

Η λεπτομέρεια κρύβεται στα απλά πράγματα,

Το Θεώρημα Καμπυλών του Τζόρνταν [The Jordan Curve Theorem]



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Σοφιανίδης Κωνσταντίνος

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Λαμπροπούλου Σοφία

Αθήνα, Φεβρουάριος 2021

Τριμελής επιτροπή

- Σ. Λαμπροπούλου, Καθηγήτρια ΣΕΜΦΕ (Επιβλέπουσα)
- Β. Κανελλόπουλος, Αναπλ. Καθηγητής ΣΕΜΦΕ
- Δ. Κοντοκόστας, Επίκ. Καθηγητής ΣΕΜΦΕ

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	05
Πρόλογος	06
Abstract	07

ΚΕΦΑΛΑΙΑ

1^ο Ιστορική Αναδρομή	
1.1 Διεθνής ανασκόπηση	08
1.2 Έλληνες μαθηματικοί.	14
2^ο Εισαγωγικές Έννοιες	18
3^ο Στοιχεία Αλγεβρικής Τοπολογίας	23
4^ο Το Θεώρημα Καμπυλών Jordan: 1 ^η Απόδειξη μέσω στοιχειωδών τεχνικών	38
5^ο Το Θεώρημα Καμπυλών Jordan: 2 ^η Απόδειξη με εφαρμογή του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου Brouwer	51
6^ο Γενίκευση σε μεγαλύτερες διαστάσεις: Το θεώρημα Jordan-Brouwer	58
7^ο Συμπεράσματα	61
8^ο Βιβλιογραφία	62

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα Καθηγήτρια της διπλωματικής μου εργασίας, κα Λαμπροπούλου Σοφία, καθηγήτρια Ε.Μ.Π., για το υλικό προς μελέτη που μου υπέδειξε, την καθοδήγηση καθόλη την διάρκεια της εργασίας και την εξαιρετική συννενοήση.

Συνεχίζοντας, ευχαριστώ θερμά τους γονείς μου για όλα όσα απλόχερα μου προσέφεραν σε όλα τα βήματα μου.

Κλείνοντας, ευχαριστώ τους φίλους μου για τα όμορφα φοιτητικά χρόνια αλλά και την στήριξη στις δύσκολες στιγμές.

© (2020) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ' αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Πρόλογος

‘Μια κλειστή γραμμή χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές’. Είναι αλήθεια πως η συγκεκριμένη πρόταση δε θα προξενούσε απορία σε κάποιον αναγνώστη καθώς περιέχει μια προφανή δήλωση. Πόσο εύκολο είναι όμως να αποδειχθεί πλήρως μια τέτοια προφανής, για τα Μαθηματικά, πρόταση;

Το 1838 γεννιέται στη Λυόν της Γαλλίας ο Marie Ennemond Camille Jordan. Σπούδασε στο *École Polytechnique* και εργάστηκε ως μηχανικός. Στην πορεία δίδαξε στο *École Polytechnique* και στο *Collège de France* και έμεινε γνωστός από τη συνεισφορά του σε αρκετούς τομείς της Άλγεβρας, όπως για παράδειγμα η Κανονική Μορφή Jordan και ο Πίνακας Jordan στην Γραμμική Άλγεβρα και φυσικά, το Θεώρημα Καμπυλών του Jordan (*Jordan Curve Theorem**). Όσον αφορά το τελευταίο, ο Camille Jordan διατύπωσε ρητά το θεμελιώδες θεώρημα πως μια απλή, κλειστή καμπύλη επάνω σε ένα επίπεδο διαχωρίζει το τελευταίο σε ένα εσωτερικό και ένα εξωτερικό χωρίο, κάτι το οποίο αποδείχθηκε ένα σημαντικό βήμα όσον αφορά την θεμελίωση των αυστηρών μαθηματικών εννοιών.

Στο βιβλίο του *Cours d'Analyse, Paris, 1893*, παρουσίασε το Θεώρημα μαζί με μία απόδειξη η οποία αμφισβητήθηκε για λόγους τυπικότητας. Έκτοτε, καθώς η απόδειξη είναι αντιστρόφως ανάλογης δυσκολίας από ότι η διατύπωση του JCT, ξεκίνησε μια αλυσίδα αντιδράσεων και αρκετοί μαθηματικοί της εποχής ασχολήθηκαν με την απόδειξη αυτού του προφανούς, κατά τα άλλα Θεωρήματος · ανάμεσα σε αυτούς σπουδαίοι Έλληνες μαθηματικοί, όπως ο Χ. Παπακυριακόπουλος.

Στην παρούσα εργασία συγκεντρώθηκε υλικό από ξένη και ελληνική βιβλιογραφία με σκοπό να εξετάσουμε την πορεία του Θεωρήματος και να προσεγγίσουμε την απόδειξη του. Το 1^ο κομμάτι της εργασίας φέρει μια ιστορική αναδρομή για την ενδιαφέρουσα εξέλιξη του JCT από την πρώτη του διατύπωση ως τα τέλη του 20^{ου} αιώνα. Κατόπιν, έχουν συμπεριληφθεί έννοιες και εργαλεία τα οποία θα χρειαστούν στον αναγνώστη και αποτελούν τις βάσεις για τις αποδείξεις του Θεωρήματος. Στη συνέχεια, προσεγγίζουμε την απόδειξή του JCT αρχικά χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις τεχνικές και στη συνέχεια με το Θεώρημα Σταθερών Σημείων του Brower.

* *Συνοτομογραφία, JCT.*

Abstract

“A closed line divides the plane into two regions”. Clearly this sentence would not raise any question to the reader as it contains an obvious statement. But how easy is it to prove such an obvious statement, from the perspective of mathematics?

In 1838 Marie Ennemond Camille Jordan was born in Lyon, France. He studied at the École Polytechnique and worked as an engineer. Later on, Jordan taught at the École Polytechnique and at the Collège de France and became known from his contribution on several aspects in Algebra, such as the Jordan Normal Form and the Jordan Matrix, and of course the Jordan Curve Theorem*. Regarding the last one, Camille Jordan stated clearly the fundamental theorem that a simple, closed curve lying on a plane splits the plane into an inside and an outside region, which proved to be an important step in the direction of rigorous mathematics.

In his book *Cours d'Analyse*, Paris, 1893, he formulated the Theorem and also included a proof of it, which was challenged because of minor omissions. Since then, and since the proof of the JCT is a lot more difficult than its formulation, a chain of reactions occurred and plenty of mathematicians worked on the proof of this obvious Theorem; among them, great Greek mathematicians like C. Papakyriakopoulos.

In this thesis, foreign and Greek sources were gathered in order to examine the progression of the Theorem and approach its proof. In the first part of the thesis, we will be viewing a retrospection on the interesting evolution of JCT from the moment it was originally formulated until the end of the 20th century. After that, we then present some notions and tools which will be needed as they form the base for proving the Theorem. Then, we proceed with presenting the proof of the JCT following two different approaches: by elementary means and by using the Brouwer's Fixed Point Theorem.

**abbreviation, JCT.*

Κεφάλαιο 1

Ιστορική αναδρομή

1.2 Διεθνής ανασκόπηση

Το θεώρημα λόγω της προφανούς φύσης του παρέμεινε για αιώνες απαρατήρητο. Έντονες φήμες θέλουν τον Bolzano να έχει κάνει αναφορά στο πρόβλημα σε κάποια από τις εργασίες του και να επισημαίνει πως δεν είναι κάτι ασήμαντο και χρήζει απόδειξης. Συγκεκριμένα, διατύπωσε πως «εάν μια κλειστή γραμμή βρίσκεται στο επίπεδο και ένα ευθύγραμμο τμήμα ενώσει 1 σημείο εσωτερικά της γραμμής και ένα εξωτερικά, η γραμμή τέμνεται σε ένα σημείο από το ευθύγραμμο τμήμα».

Παρ'όλα αυτά, διατυπώθηκε επίσημα για πρώτη φορά από τον Γάλλο μαθηματικό Camille Jordan, το 1893. Ταυτόχρονα, παρουσίασε και μία απόδειξη στο έργο του «Cours d'Analyse» (Έκδοση 2^η) η οποία, όμως, θεωρήθηκε μαθηματικά λανθασμένη από κάποιους μαθηματικούς αναφέροντας πως ο Jordan παρέλειψε να συμπεριλάβει στην απόδειξη του το βασικό πολύγωνο. Ωστόσο, η πρωτόγνωρη ενασχόληση του Jordan με το θέμα, προσέλυσε το ενδιαφέρον μαθηματικών οι οποίοι αναγνώρισαν την χρησιμότητα του θεωρήματος στην μιγαδική (και κλασσική) ανάλυση.

Η 1^η αυστηρή και μαθηματικά ορθή απόδειξη δεν ήρθε πριν το 1905, όπου ο Oswald Veblen έθεσε τη πολυπλοκότητα του ζητήματος και προχώρησε στην απόδειξη του θεωρήματος . Είχε ασκήσει κριτική στην απόδειξη του Jordan και τοποθετήθηκε δημόσια στο βιβλίο του «Theory on Plane Curves in Non-Metrical Analysis Situs»,1905, αποκαλώντας την απόδειξη μη ικανοποιητική για πλήθος μαθηματικών, βασιζόμενος στο γεγονός πως ο Jordan παρέλειψε να συμπεριλάβει στην απόδειξη του την περίπτωση ενός απλού πολυγώνου. Συγκεκριμένα στο έργο του, αναφέρθηκε στις επιπλοκές που παρουσιάζονται κατά την απόδειξη του προβλήματος όταν παρουσιάζονται καμπύλες παντού συνεχείς αλλά πουθενά διαφορίσιμες.

COURS
D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. C. JORDAN,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

DEUXIÈME ÉDITION, ENTièrement REFONDUE.

TOME PREMIER.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

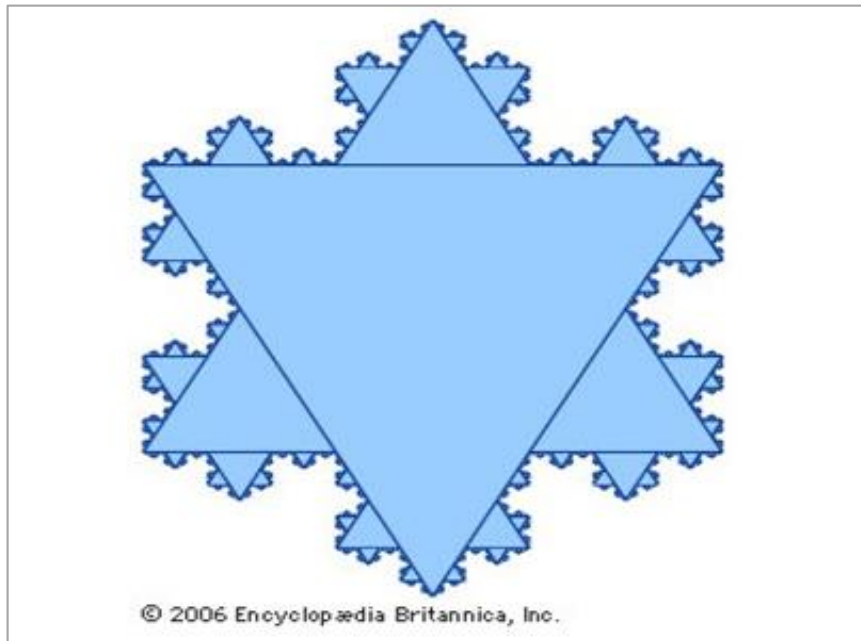
PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

(Tous droits réservés.)

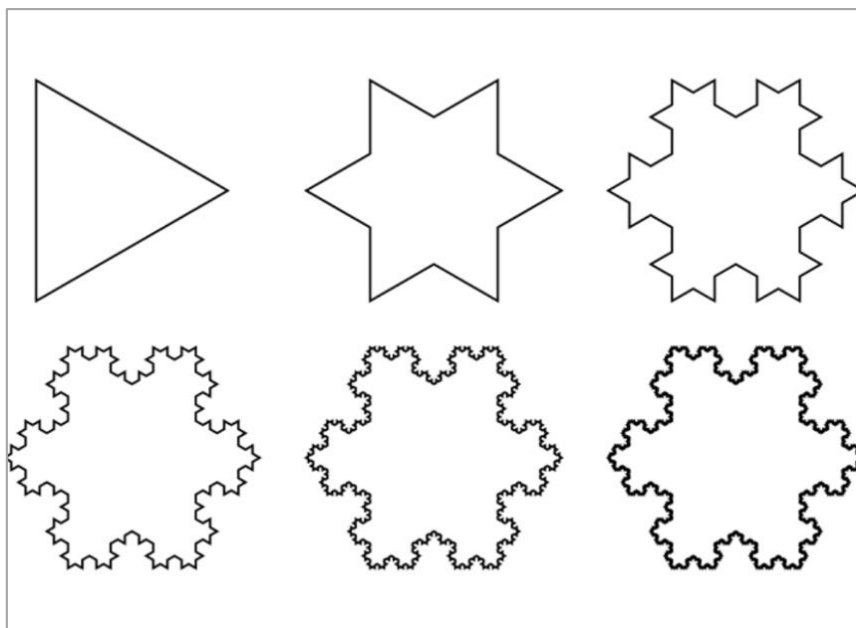
Πάνω σε αυτό, έδωσε ένα παράδειγμα το 1906 ο Niels Fabian Helge Von Koch σχεδιάζοντας μια αρκετά ιδιαίτερη.. χιονονιφάδα! Η τελευταία ονομάστηκε «Χιονονιφάδα του Koch (Koch's Snowflake)».



Εικόνα ii: "Χιονονιφάδα του Koch"

Πώς δημιουργήθηκε όμως το παραπάνω φράκταλ;

Παρατηρούμε πως η καμπύλη ξεκινάει με ένα ισόπλευρο τρίγωνο, όπου τρία επόμενα ισόπλευρα τρίγωνα κατασκευάζονται στο μέσον κάθε μιας από τις πλευρές του με μήκος κάθε πλευράς το $1/3$ της πλευράς του αρχικού τριγώνου. Σχηματίζεται ένα άστρο με έξι (6) κορυφές.



Εικόνα iii: Διαδικασία κατασκευής της "Χιονονιφάδας του Koch"

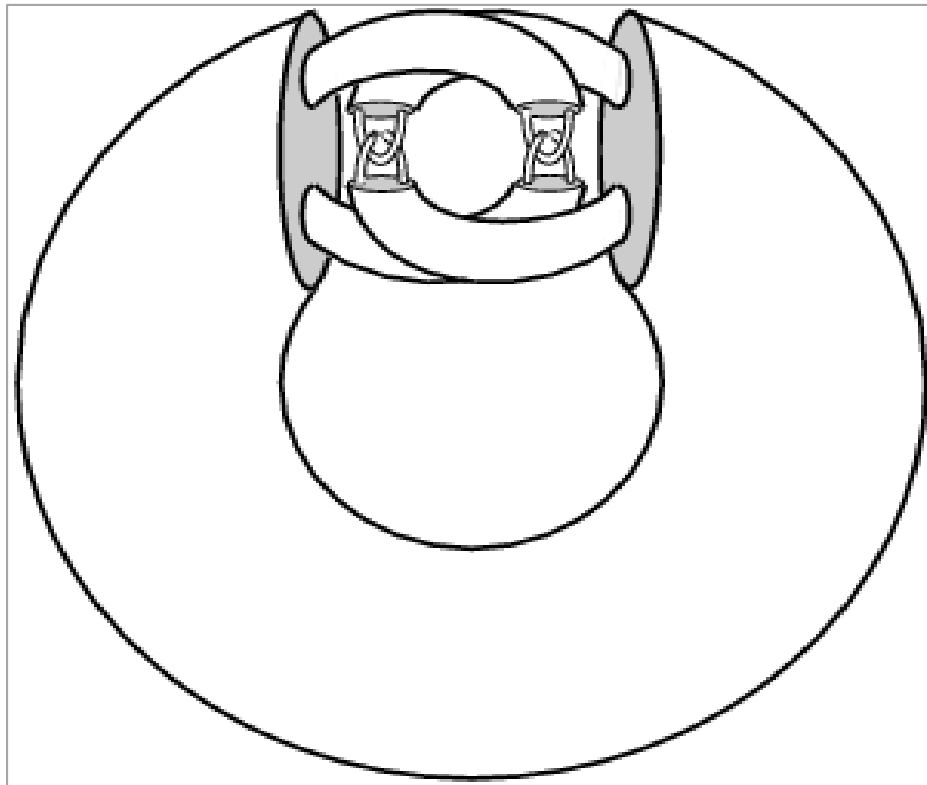
Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται επ'άπειρον δημιουργώντας μια καμπύλη με άπειρο μήκος (φράκταλ) και πουθενά διαφορίσιμη, συνεπώς δεν υπάρχει σημείο της καμπύλης στο οποίο εφάπτεται κάποια ευθεία.

Σε συνέχεια της αναδρομής, εκτενέστερη και ισχυρότερη μορφή του θεωρήματος παρουσίασε το 1906 ο Arthur Moritz Schönflies. Ουσιαστικά το θεώρημα αυτό το οποίο είναι γνωστό και ως Jordan- Schönflies είναι και η επικρατέστερη μορφή προσέγγισης στο επίπεδο.

Συγκεκριμένα, αξίωσε πως τα 2 χωρία που δημιουργούνται λόγω της καμπύλης Jordan είναι ομοιομορφικά με τα χωρία που δημιουργούνται από έναν δίσκο, θέτοντας ουσιαστικά πώς υπάρχει συνεχής απεικόνιση μεταξύ των αντίστοιχων χωρίων. Ο Schönflies είχε ήδη στρέψει την προσοχή του στην αλγεβρική θεωρία και την τοπολογία και πρόσφερε πολύτιμους λίθους, εισάγοντας την τοπολογική αντίληψη της κλειστής καμπύλης και της απλής κλειστής καμπύλης στις εργασίες του. Οι εργασίες αυτές εξετάστηκαν ενδελεχώς και αποτέλεσαν τροφή για τον Brower ο οποίος προχώρησε σε σημαντικές ανακαλύψεις εξετάζοντας τα λάθη και τις αβλεψίες που είχαν ορισμένα από τα κείμενα του Schönflies. Ένα από αυτά ήταν η αντίληψη της απλής καμπύλης όπου είχε παρουσιάσει ο Schönflies, όπου με αντιπαραδείγματα ο Brower έδειξε πως είναι αρκετά πιο σύνθετη και πολύπλοκη και έτσι διόρθωσε κάποια σφάλματα στην αρχική του απόδειξη.

Ο Brower γοητευμένος από την φύση του θεωρήματος, θέλησε να το επεκτείνει σε χώρους άνω των 2 διαστάσεων. Το 1912 διατύπωσε την απόδειξη του χρησιμοποιώντας το εργαλείο της ισχυρής μορφής ομοιομορφισμού που είχε χρησιμοποιηθεί από τον ίδιο και άλλους για το επίπεδο και της καμπύλης. Η αντίστοιχη ισχυρή μορφή για τους ομοιομορφισμούς στις 3 διαστάσεις, όμως, δεν ήταν μαθηματικά ορθή . Ο Brower αδυνατούσε να αποδείξει πως ο χώρος εντός οποιαδήποτε απλής και συνεκτικής επιφάνειας είναι ομοιομορφικός με την ευκλείδια σφαίρα και συμπαγής.

Το 1921 ο J.W. Alexander ανακοίνωσε πως είχε λύση-απόδειξη για το συγκεκριμένο πρόβλημα, παρόλαυτα δεν δημοσίευσε την εργασία του, καθώς περίπου δύο χρόνια μετά σε ένα report του έδωσε ένα αντιπαράδειγμα για το Θεώρημα Jordan-Schönflies σχεδιάζοντας μια παραλλαγή σφαίρας, την «Κερατώδη Σφαίρα του Alexander (*Alexander's horned sphere*)» παραδέχοντας το σφάλμα του στις αρχικές του προσεγγίσεις και δείχνοντας ότι η γενίκευση του πορίσματος περί ομοιομορφισμού, σε 3-διάστατους χώρους, στη απόδειξη Jordan-Schönflies δεν είναι δυνατή.



Εικόνα iv: «Κερατώδης Σφαίρα του Alexander»

Η σφαίρα αυτή αποτελείται από ένα συνδυασμό επιφανειών σωληνοειδούς τύπου σε σχήμα του αγγλικού γράμματος «C» ο οποίος όμως συνεχίζει επ'άπειρων. Σαν αποτέλεσμα, το εξωτερικό χωρίο της απλής συνεκτικής επιφάνειας δεν είναι απλώς συνεκτικό διότι μία σφαίρα στο εξωτερικό χωρίο κοντά στο ένα «κέρατο» δε μπορεί να συρρικνωθεί σε ένα σημείο χωρίς να περάσει μέσα από το όριο-επιφάνεια.

