



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ &  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**Μελέτη μίας νέας μεθόδου αναγνώρισης γραφέα και εφαρμογή σε  
σημαντικά αρχαία κείμενα**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Πρόδρομος Β. Κολυβάκης**

*Επιβλέπων:* Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2014





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ &  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**Μελέτη μίας νέας μεθόδου αναγνώρισης γραφέα και εφαρμογή σε  
σημαντικά αρχαία κείμενα**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Πρόδρομος Β. Κολυβάκης**

*Επιβλέπων:* Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 12<sup>η</sup> Νοέμβρη 2014.

.....  
Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Βασίλειος Λούμος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Ηλίας Κουκούτσης  
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.



.....  
Κολυβάκης Πρόδρομος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Κολυβάκης Πρόδρομος, 2014

Copyright © Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς, 2014

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το ακαδημαϊκό ενδιαφέρον της παρούσης διπλωματικής εργασίας εστιάζει στην μελέτη και στην εφαρμογή προηγμένων αλγορίθμων της Υπολογιστής Όρασης και της Διαφορικής Γεωμετρίας, με στόχο τον υπολογισμό ενός βέλτιστου αντιπροσώπου από ένα σύνολο διαφορετικών υλοποιήσεων του ίδιου γράμματος - συμβόλου σε ένα αρχαίο χειρόγραφο κείμενο. Αυτοί, οι ιδεατοί αντιπρόσωποι συνθέτουν τα βασικά συστατικά μίας καινοφανούς μεθοδολογίας, μέρος της οποίας παρουσιάζεται ακολούθως, που σκοπό έχει την αυτόματη ταυτοποίηση γραφέα αρχαίων επιγραφών και βυζαντινών χειρογράφων. Η αυτόματη αναγνώριση του γραφέα ενός αρχαίου κειμένου με χρήση σύγχρονων μαθηματικών αλγορίθμων, που υλοποιούνται στον υπολογιστή, μπορεί να οδηγήσει με ασφάλεια στην ακριβή χρονολόγηση ενός αρχαίου κειμένου, άρα και στην επίλυση των σχετικών σημαντικών επιστημονικών προβλημάτων. Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής, γίνεται αρχικά μία πλήρης παρουσίαση του μαθηματικού υπόβαθρου που χρησιμοποιήθηκε, και στη συνέχεια γίνεται μία εκτενής περιγραφή της μεθόδου που μελετάται, η οποία τελικά εφαρμόζεται στο κείμενο «*Αθηναίων Πολιτεία*» του Αριστοτέλους, το οποίο σώζεται σε παπύρους που φυλάσσονται στο Βρετανικό Μουσείο. Συνοπτικά η μελετώμενη μεθοδολογία περιλαμβάνει: (α) εκτίμηση της κανονικοποιημένης καμπυλότητας σε κάθε pixel του περιγράμματος ενός γράμματος, (β) εκτέλεση συγκρίσεων ανά ζεύγη των ακολουθιών καμπυλότητας που αντιστοιχούν σε δύο υλοποιήσεις του ίδιου γράμματος - συμβόλου, (γ) παρουσίαση μίας νέας Πρότασης, η οποία κάνοντας χρήση των προηγούμενων αποτελεσμάτων, προτείνει μία κλειστή λύση στο πρόβλημα της βέλτιστης προσαρμογής δύο ισοπληθών ψηφιακών περιγραμμάτων, υπό την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων και (δ) εφαρμογή ένα κριτήριο που ποσοτικοποιεί την ομοιότητα δύο υλοποιήσεων του ίδιου γράμματος - συμβόλου. Εν τέλει, τα αποτελέσματα που προκύπτουν, από την εφαρμογή της εξεταζόμενης μεθόδου, στα κείμενα της *Αθηναίων Πολιτείας* επιβεβαιώνουν το θεωρητικό μοντέλο, που αναπτύχθηκε και οδηγούν σε πρώτα σημαντικά συμπεράσματα γύρω από το μελετηθέν αντικείμενο.

### **Λέξεις κλειδιά:**

αυτόματη αναγνώριση γραφέα, ψηφιακή επεξεργασία εικόνας, αναγνώριση προτύπων, Διαφορική Γεωμετρία, καμπυλότητα, επίπεδη καμπυλότητα, αυτόματη κατάταξη, text independent hand recognition.





## **ABSTRACT**

The main content of the present dissertation may be, very briefly, described as follows: advanced methods of Computer Vision and Differential Geometry are studied and employed for the automatic identification of the writer of ancient documents. In the process of doing so, a kind of ideal representative is extracted from an arbitrary of realizations of the same alphabet symbol appearing on ancient documents. We would like to point out that the automatic identification of the writer of an ancient inscription or papyrus maybe of fundamental importance to Archaeology and History, since, among others, may lead to objective dating of the corresponding document. In the frame of the dissertation in hand (a) a rather extensive presentation of the necessary principles and theorems of Differential Geometry takes place, (b) a recently introduced method of automatic identification of ancient documents' writers is analyzed and quite extensively presented and finally (c) this method and the corresponding algorithms are applied to the celebrated "Athinaion Politeia" kept in the British Museum. Conclusively the considered method includes: (a) estimation of the normalized curvature at each pixel of a letter contour, (b) pair-wise comparisons of the curvatures sequences that correspond to two realizations of the same alphabet symbol, (c) introduction of a recently introduced Proposition that, on the basis of the previous results, offers a closed solution to the problem of matching two equinumerous digital contours in the Least Squares sense and (d) a criterion quantifying the similarity of two realizations of the same alphabet symbol. Finally, the results obtained from the application of the method in "Athinaion Politeia" verify the developed theoretical model, and lead to a number of first, important conclusions about the studied document.

### **Key words:**

Automatic writer identification, digital image processing, pattern recognition, Differential Geometry, curvature, plane curvature, automatic classification, text independent hand recognition.



## Ευχαριστίες

---

Η ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας σηματοδοτεί και το τέλος των προπτυχιακών μου σπουδών στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο· γεγονός, που με ωθεί στην ανάγκη να εκφράσω τις ευχαριστίες σε όλους όσους στήριξαν την προσπάθεια μου όλο αυτόν τον καιρό.

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου, κ. Κωνσταντίνο Παπαοδυσσέα, για την ανάθεση και την επίβλεψη της διπλωματικής μου εργασίας, δίνοντας μου την ευκαιρία μου, με αυτό τον τρόπο, να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον ερευνητικό θέμα. Επίσης, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την έμπρακτη βοήθεια και καθοδήγηση του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας καθώς και για την τόσο ανθρώπινη του αντιμετώπιση.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στον υπεύθυνο της διπλωματικής μου εργασίας διδάκτορα, Δημήτρη Αραμπατζή, καθώς και στον διδάκτορα, Φώτιο Γιαννόπουλο, για την άψογη συνεργασία και υποστήριξη, που μου παρείχαν όλο αυτόν τον καιρό. Επιπλέον, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στον διδάκτορα κ. Παναγιώτη Ρουσόπουλο για την προθυμία του να με βοηθήσει όποτε αυτό χρειάστηκε, καθώς και για την τόσο φιλική του στάση.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, γιατί μου παρείχε την ευκαιρία να σπουδάσω, εκπληρώνοντας με αυτό τον τρόπο ένα μεγάλο μου όνειρο, αλλά κυρίως γιατί αποτέλεσε, αποτελεί και θα αποτελεί πάντα για μένα, μέσα από τη διαπαιδαγώγηση που μου χάρισε, τον πρώτο ηθικό και πνευματικό δάσκαλο στη ζωή.



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	11
1.1 Αντικείμενο και σκοπός της παρούσης διπλωματικής.....	11
1.2 Η σπουδαιότητα της αυτόματης αναγνώρισης γραφένων αρχαίου κειμένου.....	13
1.3 Οι δυσκολίες.....	15
1.4 Ιστορικά στοιχεία πάνω στην Αθηναίων Πολιτεία.....	17
<b>2. ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ</b> .....	24
2.1 Γενικά περί καμπυλών – σχετικοί ορισμοί.....	24
2.2 Μία ιστορική αναφορά στην έννοια της καμπυλότητας.....	30
2.3 Ορισμός καμπυλότητας καμπύλης και σχετικά χρήσιμα θεωρήματα.....	34
2.3.1 Η περίπτωση του κύκλου: μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{T}$ , αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία κύκλου και $\vec{r}''(s)$ .....	34
2.3.2 Η γενική περίπτωση καμπύλης. Ο εγγύτατος κύκλος και η καμπυλότητα με παράμετρο το μήκος καμπύλης $s$ .....	36
2.3.3 Η καμπυλότητα στη γενική περίπτωση καμπύλης με τυχούσα παράμετρο και ορισμός του πρωτεύοντος κάθετου διανύσματος.....	38
2.3.4 Επίδρασης της κλιμάκωσης μίας συνάρτησης στην καμπυλότητα της.....	39
2.3.5 Εναλλακτική μορφή της καμπυλότητας σε ισοϋψείς καμπύλες.....	40
2.4 Η ειδική μορφή του Θεμελιώδους Θεωρήματος Καμπυλών.....	43
2.5 Γενικά περί επιφανειών – σχετικοί ορισμοί.....	48
2.6 Γεωδαισιακές και συντομότεροι δρόμοι πάνω σε μία επιφάνεια.....	52
2.6.1 Ορισμός γεωδαισιακών και κάποια σημαντικά συμπεράσματα επί αυτών.....	52
2.6.2 Οι γεωδαισιακές ως συντομότεροι δρόμοι.....	54
<b>3. ΜΙΑ ΝΕΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΑΙ Ο ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ ΔΥΟ ΚΑΜΠΥΛΩΝ <math>\Gamma_1</math> ΚΑΙ <math>\Gamma_2</math></b> .....	58
3.1 Ένας σύντομος προϊδεασμός της χρήσης των κεντρικότερων ιδεολογικών συλλήψεων της παρουσιαζόμενης μεθόδου.....	58
3.2 Σύντομη παρουσίαση των βασικών βημάτων της εφαρμοζόμενης μεθόδου...60	

3.3 Προεπεξεργασία περιγράμματος μέσω ενός νέου αλγορίθμου.....	63
3.4 Υπολογισμός καμπυλότητας και σύγκριση των καμπυλοτήτων των περιγραμμάτων δύο διαφορετικών υλοποιήσεων του ίδιου συμβόλου.....	64
3.4.1 Υπολογισμός καμπυλότητας για την περίπτωση ενός μονού εξωτερικού περιγράμματος και βέλτιστο ταίριασμα των προκυπτουσών ακολουθιών.....	66
3.4.2 Υπολογισμός καμπυλότητας για την περίπτωση ενός περιγράμματος που αποτελείται από πολλές ξεχωριστές συνεκτικές κλειστές καμπύλες και βέλτιστο ταίριασμα των προκυπτουσών ακολουθιών.....	71
3.5 Μία πρώτη εκτίμηση της βέλτιστης θέσης προσαρμογής των περιγραμμάτων δύο γραμμάτων.....	73
3.6 Βέλτιστο ταίριασμα δυο πραγματοποιήσεων του ίδιου συμβόλου με βάση το κριτήριο «τομή δια ένωση».....	79
3.7 Η καμπυλότητα ως ένα φράγμα στις μεταβολές ενός σχήματος.....	85
<b>4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΤΗΝ ΤΑΥΤΟΠΟΙΗΣΗ ΓΡΑΦΕΩΝ ΤΩΝ ΚΕΙΜΕΝΩΝ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΔΙΑΣΩΘΕΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΘΗΝΑΙΩΝ ΠΟΛΙΤΕΙΑ.....</b>	<b>89</b>
4.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Α’.....	91
4.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Β’.....	93
4.2.1 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Β’ στην I0006.....	93
4.2.2 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Β’ στην I0040.....	95
4.2.3 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Β’ στην I0043.....	97
4.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Γ’.....	99
4.3.1 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Γ’ στην I0013.....	99
4.3.2 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Γ’ στην I0014.....	101
4.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Δ’.....	103
4.4.1 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Δ’ στην I0039.....	103
4.4.2 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Δ’ στην I0046.....	105

4.5 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ	
‘Ε’ .....	107
4.5.1 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ε’ στην I0014.....	107
4.5.2 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ε’ στην I0016.....	109
4.6 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ	
‘Η’ .....	111
4.6.1 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Η’ στην I0006.....	111
4.6.2 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Η’ στην I0013.....	113
4.7 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ	
‘Θ’ .....	115
4.8 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ	
‘Κ’ .....	117
4.8.1 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Κ’ στην I0013.....	117
4.8.2 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Κ’ στην I0014.....	119
4.9 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ	
‘Λ’ .....	121
4.10 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ	
‘Μ’ .....	123
4.11 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ	
‘Ν’ .....	125
4.11.1 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ν’ στην I0039.....	125
4.11.2 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ν’ στην I0043.....	127
4.12 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ	
‘Ξ’ .....	129
4.13 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ	
‘Π’ .....	131
4.14 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ	
‘Ρ’ .....	133
4.15 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ	
‘Ω’ .....	135
4.15.1 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ω’ στην I0014.....	135
4.15.2 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ω’ στην I0016.....	137

**5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....139**



## 1. Εισαγωγή.

### 1.1 Αντικείμενο και σκοπός της παρούσης διπλωματικής.

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την μελέτη και την κατασκευή ενός βέλτιστου αντιπροσώπου ενός συγκεκριμένου γράμματος από ένα σύνολο από διαφορετικές υλοποιήσεις του, με απώτερο σκοπό την χρήση του στην δημιουργία ενός συστήματος αυτόματης ταυτοποίησης γραφών αρχαίου κειμένου. Οι βέλτιστοι αυτοί αντιπρόσωποι, που στο εξής θα καλούνται *πλατωνικά πρότυπα* ή απλά *πλατωνικά*, αποτελούν τον βασικό δειγματικό χώρο, στον οποίο θα εφαρμοστεί ο στατιστικός έλεγχος της υπόθεσης ότι δύο αρχαία κείμενα έχουν γραφτεί από τον ίδιο άνθρωπο. Η μεθοδολογία, της οποίας η βασική ιδέα θα αναλυθεί εδώ αλλά θα μελετηθεί και εξονυχιστικά στη συνέχεια, εφαρμόστηκε σε παπυρολογικά κείμενα του έργου «Αθηναίων Πολιτεία» του Αριστοτέλη, με τελικό σκοπό την αναγνώριση του γραφέα του αρχαίου σωζόμενου κειμένου και του ελέγχου της υπόθεσης αν όλο το έργο έχει γραφτεί από έναν και μοναδικό γραφέα.

Η θεμελιώδης ιδέα πίσω από την κατασκευή του πλατωνικού είναι η επίτευξη του βέλτιστου ταιριάσματος δύο καμπυλών ύστερα από μετασχηματισμούς στροφής, κλιμάκωσης και μεταφοράς στο επίπεδο, τις οποίες υφίσταται μία εκ των δύο καμπυλών. Η βασική παραδοχή της μεθόδου είναι ότι αν πραγματοποιηθεί η βέλτιστη προσαρμογή των περιγραμμάτων των διαφόρων υλοποιήσεων ενός γράμματος και στη συνέχεια εφαρμοστεί κάποιος τελεστής πάνω στις συμπαγείς υλοποιήσεις, ο οποίος μπορεί να εξάγει κοινά χαρακτηριστικά, τότε με μεγάλη πιθανότητα θα έχει επιτευχθεί η μεταφορά στον αντιπρόσωπο αυτόν, που παραρίχθηκε με την παραπάνω ιδέα, όλων εκείνων των στοιχείων, που είναι χαρακτηριστικά του γραφικού στυλ ενός ανθρώπου. Σημειώνεται ότι η εξαγωγή των υλοποιήσεων από κάποιο ψηφιοποιημένο κείμενο έχει πραγματοποιηθεί μέσω κάποιας μεθόδου ημιαυτόματης κατάτμησης. Θα πρέπει να τονισθεί σε αυτό το σημείο ότι, παρόλο που σε όλον τον παραπάνω προϊδεασμό έγινε λόγος για εφαρμογή της μεθόδου μόνο σε αρχαία χειρόγραφα κείμενα, η μέθοδος εφαρμόζεται εξίσου αποτελεσματικά και σε αρχαίες επιγραφές, επιτυγχάνοντας να ανιχνεύσει τα χαρακτηριστικά εκείνα, που είναι μοναδικά για τον κάθε χαρακτήρα.

Στην παρούσα εργασία, επομένως, παρουσιάζεται μία ολοκληρωμένη μελέτη και θεμελίωση της επίπεδης καμπυλότητας. Μελετάται ένας νέος τρόπος υπολογισμού της καμπυλότητας ενός σχήματος, του οποίου όμως δεν είναι γνωστή η παραμετρική του εξίσωση, καθώς και ένας νέος αλγόριθμος ταιριάσματος δύο καμπυλών, βάση της καμπυλότητας τους. Ερευνάται το βέλτιστο του παραπάνω ταιριάσματος, και σε περιπτώσεις που το αποτέλεσμα που προσφέρει η παραπάνω μεθοδολογία είναι υποβέλτιστο, ορίζεται ένα νέο κριτήριο, το οποίο κάνει χρήση των προηγούμενων αποτελεσμάτων και δίνει προσαρμογές καμπυλών οι οποίες είναι βέλτιστες. Εν τω άμα, το τελευταίο κριτήριο παράγει αποτελέσματα τα οποία είναι έτοιμα για στατιστική επεξεργασία. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ο τρόπος παραγωγής του πλατωνικού, και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου τα οποία, όπως και θα φανεί παρακάτω, είναι απολύτως συνεπή με την ανθρώπινη διαίσθηση.

Παράλληλα, επειδή γίνεται ενδεδειγμένη χρήση της έννοιας της καμπυλότητας σε όλη την πορεία της παρουσίασης της μεθόδου, μεγάλη φροντίδα δόθηκε τόσο στην απλούστερη διατύπωση των ιδεών που σχετίζονται με αυτή όσο και στην παρουσίαση των κεντρικότερων σχετικών θεωρημάτων της Διαφορικής Γεωμετρίας. Επιπλέον, παρατίθενται πολλές μαθηματικές έννοιες και αποδείξεις που κρίθηκαν αναγκαίες, οι οποίες αν και δεν σχετίζονται άμεσα με την παρουσιαζόμενη μέθοδο κρίθηκε απαραίτητο να συμπεριληφθούν καθώς βοηθούν στην βαθύτερη κατανόηση της όλης ιδέας.

Η ανάγκη και η σημασία της κατασκευής ενός συστήματος αυτόματης αναγνώρισης γραφέα με εφαρμογή σε αρχαία κείμενα, καθώς και της δυσκολίας του, πιθανώς να μην γίνεται άμεσα αντιληπτή. Για αυτό το λόγο, στην παρούσα εργασία αφιερώθηκαν οι δύο επόμενες ενότητες ακριβώς για αυτό το λόγο. Περιληπτικά αναφέρουμε εδώ, ότι η εισαγωγή και η χρήση των υπολογιστικών συστημάτων σε εργασίες και μελέτες που μέχρι πρότινος γινόταν, όπως λέγεται «με το χέρι» και βάση του ενστίκτου και της εν γένει εμπειρίας των αρχαιολόγων, έχει πολύ μεγάλη αξία και παρέχει ιδιαίτερα μεγάλη βοήθεια στον τομέα της έρευνας της Αρχαιολογίας. Οι τρόποι ανάλυσης χωρίς την χρήση πληροφοριακών συστημάτων, προσφέρουν αποτελέσματα όμως κανείς εξ' αυτών δεν δίνει με συνέπεια αντικειμενικά και αδιαμφισβήτητα μετρήσιμα αποτελέσματα. Με άλλα λόγια, η προσπάθεια μας έγκειται στην εισαγωγή και εφαρμογή της ανθρωπίνης εμπειρίας και κριτικής σκέψης σε ένα υπολογιστικό-πληροφοριακό σύστημα προς διευκόλυνση της εργασίας του ίδιου του ανθρώπου αλλά και εξαγωγή ταχύτερων και αντικειμενικότερων συμπερασμάτων.

Συνοψίζοντας, ο βασικός σκοπός του έργου που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία είναι η κατασκευή του πλατωνικού προτύπου για όλες τις υλοποιήσεις κάθε γράμματος σε κάθε στήλη της Αθηναίων Πολιτείας του Αριστοτέλη, ώστε σε επόμενο στάδιο να μπορούν να γίνουν διάφοροι έλεγχοι υπόθεσης ως προς την μοναδικότητα ή όχι του γραφέα του σωζόμενου κειμένου που η Αρχαιολογία έχει στα χέρια της. Η αποτελεσματικότητα και η συμφωνία με την ανθρώπινη διαίσθηση των αποτελεσμάτων των μεθόδων που θα ακολουθήσουν, θα δημιουργήσει τις βάσεις, ανοίγοντας έτσι τον δρόμο για την επιτυχή ταυτοποίηση γραφέα σε περιπτώσεις που οι αρχαιολογικές πληροφορίες και αναλύσεις αδυνατούν. Δείχνοντας με αυτό τον τρόπο ότι η πληροφορική πρέπει και οφείλει να προσεγγίσει διάφορους τομείς, οι οποίοι φαινομενικά φαντάζουν ξένοι προς αυτή, και να επιτελέσει τον σκοπό της, αυτό δηλαδή της μελέτης και της επεξεργασίας της πληροφορίας, έστω και αν στην αρχή το πρόβλημα φαντάζει απόρθητο υπολογιστικά.

*Η επιστήμη υπολογιστών δεν είναι τόσο παλιά όσο η φυσική, υστερεί χρονικά μερικούς αιώνες. Ωστόσο, αυτό δεν σημαίνει ότι υπάρχουν λιγότερα στο πιάτο του επιστήμονα των υπολογιστών απ' ό,τι σε αυτό του φυσικού: μπορεί να είναι νεότερη αλλά είχε μια πολύ πιο έντονη γέννηση!*

- Richard Feynman

## 1.2 Η σπουδαιότητα της αυτόματης αναγνώρισης γραφών αρχαίου κειμένου.

Η ιστορία δεν αποτελεί απλή αφήγηση τετελεσμένων γεγονότων, αλλά προσπάθεια αναδόμησης και ερμηνείας του παρελθόντος, με στόχο την ερμηνεία του παρόντος και την πρόβλεψη του μέλλοντος. Μάλιστα, η λέξη «ιστορία» προέρχεται από το ουσιαστικό *ιστόρ*, όπου *ιστόρ* στην Αρχαιότητα ήταν εκείνος που κατείχε ένα θέμα καλά ή ήταν αυτόπτης μάρτυρας. Πράγμα που υποδεικνύει και ετυμολογικά την ανάγκη για αναζήτηση πηγών και ταυτόχρονα εξονυχιστική μελέτη για την διασταύρωση της αλήθειας των λεγομένων τους, έτσι ώστε η ιστορία να μπορέσει να μιλήσει για τα γεγονότα όσο το δυνατόν σαφέστερα και αντικειμενικότερα.

Το σύνολο των σωζόμενων κειμένων είναι μία από τις κυριότερες πηγές μελέτης για την επιστήμη της Ιστορίας. Μιλώντας δε, ειδικά για την Αρχαιότητα, το σύνολο αυτών των αρχαίων κειμένων αποτελείται είτε από λίθινες επιγραφές είτε από χειρόγραφα, γραμμένα σε πάπυρους και επιγραφές. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η χρήση αυτών σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να περιοριστεί μόνο στο ιστορικό ενδιαφέρον γύρω από αυτά. Καθώς, πρόκειται για κείμενα που η δύναμη των ιδεών τους ήταν τόσο μεγάλη ώστε σχεδόν χίλια χρόνια και περισσότερα από την συγγραφή τους, αποτέλεσαν την μαγιά ιδεών για κινήματα όπως της Αναγέννησης και του Διαφωτισμού, δείχνοντας ότι οι σπουδαίες ιδέες δεν έχουν ημερομηνία λήξης, απλώς περιμένουν τις κατάλληλες προϋποθέσεις για να καρποφορήσουν ξανά.

Βέβαια, ένα από τα πιο εύλογα ερωτήματα που προέκυψαν σχετικά γρήγορα κατά την μελέτη των κειμένων αυτών είναι η χρονολογία συγγραφής τους, καθώς η μελέτη μίας πηγής δεν μπορεί να γίνει σε κενό χρόνο. Όπως, άλλωστε έγραψε πρόσφατα και ο μεγάλος ιστορικός Christian Habicht “σωστή χρήση των επιγραφών μπορεί να γίνει μόνο αν αυτές μπορούν να προσδιοριστούν χρονικά”. Δυστυχώς, όμως η ακριβής χρονολόγηση δεν είναι εύκολη άμεσα καθώς οι γραφείς στην Αρχαιότητα, δεν υπέγραφαν ποτέ και δεν σημείωναν την ημερομηνία στα κείμενα τους. Έτσι, ο ιστορικός ως *μη ιστόρ* της ημερομηνίας συγγραφής τους, αναζητά έξυπνες έμμεσες μεθόδους για την χρονολόγησή των κειμένων. [7]

Μία ιδέα που προέκυψε, και μάλιστα ιδιαίτερα καρποφόρα όπως θα φανεί παρακάτω, είναι ο προσδιορισμός του γραφέα μέσω της κατανόησης των λεπτομερειών που αναπαράγονται ασυναίσθητα στον τρόπο γραφής του. Η ιδέα μπορεί να δικαιολογηθεί από το γεγονός ότι τόσο το σκάλισμα επιγραφών όσο και η γραφή ήταν επάγγελμα στην Αρχαιότητα, και επειδή η καριέρα των περισσότερων χαρακτών και γραφέων ήταν περί τα 20 με 25 χρόνια, η εξακρίβωση του γραφέα οδηγεί και σε μία ασφαλή χρονολογική εκτίμηση. Τα παραπάνω μας επιτρέπουν με σχετική ασφάλεια να καταλήξουμε στο γεγονός ότι δεκάδες χιλιάδες πλάκες μπορούν να αποδοθούν σε μερικές δεκάδες χέρια. Αν λοιπόν, είμαστε βέβαιοι για την χρονολογία μίας πλάκας και μπορέσουμε να αποδώσουμε με σιγουριά μία άλλη πλάκα στον χαρακτή της πρώτης, τότε έχουμε καταφέρει να προσεγγίσουμε χρονικά την δεύτερη πλάκα, σύμφωνα με την χρονική περίοδο επαγγελματικής δράσης του χαρακτή. [18]

Τα παραπάνω ισχύουν και στην περίπτωση των χειρόγραφων. Για παράδειγμα στο έργο του Ομήρου, έργο το οποίο ταξίδεψε στην Ευρώπη και στους αιώνες και υπέστη

πλήθος προσθηκών σχολίων και σημειώσεων στα περιθώρια των σελίδων των αρχικών εκδόσεων, η εφαρμογή της παραπάνω ιδέας θα οδηγούσε σε άμεσα χρονολόγηση των σχολίων, μέσω του προσδιορισμού των διαφορετικών γραφών, δίνοντας πολλές επιπρόσθετες πληροφορίες, ακόμα και για τον τρόπο προσέγγισης του κειμένου από τους μελετητές στην πορεία του χρόνου.

Ιστορικά, η πρώτη μη μηχανιστική προσπάθεια, μεγάλης κλίμακας, εφαρμογή της μεθόδου έγινε από τον Colin, ο οποίος μελετώντας τις επιγραφές των Πυθείων στο αθηναϊκό θησαυροφυλάκιο των Δελφών, κατάφερε να διακρίνει τα χέρια των κοπτών και να αναθέσει τα κείμενα αντίστοιχα. Όμως, αυτός που έδειξε τον δρόμο για τη συστηματική μελέτη των ξεχωριστών κοπτών ήταν ο Wilhelm, ο οποίος το 1906 περιέγραψε ένα χαρακτηριστικό στυλ και διαπίστωσε επτά επιγραφές ως χαρακτηριστικές αυτού. Στην συνέχεια ο Dow επέκτεινε αυτό τον φάκελο εγγράφων με 27 νέα παραδείγματα, πετυχαίνοντας έτσι μέσω αυτής αλλά και πληθώρας άλλων συνεισφορών να θεωρείται και ο θεμελιωτής αυτής της προσέγγισης. Έκτοτε, ο Tracy συνεχίζοντας την εφαρμογή της ιδέας, έδειξε ότι η μελέτη των ανεξάρτητων γραφών των Ελληνικών επιγραφών είναι ταυτόχρονα εφικτή και παράλληλα καρποφόρα μέθοδος για την χρονολόγηση τους.

Δυστυχώς όμως, η εφαρμογή της μεθόδου από τον άνθρωπο αποτελεί μία πολύ κοπιαστική και επίφοβη ως προς την έλλειψη αντικειμενικότητας διαδικασία. Και αυτό γιατί, ο χρόνος που απαιτείται για την μελέτη και την κατανόηση του τρόπου γραφής ενός ανθρώπου καθώς και η εύρεση επαρκούς πλήθους κειμένων χαρακτηριστικών της γραφής του, κωλυσιεργία που μπορεί να οφείλεται σε πλήθος αιτιών ακόμη και γραφειοκρατικής φύσεως, μπορεί να την καθιστά απαγορευτική για ένα μελετητή, παρόλο της καλής διάθεσης του τελευταίου. Επιπλέον, είναι δουλειά που απαιτεί μεγάλη υπομονή, πολύ καλή παρατηρητικότητα και αποσπασματική μελέτη καθώς μικρές τυχαίες διαφορές μπορούν κάλλιστα να οδηγήσουν σε πλάνη και συνεπώς εξαγωγή λάθος συμπεράσματος. Τέλος, όπως σε κάθε επαγωγική διαδικασία, ο κίνδυνος της υποκειμενικότητας είναι φανερός και αδύνατος να αποφευχθεί, αφού είναι αδύνατο να αποδειχθεί, για παράδειγμα, αναμφισβήτητα ότι δύο αρχαίες επιγραφές χαράχτηκαν από τον ίδιο χαρακτήη.

Συνεπώς, στη σημερινή εποχή όπου η πληροφορική καλείται να δώσει λύσεις σε προβλήματα, όπου ο όγκος των πληροφοριών και ο χρόνος εξέτασης τους από τον άνθρωπο καθιστούν απαγορευτική την μη μηχανιστική προσέγγιση, η αλγοριθμική θεώρηση διαφαίνεται ότι είναι αναγκαία και πιθανώς μονόδρομος. Η διαπίστωση που ενισχύεται από το γεγονός ότι ο αριθμός των σωζόμενων επιγραφών αριθμείται περίπου στις 50.000, αριθμός ρεαλιστικά απρόσιτος από τον άνθρωπο. Τέλος, κρίθηκε αναγκαίο να αναφερθεί ότι η μέθοδος που πρόκειται να παρουσιαστεί, που προτείνει μία κομψή και γρήγορη λύση στην αντιμετώπιση του προβλήματος, έχει εφαρμοστεί σε 46 αρχαίες επιγραφές, της κλασσικής και ελληνιστικής περιόδου, και σε 23 βυζαντινούς κώδικες και τα συμπεράσματα της έρχονται σε πλήρη συμφωνία με τα εξαχθέντα συμπεράσματα των μελετητών για τον γραφέα του κάθε κειμένου. Το γεγονός αυτό ενισχύει την διαίσθηση ότι πρόκειται για ένα πρόβλημα που η πληροφορική και γενικότερα τα μαθηματικά οφείλουν να προσεγγίσουν και ταυτόχρονα ότι το ανερχόμενο επιστημονικό πεδίο των digital humanities, όπως καλείται στη διεθνή ορολογία, είναι μία προσέγγιση που θα αποφέρει στο μέλλον πολλούς καρπούς. [7]

### 1.3 Οι δυσκολίες.

Το πρόβλημα της αναγνώρισης του γραφέα ενός αρχαίου κειμένου σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να θεωρηθεί ως κάτι τετριμμένο, και μάλιστα η αλγοριθμική προσέγγιση του προβλήματος έρχεται να αντιμετωπίσει πολλές δυσκολίες. Η κατανόηση των δυσκολιών αυτών είναι καίριας σημασίας, καθώς από την μία πλευρά επιτρέπει την πλήρη κατανόηση του προβλήματος σε όλο του το βάθος και από την άλλη έρχεται να εξηγήσει διάφορες σχεδιαστικές επιλογές του αλγορίθμου, που διαφορετικά θα φαινόταν αινιγματικές.

Μία κύρια δυσκολία, σχεδόν άμεσα αντιληπτή από την πρώτη προσέγγιση κάποιου με το πρόβλημα της αυτόματης αναγνώρισης γραφέα αρχαίων κειμένων, είναι η απουσία ενός συνόλου εκπαίδευσης, υπό την έννοια ότι δεν υπάρχουν καθόλου χειρόγραφα αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα θα έπρεπε να λυθεί χωρίς την ύπαρξη ενός κειμένου χαρακτηριστικού των γραφέων για την χρήση ως πρωτότυπου, χωρίς την χρήση κάποια βάσης δεδομένων και τέλος χωρίς καμία πρότερη ένδειξη ακόμα και για τον αριθμό των διαφορετικών γραφέων. Αντίθετα, θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι περισσότερες υπάρχουσες μεθόδους αυτόματης αναγνώρισης, που έχουν παρουσιαστεί έως τώρα, προαπαιτούν κάποιο σύνολο εκπαίδευσης.

Επιπλέον, υπάρχουν αρκετές άλλες συνιστώσες που δυσχεραίνουν το πρόβλημα. Για παράδειγμα, πολλές φορές τα κείμενα, στα οποία πρέπει να εξαχθεί κάποιο συμπέρασμα, έχουν υποστεί μεγάλη φθορά, πράγμα που απαιτεί ιδιαίτερη μεταχείριση και προσοχή στην υπολογιστική μεταφορά της μεθόδου για όσο το δυνατόν ασφαλέστερο συμπέρασμα. Αρκετά συχνά δε, η ομοιότητα μεταξύ δύο συγκεκριμένων δειγμάτων ενός συμβόλου του αλφάβητου του ίδιου γραφέα είναι πολύ μικρότερη από αυτή άλλων ζευγαριών δειγμάτων άλλων γραφέων. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι ο τρόπος που ένας γραφέας σχηματίζει το αλφάβητο στην Αρχαιότητα παρουσιάζει ουσιαστική μεταβλητότητα. Για παράδειγμα στο ίδιο χειρόγραφο, μπορεί να υπάρχουν πραγματοποιήσεις του συμβόλου 'Ω' άλλοτε κλειστές και άλλοτε ανοικτές.



**Εικόνα 1:** Δύο διαφορετικές πραγματοποιήσεις του γράμματος 'Ω', που έχουν εξαχθεί από βυζαντινό κώδικα.

Παρόμοιες παρατηρήσεις ισχύουν για πολλά γράμματα όπως για το γράμμα *έψιλον*, για το γράμμα *κάππα* που κάποιες πραγματοποιήσεις του μοιάζουν με το λατινικό 'U', για το γράμμα *άλφα* όπου αρκετές φορές ο ίδιος γραφέας ενώνει την οριζόντια γραμμή μόνο με την πλάγια αριστερή, άλλες φορές μόνο με την πλάγια δεξιά και σε κάποιες πραγματοποιήσεις μάλιστα δεν το ενώνει με καμία πλάγια πλευρά.



**Εικόνα 2:** Στο αριστερό τμήμα της εικόνας απεικονίζεται τμήμα επιγραφής. Παρατηρούμε ότι η φθορά είναι ιδιαίτερα εμφανής. Στο δεξί τμήμα απεικονίζεται απόσπασμα βυζαντινού κώδικα.

Ακόμη, αν και το σχήμα ενός συμβόλου του αλφάβητου μπορεί να φαντάζει κανονικό, πολύ σημαντικό ρόλο παίζει και ο θόρυβος του περιγράμματος του. Αν και ο θόρυβος παρατηρείται περισσότερο στις επιγραφές, υπάρχουν και περιπτώσεις χειρογράφων που η παρουσία θορύβου είναι ιδιαίτερα σοβαρή, γεγονός που μπορεί να εξηγηθεί από την διάθεση και την κούραση του γραφέα, την ποιότητα του υλικού πάνω στο οποίο χαράχτηκε ή γράφηκε το κείμενο, την ακριβή μορφή του οργάνου γραφής (σμίλη, πένα), την ηλικία του γραφέα, κτλ (βλέπε εικόνα 2). Τέλος, σε όλα αυτά έρχεται να προστεθεί και η ίδια η φύση του προβλήματος που αναζητά λύσεις όσο το δυνατό πιο βέβαιες. Ως εκ τούτου, διαφαίνεται η ανάγκη για την ανάπτυξη μίας στατιστικά αυστηρούς προσέγγισης για την ποσοτικοποίηση και για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι δύο κείμενα έχουν γραφεί από τον ίδιο άνθρωπο. [7]

Η παραπάνω παράθεση των προβλημάτων δείχνει ότι η εφαρμογή της ιδέας έρχεται να αντιμετωπίσει πολλές δυσκολίες: οι οποίες προκύπτουν, από την μία πλευρά, από το γεγονός ότι το σύνολο εφαρμογής της είναι κείμενα, που έχουν υποστεί καταστροφές από τον χρόνο και αλλοιώσεις, θέτοντας έτσι ως προαπαιτούμενο την ανάπτυξη καινοφανών λύσεων για την επίλυση αυτών. Φυσικά, ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να ληφθεί ώστε η οποιαδήποτε επεξεργασία να μην αλλοιώνει την πληροφορία του στυλ γραφής που κρύβεται σε αυτά. Και από την άλλη πλευρά, η απουσία κάποιου συνόλου εκπαίδευσης αποκλείει την εφαρμογή αρκετών σύγχρονων ιδεών που κάνουν σαφή χρήση τους. Καταλήγοντας, από όλα τα παραπάνω φαίνεται ότι ο άνθρωπος που προσπαθεί να αναπτύξει μεθόδους για την αυτόματη αναγνώριση γραφέων αρχαίου κειμένου θα έρθει αντιμέτωπος με πολλά προβλήματα, αυτό όμως δεν πρέπει να θεωρηθεί σε καμία περίπτωση ως τροχοπέδη, αλλά αντίθετα ως μία πολύ ενδιαφέρουσα πρόκληση που η επίλυση της θα είναι καθοριστικής σημασίας για την Αρχαιολογία, όπως εξηγήθηκε και στην προηγούμενη ενότητα.

## 1.4 Ιστορικά στοιχεία πάνω στην Αθηναίων Πολιτεία.

**Βίος του Αριστοτέλη.** Πριν γίνει λόγος για την Αθηναίων Πολιτεία, κρίθηκε απαραίτητο, να αναφερθούν κάποια στοιχεία για τον ίδιο τον συγγραφέα της. Κατά την ανάγνωση των κειμένων του Αριστοτέλη, ακόμα και χωρίς κάποια πρότερη γνώση της σημασίας του για την ανθρώπινη νόηση, άμεσα αντιλαμβάνεται κανείς ότι πρόκειται για μία ξεχωριστή φυσιογνωμία συγγραφέα και ανθρώπου. Ίσως, το μεγαλείο του έργου του πλέκει ένα μυστήριο γύρω από αυτόν· μας κάνει να αναρωτηθούμε πώς ένας άνθρωπος έγινε κοινωνός και συνόψισε όλη την σοφία της τότε εποχής, την απέδωσε με τρόπο αξιοθαύμαστα συστηματικό και σαφή, και παράλληλα όρισε και θεμελίωσε τόσα νέα επιστημονικά πεδία, μέσω των καινοτόμων ιδεών του και παρατηρήσεων. Πρόκειται για τον άνθρωπο που έθεσε το πείραμα και την παρατήρηση ως την βάση της επιστήμης και παράλληλα όρισε σαν θεμέλιο αυτής, την γνώση των αιτιών των πραγμάτων και των φαινομένων. Τόσο μεγάλη είναι η δύναμη και η αρτιότητα των συγγραμμάτων του, ώστε δίκαια έχει ειπωθεί για αυτόν ότι: «άλλος Αριστοτέλης ούτε εγεννήθη, ούτε θα γεννηθεί, αλλά ούτε και είναι ανάγκη να γεννηθή». Ακολουθεί λοιπόν, μία προσπάθεια εξιχνίασης αυτού του «μυστηρίου» μέσω της παρουσίασης της ιστορίας του.



**Εικόνα 3:** Ο Αριστοτέλης σε πίνακα του Ιταλού ρομαντικού ζωγράφου Φραντσέσκο Χάγιεζ.

Ο μεγάλος Έλληνας, φυσιοδίφης και φιλόσοφος, Αριστοτέλης γεννήθηκε το 384 π.Χ. στην πόλη Στάγειρα της Χαλκιδικής. Ο πατέρας του ονομαζόταν Νικόμαχος, και

ήταν γιατρός στην αυλή του Βασιλιά της Μακεδονίας Αμύντα του Γ'. Το επάγγελμα του πατέρα του ίσως αποτέλεσε και την πρώτη επαφή του Αριστοτέλη με την επιστημονική σκέψη. Και ίσως αυτές οι ζυμώσεις του με τον περίεργο και ενδιαφέρον κόσμο της ιατρικής, αποτέλεσαν τα πρώτα ψήγματα για την διαμόρφωση της αγάπης του για την κατανόηση του κόσμου και την αναζήτηση των αληθειών του. Στα δεκαεπτά του χρόνια, έχοντας ήδη χάσει τον πατέρα του, φτάνει στην Αθήνα για να σπουδάσει στην Ακαδημία του Πλάτωνα, αρχίζοντας έτσι την 1<sup>η</sup> περίοδο της φιλοσοφικής τους δραστηριότητας, σύμφωνα με τους μελετητές του. [1]

Τη διεύθυνση της Ακαδημίας, εκείνη την περίοδο, την είχε παραχωρήσει ο Πλάτωνας σε μία από τις πιο προικισμένες προσωπικότητες της Αρχαιότητας, στον νεαρό, τότε, Εύδοξο. Ο Εύδοξος, του οποίου η καταγωγή ήταν από την Κνίδα, ήταν σπουδαίος μαθηματικός, αστρονόμος και γεωγράφος της εποχής. Εύκολα τίθεται το ερώτημα αν η απουσία του Πλάτωνα ήταν αποφασιστικής σημασίας για την διαμόρφωση της προσωπικότητας του νεαρού Σταγειρίτη και σχεδόν άμεσα προκύπτει ότι η απάντηση είναι καταφατική. Δεν ήταν μόνο τυχερός ο νεαρός τότε Αριστοτέλης που «βρέθηκε την πιο κατάλληλη στιγμή στον πιο σωστό τόπο, εκεί δηλαδή όπου υπήρχαν οι κατάλληλοι άνθρωποι που θα μπορούσαν να γονιμοποιήσουν με έναν εντελώς ξεχωριστό τρόπο τη σκέψη του βοηθώντας την να απλώσει μέσα σε σύντομο χρόνο τα δικά της φτερά», όπως μάλιστα διατύπωσε και ένας αριστοτελιστής των ημερών μας. Αλλά το πιο σημαντικό είναι ότι με την απουσία του Πλάτωνα είχε, από την πρώτη στιγμή, την ευκαιρία να δεχτεί εκείνη ακριβώς την επίδραση που πρέπει να ανταποκρινόταν πολύ αμεσότερα στη δική του ψυχοσύνθεση, την ελάχιστη ποιητική, την σχεδόν απόλυτα θετική και επιστημονική.

Μετά τον θάνατο του Πλάτωνα, ο Αριστοτέλης εγκαταστάθηκε στην Άσσο, όπου και αρχίζει η 2<sup>η</sup> περίοδος της φιλοσοφικής του δραστηριότητας, εκεί ο φιλόσοφος ανακαλύπτει τον κόσμο των φυτών και των ζώων. Όλα σχεδόν τα φυσιολογικά του έργα είναι καρπός αυτής της περιόδου. Εκείνη την περίοδο επίσης, όντας εγκαταστημένος στην Μακεδονία, έλαβε πρόσκληση από τον Βασιλιά Φίλιππο για την ανάληψη της αγωγής του Μέγα Αλέξανδρου, την οποία και δέχτηκε. Το διάστημα που εκπαίδευε τον μικρό τότε Αλέξανδρο στην μακεδονική αυλή, είχε την άνεση τόσο να συστηματοποιήσει τις άπειρες κεκτημένες γνώσεις του, κατά τρόπο διδακτικό και να εξάγει τα ηθικά και πολιτικά πορίσματα που συνεπάγονταν, αλλά και να αυξήσει σε μεγάλο βαθμό και με δικά του πειράματα και παρατηρήσεις τις γνώσεις του τότε καιρού για την φυσική και φυσιολογία. Είναι γνωστό ότι κατά την εκστρατεία του Μεγάλου Αλεξάνδρου, μισθοδοτούνταν χιλιάδες ανδρών από τον βασιλιά για να συλλέγουν και να αποστέλλουν στον Αριστοτέλη όλα τα ζώα, τα φυτά και τα «περίεργα εν γένει» πράγματα της Ασιατικής χώρας, όπως αναφέρει ο Πλίνιος.

Μετά την αναχώρηση από την Μακεδονία του Αλεξάνδρου, ο Αριστοτέλης επέστρεψε στην Αθήνα, διδάσκοντας στο δημόσιο γυμναστήριο στο Λυκαβηττό, που ίδρυσε, το Λύκειο. Τα δώδεκα χρόνια που παρέμεινε στην Αθήνα, και αποτελούν και την 3<sup>η</sup> περίοδο της φιλοσοφικής τους δραστηριότητα, ήταν χρόνια απερίσκεπτης δουλειάς για τον σπουδαίο φιλόσοφο. Ο Αριστοτέλης συνθέτει τώρα το σημαντικότερο μέρος των Πολιτικῶν του (έχει άλλωστε προηγηθεί —κατά την περίοδο των ταξιδιών του— η συγκέντρωση των 158 Πολιτειῶν του, των μορφών διακυβέρνησης ή, όπως θα λέγαμε εμείς σήμερα, των συνταγμάτων ενός πλήθους ελληνικών πόλεων), ενώ παράλληλα



συγγράφει σημαντικό μέρος από τα Μετά τὰ φυσικά του, το βιολογικού περιεχομένου έργο Περί ζώων γενέσεως, και τα Ἠθικά Νικομάχεια.

Το πέρας των χρόνων στην Αθήνα βρίσκουν τον Αριστοτέλη να είναι τώρα πια ένας ώριμος και ήρεμος στοχαστής. Η συζήτηση μαζί του είναι τώρα ευκολότερη, γιατί και η δική του στάση απέναντι στις γνώμες των άλλων προσδιορίζεται τώρα από περισσότερη κατανόηση. Το πράγμα γίνεται φανερό ακόμη και στο ύφος των έργων του αυτής της περιόδου. Είναι άλλωστε και οι εξωτερικές συνθήκες που τον βοηθούν να αφοσιωθεί στο έργο του. Η ζωή για έναν Μακεδόνα δεν είναι τώρα δύσκολη στην Αθήνα. Το 323 π.Χ. φτάνει στην Αθήνα η είδηση ότι πέθανε ο Αλέξανδρος. Ο Αριστοτέλης αισθάνεται πως η ζωή του βρισκόταν πάλι μπροστά στον πιο μεγάλο κίνδυνο. Η συνταγή για τα ανεπιθύμητα πρόσωπα ήταν στην Αθήνα γνωστή από παλιά. Να βρεθεί ένας κατηγορος δεν ήταν καθόλου δύσκολο, και μια μικρή αφορμή ήταν αρκετή για να απαγγελθεί κατηγορία για ασέβεια. Στην περίπτωση του Αριστοτέλη την αφορμή την πρόσφερε ένα ποίημα που ο φιλόσοφος είχε γράψει για τον αξέχαστο φίλο του Ερμία, που είχε βρει στο μεταξύ μαρτυρικό θάνατο. Η κατηγορία βασίστηκε στο γεγονός ότι το ποίημα αυτό του Αριστοτέλη είχε τη μορφή ενός παιάνα, του παραδοσιακού ύμνου στον θεό Απόλλωνα και το "έγκλημα" ήταν ότι χρησιμοποιήθηκε αυτό το ποιητικό σχήμα για να υμνηθεί ένας κοινός θνητός —για τους Αθηναίους, ας μη το έλεγαν, αυτός ο κοινός θνητός ήταν ένας δηλωμένος φίλος του Φίλιππου, του βασιλιά της Μακεδονίας. Η μόνη λύση για τον Αριστοτέλη ήταν να εγκαταλείψει για δεύτερη φορά την Αθήνα. Τη φορά αυτή πήγε να ζήσει στην Χαλκίδα, στο σπίτι που είχε εκεί από τη μητέρα του, όπου ο θάνατος τον βρήκε εκεί την επόμενη χρονιά.

Η παράδοση λέει πως όταν έφευγε ο Αριστοτέλης από την Αθήνα, τον ρώτησαν «Τίς έστιν ἡ τῶν Ἀθηναίων πόλις;». Εκείνος χαρακτήρισε την πόλη που τον φιλοξένησε τριάντα τόσα χρόνια με ένα αληθινά εντυπωσιακό επίθετο· την ονόμασε παγκάλη, πανέμορφη· παραπονέθηκε όμως πως πίσω από την ασύγκριτη ομορφιά της κρύβει μιαν ασχήμια από τις πιο σιχαμερές και τις πιο ανυπόφορες· χρησιμοποιώντας στίχους από την Οδύσσεια έκανε έναν δριμύ υπαινιγμό στους συκοφάντες, που δεν ήταν μόνο πολλοί στην Αθήνα· ήταν και ένα είδος που δεν έλειπε δυστυχώς ποτέ, αφού πάντα βρίσκονταν οι πρόθυμοι να διαδεχτούν τους προηγούμενους. Σύμφωνα με μια δεύτερη διήγηση τον ρώτησαν επίσης τις κρίσιμες εκείνες μέρες γιατί εγκατέλειπε την Αθήνα, κι εκείνος απάντησε ότι δεν ήθελε να δώσει στους Αθηναίους την ευκαιρία να σφάλουν για δεύτερη φορά σε βάρος της φιλοσοφίας, κάνοντας, βέβαια, τη φορά αυτή υπαινιγμό στη θανατική καταδίκη και στο τέλος του Σωκράτη.

**Το συγγραφικό έργο του Αριστοτέλη.** Από τα συγγράμματα του Αριστοτέλη μόνο το ένα τρίτο διασώθηκε, πράγμα που συμπεραίνουμε από πολλούς αρχαίους συγγραφείς οι οποίοι κάνουν αναφορά σε έργα του άγνωστα σε μας. Πιθανότερο όμως είναι η απώλεια των αριστοτελικών έργων να μην είναι τόσο μεγάλη και ότι έχουμε ακόμα και τώρα το κυριότερο και σημαντικό μέρος των έργων του. [1]

Τα έργα του, ήδη από την Αρχαιότητα χωρίζονταν σε δύο κυρίως ομάδες από τους μελετητές του. Την πρώτη την αποτελούσαν έργα με τα οποία ο Αριστοτέλης απευθυνόταν σε ένα πλατύτερο αναγνωστικό κοινό, ένα κοινό πέρα από το ακροατήριο του στην Ακαδημία και αργότερα στο Λύκειο. Οι αρχαίοι ονόμαζαν τα έργα της ομάδας αυτής, ακριβώς γι' αυτόν τον λόγο, εξωτερικά. Σήμερα δεν έχουμε από τα έργα αυτά του

Αριστοτέλη παρά μόνο αποσπάσματα, κομμάτια δηλαδή, μικρότερα ή μεγαλύτερα, που διασώθηκαν στα έργα άλλων συγγραφέων της αρχαιότητας.

