



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών
Τομέας Τοπογραφίας
Εργαστήριο Φωτογραμμετρίας

**Γεωμετρία του στερεοζεύγους από
βαθμονομημένες και από μη βαθμονομημένες
μηχανές**

Διπλωματική εργασία

Αδάμ Κατερίνα

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2011

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, Γιώργο Καρρά για τις συμβουλές και τον χρόνο του, που διέθεσε απλόχερα κατά την εκπόνηση της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας, αλλά κυρίως για την ενθάρρυνση και υποστήριξη που μου προσέφερε, καθώς και τους Έλλη Πέτσα, καθηγήτρια ΤΕΙ Αθήνας, και Ηλία Καλησπεράκη, διδάκτορα μηχανικό ΕΜΠ, για τις πολύτιμες συμβουλές τους και τη βοήθειά τους καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά και τους υποψήφιους διδάκτορες του Εργαστηρίου Φωτογραμμετρίας Χ. Στεντούμη, Α. Πρόκο και Χ. Ψάλτη που με μεγάλη προθυμία μοιράστηκαν μαζί μου τις γνώσεις τους.

Περίληψη

Με την ταχέως αναπτυσσόμενη έρευνα στο πεδίο της Όρασης Υπολογιστών, νέοι δρόμοι άνοιξαν και για τη ψηφιακή Φωτογραμμετρία, ενώ επανήλθαν στο προσκήνιο έννοιες διατυπωμένες εδώ και έναν αιώνα από πρωτοπόρους Φωτογραμμέτες, οι οποίες όμως δεν είχαν ερευνηθεί περαιτέρω. Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία αντιμετωπίζει τη γεωμετρία του στερεοζεύγους με βάση τόσο τις εμπεδωμένες μεθόδους της Φωτογραμμετρίας (όπως η συνθήκη συνεπιπεδότητας, η μέθοδος της δέσμης ή η επιπολική επανασύσταση) όσο και τους πιο πρόσφατους αλγόριθμους και τις σχετικές έννοιες που προέρχονται από το πεδίο της Όρασης Υπολογιστών. Ανάμεσά τους συγκαταλέγονται γραμμικοί αλγόριθμοι υπολογισμού του σχετικού προσανατολισμού μέσω του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα αλλά και η έννοια του επιπολικού πίνακα, που χρησιμοποιείται για ζεύγη προερχόμενα από μηχανές άγνωστου εσωτερικού προσανατολισμού και εκφράζει τη δέσμευση της δισδιάστατης επιπολικής γεωμετρίας. Αναφέρονται οι ιδιότητες του πίνακα αυτού και οι αλγόριθμοι υπολογισμού του, αλλά και διαδικασίες που βασίζονται σε αυτόν, όπως η εύρεση των συντεταγμένων των πόλων του στερεοζεύγους, ο υπολογισμός της ομόλογης επιπολικής ευθείας εικονοσημείου και η επιπολική επανασύσταση στην περίπτωση που δεν έχει προηγηθεί αποκατάσταση του εσωτερικού προσανατολισμού. Μέσω του επιπολικού πίνακα είναι ακόμα εφικτές, με εμπροσθοτομία, τρισδιάστατες ανακατασκευές του απεικονιζόμενου αντικειμένου, οι οποίες διαφέρουν από το πραγματικό κατά έναν 3D προβολικό μετασχηματισμό. Άρση της αβεβαιότητας αυτής πραγματοποιείται με αναβάθμιση της ανακατασκευής σε ευκλείδεια (ή αρχικά σε αφινική και εν συνεχεία σε ευκλείδεια). Για την πλήρη αυτοματοποίηση του υπολογισμού του επιπολικού πίνακα απαιτείται ο αυτόματος εντοπισμός ομολογιών σημείων. Αναφέρονται, ως εκ τούτου, και διαδικασίες ψηφιακής συνταύτισης εικόνας που χρησιμοποιούνται στην Ψηφιακή Φωτογραμμετρία, αλλά κυρίως πιο πρόσφατοι αλγόριθμοι προερχόμενοι από το πεδίο της Όρασης Υπολογιστών, όπως ο σημειακός τελεστής SIFT που αξιοποιήθηκε εκτεταμένα και στην παρούσα εργασία. Εξετάστηκε ακόμα η περίπτωση της αυτοβαθμονόμησης, δηλαδή του υπολογισμού των παραμέτρων του εσωτερικού προσανατολισμού με μοναδικό δεδομένο ομολογιές σημείων, η οποία όμως μπορεί να επιτευχθεί πλήρως μέσω τουλάχιστον τριών λήψεων κοινού εσωτερικού προσανατολισμού. Στην περίπτωση του ζεύγους εικόνων που απασχολεί τη συγκεκριμένη εργασία, μπορεί να επιτευχθεί μοναχά μερική αυτοβαθμονόμηση, εφόσον ορισμένα από τα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού είναι γνωστά. Κατά κύριο λόγο μελετήθηκε ο υπολογισμός των σταθερών της μηχανής, με γνωστό πρωτεύον σημείο των εικόνων, μέσω γραμμικών όσο και μη γραμμικών αλγορίθμων. Για την υλοποίηση και αξιολόγηση όλων των παραπάνω διαδικασιών και μεθόδων, ιδίως βέβαια εκείνων από τον χώρο της Όρασης Υπολογιστών, συντάχθηκαν πολλοί κώδικες στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab, και χρησιμοποιήθηκαν επίσης ορισμένοι έτοιμοι κώδικες διαθέσιμοι ελεύθερα στο Διαδίκτυο, οι οποίοι εφαρμόστηκαν τόσο σε προσομοιωμένα δεδομένα όσο και σε πραγματικά ζεύγη εικόνων. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται και σχολιάζονται στο τέλος της εργασίας, όπου ακόμα παρατίθενται και κάποια τελικά συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα, όσο και η χρησιμοποιηθείσα βιβλιογραφία.

Geometry of the stereo-pair from calibrated and un-calibrated cameras

Katerina Adam

Diploma Thesis

September 2011

Abstract

Research in the field of Computer Vision has resulted in several new approaches concerning the fundamental problems treated by Photogrammetry. Subject of this diploma thesis is to examine both the conventional photogrammetric algorithms of the stereo pair and the innovative algorithms proposed by researchers in Computer Vision. Among the well-established procedures of Photogrammetry, of interest here are mainly the computation of the five parameters of relative orientation in the case of calibrated cameras using either the coplanarity condition or bundle adjustment, and also the epipolar rectification of such stereo pairs. Research in the field of Computer Vision has proposed (or actually reformulated) a linear approach for computing relative orientation based on the essential matrix. Furthermore, the essential matrix may result from the fundamental matrix when the interior orientation is known. The fundamental matrix expresses the constraints of 2D epipolar lines in the general case, i.e. when the cameras are uncalibrated. For a totally automatic computation of the fundamental matrix, algorithms establishing point correspondences are required. Thus, the thesis makes a reference to area-based matching methods and interest point operators popular in Digital Photogrammetry, but mainly focuses on operators developed in the field of Computer Vision, which are essentially invariant to changes due to illumination, rotation and scale, like the SIFT algorithm which is extensively used here. Several important tasks may be tackled through the fundamental matrix, such as computation of the epipoles, generation of epipolar images of uncalibrated pairs and establishment of the correspondence between image points and epipolar lines. Furthermore, the fundamental matrix can be used for creating 3D object reconstructions by triangulation. Projective ambiguity characterizes these reconstructions, which can be upgraded to affine and Euclidian under the use of specific constraints. The relation of the fundamental matrix to self-calibration is also considered here. At least three images with the same interior orientation are needed for the computation of the camera parameters. For a pair of images, only partial self-calibration is possible, i.e. some of the parameters of interior orientation have to be known. Here, the problem of computing the camera constants (for known principal point location) of the image pair is addressed using both linear and non-linear algorithms. To evaluate all above-mentioned procedures, several algorithms have been implemented in Matlab (combined with certain algorithms freely available on the Web), and applied to both simulated and real data. Finally, results are presented and discussed, and the conclusions of the thesis are presented, along with the cited references.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	i
Περίληψη.....	ii
Abstract.....	iii
Περιεχόμενα	iv
1. Εισαγωγή	1
1.1 Γενικό πλαίσιο και αντικείμενο της εργασίας	1
1.2 Στόχος της εργασίας.....	4
1.3. Διάρθρωση της εργασίας.....	4
2. Η σχέση εικόνων-χώρου	6
2.1 Τα συστήματα αναφοράς.....	6
2.1.1 Το σύστημα των εικονοσυντεταγμένων	6
2.1.2 Το σύστημα της εικόνας.....	6
2.1.3 Το σύστημα του χώρου.....	7
2.2 Αφινικός μετασχηματισμός	7
2.3 Συνθήκη συγγραμμικότητας	8
2.4 Πίνακας στροφής και εξαγωγή των ω , ϕ , κ	9
2.5 Εμπροσθοτομία	10
2.6 Άμεσος γραμμικός μετασχηματισμός	11
3. Εικόνες με γνωστό εσωτερικό προσανατολισμό	15
3.1 Σχετικός προσανατολισμός	16
3.2 Συνθήκη συνεπιπεδότητας	17
3.3 Φωτοτριγωνισμός.....	20
3.3.1 Επίλυση με την μέθοδο της δέσμης.....	21
3.4 Γραμμικοί αλγόριθμοι σχετικού προσανατολισμού.....	24
3.4.1 RLT	24
3.4.2 Δεσμευμένος επιπολικός πίνακας.....	28
3.4.2.1 Υπολογισμός των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού.....	29
3.5 3D ανακατασκευή	30
3.6 Επιπολική γεωμετρία.....	31
3.6.1 Επιπολική επανασύσταση στερεοζεύγους.....	33
3.6.1.1 Συστήματα αναφοράς.....	35
3.6.1.2 Εύρεση των ορίων της επιπολικής εικόνας	35
3.6.1.3 Υπολογισμός της σταθεράς της μηχανής για τις επιπολικές εικόνες ..	36

3.6.1.4 Υπολογισμός του μεγέθους του pixel	37
3.6.1.5 Διαδικασία επανασύστασης της εικόνας	37
3.6.2 Μέθοδος παρεμβολής.....	37
3.6.3 Ακρίβεια και έλεγχος επιτολικών εικόνων	38
3.7 Υπολογισμός των πόλων και των επιτολικών γραμμών.....	38
4. Εικόνες με άγνωστο εσωτερικό προσανατολισμό	41
4.1 Ο επιτολικός πίνακας	42
4.1.1 Οι ιδιότητες του επιτολικού πίνακα	43
4.1.2 Γεωμετρική ερμηνεία.....	44
4.1.2.1 Επιτολικός πίνακας και πόλοι.....	44
4.1.2.2 Μεταφορά σημείων μέσω επιπέδου	45
4.2 Αλγόριθμοι υπολογισμού.....	46
4.2.1 Γραμμικοί αλγόριθμοι.....	47
4.2.1.1. Ο αλγόριθμος των 8 σημείων	47
4.2.1.2 Ο αλγόριθμος των 7 σημείων	48
4.2.2 Μη γραμμικοί αλγόριθμοι	48
4.2.2.1 Αλγεβρική προσέγγιση	49
4.2.2.2 Γεωμετρική προσέγγιση	49
4.2.3 Αλγόριθμος ανίχνευσης χονδροειδών σφαλμάτων RANSAC	51
4.3 Κρίσιμες γεωμετρίες	52
4.4 Επιτολικές εικόνες	53
4.5 3D ανακατασκευή	56
4.5.1 Μετασχηματισμοί	56
4.5.2 Εύρεση προβολικών πινάκων μηχανής από τον επιτολικό πίνακα	57
4.5.3 Εμπροσθοτομία	58
4.5.4 Επάλληλη ανακατασκευή.....	59
4.5.5 Ανακατασκευή με τη χρήση φωτοσταθερών	61
5. Αυτοβαθμονόμηση	63
5.1 Γραμμικοί αλγόριθμοι	64
5.1.1 Γραμμικοί αλγόριθμοι για εύρεση της σταθεράς σε ζεύγος εικόνων	65
5.1.2 Κρίσιμες γεωμετρίες.....	67
5.2 Μη γραμμικοί αλγόριθμοι.....	67
5.2.1 Συνθήκη συνεπιπεδότητας.....	68
5.2.2 Επίλυση δέσμης.....	69
6. Ψηφιακή συνταύτιση εικόνας	73
6.1 Επιφανειακή συνταύτιση	74

6.1.1 Μέθοδος του συντελεστή συσχέτισης	76
6.1.2 Ελαχιστοτετραγωνική συνταύτιση	78
6.2 Συνταύτιση χαρακτηριστικών	79
6.2.1 Τελεστής Moravec	80
6.2.2 Τελεστής Förstner	82
6.2.3 Τελεστής Harris	83
6.2.4 Αλγόριθμος SIFT	85
7. Πειραματικές εφαρμογές και αξιολόγηση	90
7.1 Αποτελέσματα αλγορίθμου SIFT	92
7.1.1 Ψηφιακή συνταύτιση χαρακτηριστικών	92
7.1.2 Επιπολικός πίνακας	97
7.2 Εικόνες με γνωστό εσωτερικό προσανατολισμό	97
7.2.1 Σχετικός προσανατολισμός	97
7.2.2.1 Γραμμικοί αλγόριθμοι	97
7.2.2.2 Μη γραμμικοί αλγόριθμοι	99
7.2.2 Επιπολικές εικόνες	100
7.3 Εικόνες με άγνωστο εσωτερικό προσανατολισμό	104
7.3.1 Υπολογισμός της θέσης των πόλων	104
7.3.2 Υπολογισμός επιπολικής γραμμής σημείου	104
7.3.3 Υπολογισμός επιπολικών γραμμών	105
7.3.4 Επιπολικές εικόνες	107
7.4 Μερική αυτοβαθμονόμηση στερεοζεύγους	109
7.4.1 Γραμμικοί αλγόριθμοι	109
7.4.2 Μη γραμμικοί αλγόριθμοι	110
7.5 3D ανακατασκευή	112
7.5.1 Παράδειγμα 1	112
7.5.2 Παράδειγμα 2	114
7.5.3 Παράδειγμα 3	117
8. Συμπεράσματα	120
8.1 Σχόλια και παρατηρήσεις	120
8.2 Προτάσεις για το μέλλον	122
9. Βιβλιογραφία	123
Παράρτημα	128

1

Εισαγωγή

1.1 Γενικό πλαίσιο και αντικείμενο της εργασίας

Η ανάπτυξη της τεχνολογίας οδήγησε στη μετάβαση στην ψηφιακή φάση της φωτογραμμετρίας. Ήδη από τη δεκαετία του '70, η διάδοση των ηλεκτρονικών υπολογιστών που διευκόλυναν την επίλυση σύνθετων αλγορίθμων (πχ. αεροτριγωνισμού), αλλά κυρίως των ψηφιακών μηχανών λίγο αργότερα, άλλαξαν άρδην το σκηνικό. Παράλληλα, οι ανάγκες για αυτοματοποίηση περίπλοκων και χρονοβόρων διαδικασιών αποτελούσαν, ούτως ή άλλως, μείζον θέμα που απασχολούσε τους μελετητές. Τα τελευταία χρόνια η έρευνα στο πεδίο της όρασης υπολογιστών άνοιξε νέους ορίζοντες και για την ψηφιακή φωτογραμμετρία. Από τα επόμενα θα φανεί πως η συνεργασία μεταξύ των ερευνητών στα δύο αυτά πεδία κρίνεται αναγκαία, όπως και η επανεξέταση ορισμένων συμβατικά θεμελιωμένων εννοιών της κλασσικής φωτογραμμετρίας.

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στο ζεύγος εικόνων, με τη μελέτη ορισμένων συμβατικών και συνήθων μέχρι τώρα διαδικασιών όσο και πιο καινοτόμων προσεγγίσεων που τα τελευταία χρόνια θεμελιώθηκαν, κατά κύριο λόγο, μέσω της όρασης υπολογιστών.

Στην περίπτωση λοιπόν του στερεοζεύγους, οι μέχρι πρότινος γνώσεις της συμβατικής φωτογραμμετρίας περιλάμβαναν πλήθος διαδικασιών, όπως αυτή του υπολογισμού της σχετικής στροφής μεταξύ των δύο εικόνων και ενός διανύσματος προσανατολισμού της βάσης του στερεοζεύγους, η οποία είναι γνωστή ως σχετικός προσανατολισμός και μπορεί να επιτευχθεί με χρήση της συνθήκης συνεπιπεδότητας ή και με τη μέθοδο της συνόρθωσης δέσμης (με δέσμευση 7 παραμέτρων που ορίζουν σύστημα αναφοράς). Για αυτές τις διαδικασίες απαιτείται γνώση των στοιχείων που περιγράφουν τη γεωμετρία της μηχανής. Ουσιαστικά, δηλαδή, πρέπει να έχει αποκατασταθεί ο εσωτερικός προσανατολισμός της εικόνας, ώστε να έχει οριστεί πλήρως η 3D δέση των οπτικών ακτινών. Με βάση πλέον τον γνωστό σχετικό προσανατολισμό, και με εμπροσθοτομικό προσδιορισμό των συντεταγμένων του αντικείμενου στο

χώρο, είναι δυνατή η δημιουργία ενός τρισδιάστατου μοντέλου, το οποίο βέβαια διαφέρει από το πραγματικό κατά θέση, κλίμακα και προσανατολισμό. Για να αρθεί η αβεβαιότητα αυτή απαιτείται εξωτερική πληροφορία για το αντικείμενο, συνήθως ορισμένα σημεία με γνωστές γεωδαιτικές συντεταγμένες, ώστε να ακολουθήσει η διαδικασία του απόλυτου προσανατολισμού (προφανώς αυτά τα φωτοσταθερά σημεία, αν υπάρχουν, μπορούν να εισαχθούν και απευθείας στην συνόρθωση δέσμης για τον άμεσο προσδιορισμό του εξωτερικού προσανατολισμού του ζεύγους). Ακόμα, σε περίπτωση γνωστού εσωτερικού και σχετικού (ή εξωτερικού) προσανατολισμού είναι δυνατή και η επιπολική επανασύσταση (κανονικοποίηση) του ζεύγους εικόνων. Με την επανασύσταση αυτή οι επιπολικές γραμμές γίνονται παράλληλες στη βάση του ζεύγους, εξασφαλίζεται η δυνατότητα για στερεοσκοπική παρατήρηση, και βέβαια διευκολύνεται σημαντικά και η αυτόματη αναζήτηση ομόλογων σημείων.

Οι μέθοδοι προσδιορισμού του σχετικού προσανατολισμού (με βάση τις εξισώσεις συνεπιπεδότητας ή συγγραμμικότητας) είναι όμως μη γραμμικές και έχουν την απαίτηση για επαρκείς προσεγγιστικές τιμές. Μελέτες που πραγματοποιήθηκαν στο πεδίο της όρασης υπολογιστών επανέφεραν στο προσκήνιο, και αναδιατύπωσαν, ορισμένους γραμμικούς αλγορίθμους που ικανοποιούν τις ανάγκες αυτές, οι οποίοι είχαν ήδη διατυπωθεί πολύ νωρίς από φωτογραμμέτρες όπως ο Thompson (1959) και ο Stefanovic (1973), και αργότερα οι Khlebnikova (1983) και Shih (1992). Οι αλγόριθμοι αυτοί, ως γραμμικοί, δεν έχουν απαιτήσεις για αρχικές τιμές. Είναι δηλαδή κατάλληλοι για να εξασφαλίσουν ικανοποιητικές προσωρινές τιμές, χωρίς ανθρώπινη παρέμβαση, για τους πιο αυστηρούς, μη γραμμικούς αλγορίθμους. Σε αυτούς οι προσεγγιστικές τιμές των 5 παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού εξάγονται από τις υπολογιζόμενες 8 εξαρτημένες παραμέτρους του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα (*essential matrix*), όπως αυτός ονομάστηκε αργότερα από τον Longuet-Higgins (1981). Αρκετοί ερευνητές μελέτησαν εν συνεχεία τις δεσμεύσεις που οφείλει να πληροί ένας τέτοιος επιπολικός πίνακας και τους εναλλακτικούς αλγορίθμους υπολογισμού του. Οι γραμμικές μέθοδοι του σχετικού προσανατολισμού αποκάλυψαν άλλωστε και την πολλαπλότητα των λύσεων του, με τα ελάχιστα δεδομένα, που πρώτος είχε καταδείξει ο Kruppa ήδη από το 1913 (αναλυτικότερα επ' αυτού βλ. Καλησπεράκης, 2010).

Όλες οι διαδικασίες που αναφέρθηκαν προϋποθέτουν την ύπαρξη βαθμονομημένων μηχανών. Η νεότερη όμως έρευνα στο πεδίο της Όρασης Υπολογιστών έδειξε ότι ορισμένες από τις διαδικασίες αυτές μπορούν να πραγματοποιηθούν ακόμα και εάν είναι άγνωστα τα στοιχεία της μηχανής και δεν υπάρχει καμία επιπλέον *a priori* γνώση για το αντικείμενο. Με τον τρόπο αυτό η φωτογραμμετρία απαγκιστρώνεται – σε ορισμένες βέβαια περιπτώσεις και για συγκεκριμένα προβλήματα – από την διαδικασία της βαθμονόμησης ή τη χρήση μετρικών μηχανών λήψης, αλλά και από την ανάγκη για φωτοσταθερά σημεία.

Έτσι, στην περίπτωση στερεοζεύγους με άγνωστο εσωτερικό προσανατολισμό μπορεί να υπολογιστεί ο επιπολικός πίνακας F (*fundamental matrix*), ο οποίος έχει 7 βαθμούς ελευθερίας. Ο F περιγράφει την προβολική σχέση που ενυπάρχει μεταξύ δύο δισδιάστατων επιπολικών δεσμών (δεν απαιτεί, δηλαδή, να έχουν οριστεί οι 3D δέσμες ακτίνων όπως συμβαίνει στην συνθήκη συνεπιπεδότητας), επομένως εκφράζει τη δισδιάστατη επιπολική γεωμετρία του μη βαθμονομημένου ζεύγους. Για τον υπολογισμό του έχουν κατά καιρούς αναπτυχθεί διάφοροι γραμμικοί αλλά και μη γραμ-

μικοί αλγόριθμοι, οι οποίοι βασίζονται στην ελαχιστοποίηση κάποιας ορισμένης ποσότητας. Οι Torr & Murray (1997) χρησιμοποίησαν για πρώτη φορά τον αλγόριθμο RANSAC των Fischler & Bolles (1981), που πραγματοποιεί ανίχνευση χονδροειδών σφαλμάτων, για τη βελτίωση της ακρίβειας υπολογισμού του, πράγμα που μπορεί να αποτελέσει μία πλήρως αυτοματοποιημένη διαδικασία, εάν βασιστεί στον αυτόματο εντοπισμό ομολογιών σημείων, όπως θα αναφερθεί στην συνέχεια. Μέσω του επιπολικού πίνακα είναι δυνατόν να υπολογιστεί η θέση των πόλων του ζεύγους, οι ομόλογες επιπολικές ευθείες, η επιπολική ευθεία που αντιστοιχεί σε εικονοσημείο καθώς και να δημιουργηθούν επιπολικές εικόνες. Είναι ακόμα δυνατόν να οριστούν άπειρα ζεύγη προβολικών πινάκων μηχανής συμβατά με αυτόν, και με τη βοήθειά τους και εμπροσθοτομικό προσδιορισμό των συντεταγμένων των σημείων να προκύψει ένα τρισδιάστατο μοντέλο, το οποίο διαφέρει από το πραγματικό κατά έναν 3D προβολικό μετασχηματισμό (15 παράμετροι). Με μεταβολή των δύο προβολικών πινάκων μηχανής (που πρέπει βέβαια να παραμένουν συμβατοί με τον συγκεκριμένο \mathbf{F} του στερεοζεύγους) μεταβάλλεται και το τρισδιάστατο μοντέλο. Όλα, επομένως, τα μοντέλα που προκύπτουν με τον τρόπο αυτό διαφέρουν κατά έναν προβολικό μετασχηματισμό. Εφαρμόζοντας ορισμένες δεσμεύσεις σχετικά με τη θέση του επιπέδου του απείρου Π_∞ , μπορεί κανείς να αναβαθμίσει την ανακατασκευή σε αφινική, ενώ υπολογίζοντας τη θέση της “απόλυτης κωνικής” Ω_∞ στο επίπεδο του απείρου μπορεί να μετατρέψει την αφινική ανακατασκευή σε ευκλείδεια. Φυσικά, σε περίπτωση όπου υπάρχουν περισσότερα από 5 σημεία του αντικειμένου με γνωστές συντεταγμένες, είναι δυνατό να υπολογιστούν απευθείας οι 15 παράμετροι που χαρακτηρίζουν πλήρως έναν μετασχηματισμό \mathbf{H} , ο οποίος αίρει την προβολική αβεβαιότητα.

Μια άλλη καινοτομία που προέκυψε από αυτό το “κύμα” αλλαγών αφορά την διαδικασία της αυτοβαθμονόμησης. Πρόκειται ουσιαστικά για διαδικασία βαθμονόμησης της μηχανής που βασίζεται σε ομολογίες σημείων, χωρίς καμία απολύτως γνώση για τον τρισδιάστατο χώρο. Αποδείχτηκε πως για πλήρη αυτοβαθμονόμηση απαιτείται να υπολογιστούν οι επιπολικοί πίνακες μεταξύ τουλάχιστον τριών επικαλυπτόμενων λήψεων, υπό την δέσμευση του κοινού εσωτερικού προσανατολισμού (Καλησπεράκης, 2010). Σε ζεύγος εικόνων, ο υπολογισμός των 5 παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού εισάγει 5 δεσμεύσεις στους 7 βαθμούς ελευθερίας του επιπολικού πίνακα. Οι εναπομένοντες δύο βαθμοί είναι συνεπώς δυνατό να χρησιμοποιηθούν για την εισαγωγή δεσμεύσεων στα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού, οι οποίες μπορούν να είναι τόσο γεωμετρικές όσο και αλγεβρικές. Συνεπώς, στην περίπτωση του στερεοζεύγους, επειδή οι επιπλέον βαθμοί ελευθερίας είναι μοναχά δύο, είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί μόνο μερική αυτοβαθμονόμηση, δηλαδή εάν πχ. υποτεθεί ότι πρόκειται για μηχανή σημειακής οπής (τετραγωνικό pixel) και η θέση του πρωτεύοντος σημείου είναι γνωστή ή υποτεθεί κατά προσέγγιση στο κέντρο της εικόνας, είναι δυνατός ο υπολογισμός τόσο μίας κοινής όσο και δύο διαφορετικών σταθερών μηχανής για τις δύο εικόνες. Για το πρόβλημα αυτό έχουν διατυπωθεί διαφορετικοί γραμμικοί αλγόριθμοι (Newsam, 1996, Bougnoux, 1998, Sturm, 2001 και 2005) που εξασφαλίζουν ικανοποιητικές λύσεις, των οποίων η ακρίβεια βελτιώνεται εάν εισαχθούν ως προσεγγιστικές τιμές σε μη γραμμικούς αλγορίθμους, όπως αυτός της μεθόδου της δέσμης.

Τέλος, η ψηφιακή φωτογραμμετρία ανέδειξε επιτακτική την ανάγκη για την αυτοματοποίηση των διαδικασιών συνταύτισης. Η έρευνα στο πεδίο της όρασης υπολογιστών

σχετικά με την αναγνώριση προτύπων και την αυτόματη συνταύτιση εικόνων οδήγησε στη δημιουργία πλήθους καινοτόμων αλγορίθμων. Αρχικά, η διαδικασία βασιζόταν σε μεθόδους επιφανειακής συνταύτισης, με την πάροδο όμως των χρόνων επεκτάθηκαν οι δυνατότητες για συνταύτιση χαρακτηριστικών, σε συνθήκες μάλιστα έντονων μεταβολών στον φωτισμό, την κλίμακα, τις προοπτικές παραμορφώσεις κ.λπ. Για τον λόγο αυτό διατυπώθηκαν διάφοροι τελεστές εξαγωγής σημείων ενδιαφέροντος (όπως είναι οι τελεστές Harris και Moravec), τα οποία στη συνέχεια αντιστοιχίζονται μεταξύ τους. Ο πρώτος ιδιαίτερα ανθεκτικός σε όλες τις προαναφερθείσες αλλαγές αλγόριθμος, ο SIFT (Scale Invariant Feature Transform), αναπτύχθηκε από τον Lowe το 2004. Ο SIFT βασίζεται στην εξαγωγή σημείων ενδιαφέροντος και την αντιστοίχισή τους με την βοήθεια καταλόγου περιγραφικών χαρακτηριστικών (descriptors) που αποδίδεται σε κάθε σημείο.

1.2 Στόχος της εργασίας

Σε αυτό το πλαίσιο, στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν να μελετήσει και να υλοποιήσει όσα αναφέρθηκαν ανωτέρω σε θεωρητικό και πειραματικό επίπεδο, καθώς και να παρουσιάσει και να αξιολογήσει τα αποτελέσματα εφαρμογής τους. Ειδικότερα, η εργασία αντιμετώπισε το πρόβλημα της αυτόματης αποκατάστασης ομολογιών σημείων και, βάσει αυτού, υλοποίησε αυτόματες επιλύσεις προβλημάτων που αναφέρονται σε ζεύγος εικόνων και συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- Σχετικός προσανατολισμός βαθμονομημένων ζευγών εικόνων (α) μέσω της συνθήκης συνεπιπεδότητας και (β) της μεθόδου της συνόρθωσης δέσμης, σχετικός προσανατολισμός βαθμονομημένων ζευγών εικόνων με τους γραμμικούς αλγορίθμους (γ) του RLT (Relative Linear Transformation) και (δ) του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα για τον αυτόματο προσδιορισμό προσεγγιστικών τιμών για τις δυο προηγούμενες μη γραμμικές περιπτώσεις (α και β), και, τέλος, (ε) σχετικός προσανατολισμός μη βαθμονομημένων εικόνων βάσει του επιπολικού πίνακα.
- Μερική αυτοβαθμονόμηση μέσω γραμμικών αλγορίθμων και σχετικός προσανατολισμός με μερική αυτοβαθμονόμηση με μη γραμμικούς αλγορίθμους.
- Δημιουργία επιπολικών εικόνων σε βαθμονομημένα αλλά και σε μη βαθμονομημένα ζεύγη εικόνων (επιπολικός πίνακας).
- 3D ανακατασκευή (α) μετρική, από βαθμονομημένο στερεοζεύγος εικόνων, και (β) προβολική, από μη βαθμονομημένο στερεοζεύγος εικόνων βάσει του επιπολικού πίνακα και με αυθαίρετες επιλογές συμβατών πινάκων μηχανής.
- Υπολογισμός της θέσης των πόλων και των ομόλογων επιπολικών ευθειών για ζεύγη εικόνων από βαθμονομημένες και μη βαθμονομημένες μηχανές.

1.3. Διάρθρωση της εργασίας

Μετά από αυτή την εισαγωγή, η υπόλοιπη εργασία διαρθρώνεται ως εξής. Το **Κεφάλαιο 2** αναφέρει συνοπτικά ορισμένα βασικά γενικά στοιχεία της φωτογραμμετρικής θεωρίας που θα χρησιμοποιηθούν ως θεωρητικό υπόβαθρο για την ανάπτυξη των επόμενων κεφαλαίων, όπως είναι τα χρησιμοποιούμενα συστήματα αναφοράς, η συν-

θήκη συγγραμμικότητας και ο Άμεσος Γραμμικός Μετασχηματισμός (DLT). Το **Κεφάλαιο 3** αναφέρεται στις προαναφερθείσες διαδικασίες που αφορούν δύο εικόνες στην περίπτωση όπου τα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού είναι γνωστά (σχετικός προσανατολισμός, επιπολική επανασύσταση, τρισδιάστατη ανακατασκευή, αλλά και δεσμευμένος επιπολικός πίνακας). Στο **Κεφάλαιο 4** αναπτύσσεται η έννοια του επιπολικού πίνακα (\mathbf{F}) και οι ιδιότητές του. Αναφέρονται διαφορετικοί αλγόριθμοι για τον υπολογισμό του, πιθανές παραμετροποιήσεις του, η διαδικασία δημιουργίας επιπολικών εικόνων με χρήση μόνο του \mathbf{F} , όπως και η διαδικασία προσδιορισμού των ομολογών επιπολικών ευθειών και των πόλων του ζεύγους. Εξετάζεται, τέλος, το ζήτημα της προβολικής ανακατασκευής και ο τρόπος της αναβάθμισής της σε αφινική και τελικά σε μετρική, όσο και η δυνατότητα μετασχηματισμού της σε ευκλείδεια μέσω φωτοσταθερών σημείων. Στο **Κεφάλαιο 5** περιγράφεται η διαδικασία της αυτοβαθμολόγησης (self-calibration) αποκλειστικά από απλές ομολογίες εικονοσημείων. Ιδιαίτερη έμφαση αποδίδεται στην περίπτωση ζεύγους εικόνων με γνωστά ορισμένα από τα στοιχεία εσωτερικού προσανατολισμού του και αναλύονται τόσο γραμμικοί όσο και μη γραμμικοί αλγόριθμοι για υπολογισμό των σταθερών των δύο λήψεων. Το **Κεφάλαιο 6** εκθέτει τις βασικές μεθόδους ψηφιακής συνταύτισης που έχουν χρησιμοποιηθεί κατά καιρούς. Περιλαμβάνονται σε αυτό διάφορες μέθοδοι επιφανειακής συνταύτισης, αναλύεται όμως κυρίως η εξαγωγή χαρακτηριστικών (feature extraction) με τους τελεστές Moravec, Harris και Förstner, που χρησιμεύουν στην εξαγωγή σημείων ενδιαφέροντος, και ο αλγόριθμος SIFT που καταλήγει και στην αποκατάσταση ομολογιών σημείων. Στο **Κεφάλαιο 7** περιλαμβάνονται όλες οι πειραματικές εφαρμογές των υλοποιηθέντων αλγορίθμων, αρχικά σε συνθετικά δεδομένα για έλεγχο και στη συνέχεια σε πραγματικά ζεύγη εικόνων. Στο κεφάλαιο αυτό συγκεντρώνονται όλα τα αποτελέσματα της εφαρμογής των αλγορίθμων καθώς και σχολιασμός τους. Το **Κεφάλαιο 8** περιλαμβάνει τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την μελέτη που πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο της προκειμένης διπλωματικής εργασίας, αλλά και προτάσεις για ενδεχόμενη περαιτέρω μελλοντική έρευνα. Τέλος, το κείμενο της εργασίας ολοκληρώνεται με την βιβλιογραφία που αξιοποιήθηκε κατά την εκπόνησή της.

2

Η σχέση εικόνων-χώρου

2.1 Τα συστήματα αναφοράς

Στην πρώτη αυτή ενότητα αναφέρονται πολύ συνοπτικά, για λόγους πληρότητας, τα βασικά συστήματα αναφοράς που χρησιμοποιούνται στη Φωτογραμμετρία. Τα συστήματα συνδέονται μέσω σχέσεων που θα αναλυθούν στη συνέχεια του κεφαλαίου.

2.1.1 Το σύστημα των εικονοσυντεταγμένων

Πρόκειται για ένα δισδιάστατο δεξιόστροφο σύστημα μέτρησης στο επίπεδο της φωτοεαίσθητης επιφάνειας, με αρχή το κέντρο M της εικόνας. Οι μετρήσεις εκφράζονται σε mm ή σε εικονοψηφίδες (pixel), και εφόσον πραγματοποιούνται σε διαφορετικό σύστημα πρέπει να μετασχηματιστούν στο σύστημα των εικονοσυντεταγμένων μέσω αφινικού μετασχηματισμού, όπως αναφέρεται στην συνέχεια.

2.1.2 Το σύστημα της εικόνας

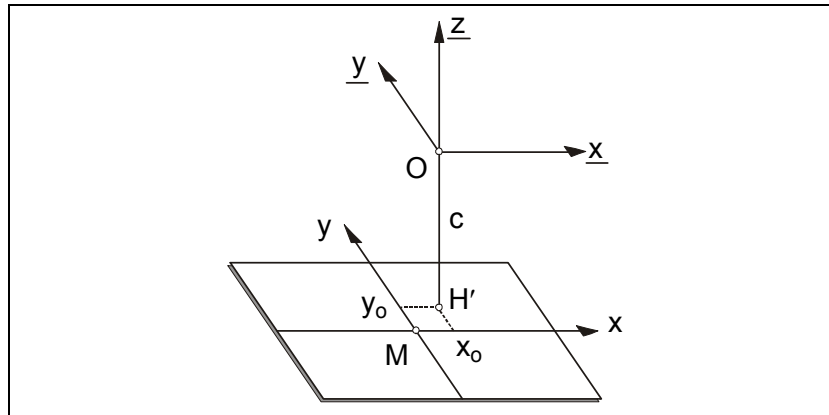
Το σύστημα της εικόνας είναι ένα τρισσορθογώνιο δεξιόστροφο σύστημα xyz με αρχή το σημείο λήψης O (προβολικό κέντρο). Ο άξονας z είναι κάθετος στο επίπεδο της εικόνας και οι άξονες x, y παράλληλοι με τους άξονες του συστήματος των εικονοσυντεταγμένων που υλοποιούνται στο επίπεδο της εικόνας. Η συντεταγμένη z όλων των σημείων στο σύστημα αυτό είναι ίση με $-c$, όσο δηλαδή η μετάθεση των συστημάτων εικόνας και εικονοσυντεταγμένων κατά αυτή τη διεύθυνση. Ακόμα, τα συστήματα είναι μετατεθειμένα και κατά τις άλλες δύο διευθύνσεις κατά x_0 και y_0 , αντίστοιχα, όπου x_0, y_0 οι εικονοσυντεταγμένες του πρωτεύοντος σημείου H' της εικόνας, δηλαδή της προβολής του σημείου λήψης στο επίπεδο της εικόνας. Συνεπώς, οι σχέσεις που

συνδέουν τα δύο συστήματα προφανώς είναι:

$$\underline{x} = x - x_0$$

$$\underline{y} = y - y_0 \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ c \end{bmatrix} \quad (2.1 a - c)$$

$$\underline{z} = -c$$



Σχήμα 2.1: Σύστημα εικόνας και εικονοσυντεταγμένων (Πέτσα, 2000).

2.1.3 Το σύστημα του χώρου

Το γεωδαιτικό σύστημα ή, γενικότερα, σύστημα του χώρου είναι ένα δεξιόστροφο σύστημα XYZ, το οποίο μπορεί να σχετίζεται με το κρατικό σύστημα αναφοράς ή και να είναι αυθαίρετο. Στις τυπικές περιπτώσεις των αεροφωτογραφιών ο Z αντιπροσωπεύει τον κατακόρυφο άξονα, ενώ σε περιπτώσεις επίγειων λήψεων ο άξονας Z συχνά είναι οριζόντιος (και κατά προτίμηση περίπου παράλληλος, ει δυνατόν, προς τον άξονα των λήψεων).

2.2 Αφινικός μετασχηματισμός

Ο αφινικός μετασχηματισμός συγκαταλέγεται μεταξύ των συνήθων δισδιάστατων μετασχηματισμών στην φωτογραμμετρία. Ορίζεται πλήρως με τον προσδιορισμό 6 συντελεστών που αντιπροσωπεύουν τις εξής φυσικές παραμέτρους: δύο συντελεστές κλίμακας (μία για κάθε άξονα), στροφή του συστήματος, απόκλιση των αξόνων από την ορθογωνικότητα καθώς και δύο μεταθέσεις, για κάθε άξονα αντίστοιχα (Καρράς, 1998). Τελικά προκύπτει η εξής σχέση που συνδέει δύο συστήματα xy και $x'y'$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

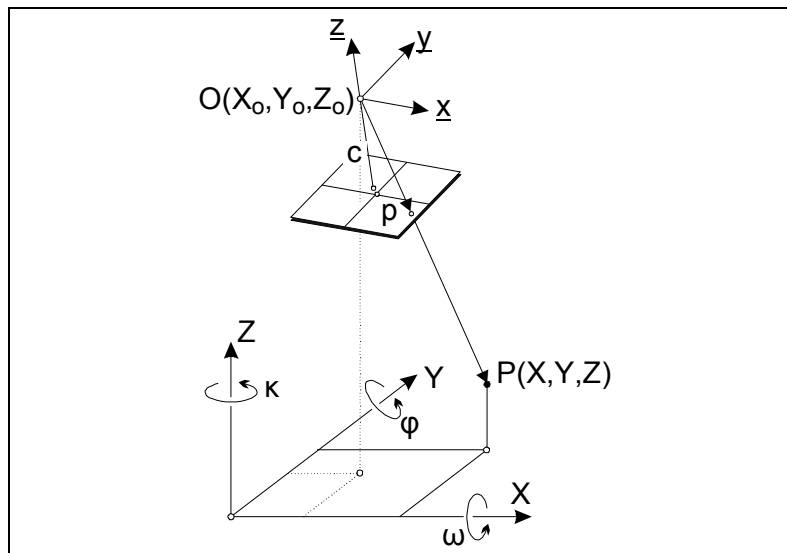
όπου θ η στροφή και ε η απόκλιση από την ορθογωνικότητα, λ_x και λ_y οι συντελεστές κλίμακας και t_x , t_y οι μεταθέσεις μεταξύ των δύο συστημάτων. Η Εξ. (2.2) γράφεται ως:

$$x = a_1x' + b_1y' + c1 \quad y = a_2x' + b_2y' + c2 \quad (2.3 a - b)$$

Προκειμένου να υπολογιστούν οι 6 αυτοί συντελεστές, απαιτούνται κατ' ελάχιστον 3 γνωστά σημεία, κοινά και στα δύο συστήματα. Στην περίπτωση όπου ο αριθμός των γνωστών σημείων είναι μεγαλύτερος εφαρμόζεται επίλυση Μ.Ε.Τ. με τη μέθοδο των έμμεσων παρατηρήσεων. Ο αφινικός μετασχηματισμός επιτρέπει να μετασχηματίζονται στο σύστημα εικονοσυντεταγμένων οι συντεταγμένες εικονοσημείων που έχουν μετρηθεί σε διαφορετικό σύστημα. Όταν οι μετρήσεις σε εικόνες από ψηφιακή μηχανή έχουν γίνει στο (αριστερόστροφο) σύστημά της, ο μετασχηματισμός εκφυλίζεται σε δύο μεταθέσεις και αλλαγή φοράς του άξονα y των μετρήσεων.

2.3 Συνθήκη συγγραμμικότητας

Η συνθήκη συγγραμμικότητας αποτελεί τη βασική εξίσωση της φωτογραμμετρίας και ουσιαστικά εκφράζει την κεντρική προβολή. Είναι η σχέση που χρησιμοποιείται στις διαδικασίες της εμπροσθοτομίας, της οπισθοτομίας, της βαθμονόμησης και του φωτοτριγωνισμού με την μέθοδο της δέσμης και συνδέει το σύστημα XYZ του χώρου με το σύστημα xyz της εικόνας (όπως αυτό υλοποιείται από το σύστημα εικονοσυντεταγμένων xy και την σταθερά c της μηχανής). Ουσιαστικά περιγράφει τις στροφές και μεταθέσεις που πρέπει να υποστεί το ένα σύστημα προκειμένου να ταυτιστεί με το άλλο. Μεταξύ δύο 3D συστημάτων συντεταγμένων υπάρχουν 6 βαθμοί ελευθερίας (3 στροφές + 3 μεταθέσεις). Τα στοιχεία αυτά στη συγκεκριμένη περίπτωση αντιπροσωπεύουν τα στοιχεία $X_0, Y_0, Z_0, \omega, \varphi, \kappa$ του εξωτερικού προσανατολισμού της εικόνας, όπου X_0, Y_0, Z_0 οι συντεταγμένες χώρου του σημείου λήψης και ω, φ, κ οι στροφές της εικόνας (Σχ. 2.2).



Σχήμα 2.2: Γεωμετρία της συνθήκης συγγραμμικότητας (Πέτσα, 2000).

Η συνθήκη συγγραμμικότητας εκφράζει τη δέσμευση ότι το διάνυσμα που συνδέει το κέντρο προβολής με το σημείο στον χώρο και το διάνυσμα που συνδέει το κέντρο προβολής με την εικόνα του σημείου πρέπει να είναι συνευθειακά (συγγραμμικά). Αυτό εκφράζεται μαθηματικά με τη συνθήκη:

$$\begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ -c \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \mathbf{R} \begin{bmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \\ Z - Z_o \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

όπου \mathbf{R} ο πίνακας στροφής της εικόνας.

Ο παράγων $1/k$ (σημειακή κλίμακα) συνήθως απαλείφεται με διαίρεση των σχέσεων, ώστε τελικά να προκύψουν οι γνωστές εξισώσεις συγγραμμικότητας:

$$x - x_o = -c \frac{r_{11}(X - X_o) + r_{12}(Y - Y_o) + r_{13}(Z - Z_o)}{r_{31}(X - X_o) + r_{32}(Y - Y_o) + r_{33}(Z - Z_o)} \quad (2.5 a - b)$$

$$y - y_o = -c \frac{r_{21}(X - X_o) + r_{22}(Y - Y_o) + r_{23}(Z - Z_o)}{r_{31}(X - X_o) + r_{32}(Y - Y_o) + r_{33}(Z - Z_o)}$$

όπου r_{ij} τα 9 στοιχεία του πίνακα στροφής \mathbf{R} της εικόνας.

2.4 Πίνακας στροφής και εξαγωγή των στροφών

Δύο τυπικά τρισσορθογώνια συστήματα του χώρου συνδέονται μεταξύ τους με 3 μεταθέσεις και 3 στροφές, όπως προαναφέρθηκε. Οι στροφές αυτές στην φωτογραμμετρία συνήθως ονομάζονται ω , φ , κ και αναφέρονται σε στροφές περί τους 3 αντίστοιχους άξονες X , Y , Z . Ο πίνακας στροφής \mathbf{R} περιγράφει τη σχέση μεταξύ των δύο αυτών συστημάτων, δηλαδή εν προκειμένω τις στροφές που πρέπει να υποστεί το σύστημα του χώρου προκειμένου να γίνει παράλληλο με το σύστημα της εικόνας. Ο $\mathbf{R}_{\omega\varphi\kappa}$ αναλύεται σε τρεις υποπίνακες, τους \mathbf{R}_ω , \mathbf{R}_φ και \mathbf{R}_κ , οι οποίοι δεν έχουν αντιμεταθετική ιδιότητα, και για τον λόγο αυτό ο \mathbf{R} προκύπτει από πολλαπλασιασμό των επιμέρους πινάκων μεταξύ τους με συγκεκριμένη σειρά, η οποία κατά την συνήθη φωτογραμμετρική σύμβαση είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\omega\varphi\kappa} &= \mathbf{R}_\kappa \mathbf{R}_\varphi \mathbf{R}_\omega = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & \cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\varphi\cos\kappa & \sin\omega\sin\kappa - \cos\omega\sin\varphi\cos\kappa \\ -\cos\varphi\sin\kappa & \cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\varphi\sin\kappa & \sin\omega\cos\kappa + \cos\omega\sin\varphi\sin\kappa \\ \sin\varphi & -\sin\omega\cos\varphi & \cos\omega\cos\varphi \end{bmatrix} \quad (2.6) \end{aligned}$$

Συχνά, όμως, αλγόριθμοι υπολογίζουν απευθείας τον πίνακα στροφής και απαιτείται η εξαγωγή των στροφών από αυτόν. Λόγω όμως της ύπαρξης διαφορετικών γωνιών με το ίδιο ημίτονο ή συνημίτονο, το πρόβλημα περιπλέκεται. Προκειμένου λοιπόν να υπολογιστούν οι γωνίες υποτίθεται $\cos\varphi > 0$. Με τον τρόπο αυτό και από την σχέση:

$$\frac{-r_{21}}{r_{11}} = \frac{\sin\kappa}{\cos\kappa} = \tan\kappa \quad (2.7)$$

είναι δυνατός να υπολογιστεί η τιμή της εφαπτομένης της γωνίας κ .

Διερευνώντας δε και το πρόσημο της τιμής του ημιτόνου ή του συνημίτονου, είναι εφικτό να προσδιορίσει κανείς εάν πρόκειται για τη γωνία κ ή τη γωνία $\kappa \pm \pi$, καθώς οι γωνίες αυτές έχουν την ίδια τιμή για το τόξο εφαπτομένης. Με ανάλογο τρόπο, υπολογίζεται η γωνία φ με βάση τις σχέσεις:

$$\tan\varphi = \frac{r_{31}}{r_{11}/\cos\kappa} \Rightarrow \varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) \quad (2.8)$$

καθώς και η γωνία ω :

$$\tan\omega = \frac{-r_{32}}{r_{33}} \Rightarrow \omega = \operatorname{atan}\left(\frac{\sin\omega}{\cos\omega}\right) \quad (2.9)$$

Στην περίπτωση όπου $\cos\varphi < 0$, οι γωνίες που υπολογίζονται είναι οι $\pi + \omega$, $\pi - \varphi$, $\pi + \kappa$ (Μπουτσικάκης, 2003).

Συνεπώς γίνεται κατανοητό από τα παραπάνω, ότι δεδομένου του πίνακα στροφής \mathbf{R} η εξαγωγή των γωνιών ω , φ , κ δεν είναι μία απλή, άμεση διαδικασία καθώς απαιτείται επιπλέον διερεύνηση για την επιλογή του σωστού συνδυασμού γωνιών, όπως θα αναφερθεί και στα αντίστοιχα σημεία στα επόμενα κεφάλαια.

2.5 Εμπροσθοτομία

Στην παρούσα εργασία η συνθήκη συγγραμμικότητας εφαρμόζεται και στο πρόβλημα της εμπροσθοτομίας, που αναφέρεται συνοπτικά εδώ και εφαρμόζεται σε διαδικασίες του Κεφαλαίου 3 (συνόρθωση δέσμης, επιλογή σωστής λύσης από τους γραμμικούς αλγόριθμους του σχετικού προσανατολισμού). Η διαδικασία αυτή εκτελείται προκειμένου να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των σημείων στον χώρο και πραγματοποιείται σε ζεύγος (ή και σε μεγαλύτερο αριθμό) εικόνων, εάν είναι γνωστός ο εσωτερικός προσανατολισμός της μηχανής, οι εξωτερικοί προσανατολισμοί των εικόνων και φυσικά οι μετρημένες εικονοσυντεταγμένες x_a, y_a, x_b, y_b των ομόλογων σημείων. Η εξίσωση συγγραμμικότητας δεν είναι γραμμική ως προς τους αγνώστους, συνεπώς απαιτούνται προσωρινές τιμές. Αυτές υπολογίζονται από τις δύο κατά X εξισώσεις της συνθήκης συγγραμμικότητας στις δύο εικόνες και μία κατά Y εξίσωση, στην ουσία δηλαδή επιλύεται σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους. Ειδικότερα, οι 3 εξισώσεις που χρησιμοποιούνται είναι οι:

$$X = X_{o\alpha} + (Z - Z_{o\alpha}) \frac{r_{11}^a (x'_a - x_{o\alpha}) + r_{21}^a (y'_a - y_{o\alpha}) - r_{31}^a c_a}{r_{13}^a (x'_a - x_{o\alpha}) + r_{23}^a (y'_a - y_{o\alpha}) - r_{33}^a c_a} \quad (2.10 \text{ a} - \text{c})$$

$$Y = Y_{o\alpha} + (Z - Z_{o\alpha}) \frac{r_{12}^a (x'_a - x_{o\alpha}) + r_{22}^a (y'_a - y_{o\alpha}) - r_{32}^a c_a}{r_{13}^a (x'_a - x_{o\alpha}) + r_{23}^a (y'_a - y_{o\alpha}) - r_{33}^a c_a}$$

$$X = X_{o\beta} + (Z - Z_{o\beta}) \frac{r_{11}^\beta (x'_\beta - x_{o\beta}) + r_{21}^\beta (y'_\beta - y_{o\beta}) - r_{31}^\beta c_\beta}{r_{13}^\beta (x'_\beta - x_{o\beta}) + r_{23}^\beta (y'_\beta - y_{o\beta}) - r_{33}^\beta c_\beta}$$

όπου οι δείκτες α και β αναφέρονται στην αριστερή και την δεξιά εικόνα, αντίστοιχα, και c_α, c_β είναι οι σταθερές των μηχανών. Τα στοιχεία r αναφέρονται εδώ στον αντίστροφο πίνακα εκείνου που ορίστηκε στην Εξ. (2.6), δηλαδή στον πίνακα στροφής $\mathbf{R}^T (= \mathbf{R}^{-1})$. Αρχικά από τις παραπάνω σχέσεις υπολογίζεται το Z και στη συνέχεια τα X, Y , οπότε πλέον προκύπτει μια ικανοποιητική προσέγγιση των τιμών των συντεταγμένων χώρου του σημείου για την επίλυση με M.E.T. Η εξίσωση παρατήρησης γραμμικοποιείται ως εξής:

$$b_{x_a} = x'_a - x_a^0 = \frac{\partial x_a}{\partial X} \partial X + \frac{\partial x_a}{\partial Y} \partial Y + \frac{\partial x_a}{\partial Z} \partial Z + v_{x_a} \quad (2.11 a - d)$$

$$b_{y_a} = y'_a - y_a^0 = \frac{\partial y_a}{\partial X} \partial X + \frac{\partial y_a}{\partial Y} \partial Y + \frac{\partial y_a}{\partial Z} \partial Z + v_{y_a}$$

$$b_{x_b} = x'_b - x_b^0 = \frac{\partial x_b}{\partial X} \partial X + \frac{\partial x_b}{\partial Y} \partial Y + \frac{\partial x_b}{\partial Z} \partial Z + v_{x_b}$$

$$b_{y_b} = y'_b - y_b^0 = \frac{\partial y_b}{\partial X} \partial X + \frac{\partial y_b}{\partial Y} \partial Y + \frac{\partial y_b}{\partial Z} \partial Z + v_{y_b}$$

Η επίλυση πραγματοποιείται με τη μέθοδο των εμμέσων παρατηρήσεων που περιγράφεται από το μαθηματικό μοντέλο:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (2.12)$$

Ο πίνακας σχεδιασμού $\mathbf{A}(4 \times 3)$ για κάθε σημείο περιλαμβάνει τις μερικές παραγώγους της συνθήκης συγγραμμικότητας ως προς τις γεωδαιτικές συντεταγμένες X, Y, Z των σημείων και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_a}{\partial X} & \frac{\partial x_a}{\partial Y} & \frac{\partial x_a}{\partial Z} \\ \frac{\partial y_a}{\partial X} & \frac{\partial y_a}{\partial Y} & \frac{\partial y_a}{\partial Z} \\ \frac{\partial x_b}{\partial X} & \frac{\partial x_b}{\partial Y} & \frac{\partial x_b}{\partial Z} \\ \frac{\partial y_b}{\partial X} & \frac{\partial y_b}{\partial Y} & \frac{\partial y_b}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

ενώ το διάνυσμα $\mathbf{x}(3 \times 1)$ των άγνωστων διορθώσεων είναι:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Τέλος, με βάση τις προσωρινές τιμές των συντεταγμένων χώρου υπολογίζονται οι προσωρινές τιμές των εικονοσυντεταγμένων, οι οποίες αφαιρούμενες από τις παρατηρούμενες ποσότητες δίνουν το διάνυσμα $\mathbf{b}(4 \times 1)$ των ανηγμένων παρατηρήσεων:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x'_a - x_a^0 \\ y'_a - y_a^0 \\ x'_b - x_b^0 \\ y'_b - y_b^0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Υπάρχει βέβαια και η δυνατότητα απόδοσης βαρών στα μετρημένα μεγέθη, ώστε τελικά να προκύψει ο τετραγωνικός πίνακας \mathbf{P} των βαρών, στη διαγώνιο του οποίου εμφανίζονται (για ασυσχέτιστες μετρήσεις) οι τιμές $1/\sigma^2$, όπου σ η ακρίβεια της κάθε μέτρησης. Η διαδικασία αυτή συνόρθωσης είναι επαναληπτική και τερματίζεται όταν οι διορθώσεις δεν υπερβαίνουν ένα προκαθορισμένο όριο.

