



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ & ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΩΤΟΓΡΑΜΜΕΤΡΙΑΣ

## **ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ ΜΗ ΑΝΑΠΤΥΚΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΣΥΜΜΟΡΦΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ**

---

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

**Παναγιώτας Γ. Γαλαζούλα**

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ

**Ανδρέας Γεωργόπουλος**

**Βύρωνας Νάκος**

**Καθηγητές Ε.Μ.Π.**

Αθήνα, 2021





NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
SCHOOL OF RURAL & SURVEYING ENGINEERING  
DEPARTMENT OF TOPOGRAPHY  
LABORATORY OF PHOTOGRAMMETRY

## **DEVELOPMENTS OF NON-DEVELOPABLE SURFACES WITH CONFORMAL PROJECTIONS**

---

DIPLOMA THESIS

of

**Panagiota G. Galazoula**

SUPERVISORS

**Andreas Georgopoulos**

**Byronas Nakos**

**Professors N.T.U.A.**

Athens, 2021



## Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ανδρέα Γεωργόπουλο για το θέμα της εργασίας που μου ανέθεσε καθώς και για τις πολύτιμες οδηγίες και συμβουλές του. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Βύρωνα Νάκο για την πολύτιμη στήριξη και βοήθεια του στην εκπόνηση του θέματος. Επίσης, τον κ. Κωνσταντίνο Καράτζαλο με την διδακτική ομάδα του που βοήθησαν σε προβλήματα που παρουσιάστηκαν στη σύνταξη του προγράμματος.

Ευχαριστώ επίσης το φίλο και συνάδελφό μου Χρήστο Βέλλη για την πολύτιμη στήριξη και καλή συνεργασία καθ' όλη τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας. Τέλος, τους φίλους μου για την ανιδιοτελή φιλία και αφοσίωση αλλά και την οικογένειά μου για όλα όσα μου προσέφεραν.

## Πίνακας Περιεχομένων

---

1	Εισαγωγή.....	3
2	State of the Art.....	5
3	Ανάλυση κώδικα .....	14
4	Μαθηματική και Γεωμετρική Προσέγγιση Αναπτυγμάτων .....	38
4.1	Εισαγωγή.....	38
4.2	Αναπτυκτές επιφάνειες.....	38
4.3	Μη αναπτυκτές επιφάνειες .....	38
4.4	Αναπτύγματα μη αναπτυκτών επιφανειών .....	39
4.4.1	Η Γεωμετρία της σφαίρας και του ελλειψοειδούς.....	39
4.4.2	Χαρτογραφικές προβολές.....	42
5	Πρακτική Εφαρμογή .....	46
5.1	Προσδιορισμός των παραμέτρων της μαθηματικής επιφάνειας.....	46
5.1.1	Ορισμός παραμέτρων ελλειψοειδούς εκ περιστροφής.....	47
5.1.2	Γενική μέθοδος και προσδιορισμός προσωρινών τιμών ελλειψοειδούς εκ περιστροφής.....	49
5.1.3	Γενική μέθοδος και προσδιορισμός προσωρινών τιμών σφαίρας .....	51
5.1.4	Μετασχηματισμός των καρτεσιανών συντεταγμένων του νέφους σημείων στις πολικές συντεταγμένες της επιφάνειας αναφοράς.....	53
5.1.5	Προσδιορισμός των συντεταγμένων $x,y$ της χαρτογραφικής προβολής και εύρεση των ορίων του αναπτύγματος .....	53
5.1.6	Καθορισμός του μεγέθους της εικονοψηφίδας.....	54
5.1.7	Εύρεση της θέσης κάθε σημείου στην τελική εικόνα και απόδοση χρώματος .....	54
5.2	Σχολιασμός αποτελεσμάτων.....	56
5.2.1	Σχολιασμός αποτελεσμάτων με χρήση ελλειψοειδούς εκ περιστροφής	58
5.2.2	Σχολιασμός αποτελεσμάτων με χρήση σφαίρας .....	65
5.3	Απομόνωση σφαιρικού τμήματος τρούλου .....	71
5.3.1	Σχολιασμός αποτελεσμάτων τμήματος τρούλου με χρήση σφαίρας...	71
5.3.2	Σχολιασμός αποτελεσμάτων τμήματος τρούλου με χρήση ελλειψοειδούς εκ περιστροφής .....	73
6	Συμπεράσματα.....	76
6.1	Προβλήματα που αντιμετωπίστηκαν .....	76
6.2	Αξιολόγηση προγράμματος .....	81
6.3	Προτάσεις για μελλοντικές μελέτες.....	81
7	Παράρτημα .....	84



## Πίνακας Εικόνων

Εικόνα 2-1: Παράδειγμα τσαγιέρας	5
Εικόνα 2-2: Μετασχηματισμός υφασμάτων	6
Εικόνα 2-3: Ανάλυση 3D μοντέλου	6
Εικόνα 2-4: Αποσύνθεση επιφάνειας	7
Εικόνα 2-5: Κωνική τομή	7
Εικόνα 2-6: Τριγωνισμός	8
Εικόνα 2-7: Προσαρμογή έλλειψης	9
Εικόνα 2-8: Απόδοση σημείων σε επιφάνειες	9
Εικόνα 2-9: Διαφορά υπερβολοειδούς με ελλειψοειδές	10
Εικόνα 2-10: Ανάπτυγμα οροφής	10
Εικόνα 2-11: Ανάπτυγμα κυλινδρικής επιφάνειας	11
Εικόνα 2-12: Μέθοδος Gore	12
Εικόνα 2-13: Ανάπτυγμα κάστρου	13
Εικόνα 4-1: Αναπτυκτές επιφάνειες	38
Εικόνα 4-2: Αναπτυκτές επιφάνειες b	38
Εικόνα 4-3: Μη αναπτυκτές επιφάνειες	39
Εικόνα 4-4: Σφαίρα	40
Εικόνα 4-5: Ελλειψοειδές εκ περιστροφής	41
Εικόνα 4-6: Τριαξονικό ελλειψοειδές	41
Εικόνα 4-7: Ορθή προβολή	43
Εικόνα 4-8: Εγκάρσια προβολή	43
Εικόνα 4-9: Πλάγια προβολή	43
Εικόνα 4-10: Κυλινδρική απεικόνιση	44
Εικόνα 4-11: Περιοχή παραμόρφωσης	45
Εικόνα 5-1: Αρχή των rixel	55
Εικόνα 5-2: Αρχή των συντεταγμένων	55
Εικόνα 5-3: Μονή Προφήτη Ηλία	56
Εικόνα 5-4: Κάτοψη νέφους	57
Εικόνα 5-5: Όψη νέφους	58
Εικόνα 5-6: Αποτελέσματα προσέγγισης με ελλειψοειδές	59
Εικόνα 5-7: Προσέγγιση τρούλου με ελλειψοειδές εκ περιστροφής	60
Εικόνα 5-8: Εδαφοψηφίδα 0.014	61
Εικόνα 5-9: Ανάπτυγμα με χρήση ΟΜΠ και εδαφοψηφίδα 0.014	62
Εικόνα 5-10: Ανάπτυγμα με χρήση ΟΜΠ και εδαφοψηφίδα 0.042	63
Εικόνα 5-11: Πύκνωση χρώματος με παρεμβολή στην εικόνα με εδαφοψηφίδα 0.014	64
Εικόνα 5-12: Σύγκριση τμήματος εικόνων	65
Εικόνα 5-13: Αποτέλεσμα προσέγγισης με χρήση σφαίρας	65
Εικόνα 5-14: Εδαφοψηφίδα 0.02	66
Εικόνα 5-15: Ανάπτυγμα με χρήση ΟΜΠ και εδαφοψηφίδα 0.02	67
Εικόνα 5-16: Αναπαράσταση προβολής	68
Εικόνα 5-17: Ανάπτυγμα με χρήση ΟΜΠ και εδαφοψηφίδα 0.06	69
Εικόνα 5-18 Πύκνωση χρώματος με παρεμβολή στην εικόνα με εδαφοψηφίδα 0.02	70
Εικόνα 5-19: Σύγκριση τμήματος εικόνων στη σφαίρα	70
Εικόνα 5-20: Τμήμα τρούλου	71
Εικόνα 5-21: Αποτέλεσμα προσέγγισης τμήματος τρούλου με χρήση σφαίρας	72
Εικόνα 5-22: Ανάπτυγμα τμήματος τρούλου με χρήση σφαίρας 1	72
Εικόνα 5-23: Ανάπτυγμα τμήματος τρούλου με χρήση σφαίρας 2	72
Εικόνα 5-24: Πύκνωση χρώματος τμήματος σφαίρας 1	72
Εικόνα 5-25: Πύκνωση χρώματος τμήματος σφαίρας 2	73
Εικόνα 5-26: Αποτέλεσμα προσέγγισης τμήματος τρούλου με χρήση ελλειψοειδούς εκ περιστροφής	73
Εικόνα 5-27: Ανάπτυγμα τμήματος τρούλου με χρήση ελλειψοειδούς εκ περιστροφής	74
Εικόνα 5-28: Πύκνωση χρώματος τμήματος τρούλου	75
Εικόνα 6-1: Προσέγγιση ελλειψοειδούς 1	77
Εικόνα 6-2: Προσέγγιση ελλειψοειδούς 2	77
Εικόνα 6-3: Κατοπτρικό αποτέλεσμα	78



Εικόνα 6-4: Σφάλμα εκτέλεσης αλγορίθμου	78
Εικόνα 6-5: Προβολές στη σφαίρα	79
Εικόνα 6-6: Κέντρο $60^{\circ}, 0^{\circ}$ και γωνία $0^{\circ}$	80
Εικόνα 6-7: Κέντρο $30^{\circ}, 0^{\circ}$ και γωνία $45^{\circ}$	80
Εικόνα 6-8: Τμήμα Σφαίρας	82
Εικόνα 7-1: Επιλογές Meshlab	84
Εικόνα 7-2: Είδος αρχείου	85
Εικόνα 7-3: Εισαγωγή αρχείου	85
Εικόνα 7-4: Επιλογή επιφάνειας αναφοράς	85
Εικόνα 7-5: Αποτελέσματα ελλειψοειδούς	86
Εικόνα 7-6: Ερώτηση εμφάνισης νέφους	86
Εικόνα 7-7: Εμφάνιση ελλειψοειδούς	87
Εικόνα 7-8: Επιλογή προβολής	87
Εικόνα 7-9: Όνομα προβολής	87
Εικόνα 7-10: Επιλογή εδαφοψηφίδας	88
Εικόνα 7-11: Προσωρινές τιμές σφαίρας	88
Εικόνα 7-12: Εμφάνιση σφαίρας	89
Εικόνα 7-13: Επιλογή προβολής σφαίρας	89
Εικόνα 7-14: Επιλογή ονόματος	89
Εικόνα 7-15: Επιλογή εδαφοψηφίδας	90
Εικόνα 7-16: Επιλογή ονόματος	90
Εικόνα 7-17: Νέο όνομα εικόνας	90
Εικόνα 7-18: Άνω όριο μαύρων pixel	91

## **ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Αντικείμενο της παρούσας προπτυχιακής διπλωματικής εργασίας αποτελεί η ανάπτυξη λογισμικού, για την παραγωγή αναπτυγμάτων μη αναπτυκτών επιφανειών από ένα νέφος σημείων συνοδευόμενο από το χρώμα εκάστου σημείου. Το λογισμικό αποτελείται από τέσσερα υπο-προγράμματα, καθένα από τα οποία ειδικεύεται σε ξεχωριστή διαδικασία. Τα πρώτα δύο αποτελούν βοηθητικά προγράμματα της διαδικασίας προσέγγισης του νέφους από μία μαθηματική επιφάνεια, είτε ελλειψοειδές εκ περιστροφής, είτε σφαίρας. Το κύριο πρόγραμμα είναι αρμόδιο για τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων του νέφους σε πολικές συντεταγμένες και στη συνέχεια την ανάπτυξη αυτών μέσω της Μερκατορικής προβολής. Επιπλέον, δημιουργεί την ορθοφωτογραφία σε κλίμακα επιλογής του χρήστη επιτρέποντάς του την επιλογή της εδαφοψηφίδας που επιθυμεί. Το επόμενο πρόγραμμα χρησιμοποιείται για την καλύτερη απόδοση χρώματος σε περίπτωση που υπάρχει ελλιπής πληροφορία στο αρχικό νέφος σημείων και η απόδοση χρώματος στο ανάπτυγμα δεν είναι ικανοποιητική. Για αυτή τη διαδικασία χρησιμοποιείται γραμμική παρεμβολή. Η εφαρμογή του λογισμικού έγινε σε νέφος σημείων του εσωτερικού του Τρούλου της Μονής του Προφήτη Ηλία στην περιοχή του Γερακίου Λακωνίας. Τελικό προϊόν της εφαρμογής ήταν η εικονιστική απόδοση του αντικειμένου σε ανάπτυγμα μέσω και των δύο διαθέσιμων μαθηματικών επιφανειών. Στη συνέχεια, προέκυψαν διάφορα συμπεράσματα για την διεξαγωγή της διαδικασίας, τα οποία την καθιστούν επιτυχημένη καθώς και κάποιες μελλοντικές εξελίξεις των δυνατοτήτων του.

## **ABSTRACT**

The object of this undergraduate diploma thesis is the development of a software, for the production of a development by non-developable surfaces from a point cloud accompanied by the color of each point. The software consists of four sub-programs, each of which specializes in a separate process. The first two are auxiliary programs of the process of approximating the cloud by a mathematical surface, either an ellipsoid or a sphere. The main program is responsible for transforming the coordinates of the point cloud into polar coordinates and then developing them through the Mercator projection. In addition, it creates the orthophoto at a scale of the user's choice by selecting the desired ground sampling distance. The following program is used for better color approximation, when there is lack of information in the original point cloud and the color performance in the development is not satisfactory. Linear interpolation is used for this process. The application of the software used in a point cloud of the interior of the Dome of the Monastery of Profitis Ilias in the area of Geraki in Lakonia. The final product of the application was

the raster development of the object through both available mathematical surfaces. Subsequently, various conclusions were drawn for the performance of the process, which prove it is successful as well as some future developments of its possibilities. Subsequently, various conclusions were drawn for the conduct of the process, which make it successful as well as some future developments of its possibilities.

## 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

---

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η δημιουργία ενός προγράμματος ικανού να δημιουργήσει αναπτύγματα τρισδιάστατων επιφανειών. Ως δεδομένο χρησιμοποιείται ένα νέφος σημείων και προσδιορίζεται η μαθηματική επιφάνεια που προσεγγίζει την τρισδιάστατη επιφάνεια μέσω της επίλυσης ελαχίστων τετραγώνων. Ως μαθηματική επιφάνεια ο χρήστης μπορεί να επιλέξει είτε το ελλειψοειδές εκ περιστροφής, είτε τη σφαίρα. Στη συνέχεια, προβάλλονται τα σημεία στην μαθηματική επιφάνεια και δημιουργείται το ανάπτυγμα χρησιμοποιώντας μία συγκεκριμένη χαρτογραφική προβολή. Στην εργασία αυτή το ανάπτυγμα στην περίπτωση του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής αλλά και της σφαίρας δημιουργείται μέσω της ορθής μερκατορικής προβολής. Η μερκατορική προβολή είναι μία σύμμορφη κυλινδρική προβολή με χαρακτηριστικό γνώρισμα τη διατήρηση των μορφών. Ο λόγος που επιλέχθηκε είναι ότι κατά την ανάπτυξη του προγράμματος θεωρήθηκε σκόπιμη η επιλογή μίας προβολής που θα ανταποκρίνεται στις ανάγκες ενός μεγάλου πλήθους χρηστών.

Η ανάγκη ανάπτυξης ενός προγράμματος με δυνατότητα παραγωγής αναπτυγμάτων μη αναπτυκτών επιφανειών προκύπτει από το γεγονός πως υπάρχουν αρκετά τμήματα κτηρίων τόσο στην πολιτιστική κληρονομιά (πύργοι, οροφές, αψίδες εκκλησιών) όσο και σε εγκαταστάσεις άλλων τομέων όπως στη βιομηχανία, στις οποίες η ύπαρξη αυτών των αναπτυγμάτων αποτελεί σημαντικό εργαλείο. Συγκεκριμένα, σε έργα και μελέτες διαφύλαξης της πολιτιστικής κληρονομιάς τα αναπτύγματα και οι ορθοφωτογραφίες χρησιμοποιούνται ευρέως καθώς συμβάλλουν άμεσα στη γεωμετρική τεκμηρίωση ιστορικών κτηρίων, ναών, μνημείων και συνακόλουθα στην αποκατάσταση και συντήρησή τους. Οι ορθοφωτογραφίες έχουν ευρεία χρήση και βέλτιστη εφαρμογή σε αντικείμενα με επιφάνειες που προσεγγίζουν επίπεδα, όπως για παράδειγμα οι τοίχοι και τα δάπεδα ενός κτηρίου. Ωστόσο οι ορθές προβολές μειονεκτούν έναντι των αναπτυγμάτων στις περιοχές με καμπυλότητα καθώς αλλοιώνουν τα σχήματα και την κλίμακα προβολής και κατ' επέκταση μειώνουν την μετρητική αξία των σχεδίων. Στην περίπτωση του κυλίνδρου οι παραμορφώσεις κατά την ορθή προβολή στο επίπεδο, λόγω μεγάλης καμπυλότητας, είναι ιδιαίτερα σημαντικές και απαιτούν ιδιαίτερο χειρισμό. Η κλασική διαδικασία παραγωγής ορθοφωτογραφιών και αναπτυγμάτων χρησιμοποιώντας φωτογραφικές εικόνες είναι ιδιαίτερα χρονοβόρα καθώς απαιτούνται εκτός από την υλοποίηση των προσανατολισμών και η επεξεργασία του παραγόμενου νέφους αλλά και του ψηφιακού μοντέλου επιφάνειας. Ωστόσο κατά την τελευταία δεκαετία οι αυτοματοποιημένες φωτογραμμετρικές τεχνικές έχουν αποδείξει πως είναι δυνατόν να αποκτηθούν άμεσα πυκνά νέφη σημείων με χρώμα [RGB]. Η πληροφορία της υψής στο πυκνό νέφος σημείων στην περίπτωση της κλασικής ψηφιακής φωτογραμμετρίας αντλείται από την κατάλληλη επεξεργασία των αρχικών εικόνων. Με αρχικό δεδομένο το εκάστοτε νέφος σημείων σε συνδυασμό με την χρήση μαθηματικών μοντέλων αλλά και προγραμματισμού είναι δυνατόν να αναπτυχθεί ένα πρόγραμμα παραγωγής αναπτυγμάτων.

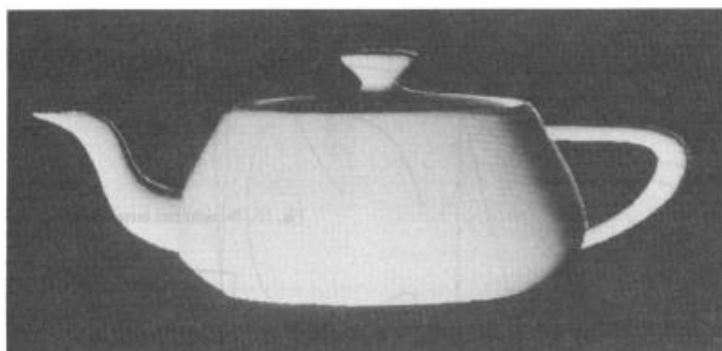
Η παραγωγή αναπτυγμάτων έχει αποτελέσει και αποτελεί αντικείμενο μελέτης τόσο σε ερευνητικές εργασίες όσο και σε εμπορικά και μη φωτογραμμετρικά λογισμικά. Ειδικότερα στη Σχολή Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου έχουν εκπονηθεί αρκετές εργασίες που πραγματεύονται την δημιουργία αναπτυγμάτων χρησιμοποιώντας ως αρχικά δεδομένα νέφη σημείων.

## 2 STATE OF THE ART

---

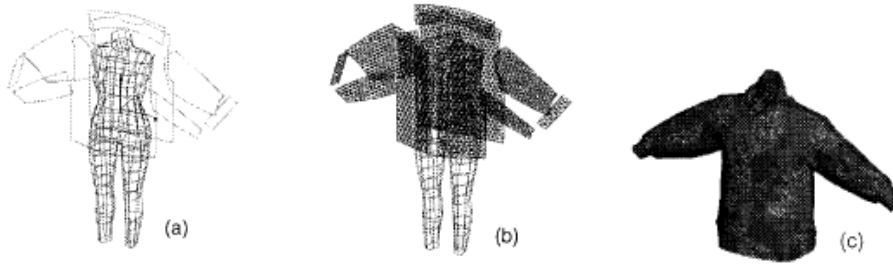
Το πρόβλημα της παραγωγής αναπτύγματος μη αναπτυκτών επιφανειών φαίνεται ότι δεν έχει αντιμετωπιστεί μέχρι τώρα με μια καθολική λύση, αλλά μελετάται κάθε φορά και υιοθετούνται λύσεις για συγκεκριμένες περιπτώσεις. Η παραγωγή αναπτυγμάτων και ορθοφωτογραφιών έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης τόσο σε ακαδημαϊκές εργασίες όσο σε εμπορικά και μη φωτογραμμετρικά λογισμικά. Ειδικότερα, στην σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου έχουν εκπονηθεί αρκετές εργασίες που πραγματεύονται την παραγωγή ορθοφωτογραφιών και αναπτυγμάτων χρησιμοποιώντας ως αρχικά δεδομένα φωτογραφίες ή νέφη σημείων.

Πιο συγκεκριμένα, οι Lane και (1980) δημιούργησαν αλγόριθμους ικανούς για την αξιολόγηση πολυωνυμικών καμπυλών και επιφανειών spline αλλά και υποδιαίρεση αυτών των καμπυλών και επιφανειών σε μικρότερα κομμάτια. Η τεχνική υποδιαίρεσης των καμπυλών είναι πολύ χρήσιμη σε σχεδιαστικά προγράμματα τύπου CAD. Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της εφαρμογής τους είναι ότι το μοντέλο πρέπει να αντιπροσωπεύει με ακρίβεια μια ποικιλία σχημάτων ώστε να μπορεί να υποστεί επεξεργασία και να αναλυθεί από το χρήστη σε προγράμματα τύπου CAD. Παράδειγμα αποτελεί η τσαγιέρα (Εικόνα 2-1) που φαίνεται παρακάτω και απαρτίζεται από 28 δικυβικά μπαλώματα.



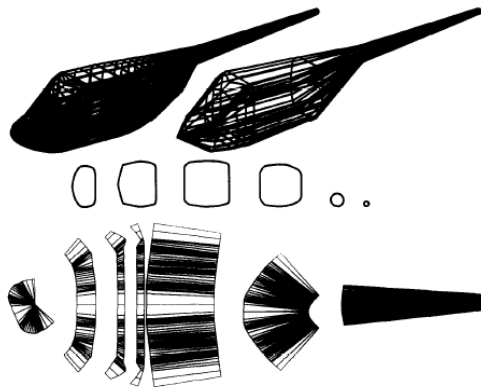
Εικόνα 2-1: Παράδειγμα τσαγιέρας

Οι Fan, Wang, Chen, Yuen και Chan (1981) στην ερευνητική τους εργασία έδειξαν τον μετασχηματισμό από 3D δεδομένα σε 2D και αντίστροφα όσον αφορά στην ένδυση και στη δημιουργία υφασμάτων. Αρχικά, δημιούργησαν τα μοντέλα και έχοντας ξεχωριστά κομμάτια υφασμάτων (2D) δημιούργησαν το τελικό ένδυμα (3D) σύμφωνα με τις διαστάσεις της κούκλας που είχε εισαχθεί στο πρόγραμμα. Στην επόμενη περίπτωση, έχοντας το τελικό ένδυμα ολόκληρο (3D) έκαναν αποδόμηση για να καταλήξουν στα ξεχωριστά κομμάτια υφάσματος (2D). Μειονέκτημα της μεθόδου αποτελεί ότι αν υπάρχει μικρός αριθμός συνδέσεων ο αλγόριθμος οδηγεί σε ελλιπή προσέγγιση των μοτίβων του υφάσματος, ενώ εάν είναι πάρα πολλά η εξαγωγή του αποτελέσματος θέλει αρκετό χρόνο.



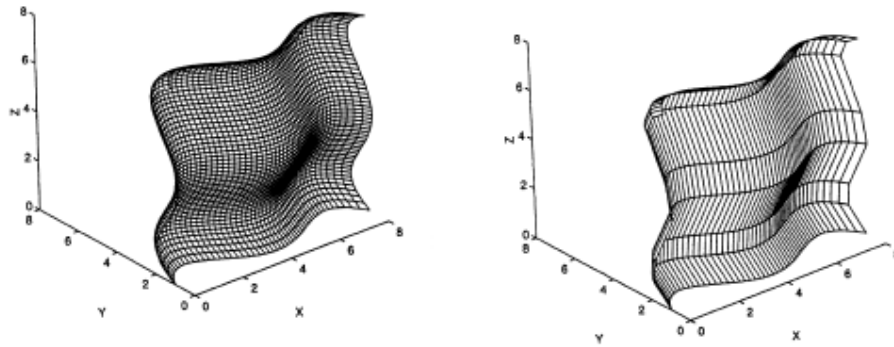
Εικόνα 2-2: Μετασχηματισμός υφασμάτων

Σύμφωνα με την ερευνητική εργασία του Elber (1995), παρουσιάζεται ένα μοντέλο κατασκευής σχεδίων που αυτόματα μπορεί να προσεγγίσει ένα τρισδιάστατο μοντέλο. Το αποτέλεσμα της μεθόδου είναι δισδιάστατα σχέδια τα οποία χωρίζονται σε επιφάνειες και στον σκελετό του αρχικού τρισδιάστατου αντικειμένου. Αυτά τα δισδιάστατα σχέδια αν ενωθούν κατάλληλα θα δημιουργήσουν το αρχικό 3D μοντέλο. Περιορισμός της μεθόδου είναι ότι κάθε επιμέρους επιφάνεια πρέπει να είναι αναπτυσσόμενη. Ένα παράδειγμα της μεθόδου φαίνεται παρακάτω (Εικόνα 2-3).



Εικόνα 2-3: Ανάλυση 3D μοντέλου

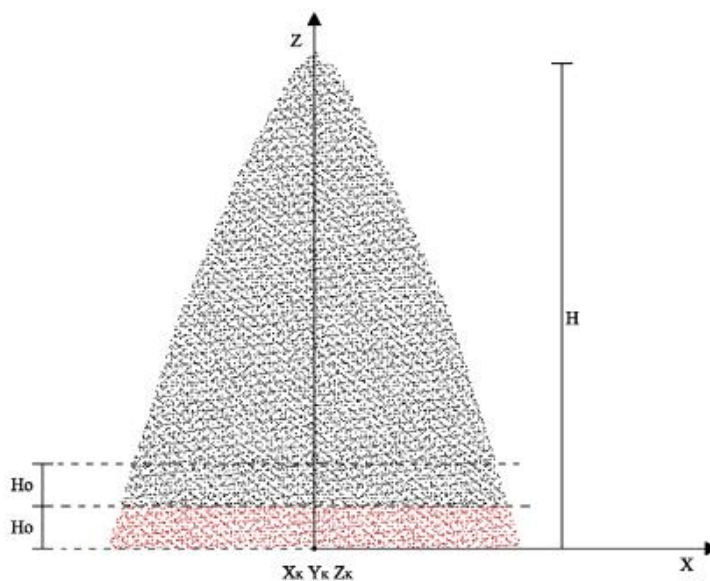
Ο Hoschek (1998), μέσω της έρευνάς του, δημιούργησε έναν αλγόριθμο σύμφωνα με τον οποίο κάθε τρισδιάστατο μοντέλο αποσυντίθεται σε μικρότερες αναπτυσσόμενες επιφάνειες. Χαρακτηριστικό του αλγορίθμου είναι ότι ο χρήστης προσδιορίζει το ανεκτό τυπικό σφάλμα της προσέγγισης κάθε τμήματος. Μειονέκτημα ωστόσο αποτελεί ότι αυτή η προσέγγιση δεν είναι εφικτή για όλες τις επιφάνειες, καθώς υπάρχουν επιφάνειες που δεν μπορούν να προσδιοριστούν απευθείας από αναπτυσσόμενες επιφάνειες. Στην Εικόνα 2-4 φαίνεται αριστερά η αρχική επιφάνεια ενώ στα δεξιά φαίνεται το αποτέλεσμα μετά την χρήση του αλγορίθμου. Πιο συγκεκριμένα, η επιφάνεια έχει χωριστεί σε επιμέρους προσεγγισμένες με διαφορετικούς κυλίνδρους για το τελικό ανάπτυγμα.



Εικόνα 2-4: Αποσύνθεση επιφάνειας

Η Βαλάνη (2002), χρησιμοποίησε το μοντέλο του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής και της σφαίρας για τη δημιουργία αναπτυγμάτων με τη χρήση χαρτογραφικών προβολών σε τέσσερα διαφορετικά ημιχώνια της Μονής Δαφνίου. Αναλυτικότερα, η συγκεκριμένη εργασία σκόπευε στην δημιουργία αναπτυγμάτων μέσω του νέφους σημείων που είχε παραχθεί για τα τέσσερα αυτά ημιχώνια. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε δεν ήταν καθολική και αφορούσε τις ανάγκες της συγκεκριμένης εργασίας. Ωστόσο, η προσέγγιση του νέφους μέσω της σφαίρας δεν γινόταν απευθείας αλλά μέσω ενός ενδιάμεσου μοντέλου αφού το αντικείμενο απείχε αρκετά από την επιφάνεια αναφοράς.

Ο Σκόνδρας (2006) δημιούργησε πρόγραμμα που προσαρμόζει ορθές κωνικές επιφάνειες σε ένα τρισδιάστατο νέφος σημείων. Να σημειωθεί ότι το πρόγραμμα για να λειτουργήσει απαιτεί από το χρήστη να κάνει την επιλογή των προσωρινών τιμών των παραμέτρων της ορθής κωνικής επιφάνειας, την τιμή του μέγιστου ανεκτού τυπικού σφάλματος και το βήμα κατά το οποίο επιλέγονται τα σημεία για τη διαδικασία της συνόρθωσης (βήμα  $h_0$ ).

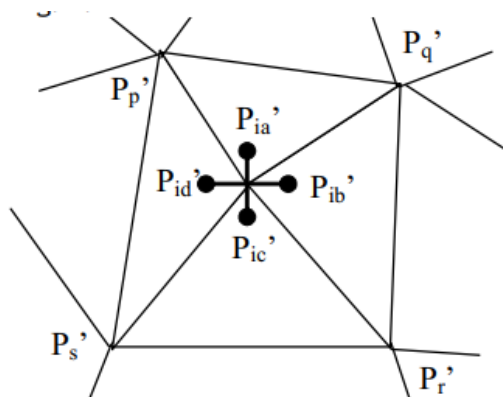


Εικόνα 2-5: Κωνική τομή



Αποτέλεσμα του λογισμικού είναι οι καλύτερες τιμές των παραμέτρων του κώνου. Ουσιαστικά, το πρόγραμμα υπολογίζει έναν αριθμό ορθών κώνων οι οποίοι προσαρμόζονται βέλτιστα σε τμήματα της επιφάνειας του αντικειμένου. Οπότε σε κάθε υπολογισμένο ορθό κώνο αντιστοιχεί ένας κόλινος κώνος του οποίου οι παράμετροι προκύπτουν από το μέγιστο και ελάχιστο υψόμετρο του τμήματος νέφους στο οποίο έχει προσαρμοστεί. Αντίστοιχα, υπολογίζονται τα τυπικά σφάλματα και ο αριθμός επαναλήψεων της συνόρθωσης.

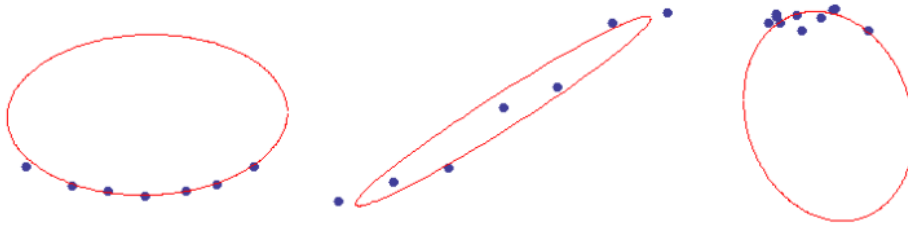
Οι Tam, Joneja, Tang και Yao (2007) δημιούργησαν αλγόριθμο για την μετατροπή των 3D σχημάτων σε επιφάνειες 2D. Η μέθοδος που χρησιμοποίησαν ήταν η εξής: Στο 3D σχήμα έπειτα από τριγωνισμό επέλεξαν ένα τρίγωνο για αρχή και στη συνέχεια τοποθετούσαν τα υπόλοιπα τρίγωνα που είχαν μια κοινή πλευρά με το αρχικό όπως φαίνεται παρακάτω (Εικόνα 2-6). Έτσι, δημιουργούσαν την ανηγμένη εικόνα.



Εικόνα 2-6: Τριγωνισμός

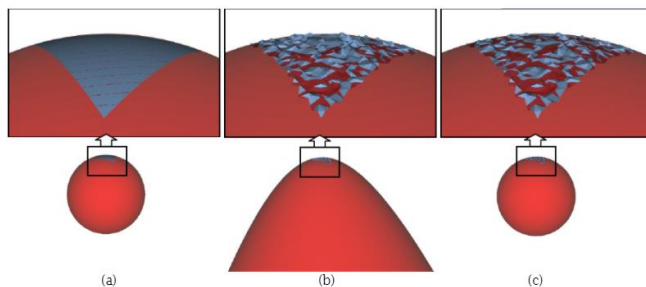
Ο αλγόριθμος αυτός που δημιουργήθηκε χρησιμοποιήθηκε σε πολλά σχεδιαστικά μοντέλα και έφερε αποτέλεσμα, ωστόσο χρειαζόταν πολύ χρόνο. Τέλος, οι παραμορφώσεις στην ανηγμένη επιφάνεια που δημιουργούταν δεν ήταν γνωστές.

Άλλη εφαρμογή έγινε από τον Bertoni (2010) ο οποίος προσεγγίζει τα δεδομένα (σημεία) δημιουργώντας επίσης ένα ελλειψοειδές ή μία έλλειψη που προσεγγίζει τα περισσότερα σημεία. Η έλλειψη που δημιουργείται είναι για δισδιάστατα δεδομένα. Αναλυτικότερα, για τον προσδιορισμό της έλλειψης κρατούνται τα  $x, y$  από το νέφος. Μέσα από την επίλυση ενός συστήματος προκύπτουν οι ιδιοτιμές με τις οποίες προσεγγίζει την επόμενη διάσταση (τριαξονικό ελλειψοειδές). Δέσμευση αποτελεί το γεγονός ότι χρειάζεται ένα γνωστό κέντρο το οποίο προσεγγίζεται μέσα από την επίλυση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Αυτή η μέθοδος είναι ασταθής και δεν μπορεί να φέρει καλά αποτελέσματα σε δεδομένα με θόρυβο. Επιπρόσθετα, ενώ ο προσδιορισμός της έλλειψης επιτυγχάνεται για όλα τα δεδομένα, η προσέγγιση του τριαξονικού ελλειψοειδούς εξαρτάται από τον πίνακα ο οποίος περιγράφει το ελλειψοειδές αυτό, και εάν η ορίζουσά του είναι αρνητική τότε δεν εξάγεται τριαξονικό ελλειψοειδές. Τέλος, σύμφωνα με τον Bertoni (2010) το πρόβλημα αυτό προσπερνάται έχοντας γνωστό το κέντρο.



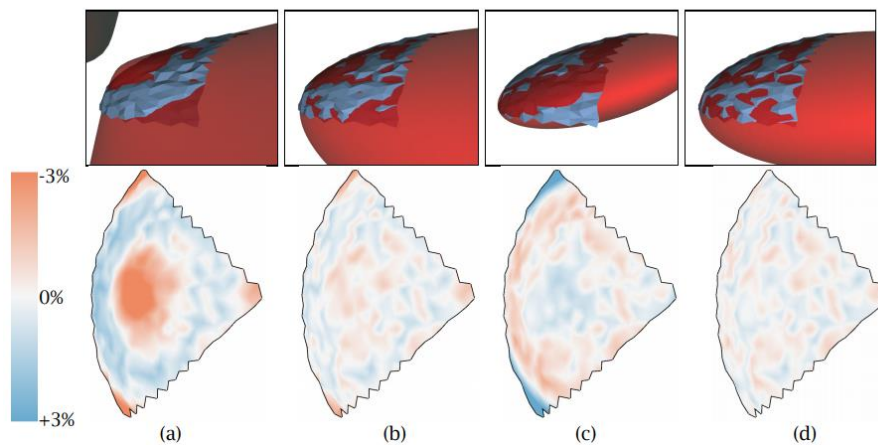
Εικόνα 2-7: Προσαρμογή έλλειψης

Οι Andrew και Sequin (2013) χρησιμοποιούν ως δεδομένα νέφη σημείων ή και πολυγωνικές επιφάνειες (mesh). Τα νέφη τα οποία εισάγονται αναπαριστούν ένα αντικείμενο ή ένα τμήμα αυτού και ο χρήστης μπορεί να επιλέξει τη μαθηματική επιφάνεια με την οποία θα το προσεγγίσουν ή να προσδιοριστεί αυτόματα από το πρόγραμμα. Οι διαθέσιμες επιφάνειες αναφοράς είναι το ελλειψοειδές, το υπερβολοειδές, ο κώνος, το παραβολοειδές, ο κύλινδρος και το επίπεδο. Το αποτέλεσμα είναι ότι το πρόγραμμα δείχνει πόσα σημεία του νέφους είναι εκτός της μαθηματικής επιφάνειας που χρησιμοποιείται. Στη συγκεκριμένη μέθοδο ωστόσο ο θόρυβος στα δεδομένα μπορεί να αλλάξει τον καλύτερο τύπο μαθηματικής επιφάνειας που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα. Παρουσιάζεται στην Εικόνα 2-8 το προαναφερθέν πρόβλημα καθώς το ζήτημα αυτό παρουσιάζει έντονο ενδιαφέρον.



