ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ ΔΙΑΤΟΙΧΙΣΜΟΥ ΠΛΟΙΟΥ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ «PATH INTEGRATION»

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΤΣΟΥΜΠΕΛΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Κ. ΣΠΥΡΟΥ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στη σχολή των Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών είχα την ευκαιρία να ασχοληθώ με πολλούς τομείς σχετικά με την μελέτη του πλοίου, τις θαλάσσιες κατασκευές και τη ναυτική μηχανολογία. Μετά από τα ερεθίσματα που έλαβα αποφάσισα να ασχοληθώ περισσότερο με τον τομέα της ευστάθειας πλοίου. Έκανα αυτή την επιλογή διότι είναι ένας τομέας που συνεισφέρει καθοριστικά στον ασφαλή σχεδιασμό των πλοίων και αποκαλύπτει πολλά ενδιαφέροντα στοιχεία της συμπεριφοράς τους ,που ορισμένες φορές αντιβαίνουν στη διαίσθηση.

Αρχικά θέλω να ευχαριστήσω πολύ τον επιβλέποντα καθηγητή Κ. Σπύρου για την στήριξη που μου προσέφερε κατά την πραγματοποίηση της διπλωματικής. Μέσα από τις γνώσεις που μου παρείχε με τα μαθήματα όπως η μη γραμμική δυναμική και η ευστάθεια διατοιχισμού είχα την ευκαιρία να μάθω για ενδιαφέροντα φαινόμενα σχετικά με την δυναμική συμπεριφρά του πλοίου. Έτσι μου κίνησε το ενδιαφέρον να ασχοληθώ με αυτό το θέμα και μου έδωσε την ευκαιρία να το μελετήσω από μια ενδιαφέρουσα σκοπιά.

Ακόμα, να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τον Υποψήφιο Διδιάκτορα της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών κ. Παναγιώτη Αναστόπουλο για την καθοδήγησή του. Αφιέρωσε χρόνο και προσοχή για τις παρατηρήσεις και τις οδηγίες που μου έδωσε, χωρίς τις οποίες η παρούσα διπλωματική δεν θα είχε σε καμία περίπτωση την παρούσα μορφή.

Επίσης να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη στήριξη και τη βοήθεια που μου προσέφερε. Χωρίς αυτά η ολοκλήρωση των σπουδών μου θα ήταν πολύ δυσκολότερη.

Τέλος να ευχαριστήσω τους φίλους μου Βαγγέλη Τραγόπουλο και Νίκο Κουγιάτσο που με βοηθούν και μου δίνουν το καλό παράδειγμα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία προσπαθούμε να προσδιορίσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των διατοιχιστικών κινήσεων πλοίου το οποίο υπόκειται σε τυχαία εγκάρσια διέγερση από την θάλασσα. Την διέγερση την μοντελοποιούμε ως λευκό θόρυβο, ο οποίος ορίζεται με βάση κανονικοποιημένες «απειροστές» προσαυξήσεις της κίνησης Brown. Αυτή η υπόθεση μας οδηγεί, υπό προϋποθέσεις που πληρούνται, στην μερική διαφορική εξίσωση Fokker-Plank-Kolmogorov που περιγράφει τη χρονική εξέλιξη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των αποκρίσεων του πλοίου. Η αναλυτική λύση της εξίσωσης αυτής είναι γνωστή για ειδικές περιπτώσεις και στη γενική περίπτωση επιλύεται αριθμητικά. Λόγω αυτών των δυσκολιών, στρεφόμαστε στην αριθμητική μέθοδο Path Integration. Η μέθοδος αυτή δεν επιχειρεί μια «κατά μέτωπο επίθεση» στη δυσεπίλυτη εξίσωση Fokker-Plank-Kolmogorov, αλλά εκμεταλλεύεται τις μαρκοβιανές ιδιότητες του συστήματος ,οι οποίες προκύπτουν από την μοντελοποίηση της διέγερσης ως λευκό θόρυβο, για την παραγωγή μιας ισοδύναμης λύσης. Να σημειώσουμε βέβαια ότι η ισοδυναμία αυτή δεν έχει αποδειχτεί αυστηρά. Έτσι στα κεφάλαια που θα ακολουθήσουν θα προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε έναν κατά το δυνατό αποτελεσματικό και γρήγορο αλγόριθμο και να τον εφαρμόσουμε σε μοντέλο της κίνησης διατοιχισμού ενός πλοίου. Θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τα βήματα του αλγορίθμου και τα αριθμητικά εργαλεία που χρησιμοποιούμε για την υλοποίησή του. Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε σε προβλήματα που εμφανίζονται κατά την υλοποίηση του αλγορίθμου. Τέλος, θα παραθέσουμε τα αποτελέσματα εφαρμογής της μεθόδου. Θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της μεθόδου με αυτά της Monte-Carlo για να έχουμε μια εικόνα του κατά πόσο αυτά είναι αξιόπιστα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ 5

2 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ 7

3 ΣΤΟΧΟΙ 12

4 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΛΟΙΟΥ ΔΙΕΓΕΙΡΟΜΕΝΟ ΑΠΟ ΛΕΥΚΟ ΘΟΡΥΒΟ

4.1 ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 13

4.2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ROLL ΔΙΕΓΕΙΡΟΜΕΝΗ ΑΠΟ ΛΕΥΚΟ ΘΟΡΥΒΟ.....14

5 Η ΜΕΘΟΔΟΣ PATH INTEGRATION

5.1 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ.....18

5.2 ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΜΕ B-SPLINES ΣΕ ΜΙΑ ΚΑΙ ΠΟΛΛΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ.....20

5.3 ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΚΑΙ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΓΙΑ ΧΡΟΝΙΚΑ ΟΜΟΓΕΝΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.24

5.4 ΜΙΑ ΑΚΟΜΑ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΣΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ.....25

5.5 ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΑ ΤΑ ΒΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ.....27

6 ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

6.1 ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.....29

6.2 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ.....34

7 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

7.1 CURVE-FIT ΤΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ.....37

7.2 MONTE-CARLO SIMULATION.....38

7.3 Path Integration: ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΛΕΥΚΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ.....41

7.4 Path Integration: ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΦΙΛΤΡΑΡΙΣΜΕΝΟΥ ΛΕΥΚΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ.....49

8 ΣΥΖΗΤΗΣΗ.....54

9 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....55

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....55

1. Εισαγωγή

Η εγκάρσια ευστάθεια ενός πλοίου είναι καίριας σημασίας καθώς σε αυτόν τον βαθμό ελευθερίας έχουμε τον μικρότερο συντελεστή επαναφοράς σε σχέση με τις υπόλοιπες κινήσεις που περιλαβάνουν περίπτωση ανατροπής ή βύθισης του πλοίου. Αν και είναι ένα φαινόμενο που συμβαίνει πολύ σπάνια, οι συνέπειες που επιφέρει είναι πολύ σηματικές από πολλές απόψεις, οπότε θα ήταν χρήσιμο να είχαμε μια εκτίμηση της πιθανότητας εμφάνισής του. Για να γίνει αυτή η εκτίμηση θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η δυναμική συμπεριφορά του πλοίου και να εκτιμηθεί η πιθανότητα το πλοίο να φτάσει σε μεγάλες τιμές εγκάρσιας κλίσης για δεδομένα κυματικά περιβάλλοντα. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορούμε να έχουμε μια εκτίμηση της πιθανότητας ανατροπής του πλοίου.

Στην κατεύθυνση αυτή, είναι απαραίτητο να μοντελοποιηθεί τόσο η δυναμική συμπεριφορά του πλοίου όσο και η τυχαιότητα του κυματικού περιβάλλοντος. Για την δυναμική συμπεριφορά, θεωρούμε απλουστευτικά, στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, ότι το πλοίο αποτελεί έναν ταλαντωτή ως προς την εγκάρσια κλίση, με μη γραμμικές συναρτήσεις επαναφοράς και απόσβεσης. Όσον αφορά την τυχαιότητα, αυτή υπεισέρχεται μέσω της εξωτερικής ροπής από τα κύματα, για την οποία κάνουμε δύο υποθέσεις. Στην πρώτη περίπτωση η τυχαία ροπή αποτελεί λευκό θόρυβο ο οποίος εφαρμόζεται απευθείας στο σύστημα. Οδηγούμαστε έτσι σε ένα σύστημα δύο μεταβλητών στον χώρο των φάσεων, της θέσης και της ταχύτητας. Ωστόσο η θεώρηση αυτή δεν είναι ρεαλιστική καθώς το φάσμα της ροπής στην παραπάνω περίπτωση θα ήταν ομοιόμορφο. Έτσι, στην δεύτερη περίπτωση εισάγουμε ένα φίλτρο στον λευκό θόρυβο. Με άλλα λόγια, ο λευκός θόρυβος εφαρμόζεται σε έναν ενδιάμεσο ξεχωριστό ταλαντωτή, γραμμικής απόσβεσης και επαναφοράς, ο οποίος διεγείρεται από λευκό θόρυβο. Η απόκριση «ταχύτητας» του ταλαντωτή αυτού αποτελεί την ροπή που τελικά εφαρμόζεται στο πλοίο. Σε αυτή την περίπτωση το φάσμα της ροπής είναι αρκετά όμοιο με το φάσμα της ροπής από την θάλασσα. Με αυτή τη θεώρηση καταλήγουμε στην παρούσα εργασία σε ένα σύστημα τεσσάρων μεταβλητών στον χώρο των φάσεων.

Στην κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις καταλήγουμε σε ένα σύστημα στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων από τις οποίες μπορούμε να οδηγηθούμε στην από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) και κατά συνέπεια στην σ.π.π. για την εγκάρσια κλίση. Είναι γνωστό [Risken, 1989] ότι σε ένα τέτοιο σύστημα η σ.π.π. υπακούει, υπό προϋποθέσεις, σε μια μερική διαφορική εξίσωση, την λεγόμενη Foker Plank Kolmogorov (FPK). Η αναλυτική λύση της είναι γνωστή για περιορισμένο αριθμό συστημάτων. Για τις δύο παραπάνω θεωρήσεις που μας ενδιαφέρουν, δεν υπάρχει αναλυτική λύση και έτσι αυτή θα πρέπει να υπολογιστεί αριθμητικά.

Για την αριθμητική λύση της FPK οι πιο γνωστές μέθοδοι είναι μέσω πεπερασμένων στοιχείων [Spencer and Bergman, 1993], πεπερασμένων διαφορών [Wojtkiewicz et al., 1999] και η λεγόμενη «Path Integration» (PI). Οι δύο πρώτες μέθοδοι στοχεύουν σε απευθείας επίλυση της FPK, ωστόσο η PI προσπαθεί να βρει λύση με έμμεσο τρόπο. Στην PI εκμεταλλευόμαστε (ή

ακριβέστερα, υποθέτουμε) την λεγόμενη «μαρκοβιανή» ιδιότητα του συστήματος. Έτσι, διακριτοποιώντας το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων ως προς τον χρόνο, δημιουργούμε μια μαρκοβιανή αλυσίδα [Risken, 1989]. Προκειμένου να μεταβούμε από την σ.π.π. μιας χρονικής στιγμής στην επόμενη, βασιζόμαστε στη λεγόμενη εξίσωση Chapman-Kolmogorov. Για να εφαρμόσουμε την εξίσωση αυτή προσεγγίζουμε την συνάρτηση δεσμευμένης πιθανότητας με μια έκφραση που ισχύει με αρκετή ακρίβεια για μικρό χρονικό βήμα. Με τη μέθοδο αυτή αρχικά ασχολήθηκαν οι [Wehner and Wolfer, 1987]. Από τους [Naess and Moe, 2000] είχε δειχθεί ότι η μέθοδος έχει καλή ακρίβεια στην εκτίμηση της πιθανότητας σε ακραίες περιοχές. Ο [Mo, 2008] εφάρμοσε τη μέθοδο σε διαφόρων ειδών συστήματα αναδεικνύοντας πολλές τεχνικές δυσκολίες. Να σημειωθεί ότι από τον [Mo, 2008] έγινε εφαρμογή της μεθόδου και σε σύστημα έξι διαστάσεων. Εφαρμογές της μεθόδου σε πλοία έχουν γίνει από τους [Cottone et al., 2010] , [Kougioumtzoglou and Spanos, 2013] και [W. Chai et al., 2016]. Να τονίσουμε ότι στους [Cottone et al. , 2010] εφαρμόστηκε ταυτόχρονα με τον κλασσικό Γκαουσιανό θόρυβο και θόρυβος τύπου Poisson. Όσον αφορά τα βήματα για τη διακριτοποίηση του χρόνου και των διαστάσεων υπάρχουν κάποιες κατευθύνσεις [Mo, 2008], [Johnsen, 1992] και [Naess and Harvolsen, 2011] ωστόσο δεν είναι αυστηρές και όπως συμπεραίνεται από τον [Mo, 2008] πρέπει να γίνεται προσαρμογή τους για το εκάστοτε σύστημα ξεχωριστά.

Συνοψίζουμε τα κεφάλαια της εργασίας αυτής ως εξής:

- Κεφάλαιο 2: Κάνουμε μια περιγραφή των βασικότερων πηγών που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξη του αλγορίθμου.
- Κεφάλαιο 3: Συνοψίζουμε τους στόχους της εργασίας αυτής.
- Κεφάλαιο 4: Αρχικά λέμε λίγα λόγια για την κίνηση Brown και τη θεωρία των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων. Ακόλουθα περιγράφουμε το σύστημα που μελετάμε και τις δύο θεωρήσεις για την εξωτερική ροπή.
- Κεφάλαιο 5: Περιγράφουμε αναλυτικά την μέθοδο PI και τον συνδυασμό της με την μέθοδο παρεμβολής.
- Κεφάλαιο 6: Αναφερόμαστε σε τεχνικά σημεία για την υλοποίηση της μεθόδου αλλά και σε κάποιες βελτιστοποιήσεις του αλγορίθμου.
- Κεφάλαιο 7: Αρχικά παραθέτουμε το φάσμα του φιλτραρισμένου θορύβου και τα αποτελέσματα του curve-fitting. Στη συνέχεια έχουμε τα αποτελέσματα του Monte-Carlo. Ακόλουθα έχουμε τα αποτελέσματα των δύο συστημάτων διερευνώντας και τις διακριτοποιήσεις που δίνουν ακριβέστερα αποτελέσματα για το κάθε ένα. Αξιολογούμε τα αποτελέσματα της PI συγκρίνοντάς τα με του Monte-Carlo.
- Κεφάλαιο 8: Διατυπώνουμε τα συμπεράσματά μας από τα αποτελέσματα παραπάνω.

2. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

2.1. Σύνοψη Εναλλακτικών Μεθόδων

Η μέθοδος Path Integration είναι ένας τρόπος για να εκτιμήσουμε την πιθανότητα που έχει το πλοίο, θεωρούμενο ως ταλαντωτής, να φτάσει σε κάποια γωνία εγκάρσιας κλίσης. Υπάρχουν ωστόσο και άλλες προσεγγίσεις για να εκτιμήσουμε την παραπάνω πιθανότητα με βασικότερες να είναι οι "Monte-Carlo", "Stochastic Averaging" [Roberts and Spanos, 1986] και "Critical Wave Groups" [Anastopoulos and Spyrou, 2019]. Η πρώτη μέθοδος είναι η απλούστερη (σε σύλληψη), στην οποία δημιουργούμε στατιστικά στοιχεία για την θέση και την ταχύτητα του πλοίου μέσω προσομοιώσεων της χρονικής εξέλιξης του συστήματος με τυχαία διέγερση. Στην δεύτερη μέθοδο προσπαθούμε να απλοποιήσουμε την στοχαστική διαφορική εξίσωση του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα βασιζόμαστε στην υπόθεση ότι η συνολική ενέργεια του ταλαντωτή αλλάζει «αργά» και «ψευδο-αρμονικά» σε σχέση με μια περίοδο ταλάντωσης και παραμένει σχεδόν σταθερή κατά τη διάρκειά της. Ακόλουθα, εκφράζουμε τη λύση της διαφορικής ως προς ένα ζεύγος νέων μεταβλητών που αναπαριστούν το πλάτος και τη φάση (α, φ) της ενέργειας, τα οποία μεγέθη εμπεριέχουν τις μεταβλητές ενδιαφέροντος, δηλαδή τη θέση και την ταχύτητα $(x, \dot{x})$. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το οριακό θεώρημα Stratonovich-Khasminskii στο σύστημά μας και να λάβουμε δύο εξισώσεις στην μια από τις οποίες το πλάτος είναι αποσυζευγμένο από την φάση. Μπορούμε έτσι να βγάλουμε συμπεράσματα για το σύστημα λύνοντας είτε αριθμητικά είτε αναλυτικά, σε ορισμένες περιπτώσεις, την εξίσωση αυτή. Εφαρμογή των παραπάνω γίνεται και στο [Kougioumtzoglou and Spanos, 2013]. Στην τρίτη μέθοδο προσπαθούμε να χωρίσουμε το πρόβλημα σε δύο υποπροβλήματα. Στο ένα προσπαθούμε να βρούμε ποια πρέπει να είναι η «ελάχιστη» ένταση εξωτερικής διέγερσης, την οποία δέχεται το πλοίο σε μια κατάσταση θέσης και ταχύτητας $(x_0, \dot{x}_0)$ και η οποία οδηγεί οριακά σε ανατροπή, δηλαδή υπέρβαση μιας γωνίας φ_{crit}. Στο άλλο υποπρόβλημα υπολογίζουμε την πιθανότητα να συναντήσουμε οποιαδήποτε κυματική διέγερση με ένταση τουλάχιστον ίση με εκείνη των οριακών διεγέρσεων. Αθροίζοντας κατάλληλα τις πιθανότητες συνάντησης θα έχουμε στην ουσία την πιθανότητα ανατροπής. Όσον αφορά τη μορφή της διέγερσης, αυτή μοντελοποιείται ως μια σειρά από j-αριθμό κυμάτων με $h_n, t_n \;\; 1 \leq n \leq j$ αντίστοιχα ύψη και περιόδους το κάθε ένα. Στην εργασία των [Anastopoulos and Spyrou, 2019] προτάθηκε η χρήση των πιο πιθανών κυματικών ομάδων για τη μοντελοποίηση των οριακών διεγέρσεων αντί της απλουστευτικής χρήσης αρμονικών κυματομορφών.

2.2 Κριτική Ανασκόπηση Βασικών Υλοποιήσεων της Μεθόδου PI

α) [Mo, 2008]

Στο κεφάλαιο 2 της εργασίας αυτής, αρχικά, γίνεται αναφορά στη χρονική διακριτοποίηση μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (ΣΔΕ) και διατυπώνεται ένα ασθενές και ένα ισχυρό κριτήριο σύγκλισης για μια ακολουθία τυχαίων συναρτήσεων. Ακόλουθα, δίνεται ένα κριτήριο επιλογής του χρονικού βήματος για την Path Integration με βάση τον [Naess and

Johnsen, 1992]. Ωστόσο, όπως αναφέρεται και εκεί, η επιλογή του εξαρτάται σημαντικά από την διακριτοποίηση των χωρικών διαστάσεων και σε αρκετές περιπτώσεις το κριτήριο αυτό δεν έχει καλά αποτελέσματα. Στη συνέχεια παρατίθενται διάφορες αριθμητικές μέθοδοι προσέγγισης του ντετερμινιστικού όρου μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Τονίζεται δε, ότι μια αριθμητική μέθοδος μπορεί να έχει επιπλοκές, καθώς το διακριτοποιημένο σύστημα αποτελεί στην ουσία ένα διαφορετικό σύστημα από το συνεχές. Αξίζει να αναφέρουμε ότι δίνεται και ένας αλγόριθμος υπολογισμού της Runge-Kutta $4^{ης}$ τάξης ο οποίος δίνει ελαφρώς καλύτερη ταχύτητα υπολογισμού από τον κλασσικό.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η παρεμβολή είναι πολύ σημαντικό κομμάτι της PI καθώς σε κάθε βήμα απαιτείται με αρκετή ακρίβεια η γνώση της σ.π.π. σε ενδιάμεσα σημεία των κόμβων, όπου είναι γνωστές οι τιμές της. Έτσι ,στο κεφάλαιο 3 αναφέρονται διάφορες μέθοδοι παρεμβολής και αναλύεται μια νέα μέθοδος με στόχο την μείωση των «ταλαντώσεων» που παρουσιάζουν οι B-Splines όταν έχουμε μεγάλα άλματα της συνάρτησης σε κοντινούς κόμβους. Τη μέθοδο αυτή περιγράφουμε και στην παρούσα εργασία στην παράγραφο 5.4. Παρουσιάζει αρκετά πλεονεκτήματα, όπως η θετικότητα, που δεν παρουσιάζεται πάντα στις B-Splines, η ευκολία προσθήκης κόμβων και η «λογική» εκτίμηση δίνοντας παράλληλα τιμές εκτός της συνήθους γραμμικής παρεμβολής. Ωστόσο, όπως παρατηρείται, αυτή η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στους κόμβους. Βλέπουμε επίσης ότι η παρεμβολή μπορεί να συνδυαστεί με την μέθοδο Path Integration υπολογίζοντας από πριν τα ολοκληρώματα της tpd με τις συναρτήσεις βάσης. Ωστόσο γίνεται αρκετά περίπλοκη η υλοποίηση.

Στο κεφάλαιο 4 γίνεται αναλυτική περιγραφή της μεθόδου Path Integration. Να σημειώσουμε εδώ ότι γίνεται αναφορά στην περίπτωση που τα σημεία $\left(x'_{r0}, \varphi(x'_{r0})\right)$, αυτά δηλαδή που έχουν σημαντική συνεισφορά στο ολοκλήρωμα Chapman-Kolmogorov, βρίσκονται εκτός του πλέγματος τότε η τιμή της σ.π.π. $p(x'_{r0}, \varphi(x'_{r0}); t')$ λαμβάνεται ίση με μηδέν. Ωστόσο θα μπορούσε να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στο πρόβλημα αυτό καθώς οδηγεί σε μηδενισμό των τιμών της σ.π.π. σε κάποια ακραία σημεία του πλέγματος. Στη συνέχεια δίνεται ένας τρόπος προσέγγισης της ορίζουσας της Ιακωβιανής ,η οποία ονομάζεται και διορθωτικός όρος ,η οποία παρουσιάζεται στο ολοκλήρωμα της εξίσωσης Chapman-Kolmogorov. Στη συνέχεια αναφέρεται ότι ο παραπάνω όρος είναι κατά κύριο λόγο ίσος με την μονάδα σε πολλές επιπτώσεις. Ωστόσο αναλύεται ένα παράδειγμα συστήματος όπου η παράλειψή του αλλάζει σημαντικά τα αποτελέσματα. Η αιτιολόγηση για το παραπάνω συμπέρασμα γίνεται με δεδομένα και λεπτομέρεια, πράγματα που το κάνουν αρκετά ισχυρό. Τέλος να πούμε ότι περιγράφεται και μια μέθοδος για την έμμεση εύρεση των σημείων $\left(x'_{r0}, \varphi(x'_{r0})\right)$ και ο οποίος σε αρκετούς τύπους συστημάτων μπορεί να επιταχύνει τους υπολογισμούς.

Στο κεφάλαιο 5 αρχικά περιγράφεται πολύ συνοπτικά ο συνδυασμός της μεθόδου PI με την παρεμβολή μέσω B-Splines για χρονικά ομογενή συστήματα . Στη συνέχεια αναλύεται ένας τρόπος υπολογισμού του βασικού ολοκληρώματος της PI μέσω μετασχηματισμού Fourier. Ακολούθως γίνεται κριτική στην μέθοδο παρεμβολής του λογαρίθμου της σ.π.π.. Υποστηρίζεται πως βασικό πρόβλημα της μεθόδου αυτής είναι ότι στα άκρα της σ.π.π. πολλές τιμές τείνουν

στο μηδέν και άρα $\ln\big(p(X';t')\big) \to -\infty$. Ωστόσο το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε ενδεχομένως να λυθεί αν μπορούσαμε να εκτιμήσουμε την σ.π.π. σε σημεία εκτός του πλέγματος. Ακόμα, γίνεται μια συζήτηση σχετικά με το χρονικό βήμα της μεθόδου. Σε γενικές γραμμές υποστηρίζεται πως όσο μεγαλώνει το Δt ,τα σημεία με σημαντική συνεισφορά στο ολοκλήρωμα Chapman-Kolmogorov, έχουν μεγαλύτερο εύρος μεταβολής. Κατά συνέπεια ,λόγω του μεγάλου εύρους τα σφάλματα της παρεμβολής αλληλοαναιρούνται καθώς σε κάποια σημεία X' υπάρχει υπερεκτίμηση και σε κάποια υποεκτίμηση της $p(X';t')$. Αντίθετα, για μικρό Δt η παρεμβολή γίνεται πιο τοπικά όπου πιθανότατα έχουμε αποκλειστικά υποεκτίμηση ή υπερεκτίμηση της $p(X';t')$. Τέλος αξίζει να αναφερθούμε σε μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της PI. Εκεί παρατηρήθηκε ότι η ομοιόμορφη διαμέριση του πλέγματος δεν έδινε καλά αποτελέσματα. Επίσης, από τις προσομοιώσεις Monte Carlo διαπιστώθηκε ότι για κάποια περιοχή του εύρους της Χ-συνιστώσας υπήρχε μεγάλη μεταβλητότητα της συνιστώσας αυτής. Έτσι επιλέχθηκε να πυκνωθεί η διαμέριση του Χ σε εκείνη την περιοχή και να είναι πιο αραιή στην υπόλοιπη, δίνοντας αρκετά καλά αποτελέσματα.

