



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Αεροδυναμικής

Επέκταση της μεθόδου στοιχείων στροβιλότητας σε
συμπιεστές ροες

Διπλωματική Εργασία

Συνοδινός Αντώνιος-Λυκούργος

Επιβλέποντες: Σπυρίδων Βουτσινάς , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2020

Ευχαριστίες

Ξεκινώντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Σπύρο Βουτσίνα για την διαρκής και υπομονετική καθοδήγηση και την διάρκεια της εργασίας. Οι επαναλαμβανόμενες συζητήσεις και οι προβληματισμοί κατά την διάρκεια της εκπόνησης, βοήθησαν στην προσέγγιση του επιστημονικού τρόπου σκέψης. Έπειτα ευχαριστώ ιδιαίτερας τον υποψηφίο διδάκτορα Θεολόγο Ανδρονικό για τις ατελείωτες ώρες συζητήσεων. Η βοήθεια του ήταν καθοριστική για την εκπόνηση της εργασίας. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω και τον κ.Γιώργο Παπαδάκη για την πολύτιμη βοήθεια του. Δεν θα μπορούσα βέβαια να παραλείψω και τα παιδιά του εργαστηρίου τον Γιάννη, τον Λεωνίδα, τον Κώστα, τα οποία ευχαριστώ ιδιαίτερα για τον ευχάριστο κλίμα. Κλείνοντας θα ήθελα να ευχαριστήσω εγκάρδια την οικογένεια μου, για την διαρκή τους στήριξη τους σε όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών.

Περίληψη

Η μελέτη της συμπίεστικότητας στην αεροδυναμική γίνεται αναγκαία για αριθμούς Mach μεγαλύτερους από 0.4. Στην παρούσα εργασία θα γίνει μελέτη για υποηχητικές ροές, όπου δεν δημιουργείται κύμα κρούσεως και η ροή είναι υποηχητική παντού. Η παραπάνω περιοχή βρίσκει εφαρμογή σε ροές γύρω από αεροπλάνα καθώς και ελικόπτερα, όπου η ανάπτυξη κυμάτων κρούσης είναι ανεπιθύμητη. Με βάση τα παραπάνω, σε συνδιασμό με την υπόθεση της ατριβούς ροής οδηγεί στην θεώρηση ισεντροπικής ροής παντού στο χωρίο. Η επίλυση του προβλήματος της ροής βασίζεται στην μέθοδο στοιχείων στροβιλότητας η οποία ανήκει στην κατηγορία των μη-πλεγματικών μεθόδων. Η μελέτη βασιστήκε σε έναν ήδη υπάρχων επιλύτη, τον GENUVP, ο οποίος επιλύει την μη-μόνιμη, μη-συνεκτική ροή και ασυμπίεστη ροή γύρω από τριδιάστατα ανωστικά σώματα με πάχος. Η αναπαράσταση των σωμάτων γίνεται με την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων ενώ η αναπαράσταση του πεδίου στροβιλότητας γίνεται με την μέθοδο στοιχείων στροβιλότητας. Επίσης γίνεται μείωση του κόστους με χρήση Fast Poisson επιλυτών και συγκεκριμένα του Particle Mesh για την επιτάχυνση των υπολογισμών. Επόμενος σκοπός της εργασίας αποτελεί η ανάπτυξη του επιλύτη ώστε να μπορεί να διαχειριστεί συμπίεστες υποηχητικές ροές. Η επίδραση της συμπίεστικότητας λαμβάνεται υπόψη μέσω του βαθμωτού δυναμικού του αστρόβιλου τμήματος της ροής. Συγκεκριμένα επιλύεται μια Eulerian εξίσωση η οποία έχει την μορφή της διαφορικής εξίσωσης Hamilton-Jacobi. Ωστόσο κατά την ανάπτυξη του επιλύτη προκύπτουν αρκετά ζητήματα προς επίλυση, τα οποία πηγάζουν από το γεγονός ότι το πλέγμα του PM είναι ορθοκανονικό και δεν σέβεται την γεωμετρία του συνόρου. Το βασικό πρόβλημα που παρουσιάζεται είναι ο προσδιορισμός της μεταβολής του όγκου στο σύνορο. Το μεταβατικό φαινόμενο της ροής αποτελείται από την διάδοση ακουστικών κυμάτων, για τα οποία χρησιμοποιείται κατάλληλη συνάρτηση απόσβεσης λόγω της ανάκλασης στα εξωτερικά όρια του υπολογιστικού χωρίου. Τα φορτία στις επιφάνειες υπολογίζονται από την εξίσωση Bernoulli σε συνδιασμό με την σχέση της ισεντροπικής ροής. Η σύγκριση με τα αντίστοιχα φορτία που προκύπτουν από την γραμμική διόρθωση δείχνει οι μεταβολές βρίσκονται στην σωστή κατεύθυνση, παρόλαυτα όσο αυξάνεται ο αριθμός Mach αυξάνεται και η απόκλιση σε σχέση με την θεωρητική διόρθωση. Για βελτίωση της ακρίβειας προτείνεται αύξηση της ακρίβειας στην περιοχή του στερεού συνόρου. Συνοψίζοντας ο επιλύτης είναι σε θέση να διαχειριστεί συμπίεστες ροές με χαμηλό κόστος, που αποτελεί τον βασικό ζητούμενο της διαδικασίας.

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Περιεχόμενα	ii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Υπολογιστικές μέθοδοι στη Ρευστομηχανική	1
1.1.1 Πλεγματικές Μέθοδοι	2
1.1.2 Μη-Πλεγματικές Μέθοδοι	2
1.2 Η συμπίεστικότητα στην αεροδυναμική	3
1.3 Σκοπός της εργασίας	3
1.3.1 Σχετική Βιβλιογραφία	4
1.3.2 Διατύπωση του προβλήματος	5
1.3.3 Ο Γενικευρ επιλύτης	5
1.4 Διάρθρωση της εργασίας	6
2 Θεωρητικό υπόβαθρο	7
2.0.1 Ολοκληρωτική αναπαράσταση του πεδίου ταχύτητας	9
2.0.2 Στροβιλή Θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας	11
2.0.3 Η Κινηματική Συνθήκη Μη-Εισχώρησης	13
2.0.4 Η δυναμική Συνθήκη Kutta-Joukowski	14
2.0.5 Διακριτοποίηση-Βαθμοί Ελευθερίας-Επίλυση	15
2.0.6 Υπολογισμός φορτίων	16
3 Ο Lagrangian Επιλύτης	19
3.1 Ορισμός 'συμπίεστών' στοιχείων στροβιλότητας	19

3.2	Lagrangian διατύπωση των εξισώσεων της ροής	21
3.3	Επιφανειακά Στοιχεία Στροβιλότητας	23
3.4	Particle Mesh	26
3.4.1	Συναρτήσεις Προβολής-Παρεμβολής	27
3.4.2	Η τεχνική του Remeshing	29
3.5	Υπόθεση Ισεντροπικής Ροής	30
3.5.1	Hamilton-Jacobi	31
3.6	Υπολογιστικό χωρίο	33
3.7	Ηχητικά κύματα-Απόσβεση	34
3.8	Υπολογισμός της Ψευδοπίεσης	35
3.9	Ο Lagrangian αλγόριθμος επίλυσης	36
4	Λεπτομέρειες της εφαρμογής	40
4.1	Βασικά ζητήματα και δυσκολίες	40
4.1.1	Πεδίο Ταχύτητας Particle Mesh	41
4.1.2	Υπολογισμός παραγώγων- Συναρτήσεις Παρεμβολής	44
4.2	Μέθοδοι και τεχνικές επίλυσης	45
4.2.1	Χρήση Bodyfitted-Particles	45
4.2.2	Τεχνικές υπολογισμού της μεταβολής του όγκου	47
4.2.3	Τεχνικές υπολογισμού της ενθαλπιας	48
4.2.4	Τεχνικές υπολογισμού των παραγώγων	48
4.3	Προσεγγίσεις του προβλήματος	49
4.3.1	Προσέγγιση στην λογική του Hopflow	49
4.3.2	Προσέγγιση με την χρήση της εξίσωσης Bernoulli	50
4.3.3	Προσέγγιση για λεπτή πτέρυγα	51
4.3.4	Προσέγγιση με την χρήση της εξίσωσης Hamilton-Jacobi	52
5	Αποτελέσματα	53
5.1	Η υπολογιστική διάταξη	53
5.2	Μη-μόνιμη - μόνιμη ροή	54

5.2.1	Μη-μόνιμη ροή	55
5.2.2	Μόνιμη ροή	58
5.3	Υπολογισμών των φορτίων	59
5.4	Σχολιασμός αποτελεσμάτων	69
6	Συμπεράσματα και μελλοντική έρευνα	73
6.1	Συμπεράσματα και μελλοντική έρευνα	73
6.1.1	Συμπεράσματα	73
6.1.2	Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	74
7	Παράρτημα	76
7.1	Διατύπωση των εξισώσεων της ροής	76
7.1.1	Εξίσωση Συνέχειας	76
7.1.2	Εξίσωση Ορμής	76
7.1.3	Εξίσωση της ενέργειας	80
7.1.4	Εξίσωση Bernoulli	82
	Βιβλιογραφία	84

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Υπολογιστικές μέθοδοι στη Ρευστομηχανική

Η Υπολογιστική Ρευστομηχανική είναι ένας ενεργός τομέας έρευνας που τις τελευταίες δεκαετίες χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο στην ανάλυση προβλημάτων από απλά αεροδυναμικά προβλήματα μέχρι αερο-ελαστικά προβλήματα πλήρους κλίμακας. Σε συνδυασμό με τη μεγάλη πρόοδο στην τεχνολογία των υπολογιστών μπορούν πλέον να γίνουν προσομοιώσεις ροών γύρω από πολύπλοκες διατάξεις με χρήση πλεγμάτων αποτελούμενα από πολλά εκατομμύρια κελιά. Οι υπολογιστικές μέθοδοι (CFD) μπορούν να διαχωριστούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες: οι μέθοδοι που βασίζονται στη χρήση υπολογιστικών πλεγμάτων και οι μέθοδοι που δεν χρησιμοποιούν πλέγματα. Στην τελευταία κατηγορία χρησιμοποιούνται στοιχεία που μεταφέρουν ποσότητες της ροής σε μια Lagrangian εκδοχή. Στις Eulerian μεθόδους, το υπολογιστικό πλέγμα αποτελεί το χωρίο επίλυσης ενώ το πεδίο ροής περιγράφεται από μεγέθη ορισμένα πάνω στο υπολογιστικό πλέγμα.[1]

1.1.1 Πλεγματικές Μέθοδοι

Οι Πλεγματικές ή αλλιώς Eulerian μέθοδοι υπολογιστικής ρευστομηχανικής αφορούν ένα αρκετά σημαντικό εργαλείο για την προσομοίωση αεροδυναμικών ροών. Οι εξισώσεις που περιγράφουν το πεδίο ροής επιλύονται σε υπολογιστικό πλέγμα, ενώ για την διακριτοποίηση των εξισώσεων χρησιμοποιούνται διάφοροι μέθοδοι όπως η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών, των Πεπερασμένων όγκων κ.α. Οι πλεγματικές αυτές μέθοδοι δίνουν την δυνατότητα λεπτομερούς αριθμητικής προσομοίωσης των συνεκτικών φαινομένων της ροής, ικανοποιώντας με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες την παρουσία του στερεού συνόρου[1].

1.1.2 Μη-Πλεγματικές Μέθοδοι

Η δεύτερη κατηγορία επιλυτών υπολογιστικής ρευστομηχανικής αφορά τις μη πλεγματικές ή σωματιδιακές ή αλλιώς Lagrangian μεθόδους. Αυτό το οποίο ξεχωρίζει στις τεχνικές αυτές είναι η απουσία του υπολογιστικού πλέγματος, έχουν εξόρισμού μηδενική αριθμητική διάχυση [1] και οι άπαιργο συνθήκες της ροής ικανοποιούνται ακριβώς[2]. Ανάλογα με τις ποσότητες που μεταφέρουν τα στοιχεία που προσομοιάζουν την ροή χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τις μεθόδους στοιχείων στροβιλότητας (Vortex Particle Methods)[2] και τις μεθόδους Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) [3, 4]. Στις μεν (SPH) τα στοιχεία μεταφέρουν μάζα, ορμή και ενέργεια, ενώ με την εισαγωγή της στροβιλότητας(vorticity) και τη μεταβολής όγκου (dilatation) ως κύριες μεταβλητές της ροής προκύπτουν οι Μέθοδοι Στροβιλότητας(Vortex Methods (VM)). Οι μέθοδοι στοιχείων στροβιλότητας χρησιμοποιούνται αρκετά στην μοντελοποίηση του ομόρρου λόγω της μηδενικής αριθμητικής διάχυσης και του γεγονότος ότι μπορεί να παρασταθεί ο ομόρρος σε μεγάλη απόσταση με μικρό κόστος αποθήκευσης. Από την άλλη όμως οι οριακές συνθήκες στερεού συνόρου είναι δύσκολο να μοντελοποιηθούν[5, 6]. Συνήθως οι μέθοδοι αυτοί συνδιάζονται με την μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων [7] για την προσομοίωση του στερεού συνόρου. Παρόλα αυτά, επειδή ο υπολογισμός του πεδίου ταχύτητας προκύπτει από ολοκληρωτικές αναπαρα-

στάσεις, το υπολογιστικό κόστος είναι μεγάλο. Για την μείωση του κόστους αυτού έχει αναπτυχθεί η μέθοδος Particle Mesh[1]. Ακόμη ένα μείζων θέμα στις Lagrangian μεθόδους, αποτελεί η κατανομή των στοιχείων στον χώρο. Τοπικές λοιπόν πυκνώσεις ή αραιώσεις των στοιχείων στροβιλότητας μπορούν να οδηγήσουν σε λάθος συμπεράσματα. Επομένως γίνεται επαναδιαμόρφωση των στοιχείων στροβιλότητας σε διατεταγμένες θέσεις, η τεχνική αυτή ονομάζεται remeshing [2, 8, 9, 10].

1.2 Η συμπίεστικότητα στην αεροδυναμική

Η συμπίεστικότητα αποτελεί βασικό παράγοντα της αεροδυναμικής, ο οποίος χαρακτηρίζει την ιδιότητα των στοιχείων του ρευστού να μεταβάλουν τον όγκο τους, όταν σε αυτά ασκούνται πιέσεις. Σε χαμηλές ταχύτητες, η συμπίεστικότητα του αέρα δεν είναι σημαντική σε σχέση με τη σχεδίαση του αεροσκάφους, αλλά καθώς η ροή αέρα προσεγγίζει ή ξεπερνά την ταχύτητα του ήχου, παρουσιάζονται μια σειρά αεροδυναμικών φαινομένων επηρεάζουν δραματικά την συμπεριφορά του αεροσκάφους. Η συμπίεστικότητα λοιπόν έχει ως αποτέλεσμα λοιπόν της μεταβολή της πυκνότητας γύρω από το αεροσκάφος, που επηρεάζει τα φορτία που ασκούνται σε αυτό. Κρίσιμο μέγεθος για την εμφάνιση συμπίεστων φαινομένων αποτελεί η ταχύτητα του ήχου και συγκεκριμένα ο αριθμός Mach της ροής. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον αποτελεί η μετάβαση σε υπερηχητική ροή (Mach > 1), όπου εμφανίζονται κύματα κρούσεως και οι μεταβολές των φορτίων είναι πολύ σημαντικές.

1.3 Σκοπός της εργασίας

Ο σκοπός λοιπόν της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη μιας μεθόδου στοιχείων στροβιλότητας (VPM), η οποία θα επιλύει την μη-μόνιμη, συμπίεστη, μη-συνεκτική ροή που αναπτύσσεται γύρω από τριδιάστατα ανωστικά σώματα με πάχος.

1.3.1 Σχετική Βιβλιογραφία

Ανατρέχοντας στην σχετική βιβλιογραφία οι προσπάθειες που έχουν γίνει για την επέκταση των (Vortex Methods) σε συμπιεστές ροές είναι ελάχιστες. Αμειγώς σωματιαδιακές μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί [11, 12, 13], όπου τα στοιχεία μεταφέρουν μάζα, στροβιλότητα, μεταβολή όγκου και ενέργεια με την μορφή είτε εντροπίας είτε θερμοκρασίας και οι εξισώσεις της ροής που επιλύονται είναι αμειγώς Lagrangian. Παρόλαυτα οι μέθοδοι αυτοί εφαρμόζονται σε απλές ροές στις οποίες απουσιάζει το στερεό σύνορο.

Από την άλλη, μη πλεγματικές μέθοδοι οι οποίες βασίζονται στην τεχνική του Particle Mesh και αποτελούν επέκταση των 'ασυμπίεστων' μεθόδων στροβιλότητας έχουν αναπτυχθεί. [14, 15]. Στην [14] η συμπιεστότητα λαμβάνεται υπόψη στην εξίσωση για το βαθμωτο δυναμικό, ενώ η μεταβολή του όγκου είναι 'δευτερεύον' μέγεθος και παράγωγο αυτού. Από την άλλη στην [15] το βαθμωτό δυναμικό αντιμετωπίζεται ως μια εξίσωση κύματος για την πίεση. Επίσης στις εργασίες αυτές, δεν λαμβάνεται υπόψη η ύπαρξη στερεού συνόρου.

O Hopflow επίλυτης

Η επίδραση του στερεού συνόρου λαμβάνεται υπόψη στον υβριδικό επίλυτη Hopflow [1] ο οποίος αναπτύχθηκε στο εργαστήριο Αεροδυναμική του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου. Ο επίλυτης αυτός έχει την δυνατότητα να επιλύει τρισδιάστατες εξωτερικές, συμπιεστές,συνεκτικές ροές. Αποτελείται λοιπόν από έναν Eulerian επίλυτη, ο οποίος προσομοιώνει με εξαιρετική ακρίβεια την περιοχή κοντά στο σύνορο και έναν Lagrangian επίλυτη ο οποίος ικανοποιεί ακριβώς τις επ'άπειρο οριακές συνθήκες. Για την επιτάχυνση των υπολογισμών γίνεται χρήση της τεχνικής Particle Mesh.

Αντίστοιχη εργασία [16] με την παραπάνω έχει πραγματοποιηθεί, με μόνη διαφοροποίηση ότι η συμπιεστότητα λαμβάνεται υπόψη μέσω της εξίσωσης για το βαθμωτο δυναμικό η οποία έχει την μορφή της εξίσωσης Hamilton-Jacobi και εφαρμόζεται σε δυσδιάστατες μη συνεκτικές ροές. Συνεπώς, η παρουσία του στερεού συνόρου λαμβάνεται υπόψη από την επίλυση των εξισώσεων Euler σε ένα σωματόδετο πλέγμα.

1.3.2 Διατύπωση του προβλήματος

Με βάση τα παραπάνω συμπαίρνεται ότι η προσομοίωση του στερεού συνόρου στις Lagrangian μεθόδους αποτελεί μείζων ζήτημα, ενώ σε άλλες περιπτώσεις απαιτείται τεράστιος αριθμός σωματιδίων για την προσομοίωση αυτού. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος που οι αμιγώς σωματιδιακές μέθοδοι δεν έχουν εφαρμοστεί σε πληθώρα μηχανολογικών προβλημάτων [17]. Με βάση την σχετική βιβλιογραφία αυτο επιτυγχάνεται αποκλειστικά με την επίλυση Eulerian εξισώσεων σε μια περιοχή κοντά σε αυτό. Παρόλαυτα ο Eulerian επιλύτης, απαιτεί περίπλοκα πλέγματα που πολλές φορές καθιστά την επίλυση αρκετά χρονοβόρα.

Η παρούσα εργασία βασίζεται στην τεχνική του Particle Mesh και για την αναπαράσταση των σωμάτων γίνεται χρήση της μεθόδου συνοριακών στοιχείων μέσω του επιλύτη Genuynp . Ακόμη η συμπίεστικότητα λαμβάνεται υπόψη μέσω του βαθμωτού δυναμικού και την επίλυση της εξίσωσης Hamilton-Jacobi .

1.3.3 Ο Genuynp επιλύτης

Ο Genuynp [18] αποτελεί μια μέθοδο η οποία αναπτύχθηκε στο εργαστήριο Αεροδυναμικής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου και επιλύει εξωτερικές, τριδιάστατες, μη-μόνιμες, μη-συνεκτικές ροές γύρω από ανωστικά σώματα με πάχος η χωρίς. Εξετάζει λοιπόν την μη γραμμική διατύπωση της ροής γύρω από σώμα με ομόρρου. Η μέθοδος αυτή ανήκει στις αριθμητικές μεθόδους συνοριακών στοιχείων. Συγκεκριμένα υιοθετείται η μικτή διατύπωση πηγών και διπόλων σε τμηματικά επίπεδα στοιχεία, με βάση τον Hess [19]. Όσον αφορά την περιγραφή του ομόρρου γίνεται χρήση της μεθόδου των στοιχείων στροβιλότητας η οποία ανήκει στις μεθόδους ελεύθερου ομόρρου (free wake)[20], όπου ο ομόρρος είναι ελεύθερος και η γεωμετρία του καθορίζεται από την επίλυση κινηματικών και δυναμικών εξισώσεων για την ελεύθερη στροβιλότητα. Η Lagrangian διατύπωση του προβλήματος λοιπόν ως προς την στροβιλότητα επιτρέπει την εφαρμογή της μεθόδου χωρίς η επιβάρυνση σε υπολογιστικό χρόνο και μνήμη να

είναι απαγορευτική.

1.4 Διάρθρωση της εργασίας

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε 6 κεφάλαια:

- Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται οι Υπολογιστικές Μέθοδοι στην Ρευστομηχανική, έπειτα γίνεται αναφορά στον σκοπό της παρούσας εργασίας, καθώς και στην σχετική βιβλιογραφία.
- Στο Κεφάλαιο 2 αναφέρεται το θεωρητικό υπόβαθρο για επίλυση του προβλήματος της μη-μόνιμης ροής συμπιεστού,μη-συνεκτικού ρευστού γύρω από σώματα με πάχος με την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων.
- Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται αναφορά στον Lagrangian επιλύτη. Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε τεσσεραμεγάλα υποκεφάλαια. Στο πρώτο εξ'αυτών γίνεται ο ορισμός των 'συμπιεστών' στοιχείων στροβιλότητας και διατυπώνονται οι εξισώσεις της ροής σε Lagrangian εκδοχή. Στο δεύτερο υποκεφάλαιο παρουσιάζεται η τεχνική του Particle Mesh. Στο τρίτο υποκεφάλαιο αναφέρεται η υπόθεση της ισηντροπικής και η εξίσωση για το βαθμωτό δυναμικό Hamilton-Jacobi. Τέλος στο τέταρτο υποκεφάλαιο δίνεται αναλυτικά ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος.
- Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται βασικές λεπτομέρειες της εφαρμογής, καθώς και τα βασικά ζητήματα τα οποία προκύπτουν κατά την ανάπτυξη του επιλύτη.
- Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα.
- Στο Κεφάλαιο 6 εκθετονται τα συμπεράσματα της μελέτης καθώς και ιδέες για μελλοντική έρευνα.
- Στο Κεφάλαιο 7 δίνεται Παράρτημα με την παραγωγή των εξισώσεων Lagrange της ροής, της εξίσωσης Bernoulli καθώς και των ισηντροπικών σχέσεων.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό υπόβαθρο

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί αρχικά ο τρόπος επίλυσης του προβλήματος της μη μόνιμης ροής συμπιεστού μη συνεκτικού ρευστού γύρω από σώματα με παχος συνδιάζοντας την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων και την μέθοδο στοιχείων στροβιλότητας για τη αναπαράσταση των σωμάτων και των φύλλων στροβιλότητας αντίστοιχα. Στην συνέχεια θα γίνει αναφορά στις κινηματικές και δυναμικές συνθήκες, καθώς και στην διακριτοποίηση και τον αριθμητικό τρόπο επίλυση του προβλήματος της ροής. Κλείνοντας θα γίνει αναφορά στο τρόπο υπολογισμού των φορτίων στις επιφάνειες των σωμάτων. Το πρόβλημα το οποίο επιλύεται αφορά ροή συμπιεστού μη συνεκτικού ρευστού γύρω από σώμα με επιφάνειες ασυνέχειας. Οι επιφάνειες ασυνέχειας ως προς την διανυσματική βάση των επιφανειών διανομής τους μπορεί να είναι εφαπτομενικές (φύλλο στροβιλότητας, στερεό συνορο) ή καθυετες (κύμα κρούσης). Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα διαχωρισμού της διανυσματικής ανάλυσης [21, 22], κάθε πεδίο ταχύτητας $\vec{u}(\vec{x}, t)$ που μπορεί να περιλαμβάνει τέτοιες επιφάνειες ασυνέχειας, που αναφέρθηκαν παραπάνω, αναλύεται σε ένα άθροισμα ενός στροβιλού και ενός αστρόβιλου πεδίου.

$$\begin{aligned}\vec{u}(\vec{x}, t) &= \vec{U}_\infty(t) + \vec{u}_\phi(\vec{x}, t) + \vec{u}_\omega(\vec{x}, t) \\ \vec{u}_\phi(\vec{x}, t) &= \nabla\phi(\vec{x}, t), \quad \vec{u}_\omega(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{\psi}(\vec{x}, t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

όπου το $\vec{u}_\phi(\vec{x}, t)$ είναι το αστρόβιλο κομμάτι του πεδίου ταχύτητας , $\vec{u}_\omega(\vec{x}, t)$ είναι το στροβιλό κομμάτι του πεδίου ταχύτητας , $\phi(\vec{x}, t)$ το βαθμωτό δυναμικό του αστρόβιλου πεδίου τέτοια ώστε να ικανοποιούνται :

$$\nabla \times \Phi(\vec{x}, t) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{U}_\omega(\vec{x}, t) = 0$$

από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι,

$$\nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}, t) = \nabla^2 \phi(\vec{x}, t) = \theta(\vec{x}, t) \quad (2.2)$$

όπου $\theta = \nabla \cdot \vec{u}$ που με βάση την εξίσωση της συνέχειας αποτελεί την μεταβολή του όγκου.

$$\nabla \times \vec{u} = \nabla \times \nabla \times \vec{\psi} = -\nabla^2 \vec{\psi} = -\omega(\vec{x}, t) \quad (2.3)$$

Έτσι το πεδίο ταχύτητας προκύπτει από την επίλυση των δύο παραπάνω εξισώσεων Poisson. Να σημειωθεί ότι η διαταραχή η οποία εισάγεται στην ροή απο την παρουσία των στερεών συνόρων εντάσσεται στο βαθμωτό δυναμικό $\phi(\vec{x})$ του αστρόβιλου πεδίου ταχύτητας. Στο στροβιλό μέρος είναι δυνατόν να συμπεριληφθεί η ελεύθερη στροβιλότητα που εκφεύγει από τα ανωστικά σώματα όσο και η στροβιλότητα που μπορεί να υπάρχει στο επερχόμενο πεδίο ροής, η οποία προέρχεται απο προπορευόμενα σώματα. Η επίλυση των εξισώσεων αυτών μπορεί να γίνει μεσω της ολοκληρωτικής αναπαράστασης με την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, είτε μέσω του Particle Mesh όπως θα παρουσιαστεί σε επόμενο κεφάλαιο. Σύμφωνα λοιπόν με την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων οι εξισώσεις του προβλήματος επιλύονται στο συνοριακό πλέγμα της εξωτερικής επιφάνειας και όχι σε ένα χωρικό πλέγμα που καλύπτει όλο το πεδίο της ροής, όπως γίνεται για παράδειγμα στις Eulerian μεθόδους.