2.6 Άμεσος γραμμικός μετασχηματισμός

Ο Άμεσος Γραμμικός Μετασχηματισμός, γνωστός και ως DLT (Direct Linear Trans-

formation), περιγράφει τη γενικότερη προβολική σχέση μεταξύ του 2D συστήματος της εικόνας και του 3D συστήματος του χώρου (Δερμάνης, 1991, Καρράς, 1998). Ο μετασχηματισμός αυτός (που, σε αντίθεση με τον γνωστότερο 2D–2D προβολικό μετασχηματισμό που χρησιμοποιείται στην φωτογραμμετρική αναγωγή, δεν είναι βέβαια αντιστρέψιμος) περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$x = \frac{b_{11}X + b_{12}Y + b_{13}Z + b_{14}}{b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z + 1} \quad y = \frac{b_{21}X + b_{22}Y + b_{23}Z + b_{24}}{b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z + 1} \quad (2.16 \text{ a- b})$$

Έτσι, οι παράμετροι που υπεισέρχονται είναι 11, μπορούν δηλαδή να υπολογιστούν από αυτές οι 9 παράμετροι του προσανατολισμού μιας εικόνας (6 παράμετροι του εξωτερικού + 3 του εσωτερικού). Οι λοιπές 2 αφορούν την ορθογωνικότητα των αξόνων και μια διαφορά κλίμακας, με συνέπεια να υπολογίζονται από τον DLT μια τιμή για τη σταθερά μηχανής c_x κατά την διεύθυνση x και μια τιμή c_y κατά την y . Σε περίπτωση που ισχύει αυστηρά το μοντέλο της κεντρικής προβολής, όπου δηλαδή δεν υπάρχει παραμόρφωση κλίμακας ($c_x = c_y = c$), αλλά ούτε και απόκλιση από την ορθογωνικότητα των αξόνων, οι δύο επιπλέον παράμετροι δεσμεύονται με τις ακόλουθες σχέσεις, ώστε τελικά να υπάρχουν μόνο 9 βαθμοί ελευθερίας στον μετασχηματισμό:

$$c_1 = (b_{11}b_{21} + b_{12}b_{22} + b_{13}b_{23})(b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2) - (b_{11}b_{31} + b_{12}b_{32} + b_{13}b_{33})(b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} + b_{23}b_{33}) = 0 \quad (2.17)$$

$$c_2 = (b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2 - b_{21}^2 - b_{22}^2 - b_{23}^2)(b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2) - (b_{11}b_{31} + b_{12}b_{32} + b_{13}b_{33}) + (b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} + b_{23}b_{33}) = 0 \quad (2.18)$$

Στην περίπτωση βέβαια αυτή, οι σχέσεις του άμεσου γραμμικού μετασχηματισμού δεν εκφράζουν τίποτα περισσότερο από τη συνθήκη συγγραμμικότητας.

Καίριο πλεονέκτημα του αλγορίθμου, σε αντιδιαστολή με τη συνθήκη συγγραμμικότητας, είναι ότι οι εικονοσυντεταγμένες που χρησιμοποιούνται μπορούν κάλλιστα να μην αναφέρονται στο σύστημα των εικονοσυντεταγμένων αλλά σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα, για παράδειγμα να είναι συντεταγμένες σε pixel, σε mm κ.λπ. και με οποιαδήποτε αφετηρία και κλίμακα, ενώ δεν είναι απαραίτητο να έχει προηγηθεί αποκατάσταση του εσωτερικού προσανατολισμού της εικόνας. Ωστόσο τα σημεία του χώρου που θα χρησιμοποιηθούν ως σημεία γνωστών συντεταγμένων χώρου οφείλουν να μην είναι συνεπίπεδα και πρέπει να είναι τουλάχιστον 6.

Οι σχέσεις του DLT δεν είναι γραμμικές ως προς τους αγνώστους, μπορούν όμως να γραμμικοποιηθούν πολύ απλά ώστε να προκύψουν οι ακόλουθες σχέσεις, όπου τα μεγέθη v_x , v_y δεν αφορούν διορθώσεις των μετρημένων τιμών αλλά διορθώσεις των εξισώσεων (ισούνται δηλαδή με το σφάλμα κλεισίματος της εξίσωσης παρατήρησης):

$$x + v_x = b_{11}X + b_{12}Y + b_{13}Z + b_{14} - b_{31}xX - b_{32}xY - b_{33}xZ \quad (2.19 \text{ a - b})$$

$$y + v_y = b_{21}X + b_{22}Y + b_{23}Z + b_{24} - b_{31}yX - b_{32}yY - b_{33}yZ$$

Από τις γραμμικές αυτές σχέσεις υπολογίζονται προσεγγιστικές τιμές για τις 11 παραμέτρους του άμεσου γραμμικού μετασχηματισμού, οι οποίες μπορούν στη συνέχεια να χρησιμοποιηθούν ως αρχικές τιμές για την ελαχιστοτρεγωνική επίλυση με τις μη

γραμμικές σχέσεις της Εξ. (2.4). Στην περίπτωση αυτή είναι μάλιστα δυνατόν να εισαχθούν δεσμεύσεις, αν κάποια από τα στοιχεία του εσωτερικού ή του εξωτερικού προσανατολισμού είναι γνωστά, είτε ακόμα να εισαχθούν πχ. 5 επιπλέον παράμετροι για την ακτινική διαστροφή των φακών, οι οποίες περιγράφονται από τις σχέσεις:

$$\Delta u = \xi(b_{12}r^2 + b_{13}r^4 + b_{14}r^6) + b_{15}(r^2 + 2\xi^2) + b_{16}\xi\eta \quad (2.20)$$

$$\Delta v = \eta(b_{12}r^2 + b_{13}r^4 + b_{14}r^6) + b_{16}(r^2 + 2\eta^2) + b_{15}\xi\eta \quad (2.21)$$

$$\text{όπου } \xi = x - x_o, \quad \eta = y - y_o \text{ και } r^2 = \xi^2 + \eta^2$$

Οι παράμετροι b_{12} , b_{13} , b_{14} αντιστοιχούν στους συντελεστές της ακτινικής διαστροφής και οι b_{15} , b_{16} στην έκκεντρη διαστροφή του φακού.

Τελικώς, ο μετασχηματισμός αυτός αντιμετωπίζει συνολικά το πρόβλημα του προσανατολισμού της εικόνας, τόσο του εσωτερικού όσο και εξωτερικού. Για να οριστούν πλήρως και οι 11 παράμετροί του, όπως αναφέρθηκε, απαιτείται η γνώση 6 σημείων καθώς κάθε σημείο οδηγεί σε δύο εξισώσεις. Αν είναι γνωστές $N > 6$ αντιστοιχίες σημείων, στην συνόρθωση με τη μέθοδο των εμμέσων παρατηρήσεων σχηματίζεται ο πίνακας σχεδιασμού **A** διαστάσεων $2N \times 11$. Ο αριθμός των στηλών είναι βέβαια πιθανόν να μεταβάλλεται εάν κάποια από τα στοιχεία του εσωτερικού ή εξωτερικού προσανατολισμού είναι γνωστά είτε εάν έχουν εισαχθεί πρόσθετες παράμετροι. Σε περίπτωση δε όπου εφαρμόζονται επιπλέον δεσμεύσεις, ο πίνακας αποκτά πρόσθετες σειρές με τις μερικές παραγώγους των εκφράσεων των δεσμεύσεων ως προς τους αγνώστους. Σχηματίζεται ακόμα το διάνυσμα **b** ($2N \times 1$) με τις διαφορές των οικονομοσυντεταγμένων από τις προσωρινές τιμές. Αν υπάρχουν διαφορετικές μέθοδοι μέτρησης των παρατηρούμενων ποσοτήτων εισάγεται και ο τετραγωνικός πίνακας βαρών **P**, ώστε τελικά οι διορθώσεις των προσωρινών τιμών των αγνώστων να προκύπτουν ως:

$$dx = (A'PA)^{-1}(A'b) \quad (2.22)$$

Από τις τιμές των 11 παραμέτρων μπορούν να προκύψουν οι τιμές των παραμέτρων του εσωτερικού και εξωτερικού προσανατολισμού με βάση τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\omega = \arctan\left(-\frac{b_{32}}{b_{33}}\right)$$

$$\varphi = \arctan\left(-\sin\omega \frac{b_{31}}{b_{32}}\right)$$

$$\kappa = \arctan\left(-\frac{c_x(y_o b_{31} - b_{21})}{c_y(x_o b_{31} - b_{11})}\right) \quad (2.23 \text{ a} - \text{c})$$

$$\begin{bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$B = -(r_{31}X_o + r_{32}Y_o + r_{33}Z_o) \quad (2.25)$$

$$x_o = (b_{11}b_{31} + b_{12}b_{32} + b_{13}b_{33})B^2 \quad (2.26 \text{ a})$$

$$y_o = (b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} + b_{23}b_{33})B^2 \quad (2.26 b)$$

$$c_x = \sqrt{-x_o^2 + (b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2)B^2} \quad (2.27 c)$$

$$c_y = \sqrt{-y_o^2 + (b_{21}^2 + b_{22}^2 + b_{23}^2)B^2} \quad (2.26 d)$$

$$c = \frac{c_x + c_y}{2}$$

Τα αποτελέσματα αυτά συχνά χρησιμοποιούνται ως αρχικές τιμές για διάφορα προβλήματα, όπως εκείνα της οπισθοτομίας και της αυτοβαθμόνωσης.

Τα προαναφερθέντα αφορούν το πρόβλημα προσδιορισμού των συντελεστών του μετασχηματισμού (αντίστοιχο της φωτογραμμετρικής οπισθοτομίας). Μετά από τον προσδιορισμό τους σε δύο (τουλάχιστον) επικαλυπτόμενες εικόνες είναι προφανώς δυνατόν να προσδιορίζονται και συντεταγμένες χώρου άγνωστων σημείων. Η διαδικασία αυτή είναι παρόμοια με την φωτογραμμετρική εμπροσθοτομία (ενότητα 2.5).

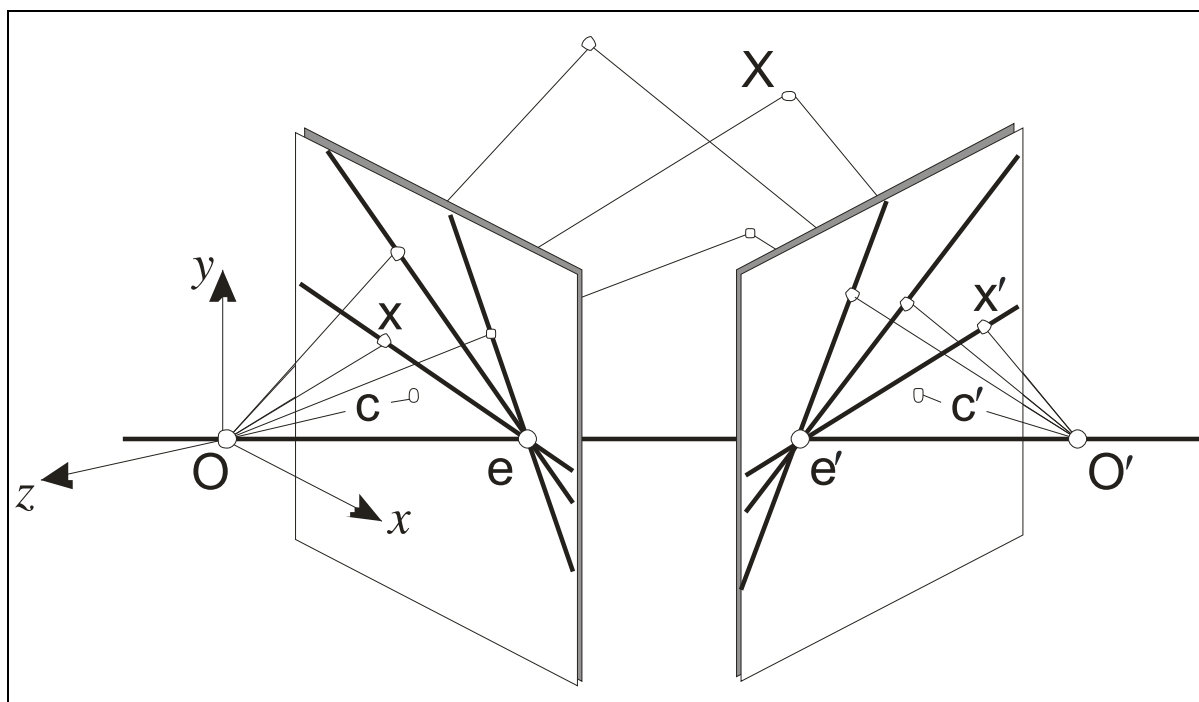
3

Εικόνες με γνωστό εσωτερικό προσανατολισμό

Για να εφαρμοστεί η πλειονότητα των διαδικασιών που μελετά η φωτογραμμετρία απαιτείται γνώση του εσωτερικού προσανατολισμού της μηχανής λήψης. Τα στοιχεία του είναι, κατά κύριο λόγο, η σταθερά c της μηχανής, η θέση x_0, y_0 του πρωτεύοντος σημείου καθώς και το πολυώνυμο της ακτινικής διαστροφής, τα οποία καθορίζουν το μοντέλο της κεντρικής προβολής που περιγράφει καλύτερα τη συγκεκριμένη μηχανή. Η αποκατάσταση του εσωτερικού προσανατολισμού αποτελεί στην ουσία ανάπλαση της δέσμης των ακτίνων. Η χρήση της συνθήκης συγγραμμικότητας, εκτός από την περίπτωση της οπισθοτομίας με βαθμονόμηση ή της συνόρθωσης δέσμης με αυτοβαθμονόμηση, όπου προσδιορίζονται και τα στοιχεία της γεωμετρίας της μηχανής, προϋποθέτει τη γνώση του εσωτερικού προσανατολισμού. Σε περίπτωση όπου αυτός είναι γνωστός μπορεί, όπως περιγράφεται στην συνέχεια, να εφαρμοστεί η συνθήκη συνεπιπεδότητας για να υπολογιστεί ο σχετικός προσανατολισμός του στερεοζεύγους. Στα ίδια αποτελέσματα οδηγεί και η εφαρμογή της μεθόδου της δέσμης με δέσμευση 7 βαθμών ελευθερίας. Πέραν από τους ανωτέρω μη γραμμικούς τρόπους υπολογισμού του σχετικού προσανατολισμού, είναι δυνατό να διατυπωθούν και γραμμικοί αλγόριθμοι για υπολογισμό αυτών των παραμέτρων. Επίσης, με γνώση του εσωτερικού προσανατολισμού και είτε του εξωτερικού είτε του σχετικού προσανατολισμού ένα ζεύγος εικόνων μπορεί να μετασχηματιστεί στο σύστημα της βάσης του και να προκύψουν επιπολικές εικόνες. Σε στερεοζεύγος με γνωστό εσωτερικό προσανατολισμό ορίζονται ακόμα οι θέσεις των πόλων και υπολογίζονται οι ομόλογες επιπολικές γραμμές. Με δεδομένο σχετικό προσανατολισμό, από εμπροσθοτομία προκύπτει ένα τρισδιάστατο μοντέλο του απεικονιζόμενου αντικειμένου. Σε περίπτωση δε όπου υπάρχουν και σημεία με γνωστές συντεταγμένες χώρου (φωτοσταθερά) είναι δυνατό να ακολουθήσει αποκατάσταση του απόλυτου προσανατολισμού για να προκύψει ένα 3D μοντέλο με σωστό σχήμα, θέση και προσανατολισμό στον χώρο. Οι παραπάνω διαδικασίες θα περιγραφούν συνοπτικά στις επόμενες ενότητες.

3.1 Σχετικός προσανατολισμός

Η διαδικασία του σχετικού προσανατολισμού αποτελεί ένα μείζον θέμα στη φωτογραμμετρία, ειδικά όσον αφορά το ζεύγος εικόνων. Πρόκειται στην ουσία για το πρόβλημα προσδιορισμού της σχετικής θέσης και των σχετικών στροφών μεταξύ δύο επικαλυπτόμενων δεσμών από ομολογίες εικόνων (Καλησπεράκης, 2010). Η αποκατάστασή του επιτρέπει την ανάπλαση του σχήματος του αντικειμένου και ταυτόχρονα εξασφαλίζει τη στερεοσκοπική παρατήρηση. Οι 5 παράμετροι που τον χαρακτηρίζουν πλήρως είναι, στην τυπική περίπτωση, οι εξής: οι σχετικές συνιστώσες b_y , b_z της βάσης των εικόνων και οι τρεις σχετικές στροφές ω , φ και κ των δύο εικόνων. Η κατά x συνιστώσα της βάσης επηρεάζει μόνο το μέγεθος του στερεομοντέλου που δημιουργείται με την αποκατάσταση του σχετικού προσανατολισμού και συνεπώς δε συμπεριλαμβάνεται στις παραμέτρους του. Ο προσανατολισμός αυτός συσχετίζει τις δύο δέσμες, ώστε να έχουν την ίδια σχετική θέση όπως κατά τη στιγμή της λήψης των εικόνων. Για να πραγματοποιηθεί αυτό απαιτείται να εξασφαλιστεί η αλληλοτομία των ομόλογων ακτίνων, και πιο συγκεκριμένα η αλληλοτομία 5 ομόλογων ακτίνων. Έτσι αποκαθίσταται η γεωμετρία του στερεοζεύγους (Σχ. 3.1), δηλαδή έχουν πλέον οριστεί οι πόλοι (e , e'), τα επιπολικά επίπεδα και τα ίχνη τους στα επίπεδα των εικόνων, οι επιπολικές ευθείες.



Σχήμα 3.1. Η γεωμετρία του στερεοζεύγους.

Για την αποκατάσταση του σχετικού προσανατολισμού, απαραίτητη προϋπόθεση αποτελεί η γνώση των στοιχείων της μηχανής – στην ουσία δηλαδή έπεται της αποκατάστασης του εσωτερικού προσανατολισμού – καθώς και οι εικονοσυντεταγμένες τουλάχιστον 5 ομόλογων σημείων, σε θέσεις κατά προτίμηση περιμετρικά της επικαλυπτόμενης περιοχής (θέσεις von Gruber), ενώ προφανώς δεν απαιτούνται σημεία με γνωστές συντεταγμένες χώρου καθώς δεν πραγματοποιείται η σύνδεση με κάποιο εξωτερικό σύστημα αναφοράς. Σε αυτό ακριβώς το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι η ακρίβεια του σχετικού προσανατολισμού εξαρτάται αποκλειστικά από την “εσωτερική

ακρίβεια των εικόνων”, και να υπογραμμιστεί η ανεξαρτησία του από την ύπαρξη φωτοσταθερών, η οποία δίνει σημαντική περίσσεια παρατηρήσεων ώστε να εξασφαλίζονται ισχυρές λύσεις (Πέτσα, 2000). Η αποκατάστασή του γίνεται με εφαρμογή της συνθήκης συνεπιπεδότητας για την εξάλειψη της κατά y παράλλαξης. Οι παράμετροι μπορούν ακόμα να υπολογιστούν με συνόρθωση δέσμης, εάν θεωρηθούν πχ. μηδενικές τιμές για όλα τα στοιχεία του εξωτερικού προσανατολισμού της αριστερής εικόνας και αυθαίρετη τιμή στην κατά x συνιστώσα της βάσης. Υπάρχουν, τέλος, και γραμμικοί τρόποι για τον υπολογισμό των τιμών των 5 αυτών παραμέτρων, ώστε να χρησιμοποιηθούν ως αρχικές τιμές για τους μη γραμμικούς τρόπους επίλυσης που αναφέρθηκαν. Στη συνέχεια θα περιγραφούν όσες μέθοδοι χρησιμοποιήθηκαν στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

3.2 Συνθήκη συνεπιπεδότητας

Η συνθήκη συνεπιπεδότητας αποτελεί την αναλυτική έκφραση του σχετικού προσανατολισμού. Όπως γίνεται αντιληπτό από την ονομασία της, υπαγορεύει τη δέσμευση τα δύο ομόλογα διανύσματα \mathbf{p}' και \mathbf{p}'' που συνδέουν το σημείο στο χώρο με τα δύο κέντρα λήψης και το διάνυσμα \mathbf{B} της βάσης να ανήκουν στο ίδιο (επιπολικό) επίπεδο.

Αυτό μαθηματικά εκφράζεται από τη σχέση (βλ. και Σχ. 3.2):

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'') = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d} = 0 \quad (3.1)$$

Αναλύοντας την παραπάνω σχέση, γίνεται κατανοητό ότι από το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{p}' \times \mathbf{p}''$ προκύπτει ένα διάνυσμα \mathbf{d} κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα δύο ομόλογα διανύσματα. Προκειμένου να ισχύει η συνθήκη, το διάνυσμα \mathbf{B} της βάσης οφείλει να είναι κάθετο στο νέο αυτό διάνυσμα \mathbf{d} , αφού πρέπει να είναι συνεπίπεδο με τα δύο ομόλογα διανύσματα. Συνεπώς, το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα \mathbf{B} της βάσης με το διάνυσμα \mathbf{d} πρέπει να είναι μηδενικό, άρα να μηδενίζεται το εσωτερικό γινόμενο των δύο αυτών διανυσμάτων, όπως και ορίζει η παραπάνω σχέση. Αναλύοντας τα τρία αυτά διανύσματα στις κατά x , y και z συνιστώσες τους, παίρνει κανείς την η σχέση:

$$\begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ p'_x & p'_y & p'_z \\ p''_x & p''_y & p''_z \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

Όπως προαναφέρθηκε, στον σχετικό προσανατολισμό, η συνιστώσα B_x της βάσης δεν υπολογίζεται, καθώς επηρεάζει μόνο την κλίμακα του μοντέλου. Οι συνιστώσες, λοιπόν, B_y και B_z ανάγονται στην κατά x συνιστώσα και τελικά προκύπτει:

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta'_y & \beta'_z \\ p'_x & p'_y & p'_z \\ p''_x & p''_y & p''_z \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3)$$

όπου $\beta_y = B_y/B_x$ και $\beta_z = B_z/B_x$.

Εάν ο πίνακας στροφής \mathbf{R}_Σ εκφράζει τη στροφή της δεξιάς εικόνας στο σύστημα της αριστερής, τα δύο ομόλογα διανύσματα, εκφρασμένα στο σύστημα της αριστερής εικόνας, αναλύονται στα εξής:

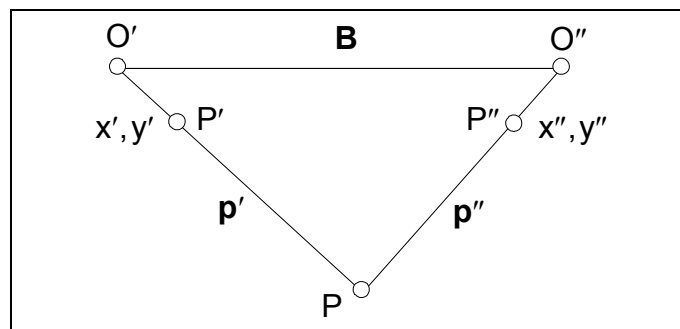
$$\vec{p}' = O'P = k' \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = k' \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ -c \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\vec{p}'' = O''P = \begin{bmatrix} p''_x \\ p''_y \\ p''_z \end{bmatrix} = k'' \mathbf{R}_\Sigma \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ -c \end{bmatrix} = k'' \begin{bmatrix} x''_\delta \\ y''_\delta \\ -c_\delta \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

οπότε και προκύπτει η τελική έκφραση της συνθήκης συνεπιπεδότητας :

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta_y & \beta_z \\ x' & y' & -c \\ x'_\delta & y'_\delta & -c_\delta \end{vmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

Αξίζει να σημειωθεί πως σε αυτή την έκφραση οι εικονοσυντεταγμένες αναφέρονται στο πρωτεύον σημείο, καθώς θεωρείται ότι έχει προηγηθεί αποκατάσταση του εσωτερικού προσανατολισμού. Οι τρεις παράμετροι ω , ϕ , κ του σχετικού προσανατολισμού που δεν εμφανίζονται άμεσα στην παραπάνω σχέση εμπεριέχονται προφανώς στις μετασχηματισμένες μέσω του πίνακα στροφής (Εξ. 3.5) εικονοσυντεταγμένες της δεξιάς εικόνας.



Εικόνα 3.2: Η συνθήκη συνεπιπεδότητας (Πέτσα, 2000).

Η ορίζουσα της Εξ. 3.6 δίνει τελικά την ακόλουθη έκφραση της συνθήκης συνεπιπεδότητας που χρησιμοποιείται στην πράξη:

$$\begin{aligned} & c (x''r_{12} + y''r_{22} - cr_{32}) + y' (x''r_{13} + y''r_{23} - cr_{33}) \\ & - \beta_y [x' (x''r_{13} + y''r_{23} - cr_{33}) + c(x''r_{11} + y''r_{21} - cr_{31})] \\ & + \beta_z [x' (x''r_{12} + y''r_{22} - cr_{32}) - y' (x''r_{11} + y''r_{21} - cr_{31})] = 0 \quad (3.7) \end{aligned}$$

με βάση την οποία καθίσταται πλέον δυνατός ο υπολογισμός των πέντε παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού.

Για την αποκατάσταση του σχετικού προσανατολισμού με τη συνθήκη συνεπιπεδότητας χρειάζονται κατ' ελάχιστον 5 ομολογίες σημείων. Σε περίπτωση όπου είναι διαθέσιμος μεγαλύτερος αριθμός η επίλυση πραγματοποιείται με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Η συνθήκη συνεπιπεδότητας δεν αποτελεί βέβαια γραμμικό πρόβλημα, κατ' επέκταση είναι και εδώ απαραίτητες οι προσεγγιστικές τιμές, ιδιαίτερα σε επίγειες λήψεις όπου συχνά υπάρχουν έντονες σχετικές στροφές, οι οποίες μπορούν να εκτιμηθούν γραμμικά, όπως αναφέρεται σε επόμενη ενότητα αυτού το κεφαλαίου.

Η επίλυση με Μ.Ε.Τ. επιδέχεται δύο τρόπους αντιμετώπισης. Κατ' αρχάς, θα μπορούσε να ελαχιστοποιείται το σφάλμα κλεισίματος της συνθήκης:

$$-F^o - v_F = \frac{\partial F}{\partial \beta_y} \Delta \beta_y + \frac{\partial F}{\partial \beta_z} \Delta \beta_z + \frac{\partial F}{\partial \omega_\Sigma} \Delta \omega_\Sigma + \frac{\partial F}{\partial \varphi_\Sigma} \Delta \varphi_\Sigma + \frac{\partial F}{\partial \kappa_\Sigma} \Delta \kappa_\Sigma \quad (3.8)$$

Οι διορθώσεις v_F που υπολογίζονται από την επίλυση αφορούν το σφάλμα κλεισίματος, ενώ το τυπικό σφάλμα δεν μπορεί να μπορεί να ερμηνευτεί άμεσα, καθώς δεν αναφέρεται στην ακρίβεια μέτρησης των εικονοσυντεταγμένων. Η επίλυση βασίζεται κατά τα γνωστά στην σχέση:

$$l - v = A\Delta \quad (3.9)$$

Όπου v : το διάνυσμα των υπολοίπων (εναπομένοντα σφάλματα)

A : ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων

Δ : το διάνυσμα των βέλτιστων εκτιμήσεων των αγνώστων

Γενικά όμως είναι προτιμότερο να γίνει επίλυση με τη γενική μέθοδο, όπου ως παρατήρηση θεωρούνται τα άμεσα μετρημένα μεγέθη. Το μαθηματικό μοντέλο της γενικής μεθόδου είναι:

$$w + Bv + A\Delta = 0 \quad (3.10)$$

όπου v : το διάνυσμα των υπολοίπων (εναπομένοντα σφάλματα)

A : ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων

B : ο πίνακας των συντελεστών των μετρήσεων

Δ : το διάνυσμα των βέλτιστων εκτιμήσεων των αγνώστων

w : το διάνυσμα με τις διαφορές κλεισίματος της συνθήκης.

Πιο συγκεκριμένα, κάθε εξίσωση παρατήρησης περιλαμβάνει τις 4 εικονοσυντεταγμένες κάθε σημείου. Για N μετρημένα ομόλογα σημεία, σχηματίζονται οι πίνακες $A(N \times 5)$ με τις μερικές παραγώγους της εξίσωσης παρατήρησης ως προς τις 5 παραμέτρους του σχετικού προσανατολισμού, $B(N \times 4N)$ με τις μερικές παραγώγους της εξίσωσης παρατήρησης ως προς τις παρατηρήσεις και το διάνυσμα $w(N \times 1)$ με το σφάλμα κλεισίματος κάθε εξίσωσης. Η επίλυση της συνόρθωσης (για εικονοσυντεταγμένες ίσης ακρίβειας) δίνει:

$$\Delta = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} w \quad (3.11)$$

όπου $\mathbf{M} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$, ενώ το διάνυσμα των εναπομενόντων σφαλμάτων των μετρημένων εικονοσυντεταγμένων προκύπτει ως:

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{w} + \mathbf{A}\Delta) \quad (3.12)$$

Οι βαθμοί ελευθερίας της επίλυσης είναι N-5. Στην συνέχεια εμφανίζονται εντελώς ενδεικτικά, οι πίνακες \mathbf{A} και \mathbf{B} στην περίπτωση όπου είναι γνωστές 3 ομολογίες σημείων. Είναι σαφές ότι αυτός ο αριθμός ομολογιών δεν καλύπτει τις απαιτήσεις για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού, απλώς χρησιμοποιείται για να δοθεί συνοπτικά η μορφή των πινάκων.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} \frac{\partial F_1}{\partial b_y} & \frac{\partial F_1}{\partial b_z} & \frac{\partial F_1}{\partial \omega} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_1}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial F_2}{\partial b_y} & \frac{\partial F_2}{\partial b_z} & \frac{\partial F_2}{\partial \omega} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_2}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial F_3}{\partial b_y} & \frac{\partial F_3}{\partial b_z} & \frac{\partial F_3}{\partial \omega} & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_3}{\partial \kappa} \end{array} \right] \end{array} \quad (3.13 \text{ a -b})$$

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & \text{Σημείο 1} & & \text{Σημείο 2} & & \text{Σημείο 3} & \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y'_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x'_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y'_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial y_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x'_3} & \frac{\partial F_3}{\partial y'_3} \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

Σε περίπτωση όπου τα παρατηρούμενα μεγέθη έχουν μετρηθεί με διαφορετικό τρόπο είναι δυνατή η θεώρηση των παρατηρήσεων ως ανισοβαρών και η απόδοση βάρους σε κάθε παρατήρηση. Η διαδικασία αυτή καταλήγει στη εισαγωγή στην συνόρθωση και ενός τετραγωνικού πίνακα βαρών \mathbf{P} .

3.3 Φωτοτριγωνισμός

Μία από τις σημαντικότερες απαιτήσεις της φωτογραμμετρίας είναι η σύνδεση της εικόνας με ένα σύστημα του χώρου στο οποίο είναι μετρημένα ορισμένα από τα απεικονιζόμενα σημεία. Η διαδικασία αυτή ονομάστηκε αρχικά αεροτριγωνισμός, προκειμένου όμως να καλύπτει και τις ανάγκες της επίγειας φωτογραμμετρίας γενικεύτηκε σε φωτοτριγωνισμό (Καλησπεράκης & Τζάκος, 2001). Παράλληλα, μπορεί να συνδέει και εικόνες μεταξύ τους με την εξασφάλιση πολλαπλών αλληλοτομιών. Έτσι, ο φωτοτριγωνισμός δεν είναι απαραίτητο να συνδέει τις εικόνες με τον χώρο, αλλά μπορεί

κάλλιστα να εφαρμοστεί και για την βέλτιστη σύνδεση των εικόνων μεταξύ τους σε αυθαίρετο σύστημα (πράγμα που είναι το πολυεικονικό αντίστοιχο του σχετικού προσανατολισμού, με δέσμευση φυσικά και εδώ 7 παραμέτρων που ορίζουν το datum).

Ο επίσημος ορισμός του αεροτριγωνισμού, όπως υπαγορεύεται από τη Διεθνή Εταιρεία Φωτογραμμετρίας και Τηλεπισκόπησης (ISPRS) είναι: “Αεροτριγωνισμός είναι η διαδικασία πύκνωσης του οριζοντιογραφικού και υψομετρικού δικτύου ελέγχου, κατά την οποία οι μετρήσεις γωνιών και αποστάσεων σε επικαλυπτόμενες εικόνες συσχετίζονται σε ενιαία λύση στο χώρο με την βοήθεια των προοπτικών ιδιοτήτων των εικόνων”. Βέβαια, με την πάροδο του χρόνου ο σκοπός του φωτοτριγωνισμού απομακρυνόταν από την “πύκνωση του δικτύου” και έτεινε ολοένα και περισσότερο στον υπολογισμό των εξωτερικών (ή σχετικών προσανατολισμών σε αυθαίρετο σύστημα, όπως προαναφέρθηκε) των εικόνων.

Ο φωτοτριγωνισμός αποτελεί λοιπόν στην ουσία ενιαία συνόρθωση, στην οποία συμμετέχουν εικονοσυντεταγμένες καθώς και συντεταγμένες χώρου, τόσο σημείων σύνδεσης (άγνωστων) όσο και φωτοσταθερών (γνωστών). Μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο μεθόδους, είτε παλαιότερα με τη μέθοδο των ανεξάρτητων μοντέλων είτε με την επικρατούσα πλέον μέθοδο της δέσμης. Με την πάροδο των χρόνων, η δεύτερη μέθοδος υπερτέρησε πλήρως, καθώς προσφέρει τη δυνατότητα για αυτοβαθμονόμηση, συμμετοχή πρόσθετων παρατηρήσεων, πχ. από GPS, όπως και πρόσθετων παραμέτρων που αφορούν την αποχή του μοντέλου εκείνο της κεντρικής προβολής, ή και την εισαγωγή άλλων γεωμετρικών δεσμεύσεων. Είναι μέθοδος ακριβής, με άμεσο μαθηματικό μοντέλο συσχετισμού εικονοσυντεταγμένων με συντεταγμένες χώρου/μοντέλου, και παρέχει τη δυνατότητα συνόρθωσης κάθε είδους εικόνων με κάθε γεωμετρία δικτύου. Στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας εφαρμόστηκε η μέθοδος της δέσμης στο στερεοζεύγος χωρίς φωτοσταθερά.

3.3.1 Επίλυση με την μέθοδο της δέσμης

Στη μέθοδο της δέσμης βασικό στοιχείο, όπως φαίνεται και από το όνομά της, αποτελεί η δέσμη ακτίνων της εικόνας, εξίσωση δε παρατήρησης είναι η εξίσωση συγγραμμικότητας. Η επίλυση γενικά πραγματοποιείται με έμμεσες παρατηρήσεις. Άγνωστες παραμέτρους αποτελούν οι συντεταγμένες χώρου (ή μοντέλου) των σημείων σύνδεσης και οι 6 παράμετροι του εξωτερικού προσανατολισμού για κάθε εικόνα, ενώ παρατηρούμενα μεγέθη είναι οι εικονοσυντεταγμένες φωτοσταθερών και σημείων σύνδεσης. Στην περίπτωση της επίλυσης δέσμης με αυτοβαθμονόμηση, άγνωστες είναι και οι παράμετροι της μηχανής. Τα ελάχιστα φωτοσταθερά που απαιτούνται για την επίλυση του φωτοτριγωνισμού σε δεδομένο σύστημα του χώρου είναι γενικά 2 πλήρη φωτοσταθερά και ένα υψομετρικό, προκειμένου να καλύψουν τους 7 βαθμούς ελευθερίας του μπλοκ εικόνων, που στην ουσία είναι 3 μετατοπίσεις, 3 στροφές και ένας συντελεστής κλίμακας (3D μετασχηματισμός ομοιότητας). Σε περίπτωση βέβαια απουσίας φωτοσταθερών επιβάλλεται η δέσμευση των 7 βαθμών ελευθερίας με άλλο τρόπο (ορισμός αυθαίρετου συστήματος αναφοράς).

Στην εργασία αυτή η επίλυση δέσμης περιορίστηκε σε ζεύγος εικόνων για τον υπολογισμό των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού, δηλαδή χωρίς χρήση φωτοσταθερών παρά μόνο σημείων σύνδεσης (με επέκταση, όπως θα εξηγηθεί σε επόμε-

νο κεφάλαιο και για μερική αυτοβαθμονόμηση των μηχανών). Οι 7 δεσμεύσεις που απαιτούνται ορίστηκαν με μηδενικές τιμές στα στοιχεία του εξωτερικού προσανατολισμού της αριστερής εικόνας και μια αυθαίρετη τιμή συντεταγμένης X_{o2} του σημείου λήψης της δεξιάς εικόνας, δηλαδή με ορισμό της κατά x συνιστώσας της βάσης του μοντέλου που, όπως έχει αναφερθεί, επιδρά μόνο στο μέγεθός του. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζονται οι άγνωστοι στο σύστημα της αριστερής εικόνας. Άγνωστοι στην περίπτωση αυτή είναι οι υπόλοιπες 5 παράμετροι προσανατολισμού της δεξιάς εικόνας στο σύστημα της αριστερής και οι $3 \times N$ συντεταγμένες μοντέλου των N σημείων σύνδεσης. Για κάθε σημείο προκύπτουν δύο εξισώσεις παρατήρησης, άρα από τη στιγμή που κάθε σημείο εμφανίζεται και στις δύο εικόνες ο συνολικός αριθμός των εξισώσεων παρατήρησης είναι $4 \times N$. Προφανώς, με 5 σημεία σύνδεσης το πρόβλημα επιλύεται χωρίς περίσσεια παρατηρήσεων (4×5 εξισώσεις και $5 + 3 \times 5$ άγνωστοι). Η συνθήκη συγγραμμικότητας δεν είναι γραμμική ως προς τους αγνώστους και για τον λόγο αυτό γραμμικοποιείται ως εξής:

$$b_x = x' - x^o = \frac{\partial X}{\partial X_o} \partial X_o + \frac{\partial X}{\partial Y_o} \partial Y_o + \frac{\partial X}{\partial Z_o} \partial Z_o + \frac{\partial X}{\partial \omega} \partial \omega + \frac{\partial X}{\partial \varphi} \partial \varphi + \frac{\partial X}{\partial \kappa} \partial \kappa + \frac{\partial X}{\partial X} \partial X + \frac{\partial X}{\partial Y} \partial Y + \frac{\partial X}{\partial Z} \partial Z + v_x \quad (3.14 a - b)$$

$$b_y = y' - y^o = \frac{\partial y}{\partial X_o} \partial X_o + \frac{\partial y}{\partial Y_o} \partial Y_o + \frac{\partial y}{\partial Z_o} \partial Z_o + \frac{\partial y}{\partial \omega} \partial \omega + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \partial \varphi + \frac{\partial y}{\partial \kappa} \partial \kappa + \frac{\partial y}{\partial X} \partial X + \frac{\partial y}{\partial Y} \partial Y + \frac{\partial y}{\partial Z} \partial Z + v_y$$

Προσεγγιστικές τιμές για τις 5 παραμέτρους του σχετικού προσανατολισμού της δεξιάς εικόνας μπορούν να εξασφαλιστούν αυτόματα από γραμμικούς αλγορίθμους (βλ. ενότητα 3.4), ενώ για τις συντεταγμένες μοντέλου των σημείων σύνδεσης από στην περίπτωση της απλής εμπροσθοτομίας (ενότητα 2.5). Τελικά προκύπτει ο πίνακας σχεδιασμού **A** με τις μερικές παραγώγους ως προς τους αγνώστους και διαστάσεις $(4 \times N) \times (5 + 3 \times N)$, ο οποίος έχει της εξής μορφή (ενδεικτικά για 3 σημεία σύνδεσης):

Εικόνα 2					Σημείο 1				Σημείο 2				Σημείο 3
0	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{11}}{\partial X_1}$	$\frac{\partial x_{11}}{\partial Y_1}$	$\frac{\partial x_{11}}{\partial Z_1}$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{11}}{\partial X_1}$	$\frac{\partial y_{11}}{\partial Y_1}$	$\frac{\partial y_{11}}{\partial Z_1}$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{12}}{\partial X_2}$	$\frac{\partial x_{12}}{\partial Y_2}$	$\frac{\partial x_{12}}{\partial Z_2}$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{12}}{\partial X_2}$	$\frac{\partial y_{12}}{\partial Y_2}$	$\frac{\partial y_{12}}{\partial Z_2}$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{13}}{\partial X_3}$	$\frac{\partial x_{13}}{\partial Y_3}$	$\frac{\partial x_{13}}{\partial Z_3}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{13}}{\partial X_3}$	$\frac{\partial y_{13}}{\partial Y_3}$	$\frac{\partial y_{13}}{\partial Z_3}$

3. Εικόνες με γνωστό εσωτερικό προσανατολισμό

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 \frac{\partial x_{21}}{\partial Y_{o2}} & \frac{\partial x_{21}}{\partial Z_{o2}} & \frac{\partial x_{21}}{\partial \omega_2} & \frac{\partial x_{21}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial x_{21}}{\partial \kappa_2} & \frac{\partial x_{21}}{\partial X_1} & \frac{\partial x_{21}}{\partial Y_1} & \frac{\partial x_{21}}{\partial Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\partial y_{21}}{\partial Y_{o2}} & \frac{\partial y_{21}}{\partial Z_{o2}} & \frac{\partial y_{21}}{\partial \omega_2} & \frac{\partial y_{21}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial y_{21}}{\partial \kappa_2} & \frac{\partial y_{21}}{\partial X_1} & \frac{\partial y_{21}}{\partial Y_1} & \frac{\partial y_{21}}{\partial Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\partial x_{22}}{\partial Y_{o2}} & \frac{\partial x_{22}}{\partial Z_{o2}} & \frac{\partial x_{22}}{\partial \omega_2} & \frac{\partial x_{22}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial x_{22}}{\partial \kappa_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial x_{22}}{\partial X_2} & \frac{\partial x_{22}}{\partial Y_2} & \frac{\partial x_{22}}{\partial Z_2} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\partial y_{22}}{\partial Y_{o2}} & \frac{\partial y_{22}}{\partial Z_{o2}} & \frac{\partial y_{22}}{\partial \omega_2} & \frac{\partial y_{22}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial y_{22}}{\partial \kappa_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial y_{22}}{\partial X_2} & \frac{\partial y_{22}}{\partial Y_2} & \frac{\partial y_{22}}{\partial Z_2} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\partial x_{23}}{\partial Y_{o2}} & \frac{\partial x_{23}}{\partial Z_{o2}} & \frac{\partial x_{23}}{\partial \omega_2} & \frac{\partial x_{23}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial x_{23}}{\partial \kappa_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial x_{23}}{\partial X_3} & \frac{\partial x_{23}}{\partial Y_3} & \frac{\partial x_{23}}{\partial Z_3} \\
 \frac{\partial y_{23}}{\partial Y_{o2}} & \frac{\partial y_{23}}{\partial Z_{o2}} & \frac{\partial y_{23}}{\partial \omega_2} & \frac{\partial y_{23}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial y_{23}}{\partial \kappa_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial y_{23}}{\partial X_3} & \frac{\partial y_{23}}{\partial Y_3} & \frac{\partial y_{23}}{\partial Z_3} \\
 \frac{\partial Y_{o2}}{\partial X_3} & \frac{\partial Z_{o2}}{\partial X_3} & \frac{\partial \omega_2}{\partial X_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_3} & \frac{\partial \kappa_2}{\partial X_3} & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

(3.15)

ενώ το διάνυσμα \mathbf{dx} (5 + 3×N) των διορθώσεων των αγνώστων για το συγκεκριμένο παράδειγμα θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{dx} = \begin{bmatrix} \delta Y_{o2} \\ \delta Z_{o2} \\ \delta \omega_2 \\ \delta \varphi_2 \\ \delta \kappa_2 \\ \delta X_1 \\ \delta Y_1 \\ \delta Z_1 \\ \delta X_2 \\ \delta Y_2 \\ \delta Z_2 \\ \delta X_3 \\ \delta Y_3 \\ \delta Z_3 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Τέλος, στην επίλυση συμμετέχει και το διάνυσμα \mathbf{b} (4×N) των ανηγμένων παρατηρήσεων με την ακόλουθη μορφή στη συγκεκριμένη περίπτωση:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x'_{11} - x^o_{11} \\ y'_{11} - y^o_{11} \\ x'_{12} - x^o_{12} \\ y'_{12} - y^o_{12} \\ x'_{13} - x^o_{13} \\ y'_{13} - y^o_{13} \\ x'_{21} - x^o_{21} \\ y'_{21} - y^o_{21} \\ x'_{22} - x^o_{22} \\ y'_{22} - y^o_{22} \\ x'_{23} - x^o_{23} \\ y'_{23} - y^o_{23} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Οι βαθμοί ελευθερίας που χαρακτηρίζουν αυτή την διαδικασία επαναληπτικής

συνόρθωσης με βάση το μαθηματικό μοντέλο των εμμέσων παρατηρήσεων ισούνται με $(4 \times N) - (5 + 3 \times N)$.

3.4 Γραμμικοί αλγόριθμοι σχετικού προσανατολισμού

Οι μη γραμμικοί αυτοί αλγόριθμοι, αν και δίνουν ακριβή αποτελέσματα για τις 5 παραμέτρους του σχετικού προσανατολισμού των δύο εικόνων, απαιτούν προσωρινές τιμές. Η ανάπτυξη γραμμικών αλγορίθμων επίλυσης του σχετικού προσανατολισμού που εκ των πραγμάτων δεν εμφανίζουν απαίτηση για αρχικές τιμές αποτέλεσε σημαντικό μέλημα των ερευνητών στο πεδίο της όρασης υπολογιστών και της φωτογραμμετρίας. Κεντρική ιδέα των αλγορίθμων αυτών ήταν η διατύπωση ενός πίνακα 3×3 , από τα στοιχεία του οποίου θα υπολογιστούν μετά οι 5 παράμετροι του σχετικού προσανατολισμού του ζεύγους. Οι παρατηρήσεις των εικονοσυντεταγμένων αναπτύσσονται γραμμικά ως προς τα στοιχεία του πίνακα, επειδή δε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει είναι ομογενές, ένα από τα στοιχεία του ορίζεται αυθαίρετα και οι υπόλοιπες 8 παράμετροι (που είναι εξαρτημένες μεταξύ τους) οδηγούν στον υπολογισμό των 5 ανεξάρτητων παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού. Ανάλογους αλγορίθμους ανέπτυξαν, όπως αναφέρθηκε, οι Stefanovic (1973), Khlebnikova (1983), Chang (1986), Shih (1994) και άλλοι. Στην συνέχεια θα αναλυθεί ο αλγόριθμος RLT (Relative Linear Transformation), όπως αυτός ονομάστηκε στην Φωτογραμμετρία, ο οποίος αποτελεί έκφραση του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα, γνωστού στην βιβλιογραφία της όρασης υπολογιστών ως *essential matrix*. Αρκετοί ερευνητές, όπως οι Longuet-Higgins (1981) και Huang & Faugeras (1989), ασχολήθηκαν με τη διατύπωση της έννοιας του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα και τον τρόπο υπολογισμού του από ομολογίες σημείων, καθώς και με εναλλακτικές εκφράσεις των δεσμεύσεων που αυτός οφείλει να πληροί.

Τέλος, μελετώντας τους προαναφερθέντες μη γραμμικούς αλγορίθμους σχηματίζει κανείς την εντύπωση ότι ο σχετικός προσανατολισμός έχει πάντοτε μόνο μία λύση. Αυτό όμως δεν ισχύει, καθώς οι μη γραμμικοί αλγόριθμοι είναι δυνατό να συγκλίνουν στην σωστή λύση μόνο χάρη στη χρήση καλών προσωρινών τιμών. Η μελέτη στο πεδίο της όρασης υπολογιστών επανέφερε στο προσκήνιο το ζήτημα της πολλαπλότητας των λύσεων του. Ειδικότερα σε περίπτωση που διατίθενται μόνο 5 ομολογίες σημείων, πρώτος ο Αυστριακός μαθηματικός E. Kyrppa έδειξε το 1913 την ύπαρξη 11 πιθανών λύσεων (Καλησπεράκης, 2010) στηριζόμενος στις ιδιότητες “της απόλυτης κωνικής”, μιας μιγαδικής κωνικής του απείρου, ενώ οι Faugeras & Maybank (1990) απέδειξαν ότι, τελικά, οι πιθανές λύσεις (πραγματικές ή μιγαδικές) είναι 10 και πρότειναν τρόπους για τον υπολογισμό τους (βλ. αναλυτικότερα Καλησπεράκης, 2010).