Τη δεύτερη ομάδα την αποτελούν τα έργα του που μας σώθηκαν ολόκληρα. Όλα τους σχεδόν είναι τα χειρόγραφα που είχε μαζί του ο Αριστοτέλης στα μαθήματά του· μερικά μάλιστα από αυτά δεν είναι παρά σημειώσεις στη συντομότερη δυνατή μορφή, πρέπει επομένως να είχαν γραφεί για αποκλειστικά προσωπική χρήση, για να βοηθήσουν δηλαδή τη μνήμη του Αριστοτέλη την ώρα της παράδοσης (οι αρχαίοι ονόμαζαν τα έργα αυτά ακροαματικά).

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι τα έργα του Αριστοτέλη που κυκλοφόρησαν στο ευρύ κοινό, τα έργα επομένως που πολλαπλασιάστηκαν σε πλήθος αντιτύπων, είναι ακριβώς τα έργα του που χάθηκαν· αντίθετα, τα έργα του από τα οποία δεν υπήρξε καν δεύτερο αντίτυπο πέρα από το προσωπικό του χειρόγραφο, αυτά έφτασαν τελικά ως εμάς.

***Ποια έργα του σώθηκαν ως εμάς και πώς; Ποια έργα του χάθηκαν και γιατί;*** Γεννιέται το ερώτημα βέβαια, τι απέγιναν τα έργα του Αριστοτέλη μετά τον θάνατό του. Ποια ήταν τα γεγονότα που οδήγησαν στην εξαφάνιση τόσο μεγάλου μέρους του έργου του μεγάλου φιλοσόφου; Σύμφωνα με την ιστορία, μετά τον θάνατο του Αριστοτέλη τα βιβλία του πέρασαν στην ιδιοκτησία του Θεόφραστου. Με τη σειρά του ο Θεόφραστος τα κληροδότησε στον Νηλέα από τη Σκήψη, τον τελευταίο που ζούσε ακόμη από τον στενό κύκλο των φίλων του Αριστοτέλη.

Λίγο ύστερα από τον θάνατο του Θεόφραστου, δηλαδή λίγο ύστερα από το έτος 287/6 π.Χ. , ο Νηλέας έφυγε από την Αθήνα για να εγκατασταθεί στην ιδιαίτερη πατρίδα του. Μαζί του έφερε εκεί και τα προσωπικά χειρόγραφα του παλιού του φίλου, πιο πολύ από σεβασμό προς τη μνήμη του. Οι κληρονόμοι του, όντας μη κοινωνοί της σημασίας του έργου του Αριστοτέλη που είχαν στα χέρια τους, δεν είχαν πια κανένα ενδιαφέρον να διασώσουν το περιεχόμενο των βιβλίων που κληρονόμησαν. Παράλληλα όμως ήθελαν να τα σώσουν από τη βουλιμία των ηγεμόνων της Περγάμου, που τι δεν θα έκαναν για να αποκτήσουν την πολύτιμη συλλογή, αφού είχαν και αυτοί αποδυθεί στον ίδιο με τους Πτολεμαίους της Αιγύπτου αγώνα για τη δημιουργία μεγάλης βιβλιοθήκης. Το μόνο λοιπόν που τους έμενε να κάνουν, σκέφτηκαν, ήταν να τα κρύψουν σε μια υπόγεια αποθήκη στη Σκήψη.

Εκεί τα ανακάλυψε, ένας περίφημος βιβλιόφιλος της Αθήνας, ο Απελλικών, στις αρχές του 1ου πια αιώνα π.Χ. Ο Απελλικών έφτασε στη Σκήψη στην κατάλληλη στιγμή. Τα βιβλία είχαν αρχίσει κιόλας να καταστρέφονται από την υγρασία και άλλες καταπονήσεις. Τα αγόρασε λοιπόν και τα ξανάφερε πίσω στην Αθήνα. Όταν όμως το 86 π.Χ. ο Ρωμαίος Σύλλας κυρίεψε την Αθήνα, ανάμεσα στην πλούσια λεία που έστειλε από εκεί στη Ρώμη, ήταν και τα βιβλία του Αριστοτέλη.

Νέες περιπέτειες άρχιζαν εκεί για τα βιβλία του μεγάλου φιλοσόφου. Αίτιοι τη φορά αυτή ήταν οι διάφοροι αντιγραφείς. Όσπου στο δεύτερο μισό του 1ου αιώνα π.Χ. ανέλαβε και έφερε σε πέρας την έκδοση των έργων του Αριστοτέλη ο Ροδίτης Ανδρόνικος. Η έκδοση αυτή έδωσε το έναυσμα για μια συστηματική πλέον απασχόληση με τα έργα και τη φιλοσοφία του Αριστοτέλη. Σύντομα άρχισε μάλιστα, με βάση τα αντίγραφα της έκδοσης αυτής, και ο σχολιασμός των έργων του Αριστοτέλη.

Σ' αυτό ακριβώς το ενδιαφέρον, που ήταν καρπός της συστηματικής εργασίας του Ανδρόνικου, χρωστούμε εμείς σήμερα τα έργα του Αριστοτέλη όσα έχουμε. Την ίδια

όμως στιγμή είμαστε υποχρεωμένοι να πούμε πως το ενδιαφέρον για τα έργα που αποκάλυψε στον κόσμο ο Ανδρόνικος, έκανε να ξεχαστούν τα άλλα έργα του Αριστοτέλη, εκείνα που είχαν γνωρίσει τη μεγάλη δημοσιότητα.

**Η «Αθηναίων Πολιτεία».** Στα συγγράμματα του «Συναγωγή Πολιτειών» ή «Πολιτεία» (πολιτεύματα) ο Αριστοτέλης περιέγραψε και ανέλυσε κατά τον Διογένη τον Λαέρτιο και τον Ησύχιο 158 πολιτεύματα αυτονόμων πολιτειών και κρατών, τόσο ελληνικών όσο και ξένων. Βέβαια, ο συνολικός αριθμός των πολιτειών που διασώθηκαν είναι 99. Στα 51 από αυτά τα αποσπάσματα το όνομα του Αριστοτέλη και ο τίτλος των πολιτειών αναφέρονται ως επί των πλείστων με τον ακόλουθο τρόπο: «Αριστοτέλης εν τη ..... ων πολιτεία». Σε 16 αποσπάσματα αναφέρεται μόνο το όνομα του, αλλά όχι το όνομα της πολιτείας και στα υπόλοιπα είναι φανερό από το περιεχόμενο και το όνομα του Αριστοτέλη αλλά και το όνομα της πολιτείας. [2]

Πρώτη στο όλο έργο ήταν η Αθηναίων Πολιτεία, η οποία χάθηκε και πιο νωρίς από όλα τα έργα. Διαπίστωση που επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι και ο Φώτιος, που την γνώριζε από κάποια επιτομή, και ο παλαιότερος του ο Ησύχιος δεν αναφέρουν κανένα ακριβές της απόσπασμα. Είναι δε περίεργο ότι συνέβη τόσο νωρίς η απώλεια της, γιατί αφενός υπήρχαν πολλά αντίγραφα της, και αφετέρου της αποδιδόταν πολύ μεγάλη σημασία, αφού είχε γραφεί από την ίδια και προσωπική αντίληψη του Αριστοτέλη, ο οποίος το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του έμεινε στην Αθήνα. Από το έργο αυτό, πολλοί από τους επόμενους συγγραφείς δανείζονται πληροφορίες, κρίσεις και περικοπές. Ο Κικέρων, είχε το βιβλίο αυτό στην βιβλιοθήκη του, ο Πλούταρχος από αυτό άντλησε, κυρίως, τον βίο του Σόλωνα και με αυτό διευκρίνισε πολλά στους βίους του Θησέα, του Περικλή και του Νικίου. Τέλος, ο Αρποκρατίων και άλλοι λεξικογράφοι από αυτό το έργο πήραν σαφείς πληροφορίες για τους Αθηναίους θεσμούς. Ακριβώς, τη παραπάνω χρησιμοποίηση του έργου από πολλούς συγγραφείς αναφέρει και ο Théodore Reinach ως την κύρια αιτία της απώλειας του. Ισχυριζόμενος ότι οι Βυζαντινοί αντιγραφείς του θεωρούσαν ανωφελές να επιχειρούν αντιγραφή έργου, το οποίο ολόκληρο σχεδόν, κατά την αντίληψη τους, περιλαμβανόταν αποσπασματικά σε άλλα συγγράμματα. Οποσδήποτε, είναι βέβαιο ότι από την εποχή της Αναγέννησης η Αθηναίων Πολιτεία θεωρείται χαμένη οριστικά και μόνο κάποια αυθεντικά ή αλλοιωμένα αποσπάσματα και η δισέλιδη περίληψη των περιεχομένων της, γνωστή με τον τίτλο «εκ των Ηρακλειδών περί της πολιτείας Αθηναίων», έδιναν κάποια ιδέα για το περιεχόμενο όλης της πραγματείας των πολιτευμάτων από τον Αριστοτέλη.

Το 1885 όμως, σε ένα φθαρμένο πάπυρο της βιβλιοθήκης του Βερολίνου ανέγνωσαν αποσπάσματα ιστορικής ύλης, τα οποία αναγνωρίστηκαν ότι άνηκαν στην Αθηναίων Πολιτεία. Επειδή δε ο πάπυρος προερχόταν από την Αίγυπτο, όπου είχαν βρεθεί οι λόγοι του ρήτορα Υπερείδη και το «Παρθένιον» του ποιητή Αλκμάνος, γεννήθηκε η ελπίδα ότι εκεί θα βρισκόταν και η Αθηναίων Πολιτεία, διότι σε κάποιο κατάλογο Αιγυπτιακής βιβλιοθήκης ο οποίος βρισκόταν στην Πετρούπολη βεβαιωνόταν πως το έργο βρισκόταν στην Αίγυπτο, κατά τον 3<sup>ο</sup> αιώνα μ.Χ. Και όντως, το 1891 αναγγέλθηκε στο Λονδίνο ότι μεταξύ δέσμης παπύρων, άγνωστο πως και πότε εισήχθησαν στο Βρετανικό Μουσείο, ανευρέθηκε η Αθηναίων Πολιτεία του Αριστοτέλη. Μετά από λίγες βδομάδες εκδόθηκε από τον Kenyon για πρώτη φορά.

Από την αρχή, έγιναν μελέτες για την αυθεντικότητα του κειμένου, όπου και αναγνωρίστηκε ως αυθεντικό. Διαπιστώθηκε μάλιστα, και η μεγάλη αρχαιότητα του αντιγράφου, που αναγόταν στον 1<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα. Από το ίδιο το σύγγραμμα, μπορεί να οριστεί και η εποχή της συγγραφής του. Επειδή, ο τελευταίος αναφερόμενος σε αυτό άρχοντας είναι ο Κηφισόφων, επώνυμος του έτους 329 – 328 π.Χ. και δεν γίνεται κανένας λόγος για σημαντικές μεταβολές στο Αθηναϊκό πολίτευμα σε σχέση με αυτές που επέφερε ο Αντίπαρος το 322 π.Χ. δηλαδή ακριβώς το έτος θανάτου του Αριστοτέλη, συμπεραίνουμε ασφαλώς ότι η συγγραφή έγινε μεταξύ του 238 και του 322 π.Χ.

***Η δομή και το περιεχόμενο της «Αθηναίων Πολιτείας».*** Το πρώτο μέρος του έργου, το καθαρά ιστορικό, ακολουθεί αυστηρή χρονολογική σειρά, και γίνονται συντομότητες ή και καθόλου μνείες σε άνδρες, που δεν συνετέλεσαν σε πολιτειακές ή διοικητικές μεταβολές. Έτσι πουθενά δεν αναφέρεται ο Αλκιβιάδης, ενώ απεναντίας, αναφέρονται εκτενώς τα όσα έγιναν επί Σόλωνος, Κλεισθένη, τα γεγονότα που αφορούν την διοίκηση και την πτώση των Πεισιστρατιδών, το μετά την καταστροφή στην Σικελία ολιγαρχικό κίνημα, η άλωση των Αθηναίων από τον Λύσανδρο, και τέλος η αποκατάσταση του δημοκρατικού πολιτεύματος το 403 π.Χ. Μάλιστα, ο Αριστοτέλης σταματά την περιγραφή σε αυτό το σημείο καθώς την θριαμβευτική επάνοδο του δήμου στην εξουσία με τον Θρασύβουλο, την κρίνει ως την ενδέκατη και τελευταία μεταβολή της πολιτειακής ιστορίας των Αθηναίων. Και αποτελεί αλήθεια, η παραπάνω διαπίστωση καθώς όντως καθ' όλον τον 4<sup>ο</sup> π.Χ. αιώνα η αθηναϊκή πολιτεία, εκτός από μερικές τροποποιήσεις στις λεπτομέρειες, δεν υπέστη καμιά ριζική μεταβολή.

Το δεύτερο μέρος του έργου ελάχιστα αναφέρεται σε ιστορικές πηγές, γιατί σε αυτό περιγράφει το σύγχρονο του πολιτειακό σύστημα, αντιλαμβανόμενος και πληροφορούμενος ο ίδιος τα πράγματα. Αντίθετα με το πρώτο μέρος όπου ακολουθεί διηγητικό ύφος και διακρίνεται για τη δυνατή κριτική του, στο δεύτερο μέρος, το περιγραφικό και αναλυτικό ύφος επικρατεί, χαρακτηρίζεται από τρομερή μεθοδικότητα και διαφαίνεται ο θαυμάσιος διασαφητικός τρόπος της αριστοτέλειας διάνοιας. Συνολικά, στο έργο αυτό ο Αριστοτέλης αποδεικνύεται βαθύτατος κριτικός τόσο στην χρήση των ιστορικών κειμένων και στην εκλογή αυτών όσο και στην εκτίμηση της σημασιών των γεγονότων.

Παρά τα πλεονεκτήματα αυτά ο Αριστοτέλης δεν μπορεί να θεωρηθεί το πρότυπο ιστορικού συγγραφέα όχι μόνο κατά τη σημερινή αντίληψη της ιστορίας, αλλά ούτε παραβαλλόμενος προς τους επιφανειακούς αρχαίους ιστορικούς συγγραφείς. Γιατί την ιστορική του αφήγηση δεν την ολοκληρώνει το βαθύ και ιδιότυπο ύφος του Θουκυδίδη, το οποίο καθιστά το σύγγραμμά του Πελοποννησιακού πολέμου ένα σύνολο άρτιο και αδιάσπαστο, ούτε διακατέχεται από την υψηλότερη και γενική κοσμοπολιτική αντίληψη των γεγονότων που διαπνέει την ιστορία του Πολύβιου. Επίσης, αν και ασχολείται με αρκετές λεπτομέρειες ο Αριστοτέλης, δεν είναι πάντα και σε αυτές αλάθητος χρονογράφος και τέλειος από διευκρινιστικής άποψης αφηγητής των συμβάντων. Βέβαια, αυτό θα πρέπει να αποδοθεί στο εσπευσμένο της συγγραφής και στην πιθανή μη εκ των υστέρων αναθεώρηση και εξέταση του έργου μάλλον, παρά σε άγνοια των ιστορικών πηγών και των αυθεντικών κειμένων.

**Η σημασία της αυθεντικότητας της «Αθηναίων Πολιτείας».** Όταν δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά το κείμενο της «Αθηναίων Πολιτείας» οι νέες πληροφορίες και απόψεις που έδινε το έργο αυτό, οι διαφορές και αντιθέσεις του προς την ήδη γνωστή παράδοση, τέλος η σύνθεσή του που ήταν αρκετά διαφορετική από τα άλλα συγγράμματα του Αριστοτέλη, προξένησαν ισχυρή εντύπωση στους μελετητές του. Σε μερικούς μάλιστα απ' αυτούς η χαρά για την ανακάλυψη ήταν ανάμικτη με κάποια δυσάρεστη έκπληξη, σχεδόν απογοήτευση. Η πίστη που είχαν ορισμένοι απ' αυτούς στην ενότητα της ιστορικής παράδοσης της Ελλάδας και στο αλάθητο του Αριστοτέλη έγινε αφορμή για ζωνρές φιλονικίες, που κράτησαν χρόνια, γύρω από το έργο αυτό, που μερικοί σοφοί έφτασαν στο σημείο να του αμφισβητήσουν την αυθεντικότητα, και πολύ περισσότερο την ακεραιότητα.

Επιπλέον, ο πάπυρος της Αθηναίων Πολιτείας, περιέχει αρκετά συντακτικά, γραμματικά και λεξιλογικά λάθη που οφείλονται στους παλιούς αντιγραφείς. Και από την άποψη αυτή ο πάπυρος της Αθηναίων Πολιτείας μας παρέχει σημαντικά ωφελήματα, γιατί μας δίνει να καταλάβουμε το πλήθος των παραφθορών και αλλοιώσεων οι οποίες έγιναν στα κείμενα από τους αντιγραφείς. Λέξεις αλλοιωμένες, φράσεις μετατοπισμένες, κακή ανάγνωση του αντιγραφόμενου, παραλείψεις, φράσεις αυθαίρετα εξηγητικές, που αντικαθιστούν μερικές φορές το αρχικό κείμενο ή παρεμβάλλονται δίπλα στις γνήσιες, αλλοιώνουν σε πολλά μέρη το κείμενο. Μεγαλύτερη ακόμα αλλοίωση, όπως απέδειξε η κριτική μελέτη του κειμένου, προήλθε από την παρεμβολή περικοπών άλλου προγενέστερου αλλά λιγότερου σημαντικού συγγράμματος πάνω στο ίδιο θέμα – παρεμβολή που έγινε μεθοδικά μεν σύμφωνα με τις χρονολογίες, αλλά αντιφάσκει συχνά με το κείμενο. Όταν αυτές οι παρεμβαλλόμενες φράσεις αφαιρεθούν, τότε φαίνεται το γνωστό ύφος του Αριστοτέλη, η λιτότητα και η ακρίβεια της φράσης και η ξηρή διατύπωση αυτού που σκοπεύει να πει, χωρίς πλεονασμούς και χωρίς ελλείψεις.

Άλλα, διακριτικά χαρακτηριστικά αυτού του αριστοτέλειου έργου είναι η απ' αρχής μέχρι τέλους υπάρχουσα καλή πίστη του συγγραφέα και το διαυγές, λιτό και αβίαστο αφηγηματικό ύφος, για το οποίο με ενθουσιασμό μίλησαν κατά την αρχαιότητα από τον Κικέρωνα ο οποίος ονόμασε τον αριστοτέλειο λόγο σαν «ποτάμι χρυσού», μέχρι τον Πλούταρχο, ο οποίος εξαιρεί την δύναμη και την χάρη του ύφους του.

Σύμφωνα, με όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι όχι μόνο από ιστορικής αλλά και από φιλολογικής άποψης η Αθηναίων Πολιτεία, είναι ένα από τα πολυτιμότερα κειμήλια, που κληροδοτήθηκαν σε μας από την ελληνική αρχαιότητα, όταν βρισκόταν στην ακμή της. Για, αυτό το λόγο, φαίνεται η εξέχουσα σημασία για την αυθεντικότητα της, και για την ακεραιότητα της. Σήμερα ο σάλος αυτός της πολεμικής έχει κοπάσει, και τα διάφορα εξαγόμενα που αφορούν τη σύνθεση του έργου και την αξία του σαν ιστορικής μαρτυρίας μπορούν πλέον να θεωρηθούν ασφαλή. Το κείμενο συμπίπτει με τόση ακρίβεια με τα σχετικά αποσπάσματα που μας κληροδότησε η αρχαιότητα, ώστε να μην παρουσιάζεται σήμερα καμία σοβαρή αντιγνωμία όσον αφορά τη γνησιότητα της «Αθηναίων Πολιτείας». [2]

## 2. ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιαστούν διάφοροι ορισμοί και αποδείξεις από την Διαφορική Γεωμετρία, πιθανώς άγνωστοι στον αναγνώστη. Καταρχάς, έννοιες όπως η καμπυλότητα, ο εγγύτατος κύκλος και οι γεωδαισιακές παρατίθενται, καθώς αποτελούν τα βασικά μαθηματικά εργαλεία για την παρουσίαση της μεθόδου στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο. Ταυτόχρονα όμως, παρατίθενται κάποιες ιστορικές αναδρομές σε έννοιες, εκλαιϊκεύσεις αυτών και αποδείξεις, που αν και με πρώτη ματιά δεν συνεισφέρουν άμεσα στην κατανόηση του 3<sup>ου</sup> κεφαλαίου, κρίθηκε σκόπιμη η παράθεσή τους, καθώς βοηθούν τον αναγνώστη να αντιληφθεί την σημασία αυτών μέσω σημαντικών αποδείξεων, να τις κάνει κτήμα του εκλαιϊκεύοντας τις, και ανοίγοντας του τελικά έτσι δρόμους για βαθύτερη κατανόηση της μεθόδου.

### 2.1 Γενικά περί καμπυλών – σχετικοί ορισμοί.

➤ Ορισμός καμπύλης στο χώρο  $\mathcal{R}^n$

Ως καμπύλη στον χώρο  $\mathcal{R}^n$  θεωρείται το σύνολο των σημείων, δηλαδή των διατεταγμένων n-άδων, όλες οι συνιστώσες των οποίων εξαρτώνται συναρτησιακά μόνο από μία ελεύθερη μεταβλητή, η οποία παίρνει τιμές σε ένα διάστημα  $I \subseteq \mathcal{R}$ . Άρα, ισοδυνάμως, η καμπύλη είναι το σύνολο των σημείων  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  που προκύπτουν από μία απεικόνιση  $I \rightarrow \mathcal{R}^n$  διατεταγμένη n-άδα, όπου  $t \in I$ .

➤ Ορισμός επιβατικής ακτίνας σε τυχόν σημείο καμπύλης

Έστω τυχούσα καμπύλη  $C \subset \mathcal{R}^n$  και  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  τυχόν σημείο αυτής. Έστω  $O$  η αρχή των αξόνων,  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  μία ορθοκανονική βάση του  $\mathcal{R}^n$ ,  $t$  η παράμετρος της καμπύλης και  $t_m$  η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$  που αντιστοιχεί στο σημείο  $m$ . Η επιβατική ακτίνα στο  $m$  ορίζεται ως

$$\vec{r}(t_m) = \overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n \quad (2.1)$$

➤ Ορισμός  $C_n$ ,  $C_n^t$  και  $C_n^-$  καμπύλης.

Μία καμπύλη λέγεται  $C_n$  ομαλή ή απλώς  $C_n$  εάν η επιβατική της ακτίνα  $\vec{r}(t)$  έχει όλες τις παραγώγους μέχρι και τάξεως  $n$  και επιπλέον η  $n$ -οστή παράγωγος του  $\vec{r}(t)$  είναι συνεχής. Επειδή, όπως είναι γνωστό, η ύπαρξη της παραγώγου τάξεως  $n$  εγγυάται τη συνέχεια της παραγώγου τάξεως  $n-1$ , συνεπάγεται ότι μία  $C_n$  καμπύλη είναι και η ίδια συνεχής, αλλά και έχει όλες τις παραγώγους του  $\vec{r}(t)$  τάξεως από 1 έως  $n$  συνεχείς.

Εάν μία καμπύλη είναι μία ένωση  $C_n$  καμπυλών θα λέγεται τμηματικώς  $C_n$  και

συμβολίζεται με  $C_n^t$ . Είθισται η απλώς τμηματικώς συνεχής καμπύλη να λέγεται  $C_0^t$ .

Ορίζουμε σαν  $C_{n-}$  καμπύλη, αυτήν η οποία έχει όλες τις παραγώγους μέχρι τάξη  $n-1$  συνεχείς, αλλά πού η  $n$ -οστή τάξεως παράγωγος του  $\vec{r}(t)$  τμηματικώς υπάρχει, δηλαδή υπάρχει παντού εκτός ενδεχομένως από ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων.

➤ Ορισμός λείας καμπύλης

Έστω μία καμπύλη  $\gamma$ , εάν οι παράγωγοι  $\frac{d^n r}{dt^n}$  της επιβατικής της ακτίνας  $\vec{r}(t)$  ορίζονται για κάθε  $n \geq 1$  και για κάθε  $t \in I$ , όπου  $I$  το πεδίο ορισμού της καμπύλης τότε η καμπύλη ονομάζεται *λεία*.

➤ Ορισμός εφαπτομένου και μοναδιαίου εφαπτομένου διανύσματος καμπύλης

Έστω η καμπύλη  $C \subset \mathcal{R}^n$  με ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  και έστω  $M(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  τυχόν σημείο της  $C$ , όπου οι συναρτήσεις  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα  $I$ . Τότε το διάνυσμα  $\vec{r}'(t) = x_1'(t)\vec{e}_1 + x_2'(t)\vec{e}_2 + \dots + x_n'(t)\vec{e}_n$  εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο  $M$ .

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο τυχόν σημείο  $M$  της καμπύλης είναι το

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}. \quad (2.2)$$

Εάν οι συναρτήσεις  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο  $I$  τότε μπορεί να οριστεί η δεύτερη παράγωγος της επιβατικής ακτίνας, μέσω της σχέσεως  $\vec{r}''(t) = x_1''(t)\vec{e}_1 + x_2''(t)\vec{e}_2 + \dots + x_n''(t)\vec{e}_n$ . Με προφανή επέκταση ορίζονται οι παράγωγοι ανωτέρας τάξεως του διανύσματος επιβατικής ακτίνας.

➤ Ορισμός μήκος τόξου καμπύλης.

Έστω η καμπύλη  $C \subset \mathcal{R}^n$  με ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$ . Στην προσπάθεια να βρούμε έναν τύπο για το μήκος μίας καμπύλης έστω  $\sigma$ , ξεκινάμε από την παρατήρηση ότι για διτ αρκούντως μικρό, το τμήμα της εικόνας  $C$  της  $\sigma$  μεταξύ  $\sigma(t)$  και  $\sigma(t+\delta t)$  είναι σχεδόν ευθύγραμμο, οπότε το μήκος του είναι κατά προσέγγιση ίσο με:

$$\|\sigma(t + \delta t) - \sigma(t)\| \quad (2.3)$$

Προσεγγίζοντας την καμπύλη με πολυγωνικές γραμμές, έχουμε την παρακάτω ανάλυση. Έστω ότι το πεδίο ορισμού της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι ένα διάστημα της μορφής  $[a, b]$ . Διαμερίζουμε το διάστημα αυτό σε  $N$  υποδιαστήματα. Συνεπώς έχουμε την ακόλουθη διαμέριση:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

Και συνεπώς το μήκος θα μπορούσε να προσεγγιστεί ως εξής:

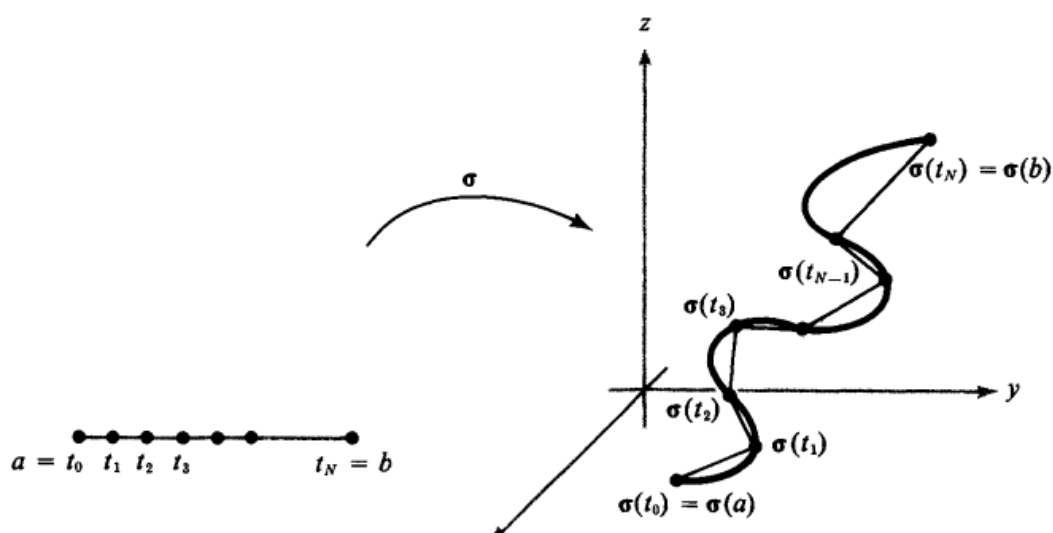
$$L_N(\sigma) = \sum_{i=0}^{N-1} \|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)\| \quad (2.4)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής για κάθε συνιστώσα της  $\sigma$  στο  $[t_i, t_{i+1}]$  θα υπάρχει  $\xi_i$  τέτοιο ώστε:

$$\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) = \dot{\sigma}(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) . \quad (2.5)$$

Και θέτοντας  $\delta t_i = t_{i+1} - t_i$  έχουμε:

$$L_N(\sigma) = \sum_{i=0}^{N-1} \|\dot{\sigma}(\xi_i)\| \delta t_i \quad (2.6)$$



**Εικόνα 4:** Μία καμπύλη  $\sigma$  προσεγγίζεται από την πολυγωνική γραμμή που λαμβάνεται ενώνοντας κάθε  $\sigma(t_i)$  με το  $\sigma(t_{i+1})$  με ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Καθώς το  $N \rightarrow \infty$ , αυτή η πολυγωνική προσέγγιση δίνει όλο και καλύτερη προσέγγιση για το μήκος της  $\sigma$ .

Αν θεωρήσουμε ότι το  $\delta t$  τείνει στο μηδέν και το  $N$  τείνει στο άπειρο, τότε μπορεί ναδειχθεί ότι το παραπάνω άπειρο άθροισμα είναι ένα καλώς ορισμένο άθροισμα Riemann και θα συγκλίνει σε ένα μοναδικό αριθμό κάτω από κάποιες ασφαλές υποθέσεις για την καμπύλη. Μία ασφαλής υπόθεση για την ύπαρξη του παραπάνω ολοκληρώματος είναι η  $\sigma$  να είναι  $C^1$ .

Συνεπώς ορίζουμε το *μήκος τόξου* μίας καμπύλης  $\gamma$  με σημείο εκκίνησης το  $\gamma(t_0)$  να είναι η συνάρτηση  $s(t)$  που δίνεται από την:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| du \quad (2.7)$$

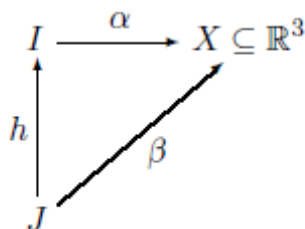


➤ Ορισμός κανονικής καμπύλης και σημείων ανωμαλίας.

Μία διαφορίσιμη καμπύλη της οποίας η παράγωγος δεν μηδενίζεται πουθενά ονομάζεται *κανονική* ή *ομαλή* καμπύλη. Ενώ τα σημεία μίας *μη κανονικής* καμπύλης στα οποία η παράγωγος μηδενίζεται ονομάζονται *σημεία ανωμαλίας* της  $\alpha$ .

➤ Αναπαραμέτρηση καμπύλης.

Αν  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι μία καμπύλη, τότε μία καμπύλη  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  λέγεται αναπαραμέτρηση της  $\alpha$ , αν υπάρχει μία αμφιδιαφορίσιμη  $h : J \rightarrow I$ , με  $\beta = \alpha \circ h$  (βλ και το επόμενο σχετικό διάγραμμα).



Εικόνα 5: Οπτική αναπαράσταση της αναπαραμέτρησης καμπύλης.

Υπενθυμίζεται ότι η έκφραση “η  $h$  είναι αμφιδιαφορίσιμη” σημαίνει ότι η  $h$  είναι διαφορίσιμη απεικόνιση  $1 - 1$  και επί με διαφορίσιμη αντίστροφη. Κατά το θεώρημα της Αντίστροφης συνάρτησης, η  $h$  είναι αμφιδιαφορίσιμη τότε και μόνο τότε αν είναι  $1 - 1$  και επί με  $h'(s) \neq 0$ , για κάθε  $s \in J$ .

Είναι φανερό ότι κάθε αναπαραμέτρηση της  $\alpha$  έχει την ίδια εικόνα με την  $\alpha$ . Είναι επίσης φανερό ότι αν η  $\alpha$  είναι κανονική, τότε και κάθε αναπαραμέτρηση της θα είναι κανονική. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι η  $\alpha'$  μας δείχνει πως αλλάζει η  $a'$ . Η αλλαγή αυτή μπορεί να αφορά σε αλλαγή του μέτρου της  $a'$ , ή σε αλλαγή της διεύθυνσης. Σταθεροποιώντας το μέτρο λοιπόν, παίρνουμε επιτάχυνση που μας δείχνει μόνο την αλλαγή της διεύθυνσης, άρα την *καμπύλωση* της. Θα ορίσουμε παρακάτω, τι σημαίνει *καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας*, ο ορισμός αυτός οδηγεί σε απλούστερη γραφή πολλών θεωρημάτων και ιδιοτήτων των καμπυλών, και ο ορισμός της δικαιολογείται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα.** Κάθε κανονική καμπύλη  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  δέχεται αναπαραμέτρηση  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $\|\beta'(s)\| = 1$ , για κάθε  $s \in J$ .

**Απόδειξη.** Έστω  $I := [a, b]$ . Θεωρούμε την απεικόνιση

$$s : [a, b] \rightarrow [0, L(\alpha)] : t \mapsto \int_a^t \| \alpha'(u) \| du.$$

Αυτή είναι γνησίως αύξουσα και διαφορίσιμη, με

$$s'(t) = \|a'(t)\| = v(t) > 0, \quad (2.8)$$

άρα, από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης, έχει διαφορίσιμη αντίστροφη:

$$h : [0, L(a)] \rightarrow [a, b]$$

της οποίας η παράγωγος δίνεται από την σχέση

$$h'(s) = 1 / s'(h(s)), \quad \forall s \in [0, L(a)]. \quad (2.9)$$

Θέτοντας  $\beta := \alpha \circ h$ , έχουμε ότι

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| \cdot |h'(s)| = \|a'(h(s))\| / |s'(h(s))| = 1,$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

➤ Ορισμός καμπύλης μοναδιαίας ταχύτητας.

Μία καμπύλη  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $\|\beta'(s)\| = 1$ , για κάθε  $s \in J$ , ονομάζεται **καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας**. Αν  $\alpha$  είναι μία τυχαία κανονική καμπύλη, λέμε ότι η αναπαραμέτρηση  $\beta$  που κατασκευάστηκε στο προηγούμενο θεώρημα, είναι η **αναπαραμέτρηση μέσω (του) μήκους τόξου** ή ότι έχει **παράμετρο το μήκος τόξου**. Επίσης το μήκος τόξου λέγεται και **φυσική παράμετρος**.

Σημείωση: Στην παραπάνω απόδειξη η ανεξαρτησία του  $L(a)$ , και συνεπώς η μοναδικότητα του, από την παραμετροποίηση αποσιωπήθηκε. Όπως, όπως μπορεί να αποδειχθεί,<sup>1</sup> το μήκος μίας καμπύλης είναι ανεξάρτητο της παραμετροποίησης. Το γεγονός αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού το μήκος μίας καμπύλης είναι γεωμετρικό χαρακτηριστικό. Άρα, η παραπάνω απόδειξη όντως αποδεικνύει την ύπαρξη καμπύλης μοναδιαίας καμπύλης για κάθε κανονική καμπύλη.

<sup>1</sup> Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο [11] για την απόδειξη.

➤ Ορισμός πολυγώνου Jordan.

Στη γεωμετρία ορίζουμε ως *απλό πολύγωνο* το σχήμα του επιπέδου που αποτελείται από ευθεία μη τεμνόμενα τμήματα, ονομαζόμενα και πλευρές, που ενώνονται ανά δύο και σχηματίζουν μία κλειστή διαδρομή. Εάν οι πλευρές τέμνονται τότε το πολύγωνο δεν θεωρείται απλό.

Παρατήρηση: Ο όρος πολύγωνο αναφέρεται μόνο στις πλευρές και όχι στην περιοχή που περιβάλλει.

Ο παραπάνω ορισμός εγγυάται τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Ένα απλό πολύγωνο περικλείει μία περιοχή, που καλείται εσωτερικό, η οποία πάντα έχει μετρήσιμο εμβαδόν.
- Οι πλευρές συναντώνται μόνο στα τελικά σημεία τους, που καλούνται *κορυφές*, η λιγότερο φορμαλιστικά *γωνίες*.
- Ακριβώς δύο πλευρές συναντώνται σε κάθε κορυφή.
- Ο αριθμός των πλευρών πάντα ισούται με τον αριθμό των κορυφών.

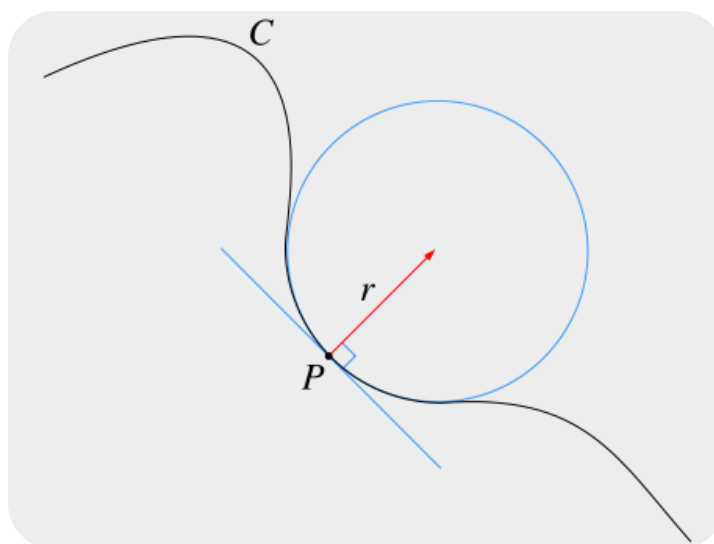
Τα απλά πολύγωνα ονομάζονται και *πολύγωνα Jordan*, επειδή το Θεώρημα των καμπυλών Jordan μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξει ότι ένα απλό πολύγωνο χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές, την περιοχή εντός του πολυγώνου και την περιοχή εκτός του. Τοπολογικά, ένα πολύγωνο Jordan είναι ισοδύναμο με τον κύκλο και το εσωτερικό του ισοδύναμο με τον δίσκο.

## 2.2 Μία ιστορική αναφορά στην έννοια της καμπυλότητας.

Το σχήμα πολλών καμπύλων, τόσο στο επίπεδο όσο και στον τρισδιάστατο χώρο, είναι πολύ δύσκολο να περιγραφεί αυστηρά με λόγια, εξαιτίας της μεγάλης πολυπλοκότητας που μπορεί να αποκτήσει. Χαρακτηριστικό και μάλλον ακραίο παράδειγμα είναι αυτό των φράκταλς. Για αυτό, η ανάγκη για εύρεση μαθηματικών εργαλείων ικανών για την φορμαλιστική περιγραφή, τέθηκε ως ζήτημα από την αρχαιότητα.

Η πιο γνωστή μέθοδος για την περιγραφή μιας καμπύλης είναι η παραμετρικοποίηση της, η οποία αναφέρθηκε και ορίστηκε πιο πάνω, όπου ο κύριος εμπνευστής της και θεμελιωτής της ήταν ο Καρτέσιος. Μία εναλλακτική μέθοδος, είναι η περιγραφή του πόσο καμπυλώνει, σε ένα δεδομένο σημείο, μία καμπύλη. Αυτό το μέτρο, της καμπύλωσης, είναι γνωστό με τον μαθηματικό όρο «καμπυλότητα». Μάλιστα ένα εντυπωσιακό γεγονός, που θα αποδειχθεί και παρακάτω, είναι ότι η καμπυλότητα είναι ακριβώς ότι χρειάζεται για να περιγραφεί μία καμπύλη μοναδικά, εκτός από μία στερεά της κίνηση.

Σε μία εκλαϊκευτική προσπάθεια απόδοσης της έννοιας, μέσω της φυσικής, ας φανταστούμε ένα όχημα να κινείται σε ένα καμπυλωμένο επίπεδο δρόμο. Ξαφνικά, σε ένα σημείο κατά μήκος του δρόμου, το τιμόνι κλειδώνει στην τωρινή του θέση. Κατόπιν αυτού, το όχημα κινείται σε έναν κύκλο που εφάπτεται του δρόμου, σε αυτό το σημείο.



Η καμπυλότητα του δρόμου ορίζεται ως το αντίστροφο της ακτίνας του κύκλου και ο κύκλος, όπως ορίστηκε πιο πάνω, ονομάζεται εγγύτατος κύκλος στο σημείο αυτό. Ο εγγύτατος κύκλος, ο οποίος είναι ανάμεσα σε όλους τους εφαπτόμενους κύκλους σε αυτό το σημείο αυτός που την προσεγγίζει πιο «σφιχτά», είχε ονομαστεί από τον Leibniz: *circulus osculans*, που είναι η λατινική ονομασία για την αγγλική ορολογία: kissing circle. Η έννοια του εγγύτατου κύκλου χρησιμοποιήθηκε συστηματικά και από τον Ισαάκ Νεύτωνα στο *Principia*. Παρατίθεται ένα απόσπασμα από αυτό:

*There being given, in any places, the velocity with which a body describes a given figure, by means of forces directed to some common centre: to find that centre.*

— Isaac Newton, *Principia*; PROPOSITION V. PROBLEM I.

Πριν, ακολουθήσει ο μαθηματικός φορμαλισμός κρίθηκε προτιμότερο να γίνει μία σύντομη ιστορική αναδρομή στην έννοια της καμπυλότητας. Μέσα από αυτή την αναδρομή κάποιος μπορεί να αντιληφθεί, την εξέχουσα σημασία της, πράγμα που προκύπτει από την αναφορά της ήδη από τα ελληνιστικά χρόνια στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, αλλά και τις δυσκολίες – ιδιαιτερότητες – που προηγήθηκαν του τελικού ορισμού της, που πήγαζαν κυρίως από την απουσία ιδεών του Διαφορικού Λογισμού. Τέλος, η υιοθέτηση της καμπυλότητας από τον Νεύτωνα, στο μαθηματικό του οπλοστάσιο είναι μία ενδιαφέρουσα ιστορία που παρουσιάζει την αμφισβήτηση εννοιών όπως της παραγώγου το 17<sup>ο</sup> αιώνα μ.Χ. και της χρήσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως το μόνο έμπιστο «εργαλείο απόδειξης».

Η αναζήτηση της στρέβλωσης μίας καμπύλης έχει τις ρίζες της στην αρχαιότητα, και καθ' όλη τη διάρκεια της ιστορίας των μαθηματικών, η μελέτη της έχει αποτελέσει ένα ισχυρό εργαλείο για την ανάδειξη των πιο σημαντικών ιδιοτήτων των καμπυλών. Η ιστορία της Γεωμετρίας μπορεί να χωριστεί σε τρεις πολύ ευδιάκριτες μεταξύ τους περιόδους, την Ευκλείδεια Γεωμετρία, την Αναλυτική (με κύριους εκφραστές της τον Fermat και τον Καρτέσιο το 17<sup>ο</sup> αιώνα) και τελικά την Διαφορική Γεωμετρία. Ανέκαθεν, η καμπυλότητα τράβηξε την προσοχή των πιο σπουδαίων στοχαστών. Στην Αρχαία Ελλάδα, για παράδειγμα, υπήρχε μία σαφής διάκριση ανάμεσα στην ευθεία γραμμή και τον κύκλο, η οποία είχε να κάνει με το γεγονός ότι η ευθεία δεν στρεβλώνει, αντίθετα με τον κύκλο, ο οποίος στρεβλώνει και μάλιστα το ίδιο σε κάθε σημείο του. Σύμφωνα με τον Πρώκλο, ο Αριστοτέλης προέκτεινε τις ιδέες αυτές ένα βήμα παραπέρα, δηλώνοντας ότι υπάρχουν τριών ειδών καμπύλες: οι ευθείες, οι κυκλικές και οι «μεικτές». [4]

Άλλη μία μεγάλη φυσιογνωμία για την Ευκλείδεια Γεωμετρία ο Απολλώνιος ο Περγαίος (περ. 262 π.Χ. - περ. 190 π.χ.) ασχολήθηκε με την καμπυλότητα. Ανάμεσα στις πιο σημαντικές του ανακαλύψεις ήταν και ότι σε κάθε σημείο μίας κωνικής τομής υπάρχει ακριβώς μία κανονική γραμμή. Κανονική γραμμή ονομάζεται η γραμμή εκείνη η οποία είναι κάθετη στην εφαπτομένη της κωνικής τομής στο ίδιο σημείο. Η σχέση αυτού του γεγονότος με την καμπυλότητα θα δειχθεί πολύ αργότερα. Επίσης ακόμα πιο σημαντικό είναι το γεγονός ότι στο 5<sup>ο</sup> βιβλίο των Κωνικών Τομών αναφέρονται και ξεκάθαρες αναφορές εννοιών πολύ κοντά στην έννοια του εγγύτατου κύκλου. Σύμφωνα μάλιστα με τον μεγάλο μαθηματικό ιστορικό D.T. Whiteside, ο Απολλώνιος εφάρμοσε μεθόδους για την εύρεση της ακτίνας καμπυλότητας, οι οποίες ήταν εκπληκτικά παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν από το Huygens και τον Νεύτωνα δύο χιλιάδες χρόνια αργότερα.

Μετά από πολλά χρόνια, τον 14<sup>ο</sup> αιώνα, ο Nicole Oresme έκανε την επόμενη μεγάλη συνεισφορά. Ο Oresme, γενικά, θεωρείται ο πρώτος άνθρωπος που σχεδίασε το γράφημα μίας καμπύλης, και η δουλειά του θεωρήθηκε από τους μελετητές του ως η πρώτη προσπάθεια προς την Αναλυτική Γεωμετρία. Επίσης, θεωρείται ο πρώτος ο οποίος αποπειράθηκε να ορίσει την καμπυλότητα. Στην πραγματικότητα βέβαια ο Oresme, πίστευε στην ύπαρξη ενός μέτρου της στρέψης μίας καμπύλης, που το ονόμασε «curvitas», χωρίς όμως να δώσει κάποιον φορμαλιστικό ορισμό για αυτό. Επίσης, υποστήριξε ότι, αν 2 καμπύλες έχουν την ίδια εφαπτόμενη σε ένα σημείο και η μία καμπύλη κείται εντός της άλλης, τότε η «εσωτερική» έχει μεγαλύτερη curvitas. Πράγμα προφανές για τον Oresme, αφού, η εσωτερική φαίνεται να καμπυλώνει περισσότερο. Επιπλέον, ανέφερε ότι ο κύκλος έχει «ομοιόμορφη» curvitas και μάλιστα ότι η ακτίνα

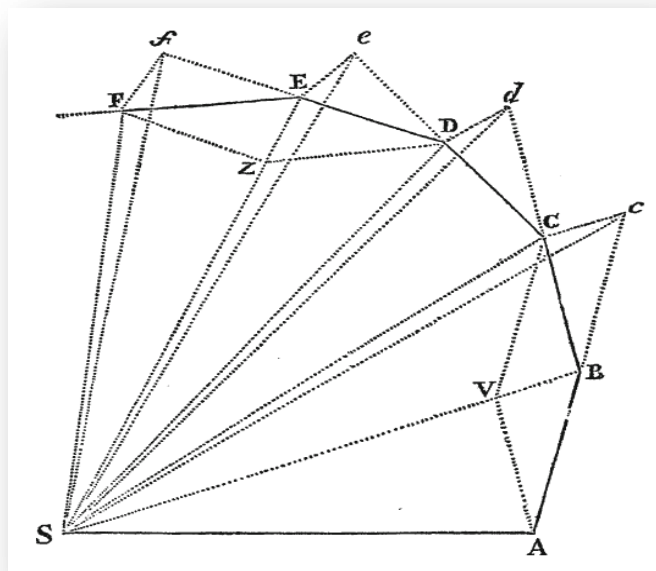
του κύκλου είναι πολλαπλασιαστικά αντίστροφη αυτής. Βέβαια, η μεγαλύτερη συνεισφορά του Oresme στην έννοια της καμπυλότητας ήταν ότι αναζωπύρωσε το ενδιαφέρον της μαθηματικής κοινότητας πάνω σε αυτό το θέμα. Σχεδόν τρεις αιώνες αργότερα ο Johannes Kepler έκανε έμμεσες συνεισφορές στην θεωρία της καμπυλότητας. Η πρώτη του προσφορά ήταν η γενίκευση του στο πρόβλημα του Al Hazin, το οποίο είναι να βρεθεί η εικόνα ενός φωτεινού σημείου, το οποίο ανακλάται σε ένα κύκλο. Μέρος της ιδιοφυούς απόδειξης του Kepler ήταν να προσεγγίσει την γενική καμπύλη με ένα εφαπτόμενο κύκλο σε αυτή στο σημείο μελέτης, και έτσι ανήγαγε το πρόβλημα σε αυτό του Al Hasin. Σε μεταγενέστερες εποχές, αυτός ο προσεγγίζον κύκλος έγινε γνωστός ως «κύκλος της καμπυλότητας», και το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο της ακτίνας αυτού, άρχισε να γίνεται γνωστό ως ένα μέτρο της στρέψης μίας καμπύλης σε κάποιο σημείο της.

Το 1673, ο μαθηματικός Christiaan Huygens δημοσίευσε το βιβλίο του «*Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometrica*». Το κύριο θέμα μελέτης του βιβλίου του ήταν οι εξειλιγμένες και οι ενειλιγμένες μίας καμπύλης καθώς και η σχέση τους με την καμπυλότητα. Στο έργο αυτό, θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο Huygens έφτασε πολύ κοντά στο να καταφέρει να ορίσει την καμπυλότητα. Δυστυχώς όμως, ως γνωστόν για να επιτευχθεί ο φορμαλιστικά ορθός ορισμός της, απαιτούνται ιδέες του διαφορικού λογισμού, των οποίων ο Huygens δεν ήταν κοινωνός, χάνοντας έτσι την ευκαιρία να καταχωρηθεί ως ο πρώτος θεμελιωτής της. Παρόλα αυτά, ένα από τα πιο εντυπωσιακά επιτεύγματα του στο *Horologium oscillatorium* ήταν η μελέτη του για το κυκλοειδές, το οποίο τον οδήγησε στην ανακάλυψη του κυκλοειδούς εκκρεμούς. Το τελευταίο θα αποτελέσει μία από τις πιο πρακτικές εφαρμογές της καμπυλότητας και παράλληλα θα χρησιμεύσει ως μία από τις κυριότερες πηγές έμπνευσης για τους μεταγενέστερους μαθηματικούς, που θα ασχοληθούν με την έννοια της καμπυλότητας.