2.0.1 Ολοκληρωτική αναπαράσταση του πεδίου ταχύτητας

Με βάση το θεώρημα Green επίλυεται η παραπάνω εξίσωση (2.2) για το βαθμωτό δυναμικό και ανάλογα την συνοριακή συνθήκη η οποία θα επιλεγεί για το πρόβλημα Poisson μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικές διατυπώσεις[18]. Σε κάθε περίπτωση ανάλογα το είδος της ροής, επιλέγεται εκείνη η διατύπωση η οποία περιγράφει ιδανικότερα το φυσικό φαινόμενο. Για αυτό το λόγο είναι χρήσιμο να σημειωθεί ότι οι διανομές πηγών οδηγούν σε ασυνέχεια κάθετης ταχύτητας στην επιφάνεια που τοποθετούνται, ενώ έχουν συνεχή εφαπτομενική ταχύτητα. Μη μηδενική ένταση πηγών σημαίνει ότι το ρευστό διαπερνά κατά κάποιο τρόπο την επιφάνεια. Από την άλλη οι διανομές διπόλων οδηγούν σε ασυνέχεια της εφαπτομενικής ταχύτητας στην επιφάνεια που τοποθετούνται, γεγονός που όπως θα δούμε και παρακάτω είναι απαραίτητο για την εμφάνιση άνωσης.

Η μικτή διατύπωση πηγών-διπόλων

Συνεπώς η μικτή διατύπωση πηγών-διπόλων είναι εκείνη που αναπαράστα ιδανικότερα την ροή γύρω από σώματα με πάχος.

$$\Phi(\vec{x}_o) = \int_S \left\{ \sigma \cdot G(\vec{x}_o - \vec{x}) + \mu(\vec{x}) \frac{\partial G}{\partial n}(\vec{x}_o - \vec{x}) \right\} dS(\vec{x}) + \int_V \theta(\vec{x}) G(\vec{x}_o - \vec{x}) dV(\vec{x})$$

όπου G είναι η συνάρτηση Green

$$G(\vec{x}_o - \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}(\vec{x}_o - \vec{x}) = \nabla G(\vec{x}_o - \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}), \quad \nabla G(\vec{x}_o - \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{(\vec{x}_o - \vec{x})}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|^3}$$

$$\Phi(\vec{x}_o) = \int_S \left\{ -\sigma(\vec{x}) \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|} + \mu(\vec{x}) \frac{1}{4\pi} \frac{(\vec{x}_o - \vec{x}) \cdot \vec{n}}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|^3} \right\} dS(\vec{x}) + \int_V -\theta(\vec{x}) \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|} dV(\vec{x}) \quad (2.4)$$

ενώ η ταχύτητα η οποία επάγεται σε ένα οποιοδήποτε σημείο \vec{x}_o του εξωτερικού χωρίου

$$\begin{aligned} \vec{U}_\phi(\vec{x}_o) = \nabla\Phi(\vec{x}_o) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\vec{x}) \frac{(\vec{x}_o - \vec{x})}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|^3} dS(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_S \{ \nabla\mu(\vec{x}) \times \vec{n}(\vec{x}) \} \times \frac{(\vec{x}_o - \vec{x})}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|^3} dS(\vec{x}) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint \mu(\vec{x}) \frac{d\vec{l}_w \times (\vec{x}_o - \vec{x})}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|^3} dS(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_V \theta(\vec{x}) \frac{(\vec{x}_o - \vec{x})}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|^3} dV(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Η ταχύτητα λοιπόν από το αστρόβιλο κομμάτι της ροής μπορεί να χωριστεί ως ακολούθως:

$$\vec{U}_\phi(\vec{x}_o) = \vec{U}_{\sigma,\mu}(\vec{x}_o) + \vec{U}_\theta(\vec{x}_o)$$

$\vec{U}_{\sigma,\mu}$ η επαγόμενη ταχύτητα λόγω κατνομής πηγών και διπόλων στις επιφάνειες των σωμάτων

\vec{U}_θ η επαγόμενη ταχύτητα λόγω της χωρικά διανεμημένης μεταβολής του όγκου (Dilatation)

$$\begin{aligned} \vec{U}_{\sigma,\mu}(\vec{x}_o) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\vec{x}) \frac{(\vec{x}_o - \vec{x})}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|^3} dS(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_S \{ \nabla\mu(\vec{x}) \times \vec{n}(\vec{x}) \} \times \frac{(\vec{x}_o - \vec{x})}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|^3} dS(\vec{x}) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint \mu(\vec{x}) \frac{d\vec{l}_w \times (\vec{x}_o - \vec{x})}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|^3} dS(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\vec{U}_\theta(\vec{x}_o) = \frac{1}{4\pi} \int_V \theta(\vec{x}) \frac{(\vec{x}_o - \vec{x})}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|^3} dV(\vec{x}) \quad (2.7)$$

Στην περίπτωση όπου η επιφάνεια dS είναι κλειστή το παραπάνω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Ενώ ο όρος $\{ \nabla\mu(\vec{x}) \times \vec{n}(\vec{x}) \} = \vec{\gamma}_w$ είναι η επιφανειακή στροβι-

λότητα¹

$$\begin{aligned}\vec{U}_\phi(\vec{x}_o) = \nabla\Phi(\vec{x}_o) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\vec{x}) \frac{(\vec{x}_o - \vec{x})}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|^3} dS(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_S \vec{\gamma}_w \times \frac{(\vec{x}_o - \vec{x})}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|^3} dS(\vec{x}) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_V \theta(\vec{x}) \frac{(\vec{x}_o - \vec{x})}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|^3} dV(\vec{x})\end{aligned}\quad (2.8)$$

2.0.2 Στροβιλή Θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας

Ως εξορισμού το φύλλο στροβιλότητας είναι μια κινούμενη επιφάνεια S_w με ασυνέχεια εφαπτομενικής ταχύτητας $\|\vec{U}\|$ σε ένα σημείο $x_w \in S_w$. Στην περίπτωση ροής γύρω από τρισδιάστατο ανωστικό σώμα επιβάλλεται ο ορισμός μιας γραμμής στο στερεό σύνορο από όπου θα εκφεύγει ένα επιφανειακό φύλλο στροβιλότητας (ομόρρους). Η ύπαρξη μιας επιφάνειας ασυνέχειας συνδέεται και είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη επιφανειακής κατανομής διπόλων και είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την ανάπτυξη κυκλοφορίας, συνεπώς και άνωσης. Προκύπτει λοιπόν ότι,

$$\Phi_w(\vec{x}_o) = \int_S \mu_w(\vec{x}_w) \frac{1}{4\pi} \frac{(\vec{x}_o - \vec{x}_w) \cdot \vec{n}_w}{\|\vec{x}_o - \vec{x}_w\|^3} dS_w(\vec{x}_w) \quad (2.9)$$

όπου το πεδίο ταχύτητας που επάγεται είναι

$$\vec{u}_w(\vec{x}_o) = \nabla\Phi_w(\vec{x}_o)$$

$$\vec{u}_w(\vec{x}_o) = \frac{1}{4\pi} \int_S \{\nabla\mu_w(\vec{x}_w) \times \vec{n}(\vec{x}_w)\} \times \frac{(\vec{x}_o - \vec{x}_w)}{\|\vec{x}_o - \vec{x}_w\|^3} dS_w(\vec{x}_w) + \frac{1}{4\pi} \oint \mu_w(\vec{x}_w) \frac{d\vec{l} \times (\vec{x}_o - \vec{x}_w)}{\|\vec{x}_o - \vec{x}_w\|^3} dS_w(\vec{x}_w) \quad (2.10)$$

Η στροβιλή διατύπωση του φύλλου στροβιλότητας προκύπτει από την μετατροπή της στροβιλότητας που είναι καταναμημένη σε πλέγμα δινοσωλήνων σε χωρική διανομή στοιχείων στροβιλότητας (vortex particles) ισοδύναμης έντασης $\omega(\vec{x}, t)$. Η μετατροπή

¹Το πεδίο ταχύτητας που προκύπτει από μια σημακλή δίνη εντάσως $\vec{\omega}$ είναι ίδιο με το πεδίο ταχύτητας που προκύπτει από τον όρο $\frac{1}{4\pi} \int_S \{\nabla\mu(\vec{x}) \times \vec{n}(\vec{x})\} \times \frac{(\vec{x}_o - \vec{x})}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|^3} dS(\vec{x})$ με $\vec{\omega} = \vec{\gamma}_w dS(\vec{x})$

γίνεται με τον παρακάτω τρόπο :

$$\vec{\omega}(\vec{x}) = \delta_{S_w}(\vec{x} - \vec{x}_w) \cdot \{\nabla \mu_w(\vec{x}_w) \times \vec{n}(\vec{x}_w)\} + \delta_{\partial S_w}(\vec{x} - \vec{x}_w) \mu_w(\vec{x}_w) \vec{\tau}_w(\vec{x}_w) \quad (2.11)$$

όπου $\vec{\tau}_w$, \vec{n}_w είναι το εφαπτομενικό διάνυσμα και το κάθετο διάνυσμα στο σύνορο, δ_{S_w} , $\delta_{\partial S_w}$ οι συναρτήσεις Dirac οι οποίες ορίζονται αποκλειστικά στο σύνορο. Έτσι λοιπόν η ταχύτητα που επάγεται είναι :

$$\vec{U}_\omega = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\vec{\omega}(\vec{x}) \times (\vec{x}_o - \vec{x})}{\|\vec{x}_o - \vec{x}\|^3} \quad (2.12)$$

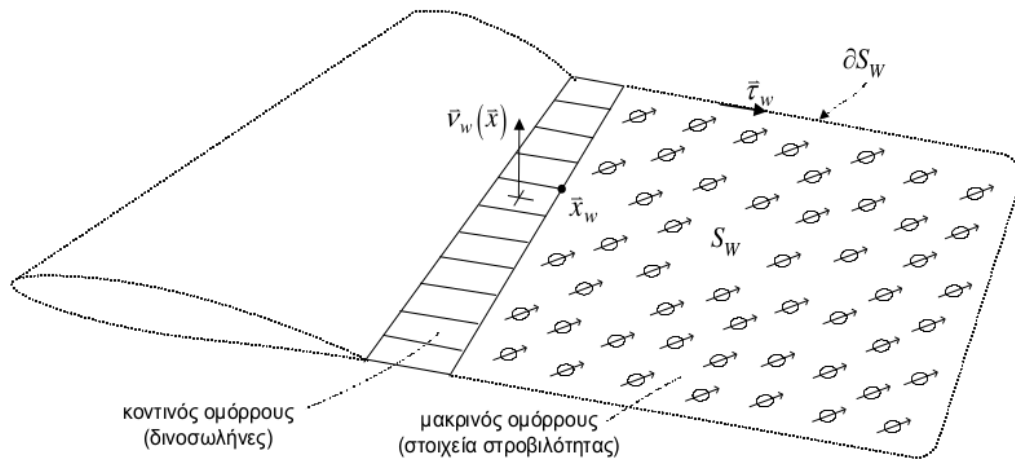
όπου $\vec{\omega}$ η γενικευμένη στροβιλότητα η οποία ορίζεται με βάση την σχέση (2.11) και συμπεριφέρεται όπως η χωρική στροβιλότητα.

Θεωρώντας τώρα ότι υπάρχουν K στοιχεία τα οποία μεταφέρουν στροβιλότητα στις θέσεις \vec{x}_{Ω_i} με $i = 1, K$ τότε η στροβιλότητα σε ένα σημείο $\vec{x} \in D$ υπολογίζεται από το άθροισμα

$$\vec{\omega}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^K \Omega_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\Omega_i})$$

άρα και η επαγόμενη ταχύτητα

$$\vec{U}_\omega(\vec{x}_o) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^K \frac{\Omega_i \times (\vec{x}_o - \vec{x}_{\Omega_i})}{\|\vec{x}_o - \vec{x}_{\Omega_i}\|^3} \quad (2.13)$$



Σχήμα 2.1: Στροβιλή Θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας

2.0.3 Η Κινηματική Συνθήκη Μη-Εισχώρησης

Η ικανοποίηση της συνθήκη μη εισχώρησης σε ένα σημείο \vec{x} της επιφάνειας ενός σώματος επιβάλλει τον μηδενισμό της κάθετης ταχύτητας στο σημείο αυτό.

$$\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}, t) = \vec{U}_{body}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}, t) \quad (2.14)$$

όπου $U_{body}(\vec{x}, t)$ η ταχύτητα μεταφοράς του σώματος, \vec{n} το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια, $u(\vec{x})$ η ταχύτητα της ροής.

Η ταχύτητα της ροής μπορεί λοιπόν να υπολογιστεί ως εξής:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{U}_{\infty}(t) + \vec{U}_{\sigma, \mu}(\vec{x}, t) + \vec{U}_{nw}(\vec{x}, t) + \vec{U}_{\omega}(\vec{x}, t) + \vec{U}_{\theta}(\vec{x}, t) \quad (2.15)$$

όπου:

\vec{U}_{∞} είναι η αδιατάρακτη ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο

$\vec{U}_{\sigma, \mu}$ η επαγόμενη ταχύτητα από τα σώματα (εξίσωση (2.6))

\vec{U}_{NW} η επαγόμενη ταχύτητα από την κατανομή διπόλων στον κοντινό ομόρρους (εξίσωση (2.10))

\vec{U}_{ω} η επαγόμενη ταχύτητα της χωρικά διανεμημένης στροβιλότητας (εξίσωση (2.13))

\vec{U}_θ η επαγόμενη ταχύτητας λόγω της χωρικά διανεμημένης μεταβολής του όγκου (εξίσωση (2.7))

$$\vec{U}_{\sigma,\mu}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) = \left(\vec{U}_{body} - \vec{U}_\infty - \vec{U}_{NW} - \vec{U}_\omega - \vec{U}_\theta \right) (\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \quad (2.16)$$

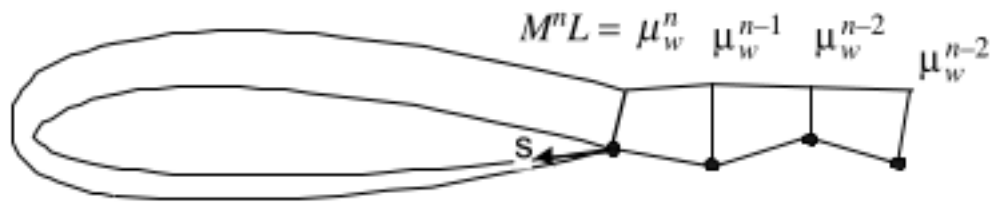
2.0.4 Η δυναμική Συνθήκη Kutta-Joukowski

Η δυναμική εξίσωση Kutta-Joukowski ολοκληρώνει το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων του προβλήματος. Η Kutta επιβάλλει την εξίσωση των πιέσεων, η ισοδύναμα τον μηδενισμό του πηδήματος στην ακμή εκφυγής, προσδιορίζοντας έτσι μια μη γραμμική σχέση για την ταχύτητα. Ορίζοντας λοιπόν το μέγεθος $[[P]]$ ως το πήδημα, μεταξύ της πάνω και την κάτω πλευράς στην ακμή εκφυγής και εφαρμόζοντας Bernoulli την απαίτηση για μηδενικό πήδημα πίεσης οδηγεί στην εξής συνθήκη:

$$[[P]] = 0 \rightarrow \frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + \vec{u}_{mean} \cdot (\nabla\mu) = 0$$

,οπου \vec{u}_{mean} είναι η μέση ταχύτητα. Μέσω της παραπάνω εξίσωσης προκύπτει οτι κάθε σημείο του ομόρρου διατηρεί την ένταση διπόλου που είχε κατα την στιγμή της δημιουργίας του, όπως φαίνεται στον σχήμα(2.2). Επειδή η συνθήκη Kutta-Joukowski έχει τοπικό χαρακτήρα, μπορεί να προσδιοριστεί η κατανομή διπόλων μονο στην ακμή εκφυγής. Επομένως για υπολογιστικούς λόγους, επιλέγεται η κατανομή διπόλων σύμφωνα με τον Hess , κατά την οποία η ένταση αυτών μεταβάλλεται γραμμικά σε σχέση με την μεταβλητή s όπως φαίνεται στο σχήμα. (2.2).

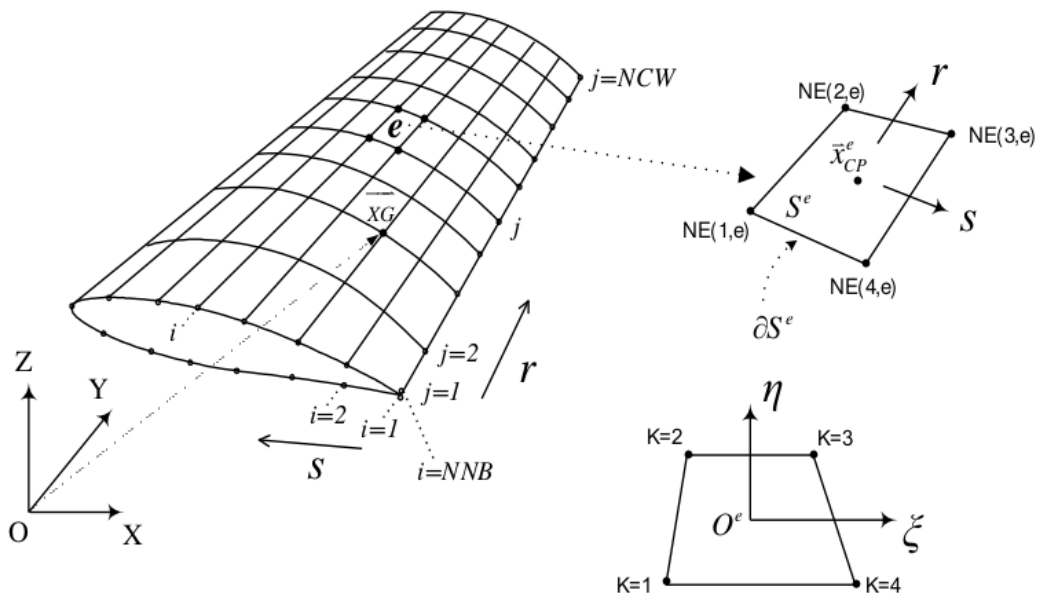
$$\mu = M \cdot s, 0 \leq s \leq L$$



Σχήμα 2.2: Γραμμική κατανομή εντάσεως διπόλων κατά μήκος της χορδής

2.0.5 Διακριτοποίηση-Βαθμοί Ελευθερίας-Επίλυση

Το σύνορο αποτελείται από επίπεδα στοιχεία όπου τοποθετούνται οι άγνωστες κατανομές πηγών διπόλων. Θεωρούμε τμηματικά σταθερές κατανομές πηγών για τα στοιχεία του πλέγματος, ενώ η κατανομή διπόλων είναι τμηματικά σταθερή στην ακτινική κατεύθυνση r , ενώ μεταβάλλεται γραμμικά στην κατεύθυνση s . Η παράμετρος μήκους s αντιστοιχεί στο μήκος τόξου που διατρέχει την επιφάνεια του σώματος για δεδομένη ακτινική θέση. Ξεκινάει από την ακμή εκφυγής της κάτω πλευράς υπερπίεσης, περνάει το χείλος προσβολής και καταλήγει στην ακμή εκφυγής από την πάνω πλευρά υποπίεσης. Η παράμετρος r αντιστοιχεί σε ακτινικές θέσεις πάνω στο σώμα, Όπως φαίνεται στο σχήμα(2.3), το επιφανειακό πλέγμα αποτελείται από $NNT = NNB * NCW$ κόμβους, $NTE = (NNB - 1) * (NCW - 1)$ επιφανειακά στοιχεία.



Σχήμα 2.3: Διακριτοποίηση της γεωμετρίας ενός σώματος

Οι βαθμοί ελευθερίας δίνονται στο μητρώο S :

$$[S] = [\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \dots, \sigma^{NTE}, M_1, M_2, M_3, \dots, M^{(NCW-1)}]$$

- $\sigma^{(1:NTE)}$: οι εντάσεις των πηγών στα επίπεδα επιφανειακά στοιχεία
- $M^{(1:(NCW-1))}$: οι κλίσεις των διπόλων για τις ακτινικές λορίδες του πλέγματος (η αλλιώς η κυκλοφορία στην ακμή εκφυγής)

Για την επίλυση εφαρμόζεται η συνθήκη μη εισχώρησης στα σημεία ελέγχου των επιφανειακών στοιχείων (NTE εξισώσεις), και η συνθήκη Kutta « $NCW - 1$ » εξισώσεις. Επειδή η συνθήκη Kutta είναι μη γραμμική ως προς την ταχύτητα, η επίλυση του συστήματος απαιτεί επαναληπτική διαδικασία.

2.0.6 Υπολογισμός φορτίων

Ο υπολογισμός των φορτίων στην περίπτωση της μη συνεκτικής ροής ανάγεται στον υπολογισμό των ορθών τάσεων(πιέσεων) στις επιφάνειες της ροής. Ο υπολογισμός

των πιέσεων στα στερεά σύνορα είναι ένα πρόβλημα πλήρως αποσυζευγμένο από τον υπολογισμό του πεδίου ροής και γίνεται μέσω της εξίσωσης Bernoulli .

$$\frac{d\Phi}{dt} + \frac{u^2}{2} + h + q = \left(\frac{u^2}{2} \right)_{\infty} + h_{\infty} \quad (2.17)$$

όπου

- Φ είναι το βαθμωτό δυναμικό του αστρόβιλου τμήματος της ροής.
- h είναι η ενθαλπία.
- q είναι η ψευδοπίεση ή αλλιώς η πίεση που οφείλεται στο αστρόβιλο τμήμα της ροής [18] και προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης Poisson

$$\nabla^2 q = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{\omega}) \quad (2.18)$$

όπου $\vec{\omega}$ είναι χωρικά διανεμημένη στροβιλότητα

- \vec{u}_{∞} είναι η ταχύτητα της επάπειρο ροής
- h_{∞} είναι η ενθαλπία της επάπειρο ροής

Επαναδιατυπώνοντας την εξίσωση Bernoulli στην εξής μορφή.:

$$h_s = h_{\infty} - \frac{d\Phi}{dt} + \left(\frac{u^2}{2}_{\infty} - \frac{u^2}{2}_s \right) - q_s \quad (2.19)$$

υπολογίζεται η ενθαλπία h_s πάνω στο σύνορο, όπου με την βοήθεια της ισοεντροπικής σχέσης και της σχέσης ορισμού της ενθαλπιας,

$$h = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{p}{\rho}$$

$$\frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}^{\gamma}} = \frac{p}{\rho^{\gamma}}$$

προκύπτει η έκφραση για την πίεση p_s στο σύνορο των στερεών σωμάτων.

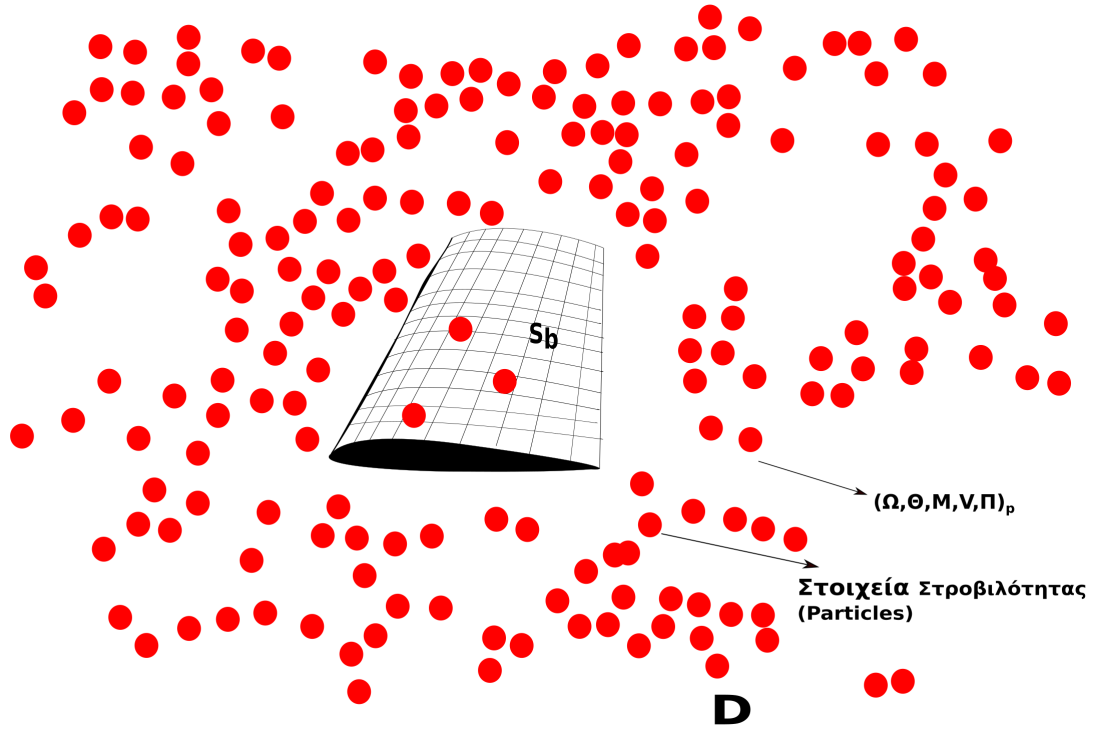
$$p_s = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_\infty}{p_\infty} h_s \right)^{\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)} \quad (2.20)$$

Κεφάλαιο 3

Ο Lagrangian Επιλύτης

3.1 Ορισμός "συμπιεστών" στοιχείων στροβιλότητας

Ο Lagrangian επιλυτής χρησιμοποιεί στοιχεία στροβιλότητας για να προσομοιώσει τη ροή. Τα στοιχεία στροβιλότητας αυτά βρίσκονται σε θέση $Z_p(t)$ μεταφέρουν μάζα M_p και καταλαμβάνουν όγκο $V_p(t)$, ενώ επίσης μεταφέρουν στροβιλότητα $\vec{\Omega}_p(t)$, μεταβολή όγκου $\Theta_p(t)$ και ενέργεια $\Pi_p(t)$, όπως φαίνεται στο σχήμα (3.1).



Σχήμα 3.1: Το πεδίο ροής D , με την παρουσία στερεού συνόρου S_b . Τα κόκκινα σημεία υποδηλώνουν τα στοιχεία στροβιλότητας

Τα μεγέθη $(M, \vec{\Omega}, \Theta, \Pi)_p$ είναι τα χωρικά ολοκληρώματα των μεγεθών του συνεχούς πεδίου της ροής.

$$M_p(t) = \int_{V_p(t)} \rho(\vec{x}, t) dV_p(t) = \rho_p(t) V_p(t) \quad (3.1)$$

$$\Theta_p(t) = \int_{V_p(t)} \theta(\vec{x}, t) dV_p(t) = \theta_p(t) V_p(t) = (\nabla \vec{u})_p V_p(t) \quad (3.2)$$

$$\vec{\Omega}_p(t) = \int_{V_p(t)} \omega(\vec{x}, t) dV_p(t) = \vec{\omega}_p(t) V_p(t) = (\nabla \times \vec{u})_p V_p(t) \quad (3.3)$$

$$\Pi_p(t) = \int_{V_p(t)} \epsilon(\vec{x}, t) dV_p(t) = \epsilon_p(t) V_p(t) = (\rho E)_p(t) V_p(t) \quad (3.4)$$

όπου $\rho(\vec{x}, t)$, $\theta(\vec{x}, t)$, $\omega(\vec{x}, t)$, $\epsilon(\vec{x}, t)$, είναι τα μεγέθη στο συνεχές πεδίο πεδίο της ροής. Τα Particles μπορούν να θεωρηθούν ως σημεία της ροής (\cdot) τα οποία προσεγγίζουν το πεδίο ροής σε συγκεκριμένα σημεία του χωρίου. Πρέπει στο σημείο αυτό να τονισθεί η διαφορά των παραπάνω αριθμητικών στοιχείων της ροής με τα φυσικά στοιχεία της

ροής. Στα φυσικά στοιχεία δεν επιτρέπεται η αλληλοεπικάλυψη μεταξύ τους [23, 24], γεγονός που δεν συμβαίνει με τα αριθμητικά στοιχεία. Έτσι δίνεται η δυνατότητα μέσω των παρακάτω συνελίξεων να προκύψει το συνεχές πεδίο της ροής.