Τα επόμενα χρόνια, δεν ήταν λίγοι οι επιστήμονες που ασχολήθηκαν με το θεώρημα και την απόδειξη του. Ορισμένοι που ξεχώρισαν ήταν το 1950 ο Filirron ο οποίος χρησιμοποίησε στοιχειώδη μαθηματικά μέσα,

καθώς και ο Tverberg το 1980. Το 1971 ο καθηγητής Louis Narens έκανε μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση διατυπώνοντας μια απόδειξη στην οποία δε χρησιμοποίησε τα κλασσικά εργαλεία της ανάλυσης, αλλά θεωρία απλών πολυγώνων και μιγαδική ανάλυση. Έχοντας ως βάση τη κλασσική θεωρία πολυγώνων, η απόδειξη αυτή προσομοιώνει τις καμπύλες Τζόρνταν σαν πολύγωνα που τείνουν επ' άπειρον να γίνουν απλές καμπύλες.

Την απόδειξη με την εφαρμογή του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου Brouwer χρησιμοποίησε το 1982 ο καθηγητής Maehara, δίνοντας μια πιο πρακτική αλλά και συντομότερη λύση στο θεώρημα αυτό.

Τέλος, να αναφέρουμε βιβλιογραφικά πως το HOL light sytem, ένα πρόγραμμα το οποίο χρησιμοποιεί βιβλιοθήκες από παλαιότερα αποδεδειγμένα θεωρήματα, έδωσε μια απόδειξη για το Θεώρημα Καμπυλών του Τζόρνταν το 2005. Η απόδειξη θεωρήθηκε επίσημη και έγκυρη, και έχει έκταση 60,000+ γραμμές. Να σημειωθεί πως διάφοροι τοπολόγοι θεωρούν το έν λόγω Θεώρημα ίσως το πιο απαιτητικό προς απόδειξη όσον αφορά το θεωρητικό επίπεδο αξιωμάτων και αποδείξεων.

1.2 Έλληνες μαθηματικοί

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, το Θεώρημα Καμπυλών του Jordan είχε απασχολήσει πολλούς μαθηματικούς την εποχή εκείνη στα τέλη του 19^{ου} αιώνα, αλλά κυρίως στις αρχές του 20^{ου}. Οι πρώτες απόπειρες απόδειξης με στοιχειώση μέσα έβρισκαν ορισμένες φορές διαφωνούντες ως προς την ορθότητα αλλά και την καθολικότητα του περιεχομένου τους άλλους επιστήμονες. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα μια γενική προσπάθεια βελτίωσης και ένα κλίμα «ανταγωνισμού» μεταξύ των μαθηματικών, καθώς θεωρούταν σοβαρό κατόρθωμα να μπορεί κάποιος να συμπεριλάβει μια ορθή απόδειξη του Θεωρήματος σε κάποιο βιβλίο ή εργασία του.

Όπως είναι επόμενο, όλη αυτή η «αναστάτωση» στα πρώτα βήματα της τοπολογίας σαν επιστήμη δε θα μπορούσαν να αφήσουν αδιάφορους του Έλληνες επιστήμονες της εποχής. Μεταξύ αυτών, θα αναφέρουμε δύο εξαιρετες προσωπικότητες της εποχής οι οποίοι ασχολήθηκαν με το Θεώρημα και με την γενικότερη παρουσία τους στο χρόνο συνέβαλαν καθολικά στην εξέλιξη των θετικών επιστημών.

Καραθεοδωρής Κωνσταντίνος

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή διακρίθηκε στα μαθηματικά σε παγκόσμιο επίπεδο. Οι επιστημονικές του μελέτες και τα έργα του, τα οποία δημοσιεύθηκαν στα γερμανικά, αποτελούν τεράστια παρακαταθήκη στην παγκόσμια βιβλιογραφία της άλγεβρας, και όχι μόνο. Η αρχική του ενασχόληση με τον Λογισμό των Μεταβολών δεν μονοπόλησαν το ενδιαφέρον του, καθώς εξάντλησε σχεδόν κάθε τομέα των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, παρουσίασε εργασίες στην θεωρία πραγματικών και μιγαδικών συναρτήσεων, τις διαφορικές εξισώσεις, τη θεωρία συνόλων και φυσικά στη διαφορική γεωμετρία.

Το Θεώρημα Καμπυλών του Jordan όμως, παρέμενε για τους ειδικούς της Ανάλυσης ένα περίπλοκο θέμα. Ο καθηγητής Salomon Bochner, ο οποίος διατήρούσε πολύ στενή σχέση με τον Καθαθεοδωρή, μας ενημερώνει πώς ο Έλληνας μαθηματικός είχε προσπαθήσει και ο ίδιος να αποδείξει ισχυρά το θεώρημα. Συγκεκριμένα, αναφερόμενος στο έργο του Καραθεοδωρή, έγραψε πως σχεδίαζε ένα βιβλίο στη Μιγαδική Ανάλυση πριν ασχοληθεί με το Λογισμό των Μεταβολών. Καθυστέρησε όμως να το εκδώσει διότι εκείνη την περίοδο κυριαρχούσε η αντίληψη πώς κάθε βιβλίο μιγαδικής ανάλυσης που

σέβεται τον εαυτό του, οφείλει να περιέρχει μια πλήρη και αυστηρή απόδειξη του JCT. Υπήρχε ανταγωνισμός μεταξύ των ειδικών της ανάλυσης εκείνη την περίοδο για το ποιος θα καταφέρει να βάλει τέλος στις υπόλοιπες αποδείξεις.

Παρότι ο Salomon αναφέρει πως ο Καραθεοδωρή πειραματιζόταν χρόνια με μια δική του απόδειξη, δυστυχώς αυτή ή κάποιο μέρος της δεν είναι διαθέσιμο στη βιβλιογραφία. Μάλιστα, στο βιβλίο του «Konforme Abbildung Jordanscher Gebiete» αναφέρει το Θεώρημα και παραπέμπει στα κείμενα του Brower για την «πιο απλή» απόδειξη.

Στο Θεώρημα του Καραθεοδωρή δε, χρησιμοποιεί τις έννοιες που έθεσε ο Τζόρνταν περί απλών καμπλών. Συγκεκριμένα :

- Έστω Ω ένα απλά συνεκτικό σύνολο τιμών στο επεκταμένο επίπεδο \mathbb{C}^* . Θα ονομάζουμε το Ω Σύνολο Jordan (Jordan Domain) εάν για $\Gamma = \partial\Omega$ το Γ είναι μια καμπύλη Jordan στο \mathbb{C}^* .

Θεώρημα (Καραθεοδωρή): Έστω φ μια σύμμορφη απεικόνιση με πεδίο ορισμού το μοναδιαίο δίσκο D και σύνολο τιμών ένα Σύνολο Jordan. Τότε η φ θα έχει μια συνεχή επέκταση στο \overline{D} και η επέκταση αυτή είναι μια 1-1 απεικόνιση από το \overline{D} στο $\overline{\Omega}$.

Χρίστος Παπακυριακόπουλος

Γνωστός και ως «Πάπα» στους συναδέλφους του στο εξωτερικό, αποτελεί αδιαμφισβήτητα μία από τις μεγαλύτερες μαθηματικές προσωπικότητες της Ελλάδος.

Διέπρεψε από νεαρή ηλικία στα μαθηματικά, και παρουσίασε ενδιαφέρον για την τοπολογία σε μια περίοδο όπου οι βάσεις της δεν είχαν εδραιωθεί καν πλήρως. Ο προτότυπος τρόπος σκέψης του επάνω στα ζητήματα της αλγεβρικής τοπολογίας, καθώς και η ενασχόληση του με το Λήμμα του Ντεν του έδωσαν την ευκαιρία να συνεχίσει ως ερευνητής καθηγητής στην Αμερική. Ο ίδιος ταπεινός και αφοσιωμένος, τραβούσε όμως το ενδιαφέρον αρκετών συναδέλφων του και η σοβαρή μελέτη του στη τοπολογία των τρισδιάστατων πολλαπλοτήτων τον έφερε σε επαφή με τον πολύ σημαντικό μαθηματικό της εποχής, Πουανκαρέ. Όσον αφορά τον τελευταίο, ο Χ.Παπακυριακόπουλος, έθεσε τις ισχυρές βάσεις για την λύση της Εικασίας του Πουανκαρέ και εκτός από την απόδειξη του Λήμματος του Ντεν, παρουσίασε και το Θεώρημα του Βρόχου και το Θεώρημα της Σφαίρας. Ύψηστη διάκριση αποτελεί το βραβείο Veblen από την Αμερικανική Μαθηματική Εταιρεία το 1964, απόρροια των 2 τοπολογικών θεωρημάτων που παρουσίασε.

Αξίζει να αναφερθεί πως μέσω της διαθήκης του άφησε όλη του την περιουσία στο ΕΜΠ.

Το Θεώρημα Καμπυλών του Jordan κέντρισε το ενδιαφέρον του μεγάλου Έλληνα μαθηματικού. Αρχικά παρουσίασε την εργασία «Περί μιας δεικτρίας των επίπεδων κλειστών καμπυλών του Jordan» στο Δελτίο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Τομ. ΙΗ'-Α', Β', Γ'. Σε συνέχεια της εργασίας αυτής, ακολούθησε η εργασία «Περί μιας αποδείξεως του Θεωρήματος του Jordan δια τους ομωνύμους επιπέδους κλειστάς καμπύλας». Ο Χ.Παπακυριακόπουλος πρωτότυπησε κάνοντας χρήση της «Δεικτρίας» που ανέφερε στη 1^η εργασία και χρησιμοποιώντας στοιχειώδης τεχνικές γεωμετρίας, προχώρησε επιτυχώς στην απόδειξη του θεωρήματος.

Παρακάτω παρατίθεται απόσπασμα από το Δελτίο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας στο οποίο περιέχεται η εισαγωγή και τα πρώτα βήματα της απόδειξης.

ΠΕΡΙ ΜΙΑΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ JORDAN ΔΙΑ ΤΑΣ ΟΜΩΝΥΜΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥΣ ΚΛΕΙΣΤΑΣ ΚΑΜΠΥΛΑΣ *)

Υπό Χ. ΠΑΠΑΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (έν Αθήναις)

Ἡ παρούσα ἐργασία εἶναι συνέχεια τῆς ὑπὸ τὸν τίτλον «Περὶ μίας δεικτρίας τῶν ἐπιπέδων κλειστῶν καμπύλων τοῦ Jordan»¹⁾. Ἐνταῦθα ἀναπτύσσομεν μίαν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τοῦ Jordan, βασιζόμενοι αὐτὴν ἐπὶ τῆς ἀναφερθεῖσης «δεικτρίας». Εἶναι ἀπαραίτητον ὁ ἀναγνώστης νὰ γνωρῆται τὰ ὅσα ἐκεῖ ἀνεφέρθημεν καὶ τὰ ὁποῖα θὰ ὑποθέσωμεν ἔδῳ ὡς γνωστά. Ὅσαίς εἰς τὰ ἐπόμενα παραπέμπομεν εἰς τὴν «δεικτρίαν», θὰ ἐννοοῦμεν τὴν ὡς ἀνω ἐργασίαν.

Ἀήμματα

1. Ἐστωσαν κλειστὴ καμπύλη τοῦ Jordan C καὶ τυχούσα ἄλλη ἀνοικτὴ συνεχῆς καμπύλη C' μὲ ἀκροὺς M, N, μὴ ἔχουσα κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς πρώτης. Τὰ σημεῖα M, N θὰ εἶναι ἀμφότερα ἢ ἐσωτερικὰ ἢ ἐξωτερικὰ τῆς καμπύλης C.

Ἀπόδειξις: Θεωροῦμεν πολυγωνικὴν γραμμὴν M, M₁, M₂, ..., M_n, N, ἔχουσαν τὰς κορυφὰς αὐτῆς ἐπὶ τῆς καμπύλης C' καὶ μὴ ἔχου-

1) Δ' ἄλλας ἀποδείξεις τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος ἢ ἀναπτύξεις παρομοίων ζητημάτων βλῆτε: α') E. Schmidt «Über einen Beweis des Jordanschen Satzes», Sitz. B. d. Preuss. Akad. d. Wiss. (1933). β') Kerékjártó, B. sz., Vorlesungen über Topologie S. (Berlin 1923). γ') L. E. J. Brouwer «Beweis des Jordanschen Kurvensatzes», Math. Ann. 69(1910), S. 169-175. δ') C. Carathéodory «Ueber die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis», Math. Ann. 73 (1913), S. 314-320. ε') N. Κοιτικός «Τὸ θεώρημα τοῦ Jordan περὶ ἐπιπέδων κλειστῶν γραμμῶν», Δελ. Ε. Μ. Ε., 12'—Α' (1936), Σ. 4-25. 2) Χ. Παπακυριακόπουλος «Περὶ μίας δεικτρίας τῶν ἐπιπέδων κλειστῶν καμπύλων τοῦ Jordan», Δελ. Ε. Μ. Ε., 11'—Α', Β', Γ' (1938), Σ. 84.

σαν κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς C'). Ὀνομάζομεν u, u' δύο ἡμιευθεῖας ἔχούσας ἀκροὺς M, M₁, παραλλήλους καὶ ὁμορόπους καὶ τοιαύτας ὥστε ἢ u νὰ διέρχεται διὰ τοῦ M₁. Τότε, ὡς ἐκόλως φαίνεται, ἔχομεν $\xi_u = \xi_{u'}$. Ἄρα, συμφώνως πρὸς τοὺς ὁρισμοὺς 7 τῆς «δεικτρίας», τὰ σημεῖα M, M₁ εἶναι ἀμφότερα ἢ ἐσωτερικὰ ἢ ἐξωτερικὰ τῆς καμπύλης C. Ἀναλόγως ἀποδεικνύομεν καὶ ὅτι, δύο τυχούσαι διαδοχικαὶ κορυφαὶ τῆς θεωρηθείσης πολυγωνικῆς γραμμῆς εἶνε ἀμφότερα ἢ ἐσωτερικὰ ἢ ἐξωτερικὰ τῆς καμπύλης C. Ἄρα τὸ ζήτημα ἀπεδείχθη ὁ. ἔ. ὁ.

2. Ἐσώσαν C₁, C₂, C₃ τρεῖς ἀνοικτὰ καμπύλαι τοῦ Jordan, ἔχουσαι ἀνὰ δύο μόνον τὰ ἀκροὺς αὐτῶν A, B κοινά. Θέτομεν C=C₁+C₂, C'=C₁+C₃, καὶ C=C₂+C₃.

1. Ἐὰν σημεῖον O δὲν ἀνήκει εἰς οὐδεμίαν τῶν καμπύλων C₁, C₂, C₃, καὶ εἶναι ἐσωτερικὸν μίας τῶν C, C', C'', θὰ εἶναι ἐσωτερικὸν μίας τῶν δύο ἄλλων καὶ ἐξωτερικὸν τῆς τρίτης. Ἔστω ὅτι τὸ σημεῖον O εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς C. Ἐκ τούτου φέρομεν τυχούσαν ἡμιευθεῖαν u τοιαύτην ὥστε, αὐτὴ καὶ ἢ ἀντίθετός της νὰ μὴ διέρχωνται δι' οὐδενὸς τῶν σημείων A, B. Διὰ τὰς γραμμὰς C, C', C'' καὶ τὴν ἡμιευθεῖαν u, συμφώνως πρὸς τὰ ἐν 3, 7 τῆς «δεικτρίας» ἔχομεν:

$$\xi_u = \xi_{2u} + \xi_{2u} + 2\Lambda = 2K + 1 \quad (1)$$

$$\xi'_u = \xi_{1u} + \xi_{2u} + 2\Lambda', \quad \xi''_u = \xi_{1u} + \xi_{2u} + 2\Lambda'' \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1), (2) συνάγομεν²⁾:

$$\xi_u + \xi''_u = 2 \xi_{1u} + 2(\Lambda' + \Lambda'') + 2(K - \Lambda) + 1$$

Ὅθεν οἱ ἀριθμοὶ ξ_u, ξ''_u εἶναι ἑτεροειδεῖς καὶ ἐπομένως, συμφώνως πρὸς τὰ ἐν 7 τῆς «δεικτρίας», τὸ ζήτημα ἀπεδείχθη.

II. Παροδεχόμεθα ὅτι, ὑπάρχει σημεῖον O ἐσωτερικὸν τῶν καμπύλων C, C'' καὶ ὅτι, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐξ αὐτοῦ ἡμιευθεῖαν u, μὴ ἔχουσαν κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς καμπύλης C, καὶ τοιαύτην ὥστε, ἢ ἀντίθετός της νὰ μὴ διέρχεται δι' οὐδενὸς τῶν σημείων A, B. Ἐκ τῶν ὑποθέσεων τούτων θὰ ἐξαγάγωμεν μερικὰς προτάσεις χρήσιμους διὰ τὰ ἐπόμενα.



α) Διὰ τὴν ἡμιευθεῖαν u καὶ τὰς καμπύλας C₂, C₃ ἔχομεν τὰς σχέσεις:

1) Τοῦτο ἐκόλως ἐπιτυγχάνεται, ὡς γνωστόν.
2) Ἴδε τὰ περὶ «δεικτρίας».
3) Ὑπενθυμίζομεν ἔνταῦθα ὅτι, οἱ ἀριθμοὶ K, Λ, Λ', Λ'' εἶναι ἀκέραιοι.

Εικόνα ν: «Περὶ μίας ἀποδείξεως τοῦ Θεωρήματος Jordan δια τὰς ομόνυμους ἐπίπεδους κλειστὰς καμπύλας», ΕΜΕ Τόμος Γ'Θ-Α, 1938.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγικές έννοιες

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναπτυχθούν κάποιες έννοιες της γενικής τοπολογίας, της διαφορικής γεωμετρίας και της μιγαδικής ανάλυσης οι οποίες είναι απαραίτητες για την ανάπτυξη του περιεχομένου στις επόμενες ενότητες.

Ορισμός 2.1: Έστω σύνολο $X \neq \emptyset$. Μια *τοπολογία* στον X καλείται ένα σύνολο $T \subset P(X)$ με τις εξής ιδιότητες:

- i) $X, \emptyset \in T$,
- ii) $\forall \{A_i\}_{i \in I} \subset T \Rightarrow \cup_{i \in I} A_i \in T$,
- iii) $\forall \{A_i\}_{k=1}^n \subset T \Rightarrow \cap_{k=1}^n A_k \in T$.

Κάθε σύνολο εντός της T θα το αποκαλούμε *T-ανοικτό υποσύνολο* του X . Το ζεύγος (X, T) καλείται *τοπολογικός χώρος*.

Ορισμός 2.2: Έστω (X, T) και (Y, S) τοπολογικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$. Η f θα λέγεται *συνεχής* στο $x \in X$ εάν και μόνο εάν για κάθε ανοικτή περιοχή V του y υπάρχει U ανοικτή περιοχή του x για την οποία να ισχύει $f(U) \subset V$. Αν αυτό ικανοποιείται για κάθε $x \in X$, θα λέμε απλά ότι η f είναι *συνεχής*.

Θεώρημα (Tietze) 2.1: Έστω (X, T) φυσιολογικός τοπολογικός χώρος, $A \subset X$ κλειστό και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ με $F|_A = f$, δηλαδή υπάρχει συνεχής επέκταση της f σε ολόκληρο τον X .

Ορισμός 2.3: Έστω (X, T) τοπολογικός χώρος. Μια *καμπύλη* (θα αναφερόμαστε σε αυτήν την έννοια εναλλακτικά ως μονοπάτι) στον X είναι μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$.

Ορισμός 2.4: Θα ονομάζουμε μια *καμπύλη Jordan* μια απεικόνιση

$$J: S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

που είναι συνεχής και 1-1 (δηλαδή μια καμπύλη Jordan είναι μια εμφύτευση της σφαίρας S^1 στο \mathbb{R}^2).

Ορισμός 2.5: Έστω (X, \mathcal{T}) τοπολογικός χώρος. Ένα υποσύνολο $A \subset X$ θα λέγεται:

- (i) *μη-συνεκτικό* εάν υπάρχουν U, V ανοικτά υποσύνολα του X ξένα μεταξύ τους με $A = U \cup V$. Ένα σύνολο το οποίο δεν ικανοποιεί αυτήν την συνθήκη θα λέγεται *συνεκτικό*.
- (ii) *δρομοσυνεκτικό* (ή *συνεκτικό κατά δρόμους*) εάν για κάθε σημεία x, y στο A υπάρχει μια καμπύλη γ που να ενώνει τα σημεία αυτά και να παραμένει εξ ολοκλήρου εντός του A .

Σχετικά με την ιδιότητα της συνεκτικότητας, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Ένα σύνολο A είναι συνεκτικό,

(β) Υπάρχει $f: A \rightarrow \{0,1\}$ επί συνεχής,

(γ) Αν $B \subset A$ υποσύνολο του A το οποίο είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό ως προς το A , τότε $B=A$.

Πρόταση 2.1: Έστω $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ τοπολογικοί χώροι, $A \subset X$ συνεκτικό και έστω $f: X \rightarrow Y$ συνεχής. Τότε και το $f(A)$ είναι συνεκτικό.

