quad \text{και} \quad N_R = \begin{bmatrix} u_0 \\ c_0 \end{bmatrix}_R \quad (3.221)$$

- p_L, p_R : Τα ιδιοδιανύσματα των κουάρκ της δεύτερης οικογένειας στη φυσική βάση

$$p_L = \begin{bmatrix} d \\ s \end{bmatrix}_L \quad \text{και} \quad p_R = \begin{bmatrix} d \\ s \end{bmatrix}_R \quad (3.222)$$

- n_L, n_R : Τα ιδιοδιανύσματα των κουάρκ της πρώτης οικογένειας στην φυσική βάση

$$n_L = \begin{bmatrix} u \\ c \end{bmatrix}_L \quad \text{και} \quad n_R = \begin{bmatrix} u \\ c \end{bmatrix}_R \quad (3.223)$$

- U_p, V_p : Πίνακες στροφής Cabbibo για τα κουάρκ της δεύτερης οικογένειας. Οι πίνακες αυτοί είναι ίσοι και μοναδιαίοι και άρα ισχύει

$$U_p = V_p \quad \text{και} \quad U_p^{-1} = V_p^{-1} = U_p^\dagger = V_p^\dagger \quad (3.224)$$

- U_N, V_N : Αντίστοιχοι πίνακες στροφής Cabbibo για τα κουάρκ της πρώτης οικογένειας. Οι πίνακες αυτοί είναι ίσοι και μοναδιαίοι.

$$U_N = V_N \quad \text{και} \quad U_N^{-1} = V_N^{-1} = U_N^\dagger = V_N^\dagger \quad (3.225)$$

Οπότε οι διπλέτες των κουάρκ των δύο διαφορετικών βάσεων θα δίνονται ως εξής

$$\begin{aligned} P_L &= U_p p_L & P_R &= V_p p_R \\ N_L &= U_N n_L & N_R &= V_N n_R \end{aligned} \quad (3.226)$$

Η λαγκρανζιανή (3.222) γράφεται σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{P}_L M_D P_R + \bar{N}_L M_U N_R \\ &= \bar{P}_L U_p U_p^{-1} M_D V_p V_p^{-1} P_R + \bar{N}_L U_N U_N^{-1} M_U V_N V_N^{-1} N_R \\ &= \bar{p}_L (U^{-1} M_D V_p) p_R + \bar{n}_L (U_N^{-1} M_U V_N) n_R \end{aligned} \quad (3.227)$$

Βλέπουμε πως οι όροι μέσα στις παρενθέσεις είναι οι όροι διαγωνοποίησης των πινάκων των μαζών. Θα απαιτήσουμε ο πίνακας που θα προκύψει από τους πολλαπλασιασμούς να είναι διαγώνιος.

$$\begin{aligned} U_p^{-1} M_D V_p &= U_p^{-1} M_D U_p = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & m \\ m & m' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2scm + s^2 m' & (c^2 - s^2)m - scm' \\ (c^2 - s^2)m - scm' & 2scm + c^2 m' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.228)$$

όπου $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$. Θα απαιτήσουμε τώρα ο πίνακας αυτός να είναι διαγώνιος

$$\begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2scm + s^2 m' & (c^2 - s^2)m - scm' \\ (c^2 - s^2)m - scm' & 2scm + c^2 m' \end{bmatrix} \quad (3.229)$$

3.11. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ Θ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΩΝ ΜΑΖΩΝ ΤΩΝ ΚΟΥΑΡΚ79

Η λύση του συστήματος αυτού μας δίνει

$$\tan^2 \theta_1 = \frac{m_d}{m_s} \quad (3.230)$$

και ο δεύτερος όρος αντίστοιχα

$$\tan^2 \theta_2 = \frac{m_u}{m_c} \quad (3.231)$$

Επιπλέον για την γωνία Cabbibo έχουμε

$$\begin{aligned} U &= U_p^\dagger U_N = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & s_2 \\ -s_2 & c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 c_2 + s_1 s_2 & c_1 s_2 - s_1 c_2 \\ s_1 c_2 - s_2 c_1 & s_1 s_2 + c_1 c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1-2} & -s_{1-2} \\ s_{1-2} & c_{1-2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.232)$$

Και άρα γνωρίζοντας της μάζες των κούαρκ η γωνία υπολογίζεται

$$\theta_c = \theta_1 - \theta_2 \approx 13^\circ \quad (3.233)$$

Κεφάλαιο 4

Η ομάδα SU(5)

4.1 Εισαγωγή

Συχνά λέγεται πως η έννοια του πεδίου αποτελεί μία από τις σημαντικότερες έννοιες στην φυσική. Εισήχθει αρχικά από τον Micheal Faraday για να περιγράψει τα ηλεκτρικά και μαγνητικά φαινόμενα. Δημιουργός της πρώτης πεδιακής θεωρίας ήταν ο Maxwell και κατάφερε, μέσω της θεωρίας του, να δείξει πως τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία αποτελούν διαφορετικές όψεις του ίδιου νομίσματος, που καλείται ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, ξεκινώντας έτσι την ιδέα της ενοποίησης στην φυσική. Η θεωρία του, που θεωρούταν από τις πιο καλά μελετημένες τον δέκατο ένατο αιώνα, περιέχει κάποιες κρυφές συμμετρίες. Γνωρίζουμε πως οι γραμμές μαγνητικού πεδίου είναι πάντα κλειστές καθώς παρατηρούμε ηλεκτρικά φορτία αλλά ποτέ μαγνητικά μονόπολα. Οι εξισώσεις του Maxwell πρέπει να είναι αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό

$$(E, B) \rightarrow (B, -E) \quad (4.1)$$

μαζί με την εναλλαγή ηλεκτρικών και μαγνητικών ρευμάτων. Σημαντικότερα, όπως ανακαλύφθηκε τις αρχές του εικοστού αιώνα, η θεωρία του Maxwell περιέχει δύο πολύ σημαντικές συμμετρίες, είναι Lorentz και gauge αναλλοίωτη. Η πρώτη βοήθησε τον Einstein να ανακαλύψει την ενοποίηση χώρου και χρόνου και να συμπεράνει πως κάθε φυσική θεωρία πρέπει να είναι Lorentz αναλλοίωτη. Αν λάβουμε υπόψιν και την κβαντομηχανική αυτές οι συμμετρίες οδήγησαν σε περαιτέρω ανακαλύψεις θεωριών που αποτελούν κάποιες από τις καλύτερες που οι φυσικοί έχουν στην διάθεση τους. Αν επιτρέψουμε σε αυτές τις συμμετρίες να είναι τοπικές, δηλαδή να εξαρτώνται από τις χωροχρονικές συντεταγμένες, καταλήγουμε να εισάγουμε με φυσικό τρόπο τις αλληλεπιδράσεις στην θεωρία μας μέσω της εισαγωγής νέων πεδίων που αποτελούν τους φορείς των αλληλεπιδράσεων. Με την βοήθεια του μηχανισμού του αυθόρμητου σπάσιματος συμμετρίας έγινε δυνατό να εξηγήσουμε τον τρόπο με τον οποίο αποκτούν μάζα τα gauge μποζόνια που μεταδίδουν την ασθενή πυρηνική δύναμη, με αποτέλεσμα να οδηγηθούμε στο καθιερωμένο πρότυπο της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης. Το καθιερωμένο πρότυπο αποτελεί μία πολύ ικανοποιητική κβαντική

θεωρία πεδίου που περιγράφει όλες τις αλληλεπιδράσεις, με εξαίρεση την βαρυτική, που παρά την μεγάλη του επιτυχία περιλαμβάνει ακόμη κάποια αναπάντητα ερωτήματα. Η ομάδα των συμμετριών του καθιερωμένου προτύπου είναι η $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ και περιλαμβάνει τρεις σταθερές σύζευξης για τρεις δυνάμεις οπότε στην ουσία δεν τις ενοποιεί. Για αυτό το λόγο θεωρείται ότι αποτελεί το όριο σε χαμηλές ενέργειες ενός πιο θεμελιώδους μοντέλου. Υπάρχουν συνολικά δώδεκα σωματίδια φορείς σε αυτό το μοντέλο με τρία από αυτά να παίρνουν μάζα με το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας, οκτώ άμαζα γλουόνια για την μετάδοση της ισχυρής πυρηνικής δύναμης και το φωτόνιο. Το 1974 οι H.Georgi και S.Glashow πρότειναν ένα μοντέλο ενοποίησης με βάση την ομάδα $SU(5)$ που περιλαμβάνει το καθιερωμένο πρότυπο ως υποομάδα του. Θεωρίες αυτού του τύπου ονομάστηκαν Grand Unifies Theories. Λέγεται πως η $SU(5)$ θεωρία ενοποιεί όλες τις αλληλεπιδράσεις γιατί σε ενέργειες της τάξης των $10^{16} GeV$ έχει μία μόνο σταθερά σύζευξης, μέχρι, μέσω του αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας, καταλήξει στις ομάδες συμμετρίας του καθιερωμένου προτύπου. Το μοντέλο αυτό περιλαμβάνει 24 gauge μποζόνια τα οποία είναι άμαζα, αλλά μετά το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας 12 από αυτά αποκτούν μάζα, αφήνοντας έτσι 12 gauge μποζόνια του καθιερωμένου προτύπου χωρίς μάζα. Στο καθιερωμένο πρότυπο στην συνέχεια έχουμε ξανά αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας σε ενέργεια της τάξης των $10^2 GeV$ που αφήνει άμαζο μόνο το φωτόνιο. Στην $SU(5)$ τα κουάρκ και λεπτόνια έχουν τις ίδιες αναπαραστάσεις και υπάρχουν αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους που μετατρέπουν τα κουάρκ σε λεπτόνια και αντίστροφα. Η θεωρία αυτή προβλέπει λοιπόν την διάσπαση του πρωτονίου καθώς και την ύπαρξη μαγνητικών μονοπόλων. Καμία από αυτές τις προβλέψεις δεν έχει παρατηρηθεί πειραματικά .

4.2 Υπενθυμίσεις και προβλήματα του καθιερωμένου προτύπου

Το καθιερωμένο πρότυπο αποτελεί μία επιτυχημένη θεωρία των στοιχειωδών σωματιδίων και των αλληλεπιδράσεων τους, με εξαίρεση την βαρύτητα. Περιέχει τις τρεις άλλες δυνάμεις, τις ηλεκτρομαγνητικές, τις ασθενείς και τις ισχυρές. Η θεωρία αυτή σχηματίζεται από την λαγκρανζιανή ενός ελεύθερου σωματιδίου, \mathcal{L} . Για να είμαστε ακριβείς η \mathcal{L} ονομάζεται λαγκρανζιανή πυκνότητα στην κλασική μηχανική και συνδέεται με την λαγκρανζιανή L μέσω του τύπου $L = \iiint \mathcal{L} dx dy dz$. Για να βρούμε τις αλληλεπιδράσεις, η \mathcal{L} γίνεται gauged που σημαίνει πως γίνεται gauge αναλλοίωτη κάτω από κάποιους μετασχηματισμούς. Η λαγκρανζιανή που χρησιμοποιείται για την περιγραφή του συστήματος θα έχει παραπάνω βαθμούς ελευθερίας, που δεν επηρεάζουν τις εξισώσεις κίνησης, που ονομάζονται gauges. Οι μετασχηματισμοί που μετασχηματίζουν την λαγκρανζιανή από ένα gauge σε ένα άλλο ονομάζονται gauge μετασχηματισμοί.

Οι εσωτερικοί μετασχηματισμοί του καθιερωμένου προτύπου είναι

- $U(1)$, που είναι η ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό των μιγαδικών αριθμών και

μονάδα ως την απόλυτη τιμή.

• $SU(2), SU(3)$, όπου $SU(n)$ είναι η ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων, ενώ αποτελείται από $n \times n$ μοναδιαίους πίνακες με ορίζουσα 1.

Όπως είδαμε η ομάδα του καθιερωμένου προτύπου είναι η $SU(3)_C \times SU(2) \times U(1)_Y$. Οι κάτω δείκτες μας δείχνουν πάνω σε ποιές ποσότητες δρα η ομάδα. Αναλυτικά έχουμε c για το χρώμα, L γιατί δρα μόνο στις αριστερόστροφες καταστάσεις και Y το υπερφορτίο των σωματιδίων που καθορίζει το βαθμό σύζευξης με το gauge μποζόνιο της $U(1)$ ομάδας. Η αναλλοιώτητα κάτω από τις εσωτερικές συμμετρίες επιτυγχάνεται με την χρήση της συναλοιώτης παραγωγού, που για το καθιερωμένο πρότυπο είναι

$$D^\mu = \partial^\mu - ig_1 \frac{Y}{2} B^\mu - ig_2 \frac{\tau_j}{2} W_j^\mu - ig_3 \frac{\lambda_\alpha}{2} G_\alpha^\mu \quad (4.2)$$

όπου $B^\mu, W_j^\mu, G_\alpha^\mu$ είναι τα πεδία των ομάδων $U(1)_Y, SU(2), SU(3)_C$. Ο δείκτης j τρέχει από 1 έως 3 και ο δείκτης α από 1 έως 8. Το φωτόνιο και το Z μποζόνιο αποτελούν γραμμικούς συνδυασμούς των B^μ και W_3^μ , τα W μποζόνια είναι συνδυασμοί των $W_{1,2}^\mu$ και τα 8 γλουόνια g είναι τα πεδία G_α^μ .

Το Y είναι βαθμωτό και δεν είναι τίποτα άλλο από το υπερφορτίο, τ_j και λ_α είναι οι πίνακες του Pauli και οι Gellmann-Zweig αντίστοιχα.

Οι σταθερές σύζευξης δίνονται ως

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{e}{\cos(\theta_W)} \\ g_2 &= \frac{e}{\sin(\theta_W)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

όπου e είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου και θ_W η γωνία ανάμιξης. Αυτή η γωνία μας δίνει ένα μέτρο του πόσο το φωτόνιο και το Z μποζόνιο αποτελούνται από τα B^μ, W_3^μ πεδία, σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} B^\mu &= A^\mu \cos(\theta_W) + Z^\mu \sin(\theta_W) \\ W_3^\mu &= -A^\mu \sin(\theta_W) + Z^\mu \cos(\theta_W) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Η τρίτη σταθερά σύζευξης, g_3 , είναι της ομάδας χρώματος και μας δείχνει της ισχύ της ισχυρής αλληλεπίδρασης. Ένας χρήσιμος ορισμός είναι $\alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}$, επειδή εμφανίζονται συχνά απλοποιεί πολλές εκφράσεις. Τα σωματίδια του καθιερωμένου προτύπου φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί. Περιλαμβάνεται μόνο η πρώτη γενιά φερμιονίων καθώς οι άλλες δύο περιγράφονται από τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς με τα σωματίδια να εμφανίζουν μεγαλύτερες μάζες. Υπάρχουν επίσης τα τα αντισωματίδια των φερμιονίων, αλλά είναι τα δεξιόστροφα αντισωματίδια που έχουν μη μηδενικό T_3 , που είναι η τρίτη συνιστώσα του ασθενούς ισοσπίν. Όπως και το J_z , το T_3 , μπορεί να είναι οποιωσδήποτε ακέραιος ή ημιακέραιος αριθμός. Σε μία $SU(2)$ διπλέτα, μία κατάσταση θα έχει $T_3 = +1/2$ και η άλλη $T_3 = -1/2$, ενώ σε μία τριπλέτα $T_3 = +1, 0, -1$ κλπ. Το T_3 μαζί με το υπερφορτίο ενός σωματιδίου καθορίζει τη σύζευξη του με τα πεδία του φωτονίου και του Z -μποζονίου.

