



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ»

Μεταπτυχιακή Εργασία

**Εφαρμογή της μεθόδου Extremum Seeking Control (ESC) στο πρόβλημα
της πτήσης δύο αεροσκαφών σε σχηματισμό.**

Μπατσής Ιωάννης

Επιβλέπων Καθηγητής: Καθηγητής Κωνσταντίνος Κυριακόπουλος

ΑΘΗΝΑ 2021

Περίληψη

Η πτήση σε σχηματισμό είναι εμπνευσμένη από τη φύση, καθώς χρησιμοποιείται από τα αποδημητικά πουλιά. Πετώντας σε σχηματισμό το κάθε πτηνό εκμεταλλεύεται τα ανοδικά ρεύματα που δημιουργεί το μπροστινό του και έτσι ίπταται καταναλώνοντας λιγότερη ενέργεια.

Η ίδια τεχνική μπορεί αποδεδειγμένα να χρησιμοποιηθεί και από τα αεροσκάφη. Καθώς ένα αεροσκάφος κινείται διαμέσου του αέρα, δημιουργεί αέρια ρεύματα στο χώρο γύρω από αυτό με τη μορφή δινών. Οι δίνες αυτές επάγουν δυνάμεις και ροπές στους ακόλουθους του σχηματισμού και υπάρχει ένα συγκεκριμένο σημείο στο χώρο όπου η επαγόμενη άντωση και η οπισθέλκουσα μεγιστοποιείται και ελαχιστοποιείται αντίστοιχα.

Στην παρούσα εργασία μελετάμε το πρόβλημα της πτήσης δύο αεροσκαφών σε σχηματισμό. Συγκεκριμένα θα δημιουργήσουμε ένα μοντέλο προσομοίωσης δύο αεροσκαφών, στο οποίο ο ακόλουθος θα παραμένει σε σχηματισμό με τον αρχηγό στο προαναφερθέν κατάλληλο σημείο του χώρου, το οποίο θα εντοπίζεται από ένα σύστημα αυτομάτου ελέγχου που θα σχεδιάσουμε με τη μέθοδο Extremum Seeking Control.

Abstract

Formation flight is inspired by nature itself, since it is being used by migratory birds. By flying in formation, each bird can exploit the lifting air currents that its leader creates and therefore can fly by consuming less energy.

The same technique is proven to be able to be used by aircraft. As an aircraft flies through the air, it generates air currents in the surrounding space in the form of vortices. These vortices induce forces and moments at the formation followers and there exists a particular point in space where induced lift and drag is maximized and minimized accordingly.

In this thesis we study the problem of formation flight. More precisely, we will create a simulation model of two aircraft, in which the follower will remain in formation with the leader at the aforementioned appropriate point in space, which will be detected by a control system which we will design with the method of Extremum Seeking Control.

*Αφιερώνεται στο σεβαστό Γέροντά μου
Αρχιμανδρίτη Βαϊόπουλο Ειρηναίο
και στην αδελφότητα της Ιεράς Μονής
Αγίου Νικοδήμου του Αγιορείτου, Πυργετού, Λαρίσης.*

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών "Συστήματα Αυτοματισμού". Το βασικό κίνητρο υπήρξε η επιθυμία για την ενασχόληση με το αεροσκάφος και ιδιαιτέρως με τον σύγχρονο και ταχέως αναπτυσσόμενο τομέα των Μη Επανδρωμένων Αεροσκαφών (Unmanned Aerial Vehicles, UAV).

Η επιθυμία του ανθρώπου να πετάξει υπήρχε από αρχαιοτάτων χρόνων. Από την ελληνική μυθολογία είναι πασίγνωστος ο μύθος του Δαιδάλου και του Ικάρου, οι οποίοι κατασκευάζοντας ένα ζεύγος φτερών, τα οποία προσάρμοσαν στο σώμα τους με κερί, κατόρθωσαν να δραπέτεύσουν από την Κρήτη όπου τους κρατούσε ο βασιλιάς Μίνωας. Κατά την πτήση όμως ο Ίκαρος, ορμώμενος ίσως από τη νιότη του, δεν άκουσε τη συμβουλή του πατέρα του και ανέβηκε σε μεγαλύτερο ύψος και ποιο κοντά στον ήλιο, με αποτέλεσμα το κερί που συγκρατούσε τα φτερά του να λιώσει και ο ίδιος να πέσει στη θάλασσα, στο χώρο όπου σήμερα καλούμε Ικάριο πέλαγος.

Η ιστορία της πτήσης είναι τόσο μεγάλη και πολύπλευρη που είναι αδύνατο να την καλύψουμε σε λίγες γραμμές. Για το λόγο αυτό θα προσπαθήσουμε να αναφερθούμε επιγραμματικά στα πιο βασικά σημεία της. Ο άνθρωπος έκανε κατά το παρελθόν αμέτρητες προσπάθειες προκειμένου να κατακτήσει τους αιθέρες. Μέχρι ωστόσο τις αρχές του 20^{ου} αιώνα το καλύτερο που κατορθώθηκε ήταν σύντομη πτήση με ανεμόπτερα από πλαγιές και η παραμονή στον αέρα με το αερόστατο. Η 17^η Δεκεμβρίου 1903 είναι μια ημερομηνία ορόσημο για τη σύγχρονη αεροπλοΐα, καθώς δύο μηχανικοί ποδηλάτων από το Ντίπτον της πολιτείας του Οχάιο, οι αδερφοί Ράιτ (Wright), πραγματοποίησαν την πρώτη επανδρωμένη μηχανοκίνητη πτήση με αεροσκάφος βαρύτερο του αέρα, στο Κίτι Χόκ (Kitty Hawk) της Βόρειας Καρολίνας. Το αεροσκάφος τους που ονόμασαν Φλάιερ (Flyer), παρέμεινε κατά την πρώτη πτήση στον αέρα για περίπου 12 s και διήνυσε μια απόσταση ίση με 36 m. Έκτοτε η ανάπτυξη του αεροσκάφους υπήρξε ραγδαία.

Το αεροσκάφος κατά την εξέλιξή του γινόταν συνεχώς ταχύτερο και μπορούσε να ίππεται σε μεγαλύτερα ύψη. Η αξία του αναγνωρίστηκε και κατά τη διάρκεια του Α΄ και Β΄ Παγκοσμίου Πολέμου όπου από ένα απλό μέσο μεταφοράς και εξερεύνησης μετατράπηκε σε πολεμική μηχανή, φέροντας βόμβες και πυροβόλα όπλα. Στα χρόνια που ακολούθησαν τα αεροσκάφη άρχισαν να αποκτούν νέο σχήμα και να εφοδιάζονται πλέον με ισχυρούς κινητήρες με αποτέλεσμα το 1947 να πραγματοποιηθεί η πρώτη επανδρωμένη υπερηχητική πτήση με το αεροσκάφος Bell X-1 και κυβερνήτη τον Charles "Chuck" Yeager.

Το αεροσκάφος στις μέρες μας έχει αναπτυχθεί σε πολύ μεγάλο βαθμό καθώς χρησιμοποιείται τόσο για μεταφορές και για πολεμικές επιχειρήσεις όσο και για ερευνητικούς σκοπούς. Ένας ραγδαία εξελισσόμενος τομέας έρευνας είναι αυτός των UAV. Η ιδιαιτερότητα που παρουσιάζουν σε σχέση με τα συμβατικά αεροσκάφη είναι η απουσία του πιλότου. Ο έλεγχός τους μπορεί να γίνει από κάποιο σταθμό ελέγχου, αρκετά μακριά από το μέρος όπου επιχειρεί το αεροσκάφος. Μπορεί ωστόσο να είναι και πλήρως αυτόνομα συστήματα. Η έρευνα πάνω στα UAV περιλαμβάνει μεταξύ των άλλων το σχεδιασμό αποτελεσματικών συστημάτων ελέγχου, την ανάπτυξη της ικανότητας τους να πλοηγούνται αυτόνομα σε άγνωστα

περιβάλλοντα, να χρησιμοποιούν τους αισθητήρες τους για τη συλλογή πληροφοριών, να μπορούν μέσω κατάλληλων αλγορίθμων να αναλύουν τις εικόνες του περιβάλλοντος και να εξάγουν χρήσιμες πληροφορίες. Τα UAV χρησιμοποιούνται στις μέρες μας σε εφαρμογές που αφορούν την επιτήρηση και ασφάλεια, την άμυνα, τη μεταφορά αγαθών και τη συλλογή πληροφοριών.

Στον συγκεκριμένο τομέα, όπως και σε κάθε άλλον άλλωστε, ο σύγχρονος μηχανικός καλείται να ερευνήσει μία αρκετά μεγάλη γκάμα εφαρμογών, ένα ταξίδι το οποίο περιέχει δυσκολίες και προκλήσεις, οδηγεί ωστόσο και σε ευεργετικά για την κοινωνία και την ανθρώπινη ζωή αποτελέσματα. Ο κόπος και η προσπάθεια που καλείται να καταβάλει είναι μεγάλος, αλλά εφοδιασμένος με την αγάπη για τη διαρκή μάθηση και την προσφορά στο κοινωνικό σύνολο μπορεί να ξεπεράσει τις δυσκολίες που θα συναντήσει και να επιτελέσει με επιτυχία το έργο του. Σημαντικότερο ρόλο στο ταξίδι διαδραματίζει και η συνεργασία με τους συναδέλφους του. Θα πρέπει δε πάντα να έχει κατά νου, ότι μπορεί κάθε αρχή να είναι και δύσκολη, αλλά από την άλλη μεριά "η αρχή είναι το ήμισυ του παντός".

Μπατσής Ιωάννης
Αθήνα 2021

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	3
Abstract.....	5
Πρόλογος	9
Κατάλογος εικόνων	13
Κατάλογος συντημήσεων	17
Κατάλογος συμβόλων	19
Κεφάλαιο 1	23
1.1 Σκοπός εργασίας.....	25
1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση	26
1.3 Δομή εργασίας.....	29
Κεφάλαιο 2.....	31
2.1 Συστήματα συντεταγμένων.....	31
2.2 Εξισώσεις κινηματικής.....	33
2.3 Δυνάμεις και ροπές.....	35
2.3.1 Διαμήκεις Δυνάμεις και Ροπές (Longitudinal Aerodynamics).....	37
2.3.2 Εγκάρσιες Δυνάμεις και Ροπές (Lateral Aerodynamics).....	40
2.3.3 Συνολικές δυνάμεις και ροπές.....	41
2.4 Πλήρες μοντέλο αεροσκάφους.....	42
2.5 Αυτόματος έλεγχος αεροσκάφους	44
2.5.1 Αυτόματος πιλότος εγκάρσιων δυνάμεων (Longitudinal Autopilot).....	46
2.5.2 Αυτόματος πιλότος διαμηκών δυνάμεων (Longitudinal Autopilot).....	50
Κεφάλαιο 3.....	57
3.1 Εισαγωγή.....	57
3.2 Στοιχεία γεωμετρίας πτέρυγας	58
3.3 Στοιχεία Θεωρίας Πεδίου Ροής	60
3.4 Θεωρία Φέρουσας γραμμής του Prandtl.....	63
3.5 Θεωρία Φέρουσας γραμμής του Weissinger.....	64
3.6 Προφίλ ταχυτήτων δινών	66
Κεφάλαιο 4.....	71
4.1 Εισαγωγή	71
4.2 Κλασικός αλγόριθμος Extremum Seeking Control	72
4.3 Βελτιωμένος αλγόριθμος Extremum Seeking Control με χρήση φίλτρου Kalman.....	75
4.4 Αλγόριθμος σχεδιασμού συστημάτων SISO ESC.....	77
4.5 Αλγόριθμος σχεδιασμού συστημάτων MISO ESC.....	80
4.6 Ευστάθεια μη γραμμικών συστημάτων με ανάδραση ESC.....	83
4.6.1 Διατύπωση του προβλήματος.....	84

4.6.2 Ανάλυση με τη μέθοδο Averaging	87
4.6.3 Ανάλυση με τη μέθοδο Singular Perturbation.....	91
Κεφάλαιο 5.....	95
5.1 Εισαγωγή	95
5.2 Συνθήκες προσομοίωσης	95
5.3 Μαθηματικά μοντέλα	96
5.3.1 Μοντέλο αεροσκάφους.	96
5.3.2 Μοντέλο αεροδυναμικής αλληλεπίδρασης.	98
5.4 Σχεδιασμός επιμέρους υποσυστημάτων.....	103
5.4.1 Σχεδιασμός αυτόματου πιλότου αεροσκάφους (Follower).....	104
5.4.2 Σχεδιασμός Ελεγκτή Σχηματισμού (Formation Controller).	106
5.4.3 Σχεδιασμός συστήματος ESC.....	107
5.5 Μοντέλο προσομοίωσης.....	109
5.6 Αποτελέσματα.	110
Κεφάλαιο 6.....	117
Βιβλιογραφία	119
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	121
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β	125

Κατάλογος εικόνων

Εικόνα 1.1 Σμήνος αποδημητικών χηνών σε σχηματισμό τύπου V (εικόνα από <i>trainingonline4u.com</i>).....	26
Εικόνα 1.2 Στιγμιότυπο από τις πτητικές δοκιμές του 1990 του Γερμανικού Κέντρου Αεροδιαστημικής (εικόνα από [Beukenberg M, Hummel D, 1990]).....	28
Εικόνα 1.3 Στιγμιότυπο από τις πτητικές δοκιμές του 2001 της NASA (εικόνα από <i>nasa.gov</i>).....	29
Εικόνα 2.1 Αεροδυναμικές γωνίες προσβολής και πλαγιολίσθησης (εικόνα απο (εικόνα από <i>researchgate.net</i>)).....	33
Εικόνα 2.2 Δυνάμεις και ροπές αεροδυναμικής φύσεως επί αεροσκάφους (εικόνα από <i>researchgate.net</i>).....	36
Εικόνα 2.3 Επιφάνειες ελέγχου αεροσκάφους (εικόνα από <i>aerospaceweb.org</i>).....	37
Εικόνα 2.4 Ο συντελεστής άντωσης C_L σε συνάρτηση με τη γωνία προσβολής α (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).....	39
Εικόνα 2.5 Η τεχνική <i>Successive Loop Closure</i> (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).....	45
Εικόνα 2.6 Αυτόματος πιλότος εγκάρσιων δυνάμεων (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).....	46
Εικόνα 2.7 Εισαγωγή διαταραχής στον εσωτερικό βρόγχο του συστήματος ελέγχου της γωνίας διατοιχισμού ϕ (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).....	47
Εικόνα 2.8 Σύστημα ελέγχου γωνίας πλαγιολίσθησης β (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).....	49
Εικόνα 2.9 Οι φάσεις πτήσης για τον διαμήκη αυτόματο πιλότο (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).....	51
Εικόνα 2.10 Σύστημα ελέγχου γωνίας πρόνευσης θ (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).....	51
Εικόνα 2.11 Σύστημα ελέγχου ύψους μέσω της γωνίας πρόνευσης θ (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).....	53
Εικόνα 2.12 Σύστημα ελέγχου ταχύτητας χρησιμοποιώντας τη γωνία πρόνευσης θ (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).....	54
Εικόνα 2.13 Σύστημα ρύθμισης ταχύτητας με τη χρήση του κινητήρα (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).....	55
Εικόνα 3.1 Αεροτομή και σχετικές παράμετροι (εικόνα από <i>researchgate.net</i>).....	58
Εικόνα 3.2 Δίνη ρευστού στο επίπεδο (εικόνα από [Saban 2010]).....	61
Εικόνα 3.3 Ροή αέρα σε μια αεροτομή (εικόνα από [Saban 2010]).....	62
Εικόνα 3.4 Θεωρία φέρουσας γραμμής του Prandtl (εικόνα από [Saban 2010]).....	63
Εικόνα 3.5 Μοντελοποίηση πτέρυγας με χρήση της Εκτεταμένης Θεωρίας Φέρουσας Γραμμής του Weissinger (εικόνα από [Saban 2010].).....	65
Εικόνα 3.6 Σύγκριση μοντέλων κατανομής ταχυτήτων (εικόνα απο [Saban 2010])... ..	70
Εικόνα 4.1 Βασική μορφή αλγορίθμου <i>Extremum Seeking Control</i> συστήματος SISO (εικόνα από [Gelbert et al. 2012]).....	72
Εικόνα 4.2 Βασική αρχή λειτουργίας αλγορίθμου ESC (εικόνα από [Gelbert et al 2012.]).....	73
Εικόνα 4.3 Βελτιωμένος αλγόριθμος ESC με χρήση Εκτεταμένου φίλτρου Kalman (<i>Extended Kalman Filter, ESC</i>) (εικόνα απο [Gelbert et al, 2012]).....	76
Εικόνα 4.4 Βρόγχος ESC για σύστημα SISO (εικόνα από [Ariyur., Krstic, 2003]).....	77
Εικόνα 4.5 Βρόγχος ESC για σύστημα MIMO (εικόνα από [Ariyur, Krstic, 2003]).....	80

Εικόνα 4.6 Δημοσιευθείσες εργασίες αναφορικά με τη μέθοδο ESC ανά δεκαετία στο χρονικό διάστημα 1960-2009 (εικόνα από [Tan et. al. 2010]).....	84
Εικόνα 4.7 Σύστημα με βρόγχο ανάδρασης ESC (εικόνα από [Krstic, Wang, 2000]).	84
Εικόνα 4.8 Σύστημα με βρόγχο ανάδρασης ESC και σήμα διέγερσης με συχνότητα χαμηλότερη από το εύρος ζώνης του (εικόνα από [Krstic, Wang, 2000]).....	86
Εικόνα 5.1 Πεδίο ταχυτήτων λόγω της των επαγόμενων δινών κατά την πτήση του αρχηγού του σχηματισμού.	99
Εικόνα 5.2 Κατακόρυφη συνιστώσα W_{wake} , επαγόμενου πεδίου ταχυτήτων.....	100
Εικόνα 5.3 Εγκάρσια συνιστώσα, V_{wake} , επαγόμενου πεδίου ταχυτήτων.....	100
Εικόνα 5.4 Επαγόμενη άντωση.....	102
Εικόνα 5.5 Επαγόμενη διαμήκης ροπή.	102
Εικόνα 5.6 Επαγόμενη μέση ταχύτητα ανωρεύματος.	103
Εικόνα 5.7 Το πλήρες μοντέλο προσομοίωσης.	109
Εικόνα 5.8 Μεταβολή γωνίας προβολής, άντωσης και οπισθέλκουσας (εικόνα από [Zang et all, 2016]).	110
Εικόνα 5.9 Η αρχική θέση των δύο αεροσκαφών.	111
Εικόνα 5.10 Η σύγκλιση του αλγορίθμου ESC κατά τη μεταβλητή της κανονικοποιημένης εγκάρσιας απόστασης.....	111
Εικόνα 5.11 Η σύγκλιση του αλγορίθμου ESC κατα τη μεταβλητή της κανονικοποιημένης κατακόρυφης απόστασης.....	112
Εικόνα 5.12 Μετρούμενη απόσταση μεταξύ των αεροσκαφών.	112
Εικόνα 5.13 Η τελική θέση των δύο αεροσκαφών.	113
Εικόνα 5.14 Μετρούμενη τιμή επαγόμενης άντωσης.	113
Εικόνα 5.15 Θέση επιφανειών ελέγχου.....	114
Εικόνα 5.16 Ο συντελεστής οπισθέλκουσας C_D	115
Εικόνα 5.17 Η εντολή του κινητήρα.....	115
Εικόνα Β.1 Το μοντέλο προσομοίωσης του αρχηγού του σχηματισμού.	125
Εικόνα Β.2 Το μοντέλο προσομοίωσης του ακόλουθου του σχηματισμού.	126
Εικόνα Β.3 Το μοντέλο προσομοίωσης του σχηματισμού των δύο αεροσκαφών.	127

Κατάλογος πινάκων

Πίνακας 5.1 Παράμετροι αεροσκάφους.....	97
Πίνακας 5.2 Παράμετροι και κέρδη συστήματος ελέγχου γωνία διατοιχισμού φ	104
Πίνακας 5.3 Παράμετροι και κέρδη ελεγκτή πορείας χ	104
Πίνακας 5.4 Παράμετροι και κέρδη ελεγκτή γωνίας πλαγιολίσθησης β	105
Πίνακας 5.5 Παράμετροι και κέρδη ελεγκτή γωνίας πρόνευσης θ	105
Πίνακας 5.6 Παράμετροι και κέρδη ελεγκτή ύψους μέσω της γωνίας πρόνευσης θ	105
Πίνακας 5.7 Παράμετροι και κέρδη ελεγκτή ταχύτητας μέσω της γωνίας πρόνευσης	105
Πίνακας 5.8 Παράμετροι και κέρδη ελεγκτή ταχύτητας με χρήση του κινητήρα.	106
Πίνακας 5.9 Παράμετροι Ελεγκτή σχηματισμού.....	107
Πίνακας 5.10 Παράμετροι συστήματος ESC.	108

Κατάλογος συντμήσεων

AFF	Autonomous Formation Flight
AR	Aspect Ratio
DC	Direct Current
EKF	Extended Kalman Filter
ESC	Extremum Seeking Control
FLCS	Flight Control System
MISO	Multiple Input Multiple Output
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NDI	Nonlinear Dynamic Inversion
NED	North East Down
PI	Proportional Integral
PID	Proportional Integral Derivative
SISO	Single Input Single Output
SLC	Successive Loop Closure
TR	Taper Ratio
UAV	Unmanned Aerial Vehicle

Κατάλογος συμβόλων

C_{D*}	Συντελεστής οπισθέλκουσας
C_{L*}	Συντελεστής άντωσης
C_{X*}	Αεροδυναμικός συντελεστής δύναμης κατά τον διαμήκη άξονα του αεροσκάφους
C_{Y*}	Αεροδυναμικός συντελεστής δύναμης κατά τον εγκάρσιο άξονα του αεροσκάφους
C_{Y*}	Συντελεστή πλάγιας δύναμης
C_{Z*}	Αεροδυναμικός συντελεστής δύναμης κατά τον κατακόρυφο άξονα του αεροσκάφους
C_{l*}	Συντελεστής ροπής κατά τον διαμήκη άξονα του αεροσκάφους
C_{m*}	Συντελεστής κατά τον εγκάρσιο άξονα του αεροσκάφους
C_{n*}	Συντελεστής κατά τον κατακόρυφο άξονα του αεροσκάφους
C_{p*}	Αεροδυναμικός συντελεστής δύναμης κατά τον διαμήκη άξονα του αεροσκάφους
C_{q*}	Αεροδυναμικός συντελεστής δύναμης κατά τον εγκάρσιο άξονα του αεροσκάφους
C_{r*}	Αεροδυναμικός συντελεστής δύναμης κατά τον κατακόρυφο άξονα του αεροσκάφους
K_{T_p}	Σταθερά κινητήρα αεροσκάφους
K_{d*}	Διαφορικό κέρδος PID ελεγκτή
K_{i*}	Ολοκληρωτικό κέρδος PID ελεγκτή
K_{p*}	Αναλογικό κέρδος PID ελεγκτή
$K_{\theta_{DC}}$	DC κέρδος συνάρτηση μεταφοράς γωνίας πρόνευσης θ .
(i^b, j^b, k^b)	Μοναδιαία διανύσματα που ορίζουν το σύστημα συντεταγμένων σώματος (body frame) του αεροσκάφους
(i^i, j^i, k^i)	Μοναδιαία διανύσματα που ορίζουν το αδρανειακό σύστημα αναφοράς
C_{prop}	Συντελεστής προπέλας αεροσκάφους
K_{motor}	Συντελεστής κινητήρα αεροσκάφους
S_{prop}	Καλυπτόμενο εμβαδό από την προπέλα του αεροσκάφους
W_*	Συντελεστής ελάττωσης εύρους ζώνης.
f_*	Συνιστώσα δύναμης
p_d	Συντεταγμένη στον άξονα του Κάτω
p_e	Συντεταγμένη στον άξονα της Ανατολής
p_n	Συντεταγμένη στον άξονα του Βορρά
r_c	Ιξώδης πυρήνας στροβίλου
Γ_*	Αδρανειακός συντελεστής
α_0	Τιμή γωνίας προσβολής αποκοπής
δ_a	Κλίση πτερυγίων διατοιχισμού (aileron)
δ_e	Κλίση πτερυγίων ανόδου-καθόδου (elevators)
δ_r	Κλίση πηδαλίου (rudder)

δ_t	Εντολή κινητήρα (throttle)
ζ_*	Συντελεστής απόσβεσης
ω_*	Εύρος ζώνης
ω_h	Συχνότητα αποκοπής υπεραποκαταστάσεως φίλτρου ESC
ω_l	Συχνότητα αποκοπής κατωπερατού φίλτρου ESC
AR	Aspect Ratio
D	Οπισθέλκουσα (Drag)
L	Άντωση (Lift)
M	Ρυθμός μετάβασης
S	Εμβαδό πτέρυγας
TR	Taper ratio
b	Μήκος πτέρυγας
c	Χορδή
e	Παράγοντας Oswald
l	Ροπή κατά τον διαμήκη άξονα του αεροσκάφους
m	Ροπή κατά τον εγκάρσιο άξονα του αεροσκάφους
n	Ροπή κατά τον κατακόρυφο άξονα του αεροσκάφους
p	Γωνιακή ταχύτητα κατά τον διαμήκη άξονα του συστήματος συντεταγμένων σώματος του αεροσκάφους
q	Γωνιακή ταχύτητα κατά τον εγκάρσιο άξονα του συστήματος συντεταγμένων σώματος του αεροσκάφους
r	Γωνιακή ταχύτητα κατά τον κατακόρυφο άξονα του συστήματος συντεταγμένων σώματος του αεροσκάφους
u	Ταχύτητα κατά τον διαμήκη άξονα του συστήματος συντεταγμένων σώματος του αεροσκάφους
v	Ταχύτητα κατά τον εγκάρσιο άξονα του συστήματος συντεταγμένων σώματος του αεροσκάφους
w	Ταχύτητα κατά τον κατακόρυφο άξονα του συστήματος συντεταγμένων σώματος του αεροσκάφους
m	Μάζα αεροσκάφους
Γ	Στροβιλότητα (Circulation)
Y	Πλευρική δύναμη (Side force)
α	Γωνία προσβολής (Angle of Attack)
α	Πλάτος σήματος διέγερσης
β	Γωνία πλαγιολίσθησης (Sideslip angle)
θ	Γωνία πρόνευσης (Pitch)
ρ	Πυκνότητα αέρα
φ	Γωνία διατοιχισμού (Roll)
χ	Πορεία αεροσκάφους
ψ	Γωνία εκτροπής (Yaw)
ω	Συχνότητα σήματος διέγερσης

Εκθέτες/Δείκτες

av	Average
b	Body Frame
c	Commanded
d	Down

<i>e</i>	East
<i>e</i>	Equilibrium
<i>g</i>	Ground
<i>i</i>	Input
<i>n</i>	North
<i>o</i>	Output
<i>p</i>	Proper
<i>per</i>	Perturbation
<i>r</i>	Reduced
<i>s</i>	Stability Frame
<i>w</i>	Wind Frame
α	Air

Ευχαριστίες

Για την επιτυχή εκπόνηση της παρούσης εργασίας, οφείλω ευγνωμοσύνη και ευχαριστίες σε αρκετούς ανθρώπους καθώς θα ήταν αδύνατο να φέρω ένα τέτοιο έργο εις πέρας χωρίς βοήθεια και καθοδήγηση. Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Καθηγητή κ. Κυριακόπουλο Κωνσταντίνο καθώς και τον μεταδιδακτορικό ερευνητή κ. Μπεχλιούλη Χαράλαμπο. Η ευκαιρία που μου έδωσαν να ασχοληθώ με αυτό το αρκετά σύνθετο και συναρπαστικό θέμα καθώς και η καθοδήγησή και οι υποδείξεις τους ήταν ουσιαστικές και πολύτιμες.

Ευχαριστίες οφείλω επίσης στον Αναπληρωτή Καθηγητή του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής κ. Μυτηλιναίο Στυλιανό ο οποίος μετά από της άψογη συνεργασία που είχαμε στη Σχολή Ικάρων μου έδωσε την ευκαιρία με τι συστάσεις του να συνεχίσω τις σπουδές μου. Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω και τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας κ. Μπαργιώτα Δημήτριο, με τον οποίο συνεργαστήκαμε στο πρώτο μου μεταπτυχιακό και ο οποίος με βοήθησε τόσο να εμβαθύνω στο αντικείμενό μου όσο και να αναζητώ αποτελεσματικά πληροφορίες.

Στη διάρκεια των σπουδών μου είχα την ευκαιρία να γνωρίσω και να συνεργαστώ με πολύ αξιόλογους ανθρώπους, οι οποίοι με βοήθησαν πάρα πολλές φορές και με τους οποίους είχαμε πολύ καλή συνεργασία καθ' όλη τη διάρκεια του προγράμματος. Έτσι θα ήθελα να ευχαριστήσω την κα. Βανδώρου Φωτεινή, τον κ. Βώκο Φίλιππο και τον κ. Τσογγάρη Νικόλαο.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τον συνάδελφό μου κ. Χατζηγιάννου Φίλιππο, ο οποίος ως μηχανικός αεροσκαφών με βοήθησε στην κατανόηση δύσκολων εννοιών της αεροδυναμικής, γεγονός που με βοήθησε πολύ στο κομμάτι της προσομοίωσης στον υπολογιστή.

Τέλος, δεν θα μπορούσα να παραλείψω τις ευχαριστίες μου σε όλη την οικογένειά μου και δη προς τους γονείς μου Βασίλειο και Ανδρομάχη. Η στήριξη που μου παρείχαν στις δυσκολίες που αντιμετώπισα ήταν κάτι παραπάνω από πολύτιμη και σημαντική. Σε αυτούς οφείλω τα πάντα και ποτέ δεν ξεχνώ ότι χάρη σε αυτούς γεννήθηκα και ζω.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε το σκοπό για τον οποίο εκπονήθηκε η συγκεκριμένη εργασία καθώς και το λόγο για τον οποίο είναι σημαντική από ερευνητικής πλευράς. Θα κάνουμε μια σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση στις σημαντικότερες εργασίες που έχουν εκπονηθεί και θα ολοκληρώσουμε με μια σύντομη παρουσίαση της δομής της εργασίας.

1.1 Σκοπός εργασίας

Η παρούσα εργασία έχει ως αντικείμενο τη μελέτη του προβλήματος της πτήσης δύο αεροσκαφών σε κλειστό σχηματισμό, δηλαδή σε σχετικά κοντινή μεταξύ τους απόσταση, με τον βέλτιστο δυνατό τρόπο. Καθώς ένα αεροσκάφος κινείται διαμέσου του αέρα, δημιουργεί στο χώρο μπροστά και πίσω του αέρια ρεύματα με τη μορφή **δινών (vortices)**. Ιδιαίτερη σημασία για την πτήση σε σχηματισμό έχουν τα ρεύματα αέρα που δημιουργούνται στο χώρο πίσω από το αεροσκάφος. Κατά αντιστοιχία με τα υδάτινα ρεύματα που δημιουργεί ένα πλοίο καθώς κινείται στη επιφάνεια της θάλασσας τα οποία καλούνται με το ναυτικό όρο **απόνερα (wake)**, τα εν λόγω αέρια ρεύματα είναι γνωστά στη βιβλιογραφία ως **wake vortices**. Η έννοια της πτήσης σε σχηματισμό με το βέλτιστο δυνατό τρόπο σημαίνει το αεροσκάφος που έπεται του σχηματισμού να τοποθετηθεί από ένα σύστημα του αυτόματου πιλότου που διαθέτει σε τέτοιο σημείο στο χώρο, σε σχέση με το μπροστινό του, ώστε να ίπταται καταναλώνοντας λιγότερο καύσιμο, εκμεταλλευόμενο τα ανοδικά από τα προαναφερθέντα ρεύματα που το τελευταίο παράγει.

Η πτήση σε σχηματισμό είναι εμπνευσμένη από την ίδια τη φύση και πιο συγκεκριμένα από τα αποδημητικά πουλιά, τα οποία πετώντας σε κλειστό σχηματισμό μπορούν να διανύσουν μεγαλύτερες αποστάσεις κατά την περίοδο της μετανάστευσης. Η ίδια τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί και από τα αεροσκάφη. Το αεροσκάφος που προηγείται των υπολοίπων είναι ο **αρχηγός (leader)** του σχηματισμού. Τα αέρια ρεύματα που αυτός δημιουργεί και περιγράψαμε προηγουμένως, συμβάλλουν στο χώρο με αποτέλεσμα να υπάρχουν περιοχές όπου δημιουργούνται ανοδικά αλλά και καθοδικά ρεύματα. Τα ρεύματα αυτά έρχονται σε επαφή με τα αεροσκάφη που έπονται του αρχηγού, τους **ακόλουθους (followers)** και επάγουν σε αυτά επιπλέον δυνάμεις και ροπές αεροδυναμικής φύσεως, πέραν των ήδη υπαρχόντων από τη δική τους κίνηση στο χώρο. Έτσι οι ακόλουθοι μπορούν να τοποθετηθούν σε συγκεκριμένα σημεία του χώρου όπου εκμεταλλεύονται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο την ευεργετική επίδραση των επαγόμενων δυνάμεων και ροπών από τα ανοδικά ρεύματα που προκαλεί ο αρχηγός του σχηματισμού. Λόγω των ευεργετικών αυτών επιδράσεων, τα κατάλληλα αυτά σημεία του χώρου είναι γνωστά με το όνομα "**γλυκά**", με την έννοια του "**καλά**" ή "**επιθυμητά**", σημεία (**sweet spots**).

Από φυσικομαθηματικής άποψης, η μη γραμμική φύση της δυναμικής τόσο ενός αεροσκάφους όσο και των προαναφερθέντων αερίων δινών καθώς και η εξαιρετική πολυπλοκότητα του πραγματικού φαινομένου, καθιστά πολύ δύσκολη έως αδύνατη την τοποθέτηση του αεροσκάφους σε κατάλληλο σημείο του χώρου του

σχηματισμού αποκλειστικά και μόνο από τον πιλότο. Για το λόγο αυτό είναι αναγκαίος ο σχεδιασμός ενός επιπλέον συστήματος αυτομάτου ελέγχου, το οποίο θα είναι επιφορτισμένο με το έργο να εντοπίζει το εν λόγω σημείο και να δίνει κατάλληλες εντολές στον αυτόματο πιλότο του αεροσκάφους προκειμένου να το οδηγήσει σε αυτό. Όπως καταλαβαίνουμε, στο επιθυμητό σημείο του χώρου η επαγόμενη **άντωση (Lift)** στον ακόλουθο του σχηματισμού μεγιστοποιείται. Λόγω του ότι το σύστημα ελέγχου καλείται να εντοπίσει τη μέγιστη τιμή μίας συνάρτησης, η πλέον κατάλληλη τεχνική για το σχεδιασμό του είναι η τεχνική **Ελέγχου Αναζήτησης Ακρότατου (Extremum Seeking Control, ESC)**.

Το ερευνητικό ενδιαφέρον επί της πτήσεως αεροσκαφών σε σχηματισμό είναι αρκετά μεγάλο, λόγω των άμεσων πρακτικών εφαρμογών του και ο αριθμός των εκπονημένων μέχρι στιγμής εργασιών επί του θέματος είναι αρκετά μεγάλος. Ένα βασικό όφελος τόσο για την πολιτική όσο και την πολεμική αεροπορία είναι η οικονομία του καυσίμου, με άμεση συνέπεια τη δυνατότητα πραγματοποίησης περισσότερων δρομολογίων ή αποστολών. Επιπροσθέτως είναι δυνατή η διάνυση μεγαλύτερης απόστασης από επιβατικά ή μεταγωγικά αεροσκάφη με συγκεκριμένο φορτίο.

Με βάση τα ανωτέρω, ο σκοπός της παρούσης εργασίας είναι να σχεδιαστεί ένα σύστημα αυτομάτου ελέγχου με τη μέθοδο ESC το οποίο θα οδηγεί τον ακόλουθο ενός σχηματισμού δύο αεροσκαφών στο κατάλληλο σημείο του χώρου, δηλαδή στο *sweet spot*, πίσω από τον αρχηγό.

1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Το πρόβλημα της πτήσης σε σχηματισμό μελετάται συστηματικά τα τελευταία 30 χρόνια, οι απαρχές του ωστόσο συναντώνται στις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Όπως ήδη αναφέραμε, αριθμός των εκπονημένων εργασιών είναι μεγάλος και μια πλήρης βιβλιογραφική ανασκόπηση θα ήταν πολύ δύσκολη. Για το λόγο αυτό θα αναφέρουμε ενδεικτικά σε μερικές από τις πιο σημαντικές. Μία πολύ καλή ανασκόπηση στις εκπονημένες για το συγκεκριμένο θέμα μελέτες μπορεί να βρει κανείς στην αναφορά [Ryan, 2010].

Από τους πρώτους κλάδους που ασχολήθηκαν με το θέμα ήταν αυτός της βιολογίας. Μελέτες σε αποδημητικά πτηνά που έγιναν από τον Wieselberger το 1914 έδειξαν ότι στα πτηνά που πετούν σε σχηματισμό σχήματος V, όπου δηλαδή το κάθε πτηνό είναι τοποθετημένο διαγωνίως σε σχέση με το μπροστινό του όπως φαίνεται στην εικόνα 1.1, η δύναμη της αντίστασης του αέρα ή αλλιώς **οπισθέλκουσα (Drag)** που θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο 2 ελαττώνεται κατά 15,8 %.



Εικόνα 1.1 Σμήνος αποδημητικών χηνών σε σχηματισμό τύπου V (εικόνα από trainingonline4u.com).

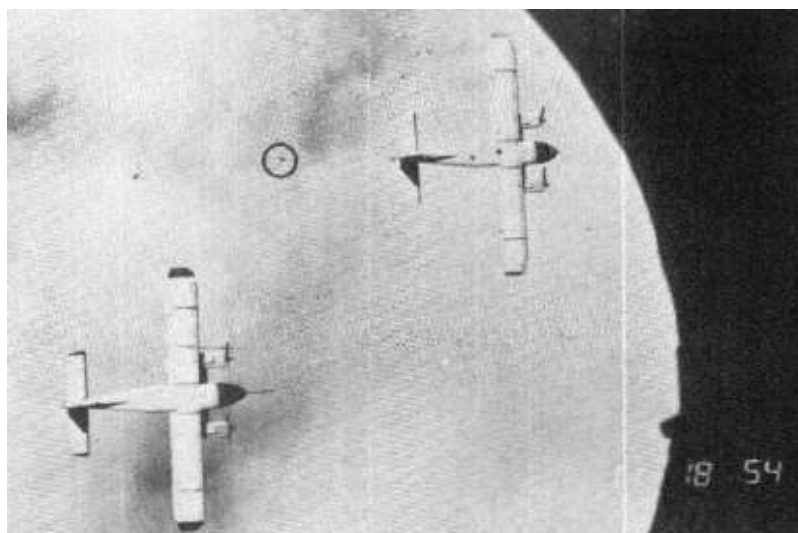
Αναφορικά με την μελέτη της πτήσης αεροσκαφών σε σχηματισμό με σκοπό την μείωση της οπισθέλκουσας ασχολήθηκε πρώτος ο Shclitchting το 1942. Στη μετέπειτα περίοδο, μία από τις πρώτες εργασίες που εκπονήθηκαν το θέμα ήταν αυτή των [Binetti et al, 2003]. Οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν ένα απλό και ευρέως χρησιμοποιούμενο μέχρι σήμερα μοντέλο για την αεροδυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ δύο αεροσκαφών τύπου C-5 Galaxy, την **Θεωρία Φέρουσας Γραμμής του Prandtl (Prandtl's Lifting Line theory)** που θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο 3, για να υπολογίσουν τις επαγόμενες στο χώρο ταχύτητες, και κατά συνέπεια δυνάμεις και ροπές στο αεροσκάφος που έπονταν του αρχηγού του σχηματισμού. Στη συνέχεια σχεδίασαν έναν αυτόματο πιλότο με τη μέθοδο ελέγχου **Proportional-Integral-Derivative (PID)**, που διατηρούσε τα δύο αεροσκάφη σε σχηματισμό στο επιθυμητό σημείο και εισήγαγαν την αεροδυναμική επίδραση ως μια μη γραμμική ανάδραση στο γραμμικό μοντέλο του ακόλουθου του σχηματισμού. Ολοκληρώνοντας σχεδίασαν το σύστημα αυτομάτου ελέγχου για την εύρεση του βέλτιστου σημείου με τη μέθοδο ESC και έκαναν χρήση της κλασικής, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 5, μορφής του αλγορίθμου ESC με υπερατά και κατωπερατά φίλτρα για την εύρεση του μεγίστου της μη γραμμικής συνάρτησης. Η τελευταία επιλέχθηκε να είναι η τιμή της γωνίας **πρόνευσης (pitch) θ** , που θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο 2, η οποία στο κατάλληλο σημείο εμφανίζει ελάχιστο. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης έδειξαν ελάττωση της εντολής **χρήσης του κινητήρα (throttle)** κατά 40%.

Οι [Chicka et al, 1999, 2006] χρησιμοποίησαν το ίδιο μοντέλο αεροδυναμικής επίδρασης ωστόσο στον βρόγχο του ESC, δεν έκαναν χρήση της κλασικής μορφής του αλγορίθμου. Αντί αυτού χρησιμοποίησαν μια πιο βελτιωμένη τεχνική η οποία εντοπίζει τη θέση του κατάλληλου σημείου με χρήση ενός **Εκτεταμένου Φίλτρου Kalman (Extended Kalman Filter, EKF)**. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα ο αλγόριθμος ESC να συγκλίνει πιο γρήγορα και πιο αποτελεσματικά. Ως συνάρτηση προς βελτιστοποίηση επιλέχθηκε η επαγόμενη στον ακόλουθο διαμήκης ροπή, η οποία μεγιστοποιείται στο κατάλληλο σημείο.

Μια πρόσφατη, πολύ καλή και βελτιωμένη σε μεγάλο βαθμό εργασία σε σχέση με τις προαναφερθείσες είναι αυτή των [Brodecki, Subbarao, 2013]. Σε αυτήν μελετήθηκε το πρόβλημα του σχηματισμού τόσο δύο όσο και τριών αεροσκαφών και έγινε χρήση ενός μη γραμμικού μοντέλου για αεροσκάφος τύπου F-16. Η αεροδυναμική επίδραση μεταξύ των αεροσκαφών μοντελοποιήθηκε με την πιο ακριβή μέθοδο της **Εκτεταμένης Θεωρίας Φέρουσας Γραμμής (Extended Lifting Line Theory)** που θα δούμε στο κεφάλαιο 3. Επιπροσθέτως το σύστημα του αυτόματου πιλότου του ακόλουθου του σχηματισμού σχεδιάστηκε με η μέθοδο **Non Linear Dynamic Inversion (NDI)** και για την εύρεση του κατάλληλου σημείου έγινε χρήση της βελτιωμένης τεχνικής του αλγορίθμου ESC με χρήση EKF. Στις προσομοιώσεις που έγιναν δείχθηκε μείωση στο συντελεστή της οπισθέλκουσας κατά 19,3%.

Εκτός από θεωρητικές μελέτες, έχουν πραγματοποιηθεί και πραγματικές δοκιμές η οποίες και επιβεβαίωσαν τις θεωρητικές προβλέψεις. Η πρώτη πραγματική δοκιμή που έγινε σύμφωνα με τον [Ryan 2010] ήταν αυτή των Beukenberg και Hummel [Beukenberg M, Hummel D, 1990] το 1990. Στην εικόνα 1.2 φαίνεται ένα στιγμιότυπο από τις πτητικές δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν σε συνεργασία με το **Γερμανικό Κέντρο Αεροδιαστημικής (Deutsches Zentrum für Luft- und**

Raumfahrt) όπου χρησιμοποιήθηκαν δύο αεροσκάφη δοκιμών τύπου Dornier-28 και ένα αεροσκάφος τύπου Dornier-27 το οποίο βοήθησε στην όλη διαδικασία. Με κύκλο είναι σημειωμένος ένας κώνος διαμέτρου 20 cm και ύψους 40 cm ο οποίος ήταν συνδεδεμένος με καλώδιο με το μπροστινό αεροσκάφος και χρησιμοποιούνταν σαν ένδειξη της επιθυμητής απόστασης μεταξύ των δύο αεροσκαφών. Στην εν λόγω εργασία επιβεβαιώθηκε η πολύ καλή συμφωνία των θεωρητικώς αναμενομένων αποτελεσμάτων για ελάττωση της οπισθέλκουσας και των μετρήσεων που λήφθηκαν κατά τις πτητικές δοκιμές. Επιπροσθέτως τονίστηκε η ανάγκη για το σχεδιασμό ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου το οποίο θα οδηγεί τον ακόλουθο στο επιθυμητό σημείο με χρήση της τεχνικής ESC. Για τα προαναφερθέντα πραγματοποιήθηκαν τόσο προσομοιώσεις όσο και πραγματικές δοκιμές οι οποίες επιβεβαίωσαν το αναμενόμενο θεωρητικό αποτέλεσμα της μείωσης της κατανάλωσης καυσίμου κατά 10%.