Απόδειξη. Έστω ότι το $f(A)$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε θα υπάρχουν $V_1, V_2 \subset Y$ ανοικτά, ξένα με $f(A) = (f(A) \cap V_1) \cup (f(A) \cap V_2)$. Τότε θα έχουμε :

$$\begin{aligned} A &= f^{-1}(f(A) \cap V_1) \cup f^{-1}(f(A) \cap V_2) \\ &= (A \cap f^{-1}(V_1)) \cup (A \cap f^{-1}(V_2)) \end{aligned}$$

όπου τα $A \cap f^{-1}(V_1), A \cap f^{-1}(V_2)$ είναι ξένα και ανοικτά (λόγω συνέχειας της f), το οποίο συνεπάγεται ότι το A είναι μη συνεκτικό, γεγονός που αποτελεί αντίφαση. ■

Μια φυσιολογική ερώτηση αφορά στον τρόπο με τον οποίο σχετίζονται αυτές οι δύο έννοιες. Συνεπάγεται, δηλαδή, η μια την άλλη και αν ναι ποιες συνεπαγωγές ισχύουν; Στην περίπτωση του συνόλου των μιγαδικών, το ερώτημα αυτό απαντάται με την ακόλουθη:

Πρόταση 2.2: Έστω $G \subset \mathbb{C}$ ανοικτό. Τότε το G είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι δρομοσυνεκτικό.

Απόδειξη. Έστω ότι το G είναι δρομοσυνεκτικό και ότι δεν είναι συνεκτικό. Τότε θα υπάρχουν U, V ανοικτά μη κενά υποσύνολα του \mathbb{C} , ξένα μεταξύ τους με $G = U \cup V$. Έστω $z \in U$ και $w \in V$. Εξ υποθέσεως, θα υπάρχει μια καμπύλη γ που να ενώνει τα z, w . Επομένως,

$$\gamma = (\gamma \cap U) \cup (\gamma \cap V)$$

δηλαδή η καμπύλη γράφεται ως ένωση δυο μη κενών –σχετικά– ανοικτών υποσυνόλων της, το οποίο είναι άτοπο, διότι η γ είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,1]$ που είναι συνεκτικό, άρα και η εικόνα θα είναι συνεκτική. Άρα το G είναι συνεκτικό.

Αντίστροφα, έστω G συνεκτικό και έστω $z_0 \in G$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{z \in G : \text{υπάρχει καμπύλη } \gamma \text{ εντός του } G \text{ που ενώνει το } z \text{ με το } z_0\}$

Θα δείξουμε ότι το A είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του G , από όπου θα συμπεράνουμε ότι $A=G$. Προφανώς το A είναι μη κενό. Έστω, τώρα, $z \in A$. Εφόσον $z \in G$ θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(z, \varepsilon) \subset G$. Αφού $z \in A$, υπάρχει μια καμπύλη γ στο G η οποία θα συνδέει τα z_0, z . Για κάθε $w \in D(z, \varepsilon)$ το σύνολο $\gamma^* \cup [z, w]$ είναι η εικόνα μιας καμπύλης στο G που συνδέει τα z_0, w (Συμβ. $[z, w]$ το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα z_0, w)

Επομένως $w \in A$ και άρα $D(z, \varepsilon) \subset A$, συνεπώς το A είναι ανοικτό. Έστω, τώρα, $z \in \bar{A} \cap G$. Εφόσον $z \in G$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ για το οποίο $D(z, \varepsilon) \subset G$. Αλλά αφού $z \in \bar{A}$ θα πρέπει να υπάρχει $w \in D(z, \varepsilon) \cap \bar{A}$. Εξ υποθέσεως, θα υπάρχει καμπύλη γ στο G που θα συνδέει τα z_0, w και έτσι το σύνολο $\gamma^* \cup [w, z]$ είναι η εικόνα μιας καμπύλης στο G η οποία συνδέει τα z_0, z .

Άρα $z \in A$, δηλαδή το A είναι κλειστό. Εφόσον δείξαμε τα παραπάνω για αυθαίρετο z_0 , προκύπτει αμέσως το ζητούμενο. ■

Πρόταση 2.3: Έστω (X, T) τοπολογικός χώρος, $x_0 \in X$ και $\{A_i: i \in I\}$ συλλογή από συνεκτικά υποσύνολα του X ώστε $x_0 \in A_i \forall i \in I$. Τότε και η ένωσή τους είναι συνεκτικό υποσύνολο του X .

Απόδειξη. Έστω G ένα μη κενό υποσύνολο του $A = \cup_{i \in I} A_i$ το οποίο να είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό. Τότε το $G \cap A_i$ θα είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του A_i για κάθε i . Αυτό έπεται ότι ή $G \cap A_i = \emptyset$ ή $G \cap A_i = A_i$. Δεδομένου ότι το G είναι μη κενό θα πρέπει να είναι $G \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ για κάποιο $i_0 \in I$. Συνεπώς, θα είναι $G \cap A_{i_0} = A_{i_0}$. Ειδικότερα, $x_0 \in G$ και $x_0 \in G \cap A_i$ για κάθε i . Τότε θα πρέπει $G \cap A_i = A_i$ για κάθε i και ως εκ τούτου $G = \cup_{i \in I} A_i$ ■

Ορισμός 2.6: Έστω (X, T) τοπολογικός χώρος. Ένα υποσύνολο A του X λέγεται *συνεκτική συνιστώσα* του X εάν είναι ένα μεγιστικό συνεκτικό υποσύνολο του X . Δηλαδή το A είναι συνεκτικό και κανένα συνεκτικό υποσύνολο του X δεν περιέχει γνήσια το A .

Πρόταση 2.4: Έστω (X, T) τοπολογικός χώρος. Τότε:

- (i) Κάθε $x_0 \in X$ ανήκει σε ακριβώς μια συνεκτική συνιστώσα του X .
- (ii) Διακεκριμένες συνεκτικές συνιστώσες του X είναι ξένες μεταξύ τους.

Απόδειξη.

- (i) Θέτουμε $\mathcal{A} = \{A \subset X: x_0 \in A, A \text{ συνεκτικό}\}$. Τότε η οικογένεια αυτή είναι μη κενή διότι $\{x_0\} \in \mathcal{A}$. Επιπλέον, από την προηγούμενη πρόταση, θα ισχύει ότι το σύνολο $C = \cup_{A \in \mathcal{A}} A$ θα είναι συνεκτικό. Εξ ορισμού, το C είναι μεγιστικό και άρα αποτελεί μια συνεκτική συνιστώσα του X .
- (ii) Αν C_1, C_2 διακεκριμένες συνεκτικές συνιστώσες του X με $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, τότε πάλι λόγω της προηγούμενης πρότασης, το $C = C_1 \cup C_2$ θα είναι συνεκτικό και περιέχει γνήσιως τα C_1, C_2 το οποίο είναι άτοπο. ■

Πρόταση 2.5: Έστω $G \subset \mathbb{C}$. Τότε οι συνεκτικές συνιστώσες του G είναι ανοικτά σύνολα και αριθμήσιμες το πλήθος.

Απόδειξη. Έστω $A \subset G$ συνεκτική συνιστώσα του G και έστω $z \in A$. Εφόσον το G είναι ανοικτό, θα πρέπει να υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(z, \varepsilon) \subset G$. Τότε, όμως, το $D(z, \varepsilon) \cup A$ είναι συνεκτικό. Λόγω μεγιστικότητας του A , θα πρέπει αναγκαστικά να είναι $D(z, \varepsilon) \subset A$. Συνεπώς, το A είναι ανοικτό. Το ότι οι συνεκτικές συνιστώσες του G είναι αριθμήσιμες το πλήθος έπεται απ'το ότι σε έναν διαχωρίσιμο μετρικό χώρο, κάθε οικογένεια μη κενών ξένων ανα δυο ανοικτών συνόλων είναι αριθμήσιμη. ■

Κεφάλαιο 3

Στοιχεία Αλγεβρικής Τοπολογίας

Σε αυτήν την ενότητα θα αναπτύξουμε τις απαραίτητες έννοιες από την αλγεβρική τοπολογία που θα χρειαστούν στην μια εκ των αποδείξεων που θα ακολουθήσουμε. Ξεκινάμε με την βασική έννοια της ομοτοπίας.

Ορισμός 3.1: Έστω $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς (αν ο X κάποιος τοπολογικός χώρος). Μια ομοτοπία από την f στην g είναι μια συνάρτηση $H : X \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$H(x,0) = f(x) \quad \text{και} \quad H(x,1) = g(x), \quad \forall x \in X$$

Θα λέμε, επίσης, ότι οι f, g είναι ομοτοπικές και θα συμβολίζουμε $f \simeq g$ ακριβώς όταν υπάρχει μια ομοτοπία H από την f στην g .

Μια πρώτη παρατήρηση για τον ορισμό που μόλις δώσαμε είναι ότι η \simeq είναι σχέση ισοδυναμίας. Πράγματι:

- ❖ Κάθε συνεχής συνάρτηση f είναι ομοτοπική με τον εαυτό της, δηλ. μπορούμε να ορίσουμε την H με $H(x,t) = f(x), \forall t \in [0,1]$
- ❖ Αν $f \simeq g$ με ομοτοπία H , τότε μπορούμε να ορίσουμε την $H'(x,t) = H(x,1-t)$. Τότε, η H' είναι ομοτοπία από την g στην f .
- ❖ Αν $f \simeq g$ με ομοτοπία H_1 και $g \simeq h$ με ομοτοπία H_2 , τότε μπορούμε να ορίσουμε την H για την οποία:

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x, 2t) & \text{για } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ H_2(x, 2t-1) & \text{για } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Με αυτήν την κατασκευή παίρνουμε μια ομοτοπία από την f στην h . Έτσι, προκύπτει ότι το να είναι δυο συναρτήσεις ομοτοπικές τις καθιστά, υπό μια έννοια, 'ισοδύναμες' (αυτό μας επιτρέπει να αναφερόμαστε σε ομοτοπία "ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις").

Ορισμός 3.2: Έστω δύο μονοπάτια $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ με $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_0$ και $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = x_1$. Μια *ομοτοπία από την γ_1 στην γ_2* είναι μια απεικόνιση $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$ με: $H(t, 0) = \gamma_1(t)$, $H(t, 1) = \gamma_2(t)$, $H(0, s) = x_0$ και $H(1, s) = x_1$. Αντίστοιχα με τον προηγούμενο ορισμό, οι γ_1, γ_2 καλούνται ομοτοπικές ακριβώς όταν υπάρχει μια τέτοια απεικόνιση H και συμβολίζουμε \simeq_p .

Επί της ουσίας, η ομοτοπία είναι μια διαδικασία κατά την οποία ‘αλλοιώνουμε’ μια συνάρτηση/καμπύλη κατά συνεχή τρόπο εως ότου προκύψει η άλλη ομοτοπική προς την πρώτη συνάρτηση/καμπύλη. Επιπλέον, εάν δύο μονοπάτια είναι ομοτοπικά, τότε το αρχικό και τελικό σημείο των μονοπατιών διατηρείται για όλα τα ”στάδια” τα οποία διανύει η ομοτοπία, δηλ. για κάθε t η $\gamma_t(s) = H(t, s)$ είναι ένα μονοπάτι με αρχικό σημείο x_0 και τελικό σημείο το x_1 . Κατά τρόπο πλήρως ανάλογο με προηγουμένως, μπορεί να δειχθεί ότι η \simeq_p είναι σχέση ισοδυναμίας.

Στη συνέχεια μπορούμε να ορίσουμε μια πράξη ανάμεσα σε μονοπάτια.

Ορισμός 3.3: Έστω γ_1 καμπύλη με αρχή το x_0 και πέρας το x_1 και γ_2 καμπύλη με αρχή το x_1 και πέρας το x_2 . Ορίζουμε ως *γινόμενο* των δύο καμπυλών την καμπύλη που ορίζεται ως:

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{για } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{για } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Η $\gamma_1 * \gamma_2 * 2$ είναι ένα καλώς ορισμένο μονοπάτι και $H \gamma_1 * \gamma_2(0) = x_0$, $\gamma_1 * \gamma_2(1) = x_2$.

Εάν συμβολίζουμε με $[\gamma]$ την ομοτοπική κλάση ισοδυναμίας του μονοπατιού γ , τότε η πράξη που μόλις ορίσαμε επάγει μια πράξη ανάμεσα στις ομοτοπικές κλάσεις με $[\gamma_1] * [\gamma_2] = [\gamma_1 * \gamma_2]$. Πράγματι, έστω $\gamma_1' \simeq \gamma_1$ και $\gamma_2' \simeq \gamma_2$. Θα κατασκευάσουμε μια ομοτοπία ανάμεσα στις $\gamma_1' * \gamma_2'$ και $\gamma_1 * \gamma_2$. Έστω H_1 ομοτοπία των γ_1', γ_1 και H_2 αντίστοιχα για τις γ_2', γ_2 .

Θέτουμε:

$$H(s, t) = \begin{cases} H_1(2t, s) & \text{για } t \in [0, 1/2] \\ H_2(2t, s) & \text{για } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Η H είναι καλώς ορισμένη, μιας και $H_1(1, t) = H_2(0, t)$ (εφόσον $x_0 \xrightarrow{\gamma_1} x_1$ και $x_1 \xrightarrow{\gamma_2} x_2$) ενώ είναι ομοτοπία ανάμεσα στις $\gamma_1' * \gamma_2'$ και $\gamma_1 * \gamma_2$ αφού:

$$\begin{aligned} H(0, s) &= x_0, H(1, s) = x_2 \forall s \text{ και } H(t, 0) = \gamma_1 * \gamma_2(t), H(t, 1) \\ &= (\gamma_1' * \gamma_2')(t) \end{aligned}$$

Έχουμε, λοιπόν, το σύνολο των μονοπατιών από ένα σημείο σε ένα δεύτερο εφοδιασμένο με μια πράξη. Κατά φυσιολογικό τρόπο ανακύπτει το ερώτημα: ποια είναι η δομή αυτού του ζεύγους; Η απάντηση δίδεται με το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.1: Η πράξη $*$ ικανοποιεί τα ακόλουθα:

- (1) $[\gamma_1] * ([\gamma_2 * \gamma_3]) = ([\gamma_1] * [\gamma_2]) * [\gamma_3] = [\gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3]$ στην περίπτωση που τουλάχιστον ένα από αυτά ορίζεται (Προσεταιριστικότητα)
- (2) Για $x \in X$, θεωρούμε $e_x: [0, 1] \rightarrow X$, $e_x(s) = x$. Τότε, για γ καμπύλη με αρχή το x_0 και πέρας το x_1 ισχύουν οι:

$$[\gamma] * [e_{x_1}] = [\gamma] \text{ και } [e_{x_0}] * [\gamma] = [\gamma]$$

Δηλαδή, για κάθε καμπύλη γ υπάρχει δεξί και αριστερό ταυτοτικό στοιχείο.

- (3) Για κάθε καμπύλη $\gamma: x_0 \rightarrow x_1$, υπάρχει η $\gamma^{-1}: x_1 \rightarrow x_0$ με $\gamma^{-1}(s) = 1 - s$. Τότε:

$$[\gamma] * [\gamma^{-1}] = [e_{x_0}] \text{ και } [\gamma^{-1}] * [\gamma] = [e_{x_1}]$$

Δηλ. για κάθε καμπύλη γ υπάρχει αντίστροφο στοιχείο. Απ' τα παραπάνω, προκύπτει ότι το σύνολο των καμπυλών εφοδιασμένο με την πράξη $*$ είναι ένα ομαδοειδές.

Απόδειξη. Αποδεικνύαμε πρώτα τα (2),(3). Για το (2), έστω $e_0 : [0,1] \rightarrow [0,1]$ το σταθερό μηδενικό μονοπάτι και $\mathbf{1} : [0,1] \rightarrow [0,1]$ η ταυτοτική απεικόνιση (δηλ. μονοπάτι $0 \rightarrow 1$). Τότε το $e_0 * \mathbf{1}$ είναι ένα μονοπάτι $0 \rightarrow 1$. Επειδή το $[0,1]$ είναι κυρτό, θα υπάρχει ομοτοπία H ανάμεσα στο $\mathbf{1}$ και στο $e_0 * \mathbf{1}$. Τότε η $\gamma \circ H$ είναι ομοτοπία ανάμεσα στην $\gamma \circ \mathbf{1} = \gamma$ και στην:

$$\gamma \circ (e_0 * \mathbf{1}) = (\gamma \circ e_0) * (\gamma \circ \mathbf{1}) = e_{x_0} * \gamma$$

Επομένως: $[e_{x_0}] * [\gamma] = [\gamma]$

Παρόμοια είναι και η απόδειξη για το δεξί ταυτοτικό στοιχείο.

Για το (3), έστω $\mathbf{1}^{-1}$ το μονοπάτι $s \rightarrow 1 - s$. Τότε το $\mathbf{1} * \mathbf{1}^{-1}$ είναι μονοπάτι $0 \rightarrow 0$ όπως και το e_0 . Λόγω κυρτότητας του $[0,1]$ θα υπάρχει ομοτοπία H ανάμεσα στο e_0 και το $\mathbf{1} \circ \mathbf{1}^{-1}$. Τότε η $\gamma \circ H$ είναι ομοτοπία ανάμεσα στην $\gamma \circ e_0 = e_{x_0}$ και την:

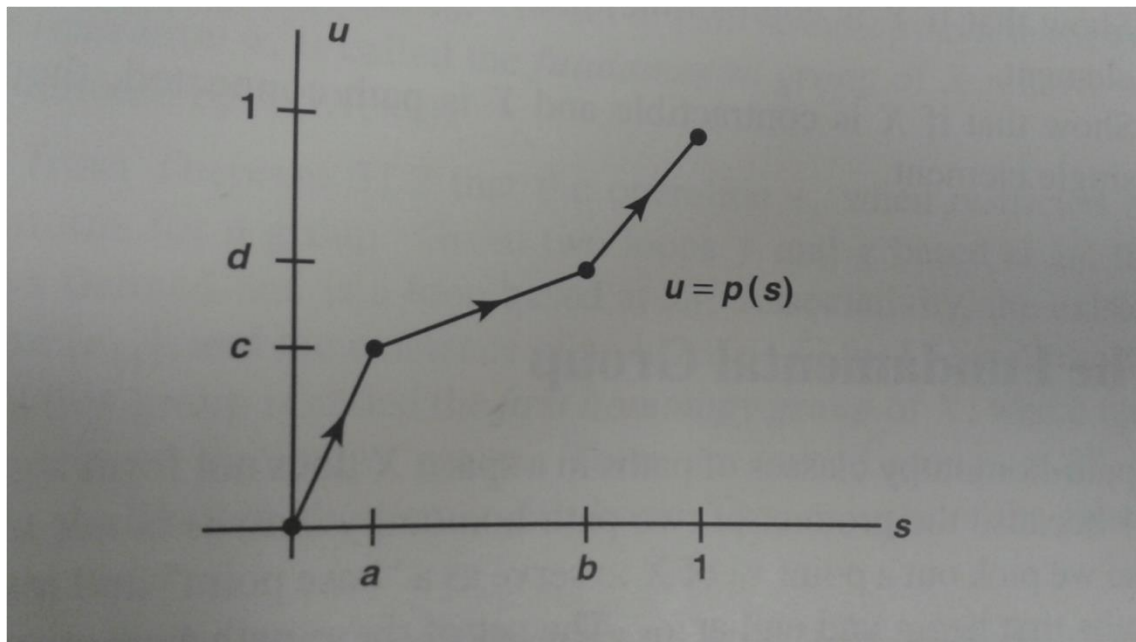
$$\gamma \circ (\mathbf{1} * \mathbf{1}^{-1}) = (\gamma \circ \mathbf{1}^{-1}) = (\gamma \circ \mathbf{1}^{-1}) = \gamma * \gamma^{-1}$$

Επομένως: $[\gamma] * [\gamma^{-1}] = [e_{x_0}]$

Μένει, τώρα, να δείξουμε το (1). Παρατηρούμε, αρχικά, ότι αν ορίσουμε για $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ την $p: [a,b] \rightarrow [c,d]$ με $p(x) = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{ad-bc}{a-b}$ τότε $p(a) = c$, $p(b) = d$ και η κλίση αυτής της αφινικής απεικόνισης είναι θετική, γεγονός που μας επιτρέπει να αναφερόμαστε σε αυτήν ως θετική γραμμική απεικόνιση. Έτσι, παρατηρούμε τώρα ότι το γινόμενο $\gamma_1 * \gamma_2$ δύο μονοπατιών είναι στο $[0,1/2]$ η σύνθεση της θετικής γραμμικής απεικόνισης του $[0,1/2]$ στο $[0,1]$ με τη γ_1 και στο $[1/2,1]$ η σύνθεση της γραμμικής απεικόνισης από το $[1/2,1]$ στο $[0, 1]$ με την γ_2 . Έστω, λοιπόν, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ μονοπάτια στον X με $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ και $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$, για να ορίζονται τα αντίστοιχα γινόμενα των καμπυλών.