3.4.1 RLT

Ο Shih (1994), βασιζόμενος σε προηγούμενες έρευνες των Khlebnikova (1983) και Chang (1986), ανέπτυξε τον αλγόριθμο RLT (Relative Linear Transformation – βλ. και Μπουτσικάκης, 2003), ο οποίος μπορεί, υπό μια έννοια, να παρομοιαστεί με τον DLT, όπως αυτός αναλύθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, με τη διαφορά ότι εδώ απαιτείται γνώση των στοιχείων του εσωτερικού προσανατολισμού, και κυρίως ότι συσχετίζει τα συστήματα των δύο εικόνων και όχι το σύστημα της εικόνας με εκείνο του

χώρου. Τέλος, συνδέεται κυρίως με τη συνθήκη συνεπιπεδότητας και όχι τη συνθήκη συγγραμμικότητας, όπως ο άμεσος γραμμικός μετασχηματισμός. Εάν λοιπόν αναπτυχθεί η συνθήκη συνεπιπεδότητας (Εξ. 3.6) προκύπτει η γραμμική σχέση :

$$L_1yx' + L_2yy' - L_3yc' + L_4cx' + L_5cy' - L_6cc' + L_7xx' + L_8xy' - L_9xc' = 0 \quad (3.18)$$

$$\text{όπου } L_1 = B_x r_{31} - B_z r_{11} \quad L_2 = B_x r_{32} - B_z r_{12} \quad L_3 = B_x r_{33} - B_z r_{13}$$

$$L_4 = B_x r_{21} - B_y r_{11} \quad L_5 = B_x r_{22} - B_y r_{12} \quad L_6 = B_x r_{23} - B_y r_{13}$$

$$L_7 = B_z r_{21} - B_y r_{31} \quad L_8 = B_z r_{22} - B_y r_{32} \quad L_9 = B_z r_{23} - B_y r_{33}$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι ομογενείς, συνεπώς ένας από τους αγνώστους μπορεί να απαλειφεί. Η επιλογή του αγνώστου αυτού εξαρτάται τόσο από τον πίνακα στροφής όσο και από τον πίνακα μετάθεσης που περιλαμβάνει τις συνιστώσες της βάσης. Για τις περισσότερες των περιπτώσεων όπου η κατά x συνιστώσα είναι σημαντικά μεγαλύτερη, η απαλοιφή του συντελεστή L_5 λειτουργεί με επιτυχία, ώστε τελικά να προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$L'_1yx' + L'_2yy' - L'_3yc' + L'_4cx' + L'_5cy' - L'_6cc' + L'_7xx' + L'_8xy' - L'_9xc' = 0 \quad (3.19)$$

$$\text{όπου } L'_i = L_i/L_5.$$

Ο πίνακας στροφής \mathbf{R} που πρόκειται να υπολογιστεί οφείλει να είναι ορθογώνιος. Από τη δέσμευση αυτή απορρέουν οι ακόλουθες 6 μαθηματικές εκφράσεις:

$$L_1'^2 + L_2'^2 + L_3'^2 = \frac{B_x^2 + B_z^2}{L_5^2} \quad (3.20 a - f)$$

$$L_4'^2 + L_5'^2 + L_6'^2 = (B_y^2 + B_x^2)/L_5^2$$

$$L_7'^2 + L_8'^2 + L_9'^2 = (B_y^2 + B_z^2)/L_5^2$$

$$L_1L_4 + L_2L_5 + L_3L_6 = B_yB_z$$

$$L_1L_7 + L_2L_8 + L_3L_9 = -B_yB_x$$

$$L_7L_4 + L_8L_5 + L_9L_6 = B_xB_z$$

Λύνοντας τις πρώτες τρεις εξισώσεις και θέτοντας $B_x = 1$, παίρνει κανείς τα εξής:

$$L_5^2 = \frac{2B_x^2}{a + b - c} \quad (3.21)$$

$$B_y^2 = \frac{L_5^2(b + c - a)}{2} \quad (3.22)$$

$$B_z^2 = \frac{L_5^2(b + a - c)}{2} \quad (3.23)$$

$$\text{όπου } \alpha = L_1'^2 + L_2'^2 + L_3'^2 \quad (3.24 a - c)$$

$$b = L_4'^2 + L_5'^2 + L_6'^2$$

$$c = L_7'^2 + L_8'^2 + L_9'^2$$

Όμως οι Εξ. 3.22 και 3.23 από τις οποίες προκύπτουν οι δύο συνιστώσες της βάσης B_y , B_z καθώς και η τιμή της παραμέτρου L_5 δίνουν ως αποτέλεσμα δύο ίδιες τιμές με αντίθετο πρόσημο. Αυτό υποδηλώνει εδώ την πολλαπλότητα των λύσεων του σχετικού προσανατολισμού. Για καλύτερη αντιμετώπιση του προβλήματος έχουν διατυπωθεί και οι ακόλουθες εξισώσεις για τον προσδιορισμό των B_y και B_z , οι οποίες δεν εξαρτώνται από την τιμή του προσήμου του L_5 , το οποίο δεν είναι δυνατόν να βρεθεί.

$$B_y = -\frac{L_1L_7 + L_2L_8 + L_3L_9}{B_x} \quad (3.25)$$

$$B_z = \frac{L_4L_7 + L_5L_8 + L_3L_9}{B_x} \quad (3.26)$$

Τα στοιχεία του πίνακα στροφής μπορούν να υπολογιστούν από την σχέση:

$$\begin{bmatrix} -B_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_x & 0 & 0 \\ 0 & -B_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_x & 0 \\ 0 & 0 & -B_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_x \\ -B_y & 0 & 0 & B_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_y & 0 & 0 & B_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_y & 0 & 0 & B_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_z & 0 & 0 & -B_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_z & 0 & 0 & -B_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_z & 0 & 0 & -B_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \\ r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \\ L_9 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Ο πίνακας αυτός με διαστάσεις 9×9 έχει βαθμό 6. Έτσι από τις 9 εξισώσεις που προκύπτουν από την παραπάνω σχέση μόνο οι 6 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Συνεπώς απαιτούνται άλλες 3 εξισώσεις, οι οποίες πηγάζουν από τη δέσμευση ορθογωνιότητας του πίνακα στροφής. Ισχύουν λοιπόν οι σχέσεις:

$$L_3L_5 - L_2L_6 = B_x^2r_{11} + B_xB_zr_{31} + B_xB_yr_{21} \quad (3.28 a - i)$$

$$L_1L_6 - L_3L_4 = B_x^2r_{12} + B_xB_zr_{32} + B_xB_yr_{22}$$

$$L_2L_4 - L_1L_5 = B_x^2r_{13} + B_xB_zr_{33} + B_xB_yr_{23}$$

$$L_2L_7 - L_1L_8 = B_z^2r_{33} + B_xB_zr_{13} + B_yB_zr_{23}$$

$$L_3L_8 - L_2L_9 = B_z^2r_{31} + B_xB_zr_{11} + B_yB_zr_{21}$$

$$L_1L_9 - L_3L_7 = B_z^2r_{32} + B_xB_zr_{12} + B_yB_zr_{22}$$

$$L_4L_9 - L_6L_7 = B_y^2r_{22} + B_xB_yr_{12} + B_yB_zr_{32}$$

$$L_6L_8 - L_5L_9 = B_y^2r_{21} + B_xB_zr_{11} + B_yB_zr_{31}$$

$$L_5L_7 - L_4L_8 = B_z^2r_{23} + B_xB_yr_{13} + B_yB_zr_{33}$$

Από τις προ αναφερθείσες σχέσεις μόνο οι 3 είναι γραμμικά ανεξάρτητες, γι' αυτό και θα πρέπει να επιλεγούν προσεκτικά όσες θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των 9 στοιχείων του πίνακα στροφής. Τελικά οι 9 αυτές παράμετροι υπολογίζονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{bmatrix} -B_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_x & 0 & 0 \\ 0 & -B_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_x & 0 \\ 0 & 0 & -B_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_x \\ -B_y & 0 & 0 & B_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_y & 0 & 0 & B_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_y & 0 & 0 & B_x & 0 & 0 & 0 \\ B_x^2 & 0 & 0 & B_x B_y & 0 & 0 & B_x B_z & 0 & 0 \\ 0 & B_x^2 & 0 & 0 & B_x B_y & 0 & 0 & B_x B_z & 0 \\ 0 & 0 & B_x^2 & 0 & 0 & B_x B_y & 0 & 0 & B_x B_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \\ r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_3 L_5 - L_2 L_6 \\ L_1 L_6 - L_3 L_4 \\ L_2 L_4 - L_1 L_5 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Προκειμένου όμως να αποφευχθεί η αντιστροφή πινάκων και οι υπολογιστικά απαιτητικές πράξεις που προκύπτουν από την παραπάνω ισότητα, εξάγονται οι ακόλουθες γραμμικές σχέσεις για τον υπολογισμό των στοιχείων του πίνακα στροφής:

$$r_{11} = \frac{L_3 L_5 - L_2 L_6 - B_z L_1 - B_y L_4}{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (3.30 \text{ a} - i)$$

$$r_{12} = \frac{L_1 L_6 - L_3 L_4 - B_z L_2 - B_y L_5}{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

$$r_{13} = \frac{L_2 L_4 - L_1 L_5 - B_z L_3 - B_y L_6}{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

$$r_{31} = \frac{B_z r_{11} + L_1}{B_x}$$

$$r_{32} = \frac{B_z r_{12} + L_2}{B_x}$$

$$r_{33} = \frac{B_z r_{13} + L_3}{B_x}$$

$$r_{21} = \frac{B_y r_{11} + L_4}{B_x}$$

$$r_{22} = \frac{B_y r_{12} + L_5}{B_x}$$

$$r_{23} = \frac{B_y r_{13} + L_6}{B_x}$$

Από τα στοιχεία αυτά μπορούν να υπολογιστούν οι γωνίες στροφής ω , φ , κ με τον τρόπο που έχει αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Υπάρχουν δύο διαφορετικοί πιθανοί συνδυασμοί που οδηγούν στον ίδιο πίνακα στροφής. Με εμπροσθοτομίες, η λύση η οποία τελικά επιλέγεται είναι εκείνη που εξασφαλίζει αρνητικό Z για όλα τα σημεία του αντικειμένου αφού η αρχή του συστήματος των συντεταγμένων βρίσκεται

στο σημείο λήψης της αριστερής εικόνας. Η επιλογή του σωστού συνδυασμού μπορεί να προκύψει και εάν είναι γνωστά ορισμένα στοιχεία για το αντικείμενο, όπως για παράδειγμα δύο μήκη. Παρ' όλα αυτά η διαδικασία αυτή είναι αρκετά πιο απαιτητική και περίπλοκη σε σχέση με την εμπροσθοτομία.

3.4.2 Δεσμευμένος επιπολικός πίνακας

Γενικότερα, ο δεσμευμένος επιπολικός πίνακας αποτελεί υποπερίπτωση του επιπολικού πίνακα όταν ο εσωτερικός προσανατολισμός της μηχανής είναι γνωστός. Ο δεσμευμένος επιπολικός πίνακας έχει λιγότερους βαθμούς ελευθερίας από τον επιπολικό και επομένως περισσότερες δεσμεύσεις. Η περίπτωση του μελετήθηκε από τον Longuet-Higgings (1981) και στην ουσία πρόκειται και εδώ για υπολογισμό 8 εξαρτημένων παραμέτρων, από τις οποίες προκύπτουν οι 5 ανεξάρτητες παράμετροι του σχετικού προσανατολισμού.

Αφού ο εσωτερικός προσανατολισμός και άρα οι πίνακες μηχανής είναι γνωστοί, εάν υποτεθεί και μηχανή σημειακής οπής (aspect ratio = 1, scewness = 0) είναι εύκολη η μετάβαση σε κανονικοποιημένες συντεταγμένες με βάση τις σχέσεις:

$$\tilde{x} = K^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -c \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \tilde{x}' = K'^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \\ -c \end{bmatrix} \quad (3.31 \text{ a} - \text{b})$$

όπου το σύμβολο “~” υποδηλώνει ισότητα η οποία συμπεριλαμβάνει πολλαπλασιασμό με σταθερά $\lambda \neq 0$ (Καλησπεράκης, 2010).

Η συνθήκη συνεπιπεδότητας μπορεί να γραφεί ως:

$$\tilde{x} (\mathbf{B} \times \mathbf{R}\tilde{x}') = 0 \quad (3.32)$$

Εάν το εξωτερικό γινόμενο γραφεί συναρτήσει του αντισυμμετρικού πίνακα του εξωτερικού γινομένου, η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\tilde{x}^T [\mathbf{B}]_x \mathbf{R}\tilde{x}' = 0 \Leftrightarrow \tilde{x}^T \mathbf{E}\tilde{x}' = 0 \quad (3.33)$$

$$\text{όπου} \quad \mathbf{E} = [\mathbf{B}]_x \mathbf{R} \quad (3.34)$$

Ο \mathbf{E} συνιστά τον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα του ζεύγους των εικόνων και μπορεί να αναλυθεί σε ένα διάνυσμα μετάθεσης \mathbf{B} και έναν πίνακα στροφής \mathbf{R} .

Η παραπάνω Εξ. (3.33) επιλύεται γραμμικά ως προς τα στοιχεία του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα που έχει μεν διαστάσεις 3×3 αλλά 8 παράμετροι επαρκούν πλήρως για τον ορισμό του. Συνεπώς μια παράμετρος μπορεί να οριστεί αυθαίρετα. Η σχέση αυτή ανεπτυγμένη γραμμικά ως προς τα στοιχεία του \mathbf{E} είναι η εξής:

$$\tilde{x}_1 \tilde{x}'_1 E_{11} + \tilde{x}_2 \tilde{x}'_1 E_{12} + \tilde{x}'_1 E_{13} + \tilde{x}_1 \tilde{x}'_2 E_{21} + \tilde{x}_2 \tilde{x}'_2 E_{22} + \tilde{x}'_2 E_{23} + \tilde{x}_1 E_{31} + \tilde{x}_2 E_{32} + E_{33} = 0 \quad (3.35)$$

όπου οι συντεταγμένες των ομόλογων σημείων έχουν προηγουμένως μετασχηματιστεί στην ακόλουθη μορφή:

$$\tilde{x} = [\tilde{x}_1 \quad \tilde{x}_2 \quad 1]^T \quad \text{και} \quad \tilde{x}' = [\tilde{x}'_1 \quad \tilde{x}'_2 \quad 1]^T \quad (3.36 \text{ a} - \text{b})$$

Ο δεσμευμένος επιπολικός πίνακας μπορεί να υπολογιστεί με βάση την Εξ. (3.33) από ομολογίες σημείων. Στην περίπτωση όπου υπάρχουν περισσότερες από 5 γνωστές ομολογίες γίνεται επίλυση με Μ.Ε.Τ. Μπορεί όμως ο \mathbf{E} να υπολογιστεί και εάν προηγουμένως έχει υπολογιστεί ο επιπολικός πίνακας \mathbf{F} (βλ. ενότητα 4.1) με βάση την ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}^T \mathbf{F} \mathbf{K} \quad (3.37)$$

όπου \mathbf{K} ο πίνακας εσωτερικού προσανατολισμού. Ο \mathbf{E} , όπως προαναφέρθηκε, έχει μόνο 5 βαθμούς ελευθερίας. Ακόμα και αν οι συνολικοί βαθμοί ελευθερίας του διανύσματος της βάσης και του πίνακα στροφής στους οποίους αναλύεται είναι συνολικά 6, η κλίμακα του μοντέλου δεν μπορεί βέβαια να οριστεί.

Για να συνιστά ένας πίνακας δεσμευμένο επιπολικό πίνακα θα πρέπει να υπακούει σε ορισμένες δεσμεύσεις (Καλησπεράκης, 2010). Οι ερευνητές στον χώρο της όρασης υπολογιστών έχουν εκφράσει τις δεσμεύσεις αυτές με διαφορετικές μαθηματικές σχέσεις. Θα αναφερθούν οι πιο διαδεδομένες μαθηματικές εκφράσεις τους, που βασίζονται στην ανάλυση ιδιαζουσών τιμών (*singular values*). Κατ' αρχάς, πρέπει ο \mathbf{E} να είναι μη αντιστρέψιμος, άρα να έχει μηδενική ορίζουσα και βαθμό 2. Επειδή δε ο αριθμός των ιδιαζουσών τιμών του πίνακα ισούται με τον βαθμό του, η τρίτη ιδιάζουσα τιμή πρέπει να είναι μηδενική και οι δύο πρώτες να είναι ίσες μεταξύ τους, προκειμένου να αναλύεται σε γινόμενο αντισυμμετρικού και ορθογώνιου πίνακα, όπως υπαγορεύεται από την Εξ. (3.34).

3.4.2.1 Υπολογισμός των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού

Υπολογίζοντας τον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα από ομολογίες σημείων είτε έχοντας υπολογίσει αρχικά τον επιπολικό πίνακα, διαπιστώνει κανείς ότι οι παραπάνω δεσμεύσεις δεν πληρούνται κατ' ανάγκην, λόγω της ύπαρξης θορύβου στις μετρημένες εικονοσυντεταγμένες. Για τον λόγο αυτό ο Hartley (1992) ανέπτυξε έναν αλγόριθμο υπολογισμού του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα που πληροί της ανωτέρω δεσμεύσεις, διαφέροντας παράλληλα κατ' ελάχιστον από τον ήδη υπολογισμένο \mathbf{E} , και βασίζεται στην ανάλυση ιδιαζουσών τιμών. Πιο συγκεκριμένα, αναλύοντας τον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα προκύπτει η εξής σχέση:

$$\mathbf{E} = \mathbf{U} \text{diag} (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mathbf{V}^T \quad (3.38)$$

Είναι κατανοητό ότι λόγω του θορύβου, όπως προαναφέρθηκε, η λ_3 δεν θα είναι ίση με μηδέν, αλλά ούτε και οι δύο πρώτες ιδιάζουσες τιμές θα είναι ίσες μεταξύ τους. Εφαρμόζοντας τις δεσμεύσεις αυτές, παίρνει κανείς τον νέο πίνακα:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{U} \text{diag} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, 0 \right) \mathbf{V}^T \quad (3.39)$$

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Hartley (1992), από τον νέο \mathbf{E} και εάν οριστούν οι πίνακες:

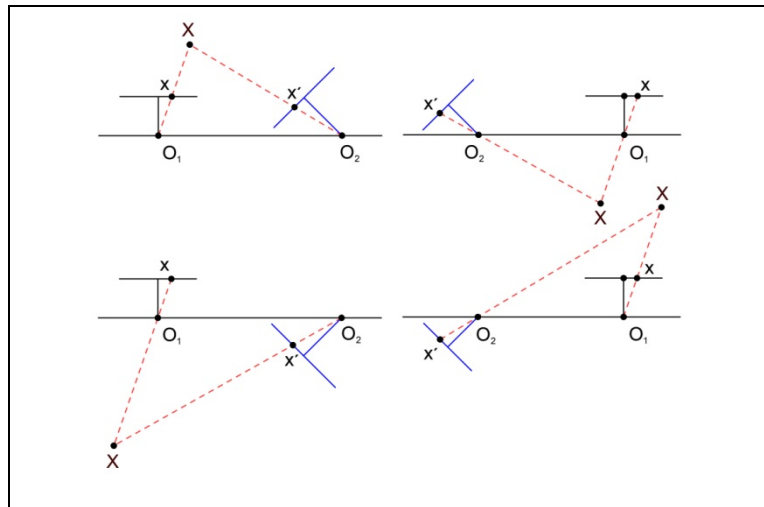
$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι δυνατός ο υπολογισμός του διανύσματος \mathbf{B} που εκφράζει τη διεύθυνση της βάσης (δηλαδή τις συνιστώσες της β_z και β_y) του στερεοζεύγους και του πίνακα στροφής \mathbf{R} με βάση τις σχέσεις:

$$\mathbf{B} = \pm \mathbf{UZU}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$$\text{και } \mathbf{R} = \mathbf{UWV}^T \text{ ή } \mathbf{R} = \mathbf{UW}^T \mathbf{V}^T \quad (3.41 a - b)$$

Με συνδυασμό των παραπάνω αποτελεσμάτων εμφανίζονται στην πραγματικότητα 4 πιθανές λύσεις για τον σχετικό προσανατολισμό, που φανερώνουν την πολλαπλότητα των λύσεων του συγκεκριμένου προβλήματος. Η διαφορά προσήμου στο διάνυσμα της βάσης ερμηνεύεται γεωμετρικά ως αδυναμία εντοπισμού της σχετικής θέσης των εικόνων (πάνω-κάτω ή δεξιά-αριστερά), ενώ οι δύο πίνακες στροφής αντιστοιχούν σε γεωμετρίες λήψης που διαφέρουν κατά στροφή 180° της δεύτερης εικόνας περί τη βάση (Καλησπεράκης, 2010). Εάν βέβαια προσδιοριστούν με εμπροσθοτομία για τους τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς οι 3D συντεταγμένες των σημείων, γίνεται φανερό πως μια είναι η αποδεκτή λύση, εκείνη για την οποία όλα τα σημεία βρίσκονται μπροστά και από τις δύο μηχανές (περίπτωση πάνω αριστερά στο Σχ. 3.2).



Εικόνα 3.3: Οι τέσσερις πιθανές λύσεις του σχετικού προσανατολισμού (Καλησπεράκης, 2010).

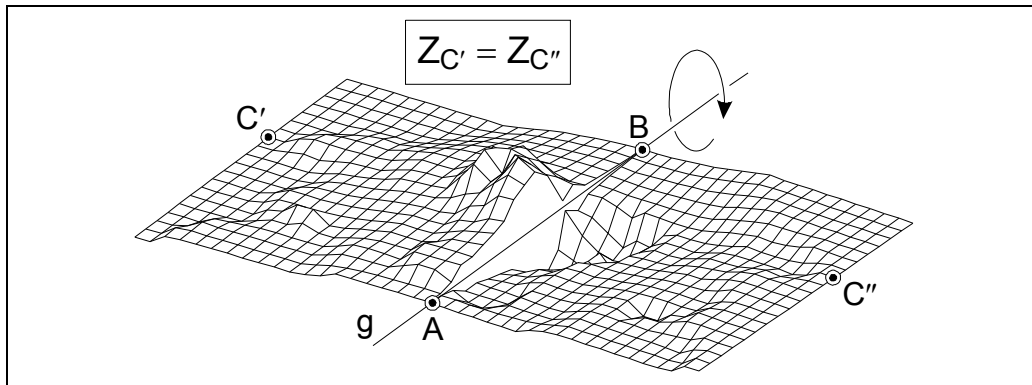
3.5 3D ανακατασκευή

Ο υπολογισμός του σχετικού προσανατολισμού του στερεοζεύγους, και στη συνέχεια των συντεταγμένων (X_m , Y_m , Z_m) των σημείων του αντικειμένου με εμπροσθοτομία, οδηγούν στη δημιουργία ενός τρισδιάστατου μοντέλου το οποίο διαφέρει από το πραγματικό αντικείμενο κατά κλίμακα, θέση και προσανατολισμό στον χώρο. Το μοντέλο είναι μετρικό, δηλαδή έχει πραγματοποιηθεί σωστή ανάπλαση του σχήματος του αντικειμένου, αλλά όχι μονοσήμαντο. Για να αρθεί η αβεβαιότητα αυτή απαιτείται η αποκατάσταση εκείνου που στην φωτογραμμετρία ονομάζεται απόλυτος προσανατολι-

σμός (3D μετασχηματισμός ομοιότητας). Οι παράμετροι που τον ορίζουν είναι 7, ήτοι 3 μεταθέσεις (t_x, t_y, t_z), 3 στροφές (Ω, Φ, K) και κλίμακα (λ). Με τον τρόπο αυτό μετασχηματίζεται το σύστημα του μοντέλου στο επιθυμητό σύστημα του χώρου. Η μαθηματική έκφραση του απόλυτου προσανατολισμού είναι η ακόλουθη:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda * \mathbf{R}_{\Omega\Phi K} * \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Η σχέση δεν είναι γραμμική ως προς τους αγνώστους, ενώ για κάθε σημείο γνωστών συντεταγμένων προκύπτουν 3 εξισώσεις. Συνεπώς, προκειμένου να προσδιοριστούν οι 7 παράμετροι του απόλυτου προσανατολισμού θεωρείται γενικά στην φωτογραμμετρία ότι απαιτούνται δύο φωτοσταθερά, που αποκαθιστούν πλήρως το μέγεθος και τη θέση του μοντέλου, και ένα υψομετρικό που ολοκληρώνει την δέσμευση των στροφών (θεωρητικά υπάρχουν δύο λύσεις, συμμετρικές περί την ευθεία που ορίζουν τα δύο φωτοσταθερά – βλ. Σχ. 3.3).



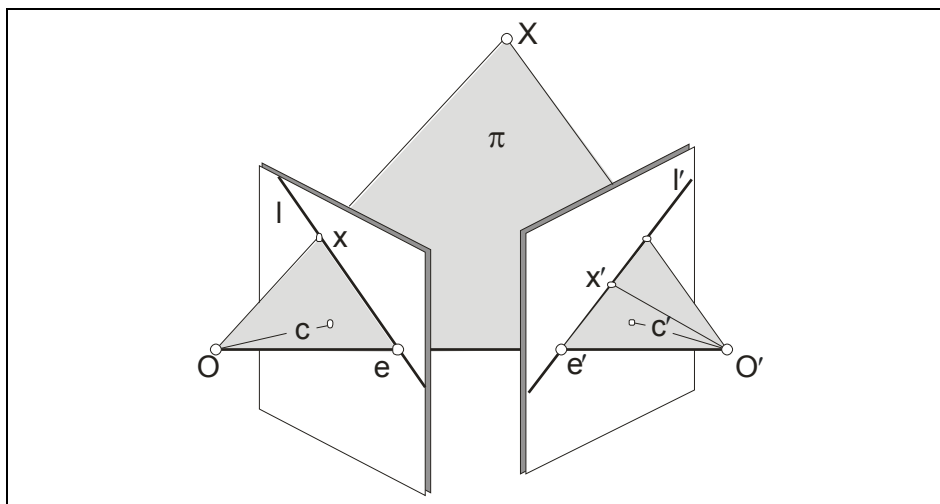
Σχήμα 3.4: Οι δύο λύσεις του απόλυτου προσανατολισμού με 7 συντεταγμένες (Πέτσα, 2000).

Εάν τα N διαθέσιμα φωτοσταθερά είναι περισσότερα από τα απαιτούμενα, πραγματοποιείται συνόρθωση με τη μέθοδο ελαχίστων τετράγωνων, όπου ο πίνακας σχεδιασμού έχει διαστάσεις $3N \times 7$ και οι βαθμοί ελευθερίας του προβλήματος είναι $3N - 7$.

3.6 Επιπολική γεωμετρία

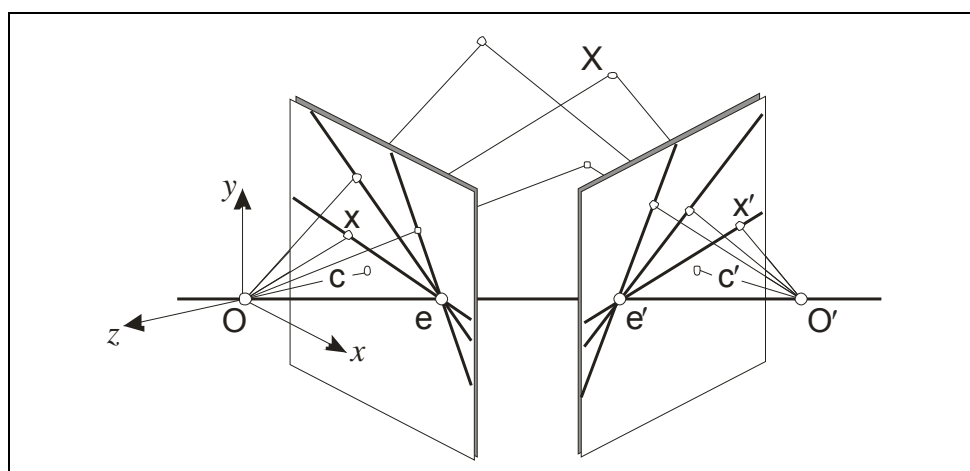
Η επιπολική γεωμετρία αποτελεί άκρως σημαντικό ζήτημα για τη φωτογραμμετρία. Η έννοιά της περιγράφει την προβολική γεωμετρική σχέση που ενυπάρχει μεταξύ δύο εικόνων (Hartley & Zisserman, 2003). Μελετώντας την διαπιστώνει κανείς ότι τα ομόλογα διανύσματα που συνδέουν το σημείο στον χώρο με τα κέντρα λήψης και η βάση του στερεοζεύγους, η οποία ορίζεται από τα δύο αυτά κέντρα, είναι συνεπίπεδα. Το επίπεδο που δημιουργούν ονομάζεται επιπολικό. Στο Σχ. 3.4 εμφανίζεται το επιπολικό επίπεδο π για σημείο X του χώρου, ενώ τα O και O' αναπαριστούν τα κέντρα λήψης. Τα ίχνη των επιπέδων αυτών στις εικόνες ονομάζονται επιπολικές γραμμές, οι οποίες στο σχήμα εμφανίζονται ως l, l' , ενώ η βάση τέμνει τις δύο εικόνες στους πόλους e, e' , από τους οποίους διέρχονται όλες οι επιπολικές ευθείες. Αυτή η δέσμευση ισχύει για όλα τα σημεία που απεικονίζονται στην εικόνα, συνεπώς δημιουργείται δέσμη επιπολικών επιπέδων αξονική ως προς τη βάση, και το σύνολο τους ορίζει δέ-

σημ δισδιάστατων επιπολικών ευθειών στα επίπεδα των δύο εικόνων. Οι δύο δέσμες βρίσκονται σε προβολική σχέση μεταξύ τους (Καλησπεράκης, 2010), και η γεωμετρία τους φαίνεται στα Σχ. 3. 5 και 3.6 (το οποίο είναι ίδιο με το Σχ. 3.1).



Σχήμα 3.5: Το επιπολικό επίπεδο.

Η επιπολική γεωμετρία αποτελεί αποφασιστικής σημασίας παράγοντα σε διαδικασίες συνταύτισης εικόνων καθώς περιορίζει δραστικά την περιοχή αναζήτησης. Αυτό συμβαίνει γιατί τα ομόλογα σημεία εξ ορισμού ανήκουν σε ζεύγος επιπολικών γραμμών. Πιο συγκεκριμένα, σημείο X του χώρου, που απεικονίζεται ως x_1 στην εικόνα 1 και ανήκει στην επιπολική ευθεία l_1 , θα ανήκει επίσης σε επιπολικό επίπεδο π , του οποίου το ίχνος στη δεύτερη εικόνα αποτελεί η επιπολική γραμμή l_2 , συνεπώς το ομόλογο σημείο x_2 θα ανήκει στη γραμμή αυτή.



Σχήμα 3.6: Οι δέσμες των επιπολικών επιπέδων και των επιπολικών ευθειών.

Με τον τρόπο αυτό η αναζήτηση ομόλογων σημείων περιορίζεται μόνο κατά μήκος των επιπολικών γραμμών. Κατά τις διαδικασίες λοιπόν της επιφανειακής συνταύτισης ή και της συνταύτισης χαρακτηριστικών, το παράθυρο αναζήτησης (σε προσανατολισμένες εικόνες) αποτελείται από ορισμένες στήλες στην κατά x διάσταση και θεωρητικά θα μπορούσε να αποτελείται μόνο από μία γραμμή κατά την διάσταση y . Στην

πράξη βέβαια χρησιμοποιούνται δύο ή και τρεις γραμμές, γιατί τα εναπομένοντα σφάλματα του σχετικού προσανατολισμού δεν επιτρέπουν πλήρη μηδενισμό της παράλλαξης κατά τη διεύθυνση y . Επίσης, όλα τα σημεία που ανήκουν στην επιπολική γραμμή l_1 της αριστερής εικόνας θα ανήκουν και στην επιπολική γραμμή l_2 της δεξιάς εικόνας. Ένα άλλο πλεονέκτημα της επιπολικής επανασύστασης των εικόνων είναι, βέβαια, ότι εξασφαλίζει τη στεροσκοπική παρατήρηση.

3.6.1 Επιπολική επανασύσταση στερεοζεύγους

Η επιπολική, λοιπόν, επανασύσταση (κανονικοποίηση) στερεοζεύγους αναφέρεται σε μετασχηματισμό των εικόνων στο σύστημα της βάσης, προκειμένου οι δύο άξονες λήψης να γίνουν παράλληλοι μεταξύ τους και κάθετοι στη βάση, ενώ οι άξονες x των εικόνων να συμπίπτουν. Τότε, οι επιπολικές γραμμές γίνονται πλέον παράλληλες στη βάση και συμπίπτουν με τις γραμμές της ψηφιακής εικόνας (Θεοφάνους, 2004).

Προκειμένου να πραγματοποιηθεί αυτή η επιπολική επανασύσταση ζεύγους εικόνων είναι αναγκαία η γνώση του εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων (θέση πρωτεύοντος σημείου, σταθερά μηχανής, ακτινική διαστροφή) καθώς και ο εξωτερικός προσανατολισμός των εικόνων ή ο σχετικός προσανατολισμός τους.

Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν δύο βήματα. Κατ' αρχάς οι εικόνες στρέφονται προκειμένου να αποκτήσουν μοναδιαίο πίνακα στροφής στο σύστημα του εξωτερικού ή του σχετικού προσανατολισμού (άρα στην περίπτωση των αεροφωτογραφιών να γίνουν αυστηρά κατακόρυφες) και στη συνέχεια μετασχηματίζονται στο σύστημα της βάσης. Οι γωνίες ω , φ , κ του εξωτερικού προσανατολισμού περιγράφουν, όπως έχει αναφερθεί, τις στροφές του συστήματος των εικόνων ως προς το σύστημα αναφοράς του χώρου. Στην προκειμένη περίπτωση ζητούμενο είναι το σύστημα των εικόνων να γίνει παράλληλο με εκείνο του χώρου. Για τον λόγο αυτό κάθε εικόνα μετασχηματίζεται με τον ανάστροφο του πίνακα στροφής της:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & \cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\varphi\cos\kappa & \sin\omega\sin\kappa - \cos\omega\sin\varphi\cos\kappa \\ -\cos\varphi\sin\kappa & \cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\varphi\sin\kappa & \sin\omega\cos\kappa + \cos\omega\sin\varphi\sin\kappa \\ \sin\varphi & -\sin\omega\cos\varphi & \cos\omega\cos\varphi \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Ακολουθεί ο μετασχηματισμός στο σύστημα της βάσης. Απαιτείται λοιπόν να υπολογιστεί ο πίνακας στροφής της βάσης στο σύστημα του χώρου, που εκφράζεται με τη βοήθεια των γωνιών Ω , Φ , K (Σχ. 3.6). Από τις τρεις συνιστώσες της βάσης:

$$B_x = X_{o2} - X_{o1} \quad B_y = Y_{o2} - Y_{o1} \quad \text{και} \quad B_z = Z_{o2} - Z_{o1}$$

υπολογίζονται οι γωνίες:

$$K = \arctan\left(\frac{B_y}{B_z}\right) \quad (3.44 \text{ a} - \text{c})$$

$$\Phi = \arctan\left(-\frac{B_z}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}\right)$$

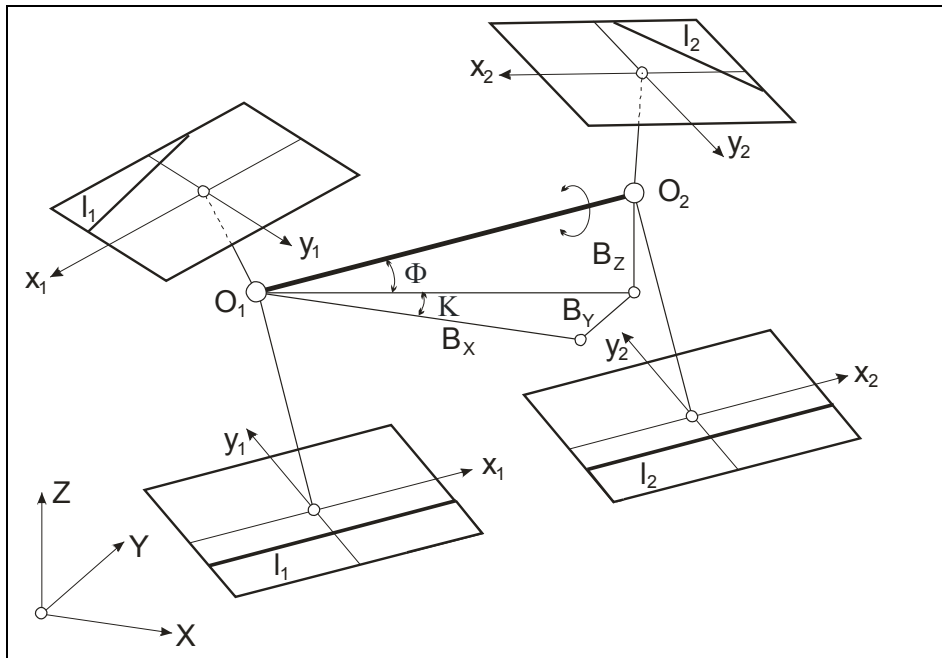
$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

Θεωρητικά, η γωνία Ω δεν είναι αναγκαίο να χρησιμοποιηθεί καθώς οποιαδήποτε τιμή και να της αποδοθεί, το ζεύγος μπορεί να επανασυσταθεί επιπολικά και θα διαφέρει μονάχα στο μέγεθος των νέων εικόνων, που ανάλογα με την τιμή της στροφής θα έχουν διαφορετική προοπτική παραμόρφωση. Η παραπάνω όμως τιμή ελαχιστοποιεί το συνολικό μέγεθος των νέων επιπολικών εικόνων. Ο τελικός πίνακας στροφής της βάσης $\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_\Omega \mathbf{R}_\Phi \mathbf{R}_K$ που προκύπτει είναι:

$$\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} \cos\Phi \cos K & \cos\Phi \sin K & -\sin\Phi \\ -\cos\Omega \sin K + \sin\Omega \sin\Phi \cos K & \cos\Omega \cos K + \sin\Omega \sin\Phi \sin K & \sin\Omega \cos\Phi \\ \sin\Omega \sin K + \cos\Omega \sin\Phi \cos K & -\sin\Omega \cos K + \cos\Omega \sin\Phi \sin K & \cos\Omega \cos\Phi \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Συνεπώς για να επιτευχθεί η επιπολική επανασύσταση, κάθε εικόνα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τους ακόλουθους αντίστοιχους πίνακες στροφής:

$$\mathbf{R}_{N1} = \mathbf{R}_B \mathbf{R}_1^T \quad \text{και} \quad \mathbf{R}_{N2} = \mathbf{R}_B \mathbf{R}_2^T \quad (3.46 a - b)$$



Σχήμα 3.7: Σχέση κανονικοποιημένων και επιπολικών εικόνων (Θεοφάνους, 2004).

Προφανώς, σε περίπτωση που η επιπολική επανασύσταση πραγματοποιείται μέσω του σχετικού, και όχι του εξωτερικού, προσανατολισμού του ζεύγους θα είναι $\mathbf{R}_1 = \mathbf{I}$ και άρα $\mathbf{R}_{N1} = \mathbf{R}_B$. Ο μετασχηματισμός των εικονοσυντεταγμένων της αρχικής εικόνας σε εκείνες της επιπολικής, και το αντίστροφο, είναι ουσιαστικά ένας 2D προβολικός μετασχηματισμός μέσω της συνθήκης συγγραμμικότητας, η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν συνδέει το σύστημα της εικόνας με το σύστημα του χώρου αλλά το σύστημα της αρχικής εικόνας με το σύστημα της κανονικοποιημένης και εκφράζεται μαθηματικά ως:

$$\begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ -c \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{R}_N^T \begin{bmatrix} x' - x_o \\ y' - y_o \\ -c \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

ενώ η αντίστροφη σχέση είναι:

$$\begin{bmatrix} x' - x_o \\ y' - y_o \\ -c' \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{R}_N \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ -c \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Ο συντελεστής λ αναφέρεται στη σημειακή κλίμακα του σημείου και απαλείφεται με διαίρεση ώστε να προκύψουν οι ακόλουθες σχέσεις, όπου με x, y αναπαρίστανται οι εικονοσυντεταγμένες στην αρχική εικόνα, με x_n, y_n στην επιπολική εικόνα (ανηγμένες στο πρωτεύον σημείο της), ενώ r_n είναι τα στοιχεία του πίνακα στροφής:

$$x_n = -c' \frac{r_{n11}(x-x_o) + r_{n12}(y-y_o) - r_{n13}c}{r_{n31}(x-x_o) + r_{n32}(y-y_o) - r_{n33}c} \quad (3.49 \text{ a-b})$$

$$y_n = -c' \frac{r_{n21}(x-x_o) + r_{n22}(y-y_o) - r_{n23}c}{r_{n31}(x-x_o) + r_{n32}(y-y_o) - r_{n33}c}$$

όπου x_o, y_o, c οι εικονοσυντεταγμένες του πρωτεύοντος σημείου και η σταθερά της μηχανής στην αρχική και c' η σταθερά της μηχανής την κανονικοποιημένη εικόνα. Κατά κανόνα η σταθερά της μηχανής των επιπολικών εικόνων επιλέγεται κατά τι μεγαλύτερη από c , προκειμένου να μην υπάρξει απώλεια πληροφορίας (Kraus, 2003).

3.6.1.1 Συστήματα αναφοράς

Η συνθήκη συγγραμμικότητας αναφέρεται σε εικονοσυντεταγμένες με αρχή μέτρησης το κέντρο της εικόνας. Προκειμένου λοιπόν να χρησιμοποιηθεί θα πρέπει να πραγματοποιηθούν ορισμένες αναγωγές μεταξύ των συστημάτων αναφοράς.

Σε περίπτωση που η εικόνα έχει προέλθει από ψηφιακή μηχανή, οι μετρήσεις των εικονοσυντεταγμένων συνήθως αναφέρονται σε εικονοψηφίδες i, j ως προς την πάνω αριστερή γωνία, μετρημένες στο αριστερόστροφο σύστημα αναφοράς της ψηφιακής εικόνας. Στην περίπτωση αυτή απαιτείται απλώς ένας μετασχηματισμός προκειμένου το σύστημα να γίνει δεξιόστροφο και να μετατεθεί η αρχή του. Ο μετασχηματισμός αυτός εκφράζεται από τις σχέσεις:

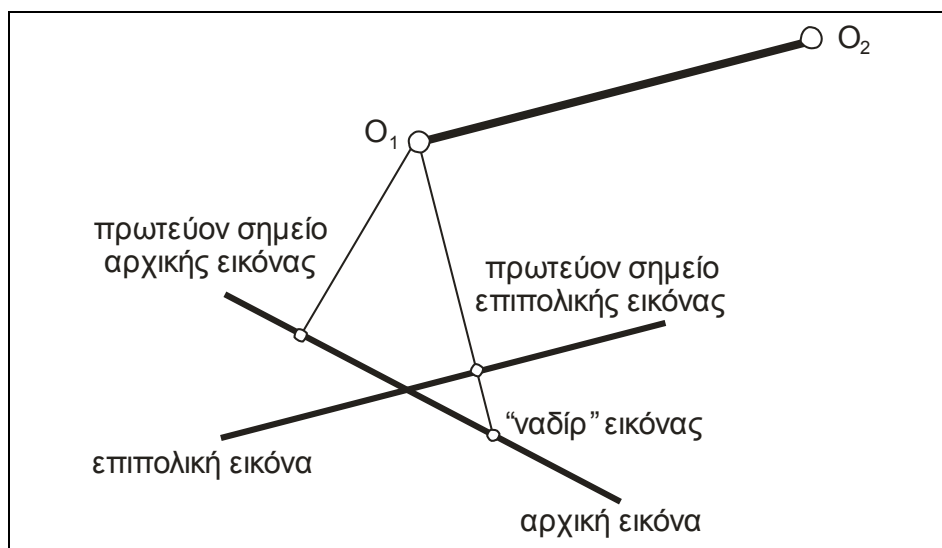
$$x = j - j_o \quad \text{και} \quad y = -i + i_o \quad (3.50 \text{ a} - \text{b})$$

Εάν αντίθετα οι εικόνες προέρχονται από σάρωση αναλογικών εικόνων, οι εικονοσυντεταγμένες (σε pixel ή και mm) πρέπει να υποστούν έναν πλήρη αφινικό μετασχηματισμό (βλ. προηγούμενο κεφάλαιο) με τουλάχιστον τρία γνωστά κοινά σημεία και στα δύο συστήματα, ώστε να επιτευχθεί ο μεταξύ τους μετασχηματισμός.

3.6.1.2 Εύρεση των ορίων της επιπολικής εικόνας

Προκειμένου να πραγματοποιηθεί η διαδικασία επιπολικής επανασύστασης είναι βέβαια απαραίτητο να οριστούν αρχικά οι διαστάσεις των νέων εικόνων. Με βάση λοιπόν τις συντεταγμένες των άκρων της αρχικής εικόνας η συνθήκη συγγραμμικότητας επιτρέπει να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες των άκρων της κανονικοποιημένης εικόνας. Κατόπιν υπολογίζονται οι διαστάσεις της νέας εικόνας κατά x ως $x_{\max} - x_{\min}$ και

κατά y ως $y_{\max}-y_{\min}$, και δημιουργείται μια νέα κενή εικόνα. Οι παραπάνω διαστάσεις μπορούν να αναφέρονται σε pixel ή mm, ανάλογα με το σύστημα μέτρησης των εικονοσυντεταγμένων. Στην περίπτωση όπου αναφέρονται σε mm, οι διαστάσεις θα διαιρεθούν με το μέγεθος του pixel, ώστε να υπολογιστεί ο αριθμός των εικονοψηφίδων που απαρτίζουν κάθε διάσταση της εικόνας. Ακόμα πρέπει να υπολογιστεί και η θέση του πρωτεύοντος σημείου στη νέα εικόνα, η οποία είναι η προβολή του ναδύρ της αρχικής εικόνας στο σύστημα της βάσης (Σχ. 3.7). Το σημείο αυτό αναπαριστά την αρχή του συστήματος μέτρησης των εικονοσυντεταγμένων στην επιπολική εικόνα και έχει συντεταγμένες $x = |\min_x|$ και $y = \max_y$ στο σύστημα της ψηφιακής επιπολικής εικόνας (Καρφής, 2009). Εάν το σύστημα μέτρησης είναι σε mm οι παραπάνω τιμές οφείλουν να διαιρεθούν με το μέγεθος του pixel.



Σχήμα 3.8: Πρωτεύον σημείο επιπολικής εικόνας (Καρφής, 2009).

3.6.1.3 Υπολογισμός της σταθεράς της μηχανής για τις επιπολικές εικόνες

Στις περισσότερες των περιπτώσεων η σταθερά της μηχανής στις επιπολικές εικόνες επιλέγεται να είναι λίγο μεγαλύτερη από αυτή των αρχικών εικόνων ώστε, όπως προαναφέρθηκε, να μην υπάρχει απώλεια πληροφορίας λόγω διαφορών κλίμακας. Για να υπολογιστεί η νέα σταθερά της μηχανής, πρέπει αρχικά να υπολογιστεί ο λόγος δ των κλιμάκων για τα τέσσερα άκρα της αρχικής και της νέας εικόνας από τη σχέση:

$$\delta = \frac{x^2 + y^2 + c^2}{x'^2 + y'^2 + c^2} \quad (3.51)$$

όπου x, y οι συντεταγμένες των άκρων στην αρχική εικόνα και x', y' οι συντεταγμένες των άκρων στην επιπολική εικόνα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται και για τη δεύτερη εικόνα και μεταξύ των 8 λόγων (4 για κάθε εικόνα) επιλέγεται ο μεγαλύτερος. Με αυτόν πολλαπλασιάζεται η σταθερά της μηχανής c για να προκύψει αυτή η νέα σταθερά $c' = \delta_{\max} \times c$. Τέλος, επαναλαμβάνεται η διαδικασία προσδιορισμού των άκρων βάσει της νέας υπολογισμένης σταθεράς για τις επιπολικές εικόνες.

3.6.1.4 Υπολογισμός του μεγέθους του pixel

Στη συνέχεια πρέπει να οριστεί το μέγεθος της εικονοψηφίδας στη νέα εικόνα. Για να ληφθεί η απόφαση αυτή, υπάρχουν βασικά δύο πιθανές μέθοδοι. Είτε να διατηρηθεί μέγεθος pixel ίδιο με την αρχική εικόνα και να υπολογιστούν οι διαστάσεις της εικόνας είτε να διατηρηθούν οι διαστάσεις της αρχικής εικόνας και να υπολογιστεί το νέο μέγεθος της εικονοψηφίδας. Ο πρώτος τρόπος επιτρέπει να χρησιμοποιηθούν άμεσα οι εικόνες αφού θα έχουν την ίδια ανάλυση.

3.6.1.5 Διαδικασία επανασύστασης της εικόνας

Τελικό στάδιο της διαδικασίας είναι ο υπολογισμός των τιμών του γκρίζου για κάθε εικονοψηφίδα της νέας εικόνας. Αρχικά υπολογίζεται με την αντίστροφη συνθήκη συγγραμμικότητας η θέση της εικονοψηφίδας στην αρχική εικόνα, της οποίας οι συντεταγμένες είναι απαλλαγμένες από ακτινική διαστροφή, οπότε προκειμένου να εντοπιστεί η ακριβής θέση του αρχικού σημείου οφείλουν αυτές να αλλοιωθούν λόγω του σφάλματος αυτού (εφόσον βέβαια το πολυώνυμο που τη μοντελοποιεί είναι γνωστό) και εν συνεχεία να αναχθούν στο πρωτεύον σημείο. Με βάση την ακτινική απόσταση:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (3.52)$$

η ακτινική διαστροφή αναλύεται στις κατά x και y συνιστώσες της:

$$(x - x_0) - \Delta x = (x - x_0) - \frac{(x - x_0)}{r} \Delta r = (x - x_0)(1 - k_3 r^2 - k_5 r^4 - \dots) \quad (3.53 \text{ a} - \text{b})$$

$$(y - y_0) - \Delta y = (y - y_0) - \frac{(y - y_0)}{r} \Delta r = (y - y_0)(1 - k_3 r^2 - k_5 r^4 - \dots)$$

Γενικά επαρκεί η χρήση μόνο των δύο πρώτων συντελεστών k_3 , k_5 .

Τελικά ακολουθεί ο αντίστροφος των μετασχηματισμών που περιγράφηκαν στην ενότητα 3.6.1.1 ώστε να πραγματοποιηθεί μετασχηματισμός από το σύστημα των εικονοσυντεταγμένων στο σύστημα της ψηφιακής εικόνας για να παρεμβληθεί η τιμή γκρίζου στην αρχική εικόνα. Σε έγχρωμες εικόνες η διαδικασία της επανασύστασης πραγματοποιείται για κάθε ένα από τα τρία κανάλια και ακολουθεί συγχώνευσή τους στην τελική έγχρωμη επιπολική εικόνα.

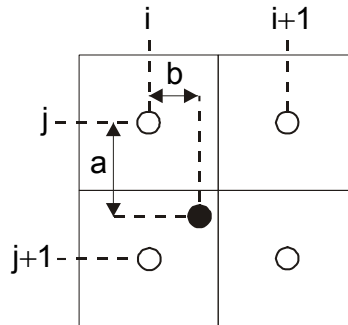
3.6.2 Μέθοδος Παρεμβολής

Οι βασικές μέθοδοι παρεμβολής είναι τρεις, του πλησιέστερου γείτονα, η διγραμμική και η δικυβική. Η παρεμβολή του πλησιέστερου γείτονα αποδίδει στο pixel την τιμή του γκρίζου της εγγύτερης εικονοψηφίδας. Είναι μέθοδος υπολογιστικά γρήγορη που διατηρεί τους τόνους της αρχικής εικόνας, όμως δημιουργεί συχνά ασυνέχειες και οδοντωτές ακμές στις εικόνες, και για τον λόγο αυτό προτιμάται κυρίως σε εικόνες μεγάλων αναλύσεων.

Στην διγραμμική παρεμβολή η τιμή του τόνου που αποδίδεται στην εικονοψηφίδα υπολογίζεται από τις τιμές των τόνων των 4 γειτονικών ψηφίδων με βάρη ανάλογα

της απόστασης. Η διαδικασία αυτή είναι υπολογιστικά πιο απαιτητική από εκείνη του πλησιέστερου γείτονα, μεταβάλλει τα ραδιομετρικά δεδομένα καθώς παρεμβάλλει σε τέσσερεις τόνους, αλλά η εφαρμογή της δεν δημιουργεί ανωμαλίες στις ακμές, όπως συμβαίνει με την πρώτη μέθοδο. Η μαθηματική της έκφραση, η οποία χρησιμοποιήθηκε και στην παρούσα εργασία, είναι (βλ. και Σχ. 3.8):

$$g' = (1 - a)(1 - b)g_{i,j} + (1 - a)bg_{i+1,j} + a(1 - b)g_{i,j+1} + abg_{i+1,j+1} \quad (3.54)$$



Σχήμα 3.9: Διγραμμική παρεμβολή.

Τέλος, η δικυβική παρεμβολή υπολογίζει την τιμή του γκρίζου με βάση τα 16 γειτονικά pixels, στα οποία αποδίδονται κατάλληλα βάρη. Η μέθοδος αυτή είναι βέβαια η πιο απαιτητική υπολογιστικά.

3.6.3 Ακρίβεια και έλεγχος επιπολικών εικόνων

Η ακρίβεια των επιπολικών εικόνων εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Οι κυριότεροι είναι η ακρίβεια υπολογισμού του εξωτερικού και εσωτερικού προσανατολισμού, συμπεριλαμβανομένης της ακτινικής διαστρόφης του φακού, η μέθοδος παρεμβολής αλλά και η ανάλυση των εικόνων.

Προκειμένου να πραγματοποιηθεί έλεγχος κατά τη διάρκεια της διαδικασίας, αρκεί να υπολογιστούν οι εικονοσυντεταγμένες δύο ομόλογων σημείων στις κανονικοποιημένες εικόνες, των οποίων οι συντεταγμένες y πρέπει πρακτικά να ταυτίζονται (να διαφέρουν ελάχιστα). Μετά το πέρας τη διαδικασίας της επιπολικής επανασύστασης, ο πιο άμεσος έλεγχος είναι η σχεδίαση των επιπολικών γραμμών που οφείλουν να συμπίπτουν και να περιλαμβάνουν τα ομόλογα σημεία.

3.7 Υπολογισμός των πόλων και των επιπολικών γραμμών

Γνωρίζοντας τα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού της μηχανής με την οποία έχουν ληφθεί οι εικόνες, είναι γνωστός ο πίνακας μηχανής \mathbf{K} , ο οποίος έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -c\alpha_x & s & x_0 \\ 0 & -c\alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

όπου α_x, α_y συντελεστές κλίμακας κατά x και y (ο λόγος α_x / α_y ορίζεται ως aspect ratio) και s (skewness) η απόκλιση των αξόνων από την ορθογωνικότητα.

Στην περίπτωση της μηχανής σημειακής οπής, ο \mathbf{K} απλοποιείται δεδομένου ότι είναι $s = 0$ και $\alpha_x = \alpha_y = 1$ (δηλαδή το σχήμα της εικονομηφίδας είναι τετραγωνικό), ώστε τελικά προκύπτει:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -c & 0 & x_0 \\ 0 & -c & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Από τον παραπάνω πίνακα και εάν ο σχετικός προσανατολισμός μεταξύ των δύο εικόνων είναι γνωστός, καθίσταται πολύ εύκολη η μετάβαση στους προβολικούς πίνακες μηχανής \mathbf{P} του στερεοζεύγους, με την υπόθεση ότι η αρχή του συστήματος των συντεταγμένων ταυτίζεται με τη θέση του σημείου λήψης της αριστερής εικόνας. Με βάση τα παραπάνω:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{I}_{(3 \times 3)} | \mathbf{0}] \quad \text{και} \quad \mathbf{P}' = \mathbf{K}'[\mathbf{R} | \mathbf{T}] \quad (3.57 \text{ a} - \text{b})$$

όπου \mathbf{R}, \mathbf{T} ο πίνακας στροφής και το διάνυσμα μετάθεσης μεταξύ των δύο εικόνων.

Ο προβολικός πίνακας της μηχανής \mathbf{P} έχει διαστάσεις 3×4 και συνδέει τις ομογενείς συντεταγμένες του συστήματος του χώρου με εκείνες τις εικόνας, κατά την σχέση:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X} \quad (3.58)$$

Οι Hartley & Zissermann (2003) και Καλησπεράκης (2010) αναφέρουν πώς, βασιζόμενος κανείς στα γνωστά στοιχεία του εσωτερικού και του σχετικού προσανατολισμού, είναι δυνατόν να βρει την θέση των πόλων και των επιπολικών ευθειών. Με γνωστούς προβολικούς πίνακες μηχανής, μπορεί να εκφραστεί μία μονοπαραμετρική σχέση, η οποία συνδέει τα σημεία της εικόνας με εκείνα του χώρου:

$$\mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{P}^+ \mathbf{x} + \lambda \mathbf{C} \quad (3.59)$$

Ο \mathbf{P}^+ αποτελεί τον ψευδοαντίστροφο του προβολικού πίνακα μηχανής, ώστε:

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^+ = \mathbf{I} \quad (3.60)$$

ενώ ο \mathbf{C} αναπαριστά το προβολικό κέντρο και υπολογίζεται ως το μηδενικό διάνυσμα του πίνακα \mathbf{P} , άρα προκύπτει από:

$$\mathbf{P}\mathbf{C} = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad \mathbf{P}'\mathbf{C}' = \mathbf{0} \quad (3.61 \text{ a} - \text{b})$$

Δύο σημεία που ικανοποιούν τη σχέση (3.59) είναι τα $\mathbf{P}^+ \mathbf{x}$ και το προβολικό κέντρο \mathbf{C} . Οι προβολές των σημείων αυτών στη δεύτερη εικόνα είναι τα $\mathbf{P}'\mathbf{P}^+ \mathbf{x}$ και $\mathbf{P}'\mathbf{C}$, αντίστοιχα. Στην ουσία η προβολή του \mathbf{C} της αριστερής εικόνας στη δεξιά αποτελεί τον πόλο \mathbf{e}' , συνεπώς οι συντεταγμένες των δύο πόλων ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{P}'\mathbf{C} \quad \text{και} \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{P}\mathbf{C}' \quad (3.62 \text{ a} - \text{b})$$

Τα δύο σημεία που έχουν υπολογιστεί προηγουμένως δεσμεύονται να ανήκουν στην ίδια επιπολική γραμμή, καθώς όλες οι επιπολικές γραμμές διέρχονται από τον πόλο

της εικόνας, άρα η εξίσωση της επιπολικής γραμμής είναι:

$$l' = (P' C) \times (P' P^+ x) = e' \times (P' P^+ x) = [e']_{\times} (P' P^+ x) \quad (3.63)$$

Εάν δε αντιστραφούν οι ρόλοι των δύο εικόνων, η σχέση που προκύπτει είναι:

$$l = (P C') \times (P P'^+ x') = e \times (P P'^+ x') = [e]_{\times} (P P'^+ x') \quad (3.64)$$

Οι εξισώσεις αυτές επιτρέπουν υπολογισμό των επιπολικών γραμμών σημείων με βάση τις ομογενείς τους συντεταγμένες, ενώ επιβάλλουν δεσμεύσεις που σχετίζονται με την εύρεση της θέσης του ομόλογου σημείου του \mathbf{x} , καθώς αυτό, όπως έχει αναφερθεί, οφείλει να κείται επί της επιπολικής γραμμής. Η δέσμευση αυτή εκφράζεται μαθηματικά με την παρακάτω σχέση:

$$x'^T l' = 0 \Rightarrow x'^T [e']_{\times} (P' P^+ x) = 0 \quad (3.65)$$

4

Εικόνες με άγνωστο εσωτερικό προσανατολισμό

Με την πάροδο των χρόνων και την έρευνα επιστημόνων και σε άλλα πεδία εκτός φωτογραμμετρίας, όπως αυτό της όρασης υπολογιστών, επανεμφανίστηκε η ιδέα της διερεύνησης ορισμένων συμβατικών φωτογραμμετρικών διαδικασιών όταν τα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού της μηχανής δεν είναι γνωστά (σε αντίθεση, δηλαδή, με την συντριπτική πλειονότητα των φωτογραμμετρικών αλγορίθμων και εφαρμογών). Η ιδέα αυτή αποτελεί μεγάλης σημασίας βήμα για την απαγκίστρωση της φωτογραμμετρικής πρακτικής (όπου αυτό είναι δυνατόν), αλλά και της φωτογραμμετρικής θεωρίας, από την ανάγκη για ακριβές μετρικές μηχανές και, κυρίως, από τις επίπονες και χρονοβόρες διαδικασίες της βαθμονόμησης.