Εικόνα 2-8: Απόδοση σημείων σε επιφάνειες

Η διαφορά ενός υπερβολοειδούς με ένα ελλειψοειδές μπορεί να είναι πολύ μικρή όσον αφορά ένα μέρος της επιφάνειας. Στην παραπάνω εικόνα απεικονίζεται με μπλε το νέφος που είναι ένα τμήμα της σφαίρας στην περίπτωση a , ενώ στις περιπτώσεις b και c είναι το ίδιο νέφος με γκαουσιανό σφάλμα 1%. Στην πρώτη περίπτωση έχει επιλεγεί από το πρόγραμμα ως καλύτερη επιφάνεια η σφαίρα, στη δεύτερη περίπτωση επιλέχθηκε από το πρόγραμμα το ελλειψοειδές και στην τρίτη περίπτωση επιλέχθηκε από το χρήστη η σφαίρα. Στην δεύτερη περίπτωση εξαιτίας του θορύβου επιλέχθηκε ως επιφάνεια αναφοράς το ελλειψοειδές και όχι η σφαίρα. Έτσι συμπεραίνεται ότι η επιλογή της καταλληλότερης επιφάνειας αναφοράς είναι αρκετά ευαίσθητη στην εισαγωγή θορύβου.



Εικόνα 2-9: Διαφορά υπερβολοειδούς με ελλειψοειδές

Στην παραπάνω φωτογραφία (Εικόνα 2-9) απεικονίζονται με μπλε χρώμα τα δεδομένα που σε κάθε περίπτωση δεν εφάπτονται αρκετά καλά στην μαθηματική επιφάνεια. Συμπερασματικά, πλεονέκτημα της μεθόδου είναι η δυνατότητα οπτικοποίησης της προσέγγισης του νέφους με την εκάστοτε επιφάνεια.

Στο άρθρο των Benilacqua, Caroti, Zaragoza, Piemonte (2016) πραγματοποιείται η αποτύπωση της οροφής ενός θησαυροφυλακίου με τη χρήση laser scanner και φωτογραφιών για την απόδοση υψής. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτής της μεθοδολογίας είναι η δημιουργία κολάζ από διάφορες ορθογώνιες όψεις του τρισδιάστατου μοντέλου με υφή, χάρη στις γεωμετρικές αναφορές που παρέχονται από τις χαρακτηριστικές γραμμές του μοντέλου. Οι γραμμές αυτές είναι ορατές στο τρισδιάστατο μοντέλο αλλά και στο ανάπτυγμα. Αποτέλεσμα είναι το ανάπτυγμα της οροφής το οποίο προκύπτει από την προσέγγισή της με διαφορετικούς κυλίνδρους ώστε να δοθεί το παρακάτω αποτέλεσμα που φαίνεται στην Εικόνα 2-10.



Εικόνα 2-10: Ανάπτυγμα οροφής

Ο Δερμάνης (2017) προσεγγίζει ένα νέφος σημείων με τη βοήθεια των ελαχίστων τετραγώνων, χρησιμοποιώντας την πλήρη εξίσωση του τριαξονικού ελλειψοειδούς και την παραμετρική εξίσωση του ελλειψοειδούς με τη διαφορά ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες εκφράζονται μέσα από πολικές συντεταγμένες. Η προσπάθεια αυτή γίνεται για να προσδιορίσει μέσω της επίλυσης των ελαχίστων τετραγώνων την βέλτιστη προσέγγιση. Πιο συγκεκριμένα, το παράδειγμά του αφορά δύο διαφορετικές προσεγγίσεις της εξίσωσης του τριαξονικού ελλειψοειδούς (παραμετρική με XYZ, παραμετρική με πολικές συντεταγμένες) και την επίλυση των ελαχίστων τετραγώνων σε κάθε μία από αυτές.

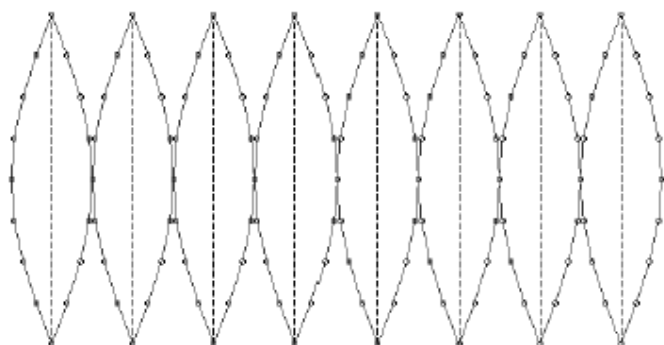
Η Βασιλείου (2018) δημιούργησε έναν αλγόριθμο για την παραγωγή αναπτυσμάτων κυλινδρικών επιφανειών χρησιμοποιώντας ως μοναδικό δεδομένο το νέφος σημείων, που αναπαριστά την επιφάνεια, συνοδευόμενο από το χρώμα εκάστου σημείου. Το νέφος σημείων που χρησιμοποίησε ήταν του ναού του Ηφαίστου. Η συγκεκριμένη διπλωματική αφορά στην προσέγγιση του νέφους με έναν κύλινδρο και στην συνέχεια το άνοιγμα αυτού για τη δημιουργία του αναπτύγματος. Το άνοιγμα του κυλίνδρου δεν αναφέρει τι παραμορφώσεις επιφέρει στο ανάπτυγμα και έτσι δεν μπορεί να αξιολογηθεί. Ουσιαστικά, είναι ένα ανάπτυγμα μιας αναπτυστικής επιφάνειας όπως φαίνεται στην Εικόνα 2-11.



Εικόνα 2-11: Ανάπτυγμα κυλινδρικής επιφάνειας

Η Λούκα (2019) στην εργασία της δίνει το ανάπτυγμα της σφαίρας μέσα από τρεις παραλλαγές. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται και για τις τρεις παραλλαγές είναι η μέθοδος Gore και στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιούνται διαδοχικά: 4 μεσημβρινά (κατακόρυφα) επίπεδα (με αποτέλεσμα 8 gores), 5 μεσημβρινά επίπεδα (10 gores) και 6 μεσημβρινά επίπεδα (12 gores). Επιπλέον, τα σφάλματα

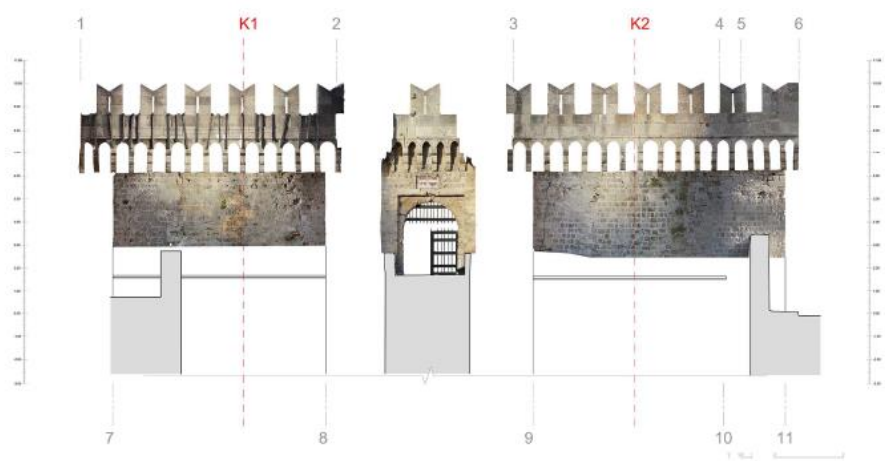
εξαρτώνται έντονα από τον αριθμό των σημείων που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση των *gore*. Πιο συγκεκριμένα, όσο αυξάνεται το πλήθος των σημείων τόσο μειώνεται το σφάλμα.



Εικόνα 2-12: Μέθοδος Gore

Ο Πάνου (2020) έχει προσεγγίσει ένα τρισδιάστατο νέφος σημείων αρκετά μικρού πλήθους με ένα τριαξονικό ελλειψοειδές και αντίστοιχα ένα δισδιάστατο νέφος με μία έλλειψη χρησιμοποιώντας την πλήρη εξίσωση δευτέρου βαθμού στην περίπτωση του τριαξονικού ελλειψοειδούς και την εξίσωση της έλλειψης αντίστοιχα. Αποτέλεσμα της μεθόδου είναι η προσέγγιση του νέφους μέσω της επίλυσης ελαχίστων τετραγώνων και ο προσδιορισμός του ελλειψοειδούς δίνοντας τιμές στους τρεις ημιάξονες, στο κέντρο αλλά και στις τρεις στροφές. Στην περίπτωση της έλλειψης το αποτέλεσμα είναι η τιμή των δύο ημιαξόνων, η γωνία και το κέντρο της έλλειψης. Η διαφορά της έλλειψης με το τριαξονικό ελλειψοειδές είναι ότι η έλλειψη απεικονίζεται σε δύο διαστάσεις ενώ το τριαξονικό σε τρεις διαστάσεις.

Οι Γεωργόπουλος, Σκαμαντζάρη και Ταπεινάκη (2020), πραγματοποίησαν ψηφιακό ανάπτυγμα μεσαιωνικών οχυρώσεων σε δύο κάστρα στη Χίο και τη Ρόδο αντίστοιχα. Αναλυτικότερα, για την γεωμετρική τεκμηρίωση των μνημείων αυτών χρησιμοποιήθηκαν τα λογισμικά 3DReshaper, Cloud Compare και Geomagic Wrap για την δημιουργία ορθοφωτογραφιών και αναπτυγμάτων. Τα προϊόντα αυτά θα βοηθούσαν στη συντήρηση και ανακατασκευή των μνημείων. Ωστόσο, προτάθηκε η δημιουργία ενός λογισμικού εξαγωγής αναπτυγμάτων από μη αναπτυκτές επιφάνειες μέσω χαρτογραφικών προβολών για την ανάπτυξη των κώνων ή κυλίνδρων ή επιπέδου. Αυτή η διαδικασία περιλαμβάνει αναπόφευκτα ελεγχόμενες παραμορφώσεις που είναι γνωστές εκ των προτέρων, όπως συμβαίνει με τους χάρτες.



Εικόνα 2-13: Ανάπτυγμα κάστρου

### 3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΩΔΙΚΑ

```
1. print("Καλως ήρθατε στο Be..Chri!\n")
2. type=input("Παρακαλω δωστε των τυπο του αρχειου (.ply ή .txt)\n >>")
3. while type!=".ply" and type!="ply" and type!=".txt" and type!="txt":
4.     print('Πληκτρολόγησες "{}"\nΠαρακαλω δωσε .ply ή .txt \n'.format(type))
5.     type=input(">>")
6.
7. filename=input("Δωστε το ονομα του αρχειου\nBe..Chri Warnings you! Το αρχειο να βρισκεται στον ιδιο φακελο με το προγραμμα!\n>>")
8. if type=="ply" or type=="ply":
9.     filename+="ply"
10.    ply(filename)
11.    X,Y,Z,n=data(filename[:-4]+".txt")
12. else:
13.     filename+="txt"
14.     X,Y,Z,n=data(filename)
15. X,Y,Z,xc,yc,zc,klimaka=normalization(X,Y,Z,n)
16.
17. ea=input("Ποια επιφανεια αναφορας να χρησιμοποιοηθει; Σφαίρα ή ελλειψοειδες εκ περιστροφης\nΠιεσε 1 ή 2 αντιστοιχα!\n>>")
18. while ea!="1" and ea!="2":
19.     print('Πληκτρολόγησες "{}"\nΠαρακαλω δωσε "1" για σφαίρα ή "2" για ελλειψοειδες εκ περιστροφης \n'.format(ea))
20.     ea=input(">>")
```

```
21. def ply(filename):
22.     nefos = PlyData.read(filename)
23.     filename=filename[:-4]
24.     filew=filename+'.txt'
25.     filew1=filename+"1.txt"
26.     f= open(filew,'w', encoding='utf-8')
27.     ff=open(filew1,'w',encoding="utf-8")
28.     out=""
29.     out1=""
30.
31.     X=[]
32.     Y=[]
```

Δίνεται από το χρήστη ο τύπος αρχείου στη μεταβλητή type και στη γραμμή 3 ελέγχεται αν η μορφή του αρχείου είναι συμβατή με τις δυνατότητες του προγράμματος. Σε περίπτωση που δεν είναι, ζητείται η επανεκχώρηση του τύπου του αρχείου.

Εκχωρείται το όνομα του αρχείου.

Πραγματοποιείται έλεγχος για τον τύπο του αρχείου (ply/txt).

Αν είναι ply καλείται η συνάρτηση ply η οποία διαβάζει το αρχείο και δημιουργεί δύο νέα αρχεία τύπου txt.

Στη συνέχεια καλεί τη συνάρτηση data η οποία επιστρέφει τρεις πίνακες με τις καρτεσιανές συντεταγμένες του νέφους και τη μεταβλητή n που αφορά το πλήθος των σημείων.

Αν είναι txt καλείται απευθείας η συνάρτηση data.

Με τη συνάρτηση normalization γίνεται κανονικοποίηση του νέφους και επιστρέφονται οι καινούργιες τιμές των X,Y,Z αλλά και το κέντρο βάρους και η κλίμακα σμίκρυνσης του νέφους.

Τέλος, ο χρήστης επιλέγει την επιφάνεια αναφοράς και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να δοθεί η κατάλληλη εισαγωγή.

Στη συνάρτηση αυτή αποθηκεύει προσωρινά τα δεδομένα στη μεταβλητή nefos. Ύστερα, δημιουργεί δύο κενά αρχεία txt το ένα όνομα.txt και το άλλο όνομα1.txt. Το όνομα είναι αυτό που έχει οριστεί από το χρήστη.

Δημιουργούνται τρεις κενές λίστες X,Y,Z.

```

33. Z=[]
34.
35. X=nefos['vertex']['x']
36. Y=nefos['vertex']['y']
37. Z=nefos['vertex']['z']
38. total=len(X)
39. step=int(total/1500)
40. newn=int(total/step)+1
41.
42. RGB=np.zeros((newn,3))
43. j=0
44. for i in range(0,total,step):
45.     t1,t2,t3,r,g,b,alpha=nefos.elements[0].data
46.     [i]
47.     out+='{},{},{},{}\n'.format(X[i],Y[i],Z[i],r,
48.     g,b)
49.     for i in range(total):
50.         t1,t2,t3,r,g,b,alpha=nefos.elements[0].data
51.         [i]
52.         out1+='{},{},{},{}\n'.format(t1,t2,t3,r,g,
53.         b)
54.
55. ff.write(out1)
56. ff.close()
57. f.write(out)
58. f.close()
59.
60. def data(filename):
61.
62.     f= open(filename,'r', encoding='utf-8')
63.     n=0
64.     X=[]
65.     Y=[]
66.     Z=[]
67.
68.     for row in f:
69.         x,y,z,r,g,b=row.split(',')
70.         x=float(x.strip('\n'))
71.         y=float(y.strip('\n'))
72.         z=float(z.strip('\n'))
73.         X.append(x)
74.         Y.append(y)
75.         Z.append(z)
76.
77.     n+=1
78.     X=np.array(X)
79.     Y=np.array(Y)
80.     Z=np.array(Z)
81.
82.     return X,Y,Z,n

```

Οι λίστες παίρνουν τις τιμές x,y,z του νέφους. Για τη δημιουργία του αραιού νέφους (όνομα.txt) επιλέγονται τα σημεία σύμφωνα με βήμα (συνολικό πλήθος/1500) έτσι ώστε το καινούργιο νέφος να έχει περίπου 1500 σημεία και να αποτυπώνει ικανοποιητικά το αρχικό νέφος (π.χ. έστω νέφος 10.000.000 σημείων. Το βήμα είναι 10.000.000/1500=6,666

Τα σημεία του καινούργιου .txt είναι 10.000.000/6,666=1500.)

Το μικρότερο νέφος που δημιουργείται αποθηκεύεται προσωρινά σ τη μεταβλητή out στην μορφή “x,y,z,r,g,b” για κάθε γραμμή.

Ύστερα στη μεταβλητή out1 αποθηκεύονται προσωρινά οι μεταβλητές “x,y,z,r,g,b” όλων των σημείων του νέφους.

Το r,g,b είναι το χρώμα κάθε σημείου στα τρία κανάλια του έγχρωμου σύνθετου.

Στην συνέχεια, αποθηκεύονται στον ίδιο φάκελο που είναι το πρόγραμμα.

Στη συνάρτηση data ανοίγεται το αρχείο όνομα.txt δημιουργούνται τρεις κενές λίστες X,Y,Z.

Τις έξι διαφορετικές τιμές τις διαχωρίζει σύμφωνα με το κόμμα (,) και τις εκχωρεί κατάλληλα στους αντίστοιχους πίνακες.

Το n μετράει το πλήθος των σημείων.

Γίνεται η μετατροπή των δεδομένων από λίστα σε πίνακα για να είναι κατάλληλα για επεξεργασία.

Τέλος, επιστρέφονται οι πίνακες X,Y,Z και το πλήθος.



- ★ Η κανονικοποίηση δεδομένων είναι η διαδικασία της δομής μιας σχεσιακής βάσης δεδομένων προκειμένου να μειωθεί ο πλεονασμός δεδομένων και να βελτιωθεί η ακεραιότητα των δεδομένων. Η εύρεση των καλύτερων τιμών των παραμέτρων της επιφάνειας αναφοράς βρίσκεται με την εφαρμογή των ελαχίστων τετραγώνων και πιο συγκεκριμένα της γενικής μεθόδου (εδάφιο 5.12 και 5.13). Η μέθοδος αυτή, είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη στην εξαγωγή σωστών αποτελεσμάτων όταν το πλήθος των δεδομένων είναι μεγάλο ( $>100$ ) και μεγάλη τάξη μεγέθους ( $>10^2$ ). Για το λόγο αυτό επιλέχθηκε η κανονικοποίηση των δεδομένων. Ουσιαστικά, η κανονικοποίηση μειώνει τη τάξη μεγέθους και διατηρεί σταθερές τις συσχετίσεις μεταξύ τους. Πλεονέκτημα της μεθόδου αποτελεί ότι η διαδικασία είναι αντιστρέψιμη.

```

79. def normalization(X,Y,Z,n):
80.     mediaX = np.mean(X)
81.     sigmaX= X.std()
82.     mediaY= np.mean(Y)
83.     sigmaY= Y.std()
84.     mediaZ = np.mean(Z)
85.     sigmaZ= Z.std()
86.     sigma_mean=(sigmaX+sigmaY+sigmaZ)/3
87.     for i in range(n):
88.         X[i] = ((X[i] - mediaX) / sigma_mean)
89.         Y[i] = ((Y[i] - mediaY) / sigma_mean)
90.         Z[i] = ((Z[i] - mediaZ) / sigma_mean)
91.     return X,Y,Z,mediaX,mediaY,mediaZ,sigma_m
        ean

```

Στη συνάρτηση normalization υπολογίζεται ο μέσος όρος των X,Y,Z συντεταγμένων και η τυπική απόκλιση τους αντίστοιχα.

Υπολογίζεται ο μέσος όρος των τυπικών αποκλίσεων.

Από κάθε τιμή του πίνακα X αφαιρείται ο μέσος όρος του πίνακα και διαιρείται με το μέσο όρο των τυπικών αποκλίσεων. Αντίστοιχα για τα Y,Z.

Τέλος, επιστρέφονται οι νέες τιμές X,Y,Z, οι μέσοι όροι των τριών πινάκων και ο μέσος όρος των τυπικών αποκλίσεων.

- ★ Εάν επιλεγθεί ως επιφάνεια αναφοράς η σφαίρα (γραμμή 17 κώδικα).

```

92. if ea=="1":
93.     import sfaira
94.     xk,yk,zk,R=sfaira.sphere_fit(X,Y,Z,n)
95.     print("\nΕπελεξε την προβολη που θες για να
        δημιουργηθει η εικονα\n")
96.     print("Πιεσε 1 για πλάγια μερκατορικη προβ
        ολη και 2 για πλάγια Lambert προβολη\n")

```

Γίνεται εισαγωγή της βιβλιοθήκης sfaira.

Καλείται η συνάρτηση sphere\_fit όπου δίνει τις καλύτερες τιμές των παραμέτρων της σφαίρας (xk,yk,zk,r).

Στη συνέχεια ο χρήστης επιλέγει ποια προβολή θέλει ανάμεσα στην πλάγια μερκατορική ή στην πλάγια Lambert.

- ★ Βιβλιοθήκη sfaira.

```

97. import numpy as np
98.
99. def initial_values(x,y,z,n):
100.     tx=np.mean(x)
101.     ty=np.mean(y)
102.     tz=np.mean(z)
103.     dist=0
104.
105.
106.     for i in range(n):

```

Γίνεται εισαγωγή της βοηθητικής βιβλιοθήκης numpy η οποία χρησιμοποιείται για πολύπλοκους μαθηματικούς υπολογισμούς .

Ορίζεται συνάρτηση για τον υπολογισμό των προσωρινών τιμών με όνομα initial\_values. Στη συνάρτηση γίνεται ο υπολογισμός του μέσου όρου των τιμών X,Y,Z αντίστοιχα (κέντρο βάρους νέφους).

Στο σημείο αυτό υπολογίζεται η μέση

```

107.         dist=dist+((tx-x[i])**2+(ty-
           y[i])**2+(tz-z[i])**2)**(0.5)
108.         R=dist/n
109.         return tx,ty,tz,R
110.
111.     def sphere_fit(x,y,z,k):
112.
113.         n = 3*k
114.         m = 4 + 2*k
115.         m0 = 4
116.         # eksiswsh sfairas """" (x-xk)**2+(y-
           yk)**2 + (z-zk)**2=r**2""""
117.         xk,yk,zk,r=initial_values(x,y,z,k)
118.         count = 0
119.         s0_aposteriori = 1
120.         while count < 40:
121.             s0hat = s0_aposteriori
122.
123.             A = np.zeros((k,m0))
124.             for i in range(k):
125.                 A[i,0] = -2*x[i]+2*xk
126.                 A[i,1] = -2*y[i]+2*yk
127.                 A[i,2] = -2*z[i]+2*zk
128.                 A[i,3] = -2*r
129.             A=np.array(A)
130.             A=A.reshape((k,4))
131.             B = np.zeros((k,n))
132.             for i in range(k):
133.                 B[i,i*3]=2*x[i]-2*xk
134.                 B[i,(i*3)+1]=2*y[i]-2*yk
135.                 B[i,(i*3)+2]=2*z[i]-2*zk
136.             B=np.array(B)
137.             B=B.reshape((k,n))
138.
139.             W=np.zeros((k,))
140.             for i in range(k):
141.                 W[i]=0-((x[i]-xk)**2+(y[i]-
           yk)**2 + (z[i]-zk)**2-r**2)
142.             W=np.array(W)
143.
144.             P=np.zeros((n,n))
145.             for i in range(n):
146.                 P[i,i]=1.0
147.
148.             AT=np.transpose(A)
149.
150.             BT=np.transpose(B)
151.             P1=np.linalg.inv(P)
152.
153.             bx=np.dot(B,P1)
154.             by=np.dot(bx,BT)

```

απόσταση όλων των σημείων από το κέντρο βάρους, δηλαδή η ακτίνα.

Έτσι προκύπτουν οι προσωρινές τιμές της σφαίρας (tx,ty,tz,R) για την επίλυση αργότερα των ελαχίστων τετραγώνων.

Στη συνέχεια ορίζεται η συνάρτηση sphere\_fit στην οποία γίνεται η επίλυση των ελαχίστων τετραγώνων με τη γενική μέθοδο.

Παρακάτω φαίνονται οι απαραίτητοι υπολογισμοί που έγιναν για την επίλυση της γενικής μεθόδου.

Ξεκινάει μία δομή επανάληψης με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων το 40.

Στο σημείο αυτό γίνονται οι ορισμοί των πινάκων A,B,W,P.

Ακολουθούν οι πράξεις μεταξύ των πινάκων.

```

155.         by1=np.linalg.inv(by)
156.
157.         cx=np.linalg.multi_dot([AT,by1])
158.         cy=np.linalg.multi_dot([cx,A])
159.         cy1=np.linalg.inv(cy)
160.
161.         ax=np.linalg.multi_dot([cy1,AT])
162.         ay=np.linalg.multi_dot([ax,by1])
163.         ds=np.linalg.multi_dot([ay,W])
164.
165.         xk = xk + ds[0]
166.         yk = yk + ds[1]
167.         zk = zk + ds[2]
168.         r = r + ds[3]
169.
170.         Pa=by1
171.         mx=np.linalg.multi_dot([A,ds])
172.         my=W-mx
173.         xn=np.linalg.multi_dot([P1,BT])
174.         xb=np.linalg.multi_dot([xn,by1])
175.         u=np.linalg.multi_dot([xb,my])
176.
177.
178.         #ypologimsos tou sigma^2 aposteriori
179.
180.         v=3*n
181.         m=2*n+ m0
182.         uT=np.transpose(u)
183.         zx=np.linalg.multi_dot([uT,P])
184.         zy=np.linalg.multi_dot([zx,u])
185.         s0_aposteriori1=zy/(v-m) # sigma^2
186.         s0_aposteriori=s0_aposteriori1**(.5)
187.
188.
189.         if (np.abs(s0hat-
s0_aposteriori)) <= 0.001:
190.             break
191.             count+= 1
192.
193.         print("Για τον υπολογισμο των καλυ
ερων τιμών των παραμέτρων εγιναν {} επαναλή
ψεις.\n".format(count-1))
194.         print("Το κέντρο της σφαίρας είναι ({:
1.3f},{:1.3f},{:1.3f}) και η ακτίνα {:1.3f}\n".forma
t(xk,yk,zk,r))
195.         print("Το sigma aposteriori τις προσεγγι
σεις του νεφους με αυτη την σφαιρα είναι {:1.4
f}".format(s0_aposteriori))

```

Υπολογισμός των καλύτερων τιμών των παραμέτρων για κάθε επανάληψη της διαδικασίας.

Στη πρώτη επανάληψη χρησιμοποιεί ως προσωρινές τιμές αυτές που δημιουργήθηκαν στη συνάρτηση `initial_values`, ενώ από την επόμενη και μετά χρησιμοποιούνται ως προσωρινές τιμές οι καλύτερες τιμές που έχουν υπολογιστεί από την συνόρθωση της προηγούμενης επανάληψης.

Υπολογισμό του τυπικού σφάλματος μετά τη συνόρθωση του δείγματος ( $\sigma_{\text{aposteriori}}^2$ ).

Πραγματοποιείται έλεγχος της διαφοράς του  $\sigma_{\text{aposteriori}}^2$  της προηγούμενης επανάληψης με αυτό της επόμενης και είναι μικρότερο από 0,001 σταματάει η διαδικασία της συνόρθωσης και επιλέγονται ως καλύτερες τιμές αυτές της τελευταίας επανάληψης.

Τέλος, εμφανίζονται στο χρήστη.

Παρακάτω εμφανίζεται ο αλγόριθμος της εκτύπωσης της επιφάνειας και του αραιού νέφους.

```
196.     print("\n Αν θες να δεις την σφαιρα και
        το νεφος στον χώρο πατα enter αλλιως οτιδη
        οτε αλλο\n ")
197.     ans=input(">>")
198.     if ans=="":
199.         import matplotlib.pyplot as plt
200.         import importlib
201.         importlib.import_module('mpl_too
        lkits.mplot3d').Axes3D
202.         fig = plt.figure()
203.         ax = fig.add_subplot(111, projectio
        n='3d')
204.         xm=xk
205.         ym=yk
206.         zm=zr
207.         u, v = np.mgrid[0:2*np.pi:20j, 0:np.
        pi:10j]
208.         xsf=np.cos(u)*np.sin(v)*r
209.         ysf=np.sin(u)*np.sin(v)*r
210.         zsf=np.cos(v)*r
211.         xsf = xsf + xk
212.         ysf = ysf + yk
213.         zsf = zsf + zr
214.
215.         ax.scatter(x, y, z, c='r', marker='!')
216.         ax.scatter(xsf, ysf, zsf, c='b')
217.         max_range = np.array([xsf.max()-
        xsf.min(), ysf.max()-ysf.min(), zsf.max()-
        zsf.min()]).max() / 2.0
218.         mid_x = (xsf.max()+xsf.min()) * 0.5
219.         mid_y = (ysf.max()+ysf.min()) * 0.5
220.         mid_z = (zsf.max()+zsf.min()) * 0.5
221.         ax.set_xlim(mid_x -
        max_range, mid_x + max_range)
222.         ax.set_ylim(mid_y -
        max_range, mid_y + max_range)
223.         ax.set_zlim(mid_z -
        max_range, mid_z + max_range)
224.         ax.text2D(0.05, 0.95, "■ Νέφος
        σημείων με κόκκινο χρώμα\nΣφαιρα με μπλε
        χρώμα\nκλείστε το παράθυρο για να
        συνεχίσετε!", transform=ax.transAxes)
225.         plt.show()
226.         return xk,yk,zr
```

Επιλέγεται από το χρήστη αν θα εκτυπωθεί η σφαίρα που έχει δημιουργηθεί ή θα προχωρήσει η διαδικασία.

Γίνεται εισαγωγή των κατάλληλων βιβλιοθηκών για εκτύπωση.

Δημιουργείται ένα νέο νέφος σημείων ώστε να μπορεί να εκτυπωθεί η επιφάνεια αναφοράς με συντεταγμένες φ,λ οι οποίες μετασχηματίζονται σε καρτεσιανές.

Γίνεται εισαγωγή της επιφάνειας αναφοράς (σφαίρας) και του αραιού νέφους σημείων (αρχικά δεδομένα).

Στη συνέχεια γίνεται μία μορφοποίηση της εμφάνισης για μία καλύτερη οπτική εμφάνιση στο χρήστη.

Δημιουργείται το υπόμνημα του γραφήματος στο οποίο με μπλε απεικονίζεται η σφαίρα και με κόκκινο το νέφος.

Γίνεται επιστροφή των καλύτερων τιμών των παραμέτρων στο κύριο πρόγραμμα (γραμμή 94).

Επιστρέφοντας στο κύριο πρόγραμμα για την επιλογή της κατάλληλης προβολής

```
227.     probolh=input(">>")
228.     print("\nΔωσε το ονομα του
αναπτύγματος που θα δημιουργηθει!\n")
229.     photo=input(">>")
230.     x,y,z,RGB,total=all_data(filename[:
4]+".txt")
231.     n=total
232.     x,y,z,xk,yc,zc,garbage=
normalization(x,y,z,n)
233.     x=x*klimaka
234.     y=y*klimaka
235.     z=z*klimaka
236.     R=R*klimaka
237.
238.
239.     f,l=xyz2sfere(x,y,z,R,xk,yk,zk,n)
```

Μετά την επιλογή της προβολής ο χρήστης καλείται να δώσει το όνομα του αναπτύγματος που θα δημιουργηθεί.

Γίνεται εισαγωγή των σημείων από το πλήρες νέφος.

Γίνεται κανονικοποίηση του πλήρους νέφους και πολλαπλασιάζεται με τη κατάλληλη κλίμακα. Αυτό συμβαίνει για να αποκτήσουν το πραγματικό τους μέγεθος και όχι αυτό που είχαν μετά από την κανονικοποίηση.

Καλείται η συνάρτηση xyz2sfere που μετατρέπει τις καρτεσιανές συντεγμένες του νέφους σε πολικές.

```
240.     def all_data(filename):
241.         f= open(filename,'r', encoding='utf-
8')
242.         all_lines = f.readlines()
243.         total=len(all_lines)
244.
245.         X=np.zeros(total)
246.         Y=np.zeros(total)
247.         Z=np.zeros(total)
248.         RGB=np.zeros((total,3))
249.
250.         for i in range(total):
251.             t1,t2,t3,r,g,b=all_lines[i].split(',')
252.             X[i]=t1
253.             Y[i]=t2
254.             Z[i]=t3
255.             RGB[i,0]=r
256.             RGB[i,1]=g
257.             RGB[i,2]=b
258.         return X,Y,Z,RGB,total
259.     def xyz2sfere(x,y,z,R,xk,yk,zk,n):
260.         fi=np.zeros(n)
261.         theta=np.zeros(n)
262.         r=np.zeros(n)
263.         x1=np.zeros(n)
264.         y1=np.zeros(n)
265.         z1=np.zeros(n)
266.         for i in range(n):
267.             xp=x[i]-xk
```

Ορισμός της συνάρτησης all\_data.

Άνοιγμα του αρχείου "όνομα1.txt" .

Εισαγωγή κάθε γραμμής του txt σε πίνακα

Καταμέτρηση των γραμμών του αρχείου.

Ορισμός τεσσάρων διαφορετικών πινάκων X,Y,Z,RGB.

Εισαγωγή των κατάλληλων τιμών του αρχείου txt στους τέσσερις πίνακες που έχουν δημιουργηθεί. Ο διαχωρισμός των τιμών γίνεται με το κόμμα.

Επιστροφή των τιμών X,Y,Z,RGB, πλήθος σημείων (γραμμή 274).

Ορισμός της συνάρτησης xyz2sfere.

Δημιουργία έξι κενών πινάκων με θέσεις τόσες όσες το πλήθος των σημείων φ,θ,x1,y1,z1,r.

Δομή επανάληψης για την αφαίρεση του κέντρου από κάθε σημείου και τον υπολογισμό

```

268.     yp=y[i]-yk
269.     zp=z[i]-zk
270.     r2= xp**2 + yp**2 +zp**2
271.     r[i]= r2**(0.5)
272.     theta[i] = np.arctan2(yp,xp)
273.     fi[i] =np.arccos(zp/r[i])
274.
275.
276.     return fi,theta

```

των πολικών συντεταγμένων της σφαίρας.

Επιστροφή του φ,θ στο κύριο πρόγραμμα.

```

277.     if probolh=="1":
278.         xo,yo=s_merkatorikh(f,l,R,n)
279.     else:
280.         xo,yo=s_lambert(f,l,R,n)
281.     def s_merkatorikh(f,l,R,n):
282.     import warnings
283.         warnings.filterwarnings("error")
284.
285.         k=0
286.         tr=0
287.         for i in range(n):
288.             l[i]=180*l[i]/np.pi
289.             if l[i]<180 and l[i]>-180:
290.                 l[i]=l[i]-360
291.                 l[i]=l[i]*np.pi/180
292.                 x[i]=np.pi*R*l[i]
293.                 if f[i]==np.pi/2:
294.                     y[i]=50
295.                     k+=1
296.                 print(k)
297.             else:
298.                 if (f[i]>np.pi/2):
299.                     if f[i]==np.pi/2 :
300.                         y[i]==-100
301.                         f[i]=f[i]
302.                 try:
303.
304.                     y[i]=R*np.log(np.abs(np.tan((np.pi/4)+(f
305.                     [i]/2))))
306.
307.                 expect: RuntimeWarning:
308.
309.                     f[i]=np.degrees(f[i])
310.
311.                 expect::
312.
313.                 print("Something else went wrong")
314.             else:

```

Στη συνέχεια, γίνεται έλεγχος για το ποιό προβολή έχει επιλεγθεί ανάμεσα στην πλάγια μερκατορική και την πλάγια Lambert.

★ Η διπλωματική αυτή αφορά στην ανάπτυξη κώδικα για σύμμορφες προβολές. Ωστόσο, η επιλογή του χρήστη αφορά και σε ισοδύναμες προβολές οι οποίες έχουν δημιουργηθεί σε παράλληλη διπλωματική (Βέλλης).

Ορισμός συνάρτησης s\_merkatorikh.

Πραγματοποιείται έλεγχος για την σωστή ταξινόμηση των τιμών του φ και λ αντίστοιχα.

Ο έλεγχος σχετίζεται με τη θέση του κάθε φ και λ.

Ο υπολογισμός των Χ,Υ στο νέο σύστημα αναφοράς που προέρχεται από τον ανηγμένο κύλινδρο γίνεται από τις εξής σχέσεις:

$$x[i]=np.pi*R*l[i]$$

$$y[i]=R*np.log(np.abs(np.tan((np.pi/4)+(f[i]/2))))$$

Λόγω της εμφάνισης κάποιων προειδοποιήσεων και πιθανού τερματισμού του προγράμματος στο ενδιάμεσο των υπολογισμών, το πρόγραμμα τους εξαιρεί για την ομαλή λειτουργία.

```

310.         if f[i]==np.pi:
311.             y[i]=50
312.             tr+=1
313.             print(tr)
314.
315.         y[i]=R*np.log(np.tan((np.pi/4)+(f[i]/2)))
316.     return x,y

```

★ Επιστροφή τιμών στον κύριο κώδικα

```

316.     minx=np.min(xo)
317.     miny=np.min(yo)
318.     maxx=np.max(xo)
319.     maxy=np.max(yo)
320.     ap=maxx-minx
321.     bp=maxy-miny
322.     mpuknohta=((ap*bp)/(total))**(0.5)
323.     print("η ελάχιστη εδαφοψηφίδα είναι
324.     i %.12f στην μοναδα που έχει το αρχείο που ει
325.     σηχθη \n"%mpuknohta)
326.     print("οσο μεγαλυτερη είναι
327.     η εδαφοψηφίδα τοσο μικρότερη είναι η
328.     ανάλυση στην εικόνα \n ")
329.     mpuknohta=float(input("\nδωσε την
330.     εδαφοψηφίδα που θελεις\n>>'))
331.     # megethos eikonas
332.     px=int(ap/mpuknohta)
333.     py=int(bp/mpuknohta)
334.     img = Image.new('RGB', (px, py), colo
335.     r = (0,0,0))
336.     photo+=' .jpg'
337.     img.save(photo)
338.     gsd=mpuknohta

```

Εύρεση των ελαχίστων και μεγίστων τιμών x,y που δημιουργήθηκαν από το ανάπτυγμα της σφαίρας μέσω την εφαρμογή της κατάλληλης προβολής.

Εύρεση της μεγαλύτερης απόστασης στον άξονα x και στον άξονα y.

Υπολογισμός της μέσης πυκνότητας για την προσέγγιση της ελάχιστης εδαφοψηφίδας.

Γνωστοποίηση αυτής της πληροφορίας στο χρήστη και δυνατότητα επιλογής της κατάλληλης εδαφοψηφίδας για τον προσδιορισμό της επιθυμητής ανάλυσης.

Σύμφωνα με τα παραπάνω υπολογίζεται το μέγεθος της εικόνας σε pixel.

Δημιουργία μιας κενής εικόνας με αυτό το μέγεθος.

