ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Τομέας Μηχανολογικών Κατασκευών και Αυτομάτου Ελέγχου

Εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών & Δυναμικής

Μοντελοποίηση και σχεδιασμός βαθμίδας οδοντωτών τροχών μεταβλητής χάρης κατατομών

Διπλωματική εργασία
του

Κωνσταντίνου Τριανταφύλλου

Επιβλέπων: Βασίλειος Σπιτάς, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2021

Στον πατέρα μου Τριαντάφυλλο

στη μητέρα μου Βιβή

στον αδερφό μου Δημήτρη

και στη γιαγιά μου Νίτσα

Η παρούσα διπλωματική εργασία μου ανατέθηκε από τον Γιώργο Βασιλείου, Υποψήφιο Διδάκτορα Ε.Μ.Π. του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών & Δυναμικής. Ο Γιώργος ήταν ο κύριος συνεργάτης μου κατά την εκπόνηση της εργασίας, τον ευχαριστώ θερμά και του εύχομαι να μείνει πιστός στα όνειρά του, να τα πραγματοποιήσει και να διαπρέψει.

Στον φωτισμένο καθηγητή μου Βασίλειο Σπιτά εύχομαι να συνεχίσει ακούραστα να εμπνέει τους φοιτητές του και να αναβαθμίζει το πανεπιστημιακό Ίδρυμα.

Περίληψη

Η χάρη κατατομών βαθμίδας οδοντωτών τροχών είναι το διάκενο μεταξύ των μην εργαζόμενων κατατομών δύο συνεργαζόμενων οδόντων και ως μέγεθος επηρεάζεται κυρίως από τα κατασκευαστικά σφάλματα και τα σφάλματα συναρμολόγησης. Αυτό σημαίνει ότι ο σχεδιαστής της βαθμίδας δεν έχει μεγάλο έλεγχο στην πραγματική τιμή της χάρης κατατομών, ειδικά όταν η σχεδίαση των οδοντωτών τροχών δεν υπαγορεύει κάποια εξαιρετική ακρίβεια στις γεωμετρικές και διαστασιολογικές ανοχές ή στην επιφανειακή επεξεργασία των οδόντων, ώστε να μείνει χαμηλά το κόστος παραγωγής. Στην περίπτωση, όμως, που η ακρίβεια στην εφαρμογή είναι ιδιαίτερη σημασίας, η χάρη κατατομών πρέπει να είναι ένα από τα βασικά θέματα που θα απασχολήσουν τον σχεδιαστεί και έλλειψη ακρίβειας της από τις μεθόδους παραγωγής χρειάζεται να αντιμετωπισθεί με κάποιον τρόπο. Μέχρι σήμερα, έχουν αναπτυχθεί αρκετοί μέθοδοι μείωσης της χάρης κατατομών, όπως αναφέρεται στην συνέχεια της εργασίας, ωστόσο, η παρούσα μελέτη συγκεντρώνεται στο να αναδείξει μία χαμηλού κόστους λύσης, η οποία να είναι εύκολα επιτεύξιμη ακόμα και σε μικρές εγκαταστάσεις με περιορισμένα μέσα παραγωγής. Ο απόλυτος στόχος θα ήταν η ανάδειξη ενός σχεδιασμού ικανού να αποτελέσει μελλοντικά τον κύριο τρόπο σχεδίασης βαθμίδων οδοντωτών τροχών με δυνατότητα ελέγχου της χάρης κατατομών. Στην συνέχεια της εργασίας αποδεικνύεται πώς χρησιμοποιώντας μία συμβατική οριζόντια CNC εργαλειομηχανή κοπής οδοντωτών τροχών με τη μέθοδο hobbing και ένα απλό κοπτικό εργαλείο hob, είναι εφικτό να παραχθεί οδοντωτός τροχός μεταβλητού πάχους οδόντων, μέσω της επαλληλίας μίας δεξιόστροφης και μίας αριστερόστροφης ελικοειδούς κοπής επάνω στον υπό κατεργασία τροχό. Σε βαθμίδα που απαρτίζεται από τέτοιους οδοντωτούς τροχούς προκύπτει η δυνατότητα μεταβολής της τιμής της χάρης κατατομών μέσω της αξονικής μετατόπισης του ενός εκ των δύο συνεργαζόμενων τροχών. Αυτή η βαθμίδα ονομάζεται «Βαθμίδα οδοντωτών τροχών με μεταβλητή χάρη κατατομών». Η μοντελοποίηση των εν λόγω τροχών επαληθεύεται με την δημιουργία 3D μοντέλων σε λογισμικό CAD και με προσομοιώσεις στατικής φόρτισης με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM). Ακολούθως, παρουσιάζεται μία περίπτωση εφαρμογής ώστε να δειχθεί πώς θα μπορούσε να υλοποιηθεί ο σχεδιασμός σε ένα πιθανή πραγματική περίπτωση. Τελευταίο, αλλά εξίσου σημαντικό, προτού πραγματοποιηθεί ο σχεδιασμός και η μοντελοποίηση της βαθμίδας οδοντωτών τροχών με μεταβλητή χάρη κατατομών, αναπτύχθηκε ένα λογισμικό γένεσης οδοντώσεων δι’ εξειλιγμένης, έτσι ώστε ο σχεδιαστής μίας τέτοιας βαθμίδας να μπορεί να επιλέξει ελεύθερα τα χαρακτηριστικά μεγέθη των οδοντωτών τροχών και να πειραματιστεί με μη τυποποιημένες οδοντώσεις, πέρα από τους γεωμετρικούς περιορισμούς που θέτουν τα αντίστοιχα καθιερωμένα εμπορικά λογισμικά.

Abstract

Backlash, the clearance between the working flanks of two conjugate gears, is mostly affected from manufacturing and assembling errors, which means that the gear-stage designer has little to no control of its final value, especially when surface treatment and tolerances are near average, to keep the cost down. If precision in the application is of great importance, gear design has to be done with backlash in mind and its inaccuracy must be addressed somehow. Several approaches have been used to deal with it, thoroughly demonstrated throughout this work, but this project is focused on highlighting a low cost and feasible method even with limited facilities and means of production. The ultimate goal of this study is to propose a new go-to design for backlash control gears. Using a conventional horizontal CNC gear hobbing machine and a simple gear hobbing cutter, this study proves that it is possible to manufacture gears with variable tooth thickness by the superposition of one right handed and one left handed helical cut on the same wheel, introducing a gear stage with the ability to change its backlash value by axially offsetting the two conjugated gears. This is called the “variable backlash gear stage”. A CAD and FEA verification follows modelling of the gears and an implementation case is presented to prove that design is feasible in a real case scenario. Last but not least, prior to the design and modeling of the variable backlash gears, a software for gear generation was developed, so a gear designer can choose meticulously, from a wide range of values, the geometric characteristics of the desired gears without the geometrical limitations found in the corresponding standards and commercial software.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή

Η χρήση οδοντωτών τροχών στις εφαρμογές κίνησης και ισχύος εκ περιστροφής, αποτελεί την ευρύτερα χρησιμοποιούμενη τεχνολογία. Η πλειάδα των εφαρμογών τους οδήγησε, και συνεχίζει να οδηγεί, σε μεγάλη ερευνητική δραστηριότητα τόσο σε ακαδημαϊκό, όσο και σε βιομηχανικό επίπεδο. Ωστόσο, πέραν από τους κλασσικούς, τυποποιημένους και ευρέως χρησιμοποιούμενους οδοντωτούς τροχούς, οι εξελίξεις στην βιομηχανία αυξάνουν τις απαιτήσεις και αναδεικνύουν την ανάγκη για περαιτέρω ανάπτυξη νέων, τροποποιημένων και μη-συμβατικών σχεδιασμών με στόχο την βελτιστοποίηση των χαρακτηριστικών τους.

Η επιτυχία στην σχεδίαση μίας βαθμίδας οδοντωτών τροχών κρίνεται από το πόσο αποδοτικά μεταφέρεται η ισχύς και η κίνηση από τον κινητήριο στον κινούμενο τροχό. Μία παράμετρος της βαθμίδας οδοντωτών τροχών που επιδρά σημαντικά στην απόδοση της μετάδοσης της κίνησης, ειδικά στις εφαρμογές υψηλών απαιτήσεων σε ακρίβεια κίνησης και επαναληψιμότητας (π.χ. ρομποτικές εφαρμογές, οδηγήσεις κλπ), είναι η χάρη κατατομών, ή backlash, όπως είναι ευρύτερα γνωστή με την αγγλική ορολογία. Η χάρη κατατομών ορίζεται σαν μέγεθος για σύστημα δύο γραναζιών σε συνεργασία (ή οδοντωτού τροχού σε συνεργασία με κανόνα) και δεν αποτελεί εγγενές χαρακτηριστικό ενός μόνου οδοντωτού τροχού [1]. Ορίζεται ως το διάκενο μεταξύ των συνεργαζόμενων οδόντων σε ένα ζεύγος τροχών και είναι συνάρτηση της πραγματικής απόστασης των κέντρων των συνεργαζόμενων οδοντωτών τροχών και του πραγματικού πάχους των οδόντων των τροχών [2]. Το διάκενο αυτό δίνει την δυνατότητα ύπαρξης ενός μικρού «τζόγου» μεταξύ των οδόντων.

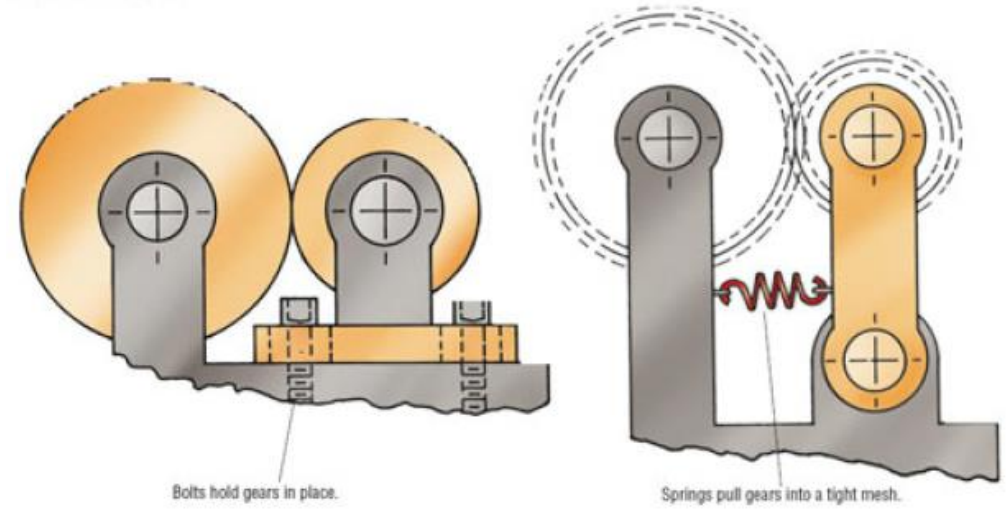
Στην πλειοψηφία των εφαρμογών είναι επιθυμητό και αναγκαίο, κυρίως ώστε να αποφευχθεί η εμπλοκή των οδόντων κατά την συνεργασία και να παρέχεται το απαραίτητο κενό ώστε να πραγματοποιείται ικανοποιητική λίπανση [3]. Οι οδοντωτοί τροχοί ταξινομούνται ανάλογα με την διαστασιολογική και γεωμετρική τους ακρίβεια σε κλάσεις κατά τα διεθνή πρότυπα ISO & AGMA, τα οποία με τη σειρά τους υποδεικνύουν και το επίπεδο της χάρης κατατομών βαθμίδας. Από την άλλη, είναι υπεύθυνο για την απώλεια επαφής των οδόντων την στιγμή που ο κινητήριος τροχός αλλάζει φορά περιστροφής. Αυτή η μικρή γωνία στροφής που επιτρέπεται στον κινητήριο τροχό να κάνει, χωρίς να μεταδίδει την αντίστοιχη κίνηση στον συνεργαζόμενο, δημιουργεί σφάλμα μετάδοσης της κίνησης. Σε εφαρμογές που απαιτείται εξαιρετική ακρίβεια, όπως για παράδειγμα η οδήγηση σε ακριβή θέση οργάνων μέτρησης, κοπτικών εργαλείων ή ρομπότ, η χάρη κατατομών είναι ένα μέγεθος που ο σχεδιαστής οφείλει να λάβει καλά υπόψη του. Αν χρειάζεται να επιτευχθεί ακριβής τοποθέτηση στον άξονα εξόδου, η μείωση ή ακόμα και ο μηδενισμός, της χάρης κατατομών πρέπει να τεθεί πρωταρχικός σχεδιαστικός στόχος.

Σε τέτοιου είδους εφαρμογές που η ακρίβεια δεν επιδέχεται συμβιβασμό, μεταβλητές όπως τα κατασκευαστικά σφάλματα, οι ανοχές τοποθέτησης και συναρμογές στις εδράσεις, είναι αναγκαίο να περιοριστούν. Όπως είναι φυσικό, ο τέλειος οδοντωτός τροχός ονομαστικών διαστάσεων είναι αδύνατον να κατασκευαστεί. Αποκλίσεις από τις επιθυμητές ονομαστικές τιμές είναι σίγουρο πως θα προκύψουν, όμως, όταν το κόστος δεν έρχεται σαν πρώτη προτεραιότητα και ο αριθμός παραγωγής μένει σε χαμηλά επίπεδα, καθίσταται δυνατή η

υιοθέτηση των πιο εξελιγμένων και ακριβών κατεργασιών με στόχο την δημιουργία οδοντωτών τροχών με ακριβείς μορφές κατατομών, όσο το δυνατόν πιο κοντά στις θεωρητικές. Τέτοιοι οδοντωτοί τροχοί ακριβείας υπακούν στα αυστηρότερα πρωτόκολλα κατεργασιών και διαμορφώνονται με ποιότητες επιφανείας σύμφωνα με τα υψηλότερα πρότυπα ποιότητας ως και AGMA 14 [3]. Αντίστοιχης ποιότητας οφείλουν να είναι και τα έδρανα κύλισης, αλλά και η κατεργασία του κελύφους με σφιχτές ανοχές στα σημεία υποδοχής αυτών, όταν πρόκειται για ένα συναρμολόγημα που αποτελείται από οδοντωτούς τροχούς τέτοιων προδιαγραφών. Κατά αυτόν τον τρόπο, δίνεται η δυνατότητα στον σχεδιαστεί να ελέγξει και να ορίσει με ακρίβεια την επιθυμητή χάρη κατατομών μέσω του σχεδίου.

Άλλοι τρόποι επίτευξης βαθμίδας οδοντωτών τροχών με δυνατότητα ελέγχου της χάρης κατατομών στο τελικό αποτέλεσμα περιλαμβάνουν τροποποιημένα σχέδια και μεθόδους συναρμολόγησης και τοποθέτησης των τροχών.

Ο απλούστερος και πιο κοινός τρόπος να μειωθεί η χάρη κατατομών σε ένα ζεύγος οδοντωτών τροχών είναι μειώνοντας την απόσταση των κέντρων τους κατά την τοποθέτησή τους. Αυτό επιτυγχάνεται είτε με σταθερή/ ακλόνητη τοποθέτηση του συνεργαζόμενου οδοντωτού τροχού σε έδραση στην επιθυμητή απόσταση για το επιθυμητό backlash, είτε με χρήση ελατηρίου που κρατάει τον συνεργαζόμενο τροχό στην κατάλληλη απόσταση για μηδενική χάρη κατατομών. Η πρώτη περίπτωση εφαρμόζεται σε βαρέως φορτίου εφαρμογές και η σταθερή έδραση του τροχού πρέπει να έχει την δυνατότητα να ρυθμίζεται, ώστε να αναπροσαρμόζεται η απόσταση των κέντρων ανάλογα με τη φθορά των οδόντων. Η δεύτερη περίπτωση συναντάται σε εφαρμογές χαμηλής ροπής. Οι δύο αυτές περιπτώσεις απεικονίζονται στην Εικόνα 1.1.

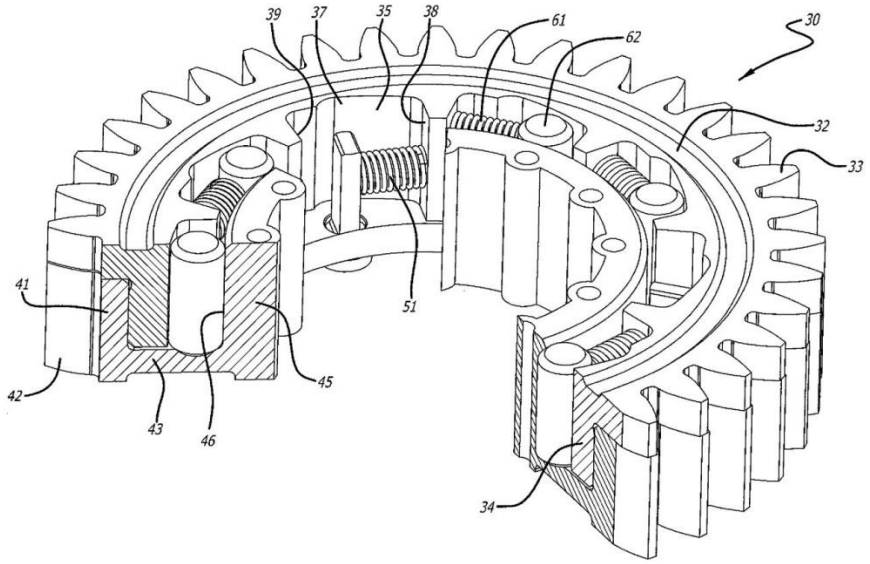


Εικόνα 1.1: Ρύθμιση απόστασης κέντρων μέσω σταθερής τοποθέτησης του τροχού (αριστερά) και χρήση ελατηρίου (δεξιά) [3]

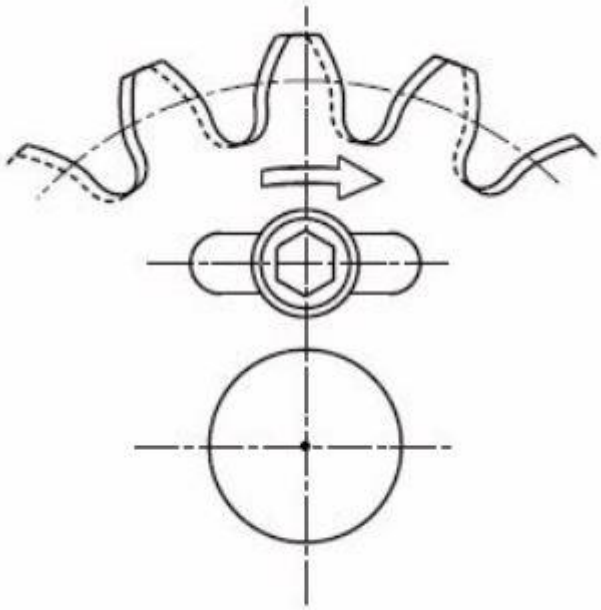
Μια άλλη μέθοδος είναι αυτή των split gears (Εικόνα 1.2). Πρακτικά, πρόκειται για τις δύο οδοντωτούς τροχούς που έχουν προκύψει ως μετωπικές τομές ενός πλατύτερου. Τα δύο αυτά γρανάζια είναι τοποθετημένα εφαπτόμενα πρόσωπο με πρόσωπο, το ένα πακτωμένο στον άξονα του, ενώ το άλλο συγκρατείται μέσω ελατηρίων με το πρώτο σε μία μικρή

σχετική γωνία όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.2. Η διάταξη αυτή αυξάνει το ενεργό πάχος του οδόντα και έτσι το εξαλείφεται το διάκενο μεταξύ των συνεργαζόμενων οδόντων.

Μία απλούστερη εκδοχή της συγκεκριμένης λειτουργίας είναι η χρήση κοχλιών για την σταθεροποίηση στην κατάλληλη γωνιακή θέση του δεύτερου μισού τροχού πάνω στον πρώτο όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.3.

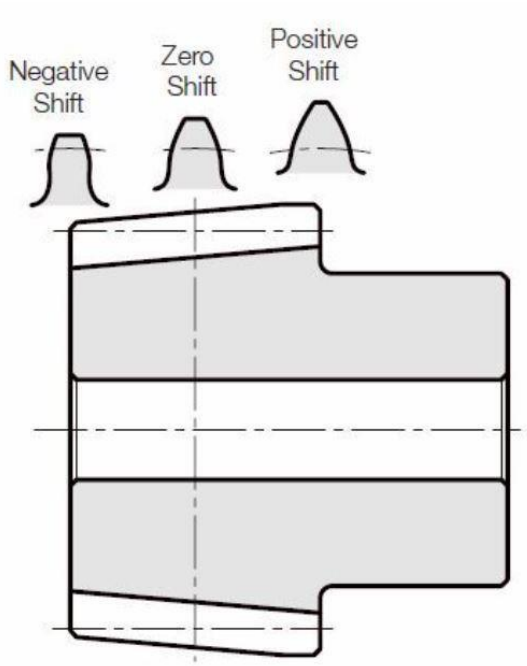


Εικόνα 1.2: Μέθοδος split gears [4]



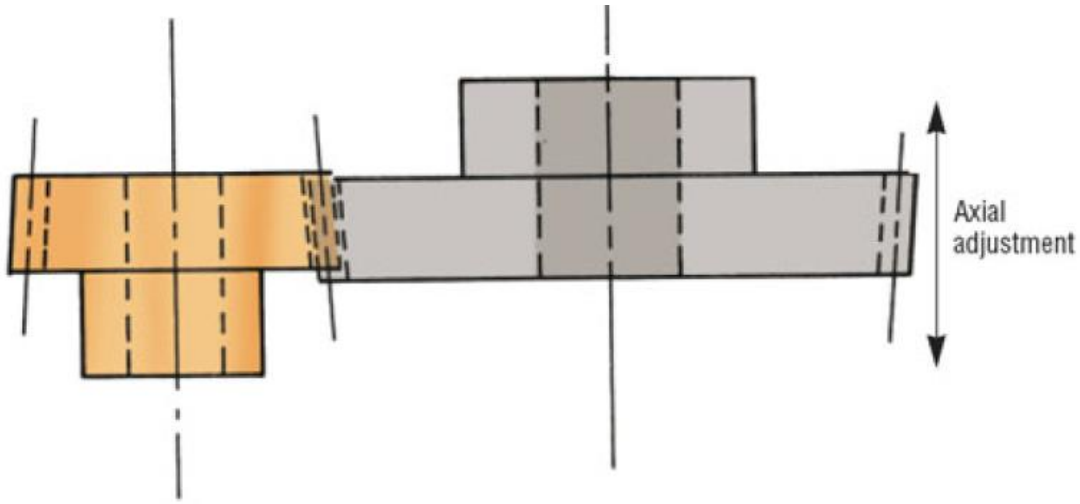
Εικόνα 1.3: Μέθοδος split gears με σταθεροποιημένα τα δύο μέρη [5]

Μία άλλη προσέγγιση στο πρόβλημα είναι η αντικατάσταση των μετωπικών οδοντωτών τροχών με μετωπικούς οδοντωτούς τροχούς μικρής κωνικότητας. Τέτοιοι τροχοί έχουν κωνικούς οδόντες, καθώς έχουν κοπεί με κοπτικό που κινείται υπό γωνία με τον άξονα του τροχού κατά την κοπή και διαθέτουν το χαρακτηριστικό του μη σταθερού πάχους οδόντα κατά τη έννοια του πλάτους του τροχού.



Εικόνα 1.4: Κατατομή οδόντων κωνικού μετωπικού οδοντωτού τροχού

Κατά την τοποθέτησή τους ρυθμίζονται κατά την αξονική διεύθυνση το ένα σχετικά με το άλλο, έτσι ώστε να επιτευχθεί επιθυμητή χάρη κατατομών.



Εικόνα 1.3: Βαθμίδα κωνικών μετωπικών οδοντωτών τροχών [3]

Η μέθοδος αυτή, ενώ παρουσιάζεται αρκετά απλούστερη των προηγούμενων, παρουσιάζει εντούτοις σημαντικά προβλήματα όπως φαίνεται και στο σχήμα της Εικόνας 1.3. Υπάρχει χωροταξικός περιορισμός της τοποθέτησης και συναρμολόγησης της βαθμίδας ενώ οι προκύπτουσες ταχύτητες ολίσθησης μεταξύ των κατατομών είναι σημαντικές (κατά την έννοια του πλάτους του οδόντα), καθώς αλλάζουν οι ακτίνες των σημείων επαφής των κατατομών των συνεργαζόμενων τροχών.

Στην παρούσα εργασία προτείνεται μία εναλλακτική προσέγγιση, διατηρώντας μεν την απλότητα του σχεδιασμού αλλά αναιρώντας τα βασικά της μειονεκτήματα.

Για την εκμηδένιση της χάρης κατατομών σε εφαρμογές όπου αυτό είναι απαραίτητο συναντάμε και συστήματα μετάδοσης ισχύς και κίνησης που ξεφεύγουν από τα συνηθισμένα γρανάζια. Μοντέρνοι μηχανισμοί αρμονικής, κυκλοειδούς και επικυκλικής οδήγησης υλοποιούνται σε διαστημικές εφαρμογές, ρομπότ, ιατρικά μηχανήματα και άλλα. Ωστόσο, τέτοιες πρακτικές δεν είναι στόχος της παρούσας εργασίας να εξετασθούν.

Η εργασία αυτή συγκεντρώνεται στην ανάδειξη λύσης στο πρόβλημα της μεγάλης αβεβαιότητας στο μέτρο της πραγματικής χάρης κατατομών σε βαθμίδα μετωπικών οδοντωτών τροχών και στην απόκλιση της από την θεωρητική κατά τον σχεδιασμό. Με κύριο γνώμονα την απλότητα και το χαμηλό κόστος, στοχεύει στον σχεδιασμό και την μοντελοποίηση βαθμίδας οδοντωτών τροχών τέτοιας που να δίνεται η δυνατότητα στον σχεδιαστεί να ρυθμίζει την χάρη κατατομών κατά την συναρμολόγηση, ώστε τελικά να μην επιδρούν στο backlash όποια σφάλματα προκύψουν κατά την παραγωγή των γραναζιών. Έτσι, να μπορεί να επιτευχθεί το απαιτούμενο διάκενο, ακόμα και μηδενικό αν χρειάζεται. Αναλυτικότερη περιγραφή, με τους περιορισμούς που τέθηκαν, τα προβλήματα που ανέκυψαν και την τελική λύση θα ακολουθήσει στα επόμενα κεφάλαια.

Πιο συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 2 γίνεται περιγραφή του κώδικα γέννησης οδοντώσεων που αναπτύχθηκε ως προκαταρκτικό στάδιο για την μοντελοποίηση των επιθυμητών οδοντωτών τροχών. Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η μοντελοποίηση και ο σχεδιασμός που πραγματοποιήθηκε, καθώς η περιγραφή των αναγκών και οι περιορισμοί που διαμορφώθηκαν εξ αυτών και τελικά οδήγησαν στο τελικό concept σχέδιο. Στο 4 κεφάλαιο παρουσιάζεται η επαλήθευση των σχεδίων μέσω λογισμικών CAD και FEA, η ανατροφοδότηση του σχεδιασμού από τα πορίσματα που προέκυψαν και η τελική λύση. Στο κεφάλαιο 5 γίνεται μία εννοιολογική μελέτη εφαρμογής της εν λόγω βαθμίδας και στο τελευταίο κεφάλαιο παραθέτονται τα συμπεράσματα αυτής της εργασίας και προτάσεις για μελλοντική δουλεία προς εμβάθυνση του θέματος.

2. Περιγραφή κώδικα γένεσης οδοντώσεων

Για τον σχεδιασμό και την μοντελοποίηση ενός πρωτότυπου οδοντωτού τροχού που θα πετυχαίνει, κατά την λειτουργία του με τον συνεργαζόμενο, το επιθυμητό χαρακτηριστικό της μεταβλητής χάρης κατατομών, κρίθηκε απαραίτητο σαν πρώτο στάδιο της εργασίας να δημιουργηθεί κώδικας γέννησης οδοντώσεων. Ο κώδικας αυτός θα λειτουργήσει για την εξέλιξη της εργασίας ως το βασικό εργαλείο σχεδιασμού των πιθανών γεωμετριών που θα προσφέρουν λύση στο πρόβλημα.

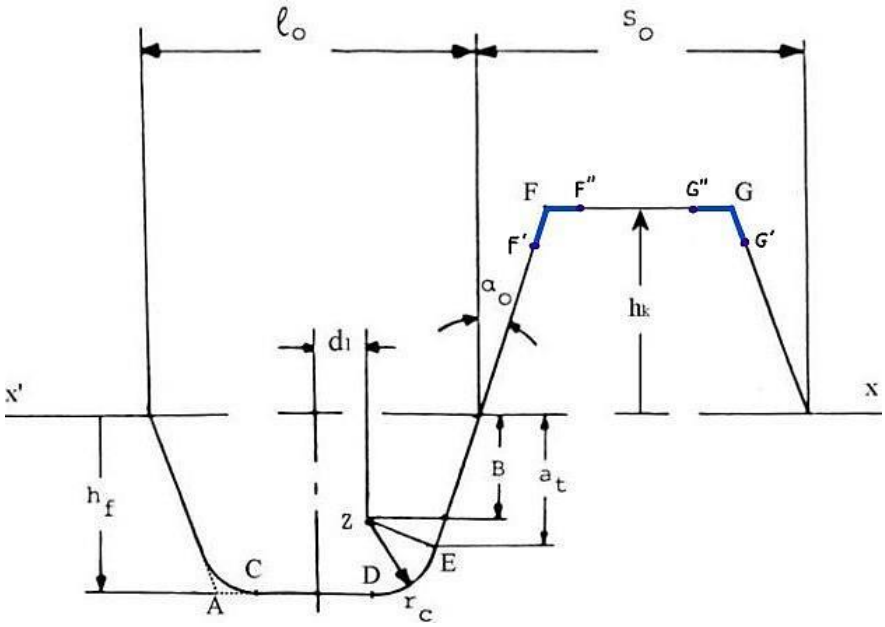
Το γεγονός ότι δεν είναι ξεκάθαρη από την αρχή η γεωμετρία τα οδόντα που θα δώσει την βέλτιστη υλοποίηση υπαγορεύει την ανάγκη γενίκευσης του εν λόγω εργαλείου για κάθε πιθανή σχεδιαστική απαίτηση. Η δυνατότητα γέννησης οδοντώσεων, χωρίς περιορισμούς, παρέχει μία πιο διευρυμένη οπτική του θέματος του σχεδιασμού κατάλληλης γεωμετρίας, καθώς δίνει την δυνατότητα πειραματισμού με λιγότερο συχνά χρησιμοποιούμενες κατατομές και της “out of the box” προσέγγισης. Κατά αυτόν τον τρόπο, η ανάλυση του θέματος μπορεί να γίνει σε μεγαλύτερο βάθος και έτσι, όχι μόνο να προκύψει μία βέλτιστη λύση, αλλά και μία λύση με ισχυρότερη τεκμηρίωση.

Εκτός των άλλων, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι το πρόβλημα του σχεδιασμού και τις μοντελοποίησης σχεδόν ποτέ δεν επιδέχεται μοναδική λύση. Διαμορφώνοντας νέες απαιτήσεις και περιορισμούς για το υπάρχον πρόβλημα, υιοθετώντας νέες πρακτικές προσέγγισης μέσω νέων ιδεών και εμπνεύσεων, είναι πιθανόν ο σχεδιασμός με τον καιρό να αλλάζει και να βελτιώνεται, όπως και οφείλει κάθε σχεδιασμός που προτείνει μία state-of-the-art πρακτική. Για τον λόγο αυτό, ο κώδικας γέννησης οδοντώσεων διαμορφώθηκε με όσο μεγαλύτερη γενικότητα ήταν δυνατόν, ώστε να διεκδικήσει μία θέση στην «εργαλειοθήκη» του εργαστηρίου και να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο μελλοντικής έρευνας αυτού ή και άλλων προβλημάτων κοινής θεματολογίας.

Ο κώδικας γένεσης οδοντώσεων βασίζεται στη γενικευμένη θεωρία [6] οδοντώσεων, κατά τον οποίον οι συνεργαζόμενες κατατομές πρέπει να είναι τέτοιες ώστε η κοινή κάθετος των κατατομών στο τυχόν σημείο επαφής τους να διέρχεται δια του σημείου κυλίσεως των τροχών. Με βάση αυτόν τον νόμο και με δεδομένη την γεωμετρία της μίας κατατομής, αποδεικνύεται ότι μπορεί να βρεθεί και η γεωμετρία της άλλης κατατομής. Αυτήν την βασική αρχή χρησιμοποιεί ο κώδικας για την γένεση των κατατομών. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται η καμπύλη $y=f(x)$ που ακολουθεί την κατατομή οδόντα κοπτικού κανόνα, και μέσω αυτής παράγεται η συνεργαζόμενη κατατομή (rack generation).

Ο κώδικας αυτός συγκεντρώνεται στην δημιουργία κατατομών δια εξειλιγμένης καμπύλης, οπότε ο κοπτικός κανόνας, που αρχικά δημιουργείται ώστε να παράξει την επιθυμητή κατατομή, έχει κατατομή οδόντος ευθεία γραμμή. Οι παράμετροι που ορίζουν την γεωμετρία του κανόνα είναι οι είσοδοι του κώδικα και τις χειρίζεται ο σχεδιαστής ώστε τελικά να παραχθεί η επιθυμητή κατατομή οδόντα. Αυτές είναι η ημιγωνία οδόντος του κανόνα, η οποία διαμορφώνει την γωνία εξειλιγμένης, το μέτρο της οδόντωσης ή module, βάσει του οποίου υπολογίζονται τα υπόλοιπα γεωμετρικά χαρακτηριστικά, το ύψος κεφαλής και το ύψος ποδός του κανόνα, τα οποία ορίζουν το ύψος ποδός και το ύψος κεφαλής του οδόντος του τροχού, αντίστοιχα, το πάχος οδόντος του τροχού στον αρχικό

κύκλο, την ακτίνα καμπυλότητας που διαμορφώνει το τροχοειδές του οδόντα του τροχού. Εκτός των παραπάνω μεγεθών που ορίζουν την γεωμετρία του κανόνα, εισάγεται και το σημαντικό μέγεθος του υπό δημιουργία οδοντωτού τροχού, το πλήθος των οδόντων του τροχού Z, από το οποίο εξαρτάται η σχέση μετάδοσης δύο συνεργαζόμενων τροχών. Βάση αυτών παράγεται η κατατομή του οδόντος του κανόνα όπως φαίνεται στην Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Κατατομή οδόντος του κοπτικού κανόνα

Συμβολισμοί:

- m module
- α_0 γωνία πίεσης
- C_f συντελεστής ύψους ποδός
- C_k συντελεστής ύψους κεφαλής
- C_s συντελεστής πάχους οδόντος τροχού στον αρχικό κύκλο
- C_c συντελεστής ακτίνας καμπυλότητας

Υπολογισμοί:

- $h_f = mC_f$ ύψος ποδός οδόντος τροχού
- $h_k = mC_k$ ύψος κεφαλής οδόντος τροχού
- $t_0 = \pi m$ βήμα στον αρχικό κύκλο
- $S_0 = C_s t_0$ πάχος οδόντος τροχού στον αρχικό κύκλο
- $l_0 = t_0 - S_0$ διάκενο μεταξύ οδόντων του τροχού στον αρχικό κύκλο
- $r_c = mC_c$ ακτίνα καμπυλότητας

Επίσης, από την γεωμετρία προκύπτει:

- $CD = l_0 - 2(a_t \tan\alpha_0 + r_c \cos\alpha_0)$
- $B = h_f - r_c$
- $a_t = h_f - r_c(1 - \sin\alpha_0)$

Κατά την κοπή του οδοντωτού τροχού με κοπτικό κανόνα είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι τα μπλε σκιασμένα διαστήματα *F'-F-F''* και *G''-G-G'*, δεν συμμετέχουν στην κοπή και δεν έρχονται ποτέ σε επαφή με το υλικό. Το διάστημα που κόβει την κεφαλή του οδόντα του τροχού είναι το *F''G''* και υπολογίζεται ως εξής. Κατά την κοπή, ο κοπτικός κανόνας κινήθηκε κατά το τμήμα *F''G''* με σταθερή ταχύτητα $V_0 = \omega r_0$, η οποία είναι η ίδια με την περιφερειακή ταχύτητα του τροχού στον αρχικό κύκλο. Ο δε τροχός κινήθηκε κατά τμήμα S_k, που είναι το πάχος οδόντος στην κεφαλή, με περιφερειακή ταχύτητα $V_k = \omega r_k$. Τα δύο αυτά διαστήματα έγιναν στον ίδιο χρόνο, οπότε προκύπτει ότι

$$F''G'' = S_k \frac{r_0}{r_k}$$

Το πάχος κεφαλής, από τις ιδιότητες της εξειλιγμένης υπολογίζεται ως

$$S_k = r_k \left[\frac{S_0}{r_0} + 2(\varphi_0 - \varphi_k)\right]$$

Όπου

$$\varphi_k = \tan a_k - a_k$$

και

$$\cos a_k = \frac{r_g}{r_k}$$

Τελικά:

$$F''G'' = S_0 - 2r_0(\tan\alpha_k - \alpha_k - \tan\alpha_0 + \alpha_0)$$

Επίσης, για τον πλήρη ορισμό ρου κανόνα, χρειάζεται να οριστεί η τεταγμένη των σημείων F' και G'. Αναλύοντας την γεωμετρία του κανόνα σύμφωνα με το Σχήμα 2.2, ισχύει:

$$r_k^2 = (G'C)^2 + r_0^2 - 2r_0 G'C \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_0\right)$$

Από την οποία παίρνουμε

$$G'C = -r_0 \sin a_0 + \left(r_k^2 - r_g^2\right)^{1/2}$$

Όπου

$$r_g = r_0 \cos a_0$$

Ο βασικός κύκλος του οδοντωτού τροχού, και

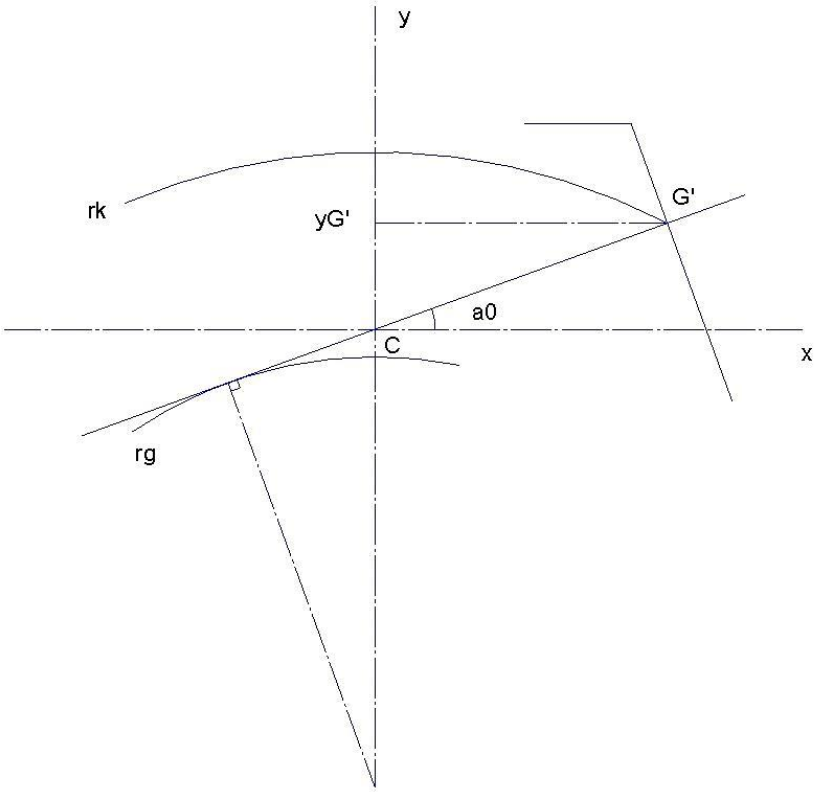
$$r_k = r_0 + C_k m$$

Επειδή

$$y_{G'} = G'C \sin a_0$$

Θα είναι τελικά:

$$y_{F'} = y_{G'} = -r_0 \sin^2 a_0 + \sin a_0 \left(r_k^2 - r_g^2\right)^{1/2}$$



Σχήμα 2.2: Ορισμός του $y_{G'}$

Με όλα τα παραπάνω είναι δυνατόν να δημιουργηθεί η πολύκλαδη συνάρτηση $y = F(x)$ της κατατομής του κανόνα.

Έχοντας τη κατατομή οδόντος του κανόνα και την ακτίνα r_0 του κύκλου κυλίσεως του τροχού είναι εφικτό να υπολογιστεί η κατατομή οδόντος ενός τροχού. Έστω (x_K, y_K) οι συντεταγμένες ενός σημείου της κατατομής του κανόνα και (x_{TE}, y_{TE}), (x_{gear}, y_{gear}) οι συντεταγμένες των σημείων της τροχιάς επαφών και των σημείων της κατατομής οδόντος του τροχού, αντίστοιχα, τότε το σημείο (x_K, y_K) του κανόνα και (x_{gear}, y_{gear}) του τροχού θα έλθουν σε επαφή στο σημείο (x_{TE}, y_{TE}) της τροχιάς επαφών. Κατά την οριζόντια μετακίνηση του κανόνα κατά $K > 0$ αντιστοιχεί στροφή του τροχού κατά γωνία θ, τέτοια ώστε:

$$K = \theta r_0$$

Όπως υπαγορεύει ο βασικός νόμος οδοντώσεων για την περίπτωση κυλίσεως χωρίς ολίσθηση του κανόνα και του τροχού. Προφανώς θα ισχύουν οι σχέσεις

$$y_{TE} = y_K \qquad \text{και} \qquad x_{TE} = x_K + K$$

$$\tan a = \frac{y_{TE}}{x_{TE}} = -\frac{dx_K}{dy_K}$$

Από τις οποίες προκύπτει ότι:

$$K = -\left(y_K \frac{dy_k}{dx_K} + x_K\right)$$

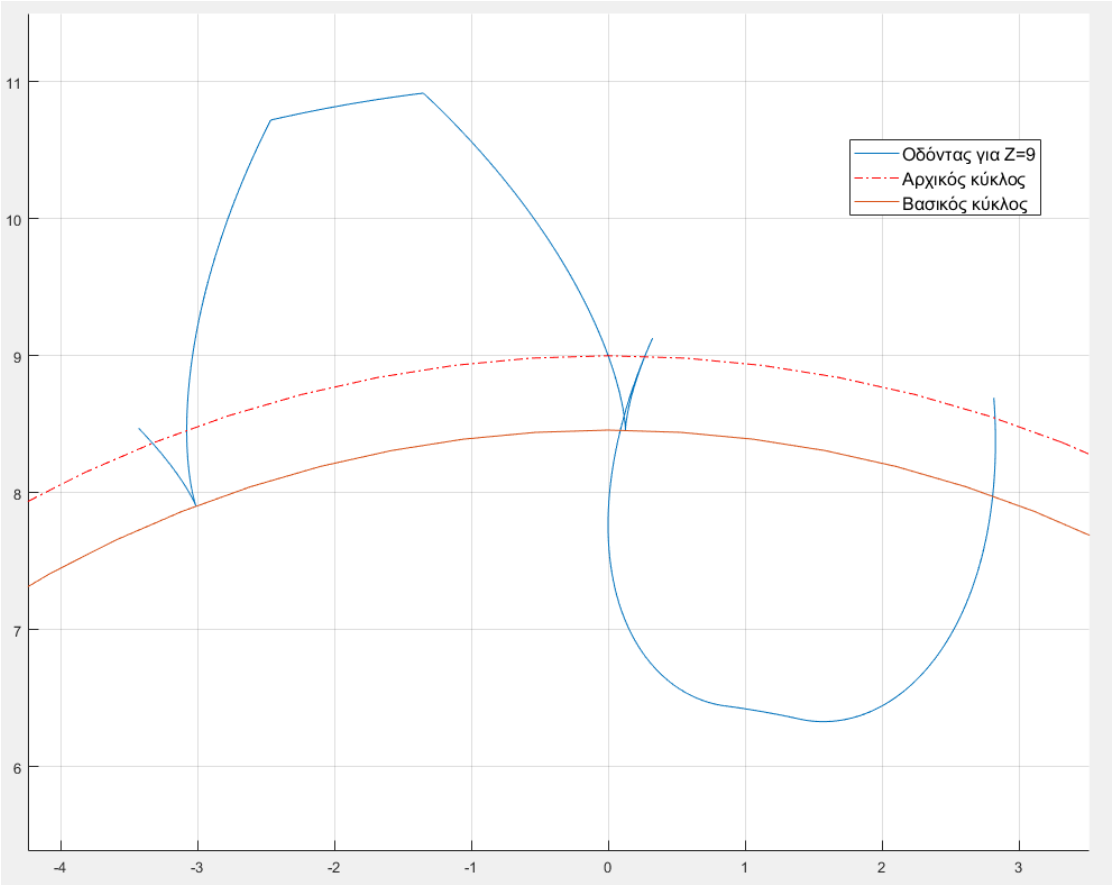
Οι συντεταγμένες του σημείου (x_{gear}, y_{gear}) προκύπτουν ως εξής:

$$\begin{cases} x_{gear} = (x_K + K)\cos\theta - (y + r_0)\sin\theta \\ y_{gear} = (x_K + K)\sin\theta + (y_K + r_0)\cos\theta - r_0 \end{cases}$$

Με την χρήση των παραπάνω σχέσεων υπολογίζεται η κατατομή οδόντος, όμως χωρίς τις κατάλληλες προσθήκες στον κώδικα το αποτέλεσμα που προκύπτει θα είναι σωστό μόνο στις πιο απλές περιπτώσεις τροχών. Σε αυτές δηλαδή που οι τιμές των παραμέτρων εισόδου $(\alpha_0, C_k, C_f, C_c, Z)$ κυμαίνονται σε ένα τυποποιημένο εύρος τιμών. Παρακάτω θα γίνει αναφορά σε αυτές τις προσαρμογές.

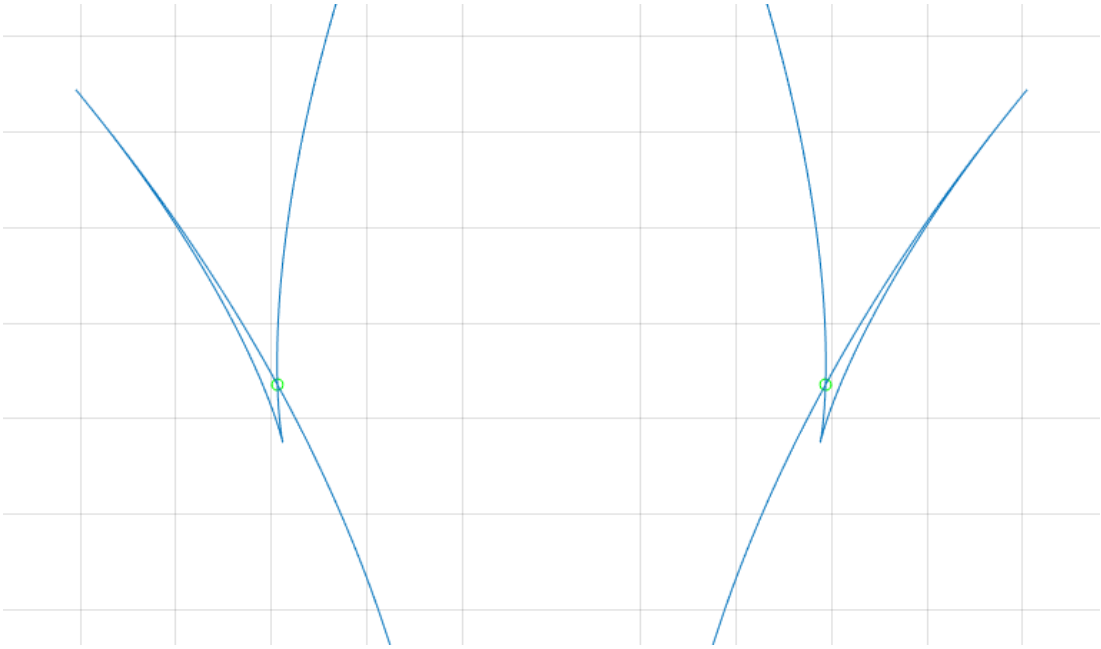
2.1. Υποκοπές Λειτουργίας

Αρχικά, προκύπτει το ζήτημα των υποκοπών λειτουργίας. Οι υποκοπές λειτουργίας είναι ένα σοβαρό μειονέκτημα των οδοντώσεων δι' εξειλιγμένης και εμφανίζονται όταν ο αριθμός των οδόντων του τροχού είναι μικρότερος από μία ελάχιστη τιμή.



Σχήμα 2.1.1: Κατατομή οδόντα τροχού όπως προκύπτει από την γενικευμένη θεωρία οδοντώσεων για δεδομένη κατατομή οδόντος του κανόνα

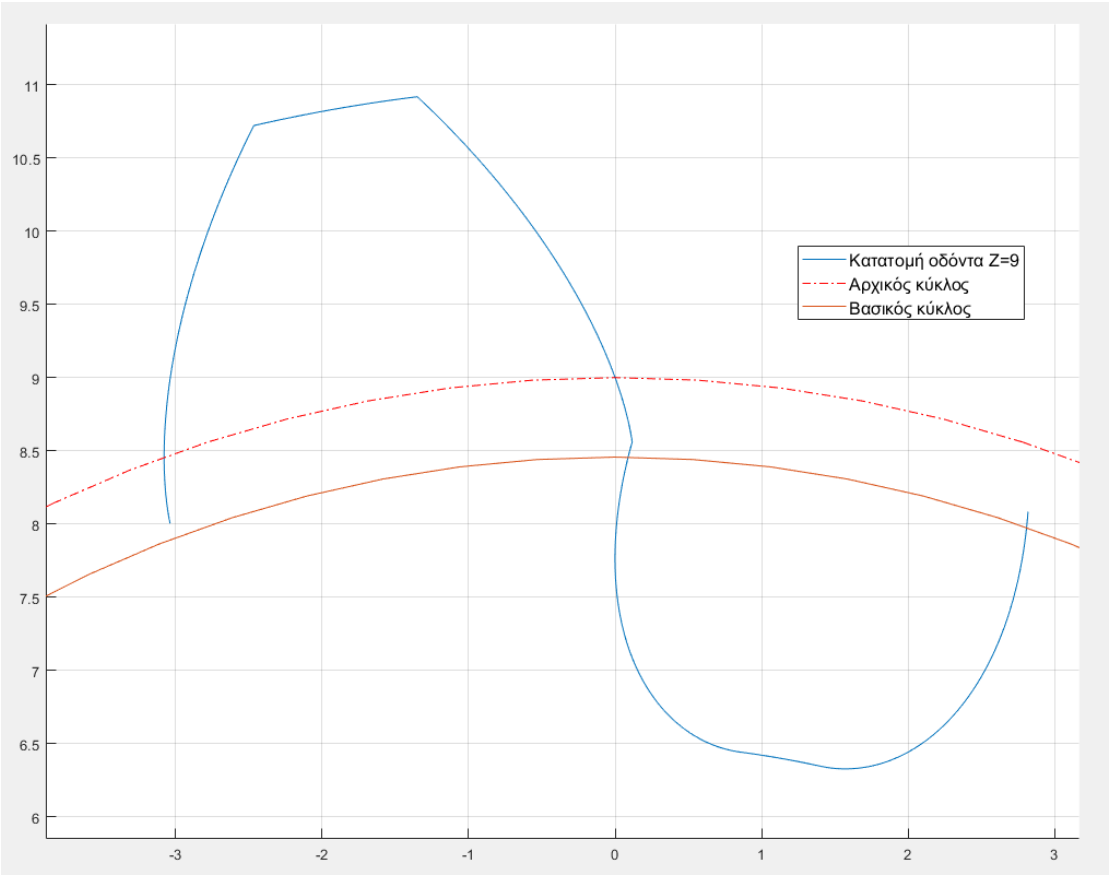
Στο Σχήμα 2.1.1 φαίνεται το αποτέλεσμα του υπολογισμού της κατατομής οδόντα τροχού με 9 οδόντες. Φαίνεται ότι υπολογίζονται σημεία τα οποία βρίσκονται εκτός της πραγματικής κατατομής του οδόντα (Εικόνα 2.1.2) και κατά την κατεργασία κοπής ο κοπτικός κανόνας ναι μεν «περνάει» από τα σημεία αυτά, αλλά δεν βρίσκει υλικό για να μορφοποιήσει τον οδόντα.



Εικόνα 2.1.2: Περιοχή υποκοπών κατασκευής για τις δύο πλευρές οδόντα τροχού με αριθμό οδόντων μικρότερο του ελάχιστου δυνατού για αποφυγή αυτών

Σε αυτών τον κώδικα είναι θεμιτό να μπορούν να προκύψουν κατατομές και με αριθμό οδόντων μικρότερο του κατώτερου ορίου και συνεπώς το γραφικό πρόβλημα της υποκοπής θα πρέπει να αντιμετωπισθεί, ώστε τελικά να προκύπτει η πραγματική κατατομή οδόντα τροχού που θα προέκυπτε μετά το πέρας της κατεργασίας κοπής. Στο Σχήμα 2.1.3 φαίνεται η κατατομή του ίδιου οδόντα με την παραπάνω περίπτωση, μετά την προσαρμογή του κώδικα για την διαχείριση του *undercut.*

Όσον αφορά την προσέγγιση που ακολουθήθηκε για την επίλυση του εν λόγω προβλήματος στον κώδικα, η κατατομή του οδόντα χωρίζεται σε δύο τμήματα, στο κομμάτι της εξειλιγμένης καμπύλης και στο κομμάτι του τροχοειδούς. Υπολογίζεται το σημείο τομής των δύο καμπυλών, αν υπάρχει, και έπειτα αφαιρούνται από το σύνολο των σημείων της κατατομής τα σημεία εκείνα που δεν ανήκουν στην «πραγματική» εξειλιγμένη και στο «πραγματικό» τροχοειδές του οδόντα του τροχού.