Particle	Spin	Mass	Electric Charge, Q	Weak Isospin 3^{rd} comp., T_3	Color mult.
e_L^-	1/2	0.511 MeV	-1	-1/2	Singlet
e_R^-	1/2	0.511 MeV	-1	0	Singlet
ν_{eL}	1/2	< 2 eV	0	+1/2	Singlet
u_L	1/2	2.3 MeV	+2/3	+1/2	Triplet
d_L	1/2	4.8 MeV	-1/3	-1/2	Triplet
u_R	1/2	2.3 MeV	+2/3	0	Triplet
d_R	1/2	4.8 MeV	-1/3	0	Triplet
γ	1	0	0	*	Singlet
W^\pm	1	80.4 GeV	± 1	± 1	Singlet
Z^0	1	91.2 GeV	0	*	Singlet
g	1	0	0	0	Octet

Το αριστερόστροφο ηλεκτρόνιο και νεutrino, και τα αριστερόστροφα κουάρκ, σχηματίζουν $SU(2)_L$ διπλέτες.

$$L = \begin{bmatrix} \nu_e \\ e^- \end{bmatrix}_L, Q = \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}_L \quad (4.5)$$

ενώ το δεξιόστροφο ηλεκτρόνιο και κουάρκ σχηματίζουν $SU(2)_L$ singlets. Βλέπουμε δηλαδή πως το καθιερωμένο πρότυπο αντιμετωπίζει με διαφορετικό τρόπο τα δεξιόστροφα από τα αριστερόστροφα φερμιόνια. Μία παρατήρηση που πρέπει να κάνουμε για τα σωματίδια που φαίνονται στο πινακάκι είναι πως δεν υπάρχουν δεξιόστροφα νεutrina. Αυτό συμβαίνει καθώς πειραματικά έχουν παρατηρηθεί μόνο αριστερόστροφα νεutrina. Υπάρχει σαν πρόταση τα δεξιόστροφα νεutrina να είναι singlet κάτω από όλες τις αλληλεπιδράσεις και άρα να μην αλληλεπιδρούν καθόλου. Υπάρχουν GUT που προβλέπουν την ύπαρξη τους. Τα αστεράκια στην στήλη για τις τιμές τις T_3 υπάρχουν για τα φωτόνια γ , και τα Z -μποζόνια καθώς αυτά δεν αποτελούν ασθeneis ιδιοκαταστάσεις αλλά ιδιοκαταστάσεις μάζας και άρα δεν έχουν συγκεκριμένο ασθeneis κβαντικό αριθμό. Η χρήση συμμετριών, κατά τα γνωστά, δεν δίνει όρους μάζας άρα όλα τα σωματίδια πρέπει να είναι άμαζα, που προφανώς δεν ισχύει. Η εισαγωγή όρων μάζας στην λαγκρανζιανή, όπως είδαμε, επίσης δεν αποτελεί λύση καθώς παραβιάζεται η $SU(2)_L$ συμμετρία καθώς ο όρος μάζας για τα φερμιόνια είναι

$$m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R) \quad (4.6)$$

με τα αριστερόστροφα φερμιόνια να είναι $SU(2)_L$ διπλέτες ενώ τα δεξιόστροφα να είναι singlets, και άρα το γινόμενο των κυματοσυναρτήσεων τους να μην είναι ένα $SU(2)_L$ singlet. Η συνέπεια αυτού είναι ο όρος αυτός να μην είναι αναλλοίωτος κάτω από την $SU(2)_L$. Το πρόβλημα αυτό λύνεται, κατά τα γνωστά, μέσω του μηχανισμού του αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας, που πρακτικά είναι η εισαγωγή ενός μιγαδικού

βαθμωτού πεδίου, που ονομάζεται πεδίο Higgs, σε μία $SU(2)_L$ διπλέτα

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Η λαγκρανζιανή του πεδίου Higgs θα είναι

$$\mathcal{L}_\phi = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (4.8)$$

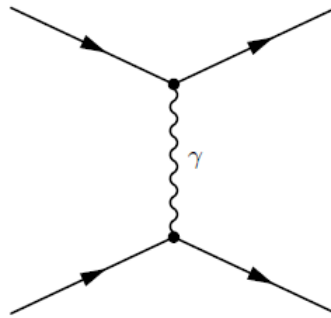
όπου όπως είδαμε η αναβάθμιση της παραγώγου $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ κάνει την λαγκρανζιανή αναλλοίωτη κάτω από την ομάδα συμμετρίας του καθιερωμένου προτύπου. Η ουδέτερη συνιστώσα του πεδίου Higgs θα δώσει μια μη μηδενική τιμή για την αναμενόμενη τιμή κενού. Αν η φορτισμένη συνιστώσα είχε μία αντίστοιχη τιμή, οι τιμές του φορτίου θα μπορούσαν να εξαφανιστούν στο κενό πράγμα που προφανώς δεν ισχύει μιας και το φορτίο διατηρείται. Αυτό θα σπάσει την $SU(2)_L \times U(1)_Y$ στην $U(1)_{EM}$ την ομάδα συμμετρίας της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής. Το πεδίο αυτό θα σπάσει την $SU(2)_L$ συμμετρία καθώς μία μόνο από τις συνιστώσες έχει αναμενόμενη τιμή κενού και η $U(1)_Y$ θα σπάσει λόγω της τιμής του υπερφορτίου Y του Higgs που είναι μη μηδενική καθώς

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{Y}{2} \quad (4.9)$$

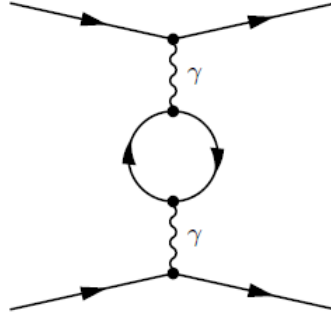
Χρησιμοποιώντας τον τελεστή φορτίου, Q , στην ϕ^0 θα δώσει μηδέν, όπως περιμένουμε, και άρα η ϕ^0 θα είναι αναλλοίωτη κάτω από ηλεκτρομαγνητικό γραμμικό συνδιασμό των $SU(2)_L$ και $U(1)_Y$. Τα μποζόνια που σχετίζονται με αυτή θα παραμείνουν άμαζα ενώ τα υπόλοιπα θα αποκτήσουν μεγάλη μάζα. Ως συνέπεια θα καταλήξουμε με μεγάλης μάζας W^\pm και Z^0 και ένα άμαζο γ , που είναι αυτό ακριβώς που παρατηρούμε. Το μποζόνιο Higgs θα δώσει μάζα επίσης στα κουάρκ και λεπτόνια, με εξαίρεση τα νετρίνα, καθώς αυτό θα απαιτούσε την ύπαρξη δεξιόστροφου νετρίνου.

4.3 Σταθερές σύζευξης

Για μία δοσμένη αλληλεπίδραση, για παράδειγμα την ανταλλαγή φωτονίου μεταξύ δύο φορτισμένων σωματιδίων, θα υπάρχει ένα διάγραμμα με δύο κορυφές μία για κάθε ένα από τα φορτισμένα σωματίδια και το φωτόνιο ως διαδότης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Μαζί όμως με αυτό θα υπάρχουν και διαγράμματα υψηλότερης τάξης αφού το φωτόνιο μπορεί να δημιουργήσει ζεύγος σωματιδίου-αντισωματιδίου, που στην συνέχεια δημιουργεί ένα φωτόνιο, όπως επίσης φαίνεται στο σχήμα.



Μπορεί φυσικά να υπάρχουν πάρα πολλά loops φερμιονίων, αν προσμετρηθούν όλες οι τάξεις. Η μετρήσιμη ενεργός διατομή θα περιλαμβάνει όλες τις τάξεις. Το πρόβλημα είναι πως κάποιες από τις συνεισφορές είναι άπειρες και άρα η θεωρία μας είναι άχρηστη. Αυτό λύνεται μέσω μιας μεθόδου που ονομάζεται επανακανονικοποίηση, που μας επιτρέπει να πάρουμε σχέσεις για τις σταθερές σύζευξης σαν συνάρτηση της κλίμακας ενέργειας, q^2 , δεδομένου πως έχουν μετρηθεί στην κλίμακα μ^2 .

$$\frac{1}{\alpha_i(q^2)} = \frac{1}{\alpha_i(\mu^2)} + \frac{b_i}{4\pi} \ln \left(\frac{q^2}{\mu^2} \right) \quad (4.10)$$

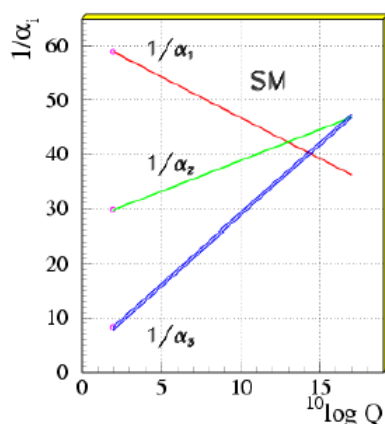
όπου τα b_i είναι σταθερές που εξαρτώνται από το πόσα φερμιόνια και μποζόνια εισέρχονται στα loops.

Δίνονται ως

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{4n_F}{3} \\ b_2 &= \frac{22}{3} - \frac{4n_F}{3} \\ b_3 &= 11 - \frac{4n_F}{3} \end{aligned} \quad (4.11)$$

όπου n_F είναι ο αριθμός των γενιών.[6]

Σχηματικά δίνονται ως



Μπορούμε να δούμε πως οι σταθερές σύζευξης, παρότι δεν ενοποιούνται τέλεια, πλησιάζουν αρκετά σε ενεργειακή κλίμακα $Q \simeq 10^{15} \text{ GeV}$.

4.4 Προβλήματα

Παρά την επιτυχία του, το καθιερωμένο πρότυπο αφήνει αρκετά ερωτήματα αναπάντητα. Επιγραμματικά αναφέρουμε :

- Γιατί η ομάδα συμμετρίας του καθιερωμένου προτύπου είναι η $SU(3)_C \times SU(2) \times U(1)_Y$;
- Γιατί υπάρχουν τρεις οικογένειες λεπτονίων και κουάρκ ;
- Γιατί τα αριστερόστροφα φερμιόνια αντιμετωπίζονται διαφορετικά από τα δεξιόστροφα ;
- Υπάρχουν αρκετές ελεύθερες παράμετροι στο καθιερωμένο πρότυπο, όπως για παράδειγμα οι μάζες των κουάρκ, των λεπτονίων, των νετρίνων, του μποζονίου Higgs, του Z μποζονίου, της γωνίας ανάμιξης και των σταθερών σύζευξης, υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ τους ;
- Δεν παρέχει καμία περιγραφή της βαρύτητας
- Διαφορετικές σταθερές σύζευξης για κάθε αλληλεπίδραση

4.5 Κίνητρο για μεγαλοενοποίηση

Μιάς και τα κουάρκ και τα λεπτόνια δεν συνδέονται στο καθιερωμένο πρότυπο, τα υπερφορτία τους καθορίζονται από τις πειραματικά μετρημένες τιμές των φορτίων των σωματιδίων και των ασθενών τους αλληλεπιδράσεων. Αυτές όμως δεν συνδέονται και άρα δεν υπάρχει λόγος για τις τιμές των φορτίων των κουάρκ να είναι τέτοιες ώστε τα πρωτόνια και τα ηλεκτρόνια να έχουν ίσα κατά μέτρο φορτία. Την ίδια στιγμή αποτελεί πειραματικό γεγονός πως [7] το εύρος διαφοράς αυτών των τιμών είναι ιδιαίτερα μικρό $0.8(8) \times 10^{-21} e$. Αφού η μεγαλοενοποίηση ενσωματώνει τις επιμέρους ομάδες σε μία, το υπερφορτίο των λεπτονίων και των κουάρκ δεν θα είναι πλέον ανεξάρτητο.

Υπάρχει επίσης και το γεγονός, όπως είδαμε νωρίτερα, πως οι σταθερές σύζευξης σχεδόν συμπίπτουν σε ενέργειες $10^{14} - 10^{16}$ GeV που υποδηλώνει ενοποίηση σε αυτήν την κλίμακα, εκτός αν προφανώς πρόκειται για σύμπτωση.

4.6 Συμβολισμός

Ξεκινάμε από τα αριστερόστροφα up,down κουάρκς. Αυτά ανήκουν σε μία διπλέτα ως προς την SU(2), έχουν τρία χρώματα και το υπερφορτίο τους είναι 1/6. Αντίστοιχα το δεξιόστροφο up κουάρκ είναι τριπλέτα κάτω από την SU(3), singlet κάτω από την SU(2) και έχει υπερφορτίο 2/3. Συγκεντρώνοντας όλα τα σωματίδια μιας γενιάς μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u^\alpha \\ d^\alpha \end{bmatrix}_L &\rightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})_L \\
 u_R^\alpha &\rightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3})_R \\
 d_R^\alpha &\rightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3})_R \\
 \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \end{bmatrix}_L &\rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})_L \\
 e_R &\rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)_R
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Είναι σημαντικό σε αυτό το σημείο να τονίσουμε το εξής : Επειδή οι μετασχηματισμοί βαθμίδας μετατίθενται με την ομάδα Lorentz δεν μπορούμε να μετασχηματίσουμε αριστερόστροφα σε δεξιόστροφα σωματίδια. Για να κάνουμε τα αριστερόστροφα δεξιόστροφα κάνουμε τα εξής.

Γνωρίζουμε ότι

$$\psi^c = C\gamma_0\psi^* = i\gamma^2\psi^* \tag{4.13}$$

όπου θα είναι

$$(\psi_R)^c = (\psi^c)_L = \psi_L^c \tag{4.14}$$

με βάση τον συμβολισμό που εισάγαμε πριν θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u^\alpha \\ d^\alpha \end{bmatrix}_L &\rightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6}) \\
 u_R^{\alpha c} &\rightarrow (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, -\frac{2}{3}) \\
 d_R^{\alpha c} &\rightarrow (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, \frac{1}{3}) \\
 \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \end{bmatrix}_L &\rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2}) \\
 e_R^c &\rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

δηλαδή για τα δεξιόστροφα σωματίδια πήραμε τα αντισωματίδια τους και στις αναπαράστασεις θεωρήσαμε τη συζυγή αναπαράσταση κάτω από την ίδια ομάδα.

4.7 Άλγεβρες Lie

Σε μία συνεχή ομάδα, κάθε στοιχείο μπορεί να παραχθεί από το ταυτοτικό στοιχείο αν του εφαρμόσουμε ένα άπειρο αριθμό απειροστών μετασχηματισμών.

Με βάση αυτά κάθε στοιχείο δίνεται ως

$$g(\alpha) = 1 + i\alpha^\alpha T^\alpha + O(\alpha^2) \quad (4.16)$$

όπου α^α είναι οι απειροστοί παράμετροι που ορίζουν σε ποιά διεύθυνση από το ταυτοτικό στοιχείο κινούμαστε και T^α είναι οι γεννήτορες της ομάδας. Μία ομάδα με αυτή τη δομή ονομάζεται ομάδα Lie. Στην περίπτωση αυτή οι γεννήτορες ορίζουν ένα διανυσματικό χώρο απειροστών μετασχηματισμών, και άρα ο μεταθέτης τους θα είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός των γεννητόρων

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (4.17)$$

όπου οι f^{abc} ονομάζονται σταθερές δομής. Αυτός ο διανυσματικός χώρος μαζί με τον μεταθέτη των γεννητόρων ορίζουν μία άλγεβρα Lie. Αν υπάρχει γεννήτορας που μετατίθεται με όλους τους άλλους, θα παράγει μία ανεξάρτητη συνεχή αβελιανή ομάδα με την δομή της $U(1)$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος γεννήτορας η ομάδα ονομάζεται ημι-απλή. Οι $SU(n)$ είναι απλές ομάδες.

4.8 Αναπαράστασεις

Μία αναπαράσταση μίας ομάδας είναι μία αντιστοίχιση, $D(g)$, των στοιχείων, $g \in G$, που ικανοποιεί :

$$D(e) = 1_n \quad (4.18)$$

όπου 1_n είναι ο πίνακας μονάδα διαστάσεων $n \times n$ και

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1 * g_2) \quad (4.19)$$

για όλα τα $g_{1,2} \in G$.

Τα σωματίδια μπορούν να αναγνωρισθούν ως οι αναπαράστασεις της ομάδας, που καθορίζουν τις ιδιότητες μετατροπής τους με βάση την ομάδα στην οποία ανήκουν.

4.8.1 Αναπαράστασεις της $SU(n)$

Στις αναπαράστασεις των ομάδων $SU(n)$ μπορούν να ανατεθούν $n - 1$ ακέραιοι $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ που καθορίζουν την αναπαράσταση. Η συζυγής αναπαράσταση θα μας

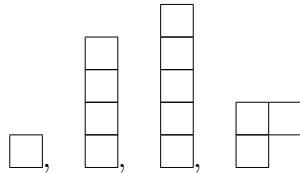
δώσει $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \rightarrow (\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1)$. Από αυτούς τους ακεραίους ο αριθμός των σωματιδίων της αναπαράστασης μπορεί να υπολογισθεί.

Για μία $SU(5)$ αναπαράσταση, καθορισμένη από τους $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, ο αριθμός των σωματιδίων θα είναι

$$N = \left(\prod_{i=1}^4 \frac{\alpha_i + 1}{1} \right) \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + 2}{2} \right) \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_3 + 2}{2} \right) \left(\frac{\alpha_3 + \alpha_4 + 2}{2} \right) \times \quad (4.20)$$

$$\times \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3}{3} \right) \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + 3}{3} \right) \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + 4}{4} \right)$$

Ο αριθμός των σωματιδίων χρησιμοποιείται για να ονοματίσει αναπαραστάσεις. Σε αυτή την περίπτωση θα γράφεται σε έντονα γράμματα, άρα το $\mathbf{5}$ θα είναι το $(1, 0, 0, 0)$ της $SU(5)$ και το αντίστοιχο συζυγές θα συμβολίζεται με μία μπάρα πάνω από το σύμβολο. Δηλαδή το $\bar{\mathbf{5}}$ θα είναι $(0, 0, 0, 1)$. Οι αναπαραστάσεις επίσης αντιστοιχούν σε ένα διάγραμμα Young. Αυτά αποτελούνται από 1 έως n σειρές από κουτιά που καθορίζονται από τη χρήση των ακεραίων α_i της αναπαράστασης. Ο πρώτος αριθμός α_1 , καθορίζει το πόσες περισσότερες στήλες από κουτιά υπάρχουν στην πρώτη σειρά, σε σύγκριση με την δεύτερη. Για τον δεύτερο αριθμό ισχύουν τα ίδια αλλά τώρα η δεύτερη σειρά συγκρίνεται με την τρίτη κτλπ. Άρα για το $(1, 0, 0, 0)$ θα υπάρχει πάντα ένα μόνο κουτί αφού η πρώτη σειρά θα έχει μία μόνο παραπάνω στήλη από την δεύτερη που έχει μηδέν. Για το $(0, 0, \dots, 1)$ η $(n - 1)$ σειρά έχει ένα παραπάνω κουτί από την n σειρά και άρα αυτό θα αντιστοιχεί σε μία μόνο στήλη από $n - 1$ κουτιά. Τέλος πρέπει να αναφέρουμε την περίπτωση της $(0, 0, \dots, 0)$ αναπαράστασης που θα είναι μια μονή στήλη από n κουτιά. Δίνουμε κάποια παραδείγματα για την $SU(5)$.



$$\square, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (4.21)$$

Με την σειρά που φαίνονται έχουμε τα $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(0, 0, 0, 0)$ και $(1, 1, 0, 0)$. Για να είναι δυνατό να αντιστοιγήσουμε όλα τα σωματίδια σε αναπαραστάσεις, όταν κάνουμε ενοποίηση με την $SU(5)$, θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερες αναπαραστάσεις από τις $\mathbf{5}, \bar{\mathbf{5}}$. Οι μεγαλύτερες αναπαραστάσεις μπορούν να βρεθούν με τον να συνδέσουμε αυτές τις δύο με τον εαυτό τους ή μεταξύ τους. Γι αυτό το λόγο τα διαγράμματα Young εισάγονται εδώ, καθώς η σύνθεση αναπαραστάσεων γίνεται απλά με την χρήση τους. Πρέπει να εισάγουμε εδώ την έννοια της αποδεκτής ακολουθίας. Μια αποδεκτή ακολουθία είναι μία ακολουθία από γράμματα όπου ο αριθμός των a που έχουν χρησιμοποιηθεί είναι πάντα μεγαλύτερος από τον αριθμό των b όπου αντίστοιχα είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των c κλπ. Αυτό σημαίνει πως το aac δεν είναι αποδεκτό ενώ το $aabc$ είναι. Για να συνδέσουμε δύο αναπαραστάσεις με χρήση των διαγραμμάτων Young ακολουθούμε τρία βήματα :

1) Και τα δύο διαγράμματα πρέπει να σχεδιαστούν , αλλά τα κουτιά του ενός γεμίζονται

με γράμματα. Η πρώτη σειρά των κουτιών γεμίζεται με a η δεύτερη με b κλπ. Για την $(0, 1) \otimes (1, 1)$ της $SU(3)$ έχουμε

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array}$$

2) Τα κουτιά με a προσθέτονται στα δεξιά των μη γεμισμένων κουτιών, με τρόπο τέτοιο ώστε καμία στήλη δεν έχει πάνω από ένα a , καμία κατώτερη σειρά δεν έχει παραπάνω στήλες από την ανώτερη και υπάρχουν το μέγιστο n σειρές

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & \\ \hline a & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & a \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}$$

τώρα τα κουτιά με b μπαίνουν με τον ίδιο τρόπο, αλλά όταν τα διαβάζουμε από δεξιά προς τα αριστερά, ξεκινώντας από την πρώτη σειρά και πηγαίνοντας προς τα κάτω, η σειρά γραμμάτων πρέπει να είναι αποδεκτή.