Τελικά τον 17<sup>ο</sup> αιώνα, επινοήθηκε ο Διαφορικός Λογισμός, παράλληλα και ανεξάρτητα, από τους Ισαάκ Νεύτωνα και Gottfried Wilhelm Leibniz, και για πρώτη φορά τέθηκαν τα θεμέλια για τον φορμαλιστικό ορισμό της καμπυλότητας. Ο Νεύτωνας, έκανε εκτενέστερη χρήση της καμπυλότητας, απ' ότι ο Leibniz. Αυτό οφείλεται σε δύο λόγους, πρώτον φαίνεται να ελκύεται από την «ομορφιά» αυτής της έννοιας όπως και φαίνεται από το απόσπασμα του 5<sup>ου</sup> προβλήματος του βιβλίου του *Methods of series and fluxions*:

*"To find the curvature of any curve at a given point, he begins, "The problem has the mark of exceptional elegance and of being pre-eminently useful in the science of curves".*

Και δεύτερον, αν και είχε συλλάβει τις έννοιες του διαφορικού λογισμού, δυστυχώς δεν μπορούσε να τις χρησιμοποιήσει στις αποδείξεις του. Ένα άμεσο πρόβλημα που συνάντησε ο Νεύτωνας ήδη από την αρχή, είναι η έκφραση της επιτάχυνσης ως αυτόνομο μέγεθος. Προφανώς, και ήξερε ότι μπορούσε να οριστεί μέσω της χρήσης της δεύτερης παραγώγου της θέσης ως προς τον χρόνο. Για να δεχτεί, όμως, η μαθηματική κοινότητα την ιδέα ότι η βαρυτική δύναμη είναι κεντρική και είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης, θα έπρεπε οι αποδείξεις του να είναι καθαρά γεωμετρικές. Έτσι θα έπρεπε να αποδείξει τους τρεις νόμους του Kepler χωρίς την χρήση



**Εικόνα 6:** Το διάγραμμα των ίσων εμβαδών για την πρόταση 1, από το 1<sup>ο</sup> βιβλίο του Principia του Νεύτωνα.

των ανακαλύψεων του, πράγμα που έκανε και στο Principia. Όπως θα φανεί παρακάτω η καμπυλότητα για να οριστεί απαιτεί την 2<sup>η</sup> παράγωγο της επιβατικής ακτίνας της καμπύλης. Συνεπώς, η καμπυλότητα για τον Νεύτωνα ήταν το γεωμετρικό ανάλογο που χρειαζόταν. [3, 5]

Θα πρέπει αναφερθεί ότι πολλοί μαθηματικοί την ίδια περίοδο με τον Νεύτωνα ασχολήθηκαν με το πρόβλημα της καμπυλότητας. Κανένας, όμως, το έργο δεν ήταν τόσο παραγωγικό και τόσο επιτυχές. Για παράδειγμα, ο Leibniz ο οποίος έδωσε και το όνομα στον *εγγύτατο κύκλο*, υπέπεσε σε ένα σημαντικό λάθος, λάθος το οποίο στέρησε την αναγνώριση για το έργο του πάνω στην καμπυλότητα. Ο James Bernoulli πολύ έγκαιρα επισήμανε αυτό το λάθος, και μάλιστα μαζί με τον αδερφό του John Bernoulli το 1691 έδωσαν τον δικό τους τύπο για την καμπυλότητα, αποτέλεσμα που το χαρακτήρισαν οι ίδιοι ως «χρυσό θεώρημα». Τέλος, ο μαθηματικός που είναι υπεύθυνος για το σημαντικό θεώρημα, ότι το μέτρο της καμπυλότητας είναι ίσο με το μέτρο της δεύτερης παραγώγου της παραμετροποίησης της καμπύλης σε ένα δεδομένο σημείο είναι ο Leonhard Euler.

Προφανώς, η ιστορία της καμπυλότητας που μόλις παρουσιάστηκε απέχει πολύ από το να εξαντληθεί, όπως και τα ονόματα των μαθηματικών που ασχολήθηκαν με αυτή. Η καμπυλότητα αποτέλεσε μία από τις κεντρικότερες εννοιολογικές συλλήψεις της Διαφορικής Ανάλυσης, και η μελέτη της βοήθησε στην ανακάλυψη πολλών εντυπωσιακών πεδίων, όπως αυτών της Διαφορικής Γεωμετρίας, της θεωρίας πολλαπλοτήτων, της γεωμετρίας Riemann και πολλών άλλων. Μάλιστα, θα αποτελέσει μία από τις κεντρικότερες ιδέες της παρουσιαζόμενης μεθόδου αναγνώρισης γραφέα στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο. Στις επόμενες ενότητες ακολουθεί ο ορισμός της και η παρουσίαση των σημαντικότερων θεωρημάτων σχετικών με αυτήν.

## 2.3 Ορισμός καμπυλότητας καμπύλης και σχετικά χρήσιμα θεωρήματα.

2.3.1 Η περίπτωση του κύκλου: μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα  $\vec{T}$ , αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία κύκλου και  $\vec{r}''(s)$ .

Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου στο επίπεδο με παράμετρο την πολική γωνία, έστω  $\vartheta$ , έχουν ως εξής:

$$x(\vartheta) = x_0 + a \cos(\vartheta)$$

$$y(\vartheta) = y_0 + a \sin(\vartheta)$$

όπου  $x_0, y_0$  οι συντεταγμένες του κέντρου  $K$  του κύκλου,  $a$  η ακτίνα αυτού και  $\vartheta \in [0, 2\pi)$ . Γεωμετρικά η ανεξάρτητη μεταβλητή  $\vartheta$  είναι η προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζει το μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{i}$  του άξονος  $x$ , με την επιβατική ακτίνα  $\overrightarrow{KM}$  όπου  $M$  τυχόν σημείο του κύκλου.

Το στοιχειώδες μήκος του κύκλου είναι  $ds = \sqrt{x'(\vartheta)^2 + y'(\vartheta)^2} d\vartheta = a d\vartheta$ . Συνεπώς το μήκος αυτού είναι  $s = a\vartheta$  όπως πρώτος παρατήρησε και απέδειξε ο μεγάλος Αρχιμήδης.

Με χρήση της παραμέτρου  $s$  οι εξισώσεις του κύκλου γίνονται:

$$x(s) = x_0 + a \cos\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$y(s) = y_0 + a \sin\left(\frac{s}{a}\right)$$

Συνεπώς το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στον κύκλο τότε γίνεται:

$$\vec{r}'(s) = -\sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j}. \quad (2.10)$$

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα συμβολίζεται και με  $\vec{T}$ . Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το μήκος  $s$  του κύκλου τότε  $\vec{T} = \vec{r}'(s)$ , ενώ στη γενική περίπτωση τυχούσης μεταβλητής  $t$  ισχύει

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}. \quad (2.11)$$



Παραγωγίζοντας την (2.11) προκύπτει:

$$\begin{aligned}\vec{r}''(s) &= -\frac{1}{a} \cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} - \frac{1}{a} \sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j} \Leftrightarrow \\ \vec{r}''(s) &= -\frac{1}{a^2} (\vec{r}(s) - x_0\vec{i} - y_0\vec{j}) = -\frac{1}{a^2} \overrightarrow{KM}.\end{aligned}$$

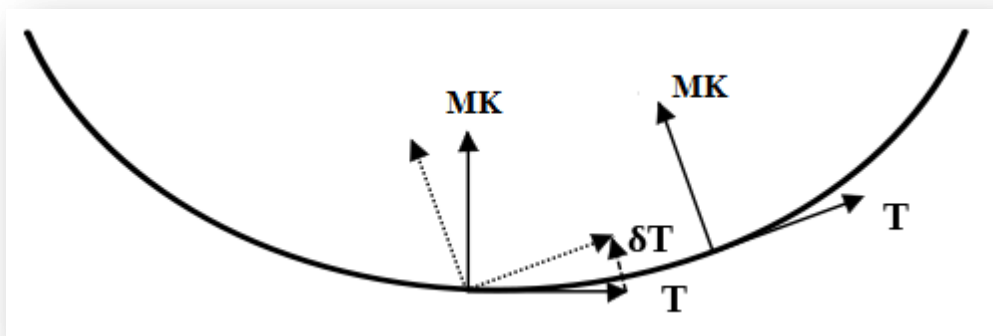
Επομένως  $\|\vec{r}''(s)\| = \frac{1}{a}$ , δηλαδή το μέτρο του διανύσματος του  $\vec{r}''(s)$  μας προσφέρει αμέσως την ακτίνα του κύκλου. Επιπλέον

$$\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) \equiv 1 \Rightarrow \frac{d}{ds} (\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s)) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \cdot \vec{T}(s) = 0 \Leftrightarrow \vec{r}''(s) \cdot \vec{T}(s) = 0.$$

Όλα τα ανωτέρω καταδεικνύουν ότι το διάνυσμα  $\vec{r}''(s)$  σε τυχόν σημείο  $M$  του κύκλου δείχνει προς το κέντρο του κύκλου  $K$  και

$$\overrightarrow{MK} = \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2}. \quad (2.12)$$

Συνεπώς η γνώση ενός τυχόντος σημείου  $M$  του κύκλου και του διανύσματος  $\vec{r}''(s)$  σε αυτό το σημείο ορίζει μονοσήμαντα τον κύκλο.



**Εικόνα 7:** Παρουσιάζονται σχηματικά τα παραπάνω πορίσματα. Παρατηρούμε ότι η φορά του διανύσματος  $MK$  είναι προς το κέντρο του κύκλου και είναι κάθετο κάθε στιγμή το εφαπτόμενο διάνυσμα  $T$ .

### Παρατηρήσεις:

Παρατηρούμε ότι το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο της ακτίνας του κύκλου προέκυψε ως το μέτρο της 2<sup>ης</sup> παραγώγου της επιβατικής ακτίνας. Από την παραπάνω ιστορική αναδρομή ήδη ο αναγνώστης, αντιλαμβάνεται ότι πρόκειται για την καμπυλότητα του κύκλου. Η οποία πρόεκυψε σταθερή κατά μέτρο, όπως περιμέναμε, και αποδείχθηκε ότι χαρακτηρίζει μοναδικά το σχήμα του κύκλου, εκτός από την ακριβή του θέση στο επίπεδο, η οποία προσδιορίζεται από την πρότερη γνώση του κέντρου του, πράγμα που θα αποδειχθεί και στην γενική περίπτωση παρακάτω.

2.3.2 Η γενική περίπτωση καμπύλης. Ο εγγύτατος κύκλος και η καμπυλότητα με παράμετρο το μήκος καμπύλης  $s$ .

Έστω τυχούσα καμπύλη σε χώρο οσονδήποτε διαστάσεων της οποίας η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το μήκος της  $s$ . Στο  $\mathcal{R}^2$  ισχύει:

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j},$$

ενώ στο  $\mathcal{R}^3$ :

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}.$$

Σημειώνεται ότι επειδή εξ υποθέσεως  $d\vec{r} = d\vec{s}$ ,  $\|\vec{r}'(s)\| \equiv \left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| \equiv \frac{\|d\vec{s}\|}{ds} = 1$  που σημαίνει ότι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα  $\vec{T}(s)$  στο τυχόν σημείο A της καμπύλης ισούται με  $\vec{r}'(s)$ , δηλαδή  $\vec{T}(s) = \vec{r}'(s) \forall s$ .

Εξ άλλου  $\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \vec{r}''(s)$ , οπότε ας θεωρήσουμε το μοναδικό κύκλο (K) ο οποίος περνάει από το ίδιο σημείο A, έχει το ίδιο  $\frac{d\vec{T}(s)}{ds}$  στο A με τη δεδομένη καμπύλη και κείται στο ίδιο επίπεδο με το  $\vec{T}(s)$ . Θα αποδείξουμε ότι εάν B είναι το σημείο  $\vec{r}(s + ds)$  και  $\vec{T}(s + ds)$  το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο B τότε το B ανήκει επίσης στον κύκλο (K), ενώ επίσης τα  $\vec{T}(s)$  και  $\vec{T}(s + ds)$  εφάπτονται στον (K) στα αντίστοιχα σημεία.

**Απόδειξη.** Ακολουθώντας τη συλλογιστική που αναπτύξαμε στην παράγραφο 2.31, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το  $\frac{d\vec{T}(s)}{ds}$  είναι κάθετο στο  $\vec{T}(s)$ . Πράγματι, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) &\equiv 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s)) = 0 \Leftrightarrow \\ \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \cdot \vec{T}(s) &= 0 \Leftrightarrow \vec{r}''(s) \cdot \vec{T}(s) = 0. \end{aligned}$$

Επομένως το  $\vec{T}(s)$  εφάπτεται και στον κύκλο (K) και στη δεδομένη καμπύλη αφού το  $\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \vec{r}''(s)$  εξ υποθέσεως είναι κοινό και στη δεδομένη καμπύλη και στον (K). Επίσης,

$$\vec{r}(s + ds) = \vec{r}(s) + \vec{r}'(s)ds = \vec{r}(s) + \vec{T}(s)ds$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι και το σημείο  $\vec{r}(s + ds)$ , δηλαδή το σημείο B επίσης ανήκει στον (K).

Όντως αν  $O$  η αρχή των αξόνων και  $K$  το κέντρο του (K), τα δεδομένα είναι ότι

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \vec{r}(s+ds), \\ \overrightarrow{OA} &= \vec{r}(s)\end{aligned}$$

οπότε και  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}'(s)ds = \vec{T}(s)ds$ .

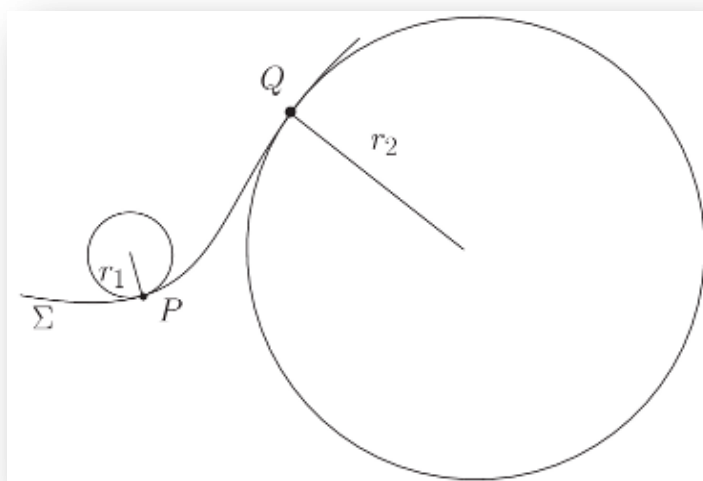
Άλλα προφανώς  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KA}$ , οπότε  $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KA} + \vec{T}(s)ds$ .

Επειδή, δε, ο (K) και η καμπύλη έχουν το ίδιο μοναδιαίο εφαπτόμενο στο A, το B ανήκει στον (K).

Τέλος  $\vec{T}(s+ds) = \vec{T}(s) + \frac{d\vec{T}}{ds}ds$ . Αλλά  $\vec{T}(s)$  και  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  είναι κοινά και στον κύκλο

(K) και στην καμπύλη. Άρα το  $\vec{T}(s+ds)$  εφάπτεται επίσης στον κύκλο (K) στο σημείο B. ο.ε.δ.

Ακριβώς επειδή ο κύκλος (K) έχει κοινά σημεία με την καμπύλη τα  $\vec{r}(s)$  και  $\vec{r}(s+ds)$  ως και κοινές εφαπτόμενες στα σημεία αυτά, ονομάζεται *εγγύτατος κύκλος* διότι είναι η καλύτερη δευτέρας τάξεως προσέγγιση της καμπύλης.



**Εικόνα 8:** Οι εγγύτατοι κύκλοι για δύο διαφορετικά σημεία μίας καμπύλης.

Ορισμός: Ορίζουμε, εύλογα, την καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο A ( $\vec{r}(s)$ ) την καμπυλότητα του κύκλου (K). Επειδή δε, ο κύκλος (K) εξ υποθέσεως έχει κοινό  $\vec{r}''(s)$  με την καμπύλη, προφανώς η καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο A ( $\vec{r}(s)$ ) είναι  $\|\vec{r}''(s)\|$ . Το κέντρο δε του εγγυτάτου κύκλου είναι το σημείο  $\vec{r}(s) + \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2}$ , η δε

ακτίνα του (K) είναι  $\frac{1}{\|\vec{r}''(s)\|}$ , η οποία και λέγεται εγγυτάτη ακτίνα ή ακτίνα καμπυλότητας.

2.3.3 Η καμπυλότητα στη γενική περίπτωση καμπύλης με τυχούσα παράμετρο και ορισμός του πρωτεύοντος κάθετου διανύσματος.

Έστω τυχούσα καμπύλη με τυχούσα ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$ . Άρα στο  $\mathfrak{R}^2$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Παραγωγίζοντας ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή έχουμε

$$\vec{r}'(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{ds} \left| \vec{r}'(t) \right| \Leftrightarrow \frac{\vec{r}'(t)}{\left| \vec{r}'(t) \right|} = \frac{d\vec{r}(t)}{ds}$$

Αλλά

$$\frac{\vec{r}'(t)}{\left| \vec{r}'(t) \right|} = \vec{T}(t) \quad (\text{βλ και σχέση 2.11})$$

Άρα

$$\vec{T}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{ds}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς  $t$  έχουμε

$$\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}(t)}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \frac{ds}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \left| \vec{r}'(t) \right| \Leftrightarrow \quad (2.13)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{\frac{d\vec{T}(t)}{dt}}{\left| \vec{r}'(t) \right|} \Leftrightarrow \left\| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right\| = \frac{\left\| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right\|}{\left\| \vec{r}'(t) \right\|} = \frac{\left\| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right\|}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} = k$$

Όπου  $k$  η καμπυλότητα εκπεφρασμένη, στην τελευταία σχέση, ως προς την ανεξάρτητη παράμετρο  $t$ .

Ορισμός πρωτεύοντος κάθετου διανύσματος.

Ορίζεται για κάθε  $t$  στο πεδίο ορισμού της ανεξάρτητης μεταβλητής της καμπύλης το πρωτεύον κάθετο διάνυσμα  $N(t)$  ως εξής:

$$N(t) = \frac{1}{k(t)} T'(t). \quad (2.14)$$

2.3.4 Επίδρασης της κλιμάκωσης μίας συνάρτησης στην καμπυλότητα της.

**Λήμμα.** Η καμπυλότητα μπορεί να εκφραστεί ως εξής:  $\kappa = \frac{\|(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})\ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})\dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^4}$ .

**Απόδειξη.** Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας έχω:

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{ds} \frac{ds}{dt},$$

οπότε

$$\kappa = \left\| \frac{d^2\gamma}{ds^2} \right\| = \left\| \frac{d}{ds} \left( \frac{d\gamma}{ds} \frac{ds}{dt} \right) \right\| = \left\| \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{d\gamma}{ds} \frac{ds}{dt} \right)}{\frac{ds}{dt}} \right\| = \left\| \frac{\frac{ds}{dt} \frac{d^2\gamma}{dt^2} - \frac{d^2s}{dt^2} \frac{d\gamma}{dt}}{\left( \frac{ds}{dt} \right)^3} \right\|$$

Επιπλέον,

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \|\dot{\gamma}\|^2 = \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma},$$

και παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε:

$$\frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} = \dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma}.$$

Και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση έχω το ζητούμενο.

**Πρόταση.** Έστω τυχούσα καμπύλη με τυχούσα ανεξάρτητη μεταβλητή t, και r(t) μία παραμετροποίηση της μοναδιαίας ταχύτητας. Έστω η καμπύλη b(t) = λr(t), τότε ισχύει

ότι:  $k_b = \frac{1}{|\lambda|} k_r$  με  $k_r$  και  $k_b$  να είναι οι καμπυλότητες των r(t) και b(t) αντίστοιχα.

**Απόδειξη.** Γνωρίζω ότι η καμπυλότητα βάση τα παραπάνω εκφράζεται ως εξής:

$$\kappa_b = \frac{\|(\dot{b} \cdot \dot{b})\ddot{b} - (\dot{b} \cdot \ddot{b})\dot{b}\|}{\|\dot{b}\|^4} \quad (2.15)$$

Τώρα

$$\kappa_b = \frac{|\lambda|^3 \cdot \|(\dot{r} \cdot \dot{r})\ddot{r} - (\dot{r} \cdot \ddot{r})\dot{r}\|}{|\lambda|^4 \cdot \|\dot{r}\|^4}$$

Και άρα:

$$\kappa_b = \frac{1}{|\lambda|} \kappa_r$$

που είναι το ζητούμενο.

### 2.3.5 Εναλλακτική μορφή της καμπυλότητας σε ισοϋψείς καμπύλες.

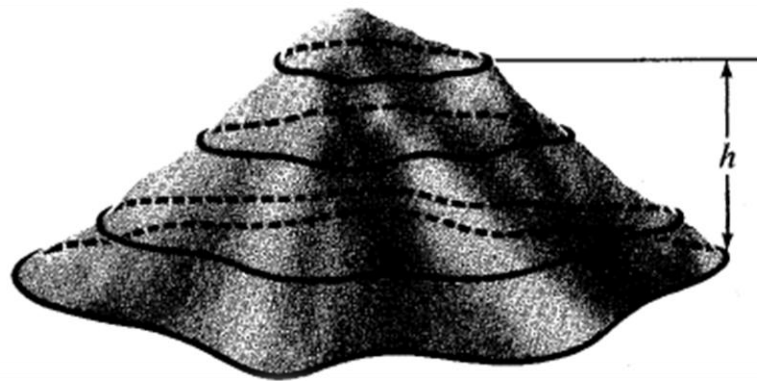
Παρακάτω θα αποδειχτεί ένας εναλλακτικός τύπος για την καμπυλότητα, ο οποίος βρίσκεται εφαρμογή σε ισοϋψείς καμπύλες. Η χρησιμότητα του παρακάτω τύπου θα φανεί στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο όπου θα αποδειχθεί ότι το εμβαδόν της καμπυλότητας υπολογισμένο στο χωρίο που περικλείεται ανάμεσα από δύο περιγράμματα φράζει τις 1<sup>ης</sup> τάξης μεταβολές του γεωδαισιακού μήκους μεταξύ δύο σχημάτων. Το γεγονός αυτό έρχεται σε συμφωνία με τη διαίσθηση ότι δύο γράμματα που «μοιάζουν», δηλαδή έχουν γραφτεί από τον ίδιο άνθρωπο, θα έχουν καμπυλότητες οι οποίες τείνουν να ταυτιστούν. Παρακάτω ακολουθούν οι απαραίτητοι ορισμοί και η εξαγωγή του προαναφερόμενου τύπου.

➤ Ορισμός ισοψούς καμπύλης.

Έστω  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  και  $c \in \mathbb{R}$ . Τότε το σύνολο στάθμης με τιμή  $c$  ορίζεται σαν το σύνολο των σημείων  $x \in U$  στα οποία  $f(x) = c$ . Αν  $n = 2$ , μιλάμε για καμπύλη στάθμης ή ισοϋψής καμπύλη (με τιμή  $c$ ) και αν  $n = 3$ , μιλάμε για επιφάνεια στάθμης. Συμβολικά, το σύνολο στάθμης με τιμή  $c$  γράφεται

$$\{x \in U \mid f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Σημειώνεται ότι το σύνολο στάθμης περιέχεται πάντοτε στον χώρο όπου ορίζεται η συνάρτηση.



**Εικόνα 9:** Οι ισοϋψείς καμπύλες μιας συνάρτησης ορίζονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και οι ισοϋψείς καμπύλες ενός τοπογραφικού χάρτη.

Έστω  $E$  μία τυχαία ισοϋψής καμπύλη της  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , δηλαδή η καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση  $F(x, y) = c$  για κάποια σταθερά  $c$  και έστω  $M$  τυχαίο σημείο της καμπύλης  $E$ . Συμβολίζουμε με  $\vec{n}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της  $E$  στο  $M$ . Είναι γνωστό ότι  $\vec{n} = \nabla F / |\nabla F|$ , όπου  $\nabla = \vec{i} \partial/\partial x + \vec{j} \partial/\partial y$  είναι ο τελεστής ανάδελτα.

➤ Ορισμός επίπεδης καμπυλότητας.

Ορίζουμε την συνάρτηση  $C(x, y) \equiv \nabla \cdot \vec{n} \equiv \text{div}(\vec{n})$  και την καλούμε “επίπεδη καμπυλότητα”.

Παρατήρηση: Για την ισοϋψή καμπύλη με  $c = 0$ , η επίπεδη καμπυλότητα είναι η συνήθης καμπυλότητα που έχει οριστεί πιο πάνω υπολογισμένη σε κάθε σημείο της. Το γεγονός αυτό θα αποδειχθεί παρακάτω.

**Λήμμα.** Αν  $y = f(x)$  τότε η καμπυλότητα μπορεί να εκφραστεί ως:  $\kappa = \frac{|\ddot{y}|}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}$ .

**Απόδειξη.** Έχω ότι  $\gamma(x) = (x, y(x))$ .

Γνωρίζω ότι η καμπυλότητα μπορεί να εκφραστεί ως:  $\kappa = \frac{\|(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})\ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})\dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^4}$

Τώρα έχω:

- ✓  $(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}) = 1 + \dot{y}^2$
- ✓  $(\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma}) = 1 + \dot{y}\ddot{y}$
- ✓  $\|\dot{\gamma}\|^4 = (1 + \dot{y}^2)^2$

Άρα

$$\begin{aligned} \|(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})\ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})\dot{\gamma}\| &= \|(1 + \dot{y}^2)(0, \ddot{y}) - \dot{y}\ddot{y}(1, \dot{y})\| \Leftrightarrow \\ \|(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})\ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})\dot{\gamma}\| &= \|(0, (1 + \dot{y}^2)\ddot{y}) - (\dot{y}\ddot{y}, \dot{y}^2\ddot{y})\| \Leftrightarrow \\ \|(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})\ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})\dot{\gamma}\| &= \|(-\dot{y}\ddot{y}, \ddot{y} + \dot{y}^2\ddot{y} - \dot{y}^2\ddot{y})\| \Leftrightarrow \\ \|(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})\ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})\dot{\gamma}\| &= \|(-\dot{y}\ddot{y}, \ddot{y})\| \Leftrightarrow \\ \|(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})\ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})\dot{\gamma}\| &= |\ddot{y}|(1 + \dot{y}^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Και αντικαθιστώντας αποδείχθηκε το ζητούμενο.

**Λήμμα.** Η καμπυλότητα μίας ισοϋψής καμπύλης δίνεται από τον τύπο:

$$\kappa = \frac{|F_x^2 F_{yy} + F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy}|}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}$$

**Απόδειξη.** Θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα του παραπάνω λήμματος.

Παραγωγίζοντας τη σχέση  $F(x, y)$  μερικώς ως προς  $x$  παίρνουμε:  $F_x + F_y \dot{y} = 0$ .

Παρατηρώ από αυτήν ότι όταν  $F_y = 0$  τότε και  $F_x = 0$ . Συνεπώς, υποθέτοντας σωστά

ότι  $F_y \neq 0$  έχουμε  $\dot{y} = -\frac{F_x}{F_y}$  και θέτοντας  $G(x, y) = -\frac{F_x}{F_y}$ , έχουμε  $\ddot{y} = G_x + G_y \dot{y}$ .

Όμως,

$$G_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{F_x}{F_y} \right) = \frac{F_y F_{yx} - F_y F_{xx}}{F_y^2},$$

και

$$G_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{F_x}{F_y} \right) = \frac{F_x F_{yy} - F_y F_{xy}}{F_y^2}.$$

Και αντικαθιστώντας έχω:

$$\ddot{y} = \frac{2F_x F_y F_{xy} - F_x^2 F_{yy} - F_y^2 F_{xx}}{F_y^3}.$$

Και αντικαθιστώντας στην  $\kappa = \frac{|\ddot{y}|}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}$ , τις εκφράσεις για τα  $\dot{y}, \ddot{y}$  έχω τον ζητούμενο τύπο.

**Πρόταση.** Για ισοϋψείς επίπεδες καμπύλες η καμπυλότητα δίνεται από τον τύπο  $\kappa = |\nabla \cdot \vec{n}|$ .

**Απόδειξη.**

$$\begin{aligned} \kappa &= \left| \nabla \cdot \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right| = \left| \nabla \cdot \frac{(F_x, F_y)}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \right| \\ &= \left| \left( \partial_x \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \right) + \left( \partial_y \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \right) \right| \\ &= \left| \frac{F_{xx}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} - \frac{F_x(F_x F_{xx} + F_y F_{xy})}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}} + \frac{F_{yy}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} - \frac{F_y(F_x F_{xy} + F_y F_{yy})}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}} \right| \\ &= \left| \frac{F_{xx}(F_x^2 + F_y^2) + F_{yy}(F_x^2 + F_y^2) - F_x(F_x F_{xx} + F_y F_{xy}) - F_y(F_x F_{xy} + F_y F_{yy})}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}} \right| \\ &= \frac{|F_x^2 F_{yy} + F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy}|}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο, δηλαδή ότι:

$$\kappa = |\nabla \cdot \vec{n}|. \quad (2.16)$$

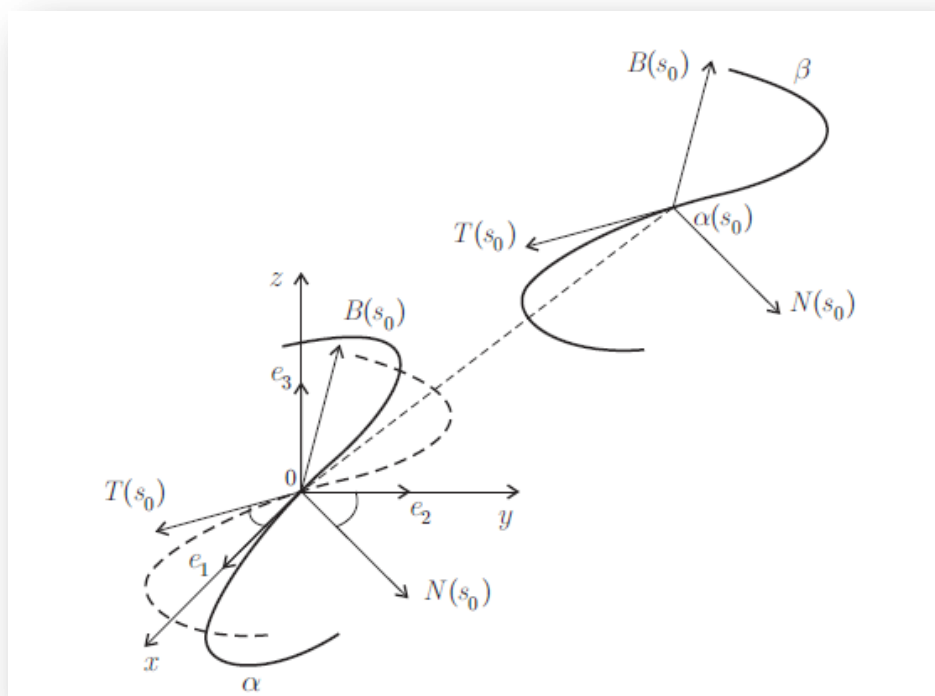
Σημείωση: Στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ , αν

υποθέσουμε ότι η F είναι της κλάσης  $C^2$ , τότε η παραπάνω ισότητα ικανοποιείται.



## 2.4 Η ειδική μορφή του Θεμελιώδους Θεωρήματος Καμπυλών.

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα των Καμπυλών για καμπύλες στον τρισδιάστατο χώρο η καμπυλότητα και ένα ακόμα μέγεθος που ονομάζεται *στρέψη*, και θα οριστεί συντόμως παρακάτω, είναι ικανά για να περιγράψουν το σχήμα μίας καμπύλης μοναδικά, εκτός μόνο από τη θέση της και τον προσανατολισμό της στον χώρο. Για επίπεδες καμπύλες ακριβώς επειδή έχουν μηδενική στρέψη, η καμπυλότητα ως μέγεθος αρκεί από μόνο του. [11]



**Εικόνα 10:** Η παράλληλη μεταφορά και η στροφή μίας καμπύλης δεν αλλάζει την καμπυλότητα της.

➤ Ορισμός δεύτερου κάθετου διανύσματος καμπύλης:

Έστω μία καμπύλη  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , με  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Για κάθε  $s \in I$ , ορίζουμε το διάνυσμα

$$B(s) := T(s) \times N(s) \quad (2.17)$$

το οποίο ονομάζουμε **δεύτερο κάθετο διάνυσμα** της καμπύλης σε αυτό το σημείο. Προφανώς, είναι κάθετο, εξ' ορισμού, στα  $T(s)$ ,  $N(s)$  και είναι μοναδιαίο.

➤ Ορισμός στρέψης καμπύλης:

Παρατηρούμε ότι  $\langle N(s), B(s) \rangle = 0$ , για κάθε  $s \in I$ . Παραγωγίζοντας την έχουμε:

$$\langle N'(s), B(s) \rangle + \langle N(s), B'(s) \rangle = 0$$

Ορίζουμε τον πραγματικό αριθμό

$$\tau(s) := - \langle N(s), B'(s) \rangle = \langle N'(s), B(s) \rangle \quad (2.18)$$

**στρέψη** (torsion) της καμπύλης  $\alpha$  στο σημείο  $s$ .

Από τον ορισμό της στρέψης, επειδή περιέχει την παράγωγο του  $B(s)$ , καταλαβαίνουμε ότι αποτελεί ένα μέτρο της μεταβολής του δεύτερου κάθετου διανύσματος. Εύκολα, μπορεί ναδειχθεί ότι για επίπεδες καμπύλες το  $B'(s)$  είναι συγγραμμικό με το  $N(s)$  και συνεπώς  $\tau(s) = 0 \quad \forall s$ .

➤ Ορισμός στερεάς κίνησης:

Καταρχάς, ορίζουμε την έννοια της μεταφοράς και της στροφής μίας απεικόνισης. **Μεταφορά** κατά  $c \in \mathbb{R}^3$  ονομάζεται η απεικόνιση

$$\mu_c : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : u \mapsto \mu_c(u) := u + c.$$

Και **στροφή** ονομάζεται κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^3$  με θετική ορίζουσα, με άλλα λόγια κάθε γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

που διατηρεί τα γινόμενα, δηλαδή

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3,$$

και ο πίνακας της έχει θετική ορίζουσα ( συνεπώς διατηρεί τον προσανατολισμό των βάσεων). Επομένως, η  $f$  διατηρεί τις αποστάσεις, αντιστρέφεται (δηλαδή είναι γραμμικός ισομορφισμός) και διατηρεί τα εξωτερικά γινόμενα με την έννοια ότι ισχύει η σχέση

$$f(u \times v) = f(u) \times f(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

Παρατηρούμε ότι οι μεταφορές και οι στροφές είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις. Επιπλέον είναι και αντιστρέψιμες: η αντίστροφη της  $\mu_c$  είναι η  $\mu_{-c}$ , δηλαδή είναι επίσης μία μεταφορά, ενώ η αντίστροφη μίας στροφής είναι και αυτή στροφή. Επομένως, μεταφορές και στροφές είναι αμφιδιαφορίσιμες με αντίστροφες απεικονίσεις του ίδιου τύπου. Διαπιστώνεται εύκολα ότι

$$f \circ \mu_c = \mu_{f(c)} \circ f.$$

Η σύνθεση μίας μεταφοράς και μίας στροφής ονομάζεται **στερεά κίνηση** (rigid motion).

Απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος για επίπεδες καμπύλες:

- ✓ Ορθά: Έστω  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , μία επίπεδη καμπύλη και  $\beta$  η επίπεδη καμπύλη που προκύπτει από μία στροφή  $f$  της  $\alpha$  και μία μεταφορά  $\mu_c$ , δηλαδή

$$\beta(t) = f(\alpha(t)) + c, \quad \forall t \in I.$$

Τότε, η  $\beta$  έχει την ίδια καμπυλότητα με την  $\alpha$ .

Λήμμα:  $(f \circ \alpha)'(t) = f'(\alpha'(t))$ .

Απόδειξη: Αν  $M$  είναι ο πίνακας της  $f$  (ως προς την φυσική βάση του  $\mathbb{R}^2$ ), θα είναι  $f(\alpha(t)) = M \cdot (\alpha_1(t), \alpha_2(t))^T$ , όπου ο εκθέτης  $T$  συμβολίζει τον ανάστροφο πίνακα. Επομένως, η διγραμμικότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων, δίνει ότι:

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)'(s) &= M' \cdot (\alpha_1(t), \alpha_2(t))^T + M \cdot (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t))^T \\ &= M \cdot (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t))^T = f'(\alpha'(t)). \end{aligned}$$

Ερχόμαστε τώρα στην απόδειξη του ορθού τμήματος:

$$\begin{aligned} T_\beta(t) &= \beta'(t) = (f \circ \alpha)'(t) = f'(\alpha'(t)) = f'(T_\alpha(t)) \Rightarrow \\ \|T_\beta(t)\| &= \|f'(T_\alpha(t))\| = \|T_\alpha(t)\| = 1 \Rightarrow \\ T_\beta'(t) &= (f' \circ T_\alpha)'(t) = f''(T_\alpha(t)) \Rightarrow \\ k_\beta(t) &= \|T_\beta'(t)\| = \|f''(T_\alpha(t))\| = \|T_\alpha'(t)\| = k_\alpha(t). \end{aligned}$$

Και η απόδειξη του ορθού τμήματος ολοκληρώθηκε.

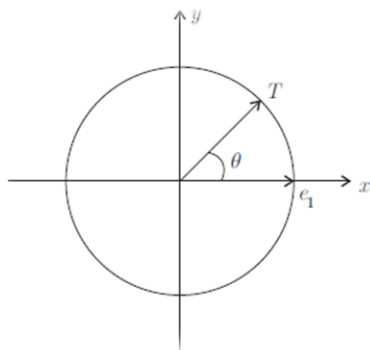
- ✓ Αντίστροφα: Έστω  $k: I = [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  μία διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει επίπεδη καμπύλη  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , της οποίας η καμπυλότητα είναι ίση με  $k$ . Επίσης, αν  $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  είναι καμπύλη με τις ίδιες ιδιότητες, τότε υπάρχει στερεά κίνηση  $g$  του επιπέδου, τέτοια ώστε  $g \circ \alpha = \beta$ .

Λήμμα: Έστω  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  μία επίπεδη καμπύλη. Τότε ισχύει η σχέση:

$$k = \frac{d\theta}{dt},$$

όπου  $\theta(t)$  είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα  $T(t)$  και  $e_1$ .

Παρατίθεται το παρακάτω σχήμα για την απλή περίπτωση του κύκλου:



**Εικόνα 11:** Βοηθητικό διάγραμμα για το αντίστροφο τμήμα του Θεμελιώδους Θεωρήματος των επιπέδων καμπυλών.

Απόδειξη: Επειδή, για κάθε  $t \in I$ , το διάνυσμα  $T(t)$  είναι στοιχείο του μοναδιαίου κύκλου, θα είναι  $T(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ , όπου  $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$  διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε

$$\begin{aligned} T'(t) &= (-\sin \theta(t) \cdot \theta'(t), \cos \theta(t) \cdot \theta'(t)), \\ N(t) &= (-\sin \theta(t), \cos \theta(t)), \end{aligned}$$

Και σύμφωνα με την σχέση:  $k(t) = \langle T'(t), N(t) \rangle$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} k(t) &= \langle (-\theta'(t) \sin \theta(t), \theta'(t) \cos \theta(t)), (-\sin \theta(t), \cos \theta(t)) \rangle \\ &= \theta'(t) \sin^2 \theta(t) + \theta'(t) \cos^2 \theta(t) = \theta'(t), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Ερχόμαστε τώρα στην απόδειξη του αντίστροφου τμήματος. Θέτουμε:

$$\varphi(t) := \int_0^t k(s) ds$$

και

$$\alpha(t) := (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = \left( \int_0^t \cos \varphi(u) du, \int_0^t \sin \varphi(u) du \right).$$

Επαληθεύεται αμέσως ότι η  $\alpha$  είναι διαφορίσιμη καμπύλη και βάση του προηγούμενου λήμματος, η καμπυλότητα της είναι ακριβώς ίση με την δοθείσα  $k$ .

Έστω τώρα  $\beta$  μία άλλη καμπύλη με τις ίδιες ιδιότητες. Αν  $T_\beta$  είναι η ταχύτητα της  $\beta$  και  $\theta$  η γωνία που σχηματίζει η  $T_\beta$  με το  $e_1$ , από το παραπάνω λήμμα θα έχω:

$$\theta(t) = \int_0^t k(s) ds + \theta_0 = \varphi(t) + \theta_0,$$

οπότε:

$$\begin{aligned} (\cos \theta(t), \sin \theta(t)) &= (\cos(\varphi(t) + \theta_0), \sin(\varphi(t) + \theta_0)) \\ &= (\cos \theta_0 \cos \varphi(t) - \sin \theta_0 \sin \varphi(t), \\ &\quad \cos \theta_0 \sin \varphi(t) + \sin \theta_0 \cos \varphi(t)) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} \\ &= f(\cos \varphi(t), \sin \varphi(t)), \end{aligned}$$

όπου με  $f$  συμβολίζουμε την γραμμική απεικόνιση, που αντιστοιχεί στον αμέσως προηγούμενο  $2 \times 2$  πίνακα, και ορίζει την στροφή του επιπέδου κατά την γωνία  $\theta_0$ , δηλαδή

$$f(x, y) = (x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0, x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Στη συνέχεια, η σχέση

$$\beta'(t) = (\beta_1'(t), \beta_2'(t)) = T_\beta(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

δίνει ότι

$$\beta(t) = \left( \int_0^t \cos \theta(u) du + x_0, \int_0^t \sin \theta(u) du + y_0 \right),$$

όπου  $x_0, y_0$  σταθερές.

Άρα χρησιμοποιώντας τις πρώτες ισότητες, η παραπάνω σχέση για το  $\beta(t)$  μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \left( \int_0^t [\cos \theta_0 \cos \varphi(u) - \sin \theta_0 \sin \varphi(u)] du, \right. \\ &\quad \left. \int_0^t [\cos \theta_0 \sin \varphi(u) - \sin \theta_0 \cos \varphi(u)] du \right) + (x_0, y_0) \\ &= \left( \cos \theta_0 \int_0^t \cos \varphi(u) du - \sin \theta_0 \int_0^t \sin \varphi(u) du, \right. \\ &\quad \left. \cos \theta_0 \int_0^t \sin \varphi(u) du - \sin \theta_0 \int_0^t \cos \varphi(u) du \right) + (x_0, y_0) \\ &= f \left( \int_0^t \cos \varphi(u) du, \int_0^t \sin \varphi(u) du \right) + (x_0, y_0) \\ &= f(\alpha(t)) + (x_0, y_0), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

## 2.5 Γενικά περί επιφανειών – σχετικοί ορισμοί.

Μία επιφάνεια είναι ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$ , που μοιάζει με ένα κομμάτι του  $\mathbb{R}^2$  στην εγγύτητα οποιουδήποτε δοθέντος σημείου, όπως ακριβώς η επιφάνεια της Γης, που, αν και στην πραγματικότητα είναι σφαιρική, φαίνεται να είναι επίπεδη σε έναν παρατηρητή που βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια και κοιτά μόνο προς τον ορίζοντα. Για να προσδώσουμε ακριβή σημασία στις λέξεις «μοιάζει» και «στην εγγύτητα», πρέπει πρώτα να εισάγουμε κάποιες προκαταρκτικές έννοιες. Η περιγραφή αυτών των εννοιών θα γίνει στον  $\mathbb{R}^n$  για  $n \geq 1$ , αν και θα τις χρειαστούμε μόνο για  $n=1, 2, 3$ . [13]

➤ Ορισμός ανοικτού υποσυνόλου.

Ένα υποσύνολο  $U$  του  $\mathbb{R}^n$  καλείται ανοικτό εάν, για κάθε σημείο  $a$  του  $U$ , υπάρχει ένας θετικός αριθμός  $\varepsilon$  τέτοιος ώστε για κάθε σημείο  $u \in \mathbb{R}^n$  που απέχει απόσταση  $\varepsilon$  από το  $a$  να ανήκει επίσης στο  $U$ :

$$a \in U \text{ και } \|u - a\| < \varepsilon \Rightarrow u \in U.$$

➤ Ορισμός ομομορφισμού.

Εάν η  $f: X \rightarrow Y$  είναι συνεχής, 1-1 και επί και εάν η αντίστροφη της απεικόνιση  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  είναι επίσης συνεχής, τότε η  $f$  καλείται ομομορφισμός και λέμε ότι τα  $X$  και  $Y$  είναι ομομορφικά.

➤ Ορισμός επιφάνειας.

Ένα υποσύνολο  $S$  του  $\mathbb{R}^3$  είναι επιφάνεια εάν, για κάθε σημείο  $p \in S$ , υπάρχουν ένα ανοικτό υποσύνολο  $U$  του  $\mathbb{R}^2$  και ένα ανοικτό υποσύνολο  $W$  του  $\mathbb{R}^3$  που περιέχει το  $p$  τέτοια ώστε  $S \cap W$  να είναι ομομορφικό με το  $U$ . Ένα υποσύνολο μίας επιφάνειας  $S$  της μορφής  $S \cap W$ , όπου  $W$  είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του ονομάζεται ανοικτό υποσύνολο της  $S$ . Ένας ομομορφισμός  $\sigma: U \rightarrow S \cap W$  σαν αυτόν που μόλις ορίστηκε καλείται τμήμα επιφάνειας ή παραμέτρηση του ανοικτού υποσυνόλου  $S \cap W$  της  $S$ . Μία συλλογή τμημάτων επιφάνειας των οποίων οι εικόνες καλύπτουν ολόκληρη την  $S$  ονομάζεται άτλας της  $S$ .

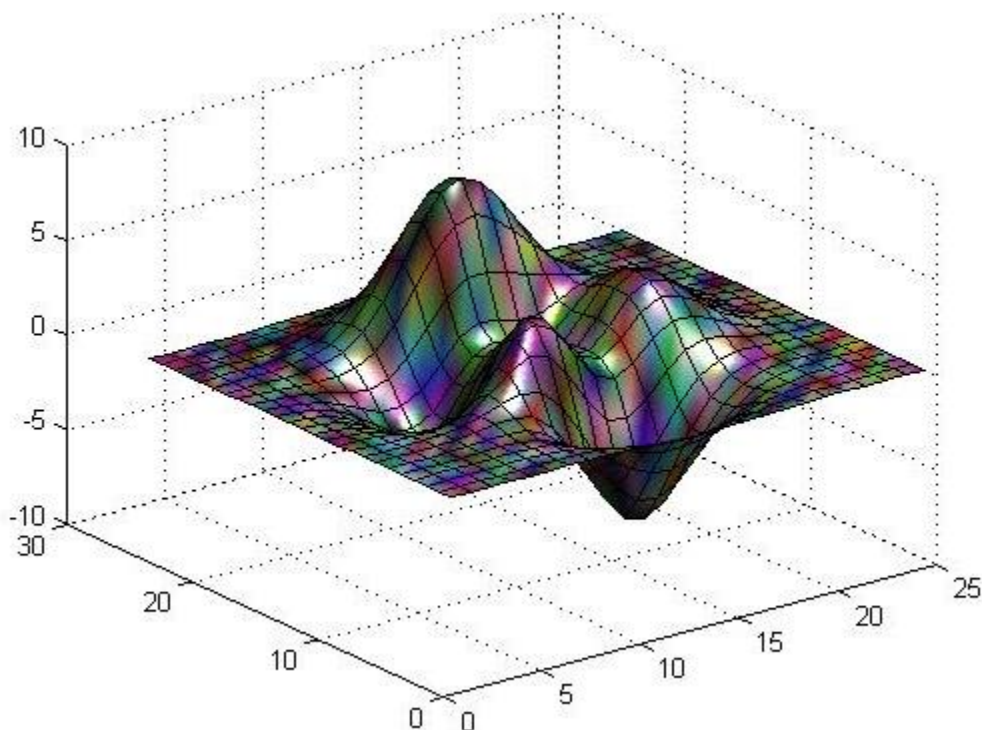
➤ Ορισμός κανονικού τμήματος επιφάνειας.

Ένα τμήμα επιφάνειας  $\sigma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  καλείται κανονικό εάν είναι λείο και τα διανύσματα  $\sigma_u$  και  $\sigma_v$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε όλα τα σημεία  $(u, v) \in U$ . Ισοδύναμα, η  $\sigma$  πρέπει να είναι λεία και το διανυσματικό γινόμενο  $\sigma_u \times \sigma_v$  πρέπει να είναι διάφορο του μηδενός σε κάθε σημείο του  $U$ .

Σημείωση: Μία απεικόνιση  $\sigma(u,v) = (\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v))$ , καλείται λεία αν για κάθε μία από τις τρεις συνιστώσες της  $\sigma$ , οι οποίες είναι συναρτήσεις  $\sigma_i : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης.

Συμβολίζουμε:

$$\sigma_u = \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \right), \quad \sigma_v = \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right). \quad (2.19)$$



Εικόνα 12: Μία επιφάνεια του  $\mathbb{R}^3$ .

- Ορισμός επιτρεπτού τμήματος επιφάνειας λείας επιφάνειας και άτλαντος λείας επιφάνειας.

Εάν  $S$  είναι μία επιφάνεια, ένα *επιτρεπτό τμήμα επιφάνειας* της  $S$  είναι ένα κανονικό τμήμα επιφάνειας  $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  τέτοιο ώστε η  $\sigma$  να είναι ένας ομομορφισμός από το  $U$  προς ένα ανοικτό υποσύνολο της  $S$ . Μία *λεία επιφάνεια* είναι μια επιφάνεια της  $S$  τέτοια ώστε, για κάθε  $p \in S$ , να υπάρχει ένα επιτρεπτό τμήμα επιφάνειας  $\sigma$  όπως παραπάνω τέτοιο ώστε  $p \in \sigma(U)$ . Μία συλλογή  $\mathcal{A}$  επιτρεπτών τμημάτων επιφάνειας μίας επιφάνειας  $S$  τέτοια ώστε κάθε σημείο της  $S$  να ανήκει στην εικόνα τουλάχιστον ενός τμήματος της  $\mathcal{A}$  ονομάζεται *άτλας* της λείας επιφάνειας  $S$ .

➤ Ορισμός εφαπτόμενου διανύσματος και εφαπτόμενου χώρου επιφάνειας.

Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα μίας επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $p \in S$  είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στο  $p$  μίας καμπύλης της  $S$  που διέρχεται από το  $p$ . Ο εφαπτόμενος χώρος  $T_p S$  της  $S$  στο  $p$  είναι το σύνολο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων της  $S$  στο σημείο  $p$ .

➤ Ορισμός πρώτης θεμελιώδους μορφής.