Εικόνα 1.2 Στιγμιότυπο από τις πτητικές δοκιμές του 1990 του Γερμανικού Κέντρου Αεροδιαστημικής (εικόνα από [Beukenberg M, Hummel D, 1990]).

Το 2001 η **NASA** ολοκλήρωσε μία εκτεταμένη σειρά δοκιμών στα πλαίσια του προγράμματος *Autonomous Formation Flight project (AFF)*. Δύο αεροσκάφη τύπου F/A-18 που χρησιμοποιούνται για ερευνητικούς σκοπούς εφοδιάστηκαν με τους κατάλληλους αισθητήρες και όργανα μέτρησης, προκειμένου να μετρηθεί μέσω κατάλληλων τεχνικών η μεταβολή στους συντελεστές επαγώμενης άντωσης και οπισθέλκουσας, καθώς και στην κατανάλωση του καυσίμου. Οι προκλήσεις του όλου εγχειρήματος ήταν αρκετές, συμπεριλαμβανομένης της λήψης μετρήσεων διατηρώντας ωστόσο ασφαλή απόσταση μεταξύ των δύο αεροσκαφών. Επίσης κατά την πτήση καθώς το καύσιμο καταναλώνονταν, ελαττώνονταν το βάρος των αεροσκαφών γεγονός το οποίο επηρεάζει την υπολογιζόμενη ένταση των δημιουργούμενων αερίων δινών. Το εγχείρημα εν τούτοις ολοκληρώθηκε επιτυχώς και επιβεβαίωσε τα θεωρητικά δεδομένα καθώς παρατηρήθηκε μείωση στο συντελεστή επαγώμενης οπισθέλκουσας της τάξης έως και 20% καθώς και μείωση της κατανάλωσης καυσίμου της τάξης του 10 – 15% [Vachon M J et al, 2002].



Εικόνα 1.3 Στιγμιότυπο από τις πτητικές δοκιμές του 2001 της NASA (εικόνα από nasa.gov).

1.3 Δομή εργασίας

Στη συγκεκριμένη εργασία ενδιαφερόμαστε για τη μελέτη της πτήσης σε σχηματισμό δύο πλήρως αυτόνομων **Μη Επανδρωμένων Αεροσκαφών (Unmanned Aerial Vehicles, UAV)**. Η δομή της εργασίας έχει ως ακολούθως:

Στο **κεφάλαιο 2** παρουσιάζεται η βασική θεωρία της δυναμικής της πτήσης ενός αεροσκάφους. Ξεκινούμε από τις περιγραφές των χρησιμοποιούμενων συστημάτων συντεταγμένων και περιγράφουμε στη συνέχεια τα βασικά αεροδυναμικά μεγέθη. Στη συνέχεια διατυπώνονται οι διαφορικές εξισώσεις του μη γραμμικού μοντέλου ενός αεροσκάφους δώδεκα μεταβλητών κατάστασης και έξι βαθμών ελευθερίας. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση ενός αυτόματου πιλότου για ένα Μη Επανδρωμένο Αεροσκάφος, σχεδιασμένου με τη μέθοδο *PID*.

Στο **κεφάλαιο 3** δίνεται η περιγραφή των διαθέσιμων μοντέλων των αερίων δινών που προκαλεί ένα αεροσκάφος κατά την κίνησή του στο χώρο. Αρχικά θα γίνει μια περιγραφή των βασικών παραμέτρων μιας πτέρυγας καθώς και μιας επιμέρους τομής της με ένα παράλληλο στον άξονα συμμετρίας της επίπεδο που καλείται **αεροτομή (airfoil)**. Έπειτα θα γίνει μια σύντομη εισαγωγή στη **Θεωρία Πεδίου Ροής (Potential Flow Theory)** με τη βοήθεια της οποίας θα γίνεται ο υπολογισμός των δυνάμεων και ροπών που ασκούνται σε μια πτέρυγα. Τέλος παρουσιάσουμε τα διαθέσιμα μαθηματικά μοντέλα πεδίων κατανομής ταχυτήτων των εν λόγω αερίων δινών.

Στο **κεφάλαιο 4** περιγράφεται η τεχνική του *ESC*. Αρχικά θα περιγραφεί βασική δομή ενός συστήματος *ESC* και στη συνέχεια θα παρουσιαστούν δύο αλγόριθμοι σχεδιασμού τόσο για συστήματα **Μονής Εισόδου – Μονής Εξόδου (Single Input – Single Output, SISO)**, όσο και για Πολυμεταβλητά Συστήματα **Πολλών Εισόδων – Μίας Εξόδου (Multi Input – Single Output, MISO)**. Θα παρουσιαστεί στη συνέχεια τη σύγχρονη βελτιωμένη μέθοδος *ESC* με τη χρήση του *EKF* και θα ολοκληρώσουμε με την παρουσίαση των βασικών σημείων της απόδειξης της ευστάθειας των συστημάτων *ESC* όταν πληρούνται συγκεκριμένες συνθήκες.

Το **κεφάλαιο 5** αποτελεί το ερευνητικό μέρος της εργασίας. Συγκεκριμένα πραγματοποιήθηκε προσομοίωση σε περιβάλλον MATLAB®/Simulink. Θα ξεκινήσουμε με την παρουσίαση των μαθηματικών μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν στο μοντέλο προσομοίωσης τόσο για το αεροσκάφος όσο και για τις επαγόμενες αέριες δίνες. Έπειτα θα δείξουμε τις τεχνικές σχεδιασμού και την επιλογή των παραμέτρων των επιμέρους συστημάτων του μοντέλου προσομοίωσης (σχηματισμός αεροσκαφών, ελεγκτής σχηματισμού, ESC) . Θα ολοκληρώσουμε με την παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

Τέλος, στο **κεφάλαιο 6** παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και γίνονται προτάσεις για περαιτέρω εργασία.

Κεφάλαιο 2

Δυναμική αεροσκάφους

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε αρχικά τις εξισώσεις οι οποίες διέπουν την κίνηση ενός αεροσκάφους στο χώρο. Οι εξισώσεις αυτές ισχύουν για ταχύτητες μικρότερες της ταχύτητας του ήχου. Η περιγραφή βασίζεται στο έργο των [Beard, McLain 2012]. Θα ξεκινήσουμε με τα συστήματα συντεταγμένων που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της κίνησης ενός αεροσκάφους καθώς και τα απαραίτητα αεροδυναμικά μεγέθη. Στη συνέχεια διατυπώνουμε τις εξισώσεις κινηματικής, οι οποίες περιγράφουν την κίνηση του αεροσκάφους στο χώρο. Έπειτα παραθέτουμε τα γραμμικοποιημένα μοντέλα υπολογισμού των δυνάμεων και ροπών που ασκούνται σε ένα αεροσκάφος και εισάγουμε τα εν λόγω μεγέθη στο κινηματικό μοντέλο, προκειμένου να εξάγουμε το πλήρες μοντέλο δώδεκα μεταβλητών κατάστασης και έξι βαθμών ελευθερίας. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου για Μη Επανδρωμένα Αεροσκάφη με τη μέθοδο *PID*.

2.1 Συστήματα συντεταγμένων.

Για την περιγραφή της κίνησης ενός αεροσκάφους διαμέσου του αέρα είναι απαραίτητη η χρήση εκτός από ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων και ενός επιπλέον συστήματος συντεταγμένων προσαρμοσμένο επί του αεροσκάφους. Αυτό διότι οι δυνάμεις και ροπές αεροδυναμικής φύσεως που ασκούνται επί του αεροσκάφους εκφράζονται ποιο εύκολα σε ένα σύστημα συντεταγμένων σταθερά προσαρτημένου σε αυτό. Το αδρανειακό σύστημα αναφοράς αναφέρεται ως **σύστημα Βορράς-Ανατολή-Κάτω (North-East-Down, NED)** ενώ το προσαρτημένο επί του αεροσκάφους σύστημα ονομάζεται **σύστημα αξόνων σώματος (Body Frame)**. Το τελευταίο εδράζεται επί του κέντρου βάρους του αεροσκάφους και ο **διαμήκης (longitudinal)**, **εγκάρσιος (lateral)** και **κατακόρυφος (vertical)** άξονάς του, ταυτίζεται με τον διαμήκη, εγκάρσιο και κατακόρυφο άξονα του αεροσκάφους αντίστοιχα.

Έστω i^i, j^i, k^i τα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος *NED* και i^b, j^b, k^b τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος αξόνων σώματος. Ο προσανατολισμός του αεροσκάφους μπορεί να μεταβάλλεται σε σχέση με το σύστημα *NED* και περιγράφεται ως ακολούθως. Έστω ότι τα δύο συστήματα έχουν αρχικά τον ίδιο προσανατολισμό. Σε σχέση με το σύστημα *NED*, το αεροσκάφος μπορεί να περιστραφεί περί τον κατακόρυφο άξονα κατά μια γωνία ψ η οποία ονομάζεται **γωνία εκτροπής (Yaw angle)**, κατά τον εγκάρσιο άξονα κατά μια γωνία θ η οποία λέγεται **γωνία πρόνευσης (Pitch angle)** και κατά τον διαμήκη άξονα κατά μια γωνία φ η οποία καλείται **γωνία διατοιχισμού (Roll angle)**.

Είναι γνωστό ότι η μέτρηση ενός διανύσματος σε ένα σύστημα συντεταγμένων το οποίο είναι περιστρεφόμενο σε σχέση με ένα άλλο γίνεται με τη χρήση των πινάκων περιστροφής. Οι πίνακες περιστροφής για κάθε μία από τις ανωτέρω περιγραφόμενες γωνίες είναι:

$$R_{u_1}^{u_1}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$R_{u_1}^{u_2}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$R_{u_2}^b(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

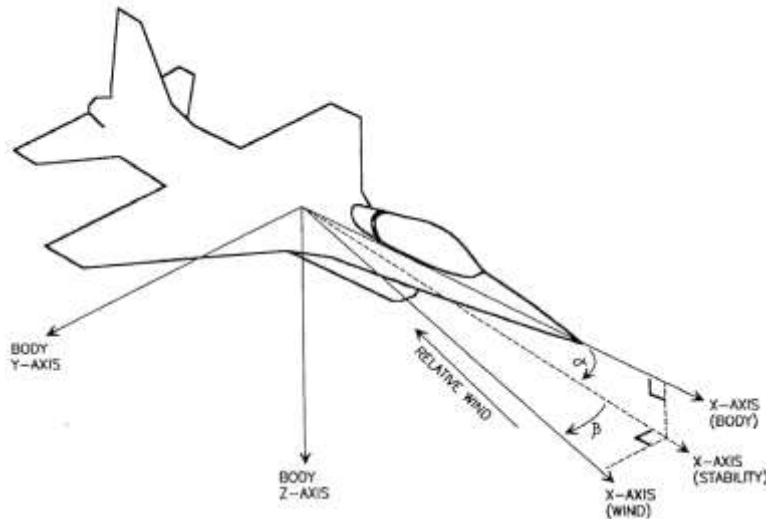
όπου u και b είναι αντίστοιχα το μετατοπισμένο στο κέντρο βάρους του αεροσκάφους αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων NED και το σύστημα συντεταγμένων σώματος αντίστοιχα. Με u_1 και u_2 συμβολίζονται τα ενδιάμεσα συστήματα συντεταγμένων που προκύπτουν έπειτα από την περιστροφή του μετατοπισμένου αδρανειακού συστήματος κατά τις γωνίες εκτροπής και πρόνευσης. Ο συνολικός πίνακας περιστροφής από το αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο σύστημα αξόνων σώματος είναι το γινόμενο των (3.1), (3.2) και (3.3):

$$R_u^b = R_{u_2}^b R_{u_1}^{u_2} R_{u_1}^{u_1} = \begin{pmatrix} c_\theta c_\varphi & c_\theta s_\varphi & -s_\theta \\ s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi & s_\varphi s_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi c_\theta \\ c_\varphi s_\theta c_\psi - s_\varphi s_\psi & c_\varphi s_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi c_\theta \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

όπου $c_\varphi = \cos(\varphi)$, $c_\theta = \cos(\theta)$, $c_\psi = \cos(\psi)$, $s_\varphi = \sin(\varphi)$, $s_\theta = \sin(\theta)$ και $s_\psi = \sin(\psi)$.

Εκτός από τις γωνίες πρόνευσης, διατοιχισμού και εκτροπής, χρησιμοποιούνται δύο επιπλέον γωνίες για την περιγραφή της κίνησης ενός αεροσκάφους. Αυτές είναι η **γωνία προσβολής (angle of attack) α** , και η **γωνία πλαγιολίσθησης (sideslip angle) β** . Αυτές ορίζονται ως ακολούθως. Έστω V_a το διάνυσμα της ταχύτητας του αεροσκάφους ως προς τον αέρα. Η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του διανύσματος i^b και της προβολής του διανύσματος V_a στο επίπεδο $i^b - k^b$ είναι η γωνία προσβολής α . Καθώς το αεροσκάφος κινείται, το διάνυσμα V_a δεν είναι πάντοτε ευθυγραμμισμένο με το επίπεδο $i^b - k^b$, αλλά παρουσιάζει μια γωνία. Αυτή η γωνία είναι η γωνία πλαγιολίσθησης β . Στην εικόνα 2.1 φαίνονται σχηματικά οι ανωτέρω γωνίες.

Στο σημείο αυτό τονίζουμε ότι παρουσία ανέμου η ταχύτητα του αεροσκάφους ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς δεν είναι η V_a αλλά η V_g , η οποία παριστάνεται με ένα νέο διάνυσμα που προκύπτει από διανυσματική αφαίρεση των συνιστωσών της V_a από τις αντίστοιχες συνιστώσες του διανύσματος του ανέμου.



Εικόνα 2.1 Αεροδυναμικές γωνίες προσβολής και πλαγιολίσθησης (εικόνα από (εικόνα από researchgate.net)).

Από τις δύο αυτές γωνίες προκύπτουν δύο επιπλέον συστήματα συντεταγμένων. Η περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων σώματος κατά τη γωνία προσβολής α οδηγεί σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων που ονομάζεται **σύστημα σταθερότητας (stability frame)**. Συμβολίζοντας με s το εν λόγω σύστημα, ο πίνακας περιστροφής είναι:

$$R_b^s(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Ομοίως, η περιστροφή του συστήματος σταθερότητας περί την γωνία πλαγιολίσθησης β οδηγεί σε ένα νέο σύστημα το οποίο καλείται **σύστημα ανέμου (wind frame)**. Αυτό διότι το διάνυσμα V_a βρίσκεται επί του διαμήκου άξονά του. Συμβολίζοντάς το σύστημα αυτό με w ο πίνακας περιστροφής είναι:

$$R_s^w(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

2.2 Εξισώσεις κινηματικής.

Η κίνηση ενός αεροσκάφους στο χώρο περιγράφεται από ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων. Η μορφή των εξισώσεων αυτών εξαρτάται από το ποιές μεταβλητές θα χρησιμοποιηθούν στο διάνυσμα κατάστασης. Μία αρκετά καλή επιλογή περιλαμβάνει τη θέση του αεροσκάφους ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (p_n, p_e, p_d) , τις αντίστοιχες ταχύτητες (u, v, w) , τις γωνίες διατοιχισμού, πρόνευσης και εκτροπής (φ, θ, ψ) και τις αντίστοιχες γωνιακές ταχύτητες (p, q, r) . Έτσι το χρησιμοποιούμενο διάνυσμα κατάστασης είναι το

$$x = (p_n, p_e, p_d, u, v, w, \varphi, \theta, \psi, p, q, r) \quad (2.7)$$

Από το διάνυσμα κατάστασης συμπεραίνουμε ότι η κίνηση ενός αεροσκάφους στο χώρο περιγράφεται από ένα σύστημα 12 διαφορικών εξισώσεων. Κατά αντιστοιχία με τις τριάδες των μεταβλητών κατάστασης που περιγράψαμε προηγουμένως, αυτές μπορούν να χωριστούν σε τέσσερις κατηγορίες, τις **εξισώσεις πλοήγησης**, τις **εξισώσεις δυνάμεων**, τις **εξισώσεις κινηματικής** και τις **εξισώσεις ροπών**. Αυτές προκύπτουν με εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα. Στη διατύπωσή τους πρέπει να ληφθεί υπόψη και η περιστροφή του αεροσκάφους σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Εάν θεωρήσουμε το αεροσκάφος σαν ένα σύστημα, οι είσοδοι αυτού του συστήματος είναι οι συνολικές δυνάμεις που δέχεται το αεροσκάφος στους τρεις άξονες του συστήματος αξόνων σώματος f_x, f_y και f_z καθώς και οι συνολικές ροπές l, m και n που δέχεται το αεροσκάφος στους προαναφερθέντες άξονες. Με βάση την ανάλυση που βρίσκουμε στο έργο των [Beard, McLain 2012] οι εξισώσεις αυτές είναι:

1. Εξισώσεις πλοήγησης:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{p}_e \\ \dot{p}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\theta c_\psi & s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi & c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\varphi s_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi \\ -s_\theta & s_\varphi c_\theta & c_\varphi c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

2. Εξισώσεις δυνάμεων:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

3. Εξισώσεις κινηματικής:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \varphi \tan \theta & \cos \varphi \tan \theta \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} & \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

4. Εξισώσεις ροπών:

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr \\ \Gamma_5 pr - \Gamma_6 (p^2 - r^2) \\ \Gamma_7 pq - \Gamma_1 qr \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_3 l + \Gamma_4 n \\ \frac{1}{J_y} m \\ \Gamma_4 l + \Gamma_8 n \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

όπου $c_\varphi = \cos \varphi$, $s_\varphi = \sin \varphi$, $c_\theta = \cos \theta$, $s_\theta = \sin \theta$, $c_\psi = \cos \psi$ και $s_\psi = \sin \psi$ και με έντονη γραφή m συμβολίζουμε τη μάζα του αεροσκάφους για να την διακρίνουμε από την ροπή περί τον εγκάρσιο άξονα που συμβολίζεται με το ίδιο γράμμα, m . Οι όροι $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7$ και Γ_8 σχετίζονται με τη ροπή αδράνειας του αεροσκάφους κατά την περιστροφική του κίνηση και ορίζονται ως:

$$\Gamma_1 = \frac{J_{xz}(J_x - J_y + J_z)}{\Gamma} \quad (2.12)$$

$$\Gamma_2 = \frac{J_z(J_z - J_y) + J_{xz}^2}{\Gamma} \quad (2.13)$$

$$\Gamma_3 = \frac{J_z}{\Gamma} \quad (2.14)$$

$$\Gamma_4 = \frac{J_{xz}}{\Gamma} \quad (2.15)$$

$$\Gamma_5 = \frac{J_z - J_x}{J_y} \quad (2.16)$$

$$\Gamma_6 = \frac{J_{xz}}{J_y} \quad (2.17)$$

$$\Gamma_7 = \frac{(J_x - J_y)J_x + J_{xz}^2}{\Gamma} \quad (2.18)$$

$$\Gamma_8 = \frac{J_x}{\Gamma} \quad (2.19)$$

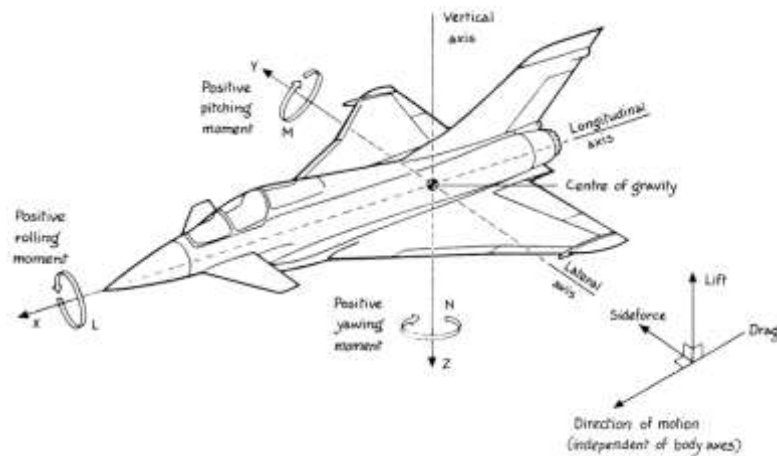
όπου:

$\Gamma = J_x J_z - J_{xz}^2$. Οι όροι J_x, J_y και J_z εκφράζουν τη ροπή αδράνειας ως προς τους άξονες περιστροφής x, y και z αντίστοιχα. Ειδικά ο όρος J_{xz} εκφράζει το γυροσκοπικό φαινόμενα κατά την περιστροφική κίνηση του αεροσκάφους γύρω από τον διαμήκη άξονά του. Ποιο συγκεκριμένα κατά την κίνησή αυτή το αεροσκάφος δεν εκτελεί μια καθαρή περιστροφή, αλλά ταυτόχρονα εκτρέπεται και κατά τον κατακόρυφο άξονα. Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι η κίνηση κατά τον διαμήκη άξονα είναι συζευγμένη με την κίνηση στον κατακόρυφο άξονα.

2.3 Δυνάμεις και ροπές.

Επί ενός αεροσκάφους ασκούνται σε γενικές γραμμές τρεις δυνάμεις και τρεις ροπές αεροδυναμικής φύσεως. Αυτές είναι η **Άντωση (Lift)**, η **Οπισθέλκουσα (Drag)** και η **Πλευρική Δύναμη (Side Force)**, οι οποίες συμβολίζονται αντίστοιχα με L, D και Y . Οι δύο πρώτες ασκούνται στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα i^b και k^b ενώ η τρίτη ασκείται στη διεύθυνση του διανύσματος j^b . Η άντωση υπερνικά τη βαρύτητα και συντελεί στο να παραμένει το αεροσκάφος στον αέρα. Η οπισθέλκουσα αντιτίθεται στην κίνηση του αεροσκάφους καθώς αυτό κινείται διαμέσου του αέρα. Οι δυνάμεις αυτές εξαρτώνται από την ταχύτητα του αεροσκάφους και ως εκ τούτου έχουν μηδενική τιμή όταν το αεροσκάφος δεν κινείται. Οι τρεις ροπές κατά τον διαμήκη, εγκάρσιο και κατακόρυφο άξονα του αεροσκάφους συμβολίζονται αντίστοιχα, όπως

ήδη αναφέραμε, ως l, m και n . Μία επιπλέον δύναμη που ασκείται στο αεροσκάφος είναι αυτή της βαρύτητας. Οι ανωτέρω δυνάμεις και ροπές φαίνονται στην εικόνα 2.2.



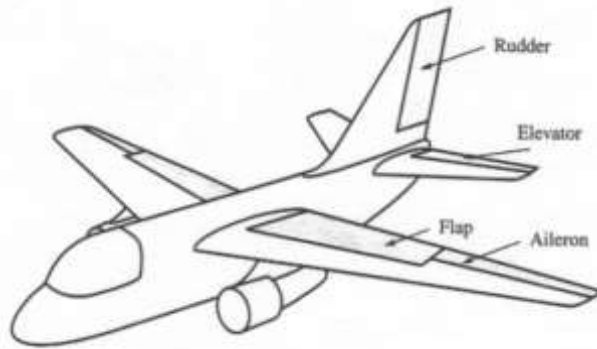
Εικόνα 2.2 Δυνάμεις και ροπές αεροδυναμικής φύσεως επί αεροσκάφους (εικόνα από researchgate.net).

Έστω f_g η δύναμη της βαρύτητας. Αυτή ασκείται στο κέντρο βάρους του αεροσκάφους προς την κατεύθυνση προς τον άξονα που αντιστοιχεί στο μοναδιαίο διάνυσμα k^i του αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων. Σε διανυσματική μορφή και λαμβάνοντας υπ' όψη την περιστροφή του αεροσκάφους περί το αδρανειακό σύστημα αναφοράς η βαρυτική δύναμη εκφρασμένη στο σύστημα αναφοράς σώματος του αεροσκάφους, f_g^b , ισούται με:

$$f_g^b = R_u^b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg \sin(\theta) \\ mg \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ mg \cos(\theta) \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Η ανάλυση των δυνάμεων και ροπών είναι βολικό να χωρίζεται σε δύο επιμέρους τμήματα, τις **Διαμήκειες Δυνάμεις και Ροπές Αεροδυναμικής φύσεως (Longitudinal Aerodynamics)** οι οποίες ασκούνται στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα i^b και k^b και τις **Εγκάρσιες Δυνάμεις και Ροπές Αεροδυναμικής Φύσεως (Lateral Aerodynamics)** οι οποίες ασκούνται στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα i^b και j^b .

Ο έλεγχος του αεροσκάφους επιτυγχάνεται μέσω των **επιφανειών ελέγχου (control surfaces)**. Αυτές είναι οι επιφάνειες ελέγχου **ανόδου – καθόδου (elevators)**, οι επιφάνειες **ελέγχου διατοιχισμού (aileron)** και το **πηδάλιο (rudder)** και φαίνονται στην εικόνα 2.3. Τα μεν πρώτα ελέγχουν την περιστροφή του αεροσκάφους περί τον άξονα j^b , τα δεύτερα περί τον άξονα i^b και τα τελευταία περί τον άξονα k^b . Οι αντίστοιχες εντολές συμβολίζονται με δ_e, δ_a και δ_r .



Εικόνα 2.3 Επιφάνειες ελέγχου αεροσκάφους (εικόνα από aerospaceweb.org).

2.3.1 Διαμήκεις Δυνάμεις και Ροπές (Longitudinal Aerodynamics).

Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται οι δυνάμεις άντωσης και οπισθέλκουσας καθώς και η ροπή περί τον διαμήκη άξονα. Η γενική μορφή των εξισώσεων που τις περιγράφουν είναι:

$$F_{lift} = L = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_L(\alpha, q, \delta_e) \quad (2.21)$$

$$F_{drag} = D = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_D(\alpha, q, \delta_e) \quad (2.22)$$

$$m = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S c C_m(\alpha, q, \delta_e) \quad (2.23)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του αέρα, V_a είναι η ταχύτητα του αεροσκάφους και S είναι η επιφάνεια της πτέρυγας και c μία παράμετρος της αεροτομής η οποία καλείται **χορδή** και την οποία θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο 3. Η ποσότητα $\frac{1}{2} \rho V_a^2 S$ ονομάζεται **δυναμική πίεση**. Οι ποσότητες C_L, C_D και C_m είναι οι αδιάστατοι **αεροδυναμικοί συντελεστές**. Όπως βλέπουμε στις ανωτέρω σχέσεις, οι συντελεστές αυτοί είναι συνάρτηση της γωνίας προσβολής, της γωνιακής ταχύτητας κατά τον εγκάρσιο άξονα και της κλίσης των επιφανειών ανόδου-καθόδου.

Οι εξισώσεις των δυνάμεων άντωσης και οπισθέλκουσας, καθώς και της διαμήκου ροπής, είναι στην πραγματικότητα μη γραμμικές. Ωστόσο για συνθήκες πτήσης όμως όπου η γωνία προσβολής α είναι σχετικά μικρή, μια καλή προσέγγιση είναι να τις διατυπώσουμε προσεγγιστικά χρησιμοποιώντας σειρές Taylor. Οι εξισώσεις 2.21 – 2.23 σε αυτήν την περίπτωση παίρνουν τη μορφή:

$$F_{lift} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \left[C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha + C_{Lq} \frac{c}{2V_a} q + C_{L\delta_e} \delta_e \right] \quad (2.24)$$

$$F_{drag} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \left[C_{D0} + C_{D\alpha} \alpha + C_{Dq} \frac{c}{2V_a} q + C_{D\delta_e} \delta_e \right] \quad (2.25)$$

$$m = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S c \left[C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{m_{\delta_e}} \delta_e \right] \quad (2.26)$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις περιγράφουν ικανοποιητικά την τιμή των δυνάμεων άντωσης και οπισθέλκουσας καθώς και τις διαμήκους ροής για μικρές τιμές της γωνίας προσβολής. Ωστόσο δεν λαμβάνουν υπ όψη μη γραμμικά αεροδυναμικά φαινόμενα, εκ των οποίων το πλέον σημαντικό είναι η **απώλεια στήριξης (stall)**. Κατά το φαινόμενο αυτό, η γωνία προσβολής έχει αυξηθεί σε τέτοιο βαθμό, ώστε η ροή του αέρα αποκολλάται από την πτέρυγα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα δραματική μείωση στην τιμή της άντωσης κάτι το οποίο δεν προβλέπει η εξίσωση 2.24. Έτσι προκειμένου να μοντελοποιήσουμε το φαινόμενο της απώλειας στήριξης, τροποποιούμε τις εξισώσεις 2.24 – 2.26 έτσι ώστε οι αεροδυναμικοί συντελεστές να είναι μη γραμμικές συναρτήσεις της γωνίας προσβολής α . Έτσι οι εν λόγω εξισώσεις ξαναγράφονται ως:

$$F_{lift} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \left[C_L(\alpha) + C_{L_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{L_{\delta_e}} \delta_e \right] \quad (2.27)$$

$$F_{drag} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \left[C_D(\alpha) + C_{D_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{D_{\delta_e}} \delta_e \right] \quad (2.28)$$

$$m = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S c \left[C_m(\alpha) + C_{m_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{m_{\delta_e}} \delta_e \right] \quad (2.29)$$

Το επί μέρους τμήμα του συντελεστή άντωσης, $C_L(\alpha)$, μπορεί υπολογίζεται από τη ακόλουθη μη γραμμική σχέση, η οποία μοντελοποιεί το φαινόμενο απώλειας στήριξης:

$$C_L(\alpha) = (1 - \sigma(\alpha)) [C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha] + \sigma(\alpha) [2 \text{sign}(\alpha) \sin^2 \alpha \cos \alpha] \quad (2.30)$$

όπου:

$$\sigma(\alpha) = \frac{1 + e^{-M(\alpha-\alpha_0)} + e^{M(\alpha-\alpha_0)}}{(1 + e^{-M(\alpha-\alpha_0)})(1 + e^{M(\alpha+\alpha_0)})} \quad (2.31)$$

είναι μια σιγμοειδής συνάρτηση με τιμή αποκοπής γωνίας προσβολής α_0 και ρυθμό μετάβασης M . Το τμήμα του συντελεστή οπισθέλκουσας $C_D(\alpha)$, υπολογίζεται αντίστοιχα από τη σχέση:

$$C_D(\alpha) = C_{D_p} + \frac{(C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha)^2}{\pi e AR} \quad (2.32)$$

όπου e είναι ο παράγοντας Oswald και AR ένας παράγοντας που καλείται **Aspect Ratio** και θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο 4.

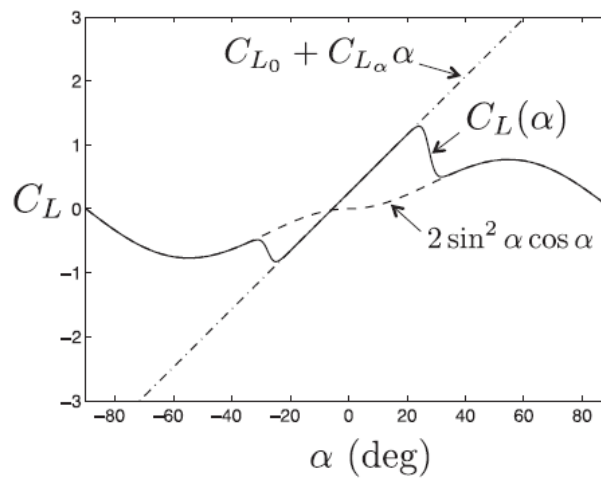
Εάν ωστόσο υποθέσουμε ότι καθ' όλη τη διάρκεια της πτήσης η γωνία προσβολής θα είναι αρκετά μικρή, τότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα κατωτέρω γραμμικά

μοντέλα για τα προαναφερθέντα τμήματα των συντελεστών άντωσης και οπισθέλκουσας:

$$C_L(\alpha) = C_{L_0} + C_{L\alpha}\alpha \quad (2.33)$$

$$C_{D\alpha}(\alpha) = C_{D_0} + C_{D\alpha}\alpha \quad (2.34)$$

Στην εικόνα 2.4 φαίνεται με έντονη γραμμή η γραφική παράσταση της 2.30. Η ευθεία διακεκομμένη γραμμή προκύπτει από το γραμμικό μοντέλο του συντελεστή άνωσης και η καμπύλη διακεκομμένη περιγράφει τη συνάρτηση $2\sin^2\alpha \cos\alpha$ που εμφανίζεται στο αντίστοιχο γραμμικό μοντέλο.



Εικόνα 2.4 Ο συντελεστής άντωσης C_L σε συνάρτηση με τη γωνία προσβολής α (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).

Οι δυνάμεις άντωσης και οπισθέλκουσας υπολογίζονται στο σύστημα συντεταγμένων σταθερότητας του αεροσκάφους. Έχουμε πει όμως πως οι εν λόγω δυνάμεις είναι πιο βολικό να υπολογίζονται στο σύστημα αξόνων σώματος. Έτσι για να εκφράσουμε τις δυνάμεις αυτές στο επιθυμητό σύστημα, πολλαπλασιάζουμε με τον πίνακα περιστροφής που εκφράζεται από τη σχέση 2.5, αλλά με αντίθετο πρόσημο λόγω της περιστροφής κατά την αρνητική φορά μέτρησης της γωνίας α , και τελικά έχουμε:

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F_{drag} \\ F_{lift} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f_x \\ f_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S$$

$$\begin{bmatrix} -C_D(\alpha) \cos\alpha + C_L(\alpha) \sin\alpha + \left(-C_{Dq}(\alpha) \cos\alpha + C_{Lq}(\alpha) \sin\alpha\right) \frac{c}{2V_a} q + \left(-C_{D\delta_e}(\alpha) \cos\alpha + C_{L\delta_e}(\alpha) \sin\alpha\right) \delta_e \\ -C_D(\alpha) \sin\alpha - C_L(\alpha) \cos\alpha + \left(-C_{Dq}(\alpha) \sin\alpha - C_{Lq}(\alpha) \cos\alpha\right) \frac{c}{2V_a} q + \left(-C_{D\delta_e}(\alpha) \sin\alpha - C_{L\delta_e}(\alpha) \cos\alpha\right) \delta_e \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος i^b ασκείται επιπλέον και η δύναμη του προωθητικού συστήματος. Οι [Beard, McLain 2012] στο έργο τους, εξετάζουν την περίπτωση μικρών αεροσκαφών, το προωθητικό σύστημα των οποίων είναι μία έλικα οδηγούμενη από κινητήρα. Εάν συμβολίσουμε με f_p τη δύναμη του προωθητικού συστήματος, τότε το χρησιμοποιούμενο μοντέλο για το σύστημα προώθησης είναι:

$$f_b = \frac{1}{2} \rho S_{prop} C_{prop} \begin{pmatrix} (k_{motor} \delta_t)^2 - V_a^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

όπου S_{prop} είναι το εμβαδό που καλύπτει κατά την περιστροφή της η έλικα και C_{prop} ένας συντελεστής. Η μορφή της 2.36 δηλώνει ότι η δύναμη της πρόωσης ασκείται μόνο κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος i^b και έτσι δεν ασκεί κάποια ροπή περί το κέντρο μάζας του αεροσκάφους. Η έλικα κατά την κίνησή της περί τον άξονα της, παράγει και μια ροπή η οποία ωστόσο εξουδετερώνεται από τις επιφάνειες ελέγχου διατοιχισμού και η οποία υπολογίζεται από τη σχέση:

$$m_p = \begin{pmatrix} -K_{Tp} (K_\Omega \delta_t)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

όπου $K_\Omega \delta_t = \Omega$ είναι η ταχύτητα περιστροφής της προπέλας και K_{Tp} μία σταθερά που προκύπτει έπειτα από πειραματικές δοκιμές.

2.3.2 Εγκάρσιες Δυνάμεις και Ροπές (Lateral Aerodynamics).

Η παρούσα κατηγορία περιλαμβάνει την ασκούμενη δύναμη κατά τον εγκάρσιο άξονα του συστήματος αξόνων σώματος του αεροσκάφους, καθώς και τις ροπές στον διαμήκη και κατακόρυφο άξονα. Οι τύποι υπολογισμού είναι οι:

$$f_y = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_Y(\beta, p, r, \delta_\alpha, \delta_r) \quad (2.38)$$

$$l = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b C_l(\beta, p, r, \delta_\alpha, \delta_r) \quad (2.39)$$

$$n = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b C_n(\beta, p, r, \delta_\alpha, \delta_r) \quad (2.40)$$

όπου C_Y , C_l και C_n είναι οι αδιάστατοι αεροδυναμικοί συντελεστές, β η γωνία πλαγιολίσθησης, p και r η γωνιακές ταχύτητες περιστροφής περί τον διαμήκη και κατακόρυφο άξονα αντίστοιχα και δ_α και δ_r η κλίση των επιφανειών ελέγχου ανόδου-καθόδου και εκτροπής. Όπως και στην περίπτωση των διαμηκών δυνάμεων και ροπών, οι σχέσεις 2.38 – 2.40 είναι μη γραμμικές. Μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε στην προηγούμενη περίπτωση και να τις

διατυπώσουμε προσεγγιστικά με σειρές Taylor. Έτσι η νέα μορφή των προαναφερθέντων εξισώσεων είναι:

$$f_y = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \left[C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_p} \frac{b}{2V_a} p + C_{Y_r} \frac{b}{2V_a} r + C_{Y_{\delta_a}} \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r \right] \quad (2.41)$$

$$l = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \left[C_{l_0} + C_{l_\beta} \beta + C_{l_p} \frac{b}{2V_a} p + C_{l_r} \frac{b}{2V_a} r + C_{l_{\delta_a}} \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \delta_r \right] \quad (2.42)$$

$$n = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \left[C_{n_0} + C_{n_\beta} \beta + C_{n_p} \frac{b}{2V_a} p + C_{n_r} \frac{b}{2V_a} r + C_{n_{\delta_a}} \delta_a + C_{n_{\delta_r}} \delta_r \right] \quad (2.43)$$

Λόγω του ότι οι εν λόγω δύναμη και ροπές υπολογίζονται ήδη στο σύστημα αξόνων σώματος και επομένως δεν χρειάζεται πλέον η έκφρασή τους με περιστροφή περί την γωνία προσβολής α , όπως συμβαίνει με τις διαμήκεις δυνάμεις και ροπές.

2.3.3 Συνολικές δυνάμεις και ροπές.

Με βάση τα ανωτέρω, οι [Beard, McLain 2012] στο έργο τους παρουσιάζουν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων το οποίο περιγράφει τις δυνάμεις και ροπές που ασκούνται επί ενός μικρού αεροσκάφους, του οποίου το προωθητικό σύστημα αποτελείται από μία έλικα. Για την περίπτωση που το προωθητικό σύστημα ήταν άλλης μορφής, μπορούμε να πούμε ότι οι εν λόγω εξισώσεις ισχύουν γενικά για ένα αεροσκάφος για υποχηητικές ταχύτητες.

1. Εξισώσεις δυνάμεων:

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \varphi \\ mg \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \begin{pmatrix} C_X(\alpha) + C_{X_q}(\alpha) \frac{c}{2V_a} q + C_{X_{\delta_e}}(\alpha) \delta_e \\ C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_p} \frac{b}{2V_a} p + C_{Y_r} \frac{b}{2V_a} r + C_{Y_{\delta_a}} \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r \\ C_Z(\alpha) + C_{Z_q}(\alpha) \frac{c}{2V_a} q + C_{Z_{\delta_e}}(\alpha) \delta_e \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \rho S_{prop} C_{prop} \begin{pmatrix} (k_{motor} \delta_t)^2 - V_a^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

όπου:

$$C_X(\alpha) = -C_D(\alpha) \cos \alpha + C_L(\alpha) \sin \alpha \quad (2.45)$$

$$C_{X_q}(\alpha) = -C_{D_q} \cos \alpha + C_{L_q} \sin \alpha \quad (2.46)$$

$$C_{X_{\delta_e}}(\alpha) = -C_{D_{\delta_e}} \cos \alpha + C_{L_{\delta_e}} \sin \alpha \quad (2.47)$$

$$C_Z(\alpha) = -C_D(\alpha) \sin \alpha - C_L(\alpha) \cos \alpha \quad (2.48)$$

$$C_{Z_q}(\alpha) = -C_{D_q} \sin \alpha - C_{L_q} \cos \alpha \quad (2.49)$$

$$C_{Z_{\delta_e}}(\alpha) = -C_{D_{\delta_e}} \sin \alpha - C_{L_{\delta_e}} \cos \alpha \quad (2.50)$$

είναι τα αντίστοιχα γραμμικοποιημένα τμήματα των αεροδυναμικών συντελεστών κάθε ανεξάρτητης μεταβλητής που προκύπτουν από την περιστροφή κατά τη γωνία προσβολής α .

2. Εξισώσεις ροπών:

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \begin{pmatrix} b \left[C_{l_0} + C_{l_\beta} \beta + C_{l_p} \frac{b}{2V_a} p + C_{l_r} \frac{b}{2V_a} r + C_{l_{\delta_a}} \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \delta_r \right] \\ c \left[C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{m_{\delta_e}} \delta_e \right] \\ b \left[C_{n_0} + C_{n_\beta} \beta + C_{n_p} \frac{b}{2V_a} p + C_{n_r} \frac{b}{2V_a} r + C_{n_{\delta_a}} \delta_a + C_{n_{\delta_r}} \delta_r \right] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K_{Tp} (K_\Omega \delta_t)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Στις εξισώσεις 2.44 και 2.51 περιγράφονται οι δυνάμεις και ροπές που ασκούνται επί των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων σώματος στην διεύθυνση των μοναδιαίων διανυσμάτων i^b , j^b και k^b .

2.4 Πλήρες μοντέλο αεροσκάφους.