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_p \rho_p(t) V_p(t) \zeta_\epsilon(\vec{x} - \vec{Z}_p(t)) \quad (3.5)$$

$$\theta(\vec{x}, t) = \sum_p \theta_p(t) V_p(t) \zeta_\epsilon(\vec{x} - \vec{Z}_p(t)) \quad (3.6)$$

$$\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \sum_p \omega_p \vec{\omega}_p(t) V_p(t) \zeta_\epsilon(\vec{x} - \vec{Z}_p(t)) \quad (3.7)$$

$$\varepsilon(\vec{x}, t) = \sum_p \varepsilon_p(t) V_p(t) \zeta_\epsilon(\vec{x} - \vec{Z}_p(t)) \quad (3.8)$$

όπου ζ_ϵ είναι μια συνάρτηση κατανομής. Ως εξορισμού η συνάρτηση αυτή είναι η Dirac[25], η οποία όμως οδηγεί σε αρκετές ιδιομορφίες λόγω της μορφής της. Προκύπτει λοιπόν η ανάγκη να υιοθετηθεί μια πιο ομαλή καμπύλη η οποία όμως θα έχει την ίδια μορφή, αλλά δεν θα οδηγεί σε τετοιους είδους ιδιομορφίες [2, 26, 27].

3.2 Lagrangian διατύπωση των εξισώσεων της ροής

Επομένως προκύπτει η Lagrangian διατύπωση των εξισώσεων της ροής.

$$\text{Εξίσωση Συνέχειας: } \frac{DM_p}{Dt} = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{DV_p}{Dt} = \theta V_p = \Theta_p \quad (3.10)$$

$$\text{Εξίσωση Ορμής: } \frac{D\vec{\Omega}_p}{Dt} = V_p \left((\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p \right)_p \quad (3.11)$$

$$\frac{D\Theta_p}{Dt} = V_p \left(2\|\nabla \vec{u}\| - \nabla \cdot \frac{\nabla p}{\rho} \right)_p \quad (3.12)$$

$$\text{Εξίσωση Ενέργειας: } \frac{DE_p}{Dt} = -V_p \nabla \cdot (\vec{u} p) \quad (3.13)$$

Όσον αφορά της εξίσωση της ενέργειας (3.13) προκύπτουν οι ισοδύναμες διατυπώσεις ως προς την πίεση και την ενθαλπία:

$$\text{Εξίσωση Ενέργειας ως προς την Πίεση: } \frac{DP_p}{Dt} = ((1 - \gamma) p\theta)_p \quad (3.14)$$

$$\text{Εξίσωση Ενέργειας ως προς την Ενθαλπία: } \frac{DH_p}{Dt} = ((2 - \gamma) h\theta)_p \quad (3.15)$$

Οι παραπάνω Lagrange εξισώσεις τις ατριοβούς ροής μπορούν να διατυπωθούν σε μητρωική μορφή ως εξής:

$$\frac{D\vec{U}_p(t)}{Dt} = G(\vec{U}_p(t), t) \quad (3.16)$$

$$\vec{U}_p(t) = \left\{ \vec{Z}_p, M_p, \vec{\Omega}_p, \Theta_p, (P_p \text{ ή } H_p), V_p \right\} \quad (3.17)$$

Το σύστημα επίλυσης είναι πλήρες με τον υπολογισμό του πεδίου ταχύτητας μέσω του θεωρήματος Helmholtz και των εξισώσεων (2.2,2.3) οι οποίες επαναδιατυπώνονται παρακάτω:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \theta \\ \nabla^2 \vec{\psi} &= -\vec{\omega} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\vec{U} = \vec{U}_\infty + \nabla \times \vec{\psi} + \nabla \Phi$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green για τις εξισώσεις Poisson (3.18) της ροής, προκύπτουν οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για το ϕ, ψ .

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}_o) &= \int_D \nabla^2 \phi(\vec{x}) G(\vec{x}_o - \vec{x}) dD(\vec{x}) + \int_S (\partial_n \phi(\vec{x}) G(\vec{x}_o - \vec{x}) - \phi(\vec{x}) \partial_n G(\vec{x}_o - \vec{x})) dS(\vec{x}) \\ \psi_i(\vec{x}_o) &= \int_D \nabla^2 \psi_i(\vec{x}) G(\vec{x}_o - \vec{x}) dD(\vec{x}) + \int_S (\partial_n \psi_i(\vec{x}) G(\vec{x}_o - \vec{x}) - \psi_i(\vec{x}) \partial_n G(\vec{x}_o - \vec{x})) dS(\vec{x}) \end{aligned}$$

Παίρνοντας το ∇_o της πρώτης και το $\nabla_o \times$ της δεύτερης, η ολοκληρωτική αναπαράσταση για την ταχύτητα διαταραχής $\vec{u} = U - U_\infty$ είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}_o) = & \vec{U}_\infty + \int_D (\theta(\vec{x}) \vec{K}(\vec{x}_o - \vec{x}) + \vec{\omega}(\vec{x}) \times \vec{K}(\vec{x}_o - \vec{x})) dD(\vec{x}) + \\ & \int_S (\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \vec{K}(\vec{x}_o - \vec{x}) + (\vec{n}(\vec{x}) \times \vec{u}(\vec{x})) \times \vec{K}(\vec{x}_o - \vec{x})) dS(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

όπου

$$\vec{K}(\vec{x}_o - \vec{x}) = \nabla G(\vec{x} - \vec{x}_o) = \frac{\vec{x}_o - \vec{x}}{|\vec{x}_o - \vec{x}|^3}$$

Στην περίπτωση απουσίας στερεών συνόρων ο παραπάνω επιφανειακός όρος μηδενίζεται και επομένως προκύπτει:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}_o) = & \vec{U}_\infty + \int_D (\theta(\vec{x}) \vec{K}(\vec{x}_o - \vec{x}) + \vec{\omega}(\vec{x}) \times \vec{K}(\vec{x}_o - \vec{x})) dD(\vec{x}) \\ \vec{u}(\vec{x}_o) = & \Theta_p(\vec{x}) \vec{K}(\vec{x}_o - \vec{x}) + \vec{\Omega}_p(\vec{x}) \times \vec{K}(\vec{x}_o - \vec{x}) \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή η επίλυση του παραπάνω συστήματος είναι πολύ απλή. Για δεδομένες αρχικές συνθήκες γίνεται ανανέωση των μεγεθών μέσω της ολοκλήρωσης των εξισώσεων (3.16). Έπειτα για δεδομένα $\Theta_p, \vec{\Omega}_p$ με βάση την παραπάνω σχέση υπολογίζεται το πεδίο ταχύτητας.

3.3 Επιφανειακά Στοιχεία Στροβιλότητας

Στην περίπτωση παρουσίας στερεού συνόρου ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}_o) = & \vec{U}_\infty + \int_D (\theta(\vec{x}) \vec{K}(\vec{x}_o - \vec{x}) + \vec{\omega}(\vec{x}) \times \vec{K}(\vec{x}_o - \vec{x})) dD(\vec{x}) + \\ & \int_S (\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \vec{K}(\vec{x}_o - \vec{x}) + (\vec{n}(\vec{x}) \times \vec{u}(\vec{x})) \times \vec{K}(\vec{x}_o - \vec{x})) dS(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) = u_n(\vec{x})$: η κάθετη ταχύτητα διαταραχής στο σύνορο S

$\vec{n}(\vec{x}) \times \vec{u}(\vec{x}) = u_\tau(\vec{x})$: η εφαπτομενική ταχύτητα διαταραχής στο σύνορο S .

Παρατηρείται λοιπόν οτι όρος $\vec{u} \cdot \vec{n}$ δρα σαν μία επιφανειακή μεταβολή όγκου, ενώ όρος $\vec{n} \times \vec{u}$ δρα σαν επιφανειακή στροβιλότητα. Εκμεταυλούμενοι λοιπόν το γεγονός οτι οι επιφανειακοί όροι $\int_S (u_n(\vec{x}) \vec{K}(\vec{x}_0 - \vec{x}) dS(\vec{x})$ και $\int_S \vec{u}_\tau(\vec{x}) \times \vec{K}(\vec{x}_0 - \vec{x}) dS(\vec{x})$ έχουν την ίδια μορφή με τους χωρικούς όρους, μπορούμε να μετρατεψουμε τις παραπάνω επιφανειακές κατανομές σε χωρικές πηγές, δίνες και στην συνέχεια σε στοιχεία στροβιλότητας εντάσως $\Theta_{p,sur}, \vec{\Omega}_{p,sur}$ ως εξής :

$$\Theta_{p,s}(\vec{x}) = u_n(\vec{x}) dS(\vec{x}) = \theta_{surface}(\vec{x}) dD(\vec{x})$$

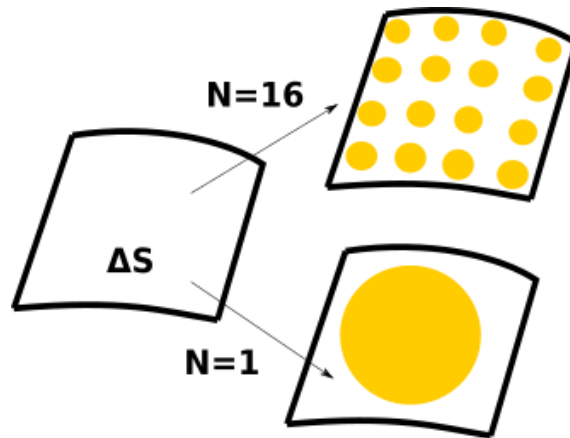
$$\vec{\Omega}_{p,s}(\vec{x}) = \vec{u}_\tau(\vec{x}) dS(\vec{x}) = \vec{\omega}_{surface}(\vec{x}) dD(\vec{x})$$

Επομένως απο κάθε επιφάνεια ΔS του διακριτοποιημένου συνόρου S , όπου η ταχύτητα διαταραχής είναι σταθερή (από την επίλυση την συνοριακής συνθήκης), μπορούν να δημιουργηθούν ένα η περισσότερα στοιχεία στροβιλότητας(N) (Particles). Τα οποία τοποθετούνται στην επιφάνεια DS όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

$$\Theta_{p,s}(\vec{x}) = \frac{u_n(\vec{x}) \Delta S}{N} \quad \vec{\Omega}_{p,s}(\vec{x}) = \frac{\vec{u}_\tau(\vec{x}) \Delta S}{N} \quad (3.21)$$

Με βάση τα παραπάνω η εξίσωση (3.19) γράφεται στην μορφή:

$$\vec{u}(\vec{x}_o) = \vec{U}_\infty + (\Theta_p(\vec{x}) + \Theta_{p,sur})(\vec{x}) \vec{K}(\vec{x}_0 - \vec{x}) + \left(\vec{\Omega}_p(\vec{x}) + \vec{\Omega}_{p,sur}(\vec{x}) \right) \times \vec{K}(\vec{x}_0 - \vec{x}) \quad (3.22)$$



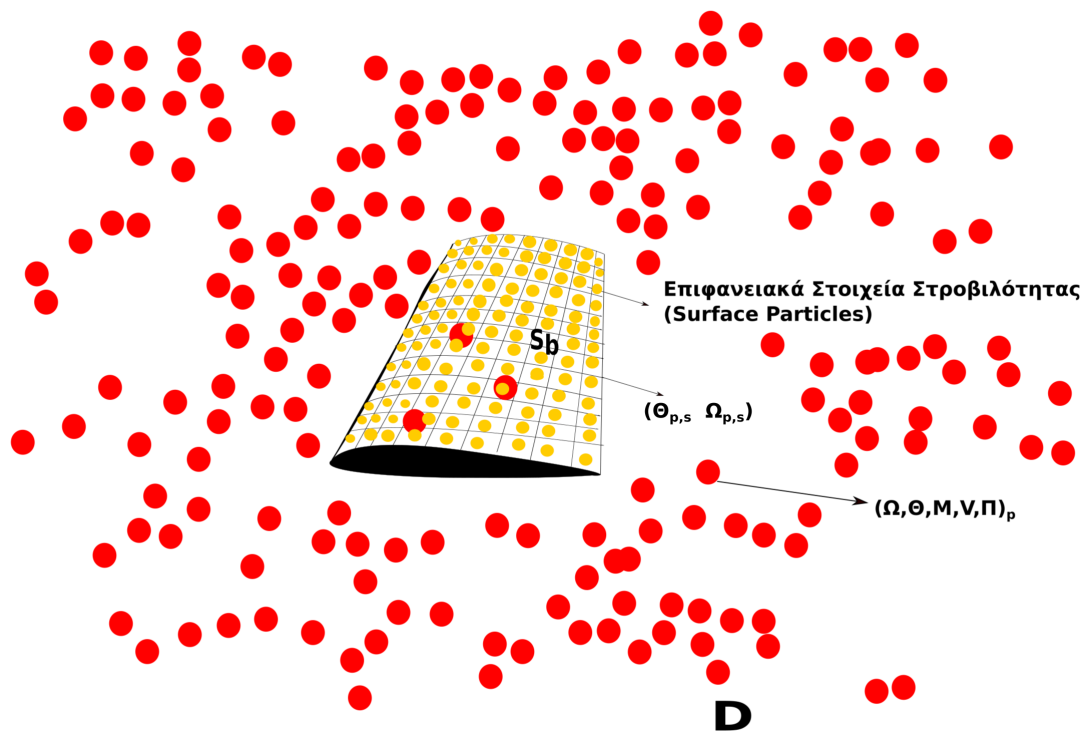
Σχήμα 3.2: Αριθμός Επιφανειακών Στοιχείων Στροβιλότητας(N=1,N=16)

Για την αντιμετώπιση των επιφανειακών όρων μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η διατύπωση πηγών διπόλων στην μορφή(2.8), όπου είναι παρόμοια με αυτήν της σχέσης(3.19) με την διαφοροποίηση ότι για τα επιφανειακά στοιχεία στροβιλότητας ισχύει:

$$\Theta_{p,s} = \frac{\sigma \Delta S}{N} \quad \vec{\Omega}_{p,s} = \frac{\vec{\gamma}_w \Delta S}{N} \quad (3.23)$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνουν οι εξής παρατηρήσεις:

- Τα επιφανειακά στοιχεία στροβιλότητας βρίσκονται διαρκώς προσδεδεμένα στο στερεό σύνορο και μετακινούνται εφαπτομενικά αυτού.
- Τα επιφανειακά στοιχεία μεταφέρουν πληροφορία για την ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης στο σύνορο.
- Συνεπώς μόλις γίνει η μετακίνηση των χωρικών στοιχείων παύει να ισχύει η συνθήκη μη εισχώρησης. Επομένως υπολογιστικά πιο εύκολο στο τέλος κάθε χρονικού βήματος να διαγράφονται και να επαναδημιουργούνται στις αντίστοιχες θέσεις με την ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης.



Σχήμα 3.3: Επιφανειακά στοιχεία Στροβιλότητας για $N=1$

3.4 Particle Mesh

Το κόστος για τον υπολογισμό του πεδίου ταχύτητας μέσω των ολοκληρωτικών αναπαράστασεων (3.22) είναι μεγάλο. Για παράδειγμα σε N στοιχεία του ρευστού απαιτούνται $O(N^2)$ υπολογισμοί [1]. Το παραπάνω έχει ως συνέπεια τον περιορισμό στον αριθμό των στοιχείων προσομοίωσης, το οποίο με την σειρά του οδηγεί σε λανθασμένη προσομοίωση της ροής και σε υπολογιστικά σφάλματα. Αυτήν η δυσκολία παρακάμπτεται με την χρήση του επιλύτη Particle Mesh, ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός των James-Lackner [28, 29]. Συνοπτικά στον επιλύτη αυτό οι ποσότητες των στοιχείων της ροής προβάλλονται πάνω σε ένα ορθογωνικό πλέγμα, όπου οι υπολογισμοί της ταχύτητας γίνονται με έναν επιλύτη Poisson ο οποίος βασίζεται σε έναν Fast Fourier Transform (FFT). Η ταχύτητα στα στοιχεία του ρευστού υπολογίζεται μέσω μια συνάρτησης παρεμβολής από τους κόμβους του πλέγματος. Μέσω αυτής της τεχνικής το κόστος υπολογισμού της ταχύτητας πέφτει στο $O(N \log N)$. Τέλος το

πλέγμα του Particle Mesh είναι χρήσιμο για τον υπολογισμό των χωρικών παραγώγων που είναι απαραίτητες. Συνεπώς επιλύονται οι εξισώσεις (3.18) στους κόμβους (i, j, k) του πλέγματος.

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi_{i,j,k} &= \theta_{i,j,k} \\ \nabla^2 \vec{\psi}_{i,j,k} &= -\vec{\omega}_{i,j,k}\end{aligned}\quad (3.24)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονισθεί ότι η διαδικασία μετατροπής των επιφανειακών όρων σε χωρικά στοιχεία στροβιλότητας πραγματοποιείται με στόχο να ενταχθεί στους υπολογισμούς του Particle Mesh η επίδραση του στερεού συνόρου.

3.4.1 Συναρτήσεις Προβολής-Παρεμβολής

Με στόχο να υλοποιηθεί η παραπάνω τεχνική, για το υπολογισμό του πεδίου ταχύτητας, είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί μια τεχνική με την οποία θα μεταφέρεται πληροφορία από τα στοιχεία στροβιλότητας στο πλέγμα. Μόλις πραγματοποιηθεί η επίλυση θα πρέπει η πληροφορία η οποία υπολογίστηκε πάνω στο πλέγμα, να μεταφερθεί πίσω στα στοιχεία στροβιλότητας. Τα παραπάνω επιτυγχάνονται με τις συναρτήσεις Προβολής-Παρεμβολής. Η βασική ιδέα στην περίπτωση της προβολής είναι ότι, εάν ένα στοιχείο στροβιλότητας μεταφέρει ένα μέγεθος $Q_p = q_p V_p$ τότε η ποσότητα q στον κόμβο i, j, k θα δίνεται:

$$q_{i,j,k} = \sum_p q_p W(\vec{Z}_p - \vec{x}_{i,j,k}) \quad (3.25)$$

όπου η συνάρτηση παρεμβολής W εξυπηρετεί τον ίδιο σκοπό με τις συναρτήσεις κατανομής ζ_ϵ επειδή όμως η παραπάνω διατύπωση δεν λαμβάνει υπόψη την μη ομοιόμορφη χωρική κατανομή των στοιχείων στροβιλότητας, χρησιμοποιούνται οι παρακάτω διατυπώσεις.:

$$q_{i,j,k} \equiv \text{Proj}_{\text{PM}}(q_p; V_p) = \frac{\sum_p q_p V_p W(\vec{x}_{i,j,k} - \vec{Z}_p)}{\sum_p V_p W(\vec{x}_{i,j,k} - \vec{Z}_p)} \quad (3.26)$$

$$q_{i,j,k} \equiv \text{Proj}_{\text{PM}}(q_p; V_p) = \frac{\sum_p q_p V_p W(\vec{x}_{i,j,k} - \vec{Z}_p)}{DV_{pm}} \quad (3.27)$$

όπου $DV_{pm} = DX_{pm}DY_{pm}DZ_{pm}$ είναι ο όγκος ενός κελιού του PM, με πλευρές μήκους $DX_{pm}, DY_{pm}, DZ_{pm}$ και W η συνάρτησης παρεμβολής στις τρεις διαστάσεις που ορίζεται ως το γινόμενο τριών μονοδιάστατων συναρτήσεων παρεμβολής W_{1D}

$$W(\vec{x}_{i,j,k} - \vec{Z}_p) = W_{1D}\left(\frac{X_p - x_{i,j,k}}{h}\right) W_{1D}\left(\frac{Y_p - y_{i,j,k}}{h}\right) W_{1D}\left(\frac{Z_p - z_{i,j,k}}{h}\right)$$

όπου $\vec{Z}_p = (X_p, Y_p, Z_p)$ είναι η θέση του στοιχείου στροβιλότητα και $\vec{x}_{i,j,k} = (x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$ η θέση του κόμβου.

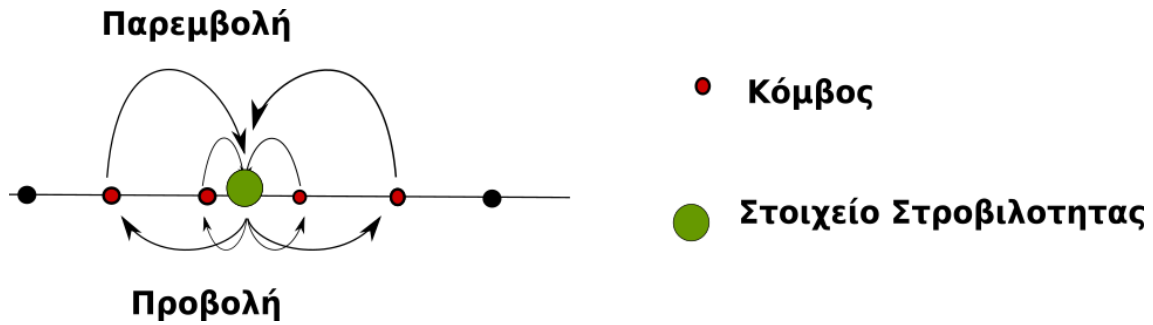
Η πληροφορία μεταφέρεται από το πλέγμα στα στοιχεία στροβιλότητας χρησιμοποιώντας τις ίδιες συναρτήσεις παρεμβολής.

$$q_p \equiv \text{Interp}(q_{i,j}) = \sum_{i,j,k} q_{i,j,k} W(\vec{x}_{i,j,k} - \vec{Z}_p) \quad (3.28)$$

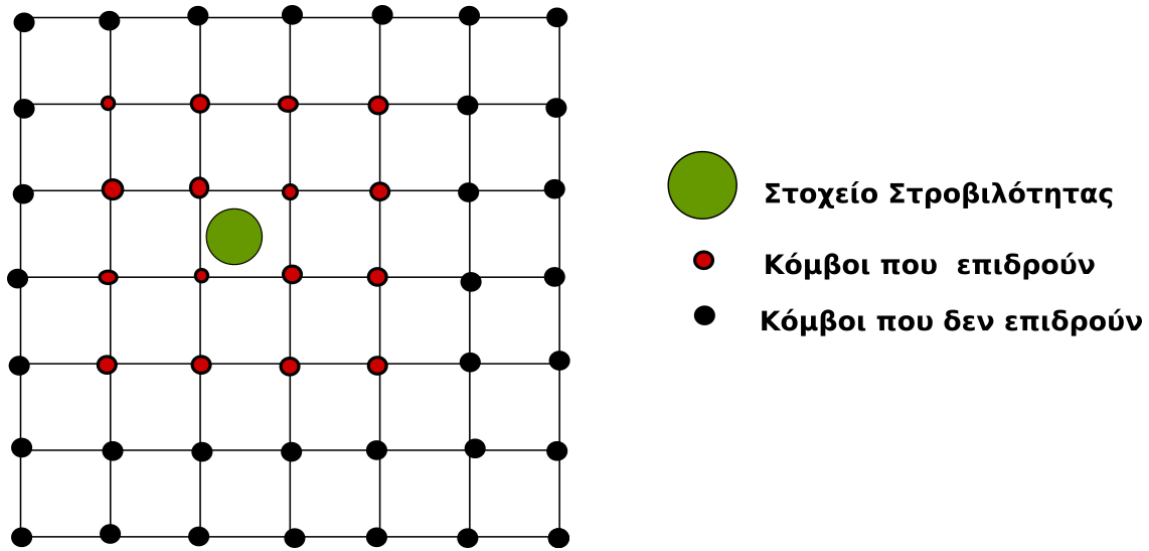
Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται συνάρτηση παρεμβολή 3ης τάξης M4:

$$W_{1D} = M_4(x, h) = \begin{cases} 1 - \frac{5s^2}{2} + \frac{3s^3}{2} & 0 \leq s \leq 1 \\ \frac{(1-s)(2-s^2)}{2} & 1 \leq s \leq 2, \quad s = \left| \frac{r_i - r_j}{h} \right| \\ 0 & s \geq 2 \end{cases}$$

Όσον αφορά την μονοδιάστατη περίπτωση, κάθε στοιχείο στροβιλότητας αλληλεπιδρά με μέχρι και 4 κόμβους, όπως φαίνεται στο σχήμα (3.4), ενώ στην δυσδιάστατη με μέχρι και 16 κόμβους(3.5).



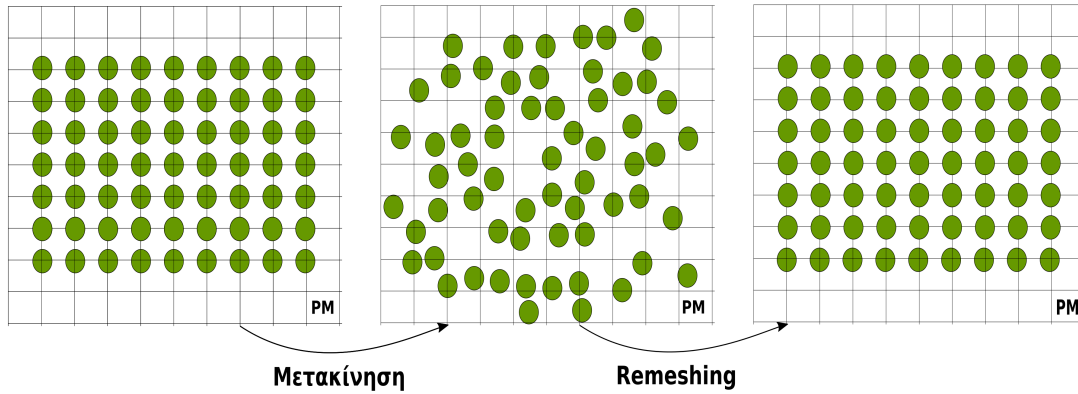
Σχήμα 3.4: Προβολή-Παρεμβολή για συνάρτηση M4 σε 1D



Σχήμα 3.5: Προβολή-Παρεμβολή για συνάρτηση $M4$ σε $2D$

3.4.2 Η τεχνική του Remeshing

Η τοπική συγκέντρωση/αραίωση των στοιχείων στροβιλότητας μειώνει την ακρίβεια της μεθόδου. Στην περίπτωση των μεθόδων στοιχείων στροβιλότητας είναι γνωστό ότι η χωρική κατανομή των στοιχείων μπορεί να επηρεάσει την ακρίβεια της μεθόδου. Για αυτό το λόγο ανά τακτά χρονικά βήματα χρειάζεται η ανακατασκευή των ροικών δεδομένων γνωστή ως RM . Το RM συνίσταται στην επαναδιανομή των στοιχείων στροβιλότητας σε δομημένες θέσεις ώστε να διατηρηθεί η ομοιόμορφη κατανομή των στοιχείων (3.6). Συγκεκριμένα πραγματοποιείται Remeshing κάθε χρονικό βήμα, ως συνάρτηση προβολής χρησιμοποιείται η (3.27), ενώ τα στοιχεία στροβιλότητας επαναδιανομούνται στους κόμβους του Particle Mesh καταλαμβάνοντας όγκο DV_{pm}



Σχήμα 3.6: *Remeshing*

3.5 Υπόθεση Ισεντροπικής Ροής

Στην περίπτωση της ισεντροπικής ροής ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις(7.12) (7.13) (7.17):

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} = \frac{p}{\rho^\gamma}$$

$$\nabla h = \frac{\nabla p}{\rho}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} + \frac{u^2}{2} + h + q = \left(\frac{u^2}{2}\right)_\infty + h_\infty$$

Προκύπτει λοιπόν ότι εξίσωση μεταφοράς του Dilatation μπορεί να γραφτεί:

$$\frac{D\Theta_p}{Dt} = V_p (2\|\nabla \vec{u}\| - \nabla^2 h)_p \quad (3.29)$$

ενώ ο βαροτροπικός όρος στην εξίσωση μεταφοράς της στροβιλότητας μεταφοράς (3.11) μηδενίζεται διότι τα διανύσματα $\nabla p, \nabla \rho$ είναι ομόρροπα: ¹

$$\frac{D\vec{\Omega}_p}{Dt} = V_p ((\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u})_p \quad (3.30)$$

Όσον αφορά η εξίσωση της ενέργειας (3.15) μπορεί να αντικατασταθεί απο την ισεντροπική σχέση στην οποία η πίεση και η ενθαλπία είναι συνάρτηση μόνο της πυκνότητας. Με βάση την (7.13) προκύπτει:

$$p = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \rho^\gamma \rightarrow p = p(\rho), h = h(\rho) \quad (3.31)$$

με την πυκνότητα να προκύπτει απο την εξίσωση συνέχειας.