Άρα τα επιτρεπτά διαγράμματα θα είναι

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & b \\ \hline a & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & a \\ \hline \square & b & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & a \\ \hline \square & & \\ \hline b & & \\ \hline \end{array},$$

Αυτό το βήμα επαναλαμβάνεται για κάθε επόμενο γράμμα.

3) Το τελικό αποτέλεσμα είναι τα διαγράμματα Young που έχουμε πάρει αφού ακολουθήσουμε τα προηγούμενα βήματα. Όταν αφαιρέσουμε τα γράμματα το αποτέλεσμα για αυτό το παράδειγμα θα είναι

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

με συμβολισμό δύο ακεραίων έχουμε

$$(0, 1) \otimes (1, 1) = (0, 1) \oplus (1, 2) \oplus (2, 0) \tag{4.22}$$

Ένα χρήσιμο κόλπο είναι πως είναι δυνατό να πάρουμε τις συζυγείς των δύο αναπαραστάσεων που θέλουμε να συνδέσουμε, αν αυτό κάνει πιο εύκολο να ακολουθήσουμε τα τρία βήματα, και στο τέλος να πάρουμε ως αποτέλεσμα το συζυγές του αποτελέσματος. Ένα παράδειγμα για την $SU(5)$ είναι το $(1, 0, 0, 0) \otimes (0, 0, 0, 1)$ που είναι

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \tag{4.23}$$

Αυτό θα ήταν δύσκολο να υπολογιστεί, οπότε μπορούμε εναλλακτικά να υπολογίσουμε το $(0, 0, 0, 1) \oplus (1, 0, 0, 0)$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (4.24)$$

4.8.2 Θεμελιώδεις αναπαραστάσεις της $SU(n)$

Για την $SU(n)$ η θεμελιώδης αναπαραστάση θα είναι ένα διάνυσμα αποτελούμενο από n μιγαδικά στοιχεία.

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_n \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

που μετασχηματίζεται ως

$$\psi \rightarrow U\psi \quad (4.26)$$

όπου U είναι οι ειδικοί μοναδιαίοι πίνακες της ομάδας. Αυτή είναι η αναπαράσταση που συμβολίζεται ως $(1, 0, \dots, 0)$. Θα υπάρχει επίσης μια μιγαδική συζυγής θεμελιώδης αναπαράσταση, ψ^* , που μετασχηματίζεται ως

$$\psi^* \rightarrow U^*\psi^* \quad (4.27)$$

που είναι το $(0, \dots, 0, 1)$ που είδαμε νωρίτερα.

Για την ομάδα χρώματος του καθιερωμένου προτύπου, τα κουάρκ μετασχηματίζονται σαν τις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις της $SU(3)$, δηλαδή την τριπλέτα χρώματος $\mathbf{3}$, και τα αντικουάρκ σαν τις συζυγείς αναπαραστάσεις, την τριπλέτα αντι-χρώματος $\bar{\mathbf{3}}$. Τα μποζόνια της $SU(3)$ μετασχηματίζονται σύμφωνα με την συζυγή αναπαράσταση. Για την $SU(3)$ τα γλουόνια μετασχηματίζονται σαν μία octet χρώματος που σχηματίζεται ως $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$.

4.9 Μεγαλο-ενοποίηση με $SU(5)$

Κάθε μία από τις ηλεκτρομαγνητικές, ασθενείς και ισχυρές αλληλεπιδράσεις σχετίζεται με μία άλγεβρα Lie, και μαζί σχηματίζουν την $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Αυτή μπορεί να ενσωματωθεί σε μία άλγεβρα Lie ενοποιώντας τις δυνάμεις.

4.9.1 Διανυσματικά μποζόνια

Υπάρχουν 24 γεννήτορες της $SU(5)$, που συνδέονται με τα διανυσματικά μποζόνια $V_\mu^\alpha, \alpha = 1, \dots, 24$.

Προκύπτουν από την συναλλοίωτη παράγωγο

$$D^\mu = \partial^\mu - ig_5 T_\alpha V_\alpha^\mu \quad (4.28)$$

Για να φτάσουμε στην υπο-ομάδα $SU(3) \times SU(2)$, προκειμένου να επιστρέψουμε στο καθιερωμένο πρότυπο στις χαμηλές ενέργειες, τονίζουμε πως η ομάδα χρώματος δρά πάνω στις τρεις πρώτες γραμμές και στήλες των 5×5 πινάκων, ενώ η $SU(2)$ δρά στις δύο τελευταίες γραμμές και στήλες.

Για την κανονικοποίηση των πινάκων ισχύει

$$Tr(T^\alpha T^b) = 2\delta^{\alpha b} \quad (4.29)$$

Τότε οι τρεις πρώτοι γεννήτορες δίνονται ως

$$T^{\alpha=1,2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \sigma^{1,2,3} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

όπου κατά τα γνωστά οι $\sigma_{1,2,3}$ είναι οι πίνακες του Pauli.

Αυτοί οι τρεις γεννήτορες θα είναι συσχετισμένοι με τα $W^{1,2,3}$ μποζόνια της $SU(2)$.

Τα φορτισμένα W μποζόνια θα είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί

$$W^\pm = \frac{V_\mu^9 \pm iV_\mu^{10}}{\sqrt{2}} \quad (4.31)$$

Οι γεννήτορες της $SU(3)$, για την περίπτωση της $SU(5)$, θα δίνονται με παρόμοιο τρόπο όπως πριν, με τους 3×3 Gell-Mann Zweig πίνακες $\lambda^{\alpha=1, \dots, 8}$ εισερχόμενοι στις πρώτες τρεις σειρές και στήλες, δηλαδή

$$T^{\alpha=5, \dots, 12} = \begin{bmatrix} & & & 0 & 0 \\ & \lambda^\alpha & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

όπου οι πίνακες $\lambda^{\alpha=1,\dots,8}$ δίνονται ως

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda^7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

έτσι ώστε τα $V_{\mu}^{\alpha=1,\dots,8}$ να είναι τα διανυσματικά μποζόνια της $SU(3)$, δηλαδή τα γλουόνια. Για τις $SU(n)$ ομάδες, οι γεννήτορες είναι άγχοι. Με βάση αυτό καθώς και την εξίσωση (4.8) σε συνδυασμό με το γεγονός πως ο γεννήτορας συσχετισμένος με το B_{μ} πρέπει να μετατίθεται με τους $T^{\alpha=1,2,3}$ και $T^{\alpha=5,\dots,12}$ θα ισχύει

$$T^4 = \frac{1}{\sqrt{15}} \text{Diag}(-2, -2, -2, 3, 3) \quad (4.34)$$

Μέχρι τώρα έχουν απομείνει 12 διανυσματικά μποζόνια αλλά έχουμε καταφέρει να μετρήσουμε όλα τα μποζόνια του καθιερωμένου προτύπου! Ως αποτέλεσμα θα έχουμε 12 νέα μποζόνια που θα δώσουν νέες αλληλεπιδράσεις.

Οι αντίστοιχοι γεννήτορες μπορούν να σχηματιστούν ως

$$l^{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, l^{14} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, l^{15} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

και ανάλογα ως τον l^{18} . Για τιμές από 19 έως 24 ορίζονται ως

$$l^{19} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, l^{20} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, l^{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

και τέλος οι L^{13+k} για $k = 0, 1, \dots, 11$ θα σχηματίζονται με βάση

$$L^{1k} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & l^{13+k} \\ (l^{13+k})^{\dagger} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, k = 0, 1, \dots, 11 \quad (4.37)$$

όπου $0_{n \times n}$ είναι ο μηδενικός πίνακας διαστάσεων $n \times n$.

Τα νέα μποζόνια θα είναι

$$X_{\mu}^1 = \frac{V_{\mu}^{13} - iV_{\mu}^{14}}{\sqrt{2}} Y_{\mu}^1 = \frac{V_{\mu}^{18} + iV_{\mu}^{19}}{\sqrt{2}} \quad (4.38)$$

Αντίστοιχα προκύπτουν τα τέσσερα επιπλέον X, Y μποζόνια. Θα έχουν χρώμα και ηλεκτρικό φορτίο $Q_X = +\frac{4}{3}$ και $Q_Y = +\frac{1}{3}$. Μπορούμε να ορίσουμε τώρα έναν 5×5 πίνακα ως

$$V_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=1}^{24} V_\mu^\alpha T^\alpha \quad (4.39)$$

Αναλυτικά

$$V_\mu = \begin{bmatrix} g_{11} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & g_{12} & g_{13} & \bar{X}^1 & \bar{Y}^1 \\ g_{21} & g_{22} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & g_{23} & \bar{X}^2 & \bar{Y}^2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & \bar{X}^3 & \bar{Y}^3 \\ X^1 & X^2 & X^3 & \frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y^1 & Y^2 & Y^3 & W^- & -\frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

4.10 Κβάντωση του φορτίου

Μετρώντας όλα τα φερμιόνια του πίνακα 1, με το κάθε κουάρκ να μετρείται σαν 3, λόγω χρώματος, και να δίνει σαν σύνολο 15 φερμιόνια, όπου μαζί με τα αντισωματίδια τους δίνουν 30 φερμιόνια ανα οικογένεια στο καθιερωμένο πρότυπο. Τα φερμιόνια της πρώτης οικογένειας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα, έτσι ώστε να γίνει πιο εύκολο να αναγνωριστεί σε ποια αναπαράσταση της $SU(5)$ θα μπουόν.

Particle	$SU(2)$ multiplicity	$SU(3)$ multiplicity	Electric Charge, Q
$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$	2	1	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\bar{L} = \begin{pmatrix} e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix}_R$	2	1	$\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$
e_R^-	1	1	-1
e_L^+	1	1	+1
$Q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	2	3	$\begin{pmatrix} +2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}_R$	2	3	$\begin{pmatrix} +1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$
u_R	1	3	+2/3
d_R	1	3	-1/3
\bar{u}_L	1	3	-2/3
d_L	1	3	+1/3

Η πιο απλές αναπαράστασεις της $SU(5)$ είναι οι θεμελιώδεις αναπαράστασεις $(1, 0, 0, 0)$ και $(0, 0, 0, 1)$, που συμβολίζονται ως $\mathbf{5}$ και $\bar{\mathbf{5}}$.

Έχουμε

$$\bar{\psi} = \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Επειδή οι δείκτες χρώματος δρούν πάνω στις 3 πρώτες σειρές και η $SU(2)$ δρά στις 2 τελευταίες, τα $\alpha^{i=1,2,3}$ θα είναι singlet κάτω από την $SU(2)$ και τριπλέτα κάτω από την $SU(3)$. Αντίστοιχα τα $\alpha^{i=4,5}$ θα είναι διπλέτα κάτω από την $SU(2)$ και singlet κάτω από την $SU(3)$. Ένας τελεστής αναβίβασης ή καταβίβασης σε αυτό το αντικείμενο δεν μπορεί να αλλάξει την κατεύθυνση του spin, έτσι ώστε όλα τα σωματίδια να έχουν την ίδια ελικότητα. Για την πρώτη οικογένεια, κοιτώντας το πινακάκι, η τριπλέτα χρώματος μπορεί να αναγνωρισθεί με καθένα από τα δεξιόστροφα κουάρκ αφού τα αντικουάρκ μετασχηματίζονται ως αντι-τριπλέτες (antitriplets) χρώματος. Η διπλέτα $SU(2)$ πρέπει να αναγνωρισθεί με είτε τα L είτε με τα \bar{L} . Αυτό γίνεται καθώς οι αναπαράστασεις της $SU(2)$ είναι πραγματικές. Η αντιστοίχιση του L στα $\alpha^{4,5}$ δίνει

$$\bar{\psi} = \begin{bmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \\ e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{bmatrix}_R \quad (4.42)$$

Ο τελεστής φορτίου $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των γεννητόρων της $SU(2)$ και της $U(1)$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός πως οι γεννήτορες των $SU(n)$ είναι άιχνοι για να αναγνωρίσουμε τα κουάρκ στην $\bar{\psi}$. Πρέπει οι ιδιοτιμές του Q να έχουν άθροισμα μηδέν. Χρησιμοποιώντας αυτό στο $\bar{\psi}$ παίρνουμε:

$$Q(\bar{\nu}_e) + Q(e^+) + 3Q(q) = 0 \Rightarrow Q(q) = -\frac{1}{3}e \quad (4.43)$$

άρα πρέπει να είναι το δεξιόστροφο down κουάρκ σε αυτή την αναπαράσταση. Αυτή είναι η κβάντωση του φορτίου του δεξιόστροφου down κουάρκ στην $SU(5)$.

Τέλος έχουμε ότι η $\bar{\mathbf{5}}$ ($\mathbf{5}$) αναπαράσταση είναι

$$\bar{\psi} = \begin{bmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \\ e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{bmatrix}, \psi = \begin{bmatrix} \bar{d}_r \\ \bar{d}_g \\ \bar{d}_b \\ \nu_e \\ e^- \end{bmatrix}_L \quad (4.44)$$

Χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα Young μεγαλύτερες αναπαράστασεις μπορούν να φτιαχτούν από το $\mathbf{5}$ συνδέοντας το με τον εαυτό του. Για παράδειγμα παίρνοντας

$5 \otimes 5$ έχουμε

$$\square \otimes \alpha = \square \alpha \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \alpha \\ \hline \end{array} \quad (4.45)$$

Δηλαδή

$$(1, 0, 0, 0) \otimes (1, 0, 0, 0) = (2, 0, 0, 0) \otimes (0, 1, 0, 0) \quad (4.46)$$

που αντιστοιχεί σε

$$5 \otimes 5 = 10 \oplus 15 \quad (4.47)$$

Το 15 είναι το συμμετρικό μέρος και το 10 το αντισυμμετρικό. Το συμμετρικό μέρος παραλείπεται γιατί περιέχει μία sextuplet χρώματος, που δεν ταιριάζει σε καμία από τις καταστάσεις του καθιερωμένου προτύπου. Για τα στοιχεία του αντισυμμετρικού πίνακα έχουμε

$$\chi = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} \\ & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} \\ & & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{35} \\ & & & 0 & \alpha_{45} \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

όπου από τα αριστερά προς τα δεξιά, και πάνω προς τα κάτω έχουμε τα $d_r, d_g, d_b, e^+, \bar{\nu}_e$. Τα μηδενικά ωφείλονται στην αντισυμμετρικότητα της αναπαράστασης και το κένο μέρος προκύπτει μέσω της σχέσης ($\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$). Για να καθορίσουμε το στοιχείο α_{ij} οι κβαντικοί αριθμοί του φορτίου, του χρώματος και της T_3 το i -οστό στοιχείο στα αριστερά και το j -οστό άνω στοιχείο αθροίζονται. Το αποτέλεσμα για το χρώμα, το φορτίο και το T_3 συγκρίνονται με τα εναπομείναντα φερμιόνια της πρώτης γενιάς και άρα αυτό ταυτίζεται με το α_{ij} . Για παράδειγμα το α_{12} το φορτίο είναι $Q_{12} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$ το χρώμα είναι $c_{12} = r + g = \bar{b}$ και $T_{12}^3 = 0 + 0$ που αντιστοιχεί σε μία αντιτριπλέτα χρώματος και ένα $SU(5)$ singlet. Κοιτώντας το πινακάκι βλέπουμε πως το α_{12} πρέπει να είναι το anti-blue, anti-up κουάρκ. Πέρα από το να ταυτοποιούμε στοιχεία παίρνουμε έτσι και την κβάντωση του φορτίου των up κουάρκ, αφού πρέπει να είναι $Q_u = Q_d + Q_{e^+} = +\frac{2}{3}$.

Ταυτοποιώντας όλα τα στοιχεία παίρνουμε

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \bar{u}_b & -\bar{u}_g & -u_r & -\bar{d}_r \\ -\bar{u}_b & 0 & \bar{u}_r & -u_g & -\bar{d}_g \\ \bar{u}_g & -\bar{u}_r & 0 & -u_b & -\bar{d}_b \\ u_r & u_g & u_b & 0 & -e^+ \\ \bar{d}_r & \bar{d}_g & \bar{d}_b & e^+ & 0 \end{bmatrix}_L \quad (4.49)$$

και

$$\bar{\chi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & u_b & -u_g & -\bar{u}_r & -\bar{d}_r \\ -u_b & 0 & u_r & -\bar{u}_g & -\bar{d}_g \\ u_g & -u_r & 0 & -\bar{u}_b & -\bar{d}_b \\ \bar{u}_r & \bar{u}_g & \bar{u}_b & 0 & -e^- \\ \bar{d}_r & \bar{d}_g & \bar{d}_b & e^- & 0 \end{bmatrix}_R \quad (4.50)$$

Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται για τις δύο εναπομείναντες οικογένειες ώστε κάθε οικογένεια φερμιονίων δίνεται από την αναπαράσταση $\mathbf{5} \oplus \mathbf{10}$ μαζί με την συζυγή της. Βλέπουμε δηλαδή πως στην $SU(5)$ το φορτίο των κουάρκ είναι καθορισμένο ως προς αυτό του ηλεκτρονίου και ότι το $Q_p + Q_{e^-} = 0$ προκύπτει αφού το πρωτόνιο αποτελείται από uud.