Στο τέλος της εργασίας συμπεραίνεται ότι η επιλογή της διαμέρισης του πλέγματος και του χρόνου πρέπει να είναι προσαρμοσμένη στα μέτρα του εκάστοτε υπό μελέτη συστήματος προκειμένου να έχουμε μια ακριβή λύση.

β) [A. Naess, V. Moe, 2000]

Στο άρθρο αυτό γίνεται εφαρμογή της Path Integration χρησιμοποιώντας τη μέθοδο παρεμβολής με λογαρίθμηση της $p(X';t')$. Αρχικά αναφέρονται οι προσεγγίσεις Runge Kutta Maruyama και Runge Kutta Milstein για την διακριτοποίηση μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Στην Runge Kutta Maruyama δίνεται έμφαση στην προσέγγιση του ντετερμινιστικού όρου της ΣΔΕ, χρησιμοποιώντας την Runge Kutta 4ης τάξης, και διατηρείται μια απλή αναπαράσταση του στοχαστικού της όρου. Στην Runge Kutta Milstein εκτός από την παραπάνω προσέγγιση για τον ντετερμινιστικό όρο δίνεται ακρίβεια στην προσέγγιση και του στοχαστικού όρου. Η παραπάνω προσέγγιση του στοχαστικού όρου ονομάζεται και ισχυρή προσέγγιση Taylor 1ης τάξης. Όπως αναφέρεται όμως, η εμπειρία έχει δείξει ότι μεγαλύτερη σημασία έχει η ακρίβεια του ντετερμινιστικού όρου παρά του στοχαστικού παραπέμποντας σε [Kloeden and Platen, 1992] για περισσότερες λεπτομέρειες. Τέλος γίνεται λόγος για την ισχυρή προσέγγιση Taylor τάξης 1.5 η οποία όμως αυξάνει κατά πολύ την αριθμητική περιπλοκότητα του ολοκληρώματος Chapman-Kolmogorov.

Στα αποτελέσματα έχουν μελετηθεί έξι ταλαντωτές εκ των οποίων οι τέσσερεις έχουν αναλυτική λύση, η οποία συγκρίνεται με τα αποτελέσματα της PI, και δύο χωρίς αναλυτική λύση όπου αυτή τη φορά γίνεται σύγκριση με την μέθοδο Monte Carlo. Βλέπουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις υπάρχει καλή συμφωνία των αποτελεσμάτων με την μέθοδο Monte Carlo ή την αναλυτική λύση ακόμα και στα άκρα των κατανομών. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτές τις περιπτώσεις δεν εμφανίστηκε κάποιο πρόβλημα στην μέθοδο λογαρίθμησης, καθώς σύμφωνα με [Mo, 2008] στα όρια του πλέγματος ενδεχομένως $\ln\big(p(X';t')\big) \to -\infty$. Θα ήταν σκόπιμο

βέβαια να αναφερθεί τι πρακτική εφαρμόστηκε για τα σημεία X' που καταλήγουν εκτός των ορίων του πλέγματος και που ενδεχομένως να είναι η αιτία για πιθανά προβλήματα.

γ) [Naess, 2001]

Στις σημειώσεις αυτές περιγράφεται η Path Integration με έμφαση στην παρεμβολή. Αναφέρεται και εδώ ότι έχει μεγαλύτερη σημασία η ακριβής προσέγγιση του ντετερμινιστικού όρου σε σχέση με τον στοχαστικό. Ακόμα, υποστηρίζεται πως αν το σύστημα έχει μια στάσιμη χρονικά λύση τότε η $p(X;t)$ μέσω της PI θα την προσεγγίσει. Ενδεχομένως όμως να χρειαστούν περισσότερα βήματα ανάλογα με την αρχική κατανομή $p(X;0)$. Θα είχε ένα ενδιαφέρον να εξεταστεί κατά πόσο επηρεάζει η αρχική κατανομή τη στατική κατανομή στην οποία καταλήγουμε με σύγκλιση. Στη συνέχεια, δίνεται και ένα παράδειγμα υλοποίησης της PI. Η υλοποίηση αυτή είναι αρκετά ασταθής και δεν δίνει καλά αποτελέσματα. Ωστόσο έχει συμπεριληφθεί γιατί γίνεται εύκολα κατανοητός ο γενικός αλγόριθμος της PI. Στη συνέχεια δίνεται με αναλυτικό τρόπο ο συνδυασμός της PI με την παρεμβολή μέσω B-Splines για χρονικά ομογενή συστήματα, καθώς και η παρεμβολή μέσω λογαρίθμου.

Δίνονται επίσης κάποιες πρακτικές σχετικά με την υλοποίηση της μεθόδου, κάποιες από τις οποίες έχουν περιγραφεί στο [A. Naess and V. Moe, 2000] και δεν θα τις αναφέρουμε. Σε αυτές δίνεται έμφαση στην περίπτωση που στο σύστημά μας έχουμε μεταβλητές με βοηθητικό χαρακτήρα, όπως συμβαίνει κατά κύριο λόγο στην εφαρμογή διέγερσης με φίλτρο. Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να κρατήσουμε μια σχετικά πυκνή διαμέριση για τις μεταβλητές που μας ενδιαφέρουν άμεσα αλλά και για τις βοηθητικές μεταβλητές. Τέλος, προτείνεται η αναπαράσταση των μεταβλητών ενδιαφέροντος να γίνει με κυβικές splines ενώ η αναπαράσταση των υπόλοιπων μεταβλητών με γραμμική παρεμβολή. Στην περίπτωση αυτή όμως ενδεχομένως να απαιτούνταν μικρότερη διαμέριση στις διαστάσεις των βοηθητικών μεταβλητών ,ώστε να υπάρχει ακρίβεια από την γραμμική παρεμβολή, πράγμα που θα αύξανε σημαντικά τον χρόνο.

δ) [Naess and Harvolsen, 2011]

Στην εργασία αυτή γίνεται παρουσίαση της μεθόδου PI με αρκετά αυστηρή μαθηματική θεμελίωση. Να σημειώσουμε απλά ότι γίνεται αναλυτική μελέτη του σφάλματος της PI συναρτήσει του Δt και έχουμε όμοιο συμπέρασμα με αυτό που είχε εξαχθεί και από τον [Mo, 2008]. Ένα ενδιαφέρον κομμάτι της εργασίας αυτής είναι η εφαρμογή της PI για το σύστημα Lotka-Volterra. Στο σύστημα αυτό υπάρχει ένα ευσταθές σημείο (X_0,Y_0) κοντά στο οποίο υπάρχει και ο μεγαλύτερος όγκος πιθανότητας. Ωστόσο η σ.π.π. μειώνεται με διαφορετικό ρυθμό ,ξεκινώντας από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας, ανάλογα με την κατεύθυνση. Παρατηρείται δηλαδή ότι υπάρχει μεγαλύτερη μείωση αν η κατεύθυνση έχει θετικό X και θετικό Y και άρα είναι λογικό να έχουμε μικρότερη διαμέριση του πλέγματος για τις περιοχές με $X>X_0$ και $Y>Y_0$. Αυτό όμως θα πυκνώσει το πλέγμα όχι μόνο στην περιοχή κοντά στο σημείο ισορροπίας αλλά και στα άκρα, εφόσον χρησιμοποιήσουμε αναπαράσταση με B-Splines. Για να υπάρχει λοιπόν η δυνατότητα τοπικής πύκνωσης του πλέγματος ακολουθείται γραμμική παρεμβολή σε

συνδυασμό με κάποιο κριτήριο για την πύκνωση του πλέγματος. Η διαδικασία λοιπόν είναι η εξής: Γίνεται μια αρχική εκτέλεση της PI με αραιό πλέγμα και όταν φτάσει σε σύγκλιση ελέγχεται αν σε κάθε σημείο υπάρχει «καλή» αναπαράσταση της λύσης σύμφωνα με κάποιο κριτήριο. Για τα σημεία στα οποία δεν συμβαίνει αυτό πυκνώνεται το πλέγμα τοπικά και ξαναεκτελείται η μέθοδος. Όταν φτάσουμε σε σύγκλιση κάνουμε πάλι τον παραπάνω έλεγχο. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρι να μην χρειάζεται περαιτέρω επέμβαση στο πλέγμα. Όσον αφορά τα κριτήρια πύκνωσης αυτά αφορούν τον έλεγχο του όγκου πιθανότητας κάτω από μια περιοχή και την ακρίβεια υπολογισμού της από τον κανόνα του τραπεζίου. Έτσι, σε περίπτωση που ,για μια περιοχή του πλέγματος, η εκτίμηση του «όγκου» κάτω από το γράφημα με τον κανόνα του τραπεζίου αλλάζει σημαντικά σε σχέση με μια πιο ακριβή εκτίμηση, τότε προστίθενται σημεία στην περιοχή αυτή.

Η παραπάνω μέθοδος παρουσιάζει αρκετά θετικά στοιχεία αλλά υπάρχουν και κάποια ερωτήματα. Στα θετικά έχουμε ότι η λύση που λαμβάνουμε θα έχει καλή αναπαράσταση στις περιοχές μεγάλης πιθανότητας. Επίσης δαπανάται υπολογιστική ισχύς μόνο στα σημεία που χρειάζεται. Ωστόσο ,από τα αποτελέσματα βλέπουμε ότι το πλέγμα καταλήγει να είναι αραιό στα άκρα του, κάτι που δεν θα οδηγήσει σε καλή εκτίμηση σύμφωνα με [A. Naess and V. Moe, 2000]. Επιπλέον, τα κριτήρια πύκνωσης του πλέγματος, εφόσον στηρίζονται σε μέτρηση του «όγκου», δεν είναι σίγουρο αν διασφαλίζουν επαρκή διαμέριση για να έχουμε ακρίβεια στις τιμές της σ.π.π.. Δυστυχώς όμως δεν ολοκληρώθηκε ο κώδικας και δεν έγινε εξαγωγή αποτελεσμάτων για να πούμε κάτι με βεβαιότητα.

3. Στόχοι

Οι στόχοι της παρούσας εργασίας μπορούν να διακριθούν στους παρακάτω:

- Κατανόηση της μεθόδου Path Integration.
- Ανάπτυξη ενός, κατά το δυνατό, αποτελεσματικού και γρήγορου αλγορίθμου για την εφαρμογή της.
- Εφαρμογή του αλγορίθμου για την πιθανοτική αξιολόγηση της ευστάθειας πλοίου υπό την επίδραση (φιλτραρισμένου) λευκού θορύβου.
- Εύρεση κατάλληλα πυκνής διαμέρισης των μεταβλητών για «επαρκή» ακρίβεια αποτελέσματος και υπολογιστικής ταχύτητας.
- Αξιολόγηση των αποτελεσμάτων μέσω συγκρίσεων με την μέθοδο Monte-Carlo.

4. Μοντελοποίηση του πλοίου διεγειρόμενου από λευκό θόρυβο

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξαγάγουμε την διαφορική εξίσωση που ακολουθεί η γωνία διατοιχισμού του πλοίου. Την κίνηση αυτή διεγείρει μια εξωτερική ροπή την οποία θεωρούμε τυχαία. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας θα θεωρήσουμε ότι η ροπή συμεριφέρεται ως λευκός θόρυβος, που αποτελεί την «παράγωγο» της κίνησης Brown. Έτσι, η παραπάνω διαφορική εξίσωση ανάγεται στην κατηγορία των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΣΔΕ). Προτού περάσουμε στην παρουσίαση του μοντέλου του πλοίου θεωρούμε σκόπιμο να πούμε κάποια βασικά στοιχεία για την κίνηση Brown και τις ΣΔΕ.

4.1 Βασική θεωρία στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων :

Η κίνηση Brown ήταν το μοντέλο που πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τον Robert Brown και που αποσκοπούσε στο να περιγράψει την τυχαία κίνηση σωματιδίων που διαχέονται σε ένα ρευστό. Οι βασικές μαθηματικές ιδιότητες της κίνησης Brown-$B(t)$ (αλλιώς και διαδικασία Wiener) είναι οι ακόλουθες [Risken, 1989]:

- $B(0) = 0$
- $dB(t) = B(t + dt) - B(t) \sim N_0(0, dt)$, όπου $N_0(0, dt)$ είναι η Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή $m = 0$ και διασπορά $\sigma^2 = dt$
- $E[B(t)] = 0$, $E[B(t)B(s)] = \min(s, t)$ η ιδιότητα αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι οι διάφορες «μεταβολές» $B(t_i) - B(t_{i-1})$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες υπό την προϋπόθεση ότι τα διαστήματα $t_i - t_{i-1}$ δεν έχουν επικάλυψη μεταξύ τους. Κατά συνέπεια, θεωρώντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $t \geq s$ έχουμε: $E[B(t)B(s)] = E\big[\big(B(t) - B(s)\big)B(s) + B(s)B(s)\big] = E[\big(B(t) - B(s)\big)\big(B(s) - B(0)\big)] + E[B^2(s)] = E[B^2(s)] = s$

Τις «απειροστές μεταβολές» $dB(t)$ της κίνησης Brown πολλές φορές τις συμβολίζουμε και ως:

$$dB(t) = N(t)\, dt \quad (4.1)$$

Όπου $N(t)$ είναι ο λευκός θόρυβος. Βλέπουμε ότι $N(t) = \frac{dB(t)}{dt} \sim N_0(0, \frac{1}{dt})$, όπου $N_0(0, \frac{1}{dt})$ Γκαουσιανή κατανομή με $m = 0$, $\sigma^2 = \frac{1}{dt}$. Ισχύει εξ ’ορισμού ότι:

$$R_{NN}(\tau) = E[N(t)N(t + \tau)] = \delta(\tau)$$

Προκύπτει έτσι από το θεώρημα Wiener-Khinchin ότι το φάσμα του λευκού θορύβου είναι:

$$S_{NN}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \quad (4.2)$$

Να σημειωθεί ότι η κίνηση Brown είναι συνεχής κατά μέση τετραγωνική έννοια, ωστόσο μη παραγωγήσιμη. Έτσι στη συνέχεια θα συμβολίζουμε $\dot{B}(t)dt$ και θα εννοούμε $dB(t)$.

Θα περιγράψουμε ακολούθως την τυπική μορφή που έχουν οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις που προσπαθούμε να λύσουμε. Έστω $\mathbf{X}_t$ μια r-διάστατη τυχαία συνάρτηση, τα λεία διανυσματικά πεδία $\alpha: R^r \to R^r$, $b_1, \dots, b_r: R^r \to R^m$ και οι τυχαίες μονοδιάστατες συναρτήσεις $B_t^1, \dots, B_t^m$,η κάθε μια από τις οποίες αναπαριστά μία κίνηση Brown. Συμβολίζουμε $\boldsymbol{B}_t = [B_t^1, \dots, B_t^m]^T$ το τυχαίο διάνυσμα. Με αυτά τα δεδομένα η στοχαστική διαφορική εξίσωση γράφεται ως:

$$dX_t = a(X_t, t)dt + [b_1(X_t, t) * d\boldsymbol{B}_t, \dots, b_r(X_t, t) * d\boldsymbol{B}_t] \quad (4.3)$$

με κάποια αρχική συνθήκη $X_{t=0} = X_{init}$, όπου X_{init} μια τυχαία συνάρτηση. Στην παραπάνω εξίσωση με «*» συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των m-διάστατων διανυσμάτων $b_j(X_t, t)$ και $d\boldsymbol{B}_t$. Να σημειώσουμε εδώ ότι σε πολλές περιπτώσεις η τυχαιότητα υπεισέρχεται στο σύστημα μέσω μίας μόνο παραμέτρου του συστήματος, πράγμα που σημαίνει $b_j(X_t, t) = (0, \dots, 0)$, $j = 1, \dots, r-1$ και $b_r(X_t, t) = (0, \dots, 0, \gamma)$. Αυτό συμβαίνει και στο σύστημα που θα μελετήσουμε.

Είναι γνωστό ότι σε μια στοχαστική διαφορική εξίσωση της παραπάνω μορφής αντιστοιχεί υπό προϋποθέσεις η εξίσωση Fokker Planck Kolmogorov, μια μερική διαφορική εξίσωση που διέπει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(x; t)$ του συστήματος. Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή [Risken, 1989]:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{r} -\frac{\partial}{\partial x_i}[a_i(x,t)p(x,t)] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[(bb^T)_{ij}p(x,t)] \quad (4.4)$$

όπου a, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{bmatrix}$ είναι οι όροι της (4.3). Με την μέθοδο Path Integration δεν προσπαθούμε να λύσουμε με άμεσο τρόπο την παραπάνω εξίσωση. Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι υπάρχει γενική έκφραση για τη συνάρτηση δεσμευμένης πιθανότητας $p(x, t' + dt|x', t')$ η οποία ισχύει με ικανοποιητική ακρίβεια για ένα εύρος του dt [Risken, 1989]. Στη συνέχεια υποθέτουμε μια αρχική κατανομή $p(x_0, t_0)$ και με την βοήθεια της δεσμευμένης πιθανότητας βρίσκουμε την εξέλιξη της $p(x, t)$ με τον χρόνο. Υποθέτουμε ότι για αρκετά μεγάλο t επέρχεται σύγκλιση και έτσι καταλήγουμε στη στατική σ.π.π. του συστήματος [Naess, 2001].

4.2 Μοντελοποίηση της κίνησης roll διεγειρόμενη από τυχαία ροπή

Θεωρούμε ότι η κίνηση roll του πλοίου ακολουθεί την εξίσωση ταλαντωτή με κάποια συνάρτηση απόσβεσης, επαναφοράς και μια εξωτερική διέγερση. Θα εξαγάγουμε στη συνέχεια την εξίσωση κίνησης του πλοίου βασιζόμενοι στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Θα συμβολίσουμε την ροπή αδράνειας του πλοίου χωρίς το νερό που συμπαρασύρει ως I και τη ροπή αδράνειας του συμπαρασυρόμενου νερού ως δI. Στην εξίσωση κίνησης, το πρώτο μέλος θα αφορά τις εξωτερικές ροπές και το άλλο τις επιταχύνσεις των διαφόρων σωμάτων ως αποτέλεσμα των εφαρμοζόμενων ροπών. Οι εφαρμοζόμενες ροπές είναι $-M_D(\dot{\varphi})$ για την

απόσβεση, $-M_R(\varphi)$ για την επαναφορά και $M(t)$ για την διέγερση. Όσον αφορά τους αδρανειακούς όρους, έχουμε δύο επιταχυνόμενα σώματα. Το ένα είναι το πλοίο με αδρανειακό όρο $I\ddot{\varphi}$ και το άλλο είναι το νερό με όρο $\delta I\ \ddot{\varphi}$. Άρα τελικά έχουμε: $I\ \ddot{\varphi} + \delta I\ \ddot{\varphi} = -M_D(\dot{\varphi}) - M_R(\varphi) + M(t)$. Με αναδιοργάνωση των όρων είναι:

$$(I + \delta I)\ \ddot{\varphi} + M_D(\dot{\varphi}) + M_R(\varphi) = M(t) \quad (4.5)$$

Σχετικά με τις καμπύλες υδροδυναμικής αντίστασης και επαναφοράς, κάποιες τυπικές μορφές είναι οι παρακάτω [Spyrou, 2015]:

Για την απόσβεση:

$$M_D(\dot{\varphi}) = B_1\dot{\varphi} + B_3\dot{\varphi}^3 \quad (4.6)$$

ή

$$M_D(\dot{\varphi}) = B_1\dot{\varphi} + B_2|\dot{\varphi}|\dot{\varphi} \quad (4.7)$$

Για την επαναφορά:

$$M_R(\varphi) = C_1\varphi - C_3\varphi^3 \quad (4.8)$$

Το παραπάνω μοντέλο αν και είναι αρκετά απλό, καθώς δεν εμπεριέχει σύζευξη με τις άλλες κινήσεις, μας επιτρέπει να καταλάβουμε διαισθητικά το φαινόμενο και η εφαρμογή της Path Integration γίνεται σημαντικά πιο εύκολη ενώ ο χρόνος εκτέλεσης είναι πολύ πιο σύντομος.

Για να κάνουμε τον μετασχηματισμό στο χώρο φάσεων θέτουμε $x_1 = \varphi$ και $x_2 = \dot{\varphi}$ παίρνοντας:

$$\begin{Bmatrix} dx_1 = x_2\ dt \\ dx_2 = -\frac{1}{I+\delta I}(B_1x_2 + B_2x_2|x_2| + C_1x_1 - C_3x_1^3)\ dt + \left(\frac{M(t)}{I+\delta I}\right)dt \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Η τυχαιότητα στο σύστημα εισάγεται μέσω της ροπής $M(t)$ από τους κυματισμούς. Το φάσμα της διεγείρουσας ροπής συνδέεται με το φάσμα του ύψους κύματος μέσω του λόγου απόκρισης $RAO = |F_{roll}(\omega)|$ από τη σχέση:

$$S_{MM}(\omega) = |F_{roll}(\omega)|^2 S_{\zeta\zeta}(\omega) \quad (4.10)$$

Σε περίπτωση που δεν έχουμε πληροφορίες για τον λόγο απόκρισης μπορούμε να συνδέσουμε τη ροπή με το ύψος κύματος από τη σχέση [Spyrou, 2015]:

$$M(t) = \Delta\ C_1\ a_0\ \eta(t) \quad (4.11)$$

Όπου Δ το εκτόπισμα του πλοίου, C_1 ο πρωτοβάθμιος όρος της καμπύλης επαναφοράς GZ-φ , a_0 ο δείκτης ενεργού κλίσης κύματος και $\eta(t)$ η κλίση του κύματος. Θεωρώντας ότι έχουμε βαθύ νερό, το φάσμα της κλίσης και του ύψους κύματος συνδέονται με τη σχέση:

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \frac{\omega^4}{g^2} S_{\zeta\zeta}(\omega) \quad (4.12)$$

Άρα από τις (4.12),(4.11) και κανονικοποιώντας με τη ροπή αδράνειας $I + \delta I$ έχουμε:

$$S_{mm}(\omega) = \frac{S_{MM}(\omega)}{(I+\delta I)^2} = \left(\frac{\Delta\, C_1 a_0}{I+\delta I}\right)^2 \frac{\omega^4}{g^2} S_{\zeta\zeta}(\omega) \quad (4.13)$$

Θέτουμε $\omega_0 = \sqrt{\frac{\Delta\, C_1}{I+\delta I}}$, που είναι η ιδιοσυχνότητα ελεύθερης αρμονικής ταλάντωσης του πλοίου-συμπαρασυρόμενου νερού. Άρα $S_{mm}(\omega) = \omega_0^4\, \alpha_0^2\, \frac{\omega^4}{g^2}\, S_{\zeta\zeta}(\omega)$ (4.14).