Σε αυτό ακριβώς το πλαίσιο πλήθος μελετητές προσέγγισαν το πρόβλημα της δισδιάστατης επιπολικής γεωμετρίας, καθώς οι δέσμες των ομόλογων επιπολικών ευθειών είναι δυνατόν να οριστούν χωρίς να πρέπει κατ' ανάγκην να οριστούν οι αντίστοιχες οπτικές ακτίνες στον χώρο (Καλησπεράκης, 2010).

Οι Faugeras (1992) και Hartley (1992) εισήγαγαν, έτσι, για πρώτη φορά την έννοια του “επιπολικού πίνακα” (*fundamental matrix*) που θα αναλυθεί στη συνέχεια του κεφαλαίου. Η έρευνα έδειξε ότι, ακόμα και στην περίπτωση όπου η μηχανή λήψης δεν είναι βαθμονομημένη, μέσω αυτού καθίσταται δυνατή η διαδικασία της επιπολικής επανασύστασης, ο υπολογισμός της θέσης των πόλων, όπως και ο υπολογισμός τόσο των ομόλογων επιπολικών γραμμών όσο και της επιπολικής γραμμής που αντιστοιχεί σε δεδομένο εικονοσημείο. Τέλος, δίνεται η δυνατότητα δημιουργίας ενός 3D μοντέλου, με επιλογή ζευγών Άμεσων Γραμμικών Μετασχηματισμών, συμβατών με τον επιπολικό πίνακα, και εμπροσθοτομιών για τον υπολογισμό των συντεταγμένων του αντικείμενου, το οποίο διαφέρει από το κανονικό κατά τρισδιάστατο προβολικό μετασχηματισμό (“προβολική αβεβαιότητα”).

4.1 Ο επιπολικός πίνακας

Ο επιπολικός πίνακας εκφράζει τη δισδιάστατη επιπολική γεωμετρία. Την ανάλογη έρευνα στο πεδίο της φωτογραμμετρίας επανεπικαιροποίησε ο Bender το 1971 αναφερόμενος για πρώτη φορά στην έννοια του “γενικευμένου σχετικού προσανατολισμού”, αφού είχαν προηγηθεί ορισμένες σημαντικές θεωρητικές διατυπώσεις από τον φωτογραμμέτη S. Finsterwalder στα τέλη του 19^{ου} αιώνα. Η έρευνα ολοκληρώθηκε με τη διατύπωση, θεωρητική θεμελίωση και διερεύνηση του επιπολικού πίνακα, που όμως προήλθε από το πεδίο της όρασης υπολογιστών (Καλησπεράκης, 2010).

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε αναφορά στον υπολογισμό των πόλων και των ομόλογων επιπολικών ευθειών όταν τα στοιχεία του εσωτερικού και σχετικού προσανατολισμού είναι γνωστά. Η σχέση με την οποία υπολογίζονται οι επιπολικές ευθείες είναι η εξής:

$$l' = e' \times (P'P^+x) = [e']_{\times}(P'P^+x) \quad (4.1)$$

Ο επιπολικός πίνακας F ορίζεται με βάση την παραπάνω σχέση ως:

$$F = [e']_{\times}(P'P^+) \quad (4.2)$$

Πρόκειται για έναν πίνακα διαστάσεων 3×3 , ο οποίος επειδή αναλύεται σε γινόμενο αντισυμμετρικού πίνακα έχει μηδενική ορίζουσα ($\det(F) = 0$). Συνεπώς, ο βαθμός του ισούται με 2. Ο πίνακας αυτός περιγράφει μια ετερογραφία, καθώς συνδέει τα σημεία της μίας εικόνας με γραμμές της άλλης (Καλησπεράκης, 2010). Σημείο x στην αριστερή εικόνα ορίζει μέσω του επιπολικού πίνακα τη γραμμή l' στη δεξιά εικόνα. Οι επιπολικές γραμμές l (που περιλαμβάνει το σημείο) και l' είναι ομόλογες, συνεπώς κάθε σημείο της l περιλαμβάνεται στην l' και η ετερογραφία δεν είναι αντιστρέψιμη, κάτι που γίνεται εύκολα κατανοητό αφού ο F έχει και μηδενική ορίζουσα. Η επιπολική ευθεία σημείου υπολογίζεται με βάση τη σχέση:

$$l' = Fx \quad (4.3)$$

Μεταξύ των επιπολικών γραμμών στις δύο εικόνες υφίσταται μία προβολική σχέση. Ο F , πέρα από τη μη αντιστρέψιμη ετερογραφία που συνδέει σημείο με γραμμή, περιγράφει και μία αμφιμονοσήμαντη σχέση, η οποία συνδέει τις επιπολικές δέσμες. Η σχέση αυτή είναι μία ομογραφία μεταξύ των επίπεδων επιπολικών δεσμών των δύο εικόνων, καθώς δεν απαιτείται σύνδεσή τους με τις αντίστοιχες τρισδιάστατες δέσμες του χώρου ή τις δέσμες των επιπολικών επιπέδων. Σε αυτό ακριβώς το σημείο έγκειται και η ειδοποιός διαφορά του με τον σχετικό προσανατολισμό, αφού για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται είναι αυτή της συνεπιπεδότητας μεταξύ των ομόλογων 3D ακτίνων, ενώ η δέσμευση που περιγράφει ο επιπολικός πίνακας είναι εκείνη της δισδιάστατης επιπολικότητας, σύμφωνα με την οποία τα ομόλογα σημεία οφείλουν να κείνται επί ομόλογων επιπολικών ευθειών. Αυτή εκφράζεται μαθηματικά από την ακόλουθη σχέση:

$$x'^T Fx = 0 \quad (4.4)$$

Συνεπώς, πρόκειται για δύο εντελώς διαφορετικές προσεγγίσεις. Εξηγείται έτσι το ότι στη συνθήκη συνεπιπεδότητας χρησιμοποιούνται κανονικοποιημένες συντεταγμένες,

σε αντίθεση με τη Εξ. 4.4 όπου χρησιμοποιούνται ομογενείς συντεταγμένες των εικονοσημείων.

Η ιδιότητα του επιπολικού πίνακα να μπορεί να οριστεί από απλές ομολογίες σημείων (τουλάχιστον 7, αφού χαρακτηρίζεται από 7 βαθμούς ελευθερίας) είναι πολύ σημαντική, ιδίως φυσικά σε περιπτώσεις όπου δεν υπάρχουν δεδομένα για τη γεωμετρία που περιγράφει τις μηχανές λήψης, αφού μέχρι στιγμής ο επιπολικός πίνακας εκφράστηκε με τη βοήθεια των προβολικών πινάκων μηχανής. Στις επόμενες ενότητες θα αναλυθούν ανάλογοι τρόποι υπολογισμού, με βάση τη δέσμευση της Εξ. (4.4).

4.1.1 Οι ιδιότητες του επιπολικού πίνακα

Ο πίνακας \mathbf{F} είναι ένας πίνακας 3×3 , συνεπώς περιλαμβάνει 9 στοιχεία. Για να οριστεί όμως πλήρως απαιτεί 8 παραμέτρους, καθώς υπάρχει αδυναμία ορισμού της κλίμακας. Άρα, μία παράμετρος μπορεί να ορίζεται αυθαίρετα. Η μοναδική δέσμευση που οφείλεται να ικανοποιείται είναι εκείνη της μηδενικής ορίζουσας, με συνέπεια οι συνολικοί βαθμοί ελευθερίας του να ισούνται με 7. Εάν ο \mathbf{F} περιγράφει τη δέσμευση επιπολικότητας μεταξύ στερεοζεύγους με προβολικούς πίνακες μηχανής \mathbf{P} και \mathbf{P}' , ο ανάστροφος πίνακας \mathbf{F}^T περιγράφει τη δέσμευση επιπολικότητας όταν οι θέσεις των εικόνων αντιστραφούν, και συνεπώς το υπάρχον στερεοζεύγος χαρακτηρίζεται από τους προβολικούς πίνακες μηχανής \mathbf{P}' , \mathbf{P} .

Όπως προαναφέρθηκε, ο \mathbf{F} καθιστά δυνατό τον υπολογισμό της επιπολικής γραμμής σημείου \mathbf{x} , η οποία υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{l}' = \mathbf{F}\mathbf{x} \quad (4.5)$$

ενώ για σημείο \mathbf{x}' της δεξιάς εικόνας, ο υπολογισμός της επιπολικής γραμμής προκύπτει μέσω του ανάστροφου πίνακα \mathbf{F}^T :

$$\mathbf{l} = \mathbf{F}^T\mathbf{x}' \quad (4.6)$$

Με τη βοήθεια του επιπολικού πίνακα μπορούν να υπολογιστούν και οι θέσεις των πόλων \mathbf{e} , \mathbf{e}' στις δύο εικόνες από τις σχέσεις:

$$\mathbf{F}\mathbf{e} = 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{F}^T\mathbf{e}' = 0 \quad (4.7 \text{ a} - \text{b})$$

Ο \mathbf{F} συνδέει και δύο ομόλογες επιπολικές ευθείες μεταξύ τους. Έστω ευθεία οριζόμενη σε ομογενείς συντεταγμένες από το διάνυσμα \mathbf{e} , η οποία δεν διέρχεται από τον πόλο και τέμνει επιπολική γραμμή σε εικονοσημείο \mathbf{x} . Το εξωτερικό γινόμενο των δύο αυτών ευθειών αναπαριστά το σημείο τομής τους, το οποίο ανήκει στην επιπολική γραμμή \mathbf{l} , και μέσω του σημείου ορίζεται η ομόλογη επιπολική γραμμή \mathbf{l}' στην άλλη εικόνα. Συνεπώς, οι Εξ. (4.5) και (4.6) μετασχηματίζονται στις σχέσεις που συνδέουν τις ομόλογες επιπολικές ευθείες μεταξύ τους και είναι οι:

$$\mathbf{l}' = \mathbf{F}\mathbf{e} \times \mathbf{l} = \mathbf{F}[\mathbf{e}]_{\times}\mathbf{l} \quad \text{και} \quad \mathbf{l} = \mathbf{F}^T[\mathbf{e}']_{\times}\mathbf{l}' \quad (4.8 \text{ a} - \text{b})$$

Ακόμα, ο \mathbf{F} μπορεί να αναλυθεί σε συμμετρικό μέρος \mathbf{F}_s και αντισυμμετρικό \mathbf{F}_a με:

$$\mathbf{F}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) \quad \text{και} \quad \mathbf{F}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{F} - \mathbf{F}^T) \quad (4.9 \text{ a} - \text{b})$$

ώστε να ισχύει:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_a \quad (4.10)$$

Τέλος, όπως αναφέρθηκε και στην αντίστοιχη ενότητα (βλ. 3.4.2), ο δεσμευμένος επιπολικός πίνακας αποτελεί υποπερίπτωση του επιπολικού πίνακα. Με γνωστά τον \mathbf{F} και τα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού, ώστε να κατασκευαστεί ο πίνακας μηχανής \mathbf{K} , η σύνδεση του \mathbf{F} με τον \mathbf{E} υλοποιείται με βάση την ακόλουθη έκφραση:

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}^T \mathbf{F} \mathbf{K} \quad (4.11)$$

4.1.2 Γεωμετρική ερμηνεία

4.1.2.1 Επιπολικός πίνακας και πόλοι

Ο επιπολικός πίνακας εκφράζει μία ομογραφία μεταξύ των δεσμών των επιπολικών ευθειών, αντιμετωπιζόμενων ως στοιχείων του μονοδιάστατου προβολικού χώρου, και είναι δυνατό να εκφραστεί μέσω των τριών παραμέτρων που ορίζουν την ομογραφία αυτή και της θέσης των πόλων, όπως έδειξαν οι Luong & Faugeras (1996).

Σε περίπτωση όπου οι πόλοι της εικόνας δεν βρίσκονται στο άπειρο, καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός της κλίσης των επιπολικών γραμμών, με ορισμό της τομής της ευθείας αυτής l με την ευθεία του απείρου l_∞ . Ειδικότερα, εάν υπάρχει σημείο \mathbf{q} που ανήκει στην επιπολική γραμμή, τότε το σημείο τομής της ευθείας με την l_∞ είναι το:

$$\mathbf{y}_\infty = (\mathbf{e} \times \mathbf{q}) \times (0,0,1)^T \quad (4.12)$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως $(1, \tau, 0)^T$,

όπου το τ υποδηλώνει την κλίση της επιπολικής γραμμής και είναι:

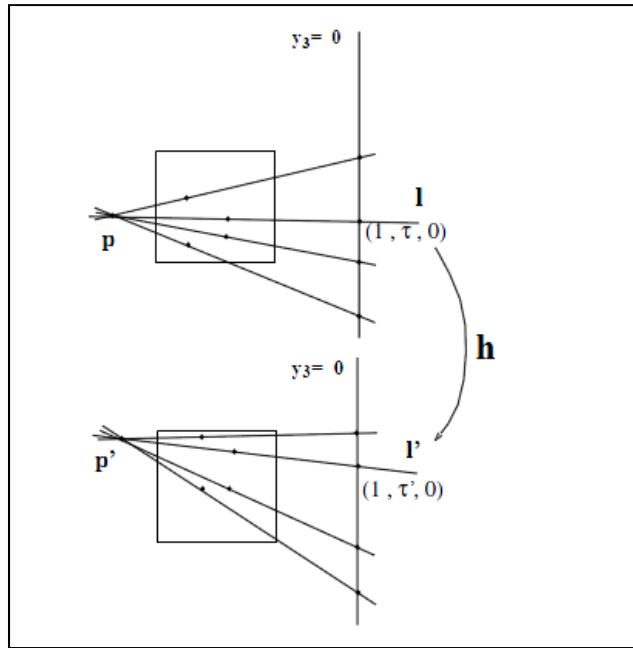
$$\tau = \frac{q_2 - e_2}{q_1 - e_1} \quad (4.13)$$

Εάν δε υπάρχει στην άλλη εικόνα σημείο \mathbf{q}' , ομόλογο του \mathbf{q} , τότε η επιπολική ευθεία l' που θα διέρχεται από το \mathbf{q}' θα είναι η ομόλογη της ευθείας l . Όμοια με τα παραπάνω, η τομή της ευθείας l' με την ευθεία του απείρου l_∞ θα βρίσκεται στο σημείο \mathbf{y}_∞' , επομένως η κλίση της επιπολικής ευθείας l' μπορεί να γραφεί συναρτήσει της κλίσης της επιπολικής ευθείας l ως

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (4.14)$$

ώστε τελικά ο επιπολικός πίνακας να ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} b & a & -ae_2 - be_1 \\ -d & -c & ce_2 + de_1 \\ de'_2 - be'_1 & ce'_2 - ae'_1 & -ce'_2e_2 - de'_2e_1 + ae_2e'_1 + be_1e'_1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$



Σχήμα 4.1: Οι κλίσεις των επιπολικών ευθειών προκύπτουν με τομή με την ευθεία του απείρου.

Η παραπάνω παραμετροποίηση συμφωνεί με τους 7 βαθμούς ελευθερίας που χαρακτηρίζουν τον επιπολικό πίνακα, καθώς απαιτούνται 4 βαθμοί ελευθερίας για να οριστούν πλήρως οι πόλοι και 3 για να οριστεί η ομογραφία (σημασία έχει μόνο ο λόγος των τεσσάρων παραμέτρων που υπεισέρχονται σε αυτήν). Η συγκεκριμένη παραμετροποίηση εξασφαλίζει ότι ο πίνακας \mathbf{F} έχει μηδενική ορίζουσα, και για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται συχνά.

Είναι ακόμα εφικτό να αντιστραφεί η παραπάνω η σχέση, ώστε με δεδομένο τον επιπολικό πίνακα να υπολογίζονται οι πόλοι με βάση τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= f_{12} & b &= f_{11} & c &= -f_{22} \\
 d &= -f_{21} & e_1 &= \frac{f_{23}f_{12} - f_{22}f_{13}}{f_{22}f_{11} - f_{21}f_{12}} & e_1' &= \frac{f_{32}f_{21} - f_{22}f_{31}}{f_{22}f_{11} - f_{21}f_{12}} \\
 e_2 &= \frac{f_{13}f_{21} - f_{11}f_{23}}{f_{22}f_{11} - f_{21}f_{12}} & e_2' &= \frac{f_{31}f_{12} - f_{11}f_{32}}{f_{22}f_{11} - f_{21}f_{12}} & & (4.16 \text{ a} - \text{h})
 \end{aligned}$$

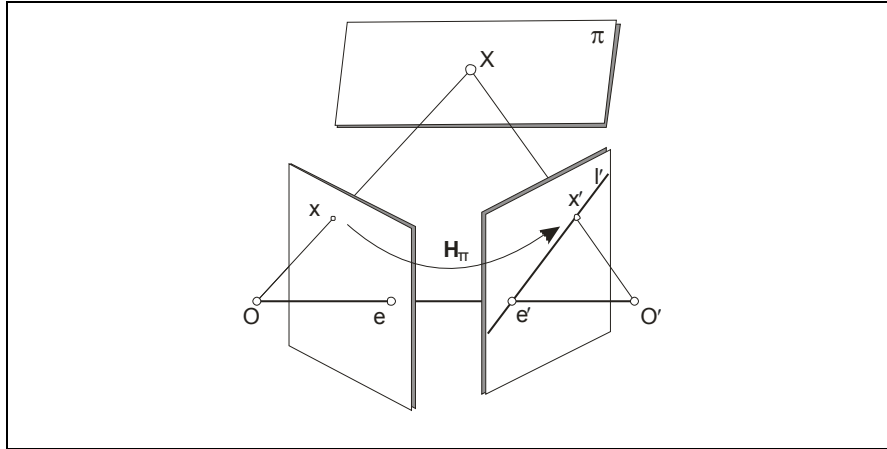
όπου f_{ij} τα στοιχεία του \mathbf{F} .

4.1.2.2 Μεταφορά σημείων μέσω επιπέδου

Ο επιπολικός πίνακας μπορεί ακόμα να οριστεί μέσω ενός τυχαίου επιπέδου π . Για εικονοσημείο \mathbf{x} , η τομή της τρισδιάστατης οπτικής ακτίνας που αυτό ορίζει με οποιοδήποτε επίπεδο π , πέρα από εκείνα που περιλαμβάνουν κάποιο από τα δύο κέντρα λήψης, είναι σημείο \mathbf{X} του χώρου, το οποίο αποτελεί σημείο του αντικειμένου μόνο αν το επίπεδο τομής είναι το επίπεδο του αντικειμένου. Το \mathbf{X} στη δεύτερη εικόνα προβάλλεται ως εικονοσημείο \mathbf{x}' . Οποιοδήποτε σημείο x_i μεταφέρεται μέσω του επιπέδου π στο ομόλογό του, συνεπώς υπάρχει μία δισδιάστατη ομογραφία \mathbf{H}_π διαστά-

σεων 3×3 που συνδέει τα σημεία αυτά, ώστε:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}_\pi \mathbf{x} \quad (4.17)$$



Σχήμα 4.2: Μεταφορά σημείων μέσω επιπέδου (Hartley & Zisserman, 2003).

Το \mathbf{x} ανήκει στην επιπολική ευθεία l , συνεπώς το ομόλογό του θα ανήκει στην επιπολική ευθεία l' , η οποία μπορεί να υπολογιστεί καθώς δύο σημεία της – το \mathbf{x}' και ο πόλος \mathbf{e}' – είναι γνωστά. Άρα:

$$l' = \mathbf{e}' \times \mathbf{x}' = [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{x}' = [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{H}_\pi \mathbf{x} = \mathbf{F} \mathbf{x} \quad (4.18)$$

Συνεπώς:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{H}_\pi \quad (4.19)$$

Ο \mathbf{F} εκφράζεται με τον τρόπο αυτό ως γινόμενο αντισυμμετρικού πίνακα και ομογραφίας (Καλησπεράκης, 2010). Η σχέση αυτή επιβεβαιώνει ότι ο επιπολικός πίνακας έχει βαθμό 2, καθώς αναπαριστά μία ομογραφία μεταξύ του διδιάστατου προβολικού χώρου της πρώτης εικόνας και της δέσμης των επιπολικών ευθειών της δεύτερης εικόνας δια του πόλου της, που αποτελεί έναν μονοδιάστατο προβολικό χώρο.

4.2 Αλγόριθμοι υπολογισμού

Όπως προαναφέρθηκε, ο υπολογισμός του επιπολικού πίνακα είναι δυνατός και με ομολογίες σημείων. Κατά καιρούς έχουν αναπτυχθεί διάφοροι γραμμικοί και μη γραμμικοί αλγόριθμοι για έναν τέτοιο υπολογισμό του, οι οποίοι διαφέρουν ως προς τον αριθμό των ομολογιών που απαιτούνται αλλά και ως προς τη συνάρτηση κόστους που ελαχιστοποιείται. Οι εικονοσυντεταγμένες των ομόλογων σημείων μπορούν να αναφέρονται σε οποιοδήποτε σύστημα μέτρησης συντεταγμένων (pixel, mm κ.λπ.), αρκεί να είναι ομογενείς.

4.2.1 Γραμμικοί Αλγόριθμοι

4.2.1.1. Ο αλγόριθμος των 8 σημείων

Στην περίπτωση όπου είναι γνωστές 8 ή περισσότερες ομολογίες σημείων, έχει αναπτυχθεί γραμμικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα, παρόμοιος με εκείνον για τον υπολογισμό του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα \mathbf{E} κατά τον Longuet-Higgins (1981), ο οποίος είναι εύκολος στην εφαρμογή, ενώ έχει επικρατήσει να ονομάζεται “αλγόριθμος των 8 σημείων” (*8-point algorithm*). Ειδικότερα, χρησιμοποιώντας τις ομογενείς συντεταγμένες των σημείων και αναπτύσσοντας τη δέσμευση:

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{F} \mathbf{x} = 0$$

όπου τα σημεία έχουν τη μορφή:

$$\mathbf{x} = [x \ y \ 1]^T \quad \text{και} \quad \mathbf{x}' = [x' \ y' \ 1]^T \quad (4.20 \ a - b)$$

παίρνει κανείς την ακόλουθη γραμμική σχέση για κάθε σημείο:

$$x'x f_{11} + x'y f_{12} + x' f_{13} + y'x f_{21} + y'y f_{22} + y' f_{23} + x f_{31} + y f_{32} + f_{33} = 0 \quad (4.21)$$

Με βάση τα παραπάνω δημιουργείται, για N ομολογίες σημείων, πίνακας \mathbf{A} διαστάσεων $N \times 9$, ο οποίος οφείλει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathbf{A} \mathbf{f} = 0 \quad (4.22)$$

όπου \mathbf{f} διάνυσμα που περιλαμβάνει τα στοιχεία του επιπολικού πίνακα:

$$\mathbf{f} = [f_{11} \ f_{12} \ f_{13} \ f_{21} \ f_{22} \ f_{23} \ f_{31} \ f_{32} \ f_{33}]^T \quad (4.23)$$

Ο πίνακας \mathbf{A} έχει τη μορφή:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x'_1 x_1 & x'_1 y & x'_1 & y'_1 x_1 & y'_1 y_1 & y'_1 & y_1 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_n x_n & x'_n y & x'_n & y'_n x_n & y_n & y'_n & y_n & x_n & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Το σύστημα των εξισώσεων είναι ομογενές, έχει συνεπώς άπειρες λύσεις. Ένα λοιπόν από τα στοιχεία του \mathbf{f} οφείλει να οριστεί αυθαίρετα, και στη συνέχεια το σύστημα επιλύεται γραμμικά.

Για να εξασφαλίζεται μοναδική λύση, απαιτείται ο πίνακας \mathbf{A} να έχει βαθμό 8. Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις αυτό δεν συμβαίνει λόγω του αναμενόμενου θορύβου στις εικονοσυντεταγμένες. Τότε, χρησιμοποιείται η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων, όπου η λύση δίνεται από τα στοιχεία της τελευταίας στήλης του πίνακα \mathbf{V} , που προκύπτει από την ανάλυση ιδιζουσών τιμών $SVD(\mathbf{A}) = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T$. Ελαχιστοποιείται με τον τρόπο αυτό το γινόμενο $\mathbf{A} \mathbf{f}$, υπακούοντας ταυτόχρονα στη δέσμευση $\|\mathbf{f}\| = 1$, η οποία εξασφαλίζει τη μοναδική λύση του συστήματος. Η μέθοδος αυτή λειτουργεί αποτελεσματικότερα από τον αυθαίρετο ορισμό ενός στοιχείου του επιπολικού πίνακα, καθώς το στοιχείο αυτό δεν αποκλείεται να είναι μηδενικό.

Ο επιπολικός πίνακας που προκύπτει οφείλει να έχει βαθμό 2 (δηλαδή μηδενική ορίζουσα). Για να εξασφαλιστεί αυτή η μείζονος σημασίας δέσμευση πρέπει να αντικα-

τασταθεί από τον πίνακα \mathbf{F}' . Ο \mathbf{F}' ελαχιστοποιεί τη νόρμα $\|\mathbf{F}' - \mathbf{F}\|$, ενώ ταυτόχρονα εξασφαλίζει ότι $\det(\mathbf{F}) = 0$. Ο νέος επιπολικός πίνακας υπολογίζεται με μηδενισμό της τρίτης τιμής λ_3 του πίνακα \mathbf{D} που προκύπτει από την ανάλυση ιδιοζουσών τιμών, ώστε:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{U}\mathbf{D}(\lambda_1, \lambda_2, 0)\mathbf{V}^T \quad (4.25)$$

Στην παραπάνω διαδικασία, για την ενίσχυση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων του επιπολικού πίνακα κατά τον Hartley (1997a) μπορεί να πραγματοποιηθεί και κανονικοποίηση των συντεταγμένων, ώστε το κέντρο βάρους τους να βρίσκεται στην αρχή του συστήματος μέτρησης και η μέση απόστασή τους από αυτή να είναι ίση με $\sqrt{2}$. Ο νέος αυτός αλγόριθμος ονομάστηκε “κανονικοποιημένος αλγόριθμος των 8 σημείων”. Η μαθηματική έκφραση της κανονικοποίησης των συντεταγμένων είναι η ακόλουθη:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad \text{και} \quad \mathbf{x}'_t = \mathbf{T}'\mathbf{x}' \quad (4.26)$$

ώστε τελικά ο \mathbf{F}_t που προκύπτει συνδέεται με τον ζητούμενο επιπολικό πίνακα με την εξής σχέση:

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}'\mathbf{F}_t\mathbf{T} \quad (4.27)$$

4.2.1.2 Ο αλγόριθμος των 7 σημείων

Εάν χρησιμοποιηθεί ο παραπάνω αλγόριθμος όταν υπάρχουν διαθέσιμες μόνο 7 ομολογίες, ο πίνακας σχεδιασμού \mathbf{A} έχει διαστάσεις 7×9 και βαθμό 7.

Στην περίπτωση αυτή τη λύση του ομογενούς συστήματος των εξισώσεων αποτελεί μια μονοπαραμετρική οικογένεια της μορφής $a\mathbf{F}_1 + (1 - a)\mathbf{F}_2$, όπου a μία μεταβλητή. Με χρήση της δέσμευσης μηδενικής ορίζουσας του πίνακα \mathbf{A} , προκύπτει:

$$\det(a\mathbf{F}_1 + (1 - a)\mathbf{F}_2) = 0 \quad (4.28)$$

Οι \mathbf{F}_1 και \mathbf{F}_2 είναι πίνακες με διαστάσεις 3×3 που προκύπτουν από τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα \mathbf{V} της ανάλυσης ιδιοζουσών τιμών $SVD(\mathbf{A}) = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$. Η Εξ. (4.28) οδηγεί σε πολυωνυμική εξίσωση 3^{ου} βαθμού ως προς a , αφού οι \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 είναι γνωστοί, η οποία είναι πιθανόν να έχει μια ή τρεις πραγματικές λύσεις, άρα και ο \mathbf{F} στην οριακή αυτή περίπτωση είναι πιθανό να μην μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος, όπως θα αναφερθεί και παρακάτω, συνεισφέρει καταλυτικά στους αλγορίθμους εντοπισμού χονδροειδών σφαλμάτων.

4.2.2 Μη γραμμικοί αλγόριθμοι

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο υπολογισμός του επιπολικού πίνακα \mathbf{F} είναι δυνατός με γραμμικούς αλγορίθμους από ομολογίες σημείων. Σημαντικό μειονέκτημα όμως αποτελεί ότι οι λύσεις που εξασφαλίζουν οι αλγόριθμοι αυτοί δεν είναι ισχυρές καθώς είναι ευαίσθητες στον θόρυβο αλλά και στις αλλαγές του συστήματος των εικονοσυντεταγμένων. Έτσι, έχουν αναπτυχθεί και μη γραμμικοί αλγόριθμοι υπολογισμού του επιπολικού πίνακα.

4.2.2.1 Αλγεβρική προσέγγιση

Για να βελτιωθεί ο γραμμικός αλγόριθμος, όπως επισημάνθηκε ήδη, προτάθηκε η αντικατάσταση του πίνακα \mathbf{F} με τον \mathbf{F}' ώστε να ελαχιστοποιηθεί η διαφορά $\|\mathbf{F}' - \mathbf{F}\|$. Για τη βέλτιστη λειτουργία της μεθόδου αυτής, θα πρέπει προηγουμένως να έχει υπολογιστεί ο πίνακας συμμεταβλητότητας και να έχουν αποδοθεί βάρη στα 9 στοιχεία του \mathbf{F} . Στη συνέχεια με βάση το κριτήριο της ελαχιστοποίησης της απόστασης Mahalanobis (η οποία διαφέρει από την ευκλείδεια κατά το ότι λαμβάνει υπόψη τις συσχετίσεις που υπάρχουν στα δεδομένα) θα υπολογιστεί ο νέος πίνακας \mathbf{F}' (Hartley & Zisserman, 2003). Η διαδικασία αυτή είναι ιδιαίτερα απαιτητική υπολογιστικά. Διατυπώθηκε λοιπόν ένας εναλλακτικός αλγόριθμος, που επιτρέπει τον υπολογισμό του \mathbf{F} εξασφαλίζοντας υψηλές ακρίβειες με απλούστερο τρόπο.

Εναλλακτικά, ο πίνακας \mathbf{F}' θα μπορούσε να υπολογιστεί πιο άμεσα με βάση τις εξής δεσμεύσεις:

- Ελαχιστοποίηση του $\|\mathbf{A}\mathbf{f}'\|$
- $\|\mathbf{f}'\| = 1$
- $\det(\mathbf{F}') = 0$

Η τελευταία δέσμευση δεν είναι γραμμική και περιπλέκει τον αλγόριθμο, γι' αυτό και υιοθετήθηκε η ακόλουθη επαναληπτική μέθοδος. Ο πίνακας \mathbf{F} αναλύεται σε γινόμενο αντισυμμετρικού πίνακα, ώστε:

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}[\mathbf{e}]_{\times} \quad (4.29)$$

όπου το \mathbf{e} αναφέρεται στον πόλο της αριστερής εικόνας. Θεωρώντας τα διανύσματα \mathbf{f} , \mathbf{m} που περιλαμβάνουν σε μία σειρά τα στοιχεία των πινάκων \mathbf{F} , \mathbf{M} έχει κανείς:

$$\mathbf{f} = \mathbf{E}\mathbf{m} \quad (4.30)$$

όπου \mathbf{E} ο ακόλουθος πίνακας με διαστάσεις 9×9 :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} [\mathbf{e}]_{\times} & & \\ & [\mathbf{e}]_{\times} & \\ & & [\mathbf{e}]_{\times} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Με ελαχιστοποίηση της νόρμας $\|\mathbf{A}\mathbf{f}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{E}\mathbf{m}\|$ και παράλληλη διατήρηση της δέσμευσης $\|\mathbf{f}\| = \|\mathbf{E}\mathbf{m}\| = 1$, ο επιπολικός πίνακας υπολογίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια. Οι ανάγκες για προσεγγιστικές τιμές του \mathbf{F} καλύπτονται επαρκώς από τον αλγόριθμο των 8 σημείων, και κατόπιν υπολογίζονται οι συντεταγμένες των πόλων από τον \mathbf{F} , όπως έχει περιγραφεί.

4.2.2.2 Γεωμετρική προσέγγιση

Πέραν της αλγεβρικής προσέγγισης του προβλήματος υπολογισμού του \mathbf{F} , διάφοροι ερευνητές (βλ. Hartley & Zisserman, 2003) έχουν αναπτύξει αρκετούς αλγορίθμους για τον υπολογισμό του, βασιζόμενοι σε γεωμετρικές σχέσεις. Στους αλγορίθμους αυτούς μείζον θέμα αποτελεί η παραμετροποίηση του επιπολικού πίνακα, η οποία

πραγματοποιείται με διάφορους τρόπους. Αναφέρονται εδώ οι βασικότεροι.

Καταρχάς, όπως έχει προαναφερθεί, ο επιτολικός πίνακας μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{M}$$

Ο πίνακας \mathbf{M} έχει διαστάσεις 3×3 , ενώ το \mathbf{t} διαστάσεις 3×1 , άρα ο \mathbf{F} θα οριστεί πλήρως με τη βοήθεια 12 παραμέτρων και όχι 7 που είναι ο ελάχιστος απαιτητός αριθμός για τον πλήρη ορισμό του.

Άλλη πιθανή παραμετροποίηση χρησιμοποιεί τις συντεταγμένες $(A, B, -1)^T$ του ενός πόλου \mathbf{e} . Η παραμετροποίηση αυτή διασφαλίζει τη δέσμευση $\det(\mathbf{F}) = 0$ και πραγματοποιείται όταν η τρίτη γραμμή ή η τρίτη στήλη γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των δύο πρώτων γραμμών ή στηλών, αντίστοιχα. Για να λειτουργεί βέβαια απαιτείται οι δύο πρώτες γραμμές ή στήλες να είναι γραμμικά ανεξάρτητες, κάτι που δεν συμβαίνει αν ο πόλος \mathbf{e}_2 βρίσκεται στο άπειρο. Τότε χρειάζεται επιλογή δύο άλλων γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών. Παρακάτω εμφανίζεται ένα παράδειγμα της παραμετροποίησης αυτής, όταν οι δύο πρώτες στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a & b & Aa + Bb \\ c & d & Ac + Bd \\ e & f & Ae + Bf \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Από τις παραπάνω 6 παραμέτρους a, \dots, f μπορεί η μια να τεθεί αυθαίρετα, ώστε να εξασφαλίζεται ο ορισμός του επιτολικού πίνακα με τις ελάχιστες δυνατές παραμέτρους. Πλεονέκτημα της παραμετροποίησης αυτής αποτελεί η δέσμευση της μηδενικής οριζουσας, η οποία εάν εφαρμοστεί με την καθαρά μαθηματική της μορφή οδηγεί σε πολύπλοκη εξίσωση.

Το τελευταίο είδος παραμετροποίησης, που αναφέρθηκε και παραπάνω (Εξ. 4.15), κάνει χρήση των συντεταγμένων και των δύο πόλων $(A, B, -1)^T$ και $(A', B', -1)^T$ και των παραμέτρων της ομογραφίας που συνδέει τις επιτολικές δέσμες. Ο πίνακας \mathbf{F} που προκύπτει είναι ο εξής:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a & b & Aa + Bb \\ c & d & Ac + Bd \\ aA' + B'c & A'b + B'd & AA'a + A'Bb + B'Ac + B'Bd \end{bmatrix}$$

Οι αλγόριθμοι που έχουν αναπτυχθεί διαφοροποιούνται ως προς το γεωμετρικό μοντέλο που χρησιμοποιούν και την ποσότητα που πρέπει να ελαχιστοποιείται.

Ο πιο συνηθισμένος αλγόριθμος είναι αυτός που χρησιμοποιεί ως συνάρτηση κόστους την απόσταση του σημείου από τις αντίστοιχες επιτολικές γραμμές:

$$\sum_i d(\mathbf{q}'_i, \mathbf{F}\mathbf{q}_i)^2 \quad (4.33)$$

Ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να δοθεί στη μη ύπαρξη συμμετρίας μεταξύ των δύο εικόνων, κάτι που δεν συμβαίνει στις γραμμικές επιλύσεις. Πιο συγκεκριμένα, δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η παραπάνω σχέση για την επίλυση του πίνακα \mathbf{F} και η σχέση:

$$\sum_l d(\mathbf{q}_i, \mathbf{F}' \mathbf{q}'_i)^2 \quad (4.34)$$

για τον υπολογισμό του επιτολικού πίνακα \mathbf{F}' .

Η Εξ. (4.34) προκύπτει εάν αντιστραφούν οι θέσεις των εικόνων, δεν διασφαλίζει όμως ότι τα ομόλογα των σημείων που περιλαμβάνονται στην επιτολική γραμμή l του σημείου \mathbf{q} θα ανήκουν στην επιτολική γραμμή l' του σημείου \mathbf{q}' . Για τον λόγο αυτό οι Luong & Faugeras (1996) πρότειναν τη χρήση της ακόλουθης εξίσωσης, με την οποία εξασφαλίζεται η παραπάνω δέσμευση, καθώς σε περίπτωση που αντιστραφούν οι θέσεις των εικόνων ο επιτολικός πίνακας του στερεοζεύγους που θα προκύψει θα αποτελεί τον ανάστροφο πίνακα του \mathbf{F} :

$$\sum_l (d(\mathbf{q}_i, \mathbf{F}^T \mathbf{q}'_i)^2 + d(\mathbf{q}'_i, \mathbf{F} \mathbf{q}_i)^2) \quad (4.35)$$

Η σχέση αυτή με χρήση της ιδιότητας $\mathbf{q}_i'^T \mathbf{F} \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i^T \mathbf{F}^T \mathbf{q}'_i$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\sum_i (\mathbf{q}_i'^T \mathbf{F} \mathbf{q}_i)^2 \left(\frac{1}{(\mathbf{F} \mathbf{q}_i)_1^2 + (\mathbf{F} \mathbf{q}_i)_2^2} + \frac{1}{(\mathbf{F}^T \mathbf{q}'_i)_1^2 + (\mathbf{F}^T \mathbf{q}'_i)_2^2} \right) \quad (4.36)$$

Αυτός ο μη γραμμικός αλγόριθμος είναι παραπλήσιος με εκείνον που χρησιμοποιεί ως συνάρτηση κόστους την απόσταση Sampson, και η μαθηματική έκφραση που οφείλει να ελαχιστοποιείται είναι:

$$\sum_i \left(\frac{(\mathbf{q}_i'^T \mathbf{F} \mathbf{q}_i)^2}{(\mathbf{F} \mathbf{q}_i)_1^2 + (\mathbf{F} \mathbf{q}_i)_2^2 + (\mathbf{F}^T \mathbf{q}'_i)_1^2 + (\mathbf{F}^T \mathbf{q}'_i)_2^2} \right) \quad (4.37)$$

Τέλος, άλλοι μη γραμμικοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούν μία επιφάνεια τετάρτου βαθμού, η οποία προσαρμόζεται κατά το δυνατόν καλύτερα στα δεδομένα και μπορεί να παραμετροποιηθεί αν χρησιμοποιήσει κανείς τις δέσμες των επιτολικών ευθειών. Οι αλγόριθμοι αυτοί βασίζονται στην ελαχιστοποίηση της ευκλείδειας απόστασης μεταξύ του εικονοσημείου και του αντίστοιχου σημείου που ανήκει στην επιφάνεια.

4.2.3 Αλγόριθμος ανίχνευσης χονδροειδών σφαλμάτων RANSAC

Ο υπολογισμός του επιτολικού πίνακα μπορεί να μετατραπεί σε μία πλήρως αυτοματοποιημένη διαδικασία, με την αυτόματη εξαγωγή ομόλογων σημείων (όπως θα αναφερθεί και σε επόμενο κεφάλαιο) και εφαρμογή στη συνέχεια των παραπάνω αλγορίθμων για τον υπολογισμό του. Για ακριβή και σωστό υπολογισμό του \mathbf{F} απαιτείται οι ομολογίες σημείων που εξάγονται να είναι σωστές, διαφορετικά θα οδηγήσουν σε εσφαλμένους υπολογισμούς. Ο διαθέσιμος αριθμός ομολογιών συνήθως είναι αρκετά μεγάλος, και έρευνες έχουν δείξει ότι καλύτερος τρόπος για την ανίχνευση χονδροειδών σφαλμάτων σε ανάλογες περιπτώσεις είναι η εφαρμογή του αλγορίθμου RANSAC των Fischler & Bolles (1981), ο οποίος σε αντίθεση με την πλειονότητα των αντίστοιχων αλγορίθμων, χρησιμοποιεί κατά το δυνατόν λιγότερα δεδομένα.

Εφαρμογή του για τον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα έγινε για πρώτη φορά από τους Torr & Murray (1993) και βασίζεται στην ακόλουθη διαδικασία. Κατ' αρχάς δημιουργούνται ορισμένα δείγματα. Το καθένα αποτελείται από 7 ομολογίες σημείων, τον μικρότερο δηλαδή δυνατό αριθμό για τον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα. Από κάθε δείγμα υπολογίζεται ο F με βάση τον προαναφερθέντα αλγόριθμο των 7 σημείων. Πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι ο επιπολικός πίνακας θα έχει βαθμό 2, ενώ όσο μικρότερα είναι τα δείγματα που χρησιμοποιούνται, τόσο μικρότερος είναι και ο αριθμός των δειγμάτων που απαιτείται να δοκιμαστούν για να τερματιστεί επιτυχώς η διαδικασία. Μειονέκτημα βέβαια αποτελεί πως ο συγκεκριμένος αλγόριθμος πιθανώς να επιστρέψει τρεις επιπολικούς πίνακες, οι οποίοι θα πρέπει ελεγχθούν περαιτέρω.

Για κάθε επιπολικό πίνακα υπολογίζεται η απόσταση Sampson για όλες τις ομολογίες σημείων που έχουν αναγνωριστεί από τον αλγόριθμο συνταύτισης. Εάν η τιμή που προκύπτει είναι μικρότερη από ένα προκαθορισμένο κατώφλι, η ομολογία θεωρείται έγκυρη (*inlier*), διαφορετικά θεωρείται άκυρη (*outlier*). Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για συγκεκριμένο αριθμό δειγμάτων, ώστε να εξασφαλιστεί η επιδιωκόμενη ακρίβεια. Είναι προφανές ότι θα ήταν υπολογιστικά αδύνατο να πραγματοποιηθεί η διαδικασία για το σύνολο των δυνατών δειγμάτων. Ο αριθμός N των δειγμάτων, δηλαδή των επαναλήψεων, που απαιτούνται ώστε κάποιο από αυτά να περιλαμβάνει μόνο inliers με πιθανότητα p , δίνεται από την εξής σχέση (Καλησπεράκης, 2010):

$$N = \frac{\log(1-p)}{\log(1-(1-\varepsilon)^s)} \quad (4.38)$$

όπου s ο αριθμός των ελάχιστων σημείων που απαιτούνται σε κάθε δείγμα και ε η εκτίμηση του ποσοστού των χονδροειδών σφαλμάτων.

Τελικά, επιλέγεται ο επιπολικός πίνακας με τον οποίο συμβαδίζει ο μεγαλύτερος αριθμός inliers, και όλα τα σημεία συγκροτούν ένα νέο δείγμα με βάση το οποίο γίνεται ο υπολογισμός του τελικού επιπολικού πίνακα μέσω κάποιου από τους μη γραμμικούς αλγόριθμους που αναφέρθηκαν.

4.3 Κρίσιμες γεωμετρίες

Το μοντέλο του επιπολικού πίνακα δεν λειτουργεί σε κάθε περίπτωση. Υπάρχουν ορισμένες γεωμετρίες λήψεων των εικόνων στις οποίες, ανεξάρτητα από τον προκύπτοντα αριθμό ομολογιών, ο F δεν μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα. Οι κρίσιμες αυτές γεωμετρίες έχουν ιδιαίτερη σημασία αφού και οι λύσεις από γεωμετρίες που διαφέρουν λίγο από αυτές δεν είναι ισχυρές.

Βασική τέτοια περίπτωση αποτελεί η ύπαρξη κοινού σημείου λήψης για όλες τις εικόνες, καθώς η επιπολική γεωμετρία στην οποία οφείλει να υπακούει το στερεοζεύγος πηγάζει ως δέσμευση από την ύπαρξη διαφορετικών σημείων λήψης. Τότε οι δύο εικόνες διαφέρουν κατά μία ομογραφία H , ενώ εάν επιχειρηθεί ο υπολογισμός του F στην πιο ευνοϊκή περίπτωση θα προκύψει οικογένεια πιθανών λύσεων χαρακτηριζόμενη από 2 παραμέτρους. Ειδικότερα ο επιπολικός πίνακας θα έχει τη μορφή:

$$F = SH \quad (4.39)$$

όπου \mathbf{H} η ομογραφία που συνδέει τις δύο εικόνες και \mathbf{S} τυχαία ορισμένος αντισυμμετρικός πίνακας.

Δεύτερη περίπτωση κρίσιμης γεωμετρίας αποτελεί η περίπτωση όπου τα κέντρα λήψης και τα ομόλογα σημεία που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα ανήκουν σε ευθειογενή επιφάνεια 2^{ου} βαθμού. Τότε υπολογίζονται τρεις επιπολικοί πίνακες.

Σημαντικότερη βέβαια υποπερίπτωση της παραπάνω υπόθεσης, όπου το μοντέλο του \mathbf{F} αδυνατεί να αντεπεξέλθει ικανοποιητικά, προκύπτει όταν όλες οι ομολογίες σημείων που χρησιμοποιούνται αφορούν συνεπίπεδα σημεία. Τα ομόλογα σημεία μεταξύ των δύο εικόνων συνδέονται μεταξύ τους με ομογραφία \mathbf{H} , άρα

$$x_i' = \mathbf{H}x_i \quad (4.40)$$

και ο επιπολικός πίνακας οφείλει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$x_i'^T \mathbf{F} x_i = x_i'^T (\mathbf{F} \mathbf{H}^{-1}) x_i' = 0 \quad (4.41)$$

Η σχέση αυτή ικανοποιείται οσάκις ο πίνακας $\mathbf{F} \mathbf{H}^{-1}$ είναι αντισυμμετρικός, οπότε λύση για τον \mathbf{F} είναι κάθε πίνακας της μορφής $\mathbf{S} \mathbf{H}$, όπου \mathbf{S} αντισυμμετρικός πίνακας.

4.4 Επιπολικές εικόνες

Σε προηγούμενη ενότητα (βλ. 3.5) έχει αναφερθεί η δημιουργία επιπολικών εικόνων από εικόνες με γνωστό εσωτερικό και εξωτερικό ή σχετικό προσανατολισμό, καθώς και τα πλεονεκτήματα που αυτές παρουσιάζουν στις διαδικασίες της συνταύτισης και της στερεοσκοπικής παρατήρησης. Η δημιουργία όμως ζεύγους επιπολικών εικόνων είναι δυνατή, μέσω του επιπολικού πίνακα, ακόμα και αν οι εικόνες προέρχονται από μη βαθμονομημένες μηχανές και δεν υπάρχει καμία επιπλέον γνώση για τη μεταξύ τους σχετική θέση.

Η διαδικασία που θα περιγραφεί στην συνέχεια βασίζεται στην επαναπροβολή των δύο εικόνων σε ένα επίπεδο με τη βοήθεια των αντίστοιχων δισδιάστατων μετασχηματισμών \mathbf{H} και \mathbf{H}' , με στόχο να ελαχιστοποιηθούν οι διαφορές μεταξύ της αρχικής και της επιπολικής εικόνας αλλά και οι πιθανές παραμορφώσεις που θα προκύψουν. Όταν ολοκληρωθεί, οι δύο εικόνες θα ταυτίζονται κατά το δυνατό, ενώ οι επιπολικές γραμμές θα είναι παράλληλες μεταξύ τους. Η μέθοδος αυτή επιπολικής επανασύστασης στηρίζεται στη μεταφορά των πόλων των εικόνων στο άπειρο και δεν είναι βέβαια αποτελεσματική στην περίπτωση όπου οι πόλοι εντοπίζονται μέσα στα φυσικά όρια των εικόνων, καθώς τότε θα έπρεπε προφανώς εικονοσημεία να μεταφερθούν στο άπειρο. Εν τούτοις, έχουν και για αυτό προταθεί διάφοροι άλλοι τρόποι, όπως εκείνος των Pollyfeys et al. (1999) που επαναπροβάλλει την εικόνα σε κυλινδρική επιφάνεια και χρησιμοποιείται όταν οι πόλοι βρίσκονται κοντά ή και μέσα στις εικόνες.

Προκειμένου οι επιπολικές γραμμές να είναι παράλληλες στον άξονα x θα πρέπει ο πόλος της εικόνας να μεταφερθεί στη θέση $(1,0,0)^T$. Οι επιπολικές γραμμές βέβαια μπορούν να είναι και παράλληλες στη διεύθυνση y των εικόνων σε περίπτωση όπου ο πόλος μεταφερθεί στη θέση $(0,1,0)^T$. Η επιλογή για την τελική θέση του πόλου ε-

ξαρτάται μόνο από την αρχική του θέση. Στη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων οι επιπολικές γραμμές μετατρέπονται ώστε να είναι παράλληλες στον άξονα x , περίπτωση η οποία θα αναλυθεί παρακάτω.

Η ομογραφία που εκτελεί την παραπάνω διαδικασία χαρακτηρίζεται από 4 βαθμούς ελευθερίας και, αν δεν επιβληθούν ισχυρές γεωμετρικές δεσμεύσεις, πιθανόν να προκαλέσει έντονη παραμόρφωση στις εικόνες (Hartley & Zisserman, 2003). Η ακόλουθη σχέση οφείλει να τηρείται από την ομογραφία που θα επιλεγεί, αν και δεν υπάρχει μοναδική \mathbf{H} που υπακούει σε αυτή:

$$\mathbf{H}^T \bar{\mathbf{F}} \mathbf{H} = \mathbf{F} \quad (4.42)$$

όπου $\bar{\mathbf{F}}$ ο επιπολικός πίνακας του στερεοζεύγους των επιπολικών εικόνων που έχει την εξής μορφή:

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Είναι επιθυμητό, όπως ειπώθηκε και παραπάνω, η επιπολική εικόνα να είναι κατά το δυνατόν ίδια με την αρχική, εφαρμόζεται λοιπόν μόνο μία μετάθεση και μία στροφή στην αρχική εικόνα. Με βάση τις παραπάνω δεσμεύσεις, τελικά η ομογραφία ορίζεται ως γινόμενο τριών πινάκων, όπως φαίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{H} = \mathbf{GRT} \quad (4.44)$$

όπου \mathbf{T} πίνακας που συνεισφέρει στη μετάθεση του αρχής του συστήματος των εικονοσυντεταγμένων στο κέντρο της εικόνας, \mathbf{R} πίνακας στροφής 3×3 περί την αρχή του συστήματος των εικονοσυντεταγμένων που μετακινεί τον πόλο στο σημείο $(f, 0, 1)^T$ και \mathbf{G} πίνακας με την ακόλουθη μορφή, ο οποίος μεταφέρει το $(f, 0, 1)^T$ στο άπειρο:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/f & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Η διαδικασία αυτή μπορεί να εφαρμοστεί δύο φορές, ώστε να υπολογιστούν οι ομογραφίες \mathbf{H} και \mathbf{H}' που μετακινούν αντίστοιχα τους πόλους \mathbf{e} , \mathbf{e}' στο άπειρο, ή μόνο μία φορά, ώστε να υπολογιστεί η \mathbf{H}' και βάσει της ακόλουθης σχέσης να υπολογιστεί η \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = (\mathbf{I} + \mathbf{H}' \mathbf{e}' \boldsymbol{\alpha}^T) \mathbf{H}' \mathbf{M} \quad (4.46)$$

για κάποιο διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$, και \mathbf{M} τον πίνακα που προκύπτει από τη σχέση $\mathbf{F} = [\mathbf{e}]_{\times} \mathbf{M}$.

Οι δύο ομογραφίες που εμπλέκονται στη παραπάνω σχέση έχουν υπολογιστεί με τρόπο ώστε να ελαχιστοποιούν τη μαθηματική συνάρτηση:

$$\sum_i d(\mathbf{H} \mathbf{x}_i, \mathbf{H}' \mathbf{x}'_i)^2 \quad (4.47)$$

Από τα παραπάνω υπολογίζονται οι συντελεστές του δισδιάστατου μετασχηματισμού που θα εφαρμοστεί στην εκάστοτε εικόνα. Προκειμένου όμως να ελαχιστοποιηθούν οι παραμορφώσεις κατά την x και την y διεύθυνση υπολογίζεται και ένας επιπλέον

μετασχηματισμός, ώστε οι εικόνες να ταυτίζονται κατά το δυνατόν, ο οποίος περιλαμβάνει κατά κάθε διεύθυνση μόνο μετάθεση και κλίμακα, σύμφωνα με την σχέση:

$$x' = scale_x * x + dx \quad \text{και} \quad y' = scale_y * y + dy \quad (4.48 \text{ a} - \text{b})$$

Ο υπολογισμός των παραμέτρων $scale_x$ και dx για να μειωθεί η παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση x πραγματοποιείται με τη βοήθεια της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, καθώς δημιουργείται ο πίνακας σχεδιασμού $\mathbf{A}(N \times 2)$ για N σημεία με μορφή:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_i & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

και το διάνυσμα:

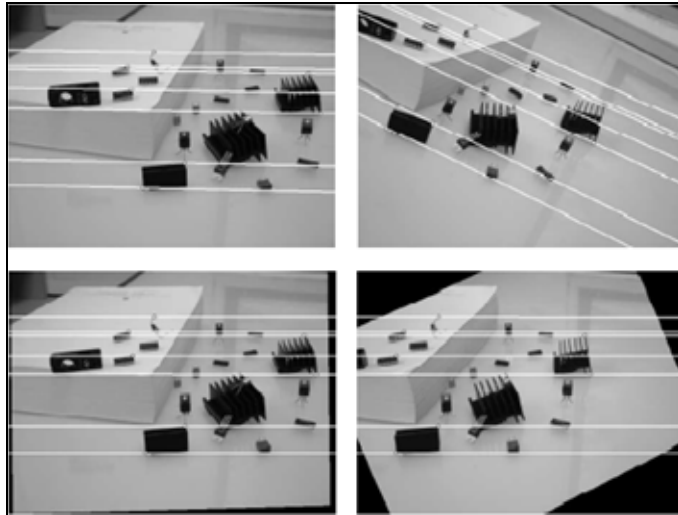
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x'_i \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Ο τελικός μετασχηματισμός που προκύπτει για την αριστερή εικόνα είναι:

$$\mathbf{H}_{\tau\epsilon\lambda} = \mathbf{M} * \mathbf{H} \quad (4.51)$$

$$\text{όπου } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} scale_x & 0 & dx \\ 0 & scale_y & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

ενώ ο μετασχηματισμός για τη δεξιά δεν μεταβάλλεται. Ο τελικός πίνακας \mathbf{H} επιτρέπει τον μετασχηματισμό των αρχικών εικονοσυντεταγμένων στις εικονοσυντεταγμένες τις επιπολικής εικόνας και ο \mathbf{H}^{-1} εκφράζει τον αντίστροφο μετασχηματισμό.