4.11 Προβλέψεις

Η ενεργειακή κλίμακα στην οποία τα couplings ενοποιούνται ορίζεται ως M_{GUT} . Τα couplings δεν ενοποιούνται ακριβώς αλλά πλησιάζουν σημαντικά περίπου στα $M \simeq 10^{15} GeV$. Όταν τα couplings γίνονται ίσα $Cg_1 = g_2 = g_3 \equiv g_G$ ο λόγος είναι πως η σταθερά C μπροστά από το g_1 υπάρχει ώστε οι γεννήτορες των $SU(2)$, $SU(3)$ να κανονικοποιηθούν με τον ίδιο τρόπο, διαφορετικό όμως από αυτό για την $U(1)$. Αναζητώντας αυτή την σταθερά θα πάρουμε

$$\tan(\theta_W) \quad (4.51)$$

για την κλίμακα ενοποίησης, αφού εξ' ορισμού αυτή είναι $\frac{g_2}{g_1}$. Λόγω πειραματικών δυσκολιών αντί να υπολογίσουμε το $\sin^2(\theta_W)$ στις χαμηλές ενέργειες, θα βρούμε τη σταθερά της ισχυρής αλληλεπίδρασης, α_3 . Τονίζουμε επίσης πως πειραματικά τα $\sin^2(\theta_W)$ και α_{EM} είναι γνωστά με μεγάλη ακρίβεια ενώ το α_3 δεν είναι γνωστό με την ίδια ακρίβεια.

Αναπτύσσοντας την (4.28) πάνω στα α , παίρνουμε

$$D^\mu = \partial^\mu - g_5 T_\alpha V_\alpha^\mu = \partial^\mu - ig_5 (T_3 W_3^\mu + T_4 B^\mu + \dots) \quad (4.52)$$

όπου τα T_α είναι οι 24 γεννήτορες της $SU(5)$. Δύο από αυτούς αντιστοιχούν στους W_3^μ και B^μ που είδαμε στα προηγούμενα. Τώρα τα W_3^μ και B^μ θα πρέπει να εκφραστούν σε συνάρτηση των ιδιοκαταστάσεων μάζας A^μ και Z^μ σύμφωνα με τις εξισώσεις (4.4). Οι όροι Z^μ μπορούν να αγνοηθούν. Αυτό γίνεται καθώς ο στόχος είναι να συγκρίνουμε τις εκφράσεις του πεδίου του φωτονίου, A^μ , τις $SU(5)$ με αυτή του καθιερωμένου προτύπου. Αυτή η σύγκριση μας επιτρέπει να βρούμε την σταθερά σύζευξης. Βάζοντας τις εκφράσεις (4.4) στην (4.52) και κρατώντας μόνο τους όρους με A^μ παίρνουμε

$$-g_5 (-\sin(\theta_W) T_3 + \cos(\theta_W) T_4) A^\mu = g_5 \sin(\theta_W) (T_3 - \cot(\theta_W) T_4) A^\mu \quad (4.53)$$

Γνωρίζουμε πως το φορτίο πρέπει να είναι γραμμικός συνδυασμός των γεννητόρων της $SU(5)$ που αντιστοιχούν στις $SU(2)$, $U(1)$ συμμετρίες ως

$$Q = T_3 + c T_4 \quad (4.54)$$

όπου c είναι κάποια άγνωστη σταθερά αφού το υπερφορτίο Y δεν είναι κανονικοποιημένο με τον ίδιο τρόπο όπως στην $SU(2)$ και την $SU(3)$. Ο γραμμικός συνδυασμός

πριν το A^μ πρέπει να είναι eQ , επειδή γνωρίζουμε τη σύζευξη του ηλεκτρομαγνητισμού, μπορούμε τώρα να βρούμε το c συγκρίνοντας με την έκφραση για το Q :

$$g_5(\sin(\theta_W)(T_3 - \cot(\theta_W)T_4)A^\mu = e(T_3 + cT_4)A^\mu \quad (4.55)$$

και άρα

$$\begin{aligned} c &= -\cot(\theta_W) \\ e &= g_5 \sin(\theta_W) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Παίρνοντας το ίχνος του Q^2

$$Tr(Q^2) = Tr((T_3 + cT_4)^2) = (1 + c^2)Tr(T_3^2) \quad (4.57)$$

Χρησιμοποιήσαμε δύο φορές τη συνθήκη κανονικοποίησης (4.29) .

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση ψ το ίχνος των Q^2, T_3^2 μπορεί να υπολογιστεί, αφού είναι γνωστοί

$$\frac{1}{1 + c^2} = \frac{Tr(T_3^2)}{Tr(Q^2)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 3 \times 0}{0 + 1 + 3\frac{1}{9}} = \frac{3}{8} \quad (4.58)$$

Από την (4.56) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan^2(\theta_W)} = c^2 &\Rightarrow c^2 + 1 = \frac{\cos^2(\theta_W)}{\sin^2(\theta_W)} + 1 = \frac{\cos^2(\theta_W)}{\sin^2(\theta_W)} + \sin^2(\theta_W) + \cos^2(\theta_W) \\ &\Rightarrow c^2 + 1 = \frac{\cos^2(\theta_W) + \cos^2(\theta_W)\sin^2(\theta_W) + \sin^4(\theta_W)}{\sin^2(\theta_W)} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Αφού

$$\cos^4(\theta_W) = \cos^2(\theta_W)(1 - \sin^2(\theta_W)) \Rightarrow \cos^2(\theta_W) = \cos^4(\theta_W) + \cos^2(\theta_W)\sin^2(\theta_W) \quad (4.60)$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική έχουμε

$$\begin{aligned} c^2 + 1 &= \frac{\cos^4(\theta_W) + 2\cos^2(\theta_W)\sin^2(\theta_W) + \sin^4(\theta_W)}{\sin^2(\theta_W)} \\ &= \frac{(\cos^2(\theta_W) + \sin^2(\theta_W))^2}{\sin^2(\theta_W)} = \frac{1}{\sin^2(\theta_W)} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Τελικά

$$\sin^2(\theta_W) = \frac{1}{c^2 + 1} = \frac{3}{8} \quad (4.62)$$

Αυτή η τιμή είναι έγκυρη μόνο στον συγκεκριμένο βαθμό ενοποίησης (unification scale) και όχι σε χαμηλότερες ενέργειες. Είναι λοιπόν αναγκαίο, αν θέλουμε να συγκρίνουμε με την τιμή που μπορούμε να βρούμε πειραματικά, να βρούμε την εξάρτηση από

την κλίμακα μ . Για να βρούμε αυτή την εξάρτηση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα αποσύζευξης το οποίο μας λέει πως αν υπάρχουν σωματίδια σε δύο κλίμακες μάζας $m \ll M$, σε μία επανακανονικοποιήσιμη λαγκρανζιανή θεωρία πεδίου, μία εναλλακτική λαγκρανζιανή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τους υπολογισμούς που θα λαμβάνει υπόψιν μόνο τα ελαφρύτερα σωματίδια μάζας m . Τα βαρύτερα σωματίδια θα επηρεάζουν μόνο τις παραμέτρους κανονικοποίησης και τον προσδιορισμό των συζεύξεων της θεωρίας. Οι τρεις σταθερές σύζευξης θα υπολογιστούν με βάση των τύπο

$$\frac{1}{\alpha_i(q^2)} = \frac{1}{\alpha_i(\mu)} + \frac{b_i}{4\pi} \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right) \quad (4.63)$$

Οι νέες σταθερές μαζί με τις συνεισφορές Higgs θα είναι

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{4n_F}{3} - \frac{n_h}{10} \\ b_2 &= \frac{22}{3} - \frac{4n_F}{3} - \frac{n_h}{6} \\ b_3 &= 11 - \frac{4n_F}{3} \end{aligned} \quad (4.64)$$

όπου n_h είναι ο αριθμός των Higgs $SU(2)$ διπλετών. Από τον ορισμό των $g_{1,2}$ μαζί με το

$$\alpha_{EM} = \frac{e^2}{4\pi} \quad (4.65)$$

έχουμε ότι

$$\alpha_{EM} = \sin^2(\theta_W)\alpha_2 = \frac{3}{5} \cos^2(\theta_W)\alpha_1 \quad (4.66)$$

Παίρνοντας την διαφορά αυτής και της (4.63) για i και j με $\mu^2 = M_{GUT}^2$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός πως σε αυτή την κλίμακα οι συζεύξεις ενοποιούνται παίρνουμε

$$\frac{1}{\alpha_i(q^2)} - \frac{1}{\alpha_j(q^2)} = \frac{B_{ij}}{4\pi} \ln\left(\frac{q^2}{M_{GUT}^2}\right) \quad (4.67)$$

όπου $B_{ij} = b_i - b_j$. Για $i = 1$ και $j = 2$ έχουμε

$$\frac{1}{\alpha_1(q^2)} - \frac{1}{\alpha_2(q^2)} = \frac{B_{12}}{4\pi} \ln\left(\frac{q^2}{M_{GUT}^2}\right) \quad (4.68)$$

χρησιμοποιώντας τον τύπο (4.66) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{8}{5\alpha_{EM}} \left(\frac{3}{8} - \sin^2(\theta_W)(q) \right) &= \frac{B_{12}}{4\pi} \ln\left(\frac{q^2}{M_{GUT}^2}\right) \\ M_{GUT} &= q \exp \left[\frac{16\pi \sin^2(\theta_W)(q) - \frac{3}{8}}{5 \alpha_{EM} B_{12}} \right] \end{aligned} \quad (4.69)$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την (4.63) για την $i = 2, j = 3$ και την (4.69) για να απαλαχθούμε από τον όρο $\ln(\frac{g^2}{M_{GUT}^2})$ παίρνουμε

$$\frac{1}{\alpha_2(q^2)} - \frac{1}{\alpha_3(q^2)} = \frac{B_{23}}{B_{12}} \frac{8}{5\alpha_{EM}} \left[\frac{3}{8} - \sin^2(\theta_W)(q) \right] \quad (4.70)$$

Με βάση αυτό και την (4.66) παίρνουμε

$$\frac{\sin^2(\theta_W)}{\alpha_{EM}} - \frac{1}{\alpha_3} = \frac{B_{23}}{B_{12}} \frac{8}{5\alpha_{EM}} \left[\frac{3}{8} - \sin^2(\theta_W)(q) \right] \quad (4.71)$$

Από αυτό μπορούμε να πάρουμε είτε

$$\frac{1}{\alpha_3} = \frac{1}{\alpha_{EM}} \left[\left(1 + \frac{8 B_{23}}{5 B_{12}} \right) \sin^2(\theta_W)(q) - \frac{3 B_{23}}{5 B_{12}} \right] \quad (4.72)$$

είτε αυτό που ονομάζεται B-test, ένα κριτήριο για το αν οι σταθερές ενοποιούνται

$$\frac{B_{23}}{B_{12}} = \frac{5 \sin^2(\theta_W)(q) - \frac{\alpha_{EM}}{\alpha_3}}{\frac{3}{8} - \sin^2(\theta_W)(q)} \quad (4.73)$$

Χρησιμοποιώντας $\sin^2(\theta_W)(m_Z) = 0.23116$, $\alpha_{EM}^{-1}(m_Z) = 127.916$ και $\alpha_3(m_Z) = 0.1184$ [8] από την δεξιά πλευρά της (4.73) μας δίνει

$$\frac{B_{23}}{B_{12}} = 0.718 \quad (4.74)$$

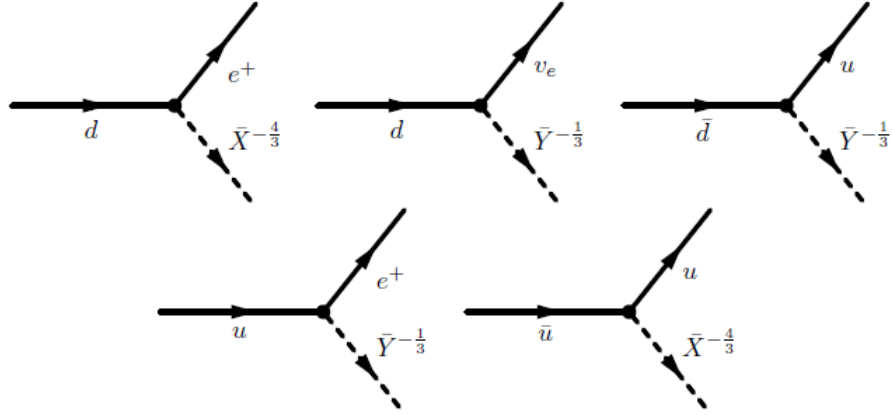
Υπολογίζοντας την αριστερή πλευρά της (4.73) μαζί τις (4.64) με $n_F = 3, n_h = 1$ παίρνουμε

$$\frac{B_{23}}{B_{12}} = 0.5275 \quad (4.75)$$

Άρα το μοντέλο SU(5) εφοδιασμένο μόνο με τα σωματίδια του καθιερωμένου προτύπου και μία διπλέτα Higgs, και όχι παραπάνω σωματίδια ανάμεσα στις δύο κλίμακες, δεν ικανοποιεί το τεστ. Αν υπήρχαν και άλλα σωματίδια, ο λόγος θα ήταν διαφορετικός, και άρα υπάρχει ακόμη η πιθανότητα αυτό να ικανοποιείται. Αυτό επιτυγχάνεται προσθέτωντας και άλλα σωματίδια Higgs σε μία μεγαλύτερη αναπαράσταση [9]. Χρησιμοποιώντας $m_Z = 91.1876 GeV$ [8] στην (4.69) παίρνουμε $M_{GUT} = 10^{13} GeV$. Περισσότερες διπλέτες Higgs θα αύξαναν τον λόγο, που θα μπορούσε να δώσει ενοποίηση. Αν αυτό γίνει [10], με απαιτούμενο αριθμό 6, η κλίμακα ενοποίησης θα γινόταν $M_{GUT} < 10^{14} GeV$ που είναι όμως ασύμβατο με την διάσπαση του πρωτονίου.

4.12 Διάσπαση του πρωτονίου

Τα νέα μποζόνια της SU(5), $X_\alpha^{+\frac{4}{3}}$ και $\Upsilon_\alpha^{+\frac{1}{3}}$ θα επιτρέψει την εισαγωγή νέων vertices. Αυτά για την πρώτη γενιά δίνονται παρακάτω

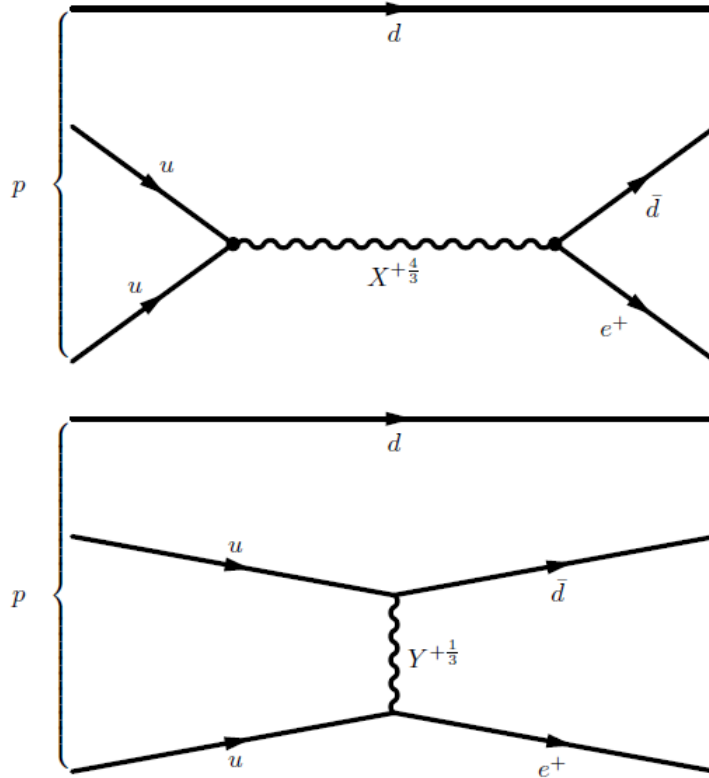


Άρα για ένα βαρυόνιο αυτό θα επιτρέψει στα αντίστοιχα κουάρκ να εξαίλωθούν και να δημιουργήσουν νέα μποζόνια που, με την σειρά τους, μπορούν να δημιουργήσουν για παράδειγμα ένα λεπτόνιο και ένα κουάρκ και άρα το βαρυόνιο μπορεί να διασπαστεί. Το πρωτόνιο θα μπορεί να διασπαστεί για παράδειγμα σε ένα ηλεκτρόνιο και ένα πόνιο $p \rightarrow e^+ \pi^0$. Δύο από τα δυνατά διαγράμματα Feynman δίνονται παρακάτω. Το νετρίνο θα μπορεί επίσης να διασπαστεί μέσω διαδικασιών παραβίασης της διατήρησης του βαρυονικού αριθμού με τρόπο παρόμοιο με αυτό του πρωτονίου. Μια προσέγγιση για το ρυθμό διάσπασης του πρωτονίου μπορεί να δοθεί αν χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο λόγο με αυτόν για την διάσπαση του μιονίου.

$$\Gamma_\mu = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} = \frac{1}{384\pi} \frac{\alpha_2^2 m_\mu^5}{m_W^4} \quad (4.76)$$

Ξεχνώντας για λίγο τον συντελεστή, χρησιμοποιούμε το ενοποιημένο coupling αντί του α_2 , την μάζα του πρωτονίου αντί του μιονίου και τις μάζες των X, Y αντί του W . Με τα νέα μποζόνια να έχουν μάζες της τάξης της κλίμακας της ενοποίησης $\simeq 10^{15} GeV$ και ένα coupling ενοποίησης $\simeq \frac{1}{42}$ παίρνουμε

$$\tau_p \simeq 3.7 \times 10^{31} yr \quad (4.77)$$



Παραπάνω βλέπουμε κάποια πιθανά διαγράμματα Feynmann, χαμηλότερης τάξης, για διάσπαση του πρωτονίου σε ένα ποζιτρόνιο και ένα ουδέτερο πiónιο στην $SU(5)$. Αυτό το αποτέλεσμα έχει απορριφθεί από τα πειράματα στο Super-Kamiokande σε ανιχνευτές Cherenkov. Η αύξηση της κλίμακα ενοποίησης θα βοηθούσε στην διάρκεια ζωής του πρωτονίου. Αν η κλίμακα ήταν περίπου στα $\simeq 10^{16} GeV$, η διάσπαση του πρωτονίου με ανταλλαγή X, Y μποζονίων θα ήταν αρκετά ασθενής ώστε το μοντέλο να μην διαψευστεί από τα πειραματικά δεδομένα. Η απλούστερη $SU(5)$ θεωρία απορρίπτεται από την απουσία της διάσπασης του πρωτονίου. Απορρίπτεται επίσης από το B-test που είδαμε νωρίτερα.