Προσπαθούμε τώρα να αναπαραστήσουμε την τυχαία μεταβλητή της κανονικοποιημένης ροπής $m(t) = \frac{M(t)}{I+\delta I}$ αρχικά ως λευκό θόρυβο και στη συνέχεια μέσω φίλτρου του λευκού θορύβου. Για την πρώτη περίπτωση υποθέτουμε ότι

$$m(t) = \sigma N(t) \quad (4.15)$$

Όπου $N(t)$ ο λευκός θόρυβος. Η κίνηση Brown που περιγράψαμε στην παράγραφο 4.1 χρησιμοποιείται μαθηματικά για να αναπαραστήσουμε το ολοκλήρωμα του λευκού θορύβου. Επομένως:

$$m(t)dt = \sigma dB(t) \quad (4.16)$$

Όσον αφορά τη σταθερά σ, αυτή την προσδιορίζουμε υποθέτοντας ότι το φάσμα του λευκού θορύβου είναι ίσο με το φάσμα της κανονικοποιημένης ροπής διέγερσης στην θέση ω_0 [Chai et al., 2016]

$$S_{mm}(\omega_0) = S_0 \quad (4.17)$$

Προκύπτει άρα $\frac{\sigma^2}{2\pi} = S_0 \Rightarrow \sigma^2 = 2\pi S_0$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το φάσμα $S_{mm}(\omega)$ έχει φυσικό νόημα για θετικά ω ,η τελική τιμή για το σ^2 θα είναι η μισή από αυτή που προαναφέραμε, καθώς το φάσμα S_{NN} είναι συμμετρικό. Άρα:

$$\sigma^2 = \pi S_0 \quad (4.18)$$

Επομένως το σύστημα (4.9) γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{c} dx_1 = x_2 dt \\ dx_2 = -(b_1 x_2 + b_2 x_2|x_2| + c_1 x_1 - c_3 x_1^3)\, dt + \sigma dB(t) \end{array}\right\} \quad (4.19)$$

Για τη δεύτερη προσέγγιση της ροπής $m(t)$ υποθέτουμε ότι η διέγερση προκύπτει σαν λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης [Chai et al., 2015]:

$$\ddot{Y} + b\dot{Y} + aY = \gamma N(t) = \gamma \frac{dB(t)}{dt} \quad (4.20)$$

$\dot{Y}$: είναι η τελική διέγερση στο σύστημα

$N(t)$: Ο λευκός θόρυβος όπως περιεγράφηκε στην παράγραφο 4.1.

a, b, γ: είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν

Για να μετατρέψουμε τον ταλαντωτή (4.20) σε κανονική μορφή θέτουμε $x_3 = \dot{Y}$, $x_4 = -aY$ και έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_3 = (x_4 - bx_3) + \gamma N(t) \\ \dot{x}_4 = -ax_3 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

Επομένως για να βρούμε το φάσμα της x_3 ,που αποτελεί την διέγερση στο πλοίο έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} F(x_3)\,\omega i = F(x_4) - b\,F(x_3) + \gamma\,F\big(N(t)\big) \\ F(x_4) = \dfrac{-a}{\omega i} F(x_3) \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

Επομένως από το (4.22) καταλήγουμε στην ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(\omega) = \frac{F(x_3)}{F\big(N(t)\big)} = \frac{\gamma\omega i}{(a - \omega^2) + b\omega i} \quad (4.23)$$

Άρα, γνωρίζοντας ότι $S_{NN}(\omega) = \frac{1}{2\pi}$ και $S_{x_3x_3}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{NN}(\omega)$ προκύπτει:

$$S_{x_3x_3}(\omega) = \frac{1}{2\pi} * \frac{|i\omega\gamma|^2}{|(a - \omega^2) + b\omega i|^2} = \frac{1}{2\pi} * \frac{(\omega\gamma)^2}{(a - \omega^2)^2 + (b\omega)^2} \quad (4.24)$$

Να σημειώσουμε και εδώ ότι λαμβάνουμε υπ' όψη μόνο τις θετικές συχνότητες των ω ,όπως είχαμε κάνει και στην απλή περίπτωση. Τις σταθερές a, b, γ τις προσδιορίζουμε ώστε το φάσμα $S_{x_3x_3}(\omega)$ να είναι όσο πιο «κοντά» στο $S_{mm}(\omega)$ με μια μέθοδο π.χ. ελαχίστων τετραγώνων. Με αυτά υπόψη έχουμε το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} dx_1 = x_2 dt \\ dx_2 = -(b_1x_2 + b_2x_2|x_2| + c_1x_1 - c_3x_1^3 - x_3)\,dt \\ dx_3 = (x_4 - bx_3)dt + \gamma\,dB(t) \\ dx_4 = -ax_3\,dt \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

Για την εύρεση των σταθερών a, b, γ χρησιμοποιούμε μια συνάρτηση του υπολογιστικού πακέτου Scipy, για την ελαχιστοποίηση των τετραγώνων των διαφορών του φίλτρου (4.24) και του «πραγματικού» S_{mm}. Για να έχουμε ρεαλιστικότερα αποτελέσματα είναι σημαντικό το φάσμα σε συχνότητες κοντά στην ιδιοσυχνότητα του μελετώμενου συστήματος να συμφωνεί με το πραγματικά εφαρμοζόμενο. Για να έχουμε κάτι τέτοιο εισάγουμε [Chai et al., 2015] μια διορθωτική σταθερά c στο φίλτρο. Έτσι, με τις σταθερές a, b, γ που έχουμε ήδη βρεί προσπαθούμε με ελάχιστα τετράγωνα να κάνουμε fit το διορθωμένο φάσμα (4.26)

μεταβάλλοντας μόνο τη σταθερά c αυτή τη φορά και σε μια περιοχή κοντά στην ιδιοσυχνότητα ω_0. Μετά από αυτή τη διόρθωση η διέγερση στην (4.25) θα είναι $c * \gamma$ αντί γ που γράφουμε ανωτέρω.

$$S_{x_3x_3}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{c^2(\omega\gamma)^2}{(a-\omega^2)^2 + (b\omega)^2} \quad (4.26)$$

5. Μέθοδος Path Integration

5.1 Αναλυτική περιγραφή της μεθόδου

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε την μέθοδο στην γενική περίπτωση και θα ακολουθήσει ανάλυση στοχευμένη για τα συστήματα στα οποία έγινε εφαρμογή. Αρχικά αναφέρουμε δύο θεωρήματα που θα χρησιμοποιήσουμε.

Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης: Έστω διανυσματικό πεδίο $F: U \to R^n$ με συνιστώσες $F_i \in C^k(R^n)$, όπου U ανοιχτό υποσύνολο του R^n με $p_0 \in U$. Έστω $\det(J_F(p_0)) \neq 0$. Τότε υπάρχουν ανοιχτά υποσύνολα V, W του R^n με $p_0 \in V, F(p_0) \in W$ και υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση $F^{-1} \in C^k(R^n)$ ώστε $F^{-1}: W \to V$.

Implicit Function Theorem: Έστω διανυσματικό πεδίο : $U \to R^m$, όπου U ανοιχτό υποσύνολο του $R^n \times R^m$,με συνιστώσες $F_i \in C^k(R^n \times R^m)$. Έστω $(p_0, q_0) = (p_1, \dots p_n, q_1, \dots, q_m) \in U$ τέτοιο ώστε $F(p_0, q_0) = 0$ και $D_y F(p_0, q_0) \neq 0$. Θα υπάρχει τότε ανοιχτό υποσύνολο $V_1 \times V_2$ του U με $(p_0, q_0) \in V_1 \times V_2$ και διανυσματικό πεδίο $\varphi: V_1 \to V_2$ και $\varphi \in C^k(R^n)$ με $\varphi(p_0) = q_0$ ώστε $F\big(x, \varphi(x)\big) = 0$ για κάθε $x \in V_1$.

Σημείωση: Αν $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ τότε συμβολίζουμε την παραπάνω ορίζουσα ως:

$$D_y F(p_0, q_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}$$

Στη μέθοδο διακριτοποιούμε την χρονική εξέλιξη της X_t σε n+1 σημεία $t_i = t_0 + i * \Delta t \;\; i = 0, \dots, n,$ σε κάθε ένα από τα οποία αντιστοιχεί το τυχαίο διάνυσμα X_{t_i} με από κοινού πυκνότητα πιθανότητας $p(x_1, \dots, x_r | t_n)$. Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι η λύση της FPK μοιάζει με Brownian motion τοπικά στον χρόνο. Αυτό επιτρέπει να εκφράσουμε την tpd σε κλειστή κανονική μορφή για πολύ μικρό βήμα, η οποία αποτελεί και λύση της FPK τοπικά στον χρόνο. Θεωρούμε έτσι ότι για μικρές τιμές του Δt η παραπάνω ακολουθία των τυχαίων διανυσμάτων είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα. Δηλαδή η έκβαση της μεταβλητής X_i που

αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή t_i εξαρτάται μόνο από την έκβαση της X_{i-1}. Η πυκνότητα πιθανότητας της X_i μπορεί να δοθεί από την εξίσωση Chapman-Kolmogorov:

$$p(X_i, t_i) = \int tpd(X_i|X'_{i-1})\, p'(X'_{i-1}, t_{i-1})\, dx'_1 \dots dx'_r \quad (5.1)$$

Η μέθοδος Path Integration βασίζεται στην εξίσωση Chapman-Kolmogorov για να εξαγάγει κάθε φορά την χρονικά επόμενη σ.π.π.. Στη συνέχεια με a_j , b_r θα συμβολίζουμε τις αντίστοιχες συνιστώσες των συναρτήσεων της εξίσωσης (4.3) .Όσον αφορά την συνάρτηση δεσμευμένης πιθανότητας που χρησιμοποιούμε στην εξίσωση (5.1) , αυτή θα αποτελεί την απλή προσέγγιση του στοχαστικού όρου της (4.3) [A. Naess and V. Moe, 2000]. Για την περίπτωση που η τυχαιότητα υπεισέρχεται από μία μόνο μεταβλητή του συστήματος, αποδεικνύεται [Risken, 1989] ότι για μικρά Δt ισχύει:

$$tpd(x_1, \dots, x_r, t|x'_1, \dots, x'_r, t') =$$

$$\prod_{j=1}^{r-1} \delta\big(x_j - x'_j - a_j(X', t')\Delta t\big) \frac{1}{\sqrt{2\pi\, s_r^2(X')\, \Delta t}} \exp\left(-\frac{(x_r - x'_r - a_r(X', t')\Delta t)^2}{2\, \Delta t\, s_r^2(X')}\right) \quad (5.2)$$

Όπου $s_r^2(X') = \sum_{j=1}^{m} b_{rj}^2(X')$, $\Delta t = t - t'$

Μπορούμε για συντομία να συμβολίζουμε:

$$\tilde{p}(x_r, t|x'_r, t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, s_r^2(X')\, \Delta t}} \exp\left(-\frac{(x_r - x'_r - a_r(X', t')\, \Delta t)^2}{2\, \Delta t\, s_r^2(X')}\right) \quad (5.3)$$

Με $\delta(.)$ συμβολίζουμε την συνάρτηση delta-Dirac ή αλλιώς την κατανομή μιας ντετερμινιστικής μεταβλητής. Επομένως η εξίσωση (5.1) γίνεται μέσω της (5.2):

$$p(\boldsymbol{X}, t_i) = \int \prod_{j=1}^{r-1} \delta\big(x_j - x'_j - a_j(\boldsymbol{X}', t')\, \Delta t\big)\; \tilde{p}(x_r, t|x'_r, t')\, p(\boldsymbol{X}', t_{i-1})\, dx'_1 \dots dx'_r \quad (5.4)$$

Για να υπολογίσουμε γρήγορα το παραπάνω ολοκλήρωμα θα βοηθούσε πολύ να γνωρίζαμε τις τιμές στις οποίες μηδενίζονται τα ορίσματα των συναρτήσεων Dirac τα οποία αποτελούν ένα σύστημα r-1 εξισώσεων και r αγνώστων. Όμως αν κρατήσουμε σταθερή μία από τις μεταβλητές $x'_1, \dots, x'_r$ μπορούμε να επιλύσουμε το σύστημα που προαναφέραμε και να υπολογίσουμε έτσι τα r-1 ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην (5.4). Στην πράξη είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την x'_r ελεύθερη παράμετρο και να υπολογίσουμε για τα διάφορες τιμές της-x'_{r0} το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$H(x'_{r0}) = \int \prod_{j=1}^{r-1} \delta\big(x_j - x'_j - a_j(x'_1, \dots, x'_{r-1}, x'_{r0}, t')\, \Delta t\big)\, dx'_1 \dots dx'_{r-1} \quad (5.5)$$

Επομένως λύνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\left.\begin{array}{c} h_1(x'_1,\dots,x'_{r-1};x'_{r0}) = x_1 - x'_1 - a_1(x'_1,\dots,x'_{r-1},x'_{r0},t')\,\Delta t = 0 \\ \vdots \\ h_{r-1}(x'_1,\dots,x'_{r-1};x'_{r0}) = x_{r-1} - x'_{r-1} - a_{r-1}(x'_1,\dots,x'_{r-1},x'_{r0},t')\,\Delta t = 0 \end{array}\right\} \quad (5.6)$$

Άρα καταλήγουμε στο διανυσματικό πεδίο $h(x'_1,\dots,x'_{r-1};x_{r0}) = (h_1,\dots,h_{r-1})$, όπου $h_i: R^{r-1}\times R \to R$. Θεωρούμε επίσης ότι οι συναρτήσεις $\alpha_1,\dots,\alpha_{r-1}$ έχουν την απαραίτητη λειότητα, άρα και η h. Τέλος βλέπουμε ότι για μικρά Δt είναι $\frac{\partial h_i}{\partial x'_i} \cong -1$ και $\frac{\partial h_i}{\partial x'_k} \cong 0$, $k \neq i$ άρα

$$\det\big(Dh(x'_1,\dots,x'_{r-1};x'_{r0})\big) \cong (-1)^{r-1} \quad (5.7)$$

Επομένως, από το Implicit Function Theorem θα υπάρχει κατά κανόνα λύση στο σύστημα (5.6) σε ένα ανοιχτό διάστημα αρκεί να βρούμε λύση για μία τιμή του x'_{r0}. Η λύση θα είναι της μορφής: $\varphi: V_1 \to V_2$ όπου $V_1 \in R$, $V_2 \in R^{r-1}$, $x'_{r0} \in V_1$ με

$$h\big(x'_{r0},\varphi(x'_{r0})\big) = 0$$

Εφόσον ισχύει η (5.7) θα υπάρχει από το αντίστοιχο θεώρημα και αντίστροφη λεία συνάρτηση $g: R^{r-1}\to R^{r-1}$ ώστε αν $h(x'_1,\dots,x'_{r-1};x'_{r0}) = (y_1,\dots,y_{r-1}) \Rightarrow g(y_1,\dots,y_{r-1};x'_{r0}) = (x'_1,\dots,x'_{r-1};x'_{r0})$. Έτσι το ολοκλήρωμα (5.5) γίνεται:

$$H(x'_{r0}) = \int \prod_{j=1}^{r-1} \delta(y_j)\,\big|J_g(y_1,\dots,y_{r-1})\big| dy_1\dots dy_{r-1} = \big|J_g(\mathbf{0})\big| = \big|J_h\big(x'_{r0},\varphi(x'_{r0})\big)\big|^{-1} (5.8)$$

Επειδή εν γένει η λύση του (5.6) δεν έχει κλειστή μορφή, υπολογίζουμε για διακεκριμένες τιμές του x'_{r0} το ολοκλήρωμα (5.8) και τις τιμές $\varphi(x'_{r0})$ που είναι η λύση του (5.6) . Στη συνέχεια δεν μένει παρά να ολοκληρώσουμε (εν γένει αριθμητικά) ως προς x'_{r0} και να έχουμε:

$$p(X_i,t_i) = \int \big|J_h\big(x'_{r0},\varphi(x'_{r0})\big)\big|^{-1}\,\tilde{p}(x_r,t|x'_{r0},t')\,p(x'_{r0},\varphi(x'_{r0}),t_{i-1})\,dx'_{r0} \quad (5.9)$$

5.2 Παρεμβολή με B-Splines σε μια και πολλές διαστάσεις

Στην σχέση (5.8) είχαμε συναντήσει τις τιμές $p(x'_{r0},\varphi(x'_{r0}),t_{i-1})$. Ένα εύλογο ερώτημα που προκύπτει εδώ είναι γιατί να μην έχουμε υπολογίσει στο προηγούμενο βήμα t_{i-1} τις τιμές της σ.π.π. και στα σημεία $(x'_{r0},\varphi(x'_{r0}))$. Το πρόβλημα είναι ότι θα οδηγούμασταν σε εξαιρετικά πολλούς υπολογισμούς καθώς εν γένει τα σημεία $(x'_{r0},\varphi(x'_{r0}))$ δεν συμπίπτουν με σημεία του πλέγματος. Θα χρειαστεί επομένως να υπολογίσουμε μέσω παρεμβολής τις τιμές της σ.π.π. στα παραπάνω σημεία. Όπως αναλύεται και στο [Naess, 2001] , ένα σχετικά αραιό πλέγμα με συναρτήσεις B-Splines δίνει ικανοποιητική ακρίβεια.

Στη συνέχεια αυτής της παραγράφου θα περιγράψουμε πώς γίνεται η εύρεση των συναρτήσεων βάσης και η παρεμβολή μέσω των B-Splines, αρχικά για μια διάσταση και στη συνέχεια για περισσότερες από μια. Ο αλγόριθμος που παρουσιάζουμε για την επέκταση σε

παραπάνω διαστάσεις δεν είναι βέλτιστος, όμως είναι εύκολα κατανοητή η γενική ιδέα. Για μεγαλύτερη εμβάθυνση στις συναρτήσεις Splines παραπέμπουμε στο [Carl de Boor, 2001].

Η βάση του χώρου των B-Splines

Έστω ότι έχουμε το σύνολο $T = \{t_1, \dots, t_{m+d+1}\}$ των κόμβων με $t_i \leq t_j$, $i \leq j$. Οι συναρτήσεις βάσης μηδενικού βαθμού ορίζονται ως:

$$B_{i,0}(t) = \begin{Bmatrix} 1\,, t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0\,, \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{Bmatrix}, i = 1, \dots, m + d$$

Για βαθμό d>0 έχουμε την αναδρομική σχέση:

$$B_{i,d}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+d} - t_i} B_{i,d-1}(t) + \frac{t_{i+d+1} - t}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} B_{i+1,d-1}(t) \quad (5.10)$$

Σε περίπτωση που δύο κόμβοι στην παραπάνω σχέση ταυτίζονται αυτό που γίνεται στην ουσία είναι να αγνοούμε τον όρο στον οποίο συμβαίνει η ταύτιση.

Δύο βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων βάσης είναι οι εξής:

- $B_{i,d}(t) \geq 0\ \gamma\iota\alpha\ t \in [t_i, t_{i+d+1})\ \kappa\alpha\iota\ B_{i,d}(t) = 0\ \alpha\lambda\lambda\omicron\acute{\upsilon}$
- $B_{i,d}(t) = \sum_{k=i}^{i+d} B_{i,d}^k(t)\ B_{i,0}(t)$ όπου $B_{i,d}^k(t)$ είναι πολυώνυμο βαθμού d

Παρεμβολή σε μία διάσταση

Η συνηθέστερα χρησιμοποιούμενη βάση είναι η κυβική, δηλαδή $d = 3$. Το πρόβλημά μας σε αυτήν την περίπτωση είναι να βρούμε μια συνάρτηση $I_3 f(t)$,που αποτελείται από κυβικά πολυώνυμα κατά τμήματα, με C^2 συνέχεια στα σημεία: $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$ και με συνθήκες $I_3 f(x_i) = f(x_i), i = 1, \dots, m$ (5.11). Ωστόσο, οι συνθήκες (5.11) δεν επαρκούν από μόνες τους και χρειαζόμαστε 2 ακόμα για να καθοριστεί μοναδική συνάρτηση spline. Οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες είναι:

- $I_3 f'(a) = f'(a)\,, I_3 f'(b) = f'(b)\ Hermite$
- $I_3 f''(a) = I_3 f''(b) = 0\ Natural$
- $I_3 f'''(x_2^-) = I_3 f'''(x_2^+)\,, I_3 f'''(x_{m-1}^-) = I_3 f'''(x_{m-1}^+)\ \ Free$

Στην παρούσα εργασία δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραγώγους στα άκρα, ενώ μεταξύ των συνθηκών Natural και Free η δεύτερη δίνει σαφώς καλύτερη εκτίμηση στην πλειονότητα των περιπτώσεων [Carl De Boor, 2001].

Σχετικά με το κομβοδιάνυσμα που θα χρησιμοποιήσουμε, σύμφωνα με σχετικό θεώρημα οι εσωτερικοί του κόμβοι θα πρέπει να εμφανίζονται μία μόνο φορά έτσι ώστε να έχουμε C^2-συνέχεια. Για τις συνθήκες Free το κομβοδιάνυσμα μπορεί να διαμορφωθεί ως:

$$T = \{x_1, x_1, x_1, x_1, x_3, x_4, \dots, x_{m-3}, x_{m-2}, x_m, x_m, x_m, x_m\} \quad (5.12)$$

Βλέπουμε ότι τα σημεία x_2, x_{m-1} δεν εμφανίζονται παραπάνω καθώς το πολυωνυμικό τμήμα στα διαστήματα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ και $[x_{m-2}, x_{m-1}], [x_{m-1}, x_m]$ είναι τρίτου βαθμού με συνέχεια μέχρι και τρίτης παραγώγου για συνθήκη Free. Επομένως, αυτά τα πολυώνυμα στα παραπάνω γειτονικά διαστήματα θα ταυτίζονται και άρα δεν υπάρχει λόγος να τα υποδιαιρούμε με ενδιάμεσους κόμβους. Ακόμα, βλέπουμε ότι για τους παραπάνω κόμβους ισχύουν οι συνθήκες Schoenberg-Whitney nesting conditions . Δηλαδή έχουμε $t_i < x_i < t_{i+4}$, $i = 1, \dots, m$ εκτός από τα άκρα στα οποία ισχύει $t_1 = \cdots = t_4$ και $t_{m+1} = \cdots = t_{m+4}$,όπου επιτρέπουμε $t_1 \leq x_1 < t_5$ και $t_m < x_m \leq t_{m+4}$. Έχοντας εξασφαλίσει αυτή τη συνθήκη σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε σταθερές $c_1, \dots, c_m$ έτσι ώστε:

$$I_3 f(x_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i \, B_{i,3}(x_i) = y_i \, , i = 1, \dots, m$$

Ισοδύναμα, το σύστημα $Ac = \begin{bmatrix} B_{1,3}(x_1) & \dots & B_{i,3}(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,3}(x_m) & \dots & B_{m,3}(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ έχει μοναδική λύση.

<u>Παρεμβολή σε δύο διαστάσεις</u>

Έστω ότι γνωρίζουμε τις τιμές της συνάρτησης $f: R^2 \to R^2$ σε σημεία που σχηματίζουν ένα ορθογώνιο πλέγμα $P = \{x_i | a_1 = x_1 < \cdots < x_n = a_2\} \times \{y_j | b_1 = y_1 < \cdots < y_m = b_2\}$. Αρχικά μπορούμε να αναπτύξουμε για κάθε y_j την συνάρτηση f ώς προς x αφού γνωρίζουμε τις τιμές $f(x_i, y_j)$, $i = 1, \dots n$. Έτσι έχουμε το ακόλουθο ανάπτυγμα:

$$If_j(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(y_j) \, B_{i,kx}^{x}(t) \quad (5.13)$$

Όπου k_x είναι ο βαθμός των πολυωνύμων. Στο παραπάνω άθροισμα παρατηρούμε ότι για κάθε σταθερή τιμή του i έχουμε την σειρά των σταθερών $c_i(y_j)$, $j = 1, \dots, m$, την οποία μπορούμε να αντιμετωπίσουμε σαν μονοδιάστατη συνάρτηση πάλι και να εφαρμόσουμε παρεμβολή ως προς y. Θα έχουμε έτσι:

$$IC_i(u) = \sum_{j=1}^{m} \Gamma(i, j) \, B_{j,ky}^{y}(u) \quad (5.14)$$

Για να λάβουμε την παρεμβεβλημένη τιμή της f σε ένα σημείο (t_1, u_1) θα πρέπει να υπολογίσουμε τις σταθερές του αθροίσματος (5.14) για την τιμή u_1 και να εφαρμόσουμε την σχέση (5.13). Πιο αναλυτικά θε έχουμε τις τιμές:

$$\left\{\begin{array}{l} IC_1(u_1) = \sum_{j=1}^{m} \Gamma(1,j)\, B^{y}_{j,ky}(u_1) \\ \vdots \\ IC_n(u_1) = \sum_{j=1}^{m} \Gamma(n,j)\, B^{y}_{j,ky}(u_1) \end{array}\right\} \quad (5.15)$$

Και τελικά η τιμή της f θα είναι:

$$If(t_1,u_1) = \sum_{i=1}^{n} IC_i(u_1)\, B^{x}_{i,kx}(t_1) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \Gamma(i,j)\, B^{y}_{j,ky}(u_1)\; B^{x}_{i,kx}(t_1) \quad (5.16)$$

Εάν θέλουμε να επεκτείνουμε την παρεμβολή στις τρείς διαστάσεις με $P = \{x_i | a_1 = x_1 < \cdots < x_n = a_2\} \times \{y_j | b_1 = y_1 < \cdots < y_m = b_2\} \times \{z_k | c_1 = z_1 < \cdots < z_l = c_2\}$ θα κάνουμε διδιάστατη παρεμβολή όπως παραπάνω για z_k σταθερό και θα λάβουμε τις σταθερές $c_{ij}(z_k)\,, i = 1, \dots, n\,, j = 1, \dots m.$ Αναπτύσσοντας στη μία διάσταση τις σταθερές $c_{ij}(z_k)$ για i, j σταθερά και k μεταβλητό θα λάβουμε τις σταθερές $\Gamma(i,j,k)$. Οπότε η συνάρτηση παρεμβολής θα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} If(t_1,u_1,s_1) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} IC_{i,j}(s_1)\, B^{y}_{j,ky}(u_1)\, B^{x}_{i,kx}(t_1) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{l} \Gamma(i,j,k) * B^{z}_{k,kz}(s_1)\right] B^{y}_{j,ky}(u_1)\; B^{x}_{i,kx}(t_1) \quad (5.17) \end{aligned}$$

<u>Παρεμβολή σε τέσσερεις διαστάσεις</u>

Θα αναφερθούμε ειδικά και στην παρεμβολή για τέσσερεις διαστάσεις, παρά το γεγονός ότι η μεθοδολογία έχει περιγραφεί παραπάνω. Αυτό γιατί ο τρόπος που υπολογίζουμε τις σταθερές στον κώδικα, στον οποίο έγινε εφαρμογή, ακολουθεί λίγο διαφορετική σειρά. Στον κώδικα η τετραδιάστατη παρεμβολή γίνεται με βάση την διδιάστατη αντί της τρισδιάστατης, όπως θα προέκυπτε από τα παραπάνω. Η πρακτική αυτή ακολουθήθηκε γιατί υπάρχει ήδη ανεπτυγμένη συνάρτηση στην python η οποία, βασιζόμενη σε γλώσσα Fortran, εκτελείται πολύ πιο γρήγορα απ' ό,τι αν γραφόταν σε γλώσσα python, ενώ είναι και αξιόπιστη. Να σημειώσουμε ότι δεν υπάρχει κάποια έτοιμη συνάρτηση παρεμβολής στην βιβλιοθήκη Scipy για παραπάνω από δύο διαστάσεις και έτσι χρειάστηκε να αναπτύξουμε μια τέτοια συνάρτηση για τις τέσσερεις διαστάσεις.