Σχήμα 4.3: Ομόλογες επιπολικές γραμμές σε ζεύγος εικόνων (πάνω) και αντίστοιχες επιπολικές εικόνες με επιπολικές γραμμές παράλληλες με τη βάση (κάτω). Κατά Hartley & Zisserman (2003).

Η τελική διαδικασία επιπολικής επανασύστασης είναι αντίστοιχη με εκείνη που περιγράφηκε στην ενότητα 3.5.1 (εύρεση ορίων νέας εικόνας, υπολογισμός διαστάσεών της, παρεμβολή χρώματος κ.λπ.), με βάση βέβαια τους μετασχηματισμούς που περιγράφηκαν εδώ, ώστε να παραχθεί το τελικό αποτέλεσμα (Σχ. 4.3).

4.5 3D ανακατασκευή

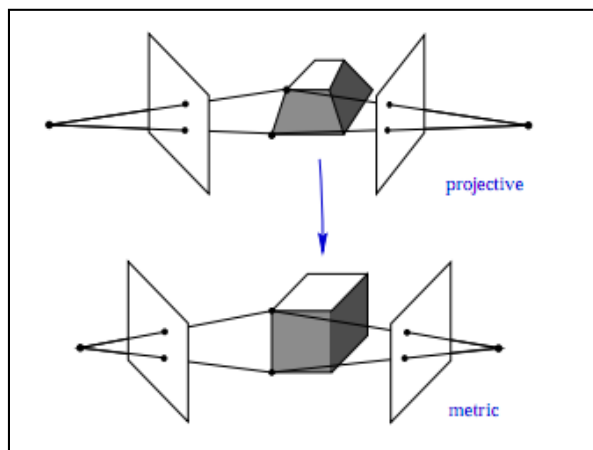
Ύστερα από εκτεταμένη έρευνα από τους Devernay & Faugeras (1992), Faugeras (1995), Pollefeys et al. (1999) και Mallon & Whelan (2005) έγινε αντιληπτό ότι ακόμα και σε περίπτωση ζευγών εικόνων από μη βαθμονομημένες μηχανές είναι δυνατή η δημιουργία ενός τρισδιάστατου μοντέλου. Το ζήτημα αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για τα πεδία της φωτογραμμετρίας και της όρασης υπολογιστών.

Στην περίπτωση όπου ο εσωτερικός προσανατολισμός των μηχανών λήψης είναι γνωστός προκύπτουν, ως γνωστόν, με εμπροσθοτομία οι 3D συντεταγμένες των σημείων του αντικειμένου εξασφαλίζοντας μετρική ανακατασκευή. Εάν δεν υφίστανται γνωστά σημεία του αντικειμένου (φωτοσταθερά), η ανακατασκευή αυτή διαφέρει από την πραγματική κατά έναν μετασχηματισμό ομοιότητας, ο οποίος θα αποκαταστήσει τη σωστή κλίμακα, θέση και στροφή του αντικειμένου (απόλυτος προσανατολισμός, βλ. ενότητα 3.4). Υπάρχουν δε πλήθος συνδυασμοί πινάκων μηχανής και εξωτερικού προσανατολισμού των εικόνων που οδηγούν στον ίδιο σχετικό προσανατολισμό. Όλα τα τρισδιάστατα μοντέλα τα οποία προκύπτουν από αυτούς τους πιθανούς συνδυασμούς διαφέρουν κατά μετασχηματισμό ομοιότητας.

Όμως το 3D μοντέλο που προκύπτει όταν η γεωμετρία των μηχανών είναι άγνωστη διαφέρει από εκείνο από βαθμονομημένες μηχανές κατά προβολικό μετασχηματισμό H . Προκειμένου να πραγματοποιηθεί η ανακατασκευή αυτή απαιτείται η εύρεση ζεύγους προβολικών πινάκων μηχανής συμβατών με τον επιπολικό πίνακα. Αλλά αυτά τα ζεύγη δεν ορίζονται μονοσήμαντα, και για τον λόγο αυτό προκύπτουν πολυάριθμες πιθανές ανακατασκευές, οι οποίες διαφέρουν κατά προβολικό μετασχηματισμό. Η διαδικασία της προβολικής ανακατασκευής αναλύεται στη συνέχεια του κεφαλαίου.

4.5.1 Μετασχηματισμοί

Για να αναλυθεί η 3D ανακατασκευή από εικόνες άγνωστης εσωτερικής γεωμετρίας, πρέπει να γίνει αντιληπτό ότι ο χώρος στον οποίο αναπαρίστανται τα αντικείμενα εμφανίζει ορισμένες ιδιότητες, με βάση τις οποίες μπορεί να χαρακτηριστεί ως προβολικός, αφινικός ή ευκλείδειος. Η μετάβαση από τον ένα χώρο στον άλλο (Σχ. 4.4) είναι δυνατή με επιβολή ορισμένων δεσμεύσεων, όπως θα αναφερθεί και στα επόμενα.



Σχήμα 4.4: Προβολική και Ευκλείδεια ανακατασκευή κύβου (Hartley & Zisserman, 2003).

Για να γίνει ο διαχωρισμός αυτός ευκολότερα αντιληπτός πρέπει να σημειωθεί πως η περίπτωση του προβολικού χώρου είναι η πιο γενική, καθώς οποιαδήποτε ιδιότητα του ισχύει και στον αφινικό χώρο, μαζί με ορισμένες επιπλέον ιδιότητες. Αντίστοιχη είναι και η σχέση του αφινικού χώρου με τον ευκλείδειο.

Σε αντικείμενο απεικονιζόμενο στον προβολικό χώρο, οι παραλληλίες γραμμών και επιπέδων παύουν να ισχύουν, ενώ και οι γωνίες μεταξύ γραμμών και επιπέδων δεν απεικονίζονται σωστά. Ιδιότητες όπως είναι ο λόγος αποστάσεων ή η ύπαρξη του μέσου ευθύγραμμου τμήματος δεν έχουν αντίκρισμα. Εξακολουθεί ωστόσο να ισχύει η συγγραμμικότητα σημείων όσο και η συνεπιπεδότητα σημείων και γραμμών, καθώς και η ιδιότητα του διπλού λόγου των μηκών. Έτσι, για συνευθειακά σημεία a, b, c και d , η μαθηματική έκφραση:

$$\text{Cross}\{a, b; c, d\} = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} \quad (4.53)$$

παραμένει αναλλοίωτη μεταξύ διαφορετικών προβολικών μετασχηματισμών.

Στον αφινικό χώρο ισχύουν οι ιδιότητες του προβολικού χώρου, ενώ επιπλέον διατηρούνται αναλλοίωτα μεταξύ αφινικών μετασχηματισμών η παραλληλία γραμμών και επιπέδων, το μέσον ευθύγραμμου τμήματος αλλά και οι λόγοι αποστάσεων στην ίδια διεύθυνση.

Τέλος, για τις ανακατασκευές αντικειμένων στον ευκλείδειο χώρο (που αναφέρονται και ως μετρικές) ισχύουν όλες οι προαναφερθείσες ιδιότητες, ενώ πλέον απεικονίζονται σωστά και οι γωνίες μεταξύ γραμμών ή επιπέδων. Για παράδειγμα, μόνο στον χώρο αυτό οι κάθετες γραμμές εμφανίζονται κάθετες. Όλες οι πιθανές ανακατασκευές του χώρου αυτού διαφέρουν μεταξύ τους κατά μετασχηματισμό ομοιότητας.

4.5.2 Εύρεση προβολικών πινάκων μηχανής από τον επιπολικό πίνακα

Για να πραγματοποιηθεί τρισδιάστατη ανακατασκευή από μη βαθμονομημένο ζεύγος εικόνων πρέπει αρχικά να έχει υπολογιστεί ο επιπολικός πίνακας του στερεοζεύγους με κάποιον από τους τρόπους που προαναφέρθηκαν. Στη συνέχεια, και με βάση τον επιπολικό πίνακα, είναι απλό να οριστούν δύο προβολικοί πίνακες μηχανής \mathbf{P} και \mathbf{P}' που να συμβαδίζουν με τον υπολογισμένο \mathbf{F} . Το ζεύγος βέβαια αυτών των προβολικών πινάκων δεν ορίζεται μονοσήμαντα, όπως έχει ήδη αναφερθεί. Όλα τα πιθανά ζεύγη διαφέρουν μεταξύ τους κατά προβολικό μετασχηματισμό \mathbf{H}^{-1} . Το ίδιο συμβαίνει και για τα σημεία του χώρου που προκύπτουν από την απεικόνιση του ίδιου εικονοσημείου \mathbf{x} μέσω των πιθανών πινάκων προβολής \mathbf{P}_i . Πράγματι, τα σημεία αυτά διαφέρουν κατά τον αντίστροφο προβολικό μετασχηματισμό \mathbf{H} . Πιο συγκεκριμένα, εάν θεωρηθεί σημείο \mathbf{X} του χώρου και το αντίστοιχό του εικονοσημείο \mathbf{x} που προβάλλεται μέσω του πίνακα \mathbf{P}_1 , χρησιμοποιώντας τον προβολικό πίνακα μηχανής $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 \mathbf{H}^{-1}$ και προβάλλοντας το ίδιο εικονοσημείο, στον χώρο θα προκύψει το σημείο \mathbf{HX} καθώς

$$\mathbf{P}_2 \mathbf{HX} = \mathbf{P}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{HX} = \mathbf{P}_1 \mathbf{x} = \mathbf{x} \quad (4.54 \text{ a} - \text{b})$$

Προκειμένου δύο προβολικοί πίνακες μηχανής να είναι συμβατοί με τον επιπολικό πίνακα θα πρέπει ο $\mathbf{P}' \mathbf{F} \mathbf{P}$ να είναι αντισυμμετρικός. Η πιο απλή περίπτωση που υπακούει στον κανόνα αυτό είναι όταν:

$$\mathbf{P}_i = [\mathbf{I}_{(3 \times 3)} | 0] \quad (4.55)$$

$$\mathbf{P}'_i = [\mathbf{S}\mathbf{F} | \mathbf{e}'] \quad (4.56)$$

όπου \mathbf{S} τυχαίος αντισυμμετρικός πίνακας και \mathbf{e}' οι συντεταγμένες του πόλου της δεύτερης εικόνας. Οι παραπάνω προβολικοί πίνακες διαφέρουν και από τους πραγματικούς, που ορίζονται αν είναι γνωστά τα στοιχεία του εσωτερικού και εξωτερικού προσανατολισμού, κατά προβολικό μετασχηματισμό.

4.5.3 Εμπροσθοτομία

Επόμενο βήμα στη διαδικασία της ανακατασκευής είναι ο υπολογισμός των συντεταγμένων των σημείων του αντικειμένου στον προβολικό χώρο. Το πρόβλημα αυτό ουσιαστικά ανάγεται στην εύρεση της τομής των ομόλογων ακτίνων. Μια διαδικασία αρκετά απλή εάν δεν υπάρχει θόρυβος στις μετρήσεις και αρκετά πιο σύνθετη όταν υπάρχει, αφού τότε δεν εξασφαλίζεται η αλληλοτομία. Η διαδικασία της εμπροσθοτομίας πρέπει να είναι αμετάβλητη υπό οποιονδήποτε προβολικό μετασχηματισμό, καθώς οι \mathbf{P} και \mathbf{P}' χαρακτηρίζονται από προβολική αβεβαιότητα. Ο υπολογισμός των συντεταγμένων πραγματοποιείται με τη βοήθεια μίας συνθήκης βάσει ελαχιστοποίησης, η οποία πρέπει να λαμβάνει υπόψη της τα χαρακτηριστικά της προβολικής ανακατασκευής, δεν θα πρέπει πχ. να βασίζεται σε ιδιότητες όπως το μέσον ευθύγραμμου τμήματος ή η καθετότητα. Συνεπώς, πραγματοποιείται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και ελαχιστοποίηση της ποσότητας:

$$\sum ((x - \mathbf{P}\mathbf{X})^2 + (x' - \mathbf{P}'\mathbf{x})^2) \quad (4.57)$$

Οι Hartley & Sturm (1997) μελέτησαν διαφορετικούς αλγορίθμους για τον υπολογισμό των συντεταγμένων των σημείων, γραμμικούς όσο και μη γραμμικούς.

Η γραμμική διαδικασία πραγματοποιείται βάσει δύο μετασχηματισμών DLT, ενός για κάθε εικόνα, καθώς είναι γνωστοί οι προβολικοί πίνακες μηχανής από τα προηγηθέντα. Οι εξισώσεις που προκύπτουν από τη συνθήκη $x \times \mathbf{P}\mathbf{X} = 0$ για τη μία εικόνα είναι:

$$x(\mathbf{p}_3^T \mathbf{X}) - (\mathbf{p}_1^T \mathbf{X}) = 0 \quad (4.58 \text{ a} - \text{c})$$

$$y(\mathbf{p}_3^T \mathbf{X}) - (\mathbf{p}_2^T \mathbf{X}) = 0$$

$$x(\mathbf{p}_2^T \mathbf{X}) - y(\mathbf{p}_1^T \mathbf{X}) = 0$$

όπου x, y οι γνωστές εικονοσυντεταγμένες, \mathbf{p}_i η i -οστή σειρά του προβολικού πίνακα μηχανής \mathbf{P} και \mathbf{X} το διάνυσμα των ζητούμενων συντεταγμένων του σημείου. Από τις παραπάνω εξισώσεις μόνο οι δύο είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Συνεπώς, από την εφαρμογή των άμεσων γραμμικών μετασχηματισμών για ένα σημείο και στις δύο εικόνες προκύπτουν συνολικά 4 γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις, οι οποίες μπορούν να γραφούν ως $\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$, όπου \mathbf{A} πίνακας 4×4 με την ακόλουθη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} xp_3^T - p_1^T \\ yp_3^T - p_2^T \\ x'p_3'^T - p_1'^T \\ y'p_3'^T - p_2'^T \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Έχουν προταθεί διάφοροι τρόποι να υπολογιστεί η τιμή του διανύσματος \mathbf{X} , όπως μέσω της ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών, με ελαχιστοποίηση της τιμής $\|\mathbf{AX}\|$ υπό την ταυτόχρονη δέσμευση $\|\mathbf{X}\| = 1$. Τα μόνα σημεία που δεν μπορούν να υπολογιστούν από τη διαδικασία της εμπροσθοτομίας είναι εκείνα που βρίσκονται κατά μήκος της βάσης, δηλαδή κείνται κατά μήκος της γραμμής που ενώνει τα δύο κέντρα λήψης, καθώς υπάρχει αβεβαιότητα σχετικά με την ακριβή τους θέση.

4.5.4 Επάλληλη ανακατασκευή

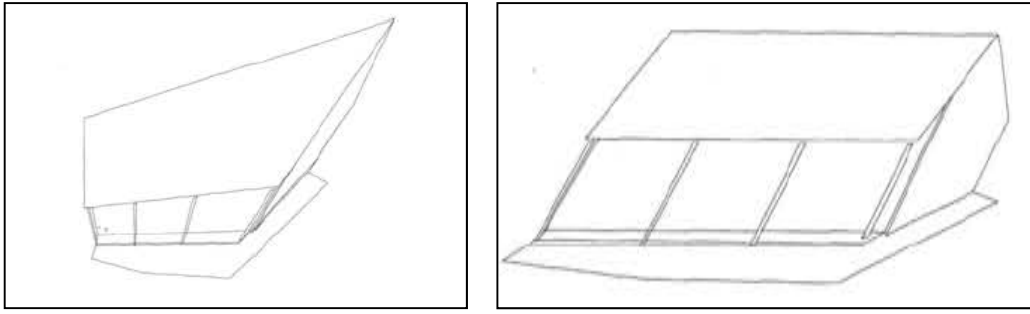
Η προβολική ανακατασκευή που έχει προκύψει με τον τρόπο που αναφέρθηκε προηγουμένως μπορεί, σε πρώτο στάδιο, να αναχθεί σε αφινική (Σχ. 4.5) και, εν συνεχεία, σε μετρική (Σχ. 4.6) εάν ληφθούν υπόψη συγκεκριμένες ιδιότητες, όπως αυτό έχει προταθεί από τον Faugeras (1992). Η διαδικασία αυτή (*stratification*) έχει αποδοθεί ελληνικά ως επάλληλη ανακατασκευή (Γραμματικόπουλος, 2007).

Για να μετατραπεί η ανακατασκευή από προβολική σε αφινική απαιτείται μόνο η εύρεση του επιπέδου του απείρου και η μεταφορά του στην κανονική του θέση. Ένα επίπεδο μπορεί να οριστεί από κατ' ελάχιστον 3 σημεία ή σημείο και ευθεία. Πιο συγκεκριμένα, ο ορισμός του επιπέδου του απείρου Π_∞ μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους, ανάλογα με τις εκάστοτε συνθήκες (για παράδειγμα, αν μεταξύ των δύο σημείων λήψης υπάρχει μόνο μετάθεση και όχι στροφή αρκεί η εύρεση τριών σημείων με τις ίδιες εικονοσυντεταγμένες και στις δύο λήψεις, καθώς τα σημεία αυτά θα εντοπίζονται στο επίπεδο του απείρου).

Στη γενική περίπτωση γεωμετρίας του στερεοζεύγους, μία από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους είναι ο εντοπισμός τριών ζευγών παράλληλων γραμμών, οι οποίες τέμνονται σε σημείο φυγής που ανήκει στο επίπεδο του απείρου, συνεπώς 3 ζεύγη αρκούν για τον υπολογισμό του επιπέδου αυτού. Άλλη γνωστή τεχνική χρησιμοποιείται όταν είναι γνωστός ο λόγος των αποστάσεων μεταξύ τριών σημείων σε ευθύγραμμο τμήμα, καθώς όταν υπάρχει εξωτερική πληροφορία σχετικά με τις αποστάσεις σε μία ευθεία καθίσταται δυνατός ο προσδιορισμός του σημείου φυγής της ευθείας. Από τα παραπάνω μπορεί να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός H_∞ που επαναφέρει το επίπεδο του απείρου, ο οποίος, εφαρμοζόμενος σε όλα τα σημεία του αντικειμένου, μετατρέπει την ανακατασκευή από προβολική σε αφινική.

Εν συνεχεία, η αφινική ανακατασκευή μπορεί να αναβαθμιστεί σε μετρική (Σχ. 4.6). Για να πραγματοποιηθεί αυτό, πρέπει να εντοπιστεί η θέση της “απόλυτης κωνικής”, η οποία βρίσκεται στο επίπεδο του απείρου (Hartley & Zisserman, 2003). Σε κάθε λήψη εντοπίζεται η εικόνα της απόλυτης κωνικής, η οποία εάν προβληθεί στον χώρο θα τέμνει το επίπεδο του απείρου κατά την απόλυτη κωνική. Το πρόβλημα, λοιπόν, ουσιαστικά ανάγεται στην εύρεση σε κάθε λήψη της εικόνας ω της απόλυτης κωνικής, η οποία χαρακτηρίζεται από 5 βαθμούς ελευθερίας.

4. Εικόνες με άγνωστο εσωτερικό προσανατολισμό



Σχήμα 4.5: Αναβάθμιση της προβολικής ανακατασκευής σε αφινική (Hartley & Zisserman, 2003).

Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει με βάση ορισμένες δεσμεύσεις που οφείλουν να πληρούνται. Κατ' αρχάς, εάν \mathbf{v}_1 και \mathbf{v}_2 σημεία φυγής ορθογωνικών διευθύνσεων, πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{v}_1^T \boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_2 = 0 \quad (4.60)$$

ενώ σημείο φυγής διεύθυνσης με ευθεία φυγής επιπέδου που είναι κάθετα οφείλουν να υπακούουν στην συνθήκη:

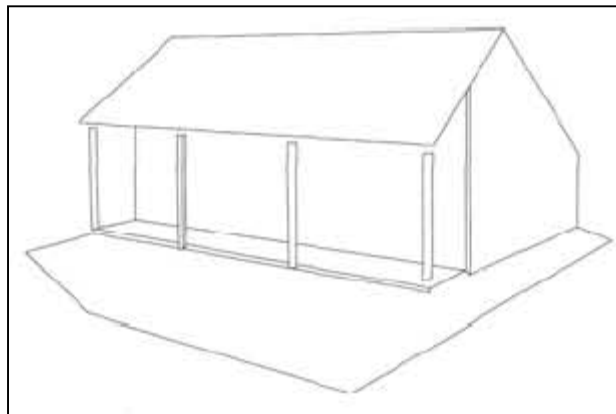
$$\mathbf{l} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{v} \quad (4.61)$$

Επιπλέον δεσμεύσεις μπορούν να τεθούν στην εικόνα της απόλυτης κωνικής εάν ο εσωτερικός προσανατολισμός της μηχανής είναι γνωστός, αφού:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \quad (4.62)$$

Στην περίπτωση όπου η μηχανή λήψης υπακούει αυστηρά στο μοντέλο της κεντρικής προβολής (aspect ratio = 1, skewness = 0), τίθενται δύο δεσμεύσεις στην $\boldsymbol{\omega}$, και εάν χρησιμοποιηθούν ακόμα 3 σημεία φυγής ορθογωνικών διευθύνσεων τίθενται άλλες 3 δεσμεύσεις (συνολικά 5), ώστε τελικά να ορίζεται η $\boldsymbol{\omega}$ και να επιτρέπεται τόσο μετρική ανακατασκευή όσο και βαθμονόμηση της μηχανής, με την Εξ. (4.62), από μία μόνο εικόνα (βλ. και Γραμματικόπουλος, 2007).

Τέλος, στην περίπτωση πολλαπλών λήψεων (τουλάχιστον τριών), και υπό την δεσμευση ότι ο εσωτερικός προσανατολισμός δεν μεταβάλλεται, είναι γενικά δυνατή η μετρική ανακατασκευή αλλά και η αυτοβαθμονόμηση της μηχανής.



Σχήμα 4.6: Μετρική ανακατασκευή (Hartley & Zisserman, 2003).

Στην πραγματικότητα η γνώση της εικόνας της απόλυτης κωνικής μπορεί να μετατρέψει μια προβολική ανακατασκευή κατευθείαν σε μετρική, αφού ισοδυναμεί με γνώση των στοιχείων του πίνακα \mathbf{K} , δηλαδή ουσιαστικά με γνώση των στοιχείων του εσωτερικού προσανατολισμού. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί πως τόσο η απόλυτη κωνική όσο και η εικόνα της και οι ιδιότητές τους παραμένουν αναλλοίωτες υπό την επίδραση προβολικών μετασχηματισμών. Με βάση τον πίνακα \mathbf{K} μπορεί από τον \mathbf{F} , όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, να υπολογιστεί ο δεσμευμένος επιπολικός πίνακας \mathbf{E} που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού (προκύπτουν 4 πιθανές λύσεις και επιλέγεται η κατάλληλη). Στη συνέχεια με εμπροσθοτομία προκύπτει μετρική ανακατασκευή, όπως έχει αναφερθεί και στην ενότητα 3.5.

4.5.5 Ανακατασκευή με τη χρήση φωτοσταθερών

Για να αναχθεί η προβολική ανακατασκευή σε μετρική, η οποία όμως θα είναι σωστά ενταγμένη και προσανατολισμένη στον χώρο και με σωστό μέγεθος, απαιτείται πληροφορία σχετικά με τον χώρο του αντικειμένου προκειμένου να προσδιοριστούν οι 15 παράμετροι του προβολικού μετασχηματισμού, δια του οποίου θα μετασχηματιστούν όλα τα σημεία του αντικειμένου.

Ο 3D μετασχηματισμός αυτός έχει ομοιότητες με τον Άμεσο Γραμμικό Μετασχηματισμό, με τη βασική διαφορά ότι δεν συνδέει εικονοσυντεταγμένες και σημεία του χώρου αλλά αποκλειστικά σημεία του 3D χώρου. Για κάθε σημείο XYZ προκύπτουν οι ακόλουθες 3 γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις:

$$X_g = \frac{a_1X + a_2Y + a_3Z + a_4}{a_{13}X + a_{14}Y + a_{15} + 1} \quad (4.63 \text{ a} - \text{c})$$

$$Y_g = \frac{a_5X + a_6Y + a_7Z + a_8}{a_{13}X + a_{14}Y + a_{15} + 1}$$

$$Z_g = \frac{a_9X + a_{10}Y + a_{11}Z + a_{12}}{a_{13}X + a_{14}Y + a_{15} + 1}$$

Συνεπώς για να οριστούν πλήρως οι 15 παράμετροι απαιτούνται κατ' ελάχιστον 5 σημεία. Σε περίπτωση όπου τα διαθέσιμα γνωστά σημεία είναι περισσότερα ακολουθείται συνόρθωση με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Όπως και για την εύρεση των παραμέτρων του Άμεσου Γραμμικού Μετασχηματισμού, σε πρώτη φάση εκτιμώνται με τη βοήθεια των γραμμικών σχέσεων αρχικές τιμές, και στη συνέχεια οι Εξ. (4.63) γραμμικοποιούνται περί αυτές και δημιουργείται για τα N σημεία ο πίνακας σχεδιασμού $\mathbf{A}(3N \times 15)$ και το διάνυσμα $\mathbf{b}(15 \times 1)$ των παρατηρήσεων. Καθώς οι παρατηρήσεις θεωρούνται γενικά ισοβαρείς, η εκτίμηση των διορθώσεων \mathbf{dx} των παραμέτρων προκύπτει κατά τα γνωστά από τη σχέση:

$$\mathbf{dx} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{b}) \quad (4.64)$$

Ο προσδιορισμός της ομογραφίας \mathbf{H} μπορεί να πραγματοποιηθεί και με την απευθείας σύνδεση εικονοσυντεταγμένων με σημεία του χώρου με βάση την εξής σχέση:

$$x_i = \mathbf{PH}^{-1} \mathbf{X}_i \quad (4.65)$$

4. Εικόνες με άγνωστο εσωτερικό προσανατολισμό

Από την εξίσωση αυτή για κάθε εικονοσημείο προκύπτουν δύο γραμμικές εξισώσεις, σε περίπτωση δε όπου υπάρχει και στη δεύτερη εικόνα σημείο x'_i , προκύπτουν 4 εξισώσεις συνολικά, μόνο οι 3 όμως είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ο συνολικός αριθμός των παραμέτρων που πρέπει να προσδιοριστούν στην παραπάνω διαδικασία είναι 22 (7 για τον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα και 15 για την μετρική ανακατασκευή με τη χρήση φωτοσταθερών), ίσως προφανώς με τον αριθμό που ορίζει πλήρως τους δύο προβολικούς πίνακες μηχανής (11 παράμετροι DLT για κάθε εικόνα).

5

Αυτοβαθμονόμηση

Η διαδικασία της βαθμονόμησης στη συμβατική φωτογραμμετρία αποτελεί διαδικασία σχετικά χρονοβόρα και απαιτητική. Στην τυπική περίπτωση, χρησιμοποιείται κάναβος ή 3D πεδίο βαθμονόμησης με γνωστά σημεία και, μονοεικονικά (στην δεύτερη περίπτωση) ή πολυεικονικά, προσδιορίζονται οι παράμετροι του εσωτερικού προσανατολισμού. Για να αποφεύγεται η διαδικασία αυτή, έχει προταθεί η διαδικασία της αυτοβαθμονόμησης, η οποία βασίζεται αποκλειστικά σε εικονοσημεία σε περισσότερες εικόνες, χωρίς καμία επιπλέον γνώση για τον τρισδιάστατο χώρο.

Οι Mayband & Faugeras (1992), χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του E. Kruppa, έθεσαν ορισμένους περιορισμούς στα στοιχεία που περιγράφουν τη γεωμετρία της μηχανής, ώστε αυτά να μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια του μοντέλου της επιπολικής γεωμετρίας όταν υπάρχουν τουλάχιστον 3 λήψεις με κοινό εσωτερικό προσανατολισμό. Το πρόβλημα αυτό επεκτάθηκε και αναλύθηκε και για περιπτώσεις όπου σε στερεοζεύγος απαιτείται να προσδιοριστούν ορισμένες μόνο παράμετροι, όταν υπάρχουν κάποια γνωστά στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού. Η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως μερική αυτοβαθμονόμηση της μηχανής.

Πράγματι, όταν υπάρχει ένα μόνο στερεοζεύγος η πλήρης βαθμονόμηση είναι αδύνατη, απαιτείται δηλαδή να προϋπάρχει γνώση για όλα τα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού πλην δύο, συνήθως τις σταθερές των μηχανών, οι οποίες και υπολογίζονται με γραμμικούς όσο και μη γραμμικούς αλγορίθμους. Οι πρώτες προσεγγίζουν ικανοποιητικά λύσεις που εν συνεχεία συνήθως βελτιώνονται, χρησιμοποιούμενες ως αρχικές τιμές στην επίλυση δέσμης ή τη συνθήκη συνεπιπεδότητας, μία ιδέα ιδιαίτερα ριζοσπαστική για τα μέχρι τότε δεδομένα της φωτογραμμετρίας, που απαιτούσαν πλήρη γνώση της γεωμετρίας της μηχανής προκειμένου να επιλυθεί ο σχετικός προσανατολισμός με τη συνθήκη συνεπιπεδότητας ή τη μέθοδο της δέσμης.

Τέλος, έρευνες έδειξαν ότι υπάρχουν κάποιες κρίσιμες γεωμετρίες όπου οι παραπάνω αλγόριθμοι αποτυγχάνουν, και η διαδικασία της αυτοβαθμονόμησης δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί. Οι γεωμετρίες αυτές θα αναφερθούν στα επόμενα.

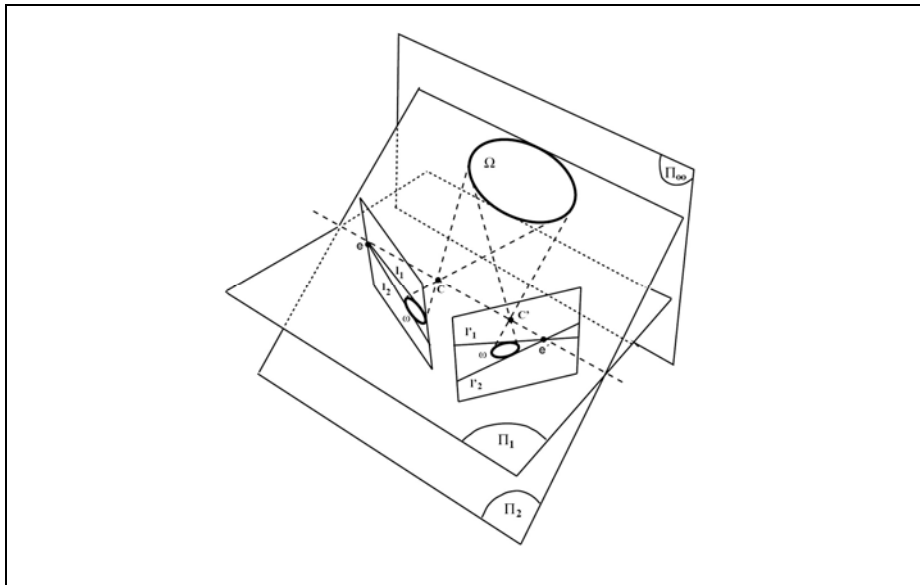
5.1 Γραμμικοί αλγόριθμοι

Κατά καιρούς έχουν αναπτυχθεί διάφοροι γραμμικοί αλγόριθμοι για υπολογισμό των στοιχείων του εσωτερικού προσανατολισμού, οι οποίοι αν και εμφανίζουν ευαισθησία στον θόρυβο και στη μεταβολή της θέσης του πρωτεύοντος σημείου, δεν απαιτούν προσωρινές τιμές, κάτι που συνιστά το κύριο πλεονέκτημά τους. Ο Hartley (1992) χρησιμοποίησε την ανάλυση ιδιαζουσών τιμών, ενώ οι Newsam et al. (1996) και οι Bougnoux (1998) και Sturm (2001) διατύπωσαν αλγορίθμους για τον υπολογισμό της σταθεράς της μηχανής από στερεοζεύγος, οι οποίοι θα αναλυθούν στη συνέχεια του κεφαλαίου. Το πρόβλημα της αυτοβαθμονόμησης μπορεί να προσεγγιστεί τόσο γεωμετρικά όσο και αλγεβρικά.

Η γεωμετρική προσέγγιση βασίζεται στην άμεση σχέση της απόλυτης κωνικής με τη γνώση των στοιχείων του εσωτερικού προσανατολισμού της εικόνας. Οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι επιδιώκουν να εντοπίσουν τη θέση του επιπέδου του απείρου Π_∞ και της απόλυτης κωνικής Ω_∞ σε αυτό, βάσει των εξισώσεων Kruppa. Τα επιπολικά επίπεδα Π_1 και Π_2 τα οποία είναι εφαπτόμενα στην απόλυτη κωνική ορίζουν ζεύγη επιπολικών γραμμών l_1, l_2 και l_1', l_2' οι οποίες οφείλουν να είναι και αυτές εφαπτόμενες στις αντίστοιχες εικόνες της απόλυτης κωνικής ω και ω' (Σχ. 5.1), όπως υπαγορεύει και η ακόλουθη εξίσωση Kruppa:

$$F\omega^*F^T \sim [e']_\times \omega^* [e']_\times \quad (5.1)$$

όπου ω^* η δυϊκή της απόλυτης κωνικής και e' η θέση του πόλου στη δεύτερη εικόνα.



Σχήμα 5.1: Δύο επιπολικά επίπεδα εφαπτόμενα στην απόλυτη κωνική και οι αντίστοιχες επιπολικές γραμμές που εφάπτονται στην εικόνα της απόλυτης κωνικής σε κάθε λήψη (Sturm, 2000).

Η γνωστή θέση της εικόνας της απόλυτης κωνικής ω , όπως έχει αναφερθεί, ισοδυναμεί με τη γνώση των στοιχείων του εσωτερικού προσανατολισμού καθώς:

$$\omega \sim K^{-T} K^{-1} \quad (5.2)$$

Η αλγεβρική προσέγγιση βασίζεται στη σχέση που συνδέει τον επιπολικό πίνακα \mathbf{F} με τον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα \mathbf{E} , μέσω των πινάκων εσωτερικού προσανατολισμού \mathbf{K} :

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}'^T \mathbf{F} \mathbf{K} \quad (5.3)$$

Εάν στην παραπάνω σχέση εφαρμοστεί και κάποια από τις δεσμεύσεις που οφείλει να πληροί ο \mathbf{E} , προκύπτουν δύο ανεξάρτητες πολυωνυμικές εξισώσεις 8^{ου} βαθμού ανάμεσα στα στοιχεία του \mathbf{F} και των \mathbf{K} , \mathbf{K}' (Καλησπεράκης, 2010). Με χρήση τουλάχιστον τριών επιπολικών πινάκων (που έχουν προκύψει από τρεις λήψεις με τον ίδιο εσωτερικό προσανατολισμό) καθίσταται δυνατή η επίλυση του συστήματος, συνεπώς και η αυτοβαθμονόμηση.

5.1.1 Γραμμικοί αλγόριθμοι για εύρεση της σταθεράς σε ζεύγος εικόνων

Η διαδικασία πλήρους αυτοβαθμονόμησης στην περίπτωση δύο εικόνων δεν είναι, όπως προαναφέρθηκε, δυνατή καθώς ο επιπολικός πίνακας του ζεύγους έχει συνολικά 7 βαθμούς ελευθερίας. Με τη βοήθεια του \mathbf{F} προσδιορίζονται οι 5 παράμετροι του σχετικού προσανατολισμού, συνεπώς δεσμεύονται οι 5 βαθμοί ελευθερίας και απομένουν 2, οι οποίοι μπορούν να ορίσουν μόνον 2 στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού, συνηθέστερα τις σταθερές της μηχανής των δύο εικόνων. Απαιτείται λοιπόν να προϋπάρχει γνώση για ορισμένα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού. Εάν η μηχανή είναι σημειακής οπής, οφείλει να έχει προκαθοριστεί μόνον το πρωτεύον σημείο, το οποίο η θέση, εάν είναι άγνωστη, μπορεί τις περισσότερες φορές να υποτεθεί στο κέντρο της εικόνας.

- *Αλγόριθμος του Sturm*

Ο Sturm (2001) και οι Sturm et al. (2005) ανέπτυξαν αλγόριθμο για τον υπολογισμό της κοινής σταθεράς ζεύγους εικόνων. Υποθέτοντας ότι η μηχανή είναι μερικώς βαθμονομημένη, θεώρησαν έναν πίνακα \mathbf{G} , ο οποίος αντιμετωπίζεται ως ενδιάμεση περίπτωση μεταξύ του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα, που χρησιμοποιείται όταν η γεωμετρία της μηχανής είναι πλήρως γνωστή, και του επιπολικού πίνακα, που χρησιμοποιείται όταν δεν υπάρχει καμία γνώση για τις παραμέτρους του εσωτερικού προσανατολισμού. Ο πίνακας \mathbf{G} εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

$$\mathbf{G} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Η εξίσωση του Kruppa (Εξ. 5.1) σε συνδυασμό με τον πίνακα \mathbf{G} καταλήγει στην:

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} f^2 & 0 & 0 \\ 0 & f^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{G}^T \sim [\mathbf{e}']_{\times} \begin{bmatrix} f^2 & 0 & 0 \\ 0 & f^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{e}']_{\times} \quad (5.5)$$

Με εφαρμογή στην Εξ. (5.5) της ανάλυσης ιδιζουσών τιμών $SVD(\mathbf{G}) = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T$, με $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0)$, προκύπτουν δύο συμμετρικοί πίνακες, των οποίων η ισότητα (με

διαφορά κλίμακας) οδηγεί στις 3 ακόλουθες εξισώσεις, δύο γραμμικές και μία δευτέρου βαθμού ως προς c^2 :

$$c^2\{\lambda_1 U_{31} U_{32} (1 - V_{31}^2) + \lambda_2 V_{32} V_{31} (1 - U_{32}^2)\} + U_{32} V_{31} (\lambda_1 U_{31} V_{31} + \lambda_2 U_{32} V_{32}) = 0 \quad (5.6)$$

$$c^2\{\lambda_1 V_{31} V_{32} (1 - U_{31}^2) + \lambda_2 U_{32} U_{31} (1 - V_{32}^2)\} + V_{32} U_{31} (\lambda_1 U_{31} V_{31} + \lambda_2 U_{32} V_{32}) = 0 \quad (5.7)$$

$$c^4\{\lambda_1^2 (1 - U_{31}^2)(1 - V_{31}^2) - \lambda_2^2 (1 - U_{32}^2)(1 - V_{32}^2)\} + c^2\{\lambda_1^2 (U_{31}^2 + V_{31}^2 - 2V_{31}^2 U_{31}^2) - \lambda_2^2 (U_{32}^2 + V_{32}^2 - 2V_{32}^2 U_{32}^2)\} + \{\lambda_1^2 U_{31}^2 V_{31}^2 - \lambda_2^2 U_{32}^2 V_{32}^2\} = 0 \quad (5.8)$$

Οι εξισώσεις αυτές δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες και η επίλυσή τους οδηγεί σε εκτίμηση του c , η οποία στη συνέχεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προσεγγιστική τιμή σε μη γραμμικές μεθόδους. Για καλύτερη ακρίβεια οι ερευνητές προτείνουν τη χρήση κανονικοποιημένων συντεταγμένων, με μετάθεση και αλλαγή κλίμακας (όπως στον κανονικοποιημένο αλγόριθμο των 8 σημείων). Τότε ο πίνακας \mathbf{G}' θα ισούται με:

$$\begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{G} \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

και η σταθερά της μηχανής θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με c_0 για να εκτιμηθεί η πραγματική σταθερά των λήψεων.

- *Αλγόριθμος του Newsam*

Με τον υπολογισμό τόσο κοινής σταθεράς των δύο εικόνων όσο και δύο διαφορετικών σταθερών μηχανής είχαν ασχοληθεί προηγουμένως και οι Newsam et al. (1996). Βασιζόμενοι στις ιδιότητες του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα, διατυπώνουν τις ακόλουθες τρεις εξισώσεις:

$$\lambda_1^2 = (\mathbf{u}_1^T \mathbf{f}_3)^2 \delta_1 + ((\mathbf{u}_1^T \mathbf{i}_3)^2 + (\mathbf{u}_3^T \mathbf{i}_3)^2) \delta_2 + \delta_3 \quad (5.10)$$

$$(\mathbf{u}_2^T \mathbf{f}_3) (\mathbf{u}_1^T \mathbf{f}_3) \delta_1 + (\mathbf{u}_1^T \mathbf{i}_3) (\mathbf{u}_2^T \mathbf{i}_3) \delta_2 = 0 \quad (5.11)$$

$$\lambda_2^2 = (\mathbf{u}_2^T \mathbf{f}_3)^2 \delta_1 + ((\mathbf{u}_2^T \mathbf{i}_3)^2 + (\mathbf{u}_3^T \mathbf{i}_3)^2) \delta_2 + \delta_3 \quad (5.12)$$

όπου \mathbf{f}_i η i -οστή στήλη του επιπολικού πίνακα, \mathbf{i}_i η i -οστή στήλη του μοναδιαίου πίνακα, \mathbf{u}_i , \mathbf{v}_i η i -οστή στήλη των πινάκων \mathbf{U} , \mathbf{V} , αντίστοιχα, και λ_1 , λ_2 οι διαγώνιες τιμές του πίνακα \mathbf{D} οι οποίες προκύπτουν από την ανάλυση ιδιαζουσών τιμών έτσι ώστε $SVD(\mathbf{F}) = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$.

Άρα και υπολογιστούν τα δ_1 , δ_2 , δ_3 από τις παραπάνω εξισώσεις, έχουν ουσιαστικά οριστεί οι τιμές των σταθερών καθώς:

$$\delta_1 = 1 - c^{-2} \quad \delta_2 = \lambda(c'^2 - 1) \quad \text{και} \quad \delta_3 = \lambda \quad (5.13 \text{ a-c})$$

Σε περίπτωση δε όπου οι δύο εικόνες έχουν ληφθεί με την ίδια σταθερά c , η διαδικασία απλοποιείται και ο υπολογισμός της προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης:

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + [((\mathbf{u}_1^T \mathbf{i}_3)^2 + (\mathbf{v}_1^T \mathbf{i}_3)^2) \lambda_1^2 - ((\mathbf{u}_2^T \mathbf{i}_3)^2 + (\mathbf{v}_2^T \mathbf{i}_3)^2) \lambda_2^2] \mu + [(\mathbf{u}_1^T \mathbf{i}_3) (\mathbf{v}_1^T \mathbf{i}_3) \lambda_1 - (\mathbf{u}_2^T \mathbf{i}_3) (\mathbf{v}_2^T \mathbf{i}_3) \lambda_2 F_{33} \mu^2] = 0 \quad (5.14)$$

όπου $\mu = c^{-2} - 1$

- *Αλγόριθμος του Bougnoux*

Τέλος, ο Bougnoux (1998) διατύπωσε έναν αλγόριθμο κατάλληλο για την περίπτωση όπου οι εικόνες εμφανίζουν διαφορετική σταθερά. Ο υπολογισμός της σταθεράς για την αριστερή εικόνα γίνεται με βάση την εξίσωση:

$$c = \sqrt{-\frac{\mathbf{p}'^T [\mathbf{e}'] \times \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{p} \mathbf{p}'^T \mathbf{F}^T \mathbf{p}'}{\mathbf{p}'^T [\mathbf{e}'] \times \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{F} \mathbf{F}^T \mathbf{p}'}} \quad (5.15)$$

όπου \mathbf{p}, \mathbf{p}' : η θέση του πρωτεύοντος σημείου στις δύο εικόνες
 \mathbf{e}' : η θέση του πόλου στη δεξιά εικόνα

και $\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ενώ για τη δεξιά εικόνα πραγματοποιείται με αντικατάσταση του επιπολικού πίνακα \mathbf{F} με τον ανάστροφό του, δηλαδή ουσιαστικά με αντιστροφή των σχέσεων των εικόνων.

5.1.2 Κρίσιμες γεωμετρίες

Οι αλγόριθμοι αυτοί αδυνατούν να καταλήξουν σε εκτίμηση της σταθεράς της μηχανής σε ορισμένες από τις πιθανές γεωμετρίες λήψεων. Ειδικότερα, σε περίπτωση όπου οι δύο οπτικοί άξονες είναι συνεπίπεδοι ή το επίπεδο που ορίζει ο άξονας λήψης μιας εικόνας και η βάση είναι κάθετο στον οπτικό άξονα της άλλης εικόνας οι γραμμικοί αλγόριθμοι οδηγούνται σε απειρία λύσεων. Πέραν από τις παραπάνω γενικές περιπτώσεις όπου αποτυγχάνει το σύνολο των γραμμικών αλγορίθμων, κάθε αλγόριθμος παρουσιάζει και κάποιες επιπλέον κρίσιμες γεωμετρίες, στις οποίες αδυνατεί να πραγματοποιήσει τη μερική αυτοβαθμονόμηση. Οι περιπτώσεις αυτές είναι πολύ σημαντικές καθώς οποιαδήποτε γεωμετρία κοντά στην κρίσιμη οδηγεί σε ασταθή λύση.

Η εξίσωση δευτέρου βαθμού του αλγορίθμου του Sturm αποτυγχάνει στην περίπτωση όπου για την κανονικοποίηση των συντεταγμένων ως c_0 έχει χρησιμοποιηθεί η πραγματική σταθερά c της μηχανής. Η συγκεκριμένη εξίσωση μπορεί να υπολογίζει ικανοποιητικά τη σταθερά της μηχανής ακόμα και αν οι δύο άξονες είναι συνεπίπεδοι, αρκεί να μην είναι παράλληλοι ή να μην τέμνονται σε σημείο από το οποίο ισαπέχουν τα δύο κέντρα λήψης, ενώ οι γραμμικές εξισώσεις δεν οδηγούν σε λύση στις παραπάνω γενικές περιπτώσεις κρίσιμων γεωμετριών.

Τέλος, για τους γραμμικούς αλγορίθμους που βασίζονται στις εξισώσεις Kurrra κρίσιμη γεωμετρία θεωρείται και η περίπτωση όπου τα κέντρα λήψης βρίσκονται στην επιφάνεια σφαίρας, από της οποίας το κέντρο διέρχονται οι οπτικοί άξονες.

5.2 Μη γραμμικοί αλγόριθμοι

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε σχετικά με την αυτοβαθμονόμηση στο πεδίο της όρασης υπολογιστών έδωσε νέα ώθηση και στο πεδίο της φωτογραμμετρίας. Χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά σε ανάλογες περιπτώσεις προσεγγίσεις για τις οποίες

μέχρι τότε κυριαρχούσε η αντίληψη ότι η εφαρμογή τους προϋπέθετε αποκατάσταση του εσωτερικού προσανατολισμού, συνεπώς γνώση των στοιχείων που ορίζουν πλήρως τη γεωμετρία της μηχανής.

Πιο συγκεκριμένα, έγινε σαφές πως τόσο η συνθήκη συνεπιπεδότητας όσο και η συνόρθωση δέσμης είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν στην περίπτωση του στερεοζεύγους ακόμα και αν οι μηχανές λήψης είναι μερικώς βαθμονομημένες. Αν δηλαδή είναι γνωστά όλα τα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού εκτός από τη σταθερά της μηχανής, μπορεί να διατυπωθεί ένας μη γραμμικός αλγόριθμος που να επιτρέπει εκτίμηση τόσο του σχετικού προσανατολισμού όσο και της σταθεράς ή των σταθερών των μηχανών, όπως αναλύεται στα επόμενα. Μπορεί, εναλλακτικά, να εκτιμηθεί η θέση του κοινού πρωτεύοντος σημείου, εάν η σταθερά ή οι σταθερές της μηχανής θεωρηθούν γνωστές. Η τελευταία αυτή περίπτωση όμως δεν θα αναλυθεί περισσότερο καθώς ξεφεύγει από το πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Μεγάλο περιορισμό των μη γραμμικών αυτών αλγορίθμων συνιστά βέβαια η ανάγκη για προσεγγιστικές τιμές, τα αποτελέσματα όμως που προσφέρουν είναι ακριβέστερα συγκριτικά με εκείνα από τους γραμμικούς αλγορίθμους, οι οποίοι πάντως μπορούν από την μεριά τους να συνεισφέρουν αυτόματα προσεγγιστικές τιμές.

5.2.1 Συνθήκη συνεπιπεδότητας

Στην περίπτωση εφαρμογής της συνθήκης συνεπιπεδότητας για τον υπολογισμό του σχετικού προσανατολισμού σε συνδυασμό με μερική αυτοβαθμονόμηση ισχύουν όσα αναφέρθηκαν και στην περίπτωση υπολογισμού μόνο του σχετικού προσανατολισμού (βλ. ενότητα 3.2)

Η διαφορά μεταξύ των δύο αλγορίθμων είναι απλώς η εισαγωγή στον πίνακα σχεδιασμού **A** μιας επιπλέον στήλης, που περιλαμβάνει τη μαθηματική έκφραση τη μερικής παραγωγού της συνθήκης συνεπιπεδότητας ως προς τη σταθερά της μηχανής. Ο πίνακας σχεδιασμού **A** (για 5 ομόλογα σημεία) και το διάνυσμα **Δ** των διορθώσεων των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων, που αυξάνεται κατά έναν όρο, τον δc , αποκτούν έτσι την εξής μορφή (ενώ ο πίνακας **B** και το διάνυσμα **w** παραμένουν ίδια):

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial B_y} & \frac{\partial x_1}{\partial B_z} & \frac{\partial x_1}{\partial \omega} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_1}{\partial \kappa} & \frac{\partial x_1}{\partial c} \\ \frac{\partial x_2}{\partial B_y} & \frac{\partial x_2}{\partial B_z} & \frac{\partial x_2}{\partial \omega} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_2}{\partial \kappa} & \frac{\partial x_2}{\partial c} \\ \frac{\partial x_3}{\partial B_y} & \frac{\partial x_3}{\partial B_z} & \frac{\partial x_3}{\partial \omega} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_3}{\partial \kappa} & \frac{\partial x_3}{\partial c} \\ \frac{\partial x_4}{\partial B_y} & \frac{\partial x_4}{\partial B_z} & \frac{\partial x_4}{\partial \omega} & \frac{\partial x_4}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_4}{\partial \kappa} & \frac{\partial x_4}{\partial c} \\ \frac{\partial x_5}{\partial B_y} & \frac{\partial x_5}{\partial B_z} & \frac{\partial x_5}{\partial \omega} & \frac{\partial x_5}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_5}{\partial \kappa} & \frac{\partial x_5}{\partial c} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta B_y \\ \delta B_z \\ \delta \omega \\ \delta \varphi \\ \delta \kappa \\ \delta c \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Η διαδικασία συνόρθωσης που ακολουθείται δεν παρουσιάζει καμία επιπλέον διαφοροποίηση, χρησιμοποιείται δηλαδή η γενική μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων. Η διαδικασία είναι επαναληπτική και τερματίζεται όταν το **Δ**, το οποίο είναι ίσο με:

$$\Delta = (A'(BB')^{-1}A)^{-1}A'(BB')^{-1}w \quad (5.18)$$

δεν υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο όριο σύγκλισης. Η τελική εκτίμηση των αγνώστων προκύπτει από το άθροισμα του διανύσματος των διορθώσεών τους με εκείνο των προσωρινών τιμών:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta B_y \\ \delta B_z \\ \delta \omega \\ \delta \varphi \\ \delta \kappa \\ \delta c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_y^o \\ B_z^o \\ \omega^o \\ \varphi^o \\ \kappa^o \\ c^o \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Αρχικές τιμές για τις παραμέτρους του σχετικού προσανατολισμού υπολογίζονται από τους γραμμικούς αλγορίθμους (πχ. RLT) που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 3.

Η μερική αυτοβαθμονόμηση μπορεί να πραγματοποιηθεί ακόμα και όταν υπάρχουν δύο διαφορετικές σταθερές. Άγνωστοι πλέον είναι τα 5 στοιχεία του σχετικού προσανατολισμού και οι 2 σταθερές της μηχανής c_1 , c_2 , ώστε ο πίνακας \mathbf{A} αποκτά πλέον δύο επιπλέον στήλες (διαστάσεις $N \times 7$), μία για κάθε σταθερά της μηχανής, και στο ενδεικτικό παράδειγμα έχει την ακόλουθη μορφή, ενώ οι άγνωστοι στην περίπτωση αυτή είναι 7:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial B_y} & \frac{\partial x_1}{\partial B_z} & \frac{\partial x_1}{\partial \omega} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_1}{\partial \kappa} & \frac{\partial x_1}{\partial c_1} & \frac{\partial x_1}{\partial c_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial B_y} & \frac{\partial x_2}{\partial B_z} & \frac{\partial x_2}{\partial \omega} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_2}{\partial \kappa} & \frac{\partial x_2}{\partial c_1} & \frac{\partial x_2}{\partial c_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial B_y} & \frac{\partial x_3}{\partial B_z} & \frac{\partial x_3}{\partial \omega} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_3}{\partial \kappa} & \frac{\partial x_3}{\partial c_1} & \frac{\partial x_3}{\partial c_2} \\ \frac{\partial x_4}{\partial B_y} & \frac{\partial x_4}{\partial B_z} & \frac{\partial x_4}{\partial \omega} & \frac{\partial x_4}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_4}{\partial \kappa} & \frac{\partial x_4}{\partial c_1} & \frac{\partial x_4}{\partial c_2} \\ \frac{\partial x_5}{\partial B_y} & \frac{\partial x_5}{\partial B_z} & \frac{\partial x_5}{\partial \omega} & \frac{\partial x_5}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_5}{\partial \kappa} & \frac{\partial x_5}{\partial c_1} & \frac{\partial x_5}{\partial c_2} \end{bmatrix} \quad (5.20) \quad \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta B_y \\ \delta B_z \\ \delta \omega \\ \delta \varphi \\ \delta \kappa \\ \delta c_1 \\ \delta c_2 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Για τη συνέχεια της επίλυσης ισχύουν τα προηγούμενα, χωρίς καμία διαφοροποίηση.