Σχήμα 2.1.3: «Πραγματική» κατατομή οδόντα μετά την προσαρμογή του κώδικα

2.2. Μέγιστες τιμές των συντελεστών C_k, C_f, C_c

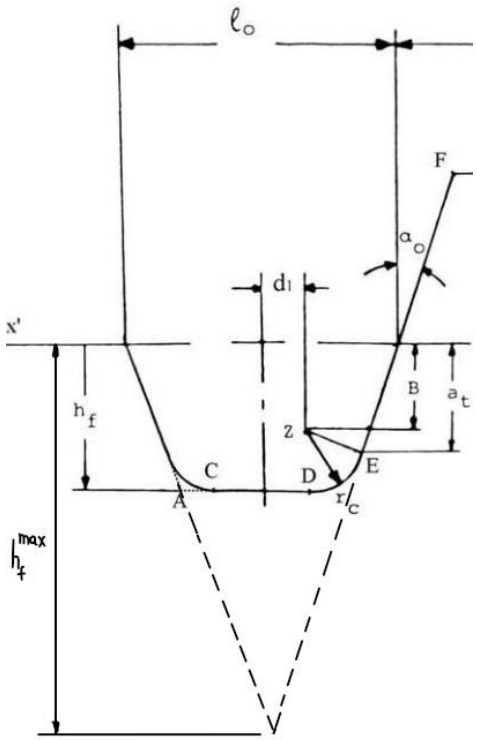
Επίσης, κρίνεται σημαντικό να υπολογίζονται οι μέγιστες τιμές των συντελεστών C_k, C_f, C_c και να υιοθετούνται όταν οι τιμές που δόθηκαν τις υπερβαίνουν. Φυσικά, δεν είναι όλοι οι συνδυασμοί των παραμέτρων υλοποιήσιμοι και η γεωμετρία του κανόνα έχει φυσικούς περιορισμούς, από τους οποίους προκύπτουν οι μέγιστες τιμές. Όπως προκύπτει από το Σχήμα 2.2.1 η μέγιστη τιμή του ύψους ποδός του τροχού είναι:

$$h_{f,max} = \frac{l_0}{2\tan a_0} = mC_{f,max}$$

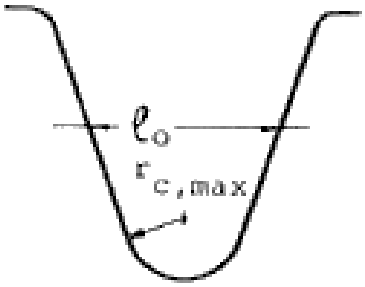
Για δεδομένο ύψος κεφαλής κανόνα (ύψος ποδός οδόντος του τροχού), η μέγιστη τιμή της ακτίνας καμπυλότητας συμβαίνει όταν $CD = 0$ (Σχήμα 2.2.2). Έτσι, έχουμε:

$$l_0 - 2\left(a_t \tan\alpha_0 + r_{c,max}\cos\alpha_0\right) = 0$$

$$r_{c,max} = \frac{\frac{(1-C_s)\pi m}{2} - C_f \tan a_o}{\cos a_0 - (1-\sin a_0)\tan a_0} = mC_{c,max}$$



Σχήμα 2.2.1: Γεωμετρία οδόντος του κανόνα



Σχήμα 2.2.2: Κατατομή οδόντος του κανόνα με μέγιστη ακτίνα καμπυλότητας

Κατά παρόμοιο τρόπο υπολογίζεται και το $C_{k,max}$. Ο συντελεστής ύψους κεφαλής οδόντα του τροχού παίρνει την μέγιστη τιμή του όταν $F''G'' = 0$. Έχουμε:

$$S_0 - 2r_0\left(\tan a_{k,max} - a_{k,max} - \tan a_0 + a_0\right) = 0$$

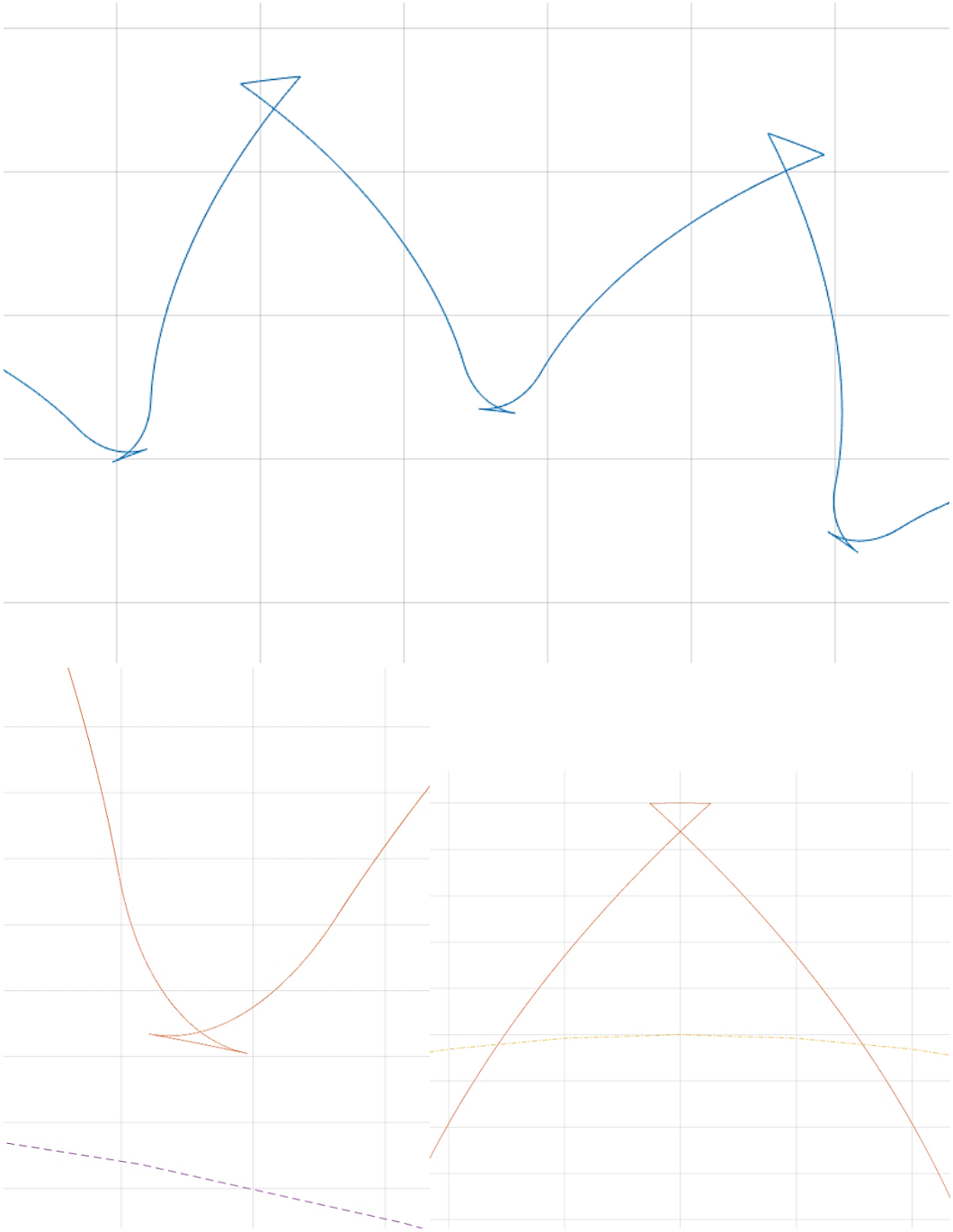
Όπου,

$$a_{k,max} = \cos^{-1}\frac{r_0 \cos a_0}{r_0 + h_{k,max}}$$

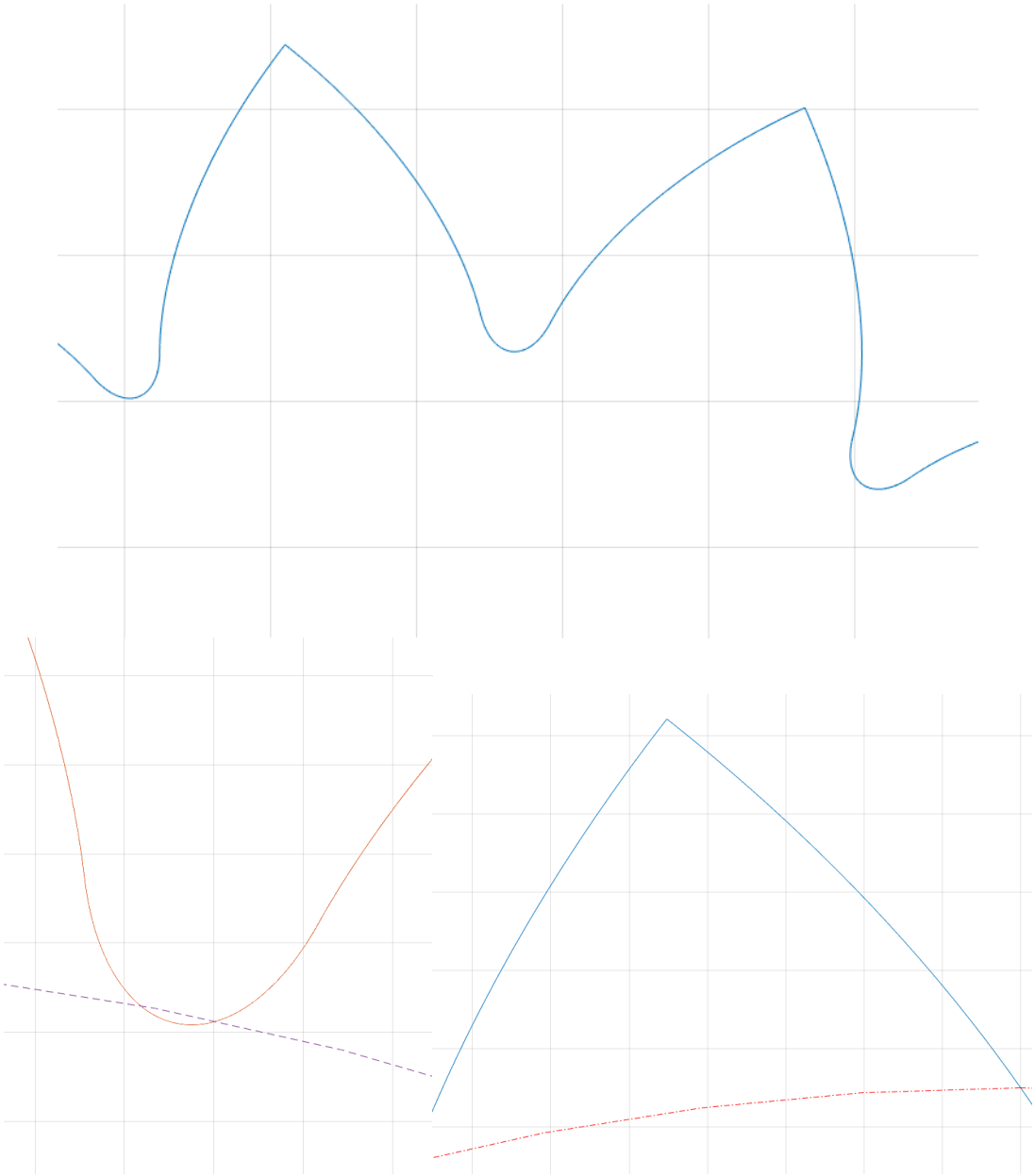
Η εξίσωση λύνεται αριθμητικά με επαναληπτική διαδικασία ως προς $h_{k,max}$ και εν τέλει υπολογίζεται το $C_{k,max} = \frac{h_{k,max}}{m}$.

Παρακάτω, στα Σχήματα 2.2.3 (α) και (β), φαίνεται η κατατομή που προκύπτει αν ο χρήστης ζητήσει να υπολογιστεί η κατατομή οδόντα τροχού με $a_0 = 35°$, $C_f = 1.3$, $C_k = 1.2$,

$C_c = 0.3$, $C_s = 0.5$, $m = 1$ και $Z = 13$, (α) στην περίπτωση που οι ανώτατες τιμές δεν εφαρμόζονται και (β) στην περίπτωση που παρεμβαίνει ο κώδικας και ορίζει τις μέγιστες τιμές των συντελεστών, όπου αυτές υπερβαίνονται

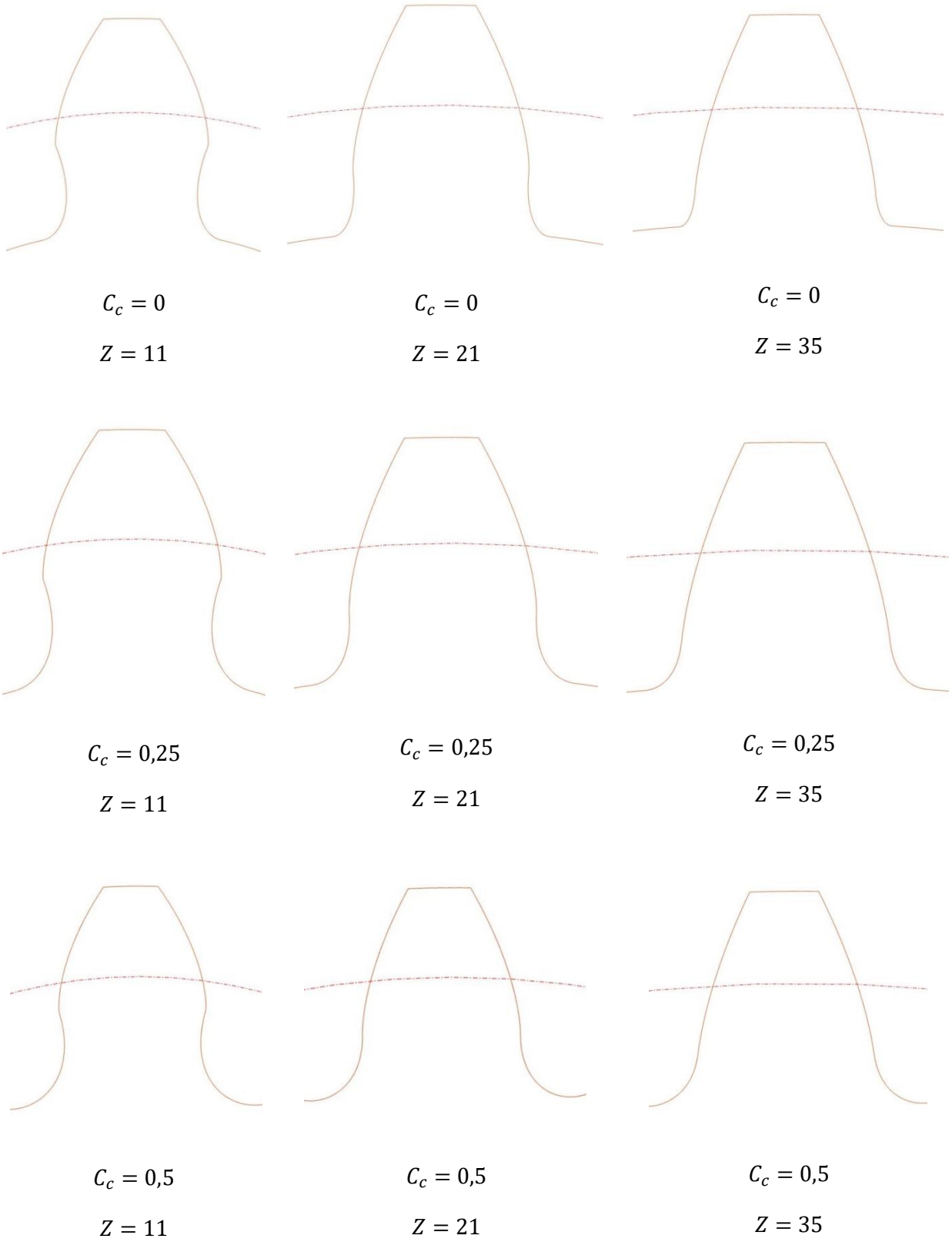


Σχήμα 2.2.3 (α): Κατατομές οδοόντων τροχών με συντελεστές C_k, C_f, C_c εκτός ορίων. Κάτω: μεγεθυνση στα σημεία ενδιαφέροντος (υποκοπές κατασκευής)



Σχήμα 2.2.3 (β): Κατατομές οδοόντων τροχών μετά την εφαρμογή των ανώτατων τιμών των συντελεστών C_k, C_f, C_c. Κάτω: μεγεθυνση στα σημεία ενδιαφέροντος (υποκοπές κατασκευής).

Τα επόμενα σχήματα (Σχήμα 2.2.4) παράγονται από κανόνα με $\alpha_0 = 20°$, $C_k = 1.0$, $C_h = 1.25$, $C_s = 0.5$ και $m = 2$. Δείχνουν τις διαφορές στις παραγόμενες κατατομές οδόντων δι' εξειλιγμένης ανάλογα το πλήθος των οδόντων του τροχού και της ακτίνας καμπυλότητας r_c της κεφαλής οδόντος του κανόνα.



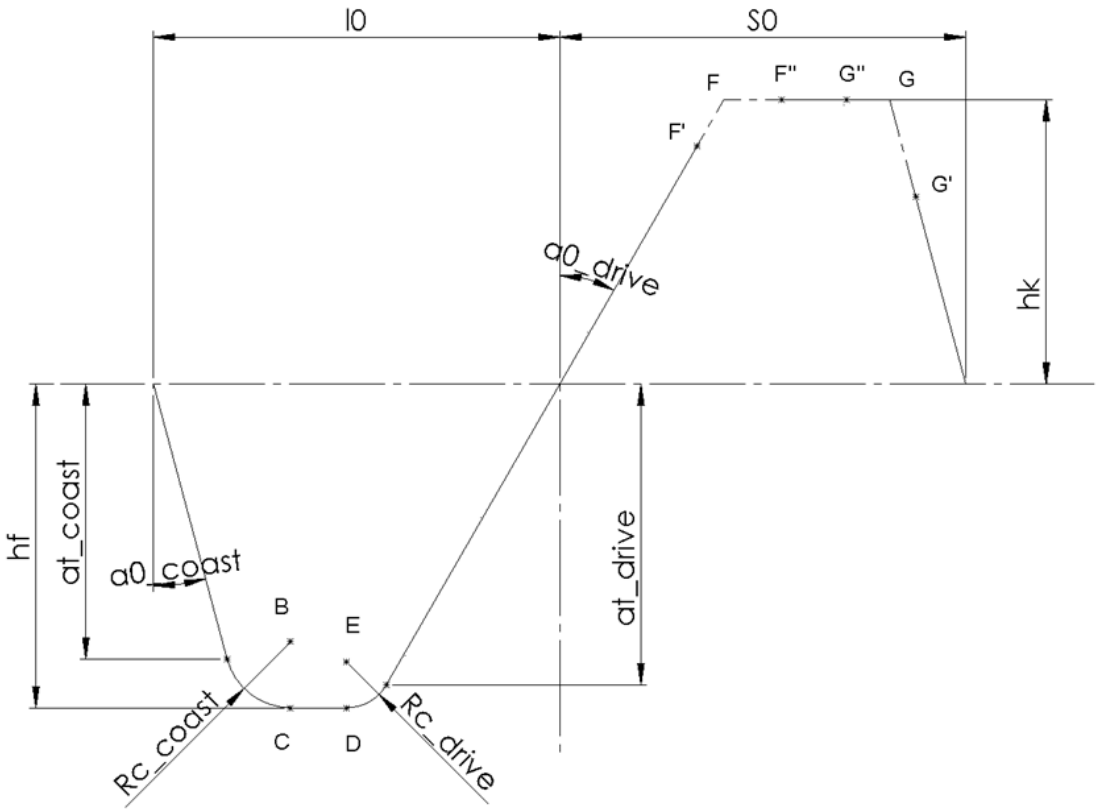
Εικόνα 2.2.4: Παραγόμενοι οδόντες από κανόνες με συντελεστές ακτίνας καμπυλότητας $C_c = 0$ (1η γραμμή), $C_c = 0{,}25$ (2η γραμμή), $C_c = 0{,}5$ (3η γραμμή), οδοντωτών τροχών με αριθμό οδόντων $Z = 11$ (1η στήλη), $Z = 21$ (2η στήλη), $Z = 35$ (3η στήλη)

Τα παρακάνω αρκούν για να υπολογίζονται κατατομές μετωπικών οδοντωτών τροχών με ευθεία οδόντωση. Όμως, όπως έχει ήδη αναφερθεί, στόχος του κώδικα είναι η γενικότητα, γι' αυτό θεωρήθηκε θεμιτό να ενταχθούν και οι περιπτώσεις μη συμμετρικών κατατομών οδόντων.

2.3. Ασύμμετροι οδόντες εξειλιγμένης

Για τον υπολογισμό ασύμμετρων κατατομών οδόντων χρειάζεται να προσδιοριστεί εκ νέου η πολύκλαδη συνάρτηση της κατατομής του κανόνα, με τις επιπλέον παραμέτρους των μεγεθών που μπορούν να ορισθούν ξεχωριστά για την εργαζόμενη (*drive*) και τη μη εργαζόμενη (*coast*) πλευρά του οδόντα. Αυτές είναι η *γωνία πίεσης* και ο *συντελεστής ακτίνας καμπυλότητας* του οδόντα του κανόνα.

Έτσι, η γεωμετρία του κανόνα γενικεύεται στην περίπτωση που φαίνεται στο Σχήμα 2.3.1.



Σχήμα 2.3.1: *Κατατομή κανόνα με ασύμμετρους οδόντες*

Για την τον ενσωμάτωση της νέας γεωμετρίας του κανόνα στον κώδικα χρειάζεται να διαμορφωθούν κατάλληλα οι εξισώσεις υπολογισμού των κομβικών σημείων.

Έχουμε για τα σημεία *B* και *E*:

$y_B = -(h_f - m * C_{c,coast})$ και $x_B = -l_0 + a_{t,coast} \sin a_{0,coast} + r_{c,coast} \cos a_{0,coast}$

$y_E = -(h_f - m * C_{c,drive})$ και $x_E = -a_{t,drive} \sin a_{0,drive} - r_{c,drive} \cos a_{0,drive}$

Το τμήμα *CD* διαμορφώνεται από τα μισά αντίστοιχα τμήματα *CD* δύο διαφορετικών κανόνων, ενός με τα χαρακτηριστικά της drive πλευράς και ενός με τα χαρακτηριστικά της coast, δηλαδή υπολογίζεται ως:

$$CD = \frac{CD_{drive}}{2} + \frac{CD_{coast}}{2}$$

Όπου,

$$CD_{drive} = l_0 - 2\left(a_{t,drive} \tan \alpha_{0,drive} + r_{c,drive} \cos \alpha_{0,drive}\right)$$

Και

$$CD_{coast} = l_0 - 2\left(a_{t,coast} \tan \alpha_{0,coast} + r_{c,coast} \cos \alpha_{0,coast}\right)$$

Με $a_{t,drive} = h_f - r_{c,drive}\left(1 - \sin a_{0,drive}\right)$ και $a_{t,coast} = h_f - r_{c,coast}\left(1 - \sin a_{0,coast}\right)$

Τελικά,

$$CD = l_0 - a_{t,drive} \tan \alpha_{0,drive} - r_{c,drive} \cos \alpha_{0,drive} - a_{t,coast} \tan \alpha_{0,coast} - r_{c,coast} \cos \alpha_{0,coast} \tag{2.1}$$

Για τα σημεία *F'* και *G'*, όμοια με την απόδειξη των αντίστοιχων σημείων του κανόνα για συμμετρικούς οδόντες, έχουμε:

$y_{F'} = -r_0 \sin^2 a_{0,drive} + \sin a_{0,drive} \left(r_k^2 - r_0^2 \cos^2 a_{0,drive}\right)^{1/2}$ και $x_{F'} = \frac{S_0}{2} - \frac{F''G''_{drive}}{2}$

$y_{G'} = -r_0 \sin^2 a_{0,coast} + \sin a_{0,coast} \left(r_k^2 - r_0^2 \cos^2 a_{0,coast}\right)^{1/2}$ και $x_{G'} = \frac{S_0}{2} + \frac{F''G''_{coast}}{2}$

Το τμήμα $F''G''$ υπολογίζεται με το ίδιο σκεπτικό που υπολογίζεται το CD, δηλαδή:

$$F''G'' = \frac{F''G''_{\ coast}}{2} + \frac{F''G''_{\ drive}}{2}$$

Είναι

$$F''G''_{\ coast} = S_0 + 2r_0\left(\tan a_{k,coast} - a_{k,coast} - \tan a_{0,coast} + a_{0,coast}\right)$$

Και

$$F''G''_{\ drive} = S_0 + 2r_0\left(\tan a_{k,drive} - a_{k,drive} - \tan a_{0,drive} + a_{0,drive}\right)$$

Όπου,

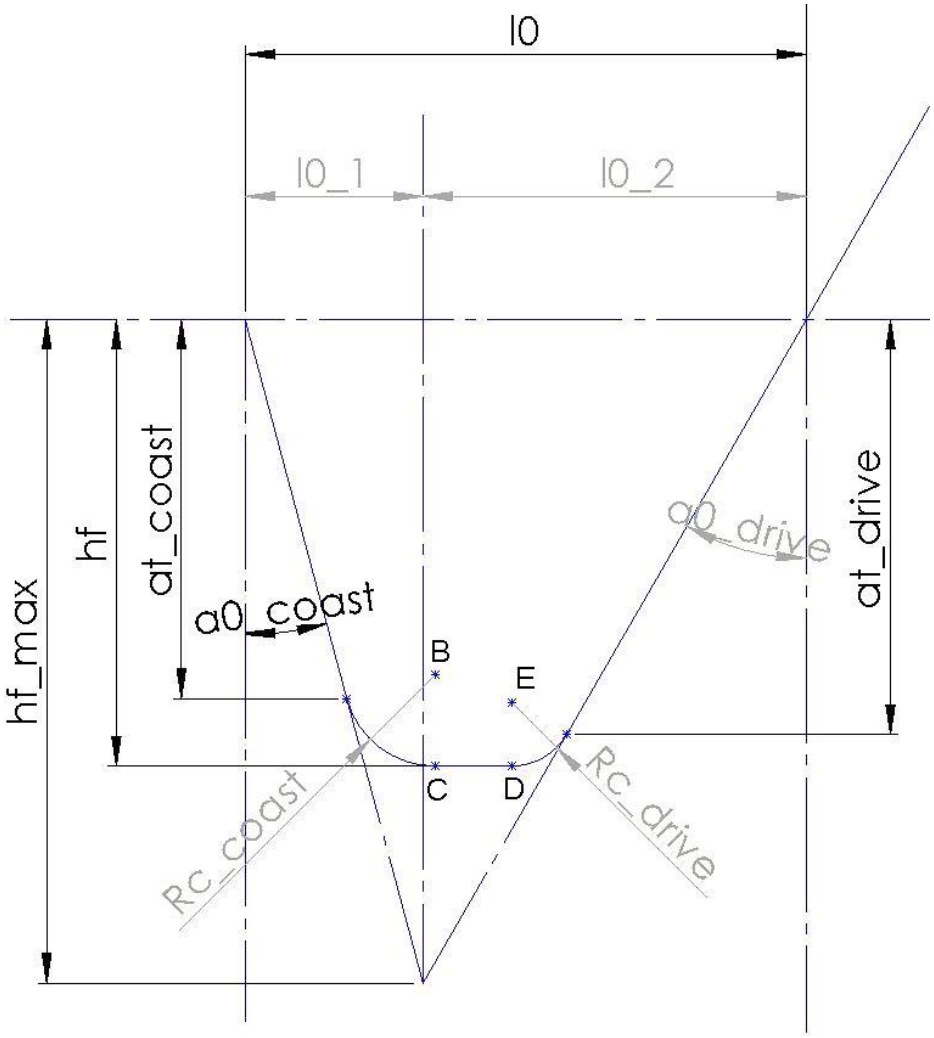
$$a_{k,drive} = \operatorname{acos}\left(\frac{r_0 \cos a_{0,drive}}{r_0 + h_k}\right) \quad \text{και} \quad a_{k,coast} = \operatorname{acos}\left(\frac{r_0 \cos a_{0,coast}}{r_0 + h_k}\right)$$

Τελικά,

$$F''G'' = S_0 + r_0\left(\tan a_{k,coast} - a_{k,coast} - \tan a_{0,coast} + a_{0,coast}\right) + r_0\left(\tan a_{k,drive} - a_{k,drive} - \tan a_{0,drive} + a_{0,drive}\right) \quad (2.2)$$

Με την νέα σχεδίαση του κανόνα χρειάζεται να προσαρμοστούν και οι σχέσεις προσδιορισμού των ανώτατων τιμών των συντελεστών C_f, C_c, C_k. Ειδικά ο συντελεστής της ακτίνας καμπυλότητας πλέον λαμβάνει δύο ξεχωριστές τιμές, την $C_{c,drive}$ για την ακτίνα καμπυλότητας της *driving* πλευράς και την $C_{c,coast}$ για την ακτίνα καμπυλότητας της *coast* πλευράς.

Για την μέγιστη τιμή του συντελεστή ύψους ποδός από την γεωμετρία του οδόντα (Σχήμα 2.3.2) αποδεικνύεται ότι:



Σχήμα 2.3.2: Γεωμετρία ασύμμετρου οδόντος κανόνα

$$\begin{Bmatrix} \tan a_{0,coast} = \dfrac{l_{01}}{h_{f,max}} \\ \tan a_{0,drive} = \dfrac{l_{02}}{h_{f,max}} \\ l_{01} + l_{02} = l_0 \end{Bmatrix}$$

Άρα,

$$C_{f,max} = \frac{(1 - C_s)\pi}{\tan a_{0,coast} + \tan a_{0,drive}}$$

Οι συντελεστές των ακτινών καμπυλότητας παίρνουν τις μέγιστες τιμές τους όταν $CD = 0$. Από την εξίσωση (2.1) για $CD = 0$ προκύπτει:

$$l_0 - a_{t,drive} \tan \alpha_{0,drive} - r_{c,drive} \cos \alpha_{0,drive} - a_{t,coast} \tan \alpha_{0,coast} - r_{c,coast} \cos \alpha_{0,coast} = 0$$

Αντικαθιστώντας τα $a_{t,drive}$ και $a_{t,coast}$ και απλοποιώντας την σχέση, έχουμε:

$$\begin{aligned} C_{c,coast}^{max}\left[\cos a_{0,coast} - \left(1 - \sin a_{0,coast}\right) \tan a_{0,coast}\right] \\ + C_{c,drive}^{max}\left[\cos a_{0,drive} - \left(1 - \sin a_{0,drive}\right) \tan a_{0,drive}\right] \\ = \pi(1 - C_s) - C_f\left(\tan a_{0,coast} + \tan a_{0,drive}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Η εξίσωση (3) αποδεικνύει ότι οι μέγιστες τιμές των συντελεστών $C_{c,coast}$ και $C_{c,drive}$ είναι αλληλοεξαρτώμενες και ανήκουν σε γεωμετρικό τόπο ευθείας γραμμής. Για τον καθορισμό όμως μίας τιμής για τις ανάγκες του κώδικα πάρθηκε η απόφαση να υπολογίζεται πρώτα από τα μέγιστα των $C_{c,coast}$ και $C_{c,drive}$, το μέγιστο $C_{c,drive}$ και με βάση αυτή την τιμή να υπολογίζεται στην συνέχεια το $C_{c,coast}$. Έχει αποδειχθεί [7] ότι αυξάνοντας την ακτίνα καμπυλότητας στην ακμή του κοπτικού κανόνα, συνεπώς επίτευξη μεγαλύτερου τροχοειδούς στον οδόντα του τροχού, μειώνεται η συγκέντρωση τάσεων και έτσι, αυξάνεται η αντοχή του οδόντα σε κάμψη. Με δεδομένο αυτό, και σε συνδυασμό με το ότι η εργαζόμενη πλευρά του οδόντα παραλαμβάνει το μεγαλύτερο φορτίο, από ότι η μη εργαζόμενη, κατά την συνεργασία δύο οδοντωτών τροχών [8], αποφασίστηκε να δίνεται προτεραιότητα όσον αφορά τον υπολογισμό της ακτίνας καμπυλότητάς. Δηλαδή, αν ο σχεδιαστής επιθυμεί να δώσει στον οδόντα του τροχού που σχεδιάζει τιμές στις ακτίνες καμπυλότητας των δύο πλευρών αρκετά υψηλές, που πιθανότατα να υπερβαίνουν τις μέγιστες τιμές τους, τότε, αφού υπολογιστεί η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει ο συντελεστής στην *drive* πλευρά, αν η ζητούμενη τιμή ξεπερνάει την υπολογισθείσα μέγιστη, θα καταχωρηθεί αυτή ως $C_{c,drive}$ του κανόνα και βάση αυτής θα υπολογιστεί και η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η *coast* πλευρά, και στην περίπτωση που ξεπερνάει την μέγιστη θα καταχωρηθεί αυτή ως $C_{c,coast}$ του κανόνα.

Η ολική μέγιστη τιμή του $C_{c,drive}$ υπολογίζεται για μηδενική ακτίνα καμπυλότητας στην coast πλευρά. Έτσι, από την εξίσωση (2.3), για $C_{c,coast} = 0$ προκύπτει:

$$C_{c,drive}^{max} = \frac{\pi(1 - C_s) - C_f\left(\tan a_{0,coast} + \tan a_{0,drive}\right)}{\cos a_{0,drive} - \left(1 - \sin a_{0,drive}\right) \tan a_{0,drive}}$$

Και βάσει αυτής της τιμής του συντελεστή ακτίνας καμπυλότητας στη drive πλευρά, υπολογίζεται και ο αντίστοιχος της coast πλευράς ως:

$$C_{c,coast}^{max} = \frac{\pi(1 - C_s) - C_f\left(\tan a_{0,coast} + \tan a_{0,drive}\right)}{\cos a_{0,coast} - \left(1 - \sin a_{0,coast}\right)\tan a_{0,coast}} - C_{c,drive}^{max}\frac{\cos a_{0,drive} - \left(1 - \sin a_{0,drive}\right)\tan a_{0,drive}}{\cos a_{0,coast} - \left(1 - \sin a_{0,coast}\right)\tan a_{0,coast}}$$

Όσον αφορά τις υποκοπές λειτουργίας στο τροχοειδές του οδόντα του τροχού, ο κώδικας ελέγχου υποκοπών που αναπτύχθηκε για τον συμμετρικό οδόντα καλύπτει και την περίπτωση των ασύμμετρων οδόντων.

Με τα παραπάνω ολοκληρώνεται ο κώδικας γένεσης συμμετρικών και ασύμμετρων οδοντώσεων οδοντωτών τροχών. Παρακάτω παρατίθενται δύο παραδείγματα οδοντωτών τροχών, θεωρητικά δύσκολων περιπτώσεων για τους κώδικες υπολογισμού κατατομών οδοντώσεων που βασίζονται στην προσέγγιση της γένεσής τους από συνεργαζόμενο κοπτικό κανόνα.

Στην πρώτη περίπτωση, που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.3.3, ο χρήστης ζητάει από τον κώδικα να παράξει οδοντωτό με παραμέτρους:

- $m = 3$
- $C_k = 1.15$
- $C_f = 1.35$
- $C_s = 0.495$
- $C_{c,drive} = 0.35$
- $C_{c,coast} = 0.35$
- $a_{0,drive} = 40°$
- $a_{0,coast} = 20°$
- $Z = 13$

Οι τιμές αυτές δεν είναι εφικτές και διορθώνονται τελικά από τον κώδικα στις πιο κοντινές ώστε να είναι δυνατή η σχεδίαση. Έτσι, οι παράμετροι διαμορφώνονται στους:

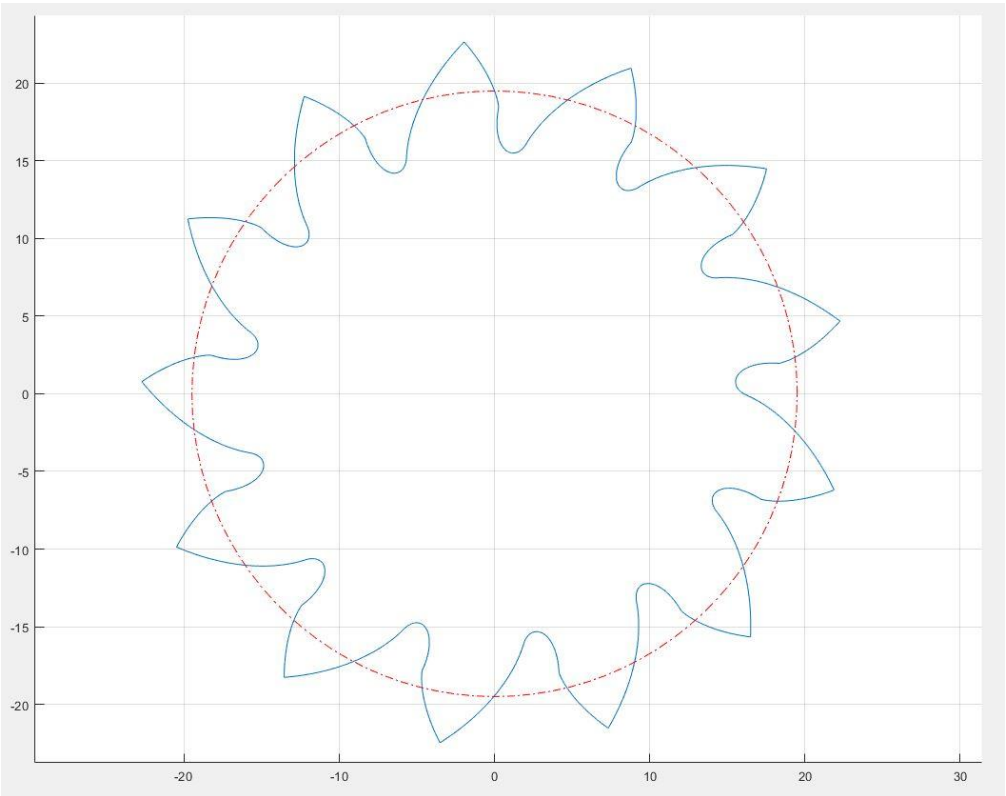
- $m = 3$
- $C_k = 1.0812$
- $C_f = 1.318$
- $C_s = 0.495$
- $C_{c,drive} = 0.0$
- $C_{c,coast} = 0.0$
- $a_{0,drive} = 40°$
- $a_{0,coast} = 20°$
- $Z = 13$

Καθώς οι τιμές $C_k, C_f, C_{c,drive}$ και $C_{c,coast}$ υπερβαίνουν τις μέγιστες επιτρεπτές τιμές ώστε να είναι εφικτός ο σχεδιασμός. Ας σημειωθεί εδώ, αν και είναι προφανές, πως από την στιγμή που το ύψος κεφαλής του οδόντα του κανόνα παίρνει την μέγιστη τιμή του, ακτίνα καμπυλότητας δεν υφίσταται καθώς το δόντι του κανόνα σχηματίζει ακμή. Το σύνολο των σημείων που αποτελούν το περίγραμμα των κατατομών αυτού του οδοντωτού τροχού φαίνεται παρακάτω.

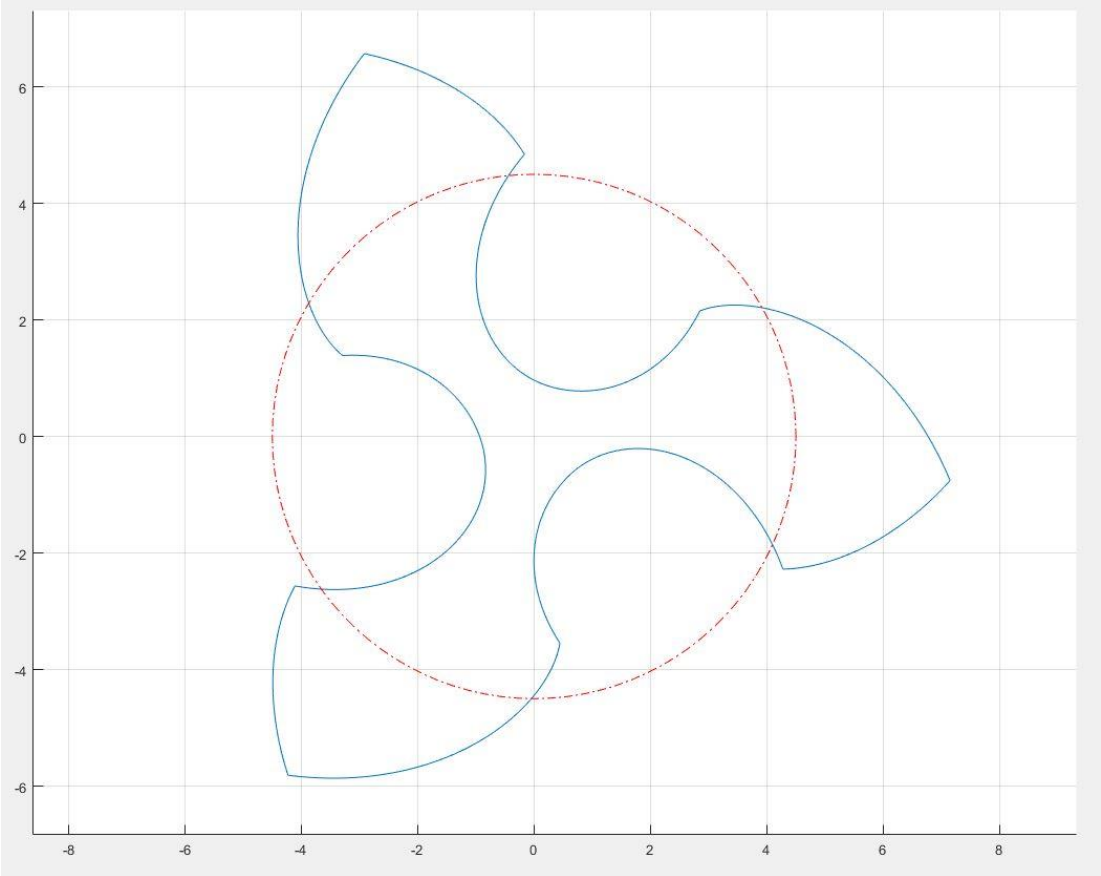
Προφανώς, σε αυτή την περίπτωση ο σχεδιαστής πρέπει να δώσει προσοχή στην τιμή του συντελεστή ύψους κεφαλής και ύψος ποδός, καθώς για την τιμή που επιθυμεί οδηγεί σε οδόντα τροχού και οδόντα κανόνα με μηδενικό πάχος κεφαλής. Ο σχηματισμός ακμής για λόγους αντοχής πρέπει να αποφευχθεί.

Άλλο ένα θεωρητικά δύσκολο – και ουτοπικό – παράδειγμα, που παρουσιάζεται στο *Σχήμα 2.3.4*, αφορά οδοντωτό τροχό με τρεις οδόντες. Έστω τιμές παραμέτρων:

- $m = 3$
- $C_k = 1.0$
- $C_f = 1.2$
- $C_s = 0.495$
- $C_{c,drive} = 0.3$
- $C_{c,coast} = 0.2$
- $a_{0,drive} = 40°$
- $a_{0,coast} = 20°$
- $Z = 3$



Σχήμα 2.3.3: Οδοντωτός τροχών 13 ασύμμετρων οδόντων και χαρακτηριστικά μεγέθη όπως αναφέρονται παραπάνω



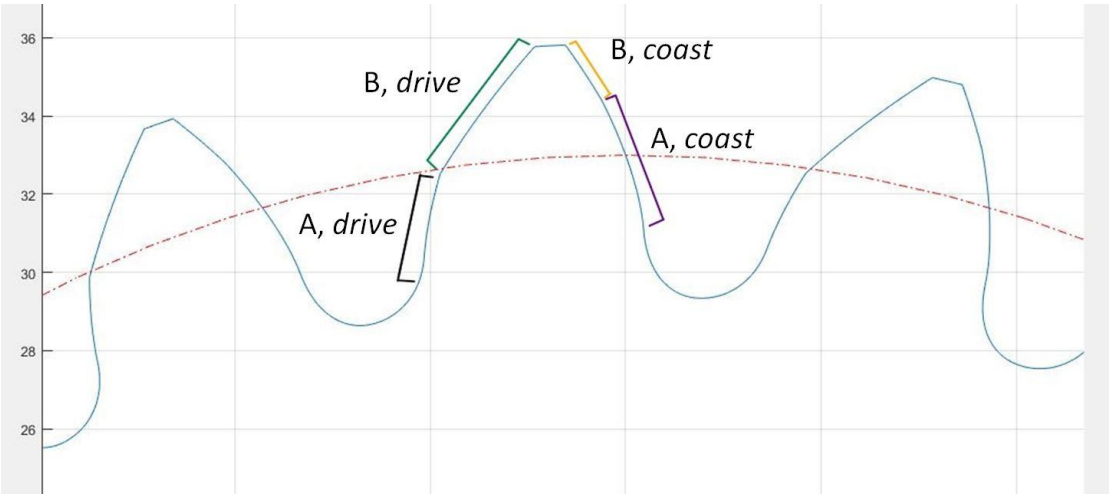
Σχήμα 2.3.4: Οδοντωτός τροχών 3 ασύμμετρων οδόντων και χαρακτηριστικά μεγέθη όπως αναφέρονται παραπάνω

Σε αυτή την περίπτωση οι προσαρμογές που γίνονται είναι οι $C_{c,coast} = 0$ και $C_k = 0.89656$. Ένα τέτοιο γρανάζι δεν πρόκειται ποτέ να παραχθεί και να χρησιμοποιηθεί, αλλά δίνεται ως παράδειγμα για να αναδειχθεί η ευχέρεια του κώδικα να διαχειρίζεται οποιεσδήποτε τιμές παραμέτρων εισόδου.

2.4. Ασύμμετροι οδόντες εξειλιγμένης δύο τμημάτων

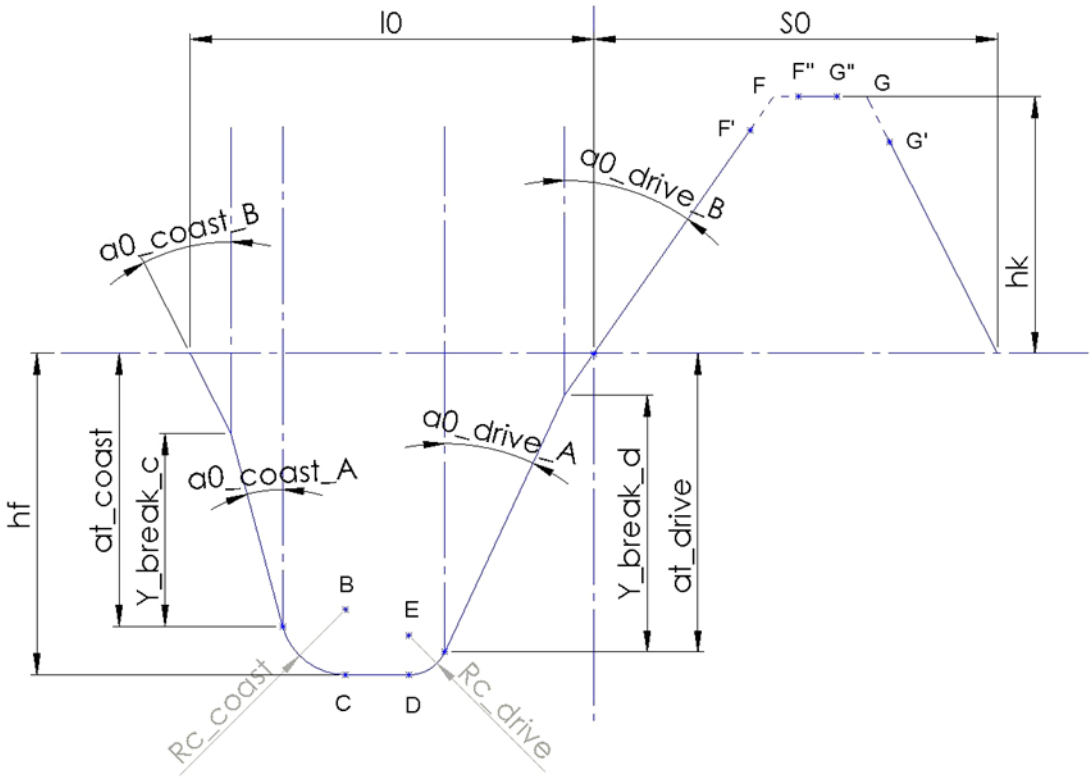
Πέρα από την γένεση κατατομών ασύμμετρων οδόντων τροχών, κρίθηκε θεμιτό να επεκταθεί περεταίρω ο κώδικας ώστε να καταστεί δυνατή η δημιουργία οδόντων με κατατομή εξειλιγμένης καμπύλης δύο τμημάτων, όπου κάθε ένα από αυτά είναι διαφορετική η γωνία πίεσης.

Παράδειγμα ενός τέτοιου οδόντα φαίνεται στο Σχήμα 2.4.1. Οι γωνίες πίεσής του είναι $a^A_{0,drive} = 25°$ & $a^B_{0,drive} = 40°$ για την εξειλιγμένη της drive πλευράς, ενώ είναι $a^A_{0,coast} = 20°$ & $a^B_{0,coast} = 25°$ για την coast πλευρά. Οι δείκτες *A* και *B* υποδεικνύουν τα δύο τμήματα της εξειλιγμένης.



Σχήμα 2.4.1: Ασύμμετροι οδόντες εξειλιγμένης δύο τμημάτων

Σε αυτή τη περίπτωση γένεσης οδοντώσεων οι νέες παράμετροι που εισάγονται είναι οι δύο επιπλέον γωνίες πίεσης, αλλά και δύο συντελεστές, ένας για κάθε πλευρά του οδόντα, που υποδεικνύουν σε ποιο σημείο γίνεται η αλλαγή της γωνίας πίεσης. Ο συντελεστής αυτός – τον ονομάζουμε C_{break} – ορίζει τι ποσοστό της πλευράς της κατατομής οδόντα του κανόνα θα αποτελεί το τμήμα *A*. Η γεωμετρία του κοπτικού κανόνα, βάση της οποίας υπολογίζονται οι κατατομές οδόντων τροχού παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.4.2:



Σχήμα 2.4.2: Κατατομή κανόνα με ασύμμετρους οδόντες εξειλιγμένης δύο τμημάτων

Σε αυτή την περίπτωση του κανόνα η πολύκλαδη συνάρτηση που υπολογίζει τα σημεία των κατατομών του είναι σύνθετη, καθώς επηρεάζεται άμεσα από τις τιμές των συντελεστών $C_{break,d}$ και $C_{break,c}$ – *d* για την *drive* πλευρά και *c* για την *coast* πλευρά – που θέτουν τα

όρια των τμημάτων των πλευρών που αλλάζει η κλίση. Χρειάζεται να οριστούν επιπλέον τα μεγέθη $Y_{break,c}$ και $Y_{break,d}$ για τον προσδιορισμό της συνάρτησης του κανόνα.

Το σημαντικό σημείο εδώ είναι πως ο νέος κανόνας προσδιορίζεται βάσει του παλιού (χωρίς την αλλαγή στην γωνία πίεσης) αν αυτός είχε για γωνία πίεσης την γωνία πίεσης του τμήματος Α του νέου κανόνα. Δηλαδή, τα $y_{F'}$ και $y_{G'}$ υπολογίζονται με γωνίες πίεσης $\alpha_{0,drive}^{A}$ και $\alpha_{0,coast}^{A}$ αντίστοιχα, γι' αυτό θα ονομαστούν $y_{F',old}$ και $y_{G',old}$

Ισχύει ότι στην κλασσική περίπτωση χωρίς την αλλαγή της γωνίας πίεσης κατά μήκος της ευθείας πλευράς του οδόντα του κανόνα, που κόβει εξειλιγμένη στον οδόντα του τροχού, στην *coast* πλευρά το μήκος του τμήματος που συμμετέχει στην κοπή είναι:

$$(\pi\lambda\epsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\ \kappa o\pi\acute{\eta}\varsigma\ \epsilon\xi\epsilon\iota\lambda\iota\gamma\mu\acute{\epsilon}\nu\eta\varsigma)_{coast} = \left(a_{t,coast} + y_{F',old}\right)\cos a_{0,coast}$$

Έτσι για το τμήμα Α της πλευράς στην περίπτωση του κανόνα με την αλλαγή στην γωνία πίεσης είναι:

$$(\tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\ A\ \kappa o\pi\acute{\eta}\varsigma\ \epsilon\xi\epsilon\iota\lambda\iota\gamma\mu\acute{\epsilon}\nu\eta\varsigma)_{coast} = \left(a_{t,coast} + y_{F',old}\right)\cos a_{0,coast}\, C_{break,c}$$

Οπότε,

$$Y_{break,c} = \left(a_{t,coast} + y_{F',old}\right)C_{break,c}$$

Και αντίστοιχα για την drive πλευρά είναι:

$$Y_{break,d} = \left(a_{t,drive} + y_{G',old}\right)C_{break,d}$$

Όμως, τα $y_{F'}$ και $y_{G'}$ του νέου κανόνα υπολογίζονται ως:

$$y_{F'} = -r_0 \sin^2 a_{0,drive}^{B} + \sin a_{0,drive}^{B}\left(r_k^2 - r_0^2 \cos^2 a_{0,drive}^{B}\right)^{1/2}$$

$$y_{G'} = -r_0 \sin^2 a_{0,coast}^{B} + \sin a_{0,coast}^{B}\left(r_k^2 - r_0^2 \cos^2 a_{0,coast}^{B}\right)^{1/2}$$

Το a_t υπολογίζεται με την γωνία πίεσης του τμήματος Α ως:

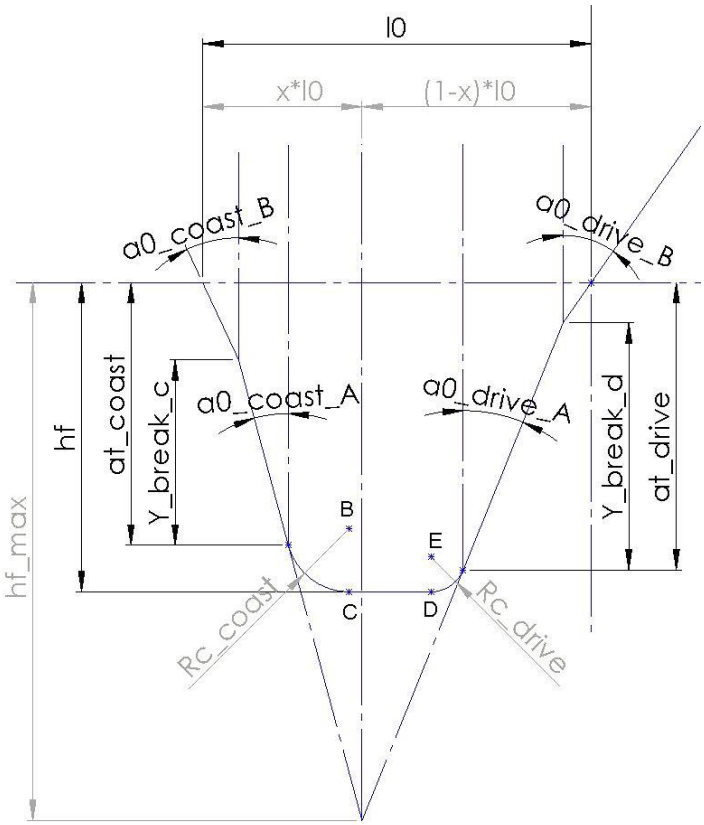
$$a_{t,drive} = h_f - r_{c,drive}\left(1 - \sin a_{0,drive}^{A}\right)$$

$$a_{t,coast} = h_f - r_{c,coast}\left(1 - \sin a_{0,coast}^{A}\right)$$

Η μορφή του κανόνα αλλάζει ανάλογα με την τιμή του συντελεστή C_{break} και αυτό δημιουργεί δυσκολία στον υπολογισμό των CD και $F''G''$, αλλά και στον υπολογισμό των μέγιστων τιμών των παραμέτρων του ύψος κεφαλής, ποδός και ακτίνας καμπυλότητας στις δύο πλευρές.

Πιο συγκεκριμένα, ανάλογα με το αν τα Y_{break} είναι μεγαλύτερα ή μικρότερα από τα α_t των αντίστοιχων πλευρών του κανόνα, δημιουργούνται τέσσερις υποπεριπτώσεις για τον υπολογισμό του CD, του $C_{f,max}$ και των $C_{c,coast}^{max}$, $C_{c,drive}^{max}$.

I. $Y_{break,d} < a_{t,drive}$ & $Y_{break,c} < a_{t,coast}$



Σχήμα 2.4.3: Γεωμετρία ασύμμετρου οδόντος κανόνα εξειλιγμένης δύο τμημάτων με $Y_{break,d} < a_{t,drive}$ & $Y_{break,c} < a_{t,coast}$

Βάσει του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 2.4.3) προκύπτει ότι:

$$\tan a_{0,drive}^{A} = \frac{x l_0 - \tan a_{0,drive}^{B}\left(a_{t,drive} - Y_{break,d}\right)}{h_f^{max} - \left(a_{t,drive} - Y_{break,d}\right)} \tag{2.4}$$

$$\tan a_{0,coast}^{A} = \frac{(1-x) l_0 - \tan a_{0,coast}^{B}\left(a_{t,coast} - Y_{break,c}\right)}{h_f^{max} - \left(a_{t,coast} - Y_{break,c}\right)} \tag{2.5}$$

Και από τις (4) και (5) προκύπτει:

$$h_f^{max} = \frac{l_0 - \left(\tan a_{0,drive}^{B} - \tan a_{0,drive}^{A}\right)\left(a_{t,drive} - Y_{break,d}\right)}{\tan a_{0,drive}^{A} + \tan a_{0,coast}^{A}} - \frac{\left(\tan a_{0,coast}^{B} - \tan a_{0,coast}^{A}\right)\left(a_{t,coast} - Y_{break,c}\right)}{\tan a_{0,drive}^{A} + \tan a_{0,coast}^{A}}$$

Τα $Y_{break,d}$ και $Y_{break,c}$ είναι συναρτήσεις του h_f, οπότε χρειάζεται να αντικατασταθούν στην εξίσωση ώστε να μην χρειάζεται να λυθεί επαναληπτικά. Τελικά έχουμε:

$$h_f^{max} = \frac{l_0 + y_{F',old} C_{break,d}\left(\tan a_{0,d}^B - \tan a_{0,d}^A\right)\left(a_{t,d} - Y_{break,d}\right)}{\tan a_{0,d}^A + \tan a_{0,c}^A + \left(1 - C_{break,d}\right)\left(\tan a_{0,d}^B - \tan a_{0,d}^A\right) + \left(1 - C_{break,c}\right)\left(\tan a_{0,c}^B - \tan a_{0,c}^A\right)} \tag{2.6}$$

Από εδώ και στο εξής οι δείκτες *drive* και *coast* μετατρέπονται σε *d* και *c* για συντομία.

Για τις μέγιστες τιμές των συντελεστών των ακτινών καμπυλότητας των δύο πλευρών του οδόντα κανόνα, όπως αναλύθηκε και στην περίπτωση του «κλασσικού» κανόνα για ασύμμετρο οδόντα, δίνεται προτεραιότητα στο τροχοειδές της drive πλευράς ώστε να λάβει την μέγιστη δυνατή τιμή, αν αυτό χρειαστεί. Η μέγιστη τιμή του $C_{c,d}$ προκύπτει όταν $CD = 0$ και $C_{c,c} = 0$. Από το σχήμα προκύπτει για το CD:

$$\begin{aligned} CD = l_0 - Y_{break,d} \tan a_{0,d}^A - \left(a_{t,d} - Y_{break,d}\right) \tan a_{0,d}^B - r_{c,d} \cos a_{0,d}^A \\ - Y_{break,c} \tan a_{0,c}^A - \left(a_{t,c} - Y_{break,c}\right) \tan a_{0,c}^B - r_{c,c} \cos a_{0,c}^A \end{aligned} \tag{2.7}$$

Τα $Y_{break,d}$ και $Y_{break,c}$ είναι συναρτήσεις του $r_{c,d}$ και $r_{c,d}$, οπότε αντικαθιστώντας τα στην (2.7) και με $CD = 0$ και $r_{c,c} = 0$ παίρνουμε:

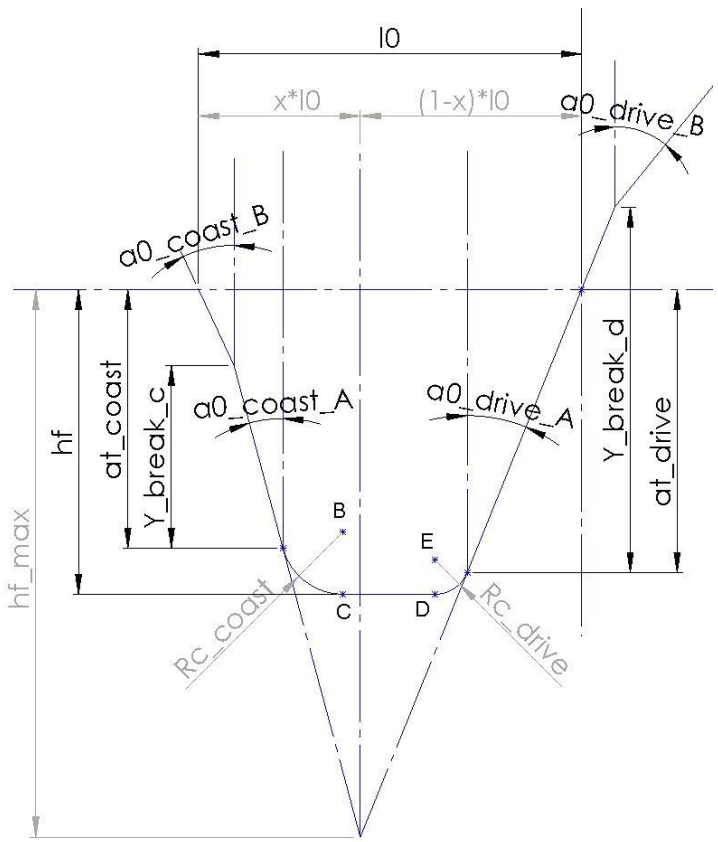
$$\begin{aligned} r_{c,d}^{max} &= \frac{h_f\left(C_{break,d} \tan a_{0,d}^A + \left(1 - C_{break,d}\right) \tan a_{0,d}^B + C_{break,c} \tan a_{0,c}^A + \left(1 - C_{break,c}\right) \tan a_{0,c}^B\right.}{\left(1 - \sin a_{0,d}^A\right)\left(C_{break,d} \tan a_{0,d}^A + \left(1 - C_{break,d}\right) \tan a_{0,d}^B - \cos a_{0,d}^A\right.} \\ &- \frac{l_0 - y_{F'old} C_{break,d}\left(\tan a_{0,d}^B - \tan a_{0,d}^A\right) - y_{G'old} C_{break,c}\left(\tan a_{0,c}^B - \tan a_{0,c}^A\right)}{\left(1 - \sin a_{0,d}^A\right)\left(C_{break,d} \tan a_{0,d}^A + \left(1 - C_{break,d}\right) \tan a_{0,d}^B - \cos a_{0,d}^A\right.} \end{aligned}$$

Για το $r_{c,c}^{max}$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} r_{c,c}^{max} &= \frac{h_f\left(C_{break,d} \tan a_{0,d}^A + \left(1 - C_{break,d}\right) \tan a_{0,d}^B + C_{break,c} \tan a_{0,c}^A + \left(1 - C_{break,c}\right) \tan a_{0,c}^B\right.}{\left(1 - \sin a_{0,c}^A\right)\left(C_{break,c} \tan a_{0,c}^A + \left(1 - C_{break,c}\right) \tan a_{0,c}^B\right) - \cos a_{0,c}^A} \\ &- \frac{l_0 - y_{F'old} C_{break,d}\left(\tan a_{0,d}^B - \tan a_{0,d}^A\right) - y_{G'old} C_{break,c}\left(\tan a_{0,c}^B - \tan a_{0,c}^A\right)}{\left(1 - \sin a_{0,c}^A\right)\left(C_{break,c} \tan a_{0,c}^A + \left(1 - C_{break,c}\right) \tan a_{0,c}^B\right) - \cos a_{0,c}^A} \\ &- r_{c,d}\left[\left(1 - \sin a_{0,d}^A\right)\left(C_{break,d} \tan a_{0,d}^A + \left(1 - C_{break,d}\right) \tan a_{0,d}^B - \cos a_{0,d}^A\right]\right. \end{aligned}$$

II. $Y_{break,d} > a_{t,drive}$ & $Y_{break,c} < a_{t,coast}$

Κατά παρόμοιο τρόπο με την παραπάνω μεθοδολογία αποδεικνύονται, βάσει γεωμετρίας, τα $C_{f,max}$ και CD, ενώ υπολογίζονται τα $C_{c,d}^{max}$ και $C_{c,c}^{max}$.