Σε αυτή την περίπτωση το πλέγμα είναι $P = \{x_i | a_1 = x_1 < \cdots < x_n = a_2\} \times \{y_j | b_1 = y_1 < \cdots < y_m = b_2\} \times \{z_k | c_1 = z_1 < \cdots < z_l = c_2\} \times \{w_r | d_1 = w_1 < \cdots < w_s = d_2\}$. Αρχικά για κάθε δυάδα (z_k, w_r) με k, r σταθερά υπολογίζουμε τις σταθερές $C_{i,j}(z_k, w_r)$ με διδιάστατη παρεμβολή και έτσι έχουμε:

$$If^{k,r}(t_1,u_1)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}C_{i,j}(z_k,w_r)\ B_{j,ky}^{y}(u_1)\ B_{i,kx}^{x}(t_1)\ ,k=1,\dots,l\ ,r=1,\dots,s\quad(5.18)$$

Για κάθε ζευγάρι i,j με k,r μεταβλητά αναπτύσσουμε με διδιάστατη παρεμβολή στα σημεία $\{z_k|c_1=z_1<\cdots<z_l=c_2\}\times\{w_r|d_1=w_1<\cdots<w_s=d_2\}$ και έχουμε:

$$IC_{i,j}(s_1,v_1)=\sum_{k=1}^{l}\sum_{r=1}^{s}\Gamma(i,j,k,r)\ B_{r,kw}^{w}(v_1)\ B_{k,kz}^{z}(s_1)$$

Άρα είναι τελικά:

$$If(t_1,u_1,s_1,v_1)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\sum_{r=1}^{s}\Gamma(i,j,k,r)\ B_{r,kw}^{w}(v_1)\ B_{k,kz}^{z}(s_1)\ B_{j,ky}^{y}(u_1)\ B_{i,kx}^{x}(t_1)$$

5.3 Συνδυασμός μεθόδου και παρεμβολής για χρονικά ομογενή συστήματα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε πάλι ένα σύστημα της μορφής που περιεγράφηκε στην παράγραφο 4.2 με την διαφορά ότι οι συναρτήσεις α, b_r δεν έχουν χρονική εξάρτηση. Σε αυτή την περίπτωση η εκτέλεση του αλγορίθμου επιταχύνεται, καθώς οι εξισώσεις (5.6) που πρέπει να λύσουμε για διάφορες τιμές του x'_{r0} έχουν τις ίδιες λύσεις για κάθε $t'\in[0,+\infty)$. Ακόλουθα, συνδυάζουμε την παρεμβολή μέσω Tensor B-splines με το ολοκλήρωμα (5.9):

$$p(X_i,t)=$$

$$\int\left|J_h\left(x'_{r0},\varphi(x'_{r0})\right)\right|^{-1}\tilde{p}(x_r,t|x'_{r0},t')\sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_r=0}^{n_r}\Gamma(i_1,\dots,i_r)\ B_{i_1,k_1}^{x_{i1}}\left(\varphi_1(x'_{r0})\right)\dots B_{i_{r-1},k_{r-1}}^{x_{ir-1}}\left(\varphi_{r-1}(x'_{r0})\right)$$

$$B_{i_r,k_r}^{x_{ir}}(x'_{r0})\ dx'_{r0}$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους έχουμε:

$$p(X_i,t)=$$

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_r=1}^{n_r}[\Gamma(i_1,\dots,i_r)\int\left|J_h\left(x'_{r0},\varphi(x'_{r0})\right)\right|^{-1}\tilde{p}(x_r,t|x'_{r0},t')\ B_{i_1,k_1}^{x_{i1}}\left(\varphi_1(x'_{r0})\right)\dots B_{i_{r-1},k_{r-1}}^{x_{ir-1}}\left(\varphi_{r-1}(x'_{r0})\right)$$

$$B_{i_r,k_r}^{x_{ir}}(x'_{r0})\ dx'_{r0}]\quad(5.19)$$

Αφού λοιπόν τα σημεία $(\varphi_1(x'_{r0}),\dots,\varphi_{r-1}(x'_{r0}),x'_{r0})$ δεν αλλάζουν με τον χρόνο, όπως και οι συναρτήσεις βάσης $B_{i_1,k_1}^{x_{i1}}(.),\dots,B_{i_r,k_r}^{x_{ir}}(.)$,τα ολοκληρώματα στην εξίσωση (5.19) χρειάζεται να υπολογιστούν μόνο μία φορά για κάθε συνδυασμό δεικτών $i_1,\dots,i_r$ αλλά και κάθε X_i. Άρα

τελικά για κάθε σημείο $X_i = (x_1, \dots, x_r)$ στο πλέγμα υπολογισμού έχουμε έναν πίνακα με στοιχεία:

$$B_{i_1,\dots,i_r} = \int \left|J_h\left(x'_{r0}, \varphi(x'_{r0})\right)\right|^{-1} \tilde{p}(x_r, t|x'_{r0}, t')\, B_{i_1,k_1}^{x_{i1}}\left(\varphi_1(x'_{r0})\right) \dots\, B_{i_r,k_r}^{x_{ir}}(x'_{r0})\, dx'_{r0} \quad (5.20)$$

τον οποίο πολλαπλασιάζουμε με τις σταθερές $\Gamma(i_1, \dots, i_r)$ που προκύπτουν από την παρεμβολή της σ.π.π. την χρονική στιγμή t'.

Αξίζει να αναφέρουμε και μια μεθοδολογία [Naess and Moe, 2000]που εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι ο λογάριθμος της σ.π.π. πολλές φορές έχει πολυωνυμική μορφή. Επομένως θα παρεμβάλλεται με αρκετή ακρίβεια από πολυώνυμα. Αναπτύσσουμε άρα την $p_{log}(X; t') = \ln(p(X; t'))$ στη βάση των B-Splines και για να παρεμβάλλουμε στο σημείο X_0 υπολογίζουμε την τιμή της $p_{log}(X_0; t)$,μέσω της διαδικασίας που περιγράψαμε, υψώνουμε με βάση το e. Υπάρχει ωστόσο το μειονέκτημα ότι δεν μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την γραμμικότητα του ολοκληρώματος και να υπολογίσουμε τους πίνακες από την ανωτέρω εξίσωση (5.20). Στην παρούσα εργασία έγινε προσπάθεια εφαρμογής αυτής της μεθόδου, ωστόσο εμφανίστηκε το πρόβλημα που θίγεται από τον [Mo, 2008] και δεν είχαμε κάποιο αποτέλεσμα.

5.4 Μια ακόμα ενδιαφέρουσα μέθοδος παρεμβολής

Η ακόλουθη μέθοδος προτάθηκε από τον [Mo, 2008] και αποσκοπούσε κατά κύριο λόγο στην αποφυγή των ανεπιθύμητων «ταλαντώσεων» που παρουσιάζουν οι συναρτήσεις B-Spline όταν παρουσιάζεται απότομη μεταβολή των τιμών σε γειτονικούς κόμβους. Κάποιες καλές ιδιότητες της παρεμβολής αυτής σύμφωνα με [Mo, 2008] είναι οι παρακάτω:

- Δίνει πάντα θετικές τιμές, καθώς αποφεύγονται οι παραπάνω «ταλαντώσεις»
- Οι τιμές της συνάρτησης παρεμβολής είναι ίσες με τις «πραγματικές» τιμές στους κόμβους
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί αραιότερο πλέγμα σε όλες τις διευθύνσεις σε σχέση με τις κυβικές B-Splines
- Δεν υπάρχει συστηματική υποεκτίμηση ή υπερεκτίμηση της τιμής της συνάρτησης
- Υπάρχει δυνατότητα να επεκταθεί το εύρος της παρεμβολής προσθέτοντας επιπλέον συνοριακές τιμές χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία

<u>Μονοδιάστατη περίπτωση</u>

Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε την συνάρτηση f σε έναν αριθμό από (απλούς) κόμβους, που έστω ότι είναι οι ακέραιοι $\{1,2, \dots, M\}$. Στην γενικότερη περίπτωση που έχουμε μεταβλητό βήμα μπορούμε να αλλάξουμε την κλίμακα των παραπάνω διαστημάτων και έτσι δεν χάνεται η γενικότητα της μεθόδου. Θα περιγράψουμε την μέθοδο χρησιμοποιώντας τις κυβικές B-Splines. Αρχικά προσεγγίζουμε την f από την εκφραση:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{M} f(i)\, B_{i,3}(x) \quad (5.21)$$

Όπου $B_{i,3}(x)$ το κυβικό πολυώνυμο με κεντρικό κόμβο i. Δηλαδή το διάστημα που δεν μηδενίζεται το πολυώνυμο είναι το $[i-2, i+2]$ και οι κόμβοι του είναι οι $\{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$. Αν εφαρμόσουμε την (5.10), σχηματίσουμε ένα από τα παραπάνω κυβικά πολυώνυμα και μετατοπίσουμε κάθε τμήμα του στο διάστημα $[0,1]$ θα έχουμε τα παρακάτω πολυώνυμα:

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{6}x^3 \\ -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

Άρα από τις (5.21),(5.22) θα έχουμε:

$$\tilde{f}(i) = \frac{1}{6}f(i-1) + \frac{2}{3}f(i) + \frac{1}{6}f(i+1) \quad (5.23)$$

Για την περίπτωση που $i = 0$ ή $i = M$, εφόσον η f φθίνει προς το μηδέν στα άκρα, γεγονός που ισχύει γενικά για μια σ.π.π. , προτείνεται να θέσουμε $f(-1) = 0$, $f(M+1) = 0$. Ωστόσο όποτε είναι εφικτό καλό είναι να θέτουμε τιμές που θα «συμφωνούσαν» με την f , όμως δεν υπάρχει κάποια επιπλέον διευκρίνηση.

Από τις παραπάνω τιμές σχηματίζουμε τα παρακάτω πηλίκα:

$$\tilde{q}(i) = \begin{Bmatrix} 0\,, f(i) = 0 \\ \frac{f(i)}{\tilde{f}(i)}\,, f(i) \neq 0 \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

Για να βρούμε την τιμή της παραπάνω συνάρτησης σε ένα σημείο x αρχικά βρίσκουμε τον μέγιστο ακέραιο (i_x) ώστε $i_x \leq x$ και έχουμε:

$$\hat{q}(x) = \big(1 - (x - i_x)\big)\, \tilde{q}(i_x) + (x - i_x)\, \tilde{q}(i_x + 1) \quad (5.25)$$

Με αυτά δεδομένα υπολογίζουμε την παρεμβεβλημένη τιμή της f στο x ως ακολούθως:

$$\hat{f}(x) = \hat{q}(x)\, \tilde{f}(x) \quad (5.26)$$

<u>Επέκταση σε δύο διαστάσεις</u>

Θεωρούμε αυτή τη φορά την f στα σημεία $\{1,2,\dots,M_1\} \times \{1,2,\dots,M_2\}$ και έχουμε αντίστοιχα:

$$\tilde{f}(x,y)=\sum_{i_1=1}^{M_1}\sum_{i_2=1}^{M_2} f(i_1,i_2)\,B_{i_1,3}(x)\,B_{i_2,3}(y) \quad (5.27)$$

Επομένως έχουμε τις τιμές στους κόμβους:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(i_1,i_2)=&\frac{1}{6}\left(f(i_1-1,i_2-1)+\frac{2}{3}f(i_1,i_2-1)+\frac{1}{6}f(i_1+1,i_2-1)\right)\\&+\frac{2}{3}\left(f(i_1-1,i_2)+\frac{2}{3}f(i_1,i_2)+\frac{1}{6}f(i_1+1,i_2)\right)\\&+\frac{1}{6}\left(f(i_1-1,i_2+1)+\frac{2}{3}f(i_1,i_2+1)+\frac{1}{6}f(i_1+1,i_2+1)\right) \quad (5.28)\end{aligned}$$

Σχηματίζουμε τους αντίστοιχους λόγους:

$$\tilde{q}(i_1,i_2)=\begin{Bmatrix}0\,,f(i_1,i_2)=0\\ \dfrac{f(i_1,i_2)}{\tilde{f}(i_1,i_2)}\,,f(i_1,i_2)\neq 0\end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την τιμή $\tilde{q}(x,y)$ βρίσκουμε τους μέγιστους ακεραίους $i_x\le x$ και $i_y\le y$ και υπολογίζουμε την τιμή από διγραμμική παρεμβολή:

$$\begin{aligned}\hat{q}(x,y)=&\big(1-(x-i_x)\big)\left(\big(1-(y-i_y)\big)\,\tilde{q}(i_x,i_y)+(y-i_y)\tilde{q}(i_x,i_y+1)\right)\\&+(x-i_x)\left(\big(1-(y-i_y)\big)\,\tilde{q}(i_x+1,i_y)+(y-i_y)\tilde{q}(i_x+1,i_y+1)\right) \quad (5.30)\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε για την παρεμβεβλημένη τιμή της f :

$$\hat{f}(x,y)=\hat{q}(x,y)\,\tilde{f}(x,y) \quad (5.31)$$

Να σημειωθεί εδώ ότι η μέθοδος αυτή δεν εφαρμόστηκε στην παρούσα εργασία, ωστόσο παρουσιάζει αρκετό ενδιαφέρον καθώς σύμφωνα με [Mo, 2008] έχει καλά αποτελέσματα, ενώ είναι ευέλικτη στην πρόσθεση κόμβων.

5.5 Συγκεντρωτικά τα βήματα του αλγορίθμου

Έχοντας περιγράψει παραπάνω αναλυτικά την μέθοδο PI, θα πούμε συγκεντρωτικά και συνοπτικά τα βήματα του αλγορίθμου. Χωρίζουμε τον αλγόριθμο σε τρείς φάσεις. Η πρώτη φάση αφορά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων (5.8), η δεύτερη φάση τον πίνακα με τις σταθερές (5.20) και η τρίτη την χρονική εξέλιξη της σ.π.π.. Να σημειωθεί ότι πρέπει να έχουμε επιλέξει το πλέγμα-ή αλλιώς σημεία όπου θα υπολογίσουμε την pdf, το οποίο θα είναι της μορφής $\{x_1|a_1=x_{11}<\cdots<x_{1n_1}=b_1\}\times\{x_2|a_2=x_{21}<\cdots<x_{2n_2}=b_2\}\times\ldots\times\{x_r|a_r=x_{r1}<\cdots<x_{rn_r}=b_r\}$.Όπου r είναι ο αριθμός των διαστάσεων και n_i ο αριθμός των σημείων της i-διάστασης.

Πρώτη Φάση: Για κάθε σημείο $(x_1, \dots, x_r)$ λύνουμε το σύστημα (5.6) για διάφορες τιμές του x'_{r0} ως προς $(x'_1, \dots, x'_{r-1}) \equiv \varphi(x'_{r0})$ (η υλοποίηση αυτή λέγεται και backward stepping) και τις αποθηκεύουμε. Υπολογίζουμε επίσης τις τιμές $[\tilde{p}(x_r, t|x'_{r0}, t') \left|J_h\left(x'_{r0}, \varphi(x'_{r0})\right)\right|^{-1}]$ και τις αποθηκεύουμε. Να σημειωθεί εδώ ότι για τα ακραία σημεία του πλέγματος πολλές από τις λύσεις $(x'_{r0}, (x'_1, \dots, x'_{r-1}))$ βρίσκονται εκτός των ορίων του. Στις περιπτώσεις αυτές η παρεμβολή των B-Splines δεν δίνει καλή εκτίμηση, αφού πρόκειται για προεκβολή, και η μέθοδος δεν συγκλίνει. Σε αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι ξεκάθαρο τι θα ήταν σωστότερο. Στις εφαρμογές μας θέσαμε την τιμή της tpd=0.

Δεύτερη Φάση: Πάλι για κάθε σημείο $(x_1, \dots, x_r)$ του πλέγματος υπολογίζουμε αριθμητικά για όλες τις συναρτήσεις βάσης το ολοκλήρωμα (5.20) που συμβολίζουμε $B_{j_1,\dots,j_r}$. Κάθε μία από τις συναρτήσεις βάσης γράφεται ως:

$$B_{j_1,k_1}^{x_1}(x'_1) \dots B_{j_{r-1},k_{r-1}}^{x_{r-1}}(x'_{r-1}) B_{j_r,k_r}^{x_r}(x'_{r0})$$

Όπου $1 \le j_1 \le n_1$, … , $1 \le j_r \le n_r$, είναι οι δείκτες των συναρτήσεων βάσης B-Splines, ο κάθε ένας για την αντίστοιχη διάσταση. Με $k_1, \dots, k_r$ συμβολίζουμε τον βαθμό των πολυωνύμων βάσης της αντίστοιχης διάστασης. Οι δείκτες $x_1, \dots, x_r$ υπάρχουν για να δείξουν ότι οι συναρτήσεις αναφέρονται στην αντίστοιχη διάσταση.

Τρίτη Φάση: Δεδομένου ότι γνωρίζουμε την $p(X, t_{i-1})$ υπολογίζουμε τις σταθερές $\Gamma(j_1, \dots, j_r)$ της r-διάστατης Tensor Spline με την διαδικασία που περιγράψαμε ανωτέρω. Θέλουμε να υπολογίσουμε για κάθε σημείο $(x_1, \dots, x_r)$ του πλέγματος την αντίστοιχη τιμή

$$p(x_1, \dots, x_r, t_i)$$

Επομένως σύμφωνα με την (5.19) υπολογίζουμε το άθροισμα:

$$p(x_1, \dots, x_r, t_i) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_r=1}^{n_r} \left[\Gamma(j_1, \dots, j_r)\, B_{j_1,\dots,j_r}\right]$$

Και έχουμε την pdf της επόμενης χρονικής στιγμής.

Σύμφωνα με [Naess, 2001], εάν το σύστημα έχει μια στατική σ.π.π., η Path Integration θα μπορέσει να καταλήξει σε αυτή την κατανομή ξεκινώντας από μια αρχική $p\left(X, t_0\right)$. Η επιλογή της αρχικής $p\left(X, t_0\right)$ θα επηρεάσει την ταχύτητα με την οποία θα καταλήξουμε στην στατική σ.π.π.. Έτσι, για να βρούμε την στατική αυτή κατανομή εφαρμόζουμε την Chapman-Kolmogorov επαναληπτικά ξεκινώντας από μια κατανομή που υποθέτουμε μέχρι να πετύχουμε σύγκλιση. Το κριτήριο σύγκλισης θα μπορούσε να είναι γενικά ότι η μέγιστη διαφορά $|p(X, t_i) - p(X, t_{i-1})|$ στα σημεία του πλέγματος είναι μικρότερη από κάποια μέγιστη τιμή.

6. Πρακτικά ζητήματα της μεθόδου

6.1 Υλοποίηση και τεχνικά προβλήματα

Εκτίμηση της αρχικής σ.π.π.

Στο ξεκίνημα της μεθόδου θα πρέπει να καθορίσουμε την αρχική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή t_0. Μία αρκετά καλή προσέγγιση για να έχουμε γρήγορη σύγκληση θα μπορούσε να γίνει μέσω μιας Γκαουσιανής κατανομής [Chai et al, 2016] εξάγοντας τη διακύμανση σ_i^2 για κάθε συντεταγμένη του X_t μέσω Monte-Carlo Simulation και θεωρόντας $m_i = 0$. Άρα:

$$p(x_1, \dots, x_r|t_0) = \prod_{j=1}^{r-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi * \sigma_j^2}} \exp(-\frac{{x_j}^2}{2 * \sigma_j^2}) \quad (6.1)$$

Η μέθοδος Monte-Carlo είναι ένας συνήθης και εύκολος τρόπος να βγάλει κανείς συμπεράσματα για ένα στοχαστικό σύστημα. Σε γενικές γραμμές αυτό που κάνουμε είναι να δημιουργούμε στατιστικά στοιχεία τρέχοντας μια χρονική ιστορία ταλάντωσης του πλοίου με τυχαίες απειροστές διεγέρσεις $\sigma N(t)dt$ και $\gamma N(t)dt$,για το διδιάστατο και τετραδιάστατο σύστημα αντίστοιχα. Τα στατιστικά στοιχεία της απόκρισης προκύπτουν από επεξεργασία των καταγραφών της κατάστασης του συστήματος $\boldsymbol{X}_K, K = 1, \dots M$. Προκειμένου να εξασφαλίσουμε τη στατιστική ανεξαρτησία μεταξύ διαδοχικών καταγραφών, διατηρήθηκε μία χρονική απόσταση μεταξύ τους [Mo, 2008]. Αυτή η χρονική απόσταση επιλέχθηκε να ισούται με τη διάρκεια της «στατιστικά» μεταβατικής φάσης του συστήματος, δηλαδή με τον χρόνο που απαιτείται να παρέλθει μέχρι κάποιες χαρακτηριστικές στατιστικές ποσότητες της απόκρισης να φτάσουν οριακά σε στασιμότητα. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήσαμε σαν σημείο αναφοράς τη πρώτη χρονική στιγμή T_1 από την έναρξη της προσομοίωσης από την οποία και ύστερα μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διασπορές όλων των συνιστωσών X^I του διανύσματος της απόκρισης παραμένουν πρακτικά αμετάβλητες. Έτσι, στα στατιστικά στοιχεία για την εξαγωγή των σ.π.π., η δειγματοληψία πραγματοποιούταν κάθε T_1 δευτερόλεπτα από μια συνεχή χρονική ιστορία.

Για να βρούμε την χρονική στιγμή T_1, τρέξαμε πολλές (N) προσομοιώσεις τυχαίας διέγερσης και μικρού σχετικά χρονικού μήκους T_{end} με μηδενική αρχική τιμή. Από την κάθε προσομοίωση καταγράφουμε τις $\boldsymbol{X}(t_i)$ στα χρονικά σημεία $0 \leq t_i \leq T_{end}$. Για τις καταγραφές που αντιστοιχούν στην κάθε t_i υπολογίζουμε από την (6.2) την διακύμανση της κάθε συντεταγμένης $X^I(t_i)$.

$$Var^I(t_i) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(X_k^I(t_i) - m_{X^I})^2}{N} \quad (6.2)$$

Όπου m_{X^I} είναι η μέση τιμή της $X^I(t_i)$.

Για να εξαγάγουμε τις συναρτήσεις περιθώριας πιθανότητας για κάθε μεταβλητή φτιάχνουμε ένα ιστόγραμμα. Αρχικά βρίσκουμε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή που συναντάμε στο δείγμα μας για την κάθε μεταβλητή και χωρίζουμε το διάστημα με σύνορα αυτές τις τιμές σε έναν αριθμό υποδιαστημάτων. Στη συνέχεια βρίσκουμε το πλήθος των καταγεγραμμένων τιμών που συναντάμε σε κάθε διάστημα και διαιρούμε με τον συνολικό αριθμό των καταγραφών για να πάρουμε την συχνότητα εμφάνισης. Διαιρώντας και με το μήκος του υποδιαστήματος παίρνουμε πυκνότητα πιθανότητας.

Ακριβέστερη αναπαράσταση της $\alpha(X_t, t)$

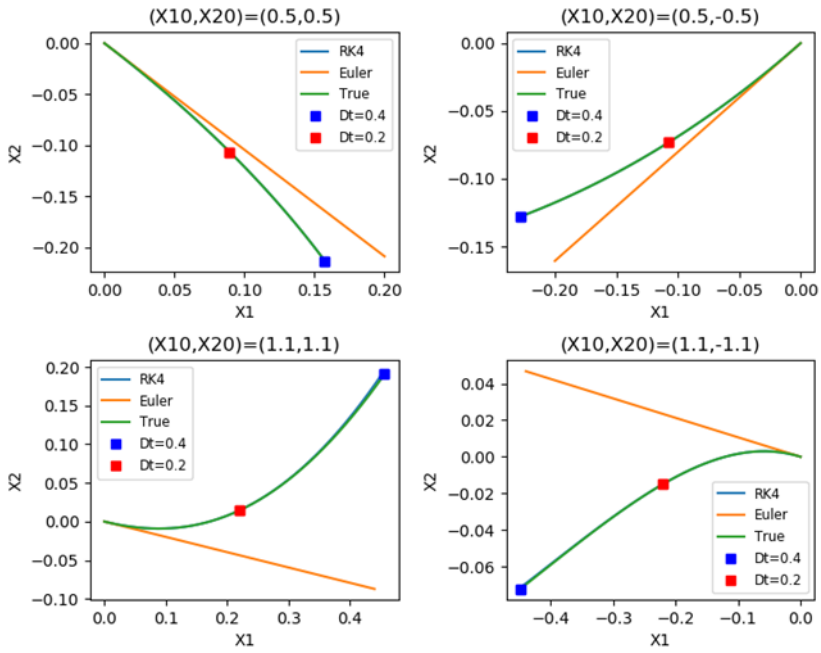
Προκειμένου να έχουμε αρκετή ακρίβεια των λύσεων $(x'_1, \dots, x'_{r-1})$ αλλά και ταχύτητα επίλυσης θα πρέπει η συνάρτηση $\alpha(X_t, t)$ στην (4.3) να «προβλέπει» αρκετά καλά το πώς θα εξελιχθεί το σύστημα την επόμενη χρονική στιγμή. Δηλαδή να παίρνουμε με αρκετά μεγάλη ακρίβεια την αριθμητική λύση της ντετερμινιστικής εξίσωσης $\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \alpha(X_t, t)$, $\boldsymbol{X}_{t=0} = \boldsymbol{X}_0$ με σχετικά "μεγάλες" τιμές του dt (π.χ. dt=0.2). Η προσέγγιση Runge-Kutta 4ης τάξης έχει δειχθεί [Naess and Johnsen, 1992] ότι δίνει αρκετά καλή ακρίβεια. Θα συμβολίσουμε την συνάρτηση που προκύπτει από την προσέγγιση Runge-Kutta 4 σαν $\tilde{\alpha}(X, t)$.