5.2.2 Επίλυση δέσμης

Όπως έχει προαναφερθεί, η μέθοδος της δέσμης μπορεί να εφαρμοστεί σε στερεοζεύγος ακόμα και αν δεν υπάρχουν στοιχεία γνωστών συντεταγμένων χώρου, οπότε υπολογίζεται η σχετική θέση και στροφή της δεξιάς εικόνας στο σύστημα της αριστερής, δηλαδή ουσιαστικά ο σχετικός τους προσανατολισμός όσο και οι συντεταγμένες μοντέλου των σημείων σύνδεσης. Η επίλυση αυτή μπορεί τελικά να πραγματοποιηθεί ακόμα και αν δεν έχει πλήρως αποκατασταθεί ο εσωτερικός προσανατολισμός και να συνδυαστεί με μερική αυτοβαθμονόμηση. Γνωρίζοντας δηλαδή τη θέση του πρωτεύοντος σημείου, εκτιμά κανείς τη σταθερά της μηχανής ή το αντίστροφο, ή και γνωρίζοντας τη θέση του πρωτεύοντος σημείου εκτιμά κανείς τόσο τη σταθερά μηχανής όσο και τους συντελεστές του πολυωνύμου της ακτινικής διαστροφής, ή, τέλος, με δεδομένη τη σταθερά της μηχανής υπολογίζεται η θέση του πρωτεύοντος σημείου και οι συντελεστές του πολυωνύμου της ακτινικής διαστροφής. Στα επόμενα θα γίνει εκτενέστερη αναφορά στην πρώτη περίπτωση, η οποία μελετήθηκε στη διπλωματική

εργασία. Με τις υπόλοιπες περιπτώσεις και την επίλυση δέσμης, σε συνδυασμό μάλιστα με την επιβολή γεωμετρικών δεσμεύσεων στον χώρο του αντικείμενου, έχει ασχοληθεί προηγούμενη διπλωματική εργασία (Καλούση, 2006).

Στην περίπτωση λοιπόν όπου υπάρχει η a priori γνώση ότι οι δύο σταθερές μηχανής ταυτίζονται, ενώ έχει υποθεθεί μηχανή σημειακής οπής και το πρωτεύον σημείο είναι γνωστό ή τίθεται κατά προσέγγιση στο κέντρο της εικόνας, η επίλυση δέσμης πέραν από λύσεις για τα στοιχεία του σχετικού προσανατολισμού είναι ικανή να υπολογίσει και την τιμή της σταθεράς c. Η διαδικασία διαφοροποιείται σε σχέση με τα αναφερθέντα στο προηγούμενο κεφάλαιο στη δομή του πίνακα **A**, στον οποίο προστίθεται μια στήλη με τη μερική παράγωγο της συνθήκης συγγραμμικότητας ως προς τη σταθερά της μηχανής, ώστε να έχει πλέον διαστάσεις για N σημεία $(4 \times N) \times (3 \times N + 5 + 1)$, ενώ ο πίνακας των διορθώσεων των αγνώστων αποκτά έναν επιπλέον όρο, τη διόρθωση της σταθεράς της μηχανής και έχει στην ουσία διαστάσεις $(5 + 1 + 3 \times N) \times 1$. Το διάνυσμα **b** με τις ανηγμένες παρατηρήσεις δεν διαφοροποιείται, και η μέθοδος επίλυσης με τις έμμεσες παρατηρήσεις παραμένει η ίδια, ώστε τελικά ο αλγόριθμος να συγκλίνει και να δίνει λύσεις όταν το διάνυσμα

$$dx = (A^T P A)^{-1} A^T b \quad (5.22)$$

δεν υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο κατώφλι. Ο πίνακας βαρών **P** στις περισσότερες περιπτώσεις είναι μοναδιαίος, καθώς οι παρατηρήσεις θεωρούνται ισοβαρείς. Η μορφή του πίνακα **A** θα είναι η ακόλουθη (Εξ. 5.23):

Εικόνα 2					Σημείο 1			Σημείο 2			Σημείο 3				
0	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{11}}{\partial X_1}$	$\frac{\partial x_{11}}{\partial Y_1}$	$\frac{\partial x_{11}}{\partial Z_1}$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{11}}{\partial c}$
0	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{11}}{\partial X_1}$	$\frac{\partial y_{11}}{\partial Y_1}$	$\frac{\partial y_{11}}{\partial Y_1}$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{11}}{\partial c}$
0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{12}}{\partial X_2}$	$\frac{\partial x_{12}}{\partial Y_2}$	$\frac{\partial x_{12}}{\partial Z_2}$	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{12}}{\partial c}$
0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{12}}{\partial X_2}$	$\frac{\partial y_{12}}{\partial Y_2}$	$\frac{\partial y_{12}}{\partial Z_2}$	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{12}}{\partial c}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{13}}{\partial X_3}$	$\frac{\partial x_{13}}{\partial Y_3}$	$\frac{\partial x_{13}}{\partial Z_3}$	$\frac{\partial x_{13}}{\partial c}$	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{13}}{\partial X_3}$	$\frac{\partial y_{13}}{\partial Y_3}$	$\frac{\partial y_{13}}{\partial Z_3}$	$\frac{\partial y_{13}}{\partial c}$	
$\frac{\partial x_{21}}{\partial Y_{02}}$	$\frac{\partial x_{21}}{\partial Z_{02}}$	$\frac{\partial x_{21}}{\partial \omega_2}$	$\frac{\partial x_{21}}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial x_{21}}{\partial \kappa_2}$	$\frac{\partial x_{21}}{\partial X_1}$	$\frac{\partial x_{21}}{\partial Y_1}$	$\frac{\partial x_{21}}{\partial Z}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{21}}{\partial c}$	
$\frac{\partial y_{21}}{\partial Y_{02}}$	$\frac{\partial y_{21}}{\partial Z_{02}}$	$\frac{\partial y_{21}}{\partial \omega_2}$	$\frac{\partial y_{21}}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial y_{21}}{\partial \kappa_2}$	$\frac{\partial y_{21}}{\partial X_1}$	$\frac{\partial y_{21}}{\partial Y_1}$	$\frac{\partial y_{21}}{\partial Z}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{21}}{\partial c}$	
$\frac{\partial x_{22}}{\partial Y_{02}}$	$\frac{\partial x_{22}}{\partial Z_{02}}$	$\frac{\partial x_{22}}{\partial \omega_2}$	$\frac{\partial x_{22}}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial x_{22}}{\partial \kappa_2}$	0	0	0	$\frac{\partial x_{22}}{\partial X_2}$	$\frac{\partial x_{22}}{\partial Y_2}$	$\frac{\partial x_{22}}{\partial Z_2}$	0	0	0	$\frac{\partial x_{22}}{\partial c}$	
$\frac{\partial y_{22}}{\partial Y_{02}}$	$\frac{\partial y_{22}}{\partial Z_{02}}$	$\frac{\partial y_{22}}{\partial \omega_2}$	$\frac{\partial y_{22}}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial y_{22}}{\partial \kappa_2}$	0	0	0	$\frac{\partial y_{22}}{\partial X_2}$	$\frac{\partial y_{22}}{\partial Y_2}$	$\frac{\partial y_{22}}{\partial Z_2}$	0	0	0	$\frac{\partial y_{22}}{\partial c}$	
$\frac{\partial x_{23}}{\partial Y_{02}}$	$\frac{\partial x_{23}}{\partial Z_{02}}$	$\frac{\partial x_{23}}{\partial \omega_2}$	$\frac{\partial x_{23}}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial x_{23}}{\partial \kappa_2}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{23}}{\partial X_3}$	$\frac{\partial x_{23}}{\partial Y_3}$	$\frac{\partial x_{23}}{\partial Z_3}$	$\frac{\partial x_{23}}{\partial c}$	
$\frac{\partial y_{23}}{\partial Y_{02}}$	$\frac{\partial y_{23}}{\partial Z_{02}}$	$\frac{\partial y_{23}}{\partial \omega_2}$	$\frac{\partial y_{23}}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial y_{23}}{\partial \kappa_2}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{23}}{\partial X_3}$	$\frac{\partial y_{23}}{\partial Y_3}$	$\frac{\partial y_{23}}{\partial Z_3}$	$\frac{\partial y_{23}}{\partial c}$	

και του διανύσματος dx των διορθώσεων των αγνώστων:

$$dx = \begin{bmatrix} \delta Y_{02} \\ \delta Z_{02} \\ \delta \omega_2 \\ \delta \varphi_2 \\ \delta \kappa_2 \\ \delta X_1 \\ \delta Y_1 \\ \delta Z_1 \\ \delta X_2 \\ \delta Y_2 \\ \delta Z_2 \\ \delta X_3 \\ \delta Y_3 \\ \delta Z_3 \\ \delta c \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Σε περίπτωση, τέλος, όπου δεν υπάρχει γνώση εκ των προτέρων πως οι δύο εικόνες εμφανίζουν την ίδια σταθερά, πραγματοποιείται επίλυση για δύο διαφορετικές σταθερές c_1, c_2 . Ο πίνακας A αποκτά τότε δύο επιπλέον στήλες. Η κάθε μία από αυτές περιλαμβάνει τη μερική παράγωγο της εξίσωσης παρατήρησης ως προς τις σταθερές της μηχανής, ώστε να έχει τελικές διαστάσεις $(4 \times N) \times (3 \times N + 5 + 2)$ (Εξ. 5.25):

Εικόνα 2					Σημείο 1			Σημείο 2			Σημείο 3				
0	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{11}}{\partial X_1}$	$\frac{\partial x_{11}}{\partial Y_1}$	$\frac{\partial x_{11}}{\partial Z_1}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{11}}{\partial c_1}$	$\frac{\partial x_{11}}{\partial c_2}$
0	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{11}}{\partial X_1}$	$\frac{\partial y_{11}}{\partial Y_1}$	$\frac{\partial y_{11}}{\partial Z_1}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{11}}{\partial c_1}$	$\frac{\partial y_{11}}{\partial c_2}$
0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{12}}{\partial X_2}$	$\frac{\partial x_{12}}{\partial Y_2}$	$\frac{\partial x_{12}}{\partial Z_2}$	0	0	0	$\frac{\partial x_{12}}{\partial c_1}$	$\frac{\partial x_{12}}{\partial c_2}$
0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{12}}{\partial X_2}$	$\frac{\partial y_{12}}{\partial Y_2}$	$\frac{\partial y_{12}}{\partial Z_2}$	0	0	0	$\frac{\partial y_{12}}{\partial c_1}$	$\frac{\partial y_{12}}{\partial c_2}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{13}}{\partial X_3}$	$\frac{\partial x_{13}}{\partial Y_3}$	$\frac{\partial x_{13}}{\partial Z_3}$	$\frac{\partial x_{13}}{\partial c_1}$	$\frac{\partial x_{13}}{\partial c_2}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{13}}{\partial X_3}$	$\frac{\partial y_{13}}{\partial Y_3}$	$\frac{\partial y_{13}}{\partial Z_3}$	$\frac{\partial y_{13}}{\partial c_1}$	$\frac{\partial y_{13}}{\partial c_2}$
$\frac{\partial x_{21}}{\partial Y_{02}}$	$\frac{\partial x_{21}}{\partial Z_{02}}$	$\frac{\partial x_{21}}{\partial \omega_2}$	$\frac{\partial x_{21}}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial x_{21}}{\partial \kappa_2}$	$\frac{\partial x_{21}}{\partial X_1}$	$\frac{\partial x_{21}}{\partial Y_1}$	$\frac{\partial x_{21}}{\partial Z_1}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{21}}{\partial c_1}$	$\frac{\partial x_{21}}{\partial c_2}$
$\frac{\partial y_{21}}{\partial Y_{02}}$	$\frac{\partial y_{21}}{\partial Z_{02}}$	$\frac{\partial y_{21}}{\partial \omega_2}$	$\frac{\partial y_{21}}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial y_{21}}{\partial \kappa_2}$	$\frac{\partial y_{21}}{\partial X_1}$	$\frac{\partial y_{21}}{\partial Y_1}$	$\frac{\partial y_{21}}{\partial Z_1}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{21}}{\partial c_1}$	$\frac{\partial y_{21}}{\partial c_2}$
$\frac{\partial x_{22}}{\partial Y_{02}}$	$\frac{\partial x_{22}}{\partial Z_{02}}$	$\frac{\partial x_{22}}{\partial \omega_2}$	$\frac{\partial x_{22}}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial x_{22}}{\partial \kappa_2}$	0	0	0	$\frac{\partial x_{22}}{\partial X_2}$	$\frac{\partial x_{22}}{\partial Y_2}$	$\frac{\partial x_{22}}{\partial Z_2}$	0	0	0	$\frac{\partial x_{22}}{\partial c_1}$	$\frac{\partial x_{22}}{\partial c_2}$
$\frac{\partial y_{22}}{\partial Y_{02}}$	$\frac{\partial y_{22}}{\partial Z_{02}}$	$\frac{\partial y_{22}}{\partial \omega_2}$	$\frac{\partial y_{22}}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial y_{22}}{\partial \kappa_2}$	0	0	0	$\frac{\partial y_{22}}{\partial X_2}$	$\frac{\partial y_{22}}{\partial Y_2}$	$\frac{\partial y_{22}}{\partial Z_2}$	0	0	0	$\frac{\partial y_{22}}{\partial c_1}$	$\frac{\partial y_{22}}{\partial c_2}$
$\frac{\partial x_{23}}{\partial Y_{02}}$	$\frac{\partial x_{23}}{\partial Z_{02}}$	$\frac{\partial x_{23}}{\partial \omega_2}$	$\frac{\partial x_{23}}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial x_{23}}{\partial \kappa_2}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial x_{23}}{\partial X_3}$	$\frac{\partial x_{23}}{\partial Y_3}$	$\frac{\partial x_{23}}{\partial Z_3}$	$\frac{\partial x_{23}}{\partial c_1}$	$\frac{\partial x_{23}}{\partial c_2}$
$\frac{\partial y_{23}}{\partial Y_{02}}$	$\frac{\partial y_{23}}{\partial Z_{02}}$	$\frac{\partial y_{23}}{\partial \omega_2}$	$\frac{\partial y_{23}}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial y_{23}}{\partial \kappa_2}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial y_{23}}{\partial X_3}$	$\frac{\partial y_{23}}{\partial Y_3}$	$\frac{\partial y_{23}}{\partial Z_3}$	$\frac{\partial y_{23}}{\partial c_1}$	$\frac{\partial y_{23}}{\partial c_2}$
$\frac{\partial Y_{02}}{\partial Y_{02}}$	$\frac{\partial Z_{02}}{\partial Z_{02}}$	$\frac{\partial \omega_2}{\partial \omega_2}$	$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial \kappa_2}{\partial \kappa_2}$				$\frac{\partial X_3}{\partial X_3}$	$\frac{\partial Y_3}{\partial Y_3}$	$\frac{\partial Z_3}{\partial Z_3}$	$\frac{\partial c_1}{\partial c_1}$	$\frac{\partial c_2}{\partial c_2}$			

ενώ στο διάνυσμα των διορθώσεων των αγνώστων dx προστίθενται οι δύο νέοι όροι

c_1 και c_2 και έχει τελικά διαστάσεις $(5 + 2 + 3 \times \text{αριθμός σημείων σύνδεσης}) \times 1$.

Η συνέχεια της διαδικασίας είναι όμοια με την προηγούμενη, και ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν οι διορθώσεις των αγνώστων δεν υπερβαίνουν ένα συγκεκριμένο όριο. Οι αρχικές τιμές, όπως και στην περίπτωση της συνθήκης συνεπιπεδότητας, προκύπτουν από τους αντίστοιχους γραμμικούς αλγορίθμους που προαναφέρθηκαν.

Τέλος, η μορφή του διανύσματος των αγνώστων δx είναι η ακόλουθη:

$$dx = \begin{bmatrix} \delta Y_{o2} \\ \delta Z_{o2} \\ \delta \omega_2 \\ \delta \varphi_2 \\ \delta \kappa_2 \\ \delta X_1 \\ \delta Y_1 \\ \delta Z_1 \\ \delta X_2 \\ \delta Y_2 \\ \delta Z_2 \\ \delta X_3 \\ \delta Y_3 \\ \delta Z_3 \\ \delta c_1 \\ \delta c_2 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

6

Ψηφιακή συνταύτιση εικόνας

Ως ψηφιακή συνταύτιση εικόνας (digital image matching) ορίζεται το πρόβλημα της αυτόματης εύρεσης ομολογιών μεταξύ δύο ή περισσότερων εικόνων. Πρόκειται στην ουσία για αντιστοίχιση σημείων ενδιαφέροντος, γραμμών ή και περιοχών με συγκεκριμένους τόνους στο επικαλυπτόμενο τμήμα εικόνων (ή και μεταξύ εικόνας και προτύπου). Οι όροι που περιγράφουν το παραπάνω πρόβλημα ποικίλλουν. Οι πιο διαδεδομένοι είναι συνταύτιση εικόνων, συσχέτιση εικόνων, ψηφιακή συσχέτιση κ.ά. Η διαδικασία είναι αρκετά εύκολη για τον ανθρώπινο εγκέφαλο, ιδιαίτερα όμως δύσκολη για τον υπολογιστή, ο οποίος ουσιαστικά αντιλαμβάνεται τις εικόνες σαν πίνακες με τιμές χρώματος. Για το λόγο αυτό, το συγκεκριμένο πρόβλημα αποτελεί ένα από τα μείζονα ερευνητικά θέματα στο πεδίο της φωτογραμμετρίας όσο και εκείνο της όρασης υπολογιστών. Μια τέτοια συνταύτιση μπορεί να χρησιμεύσει σε διάφορες εφαρμογές, όπως αναγνώριση αντικειμένων, υπολογισμός θέσης και ανίχνευση κίνησης.

Αυτό καθαυτό το πρόβλημα της συνταύτισης εικόνων είναι “ελλιπώς ορισμένο”, καθώς είναι πιθανή η μη ύπαρξη λύσης, λόγω πχ. αποκρύψεων στην εικόνα, ή ακόμα και η ύπαρξη πολλαπλών λύσεων λόγω επαναλαμβανόμενων μοτίβων, όταν δηλαδή μία οντότητα της μίας εικόνας μπορεί να αντιστοιχηθεί σε περισσότερες της μίας οντότητες στην άλλη εικόνα. Τέλος, υπάρχει ενδεχόμενο οι λύσεις του προβλήματος να μην είναι ισχυρές ή αξιόπιστες και να μεταβάλλονται με μικρές μεταβολές των δεδομένων ή των αρχικών τιμών.

Είναι φανερό ότι υπάρχει πλήθος παραγόντων που επηρεάζουν τη συνταύτιση εικόνων, και σε περίπτωση που αυτοί ελεγχθούν η διαδικασία της διευκολύνεται οδηγώντας σε καλύτερα αποτελέσματα. Ανάμεσα τους συγκαταλέγεται κατ' αρχάς η ραδιομετρία των εικόνων, η οποία οφείλει να μην έχει έντονες διαφορές. Έτσι, σκόπιμο είναι να υπάρχει παρόμοιος φωτισμός κατά τη στιγμή της λήψης των εικόνων που πρόκειται να εμπλακούν στη διαδικασία συνταύτισης. Ακόμα, δυσμενώς επηρεάζουν οι έντονες προοπτικές παραμορφώσεις, που συνεπάγονται αλλαγή σχήματος των αντικει-

μένων μεταξύ των εικόνων, καθώς και οι αλλαγές κλίμακας. Οι παράγοντες αυτοί οφείλονται σε έντονο ανάγλυφο του αντικείμενου, αισθητή διαφορά μεταξύ των αποστάσεων λήψης των εικόνων καθώς και γεωμετρικές λήψεων με έντονες στροφές, στις περιπτώσεις της επίγειας φωτογραμμετρίας κατά κύριο λόγο.

Κατά καιρούς έχουν υιοθετηθεί από τους ερευνητές διάφορες μέθοδοι προσέγγισης του προβλήματος της ψηφιακής συνταύτισης, οι οποίες ποικίλλουν ανάλογα με το είδος της οντότητας που συνταύτιζεται, το μαθηματικό μοντέλο με βάση το οποίο θα πραγματοποιηθεί η συνταύτιση κ.λπ. Η πιο διαδεδομένη κατηγοριοποίηση είναι σε:

- Επιφανειακή συνταύτιση
- Συνταύτιση χαρακτηριστικών
- Συνταύτιση προτύπων
- Σχεσιακή συνταύτιση

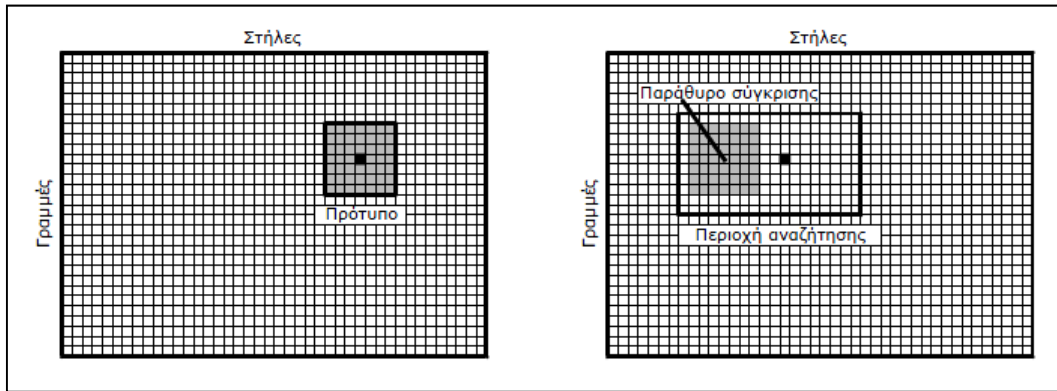
Στην επιφανειακή συνταύτιση οι οντότητες που συγκρίνονται είναι οι τιμές της έντασης σε παράθυρα στις δύο εικόνες (Πρόκος & Καρράς, 2008). Κατά τη συνταύτιση χαρακτηριστικών επιχειρείται η αντιστοίχιση σημείων, γραμμών, ακμών ή και περιοχών που έχουν εξαχθεί σε εικόνες, ενώ στη συνταύτιση προτύπων αντιστοιχίζεται μια εικόνα με ένα πρότυπο, όπως πχ. των φωτοσταθερών και των εικονοσημάτων. Τέλος, η σχεσιακή συνταύτιση βασίζεται σε τοπολογικές και γεωμετρικές σχέσεις μεταξύ των οντοτήτων.

Το πρόβλημα της αυτόματης ψηφιακής συνταύτισης που αφορά άμεσα αυτή την διπλωματική εργασία είναι εκείνο της συνταύτισης χαρακτηριστικών, ειδικότερα δε της αυτόματης εξαγωγής και συνταύτισης σημείων ενδιαφέροντος (*interest points*), ώστε με την αποκατάσταση ομολογιών μεταξύ σημείων δύο εικόνων να είναι δυνατός ο αυτόματος προσανατολισμός τους, ενδεχομένως δε και η 3D ανακατασκευή του μοντέλου. Για λόγους πληρότητας όμως, θα γίνει εδώ συνοπτική αναφορά και στις βασικές μεθόδους επιφανειακής συνταύτισης, αφού και αυτές θα μπορούσαν επίσης να αξιοποιηθούν για την αντιμετώπιση του προβλήματος. Για παράδειγμα, το πρόβλημα του αυτόματου σχετικού προσανατολισμού μπορεί να αντιμετωπιστεί τόσο με συνταύτιση χαρακτηριστικών σημείων, όπως συμβαίνει στην παρούσα εργασία, όσο και με τεχνικές επιφανειακής συνταύτισης, όπως πχ. σε πρόσφατες διπλωματικές εργασίες, με ή και χωρίς αξιοποίηση της επιτολικής γεωμετρίας (Στεντούμης, 2007, Καρφής, 2009).

6.1 Επιφανειακή συνταύτιση

Εδώ επιχειρείται να συσχετιστούν παράθυρα της εικόνας με βάση τις τιμές του τόνου του γκριζου. Μολονότι βασική μονάδα αναφοράς στην ψηφιακή εικόνα αποτελεί η εικονοψηφίδα, η συνταύτιση πραγματοποιείται μεταξύ περισσότερων της μιας εικονοψηφίδων καθώς είναι προφανές ότι σε κάθε εικόνα θα εμφανίζεται μεγάλος αριθμός *pixel* με την ίδια τιμή, ενώ ακόμα πιθανές ραδιομετρικές μεταβολές στην εικόνα οδηγούν σε διαφορές στους τόνους του γκριζου των ομολογιών. Βασικός σκοπός αυτής της διαδικασίας είναι η αντιστοίχιση του παραθύρου αναφοράς (*template window*) ή προτύπου με βάση ένα συγκεκριμένο μέτρο ομοιότητας. Το αντίστοιχο παράθυρο της εικόνας στην οποία πραγματοποιείται η αναζήτηση ονομάζεται παράθυρο σύγκρισης (*matching window*), ενώ η ευρύτερη περιοχή της εικόνας όπου αναζητείται η ομολογη

οντότητα ονομάζεται περιοχή αναζήτησης (Σχ. 6.1). Το παράθυρο σύγκρισης κινείται διαδοχικά στις διάφορες θέσεις της περιοχής αναζήτησης, και υπολογίζεται το μέτρο ομοιότητας. Βάσει κατωφλίου, από τις τιμές αυτές επιλέγεται κατά περίπτωση η μεγαλύτερη ή μικρότερη για να προκύψει η αντιστοιχία των οντοτήτων. Υπάρχει πλούσια βιβλιογραφία σχετικά με τις βέλτιστες διαστάσεις των παραθύρων, την επιλογή θέσης του παραθύρου σύγκρισης, των μέτρων ομοιότητας κ.λπ.



Σχήμα 6.1: Αρχή λειτουργίας της επιφανειακής συνταύτισης.

Γενικά, το παράθυρο αναφοράς πρέπει να περιλαμβάνει ικανό αριθμό pixels για καλή συσχέτιση, αλλά παράλληλα να μην εισάγει προοπτικές παραμορφώσεις και θόρυβο. Ακόμα, οι διαστάσεις του επηρεάζουν την ταχύτητα εφαρμογής της μεθόδου, ενώ και η θέση του διαδραματίζει σημαντικό ρόλο. Η περιοχή των παραθύρων οφείλει να χαρακτηρίζεται από έντονη υφή, καθώς η αντιστοίχιση οντοτήτων χωρίς αξιόλογη υφή είναι συχνά πρακτικά αδύνατη. Επιπλέον, αναμένεται πως η οντότητα του προτύπου θα εμφανίζεται στην εικόνα αναζήτησης μία φορά, δηλαδή δεν θα υπάρχουν αποκρύψεις ούτε επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Η περιοχή αναζήτησης θα μπορούσε θεωρητικά να είναι ολόκληρη η εικόνα, υπάρχουν όμως αρκετές δυνατές δεσμεύσεις προκειμένου αυτή να περιοριστεί (πχ. αξιοποίηση της επιπολικής γεωμετρίας για να περιορίζεται η αναζήτηση κατά μήκος των επιπολικών γραμμών, εκτιμώμενη μέση παράλλαξη της περιοχής κ.λπ.).

Σημαντική διευκόλυνση εξασφαλίζουν και οι πυραμίδες της εικόνας, που ουσιαστικά αποτελούν αναπαράσταση κλίμακας-χώρου (*scale-space*) και δημιουργούνται με κατάλληλη εξομάλυνση και υποδιπλασιασμό σε κάθε επίπεδο της χωρικής ανάλυσης της αρχικής εικόνας. Στις πυραμίδες εικόνας η αναζήτηση πραγματοποιείται από την κορυφή της, δηλαδή από το αδρό, προς τη βάση, δηλαδή το λεπτομερές, εξασφαλίζοντας κάθε φορά ικανοποιητικές αρχικές τιμές για την αναζήτηση στο επόμενο επίπεδο. Είναι μέθοδος χρήσιμη και υπολογιστικά, αφού η αρχική αναζήτηση πραγματοποιείται σε εικόνα αρκετά μικρότερη της κανονικής, ενώ παράλληλα καθώς το μέγεθος της εικόνας μειώνεται προς την κορυφή της μειώνονται και οι δυσμενείς επιπτώσεις του θορύβου και των παραμορφώσεων. Οι πυραμίδες εικόνων είναι γενικά χρήσιμο εργαλείο στον προσδιορισμό ομόλογων σημείων. Μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν και με διαφορετικό τρόπο, δηλαδή με συνυπολογισμό δεδομένων από όλα τα επίπεδα της πυραμίδας, όπως πχ. συμβαίνει και στην περίπτωση του σημειακού τελεστή που χρησιμοποιήθηκε εδώ και περιγράφεται στα επόμενα (ενότητα 6.2.4).

Τέλος, τα μέτρα ομοιότητας που χρησιμοποιούνται στην επιφανειακή συσχέτιση είναι

κυρίως το άθροισμα των απόλυτων διαφορών των τιμών χρώματος, των τετραγώνων ή των γινομένων τους, ανηγμένων στον μέσο όρο, ο συντελεστής συσχέτισης ή το τυπικό σφάλμα σε περίπτωση συνόρθωσης.

Οι μέθοδοι επιφανειακής συνταύτισης μπορούν να εξασφαλίζουν υψηλές ακρίβειες, έως και περί τα 0.1–0.2 pixel. Παράλληλα όμως υπάρχει άμεση εξάρτηση από τη ραδιομετρία της εικόνας (που επηρεάζεται από διαφορές στον φωτισμό ή και την σκιά), πράγμα που αντιμετωπίζεται εν μέρει με ραδιομετρική επέμβαση στις εικόνες (πχ. επεξεργασία ιστογράμματος). Ακόμα, αυτές οι διαδικασίες είναι ευαίσθητες στον θόρυβο (έτσι, θα πρέπει στην επιλογή των παραθύρων να λαμβάνεται υπόψη ο λόγος του σήματος προς τον θόρυβο της εικόνας) και τις πολλαπλές λύσεις, και απαιτούν καλές αρχικές τιμές. Συνεπώς δεν είναι σπάνιο το φαινόμενο των χονδροειδών σφαλμάτων. Οι βασικότερες μέθοδοι επιφανειακής συνταύτισης είναι εκείνη του συντελεστή συσχέτισης και η ελαχιστοτετραγωνική συνταύτιση (Πρόκος & Καρράς, 2008).

6.1.1 Μέθοδος του συντελεστή συσχέτισης

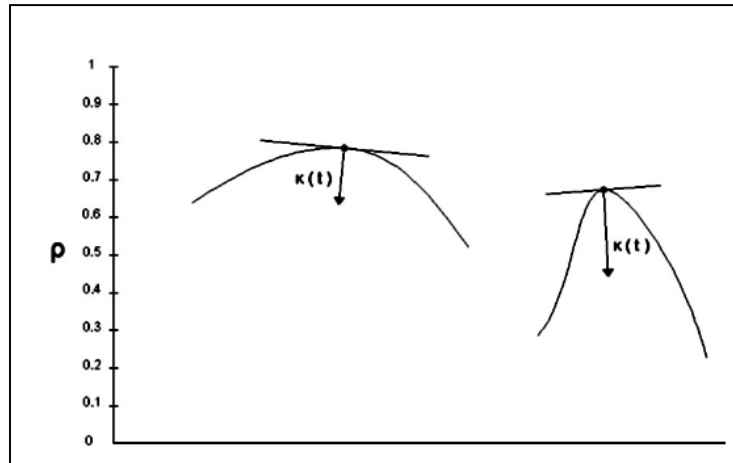
Πρόκειται για την πιο διαδεδομένη τεχνική επιφανειακής συνταύτισης. Μέτρο ομοιότητας είναι ο κανονικοποιημένος συντελεστής συσχέτισης:

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I ((g_1(j, i) - \mu_1)(g_2(j, i) - \mu_2))}{\sqrt{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (g_1(j, i) - \mu_1)^2 \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (g_2(j, i) - \mu_2)^2}} \quad (6.1)$$

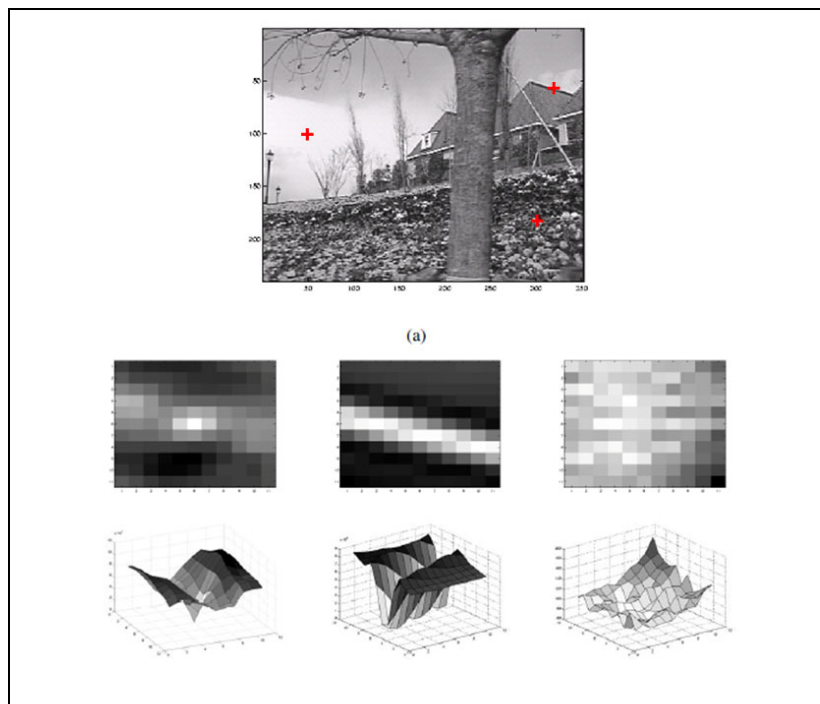
όπου ρ	ο κανονικοποιημένος συντελεστής συσχέτισης
σ_{12}	η συμμεταβλητότητα των δύο παραθύρων
σ_1	η τυπική απόκλιση του παραθύρου αναφοράς
σ_2	η τυπική απόκλιση του παραθύρου σύγκρισης
$g_1(j, i)$	η τιμή του τόνου στη θέση (j,i) στο παράθυρο αναφοράς
$g_2(j, i)$	η τιμή του τόνου στη θέση (j,i) στο παράθυρο σύγκρισης
μ_1	η μέση τιμή του τόνου στο παράθυρο αναφοράς
μ_2	η μέση τιμή του τόνου στο παράθυρο σύγκρισης
J, I	οι διαστάσεις των δύο παραθύρων

Το συγκεκριμένο μέτρο ομοιότητας λαμβάνει υπόψη πιθανές μεταβολές της ραδιομετρίας μεταξύ των εικόνων, αφού οι τιμές είναι ανηγμένες στον μέσο όρο (φωτεινότητα) και τις μεταβλητότητες (γραμμικές μεταβολές της ραδιομετρίας, δηλαδή αντίθεση).

Αποτέλεσμα εφαρμογής της μεθόδου είναι οι εικονοσυντεταγμένες του κεντρικού σημείου του παραθύρου σύγκρισης όπου εμφανίζεται η τιμή ρ_{max} , το οποίο στην ουσία αποτελεί το ομόλογο της αναζητούμενης οντότητας. Βέβαια, αποδεκτές γίνονται τιμές μεγαλύτερες από ένα κατώφλι ρ_o (συνήθως περί το 0.7, ανάλογα όμως με τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί κατά περίπτωση να κυμαίνεται από 0.5 έως 0.95). Άλλο μέσον για να αξιολογηθεί η λύση είναι η καμπυλότητα της γραφικής παράστασης των αποτελεσμάτων περί το μέγιστο (Σχ. 6.2). Μικρή καμπυλότητα ισοδυναμεί με αδύναμη συσχέτιση, καθώς αυτό υποδηλώνει αβεβαιότητα λόγω ομοιομορφίας των τόνων (χαμηλή υφή), ενώ μεγάλη καμπυλότητα σημαίνει ισχυρότερο αποτέλεσμα (Ψάλτης, 2005). Στο Σχ. 6.3 φαίνονται παραδείγματα ισχυρής και αβέβαιης συσχέτισης.



Σχήμα 6.2: Διανύσματα καμπυλότητας και καμπύλες αποτελεσμάτων (Ψάλτης, 2005).



Σχήμα 6.3: Αποτελέσματα από τη μέθοδο του συντελεστή συσχέτισης. Το διάγραμμα (α) αφορά τη συνταύτιση σημείου από τον κήπο, το (β) από τμήμα της στέγης: επαναλαμβανόμενο μοτίβο, και το (γ) από τον ουρανό: έλλειψη υψής και μη ύπαρξη κορυφής στο διάγραμμα της συσχέτισης (Szeliski, 2009).

Αποτέλεσμα της μεθόδου είναι οι εικονοσυντεταγμένες μιας εικονοψηφίδας. Υπάρχει ωστόσο η δυνατότητα υπολογισμού ομολογιών με καλύτερη ακρίβεια εάν θεωρηθούν οι τιμές του συντελεστή συσχέτισης σαν ύψη κορυφών κανάβου και παρεμβληθεί μαθηματική επιφάνεια, η θέση του μεγίστου της οποίας μπορεί να εκτιμηθεί με υποψηφιακή ακρίβεια.

Συνοψίζοντας, πρόκειται για μια γρήγορη και υπολογιστικά απλή μέθοδο επιφανειακής συνταύτισης με ακρίβεια ενός ριχελί. Συνήθως οι λύσεις που αποδίδει είναι σωστές, αν και θα πρέπει πάντοτε να γίνεται έλεγχος για χονδροειδή σφάλματα (πχ. βάσει του αν τα σημεία ικανοποιούν κάποια σχέση προσανατολισμού των εικόνων). Για υψηλότερη ακρίβεια, τα αποτελέσματα από χρήση του συντελεστή συσχέτισης χρησιμοποιούνται ως αρχικές θέσεις στη διαδικασία ελαχιστοτετραγωνικής συνταύτισης.

6.1.2 Ελαχιστοτετραγωνική συνταύτιση

Η ανάγκη για μια μέθοδο επιφανειακής συνταύτισης που θα εξασφαλίζει υποψηφιακή ακρίβεια πιο ικανοποιητική από εκείνη του συντελεστή συσχέτισης, ενώ θα λαμβάνει υπόψη και διαφορές στην προοπτική των εικόνων, οδήγησε στην προσέγγιση της ελαχιστοτετραγωνικής συνταύτισης (*least-squares matching*) (Förstner, 1982 και 1986, Ackermann, 1984, Grün, 1996). Μέτρο ομοιότητας της συγκεκριμένης μεθόδου αποτελεί το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών του τόνων του γκριζου (τυπικό σφάλμα της συνόρθωσης), ενώ χαρακτηριστικό της είναι ότι κατά την αναζήτηση δεν μεταβάλλεται μόνο η θέση του παραθύρου αλλά και το σχήμα, ο προσανατολισμός και η κλίμακά του, ώστε να μπορούν να ανιχνευτούν και γεωμετρικές αλλαγές οφειλόμενες σε προοπτικές παραμορφώσεις στην εικόνα.

Πιο συγκεκριμένα, το παράθυρα έχουν συνήθως σχήμα ορθογωνικό, όμως το παράθυρο σύγκρισης μπορεί να υφίσταται αφινικό μετασχηματισμό (παραλληλόγραμμο). Αυτό εφαρμόζεται ακόμα και αν το αντικείμενο δεν είναι επίπεδο, καθώς οι διαστάσεις του προτύπου είναι αρκετά μικρές στον χώρο, συνεπώς απεικονίζουν ένα πρακτικά επίπεδο τμήμα του αντικειμένου (θεωρητικά, άρα, τα δύο παράθυρα συνδέονται με προβολικό μετασχηματισμό 8 παραμέτρων, συνήθως όμως θεωρείται επαρκής ο αφινικός μετασχηματισμός των 6 παραμέτρων). Για να αντιμετωπιστούν, τέλος, ενδεχόμενες ραδιομετρικές αλλαγές μεταξύ των εικόνων, εισάγεται στο μοντέλο ραδιομετρική μετάθεση (ενιαία μεταβολή φωτεινότητας) και μεταβολή κλίμακας (ενιαία μεταβολή αντίθεσης). Το τελικό μαθηματικό μοντέλο που προκύπτει από τα προαναφερθέντα περιγράφεται ως εξής (Grün, 1996):

$f(x, y)$: η συνάρτηση των τόνων του προτύπου

$g(x, y)$: η συνάρτηση των τόνων του παραθύρου σύγκρισης

Γεωμετρικός μετασχηματισμός $T_G: f(x, y) = g[T_G(x, y)]$

$$\begin{bmatrix} x_g \\ y_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_g = a_{10} + a_{11}x_f + a_{12}y_f \\ y_g = a_{20} + a_{21}x_f + a_{22}y_f \end{cases} \quad (6.2)$$

Ραδιομετρικός μετασχηματισμός $T_R: f(x, y) = g[T_R(x, y)]$

$$f = b + cg \quad (6.3)$$

Συνδυάζοντας τις Εξ. (6.2) και (6.3) προκύπτει:

$$f(x, y) = b + cg[(a_{10} + a_{11}x + a_{12}y), (a_{20} + a_{21}x + a_{22}y)] \quad (6.4)$$

Οι 8 άγνωστοι (6 συντελεστές a_i αφινικού μετασχηματισμού, φωτεινότητα b , αντίθεση c) υπολογίζονται με συνόρθωση με Μ.Ε.Τ. Η μη γραμμική Εξ. (6.4) γραμμικοποιείται κατά Taylor περί τη θέση $(b, c)^0 = (0, 1)$, $(a_{10}, a_{12}, a_{20}, a_{21})^0 = 0$, $(a_{11}, a_{22})^0 = 1$, η οποία υποδηλώνει ότι τα δύο παράθυρα ταυτίζονται. Η σχέση που προκύπτει είναι:

$$f(x, y) - v(x, y) =$$

$$g^0(x, y) + g_x(x, y)\delta a_{10} + x^0 g_x(x, y)\delta a_{11} + y^0 g_x(x, y)\delta a_{12} + g_y(x, y)\delta a_{20} + x^0 g_y(x, y)\delta a_{21} + y^0 g_y(x, y)\delta a_{22} + \delta b + g^0(x, y)\delta c \quad (6.5)$$

όπου $v(x, y)$: οι διορθώσεις των ανηγμένων παρατηρήσεων $f(x, y) - g^0(x, y)$

και g_x, g_y : πρώτη παράγωγος της εικόνας στις διευθύνσεις x και y, αντίστοιχα.

Η ελαχιστοτετραγωνική συνταύτιση είναι διαδικασία επαναληπτική, η οποία συγκλίνει όταν οι διορθώσεις των τιμών δεν υπερβαίνουν ένα προκαθορισμένο όριο. Σε κάθε επανάληψη οι κορυφές του παραθύρου σύγκρισης υπολογίζονται με υποψηφιακή ακρίβεια, ανάλογη δηλαδή με την ακρίβεια που εξασφαλίζει η μέθοδος, και απαιτείται διαδικασία επανασύστασης του παραθύρου. Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου συνταύτισης καταλήγει σε δύο ομόλογα σημεία, το κεντροβαρικό σημείο του παραθύρου αναφοράς (με βάρη τις κλίσεις της εικόνας) και το ομόλογό του, που προκύπτει μέσω των τελικών συντελεστών του αφινικού μετασχηματισμού.

Γενικά, η ελαχιστοτετραγωνική συνταύτιση εξασφαλίζει ιδιαίτερα ακριβή αποτελέσματα (RMS έως και 0.05-0.07 pixel), εφόσον υπάρχουν ικανοποιητικές προσεγγιστικές τιμές, ακρίβειας το πολύ 3-4 pixel, από τη μέθοδο του συντελεστή συσχέτισης.

6.2 Συνταύτιση χαρακτηριστικών

Η συνταύτιση χαρακτηριστικών (*feature-based matching*) άρχισε να ερευνάται στις αρχές τις δεκαετίας του '80, όταν και έγινε αντιληπτό πως ο ανθρώπινος εγκέφαλος συνταυτίζει οντότητες με βάση τα χαρακτηριστικά τους και όχι τους τόνους της απόχρωσης τους. Η προσέγγιση αυτή είναι αρκετά πιο ανθεκτική σε προοπτικές παραμορφώσεις λόγω έντονων αλλαγών στις γεωμετρικές λήψης, την κλίμακα αλλά και τον φωτισμό, ενώ δεν απαιτεί ιδιαίτερα ακριβείς αρχικές τιμές. Ακόμα, μπορεί να εξασφαλίζει πολύ ισχυρότερες λύσεις λαμβάνοντας υπόψη και πληροφορίες σχετικά με τη δομή του χώρου.

Η συνταύτιση χαρακτηριστικών πραγματοποιείται ουσιαστικά σε δύο βήματα. Αρχικά εξάγονται οι οντότητες (σημεία, ακμές, γραμμές ή και επιφάνειες) και έπειτα αντιστοιχίζονται. Στο πλαίσιο της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας θα αναλυθεί μόνο η συνταύτιση σημείων. Τα σημεία που εξάγονται, με τη βοήθεια ειδικών σημειακών τελεστών (*point operators*) ονομάζονται “σημεία ενδιαφέροντος” (*interest points*) ή “γωνίες” (*corners*).

Η τελική αντιστοίχιση μπορεί να πραγματοποιηθεί και με επιφανειακή συνταύτιση, με την δημιουργία ενός προτύπου περί το σημείο ενδιαφέροντος. Το όφελος στην περίπτωση αυτή είναι ότι η αναζήτηση αφορά ένα συγκεκριμένο σημείο που συγκεντρώνει ορισμένα χαρακτηριστικά προκειμένου να θεωρηθεί ως σημείο ενδιαφέροντος και όχι οποιαδήποτε τυχαία οντότητα. Μπορεί, όμως, η αντιστοίχιση να πραγματοποιηθεί και με ελαχιστοποίηση μίας συνάρτησης κόστους μεταξύ των διανυσμάτων των περιγραφικών χαρακτηριστικών (*descriptors*) που αποδίδονται στα σημεία ενδιαφέροντος και περιλαμβάνουν πληροφορίες σχετικά με τη θέση, τον προσανατολισμό ή και την καμπυλότητα για γραμμικά στοιχεία, καθώς και τη μέση φωτεινότητα ή το μέγεθος για επιφάνειες (Πρόκος & Καρράς, 2008). Ως συνάρτηση κόστους συχνά χρησιμοποιείται η ευκλείδεια απόσταση, η απόσταση Mahalanobis. Η προσέγγιση αυτή είναι απλή και γρήγορη. Στην ουσία πρόκειται μόνο για αντιστοίχιση μεταξύ δύο καταλόγων περιγραφικών χαρακτηριστικών, άρα δεν είναι υπολογιστικά απαιτητική. Αυτά τα χαρα-

κτηριστικά υπολογίζονται σε ορισμένες συγκεκριμένες διευθύνσεις μιας τετράγωνης ή κυκλικής περιοχής που προσαρμόζεται περί το σημείο ενδιαφέροντος και κυρίως αφορούν τις τοπικές κλίσεις της εικόνας. Ειδικότερα, η διαδικασία χωρίζεται σε δύο επιμέρους στάδια. Κατ' αρχάς, πραγματοποιείται προκαταρκτική αντιστοίχιση, η οποία καταλήγει σε κατάλογο που περιλαμβάνει μόνο τα χαρακτηριστικά, τις θέσεις τους και τα βάρη αντιστοίχισής τους με άλλα χαρακτηριστικά, ώστε να μπορέσει κατόπιν να πραγματοποιηθεί ένας έλεγχος για την συμβατότητα της αντιστοίχισης ως προς ένα ορισμένο μαθηματικό μοντέλο, όπως για παράδειγμα το τρισδιάστατο μοντέλο του αντικειμένου ή ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει τη σχέση μεταξύ των εικόνων, πχ. εκείνο του σχετικού προσανατολισμού ή της επιπολικής γεωμετρίας, συνήθως με τη βοήθεια του αλγορίθμου ανίχνευσης χονδροειδών σφαλμάτων RANSAC.

Προκειμένου να χαρακτηριστεί ένα σημείο ως σημείο ενδιαφέροντος οφείλει να πληροί ορισμένες προϋποθέσεις (Förstner, 1986):

- Η διακριτότητα (*distinctness*): Τα σημεία ενδιαφέροντος πρέπει να είναι ευκρινή και εύκολα διαχωρίσιμα από τα γειτονικά τους.
- Το αμετάβλητο (*invariance*): Τα σημεία πρέπει να είναι ανεξάρτητα από προοπτικές και ραδιομετρικές παραμορφώσεις, πράγμα που μαζί με την διακριτότητα αντιπροσωπεύουν τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά τους.
- Η σταθερότητα (*stability*): Τα επιλεγμένα σημεία πρέπει να εμφανίζονται σε όλες τις εμπλεκόμενες εικόνες και να είναι ανθεκτικά σε πιθανή παρουσία θορύβου.
- Η σπανιότητα (*seldomness*): Τα σημεία ενδιαφέροντος πρέπει να είναι μοναδικά σε κάθε εικόνα. Αν και η διακριτότητα που προαναφέρθηκε διακρίνει το σημείο από τα γειτονικά του, η σπανιότητα αποσκοπεί σε επιλογή σημείων που δεν αποτελούν τμήμα επαναλαμβανόμενου μοτίβου.
- Η ερμηνευσιμότητα (*interpretability*): Τα σημεία καλό είναι να επιδέχονται και φυσική ερμηνεία, καθώς η συνταύτιση χαρακτηριστικών χρησιμοποιείται ευρέως για να επιτευχθεί ανάλυση εικόνας (*image analysis*) και αναγνώριση αντικειμένων (*object recognition*).
- Η ακρίβεια (*precision*): Οι εικονοσυντεταγμένες του σημείου ενδιαφέροντος θα πρέπει να είναι ορισμένες με ακρίβεια.

Κατά καιρούς έχουν προταθεί διάφοροι τελεστές εξαγωγής σημείων ενδιαφέροντος, γραμμών και ακμών, οι οποίοι επικεντρώνονται στην ποιότητα των ομολογιών, την ακρίβεια υπολογισμού της θέσης κ.λπ. Οι πιο συχνά απαντώμενοι σημειακοί τελεστές είναι εκείνοι των Moravec, Harris και Förstner. Πιο πρόσφατα μάλιστα αναπτύχθηκαν αλγόριθμοι που καθιστούν τη συνταύτιση χαρακτηριστικών ολοένα και πιο ανθεκτική σε ραδιομετρικές και γεωμετρικές παραμορφώσεις, δηλαδή σε διάφορα είδη μετασχηματισμών. Τέτοιοι αλγόριθμοι έχουν αναπτυχθεί από τους Lowe (2004) και Tuytelaars & van Gool (2004).

6.2.1 Τελεστής Moravec

Ο Moravec ήταν από τους πρώτους που ανέπτυξαν αλγορίθμους εξαγωγής σημείων, ενώ παράλληλα πρώτη φορά το 1977 χρησιμοποίησε τον όρο "σημεία ενδιαφέροντος". Στον τελεστή εξαγωγής σημείων του Moravec (1979) ως σημείο ενδιαφέροντος

χαρακτηρίζεται αποκλειστικά και μόνο μια εικονοψηφίδα.

Η κεντρική ιδέα στηρίζεται στον υπολογισμό της μεταβολής της έντασης στις 8 κύριες διευθύνσεις ενός προτύπου που περιβάλλει την κεντρική εικονοψηφίδα, βάσει ενός συγκεκριμένου μαθηματικού μοντέλου. Ειδικότερα, δημιουργείται ένα παράθυρο με διαστάσεις ίδιες με το πρότυπο, το οποίο τοποθετείται διαδοχικά στις οκτώ θέσεις περιγύρω αυτό. Ο αλγόριθμος υπολογίζει για κάθε θέση την τιμή:

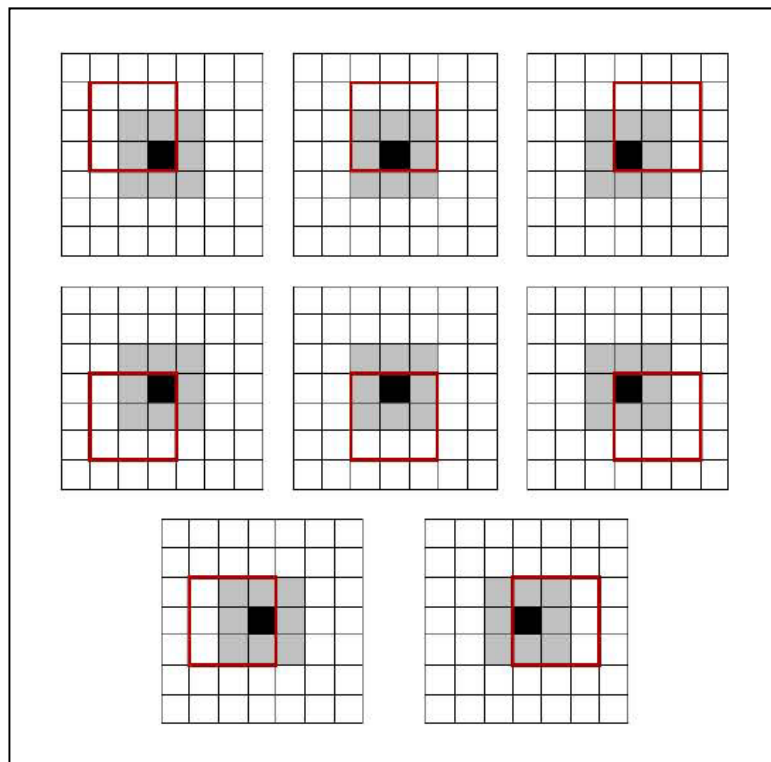
$$E_k = \sum_{i=1}^N (w_i - I_i)^2 \quad (6.6)$$

όπου i : το πλήθος των εικονοψηφίδων του παραθύρου

w_i : η τιμή της έντασης κάθε εικονοψηφίδας του προτύπου

I_i : η τιμή της έντασης κάθε εικονοψηφίδας του μετατιθέμενου παραθύρου.