Έστω  $p$  ένα σημείο μίας επιφάνειας  $S$ . Η πρώτη θεμελιώδης μορφή της  $S$  στο σημείο  $p$  αντιστοιχίζει στα εφαπτόμενα διανύσματα  $v, w \in T_p S$  τον αριθμό

$$\langle v, w \rangle_{p,S} = v \cdot w.$$

Αυτό σημαίνει ότι η  $\langle v, w \rangle_{p,S}$  είναι απλώς το βαθμωτό γινόμενο, περιορισμένο όμως σε εφαπτόμενα διανύσματα της  $S$  στο σημείο  $p$ . Σε παραδοσιακές εργασίες επάνω σε αυτό το αντικείμενο, η πρώτη θεμελιώδης μορφή παρουσιάζεται λίγο διαφορετικά. Ας υποθέσουμε ότι η  $\sigma(u, v)$  είναι ένα τμήμα επιφάνειας της  $S$ , τότε κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα της  $S$  σε ένα σημείο  $p$  της εικόνας του  $\sigma$  μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των  $\sigma_u$  και  $\sigma_v$ . Ορίζουμε τις απεικονίσεις  $du: T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  και  $dv: T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  ως εξής:

$$du(v) = \lambda, \quad dv(v) = \mu \quad \text{αν } v = \lambda \sigma_u + \mu \sigma_v,$$

για κάποια  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε τα  $du, dv$  είναι γραμμικές απεικονίσεις. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  είναι συμμετρική διγραμμική μορφή, έχουμε:

$$\langle v, v \rangle = \lambda^2 \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle + 2\lambda\mu \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle + \mu^2 \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle.$$

Αν θέσουμε

$$E = \|\sigma_u\|^2, \quad F = \sigma_u \cdot \sigma_v, \quad G = \|\sigma_v\|^2,$$

προκύπτει ότι

$$\langle v, v \rangle = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 = Edu(v)^2 + 2Fdu(v)dv(v) + Gdv(v)^2.$$

Παραδοσιακά η έκφραση

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{2.20}$$

ονομάζεται πρώτη θεμελιώδης μορφή του τμήματος επιφάνειας  $\sigma$ . Ας σημειωθεί ότι οι συντελεστές  $E, F, G$  και οι γραμμικές απεικονίσεις  $du, dv$  εξαρτώνται από την επιλογή του τμήματος επιφάνειας της  $S$ , αλλά η πρώτη θεμελιώδης μορφή εξαρτάται μόνο από την  $S$  και από το  $p$ .



Εάν  $\gamma$  είναι μία καμπύλη που ανήκει στην εικόνα του τμήματος επιφάνειας  $\sigma$ , έχουμε

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$$

για κάποιες λείες συναρτήσεις  $u(t)$  και  $v(t)$ . Αν συμβολίσουμε την  $d/dt$  με τελεία, από τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε  $\dot{\gamma} = \dot{u}\sigma_u + \dot{v}\sigma_v$ .

Συνεπώς:

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2,$$

και το μήκος της  $\gamma$  δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\int (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{1/2} dt. \quad (2.21)$$

Σε καμία περίπτωση ο σκοπός της παραπάνω παράθεσης ορισμών δεν ήταν να εξαντλήσει την Θεωρία Επιφανειών. Αντίθετα, προσπάθησε να εισάγει το βασικό φορμαλισμό ώστε η μετάβαση στην παρουσίαση των γεωδαισιακών καμπυλών στο επόμενο κεφάλαιο να είναι όσο το δυνατόν πιο ομαλή γίνεται. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει περισσότερες πληροφορίες στις βιβλιογραφικές παραπομπές.

## 2.6 Γεωδαισιακές και συντομότεροι δρόμοι πάνω σε μία επιφάνεια.

### 2.6.1 Ορισμός γεωδαισιακών και κάποια σημαντικά συμπεράσματα επί αυτών.

Γεωδαισιακές είναι οι καμπύλες μίας επιφάνειας τις οποίες ένα έντομο που ζει επάνω στην επιφάνεια αντιλαμβάνεται ως ευθείες. Παραδείγματος χάρη, ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων μίας επιφάνειας είναι πάντοτε γεωδαισιακή. Ωστόσο, θα δώσουμε καταρχάς ένα αρκετά διαφορετικό ορισμό των γαιωδαισιακών, με τον οποίο μπορούμε να εργαστούμε ευκολότερα. Αυτός προκύπτει από την παρατήρηση ότι όταν οδηγούμε σε έναν «ευθύ» δρόμο, δεν χρειάζεται να στρίβουμε το τιμόνι ούτε δεξιά, ούτε αριστερά, γιατί ακριβώς αυτό σημαίνει «ευθύς»! Στην πραγματικότητα όμως ο δρόμος δεν είναι ευθεία γραμμή, καθώς στην επιφάνεια της Γης, που είναι σφαίρα με πολύ καλή προσέγγιση, δεν υπάρχουν ευθείες. Εάν συμβολίσουμε την καμπύλη του δρόμου με  $\gamma$ , η επιτάχυνση του δρόμου  $\ddot{\gamma}$  θα είναι διάφορη του μηδενός, αλλά αντιλαμβανόμαστε την  $\gamma$  σαν ευθεία επειδή η εφαπτομενική συνιστώσα της  $\ddot{\gamma}$  είναι μηδέν, με άλλα λόγια επειδή η  $\ddot{\gamma}$  είναι κάθετη στην επιφάνεια. Με βάση τα παραπάνω οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

#### ➤ Ορισμός Γεωδαισιακής

Μία καμπύλη  $\gamma$  μίας επιφάνειας  $S$  ονομάζεται *γεωδαισιακή* εάν η επιτάχυνση  $\ddot{\gamma}(t)$  είναι μηδενική ή κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο  $\gamma(t)$ , δηλαδή παράλληλη στο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της, για όλες τις τιμές της ελεύθερης παραμέτρου  $t$ .

Υπάρχει μία ενδιαφέρουσα μηχανική ερμηνεία των γεωδαισιακών: ένα σωματίδιο που κινείται πάνω σε μία επιφάνεια και στο οποίο δεν ασκείται καμία δύναμη, εκτός από μία δύναμη κάθετη στην επιφάνεια που κρατά το σωματίδιο επάνω σε αυτήν, κινείται πάνω σε μία γεωδαισιακή. Αυτό ισχύει διότι, σύμφωνα με τον 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα, η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι παράλληλη στην επιτάχυνση του  $\ddot{\gamma}$ , η οποία πρέπει κατά συνέπεια να είναι κάθετη στην επιφάνεια.

**Πρόταση.** Κάθε γεωδαισιακή έχει σταθερή ταχύτητα.

**Απόδειξη.** Αν  $\gamma(t)$  είναι μία γεωδαισιακή επάνω σε μία επιφάνεια  $S$ , τότε

$$\frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}\|^2 = \frac{d}{dt} (\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}) = 2\ddot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}$$

όπου η τελεία συμβολίζει την  $d/dt$ . Αφού η  $\gamma$  είναι γεωδαισιακή, η επιτάχυνση  $\ddot{\gamma}$  είναι κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο και άρα κάθετη στο εφαπτόμενο διάνυσμα  $\dot{\gamma}$ . Άρα  $\ddot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = 0$ , οπότε από την τελευταία εξίσωση έπεται ότι το  $\|\dot{\gamma}\|$  είναι σταθερό.

**Πόρισμα.** Μία αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας μίας γεωδαισιακής παραμένει γεωδαισιακή.

**Απόδειξη.** Πράγματι, εάν  $\|\dot{\gamma}\| = \lambda$ , τότε η  $\tilde{\gamma} = \gamma(t/\lambda)$  είναι μία αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της  $\gamma$  και η  $\frac{d^2\tilde{\gamma}}{dt^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2\gamma}{dt^2}$  είναι παράλληλη στην  $\ddot{\gamma}$ , άρα κάθετη στην επιφάνεια. Επομένως, μπορούμε πάντοτε να περιοριζόμαστε σε γεωδαισιακές μοναδιαίας ταχύτητας αν το επιθυμούμε.

**Θεώρημα.** Μία καμπύλη  $\gamma$  μίας επιφάνειας  $S$  είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν, για οποιοδήποτε τμήμα  $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$  της  $\gamma$  που περιέχεται σε ένα τμήμα επιφάνειας  $\sigma$  της  $S$ , ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) &= \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2), \\ \frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) &= \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2), \end{aligned}$$

όπου  $Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$  είναι η πρώτη θεμελιώδης μορφή του  $\sigma$ .<sup>1</sup>

Συνεπώς, οι γεωδαισιακές εξισώσεις είναι μη γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης ως προς τις συναρτήσεις  $u(t)$ ,  $v(t)$  και συνήθως είναι δύσκολο έως αδύνατο να επιλυθούν επακριβώς. Βέβαια, η γενική θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων μας παρέχει πολύτιμες πληροφορίες για τις λύσεις του συστήματος. Συγκεκριμένα, υπάρχει η ακόλουθη πρόταση, που μας πληροφορεί για τον αριθμό των γεωδαισιακών.

**Πρόταση.** Αν  $\mathbf{p}$  είναι ένα σημείο μίας επιφάνειας  $S$  και  $\mathbf{t}$  ένα μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της  $S$  στο  $\mathbf{p}$ , τότε υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας  $\gamma$  της  $S$  που διέρχεται από το  $\mathbf{p}$ , και έχει εφαπτόμενο διάνυσμα στο  $\mathbf{p}$  το  $\mathbf{t}$ .<sup>2</sup>

Εν συντομία, η παραπάνω πρόταση αναφέρει ότι από κάθε σημείο μιας επιφάνειας διέρχεται μοναδική γεωδαισιακή προς κάθε εφαπτόμενη κατεύθυνση.

**Παράδειγμα:** Εύκολα αποδεικνύεται ότι όλες οι ευθείες ενός επιπέδου είναι γεωδαισιακές. Εφόσον υπάρχει μια ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από κάθε δοθέν σημείο προς κάθε δοθείσα κατεύθυνση παράλληλη προς το επίπεδο, από την παραπάνω πρόταση έπεται ότι δεν υπάρχουν άλλες γεωδαισιακές.

<sup>1</sup> Η απόδειξη παραλείπεται αλλά μπορεί να βρεθεί στο [13] στη σελίδα 204.

<sup>2</sup> Η απόδειξη παραλείπεται αλλά μπορεί να βρεθεί στο [13] στη σελίδα 206.

### 2.6.2 Οι γεωδαισιακές ως συντομότεροι δρόμοι.

Είναι γνωστό ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q}$  ενός επιπέδου είναι ο συντομότερος δρόμος από το  $\mathbf{p}$  στο  $\mathbf{q}$ . Είναι σχεδόν εξίσου γνωστό ότι οι μέγιστοι κύκλοι είναι οι συντομότεροι δρόμοι μίας σφαίρας. Εύκολα μπορεί να αναρωτηθεί κάποιος τη σχέση γεωδαισιακών και συντομότερων δρόμων, αφού για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις μπορεί να αποδειχτεί ότι τόσο οι ευθείες όσο και οι μέγιστοι κύκλοι είναι γεωδαισιακές του επιπέδου και της σφαίρας αντίστοιχα.

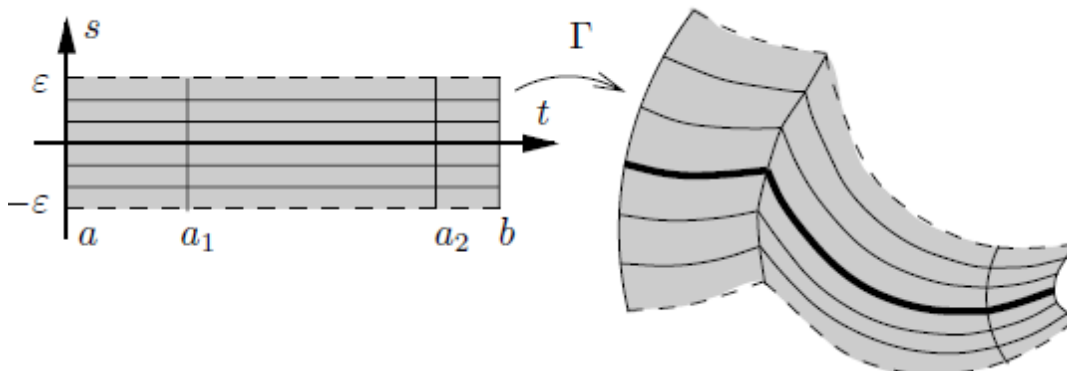
Για να βρούμε την σχέση μεταξύ γεωδαισιακών και συντομότερων δρόμων επάνω σε μία οποιαδήποτε επιφάνεια  $S$ , ας θεωρήσουμε μία καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας  $\gamma$  της  $S$  που διέρχεται από δύο σταθερά σημεία  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$ . Εάν η  $\gamma$  είναι ο συντομότερος δρόμος επάνω στην  $S$  από το  $\mathbf{p}$  στο  $\mathbf{q}$ , τότε το τμήμα της  $\gamma$  που περιέχεται σε οποιοδήποτε τμήμα επιφάνειας  $\sigma$  της  $S$  πρέπει να είναι ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων του. Πράγματι, αν  $\mathbf{p}'$  και  $\mathbf{q}'$  είναι δύο σημεία της  $\gamma$  που ανήκουν στην εικόνα του  $\sigma$  και υπήρχε συντομότερος δρόμος από το  $\mathbf{p}'$  στο  $\mathbf{q}'$  από αυτόν της  $\gamma$ , θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε το τμήμα της  $\gamma$  μεταξύ  $\mathbf{p}'$  και  $\mathbf{q}'$  με αυτόν τον συντομότερο δρόμο, οπότε θα προέκυπτε ένας συντομότερος δρόμος από το  $\mathbf{p}$  στο  $\mathbf{q}$  επάνω στην  $S$  και καταλήξαμε σε άτοπο. Επομένως, είναι σωστό να θεωρήσουμε έναν δρόμο που περιέχεται πλήρως σε ένα τμήμα επιφάνειας  $\sigma$ .

Η αναζήτηση της καμπύλης με το μικρότερο μήκος οδηγεί σε ένα πεδίο των μαθηματικών που ονομάζεται Λογισμός των Μεταβολών. Σύμφωνα με αυτόν, θεωρούμε το μήκος ως ένα συναρτησιακό στο σύνολο όλων των καμπυλών με άκρα τα  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  και κείτονται εξολοκλήρου στην  $S$ . (Συναρτήσεις των οποίων το πεδίο ορισμού είναι επίσης συναρτήσεις καλούνται συναρτησιακά). Ο Λογισμός των Μεταβολών επιτρέπει την εφαρμογή όλων των συνήθων εργαλείων της Ανάλυσης πολλών Μεταβλητών, όπως παραγώγους, κρίσιμα σημεία, σαγματικά σημεία, Εσσιανές μήτρες κτλ. Σύμφωνα με αυτή την θεώρηση, η αναζήτηση της καμπύλης με το ελάχιστο μήκος, μπορεί να θεωρηθεί σαν την αναζήτηση ελαχίστου σε αυτό το συναρτησιακό. Από το συνήθη λογισμό, πιθανώς αναμένεται ότι μία αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη «ελάχιστης καμπύλης» θα ήταν η παράγωγος του μήκους να μηδενίζεται σε κάποιο σημείο πάνω σε αυτή την ελάχιστη καμπύλη, και όπως θα φανεί στη συνέχεια αυτό ισχύει. Παρατίθενται παρακάτω η αυστηρή θεώρηση των πιο πάνω εποπτικών ιδεών. [14]

Έστω ένας δρόμος που περιέχεται εξολοκλήρου σε ένα τμήμα επιφάνειας  $\sigma$ . Για να ελέγξουμε παρακάτω αν ο  $\gamma$  έχει το μικρότερο μήκος από κάθε άλλο δρόμο του  $\sigma$  που διέρχεται από δύο σταθερά σημεία  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q}$  του  $\sigma$ , εντάσσουμε τον  $\gamma$  σε μία οικογένεια λείων καμπυλών του  $\sigma$  που διέρχεται από τα  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q}$ . Μία τέτοια οικογένεια είναι μία καμπύλη  $\gamma^t$  του  $\sigma$ , για κάθε  $t$  εντός του ανοικτού διαστήματος  $(-\delta, \delta)$ , τέτοια ώστε:

- i. υπάρχει ένα  $\varepsilon > 0$  τέτοιο ώστε η  $\gamma^t$  να ορίζεται για κάθε  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  και για κάθε  $\tau \in (-\delta, \delta)$ .
- ii. για κάποια  $a, b$  με  $-\varepsilon < a < b < \varepsilon$ , έχουμε  $\gamma^t(a) = p$  και  $\gamma^t(b) = q$  για κάθε  $t \in (-\delta, \delta)$ .

- iii. η απεικόνιση από το ορθογώνιο  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta)$  στο  $\mathbb{R}^3$  που δίνεται από την  $(t, \tau) \mapsto \gamma^\tau(t)$  είναι λεία.
- iv.  $\gamma^0 = \gamma$ .



Εικόνα 13: Σχηματική απεικόνιση του παραπάνω ορισμού της οικογένειας καμπυλών  $\gamma^\tau$ .

Το μήκος του τμήματος της  $\gamma^\tau$  μεταξύ των  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q}$  είναι

$$L(\tau) = \int_a^b \|\dot{\gamma}^\tau\| dt \quad (2.22)$$

όπου η τελεία συμβολίζει την  $d/dt$ .

**Θεώρημα.** Με τον παραπάνω συμβολισμό, η καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας  $\gamma$  είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν

$$\frac{d}{dt} L(\tau) = 0 \text{ όταν } \tau = 0.$$

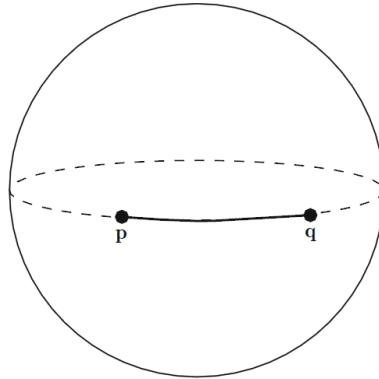
για όλες τις οικογένειες καμπυλών  $\gamma^\tau$  με  $\gamma^0 = \gamma$ .<sup>1</sup>

Τα σημεία για τα οποία ισχύει η σχέση (2.22) είναι τα κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού  $L(\tau)$ . Αξίζει να γίνουν κάποιες παρατηρήσεις πάνω στο παραπάνω θεώρημα για να αποσαφηνιστεί τι ακριβώς λέει και τι δεν λέει.

1. Εάν η  $\gamma$  είναι ο συντομότερος δρόμος επάνω στο  $\sigma$  από το  $\mathbf{p}$  στο  $\mathbf{q}$ , τότε η  $L(\tau)$  πρέπει να έχει ολικό ελάχιστο όταν  $\tau = 0$ . Έπεται ότι  $\frac{d}{dt} L(\tau) = 0$  όταν  $\tau = 0$ , άρα λόγω του παραπάνω θεωρήματος η  $\gamma$  είναι γεωδαισιακή.

<sup>1</sup> Η απόδειξη παραλείπεται αλλά μπορεί να βρεθεί στο [13] στη σελίδα 219.

2. Εάν η  $\gamma$  είναι γεωδαισιακή του  $\sigma$  που διέρχεται από τα  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q}$ , τότε η  $L(\tau)$  έχει στάσιμο σημείο (ακρότατο) όταν  $\tau = 0$ , αλλά αυτό δεν είναι κατ' ανάγκη ολικό ελάχιστο, ούτε καν τοπικό ελάχιστο, οπότε η  $\gamma$  δεν είναι κατ' ανάγκη ο συντομότερος δρόμος από το  $\mathbf{p}$  στο  $\mathbf{q}$ . Για παράδειγμα, εάν τα  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q}$  είναι δύο γειτονικά σημεία μίας σφαίρας, το μικρό τμήμα του μέγιστου κύκλου που συνδέει τα  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q}$  είναι ο συντομότερος δρόμος από το  $\mathbf{p}$  στο  $\mathbf{q}$ , αλλά και το μεγάλο τμήμα του μέγιστου κύκλου που συνδέει τα  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q}$  είναι επίσης γεωδαισιακή.

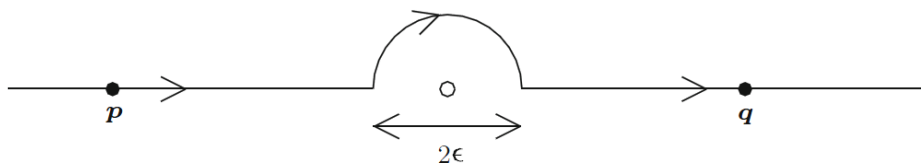


**Εικόνα 14:** Το μικρό τμήμα του μέγιστου κύκλου που συνδέει τα  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q}$  είναι ο συντομότερος δρόμος από το  $\mathbf{p}$  στο  $\mathbf{q}$ .

3. Γενικά, είναι δυνατό να μην υπάρχει συντομότερος δρόμος που να συνδέει δύο σημεία μίας επιφάνειας. Για παράδειγμα, θεωρήστε την επιφάνεια  $S$  που αποτελείται από το επίπεδο  $xy$  χωρίς την αρχή των αξόνων. Η  $S$  είναι μία πολύ καλά ορισμένη επιφάνεια, αλλά δεν υπάρχει συντομότερος δρόμος πάνω στην επιφάνεια από το  $p = (-1, 0)$  στο  $q = (1, 0)$ . Ασφαλώς, ο συντομότερος δρόμος θα έπρεπε να είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο σημεία· αυτό όμως δεν ανήκει εξ ολοκλήρου στην επιφάνεια, αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η οποία δεν είναι σημείο της επιφάνειας. Για ένα ανάλογο στην «πραγματική ζωή», ας φανταστούμε ότι προσπαθούμε να βαδίσουμε από το  $\mathbf{p}$  στο  $\mathbf{q}$ , αλλά διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μία βαθιά οπή στο έδαφος στο σημείο της αρχής των αξόνων. Μία λύση θα ήταν να βαδίσουμε σε ευθεία γραμμή όσο το δυνατόν περισσότερο, και κατόπιν, την τελευταία στιγμή, να παρακάμψουμε την οπή, να ακολουθήσουμε δηλαδή μία πορεία όπως στο σχήμα 15. Ο δρόμος αυτός αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα μήκους  $1-\varepsilon$  και από ένα ημικύκλιο ακτίνας  $\varepsilon$ , άρα το συνολικό μήκος είναι

$$2(1-\varepsilon) + \pi\varepsilon = 2 + (\pi-2)\varepsilon.$$

Το μήκος αυτό είναι ασφαλώς μεγαλύτερο από την απόσταση 2 που αντιστοιχεί στην ευθεία, αλλά μπορούμε να το φέρουμε όσο πιο κοντά επιθυμούμε παίρνοντας  $\varepsilon$  αρκούντως μικρό. Στη γλώσσα της πραγματικής ανάλυσης, το μέγιστο κάτω φράγμα των μηκών των καμπυλών που συνδέουν τα  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q}$  είναι το 2, αλλά δεν υπάρχει επιφανειακή καμπύλη από το  $\mathbf{p}$  στο  $\mathbf{q}$  της οποίας το μήκος να είναι ίσο με αυτό το κάτω φράγμα.



**Εικόνα 15:** Το  $\varepsilon$  μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε. Το μέγιστο κάτω φράγμα της απόστασης είναι 2, όμως δεν υπάρχει επιφανειακή καμπύλη από το  $p$  στο  $q$  που να «πετυχαίνει» αυτό το μήκος.

4. Τέλος, μπορεί να αποδειχθεί ότι εάν μία επιφάνεια  $S$  είναι κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  και υπάρχει κάποιος δρόμος της  $S$  που συνδέει οποιαδήποτε δύο σημεία της, τότε υπάρχει πάντα συντομότερος δρόμος που τα συνδέει. Μία άλλη ιδιότητα των επιφανειών που είναι κλειστά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^3$  είναι ότι οι γεωδαισιακές αυτών των επιφανειών μπορούν να επεκταθούν επ' άπειρο, δηλαδή μπορούν να οριστούν σε ολόκληρο το  $\mathbb{R}$ . [13]

Ο ορισμός των γεωδαισιακών και των συντομότερων διαδρομών, που μόλις προηγήθηκε, θα αποτελέσει τον τρόπο ορισμού των ελάχιστων αποστάσεων στην ενότητα 3.7 του 3ου κεφαλαίου, όπου θα γίνει προσπάθεια να εξηγηθεί ο λόγος για τον οποίον η καμπυλότητα καταφέρνει να επιτυγχάνει τα αποτελέσματα της ενότητας 3.4. Με το τέλος και της παρουσίασης των ελαχίστων δρόμων, με την βοήθεια του λογισμού των μεταβολών και των γαιωδαισιακών, το 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο ολοκλήρωσε το σκοπό του· αυτό δηλαδή της παροχής όλου του απαραίτητου μαθηματικού φορμαλισμού για την ανάπτυξη και την μαθηματική θεμελίωση μίας νέας μεθόδου για το ταίριασμα δύο καμπυλών. Με την βοήθεια της μεθόδου αυτής και της εφαρμογής της σε περιγράμματα υλοποιήσεων ενός γράμματος θα καταστεί δυνατή η δημιουργία ενός ιδεατού αντιπροσώπου ενός συνόλου του γράμματος. Ο παραπάνω ιδεατός αντιπρόσωπος, με τη σειρά του, θα είναι ο βασικός δειγματικός χώρος, που θα χρησιμοποιηθεί στον στατιστικό έλεγχο της υπόθεσης αν δύο κείμενα έχουν γραφτεί από τον ίδιο γραφέα. Ακολουθεί η ανάλυση της μεθόδου στο επόμενο κεφάλαιο.

### **3. ΜΙΑ ΝΕΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΑΙ Ο ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ ΔΥΟ ΚΑΜΠΥΛΩΝ Γ1 ΚΑΙ Γ2.**

#### **3.1 Ένας σύντομος προϋδεασμός της χρήσης των κεντρικότερων ιδεολογικών συλλήψεων της παρουσιαζόμενης μεθόδου.**

Μία μαθηματική απόδειξη είθισται να παρουσιάζεται σύμφωνα με το σχήμα λήμμα – πρόταση – θεώρημα, καθώς η κατανόηση της και η εξακρίβωση της ορθότητας των επιχειρημάτων της είναι πολύ ευκολότερη. Παρόμοια, η παρουσίαση μίας καινοφανούς επιστημονικής ιδέας ακολουθεί την ίδια οδό. Ο αναγνώστης που προσπαθεί να την γνωρίσει αρχικά γίνεται κοινωνός κάποιων ορισμών, που τον βοηθούν να καλύψει το «ορολογικό χάσμα», και στην συνέχεια βήμα προς βήμα «βλέπει» να χτίζεται η ιδέα μέχρι την τελική παρουσίαση της, στηρίζοντας τα επιμέρους βήματα της μέσω αποδείξεων και επαγωγικών παρατηρήσεων.

Όμως, η σύλληψη μίας ιδέας σπάνια ακολουθεί αυτή την οδό, αφού η αναζήτηση της λύσης ενός προβλήματος οδηγεί συνήθως σε επιμέρους προβλήματα, που υψώνουν πρόσκαιρα τείχη στην προσπάθεια επίλυσης του, όπου τα λήμματα και οι προτάσεις έρχονται να τα «ρίζουν». Έτσι, η παρουσίαση μιας ιδέας, με αυτό τον τρόπο, φέρει τον κίνδυνο να σιωπήσει αυτή τη συλλογιστική διαδρομή με συνέπεια κάποιες επιλογές να φαντάζουν αινιγματικές. Προς αποφυγή αυτών των αποσιωπήσεων κρίθηκε χρήσιμη η συγγραφή μίας ενότητας, όπου με εκλαϊκευτικό τόνο θα προσπαθήσει να προσεγγίσει το θέμα, παραθέτοντας τα κυριότερα ερωτήματα και προβλήματα της μεθόδου.

Όπως αναφέρθηκε ήδη στο εισαγωγικό πρώτο κεφάλαιο, η απάντηση στο ερώτημα αν δύο αρχαία χειρόγραφα κείμενα έχουν γραφτεί από τον ίδιο άνθρωπο θα δίνεται από κάποιο πολύ αυστηρό στατιστικό κριτήριο, που η μέθοδος οφείλει να παράσχει και να αιτιολογεί την επιλογή του. Άμεσα, τίθεται ο προβληματισμός ποια θα είναι η μορφή του δειγματικού χώρου πάνω στον οποίο θα εφαρμόζεται το κριτήριο. Και η λύση που έρχεται να προτείνει η μέθοδος είναι η κατασκευή ενός ιδεατού αντιπροσώπου από ένα σύνολο πραγματοποιήσεων ενός γράμματος, μία για κάθε κείμενο και για κάθε γράμμα που εμφανίζεται σε αυτό. Στο εξής αυτός ο ιδεατός αντιπρόσωπος θα ονομάζεται πλατωνικό πρότυπο (του γράμματος) ή απλά πλατωνικό. Η παρούσα εργασία, όπως έχει ήδη αναφερθεί, παρουσιάζει και μελετά την μέθοδο κατασκευής του πλατωνικού αντιπροσώπου. Ο τρόπος δημιουργίας του πλατωνικού, έρχεται να αντιμετωπίσει αρκετά προβλήματα, καθώς θα πρέπει να αφαιρεί όλη την παραπλανούσα πληροφορία, διατηρώντας, χωρίς να αλλοιώσει όμως, όλα εκείνα τα χαρακτηριστικά που είναι αντιπροσωπευτικά ενός γραφέα και επιτρέπουν την διάκρισή του. Συνεπώς πολλά προβλήματα γεννιούνται και πρέπει να αντιμετωπιστούν.

Για παράδειγμα, παρατηρώντας την γραφή διαφόρων αρχαίων κειμένων διαφαίνεται μία αισθητή μεταβλητότητα τόσο στην στρέψη των γραμμάτων, αλλά και στην κλίμακα τους. Αυτή η πληροφορία, αποτελεί τροχοπέδη στην κατασκευή του πλατωνικού, αφού δεν περιέχει πληροφορία για τον τρόπο γραφής, παρά μόνο εισάγει θόρυβο. Απαιτούνται συνεπώς κάποιοι μετασχηματισμοί, γραμμικοί ώστε να μην αλλοιώνουν την πληροφορία, ώστε όλα τα γράμματα να εμφανίζουν παρόμοιο



προσανατολισμό και μέγεθος. Οι συγγραφείς της μεθόδου, οδηγήθηκαν λοιπόν στην επίλυση του προβλήματος του *βέλτιστου ταιριάσματος* δύο σχημάτων μέσω γεωμετρικών μετασχηματισμών και *βέλτιστης κλιμάκωσης* τους σύμφωνα με κάποιο κριτήριο κόστους. Όμως, κατά την φορμαλιστική περιγραφή ακόμα και του κριτηρίου κόστους αρχίζει να διαφαίνεται ένα σημαντικό πρόβλημα, η αντιστοίχιση των σημείων δύο εικόνων είναι άγνωστη. Για παράδειγμα ο τύπος του σφάλματος, που θα οριστεί στην ενότητα 3.5, είναι ο ακόλουθος:

$$e_{RT}(\varphi, x_\delta, y_\delta) = \sum_{i=1}^N \left\{ (x_i - \alpha_i)^2 + (y_i - \beta_i)^2 \right\} \quad (3.1)$$

Αγνοώντας προς το παρόν τα υπόλοιπα σύμβολα, αναφέρεται ότι τα  $x_i, y_i$  είναι τα σημεία της πρώτης και της δεύτερης εικόνας αντίστοιχα. Αν δεν βρεθεί η αντιστοίχιση των σημείων τότε η προσέγγιση με αυτό τον τρόπο θα κατέρρευε. Τη λύση σε αυτό το πρόβλημα έρχεται να δώσει η έννοια της *καμπυλότητας*, που διάφορα σημαντικά θεωρήματα αποδείχθηκαν στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο σε μία προσπάθεια να καταδειχθεί η εξέχουσα σημασία της. Εξαιτίας του γεγονότος ότι δύο σχήματα χαρακτηρίζονται πλήρως από την καμπυλότητα τους, το πρόβλημα της αντιστοίχισης των σημείων μίας εικόνας ανάγεται στο πρόβλημα εύρεσης της *βέλτιστης αντιστοίχισης δύο καμπυλοτήτων* βάση κάποιου κριτηρίου κόστους, πράγμα που θα αναλυθεί στην 3.4 ενότητα. Τα προβλήματα, φυσικά δεν τελειώνουν εδώ, καθώς όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγική ενότητα η πρακτική μεταφορά των παραπάνω ιδεών συναντά το πρόβλημα του ισχυρού *θορύβου περιγράμματος*, όπου θα παρουσιαστεί η λύση του στην ενότητα 3.3, ώστε το περίγραμμα να μετασχηματιστεί σε μία μορφή που διατηρεί την πληροφορία και είναι καλύτερη για την μετέπειτα επεξεργασία.

Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι τελικός σκοπός αυτής της ενότητας δεν ήταν να γίνει μία εξαντλητική αναφορά όλων των προβλημάτων, αλλά μία προσπάθεια να προϋδαστεί ο αναγνώστης για το τι έπεται, και να απαντηθούν πρόωρα κάποια ερωτήματα ως προς τις επιλογές, την σημασία και την χρήση κάποιων εννοιών όπως αυτή της καμπυλότητας. Από την μία πλευρά, η διαλεύκανση των εννοιών αυτών θεωρείται απαραίτητως αναγκαία για την κατανόηση της μεθόδου, και οποιαδήποτε σύγχυση ως προς την χρησιμότητα τους θα απομάκρυνε από τον σκοπό της την εργασία αυτή. Από την άλλη πλευρά, η προσπάθεια κατανόησης της συλλογιστικής πορείας για την σύλληψη μίας ιδέας είναι εξίσου ενδιαφέρουσα με την ίδια την ιδέα, καθώς οδηγεί σε βαθύτερη κατανόηση της και ταυτόχρονα ανοίγει νέους ορίζοντες μέσω μίας νέας οπτικής των πραγμάτων.

### 3.2 Σύντομη παρουσίαση των βασικών βημάτων της εφαρμοζόμενης μεθόδου.

Απώτερος σκοπός του εγχειρήματος είναι η ταυτοποίηση γραφέα στα κείμενα της Αθηναίων Πολιτείας στηριζόμενη μόνο σε μαθηματική επεξεργασία και μεθόδους αναγνώρισης προτύπων στα γράμματα του κάθε κειμένου, ως και η υλοποίηση τους στον υπολογιστή. Βέβαια, για την πραγματοποίηση της αναφερόμενης μεθόδου απαραίτητη ήταν η ψηφιοποίηση των κειμένων της. Για αυτό το λόγο, πραγματοποιήθηκαν πολλές ψηφιακές λήψεις σε όλους τους προς μελέτη πάπυρους και τελικά δημιουργήθηκε ένα σύνολο από φωτογραφίες πολύ υψηλής ανάλυσης. Στη συνέχεια, η εξαγωγή των γραμμάτων πραγματοποιήθηκε με χρήση μίας ημιαυτόματης μεθόδου κατάτμησης, αντίστοιχη με αυτή που περιγράφεται στα [21, 22, 23] και κάθε υλοποίηση γράμματος ενσωματώθηκε σε ένα ορθογώνιο πλαίσιο. Παρακάτω ακολουθεί η περιγραφή των βασικών βημάτων της μεθόδου, από την επεξεργασία των γραμμάτων έως την κατασκευή του πλατωνικού προτύπου, και μέχρι τον στατιστικό έλεγχο της υπόθεσης της συγγραφής δύο κειμένων από τον ίδιο γραφέα.

Παρατήρηση: Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα βήματα, στα οποία η αρίθμηση είναι σε έντονη γραφή, είναι εκείνα που αναφέρονται στην δημιουργία του πλατωνικού και θα αναπτυχθούν ενδελεχώς στις επόμενες ενότητες.

#### **Βήματα αλγορίθμου για την αυτόματη αναγνώριση γραφέα:**

1. **Προεπεξεργασία Περιγράμματος.** Προκειμένου η μέθοδος που παρουσιάζεται να είναι εφαρμόσιμη, το περίγραμμα του σώματος κάθε γράμματος θα πρέπει να είναι σε μία «καθαρή» και καλώς ορισμένη μορφή, που θα επιτρέπει την περεταίρω επεξεργασία στα επόμενα βήματα του αλγορίθμου. Στην ενότητα 3.3 θα οριστεί η μορφή την οποία αποκαλέσαμε *καλώς ορισμένη* και θα παρουσιαστούν νέοι αλγόριθμοι, που αναπτύχθηκαν από τους συγγραφείς των [7, 9, 16, 18, 19], για τον μετασχηματισμό των εικόνων σε αυτή την μορφή.
2. **Υπολογισμός της Καμπυλότητας του Περιγράμματος.** Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα η καμπυλότητα είναι απαραίτητη για την εύρεση της αντιστοίχισης των περιγραμμάτων δύο γραμμάτων που υποθέτουμε a priori ότι τα έχει γράψει ο ίδιος γραφέας. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής: Έστω  $C$  το περίγραμμα μίας τυχαίας πραγματοποίησης ενός γράμματος. Χωρίζουμε το  $C$  σε συνεχείς ελαφρώς επικαλυπτόμενες περιοχές. Στην συνέχεια, προσεγγίζουμε κάθε προκύπτουσα αλυσίδα pixels με κατάλληλες πολυωνυμικές συναρτήσεις, ξεχωριστά για τον άξονα  $x$  και για τον άξονα  $y$ . Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή των πολυωνυμικών προσεγγίσεων είναι το μήκος τόξου  $S$  κάθε αλυσίδας. Κατόπιν, υπολογίζουμε την καμπυλότητα αυτών των πολυωνυμικών προσεγγίσεων βάση των τύπων που θα παρουσιαστούν στην ενότητα 3.4. Στο τέλος αυτής της διαδικασίας, το περίγραμμα  $C$  έχει μοναδικά συνδεθεί με μία ακολουθία τιμών καμπυλότητας, που δείχνουν την τάση της καμπύλωσης σε κάθε pixel του περιγράμματος  $C$ , με πολύ ικανοποιητικό τρόπο. Ιδιαίτερη σημασία δόθηκε στην κανονικοποίηση των

τιμών της καμπυλότητας πολλαπλασιάζοντας κάθε τιμή με το μήκος του περιγράμματος, ώστε να ληφθεί υπόψη η διαφορά στην κλίμακα που μπορεί να υπάρξει ανάμεσα σε δύο κείμενα  $D_1$  και  $D_2$ .

3. **Εύρεση αντιστοίχισης σημείων δύο περιγραμμάτων.** Έστω ότι έχουμε τα περιγράμματα  $C_1, C_2$ , δύο διαφορετικών πραγματοποιήσεων του ίδιου γράμματος, τα οποία εφαρμόζοντας τη διαδικασία που αναφέρθηκε στο 2<sup>ο</sup> βήμα δίνουν δύο διακριτές ακολουθίες καμπυλοτήτων  $\kappa_1, \kappa_2$ . Εφαρμόζοντας την μαθηματική προσέγγιση, που θα παρουσιαστεί στην ενότητα 3.5, επιτυγχάνεται βέλτιστο ταίριασμα των  $\kappa_1, \kappa_2$ , μέσω ελαχιστοποίησης μίας συνάρτησης σφάλματος.
4. **Βέλτιστη προσαρμογή δύο περιγραμμάτων.** Κάνοντας χρήση της αντιστοίχισης που παραρίχθηκε στο 3<sup>ο</sup> βήμα ταιριάζουμε βέλιστα τα αντίστοιχα περιγράμματα  $C_1, C_2$ , μέσω κριτηρίων που θα οριστούν στην ενότητα 3.5. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις, που ωστόσο εμφανίζονται συχνά στην πράξη, το αποτέλεσμα της παραπάνω προσαρμογής είναι υποβέλτιστο. Για αυτό το λόγο, ένα εναλλακτικό κριτήριο ταιριάσματος εφαρμόζεται στο 5<sup>ο</sup> στάδιο, που θα περιγραφεί αμέσως παρακάτω, ώστε το τελικό αποτέλεσμα να είναι όσο το δυνατόν πλησιέστερα στο βέλτιστο.
5. **Βέλτιστο ταίριασμα δύο περιγραμμάτων με το κριτήριο τομή – ένωση.** Έστω δύο διαφορετικές πραγματοποιήσεις του ίδιου γράμματος, υπολογίζουμε το πηλίκο του εμβαδού της τομής τους προς το εμβαδόν της ένωσης του στη θέση κάθε προσαρμογής. Το σφάλμα αυτό αποτελεί ένα πολύ ισχυρό κριτήριο ταιριάσματος, το οποίο μπορεί να ελαχιστοποιηθεί με βάση κάποιον αλγόριθμο βελτιστοποίησης. Ταυτόχρονα, όμως, αποτελεί ένα πολύ καλό μέτρο για στατιστική ανάλυση, για την μετέπειτα χρήση της στατιστικής υπόθεσης.
6. **Εφαρμογή του κριτηρίου τομή – ένωση και έλεγχος της υπόθεσης.** Εφαρμόζοντας και υπολογίζοντας τελικά το σφάλμα, όπως ορίστηκε στο 5<sup>ο</sup> βήμα, ελέγχουμε την στατιστική υπόθεση, η οποία με την σειρά της υποδεικνύει τον αριθμό των διαφορετικών γραφών που έγραψαν όλα τα διαθέσιμα κείμενα. Την ίδια στιγμή ένα «αντιπροσωπευτικό» κείμενο έχει συσχετιστεί μοναδικά με κάθε διαφορετικό γραφέα.
7. **Κατηγοριοποίηση των εναπομεινάντων κειμένων.** Κάθε κείμενο, που δεν έχει συσχετιστεί με κάποιο γραφέα, αντιστοιχίζεται σε κάποιον, με βάση κάποιες νέες εκτιμήσεις μέγιστης πιθανοφάνειας. [7]

#### Παρατηρήσεις:

Οι μέθοδοι αυτόματης αναγνώρισης και επαλήθευσης γραφέα εμπίπτουν σε δύο κατηγορίες: text – dependant και text – independent . Οι text – independent μέθοδοι, δεν λαμβάνουν υπόψη τους ότι η προς επεξεργασία εικόνα αναπαριστά κείμενο. Δημιουργούν ένα σύνολο χαρακτηριστικών, τα οποία στη συνέχεια επεξεργάζονται στατιστικά για την εξακρίβωση κάποιων υποθέσεων, αγνοώντας παντελώς την σημασιολογία του περιεχομένου τους. Αντίθετα, οι text – dependent μέθοδοι χρησιμοποιούν συγκρίσεις μεταξύ μεμονωμένων χαρακτήρων ή λέξεων, και κατά κανόνα απαιτούν μία βάση δεδομένων ή τουλάχιστον ένα σύνολο εκπαίδευσης για να μπορέσουν

να εξάγουν συμπεράσματα. Για παράδειγμα, μία text – dependent μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιεί ένα συγκεκριμένο μέρος του κειμένου, όπως για παράδειγμα την υπογραφή, για να μπορέσει να αναγνωρίσει ένα άλλο κείμενο ότι έχει γραφτεί από τον ίδιο άνθρωπο, βάση αυτής.

Υπάρχουν δύο κύριοι λόγοι για τους οποίους επιλέχθηκε η μέθοδος να είναι πρακτικά text – independent. Καταρχάς, όπως έχει ήδη αναφερθεί, τόσο στις επιγραφές όσο και στα περισσότερα χειρόγραφα κείμενα, η αλλοίωση και η παραμόρφωση είναι πολύ αισθητή. Με αποτέλεσμα η ψηφιοποίηση τους να οδηγεί σε εικόνες με αισθητή ύπαρξη θορύβου. Και κατά δεύτερον, κάνοντας χρήση text – dependent μεθόδων είναι απαραίτητος ο μετασχηματισμός των δεδομένων σε αναπαραστάσεις που δεν συσχετίζονται με τα εγγενή χαρακτηριστικά του γραφικού στυλ κάθε ανθρώπου. Αντίθετα, το πλατωνικό που κατασκευάζεται σύμφωνα με την παρουσιαζόμενη μέθοδο, αντανακλά άμεσα κάθε διαφοροποίηση του στυλ γραφής που εμφανίζεται σε ένα κείμενο.

Επιπρόσθετα, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι στην μέθοδο δεν γίνεται χρήση κανενός συνόλου εκπαίδευσης, καθώς και καμία πρότερη πληροφορία δεν απαιτείται εκτός της γλώσσας στην οποία είναι γραμμένο το κείμενο, γεγονός που βοηθά στην επακριβή προσδιορισμό του αριθμού των διαφορετικών συμβόλων που θα συναντηθούν στο κείμενο. Δηλαδή η μόνη εξάρτηση από το κείμενο είναι η γνώση του συμβόλου που κάθε φορά επεξεργαζόμαστε είτε αυτό είναι ελληνικό ή λατινικό η ετρουσκικό κτλ.

Ισοδυνάμως, η μόνη απαίτηση που χρειάζεται για την εφαρμογή της μεθόδου είναι η πρότερη γνώση ότι δύο περιγράμματα  $C_1, C_2$  είναι πραγματοποιήσεις του ίδιου γράμματος, το οποίο με την σειρά του σημαίνει ότι κάποια κατηγοριοποίηση, αυτόματα ή όχι, των γραμμάτων θα πρέπει να έχει προηγηθεί. [7]

### 3.3 Προεπεξεργασία περιγράμματος μέσω ενός νέου αλγορίθμου.

Όπως έχει αναφερθεί πολλές φορές, η κατάσταση των γραμμάτων σε καμία περίπτωση δεν είναι αυτή που απαιτείται για την εφαρμογή των κύριων βημάτων του αλγορίθμου που παρουσιάστηκε περιγραφικά. Απαιτείται ο μετασχηματισμός της εικόνας, ώστε να είναι σε μία καλώς ορισμένη μορφή, να ικανοποιεί δηλαδή κάποια κριτήρια. Συγκεκριμένα, τα κριτήρια που απαιτούμε να ισχύουν, ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν στην εικόνα με επιτυχία οι μέθοδοι των επόμενων ενοτήτων είναι τα ακόλουθα:

- ✓ κάθε pixel του περιγράμματος πρέπει να έχει δύο ακριβώς γειτονικά pixels.
- ✓ δεν επιτρέπονται απομονωμένα pixels
- ✓ τρία pixels δεν πρέπει να σχηματίζουν ορθή γωνία.

Άμεσα προκύπτει ένα πρόβλημα όμως, καθώς κανένας αλγόριθμος κατάτμησης εικόνας δεν παράγει περιγράμματα στη παραπάνω ζητούμενη μορφή. Για αυτό το λόγο, πρότερη επεξεργασία των εικόνων απαιτείται μέσω μορφολογικών φίλτρων ώστε να εξασφαλιστεί ότι το περίγραμμα θα είναι στην ζητούμενη μορφή. Παραθέτουμε παρακάτω, μία νέα μέθοδο προεπεξεργασίας που επιτυγχάνει τα επιθυμητά αποτελέσματα.

Έστω  $I$  η εικόνα ολόκληρου του πλαισίου, όπου το γράμματα βρίσκεται, και έστω  $C$  το περίγραμμα του γράμματος. Μετασχηματίζουμε την εικόνα με τους ακόλουθους μορφολογικούς τελεστές ώστε να έρθει στην επιθυμητή μορφή:

- i. Εφαρμόζουμε erosion με μάσκα σχήματος διαμαντιού και μήκος διαγωνίου 5 pixels, λαμβάνοντας έτσι την εικόνα  $I^E$ .
- ii. Εφαρμόζουμε στη συνέχεια, dilation στην  $I^E$  με μάσκα τετραγωνικού σχήματος πλευράς 2 pixels, λαμβάνοντας έτσι την εικόνα  $I^D$ .
- iii. Κατόπιν, εφαρμόζουμε στην  $I^D$  τελεστή dilation με μάσκα σε σχήμα σταυρού, με 5 pixels σε ύψος και σε πλάτος, λαμβάνοντας την εικόνα  $I^{DC}$ .
- iv. Τέλος, λαμβάνουμε το περίγραμμα στην ζητούμενη μορφή, αφαιρώντας τις εικόνες  $I^{DC}$  και  $I^D$ . [7]

### 3.4 Υπολογισμός καμπυλότητας και σύγκριση των καμπυλοτήτων των περιγραμμάτων δύο διαφορετικών υλοποιήσεων του ίδιου συμβόλου.

Όπως έχει διατυπωθεί και αποδειχθεί στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο, η γνώση της καμπυλότητας σε οποιοδήποτε σημείο μίας επίπεδης καμπύλης προσδιορίζει μοναδικά το γράφημα της, αφήνοντας μία ελευθερία επιλογής μόνο ως προς την ακριβή της θέση και τον προσανατολισμό της στο επίπεδο. Ο αλγόριθμος ταιριάσματος των γραμμμάτων για την κατασκευή του πλατωνικού προτύπου εφαρμόζεται στα περιγράμματα των γραμμμάτων (τα οποία έχουν εξαχθεί όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα). Συνεπώς, η γνώση της καμπυλότητας χαρακτηρίζει μοναδικά τα περιγράμματα των γραμμμάτων, γεγονός που θα αξιοποιηθεί πολύ στην συνέχεια, καθώς η επανάληψη παρόμοιων τιμών καμπυλότητας διαφορετικών υλοποιήσεων του ίδιου γράμματος σε μία δεδομένη περιοχή του περιγράμματός τους μπορεί να είναι χαρακτηριστική του στυλ ενός γραφέα.

Παρατίθεται παρακάτω δύο παραδείγματα από δύο πραγματοποιήσεις των γραμμμάτων 'Π' και 'Ω'. Κάθε πραγματοποίηση γράμματος προέρχεται από διαφορετικό γραφέα, και οι εικόνες έρχονται να επιβεβαιώσουν την παραπάνω υπόθεση, ότι δηλαδή η καμπυλότητα αντανακλά πολλά χαρακτηριστικά του γραφικού χαρακτήρα.



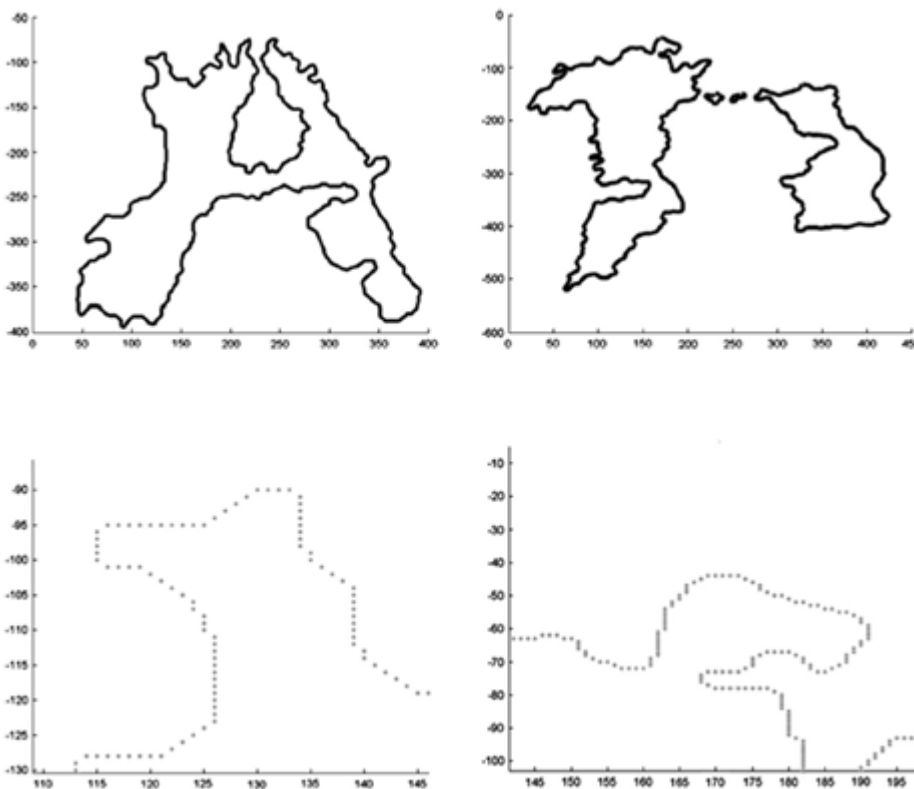
Εικόνα 16: Δύο διαφορετικές υλοποιήσεις των γραμμμάτων 'Π' και 'Ω'.