4.13 Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας

Από την στιγμή που τα μόνα άμαζα πεδία που χρειαζόμαστε είναι αυτά για το φωτόνιο και τα γλουόνια χρώματος, πρέπει να εισάγουμε αρκετές διπλέτες Higgs για να σπάσουμε την $SU(5)$ στις $SU_c(3) \times U_q(1)$ δίνοντας μάζα της τάξης των $100 GeV$ στα W^\pm, Z^0 και της τάξης των $10^{15} GeV$ στα X, Y . [11] Από την στιγμή που δύο διαφορετικές κλίμακες μάζας εμπλέκονται, θα χρειαστούμε τουλάχιστον δύο multiplets με διαφορετικές τιμές κενού. Μια κατάλληλη επιλογή είναι η **24** από βαθμωτά Higgs για

να σπάσουμε την $SU(5)$ στις $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U(1)$ και μία $\mathbf{5}$ για να σπάσει την $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U(1)$ στην $SU_c(3) \times U_Q(1)$

$$SU(5) \rightarrow_{24} SU_c(3) \times SU_L(2) \times U(1) \rightarrow_5 SU_c(3) \times U_Q(1) \quad (4.78)$$

Οι αναμενόμενες τιμές επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε η $\mathbf{24}$ να δίνει μάζες της τάξης των $10^{15} GeV$ στα X, Y και η $\mathbf{5}$ μάζες της τάξης των $10^2 GeV$ στα Z^0, W^\pm . Για να καταλάβουμε καλύτερα αυτόν το μηχανισμό του αυθόρμητου σπάσιμου συμμετρίας πρέπει να γράψουμε μία κατάλληλη λαγκρανζιανή, που να περιέχει το $\mathbf{24}$ των Higgs, σε μορφή πίνακα 5×5 πίνακα

$$\Phi = \sum_{\alpha=1}^{24} \phi_\alpha T_\alpha \quad (4.79)$$

όπου T_α οι γεννήτορες της $SU(5)$ και το $\mathbf{5}$ των Higgses που γράφεται ως

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Για απλότητα, θεωρούμε πρώτα την Φ σε απομόνωση, μετά την H σε απομόνωση και στο τέλος θα ασχοληθούμε με την σύζευξη τους. Η πιο γενική μορφή της λαγκρανζιανής θα είναι

$$\mathcal{L}_\Phi = Tr(D_\mu \Phi)^2 - m_1^2 Tr \Phi^2 - \lambda_1 (Tr \Phi^2)^2 - \lambda_2 Tr \Phi^4 \quad (4.81)$$

όπου έχουμε επιβάλει την διακριτή συμμετρία $\Phi \rightarrow -\Phi$ για να αποφύγουμε έναν $Tr \Phi^3$ όρο.

Με βάση τους τύπους

$$\begin{aligned} D^\mu &= (\partial_i^\mu g T_A^\mu) \psi \\ (T_\alpha)_{bc} &\rightarrow -i f_{abc} \end{aligned} \quad (4.82)$$

για την συναλλοίωτη παράγωγο παίρνουμε

$$D_\mu \phi_\alpha = \partial_\mu \phi_\alpha - g f_{abc} (A_\mu)_b \phi_c \quad (4.83)$$

έτσι ώστε

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + ig [A_\mu, \Phi] \quad (4.84)$$

Και άρα για το δυναμικό θα έχουμε

$$V_\Phi = m_1^2 Tr \Phi_c^2 + \lambda_1 (Tr \Phi_c^2)^2 + \lambda_2 Tr \Phi_c^4 \quad (4.85)$$

Η ελαχιστοποίηση αυτής της έκφρασης δίνει πως το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας συμβαίνει αν

$$\lambda_2 > 0, \lambda_1 > \frac{-7}{30} \lambda_2 \quad (4.86)$$

Η μορφή της έκφρασης που αντιστοιχεί σε αυτό το σπάσιμο συμμετρίας είναι

$$\Phi_c = \frac{\phi_c}{\sqrt{15}} \text{diag}[1, 1, 1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}] \quad (4.87)$$

σε ελάχιστο

$$\phi_c^2 = u_\phi^2 = -m_1^2 / (\lambda_1 + \frac{7}{30} \lambda_2) \quad (4.88)$$

Ο όρος της συναλλοίωτης παραγώγου της (4.81) παράγει όρους μάζας

$$\mathcal{L}_{mass} = -g_G^2 \text{Tr}([A_\mu, \Phi_C]^2) \quad (4.89)$$

Με βάση αυτά που είδαμε, μόνο τα X, Y αποκτούν μάζες και αυτές δίνονται ως

$$\mathcal{L}_{mass} = \frac{5}{12} g_G^2 u_\phi^2 \sum_{i=1}^3 (\bar{X}_i^\mu X_\mu^i + \bar{Y}_i^\mu Y_\mu^i) \quad (4.90)$$

Και άρα και τα τρία χρώματα των X, Y έχουν τις ίδιες μάζες m_X, m_Y και

$$m_X^2 = m_Y^2 = \frac{5}{12} g_G^2 u_\phi^2 \quad (4.91)$$

Άρα μπορούμε να βρούμε την αναμενόμενη τιμή κενού

$$u_\phi = \frac{5 \times 10^{14} \text{GeV}}{(\sqrt{5}/12)g_G} \simeq 1.5 \times 10^{15} \text{GeV} \quad (4.92)$$

Η λαγκρανζιανή για τα 5 θα είναι τότε

$$\mathcal{L}_H = \frac{-m_2^2}{2} H^\dagger H - \frac{\lambda_3}{4} (H^\dagger H)^2 \quad (4.93)$$

Το τετραγωνικό δυναμικό που αντιστοιχεί σε αυτή τη λαγκρανζιανή είναι

$$V_H = \frac{m_2^2}{2} H_C^\dagger H_C + \frac{\lambda_3}{4} (H_C^\dagger H_C)^2 \quad (4.94)$$

στο ελάχιστο

$$(H_5)_C^2 = u_H^2 = -\frac{m_2^2}{\lambda_3} \quad (4.95)$$

που δίνει στα W^\pm, Z^0 τις μάζες που είδαμε.

Λόγω της απουσίας όρων σύζευξης των H, Φ προκύπτει η δυσκολία ότι παραμένει ένας άμαζος συνδυασμός της τριπλέτας χρώματος των H, Φ , αφού λάβουμε υπόψιν τον μηχανισμό Higgs. Τέτοιου είδους όροι οδηγούν σε διαδικασίες παραβίασης βαρυονικού αριθμού. Μπορούμε να ξεπεράσουμε αυτή την δυσκολία αν συμπεριλάβουμε όρους αλληλεπίδρασης. Οι πιο γενικοί όροι σύζευξης των H, Φ είναι.

$$\mathcal{L}_{\Phi H} = -\lambda_5 H^\dagger H \text{Tr} \Phi^2 - \lambda_6 H^\dagger \Phi^2 H \quad (4.96)$$

Το αντίστοιχο δυναμικό θα είναι

$$V_{\Phi H} = \lambda_5 H_C^\dagger H_C \text{Tr} \Phi_C^2 + \lambda_6 H_C^\dagger \Phi_C^2 H_C \quad (4.97)$$

Όταν το ολικό δυναμικό, αποτελούμενο από τις (4.85), (4.94) και (4.97), ελαχιστοποιείται, η προβληματική τριπλέτα χρώματος αποκτά μάζα της τάξης m_X με μικρές διορθώσεις της μορφής των αναμενόμενων τιμών κενού (4.87). Είναι σημαντικό να εξασφαλίσουμε πως το u_H , η αναμενόμενη τιμή κενού του **5**, παραμένει της τάξης των 100 GeV, ενώ το u_ϕ , η αναμενόμενη τιμή κενού του **24**, είναι της τάξης των 10^{15} GeV ώστε να διατηρείται η ιεραρχία των μαζών.

4.14 Ενοποίηση συζεύξεων Yukawa

Οι συζεύξεις Yukawa δίνουν την δύναμη της σύζευξης των φερμιονίων στο πεδίο Higgs.

Η μάζα ενός φερμιονίου δίνεται ως

$$m_f = \lambda_f \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (4.98)$$

όπου v είναι η αναμενόμενη τιμή κενού (v.e.v) για το πεδίο Higgs και λ_f η σύζευξη Yukawa.

Η σύνδεση μεταξύ των κουάρκ και των λεπτονίων στην μεγαλοενοποίηση μπορεί να οδηγήσει σε σχέσεις όπως :

$$\lambda_d = \lambda_e, \quad \lambda_s = \lambda_\mu, \quad \lambda_b = \lambda_\tau \quad (4.99)$$

στην κλίμακα ενοποίησης M_{GUT} .

Από τις δύο πρώτες παίρνουμε

$$\frac{\lambda_s}{\lambda_d} = \frac{\lambda_\mu}{\lambda_e} \quad (4.100)$$

που αποτελεί αναλλοίωτη ποσότητα της επανακανονικοποιήσιμης ομάδας, που σημαίνει πως είναι έγκυρη για όλες τις ενεργειακές κλίμακες, όχι μόνο για αυτές για τις οποίες η $SU(5)$ αποτελεί καλή συμμετρία. Όσο αφορά τις μάζες αυτό μας δίνει

$$\frac{m_s}{m_d} = \frac{m_\mu}{m_e} \quad (4.101)$$

Χρησιμοποιώντας για τις μάζες τις τιμές $m_e = 0.510998928 \text{ MeV}$, $m_\mu = 105.6583715 \text{ MeV}$, $m_d = 4.8_{-0.3}^{+0.8} \text{ MeV}$ και $m_s = 100_{-20}^{+30} \text{ MeV}$ [8] παίρνουμε :

$$\frac{m_s}{m_d} = 21 \quad \text{και} \quad \frac{m_\mu}{m_e} = 206.768284 \quad (4.102)$$

τα οποία βρίσκονται σε ασυμφωνία με το πείραμα.

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε αυτό το πειραματικό γεγονός με την εισαγωγή μίας

επιπλέον αναπαράστασης Higgs 45 διαστάσεων, που μπορεί να κατασκευασθεί ως $10 \otimes 10 = \bar{5} \oplus 45 \oplus 50$ που έχει μελετηθεί [12]

Οι σχέσεις για τις μάζες τότε αλλάζουν ως

$$m_\mu = 3m_s, \quad 3m_e = m_d, \quad m_\tau = m_b \quad (4.103)$$

έτσι ώστε

$$\frac{m_s}{m_d} = \frac{1}{9} \frac{m_\mu}{m_e} \quad (4.104)$$

που είναι σε συμφωνία με το πείραμα. Το πρόβλημα είναι επίσης επιλύσιμο με άλλους τρόπους[13]

4.15 Συμπεράσματα της $SU(5)$

Τα προβλήματα που αναφέραμε ως κίνητρο για την μεγαλοενοποίηση έχουν πλέον επιλυθεί, δηλαδή το μέτρο της τιμής του φορτίου για τα ηλεκτρόνια και τα πρωτόνια καθώς και η ενοποίηση σε μία gauge ομάδα. Παρότι η ελάχιστη $SU(5)$, μόνο 5_H ή $\bar{5}_H$ και 24_H για το κομμάτι Higgs, δεν περιγράφει τελικά την πραγματικότητα, αφού αποτυγχάνει να ενοποιήσει τις συζεύξεις, να προβλέψει τον χρόνο ζωής του πρωτονίου και τις σχέσεις για τις συζεύξεις Yukawa, μας δείχνει ακόμη τα πολλά υποσχόμενα χαρακτηριστικά της μεγαλοενοποίησης.

Τα προβλήματα της ομάδας $SU(5)$ επιγραμματικά είναι :

- **Ενοποίηση των σταθερών σύζευξης** : Όπως είδαμε η απλούστερη $SU(5)$ θεωρία αποτυγχάνει στο B-test, δηλαδή οι σταθερές δεν ενοποιούνται σε καμία κλίμακα. Αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί είτε με την εισαγωγή ενός 5_H [9] είτε με την εισαγωγή μίας επιπλέον συμμετρίας, που ονομάζεται υπερσυμμετρία.

- **Μάζες των νετρίνων** : Αφού δεν υπάρχουν αριστερόστροφα αντινετρίνα, όπως προβλέπει η $SU(5)$, τα νετρίνα δεν μπορούν να αποκτήσουν μάζα όπως τα λεπτόνια και τα κουάρκ, εκτός αν εισαχθούν ad hoc. Το μικρό μέγεθος της μάζας του νετρίνου μπορεί να εξηγηθεί από τον μηχανισμό See-saw. Στις θεωρίες See-saw τύπου 1, δύο δεξιόστροφα νετρίνα πρέπει να εισαχθούν, και σε θεωρίες τύπου 2 το 15_H μπορεί να δημιουργήσει τις απαραίτητες μάζες.

- Η ενοποίηση Yukawa δίνει σχέσεις για τις μάζες που δεν συμφωνούν με τα πειραματικά δεδομένα. Αυτό μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε με την εισαγωγή ενός 45.

- **Doublet-triplet splitting**: Είναι το πρόβλημα που δημιουργείται καθώς η τριπλέτα χρώματος Higgs και η διπλέτα $SU(2)$ Higgs στο 5 ή $\bar{5}_H$ πρέπει να έχουν μάζες που διαφέρουν αρκετά. Η τριπλέτα πρέπει να έχει μεγάλη μάζα $\approx 10^{11} GeV$, προκειμένου να κρατήσουμε το χρόνο ζωής του πρωτονίου μεγαλύτερο από τα τωρινά πειραματικά όρια. Από την άλλη η διπλέτα Higgs πρέπει να έχει μικρή μάζα προκειμένου, της ασθενούς τάξης μεγέθους, για να σπάσει την ηλεκτρομαγνητική συμμετρία στην σωστή ενεργειακή κλίμακα.

Από την στιγμή που υπάρχει παραβίαση του βαρυονικού αριθμού στις μεγαλοενοποιημένες θεωρίες, μας εφοδιάζουν με μία από τις προουποθέσεις για να παράγουμε

την παρατηρούμενη ασυμμετρία στο σύμπαν. Μία παρατήρηση που πρέπει επίσης να κάνουμε είναι πως παρά την μεγάλη ενεργειακή κλίμακα της μεγαλοενοποίησης, λίγες τάξης χαμηλότερη από την κλίμακα Planck, η βαρύτητα ακόμη δεν αντιμετωπίζεται. Το μοντέλο της ομάδας $SU(5)$ που είδαμε είναι το απλούστερο μοντέλο μεγαλοενοποιημένης θεωρίας. Υπάρχει επίσης η δυνατότητα να δουλέψουμε με άλλες ομάδες, όπως η $SO(10)$, για καλύτερα αποτελέσματα. Τέτοιες μελέτες έχουν ήδη γίνει, για παράδειγμα [14] και [15].

Κεφάλαιο 5

Το πρότυπο των Pati-Salam

5.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο γνωρίσαμε μια πρώτη θεωρία για το πως θα μπορούσαμε να ενοποιήσουμε τις ισχυρές, ασθενείς και ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις καθώς και τις συνέπειες που η συγκεκριμένη ενοποίηση θα είχε. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε άλλη μια τέτοια θεωρία που αναπτύχθηκε από τους Jogesh C.Pati και Abdus Salam το 1974 [16]. Προτείνει την ομαδοποίηση των βαρυονικών κουάρκ($B=1$) και των λεπτονίων ($L = 1$) στην ίδια αναπαράσταση $F = B + L = 1$. Αρχικά η πρόταση αυτή για ένα κοινό φερμιονικό multiplet εγγυάται πως για κάθε μοντέλο ασθενών αλληλεπιδράσεων η ίδια προβολή ελικότητας $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$ προκύπτει τόσο για τα λεπτόνια όσο και για τα κουάρκ. Επίσης το gauging της ομάδας συμμετρίας της ύλης εξασφαλίζει πως όλες οι αλληλεπιδράσεις είναι καθολικές όσο αφορά τα κουάρκ και τα λεπτόνια. Παρότι το μοντέλο των αλληλεπιδράσεων εξαρτάται από την ομάδα συμμετρίας, που μπορεί κάποιος να επιλέξει για τα φερμιόνια, πρέπει να τονιστεί πως όλα τα μοντέλα μοιράζονται κάποια κοινά χαρακτηριστικά.

(1) Ανάμεσα στα gauge σωματίδια πρέπει να υπάρχουν και εξωτικά σωματίδια (σωματίδια X) που έχουν τόσο βαρυονικό όσο και λεπτονικό αριθμό. Στις χαμηλότερες τάξεις της θεωρίας των διαταραχών τέτοια σωματίδια θα συμμετέχουν μόνο σε ημι-λεπτονικές αλληλεπιδράσεις.

(2) Αν όλοι οι επιτρεπτοί βαθμοί ελευθερίας πραγματώνονται μέσω κατάλληλων gauge μποζονίων, η καθολικότητα των αλληλεπιδράσεων υποδηλώνει πως οι λεπτονικές και ημιλεπτονικές αλληλεπιδράσεις πρέπει τελικά να γίνονται ισχυρές. Η ασυμμετρική ανταπόκριση των λεπτονίων και των βαρυονίων στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις στις παρούσες ενέργειες θα ερμηνεύεται ως φαινόμενο χαμηλής ενέργειας.

(3) Αν εφαρμοστεί κατάλληλο αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας, θα υπάρχει πιθανότητα μετατροπής βαρυονικών κουάρκ σε λεπτόνια με παραβίαση διατήρησης βαρυονικού και λεπτονικού αριθμού με παράλληλη διατήρηση του φερμιονικού αριθμού.