Αποθήκευση της εικόνας στο φάκελο που είναι το πρόγραμμα με όνομα που έχει δοθεί προηγουμένως από το χρήστη.

```

333.     elif ea=="2":
334.         import ellipsoid
335.         xk,yk,zk,a,b,wx,wy=ellipsoid.ellipsoid
336.         _fit(X,Y,Z,n)
337.         def ellipsoid_fit(X,Y,Z,n):
338.
339.             ## Fitting an ellipsoid to the dataset
340.
341.
342.
343.
344.
345.
346.
347.
348.
349.
350.
351.
352.
353.
354.
355.
356.
357.
358.
359.
360.
361.
362.
363.
364.
365.
366.
367.
368.
369.
370.
371.
372.
373.
374.
375.
376.
377.
378.
379.
380.
381.
382.
383.
384.
385.
386.
387.
388.
389.
390.
391.
392.
393.
394.
395.
396.
397.
398.
399.
400.
401.
402.
403.
404.
405.
406.
407.
408.
409.
410.
411.
412.
413.
414.
415.
416.
417.
418.
419.
420.
421.
422.
423.
424.
425.
426.
427.
428.
429.
430.
431.
432.
433.
434.
435.
436.
437.
438.
439.
440.
441.
442.
443.
444.
445.
446.
447.
448.
449.
450.
451.
452.
453.
454.
455.
456.
457.
458.
459.
460.
461.
462.
463.
464.
465.
466.
467.
468.
469.
470.
471.
472.
473.
474.
475.
476.
477.
478.
479.
480.
481.
482.
483.
484.
485.
486.
487.
488.
489.
490.
491.
492.
493.
494.
495.
496.
497.
498.
499.
500.
501.
502.
503.
504.
505.
506.
507.
508.
509.
510.
511.
512.
513.
514.
515.
516.
517.
518.
519.
520.
521.
522.
523.
524.
525.
526.
527.
528.
529.
530.
531.
532.
533.
534.
535.
536.
537.
538.
539.
540.
541.
542.
543.
544.
545.
546.
547.
548.
549.
550.
551.
552.
553.
554.
555.
556.
557.
558.
559.
560.
561.
562.
563.
564.
565.
566.
567.
568.
569.
570.
571.
572.
573.
574.
575.
576.
577.
578.
579.
580.
581.
582.
583.
584.
585.
586.
587.
588.
589.
590.
591.
592.
593.
594.
595.
596.
597.
598.
599.
600.
601.
602.
603.
604.
605.
606.
607.
608.
609.
610.
611.
612.
613.
614.
615.
616.
617.
618.
619.
620.
621.
622.
623.
624.
625.
626.
627.
628.
629.
630.
631.
632.
633.
634.
635.
636.
637.
638.
639.
640.
641.
642.
643.
644.
645.
646.
647.
648.
649.
650.
651.
652.
653.
654.
655.
656.
657.
658.
659.
660.
661.
662.
663.
664.
665.
666.
667.
668.
669.
670.
671.
672.
673.
674.
675.
676.
677.
678.
679.
680.
681.
682.
683.
684.
685.
686.
687.
688.
689.
690.
691.
692.
693.
694.
695.
696.
697.
698.
699.
700.
701.
702.
703.
704.
705.
706.
707.
708.
709.
710.
711.
712.
713.
714.
715.
716.
717.
718.
719.
720.
721.
722.
723.
724.
725.
726.
727.
728.
729.
730.
731.
732.
733.
734.
735.
736.
737.
738.
739.
740.
741.
742.
743.
744.
745.
746.
747.
748.
749.
750.
751.
752.
753.
754.
755.
756.
757.
758.
759.
760.
761.
762.
763.
764.
765.
766.
767.
768.
769.
770.
771.
772.
773.
774.
775.
776.
777.
778.
779.
780.
781.
782.
783.
784.
785.
786.
787.
788.
789.
790.
791.
792.
793.
794.
795.
796.
797.
798.
799.
800.
801.
802.
803.
804.
805.
806.
807.
808.
809.
810.
811.
812.
813.
814.
815.
816.
817.
818.
819.
820.
821.
822.
823.
824.
825.
826.
827.
828.
829.
830.
831.
832.
833.
834.
835.
836.
837.
838.
839.
840.
841.
842.
843.
844.
845.
846.
847.
848.
849.
850.
851.
852.
853.
854.
855.
856.
857.
858.
859.
860.
861.
862.
863.
864.
865.
866.
867.
868.
869.
870.
871.
872.
873.
874.
875.
876.
877.
878.
879.
880.
881.
882.
883.
884.
885.
886.
887.
888.
889.
890.
891.
892.
893.
894.
895.
896.
897.
898.
899.
900.
901.
902.
903.
904.
905.
906.
907.
908.
909.
910.
911.
912.
913.
914.
915.
916.
917.
918.
919.
920.
921.
922.
923.
924.
925.
926.
927.
928.
929.
930.
931.
932.
933.
934.
935.
936.
937.
938.
939.
940.
941.
942.
943.
944.
945.
946.
947.
948.
949.
950.
951.
952.
953.
954.
955.
956.
957.
958.
959.
960.
961.
962.
963.
964.
965.
966.
967.
968.
969.
970.
971.
972.
973.
974.
975.
976.
977.
978.
979.
980.
981.
982.
983.
984.
985.
986.
987.
988.
989.
990.
991.
992.
993.
994.
995.
996.
997.
998.
999.
1000.

```

Εάν ο χρήστης επιλέξει την επιφάνεια αναφοράς 2 (ελλειψοειδές εκ περιστροφής) τότε εισάγεται η βιβλιοθήκη ellipsoid και καλείται η συνάρτηση ellipsoid\_fit. Η συνάρτηση αυτή εισάγει τα X,Y,Z,πλήθος από το νέφος όνομα.txt (αραιό νέφος).

```

w dinei to eansa
339.         centerf,axisf,Rf,Amat = polyToParam
           s3D(poly, True)# edw to eansa dinei ola ta stoix
           eia
340.         print('\nΌλα τα παρακάτω αφορούν
           μια γρήγορη εκτίμηση προσωρινων τιμων ενος
           ελλειψοειδούς εκ περιστροφής \n')
341.         printAns3D(centerf, axisf, Rf, X, Y,Z)

```

Στη συνέχεια, καλεί τη συνάρτηση `ls_ellipsoid` και την επιστροφή της συνάρτησης αυτής τη δίνει ως είσοδο στη συνάρτηση `polyToParams3D`.

Η συνάρτηση αυτή επιστρέφει τις τιμές του τριαξονικού ελλειψοειδούς και πιο συγκεκριμένα το κέντρο, τους τρεις ημιάξονες, το πίνακα στροφής και τους συντελεστές της πλήρης εξίσωσης δευτέρου βαθμού του τριαξονικού ελλειψοειδούς.

Με τα δεδομένα αυτά καλείται η συνάρτηση `printAns3D`.

- ★ Στο κεφάλαιο Πρακτική Εφαρμογή (κεφάλαιο 5) φαίνονται αναλυτικά οι σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν τόσο για το τριαξονικό ελλειψοειδές, όσο και για το ελλειψοειδές εκ περιστροφής.
- ★ Για την εύρεση των τιμών που θα χρησιμοποιηθούν ως προσωρινές για την επίλυση των ελαχίστων τετραγώνων στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής, προσεγγίστηκε το νέφος από ένα τριαξονικό ελλειψοειδές. Στη συνέχεια, από τις 9 παραμέτρους του τριαξονικού ελλειψοειδούς (3 ημιάξονες, 3 στροφές, κέντρο) χρειάστηκε να γίνει προσέγγιση του εκ περιστροφής. Οι παράμετροι που χρειάζονται όμως, για την προσέγγισή του είναι επτά (κέντρο, 2 ημιάξονες, 2 στροφές). Για να γίνει αυτός ο μετασχηματισμός των δεδομένων πραγματοποιήθηκαν κάποιοι έλεγχοι. Αρχικά ελέγχθηκαν ποιοι ημιάξονες έχουν πλησιέστερη τιμή και τοποθετήθηκαν ως οι πρώτοι 2 ημιάξονες του τριαξονικού ελλειψοειδούς. Κάθε γραμμή στον πίνακα στροφής αφορά στην στροφή του κάθε ημιάξονα στις τρεις κατευθύνσεις. Έτσι κάθε αλλαγή στην σειρά των ημιαξόνων επιβάλλει και την αλλαγή στη σειρά των γραμμών του πίνακα.

```

342.         def ls_ellipsoid(xx,yy,zz):
343.
344.             # change xx from vector of length N t
           o Nx1 matrix so we can use hstack
345.             x = xx[:,np.newaxis]
346.             y = yy[:,np.newaxis]
347.             z = zz[:,np.newaxis]
348.
349.             # Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz +
           Fyz + Gx + Hy + Iz = 1
350.             J = np.hstack((x*x,y*y,z*z,x*y,x*z,y*z,
           x, y, z))
351.             K = np.ones_like(x) #column of ones
352.
353.             #np.hstack performs a loop over all s
           amples and creates
354.             #a row in J for each x,y,z sample:
355.             # J[ix,0] = x[ix]*x[ix]
356.             # J[ix,1] = y[ix]*y[ix]
357.             # etc.

```

Ορισμός της συνάρτησης `ls_ellipsoid`

Τα δεδομένα `X,Y,Z` του νέφους εισάγονται σε τρεις στήλες.

Δημιουργία γραμμής πίνακα με τις τιμές  $x^2, y^2, z^2, xy, zx, yz, x, y, z$ .

Δημιουργείται επιπλέον ένας πίνακας στήλη με διαστάσεις όσες του πίνακα `x` και τιμή σε όλα τα κελιά τη μονάδα.

Η δημιουργία των παραπάνω πινάκων γίνεται για την επίλυση ελαχίστων τετραγώνων σύμφωνα με τον Bertoni (2010).



```

358.
359.     ABC= np.dot(np.linalg.pinv(J), K)
360.
361.     # Rearrange, move the 1 to the other
    side
362.     eansa=np.append(ABC,-1)
363.
364.     return (eansa)
365. def polyToParams3D(vec, printMe):
366.
367.     Amat=np.array(
368.     [
369.     [ vec[0],  vec[3]/2.0, vec[4]/2.0, vec[
        6]/2.0 ],
370.     [ vec[3]/2.0, vec[1],  vec[5]/2.0, vec[
        7]/2.0 ],
371.     [ vec[4]/2.0, vec[5]/2.0, vec[2],  vec[
        8]/2.0 ],
372.     [ vec[6]/2.0, vec[7]/2.0, vec[8]/2.0, ve
        c[9] ]
373.     ])
374.
375.     A3=Amat[0:3,0:3]
376.     A3inv=np.linalg.inv(A3)
377.     ofs=vec[6:9]/2.0
378.
379.     center=-np.dot(A3inv,ofs)
380.
381.
382.     # Center the ellipsoid at the origin
383.     Tofs=np.eye(4)
384.     Tofs[3,0:3]=center
385.
386.     R = np.dot(Tofs,np.dot(Amat,Tofs.T))
387.
388.
389.
390.     R3=R[0:3,0:3]
391.     R3test=R3/R3[0,0]
392.
393.     s1=-R[3, 3]
394.     R3S=R3/s1
395.     (el,ec)=np.linalg.eig(R3S)
396.
397.     recip=1.0/np.abs(el)
398.     axes=np.sqrt(recip)
399.
400.     return (center,axes,ec,Amat)
401.
402.
403. def printAns3D(center,axes,R,xin,yin,zin

```

Πολλαπλασιασμός του ψευδοαντίστροφου J με τον πίνακα K.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία ενός πίνακα με τιμές τους συντελεστές της εξίσωσης του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής.

Επιστροφή του πίνακα.

Ορισμός της συνάρτησης polyToParams3D

Δημιουργία πίνακα σύμφωνα με τους συντελεστές του παραπάνω πίνακα.

- ★ Σύμφωνα με την εξίσωση 20 από τον Bertoni (2010) βρίσκεται το κέντρο του τριαξονικού ελλειψοειδούς δημιουργώντας έναν πίνακα 3\*3.

Ύστερα από τις πράξεις μεταξύ των πινάκων δημιουργείται ο πίνακας στροφής.

Μέσω των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων βρίσκονται οι τρεις ημιάξονες του ελλειψοειδούς.

Τέλος, επιστρέφονται το κέντρο, οι ημιάξονες, ο πίνακας στροφής και ο πίνακας με τους συντελεστές του πολυωνύμου.

Ορισμός της συνάρτησης printAns3D.

Η συγκεκριμένη συνάρτηση έχει

```

):
404.     print( "\nΚεντρο ελλειψοειδούς %10.4f,%10.4f,%10.4f" % (center[0],center[1],center[2]))
405.     print( "Άξονες τριαξονικού ελλειψοειδούς %10.4f,%10.4f,%10.4f " % (axes[0],axes[1],axes[2]))
406.     print( "Πίνακας στροφής\n%10.5f,%10.5f,%10.5f\n%10.5f,%10.5f,%10.5f\n%10.5f,%10.5f,%10.5f" % (R[0,0],R[0,1],R[0,2],R[1,0],R[1,1],R[1,2],R[2,0],R[2,1],R[2,2]))
407.     xc=xin-center[0]
408.     yc=yin-center[1]
409.     zc=zin-center[2]
410.
411.     # create transformation matrix
412.     L = np.diag([1/axes[0],1/axes[1],1/axes[2]])
413.     M=np.dot(R.T,np.dot(L,R))
414.     [xm,ym,zm]=np.dot(M,[xc,yc,zc])   r
415.     m = np.sqrt(xm*xm + ym*ym + zm*zm)
416.     return
417.     #Axes order rearrangement to make z the rotation axis.
418.     order = np.argsort(axesf)
419.     axesord = axesf[order[::-1]]
420.     if (axesord[0]-axesord[1]) > (axesord[1]-axesord[2]):
421.         print("Axis of rotation is the largest, changing order.")
422.         order = order[[2,0,1]]
423.
424.     # reordering axes
425.     axesord = axesf[order[::-1]]
426.     Rford = Rf[:,order[::-1]]
427.     # elegxos an o pinakas strofhs afora thn antanaklash toy ellepsoeidous
428.     if np.sign(np.linalg.det(Rford)) == -1:# check for sign change (reflection)
429.         print("Reordered rotation matrix is a reflection, fixing.")
430.         #Rford = -Rford
431.         Rford[:,2] = -Rford[:,2]
432.         assert np.sign(np.linalg.det(Rford)) == 1
433.
434.         if (axesord[0] - axesord[1]) > 0.1*axesord[0]:
435.             print("\n\nWARNING: Axes difference is too high!\n\n")

```

δημιουργηθεί για την εκτύπωση όλων των απαραίτητων πληροφοριών που ηξήχθησαν από τις παραπάνω συναρτήσεις για τον ορισμό του ελλειψοειδούς.

Για την μετατροπή των παραμέτρων του τριαξονικού ελλειψοειδούς σε προσωρινές τιμές πραγματοποιείται το παρακάτω.

Γίνεται ο έλεγχος στις τιμές των αξόνων για τη σωστή διάταξή τους.

Πραγματοποιείται η αναδιάταξη των ημιάξονων και του πίνακα στροφής.

Αν οι δύο ημιάξονες με τις κοντινότερες τιμές απέχουν πάνω από 10% μεταξύ τους το πρόγραμμα προειδοποιεί ότι μπορεί να υπάρξουν σφάλματα.

Υπολογίζεται ο μέσος όρος των δύο κοντινότερων ημιάξονων. Δημιουργείται

```

436.     print("Είναι πιθανό να υπάρχει μη εν  

         να ικανοποιητική η προσέγγιση με ελλειψοει  

         δες εκ περιστροφής")
437.
438.     axes_avg = 0.5*(axesord[0] + axesord[1]
         )
439.     axes_ebr = [axes_avg, axes_avg, axesor  

         d[2]]
440.
441.     print("Νέοι άξονες που επιλεχθηκαν ως  

         πρωσορινες τιμες\ngια την γενική μέθοδο:", ax  

         es_ebr)
442.     print("Πίνακας στροφής με νέα σωστη  

         διάταξη\n", Rford)
443.
444.     #Compute euler angles of fitted ellipsoi  

         d
445.     #υπολογισμος των γωνιων στροφης
446.
447.     wxf, wyf, wzf = rotmat2euler(Rford.T)
448.     print("Γωνίες euler (XYZ) που απαιτου  

         νται για στροφή του ελλειψοειδούς εκ περιστρο  

         φης: {}, {}, {}".format(wxf,wyf,wzf))
449.
450.     #Force rotation around z to zero
451.     #Rbr0 = euler2rotmat(wxf,wyf,0).T
452.
453.     xk,yk,zk,a,b,wx,wy=genikh_me8odos(X,  

         Y,Z,wxf,wyf,axesord,centerf,n)
454.     return xk,yk,zk,a,b,wx,wy

```

έναν νέο πίνακα και γίνεται η αναδιάταξη των στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα, οι ημιάξονες μπαίνουν σε σειρά κατά την οποία οι δύο πρώτοι έχουν την ίδια τιμή και διαφοροποιείται ο τρίτος.

Καλείται η συνάρτηση `rotmat2euler` και υπολογίζονται οι τρεις γωνίες του τριαξονικού ελλειψοειδούς.

Από τις γωνίες του τριαξονικού χρησιμοποιούνται μόνο οι πρώτες δύο ( $w_x, w_y$ ), εφόσον στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής η γωνία  $\theta_z$  είναι αναγκαστικά 0. Στη συνέχεια φαίνεται είσοδος των παραμέτρων (νέφος, δύο γωνίες του ελλειψοειδές εκ περιστροφής, οι άξονες, το κέντρο και το πλήθος των σημείων) για την επίλυση της γενικής μεθόδου.

- ★ Στη συνάρτηση αυτή υπολογίζονται οι τρεις γωνίες του τριαξονικού ελλειψοειδούς μέσα από τις σχέσεις Πάνου (2019).
- ★ Στη συνέχεια, ορίζεται η συνάρτηση της γενικής μεθόδου. Όπου  $n$  οι παρατηρήσεις,  $m$  ο αριθμός παραμέτρων που ενδιαφέρουν να προσεγγιστούν και  $m$  άγνωστες ανεξάρτητες παράμετροι. Στη συνέχεια δημιουργείται ο πίνακας  $A, B, P, W$  και γίνονται οι μεταξύ τους πράξεις για τον υπολογισμό των καλύτερων τιμών αλλά και του  $\sigma_{\text{ο\_αποστεριου}}$ . Όπως και στην περίπτωση της σφαίρας η γενική μέθοδος επαναλαμβάνεται μέχρι η διαφορά της τιμής του  $\sigma_{\text{ο\_αποστεριου}}$  δύο διαδοχικών επαναλήψεων να είναι μικρότερη από 0,001. Με αυτό επιτυγχάνεται η ορθότερη προσέγγιση των παραμέτρων του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής.

```

460.     def rotmat2euler(R):
461.         wx = np.arctan2(-R[2,1],R[2,2]) * 180./np.pi

```

```

462.     wy = np.arcsin(R[2,0]) * 180./np.pi
463.     wz = np.arctan2(-R[1,0],R[0,0]) * 180./np.pi
464.
465.     return wx, wy, wz
466.     def genikh_me8odos(X,Y,Z,wxf,wyf,axesord,centerf,k):
467.         # k to plh8os tw n shmeiwn tou nefoys
468.         n = 3*k
469.         m = 7 + 2*k
470.         m0 = 7
471.         tx=centerf[0]
472.         ty=centerf[1]
473.         tz=centerf[2]
474.         a=axesord[0]
475.         az=axesord[2]
476.         wx=(wxf*np.pi)/180
477.         wy=(wyf*np.pi)/180
478.         x=X
479.         y=Y
480.         z=Z
481.
482.         print(tx,ty,tz,a,az,wx,wy, "Πρωσορινες τιμες ελλειψοειδούς εκ περιστροφής")
483.         count = 1
484.         s0_aposteriori = 1
485.         while (count < 40):
486.             s0hat = s0_aposteriori
487.             A = np.zeros((k,m0))
488.             for i in range(k):
489.                 A[i,0] = (2*tx - 2*x[i])*(np.sin(wy)**2/az**2 + np.cos(wy)**2/a**2) + (ty - y[i])*(-
2*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wy)/az**2 + 2*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wy)/a**2) + (tz -
z[i])*(2*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/az**2 - 2*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/a**2)
490.                 A[i,1] = (tx - x[i])*(-
2*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wy)/az**2 + 2*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wy)/a**2) + (2*ty -
2*y[i])*(np.sin(wx)**2*np.cos(wy)**2/az**2 + np.sin(wx)**2*np.sin(wy)**2/a**2 + np.cos(wx)**2
/a**2) + (tz - z[i])*(-2*np.sin(wx)*np.cos(wx)*np.cos(wy)**2/az**2 -
2*np.sin(wx)*np.sin(wy)**2*np.cos(wx)/a**2 + 2*np.sin(wx)*np.cos(wx)/a**2)
491.                 A[i,2] = (tx - x[i])*(2*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/az**2 -
2*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/a**2) + (ty - y[i])*(-
2*np.sin(wx)*np.cos(wx)*np.cos(wy)**2/az**2 -
2*np.sin(wx)*np.sin(wy)**2*np.cos(wx)/a**2 + 2*np.sin(wx)*np.cos(wx)/a**2) + (2*tz -
2*z[i])*(np.cos(wx)**2*np.cos(wy)**2/az**2 + np.sin(wx)**2/a**2 + np.sin(wy)**2*np.cos(wx)**
2/a**2)
492.                 A[i,3] = (-ty + y[i])**2*(-2*np.sin(wx)**2*np.sin(wy)**2/a**3 -
2*np.cos(wx)**2/a**3) + (-ty + y[i])*(-tz + z[i])*(4*np.sin(wx)*np.sin(wy)**2*np.cos(wx)/a**3 -
4*np.sin(wx)*np.cos(wx)/a**3) + (-tz + z[i])**2*(-2*np.sin(wx)**2/a**3 -
2*np.sin(wy)**2*np.cos(wx)**2/a**3) - 2*(-tx + x[i])**2*np.cos(wy)**2/a**3 - 4*(-tx + x[i])*(-
ty + y[i])*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wy)/a**3 + 4*(-tx + x[i])*(-
tz + z[i])*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/a**3
493.                 A[i,4] = -2*(-tx + x[i])**2*np.sin(wy)**2/az**3 + 4*(-tx + x[i])*(-
ty + y[i])*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wy)/az**3 - 4*(-tx + x[i])*(-
tz + z[i])*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/az**3 - 2*(-
ty + y[i])**2*np.sin(wx)**2*np.cos(wy)**2/az**3 + 4*(-ty + y[i])*(-

```

```

tz + z[i])*np.sin(wx)*np.cos(wx)*np.cos(wy)**2/az**3 - 2*(-
tz + z[i])**2*np.cos(wx)**2*np.cos(wy)**2/az**3
494.      A[i,5] = (-tx + x[i])*(-ty + y[i])*(-
2*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/az**2 + 2*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/a**2) + (-
tx + x[i])*(-tz + z[i])*(-
2*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wy)/az**2 + 2*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wy)/a**2) + (-
ty + y[i])**2*(2*np.sin(wx)*np.cos(wx)*np.cos(wy)**2/az**2 + 2*np.sin(wx)*np.sin(wy)**2*np.cos
(wx)/a**2 - 2*np.sin(wx)*np.cos(wx)/a**2) + (-ty + y[i])*(-
tz + z[i])*(2*np.sin(wx)**2*np.cos(wy)**2/az**2 -
2*np.cos(wx)**2*np.cos(wy)**2/az**2 + 2*np.sin(wx)**2*np.sin(wy)**2/a**2 -
2*np.sin(wx)**2/a**2 - 2*np.sin(wy)**2*np.cos(wx)**2/a**2 + 2*np.cos(wx)**2/a**2) + (-
tz + z[i])**2*(-2*np.sin(wx)*np.cos(wx)*np.cos(wy)**2/az**2 -
2*np.sin(wx)*np.sin(wy)**2*np.cos(wx)/a**2 + 2*np.sin(wx)*np.cos(wx)/a**2)
495.      A[i,6] = (-tx + x[i])**2*(2*np.sin(wy)*np.cos(wy)/az**2 -
2*np.sin(wy)*np.cos(wy)/a**2) + (-tx + x[i])*(-ty + y[i])*(2*np.sin(wx)*np.sin(wy)**2/az**2 -
2*np.sin(wx)*np.cos(wy)**2/az**2 -
2*np.sin(wx)*np.sin(wy)**2/a**2 + 2*np.sin(wx)*np.cos(wy)**2/a**2) + (-tx + x[i])*(-tz + z[i])*(-
2*np.sin(wy)**2*np.cos(wx)/az**2 + 2*np.cos(wx)*np.cos(wy)**2/az**2 + 2*np.sin(wy)**2*np.co
s(wx)/a**2 - 2*np.cos(wx)*np.cos(wy)**2/a**2) + (-ty + y[i])**2*(-
2*np.sin(wx)**2*np.sin(wy)*np.cos(wy)/az**2 + 2*np.sin(wx)**2*np.sin(wy)*np.cos(wy)/a**2) + (-
ty + y[i])*(-tz + z[i])*(4*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/az**2 -
4*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/a**2) + (-tz + z[i])**2*(-
2*np.sin(wy)*np.cos(wx)**2*np.cos(wy)/az**2 + 2*np.sin(wy)*np.cos(wx)**2*np.cos(wy)/a**2)
496.
497.      A=np.array(A)
498.      A=A.reshape((k,7))
499.
500.      #print(A,'pinakas A')
501.      B = np.zeros((k,n))
502.
503.      for i in range(k):
504.          B[i,i*3]=float((-2*tx + 2*x[i])*(np.sin(wy)**2/az**2 + np.cos(wy)**2/a**2) + (-
ty + y[i])*(-
2*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wy)/az**2 + 2*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wy)/a**2) + (-
tz + z[i])*(2*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/az**2 -
2*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/a**2))
505.          B[i,(i*3)+1]=float((-tx + x[i])*(-
2*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wy)/az**2 + 2*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wy)/a**2) + (-
2*ty + 2*y[i])*(np.sin(wx)**2*np.cos(wy)**2/az**2 + np.sin(wx)**2*np.sin(wy)**2/a**2 + np.cos(
wx)**2/a**2) + (-tz + z[i])*(-2*np.sin(wx)*np.cos(wx)*np.cos(wy)**2/az**2 -
2*np.sin(wx)*np.sin(wy)**2*np.cos(wx)/a**2 + 2*np.sin(wx)*np.cos(wx)/a**2) )
506.          B[i,(i*3)+2]=float((-tx + x[i])*(2*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/az**2 -
2*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/a**2) + (-ty + y[i])*(-
2*np.sin(wx)*np.cos(wx)*np.cos(wy)**2/az**2 -
2*np.sin(wx)*np.sin(wy)**2*np.cos(wx)/a**2 + 2*np.sin(wx)*np.cos(wx)/a**2) + (-
2*tz + 2*z[i])*(np.cos(wx)**2*np.cos(wy)**2/az**2 + np.sin(wx)**2/a**2 + np.sin(wy)**2*np.cos(
wx)**2/a**2) )
507.
508.      B=np.array(B)
509.      B=B.reshape((k,n))
510.

```

```

511.         W=np.zeros((k,))
512.         for i in range(k):
513.             W[i]=0-((-tx + x[i])**2*(np.sin(wy)**2/az**2 + np.cos(wy)**2/a**2) + (-tx + x[i])*(-
ty + y[i])*(-
2*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wy)/az**2 + 2*np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wy)/a**2) + (-
tx + x[i])*(-tz + z[i])*(2*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/az**2 -
2*np.sin(wy)*np.cos(wx)*np.cos(wy)/a**2) + (-
ty + y[i])**2*(np.sin(wx)**2*np.cos(wy)**2/az**2 + np.sin(wx)**2*np.sin(wy)**2/a**2 + np.cos(w
x)**2/a**2) + (-ty + y[i])*(-tz + z[i])*(-2*np.sin(wx)*np.cos(wx)*np.cos(wy)**2/az**2 -
2*np.sin(wx)*np.sin(wy)**2*np.cos(wx)/a**2 + 2*np.sin(wx)*np.cos(wx)/a**2) + (-
tz + z[i])**2*(np.cos(wx)**2*np.cos(wy)**2/az**2 + np.sin(wx)**2/a**2 + np.sin(wy)**2*np.cos(w
x)**2/a**2) - 1 )
514.
515.         W=np.array(W)
516.         #print(W,'-----\n-----\n-----\n-----')
517.
518.         P=np.zeros((n,n))
519.         for i in range(n):
520.             P[i,i]=1.0
521.
522.         # prakseis pinakwn
523.         AT=np.transpose(A)
524.
525.         BT=np.transpose(B)
526.         P1=np.linalg.inv(P)
527.
528.         bx=np.linalg.multi_dot([B,P1])
529.         by=np.linalg.multi_dot([bx,BT])
530.         by1=np.linalg.inv(by)
531.
532.         cx=np.linalg.multi_dot([AT,by1])
533.         cy=np.linalg.multi_dot([cx,A])
534.         cy1=np.linalg.inv(cy)
535.
536.         ax=np.linalg.multi_dot([cy1,AT])
537.         ay=np.linalg.multi_dot([ax,by1])
538.         ds=np.linalg.multi_dot([ay,W])
539.
540.         tx = tx + ds[0]
541.         ty = ty + ds[1]
542.         tz = tz + ds[2]
543.         a = a + ds[3]
544.         az = az + ds[4]
545.         wx = wx + ds[5]
546.         wy = wy + ds[6]
547.
548.         #upoloiph pinakes gia ypologimsos sfalmatwn
549.
550.         Pa=by1

```

```

551.     mx=np.linalg.multi_dot([A,ds])
552.     my=W-mx
553.     xn=np.linalg.multi_dot([P1,BT])
554.     xb=np.linalg.multi_dot([xn,by1])
555.     u=np.linalg.multi_dot([xb,my])
556.
557.
558.     #ypologimsos tou sigma^2 aposteriori
559.
560.     v=3*n
561.     m=2*n+ m0
562.     uT=np.transpose(u)
563.     zx=np.linalg.multi_dot([uT,P])
564.     zy=np.linalg.multi_dot([zx,u])
565.     s0_aposteriori1=zy/(v-m) # sigma^2
566.     s0_aposteriori=s0_aposteriori1**(0.5)
567.
568.     # elegchos kata poso apexei to s0 tis prohgoymenhs apo thn epomenh synor8osh
569.     if (np.abs(s0hat-s0_aposteriori)) <= 0.001:
570.         print("Η διαφορά του sigma aposteriori μεταξύ των συνορθοσεων είναι:",np.abs(s0hat-
s0_aposteriori),"\\nΑρα η προσεγγιση είναι ικανοποιητική!")
571.         break
572.         count+= 1
573.         #print("\\nΔιάνυσμα διορθωσης προσωρινων τιμων :",ds)
574.         print("\\nΚαλύτερες τιμες των παραμέτρων του ελλειψοειδούς",tx,ty,tz,a,az,wx,wy)
575.         print("\\nΤο sigma aposteriori είναι ",s0_aposteriori,"στην μοναδα μετρησεις του νέφους!")

```

```

576.     print("\\n Αν θες να δεις το ελλειψοειδ
ες εκ περιστροφης και το νεφος στον χώρο πα
τα enter αλλως οτιδηποτε αλλο\\n ")
577.     ans=input(">>")
578.     if ans=="":
579.         import matplotlib.pyplot as plt
580.         import importlib
581.         #from mpl_toolkits.mplot3d impo
rt Axes3D
582.         # αν εχει ερρορ βαζω το απο παν
ω
583.         importlib.import_module('mpl_to
olkits.mplot3d').Axes3D
584.
585.         fig = plt.figure()
586.         ax = fig.add_subplot(111, projecti
on='3d')
587.
588.         # dinontai times parametrwn
589.         axes=[a,a,az]
590.         center=[tx,ty,tz]

```

Αν ο χρήστης επιθυμεί να δει το ελλειψοειδές εκ περιστροφής μαζί με το νέφος εκτελούνται οι παρακάτω εντολές. Γίνεται εισαγωγή των βιβλιοθηκών matplotlib.pyplot και η importlib.

```

591.         R0=euler2rotmat(wx,wy,0)
592.         # to n einai h riza toy ari8mou tw
           n shmeiwn poy emfanizetai to elipsoeides
593.         n=30
594.         Xel,Yel,Zel=synthetic_data(n, axes
           , R0, center)
595.
596.         ax.scatter(X, Y, Z, c='r', marker='.')
           # me kokkino fainetai to nefos
597.
598.         ax.scatter(Xel, Yel, Zel, c='b', mark
           er='.')# me mple to ellipsoides
599.
600.         max_range = np.array([Xel.max()-
           Xel.min(), Yel.max()-Yel.min(), Zel.max()-
           Zel.min()]).max() / 2.0
601.
602.         mid_x = (Xel.max()+Xel.min()) * 0.
           5
603.         mid_y = (Yel.max()+Yel.min()) * 0.
           5
604.         mid_z = (Zel.max()+Zel.min()) * 0.
           5
605.         ax.set_xlim(mid_x -
           max_range, mid_x + max_range)
606.         ax.set_ylim(mid_y -
           max_range, mid_y + max_range)
607.         ax.set_zlim(mid_z -
           max_range, mid_z + max_range)
608.         ax.text2D(0.05, 0.95, "Νέφος
           σημείων με κόκκινο χρώμα\η\ελλειψοειδές εκ
           περιστροφής με μπλε χρώμα\η\κλείστε το
           παράθυρο για να
           συνεχίσετε!", transform=ax.transAxes)
609.         plt.show()
610.         return tx,ty,tz,a,az,wx,wy

```

Δημιουργείται ένας πίνακας στροφής έχοντας ως δεδομένα τις δύο γωνίες του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής.

Καλείται η συνάρτηση synthetic\_data η οποία παράγει ένα νέφος σημείων για την απτύπωση του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής.

Στη συνέχεια γίνεται μία μορφοποίηση της εμφάνισης για μία καλύτερη οπτική εμφάνιση στο χρήστη.

Δημιουργείται το υπόμνημα του γραφήματος στο οποίο με μπλε απεικονίζεται το ελλειψοειδές εκ περιστροφής και με κόκκινο το νέφος.

Επιστρέφονται οι καλύτερες τιμές των παραμέτρων του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής και κατά επέκταση το ellipsoid\_fit επιστρέφει τις τιμές αυτές στο κύριο κώδικα.

```

611.     def euler2rotmat(wx,wy,wz):
612.         wx=(np.pi*wx)/180
613.         wy=(np.pi*wy)/180
614.         wz=(np.pi*wz)/180
615.
616.         r11 = np.cos(wy)*np.cos(wz)
617.         r12 = np.cos(wx)*np.sin(wz)+np.sin(
           wx)*np.sin(wy)*np.cos(wz)
618.         r13 = np.sin(wx)*np.sin(wz)-
           np.cos(wx)*np.sin(wy)*np.cos(wz)

```

Ορισμός της συνάρτησης euler2rotmat. Μετασηματισμός των γωνιών από μοίρες σε rad.

Υπολογισμός κάθε στοιχείου του πίνακα στροφής σύμφωνα με τον Πάνου(2019).



```

619.         r21 = -np.cos(wy)*np.sin(wz)
620.         r22 = np.cos(wx)*np.cos(wz)-
        np.sin(wx)*np.sin(wy)*np.sin(wz)
621.         r23 = np.sin(wx)*np.cos(wz)+np.cos
        (wx)*np.sin(wy)*np.sin(wz)
622.         r31 = np.sin(wy)
623.         r32 = -np.sin(wx)*np.cos(wy)
624.         r33 = np.cos(wx)*np.cos(wy)
625.         R= np.array([[r11,r12,r13],[r21,r22,r
        23],[r31,r32,r33]])
626.         return R
627.         def synthetic_data(n=22, axes=[1,1,1],
        R=np.eye(3), center=[0,0,0]):
628.             u = np.linspace(0.0, 2.0 * np.pi, n)
629.             v = np.linspace(0.0, np.pi, n)
630.
631.             x=axes[0]*np.outer(np.cos(u), np.sin(
        v))
632.             y=axes[1]*np.outer(np.sin(u), np.sin(
        v))
633.             z=axes[2]*np.outer(np.ones_like(u),
        np.cos(v))
634.
635.             X=x.flatten()
636.             Y=y.flatten()
637.             Z=z.flatten()
638.
639.             xyz = R.dot([X,Y,Z])+np.expand_dims(
        center,axis=1)
640.
641.             X = xyz[0]
642.             Y = xyz[1]
643.             Z = xyz[2]
644.
645.
646.         return X,Y,Z

```

Επιστροφή του συνολικού πίνακα.  
Ορισμός της συνάρτησης synthetic\_data.

Τα συνθετικά δεδομένα δημιουργούνται με τη βοήθεια των πολικών συντεταγμένων, οι οποίες προσαρμόζονται στις ήδη υπολογισμένες παραμέτρους του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (κέντρο, ημιάξονες). Στη συνέχεια, στρέφονται όπως ορίζει ο μετασχηματισμένος πίνακας στροφής του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, κατά τον οποίο έχει μηδενιστεί η στροφή θz.

Τέλος, επιστρέφει τις συντεταγμένες του συνθετικού νέφους στη γραμμή 594.

- ★ Να σημειωθεί ότι τα συνθετικά δεδομένα έχουν δημιουργηθεί για προγραμματιστική ευκολία όσον αφορά στην εκτύπωση.

```

647.         elif ea=="2":
648.             import ellipsoid
649.             xk,yk,zk,a,b,wx,wy=ellipsoid.ellipsoi
        d_fit(X,Y,Z,n)
650.
651.             print("ηΕπελεξε την προβολη που
        θες για να δημιουργηθει η εικονα\n")
652.             print("Πιεσε 1 για μερκατρορικη πρ
        οβολη και 2 για προβολη Lambert\n")
653.             probolh=input(">>")
654.             print("ηΔωσε το ονομα της εικονα

```

Εάν η επιλογή του χρήστη είναι το ελλειψοειδές εκ περιστροφής ως η επιθυμητή επιφάνεια αναφοράς τότε καλείται η συνάρτηση ellipsoid που αναλύθηκε παραπάνω (γραμμή 347).

Έπειτα, εισάγεται η 'χαρτογραφική προβολή που επιλέγει ο χρήστης και το όνομα της εικόνας που θα αποθηκευτεί.