Με βάση τα παραπάνω, η καμπυλότητα του περιγράμματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα ισχυρό εργαλείο στην προσπάθεια της διάκρισης του γραφικού χαρακτήρα ενός γραφέα. Η παρακάτω ανάλυση θα παρουσιάσει έναν τρόπο πρακτικού υπολογισμού της καμπυλότητας του περιγράμματος ενός σχήματος, του οποίου δεν δίνεται η αναλυτική περιγραφή του. Επίσης, θα αναπτυχθεί μία μέθοδος σύγκρισης δύο ακολουθιών καμπυλοτήτων, με σκοπό τον προσδιορισμό σημείων αντιστοίχισης στις αρχικές εικόνες, η μεγάλη σημασία του τελευταίου έχει εξηγηθεί ενδελεχώς στην εισαγωγική ενότητα 3.1.

Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι η παραπάνω μεθοδολογία δεν λαμβάνει υπόψη της το γεγονός ότι πρόκειται για περιγράμματα γραμμάτων, με συνέπεια η χρήση της να μην περιορίζεται και να μπορεί να επεκταθεί και να χρησιμοποιηθεί σε οποιοδήποτε πεδίο απαιτείται εύρεσης αντιστοίχισης σημείων μεταξύ δύο σχημάτων, σχετικά όμοιων μεταξύ τους.

Πριν προχωρήσουμε, παρατίθεται ο απαραίτητος συμβολισμός. Υποθέτουμε δύο διαφορετικά χειρόγραφα, ή δύο διαφορετικές επιγραφές, συμβολίζοντας τα (τες) ως  $D_1$  και  $D_2$ . Έστω ένα γράμμα  $L$ , πραγματοποιήσεις του οποίου εμφανίζονται και στα δύο κείμενα. Επιλέγουμε μία τυχαία υλοποίηση  $L_i^1$  του  $L$  στο  $D_1$  και  $L_j^2$  μία επίσης τυχαία υλοποίηση του  $L$  στο  $D_2$ . Να σημειωθεί ότι οι εκθέτες 1, 2 υποδηλώνουν το χειρόγραφο ή την επιγραφή και οι δείκτες αναφέρονται στον πληθάρημο της υλοποίησης στο αντίστοιχο κείμενο. Έστω  $C_i^1$  να είναι το εξωτερικό περίγραμμα του  $L_i^1$ , στην κατάλληλη μορφή όπως αυτή περιγράφηκε, και  $C_j^2$  του  $L_j^2$ . Υποθέτουμε ότι και τα δύο εξωτερικά περιγράμματα είναι πολύγωνα Jordan. Σε πολλές περιπτώσεις, κάθε εξωτερικό περίγραμμα είναι μία απλή κλειστή γραμμή (για παράδειγμα οι πραγματοποιήσεις του 'Α' στην εικόνα 17). Όμως, υπάρχουν και περιπτώσεις όπου το εξωτερικό περίγραμμα αποτελείται από δύο ή και περισσότερες ξεχωριστές συνεκτικές καμπύλες (για παράδειγμα οι πραγματοποιήσεις του 'Ω' στην εικόνα 17).

Μελετούμε ξεχωριστά τις δύο αυτές περιπτώσεις στις δύο επόμενες υποενότητες.



**Εικόνα 17:** Πάνω απεικονίζονται τα περιγράμματα για τις υλοποιήσεις των γραμμάτων 'Α' και 'Ω'. Κάτω παρουσιάζεται μία λεπτομέρεια των περιγραμμάτων, που δείχνει τα αποτελέσματα της προεπεξεργασίας των περιγραμμάτων.

3.4.1 Υπολογισμός καμπυλότητας για την περίπτωση ενός μονού εξωτερικού περιγράμματος και βέλτιστο ταίριασμα των προκυπτουσών ακολουθιών.

1. Διαιρέση περιγράμματος σε επικαλυπτόμενες αλυσίδες pixel.

Αρχικά χωρίζουμε κάθε εξωτερικό περίγραμμα σε  $N^0$  επικαλυπτόμενες συνεχείς αλυσίδες από pixels, ίσου μήκους περίπου η καθεμία. Θα ακολουθήσουμε τον συμβολισμό  $\Sigma_1^1, \Sigma_2^1, \dots, \Sigma_{N^0}^1$  για τις αλυσίδες της  $C_i^1$ .

2. Πολυωνυμική προσέγγιση κάθε αλυσίδας από pixels.

Στη συνέχεια, προσεγγίζουμε κάθε αλυσίδα ξεχωριστά με ένα πολυώνυμο βαθμού  $v$  βέλτιστα, υπό την έννοια της ελαχιστοποίησης κάποιας συνάρτησης σφάλματος ελαχίστων τετραγώνων. Η επιλογή τόσο του αριθμού των αλυσίδων όσο και του βαθμού των πολυωνύμων επιλέγεται έτσι ώστε το σφάλμα προσέγγισης να γίνει όσο το δυνατόν πιο μικρό, και ταυτόχρονα η πολυωνυμική καμπύλη να μην εμφανίζει έντονους κυματισμούς. Η προσέγγιση επιτυγχάνεται ως εξής: Αρχικά, ορίζεται η ακολουθία που περιγράφει, το μήκος της αλυσίδας σε κάθε pixel. Αν συμβολίσουμε  $(x_q, y_q)$ ,  $q=1,2,\dots,N^0$  τις συντεταγμένες των κέντρων κάθε αλυσίδας, τότε η απόσταση δύο διαδοχικών κέντρων είναι:

$$\delta S_q = \sqrt{(x_{q+1} - x_q)^2 + (y_{q+1} - y_q)^2}. \quad (3.2)$$

Χρησιμοποιώντας το  $\delta S_q$  μπορούμε τώρα να ορίσουμε την ακολουθία μήκους τόξου κάθε αλυσίδας ως εξής:  $s_1 = 0$ ,  $s_q = \sum_{n=1}^{q-1} \delta S_n$ . Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, μπορούμε να ορίσουμε τα πολυώνυμα προσέγγισης βαθμού  $v$  έστω

$$X(s) = \sum_{n=0}^v \alpha_n (s)^{v-n}, \quad Y(s) = \sum_{n=0}^v \beta_n (s)^{v-n}, \quad (3.3)$$

όπου οι συντελεστές  $\alpha_n, \beta_n$ ,  $n=0,1,2,\dots,v$  προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης σφάλματος

$$\varepsilon = \sum_{q=1}^{N^0} \left\{ (x_q - X(s_q))^2 + (y_q - Y(s_q))^2 \right\}. \quad (3.4)$$

Η ελαχιστοποίηση του συνάρτησης σφάλματος μπορεί να γίνει μέσω κάποιου αλγορίθμου ελαχιστοποίησης όπως ο αλγόριθμος Nelder – Mead. Και έτσι τελικά προκύπτουν οι καμπύλες προσέγγισης, που θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω για τον υπολογισμό της καμπυλότητας.

Παρατήρηση: Θα μπορούσε να αναρωτηθεί κάποιος γιατί να επιλεγεί η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης σφάλματος μέσω κάποιου αλγορίθμου ελαχιστοποίησης αφού στην περίπτωση των ελαχίστων τετραγώνων επιδέχεται λύση κλειστού τύπου. Ο λόγος είναι ότι στον κλειστό τύπο παρατηρείται σφάλμα πεπερασμένης ακρίβειας, το οποίο συσσωρεύεται και οδηγεί σε λανθασμένες τιμές, γεγονός που αποφεύγεται με την επιλογή που προτάθηκε παραπάνω.



### 3. Υπολογισμός καμπυλότητας των πολυωνυμικών προσεγγίσεων.

Σε αυτό το σημείο, μπορούμε να υπολογίσουμε την καμπυλότητα των πολυωνύμων που μόλις υπολογίστηκαν στο 2<sup>ο</sup> βήμα. Ως προσεγγίσεις των αντίστοιχων καμπυλών, αναμένεται οι τιμές της καμπυλότητας που υπολογίζονται σε αυτά να είναι πολύ κοντά στην «πραγματική» καμπυλότητα των περιγραμμάτων. Εάν, συμβολίσουμε την πολυωνυμική προσέγγιση ως εξής  $\vec{R}(s) = X(s)\hat{i} + Y(s)\hat{j}$ , τότε η καμπυλότητα υπολογίζεται ως εξής:

$$\kappa(s) = \frac{\left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\|}{\left\| \frac{d\vec{R}}{ds} \right\|}, \text{ όπου } \vec{T} = \frac{d\vec{R}}{ds}. \quad (3.5)$$

Σημείωση: Χρησιμοποιήθηκε ο παραπάνω τύπος για τον υπολογισμό της καμπυλότητας και όχι ο  $\kappa = \left\| \frac{d^2\vec{R}}{ds^2} \right\|$  καθώς το s δεν είναι το πραγματικό μήκος τόξου της πολυωνυμικής γραμμής αλλά το μήκος τόξου της αλυσίδας που προσεγγίζεται.

### 4. Διόρθωση τιμών καμπυλότητας στα άκρα της αλυσίδας.

Με την προαναφερθείσα μέθοδο, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την καμπυλότητα για τα σημεία της αλυσίδας που βρίσκονται στο μέσο της με ικανοποιητική ακρίβεια. Αναμένεται βέβαια, στα σημεία που βρίσκονται κοντά στο σύνορο της αλυσίδας να εμφανίζονται τα ακόλουθα προβλήματα:

- i. Η προσέγγιση της  $\Sigma_q^1$  από την πολυωνυμική καμπύλη να μην είναι ιδιαίτερα ακριβής.
- ii. Και οι προσεγγίσεις καμπυλοτήτων διαδοχικών αλυσίδων να είναι ασυνεχείς.

Για να γίνουν περισσότερο κατανοητά τα παραπάνω, ας υποθέσουμε ότι κάθε αλυσίδα αποτελείται από 130 pixels και οι  $\Sigma_1^1$  και  $\Sigma_2^1$  επικαλύπτονται σε 30 pixels. Τότε, όπως παρατηρείται στην πράξη, τα τελευταία 10 pixels της  $\Sigma_1^1$  καθώς και τα 10 πρώτα pixels της  $\Sigma_2^1$  δεν προσεγγίζονται καλά. Ταυτόχρονα, τα pixels της  $\Sigma_1^1$  με πληθικό αριθμό από 111 έως 120 συμπίπτουν με τα pixels της αλυσίδας  $\Sigma_2^1$  αλλά δεν ταυτίζονται οι αντίστοιχες τιμές καμπυλότητας. Για να παρακάμψουμε αυτό το γεγονός, αποδίδουμε σε αυτά τα επικαλυπτόμενα pixels τις παρακάτω τιμές καμπυλότητας:

$$[\kappa_1(111) \quad \kappa_1(112) \quad \dots \quad \kappa_1(120)] \begin{bmatrix} 10/11 \\ 9/11 \\ \vdots \\ 1/11 \end{bmatrix} + [\kappa_2(1) \quad \kappa_2(2) \quad \dots \quad \kappa_2(20)] \begin{bmatrix} 1/11 \\ 2/11 \\ \vdots \\ 10/11 \end{bmatrix}.$$

Στη γενική περίπτωση, τα pixels της αλυσίδας  $\Sigma_q^1$  με πληθικό αριθμό από  $(p+1)$  έως  $(q+\mu)$  συμπίπτουν με τα pixels της αλυσίδας  $\Sigma_{q+1}^1$  με πληθικό αριθμό από  $(r+1)$  έως  $(r+\mu)$ . Τότε, αν  $\kappa_q(p+1), \kappa_q(p+2), \dots, \kappa_q(p+\mu)$  είναι οι τιμές καμπυλότητας υπολογισμένες στην  $\Sigma_q^1$  για τα προαναφερθέντα επικαλυπτόμενα σημεία και  $\kappa_{q+1}(r+1), \kappa_{q+1}(r+2), \dots, \kappa_{q+1}(r+\mu)$ , είναι οι τιμές καμπυλότητας για τα ίδια σημεία, υπολογισμένα όμως αυτή την φορά στην αλυσίδα  $\Sigma_{q+1}^1$  αποδίδουμε σε κάθε ένα από αυτά τα σημεία την τελική και μοναδική τιμή καμπυλότητας:

$$\begin{aligned} & [\kappa_q(p+1) \quad \kappa_q(p+2) \quad \dots \quad \kappa_q(p+\mu)] \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\mu+1} & \frac{\mu-1}{\mu+1} & \dots & \frac{1}{\mu+1} \end{bmatrix}^T \\ & + [\kappa_{q+1}(r+1) \quad \kappa_{q+1}(r+2) \quad \dots \quad \kappa_{q+1}(r+\mu)] \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu+1} & \frac{2}{\mu+1} & \dots & \frac{\mu}{\mu+1} \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Στο τέλος αυτής της διαδικασίας, σε κάθε pixel έχει αντιστοιχηθεί μία μοναδική τιμή καμπυλότητας, και μάλιστα οι προκύπτουσες τιμές καμπυλότητας προσεγγίζουν πολύ ικανοποιητικά την «πραγματική» καμπυλότητα του περιγράμματος.

Σημείωση: Θα πρέπει να σημειωθεί ότι και άλλες μάσκες εκτός της γραμμικής, έχουν εξίσου καλό αποτέλεσμα.

##### 5. Κανονικοποίηση των τιμών καμπυλότητας.

Στο τελικό στάδιο, κανονικοποιούμε τις υπάρχουσες τιμές της ακολουθίας καμπυλότητας. Με βάση τα αποτελέσματα της υποενότητας 2.3.4 η κλιμάκωση της καμπύλης κατά ένα παράγοντα  $\lambda$  οδηγεί στην διαίρεση της τιμής της καμπυλότητας σε κάθε σημείο κατά ένα παράγοντα  $\lambda$ . Ως εκ τούτου, ως τελική ακολουθία καμπυλότητας ορίζουμε την υπάρχουσα ακολουθία πολλαπλασιάζοντας όμως κάθε τιμή της με το μήκος της καμπύλης. Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνουμε ένα είδος ανάρτησης του παράγοντα κλιμάκωσης  $\lambda$ . [7]

Βέλτιστο ταίριασμα δύο ακολουθιών καμπυλότητας για την περίπτωση δύο απλών συνεκτικών εξωτερικών περιγραμμάτων.

Υποθέτουμε δύο τυχαίες πραγματοποιήσεις του ίδιου γράμματος, και έστω  $C_i^1, C_j^2$  τα αντίστοιχα εξωτερικά περιγράμμά τους που αποτελούνται από μία απλή κλειστή καμπύλη το καθένα. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη μεθοδολογία λαμβάνουμε τις ακολουθίες καμπυλοτήτων  $\kappa_p^1$  και  $\kappa_q^2$ . Γενικά, οι δύο πραγματοποιήσεις έχουν, εντός ορισμένων λογικών ορίων, τυχαίο προσανατολισμό και μέγεθος με αποτέλεσμα η αντιστοίχιση των pixels των δύο εικόνων να μην είναι καθόλου προφανής. Το βέλτιστο ταίριασμα των δύο ακολουθιών καμπυλοτήτων τους, όπως έχει αναφερθεί και στην εισαγωγή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεσης της ζητούμενης αντιστοίχισης. Στην συνέχεια κάνουμε την υπόθεση ότι τα δύο περιγράμματα έχουν τον ίδιο αριθμό από pixels έστω  $N^C$  (Η περίπτωση που τα δύο περιγράμματα δεν έχουν ίδιο αριθμό pixels, θα αναλυθεί στην συνέχεια).

Τότε, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο  $\tau$ , θεωρούμε τη συνάρτηση σφάλματος:

$$\varepsilon^k(\tau) = \sum_{n=0}^{N^C-1} (\kappa_n^1 - \tilde{\kappa}_{n,\tau}^2)^2, \quad (3.6)$$

όπου  $\tilde{\kappa}_{n,\tau}^2$  είναι η κυκλική επέκταση της  $\kappa_n^2$  δηλαδή για κάθε σταθερό  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq N^C$ , ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{\kappa}_{n,\tau}^2 = [\kappa_{N^C-\tau}^2 \quad \kappa_{N^C-\tau+1}^2 \quad \dots \quad \kappa_{N^C-1}^2 \quad \kappa_0^2 \quad \kappa_1^2 \quad \dots \quad \kappa_{N^C-\tau-1}^2]. \quad (3.7)$$

Έστω ότι η τιμή του  $\tau$  για το οποίο το σφάλμα  $\varepsilon^k(\tau)$  είναι ελάχιστο είναι η  $\tau^0$ . Με βάση τα προηγούμενα, η επιθυμητή αντιστοίχιση των pixels των δύο εικόνων είναι αυτή που αντιστοιχεί το πρώτο pixel της  $C_i^1$  με το  $\tau^0$ -οστό pixel της  $C_j^2$ , το δεύτερο pixel της  $C_i^1$  με το  $(\tau^0 + 1)$ -οστό pixel της  $C_j^2$ , και ούτω καθεξής.

Συνεπώς, ένα ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι ο προσδιορισμός της τιμής αυτής που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση σφάλματος. Αναπτύσσοντας την συνάρτηση σφάλματος έχουμε

$$\varepsilon^k(\tau) = \sum_{n=0}^{N^C-1} (\kappa_n^1)^2 + \sum_{n=0}^{N^C-1} (\kappa_n^2)^2 - 2 \sum_{n=0}^{N^C-1} \kappa_n^1 \cdot \tilde{\kappa}_{n,\tau}^2,$$

και παρατηρούμε ότι οι τα δύο πρώτα ομαδοποιημένα αθροίσματα είναι σταθερά, συνεπώς αρκεί να ελαχιστοποιηθεί ο 3<sup>ος</sup> όρος. Όμως, η ακολουθία  $\sum_{n=0}^{N^C-1} \kappa_n^1 \cdot \tilde{\kappa}_{n,\tau}^2$  είναι η κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών  $\kappa_n^1, \kappa_n^2$ , και με βάση τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier, το παραπάνω άθροισμα μπορεί να γραφτεί

$$\sum_{n=0}^{N^C-1} \kappa_n^1 \cdot \tilde{\kappa}_{n,\tau}^2 = DFT^{-1} \left\{ DFT \left\{ \kappa_n^1 \right\} DFT \left\{ \kappa_n^2 \right\} \right\}. \quad (3.8)$$

Οπότε, το ελάχιστο της  $\varepsilon^k(\tau)$  λαμβάνεται υπολογίζοντας το μέγιστο της

$$DFT^{-1} \left\{ DFT \left\{ \kappa_n^1 \right\} DFT \left\{ \kappa_n^2 \right\} \right\}.$$

Παρατήρηση: Ο χρόνος υπολογισμού της αντιστοίχισης συνεπώς αντιστοιχεί στο χρόνο υπολογισμού του μετασχηματισμού Fourier, του γινομένου δύο ακολουθιών και στον χρόνο υπολογισμού του αντίστροφου Fourier. Ως γνωστόν, ο χρόνος υπολογισμού τόσο του διακριτού μετασχηματισμού Fourier όσο και του αντίστροφου είναι της τάξης  $O(n \log n)$ . Συνεπώς, ο υπολογισμός των μετασχηματισμών Fourier των  $\kappa_n^1$  και  $\kappa_n^2$  είναι  $O(N^C \log N^C)$ . Το αποτέλεσμα τους είναι πάλι δύο ακολουθίες μήκους  $N^C$  και το εσωτερικό τους γινόμενο διατηρεί, κατά τα γνωστά, το μήκος των δύο ακολουθιών, συνεπώς και ο αντίστροφος διακριτός Fourier λαμβάνεται σε μία ακολουθία μήκους επίσης  $N^C$ . Οπότε, ο ασυμπτωτικός χρόνος εκτέλεσης της εύρεσης της βέλτιστης αντιστοιχίας είναι:  $O(N^C \log N^C)$ .

Στην προηγούμενη ανάλυση, είχαμε υποθέσει ότι τα εξωτερικά περιγράμματα είχαν τον ίδιο αριθμό pixels, υπόθεση καθόλου ρεαλιστική στην πράξη. Εάν τα δύο περιγράμματα δεν είναι πληθικώς ισάριθμα, τότε κάνουμε έναν αρχικό μετασχηματισμό κλίμακας στην «μεγαλύτερη» εικόνα ώστε η διαφορά στον αριθμό των pixels των δύο εικόνων να είναι πολύ μικρή. Μετά τον μετασχηματισμό αυτό, έστω ότι η πρώτη εικόνα αποτελείται από  $N_1$  pixels, η δεύτερη εικόνα αποτελείται από  $N_2$  pixels και έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι  $N_1 > N_2$ . Ας υποθέσουμε ότι  $\delta = N_1 - N_2$  είναι η διαφορά τους, που κατά βάση είναι πολύ μικρή μετά την αλλαγή στην κλίμακα που προηγήθηκε. Αν με κάποιο τρόπο αφαιρέσουμε τα σημεία αυτά, από την  $1^{\text{η}}$  εικόνα, τότε θα έχουμε δύο εικόνες ισάριθμες και συνεπώς η προηγούμενη ανάλυση θα μπορούσε να εφαρμοστεί. Η αντιστοίχιση φυσικά των σημείων θα είναι υποβέλτιστη, καθώς κάποια σημεία θα έχουν παραληφθεί αλλά θα είναι μία καλή εκτίμηση.

Ο τρόπος που αφαιρούμε τα pixels αυτά είναι ο ακόλουθος: Διαιρούμε το πρώτο περίγραμμα σε  $\delta$  το πλήθος υποπεριγράμματα έστω  $C_1, C_2, \dots, C_\delta$ , όπου το καθένα από τα  $C_1, C_2, \dots, C_{\delta-1}$  αποτελείται από  $\lceil N_1/\delta \rceil$  (όπου με το  $\lceil x \rceil$  συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του  $x$ ) και το τελευταίο αποτελείται από  $N_1 - (\delta-1)\lceil N_1/\delta \rceil$  pixels. Στη συνέχεια, σε κάθε  $C_i$  εντοπίζουμε την καμπυλότητα με την μικρότερη τιμή και την αφαιρούμε, και στο τέλος της διαδικασίας αυτής θα έχουμε ένα νέο περίγραμμα έστω  $\bar{C}_1^1$ , αποτελούμενο από  $N_2$  pixels.

Τέλος, θα πρέπει να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι η αντιστοίχιση των pixels των δύο εικόνων δεν μπορεί να θεωρηθεί πλήρως σωστή, καθώς  $\delta$  pixels δεν λήφθηκαν καθόλου υπόψη. Έτσι, κατά την εφαρμογή της παραπάνω αντιστοίχισης σε μαθηματικούς τύπους ταιριάσματος, παρόλο που μπορεί να παρέχει μία πολύ καλή εκτίμηση ταιριάσματος, γνωρίζουμε εξ αρχής ότι το αποτέλεσμα δεν μπορεί να είναι βέλτιστο. Για αυτό τον λόγο, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, απαιτείται ένα εναλλακτικό κριτήριο που θα είναι μπορεί να ξεπερνά αυτά τα προβλήματα, όπως το κριτήριο *τομή – ένωση* που θα παρουσιαστεί στην ενότητα 3.6.

### 3.4.2 Υπολογισμός καμπυλότητας για την περίπτωση ενός περιγράμματος που αποτελείται από πολλές ξεχωριστές συνεκτικές κλειστές καμπύλες και βέλτιστο ταίριασμα των προκυπτουσών ακολουθιών.

Οι χαρακτές των αρχαίων επιγραφών χάραζαν τα γράμματα στην πέτρα καταβάλλοντας πολλά ξεχωριστά κτυπήματα. Αυτό οδηγεί σε πραγματοποιήσεις γραμμάτων, τα οποία τα περιγράμματα τους τελικά αποτελούνται από πολλές ξεχωριστές κλειστές καμπύλες. Παρόμοιες περιπτώσεις απαντώνται και σε αρχαίους κώδικες αν και λιγότερο συχνά. Βέβαια, σε κάθε περίπτωση παρόλο που κάποια πραγματοποίηση ενός γράμματος εξαρχής μπορεί να είχε γραφτεί ως μία απλή και αδιαίρετη περιοχή, η φθορά που επήλθε στο κείμενο με το πέρασμα του χρόνου μπορεί να οδήγησε στην μετέπειτα διαίρεση του συμβόλου σε πολλές ξεχωριστές απλές συνεκτικές περιοχές.

Γενικά, όσον αφορά τις αρχαίες επιγραφές, φαίνεται ότι ο μεγαλύτερος αριθμός κτυπημάτων που απαντώνται σε αυτές είναι τέσσερις, και με βάση τον αριθμό των κτυπημάτων τα γράμματα μπορούν να χωριστούν σε δύο κύριες κατηγορίες: τα «ευθύγραμμα» σύμβολα και τα «καμπυλόγραμμα». Ευθύγραμμο σύμβολα καλούμε εκείνα που χαράσσονται με κτυπήματα ιδανικά εκτελεσμένα κατά μήκος μίας ευθείας γραμμής. Σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται τα ακόλουθα γράμματα: Α, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Ι, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Σ, Τ, Υ, Χ. Αντίθετα, ως καμπυλόγραμμα σύμβολα ονομάζουμε εκείνα που χαράσσονται με τουλάχιστον ένα κτύπημα, που απαιτεί μία καμπυλόγραμμη κίνηση της σμίλης. Σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται τα σύμβολα: Β, Θ, Ο, Ρ, Φ, Ψ, Ω. Θα πρέπει να σημειωθεί όμως, ότι υπάρχουν γραφείς που παραβιάζουν αυτό τον γενικό κανόνα. Για παράδειγμα, υπάρχει ένας περιορισμένος αριθμός χαρακτών που χαράσσουν το 'Ο' με τέσσερα ευθύγραμμο κτυπήματα, άλλοι που χαράσσουν το γράμμα 'Ρ' με τρία ευθύγραμμο κτυπήματα, άλλοι που χαράσσουν το 'Υ' με δύο καμπυλόγραμμα και ένα ευθύγραμμο κτύπημα, κτλ. Βέβαια, οι παρεκκλίσεις από τον γενικό κανόνα είναι πολύ σπάνιες.

Για να μπορέσουμε να χειριστούμε την περίπτωση όπου οι πραγματοποιήσεις γραμμάτων αποτελούνται από πολλές ξεχωριστές κλειστές καμπύλες εφαρμόζουμε την ιδέα των κρίσιμων σημείων, όπως αυτή ορίστηκε στο [19]. Τα κρίσιμα σημεία αντιστοιχούν σε τοπικά μέγιστα των τιμών καμπυλότητας του εξωτερικού περιγράμματος, που έχουν τιμή μεγαλύτερη από ένα κατώφλι υπολογισμένο στατιστικά. Αυτά τα κρίσιμα σημεία ορίζουν τις πλευρές κάθε κτυπήματος (βλέπε εικόνα 18).

Στη συνέχεια, θα πρέπει να τονιστεί ότι η προηγούμενη ανάλυση για τον υπολογισμό των τιμών της καμπυλότητας εφαρμόζεται επίσης και σε αυτή την περίπτωση, μόνο που θα πρέπει να εφαρμοστεί ξεχωριστά στο περίγραμμα κάθε απλής συνδεδεμένης περιοχής. Λαμβάνουμε συνεπώς τόσες ακολουθίες καμπυλοτήτων όσες και ο αριθμός των επιμέρους καμπυλών. Όμως, για τον υπολογισμό της βέλτιστης αντιστοίχισης δύο καμπυλών φαίνεται άμεσα ότι ο τύπος της σχέσης (3.6) θα πρέπει να αλλάξει ώστε να λαμβάνει υπόψη του την ύπαρξη των διαφόρων κτυπημάτων και συνεπώς των πολλών προκυπτουσών ακολουθιών καμπυλότητας, μία για κάθε κτύπημα.

Συγκεκριμένα, η συνολική τετραγωνική διαφορά των ακολουθιών καμπυλότητας των  $C_i^1, C_j^2$  θα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:



**Εικόνα 18:** Απεικονίζονται δύο πραγματοποιήσεις των γραμμάτων ‘Α’ και ‘Σ’. Τα κόκκινα τετράγωνα αναπαριστούν την πολυωνυμική προσέγγιση του περιγράμματος ενώ τα σημεία που απεικονίζονται με το ίδιο χρώμα (π.χ. πράσινο, μπλε, κτλ.) ορίζουν την αντίστοιχη πλευρά κάθε ξεχωριστού χτυπήματος. Τα σημεία καμπής απεικονίζονται με τελείες του ίδιου χρώματος.

$$\mathcal{E}^K(\tau) = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{n=0}^{N_p^c-1} \left( \kappa_{n,p}^1 - \tilde{\kappa}_{n,\tau,p}^2 \right)^2 \quad (3.9)$$

όπου ο δείκτης  $p$  διατρέχει τις πλευρές των διαφορετικών  $N_p$  κτυπημάτων και  $N_p^c$  είναι ο κοινός αριθμός pixels της  $p$ -οστής πλευράς των δυο γραμμάτων που συγκρίνονται. Η  $\kappa_{n,p}^1$  είναι η ακολουθία καμπυλοτήτων της  $p$ -οστής πλευράς του γράμματος  $L_i^1$  και  $\tilde{\kappa}_{n,\tau,p}^2$  είναι η κυκλική επέκταση της  $\kappa_{n,p}^2$ , δηλαδή της ακολουθίας καμπυλοτήτων της  $p$ -οστής πλευράς του γράμματος  $L_j^2$ .

Παρακάτω, το περιεχόμενο του τύπου εξηγείται μέσω ενός παραδείγματος. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο πραγματοποιήσεις του γράμματος ‘P’ και έστω ότι και οι δύο πραγματοποιήσεις αποτελούνται από δύο χτυπήματα, ένα ευθύγραμμο και ένα καμπυλόγραμμο. Τότε, η συνάρτηση σφάλματος που δηλώνει τη συνολική τετραγωνική διαφορά καμπυλότητας αποτελείται από 4 όρους:

1. Τον όρο που προσθέτει την διαφορά καμπυλοτήτων μεταξύ της αριστερής πλευράς του κάθετου ευθύγραμμου κτυπήματος.
2. Τον όρο που περιγράφει την τετραγωνική διαφορά καμπυλοτήτων της δεξιάς πλευράς του κατακόρυφου κτυπήματος.
3. Το άθροισμα της τετραγωνικής διαφοράς της αριστερής πλευράς του καμπυλόγραμμου κτυπήματος.
4. Και τέλος, το άθροισμα της τετραγωνικής διαφοράς της δεξιάς πλευράς του καμπυλόγραμμου κτυπήματος

#### Παρατηρήσεις:

Αναλύοντας το παραπάνω άθροισμα, όπως στην προηγούμενη ενότητα, παρατηρούμε ότι τελικά θα έχουμε  $N_p$  κυκλικές συνελίξεις, υπολογίζοντας τις μέσω του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier και προσθέτοντας τες, άμεσα διακρίνεται το μέγιστο τους. Μάλιστα ο ασυμπτωτικός χρόνος υπολογισμού της παραπάνω διαδικασίας, παραμένει σταθερός, καθώς το  $N_p$  είναι ανεξάρτητο του μήκους των ακολουθιών.

### 3.5 Μία πρώτη εκτίμηση της βέλτιστης θέσης προσαρμογής των περιγραμμάτων δύο γραμμών.

Η καμπυλότητα στην προηγούμενη ενότητα μας πρόσφερε την δυνατότητα να γνωρίζουμε την αντιστοιχία των pixels σε δύο υλοποιήσεις, που απώτερος σκοπός μας είναι η εύρεση της βέλτιστης θέσης προσαρμογής των περιγραμμάτων τους. Στην παρούσα ενότητα, αξιοποιώντας την παραπάνω γνώση θα παρουσιαστεί μία μέθοδος για το ταίριασμα των περιγραμμάτων δύο πραγματοποιήσεων του ίδιου γράμματος, η οποία παράγει ταιριάσματα πολύ κοντά στα βέλτιστα.

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση της μεθόδου, θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα της ενότητας 3.4 είναι υποβέλτιστα, στην περίπτωση που το πλήθος των pixels των δυο περιγραμμάτων δεν είναι ίσο. Αυτό με τη σειρά του οδηγεί στο ταίριασμα των δύο περιγραμμάτων, να είναι και αυτό υποβέλτιστο, και αυτό εξηγεί και την επιλογή «πρώτη εκτίμηση» στον τίτλο της παραγράφου. Παρακάτω θα αναλυθεί η περίπτωση κατά την οποία τα περιγράμματα είναι ισάριθμα. Στην περίπτωση, που τα περιγράμματα δεν είναι ισάριθμα, τότε αφαιρούμε τα  $\delta$  pixels, ακριβώς όπως ήδη έχει περιγραφεί, και εφαρμόζουμε τα παρακάτω αποτελέσματα. Το προκύπτον ταίριασμα, θα αποτελέσει μία πρώτη εκτίμηση και θα αξιοποιηθεί στην ενότητα 3.6.

Έστω ότι τα  $(x_i, y_i)$  και  $(p_i, q_i)$ ,  $i=1,2,\dots,N$  αντιστοιχούν στα pixels των περιγραμμάτων της  $1^{ns}$  και της  $2^{ns}$  εικόνας αντίστοιχα. Θέλουμε να εκτελέσουμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς στην καμπύλη  $(p_i, q_i)$ :

- i. στροφή
- ii. παράλληλη μεταφορά
- iii. κλιμάκωση

έτσι ώστε η μετασχηματισμένη έκδοση της να ταιριάζει βέλτιστα στην  $(x_i, y_i)$ , υπό την έννοια της ελαχιστοποίησης κάποιου κριτηρίου ελαχίστων τετραγώνων. Στην πραγματικότητα, προκειμένου να στραφεί η  $(p_i, q_i)$ , πρώτα της εφαρμόζουμε ένα μετασχηματισμό παράλληλης μεταφοράς ώστε το κέντρο μάζας της να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων  $(0,0)$  και στην συνέχεια την στρέφουμε. Σε αυτή την περίπτωση, λαμβάνουμε μία ενδιάμεση μετασχηματισμένη έκδοση  $(\gamma_i, \delta_i)$  η οποία δίνεται από:

$$\begin{bmatrix} \gamma_i \\ \delta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i - \bar{p} \\ q_i - \bar{q} \end{bmatrix},$$

όπου  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i}{N}$ ,  $\bar{q} = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{N}$  και  $\varphi$  είναι η γωνία στροφής.

Στη συνέχεια, μεταφέρουμε παράλληλα την  $(\gamma_i, \delta_i)$  κοντά στο κέντρο μάζας της  $(x_i, y_i)$  κατά  $(x_\delta, y_\delta)$ , δημιουργώντας έτσι την καμπύλη  $(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $i=1,2,\dots,N$ . Προφανώς  $\forall i = 1, 2, \dots, N$  ισχύει:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= (p_i - \bar{p}) \cos \varphi - (q_i - \bar{q}) \sin \varphi + x_\delta \\ \beta_i &= (p_i - \bar{p}) \sin \varphi + (q_i - \bar{q}) \cos \varphi + y_\delta \end{aligned}$$

Η πρόθεση είναι η  $(\alpha_i, \beta_i)$  να ταιριάζει βέλτιστα στην  $(x_i, y_i)$  υπό την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων, το οποίο είναι ισοδύναμο με την ελαχιστοποίηση της ακόλουθης ποσότητας:

$$e_{RT}(\varphi, x_\delta, y_\delta) = \sum_{i=1}^N \left\{ (x_i - \alpha_i)^2 + (y_i - \beta_i)^2 \right\}. \quad (3.10)$$

Η ελαχιστοποίηση της  $e_{RT}(\varphi, x_\delta, y_\delta)$  επιδέχεται κλειστή λύση όπως θα αποδειχθεί παρακάτω.<sup>1</sup>

$$\text{Τέλος, εάν } \bar{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i}{N} \text{ και } \bar{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N \beta_i}{N}, \text{ μεταβάλλουμε την κλίμακα της}$$

καμπύλης  $(\alpha_i, \beta_i)$  κατά ένα παράγοντα  $\lambda$ , με κέντρο της κλιμάκωσης το σημείο  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ , παράγοντας έτσι την καμπύλη  $(r_i, t_i) = (\lambda(\alpha_i - \bar{\alpha}) + \bar{\alpha}, \lambda(\beta_i - \bar{\beta}) + \bar{\beta})$ . Ανάμεσα σε όλες τις καμπύλες  $(r_i, t_i)$  πρέπει να επιλεγθεί η καμπύλη που ταιριάζει βέλτιστα στην  $(x_i, y_i)$  υπό την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων. Τα αποτελέσματα που συσχετίζονται με τις προαναφερθείσες ενέργειες παρουσιάζονται στη συνέχεια.

**Πρόταση.** Θεωρούμε δύο ισάριθμα σύνολα αποτελούμενα από συνεπίπεδα σημεία  $(x_i, y_i)$  και  $(p_i, q_i)$ ,  $i=1,2,\dots,N$ . Προκειμένου να ταιριάξουμε βέλτιστα την καμπύλη  $(p_i, q_i)$ , βάση ενός κατάλληλου μετασχηματισμού σε αυτή, στην  $(x_i, y_i)$  υπό την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων, προχωρούμε ως εξής:

- i. Πρώτα, στρέφουμε όλα τα σημεία  $(p_i, q_i)$  κατά γωνία  $\varphi$  όπως ένα στερεό σώμα, τα μετατοπίζουμε στη συνέχεια κατά  $(x_\delta, y_\delta)$  και απαιτούμε την ελαχιστοποίηση της ποσότητας:

$$e_{RT}(\varphi, x_\delta, y_\delta) = \sum_{i=1}^N \left\{ \left( (x_i - (p_i - \bar{p}) \cos \varphi + (q_i - \bar{q}) \sin \varphi - x_\delta)^2 + (y_i - (p_i - \bar{p}) \sin \varphi - (q_i - \bar{q}) \cos \varphi - y_\delta)^2 \right) \right\} \quad (3.11)$$

$$\text{όπου } \bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i}{N} \text{ και } \bar{q} = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{N}.$$

Η ελαχιστοποίηση της παραπάνω ποσότητας επιδέχεται κλειστή λύση όπου είναι η ακόλουθη:

$$\tan \varphi^0 = \frac{\sum_{i=1}^N \left\{ (p_i - \bar{p})(y_i - \bar{y}) - (q_i - \bar{q})(x_i - \bar{x}) \right\}}{\sum_{i=1}^N \left\{ (p_i - \bar{p})(x_i - \bar{x}) - (q_i - \bar{q})(y_i - \bar{y}) \right\}} \quad (3.12a)$$

$$x_\delta^0 = \bar{x} \quad (3.12b)$$

$$y_\delta^0 = \bar{y} \quad (3.12c)$$

<sup>1</sup> Σημείωση: Ο αναγνώστης μπορεί να παρατηρήσει ότι πρόκειται για τον τύπο (3.1).



- ii. Υπολογίζοντας τις παραπάνω ποσότητες  $\varphi^0, x_\delta^0, y_\delta^0$  και εφαρμόζοντας τους παραπάνω μετασχηματισμούς στην  $(p_i, q_i)$ , λαμβάνουμε την  $(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $i=1,2,\dots,N$  όπου θα ισχύει:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^0 & -\sin \varphi^0 \\ \sin \varphi^0 & \cos \varphi^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i - \bar{p} \\ q_i - \bar{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_\delta^0 \\ y_\delta^0 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Εάν  $\bar{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i}{N}$  και  $\bar{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N \beta_i}{N}$  είναι οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας της καμπύλης  $(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , τότε ορίζουμε βέλτιστο παράγοντα κλιμάκωσης  $\lambda$ , έτσι ώστε η καμπύλη  $(x_i, t_i) = (\lambda(\alpha_i - \bar{\alpha}) + \bar{\alpha}, \lambda(\beta_i - \bar{\beta}) + \bar{\beta})$  να ταιριάζει βέλτιστα στην  $(x_i, y_i)$ . Αυτό το βέλτιστο ταίριασμα επιτυγχάνεται μέσω της ελαχιστοποίησης της ποσότητας:

$$\varepsilon_{RTO}(\lambda) = \sum_{i=1}^N \left\{ \left( x_i - \lambda \text{sign}(x_i - \bar{\alpha}, \alpha_i - \bar{\alpha})(\alpha_i - \bar{\alpha}) - \bar{\alpha} \right)^2 + \left( y_i - \lambda \text{sign}(y_i - \bar{\beta}, \beta_i - \bar{\beta})(\beta_i - \bar{\beta}) - \bar{\beta} \right)^2 \right\} \quad (3.14)$$

όπου

$$\text{sign}(x, a) = \begin{cases} 1, & \text{if } xa \geq 0 \\ -1, & \text{if } xa < 0 \end{cases}$$

Η ελαχιστοποίηση πραγματοποιείται για:

$$\lambda^0 = \frac{\sum_{i=1}^N \left\{ |(x_i - \bar{\alpha})(\alpha_i - \bar{\alpha})| + |(y_i - \bar{\beta})(\beta_i - \bar{\beta})| \right\}}{\sum_{i=1}^N \left\{ (\alpha_i - \bar{\alpha})^2 + (\beta_i - \bar{\beta})^2 \right\}}. \quad (3.15)$$

**Απόδειξη.** (i) Η ποσότητα  $e_{RT}(\varphi, x_\delta, y_\delta)$  είναι προφανώς συνεχώς διαφορίσιμη και έχει κάτω φράγμα το μηδέν. Ως εκ τούτου, παρουσιάζει ελάχιστο και στο σημείο ελαχίστου

ισχύει:  $\frac{\partial e_{RT}}{\partial x_\delta} = \frac{\partial e_{RT}}{\partial y_\delta} = \frac{\partial e_{RT}}{\partial \varphi} = 0$ . Παραγωγίζοντας μερικώς συνεπώς και εξισώνοντας με

το μηδέν λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{RT}}{\partial x_\delta} &= -2 \sum_{i=1}^N \left\{ x_i - (p_i - \bar{p}) \cos \varphi + (q_i - \bar{q}) \sin \varphi - x_\delta \right\} = 0 \\ \frac{\partial e_{RT}}{\partial y_\delta} &= -2 \sum_{i=1}^N \left\{ y_i - (p_i - \bar{p}) \sin \varphi + (q_i - \bar{q}) \cos \varphi - y_\delta \right\} = 0 \\ \frac{\partial e_{RT}}{\partial \varphi} &= 2 \sum_{i=1}^N \left\{ \left( (p_i - \bar{p}) \sin \varphi + (q_i - \bar{q}) \cos \varphi \right) (x_i - (p_i - \bar{p}) \cos \varphi + (q_i - \bar{q}) \sin \varphi - x_\delta) \right\} \\ &+ 2 \sum_{i=1}^N \left\{ \left( -(p_i - \bar{p}) \cos \varphi + (q_i - \bar{q}) \sin \varphi \right) (y_i - (p_i - \bar{p}) \sin \varphi + (q_i - \bar{q}) \cos \varphi - y_\delta) \right\} = 0 \end{aligned}$$

Και μετά από ένα απλό χειρισμό λαμβάνουμε:

$$x_{\delta}^0 = \bar{x}$$

$$y_{\delta}^0 = \bar{y}$$

$$\tan \varphi^0 = \frac{\sum_{i=1}^N \{(p_i - \bar{p})(y_i - \bar{y}) - (q_i - \bar{q})(x_i - \bar{x})\}}{\sum_{i=1}^N \{(p_i - \bar{p})(x_i - \bar{x}) - (q_i - \bar{q})(y_i - \bar{y})\}}.$$

Προφανώς, η μοναδικότητα της λύσης στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  διασφαλίζει ότι η παραπάνω λύση πράγματι ελαχιστοποιεί την συνάρτηση κόστους  $e_{RT}(\varphi, x_{\delta}, y_{\delta})$ .

(ii) Έχοντας την βέλτιστη γωνία περιστροφής (3.12a) και τους τύπους για την παράλληλη μεταφορά (3.12b) και (3.12c), ο στόχος είναι να επιτευχθεί βέλτιστη κλιμάκωση χωρίς να επηρεαστούν οι τιμές  $\varphi^0, x_{\delta}^0, y_{\delta}^0$ . Για να συμβεί αυτό, αρχικά μετακινούμε τη καμπύλη  $(p_i, q_i)$  σαν ένα στερεό σώμα μέσω του μετασχηματισμού:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^0 & -\sin \varphi^0 \\ \sin \varphi^0 & \cos \varphi^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i - \bar{p} \\ q_i - \bar{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{\delta}^0 \\ y_{\delta}^0 \end{bmatrix}.$$

λαμβάνοντας έτσι τελικά την καμπύλη  $(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $i=1,2,\dots,N$ . Και στη συνέχεια, αλλάζουμε την κλίμακα στην  $(\alpha_i, \beta_i)$  με κέντρο κλιμάκωσης το  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \left(\frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i}{N}, \frac{\sum_{i=1}^N \beta_i}{N}\right)$ , έτσι ώστε το κέντρο μάζας της καμπύλης  $(\alpha_i, \beta_i)$  να μην επηρεαστεί. Το βέλτιστο  $\lambda$  προκύπτει από την ελαχιστοποίησης της ακόλουθης συνάρτησης:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{RTO}(\lambda) = \sum_{i=1}^N \{ & (x_i - \lambda \text{sign}(x_i - \bar{\alpha}, \alpha_i - \bar{\alpha})(\alpha_i - \bar{\alpha}) - \bar{\alpha})^2 \\ & + (y_i - \lambda \text{sign}(y_i - \bar{\beta}, \beta_i - \bar{\beta})(\beta_i - \bar{\beta}) - \bar{\beta})^2 \} \end{aligned}$$

Η παραπάνω συνάρτηση είναι συνεχώς διαφορίσιμη και φραγμένη από κάτω. Προς στιγμήν, οι όροι  $\text{sign}(x_i - \bar{\alpha}, \alpha_i - \bar{\alpha})$  και  $\text{sign}(y_i - \bar{\beta}, \beta_i - \bar{\beta})$  μπορεί να προκαλέσουν σύγχυση ως προς την συνέχεια ή την διαφορισιμότητα της  $\varepsilon_{RTO}(\lambda)$  θεωρώντας τις σαν ποσότητες που μεταβάλλονται δημιουργώντας ασυνέχειες. Όμως, στην πραγματικότητα πρόκειται για σταθερές ποσότητες που από τη στιγμή που «αποκτήσουν» πρόσημο δεν αλλάζουν, καθιστώντας έτσι την  $\varepsilon_{RTO}(\lambda)$  συνεχώς διαφορίσιμη.

Η βέλτιστη τιμή, έστω  $\lambda^0$ , προκύπτει παραγωγίζοντας μερικώς την συνάρτηση  $\varepsilon_{RTO}(\lambda)$  ως προς  $\lambda$  και εξισώνοντας ως προς το μηδέν. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{RTO}}{\partial \lambda} = 0 &\Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^N \left\{ (a_i - \bar{a}) \operatorname{sign}(x_i - \bar{a}, \alpha_i - \bar{\alpha}) (x_i - \lambda \operatorname{sign}(x_i - \bar{a}, \alpha_i - \bar{\alpha}) (\alpha_i - \bar{\alpha}) - \bar{a}) \right\} + \\ \sum_{i=1}^N \left\{ (\beta_i - \bar{\beta}) \operatorname{sign}(y_i - \bar{\beta}, \beta_i - \bar{\beta}) (y_i - \lambda \operatorname{sign}(y_i - \bar{\beta}, \beta_i - \bar{\beta}) (\beta_i - \bar{\beta}) - \bar{\beta}) \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^0 = \frac{\sum_{i=1}^N \left\{ |(x_i - \bar{a})(\alpha_i - \bar{\alpha})| + |(y_i - \bar{\beta})(\beta_i - \bar{\beta})| \right\}}{\sum_{i=1}^N \left\{ (\alpha_i - \bar{\alpha})^2 + (\beta_i - \bar{\beta})^2 \right\}} \end{aligned}$$

Η μοναδικότητα της λύσης, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η συνάρτηση σφάλματος είναι φραγμένη από κάτω, διασφαλίζει ότι η παραπάνω τιμή για την παράμετρο  $\lambda$  πράγματι ελαχιστοποιεί την συνάρτηση κόστους.

Σχολιασμός ως προς την επιλογή κατάλληλης συνάρτησης σφάλματος για την εύρεση του βέλτιστου παράγοντα κλιμάκωσης.

Πιθανώς κατά την ανάγνωση, της παρουσιαζόμενης μεθόδου, προκύπτει το ακόλουθο ερώτημα: γιατί να επιλεγθεί ως συνάρτηση σφάλματος η  $\varepsilon_{RTO}(\lambda)$  όπως ορίστηκε στην (3.14) και όχι η πιο προφανής επιλογή:

$$\varepsilon_{RTS}(\lambda) = \sum_{i=1}^N \left\{ (x_i - \lambda(\alpha_i - \bar{\alpha}) - \bar{a})^2 + (y_i - \lambda(\beta_i - \bar{\beta}) - \bar{\beta})^2 \right\}.$$

Η απάντηση θα δοθεί από την μορφή της λύσης που ελαχιστοποιεί την παραπάνω συνάρτηση. Καταρχάς, η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη και φραγμένη από κάτω, συνεπώς παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο και στο σημείο στο οποίο παρουσιάζει ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{RTS}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda^0} = 0 &\Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^N \left\{ (\alpha_i - \bar{\alpha})(x_i - \lambda(\alpha_i - \bar{\alpha}) - \bar{a}) \right\} + \sum_{i=1}^N \left\{ (\beta_i - \bar{\beta})(y_i - \lambda(\beta_i - \bar{\beta}) - \bar{\beta}) \right\} &= 0 \Leftrightarrow \\ \lambda^0 = \frac{\sum_{i=1}^N (\alpha_i - \bar{\alpha})(x_i - \bar{a}) + \sum_{i=1}^N (\beta_i - \bar{\beta})(y_i - \bar{\beta})}{\sum_{i=1}^N (\alpha_i - \bar{\alpha})^2 + \sum_{i=1}^N (\beta_i - \bar{\beta})^2} \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι αν  $(\alpha_i - \bar{a}), (x_i - \bar{a})$  είναι ετερόσημα  $\forall i = 1, 2, \dots, N$  καθώς και τα  $(\beta_i - \bar{\beta}), (y_i - \bar{y})$  είναι επίσης ετερόσημα  $\forall i = 1, 2, \dots, N$  τότε η λύση που δίδεται από τον παραπάνω τύπο είναι αρνητική, πράγμα μη επιτρεπτό αφού  $\lambda \geq 0$ . Συνεπώς, η λύση δεν προκύπτει από τον παραπάνω τύπο. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε, ότι το  $x_i - \bar{a}$  είναι ομόσημο με το  $-\lambda(\alpha_i - \bar{a})$  και το  $(y_i - \bar{y})$  ομόσημο με το  $-\lambda(\beta_i - \bar{\beta})$  άρα για τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες ισχύει:

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow \varepsilon_{RTS}(\lambda_1) > \varepsilon_{RTS}(\lambda_2) \geq \varepsilon_{RTS}(0)$$

συνεπώς η συνάρτησης σφάλματος μειώνεται μονοτονικά και λαμβάνει το ελάχιστο της για την τετριμμένη μη αποδεκτή τιμή  $\lambda=0$ .