Οι δυνάμεις και ροπές που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους είναι η είσοδος του κινηματικού μοντέλου του αεροσκάφους που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 2.2. Έτσι, εισάγοντας τις εξισώσεις δυνάμεων και ροπών 2.44 και 2.51, στις εξισώσεις κινηματικής 2.8 – 2.11, προκύπτει το πλήρες δυναμικό μοντέλο ενός αεροσκάφους **δώδεκα μεταβλητών κατάστασης και έξι βαθμών ελευθερίας (twelve state, six degree of freedom model)** του οποίου το προωθητικό σύστημα είναι ένας κινητήρας που οδηγεί μία έλικα. Οι ίδιες εξισώσεις με κατάλληλη τροποποίηση ισχύουν και στην περίπτωση που το προωθητικό σύστημα είναι άλλης μορφής. Οι εξισώσεις είναι:

1. Εξισώσεις πλοήγησης:

$$\dot{p}_n = (\cos \theta \cos \psi)u + (\sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi)v + (\cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi)w \quad (2.52)$$

$$\dot{p}_e = (\cos \theta \sin \psi)u + (\sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi)v + (\cos \varphi \sin \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi)w \quad (2.53)$$

$$\dot{h} = \sin \theta u - \sin \varphi \cos \theta v - \cos \varphi \cos \theta w \quad (2.54)$$

2. Εξισώσεις δυνάμεων:

$$\dot{u} = ru - ww - g \sin \theta + \frac{\rho V_a^2 S}{2m} \left[C_X(\alpha) + C_{X_q}(\alpha) \frac{cq}{2V_a} + C_{X_{\delta_e}}(\alpha) \delta_e \right] + \frac{\rho S_{prop} C_{prop}}{2m} [(K_{motor} \delta_t^2 - V_a^2)] \quad (2.55)$$

$$\dot{v} = pw - ru + g \cos \theta \sin \varphi + \frac{\rho V_a^2 S}{2m} \left[C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{Y_r} \frac{br}{2V_a} + C_{Y_{\delta_a}} \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r \right] \quad (2.56)$$

$$\dot{w} = qu - pv + g \cos \theta \cos \varphi + \frac{\rho V_a^2 S}{2m} \left[C_Z(\alpha) + C_{Z_q}(\alpha) \frac{cq}{2V_a} + C_{Z_{\delta_e}}(\alpha) \delta_e \right] \quad (2.57)$$

3. Εξισώσεις κινηματικής:

$$\dot{\varphi} = p + q \sin \varphi \tan \theta + r \cos \varphi \tan \theta \quad (2.58)$$

$$\dot{\theta} = q \cos \varphi - r \sin \varphi \quad (2.59)$$

$$\dot{\psi} = q \sin \varphi \sec \theta + r \cos \varphi \sec \theta \quad (2.60)$$

4. Εξισώσεις ροπών:

$$\dot{p} = \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr + \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \left[C_{p_0} + C_{p_\beta} \beta + C_{p_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{p_r} \frac{br}{2V_a} + C_{p_{\delta_a}} \delta_a + C_{p_{\delta_r}} \delta_r \right] \quad (2.61)$$

$$\dot{q} = \Gamma_5 pr - \Gamma_6 (p^2 - r^2) + \frac{\rho V_a^2 S c}{2J_y} \left[C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \frac{cq}{2V_a} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e \right] \quad (2.62)$$

$$\dot{r} = \Gamma_7 pq - \Gamma_1 qr + \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \left[C_{r_0} + C_{r_\beta} \beta + C_{r_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{r_r} \frac{br}{2V_a} + C_{r_{\delta_a}} \delta_a + C_{r_{\delta_r}} \delta_r \right] \quad (2.63)$$

όπου $h = -p_d$ είναι το ύψος και

$$C_{p_0} = \Gamma_3 C_{l_0} + \Gamma_4 C_{n_0} \quad (2.64)$$

$$C_{p_\beta} = \Gamma_3 C_{l_\beta} + \Gamma_4 C_{n_\beta} \quad (2.65)$$

$$C_{p_p} = \Gamma_3 C_{l_p} + \Gamma_4 C_{n_p} \quad (2.66)$$

$$C_{p_r} = \Gamma_3 C_{l_r} + \Gamma_4 C_{n_r} \quad (2.67)$$

$$C_{p_{\delta_a}} = \Gamma_3 C_{l_{\delta_a}} + \Gamma_4 C_{n_{\delta_a}} \quad (2.68)$$

$$C_{p_{\delta_r}} = \Gamma_3 C_{l_{\delta_r}} + \Gamma_4 C_{n_{\delta_r}} \quad (2.69)$$

$$C_{r_0} = \Gamma_4 C_{l_0} + \Gamma_8 C_{n_0} \quad (2.70)$$

$$C_{r_\beta} = \Gamma_4 C_{l_\beta} + \Gamma_8 C_{n_\beta} \quad (2.71)$$

$$C_{r_p} = \Gamma_4 C_{l_p} + \Gamma_8 C_{n_p} \quad (2.72)$$

$$C_{r_r} = \Gamma_4 C_{l_r} + \Gamma_8 C_{n_r} \quad (2.73)$$

$$C_{r_{\delta_a}} = \Gamma_4 C_{l_{\delta_a}} + \Gamma_8 C_{n_{\delta_a}} \quad (2.74)$$

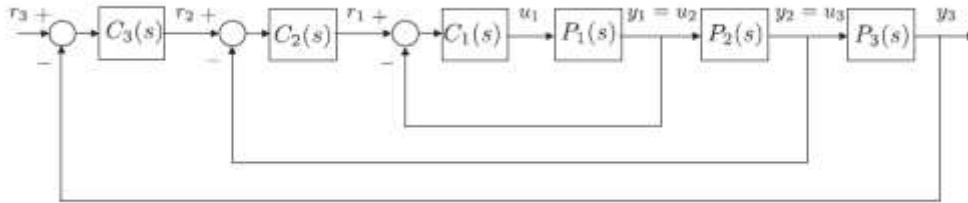
$$C_{r_{\delta_r}} = \Gamma_4 C_{l_{\delta_r}} + \Gamma_8 C_{n_{\delta_r}} \quad (2.75)$$

είναι οι συντελεστές που σχετίζονται με τα αδρανειακά χαρακτηριστικά του αεροσκάφους.

2.5 Αυτόματος έλεγχος αεροσκάφους

Το **Σύστημα Ελέγχου Πτήσης (Flight Control System, FLCS)** είναι από τα πλέον σημαντικά για ένα αεροσκάφος, καθώς του εξασφαλίζει τη δυνατότητα να ίπταται αποτελεσματικά. Ειδικά για τα UAV όπου δεν υπάρχει χειριστής, το όλο σύστημα είναι πλήρως αυτόνομο. Πρόκειται με άλλα λόγια για τον **αυτόματο πιλότο (autopilot)** του αεροσκάφους. Για το σχεδιασμό του εν λόγω συστήματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες τεχνικές αυτομάτου ελέγχου. Εμείς θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο του έργου των [Beard, McLain 2012] η οποία είναι η *PID*. Λόγω του διαχωρισμού των δυνάμεων και ροπών σε διαμήκεις και εγκάρσιες, ο αυτόματος πιλότος σχεδιάζεται έτσι ώστε και ελέγχονται ξεχωριστά οι δύο αυτές κατηγορίες ή κανάλια. Έτσι υπάρχει ο διαχωρισμός σε **αυτόματο πιλότο διαμηκών δυνάμεων και ροπών (longitudinal autopilot)** και σε **αυτόματο πιλότο εγκάρσιων δυνάμεων και ροπών (lateral autopilot)**.

Για τον αποτελεσματικότερο έλεγχο με τη μέθοδο PID, χρησιμοποιείται η τεχνική **Διαδοχικού Κλεισίματος Βρόγχων (Successive Loop Closure, SLC)**. Η τεχνική αυτή συνίσταται στο να εμπεριέχονται κλειστοί βρόγχοι ελέγχου ο ένας μέσα στον άλλον όπως φαίνεται στο παράδειγμα της εικόνας 2.5, όπου με $P_1(s), P_2(s)$ και $P_3(s)$ είναι οι συναρτήσεις μεταφοράς των αντίστοιχων υποσυστημάτων και $C_1(s), C_2(s)$ και $C_3(s)$ οι αντίστοιχοι ελεγκτές.



Εικόνα 2.5 Η τεχνική Successive Loop Closure (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).

Για τη σωστή λειτουργία ενός τέτοιου συστήματος, θα πρέπει το εύρος ζώνης του εξωτερικού βρόγχου να είναι μικρότερο από αυτό του αμέσως επόμενου εσωτερικού του. Αυτό πρέπει να γίνει έτσι ώστε οι αλλαγές στην είσοδο του εξωτερικού βρόγχου να προλαβαίνουν να εμφανίζονται στην έξοδο του εσωτερικού. Δηλαδή εάν ω_{BW1} και ω_{BW2} το εύρος ζώνης δύο διαδοχικών βρόγχων όπου βρόγχος 1 εμπεριέχεται στον βρόγχο 2, θα πρέπει να ισχύει:

$$\omega_{BW2} = \frac{1}{s} \omega_{BW1} \quad (2.74)$$

όπου s μία σχεδιαστική παράμετρος ελάττωσης του εύρους ζώνης που συνήθως λαμβάνει τιμές στο διάστημα [5,15].

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι ο αυτόματος πιλότος σχεδιάζεται με βάση το σημείο λειτουργίας x^* στο οποίο έχει γίνει γραμμικοποίηση των διαφορικών εξισώσεων 2.52 – 2.63. Με άλλα λόγια ο αυτόματος πιλότος θα σχεδιαστεί έτσι ώστε να είναι αποτελεσματικός σε συγκεκριμένες συνθήκες πτήσης, όπως ύψος h και ταχύτητα V_a . Οι συνθήκες πτήσης για τις οποίες γραμμικοποιείται το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων καλούνται **trim conditions**, το δε επιθυμητό σημείο λειτουργίας είναι:

$$\dot{x}^* = \left(X, X, V_a^* \sin \gamma^*, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{V_a^*}{R^*} \cos \gamma^*, 0, 0, 0 \right) \quad (2.75)$$

όπου το X δηλώνει αδιάφορο όρο, V_a^* είναι η ταχύτητα ως προς τον αέρα στην οποία γίνεται η γραμμικοποίηση, γ^* είναι η επιθυμητή γωνία ανόδου του αεροσκάφους (είναι διαφορετική από τη γωνία πρόνευσης θ και εκφράζει τη γωνία του διανύσματος V_g με τον διαμήκη άξονα του αδρανειακού συστήματος αναφοράς) και R^* είναι η επιθυμητή ακτίνα στροφής η οποία αποκτά πολύ μεγάλη τιμή (πρακτικώς άπειρη) εάν επιθυμούμε ευθεία οριζόντια πτήση. Για την επίτευξη της πτήσης σε συνθήκες ισορροπίας πρέπει και το διάνυσμα εισόδων $u = (\delta_e, \delta_a, \delta_r, \delta_t)$ να αποκτήσει τις αντίστοιχες κατάλληλες τιμές $u^* = (\delta_e^*, \delta_a^*, \delta_r^*, \delta_t^*)$.

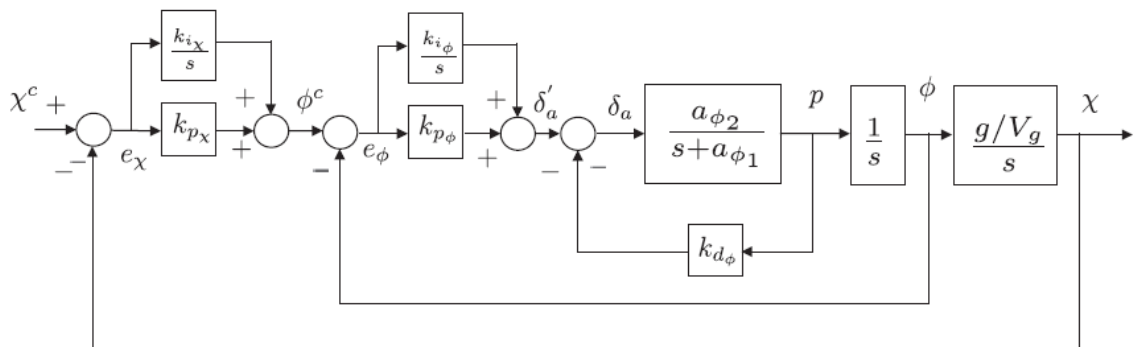
Τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια ελέγχονται από PI ελεγκτές. Κάποια από αυτά περιέχουν ένα διαφορικό κέρδος στον κλάδο ανάδρασης το οποίο προσδιορίζει τη μορφή της **απόσβεσης (damping)** του συστήματος. Οι συναρτήσεις μεταφοράς των συστημάτων είναι δευτέρου βαθμού. Ο υπολογισμός των κερδών των ελεγκτών προκύπτει έπειτα από σξίωση των όμοιων όρων ανάμεσα στην προκύπτουσα και την τυπική συνάρτηση μεταφοράς συνάρτηση μεταφοράς δευτέρου βαθμού η οποία έχει τη μορφή:

$$H(s) = \frac{y}{y^c} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.76)$$

όπου ω_n η φυσική συχνότητα του συστήματος και ζ ο συντελεστής απόσβεσης.

2.5.1 Αυτόματος πιλότος εγκάρσιων δυνάμεων (Lateral Autopilot)

Το πλήρες σύστημα φαίνεται στην εικόνα 2.6. Ο απώτερος σκοπός αυτού του συστήματος είναι η παρακολούθηση της επιθυμητής πορείας χ^c .



Εικόνα 2.6 Αυτόματος πιλότος εγκάρσιων δυνάμεων (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).

Ο εσωτερικότερος βρόγχος στο ανωτέρω σύστημα δέχεται ως είσοδο την επιθυμητή γωνία διατοιχισμού φ^c και μέσω του PI ελεγκτή παράγει την εντολή ελέγχου που είναι η κλίση των επιφανειών ελέγχου διατοιχισμού. Στην έξοδο δίνει την κλίση του αεροσκάφους, δηλαδή τη γωνία φ , περιέχει δε και ένα διαφορικό κέρδος στον κλάδο ανάδρασης. Ο εξωτερικότερος βρόγχος αντίστοιχα, δέχεται ως είσοδο την επιθυμητή πορεία χ^c και μέσω του PI ελεγκτή, παράγει την εντολή ελέγχου της επιθυμητής κλίσης του αεροσκάφους φ^c η οποία χρησιμοποιείται από τον εσωτερικό βρόγχο. Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος της εικόνας 2.5 είναι:

$$\varphi = \left(\frac{s}{s^3 + (\alpha_{\varphi 1} + \alpha_{\varphi 2} k_{d\varphi} s^2) + \alpha_{\varphi 2} k_{p\varphi} s + \alpha_{\varphi 2} k_{i\varphi}} \right) d_{\varphi 2} + \left(\frac{\alpha_{\varphi 2} k_{p\varphi} \left(s + \frac{k_{i\varphi}}{k_{p\varphi}} \right)}{s^3 + (\alpha_{\varphi 1} + \alpha_{\varphi 2} k_{d\varphi} s^2) + \alpha_{\varphi 2} k_{p\varphi} s + \alpha_{\varphi 2} k_{i\varphi}} \right) \varphi^c \quad (2.77)$$

Οι παράμετροι $\alpha_{\phi 1}$ και $\alpha_{\phi 2}$ προκύπτουν ύστερα από τη γραμμικοποίηση του συστήματος στις επιθυμητές συνθήκες πτήσης και υπολογίζονται ως:

$$\alpha_{\phi 1} = -\frac{1}{2}\rho V_a^2 S b C_{pp} \frac{b}{2V_a} \quad (2.78)$$

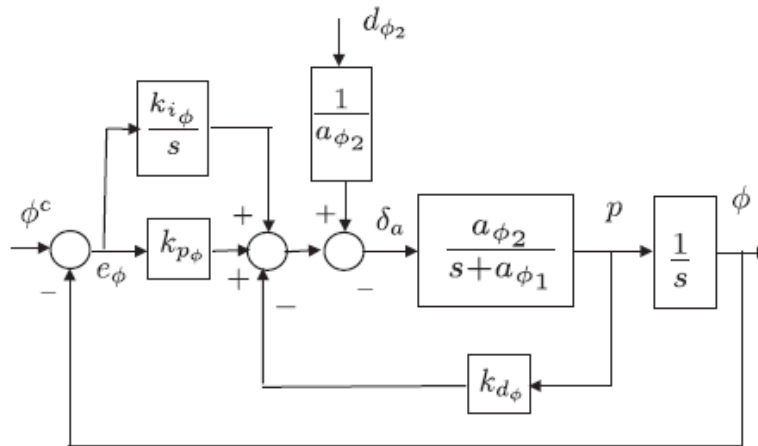
$$\alpha_{\phi 2} = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S b C_{p\delta a} \quad (2.79)$$

ο δε όρος $d_{\phi 2}$ εισάγεται ως διαταραχή όπως φαίνεται στην εικόνα 2.7, μοντελοποιεί δε τη δυναμική του συστήματος που αγνοήθηκε κατά την διατύπωση του δυναμικού μοντέλου και υπολογίζεται ως εξής:

$$d_{\phi 2} = \Gamma_1 p q - \Gamma_2 q r + \frac{1}{2}\rho V_a^2 S b \left[C_{p0} + C_{p\beta\beta} - C_{pp} \frac{b}{2V_a} d_{\phi 1} + C_{pr} \frac{br}{2V_a} + C_{p\delta_r} \delta_r \right] + \dot{d}_{\phi 1} \quad (2.80)$$

με:

$$d_{\phi 1} = q \sin \varphi \tan \theta + r \cos \varphi \tan \theta \quad (2.81)$$



Εικόνα 2.7 Εισαγωγή διαταραχής στον εσωτερικό βρόγχο του συστήματος ελέγχου της γωνίας διατοιχισμού φ (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).

Ο ολοκληρωτικός όρος στον ελεγκτή του εξωτερικού βρόγχου ελέγχου της πορείας χ χρησιμεύει για την απόρριψη της εν λόγω διαταραχής.

Τα κέρδη του εσωτερικού βρόγχου είναι το διαφορικό κέρδος $k_{d\varphi}$ του βρόγχου ανάδρασης και το αναλογικό και ολοκληρωτικό κέρδος $K_{p\varphi}$ και $K_{i\varphi}$ του PI ελεγκτή. Το αναλογικό κέρδος επιλέγεται έτσι ώστε οι επιφάνειες ελέγχου διατοιχισμού να φτάνουν σε κορεσμό όταν το σφάλμα παρακολούθησης φτάνει στη μέγιστη τιμή e_{φ}^{max} , η οποία αποτελεί σχεδιαστική παράμετρο του συστήματος. Άλλες σχεδιαστικές παράμετροι του βρόγχου είναι η μέγιστη τιμή της κλίσης των

επιφανειών διατοιχισμού δ_a^{max} και ο συντελεστή απόσβεσης ζ_φ . Τα εν λόγω κέρδη υπολογίζονται με βάση τους τύπους:

$$K_{p_\varphi} = \frac{\delta_a^{max}}{e_\varphi^{max}} \text{sign}(\alpha_{\varphi 2}) \quad (2.82)$$

$$k_{d_\varphi} = \frac{2\zeta_\varphi \omega_{n_\varphi} - \alpha_{\varphi 1}}{\alpha_{\varphi 2}} \quad (2.83)$$

όπου ω_{n_φ} είναι το εύρος ζώνης του εσωτερικού βρόγχου παρακολούθησης της γωνίας διατοιχισμού φ που ισούται με:

$$\omega_{n_\varphi} = \sqrt{|\alpha_{\varphi 2}| \frac{\delta_a^{max}}{e_\varphi^{max}}} \quad (2.84)$$

Το ολοκληρωτικό κέρδος K_{i_φ} αποτελεί και αυτό μια σχεδιαστική παράμετρο του συστήματος.

Ο εξωτερικός βρόγχος επιτελεί την παρακολούθηση της επιθυμητής πορείας χ^c του αεροσκάφους. Θα πρέπει να σχεδιαστεί έτσι ώστε το εύρος ζώνης του να είναι μικρότερο από αυτό του εσωτερικού βρόγχου κατά έναν παράγοντα W_χ , ο οποίος αποτελεί σχεδιαστική παράμετρο. Εάν ο βρόγχος σχεδιαστεί έτσι τότε θεωρούμε ότι $H_\varphi = \varphi/\varphi^c \approx 1$ και επομένως με αυτή τη συνάρτηση μεταφοράς μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον εσωτερικό βρόγχο. Η συνάρτηση μεταφοράς του πλήρους συστήματος της εικόνας 2.5 είναι:

$$\chi = \frac{g/V_g s}{s^2 + k_{p_\chi} g/V_g s + k_{i_\chi} g/V_g} d_\chi + \frac{k_{p_\chi} g/V_g s + K_{i_\chi} g/V_g}{s^2 + k_{p_\chi} g/V_g s + k_{i_\chi} g/V_g} \chi^c \quad (2.85)$$

όπου d_χ ένας όρος που εισάγεται ως διαταραχή στο σύστημα. Τέλος δε ο νόμος ελέγχου του βρόγχου προκύπτει από τη σχέση:

$$\varphi^c = k_{p_\chi} (\chi^c - \chi) + \frac{k_{i_\chi}}{s} (\chi^c - \chi) \quad (2.86)$$

Τα κέρδη του PI ελεγκτή είναι το αναλογικό και ολοκληρωτικό κέρδος k_{p_χ} και k_{i_χ} και υπολογίζονται με βάση τις σχέσεις:

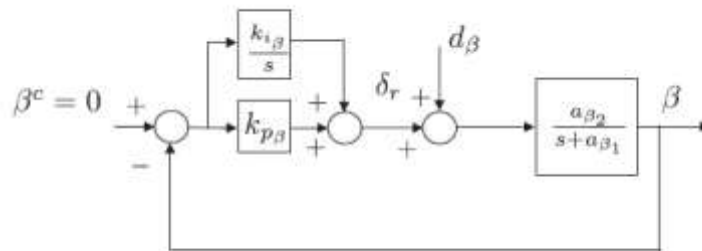
$$k_{p_\chi} = \frac{2\zeta_\chi \omega_{n_\chi} V_g}{g} \quad (2.87)$$

$$k_{i_\chi} = \frac{\omega_{n_\chi}^2 V_g}{g} \quad (2.88)$$

όπου ζ_χ η σχεδιαστική παράμετρος απόσβεσης του συστήματος. Ο νόμος ελέγχου του πλήρους συστήματος της εικόνας 2.6 είναι:

$$\delta_\alpha = k_{p\varphi}(\varphi^c - \varphi) + \frac{k_{i\varphi}}{s}(\varphi^c - \varphi) - k_{d\varphi}p \quad (2.89)$$

Εκτός από το σύστημα της εικόνας 2.6, ο αυτόματος πιλότος για τις εγκάρσιες δυνάμεις και ροπές περιλαμβάνει και τον έλεγχο του πηδαλίου του αεροσκάφους. Ο στόχος του εν λόγω συστήματος είναι η διατήρηση της γωνίας πλαγιολίσθησης β στη μηδενική τιμή. Το σύστημα αυτό φαίνεται στην εικόνα 2.8.



Εικόνα 2.8 Σύστημα ελέγχου γωνίας πλαγιολίσθησης β (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).

Η συνάρτηση μεταφοράς του εν λόγω συστήματος είναι:

$$H_{\beta/\beta^c}(s) = \frac{\alpha_{\beta_2} k_{p\beta} s + \alpha_{\beta_2} k_{i\beta}}{s^2 + (\alpha_{\beta_1} + \alpha_{\beta_2} k_{p\beta})s + \alpha_{\beta_2} k_{i\beta}} \quad (2.90)$$

όπου οι όροι α_{β_1} και α_{β_2} προκύπτουν από τη γραμμικοποίηση του συστήματος και υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\alpha_{\beta_1} = -\frac{\rho V_a S}{m} C_{Y\beta} \quad (2.91)$$

$$\alpha_{\beta_2} = \frac{\rho V_a S}{m} C_{Y\delta_r} \quad (2.92)$$

Στην συνάρτηση μεταφοράς 2.90 παρατηρούμε ότι το κέρδος DC ισούται με 1. Τα κέρδη του PI ελεγκτή είναι το αναλογικό και το ολοκληρωτικό κέρδος $k_{p\beta}$ και $k_{i\beta}$ τα οποία υπολογίζονται με βάση την επιλογή των σχεδιαστικών παραμέτρων του βρόγχου. Αυτές είναι το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος σφάλματος παρακολούθησης της γωνίας πλαγιολίσθησης β , e_β^{max} , η μέγιστη απόκλιση του πηδαλίου δ_r^{max} και ο συντελεστής απόσβεσης ζ_β . Έτσι τα προαναφερθέντα κέρδη υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$k_{p\beta} = \frac{\delta_r^{max}}{e_\beta^{max}} \text{sign}(\alpha_{\beta_2}) \quad (2.93)$$

$$k_{i\beta} = \frac{1}{\alpha_{\beta_2}} \left(\frac{\alpha_{\beta_1} + \alpha_{\beta_2} k_{p\beta}}{2\zeta_{\beta}} \right)^2 \quad (2.94)$$

Ο νόμος ελέγχου του εν λόγω βρόγχου είναι:

$$\delta_r = -k_{p\beta} \beta - \frac{k_{i\beta}}{s} \beta \quad (2.95)$$

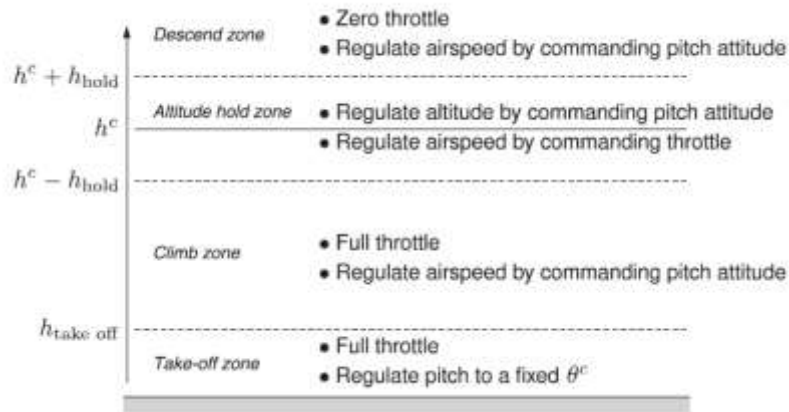
Με το εν λόγω σύστημα, ολοκληρώνεται ο σχεδιασμός του αυτόματου πιλότου εγκάρσιων δυνάμεων και ροπών.

2.5.2 Αυτόματος πιλότος διαμηκών δυνάμεων (Longitudinal Autopilot).

Το εν λόγω τμήμα του αυτόματου πιλότου είναι ποιο πολύπλοκο από το προηγούμενο διότι η ταχύτητα V_a παίζει καθοριστικό ρόλο στον υπολογισμό των δυνάμεων και ροπών. Ο τρόπος (mode) λειτουργίας του εξαρτάται από το ύψος στο οποίο βρίσκεται το αεροσκάφος. Κατά τη φάση της **απογείωσης (take off zone)** δίνεται πλήρης ισχύς στον κινητήρα και το αεροσκάφος εκτελεί άνοδο με μια καθορισμένη γωνία πρόνευσης θ^c . Ο στόχος του αεροσκάφους είναι να φτάσει σε ένα καθορισμένο ύψος h^c . Μία παράμετρος h_{hold} του αυτόματου πιλότου καθορίζει το εύρος εκτός του οποίου το αεροσκάφος θα εκτελεί **άνοδο (climb zone)** μέχρι να φτάσει στο επιθυμητό ύψος εάν είναι ποιο χαμηλά, ή **κάθοδο (descend zone)** εάν βρίσκεται υψηλότερα.

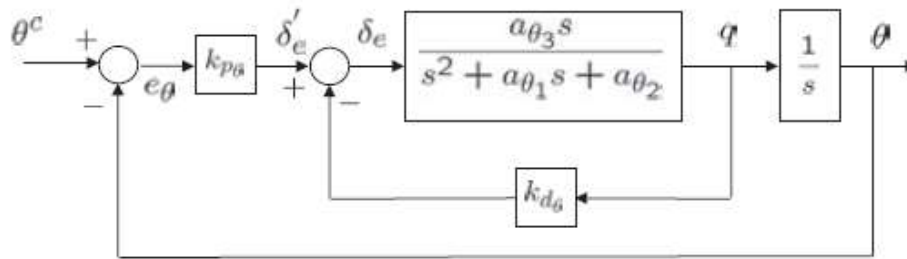
Στη ζώνη ανόδου, ο κινητήρας λειτουργεί σε πλήρη ισχύ και η ταχύτητα του αεροσκάφους ελέγχεται με βάση τη γωνία πρόνευσης θ . Συγκεκριμένα εάν η ταχύτητα υπερβεί την επιθυμητή τιμή, τότε ο αυτόματος πιλότος δίνει εντολή στο αεροσκάφος να αυξήσει τη γωνία πρόνευσης θ με αποτέλεσμα να αυξηθεί ο ρυθμός ανόδου και να μειωθεί η ταχύτητα V_a του αεροσκάφους. Το αντίθετο συμβαίνει όταν το αεροσκάφος έχει χαμηλότερη ταχύτητα από την επιθυμητή. Η ίδια διαδικασία χρησιμοποιείται και στη ζώνη καθόδου, μόνο που αυτή τη φορά ο κινητήρας τίθεται εκτός λειτουργίας.

Η ζώνη που ενδιαφέρει την κυρίως πτήση είναι η **ζώνη υψομέτρου (altitude hold zone)**. Εάν το αεροσκάφος βρίσκεται σε χαμηλότερο ύψος από το επιθυμητό, αλλά ψηλότερα από τη ζώνη ανόδου, τότε η ταχύτητά του ελέγχεται από την ισχύ του κινητήρα. Εάν το αεροσκάφος βρίσκεται σε μεγαλύτερο ύψος από το επιθυμητό, αλλά χαμηλότερα από τη ζώνη καθόδου, η ταχύτητα ελέγχεται μέσω της γωνίας πρόνευσης θ , με τον τρόπο που περιγράψαμε ποιο πάνω. Οι εν λόγω φάσεις της πτήσης φαίνονται στην εικόνα 2.9.



Εικόνα 2.9 Οι φάσεις πτήσης για τον διαμήκη αυτόματο πιλότο (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).

Για να σχεδιάσουμε τον αυτόματο πιλότο διαμηκών δυνάμεων και ροπών θα χρησιμοποιήσουμε όπως και πριν την τεχνική *SLC*. Ο εσωτερικός βρόγχος των επί μέρους συστημάτων αυτομάτου ελέγχου είναι ο βρόγχος ελέγχου της γωνίας πρόνευσης θ που φαίνεται στην εικόνα 2.10.



Εικόνα 2.10 Σύστημα ελέγχου γωνίας πρόνευσης θ (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).

Η συνάρτηση μεταφοράς που χαρακτηρίζει το βρόγχο είναι:

$$H_{\theta/\theta^c}(s) = \frac{k_{p\theta} a_{\theta_3}}{s^2 + (\alpha_{\theta_1} + k_{d\theta} a_{\theta_3})s + (\alpha_{\theta_2} + k_{p\theta} a_{\theta_3})} \quad (2.96)$$

όπου οι όροι $\alpha_{\theta_1}, \alpha_{\theta_2}$ και α_{θ_3} προκύπτουν από τη γραμμικοποίηση του συστήματος και ισούται με:

$$\alpha_{\theta_1} = -\frac{\rho V_a^2 c S}{2J_y} C_{m_q} \frac{2}{2V_a} \quad (2.97)$$

$$\alpha_{\theta_2} = -\frac{\rho V_a^2 c S}{2J_y} C_{m_\alpha} \quad (2.98)$$

$$\alpha_{\theta_3} = \frac{\rho V_a^2 c S}{2J_y} C_{m\delta_e} \quad (2.99)$$

Τα κέρδη των ελεγκτών του συστήματος είναι το αναλογικό κέρδος k_{p_θ} του P ελεγκτή και το διαφορικό κέρδος k_{d_θ} του βρόγχου ανάδρασης. Ως παραμέτρους σχεδιασμού του εν λόγω βρόγχου έχουμε τη μέγιστη κλίση των επιφανειών ελέγχου ανόδου καθόδου δ_e^{max} , το συντελεστή απόσβεσης ζ_θ καθώς και το μέγιστο αναμενόμενο σφάλμα παρακολούθησης e_θ^{max} . Με βάση αυτά τα κέρδη του συστήματος υπολογίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$k_{p_\theta} = \frac{\delta_e^{max}}{e_\theta^{max}} \text{sign}(\alpha_{\theta_3}) \quad (2.100)$$

$$k_{d_\theta} = \frac{2\zeta_\theta \omega_{n_\theta} - \alpha_{\theta_1}}{\alpha_{\theta_3}} \quad (2.101)$$

όπου ω_{n_θ} είναι το εύρος ζώνης το συστήματος το οποίο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega_{n_\theta} = \sqrt{\alpha_{\theta_2} + \frac{\delta_e^{max}}{e_\theta^{max}} |\alpha_{\theta_3}|} \quad (2.102)$$

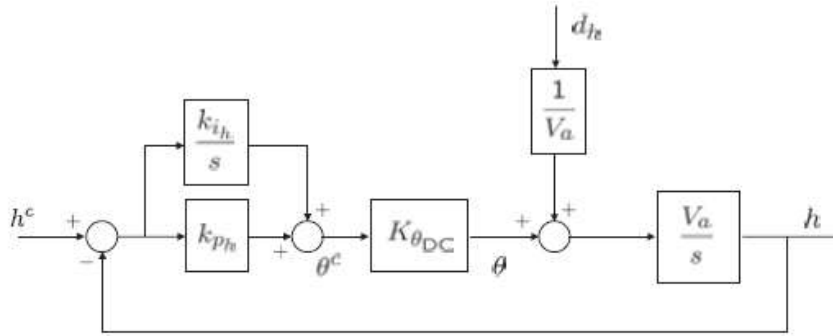
Από τη συνάρτηση μεταφοράς 2.96 βλέπουμε ότι το DC κέρδος δεν ισούται με τη μονάδα, παρά μόνον όταν το αναλογικό κέρδος k_{p_θ} τείνει στο άπειρο. Έτσι στο μόνιμη κατάσταση, το DC κέρδος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K_{\theta DC} = \frac{k_{p_\theta} \alpha_{\theta_3}}{(\alpha_{\theta_2} + k_{p_\theta} \alpha_{\theta_3})} \quad (2.103)$$

και για τυπικές τιμές του αναλογικού κέρδους του P ελεγκτή έχει τιμή αρκετά μικρότερη από τη μονάδα. Ο νόμος ελέγχου του εν λόγω βρόγχου είναι:

$$\delta_e = k_{p_\theta}(\theta^c - \theta) - k_{d_\theta} \dot{\theta} \quad (2.104)$$

Με βάση την αρχή του SLC, ο βρόγχος αυτός χρησιμοποιείται σαν εσωτερικός βρόγχος για τα επακόλουθα συστήματα ελέγχου. Το πρώτο σύστημα που θα παρουσιάσουμε είναι αυτό που ελέγχει το ύψος με χρήση της γωνίας πρόνευσης θ . Το σχετικό διάγραμμα φαίνεται στην εικόνα 2.11.



Εικόνα 2.11 Σύστημα ελέγχου ύψους μέσω της γωνίας πρόνευσης θ (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).

Για την αποτελεσματική λειτουργία του συστήματος θα πρέπει το εύρος ζώνης του να είναι μικρότερο από αυτό του εσωτερικού βρόγχου. Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση αυτός μπορεί να αντικατασταθεί με το DC κέρδος του, $K_{\theta_{DC}}$. Η σχεδιαστική παράμετρος για το εύρος ζώνης είναι η W_h , με τιμή όπως ήδη αναφέραμε που κυμαίνεται στο διάστημα [5,15]. Έτσι το εύρος ζώνης του εξωτερικού βρόγχου θα ισούται με:

$$\omega_{nh} = \frac{1}{W_h} \omega_{n\theta} \quad (2.105)$$

Μία ακόμη σχεδιαστική παράμετρος του συστήματος είναι ο παράγοντας απόσβεσης ζ_h . Τα κέρδη του PI ελεγκτή είναι το αναλογικό και το ολοκληρωτικό κέρδος k_{ph} και k_{ih} και υπολογίζονται ως εξής:

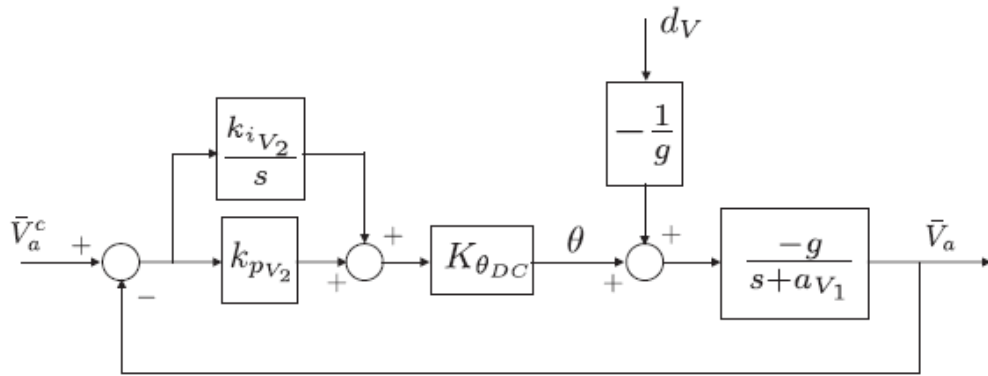
$$k_{ih} = \frac{\omega_{nh}^2}{K_{\theta_{DC}} V_a} \quad (2.106)$$

$$k_{ph} = \frac{2\zeta_h \omega_{nh}}{K_{\theta_{DC}} V_a} \quad (2.107)$$

Ο νόμος ελέγχου του βρόγχου είναι:

$$\theta^c = K_{ph}(h^c - h) + \frac{k_{ih}}{s}(h^c - h) \quad (2.108)$$

Ένας δεύτερος εξωτερικός βρόγχος είναι αυτός που ελέγχει την ταχύτητα του αεροσκάφους με βάση τη γωνία πρόνευσης θ . Το σχετικό διάγραμμα φαίνεται στην εικόνα 2.12.



Εικόνα 2.12 Σύστημα ελέγχου ταχύτητας χρησιμοποιώντας τη γωνία πρόνευσης θ (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\bar{V}_a(s) = \left(\frac{-K_{\theta DC} g k_{pV_2} \left(s + \frac{k_{iV_2}}{k_{pV_2}} \right)}{s^2 + (a_{V_1} - K_{\theta DC} g k_{pV_2}) s - K_{\theta DC} g k_{iV_2}} \right) \bar{V}_a^c(s) + \left(\frac{s}{s^2 + (a_{V_1} - K_{\theta DC} g k_{pV_2}) s - K_{\theta DC} g k_{iV_2}} \right) d_V(s) \quad (2.109)$$

όπου $d_V(s)$ είναι ο όρος εισάγεται ως διαταραχή στο σύστημα και ισούται με:

$$d_{V_2} = (rV_a \cos \alpha - pV_a \sin \alpha) \sin \beta - g \sin \alpha \cos \theta (1 - \cos \varphi) + \frac{\rho S_{prop} C_{prop}}{2m} [(k\delta_t)^2 - V_a^2] (\cos \alpha - 1) + d_{V_1} \quad (2.110)$$

με:

$$d_{V_1} = -\dot{u}(1 - \cos \beta) \cos \alpha - \dot{w}(1 - \cos \beta) \sin \alpha + \dot{u} \sin \beta \quad (2.111)$$

Ο όρος της συνάρτησης μεταφοράς a_{V_1} προκύπτει από τη γραμμικοποίηση του συστήματος και ισούται με:

$$a_{V_1} = \frac{\rho V_a^* S}{m} [C_{D0} + C_{D\alpha} \alpha^* + C_{D\delta_e} \delta_e^*] + \frac{\rho S_{prop}}{m} C_{prop} V_a^* \quad (2.112)$$

Ο εσωτερικός βρόγχος παρατηρούμε στην εικόνα 2.11 και πάλι πως αντικαθίστανται με την τιμή του DC κέρδους $K_{\theta DC}$. Με βάση την τεχνική του SLC, θα πρέπει το εύρος ζώνης του εξωτερικού βρόγχου να είναι μικρότερο από αυτό του εσωτερικού. Η σχεδιαστική παράμετρος που το καθορίζει αυτό είναι η W_{V_2} , το δε εύρος ζώνης του εξωτερικού βρόγχου θα είναι ίσο με:

$$\omega_{nV_2} = \frac{1}{W_{V_2}} \omega_{n\theta} \quad (2.113)$$

Η άλλη σχεδιαστική παράμετρος είναι ο συντελεστής απόσβεσης ζ_{V_2} . Τα κέρδη του ΠΙ ελεγκτή είναι το αναλογικό και το ολοκληρωτικό κέρδος k_{pV_2} και k_{iV_2} . Με κατάλληλη επιλογή των σχεδιαστικών παραμέτρων, τα κέρδη του ελεγκτή υπολογίζονται ως:

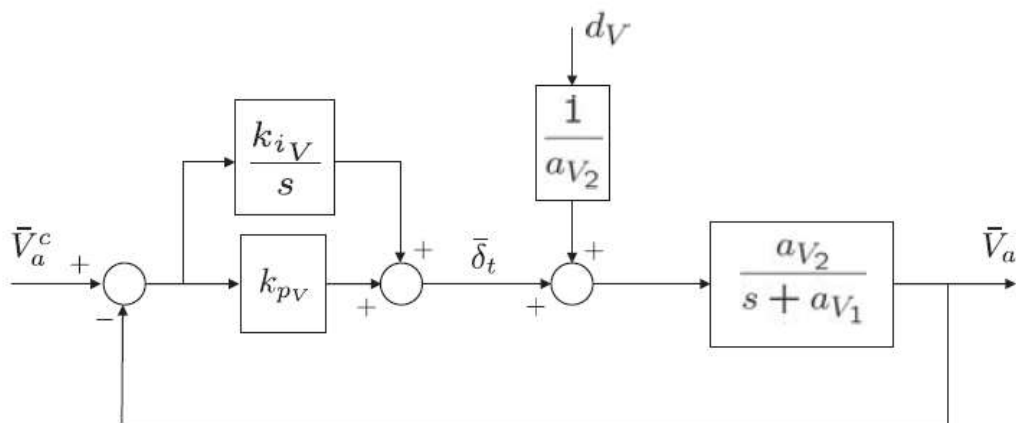
$$k_{pV_2} = \frac{\alpha_{V_1} - 2\zeta_{V_2}\omega_{nV_2}}{K_{\theta DC}g} \quad (2.114)$$

$$k_{iV_2} = -\frac{\omega_{nV_2}^2}{K_{\theta DC}g} \quad (2.115)$$

Ο νόμος ελέγχου του βρόγχου ισούται με:

$$\theta^c = k_{pV_2}(V_a^c - V_a) + \frac{k_{iV_2}}{s}(V_a^c - V_a) \quad (2.116)$$

Το τελευταίο σύστημα του αυτόματου πιλότου διαμηκών δυνάμεων είναι αυτό που ρυθμίζει την ταχύτητα του αεροσκάφους χρησιμοποιώντας την ισχύ του κινητήρα (Throttle). Στην εικόνα 2.13 φαίνεται το σχετικό διάγραμμα:



Εικόνα 2.13 Σύστημα ρύθμισης ταχύτητας με τη χρήση του κινητήρα (εικόνα από [Beard, McLain 2012]).

Ο ολοκληρωτικός όρος καθίσταται απαραίτητος για την απόρριψη των διαταραχών. Η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\bar{V}_a = \left(\frac{\alpha_{V_2} (k_{p_V} s + k_{i_V})}{s^2 + (\alpha_{V_1} + \alpha_{V_2} k_{p_V}) s + \alpha_{V_2} k_{i_V}} \right) \bar{V}_a^c + \left(\frac{1}{s^2 + (\alpha_{V_1} + \alpha_{V_2} k_{p_V}) s + \alpha_{V_2} k_{i_V}} \right) d_V \quad (2.117)$$

όπου οι όροι α_{V_1} και α_{V_2} προκύπτουν από τη γραμμικοποίηση του συστήματος και ο μιν υπολογίζεται από τη σχέση 2.112, ο δε ισούται από τη σχέση:

$$\alpha_{V_2} = \frac{\rho S_{prop}}{m} C_{prop} k^2 \delta_t^* \quad (2.118)$$

όπου δ_t^* η ισχύς του κινητήρα που απαιτείται για την επίτευξη της πτήσης σε συνθήκες ισορροπίας (*trim conditions*). Ο όρος d_V εισάγεται ως διαταραχή στο σύστημα. Για το εν λόγω σύστημα, η σχεδιαστική παράμετρος είναι ο συντελεστής απόσβεσης ζ_V και το εύρος ζώνης ω_{n_V} . Τα κέρδη του PI ελεγκτή είναι το αναλογικό και το ολοκληρωτικό κέρδος k_{p_V} και k_{i_V} και υπολογίζονται ως:

$$k_{p_V} = \frac{2\zeta_V \omega_{n_V} - \alpha_{V_1}}{\alpha_{V_2}} \quad (2.119)$$

$$k_{i_V} = \frac{\omega_{n_V}^2}{\alpha_{V_2}} \quad (2.120)$$

Ο νόμος ελέγχου του βρόγχου είναι:

$$\delta_t = \delta_t^* + k_{p_V} (V_a^c - V_\alpha) + \frac{k_{i_V}}{s} (V_a^c - V_\alpha) \quad (2.121)$$

Με το εν λόγω σύστημα ολοκληρώνεται ο σχεδιασμός του αυτόματου πιλότου διαμηκών δυνάμεων και ροπών.

Κεφάλαιο 3

Μαθηματικά μοντέλα αερίων δινών.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα ευρέως χρησιμοποιούμενα μαθηματικά μοντέλα, τα οποία περιγράφουν τη μη γραμμική φύση των αερίων δινών που δημιουργεί ένα αεροσκάφος καθώς κινείται στο χώρο. Θα γίνει μια σύντομη εισαγωγή της περιγραφής του φαινομένου και της συμβολής του στην πτήση αεροσκαφών σε σχηματισμό. Έπειτα θα παρουσιάσουμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά μιας πτέρυγας και στη συνέχεια θα δείξουμε τον τρόπο υπολογισμού δυνάμεων και ροπών σε αυτήν με χρήση της **Θεωρίας Πεδίου Ποής (Potential Flow Theory)**. Έπειτα θα παρουσιάσουμε δύο ευρέως χρησιμοποιούμενες θεωρίες για την περιγραφή του σχηματισμού των αερίων δινών στο χώρο γύρω από το αεροσκάφος, την **Θεωρία Φέρουσας Γραμμής του Prandtl (Prandtl's Lifting Line Theory)** και την **Εκτεταμένη Θεωρία Φέρουσας Γραμμής του Weissinger (Weissinger's Extended Lifting Line Theory)**. Τέλος δε, θα παρουσιάσουμε τα διαθέσιμα μαθηματικά μοντέλα περιγραφής της κατανομής των ταχυτήτων των επαγόμενων δινών στο χώρο γύρω από ένα αεροσκάφος.