Στο σημείο αυτό ελέγχεται ποια τιμή είναι μεγαλύτερη από τους δύο ημιάξονες καθώς

```

        ς που θα δημιουργηθει!\n")
655.     photo=input(">>")
656.     if b>=a:
657.         help=a
658.         a=b
659.         b=help
660.         n=total
661.         x,y,z,RGB,total=all_data(filename[:-
4]+".1.txt")
662.         x,y,z,xc,yc,zc,garbage=normalization
(x,y,z,n)
663.         x=x*klimaka
664.         y=y*klimaka
665.         z=z*klimaka
666.         a=a*klimaka
667.         b=b*klimaka
668.         fi,lamda,e=xyz2ell(x,y,z,a,b,n,xk,yk,z
k)
669.         if probolh=="1":
670.             xo,yo=merkatorikh(fi,lamda,e,a)
671.         else:
672.             xo,yo=lambert(fi,lamda,e,a)
673.         minx=np.min(xo)
674.         miny=np.min(yo)
675.         maxx=np.max(xo)
676.         maxy=np.max(yo)
677.         ap=maxx-minx
678.         bp=maxy-miny
679.         mpuknohta=((ap*bp)/(total))**(0.5
)
680.
681.         print(" print("η ελάχιστη εδαφοψ
ηφίδα είναι %.12f στην μονάδα που έχει το α
ρχείο που εισήχθη \n"%mpuknohta)
682.         print("οσο μεγαλύτερη είναι
η εδαφοψηφίδα τοσο μικρότερη είναι η
ανάλυση στην εικόνα \n ")
683.         mpuknohta=float(input('\nδωσε τη
ν εδαφοψηφίδα που θέλεις\n>>'))
684.         # megethos eikonas
685.         mpuknohta=mpuknohta
686.         px=int(ap/mpuknohta)
687.         py=int(bp/mpuknohta)
688.         img = Image.new('RGB', (px, py), col
or = (0,0,0))
689.         photo+=' .jpg'
690.         img.save(photo)
691.         gsd=mpuknohta

```

πρέπει να τοποθετηθούν κατά φθίνουσα σειρά. Ο έλεγχος αυτός κρίνεται αναγκαίος για τη σωστή διεξαγωγή αποτελεσμάτων στο σημείο εφαρμογής των τύπων των χαρτογραφικών προβολών.

Γίνεται εισαγωγή όλων των δεδομένων με τη βοήθεια της συνάρτησης all\_data.

Γίνεται κανονικοποίηση του πλήρους νέφους και πολλαπλασιάζεται με τη κατάλληλη κλίμακα.

Πραγματοποιείται μετασχηματισμός των καρτεσιανών σε πολικές συντεταγμένες.

Εάν ο χρήστης επιλέξει «1» καλείται η μερκατορική προβολή. Εάν ο χρήστης επιλέξει «2» καλείται η προβολή Lambert.

Εύρεση των ελαχίστων και μεγίστων τιμών x,y που δημιουργήθηκαν από το ανάπτυγμα του ελλειψοειδούς μέσω της εφαρμογής της κατάλληλης προβολής.

Εύρεση της μεγαλύτερης απόστασης στον άξονα x και στον άξονα y.

Υπολογισμός της μέσης πυκνότητας για την προσέγγιση της ελάχιστης εδαφοψηφίδας.

Γνωστοποίηση αυτής της πληροφορίας στο χρήστη και δυνατότητα επιλογής της κατάλληλης εδαφοψηφίδας για τον προσδιορισμό της επιθυμητής ανάλυσης.

Σύμφωνα με τα παραπάνω υπολογίζεται το μέγεθος της εικόνας σε pixel.

Δημιουργία μιας κενής εικόνας με αυτό το μέγεθος.

Αποθήκευση της εικόνας στο φάκελο που είναι το πρόγραμμα με όνομα που έχει δοθεί προηγουμένως από το χρήστη.

```

693. def xyz2ell(x,y,z,a,b,n,xk,yk,zk):
694.     fi=np.zeros(n)
695.     lamda=np.zeros(n)
696.     x1=np.zeros(n)
697.     y1=np.zeros(n)
698.     z1=np.zeros(n)
699.     x=x-xk
700.     y=y-yk
701.     z=z-zk
702.     f=1-(b/a)
703.     e2= (a**2 - b**2)/ a**2
704.     e= e2**(0.5)
705.     for i in range(n):
706.
707.
708.         lamda[i] = np.arctan2(y[i],x[i])
709.         p= (x[i]**2+y[i]**2)**(0.5)
710.         # proth timh gia f
711.         fi0=np.arctan2(z[i],((1-e**2)*p))
712.         count=0
713.         while count<20:
714.             N1=a/(1-
(e**2)*((np.sin(fi0)**2))**0.5
715.             h1=(p/np.cos(fi0))-(N1)
716.             fi1= np.arctan2(z[i],((1-
e**2*(N1/(N1+h1)))*p))
717.             if (np.abs(fi0-fi1)<= 0.00001):
718.                 break
719.             fi0=fi1
720.             fi[i]=fi0
721.             count+=1
722.
723.     return fi,lamda,e

```

Ορισμός της συνάρτησης xyz2ell.

Δημιουργία πέντε κενών πινάκων φ,λ,x,y,z.

Αφαίρεση του κέντρου του ελλειψοειδούς από τις συντεταγμένες κάθε σημείου καθώς για την χρήση πολικών συντεταγμένων ενδείκνυται οι τιμές των συντεταγμένων να είναι γύρω από το μηδέν.

Υπολογισμός της εκκεντρότητας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής και της επιπλάτυσης.

Έναρξη μιας επαναληπτικής διαδικασίας για τον προσδιορισμό των βέλτιστων πολικών συντεταγμένων του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής..

Ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων για τον υπολογισμό του φ είναι 20 και ο έλεγχος σταματάει όταν η διαφορά δύο διαδοχικών επαναλήψεων είναι μικρότερη από 0,00001.

Επιστροφή των τιμών φ,λ,εκκεντρότητα.

```

724. def merkatorikh(f,l,e,a):
725.     x=a*I
726.     y=a*np.log(np.tan(np.pi/4+f/2)*((1-
e*np.sin(f))/(1+e*np.sin(f))**(e/2))
727.     return x,y

```

Ο υπολογισμός των X,Y στο νέο σύστημα αναφοράς που προέρχεται από τον ανηγμένο κύλινδρο είναι ο εξής:

X=εξίσωση (5.1)

Y=εξίσωση (5.2)

```

728.     coloring(xo,yo,photo,gsd,RGB,minx,mi
ny,py)
729.     def coloring(mx,my,photo,gsd,xrwma,
minx,miny,maxpy):
730.         img = Image.open(photo)

```

Μετά την υλοποίηση όλων των διαδικασιών καλείται η συνάρτηση coloring για να δώσει χρώμα στο ανάπτυγμα.

Για τη συνάρτηση αυτή γίνεται εισαγωγή της κενής εικόνας που δημιουργήθηκε (γραμμή

```

731.     count=0
732.     N=len(mx)
733.     for i in range(N):
734.         px=int((mx[i]-minx)/(gsd))-1
735.         py=int((my[i]-miny)/(gsd))-1
736.         py=maxpy-py-2
737.         r,gr,b=xrwma[i]
738.         r=int(r)
739.         gr=int(gr)
740.         b=int(b)
741.         #print(w,j,"pixel")
742.         img.putpixel((px,py),(r, gr, b))
743.         #img[px,py]=xrwma[i]
744.         count+=1
745.         #print("ebale xrwma se pix
el",count)
746.
747.     img.save(photo)

```

689).

Έναρξη δομής επανάληψης με αριθμό επαναλήψεων όσο το πλήθος των σημείων. Ανάλογα με την εδαφοψηφίδα που έχει επιλεχθεί και τα όρια του αναπτύγματος, βρίσκεται το μέγεθος της εικόνας σε pixel.

Στη συνέχεια, αφαιρείται από κάθε συντεταγμένη (x,y) η ελάχιστη τιμή της αντίστοιχα και διαιρείται με την εδαφοψηφίδα. Άρα, το ακέραιο μέρος αυτής της διαίρεσης δίνει το pixel στο οποίο αντιστοιχεί το χρώμα του συγκεκριμένου σημείου. Επειδή η αρχή των αξόνων σε θετικές τιμές στο καρτεσιανό είναι κάτω αριστερά ενώ σε μία εικόνα πάνω αριστερά, η σειρά των γ όσον αφορά τον χρωματισμό αντιστρέφεται.

Τέλος, γίνεται ο χρωματισμός των pixel.

Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται για όλο το πλήθος των σημείων.

Αποθηκεύεται η εικόνα στον ίδιο φάκελο με το πρόγραμμα.

Όταν ο χρήστης επιλέξει να επιτύχει καλύτερο οπτικό αποτέλεσμα τότε ανοίγει το αρχείο better\_photo.py και παρακάτω αναλύεται ο κώδικάς του.

```

748.     import numpy as np
749.     from PIL import Image
750.     print("Δώστε το όνομα της εικόνας.\n")
751.     photo=input(">>")
752.     print("Δώστε το όνομα της εικόνας που θα αποθηκευτεί μετά την επεξεργασία.\n")
753.     photo+=".jpg"
754.     photo1=input(">>")
755.     photo1+=".jpg"
756.     img = Image.open(photo)
757.
758.     img2=np.array(img)
759.     print("Δώστε το όριο ελέγχου των τιμών του μαύρου χρώματος.")
760.     treshold=input(">>")
761.     ts=int(treshold)
762.     for i in range(1,img.height-1,1):

```

Εισαγωγή βιβλιοθηκών

Ο χρήστης επιλέγει το όνομα της εικόνας στην οποία θα πραγματοποιηθεί βελτίωση.

Στη συνέχεια επιλέγει το νέο όνομα της εικόνας μετά την επεξεργασία.

Οι καταλήξεις και των δύο εικόνων είναι .jpg.

Γίνεται το άνοιγμα της εικόνας.

Η εικόνα μετατρέπεται σε μορφή πίνακα.

Επιλογή από το χρήστη ενός ανώτερου ορίου ελέγχου για την εύρεση των pixel με μαύρο χρώμα.

Έναρξη μιας δομής επανάληψης, ξεκινώντας

```

763.         for j in range(1,img.width-1,1):
764.
765.             if img2[i][j][0]<ts and img2[i][j][1]
<ts and img2[i][j][2]<ts:
766.
767.                 px=i
768.                 py=j
769.                 r=int(img2[px-
1,py,0])+int(img2[px+1,py,0])
770.                 r=r+int(img2[px-
1,py+1,0])+int(img2[px+1,py+1,0])
771.                 r=r+int(img2[px-1,py-
1,0])+int(img2[px+1,py-1,0])
772.                 r=r+int(img2[px,py+1,0])+int(im
g2[px,py-1,0])
773.
774.                 g=int(img2[px-
1,py,1])+int(img2[px+1,py,1])
775.                 g=g+int(img2[px-
1,py+1,1])+int(img2[px+1,py+1,1])
776.                 g=g+int(img2[px-1,py-
1,1])+int(img2[px+1,py-1,1])
777.                 g=g+int(img2[px,py+1,1])+int(i
mg2[px,py-1,1])
778.
779.                 b=int(img2[px-
1,py,2])+int(img2[px+1,py,2])
780.                 b=b+int(img2[px-
1,py+1,2])+int(img2[px+1,py+1,2])
781.                 b=b+int(img2[px-1,py-
1,2])+int(img2[px+1,py-1,2])
782.                 b=b+int(img2[px,py+1,2])+int(i
mg2[px,py-1,2])
783.                 r=int(r/8)
784.                 g=int(g/8)
785.                 b=int(b/8)
786.                 img.putpixel((j,i),(r, g, b))
787.
788.
789.         img.save(photo1)

```

μία θέση μετά την αρχή των pixel και μία θέση πριν το τέλος τους, για τον εντοπισμό των μαύρων pixel τόσο για τον άξονα τον x όσο και για τον y.

Έλεγχος σε κάθε κανάλι της εικόνας ώστε να βρεθεί εάν όλα τα κανάλια του κάθε pixel έχουν τιμή σύμφωνα με το όριο που έχει θέσει ο χρήστης.

Άθροισμα των 8 γειτονικών pixel σε κάθε κανάλι για τον υπολογισμό του μέσου όρου της τιμής του χρώματος.

Διαίρεση των τιμών με το 8 (πλήθος των pixel που έχουν ληφθεί υπόψη) σε κάθε κανάλι αντίστοιχα.

Αποθήκευση των τριών χρωμάτων στην κατάλληλη θέση στην εικόνα.

Αποθήκευση της νέας εικόνας στο φάκελο που είναι το πρόγραμμα.

- ★ Οι τιμές των pixel όσον αφορά το χρώμα βρίσκονται στο διάστημα: 0-255. Οι τιμές εκφράζουν τη φωτεινότητα του κάθε καναλιού. Έτσι, εάν και τα τρία κανάλια έχουν χαμηλή τιμή τότε πλησιάζουν το μαύρο χρώμα. Για τον εντοπισμό όλων αυτών των pixel που οι τιμές τους είναι κοντά στο μαύρο χρησιμοποιείται ένα κατώφλι (threshold). Δίνεται η δυνατότητα στον χρήστη

να ορίζει αυτή τη τιμή ανάλογα με τη χρήση που επιθυμεί αλλά και το απεικονιζόμενο αντικείμενο.

## 4 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΩΝ

---

### 4.1 Εισαγωγή

---

Η ορθή προβολή μη επίπεδων επιφανειών οδηγεί σε αρκετές παραμορφώσεις. Ωστόσο κάποιες φορές απαιτείται να χρησιμοποιηθούν για μετρήσεις ακριβείας. Στην περίπτωση αυτή απαιτείται να «αναπτυχθεί» η επιφάνεια για να αποκτήσει μετρητικές ιδιότητες η προβολή. Αυτό επιτυγχάνεται με τη δημιουργία αναπτυγμάτων. Αναπτύγματα καλούνται οι επίπεδες προβολές τρισδιάστατων μορφών ή πολυεπίπεδων αντικειμένων μέσω μίας αναπτυκτής επιφάνειας.

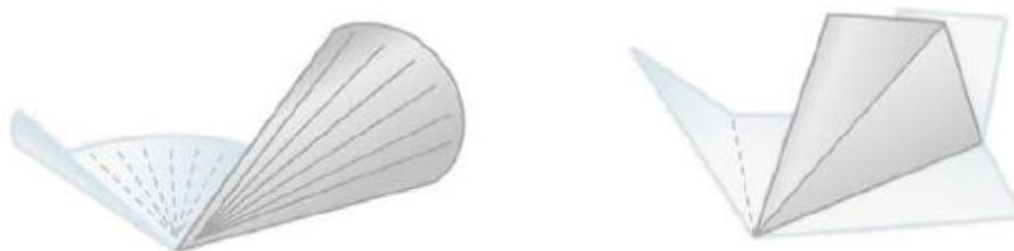
### 4.2 Αναπτυκτές επιφάνειες

---

Αναπτυκτές επιφάνειες καλούνται οι επιφάνειες οι οποίες είναι πολυεπίπεδες όπως οι κύλινδροι, οι κώνοι και η πυραμίδα όπως φαίνεται στις Εικόνες 4-1 και 4-2.



Εικόνα 4-1: Αναπτυκτές επιφάνειες



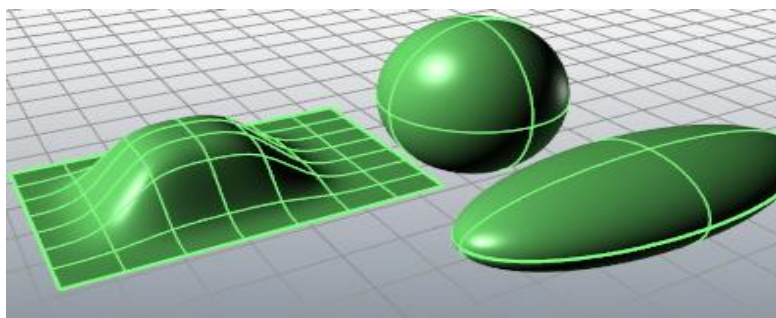
Εικόνα 4-2: Αναπτυκτές επιφάνειες b

### 4.3 Μη αναπτυκτές επιφάνειες

---

Η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζει στην παραγωγή αναπτυγμάτων από μη αναπτυκτές επιφάνειες. Μη αναπτυκτές επιφάνειες χαρακτηρίζονται όσες

επιφάνειες όταν αναπτυχθούν στο επίπεδο συνοδεύονται από παραμόρφωση μηκών, εμβαδού και γωνιών. Παραδείγματα τέτοιων μη αναπτυκτών επιφανειών είναι η σφαίρα, το τριαξονικό ελλειψοειδές, το παραβολοειδές και κάθε επιφάνεια δευτέρου βαθμού (καμπύλη επιφάνεια) όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 4-3). Χαρακτηριστικό παράδειγμα μη αναπτυκτών επιφανειών αποτελεί η σφαίρα και το ελλειψοειδές εκ περιστροφής.



Εικόνα 4-3: Μη αναπτυκτές επιφάνειες

#### 4.4 Αναπτύγματα μη αναπτυκτών επιφανειών

---

Για να αναπτυχθεί στο επίπεδο μία μη αναπτυκτή επιφάνεια χρησιμοποιείται συνήθως μια κατάλληλη χαρτογραφική προβολή. Η επιλογή της προβολής εξαρτάται από το τελικό αποτέλεσμα και τις ιδιότητες που πρέπει να έχει. Έτσι εν γένει μεσολαβεί η προβολή όλων των στοιχείων του αντικειμένου σε μια ενδιάμεση, μη αναπτυκτή επιφάνεια (σφαίρα ή ελλειψοειδές), και ακολούθως προσαρμόζεται η καταλληλότερη αναπτυκτή επιφάνεια σε αυτήν, στην οποία γίνεται η ανάπτυξή της.

Έτσι, χρήσιμο θεωρείται σε αυτό το σημείο να γίνει μια σύντομη αναφορά στις χαρτογραφικές προβολές και στις ιδιότητές τους, αλλά και στην γεωμετρία των ενδιάμεσων επιφανειών, δηλαδή, της σφαίρας και του ελλειψοειδούς.

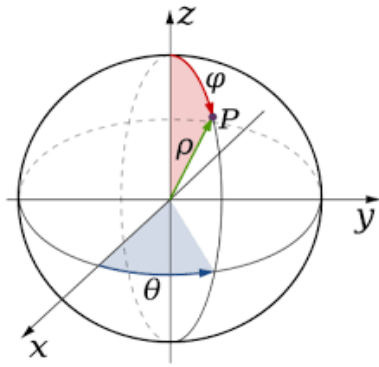
Στόχο αποτέλεσε η εύρεση επιφανειών, οι οποίες θα μπορούσαν να περιγράψουν ικανοποιητικά ένα μεγάλο πλήθος μη αναπτυκτών επιφανειών. Η επιφάνεια αυτή θα όφειλε να είναι εξίσου μη αναπτυκτή (δευτέρου βαθμού) για να μπορεί να «αναπαριστά» το αντικείμενο. Επιπλέον, χρήσιμο στοιχείο για την επιλογή αποτέλεσε το γεγονός, ότι στην χαρτογραφία έχουν μελετηθεί δυο συγκεκριμένες επιφάνειες πάνω στις οποίες έχουν αναπτυχθεί σχέσεις μεταξύ της μη αναπτυκτής επιφάνειας και της προβολής στο επίπεδο (ανάπτυγμα). Έτσι επιλέχθηκαν ως επιφάνειες αναφοράς η σφαίρα και το ελλειψοειδές εκ περιστροφής.

##### 4.4.1 Η Γεωμετρία της σφαίρας και του ελλειψοειδούς

---

Η σφαίρα ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που απέχουν σταθερή απόσταση από ένα σημείο  $K$  το οποίο ορίζεται ως κέντρο της σφαίρας. Για την διεξαγωγή της παρούσας διπλωματικής χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση της σφαίρας  $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ , όπου  $x_0, y_0, z_0$  είναι το κέντρο και  $r$  η ακτίνα της σφαίρας.





Εικόνα 4-4: Σφαίρα

Για τις ανάγκες της διπλωματικής χρησιμοποιήθηκαν και οι πολικές συντεταγμένες της σφαίρας ( $\phi, \theta$ ) για την προβολή των σημείων στην επιφάνεια της σφαίρας όπως αναλύεται στο κεφάλαιο 5, εδάφιο (5.1.4).

Ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής δημιουργείται από την περιστροφή μιας έλλειψης γύρω από τον μικρό άξονά της και ορίζεται από τον μεγάλο ημιάξονα  $a$  και είτε από την επιπλάτυνση  $f$ , είτε από τον μικρό ημιάξονα  $b$ , είτε από την εκκεντρότητά του  $e$ . Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $X, Y, Z$  με κέντρο το κέντρο του ελλειψοειδούς η εξίσωσή του είναι η (4.1):

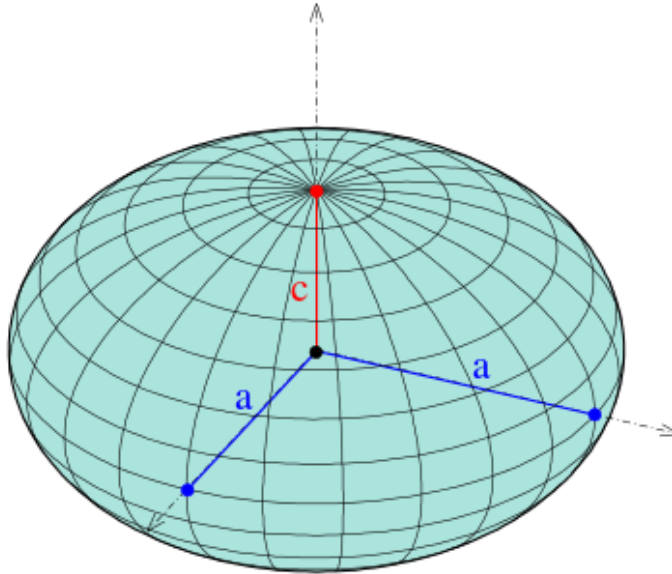
$$(X^2/a^2 + Y^2/a^2 + Z^2/b^2 = 1) \quad (4.1)$$

όπου ο άξονας  $Z$  ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας του.

**Μεσημβρινοί** ονομάζονται οι τομές του ελλειψοειδούς με το επίπεδο που σχηματίζει το σημείο που μας ενδιαφέρει και ο άξονας περιστροφής. Οι μεσημβρινοί είναι ελλείψεις ίσες μεταξύ τους.

**Παράλληλοι** είναι οι τομές του ελλειψοειδούς και του κάθετου στον άξονα περιστροφής επιπέδου, που περιέχει το σημείο ενδιαφέροντος. Οι παράλληλοι είναι κύκλοι των οποίων η ακτίνα μειώνεται όσο πλησιάζουμε στους πόλους.

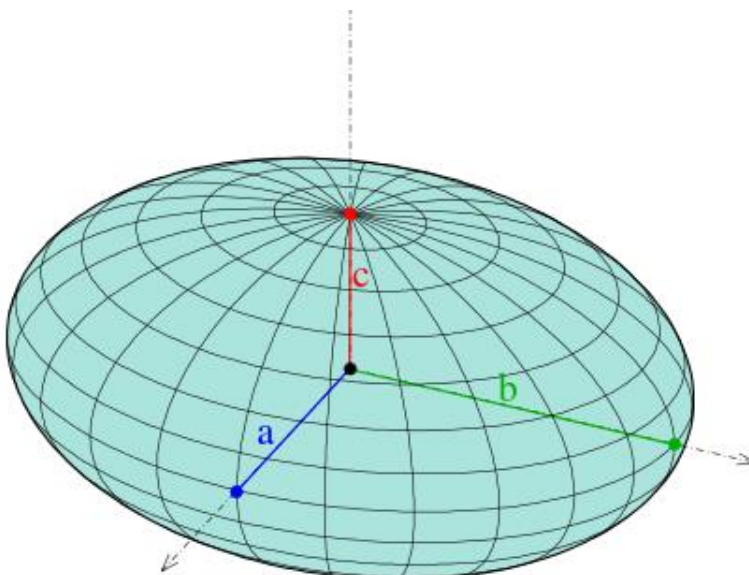
**Ισημερινός** ονομάζεται ο μεγαλύτερος παράλληλος, το επίπεδο του οποίου διέρχεται από το κέντρο του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής.



Εικόνα 4-5: Ελλειψοειδές εκ περιστροφής

Όπως φαίνεται στο κεφάλαιο 5 (εδάφιο 5.1.2) για την εύρεση προσωρινών τιμών του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής αλλά και της πλήρης εξίσωσης του ελλειψοειδούς χρησιμοποιήθηκε το τριαξονικό ελλειψοειδές.

Ένα ελλειψοειδές έχει τρεις κάθετους άξονες συμμετρίας, οι οποίοι τέμνονται σε ένα κέντρο συμμετρίας, που ονομάζεται κέντρο του ελλειψοειδούς. Εάν οι τρεις άξονες έχουν διαφορετικά μήκη, το ελλειψοειδές είναι τριαξονικό ή σπάνια σκαλένιο και οι άξονες ορίζονται μοναδικά ενώ αν οι δύο από αυτούς είναι ίσοι ονομάζεται ελλειψοειδές εκ περιστροφής.



Εικόνα 4-6: Τριαξονικό ελλειψοειδές

#### 4.4.2 Χαρτογραφικές προβολές

---

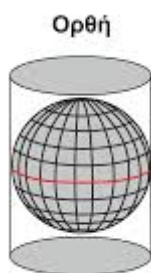
Οι χαρτογραφικές προβολές παραδοσιακά εντάσσονται στη θεματική περιοχή της μαθηματικής χαρτογραφίας, αντικείμενο της οποίας είναι η μελέτη της απεικόνισης της επιφάνειας της Γης πάνω σε ένα επίπεδο, το επίπεδο του χάρτη. Ωστόσο μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε οποιοδήποτε αντικείμενο το οποίο έχει προσεγγιστεί με ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής ή μια σφαίρα. Η μελέτη αυτή, της απεικόνισης των δυο επιφανειών αναφοράς στο επίπεδο, έχει θεωρητικό αλλά και πρακτικό χαρακτήρα. Ο θεωρητικός χαρακτήρας έγκειται στην έρευνα και στην τεκμηρίωση του συνόλου των δυνατών τρόπων απεικόνισης, δηλαδή, των προβολών (ή απεικονίσεων), καθώς και των ιδιοτήτων που τις χαρακτηρίζουν. Ο πρακτικός χαρακτήρας σχετίζεται με την κατασκευή του μαθηματικού υποβάθρου του αναπτύγματος σε μια συγκεκριμένη χαρτογραφική προβολή.(Νάκος)

Ο απόλυτα σωστός τρόπος μεταφοράς της μη αναπτυσσόμενης επιφάνειας σε ένα επίπεδο είναι αδύνατος, καθώς συνοδεύεται πάντα από παραμορφώσεις. Το πρόβλημα αυτό παραμένει άλυτο γιατί ουσιαστικά επιχειρείται να μεταφερθεί (να προβληθεί) μία καμπύλη επιφάνεια (η σφαίρα ή το ελλειψοειδές εκ περιστροφής) σε μία επίπεδη επιφάνεια (ανάπτυγμα). Επειδή αυτό είναι αδύνατο να γίνει κατά απόλυτο τρόπο, δηλαδή η προβολή να δώσει ένα τέλειο αποτέλεσμα, η προσπάθεια επικεντρώνεται στον έλεγχο παραμορφώσεων έτσι ώστε να διατηρούνται όσες ιδιότητες απαιτούνται. Η απόδοση της γήινης επιφάνειας πάνω στην υδρόγειο (επιφάνεια αναφοράς) είναι η μοναδική σωστή προβολή γιατί αποδίδονται σωστά οι αποστάσεις μεταξύ των τόπων, η έκταση και το σχήμα των ηπείρων. Αντίθετα, σε οποιαδήποτε άλλη προβολή, είναι αδύνατο να υπάρχει σωστή απόδοση και των τριών αυτών χαρακτηριστικών.

Έτσι, κάθε ανάπτυγμα, το οποίο αποτελεί προβολή ενός τμήματος της μη αναπτυσσόμενης επιφάνειας πάνω σε ένα επίπεδο, θα αποδίδει σωστά κάποια από αυτά τα χαρακτηριστικά. Ουσιαστικά, κάθε ανάπτυγμα παραμορφώνει τα βασικά μεγέθη των απεικονιζόμενων οντοτήτων στην εκάστοτε επιφάνεια (μήκη, γωνίες και εμβαδά). Η κάθε χαρτογραφική προβολή περιγράφει αναλυτικά την μεθοδολογία διαχείρισης των παραμορφώσεων των στοιχειωδών αλλά και των πεπερασμένων μεγεθών. Οι χαρτογραφικές προβολές οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν έχουν ευρύ φάσμα και η κάθε μία χρησιμοποιείται σύμφωνα με τις ανάγκες του χρήστη. Πιο συγκεκριμένα, κάθε χαρτογραφική προβολή επιλέγεται για την διατήρηση ορισμένων χαρακτηριστικών της αρχικής μαθηματικής επιφάνειας.

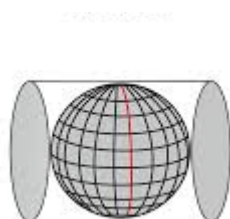
Η απεικόνιση μπορεί να γίνει είτε απευθείας επάνω στην επιφάνεια ενός επιπέδου είτε πρώτα σε μία αναπτυσσόμενη επιφάνεια και στη συνέχεια η επιφάνεια αυτή να αναπτυχθεί στο επίπεδο. Τέτοιες κατάλληλες αναπτυσσόμενες επιφάνειες είναι αυτές του κυλίνδρου και του κώνου(Νάκος). Ανάλογα με την αναπτυσσόμενη επιφάνεια που χρησιμοποιείται, οι απεικονίσεις χωρίζονται σε κυλινδρικές, κωνικές και επίπεδες. Ένας ακόμη διαχωρισμός των απεικονίσεων προκύπτει από τον τρόπο με τον οποίο η αναπτυσσόμενη επιφάνεια προσαρμόζεται επάνω στην επιφάνεια αναφοράς. Με τη λογική αυτή οι απεικονίσεις διακρίνονται σε ορθές εγκάρσιες και πλάγιες. Ορθές

ονομάζονται οι απεικονίσεις στις οποίες ο άξονας συμμετρίας της αναπτυκτής της επιφάνειας συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής της γεννήτριας που δημιούργησαν την επιφάνεια.



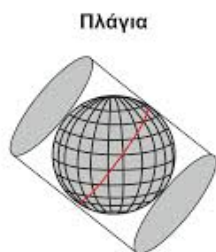
Εικόνα 4-7: Ορθή προβολή

Εγκάρσιες ονομάζονται οι απεικονίσεις στις οποίες ο άξονας συμμετρίας της αναπτυκτής επιφάνειας είναι κάθετος ως προς τον άξονα περιστροφής της γεννήτριας που δημιούργησε την επιφάνεια.



Εικόνα 4-8: Εγκάρσια προβολή

Ενώ πλαγίες ονομάζονται οι απεικονίσεις στις οποίες οι δύο άξονες τέμνονται υπό «τυχαία» γωνία.

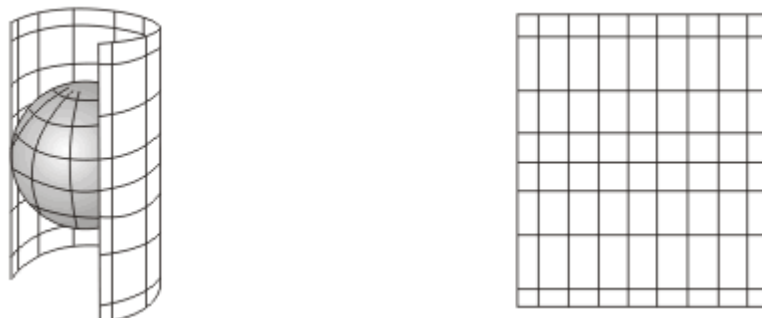


Εικόνα 4-9 :Πλάγια προβολή

Τέλος ανάλογα με τις ιδιότητες των γεωμετρικών μεγεθών που διατηρούν οι απεικονίσεις διακρίνονται σε: σύμμορφές ισοδύναμες και ισαπέχουσες.

Σύμμορφές ονομάζονται οι απεικονίσεις που διατηρούν αναλλοίωτη τη μορφή των στοιχειωδών σχημάτων. Ισοδύναμες ονομάζονται οι απεικονίσεις εκείνες που διατηρούν αναλλοίωτα τα εμβαδά. Τέλος ισαπέχουσες ονομάζονται οι απεικονίσεις οι οποίες διατηρούν αναλλοίωτα τα μήκη γραμμών σε ορισμένες μόνο διευθύνσεις.(Νάκος)

Για την παρούσα διπλωματική χρησιμοποιήθηκαν μόνο κυλινδρικές απεικονίσεις και πιο συγκεκριμένα, για τη σφαίρα η πλάγια μερκατορική προβολή και η πλάγια Lambert ενώ για το ελλειψοειδές εκ περιστροφής η ορθή κυλινδρική ισοδύναμη προβολή και η ορθή μερκατορική προβολή. Οι κυλινδρικές προβολές προκύπτουν από την προβολή των παράλληλων και των μεσημβρινών στην εσωτερική επιφάνεια ενός κυλίνδρου όπως φαίνεται στην Εικόνα 4-10.



Εικόνα 4-10: Κυλινδρική απεικόνιση

Χαρτογραφική προβολή που χρησιμοποιήθηκε

Η χαρτογραφική προβολή που χρησιμοποιείται τόσο στη σφαίρα όσο και στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής είναι η Ορθή κυλινδρική σύμμορφη προβολή – μερκατορική προβολή. Η μερκατορική προβολή είναι μια σύμμορφη ορθή κυλινδρική απεικόνιση. Προκύπτει από την ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή με κατάλληλη μετάθεση των θέσεων των παραλλήλων στο επίπεδο της απεικόνισης, ώστε να ικανοποιηθεί η συνθήκη της σύμμορφιας. (Νάκος)

Για την απεικόνιση της επιφάνειας του ελλειψοειδούς στο επίπεδο διατηρείται η σχέση:

$$x = a * \lambda \quad (4.2)$$

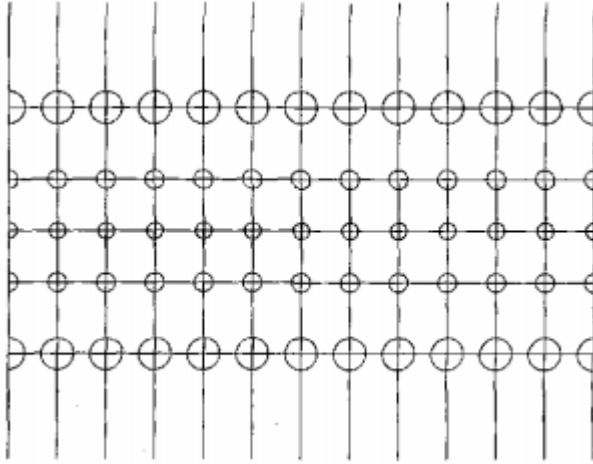
όπου  $a$  ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς.

$$y = a * \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}\right)\right) \quad (4.3)$$

Για την απεικόνιση της επιφάνειας της σφαίρας στο επίπεδο διατηρούνται οι σχέσεις:

$$x = R * \lambda \quad (4.4)$$

$$y = R * \ln\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (4.5)$$



Εικόνα 4-11: Περιοχή παραμόρφωσης

Όπως φαίνεται και στη παραπάνω Εικόνα 4-11 , μεγάλη παραμόρφωση υπάρχει σε περιοχές μακριά από τον Ισημερινό. Επιπλέον, στην προβολή αυτή δεν απεικονίζονται οι πόλοι.

Ιδιότητα της μερκατορικής προβολής είναι να απεικονίζει τις λοξοδρομίες σε ευθείες γραμμές στο επίπεδο γιατί αφενός είναι σύμμορφη, αφετέρου η σύγκλιση των μεσημβρινών είναι μηδενική σε κάθε σημείο του γεωγραφικού χώρου.(Νάκος) Να σημειωθεί ότι οι λοξοδρομίες είναι γραμμές στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς που έχουν σε κάθε σημείο της γραμμής σταθερό αζιμούθιο. Η χαρτογραφική προβολή αυτή ενδύκνεται για χρήση σε αναπτύγματα στα οποία επιθυμείται η διατήρηση των μορφών σε περιοχές κοντά στον Ισημερινό.

## 5 ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

---

Από την μελέτη της παραπάνω βιβλιογραφίας διαπιστώθηκε ότι δεν υφίσταται γενική λύση στο πρόβλημα της παραγωγής αναπτυγμάτων από μη αναπτυκτές επιφάνειες. Προφανώς αυτό οφείλεται στην ύπαρξη πληθώρας επιφανειών και ίσως να μην μπορούσαν να αντιμετωπιστούν όλες συνολικά. Έτσι αποφασίστηκε, στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής, να αναπτυχθεί ένα λογισμικό γενικής εφαρμογής, το οποίο να αντιμετωπίζει όσο το δυνατόν περισσότερες επιφάνειες. Η ανάπτυξη του λογισμικού περιορίζεται στην προσαρμογή μιας επιφάνειας ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ή σφαίρας στα διαθέσιμα δεδομένα, τα οποία τις περισσότερες φορές είναι νέφη σημείων. Προφανώς θα μπορούσε να καλύπτονται και περισσότερες μαθηματικές επιφάνειες (όπως υπερβολικά παραβολοειδή ή άλλες επιφάνειες δευτέρου βαθμού), αλλά θεωρήθηκε ότι ξεφεύγει από το περιορισμένο πλαίσιο μιας προπτυχιακής διπλωματικής εργασίας. Παράλληλα, πιστεύεται ότι θα καλυφθεί, εν μέρει έστω, η ανάγκη άμεσης παραγωγής αναπτυγμάτων σε εικονιστική μορφή με την εφαρμογή του λογισμικού *be...chri!* που αναπτύχθηκε. Για την παραγωγή του αναπτύγματος ακολουθήθηκε μία σειρά διαδικασιών τόσο για το ελλειψοειδές εκ περιστροφής όσο και για τη σφαίρα. Παρακάτω παρατίθενται σε σειρά οι διαδικασίες που ακολουθήθηκαν.