Για να παρακαμφθούν αυτά τα μη επιθυμητά αποτελέσματα επιλέχθηκε η  $\varepsilon_{RTO}(\lambda)$  έναντι της «πιο απλής»  $\varepsilon_{RTS}(\lambda)$ . Με την προσθήκη της  $sign(x, a)$  επιτυγχάνουμε οι όροι  $x_i - \bar{a}, -\lambda(\alpha_i - \bar{a})$  όταν είναι ομόσημοι αυτό να «αλλοιώνεται» μέσω του πολλαπλασιασμού με -1 του δεύτερου όρου (αυτό γιατί το  $-\lambda \leq 0$  και συνεπώς για να είναι ομόσημοι οι  $x_i - \bar{a}, -\lambda(\alpha_i - \bar{a})$  θα πρέπει να είναι ετερόσημοι οι όροι  $(\alpha_i - \bar{a}), (x_i - \bar{a})$ , όμως τότε  $sign((\alpha_i - \bar{a}), (x_i - \bar{a})) = -1$ , από όπου προκύπτει το ζητούμενο). Διορθώνοντας αυτό που πρακτικά δημιουργούσε το πρόβλημα στην συνάρτηση  $\varepsilon_{RTS}(\lambda)$  αναμένεται η λύση ελαχιστοποίησης της  $\varepsilon_{RTO}(\lambda)$  να μην «υποφέρει» από το ίδιο πρόβλημα, δηλαδή το  $\lambda^0 \geq 0$ , το οποίο όντως επιτυγχάνεται παρατηρώντας την βέλτιστη λύση που προκύπτει:

$$\lambda^0 = \frac{\sum_{i=1}^N \left\{ |(x_i - \bar{a})(\alpha_i - \bar{a})| + |(y_i - \bar{y})(\beta_i - \bar{\beta})| \right\}}{\sum_{i=1}^N \left\{ (\alpha_i - \bar{a})^2 + (\beta_i - \bar{\beta})^2 \right\}}$$

αφού τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής είναι θετικές ποσότητες.

Σχολιασμός ως προς την επιλογή της πραγματοποίησης του βέλτιστου ταιριάσματος σε δύο ανεξάρτητα βήματα.

Πιθανώς κατά την περιγραφή της μεθόδου του βέλτιστου ταιριάσματος να γεννήθηκε το ερώτημα γιατί η διαδικασία της μεταφοράς – στρέψης διαχωρίστηκε από την κλιμάκωση. Γιατί να μην επιτευχθούν ταυτόχρονα, μέσω κατάλληλης επιλογής συνάρτησης σφάλματος και ελαχιστοποίησης αυτής; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα, έρχεται να δοθεί από την παρατήρηση ότι η μεταφορά και η περιστροφή μίας καμπύλης ενδέχεται να αλλάξει το τεταρτημόριο που κάποιο σημείο της ανήκει, το οποίο με τη σειρά του δημιουργεί ασυνέχειες στις συναρτήσεις ελαχιστοποίησης, αν γίνει ταυτόχρονα και η κλιμάκωση, καθιστώντας την ελαχιστοποίηση τους πολύ δύσκολη εργασία. Για αυτό το λόγο, οι δύο διαδικασίες διασπάστηκαν για να παρακαμφθούν τα προβλήματα της ασυνέχειας, επιτρέποντας στο πρόβλημα να αντιμετωπιστεί αναλυτικά, και μάλιστα να επιδέχεται κλειστή λύση .

### 3.6 Βέλτιστο ταίριασμα δυο πραγματοποιήσεων του ίδιου συμβόλου με βάση το κριτήριο «τομή δια ένωση».

Στην προηγούμενη ενότητα, εφαρμόζοντας την πρόταση που αποδείχθηκε προηγουμένως αποκτήσαμε μία πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος δύο καμπυλών, που στην περίπτωση μας ήταν το περίγραμμα δύο διαφορετικών υλοποιήσεων του ίδιου γράμματος. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η σχετική προσαρμογή δεν μπορεί να χαρακτηριστεί βέλτιστη στην περίπτωση που τα περιγράμματα δεν είναι πληθικώς ισάριθμα. Αυτό με την σειρά του σημαίνει ότι οι προκύπτουσες τιμές του σφάλματος ταιριάσματος δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην στατιστική μελέτη για τον τελικό σκοπό της μεθόδου, δηλαδή της αναγνώρισης γραφέα.

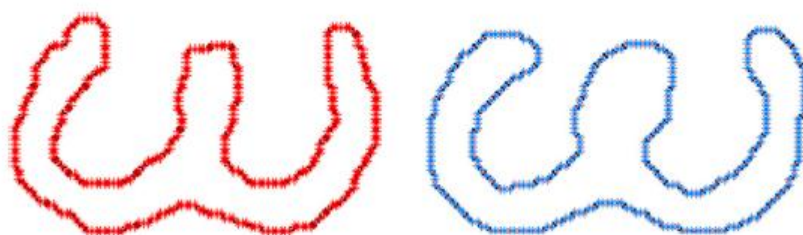
Από τα παραπάνω διαφαίνεται η ανάγκη ορισμού ενός επιπρόσθετου κριτηρίου ομοιότητας, ικανό να ταιριάζει καμπύλες ανεξάρτητα του αριθμού των pixels τους και να παρέχει και αποτελέσματα για την μετέπειτα στατιστική επεξεργασία. Το μέτρο που θα οριστεί παρακάτω, χρησιμοποιεί τα παραπάνω αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, καθώς αν και η λύση είναι υποβέλτιστη παρόλα αυτά είναι πολύ κοντά στο βέλτιστο ταίριασμα, παρέχοντας έτσι ένα πολύ καλό σημείο έναρξης. Παρακάτω ακολουθεί η παρουσίαση και η ανάλυση του κριτηρίου.

Θεωρούμε δύο πραγματοποιήσεις  $L_1$  και  $L_2$  του ίδιου συμβόλου, τα οποία εμφανίζονται στο ίδιο ή σε δύο ξεχωριστά κείμενα. Έστω  $C_1, C_2$  τα δύο εξωτερικά περιγράμματα των  $L_1, L_2$  αντίστοιχα, σε μορφή όπως αυτή περιγράφηκε στην ενότητα 3.3. Να σημειωθεί ότι τα  $C_1$  και  $C_2$  μπορεί να εσωκλείουν άλλες πολυγωνικές γραμμές, όπως στην περίπτωση του γράμματος 'Ω', στην εικόνα 19. Θα πρέπει να τονισθεί ότι τα αποτελέσματα της παραγράφου 3.5 εφαρμόζονται μόνο στο εξωτερικό περίγραμμα των  $C_1, C_2$ .

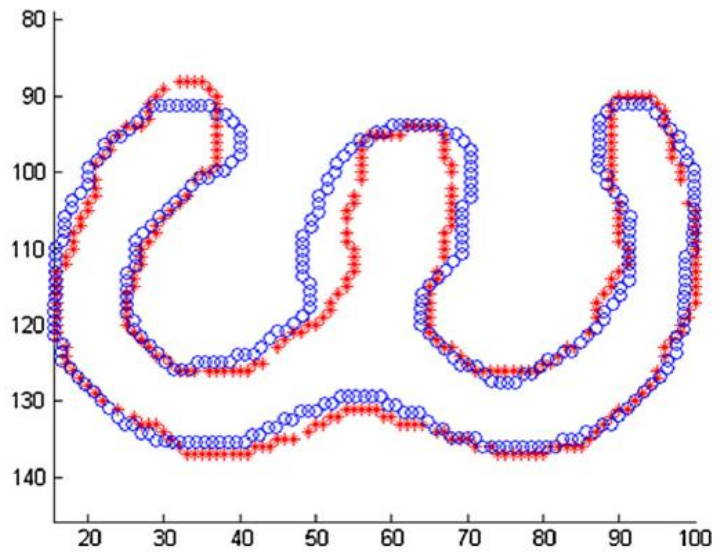


Εικόνα 19: Υλοποίηση του συμβόλου 'Ω' που εσωκλείει δύο κλειστές καμπύλες Jordan.

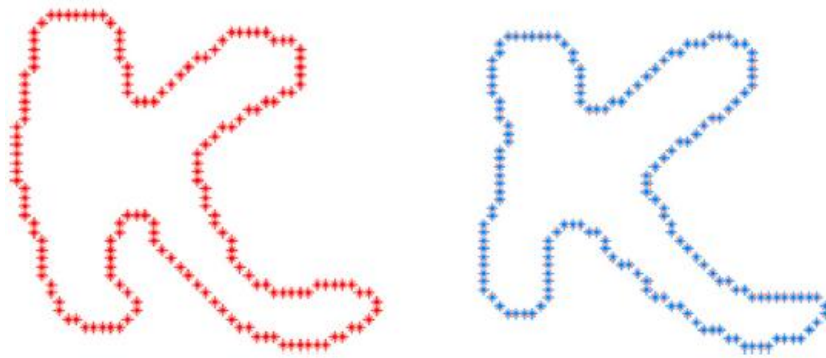
Τοποθετούμε τα  $C_1$  και  $C_2$  στην βέλτιστη σχετική τους θέση σύμφωνα με το κριτήριο ελαχίστων τετραγώνων. Παρατίθενται τα αποτελέσματα της εφαρμογής του ταιριάσματος με βάση τα αποτελέσματα της πρότασης της ενότητας 3.5 για δύο αντιπροσώπους των γραμμάτων 'Κ' και 'Ω'.



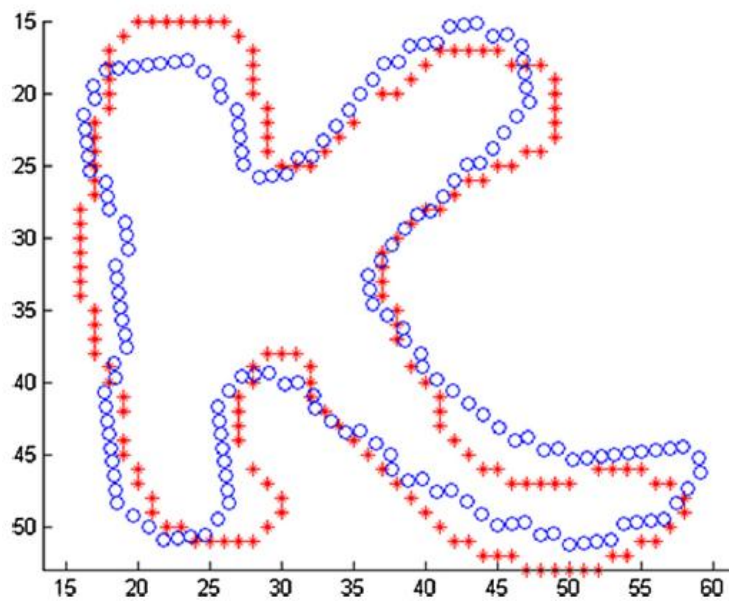
Εικόνα 20: Εμφανίζονται τα περιγράμματα, σε χρώμα κόκκινο και μπλε, δύο διαφορετικών πραγματοποιήσεων του γράμματος 'Ω'.



**Εικόνα 21:** Τα περιγράμματα της εικόνας 20 μετά την εφαρμογή των αποτελεσμάτων της πρότασης.



**Εικόνα 22:** Εμφανίζονται τα περιγράμματα, σε χρώμα κόκκινο και μπλε, δύο διαφορετικών πραγματοποιήσεων του γράμματος 'Κ'.



**Εικόνα 23:** Τα περιγράμματα της εικόνας 22 μετά την εφαρμογή των αποτελεσμάτων της πρότασης.

Στη συνέχεια αφού έχουμε υπολογίσει την υποβέλτιστη μεταξύ τους θέση και κλιμάκωση, τυχαία επιλέγουμε το  $C_1$  ως σταθερό και εφαρμόζουμε μετασχηματισμούς στροφής, παράλληλης μεταφοράς και κλιμάκωσης στο  $C_2$  αρκετά κοντά σε αυτή τη «θέση ισορροπίας» που πρόεκυψε ελαχιστοποιώντας το κριτήριο κόστους ελαχίστων τετραγώνων. Συγκεκριμένα, αν  $x_\delta, y_\delta, \varphi, \lambda$  είναι οι αντίστοιχες παράμετροι μετασχηματισμού που προέκυψαν από την μεθοδολογία της παραγράφου 3.5, τότε ορίζουμε ένα τετραδιάστατο κύβο γύρω από αυτό το σημείο του  $\mathbb{R}^4$  και μία λεπτή διαμέριση του, με βάση το ακόλουθο σκεπτικό: έχοντας ένα «καλό» σημείο έναρξης στον τετραδιάστατο κύβο, που είναι ουσιαστικά ο χώρος αναζήτησης μας, να βρεθεί, μέσω εξαντλητικής αναζήτησης σε αυτόν, εκείνο το σημείο που θα δίνει την καλύτερη σχετική θέση των δύο περιγραμμάτων βάση ενός κριτηρίου.

Παρακάτω ακολουθεί ο ορισμός αυτού του κριτηρίου, όπου η μεγιστοποίηση αυτού οδηγεί και στην επιλογή της καλύτερης σχετικής θέσης δύο καμπυλών. Αρχικά να σημειωθεί ότι για κάθε σημείο αυτής της διαμέρισης προκύπτει και ένας αντίστοιχος μετασχηματισμός ο οποίος μπορεί να εφαρμοστεί στο  $C_2$  λαμβάνοντας έτσι το μετασχηματισμένο αντιπρόσωπο του συμβόλου  $L_2'$ . Με βάση αυτό τον συμβολισμό το κριτήριο της *τομής διά ένωσης* ορίζεται ως εξής για κάθε μετασχηματισμένη έκδοση της  $C_2$ :

$$\delta E_n = \frac{\text{εμβαδόν της τομής του εσωτερικού του } L_1 \text{ και του εσωτερικού του } L_2'}{\text{εμβαδόν της ένωσης του εσωτερικού του } L_1 \text{ και του εσωτερικού του } L_2'}, \quad (3.16)$$

όπου ο δείκτης  $n$  διατρέχει όλα τα σημεία της διαμέρισης του τετραδιάστατου κύβου, και ορίζει μία διαφορετική έκδοση της  $C_2$  σε κάθε τιμή του.

### Παρατηρήσεις:

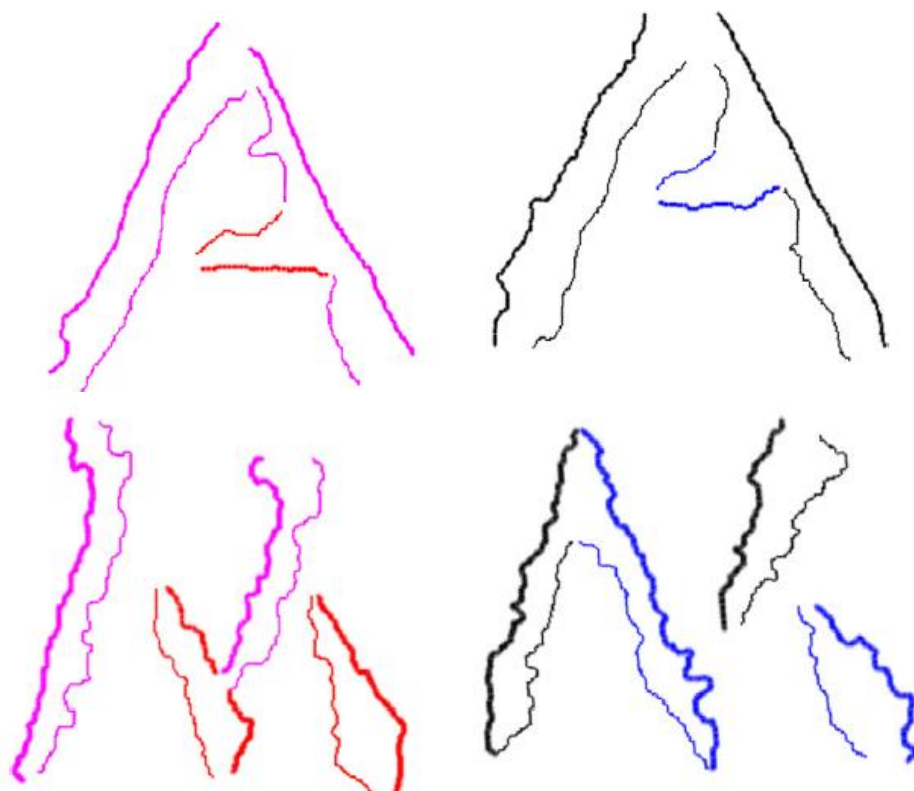
Ελέγχοντας τον ορισμό, παρατηρούμε ότι στην ιδανική περίπτωση που οι καμπύλες  $C_1$  και η μετασχηματισμένη  $C_2'$  συμπίπτουν τότε  $\delta E_n = 1$ , ενώ στην περίπτωση που οι δύο καμπύλες είναι ριζικά διαφορετικές, τότε το κριτήριο αποκτά χαρακτηριστικά μικρές τιμές. Από αυτό, συμπεραίνουμε ότι ο βέλτιστος μετασχηματισμός προκύπτει από τη μεγιστοποίηση του κριτηρίου. Συμβολίζουμε με  $\delta E^B$  την μέγιστη τιμή που αποκτά το κριτήριο.

Ένα ακόμη σημείο που πρέπει να δοθεί έμφαση είναι ότι η αναζήτηση γίνεται εξαντλητικά. Ο λόγος είναι ο στατιστικός έλεγχος για την εξακρίβωση αν δύο κείμενα έχουν γραφτεί από τον ίδιο γραφέα μπορεί να δώσει λάθος συμπέρασμα αν οι θέσεις δεν είναι βέλτιστες. Συνεπώς, δεν γίνεται να επιτραπεί η χρήση αλγορίθμων ελαχιστοποίησης συναρτήσεων οι οποίοι είναι πολύ πιθανό να «εγκλωβιστούν» σε τοπικά ελάχιστα.

Επέκταση του κριτηρίου ομοιότητας για την περίπτωση περιγραμμάτων που αποτελούνται από πολλές ξεχωριστές κλειστές καμπύλες.

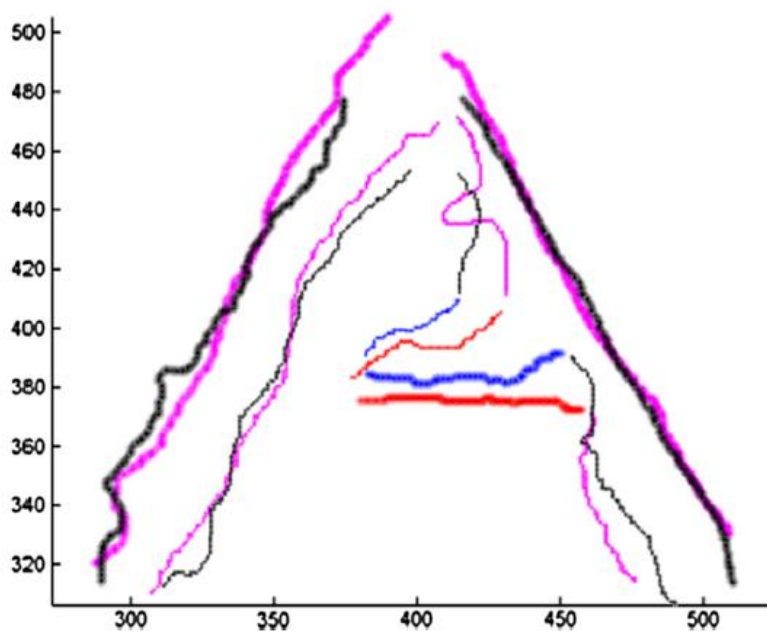
Όπως έχει ήδη αναφερθεί, πολλές πραγματοποιήσεις γραμμάτων σε αρχαίες επιγραφές αποτελούνται από παραπάνω από μία κλειστές καμπύλες. Το γεγονός αυτό, μπορεί να εξηγηθεί καθώς για να χαραχθεί ένα γράμμα ο γραφέας έπρεπε να ασκήσει πολλά διακριτά κτυπήματα στην λίθινη πλάκα. Παρόμοια, αν και περισσότερο σπάνια, συναντώνται σε βυζαντινούς κώδικες γράμματα αποτελούμενα από πολλαπλές συνδεδεμένες καμπύλες σε. Συνεπώς, απαιτείται προσαρμογή του ορισμού του κριτηρίου της *τομής δια ένωσης* ώστε να λαμβάνει υπόψη του αυτή την περίπτωση. Παρακάτω, θα υιοθετήσουμε (όπως ακριβώς και στην υποενότητα 3.4.2) την χρήση του όρου «κτύπημα» για κάθε απλή συνεκτική περιοχή, παρά το γεγονός ότι η δεδομένη υλοποίηση ενός γράμματος συμβόλου μπορεί να προέρχεται από ένα βυζαντινό κώδικα.

Ας θεωρήσουμε δύο διαφορετικές πραγματοποιήσεις  $M_1$  και  $M_2$ , αποτελούμενες από  $N_1^S, N_2^S$  κτυπήματα αντίστοιχα, όπου το κάθε κτύπημα είναι πάντα μία απλή συνεκτική περιοχή. Τότε, όπως στην προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να θεωρήσουμε τυχαία μία υλοποίηση σταθερή και να εφαρμόσουμε στην δεύτερη όλο το σύνολο των μετασχηματισμών, δηλαδή μεταφορά, στροφή και κλιμάκωση. Ακολουθούν κάποια αποτελέσματα της εφαρμογής του ταιριάσματος με βάση τα αποτελέσματα της πρότασης της προηγούμενης ενότητας για δύο αντιπροσώπους των γραμμάτων 'Α' και 'Μ'.

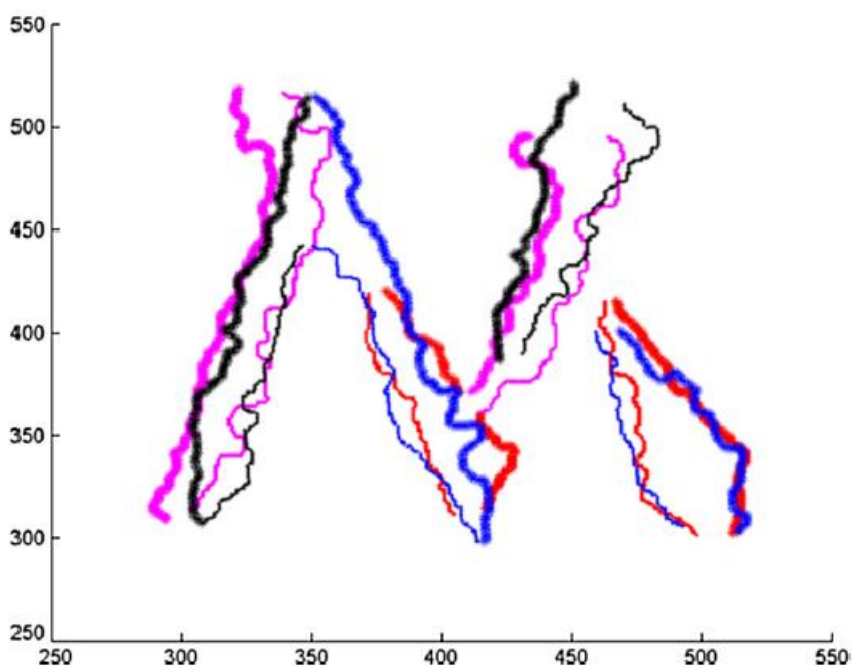


**Εικόνα 24:** Απεικονίζονται με διάφορα χρώματα τα διαφορετικά χτυπήματα, για δύο πραγματοποιήσεις των συμβόλων 'Α' και 'Μ'.





**Εικόνα 25:** Απεικονίζονται τα ίδια περιγράμματα με αυτά του πάνω τμήματος της εικόνας 24, τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'A' δηλαδή, μετά την εφαρμογή των αποτελεσμάτων του ταιριάσματος βάσει των ελαχίστων τετραγώνων.



**Εικόνα 26:** Απεικονίζονται τα ίδια περιγράμματα με αυτά του κάτω τμήματος της εικόνας 24, τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'M' δηλαδή, μετά την εφαρμογή των αποτελεσμάτων του ταιριάσματος βάσει των ελαχίστων τετραγώνων.



**Εικόνα 27:** Απεικονίζονται παραπάνω δύο βέλτιστα ταιριάσματα σύμφωνα με το κριτήριο 3.16 για τα γράμματα 'Κ' και 'Ω'. Το βέλτιστο ταιρίασμα λαμβάνεται με εύρεση του σημείου που μεγιστοποιεί το κριτήριο *τομής διά ένωση* γύρω από μία αρχική θέση ταιριάσματος που προσφέρεται από τα αποτελέσματα της πρότασης της ενότητας 3.5. Πρέπει να σημειωθεί ότι και οι δύο πραγματοποιήσεις κάθε γράμματος έχουν γραφτεί από τον ίδιο γραφέα, πράγμα που έρχεται σε συμφωνία με τα συμπεράσματα της παρουσιαζόμενης μεθόδου.

Όμως, η συνάρτηση σφάλματος της τομής διά ένωσης, θα πρέπει λίγο να διαφοροποιηθεί από τον προηγούμενο ορισμό της. Ο λόγος που είναι αναγκαία η διαφοροποίηση αυτή είναι ότι η εφαρμογή του τύπου (3.16), σε κάθε τμήμα της πραγματοποίησης, θα παραβίαζε την προσπάθεια να μην αλλοιωθεί η πληροφορία του γραφικού στυλ, συνεπώς απαιτείται ο ορισμός του σφάλματος να επεκταθεί. Συμβολίζοντας με  $U_1$  την ένωση των περιοχών των  $N_1^S$  χτυπημάτων της σταθερής πραγματοποίησης, και με  $U_2$  την ένωση των περιοχών των  $N_2^S$  χτυπημάτων της μετασχηματισμένης δεύτερης πραγματοποίησης ορίζουμε τη συνάρτηση σφάλματος της *τομής διά ένωσης* στην περίπτωση πολλαπλών συνδεδεμένων περιοχών ως εξής:

$$\delta E_n^S = \frac{\text{εμβαδόν της τομής των περιοχών } U_1 \text{ και } U_2}{\text{εμβαδόν της ένωσης των περιοχών } U_1 \text{ και } U_2}. \quad (3.17)$$

Μεγιστοποιώντας την συνάρτηση σφάλματος, λαμβάνουμε τις βέλτιστες τιμές για τις παραμέτρους των μετασχηματισμών, έχοντας παράλληλα την καλύτερη σχετική θέση των δύο καμπυλών. Παρόμοια με τα προηγούμενα, συμβολίζουμε με  $\delta E^B$  την μέγιστη τιμή που αποκτά το κριτήριο.

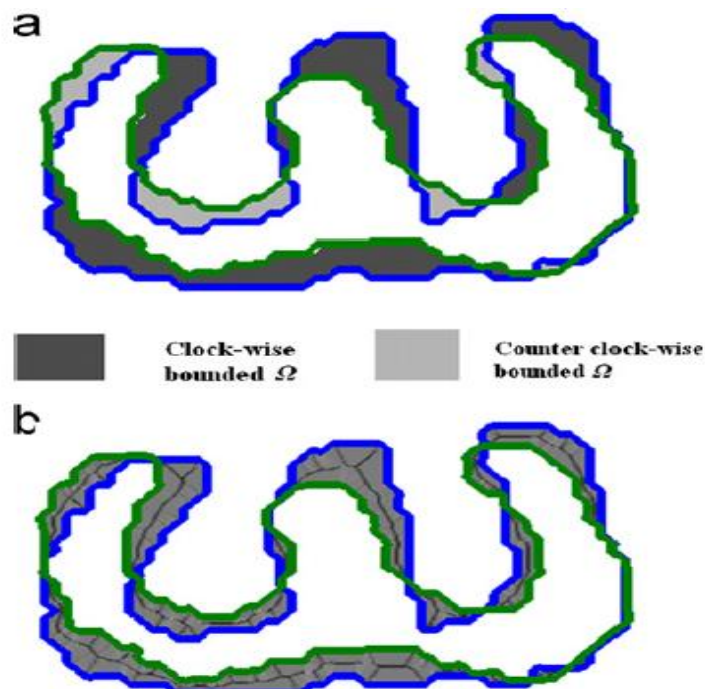
#### Γενικές παρατηρήσεις στο κριτήριο της τομής δια ένωσης:

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η μέθοδος που παρουσιάστηκε εγγυάται ότι το ταιρίασμα των δύο καμπυλών που υπολογίζεται είναι βέλτιστο, και μάλιστα επιλέγοντας κατάλληλα το βήμα στη διαμέριση του τετραδιάστατου κύβου έχουμε και την ζητούμενη ακρίβεια που επιθυμείται. Στην εικόνα 27 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ταιριάσματος με την εφαρμογή του κριτηρίου για δύο διαφορετικά γράμματα.

Η τιμή του  $\delta E^B$  όπως αναφέρθηκε και παραπάνω αποτελεί ένα ιδιαίτερα καλό κριτήριο ελέγχου του βαθμού ομοιότητας δύο πραγματοποιήσεων  $M_1$  και  $M_2$ . Αυτό έρχεται να λύσει το πρόβλημα που υπήρχε με τα αποτελέσματα του κριτηρίου των ελαχίστων τετραγώνων και συνεπώς οι τιμές ταιριάσματος είναι «έτοιμες» για το τελικό στάδιο της εφαρμογής, την αναγνώριση γραφέα μέσω της στατιστικής επεξεργασίας των παραπάνω τιμών.

### 3.7 Η καμπυλότητα ως ένα φράγμα στις μεταβολές ενός σχήματος.

Παρακάτω παρατίθεται ένα σημαντικό αποτέλεσμα για την καμπυλότητα, που έρχεται ως ένα ακόμη πειστήριο να επιβεβαιώσει την σημασία της χρήσης της ως εργαλείο για την αυτόματη αναγνώριση γραφεία. Αν και δεν σχετίζεται άμεσα με την παρουσιαζόμενη μέθοδο, κρίθηκε αναγκαίο να συμπεριληφθεί η παρουσίαση του παρακάτω αποτελέσματος και της απόδειξής του, καθώς παρέχει μία εναλλακτική οπτική, μη διαισθητική, στο πώς η καμπυλότητα καταφέρνει να εκφράσει την ομοιότητα των σχημάτων.



**Εικόνα 28.** Το χωρίο  $\Omega$  της απόκλισης των δύο καμπυλών και η συνάρτηση σφάλματος της επίπεδης καμπυλότητας. (a) Το χωρίο  $\Omega$  όπως αυτό σχηματίζεται από την απόκλιση των συνόρων για δύο πραγματοποιήσεις του γράμματος  $\Omega$ . Το σύνορο της καμπύλης αναφοράς  $\Gamma_1$  απεικονίζεται με μπλε χρώμα, ενώ αυτό της  $\Gamma_2$  με μπλε. Το μονοπάτι  $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  ορίζει τον προσανατολισμό του συνόρου του  $\Omega$ . (b) Παρουσιάζονται οι τιμές της συνάρτησης σφάλματος επίπεδης καμπυλότητας στο χωρίο  $\Omega$  σε γκριζα κλίμακα. Όσο μικρότερη είναι η τιμή του σφάλματος, τόσο πιο σκοτεινή είναι η σκίαση.

Όπως αποδείχθηκε στο κεφάλαιο 2, η καμπυλότητα για ισοϋψείς καμπύλες μπορεί να εκφραστεί ως  $\kappa = |\nabla \cdot \vec{n}|$ . Υποθέτοντας τώρα, την ύπαρξη δύο διαφορετικών ισοϋψών καμπυλών έστω,  $\Gamma_1, \Gamma_2$  (βλέπε εικόνα 28) αν συμβολίσουμε με  $\Omega$  το χωρίο που περικλείεται ανάμεσα στις δύο παραπάνω καμπύλες, τότε η ακόλουθη συνάρτηση σφάλματος

$$\varepsilon^C = \int_{\Omega} |\nabla \cdot \vec{n}| d\Omega \quad (3.18)$$

αναμένεται να αποτελεί ένα κριτήριο για την ομοιότητα δύο σχημάτων, με βάση όλη την ανάλυση που έχει προηγηθεί. Προφανώς, αν οι δυο καμπύλες ταυτίζονται το σφάλμα είναι μηδέν. Στην περίπτωση που δεν ταυτίζονται, όμως, υποθέτοντας ότι οι καμπύλες αναπαριστούν πραγματοποιήσεις ενός συγκεκριμένου συμβόλου τότε αναμένεται η τιμή του σφάλματος να είναι πολύ μικρή όταν προέρχονται από τον ίδιο γραφέα, και αρκετά μεγαλύτερη για δυο πραγματοποιήσεις από διαφορετικό γραφέα εν συγκρίσει της τιμής που προκύπτει από αυτές για τον ίδιο γραφέα.

Αν οι παραπάνω υποθέσεις επιβεβαιώνονται<sup>1</sup>, γρήγορα γεννιέται το ερώτημα ποια είναι η «φυσική ερμηνεία και εξήγηση» των παραπάνω παρατηρήσεων. Μήπως δηλαδή το παραπάνω μέτρο είναι χαρακτηριστικό της μεταβολής δύο σχημάτων, και στην περίπτωση που οι υλοποιήσεις αφορούν τον ίδιο άνθρωπο η ελαχιστοποίηση του εξηγείται επειδή οι αποκλίσεις των δυο καμπυλών είναι λογικό να είναι μικρές. Και ακριβώς, αυτό θα αποδειχθεί ακολούθως: θα δείχτεί το μέτρο αυτό φράζει τις δυνατές μεταβολές ενός σχήματος.

Συνεπώς, δύο καμπύλες με παρόμοιες τιμές καμπυλότητας θα αντιστοιχούν σε καμπύλες με πολύ μικρές αποκλίσεις. Ένα εύλογο ερώτημα βέβαια είναι πώς θα «κωδικοποιηθούν» με μαθηματικό τρόπο οι μεταβολές δύο σχημάτων, και η απάντηση έρχεται να δοθεί μέσω της μεταβολής 1<sup>ης</sup> τάξης των ελάχιστων αποστάσεων των σημείων των δύο καμπυλών. Εδώ, με την σειρά τους έρχεται να δικαιολογηθεί η μελέτη στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο της έννοιας των γεωδαισιακών, καθώς μέσω αυτών θα εκφραστούν οι «ελάχιστες αποστάσεις» που μόλις αναφέρθηκαν. Παρακάτω, ακολουθεί η απόδειξη των πιο παραπάνω διαισθητικών ιδεών, ότι δηλαδή η συνάρτηση σφάλματος αποτελεί το supremum του μέτρου της πρώτης μεταβολής της ελάχιστης απόστασης δύο καμπυλών.

Η συνάρτηση σφάλματος της επίπεδης καμπυλότητας, όπως ορίστηκε παραπάνω, θα δείχτεί ότι είναι στενά συνδεδεμένη με την φυσική ερμηνεία των δυνατών μεταβολών ενός σχήματος, ή πιο σωστά τις μεταβολές που προκαλούνται από ένα διανυσματικό πεδίο βάση μίας μετρικής. Ας θεωρήσουμε τις γεωδαισιακές με εφαπτόμενες κατά μήκος του διανυσματικού πεδίου  $\vec{n} \cdot \nabla$ , μπορούμε να υπολογίσουμε τις αποκλίσεις της ισουψούς  $\Gamma_1$  της  $F(x, y)$ , μέσα στην οικογένεια που η  $F(x, y)$  ορίζει, και αυτό θα επιχειρηθεί παρακάτω. [9]

Αρχικά, ας θεωρήσουμε ένα σημείο  $\vec{p}_1 \in \Gamma_1$  και ένα τυχαίο σημείο  $\vec{p}$  του xy-επιπέδου, τότε το γεωδαισιακό μήκος μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\delta(\vec{p}_1, p) = \int_0^{F(\vec{p})} |dF| / \|\nabla F\|. \quad (3.19)$$

Απόδειξη: Ως γνωστόν  $\delta(\vec{p}_1, p) = \int_0^{F(\vec{p})} ds$ . Όμως, ως γνωστόν  $|dF| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} ds = \|\nabla F\| ds$ , όπου το  $\|\cdot\|$  στο  $|dF|$  έγινε για να σημειωθεί ότι είναι ολοκλήρωμα μίας θετικής ποσότητας. Έτσι, διαιρώντας με την ποσότητα  $\|\nabla F\|$  προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

Αφήνοντας τώρα το  $\vec{p}$  να κινηθεί πάνω στην επίπεδη καμπύλη  $\Gamma_2$ , μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκλιση της  $\Gamma_1$  από την  $\Gamma_2$  μέσω του Λαγκρανζιανού ολοκληρώματος  $D(\Gamma_1, \Gamma_2) = \int_{\Gamma_1} \delta(\vec{p}_1(s), \vec{p}) ds$ , όπου  $s \in [0, \tau]$  είναι η αναπαράσταση μήκους τόξου της  $\Gamma_1$ .

<sup>1</sup> Γεγονός που επιβεβαιώνεται και στο [9]

Έστω τυχαίος μετασχηματισμός στο  $xy$  επίπεδο με απειροστό μήκος  $dt$  που μετασχηματίζει το  $(x,y)$  στο  $(x',y') = (x,y) + dt\vec{v}$ , όπου  $\vec{v}$  τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα που υποδηλώνει την κατεύθυνση του μετασχηματισμού. Το αποτέλεσμα τώρα αυτού του μετασχηματισμού στο  $D(\Gamma_1, \Gamma_2)$  δίνεται από δράση του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου  $\chi = \vec{v} \cdot \nabla$  στο ολοκλήρωμα  $D(\Gamma_1, \Gamma_2)$ .

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου έχουμε:

Αναπτύσσοντας  
 ντας  $\chi[D(\Gamma_1, \Gamma_2)] = \int_{\Gamma_1} \chi[\delta(\vec{p}_1(s), \vec{p})] ds + \delta(\vec{p}_1(s), \vec{p}) d\chi[s(\vec{p}_1)].$  (3.20)

ξεχωριστά

την επίδραση του  $\chi$  στο  $\delta$  και στο  $ds$  και έχουμε:

i.  $\chi[\delta(\vec{p}_1(s), \vec{p})] = \chi[\int_{\Gamma_1} \delta(\vec{p}_1(s), \vec{p}) ds] = \vec{v} \cdot \nabla [\int_{\Gamma_1} \delta(\vec{p}_1(s), \vec{p}) ds]$   
 $= (\vec{v} \cdot \vec{n})(\vec{p}) - (\vec{v} \cdot \vec{n})(\vec{p}_1).$

ii.  $d\chi[s] = d(\vec{v} \cdot \nabla s) = d(\vec{v} \cdot \vec{l})$ . Όπου  $\vec{l}$  το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στην  $\Gamma_1$  και χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι  $\nabla s = \vec{l}$ .

Άρα,

$$\chi[D(\Gamma_1, \Gamma_2)] = \int_{\Gamma_1} [\vec{v} \cdot \vec{n}]_{p_1(s)}^{p(s)} ds + \left[ \delta(\vec{p}_1(s), \vec{p}) \vec{v}(\vec{p}) \cdot \vec{l}(\vec{p}_1) \right]_{s=0}^{s=\tau} - [d\delta\vec{v}]_{p_1(s)}^{\vec{p}} \cdot \vec{l}.$$

Παρατηρούμε σε αυτό το σημείο ότι:

- ✓ Κινούμενοι σε μονοπάτια κατά μήκος του  $\vec{n}$  που συνδέει τα  $\vec{p}, \vec{p}_1$  το  $p_1$  μένει αμετάβλητο με συνέπεια το  $ds=0$ . Συνεπώς, ο πρώτος όρος μηδενίζεται.
- ✓ Κινούμενοι πάνω στην  $\Gamma_1$  πάντα έχουμε  $\delta(\vec{p}_1, \vec{p}_1) = 0$ , και συνεπώς  $d\delta(\vec{p}_1, \vec{p}_1) = 0$ . Επομένως, μηδενίζεται και ο τρίτος όρος.

Αξιοποιώντας τις παραπάνω παρατηρήσεις η πρώτη μεταβολή του  $D(\Gamma_1, \Gamma_2)$  γράφεται ως εξής:

$$\chi[D(\Gamma_1, \Gamma_2)] = \left[ \delta(\vec{p}_1(s), \vec{p}) \vec{v}(\vec{p}) \cdot \vec{l}(\vec{p}_1) \right]_{s=0}^{s=\tau}.$$

Όμως,

$$\left[ \delta(\vec{p}_1(s), \vec{p}) \vec{v}(\vec{p}) \cdot \vec{l}(\vec{p}_1) \right]_{s=0}^{s=\tau} = \int_{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2} [d\delta\vec{v}]_{p_1(0)}^{\vec{p}} \cdot \vec{l} + \int_{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1} [d\delta\vec{v}]_{p_1(\tau)}^{\vec{p}} \cdot \vec{l}$$

και αν θεωρήσουμε την περιοχή  $\Omega$  που ορίζεται από τα μονοπάτια που συνδέουν τα  $\vec{p}_1$  και  $\vec{p}$  για όλα τα  $\vec{p}_1(s) \in \Gamma_1, s \in [0, \tau]$  και χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Stokes έχουμε ότι:

$$\chi[\delta(\vec{p}_1(s), \vec{p})] = - \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \hat{k} d\partial\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} d\Omega \quad (3.21)$$

όπου  $\hat{k}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο  $\partial\Omega$ , με προσανατολισμό σύμφωνο με την θετική φορά διαγραφής της καμπύλης  $\Gamma_1$ .

Εκφράζοντας τη διαφορική μετατόπιση  $dt\vec{v}$  των καρτεσιανών συντεταγμένων στο καμπυλόγραμμο πλαίσιο  $(\vec{n}, \vec{l})$  λαμβάνουμε  $dt\vec{v} = \vec{n}d\delta + \vec{l}ds$ .

Επιπλέον,

$$\nabla \cdot (dt\vec{v}) = dt\nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla dt.$$

Επειδή, όμως το  $\vec{v}$  είναι μοναδιαίο διάνυσμα και το  $dt$  συμβολίζει το διαφορικό μήκος κατά μήκος του  $\vec{v}$  έχουμε  $\nabla dt = d\vec{v}$  και  $\vec{v} \cdot d\vec{v} = 0$  και άρα  $\nabla \cdot (dt\vec{v}) = dt\nabla \cdot \vec{v}$ .

Αναπτύσσοντας με τον ίδιο τρόπο τα  $\nabla \cdot (d\delta\vec{n})$  και  $\nabla \cdot (ds\vec{l})$  παίρνουμε  $dt\nabla \cdot \vec{v} = d\delta\nabla \cdot \vec{n} + ds\nabla\vec{l} = -(ds - d\delta)\nabla \cdot \vec{n}$ , όπου άμεσα προκύπτει ότι

$$\nabla \cdot \vec{n} = -\vec{v} \cdot (\vec{l} - \vec{n})\nabla \cdot \vec{n}.$$

Τέλος αντικαθιστώντας την έκφραση για το  $\nabla \cdot \vec{n}$  στην σχέση που παράχθηκε κάνοντας χρήση του Θεωρήματος του Stokes και παίρνοντας την νόρμα της πρώτης μεταβολής της  $D(\Gamma_1, \Gamma_2)$  έχουμε ότι:

$$\|\chi[D(\Gamma_1, \Gamma_2)]\| \leq \sqrt{2} \int_{\Omega} |\nabla \cdot \vec{n}| d\Omega \quad (3.22)$$

όπου στο δεξί μέλος εμφανίζεται η συνάρτηση σφάλματος της επίπεδης καμπυλότητας όπως αυτή ακριβώς ορίστηκε. Επομένως, το μέτρο αυτό όπως ορίστηκε παραπάνω είναι το supremum της ευκλείδειας νόρμας της 1<sup>ης</sup> μεταβολής του γεωδαισιακού μήκους δύο σχημάτων, τα οποία ανήκουν σε μία δοθείσα οικογένεια καμπυλών.

Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι η καμπυλότητα, όχι μόνο χαρακτηρίζει μοναδικά μία καμπύλη, αλλά μπορεί να εκφράσει και μαθηματικά την ομοιότητα δύο σχημάτων, βάση της σύγκρισης των καμπυλοτήτων των περιγραμμάτων τους. Η καμπυλότητα δηλαδή δεν είναι ένα «μαθηματικό τέχνασμα» που έτυχε να δίνει σωστά αποτελέσματα στην αυτόματη αναγνώριση γραφέα, αλλά είναι στην φύση της έννοιας αυτής να μπορεί να κωδικοποιεί πληροφορία για τις καμπύλες, και μάλιστα αυτή η κωδικοποίηση μπορεί και δικαιολογημένα από μαθηματικής πλευράς τώρα, να αξιοποιηθεί στα σχήματα με μικρές μεταβολές, που αναμένεται διαισθητικά να έχουν γραφτεί από τον ίδιο άνθρωπο, για διάφορους σκοπούς όπως η χρήση της για την εύρεση αντιστοίχισης στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο.

#### 4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΤΗΝ ΤΑΥΤΟΠΟΙΗΣΗ ΓΡΑΦΕΩΝ ΤΩΝ ΚΕΙΜΕΝΩΝ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΔΙΑΣΩΘΕΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΘΗΝΑΙΩΝ ΠΟΛΙΤΕΙΑ.

Στο παρόν κεφάλαιο της εργασίας θα παρουσιάσουμε αναλυτικά παραδείγματα εφαρμογών της μεθόδου που χρησιμοποιήσαμε σε εικόνες γραμμάτων της Αθηναίων Πολιτείας, όπως αυτή περιγράφηκε αναλυτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο, και εφαρμόσαμε ως αλγόριθμο στο περιβάλλον αριθμητικής υπολογιστικής και προγραμματισμού MATLAB. Το σύνολο εφαρμογής του αλγορίθμου είναι πολλαπλές υλοποιήσεις του ίδιου γράμματος, τα οποία έχουν εξαχθεί από την ψηφιοποιημένα κείμενα της Αθηναίων Πολιτείας. Η εξαγωγή των οποίων πραγματοποιήθηκε με χρήση μίας ημιαυτόματης μεθόδου κατάτμησης, αντίστοιχη με αυτή που περιγράφεται στα [21, 22, 23] και κάθε υλοποίηση γράμματος έχει ενσωματωθεί σε ένα ορθογώνιο πλαίσιο.

Μέσα από αυτά τα παραδείγματα, όπου μεγάλη προσπάθεια καταπονήθηκε ώστε να είναι όσο το δυνατόν πιο αντιπροσωπευτικά γίνεται, είναι επιθυμητό να γίνουν αντιληπτές όλες οι δυσκολίες που εξαρχής αναφέρθηκαν. Σε κάθε παράδειγμα παρατίθενται όλοι οι αντιπρόσωποι βάση των οποίων δημιουργείται το πλατωνικό, στην συνέχεια παρουσιάζονται, τόσο τα εν γένει υποβέλτιστα ταιριάσματα που υπολογίζονται βάση της προσέγγισης ελαχίστων τετραγώνων αξιοποιώντας την βέλτιστη αντιστοίχιση των pixels των διαφορετικών υλοποιήσεων μέσω συγκρίσεως της καμπυλότητας τους, όσο και τα βέλτιστα ταιριάσματα που παράγονται μέσω του κριτηρίου της *τομής διά ένωσης*. Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να παρατηρήσει το επικουρικό έργο του δεύτερου κριτηρίου βέλτιστης προσαρμογής αλλά και να διακρίνει ότι τα δύο ταιριάσματα δεν αποκλίνουν υπερβολικά, γεγονός που δικαιολογεί την διατύπωση στην παράγραφο 3.6 ότι το βέλτιστο ταιρίασμα που παράγεται μέσω της καμπυλότητας αποτελεί ένα πολύ καλό σημείο έναρξης για την μετέπειτα εξαντλητική αναζήτηση.

Τέλος, σε κάθε παράδειγμα απεικονίζεται και ο βέλτιστος αντιπρόσωπος των υλοποιήσεων κάθε γράμματος που εξετάζεται, ο οποίος λαμβάνεται παίρνοντας την τομή των συμπαγών υλοποιήσεων, όπως αυτά ταιριάστηκαν βάση των περιγραμμάτων τους σύμφωνα με τα παραπάνω. Η διαίσθηση καθώς και οι ενδείξεις από την επιτυχή εφαρμογή της μεθόδου σε άλλα κείμενα και επιγραφές<sup>1</sup>, οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το πλατωνικό καταφέρνει επιτυχώς να «αφομοιώνει» μέσα από το σχήμα του όλα εκείνα τα χαρακτηριστικά που είναι μοναδικά ενός στυλ γραφής. Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει ότι τα παραγόμενα πλατωνικά επιτυγχάνουν όντως να έχουν τα βασικά χαρακτηριστικά που απαιτούνται στις περισσότερες υλοποιήσεις.

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι ο συνολικός αριθμός των εκτελέσεων ξεπερνά τις 450 σε αριθμό. Από όλες αυτές επιλέχθηκε να παρουσιαστεί ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα που αποτελείται από τα αποτελέσματα 24 εκτελέσεων. Το μέγεθος του δείγματος στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων, επιλέχθηκε έτσι ώστε να μπορεί να προσεγγιστεί εύκολα από τον αναγνώστη δίχως να τον κουράσει και παράλληλα να τον βοηθήσει να αποκτήσει μία πλήρη εικόνα των αποτελεσμάτων της εφαρμογής της μεθόδου.

---

<sup>1</sup> Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων στο [7].

Η δομή του παρόντος κεφαλαίου είναι η ακόλουθη: Κάθε ενότητα του αντιστοιχεί στην παρουσίαση ενός και μοναδικού γράμματος και η σειρά των ενοτήτων είναι σύμφωνα με την αλφαβητική σειρά των γραμμάτων. Σε πολλές περιπτώσεις κάποια ενότητα χωρίζεται σε υποενότητες, όπου παρουσιάζονται διαφορετικά παραδείγματα του ίδιου γράμματος. Ο λόγος που γίνεται αυτό είναι γιατί είτε υπήρξαν περιπτώσεις που για κάποιο γράμμα υπήρχαν υλοποιήσεις του, που εμφανίζεται τόσο ως πεζό όσο ως κεφαλαίο και κρίθηκε αναγκαία η παρουσίαση και των δύο αποτελεσμάτων, είτε απλώς άλλες φορές αποφασίστηκε η παρουσίαση περισσότερων του ενός αποτελεσμάτων για κάποιο γράμμα για μεγαλύτερη πληρότητα. Παρακάτω συνοψίζονται τα γράμματα τα οποία παρουσιάζονται καθώς και ο αριθμός των παραδειγμάτων, που επιλέχθηκε για το καθένα:

1. Για το γράμμα 'Α' ένα παράδειγμα εφαρμογής.
2. Για το γράμμα 'Β' τρία παραδείγματα εφαρμογής.
3. Για το γράμμα 'Γ' δύο παραδείγματα εφαρμογής.
4. Για το γράμμα 'Δ' δύο παραδείγματα εφαρμογής.
5. Για το γράμμα 'Ε' δύο παραδείγματα εφαρμογής.
6. Για το γράμμα 'Η' δύο παραδείγματα εφαρμογής.
7. Για το γράμμα 'Θ' ένα παράδειγμα εφαρμογής.
8. Για το γράμμα 'Κ' δύο παραδείγματα εφαρμογής.
9. Για το γράμμα 'Λ' ένα παράδειγμα εφαρμογής.
10. Για το γράμμα 'Μ' ένα παράδειγμα εφαρμογής.
11. Για το γράμμα 'Ν' δύο παραδείγματα εφαρμογής.
12. Για το γράμμα 'Ξ' ένα παράδειγμα εφαρμογής.
13. Για το γράμμα 'Π' ένα παράδειγμα εφαρμογής.
14. Για το γράμμα 'Ρ' ένα παράδειγμα εφαρμογής.
15. Για το γράμμα 'Ω' δύο παραδείγματα εφαρμογής.