3.1 Εισαγωγή.

Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 1, η κίνηση ενός αεροσκάφους στον αέρα δημιουργεί διαταραχές στον χώρο, οι οποίες εκδηλώνονται με τη μορφή αερίων δινών (*vortices*), σε αντιστοιχία με τα απόνερα (*wake*) που δημιουργεί ένα πλοίο κατά την κίνησή του. Για το λόγο αυτό οι δίνες αυτές είναι γνωστές ως *wake vortices*. Λόγω των ανωτέρω, κατά την πτήση σε σχηματισμό δύο ή περισσότερων αεροσκαφών επάγονται επιπλέον δυνάμεις και ροπές σε κάθε ακόλουθο αεροσκάφος, οι οποίες εισάγονται στη δυναμική του με τη μορφή διαταραχών. Έτσι το σύστημα ελέγχου πτήσης (**Flight Control System, FLCS**) δίνει τις κατάλληλες εντολές στις επιφάνειες ελέγχου του αεροσκάφους προκειμένου να εξουδετερώσει τις διαταραχές αυτές, εάν βεβαίως το αεροσκάφος είναι εξοπλισμένο με ένα τέτοιο σύστημα. Η επίδραση των διαταραχών αυτών εξαρτάται από τη σχετική θέση των αεροσκαφών και μπορεί να είναι τόσο δυσμενής ώστε το FLCS τελικά να χάσει τον έλεγχο του αεροσκάφους θέτοντας σοβαρό πρόβλημα για την ασφάλεια του προσωπικού και των επιβατών όσο και για το ίδιο το αεροσκάφος.

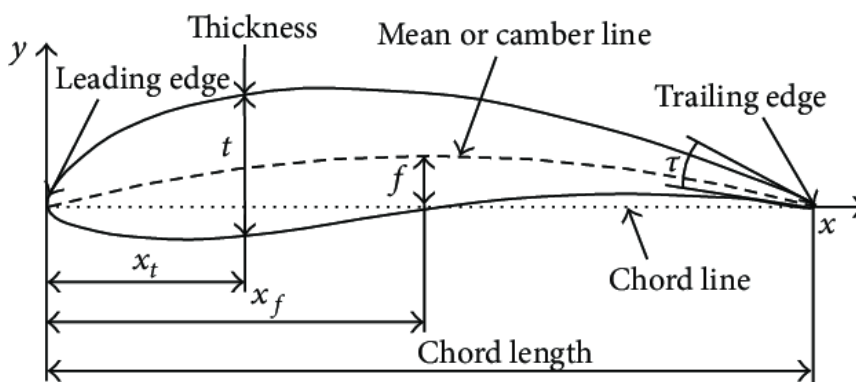
Η ύπαρξη των προαναφερθέντων αερίων δινών συνιστά τόσο ένα θετικό όσο και ένα αρνητικό γεγονός [Saban, 2010]. Από τη στιγμή που θα δημιουργηθούν στο χώρο οι δίνες αυτές, χρειάζεται να παρέλθει ένα ορισμένο χρονικό διάστημα προκειμένου το περιβάλλον να μεταβεί σε κατάσταση ηρεμίας. Για το λόγο αυτό στα αεροδρόμια μεσολαβεί ένα χρονικό διάστημα μεταξύ δύο απογειώσεων ή προσγειώσεων αεροσκαφών. Στην περίπτωση των στρατιωτικών αεροσκαφών είναι συνήθης πρακτική ο εναέριος εφοδιασμός με καύσιμο από ένα άλλο αεροσκάφος. Το αεροσκάφος ανεφοδιασμού είναι αρκετά μεγάλο σε μέγεθος και επομένως η ένταση του φαινομένου είναι αρκετά μεγάλη. Λόγω της ύπαρξης των δινών αυτών καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας, ο χειριστής του αεροσκάφους που ανεφοδιάζεται θα πρέπει να διατηρεί συνεχώς σε κατάλληλη θέση το αεροσκάφος προκειμένου να αποφύγει να βρεθεί στις περιοχές όπου οι επαγόμενες δυνάμεις και ροπές θα το

οδηγήσουν σε αστάθεια. Οι ύπαρξη των αερίων δινών μπορεί να είναι επίσης και ένα στοιχείο το οποίο μπορεί να οδηγήσει στον εντοπισμό ενός αεροσκάφους. Έτσι η ύπαρξη χαμηλού ίχνους δημιουργούμενων αερίων δινών είναι κάτι το επιθυμητό κυρίως για στρατιωτικά αεροσκάφη.

Από την άλλη μεριά, οι αέριες αυτές δίνες μπορεί να έχουν και ευεργετικά αποτελέσματα για την πτήση. Σε κατάλληλο σημείο του χώρου τα συμβαλλόμενα ρεύματα είναι ανοδικά και αυτό επάγει επιπλέον άντωση στον ακόλουθο ενός σχηματισμού, μειώνοντας ταυτόχρονα την επαγόμενη οπισθέλκουσα. Έτσι το αεροσκάφος μπορεί να συνεχίσει την πορεία του, χαμηλώνοντας το ρύγχος του και ελαττώνοντας την ισχύ του κινητήρα. Με αυτόν τον τρόπο καταναλώνεται λιγότερο καύσιμο κατά την πτήση σε σχηματισμό.

3.2 Στοιχεία γεωμετρίας πτέρυγας.

Ο όρος πτέρυγα αναφέρεται για το αντικείμενο στις τρεις διαστάσεις. Η επιφάνεια που προκύπτει από την τομή μιας πτέρυγας και ενός κατακόρυφου επιπέδου που είναι παράλληλο με τον διαμήκη άξονα συμμετρίας του αεροσκάφους καλείται **αεροτομή (airfoil)** και φαίνεται στην εικόνα 3.1.



Εικόνα 3.1 Αεροτομή και σχετικές παράμετροι (εικόνα από researchgate.net).

Η γεωμετρία της αεροτομής επηρεάζει καθοριστικά την απόδοση όλης της πτέρυγας. Το μπροστινό άκρο μιας αεροτομής καλείται **χείλος προσβολής (Leading Edge)** ενώ το πίσω άκρο ονομάζεται **χείλος εκφυγής (Trailing edge)**. Κάθε πτέρυγα χαρακτηρίζεται από ορισμένα μεγέθη, η τιμή των οποίων επηρεάζει την απόδοσή της. Παραθέτουμε τα εν λόγω μεγέθη όπως περιγράφονται στην αναφορά [Bertin J J, 2002].

1. Εμβαδό πτέρυγας (**Wing Area**), S

Είναι η συνολική επιφάνεια που καλύπτει η πτέρυγα του αεροσκάφους, συμπεριλαμβανομένου του τμήματος που περιέχεται στην άτρακτο.

2. Μήκος πτέρυγας (**Wing Span**), b

Είναι το μήκος της πτέρυγας μετρούμενο από το ένα άκρο της έως το άλλο.

3. Μέση χορδή (*Average Cord*), \bar{c}

Η *χορδή (cord)* c , είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το ένα άκρο μιας αεροτομής με το άλλο, δηλαδή το χείλος προσβολής με το χείλος εκφυγής. Το μήκος της δεν είναι πάντα σταθερό αλλά μεταβάλλεται καθώς κινούμαστε από το άκρο της πτέρυγας μέχρι τη βάση της πτέρυγας στην άτρακτο. Ο προκύπτων γεωμετρικός μέσος είναι η μέση χορδή και το γινόμενο της με το άνοιγμα της πτέρυγας είναι το εμβαδό της, δηλαδή ισχύει:

$$S = b\bar{c} \quad (3.1)$$

4. Aspect ratio (AR)

Το μέγεθος αυτό είναι ο λόγος του ανοίγματος της πτέρυγας με τη μέση χορδή. Εάν η πτέρυγα είναι ορθογώνια τότε ισχύει:

$$AR = \frac{b}{\bar{c}} \quad (3.2)$$

ενώ στην αντίθετη περίπτωση έχουμε:

$$AR = \frac{b^2}{S} \quad (3.3)$$

Αποτελεί μια ένδειξη της καταλληλότητας της πτέρυγας για μια εφαρμογή. Όσο πιο μεγάλος είναι αυτός ο λόγος τόσο πιο μακρόστενη είναι η πτέρυγα. Τυπικές τιμές είναι περίπου 35 για ένα ανεμόπτερο και 2 για ένα υπερηχητικό μαχητικό υψηλής απόδοσης.

5. Χορδή βάσης (*Root cord*) c_r και Χορδή άκρου (*Tip cord*) c_t

Όπως προείπαμε, η χορδή μιας πτέρυγας κατά κύριο λόγο δεν έχει σταθερό μήκος καθώς κινούμαστε από το άκρο της πτέρυγας προς τη βάση της στην άτρακτο. Η τιμή της στο άκρο της πτέρυγας ονομάζεται χορδή άκρου και η τιμή της στον άξονα συμμετρίας της πτέρυγας ονομάζεται χορδή βάσης.

6. Taper ratio (TR)

Το μέγεθος αυτό είναι ο λόγος της χορδής άκρου προς τη χορδή βάσης. Εάν η πτέρυγα είναι ορθογώνια τότε ο λόγος ισούται με 1 ενώ εάν η πτέρυγα είναι σχήματος Δ ο λόγος ισούται με 0.

7. Sweep angle, Λ

Έστω μια κάθετος προς την χορδή βάσης η οποία την τέμνει στο 1/4 του μήκους της. Η προκύπτουσα γωνία της εν λόγω καθέτου με την πτέρυγα είναι η γωνία *sweep angle*. Παρόμοιοι ορισμοί ισχύουν και για τις αντίστοιχες γωνίες που σχηματίζονται φέροντας αντίστοιχες καθέτους στο χείλος προσβολής και εκφυγής της πτέρυγας.

8. Δίεδρη γωνία (*Dihedral angle*)

Πρόκειται για τη γωνία μεταξύ ενός οριζοντίου επιπέδου που περιέχει τη χορδή βάσης και της κάτω επιφάνειας της πτέρυγας. Η τιμή της επηρεάζει την εγκάρσια ευστάθεια του αεροσκάφους.

9. Γεωμετρική περιστροφή (*Geometric Twist*)

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η χορδή άκρου και η χορδή βάσης δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο καθώς κινούμαστε κατά μήκος της πτέρυγας. Η μεταξύ τους γωνία καλείται Γεωμετρική Περιστροφή (*Geometric Twist*).

3.3 Στοιχεία Θεωρίας Πεδίου Ροής

Ο αέρας είναι ένα ρευστό. Για την εφαρμογή που μελετάμε θεωρούμε ότι η ροή έχει ιδανικά χαρακτηριστικά, δηλαδή είναι υποηχητική, ασυμπίεστη και χωρίς ιξώδες. Θεωρούμε επίσης ότι είναι και χωρίς στροβιλισμό. Αυτό σημαίνει πως υπάρχει μια βαθμωτή συνάρτηση δυναμικού ϕ έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

$$V = \nabla\phi \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot \phi = 0 \quad (3.5)$$

Συνδυάζοντας τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτει η εξίσωση Laplace:

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (3.6)$$

Η επίλυση της (3.6) δίνει σαν λύσεις την **ομοιόμορφη ροή (*uniform flow*)**, την **πηγή ροής (*source flow*)**, την **ροή ζεύγους (*doublet flow*)** και την **ροή δίνης (*vortex flow*)** [Saban 2010]. Η τελευταία είναι αυτή που μας ενδιαφέρει.

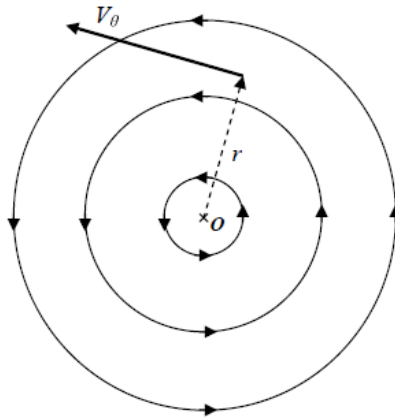
Στην εικόνα 3.2 φαίνεται η μορφή μίας δίνης στο επίπεδο. Η ένταση της συμβολίζεται με το γράμμα Γ και καλείται **στροβιλότητα (*circulation*)** της δίνης. Η βαθμωτή συνάρτηση δυναμικού συνδέεται με αυτήν μέσω της σχέσης:

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta \quad (3.7)$$

και το αντίστοιχο πεδίο ταχυτήτων εκφρασμένο σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3.8)$$

$$V_r = 0 \quad (3.9)$$



Εικόνα 3.2 Δίνη ρευστού στο επίπεδο (εικόνα από [Saban 2010]).

Μία δίνη μοντελοποιείται σαν ένα νήμα το οποίο ονομάζουμε **στροβιλογραμμή (vortex filament)** για το οποίο ισχύει το **Θεώρημα Δινών του Helmholtz (Helmholtz Vortex Theorem)**. Σύμφωνα με αυτό, μία στροβιλογραμμή δεν μπορεί να διακόπτεται απότομα εντός ενός ρευστού, εκτός και αν συναντήσει ένα συμπαγές όριο. Στην αντίθετη περίπτωση εκτείνεται στο $\pm \infty$ ή ενώνεται με άλλη δίνη για να σχηματίσει ένα κλειστό βρόγχο. Επίσης κατά μήκος της στροβιλογραμμής η στοβιλότητα Γ παραμένει σταθερή.

Μία δίνη επάγει στο χώρο γύρω από αυτή μία ταχύτητα το μέτρο της οποίας καθορίζεται από το **Νόμο των Biot-Savart (Biot-Savart Law)**. Αυτός αρχικά διατυπώθηκε για τον υπολογισμό της έντασης του μαγνητικού πεδίου B σε κάθε σημείο του χώρου γύρω από έναν αγωγό μήκους L που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I . Το στοιχειώδες μήκος dl που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I επάγει σε σημείο του χώρου στοιχειώδη ένταση dB που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \times r}{4\pi \|r\|^3} \quad (3.10)$$

όπου r η απόσταση του σημείου από το στοιχειώδες μήκος. Ολοκληρώνοντας την (3.10) προκύπτει η συνολική ένταση του μαγνητικού πεδίου.

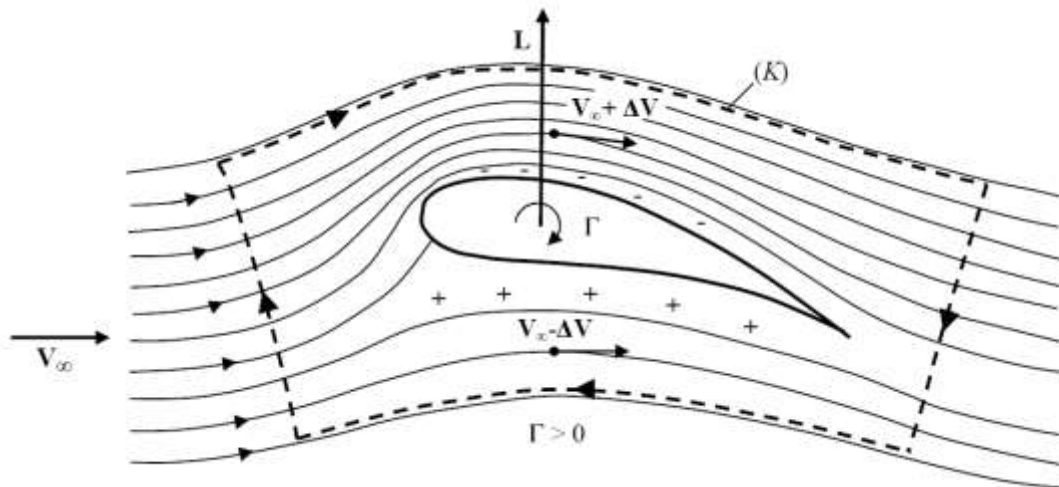
Κατά απόλυτη αναλογία, το μέτρο της ταχύτητας που επάγεται στο χώρο από μία δίνη δίνεται από τη σχέση:

$$dV = \frac{\Gamma dl \times r}{4\pi \|r\|^3} \quad (3.11)$$

και ολοκληρώνοντας την (3.11) προκύπτει η συνολικά επαγόμενη ταχύτητα εν λόγω στο σημείο.

Έστω ένα αεροσκάφος κινούμενο διαμέσου του αέρα. Η άντωση δημιουργείται λόγω της διαφοράς πίεσης μεταξύ της πάνω και της κάτω επιφάνειας της πτέρυγας. Συγκεκριμένα καθώς ο αέρας ρέει στο χώρο γύρω από την πτέρυγα, δημιουργείται υψηλότερη πίεση στην κάτω επιφάνεια σε σχέση με την πάνω. Η δύναμη της άντωσης μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν μία δίνη η οποία σταθερά προσαρτημένη στην πτέρυγα και ονομάζεται **προσαρτημένη δίνη (bound vortex)**. Με τον τρόπο

αυτό και όπως φαίνεται στην εικόνα 3.3 η ταχύτητα της ροής είναι μεγαλύτερη στην κάτω επιφάνεια από ότι στην πάνω.



Εικόνα 3.3 Ροή αέρα σε μια αεροτομή (εικόνα από [Saban 2010]).

Θεωρώντας μία κλειστή καμπύλη στο επίπεδο γύρω από την πτέρυγα, η ένταση της δίνης ή στροβιλότητα που αναφέραμε προηγουμένως ορίζεται ως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της ταχύτητας της ροής με το στοιχειώδες μήκος της καμπύλης, δηλαδή:

$$\Gamma = \oint V \cdot dl \quad (3.12)$$

Η ύπαρξη της άντωσης υποδηλώνει ότι το ολοκλήρωμα (3.12) είναι πεπερασμένο. Σύμφωνα με το **Θεώρημα των Kutta-Joukowski**, η άντωση συνδέεται με την στροβιλότητα μέσω της σχέσης:

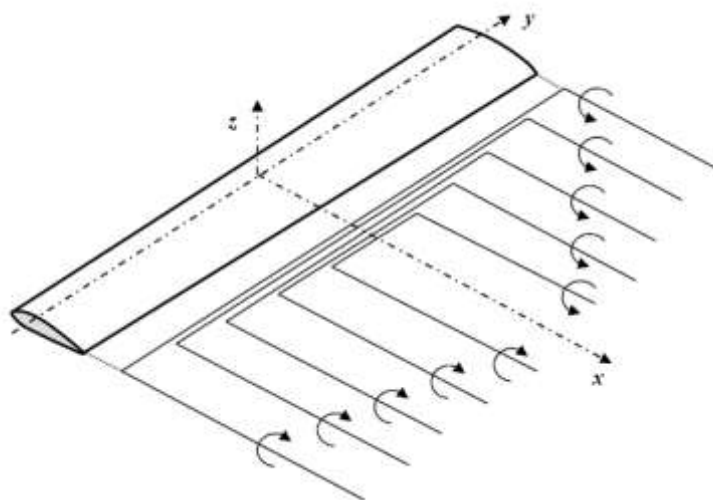
$$L = \rho_\infty V_\infty \Gamma \quad (3.13)$$

όπου ρ_∞ η πυκνότητα του αέρα, V_∞ η ταχύτητα της ροής σε αρκετή απόσταση από την αεροτομή και Γ η στροβιλότητα.

Οι πραγματικές πτέρυγες έχουν πεπερασμένο μήκος και σε αυτό οφείλεται η δημιουργία των επαγόμενων δινών που μελετούμε. Στα άκρα της πτέρυγας, λόγω της διαφοράς πίεσης, ο αέρας θα κινηθεί από την περιοχή της υψηλότερης πίεσης (κάτω επιφάνεια) προς την περιοχή της χαμηλότερης πίεσης (άνω επιφάνεια). Η κίνηση αυτή δημιουργεί δύο δίνες στα άκρα της πτέρυγας οι οποίες περιστρέφονται αντίστροφα η μία ως προς την άλλη. Οι εν λόγω δίνες είναι αυτές που στην εισαγωγή ορίσαμε ως wake vortices. Οι δίνες αυτές ικανοποιούν το Θεώρημα Δινών του Helmholtz και έτσι η μία εκκινεί από το άπειρο και ενώνεται με την πτέρυγα στο άλλο άκρο της με την προσαρτημένη δίνη. Έπειτα η προσαρτημένη δίνη ενώνεται με την άλλη δίνη η οποία εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Το προκύπτων σχήμα είναι όμοιο με πέταλο αλόγου (horseshoe) και για αυτό το λόγο το σύστημα των δινών που μόλις περιγράψαμε είναι γνωστό ως **horseshoe vortex**.

3.4 Θεωρία Φέρουσας γραμμής του Prandtl

Με βάση τη **Θεωρία της Φέρουσας Γραμμής του Prandtl (Prandtl's Lifting Line Theory)**, η πτέρυγα ενός αεροσκάφους μοντελοποιείται αντικαθιστώντας την με έναν πεπερασμένο ή άπειρο αριθμό δινών τύπου πετάλου (*horseshoe vortices*) τις οποίες περιγράψαμε προηγουμένως, τοποθετημένες η μία επάνω στην άλλη, ταυτίζοντας τον άξονα συμμετρίας τους με τον άξονα συμμετρίας της πτέρυγας [Saban 2010]. Τα ανωτέρω φαίνονται στην εικόνα 3.4.



Εικόνα 3.4 Θεωρία φέρουσας γραμμής του Prandtl (εικόνα από [Saban 2010]).

Κάθε δίνη αποτελείται από τρεις κλάδους, τον προσαρτημένο στην πτέρυγα (bound vortex) και τους άλλους δύο κλάδους. Για όλες τις δίνες, τα προσαρτημένα τμήματά τους βρίσκονται επί της νοητής γραμμής της πτέρυγας όπου η χορδή έχει μήκος ίσο με το 1/4 της τιμής της συγκεκριμένης αεροτομής (1/4 cord line). Η νοητή αυτή γραμμή καλείται **φέρουσα γραμμή (lifting line)**. Οι άλλοι δύο κλάδοι της κάθε δίνης εκτείνονται στο άπειρο. Η στροβιλότητα Γ δύναται να διαφέρει για κάθε δίνη, αλλά κατά μήκος της κάθε δίνης είναι σταθερή. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται μια κλιμακωτή κατανομή για την στροβιλότητα στην προαναφερθείσα νοητή γραμμή, η οποία αποκτάτο σχήμα κάποιας καμπύλης, συνήθως έλλειψης, όσο ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων δινών τείνει στο άπειρο.

Η φέρουσα γραμμή πτέρυγας της εικόνας 3.4, ταυτίζεται με τον άξονα y . Με εφαρμογή του νόμου των Biot-Savart και για άπειρο πλήθος δινών, η επαγόμενη ταχύτητα κατά μήκος της φέρουσας γραμμής προκύπτει ίση με:

$$V_i(y_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} dy \quad (3.14)$$

όπου b το μήκος της πτέρυγας και Γ η στροβιλότητα. Με βάση αυτή την κατανομή της επαγόμενης ταχύτητας, υπολογίζεται η **επαγόμενη γωνία προσβολής**

(*induced angle of attack*) και η *ενεργή γωνία προσβολής (effective angle of attack)* ως εξής:

$$\alpha_i(y_0) = \tan^{-1}\left(\frac{-V_i(y_0)}{V_\infty}\right) \approx \frac{-V_i(y_0)}{V_\infty} = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} dy \quad (3.15)$$

$$\alpha_{eff}(y_0) = \frac{2\Gamma(y_0)}{\alpha_0(y_0)V_\infty c(y_0)} + a_{L=0}(y_0) \quad (3.16)$$

όπου $\alpha_0(y_0)$ είναι η κλίση της καμπύλης άντωσης σε συνάρτηση με τη γωνία προσβολής, $c(y_0)$ είναι η τιμή της χορδής στο σημείο y_0 και $a_{L=0}(y_0)$ είναι γωνία προσβολής για την οποία η άντωση αποκτά μηδενική τιμή. Με βάση τις ανωτέρω σχέσεις, η **γεωμετρική γωνία προσβολής (geometric angle of attack)** του αεροσκάφους εκφράζεται ως το άθροισμα της επαγώμενης και της ενεργής γωνίας προσβολής:

$$\alpha(y_0) = \frac{2\Gamma(y_0)}{\alpha_0(y_0)V_\infty c(y_0)} + a_{L=0}(y_0) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} dy \quad (3.17)$$

Η εξίσωση 3.17 καλείται αλγεβροδιαφορική εξίσωση του Prandtl και από την επίλυσή της προκύπτει η εξίσωση της κατανομής της στροβιλότητας Γ κατά μήκος της φέρουσας γραμμής.

Αφού υπολογιστεί η στροβιλότητα Γ , η ολική άντωση και η επαγώμενη οπισθέλκουσα υπολογίζονται από το Θεώρημα των Kutta-Joukowski ως:

$$L = \rho_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (3.18)$$

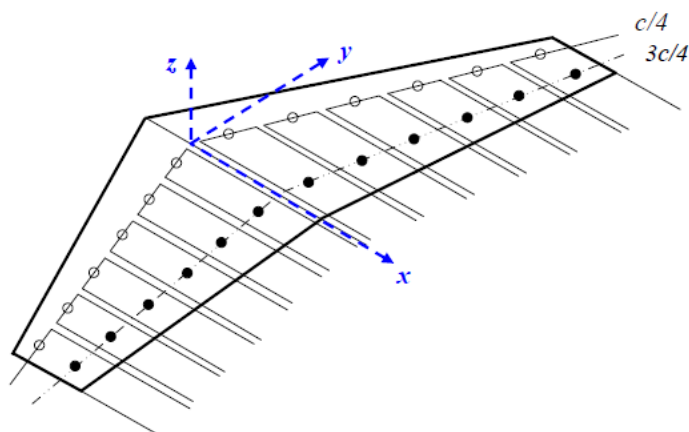
$$D_i = -\rho_\infty \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) V_i(y) dy \quad (3.19)$$

Η απλότητα της συγκεκριμένης θεωρίας, την καθιστά εφαρμόσιμη μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Συγκεκριμένα δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για ασυμπιεστές και σταθερές ροές χωρίς ιξώδες και για πτέρυγες όπου η νοητή γραμμή όπου η χορδή ισούται με το 1/4 του μήκους της είναι ευθεία. Επιπροσθέτως ποιο ακριβή αποτελέσματα δίνονται για πτέρυγες με υψηλό λόγο AR [Saban 2010].

3.5 Θεωρία Φέρουσας γραμμής του Weissinger

Μία ποιο πολύπλοκη, ωστόσο ποιο ακριβής, μοντελοποίηση μιας πτέρυγας προκύπτει με εφαρμογή της **Θεωρίας της Εκτεταμένης Φέρουσας Γραμμής του Weissinger (Weissinger's Extended Lifting Line Theory)**. Με βάση αυτή, η πτέρυγα μοντελοποιείται πάλι με τη χρήση δινών σε σχήμα πετάλου (horseshoe

vortices) τοποθετημένες όχι όμως η μία πάνω στην άλλη, αλλά η μία δίπλα στην άλλη, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.5:



Εικόνα 3.5 Μοντελοποίηση πτέρυγας με χρήση της Εκτεταμένης Θεωρίας Φέρουσας Γραμμής του Weissinger (εικόνα από [Saban 2010]).

Σε αυτή την περίπτωση, η κάθε δίνη αποτελείται από πέντε τμήματα. Το πρώτο είναι το προσαρτημένο τμήμα που βρίσκεται επί της φέρουσας γραμμής, δηλαδή της νοητής γραμμής όπου η χορδή ισούται με το $1/4$ του μήκους της. Το δεύτερο και τρίτο τμήμα τους εκτείνεται κατά μήκος της πτέρυγας μέχρι το σημείο όπου συναντά τη νοητή γραμμή όπου η χορδή ισούται με τα $3/4$ του μήκους της ($3/4$ cord line). Τέλος το τέταρτο και το πέμπτο τμήμα εκτείνονται στο άπειρο.

Μία ακόμη διαφορά της συγκεκριμένης θεωρίας σε σχέση με την προηγούμενη είναι η διαφορετική συνοριακή συνθήκη (boundary condition) που εφαρμόζεται για τον υπολογισμό της στροβιλότητας Γ . Θεωρούμε ότι η ροή του αέρα είναι εφαπτόμενη σε αυτή κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ξεκινά από το σημείο όπου η πτέρυγα έχει μήκος ίσο με το $1/4$ της τιμής της και τελειώνει στο σημείο όπου η χορδή έχει μήκος ίσο με τα $3/4$ του μήκους της. Με βάση τον άξονα συμμετρίας της κάθε δίνης, ορίζουμε ένα **σημείο ελέγχου (control point)** ως το σημείο που τέμνεται ο άξονας συμμετρίας της δίνης με την νοητή γραμμή όπου η χορδή ισούται με τα $3/4$ του μήκους της. Τα εν λόγω σημεία είναι σημειωμένα με μαύρους κύκλους στην εικόνα 3.5 και σε κάθε τέτοιο σημείο πρέπει να ισχύει η συνθήκη του Weissinger:

$$(V_i + V_\infty) \cdot n = 0 \quad (3.20)$$

όπου V_i η επαγόμενη στο συγκεκριμένο σημείο ελέγχου ταχύτητα από όλες τις δίνες, V_∞ η ταχύτητα του ανοδικού ρεύματος και n το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια της πτέρυγας στο σημείο ελέγχου.

Η γεωμετρική γωνία προσβολής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{4\Gamma(y_0)}{\varepsilon} - \int_{-\frac{b}{2}}^{y_0-\varepsilon} \frac{\Gamma(y)}{(y_0-y)^2} \left(1 + \frac{x_p(y_0) - x_c(y)}{\sqrt{(x_p(y_0) - x_c(y_0))^2 + (y_0-y)^2}} \right) dy - \int_{y_0+\varepsilon}^{\frac{b}{2}} \frac{\Gamma(y)}{(y_0-y)^2} \left(1 + \frac{x_p(y_0) - x_c(y)}{\sqrt{(x_p(y_0) - x_c(y_0))^2 + (y_0-y)^2}} \right) dy \right] \quad (3.21)$$

όπου η παράμετρος ε χρησιμοποιείται για να αποφευχθούν τα σημεία απειρισμού στο πεδίο ολοκλήρωσης.

Από την επίλυση της εξίσωσης 3.21 προκύπτει η κατανομή της στροβιλότητας Γ κατά μήκος της πτέρυγας. Στη συνέχεια από το Θεώρημα των Kutta – Joukowski (εξίσωση 3.13) μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή της άντωση, την οποία αφού ολοκληρώσουμε κατά μήκος της πτέρυγας και με κατάλληλη προβολή στους διάφορους άξονες, υπολογίζουμε την επαγόμενη άντωση, οπισθέλκουσα καθώς και τις ροπές που ασκεί η δίνη στους τρεις άξονες του αεροσκάφους [Saban 2010].

Η θεωρία αυτή δίνει ποιο ικανοποιητικά αποτελέσματα σε σχέση με την κλασική Θεωρία Φέρουσας Γραμμής του Prandtl και ισχύει για πτέρυγες οιασδήποτε κάτοψης και λόγου AR .

3.6 Προφίλ ταχυτήτων δινών

Η πραγματική φύση των αερίων δινών είναι τόσο πολύπλοκη, ώστε είναι αδύνατον να μοντελοποιηθεί επακριβώς από μαθηματικές εξισώσεις [Zang Q et al. 2016]. Κάποια φαινόμενα που δικαιολογούν το γεγονός αυτό είναι αρχικά το ότι οι άξονες περιστροφής των δινών δεν παραμένουν ακριβώς κατακόρυφοι σε σχέση με ένα εγκάρσιο στο αεροσκάφος επίπεδο. Επίσης οι δύο άξονες μιας δίνης που υποθέτουμε ότι εκτείνονται σε μια ημιευθεία μέχρι το άπειρο, είναι στην πραγματικότητα δύο γραμμές οι οποίες κάμπτονται ελαφρώς προς τα κάτω στο χώρο πίσω από το αεροσκάφος.

Επιπροσθέτως, στο χώρο της δίνης λαμβάνουν χώρα φαινόμενα ιξώδους ροής. Αυτά δύναται να αναπαρασταθούν μαθηματικά με την εισαγωγή στις εξισώσεις μίας παραμέτρου που ονομάζεται **ιξώδης πυρήνας στροβίλλου (viscous core)**. Η πραγματική του μορφή και τιμή δεν είναι κάτι το ντετερμινιστικό και μπορεί σε γενικές γραμμές να οριστεί ως η απόσταση ανάμεσα στο κέντρο του στροβίλλου και των σημείων όπου η επαπτομενική ταχύτητα V_θ αποκτά τη μέγιστη τιμή της [Saban 2010]. Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί αρκετά ποιο απλά μαθηματικά μοντέλα τα οποία περιγράφουν με ικανοποιητική ακρίβεια το φαινόμενο. Στην αναφορά [Saban 2010] παρουσιάζονται εννέα εξισώσεις που αποτελούν τα ποιο γνωστά προφίλ της ταχύτητας μιας δίνης εκφρασμένης σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Σε όλα τα μοντέλα, με Γ συμβολίζεται η στροβιλότητα, με r η απόσταση ενός σημείου από το κέντρο του στροβίλλου και με r_c ο ιξώδης πυρήνας του στροβίλλου.

1. Μοντέλο Helmholtz

Είναι το πλέον απλό μοντέλο για την περιγραφή της κατανομής ταχυτήτων μίας δίνης και υπολογίζεται ως:

$$V_{\theta}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3.22)$$

Ένα σοβαρό μειονέκτημα του μοντέλου είναι ο απειρισμός της ταχύτητας σε μηδενική απόσταση από το κέντρο του στροβίλου.

2. Μοντέλο Rankine

Σε αυτό το μοντέλο γίνεται η υπόθεση ότι ο πυρήνας του στροβίλου περιστρέφεται σαν ένα συμπαγές σώμα γύρω από το κέντρο του και σε αυτό περιέχεται όλος ο στροβιλισμός. Η ακόλουθη εξίσωση περιγράφει το πεδίο κατανομής των ταχυτήτων:

$$V_{\theta}(r) = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi r} & , r > r_c \\ \frac{\Gamma}{2\pi r_c^2} r & , r < r_c \end{cases} \quad (3.23)$$

και παρουσιάζει μία ασυνέχεια για $r = r_c$.

3. Μοντέλο Hallock-Burnham

Το μοντέλο αυτό είναι από τα πιο γνωστά και ευρέως χρησιμοποιούμενα στη βιβλιογραφία και διατυπώνεται ως:

$$V_{\theta}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{r}{r^2 + r_c^2} \right) \quad (3.24)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τιμή της παραμέτρου r_c δεν είναι επακριβώς καθορισμένη. Εκφράζεται κυρίως σαν ποσοστό του μήκους της πτέρυγας b του αεροσκάφους και σε διάφορες εργασίες έχει λάβει τιμές από 3% μέχρι 10%. Οι Zhang, Wang και Hardin όπως αναφέρει η [Saban 2010] διατύπωσαν την ακόλουθη σχέση για τον υπολογισμό της παραμέτρου r_c :

$$r_c = 0.2 \sqrt{\frac{\Gamma b}{V}} \quad (3.25)$$

όπου V η ταχύτητα του αεροσκάφους που δημιουργεί τις δίνες.

4. Μοντέλο Lamb-Oseen

Στο μοντέλο αυτό, γίνεται η υπόθεση ότι η στροβιλότητα ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με τυπική απόκλιση $\sqrt{2\nu\tau}$, όπου ν το κινηματικό ιξώδες του αέρα και τ ο χρόνος ύπαρξης του στροβίλου. Το προφίλ ταχυτήτων περιγράφεται ως ακολούθως:

$$V_{\theta}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu\tau}\right) \right) \quad (3.26)$$

Σε μια τροποποιημένη εκδοχή του μοντέλου γίνεται εισαγωγή της παραμέτρου **ιξώδους των ρευμάτων eddy (eddy viscosity)** ε , η οποία είναι ανάγολη της στροβιλότητας Γ με τιμή αναλογίας δύσκολη να μετρηθεί, αλλά με εκτιμώμενη τιμή μεταξύ 10^{-4} και 10^{-3} . Το τροποποιημένο μοντέλο διατυπώνεται ως:

$$V_{\theta}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4(\nu + \varepsilon)\tau}\right) \right) \quad (3.27)$$

5. Τροποποιημένο κατά Dogan μοντέλο Helmholtz

Συμφώνως [Saban 2010], οι Dogan, Venkataramanan και Blake διατύπωσαν το ακόλουθο μοντέλο βασισμένοι στην εξίσωση (3.27), αγνοώντας το κινηματικό ιξώδες ν του αέρα και εισάγοντας μια παράμετρο $\varepsilon = 0.06\Gamma$. Το προκύπτων προφίλ είναι:

$$V_{\theta}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\varepsilon\tau}\right) \right) \quad (3.28)$$

6. Μοντέλο Kurylowich

Το μοντέλο αυτό αποτελεί μια εναλλακτική μορφή του μοντέλου Lamb – Oseen. Η παράμετρος r_c ρυθμίστηκε εμπειρικά έτσι ώστε να συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$r_c = 36.2 \sqrt{\frac{\nu\tau}{\cos(\varphi)^2}} \quad (3.29)$$

όπου φ η γωνία sweep angle. Το προφίλ κατανομής ταχυτήτων δίνεται από τη σχέση:

$$V_{\theta}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp\left(-1.26\left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right) \right) \quad (3.30)$$

7. Μοντέλο Proctor

Το μοντέλο αυτό διατυπώθηκε με εμπειρικές μεθόδους και δίνεται από τη σχέση:

$$V_{\theta}(r) = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp\left(-10\left(\frac{r}{b}\right)^{0.75}\right) \right) & , r > r_c \\ \frac{\Gamma}{2\pi r} 1.4 \left(1 - \exp\left(-10\left(\frac{r}{b}\right)^{0.75}\right) \right) \left(1 - \exp\left(-1.2527\left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right) \right) & , r \leq r_c \end{cases} \quad (3.31)$$

Σε προσομοιώσεις που χρησιμοποιήθηκε το εν λόγω μοντέλο, δείχθηκε ότι περιγράφει καλύτερα σε σχέση με τα προαναφερθέντα μοντέλα τις δημιουργούμενες δίνες στο χώρο [Saban 2010].

8. Μοντέλο Smooth blending

Το μοντέλο αυτό, όπως περιγράφεται σε [Saban 2010], προτάθηκε από τους Gerz, Holzapfel και Darracq. Περιέχει τις αδιάστατες και χωρίς φυσική σημασία παραμέτρους β_i, β_o και p οι οποίες επιλέχθηκαν έτσι ώστε το μοντέλο να συμφωνεί με τα δεδομένα της αεροδυναμικής σήραγγας. Το μοντέλο αυτό προκύπτει από την ακόλουθη σχέση:

$$V_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp \left(\frac{-\beta_i (r/b)^2}{\left(1 + ((\beta_i/\beta_o)(r/b)^{4/5})^p\right)^{1/p}} \right) \right) \quad (3.40)$$

Οι Gerz, Holzapfel και Darracq επέλεξαν για τις προαναφερθείσες παραμέτρους τιμές $\beta_i = 500$, $\beta_o = 10$ και $p = 3$ και για την ακτίνα ιξώδους του πυρήνα του στροβίλλου $r_c = 0.0412$.

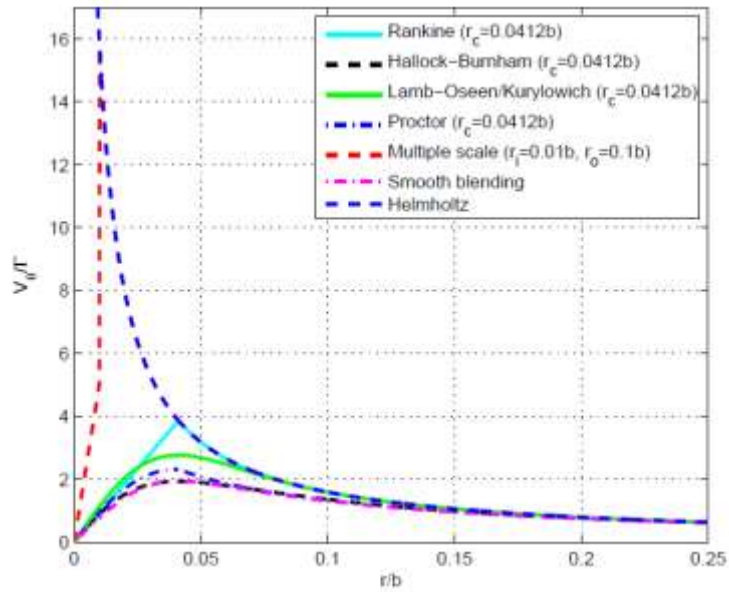
9. Μοντέλο Πολλαπλών κλιμάκων (Multiple scale)

Το μοντέλο αυτό είναι επίσης εμπειρικό και προτάθηκε από τη Jacquin όπως αναφέρεται σε [Saban 2010]. Η εξίσωση υπολογισμού είναι:

$$V_\theta(r) = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi r_i} \frac{r}{\sqrt{r_i r_o}} & , r \geq r_c \\ \frac{\Gamma}{2\pi \sqrt{r_o r}} & , r_i \geq r \geq r_o \\ \frac{\Gamma}{2\pi r} & , r \leq r_o \end{cases} \quad (3.41)$$

όπου $r_o \approx 0.1b$, $r_i \leq 0.01b$. Οι παράμετροι r_o και r_i περιγράφουν την ακτίνα του πυρήνα του στροβίλλου.

Στην εικόνα 3.6 φαίνεται μια σύγκριση μεταξύ των προαναφερθέντων μοντέλων καθώς και οι χρησιμοποιούμενη τιμή της παραμέτρου r_c για κάθε μοντέλο.. Παρατηρούμε ότι για αποστάσεις $r/b \leq 0.1$ όλα τα μοντέλα παρουσιάζουν διαφορές. Αυτό οφείλεται στο ότι τα μοντέλα ρυθμίστηκαν έτσι ώστε να περιγράφουν τις δημιουργούμενες δίνες από ένα συγκεκριμένο αεροσκάφος και σε συγκεκριμένη απόσταση από αυτό [Saban 2010]. Ωστόσο για αποστάσεις $r/b > 0.1$ βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα από όλα τα μοντέλα είναι σχεδόν πανομοιότυπα.



Εικόνα 3.6 Σύγκριση μοντέλων κατανομής ταχυτήτων (εικόνα απο [Saban 2010]).

Έτσι για μελετώμενες εφαρμογές, όπου οι αποστάσεις μεταξύ των αεροσκαφών στην εγκάρσια διεύθυνση είναι μεγαλύτερη από το 10% του ανοίγματος πτέρυγας του αεροσκάφους που δημιουργεί τις δίνες, όπως για παράδειγμα της πτήσης σε σχηματισμό ή του εναερίου εφοδιασμού δεν υπάρχει σημαντική διαφορά ως προς το ποιο μοντέλο θα χρησιμοποιηθεί.

Κεφάλαιο 4

Extremum Seeking Control

Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί μια περιγραφή της τεχνικής σχεδιασμού συστημάτων αυτομάτου ελέγχου **Extremum Seeking Control (ESC)**. Αρχικά θα γίνει μια σύντομη ιστορική αναδρομή και στη συνέχεια θα παρουσιαστεί η πλέον βασική μορφή ενός αλγορίθμου ESC. Έπειτα θα παρουσιαστούν τεχνικές σχεδίασης βρόγχων ESC για συστήματα *Μίας-Εισόδου-Μίας-Εξόδου (Single-Input-Single-Output, SISO)*, όσο και για συστήματα *Πολλών-Εισόδων-Μίας-Εξόδου (Multiple Input- Single- Output, MISO)*. Στη συνέχεια θα δειχθεί μία σύγχρονη και ποιο βελτιωμένη τεχνική σχεδίασης βρόγχου ESC με τη χρήση **Εκτεταμένου Φίλτρου Kalman (Extended Kalman Filter, EKF)**. Θα ολοκληρώσουμε με μια παρουσίαση των κύριων σημείων της πρώτης απόδειξης της ευστάθειας των συστημάτων ESC, όταν πληρούνται συγκεκριμένες προϋποθέσεις.

4.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος **Extremum Seeking Control (ESC)** είναι μια τεχνική **προσαρμοστικού ελέγχου (adaptive control)**, κατά την οποία στη μόνιμη κατάσταση βελτιστοποιούνται τα χαρακτηριστικά ανάμεσα στις εισόδους και τις εξόδους. Σε αντίθεση με τις διαδομένες τεχνικές, προκειμένου το σύστημα να λειτουργήσει, δεν απαιτείται η γνώση του μαθηματικού μοντέλου της διαδικασίας αλλά το μόνο που ενδιαφέρει είναι η γνώση ότι υπάρχει μία μαθηματική σχέση ανάμεσα στις είσοδο και την έξοδο ενός συστήματος η οποία παρουσιάζει ένα ακρότατο, το οποίο δύναται να είναι μέγιστο ή ελάχιστο.