Σχήμα 2.4.4: Γεωμετρία ασύμμετρου οδόντος κανόνα εξειλιγμένης δύο τμημάτων με $Y_{break,d} > a_{t,drive}$ & $Y_{break,c} < a_{t,coast}$

Από το Σχήμα 2.4.4 αποδεικνύεται:

$$\tan a_{0,d}^{A} = \frac{x l_0 - \tan a_{0,d}^{B}\left(a_{t,d} - Y_{break,d}\right)}{h_f^{max} - \left(a_{t,d} - Y_{break,d}\right)} \tag{2.8}$$

$$\tan a_{0,c}^{A} = \frac{(1-x) l_0}{h_f^{max}} \tag{2.9}$$

Και από τις εξισώσεις (8) και (9) παίρνουμε:

$$h_{f,max} = \frac{l_0 - \left(a_{t,d} - Y_{break,d}\right)\left(\tan a_{0,d}^{B} - \tan a_{0,d}^{A}\right)}{\tan a_{0,d}^{A} + \tan a_{0,c}^{A}}$$

Για να πάρει το ύψος κεφαλής του οδόντα του κανόνα την μέγιστη τιμή του η ακτίνα καμπυλότητας είναι μηδενική και έτσι $\alpha_t = h_f = h_{f,max}$. Αντικαθιστώντας το $Y_{break,d}$ και το $a_{t,d}$ ώστε να είναι δυνατή η αναλυτική λύση ως προς $h_{f,max}$ προκύπτει:

$$h_{f,max} = \frac{l_0 - y_{F',old} C_{break,d}\left(\tan a_{0,d}^{B} - \tan a_{0,d}^{A}\right)}{\tan a_{0,d}^{A} + \tan a_{0,c}^{A} + \left(1 - C_{break,d}\right)\left(\tan a_{0,d}^{B} - \tan a_{0,d}^{A}\right)}$$

Το CD υπολογίζεται ως:

$$CD = l_0 - r_{c,d}\cos a_{0,d}^A - Y_{break,d}\tan a_{0,d}^A - \left(a_{t,d} - Y_{break,d}\right)\tan a_{0,d}^B - r_{c,c}\cos a_{0,c}^A - a_{t,c}\tan a_{0,c}^A$$

Για τις μέγιστες τιμές των ακτινών καμπυλότητας, όμοια με παραπάνω, για $CD = 0$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} r_{c,d}\left[\left(1-\sin a_{0,d}^A\right)\left(C_{break,d}\tan a_{0,d}^A + \left(1-C_{break,d}\right)\tan a_{0,d}^B\right) - \cos a_{0,d}^A\right] \\ + r_{c,c}\left[\left(1-\sin a_{0,c}^A\right)\tan a_{0,c}^A - \cos a_{0,c}^A\right] \\ = h_f\left(C_{break,d}\tan a_{0,d}^A + \left(1-C_{break,d}\right)\tan a_{0,d}^B + \tan a_{0,c}^A\right) - l_0 \\ - y_{F'old}C_{break,d}\left(\tan a_{0,d}^B - \tan a_{0,d}^A\right) \end{aligned}$$

Το $r_{c,d}$ παίρνει την μέγιστη τιμή του όταν $r_{c,c} = 0$, άρα:

$$r_{c,d}^{max} = \frac{h_f\left(C_{break,d}\tan a_{0,d}^A + \left(1-C_{break,d}\right)\tan a_{0,d}^B + \tan a_{0,c}^A\right)}{\left(1-\sin a_{0,d}^A\right)\left(C_{break,d}\tan a_{0,d}^A + \left(1-C_{break,d}\right)\tan a_{0,d}^B\right) - \cos a_{0,d}^A} - \frac{l_0 + y_{F'old}C_{break,d}\left(\tan a_{0,d}^B - \tan a_{0,d}^A\right)}{\left(1-\sin a_{0,d}^A\right)\left(C_{break,d}\tan a_{0,d}^A + \left(1-C_{break,d}\right)\tan a_{0,d}^B\right) - \cos a_{0,d}^A}$$

Και

$$r_{c,c}^{max} = \frac{h_f\left(C_{break,d}\tan a_{0,d}^A + \left(1-C_{break,d}\right)\tan a_{0,d}^B + \tan a_{0,c}^A\right)}{\left(1-\sin a_{0,c}^A\right)\tan a_{0,c}^A - \cos a_{0,c}^A} - \frac{l_0 + y_{F'old}C_{break,d}\left(\tan a_{0,d}^B - \tan a_{0,d}^A\right)}{\left(1-\sin a_{0,c}^A\right)\tan a_{0,c}^A - \cos a_{0,c}^A} - r_{c,d}\frac{\left(1-\sin a_{0,d}^A\right)\left(C_{break,d}\tan a_{0,d}^A + \left(1-C_{break,d}\right)\tan a_{0,d}^B\right) - \cos a_{0,d}^A}{\left(1-\sin a_{0,c}^A\right)\tan a_{0,c}^A - \cos a_{0,c}^A}$$

III. $Y_{break,d} < a_{t,drive}$ & $Y_{break,c} > a_{t,coast}$

Για αυτή την περίπτωση ο κανόνας διαμορφώνεται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Αποδεικνύεται ότι:

$$\tan a_{0,d}^A = \frac{x l_0}{h_{f,max}} \tag{2.10}$$

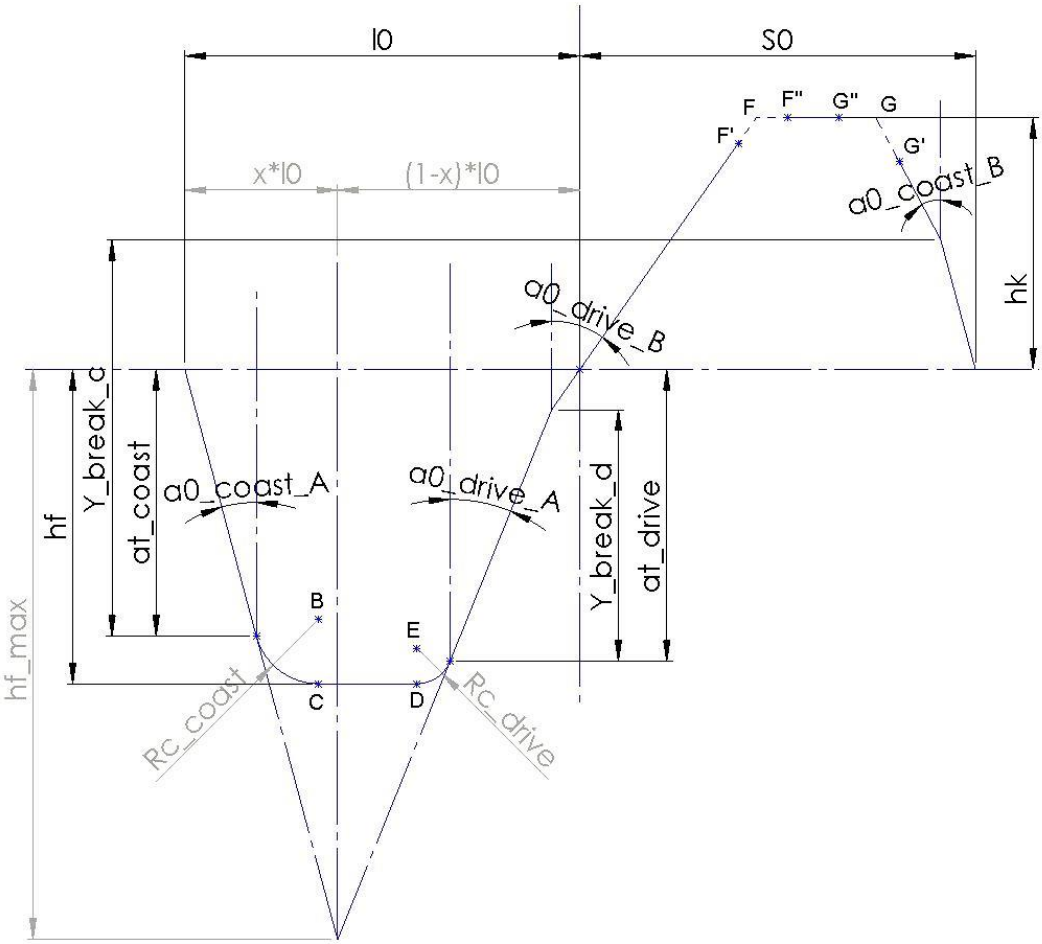
$$\tan a_{0,c}^A = \frac{(1-x)l_0 - \left(a_{t,c} - Y_{break,c}\right)\tan a_{0,c}^B}{h_f^{max} - \left(a_{t,c} - Y_{break,c}\right)} \tag{2.11}$$

Από τις εξισώσεις (10) και (11) βρίσκουμε:

$$h_{f,max} = \frac{l_0 - \left(a_{t,c} - Y_{break,c}\right)\left(\tan a_{0,c}^B - \tan a_{0,c}^A\right)}{\tan a_{0,d}^A + \tan a_{0,c}^A}$$

Και απαλείφοντας τα $Y_{break,c}$ και $a_{t,c}$ παίρνουμε:

$$h_{f,max} = \frac{l_0 - y_{G',old} C_{break,c}\left(\tan a_{0,c}^B - \tan a_{0,c}^A\right)}{\tan a_{0,d}^A + \tan a_{0,c}^A + \left(1 - C_{break,c}\right)\left(\tan a_{0,c}^B - \tan a_{0,c}^A\right)}$$



Σχήμα 2.4.4: Γεωμετρία ασύμμετρου οδόντος κανόνα εξειλιγμένης δύο τμημάτων με $Y_{break,d} < a_{t,drive}$ & $Y_{break,c} > a_{t,coast}$

Από το Σχήμα 2.4.4 αποδεικνύεται ότι:

$$CD = l_0 - Y_{break,d} \tan a_{0,d}^A - \left(a_{t,d} - Y_{break,d}\right) \tan a_{0,d}^B - r_{c,d} \cos a_{0,d}^A - a_{t,c} \tan a_{0,c}^A - r_{c,c} \cos a_{0,c}^A$$

Η συγκεκριμένη περίπτωση είναι ακριβώς αντίθετη με την περίπτωση 2, οπότε εύκολα διαπιστώνει κανείς πως:

$$\begin{aligned} & r_{c,d}\left[\left(1 - \sin a_{0,d}^A\right) \tan a_{0,d}^A - \cos a_{0,d}^A\right] \\ & + r_{c,c}\left[\left(1 - \sin a_{0,c}^A\right)\left(C_{break,c} \tan a_{0,c}^A + \left(1 - C_{break,c}\right) \tan a_{0,c}^B\right) - \cos a_{0,c}^A\right] \\ & = h_f\left(C_{break,c} \tan a_{0,c}^A + \left(1 - C_{break,c}\right) \tan a_{0,c}^B + \tan a_{0,d}^A\right) - l_0 \\ & - y_{G'old} C_{break,c}\left(\tan a_{0,c}^B - \tan a_{0,c}^A\right) \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των μέγιστων τιμών ακολουθείται η ίδια μεθοδολογία και τελικά προκύπτει:

$$r_{c,d}^{max} = \frac{h_f\left(C_{break,c}\tan a_{0,c}^{A} + \left(1 - C_{break,c}\right)\tan a_{0,c}^{B} + \tan a_{0,d}^{A}\right)}{\left(1 - \sin a_{0,d}^{A}\right)\tan a_{0,d}^{A} - \cos a_{0,d}^{A}} - \frac{l_0 + y_{G'old}C_{break,c}\left(\tan a_{0,c}^{B} - \tan a_{0,c}^{A}\right)}{\left(1 - \sin a_{0,d}^{A}\right)\tan a_{0,d}^{A} - \cos a_{0,d}^{A}}$$

Και

$$r_{c,c}^{max} = \frac{h_f\left(C_{break,c}\tan a_{0,c}^{A} + \left(1 - C_{break,c}\right)\tan a_{0,c}^{B} + \tan a_{0,d}^{A}\right)}{\left(1 - \sin a_{0,c}^{A}\right)\left(C_{break,c}\tan a_{0,c}^{A} + \left(1 - C_{break,c}\right)\tan a_{0,c}^{B}\right) - \cos a_{0,c}^{A}} - \frac{l_0 + y_{G'old}C_{break,c}\left(\tan a_{0,c}^{B} - \tan a_{0,c}^{A}\right)}{\left(1 - \sin a_{0,c}^{A}\right)\left(C_{break,c}\tan a_{0,c}^{A} + \left(1 - C_{break,c}\right)\tan a_{0,c}^{B}\right) - \cos a_{0,c}^{A}} - r_{c,d}\frac{\left(1 - \sin a_{0,d}^{A}\right)\tan a_{0,d}^{A} - \cos a_{0,d}^{A}}{\left(1 - \sin a_{0,c}^{A}\right)\left(C_{break,c}\tan a_{0,c}^{A} + \left(1 - C_{break,c}\right)\tan a_{0,c}^{B}\right) - \cos a_{0,c}^{A}}$$

IV. $Y_{break,d} > a_{t,drive}$ & $Y_{break,c} > a_{t,coast}$

Στην περίπτωση αυτή τα CD, $h_{f,max}$ και τα $r_{c,c}^{max}$, $r_{c,d}^{max}$ είναι ίδια με αυτά που προκύπτουν από τις εξισώσεις της περίπτωσης του ασύμμετρου κανόνα, οπότε χρησιμοποιούμε τις αντίστοιχες εξισώσεις αυτής την ενότητας.

Εύρεση $F''G''$:

Ο υπολογισμός του $F''G''$ στην περίπτωση του κανόνα με αλλαγή γωνία πίεσης δεν είναι προφανής. Όπως αποδείχθηκε στην ενότητα του συμμετρικού κοπτικού κανόνα, για να υπολογιστεί το $F''G''$ απαιτείται πρώτα ο υπολογισμός του πάχους κεφαλής του οδόντα του τροχού. Στην κλασσική οδόντωση με κατατομή εξειλιγμένης μίας γωνίας πίεσης ο υπολογισμός αυτός είναι απλός, μιας και το πάχος του οδόντα του τροχού σε οποιαδήποτε ακτίνα του μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του πάχος του οδόντα στον αρχικό κύκλο, της γωνίας πίεσης, της ακτίνας του αρχικού κύκλου, της ακτίνας στην οποία θέλουμε να υπολογίσουμε το πάχος και της συνάρτησης της εξειλιγμένης στα σημεία του αρχικού κύκλου και του κύκλου που μας ενδιαφέρει, βάσει της εξίσωσης:

$$S_k = r_k\left[\frac{S_0}{r_0} + 2(\varphi_0 - \varphi_k)\right] \tag{2.12}$$

Στην περίπτωση, όμως, που αλλάζει η γωνία πίεσης κατά μήκος της εξειλιγμένης, για να υπολογιστεί το πάχος κεφαλής του οδόντα του τροχού χρειάζεται να υπολογίσουμε πρώτα το πάχος στην ακτίνα που γίνεται η αλλαγή της γωνίας και έπειτα, μέσω του πάχους αυτού να υπολογίσουμε το πάχος κεφαλής του οδόντα. Κι αυτό γιατί η μετάβαση από τον βασικό κύκλο στον κύκλο κεφαλής συμβαίνει με δύο εξειλιγμένες καμπύλες, διαφορετικών γωνιών πίεσης η κάθε μία. Αν το πάχος κεφαλής υπολογιζόταν σύμφωνα με την εξίσωση (2.12) τότε το αποτέλεσμα θα ήταν σωστό μόνο στην περίπτωση όπου η αλλαγή στην γωνία πίεσης γινόταν ακριβός στον αρχικό κύκλο.

Στην περίπτωση που η αλλαγή συμβαίνει σε ακτίνα μεγαλύτερη του αρχικού κύκλου το πάχος του οδόντα στην ακτίνα αυτή υπολογίζεται ως:

$$S_{break} = r_{break}\left[\frac{S_0}{r_0} + 2\left(\varphi_{0,A} - \varphi_{break,A}\right)\right] \tag{2.13}$$

Όπου

$$\varphi_{0,A} - \varphi_{break,A} = \tan a_{0,A} - a_{0,A} - (\tan a_{break,A} - a_{break,A})$$

Και

$$a_{break,A} = \operatorname{acos}\left(\frac{r_0 \cos a_{0,A}}{r_{break}}\right)$$

Στην περίπτωση που η αλλαγή συμβαίνει σε ακτίνα μικρότερη του αρχικού κύκλου το πάχος του οδόντα στην ακτίνα αυτή υπολογίζεται ως:

$$S_{break} = r_{break}\left[\frac{S_0}{r_0} + 2\left(\varphi_{0,B} - \varphi_{break,B}\right)\right] \tag{2.14}$$

Όπου, αντίστοιχα με παραπάνω, $\varphi_{0,B} - \varphi_{break,B}$ ορίζεται με τον ίδιο τρόπο με την διαφορά ότι σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιείται η γωνία πίεσης του τμήματος Β. Το ποια από τις δύο γωνίες θα χρησιμοποιηθεί κρίνεται από αν το σημείο του οδόντα που βρίσκεται στον αρχικό κύκλο είναι σημείο της εξειλιγμένης του τμήματος Α με γωνία $a_{0,A}$ ή του τμήματος Β με γωνία $a_{0,B}$.

Προφανώς, πρέπει να υπολογιστεί η ακτίνα r_{break}. Αυτό επιτυγχάνεται με την εύρεση του σημείο της κατατομής του οδόντα όπου γίνεται η αλλαγή στην γωνία πίεσης. Η μεθοδολογία που ακολουθείται είναι να υπολογισθούν οι εξειλιγμένες καμπύλες των τμημάτων Α και Β και να βρεθεί το σημείο τομής των δύο καμπυλών. Λόγω της ασυνέχειας που προκύπτει στο σημείο της αλλαγής και ανάλογα με τις παραμέτρους του οδοντωτού τροχού τα τελευταία σημεία του τμήματος Α και τα πρώτα σημεία του τμήματος Β δεν κόβουν πραγματικά υλικό και έτσι, τα αντίστοιχα σημεία της εξειλιγμένης που παράγουν δεν αποτελούν πραγματικά σημεία της κατατομής του οδόντα. Γι' αυτό και υιοθετείται η μεθοδολογία με την τομή των δύο εξειλιγμένων, μιας και δεν προκύπτει σε όλες τις περιπτώσεις εκεί που τελειώνει η εξειλιγμένη Α, να αρχίζει η εξειλιγμένη Β.

Με γνωστή την ακτίνα στην αλλαγή της γωνίας πίεσης είναι δυνατόν να υπολογιστεί το πάχος κεφαλής του οδόντα. Γενικά ισχύει:

$$\frac{S_x}{r_x} = \frac{S_0}{r_0} + 2(\varphi_0 - \varphi_x)$$

Αν για x επιλέξουμε τα σημεία με r_k και r_{break} έχουμε:

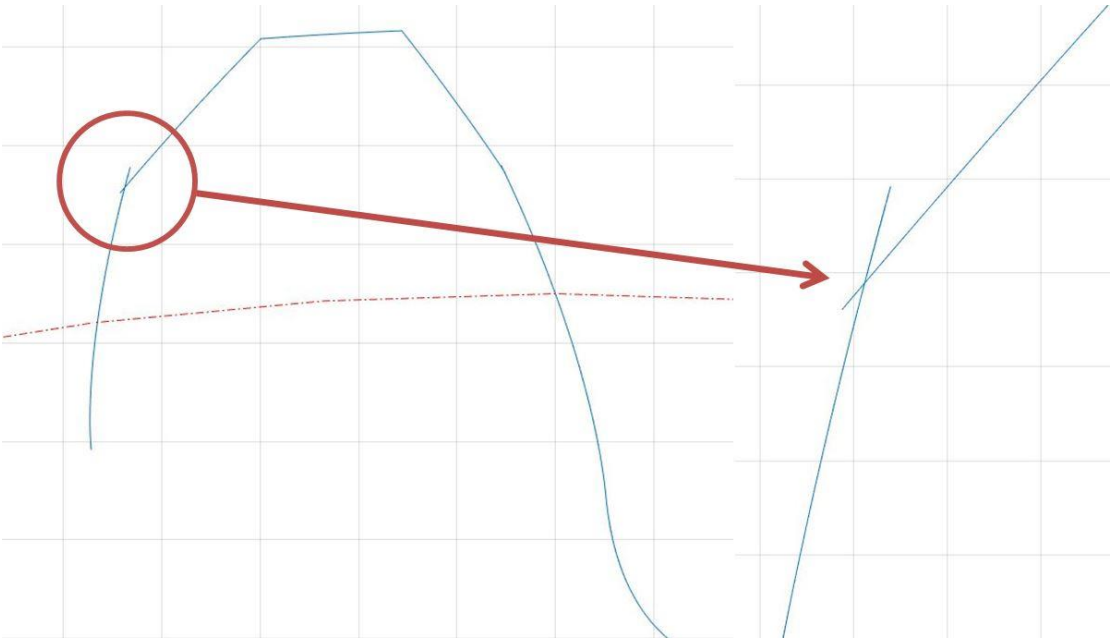
$$\frac{S_k}{r_k} = \frac{S_0}{r_0} + 2(\varphi_0 - \varphi_k) \quad \text{και} \quad \frac{S_{break}}{r_{break}} = \frac{S_0}{r_0} + 2(\varphi_0 - \varphi_{break})$$

Και απαλείφοντας το $\frac{S_0}{r_0}$ παίρνουμε:

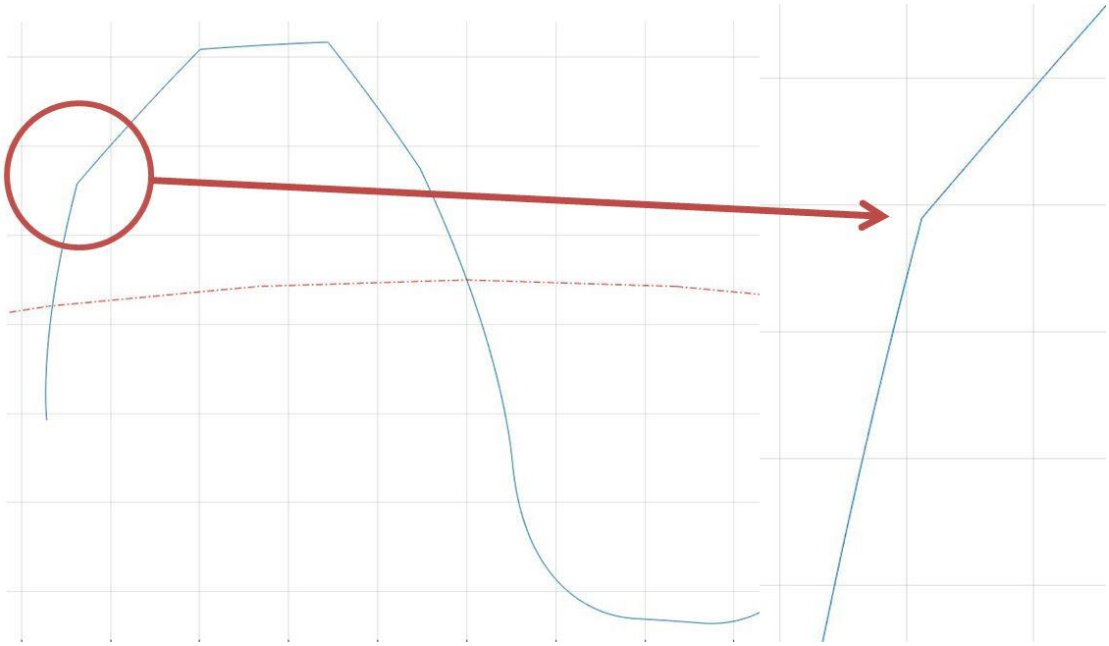
$$S_k = r_k \frac{S_{break}}{r_{break}} + 2r_k(\varphi_{break} - \varphi_k)$$

Τα σημεία αυτά που υπολογίζονται από τις εξισώσεις μετασχηματισμού του οδόντα κανόνα σε οδόντα τροχού αλλά δεν αποτελούν πραγματικά σημεία της κατατομής, πρέπει να αφαιρεθούν. Με τον ίδιο τρόπο που αφαιρέθηκαν και τα σημεία στις περιπτώσεις των υποκοπών λειτουργίας. Παρακάτω στα Σχήματα 2.4.5 (α) και (β) φαίνονται οι δύο περιπτώσεις των κατατομών οδόντων με και χωρίς την αφαίρεση των εν λόγω σημείων των δύο εξειλιγμένων. Το παράδειγμα αφορά οδόντα τροχού με τα εξής γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

- $a_{0,d}^A = 15°$ & $a_{0,d}^B = 45°$
- $a_{0,c}^A = 20°$ & $a_{0,c}^B = 30°$
- $C_k = 0.9$
- $C_f = 1.25$
- $C_s = 0.495$
- $C_{c,d} = 0.35$ & $C_{c,c} = 0.35$
- $C_{break,d} = 0.85$ & $C_{break,d} = 0.8$
- $Z = 25$



Σχήμα 2.4.5 (α): Λεπτομέρεια υποκοπής κατασκευής στην περιοχή της αλλαγής της γωνίας εξειλιγμένης



Σχήμα 2.4.5 (β): Λεπτομέρεια στην περιοχή της αλλαγής της γωνίας εξειλιγμένης μετά την προσαρμογή του αλγόριθμου

Οι εξισώσεις (2.13) και (2.14) υπολογίζονται τόσο για την drive πλευρά, όσο και για την coast, με χρήση των αντίστοιχων γωνιών πίεσης και τελικά μπορεί να υπολογιστεί το πάχος κεφαλής για τα δεδομένα της μίας και της άλλης πλευράς.

Εν τέλει, μέσω του πάχους κεφαλής του οδόντα για την drive και coast πλευρά, είναι δυνατόν να υπολογιστεί το τμήμα $F''G''$ του κανόνα, ώστε να ολοκληρωθεί η συνάρτηση που περιγράφει την γεωμετρία του σύνθετου αυτού κανόνα.

Αποδείχθηκε στην πρώτη ενότητα του συμμετρικού κοπτικού κανόνα πως συνδέεται το τμήμα $F''G''$ του κοπτικού κανόνα με το πάχος κεφαλής S_k του οδόντα τροχού μέσω της σχέσης:

$$F''G'' = S_k \frac{r_0}{r_k}$$

Επίσης, όπως αναφέρθηκε και στην περίπτωση του απλού ασύμμετρου κανόνα, το $F''G''$ υπολογίζεται ως το ημιάθροισμα των $F''G''$ για την drive και την coast πλευρά.

Τελικά,

$$F''G'' = \left(\frac{S_{k,d}}{2} + \frac{S_{k,c}}{2}\right)\frac{r_0}{r_k}$$

Το $C_{k,max}$ δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί αναλυτικά, γι' αυτό χρησιμοποιείται η παρακάτω μεθοδολογία για τον προσδιορισμό του. Από την στιγμή που ήδη έχουν υπολογιστεί οι εξειλιγμένες καμπύλες της drive και της coast πλευράς, ελέγχουμε αν οι εξειλιγμένες των τμημάτων B τέμνονται. Στην περίπτωση που δεν τέμνονται ο συντελεστής ύψους οδόντα που έχει ζητηθεί βρίσκεται εντός του ορίου και δεν απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση. Στην περίπτωση που οι εξειλιγμένες των τμημάτων B τέμνονται τότε σημαίνει πως ο συντελεστής C_k έχει ξεπεράσει την μέγιστη τιμή του και απαιτείται να βρεθεί ποια

είναι αυτή η μέγιστη τιμή και να υιοθετηθεί. Το σημείο τομής τον εξειλιγμένων έχει ακτίνα $r_{k,max}$ και ισχύει ότι $C_{k,max} = \frac{r_{max}-r_0}{m}$, όπου και αυτή η τιμή του συντελεστή ξεπερνάει το ανώτατο όριο εξ ορισμού. Εκτελείται επαναληπτική διαδικασία στην οποία υιοθετείται κάθε φορά για συντελεστή ύψους οδόντα το $C_{k,max}$ που υπολογίστηκε στην τελευταία επανάληψη. Η επαναληπτική διαδικασία τελειώνει στην επανάληψη εκείνη όπου θα ελεγχθεί να οι εξειλιγμένες των δύο πλευρών τέμνονται και θα δοθεί αρνητικό αποτέλεσμα. Το C_k της τελευταίας επανάληψης είναι και η μέγιστη οριακή τιμή που μπορεί να λάβει ο συντελεστής ύψους οδόντα του συγκεκριμένου κανόνα.

Με τον υπολογισμό του C_k ορίζεται πλέον πλήρως ο σύνθετος κοπτικός κανόνας που παράγει ασύμμετρους οδοντωτούς τροχούς που έχουν για κατατομές δύο εξειλιγμένες καμπύλες με διαφορετική γωνιά πίεσης η καθεμία.

Ας σημειωθεί εδώ, πως στις περιπτώσεις όπου υπερβαίνονται τα όρια των συντελεστών και υιοθετούνται νέες τιμές για αυτούς, οι μέγιστες δηλαδή, επαναϋπολογίζονται όλα τα μεγέθη που είναι συνάρτηση των συντελεστών αυτών.

Οι κανόνες με συμμετρικό και ασύμμετρο οδόντα αποτελούν υποπεριπτώσεις του κανόνα με ασύμμετρο οδόντα και ευθεία πλευρά δύο τμημάτων με διαφορετικές γωνίες πίεσης. Γι' αυτό ο τελευταίος υιοθετείται από τον κώδικα γένεσης οδοντώσεων εξειλιγμένης μέσω κοπτικού κανόνα, ως ο πλέον γενικός κοπτικός κανόνας που εξυπηρετεί κάθε περίπτωση.

2.5. Μετωπικοί τροχοί με ελικοειδή οδόντωση

Σημαντικό για την πληρότητα του κώδικα κρίθηκε να καταστεί δυνατός ο υπολογισμός κατατομών ελικοειδών οδόντων τροχών. Ένας οδοντωτός τροχός με ελικοειδή οδόντωση μπορεί να παραχθεί από κοπτικό κανόνα ευθείας οδόντωσης όταν στον τελευταίο δοθεί κατάλληλη κλίση προς το μετωπικό επίπεδο του τροχού. Η κλίση αυτή είναι ίση με την γωνία της έλικας που θα αποδοθεί στον οδόντα κατά την κοπή, δηλαδή η κλίση των οδόντων ως προς τον άξονα του τροχού στον αρχικό κύλινδρο και συμβολίζεται β_0. Για τα μεγέθη οδοντώσεως των τροχών ελικοειδών οδόντων ισχύουν τα εξής. Αν Z ο αριθμός οδόντων του τροχού και t_{0s} το βήμα στον αρχικό κύκλο μετωπικής τομής τότε η ακτίνα του αρχικού κύκλου μετωπικής τομής είναι:

$$r_{0s} = \frac{Zt_{0s}}{\pi} = \frac{Zm_s}{2}$$

Όπου m_s είναι το module της μετωπικής τομής στον αρχικό κύλινδρο.

Στην κάθετη τομή το module m_n λαμβάνεται ως το τυποποιημένο module, μολονότι η κατατομή του οδόντα στην κάθετη τομή δεν είναι εξειλιγμένη. Τα module της μετωπικής και της κάθετης τομής συνδέονται με την σχέση

$$m_n = m_s \cos\beta_0$$

Για την σωστή γένεση κατατομής ελικοειδούς οδόντα από τον κοπτικό κανόνας για ευθύγραμμες οδόντωσης, με χρήση του κώδικα που έχει αναπτυχθεί, θα χρειαστεί ο τελευταίος να μετασχηματιστεί σε αντίστοιχο φανταστικό κοπτικό κανόνα ελικοειδών

οδοντώσεων. Ο μετασχηματισμένος αυτός φανταστικός κανόνας θα έχει χαρακτηριστικά μεγέθη ως κατωτέρω.

Βήμα οδοντώσεως στον αρχικό κύκλο

$$t_{0s} = \pi m_s$$

Module στον αρχικό κύκλο

$$m_s = \frac{m_n}{\cos \beta_0}$$

Πάχος οδόντος στον αρχικό κύκλο

$$S_{0s} = C_s t_{0s}$$

Πάχος διακένου των οδόντων στον αρχικό κύκλο

$$l_{0s} = t_{0s} - S_{0s}$$

Ύψος ποδός του οδόντος

$$h_f = m_n C_f$$

Ύψος κεφαλής του οδόντος

$$h_k = m_n C_k$$

Ακτίνα καμπυλότητας

$$r_c = C_c m_n$$

Εισάγοντας τις τιμές που προκύπτουν από τις παραπάνω σχέσεις στις αντίστοιχες παραμέτρους του κανόνα με ευθεία οδόντωση, που έχει ήδη σχεδιαστεί, θα παραχθούν οι κατατομές οδόντων τροχού με ελικοειδή οδόντωση που θα προέκυπταν από την χρήση του υπάρχοντος κανόνα.

Έτσι, ο κώδικας τροποποιείται κατάλληλα ώστε μία από τις εισόδους του να ορίζει αν οι υπολογισμοί που θα ακολουθήσουν αφορούν τροχό με ευθύ ή ελικοειδή οδόντα. Όταν πρόκειται για ελικοειδή οδόντα χρειάζεται να καταχωρηθεί και η γωνία ελίκωσης β_0 και στη συνέχεια τα χαρακτηριστικά μεγέθη του φανταστικού κανόνα κανόνα, που θα παράξει την μετωπική τομή του ελικοειδούς οδόντα, υπολογίζονται σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις.

2.6. «Ενεργός» κοπτικός κανόνας *(Effective Rack – Cutter)*

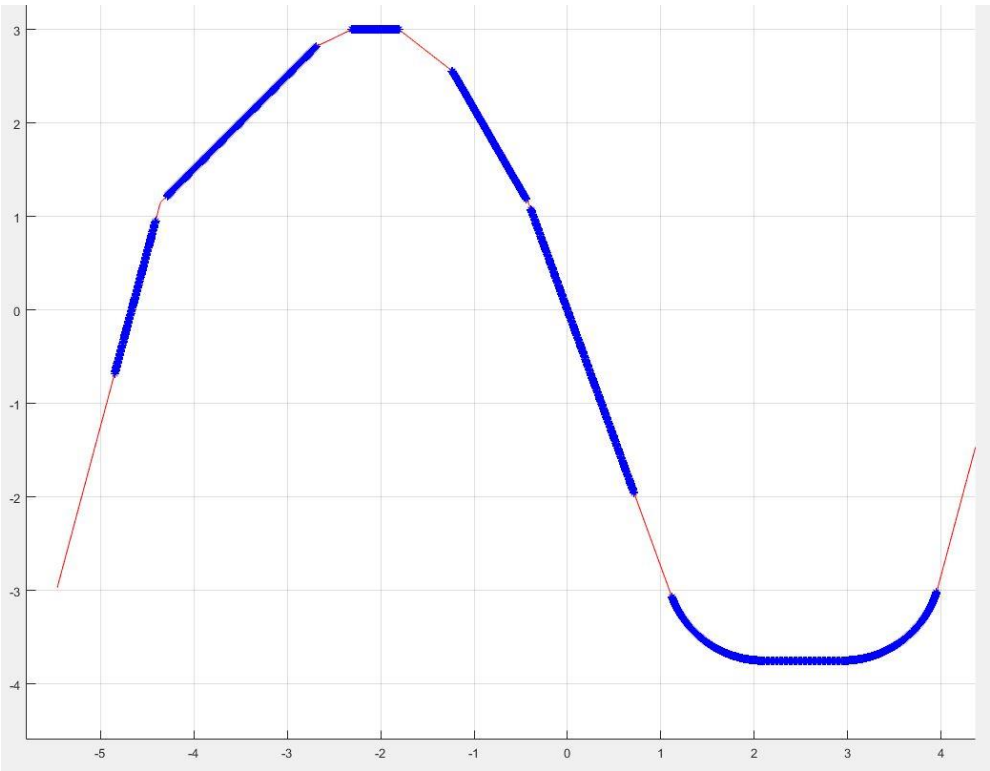
Η τελευταία ενότητα του κώδικα δημιουργεί έναν «νέο» κανόνα, βασισμένο στον ήδη υπολογισμένο, στον οποίον αποτυπώνονται μόνο τα σημεία εκείνα τα οποία συμμετέχουν πραγματικά στην κοπή και διαμόρφωση του οδοντωτού τροχού. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, σε ορισμένες περιπτώσεις γένεσης οδοντωτών τροχών, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά μεγέθη του τροχού, δημιουργούνται υποκοπές λειτουργίας. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι μία περιοχή στην κατατομή του οδόντα του κανόνα δεν έρχεται ποτέ σε επαφή με υλικό και δεν

συμμετέχει στην διαμόρφωση του οδοντωτού τροχού. Ακόμα, στην τελευταία περίπτωση που αναλύθηκε, του κανόνα με την αλλαγή γωνίας πίεσης στις πλευρές που παράγουν εξειλιγμένη, σε ορισμένες περιπτώσεις, λόγω της ασυνέχειας, στην περιοχή αλλαγής της γωνίας χάνεται η επαφή του κοπτικού κανόνα με τον τροχό.

Η πληροφορία που παρέχει ο «ενεργός» κοπτικός κανόνας μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά τον σχεδιασμό του κοπτικού εργαλείου, ώστε να δοθεί μεγαλύτερη σχεδιαστική βαρύτητα στα τμήματα που πραγματικά πρόκειται να επηρεάσουν την κατεργασία ή ακόμα και να επανασχεδιαστούν τα τμήματα που δεν αφορούν την κοπή προς όφελος της κατεργασίας ή του κόστους παραγωγής του εν λόγω εργαλείου.

Παρακάτω, στο Σχήμα 2.6.1, φαίνεται ένα παράδειγμα οδόντα κοπτικού κανόνα, όπου τα «ενεργά» σημεία της κατατομής, υπολογισμένα όπως αναφέρθηκε, τονίζονται με μπλε. Τα τμήματα του κανόνα που δεν είναι τονισμένα με μπλε χρώμα δεν συμμετέχουν στην διαμόρφωση του οδοντωτού τροχού. Στο παράδειγμα, τα χαρακτηριστικά μεγέθη του οδόντα του κανόνα είναι τα εξής:

- $a_{0,d}^{A} = 15°$ & $a_{0,d}^{B} = 45°$
- $a_{0,c}^{A} = 20°$ & $a_{0,c}^{B} = 30°$
- $C_k = 1.0$
- $C_f = 1.25$
- $C_s = 0.495$
- $C_{c,d} = 0.35$ & $C_{c,c} = 0.35$
- $C_{break,d} = 0.85$ & $C_{break,d} = 0.8$



Σχήμα 2.6.1: Κατατομή οδόντα κοπτικού κανόνα με τονισμένα τα τμήματα εκείνα που συμμετέχουν στην κοπή

3. Μοντελοποίηση και σχεδιασμός βαθμίδας οδοντωτών τροχών με μεταβλητή χάρη κατατομών

Ο βασικός στόχος της παρούσας εργασίας είναι ο σχεδιασμός και η μοντελοποίηση βαθμίδας οδοντώσεων όπου η χάρη κατατομών των συνεργαζόμενων οδόντων να μην ορίζεται με τυχαίο τρόπο, βάσει δηλαδή των τυχαίων σφαλμάτων που πιθανότατα θα προκύψουν κατά την παραγωγή και συναρμολόγηση της βαθμίδας.

Η επιλογή της λύσης που προκύπτει από την εργασία αυτή, βασίζεται στο «ρυθμιζόμενο» backlash. Η προσέγγιση αυτή επιβάλλεται έμμεσα από το υψηλό κόστος κατεργασίας οδοντωτών τροχών που σχεδιάζονται για μία αυστηρά συγκεκριμένη τιμή χάρης κατατομών. Εξ αρχής, το κόστος ήταν ένας από τους παράγοντες που θα έπαιζε σημαντικό ρόλο στην τελική επιλογή της προτεινόμενης λύσης. Έτσι, προσανατολιστήκαμε στους συμβατικούς και οικονομικούς τρόπους κατεργασίας οδοντωτών τροχών.

Στοχεύουμε να παραχθούν μη τυποποιημένοι οδοντωτοί τροχοί, των οποίων η χάρη κατατομών να ρυθμίζεται κατά την συναρμολόγηση της βαθμίδας των τροχών στην εκάστοτε εφαρμογή, με χρήση συμβατικών μεθόδων κοπής οδοντωτών τροχών. Είναι φανερό πως η υπόθεση ότι οι τροχοί δεν θα είναι τυποποιημένοι, απορρίπτει τον κλασσικό τρόπο ρύθμισης της χάρης κατατομών μέσω της μείωσης της απόστασης των κέντρων. Αυτός, άλλωστε, ήταν ένας ακόμα βασικός περιορισμός του σχεδιασμού και μοντελοποίησης της λύσης, καθώς κρίθηκε σημαντικό η βαθμίδα αυτή να είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί και σε πλανητικά συστήματα, όπου σε αυτά η παράλληλη μετατόπιση των αξόνων των οδοντωτών τροχών δεν είναι εφικτή.

Απορρίπτοντας, λοιπόν, την παράλληλη μεταφορά των αξόνων των δύο οδοντωτών τροχών ως λύση, και αφού το ρυθμιζόμενο – ελεγχόμενο backlash δηλώνει «κούρδισμα»/ σχετικές μετατοπίσεις, αναδείχθηκε η ιδέα της μετατόπισης των οδοντωτών τροχών κατά την αξονική τους διεύθυνση. Είναι δυνατόν σε μία βαθμίδα οδοντωτών τροχών, μετατοπίζοντας αξονικά τον έναν ως προς τον άλλον να επιτυγχάνεται διαφορετική χάρη κατατομών;

3.1. Μοντελοποίηση βαθμίδας οδόντωσης μεταβλητού *backlash* μέσω αξονικής μετατόπισης

Γνωρίζουμε ότι η χάρη κατατομών ορίζεται ως το διάκενο που προκύπτει μεταξύ του διακένου του ενός τροχού και του οδόντα του άλλου, στον αρχικό τους κύλινδρο. Μαθηματικά περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$backlash = l_{01} - S_{02}$$

Όπου οι δείκτες 1 και 2 δηλώνουν τον τροχό 1 και τον τροχό 2. Αναλύοντας την παραπάνω σχέση, όπου:

$$l_0 = t_0 - S_0 = \pi m - (C_s \pi m - 2m \tan a_0)$$

Προκύπτει:

$$backlash = \pi[m_1(1 - C_{s1}) - m_2 C_{s2}] - 2m_1 C_{\mu 1} \tan a_{01} - 2m_2 C_{\mu 2} \tan a_{02} \qquad (3.6)$$

Που υποδεικνύει ότι η χάρη κατατομών σε μία βαθμίδα οδοντωτών τροχών εξαρτάται από τα module, τους συντελεστές πάχους οδόντα και τους συντελεστές μετατόπισης του κανόνα των δύο συνεργαζόμενων τροχών.

Βάσει της υπόθεσης περί αξονική μετατόπισης των τροχών και σύμφωνα με την εξίσωση (3.1) γίνεται αντιληπτό πως η μεταβολή της χάρης κατατομών με αξονική μετατόπιση θα ήταν εφικτή αν σε κάθε μετωπική τομή των οδοντωτών τροχών υπήρχε μεταβολή:

I. Στο module
II. Στη γωνία πίεσης
III. Στον συντελεστή μετατόπισης του κανόνα
IV. Στον συντελεστή πάχους οδόντα

Και επιπλέον, αν επιθυμούσαμε η μεταβολή της χάρης κατατομών να είναι γραμμική, τότε γραμμικά θα έπρεπε να μεταβάλλονται και οι παραπάνω παράμετροι από τομή σε τομή, εκτός από την περίπτωση της γωνίας πίεσης, καθώς η γραμμική σχέση των παραμέτρων module, συντελεστής πάχους οδόντα C_s και συντελεστή μετατόπισης του κανόνα C_μ με την χάρη κατατομών είναι προφανής.

Οι δύο πρώτες επιλογές, δηλαδή, η μεταβολή του module και της γωνίας πίεσης κατά την αξονική κατεύθυνση του τροχού, πρέπει να συγχωνευτούν σε μία περίπτωση, καθώς αποδεικνύεται *[αναφορά σε paper Σπιτά "can non-conjugate gears mate…"]* ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να επιτυγχάνεται ομαλή συνεργασία μεταξύ των δύο οδοντωτών τροχών είναι η εξής:

$$m_1 \cos a_{01} = m_2 \cos a_{02}$$

Συνεπώς, δεν θα ήταν δυνατόν να μεταβάλλεται μόνο ένα μέγεθος εκ των module και γωνίας πίεσης και να διατηρείται ομαλή συνεργασία.

Για την κατεργασία ενός τέτοιου οδοντωτού τροχού, όπου κατά την αξονική του κατεύθυνση να μεταβάλλεται το module και η γωνία πίεσής του, απαιτείται κάποια σύνθετη κατεργασία, πιθανότατα σε φρέζα 5 αξόνων και με χρήση κάποιου σύνθετου εργαλείου ή εργαλείων κοπής. Κάτι τέτοιο αντιβαίνει με τον περιορισμό του κόσμους και την ανάδειξη λύσης άμεσα υλοποιήσιμης από το εργαστήριο. Γι' αυτό η συγκεκριμένη επιλογή απορρίπτεται.

Η επόμενη επιλογή αφορά την μεταβολή του συντελεστή μετατόπισης του κανόνα. Η περίπτωση αυτή, ουσιαστικά περιγράφει την κοπή ενός οδοντωτού τροχού με την συμβατική μέθοδο της κοπής οδοντώσεων με κοπτικό εργαλείο hob (*hobbing*) με την θεμελιώδη διαφορά, το κοπτικό εργαλείο να μην κινείται παράλληλα με τον άξονα του υπό κατεργασία τροχού αλλά με κλίση, έτσι ώστε από το ένα πρόσωπο του τροχού στο άλλο η απόσταση του κοπτικού εργαλείου από το κέντρο του τροχού να μειώνεται (ή να αυξάνεται) με γραμμικό τρόπο. Αν συνδέσουμε τα αποτελέσματα του κώδικα γένεσης οδοντώσεων

που αναπτύχθηκε με το αποτέλεσμα της κατεργασίας που περιγράφηκε, θα ήταν σαν κάθε μετωπική τομή του οδοντωτού τροχού που παράχθηκε να έχει υπολογιστεί με διαφορετικό C_μ και μάλιστα η μεταβολή του C_μ στην κάθε τομή να είναι γραμμική.

Έστω ένας τέτοιος τροχός, ο οποίος παρουσιάζει C_μ μειούμενο από το ένα πρόσωπό του στο άλλο. Είναι φανερό πώς στον αρχικό κύλινδρο το πάχος του οδόντα μειώνεται, κατά την αξονική κατεύθυνση, που είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα. Θεωρητικά, δύο οδοντωτοί τροχοί που παράχθηκαν με την μέθοδο του περιγράφηκε, σε συνεργασία, θα έδιναν μία βαθμίδα οδοντωτών τροχών με μεταβλητή χάρη κατατομών μέσω της αξονικής μετατόπισης του ενός από τον άλλον τροχό. Όμως, η μετατόπιση του κανόνα, εκτός από την επίδραση που έχει στο πάχος του οδόντα στον αρχικό κύκλο, επιδρά και στον κύκλο ποδός και κύκλο κεφαλής του οδοντωτού τροχού, διαμορφώνοντας έτσι αποτέλεσμα κωνικού οδοντωτού τροχού. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι σε κάθε μετωπική τομή, Αν πάρουμε ένα στιγμιότυπο τους δύο συνεργαζόμενους τροχούς στο σημείο κύλισης διαπιστώνουμε ότι σε κάθε μετωπική τομή ο μοχλοβραχίονας της δύναμης που ασκείται στον οδόντα ως προς την βάση του οδόντα αυξάνεται, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η καμπτική ροπή στην επικίνδυνη διατομή ποδός. Επίσης, η γραμμική μείωση του ύψους κεφαλής σε κάθε τομή συνεπάγεται και τη γραμμική μείωση του μήκους επαφών σε κάθε τομή, άρα και στην μείωση του βαθμού επικαλύψεως της βαθμίδας οδοντωτών τροχών σε κάθε τομή. Για αυτούς τους λόγους αποφασίστηκε να μην διερευνηθεί περεταίρω η συγκεκριμένη λύση.

Τέλος, η μεταβολή στο πάχος του οδόντα σαν πιθανή λύση χρειάζεται να διερευνηθεί περαιτέρω για ενδεχόμενη λύση στο ζήτημα της μεταβλητής χάρης κατατομών.

Σε πρώτη ανάγνωση, ένας οδόντας με μεταβαλλόμενο συντελεστή πάχους, δηλαδή μεταβαλλόμενο πάχος στον αρχικό κύλινδρο κατά την αξονική του κατεύθυνση θα μπορούσε θεωρητικά να δημιουργηθεί, αν η γένεση κάθε μετωπικής τομής προέκυπτε από οδοντωτούς κανόνες με, κατ' αντιστοιχία, μεταβαλλόμενο C_s. Κάτι τέτοιο όμως, προφανώς, δεν είναι υλοποιήσιμο με κάποια από τις γνωστές και ευρέως χρησιμοποιούμενες μεθόδους κατεργασιών οδοντωτών τροχών.

Ωστόσο, έγινε η εξής διαπίστωση: κατά την κοπή ενός ελικοειδούς οδοντωτού τροχού, οι κατατομές κάθε μετωπικής τομής είναι στραμμένες ως προς τον άξονα του τροχού κατά μία γωνία θ. Η γωνία θ είναι ανάλογη με το πλάτος στο οποίο βρίσκεται η εκάστοτε μετωπική τομή. Σε έναν κανονικό ελικοειδή οδόντα το πάχος του στον αρχικό κύλινδρο μένει σταθερό, γιατί όσο στρέφεται η μία πλευρά της κατατομής του οδόντα, άλλο τόσο στρέφεται και η άλλη. Αν, όμως, στρεφόταν μόνο η μία πλευρά της κατατομής του οδόντα για κάθε μετωπική του τομή, τότε το πάχος του θα μεταβαλλόταν ανάλογα με την γωνία θ.

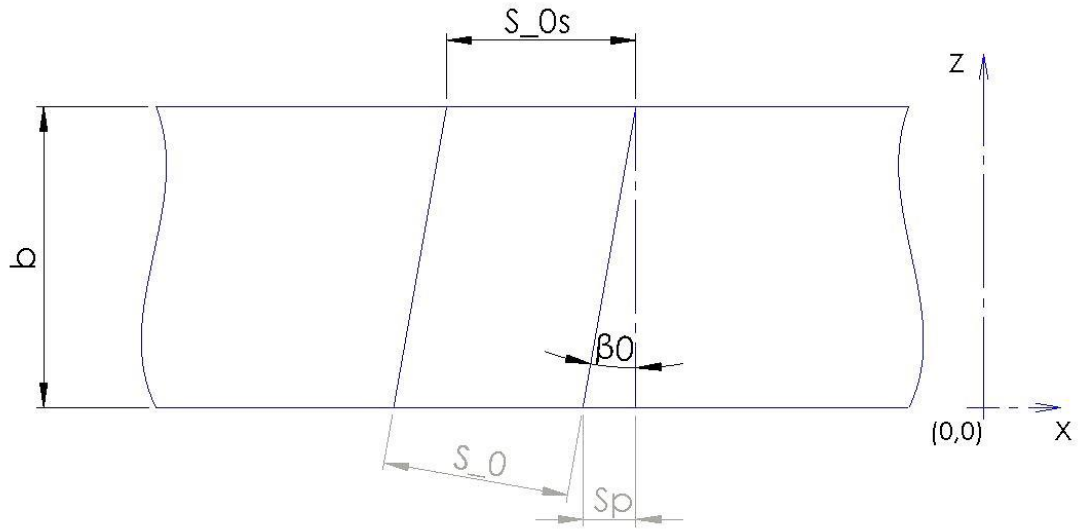
Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να επιτευχθεί αν ένας ήδη διαμορφωμένος με ευθεία οδόντωση οδοντωτός τροχός, κατεργαστεί εκ νέου σαν να πρόκειται να διαμορφωθεί ένας ελικοειδής οδοντωτός τροχός. Τότε το κοπτικό εργαλείο θα έβρισκε να αφαιρέσει υλικό μόνο από την μία πλευρά του οδόντα, καθώς έχει ήδη διαμορφωθεί το διάκενο. Αυτή η κατεργασία θα έδινε έναν τροχό με ευθεία την μία πλευρά του οδόντα και ελικοειδή την άλλη, και όπως περιγράφηκε παραπάνω, οι οδόντες του τροχού θα είχαν γραμμικά μεταβλητό πάχος.

Ακόμα, θα ήταν δυνατή η παραπάνω υλοποίηση αν, στον ήδη κατεργασμένο οδοντωτό τροχό με ευθεία οδόντωση, κατεργάζονταν οι δύο πλευρές του με ελικοειδή κοπή, η μία με δεξιόστροφη έλικα και η άλλη με αριστερόστροφή.

Αναλυτικότερα, στο παρακάτω Σχήμα 3.1.1 φαίνεται η μετάθεση του ελικοειδούς οδόντος στον αρχικό κύκλο, η οποία είναι ίση με:

$$S_p = b \tan \beta_0 \tag{3.7}$$

Όπου b είναι το πλάτος του τροχού και β_0 είναι η κλίση των οδόντων ως προς τον άξονα του τροχού στον αρχικό κύλινδρο.



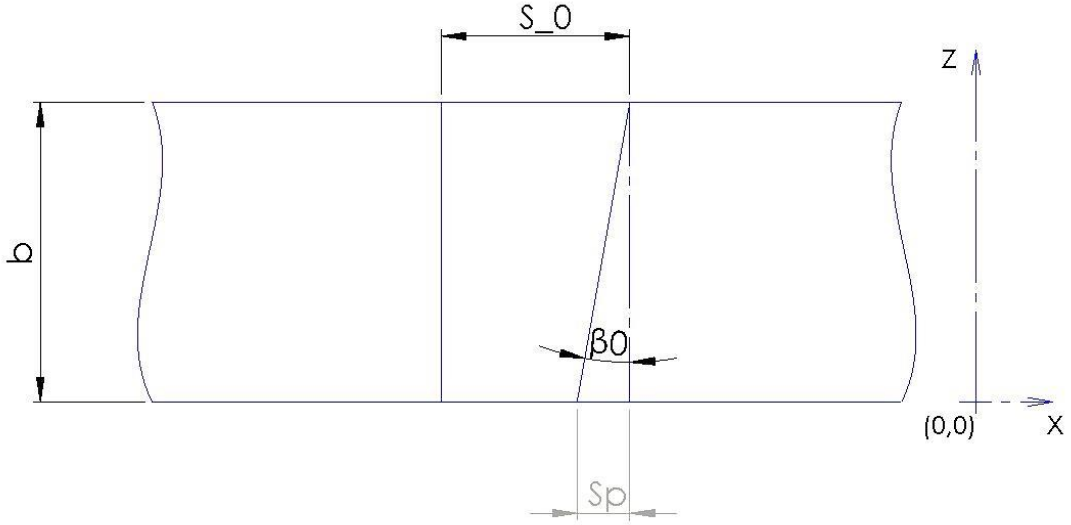
Σχήμα 3.1.1: Ελικοειδής οδόντας και τα χαρακτηριστικά μεγέθη

Η εξίσωση (3.2) μπορεί να γενικευτεί στη σχέση:

$$S_p(z) = z \tan \beta_0 \,, \qquad z \epsilon [0, b]$$

Έτσι, με την παραπάνω σχέση μπορούμε να γνωρίζουμε κατά πόσο έχει μετατεθεί η κατατομή του οδόντα μετά την ελικοειδή κοπή.