Η μέθοδος Runge-Kutta 4ης τάξης είναι ειδική περίπτωση των μεθόδων Runge-Kutta. Τα βήματα για τον υπολογισμό της για ένα σύστημα της μορφής $\dot{\boldsymbol{X}} = f(\boldsymbol{X}, t)$ είναι:

$$\left.\begin{array}{c} k_1 = f(\boldsymbol{X}_n, t_n) \\ k_2 = f\left(\boldsymbol{X}_n + \frac{dt}{2}k_1, t_n + \frac{dt}{2}\right) \\ k_3 = f\left(\boldsymbol{X}_n + \frac{dt}{2}k_2, t_n + \frac{dt}{2}\right) \\ k_4 = f(\boldsymbol{X}_n + k_3, t_n + dt) \end{array}\right\} \quad (6.3)$$

$$\boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{X}_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\, dt \quad (6.4)$$

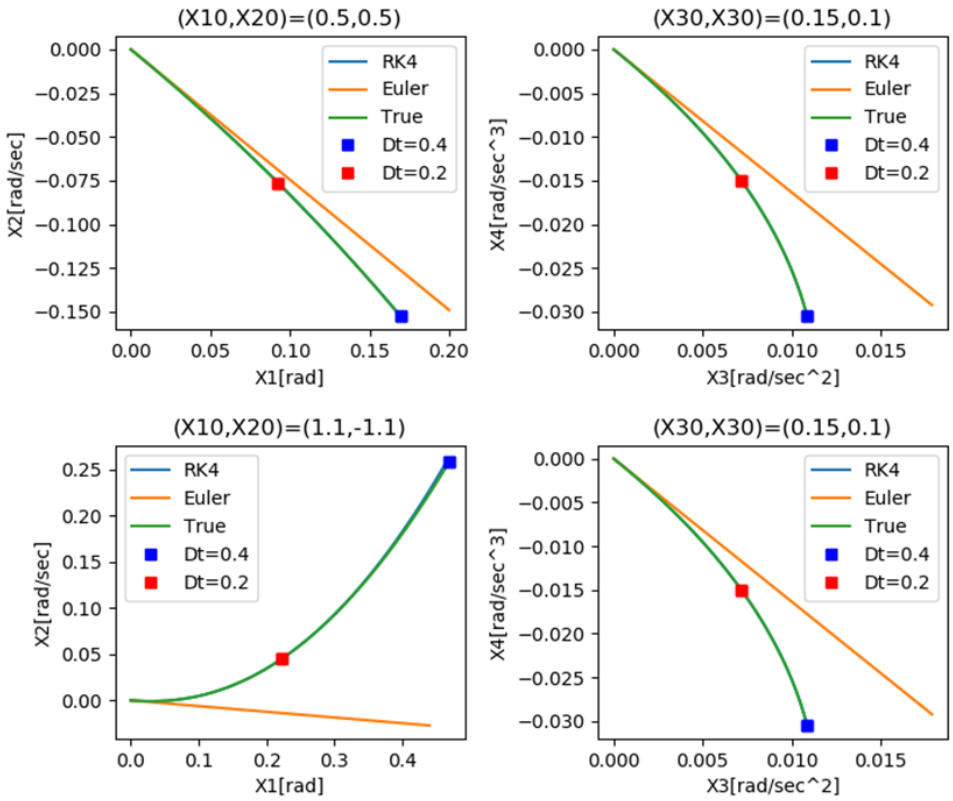
Όπου $\boldsymbol{X}_n$ είναι ένα γνωστό σημείο και $\boldsymbol{X}_{n+1}$ είναι το σημείο που αντιστοιχεί στην χρονική στηγμή $t_n + dt = t_{n+1}$. Με λίγα λόγια προσπαθούμε να κάνουμε μια πρόβλεψη για την παράγωγο που θα έχουμε την $t_n + \frac{dt}{2}$ και $t_n + dt$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Euler. Στο τέλος αθροίζουμε τις διάφορες εκτιμήσεις της παραγώγου με κάποια βάρη, για να πάρουμε την μέση τιμή της στο διάστημα $\boldsymbol{X}_n$-$\boldsymbol{X}_{n+1}$.



Σχήμα 6.1: Σύγκριση των προβλέψεων των RK4 και Euler με την πραγματική εξέλιξη του διδιάστατου συστήματος, ξεκινώντας από ένα αρχικό X_0

Θα θέλαμε να δούμε, σε περίπτωση που δεν έχουμε διέγερση, πώς συγκρίνονται οι προβλέψεις που μας δίνουν οι μέθοδοι RK4 και Euler με την πραγματική εξέλιξη του συστήματος. Στα σχήματα 6.1,6.2 έχουμε θεωρήσει κάποιο αρχικό σημείο X_0 (με συντεταγμένες (0,0) στα διαγράμματα) την t_0 στον χώρο φάσεων για το σύστημα που μελετάμε. Ξεκινώντας από το X_0 βλέπουμε για διάφορα $t = t_0 + i\ dt$ την πρόβλεψη που δίνουν οι μέθοδοι Euler και RK4 για χρονικό βήμα $i\ dt$ και ποια είναι η πραγματική πορεία του συστήματος. Η πραγματική πορεία του συστήματος προκύπτει λύνοντας αριθμητικά με βήμα dt τις ντετερμινιστικές εξισώσεις του μοντέλου που περιγράψαμε στην παράγραφο 4.2. Στο σχήμα 6.1 έχουμε καμπύλες για τέσσερα αρχικά σημεία, δύο με ήπια και δύο με έντονη μη γραμμικότητα. Βλέπουμε ότι ακόμα και στην έντονη μη γραμμικότητα, όπου βρισκόμαστε κοντά στο ασταθές σημείο της καμπύλης επαναφοράς, και για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα πρόβλεψης (0.4 sec μέγιστο) η RK4 σχεδόν ταυτίζεται με την «πραγματικότητα».

Επιπλέον, τα σημεία (X_1,X_2) (ομοίως (X_1,X_2,X_3,X_4)) των παραπάνω διαγραμμάτων έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό. Το σημείο (X_{10},X_{20}) (ομοίως (X_{10},X_{20},X_{30},X_{40})) έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα να είναι αυτό από το οποίο πέρασε το σύστημα τη χρονική στιγμή t_0 και κατέληξε στο (X_1,X_2) (ομοίως (X_1,X_2,X_3,X_4)) την t. Αυτό είναι εύκολο να το δούμε από την tpd (5.1) θέτοντας την τιμή του εκθετικού και των ορισμάτων των κατανομών-δ ίσα με μηδέν.



Σχήμα 6.2 Σύγκριση των προβλέψεων των RK4 και Euler με την πραγματική εξέλιξη του διδιάστατου συστήματος, ξεκινώντας από ένα αρχικό X_0

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Στην εξίσωση (5.9) ή , ισοδύναμα για χρονικά ομογενές σύστημα (5.19), ανακύπτει το πρόβλημα της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Αρχικά θα πρέπει να δούμε πώς θα προσδιορίσουμε το διάστημα που θα ολοκληρώσουμε ως προς x'_{r0}. Σε γενικές γραμμές, το ολοκλήρωμα στην (5.9) εξαρτάται από τις τιμές της $\tilde{p}(x_r, t|x'_{r0}, t')$ οι οποίες με τη σειρά τους εξαρτώνται κυρίως από τις τιμές του x'_{r0} καθώς ο όρος $\alpha_r(X', t')\,\Delta t$, στο εκθετικό της (5.3) , παίρνει σχετικά μικρές τιμές λόγω του Δt. Επομένως αν θεωρήσουμε $\sigma^2_{max} = \sup(s^2_r(X')\,\Delta t)$ ως την μέγιστη διασπορά και υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο διάστημα $[x_r - 3\sigma_{max}\,, x_r + 3\sigma_{max}]$ θα έχουμε υπολογίσει περίπου το 99.7% της συνολικής τιμής. Ωστόσο, σε περίπτωση που οι ποσότητες $\left|J_h\left(x'_{r0}, \varphi(x'_{r0})\right)\right|^{-1}$ και $p(x'_{r0}, \varphi(x'_{r0}); t_{i-1})$ έχουν αυξημένες τιμές στα άκρα του παραπάνω διαστήματος αλλά και που η ποσότητα $\tilde{\alpha}_r(X', t')\,\Delta t$ μεταβάλλει την μέση τιμή της αντίστοιχης Γκαουσιανής υπολογίζουμε τελικά στο διάστημα $[x_r - 5\sigma_{max}\,, x_r + 5\sigma_{max}]$ για να διασφαλίσουμε ότι έχουμε λάβει τα σημεία με την μεγαλύτερη συμβολή στο ολοκλήρωμα.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν είναι η μέθοδος του τραπεζίου και ο κανόνας του Simpson. Για n και 2n+1-αριθμό ισαπεχόντων, με βήμα h, σημείων στον x-άξονα οι μέθοδοι είναι αντίστοιχα:

Κανόνας του τραπεζίου:

$$I_T = \left(\frac{1}{2}f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right)h$$

Κανόνας του Simpson:

$$I_S = \left(1f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{2n-1}) + 4f(x_{2n}) + 1f(x_{2n+1})\right)\frac{h}{3}$$

Η επιλογή του βήματος ολοκλήρωσης θα πρέπει να γίνει προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το σφάλμα ολοκλήρωσης. Να επισημάνουμε βέβαια ότι παίρνοντας πολύ μικρό βήμα αυξάνεται και ο αριθμός των διαφορετικών συστημάτων (5.6) που πρέπει να επιλύσουμε. Επομένως η χρονική διάρκεια της πρώτης φάσης του αλγορίθμου αυξάνεται σχεδόν αναλογικά με τον αριθμό των υποδιαστημάτων. Για το 2D σύστημα μπορεί να έχουμε αρκετά περιθώρια από άποψη υπολογιστικού χρόνου, ωστόσο στο 4D σύστημα η διάρκεια είναι της τάξης των 2.5 ωρών.

Προσπαθούμε τώρα να κάνουμε μια χοντρική εκτίμηση του σφάλματος. Στην πράξη έχουμε δει ότι ο όρος που μεταβάλλεται σημαντικότερα στο ολοκλήρωμα είναι ο $\tilde{p}(x_r, t|x'_{r0}, t')$. Δηλαδή μια Γκαουσιανή με μέση τιμή $x_r - a_r(X', t')\,\Delta t \to x_r$ και διασπορά $s_r^2(X')$,η οποία για τις εφαρμογές μας είναι $\sigma^2 dt = const$ για το 2D και $(\gamma c)^2 dt = const$ για το 4D. Έτσι εκτιμούμε το σφάλμα ολοκλήρωσης της $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2})$ στο διάστημα $[-5\sigma_1, 5\sigma_1]$.

Τα σφάλματα για τον κανόνα τραπεζίου και Simpson με όρια ολοκλήρωσης a, b είναι αντίστοιχα:

$$E_T = \frac{h^2}{12}(b-a)\max(|f''(x)|\,, x \in [a,b])$$

$$E_S = \frac{h^4}{180}(b-a)\max(|f''''(x)|\,, x \in [a,b])$$

Για τα συστήματα που μελετήσαμε δοκιμάσαμε τα σφάλματα των δύο μεθόδων για $dt = 0.1$. Οι μέγιστες τιμές της δεύτερης και τέταρτης παραγώγου αντίστοιχα εμφανίζονται στο Σύγκριση των προβλέψεων των RK4 και Euler με την πραγματική εξέλιξη του διδιάστατου συστήματος, ξεκινώντας από ένα αρχικό $x = 0$ και είναι $\frac{1}{\sqrt{2\pi}*\sigma^3}$, $\frac{3}{\sqrt{2\pi}*\sigma^5}$ αντίστοιχα. Στον πίνακα 6.1 είναι οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων από την πραγματική τιμή που είναι $\int_{-5\sigma_1}^{5\sigma_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} dx \cong 1$.

Αριθμός Υποδιαστημάτων	E_T	E_S
20	0.0831	0.0042
22	0.0687	0.0028
24	0.0577	0.002

26	0.0492	0.0015
28	0.0424	0.0011
30	0.0369	0.0008

Πίνακας 6.1: Μέγιστες αποκλίσεις από την μονάδα για τις δύο μεθόδους

Βλέπουμε ότι ο κανόνας του Simpson υπερτερεί κατά πολύ του τραπεζίου και έτσι προτιμάμε τελικά αυτή τη μέθοδο. Επιλέξαμε για το 2D σύστημα 26 υποδιαστήματα και για το 4D 20.

Πρόβλημα στην πρώτη φάση του αλγορίθμου για το 4D σύστημα

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου για το τετραδιάστατο σύστημα παρατηρήθηκε ότι οι αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση του (5.6) δεν μπορούσαν να καταλήξουν σε λύση για τα σημεία του πλέγματος που διέθεταν $x_1 = 0$. Το πρόβλημα αυτό παρακάμφθηκε βάζοντας τα σημεία της 1ης διάστασης συμμετρικά εκατέρωθεν του μηδέν. Επιπλέον, και για τα σημεία κοντά στα άκρα της κατανομής , για $x_1 = \pm 1[rad]$ παρατηρήθηκε κάποια δυσκολία στην σύγκλιση, οχι όμως τόσο σοβαρή όσο στο $x_1 = 0$.

Κανονικοποίηση της pdf

Έχει παρατηρηθεί ότι ο συνολικός όγκος πιθανότητας μεταβάλλεται και αποκλίνει σημαντικά από τη μονάδα. Για παράδειγμα στο διδιάστατο σύστημα η τελική σ.π.π. ,για την οποία χρειάστηκε διάστημα δύο λεπτών χρονικής εξέλιξης, έχει τελικό όγκο πιθανότητας ίσο με 0.958. Επίσης παρατηρήθηκε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το dt τόσο μικρότερος είναι ο συνολικός όγκος πιθανότητας. Σύμφωνα με [Naess and Moe, 2000] πρέπει να γίνεται κανονικοποίηση της σ.π.π. όταν ο συνολικός όγκος αποκλίνει κατά μια ποσότητα από την μονάδα. Ωστόσο η παρεμβολή που έχουμε χρησιμοποιήσει έχει γραμμικές ιδιότητες [Carl de Boor, 2001] και άρα αν $If(x,y)$ είναι η συνάρτηση παρεμβολής της $f(x,y)$ τότε η $\alpha\, If(x,y)$ θα είναι της $\alpha\, f(x,y)$. Επομένως και οι συντελεστές $\Gamma(i,j)$ θα γίνονται $\alpha\, \Gamma(i,j)$.Οπότε άν πολλαπλασιάσουμε την $p(X,t_i)$ με έναν συντελεστή α για κανονικοποίηση, θα έχουμε από τον τύπο (5.19) ότι $p_\alpha(X,t_{i+1}) = \alpha\, p(X,t_{i+1})$ όπου $p_\alpha(X,t_{i+1})$ είναι η κατανομή που παίρνουμε κανονικοποιόντας την $p(X,t_i)$ με α. Οπότε την κανονικοποίηση αυτή μπορούμε την κάνουμε μια φορά στο τέλος της χρονικής εξέλιξης της σ.π.π.

6.2 Βελτιστοποιήσεις του αλγορίθμου

Συντόμευση υπολογισμών των συντελεστών $B_{j_1,\dots,j_r}$

Από την (5.19) βλέπουμε ότι ο συνολικός αριθμός των τιμών που πρέπει να αποθηκεύσουμε θα είναι για κάθε σημείο $n_1 \dots n_r$, όπου n_i είναι ο αριθμός των σημείων στην διάσταση x_i. Αυτό θα πρέπει να γίνει για κάθε σημείο του πλέγματος και τελικά θα έπρεπε να αποθηκεύσουμε $(n_1 \dots n_r)^2$ τιμές, πράγμα που θα απαιτούσε πολύ μεγάλο χώρο για τη μνήμη RAM. Επειδή όμως κάθε συνάρτηση βάσης $B_{i,d}$ μηδενίζεται εκτός του διαστήματος $t \in [t_i, t_{i+d+1})$, χρειάζεται να υπολογίσουμε την σχέση (5.20) μόνο για τους δείκτες στους οποίους

οι συναρτήσεις βάσης δεν μηδενίζονται στα σημεία $(\varphi_1(x'_{r0}), \dots, \varphi_{r-1}(x'_{r0}), x'_{r0})$ για τις διάφορες τιμές του x'_{r0}. Άρα λοιπόν, για κάθε διάσταση x_i του συστήματος βρίσκουμε τις τιμές $\varphi_i(x'_{r0})_{min}, \varphi_i(x'_{r0})_{max}$ και τον ελάχιστο και μέγιστο κόμβο t_{min}, t_{max} αντίστοιχα του κομβοδιανύσματος ώστε $t_{min} \leq \varphi_i(x'_{r0})_{min}$, $\varphi_i(x'_{r0})_{max} \leq t_{max}$.

Ανατροφοδότηση λύσεων

Κατά την επίλυση του συστήματος (5.6) η επίλυση θα γίνει με κάποια αριθμητική μέθοδο, πόσο μάλλον αν χρησιμοποιούμε την RK4 αναπαράσταση των $a_i(X')$. Η αριθμητική μέθοδος θα χρειάζεται κάποιο αρχικό σημείο P_0 για να ξεκινήσει τις επαναλήψεις και να συγκλίνει. Καθώς αλλάζουμε την παράμετρο x'_{r0} κατά κάποιο βήμα, οι παράμετροι των νέων εξισώσεων δεν αλλάζουν ιδιαίτερα και μια κοντινή λύση τους θα ήταν η λύση που αντιστοιχούσε στο αμέσως προηγούμενο x'_{r0}. Άρα ένα καλό P_0 θα ήταν η λύση του προηγούμενου συστήματος, την οποία έχουμε αποθηκεύσει.

Εκμετάλλευση της συμμετρίας

Το σύστημα που μελετάμε έχει την ιδιότητα της συμμετρίας όπως βλέπουμε από την (4.25). Δηλαδή για την συνάρτηση $a(X) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -b_1x_2 - b_2x_2|x_2| - c_1x_1 + c_3x_1^3 + x_3 \\ x_4 - bx_3 \\ -ax_3 \end{bmatrix}$ ισχύει $a(X) = a(-X)$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι και η αναπαράστασή της με την RK4 - $\tilde{a}(X)$ θα είναι επίσης συμμετρική. Αυτό έχει σαν συνέπεια αν $(x'_{r0}, \varphi(x'_{r0}))$ είναι οι λύσεις του (5.6) για το σημείο $(x_{1j_1}, \dots, x_{rj_r})$ τότε οι λύσεις για το $(-x_{1j_1}, \dots, -x_{rj_r})$ σημείο του πλέγματος είναι οι συμμετρικές, δηλαδή $(-x'_{r0}, -\varphi(x'_{r0}))$.Επιλέγουμε επίσης στο πλέγμα να εμπεριέχονται όλα τα συμμετρικά σημεία. Δηλαδή για κάθε διάσταση i να έχουμε τα σημεία $\{a_i = x_{i1} < \dots < x_{in_i} = b_i\}$ έτσι ώστε $x_{ij} = -x_{i(n_i-j+1)}$. Από αυτό συνεπάγεται ότι και οι συναρτήσεις βάσης είναι συμμετρικές, δηλαδή

$$B_{j_1,k_1}^{x_{i1}}(x'_1) \dots B_{j_r,k_r}^{x_{ir}}(x'_{r0}) = B_{n_1-j_1+1,k_1}^{x_{i1}}(-x'_1) \dots B_{n_r-j_r+1,k_r}^{x_{ir}}(-x'_{r0})$$

Αυτό έχει συνέπεια

$$B_{j_1,\dots,j_r}(x_{1j_1}, \dots, x_{rj_r}) = B_{n_1-j_1+1,\dots,n_r-j_r+1}(-x_{1j_1}, \dots, -x_{rj_r}) \quad (6.5)$$

Άρα οι πίνακες με τους συντελεστές $B_{j_1,\dots,j_r}$ είναι ίσοι μεταξύ τους για συμμετρικά σημεία πλέγματος. Ακόμα, βασικό στοιχείο είναι ότι έχουμε και διέγερση με μηδενική μέση τιμή. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η αρχική Γκαουσιανή να έχει $m_i = 0$ για όλες τις διαστάσεις και να είναι επίσης συμμετρική. Επομένως για τους συντελεστές $\Gamma(j_1, \dots, j_r)$ ισχύει πάλι ότι:

$$\Gamma(j_1, \dots, j_r) = \Gamma(n_1 - j_1 + 1, \dots, n_r - j_r + 1) \quad (6.6)$$

Από τις (6.5),(6.6) για την σ.π.π. που θα προκύψει θα ισχύει πάλι η (6.5) όπως και για αυτές που θα ακολουθήσουν.

Στην πράξη εκτελούμε την πρώτη και δεύτερη φάση του αλγορίθμου για τα μισά σημεία μόνο της 1ης διάστασης του πλέγματος, άρα υπολογίζουμε συνολικά τα μισά σημεία της χρονικά επόμενης σ.π.π. και τελικά κάνουμε τους μισούς υπολογισμούς. Από δοκιμές, για το 4D σύστημα παρατηρούμε μια μέγιστη διαφορά κατά απόλυτη τιμή της τάξης του 10^{-13} -10^{-14} σε σχέση με το αν εκτελούσαμε τους υπολογισμούς για όλα τα σημεία. Ωστόσο είναι δύσκολο να επηρεάσει σημαντικά την περιθώρια κατανομή του X_1 καθώς είναι της τάξης του 10^{-7} κατ' ελάχιστο. Το σαφές πλεονέκτημα αυτής της πρακτικής είναι ότι χρειαζόμαστε τον μισό χρόνο αλλά και τον μισό αποθηκευτικό χώρο στην μνήμη RAM.

Έμμεση εύρεση των λύσεων του συστήματος (5.6)

Η παρακάτω μεθοδολογία δεν εφαρμόστηκε στην παρούσα εργασία, όμως αξίζει να την αναφέρουμε καθώς μπορεί να προσφέρει αρκετή ταχύτητα στην πρώτη φάση του αλγορίθμου. Η παρακάτω μέθοδος αναφέρεται από τον [Mo, 2008] και εφαρμόζεται από τους [Johnsen, 1992] ,[Moe, 1997], [Skaug et al., 2000]. Πιο συγκεκριμένα προτείνεται η εύρεση των σημείων που είναι λύσεις των (5.6) με κάποιο έμμεσο τρόπο επιλύοντας έτσι το σύστημα λιγότερες φορές. Για παράδειγμα εάν η τυχαιότητα υπεισέρχεται στο σύστημα μέσω μιας μόνο μεταβλητής, οι λύσεις $\left(x'_{r0}, \varphi(x'_{r0})\right)$ του (5.6) βρίσκονται κατά προσέγγιση σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Θα μπορούσαμε λοιπόν να βρούμε μόνο τα ακραία σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $\left(x'_{rA}, \varphi(x'_{rA})\right) \equiv A$, $\left(x'_{rB}, \varphi(x'_{rB})\right) \equiv B$, όπου x'_{rA} , x'_{rB} οι ακραίες τιμές του x'_{r0} .Έτσι, τα ενδιάμεσα σημεία $\varphi(x'_{r0})$ να προκύψουν με ομοιόμορφη γραμμική παραμετροποίηση, δηλαδή $\varphi(x'_{r0}) = \left(\varphi(x'_{rB}) - \varphi(x'_{rA})\right)\frac{x'_{r0}-x'_{rA}}{x'_{rB}-x'_{rA}} + \varphi(x'_{rA})$. Παρουσιάζονται βέβαια προβλήματα στην παραμετροποίηση όταν οι λύσεις δεν ακολουθούν ευθεία και πρέπει να γίνει κάποιο fit πολυωνύμου μεγαλύτερης τάξης. Επιπλέον τίθεται το ερώτημα της ακρίβειας των λύσεων, η οποία είναι απαραίτητη για να έχουμε ευσταθή λύση. Ακόμα, μπορεί οι λύσεις που προκύπτουν να ακολουθούν ευθεία, ωστόσο οι τιμές $\varphi(x'_{r0})$ να μη μεταβάλλονται ακριβώς ομοιόμορφα με την παράμετρο x'_{r0} .