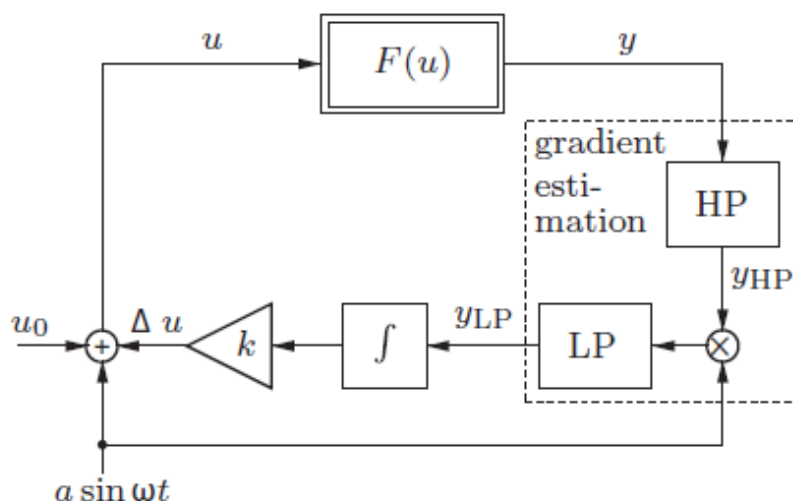
Στην αναφορά [Tan et al. 2010] παρουσιάζεται μια αρκετά λεπτομερής ιστορική αναδρομή της πορείας της μεθόδου. Η πρώτη της εμφάνιση είναι σε μία δημοσίευση του Le Blanck του 1922, όπου περιγράφεται ένας μηχανισμός μεταφοράς ηλεκτρικής ισχύος από μια εναέρια γραμμή μεταφοράς σε ένα ηλεκτροκίνητο τραμ. Η διάταξη περιλάμβανε μετασχηματιστές με μεταβλητό κενό στους οπλισμούς τους, το οποίο υποδηλώνει μεταβλητή επαγωγή, καθώς και πυκνωτές. Η ιδέα ήταν να βρεθεί η κατάλληλη τιμή της επαγωγής έτσι ώστε το κύκλωμα να οδηγηθεί σε συντονισμό και να έχουμε έτσι τη μέγιστη μεταφορά ισχύος. Πιθανώς ωστόσο λόγω του ότι δεν περιλαμβάνονταν συστηματική ανάλυση του συστήματος, η εν λόγω ιδέα δεν εφαρμόστηκε ποτέ.

Η μέθοδος ESC άρχισε να αποκτά ερευνητικό ενδιαφέρον στις δεκαετίες του 1950 και 1960. Οι Astrom και Wittenmark την περιγράφουν στο βιβλίο που εξέδωσαν το 1995 ως μία από τις πολλά υποσχόμενες μεθόδους προσαρμοστικού ελέγχου. Η πρώτη απόδειξη της ευστάθειας του βασικού συστήματος αυτομάτου ελέγχου που περιλαμβάνει βρόγχο ESC έγινε το 2000 από τους Krstic και Wang [Krstic, Wang, 2000]. Η δημοσίευση αυτή αποτέλεσε και την απαρχή για την έξαρση του ερευνητικού ενδιαφέροντος προς την μέθοδο αυτή. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι κάποιες από τις ποιο δημοφιλείς εφαρμογές που έχουν μελετηθεί και δημοσιευθεί αφορούν έλεγχο συστήματος πέδησης, πλήρως αυτόνομα οχήματα και κινητά ρομπότ, βελτιστοποίηση βιολογικών διεργασιών, μηχανές εσωτερικής καύσης, προβλήματα ελέγχου ροής, βελτιστοποίηση ελεγκτών νευρωνικών δικτύων και

ασαφούς λογικής, φωτοβολταϊκά συστήματα και όπως και στην περίπτωση της παρούσης εργασία, την πτήση σε σχηματισμό.

4.2 Κλασικός αλγόριθμος Extremum Seeking Control

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση της μεθόδου με την πλέον απλή περίπτωση του συστήματος *SISO* όπως περιγράφεται στην αναφορά [Gelbert et al. 2012]. Η μορφή ενός τέτοιου συστήματος φαίνεται στην εικόνα 4.1.

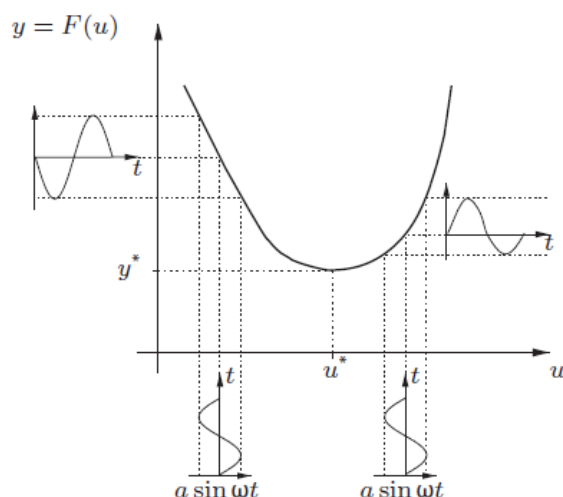


Εικόνα 4.1 Βασική μορφή αλγορίθμου Extremum Seeking Control συστήματος *SISO* (εικόνα από [Gelbert et al. 2012]).

Θα περιγράψουμε τα στοιχεία τα οποία απαρτίζουν τον αλγόριθμο. Η είσοδος στο σύστημα είναι η παράμετρος u και η έξοδος η y . Η προς βελτιστοποίηση σχέση συμβολίζεται με $F(u)$. Αυτή αποτελεί μια μη γραμμική σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου, η οποία εμφανίζει ένα ακρότατο. Η πλέον επιθυμητή περίπτωση είναι το ακρότατο αυτό να είναι ολικό. Στην περίπτωση όμως που είναι τοπικό, θα πρέπει ο αλγόριθμός ESC να σχεδιαστεί έτσι ώστε το σημείο λειτουργίας του συστήματος να είναι ένα από τα τοπικά ακρότατα.

Μία από τις σχεδιαστικές παραμέτρους του αλγορίθμου ESC είναι η αρχική εκτίμηση u_0 της επιθυμητής τιμής της παραμέτρου u η οποία βελτιστοποιεί την $F(u)$. Η τιμή της επηρεάζει την ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου. Ο αλγόριθμος ESC περιλαμβάνει ένα τμήμα εκτίμησης της **κλίσεως (gradient)** της μη γραμμικής συνάρτησης F . Αυτό γίνεται έτσι ώστε με βάση την εκτίμηση αυτή να καθοριστεί εάν η ελεγχόμενη παράμετρος u θα πρέπει να αυξηθεί ή να μειωθεί σε τιμή, προκειμένου να αποκτήσει την επιθυμητή τιμή της u^* η οποία βελτιστοποιεί την F . Το εν λόγω τμήμα είναι το **gradient estimation** και αποτελείται από δύο φίλτρα, ένα **υψηπερατό (highpass)** και ένα **κατωπερατό (lowpass)**. Ο σκοπός του υψηπερατού φίλτρου είναι να αποκόψει τη συνεχή συνιστώσα της εξόδου y και να δώσει στην έξοδο μόνο το μεταβλητό της τμήμα y_{hp} . Το σήμα αυτό στη συνέχεια πολλαπλασιάζεται ή **αποδιαμορφώνεται (demodulated)** με τη χρήση ενός κατάλληλου σήματος διέγερσης το οποίο στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι το ημιτονοειδές σήμα $a \sin(\omega t)$. Το πλάτος a και η κυκλική συχνότητα ω του σήματος αυτό είναι σχεδιαστικές

παράμετροι του αλγορίθμου ESC. Σύμφωνα με τους [Tan et al, 2008] ακόμη και το είδος της διέγερσης αποτελεί σχεδιαστική παράμετρο και παίζει ρόλο στην απόδοση του αλγορίθμου. Έτσι η διέγερση μπορεί να είναι τόσο ημιτονοειδής όσο και τριγωνικοί ή τετραγωνικοί παλμοί. Στην εικόνα 4.2 φαίνεται μια σχηματική αναπαράσταση της αρχής λειτουργίας του αλγορίθμου ESC.



Εικόνα 4.2 Βασική αρχή λειτουργίας αλγορίθμου ESC (εικόνα από [Gelbert et al 2012.]).

Στην εικόνα φαίνεται τόσο το ημιτονοειδές σήμα διέγερσης όσο και η έξοδος του υπεραποτάτου φίλτρου. Όταν η είσοδος u έχει μικρότερη τιμή από την επιθυμητή τιμή u^* , τότε βρισκόμαστε στο αριστερό τμήμα της καμπύλης όπου τα προαναφερθέντα σήματα είναι εκτός φάσης και η κλίση της F είναι αρνητική. Αντιθέτως όταν βρισκόμαστε στο δεξιό τμήμα, τα δύο σήματα είναι σε φάση και η κλίση της F είναι θετική. Το γεγονός αυτό χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος ESC, όπως θα δούμε παρακάτω, για να καθορίσει εάν η τρέχουσα τιμή της παραμέτρου u πρέπει να αυξηθεί ή να ελαττωθεί.

Η μη γραμμική σχέση F ανάμεσα στην είσοδο και την έξοδο και μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$F(u) = F^* + \frac{F''}{2}(u - u^*) \quad (4.1)$$

όπου F^* είναι το ακρότατο τιμή της F , $F'' > 0$ η δεύτερη παράγωγός της και u^* η βέλτιστη τιμή της παραμέτρου u για την οποία η F εμφανίζει ακρότατο. Ο στόχος του αλγορίθμου είναι να βρει την κατάλληλη τιμή της παραμέτρου u έτσι ώστε να κάνει τη διαφορά $u - u^*$ όσο πιο μικρή γίνεται.

Καθοριστικό ρόλο για τη λειτουργία του πλήρους συστήματος παίζει το εύρος ζώνης του ελεγχόμενου από το βρόγχο ESC συστήματος. Συγκεκριμένα εάν ο βρόγχος αυτός σχεδιαστεί έτσι ώστε το εύρος ζώνης του να είναι αρκετά μικρότερο από αυτό του προς έλεγχο συστήματος, τότε θα δρα ως ένα κατωπερατό φίλτρο για το εν λόγω σύστημα. Έτσι μπορούμε προσεγγιστικά να αγνοήσουμε τη δυναμική του ελεγχόμενου συστήματος και να το αντικαταστήσουμε με τη μη γραμμική σχέση F η οποία καλείται και **στατικός χάρτης (static map)** ανάμεσα στην είσοδο και την

έξοδο. Υποθέτοντας ότι το πλάτος a του ημιτονοειδούς σήματος διέγερσης είναι μικρό καθώς και ότι η αρχική τιμή της εισόδου είναι η u_0 , τότε η έξοδος του συστήματος μπορεί θεωρηθεί ότι ταλαντώνεται γύρω από της τιμή $y_0 = F(u_0)$ και να προσεγγιστεί ως:

$$y(t) \approx y_0 + F'a \sin(\omega t) \quad (4.2)$$

όπου F' είναι η κλίση της μη γραμμικής συνάρτησης F . Το σήμα αυτό εισάγεται στη συνέχεια στο υπεραυτό φίλτρο, όπου αφαιρείται η συνεχής συνιστώσα του και διατηρείται μόνο το μεταβαλλόμενο μέρος της ημιτονοειδούς διέγερσης. Χρησιμοποιώντας ένα υπεραυτό φίλτρο πρώτης τάξεως, $G_{hp}(s) = s/(s + \omega_{hp})$, με ω_{hp} τη συχνότητα αποκοπής του, η έξοδος του είναι περίπου ίση με:

$$y_{hp}(t) \approx |G_{hp}|F'a \sin(\omega t + \varphi_{hp}) \quad (4.3)$$

με,

$$|G_{hp}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{hp}}{\omega}\right)^2}} \quad (4.4)$$

$$\varphi_{hp} = \text{arg}(G_{hp}) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_{hp}}{\omega}\right) \quad (4.5)$$

Το σήμα της εξίσωσης (4.3) είναι ένα ημιτονοειδές σήμα με μηδενική μέση τιμή. Πολλαπλασιάζοντάς το στη συνέχεια με το αρχικό ημιτονοειδές σήμα διέγερσης $a \sin(\omega t)$, δηλαδή αποδιαμορφώνοντάς το, λαμβάνουμε την πληροφορία για την κλίση F' της μη γραμμικής συνάρτησης F . Όπως ήδη αναφέραμε, στα αριστερά του επιθυμητού σημείου u^* , το αποδιαμορφωμένο σήμα και το σήμα διέγερσης είναι εκτός φάσης κατά 180° , και επομένως το γινόμενό τους είναι αρνητικό το οποίο υποδηλώνει αρνητική κλίση της F . Κατ' αντιστοιχία στα δεξιά του επιθυμητού σημείου u^* τα προαναφερθέντα σήματα είναι συμφασικά και το γινόμενό τους θετικό, το οποίο δηλώνει θετική κλίση της συνάρτησης F . Το αποδιαμορφωμένο σήμα ισούται με:

$$y_{demod}(t) = y_{hp}(t)a \sin(\omega t) \approx |G_{hp}|F'\frac{\alpha^2}{2}(\cos(\varphi_{hp}) - \cos(2\omega t + \varphi_{hp})) \quad (4.6)$$

Το παραπάνω σήμα περιέχει ένα σταθερό και ένα χρονομεταβλητό μέρος. Για το λόγο αυτό όταν διέρχεται στη συνέχεια από το κατωπερατό φίλτρο, η επίδραση του τελευταίου μέρους ελαττώνεται και η έξοδος είναι προσεγγιστικά ίση με:

$$y_{lp}(t) = |G_{hp}|F'\frac{\alpha^2}{2}\cos(\varphi_{hp}) = \frac{F'\alpha^2}{2\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{hp}}{\omega}\right)^2}}\cos\left(\frac{\omega_{hp}}{\omega}\right) = F'\frac{\alpha^2}{2}\frac{\omega}{\omega + \omega_{hp}^2} \quad (4.7)$$

Η έξοδος του κατωπερατού φίλτρου διέρχεται στη συνέχεια από έναν ολοκληρωτή και πολλαπλασιάζεται με ένα κέρδος k , το οποίο αποτελεί σχεδιαστική παράμετρο.

Εάν αναζητείται το ελάχιστο μιας συνάρτησης τότε το k είναι αρνητικό, ενώ είναι θετικό στην αντίθετη περίπτωση. Έτσι προκύπτει ο επιπλέον όρος Δu ο οποίος προστίθεται στην αρχική εκτιμώμενη τιμή της παραμέτρου u_0 και μαζί με το ημιτονοειδές σήμα διέγερσης, δίνει τον τελικό νόμο ελέγχου του αλγορίθμου ESC:

$$u(t) = \Delta u(t) + u_0 + \alpha \sin(\omega t) \quad (4.8)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε τη σημαντικότητα της αρχικής εκτίμησης u_0 , καθώς η τιμή της πρέπει να επιλεγεί τέτοια ώστε να η αναζήτηση της πληροφορία της κλίσης της F να αρχίσει από μία ευαίσθητη για το σκοπό αυτό περιοχή της.

4.3 Βελτιωμένος αλγόριθμος Extremum Seeking Control με χρήση φίλτρου Kalman.

Οι [Gelbert et al, 2012], βασισμένοι στην εργασία του Henning και των συνεργατών του, προτείνουν τη χρήση μιας βελτιωμένης τεχνικής για το βρόγχο ESC. Σε αυτήν, αντί η εκτίμηση της κλίσης της μη γραμμικής συνάρτησης F να γίνεται από το υψιπερατό και κατωπερατό φίλτρο του κλασικού αλγορίθμου, γίνεται από ένα φίλτρο Kalman. Αυτό αποτελεί έναν πολύ ισχυρό μαθηματικό αλγόριθμο εκτίμησης των μεταβλητών κατάστασης ενός συστήματος παρουσία αβεβαιότητας (θορύβου).

Η τεχνική πήρε το όνομά της από τον εισηγητή της, Rudolf Kalman, ο οποίος την παρουσίασε το 1960 [Kalman, 1960]. Μία εξαιρετική και αρκετά απλή περιγραφή της μεθόδου βρίσκεται στις αναφορές [Rhudy et al., 2017], [Beard, McLain, 2012]. Περισσότερες λεπτομέρειες περί τούτου δίνονται στο Παράρτημα Α.

Η μορφή του βελτιωμένου βρόγχου ESC φαίνεται στην εικόνα 4.3, για ένα σύστημα δύο εισόδων και μιας εξόδου, χωρίς βλάβη της γενικότητας. Το φίλτρο Kalman δέχεται ως είσοδο της τιμή y της μη γραμμική συνάρτησης, όσο και την τιμή των μεταβλητών εισόδου u_1 και u_2 . Για να είναι όμως αποδοτικός ο αλγόριθμος, είναι απαραίτητη και η χρήση των προηγούμενων τιμών των προαναφερθέντων μεγεθών. Έτσι η συνολική είσοδος για κάθε μέγεθος είναι η τρέχουσα τιμή του και δύο προηγούμενες τιμές. Το χρονικό διάστημα μεταξύ των τιμών αυτών μπορεί να επιλεγεί ως ένα κλάσμα της περιόδου της συχνότητας του σήματος διέγερσης σύμφωνα με τη σχέση:

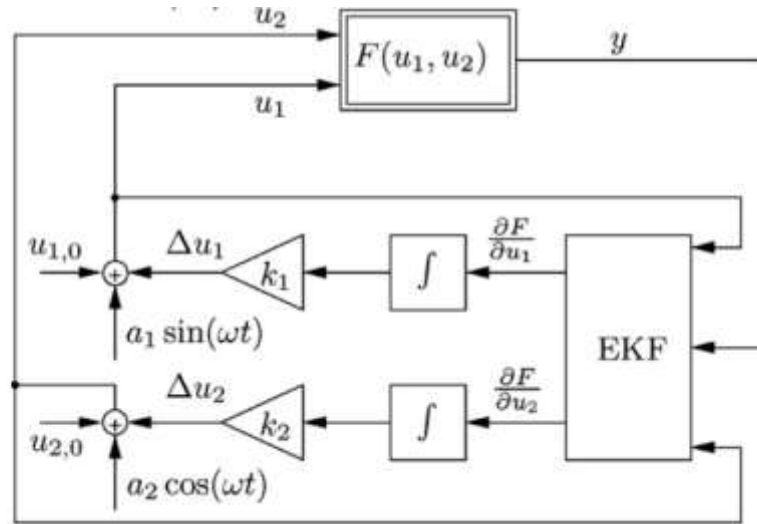
$$n\Delta t = \begin{cases} \frac{1}{4}T_{per} \\ \frac{3}{4}T_{per} \end{cases} \quad (4.9)$$

όπου T_{per} η περίοδος του σήματος διέγερσης.

Ο αλγόριθμος καθώς εκτελείται, τοποθετεί σε κάθε σημείο (u_1, u_2) ένα εφαπτόμενο επίπεδο του οποίου το διάνυσμα κλίσεως είναι η εκτιμώμενη κλίση στο κάθε σημείο. Το φίλτρο Kalman χρησιμοποιεί την ακόλουθη εξίσωση προκειμένου να κάνει εκτίμηση της κλίσης της μη γραμμικής συνάρτησης F σε σχέση με τις εισόδους u_1 και u_2 :

$$y(t) = y_0 + \frac{\partial F}{\partial u_1} u_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2} u_2 \quad (4.10)$$

όπου y_0 είναι η τομή του προαναφερθέντος επιπέδου με τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο $(u_1, u_2) = (0,0)$ και $\partial F/\partial u_1, \partial F/\partial u_2$ οι αντίστοιχες κλίσεις.



Εικόνα 4.3 Βελτιωμένος αλγόριθμος ESC με χρήση Εκτεταμένου φίλτρου Kalman (Extended Kalman Filter, ESC) (εικόνα από [Gelbert et al, 2012]).

Η δυναμική του φίλτρου Kalman περιγράφεται από δύο εξισώσεις, την **εξίσωση κατάστασης (state equation)** και την **εξίσωση μέτρησης (measurement equation)**. Η πρώτη περιλαμβάνει τις μεταβλητές την τιμή των οποίων θέλουμε να εκτιμήσουμε και η δεύτερη την έξοδο του φίλτρου που μπορούμε να μετρήσουμε. Έστω $x = (x_1 \ x_2 \ x_3)$ το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος ESC. Τότε αυτές θα είναι $x_1 = y_0$ $x_2 = \partial F/\partial u_1$ και $x_3 = \partial F/\partial u_2$. Με βάση τα προηγούμενα η εξίσωση κατάστασης και εξόδου του φίλτρου είναι:

$$x(t_{k+1}) = \begin{pmatrix} x_1(t_{k+1}) \\ x_2(t_{k+1}) \\ x_3(t_{k+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t_k) + w_k \quad (4.11)$$

$$y(t_k) = \begin{pmatrix} y(t_k) \\ y(t_{k-n_1}) \\ y(t_{k-n_2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t_k) & u_2(t_k) & 1 \\ u_1(t_{k-n_1}) & u_2(t_{k-n_1}) & 1 \\ u_1(t_{k-n_2}) & u_2(t_{k-n_2}) & 1 \end{pmatrix} x(t_k) + v_k \quad (4.12)$$

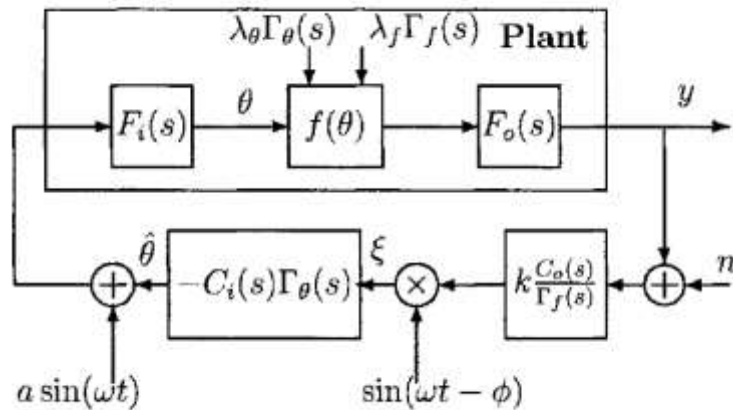
όπου $w_k \in R^3$, $v_k \in R^3$ είναι η στοχαστικές διεργασίες με μέση τιμή 0. Η τυπική απόκλιση της v_k καθορίζεται από τις φυσικές παραμέτρους του συστήματος ενώ η τυπική απόκλιση της w_k μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί σχεδιαστική παράμετρο του φίλτρου [Beard, McLain, 2012]. Οι χρονικές καθυστερήσεις n_1 και n_2 επιλέγονται σύμφωνα με την (4.9).

Η συγκεκριμένη διάταξη δοκιμάστηκε σε περιβάλλον προσομοίωσης στην εργασία των [Gelbert, et al, 2012] για τον έλεγχο μιας διεργασίας και τα αποτελέσματα έδειξαν

ότι ο συγκεκριμένος αλγόριθμος σε σχέση με τον κλασικό είναι πιο αποδοτικός. Τα στοιχεία που δικαιολογούν τα ανωτέρω είναι αρχικά η ταχύτερη σύγκλιση του στο ακρότατο της μη γραμμικής συνάρτησης ακόμη και για υψηλή τιμή του κέρδους k . Επιπροσθέτως είναι πιο αποτελεσματικός στις περιπτώσεις όπου η κλίση της μη γραμμικής συνάρτησης παρουσιάζει ασυνέχειες καθώς η εκτίμηση παρουσιάζει λιγότερη ταλάντωση στο σημείο ασυνέχειας σε σχέση με τον κλασικό αλγόριθμο. Στο σημείο αυτό τονίζουμε ότι στην ίδια εργασία δείχθηκε με προσομοίωση ότι το φίλτρο Kalman σχεδιασμένο με αυτόν τον τρόπο, εκτιμά την κλίση της μη γραμμικής συνάρτησης, λαμβάνοντας υπόψη τις μεταβολές και για τις δύο μεταβλητές. Αυτό είναι πιο αποτελεσματικό από το να χρησιμοποιηθεί ένα φίλτρο Kalman ξεχωριστά για την εκτίμηση της κλίσης ως προς την κάθε μεταβλητή ξεχωριστά.

4.4 Αλγόριθμος σχεδιασμού συστημάτων SISO ESC.

Το έργο των [Ariyur, Krstic, 2003], περιλαμβάνει εκτεταμένη ανάλυση και μελέτη της συμπεριφοράς των συστημάτων ESC. Με βάση αυτό και την αναφορά [Ariyur, Krstic, 2002], παραθέτουμε στις επόμενες δύο παραγράφους τους αλγορίθμους σχεδιασμού βρόγχων ESC αρχικά για συστήματα SISO και εν συνεχεία για συστήματα MISO. Στην εικόνα 4.4 φαίνεται η γενική μορφή ενός βρόγχου ESC, ο οποίος ελέγχει ένα σύστημα SISO.



Εικόνα 4.4 Βρόγχος ESC για σύστημα SISO (εικόνα από [Ariyur., Krstic, 2003]).

Με βάση την ανωτέρω εικόνα, για το υπό έλεγχο σύστημα (*Plant*) θεωρούμε ότι υπάρχει μια μη γραμμική σχέση f της μορφής (4.1):

$$f(\theta) = f^* + \frac{f''}{2}(\theta - \theta^*)^2 \quad (4.13)$$

όπου $f'' > 0$ αλλά άγνωστο. Οι βέλτιστες τιμές της παραμέτρου θ και της συνάρτησης f είναι θ^* και f^* αντίστοιχα και μπορεί να είναι μεταβαλλόμενες ως προς το χρόνο. Με $\lambda_\theta \Gamma_\theta$ και $\lambda_f \Gamma_f$ συμβολίζονται οι μετασχηματισμοί Laplace των προαναφερθέντων βέλτιστων τιμών, δηλαδή:

$$\mathcal{L}\{\theta^*(t)\} = \lambda_\theta \Gamma_\theta(s) \quad (4.14)$$

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = \lambda_f \Gamma_f(s) \quad (4.15)$$

με λ_θ και λ_f άγνωστα, ωστόσο γνωστά $\Gamma_\theta(s)$ και $\Gamma_f(s)$. Οι αντισταθμιστές C_o και C_i , είναι σχεδιαστικές παράμετροι του συστήματος και πρέπει να σχεδιαστούν καταλλήλως, έτσι ώστε να διασφαλίζεται η ευστάθεια του βρόγχου. Εάν η μη γραμμική συνάρτηση εμφανίζει μέγιστο τότε αντικαθιστούμε το C_o με $-C_o$. Με n αναπαριστούμε το θόρυβο στην μέτρηση της εξόδου y . Το σήμα $\alpha \sin(\omega t)$ είναι αυτό το οποίο εισάγεται στην είσοδο u του υπό έλεγχο συστήματος και χρησιμεύει για την εξαγωγή της πληροφορίας της κλίσης της μη γραμμικής συνάρτησης f . Η διαφορά φάσης φ είναι και αυτή σχεδιαστική παράμετρος και επιλέγεται έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η σύγκλιση του αλγορίθμου και η ευστάθεια του συστήματος. Οι συναρτήσεις $F_i(s)$ και $F_o(s)$ σχετίζονται με τη δυναμική του συστήματος και είναι οι συναρτήσεις μεταφοράς ανάμεσα στην έξοδο του βρόγχου ESC και την είσοδο της μη γραμμικής συνάρτησης f και η συνάρτηση μεταφοράς ανάμεσα στην έξοδο της μη γραμμικής συνάρτησης f και της εξόδου y του ελεγχόμενου συστήματος, αντίστοιχα. Ο στόχος του βρόγχου ESC είναι να βρει κατάλληλη είσοδο u έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται ο όρος $(\theta - \theta^*)$ στην 4.13 και έτσι η έξοδος του συστήματος $F_o(s)[f(\theta)]$ να λάβει τη μέγιστη τιμή της $F_o(s)[f^*]$. Προκειμένου να εξασφαλιστεί η ευστάθεια του βρόγχου ESC πρέπει να πληρούνται οι κάτωθι υποθέσεις, πράγμα το οποίο είναι εφικτό έπειτα από κατάλληλο σχεδιασμό:

Υπόθεση 4.1: Οι συναρτήσεις $F_i(s)$ και $F_o(s)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς (asymptotically stable) και πρέπουσες (proper).

Υπόθεση 4.2: Οι συναρτήσεις $\lambda_f \Gamma_f$ και $\lambda_\theta \Gamma_\theta$ είναι ρητές (rational) και αυστηρώς πρέπουσες (strictly proper).

Υπόθεση 4.3: Οι συναρτήσεις $C_o(s)/\Gamma_f(s)$ και $C_i(s)\Gamma_\theta(s)$ είναι πρέπουσες.

Οι εξισώσεις που διέπουν τη δυναμική του βρόγχου ESC είναι:

$$y = F_o(s) \left[f^*(t) + \frac{f''}{2} (\theta - \theta^*)^2 \right] \quad (4.16)$$

$$\theta = F_i(s) [\alpha \sin(\omega t) - C_i(s)\Gamma_\theta(s) [\xi]] \quad (4.17)$$

$$\xi = \sin(\omega t - \varphi) \frac{C_o(s)}{\Gamma_f(s)} [y + n] \quad (4.18)$$

Ορίζομε τις ακόλουθες σχέσεις ως σφάλμα παρακολούθησης (tracking error) $\tilde{\theta}$ και \tilde{y} :

$$\tilde{\theta} = \theta^*(t) - \theta + \theta_0 \quad (4.19)$$

$$\tilde{y} = y - F_o(s)[f^*] \quad (4.20)$$

με

$$\theta_0 = F_i(s)[\alpha \sin(\omega t)] \quad (4.21)$$

Με βάση τα ανωτέρω, επαναδιατυπώνουμε το στόχο του βρόγχου ESC ως το να ελαχιστοποιήσει το σφάλμα \tilde{y} ελαχιστοποιώντας το σφάλμα $\tilde{\theta}$, δηλαδή να θέσει την τιμή της παραμέτρου θ όσο πιο κοντά γίνεται στην βέλτιστη τιμή της θ^* . Πρέπει να τονιστεί ότι λόγω της παρουσίας του όρου θ_0 ένεκα της ύπαρξης του σήματος διέγερσης, το σφάλμα αυτό δεν μπορεί να μηδενιστεί.

Οι Ariyur και Krstic, απέδειξαν το ακόλουθο θεώρημα [Ariyur, Krstic, 2003] το οποίο αφορά τη σύγκλιση ενός αλγορίθμου ESC για συστήματα SISO και το οποίο παραθέτουμε εδώ, χωρίς την απόδειξη:

Θεώρημα 5.1 (Αλγόριθμος ESC με μία παράμετρο): Για το σύστημα της εικόνας 4.4, με βάση την ισχύ των Υποθέσεων 4.1 – 4.3, το σφάλμα παρακολούθησης \tilde{y} πετυχαίνει τοπική ασυμπτωτική σύγκλιση σε μία $O(a^2 + 1/\omega^2)$ γειτονιά του σημείου 0 (origin), δεδομένου ότι $n = 0$ και επιπλέον:

1. Η συχνότητα του σήματος διέγερσης ω είναι αρκετά μεγάλη, έτσι ώστε ο φανταστικός αριθμός $\pm j\omega$ να μην είναι μηδενικό της $F_i(s)$.
2. Τα μηδενικά της $\Gamma_f(s)$ που δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθή, να είναι μηδενικά της $C_o(s)$.
3. Οι πόλοι της $\Gamma_\theta(s)$ που δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς, να μην είναι μηδενικά της $C_i(s)$.
4. Οι συναρτήσεις $C_o(s)$ και $1/(1 + L(s))$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς, με:

$$L(s) = \alpha \frac{f''}{4} H_i(s) \left(e^{j\varphi} F_i(j\omega) H_o(s + j\omega) + e^{-j\varphi} e^{j\varphi} F_i(-j\omega) H_o(s - j\omega) \right) \quad (4.22)$$

$$H_i(s) = C_i(s) \Gamma_\theta(s) F_i(s) \quad (4.23)$$

$$H_o(s) = \frac{C_o(s)}{\Gamma_f(s)} F_o(s) \quad (4.24)$$

Εν κατακλείδι, οι συγγραφείς διατυπώνουν τον ακόλουθο και τελικό αλγόριθμος σχεδιασμού ενός βρόγχου ESC για συστήματα SISO:

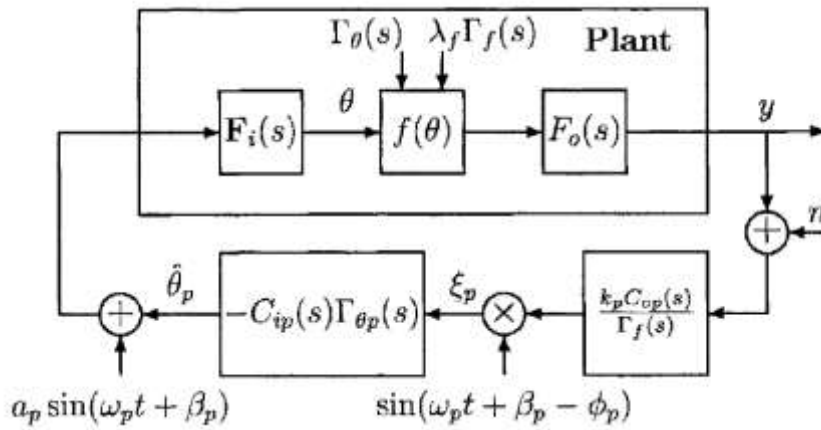
Αλγόριθμος 4.1 (ESC μίας παραμέτρου):

1. Επιλογή συχνότητας σήματος διέγερσης ω , επαρκώς μεγάλης και έτσι ώστε να μην ισούται με καμία συχνότητα του σήματος θορύβου n και ο φανταστικός αριθμός $\pm j\omega$ να μην είναι μηδενικό της $F_i(s)$.
2. Επιλογή πλάτους α του σήματος διέγερσης, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται μικρό σφάλμα παρακολούθησης εξόδου, \tilde{y} .

3. Σχεδιασμός της συνάρτησης $C_o(s)$ έτσι ώστε να είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, έχοντας ως μηδενικά τα μη ασυμπτωτικά ευσταθή μηδενικά της $\Gamma_f(s)$ και έτσι ώστε η συνάρτηση $C_o(s)/\Gamma_f(s)$ να είναι πρόπυσα.
4. Σχεδιασμός της συνάρτησης $C_i(s)$ με οποιαδήποτε τεχνική για γραμμικά SISO συστήματα, έτσι ώστε να μην περιλαμβάνει ως μηδενικά της, τους πόλους της συνάρτησης $\Gamma_\theta(s)$ που δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς και έτσι ώστε η συνάρτηση $C_i(s)\Gamma_\theta(s)$ να είναι πρόπυσα και η συνάρτηση $1/(1+L(s))$ να είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

4.5 Αλγόριθμος σχεδιασμού συστημάτων MISO ESC.

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια την ανάλογη περίπτωση που ισχύει για συστήματα MISO [Ariyur Krstic, 2003]. Έστω ένα πολυμεταβλητό σύστημα με l εισόδους και μία έξοδο όπως φαίνεται στην εικόνα 4.5.



Εικόνα 4.5 Βρόγχος ESC για σύστημα MIMO (εικόνα από [Ariyur, Krstic, 2003]).

Η μη γραμμική συνάρτηση f θεωρούμε ότι είναι της μορφής:

$$f(\theta) = f^* + \frac{f''}{2} (\theta - \theta^*)^T P (\theta - \theta^*) \quad (4.25)$$

όπου $P_{l \times l} = P^T > 0$ θετικά ορισμένος τετραγωνικός πίνακας. Η βέλτιστη τιμή της μη γραμμικής συνάρτησης f είναι f^* και το διάνυσμα παραμέτρων $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_l]^T$ έχει βέλτιστες τιμές παραμέτρων $\theta^* = [\theta_1^* \ \theta_2^* \ \dots \ \theta_l^*]^T$. όπως και στην περίπτωση των SISO συστημάτων, οι τιμές αυτές μπορούν να μεταβάλλονται με το χρόνο. Οι συναρτήσεις Γ_θ και Γ_f ορίζονται, όπως και στην περίπτωση των SISO συστημάτων ως οι μετασχηματισμοί Laplace των βέλτιστων τιμών ως:

$$\mathcal{L}\{\theta^*\} = \Gamma_\theta(s) = [\lambda_1 \Gamma_{\theta_1}(s) \ \lambda_2 \Gamma_{\theta_2}(s) \ \dots \ \lambda_l \Gamma_{\theta_l}(s)]^T \quad (4.26)$$

$$\mathcal{L}\{f^*\} = \lambda_f \Gamma_f(s) \quad (4.27)$$

Οι συναρτήσεις $F_i(s) = [F_{i1}(s) F_{i2}(s) \dots F_{il}(s)]^T$ και $F_o(s)$ σχετίζονται με την δυναμική του συστήματος, όπως στην περίπτωση των SISO συστημάτων. Είναι δηλαδή οι συναρτήσεις μεταφοράς μεταξύ της p εξόδου του ESC και της εισόδου της μη γραμμικής συνάρτησης f και η συνάρτηση μεταφοράς ανάμεσα στην έξοδο της μη γραμμικής συνάρτησης f με την έξοδο του συστήματος y . Με n αναπαριστούμε το θόρυβο της μέτρησης.

Εάν επιθυμούμε την αναζήτηση μεγίστου για $P < 0$, αντικαθιστούμε την $C_{ip}(s)$ με την $-C_{ip}(s)$. Στην εικόνα φαίνεται μόνο ένας από τους l βρόγχους, ο p , με $p = 1, 2, \dots, l$. Στην περίπτωση συστημάτων με πολλές εισόδους, χρησιμοποιούμε m τιμές για τις συχνότητες των σημάτων διέγερσης για να βελτιστοποιήσουμε $2m$ παραμέτρους. Προκειμένου να εξασφαλιστεί η ευστάθεια ενός πολυμεταβλητού βρόγχου ESC θα πρέπει να πληρούνται οι ακόλουθες υποθέσεις:

Υπόθεση 4.4: Οι συναρτήσεις $F_i(s) = [F_{i1}(s) F_{i2}(s) \dots F_{il}(s)]^T$ και $F_o(s)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς και πρέπουσες.

Υπόθεση 4.5: Οι συναρτήσεις $\Gamma_\theta(s)$ και $\Gamma_f(s)$ είναι αυστηρώς πρέπουσες.

Υπόθεση 4.6: Οι συναρτήσεις $C_{ip}(s)\Gamma_{\theta p}(s)$ και $C_{op}(s)/\Gamma_f(s)$ είναι πρέπουσες για όλα τα $p = 1, 2, \dots, l$.

Υπόθεση 5.7: Για τις συχνότητες των σημάτων διέγερσης ισχύει $\omega_p + \omega_q \neq \omega_r$, για κάθε $p, q, r = 1, 2, \dots, l$.

Οι εξισώσεις δυναμικής του p κλάδου του ESC, είναι:

$$y = F_o(s)[f^* + (\theta - \theta^*)^T P(\theta - \theta^*)] \quad (4.28)$$

$$\theta_p = F_{ip}(s)[\alpha_p \sin(\omega_p t) - C_{ip}(s)\Gamma_{\theta p}(s)[\xi_p]] \quad (4.29)$$

$$\xi_p = \sin(\omega_p t - \varphi_p) \frac{C_{op}(s)}{\Gamma_f(s)} [y + n] \quad (4.30)$$

Τα σφάλματα παρακολούθησης $\tilde{\theta}$ και \tilde{y} ορίζονται ως:

$$\tilde{\theta}_p = \theta_p^* - \theta_p + \theta_{op} \quad (4.31)$$

$$\theta_{op} = F_{ip}(s)[\alpha_p \sin(\omega_p t)] \quad (4.32)$$

$$\tilde{y} = y - F_o(s)[f^*] = F_o(s)[(\theta - \theta^*)^T P(\theta - \theta^*)] \quad (4.33)$$

όπου $\tilde{\theta} = [\tilde{\theta}_1 \tilde{\theta}_2 \dots \tilde{\theta}_\lambda]^T$ και $\theta_{op} = [\theta_{o1} \theta_{o2} \dots \theta_{ol}]^T$. Στόχος του ESC είναι και πάλι η ελαχιστοποίηση του σφάλματος παρακολούθησης \tilde{y} με ελαχιστοποίηση του σφάλματος παρακολούθησης $\tilde{\theta}$. Όπως και στην περίπτωση των SISO συστημάτων,

οι [Ariyur, Krstic, 2003] απέδειξαν την ευστάθεια των MISO συστημάτων, διατυπώνοντας το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.2 (Αλγόριθμος ESC με πολλές παραμέτρους): Για το σύστημα της εικόνας 4.5, με βάση την ισχύ των υποθέσεων 5.4 – 5.7, το σφάλμα παρακολούθησης \tilde{y} πετυχαίνει τοπική ασυμπτωτική σύγκλιση σε μια $O(1/\omega_1^2 + l \sum_{p=1}^l \alpha_p^2)$ γειτονιά του σημείου 0 (origin), δεδομένου ότι $n = 0$ και επιπλέον:

1. Οι συχνότητες των σημάτων διέγερσης $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_l$ είναι ρητές (rational), δηλαδή εκφράζονται ως κλάσματα της ω_1 , επαρκώς μεγάλες έτσι ώστε ο φανταστικός αριθμός $\pm j\omega_p$ να μην είναι μηδενικό της συνάρτησης $F_{ip}(s)$.
2. Τα μηδενικά της συνάρτησης $\Gamma_f(s)$ που δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθή, είναι μηδενικά της συνάρτησης $C_{op}(s)$, για κάθε $p = 1, 2, \dots, l$.
3. Οι πόλοι της συνάρτησης $\Gamma_{\theta p}(s)$ που δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς, δεν είναι μηδενικά της συνάρτησης $C_{ip}(s)$, για κάθε $p = 1, 2, \dots, l$.
4. Η συνάρτηση $C_{op}(s)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής για κάθε $p = 1, 2, \dots, l$ και η συνάρτηση $1/\det(I + X(s))$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, όπου $X(s)$ πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς με στοιχεία $X_{pq}(s)$ και:

$$X_{pq}(s) = P_{pq} \alpha_p L_p(s), \quad q = 1, 2, \dots, l \quad (4.34)$$

όπου:

$$L_p(s) = \frac{1}{2} H_{ip}(s) [e^{j\varphi_p} F_{ip}(j\omega_p) H_{op}(s + j\omega_p) + e^{-j\varphi_p} F_{ip}(-j\omega_p) H_{op}(s - j\omega_p)] \quad (4.35)$$

με:

$$H_{ip}(s) = C_{ip}(s) \Gamma_{\theta p}(s) F_{ip}(s) \quad (4.36)$$

$$H_{op}(s) = \frac{C_{op}(s)}{\Gamma_f(s)} F_o(s) \quad (4.37)$$

Ο σχεδιασμός ενός συστήματος ESC πολλών παραμέτρων περιέχει αρκετές προκλήσεις σε σχέση με την περίπτωση των συστημάτων SISO. Για το λόγο αυτό οι [Ariyur, Krstic, 2003] απέδειξαν το ακόλουθο θεώρημα το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη και το οποίο βοηθά στην απόδειξη της ασυμπτωτικής ευστάθειας της πολύπλοκης συνάρτησης $1/\det(I + X(s))$.

Θεώρημα 4.3: Έστω ρ_l^* η μοναδική λύση στο διάστημα $(0, 1]$ της πολυωνυμικής εξίσωσης $\text{per}(\Sigma(p)) = 2$, όπου

$$\Sigma(p) = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho \\ \rho & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Εάν η συνάρτηση $X_{pp}(s)/(1 + X_{pp}(s))$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και ισχύει $\|X_{pq}/(1 + X_{pp})\|_{H_\infty} < \rho_l^*$ για κάθε $p \neq q$, τότε η συνάρτηση $1/\det(I + X(s))$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Η συνάρτηση X_{pq} ορίζεται στη σχέση (4.34).

όπου η συνάρτηση $per(\cdot)$ (*permanent*) ενός τετραγωνικού πίνακα A με στοιχεία $a_{i,j}$, είναι μια συνάρτηση ανάλογη με την ορίζουσα $\det(\cdot)$ και ορίζεται ως εξής:

$$per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \quad (4.39)$$

όπου σ τα στοιχεία της συμμετρικής ομάδας S_n .