### 5.1 Προσδιορισμός των παραμέτρων της μαθηματικής επιφάνειας

---

Για τον βέλτιστο προσδιορισμό των παραμέτρων χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων και πιο συγκεκριμένα η γενική μέθοδος, η οποία θα αναλυθεί παρακάτω. Η μεθοδολογία αυτή, εφαρμόζεται συνήθως όταν ορισμένες από τις ανεξάρτητες παραμέτρους μετριοούνται άμεσα και ενδιαφέρει ο προσδιορισμός των παραμέτρων που δεν είναι δυνατόν να μετρηθούν. Μια τέτοια περίπτωση παρουσιάζεται στο πρόβλημα προσαρμογής επιφανειών σε μετρήσεις, δηλαδή νέφη σημείων.

Παρόμοια μέθοδος είναι αυτή των εμμέσων παρατηρήσεων με την διαφορά ότι σε αυτήν οι ανεξάρτητες παράμετροι που καλούνται να υπολογιστούν αυξάνονται όσο αυξάνονται τα σημεία που μετριοούνται. Για τον λόγο αυτόν δεν χρησιμοποιείται η μέθοδος των εμμέσων παρατηρήσεων σε περιπτώσεις προσαρμογής καθώς θεωρείται αντικοινωνική.

Για την περίπτωση του ελλειψοειδούς λόγω μη γραμμικότητας της εξίσωσης, απαιτείται επιπλέον η γραμμικοποίηση των συνθηκών που δημιουργούνται μεταξύ μετρήσεων και παραμέτρων, διαδικασία που απαιτεί την ύπαρξη αρχικών προσεγγιστικών/προσωρινών τιμών. Οι μέθοδοι των ελαχίστων τετραγώνων από μόνες τους παρουσιάζουν το σημαντικό μειονέκτημα της ευαισθησίας ως προς το μέγεθος των τιμών των παρατηρήσεων. Γι' αυτό το λόγο απαραίτητη είναι και η κανονικοποίηση των τιμών του νέφους. Επίσης μια δυσκολία που παρουσιάζει η μέθοδος αυτή είναι η αυξημένη υπολογιστική ισχύ που απαιτείται. Για το λόγο αυτό το πρόγραμμα *Be..Chri* χρησιμοποιεί ένα αραιωμένο νέφος πλήθους 1500 σημείων για την εύρεση των παραμέτρων της επιφάνειας.

Η γενική μέθοδος δίνει την καλύτερη τιμή των ζητούμενων παραμέτρων από τη λύση ενός συστήματος μέσω εξισώσεων συνθήκης. Οι καλύτερες τιμές των παραμέτρων προκύπτουν μέσα από μια επαναληπτική διαδικασία η οποία σταματά όταν η πιθανότητα να βρεθεί καλύτερο σύμφωνο σύνολο γίνει μικρότερο από ένα επιθυμητό κατώφλι.

### 5.1.1 Ορισμός παραμέτρων ελλειψοειδούς εκ περιστροφής

Για το ελλειψοειδές εκ περιστροφής χρησιμοποιήθηκε η πλήρης εξίσωσή του. Η πλήρης εξίσωση του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής προέκυψε από την εξίσωση δευτέρου βαθμού του τριαξονικού ελλειψοειδούς, σύμφωνα με τον Hirvonen (1971). Παρακάτω παρατίθεται η σχέση του τριαξονικού ελλειψοειδούς που εφαρμόστηκε (εξίσωση 5.1). Η εξίσωση αυτή περιλαμβάνει 9 παραμέτρους, δηλαδή το κέντρο  $(t_x, t_y, t_z)$  (εξίσωση 5.2), τους τρεις άξονες  $(a_x, a_y, a_z)$  και τις τρεις στροφές  $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ .

$$\begin{pmatrix} x - t_x \\ y - t_y \\ z - t_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - t_x \\ y - t_y \\ z - t_z \end{pmatrix} - 1 = 0 \quad (5.1)$$

Όπου  $x, y, z$  οι συντεταγμένες κάθε σημείου που περιγράφει ένα τριαξονικό ελλειψοειδές.

με το κέντρο του ελλειψοειδούς να είναι:

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

και τα στοιχεία του συμμετρικού πίνακα να είναι:

$$P = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{pmatrix} = RT \times \begin{pmatrix} \frac{1}{a_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_z^2} \end{pmatrix} \times R \quad (5.3)$$

$$\text{όπου } R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \quad (5.4)$$



$$\begin{pmatrix} \cos\theta_y \cos\theta_z & \cos\theta_x \sin\theta_z + \sin\theta_x \sin\theta_y \cos\theta_z & \sin\theta_x \sin\theta_z - \cos\theta_x \sin\theta_y \cos\theta_z \\ -\cos\theta_y \sin\theta_z & \cos\theta_x \cos\theta_z - \sin\theta_x \sin\theta_y \sin\theta_z & \sin\theta_x \cos\theta_z + \cos\theta_x \sin\theta_y \sin\theta_z \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x \cos\theta_y & \cos\theta_x \cos\theta_y \end{pmatrix}$$

όπου  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  είναι οι 3 γωνίες κατά Euler.

Για κάθε σημείο του νέφους σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξίσωση είναι η 5.5 όπως φαίνεται παρακάτω:

$$F_i = \rho_{xx}(x_i - t_x)^2 + \rho_{yy}(y_i - t_y)^2 + \rho_{zz}(z_i - t_z)^2 + 2\rho_{xy}(x_i - t_x)(y_i - t_y) + 2\rho_{xz}(x_i - t_x)(z_i - t_z) + 2\rho_{yz}(y_i - t_y)(z_i - t_z) - 1 = 0 \quad (5.5)$$

$$\rho_{xx} = (r_{11}/a_x)^2 + (r_{21}/a_y)^2 + (r_{31}/a_z)^2 \quad (5.6)$$

$$\rho_{yy} = ((r_{12}/a_x)^2 + (r_{22}/a_y)^2 + (r_{32}/a_z)^2) \quad (5.7)$$

$$\rho_{zz} = ((r_{13}/a_x)^2 + (r_{23}/a_y)^2 + (r_{33}/a_z)^2) \quad (5.8)$$

$$\rho_{xy} = ((r_{11} * r_{12})/a_x^2 + (r_{21} * r_{22})/a_y^2 + (r_{31} * r_{32})/a_z^2) \quad (5.9)$$

$$\rho_{xz} = ((r_{11} * r_{13})/a_x^2 + (r_{21} * r_{23})/a_y^2 + (r_{31} * r_{33})/a_z^2) \quad (5.10)$$

$$\rho_{yz} = ((r_{12} * r_{13})/a_x^2 + (r_{22} * r_{23})/a_y^2 + (r_{32} * r_{33})/a_z^2) \quad (5.11)$$

Για τον μετασχηματισμό της εξίσωσης του τριαξονικού ελλειψοειδούς σε εξίσωση που περιγράφει ελλειψοειδές εκ περιστροφής τέθηκε  $a_x = a_y = a$  και  $a_z = b$  καθώς και  $\theta_z = 0$ . Άρα οι παράμετροι πλέον μετασχηματίστηκαν σε 7, δηλαδή τρεις άξονες εκ των οποίων οι δύο ίσοι  $(a, a, b)$ , το κέντρο  $(t_x, t_y, t_z)$  (εξίσωση 5.13) και τις στροφές  $(\theta_x, \theta_y)$ . Πιο αναλυτικά, οι σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται παρακάτω.

$$\begin{pmatrix} x - t_x \\ y - t_y \\ z - t_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{xy} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{xz} & \rho_{yz} & \rho_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - t_x \\ y - t_y \\ z - t_z \end{pmatrix} - 1 = 0 \quad (5.12)$$

Όπου  $x, y, z$  οι συντεταγμένες κάθε σημείου που περιγράφει ένα τριαξονικό ελλειψοειδές με το κέντρο του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής να είναι:

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

και τα στοιχεία του συμμετρικού πίνακα να είναι:

$$P = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{pmatrix} = RT \times \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_z^2} \end{pmatrix} \times R \quad (5.14)$$

$$\text{όπου } R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_x \sin\theta_y & -\cos\theta_x \sin\theta_y \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x \cos\theta_y & \cos\theta_x \cos\theta_y \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Για κάθε σημείο του νέφους, η εξίσωση είναι η 5.16 όπως φαίνεται παρακάτω:

$$F_i = p_{xx}(x_i - t_x)^2 + p_{yy}(y_i - t_y)^2 + p_{zz}(z_i - t_z)^2 + 2p_{xy}(x_i - t_x)(y_i - t_y) + 2p_{xz}(x_i - t_x)(z_i - t_z) + 2p_{yz}(y_i - t_y)(z_i - t_z) - 1 = 0 \quad (5.16)$$

$$p_{xx} = ((r_{12}/a)^2 + (r_{22}/a)^2 + (r_{32}/a_z)^2) \quad (5.17)$$

$$p_{yy} = ((r_{12}/a)^2 + (r_{22}/a)^2 + (r_{32}/a_z)^2) \quad (5.18)$$

$$p_{zz} = ((r_{13}/a)^2 + (r_{23}/a)^2 + (r_{33}/a_z)^2) \quad (5.19)$$

$$p_{xy} = ((r_{11} * r_{12})/a^2 + (r_{21} * r_{22})/a^2 + (r_{31} * r_{32})/a_z^2) \quad (5.20)$$

$$p_{xz} = ((r_{11} * r_{13})/a^2 + (r_{21} * r_{23})/a^2 + (r_{31} * r_{33})/a_z^2) \quad (5.21)$$

$$p_{yz} = ((r_{12} * r_{13})/a^2 + (r_{22} * r_{23})/a^2 + (r_{32} * r_{33})/a_z^2) \quad (5.22)$$

### 5.1.2 Γενική μέθοδος και προσδιορισμός προσωρινών τιμών ελλειψοειδούς εκ περιστροφής

Για τον υπολογισμό των προσωρινών τιμών χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση του τριαξονικού ελλειψοειδούς και βρέθηκαν οι 9 παράμετροι, κάνοντας μια αρχική προσέγγιση ανάμεσα στο νέφος και την επιφάνεια. Για την εύρεση των προσωρινών τιμών εφαρμόστηκαν τα ελάχιστα τετράγωνα όπως αναφέρει ο Bertoni (2010). Η μέθοδος αυτή υπολογίζει τρεις τιμές για το κέντρο, τρεις για τους ημιάξονες και ένα πίνακα 3x3 για τις στροφές (πίνακα στροφής). Από τις 9 παραμέτρους πραγματοποιήθηκε μια σειρά από ελέγχους για τη μείωση των παραμέτρων από 9 σε 7 του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής.

Αρχικά, ελέγχθηκαν ανά δύο οι τρεις τιμές των ημιαξόνων του τριαξονικού καθώς αυτές που είχαν πλησιέστερη τιμή θεωρήθηκαν ίσες με το μέσο όρο τους ( $a_x = a_y = (a_x + a_y) / 2 = a$ ).

Οι τιμές των ημιαξόνων που επιλέγονται ίσες αποτελούν πάντα τις δύο πρώτες γραμμές στην εξίσωση 5.14.

Κάθε γραμμή του πίνακα στροφής αντιστοιχεί σε έναν ημιάξονα. Με την αλλαγή της σειράς των ημιαξόνων επιβάλλεται η αναδιάταξη των σειρών του πίνακα στροφής.

Από τους παρακάτω τύπους βρέθηκαν οι τρεις γωνίες στροφής από τον πίνακα στροφής του Bartonί με σκοπό το μηδενισμό της  $\theta_z$ .

$$\theta_x = \tan^{-1}(-R[2,1], R[2,2]) \times \frac{180}{\pi} \quad (5.23)$$

$$\theta_y = \sin^{-1}(R[2,0]) \times \frac{180}{\pi} \quad (5.24)$$

$$\theta_z = \tan^{-1}(-R[1,0], R[0,0]) \times \frac{180}{\pi} \quad (5.25)$$

όπου  $R[2,1]$  το στοιχείο στη δεύτερη γραμμή και πρώτη στήλη του πίνακα R κ.τ.λ.

Έπειτα από τις παραπάνω διαδικασίες οι προσωρινές τιμές έχουν δημιουργηθεί. Εάν έχουν πραγματοποιηθεί η μετρήσεις και οι άγνωστες ανεξάρτητες παράμετροι του μοντέλου είναι  $m$ , ο βαθμός ελευθερίας είναι  $r = n - m$ . Όποια από τις μεθοδολογίες και αν ακολουθηθεί, σχηματίζονται  $c$  εξισώσεις συνθήκης όπου  $c = r + m0$ .

$m0$  = αριθμός παραμέτρων που ενδιαφέρει να προσδιορισθούν (παράμετροι ελλειψοειδούς). Για το υπολογισμό των καλύτερων τιμών των παραμέτρων γίνεται ο υπολογισμός του πίνακα  $\widehat{m0}$  με την παρακάτω εξίσωση.

$$\widehat{m0} = \{A^T (BP^{-1}B^T)A\}^{-1} A^T (BP^{-1}B^T)^{-1} w \quad (5.26)$$

Για το παράδειγμα που χρησιμοποιήθηκε για την παρούσα εργασία το  $k = 1500$  (πλήθος σημείων),  $n = 3$  ( $x, y, z$ )\* $k$ ,  $m0 = 7$  (παράμετροι που χρειάζεται να υπολογιστούν). Η εξίσωση συνθήκης είναι η εξίσωση:

$$F_i = p_{xx}(x_i - t_x)^2 + p_{yy}(y_i - t_y)^2 + p_{zz}(z_i - t_z)^2 + 2p_{xy}(x_i - t_x)(y_i - t_y) + 2p_{xz}(x_i - t_x)(z_i - t_z) + 2p_{yz}(y_i - t_y)(z_i - t_z) - 1 = 0$$

$$\widehat{m0} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ a_x \\ a_y \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

$$A_{k \times \mu 0} = \begin{pmatrix} \frac{\theta F_1}{t_x} & \frac{\theta F_1}{t_y} & \frac{\theta F_1}{t_z} & \frac{\theta F_1}{a_x} & \frac{\theta F_1}{a_y} & \frac{\theta F_1}{\theta_x} & \frac{\theta F_1}{\theta_y} \\ \frac{\theta F_2}{t_x} & \frac{\theta F_2}{t_y} & \frac{\theta F_2}{t_z} & \frac{\theta F_2}{a_x} & \frac{\theta F_2}{a_y} & \frac{\theta F_2}{\theta_x} & \frac{\theta F_2}{\theta_y} \\ \frac{\theta F_3}{t_x} & \frac{\theta F_3}{t_y} & \frac{\theta F_3}{t_z} & \frac{\theta F_3}{a_x} & \frac{\theta F_3}{a_y} & \frac{\theta F_3}{\theta_x} & \frac{\theta F_3}{\theta_y} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

$$B_{k \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\theta F_1}{\theta_{x_1}} & \frac{\theta F_1}{\theta_{y_1}} & \frac{\theta F_1}{\theta_{z_1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\theta F_2}{\theta_{x_2}} & \frac{\theta F_2}{\theta_{y_2}} & \frac{\theta F_2}{\theta_{z_2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\theta F_3}{\theta_{x_3}} & \frac{\theta F_3}{\theta_{y_3}} & \frac{\theta F_3}{\theta_{z_3}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

$$w_{k \times 1} = \begin{pmatrix} 0 - F_1 \\ 0 - F_2 \\ 0 - F_3 \\ 0 - F_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

### 5.1.3 Γενική μέθοδος και προσδιορισμός προσωρινών τιμών σφαίρας

Για την εύρεση των προσωρινών τιμών της σφαίρας, χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$x_k = \sum_i^n \frac{x_i}{n} \quad (5.31)$$

$$y_k = \sum_i^n \frac{y_i}{n} \quad (5.32)$$

$$z_k = \sum_i^n \frac{z_i}{n} \quad (5.33)$$

$$r = \sum_i^n \frac{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}}{n} \quad (5.34)$$

Υπολογίστηκε ο μέσος όρος των x,y,z αντίστοιχα από τις τιμές του νέφους και ο μέσος όρος των αποστάσεων των σημείων από το κέντρο βάρους.

Για το παράδειγμα που χρησιμοποιήθηκε για την παρούσα εργασία το k= 1500 (πλήθος σημείων), n=3 (x,y,z)\*k , m0=4 (παράμετροι που χρειάζεται να υπολογιστούν)

$$\widehat{m0} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ r \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

$$A_{k \times \mu 0} = \begin{pmatrix} \frac{\theta F_1}{x_k} & \frac{\theta F_1}{y_k} & \frac{\theta F_1}{z_k} & \frac{\theta F_1}{r} \\ \frac{\theta F_2}{x_k} & \frac{\theta F_2}{y_k} & \frac{\theta F_2}{z_k} & \frac{\theta F_2}{r} \\ \frac{\theta F_3}{x_k} & \frac{\theta F_3}{y_k} & \frac{\theta F_3}{z_k} & \frac{\theta F_3}{r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

$$B_{k \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\theta F_1}{\theta_{x_1}} & \frac{\theta F_1}{\theta_{y_1}} & \frac{\theta F_1}{\theta_{z_1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\theta F_2}{\theta_{x_2}} & \frac{\theta F_2}{\theta_{y_2}} & \frac{\theta F_2}{\theta_{z_2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\theta F_3}{\theta_{x_3}} & \frac{\theta F_3}{\theta_{y_3}} & \frac{\theta F_3}{\theta_{z_3}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

$$w_{k \times 1} = \begin{pmatrix} 0 - F_1 \\ 0 - F_2 \\ 0 - F_3 \\ 0 - F_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

#### 5.1.4 Μετασχηματισμός των καρτεσιανών συντεταγμένων του νέφους σημείων στις πολικές συντεταγμένες της επιφάνειας αναφοράς

---

Αρχικά γίνεται ο μετασχηματισμός των καρτεσιανών συντεταγμένων του νέφους σημείων στο σύστημα της επιφάνειας αναφοράς έτσι ώστε το κέντρο του νέφους να ταυτίζεται με το κέντρο της επιφάνειας. Αφού έχουν βρεθεί οι καλύτερες τιμές των παραμέτρων της μαθηματικής επιφάνειας υπολογίζονται οι προβολές των σημείων του νέφους. Τα σημεία τα οποία δεν εφάπτονται στην επιφάνεια αναφοράς προβάλλονται κάθετα σε αυτή και μετατρέπονται οι καρτεσιανές συντεταγμένες σε πολικές ( $\phi$ ,  $\lambda$ ). Οι τύποι οι οποίοι χρησιμοποιούνται για την προβολή των σημείων είναι οι εξής:

Για το ελλειψοειδές εκ περιστροφής

$$\lambda = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \quad (5.39)$$

Ωστόσο για τον προσδιορισμό του  $\phi$  απαιτείται μια επαναληπτική διαδικασία. Ως αρχική τιμή του  $\phi$  ορίζεται η παρακάτω.

$$\phi_{(0)} = \tan^{-1} \left[ \frac{z}{(1-e^2)p} \right] \text{ με } p = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.40)$$

Για τον υπολογισμό του  $\phi$  ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi_{(i-1)}}} \quad (5.41)$$

$$h_{(i)} = \frac{p}{\cos \phi_{(i-1)}} - N_{(i)} \quad (5.42)$$

$$\phi_{(i-1)} = \tan^{-1} \left[ \frac{z}{\left( 1 - e^2 \frac{N_{(i)}}{N_{(i)} + h_{(i)}} \right) p} \right] \quad (5.43)$$

Για τον υπολογισμό των προβολών της σφαίρας χρησιμοποιήθηκαν οι τύποι:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5.44)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \quad (5.45)$$

$$\phi = \cos^{-1} \left( \frac{z}{\sqrt{\rho^2}} \right) \quad (5.46)$$

#### 5.1.5 Προσδιορισμός των συντεταγμένων $x, y$ της χαρτογραφικής προβολής και εύρεση των ορίων του αναπτύγματος

---

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 4 οι πολικές συντεταγμένες μετασχηματίστηκαν σε καρτεσιανές ( $x, y$ ) μέσω των χαρτογραφικών προβολών που επιλέχθηκαν. Για τον προσδιορισμό των ορίων του αναπτύγματος βρέθηκε η ελάχιστη και μέγιστη τιμή των  $x$  όπως και η ελάχιστη και μέγιστη τιμή των  $y$ .

### **5.1.6 Καθορισμός του μεγέθους της εικονοψηφίδα**

---

Προσδιορισμός του εμβαδού μιας ορθογώνιας περιοχής που προσομοιάζει την τελική εικόνα σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις:

$$A = \max_y - \min_y \quad (5.47)$$

$$B = \max_x - \min_x \quad (5.48)$$

$$\text{Εμβαδόν} = A \times B \quad (5.49)$$

Η ρίζα της διαίρεσης του εμβαδού με το πλήθος των σημείων δίνει μία ενδεικτική τιμή της εδαφοψηφίδα. Παρ'όλα αυτά ο χρήστης επιλέγει την εδαφοψηφίδα ανάλογα με τις ανάγκες του αναπτύγματος που επιθυμεί να παραγάγει.

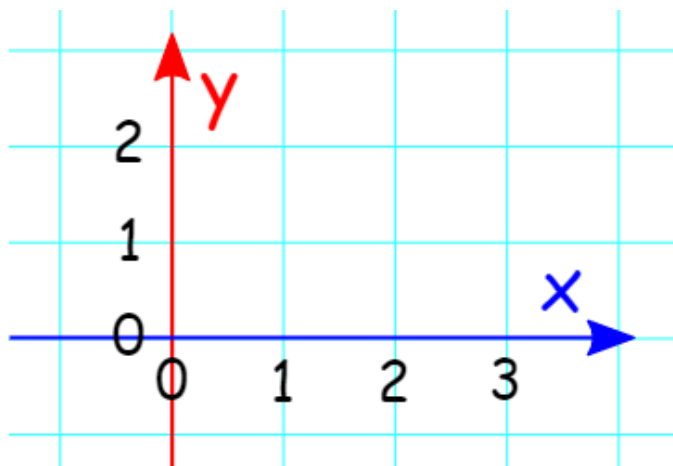
### **5.1.7 Εύρεση της θέσης κάθε σημείου στην τελική εικόνα και απόδοση χρώματος**

---

Για τον καθορισμό του χρώματος στην εικόνα απαραίτητη θεωρήθηκε η εύρεση της θέσης κάθε σημείου της εικόνας στο νέφος. Η κλασσική διαδικασία χρωματισμού μίας εικόνας απαιτεί τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων της ορθοφωτογραφίας σε συντεταγμένες επιφανείας ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ή σφαίρας. Στη συνέχεια, με τη χρήση ενός ακόμα αντίστροφου μετασχηματισμού σε συντεταγμένες νέφους σύμφωνα με τις οποίες προσδιορίζεται το χρώμα με παρεμβολή στα γειτονικά σημεία. Ωστόσο, η διαδικασία αυτή θεωρήθηκε αρκετά χρονοβόρα καθώς απαιτούσε πολλούς μετασχηματισμούς και μεγάλη υπολογιστική ισχύ. Για το λόγο αυτό, επιλέχθηκε η μέθοδος της αντιστοιχίας κάθε συντεταγμένης της ορθοφωτογραφίας με τη συντεταγμένη του νέφους μέσω των δεικτών θέσης. Αναλυτικότερα, κάθε σημείο του αρχικού νέφους έχει ένα δείκτη θέσης ο οποίος κατά τη διάρκεια των μετασχηματισμών διατηρείται. Αυτό επιτρέπει την άμεση αντιστοιχία των τελικών συντεταγμένων της ορθοφωτογραφίας με αυτές του νέφους. Έτσι οι μετασχηματισμοί για την αντίστροφη διαδικασία δεν θεωρούνται απαραίτητοι. Με αυτό το τρόπο γνωρίζοντας τη θέση της συντεταγμένης στην ορθοφωτογραφία είναι γνωστό και το σημείο του νέφους, το οποίο θα δώσει το χρώμα. Ωστόσο το σύστημα αρίθμησης των pixel μίας εικόνας διαφέρει από αυτό των συντεταγμένων. Σημαντική διαφορά αποτελούσε ότι η αρχή των pixel ξεκινούσε από πάνω αριστερά ενώ οι συντεταγμένες των σημείων στην εικόνα (x,y) είχαν ως αρχή κάτω αριστερά όπως φαίνεται στις εικόνες 5-1 και 5-2.

		axis 1		
		0	1	2
axis 0	0	0,0	0,1	0,2
	1	1,0	1,1	1,2
	2	2,0	2,1	2,2

Εικόνα 5-1: Αρχή των pixel



Εικόνα 5-2: Αρχή των συντεταγμένων

Για την εύρεση της θέσης κάθε σημείου αφαιρέθηκε η ελάχιστη τιμή του  $x$  και η ελάχιστη του  $y$  έτσι ώστε να γίνει μετάθεση του συστήματος των συντεταγμένων της ορθοφωτογραφίας στο σύστημα της εικόνας. Στη συνέχεια διαιρέθηκε με την εδαφοψηφίδα όπως φαίνεται παρακάτω. Αυτό συνέβη για να επιτευχθεί ο μετασχηματισμός της κλίμακας από τα πραγματικά μεγέθη (προβολές) στη κλίμακα αποτύπωσης της εικόνας. Εφόσον η αρχή των αξόνων στο ένα σύστημα ήταν πάνω αριστερά και στο άλλο κάτω αριστερά η τοποθέτηση των  $y$  ήταν κατοπτρική. Για την αποφυγή του προβλήματος αφαιρείται από το πλήθος των pixel στον άξονα  $y$  (total length) η εκάστοτε τιμή που υπολογίζεται στην εξίσωση  $(\frac{y_i - \min(y)}{gsd})$ .

Η θέση του pixel είναι:

$$\text{Pixel}[i,j] = \left( \frac{x_i - \min(x)}{gsd}, \text{total length} - \frac{y_i - \min(y)}{gsd} \right) \quad (5.50)$$

Να σημειωθεί ότι οι τιμές των  $i, j$  είναι ακέραιες τιμές.

Το χρώμα αποδόθηκε σύμφωνα με το χρώμα που είχε το αρχικό νέφος σημείων (πλήθος 1.290.000). Αναλυτικότερα, βρίσκοντας τη θέση κάθε σημείου στην εικόνα τοποθετούνταν και το χρώμα. Παρ' όλα αυτά στην τελική εικόνα είναι πιθανό να



υπάρχουν κάποια κενά που αποδίδονται με μαύρο χρώμα. Για αυτό στο πρόγραμμα υπάρχει η δυνατότητα να καλυφθούν τα κενά χρωματίζοντας τα μαύρα ριxel με τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής. Αναλυτικότερα, κάθε ριxel που εντοπίζεται χωρίς χρώμα, χρωματίζεται από τα οκτώ γειτονικά του. Η τιμή του χρώματος βρίσκεται από το μέσο όρο των οκτώ γειτονικών του.

## 5.2 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

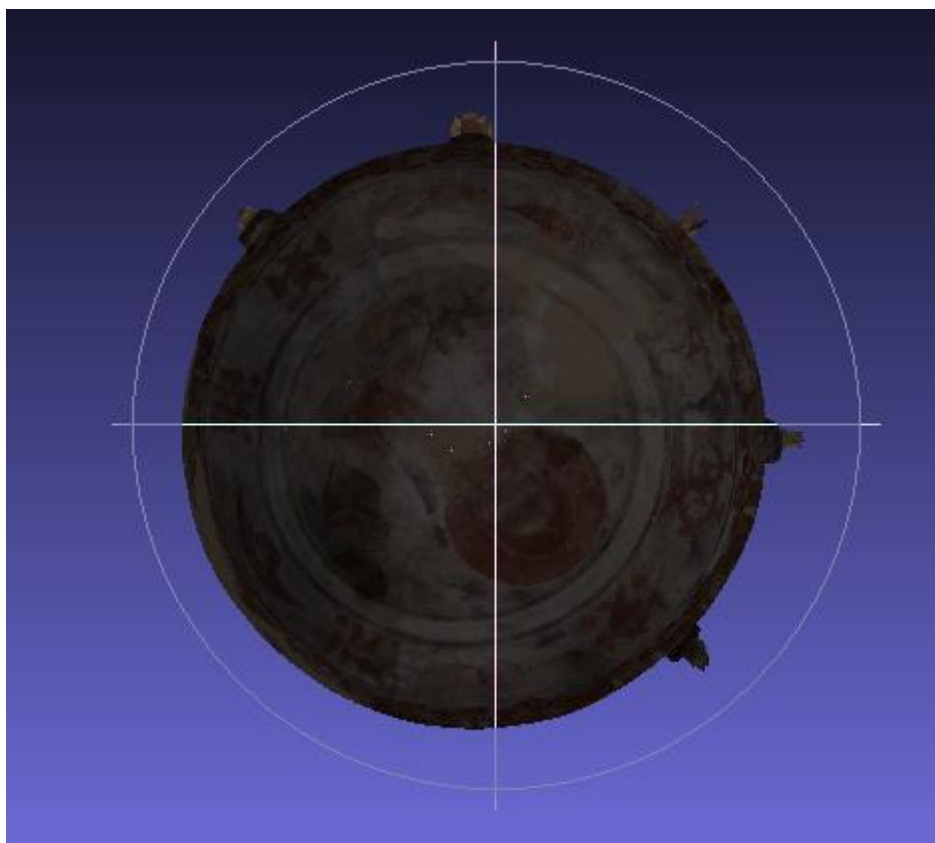
---

Το νέφος το οποίο χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία αναπτυγμάτων είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μη αναπτυκτής επιφάνειας το οποίο αναπτύχθηκε επιτυχώς. Το νέφος απεικονίζει το τρούλο της μονής Προφήτη Ηλία που βρίσκεται στη περιοχή Γεράκι του νομού Λακωνίας όπως φαίνεται στην εικόνα 5-3 και αποτελείται από 1.239.000 σημεία. Η πυκνότητα του νέφους είναι 6 χιλιοστά.

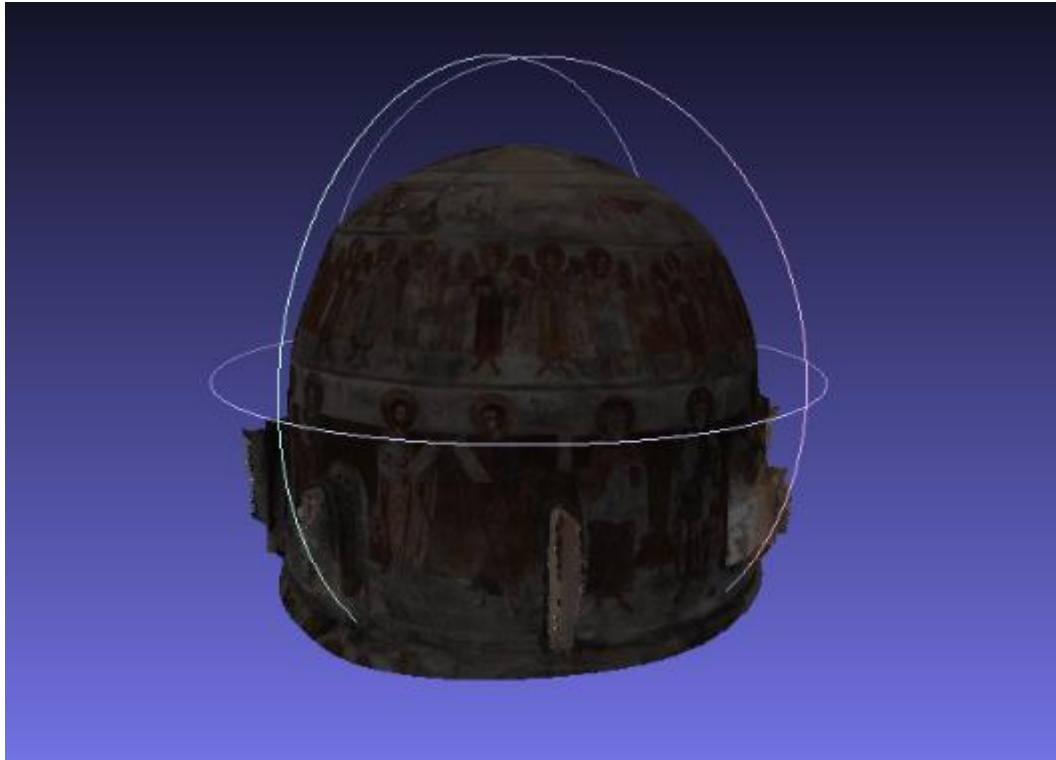


Εικόνα 5-3: Μονή Προφήτη Ηλία

Παρακάτω απεικονίζεται το νέφος στο χώρο. Πιο συγκεκριμένα στην εικόνα 5-4 φαίνεται η κάτοψη, ενώ στην εικόνα 5-5 εμφανίζεται μία πλάγια όψη του. Το νέφος παρουσιάζεται μετά το άνοιγμά του στο περιβάλλον Meshlab.



Εικόνα 5-4: Κάτοψη νέφους



Εικόνα 5-5: Όψη νέφους

### **5.2.1 Σχολιασμός αποτελεσμάτων με χρήση ελλειψοειδούς εκ περιστροφής**

Μετά την επιλογή του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής για μαθηματική επιφάνεια το αποτέλεσμα του προγράμματος be..chri.! φαίνεται στην Εικόνα 5-6.

```

Όλα τα παρακάτω αφορούν μια γρήγορη εκτίμηση προσωρινών τιμών ενός ελλειψοειδούς εκ
περιστροφής

Κέντρο ελλειψοειδούς      -0.0629,      0.0275,      -0.4738
Άξονες τριαξονικού ελλειψοειδούς      1.6793,      1.7210,      2.2828
Πίνακας στροφής
  0.80000,      0.59981,      -0.01495
  0.60000,      -0.79982,      0.01725
  0.00161,      0.02278,      0.99974
Ο άξονας περιστροφής είναι ο μεγαλύτερος, αναταξινόμηση.
Οι νέοι άξονες που επιλέχθηκαν ως προσωρινές τιμές
για την επίλυση της γενικής μεθόδου: [1.700152208596099, 1.700152208596099, 2.282771
282232162]
Ο πίνακας στροφής με νέα σωστή διάταξη
  [ [ 0.59981276  0.80000066 -0.01495312]
    [-0.79981618  0.59999696  0.01725483]
    [ 0.0227757  0.00161008  0.9997393 ] ]
Οι γωνίες euler (XYZ) που απαιτούνται για τη στροφή του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής
: -0.988788445517757, -0.8567825577875418, -53.138708151753974
-0.06291904549545732  0.027544445101450005 -0.4738346084969402  1.7209828060855743  2.2
82771282232162 -0.017257613979961426 -0.014953676607051186 Προσωρινές τιμές ελλειψοε
ιδούς εκ περιστροφής
Η διαφορά του σ0 a posteriori μεταξύ των συνορθώσεων είναι: 0.0009767384198395082
Αρα η προσέγγιση είναι ικανοποιητική!

Καλύτερες τιμές των παραμέτρων του ελλειψοειδούς -0.0664106291822179 0.0248193260212
84234 -0.504620161435659 1.6980466424709486 2.30949598802254 -0.017787061848695784 -
0.008929625267188244

Το σ0 a posteriori στο κανονικοποιημένο νέφος είναι είναι 0.035970226394846296 , και
στην μονάδα μέτρησης του νέφους είναι 0.037047141184200605 !

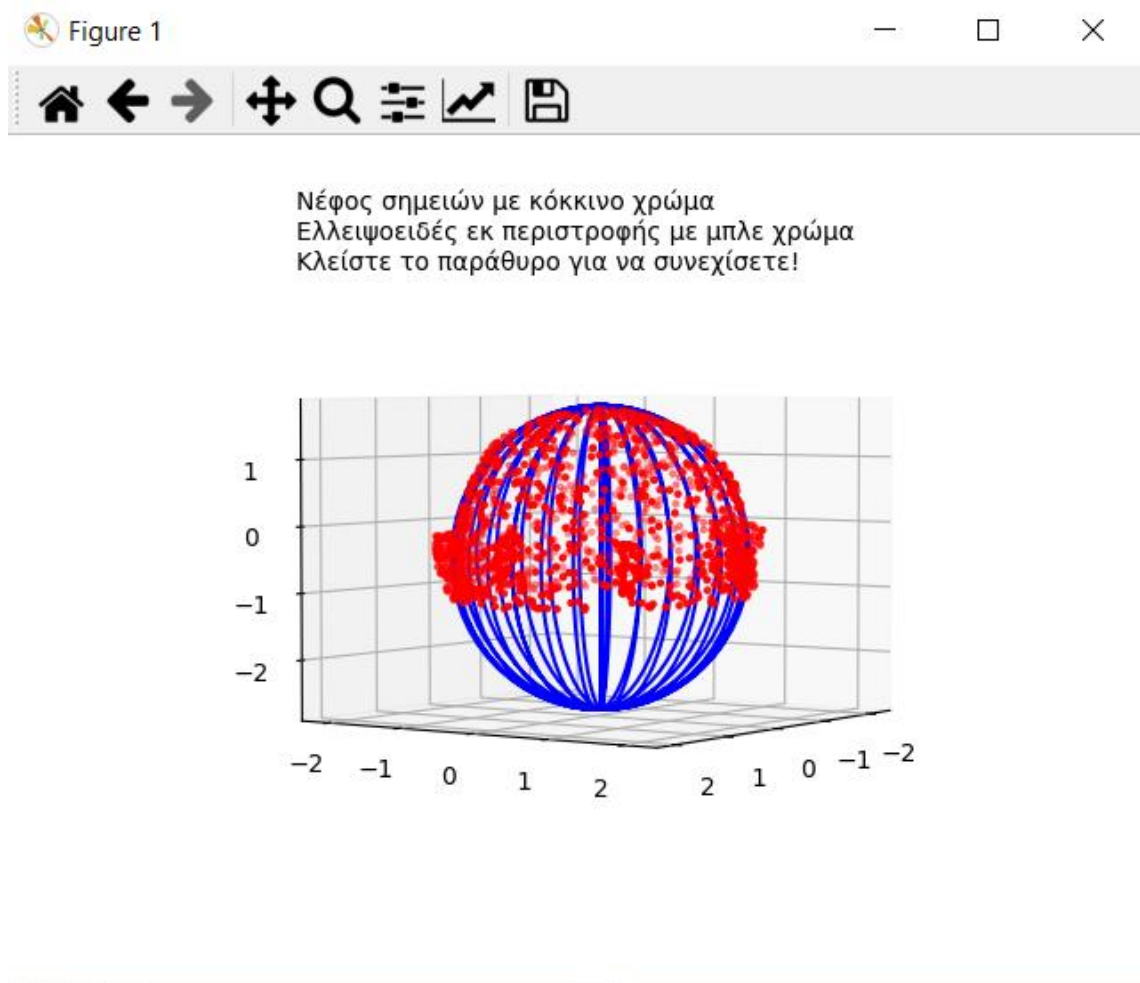
Αν θέλετε να δείτε το ελλειψοειδές εκ περιστροφής και το νέφος στον χώρο πατήστε en
ter αλλιώς οτιδήποτε άλλο.
>>

```

### Εικόνα 5-6: Αποτελέσματα προσέγγισης με ελλειψοειδές

Όπως φαίνεται παραπάνω για την προσέγγιση του νέφους παρατίθενται τα αποτελέσματα του τριαξονικού ελλειψοειδούς. Στη συνέχεια, μετά τον έλεγχο για αναταξινόμηση των αξόνων και αντικατάσταση των τιμών των δύο πρώτων αξόνων ώστε να είναι ίσοι, δημιουργούνται κάποιες από τις προσωρινές τιμές του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής. Ακολουθώντας, παρατίθεται και ο πίνακας στροφής με τη νέα διάταξη και υπολογίζονται οι γωνίες στροφής του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής. Οι γωνίες είναι εκφρασμένες σε μοίρες. Τέλος, γίνεται η συνόρθωση και κατόπιν πολλαπλών επαναλήψεων φαίνεται η διαφορά των τελευταίων δύο  $a$  posteriori  $\sigma_0$ . Το πρόγραμμα εμφανίζει το  $a$  posteriori  $\sigma_0$  της συνόρθωσης του κανονικοποιημένου νέφους αλλά και το  $a$  posteriori  $\sigma_0$  στη μονάδα μέτρησης του νέφους, δηλαδή στην πραγματική του κλίμακα. Η διαφορά αυτή είναι πολύ μικρή και δείχνει την σταθερότητα του προγράμματος στην επίλυση της συνόρθωσης καθώς και την επιτυχή προσέγγιση του νέφους από το ελλειψοειδές. Εφόσον η γενική μέθοδος χαρακτηρίζεται ως ασταθής μέθοδος προσέγγισης των καλύτερων τιμών των παραμέτρων σε δίκτυα με μεγάλους αριθμούς, η τόσο μικρή διαφορά μεταξύ των σφαλμάτων υποδηλώνει την ευστάθεια που έχει επιτευχθεί για την επίλυση. Έτσι παρουσιάζονται οι καλύτερες τιμές των παραμέτρων.