Στο Σχ. 6.4 με μαύρο εμφανίζεται η κεντρική εικονοψηφίδα, με γκριζο το πρότυπο και με κόκκινο το μεταβαλλόμενο παράθυρο. Οι διαστάσεις του παραθύρου και του προτύπου είναι 3×3 , συνεπώς η μεταβολή της έντασης σε κάθε διεύθυνση υπολογίζεται ως άθροισμα των τετραγώνων 9 διαφορών και διαφέρει ανάλογα με τη διεύθυνση στην οποία υπολογίζεται.



Σχήμα 6.4: Ο υπολογισμός της μεταβολής της έντασης στις 8 βασικές διευθύνσεις (Κυπαρίσση, 2011).

Για τον λόγο αυτό κρίνεται απαραίτητο να γίνει μια επιλογή μεταξύ των 8 τιμών που προκύπτουν. Δεδομένου ότι τα γωνιακά σημεία πρέπει να εμφανίζουν έντονες μεταβολές, δηλαδή να διαφέρουν σημαντικά από τα γειτονικά τους, κριτήριο επιλογής αποτελεί η ελάχιστη τιμή. Η τιμή αυτή ορίζεται ως το μέτρο “γωνιακότητας” $C(i, j)$ (Καρ-

φής, 2009) και συνιστά το βασικό κριτήριο για την επιλογή, καθώς τα σημεία ενδιαφέροντος οφείλουν να την ξεπερνούν.

Από όλες τις τιμές των μέτρων γωνιακότητας για κάθε εικονοψηφίδα μπορεί να κατασκευαστεί ο χάρτης γωνιακότητας, ο οποίος για κάθε εικονοψηφίδα θα φέρει την τιμή:

$$C(i, j) = \min E_k(i, j) \quad (6.7)$$

Στον χάρτη αυτό, οι περιοχές σημείων ενδιαφέροντος εμφανίζουν τιμές C ιδιαίτερα υψηλές λόγω της ανομοιογένειας των τόνων που προκαλεί η ύπαρξη του σημείου. Σε περίπτωση δε που παρατηρηθεί κάποια μεμονωμένη υψηλή τιμή, αυτή δεν θεωρείται ένδειξη για την ύπαρξη σημείου ενδιαφέροντος αλλά θορύβου, και δεν πρέπει να επιλέγεται. Συνεπώς, ο χαρακτηρισμός των σημείων ως γωνιακών γίνεται μόνο στις περιοχές όπου, όπως προαναφέρθηκε, εμφανίζονται υψηλές τιμές του μέτρου γωνιακότητας, με επιλογή της εικονοψηφίδας που εμφανίζει τη μέγιστη τιμή. Η διαδικασία αυτή αποτελεί το τελικό στάδιο του αλγορίθμου και αναφέρεται ως διαδικασία αφαίρεσης των μη μεγίστων.

Αν και ο τελεστής Moravec αντιμετώπισε ικανοποιητικά το πρόβλημα εξαγωγής σημείων ενδιαφέροντος, δεν είναι λίγα τα προβλήματα που παρουσιάζει, οπότε και αστοχεί. Κατ' αρχάς, ο υπολογισμός της έντασης στις 8 βασικές διευθύνσεις, στον οποίο βασίζεται ουσιαστικά ο αλγόριθμος, δεν είναι ανεξάρτητος του συστήματος αναφοράς, δηλαδή του συστήματος των εικονοσυντεταγμένων. Σε περίπτωση, για παράδειγμα, όπου η ίδια εικόνα στραφεί, τα σημεία ενδιαφέροντος που θα προκύψουν από εφαρμογή του τελεστή δεν θα είναι τα ίδια (ευαισθησία σε στροφές). Ακόμα, ο αλγόριθμος αδυνατεί σε πολλές περιπτώσεις να αντεπεξέλθει στην παρουσία μεμονωμένου θορύβου, καθώς τέτοια σημεία εμφανίζουν έντονες μεταβολές στην ένταση και στις 8 διευθύνσεις. Τέλος, στον τελεστή αυτόν ανταποκρίνονται και επιλέγονται ως σημεία ενδιαφέροντος – ενώ δεν θα έπρεπε – σημεία που ανήκουν σε ακμές, αφού τέτοια σημεία εξ ορισμού εμφανίζουν ασήμαντες μεταβολές έντασης κατά μήκος των ακμών και σημαντικές στην κάθετη διεύθυνση, συνεπώς το μέτρο γωνιακότητας σε αναλογες περιπτώσεις είναι αρκετά μεγάλο.

6.2.2 Τελεστής Föstrner

Ο τελεστής αυτός χρησιμοποιείται κυρίως για την εξαγωγή σημείων ενδιαφέροντος, τα οποία στη συνέχεια θα συσχετιστούν είτε βάσει του συντελεστή συσχέτισης είτε με την ελαχιστοτετραγωνική μέθοδο. Ο αλγόριθμος θεωρεί ότι τα σημεία ενδιαφέροντος πρέπει να εμφανίζουν κυκλικά έντονες μεταβολές στην ένταση. Σε κάθε εξεταζόμενο, λοιπόν, σημείο υπολογίζονται οι μεταβολές της έντασης κατά τις διευθύνσεις x, y. Οι δεσμεύσεις αυτές μπορούν να οριστούν μαθηματικά με τη βοήθεια των εξής πινάκων:

$$N = \begin{bmatrix} \sum g_x^2 & \sum g_{xy} \\ \sum g_{xy} & \sum g_y^2 \end{bmatrix} \text{ και } Q = N^{-1} = \frac{1}{\det(N)} \begin{bmatrix} \sum g_y^2 & -\sum g_{xy} \\ -\sum g_{xy} & \sum g_x^2 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

όπου g_x, g_y οι κλίσεις της εικόνας κατά x και y, αντίστοιχα.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα Q σχετίζονται με τα μήκη των ημιαξόνων της “έλλειψης σφάλματος” του σημείου, συνεπώς προκειμένου να ικανοποιηθεί το κριτήριο της κυκλικό-

τητας οι δύο αυτές ιδιοτιμές θα πρέπει να είναι περίπου ίσες, ώστε τα μήκη των ημι-αξόνων να μη διαφέρουν σημαντικά και η έλλειψη να τείνει κατά το δυνατόν σε κύκλο. Η μαθηματική έκφραση του παραπάνω κριτηρίου κυκλικότητας είναι:

$$q = \frac{4 \det(N)}{\text{tr}^2(N)} = 1 - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2 \quad (6.9)$$

Στην ιδανική περίπτωση, η τιμή του q θα έπρεπε να ισούται με τη μονάδα, στην πράξη βέβαια οποιαδήποτε τιμή πάνω πχ. από 0.80 θεωρείται αποδεκτή. Εκτός όμως από το κριτήριο της κυκλικότητας, τα σημεία ενδιαφέροντος οφείλουν να εμφανίζονται και έντονες μεταβολές στην ένταση σε σύγκριση με τα γειτονικά τους. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει να ελαχιστοποιείται το ίχνος του πίνακα \mathbf{Q} , άρα να μεγιστοποιείται η ακόλουθη έκφραση:

$$w = \frac{1}{\text{tr}(\mathbf{Q})} \quad (6.10)$$

και στη συνέχεια αποφασίζεται εάν το σημείο αποτελεί σημείο ενδιαφέροντος ή όχι με βάση μια τιμή κατωφλίου w_0 .

6.2.3 Τελεστής Harris

Οι Harris & Stevens (1988) μελέτησαν τις ιδιότητες και τα μειονεκτήματα του τελεστή Moravec και προσπάθησαν να τα βελτιώσουν δημιουργώντας έναν νέο τελεστή εξαγωγής σημείων και ακμών, τον τελεστή Harris. Ένα από τα μειονεκτήματα του τελεστή Moravec είναι πως υπολογίζει τη μεταβολή της έντασης μόνο στις 8 βασικές διευθύνσεις, δηλαδή ανά 45° (πρόβλημα ανισοτροπικότητας). Για να αντιμετωπιστεί η αδυναμία αυτή, οι ερευνητές χρησιμοποιώντας την πράξη της συνέλιξης κατέστησαν δυνατό τον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης, δηλαδή της μεταβολής της έντασης σε όλες της διευθύνσεις. Προς τούτο ορίζεται τμήμα της εικόνας που περιλαμβάνει τις τιμές της φωτεινότητας και ένα δεύτερο παράθυρο (μάσκα), μεταξύ των οποίων πραγματοποιείται συνέλιξη. Η μορφή της μάσκας καθορίζει τη διεύθυνση κατά την οποία θα υπολογιστεί η μεταβολή της έντασης.

Παραδείγματος χάριν:

$$X = I \otimes [-1 \ 0 \ 1] \approx \frac{\partial I}{\partial x} \quad (6.11 \ a - b) \quad \text{υπολογίζει τη μεταβολή της έντασης κατά } x$$

$$Y = I \otimes [-1 \ 0 \ 1]^T \approx \frac{\partial I}{\partial y} \quad \text{υπολογίζει τη μεταβολή της έντασης κατά τη διεύθυνση } y.$$

Γενικά, η μεταβολή της έντασης σε δύο τυχαίες διευθύνσεις u, v υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση :

$$E_{(u,v)}(x, y) = \sum \left(u \frac{\partial I}{\partial x} + v \frac{\partial I}{\partial y} \right)^2 \quad (6.12)$$

Η διαδικασία υπολογισμού των κλίσεων είναι γενικά ευαίσθητη στον θόρυβο και συχνά με εφαρμογή τελεστών εξαγονται ως σημεία ενδιαφέροντος σημεία θορύβου της εικόνας. Για τον λόγο αυτό απαιτείται η εφαρμογή φίλτρου εξομάλυνσης, το οποίο εν

προκειμένω είναι ένα χαμηλοπερατό φίλτρο Gauss, ώστε η παραπάνω σχέση να μεταβάλλεται ως εξής:

$$\begin{aligned} E_{(u,v)}(x,y) &= \sum e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}} \left(u \frac{\partial I}{\partial x} + v \frac{\partial I}{\partial y}\right)^2 = \sum w \left(u \frac{\partial I}{\partial x} + v \frac{\partial I}{\partial y}\right)^2 = \\ &= \sum w \left(u^2 \frac{\partial I^2}{\partial x} + 2uv \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial y} + v^2 \frac{\partial I^2}{\partial y}\right) = Au^2 + 2Cuv + Bv^2 \quad (6.13) \end{aligned}$$

$$\text{όπου} \quad A = \frac{\partial I^2}{\partial x} * w \quad B = \frac{\partial I^2}{\partial y} * w \quad C = \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial y} * w$$

$$\text{ή αλλιώς} \quad E(x,y) = (x,y) \mathbf{M}(x,y)^T \quad (6.14)$$

$$\text{όπου} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας \mathbf{M} είναι ένας συμμετρικός πίνακας 2×2 με ιδιοτιμές λ_1, λ_2 . Στην πραγματικότητα δεν είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της μεταβολής της έντασης σε όλες τις διευθύνσεις αλλά μόνο ο υπολογισμός του πίνακα \mathbf{M} , του οποίου οι ιδιοτιμές περιγράφουν τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης μεταβολής της έντασης περί την εξεταζόμενη εικονοψηφίδα. Στην περίπτωση όπου η υπό εξέταση εικονοψηφίδα ανήκει σε περιοχή με ομοιογενείς τόνους, οι μεταβολές της έντασης σε καμία από τις διευθύνσεις δεν θα είναι μεγάλες, άρα και οι δύο ιδιοτιμές θα είναι αρκετά μικρές. Εάν το σημείο ανήκει σε ακμή, θεωρητικά η μία ιδιοτιμή θα έπρεπε να είναι πολύ μεγάλη και η άλλη μηδενική. Βέβαια, λόγω της ύπαρξης θορύβου στην εικόνα η μία ιδιοτιμή δεν αναμένεται ίση με το μηδέν, απλώς μεταξύ τους εντοπίζεται σημαντική διαφορά. Τέλος, σε περίπτωση όπου εξετάζεται εικονοψηφίδα που είναι σημείο ενδιαφέροντος, οι μεταβολές θα είναι έντονες σε όλες τις διευθύνσεις, επομένως και οι δύο ιδιοτιμές αρκετά μεγάλες. Οι ιδιοτιμές καθορίζουν το μήκος των ημιαξόνων της έλλειψης σφάλματος, άρα εάν θεωρηθεί ότι σε κάθε εικονοψηφίδα προσαρμόζεται έλλειψη, με βάση τα παραπάνω σε περίπτωση σημείου ενδιαφέροντος ή σημείου σε ομοιογενή περιοχή η έλλειψη θα τείνει στο κυκλικό σχήμα, ενώ σε περίπτωση ακμής το σχήμα της θα είναι έντονα ελλειπτικό. Τα προαναφερθέντα αναπαρίστανται σχηματικά στο Σχ. 6.5.

Βέβαια, έντονες μεταβολές σε όλες τις διευθύνσεις θα εμφανίζει και ένα σημείο που αποτελεί θόρυβο. Για τον λόγο αυτό, καθώς και για την αποφυγή υπολογισμού των ιδιοτιμών, οι Harris & Stevens (1988) όρισαν το ακόλουθο μέτρο γωνιακότητας, που βοηθά στην κατάταξη των εικονοψηφίδων που μελετώνται:

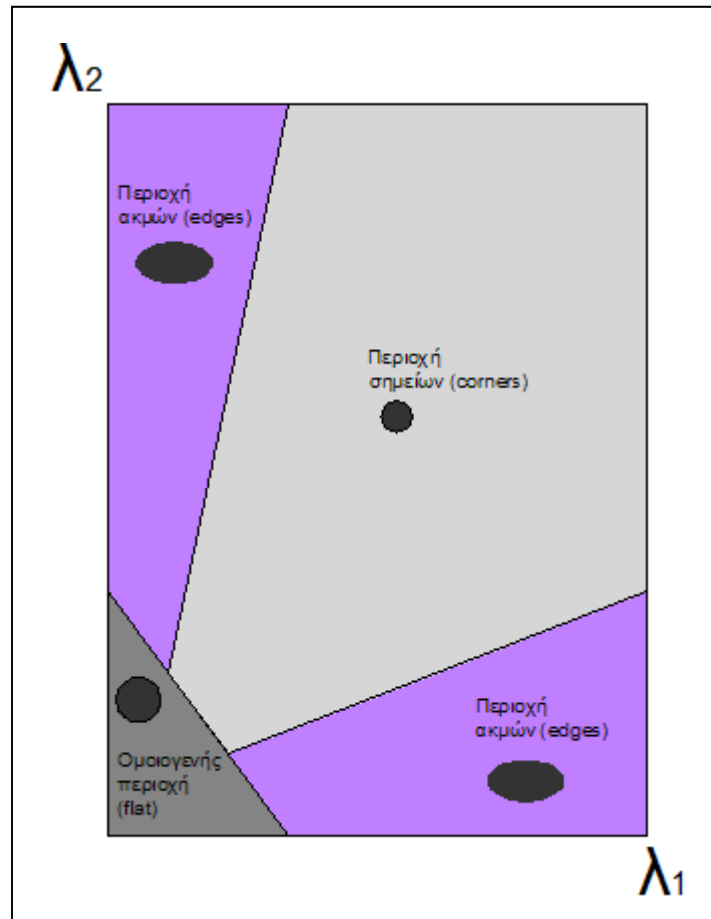
$$R = \det(\mathbf{M}) - k \operatorname{tr}^2(\mathbf{M}) = \lambda_1 \lambda_2 - k(\lambda_1 + \lambda_2) \quad (6.15)$$

όπου k κατάλληλη σταθερά.

Αρνητικές τιμές του R αντιστοιχούν σε ακμές, ενώ θετικές τιμές σε σημεία. Τέλος, μικρές τιμές για το παραπάνω μέτρο προκύπτουν για εικονοψηφίδες σε ομοιογενή περιοχή. Επομένως, θα πρέπει να οριστεί ένα συγκεκριμένο κατώφλι για το μέτρο γωνιακότητας που να επιτρέπει επιτυχή διαχωρισμό των σημείων ενδιαφέροντος.

Αν και ο τελεστής Harris μπόρεσε να αντιμετωπίσει επιτυχώς ορισμένα από τα προβλήματα του τελεστή Moravec, εξακολουθεί να εμφανίζει αδυναμίες. Κατ' αρχάς, αδυνατεί στις περισσότερες περιπτώσεις να διαχωρίσει επιτυχώς τον θόρυβο από τα ση-

μεία ενδιαφέροντος καθώς, όπως αναφέρθηκε, τα σημεία που αποτελούν θόρυβο εμφανίζουν έντονες μεταβολές της έντασης. Ακόμα, αν και κατέστησε δυνατό τον υπολογισμό της μεταβολής της έντασης σε όλες τις διευθύνσεις, δεν ήταν σε θέση να αντιμετωπίσει το πρόβλημα της ευαισθησίας σε στροφές, αφού οι μεταβολές έντασης υπολογίζονται με βάση τις κλίσεις στην οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση. Δηλαδή σε περίπτωση όπου η εικόνα στραφεί, γενικά δεν θα εξαχθούν τα ίδια σημεία ενδιαφέροντος, καθώς μεταβάλλονται οι κλίσεις κατά τις δύο βασικές διευθύνσεις.



Σχήμα 6.5: Η ερμηνεία των ιδιοτιμών.

6.2.4 Αλγόριθμος SIFT

Με την πάροδο των χρόνων, η ανάγκη για εξαγωγή σημείων ενδιαφέροντος αμετάβλητων σε μετασχηματισμούς κλίμακας, στροφή ή αλλαγές στη φωτεινότητα γινόταν ολοένα και πιο επιτακτική. Στο πλαίσιο αυτό, ο Lowe (2004) ανέπτυξε τον αλγόριθμο SIFT (Scale Invariant Feature Transform) προκειμένου να επιτύχει μια τέτοια συνταύτιση ομόλογων σημείων. Τα σημεία αυτά θα πρέπει να εντοπίζονται παρά τις πιθανές αλλαγές κλίμακας και στροφής μεταξύ των δύο εικόνων, καθώς και να είναι ανθεκτικά σε αφινικούς μετασχηματισμούς και έντονες αλλαγές στο σημείο λήψης ή την ύπαρξη θορύβου. Ο αλγόριθμος ακολουθεί ορισμένα βήματα μέχρι να καταλήξει στην εύρεση ομολογιών, συνδυάζοντας την εξαγωγή σημείων ενδιαφέροντος με τη δημιουργία ενός πίνακα περιγραφικών χαρακτηριστικών (*descriptors*) για κάθε ένα από αυτά.

Κατ' αρχάς, ο αλγόριθμος αναζητά τα σημεία ενδιαφέροντος σε πυραμίδες εικόνων. Για να δημιουργηθεί η πυραμίδα, πραγματοποιείται συνέλιξη με φίλτρο εξομάλυνσης Gauss με διάφορες τυπικές αποκλίσεις, ώστε να δημιουργηθούν εικόνες με διαφορετική κλίμακα. Η πράξη της συνέλιξης περιγράφεται μαθηματικά ως εξής:

$$L(x, y, \sigma) = G(x, y, \sigma) \otimes I(x, y) \quad (6.16)$$

όπου

$$G(x, y, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}$$

και $I(x, y)$ η εικόνα.

Σύμφωνα με πειραματικά δεδομένα, επαρκεί η συνέλιξη της αρχικής εικόνας τέσσερις φορές με φίλτρα Gauss διαφορετικών τυπικών αποκλίσεων. Στη συνέχεια, ακολουθεί δημιουργία ενός νέου επιπέδου με επανασύσταση της εικόνας, με επιλογή κάθε δεύτερης εικονοψηφίδας κατά την οριζόντια και την κατακόρυφη διεύθυνση, και συνέλιξη της νέας αυτής εικόνας με φίλτρα εξομάλυνσης Gauss διαφορετικών τυπικών αποκλίσεων. Η διαδικασία αυτή αρκεί να επαναληφθεί τρεις φορές, όπως διαπιστώθηκε μετά από έρευνα. Έπειτα, για κάθε επίπεδο οι εικόνες διαφορετικής κλίμακας που έχουν δημιουργηθεί αφαιρούνται μεταξύ τους με αποτέλεσμα να προκύπτει η πυραμίδα DoG (Difference of Gaussian). Στην ουσία η πυραμίδα αυτή υπολογίζεται από την αφαίρεση εικόνων διαδοχικών κλιμάκων, που διαφέρουν κατά τη σταθερά k , όπως φαίνεται και στην παρακάτω σχέση:

$$D(x, y, \sigma) = (G(x, y, k\sigma) - G(x, y, \sigma)) * I(x, y) = L(x, y, k\sigma) - L(x, y, \sigma) \quad (6.17)$$

Στη νέα αυτή πυραμίδα γίνεται η ανίχνευση σημείων ενδιαφέροντος με σύγκριση της τιμής κάθε εικονοψηφίδας με τις 8 γειτονικές, καθώς και με τις 9 τιμές που αντιστοιχούν στην αμέσως επόμενη και την αμέσως προηγούμενη εικόνα. Σε περίπτωση όπου το σημείο αποτελεί μέγιστο ή ελάχιστο ύστερα από τη σύγκριση με τις προαναφερθείσες τιμές και εάν η τιμή του είναι μεγαλύτερη από ένα προεπιλεγμένο κατώφλι, θεωρείται σημείο ενδιαφέροντος.

Η ανίχνευση των σημείων είναι προτιμότερο να πραγματοποιείται στην πυραμίδα DoG, καθώς η εύρεσή τους στην πυραμίδα αυτή είναι ανεξάρτητη της κλίμακας της εικόνας, όπως φαίνεται από τη μαθηματική σχέση που ακολουθεί, αφού η διαφορά των εικόνων περιλαμβάνει το σ^2 , παράγοντας που απαιτείται για να κανονικοποιηθεί η κλίμακα σε όλα τα επίπεδα της πυραμίδας:

$$G(x, y, k\sigma) - G(x, y, \sigma) \approx (k - 1)\sigma^2 \nabla^2 G^2 \quad (6.18)$$

Τέλος, δεν είναι υπολογιστικά απαιτητική, διότι ένα σημείο που δεν αποτελεί μέγιστο ή ελάχιστο θα απορριφθεί αμέσως ύστερα από κάποιες αρχικές συγκρίσεις με τα 26 γειτονικά του στοιχεία.

Αφού έχει γίνει η εύρεση των σημείων ενδιαφέροντος, ακολουθεί ο ακριβής υπολογισμός της θέσης τους με τη χρήση πολυώνυμου Taylor. Τα εν λόγω σημεία συνήθως βρίσκονται ανάμεσα σε ακέραιες τιμές εικονοψηφίδων, για τον λόγο αυτό και απαιτείται υπολογισμός της θέσης τους με ακρίβεια καλύτερη του pixel. Στην κλίμακα λοιπόν

όπου εντοπίστηκε το σημείο ενδιαφέροντος χρησιμοποιείται το πολυώνυμο:

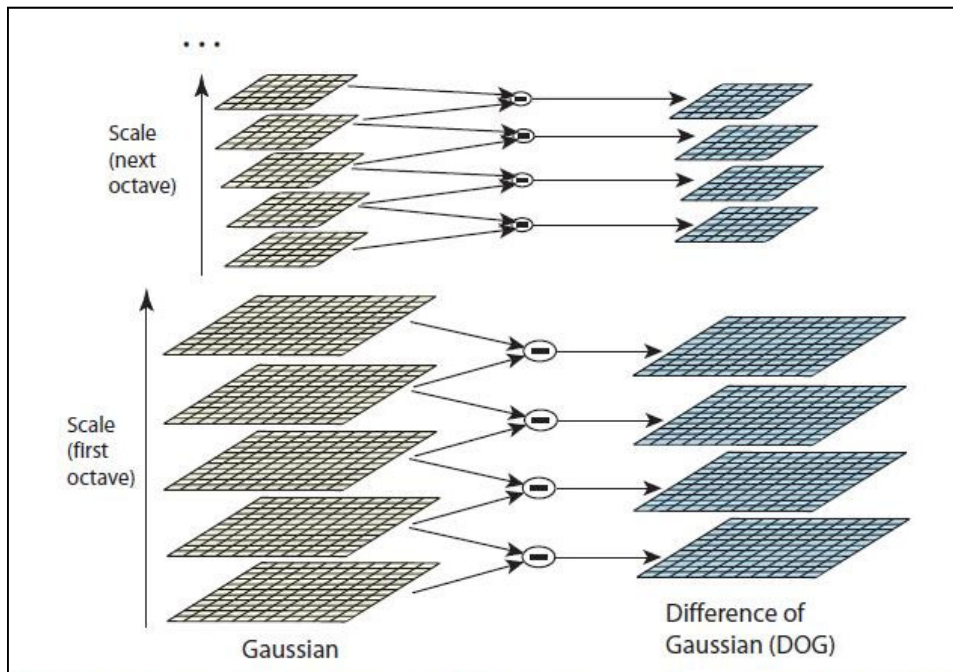
$$D(x) = D + \frac{\partial D^T}{\partial x} x + \frac{1}{2} x^T \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} x \quad (6.19)$$

το οποίο παραγωγίζεται και τίθεται ίσο με το μηδέν προκειμένου να εντοπιστεί η απόσταση του σημείου ενδιαφέροντος από το εγγύτερο ακέραιο pixel με βάση την σχέση:

$$\hat{x} = -\frac{\partial^2 D^{-1} \partial D}{\partial x^2 \partial x} \quad (6.20)$$

Στην περίπτωση όπου $x > 0.5$, τότε το σημείο ενδιαφέροντος βρίσκεται πιο κοντά σε άλλο pixel και επαναλαμβάνεται η διαδικασία. Στο βήμα αυτό απορρίπτονται και σημεία που βρίσκονται σε περιοχές με χαμηλή αντίθεση και συνεπώς δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ως σημεία ενδιαφέροντος με βάση το κριτήριο $|D(\hat{x})| < 0.03$, όπου

$$D(\hat{x}) = D + \frac{1}{2} \frac{\partial D^T}{\partial x} \hat{x} \quad (6.21)$$



Σχήμα 6.6: Πυραμίδες Γκαουσιανή και DoG (Lowe, 2004).

Στη συνέχεια θα πρέπει να απομακρυνθούν και τα σημεία κατά μήκος ακμών, τα οποία κατά κανόνα αποκρίνονται στην παραπάνω διαδικασία και επιλέγονται ως σημεία ενδιαφέροντος. Για να πραγματοποιηθεί αυτό, ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τον παρακάτω πίνακα στην ανάλογη θέση και την κλίμακα:

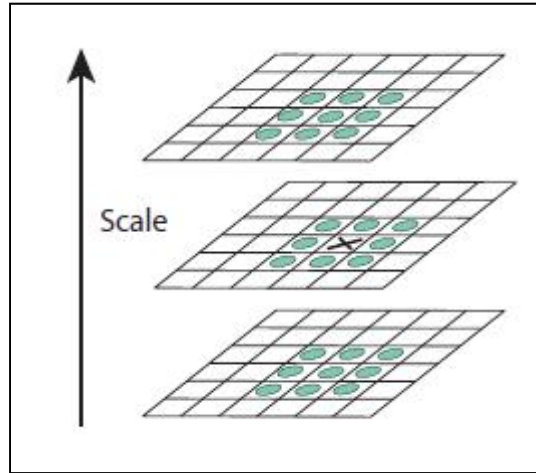
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

οι ιδιοτιμές του οποίου εκφράζουν τις κύριες καμπυλότητες του σημείου. Στα σημεία κατά μήκος ακμών παρατηρείται μια μεγάλη καμπυλότητα και μια μικρή. Στον \mathbf{H} δεν απαιτείται υπολογισμός των ιδιοτιμών του, παρά μόνο ο λόγος των δύο καμπυλοτήτων. Διαιρώντας το ίχνος του πίνακα με την ορίζουσά του και υποθέτοντας ότι a είναι

η μεγάλη και β η μικρή ιδιοτιμή, συνεπώς είναι $a = r\beta$ με $r \geq 1$, παίρνει κανείς:

$$\frac{Tr(\mathbf{H})^2}{Det(\mathbf{H})} = \frac{(a + \beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{(r\beta + \beta)^2}{r\beta^2} = \frac{(r + 1)^2}{r} \quad (6.23)$$

Μετά από δοκιμές σε πειραματικά δεδομένα, εκτιμήθηκε κατάλληλη τιμή ορίου $r = 10$. Συνεπώς, πραγματοποιείται έλεγχος με βάση την προηγούμενη σχέση και τα σημεία που απομακρύνονται είναι εκείνα με λόγο μεταξύ των κύριων καμπυλοτήτων μεγαλύτερο του 10.



Σχήμα 6.7: Σύγκριση με γειτονικά στοιχεία για εξαγωγή σημείου ενδιαφέροντος (Lowe, 2004).

Μετά από την εξαγωγή των σημείων ενδιαφέροντος και την απαλοιφή όσων δεν συγκέντρωναν τα απαραίτητα χαρακτηριστικά, υπολογίζεται η μεταβολή της έντασης m και η γωνία του προσανατολισμού θ για κάθε σημείο στο επίπεδο όπου εντοπίστηκε, προκειμένου να μην υπάρχει εξάρτηση από την κλίμακα, με βάση τις εξής σχέσεις:

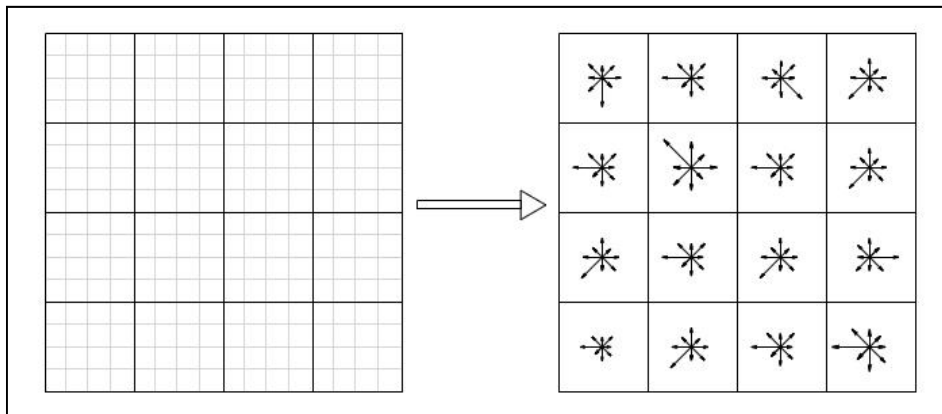
$$m(x, y) = \sqrt{(L(x + 1, y) - L(x - 1, y))^2 + (L(x, y + 1) - L(x, y - 1))^2} \quad (6.24)$$

$$\theta(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{L(x, y + 1) - L(x, y - 1)}{L(x + 1, y) - L(x - 1, y)} \right) \quad (6.25)$$

Αφού υπολογιστούν οι ποσότητες αυτές, δημιουργείται ένα ιστόγραμμα ανά 10° , που επομένως χωρίζεται σε 36 τμήματα και σε αυτά απεικονίζει τη μεταβολή της έντασης, συνυπολογίζοντας με τη βοήθεια βαρών την κλίμακα στην οποία ανιχνεύθηκε το σημείο. Το μέγιστο του ιστογράμματος αποτελεί τον προσανατολισμό του σημείου. Εάν υπάρχουν περισσότερες της μίας κορυφής μεγαλύτερες από το 80% του μεγίστου του ιστογράμματος, δημιουργούνται περισσότερα του ενός σημεία ενδιαφέροντος, τα οποία διαφέρουν μόνο κατά προσανατολισμό. Για μεγαλύτερη ακρίβεια στον προσανατολισμό του σημείου πραγματοποιείται παρεμβολή μεταξύ των τριών κοντινότερων τιμών της κορυφής. Τελικά, με τον τρόπο αυτό έχει υπολογιστεί η ακριβής θέση, η κλίμακα και ο προσανατολισμός του.

Ακολουθεί η δημιουργία ενός διανύσματος περιγραφικών χαρακτηριστικών για κάθε σημείο ενδιαφέροντος. Τα διανύσματα αυτά στρέφονται κατά τη γωνία του προσανατολισμού που έχει υπολογιστεί στο προηγούμενο βήμα, ώστε η συνταύτιση να είναι

ανεξάρτητη από πιθανές στροφές μεταξύ των εικόνων. Για τον υπολογισμό του διάνυσματος αυτού επιλέγεται περιοχή με διαστάσεις 4×4 περί το σημείο ενδιαφέροντος στην κλίμακα όπου αυτό έχει εντοπιστεί. Εκεί υπολογίζονται οι μεταβολές της έντασης σε 8 διευθύνσεις, με αποτέλεσμα ένα διάνυσμα με διαστάσεις $16 \times 8 = 128$ στοιχεία για κάθε σημείο ενδιαφέροντος. Για τον υπολογισμό των τιμών πραγματοποιείται παρεμβολή αφού τα σημεία ενδιαφέροντος βρίσκονται μεταξύ διαδοχικών ρixel. Προκειμένου να αποφευχθούν έντονες αλλαγές στο διάνυσμα των περιγραφικών χαρακτηριστικών, που είναι πιθανές λόγω μικρών αλλαγών στη θέση του παραθύρου, οι τιμές της έντασης συσχετίζονται με βάρη, εξαρτώμενα από την απόσταση από το σημείο ενδιαφέροντος.



Σχήμα 6.8: Ο υπολογισμός των περιγραφικών χαρακτηριστικών (Καλησπεράκης, 2010).

Τα διανύσματα αυτά δεν πρέπει να είναι ευαίσθητα σε αλλαγές φωτεινότητας και για τον λόγο αυτό κανονικοποιούνται στο διάστημα $[0, 1]$. Με τον τρόπο αυτό, οποιαδήποτε γραμμική αλλαγή, όπως ο πολλαπλασιασμός κάθε ρixel με σταθερά, δεν επηρεάζει τη συνταύτιση. Στη συνέχεια, στο νέο διάνυσμα εφαρμόζεται ένα μέγιστο κατώφλι ίσο με 0.2 και έπειτα κανονικοποιείται ξανά στο διάστημα $[0, 1]$. Έτσι ο αλγόριθμος γίνεται ανθεκτικός και σε αλλαγές στη φωτεινότητα που έχουν προκύψει με μη γραμμικό τρόπο, όπως αυτές που συμβαίνουν σε μία τρισδιάστατη επιφάνεια.

Το τελικό στάδιο για τη συνταύτιση είναι η αντιστοίχιση των διανυσμάτων των περιγραφικών χαρακτηριστικών. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται με την εύρεση του πλησιέστερου γείτονα, ο οποίος προκύπτει με υπολογισμό της ευκλείδειας απόστασης μεταξύ των διανυσμάτων και επιλογή εκείνου που δίνει τη μικρότερη τιμή. Για να ορισθούν δύο σημεία ως ομόλογα θα πρέπει η απόσταση να είναι μικρότερη από ένα κατώφλι, ενώ αξιόπιστο μέσο ελέγχου αποτελεί και ο λόγος της μικρότερης απόστασης με την αμέσως επόμενη. Αν η διαφορά αυτή είναι μεγαλύτερη από ένα προκαθορισμένο κατώφλι τα σημεία θεωρούνται ομόλογα.

Η διαδικασία αυτή είναι απαιτητική υπολογιστικά και χρονοβόρα, για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος “Best-Bin-First”, ο οποίος επιστρέφει τον κοντινότερο γείτονα με μεγάλη πιθανότητα και σταματά την αναζήτηση για αυτόν, ύστερα από έρευνα στους πρώτους 200 υποψηφίους κάθε σημείου. Τελικά, το αποτέλεσμα του αλγορίθμου SIFT είναι η αυτόματη αποκατάσταση ομολογιών σημείων, οι οποίες μπορούν πλέον να ελεγχθούν περαιτέρω με βάση γεωμετρικές δεσμεύσεις μεταξύ των εικόνων (πχ. επιπολικός πίνακας, σχετικός προσανατολισμός).

7

Πειραματικές εφαρμογές και αξιολόγηση

Στο πλαίσιο της προκειμένης διπλωματικής εργασίας, για λόγους βαθύτερης κατανόησης και διερεύνησης, προγραμματίστηκαν αλγόριθμοι που εκτελούν τα προαναφερθέντα. Πιο συγκεκριμένα, συντάχθηκαν κώδικες στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab που υλοποιούν τις εξής διαδικασίες:

- Εύρεση ομολογιών μεταξύ των σημείων ενδιαφέροντος SIFT με ελαχιστοποίηση της απόστασης των διανυσμάτων των περιγραφικών χαρακτηριστικών.
- Σχετικός προσανατολισμός βαθμονομημένων εικόνων
 - με την συνθήκη συνεπιπεδότητας
 - με επίλυση δέσμης
 - με τον αλγόριθμο RLT
 - μέσω του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα.
- Σχετικός προσανατολισμός με αυτοβαθμονόμηση, για κοινή όσο και για διαφορετικές σταθερές των εικόνων, με επίλυση α) με την μέθοδο της δέσμης και β) με την συνθήκη συνεπιπεδότητας.
- Επιπολική επανασύσταση στερεοζεύγους.
- Υπολογισμός του επιπολικού πίνακα στερεοζεύγους.
- Υπολογισμός της θέσης των πόλων του ζεύγους.
- Εύρεση ομόλογης επιπολικής γραμμής σημείου από τον επιπολικό πίνακα.
- Δημιουργία τρισδιάστατης (ευκλείδειας και προβολικής) ανακατασκευής.
- Υπολογισμός του 3D μετασχηματισμού για αναβάθμιση της προβολικής ανακατασκευής σε μετρική.

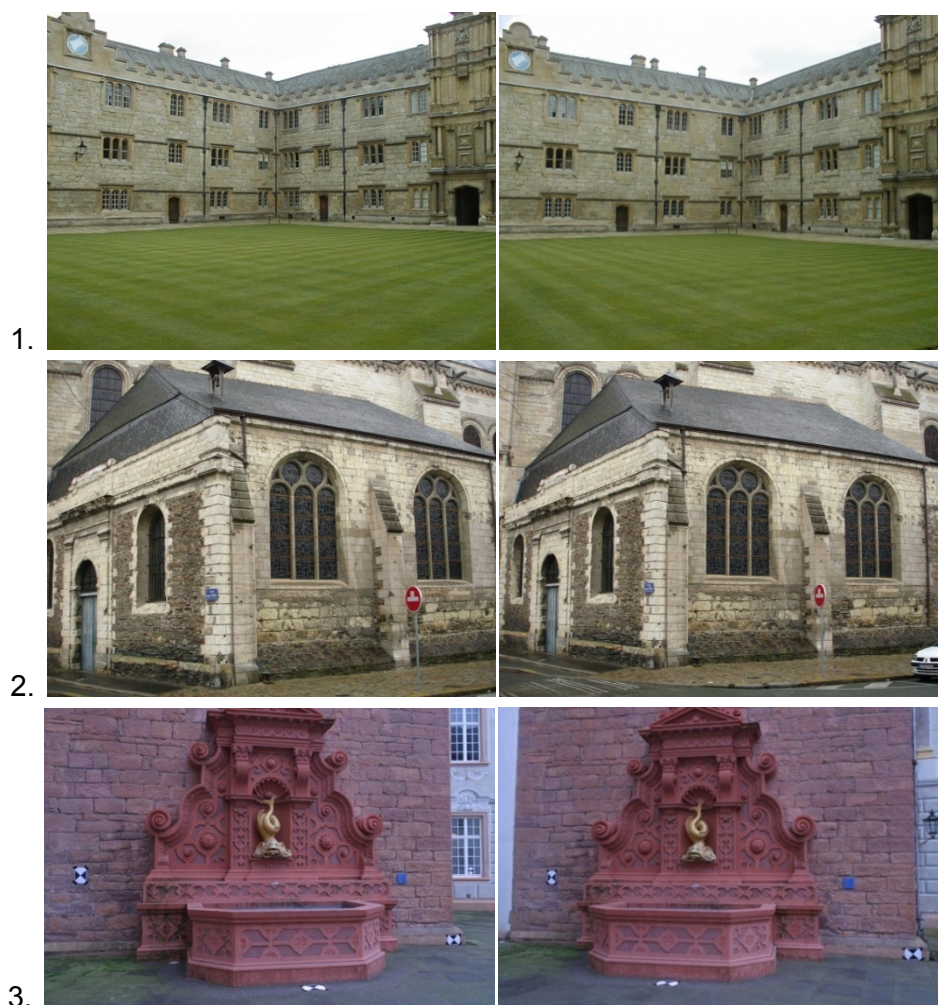
Οι αλγόριθμοι αυτοί συνδυάστηκαν και με ορισμένους ήδη υλοποιημένους και ελεύθερα διαθέσιμους αλγορίθμους για:

- Εξαγωγή σημείων ενδιαφέροντος και ψηφιακή συνταύτισή τους με τον αλγόριθμο SIFT (<http://www.cs.ubc.ca/~lowe/keypoints/>)

- Ανίχνευση χονδροειδών σφαλμάτων με τον αλγόριθμο RANSAC (<http://www.csse.uwa.edu.au/~pk/research/matlabfns/>)
- Μερική αυτοβαθμονόμηση ζεύγους εικόνων κατά τους Newsam et al. (1996) (<http://www.csse.uwa.edu.au/~du/Software/Welcome.html>) και κατά Sturm (2001) και Bougnoux (1998) (κώδικες που έχει συντάξει ο Ηλίας Καλησπεράκης)
- Επιπολική επανασύσταση ζεύγους μέσω του επιπολικού πίνακα ([http://www.csse.uwa.edu.edu.au/~du/Software/Welcome.html](http://www.csse.uwa.edu.au/~du/Software/Welcome.html))
- Χειροκίνητη μέτρηση εικονοσυντεταγμένων (από λογισμικό *MPT: Matlab Photogrammetric Toolbox* των Λ. Γραμματικόπουλου και Η. Καλησπεράκη).

Οι υλοποιημένοι αλγόριθμοι εφαρμόστηκαν αρχικά σε προσομοιωμένα και εν συνεχεία σε πραγματικά δεδομένα λήψεων ώστε να ελεγχθούν και να αξιολογηθούν. Για τα προσομοιωμένα δεδομένα υποτέθηκε στερεοσκοπική λήψη κύβου. Οι εικονοσυντεταγμένες των προσομοιωμένων δεδομένων ήταν απαλλαγμένες από θόρυβο, ώστε να ελεγχθούν οι συνταχθέντες αλγόριθμοι. Τα αποτελέσματα επιβεβαίωσαν την σωστή λειτουργία των προγραμμάτων.

Τα πραγματικά δεδομένα είναι τα 3 επίγεια στερεοζεύγη του Σχ. 7.1 που έχουν ληφθεί με κοινές ψηφιακές μηχανές και συνδυάζουν διαφορετικές γεωμετρίες λήψεων.



Σχήμα 7.1: Τα πειραματικά δεδομένα.

Το πρώτο ζευγάρι απεικονίζει το κτίριο Merton του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης και διατίθεται ελεύθερα στο Διαδίκτυο σε βάση δεδομένων της ερευνητικής ομάδας Oxford Visual Geometry Group (<http://www.robots.ox.ac.uk/~vgg/data/data-mview.html>). Το δεύτερο ζευγάρι απεικονίζει κτήριο της πόλης Angers στη Γαλλία, έχει ληφθεί από τον Ηλία Καλησπεράκη και έχει χρησιμοποιηθεί στη διδακτορική διατριβή του. Τέλος, το τρίτο ζεύγος απεικονίζει σιντριβάνι στην πόλη Ettlingen της Γερμανίας. Διατίθεται ελεύθερα από το Καθολικό Πανεπιστήμιο της Leuven σε βάση δεδομένων ερευνητικής ομάδας (<http://cvlab.epfl.ch/~strecha/multiview/denseMVS.html>).

Στον Πίνακα 7.1 δίδονται οι διαστάσεις των ψηφιακών εικόνων και εκτιμήσεις για την σταθερά της μηχανής τους. Για το πρώτο και το τρίτο ζεύγος οι εκτιμήσεις προέρχονται από αυτοβαθμονόμηση που αναφέρεται στους αντίστοιχους ιστοτόπους, ενώ για το δεύτερο από την τιμή της εστιακής απόστασης που συνοδεύει τα ψηφιακά αρχεία. Στοιχεία για τις υπόλοιπες παραμέτρους του εσωτερικού προσανατολισμού δεν ήταν διαθέσιμα, κατά συνέπεια το πρωτεύον σημείο υποτέθηκε στο κέντρο της εικόνας και η ακτινική διαστροφή του φακού αγνοήθηκε.

Στερεοζεύγος	Τύπος Ψηφιακής Μηχανής	Διαστάσεις Εικόνας (pixel)	Εκτίμηση c (pixel)
1	Olympus C820-L	1024×768	1165
2	Sony DSC-W17	1024×768	1140
3	Canon D60	1024×683	920

Πίνακας 7.1: Στοιχεία για τα ζεύγη των πειραματικών δεδομένων.

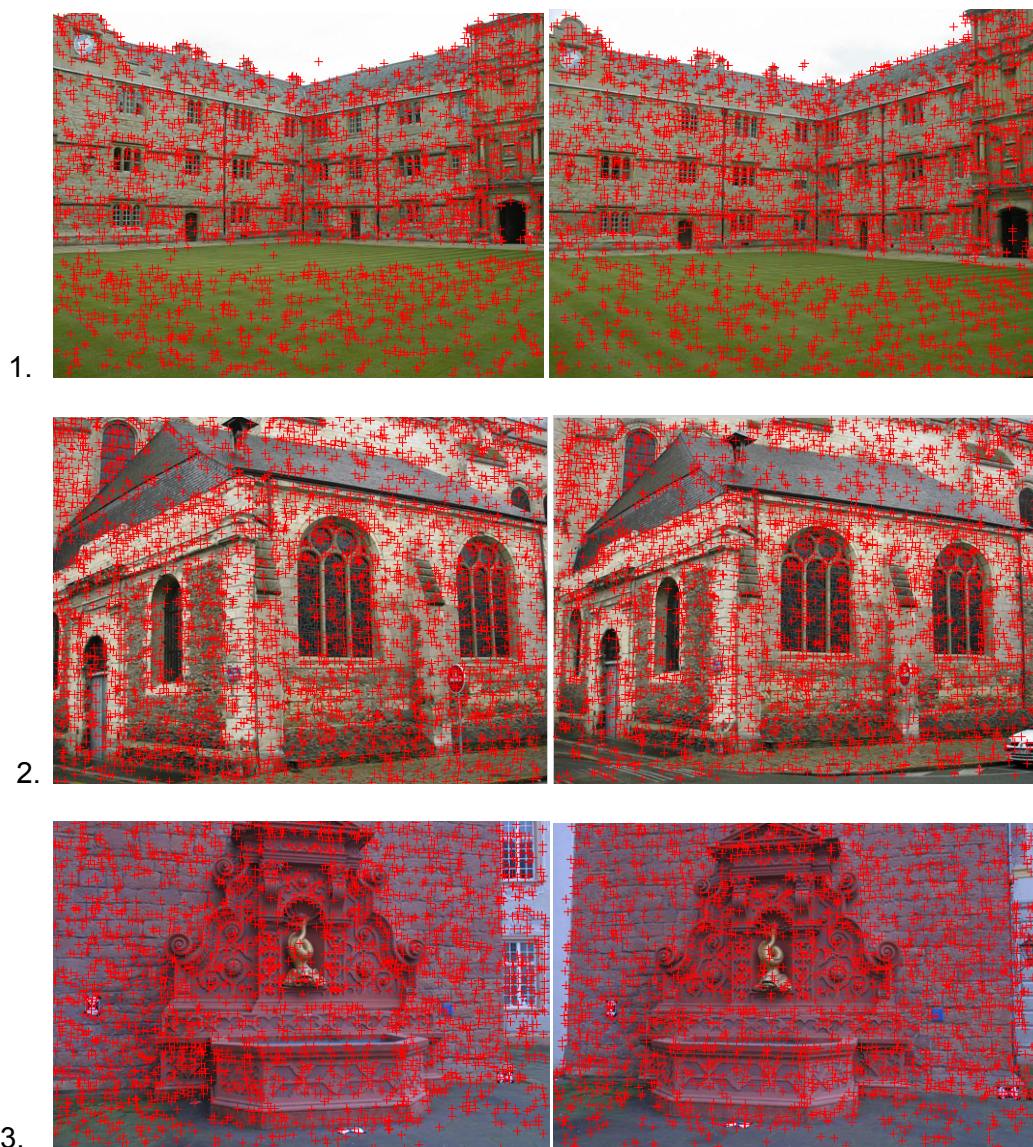
Για ευκολία και ταχύτητα στους υπολογισμούς οι διαστάσεις των εικόνων υποδιπλασιάστηκαν. Οι τελικές διαστάσεις των δύο πρώτων ζευγών μειώθηκαν σε 512×384 pixel και του τρίτου σε 512×341 pixel. Η σταθερά που χρησιμοποιήθηκε στους υπολογισμούς για κάθε νέα εικόνα είναι προφανώς ίση με το μισό της σταθεράς που αναφέρεται στον πίνακα.

7.1 Αποτελέσματα αλγορίθμου SIFT

Η εφαρμογή στα δεδομένα του σημειακού τελεστή SIFT και του αλγορίθμου ανίχνευσης χονδροειδών σφαλμάτων RANSAC, όπως αυτοί συντάχθηκαν από τις αντίστοιχες ερευνητικές ομάδες, οδηγεί στην ψηφιακή συνταύτιση χαρακτηριστικών και τον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα με τον κανονικοποιημένο αλγόριθμο των 8 σημείων. Τα αποτελέσματα εμφανίζονται και σχολιάζονται στις επόμενες ενότητες.

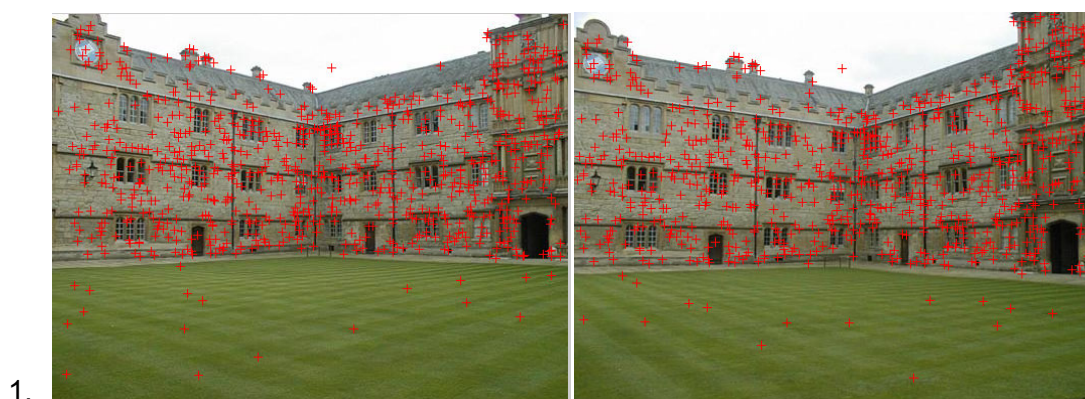
7.1.1 Ψηφιακή συνταύτιση χαρακτηριστικών

Αρχικό στάδιο της εφαρμογής των αλγορίθμων αποτελεί η εξαγωγή σημείων ενδιαφέροντος και εν συνεχεία η εύρεση των ομολογιών (βλ. ενότητα 6.2.4). Έτσι, εξάγονται κατ' αρχάς τα σημεία που επισημαίνονται με κόκκινο σταυρό στις εικόνες του Σχ. 7.2.



Σχήμα 7.2: Εξαγωγή σημείων ενδιαφέροντος.

Σε κάθε ένα από αυτά τα σημεία (ο αριθμός τους για τις δύο εικόνες κάθε ζεύγους φαίνεται στον Πίνακα 7.2) έχει αποδοθεί ένα διάνυσμα περιγραφικών ιδιοτήτων. Μέσω αυτού πραγματοποιείται μια πρώτη αντιστοίχιση για τον εντοπισμό ομοιοτήτων με τον αλγόριθμο Best-Bin-First (βλ. ενότητα 6.2.4). Τα αποτελέσματα της αντιστοίχισης αυτής εμφανίζονται στο ακόλουθο Σχ. 7.3.

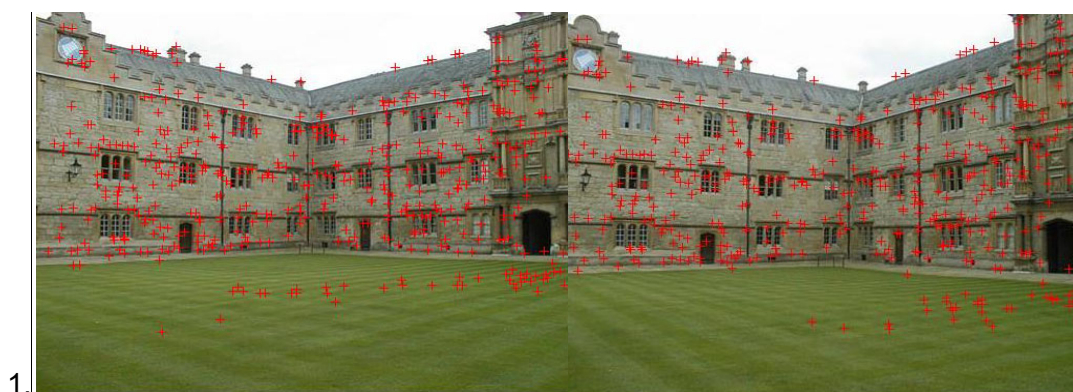




Σχήμα 7.3: Αρχική αντιστοίχιση ομολογιών SIFT.

Συντάχθηκε επίσης πρόγραμμα, όπως έχει ήδη αναφερθεί, το οποίο χρησιμοποιεί τα σημεία ενδιαφέροντος προκειμένου να εντοπίσει τις ομολογίες βάσει της ευκλείδειας απόστασης μεταξύ των περιγραφικών διανυσμάτων. Για κάθε σημείο της αριστερής εικόνας υπολογίζεται η απόσταση μεταξύ του διανύσματος του σημείου και όλων των περιγραφικών διανυσμάτων των σημείων της δεξιάς εικόνας, και τελικά επιλέγεται εκείνο που ελαχιστοποιεί τη συγκεκριμένη συνάρτηση κόστους. Τέλος, ελέγχεται κατά πόσον η ομολογία είναι αποδεκτή με σύγκριση της απόστασης με προκαθορισμένο κατώφλι. Η τιμή αυτή για τον αλγόριθμο που διατυπώθηκε εδώ έχει τεθεί ίση με 0.3 (η τιμή αναφέρεται σε μεταβολές της έντασης).

Τα αποτελέσματα της διαδικασίας αυτής φαίνονται στο Σχ. 7.4.