7. Αποτελέσματα

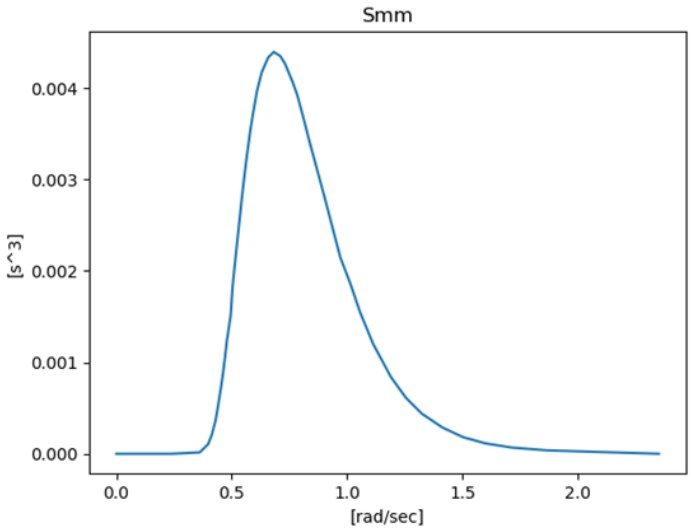
7.1 Curve-Fit του φάσματος

Παραθέτουμε τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης με ελάχιστα τετράγωνα του φάσματος δευτέρας τάξης στο φάσμα της διέγερσης αλλά και την διορθωτική σταθερά σε ένα εύρος κοντά στην ιδιοσυχνότητα του πλοίου που εξετάζουμε. Τα αποτελέσματα που θα ακολουθήσουν αφορούν ένα ωκεανογραφικό που περιγράφεται στο [Chai et al., 2015]. Υποθέτουμε ότι το φάσμα της θάλασσας είναι είδους Pierson-Moskowitz:

$$S_{\zeta\zeta}(\omega) = \frac{5.058\ g^2\ H_s^2}{T_p^4\ \omega^5} \exp\left(-1.25\ \frac{\omega_p^4}{\omega^4}\right) \quad (7.1)$$

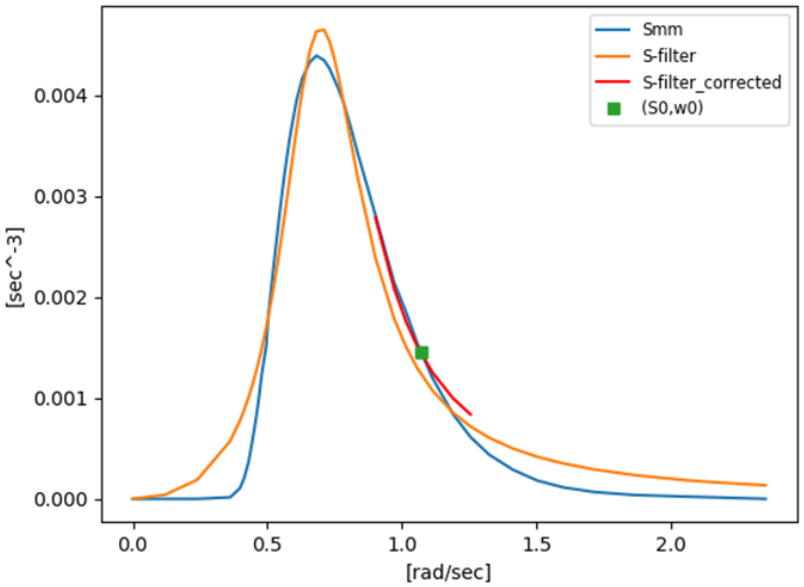
Εξετάζουμε την περίπτωση όπου $H_s = 4m$ και $T_p = 11sec$. Στο σχήμα 7.1 παραθέτουμε το τελικό φάσμα με βάση τον συντελεστή RAO του πλοίου, που δίνεται από την εξίσωση (7.2) κανονικοποιημένο με την συνολική ροπή αδράνειας. Δηλαδή:

$$S_{mm}(\omega) = \frac{|F_{roll}(\omega)|^2}{(I + \delta I)^2}\ S_{\zeta\zeta}(\omega) \quad (7.2)$$



Σχήμα 7.1 Το φάσμα της κανονικοποιημένης διεγείρουσας ροπής

Στο σχήμα 7.2 είναι το φάσμα που προκύπτει χωρίς τον διορθωτικό συντελεστή (πορτοκαλί) καθώς και αυτό που προκύπτει με τον διορθωτικό συντελεστή (κόκκινο).



Σχήμα 7.2 Τα φάσματα που προκύπτουν με curve-fit στο φάσμα S_{mm}

a	0.4872	[sec^{-2}]
b	0.3690	[sec^{-1}]
γ	0.04470	[rad/sec^2]
c	1.08	-

Πίνακας 7.1: Οι σταθερές του φάσματος δευτέρας τάξης

I+δI	$5.54*10^7$	[$kg*m^2$]
Δ	$2.017*10^7$	[N]
b_1	0.095	[sec^{-1}]
b_2	0.0519	-
c_1	1.153	[sec^{-2}]
c_3	0.915	[sec^{-2}]
ω_0	1.074	[rad/sec]
S_0	$1.46*10^{-3}$	[sec^{-3}]

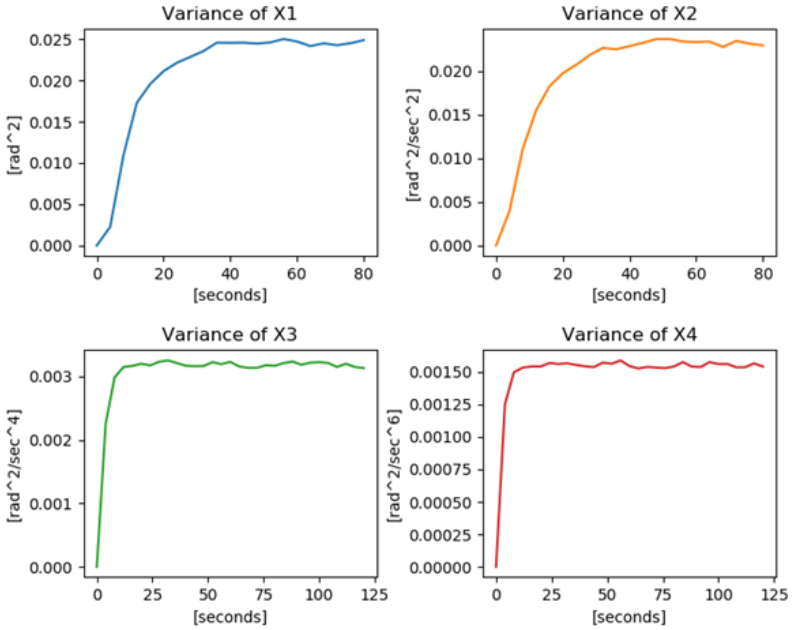
Πίνακας 7.2: Τα χαρακτηριστικά του ωκεανογραφικού

7.2 Monte-Carlo Simulation

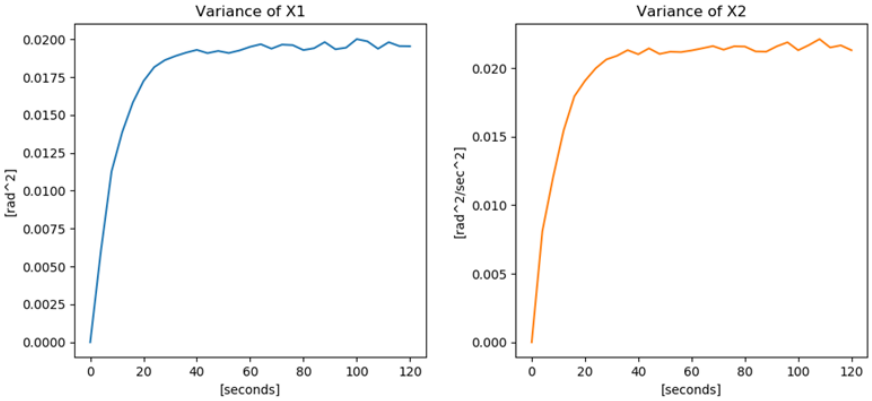
Στο Σχήμα 7.3 βλέπουμε τις χρονικές εξελίξεις των διακυμάνσεων για την κάθε μεταβλητή του τετραδιάστατου συστήματος. Αν και οι μεταβλητές X_3, X_4 φτάνουν γρήγορα σε μόνιμη κατάσταση, δεν ισχύει το ίδιο και για τις X_1, X_2. Οπότε ο μεταβατικός χρόνος προκύπτει περίπου 35 sec. Επίσης, οι διακυμάνσεις που προκύπτουν για το σύστημα είναι οι ακόλουθες:

$Var(X_1)$	0.02440
$Var(X_2)$	0.02292
$Var(X_3)$	0.003234
$Var(X_3)$	0.001536

Πίνακας 7.3: Διακυμάνσεις των μεταβλητών



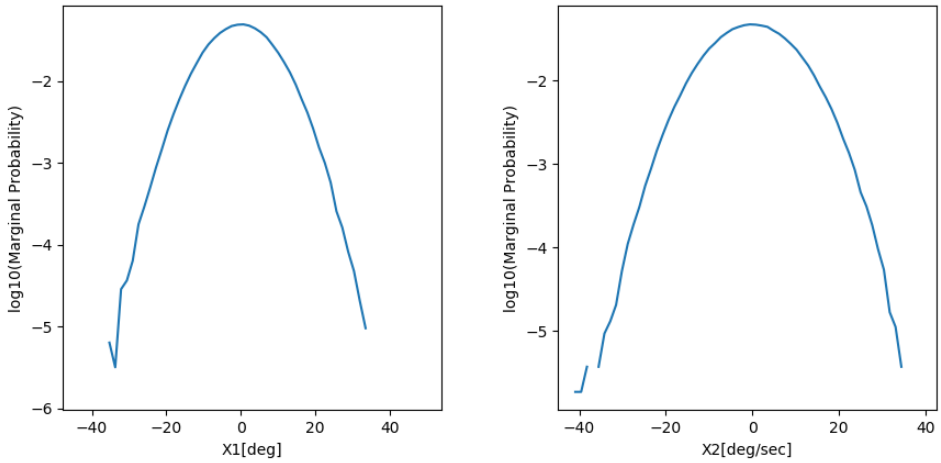
Σχήμα 7.3 Η χρονική εξέλιξη της διασποράς για την κάθε μεταβλητή του τετραδιάστατου συστήματος



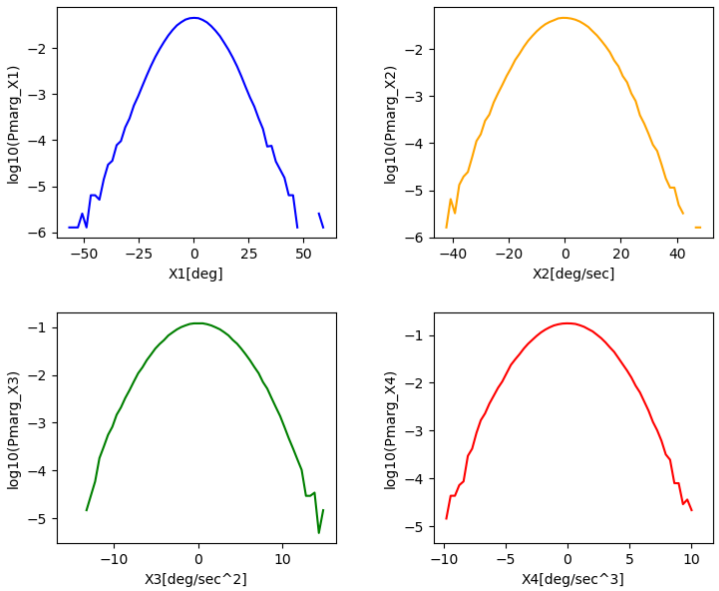
Σχήμα 7.4 Η χρονική εξέλιξη της διασποράς για την κάθε μεταβλητή του διδιάστατου συστήματος

Στα ακόλουθα διαγράμματα έχουμε λογαριθμήσει τις κατανομές που λάβαμε και είναι φανερό ότι ακολουθούν παραβολική μορφή. Στα άκρα των κατανομών βλέπουμε ότι διακόπτεται η λειότητα που υπάρχει στο κέντρο καθώς έχουμε μικρή συχνότητα εμφάνισης και

θα χρειαζόμασταν σημαντικά μεγαλύτερο αριθμό δειγμάτων για να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα. Αυτή τη δυσκολία προσπαθούμε να ξεπεράσουμε με τη μέθοδο Path Integration. Να σημειωθεί ότι η κατανομή που παίρνουμε για το 2D σύστημα είναι σημαντικά πιο συγκεντρωμένη στο κέντρο σε σχέση με του 4D.



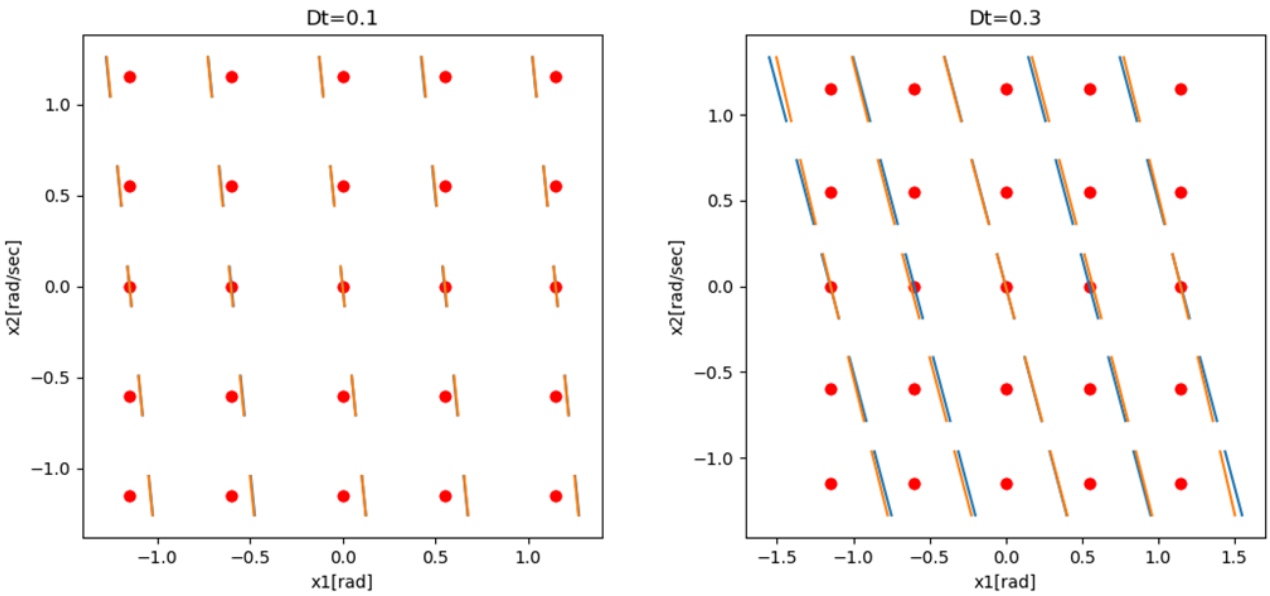
Σχήμα 7.5 Λογαριθμημένη περιθώρια σ.π.π. διδιάστατου συστήματος



Σχήμα 7.6 Λογαριθμημένη περιθώρια σ.π.π. τετραδιάστατου συστήματος

7.3 Path Integration : Σύστημα με διέγερση λευκού θορύβου

Στο σχήμα 7.7 έχουμε σχεδιάσει τα σημεία που είναι λύσεις του συστήματος (5.6), το οποίο ανάγεται σε μια εξίσωση: $x_1 - x_1' - \tilde{a}_1(x_1', x_2')\,\Delta t = 0$.



Σχήμα 7.7 Οι λύσεις της εξίσωσης 5.6 του διδιάστατου συστήματος για τα αναγραφόμενα χρονικά βήματα

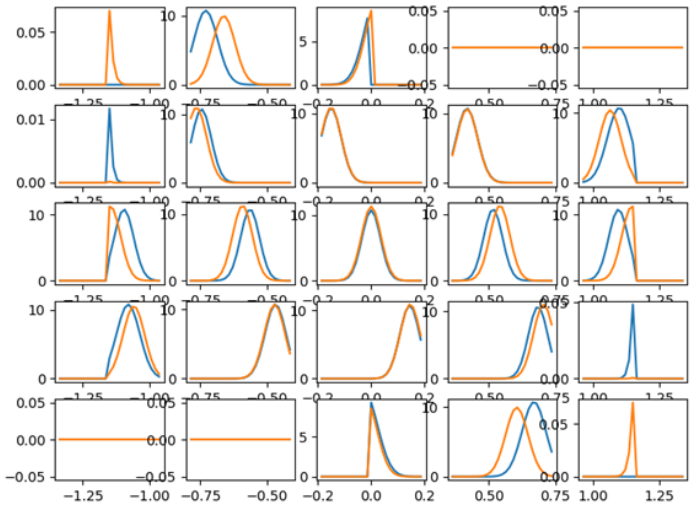
Με x_1, x_2 συμβολίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου του πλέγματος ενώ με x_1', x_2' τις συντεταγμένες της λύσης της παραπάνω εξίσωσης . Για το κάθε σημείο του πλέγματος (κόκκινα σημεία) λύνουμε την παραπάνω εξίσωση για διάφορες τιμές του x_2'. Οι γραμμές με μπλε είναι για την περίπτωση που η $\tilde{a}_1$ έχει την απλή μορφή της μεθόδου Euler ενώ οι πορτοκαλί της RK4. Στο αριστερό σχήμα υπάρχει σχεδόν ταύτιση των λύσεων των δύο μεθόδων. Η δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας δίνεται από την:

$$p(x_1, x_2, t | x_1', x_2', t') = \delta(x_1 - x_1' - \tilde{a}_1\,\Delta t)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}}\,\exp\left(-\frac{(x_2 - x_2' - \tilde{a}_2\,\Delta t)^2}{2\,\sigma^2\,\Delta t}\right) \quad (7.3)$$

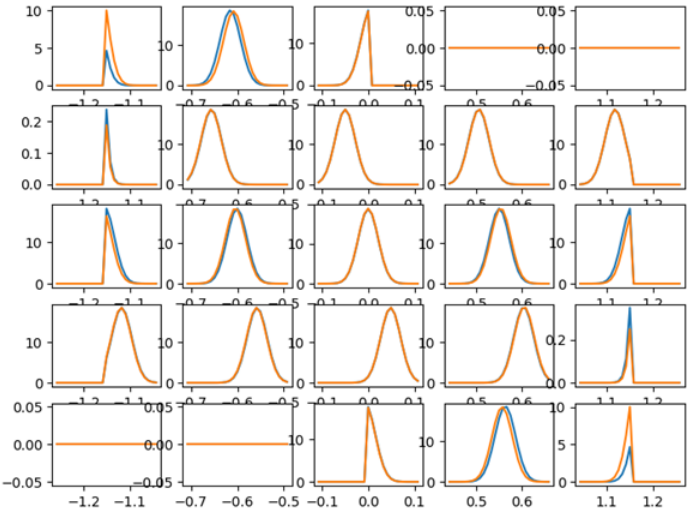
Στο σχήμα 7.7 βλέπουμε αρχικά ότι οι καμπύλες είναι λιγότερο εκτεταμένες και εγγύτερες στα σημεία του πλέγματος για μικρότερο dt. Κάτι τέτοιο είναι λογικό, αφού για μικρότερο χρονικό διάστημα μπορεί να καλυφθεί μικρότερη απόσταση. Επίσης, η θέση των καμπυλών είναι αριστερά για θετική ταχύτητα και δεξιά για αρνητική. Επίσης λογικό, αφού η μελλοντική θέση είναι αρνητικότερα (αριστερότερα) για αρνητική ταχύτητα και θετικότερα (δεξιότερα) για θετική. Τέλος είναι φανερό ότι και στα δύο διαγράμματα πολλά σημεία βγαίνουν εκτός των ορίων του πλέγματος. Για τα σημεία αυτά δεν μπορούμε να κάνουμε κάποια εκτίμηση και θέτουμε την τιμή της tpd ίση με μηδέν. Αυτό έχει σαν συνέπεια να χάνεται κάποια ποσότητα

πιθανότητας και οι τιμές της σ.π.π. να μηδενίζονται σχεδόν στα άκρα. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να επηρεάσει και τα σημεία πιο εσωτερικά λόγω της παρεμβολής. Δεχόμαστε έτσι ότι τα σημεία στα οποία συμβαίνει αυτό είναι αρκετά απομακρυσμένα από το κέντρο και οι τιμές πιθανότητάς τους δεν συμβάλουν σημαντικά ,έτσι κι αλλιώς, στον πυρήνα της κατανομής. Ο μηδενισμός της σ.π.π. στα άκρα ήταν και ο λόγος που η μέθοδος παρεμβολής με λογαρίθμηση δεν έφερε αποτελέσματα.

Θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε την παραπάνω εξίσωση (7.3) ως εξής. Για να προσομοιώσουμε τυχαίες χρονικές ιστορίες του διδιάστατου συστήματος αφήνουμε το σύστημα να εξελιχθεί για το χρονικό διάστημα t έως $t + dt$ χωρίς καμία διέγερση και στο τελικό σημείο που προκύπτει εφαρμόζουμε μια τυχαία κρούση ,το μέγεθος της οποίας ακολουθεί την κατανομή $\sigma N(t)dt$. Θεωρώντας δεδομένο το τελικό (x_1, x_2) σημείο της $t + dt$ ψάχνουμε να βρούμε ποια σημεία (x_{10}, x_{20}) καταλήγουν σε αυτό μέσω της διαδικασίας που περιγράψαμε πριν. Έστω ότι κρατάμε σταθερό το x_{20} και ψάχνουμε το αντίστοιχο x_{10}.Πρώτη προϋπόθεση είναι $x_1 = x_{10} + \tilde{a}_2(x_1', x_2')\,\Delta t$,καθώς στο τέλος η κρούση επηρεάζει μόνο την ταχύτητα-X_2, και έτσι βρίσκουμε το x_{10} . Δεύτερη προϋπόθεση είναι η κρούση που θα τύχει στο τέλος να είναι μεγέθους $x_2 - x_2' - \tilde{a}_2(x_1', x_2')\,\Delta t$, η οποία ποσότητα ακολουθεί κατανομή Gauss. Άρα για να τύχουν και οι δύο παραπάνω προϋποθέσεις θα πάρουμε το γινόμενο των πιθανοτήτων τους. Δηλαδή το γινόμενο μιας ντετερμινιστικής και μιας Γκαουσιανής κατανομής. Άρα η τελική πιθανότητα να ξεκινήσουμε από το (x_1', x_2') και να καταλήξουμε στο (x_1, x_2) θα δίνεται από την (7.3).

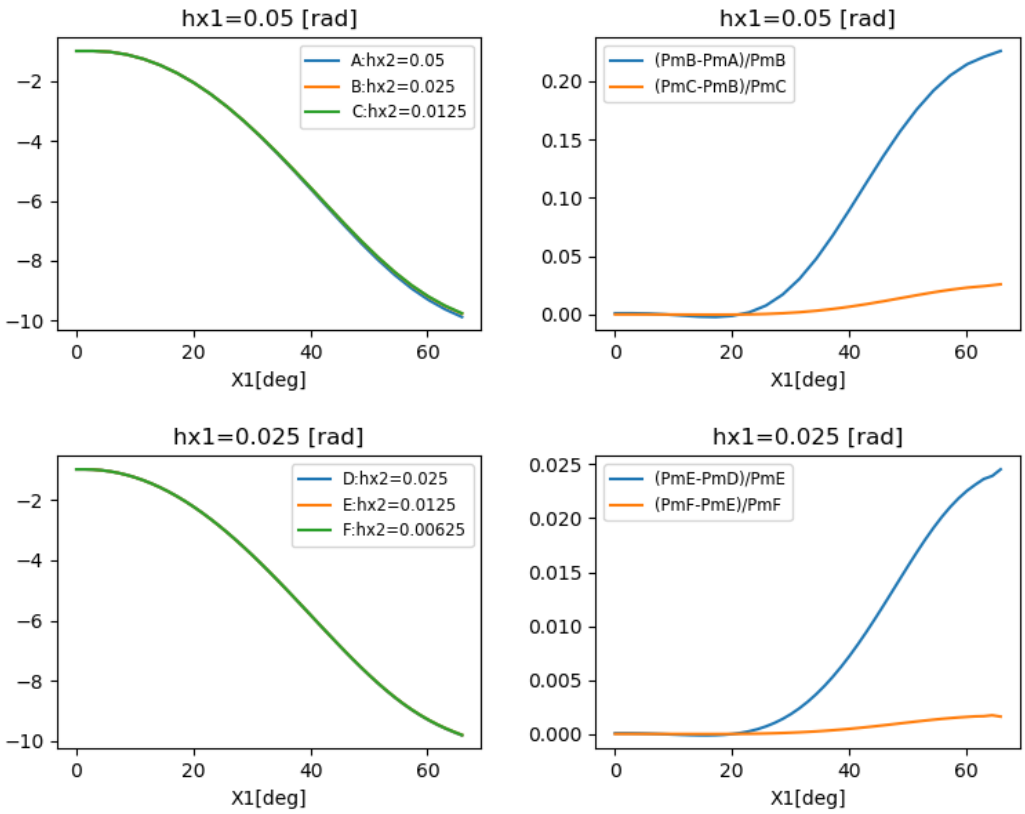


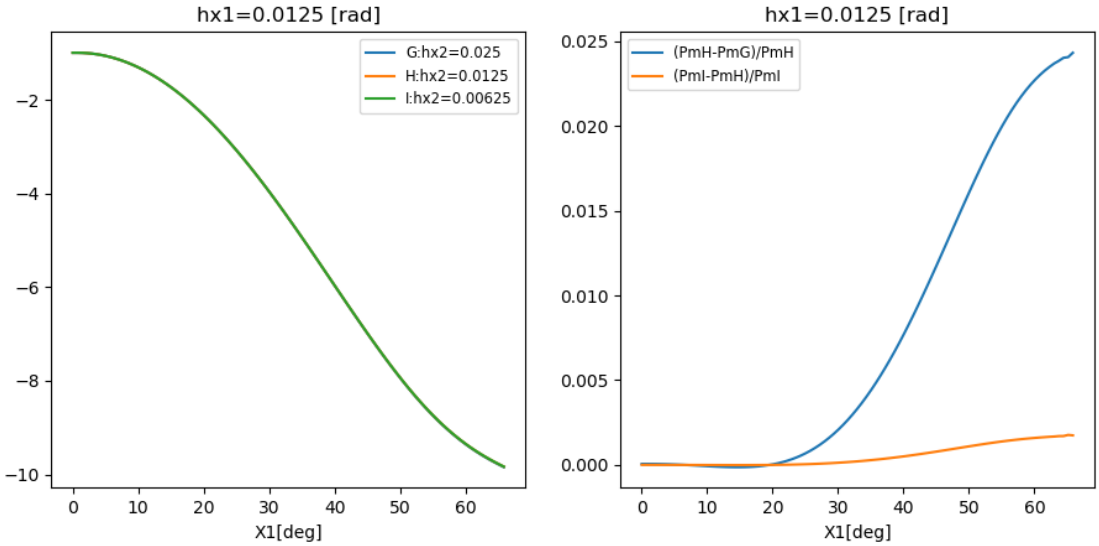
Σχήμα 7.8 Οι tpd συναρτήσεις του διδιάστατου συστήματος για dt=0.3 για τα αντίστοιχα σημεία του πλέγματος