Στη συνέχεια εμφανίζεται το νέφος προσεγγισμένο με το ελλειψοειδές εκ περιστροφής όπως φαίνεται στην Εικόνα 5-7.



Εικόνα 5-7: Προσέγγιση τρούλου με ελλειψοειδές εκ περιστροφής

Με την παραπάνω εμφάνιση δίνεται η δυνατότητα ελέγχου του αποτελέσματος, για την αποφυγή κάποιου χονδροειδούς σφάλματος. Επίσης είναι χρήσιμο εργαλείο για τον εντοπισμό όσων τμημάτων του νέφους δεν εφαρμόζουν καλά και μπορούν να αφαιρεθούν ως περιττά. Στην εφαρμογή του τρούλου της μονής Προφήτη Ηλία φαίνεται ότι τα παράθυρα που εξέχουν από την μαθηματική επιφάνεια θα μπορούσαν να αφαιρεθούν.

Σειρά έχει η προβολή των σημείων πάνω στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής. Έτσι, γίνεται η μετατροπή των καρτεσιανών συντεταγμένων  $X, Y, Z$  του νέφους σε πολικές συντεταγμένες. Η μετατροπή των συντεταγμένων γίνεται με χρήση των παρακάτω τύπων. Να σημειωθεί ότι η διαδικασία είναι επαναληπτική για τον προσδιορισμό των  $\phi$ .

Η τιμή του  $\lambda$  υπολογίζεται μία φορά σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\lambda = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \quad (5.51)$$

Η αρχική τιμή του  $\phi$  υπολογίζεται από:

$$\varphi_0 = \tan^{-1} \left( \frac{z}{(1-e^2)p} \right) \quad (5.52)$$

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.53)$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (5.54)$$

Για τον υπολογισμό του  $\varphi$  χρησιμοποιούνται οι παρακάτω εξισώσεις με επαναληπτική διαδικασία:

$$N_i = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_{(i-1)}}} \quad (5.55)$$

$$h_i = \frac{p}{\cos(\varphi_{i-1})} - N_i \quad (5.56)$$

$$\varphi_i = \tan^{-1} \left[ \frac{z}{1 - e^2 \left( \frac{N_i}{N_i + h_i} \right) p} \right] \quad (5.57)$$

Η διαδικασία προσέγγισης του  $\varphi$  σταματά όταν η διαφορά των δύο διαδοχικών επαναλήψεων είναι μικρότερη από 0.00001. Αναλυτικότερα  $|\varphi_i - \varphi_{i-1}| \leq 0.00001$ .

Στην συνέχεια ακολουθεί η εξαγωγή του αναπτύγματος με τη βοήθεια της Ορθής Μερκατορικής προβολής όπως αναλύθηκε στο κεφάλαιο 4, εδάφιο (4.4.2). Το πρόγραμμα δίνει μία προτεινόμενη τιμή της εδαφοψηφίδας και αφήνει την επιλογή στο χρήστη. Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα με τη χρήση δύο διαφορετικών μεγεθών εδαφοψηφίδας. Για την πρώτη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε η ελάχιστη τιμή που προτείνει το πρόγραμμα (Εικόνα 5-8). Με νέφος πυκνότητας ανά 6mm το πρόγραμμα δίνει εδαφοψηφίδα των 1.4cm, ικανοποιητική για κλίμακα απόδοσης 1/60, ωστόσο η τελική επιλογή είναι στο χρήστη.

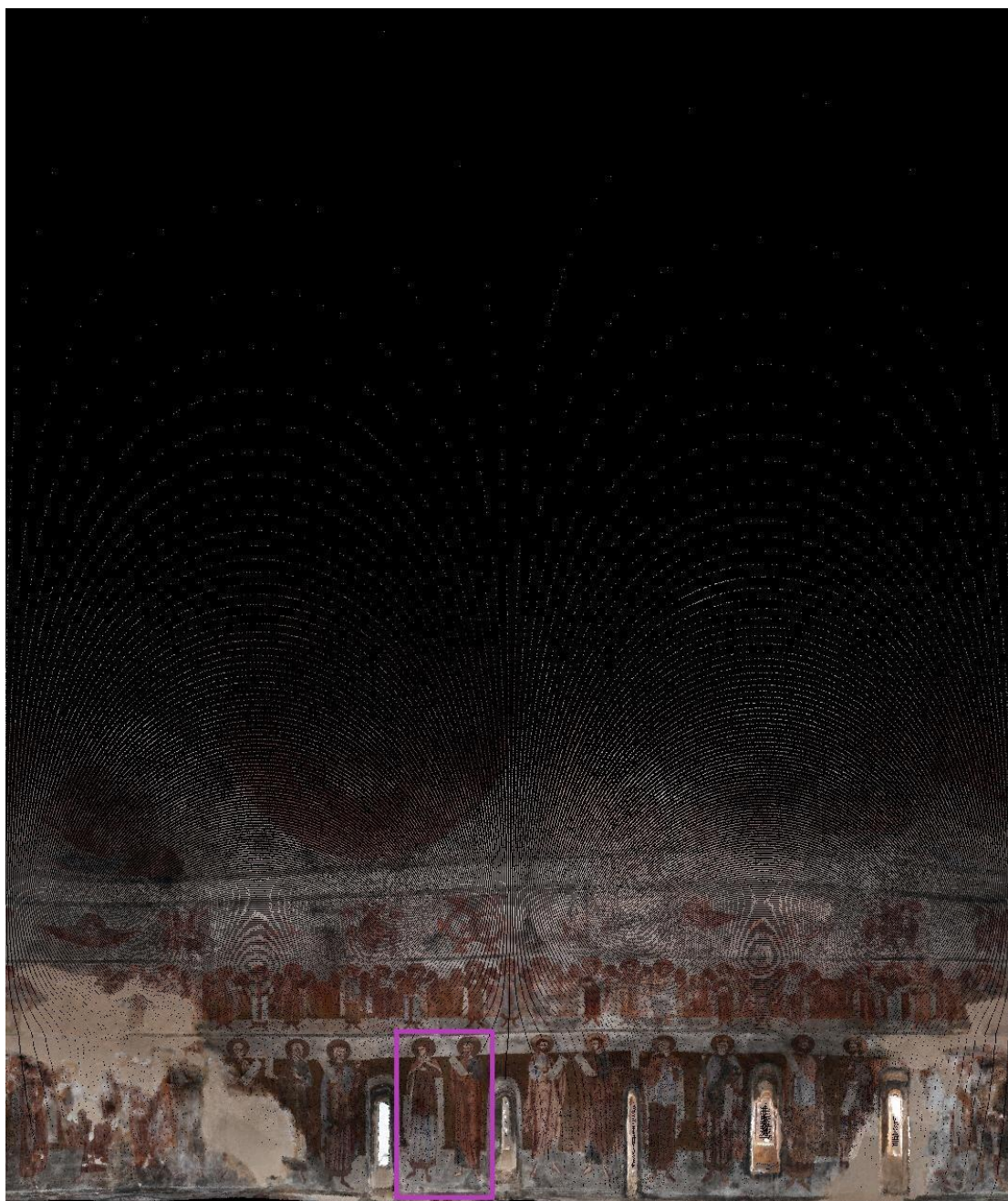
```

Η ελάχιστη εδαφοψηφίδα είναι 0.0142642 στην μονάδα που έχει το αρχείο που εισήχθη.
Όσο μεγαλύτερη είναι η εδαφοψηφίδα τόσο μικρότερη είναι η ανάλυση στην εικόνα.

Δώστε την εδαφοψηφίδα που θέλετε.
>>0.014
>>> |

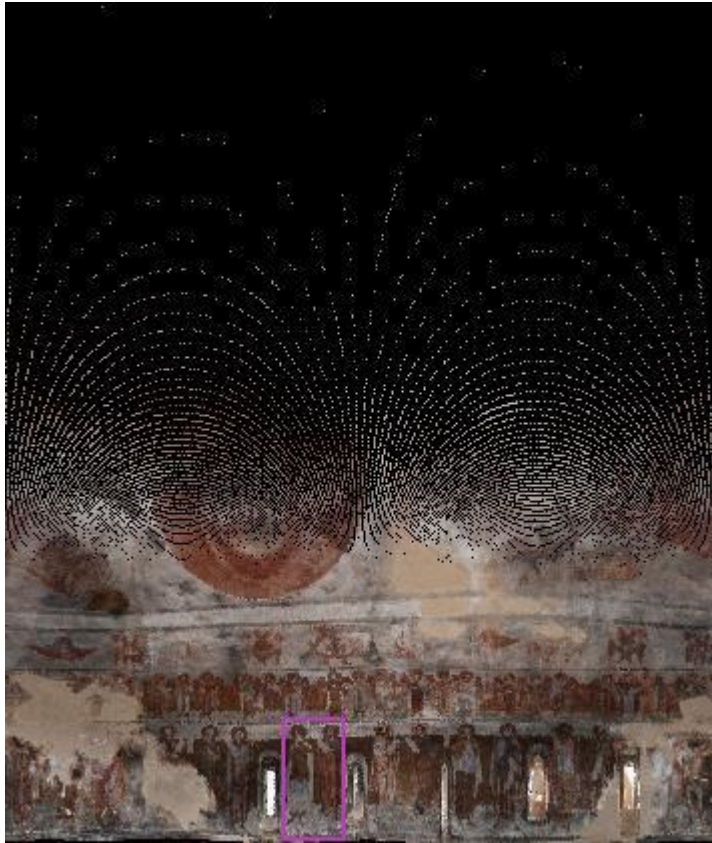
```

Εικόνα 5-8: Εδαφοψηφίδα 0.014



Εικόνα 5-9: Ανάπτυγμα με χρήση ΟΜΠ και εδαφοψηφίδα 0.014

Η παραπάνω απόδοση αποτελεί το ανάπτυγμα του τρούλου της Μονής Προφήτη Ηλία. Το αποτέλεσμα είναι ικανοποιητικό καθώς οι μορφές διατηρούνται σύμφωνα με τα αρχικά δεδομένα και οι έντονες παραμορφώσεις παρουσιάζονται κοντά στους πόλους. Για αυτό το λόγο δικαιολογείται και το μεγάλο μέρος μαύρου χρώματος που παρουσιάζεται στο πάνω μέρος της εικόνας.

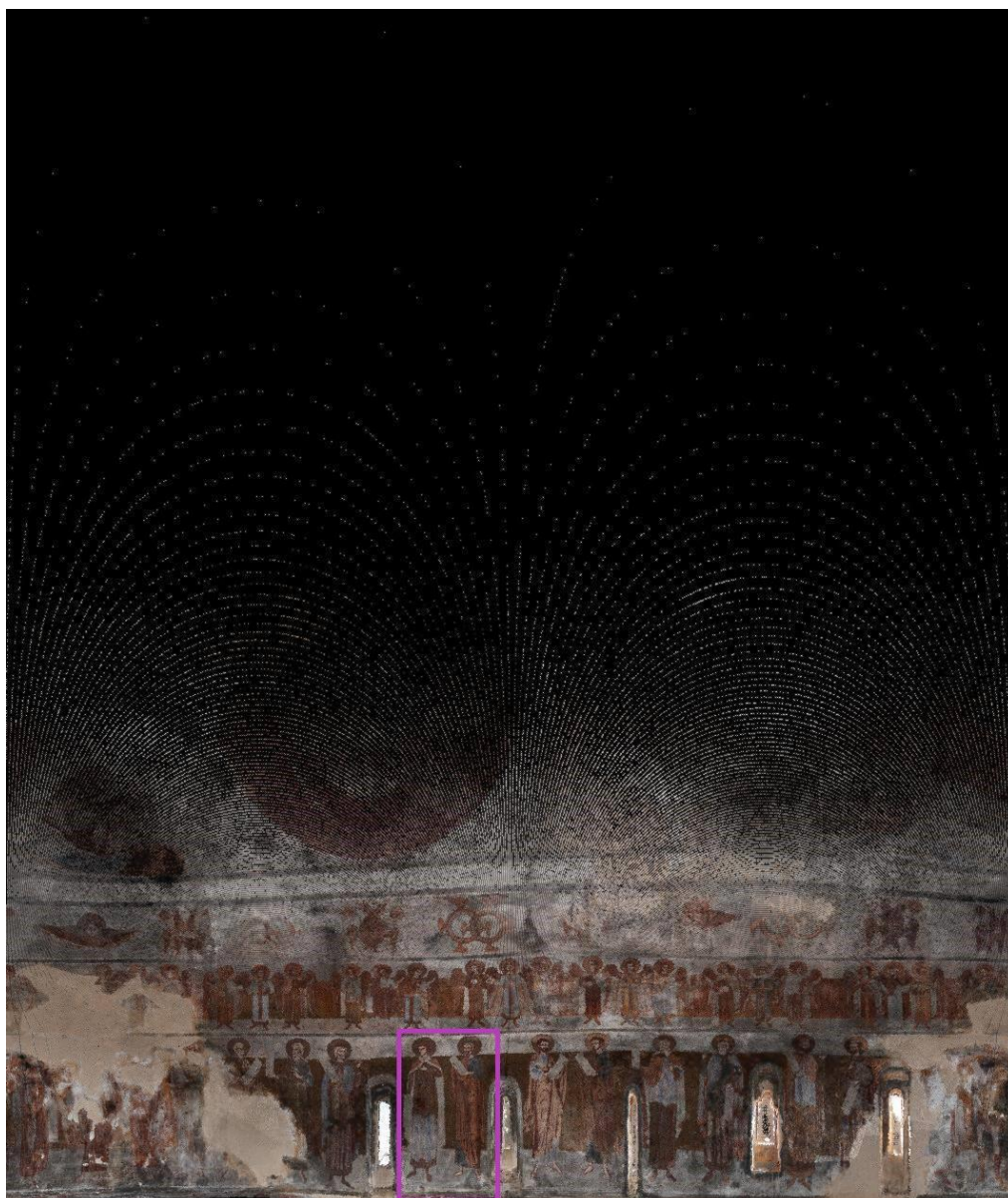


Εικόνα 5-10: Ανάπτυγμα με χρήση ΟΜΠ και εδαφοψηφίδα 0.042

Με χρήση εδαφοψηφίδας 0.042 το αποτέλεσμα δεν είναι ικανοποιητικό αν και ήταν αναμενόμενο, διότι δεν αξιοποιείται πλήρως η αρχική πληροφορία. Αυτό συμβαίνει διότι πολλά σημεία χωρικά τοποθετούνται σε ένα pixel με αποτέλεσμα να μη γίνεται σωστά η απόδοση του χρώματος. Έτσι είναι χρήσιμο να ακολουθηθεί η πρόταση του προγράμματος καθώς λαμβάνει υπόψιν το πλήθος των σημείων που εισάγονται σε συνδυασμό με το μέγεθος της εικόνας που θα αποτυπωθούν.

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 5-9 υπάρχουν πολλά pixel που αποτυπώνονται με μαύρο χρώμα λόγω της έλλειψης πληροφορίας. Για καλύτερα οπτικά αποτελέσματα χρησιμοποιείται το πρόγραμμα [betterphoto.py](http://betterphoto.py) που χρησιμοποιεί τα οκτώ γειτονικά pixel για την επίλυση του προβλήματος (Εικόνα 5-11).





Εικόνα 5-11: Πύκνωση χρώματος με παρεμβολή στην εικόνα με εδαφοψηφίδα 0.014

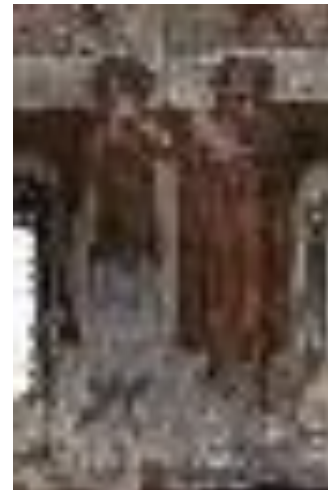
Είναι εμφανής η μείωση των μαύρων pixel και η ευκολότερη κατανόηση των μορφών. Στην εικόνα 5-12 φαίνονται κάποιες λεπτομέρειες του αναπτύγματος σε μεγέθυνση για καλύτερη σύγκριση των αποτελεσμάτων.



A) εδαφοψηφίδα 0.014



B) εδαφοψηφίδα 0.014 με  
πύκνωση χρώματος



Γ) εδαφοψηφίδα 0.042

Εικόνα 5-12: Σύγκριση τμήματος εικόνων

Στην Εικόνα 5-12A φαίνεται το πρόβλημα των μαύρων ρixel το οποίο δεν υπάρχει στην Εικόνα 5-12BB και 5-12Γ. Ωστόσο, στην περίπτωση B η απόδοση έχει γίνει σωστά ενώ ταυτόχρονα έχει διατηρηθεί η λεπτομέρεια που δίνει το πυκνό νέφος σημείων. Αντίθετα στην περίπτωση Γ η μεγάλη εδαφοψηφίδα δεν δημιουργεί το πρόβλημα των μαύρων ρixel ωστόσο μειώνει σημαντικά τη λεπτομέρεια και την ευκολία κατανόησης των μορφών.

### 5.2.2 Σχολιασμός αποτελεσμάτων με χρήση σφαίρας

Μετά την επιλογή της σφαίρας για μαθηματική επιφάνεια το αποτέλεσμα του προγράμματος be..chri.! φαίνεται στην Εικόνα 5-13:

```
Για τον υπολογισμό των καλύτερων τιμών των παραμέτρων έγιναν 0 επαναλήψεις.  
Το κέντρο της σφαίρας είναι (-0.063,0.027,-0.163) και η ακτίνα 1.744  
Το  $\sigma_0$  a posteriori της προσέγγισης του κανονικοποιημένου νέφους με αυτή την σφαίρα είναι  
0.05827948457079033 , και στην μονάδα μέτρησης του νέφους είναι 0.06002431759356004 !  
Αν θέλετε να δείτε την σφαίρα και το νέφος στον χώρο πατήστε enter αλλιώς οτιδήποτε άλλ  
ο  
>>|
```

Εικόνα 5-13: Αποτέλεσμα προσέγγισης με χρήση σφαίρας

Όπως φαίνεται παραπάνω για την προσέγγιση του νέφους μέσω της σφαίρας υπολογίζονται οι καλύτερες τιμές των παραμέτρων αλλά και το  $\sigma_0$  a posteriori του κανονικοποιημένου νέφους όπως και αυτό στις πραγματικές μονάδες του νέφους. Η διαφορά αυτή είναι πολύ μικρή και δείχνει την σταθερότητα του προγράμματος στην επίλυση της συνόρθωσης καθώς και την επιτυχή προσέγγιση του νέφους από τη σφαίρα. Συμπεραίνεται λοιπόν, ότι η μέθοδος που εφαρμόζεται για τη προσέγγιση της επιφάνειας είναι αρκετά καλή και προσαρμόζει με μεγάλη ακρίβεια στο νέφος. Ωστόσο το σφάλμα της προσέγγισης είναι μεγαλύτερο από αυτό της προσέγγισης με ελλειψοειδές όπως ήταν αναμενόμενο. Αυτό συμβαίνει διότι, το

ελλειψοειδές εκ περιστροφής λόγω της μεταβλητής καμπυλότητας προσαρμόζεται με καλύτερη ακρίβεια στα δεδομένα. Έναντι του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, η σφαίρα έχει ευκολότερη αλλά και γρηγορότερη προσέγγιση του νέφους λόγω του μικρότερου αριθμού προσδιοριζόμενων συντελεστών. Μειονέκτημά της θεωρείται το γεγονός ότι έχει σταθερή καμπυλότητα και η προσέγγιση ενώ είναι ικανοποιητική μειονεκτεί έναντι του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής.

Σειρά έχει η προβολή των σημείων πάνω στη σφαίρα. Έτσι, γίνεται η μετατροπή των καρτεσιανών συντεταγμένων X,Y,Z του νέφους σε πολικές συντεταγμένες. Η μετατροπή των συτεταγμένων γίνεται με χρήση των παρακάτω σχέσεων:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5.58)$$

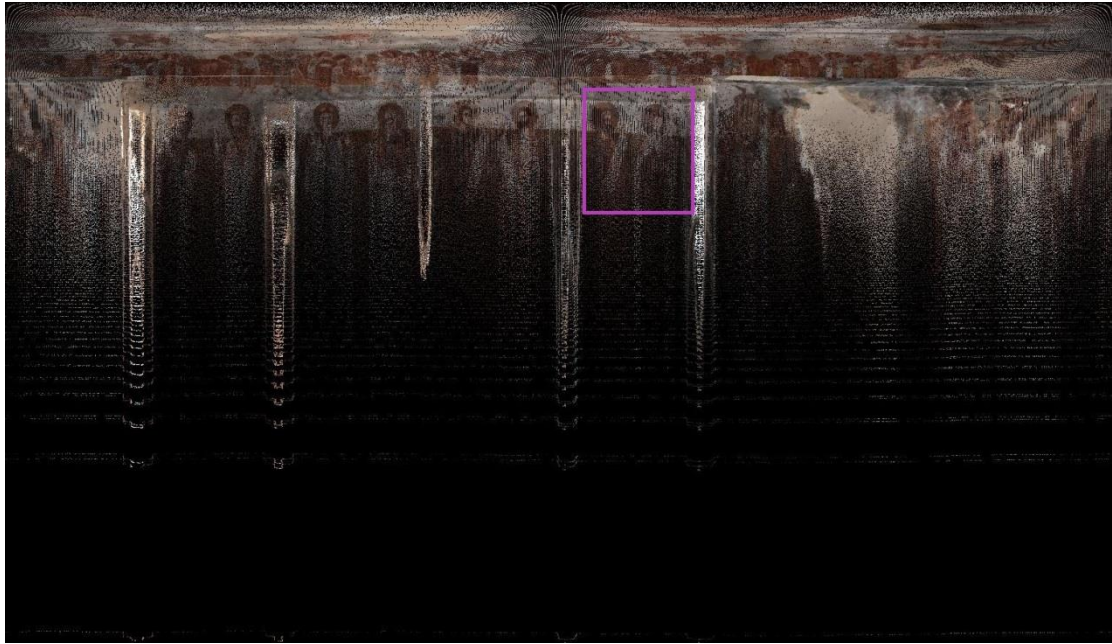
$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (5.59)$$

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{r^2}} = \cos^{-1} \frac{z}{r} \quad (5.60)$$

Στην συνέχεια, ακολουθεί η εξαγωγή του αναπτύγματος με τη βοήθεια της Ορθής Μερκατορικής προβολής όπως αναλύθηκε στο κεφάλαιο 4, εδάφιο (4.4.2). Το πρόγραμμα δίνει μία προτεινόμενη τιμή της εδαφοψηφίδας και αφήνει την επιλογή στο χρήστη. Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα με τη χρήση δύο διαφορετικών μεγεθών εδαφοψηφίδας. Για την πρώτη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε η ελάχιστη τιμή που προτείνει το πρόγραμμα (Εικόνα 5-14). Σύμφωνα με την τιμή αυτή, για νέφος πυκνότητας 6mm και εδαφοψηφίδα 0.02 η κλίμακα απόδοσης είναι 1/80.

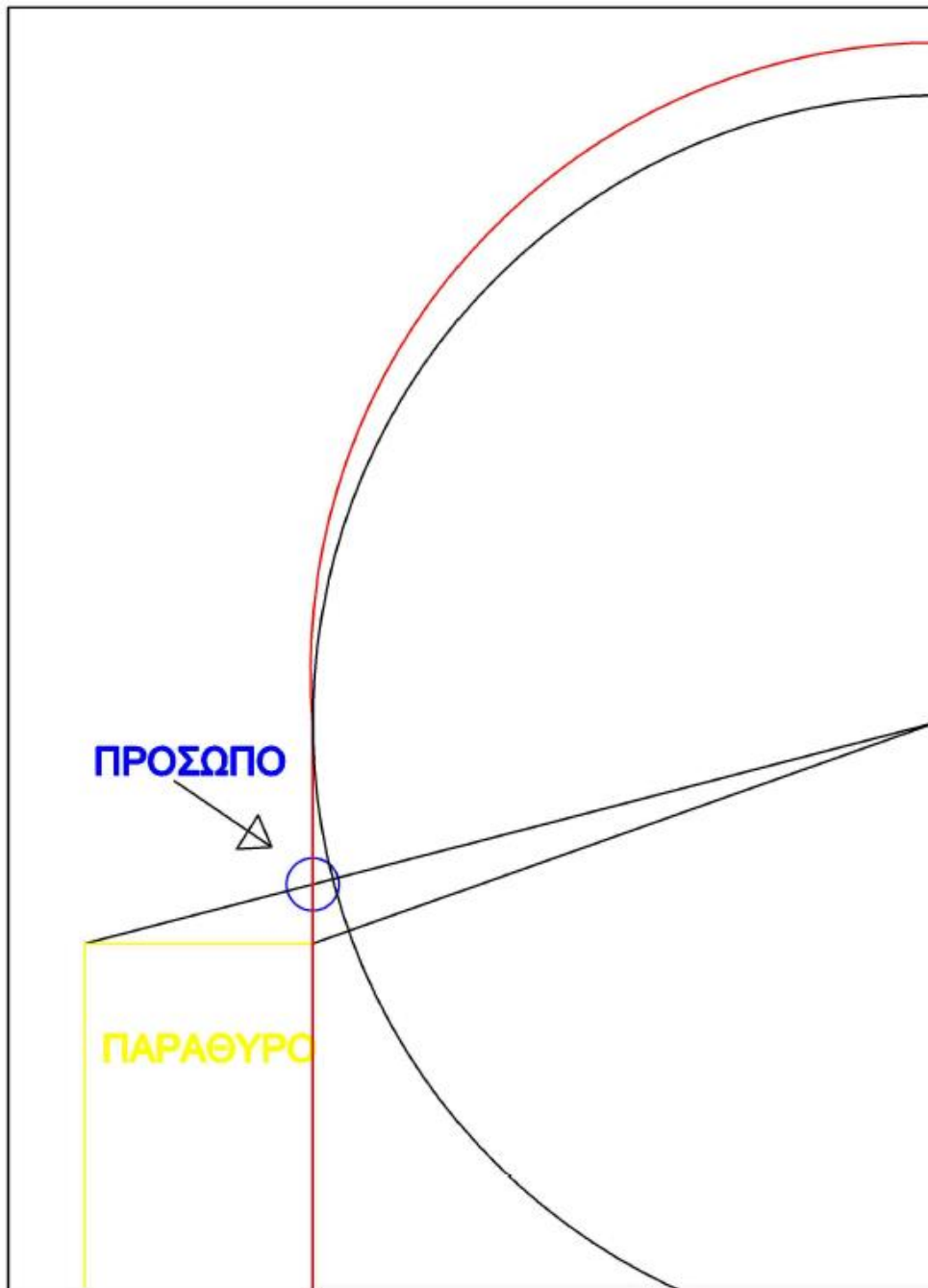
```
Η ελάχιστη εδαφοψηφίδα είναι 0.023648986473 στην μονάδα που έχει το αρχείο που εισήχθη.  
Όσο μεγαλύτερη είναι η εδαφοψηφίδα τόσο μικρότερη είναι η ανάλυση στην εικόνα.  
Δώστε την εδαφοψηφίδα που θέλετε.  
>>0.02  
>>> |
```

Εικόνα 5-14: Εδαφοψηφίδα 0.02



Εικόνα 5-15: Ανάπτυγμα με χρήση ΟΜΠ και εδαφοψηφίδα 0.02

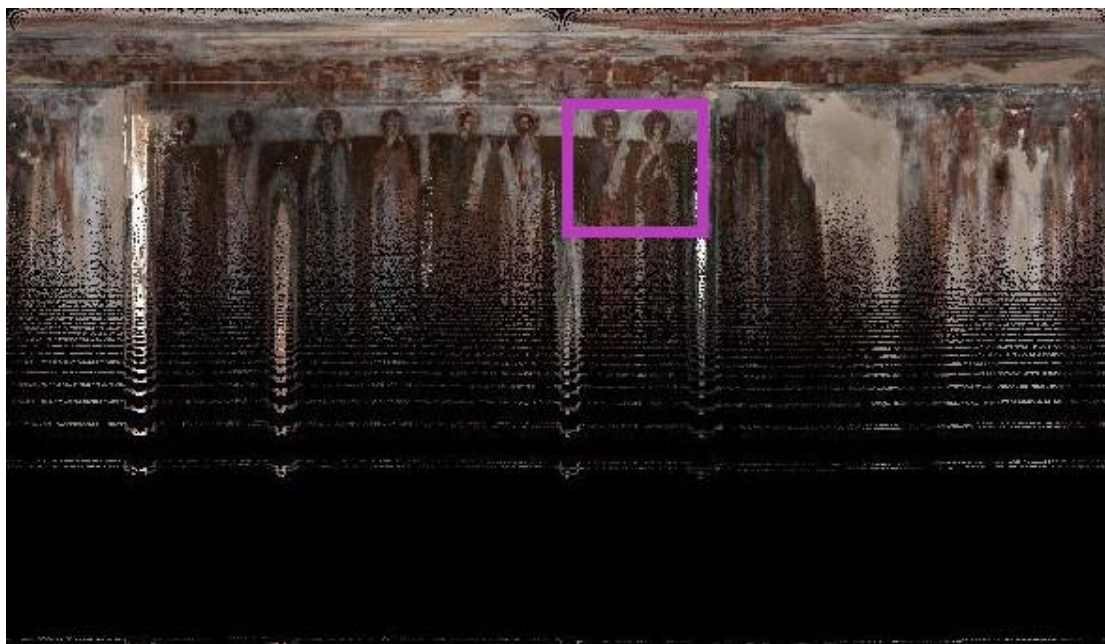
Το παραπάνω αποτελεί το ανάπτυγμα του τρούλου της Μονής Προφήτη Ηλία με εδαφοψηφίδα 0.02. Το αποτέλεσμα δεν είναι ικανοποιητικό σε όλο το μήκος καθώς τα παράθυρα του τρούλου δεν αποτυπώνονται ορθά σε αντίθεση με τα πρόσωπα στα οποία έχει διατηρηθεί η συμμορφία. Παρ' όλα αυτά, τα σώματα των Αγίων φαίνεται να έχουν παραμορφωθεί καθώς βρίσκονται σε μια περιοχή πάνω από τον πόλο και η παραμόρφωση είναι μεγάλη. Όσον αφορά στα παράθυρα, η παραμόρφωση είναι λογική και οφείλεται στις προβολές. Η ερμηνεία ακολουθεί στην Εικόνα 5-16.



Εικόνα 5-16: Αναπαράσταση προβολής

Τα παράθυρα βρίσκονται νοτιότερα σε σχέση με τα πρόσωπα των αγίων. Ωστόσο κατά τη δημιουργία της προβολής, το εξωτερικό μέρος του παραθύρου που εξέρχει από τη σφαίρα, προβάλλεται στο ίδιο ύψος με το πρόσωπο. Με μπλε χρώμα φαίνεται η θέση του προσώπου του Αγίου και με κίτρινο το παράθυρο. Αντίστοιχα, με κόκκινο χρώμα αναπαριστάται ο τρούλος. Έτσι, η τομή της ακτίνας από την άκρη του παραθύρου με τη σφαίρα (μαύρο ημικύκλιο) και η τομή της ακτίνας του κέντρου του προσώπου με τη σφαίρα βρίσκονται στο ίδιο ακριβώς σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας. Για να αποφευχθεί η λάθος τοποθέτηση των αντικειμένων στην προβολή καλό θα ήταν να γίνει επεξεργασία στο αρχικό νέφος και να αφαιρεθούν τα παράθυρα, στη συνέχεια να συνορθωθεί εκ νέου. Το παράδειγμα

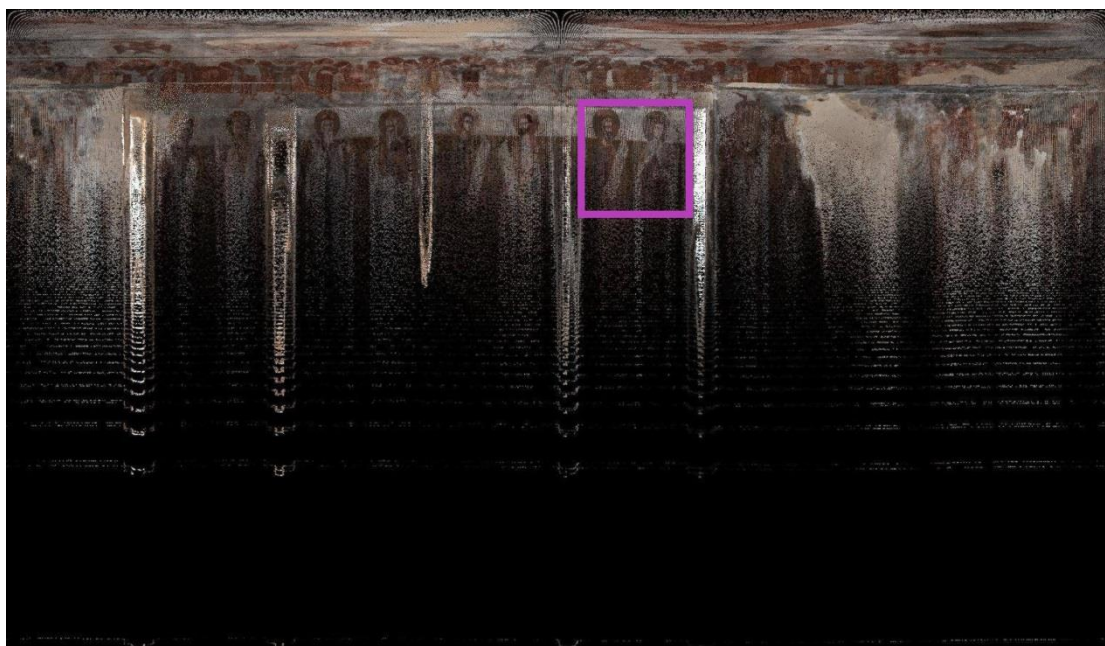
είναι ενδεικτικό και αφορά στις σχετικές θέσεις για την καλύτερη κατανόηση της Εικόνας 5-17.



Εικόνα 5-17: Ανάπτυγμα με χρήση ΟΜΠ και εδαφοψηφίδα 0.06

Με χρήση εδαφοψηφίδας 0.06 το αποτέλεσμα δεν είναι ικανοποιητικό αν και ήταν αναμενόμενο, διότι δεν αξιοποιείται πλήρως η αρχική πληροφορία. Αυτό συμβαίνει διότι πολλά σημεία χωρικά τοποθετούνται σε ένα ρixel με αποτέλεσμα να μη γίνεται σωστά η απόδοση του χρώματος. Ενώ το χρώμα φαίνεται πιο έντονο, η ακρίβεια στην προσέγγιση των μορφών έχει μειωθεί σημαντικά.

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 5-15 υπάρχουν πολλά ρixel που αποτυπώνονται με μαύρο χρώμα λόγω της έλλειψης πληροφορίας. Για καλύτερα οπτικά αποτελέσματα χρησιμοποιείται το πρόγραμμα [betterphoto.py](http://betterphoto.py) που χρησιμοποιεί τα οκτώ γειτονικά ρixel για την επίλυση του προβλήματος (Εικόνα 5-18).



Εικόνα 5-18 Πύκνωση χρώματος με παρεμβολή στην εικόνα με εδαφοψηφίδα 0.02

Είναι εμφανής η μείωση των μαύρων ρixel και η ευκολότερη κατανόηση των μορφών. Στις εικόνες 5-19 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σε μεγέθυνση για καλύτερη σύγκριση των αποτελεσμάτων.