Με βάση τα προηγούμενα, ορίζουμε ως τριπλό γινόμενο των καμπυλών $\gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3$ ως εξής: θεωρούμε $0 < a < b < 1$ και $k_{a,b}$ το μονοπάτι που στο $[0,a]$ είναι η σύνθεση της θετικής γραμμικής απεικόνισης από το $[0,a]$ στο $[0,1]$ με την γ_1 , στο $[a,b]$ η σύνθεση της θετικής γραμμικής απεικόνισης από το $[a,b]$ στο $[0,1]$ με την γ_2 και στο $[b,1]$ η σύνθεση της θετικής γραμμικής απεικόνισης από το $[b,1]$ στο $[0,1]$ με την γ_3 . Παρατηρούμε ότι το μονοπάτι $k_{a,b}$ εξαρτάται από τα σημεία a,b , δεν ισχύει όμως το ίδιο για την κλάση ομοτοπίας του.

Θα δείξουμε, δηλαδή, ότι για $0 < c < d < 1$ ισχύει $k_{a,b} \simeq k_{c,d}$.



Εικόνα vi: Περιγραφή της καμπύλης $k_{a,b}$

Η καμπύλη p του σχήματος περιορισμένη στα $[0,a],[a,b],[b,1]$ ισούται αντίστοιχα με την θετική γραμμική απεικόνιση στα $[0,c],[c,d],[d,1]$, δηλ. $k_{c,d} \circ p = k_{a,b}$. Όμως η p είναι μονοπάτι από το 0 στο 1, όπως και το ταυτοτικό μονοπάτι $\mathbf{1} : 0 \rightarrow 1$. Έστω P η ομοτοπία ανάμεσα στα p και

1. Τότε η $k_{c,d} \circ P$ είναι μια ομοτοπία ανάμεσα στην $k_{c,d}$ και στην $k_{a,b}$. Η απόδειξη, τώρα, ολοκληρώνεται με την παρατήρηση ότι για $a = 1/2, b = 3/4$ το γινόμενο $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ είναι το $k_{a,b}$, ενώ για $c = 1/4, d = 1/2$ το $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ είναι το $k_{c,d}$ και δείξαμε μόλις ότι $k_{a,b} \simeq k_{c,d}$. Επομένως $[\gamma_1] * [\gamma_2 * \gamma_3] = [\gamma_1 * \gamma_2] * [\gamma_3]$ ■

Παρατήρηση: Όπως και για κάθε πράξη για την οποία ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, έτσι και εδώ υπάρχει η δυνατότητα να μιλήσουμε για γινόμενο n -το πλήθος κλάσεων καμπυλών, εργαζόμενοι επαγωγικά.

Συνεχίζουμε με μια κεντρικής σημασίας έννοια στην αλγεβρική τοπολογία, αυτή της θεμελιώδους ομάδας. Υπενθυμίζουμε, αρχικά, κάποιους βασικούς ορισμούς από τη θεωρία ομάδων:

Ορισμός 3.4:

- (i) Έστω $G \neq \emptyset$ σύνολο και μια διμελής σχέση $*$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

(G1) Για κάθε $u, v \in G$ το $u * v \in G$

(G2) Για κάθε $u, v, w \in G$ ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, δηλ:

$$u * (v * w) = (u * v) * w = u * v * w$$

(G3) Υπάρχει στοιχείο $e \in G$ τ.ώ.:

$$u * e = e * u = u \quad \forall u \in G$$

(G4) Για κάθε $u \in G$ υπάρχει $u' \in G$ τέτοιο ώστε:

$$u * u' = u' * u = e.$$

- (ii) Μια απεικόνιση $f: (G, *) \rightarrow (G', \cdot)$ ανάμεσα σε δύο ομάδες καλείται *ομομορφισμός* εάν ισχύει:

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in G$$

Ο πυρήνας της f είναι $\ker f = \{x \in G : f(x) = e'\}$ το σύνολο και η $\text{Im} f = \{f(x) : x \in G\}$

εικόνα της f είναι το σύνολο . Εάν η f είναι ένα προς ένα και επί του G' , τότε καλείται *ισομορφισμός* (Συμβ. $G \simeq G'$).

- (iii) Έστω H υποομάδα της G (συμβ. $H \leq G$). Ονομάζουμε αριστερό σύμπλοκο της H οποιοδήποτε σύνολο της μορφής $gH = \{gh : h \in H\}$ (αντίστοιχα ορίζεται και το δεξί σύμπλοκο). Στην περίπτωση που για κάθε $g \in G$ και για κάθε $h \in H$ ισχύει $ghg^{-1} \in H$ τότε θα λέμε ότι η H είναι κανονική

υποομάδα της G και συμβολίζουμε $H \trianglelefteq G$ και τότε τα αριστερά και δεξιά σύμπλοκα της H ταυτίζονται.

Κατόπιν αυτής της παρενθετικής παράθεσης ορισμένων στοιχειωδών εννοιών της θεωρίας ομάδων, προχωράμε στον ορισμό της θεμελιώδους ομάδας.

Ορισμός 3.5: Έστω χώρος X και $x_0 \in X$. Ένας δρόμος του X $x_0 \rightarrow x_0$ καλείται βρόχος με βάση το x_0 . Το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας των βρόχων με βάση το x_0 εφοδιασμένο με την πράξη $*$ του γινομένου μονοπατιών καλείται *θεμελιώδης ομάδα του X με βάση το x_0* και συμβολίζεται με $\pi_1(X, x_0)$.

Αμέσως έχουμε την δυνατότητα να συνδέσουμε κατά φυσιολογικό τρόπο μεταξύ τους δύο θεμελιώδεις ομάδες του ίδιου χώρου με διαφορετικές βάσεις, στην περίπτωση που έχουμε ένα μονοπάτι ανάμεσα στις βάσεις, με τον τρόπο που φαίνεται παρακάτω.

Ορισμός 3.6: Έστω α μονοπάτι στον X , $x_0 \rightarrow x_1$. Τότε ορίζεται η απεικόνιση $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ με τύπο:

$$\hat{\alpha}(\gamma) = [\alpha^{-1}] * [\gamma] * [\alpha]$$

Η συγκεκριμένη απεικόνιση που μόλις ορίστηκε έχει μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα, συγκεκριμένα:

Θεώρημα 3.1: Η $\hat{\alpha}$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Δείχνουμε, πρώτα, ότι η $\hat{\alpha}$ είναι ομομορφισμός. Πράγματι, για $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(X, x_0)$:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(\gamma_1 * \gamma_2) &= [\alpha^{-1}] * [\gamma_1 * \gamma_2] * [\alpha] = [\alpha^{-1}] * [\gamma_1] * [\gamma_2] * [\alpha] = \\ &= ([\alpha^{-1}] * [\gamma_1] * [\alpha]) * ([\alpha^{-1}] * [\gamma_2] * [\alpha]) = \hat{\alpha}(\gamma_1) * \hat{\alpha}(\gamma_2) \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι ο $\hat{\alpha}$ είναι ισομορφισμός, θέτουμε:

$$\hat{\beta}(\delta) = [\alpha] * [\delta] * [\alpha^{-1}], \forall \delta \in \pi_1(X, x_1)$$

Τότε:

$$\hat{\beta}(\hat{\alpha}(\gamma)) = [\alpha] * ([\alpha^{-1}] * [\gamma] * [\alpha]) * [\alpha^{-1}] = \gamma$$

$$\hat{\alpha}(\hat{\beta}(\delta)) = [\alpha^{-1}] * ([\alpha] * [\delta] * [\alpha^{-1}]) * [\alpha] = [\delta]$$

Επομένως $\hat{\beta} = \alpha^{-1}$. ■

Πόρισμα 3.1: Αν ο X είναι δρομοσυνεκτικός, τότε

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1), \quad \forall x_0, x_1 \in X.$$

Το προηγούμενο πόρισμα έχει μια επιπλέον συνέπεια: εάν $x_0 \in X$ και η C συνεκτική συνιστώσα του X που περιέχει το x_0 , τότε $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(C, x_0)$. Αυτό είναι χρήσιμο, μιας και δεν είναι αναγκαίο να εξετάσουμε ολόκληρο τον χώρο για να μελετήσουμε την θεμελιώδη ομάδα βασισμένη στο x_0 αλλά αντ' αυτού μας αρκεί να κοιτάξουμε την συμπεριφορά της ομάδας στο πλαίσιο της συνεκτικής συνιστώσας C .

Δείξαμε ότι εάν ο X είναι δρομοσυνεκτικός, τότε όλες οι θεμελιώδεις ομάδες είναι ισομορφικές μεταξύ τους. Αν αυτό δεν συμβαίνει, ωστόσο, δεν μπορούμε εν γένει να ταυτίσουμε με κάποιον τρόπο την $\pi_1(X, x_0)$ με την $\pi_1(X, x_1)$ (με εξαίρεση την περίπτωση όπου η $\pi_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή, όπου τότε η $\hat{\alpha}$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του α).

Ορισμός 3.7: Ένας χώρος X λέγεται απλά συνεκτικός εάν είναι δρομοσυνεκτικός και $\pi_1(X, x_0) = 0 \quad \forall x \in X$ (δηλ. η θεμελιώδης ομάδα είναι η τετριμμένη).

Λήμμα 3.1: Σε έναν απλά συνεκτικό χώρο X , οποιαδήποτε μονοπάτια $x_0 \rightarrow x_1$ είναι ομοτοπικά.

Απόδειξη. Έστω $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X, x_0 \rightarrow x_1$. Τότε το γινόμενο $\alpha * \beta^{-1}$ είναι ένας βρόχος με βάση το x_0 , δηλ. $\alpha * \beta^{-1} \in \pi_1(X, x_0)$. Επειδή, όμως, ο X είναι απλά συνεκτικός η θεμελιώδης ομάδα με βάση το x_0 θα είναι η τετριμμένη, άρα

$$\alpha * \beta^{-1} \simeq_p e_{x_0} \rightarrow [\alpha * \beta^{-1}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta] \Rightarrow [\alpha] = [\beta]$$

Μια άλλη βασική ιδιότητα της θεμελιώδους ομάδας είναι ότι αποτελεί τοπολογική αναλλοίωτη.

Πράγματι, έστω $h : X \rightarrow Y$ συνεχής με $h(x_0) = y_0$. Για γ βρόχο με βάση το x_0 , το $h \circ \gamma$ είναι βρόχος με βάση το y_0 . Ορίζουμε την απεικόνιση:

$$h_{*,x_0} : \pi_1(X,x_0) \rightarrow \pi_1(Y,y_0), [\gamma] \rightarrow h_{*,x_0}(\gamma) = [h \circ \gamma]$$

Η απεικόνιση που μόλις ορίσαμε λέγεται *ομομορφισμός επαγόμενος από την h σε σχέση με το x_0* . Η h_* (παραλείπουμε το x_0 ως δείκτη εφόσον δεν προκαλείται σύγχυση) είναι καλώς ορισμένη, μιας και για $\gamma \simeq_p \gamma'$ και H μια ομοτοπία ανάμεσα στις γ, γ' έπεται ότι η $h \circ H$ είναι ομοτοπία ανάμεσα στις $h \circ \gamma, h \circ \gamma'$. Το ότι είναι ομομορφισμός προκύπτει απ' το ότι:

$$h \circ (\gamma_1 * \gamma_2) = (h \circ \gamma_1) * (h \circ \gamma_2), \forall \gamma_1, \gamma_2.$$

Σαφώς, ο συγκεκριμένος ομομορφισμός εξαρτάται τόσο από την επιλογή της h όσο και από του x_0 . Έχουμε, τώρα, το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.2: Αν $h : X \rightarrow Y$ συνεχής με $h(x_0) = y_0$ και $k : Y \rightarrow Z$ με $k(y_0) = z_0$, τότε:

$$(k \circ h)_{*,x_0} = k_{*,y_0} \circ h_{*,x_0}$$

Επιπλέον, αν $\mathbf{1} : X \rightarrow X$ η ταυτοτική απεικόνιση, τότε ο $\mathbf{1}_{x_0}$ είναι ο ταυτοτικός ισομορφισμός.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή των ορισμών. Για γ βρόχο με βάση το x_0 :

$$\begin{aligned} (k \circ h)_{*,x_0}([\gamma]) &= [(k \circ h) \circ \gamma] = [k \circ (h \circ \gamma)] = k_{*,y_0}([h \circ \gamma]) = \\ &= k_{*,y_0}(h_{*,x_0}([\gamma])) = k_{*,y_0} \circ h_{*,x_0}([\gamma]) = (k_{*,y_0} \circ h_{*,x_0})([\gamma]). \end{aligned}$$

Ομοίως, $\mathbf{1}(\gamma) = [\mathbf{1} \circ \gamma] = [\gamma]$. ■

Πόρισμα 3.2: Αν $h : X \rightarrow Y$ με $h(x_0) = y_0$ και h ομοιομορφισμός, τότε η h_{*,x_0} είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω $h^{-1} : Y \rightarrow X$ με $h^{-1}(y_0) = x_0$. Τότε:

$$h^{-1} \circ h_{*,x_0} = \mathbf{1}_{*,x_0} \quad \text{και} \quad h_{*,x_0} \circ h^{-1} = \mathbf{1}_{*,y_0}$$

Άρα $(h_{*,x_0})^{-1} = h^{-1}$ ■

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα με την ανάπτυξη τεχνικών για την εύρεση θεμελιωδών ομάδων κάποιων χρήσιμων συνόλων. Η γνώση αυτών των θεμελιωδών ομάδων θα αποδειχθεί κρίσιμη όταν θα αναπτύξουμε αργότερα το θεώρημα του Brouwer. Παραθέτουμε, αρχικά, τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.8: Έστω E, B τοπολογικοί χώροι και $\pi : E \rightarrow B$ συνεχής και επί. Η π καλείται *απεικόνιση κάλυψης* εάν για κάθε $b \in B$ υπάρχει περιοχή V_b του b για την οποία:

$$\pi^{-1}(V_b) = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha, \quad U_\alpha \in \mathcal{T}_E, \quad \forall \alpha \in A$$

όπου τα U_α είναι ξένα μεταξύ τους και ο περιορισμός της π σε κάθε U_α είναι ομοιομορφισμός με το V_b . Ο E καλείται *χώρος κάλυψης του B* και η οικογένεια $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ λέγεται *τεμαχισμός του $\pi^{-1}(V_b)$*

Ήδη από αυτόν τον ορισμό και μόνο έχουμε μια χρήση ιδιότητα για αυτού του είδους τις απεικονίσεις:

Πρόταση 3.1: Κάθε απεικόνιση κάλυψης π είναι ανοικτή.

Απόδειξη. Αν $A \in \mathcal{T}_E$, τότε για $y \in \pi(A)$ και V_x τ.ώ:

$$\pi^{-1}(V_x) = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha, \quad U_\alpha \in \mathcal{T}_E,$$

θα υπάρχει κάποιο U_β και $x \in U_\beta$ με $\pi(x) = y$. Τότε το $U_\beta \cap A \in \mathcal{T}_E$ άρα το U_β είναι ανοικτό στην σχετική τοπολογία του A που επάγεται από την \mathcal{T}_E . Επειδή, τώρα, η π περιορισμένη στο U_β είναι ομοιομορφισμός, έπεται ότι $\pi(U_\beta \cap A) \in \mathcal{T}_{V_x|B} \Rightarrow \pi(U_\beta \cap A) \in \mathcal{T}_B$. Συνεπώς, το $\pi(U_\beta \cap A)$ είναι μια ανοικτή περιοχή του y που περιέχεται στο $\pi(A)$. Άρα, το $\pi(A)$ είναι \mathcal{T}_B -ανοικτό, δηλαδή η π είναι ανοικτή απεικόνιση. ■

Ορισμός 3.9: Έστω $\pi : E \rightarrow B$ απεικόνιση και $f : X \rightarrow B$ συνεχής. Θα ονομάζουμε μια ανύψωση της f κάποια απεικόνιση $\tilde{f} : X \rightarrow E$ τέτοια ώστε:

$$\pi \circ \tilde{f} = f$$

Λήμμα 3.2: Έστω $\pi : E \rightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης και έστω $\pi(e_0) = b_0$. Κάθε δρόμος $f : [0,1] \rightarrow B$ με σημείο εκκίνησης το b_0 ανυψώνεται με μοναδικό τρόπο σε μονοπάτι $\tilde{f} : [0,1] \rightarrow E$ με σημείο εκκίνησης το e_0 .

Απόδειξη. Καλύπτουμε το B με ανοικτά σύνολα V κάθε ένα εκ των οποίων τεμαχίζεται από την π . Βρίσκουμε μια διαμέριση του $[0,1]$, έστω s_0, s_1, \dots, s_n τέτοια ώστε το σύνολο $f([s_i, s_{i+1}])$ να βρίσκεται σε κάποιο από αυτά τα V . Αυτό καθίσταται εφικτό λόγω του λήμματος Lebesgue. Ορίζουμε, τώρα, την \tilde{f} βήμα προς βήμα.

Αρχικά, θέτουμε $\tilde{f}(0) = e_0$. Ύστερα, υποθέτοντας ότι η $\tilde{f}(s)$ είναι ορισμένη στο $[0, s_i]$, ορίζουμε την \tilde{f} στο $[s_i, s_{i+1}]$ ως εξής: το σύνολο $f([s_i, s_{i+1}])$ κείται σε κάποιο ανοικτό V που τεμαχίζεται από το π .

Έστω $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ο τεμαχισμός του $\pi^{-1}(V)$, τότε κάθε ένα από τα U_α είναι ομοιομορφικό με το V από την π . Τώρα το $\tilde{f}(s_i)$ βρίσκεται σε κάποιο από αυτά τα σύνολα, έστω το U_0 . Ορίζουμε την \tilde{f} στο $[s_i, s_{i+1}]$ ως :

$$\tilde{f}(s) = (\pi|_{U_0})^{-1}(f(s))$$

Η \tilde{f} είναι συνεχής στο $[s_i, s_{i+1}]$, αφού $\pi|_{U_0}$ ομοιομορφισμός.

Συνεχίζοντας επαγωγικά, μπορούμε εν τέλει να ορίσουμε την \tilde{f} σε όλο το $[0,1]$ και η \tilde{f} θα είναι συνεχής. Επιπλέον, η $\pi \circ \tilde{f} = f$ θα είναι συνεχής εκ κατασκευής.

Η μοναδικότητα της \tilde{f} προκύπτει από το εξής: Εάν \tilde{f}' είναι μια άλλη ανύψωση του σημείου f με σημείο εκκίνησης e_0 , άρα $\tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0) = e_0$. Έστω $\tilde{f}(s) = \tilde{f}'(s)$ για κάθε $[0, s_i]$ και έστω U_0 όπως προηγουμένως. Αφού ο \tilde{f} είναι ανύψωση του f πρέπει να απεικονίζει το $[s_i, s_{i+1}]$ στο $\pi^{-1}(V) = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Τα U_α είναι ανοικτά ξένα και επειδή το $\tilde{f}([s_i, s_{i+1}])$ είναι συνεκτικό, πρέπει να είναι ακριβώς ένα από τα U_α . Επειδή $\tilde{f}(s_i) = \tilde{f}'(s_i)$, το οποίο βρίσκεται στο U_0 , η \tilde{f}' απεικονίζει το $[s_i, s_{i+1}]$ εντός του U_0 .

Άρα για $s \in [s_i, s_{i+1}]$, το $\tilde{f}'(s)$ πρέπει να ισούται με κάποιο $y \in U_0$, που βρίσκεται στο $\pi^{-1}(f(s))$.

Υπάρχει όμως μόνο ένα τέτοιο σημείο, το $(\pi|_{U_n})^{-1}(f(s))$

Άρα $\tilde{f}(s) = \tilde{f}'(s) \forall s \in [s_i, s_{i+1}]$ ■

Αντίστοιχης λογικής είναι και η απόδειξη του ακόλουθου λήμματος:

Λήμμα 3.3 : Έστω $\pi : E \rightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης με $\pi(e_0) = b_0$. Εάν $F : [0, 1]^2 \rightarrow B$ είναι συνεχής $F(0,0) = b_0$, υπάρχει μοναδική ανύψωση της F σε συνεχή $\tilde{F} : [0, 1]^2 \rightarrow E$ με $\tilde{F}(0,0) = e_0$. Εάν η F είναι ομοτοπία δρόμων, τότε και η \tilde{F} είναι ομοτοπία δρόμων.

Θεώρημα 3.3: Έστω $\pi : E \rightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης με $\pi(e_0) = b_0$. Έστω f, g μονοπάτια στο B από το b_0 στο b_1 και έστω οι ανυψώσεις τους \tilde{f} , \tilde{g} που έχουν σημείο εκκίνησης το e_0 . Αν τα μονοπάτια f, g είναι ομοτοπικά, το ίδιο ισχύει και για τα \tilde{f} , \tilde{g} και καταλήγουν στο ίδιο σημείο.

Απόδειξη. Έστω $F : [0, 1] \rightarrow B$ η ομοτοπία ανάμεσα στις f, g . Τότε $F(0,0) = b_0$. Έστω $\tilde{F} : [0, 1]^2 \rightarrow E$ η ανύψωσή της με $\tilde{F}(0,0) = e_0$. Επειδή η \tilde{F} είναι ομοτοπία δρόμων, από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι:

$$\tilde{F}(0 \times [0, 1]) = \{e_0\} \quad \tilde{F}(1 \times [0, 1]) = \{e_1\},$$

για κάποιο $e_1 \in E$. Τώρα, ο περιορισμός της \tilde{F} στο $[0, 1] \times 0$ είναι ένας δρόμος στο E με αρχή το e_0 και είναι ανύψωση του δρόμου που είναι περιορισμός της F στο $[0, 1] \times 0$. Από την μοναδικότητα των ανυψώσεων δρόμων έπεται ότι $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s)$. Όμοια προκύπτει ότι $\tilde{F}(1, s) = \tilde{g}(s)$ και άρα θα πρέπει το e_1 να είναι το πέρας των \tilde{f} , \tilde{g} και η \tilde{F} είναι ομοτοπία μεταξύ τους.