Έστω ότι η μία πλευρά του οδόντα είναι ευθεία και η άλλη ελικοειδής. Το αντίστοιχο ανάπτυγμα του τροχού θα ήταν όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.2:



Σχήμα 3.1.2: Οδόντας με τη μία ελικοειδή και μία ευθεία πλευρά

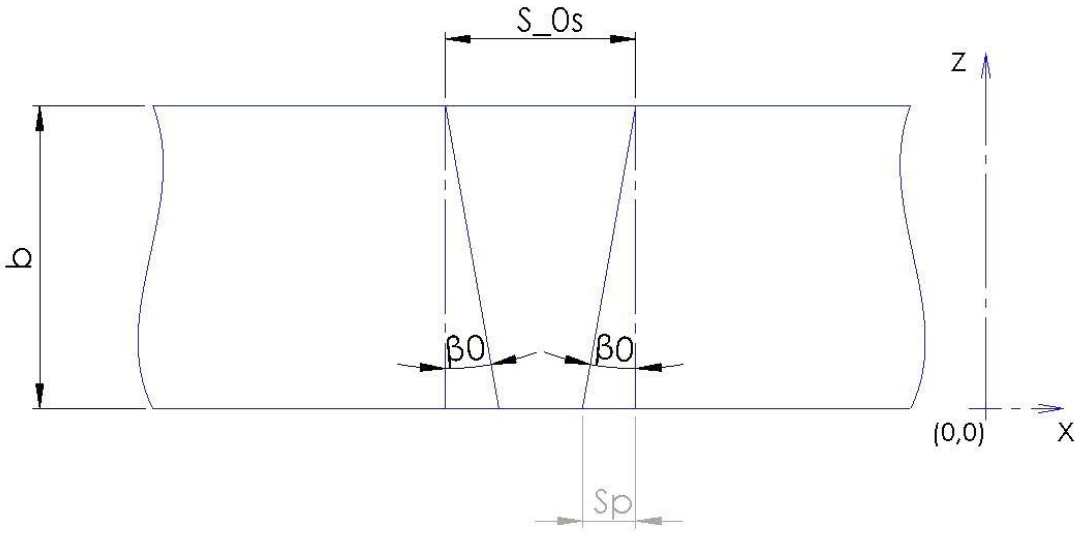
Τότε το πάχος του οδόντα στον αρχικό κύκλο περιγράφεται από την σχέση:

$$S_{0,mod}(z) = S_0 - z\tan\beta_0, \qquad z\epsilon[0,b]$$

Που αποδεικνύει ότι με αυτόν τον τρόπο το πάχος του οδόντα στον αρχικό κύλινδρο είναι μεταβλητό με γραμμικό τρόπο και συνεπώς η απαίτηση για μεταβλητή χάρη κατατομών καλύπτεται.

Υπάρχει, όμως, ένα πρόβλημα με αυτήν την προσέγγιση, την συνύπαρξη δηλαδή ευθείας και ελικοειδούς κατατομής στον ίδιο οδόντα. Στην μετωπική τομή του τροχού, όπως έχει αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, η πλευρά του οδόντα που παράγεται με ελικοειδή κοπή έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά μεγέθη από την πλευρά που παράγεται από ευθεία κοπή. Παρ' όλο που παράγονται από το ίδιο κοπτικό εργαλείο, η ευθεία οδόντωση έχει module m, γωνία πίεσης α_0, ακτίνα αρχικού κύκλου r_0, ενώ η ελικοειδής οδόντωση έχει module $m_s = \frac{m}{\cos\beta_0}$, γωνία πίεσης $\alpha_{0s} = \mathrm{atan}\left(\frac{\tan\alpha_0}{\cos\beta_0}\right)$ και ακτίνα αρχικού κύκλου $r_{0s} = \frac{r_0}{\cos\beta_0}$. Συνεπώς, διαφορετικούς κύκλος κεφαλής και ποδός και γενικά διαφορετική γεωμετρία κατατομής, γεγονός που καθιστά την κατεργασία ελικοειδούς κοπής «πάνω» από την κατεργασία ευθείας κοπής μη βέλτιστη περίπτωση. Πρακτικά, η επιπλέον ελικοειδής κοπή του ευθύ οδόντα κατά τα τελευταία πάσα της κατεργασίας θα άφηνε στον οδόντα ένα ευθύ τμήμα, αφού το κοπτικό στο ξεκίνημα της κίνησης του ως προς την αξονική κατεύθυνση του τροχού, από $z = 0$, δεν θα έβρισκε υλικό να κόψει, όπως μπορεί να γίνει αντιληπτό από το γεγονός ότι $m < m_s$ και $r < r_{0s}$.

Έστω ότι και οι δύο πλευρές του οδόντα είναι ελικοειδείς, με την ιδιαιτερότητα ότι η μία πλευρά έχει δεξιόστροφη ελίκωση και η άλλη αριστερόστροφη αλλά ίση γωνία ελίκωσης. Τότε το ανάπτυγμα του τροχού θα ήταν όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.3:



Σχήμα 3.1.3: Οδόντας με μία πλευρά δεξιόστροφης ελίκωσης και μία αριστερόστροφης

Σε αυτή την περίπτωση το πάχος του οδόντα στον αρχικό κύλινδρο προκύπτει από την σχέση:

$$S_{0,mod}(z) = S_{0s} - 2z\tan\beta_0, \quad z\epsilon[0,b] \tag{3.8}$$

Δηλαδή, το πάχος του οδόντα στον αρχικό κύλινδρο κυμαίνεται μεταξύ της μέγιστης τιμής του $S_{0,max} = S_{0s} = C_s\pi\frac{m}{\cos\beta_0}$ για $z = 0$, που είναι και το πάχος ενός κανονικού ελικοειδή οδόντα που παράγεται με κοπτικό εργαλείο hob με module m και γωνία κλίσης β_0, και της ελάχιστης τιμής $S_{0,min} = S_{0s} - 2b\tan\beta_0$, για $z = b$.

Το παραπάνω μοντέλο πληροί τις προϋποθέσεις που έχουμε θέσει ως τώρα. Το πάχος του οδόντα μεταβάλλεται γραμμικά κατά την έννοια του πλάτους του οδοντωτού τροχού, δίνοντας την δυνατότητα μεταβολής της χάρης κατατομών, κατά την συνεργασία δύο τέτοιων τροχών, μέσω της αξονικής μετατόπισης του ενός εκ των δύο τροχών.

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση του μοντέλου. Έστω κοπτικός κανόνας με τα χαρακτηριστικά μεγέθη $m = 1$ και $C_s = 0.55$ και τροχός προς κοπή με την παραπάνω μέθοδο με πλάτος $b = 10\,mm$, γωνία ελίκωσης στον αρχικό κύλινδρο $\beta_0 = 1°$ και μηδενικό profile shift. Το πάχος των οδόντων του τροχού στον αρχικό κύκλο, σύμφωνα με την εξίσωση (3), δίνεται από την σχέση:

$$S_{0,mod}(z) \cong 1{,}728 - 0{,}035z$$

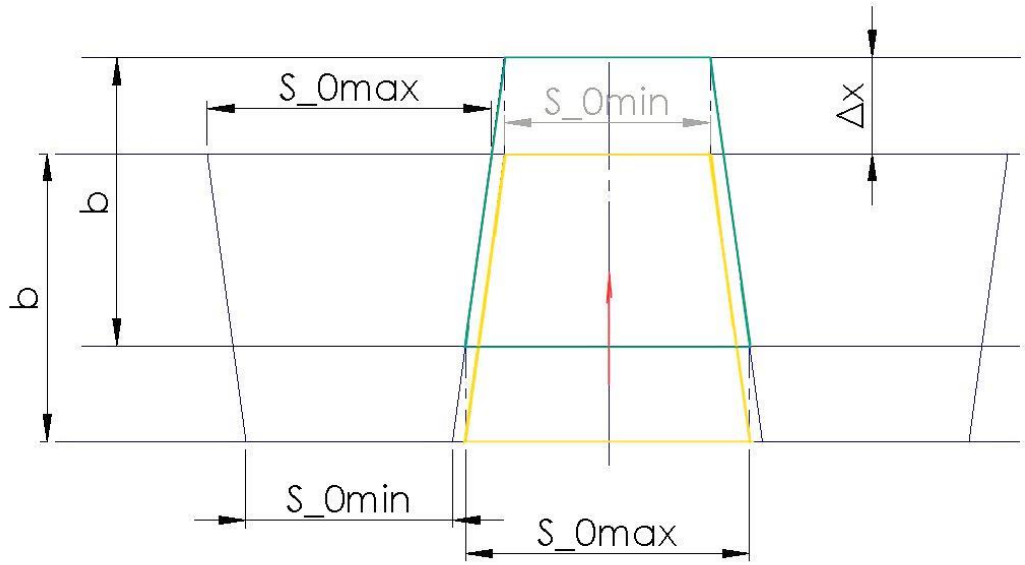
Βρίσκουμε ότι $S_{0,mod}(0) \cong 1{,}728\,mm$ και $S_{0,mod}(b) \cong 1{,}378\,mm$. Επίσης, $t_0 \cong 3.142\,mm$.

Κατά την συνεργασία δύο τέτοιων οδοντωτών τροχών, όταν τοποθετηθούν με μηδενικό offset ο ένας προς τον άλλον, και έτσι ώστε το πρόσωπο του ενός τροχού με την παχιά πλευρά του οδόντα να βρίσκει το πρόσωπο του άλλου τροχού με την λεπτή πλευρά, τότε από την εξίσωση (3.1) που υπολογίζει την χάρη κατατομών σε μία βαθμίδα οδοντωτών τροχών, έχουμε:

$$backlash \cong 0.036\ mm$$

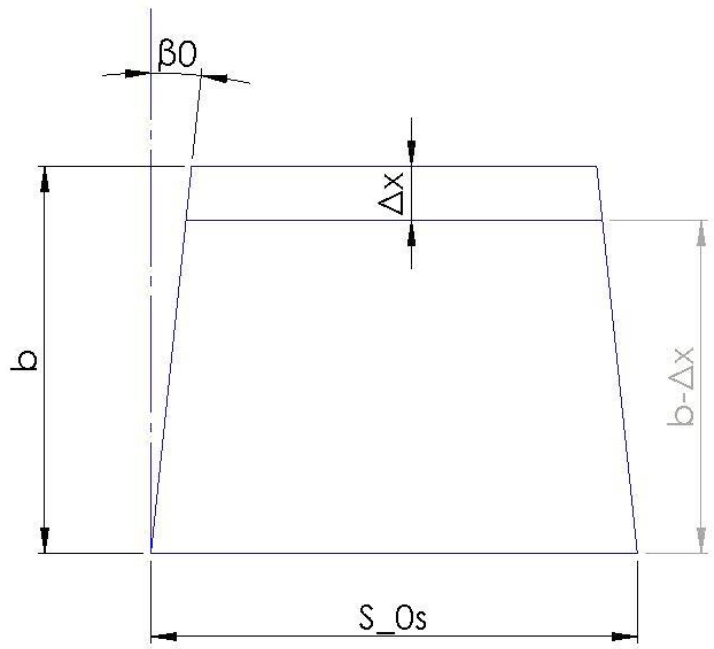
Υπάρχει κατάλληλη τιμή μετατόπισης Δx του ενός τροχού ως προς τον άλλον, τέτοια ώστε το πάχος του οδόντα στην πρώτη μετωπική του τροχού που έρχεται σε επαφή με τον συνεργαζόμενο τροχό, $S_{0,mod}(b - \Delta x)$, να μηδενίζει την εξίσωση (3.1), δηλαδή να έχουμε μηδενικό backlash. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η μετατόπιση Δx που χρειάζεται για μηδενισμό της χάρης κατατομών είναι $\Delta x \cong 1\ mm$.

Η σχηματική περιγραφή του παραπάνω παραδείγματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1.4. Ο οδόντας με το κίτρινο χρώμα βρίσκεται σε θέση μηδενικού offset με τον συνεργαζόμενο τροχό και η χάρη κατατομών της βαθμίδας είναι μη μηδενική. Με πράσινο χρώμα φαίνεται ο ίδιος οδόντας μετατοπισμένος κατά Δx έτσι ώστε να μηδενιστεί η χάρη κατατομών. Η μετατόπιση Δx είναι τόση ώστε το μέτωπο του τροχού με οδόντα πάχους $S_{0,max}$ να έρθει στην θέση όπου $S_{01,max} + S_{02}(b - \Delta x) = t_0$. Στο σχήμα αυτό το μοντέλο περιγράφεται ποιοτικά και οι διαστάσεις είναι εσκεμμένα υπερβολικές για γίνει οπτικά φανερό το αποτέλεσμα.



Σχήμα 3.1.4: Βαθμίδα οδοντωτών τροχών με οδόντες δεξιόστροφης και αριστερόστροφης ελίκωσης και αξονική μετατόπιση το ενός κατά Δx, μέχρι μηδενισμού της χάρης κατατομών

Βάσει του Σχήματος 3.1.5 προκύπτουν οι κατάλληλες εξισώσεις για τον υπολογισμό των βασικών μεγεθών.



Σχήματος 3.1.5: Χαρακτηριστικά μεγέθη οδόντα δεξιόστροφης και αριστερόστροφης ελίκωσης

Ο σχεδιαστής του συγκεκριμένου οδοντωτού τροχού καλείται να επιλέξει ποια από τα μεγέθη β_0, Δx και $S_{0,min}$ θέλει να ορίσει και ποια θέλει να προκύψουν, ανάλογα με τις απαιτήσεις της εκάστοτε εφαρμογής. Για παράδειγμα, είναι πιθανόν η αξονική μετατόπιση του οδοντωτού τροχού να είναι θεμελιώδης περιορισμός μίας εφαρμογής για χωροταξικούς λόγους κατά την συναρμολόγηση. Από το παραπάνω σχήμα προκύπτουν οι εξισώσεις υπολογισμού των μεγεθών.

Για δεδομένη μετατόπιση Δx του τροχού για επίτευξη μηδενικού backlash ισχύει:

$$S_{0,ZB} = S_{0s} - 2(b - \Delta x)\tan\beta_0 \tag{3.9}$$

Ο δείκτης *ZB* συμβολίζει την μετωπική τομή στην οποία συμβαίνει ο μηδενισμός της χάρης κατατομών (*Zero Backlash*) και έχει απόσταση Δx από το πρόσωπο του τροχό στο οποίο καταλήγει ο οδόντας λεπτός. Σε αυτή την μετωπική τομή ισχύει ότι:

$$S_{0,ZB} = l_{0s} = t_{0s} - S_{0s} \Rightarrow$$

$$S_{0,ZB} + S_{0s} = \frac{\pi m}{\cos\beta_0}$$

Έτσι, από την εξίσωση (3.4) παίρνουμε:

$$\tan\beta_0 = \frac{(2C_s - 1)\pi m}{2(b - \Delta x)\cos\beta_0} \Rightarrow$$

$$\beta_0 = \operatorname{asin}\frac{(2C_s - 1)\pi m}{2(b - \Delta x)} \tag{3.10}$$

Με γνωστή τώρα την γωνία β_0 υπολογίζεται το πάχος του οδόντα $S_{0s,min}$ από την εξίσωση (3.3) για $z = b$.

Σε διαφορετική περίπτωση, αν επιθυμούμε μία προκαθορισμένη τιμή για το πάχος του οδόντα στην πιο λεπτή διατομή, τότε:

$$\beta_0 = \operatorname{atan}\frac{S_{0s} - S_{0s,min}}{2b}$$

Και λύνοντας ως προς Δx, από την εξίσωση (5) προκύπτει:

$$\Delta x = b - \frac{(2C_s - 1)\pi m}{2\sin\beta_0}$$

Το πάχος του οδόντα στον αρχικό κύκλο, όπως έχει ήδη αναφερθεί, δίνεται από την σχέση $S_0 = C_s t_0$, οπότε όταν αναφερόμαστε στο πάχος του οδόντα μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον συντελεστή πάχους αντί το πάχος αυτό καθ' αυτό, μίας και ο συντελεστής είναι πιο εύκολος στην κατανόηση του πάχους και δεν είναι συνάρτηση του module.

Φυσικά, το βήμα του τροχού στον αρχικό κύκλο δεν μεταβάλλεται σε κάθε μετωπική τομή του οδοντωτού τροχού, καθώς όλοι οι οδόντες υπόκεινται στην ίδια μετάθεση. Προφανώς, και η γωνία πίεσης δεν μεταβάλλεται σε κάθε μετωπική τομή καθώς ο οδοντωτός τροχός παράγεται από τον ίδιο κανόνα. Έτσι, αποδεικνύεται άμεσα ότι κάθε μετωπική τομή ενός οδοντωτού τροχού μπορεί να συνεργαστεί με κάθε μετωπική τομή ενός δεύτερου οδοντωτού τροχού, αν για τους δύο αυτούς τροχούς αληθεύει η ισότητα:

$$t_{0s,1}\cos a_{0,1} = t_{0s,2}\cos a_{0,2}$$

Η οποία είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την συνεργασία δύο οδοντωτών τροχών [9].

Μία σημαντική παρατήρηση είναι ότι, αντίθετα με τους οδοντωτούς τροχούς με ευθείς οδόντες, σε αυτή την τροποποιημένη σχεδίαση ο συντελεστής πάχους του οδόντα στην παχιά πλευρά πρέπει να είναι μεγαλύτερος από $0{,}5$ για να πραγματοποιείται η επιθυμητή εμπλοκή των οδόντων των τροχών. Αν σχεδιαζόταν με συντελεστή πάχους μικρότερο από $0{,}5$ (όπως στους τροχούς με ευθεία οδόντωση που μία τυπική τιμή είναι $C_s = 0{,}495$), τότε, επειδή όλες οι υπόλοιπες μετωπικές τομές του οδόντα θα είχαν μικρότερο συντελεστή πάχους οδόντα στον αρχικό κύκλο, κατά την αξονική μετατόπιση των τροχών δεν θα έρχονται ποτέ σε επαφή και συνεπώς σε μηδενισμό της χάρης κατατομών. Για να μπορούν οι οδόντες των δύο τροχών να έρθουν σε επαφή κατά την αξονική τους μετατόπιση πρέπει να ικανοποιείται η σχέση:

$$C_{s1} + C_{s2} = 1$$

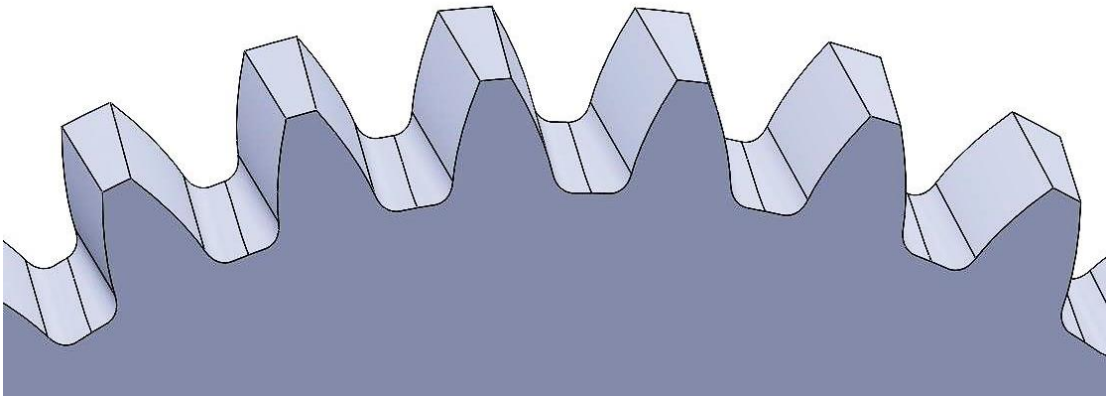
Και η σχέση αυτή δεν μπορεί ποτέ να είναι αληθής αν $C_{s1} < 0{,}5$ και $C_{s2} < 0{,}5$.

3.2. Δημιουργία 3D μοντέλων

Η έως τώρα θεωρητική ανάλυση του μοντέλου χρειάζεται να τεκμηριωθεί με την 3D σχεδίασή του σε λογισμικό CAD.

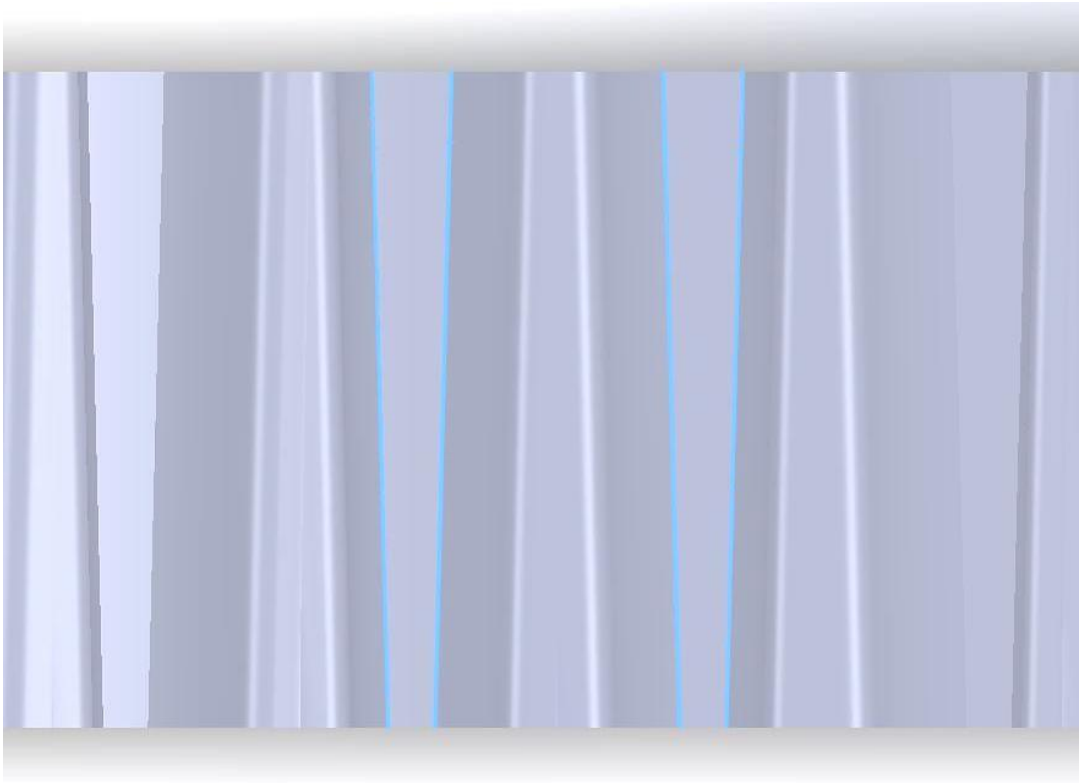
Με την βοήθεια του κώδικα που έχει αναπτυχθεί υπολογίζονται τα σημεία των κατατομών των οδόντων με τα επιθυμητά χαρακτηριστικά μεγέθη, τα οποία εξάγονται με την μορφή αρχείο *.txt* και εισάγονται στο λογισμικό *SolidWorks* για την δημιουργία του 3D μοντέλου.

Έχοντας την γεωμετρία του διακένου που κόβεται από το κοπτικό εργαλείο από τον αλγόριθμο γένεσης οδοντώσεων, τον κύλινδρο με πλάτος b και διάμετρο ίση με την διάμετρο του κύκλου κεφαλής *(extrude boss/ base)* και τις δύο έλικες – μία δεξιόστροφη και μία αριστερόστροφη, γωνίας ελίκωσης β_0 – που προκύπτουν από την επαλληλία κινήσεων του κοπτικού εργαλείου και του υπό κατεργασία τροχού *(swept cut)*, δημιουργείται το 3D μοντέλο του υπό σχεδίαση οδοντωτού τροχού.



Εικόνα 3.2.1: 3D μοντέλο οδοντωτού τροχού συμμετρικού οδόντα για βαθμίδα μεταβλητής χάρης κατατομών

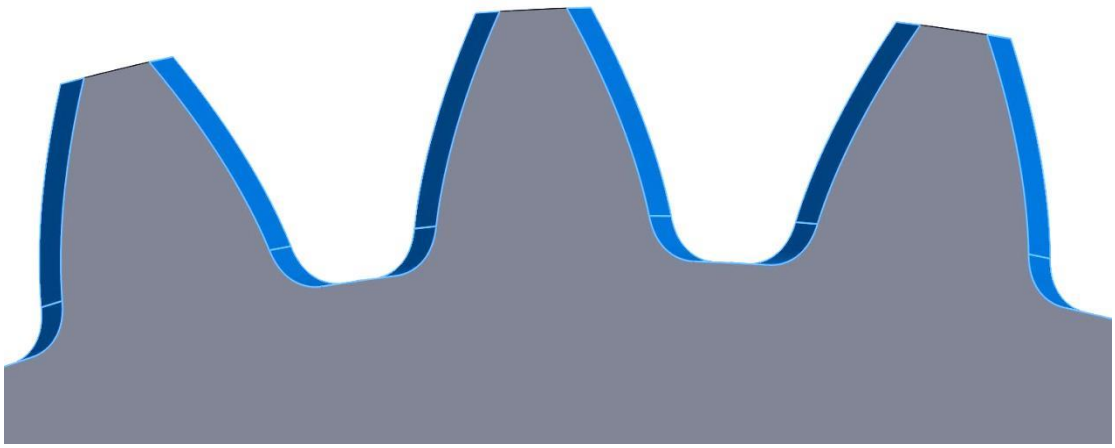
Στην Εικόνα 3.2.1 παρουσιάζεται μία άποψη από το 3D μοντέλο οδοντωτού τροχού με συμμετρικούς οδόντες, που κάνει εύκολα αντιληπτό πώς από το ένα πρόσωπο του τροχού στο άλλο το πάχος του οδόντα μεταβάλλεται, δίνοντας το επιθυμητό χαρακτηριστικό της μεταβλητής χάρης κατατομών σε βαθμίδα. Ο παραπάνω οδοντωτός τροχός έχει τα εξής χαρακτηριστικά μεγέθη: πλήθος οδόντων $Z = 33$, module $m = 2$, συντελεστή πάχους στην παχιά πλευρά του οδόντα $C_s = 0.55$, συντελεστή ύψους κεφαλής $C_k = 1$, συντελεστή ύψους ποδός $C_f = 1$, συντελεστή ακτίνας καμπυλότητας $C_c = 0.3$, γωνία πίεσης $\alpha_0 = 20°$, πλάτος $b = 15$ και γωνίες ελίκωσης $\beta_0 = 1.38°$. Από τις εξισώσεις, επίσης, υπολογίζεται $\mathrm{C_{s,min}} = 0.435$, ενώ έχει οριστεί μέγιστη αξονική μετατόπιση τροχού $\Delta x = 2\ mm$.



Εικόνα 3.2.2: Top view

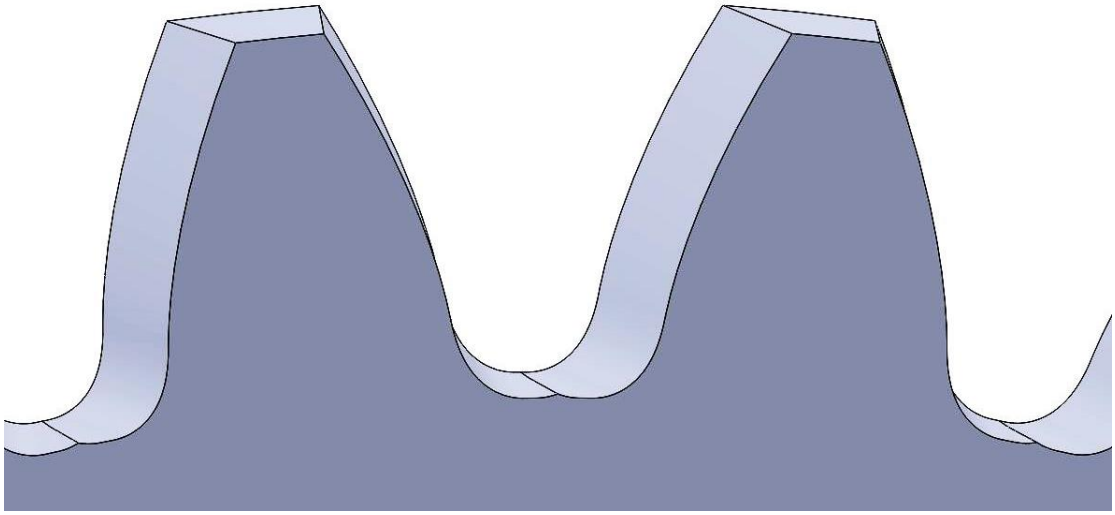
Στην Εικόνα 3.2.2 επισημαίνεται η κλίση των οδόντων στην δεξιά και αριστερή πλευρά των οδόντων του τροχού, που προσδίδουν το χαρακτηριστικό του μεταβλητού πάχους στον οδόντα. Στην παραπάνω εικόνα φαίνεται το top view τμήμα του οδοντωτού τροχού και οι κλίσεις στον ακμών στην κεφαλή των οδόντων.

Στην παρακάτω μπροστινή όψη του τροχού της Εικόνας 3.2.3, γίνεται φανερή η μεταβολή του πάχους των οδόντων από το ένα πρόσωπο με το μέγιστο πάχος που ορίζεται από το πάχος του οδόντος του κοπτικού εργαλείου hob έως το άλλο πρόσωπο του τροχού με το μικρότερο πάχος που ορίζεται από την γωνία ελίκωσης, δηλαδή την κλίση με την οποία τοποθετείται το κοπτικό για την κατεργασία, σε κάθε ύψος των οδόντων από τον κύλινδρο ποδός έως τον κύλινδρο κεφαλής.

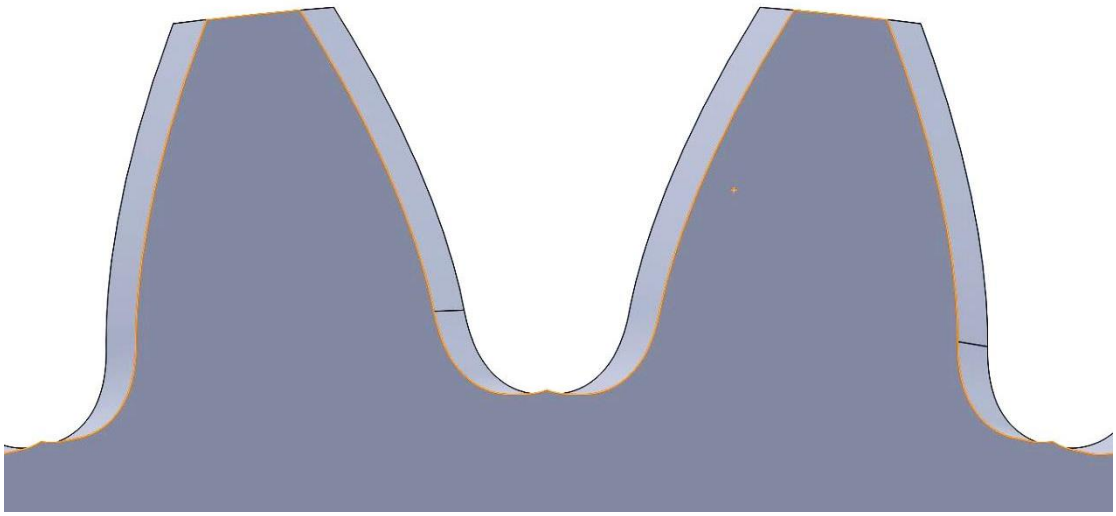


Εικόνα 3.2.3: Front view

Αξίζει να αναφερθεί πως ο αρχικός σχεδιασμός υποδείκνυε την δημιουργία του επιθυμητού τροχού με τρεις κατεργασίες κοπής. Αρχικά την κλασσική κοπή του οδοντωτού τροχού με ευθεία οδόντωση και έπειτα την μορφοποίηση των κατατομών του με δύο ελικοειδής κοπές, μία δεξιόστροφη και μία αριστερόστροφη. Αυτή η προσέγγιση υιοθετήθηκε, αρχικά, γιατί ήταν η φυσική εξέλιξη της συλλογιστικής πορείας που υπαγόρευε την τροποποίηση του συμβατικού οδοντωτού τροχού για επίτευξη του επιθυμητού αποτελέσματος και στην συνέχεια γιατί παρατηρήθηκε πως κατά την κοπή οδοντωτού με ταυτόχρονα δεξιόστροφους και αριστερόστροφους ελικοειδείς οδόντες, χωρίς να έχει προηγηθεί η κατεργασία κοπής ευθείας οδόντωσης, προέκυπτε στο κέντρο του διακένου μία ασυνέχεια στο προφίλ του κύκλου ποδός, ως φυσικό αποτέλεσμα της επαλληλίας των δύο ελικοειδών κοπών. Συγκεκριμένα, και για τις δύο ελικοειδείς κοπές το μέγιστο βάθος του διακένου κατά την κοπή δεν βρίσκεται συμμετρικά στο κέντρο μεταξύ των οδόντων, άλλα μετατίθεται δεξιότερα ή αριστερότερα αυτού, ανάλογα με την γωνία της έλικας. Το φαινόμενο αυτό φαίνεται στις Εικόνες 3.2.4 (α) και (β).

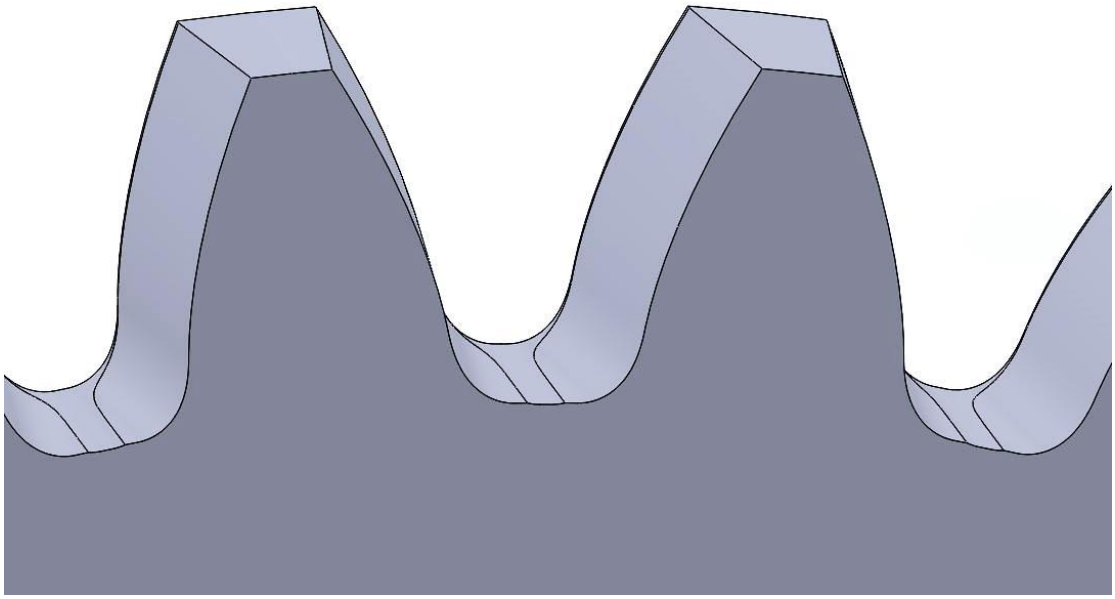


Εικόνα 3.2.4 (α): Δημιουργία «εξογκώματος»-ακμής στο κέντρο του διακένου λόγω της επαλληλίας δεξιόστροφής και αριστερόστροφης ελικοειδής κοπής

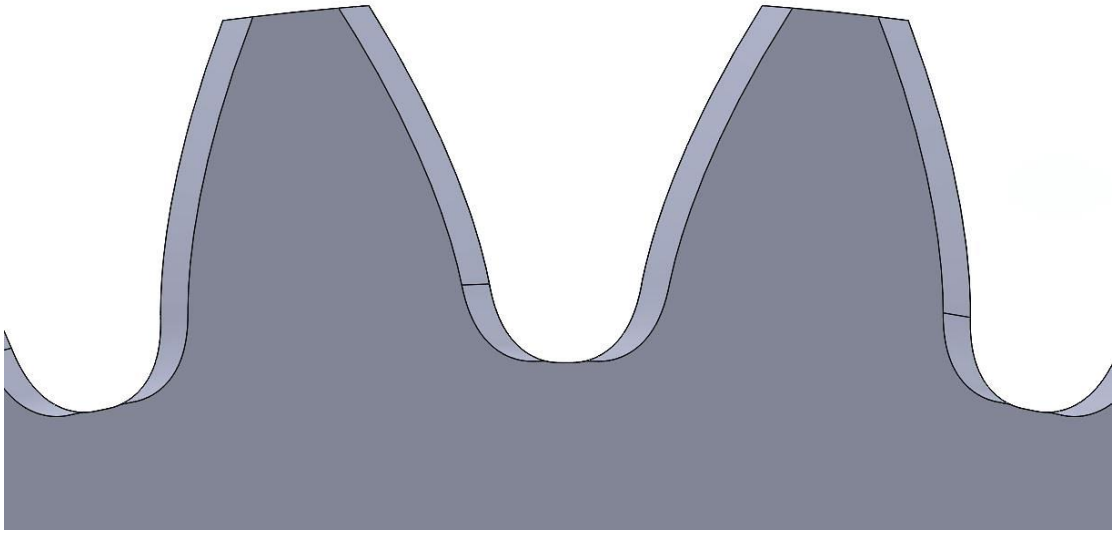


Εικόνα 3.2.4 (β): «Εξόγκωμα»-ακμή στο κέντρο του διακένου (Μπροστινή άποψη)

Εύκολα καταλήγει κανείς στο συμπέρασμα ότι αυτή η «ανωμαλία» που προκύπτει στο κέντρο του διακένου θα μπορούσε να αποφευχθεί αν οι δύο ελικοειδείς κοπές γίνονταν αφότου έχει προηγηθεί κοπή του τροχού με ευθεία οδόντωση. Τότε, στο κέντρο, συμμετρικά των οδόντων το βάθος της κοπής είναι το μέγιστο και δεν θα δημιουργούταν η συγκεκριμένη ακμή. Πράγματι, το αποτέλεσμα φαίνεται στις Εικόνα 3.2.5 (α) και (β).



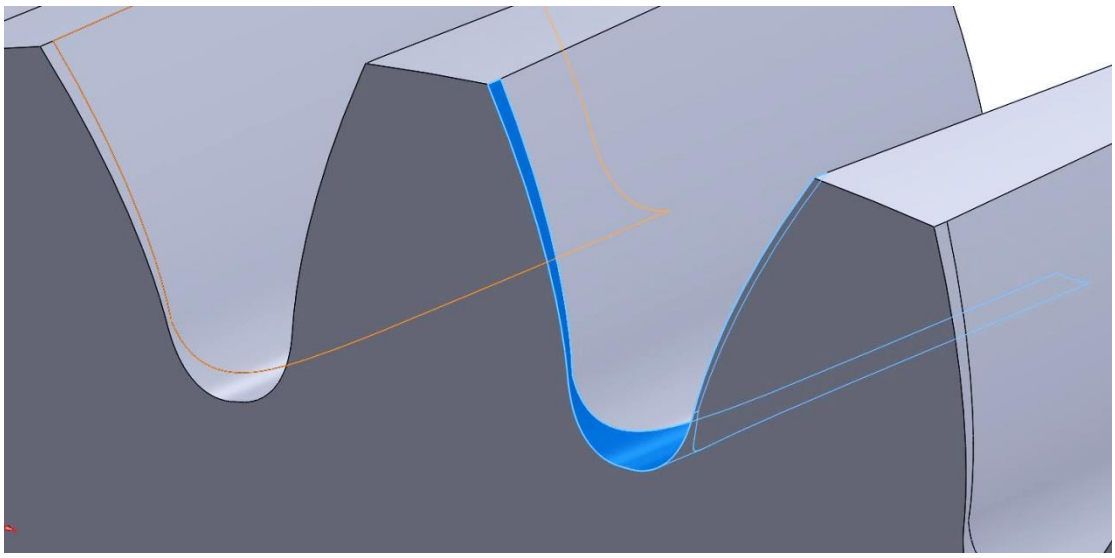
Εικόνα 3.2.5 (α): Αποτέλεσμα του οδοντωτού τροχού με την προσθήκη της κοπής ευθέων οδόντων πριν τις δύο ελικοειδείς κοπές



Εικόνα 3.2. *5 (β): Αποτέλεσμα του οδοντωτού τροχού με την προσθήκη της κοπής ευθέων οδόντων πριν τις δύο ελικοειδείς κοπές (Μπροστινή όψη)*

Ωστόσο, όπως αναλύθηκε παραπάνω, η επαλληλία των κοπών ευθείας και ελικοειδούς οδόντωσης, με το ίδιο κοπτικό εργαλείο δημιουργεί το πρόβλημα ότι η γεωμετρία της κατατομής από την ευθεία κοπή είναι μικρότερη από αυτή της ελικοειδούς, με αποτέλεσμα στο ξεκίνημα της ελικοειδούς κοπής το κοπτικό δεν βρίσκει υλικό να κόψει και οι

παραγόμενοι οδόντες έχουν ένα μικρό τμήμα ευθείας οδόντωσης, αντί να είναι ελικοειδείς σε όλο το πλάτος τους, όπως σχεδιάστηκε. Η Εικόνα 3.2.6 του μοντέλου αποτυπώνει την παραπάνω περιγραφή.



Εικόνα 3.2.6: Τμήμα οδόντα με ευθεία οδόντωση επισημαίνεται με μπλε χρώμα

Το μπλε τμήμα του οδόντα είναι αυτό που έχει παραχθεί από την ευθεία κοπή και έχει παραμείνει παρά τις ελικοειδείς κοπές που ακολουθούν, οι οποίες διαμορφώνουν τελικά την κατατομή του οδόντα. Το τμήμα αυτό της ευθείας οδόντωσης του οδόντα έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά μεγέθη από την υπόλοιπη ελικοειδή κατατομή του οδόντα και αυτό είναι ανεπιθύμητο.

Για τον λόγο αυτό, απορρίφθηκε αυτή η σχεδίαση και υιοθετήθηκε η σχεδίαση που αφορά την δημιουργία οδοντωτού τροχού με μία δεξιόστροφη και μία αριστερόστροφη ελικοειδή κοπή. Με αυτόν τον τρόπο ο χρόνος κατεργασίας του οδοντωτού τροχού μειώνεται κατά περίπου 33%, μιας και πλέον αντί για τρεις κατεργασίες *hobbing* χρειάζονται μόνο οι δύο τελευταίες.

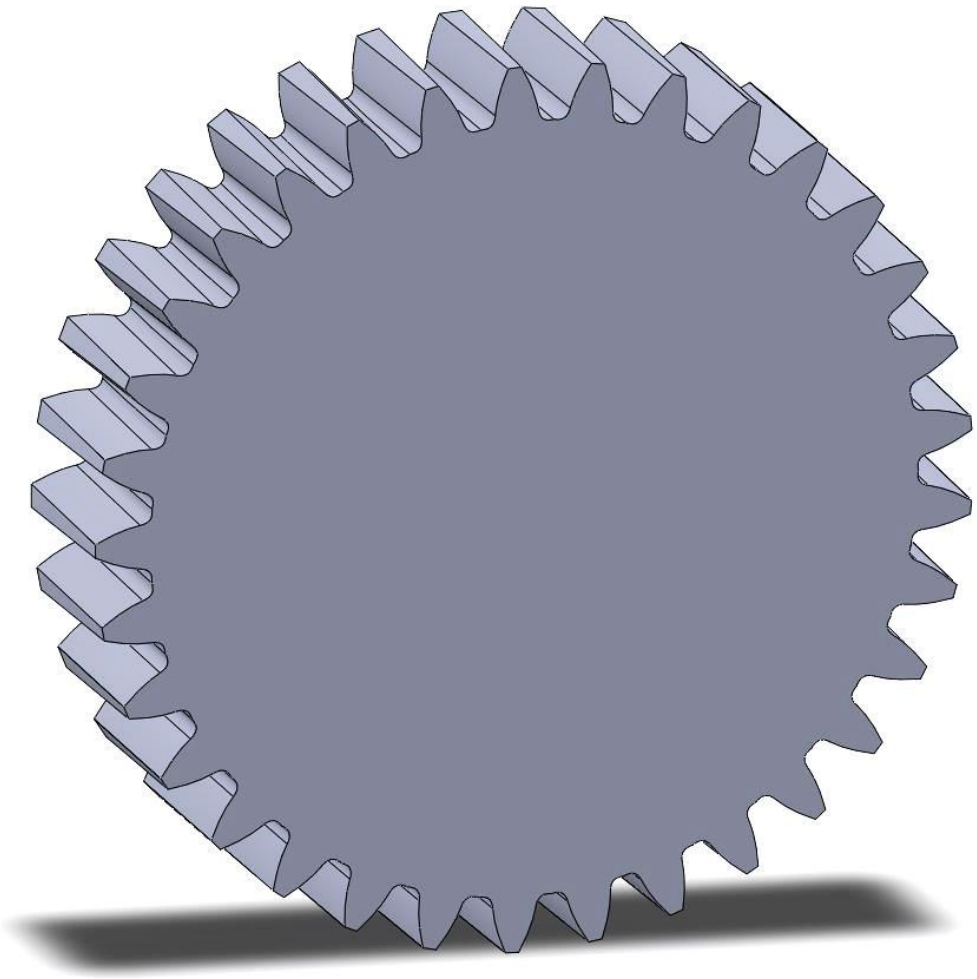
Επίσης, το ύψος του «εξογκώματος» στο κέντρο του διακένου, που σχηματίζεται με αυτή την μέθοδο και χαρακτηρίστηκε ως «ανωμαλία» παραπάνω, μετρήθηκε στα CAD μοντέλα οδοντωτών τροχών διάφορων τιμών χαρακτηριστικών μεγεθών και βρέθηκε ότι κυμαίνεται από μερικές δεκάδες μικρόμετρα, στις περιπτώσεις οδοντωτών τροχών με κλασσικές τιμές χαρακτηριστικών μεγεθών, όπως για παράδειγμα γωνία πίεσης $\alpha_0 = 20°$, $C_k = 1$, $C_f = 1.25$, $C_c = 0.3$, έως και μισό χιλιοστό, σε πιο ακραίες περιπτώσεις οδοντωτών τροχών, π.χ. οδοντωτούς τροχούς με χαρακτηριστικά μεγέθη $\alpha_0 = 30°$, $C_k = 1$, $C_f = 1.2$, $C_c = 0$.

Στην πρώτη περίπτωση, όπου ο οδόντας του κοπτικού εργαλείου δεν είναι τριγωνικός, η ύπαρξη αυτής της «ανωμαλίας» μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Στην δεύτερη περίπτωση χρειάζεται να αποδειχθεί ότι διασφαλίζεται η κατάλληλη ακτινική χάρη για την αποφυγή υποκοπών λειτουργίας *(interferences)*, δηλαδή ότι η ακτινική χάρη κατατομών είναι μεγαλύτερη από το «δοντάκι» που σχηματίζεται στο κέντρο του διακένου. Επίσης, σε κάθε περίπτωση, η προκύπτουσα γεωμετρία στο κέντρο του διακένου δεν επιδρά αρνητικά στην

αντοχή των οδόντων, όπως θα αποδειχθεί στην συνέχεια, οπότε δεν απαιτείται περεταίρω παρέμβαση ή διόρθωση του σχεδιασμού.

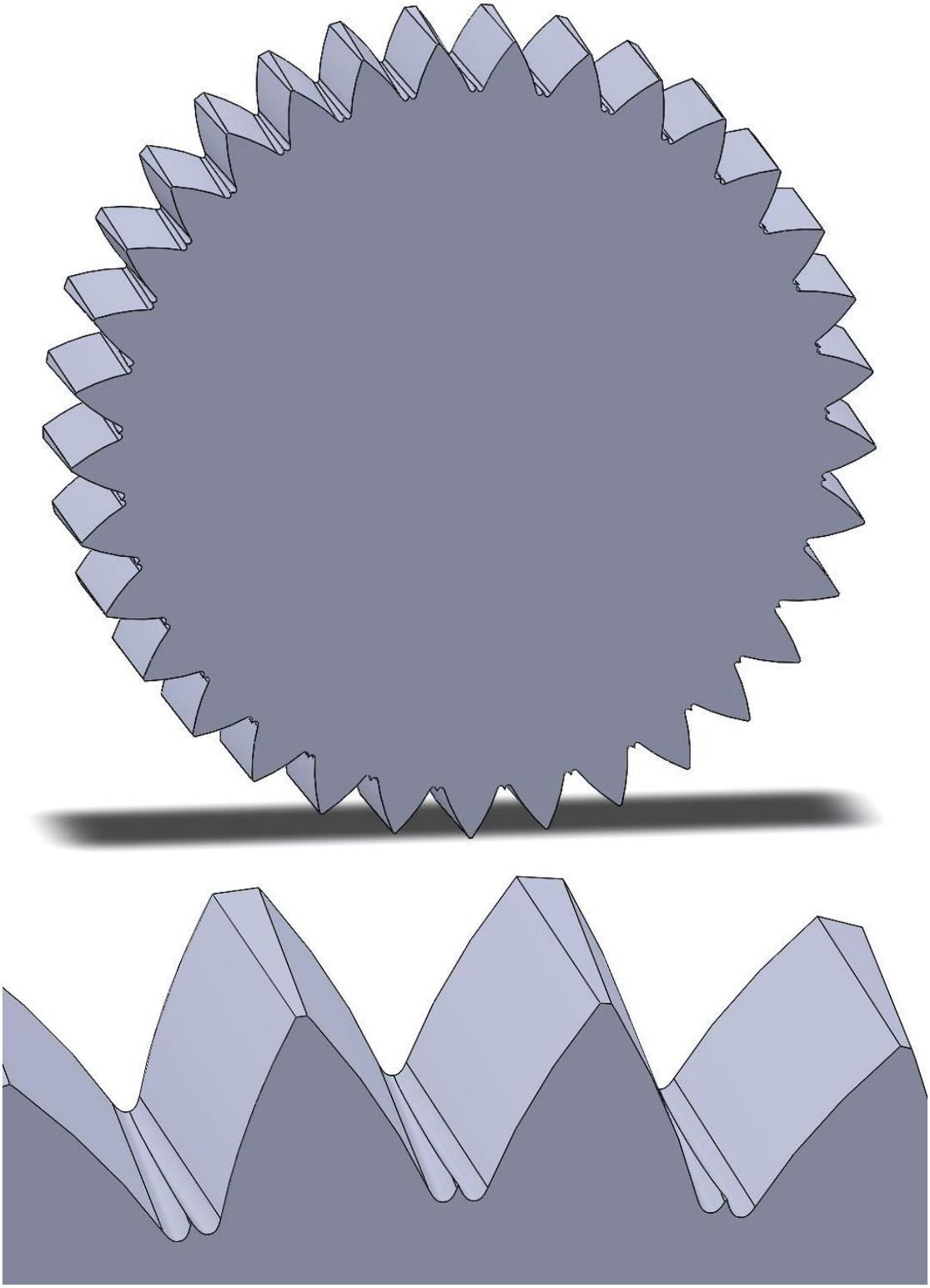
Παρακάτω παρουσιάζονται ενδεικτικά δύο οδοντωτοί τροχοί μεταβλητού πάχους οδόντα. Ο πρώτος παρουσιάζει τυποποιημένες τιμές χαρακτηριστικών μεγεθών, ενώ τα χαρακτηριστικά μεγέθη του δεύτερου είναι πιο ιδιαίτερα.

Στην Εικόνα 3.2.7 (α) βρίσκεται ο πρώτος οδοντωτός τροχός *(I)* με $\alpha_0 = 20°$, $C_k = 1$, $C_f = 1.25$, $C_c = 0.3$, $m = 2$, $Z = 33$



Εικόνα 3.2.7 (α): Οδοντωτός τροχός μεταβλητού πάχους οδόντων (I)

Στην Εικόνα 3.2.7 (β) βρίσκεται ο δεύτερος οδοντωτός τροχός *(II)* με $\alpha_0 = 30°$, $C_k = 1$, $C_f = 1.25$, $C_c = 0$, $m = 2$, $Z = 33$.

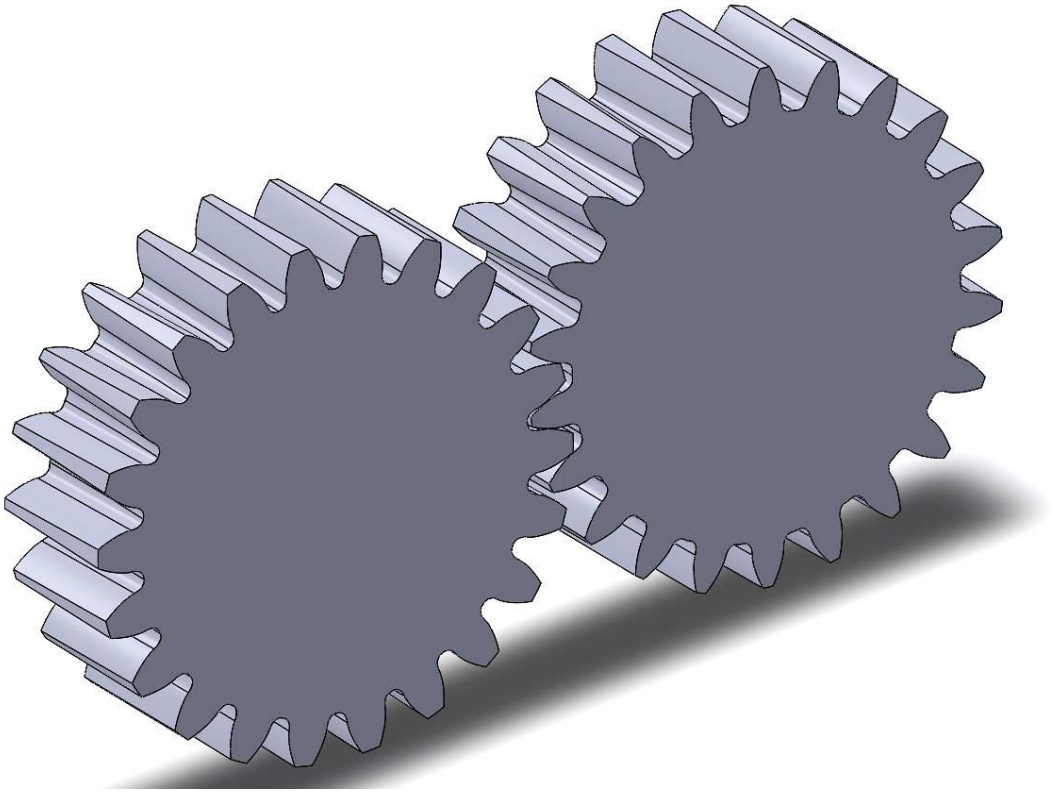


Εικόνα 3.2.7 (β): Οδοντωτός τροχός μεταβλητού πάχους οδόντων (ΙΙ). Επάνω: Ισομετρική όψη, Κάτω: Μεγέθυνση στους οδόντες και την προκύπτουσα γεωμετρία στο κέντρο του διακένου

Όπως γίνεται φανερό από την Κάτω Εικόνα 3.2.7 (β), χρειάζεται να δοθεί προσοχή στο πάχος στην κεφαλή του οδόντα στην πλευρά του τροχού που ο οδόντας λεπταίνει. Λόγω της μετάθεσης του οδόντα κατά τις ελικοειδείς κοπές, δεξιόστροφη και αριστερόστροφη, είναι πιθανόν το πάχους στην κεφαλή του οδόντα να φτάσει να μηδενιστεί ή ακόμα και να πάρει

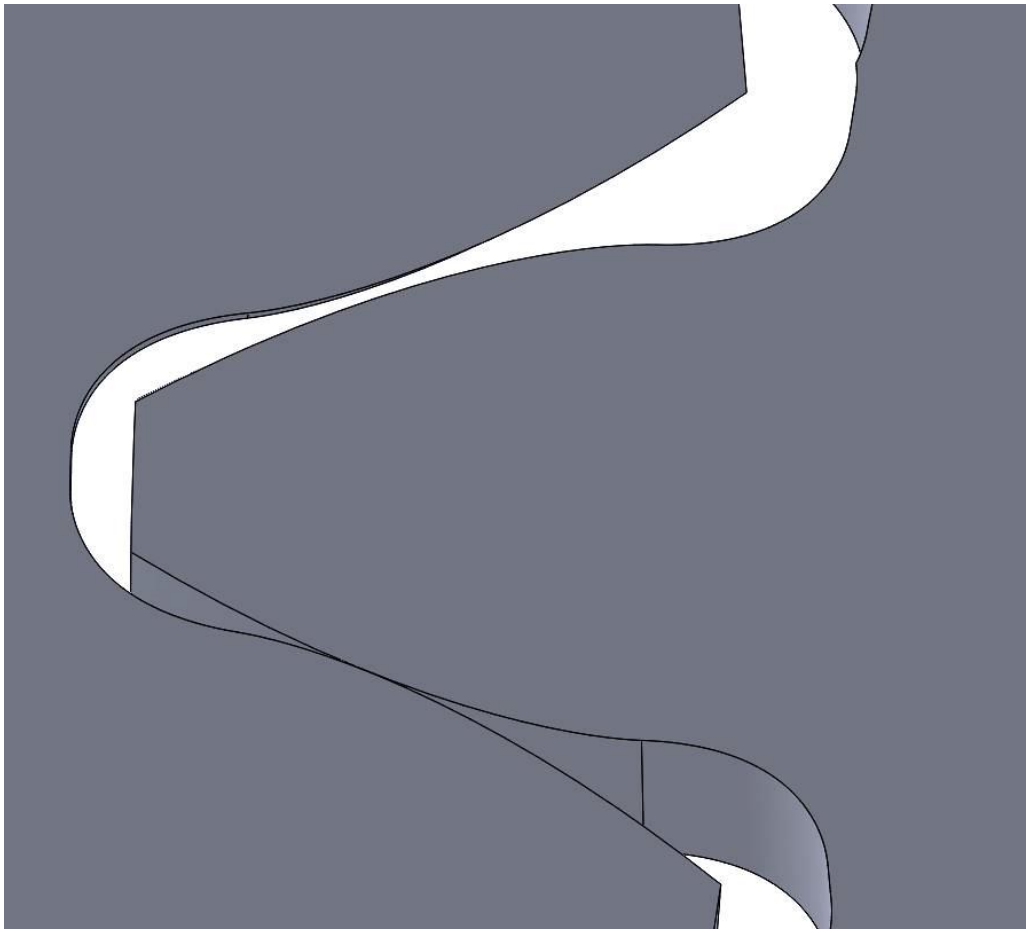
αρνητικές τιμές σε θεωρητικό επίπεδο, που πρακτικά σημαίνει ότι ο μηδενισμός του πάχους στην κεφαλή θα έρθει σε κάποιο πλάτος του τροχού, b', μικρότερο από το πραγματικό πλάτος του τροχού, b. Για τον λόγο αυτό, στον κώδικα γένεσης οδοντώσεων που αναπτύχθηκε προστέθηκε κατάλληλη υπορουτίνα που ελέγχει αν με τα δεδομένα χαρακτηριστικά μεγέθη που έχουν δοθεί για την γένεση του οδοντωτού τροχού και επηρεάζουν το πάχος του οδόντα (α_0, C_s, m, Z, αλλά και των β_0 και b), είναι εφικτή η υλοποίηση του σχεδιασμού, δηλαδή αν το πάχος στην κεφαλή του οδόντα στην λεπτή πλευρά είναι μεγαλύτερο από μηδέν. Στην περίπτωση που αυτό υπολογίζεται μικρότερο από μηδέν (ή μηδέν) χρειάζεται να αναθεωρηθούν οι τιμές των χαρακτηριστικών, με την πιο απλή αλλαγή να βρίσκεται στην μείωση της γωνίας πίεσης.