Συνοψίζοντας ένας πιθανός αλγόριθμος επίλυσης της ροής αποτελεί ο εξής. Επιλύεται η εξίσωση διατήρησης της μάζας, η εξίσωση μεταβολής όγκου, η εξίσωση στροβιλότητας στην μορφή (3.30) η εξίσωση μεταβολής της μεταβολής όγκου στην μορφή (3.29), ενώ για την ενέργεια επιλύεται είτε η εξίσωση Lagrange για την ενθαλπία (3.15), είτε η ισεντροπική σχέση (3.31)

3.5.1 Hamilton-Jacobi

Από την εξίσωση (7.17), αναπτύσσοντας τον όρο της ταχύτητας \vec{u} ,

$$\vec{U} = \vec{U}_\alpha + \nabla\Phi$$

όπου,

$$\vec{U}_\alpha = \vec{U}_\infty + \vec{U}_\omega$$

1

$$p = f(\rho) \rightarrow \nabla(p) = \nabla(f(\rho)) = \frac{df}{d\rho} \nabla\rho \rightarrow \nabla\rho \times \nabla p = \frac{df}{d\rho} (\nabla\rho \times \nabla\rho) = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{\rho^2} \nabla\rho \times \nabla p \right) = 0$$

προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{(\vec{U}_\alpha + \nabla\Phi) \cdot (\vec{U}_\alpha + \nabla\Phi)}{2} + h + q &= \left(\frac{u^2}{2}\right)_\infty + h_\infty \\ \frac{d\Phi}{dt} + \frac{\vec{U}_\alpha^2 \nabla\Phi^2}{2} + \vec{U}_\alpha \cdot \nabla\Phi + h + q &= \frac{u^2}{2}_\infty + h_\infty \\ \frac{d\Phi}{dt} + \frac{\nabla\Phi^2}{2} + \vec{U}_\alpha \cdot \nabla\Phi &= \left(\frac{u^2}{2}\right)_\infty + h_\infty - q - h - \frac{\vec{U}_\alpha^2}{2} \\ \frac{d\Phi}{dt} + H(\nabla\Phi) + \vec{U}_\alpha \nabla\Phi &= f \end{aligned}$$

με την Χαμιλτονιανή να είναι H ,

$$H(\nabla\Phi) = \frac{1}{2} \nabla\Phi^2$$

έτσι η παραπάνω εξίσωση έρχεται στην μορφή της υπερβολικής εξίσωσης Hamilton-Jacobi .

Η ενθαλπία h μέσω της εξίσωσης (7.13) έρχεται στην μορφή:

$$h = h(\rho) = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} = C \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} \quad (3.32)$$

Συνοψίζοντας λοιπόν,

$$\frac{d\Phi}{dt} + \frac{\nabla\Phi^2}{2} + \vec{U}_\alpha \cdot \nabla\Phi = \left(\frac{u^2}{2}\right)_\infty + h_\infty - C \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} - q - \frac{\vec{U}_\alpha^2}{2}$$

$$\nabla^2 q = \text{div}(\vec{u} \times \vec{\omega})$$

$$\nabla^2 \Phi = \theta$$

Διακριτοποιώντας ως προς τον χρόνο ως εξής,

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{dt} + \left(\frac{\nabla \Phi^2}{2} + \vec{U}_\alpha \cdot \nabla \Phi \right)^n = \left(\left(\frac{u^2}{2} \right)_\infty + h_\infty - C \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} - q - \frac{\vec{U}_\alpha^2}{2} \right)^n \quad (3.33)$$

$$\nabla^2 \Phi^{n+1} = \theta^{n+1} \quad (3.34)$$

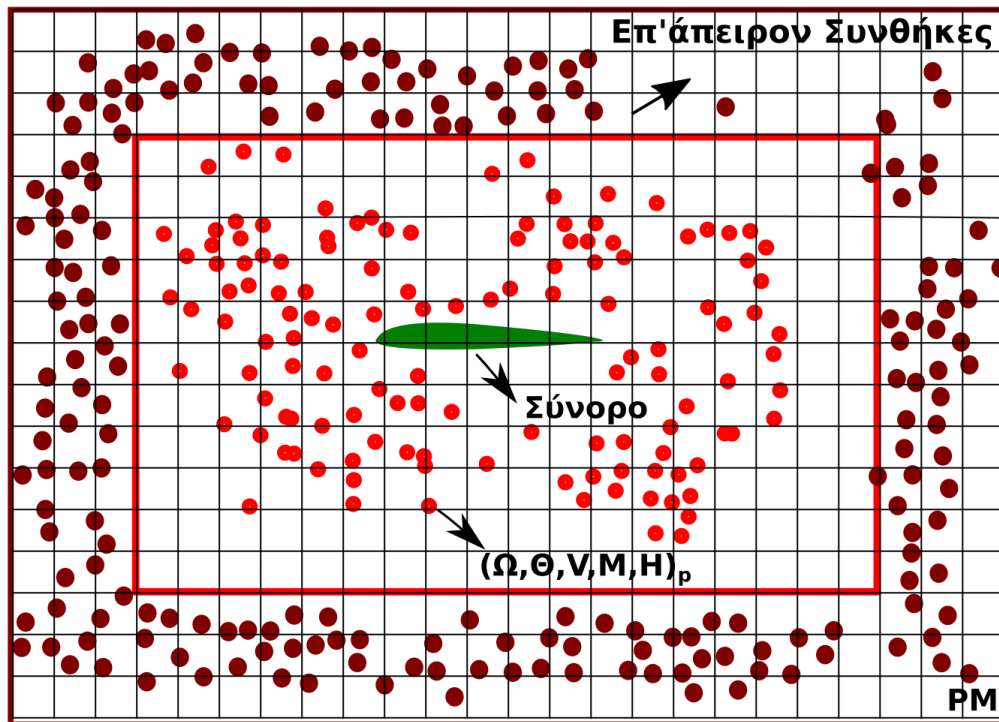
καταλήγουμε σε ένα σύστημα όπου μπορεί προσδιορίζεται το θ^{n+1} . Πρέπει να σημειωθεί στο σημείο αυτό, ότι αυτός ο τρόπος αποτελεί έναν Eulerian τρόπο υπολογισμού της μεταβολής του όγκου, μέσω του δυναμικού της αστρόβιλη ροής, σε συνδιασμό με την υπόθεση ισεντροπικής ροής. Επόμενως γίνεται αντικατάσταση της Lagrangian (3.29) από μια Eulerian εξίσωση για την μεταβολή του όγκου. Το πλέγμα πάνω στο οποίο επιλύεται είναι αυτό του Particle Mesh, το οποίο όμως δεν σέβεται το σύνορο, γεγονός το οποίο θα συζητηθεί εκτενώς στο επόμενο κεφάλαιο.

3.6 Υπολογιστικό χωρίο

Στις εφαρμογές οι οποίες εξετάζονται δίνεται έμφαση στην ροή κοντά στις στερεές επιφάνειες. Συνεπώς, μπορεί να θεωρηθεί ότι η ροή σε κάποια απόσταση από το σώμα είναι σε μόνιμη κατάσταση και δεν υπάρχουν διαταραχές στα μεγέθη $(h, \rho, \theta, \vec{\omega})$. Αντίστοιχα λοιπόν τα στοιχεία στροβιλότητας τα οποία βρίσκονται στις εξωτερικές περιοχές του υπολογιστικού χωρίου όπως φαίνεται στο σχήμα (3.7), έχουν τις επάπειρο συνθήκες της ροής.

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται στην διαχείριση της στροβιλότητας ως προς τα εξωτερικά όρια του υπολογιστικού χωρίου. Εξαιτίας του γεγονότος ότι η στροβιλότητα είναι μέγεθος το οποίο επηρεάζει το πεδίο ροής και τα φορτία πάνω στις επιφάνειες, δεν επιτρέπεται ένα στοιχείο στροβιλότητας το οποίο μεταφέρει στροβιλότητα, λόγω μεταφοράς (*convection*) να μεταφερθεί εκτός από του υπολογιστικού χωρίου. Επομένως τα όρια του υπολογιστικού χωρίου πρέπει να είναι επαρκή ώστε να ικανοποιείται ο παραπάνω

περιορισμός.



Σχήμα 3.7: Υπολογιστικό χωρίο

3.7 Ηχητικά κύματα-Απόσβεση

Παρατηρείται ότι οι μεταβολές των μεγεθών (p, h, ρ, θ) διαδίδονται με την μορφή ακουστικών κυμάτων. Αυτό δικαιολογείται πλήρως από τις ιδιοτιμές των συμπιεστών εξισώσεων της ροής. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο υπερβολικός χαρακτήρας δίνεται από την εξίσωση Hamilton-Jacobi. Άρα η μεταβολή του όγκου είναι άμεσα συνδεδεμένη με ακουστικά κύματα. Επίσης η σύζευξη μεταξύ θ με p, ρ είναι ισχυρή λόγω της ισοεντροπικής ροής και την εξίσωσης συνέχειας.

Με βάση το παραπάνω υπολογιστικό χωρίο, όταν τα ακουστικά κύματα προσεγγίσουν τα όρια αυτού, ανακλώνται, και επιστρέφουν πίσω στην ροή. Το γεγονός αυτό δεν

έχει φυσική σημασία, μιας και στα όρια επικρατούν οι συνθήκες τις επάπειρου ροής (τα στοιχεία στροβιλότητας που βρίσκονται δλδ εκεί), επομένως πρέπει να γίνει απόσβεση της μεταβολής όγκου σε μια περιοχή κοντά στα όρια του υπολογιστικού χωρίου. Αυτό επιτυγχάνεται με μια συνάρτηση απόσβεσης στην η οποία εφαρμόζεται στο J^{n+1} .

$$Hamilton - Jacobi \rightarrow \Phi^{n+1} \rightarrow \Theta^{n+1}$$

$$\Theta^{n+1} = \Theta^{n+1} - \zeta(x)\zeta(y)\zeta(z)\Theta^n$$

$$\zeta(r) = \begin{cases} \alpha \left(\frac{r-r_{beg}}{r_{end}-r_{begin}} \right)^2 & r \geq r_{beg} \\ 0 & r \leq r_{beg} \end{cases}$$

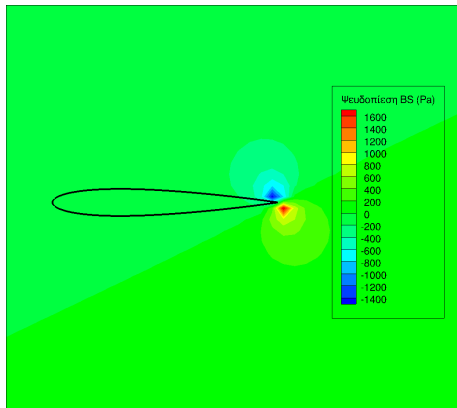
όπου r_{beg} είναι η θέση στην οποία ξεκινάει να εφαρμόζεται η απόσβεση και r_{end} είναι η θέση στην οποία η απόσβεση $\zeta = \alpha$, όπου α είναι η παράμετρος της έντασης της απόσβεσης.

3.8 Υπολογισμός της Ψευδοπίεσης

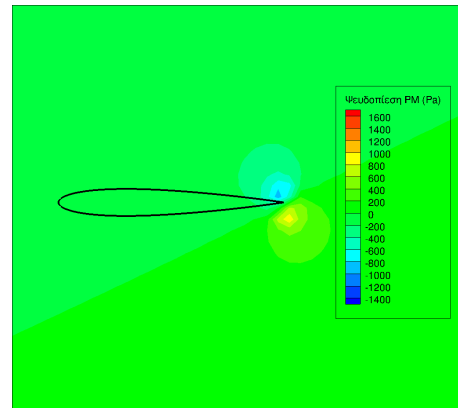
Το Particle Mesh εκτός απο την επίλυση των εξισώσεων Poisson για το πεδίο της ταχύτητας, χρησιμοποιείται και για την επίλυση της εξίσωσης για την ψευδοπίεση q .

$$\nabla^2 q = \text{div}(\vec{u} \times \vec{\omega}) \rightarrow \nabla^2 q_{i,j,k} = \text{div}(\vec{u}_{i,j,k} \times \vec{\omega}_{i,j,k})$$

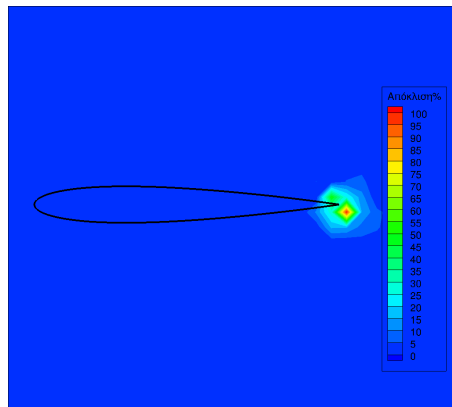
της οποία η ολοκληρωτική επίλυση δίνεται απο την σχέση (7.16). Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η σύγκριση της ολοκληρωτικής επίλυσης μέσω του Biot-Savart και εκείνης μέσω του PM στους κόμβους του πλέγματος αυτού.



(α') Ψευδοπίεση υπολογισμένη με *Biot-Savart*



(β') Ψευδοπίεση υπολογισμένη με *PM*



(γ') Απόκλιση των δύο λύσεων

Σχήμα 3.8: Σύγκριση της Ψευδοπίεσης υπολογισμένης με *Biot-Savart* και με *PM* στους κομβους αυτου. Πρόκειται για αεροτομή *NACA0012* $U_\infty = 100$ και ατμοσφαιρικές συνθήκες, η σχετική γωνία της ροής είναι 8 μοίρες, $DX_{pm} = DY_{pm} = DZ_{pm} = 0.05$, 1ο χρονικό βήμα όπου έχει δημιουργηθεί ο πρώτος στρόβιλος στον ομόρροο.

Συμπερένεται λοιπόν απόκλιση μεταξύ των δύο λύσεων, ουσιαστικά παρούσιαζεται μόνο στην ακμή εκφυγής όπου είναι συγκεντρωμένη η στροβιλότητα.

3.9 Ο Lagrangian αλγόριθμος επίλυσης

Παρακάτω δίνεται ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος της ροής. Να σημειωθεί ότι ο δείκτης $(...)_p$ αναφέρεται στα στοιχεία στροβιλότητας ενώ δείκτης $(...)_{pm}$ αναφέρεται στην λύση του Particle Mesh, $(...)_{ij}$ αναφέρεται στις ποσότητες στον κόμβο i, j του

Particle Mesh, $(\dots)_s$ αναφέρεται στις ποσότητες στις επιφάνειες. Επίσης, ο εκθέτης $(\dots)^n$ αναφέρεται στις τιμές στο χρονικό βήμα n ενώ $(\dots)^{n+1}$ στις τιμές την χρονική στιγμή $(n + 1)$.

Επομένως έχουμε τα στοιχεία στροβιλότητας $\vec{U}_p^n(t) = \left\{ \vec{Z}_p, M_p, \vec{\Omega}_p, \Theta_p, (P_p \text{ ή } H_p), V_p \right\}_p^n$ την χρονική στιγμή n , όπου ικανοποιείται η συνθήκη μη εισχώρησης.

Βήμα 1α:

Προβολή $\left\{ M_p, \vec{\Omega}_p, \Theta_p, H_p \right\}_p^n$ στο πλέγμα Particle Mesh $\rightarrow \{ \rho, \vec{\omega}, \theta, h \}_{i,j,k}^n$

Βήμα 1β:

Μετατροπή των συνοριακών όρων (πηγών-διπόλων) σε στοιχεία στροβιλότητας μέσω της ολοκληρωτικής αναπαράστασης και προβολή και αυτών στο πλέγμα Particle Mesh $(\omega_s^n, \theta_s^n) \rightarrow (\omega_{i,j,k}^n, \theta_{i,j,k}^n)$

Βήμα 2:

Υπολογισμός πεδίου ταχύτητας από εξισώσεις Poisson:

$$\nabla^2 \phi_{i,j,k} = \theta_{i,j,k}$$

$$\nabla^2 \vec{\psi}_{i,j,k} = -\vec{\omega}_{i,j,k}$$

$$\vec{u}_{i,j}^n = \nabla \phi_{i,j,k}^n + \nabla \times \vec{\psi}_{i,j,k}^n$$

Βήμα 3α:

Υπολογισμός στο Particle Mesh πλέγμα του όρου $\left\{ (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} \right\}$ για την εξίσωση εξέλιξης της στροβιλότητας.

Βήμα 3β:

Επίλυση της εξίσωσης Poisson για την Ψευδο-Πίεση στο πλέγμα του Particle Mesh

$$\nabla^2 q_{i,j,k} = \text{div} (\vec{u}_{i,j,k} \times \vec{\omega}_{i,j,k})$$

Βήμα 3γ:

Επίλυσης της εξίσωσης Hamilton-Jacobi

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{dt} + \left(\frac{\nabla \Phi^2}{2} + \vec{U}_\alpha \cdot \nabla \Phi \right)^n = \left(\left(\frac{u^2}{2} \right)_\infty + h_\infty - C \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} - q - \frac{\vec{U}_\alpha^2}{2} \right)^n$$

$$\nabla^2 \Phi^{n+1} = \theta^{n+1}$$

Βήμα 4:

Παρεμβολή (3.28) στις θέσεις $\vec{Z}_{i,j,k}^n$ της ταχύτητας $\vec{U}_{i,j,k} \rightarrow \vec{U}_p$, και του *RHS* (3.30) $\left\{ (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} \right\}_{i,j,k} \rightarrow \left\{ (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} \right\}_p$

Βήμα 5:

Ολοκλήρωση των εξισώσεων (3.30),(3.10),(3.9) και ανανέωση των μεγεθών που μεταφέρουν τα στοιχεία $\rightarrow \vec{Z}_p^{n+1}, \vec{\Omega}_p^{n+1}, M_p^{n+1}, V_p^{n+1}$

Βήμα 6:

Παρεμβολή (3.28) του θ^{n+1} στις νέες θέσεις των στοιχείων \vec{Z}_p^{n+1} :

$$\theta_{pm}^{n+1} \rightarrow \theta_p^{n+1}$$

$$\Theta_p^{n+1} = \theta_p^{n+1} V_p^{n+1}$$

Βήμα 7:

Υπολογισμός πίεσης,ενθαλπίας:

$$\rho^{n+1} = \frac{M^{n+1}}{V^{n+1}} \quad h = h(\rho) \xrightarrow{3.32} h^{n+1}, p^{n+1} \rightarrow H^{n+1}, P^{n+1}$$

Βήμα 8α:

Ψπολογισμός της επαγόμενης ταχύτητας στο σύνορο απο τους χωρικούς όρους(2.16) για την χρονική στιγμή $(n+1)$. Προβολή $\{\Theta_p^{n+1}, \vec{\Omega}_p^{n+1}\}$ στο πλέγμα του Particle Mesh, επίλυση των εξισώσεων (3.18), υπολογισμός $u_{i,j,k}^{n+1}$ και έπειτα παρεμβολή στο σύνορο (3.28) $\rightarrow U_{\Theta, \Omega_{surface}}^{n+1}$

Βήμα 8β:

Υπολογισμός *RHS* την εξίσωσης μη εισχώρησης(2.16)

$$\frac{\partial \Phi_{\sigma, \mu}^{n+1}}{\partial n} = -U_{\Theta, \Omega_{surface}}^{n+1} \cdot \vec{n} - U_{\infty}^{n+1} \cdot \vec{n} - U_{body}^{n+1} \cdot \vec{n}$$

Βήμα 9: Ικανοποίηση της Συνθήκης μη-εισχώρησης και της συνθήκης Kutta και υπολογισμός των άγνωστων διανομών $(\sigma, \mu)^{n+1}$ στο σύνορο. Τέλος δημιουργία νέων στοιχείων στροβιλότητας στην αμκή εκφυγής, με βάση την στροβιλή θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας.(Κεφάλαιο 2.2.2) [;]

Κεφάλαιο 4

Λεπτομέρειες της εφαρμογής

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά θα αναφερθούν τα βασικά ζητήματα και δυσκολίες οι οποίες παρουσιάστηκαν κατά την ανάπτυξη του επίλυτη. Έπειτα θα παρουσιαστούν μέθοδοι και τεχνικές που δοκιμάστηκαν για την αντιμετώπιση αυτών. Τέλος θα σημειωθούν οι διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης του προβλήματος, καθώς και η συλλογιστική πορεία που οδήγησε στο τελικό αποτέλεσμα.

4.1 Βασικά ζητήματα και δυσκολίες

Οι κύριες δυσκολίες οι οποίες παρουσιάζονται οφείλονται κατα κύριον λόγο στο γεγονός ότι το πλέγμα του Particle Mesh δεν λαμβάνει υπόψη την γεωμετρία του στερεού συνόρου. Πιο αναλυτικά, το πλέγμα του PM είναι καρτεσιανό και η θέση του σώματος είναι αυθαίρετη, ενώ το Particle Mesh αντιλαμβάνεται την παρουσία του συνόρου μέσω των επιφανειακών στοιχείων στρωβιλότητας τα οποία μεταφέρουν την ισοδύναμη πληροφορία στους κόμβους αυτού. Συνεπώς η περιοχή γύρω από το στερεό σύνορο είναι εκείνη η οποία χρειάζεται ιδιαίτερη μεταχείριση, όπου και σημειώνονται οι εξής δυσκολίες:

- Ο υπολογισμός του πεδίου ταχύτητας δεν είναι ακριβής.
- Ο υπολογισμός των παραγώγων με σεβασμό στο στερεό σύνορο.

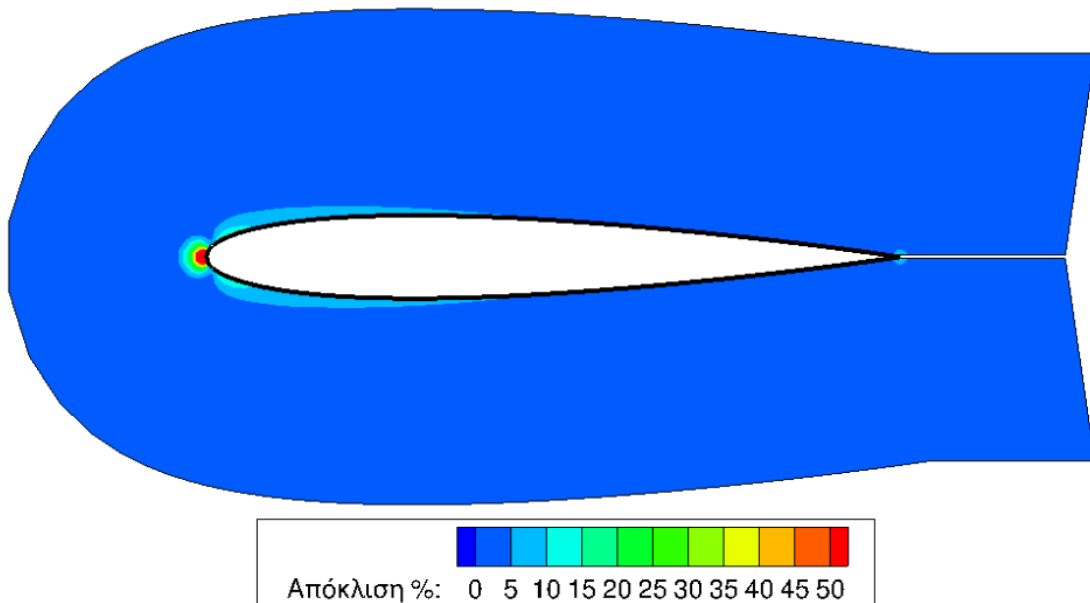
- Οι Συναρτήσεις Προβολής-Παρεμβολής με σεβασμό στο στερεό σύνορο.

4.1.1 Πεδίο Ταχύτητας Particle Mesh

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η απόκλιση της ταχύτητας του Particle Mesh από την ακριβή ταχύτητα η οποία προκύπτει από την ολοκληρωτική αναπαράσταση (2.8) που εκφράζει του νόμους του Biot-Savart . Η απόκλιση εκφράζεται ως:

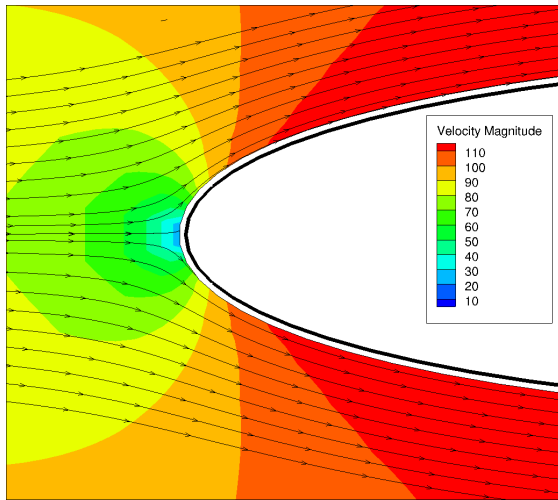
$$Deviation = \frac{U_{pm} - U_{bs}}{U_{bs}}$$

Η σύγκριση έγινε σε αεροτομή NACA0012 σε γωνία πρόσπτωσης 0 μοίρες και ταχύτητα 100m/s, ενώ για το PM επιλέχθηκε: $DX_{pm} = DY_{pm} = DZ_{pm} = 0.05$.

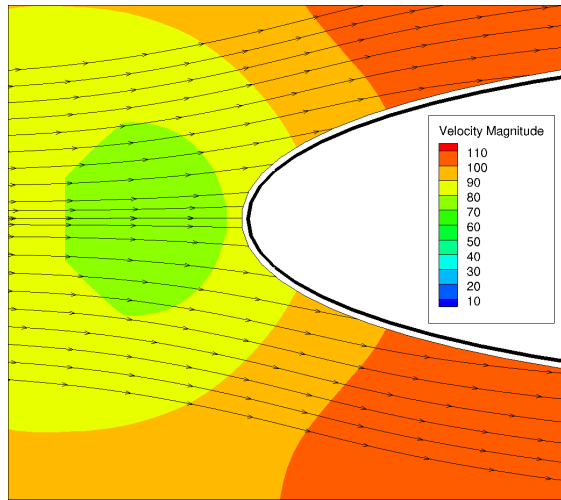


Σχήμα 4.1: Απόκλιση του πεδίου ταχύτητας εφαρμόζοντας Particle Mesh και BS

Παρατηρείται λοιπόν από το Σχήμα (4.1) ότι το πεδίο ταχύτητας, παρουσιάζει πολύ μεγάλη απόκλιση κοντά στο συνόρο και ιδιαίτερα στην περιοχή του σημείου ανακοπής. Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να παρουσιαστούν οι γραμμές ροής στην περιοχή γύρω από την ακμή πρόσπτωσης για τα δυο πεδία ταχύτητας.