Πριν ακολουθήσει η παρουσίαση των αποτελεσμάτων, θα πρέπει να εξηγηθεί η χρήση ενός συμβολισμού, εκτενής χρήση του οποίου γίνεται στα παρακάτω. Η εξήγηση του θα αποπειραθεί να γίνει μέσω ενός παραδείγματος. Κατά την μελέτη των αποτελεσμάτων για το γράμμα 'Α' ο αναγνώστης θα συναντήσει τον εξής συμβολισμό: **I0014**. Η παραπάνω κωδικοποίηση σημαίνει ότι οι υλοποιήσεις των συμβόλων του γράμματος της 1<sup>ης</sup> ενότητας προέρχονται από την 14<sup>η</sup> στήλη (εξού και ο αριθμός 14) της ψηφιοποιημένης έκδοσης του πατυρολογικού κειμένου της Αθηναίων Πολιτείας. <sup>1</sup>Ακολουθεί η παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

---

<sup>1</sup> Το αρχικό γράμμα στον συμβολισμό προέρχεται από τη λέξη Image.



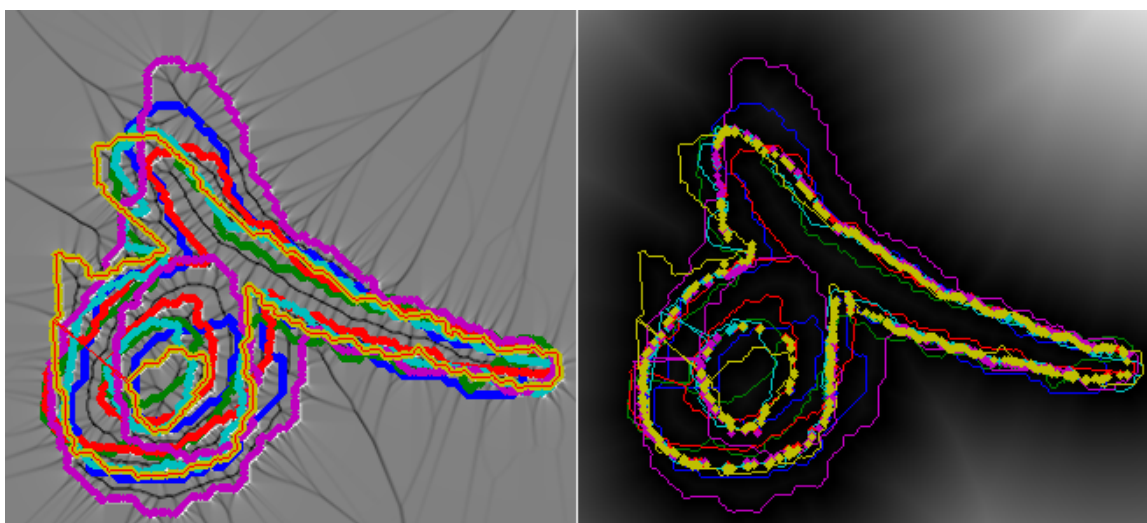
#### 4.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Α’.

Στην εικόνα 29 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Α’ όπως αυτές απατώνται στην I0014.



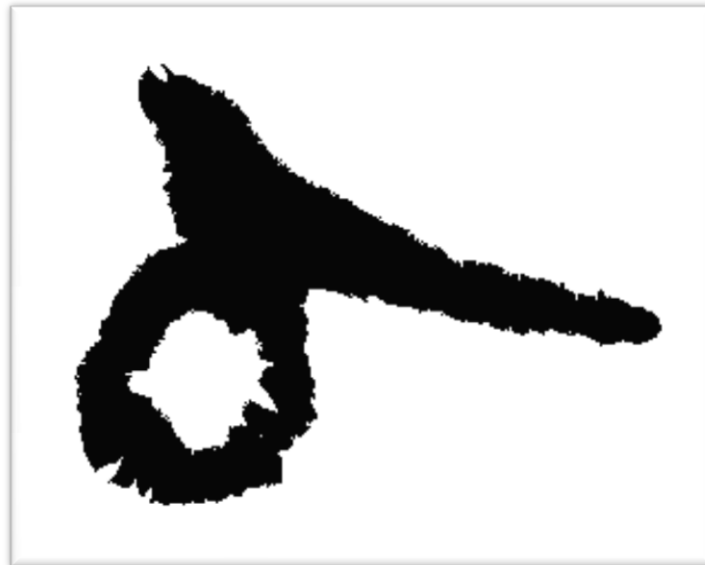
Εικόνα 29: Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Α’ όπως αυτές απατώνται στην I0014.

Παρακάτω παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάσης του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



Εικόνα 30: Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάσης του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος ‘Α’, όπως αυτές απατώνται στην I0014.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Α', που φαίνονται στην εικόνα 29.



**Εικόνα 31:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Α' που απεικονίζονται στην εικόνα 29.

## 4.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Β’.

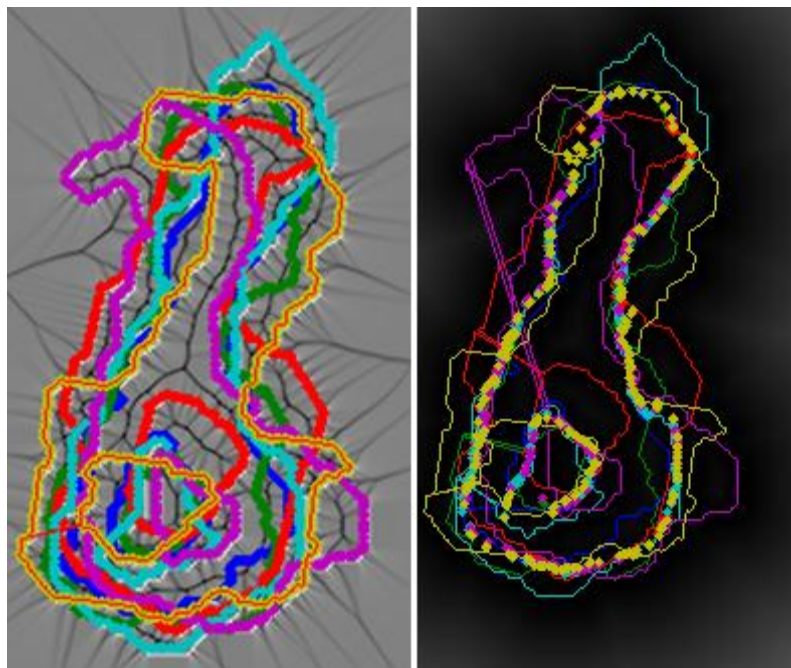
### 4.2.1 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘B’ στην I0006.

Στην εικόνα 32 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘B’ όπως αυτές απατώνται στην I0006.



**Εικόνα 32:** Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘B’ όπως αυτές απατώνται στην I0006.

Παρακάτω παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 33:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιριάσμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος ‘B’, όπως αυτές απατώνται στην I0006.

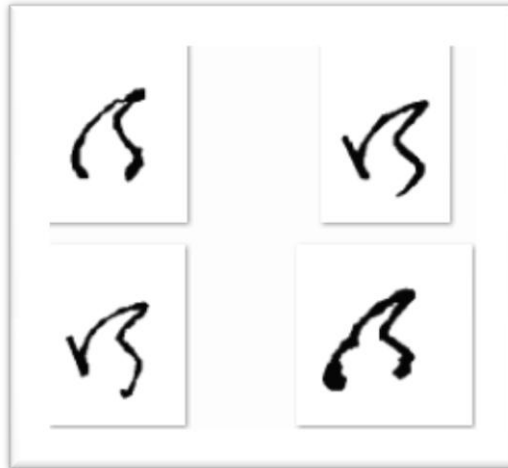
Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Β', που φαίνονται στην εικόνα 32.



**Εικόνα 34:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Β' που απεικονίζονται στην εικόνα 32.

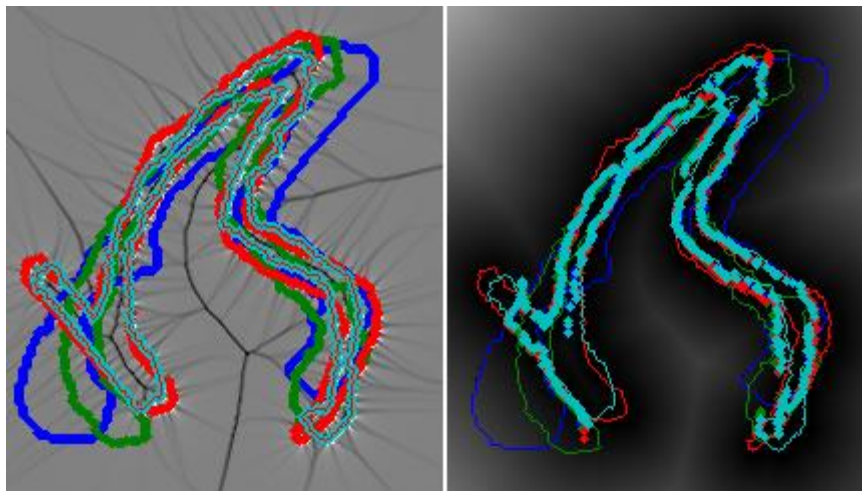
#### 4.2.2 Υλοποιήσεις του γράμματος 'B' στην I0040.

Στην εικόνα 35 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'B' όπως αυτές απαιτώνται στην I0040.



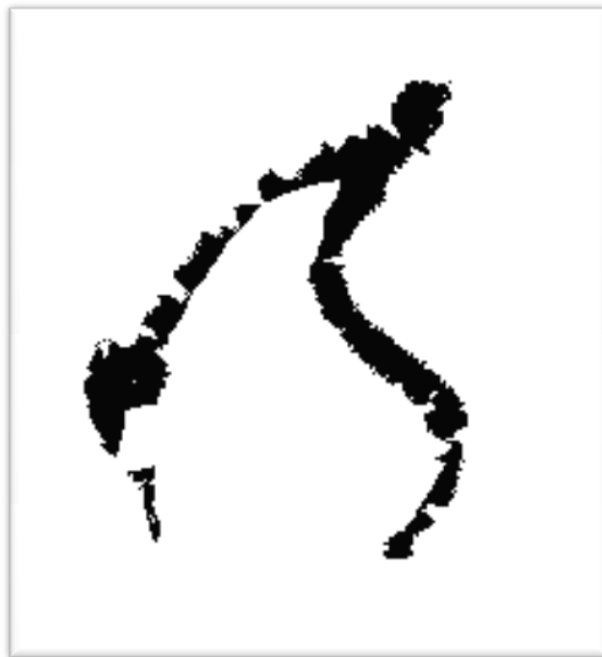
**Εικόνα 35:** Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'B' όπως αυτές απαιτώνται στην I0040.

Παρακάτω παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 36:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'B', όπως αυτές απαιτώνται στην I0040.

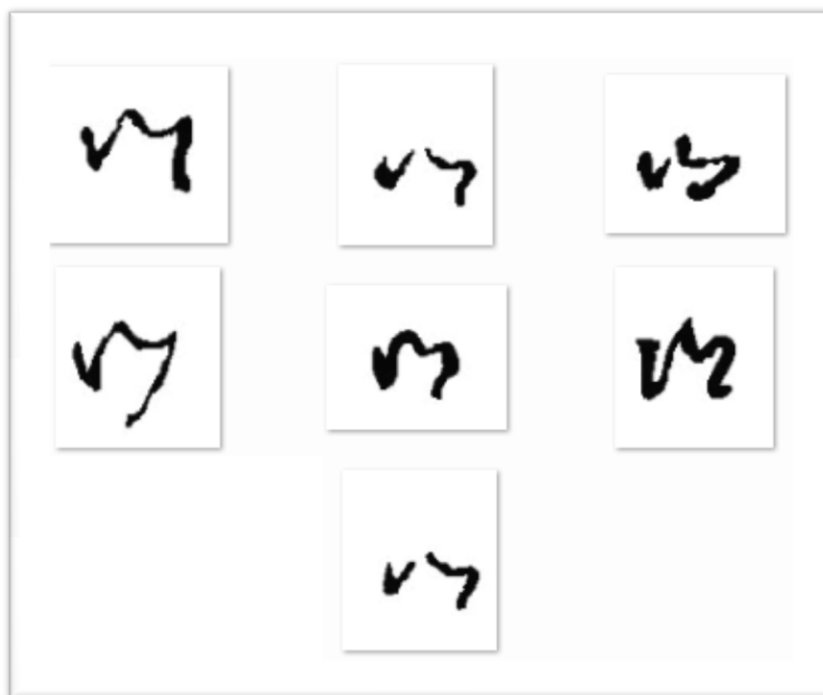
Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Β', που φαίνονται στην εικόνα 35.



**Εικόνα 37:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Β' που απεικονίζονται στην εικόνα 35.

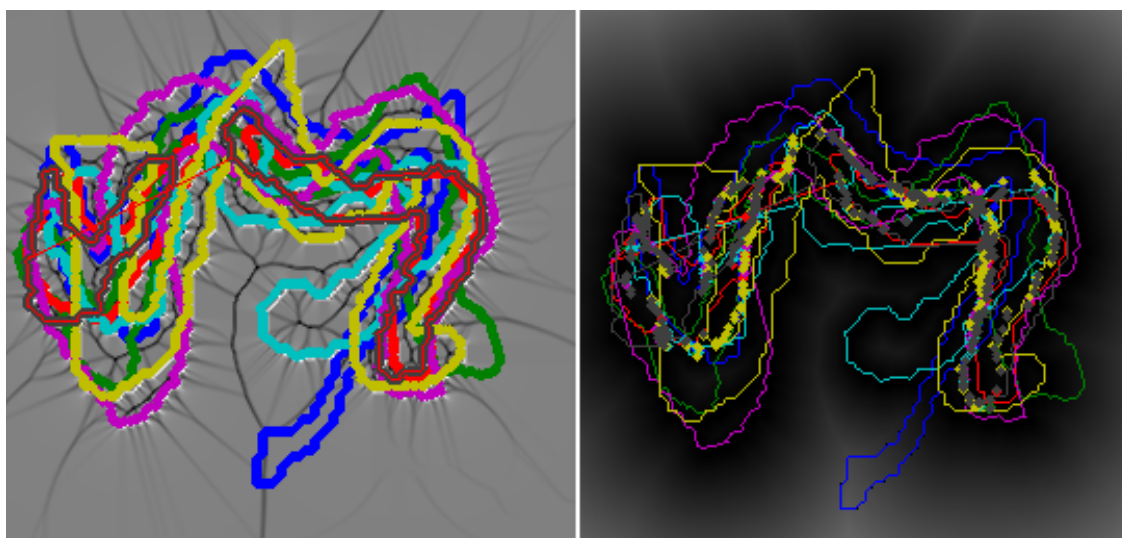
#### 4.2.3 Υλοποιήσεις του γράμματος 'B' στην I0043.

Στην εικόνα 38 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'B' όπως αυτές απατώνται στην I0043.



**Εικόνα 38:** Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'B' όπως αυτές απατώνται στην I0043.

Παρακάτω παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 39:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'B', όπως αυτές απατώνται στην I0043.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Β', που φαίνονται στην εικόνα 38.



**Εικόνα 40:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Β' που απεικονίζονται στην εικόνα 38.



### 4.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Γ’.

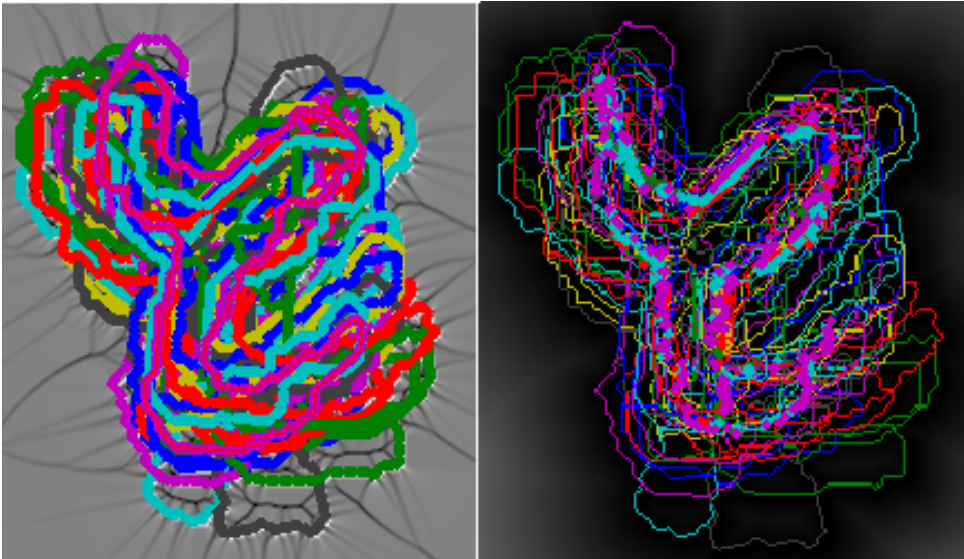
#### 4.3.1 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Γ’ στην I0013.

Στην εικόνα 41 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Γ’ όπως αυτές απατώνται στην I0013.



**Εικόνα 41:** Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Γ’ όπως αυτές απατώνται στην I0013.

Στη διπλανή σελίδα παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 42:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'Γ', όπως αυτές απατώνται στην I0013.

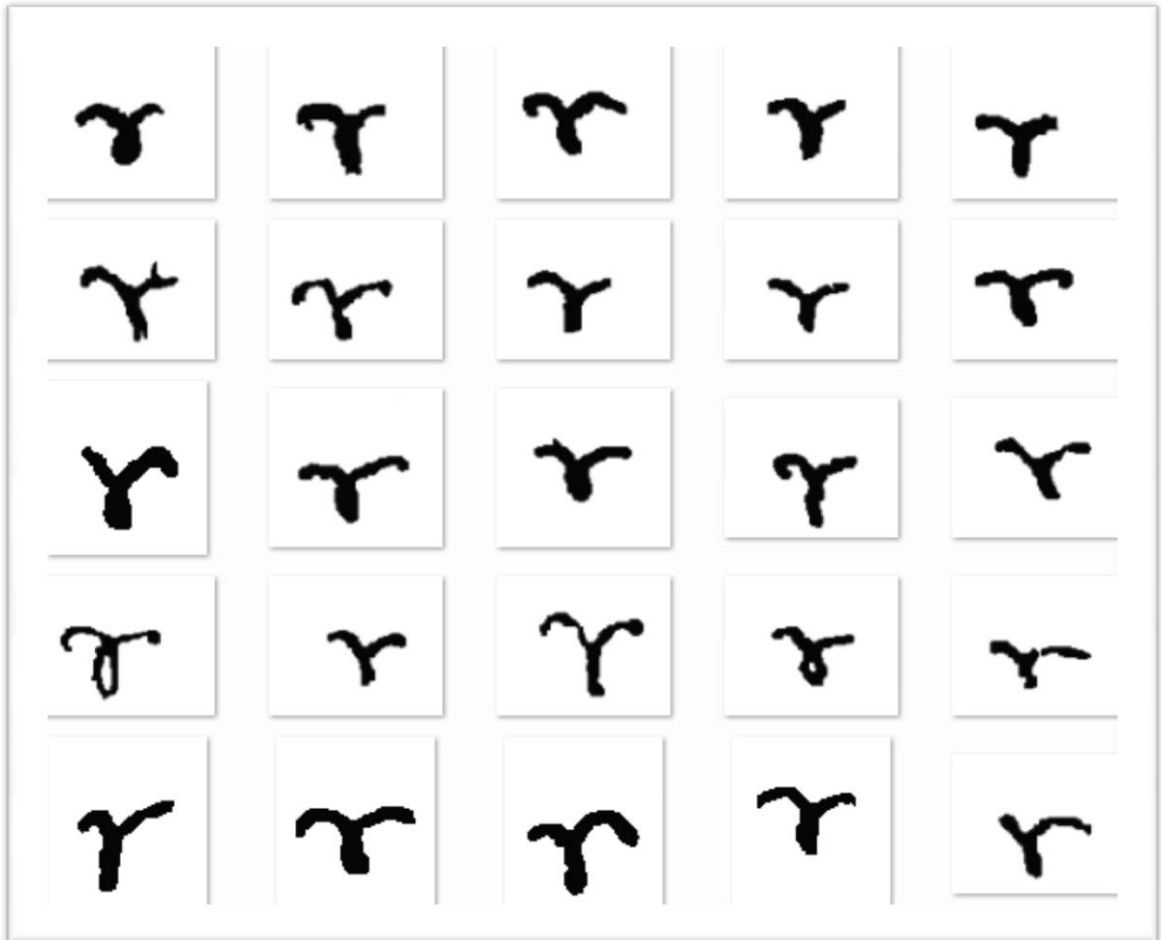
Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Γ', που φαίνονται στην εικόνα 41.



**Εικόνα 43:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Γ' που απεικονίζονται στην εικόνα 41.

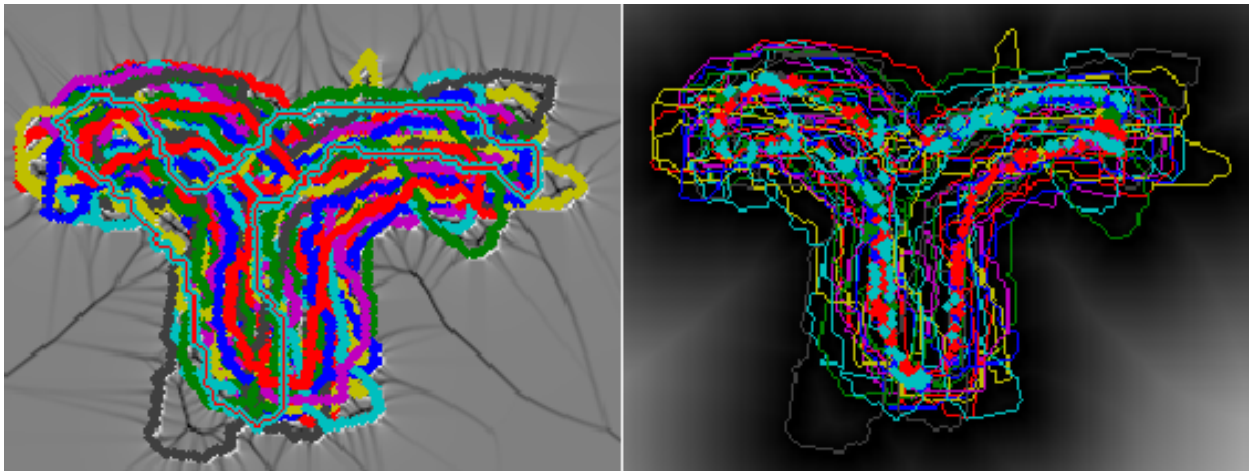
#### 4.3.2 Υλοποιήσεις του γράμματος 'Γ' στην I0014.

Στην εικόνα 44 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Γ' όπως αυτές απαιτώνται στην I0014.



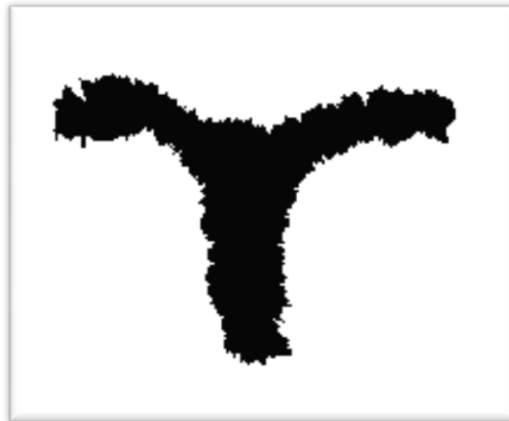
Εικόνα 44: Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Γ' όπως αυτές απαιτώνται στην I0014.

Στη διπλανή σελίδα παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 45:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'Γ', όπως αυτές απατώνται στην I0014.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Γ', που φαίνονται στην εικόνα 44.



**Εικόνα 46:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Γ' που απεικονίζονται στην εικόνα 44.

## 4.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ 'Δ'.

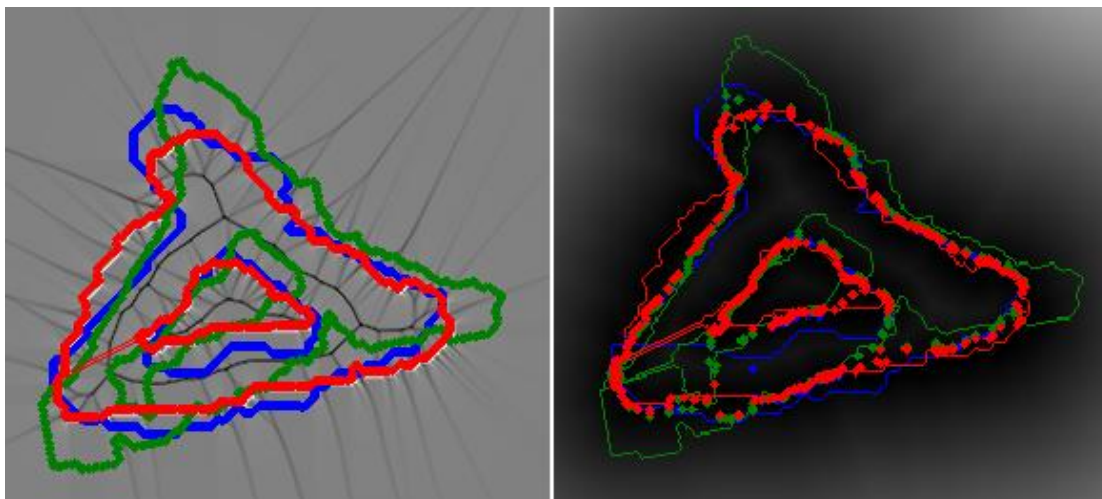
### 4.4.1 Υλοποιήσεις του γράμματος 'Δ' στην I0039.

Στην εικόνα 47 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Δ' όπως αυτές απαιτώνται στην I0039.



**Εικόνα 47:** Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Δ' όπως αυτές απαιτώνται στην I0039.

Παρακάτω παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 48:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'Δ', όπως αυτές απαιτώνται στην I0039.

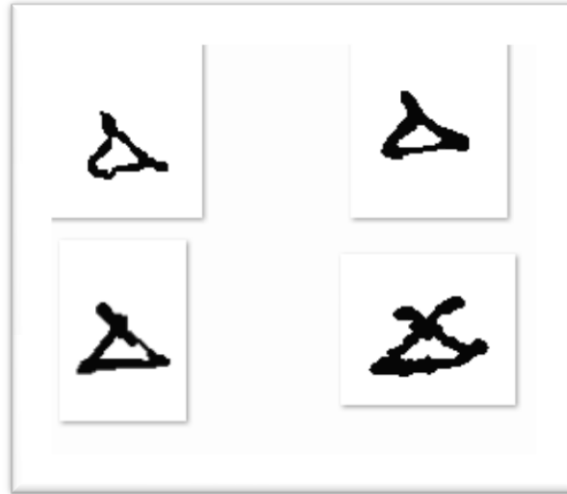
Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Δ', που φαίνονται στην εικόνα 47.



**Εικόνα 49:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Δ' που απεικονίζονται στην εικόνα 47.

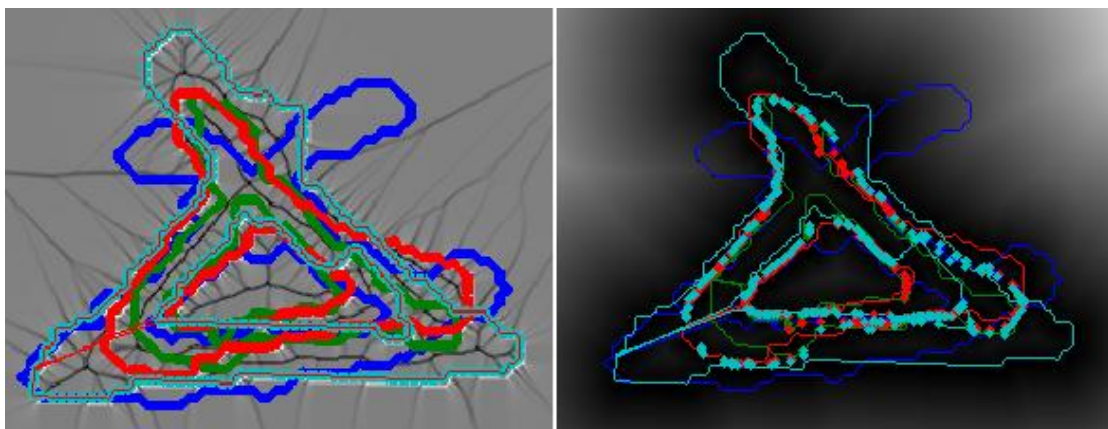
#### 4.4.2 Υλοποιήσεις του γράμματος 'Δ' στην I0046.

Στην εικόνα 50 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Δ' όπως αυτές απαιτώνται στην I0046.



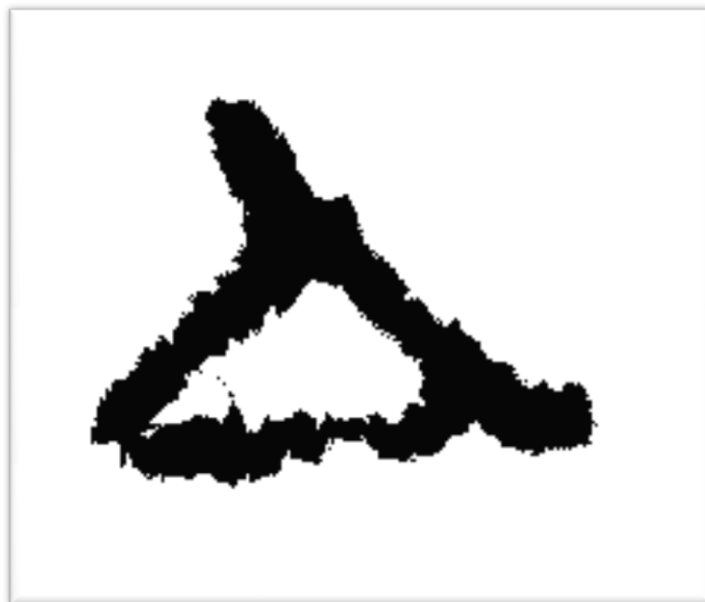
**Εικόνα 50:** Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Δ' όπως αυτές απαιτώνται στην I0046.

Παρακάτω παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάσης του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 51:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάσης του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'Δ', όπως αυτές απαιτώνται στην I0046.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Δ', που φαίνονται στην εικόνα 50.



**Εικόνα 52:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Δ' που απεικονίζονται στην εικόνα 50.



## 4.5 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ 'Ε'.

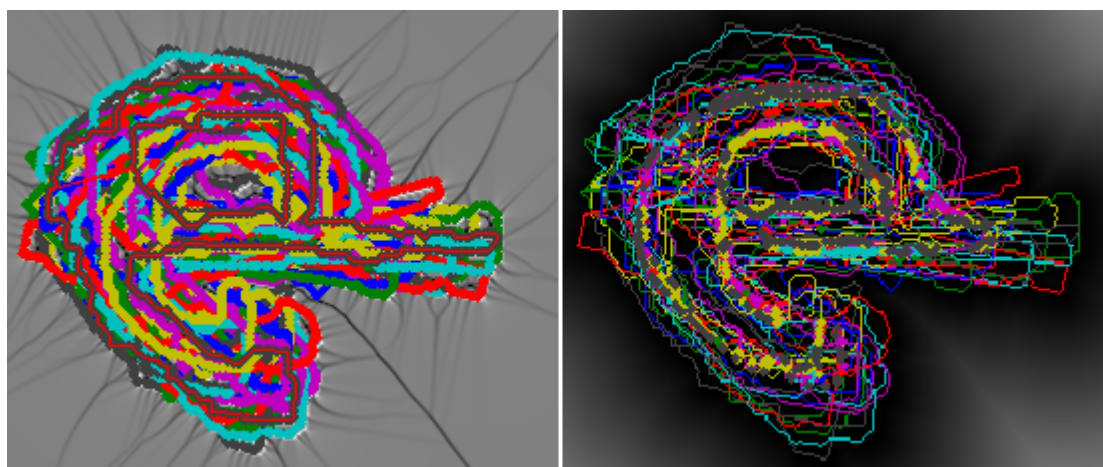
### 4.5.1 Υλοποιήσεις του γράμματος 'Ε' στην I0014.

Στην εικόνα 53 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Ε' όπως αυτές απατώνται στην I0014.



Εικόνα 53: Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Ε' όπως αυτές απατώνται στην I0014.

Παρακάτω παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



Εικόνα 54: Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'Ε', όπως αυτές απατώνται στην I0014.

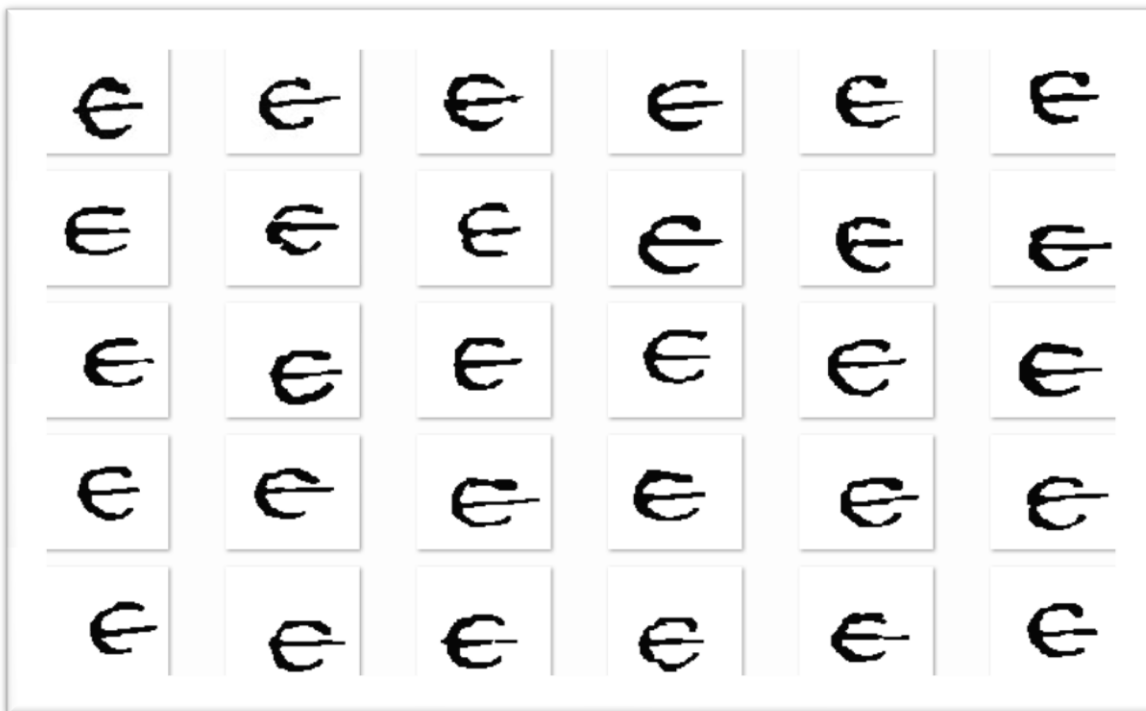
Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Ε', που φαίνονται στην εικόνα 53.



**Εικόνα 55:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Ε' που απεικονίζονται στην εικόνα 53.

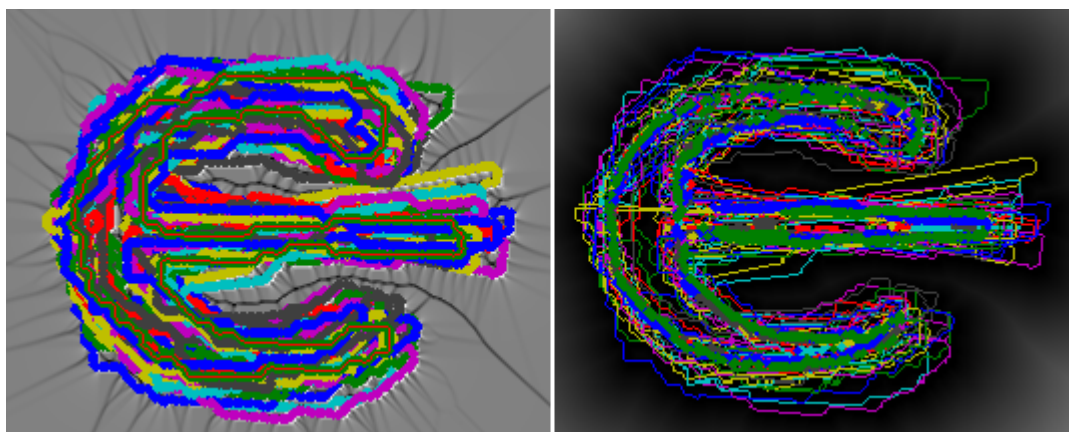
#### 4.5.2 Υλοποιήσεις του γράμματος 'Ε' στην I0016.

Στην εικόνα 56 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Ε' όπως αυτές απαιτώνται στην I0016.



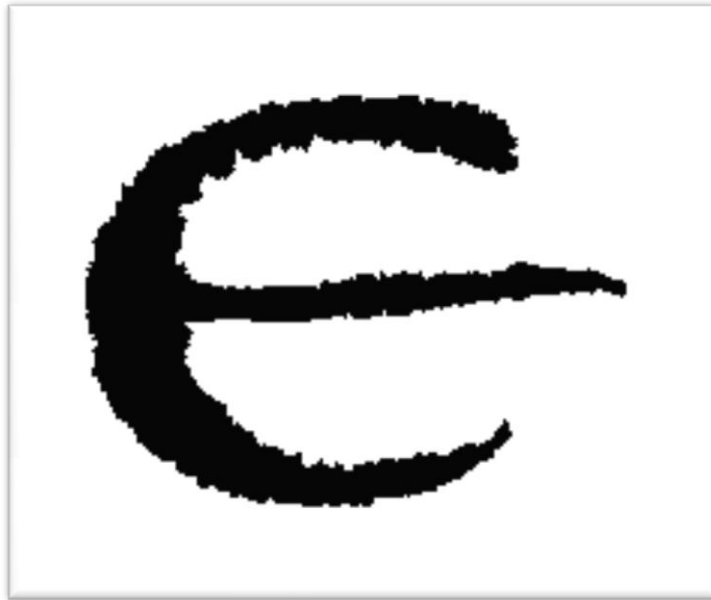
**Εικόνα 56:** Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Ε' όπως αυτές απαιτώνται στην I0016.

Παρακάτω παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 57:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'Ε', όπως αυτές απαιτώνται στην I0016.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Ε', που φαίνονται στην εικόνα 56.

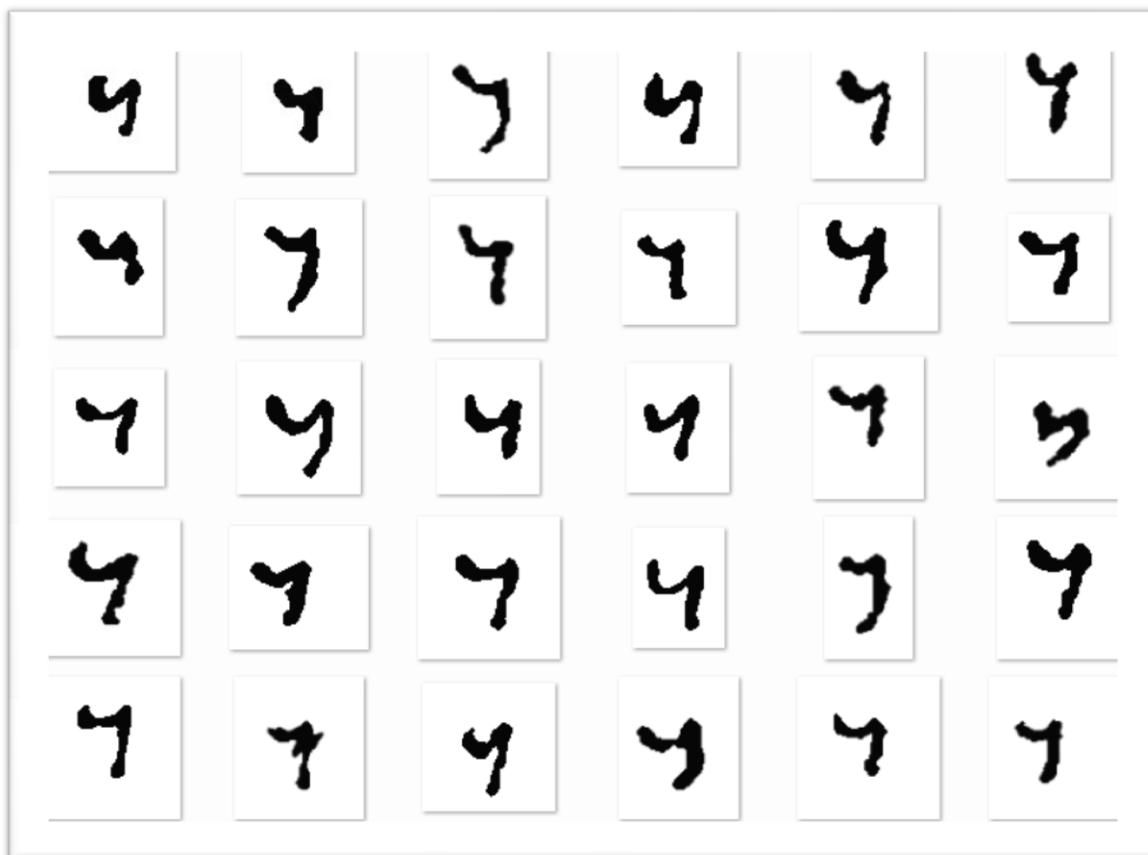


**Εικόνα 58:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Ε' που απεικονίζονται στην εικόνα 56.

## 4.6 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Η’.

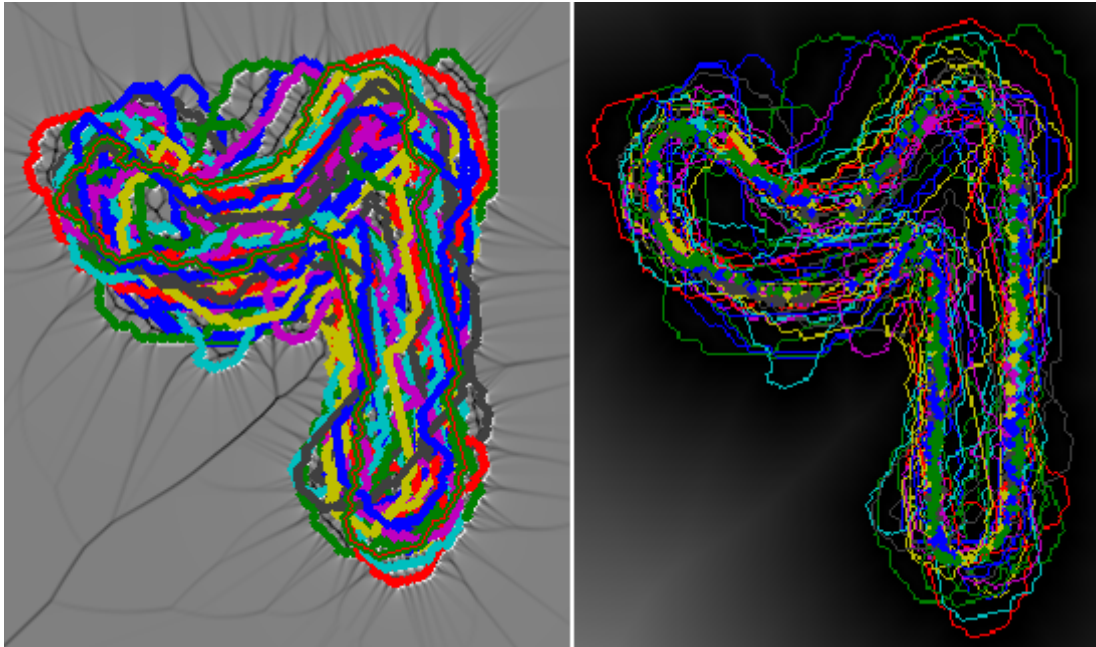
### 4.6.1 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Η’ στην I0006.

Στην εικόνα 59 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Η’ όπως αυτές απατώνται στην I0006.



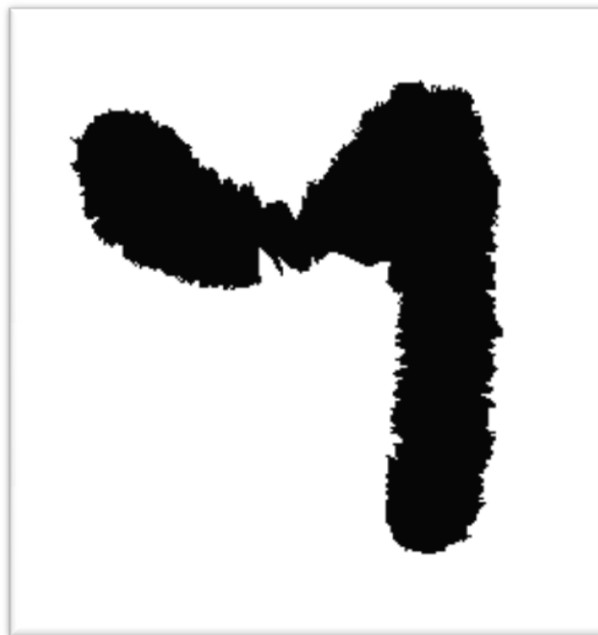
Εικόνα 59: Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Η’ όπως αυτές απατώνται στην I0006.

Στη διπλανή σελίδα παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 60:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'H', όπως αυτές απατώνται στην I0006.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'H', που φαίνονται στην εικόνα 59.



**Εικόνα 61:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'H' που απεικονίζονται στην εικόνα 59.

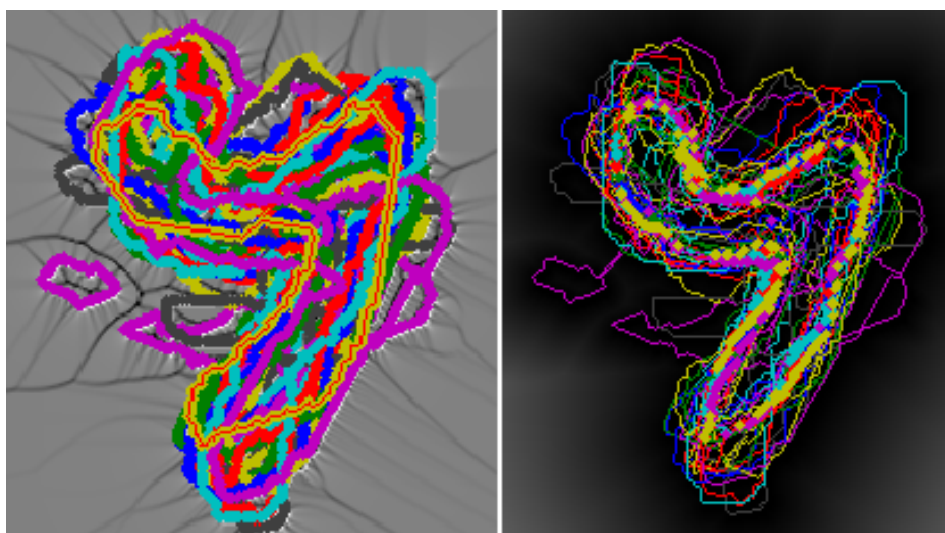
#### 4.6.2 Υλοποιήσεις του γράμματος 'Η' στην I0013.

Στην εικόνα 62 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Η' όπως αυτές απατώνται στην I0013.



Εικόνα 62: Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Η' όπως αυτές απατώνται στην I0013.

Παρακάτω παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



Εικόνα 63: Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'Η', όπως αυτές απατώνται στην I0013.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Η', που φαίνονται στην εικόνα 62.



**Εικόνα 64:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Η' που απεικονίζονται στην εικόνα 62.



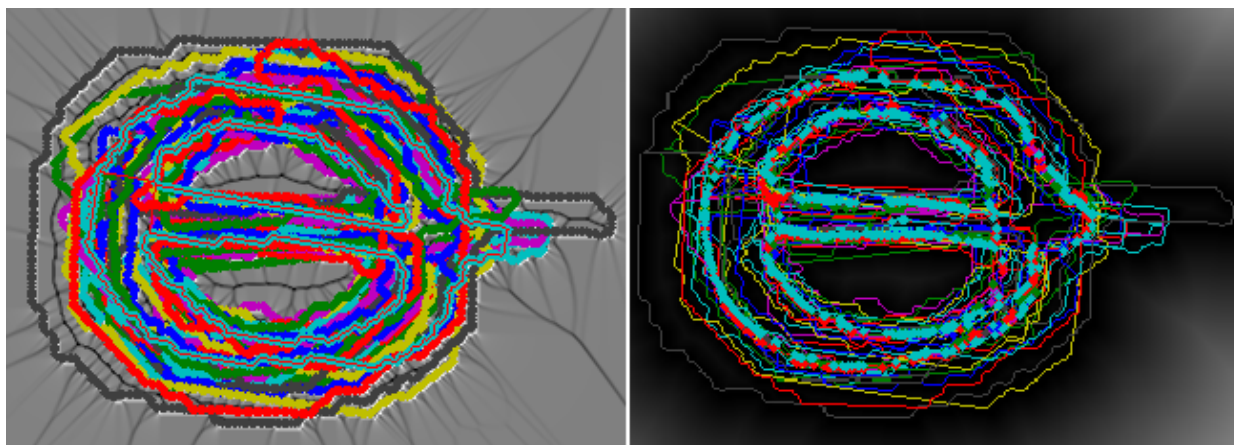
#### 4.7 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Θ’.

Στην εικόνα 65 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Θ’ όπως αυτές απαιτώνται στην I0016.



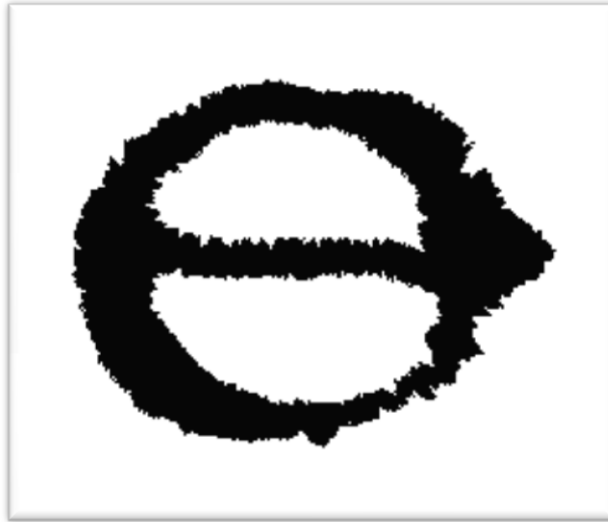
Εικόνα 65: Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Θ’ όπως αυτές απαιτώνται στην I0016.

Παρακάτω παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



Εικόνα 66: Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος ‘Θ’, όπως αυτές απαιτώνται στην I0016.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Θ', που φαίνονται στην εικόνα 65.