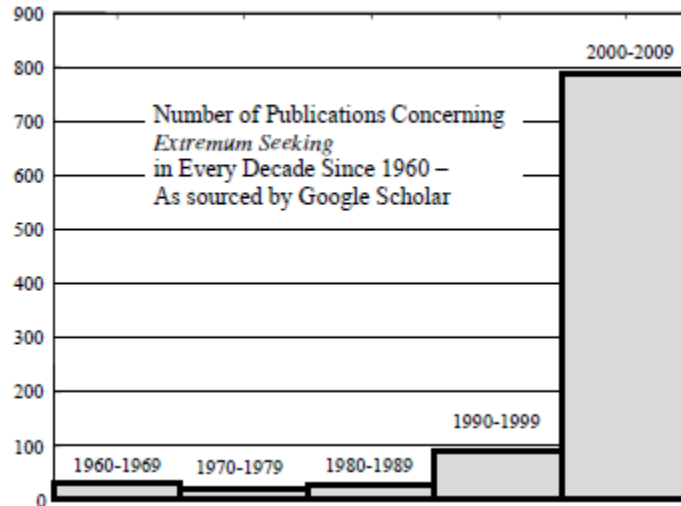
Οι συγγραφείς παραθέτουν τέλος τον ακόλουθο αλγόριθμο για το σχεδιασμό βρόγχων ESC πολλών παραμέτρων:

Αλγόριθμος 5.2 (ESC πολλών παραμέτρων):

1. Επιλογή συχνοτήτων σημάτων διέγερσης $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$ έτσι ώστε να μην ισούται με καμιά συχνότητα του σήματος θορύβου n και ο φανταστικός αριθμός $\pm j\omega_p$ να μην είναι μηδενικό της συνάρτησης $F_{ip}(s)$.
2. Επιλογή πλατών α_p των σημάτων διέγερσης, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται μικρό σφάλμα παρακολούθησης εξόδου \tilde{y} .
3. Σχεδιασμός κάθε συνάρτησης $C_{op}(s)$ έτσι ώστε να είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, με μηδενικά τα μηδενικά της συνάρτησης $\Gamma_f(s)$ που δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθή και έτσι ώστε η συνάρτηση $C_{op}(s)/\Gamma_f(s)$ να είναι πρέπουσα.
4. Για κάθε $p = 1, 2, \dots, l$, σχεδιασμός της συνάρτησης $C_{ip}(s)$ έτσι ώστε να μην περιέχει τους πόλους της συνάρτησης $\Gamma_{\theta p}(s)$ που δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς όπως τα μηδενικά της, η συνάρτηση $C_{ip}(s)\Gamma_{\theta p}(s)$ να είναι πρέπουσα και η συνάρτηση $1/\det(I + X(s))$ να είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί σχεδιάζοντας την συνάρτηση $C_{ip}(s)$ έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η νόρμα $\|X_{pp}/(1 + X_{pp})\|_{H_\infty}$ για κάθε p , χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.3.

4.6 Ευστάθεια μη γραμμικών συστημάτων με ανάδραση ESC.

Η πρώτη απόδειξη της ευστάθειας των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου που σχεδιάζονται με την μέθοδο ESC προτάθηκε από τους Kristic M. και Wang H.H το 2000 [Kristic, Wang, 2000]. Αυτό αποτέλεσε και την απαρχή για την αύξηση του ενδιαφέροντος της επιστημονικής κοινότητας για τη συγκεκριμένη μέθοδο. Στην αναφορά [Tan et. al., 2010] αναφέρεται ότι τη δεκαετία 2000-2009 υπήρξε θεαματική αύξηση των σχετικών δημοσιευθέντων εργασιών όπως βλέπουμε στην εικόνα 4.6.



Εικόνα 4.6 Δημοσιευθείσες εργασίες αναφορικά με τη μέθοδο ESC ανά δεκαετία στο χρονικό διάστημα 1960-2009 (εικόνα από [Tan et. al. 2010]).

Τα βασικά σημεία της απόδειξης που θα παρουσιάσουμε βρίσκονται στην αναφορά [Krstic, Wang, 2000] και χωρίς βλάβη της γενικότητας είναι για συστήματα SISO.

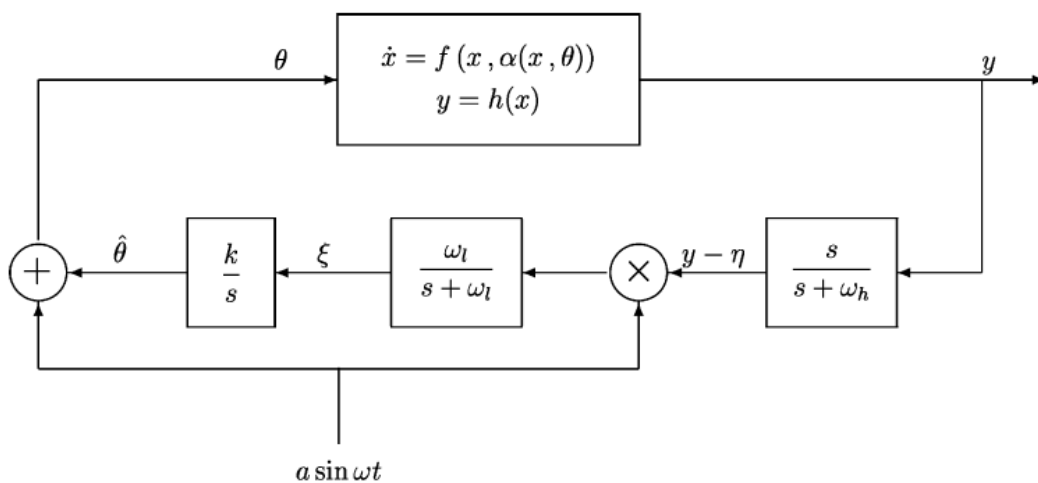
4.6.1 Διατύπωση του προβλήματος.

Έχοντας υπόψη τη γενική μορφή ενός συστήματος ESC, θεωρούμε ένα υπό έλεγχο γενικό μη γραμμικό SISO σύστημα:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (4.40)$$

$$y = h(x) \quad (4.41)$$

όπως φαίνεται στην εικόνα 4.7.



Εικόνα 4.7 Σύστημα με βρόγχο ανάδρασης ESC (εικόνα από [Krstic, Wang, 2000]).

όπου $x \in R^n$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης, $u \in R$ είναι η είσοδος, $y \in R$ είναι η έξοδος και $f: R^n \times R \rightarrow R$ και $h: R^n \rightarrow R$ είναι λείες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι για το ανωτέρω σύστημα υπάρχει ένας νόμος ελέγχου που μπορεί να αναπαρασταθεί από μια λεία συνάρτηση α , ως:

$$u = \alpha(x, \theta) \quad (4.42)$$

όπου θ μία πραγματική παράμετρος. Έτσι το σύστημα κλειστού βρόγχου:

$$\dot{x} = f(x, \alpha(x, \theta)) \quad (4.43)$$

διαθέτει σημεία ισορροπίας τα οποία εξαρτώνται από την παράμετρο θ . Όπως στη συντριπτική πλειοψηφία των μη γραμμικών συστημάτων όπου η ευστάθεια εξασφαλίζεται δεδομένου ότι ισχύουν κάποιες προϋποθέσεις, έτσι και εδώ είναι απαραίτητη η ισχύς των ακόλουθων υποθέσεων:

Υπόθεση 4.8: Υπάρχει μία λεία συνάρτηση $l: R \rightarrow R^n$ τέτοια ώστε:

$$f(x, \alpha(x, \theta)) = 0 \text{ εάν και μόνον εάν } x = l(\theta).$$

Υπόθεση 4.9: Για κάθε $\theta \in R$, το σημείο ισορροπίας $x = l(\theta)$ του συστήματος κλειστού βρόγχου είναι τοπικά, εκθετικώς ευσταθές με σταθερές εξασθένησης (decay) και υπερύψωσης (overshoot) ομοιόμορφα παραμετροποιημένες από την παράμετρο θ .

Υπόθεση 4.10: Υπάρχει $\theta^* \in R$ τέτοιο ώστε:

$$(h \circ l)'(\theta^*) = 0 \quad (4.44)$$

$$(h \circ l)''(\theta^*) < 0 \quad (4.45)$$

Τα ανωτέρω σημαίνουν πρακτικά ότι ο νόμος ελέγχου u σταθεροποιεί εκθετικά το σύστημα σε κάθε σημείο ισορροπίας που προκύπτει από την παράμετρο θ και επιπλέον ότι υπάρχει ένα βέλτιστο σημείο λειτουργίας θ^* στο οποίο η μη γραμμική σχέση ανάμεσα στην είσοδο και την έξοδο εμφανίζει μέγιστο. Στόχος μας είναι να σχεδιαστεί μηχανισμός ανάδρασης ο οποίος θα μεγιστοποιεί την έξοδο, χωρίς ωστόσο να έχουμε γνώση ούτε της τιμής θ^* ούτε των συναρτήσεων h και l .

Το ελεγχόμενο σύστημα διαθέτει ένα εύρος ζώνης. Μία από τις πλέον απαραίτητες προϋποθέσεις για την επιτυχή σύγκλιση του αλγορίθμου ESC είναι, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η συχνότητα του σήματος διέγερσης $\alpha \sin(\omega t)$ να είναι μικρότερη σε σχέση με το εύρος ζώνης του συστήματος. Επιπροσθέτως θα πρέπει οι τιμές της συχνότητας αποκοπής του υψιπερατού και κατωπερατού φίλτρου, ω_h και ω_l αντίστοιχα, να είναι μικρότερη από τη συχνότητα του σήματος διέγερσης. Έτσι το όλο σύστημα, συμπεριλαμβανομένης της ανάδρασης ESC διαθέτει τρεις χρονικές κλίμακες:

- **Γρήγορη** (Το ελεγχόμενο σύστημα με τον ελεγκτή σταθεροποίησης)
- **Μεσαία** (Το σήμα διέγερσης)
- **Αργή** (Τα φίλτρα του ESC)

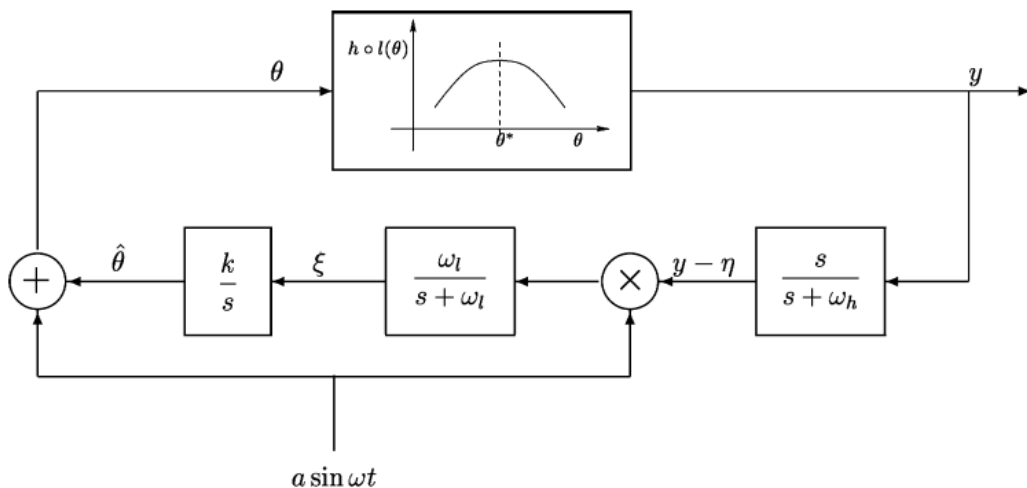
Η επιλογή των ανωτέρω παραμέτρων πρέπει να γίνει έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες:

$$\omega_h = \omega\omega_H = \omega\delta\omega_H' = O(\omega\delta) \quad (4.46)$$

$$\omega_l = \omega\omega_L = \omega\delta\omega_L' = O(\omega\delta) \quad (4.47)$$

$$k = \omega K = \omega\delta K' = O(\omega\delta) \quad (4.48)$$

με ω και δ μικρές θετικές σταθερές και ω_H', ω_L' και K' σταθερές τάξης $O(1)$. Εάν η συχνότητα του σήματος διέγερσης είναι αρκετά μικρή, τότε το ελεγχόμενο μη γραμμικό σύστημα μπορεί να θεωρηθεί, όπως ήδη αναφέραμε, ότι αναπαρίσταται από τον στατικό χάρτη τη μη γραμμικής σχέσης ανάμεσα στην είσοδο και την έξοδο, όπως φαίνεται στην εικόνα 4.8.



Εικόνα 4.8 Σύστημα με βρόγχο ανάδρασης ESC και σήμα διέγερσης με συχνότητα χαμηλότερη από το εύρος ζώνης του (εικόνα από [Krstic, Wang, 2000]).

Με βάση την εικόνα 4.8, οι διαφορικές εξισώσεις του προς ανάλυση συστήματος είναι:

$$\dot{x} = f(x, \alpha(x, \hat{\theta} + a \sin(\omega t))) \quad (4.49)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = k\xi \quad (4.50)$$

$$\dot{\xi} = -\omega_l\xi + \omega_l(y - \eta)a \sin(\omega t) \quad (4.51)$$

$$\dot{\eta} = -\omega_h\eta + \omega_h y \quad (4.52)$$

Εφαρμόζοντας την αλλαγή συντεταγμένων:

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^* \quad (4.53)$$

$$\tilde{\eta} = \eta - h \circ l(\theta^*) \quad (4.54)$$

και χρησιμοποιώντας την χρονική κλίμακα $\tau = \omega t$, το σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις 4.49 – 4.52, ξαναγράφεται ως ακολούθως:

$$\omega \frac{dx}{d\tau} = f(x, \alpha(x, \theta^* + \tilde{\theta} + a \sin \tau)) \quad (4.55)$$

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \xi \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} K' \xi \\ -\omega_L' \xi + \omega_L' (h(x) - h \circ l(\theta^*) - \tilde{\eta}) a \sin \tau \\ -\omega_H' \tilde{\eta} + -\omega_H' (h(x) - h \circ l(\theta^*)) \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Η απόδειξη της ευστάθειας περιλαμβάνει την επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Γνωρίζουμε ωστόσο ότι αναλυτικές λύσεις σε κλειστή μορφή μπορούν να βρεθούν μόνο για έναν περιορισμένο αριθμό ειδικών περιπτώσεων διαφορικών εξισώσεων. Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις, όπως η συγκεκριμένη, πρέπει να χρησιμοποιηθούν άλλες μέθοδοι είτε **αριθμητικές** είτε **ασυμπτωτικές**. Επιπροσθέτως στο πρόβλημα εμφανίζονται μεταβλητές οι οποίες μεταβάλλονται με διαφορετική ταχύτητα ως προς το χρόνο. Οι [Krstic, Wang, 2000] χρησιμοποίησαν τη μέθοδο **Averaging** για την περίπτωση του αναπαριστώμενου από το στατικό χάρτη σύστημα και τη μέθοδο **Singular Perturbation** για το πλήρες μη γραμμικό σύστημα. Και οι δύο μέθοδοι περιγράφονται στην αναφορά [Khalil, 1996], είναι κατάλληλες για συστήματα της μορφής των εξισώσεων 4.55 – 4.56 και ανήκουν στην κατηγορία των ασυμπτωτικών μεθόδων.

4.6.2 Ανάλυση με τη μέθοδο Averaging

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε συστήματα της μορφής [Khalil, 1996]:

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon) \quad (4.57)$$

όπου ε είναι μια θετική σταθερά και $f(t, x, \varepsilon)$ είναι περιοδική ως προς t με περίοδο T . Αυτό σημαίνει ότι:

$$f(t + T, x, \varepsilon) = f(t, x, \varepsilon), \quad \text{για κάθε } (t, x, \varepsilon) \in [0, +\infty) \times D \times [\varepsilon, \varepsilon_0]$$

όπου $D \subset \mathbb{R}^n$. Η μέθοδος αυτή, υπολογίζει προσεγγιστικά τη λύση του συστήματος λύνοντας το λεγόμενο **μέσο σύστημα (average system)** το οποίο προκύπτει λαμβάνοντας το μέσο όρο του συστήματος $f(t, x, \varepsilon)$ για $\varepsilon = 0$. Με άλλα λόγια, έστω ότι έχουμε ένα δυναμικό σύστημα της μορφής 4.57, όπου $f: [0, +\infty) \times D \times [\varepsilon, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μια συνεχής και φραγμένη συνάρτηση με συνεχείς και φραγμένες παραγώγους ως προς τις μεταβλητές της για $(t, x, \varepsilon) \in [0, +\infty) \times D \times [\varepsilon, \varepsilon_0]$.

Επιπροσθέτως η f είναι περιοδική κατά t με περίοδο $T > 0$. Έστω σύνολο $\Gamma = [0, +\infty) \times D$. Τότε το προαναφερθέν μέσο σύστημα είναι το αυτόνομο σύστημα:

$$\dot{x} = \varepsilon f_{av}(x) \quad (4.58)$$

όπου

$$f_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, 0) dt \quad (4.59)$$

Για την περίπτωση του συστήματος που αναπαρίσται από το στατικό χάρτη, θεωρούμε ότι το x βρίσκεται στο σημείο ισορροπίας:

$$x = l(\theta^* + \tilde{\theta} + a \sin \tau) \quad (4.60)$$

και αντικαθιστώντας στο σύστημα 5.56, προκύπτει το **μειωμένο σύστημα (reduced system)**:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_r \\ \tilde{\xi}_r \\ \tilde{\eta}_r \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} K' \xi_r \\ -\omega_L' \xi_r + \omega_L' (v(\tilde{\theta}_r + \alpha \sin \tau) - \tilde{\eta}_r) a \sin \tau \\ -\omega_H' \tilde{\eta}_r + \omega_H' v(\tilde{\theta}_r + \alpha \sin \tau) \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

με

$$v(\tilde{\theta}_r + \alpha \sin \tau) = h \circ l(\theta^* + \tilde{\theta}_r + \alpha \sin \tau) - h \circ l(\theta^*) \quad (4.62)$$

Με βάση την Υπόθεση 4.10, προκύπτει ότι:

$$v(0) = 0 \quad (4.63)$$

$$v'(0) = (h \circ l)'(\theta^*) = 0 \quad (4.64)$$

$$v''(0) = (h \circ l)''(\theta^*) < 0 \quad (4.65)$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται το **μέσο μοντέλο (average model)** με χρήση της σχέσης 4.59. Έτσι το προκύπτων μέσο μοντέλο είναι το:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_r^a \\ \tilde{\xi}_r^a \\ \tilde{\eta}_r^a \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} K' \xi_r^a \\ -\omega_L' \xi_r^a + \frac{\omega_L'}{2\pi} a \int_0^{2\pi} v(\tilde{\theta}_r^a + \alpha \sin \sigma) \sin \sigma d\sigma \\ -\omega_H' \tilde{\eta}_r^a + \frac{\omega_H'}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\tilde{\theta}_r^a + \alpha \sin \sigma) d\sigma \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Το σημείο ισορροπίας $(\tilde{\theta}_r^{a,e} \quad \tilde{\xi}_r^{a,e} \quad \tilde{\eta}_r^{a,e})$ του ανωτέρω συστήματος θα πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

$$\xi_r^{a,e} = 0 \quad (4.67)$$

$$\int_0^{2\pi} v(\tilde{\theta}_r^a + \alpha \sin \sigma) \sin \sigma d\sigma = 0 \quad (4.68)$$

$$\tilde{\eta}_r^{a,e} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\tilde{\theta}_r^a + \alpha \sin \sigma) d\sigma \quad (4.69)$$

Γράφοντας το $\tilde{\theta}_r^{a,e}$ στη μορφή:

$$\tilde{\theta}_r^{a,e} = b_1 \alpha + b_2 \alpha^2 + O(\alpha^3) \quad (4.70)$$

αντικαθιστώντας το στην 4.68, κάνοντας χρήση των 4.63 – 4.65, ολοκληρώνοντας και εξισώνοντας δυνάμεις του α προκύπτει

$$v''(0)b_1 = 0 \quad (4.71)$$

$$v''(0)b_2 + \frac{1}{8}v'''(0) = 0 \quad (4.72)$$

από τα οποία συνάγεται ότι:

$$\tilde{\theta}_r^{a,e} = -\frac{v''(0)}{4}\alpha^2 + O(\alpha^3) \quad (4.73)$$

Από τα ανωτέρω και έπειτα από επιπλέον υπολογισμούς στην σχέση 4.69, προκύπτει

$$\tilde{\eta}_r^{a,e} = \frac{v''(0)}{4}\alpha^2 + O(\alpha^3) \quad (4.74)$$

Έτσι το σημείο ισορροπίας του μέσου συστήματος εκφράζεται παραμετρικά ως:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta}_r^{a,e} \\ \xi_r^{a,e} \\ \tilde{\eta}_r^{a,e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v''(0)}{4}\alpha^2 + O(\alpha^3) \\ 0 \\ \frac{v''(0)}{4}\alpha^2 + O(\alpha^3) \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Γραμμικοποιώντας στη συνέχεια το μέσο σύστημα λαμβάνοντας την Ιακωβιανή ορίζουσά του στο σημείο ισορροπίας έχουμε:

$$J_r^a = \begin{bmatrix} 0 & K' & 0 \\ \frac{\omega_L'}{2\pi}\alpha \int_0^{2\pi} v'(\tilde{\theta}_r^{a,e} + \alpha \sin \sigma) \sin \sigma d\sigma & -\omega_L' & 0 \\ \frac{\omega_H'}{2\pi}\alpha \int_0^{2\pi} v'(\tilde{\theta}_r^{a,e} + \alpha \sin \sigma) d\sigma & 0 & -\omega_H' \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Ο πίνακας J_r^a είναι Hurwitz, εάν και μόνον εάν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\int_0^{2\pi} v'(\tilde{\theta}_r^{a,e} + \alpha \sin \sigma) \sin \sigma d\sigma < 0 \quad (4.77)$$

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες 4.63 – 4.65 και έπειτα από υπολογισμούς γράφουμε:

$$\int_0^{2\pi} v'(\tilde{\theta}_r^{a,e} + \alpha \sin \sigma) \sin \sigma d\sigma = \pi v''(0)\alpha + O(\alpha^3) \quad (4.78)$$

Αντικαθιστώντας την ανωτέρω σχέση στην 4.67, προκύπτει η συνθήκη:

$$\det(\lambda I - J_r^a) = \left(\lambda^2 + \delta \omega'_L \lambda - \frac{\delta^2 \omega'_L K'}{2} v''(0) \alpha^2 + O(\delta^2 \alpha^3) \right) (\lambda + \delta \omega'_H) \quad (4.79)$$

η οποία σε βάση τη συνθήκη 4.65, αποδεικνύει ότι ο πίνακας J_r^a είναι Hurwitz μόνο για μικρές τιμές του πλάτους α του σήματος διέγερσης. Αυτό σημαίνει πως το σημείο ισορροπίας που διατυπώνεται από την 4.75 και αφορά το μέσο σύστημα, είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για επαρκώς μικρή τιμή του α . Με βάση το Θεώρημα 8.3 του [Khalil, 1996] συμπεραίνουμε ότι το σημείο αυτό είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Για λόγους πληρότητας παραθέτουμε εδώ το προαναφερθέν Θεώρημα:

Θεώρημα 4.4: Έστω ένα δυναμικό σύστημα της μορφής 4.57 και έστω το προκύπτον, με χρήση της 4.59, μέσο σύστημα 4.58. Έστω ότι η $f(t, x, \varepsilon)$ είναι συνεχής και φραγμένη και έχει συνεχείς και φραγμένες μερικές παραγώγους μέχρι δευτέρας τάξεως ως προς (t, x) για $(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D \times [0, \varepsilon_0]$. Υποθέτουμε ότι η f έχει μια περιοδική λύση κατά t με περίοδο T , για κάποιο $T > 0$ και ότι ε είναι μία θετική παράμετρος. Έστω b μια θετική πεπερασμένη σταθερά. Έστω $x(t, \varepsilon)$ και $x_{av}(t, \varepsilon)$ οι λύσεις των 4.57 και 4.58 αντίστοιχα.

- Εάν ισχύει $x_{av}(t, \varepsilon) \in D$ για κάθε $t \in [0, b/\varepsilon]$ και $\|x(0, \varepsilon) - x_{av}(0, \varepsilon)\| = O(\varepsilon)$, τότε ισχύει ότι:

$$\|x(t, \varepsilon) - x_{av}(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon) \text{ στο διάστημα } [0, b/\varepsilon]$$

- Εάν το σημείο ισορροπίας $p^* \in D$ είναι εκθετικά ευσταθές για το μέσο σύστημα 4.58, τότε υπάρχει μια θετική σταθερά ρ τέτοια ώστε εάν ισχύει:

$$\|x_{av}(0, \varepsilon) - p^*\| < \rho \text{ και } \|x(0, \varepsilon) - x_{av}(0, \varepsilon)\| = O(\varepsilon) \text{ τότε ισχύει ότι:}$$

$$\|x(t, \varepsilon) - x_{av}(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon) \text{ για κάθε } t \in [0, \infty)$$

- Εάν το σημείο ισορροπίας $p^* \in D$ είναι εκθετικά ευσταθές για το μέσο σύστημα 4.58, τότε υπάρχει μία θετική σταθερά ε^* τέτοια ώστε για κάθε $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, το σύστημα

4.57 έχει μια μοναδική εκθετικά ευσταθή περιοδική λύση με περίοδο T σε μια $O(\varepsilon)$ γειτονιά του σημείου p^* .

Με βάση τα ανωτέρω, οι συγγραφείς διατύπωσαν το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.5: Έστω ένα σύστημα της μορφής 4.61 και έστω ότι για το εν λόγω σύστημα ισχύει η Υπόθεση 4.10. Τότε υπάρχουν $\bar{\delta}$ και $\bar{\alpha}$ τέτοια ώστε για κάθε $\delta \in (0, \bar{\delta})$ και $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ το σύστημα έχει ένα μοναδικό εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας $(\tilde{\theta}_r^{2\pi}(\tau), \tilde{\xi}_r^{2\pi}(\tau), \tilde{\eta}_r^{2\pi}(\tau))$ με περίοδο 2π και η λύση αυτή ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\left\| \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_r^{2\pi}(\tau) + \frac{v'''(0)}{8v''(0)} \alpha^2 \\ \tilde{\xi}_r^{2\pi}(\tau) \\ \tilde{\eta}_r^{2\pi}(\tau) - \frac{v''(0)}{4} \alpha^2 \end{bmatrix} \right\| \leq O(\delta) + O(\alpha^3), \quad \tau \geq 0 \quad (4.80)$$

Το θεώρημα αυτό υποδηλώνει ότι οι λύσεις $(\tilde{\theta}_r(\tau), \tilde{\xi}_r(\tau), \tilde{\eta}_r(\tau))$ και συγκεκριμένα η συντεταγμένη $\tilde{\theta}_r(\tau)$ συγκλίνουν σε μια περιοχή $O(\delta + \alpha^2)$ της αρχής των αξόνων.

4.6.3 Ανάλυση με τη μέθοδο Singular Perturbation

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε συστήματα της μορφής [Khalil, 1996]:

$$\dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon) \quad (4.81)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon) \quad (4.82)$$

και οι συγγραφείς τη χρησιμοποίησαν για το πλήρες σύστημα που φαίνεται στην εικόνα 4.7 και περιγράφεται από τις εξισώσεις 4.55 – 4.56. Η χρονική κλίμακα είναι η $t = \omega t$. Θέτοντας ως $z = (\tilde{\theta}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, το σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις 4.56 γράφεται ως:

$$\frac{dz}{d\tau} = \delta G(\tau, x, z) \quad (4.83)$$

Από το Θεώρημα 4.5 προκύπτει πως υπάρχει μία ασυμπτωτικά ευσταθής περιοδική λύση $z_r^{2\pi}(\tau)$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\frac{dz_r^{2\pi}(\tau)}{d\tau} = \delta G(\tau, L(\tau, z_r^{2\pi}(\tau)), z_r^{2\pi}(\tau)) \quad (4.84)$$

όπου:

$$L(\tau, z) = l(\theta^* + \tilde{\theta} + \alpha \sin(\tau)) \quad (4.85)$$

Προκειμένου το σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις 4.55 και 4.83 να μετασχηματιστεί στην κανονική μορφή για την εφαρμογή της μεθόδου Singular perturbation, οι συγγραφείς έκαναν αλλαγή συντεταγμένων ως:

$$\tilde{z} = z - z_r^{2\pi}(\tau) \quad (4.86)$$

Έτσι το προκύπτων μετασχηματισμένο σύστημα είναι:

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = \delta \tilde{G}(\tau, x, \tilde{z}) \quad (4.87)$$

$$\omega \frac{dx}{d\tau} = \tilde{F}(\tau, x, \tilde{z}) \quad (4.88)$$

με:

$$\tilde{G}(\tau, x, \tilde{z}) = G(\tau, x, \tilde{z} + z_r^{2\pi}(\tau)) - G(\tau, L(\tau, z_r^{2\pi}(\tau)), \tilde{z} + z_r^{2\pi}(\tau)) \quad (4.89)$$

$$\tilde{F}(\tau, x, \tilde{z}) = f(x, a(x, \theta^* + \tilde{\theta} + a \sin \tau)) \quad (4.90)$$

Η λύση $x = L(\tau, \tilde{z} + z_r^{2\pi}(\tau))$ ονομάζεται **ημι-μόνιμη κατάσταση (quasi-steady state)**. Το προκύπτων μειωμένο μοντέλο είναι:

$$\frac{d\tilde{z}_r}{d\tau} = \delta \tilde{G}(\tau, L(\tau, \tilde{z} + z_r^{2\pi}(\tau)), \tilde{z} + z_r^{2\pi}(\tau)) \quad (4.91)$$

Το ανωτέρω σύστημα έχει σημείο ισορροπίας το $\tilde{z}_r = 0$ το οποίο δείχθηκε με τη μέθοδο Averaging ότι είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Για την ολοκλήρωση της ανάλυσης με τη μέθοδο Singular perturbation, οι συγγραφείς μελέτησαν το **οριακό μοντέλο (boundary layer model)**:

$$\frac{dx_b}{d\tau} = \tilde{F}(\tau, x_b + L(\tau, \tilde{z} + z_r^{2\pi}(\tau)), \tilde{z}) = f(x_b + l(\theta), \alpha(x_b + l(\theta)), \theta) \quad (4.92)$$

όπου $\theta = \theta^* + \tilde{\theta} + \alpha \sin \tau$. Εφόσον ισχύει $f(l(\theta), \alpha(l(\theta)), \theta) \equiv 0$, τότε το σημείο $x_b = 0$ είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος 4.92 το οποίο βάσει της Υποθέσεως 4.9 είναι εκθετικά ευσταθές ομοιόμορφα ως προς την παράμετρο θ .

Η απόδειξη της ευστάθειας των συστημάτων ESC ολοκληρώθηκε με τη χρήση του Θεωρήματος 9.4 της αναφοράς [Khalil, 1996], το οποίο όπως και στην προηγούμενη παράγραφο παραθέτουμε εδώ για λόγους πληρότητας:

Θεώρημα 5.6: Έστω ένα σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις 4.81 και 4.82 με $x(t_0) = \xi(\varepsilon)$ και $z(t_0) = \eta(\varepsilon)$ και έστω $z = h(t, x)$ μία απομονωμένη ρίζα της εξίσωσης 5.82 για $\varepsilon = 0$. Υποθέτουμε ότι οι ακόλουθες συνθήκες ισχύουν για κάθε $(t, x, z - h(t, x), \varepsilon) \in [0, \infty) \times B_r \times B_\rho \times [0, \varepsilon_0]$:

- Οι συναρτήσεις f, g και οι πρώτες μερικές παράγωγοί τους σε σχέση με τις παραμέτρους (x, z, ε) είναι συνεχείς και φραγμένες. Η συνάρτηση $h(t, x)$ και η Ιακωβιανή $[\partial g(t, x, z, 0)/\partial z]$ έχουν φραγμένες μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως σε σχέση με τις παραμέτρους τους. Η Ιακωβιανή $[\partial f(t, x, h(t, x), 0)/\partial x]$ έχει φραγμένη πρώτη μερική παράγωγο σε σχέση με το x . Τα αρχικά δεδομένα $\xi(\varepsilon)$ και $\eta(\varepsilon)$ είναι λείες συναρτήσεις του ε .
- Το σημείο 0 του προκύπτοντος από τις 4.81 και 4.82 μειωμένου μοντέλου:

$$\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0)$$

είναι εκθετικώς ευσταθές.

- Το σημείο 0 του προκύπτοντος από τις 4.81 και 4.82 οριακού μοντέλου:

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t, x, y + h(t, x), 0)$$

είναι εκθετικώς ευσταθές, ομοιόμορφα κατά (t, x) . Συγκεκριμένα οι λύσεις του οριακού μοντέλου ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$\|y(\tau)\| \leq k \|y(0)\| \exp(-\gamma\tau), \text{ για κάθε } \|y(0)\| \leq \rho_0, \text{ για κάθε } (t, x) \in [0, t_1] \times B_r, \text{ για κάθε } \tau > 0, \text{ για θετικές σταθερές } k, \gamma \text{ και } \rho.$$

$$\text{με } \rho_0 \leq \rho/k.$$

Τότε, υπάρχουν θετικές σταθερές μ_1, μ_2 και ε^* έτσι ώστε για όλα τα:

$$\|\xi(0)\| < \mu_1, \|\eta(0) - h(t_0, \xi(0))\| < \mu_2 \text{ και } 0 < \varepsilon < \varepsilon^*$$

το σύστημα 4.81 και 4.82 έχει μία μοναδική λύση $x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)$, ορισμένη για όλα τα $t \geq t_0 \geq 0$, και οι σχέσεις:

$$x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon)$$

$$z(t, \varepsilon) - h(t, \bar{x}(t)) - \hat{y}(t/\varepsilon) = O(\varepsilon)$$

ισχύουν ομοιόμορφα για $t \in [t_0, \infty)$, όπου $\bar{x}(t)$ και $\hat{y}(\tau)$ είναι οι λύσεις του μειωμένου και του οριακού συστήματος:

$$\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0), \quad x(t_0) = \xi_0 = \xi(0)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t_0, \xi_0, y + h(t_0, \xi_0), 0), \quad y(0) = \eta(0) - h(t_0, \xi_0)$$

Επιπλέον, για δοσμένο $t_b > t_0$, υπάρχει $\varepsilon^{**} < \varepsilon^*$ τέτοιο ώστε η συνθήκη:

$$z(t, \varepsilon) - h(t, \bar{x}(t)) = O(\varepsilon)$$

να ισχύει ομοιόμορφα για $t \in [t_b, \infty)$ οποτεδήποτε $\varepsilon < \varepsilon^{**}$.

Έτσι οι συγγραφείς ολοκληρώνοντας, χρησιμοποιώντας το ανωτέρω Θεώρημα και το γεγονός ότι τα συστήματα 4.91 και 4.92 είναι ευσταθή, διατύπωσαν τα ακόλουθα δύο θεωρήματα, με τα οποία ολοκλήρωσαν την απόδειξη της ευστάθειας των συστημάτων ESC, τηρουμένων των απαραίτητων Υποθέσεων.

Θεώρημα 4.7: Έστω ένα σύστημα με ανάδραση που περιγράφεται από τις εξισώσεις 4.49 – 4.52 και έστω ότι ισχύουν οι Υποθέσεις 4.8 – 4.10. Τότε υπάρχει μια σφαίρα αρχικών συνθηκών γύρω από το σημείο $(x, \hat{\theta}, \xi, \eta) = (l(\theta^*), \theta^*, 0, h \circ l(\theta^*))$ και σταθερές $\bar{\omega}, \bar{\delta}$ και $\bar{\alpha}$ έτσι ώστε για όλα τα $\omega \in (0, \bar{\omega})$, $\delta \in (0, \bar{\delta})$ και $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$, η λύση $(x(t), \hat{\theta}(t), \xi(t), \eta(t))$ συγκλίνει ασυμπτωτικά σε μια $O(\omega + \delta + \alpha)$ γειτονιά αυτού του σημείου. Επιπλέον, η έξοδος του συστήματος $y(t)$ συγκλίνει σε μια $O(\omega + \delta + \alpha)$ γειτονιά του $h \circ l(\theta^*)$.

Θεώρημα 4.8: Δεδομένου ότι ισχύει το Θεώρημα 4.7, υπάρχει μια μοναδική, εκθετικά ευσταθής, περιοδική λύση του συστήματος που περιγράφεται από τις εξισώσεις 4.49 – 4.52 σε μια $O(\omega + \delta + \alpha)$ γειτονιά του σημείου $(x, \hat{\theta}, \xi, \eta) = (l(\theta^*), \theta^*, 0, h \circ l(\theta^*))$.

Τα δύο προαναφερθέντα Θεωρήματα, διατυπώνουν την ευστάθεια των συστημάτων ESC, τηρουμένων όμως των απαραίτητων υποθέσεων που περιγράψαμε. Η εργασία αυτή των [Krstic, Wang, 2000] έδωσε ώθηση στην περαιτέρω ενασχόληση της ερευνητικής κοινότητας με την μέθοδο ESC.

Κεφάλαιο 5

Προσομοίωση

Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί το πειραματικό μέρος της εργασίας. Ο στόχος μας είναι να σχεδιαστεί ένα σύστημα αυτομάτου ελέγχου με τη μέθοδο ESC το οποίο έχοντας ως είσοδο την μετρούμενη τιμή της επαγόμενης άντωσης στον ακόλουθο του σχηματισμού, θα προσπαθήσει να βρει το ακρότατο αυτής της συνάρτησης και έτσι να οδηγήσει τον ακόλουθο σε σχηματισμό με τον αρχηγό στο επιθυμητό σημείο στο χώρο (sweet spot). Θα περιγράψουμε αρχικά τις συνθήκες προσομοίωσης και τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιήσαμε και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την αρχιτεκτονική του περιβάλλοντος προσομοίωσης. Τέλος θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα.

5.1 Εισαγωγή

Για τη μελέτη του προβλήματος της εφαρμογής της μεθόδου ESC στο πρόβλημα της πτήσης δύο αεροσκαφών σε σχηματισμό, δημιουργήσαμε ένα μοντέλο προσομοίωσης σε περιβάλλον MATLAB®/Simulink. Προκειμένου να δημιουργηθεί το εν λόγω μοντέλο πρέπει να γίνουν οι ακόλουθες επιλογές:

1. Επιλογή μαθηματικού μοντέλου αεροσκάφους, τόσο για το αρχηγό του σχηματισμού όσο και για τον ακόλουθο.
2. Επιλογή μαθηματικού μοντέλου της μεταξύ τους αεροδυναμικής αλληλεπίδρασης.
3. Επιλογή της μεθόδου ελέγχου για τον Ελεγκτή Σχηματισμού των αεροσκαφών.
4. Επιλογή αρχιτεκτονικής ελέγχου του συστήματος ESC.

Το μοντέλο προσομοίωσης σχεδιάστηκε επιτυχώς βασιζόμενο στις επιμέρους εργασίες (project) που βρίσκονται στο έργο των [Beard ,McLain, 2012]. Η κάθε εργασία περιλάμβανε ένα αρχείο Simulink καθώς και τα σχετικά m-files. Αφού υλοποιήσαμε τις απαραίτητες εργασίες, συλλέξαμε στοιχεία από τα απαιτούμενα αρχεία Simulink καθώς και τα απαραίτητα m-files, προκειμένου να συνθέσουμε το μοντέλο μας.

5.2 Συνθήκες προσομοίωσης

Για την προσομοίωση θεωρήσαμε ότι ο αρχηγός του σχηματισμού πετάει σε ευθεία και οριζόντια πτήση με σταθερή ταχύτητα $V_a = 25 \text{ m/s}$ σε ύψος $h = 200 \text{ m}$. Στις προαναφερθείσες συνθήκες, υπολογίσαμε από την αντίστοιχη εργασία του έργου των [Beard ,McLain, 2012] το γραμμικοποιημένο μοντέλο του αεροσκάφους, με βάση το οποίο όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2 σχεδιάζεται ο αυτόματος πιλότος. Ο ακόλουθος έχει επίσης αρχική ταχύτητα $V_a = 25 \text{ m/s}$. Θεωρούμε ότι η αρχική απόσταση ανάμεσα στον ακόλουθο και τον αρχηγό του σχηματισμού, ως προς το κέντρο βάρους τους, είναι κατά $1.3b$ κατά τη θετική φορά του εγκάρσιου άξονα του

συστήματος NED και αντίστοιχα κατά $0.2b$ κατά τη θετική φορά του κατακόρυφου άξονα , όπου b το μήκος της πτέρυγας του αεροσκάφους. Υποθέτουμε ακόμη ότι ο αρχηγός μπορεί να μεταδώσει την πληροφορία της θέσης και της ταχύτητάς του ως προς τον αέρα στον ακόλουθο και αυτός αντίστοιχα να τη λάβει για περαιτέρω χρήση.

Θεωρούμε ότι ο άνεμος είναι σταθερός με ταχύτητα ίση με 3 m/s και έχει κατεύθυνση μόνο κατά τη θετική κατεύθυνση του διαμήκους άξονα του συστήματος NED. Επίσης στην προσομοίωση έγινε χρήση του πραγματικού διανύσματος κατάστασης του μοντέλου του αεροσκάφους και όχι του εκτιμώμενου από τις μετρήσεις των αισθητήρων διανύσματος κατάστασης. Η πυκνότητα του αέρα θεωρείται ίση με $\rho = 1.2682\text{ (Kg/m}^3\text{)}$.

Στις παραγράφους που ακολουθούν όταν θα αναφερόμαστε στον όρο σφάλμα, ως παράμετρο για χρήση σε έναν ελεγκτή, εννοούμε τη διαφορά της μεταβλητής του αρχηγού από την αντίστοιχη μεταβλητή του ακόλουθου. Για παράδειγμα ως σφάλμα πορείας e_χ θα εννοούμε τη διαφορά ανάμεσα στην πορεία χ_i του αρχηγού του σχηματισμού από την πορεία χ_f του ακόλουθου. Οι αποστάσεις μετρούνται πάντα από το κέντρο βάρους του αρχηγού προς το κέντρο βάρους του ακόλουθου. Ο χρόνος προσομοίωσης είναι ίσος με $2400\text{ s} = 40\text{ min}$. Θεωρούμε ότι ο ακόλουθος βρίσκεται αρχικά στα δεξιά του αρχηγού.

5.3 Μαθηματικά μοντέλα

Όπως σε κάθε περίπτωση προσομοίωσης, υπάρχει μία σχέση ανταλλαγής (trade -off) ανάμεσα στην υπολογιστική ακρίβεια και στον χρόνο προσομοίωσης. Εμείς επιλέξαμε τα βασικά και πλέον απλά μοντέλα για κάθε εμπλεκόμενο σύστημα του μοντέλου προσομοίωσης, τα οποία και παρουσιάζουμε στη συνέχεια.

5.3.1 Μοντέλο αεροσκάφους.

Όπως ήδη αναφέραμε, το μοντέλο προσομοίωσης βασίστηκε στις επιμέρους εργασίες του έργου των [Beard ,McLain, 2012]. Σε αυτό, το αεροσκάφος που χρησιμοποιείται είναι το *Aerosonde UAV* της εταιρείας *Textron Systems*. Στον πίνακα 5.1 φαίνονται τα γεωμετρικά και φυσικά χαρακτηριστικά του αεροσκάφους όπως δίνονται στην ανωτέρω αναφορά και χρησιμοποιήθηκαν στην προσομοίωση.

Οι μαθηματικές εξισώσεις που διέπουν την κίνησή των δύο αεροσκαφών είναι οι εξισώσεις 2.52 – 2.63 που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 2.

Πίνακας 5.1 Παράμετροι αεροσκάφους.