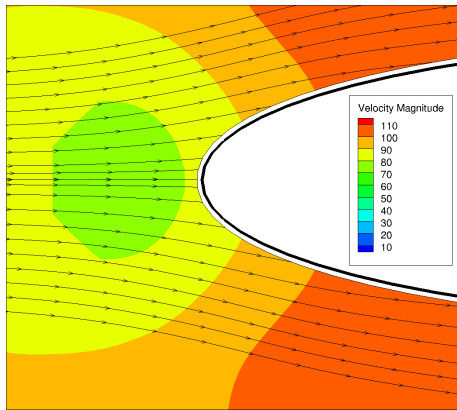
Σχήμα 4.2: Γραμμές Ροής BS



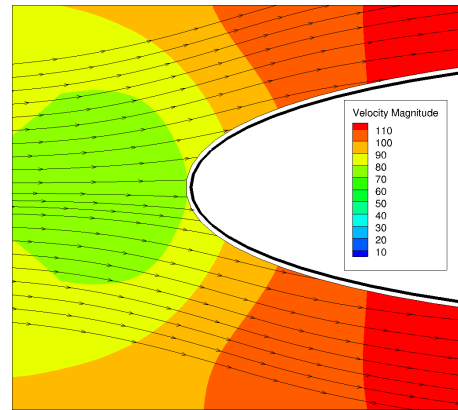
Σχήμα 4.3: Γραμμές Ροής PM

Με βάση λοιπόν τα σχήματα (4.2),(4.3) συμπεραίνεται ότι μέσω του Particle Meshto σημείο ανακοπής δεν μπορεί να υπολογιστεί, όπως και η περιοχή κοντά στο στερεό σύνορο όπου οι κλίσεις ταχύτητω είναι μεγάλες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι γραμμές ροής να είναι λανθασμένες, δίνοντας για τα στοιχεία στροβιλότητας τροχιές τέτοιες, που θα εισέρχονται εντός του στερεού συνόρου και δεν θα κινούνται εφαπτομενικά αυτού.

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3.3, τα μεγέθη $(\Theta_{p,s}, \Omega_{p,s})$ για τα επιφανειακά στοιχεία στροβιλότητας μπορούν να προκύψουν και χρησιμοποιώντας την έμμεση διατύπωση πηγών διπόλων. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η σύγκριση των πεδίων ταχύτητων που προκύπτουν μέσω PM, για τις διατυπώσεις (3.21) και (3.23) για τα επιφανειακά στοιχεία.



(α') Άμεση διατύπωση για το πεδίο ταχύτητας

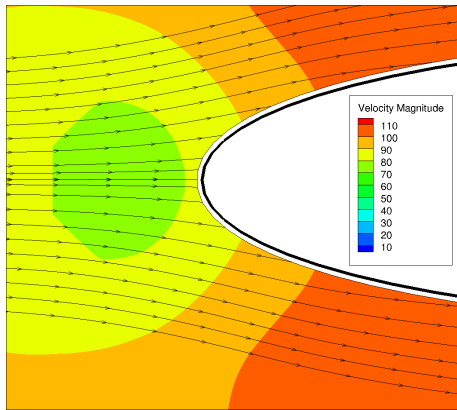


(β') Έμμεση διατύπωση

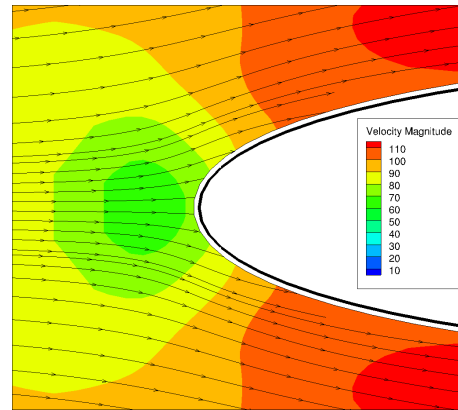
Σχήμα 4.4: Σύγκριση πεδίου ταχύτητας, γραμμών ροής υπολογισμένων με *PM* για τις δυο διαφορετικές διατυπώσεις των επιφανειακών στοιχείων στροβιλότητας

Παρατηρείται λοιπόν ότι δεν υπάρχει ιδιαίτερη διαφοροποίηση ανάμεσα στις δύο διατυπώσεις.

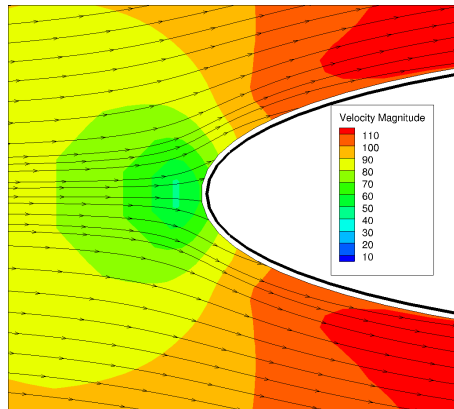
Ένας τρόπος αντιμετώπισης του παραπάνω πρόβληματος των γραμμών ροής είναι να γίνει πύκνωση του πλέγματος του *PM* όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα(4.5):



(α') $(DX, DY, DZ)_{pm} = 0.05$



(β') $(DX, DY, DZ)_{pm} = 0.025$



(γ') $(DX, DY, DZ)_{pm} = 0.0125$

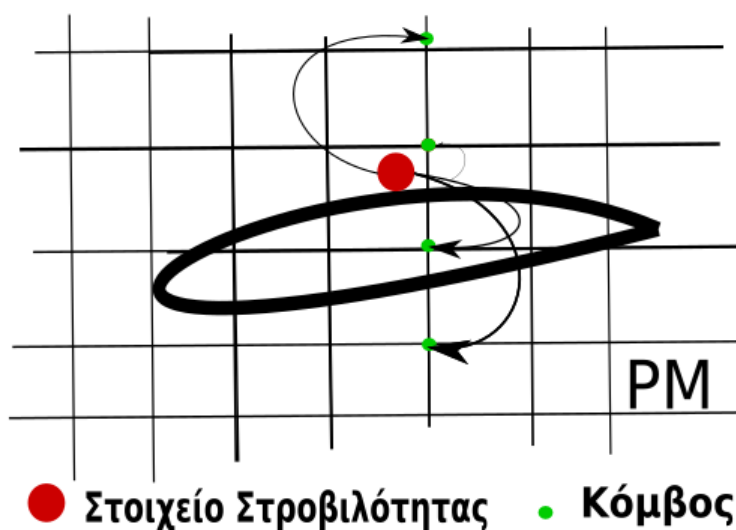
Σχήμα 4.5: Σύγκριση πεδίου ταχύτητας, γραμμών ροής για αεροτομή NACA0012 σε μηδενική γωνία, σε ταχύτητα $U_\infty = 100\text{m/s}$ για διαφορετικά πλέγματα PM

Καταληγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι πυκνώνοντας το πλέγμα, προσεγγίζεται το σημείο ανακοπής και οι γραμμές ροής τείνουν προς αυτές την αναλυτικής λύσης(Biot-Savart).

4.1.2 Υπολογισμός παραγώγων- Συναρτήσεις Παρεμβολής

Ο υπολογισμός των παραγώγων στην γειτονική περιοχή του στερεού συνόρου αποτελεί μείζον πρόβλημα, διότι η παραγωγή της μεταβολής του όγκου όπως φαίνεται απο τις εξισώσεις (3.29)(3.34) εξαρτάται απο αυτές. Ο υπολογισμός αυτών πραγματοποιείται

στο πλέγμα του Particle Mesh, του οποίου η πληροφορία προκύπτει άμεσα από τις προβολόμενες ποσότητες που μεταφέρουν τα στοιχεία στροβιλότητας. Επομένως τίθεται το ζήτημα η 'επικοινωνία' PM και στοιχείων στροβιλότητας μέσω των συναρτήσεων προβολής παρεμβολής να γίνεται με σεβασμό στο στερεό σύνορο. Αντίστοιχα και ο υπολογισμός των παραγώγων πρέπει να ακολουθεί αυτήν την αρχή. Οι υπολογισμοί στην περιοχή αυτή δυσχεραίνονται επιπλέον λόγω της μεγάλων κλίσεων ταχυτήτων που σημειώνονται λόγω του σώματος.



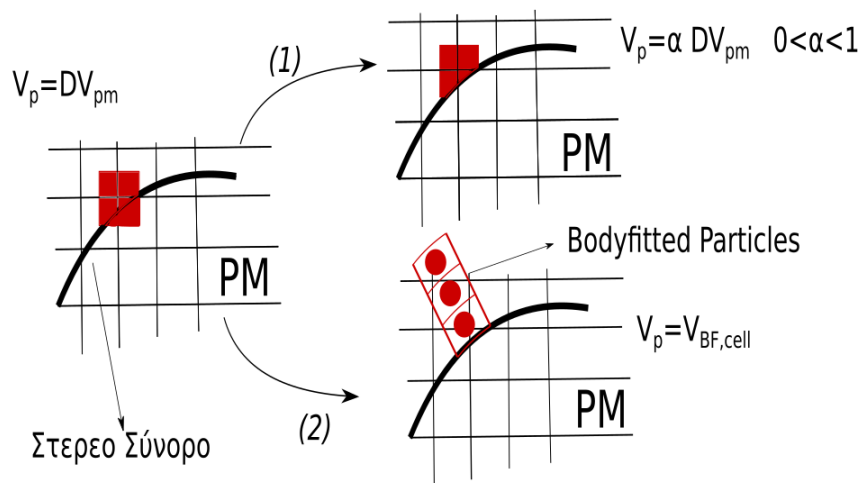
Σχήμα 4.6: Ανομοιομορφία του πλέγματος PM σε σχέση με το στερεό σύνορο

4.2 Μέθοδοι και τεχνικές επίλυσης

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν αναλυτικά μέθοδοι και τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για την αντιμετώπιση των παραπάνω ζητημάτων.

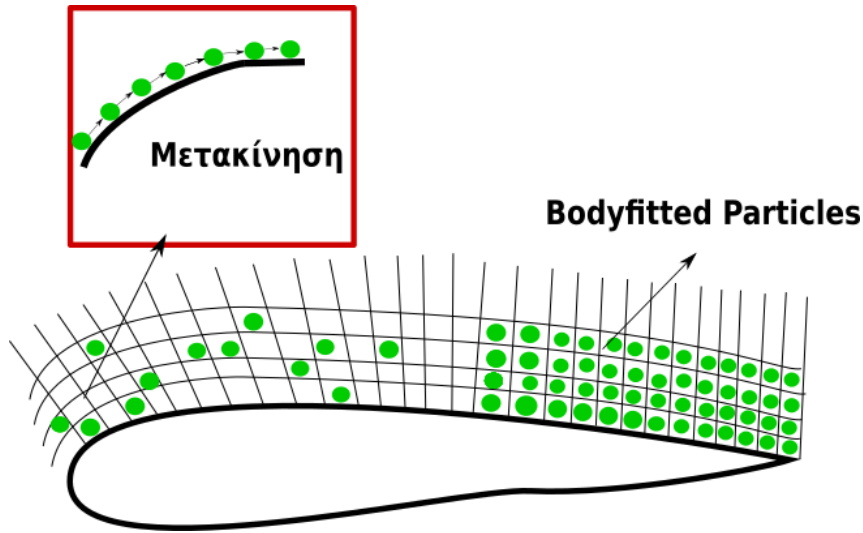
4.2.1 Χρήση Bodyfitted-Particles

Η χρήση σωματόδετων στοιχείων στροβιλότητας γίνεται ώστε η πληροφορία να είναι διατεταγμένη έτσι ώστε να σέβεται την ύπαρξη του στερεού συνόρου όπως φαίνεται και στο σχήμα (4.7).



Σχήμα 4.7: Τρόποι διόρθωσης του όγκου των στοιχείων στροβιλότητας στους γειτονικούς κόμβους με το σύνορο

Στην λογική αυτή, τα στοιχεία στροβιλότητας που δημιουργούνται κατά το remeshing στο εσωτερικό του σώματος διαγράφονται. Επιπλέον κατά την μετακίνηση θα σέβονται την ύπαρξη του στερεού συνόρου και θα κινούνται εφαπτομενικά αυτού. Με βάση αυτά τα οποία αναφέρθηκαν παραπάνω για το πεδίο ταχύτητας, υπάρχει η δυνατότητα μετακίνησης τους με την ολοκληρωτική αναπαράσταση πηγών-διπόλων, η οποία σέβεται την κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης, με αποτέλεσμα τα στοιχεία στροβιλότητας να μην εισέρχονται εντός του συνόρου. Το πάχος της συγκεκριμένης ζώνης μπορεί να προσδιοριστεί με βάση το σχήμα (4.1), τοποθετώντας ένα αποδεκτό ανώτατο όριο απόκλισης για το μέτρο της ταχύτητας.



Σχήμα 4.8: Σωματόδετα Στοιχεία Στροβιλότητας

4.2.2 Τεχνικές υπολογισμού της μεταβολής του όγκου

Οι προσεγγίσεις του προβλήματος μπορούν να χωριστούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες με βάση το τρόπο υπολογισμού και ανανέωσης της μεταβολής του όγκου στα στοιχεία της ροής Θ_p , το οποίο αποτελεί και το βασικό ζητούμενο για την διάδοση των ακουστικών κυμάτων.

- Απευθείας υπολογισμός του Θ_p από την Lagrangian εξίσωση σε ισεντροπική μορφή

$$\frac{D\Theta_p}{Dt} = V_p (2\|\nabla\vec{u}\| - \nabla^2 h)_p \quad (4.1)$$

- Υπολογισμός του δυναμικού του αστρόβιλου τμήματος της ροής Φ μέσω της γενικευμένης εξίσωσης Bernoulli

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{dt} = - \left(\frac{u^2}{2} + h + q + \left(\frac{u^2}{2} \right)_\infty + h_\infty \right)^n \quad (4.2)$$

σε μια Eulerian λογική στους κόμβους του Particle Mesh.

Με την χωρική μεταβολή του όγκου θ να υπολογίζεται απο την λαπλασιανή $\theta^{n+1} = \nabla^2 \Phi^{n+1}, \Theta^{n+1} = \theta^{n+1} V_p^{n+1}$.

- Η εξίσωση Hamilton-Jacobi 3.34 για το βαθμωτό δυναμικό η οποία αποτελεί διαφοροποίηση στο τρόπο υπολογισμού του βαθμωτού δυναμικού σε σχέση με την γενικευμένη Bernoulli .

Να σημειωθεί ότι για όλες τις προσεγγίσεις, επειδή πρόκειται για ένα σύστημα μη γραμμικών διαφορικών σχέσεων παρατηρείται ευαισθησία ως προς το χρονικό βήμα, όπως και στο σχήμα αριθμητικής ολοκλήρωσης ως προς τον χρόνο.

4.2.3 Τεχνικές υπολογισμού της ενθαλπιας

Ο υπολογισμός της ενέργειας των στοιχείων στροβιλότητας είναι ισοδύναμος με τον υπολογισμό της ενθαλπίας H_p που μεταφέρουν. Η υπόθεση της ισεντροπικής ροής παντού στο χωρίο εισάγει μια επιπλέον εξίσωση για τον υπολογισμό της ενθαλπιας:

$$\frac{DH_p}{Dt} = ((2 - \gamma) h\theta)_p \quad (4.3)$$

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} = \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (4.4)$$

Κλείνοντας ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται ο τρόπος υπολογισμού και διαχείρισης του επιφανειακού όρου h_s . Μια προσέγγιση αποτελεί η υπόθεση της ισεντροπικής ροής για τα στοιχεία, έτσι ο όρος h_s μπορεί να προσδιοριστεί από την εξίσωση .

4.2.4 Τεχνικές υπολογισμός των παραγώγων

Στο σημείο αυτό συζητήθηκαν τρόποι βελτίωσης του υπολογισμού των κλίσεων της ταχύτητας κοντά στο σύνορο, οι οποίοι είναι οι εξής:

1. Υπολογισμός των παραγώγων με one-sided στο σωματόδετο πλέγμα μέσω πεπερασμένων όγκων .Ως ταχύτητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε εκείνες του Particle Mesh με παρεβολή στις πλευρές των πεπερασμένων όγκων, είτε οι ταχύτητες που προκύπτουν απο την ολοκληρωτική διατύπωση και εκφράζονται με τους νόμους Biot-Savart .

2. Υπολογισμός των κλίσεων με την μεθοδο SPH(Smoothed Particles Hydrodynamics)[30].

4.3 Προσεγγίσεις του προβλήματος

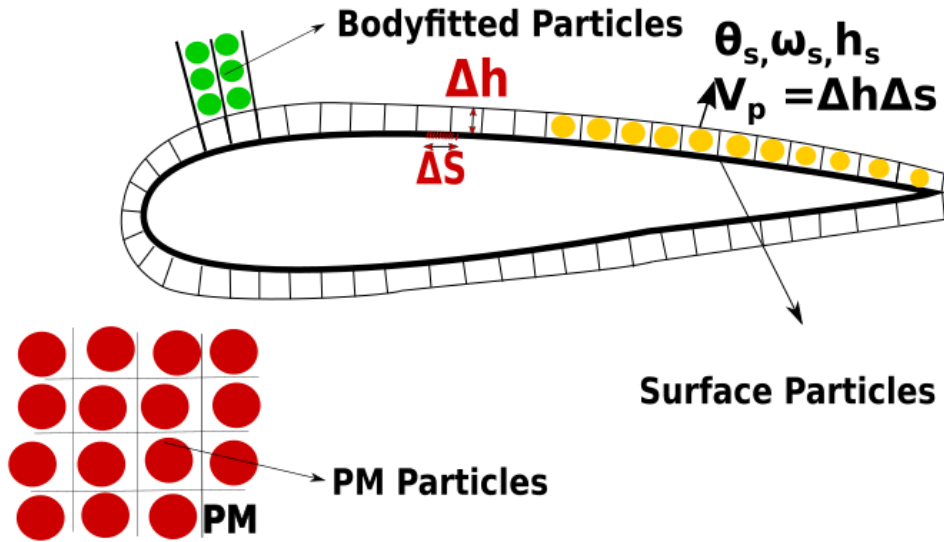
4.3.1 Προσέγγιση στην λογική του Hopflow

Στην λογική του Hopflow για την περιοχή κοντα στο στερεό σύνορο επιλύονται σε σωματόδετο πλέγμα οι Eulerian εξισώσεις της ροής και δημιουργούνται στοιχεία στροβιλότητας που μεταφέρουν ισοδύναμη πληροφορία, ικανοποιώντας την συνθήκη μη εισχώρησης. Στην περίπτωση μας, ο Eulerian επιλύτης αντικαθίσταται με την ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης μέσω της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων, δημιουργώντας επιφανειακά στοιχεία στροβιλότητας.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί η ουδιώδης διαφορά μεταξύ του επιλύτη Hopflow και του Lagrangian επιλύτη της παρούσας εργασίας. Από την μια πλευρά στον Hopflow η μεταβολή όγκου των χωρικών στοιχείων στροβιλότητας του σωματόδετου πλέγματος ανανεώνεται ώστε να ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη του προβλήματος, δίνοντας συνεπώς "σωστή πρόβλεψη" για τις ποσότητες των στοιχείων στην περιοχή κοντα στο σύνορο. Από την άλλη, στον επιλύτη μας δεν υπάρχει η δυνατότητα ανανέωσης της περιοχής αυτής και γίνεται αντικατάσταση με την απευθείας ικανοποίησης της οριακής συνθήκης στο σύνορο και την δημιουργία των επιφανειακών στοιχείων στροβιλότητας. Με βάση τα παραπάνω δεν προκύπτει κάποιο ιδιαίτερο ζητούμενο, αρκεί ο Lagrangian τρόπος υπολογισμού των ποσοτήτων των στοιχείων της ροής κοντά στο σώμα να είναι ορθός. Ωστόσο, είναι δύσκολο να επιτευχθεί για του λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Η αρχική ιδέα προσέγγισης του προβλήματος λοιπόν βασίζεται στην λογική του Hopflow [1], δηλαδή με την παρουσία σωματόδετων στοιχείων στροβιλότητας που δημιουργούνται σε ένα απλό σωματόδετο πλέγμα. Τα επιφανειακά στοιχεία στροβιλότητας τοποθετούνται στην πρώτη στρώση του πλέγματος, ενώ υπάρχει η δυνατότητα να διαχυθούν και στις επόμενες στρώσεις μέσω μιας συνάρτησης κατανομής. Τα στοιχεία

στροβιλότητας μεταφέρουν $\vec{U}_p(t) = \{ \vec{Z}_p, M_p, \vec{\Omega}_p, \Theta_p, H_p, V_p \}$. Ο υπολογισμός της μεταβολής όγκου και γίνεται με Lagrangian διατύπωση, αντίστοιχα και για την ενθαλπία (3.15).



Σχήμα 4.9: Πρόσγγιση στην λογική του Hopf flow

Η δυσκολία η οποία παρουσιάζεται είναι ότι ο όρος $\|\nabla \vec{u}\|$ από την εξίσωση της μεταβολής του όγκου περιέχει γινόμενα παραγώγων της ταχύτητας, οδηγώντας σε απειρισμούς της παραγώμενης μεταβολής όγκου γειτονικά με το στερεό σύνορο.

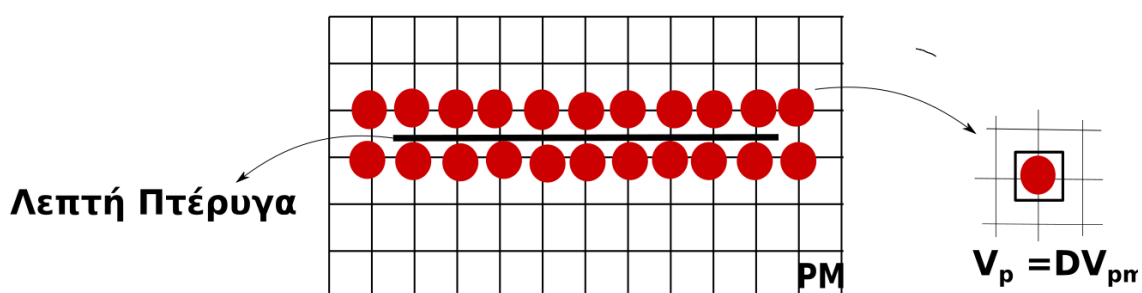
4.3.2 Πρόσγγιση με την χρήση της εξίσωσης Bernoulli

Για να αντιμετωπιστεί η δυσκολία στην ανανέωση των τιμών της μεταβολής του όγκου, γίνεται αντικατάσταση της Lagrangian εξίσωσης από την εξίσωση Bernoulli στους κόμβους του Particle Mesh για τον υπολογισμό του μέσω του δυναμικού Φ . Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται και σε αυτήν την περίπτωση στην διαχείριση των επιφανειακών όρων και συγκεκριμένα της επιφανειακής μεταβολής όγκου, συγκεκριμένα το $\frac{n+1}{i,j,k}$ που υπολογίζεται, περιέχει και τους επιφανειακούς όρους οι οποίοι αφαιρούνται στην προ-

σέγγιση μας. Αυτό είναι το αντίστοιχο της διαγραφής των επιφανειακών στοιχείων στροβιλότητας πριν την μετακίνηση. Μείζον θέμα λοιπόν αποτελεί ο τρόπος υπολογισμού της λαπλασιανής με σεβασμό του στερεού συνόρου. Επίσης μπορεί να γίνει χρήση των σωματόδετων στοιχείων στροβιλότητας και μέσω Biot-Savart η διόρθωση του πεδίου ταχύτητας. Κλείνοντας για την εξίσωση της ενέργειας, μπορεί είτε να χρησιμοποιηθεί η ισεντροπική σχέση είτε η Lagrange διατύπωση για την ενθαλπια. Αντίστοιχα η προσέγγιση αυτή οδηγεί σε τιμές της μεταβολής όγκου κοντά στο στερεό σύνορο οι οποίες αποκλίνουν την διαδικασία επίλυσης.

4.3.3 Προσέγγιση για λεπτή πτέρυγα

Με βάση τα παραπάνω παρατηρείται ότι η θέση του στερεού συνόρου ως προς το Particle Mesh αυξάνει την πολυπλοκότητα και δημιουργεί ζητήματα από τα οποία είναι δύσκολο να αποφανθείς, ποια η είναι η ουσιαστική παθολογία του προβλήματος. Συνεπώς, τίθεται η ανάγκη να μεταβούμε σε ένα απλούστερο πρόβλημα στο οποίο το πλέγμα του Particle Mesh θα σέβεται την παρουσία του στερεού συνόρου. Αυτό επιτυγχάνεται θεωρώντας λεπτή αεροτομή χωρίς πάχος, τοποθετημένη συμμετρικά στο πλέγμα Particle Mesh όπως και φαίνεται στο σχήμα. Στην λογική αυτή τα Particles που δημιουργούνται στους κόμβους του ΠΜ αποτελούν ουσιαστικά και σωματόδετα.



Σχήμα 4.10: *ἄπτιον*

Να σημειωθεί στο σημείο αυτό, ότι με την χρήση λεπτής πτέγγυγας, παύει να υπάρχει ουσιαστικά στερεό σύνορο και αυτό μοντελοποιείται ως ένα πηδημα εφαπτομενικής ταχύτητας που εισάγεται μέσω κατανομων διπόλων ή ισοδύναμα επιφανειακής στρο-

βιλότητας. Ουσιαστικά λοιπόν δεν υπάρχει παραγωγή επιφανειακής μεταβολής του όγκου. Το μεγάλο πλεονέκτημα της συγκεκριμένης προσέγγισης αποτελεί η δυνατότητα πραγματοποίησης one-sided υπολογισμό των παραγώγων μεω πεπερασμένων διαφορών στο πλέγμα, και χρήσης one-sided συναρτήσεων προβολής-παρεμβολής οι οποίες στην περίπτωση παχειάς πτέρυγας είναι περίπλοκο να εφαρμοστούν. Δοκιμάζοντας τα παραπάνω λοιπόν σε μια καθαρά Lagrangian η συγκέντρωση του στην ακμή πρόσπτωσης και ιδιαίτερα στην ακμή εκφυγής και η δυσκολία διάδοσης ,αποκλίνει τελικά το σύστημα.

4.3.4 Προσέγγιση με την χρήση της εξίσωσης Hamilton-Jacobi

Στην συνέχεια γίνεται η εισαγωγή της εξίσωσης Hamilton-Jacobi για τον υπολογισμό του βαθμωτού δυναμικού με βάση [16] που οδηγεί στην σύγκλιση και την διάδοση των ακουστικών κυμάτων. Έπειτα απο παραμετρικές μελέτες που πραγματοποιήθηκαν εξαγονται τα εξής συμπεράσματα ως προς την σύγκλιση:

- Παρατηρείται μεγάλη ευαισθησία στην θέση της πτέρυγας ως προς το πλέγμα Particle Mesh. Αδυναμία τοποθέτησης της πτέρυγας υπό γωνία.
- Οι υπολογισμοί των παραγώγων γίνονται με κεντρικές διαφορές, μη σεβόμενοι το στερεό σύνορο. Η εισαγωγή one-sided διαφορών είχαν αρνητική επίδραση.
- Αντίστοιχα και η εισαγωγή one-sided συναρτήσεων προβολής-παρεμβολής είχαν αρνητική επίδραση(ακμή πρόσπτωσης).

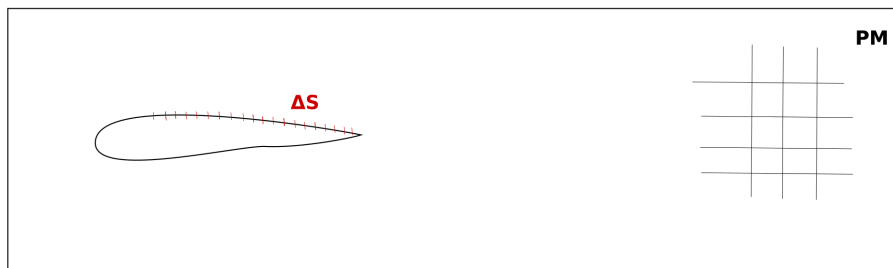
Για την αριθμητική ολοκλήρωση ως προς τον χρόνο έγινε χρήση Runge-Kutta 4ης τάξης και Runge-Kutta TVD 3ης τάξης [16]. Κλείνοντας έγινε χρήση του ίδιου αλγόριθμου σε πτέρυγες με πάχος του οποίου τα αποτελέσματα αναφέρονται στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 5

Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί αρχικά η υπολογιστική διάταξη, έπειτα θα αναφερθούν τα πεδία των μεγεθών και τέλος θα παρουσιαστούν τα φορτία.