5.2 Το βασικό μοντέλο και οι παραλλαγές του

Στη βασική παραδοχή του μοντέλου προτείνεται πως τα κουάρκ έχουν τέσσερα χρώματα. Τα συμβολίζουμε ως a, b, c ή κόκκινο, μπλέ και άσπρο που αναπαριστούν τον βαρυονικό αριθμό $B = 1$ και ως e ή λιλιά που αναπαριστά τον λεπτονικό αριθμό $L = 1$. Η ενοποίηση του βαρυονικού με τον λεπτονικό αριθμό προκύπτει με την επέκταση της συμμετρίας $SU(3')$ των τριών χρωμάτων (a, b, c) σε $SU(4')$ τεσσάρων χρωμάτων (a, b, c, d). Υποθέτουμε πως τα δεκαπέντε (1^-) gauge μποζόνια που αντιστοιχούν στην $SU(4')$ συμμετέχουν στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις με $\frac{f^2}{4\pi} \simeq 1 - 10$. Τα κουάρκ (σπιν- $\frac{1}{2}$) σχηματίζουν quartets με τέσσερις κβαντικούς αριθμούς $I_3 = \pm\frac{1}{2}, S, C$ με ομάδα συμμετρίας $SU(4)_L \times SU(4)_R$. Η πλήρης ομάδα που προτείνουμε είναι η

$$G = SU(4)_L \times SU(4)_R \times SU(4') \quad (5.1)$$

που περιλαμβάνει και την συμμετρία ταξινόμησης $SU(3) \times SU(3')$ των αδρονίων. Η συμμετρία αυτή κατασκευάζεται μαθηματικά ως εξής

$$\psi_{LR} = \begin{bmatrix} P \\ \Pi \\ \lambda \\ \chi \end{bmatrix}_{L,R} \otimes (a, b, c, d) \quad (5.2)$$

όπου στον πίνακα στήλη έχουμε σπιν $\frac{1}{2}$ ενώ στον πίνακα γραμμή μηδέν.

5.3 Φερμιόνια

Θα δώσουμε τώρα την πραγμάτωση αυτών των σωματιδίων σε μορφή πίνακα ως

$$\Psi_{L,R} = \begin{bmatrix} P_a & P_b & P_c & P_d = \nu \\ \Pi_a & \Pi_b & \Pi_c & \Pi_d = e^- \\ \lambda_a & \lambda_b & \lambda_c & \lambda_d = \mu^- \\ \chi_a & \chi_b & \chi_c & \chi_d = \nu' \end{bmatrix}_{L,R} = [\Psi_a^i]_{L,R} \quad (5.3)$$

Οι ιδιότητες μετάθεσης τους είναι

$$\begin{aligned} \Psi_L &= (4, 1, \bar{4})_G \\ \Psi_R &= (1, 4, \bar{4})_G \\ i &= P, \Pi, \lambda, \chi \\ \alpha &= a, b, c, d \end{aligned} \quad (5.4)$$

Αυτά τα multiplets περιέχουν δώδεκα βαρυονικά κουάρκ μαζί με μία λεπτονική τετραπλέτα που έχουμε ταυτοποιήσει με τα γνωστά λεπτόνια.

5.4 Τα μεσόνια του βασικού μοντέλου

Μια επανακανονικοποιήσιμη υπο-ομάδα της ομάδας $SU(4)_L \times SU(4)_R$ είναι η $Sp(4)_L \times Sp(4)_R$ στην οποία η κάθε τετραπλέτα κουάρκ ή λεπτονίων μετασχηματίζεται σαν σπίνορας τεσσάρων συνιστωσών. Παρόμοια η επανακανονικοποιήσιμη ομάδα της ισχυρής δύναμης που περιέχει σαν υποομάδα την $SU(3)$ είναι η $SU(4)_{L+R}$. Δεχόμενοι πως μία ομάδα συμμετρίας πραγματώνεται μόνο μέσα από τις αλληλεπιδράσεις της, θα θεωρήσουμε την $Sp(4)_L \times Sp(4)_R \times SU(4)_{L+R}$ που δίνει συνολικά $10 + 10 + 15 = 35$ gauge πεδία. Με δεδομένο πως τα βασικά χαρακτηριστικά του μοντέλου παραμένουν, σε ότι αφορά τις προβλέψεις του, μπορούμε για απλότητα να δουλέψουμε με την μικρότερη τοπική υποομάδα

$$S = [SU(2)_L^{I+II}] \times [SU(2)_R^{I+II}] \times SU(4)_{L+R} \quad (5.5)$$

για την οποία τα ψ_L και ψ_R μετασχηματίζονται ως $(2 + 2, 1, \bar{4})$ και $(1, 2 + 2, \bar{4})$ αντίστοιχα. Οι ομάδες $SU(2)_L^I, SU(2)_L^{II}$ δρουν πάνω στους δείκτες $(P, \Pi)_L$ και $(\lambda, \chi)_L$ αντίστοιχα. Τέλος η $SU(2)_L^{I+II}$ είναι το διαγώνιο άθροισμα τους.

Θα αναφέρουμε τώρα κάποια από τα βασικά χαρακτηριστικά του προτεινόμενου μοντέλου.

(1) Το παρών αντιμετωπίζει τα λεπτόνια και τα βαρυόνια με τον ίδιο τρόπο σε ότι αφορά την ισχυρή αλληλεπίδραση με τις παρατηρούμενες διαφορές να αποδίδονται, μέσω του μηχανισμού του αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας, στην μεγάλη μάζα των gauge μποζονίων που αλληλεπιδρούν με τα λεπτόνια.

(2) Αν οι σταθερές σύζευξης $g_L^{(0)}$ και $g_R^{(0)}$ είναι ίσες, η λαγκρανζιανή θα χαρακτηρίζεται από ολική συμμετρία ανάμεσα στις αλληλεπιδράσεις φερμιονίων-μεσονίων όσο αφορά την αριστερή και δεξιά ελικότητα. Η παρατηρούμενη ασυμμετρία των αριστερόστροφων, μέσω της παραβίασης της πάριτη στις χαμηλές και μεσαίες ενέργειες, αποδίδεται στην μεγαλύτερη μάζα των δεξιόστροφων ασθενών gauge μποζονίων σε σύγκριση με τα αριστερόστροφα που εισάγονται μέσω του αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας.

(3) Ένα από τα πλεονεκτήματα του να χρησιμοποιούμε την $SU(4)$ και τα δεξιόστροφα gauges είναι πως καθίσταται δυνατό να αναπαράγουμε τον ηλεκτρομαγνητισμό χωρίς την εισαγωγή μίας αβελιανής $U(1)$ ομάδας. Η εξάλειψη της συνεισφοράς ενός κβαντικού αριθμού στο ηλεκτρικό φορτίο είναι επιθυμητή για την κατανόηση της κβάντωσης του. Επίσης η απουσία της $U(1)$ έχει συνεισφορά στην εξασφάλιση της ασυμπωτικής ελευθερίας για την ολική θεωρία, συμπεριλαμβανομένου του ηλεκτρομαγνητισμού. Παρακάτω παραθέτουμε μία λίστα των $21(3+3+15)$ gauge σωματιδίων που αντιστοιχούν στο βασικό μοντέλο με ομάδα συμμετρίας S .

Αυτά είναι

$$W_L = (\underline{3}, 1, 1) = \begin{bmatrix} \tau W_L & 0 \\ 0 & \tau_1(\tau W_L)\tau_1 \end{bmatrix}, \text{ με σύζευξη } \frac{g_L^2}{4\pi} \simeq \alpha \quad (5.6)$$

$$W_R = (1, \underline{3}, 1) = \begin{bmatrix} \tau W_R & 0 \\ 0 & \tau_1(\tau W_R)\tau_1 \end{bmatrix}, \text{ με σύζευξη } \frac{g_R^2}{4\pi} \simeq \alpha \quad (5.7)$$

$$V = (1, 1, \underline{15}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} V(8) - \frac{S^0 \times 1}{\sqrt{12}} & X \\ \bar{X} & (\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}} S^0 \end{bmatrix} \text{ με σύζευξη } \frac{f^2}{4\pi} \simeq 1 - 10 \quad (5.8)$$

Όπου $V(8)$ στον 3×3 πίνακα αναπαριστά την οκτέτα χρώματος των gauge μεσονίων αποτελούμενο από τα V_ρ, V_{K^*} και V_8 . Το X είναι μία εξωτική τριπλέτα ($B = +1, L = -1$) της $SU(3')$ με μέλη τα (X^0, X^-, X^-') και S^0 είναι ένα singlet της $SU(3')$.

Ορίζοντας

$$\nabla_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + igW\Psi_\mu - if\Psi V_\mu \quad (5.9)$$

η λαγκρανζιανή δίνεται ως

$$-Tr[\bar{\Psi}_L(\gamma_\mu \nabla_\mu)_L \Psi_L + (L \leftrightarrow R)] \quad (5.10)$$

και άρα

$$\begin{aligned} L = & g_L \sum_{\alpha=a,b,c,d} (\bar{P}_\alpha \Pi_\alpha \bar{\lambda}_\alpha \bar{\chi}_\alpha)_L (W_L)_\mu \gamma_\mu \left[\frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \right] \begin{bmatrix} P_\alpha \\ \Pi_\alpha \\ \lambda_\alpha \\ \chi_\alpha \end{bmatrix}_L \\ & + g_R \sum_{\alpha=a,b,c,d} (\bar{P}_\alpha \bar{\Pi}_\alpha \bar{\lambda}_\alpha \bar{\chi}_\alpha)_R (W_R)_\mu \gamma_\mu \left[\frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \right] \begin{bmatrix} P_\alpha \\ \Pi_\alpha \\ \lambda_\alpha \\ \chi_\alpha \end{bmatrix}_R \\ & + f \sum_{i=P,\Pi,\lambda,\chi} (\bar{\psi}_a^i \bar{\psi}_b^i \bar{\psi}_c^i \bar{\psi}_d^i)_{L+R} V_\mu \gamma_\mu \begin{bmatrix} \psi_a^i \\ \psi_b^i \\ \psi_c^i \\ \psi_d^i \end{bmatrix}_{L+R} \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.4.1 Φωτόνιο

Για να ταυτοποιήσουμε το φωτονικό πεδίο πρέπει να βρούμε μια φόρμουλα φορτίου για το φερμιονικό multiplet. Είναι εύκολο να δείξουμε πως αφού τα βαρυόνια έχουν τρία κουάρκ σαν συστατικά και $F'_3 = F'_8 = 0$, η επιλογή για τον τελεστή Q θα είναι

$$Q = I_{3L}^{I+II} + I_{3R}^{I+II} + \left[\alpha F'_3 + \frac{\beta}{\sqrt{3}} F'_8 + \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} F_{15'} \right] \quad (5.12)$$

όπου $(I_3^{I+II})_{L,R}$ είναι οι διαγώνιοι γεννήτορες της $SU(2)_{L,R}^{I+II}$, ενώ F'_3, F'_8, F'_{15} οι διαγώνιοι γεννήτορες της $SU(4)_{L+R}$. Οι συντελεστές α και β των F'_3, F'_8 είναι αυθαίρετοι.

Τα παραπάνω μας δίνουν τα παρακάτω φορτία για τα φερμιονικά multiplets $\Psi_{L,R}$

$$Q(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\beta & \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\beta & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\beta & 0 \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\beta & -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\beta & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\beta & -1 \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\beta & -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\beta & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\beta & -1 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\beta & \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\beta & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Σημειώνουμε πως όσο αφορά το φορτίο των βαρυονικών κουάρκ (τρεις πρώτες στήλες) μπορεί να πάει ένα ευρύ φάσμα τιμών ενώ τα λεπτόνια που συσχετίζονται με το τέταρτο χρώμα κατέχουν μοναδικές τιμές φορτίου. Στα επόμενα θα δούμε δύο περιπτώσεις από αυτές.

Συγκεκριμένα το μοντέλο ακέραιου φορτίου, όπου $\alpha = \beta = +1$ και αυτό του κλασματικού φορτίου με $\alpha = \beta = 0$.

Όπως βλέπουμε και από τον τύπο (5.12) το φωτονικό πεδίο θα αποτελείται από κατάλληλες συνεισφορές των $W_{3L}, W_{3R}, V(8)$ και S^0 .

5.4.2 Παραλλαγές του βασικού μοντέλου

(1) Το οικονομικό μοντέλο

Παίρνουμε σαν βασικά φερμιόνια τις τέσσερις οκτάδες

$$\begin{aligned} (\Psi_e)_{L,R} &= \begin{bmatrix} P_a & P_b & P_c & \nu \\ \Pi_a & \Pi_b & \Pi_c & e^- \end{bmatrix}_{L,R} \\ (\Psi_\mu)_{L,R} &= \begin{bmatrix} \lambda_a & \lambda_b & \lambda_c & \mu^- \\ \chi_a & \chi_b & \chi_c & \nu' \end{bmatrix}_{L,R} \end{aligned} \quad (5.14)$$

με ομάδα συμμετρίας την

$$SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)_e \times SU(4)_\mu \quad (5.15)$$

Ο αριθμός των φερμιονίων είναι ο ίδιος με αυτόν του βασικού προτύπου, ενώ ο αριθμός των μποζονίων έχει αυξηθεί στα $36(3+3+15+15)$. Η $SU(3')$ μπορεί τώρα να ταυτιστεί το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων των $SU(3')_e$ και $SU(3')_\mu$ των οποίων η εμφάνιση απαιτεί έναν πιο περίτεχνο σετ από Higgs Scalars

(2) Το εμπλουτισμένο μοντέλο

Το μοντέλο είναι αρκετά όμοιο με το βασικό με διαφορά πως χρειαζόμαστε περισσότερα κουάρκ και λεπτόνια. Αυτά μπορούν να κατασκευασθούν με τα ακόλουθα

βασικά φερμιόνια

$$\begin{aligned}
 (\Psi_e)_{L,R} &= \begin{bmatrix} P_a & P_b & P_c & E^0 \\ \Pi_a & \Pi_b & \Pi_c & E^- \\ \lambda_a & \lambda_b & \lambda_c & e^- \\ \chi_a & \chi_b & \chi_c & \nu \end{bmatrix}_{L,R} \\
 (\Psi_\mu)_{L,R} &= \begin{bmatrix} P'_a & P'_b & P'_c & M^0 \\ \Pi'_a & \Pi'_b & \Pi'_c & M^- \\ \lambda'_a & \lambda'_b & \lambda'_c & \mu^- \\ \chi'_a & \chi'_b & \chi'_c & \nu' \end{bmatrix}_{L,R}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Εδώ τα E^0, E^-, M^0, M^- είναι τα νέα βαριά λεπτόνια και τα άλλα τα νέα κουάρκ. Σημειώνεται πως όλα τα λεπτόνια μπορούν να έχουν charm που σημαίνει πως μπορούν να συζευχθούν στα charmed κουάρκ χ και χ' μέσω του X .

(3) Το μοντέλο των πέντε χρωμάτων

Μπορούμε να επιλέξουμε ως βασικό σετ φερμιονίων ένα Ψ είκοσι στοιχείων με ομάδα συμμετρίας την

$$SU(4)_L \times SU(4)_R \times SU(5') \tag{5.17}$$

όπου

$$\Psi_{L,R} = \begin{bmatrix} P_a & P_b & P_c & E^0 & M^0 \\ \Pi_a & \Pi_b & \Pi_c & E^- & M^- \\ \lambda_a & \lambda_b & \lambda_c & e^- & \mu^- \\ \chi_a & \chi_b & \chi_c & \nu & \nu' \end{bmatrix}_{L,R} \tag{5.18}$$

Και πάλι μπορούμε να δώσουμε charm και στο ν και στο ν' .

5.5 Όρια στην μάζα των μεσονίων

Σε όλα τα μοντέλα που είδαμε παραπάνω είναι εφικτές εξωτικές ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Είναι λοιπόν απαραίτητο να δωθεί μια εξήγηση για την μη παρατήρηση τους πειραματικά. Για να γίνει αυτό τα μεσόνια αλληλεπίδρασης πρέπει να έχουν μεγάλη μάζα. Τέτοιες αλληλεπιδράσεις λαμβάνουν χώρα μέσω τριών σετ μποζονίων.

Συγκεκριμένα έχουμε

(1) Την τριπλέτα

$$(X^0, X^-, X^{-'}) \tag{5.19}$$

που οι αλληλεπιδράσεις στο βασικό μοντέλο δίνονται ως

$$f[X^0(\bar{\nu}P_a + \bar{e}\Pi_a + \bar{\mu}\lambda_a + \bar{\nu}'\chi_a) + X^-(\bar{\nu}P_b + \bar{e}\Pi_b + \bar{\mu}\lambda_b + \bar{\nu}'\chi_b) + X^{-'}(\bar{\nu}P_c + \bar{e}\Pi_c + \bar{\mu}\lambda_c + \bar{\nu}'\chi_c) + H.c.] \tag{5.20}$$

(2) Το εξωτικό S^0 μεσόνιο, η σύζευξη του οποίου δίνεται ως

$$\frac{-f}{\sqrt{24}} \left[\sum_{\alpha=a,b,c} (\bar{P}_\alpha P_\alpha + \bar{\Pi}_\alpha \Pi_\alpha + \bar{\lambda}_\alpha \lambda_\alpha + \bar{\chi}_\alpha \chi_\alpha) - 3(\bar{\nu}\nu + \bar{e}e + \bar{\mu}\mu + \bar{\nu}'\nu') \right] S^0 \tag{5.21}$$

(3) Τα δεξιόστροφα μεσόνια W_R που οδηγούν στις $(V+A)$ ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Η παραπάτω ακολουθία μαζών θα αποσβέσει αυτές τις αλληλεπιδράσεις τόσο σε απλά διαγράμματα όσο και σε αυτά με loops.