Φυσικές παράμετροι		Συντελεστές διαμηκών δυνάμεων		Συντελεστές εγκάρσιων δυνάμεων	
Παράμετρος	Τιμή	Συντελεστής	Τιμή	Συντελεστής	Τιμή
m	13.5 (Kg)	C_{L0}	0.28	C_{Y0}	0
J_x	0.8244 (Kgm ²)	C_{D0}	0.03	C_{l0}	0
J_y	1.135 (Kgm ²)	C_{m0}	-0.02338	C_{n0}	0
J_z	1.759 (Kgm ²)	$C_{L\alpha}$	3.45	$C_{Y\beta}$	-0.98
J_{xz}	0.1204 (Kgm ²)	$C_{D\alpha}$	0.3	$C_{l\beta}$	-0.12
S	0.55 (m ²)	$C_{m\alpha}$	-0.38	$C_{n\beta}$	0.25
b	2.8956 (m)	C_{Lq}	0	C_{Yp}	0
c	0.18994 (m)	C_{Dq}	0	C_{lp}	-0.26
S_{prop}	0.2027 (m ²)	C_{mq}	-3.6	C_{np}	0.022
K_{motor}	80	$C_{L\delta_e}$	-0.36	C_{Yr}	0
K_{Tp}	0	$C_{D\delta_e}$	0	C_{lr}	0.14
K_{Ω}	0	$C_{m\delta_e}$	-0.5	C_{nr}	-0.35
e	0.9	C_{prop}	1	$C_{Y\delta_a}$	0
		M	50	$C_{l\delta_a}$	0.08
		a_0	0.4712	$C_{n\delta_a}$	0.06
		ε	0.1592	$C_{Y\delta_r}$	-0.17
		C_{Dp}	0.0437	$C_{l\delta_r}$	0.105
		$C_{n\delta_r}$	-0.032		

5.3.2 Μοντέλο αεροδυναμικής αλληλεπίδρασης.

Για το μοντέλο της αεροδυναμικής αλληλεπίδρασης επιλέξαμε αυτό των Buirham-Hallock που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3. Το μοντέλο αυτό δεν είναι το πλέον ακριβές, ωστόσο είναι ικανοποιητικό διότι παρουσιάζει αρκετά καλή συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα [Ariyur, Krstic, 2003].

Το μοντέλο όπως περιγράφεται από της εξίσωση 3.24 είναι εκφρασμένο σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Αυτό που χρειαζόμασταν όμως ήταν μία έκφραση του μοντέλου αφενός σε καρτεσιανές συντεταγμένες και αφετέρου με αρχή των αξόνων ταυτισμένες με το κέντρο βάρους του αεροσκάφους. Η ζητούμενη έκφραση βρέθηκε στην αναφορά [Cooper, Rothhar, 2017]. Με βάση το αδρανειακό σύστημα αναφοράς, θεωρούμε ότι οι επαγόμενες δίνες δημιουργούνται στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα i^i και j^i . Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει διαμήκης συνιστώσα για τις επαγόμενες δίνες, παρά μόνον κατακόρυφη και εγκάρσια. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, ο αρχηγός του σχηματισμού παράγει στο χώρο πίσω από αυτόν δύο δίνες με αντίθετη φορά περιστροφής. Η απόσταση μεταξύ των δινών αυτών είναι ίση με $b_{red} = b\pi/4$ [Ariyur, Krstic, 2003], [Saban, 2010]. Ο όρος αυτός καλείται **ελαττωμένο μήκος πτέρυγας (reduced wing span)**, ο δε παράγοντας $s = \pi/4$ προκύπτει για πτέρυγες όπου η άντωση παρουσιάζει ελλειπτική κατανομή κατά μήκος τους. Ο γενικός τύπος υπολογισμού του παράγοντα s είναι:

$$s = \frac{2}{b} \int_0^{b/2} \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(y=0)} dy \quad (5.1)$$

με Γ την στροβιλότητα. Όπως και στις αναφορές [Binetti et all, 2003], [Chicka et all, 1999, 2006] χρησιμοποιούμε μόνο μία δίνη σχήματος πετάλου (horseshoe vortex) για να μοντελοποιήσουμε του φαινόμενο.

Συμβολίζοντας με W_{wake} και V_{wake} την κατακόρυφη και εγκάρσια συνιστώσα της συνισταμένης των δύο δινών, το μοντέλο υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$$W_{wake}(x, y, z) = -W_r(x, y, z) + W_l(x, y, z) \quad (5.2)$$

$$V_{wake}(x, y, z) = -V_r(x, y, z) + V_l(x, y, z) \quad (5.3)$$

όπου με εκθέτη ($*_r$) συμβολίζεται η συνιστώσα που οφείλεται στην δεξιά δίνη και με εκθέτη ($*_l$) η συνιστώσα που οφείλεται στην αριστερή. Οι επιμέρους συνιστώσες των δινών υπολογίζονται ως εξής:

$$W_r(x, y, z) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{y - b/2}{(y - b/2)^2 + z^2 + r_c^2} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - b/2)^2 + z^2}} \right] \quad (5.4)$$

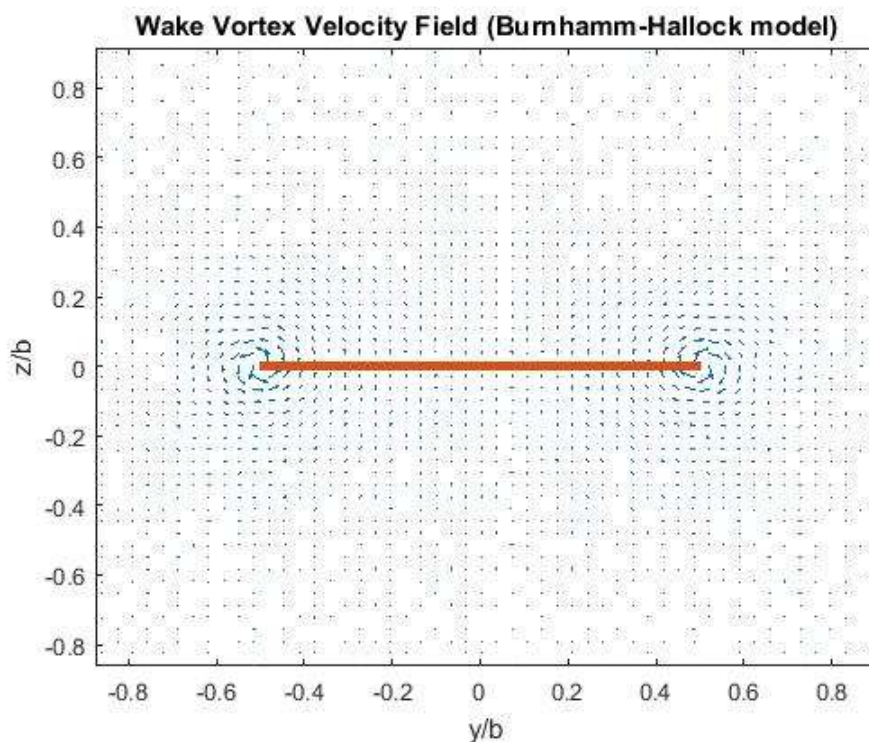
$$W_l(x, y, z) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{y + b/2}{(y + b/2)^2 + z^2 + r_c^2} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y + b/2)^2 + z^2}} \right] \quad (5.5)$$

$$V_r(x, y, z) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{-z}{(y - b/2)^2 + z^2 + r_c^2} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - b/2)^2 + z^2}} \right] \quad (5.6)$$

$$V_r(x, y, z) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{-z}{(y + b/2)^2 + z^2 + r_c^2} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y + b/2)^2 + z^2}} \right] \quad (5.7)$$

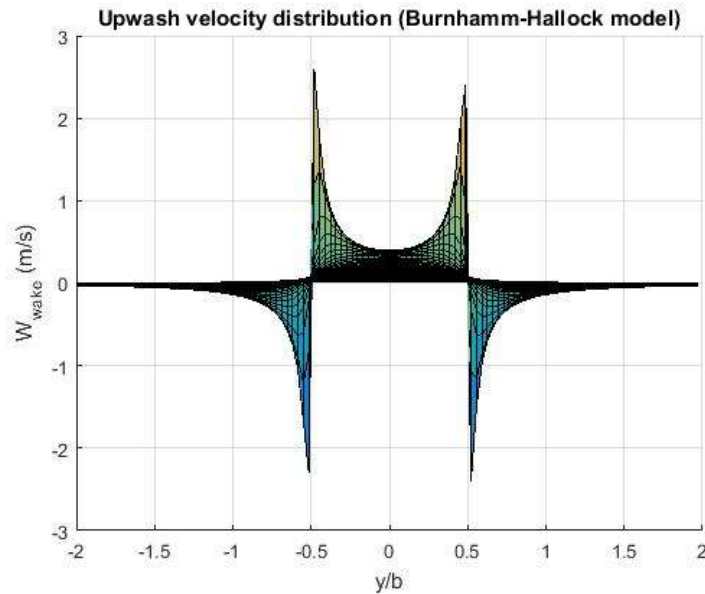
όπου x, y οι συντεταγμένες των σημείων στο χώρο. Με βάση το απλό αυτό μοντέλο, η κατάλληλο σημείο (sweet spot) στο οποίο πρέπει να βρεθεί ακόλουθος του σχηματισμού σε σχέση με τον αρχηγό είναι, κανονικοποιώντας ως προς το μήκος της πτέρυγας b , για την εγκάρσια απόσταση $y/b = 1$ και για την κατακόρυφη απόσταση $z/b = 0$. Αυτές είναι με άλλα λόγια οι συντεταγμένες του επιθυμητού σχηματισμού των δύο αεροσκαφών που πρέπει να εντοπίσει το σύστημα ESC. Ως επιθυμητή διαμήκη απόσταση μεταξύ των δύο αεροσκαφών ορίζουμε την $x = -4b$, μετρούμενο από το σύστημα συντεταγμένων σώματος του αρχηγού.

Όπως ήδη αναφέραμε, ο αρχηγός του σχηματισμού πετά σε ευθεία και οριζόντια πτήση με ταχύτητα $V_a = 25 \text{ m/s}$. Υλοποιήσαμε το ανωτέρω μοντέλο της αεροδυναμικής αλληλεπίδρασης σε m-file. Στην εικόνα 5.1 φαίνεται η απεικόνιση του πεδίου ταχυτήτων στο χώρο πίσω από τον αρχηγό του σχηματισμού και σε απόσταση $x = -4b$. Με έντονη καφέ γραμμή αναπαριστούμε την πτέρυγα του αεροσκάφους. Βλέπουμε το σχηματισμό δύο δινών οι οποίες περιστρέφονται με αντίθετη φορά η μία ως προς την άλλη. Οι υπολογισμοί έγιναν στο σύστημα NED, εξ' ου και η ανάποδη φορά περιστροφής των δινών. Η κατακόρυφη και εγκάρσια απόσταση είναι κανονικοποιημένες ως προς το μήκος b της πτέρυγας. Η σχεδιαστική παράμετρος του ιξώδους πυρήνα στροβίλου επιλέχθηκε ίση με $r_c = 0.02b$.

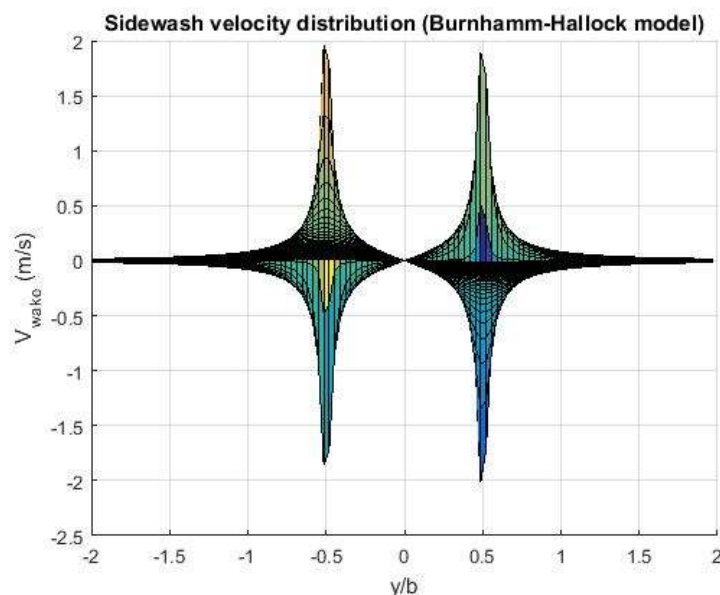


Εικόνα 5.1 Πεδίο ταχυτήτων λόγω της των επαγόμενων δινών κατά την πτήση του αρχηγού του σχηματισμού.

Στις εικόνες 5.2 και 5.3 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των επαγόμενων ταχυτήτων για $x = -4b$, όπου διακρίνονται οι ακρότατες τιμές που προκύπτουν για $z/b = 0$. Αυτό διότι, όπως αναφέραμε προηγουμένως, με βάση το θεωρητικό μοντέλο τα δύο αεροσκάφη πρέπει να ίπτανται στο ίδιο ύψος. Πρακτικά ωστόσο έχειδειχθεί ότι πρέπει ο ακόλουθος να βρίσκεται λίγο χαμηλότερα από τον αρχηγό του σχηματισμού καθώς και να υπάρχει μια επικάλυψη των πτερύγων κατά την εγκάρσια απόσταση [Vachon et al, 2002], κάτι το οποίο ωστόσο δεν προβλέπει το μοντέλο μας, πιθανόν λόγω της απλότητάς του.



Εικόνα 5.2 Κατακόρυφη συνιστώσα W_{wake} , επαγόμενου πεδίου ταχυτήτων.



Εικόνα 5.3 Εγκάρσια συνιστώσα, V_{wake} επαγόμενου πεδίου ταχυτήτων.

Όπως φαίνεται στις ανωτέρω εικόνες, οι αέριες δίνες που δημιουργεί ο αρχηγός επάγουν στον χώρο πίσω από αυτόν, **ταχύτητα ανοδικού ρεύματος (Upwash velocity)** ίση με $2,399 \text{ m/s}$ και **ταχύτητα πλαγίου ρεύματος (Sidewash velocity)** ίση με $2,017 \text{ m/s}$. Βλέπουμε επίσης ότι το μέγιστο εμφανίζεται σε απόσταση περίπου $0,5b$ από το κέντρο βάρους του αρχηγού του σχηματισμού. Αυτό που μας ενδιαφέρει ωστόσο είναι η επαγόμενη άντωση που δέχεται το αεροσκάφος στο επιθυμητό σημείο, καθώς και η επαγόμενη ροπή στον διαμήκη άξονα. Αυτές υπολογίζονται η μεν συμφώνως [Chicka et al, 2006] η δε συμφώνως [Binnetti et al. 2003] ως εξής:

$$\Delta L = \frac{1}{2} \rho V_{\infty} \alpha_0 c \int_{-b/2}^{b/2} W_{wake}(y) dy \quad (5.8)$$

$$\Delta l = -m \frac{1}{2} \rho V_{\infty} \alpha_0 c \int_{-b/2}^{b/2} W_{wake}(y) Q(y) y dy \quad (5.9)$$

όπου ρ η πυκνότητα του αέρα, V_{∞} η ταχύτητα του ακόλουθου, α_0 η κλίση της καμπύλης άντωσης στις δύο διαστάσεις, δηλαδή για μία αεροτομή και η τιμή της τέθηκε ίση με 5.67 [Binetti et al, 2003], c η χορδή της πτέρυγας (θεωρήθηκε ότι έχει σταθερή τιμή κατά μήκος της, διαφορετικά βρίσκεται εντός του ολοκληρώματος) και m ένας παράγοντας διόρθωσης που υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$$m = \frac{1}{1 + \left(\frac{2C_{L\alpha}}{\pi AR} \right) (1 + \varepsilon)} \quad (5.10)$$

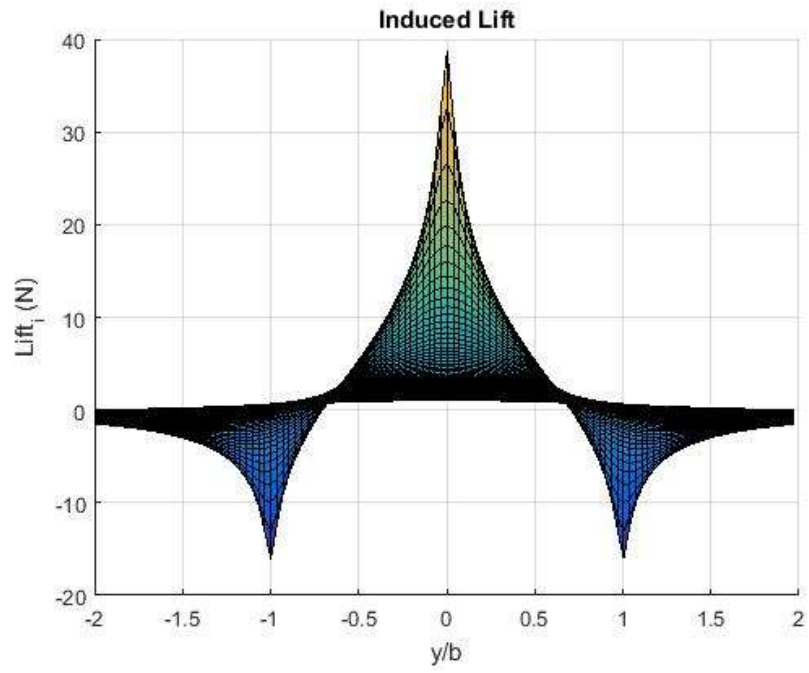
$$\varepsilon = \frac{3TR - 1}{3(1 + TR)} \quad (5.11)$$

με AR και TR να είναι οι λόγοι Aspect Ratio και Taper Ratio που είδαμε στο κεφάλαιο 3. Ο παράγοντας $Q(y)$ είναι ένας ελλειπτικός συντελεστής βάρους που υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

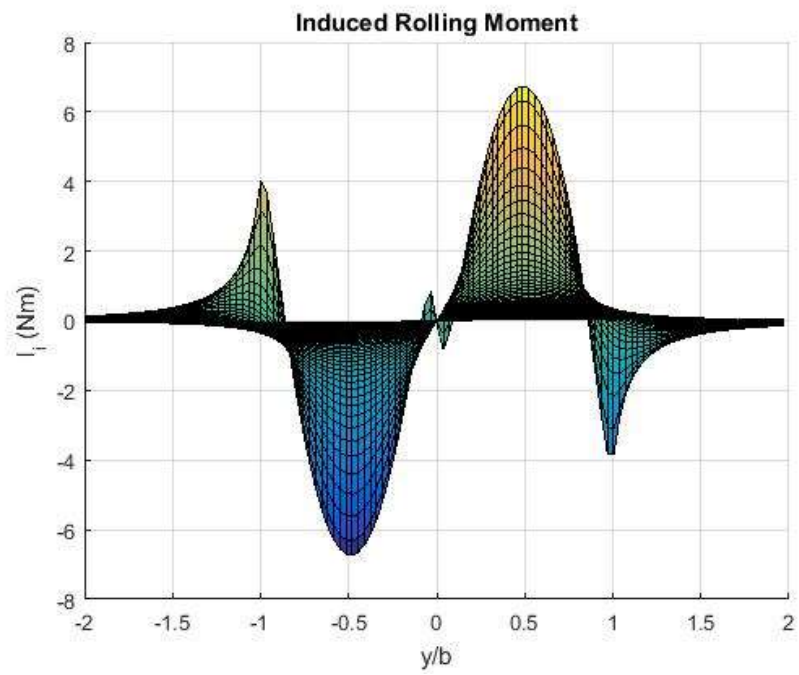
$$Q(y) = \frac{\pi}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2} \quad (5.12)$$

Οι γραφικές παραστάσεις της επαγόμενης άντωσης και ροπής καθώς και της μέσης ταχύτητας ανωρεύματος, \bar{W}_{wake} , φαίνονται στις εικόνες 5.4, 5.5 και 5.6. όπου διακρίνονται οι μέγιστες τιμές που προκύπτουν για $z = 0$. Η μέση ταχύτητα ανωρεύματος υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση [Zhang, Liu, 2016, 2017]:

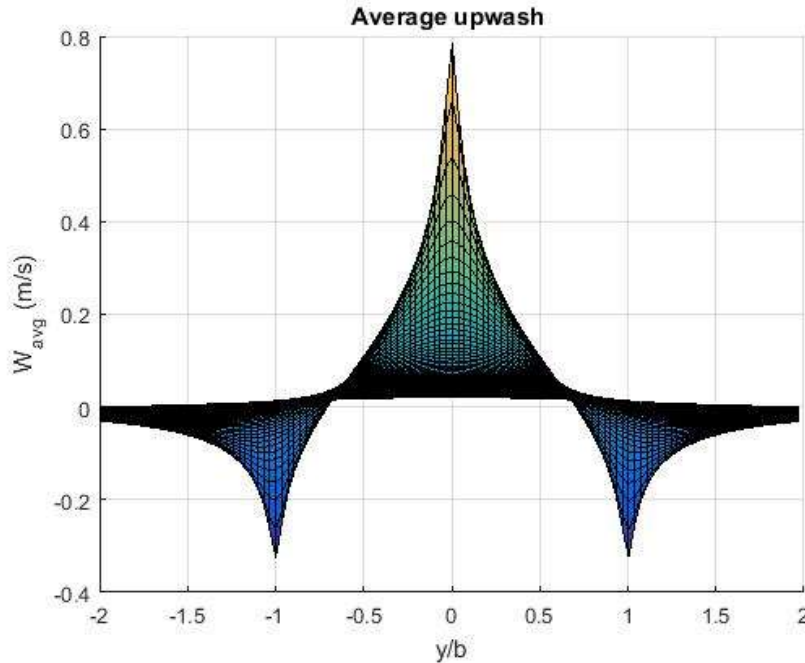
$$\bar{W}_{wake}(y) = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} W_{wake}(y) dy \quad (5.13)$$



Εικόνα 5.4 Επαγώμενη άντωση



Εικόνα 5.5 Επαγώμενη διαμήκης ροπή.



Εικόνα 5.6 Επαγόμενη μέση ταχύτητα ανωρεύματος.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση της επαγόμενης άντωσης στο επιθυμητό σημείο χώρου ($y/b = 1, z/b = 0$) παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με $-15,98 \text{ N}$. Αυτό διότι οι υπολογισμοί με βάση την αεροδυναμική αλληλεπίδραση των δύο αεροσκαφών έγιναν στο σύστημα NED. Η αντίστοιχη διαμήκης ροπή και μέση ταχύτητα ανωρεύματος είναι αντίστοιχα $-3,846 \text{ Nm}$ και $-0,3233 \text{ m/s}$. Μία ακόμη σημαντική παρατήρηση που προκύπτει από τα ανωτέρω διαγράμματα είναι τα έντονα φαινόμενα επαγόμενων δυνάμεων και ροπών που συμβαίνουν στο χώρο ακριβώς πίσω από τον αρχηγό του σχηματισμού (δηλαδή για $-1 \leq y/b \leq 1$). Είναι επομένως προφανές ότι τα επιμέρους συστήματα ελέγχου πρέπει να σχεδιαστούν έτσι ώστε ο ακόλουθος του σχηματισμού να μην βρεθεί ποτέ σε αυτήν την περιοχή.

5.4 Σχεδιασμός επιμέρους υποσυστημάτων

Το μοντέλο Simulink απαρτίζεται από το ακόλουθα κύρια υποσυστήματα:

1. Το αεροσκάφος που λειτουργεί ως αρχηγός του σχηματισμού (Leader).
2. Το αεροσκάφος που λειτουργεί ως ακόλουθος του σχηματισμού (Follower).
3. Το μοντέλο της αεροδυναμικής αλληλεπίδρασης.
4. Τον ελεγκτή του σχηματισμού.
5. Το σύστημα ESC.

Τα επιμέρους τμήματα που καλούμαστε να σχεδιάσουμε είναι ο αυτόματος πιλότος του ακόλουθου, ο ελεγκτής του σχηματισμού και το σύστημα ESC.

5.4.1 Σχεδιασμός αυτόματου πιλότου αεροσκάφους (Follower).

Για το μοντέλο του αρχηγού του σχηματισμού, δημιουργήσαμε με κατάλληλη τροποποίηση της αντίστοιχης εργασίας του έργου των [Beard, McLain, 2012] ένα μοντέλο αεροσκάφους που δεν ελέγχεται από κάποιον αυτόματο πιλότο, αλλά δέχεται τις απαιτούμενες εισόδους (κλίση επιφανειών ελέγχου και ισχύ κινητήρα) για να επιτευχθούν οι επιθυμητές συνθήκες πτήσης. Η μορφή του μοντέλου φαίνεται στην εικόνα *B.1* του παραρτήματος *B*.

Το μοντέλο ωστόσο του ακόλουθου είναι ποιο πολύπλοκο καθώς πρέπει να εφοδιαστεί και με ένα σύστημα αυτόματου πιλότου. Το εν λόγω σύστημα σχεδιάστηκε με την μέθοδο PID που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 2. Ο σκοπός του είναι να καθοδηγεί την πορεία της πτήσης του ακόλουθου οι οποία χαρακτηρίζεται από τρεις εντολές, **την επιθυμητή πορεία**, την **επιθυμητή ταχύτητα** και το **επιθυμητό ύψος**. Η εικόνα *B.2* του παραρτήματος *B* δείχνει την αρχιτεκτονική του εν λόγω μοντέλου.

Στους πίνακες 5.2 έως 5.8 παρουσιάζουμε τις τιμές των σχεδιαστικών παραμέτρων των επιμέρους συστημάτων αυτομάτου ελέγχου τόσο του αυτόματου πιλότου διαμηκών δυνάμεων, όσο και του αυτόματου πιλότου εγκάρσιων δυνάμεων. Παρουσιάζουμε ακόμη τις προκύπτουσες τιμές των κερδών των ελεγκτών με βάση τους τύπους που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 2.

Πίνακας 5.2 Παράμετροι και κέρδη συστήματος ελέγχου γωνία διατοιχισμού φ .

Παράμετρος	Τιμή
δ_a^{max}	45 (deg)
e_φ^{max}	15 (deg)
ζ_φ	0,8
$K_{p\varphi}$	3
$K_{i\varphi}$	0
$k_{d\varphi}$	0,2435

Πίνακας 5.3 Παράμετροι και κέρδη ελεγκτή πορείας χ .

Παράμετρος	Τιμή
W_χ	8
ζ_χ	0,8
$K_{p\chi}$	4,8425
$K_{i\chi}$	3,5945

Πίνακας 5.4 Παράμετροι και κέρδη ελεγκτή γωνίας πλαγιολίσθησης β .

Παράμετρος	Τιμή
δ_r^{max}	45 (deg)
e_β^{max}	30 (deg)
$k_{p\beta}$	-1,5
$k_{i\beta}$	0

Πίνακας 5.5 Παράμετροι και κέρδη ελεγκτή γωνίας πρόνευσης θ .

Παράμετρος	Τιμή
δ_e^{max}	45 (deg)
e_θ^{max}	10 (deg)
ζ_θ	0.707
$k_{p\theta}$	-4,5
$k_{d\theta}$	-1,0765

Πίνακας 5.6 Παράμετροι και κέρδη ελεγκτή ύψους μέσω της γωνίας πρόνευσης θ .

Παράμετρος	Τιμή
W_h	5
ζ_h	0,4
K_{p_h}	0,0498
k_{i_h}	0,083

Πίνακας 5.7 Παράμετροι και κέρδη ελεγκτή ταχύτητας μέσω της γωνίας πρόνευσης

Παράμετρος	Τιμή
W_{V_2}	10
ζ_{V_2}	1
$k_{p_{V_2}}$	-0,1162
$k_{i_{V_2}}$	-0,0529

Πίνακας 5.8 Παράμετροι και κέρδη ελεγκτή ταχύτητας με χρήση του κινητήρα.

Παράμετρος	Τιμή
ζ_V	1,3
ω_{n_V}	0,7
k_{p_V}	0,0512
k_{i_V}	0,0171

Το συγκεκριμένο σύστημα ελέγχου δέχεται τις επιθυμητές εντολές ταχύτητας, πορείας και ύψους από τον Ελεγκτή του Σχηματισμού που θα περιγράψουμε στην επόμενη παράγραφο.

5.4.2 Σχεδιασμός Ελεγκτή Σχηματισμού (Formation Controller).

Ο ρόλος του συγκεκριμένου συστήματος αυτομάτου ελέγχου είναι να μετατρέπει την είσοδο που δέχεται από το σύστημα ESC σε εντολή ταχύτητας, πορείας και ύψους για τον αυτόματο πιλότο του ακόλουθου του σχηματισμού. Σχεδιάστηκε με τη μέθοδο PID όπως περιγράφεται στην αναφορά [Patcher et al. 2001]. Ο ελεγκτής αυτός αποτελείται από τρία επιμέρους συστήματα τα οποία υλοποιήθηκαν με ελεγκτή PI.

Το πρώτο σύστημα είναι ο **ελεγκτής πορείας**. Δέχεται ως είσοδο δύο σφάλματα, το σφάλμα πορείας e_ψ και το σφάλμα εγκάρσιας απόστασης y και αφού υπολογίσει το ολικό σφάλμα:

$$e_y = K_y y + K_\psi e_\psi \quad (5.14)$$

όπου K_y και K_ψ τα κέρδη του μίκτη (αθροιστή), δίνει έξοδο την εντολή πορείας του ακόλουθου έτσι ώστε να είναι ίδια με αυτή του αρχηγού, δεδομένου ότι η εγκάρσια απόστασή τους έχει την επιθυμητή τιμή, σύμφωνα με το νόμο ελέγχου:

$$\psi^c = K_{y_p} e_y + K_{y_i} \int_0^t e_y dt \quad (5.15)$$

με K_{y_p} και K_{y_i} το αναλογικό και ολοκληρωτικό κέρδος του PI ελεγκτή.

Το δεύτερο σύστημα είναι ο **ελεγκτής ταχύτητας**. Δέχεται ως είσοδο το σφάλμα διαμήκους απόστασης x καθώς και το σφάλμα ταχύτητας e_V και αφού υπολογίσει το ολικό σφάλμα:

$$e_x = K_x x + K_V e_V \quad (5.16)$$

όπου K_x και K_V τα κέρδη του μίκτη, στην έξοδο παράγει την εντολή ταχύτητας για τον ακόλουθο έτσι ώστε να διατηρείται σε σχηματισμό με τον αρχηγό, σύμφωνα με το νόμο ελέγχου:

$$V^c = K_{x_p} e_x + K_{x_i} \int_0^t e_x dt \quad (5.17)$$

με K_{x_p} και K_{x_i} το αναλογικό και ολοκληρωτικό κέρδος του PI ελεγκτή.

Τέλος δε, το τελευταίο σύστημα είναι ο **ελεγκτής ύψους**. Η είσοδός του είναι το σφάλμα κατακόρυφης απόστασης z και η έξοδός του είναι η επιθυμητή εντολή ύψους για τον ακόλουθο σύμφωνα με το νόμο ελέγχου:

$$h^c = K_{z_p} z + K_{z_i} \int_0^t z dt \quad (5.18)$$

όπου K_{z_p} και K_{z_i} το αναλογικό και το ολοκληρωτικό κέρδος του PI ελεγκτή.

Οι προαναφερθείσες εντολές πορείας, ταχύτητας και ύψους χρησιμοποιούνται από τον αυτόματο πιλότο του ακόλουθου προκειμένου να διατηρείται σε σχηματισμό με τον αρχηγό. Οι σχεδιαστικές παράμετροι είναι τα κέρδη μίξης K_ψ, K_y, K_x, K_V και τα κέρδη των PI ελεγκτών $K_{y_p}, K_{y_i}, K_{x_p}, K_{x_i}, K_{z_p}$ και K_{z_i} . Στον πίνακα 5.9 φαίνονται οι επιλεγμένες τιμές.

Πίνακας 5.9 Παράμετροι Ελεγκτή σχηματισμού.

Ελεγκτής πορείας		Ελεγκτής ταχύτητας		Ελεγκτής ύψους	
Παράμετρος	Τιμή	Παράμετρος	Τιμή	Παράμετρος	Τιμή
K_ψ	-1	K_x	1	K_{z_p}	2
K_y	1	K_V	-1	K_{z_i}	0,5
K_{y_p}	10	K_{x_p}	1		
K_{y_i}	0.0005	K_{x_i}	0,5		

5.4.3 Σχεδιασμός συστήματος ESC.

Το κύριο σύστημα ελέγχου που είναι και το αντικείμενο της παρούσης εργασίας είναι το ESC. Για το σχεδιασμό του επιλέξαμε τον κλασικό αλγόριθμο που εκτιμά την κλίση την μη γραμμικής συνάρτησης με τη χρήση του υψιπερατού και κατωπερτού φίλτρου. Η εν λόγω μη γραμμική συνάρτηση είναι αυτή της επαγώμενης άντωσης που προκύπτει από τη σχέση 5.8 και η γραφική της παράσταση είναι αυτή της εικόνας 5.4. Ο στόχος του αλγορίθμου ESC είναι να εντοπίσει το ελάχιστό της (συγκεκριμένα το δεξιό ελάχιστο λόγω της αρχικής θέσης των αεροσκαφών), διότι όπως έχουμε ήδη αναφέρει οι υπολογισμοί έγιναν στο σύστημα NED.

Ως σήματα διέγερσης επιλέξαμε ένα ημιτονοειδές σήμα για το κανάλι του ύψους και ένα συνημιτονοειδές σήμα (πρακτικά ημιτονοειδές με αρχική φάση $\pi/2$) για το κανάλι της εγκάρσιας απόστασης. Η αρχική εκτίμηση της θέσης του επιθυμητού σημείου (sweet spot) που δίνουμε στον αλγόριθμο είναι 20% ποιο κάτω κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση και 30% ποιο δεξιά κατά την εγκάρσια. Στον πίνακα 10 φαίνονται οι τιμές των σχεδιαστικών παραμέτρων του αλγορίθμου που επιλέξαμε όπως τις παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 4. Αυτές είναι οι συντεταγμένες αρχικής εκτίμησης του επιθυμητού σημείου h_0^c και y_0^c , το πλάτος a η συχνότητα ω και η αρχική φάση φ_h , φ_y του κάθε σήματος διέγερσης αντίστοιχα (θέσαμε ίδια τιμή πλάτους και συχνότητας), το κέρδος K_{hp} και K_{lp} των δύο κλάδων του ESC (τα θέσαμε να έχουν την ίδια τιμή) και τις συχνότητες αποκοπής του υψιπερατού, ω_{hp} , και κατωπερατού, ω_{lp} , φίλτρου των δύο κλάδων του ESC (θέσαμε ίδιες τιμές για τα φίλτρα και των δύο κλάδων).

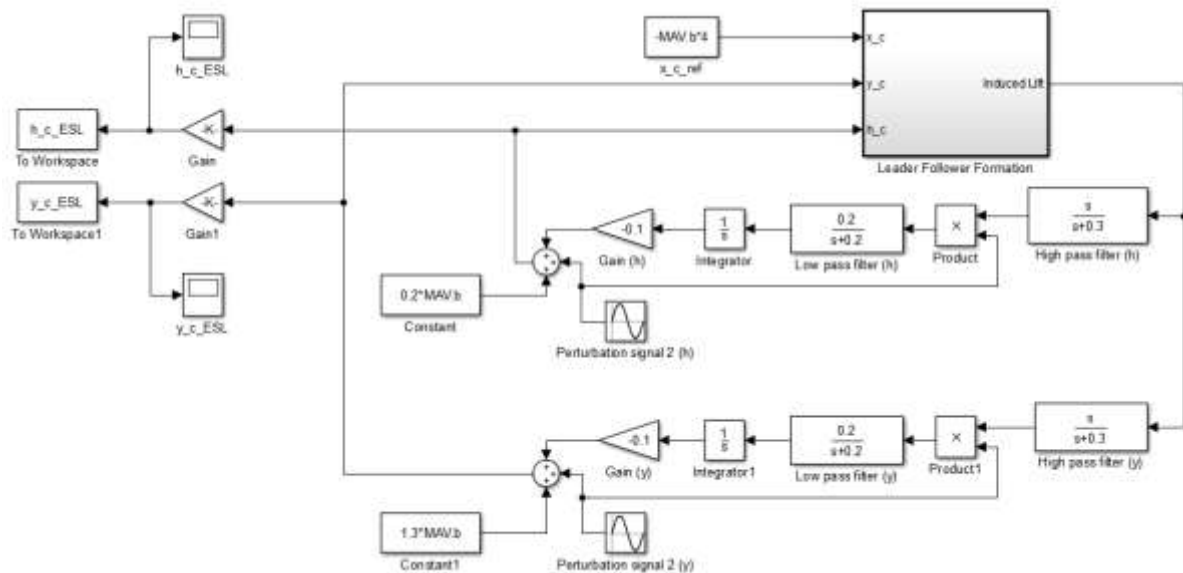
Πίνακας 5.10 Παράμετροι συστήματος ESC.

Παράμετρος	Τιμή
h_0^c	0,2b
y_0^c	1,3b
a	0,1
ω	0,4 (rad/s)
ω_{hp}	0,3 (rad/s)
φ_h	0 (rad)
K_{hp}	0,1
ω_{lp}	0,2 (rad/s)
φ_y	$\pi/2$ (rad)
K_{lp}	0,1

Το σύστημα ESC δίνει την έξοδό του ως είσοδο στον Ελεγκτή Σχηματισμού. Καθώς αναζητά το ελάχιστο της μη γραμμικής συνάρτησης επαγόμενης άντωσης, η έξοδός του είναι συνεχώς η τρέχουσα επιθυμητή απόσταση μεταξύ αρχηγού και ακόλουθου. Όταν ο αλγόριθμος θα συγκλίνει, δηλαδή θα εντοπίσει το ελάχιστο της μη γραμμικής συνάρτησης της επαγόμενης άντωσης, η έξοδος του ESC θα σταθεροποιηθεί πλέον στις επιθυμητές συντεταγμένες του επιθυμητού σημείου (sweet spot), οι οποίες με βάση το μοντέλο αεροδυναμικής αλληλεπίδρασης που χρησιμοποιούμε είναι $y^c/b = 1$ και $h^c/b = 0$, κανονικοποιώντας ως προς το μήκος της πτέρυγας b . Υπενθυμίζουμε ότι όπως δείξαμε στο κεφάλαιο 4, λόγω της παρουσίας των ημιτονοειδών σημάτων διέγερσης το σφάλμα μόνιμης κατάστασης δεν γίνεται να μηδενιστεί.

5.5 Μοντέλο προσομοίωσης.

Στην εικόνα 5.7 φαίνεται το πλήρες μοντέλο προσομοίωσης που σχεδιάσαμε το περιβάλλον του MATLAB®/Simulink. Διακρίνονται οι δύο κλάδοι του ESC, όπου ο ένας αναζητά το ελάχιστο της συνάρτησης της επαγώμενης άντωσης ως προς τη μεταβλητή h και ο άλλος ως προς τη μεταβλητή y . Η είσοδος στο σύστημα ESC είναι η μετρούμενη επαγώμενη άντωση όπως προκύπτει από την εξίσωση 5.8.



Εικόνα 5.7 Το πλήρες μοντέλο προσομοίωσης.

Το μπλόκ **Leader Follower Formation** περιλαμβάνει το μοντέλο του σχηματισμού των δύο αεροσκαφών καθώς και το μοντέλο της αεροδυναμικής αλληλεπίδρασης, όπως φαίνεται στην εικόνα B.3 του παραρτήματος B.

Το πρώτο από τα δεξιά μπλοκ στην εν λόγω εικόνα είναι το μοντέλο της αεροδυναμικής αλληλεπίδρασης το οποίο χρησιμοποιώντας την ταχύτητα του αρχηγού του σχηματισμού και τη σχετική απόστασή του από τον ακόλουθο, δίνει ως έξοδο την επαγώμενη στον ακόλουθο άντωση για χρήση από το σύστημα ESC, καθώς και την επαγώμενη διαμήκη ροπή, την υπολογιζόμενη μέση ταχύτητα ανωρεύματος, \bar{W}_{wake} και την μεταβολή στη γωνία προσβολής $\Delta\alpha$. Ο υπολογισμός της μείωσης της οπισθέλκουσας σύμφωνα με τον τύπου [Zhang, Liu, 2017,]:

$$\Delta D = (L + \Delta L) \sin \Delta\bar{\alpha} \quad (5.19)$$

όπου ΔD η μείωση στην οπισθέλκουσα, L η κανονική άντωση που υπολογίσαμε σύμφωνα με τη σχέση 2.27, ΔL η επαγώμενη άντωση και $\Delta\bar{\alpha}$ η μέση μεταβολή στη γωνία προσβολής που υπολογίζεται ως εξής:

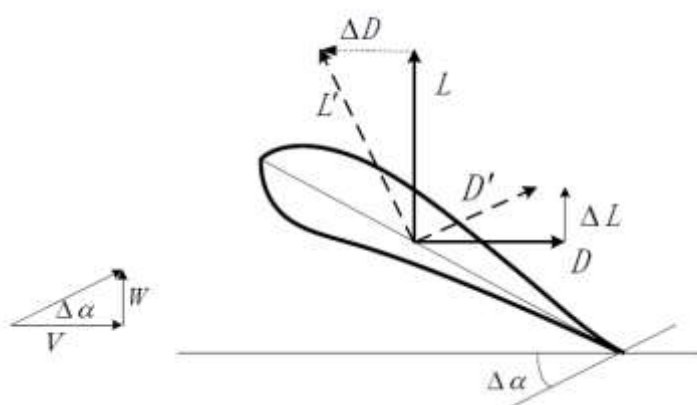
$$\Delta\bar{\alpha}(y) = \frac{\bar{W}_{wake}(y)}{V_{\infty}} \quad (5.20)$$

Σύμφωνα με [Zhang, Liu, 2017], οι επαγόμενες ταχύτητες των δυνάμεων υπολογίζονται στο σύστημα αξόνων ανέμου. Έτσι προσθέτουμε τις υπολογισθείσες δυνάμεις επαγόμενης άντωσης και μείωσης οπισθέλκουσας στις εξισώσεις 2.44, αφού τις περιστρέψουμε με την κατάλληλη μήτρα περιστροφής από το σύστημα αξόνων ανέμου στο σύστημα αξόνων σώματος κατά τις γωνίες πλαγιολίσθησης β και προσβολής α [Beard, McLain, 2012]. Συμβολίζοντας με f_i το διάνυσμα των επαγόμενων δυνάμεων, έχουμε:

$$\begin{pmatrix} f_{i_x} \\ f_{i_y} \\ f_{i_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha & -\sin \beta \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta D \\ 0 \\ \Delta L \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

όπου ΔL και ΔD η επαγόμενη άντωση και μείωση στην οπισθέλκουσα αντίστοιχα.

Στην εικόνα 5.8 φαίνεται η μεταβολή στη γωνία προσβολής α , στην άντωση και στην οπισθέλκουσα στην πτέρυγα του ακόλουθου λόγω της αεροδυναμικής του αλληλεπίδρασης με τον αρχηγό.

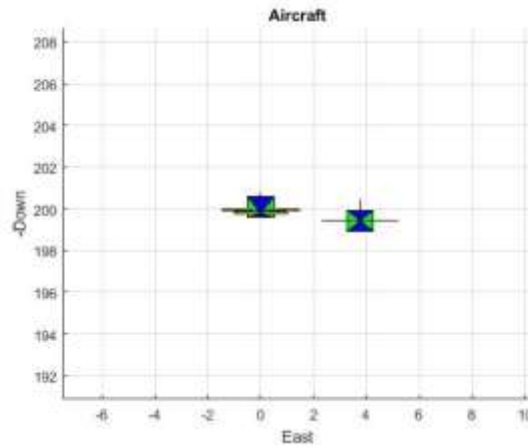


Εικόνα 5.8 Μεταβολή γωνίας προσβολής, άντωσης και οπισθέλκουσας (εικόνα από [Zang et al, 2016]).

Τα επόμενα δύο μπλοκ της εικόνας B.3 καθώς κινούμαστε προς τα αριστερά είναι τα μοντέλα των δύο αεροσκαφών, του αρχηγού και του ακόλουθου, που περιγράψαμε πιο πάνω. Τέλος το ακριανό αριστερό μπλοκ είναι ο ελεγκτής του σχηματισμού που δέχεται τη θέση και την ταχύτητα των δύο αεροσκαφών και παράγει τις απαραίτητες εντολές για τη διατήρηση του ακόλουθου σε σχηματισμό με τον αρχηγό στο επιθυμητό σημείο, το οποίο λαμβάνει από το σύστημα ESC.

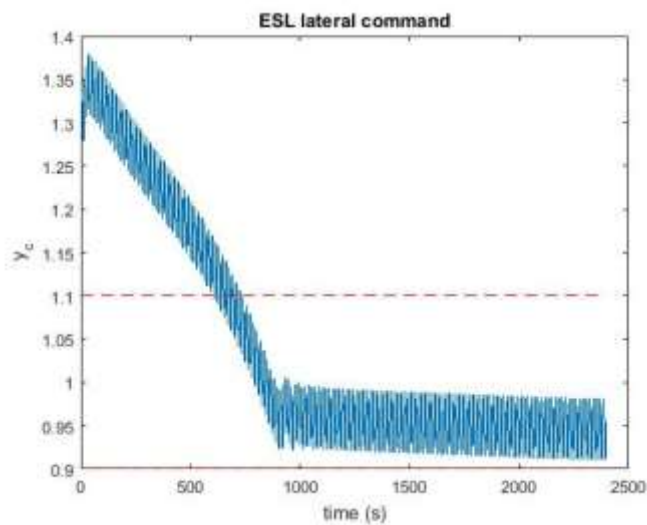
5.6 Αποτελέσματα.