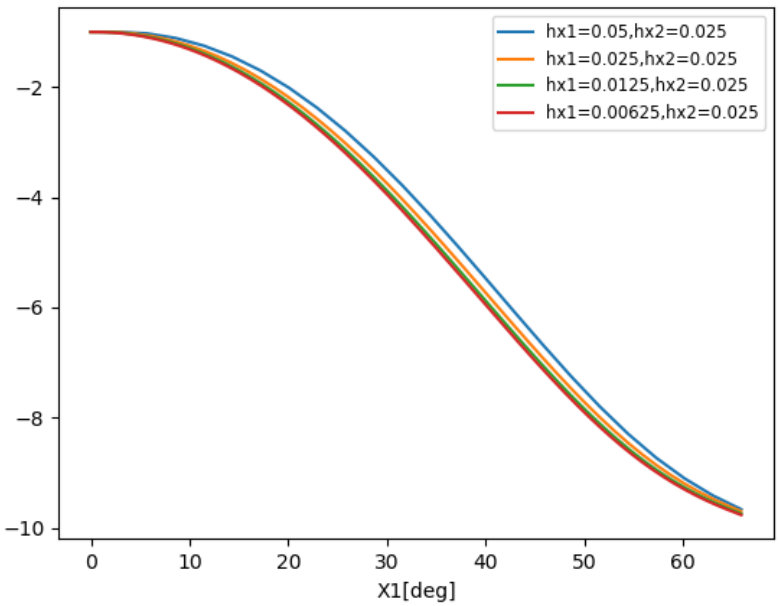
Σχήμα 7.9 Οι tpd συναρτήσεις του διδιάστατου συστήματος για dt=0.1 για τα αντίστοιχα σημεία του πλέγματος

Διερεύνηση της πυκνότητας του πλέγματος στο διδιάστατο σύστημα





Σχήμα 7.10: Περιθώριες κατανομές πιθανότητας για διάφορες πυκνότητες πλέγματος (αριστερά) και σχετικές αποκλίσεις (δεξιά)



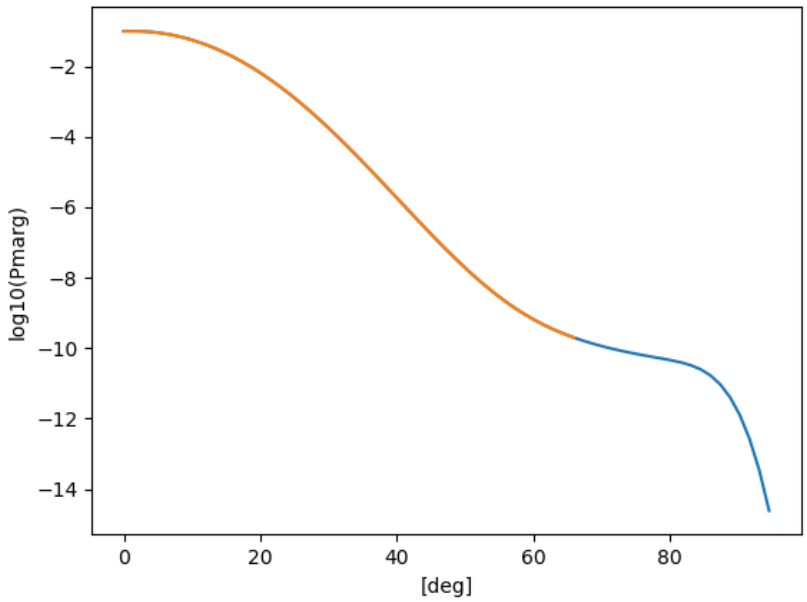
Σχήμα 7.11: Σύγκριση περιθώριων κατανομών για ίδιο βήμα στην X_2-διάσταση και μειούμενο στην X_1-διάσταση

Όπως έχουμε αναφέρει, γενικά δεν υπάρχει κάποιο αυστηρό κριτήριο που να μας δίνει τιμές για την διαμέριση του πλέγματος. Έτσι κάναμε μια μικρή διερεύνηση για την μεταβολή των αποτελεσμάτων συναρτήσει των βημάτων h_1 , h_2 των διαστάσεων X_1,X_2 και dt=0.1 sec-σταθερό. Στο σχήμα 7.10 στην αριστερή στήλη κάθε υπο-διάγραμμα αναφέρεται σε σταθερό h_1

και μεταβαλλόμενο h_2 ενώ στην αριστερή στήλη είναι οι σχετικές διαφορές των τιμών των περθώριων κατανομών για ίδιο h_1. Γενικά παρατηρούμε ότι για όλα τα h_1 οι κατανομές με $h_2 \leq 0.025$ έχουν μικρή μεταβλητότητα. Επομένως η τιμή $h_2 = 0.025[rad/s]$ είναι ικανοποιητική για την X_2 διάσταση και την επιλέγουμε στις παρακάτω εφαρμογές. Στο σχήμα 7.11 βλέπουμε για $h_2 = 0.025[rad/s]$ την μεταβολή της περιθώριας κατανομής αλλάζοντας μόνο το h_1. Γενικά δεν έχουμε τόση σταθερότητα με αλλαγή του h_1, ωστόσο για τις τιμές 0.025 και 0.0125 η απόσταση είναι αρκετά μικρότερη απ'ότι για τις 0.025 και 0.05. Επιλέξαμε για τα σχήματα που θα ακολουθήσουν την τιμή $h_1 = 0.025[\text{rad}]$ για να έχουμε ταχύτητα και πιο πολύ μια ποιοτική εκτίμηση. Να σημειωθεί ότι για τις παραπάνω κατανομές και για αυτές που θα ακολουθήσουν έχουμε προσθέσει τις περιθώριες τιμές πιθανότητας σε συμμετρικές τιμές του X_1 καθώς είναι σχεδόν ίδιες λόγω συμμετρίας ,όπως είχαμε εξηγήσει και στην παράγραφο 6.2 .

Όσον αφορά τον συνολικό χρόνο της μεθόδου, χρειάστηκαν συνολικά 2,5 λεπτά για $h_1 = 0.025[\text{rad}]$ $h_2 = 0.025[rad/s]$ με 93 σημεία σε κάθε διάσταση και $dt = 0.1sec$. Σχετικά με τα όρια των διαστάσεων, επιλέξαμε το όριο m_1 της X_1 να είναι ελαφρώς μεγαλύτερο από την γωνία απώλειας ευστάθειας του πλοίου και θέσαμε την ίδια τιμή για την m_2 δεδομένου ότι έχουν περίπου την ίδια διασπορά, όπως προκύπτει από το Monte-Carlo. Άρα $m_1 = m_2 = 1.15$.

<u>Αλλαγή των ορίων έκτασης του πλέγματος</u>



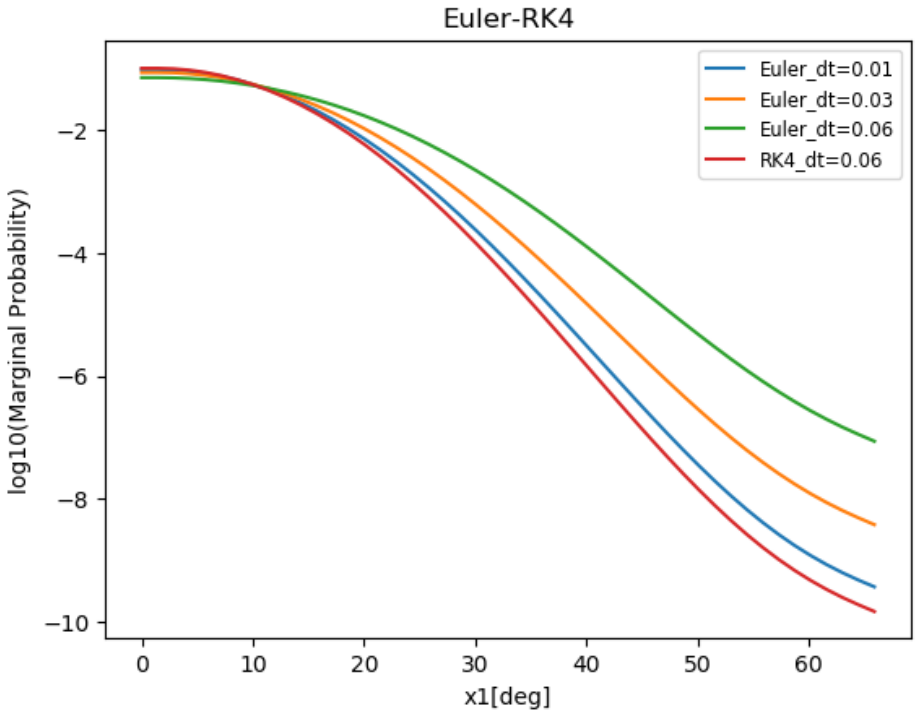
Σχήμα 7.12: Σύγκριση των κατανομών για επέκταση του πλέγματος

Σε αυτή τη δοκιμή προσπαθήσαμε ελέγξουμε το κατά πόσο επηρεάζεται η κατανομή λόγω των σημείων που πέφτουν εκτός του πλέγματος. Στο σχήμα 7.12 η πορτοκαλί καμπύλη είναι με όρια $m_1 = m_2 = 1.15$ και η μπλε με τα $m_1 = m_2 = 1.65$. Βλέπουμε ότι οι δύο καμπύλες σχεδόν

ταυτίζονται. Η μπλε καμπύλη βέβαια είναι ελάχιστα πιο πάνω από την πορτοκαλί στις 65 μοίρες, η διαφορά όμως είναι όμως πολύ μικρή.

Σύγκριση περιθώριων κατανομών Euler-RK4

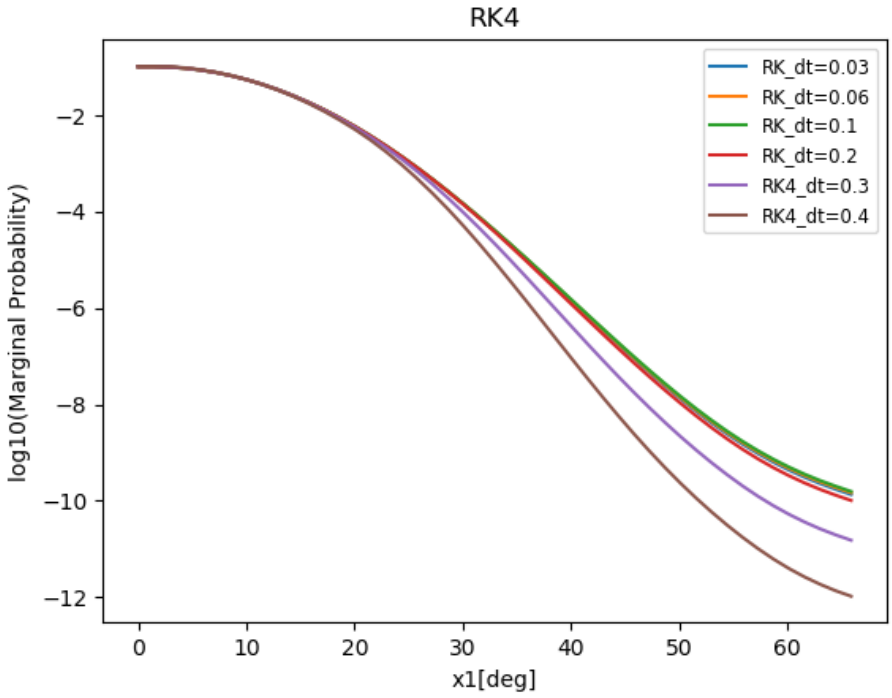
Δοκιμάσαμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο βρίσκοντας τα σημεία (x_1', x_2') με μέθοδο Euler. Στο σχήμα 7.13 βλέπουμε ότι για μειούμενο dt η περιθώρια κατανομή του X_1 τείνει στην κατανομή που προκύπτει με RK4. Ωστόσο υπάρχει σημαντική απόκλιση ακόμα και για dt=0.01 sec, ενώ για το σχετικά μικρό dt=0.03 sec έχουμε ήδη μεγάλη διαφορά.



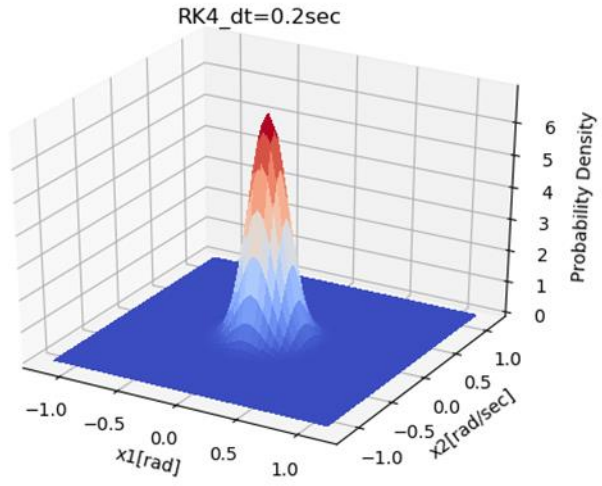
Σχήμα 7.13 Σύγκριση της λύσης του διδιάστατου συστήματος με μέθοδο Euler και RK4

Εξάρτηση από το χρονικό βήμα

Στο σχήμα 7.14 έχουμε την περιθώρια κατανομή που προκύπτει από την Path Integration με μέθοδο RK4 για ίδιο συνολικό χρόνο προσομοίωσης (ικανό για να πετύχουμε σύγκλιση) ίδια διαμέριση πλέγματος αλλά διαφορετικό dt. Βλέπουμε ότι για $0.03 \leq dt \leq 0.2$ καταλήγουμε σε κοντινές μεταξύ τους κατανομές, οι οποίες δεν μεταβάλλονται σημαντικά. Επίσης παρατηρήθηκε ότι η κατανομή για $dt = 0.1$ βρίσκεται υψηλότερα σε σχέση με την $dt = 0.03$. Ωστόσο για $dt = 0.2$ η κατανομή βυθίζεται. Άρα έχουμε κάποια ταλάντωση περίπου μεταξύ των κατανομών $dt = 0.03$ και $dt = 0.1$. Για περαιτέρω αύξηση του βήματος έχουμε γρήγορη βύθιση της κατανομής και η λύση δεν είναι αξιόπιστη.



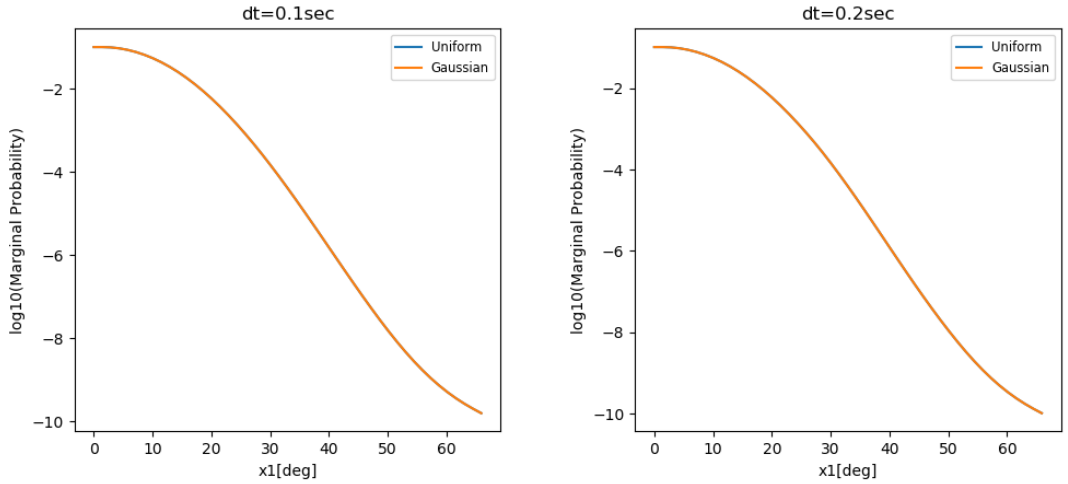
Σχήμα 7.14 Λύσεις της μεθόδου για διαφορετικό χρονικό βήμα



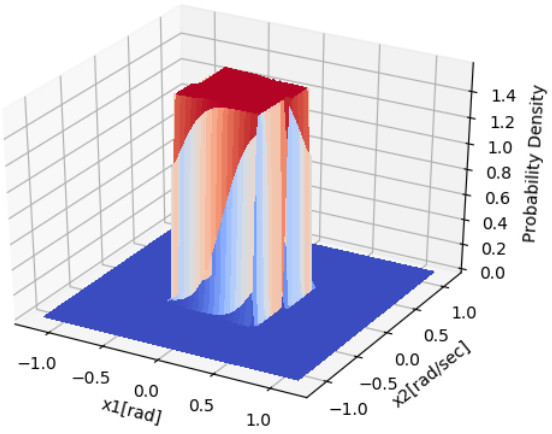
Σχήμα 7.15 Τρισδιάστατη αναπαράσταση της σ.π.π. του διδιάστατου συστήματος

Σύγκλιση της μεθόδου με διαφορετική αρχική κατανομή

Δοκιμάσαμε να δούμε πώς θα μεταβληθεί η έξοδος για διαφορετική αρχική πυκνότητα πιθανότητας. Φαίνεται στο σχήμα 7.16 πως το όριο της ακολουθίας είναι σχεδόν ίδιο για ομοιόμορφη αρχική κατανομή στο $[-0.4, 0.4] \times [-0.4, 0.4]$ και για Γκαουσιανή. Στο σχήμα 7.17 βλέπουμε την από κοινού κατανομή στο ξεκίνημα της μεθόδου για $dt = 0.1\ sec$.



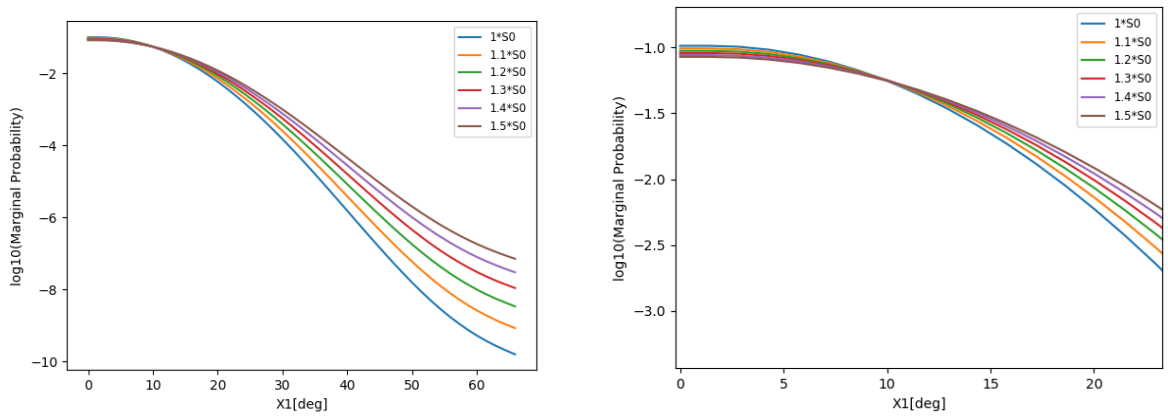
Σχήμα 7.16 Οι περιθώριες κατανομές με αρχική σ.π.π. Γκαουσιανή και ομοιόμορφη κατανομή



Σχήμα 7.17 Τρισδιάστατη αναπαράσταση της χρονικής στιγμής t=0.1 σ.π.π. με ομοιόμορφη αρχική σ.π.π. και dt=0.1

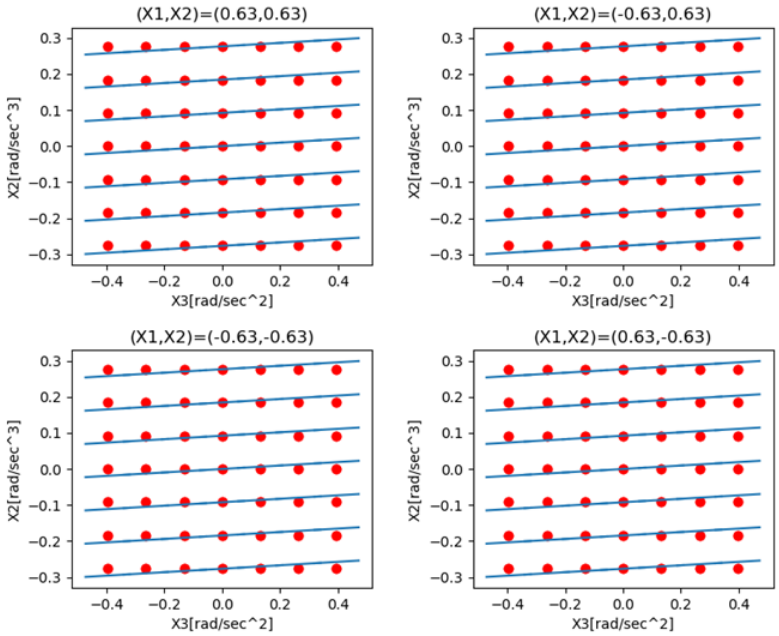
Μεταβολή της έντασης της διέγερσης

Αυτή τη φορά κρατήσαμε σταθερό το χρονικό βήμα στο $dt = 0.1\,sec$ αυξήσαμε σταδιακά την ένταση της διέγερσης του συστήματος κατά κάποιο πολλαπλάσιο του S_0. Αρχικά βλέπουμε ότι με την αύξηση αυτή η καμπύλη περιθώριας πιθανότητας μειώνεται κοντά στο μηδέν και αυξάνεται στα άκρα, πράγμα αναμενόμενο. Να σημειώσουμε εδώ ότι στο σχήμα μπορεί να φαίνεται αμελητέα η μείωση κοντά στο μηδέν, ωστόσο το διάγραμμα έχει λογαριθμική κλίμακα και η διαφορά ύψους μεγεθύνεται στα άκρα. Μια ακόμα παρατήρηση είναι ότι οι καμπύλες φαίνεται να τέμνονται στο ίδιο περίπου σημείο, ωστόσο δεν έχουμε αρκετά καλή διαμέριση του X1 για να πούμε κάτι με βεβαιότητα.