Ορισμός 3.10: Έστω $\pi : E \rightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης. Για $b_0 \in B$ διαλέγουμε e_0 τέτοιο ώστε $\pi(e_0) = b_0$. Για $[f] \in \pi_1(B, b_0)$, έστω \tilde{f} ανύψωση της f σε δρόμο που ξεκινάει από το e_0 . Έστω $\varphi([f]) = \tilde{f}(1)$ το σημείο άφιξης της \tilde{f} . Τότε η φ είναι καλώς ορισμένη απεικόνιση:

$$\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi^{-1}(b_0)$$

και θα την ονομάζουμε *ανυψωτική αντιστοιχία* επαγόμενη από την απεικόνιση κάλυψης π .

Θεώρημα 3.4: Έστω $\pi : E \rightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης με $\pi(e_0) = b_0$. Έαν το E είναι δρομοσυνεκτικό, τότε η ανυψωτική αντιστοιχία:

$$\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi^{-1}(b_0)$$

είναι επί. Αν το E είναι απλά συνεκτικό, τότε η φ είναι και 1-1.

Απόδειξη. Αν το E είναι δρομοσυνεκτικό, θεωρούμε $e_1 \in \pi^{-1}(b_0)$. Τότε υπάρχει \tilde{f} του E από το e_0 στο e_1 . Άρα η $f = \pi \circ \tilde{f}$ με βάση το b_0 και εξ ορισμού $\varphi([f]) = e_1$.

Αν, τώρα, το E είναι απλά συνεκτικό, θεωρούμε f, g στοιχεία της $\pi_1(B, b_0)$ με $\varphi([f]) = \varphi([g])$. Έστω οι ανυψώσεις τους \tilde{f}, \tilde{g} με σημείο εκκίνησης το e_0 . Τότε $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Λόγω του ότι το E είναι απλά συνεκτικό, θα υπάρχει ομοτοπία \tilde{F} μεταξύ των \tilde{f}, \tilde{g} (διότι η $\tilde{f} * \tilde{g}^{-1}$ είναι ομοτοπική με τον σημείο "βρόχο" $e_0 \rightarrow e_0$). Τότε η $\pi \circ \tilde{F}$ είναι ομοτοπία ανάμεσα στις f, g και άρα $[f] = [g]$, δηλ. η φ είναι 1-1. ■

Όλα τα προηγούμενα θα μας φανούν ιδιαιτέρως χρήσιμα στη συνέχεια, μεταξύ άλλων και στο ακόλουθο:

Θεώρημα 3.5: Η θεμελιώδης ομάδα $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ του είναι ισομορφική με την προσθετική ομάδα των ακεραίων $(\mathbb{Z}, +)$

Απόδειξη. Αν $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ απεικόνιση κάλυψης με $\pi(x) = e^{2i\pi nx}$, τότε είναι $\pi(0) = 1$ και $\pi(\mathbb{Z}) = \{1\}$. Επειδή το \mathbb{R} είναι απλά συνεκτικό, η ανυψωτική αντιστοιχία

$$\varphi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$$

θα είναι 1-1 και επί. Μένει να δειχθεί ότι η φ θα είναι και ομομορφισμός ομάδων. Έστω, λοιπόν, $[f], [g] \in \pi_1(S^1, 1)$ και αντίστοιχα \tilde{f}, \tilde{g} οι ανυψώσεις τους με βάση την π , με σημείο εκκίνησης το 0. Για $n = \tilde{f}(1)$, $m = \tilde{g}(1)$ θα έχουμε εξ ορισμού ότι $\varphi([f]) = n$, $\varphi([g]) = m$. Έστω το μονοπάτι

$$\tilde{g}'(s) = n + \tilde{g}(s)$$

Επειδή $\pi(n + x) = \pi(x) \forall x \in \mathbb{R}$, η \tilde{g}' θα είναι ανύψωση του g που ξεκινά από το n . Μπορούμε, λοιπόν, να ορίσουμε την $\tilde{f} * \tilde{g}'$ το οποίο είναι

ένα μονοπάτι που αποτελεί ανύψωση της $f * g$, έχει αρχή το 0. Το σημείο άφιξης της \tilde{g}' είναι το $n + m$. Επομένως, από τον ορισμό της φ έχουμε:

$$\varphi([f] * [g]) = n + m = \varphi([f]) + \varphi([g])$$

Στη συνέχεια, για $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ θα δείξουμε ότι η αντίστοιχη θεμελιώδης ομάδα είναι η τετριμμένη, όταν $n \geq 2$.

Θα δείξουμε, αρχικά, το επόμενο:

Θεώρημα 3.6: Έστω X τοπολογικός χώρος που μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο απλά συνεκτικών συνόλων U, V έτσι ώστε η τομή $U \cap V$ είναι συνεκτική κατά δρόμους. Τότε ο X είναι απλά συνεκτικός.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι κάθε βρόχος στον X είναι ομοτοπικός με ένα γινόμενο μονοπατιών, κάθε ένα από τα οποία βρίσκεται είτε στο U είτε στο V . Αυτό αρκεί, μιας και τα U, V είναι απλά συνεκτικά.

Επιλέγουμε ένα σημείο βάσης $x_0 \in U \cap V$ και έστω $f: [0, 1] \rightarrow X$ βρόχος με βάση το x_0 . Από το λήμμα του Lebesgue θα υπάρξει διαμέριση του $[0, 1]$, έστω $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ τέτοια ώστε η εικόνα $f([t_{k-1}, t_k])$ να περιέχεται εξ ολοκλήρου είτε στο U είτε στο V .

Έστω

$$f_k: [0, 1] \rightarrow X, \quad s \rightarrow f_k(s) = f((t_k - t_{k-1})s + t_{k-1})$$

Συνδέουμε το x_0 με κάθε σημείο $f(t_k)$ για $k = 1, 2, \dots, n - 1$ με δρόμο g_k ο οποίος βρίσκεται στο U αν $f(t_k) \in U$ ή βρίσκεται στο V εάν $f(t_k) \in V$. Αν $f(t_k) \in U \cap V$, ο δρόμος g_k θα βρίσκεται στο $U \cap V$, αφού έχουμε υποθέσει ότι η τομή αυτή είναι δρομοσυνεκτικό σύνολο. Τελικά, έχουμε ότι η f είναι ομοτοπική με το γινόμενο:

$$(f_1 * g_1^{-1}) * (g_1 * f_2 * g_2^{-1}) * \dots * (g_{n-1} * f_n)$$

και κάθε ένα από τα επιμέρους μονοπάτια βρίσκεται είτε στο U είτε στο V . ■

Έχουμε, λοιπόν, την δυνατότητα να αποδείξουμε το εξής:

Θεώρημα 3.7: Η S^n είναι απλά συνεκτική και, άρα, η θεμελιώδης ομάδα της είναι η τετριμμένη.

Απόδειξη. Έστω n, s ο βόρειος και ο νότιος πόλος της σφαίρας S^n αντίστοιχα. Μέσω των στερεογραφικών προβολών, τα σύνολα

$U = S^n \setminus \{n\}$, $V = S^n \setminus \{s\}$ είναι ομοιομορφικά με το \mathbb{R}^n , άρα θα είναι απλά συνεκτικά. Επίσης, για $n \geq 2$ το σύνολο $U \cap V$ είναι δρομοσυνεκτικό. Απ' το προηγούμενο θεώρημα, έπεται ότι η S^n είναι απλά συνεκτική ■

Κλείνουμε την ενότητα με μια έννοια που είναι καίριας σημασίας για την απόδειξη του Θεωρήματος Brouwer. [Type equation here.](#)

Ορισμός 3.11: Έστω τοπολογικός χώρος X και $A \subset X$. Μια ανάκλιση (retraction) του X επί του A είναι μια συνεχής απεικόνιση $r : X \rightarrow A$ τέτοια ώστε ο περιορισμός $r|_A$ στο A να είναι η ταυτοτική απεικόνιση του A . Εάν υπάρχει μια τέτοια απεικόνιση, καλούμε το A ανάκλιση του X .

Λήμμα 3.4: Αν το A είναι ανάκλιση του X , τότε ο επαγόμενος από τον εγκλεισμό ομομορφισμός θεμελιωδών ομάδων $i_A : A \rightarrow X$ είναι 1-1.

Απόδειξη. Εάν $r : X \rightarrow A$ ανάκλιση, τότε η σύνθεση $r \circ i_A$ ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση του A . Άρα η $r_* \circ (i_A)_*$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση της $\pi_1(A, a)$, $a \in A$, άρα η $(i_A)_*$ αναγκαστικά είναι 1-1. ■

Κεφάλαιο 4

Το Θεώρημα Καμπυλών του Τζόρνταν: 1^η Απόδειξη μέσω στοιχειωδών τεχνικών

Θεώρημα (Jordan) 4.0: Έστω μια καμπύλη Jordan $J : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Τότε η J χωρίζει το επίπεδο σε ακριβώς δύο συνιστώσες, εκ των οποίων η μια είναι φραγμένη και η άλλη μη φραγμένη. Επιπλέον, η εικόνα της καμπύλης στο επίπεδο αποτελεί το κοινό σύνορο των δύο συνιστωσών.

Το παραπάνω αποτελεί τη διατύπωση του JCT. Προχωράμε στην απόδειξη του Θεωρήματος μέσω βασικών εργαλείων της μιγαδικής ανάλυσης και τοπολογίας. Τα πρώτα δύο Λήμματα [4.1,4.2] χρησιμοποιούνται και στην 2^η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε (Κεφ.5):

Λήμμα 4.1: Δοθέντος ενός μονοπατιού $\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ (ή ενός βρόχου $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$) στο επίπεδο, οι συνιστώσες του συμπληρώματος της εικόνας της γ είναι ανοικτές και δρόμο-συνεκτικές.

Απόδειξη. Σε κάθε περίπτωση, το πεδίο ορισμού της γ είναι συμπαγές σύνολο και επειδή η γ είναι συνεχής απεικόνιση έπεται ότι και η εικόνα της γ στο \mathbb{C} είναι συμπαγές υποσύνολό του. Κατά συνέπεια, θα είναι και κλειστό υποσύνολο του \mathbb{C} , άρα το συμπλήρωμα της γ είναι ανοικτό. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του συμπληρώματος είναι ανοικτή ως υποσύνολο ανοικτού συνόλου, ενώ κάθε ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του \mathbb{C} είναι και δρομο-συνεκτικό, που μας δίνει το ζητούμενο. ■

Λήμμα 4.2: Δοθείσης μιας καμπύλης Jordan, ακριβώς μια εκ των συνιστωσών του $\mathbb{C} \setminus J$ είναι μη φραγμένη. Σαφώς επειδή το J είναι συμπαγές, το $\mathbb{C} \setminus J$ πρέπει να περιλαμβάνει τουλάχιστον μια συνεκτική συνιστώσα.

Απόδειξη. Ως συνεχής εικόνα συμπαγούς, η καμπύλη Jordan J αποτελεί συμπαγές σύνολο. Ειδικότερα, θα είναι και φραγμένο, οπότε θα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε: $J \subset \overline{B}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\} \equiv \overline{B(0, r)}$.

Το ανοικτό και συνεκτικό σύνολο B_r^c είναι ξένο με το J , επομένως περιλαμβάνεται σε μια εκ των συνιστώσων του $\mathbb{C} \setminus J$, έστω U . Όμως κάθε μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus J$ θα πρέπει να τέμνει το B_r^c , άρα και το U . Επειδή, όμως, οι συνεκτικές συνιστώσες διαμερίζουν το $\mathbb{C} \setminus J$, δεν μπορεί παρά αυτές οι μη φραγμένες συνιστώσες να ταυτίζονται με το U , εξ ου και το ζητούμενο. ■

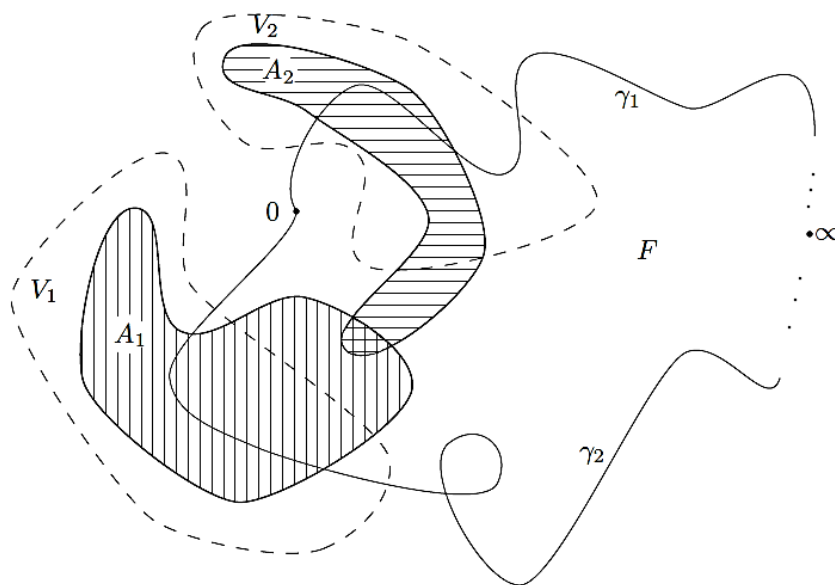
Βασικό για τον τελικό σκοπό μας είναι το εξής αποτέλεσμα από τον Janiszewski.

Θεώρημα (Janiszewski) 4.1: Έστω A, B δύο συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{C} και $a, b \in \mathbb{C} \setminus (A \cup B)$ με $a \neq b$. Εάν κανένα εκ των A, B δεν διαχωρίζει τα a και b και το $A \cap B$ είναι συνεκτικό, τότε ούτε το $A \cup B$ δεν διαχωρίζει τα a και b .

Το εν λόγω θεώρημα θαδειχθεί ως ειδική περίπτωση του ακόλουθου λήμματος:

Λήμμα 4.3: Έστω A_1, A_2 δύο κλειστά υποσύνολα του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου και έστω $a, b \in \mathbb{C}$. Εάν κανένα από τα A_1, A_2 δεν διαχωρίζουν τα a, b και το $A_1 \cap A_2$ είναι συνεκτικό, τότε το $A_1 \cup A_2$ δεν διαχωρίζει τα a, b .

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, στην θέση των a, b θα θεωρήσουμε τα $0, \infty$. Τα ακόλουθα αναπτύσσονται με βάση το παρακάτω σχήμα:



Εικόνα vii: Κατασκευή κλάδου λογαρίθμου σε χωρίο για την απόδειξη του Janiszewski, Θεωρ.4.1

Για $i = 1, 2$ έχουμε τα ακόλουθα:

Εφόσον το A_i δεν διαχωρίζει τα $0, \infty$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μονοπάτι γ_i που να ενώνει τα δύο αυτά σημεία και να μην τέμνει το A_i , δηλ $|\gamma_i| \cap A_i = \emptyset$. Θεωρούμε, τώρα, το βρόχο $\gamma_1 + \overline{\gamma_2}$. Είναι σαφές, αρχικά, ότι ο εν λόγω βρόχος δεν τέμνει το συνεκτικό σύνολο $A_1 \cap A_2$. Στην περίπτωση που $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ θεωρούμε την συνεκτική συνιστώσα που περιέχει το $A_1 \cap A_2$. Αν $A_1 \cap A_2 = \mathbb{H}$, τότε διαλέγουμε οποιαδήποτε συνιστώσα εντός του συμπληρώματος του βρόχου. Θα συμβολίσουμε την συνιστώσα αυτή με F στη συνέχεια.

Γνωρίζουμε από την μιγαδική ανάλυση ότι εάν ένα χωρίο $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ είναι απλά συνεκτικό, τότε μπορούμε για κάθε $a \in \Omega^c$ να διαλέξουμε έναν καλώς ορισμένο κλάδο της απεικόνισης $z \rightarrow \log(z - a)$. Επιπλέον ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbb{C}$ είναι απλά συνεκτικό αν το $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ είναι συνεκτικό. Από τα προηγούμενα, λοιπόν, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν καλώς ορισμένο κλάδο λογαρίθμου f_i στο σύνολο $\overline{\mathbb{C}} \setminus |\gamma_i|$, μιας και το συμπλήρωμα αυτών των συνόλων ως προς το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο είναι ακριβώς το δρόμο-συνεκτικό σύνολο $|\gamma_i|$, που περιλαμβάνει το 0. Μπορούμε, μάλιστα, να κατασκευάσουμε τους εν λόγω κλάδους με τέτοιο τρόπο ώστε να συμπίπτουν επί του F .

Αν αφαιρέσουμε ένα ανοικτό σύνολο από ένα συμπαγές, το σύνολο που προκύπτει παραμένει συμπαγές, επομένως τα σύνολα $A_i \setminus F$ είναι συμπαγή. Εφόσον τα $A_i \setminus F$ και $|\gamma_i|$ είναι ξένα συμπαγή, θα είναι $r = \text{dist}(A_i \setminus F, |\gamma_i|) > 0$. Υπάρχει, λοιπόν, μια ανοικτή περιοχή V_i που να περικλείει το $A_i \setminus F$ και να μην τέμνει την $|\gamma_i|$. Εφόσον τα $A_i \setminus F$, $i = 1, 2$ είναι ξένα συμπαγή, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα

V_1, V_2 είναι ξένα.

Εάν συμβολίσουμε $H = V_1 \cup F \cup V_2$, μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{αν } z \in V_1 \\ f_2(z) & \text{αν } z \in V_2 \\ f_1(z) = f_2(z) & \text{αν } z \in F \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι αναλυτική επί του H (αρα και επί του $A_1 \cup A_2$) και για κάθε $z \in H$ ισχύει:

$$\exp(f(z)) = z.$$

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το $A_1 \cup A_2$ διαχωρίζει τα σημεία $0, \infty$. Τότε κατά συνέπεια και το H θα έπρεπε να διαχωρίζει τα σημεία αυτά. Αυτό συνεπάγεται ότι θα υπάρχει μια φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του συμπληρώματος του H . Μπορούμε, τώρα, να κατασκευάσουμε έναν δρόμο γ ο οποίος να έχει δείκτη στροφής $I(\gamma, 0) = 1$ (ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται αυτή η κατασκευή υπάρχει στο [11],[12]). Τότε, όμως, καταλήγουμε σε άτοπο διότι:

$$I(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f'(z) dz = 0 \neq 1$$

Επομένως το $A_1 \cup A_2$ δεν διαχωρίζει τα σημεία $0, \infty$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

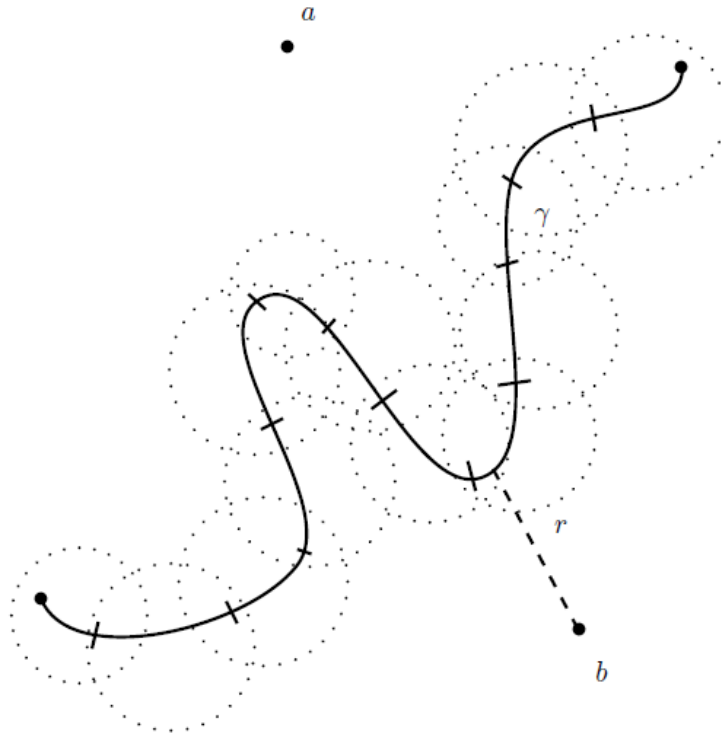
Απόδειξη(Θ. Janiszewski). Είναι άμεση από το προηγούμενο λήμμα, εάν λάβουμε υπόψη ότι τα συμπαγή υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου είναι κλειστά για το \mathbb{C} .

Από το Θεώρημα του Janiszewski παίρνουμε, τώρα, το εξής χρήσιμο:

Πόρισμα 4.1: Το συμπλήρωμα ενός απλού τόξου είναι συνεκτικό (δηλ. δεν διαχωρίζει σημεία που δεν περιλαμβάνονται στην εικόνα του).