Εκτός από την δημιουργία των 3D μοντέλων μεμονωμένων οδοντωτών τροχών, είναι σημαντικό να δημιουργηθεί και CAD μοντέλο με δύο τροχούς σε συνεργασία, έτσι ώστε να αποδειχτεί ότι η χάρη κατατομών μειώνεται μέχρι τον μηδενισμό της *(zero backlash),* με την αξονική μετατόπιση του ενός εκ των δύο τροχών. Έτσι, τοποθετώντας σε συνεργασία δύο οδοντωτούς τροχούς δημιουργήθηκε το μοντέλο της παρακάτω εικόνας (Εικόνα 3.2.8). Οι οδοντωτοί τροχοί είναι ίδιοι, δηλαδή ο λόγος μετάδοσης της βαθμίδας είναι 1 προς 1.



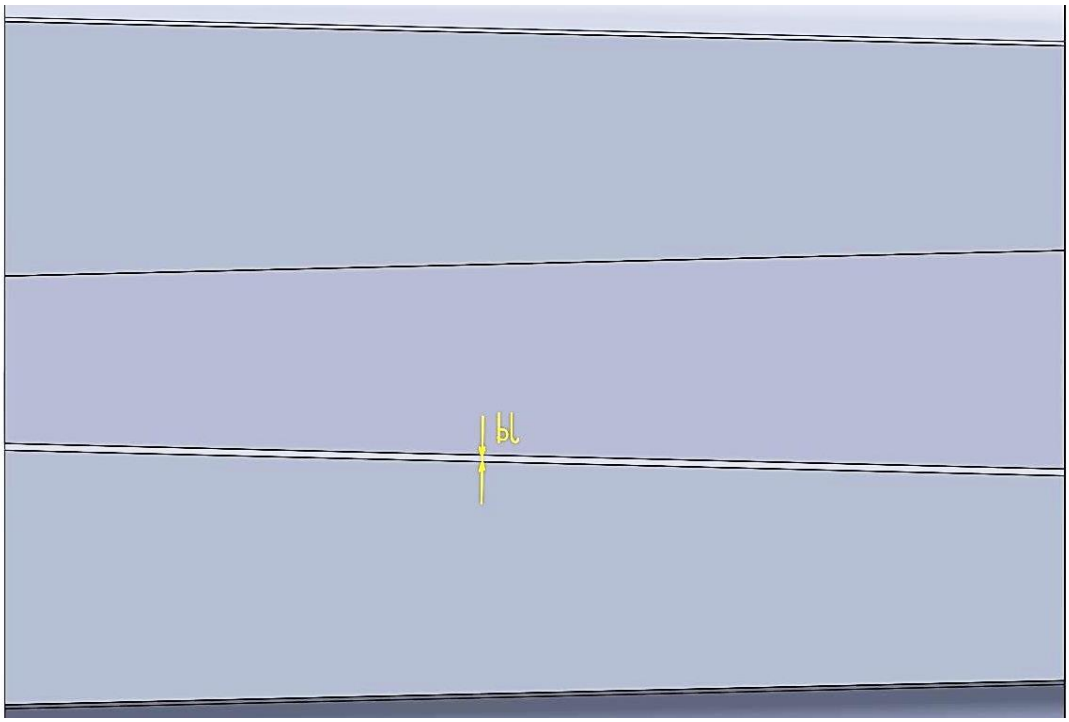
Εικόνα 3.2.8: Βαθμίδα οδοντωτών τροχών μεταβλητής χάρης κατατομών λόγου μετάδοσης 1:1

Στους συνεργαζόμενους οδοντωτούς τροχούς της Εικόνας 3.2.8 δεν έχει δοθεί αξονική μετατόπιση στον έναν από τους δύο, δηλαδή βρίσκονται στην θέση μηδενικού όφσετ. Με κατάλληλη μεγέθυνση στους υπό συνεργασία οδόντες μπορεί να φανεί η χάρη κατατομών που υπάρχει μεταξύ των κατατομών (Εικόνα 3.2.9).



Εικόνα 3.2.9: Συνεργαζόμενοι οδόντες σε μεγέθυνση, όψη υπό κατάλληλη γωνία ώστε να γίνεται φανερή η χάρη κατατομών της βαθμίδας

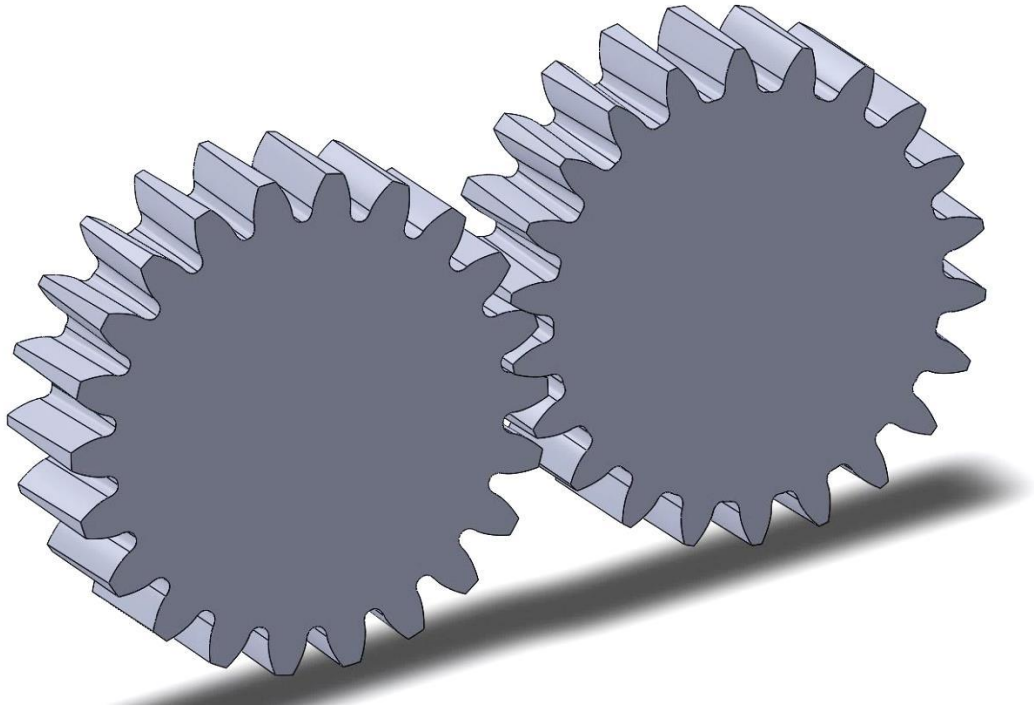
Η κάθετη τομή των συνεργαζόμενων οδόντων της Εικόνας 3.2.10 διευκολύνει την εποπτεία.



Εικόνα 3.2.10: Κάθετη τομή συνεργαζόμενων οδόντων στο σημείο της επαφής

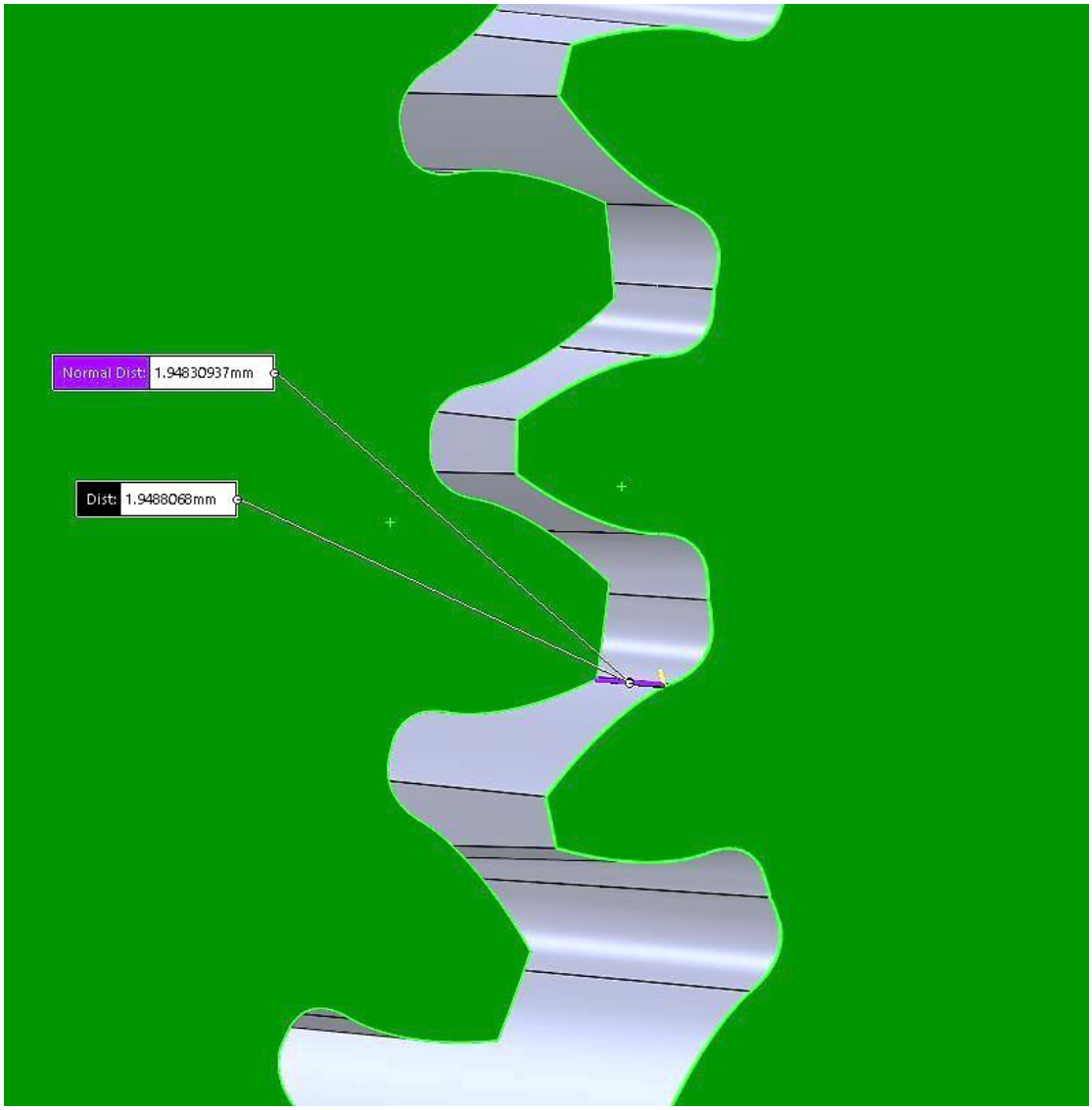
Όπου με κίτρινο σημείωμα bl επισημαίνεται η χάρη κατατομών *(backlash)* της συγκεκριμένης βαθμίδας.

Αν μετατοπίσουμε τον έναν εκ των δύο τροχών αξονικά μέχρις ότου ανιχνευθεί σύγκρουση των οδόντων *(Collision Detection)*, βλέπουμε ότι οι κατατομές συγκρούονται, δηλαδή μηδενίζεται η χάρη κατατομών, σε απόσταση Δx όπως υπολογίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο (Εικόνες 3.2.11, 12 και 13).



Εικόνα 3.2.11: Βαθμίδα οδοντωτών τροχών μεταβλητής χάρης κατατομών σε αξονική μετατόπιση Δx

Εικόνα 3.2.12: Κάθετη τομή συνεργαζόμενων οδόντων στο σημείο της επαφής βαθμίδας μετατοπισμένων οδοντωτών τροχών



Εικόνα 3.2.13:Οδοντωτοί τροχοί σε συνεργασία μετατοπισμένοι στη θέση μηδενικής χάρης κατατομών

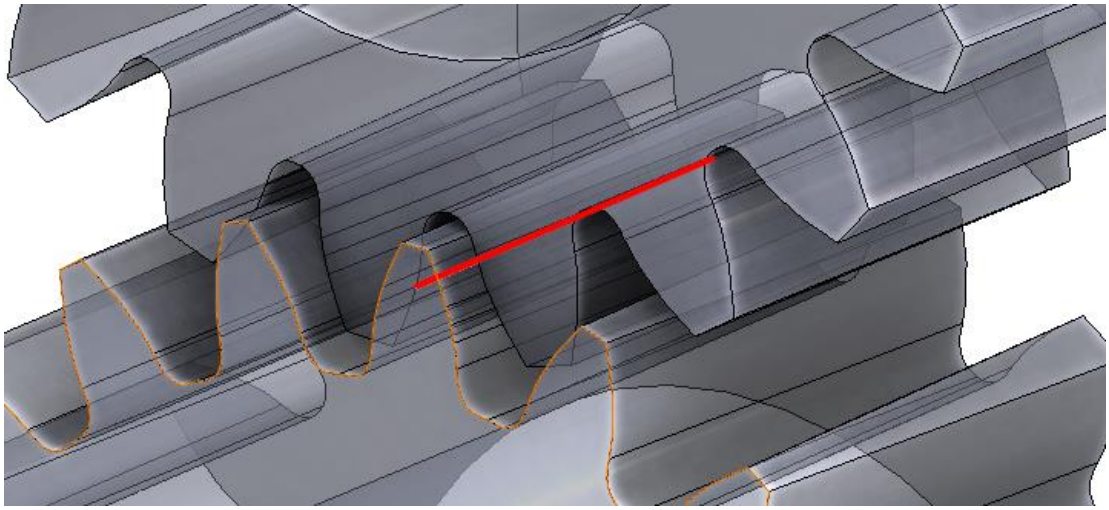
Η αξονική μετατόπιση στην οποία συνέβη η σύγκρουση των κατατομών των συνεργαζόμενων οδόντων είναι ίση με την τιμή της μετατόπισης Δx που υπολογίζεται από τον κώδικα που έχουμε αναπτύξει. Αυτό πιστοποιεί την ορθότητα της μοντελοποίησης και του σχεδιασμού της βαθμίδας οδοντωτών τροχών με χάρη κατατομών που μεταβάλλεται ρυθμίζοντας την αξονική θέση ενός εκ των δύο οδοντωτών τροχών.

4. Επαλήθευση του μοντέλου

Το επόμενο βήμα στην πορεία του σχεδιασμού είναι η επαλήθευση των μοντέλων που έχουν προκύψει με τα κατάλληλα λογισμικά προσομοίωσης λειτουργίας της βαθμίδας οδοντωτών τροχών με μεταβλητή χάρη κατατομών.

Ήδη από το προηγούμενο κεφάλαιο αποδείχθηκε ότι η αξονική μετατόπιση του ενός εκ των δύο τροχών της βαθμίδας, μέσω του 3D μοντέλου δύο οδοντωτών τροχών σε συνεργασία στο εμπορικό λογισμικό CAD SolidWorks. Μετράμε την αξονική μετατόπιση μέχρι την σύγκρουση των δύο οδόντων και βρίσκεται όση σχεδιάστηκε να είναι. Σημαντικό ζητούμενο, ωστόσο, είναι να αποδειχθεί ότι κατά την επαφή των δύο κατατομών η γραμμή επαφής, κατά μήκος του πλάτους των οδόντων, είναι ευθεία γραμμή και συνεχής.

Πράγματι, στο ίδιο λογισμικό εξετάζοντας την επαφή των κατατομών επιβεβαιώνεται ότι η γραμμή επαφής είναι γραμμική σε όλο το ενεργό πλάτος των οδόντων των τροχών, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 4.1.



Εικόνα 4.1: Γραμμή επαφής οδοντωτών τροχών με μεταβλητή χάρη κατατομών

Μεγεθύνοντας την πλάγια όψη του σχήματος (Εικόνα 4.2) φαίνεται καλύτερα και η κλίση που παρουσιάζει η γραμμή επαφής λόγω της κλίσης των οδόντων από την ελικοειδή κοπή. Το αποτέλεσμα είναι παρόμοιο με αυτό που παίρνουμε και σε μία βαθμίδα μετωπικών ελικοειδών οδοντωτών τροχών, αλλά με πιο ήπια κλίση, καθώς σε αυτήν την περίπτωση η γωνία της έλικας που χρησιμοποιείται για την κοπή είναι περίπου $1°$ με $2°$, ενώ στους ελικοειδής οδοντωτούς τροχούς συνήθως χρησιμοποιούνται γωνίες ελίκωσης περί τις $20°$.

Εικόνα 4.2: Πλάγια όψη σε μεγέθυνση της γραμμής επαφών

4.1. Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM)

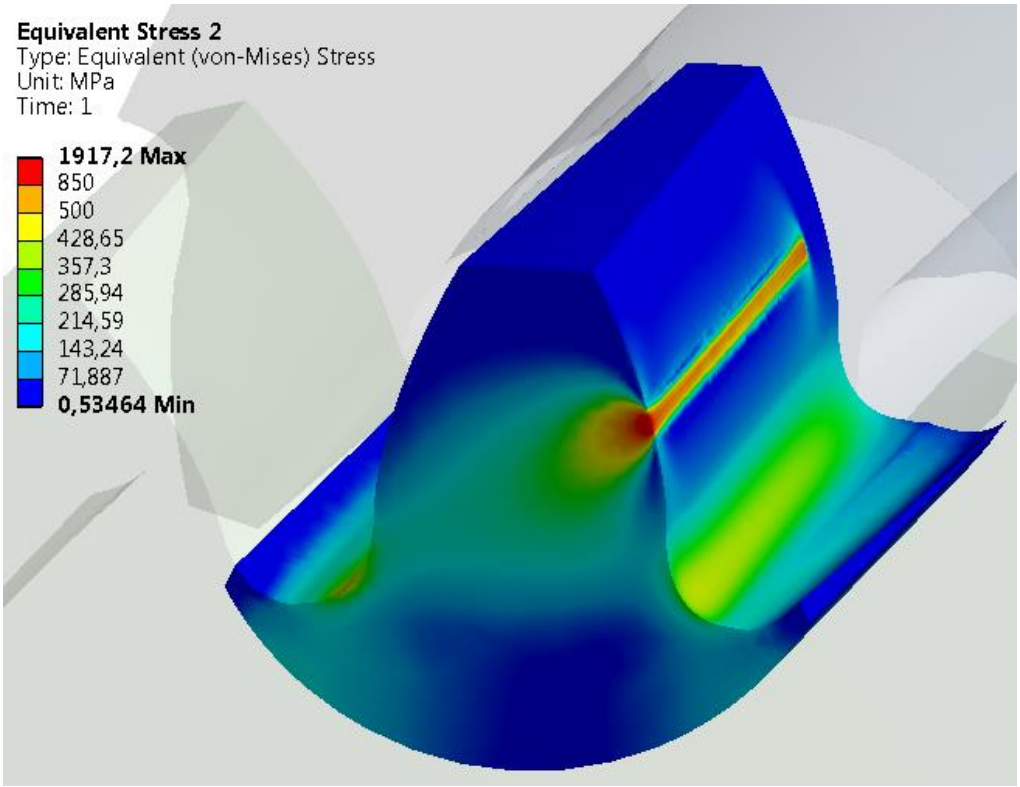
Στη συνέχεια, με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων πραγματοποιήθηκε προσομοίωση στατικής ανάλυσης για έξι βαθμίδες οδοντωτών τροχών, τρείς για τροχούς με γωνία εξειλιγμένης $20°$ και σχέσεις μετάδοσης 1:1, 1.5:1 και 2:1 και τρεις για τροχούς με γωνία εξειλιγμένης $30°$ και τις ίδιες σχέσεις μετάδοσης.

Για τις συνθήκες των προσομοιώσεων ισχύουν τα εξής:

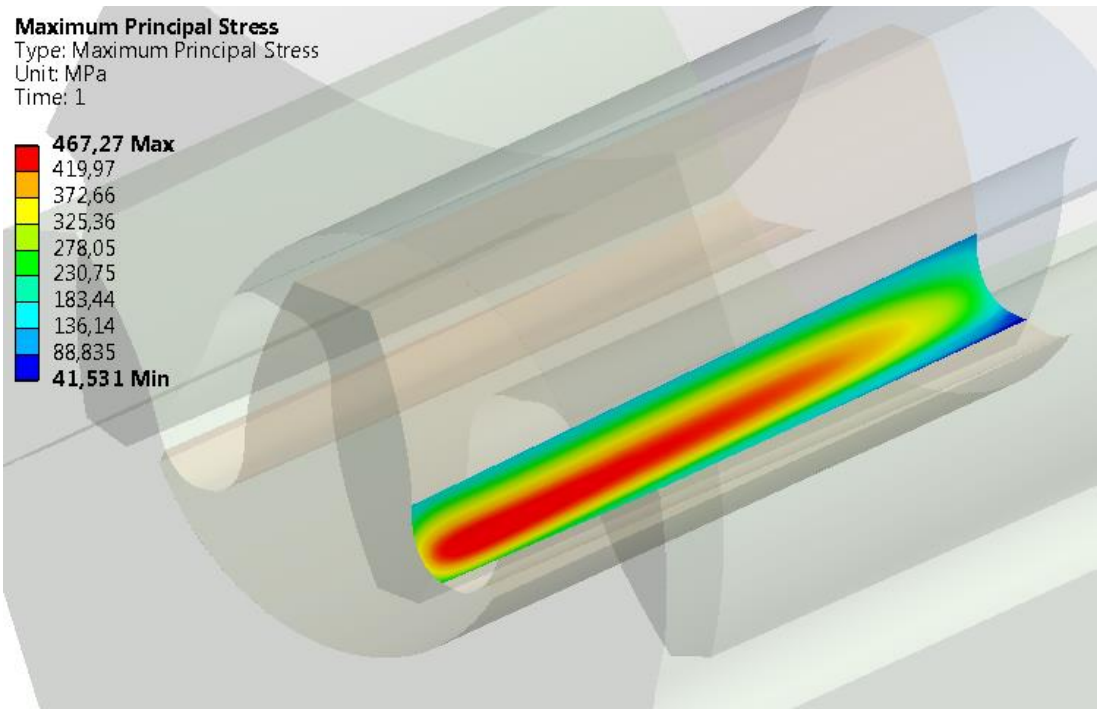
- Ως συνοριακές συνθήκες για όλες τις περιπτώσεις τέθηκε κυλινδρική στήριξη με δεσμευμένους όλους του βαθμούς ελευθερίας για τον οδηγούμενο οδοντωτό τροχό της βαθμίδας και κυλινδρική στήριξη με δεσμευμένο τον αξονικό βαθμό ελευθερίας και ελεύθερη την περιστροφή για τον κινητήριο οδοντωτό τροχό (*pinion*).
- Το σημείο επαφής των κατατομών στο οποίο έγιναν οι προσομοιώσεις είναι το σημείο κύλισης του πινιόν.
- Στον εργαζόμενο οδόντα του κινητήριου οδοντωτού τροχού ασκήθηκε ροπή $100Nm$.
- Η επαφή θεωρήθηκε τριβική και μεταξύ των κατατομών θεωρήθηκε συντελεστής τριβής ολίσθησης $\mu = 0{,}2$.
- Λήφθηκε υπόψη μόνο η περίπτωση επαφής ενός ζεύγος οδόντων.
- Τα αποτελέσματα που ζητήθηκαν από κάθε προσομοίωση ήταν τα *Equivalent von-Mises stress* στο πινιόν, *Hertzian stress* (πιέσεις επιφανείας) στην περιοχή της γραμμής επαφής του πινιόν, και οι μέγιστες – κατ' απόλυτη τιμή – κύριες τάσεις στους πόδες και συγκεκριμένα η *Minimum Principal stress* στην περιοχή του τροχοειδούς της μη εργαζόμενης κατατομής του οδόντα του πινιόν και *Maximum Principal stress* στην περιοχή του τροχοειδούς της εργαζόμενης κατατομής του οδόντα του πινιόν.

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων παρουσιάζονται παρακάτω.

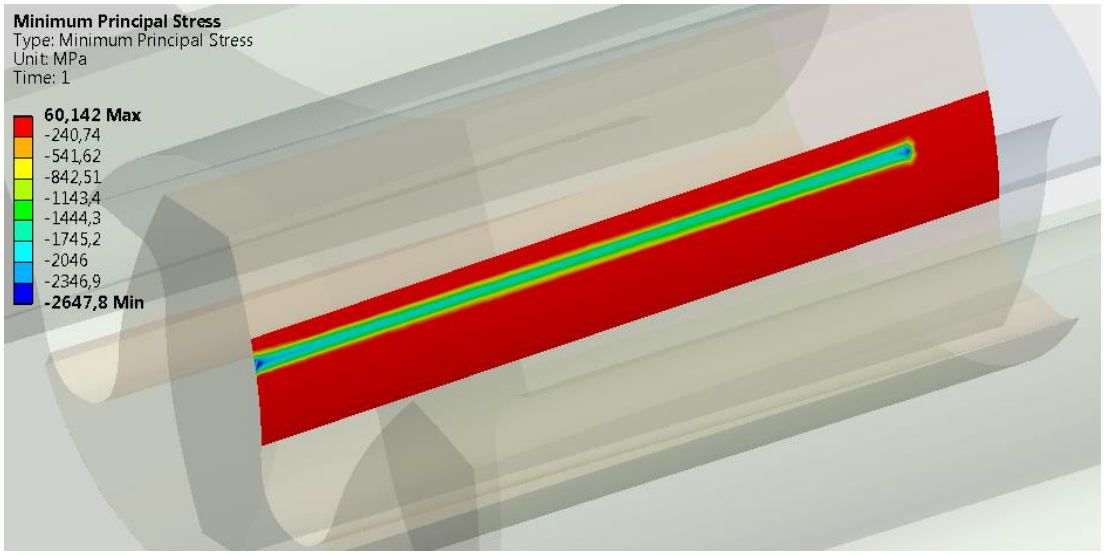
i. *Γωνία εξειλιγμένης* $20°$*, σχέση μετάδοσης* $1:1$



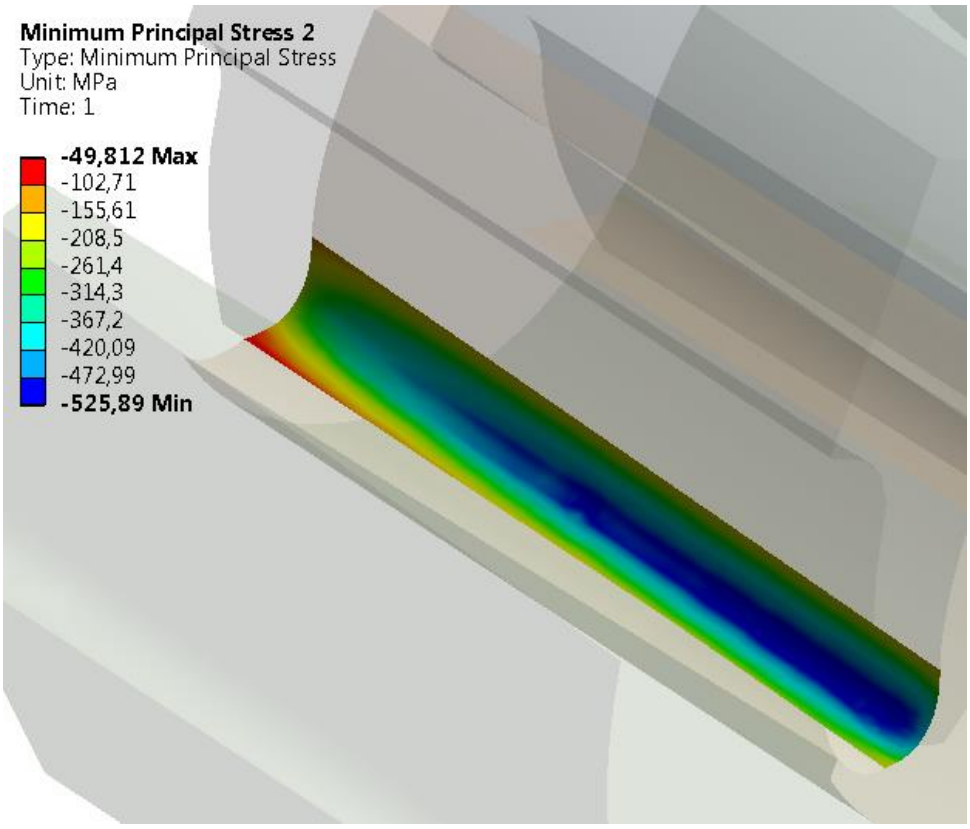
Equivalent von-Mises Stress στον οδόντα του πινιόν



Maximum Principal Stress στην περιοχή του τροχοειδούς της εργαζόμενης κατατομής του οδόντα του πινιόν

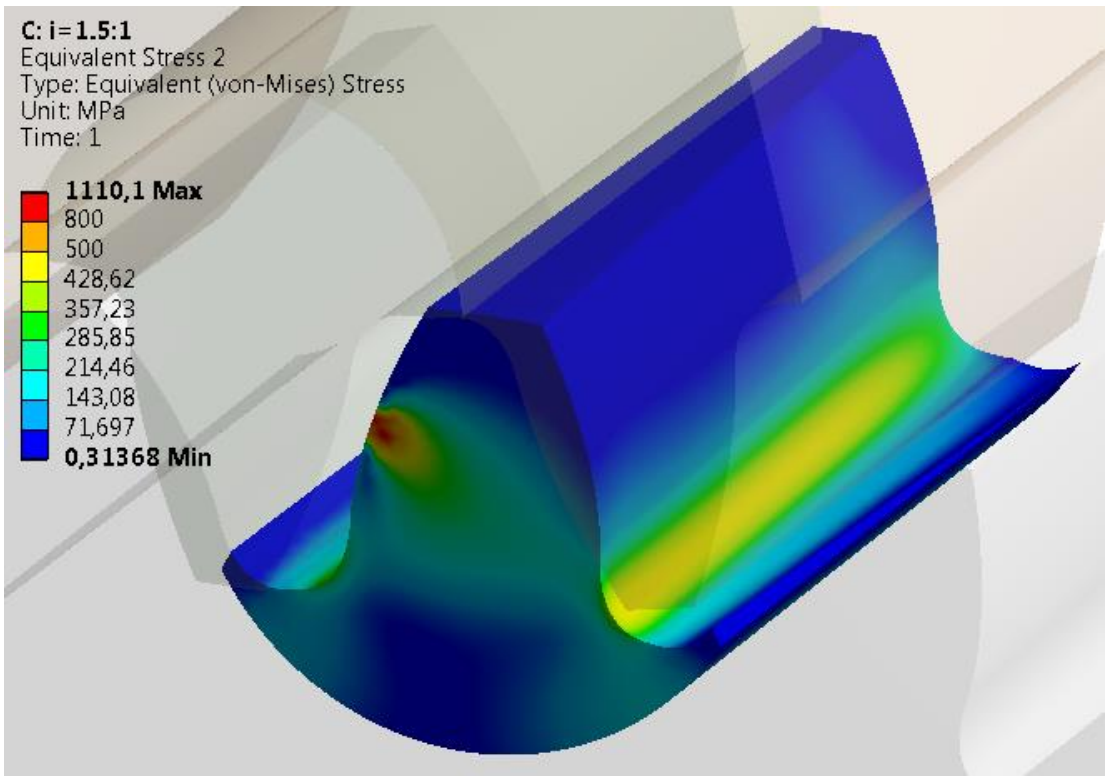


Hertzian Stress στην περιοχή της γραμμής επαφής του πινιόν

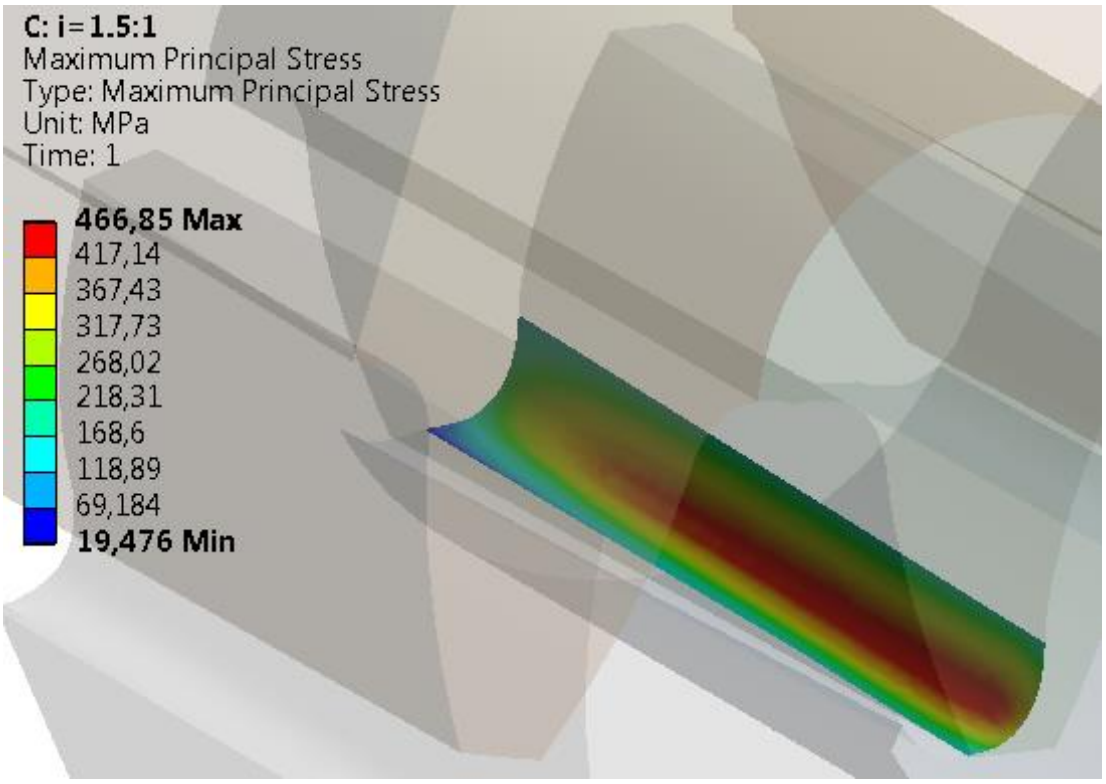


Minimum Principal Stress στην περιοχή του τροχοειδούς της μη εργαζόμενης κατατομής του οδόντα του πινιόν

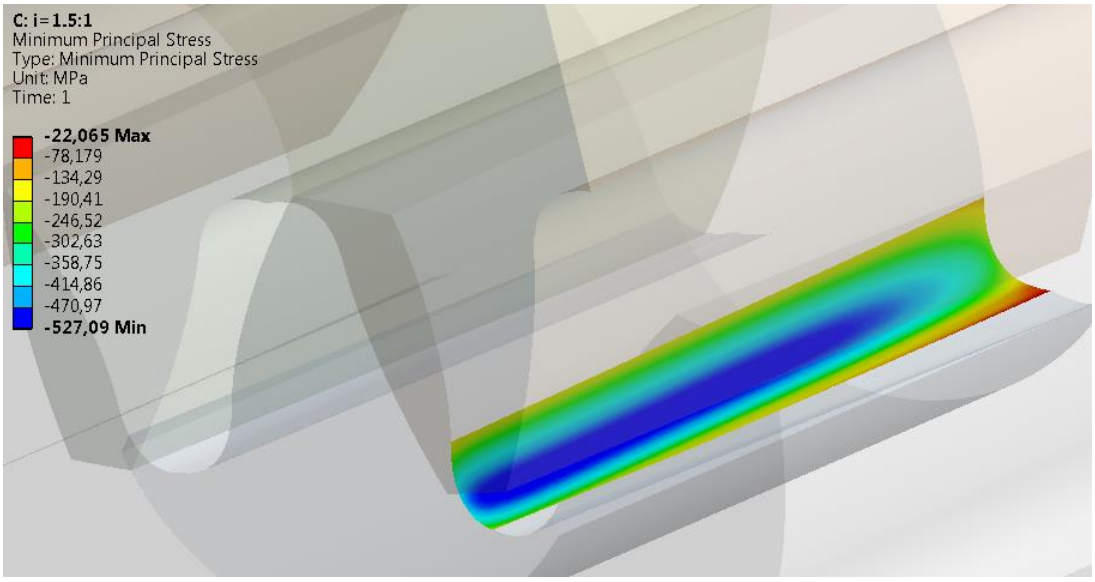
ii. *Γωνία εξειλιγμένης* 20°*, σχέση μετάδοσης* 1,5: 1



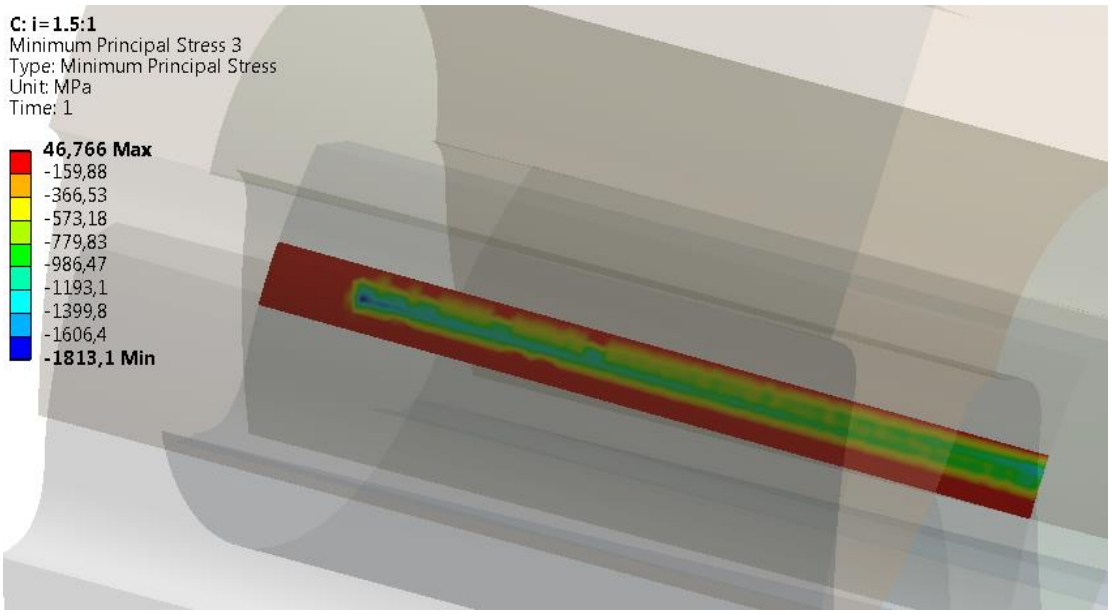
Equivalent von-Mises Stress στον οδόντα του πινιόν



Maximum Principal Stress στην περιοχή του τροχοειδούς της εργαζόμενης κατατομής του οδόντα του πινιόν

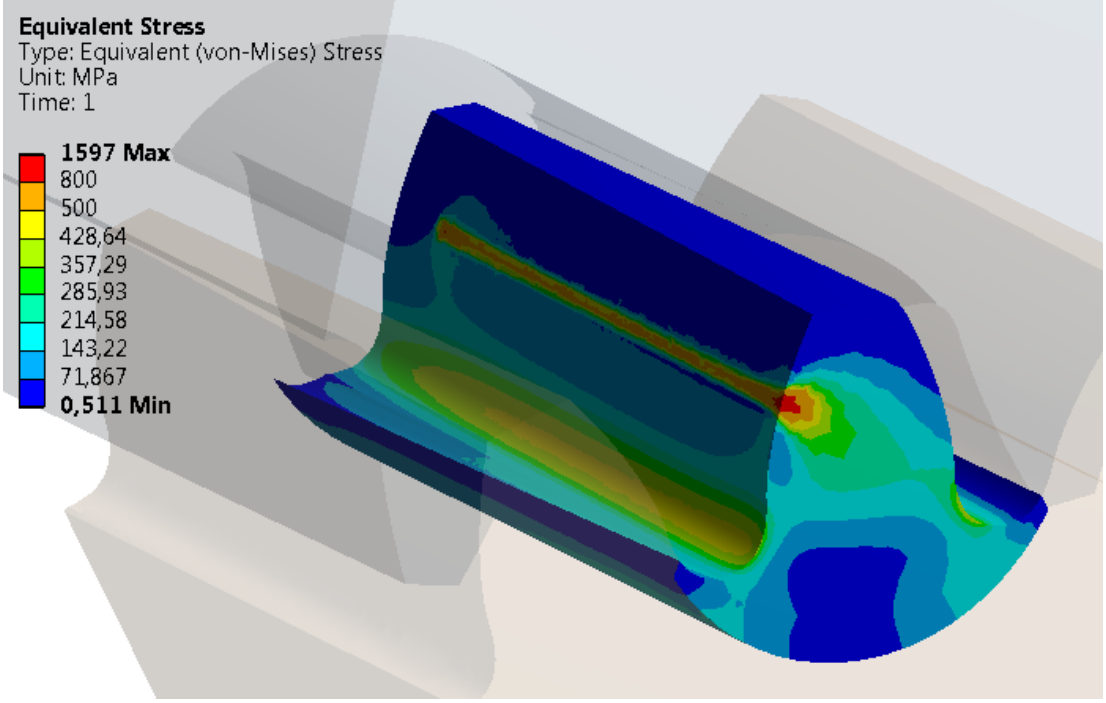


Minimum Principal Stress στην περιοχή του τροχοειδούς της μη εργαζόμενης κατατομής του οδόντα του πινιόν

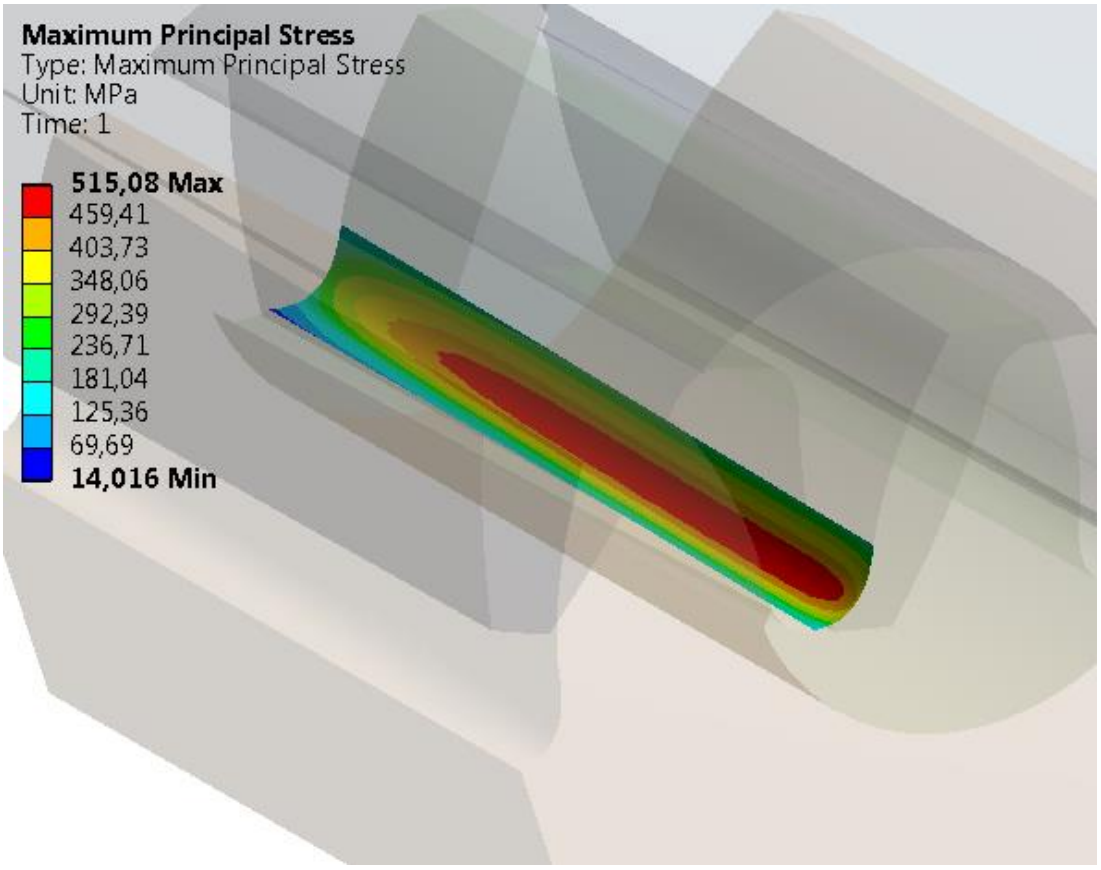


Hertzian Stress στην περιοχή της γραμμής επαφής του πινιόν

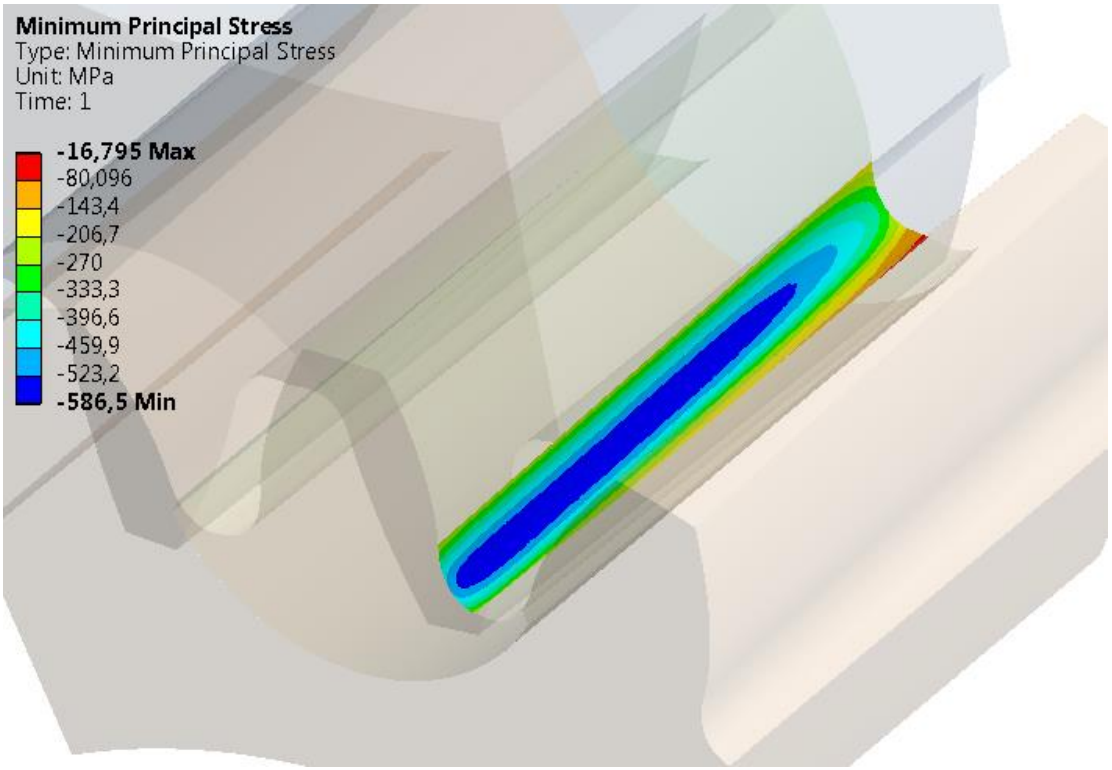
iii. *Γωνία εξειλιγμένης 20°, σχέση μετάδοσης 2: 1*



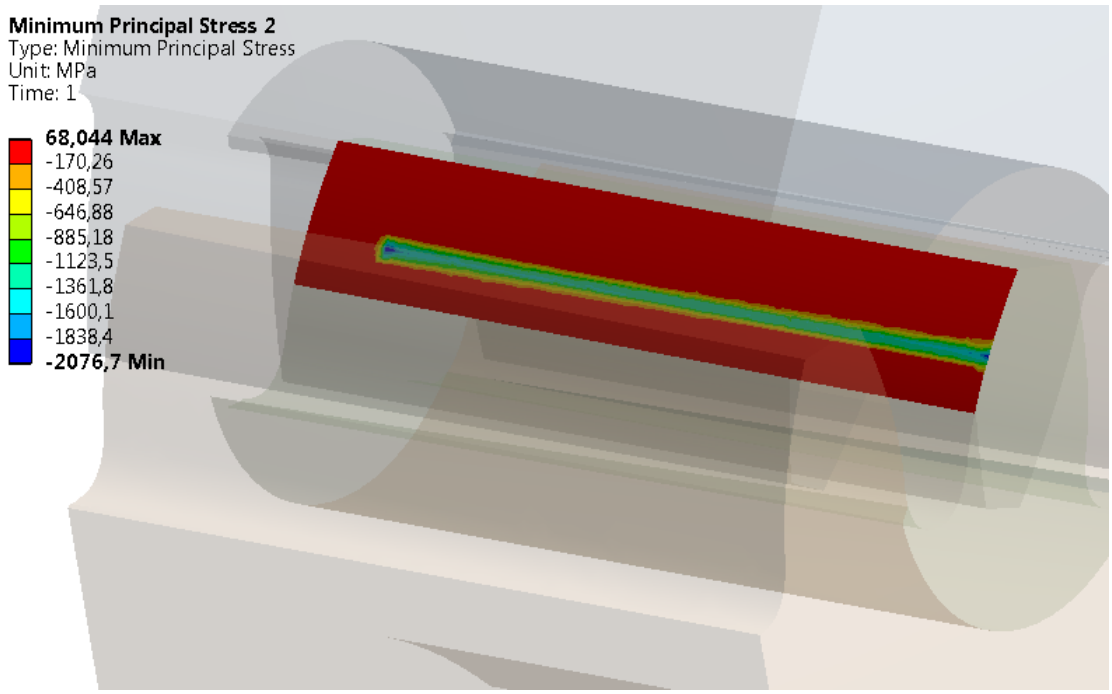
Equivalent von-Mises Stress στον οδόντα του πινιόν



Maximum Principal Stress στην περιοχή του τροχοειδούς της εργαζόμενης κατατομής του οδόντα του πινιόν

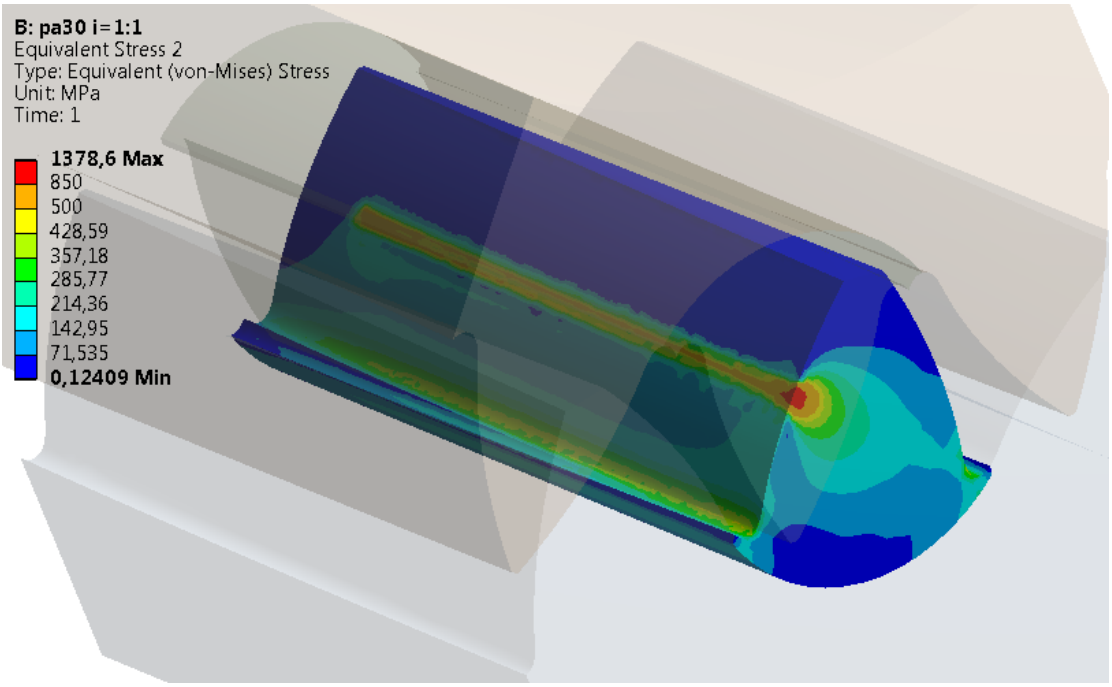


Minimum Principal Stress στην περιοχή του τροχοειδούς της μη εργαζόμενης κατατομής του οδόντα του πινιόν

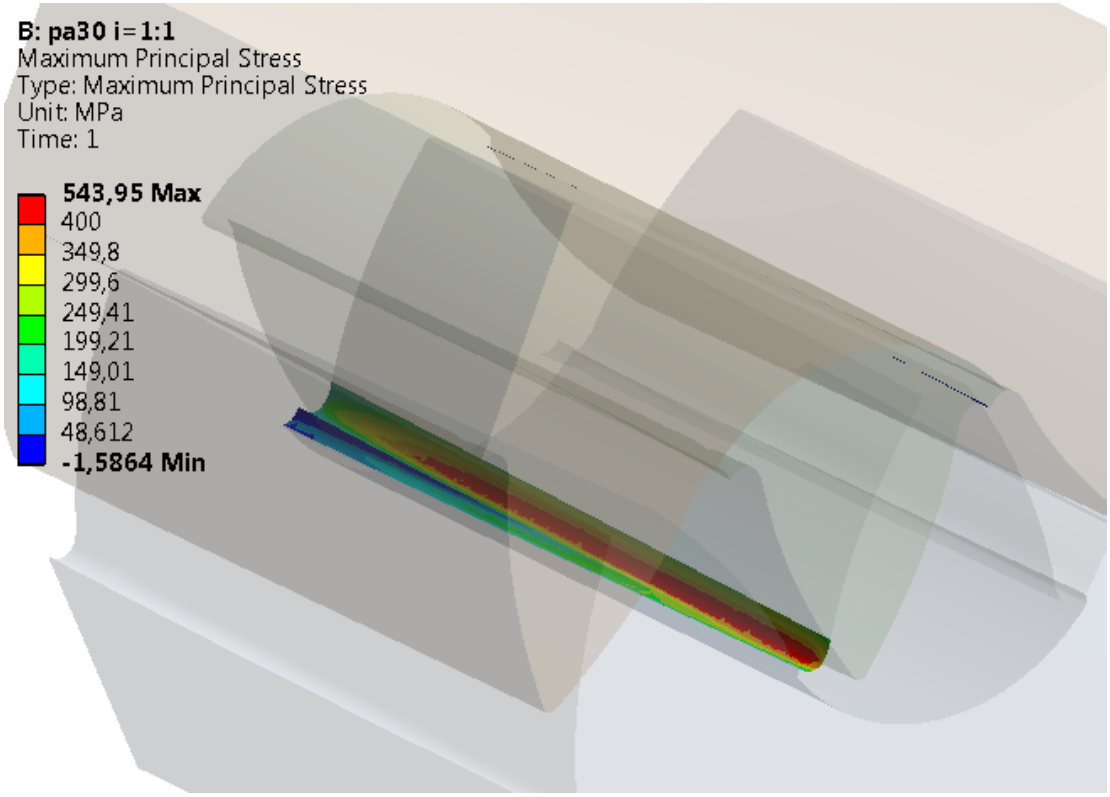


Hertzian Stress στην περιοχή της γραμμής επαφής του πινιόν

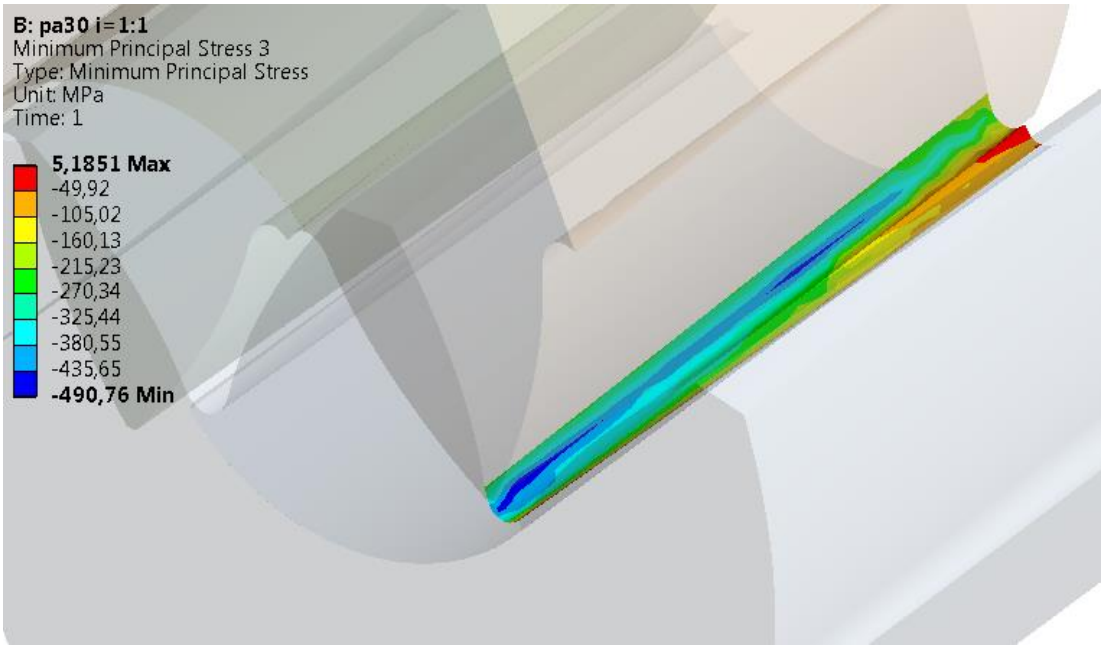
iv. *Γωνία εξειλιγμένης* $30°$*, σχέση μετάδοσης* $1:1$