**Εικόνα 67:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Θ' που απεικονίζονται στην εικόνα 65.

## 4.8 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Κ’.

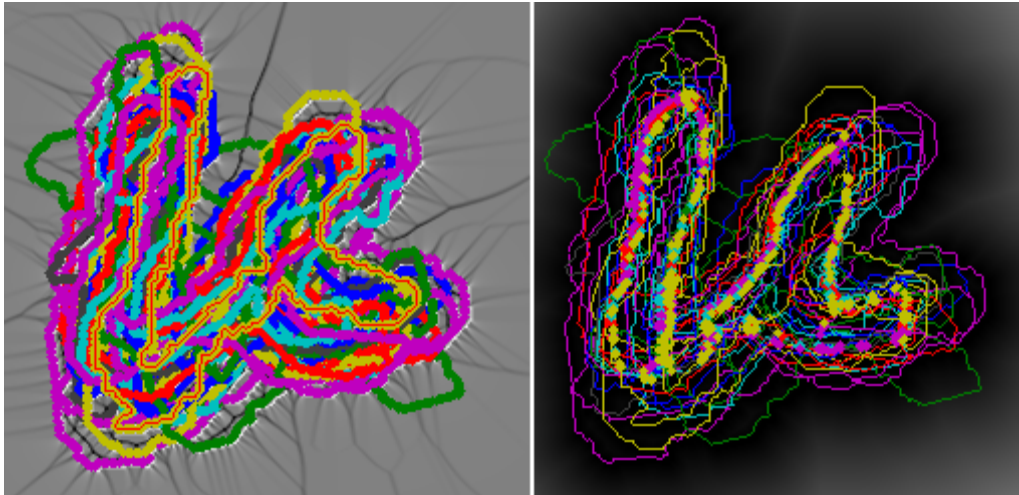
### 4.8.1 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Κ’ στην I0013.

Στην εικόνα 68 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Κ’ όπως αυτές απατώνται στην I0013.



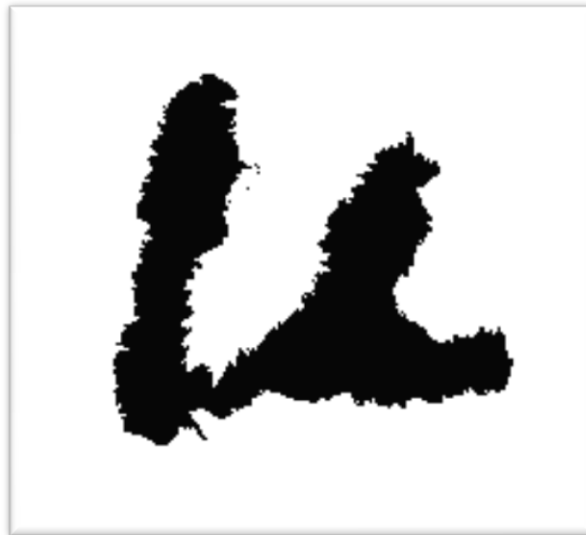
**Εικόνα 68:** Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Κ’ όπως αυτές απατώνται στην I0013.

Στη διπλανή σελίδα παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 69:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'Κ', όπως αυτές απατώνται στην I0013.

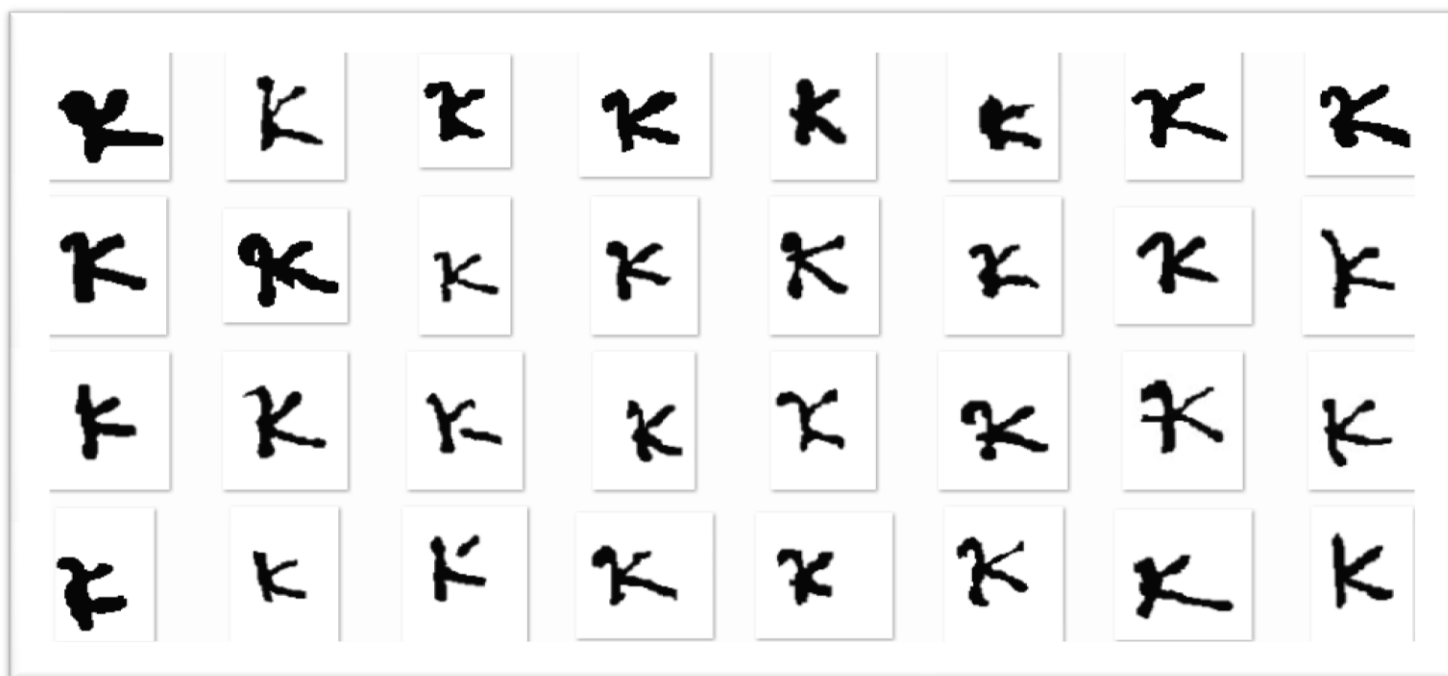
Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Κ', που φαίνονται στην εικόνα 68.



**Εικόνα 70:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Κ' που απεικονίζονται στην εικόνα 68.

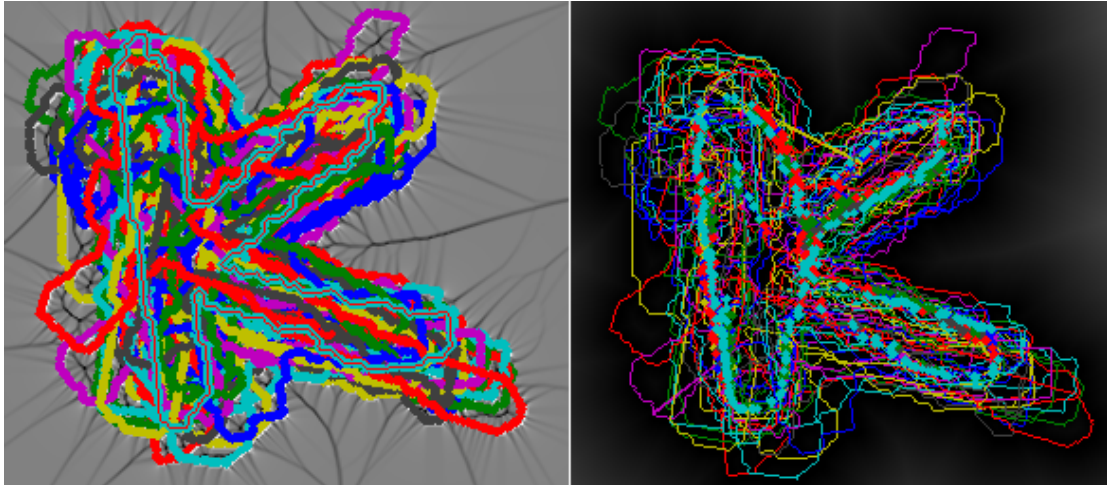
#### 4.8.2 Υλοποιήσεις του γράμματος 'Κ' στην I0014.

Στην εικόνα 71 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Κ' όπως αυτές απαιτούνται στην I0014.



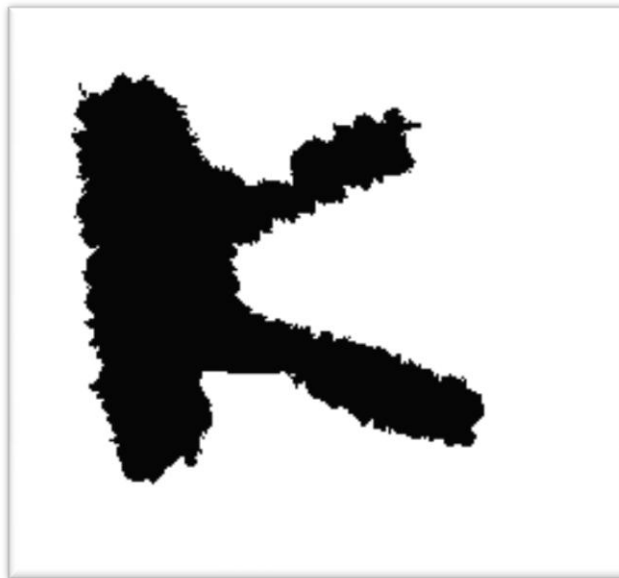
Εικόνα 71: Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Κ' όπως αυτές απαιτούνται στην I0014.

Στη διπλανή σελίδα παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 72:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'Κ', όπως αυτές απατώνται στην I0014.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Κ', που φαίνονται στην εικόνα 71.



**Εικόνα 73:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Κ' που απεικονίζονται στην εικόνα 71.

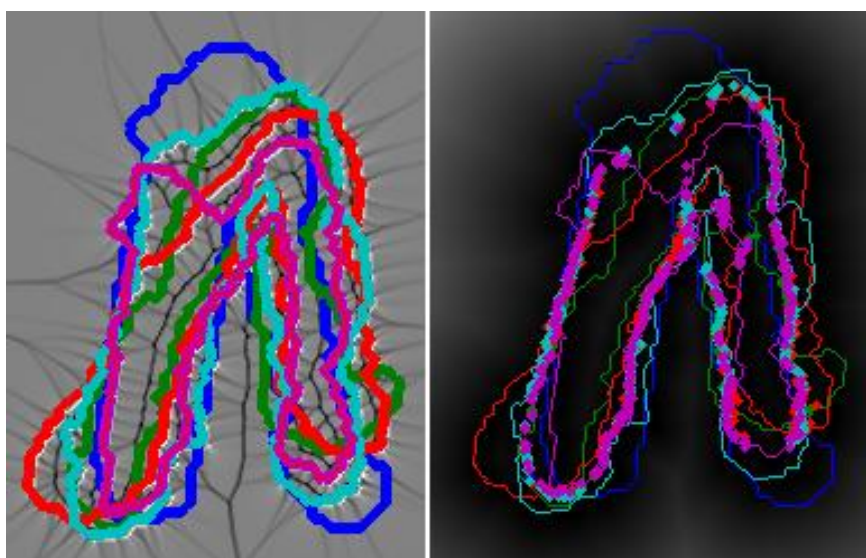
#### 4.9 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Λ’.

Στην εικόνα 74 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Λ’ όπως αυτές απαιτώνται στην I0039.



Εικόνα 74: Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Λ’ όπως αυτές απαιτώνται στην I0039.

Παρακάτω παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάσης του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



Εικόνα 75: Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάσης του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος ‘Λ’, όπως αυτές απαιτώνται στην I0039.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Λ', που φαίνονται στην εικόνα 74.



**Εικόνα 76:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Λ' που απεικονίζονται στην εικόνα 74.



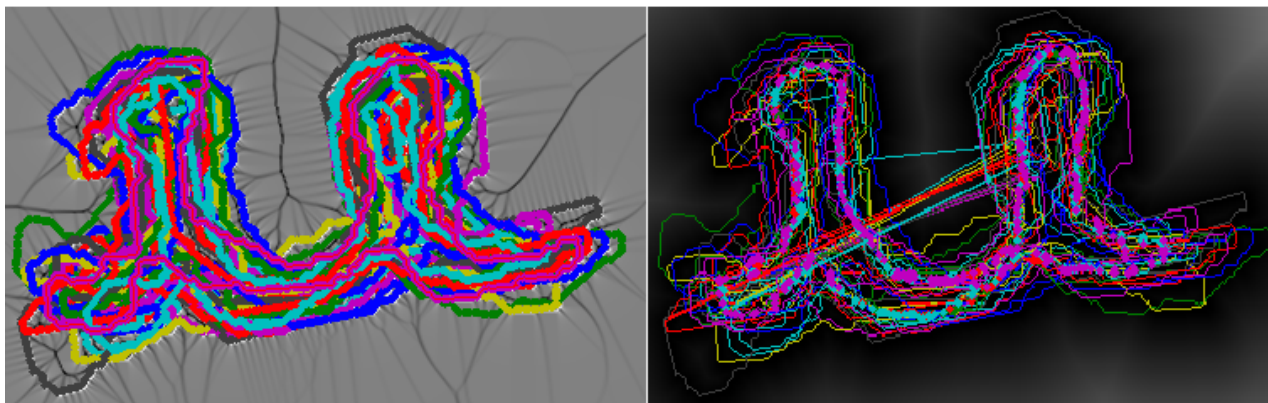
#### 4.10 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Μ’.

Στην εικόνα 77 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Μ’ όπως αυτές απατώνται στην I0016.



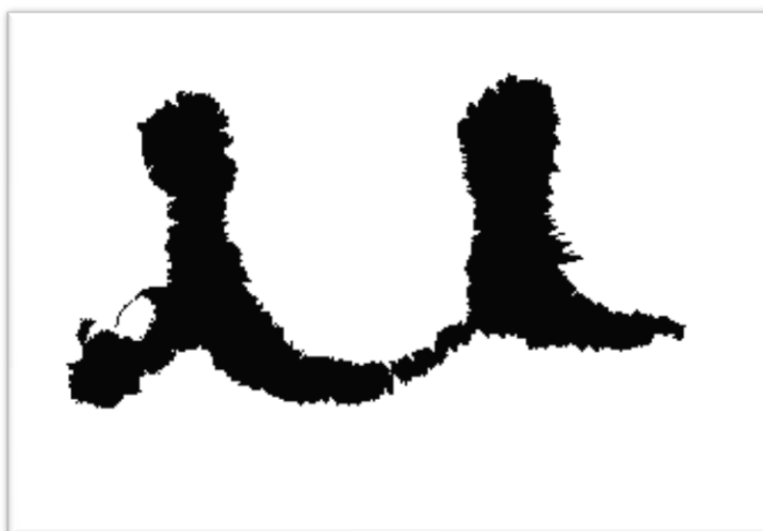
Εικόνα 77: Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Μ’ όπως αυτές απατώνται στην I0016.

Στη διπλανή σελίδα παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 78:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'Μ', όπως αυτές απατώνται στην I0016.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Μ', που φαίνονται στην εικόνα 77.

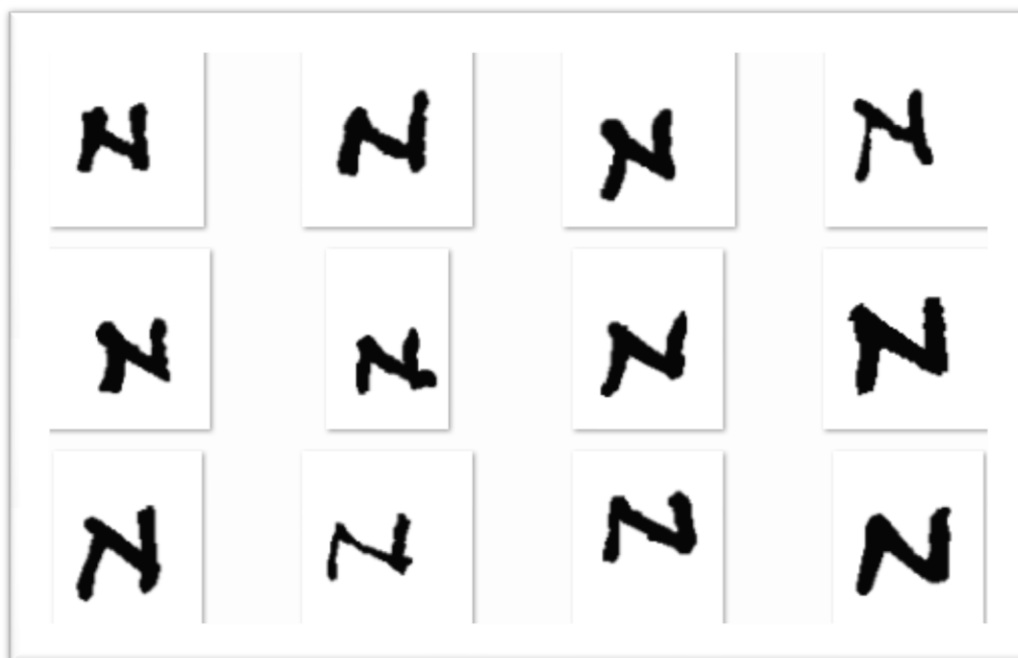


**Εικόνα 79:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Μ' που απεικονίζονται στην εικόνα 77.

## 4.11 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Ν’.

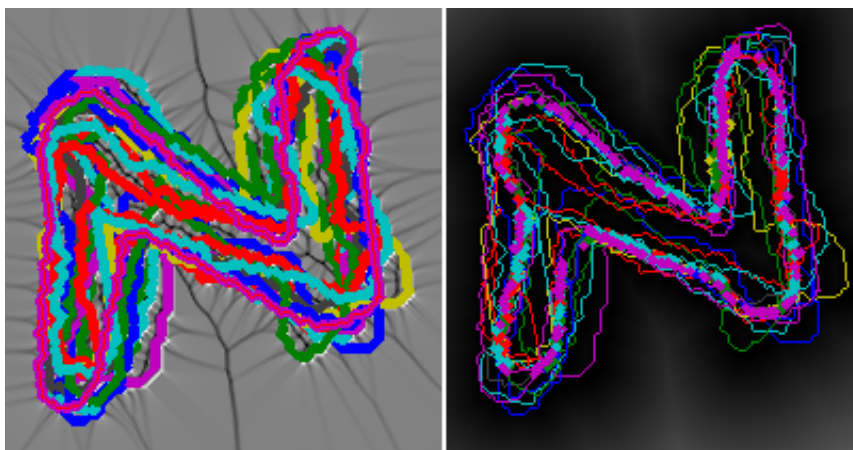
### 4.11.1 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ν’ στην I0039.

Στην εικόνα 80 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ν’ όπως αυτές απατώνται στην I0039.



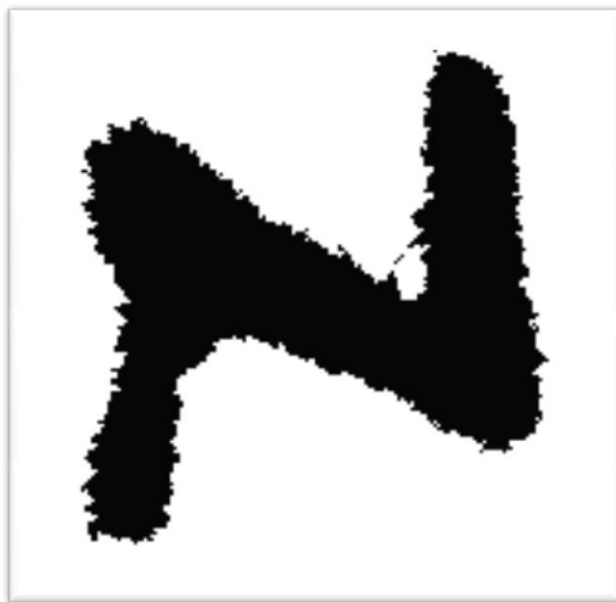
Εικόνα 80: Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ν’ όπως αυτές απατώνται στην I0039.

Παρακάτω παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



Εικόνα 81: Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ν’, όπως αυτές απατώνται στην I0039.

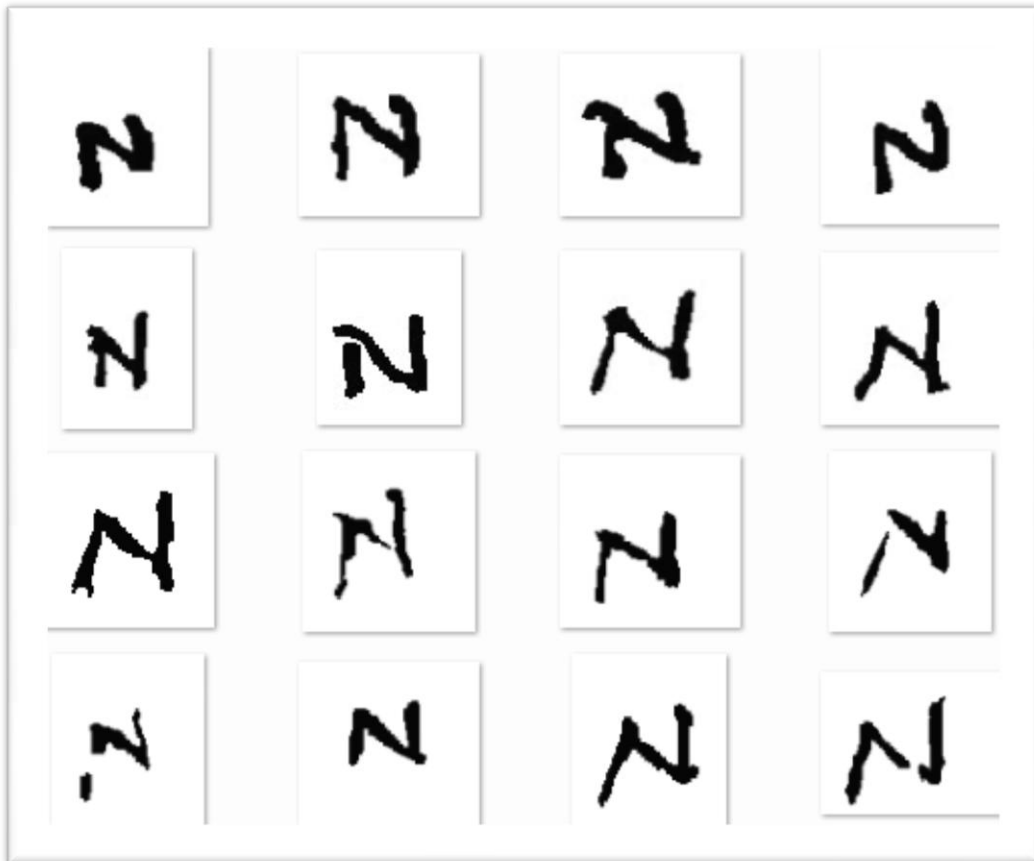
Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'N', που φαίνονται στην εικόνα 80.



**Εικόνα 82:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'N' που απεικονίζονται στην εικόνα 80.

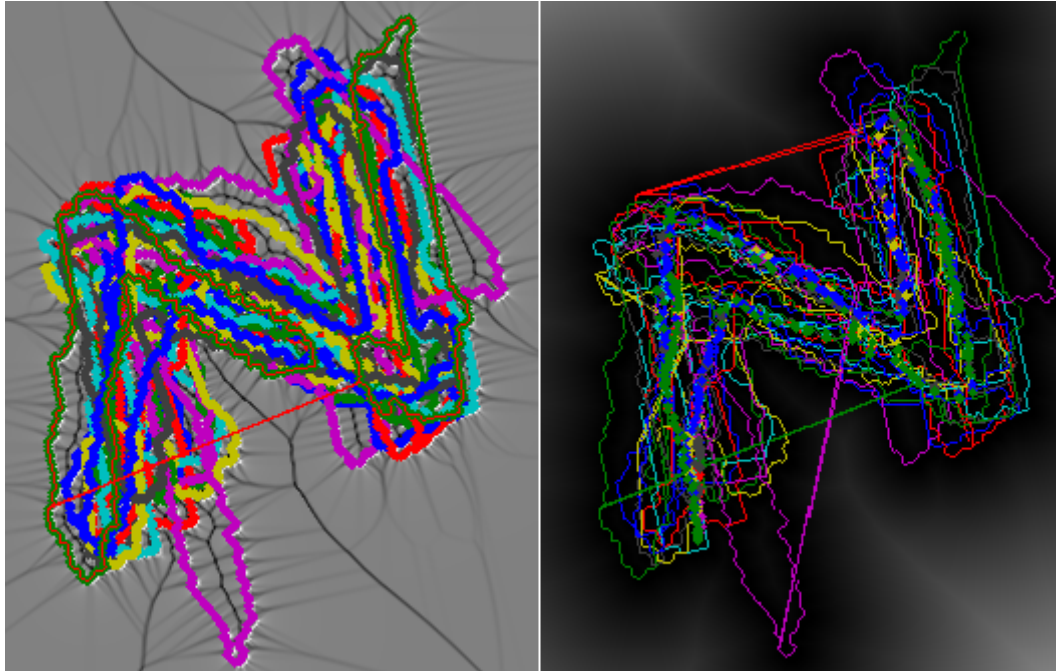
#### 4.11.2 Υλοποιήσεις του γράμματος 'N' στην I0043.

Στην εικόνα 83 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'N' όπως αυτές απατώνται στην I0043.



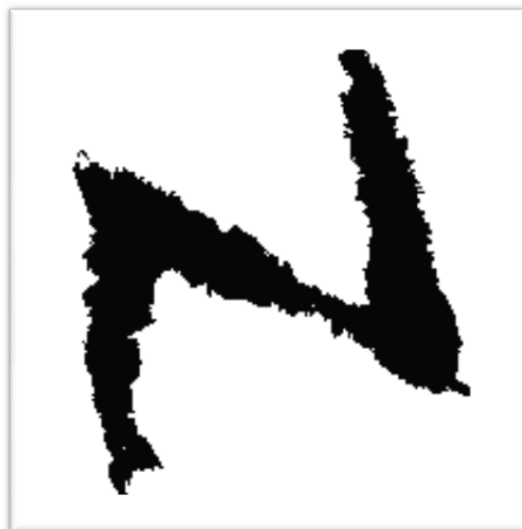
**Εικόνα 83:** Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'N' όπως αυτές απατώνται στην I0043.

Στη διπλανή σελίδα παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 84:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'N', όπως αυτές απατώνται στην I0043.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'N', που φαίνονται στην εικόνα 83.



**Εικόνα 85:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'N' που απεικονίζονται στην εικόνα 83.

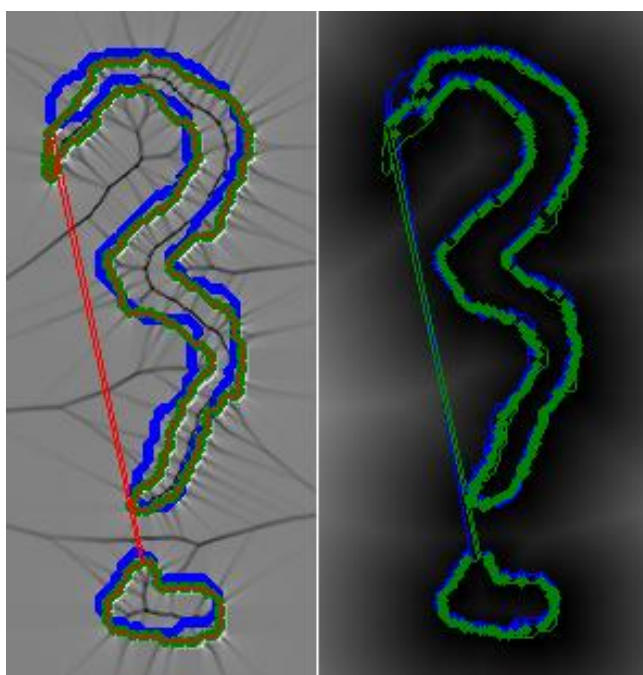
#### 4.12 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Ξ’.

Στην εικόνα 86 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ξ’ όπως αυτές απαιτώνται στην I0040.



**Εικόνα 86:** Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ξ’ όπως αυτές απαιτώνται στην I0040.

Παρακάτω παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 87:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ξ’, όπως αυτές απαιτώνται στην I0040.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Ξ', που φαίνονται στην εικόνα 86.



**Εικόνα 88:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Ξ' που απεικονίζονται στην εικόνα 86.



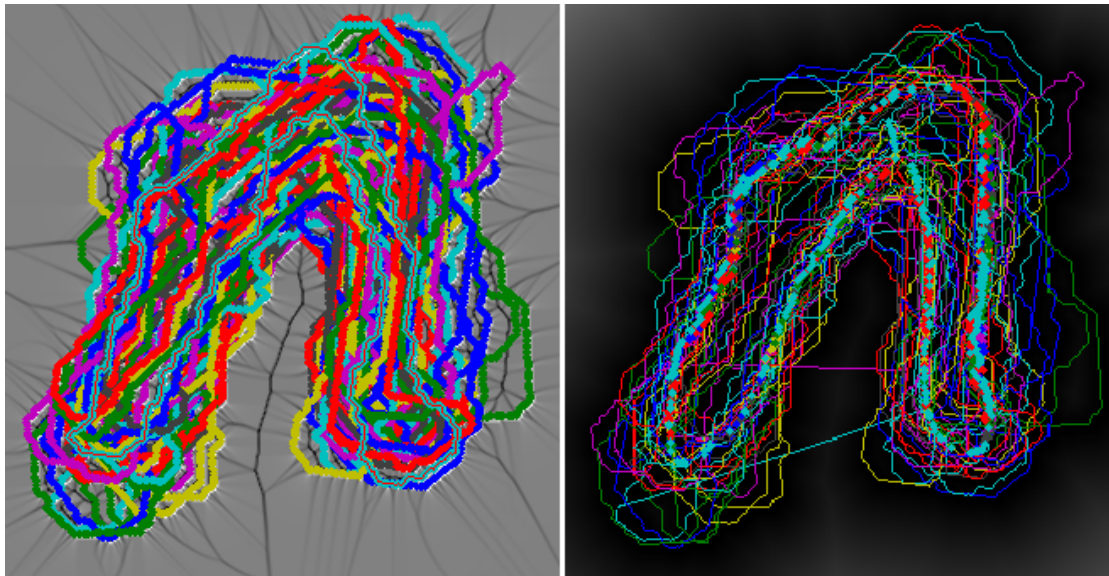
#### 4.13 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Π’.

Στην εικόνα 89 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Π’ όπως αυτές απατώνται στην I0006.



Εικόνα 89: Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Π’ όπως αυτές απατώνται στην I0006.

Στη διπλανή σελίδα παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 90:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'Π', όπως αυτές απατώνται στην I0006.

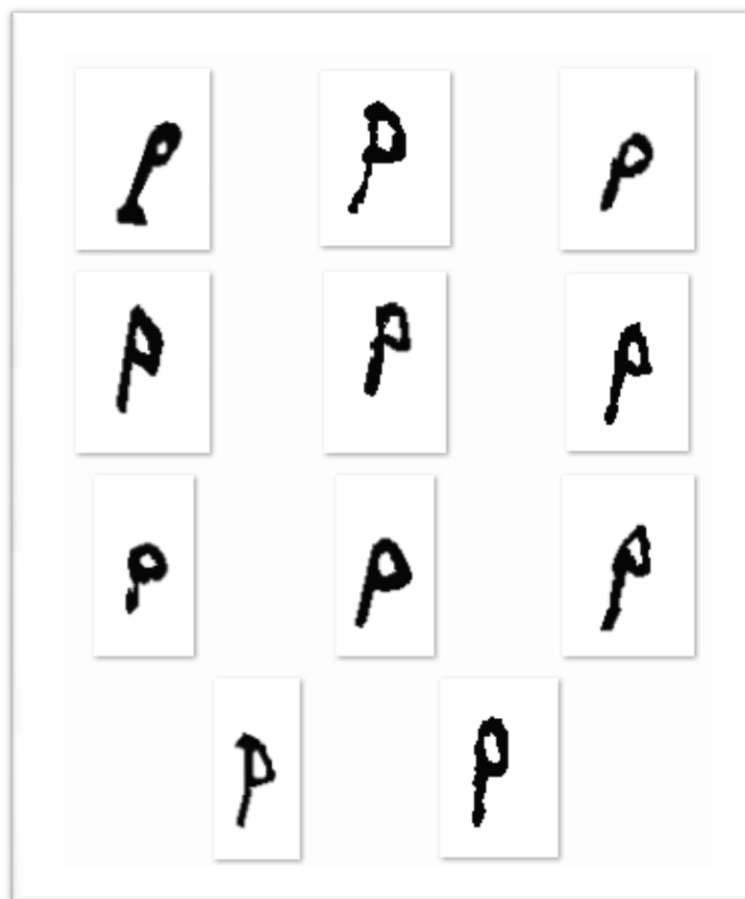
Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Π', που φαίνονται στην εικόνα 89.



**Εικόνα 91:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Π' που απεικονίζονται στην εικόνα 89.

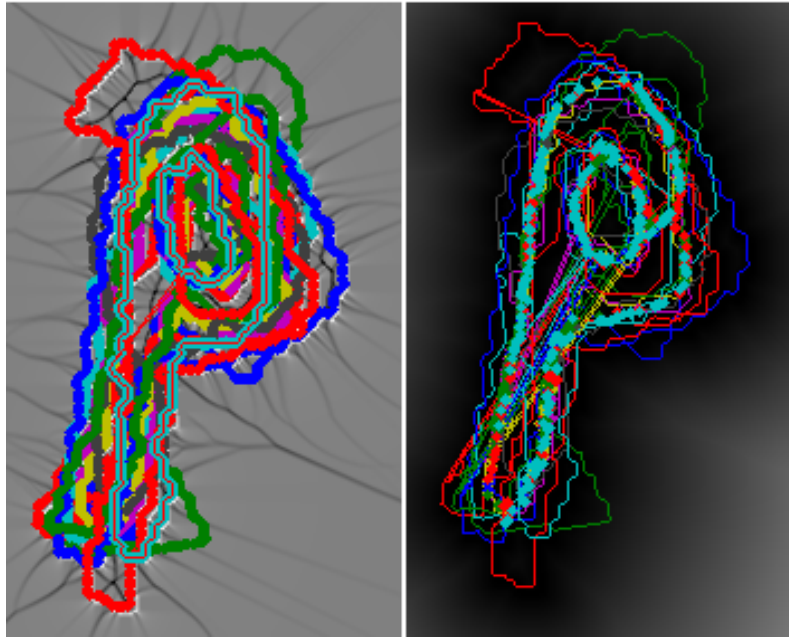
#### 4.14 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Ρ’.

Στην εικόνα 92 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ρ’ όπως αυτές απαιτούνται στην I0046.



Εικόνα 92: Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ρ’ όπως αυτές απαιτούνται στην I0046.

Στη διπλανή σελίδα παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 93:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'P', όπως αυτές απατώνται στην I0046.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Π', που φαίνονται στην εικόνα 92.



**Εικόνα 94:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'P' που απεικονίζονται στην εικόνα 92.

## 4.15 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ‘Ω’.

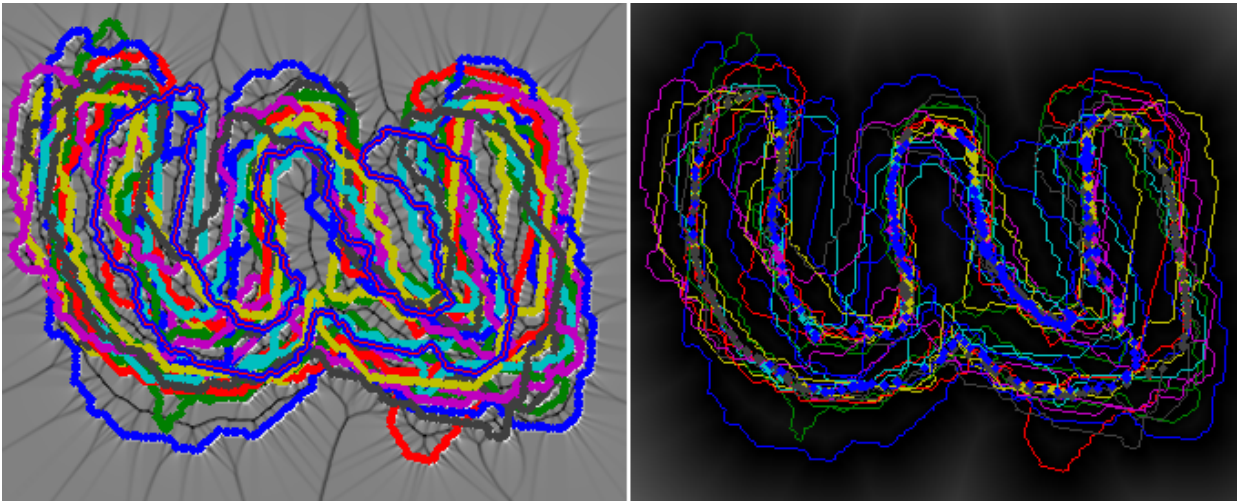
### 4.15.1 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ω’ στην I0014.

Στην εικόνα 95 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ω’ όπως αυτές απατώνται στην I0014.



Εικόνα 95: Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ω’ όπως αυτές απατώνται στην I0014.

Στη διπλανή σελίδα παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 96:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'Ω', όπως αυτές απατώνται στην 10014.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Ω', που φαίνονται στην εικόνα 95.



**Εικόνα 97:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Ω' που απεικονίζονται στην εικόνα 95.

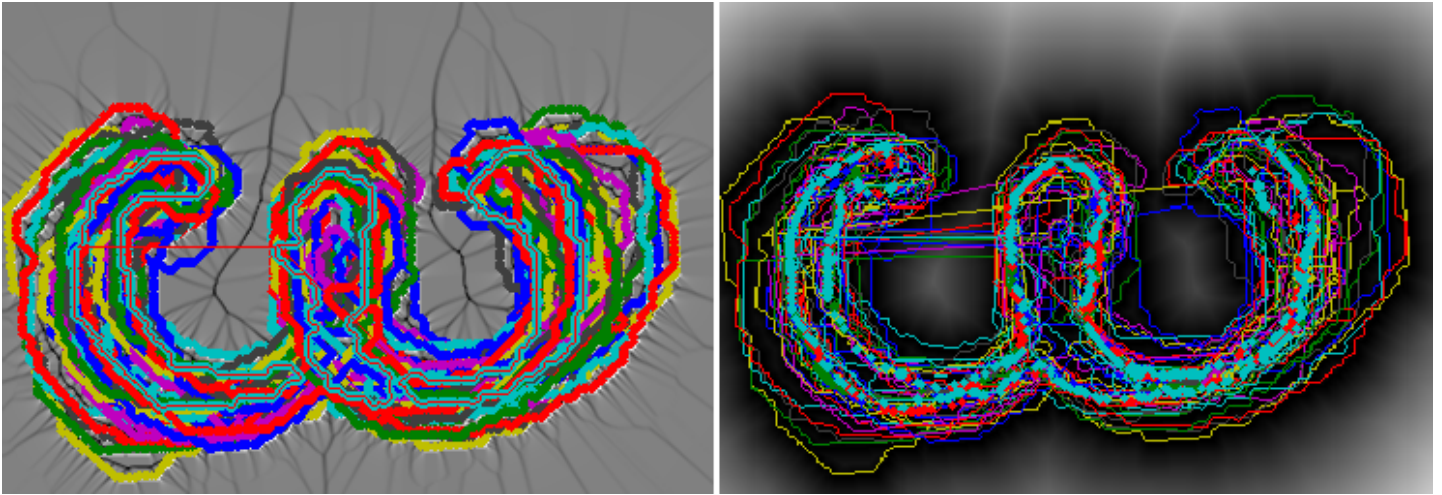
#### 4.15.2 Υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ω’ στην I0016.

Στην εικόνα 98 παρουσιάζουμε τις διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ω’ όπως αυτές απατώνται στην I0016.



**Εικόνα 98:** Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος ‘Ω’ όπως αυτές απατώνται στην I0016.

Στη διπλανή σελίδα παρατίθεται τόσο η πρώτη εκτίμηση του βέλτιστου ταιριάσματος σύμφωνα με την προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων, όσο και η βέλτιστη προσαρμογή βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Οι διαφορετικές υλοποιήσεις γραμμάτων παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα, για την ευκολότερη διάκρισή τους.



**Εικόνα 99:** Αριστερά απεικονίζεται η πρώτη εκτίμηση του ταιριάσματος και δεξιά απεικονίζεται το βέλτιστο ταιρίασμα βάση του κριτηρίου *τομή διά ένωση*. Το σύνολο εφαρμογής αποτελείται από υλοποιήσεις του γράμματος 'Ω', όπως αυτές απατώνται στην I0016.

Παρακάτω ακολουθεί το πλατωνικό πρότυπο, όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις του συμβόλου 'Ω', που φαίνονται στην εικόνα 98.



**Εικόνα 100:** Πλατωνικό πρότυπο όπως αυτό παράγεται για τις υλοποιήσεις συμβόλων του γράμματος 'Ω' που απεικονίζονται στην εικόνα 98.



## 5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.

Ολοκληρώνοντας τον κύκλο των πειραματικών εφαρμογών, και εξετάζοντας τα αποτελέσματα, μέρος των οποίων παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρατηρούμε ότι είναι πολύ ενθαρρυντικά και ελπιδοφόρα για το μέλλον της αυτόματης αναγνώρισης γραφών αρχαίου κειμένου. Σε όλες τις περιπτώσεις το κριτήριο της *τομής διά ένωσης*, ενεργώντας επικουρικά, έρχεται να βελτιστοποιήσει τις παραχθείσες προσαρμογές βάση του κριτηρίου των ελαχίστων τετραγώνων, οδηγώντας σε ταιριάσματα ποιοτικώς πολύ καλά και σύμφωνα με την ανθρώπινη διαίσθηση.

Αξιοσημείωτο αποτελεί το γεγονός ότι τα ταιριάσματα που παράγονται βάση του κριτηρίου των ελαχίστων τετραγώνων, τα οποία εν γένει είναι υποβέλτιστα, δεν απέχουν οπτικώς αισθητά πολύ από τις βέλτιστες τελικές προσαρμογές, γεγονός που έρχεται να επιβεβαιώσει την διαίσθηση ότι τα αποτελέσματα της παραγράφου 3.5 δίνουν ένα πολύ καλό σημείο έναρξης για την εξαντλητική αναζήτηση της βέλτιστης προσαρμογής σύμφωνα με το κριτήριο της *τομής διά ένωσης*.

Επιπλέον, το πλατωνικό πρότυπο που παράγεται, βάση του βέλτιστου ταιριάσματος, έρχεται και αυτό με την σειρά του να επιβεβαιώσει την ανθρώπινη διαίσθηση, καθώς οι βέλτιστοι παραγόμενοι αντιπρόσωποι φαίνονται οπτικά να καταφέρνουν να «ανιχνεύουν» και να «αιχμαλωτίζουν» μέσα στο σχήμα τους όλα τα στοιχεία των διαφόρων υλοποιήσεων των γραμμάτων που η ανθρώπινη αντίληψη θα ονομάτιζε χαρακτηριστικά ενός γραφικού στυλ. Φυσικά, για να μπορεί να λεχθεί με ασφάλεια η παραπάνω διαπίστωση απαιτείται η πλήρης σύγκριση όλων των πλατωνικών, μέσω της εφαρμογής και του τελευταίου στατιστικού βήματος για την αυτόματη αναγνώριση γραφέα, και η επαλήθευση των συμπερασμάτων με τα ήδη εξακριβωμένα με μη υπολογιστικές μεθόδους. Η συμφωνία των δύο συμπερασμάτων, πέρα του ότι θα αποτελέσει άλλη μία ηχηρή νίκη της ερευνητικής ομάδας, θα αποτελέσει ταυτόχρονα ένα πολύ ισχυρό τεκμήριο ότι η αναγνώριση γραφέα τείνει ομολογουμένως να επιλυθεί υπολογιστικά και η μέθοδος που παρουσιάστηκε πιθανώς να είναι από τις πλέον ορθότερες προσεγγίσεις.

Βέβαια, ο έλεγχος και η σύγκριση των πλατωνικών προτύπων αποτελεί αντικείμενο μελέτης μίας άλλης εργασίας. Παρόλα αυτά, θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ερευνητική ομάδα, που κάνει τα σχετικά πειράματα, έχει αρχίσει ήδη τις πρώτες δοκιμές και τα πρώτα εξαχθέντα αποτελέσματα είναι αρκετά ελπιδοφόρα. Όμως, κανένα συμπέρασμα δεν μπορεί να ληφθεί χωρίς να γίνει εξαντλητική έρευνα, όπως προειπώθηκε, και χωρίς να ελεγχθεί όλο το σύνολο εφαρμογής.

Λίγο πριν το τέλος, κρίθηκε αναγκαίος ο σχολιασμός ενός χαρακτηριστικού της μεθόδου που αναφέρθηκε στην παράγραφο 3.2, ότι δηλαδή η προσέγγιση της είναι *text – independent*. Κάνοντας χρήση μίας *text – independent* μεθόδου δεν είναι απαραίτητος ο μετασχηματισμός των δεδομένων σε αναπαραστάσεις που δεν συσχετίζονται με τα εγγενή χαρακτηριστικά του γραφικού στυλ κάθε ανθρώπου, με αποτέλεσμα να είναι πολύ εύκολη η επαλήθευση της ορθότητας των βημάτων της μεθόδου, πράγμα που έγινε ιδιαίτερα φανερό σε όλα τα παραπάνω συμπεράσματα.

Συνοψίζοντας, όλα τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι η τεχνολογική εξέλιξη στον τομέα της πληροφορικής, μπορεί να αποτελέσει αρωγό στην προσπάθεια

εκσυγχρονισμού των μεθόδων που μέχρι στιγμής χρησιμοποιούνται στην αρχαιολογική έρευνα. Επίσης, είναι φανερό ότι η έρευνα στην αυτόματη αναγνώριση γραφέα αρχαίου κειμένου, όπως φάνηκε και από τα παραπάνω, έχει να παρουσιάσει πολύ καρποφόρα αποτελέσματα στα επόμενα χρόνια, και η επίλυση της θα ρίξει φώς, μέσω της έμμεσης χρονολόγησης των αντίστοιχων κειμένων, σε πολλά θέματα που απασχολούν τη σύγχρονη Αρχαιολογία.

Κλείνοντας, θα πρέπει να σημειωθεί ότι αν και αντικείμενο αυτής της διπλωματικής είναι η εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου στην Αθηναίων Πολιτεία, αιώτερος σκοπός της ερευνητικής ομάδας είναι η ωρίμανση της ιδέας και η εφαρμογή της σε πολύ μεγαλύτερο σύνολο κειμένων, και μάλιστα σε κείμενα όχι μόνο ελληνικής γραφής αλλά και πολλών άλλων, όπως της λατινικής, ετρουσκικής ή της ιερογλυφικής της Αρχαίας Αιγύπτου. Τέλος, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή ο όγκος των σωζόμενων επιγραφών αριθμείται πάνω από 50.000, αριθμός που καθιστά επιτακτική ανάγκη την υπολογιστική προσέγγιση του προβλήματος και από μόνος του καταδεικνύει πόσο σημαντικό έργο για την Αρχαιολογία είναι η ανάπτυξη ενός τέτοιου συστήματος.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- [1] “Αρχαία Ελληνικά Φιλοσοφικός Λόγος”, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Οργανισμός εκδόσεως διδακτικών βιβλίων, Αθήνα 2010.
- [2] Αριστοτέλης, Αθηναίων Πολιτεία, Βιβλιοθήκη αρχαίων συγγραφών, Ι. Ζαχαρόπουλος.
- [3] Smith, George, "Newton's *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2008 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/newton/principia/>>.
- [4] Coolidge, J. L. "The Unsatisfactory Story of Curvature". *The American Mathematical Monthly*, Vol. 59, No. 6 (June. - Jul., 1952), pp. 375–379.
- [5] Cajori, Florian. *A History of Mathematics*. New York: Macmillan Company, 1894.
- [6] [www.wikipedia.com](http://www.wikipedia.com)
- [7] “Identifying the writer of ancient inscriptions and Byzantine codices. A novel approach”, C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, F. Giannopoulos, S. Zannos, D. Arabadjis, M. Panagopoulos, E. Kalfa, C. Blackwell, S. Tracy, *Computer Vision and Image Understanding*, Volume 121, April 2014, Pages 57-73.
- [8] “Ανάπτυξη προηγμένων μεθόδων αναγνώρισης προτύπων και μαθηματική θεμελίωση για τον εντοπισμό του τρόπου δημιουργίας και της ταυτότητας του δημιουργού σημαντικών αρχαιολογικών ευρημάτων”, Διδακτορική διατριβή, Ρουσόπουλος Παναγιώτης, 2010.
- [9] “New mathematical and algorithmic schemes for pattern classification with application to the identification of writers of important ancient documents”, D. Arabadjis, F. Giannopoulos, C. Papaodysseus, S. Zannos, P. Rousopoulos, M. Panagopoulos, C. Blackwell, *Pattern Recognition*, Volume 46, Issue 8, August 2013, Pages 2278-2296.
- [10] “Όραση Υπολογιστών”, Πέτρος Μαραγκός, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 2005.
- [11] “Σημειώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας Καμπυλών και Επιφανειών”, Ε. Βασιλείου, Μ. Παπατριανταφύλλου, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα 2010.
- [12] J. Marsden, A. Tromba, "Διανυσματικός Λογισμός", Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- [13] A. Pressley, “Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία”, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2011.

- [14] Lee, John M. (1997). *Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag.
- [15] Lee, John M. (2013). *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Text in Mathematics (2nd ed.). Springer.
- [16] “Automatic writer identification of ancient Greek inscriptions”, M. Panagopoulos, C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, D. Dafi, S. Tracy, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2009.
- [17] “Μελέτη και εφαρμογή προηγμένων αλγορίθμων αναγνώρισης προτύπων”, Πτυχιακή Εργασία, Λυδία Γ. Ιωάννου, 2014.
- [18] “The study of hands on Greek inscriptions: the need for a digital approach”, S. Tracy, C. Papaodysseus, Am. J. Archaeol. (2009) 99–102.
- [19] “Identifying hands on ancient Athenian inscriptions: first steps towards a digital approach”, S.V. Tracy, C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, M. Panagopoulos, D. Fragoulis, D. Dafi, Th. Panagopoulos, , Archaeometry 49 (4) (2007) 749–764.
- [20] A.V. Oppenheim and R.W. Schafer, Discrete-Time Signal Processing , Prentice Hall, 3rd edition.
- [21] I. Bar-Yosef, I. Beckman, K. Kedem, I. Dinstein, Binarization, character extraction, and writer identification of historical Hebrew calligraphy documents, Int. J. Doc. Anal. Recogn. 2 (9) (2007) 89–99.
- [22] S. Nomura, K. Yamanaka, O. Katai, H. Kawakami, T. Shiose, A novel adaptive morphological approach for degraded character image segmentation, Pattern Recogn. 38 (2005) 1961–1975.
- [23] Y. Lu, M. Shridhar, Character segmentation in handwritten words – an overview, Pattern Recogn. 29 (1) (1996) 77–96.