5.1 Η υπολογιστική διάταξη



Σχήμα 5.1: Η υπολογιστική διάταξη

Η υπολογιστική διάταξη, όπως φαίνεται από το σχήμα (5.1), έχει δύο βασικές παραμέτρους

- Η διακριτοποίηση του συνόρου ΔS
- Το πλέγμα του Particle Mesh

Το πλέγμα του Particle Mesh χαρακτηρίζεται από το μέγεθος των κελιών του $DX_{pm}, DY_{pm}, DZ_{pm}$

και την έκταση του $NX_{pm}, NY_{pm}, NZ_{pm}$. Έπειτα απο παραμετρικές μελέτες που έγιναν σε διάφορες γωνίες πρόσπτωσης, και αριθμούς Mach της ροής παρατηρήθηκε ότι υπάρχει μεγάλη ευαισθησία ως προς την σύγκλιση των υπολογισμών αναλόγα:

- Το χρονικό βήμα
- $DX_{pm}, DY_{pm}, DZ_{pm}$
- Διακριτοποίηση της πτέρυγας ΔS
- Η σχετική θέση της πτέρυγας ως προς του κόμβους του PM

Επίσης καθοριστικό ρόλο παίζει και το σχήμα αριθμητικής ολοκλήρωσης, όπου χρησιμοποιήθηκε Runge-Kutta 4ης τάξης. Μέ βάση τις μελέτες μπορούν να εξαχθούν τα εξής συμπεράσματα για την σύγκλιση των υπολογισμών:

1. Πρώτον απαιτείται η διακριτοποίηση του στερεού συνόρου DS να είναι περίπου όσο είναι $DY_{pm} \cdot DX_{pm}$
2. Η ασύμμετρη τοποθέτηση εξαρτάται από την θέση την ακμή εκφυγής ως προς τον άξονα z

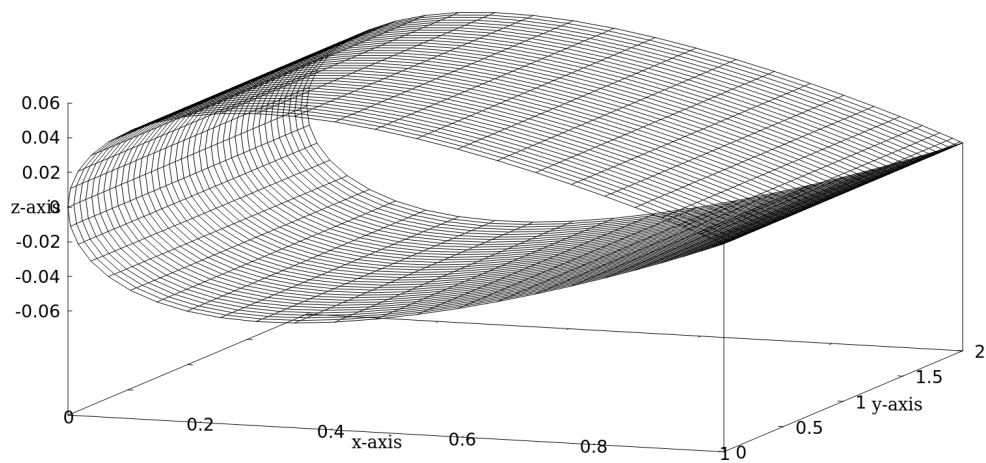
Παρατηρείται οτι ένας κανόνας σύγκλισης για τον χρονικό βήμα για συμμετρική-μη συμμετρική θέση της αερομοής είναι:

$$0.6 < cfl < 1, \quad cfl = \frac{(U_{\infty} + c)\Delta t}{\Delta X}$$

Στην περίπτωση που χρειάζεται πυκνωση στην διακριτοποίηση της πτέρυγας, αυτό πρέπει να διερευνηθεί.

5.2 Μη-μόνιμη - μόνιμη ροή

Τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν αφορούν ακίνητη πτέρυγα με συμμετρική αεροτομή $NACA0012$, χορδή $1m$ και εκπετάσματα $2m$ της οποίας η διακριτοποίηση φαίνεται στο σχήμα (5.2.) Η γωνία της ροής είναι 8 μοίρες

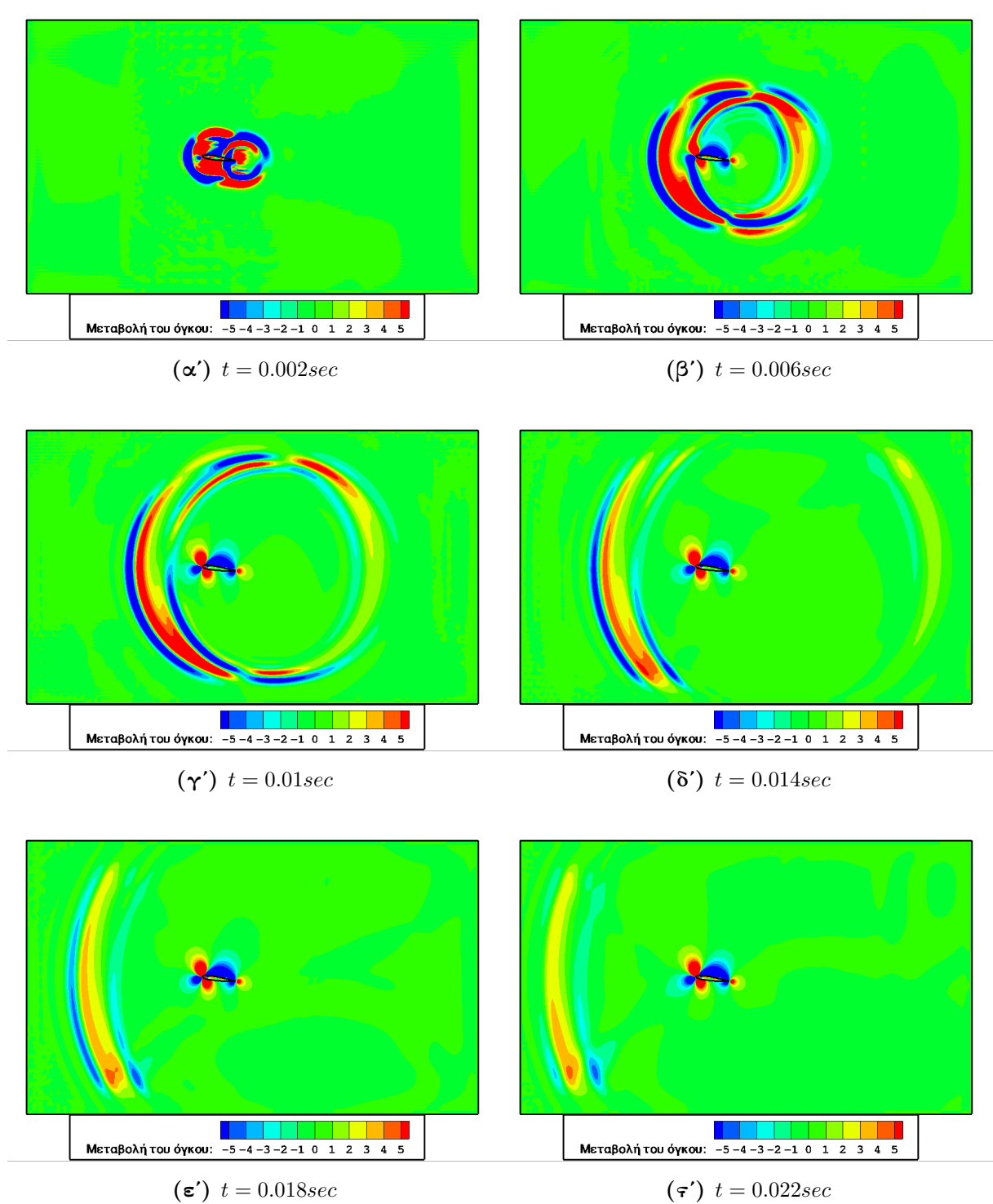


Σχήμα 5.2: Η διακριτοποίηση του στερεού συνόρου

5.2.1 Μη-μόνιμη ροή

Αρχικά θα παρουσιαστεί το μεταβατικό φαινόμενο που αποτελείται από την διάδοση των διαταραχών πίεσης με την μορφή ακουστικών κυμάτων καθώς και την μεταφορά της ελεύθερης στροβιλότητας του ομόρου.

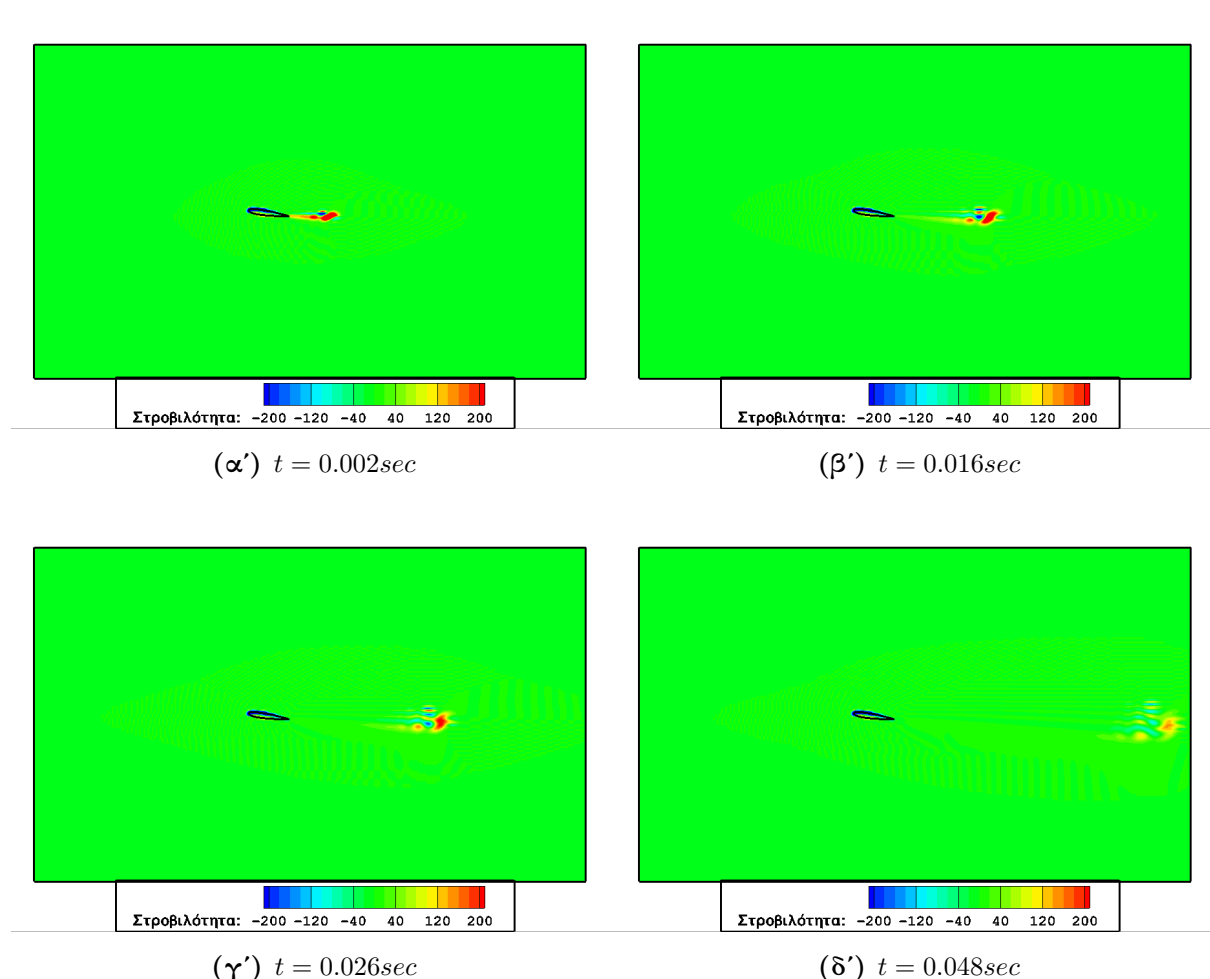
Διάδοση διαταραχών με την μορφή ακουστικών κυμάτων



Σχήμα 5.3: Διάδοση ακουστικών κυμάτων σε ακίνητη πτέρυγα NACA0012, $r/R = 50\%$, $U_\infty = 138$, $Mach = 0.4$, $\alpha = 8^\circ$, $DX_{pm} = DY_{pm} = DZ_{pm} = 0.05$

Παρατηρείται ότι η διάδοση των ακουστικών κυμάτων στις διάφορες κατευθύνσεις γίνεται με διαφορετική ταχύτητα. Αυτό οφείλεται στις διαφορετικές ιδιοτιμές του υπερβολικού προβλήματος της ροής $u+c, u-c$. Πράγματι αυτό αποτυπώνεται και στα παραπάνω στιγμιότυπα όπου παρατηρείται αυτή η διαφοροποίηση, όπου τα μεν ακουστικά κύματα αριστερά της ακμής πρόσπτωσης διαδίδονται με την ταχύτητα $u_\infty - c = -205m/s$, ενώ τα ακουστικά κύματα δεξιά της ακμής εκφυγής διαδίδονται με την ταχύτητα $u_\infty + c = 481m/s$.

Μεταφορά της ελεύθερης στροβιλότητας

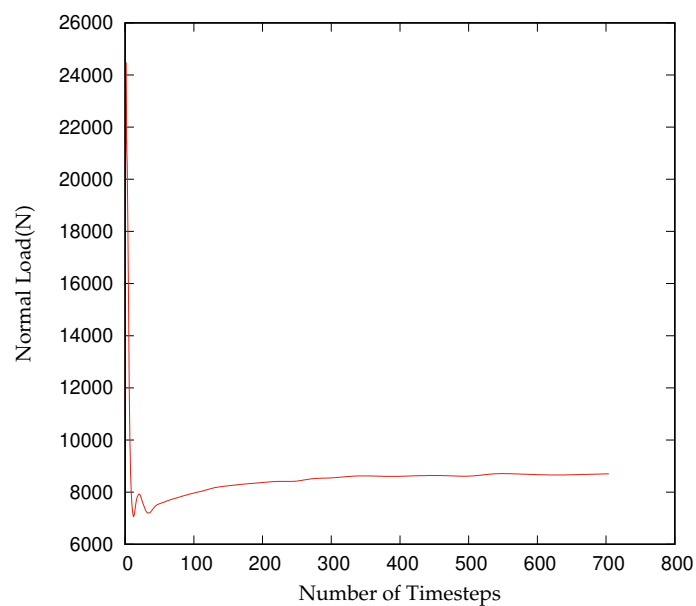


Σχήμα 5.4: Διάδοση της στροβιλότητας σε ακίνητη πτέρυγα NACA0012, $r/R = 50\%$, $U_\infty = 138$, $Mach = 0.4$, $\alpha = 8^\circ$, $DX_{pm} = DY_{pm} = DZ_{pm} = 0.05$

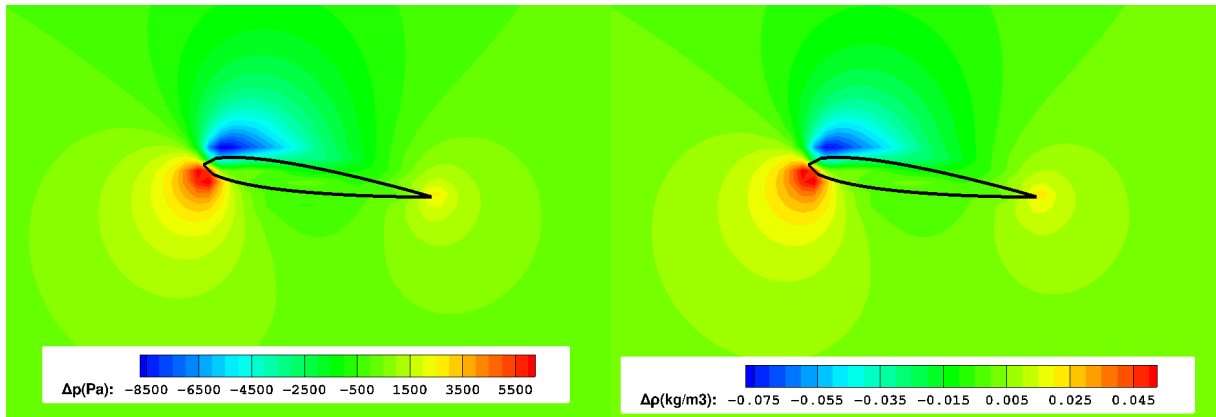
Λόγω του μικρού χρονικού βήματος το οποίο πραγματοποιείται για την σύγκλιση των υπολογισμών, σε συνδιασμό ότι γίνεται remeshing σε κάθε χρονικό βήμα έχει ως αποτέλεσμα η στροβιλότητα που παράγεται να διαχέεται έντονα.

5.2.2 Μόνιμη ροή

Παρακάτω δίνεται το διάγραμμα σύγκλισης της δύναμης άνωσης στην πτέρυγα:

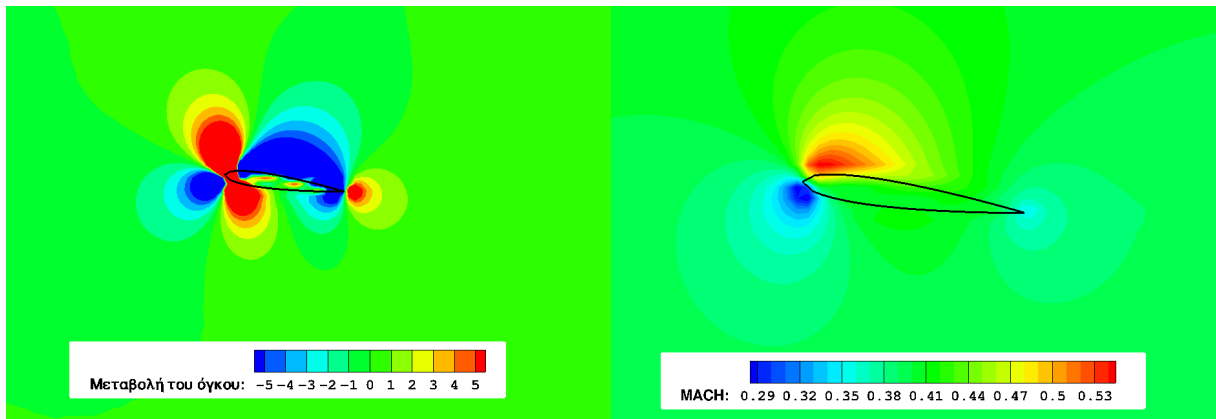


Σχήμα 5.5: Ιστορία σύγκλισης της δύναμης άνωσης στην πτέρυγα



(α') Πεδίο Πίεσης

(β') Πεδίο Πυκνότητας



(γ') Πεδίο Χωρικής Μεταβολής Όγκου

(δ') Τοπικός αριθμός Mach

Σχήμα 5.6: Μόνιμα πεδία $p, r, \theta, Mach$ σε ακίνητη πτέρυγα αεροτομής $r/R = 50\%$, $NACA0012, U_\infty = 138, Mach = 0.4, \alpha = 8^\circ, p_\infty = 103011.5 Pa, \rho_\infty = 1.225 \frac{kg}{m^3}, DX_{pm} = DY_{pm} = DZ_{pm} = 0.05$

Διαπιστώνεται λοιπόν ότι λόγω της ισεντροπικής ροής το πεδίο πίεσης έχει την ίδια μορφή με το πεδίο πυκνότητας.

5.3 Υπολογισμών των φορτίων

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπολογισούν τα φορτία στην πτέρυγα του σχήματος (5.2). Να σημειωθεί ότι η πίεση στην επιφάνεια υπολογίζεται από την σχέση (2.20) η οποία

επαναδιατυπώνεται.

$$p_s = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_\infty}{p_\infty} h_s \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho u^2}$$

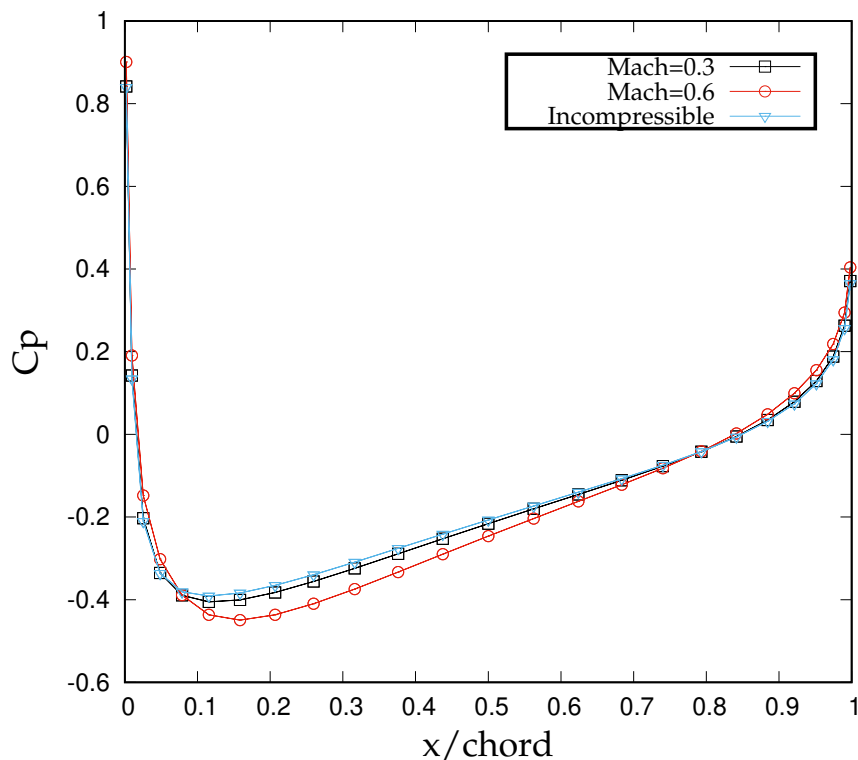
Οι περιπτώσεις οι οποίες θα εξετασθούν δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Mach	Γωνία πρόσπτωσης	DX_{pm}
0,0.3,0.6	0,4,8	0.025,0.5

Μηδενική γωνία πρόσπτωσης

Αρχικά θα παρουσιαστούν τα φορτία για μηδενική γωνία πρόσπτωσης, η οποία αποτελεί την απλούστερη περίπτωση μελέτης, μιας και δεν υπάρχει χωρικά διανεμημένη στροβιλότητα, και η ροή είναι συμμετρική στην πλευρά υποπίεσης και υπερπίεσης.

Συγκεκριμένα μελετούνται τα φορτία στο μέσο του εκπετάσματος $r/R = 50\%$.

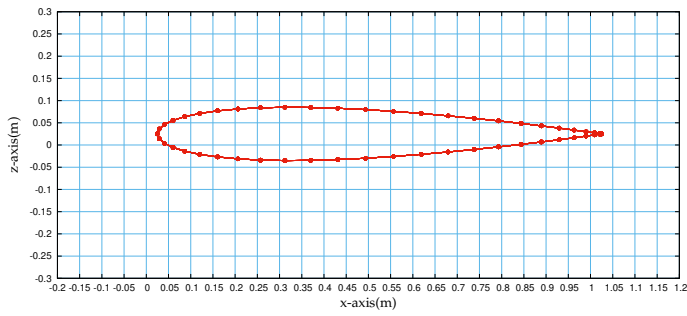


Σχήμα 5.7: Συντελεστής Πίεσης στο μέσο του εκπετάσματος για $DX_{pm} = 0.05$, $\alpha = 0^\circ$

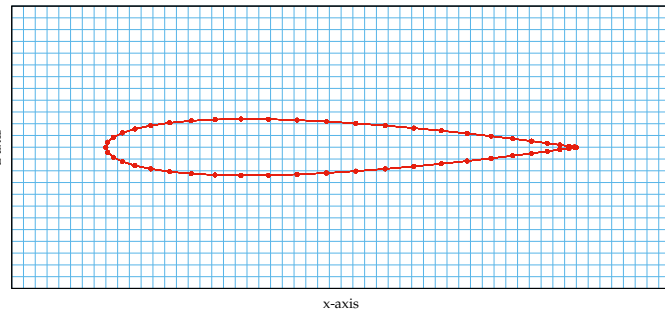
Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.7 καθώς αυξάνεται ο αριθμός Mach της ροής, αυξάνεται και η κλίση της καμπύλης C_p , και οι τιμές του συντελεστή πίεσης μετατοπίζονται προς μεγαλύτερες απόλυτες τιμές. Η φυσική εξήγηση για αυτήν την παρατήρηση δίνεται παρακάτω. Λόγω του μεγαλύτερου αριθμού Mach της ροής, οι τιμές της μεταβολής του όγκου αυξάνονται. Από την εξίσωση της συνέχειας, η μεταβολή της πυκνότητας ακολουθεί αντίστοιχες μεταβολές που λόγω της ισεντροπικής ροής οδηγεί σε ομόσημη μεταβολή και της πίεσης. Συνεπώς η πίεση παρουσιάζει και μια επιπλέον μεταβολή, σε σχέση με την ασυμπίεστη ροή η οποία οφείλεται στην μεταβολή της πυκνότητας. Παρατηρείται λοιπόν καθώς αυξάνει ο αριθμός Mach αυξάνουν οι απόλυτες τιμές των διαφορών πίεσης που παρατηρούνται, γεγονός το οποίο εξηγείται από την γραμμικοποιημένη θεωρία για την συμπίεστη ροή. Με βάση την διόρθωση από την γραμμικοποιημένη εξίσωση δυναμικού προκύπτει ότι:

$$C_{p,comp} = \frac{C_{p,incomp}}{\sqrt{1 - M^2}}$$

όπου $C_{p,comp}$ είναι ο συντελεστής πίεσης για την συμπίεστη, και $C_{p,incomp}$ ο συντελεστής πίεσης που προκύπτει θεωρώντας ασυμπίεστη ροή. Με βάση αυτήν την σχέση μπορεί να γίνει σύγκριση του συντελεστή πίεσης που προκύπτει από τον ασυμπίεστο επιλύτη με την παραπάνω διόρθωση, σε σχέση συντελεστή που υπολογίζεται από τον συμπίεστο επιλύτη. Παρακάτω δίνονται τα συγκριτικά διαγράμματα για αριθμό Mach 0.3 και 0.6. Επίσης γίνεται διερεύνηση της εξάρτησης των αποτελεσμάτων του συμπίεστου επιλύτη από μέγεθος των κελιών του Particle Mesh, που αποτελεί βασική παράμετρο του επιλύτη. Να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα του ασυμπίεστου επιλύτη για μηδενική γωνία πρόσπτωσης είναι ανεξάρτητα του πλέγματος PM. Τα πλέγματα τα οποία θα εξετασθούν φαίνονται στα σχήματα (5.8).