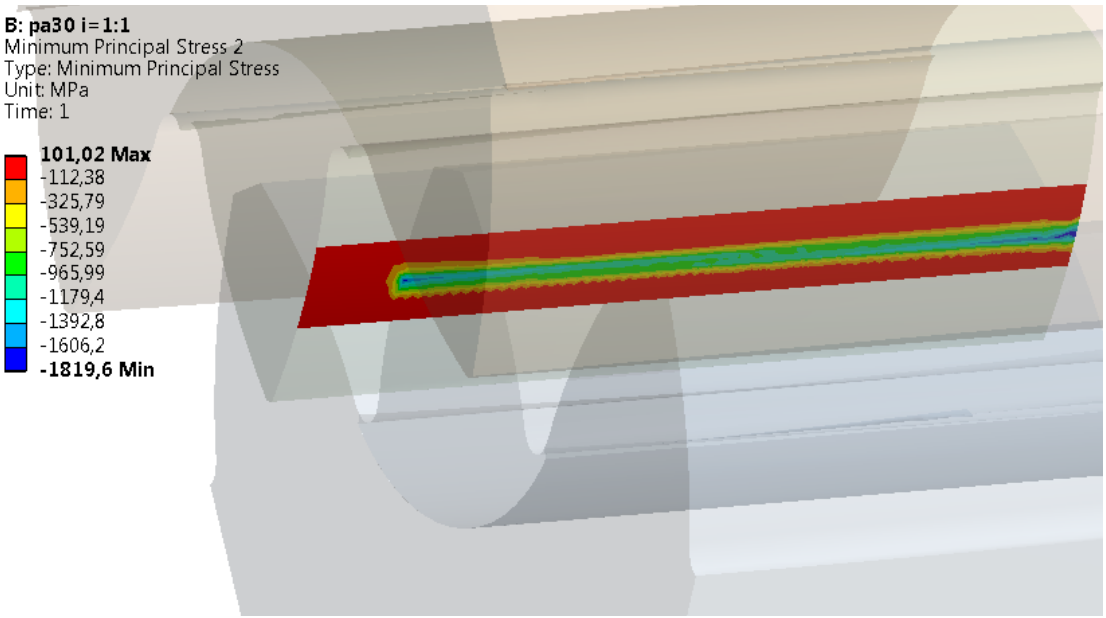
Equivalent von-Mises Stress στον οδόντα του πινιόν



Maximum Principal Stress στην περιοχή του τροχοειδούς της εργαζόμενης κατατομής του οδόντα του πινιόν

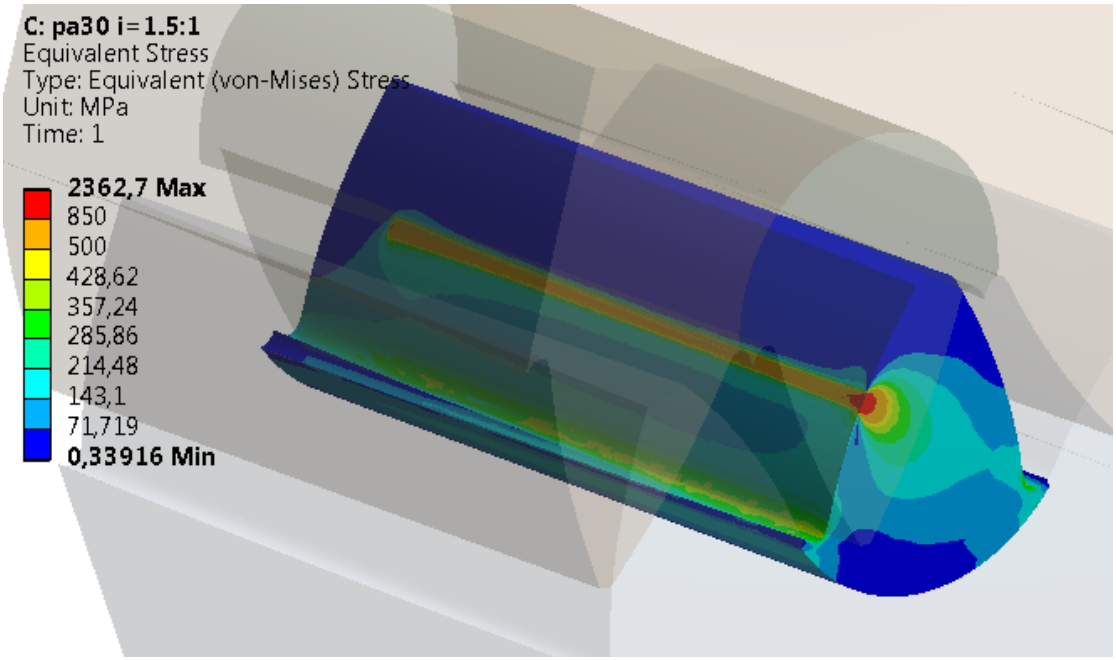


Minimum Principal Stress στην περιοχή του τροχοειδούς της μη εργαζόμενης κατατομής του οδόντα του πινιόν

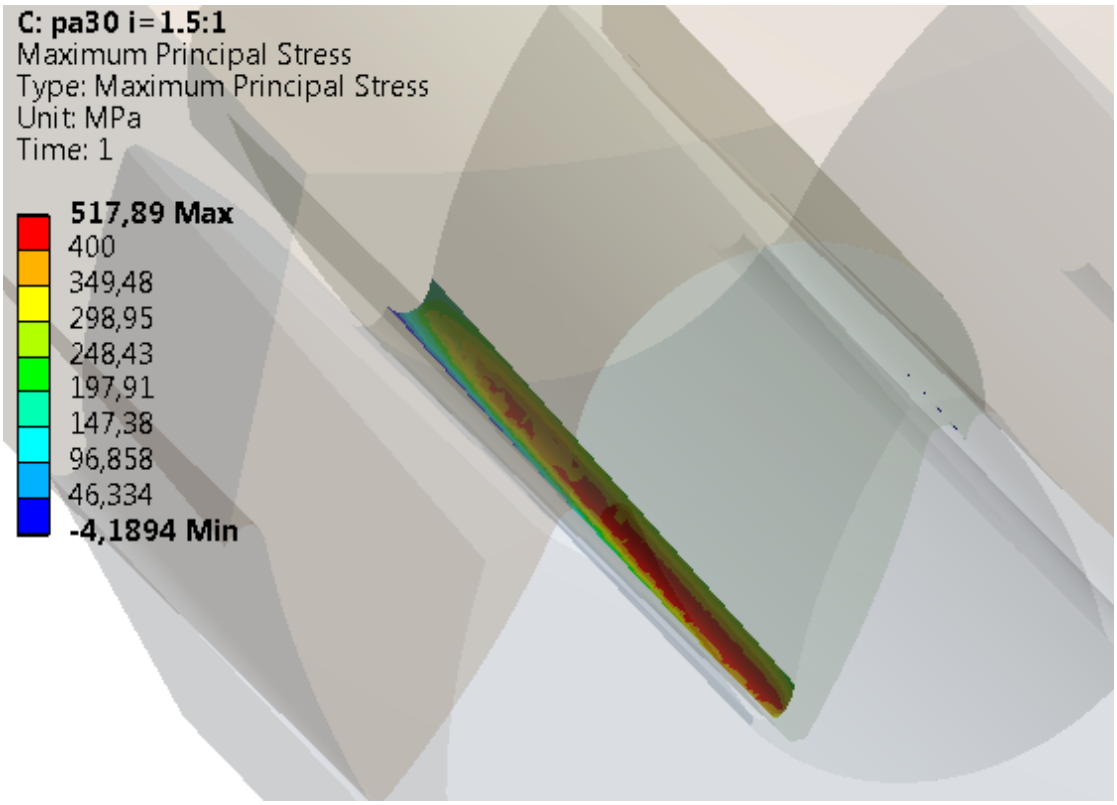


Hertzian Stress στην περιοχή της γραμμής επαφής του πινιόν

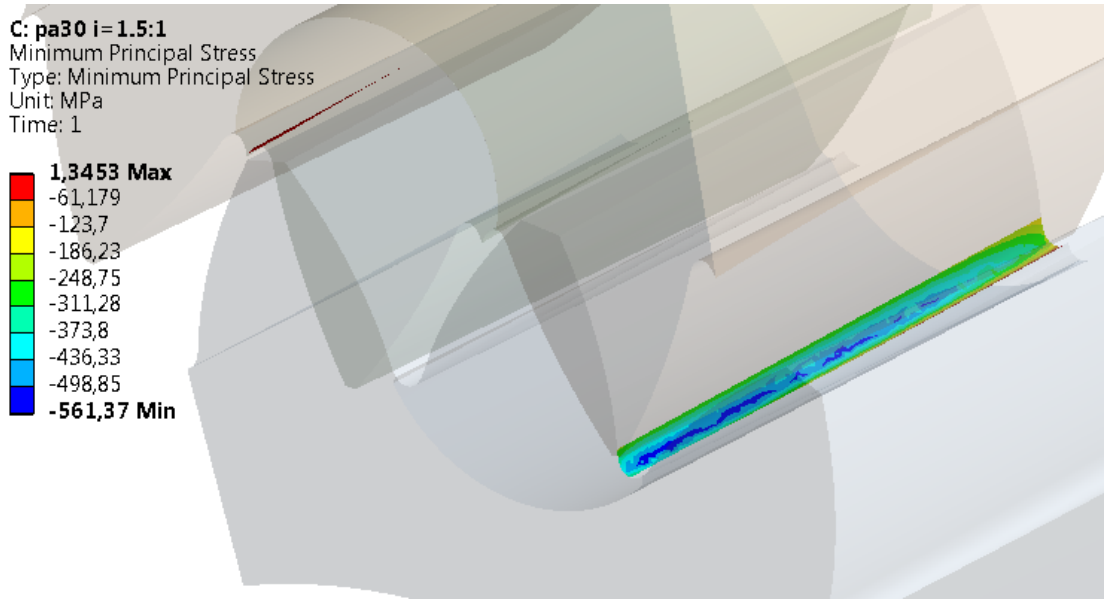
v. *Γωνία εξειλιγμένης* 30°, *σχέση μετάδοσης* 1,5: 1



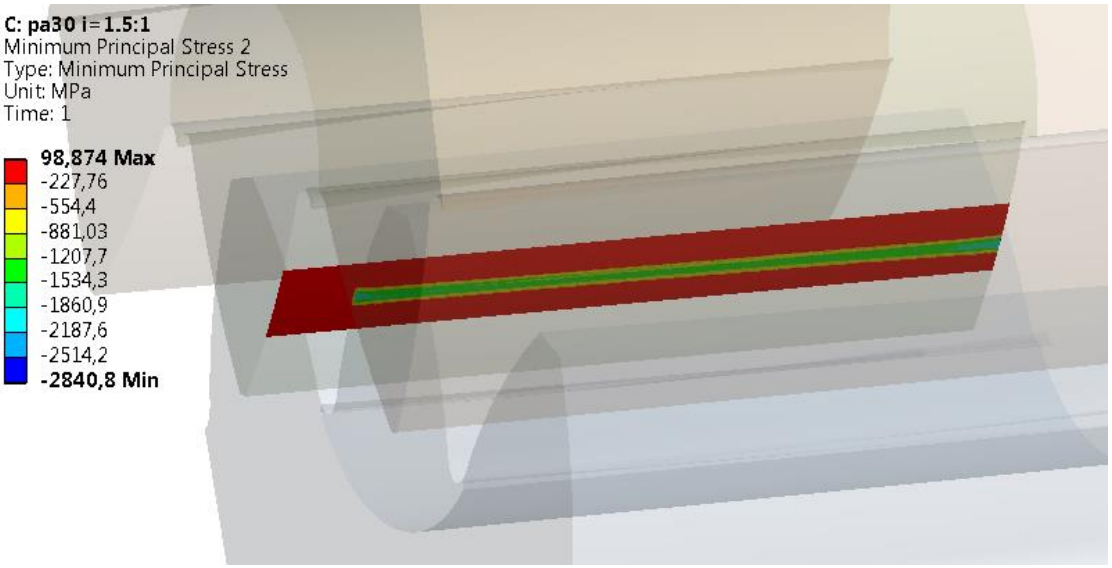
Equivalent von-Mises Stress στον οδόντα του πινιόν



Maximum Principal Stress στην περιοχή του τροχοειδούς της εργαζόμενης κατατομής του οδόντα του πινιόν

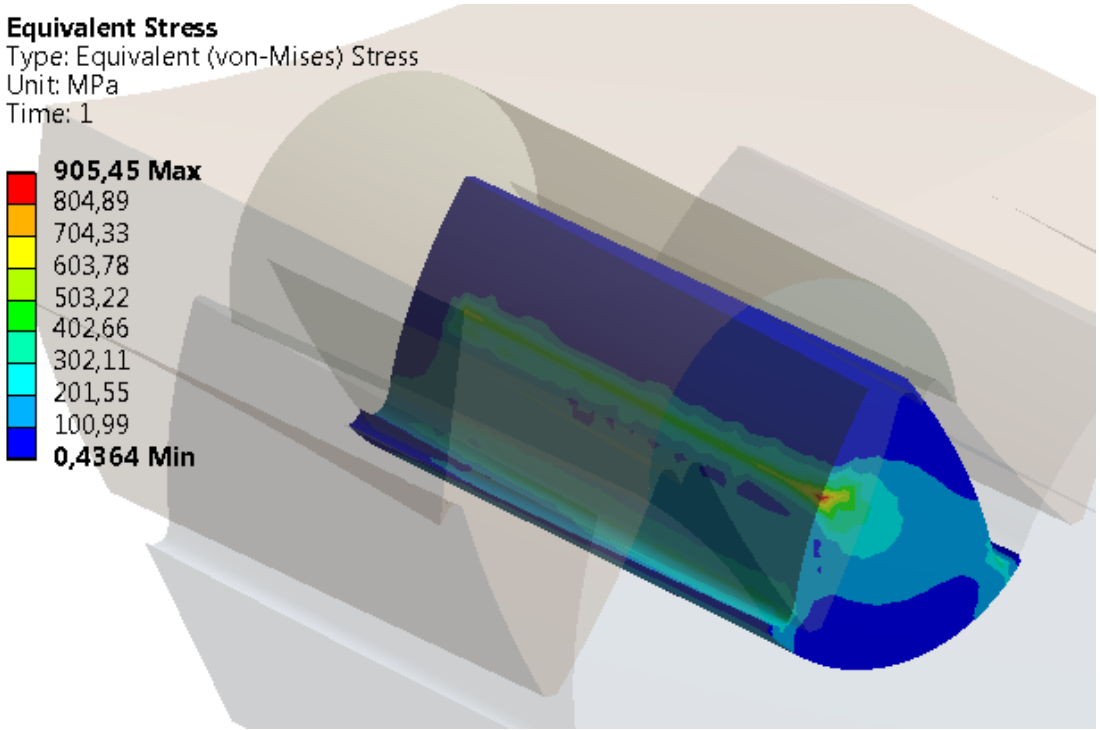


Minimum Principal Stress στην περιοχή του τροχοειδούς της μη εργαζόμενης κατατομής του οδόντα του πινιόν

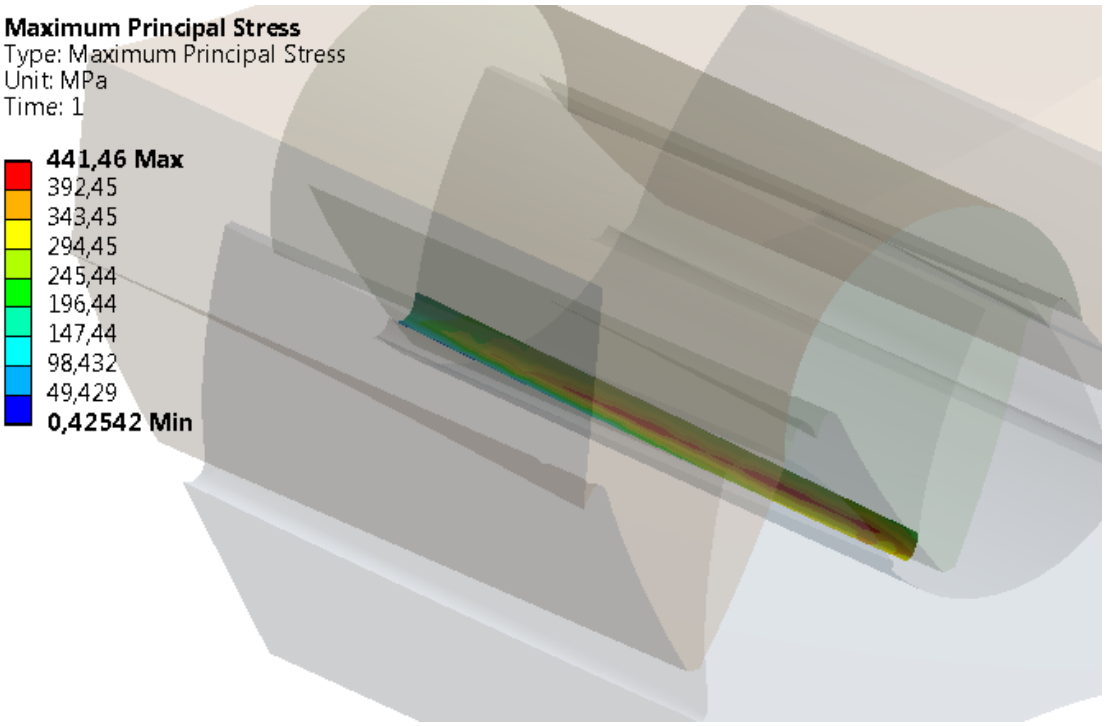


Hertzian Stress στην περιοχή της γραμμής επαφής του πινιόν

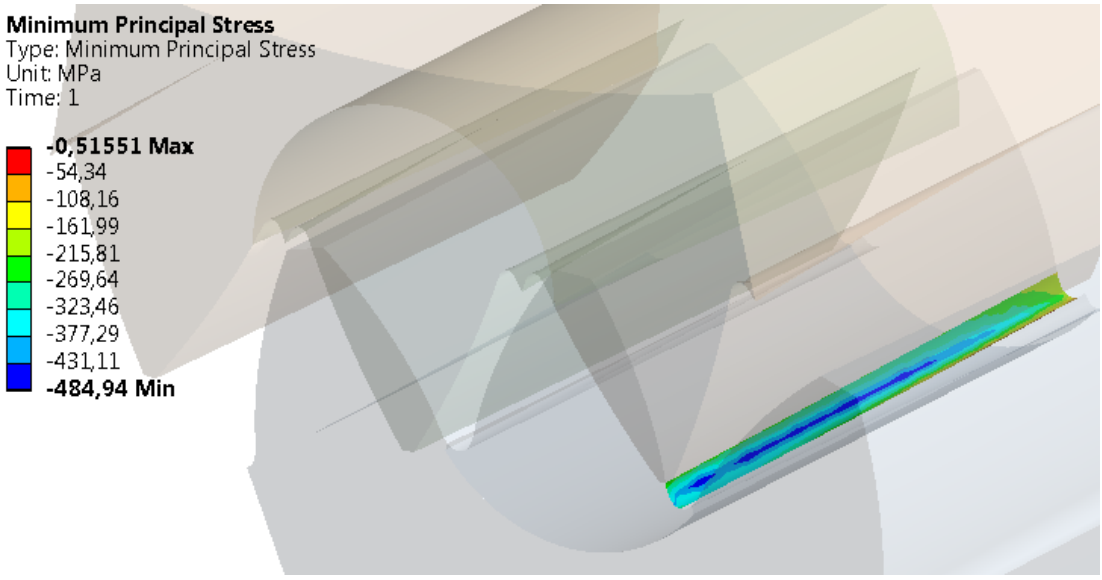
vi. *Γωνία εξειλιγμένης* 30°*, σχέση μετάδοσης* 2: 1



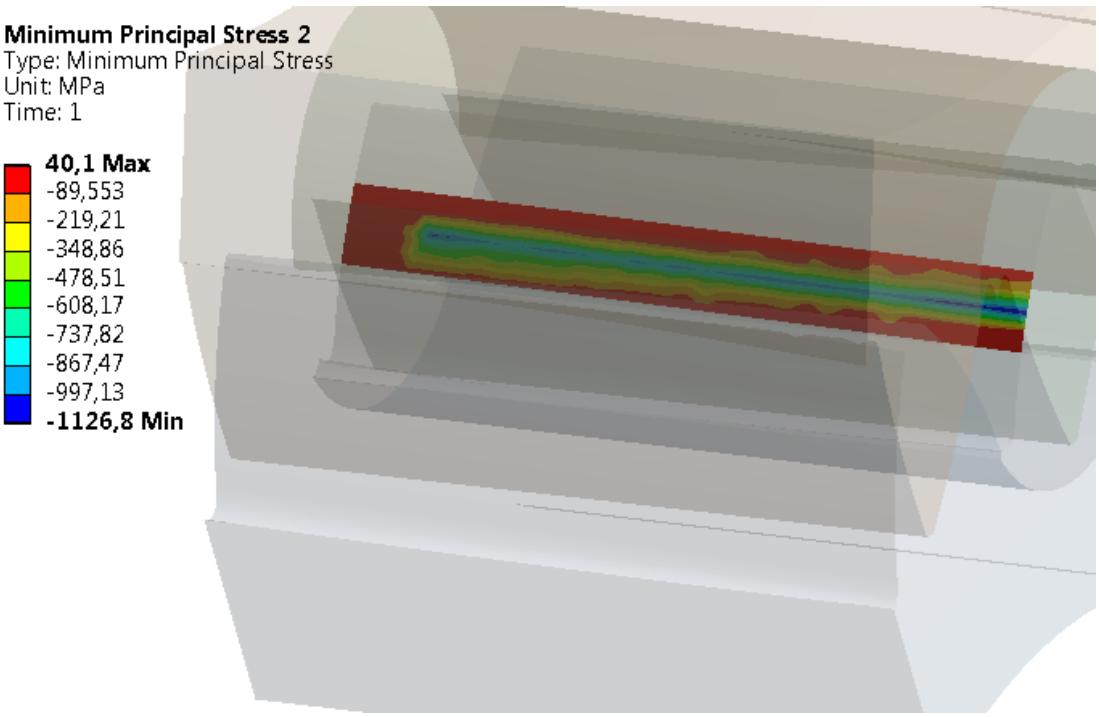
Equivalent von-Mises Stress στον οδόντα του πινιόν



Maximum Principal Stress στην περιοχή του τροχοειδούς της εργαζόμενης κατατομής του οδόντα του πινιόν



Minimum Principal Stress στην περιοχή του τροχοειδούς της μη εργαζόμενης κατατομής του οδόντα του πινιόν



Hertzian Stress στην περιοχή της γραμμής επαφής του πινιόν

Παρατηρήσεις:

Από το κριτήριο αστοχίας von-Mises προκύπτει το συμπέρασμα ότι η προτεινόμενος σχεδιασμός του οδόντα για την επίτευξη βαθμίδας μεταβλητής χάρης κατατομών δεν είναι λιγότερο ικανός να παραλάβει φορτία με ασφάλεια από τον συμβατικό σχεδιασμό των μετωπικών οδοντωτών τροχών με ευθεία οδόντωση.

Επίσης, παρατηρείται ότι στην περιοχή του τροχοειδούς του εργαζόμενου οδόντα οι ορθές εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις είναι μεγαλύτερες στην πλευρά με το μεγαλύτερο πάχος

οδόντα. Στην εργαζόμενη κατατομή του οι εφελκυστικές τάσεις μειώνονται κατά την έννοια του πλάτους, όσο δηλαδή το πάχους του οδόντα μειώνεται. Το ίδιο συμβαίνει και στην μη εργαζόμενη κατατομή του, όπου οι θλιπτικές τάσεις μειώνονται με τον ίδιο τρόπο. Δηλαδή, οι διατομές του τροχού με παχύ οδόντα παραλαμβάνουν την πλειοψηφία των φορτίων. Ο λόγος για τον οποίον προκύπτει το παραπάνω αποτέλεσμα είναι η μεγαλύτερη δυσκαμψία που έχουν οι οδόντες των μετωπικών τομών με μεγάλο πάχος οδόντα, έναντι εκείνων με λεπτότερο οδόντα. Αυτό μπορεί να γίνει πιο άμεσα κατανοητό αν αναγάγουμε το πρόβήμα σε πρόβλημα ισοδύναμων ελατηρίων. Τότε, η πλευρά του τροχού με παχύ οδόντα θα μοντελοποιούταν με ένα σκληρό ελατήριο, ενώ αυτή με λεπτό οδόντα θα μοντελοποιούταν με ένα μαλακό ελατήριο. Κατά την φόρτιση του οδόντα, δηλαδή των δύο ελατηρίων, το σκληρό ελατήριο θα λάμβανε το μεγαλύτερο ποσοστό του φορτίου, «πρώτο», πριν «δει» το μαλακό ελατήριο φορτίο.

Όσον αφορά τις πιέσεις επιφανείας και τα αποτελέσματα που παίρνουμε από την *Hertzian* ανάλυση αρχικά πρέπει να τονισθεί ότι περιοχή γύρω από την γραμμή επαφής που επισημαίνεται με κόκκινο χρώμα από το λογισμικό δεν λαμβάνεται υπόψη, καθώς δεν αντιπροσωπεύει κάποιο πραγματικό φορτίο, αφού θετική τάση σημαίνει εφελκυστικό φορτίο που δεν δικαιολογείται από την ανάλυση του *Hertz*. Γι' αυτό θεωρείται δυσλειτουργία της προσομοίωσης και αγνοείται. Οι πιέσεις επιφανείας είναι θλιπτικές και ως τέτοιες λαμβάνουν αρνητικό πρόσημο από το λογισμικό και, κατά σύμβαση, η κλίμακα των χρωμάτων είναι αντίστροφη (με έντονο μπλε επισημαίνονται τα μεγαλύτερα θλιπτικά φορτία). Όπως περιμέναμε, το πεδίο των θλιπτικών τάσεων από πιέσεις επιφανείας ακολουθεί την κλίση της γραμμής επαφής κατά μήκος του πλάτος του οδόντα. Επιπλέον, η θλιπτική φόρτιση είναι ομοιόμορφη κατά μήκος του πλάτους και ελαττώνεται όσο μεγαλώνει η απόσταση από την γραμμή επαφής μέχρι να μηδενιστεί. Τέλος, στις βαθμίδες οδοντωτών τροχών με γωνία εξειλιγμένης $30°$, η ζώνη φόρτισης είναι πιο διευρυμένη πάνω και κάτω από την γραμμή επαφών, καθώς η ακτίνα καμπυλότητας των οδόντων στο σημείο της επαφής είναι σημαντικά μεγαλύτερη από αυτήν των οδοντωτών τροχών με γωνία εξειλιγμένης $20°$.

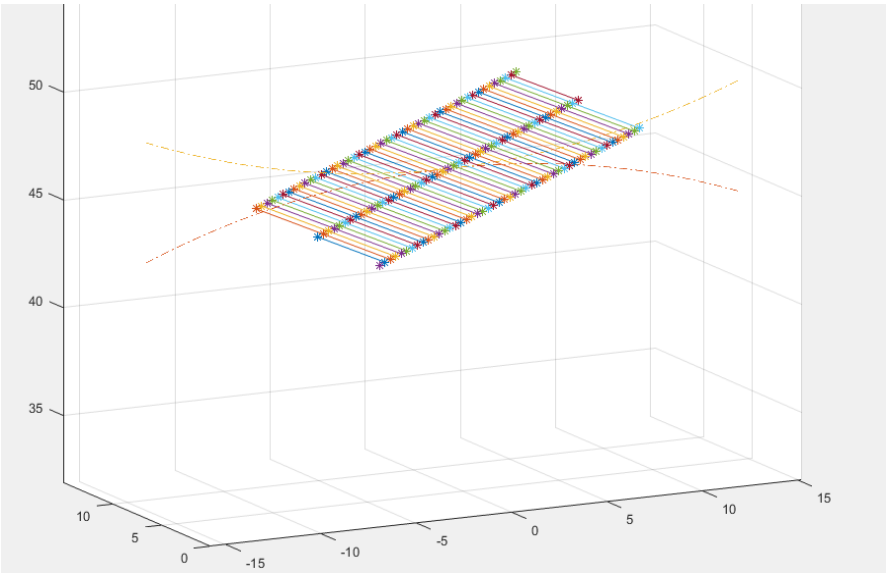
Βάσει των τιμών των τάσεων που έχουν προκύψει από τις παραπάνω προσομοιώσεις δεν μπορεί να παρατηρηθεί κάποιο μοτίβο που να τηρείται όσο αυξάνεται ο λόγος μετάδοσης ή γωνία εξειλιγμένης. Περισσότερες προσομοιώσεις με διαφορετικά μοντέλα χρειάζεται να διεξαχθούν ώστε να προκύψει ένα ασφαλές συμπέρασμα για την συμπεριφορά των τάσεων καθώς μεταβάλλεται η γωνία πίεσης και ο λόγος μετάδοσης.

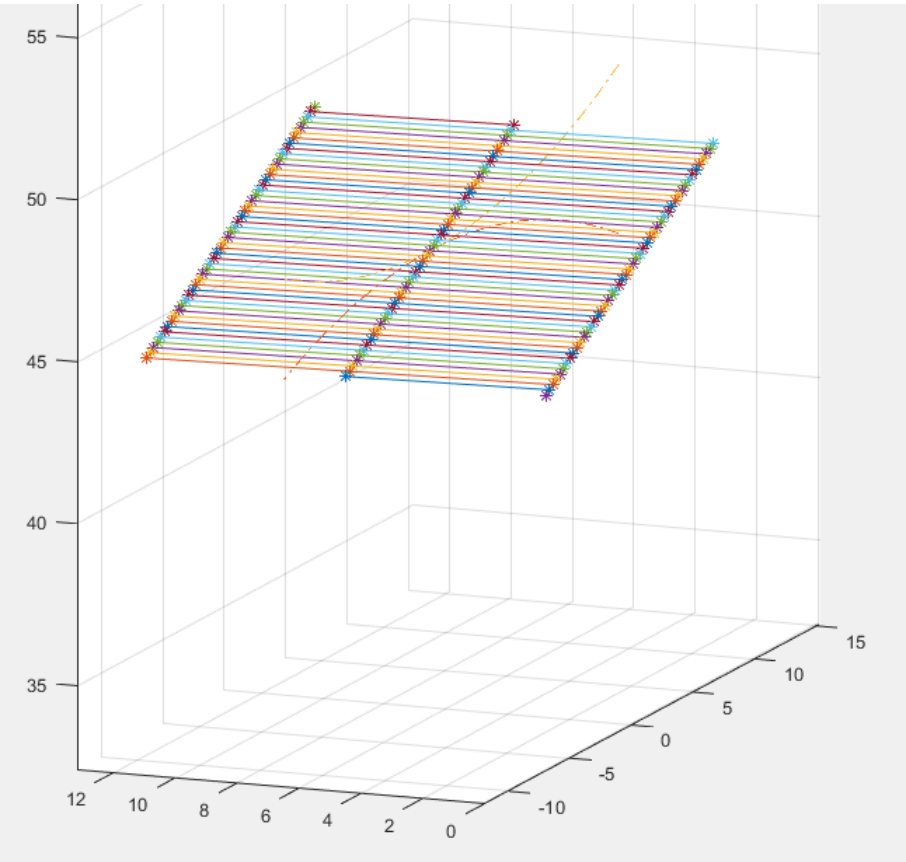
4.2. Ταχύτητες ολίσθησης

Την επιβεβαίωση του σχεδιασμού ενισχύει ανάλυση που πραγματοποιήθηκε για τις ταχύτητες ολίσθησης μεταξύ των εργαζόμενων κατατομών. Επειδή οι οδόντες του τροχού δεν είναι ευθείς, αλλά ελικοειδείς, οι γραμμές επαφών παρουσιάζουν μικρή κλίση κατά την έννοια του πλάτους. Συνεπώς, σε κάθε στιγμιότυπο της συνεργασίας δύο οδόντων, η ταχύτητα ολίσθησης μεταξύ των συνεργαζόμενων κατατομών είναι διαφορετική σε κάθε μετωπική τομή του τροχού. Για τον λόγο αυτό κρίθηκε σκόπιμο να βρεθεί το επίπεδο επαφών ή επίπεδο δράσης (*plane of action*), το οποίο αποτελείται από το πλέγμα που

δημιουργούν οι γραμμές του τμήματος επαφών σε κάθε μετωπική τομή (*u-lines*) και οι γραμμές επαφών σε κάθε στιγμιότυπο κατά την διάρκεια ενός κύκλου επαφών (*v-lines*).

Το επίπεδο δράσης είναι αυτό που φαίνεται στις Εικόνα 4.2.1 και υπολογίζεται με κατάλληλη υπορουτίνα που προσαρμόστηκε στον αλγόριθμο γένεσης οδοντώσεων.





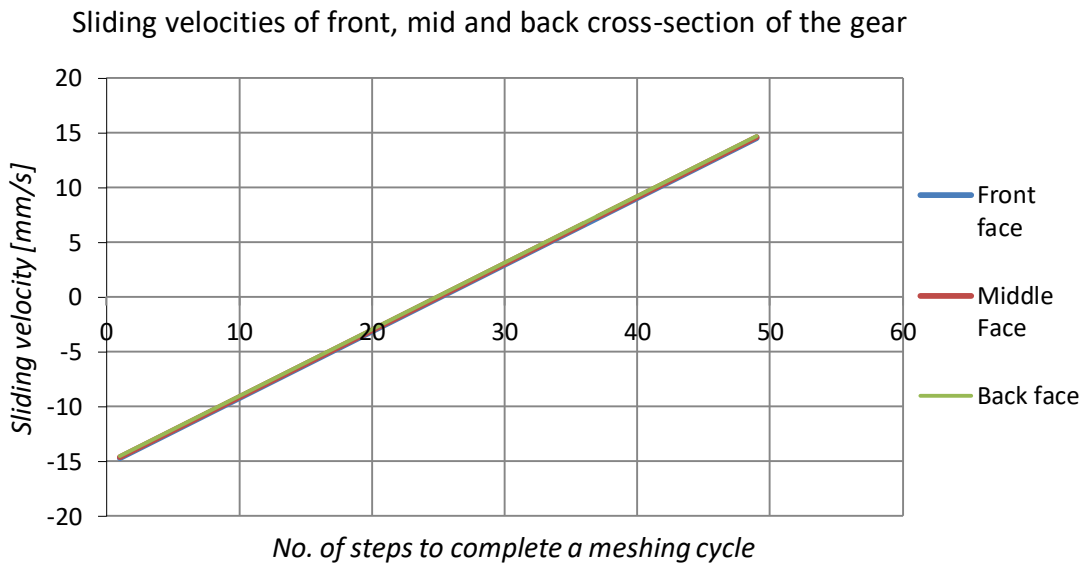
Εικόνα 4.2.1: Επίπεδο δράσης βαθμίδας οδοντωτών τροχών μεταβλητής χάρης κατατομών

Για τις τρεις μετωπικές τομές του οδοντωτού τροχού, $z = 0$, $z = \frac{B-\Delta x}{2}$ και $z = B - \Delta x$, δηλαδή τη μπροστινό, τη πίσω και τη μεταξύ αυτών μετωπική τομή, για έναν κύκλο επαφών, υπολογίστηκαν οι ταχύτητες ολίσθησης για κάθε ένα σημείο.

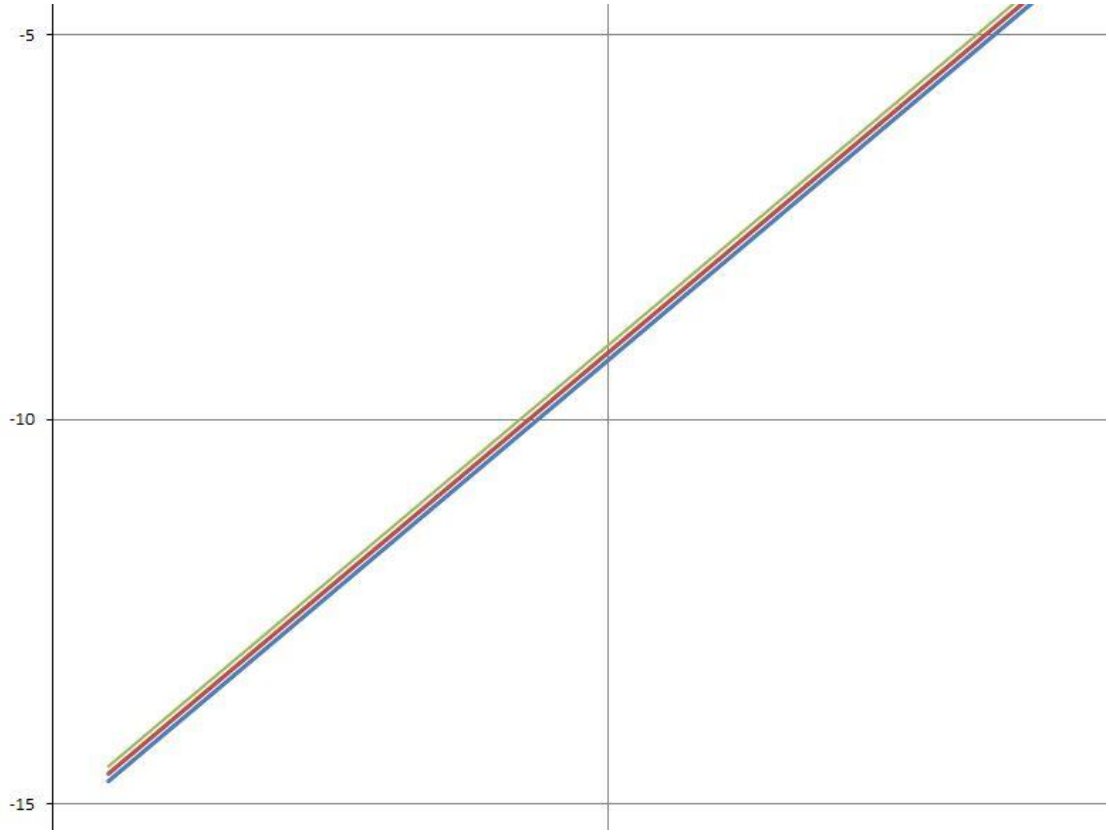
Τα βασικά δεδομένα του υπολογισμού είναι:

- Βαθμίδα οδοντωτών τροχών λόγου μετάδοσης $1:1$
- Ταχύτητα περιστροφής $60\ RPM$
- Αριθμός οδόντων τροχών $Z = 31$
- Normal module $m = 3$
- Γωνία ελίκωσης $\beta_0 = 2°$
- Πλάτος τροχού $B = 15\ mm$
- Γωνία εξειλιγμένης $\alpha_0 = 20°$
- Συντελεστής ύψους κεφαλής $C_k = 1.0$

Η διαφορές στις ταχύτητες ολίσθησης υπολογίστηκαν και βρέθηκαν αρκετά μικρές. Στα άκρα των τμημάτων επαφών, όπου η ταχύτητα ολίσθησης λαμβάνει την μέγιστη τιμή της η διαφορά της ταχύτητας ολίσθησης μεταξύ της τομής $z = 0$ (παχύς οδόντας) και $z = B - \Delta x$ (λεπτός οδόντας) υπολογίσθηκε $\Delta v_{slide} = -1\frac{mm}{s}$, ενώ μεταξύ των μετωπικών τομών $z = 0$ και $z = \frac{B-\Delta x}{2}$, βρέθηκε $\Delta v_{slide} = -0{,}5\frac{mm}{s}$, για το συγκεκριμένο παράδειγμα. Αναλυτικότερα, τα αποτελέσματα φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα, όπου στον άξονα των *y* έχουμε τις ταχύτητες ολίσθησης και στον άξονα των *x* τα διακριτά βήματα που χρειάζεται να περιστραφεί ο οδοντωτός τροχός για να ολοκληρωθεί ένας κύκλος επαφών.



Όπως είναι φανερό, οι διαφορές είναι μικρές και οι τρεις γραμμές των ταχυτήτων ολίσθησης δεν είναι ευδιάκριτες. Σε μεγέθυνση ενός σημείου του διαγράμματος (Εικόνα 4.2.2), στην αρχή του τμήματος επαφών, βλέπουμε τις μικρές διαφορές.



Εικόνα 4.2.2: Μεγέθυνση διαγράμματος ταχυτήτων ολίσθησης στις τρεις τομές για έναν κύκλο επαφών

Ποσοστιαία, η διαφορά της ταχύτητας ολίσθησης μεταξύ της μετωπικής τομής με τον πιο παχύ οδόντα και της μετωπικής τομής με τον πιο λεπτό οδόντα στην αρχή του τμήματος επαφών, όπου η ταχύτητα ολίσθησης λαμβάνει την μέγιστη τιμή της είναι 7%. Μεταξύ του μπροστινού (παχύ) και του μεσαίου προσώπου είναι 3,5%.

Η ελικοειδής διαμόρφωση που προτείνεται για την επίτευξη βαθμίδας με μεταβλητή χάρη κατατομών δεν δημιουργεί ανωμαλίες στην συνεργασία των τροχών, όσον αφορά τις ταχύτητες ολίσθησης.

5. Περίπτωση εφαρμογής σχεδιασμού

Για να θεωρηθεί ολοκληρωμένος ο σχεδιασμός της παρούσας εργασίας κρίθηκε σκόπιμο να παρουσιαστεί το πώς θα μπορούσε να υλοποιηθεί ο προτεινόμενος σχεδιασμός σε μία δυνητικά πραγματική εφαρμογή, καθώς η αξία της εργασίας αυτής μεγεθύνεται, αν μεταβεί από το θεωρητικό επίπεδο της μοντελοποίησης και του σχεδιασμού στο πρακτικό επίπεδο της εφαρμογής της.

Ο συγκεκριμένος σχεδιασμός βαθμίδας οδοντωτών τροχών με μεταβλητή χάρη κατατομών βασίζεται στην αξονική μετατόπιση του ενός εκ των δύο τροχών, καθώς, όπως έχει αποδειχθεί κάθε μετωπική τομή του τροχού διαθέτει οδόντες με μεταβλητό πάχος. Το ζητούμενο, λοιπόν, είναι να βρεθεί ένας τρόπος ώστε να είναι δυνατή η μετατόπιση του οδοντωτού τροχού πάνω στον άξονα του και η σταθεροποίησή στην θέση όπου πραγματοποιείται το επιθυμητό backlash.

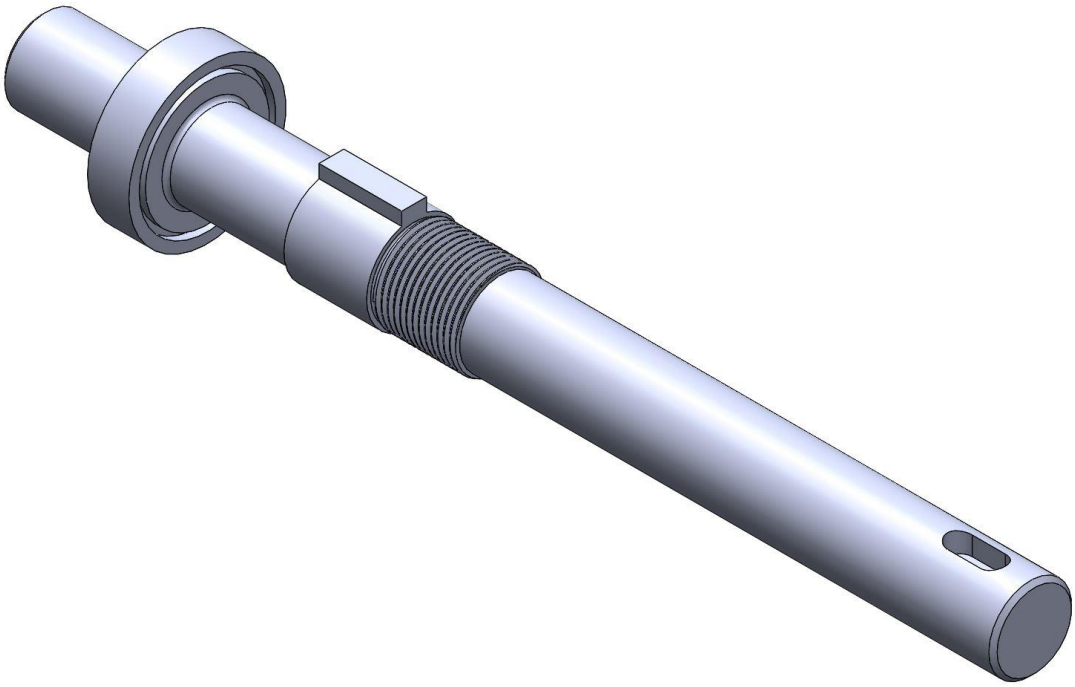
Προτείνεται διάταξη με άξονα ειδικής διαμόρφωσης και δυνατότητα τοποθέτησης επάνω σε αυτόν ελατηρίου συμπίεσης, το οποίο αντιστέκεται στην αξονική μετατόπιση του οδοντωτού τροχού. Ο οδοντωτός τροχός από την μία πλευρά βρίσκει το ελατήριο και από την άλλη βρίσκει κατάλληλο περικόχλιο που περιορίζει την θέση του στον άξονα. Δηλαδή, το ελατήριο συμπιέζει τον οδοντωτό τροχό πάνω στο περικόχλιο. Εν ολίγοις, το περικόχλιο είναι αυτό που υπαγορεύει την αξονική θέση του οδοντωτού τροχού και μέσου αυτού γίνεται τελικά η ρύθμιση της χάρης κατατομών στην βαθμίδα. Ο οδοντωτός τροχός από την πλευρά που έρχεται σε επαφή με το περικόχλιο διαθέτει ειδική διαμόρφωση ώστε να μην περιορίζεται η θέση του περικοχλίου από την σφήνα που συγκρατεί τον οδοντωτό τροχό πάνω στον άξονα.

Στην Εικόνα 5.1 φαίνεται ο ειδικά διαμορφωμένος άξονας για την συγκράτηση του ελατηρίου και την σπειροτόμηση στο κατάλληλο μήκος, που αποτελεί την διαδρομή του περικοχλίου.

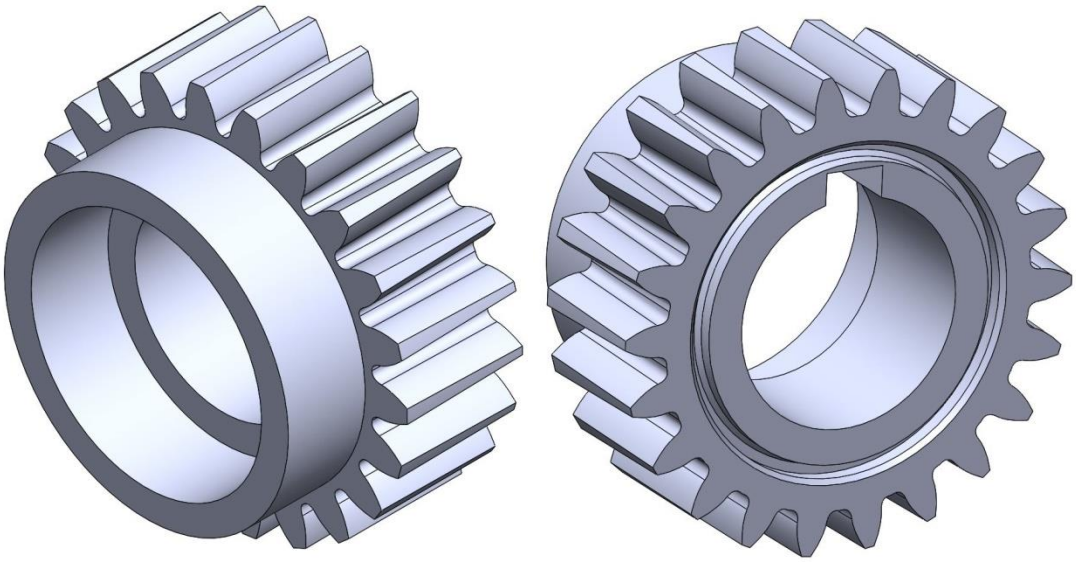
Στην Εικόνα 5.2 φαίνονται δύο ισομετρικές όψεις του οδοντωτού τροχού με την εγκοπή για την σφήνα, την διαμόρφωση για την υποδοχή του ελατηρίου και την κυλινδρική διαμόρφωση που λειτουργεί σαν αποστάτης για την επαφή με το περικόχλιο.

Στην Εικόνα 5.3 παρουσιάζεται ο άξονας συναρμολογημένος με τον οδοντωτό τροχό, το ελατήριο συμπίεσης και το περικόχλιο σταθεροποίησης.

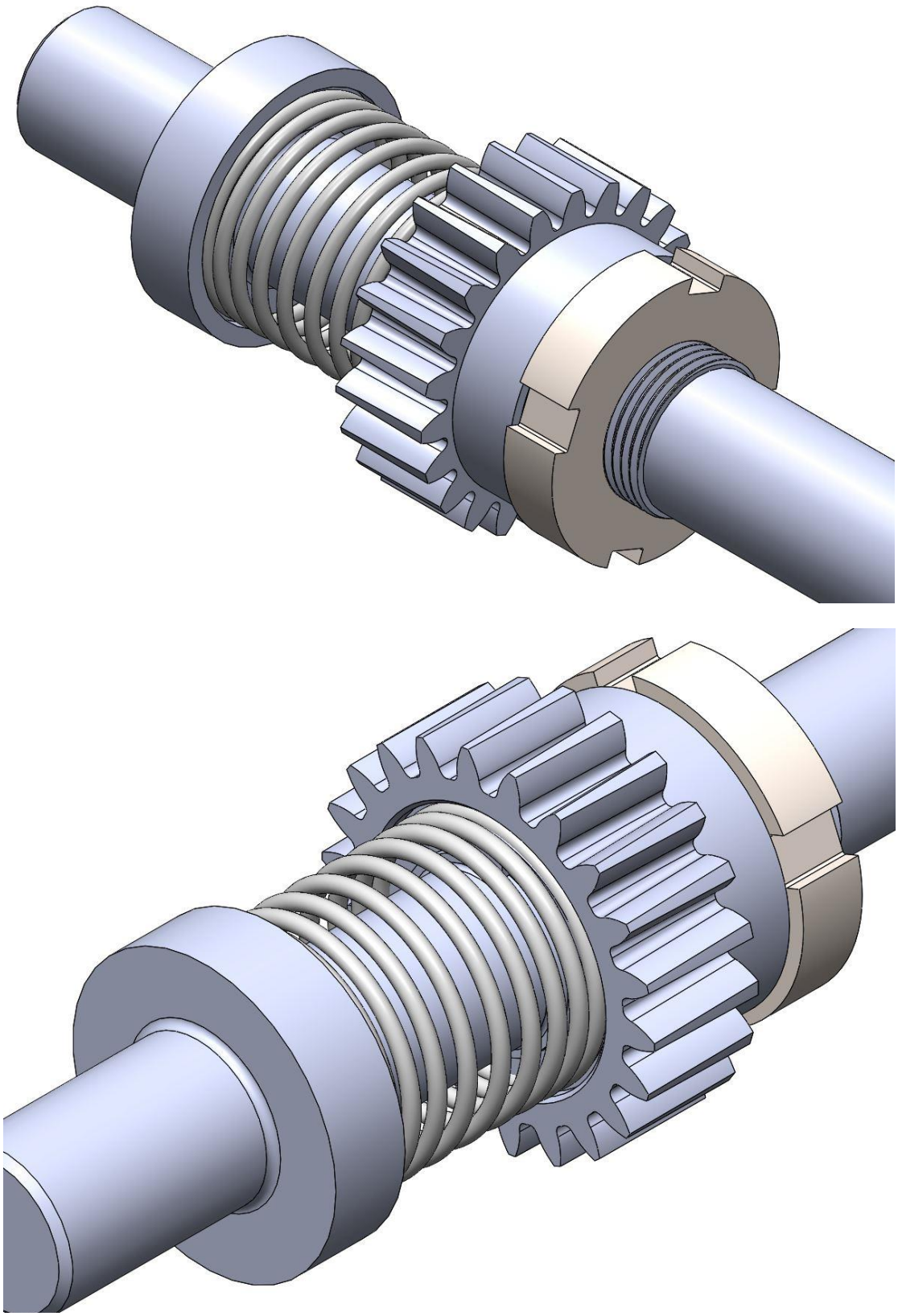
Όπως γίνεται αντιληπτό από τις εικόνες, ο συναρμολογητής, με το κατάλληλο γαντζόκλειδο, μπορεί να ρυθμίζει την αξονική θέση του τροχού μέχρι να το φέρει στην θέση όπου μετράει το επιθυμητό backlash με τον συνεργαζόμενο τροχό. Η εύρεση της θέσης κατά την συναρμολόγηση θα μπορούσε να βρεθεί με την χρήση φίλερ μεταξύ των συνεργαζόμενων κατατομών.



Εικόνα 5.1: Άξονας οδοντωτού τροχού με δυνατότητα ρύθμισης αξονικής του θέσης μέσω ελατηρίου και περικοχλίου



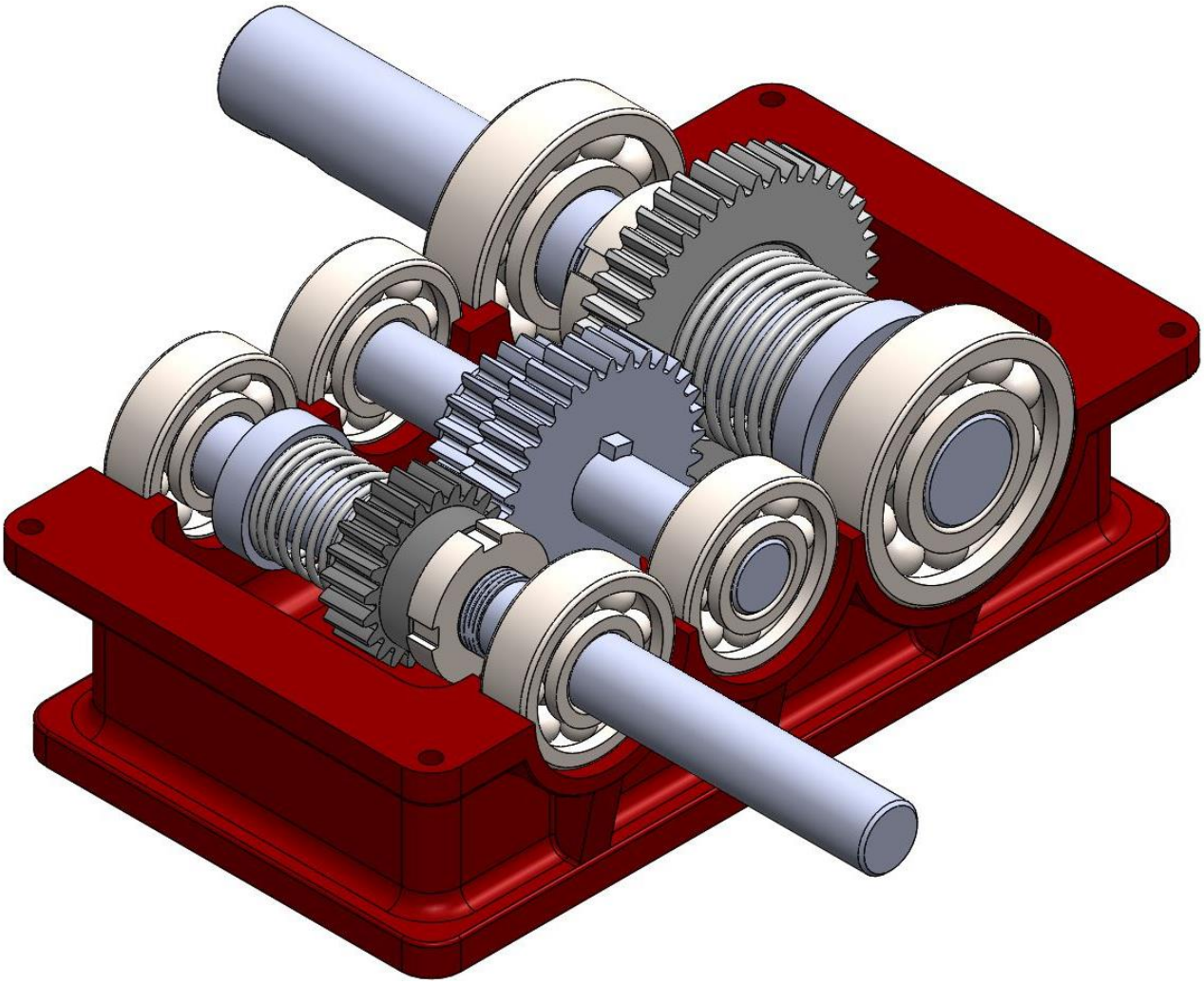
Εικόνα 5.2: Όψεις διαμορφωμένου οδοντωτού τροχού με 20 οδόντες και γωνία πίεσης 20°



Εικόνα 5.3: Όψεις από το συναρμολόγημα του άξονα

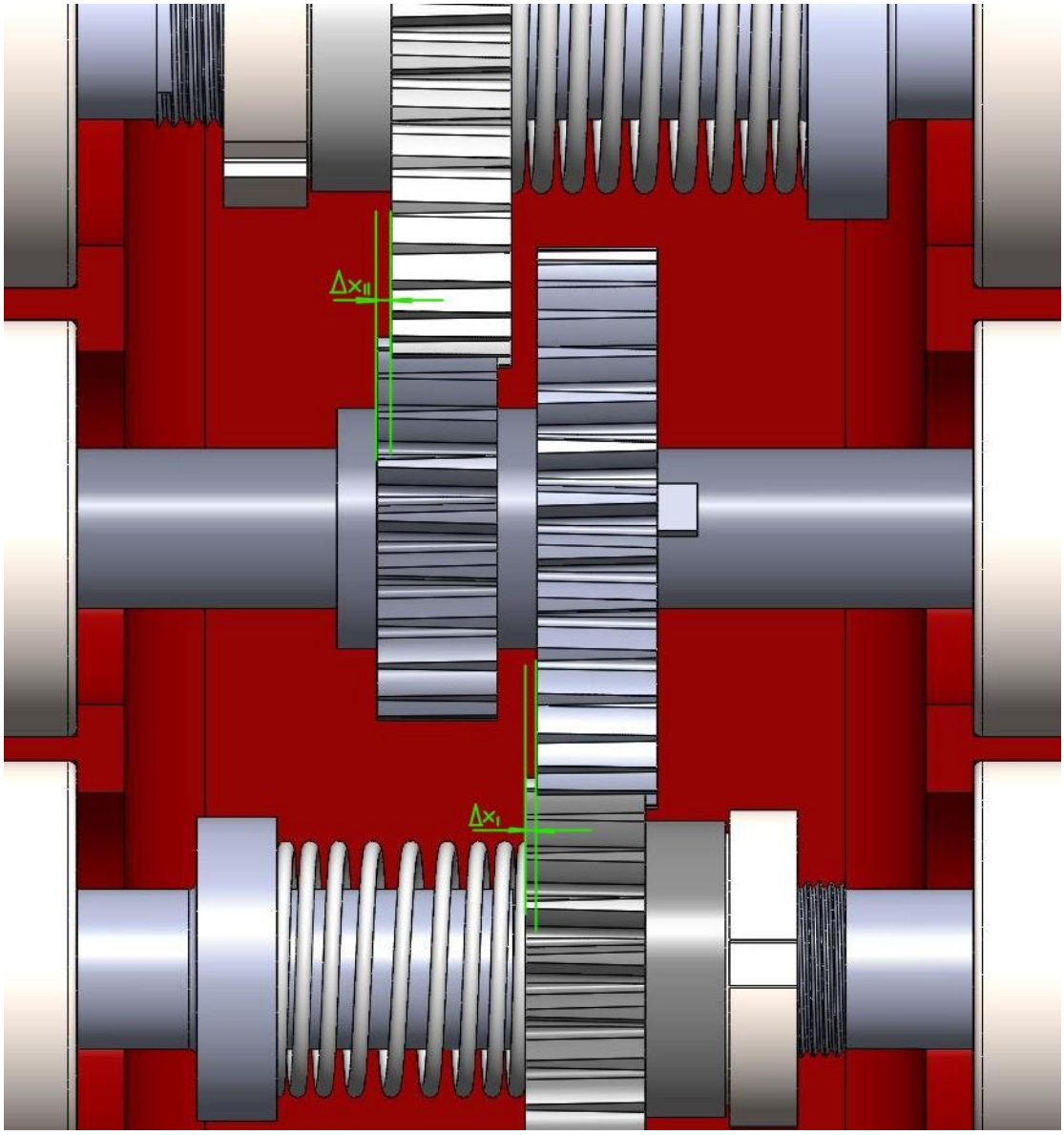
Στην Εικόνα 5.4 παρουσιάζεται μία ολοκληρωμένη διάταξη ενός κιβωτίου ταχυτήτων με δύο βαθμίδες μεταβλητής χάρης κατατομών. Οι άξονες εισόδου και εξόδου διαθέτουν την

κατάλληλη διαμόρφωση που παρουσιάστηκε παραπάνω, ώστε να ρυθμίζεται το backlash στις βαθμίδες τους. Οι οδοντωτοί τροχοί των αξόνων εισόδου και εξόδου επιλέχθηκαν ως οι τροχοί που θα ρυθμίζουν την αξονική τους θέση κυρίως γιατί οι άξονες τους δεν διαθέτουν άλλους οδοντωτούς τροχούς, με αποτέλεσμα να είναι ευκολότερη η πρόσβαση του συναρμολογητή στο σημείο ενδιαφέροντος. Δηλαδή, η επιλογή αυτή παρουσιάζει πλεονεκτήματα σε θέματα χωροταξίας.