Στην εικόνα 5.9 φαίνεται η αρχική θέση που έχουν τα δύο αεροσκάφη. Ο ακόλουθος ουσιαστικά βρίσκεται ήδη σε σχηματισμό με τον αρχηγό, ωστόσο μέσω του συστήματος ESC επιθυμούμε σταδιακά να προσεγγίζει το επιθυμητό σημείο με συντεταγμένες $y/b = 1$ και $z/b = 0$.

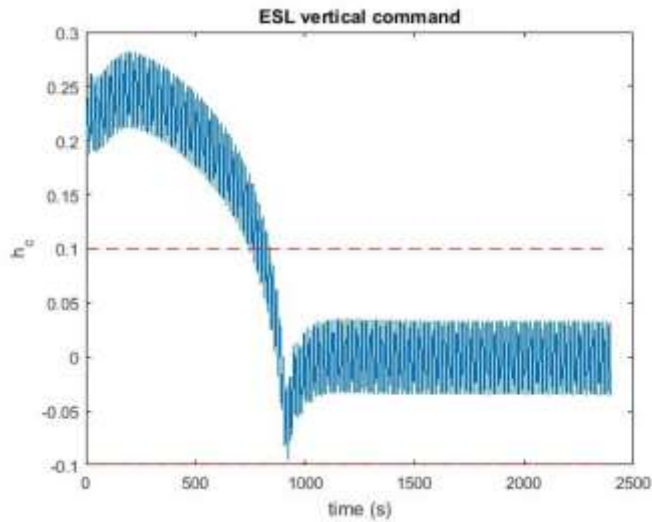


Εικόνα 5.9 Η αρχική θέση των δύο αεροσκαφών.

Ο αλγόριθμος ESC εντόπισε επιτυχώς το ελάχιστο της μη γραμμικής συνάρτησης της επαγόμενης άντωσης, μετά από χρόνο ίσο περίπου με $800\text{ s} = 13,3\text{ min}$. Οι κόκκινες γραμμές αναπαριστούν τα όρια του επιθυμητού σημείου που σύμφωνα με τη αναφορά [Zhang, Liu, 2017] επιλέξαμε να είναι της τάξης του 10% του μήκους της πτέρυγας b . Όπως βλέπουμε η εκτίμηση της θέσης του επιθυμητού σημείου δεν βγαίνει εκτός ορίων. Η πορεία σύγκλισης του αλγορίθμου φαίνεται στις εικόνες 5.10 και 5.11.

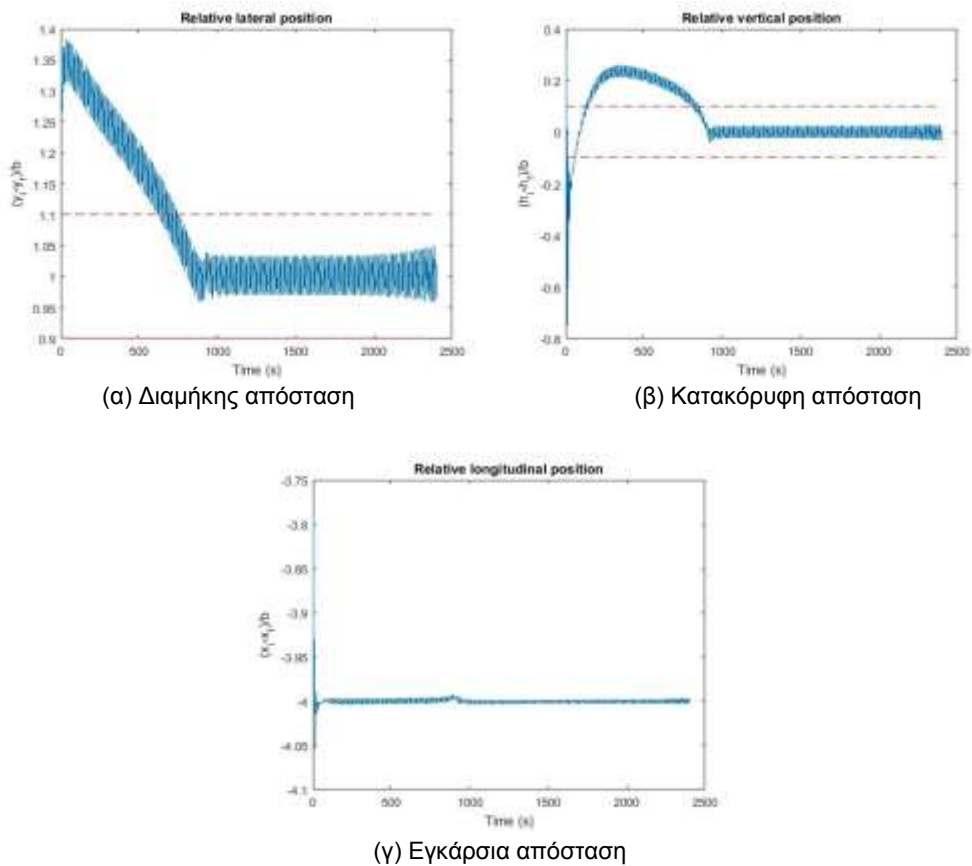


Εικόνα 5.10 Η σύγκλιση του αλγορίθμου ESC κατά τη μεταβλητή της κανονικοποιημένης εγκάρσιας απόστασης.



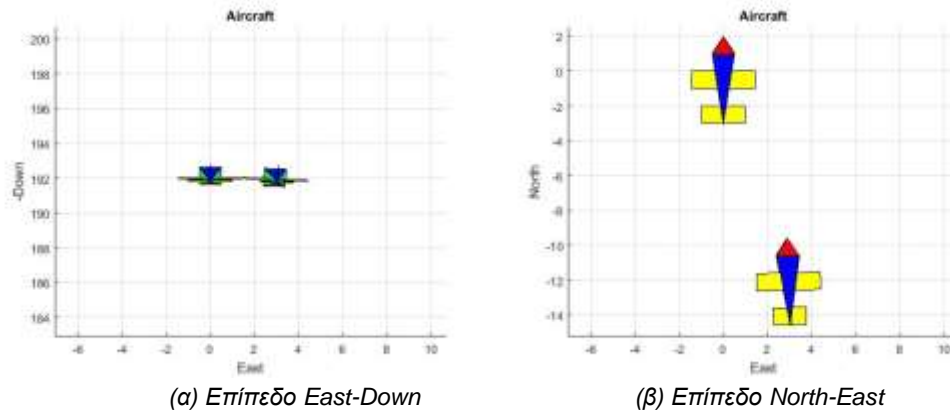
Εικόνα 5.11 Η σύγκλιση του αλγορίθμου ESC κατά τη μεταβλητή της κανονικοποιημένης κατακόρυφης απόστασης.

Η επιτυχής σύγκλιση του αλγορίθμου επιβεβαιώνεται και από τις γραφικές παραστάσεις της μετρούμενης εγκάρσια, κατακόρυφης και διαμήκου απόστασης μεταξύ των αεροσκαφών, όπως φαίνεται στην εικόνα 5.12. Με κόκκινες γραμμές, όπως και προηγουμένως είναι σημειωμένα τα όρια $\pm 10\%$ του επιθυμητού σημείου.



Εικόνα 5.12 Μετρούμενη απόσταση μεταξύ των αεροσκαφών.

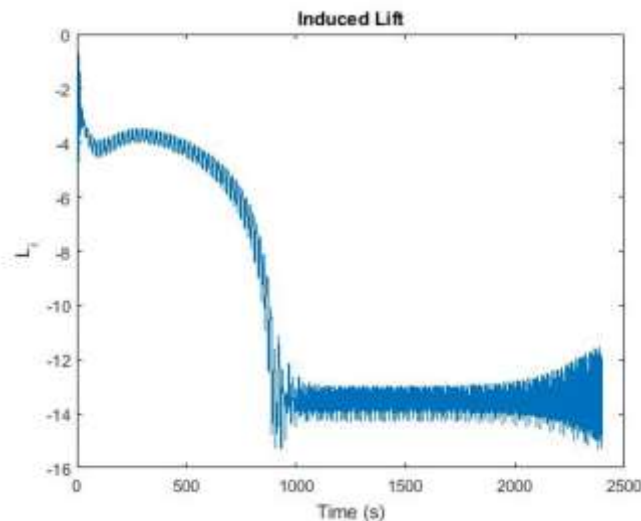
Στην εικόνα 5.13 φαίνεται η τελική θέση των αεροσκαφών, όπου βλέπουμε ότι πετούν επιτυχώς σε σχηματισμό κοντά στο επιθυμητό σημείο $y/b = 1$ και $z/b = 0$, δηλαδή οι άκρες των πτερυγών τους βρίσκονται σχεδόν στην ίδια ευθεία.



Εικόνα 5.13 Η τελική θέση των δύο αεροσκαφών.

Παρατηρούμε ότι στην τελική θέση τα αεροσκάφη ίπτανται σε ύψος 192 m . Αυτό πιθανώς οφείλεται στην αλληλεπίδραση του ανέμου με τη δυναμική των αεροσκαφών.

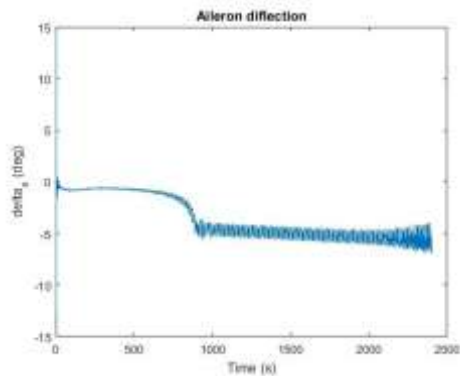
Η μετρούμενη τιμή της επαγόμενης άντωσης φαίνεται στην εικόνα 5.14. Βλέπουμε ότι το ελάχιστο, με βάση την εικόνα 5.14 έχει όντως εντοπιστεί. Η ταλαντωτική συμπεριφορά οφείλεται στο ότι το αεροσκάφος λόγω του σήματος διέγερσης του ESC δεν μένει ποτέ ακριβώς επί του επιθυμητού σημείου.



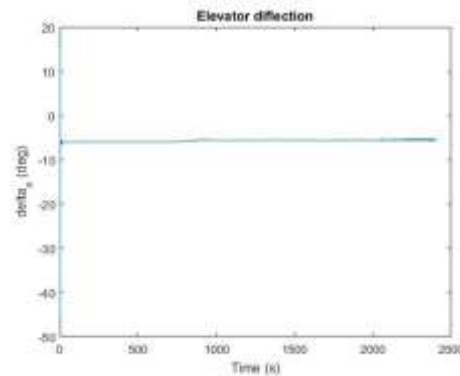
Εικόνα 5.14 Μετρούμενη τιμή επαγόμενης άντωσης.

Η επαγόμενη διαμήκης ροπή αντισταθμίζεται επιτυχώς από τις επιφάνειες ελέγχου του αεροσκάφους. Στην εικόνα 5.15 φαίνεται η τιμή της κλίσης των επιφανειών ελέγχου. Όπως βλέπουμε οι επιφάνειες ελέγχου διατοιχισμού, αποκτούν κλίση περί

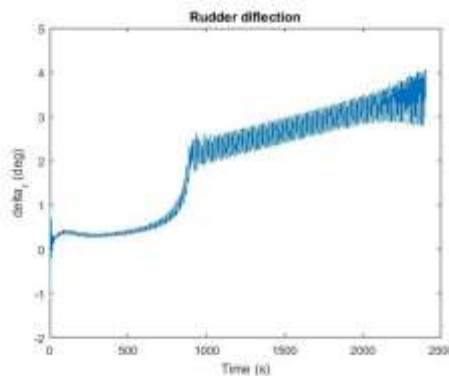
τις -5° για να εξουδετερώσουν την επαγόμενη διαμήκη ροπή. Το πηδάλιο του αεροσκάφους αποκτά επίσης κλίση περί τις 3° .



(α) Επιφάνειες ελέγχου διατοιχισμού



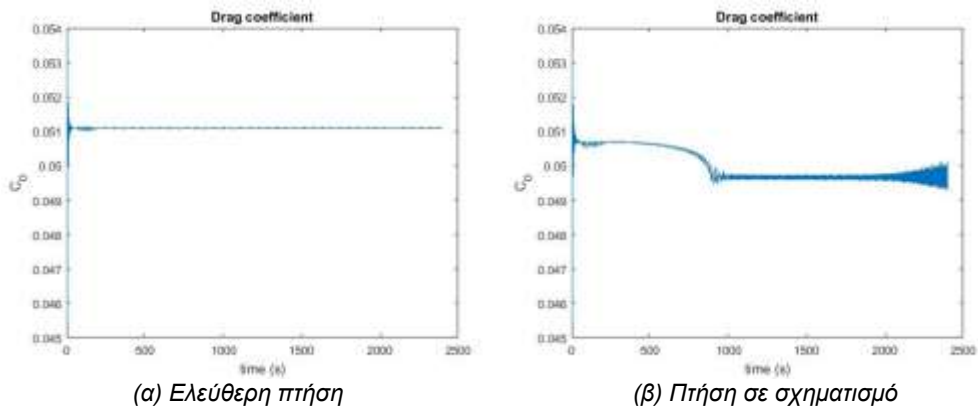
(β) Επιφάνειες ελέγχου ανόδου-καθόδου



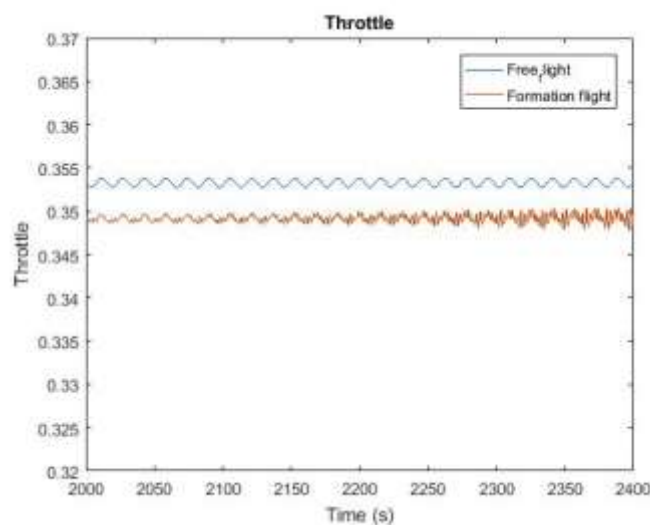
(γ) Επιφάνεια ελέγχου εκτροπής (πηδάλιο)

Εικόνα 5.15 Θέση επιφανειών ελέγχου.

Από τα ευεργετικά αποτελέσματα της πτήσης σε σχηματισμό, στάθηκε δυνατό να παρατηρήσουμε μια μικρή μείωση στο συντελεστή οπισθέλκουσας της τάξης του 2,8% τον οποίο υπολογίσαμε από την εξίσωση 2.32. Αντίστοιχα για την εντολή του κινητήρα (throttle) παρατηρήθηκε μια μικρή μείωση της τάξης του 1,38%. Τα θεωρητικώς αναμενόμενο αποτελέσματα είναι της τάξης του 10 – 20%. Στις εικόνες 5.16 και 5.17 φαίνεται η τιμή του συντελεστή οπισθέλκουσας, καθώς και η εντολή του κινητήρα με τον ακόλουθο σε ελεύθερη πτήση καθώς και σε πτήση σε σχηματισμό με το αρχηγό. Παρατηρούμε ότι τόσο ο συντελεστής οπισθέλκουσας όσο και η εντολή του κινητήρα ελαττώνεται περίπου κατά τη χρονική στιγμή $t = 800\text{ s}$, όταν δηλαδή ο αλγόριθμος ESC έχει συγκλίνει.



Εικόνα 5.16 Ο συντελεστής οπισθέλκουσας C_D .



Εικόνα 5.17 Η εντολή του κινητήρα.

Στο σημείο αυτό πρέπει να πούμε ότι λόγω των αποδεδειγμένων ευεργετικών αποτελεσμάτων της πτήσης σε σχηματισμό, η απόκλιση από τα αναμενόμενα θεωρητικά αποτελέσματα οφείλεται πιθανότατα σε σφάλμα κατά τη διαδικασία της μοντελοποίησης ή στον υπολογισμό των επαγόμενων μεγεθών, ή στην απλότητα του μοντέλου μας ένεκα της πολυπλοκότητας του φαινομένου.

Εν κατακλείδι ωστόσο μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα ESC λειτούργησε επιτυχώς και εντόπισε το ελάχιστο της γραμμικής συνάρτησης της επαγόμενης άντωσης. Ο ελεγκτής του σχηματισμού οδήγούσε επιτυχώς τον ακόλουθο για να ίπταται σε σχηματισμό με τον αρχηγό στο επιθυμητό σημείο. Παρατηρήθηκε ότι η επαγόμενη διαμήκης ροπή εξουδετερώνεται επιτυχώς από τις επιφάνειες ελέγχου του ακόλουθου και υπάρχει μια μικρή μείωση στο συντελεστή οπισθέλκουσας και στην εντολή του κινητήρα.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα –Προτάσεις για μελλοντική εργασία

Το βασικό συμπέρασμα που εξαγάγουμε από την προσομοίωση είναι ότι ο αλγόριθμος ESC σχεδιάστηκε αποτελεσματικά. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι εντόπισε επιτυχώς το ελάχιστο της μη γραμμικής συνάρτησης της επαγόμενης άντωσης. Επιπροσθέτως ο ελεγκτής του σχηματισμού και ο αυτόματος πιλότος του ακόλουθου συνεργάστηκαν αποτελεσματικά μεταξύ τους προκειμένου ο ακόλουθος να παραμείνει σε σχηματισμό με τον αρχηγό στην επιθυμητή διαμήκη απόσταση και τις επιθυμητές συντεταγμένες του χώρου. Σχετικά με τα ευεργετικά αποτελέσματα της πτήσης σε σχηματισμό παρατηρήθηκε μια μείωση της τάξης του 2,8% στην τιμή του συντελεστή οπισθέλκουσας και μείωση στην εντολή του κινητήρα της του 1,38%, με τα αναμενόμενα θεωρητικά αποτελέσματα να είναι της τάξης του 10 – 20%.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι η συγκεκριμένη εργασία δεν αποτελεί σε καμία περίπτωση μια ενδελεχή εξέταση του θέματος. Δόθηκε βάση κυρίως στην χρήση των πλέον βασικών μοντέλων προκειμένου να κατασκευαστεί ένα βασικό μοντέλο προσομοίωσης. Αυτό σημαίνει πως υπάρχουν πτυχές του θέματος που χρήζουν περαιτέρω μελέτης και βελτίωσης και τις οποίες θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τη συνέχεια.

Αρχικά θα μπορούσε να βελτιωθεί το ίδιο το μοντέλο της προσομοίωσης ώστε να υπολογίζει ποιο σωστά και με καλύτερη ακρίβεια τα επαγόμενα αεροδυναμικά μεγέθη. Η σωστή μοντελοποίηση του φαινομένου είναι αρκετά δύσκολο εγχείρημα. Ωστόσο μέσω βελτιώσεων και διορθώσεων, θα καταστεί δυνατό να παρατηρηθούν αποτελέσματα που είναι ποιο κοντά στα θεωρητικώς αναμενόμενα.

Θα μπορούσε επίσης το μοντέλο προσομοίωσης να τροποποιηθεί καταλλήλως έτσι ώστε στις εξισώσεις δυναμικής του αεροσκάφους να μην χρησιμοποιείται το πραγματικό διάνυσμα κατάστασης, αλλά το εκτιμώμενο από τα κατωπερατά φίλτρα και το φίλτρο Kalman που περιγράφονται στις αντίστοιχες εργασίες της αναφοράς [Beard, McLain, 2012]. Αυτό θα κάνει την προσομοίωση ποιο ρεαλιστική.

Μία ακόμη πτυχή που θα μπορούσε να κάνει ποιο ρεαλιστική την προσομοίωση είναι η εισαγωγή ποιο πολύπλοκων διαταραχών αέρα στο σύστημα των δύο αεροσκαφών, καθώς εμείς υλοποιήσαμε την απλή περίπτωση του σταθερού ανόμου κατά τη βόρεια κατεύθυνση.

Επίσης θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ένα ποιο ακριβές μοντέλο για την αεροδυναμική αλληλεπίδρασης των δύο αεροσκαφών, το οποίο να βασίζεται σε ποιο ακριβή θεωρία σε σχέση με την κλασική Θεωρία Φέρουσας Γραμμής του Prandtl που χρησιμοποιήσαμε στη συγκεκριμένη εργασία. Έχουν εκπονηθεί σχετικές εργασίες όπως λόγω χάρη αυτή των [Brodecki, Subbarao, 2013].

Επιπροσθέτως θα μπορούσε να υλοποιηθεί ο βελτιωμένος αλγόριθμος ESC ο οποίος κάνει εκτίμηση του διανύσματος κλίσεως της μη γραμμικής συνάρτησης της επαγόμενης άντωσης με χρήση του EKF. Με τον τρόπο αυτό ο αλγόριθμος ESC θα συγκλίνει ποιο γρήγορα και έτσι ο ακόλουθος θα τοποθετείται στο επιθυμητό σημείο πίσω από τον αρχηγό σε λιγότερο χρόνο.

Βελτιώσεως χρήσει επίσης και ο ελεγκτής του σχηματισμού καθώς και ο αυτόματος πιλότος του ακόλουθου. Και τα δύο αυτά συστήματα υλοποιήθηκαν με την μέθοδο PID. Βελτιωμένη απόδοση στο μοντέλο θα μπορούσε να επιτευχθεί εάν χρησιμοποιούνταν κάποια άλλη μη γραμμική τεχνική ελέγχου.

Βιβλιογραφία

- [1] Ariyur K. B., Krstic M., "**Analysis and Design of Multivariable Extremum Seeking**", in Proceedings of the American Control Conference, Anchorage, May 8-10,2002.
- [2] Ariyur K. B., Krstic M., "**Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control**", Wiley, 2003.
- [3] Beard R. W., McLain T. W., "**Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice**", Princeton, 2012.
- [4] Bertin J. J., "**Aerodynamics for engineers**", Prentice Hall, 2002.
- [5] Beukenberg M., Hummel D., "**Aerodynamics, Performance and Control of Airplanes in Formation Flight**", In Proceedings of the 17th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences. ICAS-90-5.9.3, September 9-14, 1990.
- [6] Binetti P., Ariyur K. B., Krstic M., Bernelli F., "**Formation Flight Optimization Using Extremum Seeking Feedback**", in Journal of Guidance Control and Dynamics, Vol 26, No. 1, January-February 2003.
- [7] Brodecki M., Subbarao K., "**Autonomous Formation Flight Control System Using In-Flight Sweet Spot Estimation**", in Journal of Guidance Control and Dynamics, January 2013.
- [8] Chicka D. F., Speyer J. L., Park C. G., "**Peak-seeking Control with Application to Formation Flight**", in Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, December 1999.
- [9] Chicka D. F., Speyer J. L., Park C. G., "**Peak-seeking Control with Application to Formation Flight**", in Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 29, No. 5, September-October 2006.
- [10] Cooper J R, Rothhar P M, "**Dynamics and Control of In-Flight Wing Tip Docking**", in Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2017.
- [11] Gelbert G., Moeck J P., Paschereit C. O., King R., "**Advanced algorithms for gradient estimation in one- and two- parameter extremum seeking controllers**", in Journal of Process Control 22, pp. 700-709, 2012.
- [12] Kalman R. E., "**A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems**", in Journal of Basic Engineering, 1960.
- [13] Khalil H. K., "**Nonlinear systems**", Prentice Hall, 1996.

- [14] Krstic M., Wang H. H., "**Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems**", in Automatica 36, pp. 595-601, 2000.
- [15] Patcher M, D' Azzo J, J, Proud A, W, "**Tight Formation Flight Control**", in Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 24, No. 2, March-April 2001.
- [16] Rhudy M. B., Salguero R. A., Hoappa K., "**A Kalman Filtering Tutorial for Undergraduate students**", in International Journal of Computer Science and Engineering Survey, Vol 8, No. 1, February 2017.
- [17] Ryan J.J., "**A Method of Extremum Seeking Control Based on a Time Varying Kalman Filter and its Application to Formation Flight**", PhD Thesis, Faculty of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California, Los Angeles, USA, 2012.
- [18] Saban D., "**Wake Vortex Modelling and Simulation for Air Vehicles in Close Formation Flight**", PhD Thesis, Department of Aerospace Sciences, School of Engineering, Cranfield University, UK. 2010.
- [19] Tan Y., Dragan Nestic, Iven Mareels, "**On the choice of dither in extremum seeking systems: A case study**", in Automatica, 44, pp. 1446-1450, 2008.
- [20] Tan Y., Moase W. H., Manzie C., Nestic D., Mareel I.M.Y, "**Extremum Seeking from 1992 to 2010**", in Proceedings of the 29th Chinese Control Conference, China, July 29-31, 2010.
- [21] Vachon M. J., Ronald J. R., Walsh K. R., Ennix K., "**F/A-18 Aircraft Performance Benefits Measured during the Aytonomouw Formation Flight Project**", AIAA paper 2002-4491, 2002.
- [22] Zang Q., Hugh H. T. Liu., "**Robust design of Close Formation Flight Control via Uncertainty and Disturbance Estimator**", in AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, San Diego, California, USA, 4-8 January 2016.
- [23] Zang Q., Hugh H. T. Liu, "**Integrator-Augmented Robust Adaptive Control Design for Close Formation Flight**", in AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Grapevine, Texas, 9-13 January 2017.
- [24] Zang Q., Hugh H. T. Liu, "**Aerodynamics Modeling and Analysis of Close Formation Flight**", in Journal of Aircraft, April 2017.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Φίλτρο Kalman.

Το φίλτρο Kalman αποτελεί έναν πολύ ισχυρό μαθηματικό αλγόριθμο, για την εξαγωγή της καλύτερης δυνατής εκτίμησης της τιμής μιας μεταβλητής, παρουσία θορύβου. Προτάθηκε από τον ομώνυμο συγγραφέα, Rudolf Kalman, το 1960 [Kalman, 1960] και έκτοτε έχει χρησιμοποιηθεί σε πληθώρα εφαρμογών, μεταξύ των άλλων και για τα διαστημικά ταξίδια. Μία εξαιρετική παρουσίαση της μεθόδου μπορεί να βρει κανείς στις αναφορές [Beard, McLain 2012] και [Rhudy et al., 2017] με βάση τις οποίες θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο.

Η εκτίμηση των μεταβλητών κατάστασης σε ένα σύστημα δεν είναι πάντοτε εφικτή με τη χρήση κάποιου αισθητήρα. Αυτό είτε διότι ενδεχομένως να μην υπάρχει κατάλληλος αισθητήρας για μέτρηση, είτε διότι οι συνθήκες μέτρησης είναι τέτοιες ώστε να μην είναι εφικτή μια απευθείας μέτρηση. Ως παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε τη μέτρηση της θερμοκρασίας ενός ακροφυσίου κάποιου πυραύλου, μια πληροφορία που θα μπορούσε να ρυθμίσει την κατανάλωση καυσίμου. Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί δυναμικά συστήματα τα οποία κάνουν **εκτίμηση** της τιμής των μεταβλητών κατάστασης και ονομάζονται **παρατηρητές κατάστασης (state observers)**.

Έστω ότι έχουμε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (A.1)$$

$$y = Cx \quad (A.2)$$

όπου x το διάνυσμα κατάστασης και A, B, C οι πίνακες δυναμικής του συστήματος. Το σύστημα του παρατηρητή κατάστασης θα προβεί στην εξαγωγή μιας εκτίμησης του διανύσματος κατάστασης, την \hat{x} και η έξοδος του θα είναι το άθροισμα δύο όρων. Αυτοί είναι η έξοδος με βάση το μοντέλο του συστήματος και ένας όρος διόρθωσης με βάση τις λαμβανόμενες από τους αισθητήρες μετρήσεις, πολλαπλασιαζόμενες με έναν παράγοντα L :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \quad (A.3)$$

Ορίζοντας το σφάλμα παρακολούθησης ως $\tilde{x} = x - \hat{x}$ προκύπτει ότι:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} \quad (A.4)$$

αυτό σημαίνει ότι το σφάλμα παρακολούθησης \tilde{x} θα τείνει εκθετικώς στο 0, εάν ο παράγοντας L επιλεγεί έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του πίνακα $A - LC$ να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Ο παράγοντας L ονομάζεται **κέρδος παρατηρητή κατάστασης (observer gain)** [Beard, McLain 2012].

Το φίλτρο Kalman αποτελεί ουσιαστικά μια μεθοδολογία για την επιλογή της βέλτιστης τιμής του κέρδους L . Η λειτουργία του χωρίζεται σε δύο φάσεις, την **πρόβλεψη** της τιμής του διανύσματος κατάστασης και την **διόρθωση** της τιμής αυτής με βάση τις λαμβανόμενες τιμές από τους αισθητήρες. Με άλλα λόγια, το φίλτρο χρησιμοποιώντας τη δυναμική του συστήματος, προβλέπει ποια είναι η τρέχουσα κατάσταση και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις μετρούμενες από τους αισθητήρες τιμές, τις συγκρίνει με τις προβλεπόμενες μετρούμενες τιμές και διορθώνει την εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης [Rhudy et al.,2017].

Λόγω του ότι οι αισθητήρες ενός συστήματος δειγματοληπτούνται ανα τακτά χρονικά διαστήματα, οι εξισώσεις A.1 και A.2 μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \xi \quad (A.5)$$

$$y[n] = Cx[n] + \eta[n] \quad (A.6)$$

όπου n η χρονική στιγμή της δειγματοληψίας, $y[n] = y(t_n)$ το n -ιοστό δείγμα της εξόδου του συστήματος και $x[n]$ το n -ιοστό δείγμα του διανύσματος κατάστασης. Οι μεταβλητές ξ και η είναι δύο τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0 και διασπορά Q και R αντίστοιχα. Ο όρος Q καλείται **θόρυβος διαδικασίας (process noise)** και ο όρος R **θόρυβος μέτρησης**. Ο πρώτος είναι γενικά άγνωστος και αποτελεί μια παράμετρο του συστήματος που μπορεί να ρυθμιστεί για την καλύτερη απόδοση του φίλτρου. ο δεύτερος μπορεί να εκτιμηθεί από τα δεδομένα των αισθητήρων του συστήματος [Beard, McLain 2012].

Η επιλογή των ανωτέρω παραμέτρων επηρεάζει την απόδοση του φίλτρου. Μεγάλη τιμή του Q σημαίνει ότι υπάρχει μεγάλη αβεβαιότητα στο μοντέλο του συστήματος και επομένως το φίλτρο θα προβεί σε εκτίμηση βασισμένο περισσότερο στις μετρήσεις των αισθητήρων. Αντίστοιχα μεγάλη τιμή του R σημαίνει μεγάλη αβεβαιότητα στη μέτρηση, το οποίο θα κάνει το φίλτρο να βασιστεί περισσότερο στην εκτίμηση με βάση τη δυναμική του μοντέλου και να διορθώνει λιγότερο με βάση τις μετρούμενες από τους αισθητήρες τιμές [Rhudy et al.,2017].

Εφόσον η δειγματοληψία γίνεται σε διακριτό χρόνο, η δυναμική του εκτιμώμενου διανύσματος κατάστασης και η **ενημέρωση (update)** της τιμής του δίνονται από τις σχέσεις:

$$\hat{\dot{x}} = A\hat{x} + Bu \quad (A.7)$$

$$\hat{x}^+ = \hat{x}^- + L(y(t_n) - C\hat{x}^-) \quad (A.8)$$

όπου \hat{x}^+ και \hat{x}^- η νέα και η προηγούμενη τιμή του εκτιμώμενου διανύσματος κατάστασης. Ορίζοντας το σφάλμα παρακολούθησης $\tilde{x} = x - \hat{x}$, ο στόχος είναι η διασπορά P του σφάλματος αυτού να είναι όσο πιο μικρή γίνεται. Αυτό όπως δείχνεται στην αναφορά επιτυγχάνεται με κατάλληλη επιλογή του κέρδους L . Η ανάλυση με βάση την οποία προκύπτουν οι εξισώσεις που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια βρίσκεται στην αναφορά [Beard, McLain 2012].

Κατά τη φάση της πρόβλεψης, δηλαδή μεταξύ δύο διαδοχικών μετρήσεων, η διασπορά P μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q \quad (A.9)$$

Τη στιγμή που θα ληφθεί μια μέτρηση από κάποιον αισθητήρα, δηλαδή στη φάση της διόρθωσης, υπολογίζεται αρχικά η τιμή του κέρδους L με την εξίσωση:

$$L = P^- C^T (R + CP^- C^T)^{-1} \quad (A.10)$$

όπου P^- η τιμή της διασποράς τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν τη μέτρηση και στη συνέχεια υπολογίζεται η νέα τιμή της διασποράς P^+ ως εξής:

$$P^+ = (I - LC)P^- \quad (A.11)$$

Έτσι με βάση τα ανωτέρω, η νέα τιμή του εκτιμώμενου διανύσματος κατάστασης, που είναι και η έξοδος του φίλτρου Kalman, προκύπτει από τη σχέση:

$$\hat{x}^+ = \hat{x}^- + L(y(t_n) - C\hat{x}^-) \quad (A.12)$$

όπου \hat{x}^- και \hat{x}^+ η προηγούμενη και η νέα τιμή του διανύσματος κατάστασης.

Στις περισσότερες εφαρμογές ωστόσο, δυναμική του συστήματος περιγράφεται από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες κατά αντιστοιχία με τις A.5 και A.6 γράφονται ως:

$$\dot{x} = f(x, u) + \xi \quad (A.13)$$

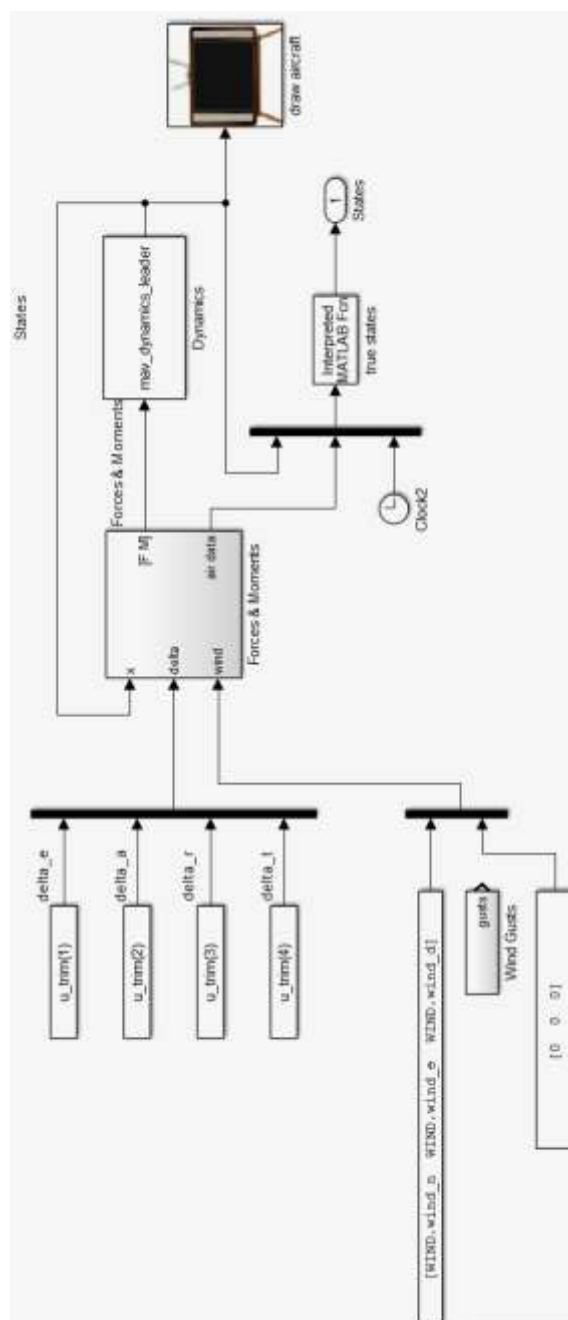
$$y[n] = h(x[n], u[n]) + \eta[n] \quad (A.14)$$

Σε αυτή την περίπτωση στις εξισώσεις A.9 έως A.12 χρησιμοποιούμε την Ιακωβιανή της f ως τον πίνακα A και την Ιακωβιανή της h ως τον πίνακα C . Η τελευταία δε αυτή περίπτωση είναι αυτό που αποκαλείται **Εκτεταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter)** [Beard, McLain 2012], [Rhudy et al., 2017].

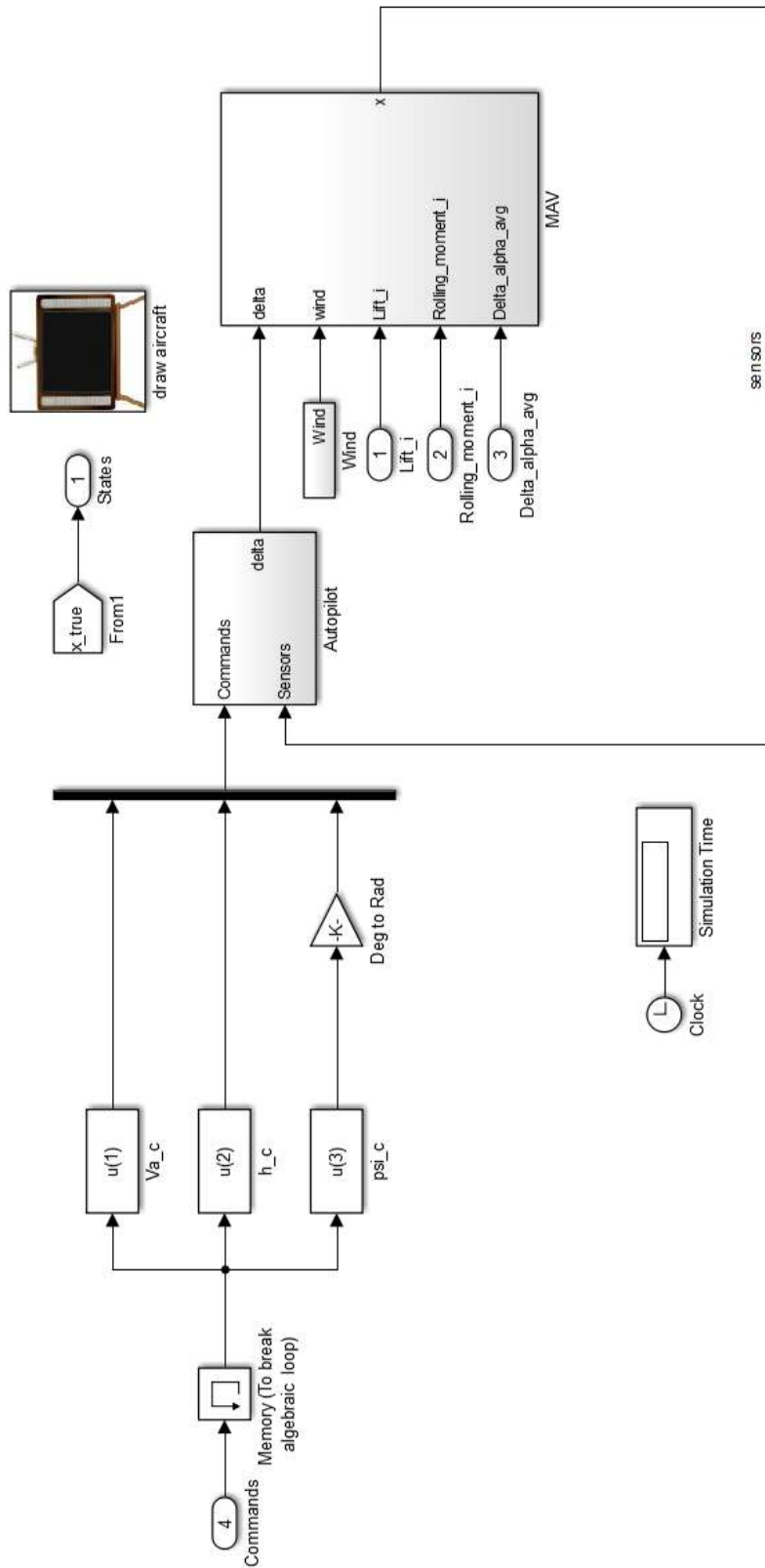
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Μοντέλα προσομοίωσης.

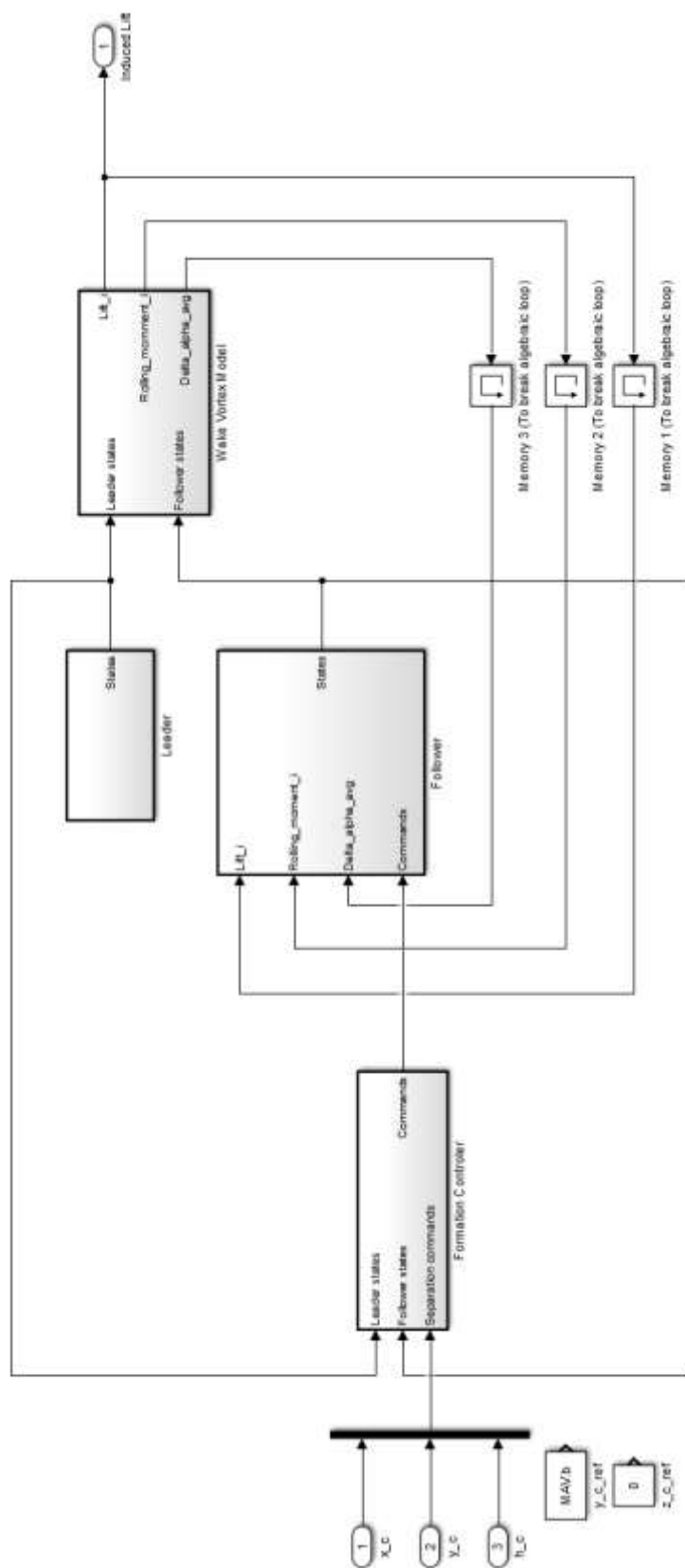
Στις εικόνες που ακολουθούν φαίνεται η αρχιτεκτονική των μοντέλων MATLAB®/Simulink του αρχηγού του σχηματισμού (εικόνα Β.1), του ακόλουθου του σχηματισμού (εικόνα Β.2) και του μπλόκ *Leader Follower Formation* (εικόνα Β.3).



Εικόνα Β.1 Το μοντέλο προσομοίωσης του αρχηγού του σχηματισμού.



Εικόνα Β.2 Το μοντέλο προσομοίωσης του ακόλουθου του σχηματισμού.



Εικόνα Β.3 Το μοντέλο προσομοίωσης του σχηματισμού των δύο αεροσκαφών.