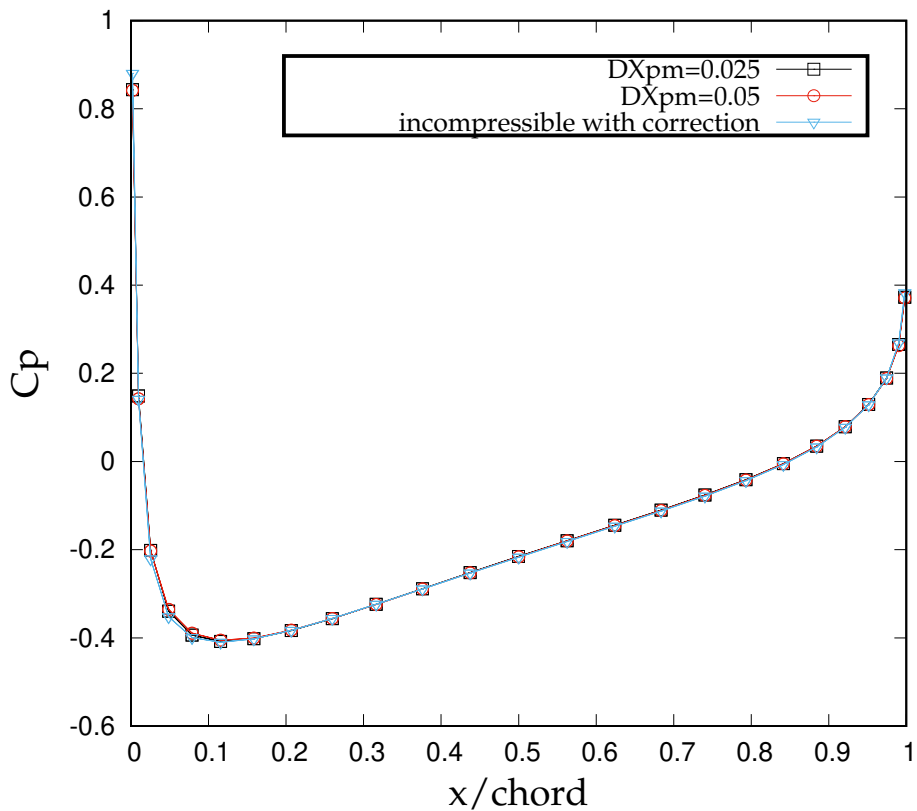


(α') $DX_{pm} = DY_{pm} = DZ_{pm} = 0.05$

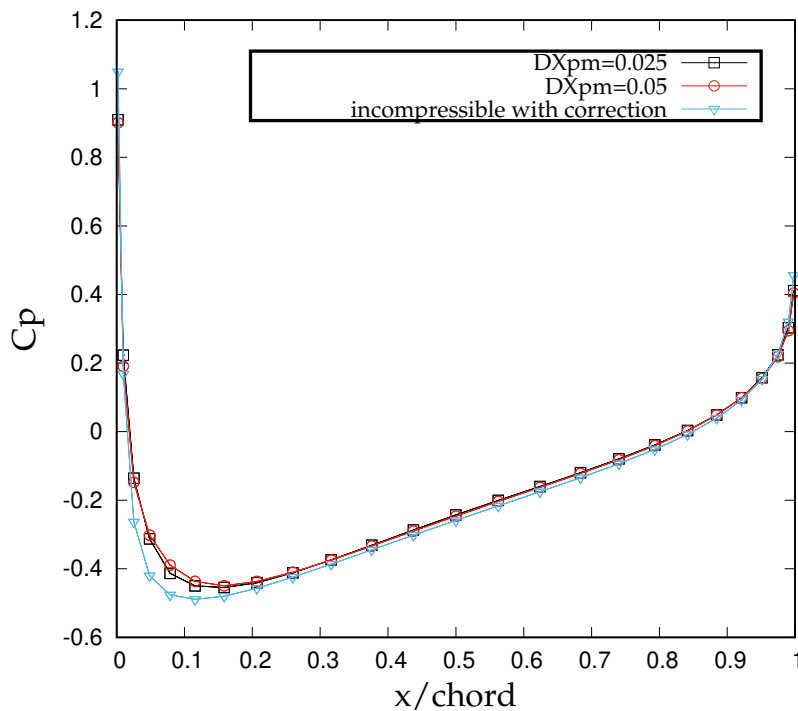


(β') $DX_{pm} = DY_{pm} = DZ_{pm} = 0.025$

Σχήμα 5.8: Διαφορετικά πλέγματα *Particle Mesh*



Σχήμα 5.9: Συγκριτικό διάγραμμα του συντελεστή πίεσης για $Mach = 0.3$ σε σχέση με τον αντίστοιχο της διορθωμένης ασυμπίεστης ροής



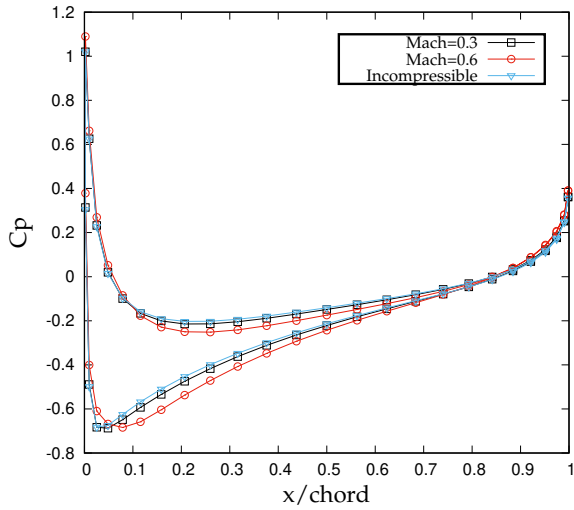
Σχήμα 5.10: Συγκριτικό διάγραμμα του συντελεστή πίεσης για $Mach=0.6$ σε σχέση με τον αντίστοιχο της διορθωμένης ασυμπίεστης ροής

Για $Mach 0.3$ (Σχήμα 5.7) τα φαινόμενα συμπίεσότητας είναι ασθενή, παρατηρείται ότι συμπίπτουν με γραμμική διόρθωση της ασυμπίεστης ροής (Σχήμα 5.9). Η μόνη διαφοροποίηση παρατηρείται στην ακμή πρόσπτωσης. Ενώ με την πύκνωση του πλέγματος δεν προκύπτει ιδιαίτερη διαφοροποίηση (Σχήμα 5.9). Για $Mach 0.6$ (Σχήμα 5.7) τα φαινόμενα συμπίεσότητας είναι εντονότερα. Με βάση την σύγκριση που γίνεται σε σχέση με το διορθωμένο συντελεστή από το ασυμπίεστο επιλύτη παρατηρείται ότι παρουσιάζεται απόκλιση στην περιοχή $0 < \frac{x}{chord} < 0.2$ (Σχήμα 5.9). Πυκνώνοντας το πλέγμα του Particle Mesh η περιοχή αυτή προσεγγίζεται καλύτερα σε μικρό ποσοστό όμως.

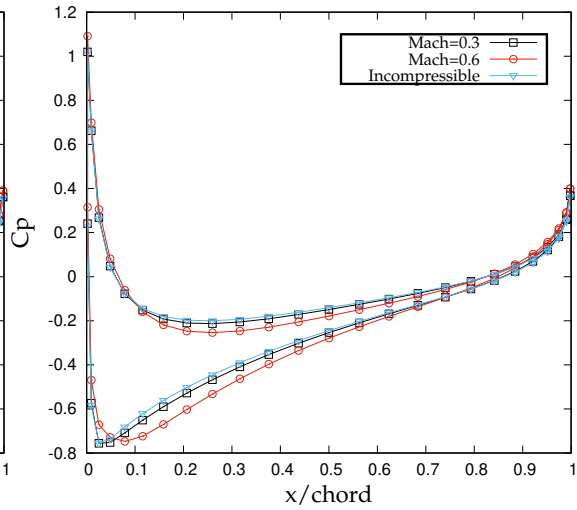
Συμπεραίνεται λοιπόν ότι καθώς ο αριθμός $Mach$ αυξάνεται παρουσιάζεται μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ του συντελεστή πίεσης του συμπίεστου επιλύτη, και του διορθωμένου συντελεστή πίεσης του ασυμπίεστου επιλύτη στην περιοχή $0 < \frac{x}{chord} < 0.2$, όπου και οι κλίσεις του πεδίου ταχύτητων είναι μεγαλύτερες.

Γωνία πρόσπτωσης 4°

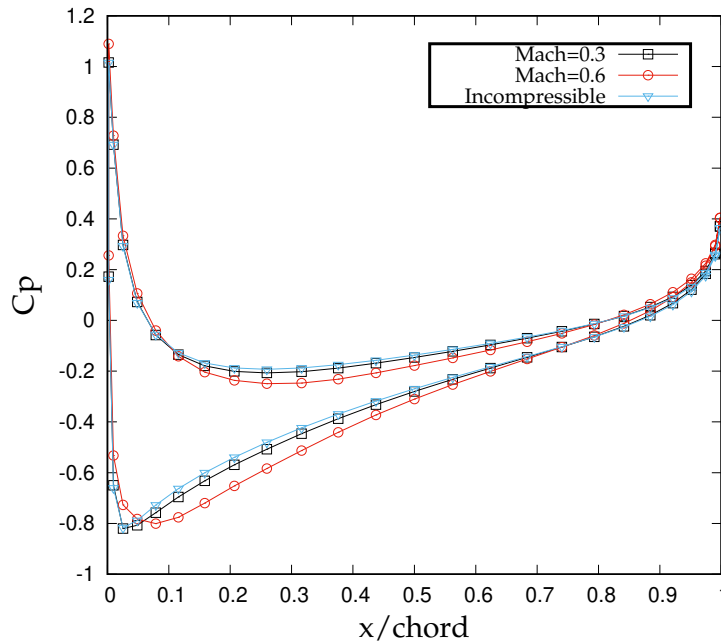
Mach	Γωνία πρόσπτωσης	DX_{pm}
0.3,0.6	4	0.025,0.5



(α') Κατανομή C_p στη θέση $r/R = 15\%$

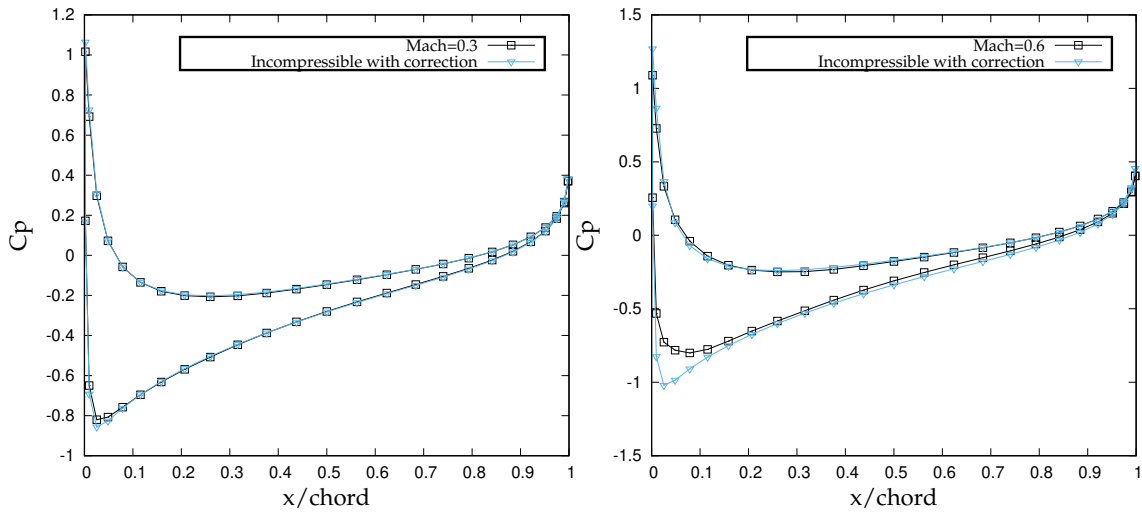


(β') Κατανομή C_p στη θέση $r/R = 25\%$



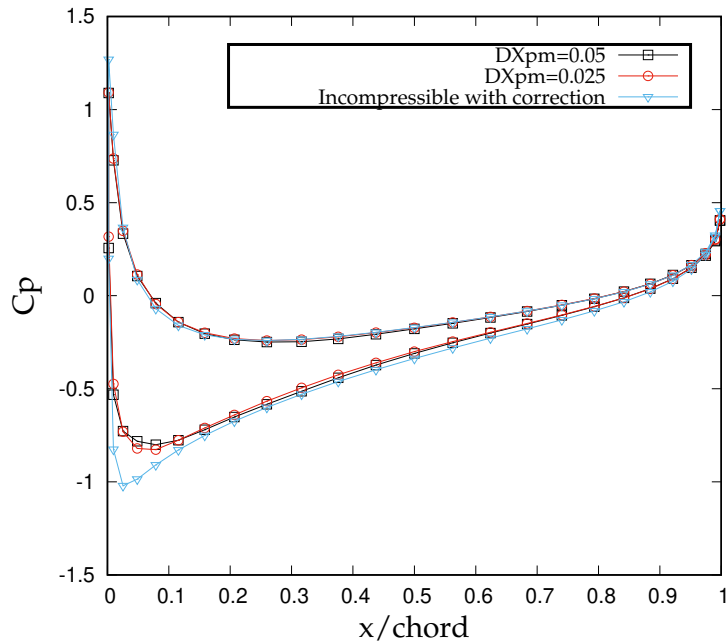
(γ') Κατανομή C_p στη θέση $r/R = 50\%$

Σχήμα 5.11: Σύγκριση συντελεστών πίεσης για $\alpha = 4^\circ$, σε διάφορες θέσεις κατά το εκμπίετασμα της πτέρυγας.



(α') $Mach = 0.3$, $a = 4^\circ$, $DX_{pm} = 0.05$

(β') $Mach = 0.6$, $a = 4^\circ$, $DX_{pm} = 0.05$

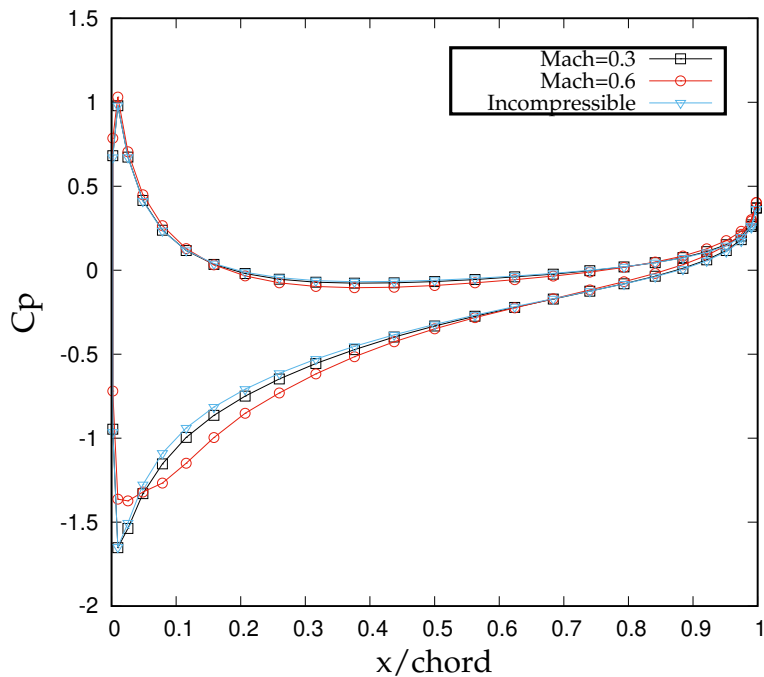


(γ') $Mach = 0.6$, $a = 4^\circ$, $DX_{pm} = 0.05$, $DX_{pm} = 0.025$

Σχήμα 5.12: Συγκριτικά διαγράμματα του συντελεστή πίεσης για $Mach = 0.6$, $Mach = 0.3$, $a = 4^\circ$, σε πλέγμα PM $DX_{pm} = 0.05$, $DX_{pm} = 0.025$, σε σχέση με τον αντίστοιχο της διορθωμένης ασυμπίεστης ροής

Γωνία πρόσπτωσης 8°

Με βάση τα παραπάνω διαγράμματα του συντελεστή πίεσης γίνονται οι εξής παρατηρήσεις:



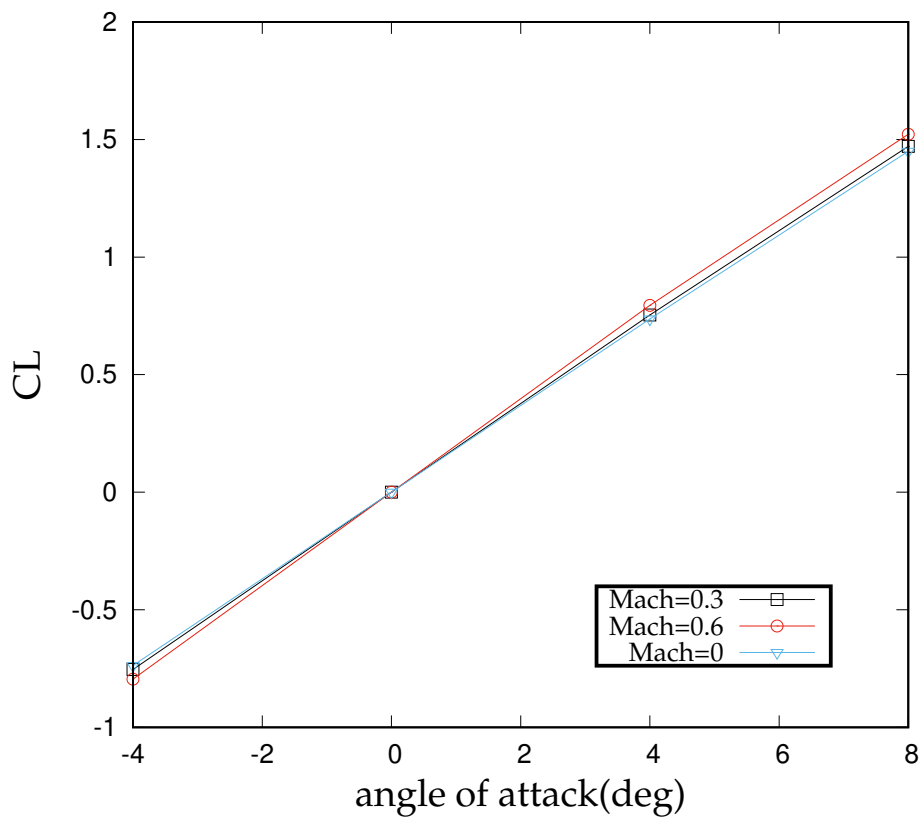
Σχήμα 5.13: Συγκριτικό διάγραμμα του συντελεστή πίεσης για $Mach=0.6$, $Mach=0.3$, $\alpha = 8^\circ$, σε πλέγμα $PM DX_{pm} = 0.05$ σε σχέση με τον αντίστοιχο της διορθωμένης ασυμπίεστης ροής

- Για $Mach = 0.6$ τα φαινόμενα συμπεστότητας είναι πιο έντονα και οι μεταβολές είναι αντίστοιχες με εκείνες που σχολιάσθηκαν στην περίπτωση της μηδενικής γωνίας πρόσπτωσης
- Καλή συσχέτιση με την διορθωμένη καμπύλη C_p του ασυμπίεστου επιλύτη, εκτός από το τμήμα που ορίζεται από το σημείο ανακοπής μέχρι το $x/chord = 10\%$ για την πλευρά υποπίεσης (5.12).
- Στο τμήμα αυτό παρατηρούνται χαμηλότερες απόλυτες τιμές διαφοράς πίεσης από την 'θεωρητική' προσέγγιση.
- Με την πυκνωση του πλέγματος του Particle Mesh (5.12) παρατηρείται ότι η καμπύλη του C_p διορθώνεται λίγο στην περιοχή αυτή.

Υπολογισμός Συντελεστή Άνωσης

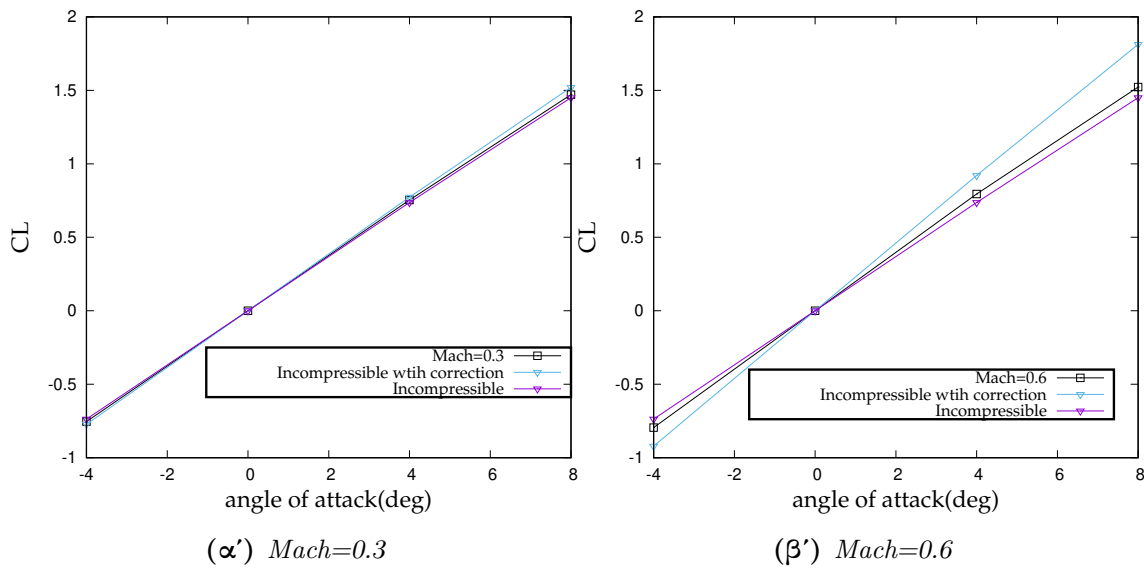
Ο συντελεστής άνωσης ορίζεται ως εξής:

$$C_L = C_{L,3D} = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho u^2}$$

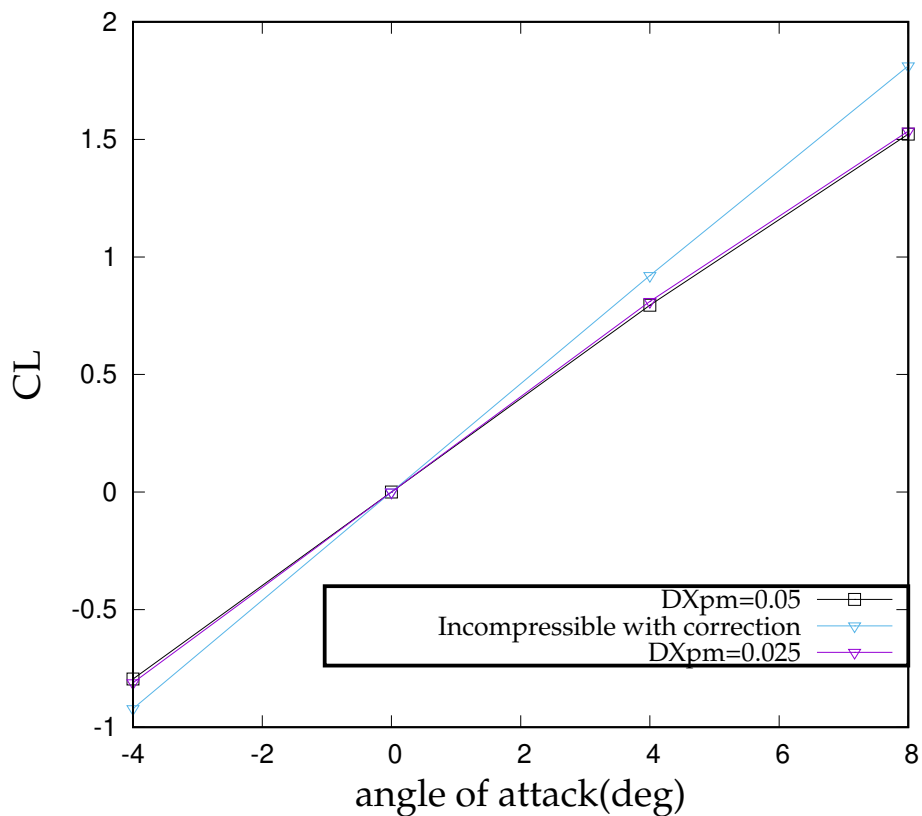


Σχήμα 5.14: Ο συντελεστής άνωσης για διάφορους αριθμούς Mach

με $Mach = 0$ θεωρείται η ασυμπίεστη επίλυση.



Σχήμα 5.15: Σύγκριση του συντελεστή άνωσης που προκύπτει από τον συμπίεστο επιλύτη σε σχέση με τον διορθωμένο της ασυμπίεστης επίλυσης. $DX_{pm} = 0.05$



Σχήμα 5.16: Σύγκριση του συντελεστή άνωσης που προκύπτει από τον συμπίεστο επιλύτη για $Mach = 0.6$ $DX_{pm} = 0.05, DX_{pm} = 0.025$ σε σχέση με τον διορθωμένο της ασυμπίεστης επίλυσης.

Από τα παραπάνω διαγράμματα προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Με βάση το Σχήμα 5.14 παρατηρείται ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός Mach αυξάνεται η κλίση της καμπύλης L
- Σε σχέση με την διορθωμένη ασυμπίεστη επίλυση παρατηρείται ότι στην περίπτωση του $Mach = 0.3$ υπάρχει αρκετά καλή συσχέτιση 5.15
- Για $Mach = 0.6$ η απόκλιση όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.15 είναι αρκετά μεγάλη και οφείλεται στο γεγονός ότι η καμπύλη του C_p στην πλευρά υποπίεσης προσεγγίζει μικρότερες απόλυτες τιμές από την θεωρητική καμπύλη.
- Πυκνώνοντας το πλέγμα του PM παρατηρείται ότι η καμπύλη του C_L διορθώνεται ελάχιστα. (5.16)

5.4 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Για την ερμηνεία των αποκλίσεων που παρατηρήθηκε στον υπολογισμό του συντελεστή πίεσης, πρέπει αρχικά να παρουσιαστούν αναλυτικά οι παράμετροι που επισέρχονται στους υπολογισμούς αυτούς. Στην περίπτωση της μόνιμης ροής εξίσωση (2.19) για τον υπολογισμό των φορτίων απλοποιείται στην μορφή :

$$h_s - h_\infty = \left(\frac{u^2}{2} \Big|_\infty - \frac{u^2}{2} \Big|_s \right)$$

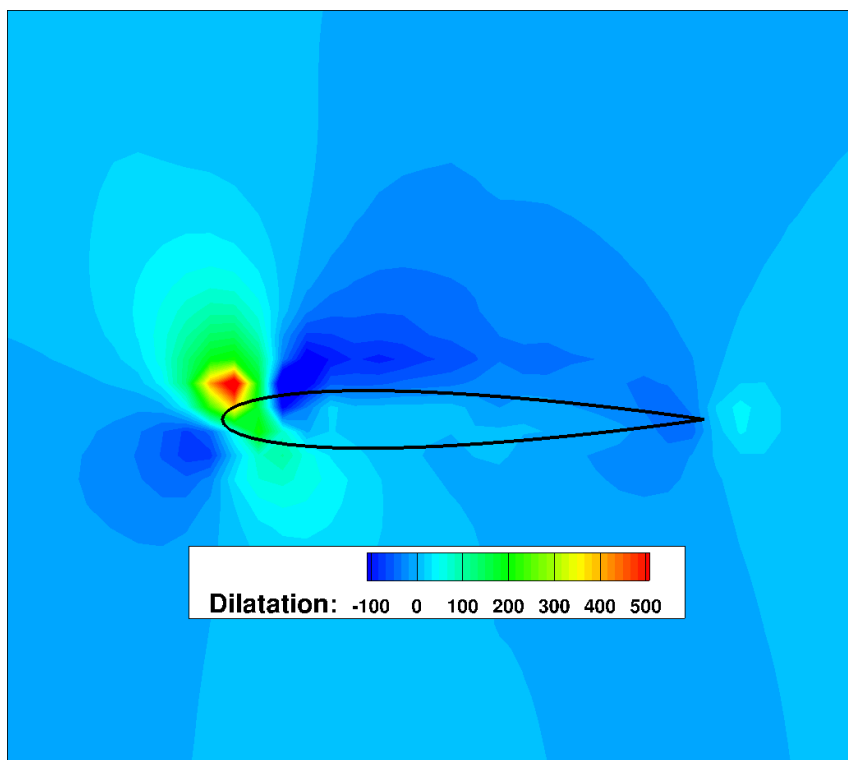
$$p_s = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_\infty}{p_\infty} h_s \right)^{\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)}$$

Συνεπώς ο μόνος όρος που επιδρά είναι η ταχύτητα στο σύνορο \vec{u}_s . Η ταχύτητα αυτή στο μόνιμο πεδίο, διαμορφώνεται από τον υπολογισμό της επαγόμενης ταχύτητας από την χωρικά διανεμημένη μεταβολή του όγκου πάνω στο σύνορο και έπειτα την ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης. Συνεπώς κύριο θέμα είναι η επαγόμενη ταχύτητα από το χωρικό θ πάνω στο σύνορο. Με βάση αυτά προκύπτουν τα εξής βασικά ερωτήματα:

1. Η κατανομή του θ να σέβεται την παρουσία του στερεού συνόρου.