Εικόνα 5.4: Κιβώτιο ταχυτήτων με δύο βαθμίδες μεταβλητής χάρης κατατομών

Στην κάτοψη (Εικόνα 5.5) διαπιστώνεται η αξονική μετατόπιση των δύο οδοντωτών τροχών στον άξονα εισόδου και εξόδου. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, οι οδοντωτοί τροχοί έχουν τοποθετηθεί στην θέση μηδενικής χάρης κατατομών στην βαθμίδα τους.

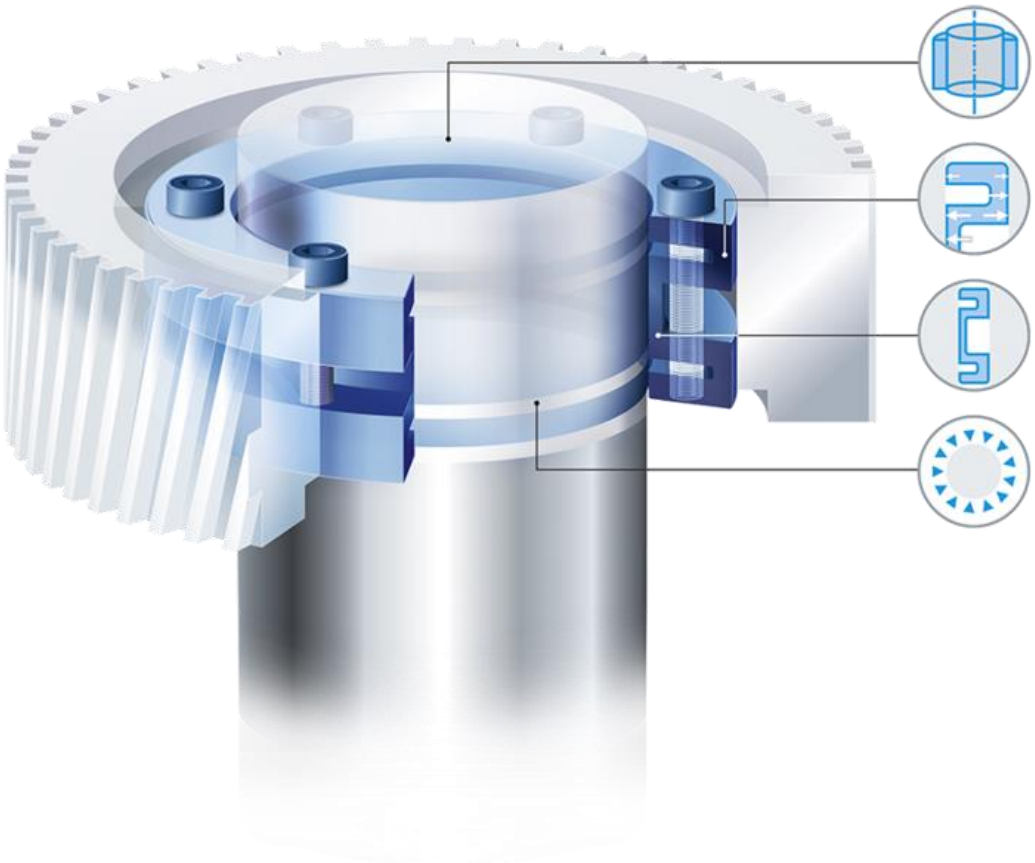


Εικόνα 5.5: Κάτοψη κιβωτίου – αξονική μετατόπιση τροχών Δx_I και Δx_{II}

Στο σημείο αυτό αξίζει να τονιστεί πως τα παραπάνω αποτελούν είναι μία από τις δυνατές υλοποιήσεις του σχεδιασμού και, φυσικά, όχι η μοναδική. Περαιτέρω έρευνα και ανάλυση θα μπορούσε να αναδείξει περισσότερες υλοποιήσεις ή πιο βέλτιστες. Ακόμα, η διαστασιολόγηση των στοιχεία του παραπάνω συναρμολογήματος δεν έχει προκύψει έπειτα από ανάλυση των φορτίων, αλλά πρόκειται για μία αδρή εκτίμηση αυτών, καθώς ο σκοπός της συγκεκριμένης διάταξης είναι καθαρά εποπτικός.

Μία εναλλακτική πρόταση στο σύστημα του ελατηρίου – περικοχλίου για την σταθεροποίηση του οδοντωτού τροχού στην επιθυμητή αξονική θέση αποτελεί ο σφιγκτήρας σύνδεσης άξονα – πλήμνης της εταιρίας *Spieth-Maschinenelemente GmbH & Co*, ο οποίος πετυχαίνει ομοιόμορφη, ακτινική σύσφιξη μέσω της ελαστικής του παραμόρφωσης. Οι ακτινικές δυνάμεις που αναπτύσσονται λόγω της ελαστικής παραμόρφωσης δημιουργούν δραστικές δυνάμεις τριβής μεταξύ του άξονα, του σφιγκτήρα και της πλήμνης, οι οποίες σταθεροποιούν τον οδοντωτό τροχό στον άξονα. Έχει το ελάττωμα ότι η τοποθέτηση στην σωστή αξονική θέση γίνεται με το χέρι, αλλιώς απαιτείται

η σχεδίαση κάποια ιδιοκατασκευής. Ως πλεονεκτήματα καταλογίζονται η απλότητα, καθώς η σχεδίαση των αξόνων γίνονται σαφώς λιτότερη και η μείωση των περιστρεφόμενων μαζών. Στην Εικόνα 5.6 παρουσιάζεται ο εν λόγω σφιγκτήρας σταθεροποίησης.



Εικόνα 5.6: Σετ σύσφιξης δια τριβής άξονα – πλήμνης της εταιρείας Spieth [10]

6. Συμπεράσματα

Ο στόχος αυτής της εργασίας ήταν να αναδείξει μία σχεδίαση οδοντωτών τροχών που θα επιτρέπει στην βαθμίδα που συμμετέχουν να μπορεί να λειτουργήσει σε μία πληθώρα τιμών backlash, ανάλογα με τις απαιτήσεις τις εκάστοτε εφαρμογής. Συγκεκριμένα, η χάρη των συνεργαζόμενων κατατομών να μην υπαγορεύεται από την τυχαιότητα και τα στατιστικά σφάλματα που προκύπτουν από τις κατεργασίες κοπής, αλλά να επιβάλλεται κατά την συναρμολόγηση της βαθμίδας.

Κατά τον σχεδιασμό δόθηκε μεγάλη βαρύτητα στο χαμηλό κόστος και στην δυνατότητα επίτευξης του στόχου με μέσα διαθέσιμα από το Εργαστήριο των Στοιχείων Μηχανών. Έτσι, καταλήξαμε στον σχεδιασμό που παρουσιάστηκε, που βασίζεται στην μέθοδο περιφερειακού φρεζαρίσματος κύλισης, για την επίτευξη του οποίου απαιτείται μία συμβατική εργαλειομηχανή hobbing και ένα κοπτικό εργαλείο hob με συντελεστή πάχους οδόντα $C_{s,HOB}$ μικρότερο από $0{,}5$. Ένα τέτοιο κοπτικό εργαλείο δεν είχε νόημα ύπαρξης μέχρι τώρα, καθώς θα παρήγαγε τροχούς με οδόντες μεγαλύτερου πάχους από το διαθέσιμο διάκενο, γεγονός που θα έκανε αδύνατη την συνεργασία τους. Ωστόσο, με τον προτεινόμενο σχεδιασμό του οδόντα διπλής ελίκωσης (επαλληλία των κοπών δεξιόστροφης και αριστερόστροφης έλικας στον τροχό), ο παραγόμενος οδοντωτός τροχός διαθέτει οδόντες των οποίων ο συντελεστής του πάχους τους κυμαίνεται από μία τιμή μεγαλύτερη του $0{,}5$ έως μία τιμή μικρότερη του $0{,}5$. Κατ' αυτόν τον τρόπο, όταν δύο τέτοιοι τροχοί έρθουν σε συνεργασία, το άθροισμα του συντελεστή πάχους του οδόντα του ενός και του συντελεστή πάχους του διακένου του άλλου να αλλάζει όταν μετατοπίζονται αξονικά οι τροχοί. Προφανώς χρήσιμο είναι η μεταξύ τους μετατόπιση να δίνει άθροισμα συντελεστή πάχους οδόντα και διακένου κοντά στην τιμή 1, με 1 να αποτελεί την ανώτερη τιμή του παραπάνω αθροίσματος και σημαίνει μηδενική χάρη κατατομών στην βαθμίδα. Όπως διαπιστώνει ο αναγνώστης της εργασίας, ο σχεδιασμός προτείνει δημιουργία οδοντωτών τροχών που πετυχαίνουν τα παραπάνω δίνοντας ένα όφσετ στα πρόσωπα των συνεργαζόμενων τροχών της τάξης του 10%. Αποδείχθηκε πως αυτή η μείωση του εργαζόμενου πλάτους στην βαθμίδα δεν έχει σημαντική επίδραση στην αντοχή των οδόντων.

Επιπλέον, εκτός της τεκμηρίωσης του μοντέλου που έχει ήδη αναλυθεί, πραγματοποιήθηκε ταχεία προτυποποίηση βαθμίδας οδοντωτών τροχών μεταβλητής χάρης κατατομών, όπως υπαγορεύει η παρούσα εργασία, σε 3D printer του εργαστηρίου, η οποία έδωσε ρεαλιστική εποπτεία του μοντέλου με τα αποτελέσματα να είναι όπως τα περιμέναμε. Όμως δεν προσθέτει επιπλέον αξία στην υπάρχουσα τεκμηρίωση του μοντέλου.

Αυτό που θα πρόσθετε ουσιαστική αξία και προτείνεται σαν μελλοντική εργασία, είναι αρχικά η προσομοίωση της δυναμικής συμπεριφοράς του μοντέλου και, μεταγενέστερα, η δημιουργία πραγματικών λειτουργικών οδοντωτών τροχών μεταβλητού πάχους και η πειραματική μέτρηση του βαθμού απόδοσής τους, η μέτρηση των σφαλμάτων στην μετάδοση κίνησης και η σύγκρισή τους με συμβατικές βαθμίδες οδοντωτών τροχών, όπως για παράδειγμα μετωπικών οδοντωτών τροχών με ευθεία οδόντωση.

Τέλος, ο αλγόριθμος γένεσης οδοντώσεων που αναπτύχθηκε, με όλες του τις προσθήκες όπως έχει περιγραφεί, αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για την σχεδίαση ποικίλων και σύνθετων οδοντωτών τροχών, συμπληρώνει τα ήδη υπάρχοντα παρόμοια εργαλεία του Εργαστηρίου και επεκτείνει τις δυνατότητές τους, ενώ καταφέρνει επιτυχώς να αντισταθμίσει όλους τους συνήθεις περιορισμούς γένεσης οδοντώσεων δι' εξειλιγμένης εμπορικών πακέτων λογισμικών, διευρύνοντας έτσι τα όρια στον σχεδιασμό των οδοντώσεων. Φυσικά μπορούν να γίνουν αναβαθμίσεις και προσθήκες νέων επιλογών, όπως για παράδειγμα γένεση εσωτερικών οδοντώσεων ή άλλων τύπων οδόντων πέραν των κατατομών δι' εξειλιγμενής.

7. Βιβλιογραφία

[1] **Bahadır K., Nihat Y., Fatih E., Mert V.** *A study on prediction & validation of meshing gear pair backlash under various manufacturing and assembly errors*, MATEC Web of Conferences 287, Power Transmissions 2019

[2] **Dudley, D. W.** *Handbook of practical gear design*, 2nd edition, 1984 (Mc-Graw Hill, New York).

[3] **Stephen J. O.** *Methods to Minimize Gear Backlash*, Micro Mo Electronics Inc., 03/01/2002, Motion System Design – Machine Design

[4] **Balazs, V**. International Publication Number WO/2016/022417 (World Intellectual Property Organization International Bureau), *Split gear assembly with one-way roller clutch for controlling backlash opposed-piston engines*, 11.02.2016

[5] "Gear technical reference – Gear backlash", Kohara Gear Industry Co., Ltd., at https://khkgears.net/new/gear_knowledge/gear_technical_reference/gear_backlash.html, Access 02/02/2021

[6] **Buckingham, E.** *Analytical mechanics of gears*, 1988, Dover Publications Inc., New York.

[7] **C. Spitas, V. Spitas, A. Amani, M. Rajabalinejad** *Parametric investigation of the combined effect of whole depth and cutter tip radius on the bending strength of 20 involute gear teeth*, Acta Mech. 225 (2) (2014) 361–371

[8] **Kapelevich A.** *Geometry and design of involute spur gears with asymmetric teeth,* Mechanism and Machine Theory, 35 (2000) 117–130

[9] **Spitas C., Spitas V.** *Can non-standard involute gears of different modules mesh?,* Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science 2006 220: 1305

[10] *"The Spieth principle",* Spieth-Maschinenelemente GmbH & Co GK, www.spieth-maschinenelemente.de/en/the-principle/, Access 18/03/202

8. Παράρτημα

Gear generator

```
clear
close all

hel_mod=0;  %if helix gear hel_mod=1

m1=2;       %module
Ck1=1.0;    %dedendum coefficient
Cf1=1.25;   %addendum coefficient
Cs1=0.5;    %circular tooth thickness coefficient
Cm1=0.0;    %profile shift coefficient
N1=35;      %number of teeth of first gear

%General case: asymmetric teeth spur gears with two pressure angle involute
flank
% parameters for driving and coast side
% segment A produce the segment of the involute near fillet and segment
% B the one near the tip
pa_d1A=20;   %pressure angle driving side of gear 1 segment A
pa_d1B=20;   %segment B
pa_c1A=20;   %pressure angle coast side of gear 1 segment A
pa_c1B=20;   %segment B

Cinv_d1=0.5;    %coefficients dividing the involute in the two segments
(drive side)
Cinv_c1=0.5;    %(coast side)

Cc_d1=0.3;   %fillet coefficient of driving side gear 1
Cc_c1=0.3;   %fillet coefficient of coast side gear 1

hk1=m1*Ck1+m1*Cm1;       %rack cutter dedendum
hf1=m1*Cf1-m1*Cm1;       %rack cutter addendum

if hel_mod==0
a0_d1A=deg2rad(pa_d1A);
a0_d1B=deg2rad(pa_d1B);
a0_c1A=deg2rad(pa_c1A);
a0_c1B=deg2rad(pa_c1B);

r01=m1*N1/2;          %radius of first gear
t01=pi*m1;            %circular pitch

else
    Bw=15;          %width in mm
    Cs_thin=0.45;   %width coeff. at the thinest cross-section of the gear
/// put 0 if don't want to be precise about it
    DX=2;           %max axial displasment for zero backlash [mm] /// put 0
if don't want to be precise about it
```

- Helix angle

```
    if DX~=0
        % 1st way -> Cs_fat & DX (max axial displasment for zero backlash)
given
        b0=asin((2*Cs1-1)*pi*m1/(2*(Bw-DX)));
    else
        % 2nd way -> Cs_fat & Cs_thin given
        b0=asin((Cs1-Cs_thin)*pi*m1/(2*Bw));
    end

    b0round_deg=round(rad2deg(b0),2);
    b0round=deg2rad(b0round_deg);
    b0=b0round;

    DX=(2*Bw*sin(b0round)-(2*Cs1-1)*pi*m1)/(2*sin(b0round));
    Cs_thin=Cs1-2*Bw*sin(b0round)/(pi*m1);

    disp(['For manufacturing purpuses, helix angle will be b0=',
num2str(b0round_deg), 'deg, max axial displasment for zero backlash will be
DX=',...
        num2str(DX), 'mm, and teeth width at the thin face will be
Cs_thin=', num2str(Cs_thin), '.']);


    a0_d1A=deg2rad(pa_d1A)/cos(b0);
    a0_d1B=deg2rad(pa_d1B)/cos(b0);
    a0_c1A=deg2rad(pa_c1A)/cos(b0);
    a0_c1B=deg2rad(pa_c1B)/cos(b0);

    r01=m1*N1/(2*cos(b0));
    t01=pi*m1/cos(b0);
end

S01=Cs1*t01;
l01=t01-S01;

rc_d1=m1*Cc_d1;          %cutter tip radius (fillet radius) driving side
rc_c1=m1*Cc_c1;          %cutter tip radius (fillet radius) coast side

at_d1=hf1-rc_d1*(1-sin(a0_d1A));
at_c1=hf1-rc_c1*(1-sin(a0_c1A));

ak_d1=acos(r01*cos(a0_d1B)/(r01+hk1));
ak_c1=acos(r01*cos(a0_c1B)/(r01+hk1));

psi_f_d1=-r01*(sin(a0_d1B))^2+sin(a0_d1B)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_d1B))^2);    %vlepe Kostopoulos sel.109
psi_f_c1=-r01*(sin(a0_c1B))^2+sin(a0_c1B)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_c1B))^2);

psi_f_d1old=-r01*(sin(a0_d1A))^2+sin(a0_d1A)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_d1A))^2);    %vlepe Kostopoulos sel.109
```

```
psi_f_c1old=-r01*(sin(a0_c1A))^2+sin(a0_c1A)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_c1A))^2);

Y_d_spasimo=(at_d1+psi_f_d1old)*Cinv_d1;
Y_c_spasimo=(at_c1+psi_f_c1old)*Cinv_c1;
```

- Find Cf1max

```
%%cases dependind on Cinv_d & Cinv_c
if Y_d_spasimo < at_d1 && Y_c_spasimo < at_c1
    Cf1max=(m1*pi*(1-Cs1)+psi_f_d1old*Cinv_d1*(tan(a0_d1B)-
tan(a0_d1A))+psi_f_c1old*Cinv_c1*(tan(a0_c1B)-
tan(a0_c1A)))/(tan(a0_d1A)+tan(a0_c1A)+(1-Cinv_d1)*(tan(a0_d1B)-
tan(a0_d1A))+(1-Cinv_c1)*(tan(a0_c1B)-tan(a0_c1A)))/m1;  %no need gia
epanaliptiki diadikasia
elseif Y_d_spasimo >= at_d1 && Y_c_spasimo < at_c1
    Cf1max=(m1*pi*(1-Cs1)+psi_f_c1old*Cinv_c1*(tan(a0_c1B)-
tan(a0_c1A)))/(tan(a0_d1A)+tan(a0_c1A)+(1-Cinv_c1)*(tan(a0_c1B)-
tan(a0_c1A)))/m1;
elseif Y_d_spasimo < at_d1 && Y_c_spasimo >= at_c1
    Cf1max=(m1*pi*(1-Cs1)+psi_f_d1old*Cinv_d1*(tan(a0_d1B)-
tan(a0_d1A)))/(tan(a0_d1A)+tan(a0_c1A)+(1-Cinv_d1)*(tan(a0_d1B)-
tan(a0_d1A)))/m1;
else
    Cf1max=(1-Cs1)*pi/(tan(a0_c1A)+tan(a0_d1A));
end
```

- New Cf1 if exceeds upper limit and equations calculated again with new Cf1=Cf1max

```
dispCf1=0;

if Cf1>Cf1max
    dispCf1=dispCf1+1;
Cf1=floor(Cf1max*1000)/1000; %floor to 4th (maybe 3rd) decimal to be sure
that is NOT d1<0

%re-evaluate the required parameters
r01=m1*N1/2;            %radius of first gear
hk1=m1*Ck1+m1*Cm1;      %rack cutter dedendum
hf1=m1*Cf1-m1*Cm1;      %rack cutter addendum
t01=pi*m1;              %circular pitch
S01=Cs1*t01;
l01=t01-S01;
rc_d1=m1*Cc_d1;          %cutter tip radius (fillet radius) driving side
rc_c1=m1*Cc_c1;          %cutter tip radius (fillet radius) coast side

at_d1=hf1-rc_d1*(1-sin(a0_d1A));
at_c1=hf1-rc_c1*(1-sin(a0_c1A));

ak_d1=acos(r01*cos(a0_d1B)/(r01+hk1));
```

```
ak_c1=acos(r01*cos(a0_c1B)/(r01+hk1));

psi_f_d1=-r01*(sin(a0_d1B))^2+sin(a0_d1B)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_d1B))^2);    %vlepe Kostopoulos sel.109
psi_f_c1=-r01*(sin(a0_c1B))^2+sin(a0_c1B)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_c1B))^2);

psi_f_d1old=-r01*(sin(a0_d1A))^2+sin(a0_d1A)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_d1A))^2);    %vlepe Kostopoulos sel.109
psi_f_c1old=-r01*(sin(a0_c1A))^2+sin(a0_c1A)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_c1A))^2);

Y_d_spasimo=(at_d1+psi_f_d1old)*Cinv_d1;
Y_c_spasimo=(at_c1+psi_f_c1old)*Cinv_c1;
end
```

- Find Cc_d1max & Cc_c1max

```
xanad=0;
xanac=0;

if Y_d_spasimo < at_d1 && Y_c_spasimo < at_c1

rc_d1max=(hf1*(Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-
Cinv_d1)*tan(a0_d1B)+Cinv_c1*tan(a0_c1A)+(1-Cinv_c1)*tan(a0_c1B))-m1*pi*(1-
Cs1)-psi_f_d1old*Cinv_d1*(tan(a0_d1B)-tan(a0_d1A))-
psi_f_c1old*Cinv_c1*(tan(a0_c1B)-tan(a0_c1A)))/((1-
sin(a0_d1A))*Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-sin(a0_d1A))*(1-Cinv_d1)*tan(a0_d1B)-
cos(a0_d1A));
Cc_d1max=rc_d1max/m1;
if Cc_d1>Cc_d1max
    Cc_d1=floor(Cc_d1max*1000)/1000;
    xanad=xanad+1;
end

rc_c1max=(hf1*(Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-
Cinv_d1)*tan(a0_d1B)+Cinv_c1*tan(a0_c1A)+(1-Cinv_c1)*tan(a0_c1B))-m1*pi*(1-
Cs1)-psi_f_d1old*Cinv_d1*(tan(a0_d1B)-tan(a0_d1A))-
psi_f_c1old*Cinv_c1*(tan(a0_c1B)-tan(a0_c1A))-Cc_d1*m1*((1-
sin(a0_d1A))*Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-sin(a0_d1A))*(1-Cinv_d1)*tan(a0_d1B)-
cos(a0_d1A)))/((1-sin(a0_c1A))*Cinv_c1*tan(a0_c1A)+(1-sin(a0_c1A))*(1-
Cinv_c1)*tan(a0_c1B)-cos(a0_c1A));
Cc_c1max=rc_c1max/m1;
if Cc_c1>Cc_c1max
    Cc_c1=floor(Cc_c1max*1000)/1000;
    xanac=xanac+1;
end

elseif Y_d_spasimo >= at_d1 && Y_c_spasimo < at_c1

rc_d1max=(hf1*(Cinv_c1*tan(a0_c1A)+(1-
Cinv_c1)*tan(a0_c1B)+tan(a0_d1A))+psi_f_c1old*Cinv_c1*(tan(a0_c1A)-
tan(a0_c1B))-m1*pi*(1-Cs1))/((1-sin(a0_d1A))*tan(a0_d1A)-cos(a0_d1A));
```

```
Cc_d1max=rc_d1max/m1;
if Cc_d1>Cc_d1max
    Cc_d1=floor(Cc_d1max*1000)/1000;
    xanad=xanad+1;
end

rc_c1max=(hf1*(Cinv_c1*tan(a0_c1A)+(1-
Cinv_c1)*tan(a0_c1B)+tan(a0_d1A))+psi_f_c1old*Cinv_c1*(tan(a0_c1A)-
tan(a0_c1B))-m1*pi*(1-Cs1)-Cc_d1*m1*((1-sin(a0_d1A))*tan(a0_d1A)-
cos(a0_d1A)))/((1-sin(a0_c1A))*Cinv_c1*tan(a0_c1A)+(1-sin(a0_c1A))*(1-
Cinv_c1)*tan(a0_c1B)-cos(a0_c1A));
Cc_c1max=rc_c1max/m1;
if Cc_c1>Cc_c1max
    Cc_c1=floor(Cc_c1max*1000)/1000;
    xanac=xanac+1;
end

elseif Y_d_spasimo < at_d1 && Y_c_spasimo >= at_c1

rc_d1max=(hf1*(Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-
Cinv_d1)*tan(a0_d1B)+tan(a0_c1A))+psi_f_d1old*Cinv_d1*(tan(a0_d1A)-
tan(a0_d1B))-m1*pi*(1-Cs1))/((1-sin(a0_d1A))*Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-
sin(a0_d1A))*(1-Cinv_d1)*tan(a0_d1B)-cos(a0_d1A));
Cc_d1max=rc_d1max/m1;
if Cc_d1>Cc_d1max
    Cc_d1=floor(Cc_d1max*1000)/1000;
    xanad=xanad+1;
end

rc_c1max=(hf1*(Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-
Cinv_d1)*tan(a0_d1B)+tan(a0_c1A))+psi_f_d1old*Cinv_d1*(tan(a0_d1A)-
tan(a0_d1B))-m1*pi*(1-Cs1)-Cc_d1*m1*((1-sin(a0_d1A))*Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-
sin(a0_d1A))*(1-Cinv_d1)*tan(a0_d1B)-cos(a0_d1A)))/((1-
sin(a0_c1A))*tan(a0_c1A)-cos(a0_c1A));
Cc_c1max=rc_c1max/m1;
if Cc_c1>Cc_c1max
    Cc_c1=floor(Cc_c1max*1000)/1000;
    xanac=xanac+1;
end
else

Cc_d1max=(pi*(1-Cs1)-Cf1*(tan(a0_c1A)+tan(a0_d1A)))/(cos(a0_d1A)-(1-
sin(a0_d1A))*tan(a0_d1A));
if Cc_d1>Cc_d1max
    Cc_d1=floor(Cc_d1max*1000)/1000;
    xanad=xanad+1;
end

Cc_c1max=(pi*(1-Cs1)-Cf1*(tan(a0_c1A)+tan(a0_d1A))-Cc_d1*(cos(a0_d1A)-(1-
sin(a0_d1A))*tan(a0_d1A)))/(cos(a0_c1A)-(1-sin(a0_c1A))*tan(a0_c1A));
if Cc_c1>Cc_c1max
    Cc_c1=floor(Cc_c1max*1000)/1000;
    xanac=xanac+1;
end
```

```
end

if xanad>0 || xanac>0
%re-evaluate the required parameters
r01=m1*N1/2;            %radius of first gear
hk1=m1*Ck1+m1*Cm1;      %rack cutter dedendum
hf1=m1*Cf1-m1*Cm1;      %rack cutter addendum
t01=pi*m1;              %circular pitch
S01=Cs1*t01;
l01=t01-S01;
rc_d1=m1*Cc_d1;          %cutter tip radius (fillet radius) driving side
rc_c1=m1*Cc_c1;          %cutter tip radius (fillet radius) coast side

at_d1=hf1-rc_d1*(1-sin(a0_d1A));
at_c1=hf1-rc_c1*(1-sin(a0_c1A));

ak_d1=acos(r01*cos(a0_d1B)/(r01+hk1));
ak_c1=acos(r01*cos(a0_c1B)/(r01+hk1));

psi_f_d1=-r01*(sin(a0_d1B))^2+sin(a0_d1B)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_d1B))^2);   %vlepe Kostopoulos sel.109
psi_f_c1=-r01*(sin(a0_c1B))^2+sin(a0_c1B)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_c1B))^2);

psi_f_d1old=-r01*(sin(a0_d1A))^2+sin(a0_d1A)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_d1A))^2);   %vlepe Kostopoulos sel.109
psi_f_c1old=-r01*(sin(a0_c1A))^2+sin(a0_c1A)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_c1A))^2);

Y_d_spasimo=(at_d1+psi_f_d1old)*Cinv_d1;
Y_c_spasimo=(at_c1+psi_f_c1old)*Cinv_c1;

end

% Ypologismos toy delta analoga me tin periptosi tou rack-cutter
if Y_d_spasimo < at_d1 && Y_c_spasimo < at_c1
d1=l01-Y_d_spasimo*tan(a0_d1A)-(at_d1-Y_d_spasimo)*tan(a0_d1B)-
rc_d1*cos(a0_d1A)-Y_c_spasimo*tan(a0_c1A)-(at_c1-Y_c_spasimo)*tan(a0_c1B)-
rc_c1*cos(a0_c1A);

elseif Y_d_spasimo >= at_d1 && Y_c_spasimo < at_c1
d1=l01-at_d1*tan(a0_d1A)-rc_d1*cos(a0_d1A)-Y_c_spasimo*tan(a0_c1A)-(at_c1-
Y_c_spasimo)*tan(a0_c1B)-rc_c1*cos(a0_c1A);

elseif Y_d_spasimo < at_d1 && Y_c_spasimo >= at_c1
d1=l01-Y_d_spasimo*tan(a0_d1A)-(at_d1-Y_d_spasimo)*tan(a0_d1B)-
rc_d1*cos(a0_d1A)-at_c1*tan(a0_c1A)-rc_c1*cos(a0_c1A);

else
d1=l01-at_d1*tan(a0_d1A)-rc_d1*cos(a0_d1A)-at_c1*tan(a0_c1A)-
rc_c1*cos(a0_c1A);
end
```

(IMPORTANT: if xana==1 prepei na ksanaginei calculation olon ton eksisoseon. To delta (d) anamenetai na allaksei alla den epireazei ta Cc_d/c1max kai ara den tha xreiastei na ksanaypologistoun epanaliptika)

- Rack cutter generation

Driving side

```
dim_dA=500;
dim_dB=500;
dim_d=dim_dA+dim_dB+2;
Xd=zeros(1, dim_d);
Yd=zeros(1, dim_d);

%1A) Section AP segment A with PA_d1A
x1A=0:Y_d_spasimo*tan(a0_d1A)/dim_dA:Y_d_spasimo*tan(a0_d1A);
y1A=zeros(1,length(x1A));
for i=1:length(x1A)
    y1A(1,i)=-at_d1+x1A(i)*tan(pi/2-a0_d1A);
    Xd(i)=x1A(i);
    Yd(i)=y1A(i);
end
Y1B=Yd(length(y1A));
X1B=Xd(length(x1A));

%1B) Section AP segment B with PA_d1B
x1B=Y_d_spasimo*tan(a0_d1A):(at_d1+psi_f_d1-
Y_d_spasimo)*tan(a0_d1B)/dim_dB:(at_d1+psi_f_d1-
Y_d_spasimo)*tan(a0_d1B)+Y_d_spasimo*tan(a0_d1A);
y1B=zeros(1,length(x1B));
for i=1:length(x1B)
    y1B(i)=Y1B-X1B*tan(pi/2-a0_d1B)+x1B(i)*tan(pi/2-a0_d1B);
    Xd(length(x1A)+i)=x1B(i);
    Yd(length(y1A)+i)=y1B(i);
end

if Y_d_spasimo >= at_d1
    Xd=Xd-S01-at_d1*tan(a0_d1A);
else
    Xd=Xd-S01-Y_d_spasimo*tan(a0_d1A)-(at_d1-Y_d_spasimo)*tan(a0_d1B);
end
```

- Ypologismos toy DE_d me basi to simeio poy ginetai h allagi toy pressure angle

```
    %Theloume na vroume to XG & YG opou symvainei to spasimo, gia auto
    %tha trexoume to gear generator

dydx_d=zeros(1, length(x1A)+length(x1B)-1);
K_d=zeros(1, length(x1A)+length(x1B)-1);
XG_d=zeros(1, length(x1A)+length(x1B)-1);
YG_d=zeros(1, length(x1A)+length(x1B)-1);
```

```
for i=1:(length(x1A)+length(x1B)-1)
    if (Xd(i+1)-Xd(i))~=0
        dydx_d(i)=(Yd(i+1)-Yd(i))/(Xd(i+1)-Xd(i));
        K_d(i)=-Yd(i)*dydx_d(i)-Xd(i);
        XG_d(i)=(Xd(i)+K_d(i))*cos(K_d(i)/r01)-(Yd(i)+r01)*sin(K_d(i)/r01);
        YG_d(i)=(Xd(i)+K_d(i))*sin(K_d(i)/r01)+(Yd(i)+r01)*cos(K_d(i)/r01);
    else
        dydx_d(i)=(Yd(i)-Yd(i-1))/(Xd(i)-Xd(i-1));
        K_d(i)=-Yd(i)*dydx_d(i)-Xd(i);
        XG_d(i)=(Xd(i)+K_d(i))*cos(K_d(i)/r01)-(Yd(i)+r01)*sin(K_d(i)/r01);
        YG_d(i)=(Xd(i)+K_d(i))*sin(K_d(i)/r01)+(Yd(i)+r01)*cos(K_d(i)/r01);
    end

end
%   MOST IMPORTANT STEP
%   Find the real point where pressure angle change occurs ----> may be
%   different of the last or first point due to possible undercut happening
in the area of
%   the pressure angle change (involutes overlap each other for extreme Cinv
%   values)

xg_dA=XG_d(1:length(x1A));
yg_dA=YG_d(1:length(y1A));
xg_dB=XG_d(length(x1A)+1:end);
yg_dB=YG_d(length(y1A)+1:end);
spa_d=InterX([xg_dA;yg_dA], [xg_dB;yg_dB]);

if isempty(spa_d)==1
    DE_d1=S01-2*r01*(tan(ak_d1)-tan(a0_d1B)+a0_d1B-ak_d1);
else
    XG_d_spasimo=spa_d(1,end);
    YG_d_spasimo=spa_d(2,end);

    %Ypologismos DE_d1
    r_d_spasimo=sqrt((XG_d_spasimo)^2+(YG_d_spasimo)^2);
    a_d_spasimoA=acos(r01*cos(a0_d1A)/(r_d_spasimo));
    a_d_spasimoB=acos(r01*cos(a0_d1B)/(r_d_spasimo));

    if  r_d_spasimo<=r01
         S_d_spasimo=r_d_spasimo*(S01/r01+2*(tan(a0_d1B)-a0_d1B-
(tan(a_d_spasimoB)-a_d_spasimoB)));
    else
        S_d_spasimo=r_d_spasimo*(S01/r01+2*(tan(a0_d1A)-a0_d1A-
(tan(a_d_spasimoA)-a_d_spasimoA)));
    end

    DE_d1=(S_d_spasimo/r_d_spasimo+2*(tan(a_d_spasimoB)-a_d_spasimoB-
(tan(ak_d1)-ak_d1)))*r01;
end

%prosdiorismos simeion xP & xD
xD=-S01/2-DE_d1/2;
xP=Xd(end);
```

Coast side

```
dim_cA=500;
dim_cB=500;
dim_c=dim_cA+dim_cB+2;
Xc=zeros(1, dim_c);
Yc=zeros(1, dim_c);

%3B)Section FG segment B with PA_c1B
if Y_c_spasimo > at_c1
    x3B=-(psi_f_c1-(Y_c_spasimo-at_c1))*tan(a0_c1B)-(Y_c_spasimo-
at_c1)*tan(a0_c1A):(psi_f_c1-(Y_c_spasimo-at_c1))*tan(a0_c1B)/dim_cB:-
(Y_c_spasimo-at_c1)*tan(a0_c1A);
else
    x3B=-psi_f_c1*tan(a0_c1B):(psi_f_c1+at_c1-
Y_c_spasimo)*tan(a0_c1B)/dim_cB:(at_c1-Y_c_spasimo)*tan(a0_c1B);
end
y3B=zeros(1, length(x3B));
for i=1:length(x3B)
    y3B(1,i)=x3B(i)*tan(pi/2+a0_c1B)+psi_f_c1-x3B(1)*tan(pi/2+a0_c1B);
    Xc(i)=x3B(i);
    Yc(i)=y3B(i);
end

X3A=Xc(length(x3B));
Y3A=Yc(length(x3B));

%3A) Section FG segment A with PA_c1A
if Y_c_spasimo <= at_c1
    x3A=(at_c1-
Y_c_spasimo)*tan(a0_c1B):Y_c_spasimo*tan(a0_c1A)/dim_cA:(at_c1-
Y_c_spasimo)*tan(a0_c1B)+Y_c_spasimo*tan(a0_c1A);
else
    x3A=-(Y_c_spasimo-at_c1)*tan(a0_c1A):((Y_c_spasimo-
at_c1)*tan(a0_c1A)+at_c1*tan(a0_c1A))/dim_cA:at_c1*tan(a0_c1A);
end
y3A=zeros(1, length(x3A));
for i=1:length(x3A)
    y3A(1,i)=x3A(i)*tan(pi/2+a0_c1A)+Y3A-X3A*tan(pi/2+a0_c1A);
    Xc(length(x3B)+i)=x3A(i);
    Yc(length(x3B)+i)=y3A(i);
end

xG=Xc(end);
Xc=Xc(1:end-1);
Yc=Yc(1:end-1);
```

- Ypologismos toy DE_c me basi to simeio poy ginetai h allagi toy pressure angle

```
%Ypologismos toy DE_c
dydx_c=zeros(1, length(x3A)+length(x3B)-1);
```

```
K_c=zeros(1, length(x3A)+length(x3B)-1);
XG_c=zeros(1, length(x3A)+length(x3B)-1);
YG_c=zeros(1, length(x3A)+length(x3B)-1);
for i=1:(length(x3A)+length(x3B)-2)
    if (Xc(i+1)-Xc(i))~=0
        dydx_c(i)=(Yc(i+1)-Yc(i))/(Xc(i+1)-Xc(i));
        K_c(i)=-Yc(i)*dydx_c(i)-Xc(i);
        XG_c(i)=(Xc(i)+K_c(i))*cos(K_c(i)/r01)-(Yc(i)+r01)*sin(K_c(i)/r01);
        YG_c(i)=(Xc(i)+K_c(i))*sin(K_c(i)/r01)+(Yc(i)+r01)*cos(K_c(i)/r01);
    else
        dydx_c(i)=(Yc(i)-Yc(i-1))/(Xc(i)-Xc(i-1));
        K_c(i)=-Yc(i)*dydx_c(i)-Xc(i);
        XG_c(i)=(Xc(i)+K_c(i))*cos(K_c(i)/r01)-(Yc(i)+r01)*sin(K_c(i)/r01);
        YG_c(i)=(Xc(i)+K_c(i))*sin(K_c(i)/r01)+(Yc(i)+r01)*cos(K_c(i)/r01);
    end
end

%Euresi simeiou opou simvainei h allagi toy pressure angle
xg_cB=XG_c(1:length(x3B));
yg_cB=YG_c(1:length(y3B));
xg_cA=XG_c(length(x3B)+1:end);
yg_cA=YG_c(length(y3B)+1:end);
spa_c=InterX([xg_cB;yg_cB], [xg_cA;yg_cA]);
if isempty(spa_c)==1
    DE_c1=S01-2*r01*(tan(ak_c1)-tan(a0_c1B)+a0_c1B-ak_c1);
else
    XG_c_spasimo=spa_c(1,1);
    YG_c_spasimo=spa_c(2,1);

    %Ypologismos toy DE_c1
    r_c_spasimo=sqrt((XG_c_spasimo)^2+(YG_c_spasimo)^2);
    a_c_spasimoA=acos(r01*cos(a0_c1A)/(r_c_spasimo));
    a_c_spasimoB=acos(r01*cos(a0_c1B)/(r_c_spasimo));

    if Y_c_spasimo<=at_c1
        S_c_spasimo=r_c_spasimo*(S01/r01+2*(tan(a0_c1B)-a0_c1B-
(tan(a_c_spasimoB)-a_c_spasimoB)));
    else
        S_c_spasimo=r_c_spasimo*(S01/r01+2*(tan(a0_c1A)-a0_c1A-
(tan(a_c_spasimoA)-a_c_spasimoA)));
    end

    DE_c1=(S_c_spasimo/r_c_spasimo+2*(tan(a_c_spasimoB)-a_c_spasimoB-
(tan(ak_c1)-ak_c1)))*r01;
end

%Ypologismos DE1
DE1=DE_d1/2+DE_c1/2;

%2) Section DE kai topothetisi toy sti sosti seira
x2=xD:DE1/100:xD+DE1;
y2=zeros(1,length(x2));

for i=1:length(x2)
```

```
    y2(i)=hk1;
end

%evresi tou teleutaiou simeiou tou (xg_dB, yg_dB) gia to InterX kai tin
%evresi toy Ck1max (mono i drive plevra xreiazetai gt mono se ayti den
%ypologizetai to pragmatiko teleytaio simeio logo tou i=1:length-1
dydx_d_last=(y2(2)-y2(1))/(x2(2)-x2(1));
K_d_last=-y2(1)*dydx_d_last-x2(1);
XG_d_last=(x2(1)+K_d_last)*cos(K_d_last/r01)-(y2(1)+r01)*sin(K_d_last/r01);
YG_d_last=(x2(1)+K_d_last)*sin(K_d_last/r01)+(y2(1)+r01)*cos(K_d_last/r01);
```

- Find Ck1max

```
over=InterX([xg_dB, XG_d_last; yg_dB, YG_d_last],[xg_cB; yg_cB]);

if isempty(over)==0
    rk1max=sqrt(over(1,1)^2+over(2,1)^2);
    Ck1max=(rk1max-r01)/m1;
end
reps=1;
while isempty(over)==0 && reps<50
%ksana olos o kodikas apo tin arxi na trexei se loop mexri to Ck1 na
%sygklinei
    Ck1=Ck1max;

    r01=m1*N1/2;          %radius of first gear
    hk1=m1*Ck1+m1*Cm1;    %rack cutter dedendum
    hf1=m1*Cf1-m1*Cm1;    %rack cutter addendum
    t01=pi*m1;            %circular pitch
    S01=Cs1*t01;
    l01=t01-S01;
    rc_d1=m1*Cc_d1;         %cutter tip radius (fillet radius) driving side
    rc_c1=m1*Cc_c1;         %cutter tip radius (fillet radius) coast side

    at_d1=hf1-rc_d1*(1-sin(a0_d1A));
    at_c1=hf1-rc_c1*(1-sin(a0_c1A));

    ak_d1=acos(r01*cos(a0_d1B)/(r01+hk1));
    ak_c1=acos(r01*cos(a0_c1B)/(r01+hk1));

    psi_f_d1=-r01*(sin(a0_d1B))^2+sin(a0_d1B)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_d1B))^2);   %vlepe Kostopoulos sel.109
    psi_f_c1=-r01*(sin(a0_c1B))^2+sin(a0_c1B)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_c1B))^2);

    psi_f_d1old=-r01*(sin(a0_d1A))^2+sin(a0_d1A)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_d1A))^2);   %vlepe Kostopoulos sel.109
    psi_f_c1old=-r01*(sin(a0_c1A))^2+sin(a0_c1A)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_c1A))^2);

    Y_d_spasimo=(at_d1+psi_f_d1old)*Cinv_d1;
    Y_c_spasimo=(at_c1+psi_f_c1old)*Cinv_c1;
```

- Find Cf1max

```
    %%cases dependind on Cinv_d & Cinv_c
    if Y_d_spasimo < at_d1 && Y_c_spasimo < at_c1
        Cf1max=(m1*pi*(1-Cs1)+psi_f_d1old*Cinv_d1*(tan(a0_d1B)-
tan(a0_d1A))+psi_f_c1old*Cinv_c1*(tan(a0_c1B)-
tan(a0_c1A)))/(tan(a0_d1A)+tan(a0_c1A)+(1-Cinv_d1)*(tan(a0_d1B)-
tan(a0_d1A))+(1-Cinv_c1)*(tan(a0_c1B)-tan(a0_c1A)))/m1;  %no need gia
epanaliptiki diadikasia
    elseif Y_d_spasimo >= at_d1 && Y_c_spasimo < at_c1
        Cf1max=(m1*pi*(1-Cs1)+psi_f_c1old*Cinv_c1*(tan(a0_c1B)-
tan(a0_c1A)))/(tan(a0_d1A)+tan(a0_c1A)+(1-Cinv_c1)*(tan(a0_c1B)-
tan(a0_c1A)))/m1;
    elseif Y_d_spasimo < at_d1 && Y_c_spasimo >= at_c1
        Cf1max=(m1*pi*(1-Cs1)+psi_f_d1old*Cinv_d1*(tan(a0_d1B)-
tan(a0_d1A)))/(tan(a0_d1A)+tan(a0_c1A)+(1-Cinv_d1)*(tan(a0_d1B)-
tan(a0_d1A)))/m1;
    else
        Cf1max=(1-Cs1)*pi/(tan(a0_c1A)+tan(a0_d1A));
    end
```

- New Cf1 if exceeds upper limit and equations calculated again with new Cf1=Cf1max

```
if Cf1>Cf1max
    Cf1=floor(Cf1max*1000)/1000; %floor to 4th decimal to be sure that is
NOT d1<0
    dispCf1=dispCf1+1;
    %re-evaluate the required parameters
    r01=m1*N1/2;            %radius of first gear
    hk1=m1*Ck1+m1*Cm1;      %rack cutter dedendum
    hf1=m1*Cf1-m1*Cm1;      %rack cutter addendum
    t01=pi*m1;              %circular pitch
    S01=Cs1*t01;
    l01=t01-S01;
    rc_d1=m1*Cc_d1;          %cutter tip radius (fillet radius) driving side
    rc_c1=m1*Cc_c1;          %cutter tip radius (fillet radius) coast side

    at_d1=hf1-rc_d1*(1-sin(a0_d1A));
    at_c1=hf1-rc_c1*(1-sin(a0_c1A));

    ak_d1=acos(r01*cos(a0_d1B)/(r01+hk1));
    ak_c1=acos(r01*cos(a0_c1B)/(r01+hk1));

    psi_f_d1=-r01*(sin(a0_d1B))^2+sin(a0_d1B)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_d1B))^2);   %vlepe Kostopoulos sel.109
    psi_f_c1=-r01*(sin(a0_c1B))^2+sin(a0_c1B)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_c1B))^2);

    psi_f_d1old=-r01*(sin(a0_d1A))^2+sin(a0_d1A)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_d1A))^2);   %vlepe Kostopoulos sel.109
```

```
    psi_f_c1old=-r01*(sin(a0_c1A))^2+sin(a0_c1A)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_c1A))^2);

    Y_d_spasimo=(at_d1+psi_f_d1old)*Cinv_d1;
    Y_c_spasimo=(at_c1+psi_f_c1old)*Cinv_c1;
end
```

- Find Cc_d1max & Cc_c1max

```
if Y_d_spasimo < at_d1 && Y_c_spasimo < at_c1

    rc_d1max=(hf1*(Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-
Cinv_d1)*tan(a0_d1B)+Cinv_c1*tan(a0_c1A)+(1-Cinv_c1)*tan(a0_c1B))-m1*pi*(1-
Cs1)-psi_f_d1old*Cinv_d1*(tan(a0_d1B)-tan(a0_d1A))-
psi_f_c1old*Cinv_c1*(tan(a0_c1B)-tan(a0_c1A)))/((1-
sin(a0_d1A))*Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-sin(a0_d1A))*(1-Cinv_d1)*tan(a0_d1B)-
cos(a0_d1A));
    Cc_d1max=rc_d1max/m1;
    if Cc_d1>Cc_d1max
        Cc_d1=floor(Cc_d1max*1000)/1000;
        xanad=xanad+1;
    end

    rc_c1max=(hf1*(Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-
Cinv_d1)*tan(a0_d1B)+Cinv_c1*tan(a0_c1A)+(1-Cinv_c1)*tan(a0_c1B))-m1*pi*(1-
Cs1)-psi_f_d1old*Cinv_d1*(tan(a0_d1B)-tan(a0_d1A))-
psi_f_c1old*Cinv_c1*(tan(a0_c1B)-tan(a0_c1A))-Cc_d1*m1*((1-
sin(a0_d1A))*Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-sin(a0_d1A))*(1-Cinv_d1)*tan(a0_d1B)-
cos(a0_d1A)))/((1-sin(a0_c1A))*Cinv_c1*tan(a0_c1A)+(1-sin(a0_c1A))*(1-
Cinv_c1)*tan(a0_c1B)-cos(a0_c1A));
    Cc_c1max=rc_c1max/m1;
    if Cc_c1>Cc_c1max
        Cc_c1=floor(Cc_c1max*1000)/1000;
        xanac=xanac+1;
    end

elseif Y_d_spasimo >= at_d1 && Y_c_spasimo < at_c1

    rc_d1max=(hf1*(Cinv_c1*tan(a0_c1A)+(1-
Cinv_c1)*tan(a0_c1B)+tan(a0_d1A))+psi_f_c1old*Cinv_c1*(tan(a0_c1A)-
tan(a0_c1B))-m1*pi*(1-Cs1))/((1-sin(a0_d1A))*tan(a0_d1A)-cos(a0_d1A));
    Cc_d1max=rc_d1max/m1;
    if Cc_d1>Cc_d1max
        Cc_d1=floor(Cc_d1max*1000)/1000;
        xanad=xanad+1;
    end

    rc_c1max=(hf1*(Cinv_c1*tan(a0_c1A)+(1-
Cinv_c1)*tan(a0_c1B)+tan(a0_d1A))+psi_f_c1old*Cinv_c1*(tan(a0_c1A)-
tan(a0_c1B))-m1*pi*(1-Cs1)-Cc_d1*m1*((1-sin(a0_d1A))*tan(a0_d1A)-
cos(a0_d1A)))/((1-sin(a0_c1A))*Cinv_c1*tan(a0_c1A)+(1-sin(a0_c1A))*(1-
Cinv_c1)*tan(a0_c1B)-cos(a0_c1A));
    Cc_c1max=rc_c1max/m1;
```

```
    if Cc_c1>Cc_c1max
        Cc_c1=floor(Cc_c1max*1000)/1000;
        xanac=xanac+1;
    end

elseif Y_d_spasimo < at_d1 && Y_c_spasimo >= at_c1

    rc_d1max=(hf1*(Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-
Cinv_d1)*tan(a0_d1B)+tan(a0_c1A))+psi_f_d1old*Cinv_d1*(tan(a0_d1A)-
tan(a0_d1B))-m1*pi*(1-Cs1))/((1-sin(a0_d1A))*Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-
sin(a0_d1A))*(1-Cinv_d1)*tan(a0_d1B)-cos(a0_d1A));
    Cc_d1max=rc_d1max/m1;
    if Cc_d1>Cc_d1max
        Cc_d1=floor(Cc_d1max*1000)/1000;
        xanad=xanad+1;
    end

    rc_c1max=(hf1*(Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-
Cinv_d1)*tan(a0_d1B)+tan(a0_c1A))+psi_f_d1old*Cinv_d1*(tan(a0_d1A)-
tan(a0_d1B))-m1*pi*(1-Cs1)-Cc_d1*m1*((1-sin(a0_d1A))*Cinv_d1*tan(a0_d1A)+(1-
sin(a0_d1A))*(1-Cinv_d1)*tan(a0_d1B)-cos(a0_d1A)))/((1-
sin(a0_c1A))*tan(a0_c1A)-cos(a0_c1A));
    Cc_c1max=rc_c1max/m1;
    if Cc_c1>Cc_c1max
        Cc_c1=floor(Cc_c1max*1000)/1000;
        xanac=xanac+1;
    end
else

    Cc_d1max=(pi*(1-Cs1)-Cf1*(tan(a0_c1A)+tan(a0_d1A)))/(cos(a0_d1A)-(1-
sin(a0_d1A))*tan(a0_d1A));
    if Cc_d1>Cc_d1max
        Cc_d1=floor(Cc_d1max*1000)/1000;
        xanad=xanad+1;
    end

    Cc_c1max=(pi*(1-Cs1)-Cf1*(tan(a0_c1A)+tan(a0_d1A))-Cc_d1*(cos(a0_d1A)-
(1-sin(a0_d1A))*tan(a0_d1A)))/(cos(a0_c1A)-(1-sin(a0_c1A))*tan(a0_c1A));
    if Cc_c1>Cc_c1max
        Cc_c1=floor(Cc_c1max*1000)/1000;
        xanac=xanac+1;
    end
end


if xanad>0 || xanac>0

    %re-evaluate the required parameters
    r01=m1*N1/2;            %radius of first gear
    hk1=m1*Ck1+m1*Cm1;      %rack cutter dedendum
    hf1=m1*Cf1-m1*Cm1;      %rack cutter addendum
    t01=pi*m1;              %circular pitch
    S01=Cs1*t01;
    l01=t01-S01;
```

```
    rc_d1=m1*Cc_d1;          %cutter tip radius (fillet radius) driving side
    rc_c1=m1*Cc_c1;          %cutter tip radius (fillet radius) coast side

    at_d1=hf1-rc_d1*(1-sin(a0_d1A));
    at_c1=hf1-rc_c1*(1-sin(a0_c1A));

    ak_d1=acos(r01*cos(a0_d1B)/(r01+hk1));
    ak_c1=acos(r01*cos(a0_c1B)/(r01+hk1));

    psi_f_d1=-r01*(sin(a0_d1B))^2+sin(a0_d1B)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_d1B))^2);   %vlepe Kostopoulos sel.109
    psi_f_c1=-r01*(sin(a0_c1B))^2+sin(a0_c1B)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_c1B))^2);

    psi_f_d1old=-r01*(sin(a0_d1A))^2+sin(a0_d1A)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_d1A))^2);   %vlepe Kostopoulos sel.109
    psi_f_c1old=-r01*(sin(a0_c1A))^2+sin(a0_c1A)*sqrt((r01+hk1)^2-
(r01*cos(a0_c1A))^2);

    Y_d_spasimo=(at_d1+psi_f_d1old)*Cinv_d1;
    Y_c_spasimo=(at_c1+psi_f_c1old)*Cinv_c1;

end

% Ypologismos toy delta analoga me tin periptosi tou rack-cutter
if Y_d_spasimo < at_d1 && Y_c_spasimo < at_c1
    d1=l01-Y_d_spasimo*tan(a0_d1A)-(at_d1-Y_d_spasimo)*tan(a0_d1B)-
rc_d1*cos(a0_d1A)-Y_c_spasimo*tan(a0_c1A)-(at_c1-Y_c_spasimo)*tan(a0_c1B)-
rc_c1*cos(a0_c1A);

elseif Y_d_spasimo >= at_d1 && Y_c_spasimo < at_c1
    d1=l01-at_d1*tan(a0_d1A)-rc_d1*cos(a0_d1A)-Y_c_spasimo*tan(a0_c1A)-
(at_c1-Y_c_spasimo)*tan(a0_c1B)-rc_c1*cos(a0_c1A);

elseif Y_d_spasimo < at_d1 && Y_c_spasimo >= at_c1
    d1=l01-Y_d_spasimo*tan(a0_d1A)-(at_d1-Y_d_spasimo)*tan(a0_d1B)-
rc_d1*cos(a0_d1A)-at_c1*tan(a0_c1A)-rc_c1*cos(a0_c1A);

else
    d1=l01-at_d1*tan(a0_d1A)-rc_d1*cos(a0_d1A)-at_c1*tan(a0_c1A)-
rc_c1*cos(a0_c1A);
end
```

(IMPORTANT: if xana==1 prepei na ksanaginei calculation olon ton eksisoseon. To delta (d) anamenetai na allaksei alla den epireazei ta Cc_d/c1max kai ara den tha xreiastei na ksanaypologistoun epanaliptika)