Απόδειξη. Έστω $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ένα απλό τόξο. Δοθέντων $a, b \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Επειδή η εικόνα του γ στο μιγαδικό επίπεδο είναι συμπαγής ($[0, 1]$ συμπαγές και γ συνεχής) έχουμε ότι $d(a, |\gamma|) > 0$ και $d(b, |\gamma|) > 0$.

Θέτουμε $r = \min\{d(a, |\gamma|) > 0, d(b, |\gamma|) > 0\}$. Η απόδειξή μας στηρίζεται στο σχήμα της επόμενης σελίδας (Εικόνα viii).



Εικόνα viii: Το συμπλήρωμα ενός απλού τόξου είναι συνεκτικό

Λόγω συμπάγειας του $[0,1]$, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια διαμέρισή του σε υποδιαστήματα της μορφής $[0,t_1], \dots, [t_{n-1}, 1]$ με τέτοιο τρόπο ώστε ο περιορισμός $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ να περιέχεται μέσα σε μια μπάλα ακτίνας μικρότερης του r , η οποία μάλιστα δεν θα περιέχει κανένα από τα a, b . Εφόσον μπορούμε να συνδέσουμε τα σημεία a, b με μια καμπύλη που βρίσκεται στο συμπλήρωμα όλων αυτών των μπαλών, μπορούμε να κατασκευάσουμε την εν λόγω διαδρομή ώστε να μην τέμνει το $\mathbb{C} \setminus \gamma_i$. Κατά συνέπεια, καμιά από τις γ_i δεν διαχωρίζει τα a, b . Μπορούμε, τώρα, να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας επαγωγικά, ότι η $\gamma_1 + \dots + \gamma_i, i = 1, \dots, n$

... Για $n = 1$ γνωρίζουμε ότι η γ_1 δεν διαχωρίζει τα a, b , αφού καμιά εκ των γ_i δεν διαχωρίζει τα δύο αυτά σημεία.

... Έστω τώρα ότι η $\alpha = \gamma_1 + \dots + \gamma_i$ δεν διαχωρίζει τα a, b . Τότε $a \cap \gamma_{i+1} = \{\gamma_{i+1}(t_i + 1)\}$, διότι η γ είναι απλή. Εξ υποθέσεως, οι a, γ_{i+1} δεν διαχωρίζουν τα a, b , ενώ η τομή τους είναι μονοσύνολο, δηλαδή συνεκτικό σύνολο. Από το θεώρημα του Janiszewski έπεται ότι η $|a| \cup |\gamma_{i+1}| = |\gamma_1 + \dots + \gamma_i + \gamma_{i+1}|$ δεν διαχωρίζει τα a, b γεγονός που ολοκληρώνει την αποδείξη μας. ■

Λήμμα 4.4: Δοθείσης μιας καμπύλης Jordan J , το σύνολο οποιασδήποτε συνιστώσας του $\mathbb{C} \setminus J$ είναι ακριβώς η J .

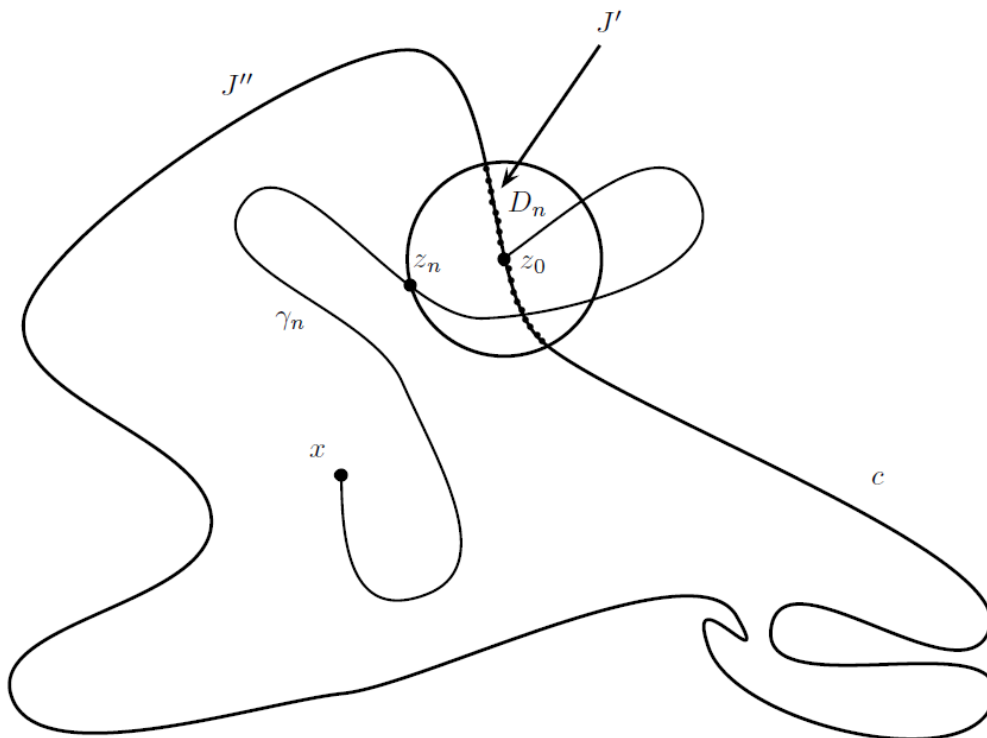
Απόδειξη.

❖ Έστω A συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus J$. Θα δείξουμε ότι $\partial A = J$.

❖ Έστω $z_0 \in \partial A$. Επειδή το A είναι ανοιχτό, θα ισχύει ότι $z_0 \notin A$.

Επίσης, το συμπλήρωμα του A θα περιέχει την J και πιθανώς άλλες συνιστώσες του $\mathbb{C} \setminus J$. Εάν το z_0 ανήκε σε κάποια άλλη συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus J$, τότε θα υπήρχε μια ανοικτή περιοχή του z_0 που θα βρισκόταν εντός της συγκεκριμένης συνιστώσας. Τότε, όμως, η ανοικτή περιοχή αυτή θα έτεμνε και το A , μιας και το z_0 είναι σημείο του συνόρου του A . Θα είχαμε, λοιπόν, μια ανοικτή περιοχή που θα έτεμνε δύο διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{C} \setminus J$, το οποίο είναι βέβαια άτοπο. Επομένως θα πρέπει $z_0 \in J$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, ας ξεκινήσουμε με ένα $z_0 \in J$. Αρκεί, τότε, να δείξουμε ότι \bar{A} και άρα αρκεί απλώς να κατασκευάσουμε μια ακολουθία σημείων για $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ την οποία να ισχύει $z_n \rightarrow z_0$. Τα επόμενα αναφέρονται στο ακ'όλουθο σχήμα:



Εικόνα ix: Επιλέγουμε σημεία μιας συνιστώσας αυθαίρετα κοντά στην καμπύλη J

Έστω $x \in A$. Επιλέγουμε αρχικά, $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο έτσι ώστε $\min(d(z_0, x), d(J)) > \frac{1}{n}$ και συμβολίζουμε $D_n := B\left(z_0, \frac{1}{n}\right)$. Συμβολίζουμε, επίσης, ως J' τη συνιστώσα του $D_n \cap J$ που περιέχει το z_0 . Η απεικόνιση J είναι ομοιομορφισμός ανάμεσα στα σύνολα S^1 & $|J|$, συνεπώς η προ-εικόνα του $|J'|$ θα είναι ένα ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο του S^1 . Έτσι, το συμπλήρωμα της εν λόγω προ-εικόνας θα είναι ομοιομορφικό με το $[0, 1]$ και αυτό παράγει ένα απλό τόξο το οποίο αντιστοιχεί στην απεικόνιση του συμπληρώματος αυτού μέσω της J , έστω $J^n = J \setminus J'$. Από προηγούμενο πόρισμα, το απλό τόξο που αντιστοιχεί στο J^n δεν διαχωρίζει τα x, z_0 . Εφόσον, τώρα, οι ανοικτές συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{C} \setminus J$ είναι δρομοσυνεκτικά σύνολα, θα υπάρχει μια καμπύλη :

$$\gamma_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus J^n \text{ με } \gamma_n(0) = x, \gamma_n(1) = z_0$$

Η καμπύλη αυτή ενώνει τα x, z_0 . Θέτουμε:

$$t_0 = \inf\{t \in [0, 1] : \gamma_n(t) \in \partial D_n\}, z_n = \gamma_n(t_0)$$

όπου t_0 είναι το πρώτο σημείο επαφής της καμπύλης γ_n με το σύνορο του D_n . Αν $B = \{t \in [0, 1] : \gamma_n(t) \in D_n\}$, τότε το B είναι κάτω φραγμένο- εξ ορισμού- και μη κενό, μιας και η συνάρτηση $t \rightarrow d(\gamma_n(t), z_0)$ είναι συνεχής με:

$$d(\gamma_n(1), z_0) = d(z_0, z_0) = 0 < \frac{1}{n} < d(\gamma_n(0), z_0) = d(x, z_0)$$

(η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την επιλογή που κάναμε νωρίτερα για το $n \in \mathbb{N}$). Συνεπώς, από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει ένα $t \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $\gamma_n(t) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \gamma_n(t) \in \partial D_n$, δλδ. $B \neq \emptyset$.

Εξ ορισμού της γ_n , γνωρίζουμε ότι δεν πρόκειται να τέμνει το J^n , ούτε όμως το J' (διότι εάν το έτεμνε, θα παίρναμε άτοπο εφαρμόζοντας όπως προηγουμένως το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, αυτή τη φορά στο διάστημα $[0, t_0]$). Έτσι, $\gamma_n|_{[0, t_0]} \subset \mathbb{C} \setminus J$. Θα πρέπει, όμως, η καμπύλη να βρίσκεται στην συνιστώσα A , διότι βρίσκεται στο συμπλήρωμα του J και όλα τα σημεία του μονοπατιού αυτού θα πρέπει να βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα που περιέχει και το x , δηλ. στην A .

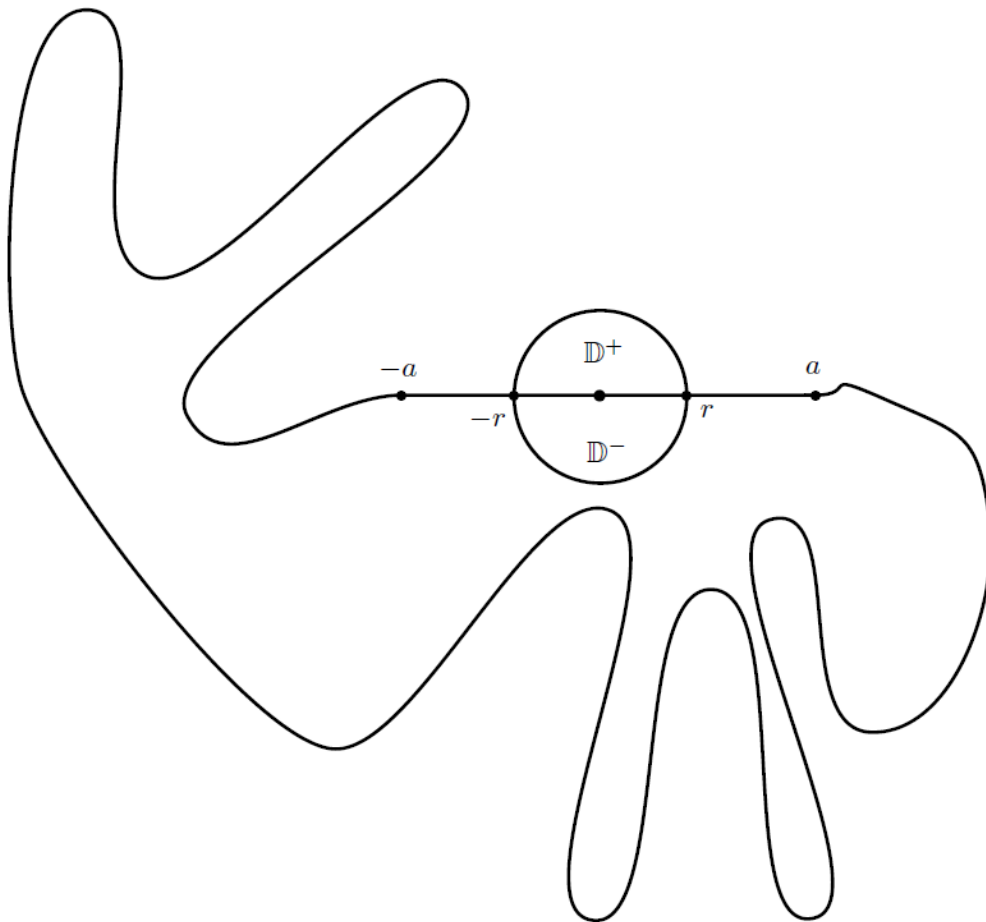
Άρα $\gamma_n|_{[0, t_0]} \subset A \Rightarrow z_n \in A$. Αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$, η ακολουθία z_n τείνει στο z_0 , γεγονός που το καθιστά οριακό σημείο του A και άρα η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Παρατήρηση: Μια γρήγορη επισκόπηση των όσων έχουμε δείξει έως τώρα ενδεχομένως να μας ωθήσει στο συμπέρασμα ότι είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα Καμπυλών του Jordan αξιοποιώντας το τελευταίο λήμμα. Ωστόσο, υπάρχει η δυνατότητα κατασκευής τριών (3) ξένων μεταξύ τους χωρίων στο επίπεδο με κοινό σύνορο. Πρέπει λοιπόν να παραθέσουμε και να αποδείξουμε και το επόμενο λήμμα για να έχουμε όλα τα εργαλεία στα χέρια μας.

Λήμμα 4.5: Το συμπλήρωμα μιας καμπύλης Jordan έχει ακριβώς δύο συνιστώσες.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το λήμμα σε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση I: Η καμπύλη Jordan J περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα



Εικόνα x: Απόδειξη του Θεωρήματος όταν η καμπύλη περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα

Έστω I το εν λόγω ευθύγραμμο τμήμα. Εφόσον μεταφορές και στροφές είναι ομοιομορφισμοί στο επίπεδο, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το ευθύγραμμο τμήμα είναι της μορφής $I = [-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$. Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι το σύνολο $J \setminus \text{int}I$ είναι συμπαγές. Επομένως, γνωρίζουμε ότι η απόσταση του συνόλου αυτού από το 0 είναι γνησίως μεγαλύτερη του μηδενός.

Θέτουμε : $r = \frac{1}{2}d(0, J \setminus \text{int}I)$ & $\mathbb{D}_r = B(0, r)$. Τότε $\mathbb{D}_r \cap J = [-r, r]$.

Συμβολίζουμε:

$$\mathbb{D}^+ = \{z \in B(0, r) : \text{Im}z > 0\} \text{ & } \mathbb{D}^- = \{z \in B(0, r) : \text{Im}z < 0\}$$

Εφόσον $0 \in I \subset J$, έχουμε από το προηγούμενο λήμμα ότι το 0 θα βρίσκεται στο σύνορο κάθε συνιστώσας του $\mathbb{C} \setminus J$. Κατά συνέπεια, κάθε συνιστώσα του συμπληρώματος του J θα έχει κοινά σημεία είτε με το \mathbb{D}^+ ή με το \mathbb{D}^- . Τα δύο σύνολα αυτά, όμως, είναι συνεκτικά ως κυρτά σύνολα και βρίσκονται στο $\mathbb{C} \setminus J$, άρα κάθε συνιστώσα του \mathbb{C} θα πρέπει να περιέχει είτε το \mathbb{D}^+ ή το \mathbb{D}^- , δηλ. το συμπλήρωμα της J έχει το πολύ δύο συνιστώσες. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη σε αυτήν την περίπτωση μένει να δειχθεί ότι το $\mathbb{C} \setminus J$ δεν είναι συνεκτικό. Αυτό θα το επιτύχουμε δείχνοντας ότι για κάθε $x \in \mathbb{D}^+$ και $y \in \mathbb{D}^-$ ανήκει σε διαφορετική συνιστώσα το καθένα.

Ας υποθέσουμε, προς απαγωγή εις άτοπο, ότι το $\mathbb{C} \setminus J$ είναι συνεκτικό. Διαλέγουμε $x \in \mathbb{D}_+$, $y \in \mathbb{D}_-$. Εφόσον η J είναι συμπαγές σύνολο, θα υπάρχει $R > 0$ αρκετά μεγάλο ώστε $J \subset B(0, R)$. Προφανώς, το σύνολο $G = \mathbb{D}_r \cap \overline{B}(0, R)$ δεν διαχωρίζει τα x, y , αφού το \mathbb{D}_r συνεκτικό ως κυρτό σύνολο. Εξ υποθέσεως, το J δεν διαχωρίζει τα x, y . Επιπλέον, η τομή των J, G είναι το συμπλήρωμα του διαστήματος $(-r, r)$ στο J , άρα είναι απλό τόξο. Από προηγούμενο πόρισμα, λοιπόν, η τομή αυτή δεν διαχωρίζει τα x, y γεγονός που συνεπάγεται από το θεώρημα Janiszewski ότι η ένωση $G \cup J$ δεν διαχωρίζει τα x, y . Έτσι, όμως, καταλήγουμε σε άτοπο, διότι το συμπλήρωμα αυτού του συνόλου είναι το

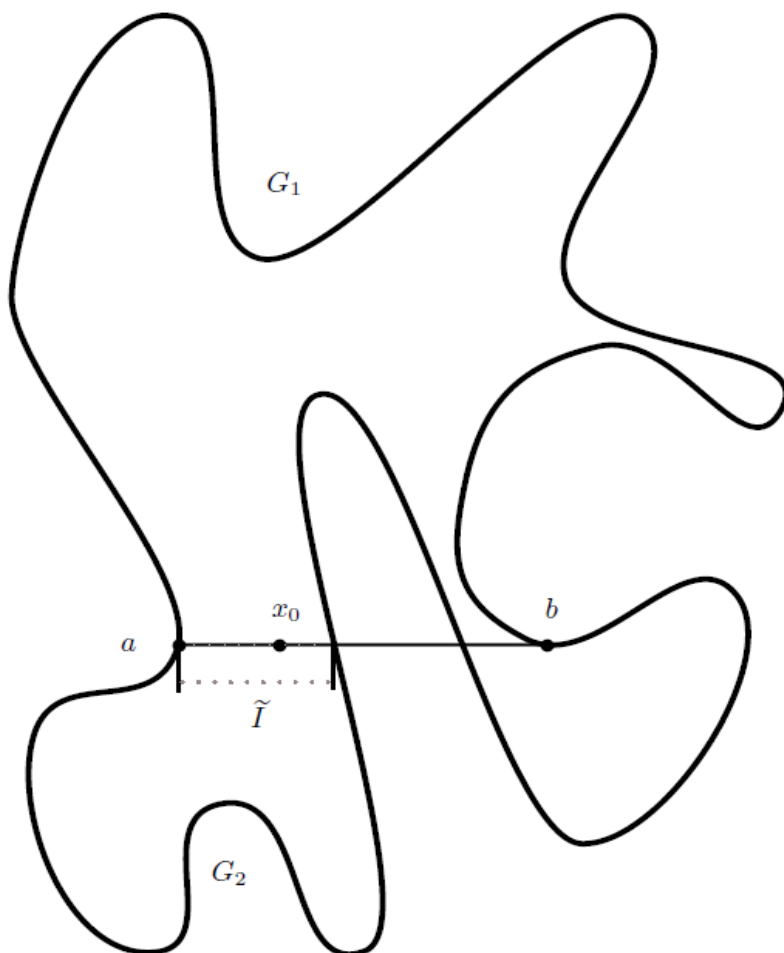
$$\mathbb{D}_+ \cup \mathbb{D}_- \cup (\overline{B}(0, R))^c \supset \mathbb{D}_+ \cup \mathbb{D}_-$$

το οποίο είναι σαφές ότι διαχωρίζει τα x, y . Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε τελικά ότι το $\mathbb{C} \setminus J$ έχει ακριβώς δύο συνιστώσες.

Περίπτωση II:

Έστω ότι δεν υπάρχει κομμάτι της καμπύλης Jordan J που να είναι ευθύγραμμο τμήμα. Έστω $a, b \in J$, $a \neq b$. Θα συμβολίσουμε με I το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από το a και καταλήγει στο b .

Όπως και προηγουμένως, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε ότι $I = [-a, a]$ για κάποιον θετικό πραγματικό αριθμό a .



Εικόνα xi: Επιλέγουμε ένα τμήμα το οποίο να μην συναντάει την καμπύλη Jordan

Εξ υποθέσεως, θα υπάρχει κάποιο σημείο στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος που να μην βρίσκεται στην εικόνα της J , έστω x_0 . Με βάση τα προηγούμενα, γνωρίζουμε ότι J^c είναι ανοικτό και $x_0 \in \text{int}I \cap J^c$ το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\text{int}I$ ως προς την επαγόμενη τοπολογία του επιπέδου. Θα υπάρχει, λοιπόν, μια ανοικτή περιοχή του x_0 , δηλ. ένα διάστημα της μορφής $I_0 = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, για $\delta > 0$, ώστε $I_0 \cap J = \emptyset$.