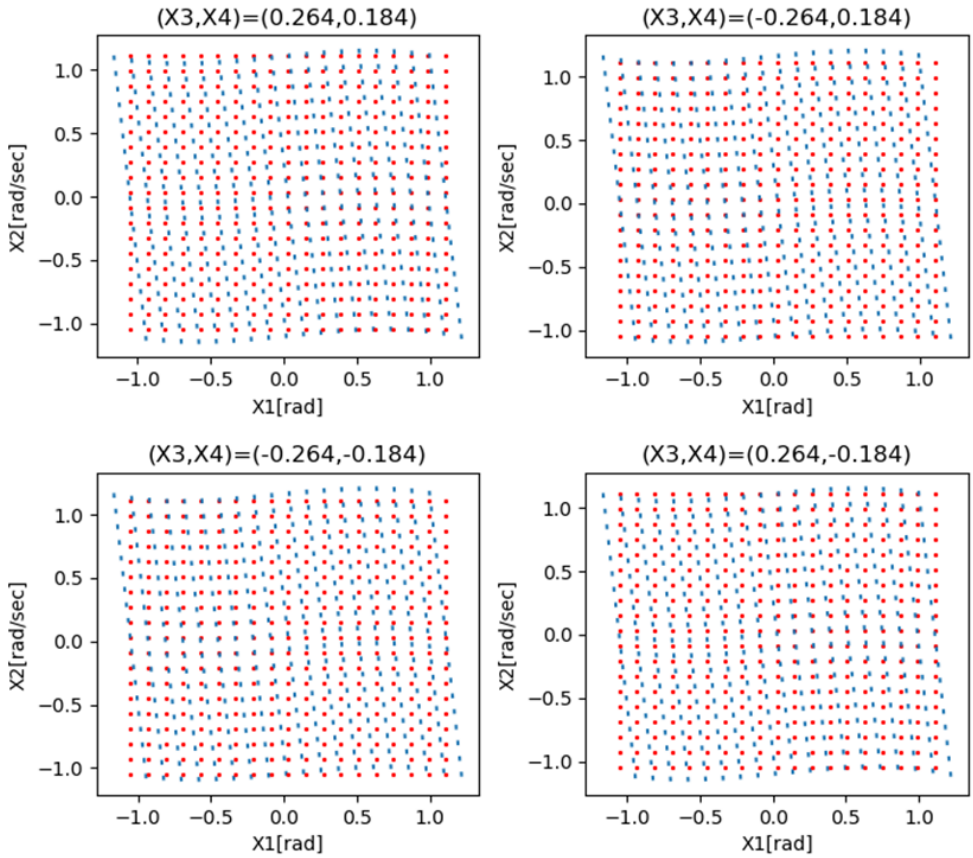


Σχήμα 7.18 Μεταβολή της διέγερσης του συστήματος

7.4 Path Integration : Σύστημα με διέγερση φιλτραρισμένου λευκού θορύβου



Σχήμα 7.19: Οι λύσεις x_3', x_4' για όλα τα X_3,X_4 σημεία του πλέγματος και τέσσερα διαφορετικά X_1,X_2

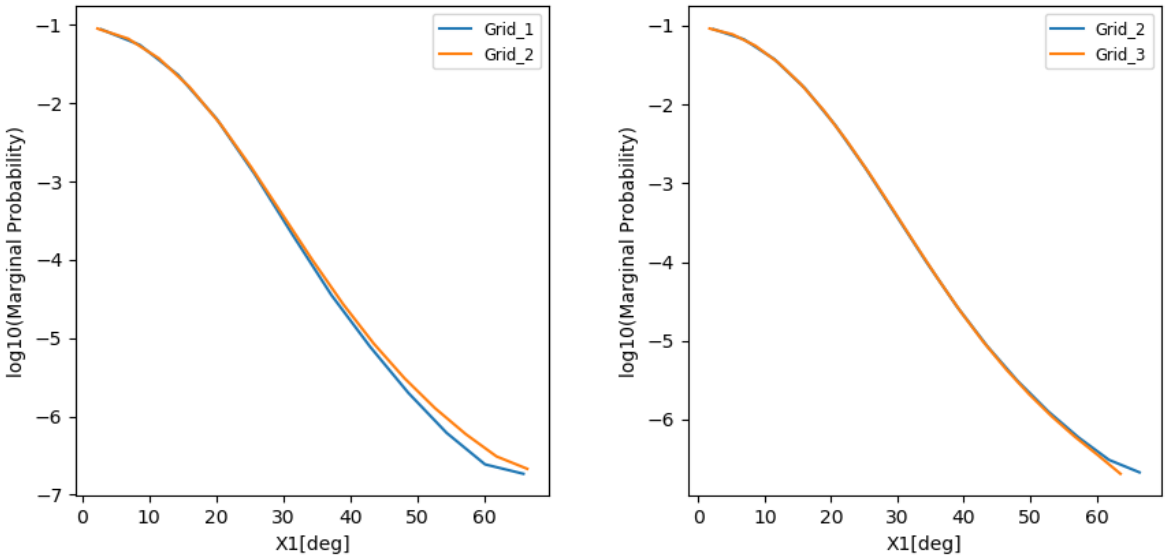


Σχήμα 7.20: Οι λύσεις x_1', x_2' για όλα τα X_1,X_2 σημεία του πλέγματος και τέσσερα διαφορετικά X_3,X_4

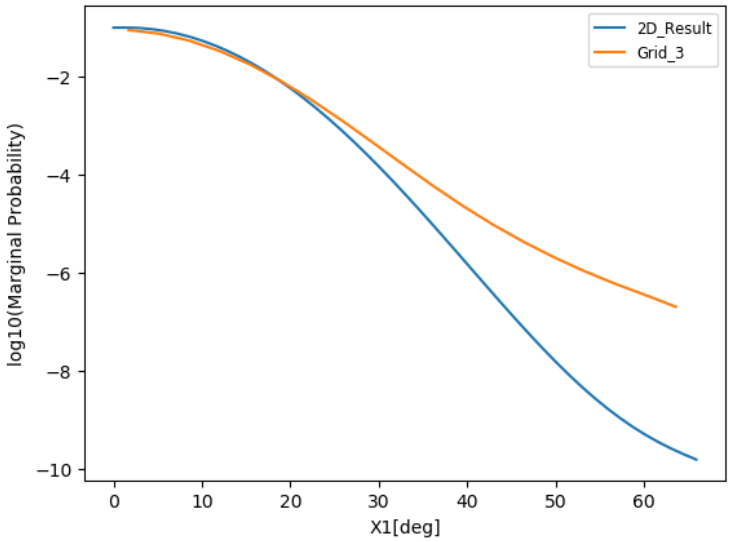
Στα παραπάνω σχήματα έχουμε πάλι τη γραφική παράσταση των λύσεων της (5.6) χρησιμοποιώντας RK4 αναπαράσταση της $\tilde{a}(X)$ και των σημείων του πλέγματος. Οι λύσεις είναι με μπλέ και τα σημεία με κόκκινο. Τα παραπάνω είναι για βήμα $dt = 0.1\ sec$. Στο σχήμα 7.19 έχουμε κάνει τη γραφική παράσταση των (x_3', x_4') για διάφορα (x_1, x_2, x_3, x_4) σημεία του πλέγματος με τα x_1, x_2 σταθερά και να λαμβάνουν τις αναγραφόμενες τιμές. Παίρνουμε τέσσερα ζεύγη τιμών για τα x_1, x_2 ,όπως φαίνεται ,ένα από κάθε τεταρτημόριο. Βλέπουμε πως οι τιμές του x_3' έχουν αρκετά μεγαλύτερο εύρος σε σχέση με αυτές του x_4' , οι οποίες μάλιστα μένουν σχετικά κοντά στην τιμή x_4 του αντίστοιχου σημείου του πλέγματος. Στο σχήμα 7.20 έχουμε κάνει αντίστοιχη γραφική παράσταση με του 7.19 , μόνο που εδώ έχουμε τα σημεία των (x_1', x_2')-λύσεων και τα σημεία (x_1, x_2, x_3, x_4) του πλέγματος για τέσσερα διαφορετικά ζεύγη των (x_3, x_4). Αρχικά βλέπουμε ότι έχουν μικρά εύρη και οι δύο τιμές των (x_1', x_2'), ωστόσο η μέση απόστασή τους απο το αντίστοιχο σημείο (x_1, x_2) έχει σημαντικές μεταβολές. Επίσης βλέπουμε πως για μια σειρά κόκκινων σημείων με σταθερή X_2-συνιστώσα η μέση τιμή των (x_1', x_2') ακολουθεί μια ημιτονοειδή καμπύλη ενώ για μια σειρά με σταθερή την X_1-συνιστώσα ακολουθεί ευθεία με αρνητική κλίση. Τέλος να πούμε ότι με μείωση της X_3-συνιστώσας του

πλέγματος η μέση τιμή των λύσεων μετατοπίζεται προς τα πάνω, ενώ για μείωση της X_4 μένει σχεδόν σταθερή.

Επιλογή πυκνότητας σημείων του πλέγματος και σύγκριση με το 2D σύστημα



Σχήμα 7.21: Διαφορετικές πυκνότητες πλέγματος για το τετραδιάστατο σύστημα



Σχήμα 7.22: Σύγκριση περιθώριας πυκνότητας πιθανότητας διδιάστατου και τετραδιάστατου συστήματος

Στο διδιάστατο σύστημα ο αριθμός των σημείων του πλέγματος δεν αυξανόταν τόσο γρήγορα αυξάνοντας τον αριθμό των σημείων της κάθε διάστασης και έτσι είχαμε περιθώρια να διαθέτουμε αρκετά μικρό βήμα σε κάθε μια. Στο τετραδιάστατο σύστημα ωστόσο είμαστε πολύ πιο περιορισμένοι καθώς ο χρόνος εκτέλεσης είναι της τάξης των 2.5 ωρών τη στιγμή που στο διδιάστατο είναι της τάξης του ενός μόνο λεπτού. Ταυτόχρονα, η απαιτούμενη μνήμη για το τετραδιάστατο είναι της τάξης των Gb βάζοντας επιπλέον περιορισμό στον αριθμό σημείων. Προσπαθούμε τώρα να ελέγξουμε την βέλτιστη πυκνότητα σημείων για να έχουμε ένα σχετικά αμετάβλητο αποτέλεσμα με περαιτέρω πύκνωση των σημείων. Για τις καμπύλες στο σχήμα 7.21, Grid_1 έως Grid _3 έχουμε τα παρακάτω στοιχεία.

Grid	h_1	h_2	h_3	h_4	m_1	m_2	m_3	m_4	dt
1	0.1	0.1	0.035	0.025	1.15	1.15	0.385	0.275	0.2
2	0.08	0.08	0.03	0.02	1.16	1.16	0.33	0.24	0.2
3	0.06	0.06	0.033	0.023	1.11	1.11	0.396	0.276	0.1

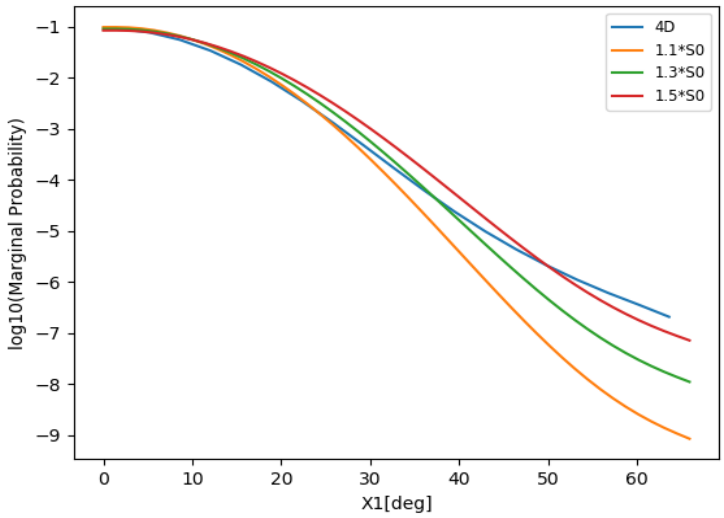
Πίνακας 7.4: Στοιχεία για την κάθε καμπύλη

Η διαφορά των Grid 1,2 είναι ότι στο δεύτερο μειώσαμε τη διαμέριση όλων των μεταβλητών, ωστόσο μειώσαμε ελαφρώς και τα όρια εύρους των X3,X4. Τελικά όμως λάβαμε καλύτερη προσέγγιση στο άκρο και στα μέσα της κατανομής αν κρίνουμε από το αριστερό σχήμα. Η διαφορά μεταξύ των Grid 2,3 είναι ότι μικρύναμε σημαντικά τη διαμέριση των X1,X2 και υποδιπλασιάσαμε το dt. Είδαμε ότι οι δύο κατανομές συμφωνούν σε μεγάλο βαθμό παρά την αλλαγή του dt. Επιλέξαμε την Grid 3, που έχει καλύτερη διαμέριση των μεταβλητών που μας ενδιαφέρουν πιο άμεσα.

Συγκρίνουμε στο σχήμα 7.22 την περιθώρια κατανομή του X1 που προκύπτει από τα δύο συστήματα. Είναι ξεκάθαρο ότι στο τετραδιάστατο σύστημα υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα ανατροπής σε σχέση με το διδιάστατο.

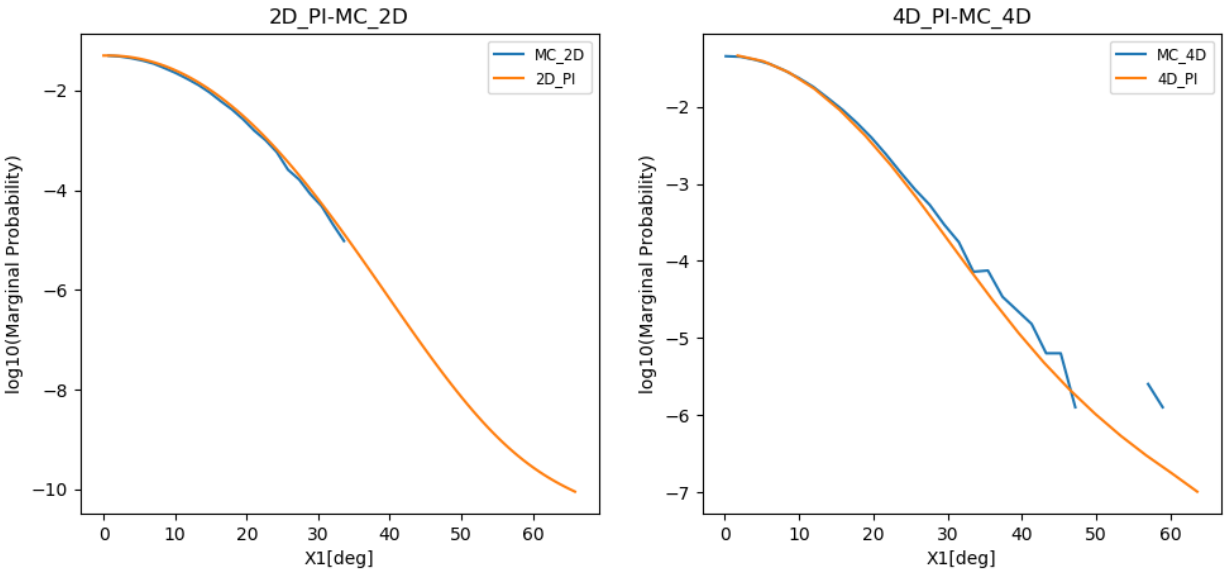
<u>Σύγκριση 2D-4D για διάφορα μεγέθη διέγερσης του 2D</u>

Είδαμε προηγουμένως ότι στο διδιάστατο σύστημα υποεκτιμάται η πιθανότητα στα άκρα. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτό οφείλεται στην υποεκτιμημένη διέγερση S_0. Αυτό μας κάνει να διερευνήσουμε το αν η καμπύλη που προκύπτει από το τετραδιάστατο σύστημα μπορεί να προσεγγιστεί από το διδιάστατο με απλή αύξηση της διέγερσης. Από το σχήμα 7.23 όμως βλέπουμε ότι ακόμα και με 50% αύξηση της διέγερσης του διδιάστατου συστήματος υπάρχει κάποια υστέρηση στα άκρα του 2D σε σχέση με το 4D. Εκτός από αυτό η πιθανότητα για ενδιάμεσες τιμές υπερεκτιμάται σημαντικά από το 2D. Καταλαβαίνουμε έτσι ότι οι δύο καμπύλες δεν μπορούν να θεωρηθούν κατά κάποιο τρόπο όμοιες.



Σχήμα 7.23: Σύγκριση του τετραδιάστατου με διάφορες διεγέρσεις στο διδιάστατο σύστημα

Σύγκριση του Monte-Carlo με την Path Integration



Σχήμα 7.24: Σύγκριση αποτελεσμάτων με Monte-Carlo

Στη σύγκριση των αποτελεσμάτων με την μέθοδο Monte-Carlo βλέπουμε και στις δύο περιπτώσεις αρκετά καλή συμφωνία γενικά. Στο τετραδιάστατο σύστημα έχουμε καλή συμφωνία μέχρι και τις 35 περίπου μοίρες και στη συνέχεια ενδεχομένως να χρειάζονται περισσότερα στατιστικά στοιχεία για να πούμε κάτι πιο βέβαιο. Στο διδιάστατο σύστημα συγκίναμε με διαμέριση $h_1 = 0.025\,, h_2 = 0.025\,, dt = 0.1$ και σε αυτή την περίπτωση η Path

Integration είναι σε όλες τις γωνίες πιο πάνω. Στο σχήμα 7.24 πήραμε καλύτερη διαμέριση στο X_1 ,συγκεκριμένα $h_1 = 0.0125$, $h_2 = 0.025$, $dt = 0.1$, και βλέπουμε καλύτερη συμφωνία.

8. Συζήτηση

Παρακάτω θα εκφράσουμε κάποιους προβληματισμούς μας σχετικά με την μέθοδο και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της, ενώ θα αναφέρουμε και κάποιους τρόπους που θα μπορούσαν να μειώσουν τον υπολογιστικό χρόνο της αλλά δεν εφαρμόστηκαν στην παρούσα εργασία.

Ο πρώτος προβληματισμός μας αφορά την ακρίβεια των αποτελεσμάτων στα σύνορα. Είχαμε τονίσει στην παράγραφο 5.5 ότι στα σύνορα του πλέγματος, όπως φαίνεται και από το σχήμα 7.7 και 7.20, οι λύσεις του συστήματος (5.6) πέφτουν εκτός των συνόρων. Κατά συνέπεια, επειδή δεν έχουμε καλή εκτίμηση της σ.π.π., αγνοήσαμε τα σημεία αυτά θέτοντας tpd=0 εκεί. Αυτό έχει σαν συνέπεια να χάνουμε κάποια ενδεχόμενα τα οποία θεωρητικά δεν οδηγούν σε ανατροπή. Θα μπορούσαμε όμως να πούμε ότι εφόσον τα σημεία αυτά αντιπροσωπεύουν καταστάσεις όπου το πλοίο έχει περάσει το όριο ευστάθειας είναι πολύ απίθανο να επιστρέψει σε σημεία με ευστάθεια και έτσι έχει λογική να τα αγνοήσουμε. Ωστόσο δεν είναι ξεκάθαρο το πόσο χάνουμε σε ακρίβεια. Είδαμε όμως από το σχήμα 7.12 ,όπου λύσαμε με μεγαλύτερα σύνορα στο πλέγμα, ότι χάνουμε πολύ μικρή ποσότητα πιθανότητας. Υπάρχει βέβαια πάλι το ερώτημα για την ακρίβεια της λύσης σε σημεία κατά πολύ εκτός του πλέγματος, όπου ακόμα και οι λύσεις του (5.6) είναι αμφίβολο κατά πόσο είναι σωστές λόγω της έντονης μη γραμμικότητας.

Ο δεύτερος προβληματισμός μας είναι ότι με την μέθοδο PI δεν έχουμε πληροφορία για τον όγκο πιθανότητας εκτός των ορίων υπολογισμού. Κάτι τέτοιο οφείλεται στην κανονικοποίηση που κάνουμε στο τέλος του αλγορίθμου, όπως είχαμε πει στην παράγραφο 6.1. Επομένως αν θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $\varphi \geq \varphi_1$,όπου φ_1 μια γωνία εγκάρσιας κλίσης, τότε ολοκληρώνουμε την περιθώρια κατανομή από την φ_1 έως το κοντινότερο όριο του πλέγματος, υποθέτοντας ότι η ποσότητα πιθανότητας μετά το όριο είναι αμελητέα. Επομένως οι γωνίες φ_1 για τις οποίες κάνουμε τους παραπάνω υπολογισμούς θα πρέπει να έχουν αρκετή απόσταση από τα όρια του πλέγματος.

Όσον αφορά τις βελτιστοποιήσεις έχουμε να προτείνουμε τα εξής. Αρχικά, τις λύσεις του (5.6) μπορούμε να τις υπολογίσουμε με τον έμμεσο τρόπο που προτείνεται από τον [Mo, 2008] όπως είχαμε αναλύσει στην παράγραφο 6.2. Επίσης μπορούμε να προσεγγίσουμε τον ντετερμινιστικό όρο με μέθοδο Runge-Kutta χαμηλότερης τάξης αλλά με παραμέτρους προσαρμοσμένες ώστε να προσεγγίζουν καλύτερα το σύστημα της εφαρμογής. Επίσης θα μπορούσε να γίνει καλύτερη κατανομή των κόμβων αν και δεν είναι ξεκάθαρο πώς ακριβώς θα μπορούσε να γίνει αυτό. Τέλος, όσον αφορά το πρόβλημα του αποθηκευτικού χώρου που καταλαμβάνουν οι σταθερές $B_{i_1,\dots,i_r}$ της (5.20), αυτό θα μπορούσε να επιλυθεί εν μέρει

μειώνοντας τον βαθμό των πολυωνύμων B-Splines, αφού σε κάθε διάστημα υποδιαίρεσης θα έχουμε λιγότερα πολυώνυμα βάσης που δεν μηδενίζονται. Το μειονέκτημα βέβαια σε αυτή την περίπτωση είναι ότι ενδεχομένως χρειαζόμαστε περισσότερα σημεία υποδιαίρεσης για την κάθε διάσταση, αφού έχουμε μειωμένο βαθμό σύνεχειας παραγώγων.

9. Συμπεράσματα

Από τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για τα βήματα υποδιαίρεσης, την ακρίβεια της κατανομής στα σύνορα και τους χρόνους υπολογισμού της μεθόδου. Αρχικά, από τη διερεύνηση της πυκνότητας του πλέγματος και τη σύγκριση με το Monte Carlo, μπορούμε να πούμε ότι για το διδιάστατο σύστημα τα βήματα $h_1 = 0.0125$, $h_2 = 0.025$, $dt = 0.1$ θα δίνουν ένα ικανοποιητικό αποτέλεσμα που δεν μεταβάλλεται σημαντικά με περαιτέρω μείωσή τους, ενώ ο υπολογιστικός χρόνος είναι περίπου 5.5 λεπτά. Τα αποτελέσματα του Monte-Carlo χρειάστηκαν περίπου 1.5 ώρα. Επομένως η Path Integration στη διδιάστατη περίπτωση υπερτερεί του Monte-Carlo στον υπολογιστικό χρόνο και εκτιμάει την πιθανότητα σε πολύ μεγαλύτερο εύρος. Όσον αφορά το τετραδιάστατο σύστημα, είναι αρχικά ξεκάθαρο ότι σε αυτό έχουμε σημαντικά μεγαλύτερη πιθανότητα ανατροπής, όπως φάνηκε από τη σύγκριση της σ.π.π. με αυτή του διδιάστατου. Επίσης, είδαμε ότι για βήματα $h_1 = 0.06$, $h_2 = 0.06$, $dt = 0.1$ και $h_3 = 0.033$, $h_4 = 0.023$ έχουμε καλή συμφωνία με το Monte-Carlo μέχρι και τις 35 μοίρες. Σε αυτή την περίπτωση βέβαια ο χρόνος προσομοίωσης της PI είναι της τάξης των 5 ωρών ενώ του MC είναι 1.5. Πιθανότατα αν η προσομοίωση του MC κρατούσε και αυτή 5 ώρες να είχαμε παρόμοια καλή εκτίμηση με της PI και έτσι να χανόταν το πλεονέκτημα ταχύτητας της τελευταίας. Οι παραπάνω υπολογισμοί έγιναν με τον επεξεργαστή Intel Core i7 5500U, 2.4GHz τεσσάρων πυρήνων.

Βιβλιογραφία:

Anastopoulos, P.A. , Spyrou , K.J. (2019) Evaluation of the critical wave groups method in calculating the probability of ship capsize in beam seas , Ocean Engineering, 106213.

De Boor, C. (2001) A practical Guide To Splines, Springer, 2001

Chai ,W. , Naess ,A. , Leira ,B.J. (2015) Stochastic dynamic analysis and reliability of a vessel rolling in random beam seas , Journal of Ship Research, pp. 113–131.

Chai ,W. , Naess ,A. , Leira ,B.J. (2016) Stochastic nonlinear ship rolling in random beam seas by the path integration methord Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 43-52.

Cottone, G., Di Paola , M., Ibrahim , R., Pirrotta ,A., Santoro ,R. (2010) Stochastic ship roll motion via path integral method. International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering, pp. 119–126.

Halvorsen, G. (2011) Numerical Solution of Stochastic Differential Equations by use of Path Integration, M.Sc., Norwegian University of Science and Technology.

Kloeden P.E., Platen E. (1992) Numerical solution of stochastic differential equations, Berlin: Springer.

Kougioumtzoglou , I.A., Spanos , P.D. (2014) Stochastic response analysis of the softening Duffing oscillator and ship capsizing probability determination via a numerical path integral approach, Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 67–74.

Mo ,E. (2008) Nonlinear stochastic dynamics and chaos by numerical path integration, PhD thesis Norwegian University of Science and Technology.

Moe ,V. (1997) Nonlinear random vibrations - numerical analysis by path integration methods. PhD thesis, Norwegian University of Science and Technology, January 1997.

Naess, A. (2001) Lecture Notes on the Numerical Solution of Stochastic Differential Equations by Path Integration Methods, Norwegian University of Science and Technology.

Naess, A., Johnsen, J.M (1992) Response statistics of nonlinear dynamic systems by path integration. In: Bellomo N, Casciati F, editors. Proceedings IUTAM Symposium on Nonlinear Stochastic Mechanics, Turin, 1991; Berlin: Springer.

Naess A., Johnsen J.M. (1993) Response statistics of nonlinear, compliant offshore structures by the path integral solution method. Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 91–106.

Naess, A., Moe, V. (2000) Efficient path integration methods for nonlinear dynamic systems, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Probabilistic Engineering Mechanics 15, pp. 221–231.

Risken, H. (1989) The Fokker Planck Equation, Second Edition, Springer Verlag Berlin, Heidelberg.

Roberts, J.B. , Spanos , P.D. (1986) Stochasting averaging an approximate method of solving random vibration problems , Journal of Nonlinear Mechanics, pp. 111-134.

Spencer, B. Jr, Bergman ,L. , On the numerical solution of the Fokker-Planck equation for nonlinear stochastic systems, Journal of Nonlinear Dynamics (1993), pp. 357–372.

Skaug, C., Random Vibration and the Path Integration Method. PhD thesis, N.U.S.T., 2000.

Spyrou, J.K. ,Σημειώσεις μαθήματος: «Δυναμική Ευστάθεια Πλοίου» , Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών Ε.Μ.Π., 2015.

Wehner, M.F., Wolfer, W.G. (1987) Numerical evaluation of path-integral solutions to Fokker–Planck equations. III. Time and functionally dependent coefficients. Physical Review A, pp. 1795–1801.

Wojtkiewicz , S.F., Johnson ,E.A. , Bergman , L.A. , Grigoriu , M. , Spencer , B.F. Jr (1999) Response of stochastic dynamical systems driven by additive Gaussian and Poisson white noise: solution of a forward generalized Kolmogorov equation by a spectral finite difference method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, pp. 73–89.