- Rack cutter generation

Driving side

```
    dim_dA=500;
    dim_dB=500;
```

```
    dim_d=dim_dA+dim_dB+2;
    Xd=zeros(1, dim_d);
    Yd=zeros(1, dim_d);

    %1A) Section AP segment A with PA_d1A
    x1A=0:Y_d_spasimo*tan(a0_d1A)/dim_dA:Y_d_spasimo*tan(a0_d1A);
    y1A=zeros(1,length(x1A));
    for i=1:length(x1A)
        y1A(1,i)=-at_d1+x1A(i)*tan(pi/2-a0_d1A);
        Xd(i)=x1A(i);
        Yd(i)=y1A(i);
    end
    Y1B=Yd(length(y1A));
    X1B=Xd(length(x1A));
    %1B) Section AP segment B with PA_d1B
    x1B=Y_d_spasimo*tan(a0_d1A):(at_d1+psi_f_d1-
Y_d_spasimo)*tan(a0_d1B)/dim_dB:(at_d1+psi_f_d1-
Y_d_spasimo)*tan(a0_d1B)+Y_d_spasimo*tan(a0_d1A);
    y1B=zeros(1,length(x1B));
    for i=1:length(x1B)
        y1B(i)=Y1B-X1B*tan(pi/2-a0_d1B)+x1B(i)*tan(pi/2-a0_d1B);
        Xd(length(x1A)+i)=x1B(i);
        Yd(length(y1A)+i)=y1B(i);
    end

    if Y_d_spasimo >= at_d1
        Xd=Xd-S01-at_d1*tan(a0_d1A);
    else
        Xd=Xd-S01-Y_d_spasimo*tan(a0_d1A)-(at_d1-Y_d_spasimo)*tan(a0_d1B);
    end
```

- Ypologismos toy DE_d me basi to simeio poy ginetai h allagi toy pressure angle

```
        %Theloume na vroume to XG & YG opou symvainei to spasimo, gia auto
        %tha trexoume to gear generator
    for i=1:(length(x1A)+length(x1B)-1)
        if (Xd(i+1)-Xd(i))~=0
            dydx_d(i)=(Yd(i+1)-Yd(i))/(Xd(i+1)-Xd(i));
            K_d(i)=-Yd(i)*dydx_d(i)-Xd(i);
            XG_d(i)=(Xd(i)+K_d(i))*cos(K_d(i)/r01)-
(Yd(i)+r01)*sin(K_d(i)/r01);

YG_d(i)=(Xd(i)+K_d(i))*sin(K_d(i)/r01)+(Yd(i)+r01)*cos(K_d(i)/r01);
        else
            dydx_d(i)=(Yd(i)-Yd(i-1))/(Xd(i)-Xd(i-1));
            K_d(i)=-Yd(i)*dydx_d(i)-Xd(i);
            XG_d(i)=(Xd(i)+K_d(i))*cos(K_d(i)/r01)-
(Yd(i)+r01)*sin(K_d(i)/r01);

YG_d(i)=(Xd(i)+K_d(i))*sin(K_d(i)/r01)+(Yd(i)+r01)*cos(K_d(i)/r01);
        end
```

```
    end

    xg_dA=XG_d(1:length(x1A));
    yg_dA=YG_d(1:length(y1A));
    xg_dB=XG_d(length(x1A)+1:end);
    yg_dB=YG_d(length(y1A)+1:end);
    spa_d=InterX([xg_dA;yg_dA], [xg_dB;yg_dB]);

    if isempty(spa_d)==1
        DE_d1=S01-2*r01*(tan(ak_d1)-tan(a0_d1B)+a0_d1B-ak_d1);
    else
        XG_d_spasimo=spa_d(1,end);
        YG_d_spasimo=spa_d(2,end);

        %Ypologismos DE_d1
        r_d_spasimo=sqrt((XG_d_spasimo)^2+(YG_d_spasimo)^2);
        a_d_spasimoA=acos(r01*cos(a0_d1A)/(r_d_spasimo));
        a_d_spasimoB=acos(r01*cos(a0_d1B)/(r_d_spasimo));

        if Y_d_spasimo>=at_d1
            S_d_spasimo=r_d_spasimo*(S01/r01+2*(tan(a0_d1B)-a0_d1B-
(tan(a_d_spasimoB)-a_d_spasimoB)));
        else
            S_d_spasimo=r_d_spasimo*(S01/r01+2*(tan(a0_d1A)-a0_d1A-
(tan(a_d_spasimoA)-a_d_spasimoA)));
        end

        DE_d1=(S_d_spasimo/r_d_spasimo+2*(tan(a_d_spasimoB)-a_d_spasimoB-
(tan(ak_d1)-ak_d1)))*r01;

    end
    %prosdiorismos simeion xP & xD

    xD=-S01/2-DE_d1/2;
    xP=Xd(end);
```

Coast side

```
    dim_cA=500;
    dim_cB=500;
    dim_c=dim_cA+dim_cB+2;
    Xc=zeros(1, dim_c);
    Yc=zeros(1, dim_c);

    %3B)Section FG segment B with PA_c1B
    if Y_c_spasimo > at_c1
        x3B=-(psi_f_c1-(Y_c_spasimo-at_c1))*tan(a0_c1B)-(Y_c_spasimo-
at_c1)*tan(a0_c1A):(psi_f_c1-(Y_c_spasimo-at_c1))*tan(a0_c1B)/dim_cB:-
(Y_c_spasimo-at_c1)*tan(a0_c1A);
    else
        x3B=-psi_f_c1*tan(a0_c1B):(psi_f_c1+at_c1-
Y_c_spasimo)*tan(a0_c1B)/dim_cB:(at_c1-Y_c_spasimo)*tan(a0_c1B);
```

```
    end
    y3B=zeros(1, length(x3B));
    for i=1:length(x3B)
        y3B(1,i)=x3B(i)*tan(pi/2+a0_c1B)+psi_f_c1-x3B(1)*tan(pi/2+a0_c1B);
        Xc(i)=x3B(i);
        Yc(i)=y3B(i);
    end

    X3A=Xc(length(x3B));
    Y3A=Yc(length(x3B));

    %3A) Section FG segment A with PA_c1A
    if Y_c_spasimo <= at_c1
        x3A=(at_c1-
Y_c_spasimo)*tan(a0_c1B):Y_c_spasimo*tan(a0_c1A)/dim_cA:(at_c1-
Y_c_spasimo)*tan(a0_c1B)+Y_c_spasimo*tan(a0_c1A);
    else
        x3A=-(Y_c_spasimo-at_c1)*tan(a0_c1A):((Y_c_spasimo-
at_c1)*tan(a0_c1A)+at_c1*tan(a0_c1A))/dim_cA:at_c1*tan(a0_c1A);
    end
    y3A=zeros(1, length(x3A));
    for i=1:length(x3A)
        y3A(1,i)=x3A(i)*tan(pi/2+a0_c1A)+Y3A-X3A*tan(pi/2+a0_c1A);
        Xc(length(x3B)+i)=x3A(i);
        Yc(length(x3B)+i)=y3A(i);
    end

    xG=Xc(end);
    Xc=Xc(1:end-1);
    Yc=Yc(1:end-1);
```

- Ypologismos toy DE_c me basi to simeio poy ginetai h allagi toy pressure angle

```
    %Ypologismos toy DE_c
    for i=1:(length(x3A)+length(x3B)-2)
        if (Xc(i+1)-Xc(i))~=0
            dydx_c(i)=(Yc(i+1)-Yc(i))/(Xc(i+1)-Xc(i));
            K_c(i)=-Yc(i)*dydx_c(i)-Xc(i);
            XG_c(i)=(Xc(i)+K_c(i))*cos(K_c(i)/r01)-
(Yc(i)+r01)*sin(K_c(i)/r01);

YG_c(i)=(Xc(i)+K_c(i))*sin(K_c(i)/r01)+(Yc(i)+r01)*cos(K_c(i)/r01);
        else
            dydx_c(i)=(Yc(i)-Yc(i-1))/(Xc(i)-Xc(i-1));
            K_c(i)=-Yc(i)*dydx_c(i)-Xc(i);
            XG_c(i)=(Xc(i)+K_c(i))*cos(K_c(i)/r01)-
(Yc(i)+r01)*sin(K_c(i)/r01);

YG_c(i)=(Xc(i)+K_c(i))*sin(K_c(i)/r01)+(Yc(i)+r01)*cos(K_c(i)/r01);
        end
    end
```

```
    %Euresi simeiou opou simvainei h allagi toy pressure angle
    xg_cB=XG_c(1:length(x3B));
    yg_cB=YG_c(1:length(y3B));
    xg_cA=XG_c(length(x3B)+1:end);
    yg_cA=YG_c(length(y3B)+1:end);
    spa_c=InterX([xg_cB;yg_cB], [xg_cA;yg_cA]);
    if isempty(spa_c)==1
        DE_c1=S01-2*r01*(tan(ak_c1)-tan(a0_c1B)+a0_c1B-ak_c1);
    else
        XG_c_spasimo=spa_c(1,1);
        YG_c_spasimo=spa_c(2,1);

        %Ypologismos toy DE_c1
        r_c_spasimo=sqrt((XG_c_spasimo)^2+(YG_c_spasimo)^2);
        a_c_spasimoA=acos(r01*cos(a0_c1A)/(r_c_spasimo));
        a_c_spasimoB=acos(r01*cos(a0_c1B)/(r_c_spasimo));

        if Y_c_spasimo>=at_c1
            S_c_spasimo=r_c_spasimo*(S01/r01+2*(tan(a0_c1B)-a0_c1B-
(tan(a_c_spasimoB)-a_c_spasimoB)));
        else
            S_c_spasimo=r_c_spasimo*(S01/r01+2*(tan(a0_c1A)-a0_c1A-
(tan(a_c_spasimoA)-a_c_spasimoA)));
        end

        DE_c1=(S_c_spasimo/r_c_spasimo+2*(tan(a_c_spasimoB)-a_c_spasimoB-
(tan(ak_c1)-ak_c1)))*r01;
    end

    %Ypologismos DE1
    DE1=DE_d1/2+DE_c1/2;
    %2) Section DE kai topothetisi toy sti sosti seira
    x2=xD:DE1/100:xD+DE1;
    y2=zeros(1,length(x2));
    for i=1:length(x2)
        y2(i)=hk1;
    end

    %evresi tou teleutaiou simeiou tou (xg_dB, yg_dB) gia to InterX kai tin
    %evresi toy Ck1max
    dydx_d_last=(y2(2)-y2(1))/(x2(2)-x2(1));
    K_d_last=-y2(1)*dydx_d_last-x2(1);
    XG_d_last=(x2(1)+K_d_last)*cos(K_d_last/r01)-
(y2(1)+r01)*sin(K_d_last/r01);

YG_d_last=(x2(1)+K_d_last)*sin(K_d_last/r01)+(y2(1)+r01)*cos(K_d_last/r01);
```

- Find Ck1max

```
    over=InterX([xg_dB, XG_d_last; yg_dB, YG_d_last],[xg_cB; yg_cB]);

    if isempty(over)==0
```

```
        rk1max=sqrt(over(1,1)^2+over(2,1)^2);
        Ck1max=(rk1max-r01)/m1;
    end
    reps=reps+1;
end
```

- Print new coefficient values if the initial ones exceed maximum values

```
if dispCf1>0
    disp(['GEAR 1: Addendum coefficient exceeds upper limit! The maximum
value has been applied, Cf1=', num2str(Cf1),'.'])
end
if xanad>0
    disp(['GEAR 1: Fillet coefficient driving side exceeds upper limit! The
maximum value has been applied, Cc_d1=', num2str(Cc_d1),'.'])
end
if xanac>0
    disp(['GEAR 1: Fillet coefficient coast side exceeds upper limit! The
maximum value has been applied, Cc_c1=', num2str(Cc_c1),'.']);
end
if reps>1
    DE1=0;
    disp(['GEAR 1: Dedendum coefficient exceeds upper limit! The maximum
value has been applied, Ck1=', num2str(Ck1),'.'])
end
```

- Check thin side head width

```
if hel_mod==1
    Sk=DE1*(r01+hk1)/r01;
    th_k=Sk/(r01+hk1);
    if th_k<4*sin(b0)*Bw/(N1*m1)
        disp('WARNING! Variable backlash design in not feasible (negative
tip thickness at thin face). Register smaller pressure angle.');
    end
end
%2) Section DE kai topothetisi toy sti sosti seira
x2=xD:DE1/100:xD+DE1;
y2=zeros(1,length(x2));
for i=1:length(x2)
    y2(i)=hk1;
end
xE=xD+DE1;
X=[Xd, x2, Xc];
Y=[Yd, y2, Yc];
```

- Rack cutter addendum (gear dedendum)

```
dim_cf=500; %c:coast f:fillet
dim_df=500; %d:drive f:fillet
```

```
dim_delta=100;
dim_add=dim_cf+dim_df+dim_delta+1;
Xadd=zeros(1,dim_add);
Yadd=zeros(1,dim_add);

%4) Kampilotita section GH
omega_c=linspace(pi+a0_c1A,3*pi/2, dim_cf);
xc_c1=xG+rc_c1*cos(a0_c1A);
yc_c1=-at_c1+rc_c1*sin(a0_c1A);
xr_c=zeros(1,length(omega_c));
yr_c=zeros(1,length(omega_c));
for i=1:length(omega_c)
    xr_c(i)=rc_c1*cos(omega_c(i))+xc_c1;
    yr_c(i)=rc_c1*sin(omega_c(i))+yc_c1;
    Xadd(i)=xr_c(i);
    Yadd(i)=yr_c(i);
end

xH=Xadd(length(xr_c));

%5)Tmima HI
x4=xH:d1/dim_delta:xH+d1;%at_d1*tan(a0_d1)+rc_d1*cos(a0_d1):(d_d1/2+d_c1/2)/
100:at_d1*tan(a0_d1)+rc_d1*cos(a0_d1)+d_d1/2+d_c1/2;
xf=zeros(1,length(x4));
yf=zeros(1,length(x4));
for i=1:length(x4)
    xf(i)=x4(i);
    yf(i)=-hf1;
    Xadd(length(xr_c)+i)=xf(i);
    Yadd(length(xr_c)+i)=yf(i);
end

%6)Tmima IJ (telos)
omega_d=linspace(-pi/2,-a0_d1A, dim_df);
xc_d1=xH+d1;%at_d1*tan(a0_d1)+rc_d1*cos(a0_d1)+d1;
yc_d1=-at_d1+rc_d1*sin(a0_d1A);
xr_d=zeros(1,length(omega_d));
yr_d=zeros(1,length(omega_d));
for i=1:length(omega_d)
    xr_d(i)=rc_d1*cos(omega_d(i))+xc_d1;
    yr_d(i)=rc_d1*sin(omega_d(i))+yc_d1;
    Xadd(length(xr_c)+length(x4)+i)=xr_d(i);
    Yadd(length(xr_c)+length(x4)+i)=yr_d(i);
end

Xall=[X, Xadd];
Yall=[Y, Yadd];
```

- Gear tooth generated by rack-cutter for ASYMMETRIC TEETH

```
cnt=1;
cnt2=1;
cnt3=1;
```

```
v=1;
q=1;
thita1=linspace(pi/2+a0_c1A, pi, length(omega_c));
thita2=linspace(0, pi/2-a0_d1A, length(omega_d)+1);
flag=0;
dydx=zeros(1,length(Xall));
K=zeros(1,length(Xall));
XG=zeros(1,length(Xall));
YG=zeros(1,length(Xall));
j=1;
dixe=zeros(1,10);

for i=1:(length(Xall)-1)
        if (Xall(i+1)-Xall(i))<min([abs(xD+DE1)-abs(x3B(1))-10^(-5), abs(xP-
xD)-10^(-5)]) && abs((Xall(i+1)-Xall(i)))~=0%>=10^(-10) %(Xall(i+1)-
Xall(i))<abs((S01/2-DE1/2-psi_f1*tan(a01)))-0.0001 && (Xall(i+1)-Xall(i))~=0
%mikrotero abs(XD-XP)
            dydx(cnt)=(Yall(i+1)-Yall(i))/(Xall(i+1)-Xall(i));
            K(cnt)=-Yall(i)*dydx(cnt)-Xall(i);
            XG(cnt2)=(Xall(i)+K(cnt))*cos(K(cnt)/r01)-
(Yall(i)+r01)*sin(K(cnt)/r01);

YG(cnt2)=(Xall(i)+K(cnt))*sin(K(cnt)/r01)+(Yall(i)+r01)*cos(K(cnt)/r01)-r01;
            cnt=cnt+1;
            cnt2=cnt2+1;
        else
            dixe(j)=i;
            j=j+1;
        end
        dixe=dixe(1:j-1);

        if Xall(i)==Xall(length(x1A)) && (Xall(i+1)-Xall(i))==0 &&
isempty(spa_d)==0
            XG(cnt2)=XG_d_spasimo;
            YG(cnt2)=YG_d_spasimo-r01;
            cnt2=cnt2+1;
            IDX1=cnt2;
        end
        if Xall(i)==Xall(length(Xd)+length(x2)+length(x3B)) && (Xall(i+1)-
Xall(i))<=10^(-10) && isempty(spa_c)==0
            IDX2=cnt2;
            XG(cnt2)=XG_c_spasimo;
            YG(cnt2)=YG_c_spasimo-r01;
            cnt2=cnt2+1;
        end
        if Xall(i)==xG && (Xall(i+1)-Xall(i))==0 &&
v<=length(thita1)%Xall(i)==S01/2+hf1*tan(a01) && (Xall(i+1)-Xall(i))==0 &&
v<=length(thita1) %((Xall(i+1))-Xall(i))==0 && (Yall(i+1)-Yall(i))==0
            dydx(cnt)=tan(thita1(v));
            K(cnt)=-Yall(i)*dydx(cnt)-Xall(i);
            XG(cnt2)=(Xall(i)+K(cnt))*cos(K(cnt)/r01)-
(Yall(i)+r01)*sin(K(cnt)/r01);

YG(cnt2)=(Xall(i)+K(cnt))*sin(K(cnt)/r01)+(Yall(i)+r01)*cos(K(cnt)/r01)-r01;
```

```
            cnt=cnt+1;
            cnt2=cnt2+1;
            v=v+1;
            flag=1;
        end
        if v>length(thita1)
            flag=0;
        end
        if Xall(i)==Xall(end) && (Xall(i+1)-Xall(i))==0 && flag==0 %&&
v>length(thita1) %Xall(i)==S0/2+hf*tan(a0)+d && (Xall(i+1)-Xall(i))==0
            dydx(cnt)=tan(thita2(q));
            K(cnt)=-Yall(i)*dydx(cnt)-Xall(i);
            XG(cnt2)=(Xall(i)+K(cnt))*cos(K(cnt)/r01)-
(Yall(i)+r01)*sin(K(cnt)/r01);

YG(cnt2)=(Xall(i)+K(cnt))*sin(K(cnt)/r01)+(Yall(i)+r01)*cos(K(cnt)/r01)-r01;
            cnt=cnt+1;
            cnt2=cnt2+1;
            q=q+1;
        end
end
YG=YG+r01;
XG=XG(1:cnt2-1);
YG=YG(1:cnt2-1);
[XGend,YGend]=XYplane_rotation(XG(1),YG(1), -2*pi/N1);
XG=[XG, XGend];
YG=[YG, YGend];
```

- Troxia epafon

```
xTE=(-4*r01*cos(a0_d1A)*sin(a0_d1A):0.1:4*r01*cos(a0_d1A)*sin(a0_d1A));

yTE=zeros(1,length(xTE));

for i=1:length(xTE)
    yTE(i)=xTE(i)*tan(a0_d1A)+r01;
end
```

- Path of contact

```
r02=r01;
hk2=hk1;
phi1=1*pi/8:pi/4000:pi/2;
phi2=8*pi/8:pi/4000:3*pi/2;
x_tip1=(r01+hk1)*cos(phi1);
y_tip1=(r01+hk1)*sin(phi1);
x_tip2=(r02+hk2)*cos(phi2);
y_tip2=(r02+hk2)*sin(phi2)+r01+r02;

fpc=InterX([xTE;yTE],[x_tip2;y_tip2]);      %First Point of Contact
lpc=InterX([xTE;yTE], [x_tip1;y_tip1]);     %Last Point of Contact
```

```
x_cp=zeros(1, length(xTE));
y_cp=zeros(1, length(xTE));
for i=1:length(xTE)
    if xTE(i)>=fpc(1,1) && yTE(i)<=lpc(2,1)
        x_cp(j)=xTE(i);
        y_cp(j)=yTE(i);
        j=j+1;
    end
end
x_cp=nonzeros(x_cp');
x_cp=[fpc(1,1), x_cp', lpc(1,1)];

y_cp=nonzeros(y_cp');
y_cp=[fpc(2,1), y_cp', lpc(2,1)];
```

- Sliding velocities

```
rot1=60;    %taxytita peristrofis se RPM
rot2=(r01/r02)*rot1;

rC1=zeros(1,length(x_cp));
rC2=zeros(1,length(x_cp));
thC1=zeros(1,length(x_cp));
thC2=zeros(1,length(x_cp));
vC1=zeros(1,length(x_cp));
vC2=zeros(1,length(x_cp));
wC1=zeros(1,length(x_cp));
wC2=zeros(1,length(x_cp));
ug=zeros(1,length(x_cp));

for i=1:length(x_cp)
    rC1(i)=sqrt(x_cp(i)^2+y_cp(i)^2);   %C einai to simeio epafis kai rC h
apostasi apo ta kentra ton troxon
    rC2(i)=sqrt(x_cp(i)^2+(y_cp(i)-r01-r02)^2);

    thC1(i)=acos(r01*cos(a0_d1A)/rC1(i));
    thC2(i)=acos(r02*cos(a0_d1A)/rC2(i));

    vC1(i)=rot1*rC1(i);                 %grammiki taxytita simeiou epafis
    vC2(i)=rot2*rC2(i);

    wC1(i)=vC1(i)*sin(thC1(i));         %i synistosa tis grammmikis
taxythtas katheti stin troxia epafon
    wC2(i)=vC2(i)*sin(thC2(i));

    ug(i)=wC1(i)-wC2(i);                %taxytita olisthisis
end
```

- Find fillet undercut point and delete points outside of the real gear contour

```
%gia driving side fillet undercut
xg_d1=zeros(1, length(Xd));
yg_d1=zeros(1, length(Xd));
for j=1:length(Xd)
    [xg_help,yg_help]=XYplane_rotation(XG(j), YG(j), (2*pi*(N1-1))/N1);
    xg_d1(j)=xg_help;
    yg_d1(j)=yg_help;
end
xg_d2=XG(length(XG)-length(xr_d):length(XG));
yg_d2=YG(length(YG)-length(yr_d):length(XG));

% %gia coast side fillet undercut
xg_c1=XG(length(Xd)+length(x2):length(Xd)+length(x2)+length(Xc)-
(length(Xall)-length(XG))-1);
yg_c1=YG(length(Yd)+length(y2):length(Yd)+length(y2)+length(Yc)-
(length(Xall)-length(XG))-1);
xg_c2=XG(length(Xd)+length(x2)+length(Xc)-(length(Xall)-
length(XG)):length(Xd)+length(x2)+length(Xc)-(length(Xall)-
length(XG))+length(xr_c));
yg_c2=YG(length(Yd)+length(y2)+length(Yc)-(length(Xall)-
length(XG)):length(Xd)+length(x2)+length(Xc)-(length(Xall)-
length(XG))+length(xr_c));

%
up_dq=InterX([xg_d2;yg_d2],[xg_d1;yg_d1]);
if isempty(up_dq)==0
    dist=sqrt(up_dq(1,:).^2+up_dq(2,:).^2);
    indx= find(dist == min(dist(:)));
    up_d=[up_dq(1,indx); up_dq(2,indx)];
end

up_cq=InterX([xg_c1;yg_c1],[xg_c2;yg_c2]);
if isempty(up_cq)==0
    dist2=sqrt(up_cq(1,:).^2+up_cq(2,:).^2);
    indxc=find(dist2==min(dist2(:)));
    up_c=[up_cq(1,indxc);up_cq(2,indxc)];
end
%
if isempty(spa_c)==1 && isempty(up_cq)==0 && a0_c1A~=a0_c1B
    XG_c_spasimo=up_c(1,1);
    YG_c_spasimo=up_c(2,1);
end

cnt=1;
```

- An symvainei undercut both sides

```
XGsfinal=zeros(1, length(XG));

YGsfinal=zeros(1, length(YG));

if isempty(up_dq)==0
```

```
    [XGhelp,YGhelp]=XYplane_rotation(up_d(1,1), up_d(2,1), -(2*pi*(N1-
1))/N1);

    XGsfinal(1)=XGhelp;
    YGsfinal(1)=YGhelp;
    cnt=cnt+1;
    %peristrofh olou toy systimatos gia kapoies akraies periptoseis
    XGr=zeros(1,length(XG));
    YGr=zeros(1,length(YG));
    if atan2(YGsfinal(1), XGsfinal(1))<0
        for j=1:length(XG)
            [XGrot,YGrot]=XYplane_rotation(XG(j), YG(j), -
(pi+pi/4+atan2(YGsfinal(1), XGsfinal(1))));
            XGr(j)=XGrot;
            YGr(j)=YGrot;
        end
        [XGsfinalONE, YGsfinalONE]=XYplane_rotation(XGsfinal(1),
YGsfinal(1), -(pi+pi/4+atan2(YGsfinal(1), XGsfinal(1))));
        [up_cxr,up_cyr]=XYplane_rotation(up_c(1,1),up_c(2,1), -
(pi+pi/4+atan2(YGsfinal(1), XGsfinal(1))));
        [XGdspa,YGdspa]=XYplane_rotation(XG_d_spasimo, YG_d_spasimo, -
(pi+pi/4+atan2(YGsfinal(1), XGsfinal(1))));
        [up_dxr,up_dyr]=XYplane_rotation(up_d(1,1),up_d(2,1), -
(pi+pi/4+atan2(YGsfinal(1), XGsfinal(1))));
        XG=XGr;
        YG=YGr;
        up_c(1,1)=up_cxr;
        up_c(2,1)=up_cyr;
        up_d(1,1)=up_dxr;
        up_d(2,1)=up_dyr;
        XGsfinal(1)=XGsfinalONE;
        YGsfinal(1)=YGsfinalONE;
        XG_d_spasimo=XGdspa;
        YG_d_spasimo=YGdspa;
    end
    for i=1:length(x1A)-1 %symperilamvanoume olo to (x1A,y1A) giati tha mas
boithisei kalytera na aporipsoume ta sosta simeia sti sunexeia
            XGsfinal(cnt)=XG(i);
            YGsfinal(cnt)=YG(i);
            cnt=cnt+1;
    end
    for i=length(x1A):length(Xd)
        if sqrt(XG(i)^2+YG(i)^2)>sqrt(XGsfinal(1)^2+YGsfinal(1)^2)
            XGsfinal(cnt)=XG(i);
            YGsfinal(cnt)=YG(i);
            cnt=cnt+1;
        end
    end
    if isempty(up_cq)==0
        for i=length(Xd)+1:length(Xd)+length(x3B)+length(x2)-3
            if sqrt(XG(i)^2+YG(i)^2)>sqrt(up_c(1,1)^2+up_c(2,1)^2) &&
atan2(YG(i),XG(i))>=atan2(up_c(2,1), up_c(1,1))
                XGsfinal(cnt)=XG(i);
                YGsfinal(cnt)=YG(i);
```

```
                cnt=cnt+1;
            end
        end

        for i=length(Xd)+length(x3B)+length(x2)-
2:length(Xd)+length(x3B)+length(x2)-2+length(x3A)
            if isempty(spa_c)==0
                if up_c(2,1)<YG_c_spasimo% && isempty(spa_c)==0
                    if sqrt(XG(i)^2+YG(i)^2)>sqrt(up_c(1,1)^2+up_c(2,1)^2)
&& sqrt(XG(i)^2+YG(i)^2)<=sqrt(XG_c_spasimo^2+YG_c_spasimo^2) &&
atan2(YG(i), XG(i))>atan2(up_c(2,1),up_c(1,1))
                        XGsfinal(cnt)=XG(i);
                        YGsfinal(cnt)=YG(i);
                        cnt=cnt+1;
                    end
                end
            elseif a0_c1A==a0_c1B
                if sqrt(XG(i)^2+YG(i)^2)>=sqrt(up_c(1,1)^2+up_c(2,1)^2) &&
atan2(YG(i), XG(i))>atan2(up_c(2,1),up_c(1,1))
                    XGsfinal(cnt)=XG(i);
                    YGsfinal(cnt)=YG(i);
                    cnt=cnt+1;
                end

            else
                break
            end
        end
        XGsfinal(cnt)=up_c(1,1);
        YGsfinal(cnt)=up_c(2,1);
        cnt=cnt+1;

        for i=length(Xd)+length(Xc)+length(x2)-2:length(XG)-length(xr_d)
            if sqrt(XG(i)^2+YG(i)^2)<sqrt(up_c(1,1)^2+up_c(2,1)^2)
                XGsfinal(cnt)=XG(i);
                YGsfinal(cnt)=YG(i);
                cnt=cnt+1;
            end
        end

        for i=length(XG)-length(xr_d)+1:length(XG)
            if sqrt(XG(i)^2+YG(i)^2)<sqrt(up_d(1,1)^2+up_d(2,1)^2)
                XGsfinal(cnt)=XG(i);
                YGsfinal(cnt)=YG(i);
                cnt=cnt+1;
            end
        end
        XGsfinal(cnt)=up_d(1,1);
        YGsfinal(cnt)=up_d(2,1);
        cnt=cnt+1;
```

- An symvainei undercut mono sti driving side

```
    else
        for i=length(Xd)+1:length(Xd)+1+length(Xc)+length(x2)-(length(Xall)-
length(XG))-1+length(xr_c)+length(x4)
            XGsfinal(cnt)=XG(i);
            YGsfinal(cnt)=YG(i);
            cnt=cnt+1;
        end

        for i=length(Xd)+1+length(Xc)+length(x2)-(length(Xall)-length(XG))-
1+length(xr_c)+length(x4)+1:length(XG)
            if sqrt(XG(i)^2+YG(i)^2)<sqrt(up_d(1,1)^2+up_d(2,1)^2)
                XGsfinal(cnt)=XG(i);
                YGsfinal(cnt)=YG(i);
                cnt=cnt+1;
            end
        end

        XGsfinal(cnt)=up_d(1,1);
        YGsfinal(cnt)=up_d(2,1);
        cnt=cnt+1;
    end
```

- An den symvainei undercut se kamia apo tis plevres

```
else
    for i=1:length(x1A)
        D(i)=sqrt(XG(i)^2+YG(i)^2);
        indx2= find(D == min(D(:)));
    end
    XGsfinal(1)=XG(indx2);
    YGsfinal(1)=YG(indx2);

    %peristrofh olou toy systimatos gia kapoies akraies periptoseis
    XGr=zeros(1,length(XG));
    YGr=zeros(1,length(YG));
    if atan2(YGsfinal(1), XGsfinal(1))<0
        for j=1:length(XG)
            [XGrot,YGrot]=XYplane_rotation(XG(j), YG(j), -
(pi+pi/4+atan2(YGsfinal(1), XGsfinal(1))));
            XGr(j)=XGrot;
            YGr(j)=YGrot;
        end
        [XGsfinalONE, YGsfinalONE]=XYplane_rotation(XGsfinal(1),
YGsfinal(1), -(pi+pi/4+atan2(YGsfinal(1), XGsfinal(1))));
        [up_cxr,up_cyr]=XYplane_rotation(up_c(1,1),up_c(2,1), -
(pi+pi/4+atan2(YGsfinal(1), XGsfinal(1))));
        [XGdspa,YGdspa]=XYplane_rotation(XG_d_spasimo, YG_d_spasimo, -
(pi+pi/4+atan2(YGsfinal(1), XGsfinal(1))));
        XG=XGr;
        YG=YGr;
        up_c(1,1)=up_cxr;
        up_c(2,1)=up_cyr;
        XGsfinal(1)=XGsfinalONE;
```

```
        YGsfinal(1)=YGsfinalONE;
        XG_d_spasimo=XGdspa;
        YG_d_spasimo=YGdspa;
    end
    cnt=cnt+1;
    if isempty(up_cq)==1
        for i=indx2+1:length(XG)
            XGsfinal(cnt)=XG(i);
            YGsfinal(cnt)=YG(i);
            cnt=cnt+1;
        end
```

- An symvainei undercut mono stin coast side

```
    else
        gon=zeros(1, length(XG));
        for i=1:length(XG)
            gon(i)=atan2(YG(i),XG(i));
        end
        if isempty(spa_c)==0
            for i=indx2+1:length(Xd)+length(Xc)+length(x2)-(length(Xall)-
length(XG))-1
                if sqrt(XG(i)^2+YG(i)^2)>sqrt(XGsfinal(1)^2+YGsfinal(1)^2)
&& atan2(YG(i),XG(i))<=atan2(YGsfinal(1),XGsfinal(1)) &&
atan2(YG(i),XG(i))>atan2(up_c(2,1),up_c(1,1))
                    XGsfinal(cnt)=XG(i);
                    YGsfinal(cnt)=YG(i);
                    cnt=cnt+1;
                end
            end
        else
            for i=indx2+1:length(Xd)+length(x3B)+length(x2)-3
                if sqrt(XG(i)^2+YG(i)^2)>sqrt(XGsfinal(1)^2+YGsfinal(1)^2)
&& atan2(YG(i),XG(i))>atan2(up_c(2,1),up_c(1,1))
                    XGsfinal(cnt)=XG(i);
                    YGsfinal(cnt)=YG(i);
                    cnt=cnt+1;
                end
            end
            if a0_c1A==a0_c1B
                for i=length(Xd)+length(x3B)+length(x2)-
2:length(Xd)+length(x3B)+length(x2)-2+length(x3A)
                    if atan2(YG(i),XG(i))>=atan2(up_c(2,1),up_c(1,1))
                        XGsfinal(cnt)=XG(i);
                        YGsfinal(cnt)=YG(i);
                        cnt=cnt+1;
                    else
                        break
                    end
                end
            end
        end
```

```
        XGsfinal(cnt)=up_c(1,1);
        YGsfinal(cnt)=up_c(2,1);
        cnt=cnt+1;
        for i=length(Xd)+length(Xc)+length(x2)-(length(Xall)-
length(XG)):length(XG)-length(xr_d)
            if sqrt(XG(i)^2+YG(i)^2)<sqrt(up_c(1,1)^2+up_c(2,1)^2)
                XGsfinal(cnt)=XG(i);
                YGsfinal(cnt)=YG(i);
                cnt=cnt+1;
            end
        end
        for j=length(XG)-length(xr_d)+1:length(XG)
            XGsfinal(cnt)=XG(j);
            YGsfinal(cnt)=YG(j);
            cnt=cnt+1;
        end
    end
end
XGsfinal=XGsfinal(1:cnt-1);
YGsfinal=YGsfinal(1:cnt-1);
```

- Deleting odd points due to change in the pressure angle in the involutes driving and coast side

```
if isempty(spa_d)==0
    indx_d_spa=find(abs(XGsfinal-XG_d_spasimo)<10^(-5));
else
    indx_d_spa=[];
end

if isempty(spa_c)==0
    indx_c_spa=find(XGsfinal == XG_c_spasimo);
else
    indx_c_spa=[];
end

cartesian_dist=zeros(1,length(x1A)+length(x1B)+length(x2)+length(x3B));
for i=length(x1A):length(x1A)+length(x1B)+length(x2)+length(x3B)
    cartesian_dist(i)=sqrt(XGsfinal(i)^2+YGsfinal(i)^2);
end

top=find(abs(cartesian_dist-(r01+hk1))<10^(-4));
indx_top=top(1);
```

Driving side

```
XGfinal=zeros(1,length(XGsfinal));

YGfinal=zeros(1,length(YGsfinal));

cnt=1;
```

```
if isempty(indx_d_spa)==1
    if isempty(up_dq)==0
        indx_d_spa=find(XGsfinal==XGhelp);
        XGfinal(1)=XGsfinal(1);
        YGfinal(1)=YGsfinal(1);
        cnt=cnt+1;
        if a0_d1A~=a0_d1B
            for i=indx_d_spa+length(x1A):indx_top
                if atan2(YGsfinal(i), XGsfinal(i))<=atan2(YGsfinal(1),
XGsfinal(1)) && atan2(YGsfinal(i), XGsfinal(i))>0
                    XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
                    YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
                    cnt=cnt+1;
                end
            end
        else
            for i=1:indx_top
                if atan2(YGsfinal(i), XGsfinal(i))<atan2(YGsfinal(1),
XGsfinal(1)) && atan2(YGsfinal(i), XGsfinal(i))>0 &&
sqrt(XGsfinal(i)^2+YGsfinal(i)^2)<sqrt(XGsfinal(indx_top)^2+YGsfinal(indx_to
p)^2)
                    XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
                    YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
                    cnt=cnt+1;
                end
            end
        end

    else
        if a0_d1A~=a0_d1B
            for i=length(x1A)+1:indx_top
                XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
                YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
                cnt=cnt+1;
            end
        else
            for i=1:indx_top
                XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
                YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
                cnt=cnt+1;
            end
        end
    end
else
    indx_d_spa=indx_d_spa(1);
    cnt=1;
        for i=1:indx_d_spa
            if
sqrt(XGsfinal(i)^2+YGsfinal(i)^2)>=sqrt(XGsfinal(1)^2+YGsfinal(1)^2) &&
sqrt(XGsfinal(i)^2+YGsfinal(i)^2)<sqrt(XGsfinal(indx_d_spa)^2+YGsfinal(indx_
d_spa)^2) && atan2(YGsfinal(i), XGsfinal(i))<=atan2(YGsfinal(1),
XGsfinal(1))% && atan2(YGsfinal(i), XGsfinal(i))>0
                XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
                YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
```

```
                cnt=cnt+1;
            end
        end
        if atan2(YGsfinal(indx_d_spa),
XGsfinal(indx_d_spa))<=atan2(YGsfinal(1), XGsfinal(1)) &&
atan2(YGsfinal(indx_d_spa), XGsfinal(indx_d_spa))>0
            XGfinal(cnt)=XGsfinal(indx_d_spa);
            YGfinal(cnt)=YGsfinal(indx_d_spa);
            cnt=cnt+1;
        end
        for i=indx_d_spa+1:indx_top
            if isempty(up_dq)==0
                if XGsfinal(indx_d_spa)>XGsfinal(1) &&
abs(YGsfinal(indx_d_spa))<YGsfinal(indx_top) && a0_d1A~=a0_d1B
                    if
sqrt(XGsfinal(i)^2+YGsfinal(i)^2)>sqrt(XGsfinal(indx_d_spa)^2+YGsfinal(indx_
d_spa)^2)
                        XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
                        YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
                        cnt=cnt+1;
                    end
                elseif a0_d1A==a0_d1B
                    if atan2(YGsfinal(i), XGsfinal(i))<atan2(YGsfinal(1),
XGsfinal(1)) && atan2(YGsfinal(i), XGsfinal(i))>0
                        XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
                        YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
                        cnt=cnt+1;
                    end
                else
                    if atan2(YGsfinal(i), XGsfinal(i))<atan2(YGsfinal(1),
XGsfinal(1)) && YGsfinal(i)>=YGsfinal(indx_d_spa) &&
sqrt(YGsfinal(i+1)^2+XGsfinal(i+1)^2)>sqrt(YGsfinal(i)^2+XGsfinal(i)^2)% &&
atan2(YGsfinal(i), XGsfinal(i))<=atan2(YGsfinal(indx_d_spa),
XGsfinal(indx_d_spa))
                        XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
                        YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
                        cnt=cnt+1;
                    end
                end
            else
               if
sqrt(XGsfinal(i)^2+YGsfinal(i)^2)>sqrt(XGsfinal(indx_d_spa)^2+YGsfinal(indx_
d_spa)^2)
                   XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
                   YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
                   cnt=cnt+1;
               end
            end
        end

end
```

Top

```
for i=indx_top:indx_top+length(x2)-1
    XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
    YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
    cnt=cnt+1;
end
```

Coast side

```
if isempty(indx_c_spa)==1 && isempty(up_cq)==0
    indx_c_spa=find(XGsfinal == up_c(1,1));
elseif isempty(indx_c_spa)==1 && isempty(up_cq)==1
    indx_no_up=abs(XGsfinal-XG_c(length(x3B)));
    indx_c_spa=find(indx_no_up== min(indx_no_up));
else
    indx_c_spa=indx_c_spa(1);
end
if isempty(spa_c)==1
    for i=indx_top+length(x2):indx_c_spa
        XYdiff=sqrt((XGsfinal(indx_top+length(x2))-
XGsfinal(indx_top+length(x2)+1))^2+(YGsfinal(indx_top+length(x2))-
YGsfinal(indx_top+length(x2)+1))^2);
        if
sqrt(XGsfinal(i)^2+YGsfinal(i)^2)>=sqrt(XGsfinal(indx_c_spa)^2+YGsfinal(indx
_c_spa)^2)%sqrt((XGsfinal(i)-XGsfinal(i+1))^2+(YGsfinal(i)-
YGsfinal(i+1))^2)<=XYdiff  %if
sqrt(XGsfinal(i)^2+YGsfinal(i)^2)>=sqrt(XGsfinal(indx_c_spa)^2+YGsfinal(indx
_c_spa)^2)
            XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
            YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
            cnt=cnt+1;
        end
    end
    for i=indx_c_spa+1:length(XGsfinal)
        if atan2(YGsfinal(i), XGsfinal(i))<atan2(YGsfinal(indx_c_spa),
XGsfinal(indx_c_spa)) ||
sqrt(XGsfinal(i)^2+YGsfinal(i)^2)<=sqrt(XGsfinal(indx_c_spa)^2+YGsfinal(indx
_c_spa)^2)
            XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
            YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
            cnt=cnt+1;
        end
    end
else
    if isempty(up_cq)==0
        if XGsfinal(indx_c_spa)>up_c(1,1)
            INDX=find(XGsfinal==up_c(1,1));
            for i=indx_top+length(x2):INDX
                if
sqrt(XGsfinal(i)^2+YGsfinal(i)^2)>=sqrt(up_c(1,1)^2+up_c(2,1)^2) &&
atan2(YGsfinal(i), XGsfinal(i))>=atan2(up_c(2,1), up_c(1,1))
                    XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
                    YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
                    cnt=cnt+1;
```

```
                end
            end
            for i=INDX:length(XGsfinal)
                if atan2(YGsfinal(i), XGsfinal(i))<atan2(up_c(2,1),
up_c(1,1)) ||
sqrt(XGsfinal(i)^2+YGsfinal(i)^2)<=sqrt(up_c(2,1)^2+up_c(1,1)^2)
                    XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
                    YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
                    cnt=cnt+1;
                end
            end

        else
            for i=indx_top+length(x2):indx_c_spa
                if
sqrt(XGsfinal(i)^2+YGsfinal(i)^2)>=sqrt(XGsfinal(indx_c_spa)^2+YGsfinal(indx
_c_spa)^2)
                    XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
                    YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
                    cnt=cnt+1;
                end
            end
            for i=indx_c_spa+1:length(XGsfinal)
               if
sqrt(XGsfinal(i)^2+YGsfinal(i)^2)<sqrt(XGsfinal(indx_c_spa)^2+YGsfinal(indx_
c_spa)^2) || atan2(YGsfinal(i), XGsfinal(i))<atan2(YGsfinal(indx_c_spa),
XGsfinal(indx_c_spa))
                    XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
                    YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
                    cnt=cnt+1;
               end
            end
        end
    else
        for i=indx_top+length(x2):indx_c_spa
            if
sqrt(XGsfinal(i)^2+YGsfinal(i)^2)>=sqrt(XGsfinal(indx_c_spa)^2+YGsfinal(indx
_c_spa)^2)
               XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
               YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
               cnt=cnt+1;
            end
        end
%          end
        for i=indx_c_spa:length(XGsfinal)
            if atan2(YGsfinal(i), XGsfinal(i))<atan2(YGsfinal(indx_c_spa),
XGsfinal(indx_c_spa)) ||
sqrt(XGsfinal(i)^2+YGsfinal(i)^2)<=sqrt(XGsfinal(indx_c_spa)^2+YGsfinal(indx
_c_spa)^2)
               XGfinal(cnt)=XGsfinal(i);
               YGfinal(cnt)=YGsfinal(i);
               cnt=cnt+1;
            end
        end
```

```
    end
end
XGfinal=XGfinal(1:cnt-1);
YGfinal=YGfinal(1:cnt-1);
```

- Rotate tooth 2*pi to create whole gear

```
Xtotal1=zeros(1,N1*length(XGfinal));

Ytotal1=zeros(1,N1*length(YGfinal));

for i=N1:-1:1
    rot_for_teeth=i/N1*2*pi;
    for j=1:length(XGfinal)
        nN=(N1-i)*length(XGfinal);
        [xh,yh]=XYplane_rotation(XGfinal(j), YGfinal(j), rot_for_teeth);
        Xtotal1(nN+j)=xh;
        Ytotal1(nN+j)=yh;
    end
end
Xtotal1(end+1)=Xtotal1(1);
Ytotal1(end+1)=Ytotal1(1);
```

- Find the points in the rack cutter where undercut starts and stop ("Effective Rack-Cutter)

```
%proto
j=1;
A=[];
if isempty(up_dq)==0
    if isempty(spa_d)==0 || a0_d1A==a0_d1B
        Adist=zeros(1,length(Xd));
        for i=1:length(Xd)
            Adist(i)=abs(sqrt((XG(i)-XGhelp)^2+(YG(i)-YGhelp)^2));
        end
        A=find(Adist==min(Adist(:)));
    else
        Adist=zeros(1,length(x1B));
        for i=length(x1A)+1:length(x1A)+1+length(x1B)
            Adist(j)=abs(sqrt((XG(i)-XGhelp)^2+(YG(i)-YGhelp)^2));
            j=j+1;
        end
        A=find(Adist==min(Adist(:)))+length(x1A);
    end
    if isempty(spa_d)==1
        A=A+1;
    end
end

%deutero kai trito
j=1;
```

```
B=[];
C=[];
if isempty(spa_d)==0
    Bdist=zeros(1,length(x1A));
    Cdist=zeros(1,length(x1B));
    for i=1:length(x1A)
        Bdist(i)=abs(sqrt((XG(i)-XG_d_spasimo)^2+(YG(i)-YG_d_spasimo)^2));
    end
    for i=length(x1A)+1:length(x1A)+1+length(x1B)
        Cdist(j)=abs(sqrt((XG(i)-XG_d_spasimo)^2+(YG(i)-YG_d_spasimo)^2));
        j=j+1;
    end
    [Bs,IB]=sort(Bdist);
    [Cs,IC]=sort(Cdist);
    B=max(IB(2),IB(3));
    C=min(IC(1),IC(2))+length(x1A);
    if B<A
        B=[];
    end
    if C<A
        C=[];
    end
end

%tetarto kai pempto
j=1;
k=1;
D=[];
E=[];
if isempty(spa_c)==0
    Ddist=zeros(1,length(x3B));
    Edist=zeros(1,length(x3A));
    for i=length(Xd)+length(x2)+1:length(Xd)+length(x2)+1+length(x3B)
        Ddist(j)=abs(sqrt((XG(i)-XG_c_spasimo)^2+(YG(i)-YG_c_spasimo)^2));
        j=j+1;
    end
    for
i=length(Xd)+length(x2)+1+length(x3B):length(Xd)+length(x2)+1+length(x3B)+1+
length(x3A)
        Edist(k)=abs(sqrt((XG(i)-XG_c_spasimo)^2+(YG(i)-YG_c_spasimo)^2));
        k=k+1;
    end
    [Ds, ID]=sort(Ddist);
    [Es, IE]=sort(Edist);
    if isempty(spa_d)==0
        D=max(ID(2), ID(3))+length(Xd)+length(x2)+2;
        E=min(IE(1),IE(2))+length(Xd)+length(x2)+length(x3B)+2;
    else
        D=max(ID(2), ID(3))+length(Xd)+length(x2)+3;
        E=min(IE(1),IE(2))+length(Xd)+length(x2)+length(x3B)+3;
    end
end

F=[];
```

```
G=[];

%ekto kai evdomo
if isempty(up_cq)==0
    k=1;
    j=1;
    Fdist=zeros(1,length(Xc));
    Gdist=zeros(1,length(xr_c));
    for i=length(Xd)+length(x2)+1:length(Xd)+length(x2)+1+length(Xc)
        Fdist(k)=abs(sqrt((XG(i)-up_c(1,1))^2+(YG(i)-up_c(2,1))^2));
        k=k+1;
    end
    for i=length(X)+1:length(X)+1+length(xr_c)
        Gdist(j)=abs(sqrt((XG(i)-up_c(1,1))^2+(YG(i)-up_c(2,1))^2));
        j=j+1;
    end
    [Fs,IF]=sort(Fdist);
    [Gs,IG]=sort(Gdist);
    if isempty(spa_d)==0 && isempty(spa_c)==0
        F=max(IF(1),IF(2))+length(Xd)+length(x2)+4;
        G=min(IG(1), IG(2))+length(X)+4;
    elseif isempty(spa_d)==0 || isempty(spa_c)==0
        F=max(IF(1),IF(2))+length(Xd)+length(x2)+3;
        G=min(IG(1), IG(2))+length(X)+3;
    else
        F=max(IF(1),IF(2))+length(Xd)+length(x2)+2;
        G=min(IG(1), IG(2))+length(X)+2;
    end
end

H=[];

%ogdoo
if isempty(up_dq)==0
    j=1;
    Hdist=zeros(1, length(xr_d));
    for i=length(X)+length(xr_c)+length(x4)+1:length(XG)
        Hdist(j)=abs(sqrt((XG(i)-up_d(1,1))^2+(YG(i)-up_d(2,1))^2));
        j=j+1;
    end
    Hdist=Hdist(1:j-1);
    [Hs,IH]=sort(Hdist);
    if isempty(spa_d)==0 && isempty(spa_c)==0
        H=max(IH(1),IH(2))+length(X)+length(xr_c)+length(x4)+5;
    elseif isempty(spa_d)==0 || isempty(spa_c)==0
        H=max(IH(1),IH(2))+length(X)+length(xr_c)+length(x4)+4;
    else
        H=max(IH(1),IH(2))+length(X)+length(xr_c)+length(x4)+3;
    end
end
```

- Create the rack cutter portion that actually cuts gear

```
%aptin arxi tis drive side mexri to telos toy DE
if isempty(A)==0 && isempty(B)==0
    XR1=[Xall(A:B), Xall(C:length(Xd)+length(x2))];
    YR1=[Yall(A:B), Yall(C:length(Xd)+length(x2))];
elseif isempty(A)==0 && isempty(B)==1
    XR1=Xall(A:length(Xd)+length(x2));
    YR1=Yall(A:length(Xd)+length(x2));
elseif isempty(A)==1 && isempty(B)==0
    XR1=[Xall(1:B), Xall(C:length(Xd)+length(x2))];
    YR1=[Yall(1:B), Yall(C:length(Xd)+length(x2))];
else
    XR1=Xall(1:length(Xd)+length(x2));
    YR1=Yall(1:length(Xd)+length(x2));
end

%apo thn arxi tou coast side to telos tou coast side fillet
if isempty(D)==0 && isempty(F)==0
    XR2=[Xall(length(Xd)+length(x2)+1:D), Xall(E:F),
Xall(G:length(X)+length(xr_c))];
    YR2=[Yall(length(Xd)+length(x2)+1:D), Yall(E:F),
Yall(G:length(X)+length(xr_c))];
elseif isempty(D)==0 && isempty(F)==1
    XR2=[Xall(length(Xd)+length(x2)+1:D), Xall(E:length(X)+length(xr_c))];
    YR2=[Yall(length(Xd)+length(x2)+1:D), Yall(E:length(X)+length(xr_c))];
elseif isempty(D)==1 && isempty(F)==0
    XR2=[Xall(length(Xd)+length(x2)+1:F), Xall(G:length(X)+length(xr_c))];
    YR2=[Yall(length(Xd)+length(x2)+1:F), Yall(G:length(X)+length(xr_c))];
else
    XR2=Xall(length(Xd)+length(x2)+1:length(X)+length(xr_c));
    YR2=Yall(length(Xd)+length(x2)+1:length(X)+length(xr_c));
end

% apo to telos tou coast side fillet eos to telos
if isempty(H)==0
    XR3=Xall(length(X)+length(xr_c)+1:H);
    YR3=Yall(length(X)+length(xr_c)+1:H);
else
    XR3=Xall(length(X)+length(xr_c)+1:end);
    YR3=Yall(length(X)+length(xr_c)+1:end);
end

XR=[XR1,XR2,XR3];
YR=[YR1,YR2,YR3];

% this new set of points indicates the "effective rack cutter" and provides
% a useful information about which parts of the gen real geometry of the
% tool cutter are worth to be better treated (surface treatment), or even
where
% the designer could make cavities or other advanced geometries in the rack
% cutter profile in order to obtain better heat transfer characteristics in
% our cutting tool
```

- Rack-cutter one more tooth

```
XRmore=zeros(1,length(Xall));
YRmore=zeros(1,length(Xall));
XRmore2=zeros(1,length(Xall));
YRmore2=zeros(1,length(Xall));

for i=1:length(Xall)
    [XRdisp1, YRdisp1]=xdisplace(Xall(i), Yall(i), t01);
    XRmore(i)=XRdisp1;
    YRmore(i)=YRdisp1;
end

for i=1:length(XR)
    [XRdisp2, YRdisp2]=xdisplace(XR(i), YR(i), t01);
    XRmore2(i)=XRdisp2;
    YRmore2(i)=YRdisp2;
end

Xrack=[Xall, XRmore];
Yrack=[Yall, YRmore];
XR=[XR, XRmore2];
YR=[YR, YRmore2];
```

- Plots

```
hold on
grid on
axis equal
% plot(Xall,Yall, '*')
% plot(XGfinal, YGfinal, '*')
plot(XGfinal, YGfinal)

% plot(Xtotal1, Ytotal1, '*')
plot(Xtotal1, Ytotal1)

th = 0:pi/50:2*pi;
xi=0; yi=0;
xp = r01*cos(th) + xi;
yp = r01*sin(th) + yi;
plot(xp, yp, 'r-.') %pitch circle

xb_d=r01*cos(th)*cos(a0_d1A)+xi;
yb_d=r01*sin(th)*cos(a0_d1A)+xi;
% plot(xb_d, yb_d, '-') %basic circle for driving side pressure angle

xb_c=r01*cos(th)*cos(a0_c1A)+xi;
yb_c=r01*sin(th)*cos(a0_c1A)+xi;
% plot(xb_c, yb_c, '--') %basic circle for coast side pressure angle

plot(Xrack, Yrack, 'r')
plot(XR, YR, 'b*')

hold off
```

Function “xdislace”

```
function [Xdisp, Ydisp]=xdisplace(x, y, disp)
    D=[1, 0, disp;
       0, 1, 0;
       0, 0, 1];
    T=D*[x; y; 1];
    Xdisp=T(1);
    Ydisp=T(2);
end
```

Function “XYplane_rotation”

```
function [x_rot, y_rot] = XYplane_rotation(x, y, th)
    for ii = 1:length(x)
        R = [cos(th),   -sin(th),   0;
            sin(th),    cos(th),   0;
            0,                 0,    1];
        T = R * [x(ii); y(ii); 1];
        x_rot(ii) = T(1);
        y_rot(ii) = T(2);
    end
end
```

Function “InterX”

```
function P = InterX(L1,varargin)
%INTERX Intersection of curves
%   P = INTERX(L1,L2) returns the intersection points of two curves L1
%   and L2. The curves L1,L2 can be either closed or open and are described
%   by two-row-matrices, where each row contains its x- and y- coordinates.
%   The intersection of groups of curves (e.g. contour lines, multiply
%   connected regions etc) can also be computed by separating them with a
%   column of NaNs as for example
%
%         L  = [x11 x12 x13 ... NaN x21 x22 x23 ...;
%               y11 y12 y13 ... NaN y21 y22 y23 ...]
%
%   P has the same structure as L1 and L2, and its rows correspond to the
%   x- and y- coordinates of the intersection points of L1 and L2. If no
%   intersections are found, the returned P is empty.
%
%   P = INTERX(L1) returns the self-intersection points of L1. To keep
%   the code simple, the points at which the curve is tangent to itself are
%   not included. P = INTERX(L1,L1) returns all the points of the curve
%   together with any self-intersection points.
%
%   Example:
%       t = linspace(0,2*pi);
%       r1 = sin(4*t)+2;  x1 = r1.*cos(t); y1 = r1.*sin(t);
%       r2 = sin(8*t)+2;  x2 = r2.*cos(t); y2 = r2.*sin(t);
%       P = InterX([x1;y1],[x2;y2]);
%       plot(x1,y1,x2,y2,P(1,:),P(2,:),'ro')
```

```
%   Author : NS
%   Version: 3.0, 21 Sept. 2010
%   Two words about the algorithm: Most of the code is self-explanatory.
%   The only trick lies in the calculation of C1 and C2. To be brief, this
%   is essentially the two-dimensional analog of the condition that needs
%   to be satisfied by a function F(x) that has a zero in the interval
%   [a,b], namely
%           F(a)*F(b) <= 0
%   C1 and C2 exactly do this for each segment of curves 1 and 2
%   respectively. If this condition is satisfied simultaneously for two
%   segments then we know that they will cross at some point.
%   Each factor of the 'C' arrays is essentially a matrix containing
%   the numerators of the signed distances between points of one curve
%   and line segments of the other.
    %...Argument checks and assignment of L2
    error(nargchk(1,2,nargin));
    if nargin == 1,
        L2 = L1;    hF = @lt;   %...Avoid the inclusion of common points
    else
        L2 = varargin{1}; hF = @le;
    end

    %...Preliminary stuff
    x1  = L1(1,:)';  x2 = L2(1,:);
    y1  = L1(2,:)';  y2 = L2(2,:);
    dx1 = diff(x1); dy1 = diff(y1);
    dx2 = diff(x2); dy2 = diff(y2);

    %...Determine 'signed distances'
    S1 = dx1.*y1(1:end-1) - dy1.*x1(1:end-1);
    S2 = dx2.*y2(1:end-1) - dy2.*x2(1:end-1);

    C1 = feval(hF,D(bsxfun(@times,dx1,y2)-bsxfun(@times,dy1,x2),S1),0);
    C2 = feval(hF,D((bsxfun(@times,y1,dx2)-bsxfun(@times,x1,dy2))',S2'),0)';
    %...Obtain the segments where an intersection is expected
    [i,j] = find(C1 & C2);
    if isempty(i),P = zeros(2,0);return; end;

    %...Transpose and prepare for output
    i=i'; dx2=dx2'; dy2=dy2'; S2 = S2';
    L = dy2(j).*dx1(i) - dy1(i).*dx2(j);
    i = i(L~=0); j=j(L~=0); L=L(L~=0);  %...Avoid divisions by 0

    %...Solve system of eqs to get the common points
    P = unique([dx2(j).*S1(i) - dx1(i).*S2(j), ...
                dy2(j).*S1(i) - dy1(i).*S2(j)]./[L L],'rows')';

    function u = D(x,y)
        u = bsxfun(@minus,x(:,1:end-1),y).*bsxfun(@minus,x(:,2:end),y);
    end
end
```