Θα κατασκευάσουμε, τώρα, το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα που περιέχει το x_0 και βρίσκεται εξ ολοκλήρου εκτός της J . Θέτουμε

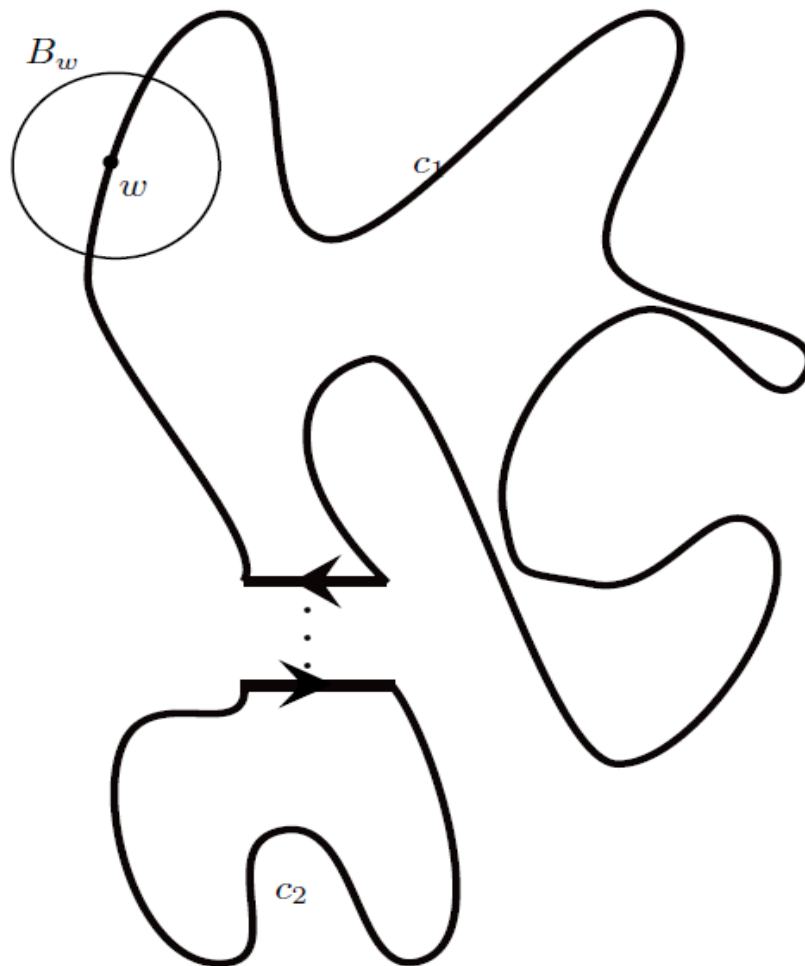
$$a = \inf\{x \in I : x, x_0) \subset J^c\} \text{ \& } \beta = \sup\{x \in I : x, x_0) \subset J^c\}$$

Τα a, β είναι καλώς ορισμένα, μιας και τα σύνολα στα οποία λάβαμε supremum/infimum είναι μη κενά και φράσσονται από το $\pm a$. Θέτουμε τώρα $\tilde{I} = (a, \beta)$. Η ιδέα της απόδειξης είναι ο τεμαχισμός της J σε κομμάτια που περιέχουν το \tilde{I} και εν συνεχεία η εφαρμογή της πρώτης περίπτωσης που αποδείξαμε προηγουμένως.

Παρατηρούμε ότι το $\Lambda\{a, \beta\}$ αποτελείται από δύο απλά τόξα, έστω G_1, G_2 .

Φτιάχνουμε, λοιπόν, δύο καμπύλες Jordan c_1, c_2 με:

- ❖ Την c_1 να ακολουθεί την G_1 και ύστερα να κινείται κατά μήκος του \tilde{I}
- ❖ Την c_2 να κινείται αρχικά κατά μήκος του \tilde{I} (με την αντίθετη φορά απ' την c_1) και ύστερα κατά μήκος της G_2 .



Εικόνα xii: Κατασκευή νέων καμπυλών Jordan που περιέχουν ευθυγμο τμήμα

Πιο αναλυτικά, αν αναπαραμετρήσουμε την $J : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ με $J(-1) = \alpha$ και $J(1) = \beta$. Συμβολίζουμε με L_1 τον μετασχηματισμό του $[0, \pi]$ στο $[\beta, \alpha]$ και L_2 τον μετασχηματισμό του $[\pi, 2\pi]$ στο $[\beta, \alpha]$ και ορίζουμε:

$$c_1: S^1 \rightarrow \mathbb{C}, c_1(e^{it}) = \begin{cases} J(t) \text{ αν } t \in [0, \pi] \\ L_2(t) \text{ αν } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$$c_2: S^1 \rightarrow \mathbb{C}, c_2(e^{it}) = \begin{cases} J(t) \text{ αν } t \in [0, \pi] \\ L_2(t) \text{ αν } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Και οι δυο καμπύλες που μόλις κατασκευάσαμε είναι καμπύλες Jordan που περιέχουν το ευθύγραμμο τμήμα Γ . Μπορούμε, λοιπόν, να εφαρμόσουμε τα όσα δείξαμε στην πρώτη περίπτωση.

Έστω $w \in |c_1| \setminus \overrightarrow{\alpha\beta}$. Το σημείο w δεν περιέχεται στο συμπαγές σύνολο $|c_2|$ και ως εκ τούτου θα υπάρχει μια ανοικτή μπάλα B_w που θα περιέχει το w και $B_w \cap |c_2| = \emptyset$. Από το αποτέλεσμα για την πρώτη περίπτωση, έχουμε ότι υπάρχουν δύο συνεκτικές συνιστώσες του $|c_1|$ οι οποίες, από προηγούμενο λήμμα, θα τέμνονται με την ανοικτή μπάλα B_w .

Λαμβάνοντας, τώρα, σημεία $w', w'' \in B_w$ που ανήκουν σε κάποια συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus |c_1|$, δεν διαχωρίζονται από το $|c_1|$. Δεν διαχωρίζονται, όμως, ούτε από την $|c_2|$, μιας και βρίσκονται στην B_w που είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C} \setminus |c_2|$. Επίσης το απλό τόξο $\overrightarrow{\alpha\beta}$ που είναι η τομή των $|c_1|, |c_2|$ είναι συνεκτικό και άρα από το θεώρημα του Janiszewski το $|c_1| \cup |c_2|$ δεν διαχωρίζει τα w', w'' , κατ'έκταση και το J δεν τα διαχωρίζει ως υποσύνολο του $|c_1| \cup |c_2|$. Εξ αυτού του γεγονότος συμπεραίνουμε ότι τα w', w'' ανήκουν στην ίδια συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus J$.

Συμπεραίνουμε ότι, από προηγούμενο λήμμα κάθε συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus J$ περιέχει σημεία του B_w και από το θεώρημα του Janiszewski κάθε ζεύγος σημείων του B_w που δεν διαχωρίζεται από το $|c_1|$ δεν διαχωρίζεται και από το J . Έτσι οι συνιστώσες του $\mathbb{C} \setminus J$ θα είναι το πολύ όσες και οι συνιστώσες του $\mathbb{C} \setminus |c_1|$. Από την πρώτη περίπτωση, το $\mathbb{C} \setminus |c_1|$ θα έχει ακριβώς δύο συνιστώσες, άρα το $\mathbb{C} \setminus J$ θα έχει το πολύ δύο συνιστώσες. Μένει να δείξουμε ότι το $\mathbb{C} \setminus J$ δεν είναι συνεκτικό. Από την περίπτωση I θα υπάρχουν $w', w'' \in B_w$ που διαχωρίζονται από την $|c_1|$. Θα δείξουμε ότι και η J τα διαχωρίζει.

Πράγματι, αν όχι, τότε θα είχαμε ότι επειδή το $|c_2|$ δεν τα διαχωρίζει (μιας και βρίσκονται στο συνεκτικό σύνολο $B_w \subset |c_2|^2$) ούτε από το απλό τόξο που αποτελεί την τομή των J , c_2 από το Θεώρημα του Janiszewski το $J \cup |c_2|$ δεν διαχωρίζει τα w', w'' . Τότε, όμως, καταλήγουμε σε άτοπο, διότι και το $|c_1|$ θα έπρεπε να μην τα διαχωρίζει, αφού $|c_1| \subset J \cup |c_2|$. Άρα το J διαχωρίζει τα w', w'' και έτσι, τελικά, προκύπτει ότι το $\mathbb{C} \setminus J$ έχει ακριβώς δύο συνιστώσες. ■

Έχουμε, πλέον στα χέρια μας τα εργαλεία για την απόδειξη του Θεωρήματος Καμπυλών Jordan.

1^η Απόδειξη του Θεωρήματος Καμπυλών Τζόρνταν. Αρχικά, από το Θεώρημα (Janiszewski) 4.1 και το Πόρισμα 4.1 δείξαμε πως μια απλή ανοιχτή καμπύλη, δεν διαχωρίζει το επίπεδο. Αν J καμπύλη Jordan, μόνο μία εκ των συνιστωσών του συμπληρώματος της J είναι μη φραγμένη [Λήμμα 4.2], ενώ αποδείξαμε επίσης πως οι συνιστώσες του $\mathbb{C} \setminus J$ έχουν ως κοινό σύνορο ακριβώς την καμπύλη J [Λήμμα 4.4]. Τέλος, από το Λήμμα 4.5 αποδείξαμε πως το συμπλήρωμα της καμπύλης J έχει ακριβώς 2 συνιστώσες. ■

Κεφάλαιο 5

Το Θεώρημα Καμπυλών Jordan: 2^η Απόδειξη με εφαρμογή του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου Brouwer

Θα δούμε, τώρα, πώς μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα καμπυλών Jordan στο επίπεδο, εκμεταλλευόμενοι το θεώρημα σταθερού Brouwer. Για αρχή αποδεικνύουμε το τελευταίο:

Θεώρημα (Brouwer) 5.1: Έστω $\bar{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ η μοναδιαία κλειστή μπάλα στον \mathbb{R}^n . Τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: \bar{B}^n \rightarrow \bar{B}^n$ έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει x τέτοιο ώστε $f(x) = x$.

Απόδειξη. Στην παρούσα ενότητα θα θεωρήσουμε την περίπτωση $n = 2$.

Έστω, λοιπόν, προς απαγωγή εις άτοπο ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f: \bar{B}^2 \rightarrow \bar{B}^2$ που δεν έχει σταθερά σημεία. Για κάθε $x \in \bar{B}^2$ θέτουμε:

$$l(t) = f(x) + t(x - f(x)), \quad \forall t \geq 0$$

την ημιευθεία που ξεκινάει απ' το $f(x)$ και διέρχεται από το x . Η ημιευθεία αυτή διέρχεται από την S^1 , έστω $l(t_0)$ το σημείο αυτό. Θέτουμε $r(x) = l(t_0)$. Τότε $|r(x)| = 1$ και $r(x) = x$.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι η r είναι συνεχής, άρα είναι ανάκληση της \bar{B}^2 στην S^1 . Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι η θεμελιώδης ομάδα της S^1 είναι το $(\mathbb{Z}, +)$, ενώ της \bar{B}^2 είναι η τετριμμένη, αφού η κλειστή μοναδιαία μπάλα στον \mathbb{R}^2 είναι απλά συνεκτική.

Ένα πόρισμα του συγκεκριμένου θεωρήματος που θα μας χρειαστεί στα παρακάτω είναι το κάτωθι:

Πόρισμα 5.1: Έστω:

$$h : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]^2, h(t) = (h_1(t), h_2(t))$$

$$v : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]^2, v(t) = (v_1(t), v_2(t))$$

δύο μονοπάτια με $h_1(-1) = -1, h_1(1) = 1, v_2(-1) = -1, v_2(1) = 1$. Τότε υπάρχουν σημεία $s, t \in [-1, 1]$ για τα οποία: $h(t) = v(s)$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι εφόσον ο μοναδιαίος δίσκος είναι ομοιομορφικός με το τετράγωνο $[-1, 1]^2$ (λόγω ισοδυναμίας των τοπολογιών στον \mathbb{R}^2), έπεται ότι το Θεώρημα του Brouwer εξακολουθεί να εφαρμόζεται για συνεχείς συναρτήσεις $f : [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]^2$. Έστω, λοιπόν, ότι δεν υπάρχει σημείο σαν αυτό που ισχυριζόμαστε, δηλαδή $h(t) \neq v(s), \forall t, s \in [-1, 1]$. Ορίζουμε:

$N(s, t) = \max(|h_1(s) - v_1(t)|, |h_2(s) - v_2(t)|), t, s \in [-1, 1]$ και την συνεχή συνάρτηση $f : [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]^2$ με

$$f(s, t) = \left(\underbrace{\frac{v_1(t) - h_1(s)}{N(s, t)}}_{f_1(s, t)}, \underbrace{\frac{h_2(s) - v_2(t)}{N(s, t)}}_{f_2(s, t)} \right)$$

Από το θεώρημα του Brouwer, έπεται ότι η f έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο, έστω (s_0, t_0)

Εκ κατασκευής, έχουμε ότι $f[-1, 1]^2 \subset \partial[-1, 1]^2$, άρα θα πρέπει $s_0 = \pm 1$ ή $t_0 = \pm 1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $t_0 = 1$ (η απόδειξη στις υπόλοιπες περιπτώσεις είναι πλήρως ανάλογη). Τότε θα είχαμε $(s_0, 1) = f(s_0, 1)$, οπότε ειδικότερα για την δεύτερη συνιστώσα έχουμε:

$$1 = f_2(s_0, 1) = \frac{h_2(s_0) - v_2(1)}{N(s_0, 1)} \leq \frac{1 - v_2(1)}{N(s_0, 1)} \stackrel{v_2(1)=0}{=} 0$$

το οποίο, φυσικά, είναι άτοπο. ■

Λήμμα 5.1: Ένα απλό τόξο δεν μπορεί να διαχωρίσει οποιοδήποτε ζεύγος σημείων στο συμπλήρωμα της εικόνας του.

Απόδειξη. Η στρατηγική της απόδειξης περιλαμβάνει το να υποθέσουμε το αντίθετο, κατασκευάζοντας έπειτα μια συνεχή συνάρτηση που θα ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Brouwer και εν τέλει θα καταλήξουμε σε άτοπο. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι η υπόθεση του λήμματος δεν ισχύει, και άρα το συμπλήρωμα της εικόνας του απλού τόξου μας -έστω γ - είναι μη συνεκτικό.

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ έχει ακριβώς μια μη φραγμένη συνιστώσα (μπορούμε να το δείξουμε αυτό τροποιώντας την απόδειξη ενός απ' το λήμμα 4.2). Εφόσον υποθέσαμε μόλις ότι θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες στο $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$, θα υπάρχει μια εξ αυτών που θα είναι φραγμένη, έστω A και έστω $x_0 \in A$. Διαλέγουμε $r > 0$ αρκετά μεγάλο ώστε $\gamma \subset B(x_0, r)$. Αυτό είναι εφικτό, μιας και η εικόνα της γ είναι εικόνα συμπαγούς συνόλου.

Το σύνορο $S = \partial B(x_0, r)$ περιέχεται σε μια απ' τις συνιστώσες του $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Tietze στην συνάρτηση $\iota \circ \gamma^{-1}: |\gamma| \rightarrow [0, 1]$ βλέπουμε ότι η ταυτοτική απεικόνιση $\iota: |\gamma| \rightarrow |\gamma|$ επεκτείνεται σε συνεχή απεικόνιση $s: \bar{B}(x_0, r) \rightarrow |\gamma|$.

Ας ορίσουμε τώρα την απεικόνιση $g: \bar{B}(x_0, r) \rightarrow \bar{B}(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ με τύπο:

$$g(x) = \begin{cases} s(z), & \text{αν } z \in \bar{A} \\ z, & \text{αν } z \in A^c \cap \bar{B}(x_0, r) \end{cases}$$

Η απεικόνιση αυτή είναι καλώς ορισμένη και συνεχής, αφού οι r, ι είναι συνεχείς και τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων τέμνονται στο $\bar{A} \cap A^c$ το οποίο περιέχεται στην εικόνα του απλού τόξου $|\gamma|$ και εκεί η s είναι η ταυτοτική. Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι $g|_S = \iota$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι το x_0 δεν βρίσκεται στην εικόνα της g , εφόσον $x_0 \in A \subset \bar{A}$ θα είναι $g(x_0) = s(x_0)$ και η s θα το απεικονίσει στο $|\gamma|$ που δεν περιέχει μέσα του το x_0 .

Χάρην ευκολίας, θα υποθέσουμε ότι $x_0 = 0$. Θέτουμε:

$$p: \bar{B}(0, r) \setminus \{0\} \rightarrow S, p(z) = \frac{z}{|z|}$$

Τότε, βλέπουμε ότι η σύνθεση των p, q μας δίνει μια συνεχή απεικόνιση από τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο στην μοναδιαία σφαίρα που διατηρεί ίδιο τον μοναδιαίο κύκλο. Θέτουμε επιπλέον $t: S \rightarrow S, t(z) = -z$ και τώρα βλέπουμε ότι η συνεχής απεικόνιση:

$$t \circ p \circ q: \bar{B}(0, r) \rightarrow S \subset \bar{B}(0, r)$$

μας οδηγεί σε άτοπο λόγω του θεωρήματος του Brouwer, μιας και αν αυτή η συνάρτηση έχει σταθερό σημείο, θα πρέπει να βρίσκεται στο S . Όμως, αν οι p, q περιοριστούν στο S , τότε είναι οι ταυτοτικές απεικονίσεις στο S και άρα θα παίρναμε :

$$(t \circ p \circ q)(z) = t(z) = -z \neq z,$$

εφόσον φυσικά, $z \in S$. ■

Θεώρημα 5.2: Εάν το συμπλήρωμα μιας καμπύλης Jordan J είναι μη συνεκτικό, τότε το σύνορο κάθε συνεκτικής συνιστώσας του $\mathbb{R}^2 \setminus J$ είναι ακριβώς η J .

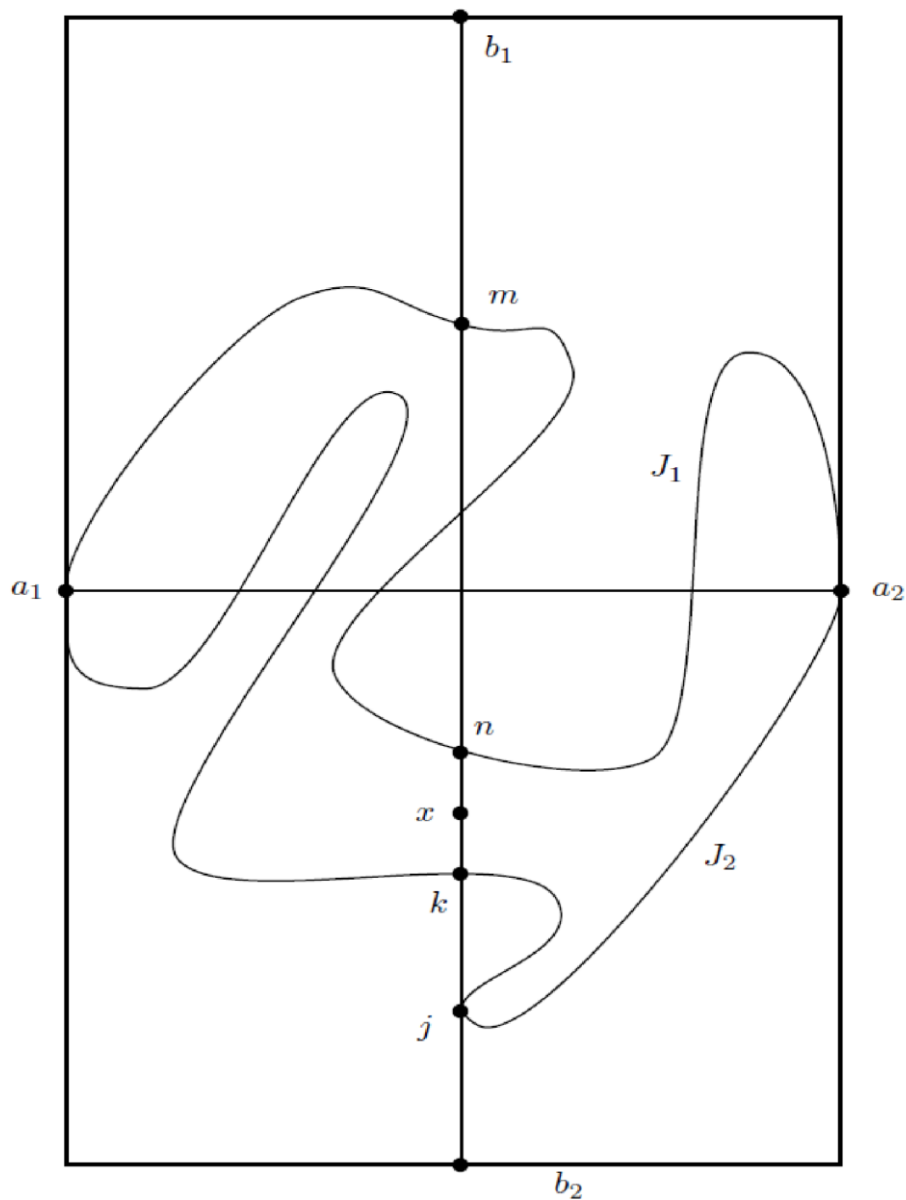
Απόδειξη. Έστω A συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{R}^2 \setminus J$. Θα δείξουμε ότι $\partial A = J$.