(α) Τα X συνεισφέρουν στο η^0 , $\pi^0 \rightarrow e^+e^-, \mu^+\mu^-$ και στο βασικό μοντέλο $K^0 \rightarrow e^- + \mu^+, \bar{K}^0 \rightarrow e^+ + \mu^-$. Αφού το παρατηρούμενο πλάτος για την $K_L \rightarrow \mu^+\mu^-$ είναι της τάξης $G_F\alpha^2$ και δεν έχουν παρατηρηθεί γεγονότα της μορφής $K_L \rightarrow \mu^\pm + e^\mp$, υπάρχει ένα κατώτερο όριο της μάζας του X στο βασικό μοντέλο, που δίνεται ως $f^2/m_X^2 < G_F\alpha^2$. Για $f^2/4\pi \simeq 1$ αυτό μας δείχνει πως το X πρέπει να είναι βαρύ ($m_X > 3 \times 10^4 GeV$). Για τις παραλλαγές του βασικού μοντέλου όπου η $K \rightarrow e^- + \mu^+$ δεν επιτρέπεται, το X δεν χρειάζεται να είναι μεγαλύτερο από $m_X^2 \simeq G_F^{-1}f^2$ με το κατώτατο όριο να έρχεται από την β διάσπαση και την ν_e αδρονική αλληλεπίδραση στο οικονομικό μοντέλο. Στα παρακάτω θα δούμε πως προκύπτουν οι μάζες για το βασικό μοντέλο μόνο.

(β) Η σύζευξη S^0 οδηγεί σε αλληλεπιδράσεις τάξης f^2 νετρίνων με αδρόνια και λεπτόνια. Προκειμένου η ένταση αυτών των αλληλεπιδράσεων να είναι μικρότερη ή ίση της G_{fermi} στις χαμηλές ενέργειες, περιμένουμε πως $f^2/m_{s^0} \leq G_F$.

(γ) Από της παρατηρούμενες ελιχότητες φαίνεται πως τα πλάτη των $V + A$ είναι κατά μέγιστο στο 10 των $V - A$, από το οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε πως αν $g_L \simeq g_R$ τότε $m_{W_R^\pm} \simeq 3m_{W_L^\pm}$. Επίσης μαζί με τους περιορισμούς των μαζών των μποζονίων υπάρχουν περιορισμοί στις μάζες των $m_{W_L^\pm}$ και της οκτέτας χρώματος $V(8)$ καθώς πρέπει να επαληθεύουν τις γνωστές αντιδράσεις $V - A$ και τις ισχυρές αντίστοιχα.

Από αυτό περιμένουμε πως $m_{W_L^\pm} \geq G_F^{-1}\alpha$ και $m(V(8)) \simeq 3 - 10 GeV$. Οι αναμενόμενες τιμές των μαζών των σωματιδίων αναγράφονται στον πίνακα που ακολουθεί

Particle	Coupling	Expected (mass) ²
$V(8)$	$\frac{f^2}{4\pi} \simeq 1-10$	$\simeq \alpha^2 G_F^{-1}$
W_L	$\frac{g_L^2}{4\pi} \simeq \alpha = \frac{1}{137}$	$\gtrsim 4\pi\alpha G_F^{-1}$
W_R	$\frac{g_R^2}{4\pi} \simeq \alpha = \frac{1}{137}$	$> (3m_{W_L^\pm})^2$
S^0	$\frac{f^2}{4\pi} \simeq 1-10$	$> f^2 G_F^{-1}$
X	$\frac{f^2}{4\pi} \simeq 1-10$	superheavy $> \alpha^{-2} G_F^{-1}$ "basic" model heavy $> f^2 G_F^{-1}$ "economical" model heavy $< f^2 \alpha G_F^{-1}$ "prodigal" model

5.6 Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας

Προκειμένου να παραχθούν οι τιμές των μαζών που είδαμε και να δούμε τα σπασίματα συμμετρίας που βλέπουμε στην φύση, είμαστε υποχρεωμένοι να εφαρμόσουμε ένα αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας στις multiplets Higgs. Στην παρούσα φάση υπάρχει μεγάλη ελευθερία στην επιλογή των multiplets, τονίζουμε όμως πως όταν αυτά επιλέγονται με την αναλοιώτητα του επανακανονικοποιήσιμου δυναμικού αλληλεπίδρασης σαν βάση, η ελαχιστοποίηση του για το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας δημιουργεί περιορισμούς. Επίσης προκειμένου να αναπαράγουμε τα σπασίματα συμμετρίας που παρατηρούμε στην φύση είναι προφανές ότι κάποια multiplets είναι πιο βολικά από άλλα. Μία απλή επιλογή που ικανοποιεί τους περιορισμούς για τις μάζες των μεσονίων δίνεται από ένα σετ τριών multiplets δεκαέξι συνιστωσών με τις ακόλουθες ιδιότητες μετάθεσης

$$\begin{aligned} A &= (4, \bar{4}, 1)_G \rightarrow U_L A U_R^{-1} \\ B &= (1, 4, \bar{4})_G \rightarrow U_R B V^{-1} \\ C &= (\bar{4}, 1, 4)_G \rightarrow V C U_L^{-1} \end{aligned} \quad (5.22)$$

όπου U_L, U_R, V αναφέρονται στις ομάδες συμμετρίας $U(4)_L, U(4)_R, U(4')_{L+R}$ αντίστοιχα. Το πιο γενικό επανακανονικοποιήσιμο δυναμικό για τα τρία multiplets $V(A, B, C)$, αναλλοίωτο κάτω από $U(4)_L \times U(4)_R \times U(4')$ μετασχηματισμούς περιέχει δώδεκα παραμέτρους (15 αν η επιλογή της ομάδας είναι η $SU(4)_L \times SU(4)_R \times SU(4')_{L+R}$), πέρα από τις τρεις παραμέτρους μάζας για τα A, B, C δεδομένου ότι έχουμε επιβάλλει την διακριτή συμμετρία $A \rightarrow -A, B \rightarrow -B, C \rightarrow -C$ και $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$. Μπορεί ναδειχθεί πως αυτό το δυναμικό δώδεκα μεταβλητών έχει ελάχιστο, δεδομένου πως τα $\langle A \rangle, \langle B \rangle, \langle C \rangle$ είναι της μορφής

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= R(\theta_L) R(\phi_L) \langle A_D \rangle R^{-1}(\theta_R) R^{-1}(\phi_R) \\ \langle B \rangle &= R(\theta_R) R(\phi_R) \langle B_D \rangle \\ \langle C \rangle &= \langle C_D \rangle R^{-1}(\theta_L) R^{-1}(\phi_L) \end{aligned} \quad (5.23)$$

όπου $R(\theta), R(\phi)$ είναι οι περιστροφές Cabibbo των γωνιών θ, ϕ στους χώρους (Π, λ) και (P, χ) αντίστοιχα.

Όπου

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

ενώ τα $\langle A_D \rangle$, $\langle B_D \rangle$, $\langle C_D \rangle$ είναι διαγώνια της μορφής

$$\begin{aligned} \langle A_D \rangle &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_1 & & \\ & & \alpha_1 & \\ & & & \alpha_4 \end{bmatrix} \\ \langle B_D \rangle &= \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & b_4 \end{bmatrix} \\ \langle C_D \rangle &= \begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_1 & & \\ & & c_1 & \\ & & & c_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Οι τέσσερις γωνίες $\theta_{L,R}$, $\phi_{L,R}$ είναι αυθαίρετες σε αυτό το στάδιο, ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι καθορίζονται πλήρως συναρτήσει των δεκαπέντε παραμέτρων του $V(A, B, C)$

5.6.1 Η λαγκρανζιανή του μοντέλου

Θεωρούμε τώρα την λαγκρανζιανή του βασικού μοντέλου

$$-\mathcal{L} = Tr \left[\sum_{L,R} (\bar{\Psi} \not{\partial} \Psi) + \sum_{A,B,C} |\nabla A|^2 + \sum_{\nu, W_L, W_R} |\nabla V|^2 + V(A, B, C) + \mu \bar{\Psi}_L A \Psi_R + H.c \right] \quad (5.26)$$

όπου

$$\begin{aligned} \not{\partial} \Psi_{L,R} &= \gamma_\mu (\partial_\mu \Psi + ig W_\mu \Psi - if \Psi V_\mu)|_{L,R} \\ \nabla A &= \partial A + ig_L W_L A - ig_R A W_R \\ \nabla B &= \partial B + ig_R W_R B - if B V \\ \nabla C &= \partial C + if V C - ig_L C W_L \end{aligned} \quad (5.27)$$

Εκτός από τους όρους που περιέχουν το W ($g_L = g_R = 0$) αυτή η λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη για την ολική συμμετρία $G = SU(4)_L \times SU(4)_R \times SU(4)_{L+R}$. Για $g_L, g_R \neq 0$ η αναλλοιότητα ισχύει μόνο για την τοπική υποομάδα $S = SU(2)_L^{I+II} \times SU(2)_R^{I+II} \times SU(4)_{L+R}$ με τα Ψ_L, Ψ_R, A, B, C να μετασχηματίζονται ως $(2+2, 1, \bar{4})$, $(1, 2+2, \bar{4})$, $(2+2, 2+2, 1)$, $(1, 2+2, \bar{4})$ και $(2+2, 1, 4)$. Το μόνο νέο χαρακτηριστικό, όσο αφορά την αναλλοιότητα για την S , είναι πως πέρα από την προσθήκη των όρων που περιλαμβάνονται στα $V(A, B, C)$ και $\mu Tr[\bar{\Psi}_L A \Psi_R]$ μπορούμε τώρα να γράψουμε ένα ευρύ φάσμα επανακανονικοποιήσιμων συζεύξεων ανάμεσα σε αυτά τα πεδία

$$-\delta \mathcal{L} = \lambda \delta V(A, B, C) + \sum_i \mu_{ij} Tr[\bar{\Psi}_L \Gamma_i A \Gamma_j \Psi_R] + H.c \quad (5.28)$$

όπου τα Γ_i είναι αριθμητικοί πίνακες. Τέτοιοι όροι είναι αναλλοίωτοι κάτω από την υποομάδα S αλλά όχι για το G , και δρουν ως αναταραχή $\delta \mathcal{L}$ στο \mathcal{L} .

5.6.2 Ο πίνακας μάζας

Επιστρέφοντας στην λαγκρανζιανή \mathcal{L} , θα μελετήσουμε τους όρους μάζας που αποκτούμε, αντικαθιστώντας τα A, B, C με $\langle A \rangle, \langle B \rangle, \langle C \rangle$. Είναι βολικό να ορίσουμε τα φυσικά πεδία Fermi που διαγωνοποιούν τον πίνακα μάζας μέσω της σχέσης

$$\Psi = R(\theta)R(\phi)\Psi_D \quad (5.29)$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε την λαγκρανζιανή στην μορφή

$$\begin{aligned} -\mathcal{L} = & Tr[\sum_{L,R} (\bar{\Psi}_D \nabla_D \Psi_D) + \sum_{A,B,C} |\nabla_D A_D|^2 \\ & + \sum_{V,W_L,W_R} |\nabla|^2 + V(A_D, B_D, C_D) + \mu(\bar{\Psi}_L A \Psi_R)_D + H.C] \end{aligned} \quad (5.30)$$

Όπου

$$\begin{aligned} \nabla_D \Psi &= \partial \Psi_D + igW(\theta, \phi)\Psi_D - if\Psi_D V \\ \nabla_D A_D &= \partial A_D + ig_L W_L(\theta, \phi)A_D - ig_R A_D W_R(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (5.31)$$

κλπ
όπου

$$W(\theta, \phi) = R^{-1}(\theta)R^{-1}(\phi)WR(\theta)R(\phi) \quad (5.32)$$

Θα ασχοληθούμε τώρα με το κομμάτι του πίνακα μάζας που αφορά το κομμάτι της μάζας των μεσονίων. Για μια πρώτη επαφή θεωρούμε $\theta_L = \phi_L = \phi_R = \theta_R = 0$ και παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση για τους όρους μάζας

$$\begin{aligned} L_{mass}^I = & \frac{1}{4}g_L^2(a^2 + c^2)[2W_L^+ W_L^- + (W_L^3)^2] + \frac{1}{4}g_R^2(a^2 + b_4^2)[2W_L^+ W_L^- + (W_L^3)^2] \\ & - \frac{1}{2}g_L g_R (a^2)(W_L^3 W_R^3) + \frac{1}{2}g_L g_R (a_1^2 + a_1 a_4)(W_L^+ W_R^- + W_L^- W_R^+) \\ & + \frac{1}{2}f^2 c_1^2 (V_3^2 + V_8^2 + 2V_\rho^+ V_\rho^- + 2V_{K^*}^+ V_{K^*}^- + 2V_{K^*}^0 \bar{V}_{K^*}^0) \\ & + \frac{1}{8}f^2 (c_1^2 + 3c_4^2 + 3b_4^2)(S^0)^2 + \frac{1}{2}f^2 (c_1^2 + c_4^2 + b_4^2)(X^0 \bar{X}^0 + X^- X^+ X'^- X^{+'}) \\ & - fg_L W_L^3 \left[c_1^2 \left(V_3 + \frac{V_8}{\sqrt{3}} - \frac{S^0}{\sqrt{24}} \right) + \frac{3c_4^2}{\sqrt{24}} S^0 \right] \\ & + fg_R \frac{3b_4^2}{\sqrt{24}} (W_R^3 S^0) + fg_L (c_1^2)(W_L^+ V_\rho^- + W_L^- V_\rho^+) + fg_L (c_1 c_4)(W_L^+ X'^- + W_L^- X^{+'}) \end{aligned} \quad (5.33)$$

όπου

$$\begin{aligned} a^2 &= 3a_1^2 + a_4^2 \\ c^2 &= 4c_1^2 + c_4^2 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Παίρνουμε λοιπόν τις ακόλουθες μάζες για τα μποζόνια (για να το κάνουμε αυτό μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους ανάμειξης χωρίς να αγνοούμε την φυσική τους σημασία)

$$\begin{aligned}
m_{W_L^\pm} &\simeq \frac{1}{2}(a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} \\
m_{W_R^\pm} &\simeq \frac{1}{2}(a^2 + b_4^2)^{\frac{1}{2}} \\
m(V(8)) &\simeq \frac{fc_1}{\sqrt{2}} \\
m(X^0, X^-, X'^-) &\simeq \frac{f(c_1^2 + c_4^2 + b_4^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \\
m_{S^0} &\simeq \frac{f}{2\sqrt{2}}(c_1^2 + 3c_4^2 + 3b_4^2)^{\frac{1}{2}} \\
m_{A^0} &= 0 \\
m_{Z^0} &\simeq \frac{1}{2}(g_L^2 + g_R^2)^{\frac{1}{2}}a
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Εδώ το A^0 συμβολίζει το φωτόνιο και το Z^0 μία ουδέτερη ιδιοκατάσταση που θα εξετάσουμε αργότερα. Εδώ μπορούμε να καταλάβουμε πως οι περιορισμοί στις μάζες ικανοποιούνται αν υποθέσουμε πως υπάρχουν βασικά τρεις κλίμακες μάζας που χαρακτηρίζονται από

$$\begin{aligned}
c &\simeq (c_1, c_4) \leq 1\text{GeV} \\
a &\simeq (a_1, a_4) \simeq 300\text{GeV} \\
b &= b_4 \simeq 10^4 - 10^5\text{GeV}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Τα παραπάνω έχουν σαν συνέπεια τα μέλη της οκτέτας $SU(3')$ των μεσονίων να έχουν σχεδόν ίδια μάζα με διαφορά μερικών GeV , τα W_L^\pm και Z^0 έχουν μάζες της τάξης των 100GeV ενώ όλα τα εξωτικά μεσόνια (X^0, X^-, X'^-, S^0 και W_R^\pm) αποκτούν μεγάλες ή πολύ μεγάλες μάζες εξαιτίας του μεγέθους της παραμέτρου b_4 . Με βάση αυτό είναι δυνατό να εξηγηθεί η ασυμμετρία βαρυονίων-λεπτονίων και αριστερόστροφων-δεξιόστροφων σωματιδίων στις χαμηλές ενέργειες λόγω της παραμέτρου b_4 .

Η διαγωνοποίηση του πίνακα μάζας μπορεί να γίνει άμεσα. Παραθέτουμε παρακάτω την σύνθεση μόνο των ουδέτερων πεδίων. Αυτές αποκτούνται χωρίς να λάβουμε υπόψιν όρους τάξης (c^2/a^2) , (c^2, b^2) και $g_{L,R}^2/f^2$ όποτε τέτοιοι όροι δεν έχουν φυσική

σημασία.

$$\begin{aligned}
\frac{A}{e} &= \left(\frac{W_L^3}{g_L} + \frac{W_R^3}{g_R} \right) + \frac{(V_3 + \frac{V_8}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3} S^0)}{f}, m_A = 0 \\
Z^0 &= \frac{f(g_R W_R^3 - g_L W_L^3) - \frac{2}{3} g_R^2 S^0 + O(g^2/f^2, c^2/a^2)}{[f^2(g_R^2 + g_L^2) + \frac{2}{3} g_R^4]^{\frac{1}{2}}}, m_{Z^0} \simeq \frac{1}{2}(g_L^2 + g_R^2)^{\frac{1}{2}} a \\
\bar{S}^0 &= \frac{f S^0 + \frac{2}{3} g_R W_R^3 + O(g^2/f^2, c^2/a^2)}{[f^2 + \frac{2}{3} g_R^2]^{\frac{1}{2}}}, m_{S^0} \simeq \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{2}} f b_4 \\
\bar{U}^0 &= \frac{g_R W_L^3 + g_L(1 + \Delta)W_R^3 - \sqrt{3} \bar{f} U^0 - \frac{2}{3} (g_L g_R / f)(1 + \Delta + \frac{4}{3} c_1^2 / b_4^2) S^0}{[g_R^2 + g_L^2 + 3\bar{f} + \frac{2}{3} (g_L g_R / f)^2]^{\frac{1}{2}}}, m_{\bar{U}^0} \simeq \frac{f c_1}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

και

$$V^0 = \frac{1}{2}(V_3 - \sqrt{3}V_8), m_{V^0} = \frac{f c_1}{\sqrt{2}} \tag{5.38}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^2} &= \frac{1}{g_L^2} + \frac{1}{g_R^2} + \frac{2}{f} \\
U^0 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}V_3 + V_8) \\
\Delta &= 2(f^2/g^2)(c_1^2/a) \\
\bar{f} &= \frac{f(g_R^2 + g_L^2)}{2g_R g_L}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

5.7 Μάζες φερμιονίων

5.7.1 Ο φερμιονικός όρος μάζας

Ο φερμιονικός όρος μάζας

$$mTr[(\bar{\Psi}_L < A > \Psi_R)_D + H.c] \tag{5.40}$$

με

$$< A_D > = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_1 & & \\ & & a_3 & \\ & & & a_4 \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

δεν μπορεί να προσφέρει διάκριση μεταξύ φερμιονίων με διαφορετικό χρώμα. Άρα κουάρκ και λεπτόνια της ίδιας σειράς στο Ψ κατέχουν την ίδια μάζα. Η κατάσταση

δεν βελτιώνεται από την πιθανότητα του να προσθέσουμε έναν όρο σύζευξης Yukawa της μορφής

$$\mu_{ij} Tr(\bar{\Psi}_L \Gamma_i A \Gamma_j \Psi_R) \quad (5.42)$$

Τέτοιοι όροι μπορεί να δίνουν διαφορετικές μάζες στα P, Π, λ, χ της ίδιας στήλης αλλά και πάλι δεν έχουμε διάκριση ως προς το χρώμα.