Α) εδαφοψηφίδα 0.02

Β) εδαφοψηφίδα 0.02 με

Γ) εδαφοψηφίδα 0.06

πύκνωση χρώματος

Εικόνα 5-19: Σύγκριση τμήματος εικόνων στη σφαίρα

Στην Εικόνα 5-19Α φαίνεται το πρόβλημα των μαύρων ρixel το οποίο έχει μειωθεί στην Εικόνα 5-19Β ενώ δεν υπάρχει στην Εικόνα 5-19Γ. Ωστόσο, στην περίπτωση Β η απόδοση έχει γίνει σωστά ενώ ταυτόχρονα έχει διατηρηθεί η λεπτομέρεια που δίνει το πυκνό νέφος σημείων έχοντας μικρά κενά τα οποία δεν εμποδίζουν στην μελέτη του αναπτύγματος. Αντίθετα στην περίπτωση Γ η μεγάλη εδαφοψηφίδα δεν δημιουργεί το πρόβλημα των μαύρων ρixel ωστόσο μειώνει σημαντικά τη λεπτομέρεια και την ακρίβεια διατήρησης των μορφών. Η μη συνολική κάλυψη των μαύρων στην περίπτωση Β οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαύρες λωρίδες αποτελούνται από δύο μαύρα ρixel στη σειρά. Έτσι, επειδή το betterphoto.py χρησιμοποιεί για τον χρωματισμό των ρixel, παρεμβολή των οκτώ γειτονικών, ένα σε κάθε κατεύθυνση, δεν αποδίδει ικανοποιητικό χρώμα. Αναλυτικότερα, το χρώμα

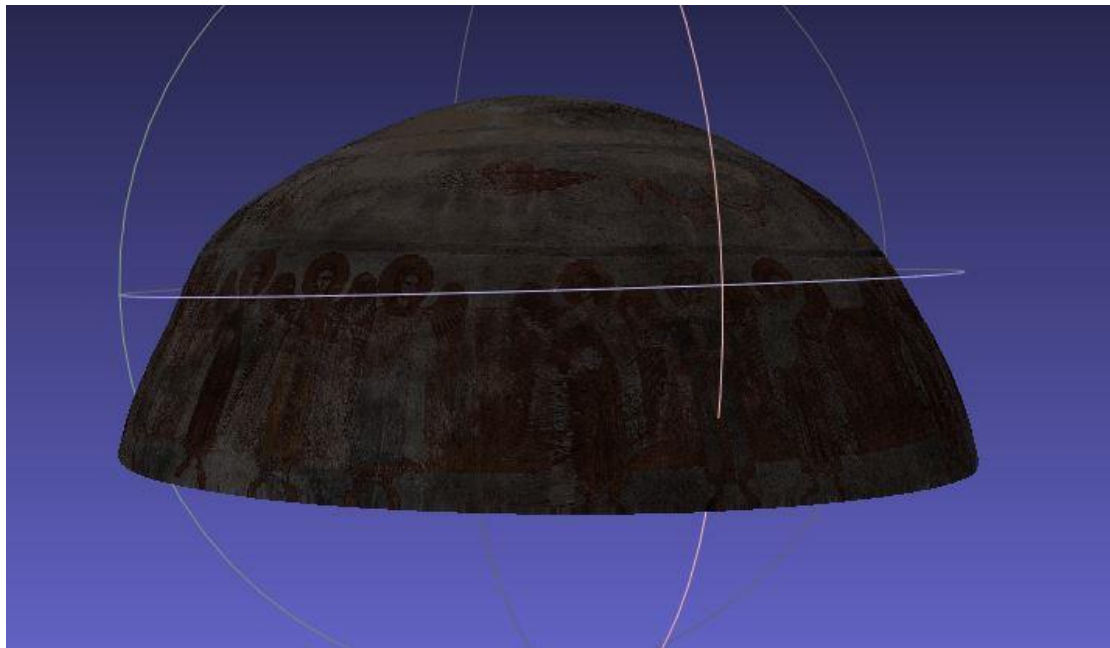
που προκύπτει από τον μέσο όρο είναι πιο κοντά στο μαύρο. Λύση του προβλήματος θα αποτελούσε η παρεμβολή στα δεκαέξι γειτονικά pixel.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στα παραπάνω παραδείγματα, η επιλογή της εδαφοψηφίδας έγινε με σκοπό την ανάδειξη των δυνατοτήτων του προγράμματος. Χρήσιμο θεωρείται σε εργασίες με συγκεκριμένη κλίμακα απόδοσης η εδαφοψηφίδα να επιλέγεται σύμφωνα με το σκοπό αυτό, είτε με τις εκάστοτε απαιτήσεις του χρήστη.

### **5.3 Απομόνωση σφαιρικού τμήματος τρούλου**

---

Παρατηρώντας το νέφος και τα παραπάνω αποτελέσματα γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η καλύτερη δυνατή προσέγγιση επιτυγχάνεται απομονώνοντας την αναπτυσσόμενη επιφάνεια (κύλινδρο) από τη μη αναπτυσσόμενη (σφαίρα). Πιο συγκεκριμένα, το παραπάνω νέφος αποτελείται από ένα τμήμα το οποίο μοιάζει με τμήμα σφαίρας, ενώ το υπόλοιπο μέρος προσεγγίζεται καλύτερα με κύλινδρο. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκε το περιβάλλον Meshlab σύμφωνα με το οποίο κόπηκε το σφαιρικό τμήμα του νέφους όπως φαίνεται στην εικόνα 5-20.



Εικόνα 5-20: Τμήμα τρούλου

Η προσέγγιση του τμήματος του τρούλου έγινε και με ελλειψοειδές εκ περιστροφής και με σφαίρα και τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω.

#### **5.3.1 Σχολιασμός αποτελεσμάτων τμήματος τρούλου με χρήση σφαίρας**

---

Μετά την επιλογή της σφαίρας ως μαθηματική επιφάνεια το αποτέλεσμα του προγράμματος be..chri.! φαίνεται στην Εικόνα 5-21:



Για τον υπολογισμό των καλύτερων τιμών των παραμέτρων έγιναν 1 επαναλήψεις.

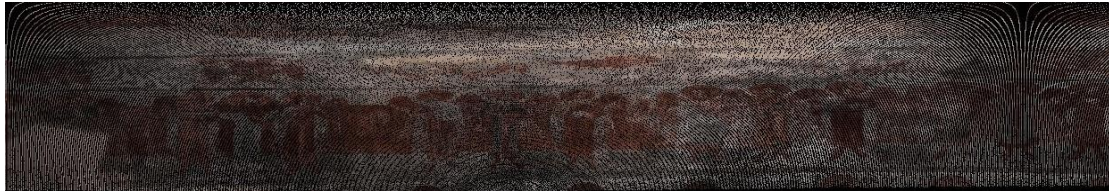
Το κέντρο της σφαίρας είναι (0.077,0.017,-1.235) και η ακτίνα 2.198

Το σθ αποsteriori της προσέγγισης του κανονικοποιημένου νέφους με αυτή την σφαίρα είναι 0.010196422852482439 , και στην μονάδα μέτρησης του νέφους είναι 0.007505532197700271 !

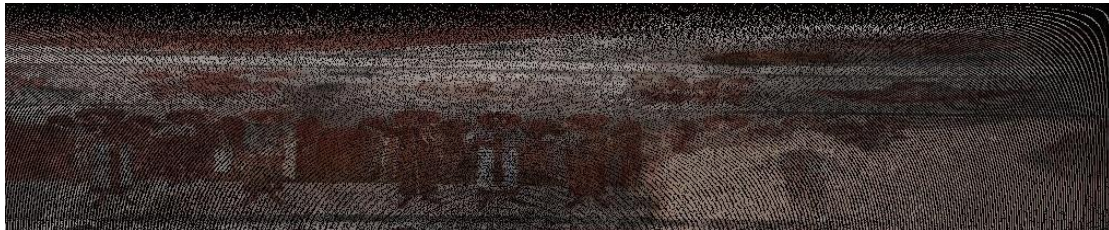
Εικόνα 5-21: Αποτέλεσμα προσέγγισης τμήματος τρούλου με χρήση σφαίρας

Όπως φαίνεται παραπάνω το  $\sigma_{\theta}$  posteriori είναι 0.008m ενώ στην περίπτωση προσέγγισης ολόκληρου του νέφους με σφαίρα η τιμή ήταν 0.06m (εδάφιο 5.2.2). Η διαφορά αυτή δείχνει την καλύτερη προσέγγιση που επιτυγχάνεται επιλέγοντας πιο προσεκτικά τα δεδομένα εισαγωγής.

Στη συνέχεια δημιουργείται το ανάπτυγμα με τη χρήση της Ορθής Μερκατορικής Προβολής. Το ανάπτυγμα δημιουργήθηκε με επιλογή εδαφοψηφίδας 0.014 σε νέφος με πυκνότητα 6mm και κλίμακα απόδοσης 1/60. Το αποτέλεσμα φαίνεται σε δύο εικόνες για καλύτερη ευκρίνεια αποτελεσμάτων.



Εικόνα 5-22: Ανάπτυγμα τμήματος τρούλου με χρήση σφαίρας 1



Εικόνα 5-23: Ανάπτυγμα τμήματος τρούλου με χρήση σφαίρας 2

Όπως φαίνεται παραπάνω η συμμορφία έχει διατηρηθεί σε όλο το μήκος. Η παραμόρφωση που εμφανίζεται στους πόλους είναι εξίσου αναμενόμενη. Ωστόσο, συγκρίνοντας το ανάπτυγμα που δημιουργήθηκε από όλο το νέφος με αυτό, φαίνεται ότι η παραμόρφωση των αγίων είναι μικρότερη. Παρ' όλα αυτά, τα μαύρα pixel είναι αρκετά και για αυτό γίνεται χρήση του better\_photo για καλύτερα οπτικά αποτελέσματα.



Εικόνα 5-24: Πύκνωση χρώματος τμήματος σφαίρας 1



Εικόνα 5-25: Πύκνωση χρώματος τμήματος σφαίρας 2

Με τη πύκνωση του χρώματος τα μαύρα pixel έχουν μειωθεί αρκετά και γίνεται ευκρινέστερη η ποιότητα της απόδοσης.

### 5.3.2 Σχολιασμός αποτελεσμάτων τμήματος τρούλου με χρήση ελλειψοειδούς εκ περιστροφής

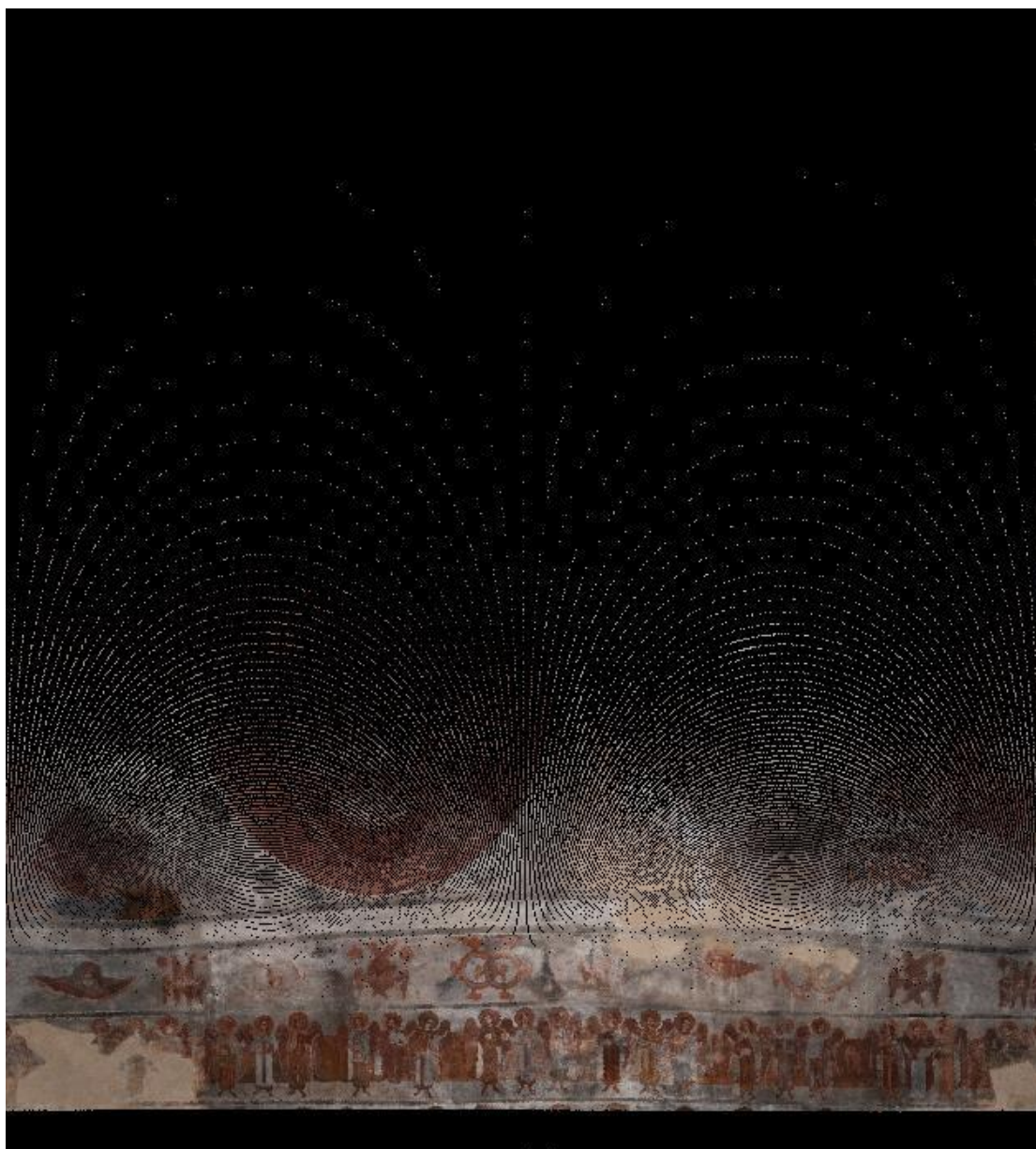
Μετά την επιλογή του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ως μαθηματική επιφάνεια το αποτέλεσμα του προγράμματος be..chri.! φαίνεται στην Εικόνα 5-26:

```
Καλύτερες τιμές των παραμέτρων του ελλειψοειδούς 0.05172046599647469 0.022102901691369182 -1  
.1621544591946322 2.1881324021272084 2.10291927069013 3.0628345006008226 0.38055460472445196  
Το  $\sigma_0$  a posteriori στο κανονικοποιημένο νέφος είναι είναι 0.008743008614679864 , και στην μο  
νάδα μέτρησης του νέφους είναι 0.006435681769148518 !
```

Εικόνα 5-26: Αποτέλεσμα προσέγγισης τμήματος τρούλου με χρήση ελλειψοειδούς εκ περιστροφής

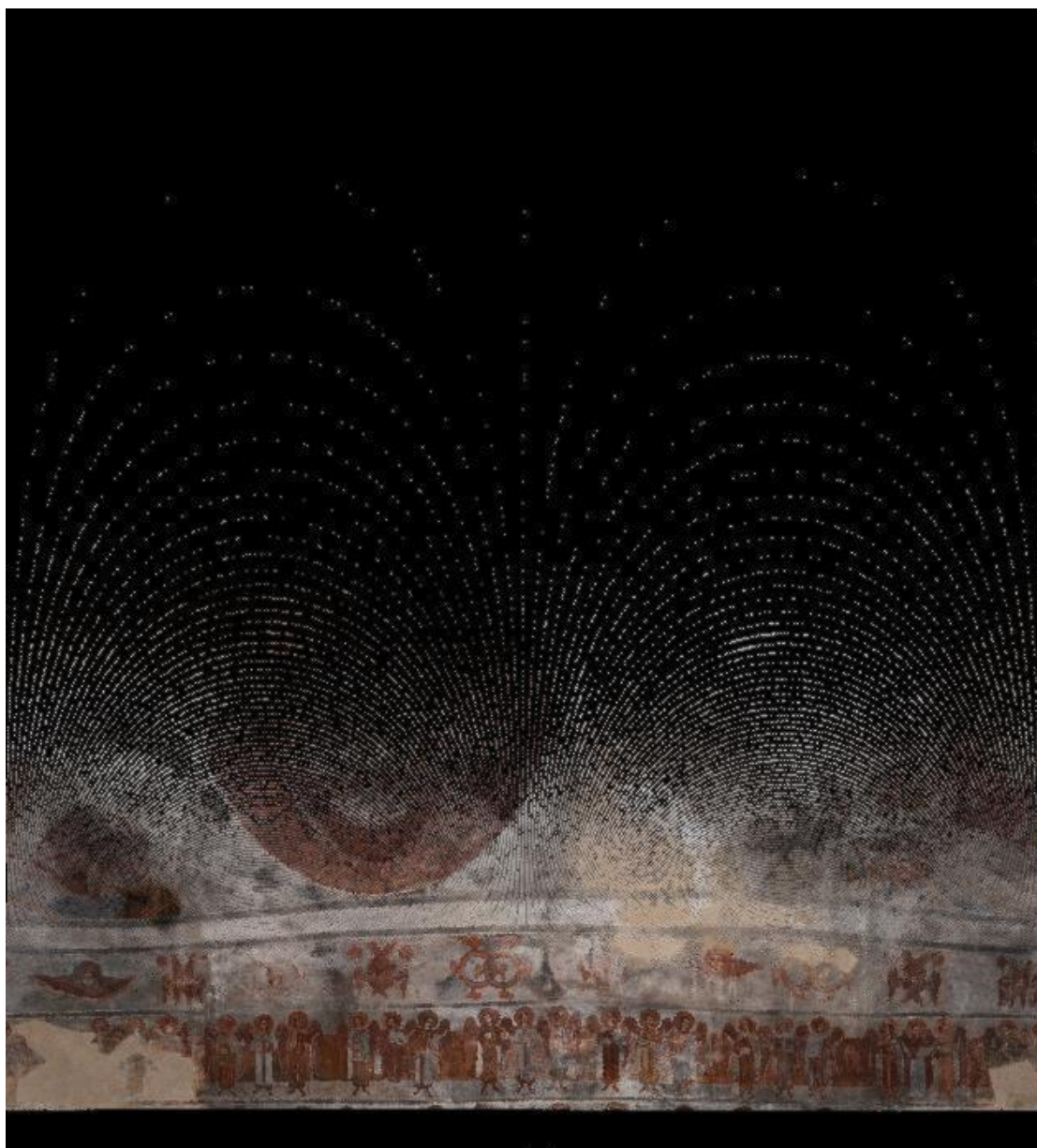
Όπως φαίνεται παραπάνω το a posteriori  $\sigma_0$  είναι 0.006m ενώ στην περίπτωση προσέγγισης ολόκληρου του νέφους με ελλειψοειδές εκ περιστροφής η τιμή ήταν 0.037m (εδάφιο 5.2.1). Η διαφορά αυτή δείχνει την καλύτερη προσέγγιση που επιτυγχάνεται επιλέγοντας πιο προσεκτικά τα δεδομένα εισαγωγής.

Στη συνέχεια δημιουργείται το ανάπτυγμα με τη χρήση της Ορθής Μερκατορικής Προβολής. Το ανάπτυγμα δημιουργήθηκε με επιλογή εδαφοψηφίδας 0.015 σε νέφος με πυκνότητα 6mm και κλίμακα απόδοσης 1/60.



Εικόνα 5-27: Ανάπτυγμα τμήματος τρούλου με χρήση ελλειψοειδούς εκ περιστροφής

Όπως φαίνεται παραπάνω η συμμορφία έχει διατηρηθεί σε όλο το μήκος. Η παραμόρφωση που εμφανίζεται στους πόλους είναι εξίσου αναμενόμενη. Ωστόσο, συγκρίνοντας το ανάπτυγμα που δημιουργήθηκε από όλο το νέφος με αυτό, φαίνεται ότι η παραμόρφωση των αγιογραφιών είναι μικρότερη. Παρ' όλα αυτά, τα μαύρα rixel είναι αρκετά και για αυτό γίνεται χρήση του better\_photo για καλύτερα οπτικά αποτελέσματα.



Εικόνα 5-28: Πύκνωση χρώματος τμήματος τρούλου

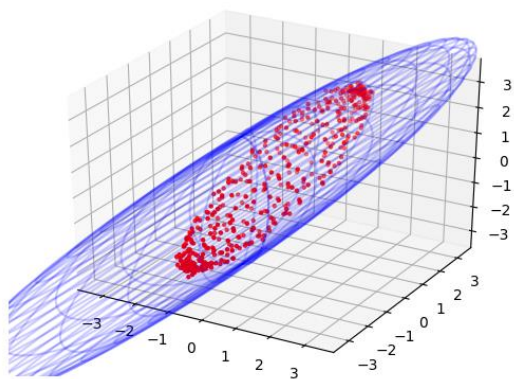
## 6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

### 6.1 Προβλήματα που αντιμετωπίστηκαν

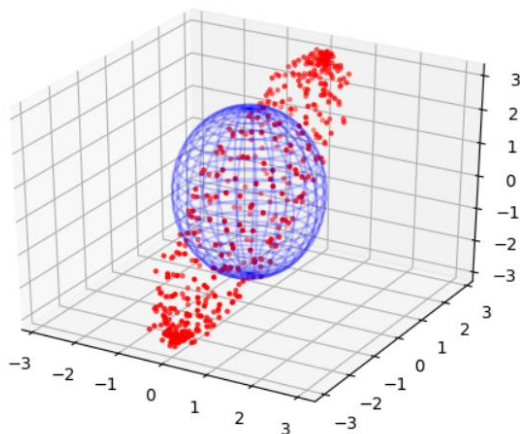
---

Καθ' όλη τη διάρκεια της ανάπτυξης του προτεινόμενου αλγορίθμου παρουσιάστηκαν αρκετά προβλήματα τα οποία αντιμετωπίστηκαν επιτυχώς και παρατίθενται κατά χρονική σειρά. Πρώτο πρόβλημα αποτέλεσε η προσέγγιση του νέφους με μία μαθηματική επιφάνεια. Για το στόχο αυτό αρχικά επιλέχθηκε η πλήρης εξίσωση δευτέρου βαθμού που αποτελείται από 10 συντελεστές (αγνώστους). Η επίλυση του συστήματος καταλήγει σε μια επιφάνεια είτε δευτέρου είτε πρώτου βαθμού με την οποία προσεγγίζεται το εκάστοτε νέφος. Ωστόσο, ενώ η προσέγγιση ήταν αρκετά καλή, δεν ήταν δυνατό να δημιουργηθεί το ανάπτυγμα καθώς με την εφαρμογή των χαρτογραφικών προβολών πάντα αναπτύσσεται στο επίπεδο (ανάπτυγμα) η επιφάνεια μίας σφαίρας ή ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής. Για όλες τις υπόλοιπες επιφάνειες οι σχέσεις δεν είναι γνωστές ή είναι αρκετά περίπλοκες (περίπτωση τριαξονικού ελλειψοειδούς).

Μετά την επιλογή των εξισώσεων της επιφάνειας της σφαίρας και του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής σειρά είχε η επιλογή των προσωρινών τιμών. Οι προσωρινές τιμές δόθηκαν στην περίπτωση του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής από την επίλυση των ελαχίστων τετραγώνων ενός τριαξονικού ελλειψοειδούς. Κατά την εφαρμογή της γενικής μεθόδου (έχοντας ως προσωρινές αυτές του τριαξονικού ελλειψοειδούς) παρατηρήθηκε ότι υπήρχαν πολύ μεγάλες αποκλίσεις στα αποτελέσματα κάθε συνόρθωσης. Πιο συγκεκριμένα, τρέχοντας το πρόγραμμα με τα ίδια δεδομένα τα αποτελέσματα διαφεροποιούνταν ενώ επιπλέον δεν προσέγγιζαν ικανοποιητικά την επιφάνεια. Το πρόβλημα αυτό θεωρήθηκε λογικό καθώς αφορούσε κατά κύριο λόγο το σφάλμα στρογγύλευσης των  $H/Y$ . Για την αντιμετώπισή του χρησιμοποιήθηκαν κατάλληλες συναρτήσεις που υλοποιούσαν υπολογισμούς με μεγάλο πλήθος μεταβλητών. Ωστόσο το πρόβλημα συνέχισε να υφίσταται. Μελετώντας περαιτέρω το πρόβλημα διαπιστώθηκε ότι δεν ήταν αρκετό το πλήθος των ψηφίων εξαιτίας των πολύ μεγάλων τιμών των δεδομένων ( $X, Y, Z$ ). Για την επίλυση του προβλήματος σκόπιμη θεωρήθηκε η κανονικοποίηση των δεδομένων έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η τιμή των συντεταγμένων και να ξεπεραστεί το πρόβλημα της ευαισθησίας των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης. Στις παρακάτω εικόνες (Εικόνα 6-1 και Εικόνα 6-2) οπτικοποιείται το αποτέλεσμα της συνόρθωσης πριν την κανονικοποίηση. Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται το νέφος και με μπλε η προσέγγιση του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής. Στην μία περίπτωση το ελλειψοειδές ήταν αρκετά μεγαλύτερο από το νέφος και στην άλλη αρκετά μικρότερο. Και τα δύο προβλήματα οφείλονταν στην αστάθεια που παρουσίαζε το σύστημα με τις πολύ μεγάλες τιμές των  $X, Y, Z$ .



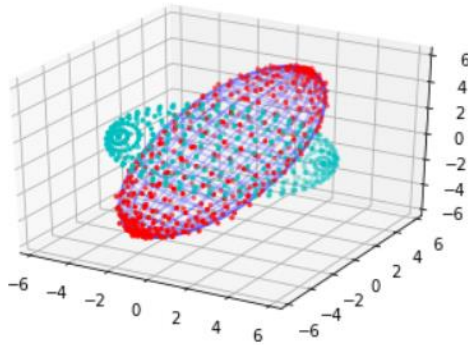
Εικόνα 6-1: Προσέγγιση ελλειψοειδούς 1



Εικόνα 6-2: Προσέγγιση ελλειψοειδούς 2

Ο καλύτερος τρόπος ελέγχου της ορθότητας της συνόρθωσης ήταν η επιλογή κάποιων δεδομένων προσομοίωσης του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής. Δεδομένα προσομοίωσης δημιουργήθηκαν μέσω της εξίσωσης του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής το οποίο περιέγραφε ένα ελλειψοειδές με γνωστές παραμέτρους. Χρησιμοποιώντας αυτά τα δεδομένα παρατηρήθηκε ότι σε κάποιες περιπτώσεις οι προσωρινές τιμές διέφεραν.

Πρόβλημα ωστόσο εντοπίστηκε και στο σημείο ορθής μετατροπής των προσωρινών τιμών του τριαξονικού ελλειψοειδές σε αντιπροσωπευτικές για το ελλειψοειδές εκ περιστροφής. Από τον πίνακα στροφής του τριαξονικού έπρεπε να υπολογιστούν ορθά οι τρεις στροφές. Για τον έλεγχο της σωστής διεξαγωγής του πίνακα R είναι ότι η ορίζουσα του πίνακα πρέπει να ισούται με 1. Έτσι υπολογίστηκε η ορίζουσα του πίνακα R σύμφωνα με την οποία αν η τιμή της ήταν -1, τότε ήταν ο αντίστροφος του επιθυμητού πίνακα με αποτέλεσμα οι γωνίες να είναι αντίθετες από τις πραγματικές. Οπτικά, το αποτέλεσμα ήταν το κατοπτρικό του πραγματικού (Εικόνα 6-3). Με κυανό συμβολίζεται το τριαξονικό ελλειψοειδές και με κόκκινο το νέφος που έπρεπε να είχε προσεγγιστεί.



Εικόνα 6-3: Κατοπτρικό αποτέλεσμα

Το παραπάνω κριτήριο λήφθηκε υπόψη και το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε, όμως τα αποτελέσματα των γωνιών δεν ήταν ικανοποιητικά και διέφεραν σημαντικά σε κάθε προσπάθεια προσέγγισης προσωρινών τιμών. Έτσι, προέκυψε η αναδιάταξη των στοιχείων του πίνακα R σύμφωνα με τη σειρά των ημιάξονων. Αναλυτικότερα, η τρίτη γραμμή του πίνακα R όφειλε να περιέχει τα στοιχεία που αφορούσαν τον ημιάξονα με τη διαφορετική τιμή.

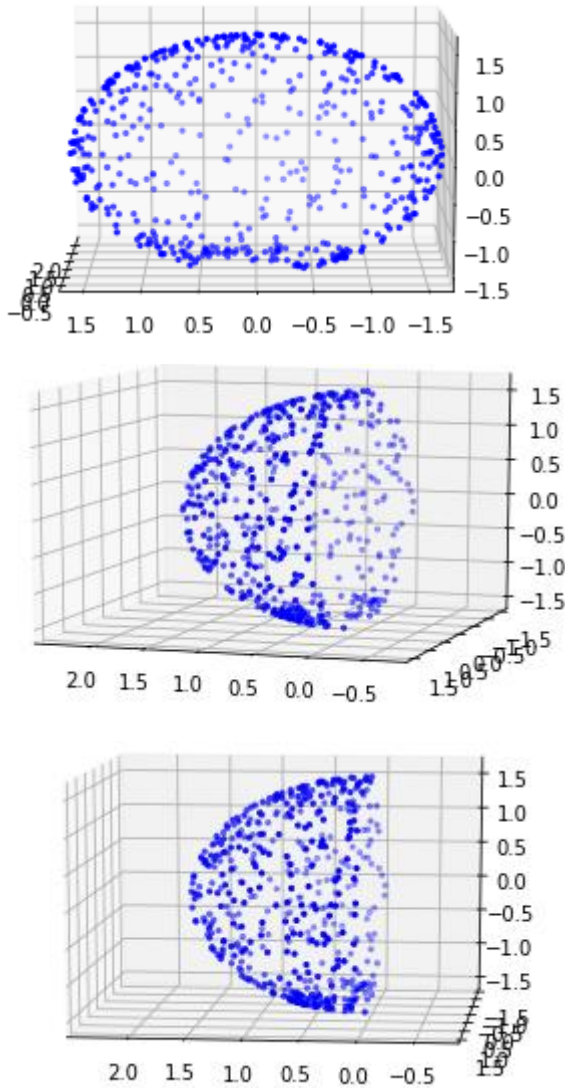
Μία ακόμα δυσκολία παρουσιάστηκε εξαιτίας των πολλών σημείων (νέφος) το οποίο απαιτείται να αντιμετωπίσει το πρόγραμμα `Be.chri!`. Πιο συγκεκριμένα, το νέφος το οποίο χρησιμοποιήθηκε για τη διπλωματική εργασία αποτελείται από 1.239.000 σημεία περίπου. Η γενική μέθοδος προκείμενου να δημιουργηθούν οι πίνακες τόσο μεγάλου όγκου δεδομένων καθώς και η επεξεργασία τους απαιτούσε πολύ μεγάλη μνήμη RAM, καθώς και μεγάλη διάρκεια επεξεργασίας. Ωστόσο κατά τη δημιουργία του προγράμματος έγινε προσπάθεια ώστε ο αλγόριθμος να τρέχει σε υπολογιστή με RAM τουλάχιστον 4GB. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε επιλέγοντας ένα αντιπροσωπευτικό σύνολο πλήθους περίπου 1500 σημείων με κατάλληλο βήμα για την διεξαγωγή των βέλτιστων αποτελεσμάτων. Η μείωση των σημείων του νέφους, δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα καθώς οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων είναι αρκετά μικρές και το ανάγλυφο του αντικειμένου δεν είναι έντονο. Με την επιλογή αυτή επιτυγχάνεται η διατήρηση του αναγλύφου του αντικειμένου καθώς τα επιπλέον σημεία δίνουν πληροφορίες για τις απεικονιζόμενες μορφές και το χρώμα.

```
MemoryError: Unable to allocate 12.2 TiB for an array with shape
(1297132, 1297132) and data type float64
>>> |
```

Εικόνα 6-4: Σφάλμα εκτέλεσης αλγορίθμου

Μία ακόμα αντιξοότητα που παρουσιάστηκε ήταν κατά τη δημιουργία των προβολών της σφαίρας. Πιο συγκεκριμένα, η προβολή του νέφους στη σφαίρα γινόταν στο μισό ημισφαίριό της, όπως φαίνεται στην εικόνα 6-5. Το πρόβλημα οφειλόταν στο γεγονός ότι δεν λαμβάνονταν υπόψιν τα ακριβή πρόσημα των συντεταγμένων για την εύρεση του σωστού τεταρτημορίου που βρισκόταν το κάθε σημείο με αποτέλεσμα όλα τα σημεία να τοποθετούνται μεταξύ 0-200 grad. Αναλυτικότερα, σημεία του «νότιου» ημισφαιρίου να απεικονίζονται στο «βόρειο»

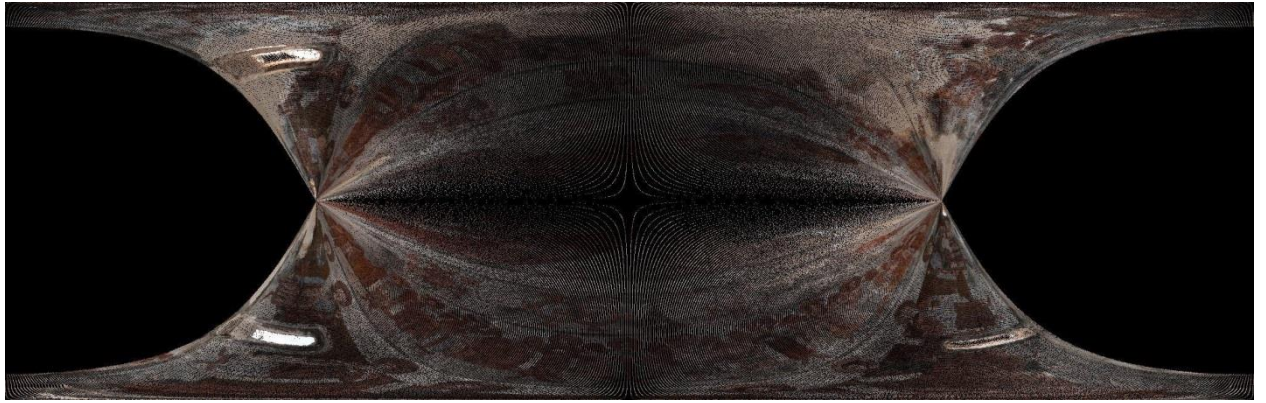
ημισφαίριο. Ενώ η εξίσωση που χρησιμοποιήθηκε ήταν σωστή κατά την κωδικοποίηση του χρησιμοποιήθηκε λανθασμένη συνάρτηση βιβλιοθήκης της γλωσσας Python, η οποία δεν μελετούσε την εφαπτομένη σε κάθε τεταρτημόριο, έτσι αντικαταστάθηκε με κατάλληλη συνάρτηση και το πρόβλημα λύθηκε.



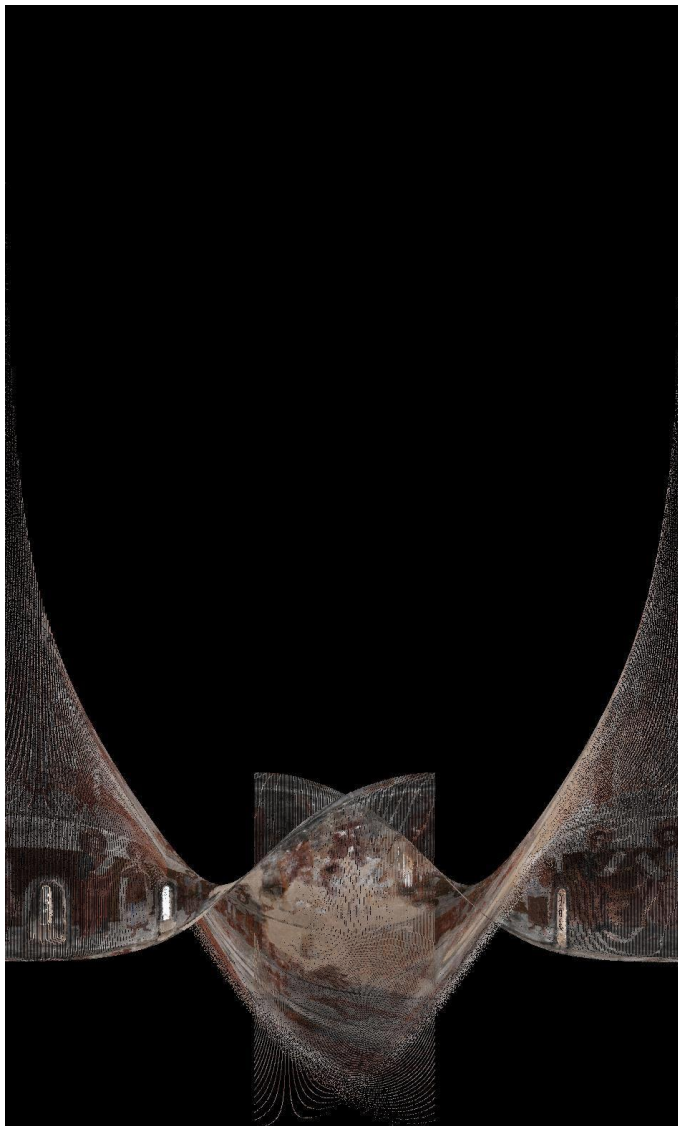
Εικόνα 6-5: Προβολές στη σφαίρα

Τέλος, πρόβλημα αντιμετωπίστηκε και στην επιλογή των χαρτογραφικών προβολών για τη σφαίρα. Αρχική ιδέα αποτέλεσε η δημιουργία αναπτύγματος μέσω της πλάγιας μερκατορικής προβολής, ωστόσο το καλύτερο δυνατό ανάπτυγμα που δημιουργήθηκε μετά από πολλαπλούς ελέγχους και διορθώσεις δεν ήταν σωστό. Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα φαίνεται παρακάτω στην εικόνα 6-6 και 6-7 με διαφορετικές γωνίες στροφής και κέντρο προβολής. Καθώς δεν βρέθηκε το σωστό επιλέχθηκε η ορθή μερκατορική προβολή.