Το ότι $\partial A \subset J$ αποδεικνύεται με πλήρως ανάλογο τρόπο όπως και σε αντίστοιχο λήμμα στο κεφάλαιο 4 (Λήμμα 4.2). Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, ας υποθέσουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $\partial A \subsetneq J$. Θεωρούμε $a \in J \setminus \partial A$. Το ∂A είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς J , άρα είναι και αυτό συμπαγές. Θα υπάρχει, λοιπόν, μια περιοχή U του $a \notin A$ με $U \cap A = \emptyset$. Ειδικότερα, θα υπάρχει ένα απλό τόξο που να περιλαμβάνει το ∂ (μπορούμε να πάρουμε λ.χ. την συνιστώσα του $J \cap U^c$ που περιλαμβάνει το ∂A με παραμέτρηση την επαγόμενη από την J). Το αμέσως προηγούμενο λήμμα μας λέει ότι το απλό τόξο γ που μόλις κατασκευάσαμε δεν διαχωρίζει σημεία στο συμπλήρωμά του. Αν, λοιπόν, διαλέξουμε $x \in A$ και y σε κάποια άλλη συνιστώσα του $\mathbb{R}^2 \setminus J$, μπορούμε να πάρουμε ένα μονοπάτι α που να συνδέει τα δύο σημεία στο $(\partial A)^c$. Η υπόθεσή μας, ωστόσο, μας λέει ότι η καμπύλη Jordan J πρέπει να διαχωρίζει τα δύο σημεία, άρα η α θα τέμνεται με το $J \setminus \gamma$. Αυτό είναι άτοπο, διότι το πρώτο σημείο τομής τους θα ανήκε στο

σύνορο του A , ενώ παράλληλα το σημείο αυτό θα έπρεπε να ανήκει σε κάποιο σύνολο ξένο ως προς το ∂A ■

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα Καμπυλών Jordan[σ.38], αυτή τη φορά βασιζόμενοι στο Θεώρημα Σταθερών Σημείων Brouwer.

2^η Απόδειξη του Θεωρήματος Καμπυλών Τζόρνταν. Εφόσον η J είναι συμπαγής, μπορούμε να βρούμε $a_1, a_2 \in J$ για τα οποία $d(a_1, a_2) = d(J)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_1 = -1, a_2 = 1$. Η εικόνα της καμπύλης περιέχεται στο ορθογώνιο $[-1, 1] \times [-2, 2]$ το οποίο θα συμβολίζουμε με R . Θέτουμε $b_1 = (0, 2)$ και $b_2 = (0, -2)$ (τα b_i είναι οι μέσοι των οριζοντίων



Εικόνα xiii: «Σταθεροποιούμε» σημεία επάνω στην καμπύλη Jordan. Χρησιμοποιούμε ένα «βολικό» σημείο του συμπληρ/τος της J_1

πλευρών του ορθογωνίου). Παρατηρούμε ότι $R \cap J = \{a_1, a_2\}$, αλλιώς η απόσταση τους δεν θα ήταν η μέγιστη δυνατή.

Το τμήμα $\overrightarrow{b_1 b_2}$ βρίσκει την καμπύλη J , από προηγούμενη πρόταση 5.1 (μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 5.1 στο κομμάτι της J ανάμεσα στα a_1, a_2). Διαλέγουμε $m \in J \cap \overrightarrow{b_1 b_2}$ με την μεγαλύτερη δεύτερη συνιστώσα (μπορούμε να κάνουμε αυτή την επιλογή για το m , εφόσον η τομή είναι συμπαγές σύνολο).

Αφαιρώντας τα a_1, a_2 από την J μας αφήνει με δύο απλά τόξα. Θα συμβολίζουμε με J_1 το τόξο που περνάει από το m και J_2 το άλλο. Διαλέγουμε, ύστερα, $n \in J \cap \overrightarrow{b_1 b_2}$ με την μικρότερη δυνατή δεύτερη συνιστώσα. Τα μονοπάτια $J_2, nb_2 \rightarrow$ τέμνονται, αλλιώς τα μονοπάτια J_2 και $\overrightarrow{b_2 n} + \widehat{nm} + \overrightarrow{mb_1}$ θα παρέβαιναν την Πρόταση 5.1. Διαλέγουμε, λοιπόν, απ' το σύνολο $J_2 \cap nb_2 \rightarrow$ το στοιχείο k με την μεγαλύτερη δυνατή δεύτερη συνιστώσα και $j \in J_2 \cap nb_2 \rightarrow$ με την μικρότερη δυνατή δεύτερη συνιστώσα. Έστω x το μέσο του τμήματος \overrightarrow{nk} . Εξ ορισμού των σημείων n, k , θα έχουμε ότι $x \in \mathbb{R}^2 \setminus J$.

Μετά την κατασκευή που φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, μπορούμε να προβούμε στην απόδειξη του θεωρήματος. Θα δείξουμε ότι το x βρίσκεται σε μια φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του συμπληρώματος της καμπύλης και κατόπιν ότι η συνιστώσα αυτή είναι η μόνη φραγμένη.

Αρχικά, λοιπόν, ισχυριζόμαστε ότι η συνιστώσα του $\mathbb{R}^2 \setminus J$ που περιέχει το x είναι φραγμένη. Πράγματι, έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε θα υπάρχει ένα μονοπάτι γ που να συνδέει το x με κάποιο y που θα βρίσκεται εκτός του ορθογωνίου R .

Θέτουμε:

$$\alpha = \gamma|_{[0, t_0]} \quad \text{όπου } t_0 = \inf\{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in \partial R\}$$

Το $\alpha(t_0)$ είναι το σημείο που το μονοπάτι α συναντάει το σύνορο του ορθογωνίου R . Σαφώς, δεν μπορεί να είναι $Im\alpha(t_0) = 0$ (με αυτό εννοούμε την τεταγμένη του $\alpha(t_0)$), αφού σε αυτήν την περίπτωση θα έπρεπε να συναντάει κάποιο από τα a_1, a_2 . Αν $Im\alpha(t_0) < 0$, τότε τα μονοπάτια J_2 και $\overrightarrow{b_1 m} + \widehat{mn} + \overrightarrow{nx} + \alpha + \alpha(\widehat{t_0})b_2$ δημιουργούν

αντίφαση με προηγούμενη πρ (συμβολίσαμε με $a(\hat{t}_0)b_2$ το μικρότερο μονοπάτι κατά μήκος του συνόρου του R ανάμεσα στα $a(t_0)$ και b_2).

Αν, τώρα, $Ima(t_0) > 0$ έχουμε αντίστοιχη αντίφαση για τις J_1 και $\vec{b}_2x + a + a(\hat{t}_0)b_1$. Συνεπώς, θα πρέπει αναγκαστικά το x να βρίσκεται σε μια φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{R}^2 \setminus J$.

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη με την απόδειξη της μοναδικότητας της φραγμένης συνεκτικής συνιστώσας του $\mathbb{R}^2 \setminus J$. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει μια δεύτερη συνεκτική συνιστώσα $G \subset \mathbb{R}^2 \setminus J$ που είναι φραγμένη (πέραν αυτής που περιέχει το x).

Τότε το μονοπάτι:

$$\beta = \vec{b}_1 m + \widehat{m} n + \vec{n} k + j \vec{b}_2$$

δεν βρίσκεται σε αυτήν την συνιστώσα, αφού:

- ❖ Τα τμήματα $\vec{b}_1 m$ και $j \vec{b}_2$ περιέχονται στην ένωση της J με την μη φραγμένη συνιστώσα του συμπληρώματός της.
- ❖ Τα απλά τόξα $\widehat{m} n, \widehat{k} j$ περιέχονται στην J .
- ❖ Το τμήμα $\vec{n} k$ περιέχεται στην ένωση της J με την συνιστώσα που περιέχει το x .

Παρατηρούμε, επιπλέον, ότι η G δεν μπορεί να περιέχει τα a_1, a_2 και ότι η εικόνα του μονοπατιού β είναι συμπαγές σύνολο, οπότε μπορούμε να βρούμε ανοικτές περιοχές U_i των a_i με $U_i \cap \beta = \emptyset, i = 1, 2$.

Από προηγούμενο λήμμα [Λήμμα 5.2], έπεται ότι $a_i \in \partial G$. Θα υπάρχουν, λοιπόν, $x_i \in U_i$ έτσι ώστε $x_i \in G, i = 1, 2$. Αφού, τώρα, η G είναι δρομοσυνεκτικό σύνολο, θα υπάρχει ένα μονοπάτι α ανάμεσα στα x_1, x_2 και τότε τα μονοπάτια β και $a_1 \vec{x}_1 + \alpha + x_2 \vec{a}_2$ μας φέρνουν σε αντίφαση από προηγούμενη πρόταση.

Συνεπώς, θα υπάρχει μόνο μια φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{R}^2 \setminus J$. Δείξαμε ήδη νωρίτερα ότι η μη φραγμένη συνιστώσα του συμπληρώματος της J είναι μοναδική, καθώς επίσης και ότι και οι δύο συνιστώσες έχουν την J ως σύνορο, και η απόδειξη του Θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί. ■

Κεφάλαιο 6

Γενίκευση σε μεγαλύτερες διαστάσεις: Το θεώρημα Jordan-Brouwer.

Μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει το Θεώρημα ακολουθώντας κάθε φορά διαφορετικό δρόμο αξιοποιώντας στην κάθε προσέγγιση διαφορετικούς κλάσους των μαθηματικών. Στην μεν πρώτη προσέγγιση μας, δείξαμε το θεώρημα καμπυλών Jordan με χρήση εργαλείων της μιγαδικής ανάλυσης, στη δε δεύτερη επιστρατεύσαμε την θεωρία της αλγεβρικής τοπολογίας και το Θεώρημα Brouwer.

Με αφορμή αυτήν την διάκριση, αναφέρουμε σε αυτό το κεφάλαιο το ακόλουθο θεώρημα το οποίο γενικεύει κατά κάποιο τρόπο το θεώρημα καμπυλών Jordan. Επίσης, αναφέρουμε τους λόγους για τους οποίους το θεώρημα του Jordan-Brouwer δεν γενικεύεται στις 3 και γενικότερα τις $n > 2$ διαστάσεις, παρά τις αρχικές εικασίες του πολυμήχανου Brouwer.

Θεώρημα (Jordan-Brouwer) 6.1: Έστω απεικόνιση $J : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ εμφύτευσης της S^n στον $(n + 1)$ -διάστατο ευκλείδειο χώρο. Τότε το συμπλήρωμα της εικόνας αυτής της εμφύτευσης χωρίζει τον \mathbb{R}^{n+1} σε δυο συνιστώσες, μια εκ των οποίων είναι φραγμένη και μια μη φραγμένη, με την εικόνα της J να είναι το κοινό τους σύνορο.

Για να αποδειχθεί το συγκεκριμένο θεώρημα, απαιτεί να αποδειχθεί πρωτίστος το θεώρημα του Brouwer για όλα τα n . Επιπλέον, απαιτεί εργαλεία από τη θεωρία ομολογιών και έννοιες τοπολογίας που δεν εξετάσαμε προηγουμένως. *Η απόδειξη του θεωρήματος ξεφεύγει από τους σκοπούς της συγκεκριμένης εργασίας, οπότε η αναφορά του είναι βιβλιογραφική.*

Έστω ότι έχουμε στα χέρια μας ένα.. μπαλόνι! Το θεώρημα μας υποδεικνύει πως η επιφάνεια του μπαλονιού αποτελεί το σύνορο μεταξύ του δωματίου στο οποίο βρισκόμαστε (και κατ'επέκταση..όλου του κόσμου) και του χωρίου εντός του μπαλονιού. Επιπλέον, όπως και το

θεώρημα του Jordan στο επίπεδο φυσικά, υποδεικνύει πως δεν υπάρχουν επιπλέον συνιστώσεις του \mathbb{R}^3 πέραν των 2 που αναφέρουμε. Το παραπάνω παράδειγμα μπορούμε να το καταλάβουμε και διαισθητικά. Προκύπτει όμως το εξής ερώτημα : Το θεώρημα, ισχύει καθολικά για όλες τις εμφυτεύσεις στον S^3 ;

Η απάντηση είναι πως όχι. Υπάρχουν εμφυτεύσεις $S^2 \rightarrow S^3$, όπου οι συνιστώσες που προκύπτουν στον χώρο δεν είναι απλά συνεκτικές μεταξύ τους και δε διαθέτουν την ίδια ομάδα ομολογίας.

Ένα τέτοιο παράδειγμα, αποτελεί και η «Κερατώδης Σφαίρα του Alexander» για την οποία αναφερθήκαμε στα εισαγωγικά κομμάτια της εργασίας.

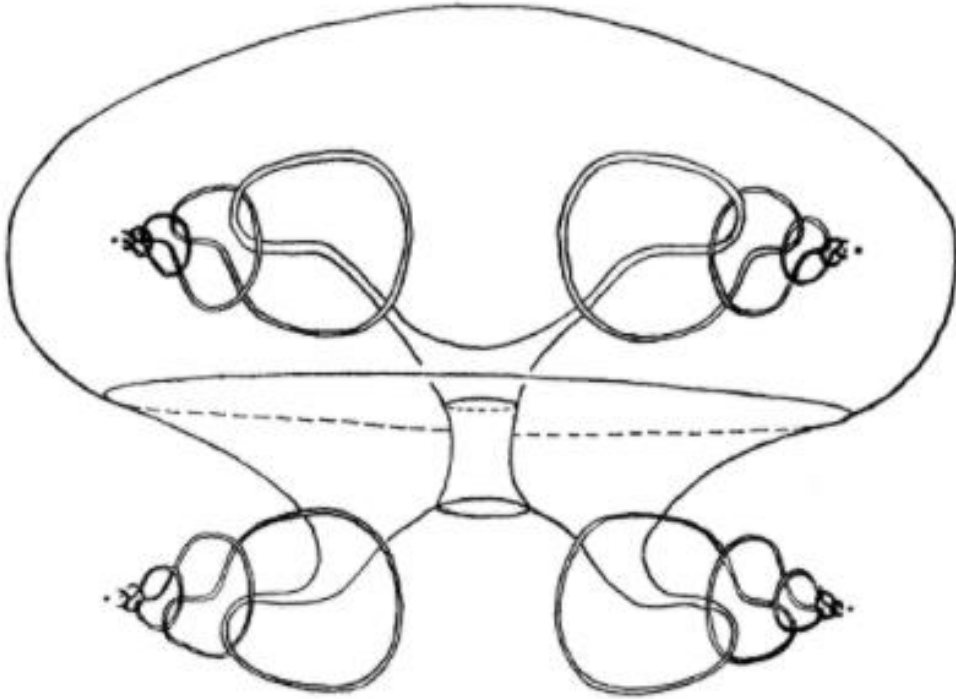
Ορισμός 6.1: Ως *Ευκλείδιο πολύεδρο* ορίζεται ένα υποσύνολο του S^n το οποίο είναι η ένωση πεπερασμένων κυρτών ευθύγραμμων τμημάτων.

Ορισμός 6.2: Ως *καμπυλωτό πολύεδρο* ορίζεται ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του S^n το οποίο είναι ομοιομορφικό σε ένα Ευκλείδιο πολύεδρο.

Ορισμός 6.3: Ένα καμπυλωτό πολύεδρο στον σφαιρικό n -διάστατο χώρο S^n καλείται *μη ομαλή εμφύτευση* (*wild embedding*) εάν δεν υπάρχει ομοιομορφισμός $S^n \rightarrow S^n$ κατάλληλος, ο οποίος να μετατρέπει το εμφυτευμένο πολύεδρο σε Ευκλείδιο πολύεδρο.

Η «Κερατώδη Σφαίρα του Alexander» αποτελεί την 1^η μη ομαλή εμφύτευση μέσω της οποίας ο J.W. Alexander απέδειξε πως η γενίκευση του Brouwer δεν είναι δυνατόν να ισχύει καθολικά στον χώρο των 3 διαστάσεων (και κατ' επέκταση στον S^n).

Παρακάτω παρατίθεται ένα πιο απλό παράδειγμα άγριας εμφύτευσης, μια επιφάνεια η οποία αποτελεί δημιούργημα των R.H. Fox και E. Artin.



Εικόνα χίν: Απλή, συνεκτική επιφάνεια η οποία αποτελεί μη ομαλή εμφύτευση

Η παραπάνω επιφάνεια είναι μια πιο απλή κατασκευή από την «σφαίρα» του Αλεξάντερ. Έχει μόνο 2 ιδιάζουσα σημεία, αντί άπειρων.

Η συγκεκριμένη σφαίρα στον S^n έχει τα συμπληρώματα του εσωτερικού και εξωτερικού της χωρίου απλώς συνεκτικές, ανοιχτές πολλαπλότητες οι οποίες όμως δεν είναι ομοιομορφικές με ένα ανοιχτό κύβο.

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα

Παρόλαυτα, το Θεώρημα Jordan-Brouwer λειτουργεί σε κανονικές εμφυτεύσεις σε πολυδιάστατους χώρους. Διαχωρίζει τον χώρο σε 2 συνιστώσεις, όταν το σύνορο είναι μια συνεκτική, συμπαγής και προσανατολισμένη απλή υπερεπιφάνεια, τηρώντας τους κανόνες ομοιομορφισμού με μία Ευκλείδια Σφαίρα μεταξύ των χωρίων που δημιουργούνται.

Όσον αφορά το επίπεδο, τόσο η μέθοδος που χρησιμοποιηθεί τις θεμελιώδης τεχνικές ανάλυσης όσο και η 2^η μέθοδος μέσω των σταθερών σημείων του Brouwer λειτουργούν εξίσου καλά. Η 1^η χρησιμοποιηθεί εργαλεία τα οποία είναι ευρέως γνωστά και διατηρεί την αίγλη της απλότητας και της σαφήνειας. Η 2^η μέθοδος λειτουργεί συνδυαστικά χρησιμοποιώντας ένα ενδιαφέρον Θεώρημα που έθεσε ο Brouwer, ένα γνωστό λήμμα και έχει μια πιο παραστική προσέγγιση.

Στους πολυδιάστατους χώρους όμως, φαίνεται να βρίσκει ένα τέλμα η μέθοδος των στοιχειωδών μαθηματικών. Το Θεώρημα σταθερών σημείων του Brouwer δίνει την δυνατότητα στους τοπολόγους να γενικεύσουν την απόδειξη, υπό όρους, και να την εφαρμόσουν στα υποσύνολα του \mathbb{R}^n .

Φαίνεται πως η επιλογή μεταξύ των δύο μεθόδων καταλήγει στις προτιμήσεις του αναγνώστη και τις προϋποθέσεις του εκάστοτε προβλήματος.

Βιβλιογραφία

- [1] C.Jordan, Cours d'Analyse, Paris, 1893, 2d ed.
- [2] William L. Hosch, Jordan Curve Theorem
- [3] J. W. Alexander, An Example of a Simply Connected Surface Bounding a Region which is not Simply Connected
- [4] Louis Narens, «A nonstandard Proof of the Jordan Curve Theorem?» (Pacific Journal of Mathematics)
- [5] Χ.Παπακυριακόπουλος, «Περί μιας απόδειξης του Θεωρήματος του Jordan δια τας ομώνυμους επιπέδους κλειστάς καμπύλας» (ΕΜΕ Τομ. ΙΘ-Α)
- [6] Σοφία Λαμπροπούλου & Αδριανή Νικολακοπούλου, «Χρίστος Παπακυριακόπουλος: Βιογραφικά στοιχεία», Ημερίδα για τα 100 χρόνια από τη γέννηση του Χρίστου Παπακυριακόπουλου, 22.12.2014, Ε.Μ.Π.
<http://zorn.math.ntua.gr/~papafest/>
- [7] Milos Dostrzal & Ralph Tindell, The Jordan Curve Theorem Revisited
- [8] C.Caratheodory, Konforme Abbildung Jordanscher Gebiete
- [9] Θ.Μήτσης, Σημειώσεις Μιγαδικής Ανάλυσης (Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης)
- [10] Ι.Δ.Πλατής, Τοπολογία:Πρόχειρες Σημειώσεις (Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης)
- [11] R.Luisto, Proof of the Jordan Curve Theorem
- [12] Ahlfors, Lars Valerian: Complex Analysis. Third edition McGraw-Hill International company
- [13] L.V.Ahlfors, Complex Analysis
- [14] A.Hatcher, Algebraic Topology
- [15] T.t.Dieck, Algebraic Topology
- [16] R.H.Fox & E.Artin, Some Wild Cells and Spheres in Three-Dimensional Space (Annals of Mathematics)