2. Ο τρόπος υπολογισμού της επαγώμενης ταχύτητας στο σύνορο.

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η κατανομή της χωρικής μεταβολής του όγκου για γωνία πρόσπτωσης 8 μοιρών.



Σχήμα 5.17: Κατανομή της χωρικής μεταβολής του όγκου για $a = 8^\circ$, $Mach = 0.6$, $r/R = 50\%$

Ο υπολογισμός της επαγώμενης ταχύτητας, γίνεται μέσω του Particle Mesh το οποίο με βάση αυτά που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 4, και της υψηλής συγκέντρωσης θ κοντά στο σημείο υπολογισμού θα δώσει μεγάλη απόκλιση σε σχέση με τους ολοκληρωτικούς υπολογισμούς. (Σχήμα 5.17)

Από την άλλη ο τρόπος υπολογισμού του θ , εμφανίζει τις εξής ιδιαιτερότητες:

- Δεν ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη.

$$\Phi_{space}^n \rightarrow \theta_{space}^n \rightarrow \text{Ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης}(\Phi_{surf}^n) \rightarrow \Phi_{total}^n = \Phi_{space}^n + \Phi_{surf}^n$$

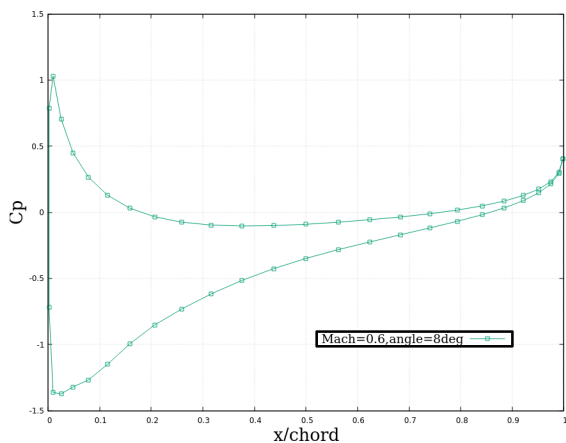
$$\nabla \Phi_{tot} \cdot \vec{n} \neq 0, \quad \text{Λόγω της επίλυσης στο Particle Mesh}$$

- Ο υπολογισμός της Laplace του $\Phi^{n+1} \rightarrow \theta^{n+1}$ γίνεται με κεντρικές διαφορές, χωρίς σεβασμό του στερεού συνόρου.

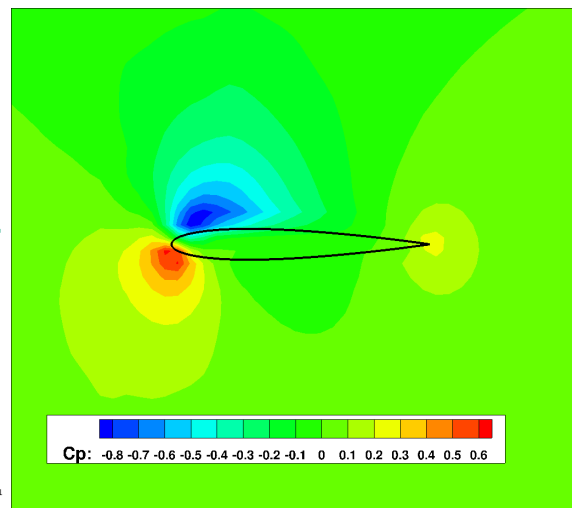
Το συμπέρασμα πάντως είναι ότι η απόκλιση παρατηρείται στο σημείο που είναι συγκεντρωμένη και μεγιστοποιούνται οι τιμές της μεταβολής του όγκου.

Η κατάσταση αυτή αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή ενός σωματόδετου πλέγματος, στο οποίο θα γίνεται ο υπολογισμός της εξίσωσης Laplace του δυναμικού, με σεβασμό στο σύνορο.

Κλείνοντας παρουσιάζεται η σύγκριση του συντελεστή πίεσης που υπολογίζεται παραπάνω, μέσω της εξίσωσης Bernoulli (2.19), σε σχέση με τον συντελεστή πίεσης που προκύπτει αποκλειστικά από τα χωρικά στοιχεία στροβιλότητας, των οποίων οι ποσότητες προβάλλονται στο πλέγμα του Particle Mesh.



(α') C_p από εξίσωση Bernoulli



(β') C_p από στοιχεία στροβιλότητας

Παρατηρείται λοιπόν η μορφή του πεδίου πίεσης είναι ίδια, παρόλαυτα παρατηρείται μεγάλη απόκλιση στις μέγιστη και την ελάχιστη πίεση .

- Ο υπολογισμός της πίεσης μέσω της εξίσωσης Bernoulli λαμβάνει υπόψη την εφαπτομενική ταχύτητα στο σύνορο η οποία ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη, και προκύπτει μέσω ολοκληρωτικής αναπαράστασης, ενώ μέσω του Particle Mesh στην περιοχή υπάρχει μεγάλη αβεβαιότητα, και δεν ικανοποιείται η συνοριακή

συνθήκη (Σχήμα 4.2,4.3).

- Όπως φαίνεται απο τα Σχήματα (4.2,4.3) στην περίπτωση της ολοκληρωτικής αναπαράστασης οι τιμές των ταχυτήτων στο στερεό σύνορο είναι μεγαλύτερες, γεγονός που οδηγεί και στην παραπάνω διαφοροποίηση (Σχήμα ;;).

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και μελλοντική έρευνα

6.1 Συμπεράσματα και μελλοντική έρευνα

6.1.1 Συμπεράσματα

Τα συμπεράσματα τα οποία προέκυψαν απο την μελέτη του προβλήματος, την ανάπτυξη του επιλύτη καθώς και τα απολέσματα αυτού είναι τα ακόλουθα:

1. Πραγματοποιείται η διάδοση των διαταραχών με την μορφή ακουστικών κυμάτων προς όλες τις κατευθύνσεις με την θεωρητική ταχύτητα διάδοσης.
2. Τα φορτία που υπλογίζονται, προσεγγίζουν αρκετά καλά και προς την ίδια κατεύθυνση τα αντίστοιχα που προκύπτουν από την γραμμική διόρθωση του ασυμπίεστου επιλύτη.
3. Προκύπτει μεγάλη ευαισθησία σε σχέση με την διακριτοποίηση της πτέρυγας και του πλέγματος του Particle Mesh, καθώς και στην σχετική της θέση στο πλέγμα, δυσκολεύοντας την σύγκλιση του προβλήματος.
4. Η ανάγκη χρήσης μικρού χρονικού βήματος για την σύγκλιση οδηγεί σε διάχυση

του ομόρρου λόγω του remeshing .

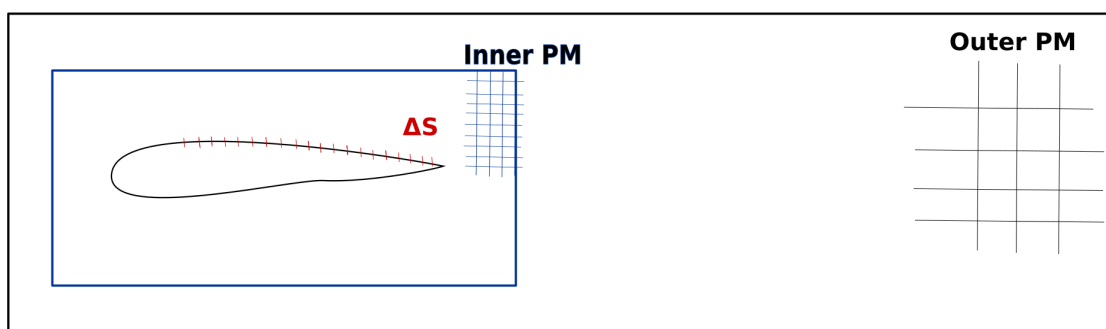
5. Αυξημένο υπολογιστικό κόστος στην περίπτωση της πύκνωσης του πλέγματος, διότι πρέπει να γίνει σε όλο το υπολογιστικό χωρίο.
6. Ο χρόνος που απαιτείται για τον προσδιορισμό των φορτίων στην μόνιμη κατάσταση, για λειτουργία 4 πυρήνων στον προσωπικό υπολογιστή και πλέγμα $DX_{pm} = 0.05$ είναι περίπου δώρες.

6.1.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Οι προτάσεις μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με το αν αφορούν μεθοδολογία η εφαρμογή:

Μεθοδολογικές προτάσεις

- Χρήση ενός εσωτερικού και ενός εξωτερικού πλέγματος Particle Mesh όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.1. Μέσω αυτής της διάταξης είναι δυνατόν κοντά στο στερεό σύνορο να γίνεται υπολογισμός σε πυκνότερο πλέγμα .Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να γίνεται πύκνωση οι μεταβολές των χωρίς το υπολογιστικό κόστος να αυξάνεται ραγδαία.



Σχήμα 6.1: Πύκνωση του πλέγματος του Particle Mesh κοντά στο στερεό σύνορο

- Χρήση ενός bodyfitted πλέγματος. Η εισαγωγή του σωματόδετου πλέγματος χρησιμεύει για επιπλέον ακρίβεια κατα τους υπολογισμούς των φορτίων. Συγκεκριμένα οι χρήσεις του πλέγματος είναι οι εξής :

1. Υπολογισμός του πεδίου ταχύτητας στην περιοχή κοντά στο στερεό σύνορο μέσω των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων που εκφράζουν τους νόμους του Biot-Savart .
 2. Υπολογισμός της εξίσωσης Laplace στο σωματόδετο πλέγμα με ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης και σεβασμός του στερεού συνόρου για του λόγους που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.
- Υπολογισμός κυμάτων κρούσεως. Ο συγκεκριμένος επιλύτης λόγω των κεντρικών σχημάτων που χρησιμοποιεί για όλους υπολογισμούς και την υπόθεση της ισητροπικής ροής παντού στο χωρίο δεν έχει την δυνατότητα να προβλέψει την δημιουργία κυμάτων κρούσεως. Αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή σχημάτων one-sided ENO,WENO στην περιοχή της ασυνέχειας.

Προτάσεις εφαρμογής

1. Χρήση του επιλύτη για την προσομοίωση συμπιεστων προβλήματων που περιέχουν κίνηση του στερεού συνόρου, όπως για παράδειγμα η ροή γύρω από πτερύγια ελικοπτέρου.
2. Χρήση του επιλύτη για την προσομοίωση πολύπλοκων προβλημάτων που αφορούν πολλαπλά στερεά σύνορα και αλληλεπίδραση του ομόρρου αυτών .

Παράρτημα 7

Παράρτημα

7.1 Διατύπωση των εξισώσεων της ροής

7.1.1 Εξίσωση Συνέχειας

Αφού $\theta = \nabla \cdot \vec{u}$. Τότε:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \rho = -\rho (\nabla \cdot \vec{u}) \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho (\nabla \cdot \vec{u}) = -\rho \theta$$

ενώ,

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\theta}{\rho}$$

Αφού, $M = \rho V$ και $\frac{DM}{Dt} = 0$,

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{V}{M} \right) \Rightarrow \frac{DV}{Dt} = \theta V \quad (7.1)$$

7.1.2 Εξίσωση Ορμής

Από την Εξίσωση της ορμής για μη συνεκτική ροή, σε συντηρητική μορφή (conservative form) :

$$(\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\vec{u} \otimes (\rho \vec{u})) = \nabla \cdot (-p)$$

αναπτύσσοντας τον όρο μεταφοράς (convection term) ,

$$\begin{aligned} \rho \vec{u} + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \rho \vec{u} + (\rho \vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} &= \nabla(-p) \Rightarrow \\ \rho (\vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}) + \vec{u} \underbrace{(\rho + \nabla(\rho \vec{u}))}_{\text{Εξίσωση Συνέχειας}} &= \nabla(-p) \end{aligned}$$

προκύπτει ότι,

$$\vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{\nabla(-p)}{\rho} = 0 \Rightarrow \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\nabla(-p)}{\rho} \quad (7.2)$$

μέσω της μαθηματικής ταυτότητας,

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \frac{u^2}{2} - \vec{u} \times \vec{\omega}$$

καταλήγουμε,

$$\vec{u} + \nabla \frac{u^2}{2} - \vec{u} \times \vec{\omega} = \frac{\nabla(-p)}{\rho} \quad (7.3)$$

Εξίσωση Μεταφοράς της Στροβιλότητας

Παίρνοντας το εξωτερικό γινόμενο ($\nabla \times$) της 7.3:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{u} + \nabla \times \left\{ \nabla \frac{u^2}{2} - \vec{u} \times \vec{\omega} \right\} &= \nabla \times \frac{\nabla(-p)}{\rho} \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) &= \nabla \times \frac{\nabla(-p)}{\rho} \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \{ \vec{u}(\nabla \cdot \vec{\omega}) - \vec{\omega}(\nabla \cdot \vec{u}) + (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} \} &= \nabla \times \frac{\nabla(-p)}{\rho} = 0 \end{aligned}$$

Αφού $\nabla \cdot \vec{\omega} = 0$ και $\nabla \cdot \vec{u} = \theta$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\omega}\theta - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega} &= \nabla \times \frac{\nabla(-p)}{\rho} \Leftrightarrow \\ \underbrace{\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega}}_{\text{Υλική Παράγωγος}} + \vec{\omega}\theta - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} &= \nabla \times \frac{\nabla(-p)}{\rho} \Leftrightarrow \\ \frac{D\vec{\Omega}}{Dt} &= -\vec{\omega}\theta + (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla \times \frac{\nabla(-p)}{\rho} \end{aligned}$$

ενώ,

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\nabla(-p)}{\rho} &= \frac{1}{\rho} \nabla \times \nabla(-p) + \nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla(-p) \Leftrightarrow \\ &= -\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla(-p) \end{aligned}$$

Έτσι η εξίσωση της στροβιλότητας γίνεται :

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = -\vec{\omega}\theta + (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} - \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla(-p) \quad (7.4)$$

Εισάγοντας ότι $\vec{\Omega} = \vec{\omega}V$,

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{\Omega}}{Dt} &= \frac{D(\vec{\omega}V)}{Dt} = \vec{\omega} \frac{DV}{Dt} + V \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \Leftrightarrow \\ \frac{D\vec{\Omega}}{Dt} &= \vec{\omega}\theta V + V \left(-\vec{\omega}\theta + (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} - \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla(-p) \right) \end{aligned}$$

το οποίο τελικά μας δίνει ότι ,

$$\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} = V \left((\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} - \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla(-p) \right) \quad (7.5)$$

Εξίσωση μεταφοράς του Dilatation

Παίρνοντας το *divergence* ($\nabla \cdot$) της εξίσωσης της ορμής :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left\{ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{\nabla(p)}{\rho} \right\} &= 0 \Leftrightarrow \\ \nabla \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla \cdot \frac{\nabla(p)}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla \cdot \frac{\nabla(p)}{\rho} &= 0 \end{aligned}$$

Αναλύοντας τον όρο ($\nabla \cdot (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} &= (\vec{u} \cdot \nabla)(\nabla \cdot \vec{u}) + (\nabla \cdot \vec{u})^2 - 2\|\nabla \vec{u}\| \\ &= (\vec{u} \cdot \nabla)\theta + \theta^2 - 2\|\nabla \vec{u}\| \end{aligned}$$

όπου:

$$\nabla \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\theta}_{\text{Υλική Παράγωγος}} + \theta^2 - 2\|\nabla \vec{u}\| + \nabla \cdot \frac{\nabla(p)}{\rho} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{D\theta}{Dt} = -\theta^2 + 2\|\nabla \vec{u}\| - \nabla \cdot \frac{\nabla(-p)}{\rho} & \quad (7.6) \end{aligned}$$

Έτσι για $\Theta = \theta V$, παίρνουμε,

$$\begin{aligned}\frac{D\Theta}{Dt} &= \frac{D\theta V}{Dt} = \theta \frac{DV}{Dt} + V \frac{D\theta}{Dt} \Leftrightarrow \\ \frac{D\Theta}{Dt} &= \theta^2 V + V \left(-\theta^2 + 2\|\nabla\vec{u}\| + \nabla \cdot \frac{\nabla(-p)}{\rho} \right) \Leftrightarrow \\ \frac{D\Theta}{Dt} &= V \left(2\|\nabla\vec{u}\| + \nabla \cdot \frac{\nabla(-p)}{\rho} \right)\end{aligned}\quad (7.7)$$

7.1.3 Εξίσωση της ενέργειας

Ξεκινώντας από την εξίσωση της ενέργειας σε συντηρητική μορφή,

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u} E) = \nabla(\vec{u} \cdot (-pI)) = 0$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho \frac{\partial E}{\partial t} + (\rho \vec{u} \cdot \nabla) E + E \nabla(\rho \vec{u}) &= \nabla(\vec{u} \cdot (-pI)) \Leftrightarrow \\ \rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) E \right) + E \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{u} \right)}_{\text{Εξίσωση Συνέχειας}} &= \nabla(\vec{u} \cdot (-pI)) \Leftrightarrow \\ \rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) E \right) &= \nabla(\vec{u} \cdot (-pI)) \Leftrightarrow \\ \rho \frac{DE}{Dt} &= \nabla(\vec{u} \cdot (-pI + \sigma))\end{aligned}$$

Εισάγωντας $\Pi = \rho V E$,

$$\begin{aligned}\frac{D\Pi}{Dt} &= \frac{D\rho V E}{Dt} = \rho V \frac{DE}{Dt} + E \frac{D\rho V}{Dt} \Leftrightarrow \\ \frac{D\Pi}{Dt} &= E \frac{DM}{Dt} + V \nabla(\vec{u} \cdot (-pI)) \Leftrightarrow \\ \frac{D\Pi}{Dt} &= V \nabla(\vec{u} \cdot (-pI))\end{aligned}\quad (7.8)$$

Στην παράπανω σχέση $E = e + \frac{1}{2}\vec{u}^2$ με $e = C_v T$ όπου e η εσωτερική ενέργεια, T η θερμοκρασία και C_v ο συντελεστής θερμοχωρητικότητας υπό σταθερό όγκο. Μέσω της καταστατικής εξίσωσης τελείων αερίων η σχέση (7.8) μπορεί να μας δώσει την

εξίσωση της πίεσης P σε Lagrange διατύπωση, όπου $P = pV$

$$\frac{DP}{Dt} = (1 - \gamma)p\theta \quad (7.9)$$

και για την ενθαλπία $H = hV$

$$\frac{DH}{Dt} = (2 - \gamma)h\theta \quad (7.10)$$

Ισεντροπική Ροή

Η ενθαλπία ενός συστήματος ορίζεται ως :

$$h = U + \frac{p}{\rho}$$

όπου U η εσωτερική ενέργεια, μέσω της καταστατικής εξίσωσης τελείων αερίων,

$$h = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{p}{\rho} \quad (7.11)$$

Εφαρμόζοντας τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο, για έναν στοιχειώδες όγκο ρευστού dV

$$\delta Q = \delta U + pdV \xrightarrow{dh=dU+\frac{dp}{\rho}+pd(\frac{1}{\rho})} dQ = dh - \frac{dp}{\rho} \xrightarrow{ds=0, dQ=0} dh = \frac{dp}{\rho}$$

γενικεύοντας λοιπόν στις τρεις διαστάσεις προκύπτει ότι,

$$\nabla h = \frac{\nabla p}{\rho} \quad (7.12)$$

Ακόμη για ισεντροπική ροή ισχύει:

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} = \frac{p}{\rho^\gamma} \quad (7.13)$$

7.1.4 Εξίσωση Bernoulli

Με βάση το θεώρημα του Helmholtz το πεδίο ταχύτητας μπορεί να χωριστεί σε ένα στροβιλό κομμάτι U_ω και σε ένα αστρόβιλο κομμάτι $U_\phi = \nabla\Phi$.

$$\vec{U} = \vec{U}_\infty + \vec{U}_\omega + \nabla\Phi \quad (7.14)$$

Από την εξίσωση της ορμής στην μορφή (7.3) και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \frac{u^2}{2} - \vec{u} \times \vec{\omega} = \frac{\nabla(-p)}{\rho} \rightarrow \left(\frac{\partial \vec{U}_\infty}{\partial t} + \frac{d\nabla\Phi}{dt} + \frac{\partial \vec{U}_\omega}{\partial t} \right) + \nabla \frac{u^2}{2} - \vec{u} \times \vec{\omega} = \frac{\nabla(-p)}{\rho}$$

Για ισεντροπική ροή με βάση την εξίσωση (7.12)

$$\begin{aligned} \rightarrow \nabla \left(\Phi + \frac{u^2}{2} + h + q \right) &= 0 \\ \nabla q = \frac{d\vec{U}_\omega}{dt} - \vec{u} \times \vec{\omega} \rightarrow q &= \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{(\vec{\omega} \times \vec{u}) \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} dV \end{aligned} \quad (7.15)$$

όπου q μπορεί να θεωρηθεί το στροβιλό κομμάτι της πίεσης(Χασαπογιάννης), η αλλιώς Ψευδο-Πίεση(Καναδός) ¹

1

$$\begin{aligned} + \frac{d\vec{U}_\omega}{dt} - \vec{u} \times \vec{\omega} = \nabla q \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{d\vec{U}_\omega}{dt} - \vec{u} \times \vec{\omega} \right) &= \vec{\nabla} \cdot (\nabla q) \\ \nabla^2 q = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{d\vec{U}_\omega}{dt} \right)}_{=0 \text{ (divfree)}} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{\omega}) \rightarrow \nabla^2 q &= -\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{\omega}) \end{aligned}$$

που με βάση το Θεώρημα της ολοκληρωτικής αναπαράστασης του Green, έχοντας μόνο χωρικά διανεμημένη στροβιλότητα:

$$q = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{(\vec{\omega} \times \vec{u}) \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} dV \quad (7.16)$$

ολοκληρώνοντας σε μια γραμμή ροής προκύπτει η εξίσωση Bernoulli .

$$\frac{d\Phi}{dt} + \frac{u^2}{2} + h + q = \left(\frac{u^2}{2} \right)_{\infty} + h_{\infty} \quad (7.17)$$

Βιβλιογραφία

- [1] Παπαδάκης, Γ.: *Ανάπτυξη υβριδικής μεθόδου στοιχείων στροβιλότητας και εφαρμογή σε εξωτερικές ροές συμπεριλαμβανομένης αυτής γύρω από ελικόπτερο*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Αεροδυναμικής, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2014.
- [2] Cottet, G H and Koumoutsakos, P.D: *Vortex methods: Theory and Practice*. Cambridge University Press, 2000.
- [3] Monaghan., Joe J: *Smoothed particle hydrodynamics*. Reports on progress in physics, 68(8), 2005.
- [4] Gingold, R. and Monaghan, J.: *Shock simulation by the particle method sph.* . Computational Physics, 52:374–389, 1983.
- [5] L. Barba, A. Leonard and Allen, C.: *dvances in viscous vortex methods - meshless spatial adaptation based on radial basis function interpolation*. Int. J. Numerical Methods in Fluids,, 47:387–421, 2005.
- [6] Koumoutsakos, P.D. and Leonard., A.: *High resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods*. Fluid Mechanics, 296:1–38, 1995.
- [7] M. Bergdorf, G. H. Cottet and Koumoutsakos, P.D.: *A particle in cell method for the 2-d compressible euler equations. in: Vortex flows and related numerical methods*. Springer, pages 373–87, 1993.
- [8] M. Bergdorf, G. H. Cottet and Koumoutsakos., P.D.: *Multilevel adaptive particle methods fr convection-diffusion equations*. IAM Multiscale Modeling and Simulation, 4:328–357, 2005.
- [9] Cottet, G H. and Magni, A.: *Tvd remeshing formulas for particle methods*. C.R. Math, 347:1367–1372, 2009.
- [10] I.F. Sbalzarini, J.H. Walther, M. Bedrgdorf S.E. Hieber and Koumoutsakos, P.D.: *Ppm - a highly efficient parallel particle-mesh library for the simulation of continuum systems*. J. Computational Physics, 215:566–588, 2006.
- [11] Eldredge J, Colonius T, Leonard A: *A vortex particle method for two-dimensional compressible flow*. J Comput Phys, 179:371–499, 2002.

- [12] Parmentier P, Winckelmans G, Chatelain P: *A vortex particle-mesh method for subsonic compressible flows*. J Comput Phys, 354:692–716, 2018.
- [13] Nitsche M, Strickland JH.: *Extension of the gridless vortex method into the compressible flow regime*. Journal of Turbulence, 2002.
- [14] Mas-Galic S, Louaked M, Pironneau O .: *A particle in cell method for the 2-d compressible euler equations*. in: *Vortex flows and related numerical methods*. Springer, pages 373–87, 1993.
- [15] R, Meske: *The vortex-in-cell method for compressible flow*. PhD thesis, Imperial College of Science and Technology, London, UK, 1994.
- [16] Oxley, Gregory S.: *A 2-D Euler-Compressible Vortex Particle Method for Transonic Rotorcraft Flows*. PhD thesis, Ε΄ μ΄, ..., ΄, 2009.
- [17] Balls, Gregory T. and Colella, Phillip: *A finite difference domain decomposition method using local corrections for the solution of poisson’s equation*. J. Computational Physics, 180:25–53, 2002.
- [18] Χασαπογιάννης, Π.: *Ανάλυση Συμπεριφοράς Αξονικού Δρομέα σε Μόνιμες και Μεταβατικές Καταστάσεις Λειτουργίας*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Αεροδυναμικής, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2005.
- [19] Hess, J.L.: *Calculation of potential flow about three dimensional lifting bodies douglas aircraft co.rep.mdcj5679-01*. 1972.
- [20] G.Voutsinas, Spyros: *Vortex methods in aeronautics: how to make things work*. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2006.
- [21] Batchelor, G.K.: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [22] Spyros G.Voutsinas, G.Bergeles: *Numerical calculation of singular integrals appearing in three-dimensional potential flow problems*. Applied Mathematical Modelling, 12:618–629, 1990.
- [23] Beale, J Thomas and Majda, Andrew: *Vortex methods. i. convergence in three dimensions*. Mathematics of Computation, 39(159):1–27, 1982.
- [24] Beale, J Thomas and Majda, Andrew: *ii. higher order accuracy in two and three dimensions*. Mathematics of Computation, 39(159):29–52, 1982.
- [25] Rosenhead, L: *The the formation of vortices from a surface of discontinuity*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, pages 170–192, 1931.
- [26] Beale, J Thomas and Majda, Andrew: *igh order accurate vortex methods with explicit velocity kernels*. Journal of Computational Physics, 58(2):188–208, 1985.

- [27] Krasny., Robert: *Desingularization of periodic vortex sheet roll-up*. Journal of Computational Physics, 65(2):292–313, 1986.
- [28] James, RA: *The solution of poisson's equation for isolated source distributions*. Journal of Computational Physics, 25(2):71–93, 1977.
- [29] Lackner, Karl: *Computation of ideal mhd equilibria*. Computer Physics Communications, 12(1):33–44, 1976.
- [30] D. Eldredge, Anthony Leonard eff and Colonius, Tim: *A general deterministic treatment of derivatives in particle methods*. Journal of Computational Physics, 180:686–709, 2002.