Εικόνα 6-6: Κέντρο  $60^\circ, 0^\circ$  και γωνία  $0^\circ$



Εικόνα 6-7: Κέντρο  $30^\circ, 0^\circ$  και γωνία  $45^\circ$

## 6.2 Αξιολόγηση προγράμματος

---

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η δημιουργία ενός προγράμματος που να διαχειρίζεται ένα νέφος σημείων, με σκοπό τη δημιουργία αναπτύγματος, με την παρέμβαση του χρήστη να περιορίζεται στην επιλογή της μαθηματικής επιφάνειας που επιθυμεί να χρησιμοποιήσει και της χαρτογραφικής προβολής. Μέσω της εφαρμογής του στο τρούλο της Μονής του Προφήτη Ηλία στο Γεράκι Λακωνίας και βάσει των τελικών αποτελεσμάτων αποδείχτηκε πως επιτελεί τον σκοπό του ικανοποιητικά. Επιπλέον, η οπτικοποίηση που λαμβάνει χώρα σχεδόν σε κάθε βήμα επεξεργασίας του νέφους σημείων καθώς και η εμφάνιση των αποτελεσμάτων κατά τη διεξαγωγή του προγράμματος, καθιστούν το πρόγραμμα ιδιαίτερα φιλικό προς τον χρήστη με δυνατότητα ελέγχου και επαλήθευσης των αποτελεσμάτων. Ιδιαίτερα εύστοχη κρίνεται επίσης η επιλογή του πακέτου τεχνικού προγραμματισμού Python λόγω του φιλικού περιβάλλοντος ανάπτυξης κώδικα και οπτικοποίησης και λόγω των βιβλιοθηκών που παρέχει καθώς βοηθούν στην ταχύτερη εκτέλεση του προγράμματος. Η γλώσσα Python είναι ειδικά σχεδιασμένη για υπολογισμούς με πίνακες όπως η επίλυση γραμμικών συστημάτων, η εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, η αντιστροφή πινάκων κ.λπ. Ο βέλτιστος τρόπος εκμάθησης της γλώσσας Python ήταν η συστηματική παρακολούθηση ορισμένων δωρεάν μαθημάτων αλλά και η συνεχής ενασχόληση και διερεύνηση στο περιβάλλον της. Επιπλέον, σημαντική βοήθεια για την υλοποίηση του προγράμματος ήταν η βοήθεια που παρείχαν οι ιστοσελίδες (<https://github.com/>) ,(<https://stackoverflow.com/>) αλλά και ο καθηγητής Κ. Καράντζαλος μαζί με συναδέλφους από το Εργαστήριο Τηλεπισκόπησης, οι οποίοι βοήθησαν στην επίλυση αρκετών προγραμματιστικών προβλημάτων.

Κατά την διεκπεραίωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας επιτεύχθηκε η ανάπτυξη διάφορων ικανοτήτων όπως αυτή της συνεργασίας. Πιο συγκεκριμένα, για την ολοκλήρωση της χρειάστηκε η συνεργασία με τον συμφοιτητή Χ. Βέλλη, ο οποίος εκπονεί παράλληλη διπλωματική εργασία με παρόμοιο αντικείμενο, καθώς οι ανάγκες του προγράμματος ήταν μεγάλες και οι δύο διπλωματικές έχουν κοινά τμήματα. Επιπλέον, αναπτύχθηκε η ικανότητα ανάγνωσης και κατανόησης αλγορίθμων στην γλώσσα Python αλλά και σε άλλες γλώσσες προγραμματισμού καθώς και η ικανότητα δημιουργίας αλγορίθμων, αφού ποτέ πριν δεν είχε αφού ποτέ πριν δεν είχε δοθεί η ευκαιρία συμμετοχής στην εκπόνηση ενός ανάλογου έργου με τόσο μεγάλες προγραμματιστικές απαιτήσεις προγραμματιστικά.

## 6.3 Προτάσεις για μελλοντικές μελέτες

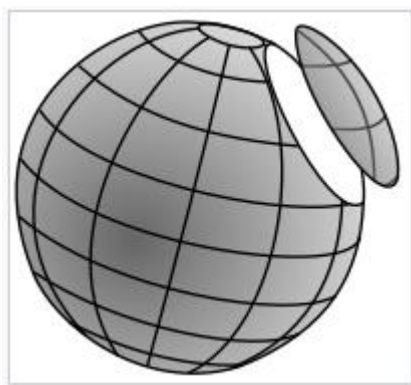
---

Μετά την αξιολόγηση του προγράμματος προέκυψε ως συμπέρασμα ότι είναι μικρότερης σημασίας τα αποτελέσματα που εξάγονται, αλλά είναι μεγαλύτερης σημασίας ο νέος τρόπος προσέγγισης των μη αναπτυκτών επιφανειών καθώς και οι δυνατότητες που παρέχει το πρόγραμμα `be.chri!` για τη μελλοντική εξέλιξή του. Η συνεχής ενασχόληση με την ανάπτυξη του προγράμματος και οι γνώσεις που απαιτήθηκαν, δημιούργησαν νέες ιδέες και ανάγκες που μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο περαιτέρω μελέτης.

Το πρόγραμμα που έχει δημιουργηθεί εξάγει επιτυχώς το ανάπτυγμα του νέφους. Πιθανή εξέλιξή του θεωρείται η διεξαγωγή ενός συμπληρωματικού αρχείου .txt που θα δίνει τη δυνατότητα αυτόματης τοποθέτησης της εικόνας σε ένα περιβάλλον τύπου CAD. Αυτό θα βοηθήσει στην περαιτέρω επεξεργασία σε τέτοιου είδους προγράμματα. Επιπλέον δυνατότητα του προγράμματος είναι η δημιουργία ορθοφωτοχάρτη καθώς η πληροφορία που χρειάζεται δίνεται στο πρόγραμμα.

Στόχος του προγράμματος είναι η δημιουργία του αναπτύγματος από το νέφος σημείων. Παρ' όλα αυτά δεν δίνεται η δυνατότητα επιλογής ενός μέρους του νέφους που επιθυμεί ο χρήστης να αναπτύξει. Η ανάγκη αυτή ωστόσο μπορεί να καλυφθεί από ένα δευτερεύον πρόγραμμα όπως το ελεύθερο λογισμικό Meshlab. Η έλλειψη χρόνου αλλά και η δυνατότητα που δίνεται από άλλα προγράμματα, οδήγησε στη μη υλοποίησή του. Η παραπάνω βελτίωση θα μπορούσε να συνοδευτεί με τη δημιουργία γραφικού περιβάλλοντος έτσι ώστε να είναι φιλικότερο προς τον χρήστη.

Μία ακόμα πρόταση είναι η αυτόματη επιλογή της κατάλληλης μαθηματικής επιφάνειας, χρησιμοποιώντας ως δεδομένο ένα κριτήριο που να εκφράζει τις αποστάσεις των σημείων από την επιφάνεια αναφοράς. Η μαθηματική επιφάνεια στην οποία τα σημεία έχουν τη μικρότερη απόσταση μπορεί να επιλεγεί ως η καταλληλότερη. Επιπλέον, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το τριαξονικό ελλειψοειδές ως επιφάνεια αναφοράς καθώς μπορεί να καλύψει κάποιες ειδικές περιπτώσεις καλύτερα από τις άλλες δύο επιφάνειες που έχουν χρησιμοποιηθεί. Μία ακόμα πιθανή βελτίωση του προγράμματος θεωρείται η πρόσεγγιση των προσωρινών τιμών της σφαίρας με άλλο τρόπο καθώς κάποια αντικείμενα χρειάζεται να προσεγγιστούν από ένα τμήμα σφαίρας με κέντρο μακριά από το κέντρο βάρους του αντικειμένου όπως φαίνεται στην Εικόνα 6-8. Το πρόγραμμα be..chri.! πιθανό να μη μπορεί να προσεγγίσει τέτοια τμήματα καθώς η μέθοδος που χρησιμοποιείται αφορά την εύρεση προσωρινών τιμών σύμφωνα με το κέντρο βάρους της σφαίρας.



Εικόνα 6-8: Τμήμα Σφαίρας

Επιπρόσθετα, χρήσιμη θα ήταν η δημιουργία του αναπτύγματος έχοντας ως αρχικά δεδομένα εικόνες αντί για νέφη σημείων. Η προσθήκη αυτή, θα έκανε το πρόγραμμα αυτοτελές καθώς δεν θα χρειαζόταν η επεξεργασία δεδομένων σε άλλα προγράμματα για τη δημιουργία νέφους.

Επιπλέον, πιθανή εξέλιξη του προγράμματος είναι η συμπερίληψη περισσότερων χαρτογραφικών προβολών για τη δημιουργία των αναπτύγμάτων και κάλυψη των αναγκών κάθε χρήστη. Να σημειωθεί ότι οι χαρτογραφικές προβολές είναι αρκετά σημαντικές για τη δημιουργία του τελικού αναπτύγματος, καθώς ανάλογα με την προβολή που επιλέγεται προσδίδονται διαφορετικά χαρακτηριστικά στο τελικό προϊόν του αναπτύγματος.

Τέλος, η βελτίωση του κώδικα στο αρχείο `better_photo` για την επιλογή όχι των οκτώ γειτονικών `pixel` αλλά των εικοσι τεσσάρων γειτονικών του θα βελτιώσει την διαδικασία της πύκνωσης. Σε αυτή τη περίπτωση θα χρειαστεί να γίνει ένας σταθμισμένος μέσος όρος και ιδανικά να εξαιρεί όποιο από τα γειτονικά `pixel` είναι μαύρο καθώς αλλοιώνει το μέσο όρο και δίνει πιο σκούρο τόνο στο χρωματισμό.

## 7 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

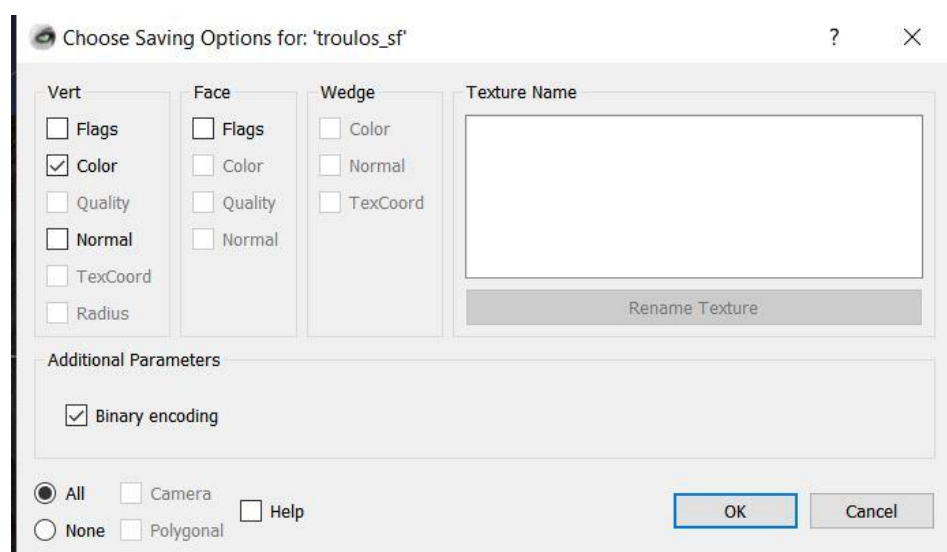
Οδηγίες χρήσης προγράμματος be...Chri!

Πριν να εκτελεστεί το πρόγραμμα, απαραίτητο είναι να έχουν εγκατασταθεί η python3 και οι βιβλιοθήκες matplotlib, numpy, plyfile, Pillow. Η εγκατάσταση της Python (version 3,7 64bit) γίνεται ακολουθώντας τις οδηγίες από την ιστοσελίδα ([https://www.python.org/downloads/?fbclid=IwAR35BcKOfhnMBYWR3W5G4Wt7uNBP4hLS0Kki2VtMt04lZ\\_YQBO4k8RCEdQ](https://www.python.org/downloads/?fbclid=IwAR35BcKOfhnMBYWR3W5G4Wt7uNBP4hLS0Kki2VtMt04lZ_YQBO4k8RCEdQ)). Για την εγκατάσταση των βιβλιοθηκών numpy, matplotlib, plyfile, Pillow ο χρήστης μπορεί να πληκτρολογήσει στην γραμμή εντολών του υπολογιστή του "pip3 install" και το όνομα κάθε βιβλιοθήκης όπως αναφέρθηκε παραπάνω.

Ο φάκελος με όνομα «αναπτύγματα» αποτελείται από τέσσερα αρχεία μορφής python (.py). Για την εκτέλεση του προγράμματος χρησιμοποιείται το αρχείο «final\_program.py» το οποίο κατά τη διάρκεια της εκτέλεσής του καλεί τα άλλα δύο με ονόματα «sfaira.py» και «ellipsoid.py». Το αρχείο με όνομα «better\_photo» χρησιμοποιείται μετά την έγκριση του χρήστη για την απόδοση χρώματος σε πιθανά κενά της εικόνας. Καταλήγωντας, το βασικό πρόγραμμα για την εξαγωγή αναπτυγμάτων το οποίο χρειάζεται να τρέξει ο χρήστης είναι αυτό με όνομα «final\_program.py» καθώς τα υπόλοιπα αποτελούν συμπληρωματικά αρχεία.

Το πρόγραμμα δέχεται δύο μορφές αρχείων με συγκεκριμένη κατάταξη στοιχείων. Αρχικά, για να ξεκινήσει το πρόγραμμα, πρέπει να δοθεί ο τύπος του αρχείου του νέφους σημείων και στη συνέχεια το όνομά του. Οι τύποι αρχείου που μπορεί να επεξεργαστεί είναι μορφής .txt (συνιστάται) ή μορφής .ply.

Το αρχείου τύπου .ply πρέπει να έχει μόνο τα σημεία και το χρώμα. Σε περίπτωση που εξάγεται από το πρόγραμμα Meshlab οι επιλογές της σωστής εξαγωγής για να είναι συμβατό με το πρόγραμμα φαίνονται παρακάτω.



Εικόνα 7-1: Επιλογές Meshlab

Το αρχείο μορφής .txt πρέπει να έχει τα στοιχεία σε γραμμές χωριζόμενα με κόμμα σε σειρά (X,Y,Z,R,G,B) και συνιστάται γιατί το λογισμικό εισάγει αυτού του τύπου αρχεία πολύ πιο γρήγορα από ό,τι τα αρχεία ply. Για παράδειγμα αρχείο νέφους 1000000 σημείων φορτώθηκε ως txt σε 10s σε αντίθεση με το αρχείο ply που χρειάστηκαν περίπου 2 λεπτά.

```
Καλώς ήρθατε στο Be..Chri!  
Παρακαλώ δώστε τον τύπο του αρχείου (.ply ή .txt)  
>>txt
```

Εικόνα 7-2: Είδος αρχείου

Στο σημείο στο οποίο ζητάει το όνομα του αρχείου, το πρόγραμμα θυμίζει ότι το αρχείο πρέπει να βρίσκεται στον ίδιο φάκελο με το πρόγραμμα.

```
Δώστε το όνομα του αρχείου  
Be..Chri Warns you! Το αρχείο να βρίσκεται στον ίδιο φάκελο με το πρόγραμμα!  
>>troulos
```

Εικόνα 7-3: Εισαγωγή αρχείου

Στο επόμενο βήμα ο χρήστης επιλέγει ποια προβολή θα χρησιμοποιήσει για την δημιουργία του αναπτύγματος. Οι δύο επιλογές που δίνονται είναι είτε προσέγγιση του νέφους μέσω ελλειψοειδούς εκ περιστροφής είτε μέσω σφαίρας

```
Ποιά επιφάνεια αναφοράς να χρησιμοποιηθεί; Σφαίρα ή ελλειψοειδές εκ περιστροφής  
Πιέστε 1 ή 2 αντίστοιχα!  
>>1
```

Εικόνα 7-4: Επιλογή επιφάνειας αναφοράς

Ύστερα, μετά την επιλογή του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής τα αποτελέσματα που εξάγει το πρόγραμμα είναι το κέντρο, οι ημιάξονες και ο πίνακας στροφής και φαίνονται σύμφωνα με την παρακάτω εικόνα. Οι τιμές αυτές είναι προσωρινές και εξάγονται από την επίλυση ενός τριαξονικού ελλειψοειδούς. Σε δεύτερο χρόνο, γίνεται αναδιάταξη του πίνακα στροφής και των ημιαξόνων για να αφορά ελλειψοειδές εκ περιστροφής και όχι τριαξονικό. Στη συνέχεια, επιλέγονται οι νέοι άξονες για την επίλυση της γενικής μεθόδου και εμφανίζονται εκ νέου ο διορθωμένος πίνακας στροφής και οι γωνίες Euler. Τέλος, εξάγεται η διαφορά της τυπικής απόκλισης των δύο διαδοχικών επαναλήψεων που ικανοποιούν την συνθήκη κατά την οποία η διαφορά τους πρέπει να είναι μικρότερη από 0.0001. Επιπλέον εξάγονται οι καλύτερες τιμές των παραμέτρων του ελλειψοειδούς δηλαδή το κέντρο, οι ημιάξονες, οι στροφές και το  $\sigma_0$  a posteriori.

```

Όλα τα παρακάτω αφορούν μια γρήγορη εκτίμηση προσωρινών τιμών ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής

Κέντρο ελλειψοειδούς      -0.0629,      0.0275,      -0.4738
Άξονες τριαξονικού ελλειψοειδούς      1.6793,      1.7210,      2.2828
Πίνακας στροφής
      0.80000,      0.59981,      -0.01495
      0.60000,      -0.79982,      0.01725
      0.00161,      0.02278,      0.99974
Ο άξονας περιστροφής είναι ο μεγαλύτερος, αναταξινόμηση.
Οι νέοι άξονες που επιλέχθηκαν ως προσωρινές τιμές
για την επίλυση της γενικής μεθόδου: [1.700152208596099, 1.700152208596099, 2.282771282232162]
Ο πίνακας στροφής με νέα σωστή διάταξη
[[ 0.59981276  0.80000066 -0.01495312]
 [-0.79981618  0.59999696  0.01725483]
 [ 0.0227757  0.00161008  0.9997393 ]]
Οι γωνίες euler (XYZ) που απαιτούνται για τη στροφή του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής: -0.988788445517757, -0.85678255778
75418, -53.138708151753974
-0.06291904549545732  0.027544445101450005 -0.4738346084969402  1.7209828060855743  2.282771282232162 -0.017257613979961426
-0.014953676607051186 Προσωρινές τιμές ελλειψοειδούς εκ περιστροφής
Η διαφορά του σθ aposteriori μεταξύ των συνορθώσεων είναι: 0.0009767384198395082
Άρα η προσέγγιση είναι ικανοποιητική!

Καλύτερες τιμές των παραμέτρων του ελλειψοειδούς -0.0664106291822179  0.024819326021284234 -0.504620161435659  1.698046642
4709486  2.30949598802254 -0.017787061848695784 -0.008929625267188244

Το σθ aposteriori είναι 0.035970226394846296 στην μονάδα μέτρησης του νέφους!

Αν θέλετε να δείτε το ελλειψοειδές εκ περιστροφής και το νέφος στον χώρο πατήστε enter αλλιώς οτιδήποτε άλλο.
>>|

```

Εικόνα 7-5: Αποτελέσματα ελλειψοειδούς

Τέλος, ο χρήστης επιλέγει αν επιθυμεί να δει το νέφος στο χώρο ή να συνεχίσει η διαδικασία.

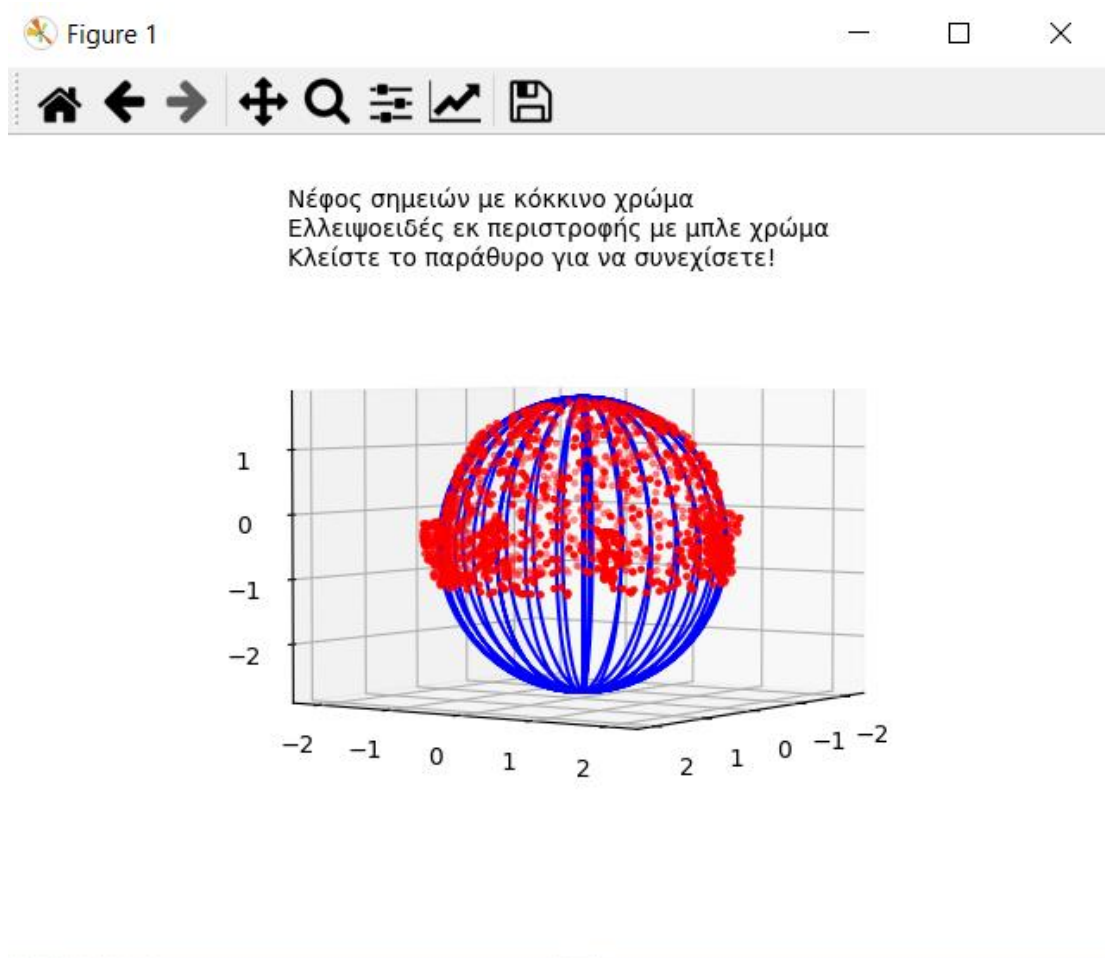
```

Αν θέλετε να δείτε το ελλειψοειδές εκ περιστροφής και το νέφος στον χώρο πατήστε enter αλλιώς
οτιδήποτε άλλο.
>>|

```

Εικόνα 7-6: Ερώτηση εμφάνισης νέφους

Εάν επιλεγθεί η εμφάνιση του νέφους, τότε παρουσιάζεται η παρακάτω εικόνα στην οποία εμφανίζεται με κόκκινο χρώμα το ελλειψοειδές και με μπλε το νέφος. Κατά την εμφάνιση, το νέφος είναι αραιωμένο και όχι ολόκληρο.



Εικόνα 7-7: Εμφάνιση ελλειψοειδούς

Στη συνέχεια, επιλέγεται η επιθυμητή προβολή.

```
Επιλέξτε την προβολή που θέλετε για να δημιουργηθεί το ανάπτυγμα
Πιέστε 1 για μερκατορική προβολή και 2 για προβολή Lambert
>>1|
```

Εικόνα 7-8: Επιλογή προβολής

Ύστερα, ο χρήστης επιλέγει το όνομα του αναπτύγματος που θα δημιουργηθεί.

```
Δώστε το όνομα του αναπτύγματος που θα δημιουργηθεί!
>>ορθή μερκατορική|
```

Εικόνα 7-9: Όνομα προβολής

Τέλος, εμφανίζεται το μέγεθος της ελάχιστης δυνατής εδαφοψηφίδας και ζητείται η εδαφοψηφίδα που επιθυμεί ο χρήστης.



```
Η ελάχιστη εδαφοψηφίδα είναι 0.0142642 στην μονάδα που έχει το αρχείο που εισήχθη.  
Όσο μεγαλύτερη είναι η εδαφοψηφίδα τόσο μικρότερη είναι η ανάλυση στην εικόνα.  
  
Δώστε την εδαφοψηφίδα που θέλετε.  
>>0.014  
>>> |
```

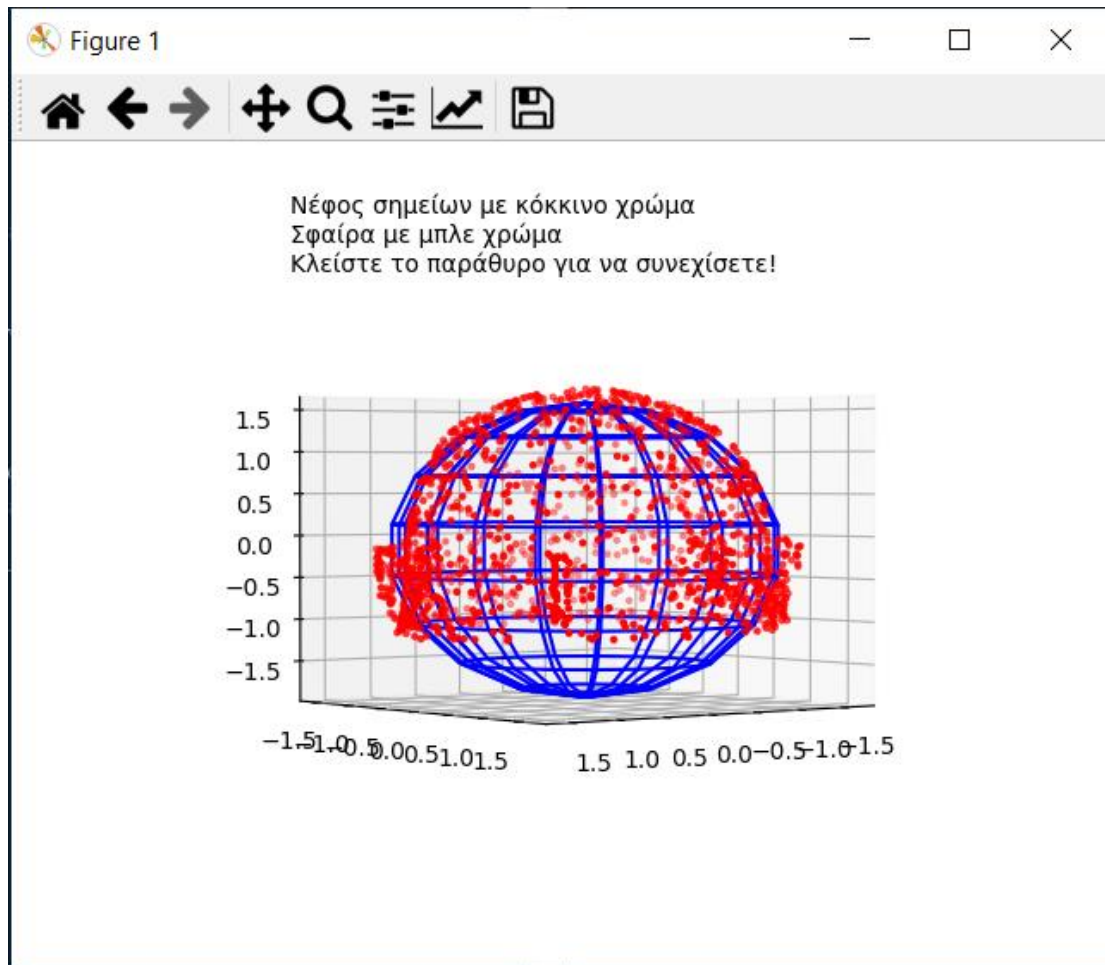
#### Εικόνα 7-10: Επιλογή εδαφοψηφίδας

Επιλέγοντας για επιφάνεια αναφοράς τη σφαίρα (Εικόνα 7.3) το πρόγραμμα θα εμφανίζει τον αριθμό των επαναλήψεων των διαδοχικών συνορθώσεων που έγιναν για τον υπολογισμό των καλύτερων τιμών των παραμέτρων της σφαίρας, το κέντρο και την ακτίνα.

```
Για τον υπολογισμό των καλύτερων τιμών των παραμέτρων έγιναν 0 επαναλήψεις.  
Το κέντρο της σφαίρας είναι (-0.063,0.027,-0.163) και η ακτίνα 1.744  
  
Το σ0 aposteriori της προσέγγισης του κανονικοποιημένου νέφους με αυτή την σφαίρα είναι  
0.05827948457079033 , και στην μονάδα μέτρησεις του νέφους είναι 0.06002431759356004 !  
  
Αν θέλετε να δείτε την σφαίρα και το νέφος στον χώρο πατήστε enter αλλιώς οτιδήποτε άλλ  
ο  
>>|
```

#### Εικόνα 7-11: Προσωρινές τιμές σφαίρας

Στη συνέχεια ο χρήστης επιλέγει αν επιθυμεί να δει το νέφος ή να συνεχίσει τη διαδικασία.



Εικόνα 7-12: Εμφάνιση σφαίρας

Για να συνεχίσει η διαδικασία πρέπει να κλείσει το παράθυρο εμφάνισης του νέφους. Ύστερα ο χρήστης επιλέγει 1 για την ορθή μερκατορική προβολή ή 2 για την ορθή Lambert. Για να ολοκληρωθεί η διαδικασία επιλογής της χαρτογραφικής προβολής ο χρήστης πιέζει enter.

```
Επιλέξτε την προβολή που θέλετε για να δημιουργηθεί το ανάπτυγμα
Πιέστε 1 για ορθή μερκατορική προβολή και 2 για ορθή Lambert προβολή
>>
```

Εικόνα 7-13: Επιλογή προβολής σφαίρας

Στο επόμενο βήμα επιλέγεται το όνομα της εικόνας που θα δημιουργηθεί. Το όνομα μπορεί να δοθεί και με ελληνικούς και με λατινικούς χαρακτήρες.

```
Δώστε το όνομα του αναπτύγματος που θα δημιουργηθεί!
>>ορθή μερκατορική
```

Εικόνα 7-14: Επιλογή ονόματος

Τέλος, εμφανίζεται το μέγεθος της ελάχιστης δυνατής εδαφοψηφίδας και ζητείται η εδαφοψηφίδα που επιθυμεί ο χρήστης.

```
Η ελάχιστη εδαφοψηφίδα είναι 0.023648986473 στην μονάδα που έχει το αρχείο που εισήχθη.  
Όσο μεγαλύτερη είναι η εδαφοψηφίδα τόσο μικρότερη είναι η ανάλυση στην εικόνα.  
  
Δώστε την εδαφοψηφίδα που θέλετε.  
>>0.02  
>>> |
```

Εικόνα 7-15: Επιλογή εδαφοψηφίδας

Προσοχή!

- ★ Εάν είναι η πρώτη φορά εκτέλεσης του αλγορίθμου για συγκεκριμένο νέφος τότε συνιστάται η χρήση του αρχείου ply καθώς το πρόγραμμα θα δημιουργήσει αυτόματα δύο αρχεία txt. Ένα με αραιωμένο νέφος σημείων που διευκολύνει στους υπολογισμούς και ένα δεύτερο αρχείο με το όνομα που έχει καθορίσει ο χρήστης με τη διαφορά ότι θα έχει name(1).txt που περιέχει όλα τα σημεία. Εάν τρέξει το πρόγραμμα για δεύτερη φορά, θα χρησιμοποιήσει τα ήδη δημιουργημένα txt.
- ★ Συνιστάται η χρήση διαφορετικών ονομάτων μεταξύ των αρχείων ply και txt.
- ★ Τα αναπτύγματα αποθηκεύονται σε μορφή .jpg και βρίσκονται στον ίδιο φάκελο με το πρόγραμμα.
- ★ Το όνομα του αναπτύγματος το οποίο καλείται να δώσει ο χρήστης, δεν δέχεται σύμβολα παρά μόνο γράμματα (ελληνικούς, λατινικούς χαρακτήρες) και αριθμούς.
- ★ Κατά την εισαγωγή της εδαφοψηφίδας που επιθυμεί ο χρήστης για την εξαγωγή του αναπτύγματος, η δεκαδική μορφή ορίζεται με τελεία και όχι με κόμμα.
- ★ Εάν ο χρήστης επιλέξει να γεμίσει τα κενά της εικόνας με χρώμα από τα γειτονικά pixel τότε ανοίγει το πρόγραμμα «better\_photo» και δίνει αρχικά το όνομα της εικόνας που επιθυμεί να επεξεργαστεί.

```
Δώστε το όνομα της εικόνας.  
>>testm
```

Εικόνα 7-16: Επιλογή ονόματος

Στη συνέχεια δίνει το νέο όνομα της εικόνας που προκύπτει μετά την επεξεργασία.

```
Δώστε το όνομα της εικόνας που θα αποθηκευτεί μετά την επεξεργασία.  
>>filled
```

Εικόνα 7-17: Νέο όνομα εικόνας

Τέλος, ο χρήστης επιλέγει το όριο κάτω από το οποίο κάθε pixel με τιμή κοντά στο μαύρο, θεωρείται μαύρο και επαναχρωματίζεται σύμφωνα με τα 8 γειτονικά τους.

```
Δώστε το όριο ελέγχου των τιμών του μαύρου χρώματος.  
>>40
```

Εικόνα 7-18: Άνω όριο μαύρων pixel

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Andrews, J., & Séquin, C. H. (2013). Type-Constrained Direct Fitting of Quadric Surfaces. *Computer-Aided Design & Applications*, 10, bbb-ccc. <https://doi.org/10.3722/cadaps.2013.xxx-yyy>
- Bennis, C., Vézien, J.-M., & Iglésias, G. (1991). Piecewise surface flattening for non-distorted texture mapping. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 25(4), 237–246. <https://doi.org/10.1145/127719.122744>
- Bertoni, B. (2010). Multi-dimensional ellipsoidal fitting. *Department of Physics, South Methodist University, ..., 3, 1–7*. <http://www.physics.smu.edu/web/research/preprints/SMU-HEP-10-14.pdf>
- Bevilacqua, M. G., Caroti, G., Zaragoza, I. M. E., & Piemonte, A. (2016). Frescoed vaults: Accuracy controlled simplified methodology for planar development of three-dimensional textured models. *Remote Sensing*, 8(3). <https://doi.org/10.3390/rs8030239>
- Dermanis, A. (2017). *Fitting Analytical Surfaces to Points: General Approaches and Applications to Ellipsoid Fitting*.
- Elber, G. (1995). Model fabrication using surface layout projection. *Computer-Aided Design*, 27(4), 283–291. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(95\)91138-B](https://doi.org/10.1016/0010-4485(95)91138-B)
- Fan, J., Wang, Q., Chen, S.-F., Yuen, M. M. F., & Chan, C. C. (1998). A spring–mass model-based approach for warping cloth patterns on 3D objects. *The Journal of Visualization and Computer Animation*, 9(4), 215–227. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1099-1778\(1998100\)9:4<215::aid-vis187>3.3.co;2-#](https://doi.org/10.1002/(sici)1099-1778(1998100)9:4<215::aid-vis187>3.3.co;2-#)
- Georgopoulos, A., Skamantzari, M., & Tapinaki, S. (2020). *Digitally Developing Medieval Fortifications. X*, 317–324. <https://doi.org/10.4995/fortmed2020.2020.11468>
- Han, E. S., Daniel, A. goleman, Richard, B., & Mckee. (1987). Map Projections. *Journal of Chemical Information and Modeling*, 53(9), 1689–1699.
- Hinds, B. K., McCartney, J., & Woods, G. (1991). *Pattern development for 3D surfaces*.
- Hoschek, J. (1998). Approximation of surfaces of revolution by developable surfaces. *CAD Computer Aided Design*, 30(10), 757–763. [https://doi.org/10.1016/S0010-4485\(98\)00030-X](https://doi.org/10.1016/S0010-4485(98)00030-X)
- Karras, G. E., Patias, P., & Petsa, E. (1996). *International Archives of Photogrammetry & Remote Sensing* (Vol. 31, Issue 5).
- Lane, J. M., & Riesenfeld, R. F. (1980). A Theoretical Development for the Computer Generation and Display of Piecewise Polynomial Surfaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-2(1), 35–46. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.1980.4766968>
- Luca, L. (2019). *A study of approximate development of spherical surfaces*. 14(1).
- synder&Voxland. (1994). *An Album of Map Projections*.

<http://library1.nida.ac.th/termpaper6/sd/2554/19755.pdf>

Tam, A., Joneja, A., Tang, K., & Yao, Z. (2007). A Surface Development Method with Application in Footwear CAD/CAM. *Computer-Aided Design and Applications*, 4(1–4), 67–77. <https://doi.org/10.1080/16864360.2007.10738527>

Γεωργόπουλος, Α. (2014). *Αναπτύγματα Επιφανειών*. [https://ocw.aoc.ntua.gr/modules/document/file.php/SURVEY115/Παρουσιάσεις\\_Διαλέξεων/DOCUMO\\_06\\_2014.pdf](https://ocw.aoc.ntua.gr/modules/document/file.php/SURVEY115/Παρουσιάσεις_Διαλέξεων/DOCUMO_06_2014.pdf)

Πάνου, Γ. (2020a). (PDF) *Direct and Indirect Estimation of the Variance-Covariance Matrix of the Parameters of a Fitted Ellipse and a Triaxial Ellipsoid*. [https://www.researchgate.net/publication/342529585\\_Direct\\_and\\_Indirect\\_Estimation\\_of\\_the\\_Variance-Covariance\\_Matrix\\_of\\_the\\_Parameters\\_of\\_a\\_Fitted\\_Ellipse\\_and\\_a\\_Triaxial\\_Ellipsoid](https://www.researchgate.net/publication/342529585_Direct_and_Indirect_Estimation_of_the_Variance-Covariance_Matrix_of_the_Parameters_of_a_Fitted_Ellipse_and_a_Triaxial_Ellipsoid)

Πάνου, Γ. (2020b). (PDF) *Fitting a triaxial ellipsoid to a geoid model*. March. [https://www.researchgate.net/publication/339827112\\_Fitting\\_a\\_triaxial\\_ellipsoid\\_to\\_a\\_geoid\\_model](https://www.researchgate.net/publication/339827112_Fitting_a_triaxial_ellipsoid_to_a_geoid_model)

## ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΕΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

<https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipsoid#/media/File:Ellipsoide.svg>

[https://www.wikiwand.com/en/Oblique\\_Mercator\\_projection](https://www.wikiwand.com/en/Oblique_Mercator_projection)

<https://docs.mcneel.com/rhino/7/help/en-us/commands/unrollsrf.htm>

<https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipsoid#/media/File:Ellipsoide.svg>

[https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/2523/1/Nikolakopoulos\\_Chapter\\_06.pdf](https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/2523/1/Nikolakopoulos_Chapter_06.pdf)

<https://www.oreilly.com/library/view/python-for-data/9781449323592/ch04.html>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Circle\\_of\\_a\\_sphere](https://en.wikipedia.org/wiki/Circle_of_a_sphere)