5.7.2 Τα άμαζα νετρίνα

Στην θεωρία που έχουμε αναπτύξει μέχρι τώρα τα νετρίνα ν, ν' είναι αντικείμενα τεσσάρων συνιστωσών που ακόμα και αν τους δίναμε μηδενική μάζα με την εισαγωγή μιάς multiplet A , θα αποκτούσαν μέσω για παράδειγμα μιας γ_5 αναλλοίωτης αλληλεπίδρασης της μορφής $\bar{\nu} \gamma_\mu P X_\mu$. Αν τα φυσικά νετρίνα $(\nu_{e,\mu})_L$ είναι φυσικά άμαζα αντικείμενα δύο συνιστωσών το μοντέλο έρχεται αντιμέτωπο με το δίλημμα του να περιγράφει νετρίνα με πολύ μεγάλη μάζα. Θα παραθέσουμε έναν μηχανισμό προκειμένου να αντιμετωπίσουμε αυτό το δίλημμα. Η ιδέα είναι η εξής, ένα σωματίδιο με σπίν $\frac{1}{2}$ είναι άμαζο μόνο αν μπορεί να περιγραφεί από ένα σπινόρα δύο συνιστωσών. Για να γίνει αυτό είναι απαραίτητη η εισαγωγή στο μοντέλο δύο νέων φερμιονίων δύο συνιστωσών ζ_L^e, ζ_L^μ , που αποτελούν singlet $(1,1,1)$ της τοπικής ομάδας S και άρα δεν κατέχουν gauge αλληλεπιδράσεις.

Η μόνη επανακανονικοποιήσιμη αναλλοίωτη αλληλεπίδραση που κατέχουν είναι τύπου Yukawa

$$h \bar{\zeta}_L^\mu Tr[\bar{B} \Psi_R] + h' \bar{\zeta}_L^e Tr[\bar{B} \Gamma \Psi_R + H.c] \quad (5.43)$$

όπου ο πίνακας Γ

$$\Gamma = \begin{bmatrix} & \tau_1 \\ \tau_1 & \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

μετατίθεται με τους γεννήτορες της S .

Θεωρούμε τώρα τον πίνακα μάζας για τα $\zeta_L^\mu, \nu'_L, \nu'_R$. Για απλότητα θεωρούμε $\theta_{L,R} = \phi_{L,R} = 0$ και διαγωνοποιώντας τους σχετικούς όρους

$$hb_4 \bar{\zeta}_L^\mu \nu'_R + \mu a_4 \bar{\nu}'_L \nu'_R + H.c \quad (5.45)$$

βλέπουμε πως στο αντικείμενο έξι συνιστωσών $(\zeta_L^\mu, \nu'_L, \nu'_R)$ υπάρχει ένα άμαζο αριστερόστροφο, δύο συνιστωσών, σωματίδιο το οποίο ταυτοποιούμε ως το ν^μ :

$$\nu_{physical}^\mu = \frac{\mu a_4 \zeta_L^\mu - hb_4 \nu'_L}{(\mu^2 a_4^2 + b_4^2 h^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.46)$$

και ένα μεγάλης μάζας φερμιόνιο τεσσάρων συνιστωσών. Το σύνολο των συζεύξεων των $\zeta^{\mu,e}$ περιέχονται στην (5.43). Αυτά τα πεδία μπορούν να εξαιρεθούν από διαδικασίες που δεν τα περιλαμβάνουν ως εισερχόμενα ή εξερχόμενα σωματίδια αφήνοντας ως αλληλεπίδραση

$$\mathcal{L}_{eff} \sim h^2 Tr(\bar{B} \Psi_R) \frac{1}{\not{p}} Tr(\bar{\Psi}_R B) + (h')^2 Tr(\bar{B} \Gamma \Psi_R) \frac{1}{\not{p}} Tr(\bar{\Psi}_R \Gamma B) \quad (5.47)$$

Σημειώνεται πως η (5.47) δεν συνεισφέρει σε διαδικασίες που περιλαμβάνουν τα αριστερόστροφα φυσικά άμαζα νετρίνα, ενώ συνεισφέρει σε ημιλεπτονικές διαδικασίες όπως ($e^+ + e^- \rightarrow$ αδρόνια), με βασικό χαρακτηριστικό να είναι η μεγάλη εμπέλεια και η εμφάνιση δεξιόστροφων σωματιδίων Ψ_R .

Κλείνοντας σημειώνουμε πως όταν λάβουμε υπόψιν όλες τις διορθώσεις στο $\langle B \rangle$ έτσι ώστε να έχει την πιο γενική μορφή, παίρνουμε την έκφραση

$$\langle B \rangle = \begin{bmatrix} b_1 & & f_1 \\ & b_2 & f_2 \\ & f_3 & b_3 \\ f_4 & & b_4 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

με τον όρο αλληλεπίδρασης να γίνεται

$$h\zeta_L^\mu (b_1 P_a + b_2 \Pi_b + b_3 \lambda_c + b_4 \nu')_R + \text{όροι που περιέχουν τα } \zeta_L^e, f's \quad (5.49)$$

Ο όρος αυτός θα συνεισφέρει στην ανάμιξη διαφορετικών χρωμάτων ανάλογη της παραμέτρου h . Ως αποτέλεσμα το κατα πόσο τα φυσικά νετρίνα θα έχουν μάζα μπορεί να χαρακτηριστεί ως ο βασικός λόγος πίσω από την ανάμιξη χρωμάτων και άρα για την παραβίαση εσωτερικών συμμετριών που παρατηρούμε στην φύση.

5.8 Πειραματικές συνέπειες

Σε αυτό το κομμάτι θα δώσουμε κάποιες από τις πειραματικές συνέπειες του προτύπου

5.8.1 Η οκτέτα χρώματος των γλουονίων $V(8)$

Για ενέργειες αρκετά πάνω από το όριο περιμένουμε να παράγουμε αυτά τα σωματίδια με μάζες $3 - 10 GeV$ σε ζεύγη με λογικές τιμές των ενεργών διατομών. Ανάλογα με την φύση της διατήρησης του χρώματος ένα ή περισσότερα από αυτά τα σωματίδια μπορεί να είναι ημισταθερά. Όλη η οκτέτα είναι ηλεκτρικά ουδέτερη για το πρότυπο των κλασματικών φορτίων $\alpha=\beta=0$, ενώ κάποια από τα μέλη έχουν ηλεκτρικό φορτίο για το πρότυπο των ακέραιων τιμών φορτίου.

5.8.2 Οι συνιστώσες χρώματος του φωτονίου U^0

Στην περίπτωση που το φωτόνιο περιέχει μια οκτέτα χρώματος U^0 σαν συνιστώσα, το αντικείμενο U^0 μπορεί να παραχθεί σε αντιδράσεις προκαλούμενες από το φωτόνιο, για παράδειγμα

$$\begin{aligned} \gamma + p &\rightarrow p + U^0 \\ e^+ + e^- &\rightarrow U^0 \end{aligned} \quad (5.50)$$

Περιμένουμε η ενεργός διατομή παραγωγής του U^0 και για τις δύο αντιδράσεις θα είναι συγκρίσιμη με αυτή του ρ^0 σε κατάλληλες ενέργειες. Η παραγωγή του U^0

στην e^-e^+ πρέπει να φανερώνει μια δομή παρόμοια με αυτή του ρ^0 με διαφορά πως το αναμενόμενο πλάτος δεν είναι βέβαιο. Αν υπάρχουν καταστάσεις χρώματος σε οκτέτα C' ελαφρύτερα από το U^0 , τότε θα είχαμε διάσπαση σε $C' + \text{αδρόνιο}$ ή $C' + C'$. Εναλλακτικά θα είχαμε διάσπαση κυρίως σε $\pi^0 + \gamma$, με δευτερεύουσες διασπάσεις σε e^-e^+ , $\mu^+\mu^-$. Μια λογική πρόβλεψη θα είναι

$$\frac{\Gamma_{\pi^0+\gamma}}{\Gamma_{\text{leptonpair}}} \simeq 1 : (10^{-3} - 10^{-4}) \quad (5.51)$$

Συμπερασματικά η αναζήτηση του κατα πόσο το φωτόνιο περιέχει συνιστώσες χρώματος περιλαμβάνει α)μετρήσεις ελλείπουσας μάζας β) παραγωγή $\mu^+\mu^-$ σε αντιδράσεις $\gamma + p$ γ) πειράματα εξάλυψης e^-e^+ . Αν τελικά έχει αυτό θα ευνοεί το μοντέλο ακέραιου φορτίου σε αντίθεση με αυτό του κλασματικού. Στην e^-e^+ εκτός από την παραγωγή ενός U^0 περιμένουμε και την παραγωγή ζεύγους των φορτισμένων μελών της οκτέτας χρώματος μεσόνιων με σπιν 1.

5.8.3 Παραβίαση της parity

Οι παραβιάσεις της parity και της παραξενιάς στις αδρονικές διαδικασίες προέρχεται από διορθώσεις ακτινοβολίας (radiative corrections) με τα W_L loops να είναι υπολογίσιμα με τάξη G_{Fermi} . Η ισχύς των συνεισφορών των W_R loops μειώνεται λόγω της μεγάλης μάζας του W_R . Επιπροσθέτως είναι εύκολο ναδειχθεί ότι δεν συμβαίνει καμία μεγάλη παραβίαση της parity και της παραξενιάς στα απλά διαγράμματα που περιλαμβάνουν τα 'διαγωνοποιημένα' μεσόνια. Το ένα πεδίο το οποίο χρειάζεται προσοχή είναι το \bar{U}^0 , επειδή είναι ελαφρύ. Λόγω, όμως, του ότι περιλαμβάνει τα $W_{L,R}^3$ πρακτικά στον ίδιο συνδυασμό ($g_R W_L^3 + g_L W_R^3$), μπορεί να συμβεί παραβίαση της parity μόνο για όρο της τάξης Δ .

5.8.4 Παραβίαση διατήρησης βαρυονικού και λεπτονικού αριθμού

Στο μοντέλο που δουλεύουμε είναι δυνατό να συμβεί μέσω του μηχανισμού αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας παραβίαση της διατήρησης βαρυονικού και λεπτονικού αριθμού στο μοντέλο ακέραιων τιμών φορτίου. Αυτό θα οδηγούσε στην διάσπαση των κουάρκ σε λεπτόνια. Ακόμη και με αρκετή ισχύ για διασπάσεις $q \rightarrow l + l + \bar{l}$ ($G_q \simeq 10^{-9} m_p^2$) δεν δημιουργείται πρόβλημα ως προς την σταθερότητα του πρωτονίου αφού αυτό αποτελείται από τρία κουάρκ ($B=3$) και η τριπλή B διάσπαση του ($| \Delta B | = 3$) μπορεί να συμβεί μόνο για τάξη ίση ή μεγαλύτερη από G_q^3 . Αυτά γίνονται με βάση την υπόθεση πως τα συστήματα με ένα ή δύο κουάρκ είναι βαρύτερα από το πρωτόνιο ή εναλλακτικά πως υπάρχει ένας θεωρητικός μηχανισμός για την φυλάκιση κουάρκ που δεν επιτρέπει σε αδρονικά κουάρκ να εμφανιστούν σαν φυσικά σωματίδια. Αν το G_q καθορίζεται από το χρόνο ζωής του πρωτονίου, υπάρχουν αβεβαιότητες στον αυστηρό καθορισμό της τιμής του. Αυτές προέρχονται από το

γεγονός πως η διάσπαση του πρωτονίου μπορεί να εξαρτάται και από κανόνες επιλογής προερχόμενους από τους χβαντικούς αριθμούς της $SU(3')$ καθώς και από λεπτομέρειες της κυματοσυνάρτησης του πρωτονίου. Ως αποτέλεσμα, από καθαρά φαινομενολογική σκοπιά, μπορεί κάποιος διασπάσεις κουάρκ (ακέραιου φορτίου) σε διαδικασίες όπως $q \rightarrow l + \pi, q \rightarrow l + l + \bar{l}$ με χρόνους ζωής να κυμαίνονται από 10^{-10} έως 10^{-6} δευτερόλεπτα. Σε κάθε περίπτωση τα υψηλοενεργειακά λεπτόνια στα προϊόντα διασπάσεων πρέπει να δώσουν βασικά χαρακτηριστικά για την διάσπαση τους. Επιπλέον στην διάσπαση $q \rightarrow l + l + \bar{l}$, ένα ζεύγος από λεπτόνια $l\bar{l}$ προερχόμενα από διάσπαση του virtual W θα χαρακτηρίζονταν από διαμήκη πόλωση και άρα θα παρουσίαζαν παραβίαση της parity. Όσο αφορά την διάσπαση του πρωτονίου είναι σημαντικό να τονιστεί ότι η αναζήτηση επικεντρώνεται σε πολυσωματιδιακές διασπάσεις του, καθώς ο ελάχιστος αριθμός σωματιδίων, με διατήρηση φερμιονικού αριθμού, που το πρωτόνιο μπορεί να διασπαστεί είναι τρία νετρίνα μαζί με ένα πιόνιο. Μπορούμε να περιμένουμε λοιπόν τις ακόλουθες κατηγορίες

$$\begin{aligned}
 p &\rightarrow 3\nu + \pi^+ \\
 &\rightarrow 4\nu + e^+ \quad \text{ή} \quad 4\nu + \mu^+ \\
 &\rightarrow 4\nu + \mu^+ + e^+ + e^-
 \end{aligned}
 \tag{5.52}$$

Το βασικό εδώ είναι πως απαγορεύονται διασπάσεις δύο ή τριών σωματιδίων. Συμπερασματικά το μοντέλο προσφέρει πληθώρα πειραματικών πιθανοτήτων. Συγκεκριμένα στην κατεύθυνση της αναζήτησης για (1) χρώματος σε αντιδράσεις με βάση το φωτόνιο (2) μεγάλες isoscalar συνιστώσες σε αντιδράσεις με βάση τα νετρίνα (3) πιθανές "ανώμαλες" αλληλεπιδράσεις, των μ και e , ειδικά σε ενέργειες πάνω από το όριο για παραγωγή χρώματος (για παράδειγμα αλληλεπιδράσεις ep) (4) δεξιόστροφες ($V + A$) ασθενείς αλληλεπιδράσεις (5) αλληλεπιδράσεις που παραβιάζουν τους μιονικούς-ηλεκτρικούς αριθμούς για παράδειγμα $K \rightarrow \mu + e$ διασπάσεις (αυτό είναι σχετικό μόνο για το βασικό μοντέλο) (6) φαινόμενα σε ημιλεπτονικές διαδικασίες που προκαλούνται από nonsuperheavy εξωτικό X -μεσόνιο και συγκεκριμένα για αντιδράσεις $e^+ + e^- \rightarrow$ αδρόνια (σχετικό για τα μοντέλα πέρα του βασικού) και τέλος (7) την μη διατήρηση βαρυονικού-λεπτονικού αριθμού σε διασπάσεις κουάρκ και πρωτονίων.

Βιβλιογραφία

- [1] Στέφανος Τραχανάς, Κβαντομηχανική 2, Πανεπιστημιακές εκδόσεις κρήτης
- [2] James B. Hartle, Βαρύτητα, Εισαγωγή στην γενική σχετικότητα του Einstein, Εκδόσεις Τζιόλα
- [3] Στέφανος Τραχανάς, Σχετικιστική κβαντομηχανική, Πανεπιστημιακές εκδόσεις κρήτης
- [4] Κωσταντίνος Ε. Βαγιονάκης, Σωματιδιακή φυσική, Μια εισαγωγή στην βασική δομή της ύλης
- [5] Γιώργος Ζουπάνος, Σημειώσεις μαθήματος Στοιχειωδών σωματιδίων 2
- [6] D.R.T.Jones, Two-loop β function for a $G_1 \times G_2$ gauge theory Phys. Rev. D, vol 25,1982
- [7] M.Marinelli and G.Morpurgo.The electric neutrality of matter: a summary. Physics letters B , 137:439-442, April 1984
- [8] K. Nakamura. Review of particle physics. Journal of physics G, 37:075021,2010
- [9] I.Dorsner, P.Fileviez Perez, and R.G. Felipe. Phenomenological and cosmological aspects of a minimal GUT scenario. Nuclear Physics B,747:312-327, July 2006
- [10] U.Amaldi. Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constants measured at lep. Physics Letters B,260:447-455, May 1991
- [11] D.Bailin,A.Love Introduction to gauge field theory,Institute of physics publishing Bristol and Philadelphia,1993
- [12] H.Georgi and C.Jarlskog. A new lepton-quark mass relation in a unified theory. Physics Letters B, 86:297-300,October 1979
- [13] J.Ellis and M.K.Gaillard. Fermion masses and Higgs representations in SU(5).

Physics Letters B,88:315-319,December 1979

[14] L.Hall and Y.Nomura.Grand unification in higher dimensions.Annals of Physics ,306:132-156

[15] L.Hall and Y.Nomura.Grand unification in higher dimensions.Physical Review D,64:055003,August 2001

[16] J.C.Pati and A.Salam. Lepton number as the fourth color. United States: N. p., 1974. Web. doi:10.1103/PhysRevD.10.275

[17] Francis Halzen Alan D.Martin: An Introductory Course in Modern Particle Physics

[18] Τράκας Νίκος, σημειώσεις μαθήματος Θεωρητικής φυσικής