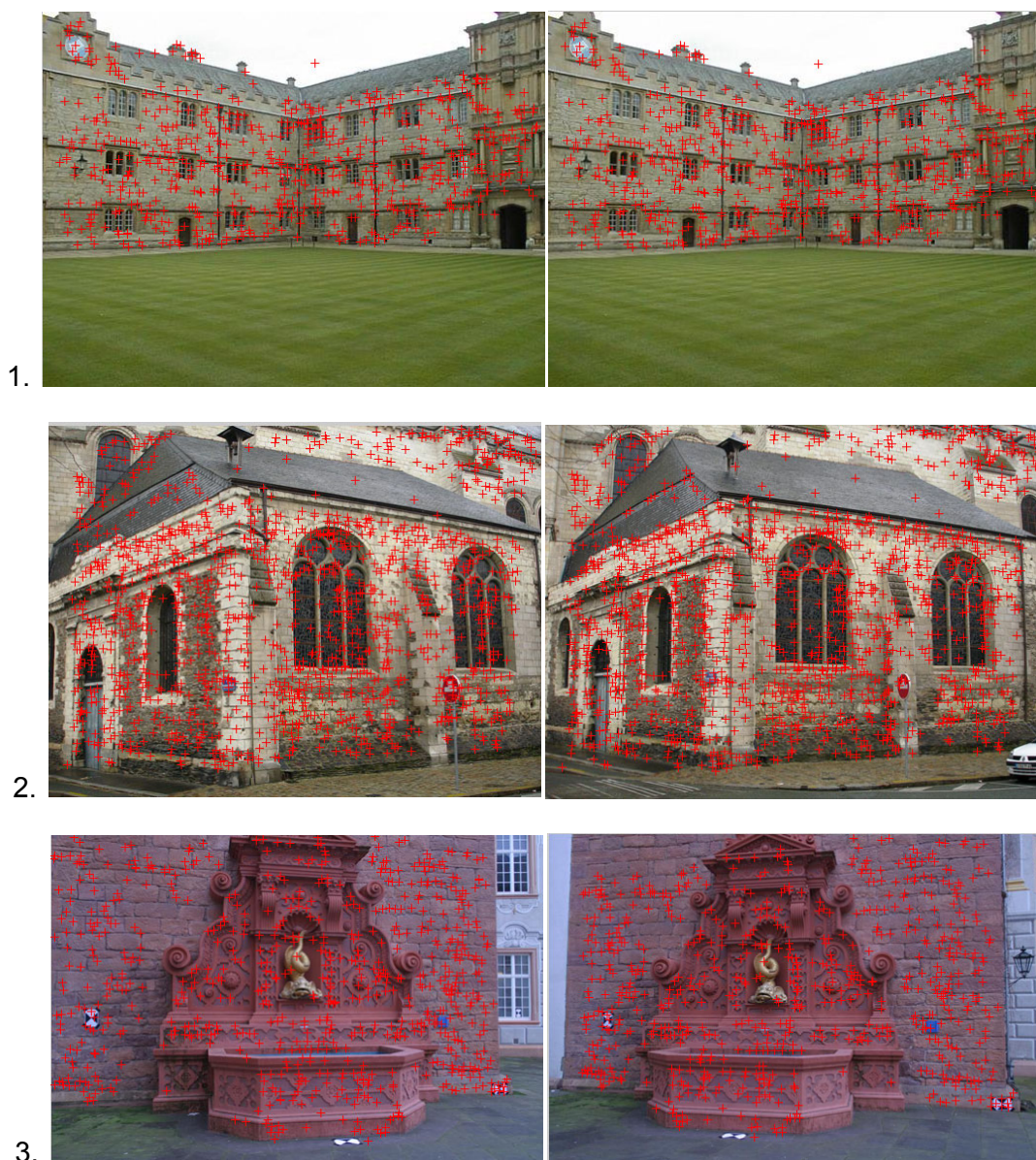




Σχήμα 7.4: Εύρεση ομολογιών με βάση την ευκλείδεια απόσταση των περιγραφέντων.

Στον αλγόριθμο SIFT οι ομολογίες των σημείων ελέγχονται κατόπιν ως προς τη συνέπειά τους με το μοντέλο του επιπολικού πίνακα, με την βοήθεια του αλγορίθμου ανίχνευσης χονδροειδών σφαλμάτων RANSAC. Στα επόμενα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα αυτής της τελικής συνταύτισης σημείων. Για να γίνει αποδεκτή μια ομολογία θα πρέπει η απόσταση του σημείου από την ομόλογη επιπολική γραμμή να μην ξεπερνά ένα κατώφλι (εν προκειμένω τα 2 pixel). Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγορίθμου SIFT για την αρχική αντιστοίχιση σημείων, δηλαδή χωρίς εντοπισμό χονδροειδών σφαλμάτων, και του αλγορίθμου εύρεσης ομολογιών με ελαχιστοποίηση της ευκλείδειας απόστασης ο οποίος συντάχθηκε εδώ (Σχ. 7.3 και Σχ. 7.4, αντίστοιχα), παρατηρεί κανείς ότι οι ομολογίες σημείων που εντοπίστηκαν είναι γενικά παραπλήσιες, αν και ο αριθμός τους στη δεύτερη περίπτωση είναι μικρότερος και στις τρεις περιπτώσεις. Αυτό οφείλεται στις μικρές διαφορές που εμφανίζει ο αλγόριθμος Best-Bin-First απέναντι σε εκείνον που εντοπίζει ομόλογα σημεία με την ευκλείδεια απόσταση, αλλά και στην επιλογή μιας αρκετά αυστηρής τιμής κατωφλίου (ίση με 0.3). Η επιλογή αυτή πρέπει να εξετάζεται σε κάθε περίπτωση συγκεκριμένα, ώστε να προσδιορίζεται ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της εκάστοτε εικόνας. Για παράδειγμα, σε εικόνες με έντονη υφή και μικρές προοπτικές παραμορφώσεις το κατώφλι θα πρέπει να είναι πιο ελαστικό σε σχέση με εικόνες με έντονες παραμορφώσεις και επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Ακόμα, η εξέταση των αποτελεσμάτων αποκαλύπτει πως υπάρχουν και ορισμένες εσφαλμένες ομολογίες. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο στερεοζεύγος εμφανίζονται ομόλογα σημεία στο γρασίδι λόγω της ομοιογένειας τόνων της περιοχής, που οδηγεί σε παρόμοια περιγραφικά διανύσματα των σημείων. Τέτοιου τύπου ομολογίες απομακρύνονται με την εφαρμογή του αλγορίθμου ανίχνευσης χονδροειδών σφαλμάτων, όπου και ελέγχεται κατά πόσον οι ομολογίες είναι όντως συμβατές με τον επιπολικό πίνακα. Η επιλογή του κατωφλίου απόστασης από

την επιπολική γραμμή, που καθορίζει εάν μία ομολογία θα γίνει αποδεκτή ή θα απορριφθεί ως χονδροειδές σφάλμα, είναι ιδιαίτερως κρίσιμη αφού μια ελαστική τιμή πιθανόν να μην αφαιρεί λανθασμένες ομολογίες, ενώ μια αυστηρή επιλογή ενδέχεται να αφαιρεί και ορθές ομολογίες. Στους Πίνακες 7.2 και 7.3 εμφανίζεται ο αριθμός των αρχικών σημείων ενδιαφέροντος καθώς και ο αριθμός των ομολογων σημείων σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις.



Σχήμα 7.5: Ομολογίες ύστερα από εφαρμογή του RANSAC.

Ζεύγος εικόνων	Αριθμός σημείων ενδιαφέροντος
1	3007 και 3176
2	3511 και 3660
3	3073 και 2883

Πίνακας 7.2: Σημεία ενδιαφέροντος στις εικόνες.

Στερεοζεύγος	Αρχικές ομολογίες σημείων (α)	Ομολογίες σημείων με βάση την ευκλείδεια απόσταση (β)	Ομολογίες με χρήση RANSAC (α)	Ομολογίες με χρήση RANSAC (β)
1	908	521	827	431
2	1625	1148	1548	1006
3	839	681	402	368

Πίνακας 7.3: Ομολογίες σημείων στα τρία στερεοζεύγη.

7.1.2 Επιπολικός πίνακας

Ύστερα από την επιλογή του δείγματος με τον μεγαλύτερο αριθμό σωστών ομολογιών, συγκροτείται νέο δείγμα ώστε να υπολογιστεί ο τελικός επιπολικός πίνακας του στερεοζεύγους, όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 6.2.4. Τα αποτελέσματα του αλγορίθμου που υλοποιήθηκε για τον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα για κάθε στερεοζεύγος είναι τα ακόλουθα:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.0010 & 0.0008 & -0.4490 \\ 0.0011 & 0.0011 & -0.1387 \\ -0.1385 & -0.1385 & 0.8607 \end{bmatrix} \quad (\sigma_0 = \pm 1.70 \text{ pixel})$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -0.0014 & 0.0192 & -0.4485 \\ -0.0126 & -0.0028 & -0.1384 \\ -0.1389 & -0.1381 & 0.8607 \end{bmatrix} \quad (\sigma_0 = \pm 1.72 \text{ pixel})$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0.0043 & 0.0057 & -0.4496 \\ -0.0025 & -0.0020 & -0.1389 \\ -0.1386 & -0.1387 & 0.8602 \end{bmatrix} \quad (\sigma_0 = \pm 1.16 \text{ pixel})$$

7.2 Εικόνες με γνωστό εσωτερικό προσανατολισμό

Εν συνεχεία, εφαρμόστηκαν στα δεδομένα οι συνταχθέντες αλγόριθμοι που υλοποιούν τις διαδικασίες που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 3, με χρήση των ομολογιών που εντοπίστηκαν και θεώρηση γνωστού εσωτερικού προσανατολισμού. Ως σταθερά της μηχανής χρησίμευσε η εκτίμηση που αναφέρεται στην ενότητα 7.1, το πρωτεύον σημείο υποτέθηκε στο κέντρο της εικόνας, ενώ δεν πραγματοποιήθηκε διόρθωση λόγω ακτινικής διαστροφής καθώς το πολυώνυμο της δεν ήταν γνωστό και δεν κρίθηκε απαραίτητο να εκτιμηθεί στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Στον προσδιορισμό των ομολογιών το κατώφλι για την ανίχνευση χονδροειδών σφαλμάτων (εφαρμογή αλγορίθμου RANSAC) τέθηκε ίσο με 0.5 pixel.

7.2.1 Σχετικός προσανατολισμός

Ο σχετικός προσανατολισμός πραγματοποιήθηκε με γραμμικούς όσο και μη γραμμικούς αλγορίθμους. Τα αποτελέσματα των γραμμικών αλγορίθμων εξασφάλισαν ικανοποιητικές προσεγγιστικές τιμές για τους μη γραμμικούς.

7.2.2.1 Γραμμικοί αλγόριθμοι

Οι γραμμικοί αλγόριθμοι περιλαμβάνουν τον υπολογισμό του δεσμευμένου επιπολι-

κού πίνακα με τη βοήθεια του πίνακα μηχανής \mathbf{K} και κατόπιν χρήση του αλγορίθμου του Hartley (1992) για τον υπολογισμό των 5 παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού (βλ. ενότητα 3.4.2) αλλά και του αλγορίθμου RLT (βλ. ενότητα 3.4.1). Ο αλγόριθμος RLT οδηγεί σε μοναδικό πίνακα στροφής \mathbf{R} και διάνυσμα βάσης, ανεξαρτήτως της τιμής της παραμέτρου L_5 , καθώς χρησιμοποιήθηκαν οι Εξ. (3.23, 3.24). Τα αποτελέσματα του αλγορίθμου για όλες τις περιπτώσεις φαίνονται στον Πίνακα 7.4. Οι συνιστώσες B_y , B_z της βάσης είναι καθαροί αριθμοί (αναγωγή στη συνιστώσα B_x της βάσης). Αυτό ισχύει για όλους τους αλγορίθμους του σχετικού προσανατολισμού.

Στερεοζεύγος	B_y	B_z	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$
1	0.0017	-0.3923	1.7548	12.6139	-0.2146
2	0.2367	1.3838	1.0070	-2.7149	-0.0391
3	-0.0166	-0.1028	0.6075	20.7644	-0.4282

Πίνακας 7.4: Αποτελέσματα γραμμικού αλγορίθμου RLT.

Έπονται τα αποτελέσματα που έχουν εξαχθεί από τον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα (Πίνακες 7.5α-γ). Στην περίπτωση αυτή για κάθε ζεύγος προκύπτουν 4 πιθανές λύσεις (δύο πίνακες στροφής και δύο διανύσματα βάσης). Το διαφορετικό πρόσημο του διανύσματος της βάσης φανερώνει την αδυναμία να οριστεί η σχετική θέση των εικόνων (πάνω-κάτω, δεξιά-αριστερά). Με έντονα γράμματα αναφέρονται οι λύσεις που τελικώς προέκυψαν από εφαρμογή του κριτηρίου της εμπροσθοτομίας (ενότητα 3.2)

Ζεύγος 1	B_y	B_z	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$
	-0.0054	-0.3861	1.5670	12.4617	-0.6292
	-0.0054	-0.3861	1.8620	-29.7369	1.2048
	0.0054	0.3861	1.5670	12.4617	-0.6292
	0.0054	0.3861	1.8620	-29.7369	1.2048

Πίνακας 7.5α: Αποτελέσματα σχετικού προσανατολισμού από τον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα για το πρώτο στερεοζεύγος.

Ζεύγος 2	B_y	B_z	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$
	0.2124	1.1835	0.7605	-3.7701	-1.0723
	0.2124	1.1835	-69.1276	-86.0552	56.5153
	-0.2124	-1.1835	0.7605	-3.7701	-1.0723
	-0.2124	-1.1835	-69.1276	-86.0552	56.5153

Πίνακας 7.5β: Αποτελέσματα σχετικού προσανατολισμού από τον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα για το δεύτερο στερεοζεύγος.

Ζεύγος 3	B_y	B_z	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$
	-0.0163	-0.1052	0.4595	4.1225	3.4298
	-0.0163	-0.1052	1.4210	21.5110	-0.8559
	0.0163	0.1052	0.4595	4.1225	3.4298
	0.0163	0.1052	1.4210	21.5110	-0.8559

Πίνακας 7.5γ: Αποτελέσματα σχετικού προσανατολισμού από τον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα για το τρίτο στερεοζεύγος.

Από την σύγκριση των αποτελεσμάτων του Πίνακα 7.4 με τα αντίστοιχα των Πινάκων 7.5α-γ φαίνεται ότι οι δύο γραμμικές προσεγγίσεις δίνουν παρεμφερείς εκτιμήσεις για τις τιμές των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού, με διαφορές που αποδίδονται και στο γεγονός ότι προέρχονται από διαφορετικές ομολογίες σημείων.

7.2.2.2 Μη γραμμικοί αλγόριθμοι

Για βελτίωση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων των γραμμικών αλγορίθμων χρησιμοποιήθηκαν και οι μη γραμμικοί αλγόριθμοι της συνθήκης συνεπιπεδότητας και της επίλυσης δέσμης, οι οποίοι οδηγούν σε μοναδική λύση μέσω προσωρινών τιμών από τις γραμμικές προσεγγίσεις. Ο αλγόριθμος της συνθήκης συνεπιπεδότητας, όπως έχει αναφερθεί (βλ. ενότητα 3.2), είναι επαναληπτικός και συγκλίνει όταν οι διορθώσεις των αγνώστων δεν ξεπερνούν το προκαθορισμένο όριο. Η τιμή του κατωφλίου για τα γραμμικά στοιχεία τέθηκε εδώ ίση με 0.00001, για τα γωνιακά 0.0000001°. Οι εκτιμήσεις για τις τιμές των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού, με αρχικές τιμές τα αποτελέσματα των δύο γραμμικών αλγορίθμων, φαίνονται στους Πίνακες 7.7 και 7.8. Σημειώνεται πάντως πως, σε όλες τις περιπτώσεις, η σύγκλιση ήταν δυνατή και όταν ως αρχικές προσεγγίσεις δόθηκαν μηδενικές τιμές (Πίνακας 7.6).

Ζεύγος	B_y	B_z	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$	σ_0 (pixel)
1	-0.0153 ± 0.0007	-0.3121 ± 0.0010	1.0200 ± 0.0097	13.5461 ± 0.0483	-0.3369 ± 0.0043	0.16
2	0.1804 ± 0.0009	1.3232 ± 0.0032	0.8316 ± 0.0061	-3.1837 ± 0.0117	-0.6353 ± 0.0034	0.14
3	-0.0173 ± 0.0004	-0.0926 ± 0.0004	1.0670 ± 0.0115	21.2344 ± 0.0187	-0.7706 ± 0.0045	0.13

Πίνακας 7.6: Αποτελέσματα σχετικού προσανατολισμού με τη συνθήκη συνεπιπεδότητας για μηδενικές προσεγγιστικές τιμές.

Ζεύγος	B_y	B_z	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$	σ_0 (pixel)
1	-0.0118 ± 0.0007	-0.3128 ± 0.0008	0.9757 ± 0.0101	13.6282 ± 0.0377	-0.3247 ± 0.0056	0.15
2	0.1866 ± 0.0009	1.2482 ± 0.0032	0.9199 ± 0.0060	-3.4717 ± 0.0127	-0.6608 ± 0.0029	0.14
3	-0.0151 ± 0.0005	-0.923 ± 0.0005	1.0127 ± 0.0126	21.1946 ± 0.0212	-0.7698 ± 0.0045	0.14

Πίνακας 7.7: Αποτελέσματα σχετικού προσανατολισμού με τη συνθήκη συνεπιπεδότητας με προσεγγιστικές τιμές τα αποτελέσματα του αλγόριθμου RLТ.

Ζεύγος	B_y	B_z	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$	σ_0 (pixel)
1	-0.0102 ± 0.0009	-0.3132 ± 0.0013	0.9523 ± 0.0129	13.8222 ± 0.0658	-0.3132 ± 0.0072	0.18
2	0.1942 ± 0.0010	1.2846 ± 0.0026	0.9262 ± 0.0056	-3.3279 ± 0.0091	-0.6599 ± 0.0027	0.15
3	-0.0141 ± 0.0006	-0.0932 ± 0.0005	0.9868 ± 0.0165	21.2875 ± 0.0268	-0.7534 ± 0.0063	0.14

Πίνακας 7.8: Αποτελέσματα σχετικού προσανατολισμού με τη συνθήκη συνεπιπεδότητας με προσεγγιστικές τιμές από τον αλγόριθμο του δεσμευμένου επιτολικού πίνακα.

Προφανώς, εφόσον ο αλγόριθμος συγκλίνει οι προσεγγιστικές τιμές δεν επηρεάζουν τη λύση. Οι μικρές διαφορές μεταξύ των αντίστοιχων τιμών στους Πίνακες 7.6-7.8 οφείλονται αποκλειστικά στις διαφορετικές ομολογίες σημείων που εντοπίζονται σε κάθε εφαρμογή του αλγορίθμου SIFT (άρα μεταβάλλονται κάπως τα δεδομένα σε κάθε περίπτωση). Τα *a posteriori* σφάλματα δείχνουν ικανοποιητική προσέγγιση του προβλήματος (κάτω του 1/5 του pixel). Γίνεται κατανοητό πως, ειδικά για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού με τη συνθήκη συνεπιπεδότητας, ακόμα και σε αντίστοιχες περιπτώσεις επίγειων λήψεων δεν είναι γενικά αναγκαίες οι προσεγγιστικές τιμές.

Οι 5 παράμετροι υπολογίστηκαν και με επίλυση δέσμης (βλ. ενότητα 3.3.1). Σε σχέση με την συνθήκη συνεπιπεδότητας ο αλγόριθμος εδώ είναι πιο ευαίσθητος στις αρχικές τιμές και δεν οδήγησε σε αποτέλεσμα όταν όλες οι αρχικές τιμές τέθηκαν ίσες με μηδέν. Έτσι, ως αρχικές τιμές για τα στοιχεία του σχετικού προσανατολισμού χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα των γραμμικών αλγορίθμων και, μέσω αυτών, υπολογίστηκαν με εμπροσθοτομία προσεγγιστικές τιμές για τα σημεία σύνδεσης. Στον Πίνακα 7.9 φαίνονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν με προσεγγιστικές τιμές από τον αλγόριθμο RLТ. Τα όρια σύγκλισης του επαναληπτικού αλγορίθμου είναι ίδια με της συνθήκης συνεπιπεδότητας, για τις δε συντεταγμένες μοντέλου τέθηκε όριο 0.001 (οι μονάδες έχουν διαστάσεις μήκους σε κλίμακα μοντέλου με συνιστώσα $B_x = 1$).

Ζεύγος	B_y	B_z	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$	σ_o (pixel)
1	-0.0175 ± 0.0008	-0.3101 ± 0.0008	1.0468 ± 0.0113	13.5205 ± 0.0400	-0.3594 ± 0.0055	0.19
2	0.1844 ± 0.0013	1.2628 ± 0.0050	0.9174 ± 0.0085	-3.4826 ± 0.0186	-0.6574 ± 0.0047	0.22
3	-0.0180 ± 0.0010	-0.0931 ± 0.0005	1.0880 ± 0.0201	21.1706 ± 0.0213	-0.7869 ± 0.0065	0.16

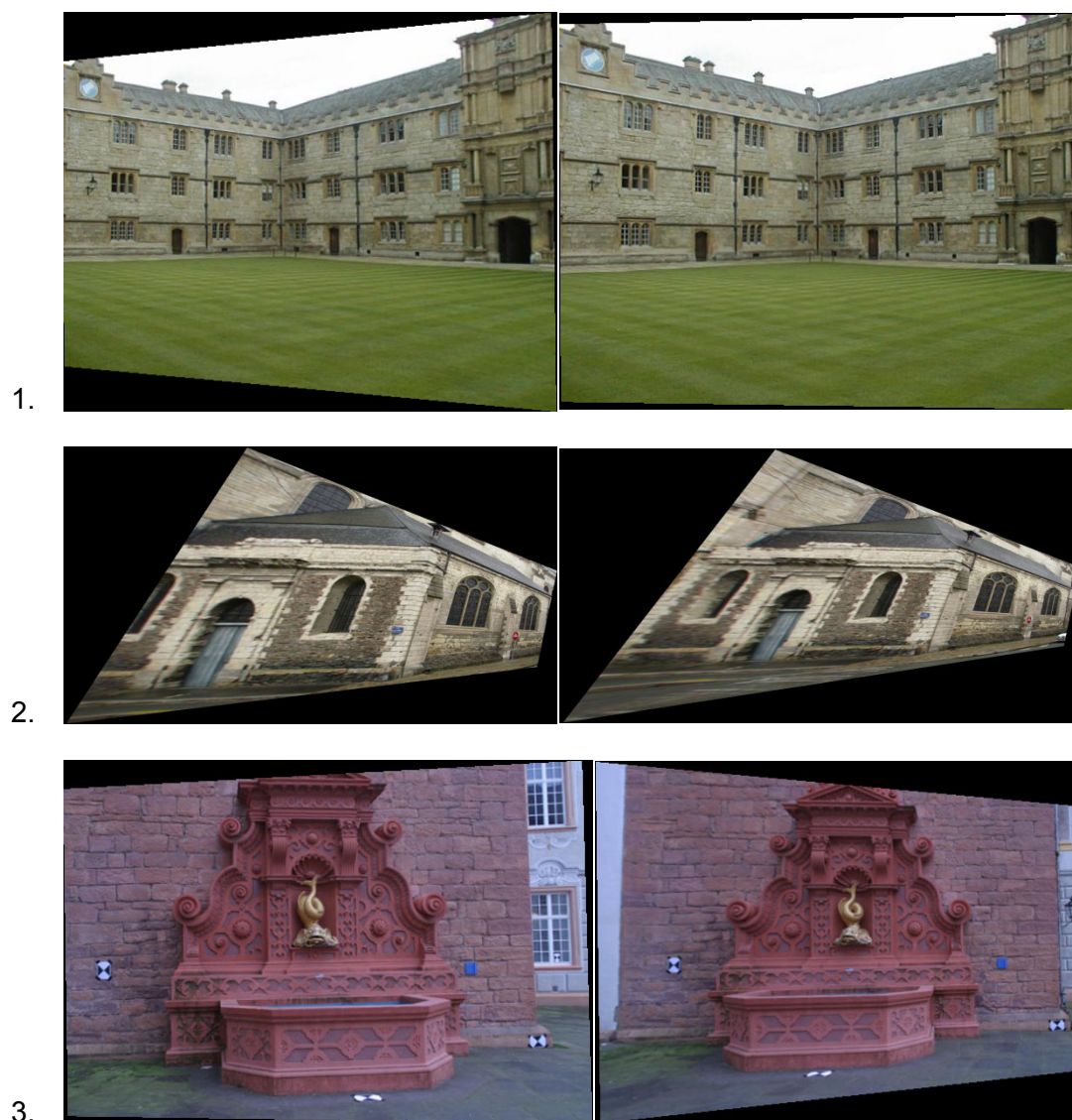
Πίνακας 7.9 Αποτελέσματα σχετικού προσανατολισμού με επίλυση δέσμης.

Εξετάζοντας όλα τα προηγηθέντα, παρατηρεί κανείς ότι και οι δύο μη γραμμικοί αλγόριθμοι αντεπεξέρχονται πλήρως στις απαιτήσεις. Η συνθήκη συνεπιπεδότητας αντιπροσωπεύει μια ισχυρότερη δέσμευση, αφού δεν έχει απαίτηση για καλές προσεγγιστικές τιμές σε αντίθεση με την επίλυση δέσμης (όπου συμμετέχουν και οι προσεγγιστικές τιμές των σημείων σύνδεσης), ενώ τα *a posteriori* τυπικά σφάλματα που επιστρέφει είναι ελαφρώς μικρότερα, ίσως επειδή κατά την επίλυση δέσμης υπολογίζονται και οι συντεταγμένες μοντέλου των σημείων σύνδεσης. Μεταξύ των στοιχείων του σχετικού προσανατολισμού, στις περισσότερες των περιπτώσεων η συνιστώσα γ της βάσης υπολογίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια, ενώ η γωνία φ , η οποία σε όλες τις γεωμετρικές λήψεων που μελετήθηκαν είναι η μεγαλύτερη μεταξύ των τριών γωνιών, υπολογίζεται με τη μεγαλύτερη αβεβαιότητα.

7.2.2 Επιπολικές εικόνες

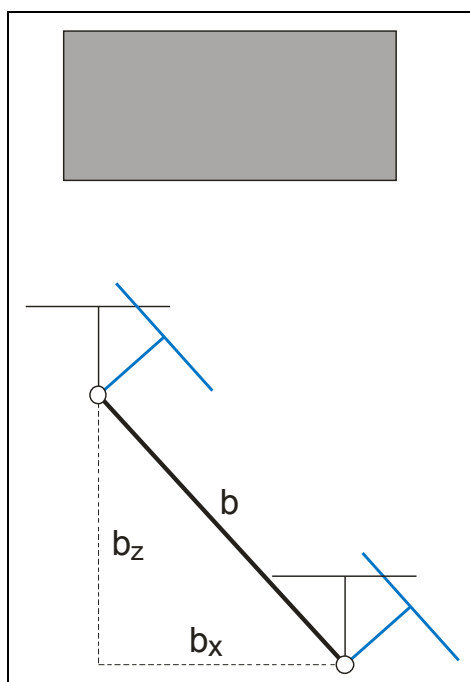
Το πρόγραμμα επιπολικής επανασύστασης που συντάχθηκε χρησιμοποιεί τον σχετικό προσανατολισμό του στερεοζεύγους, μαζί με τον γνωστό εσωτερικό προσανατολισμό του, για να δημιουργεί τις κανονικοποιημένες (επιπολικές) εικόνες. Το πρωτεύον σημείο υποτέθηκε στο κέντρο της εικόνας, ενώ δεν υπήρξε διόρθωση λόγω ακτινικής διαστρόφης (τα πολυώνυμά της δεν είναι γνωστά). Χρησιμοποιήθηκαν για κάθε στε-

ροεζεύγος τα στοιχεία του σχετικού προσανατολισμού που αναφέρονται στον Πίνακα 7.7. Οι επιπολικές εικόνες για κάθε όλα τα στερεοζεύγη παρουσιάζονται στο Σχ. 7.6.



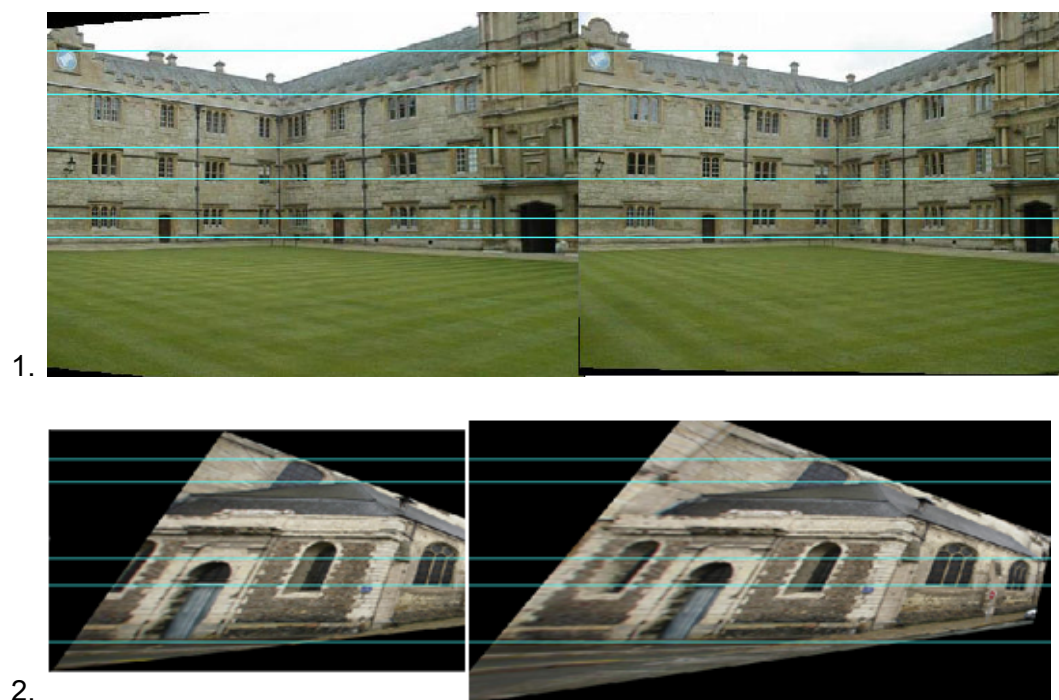
Σχήμα 7.6: Επιπολικές εικόνες των τριών στερεοζευγών.

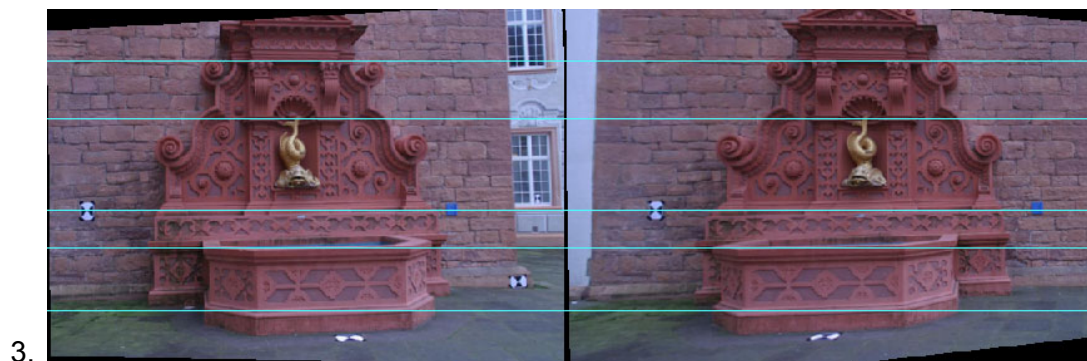
Από τα στοιχεία του σχετικού προσανατολισμού (Πίνακες 7.6-7.9) φαίνεται ότι οι περιπτώσεις των ζευγών 1 και 3 αφορούν τυπικά επίγεια στερεοζεύγη, ήτοι με μικρές συνιστώσες βάσης, μικρές στροφές ω , κ , και σχετικά έντονες στροφές φ (συγκλίνουσα περίπτωση του στερεοζεύγους). Έτσι, τα αντίστοιχα επιπολικά επανασημασμένα στερεοζεύγη δεν έχουν σημαντικές παραμορφώσεις σε σχέση με τις αρχικές εικόνες. Αντίθετα, η περίπτωση του στερεοζεύγους 2 είναι πράγματι ιδιάζουσα. Από τις τιμές των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού (Πίνακες 7.6-7.9) είναι σαφές ότι το μοντέλο αυτό δεν έχει σημαντικές στροφές, διακρίνεται όμως από μια ιδιαίτερα μεγάλη κατά z συνιστώσα της βάσης, και μάλιστα είναι $b_z > b_x$ (με συνέπεια και την σημαντική διαφορά κλίμακας μεταξύ των δύο εικόνων). Αυτό έχει ως συνέπεια τις πολύ έντονες προοπτικές παραμορφώσεις των επιπολικών εικόνων σε σχέση με τις αρχικές. Στο Σχ. 7.7 αποδίδεται σχηματικά η γεωμετρία του στερεοζεύγους αυτού, που εξηγεί τις πολύ έντονες διαφορές μεταξύ αρχικών και επιπολικών εικόνων.



Σχήμα 7.7: Η γεωμετρία λήψης του δεύτερου στερεοζεύγους με $b_z > b_x$, λόγω της οποίας οι επιπολικές εικόνες (μπλε) έχουν σημαντικές προοπτικές παραμορφώσεις ως προς τις αρχικές εικόνες.

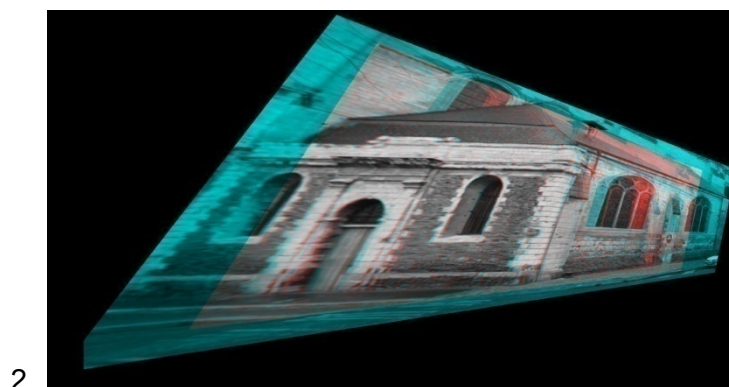
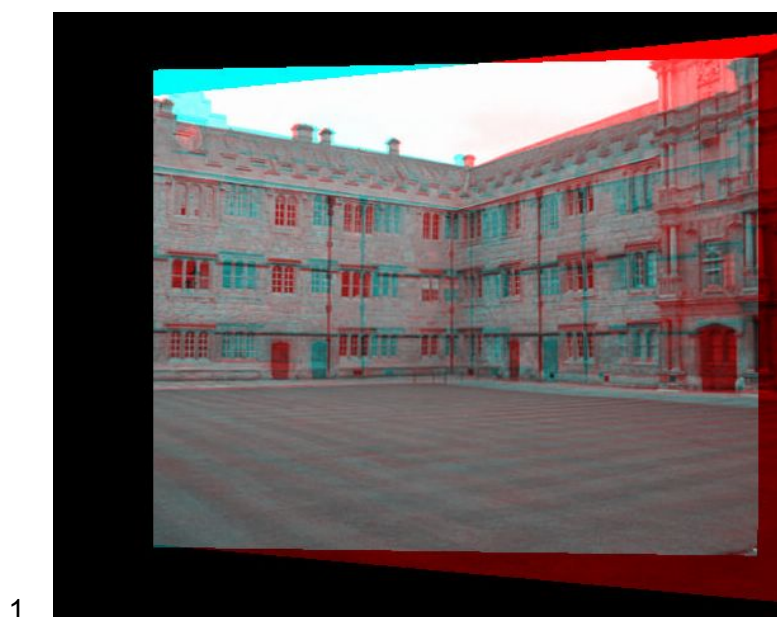
Η επιπολική επανασύσταση διευκολύνει σημαντικά την διαδικασία ψηφιακής συνταύτισης, καθώς τα ομόλογα σημεία κείνται πλέον σε ομόλογες σειρές των νέων ψηφιακών εικόνων. Συνεπώς, όπως έχει αναφερθεί και στο αντίστοιχο κεφάλαιο (βλ. ενότητα 3.6), η αναζήτηση του ομόλογου σημείου περιορίζεται κατ' αρχήν κατά μήκος μιας μόνο γραμμής. Στις ακόλουθες εικόνες του Σχ. 7.8 εμφανίζονται με γαλάζιο χρώμα ενδεικτικές επιπολικές γραμμές των τριών ζευγών.

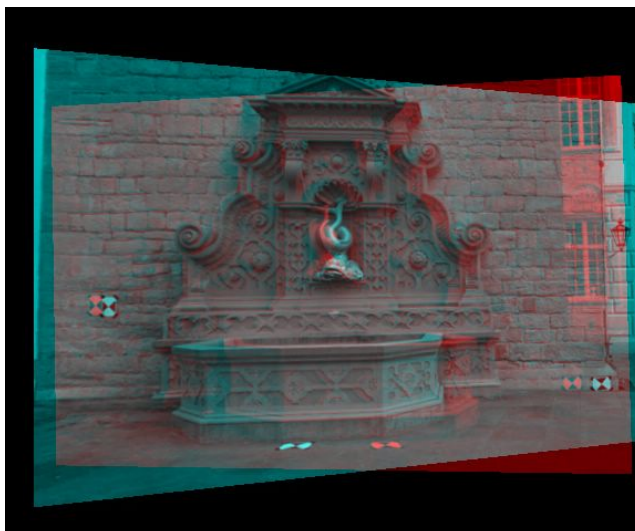




Σχήμα 7.8: Ομόλογες επιπολικές γραμμές.

Επίσης, έχει τονιστεί ότι οι επιπολικές εικόνες εξασφαλίζουν τη στερεοσκοπική παρατήρηση. Έτσι στο Σχ. 7.9 φαίνεται ενδεικτικό αποτέλεσμα της εισαγωγής των εικόνων του Σχ. 7.6 στο *Z-Anaglyph* (http://rosset.org/graphix/anaglyph/zanag_en.htm), ένα ελεύθερο λογισμικό που καθιστά δυνατή τη στερεοσκοπική παρατήρηση σε ζεύγος επιπολικών εικόνων με εφαρμογή των συμπληρωματικών χρωμάτων κόκκινου και κυανού. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως μέθοδος του αναγλύφου, και η παρατήρηση απαιτεί βέβαια τη χρήση κατάλληλων γυαλιών με τα αντίστοιχα χρώματα.





3.

Σχήμα 7.9: Εικόνες για στερεοσκοπική παρατήρηση με την μέθοδο του αναγλύφου.

7.3 Εικόνες με άγνωστο εσωτερικό προσανατολισμό

Η ενότητα αυτή θα παρουσιάσει τα αποτελέσματα όσων διαδικασιών αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 4 και αξιοποιούνται κυρίως σε περίπτωση όπου η μηχανή δεν είναι βαθμονομημένη. Όλες οι επόμενες διαδικασίες βασίζονται στον επιπολικό πίνακα.

7.3.1 Υπολογισμός της θέσης των πόλων

Κατ' αρχάς, συντάχθηκε πρόγραμμα που επιστρέφει τη θέση των πόλων όταν είναι γνωστός ο επιπολικός πίνακας. Το πρόγραμμα χρησιμοποιεί τις γραμμικές σχέσεις που αναφέρθηκαν στην ενότητα 4.1.2.1. Στον πίνακα 7.10 παρουσιάζονται οι θέσεις (x_1, y_1) και (x_2, y_2) των δύο πόλων κάθε στερεοζεύγους.

Στερεοζεύγος	x_1 (pixel)	y_1 (pixel)	x_2 (pixel)	y_2 (pixel)
1	2187.91	-13.24	1986.63	-75.13
2	-451.35	-103.01	-513.20	-128.00
3	4244.92	-106.87	-1707.80	23.8

Πίνακας 7.10 : Οι θέσεις των πόλων

Από τον Πίνακα 7.10 φαίνεται πόσο εγγύτερα στα όρια των εικόνων (μικρές τιμές εικονοσυντεταγμένων x) είναι οι πόλοι του δεύτερου στερεοζεύγους σε σχέση με τα άλλα δύο (πρβλ. και Σχ. 7.12 στην ενότητα 7.3.3).

7.3.2 Υπολογισμός επιπολικής γραμμής σημείου

Όπως έχει αναφερθεί (ενότητα 4.1), ο επιπολικός πίνακας επιτρέπει να εντοπίζεται η ομόλογη επιπολική γραμμή σημείου από τη σχέση:

$$l' = Fx \quad (7.1)$$

η οποία περιγράφει μια μη αντιστρέψιμη ετερογραφία. Στις ακόλουθες εικόνες του Σχ. 7.10 εμφανίζονται ενδεικτικά αποτελέσματα της εφαρμογής του αλγορίθμου. Το πρόγραμμα που συντάχθηκε υπολογίζει την επιπολική γραμμή l' τυχαία επιλεγμένου σημείου q σε όλα τα ζεύγη. Η γραμμή αυτή περιλαμβάνει το σημείο, όπως είναι αναμενόμενο, καθώς και όσα σημεία ανήκουν στην επιπολική γραμμή l δια του q .



Σχήμα 7.10: Ομόλογη επιπολική γραμμή σημείου.

7.3.3 Υπολογισμός επιπολικών γραμμών

Με γνωστό επιπολικό πίνακα είναι δυνατός ο ορισμός και των ομόλογων επιπολικών γραμμών (βλ. ενότητα 4.1.1), με βάση τη σχέση:

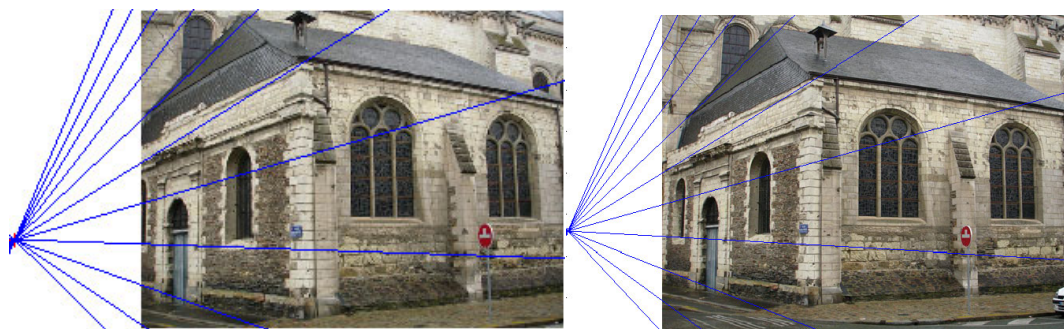
$$l' = F[e]_{\times} l \quad (7.2)$$

Εμφανίζονται ακολούθως (Σχ. 7.11) τα τρία στερεοζεύγη, στα όποια έχουν αποτυπωθεί ομόλογες επιπολικές ευθείες σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις. Το πρόγραμμα εντοπίζει 10 τυχαία σημεία x_i στην αριστερή εικόνα. Στην εικόνα αυτή υπολογίζονται οι επιπολικές γραμμές, καθώς δύο σημεία τους (το τυχαίο και ο πόλος) είναι γνωστά. Στη δεξιά εικόνα υπολογίζεται για κάθε σημείο η ομόλογη επιπολική ευθεία βάσει της Εξ. 7.1. Παρατηρώντας τις επόμενες εικόνες αντιλαμβάνεται κανείς ότι οι ομόλογες επιπολικές γραμμές, σε σωστά προσδιορισμένη επιπολική γεωμετρία, περιλαμβάνουν ομόλογα σημεία.



Σχήμα 7.11: Ομόλογες επιπολικές γραμμές.

Όλες οι επιπολικές γραμμές διέρχονται από τον πόλο της εικόνας. Στο Σχ. 7.12 εμφανίζονται οι επιπολικές γραμμές στις δύο εικόνες του δεύτερου στερεοζεύγους και το σημείο τομής τους, ο πόλος. Επισημαίνεται και εδώ πόσο κοντά είναι ο πόλος στα άκρα της εικόνας σε αυτό το συγκεκριμένο στερεοζεύγος.



Σχήμα 7.12: Οι πόλοι των εικόνων του δεύτερου ζεύγους.

7.3.4 Επιπολικές εικόνες

Σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί στην ενότητα 4.4, η επιπολική επανασύσταση εικόνων επιτυγχάνεται ακόμα και εάν δεν υπάρχει πληροφορία για κανένα στοιχείο του εσωτερικού προσανατολισμού της μηχανής. Πιο συγκεκριμένα, υπολογίζεται για κάθε εικόνα μετασχηματισμός H που μεταφέρει τους πόλους στο άπειρο. Προφανώς αυτό δεν είναι δυνατόν όταν οι πόλοι βρίσκονται μέσα (ή και πολύ κοντά) στις εικόνες, καθώς τότε εικονοσημεία θα έπρεπε να μεταφερθούν στο άπειρο (ή “κοντά” στο άπειρο). Σε ανάλογες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται εναλλακτικοί αλγόριθμοι, όπως έχει αναφερθεί στην αντίστοιχη ενότητα 4.4.



Σχήμα 7.13: Επιπολικές εικόνες μη βαθμονομημένων στερεοζευγών.

Στο Σχ. 7.13 φαίνονται οι επιπολικές εικόνες για το πρώτο και το τρίτο στερεοζεύγος.

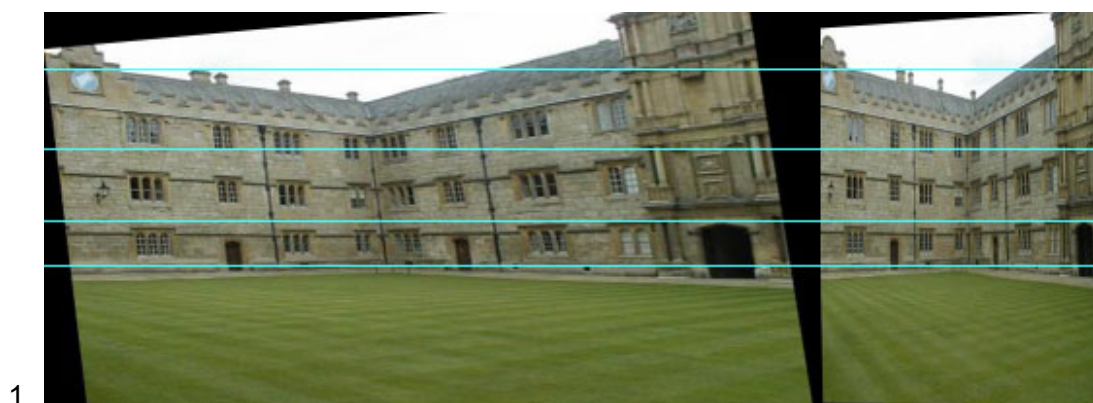
Η θέση των πόλων στο δεύτερο στερεοζεύγος δεν επιτρέπει επιπολική επανασύσταση με τον αλγόριθμο αυτό αφού, όπως έγινε αντιληπτό και από το Σχ. 7.12, οι πόλοι του βρίσκονται πολύ κοντά στα άκρα των δύο εικόνων, οπότε οι επιπολικές εικόνες θα είχαν τεράστιο μέγεθος.

Και σε αυτές τις επιπολικές εικόνες οι επιπολικές γραμμές είναι βέβαια παράλληλες μεταξύ τους και ταυτίζονται με τις γραμμές των ψηφιακών εικόνων, όπως φαίνεται και στο επόμενο Σχ. 7.14α.



Σχήμα 7.14α: Επιπολικές γραμμές σε επιπολικές εικόνες μη βαθμονομημένων στερεοζευγών.

Στον αλγόριθμο έχει προηγουμένως εφαρμοστεί ένας συμπληρωματικός μετασχηματισμός, ο οποίος ελαχιστοποιεί τις κατά x παραμορφώσεις των εικόνων, διαφορετικά θα προέκυπταν αποτελέσματα όπως τα ακόλουθα των Σχ. 7.14β και 7.14γ, καθώς οποιαδήποτε αλλαγή των εικόνων κατά τη διεύθυνση αυτή δεν επηρεάζει τις ιδιότητες των επιπολικών γραμμών.



Σχήμα 7.14β: Επιπολικές γραμμές σε επιπολικές εικόνες μη βαθμονομημένου στερεοζεύγους.



Σχήμα 7.14γ: Επιπολικές γραμμές σε επιπολικές εικόνες μη βαθμονομημένου στερεοζεύγους.

7.4 Μερική αυτοβαθμονόμηση στερεοζεύγους

Στο Κεφάλαιο 5 αναφέρθηκε η διαδικασία της μερικής αυτοβαθμονόμησης ζεύγους εικόνων. Θα δοθούν εδώ τα αποτελέσματα εφαρμογής των γραμμικών και μη γραμμικών αλγορίθμων στα πειραματικά δεδομένα.

7.4.1 Γραμμικοί αλγόριθμοι

Οι γραμμικοί αλγόριθμοι, οι οποίοι αναφέρθηκαν στην ενότητα 5.1, είναι τρεις, εκείνοι των Newsam et al. (1996), Sturm (2001) και Bougnoux (1998). Ο τελευταίος υπολογίζει διαφορετικές σταθερές για τις δύο εικόνες, ενώ οι δύο πρώτοι χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό κοινής σταθεράς μηχανής. Για να εφαρμόσει κανείς αυτούς τους αλγορίθμους μερικής βαθμονόμησης είναι αναγκαία η γνώση του πρωτεύοντος σημείου, το οποίο εδώ υποτέθηκε στο κέντρο της εικόνας. Τα αποτελέσματα των αλγορίθμων που χρησιμοποιήθηκαν καθώς και οι θεωρούμενες ως αληθείς τιμές των σταθερών (C_{data}) εμφανίζονται στους ακόλουθους Πίνακες 7.11 και 7.12.

Στερεοζεύγος	C_{Newsam} (pixel)	C_{Sturm} (pixel)	C_{data}
1	996	1131	1165
2	964	987	1140
3	1058	822	920

Πίνακας 7.11: Αποτελέσματα γραμμικών αλγορίθμων Newsam και Sturm.

Στερεοζεύγος	c_1 (pixel)	c_2 (pixel)	\bar{c}_{mean} (pixel)	C_{data}
1	1071	1018	1045	1165
2	-	-	-	1140
3	944	1088	1012	920

Πίνακας 7.12: Αποτελέσματα γραμμικού αλγορίθμου Bougnoux.

Εξετάζοντας τα αποτελέσματα αυτά συμπεραίνει κανείς πως οι γραμμικοί αλγόριθμοι γενικά δεν οδηγούν σε ισχυρές λύσεις, ενώ είναι προφανώς ευαίσθητοι τόσο στην ύπαρξη θορύβου στις μετρήσεις όσο και στον ορισμό της θέσης του πρωτεύοντος ση-

μείου. Σχετικά με το ζήτημα του θορύβου ειδικότερα, έγινε εδώ ενδεικτικός έλεγχος στο πρώτο στερεοζεύγος με τον αλγόριθμο του Sturm και διαφορετικές συλλογές σημείων ενδιαφέροντος, με τα αποτελέσματα που φαίνονται στον Πίνακα 7.13.

C_1 (pixel)	C_2 (pixel)	C_3 (pixel)	C_4 (pixel)	C_5 (pixel)	C_{mean} (pixel)	C_{data} (pixel)
1440	902	988	1445	880	1131	1165

Πίνακας 7.13: Αποτελέσματα ανεξάρτητων εφαρμογών του γραμμικού αλγορίθμου Sturm.

Είναι σαφές ότι οι επιμέρους υπολογισμοί δίνουν εκτιμήσεις της σταθεράς της μηχανής που διαφέρουν ακόμα και κατά μερικές εκατοντάδες pixel από την θεωρούμενη ως αληθή τιμή, πράγμα οφειλόμενο αποκλειστικά στην ακρίβεια και τον θόρυβο των διαφορετικών σημείων που χρησιμοποιούνται (αφού η κατανομή τους στις εικόνες είναι γενικά παρεμφερής). Ωστόσο, ο μέσος όρος είναι κοντά στην τιμή αναφοράς, και για τον λόγο αυτό είναι σκόπιμο να χρησιμοποιείται η μέση εκτίμηση από περισσότερους υπολογισμούς (όπως έχει γίνει εδώ και στους Πίνακες 7.11 και 7.12).

Ακόμα, όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 5.1.3, υπάρχουν γεωμετρίες τις οποίες ορισμένοι αλγόριθμοι αδυνατούν να αντιμετωπίσουν, όπως αυτή του 2^{ου} στερεοζεύγους όπου ο αλγόριθμος του Bougnoux δεν επιστρέφει αποτελέσματα. Στην περίπτωση αυτή οι σχετικές στροφές είναι μικρές και οι άξονες σχεδόν συνεπίπεδοι, γεγονός που συνιστά κρίσιμη γεωμετρία για τον αλγόριθμο. Παρ' όλα ταύτα, οι αλγόριθμοι κλειστής μορφής παρουσιάζουν το καίριο πλεονέκτημα ότι δεν απαιτούν προσωρινές τιμές. Έτσι μελετώνται εκτενώς και θεωρούνται απαραίτητοι σε ορισμένες διαδικασίες πλήρους αυτοματισμού. Η εισαγωγή των αποτελεσμάτων τους σε έναν μη γραμμικό αλγόριθμο βελτιώνει προφανώς κατά πολύ την ακρίβεια της λύσης.

7.4.2 Μη γραμμικοί αλγόριθμοι

Στην ενότητα 4.2 έχουν αναφερθεί οι μη γραμμικοί αλγόριθμοι για μερική αυτοβαθμολόγηση που προγραμματίστηκαν για την παρούσα διπλωματική εργασία. Σε αυτούς συμπεριλαμβάνονται η συνθήκη συνεπιπεδότητας και η επίλυση δέσμης. Ο πρώτος αλγόριθμος εκτιμά τα στοιχεία του σχετικού προσανατολισμού και τη σταθερά της μηχανής, ενώ ο δεύτερος επιστρέφει, εκτός αυτών, και τις συντεταγμένες μοντέλου των σημείων σύνδεσης. Οι δύο αυτοί αλγόριθμοι συντάχθηκαν για να επιστρέφουν αποτελέσματα τόσο για μια κοινή όσο και για δύο διαφορετικές σταθερές μηχανής. Ως προσεγγιστικές τιμές για τη σταθερά μηχανής δίδονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου του Sturm, ενώ για τις τιμές των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού τα αποτελέσματα του RLT που υπολογίζονται με βάση τη σταθερά αυτή. Στην υπόθεση διαφορετικής σταθεράς, ως προσεγγιστικές τιμές για το c χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα του αλγορίθμου του Bougnoux. Στην επίλυση δέσμης υπολογίστηκαν, με εμπροσθοτομία, και προσωρινές 3D συντεταγμένες για τα σημεία σύνδεσης. Οι δύο αλγόριθμοι είναι επαναληπτικοί και τερματίζουν όταν οι διορθώσεις του διανύσματος των αγνώστων δεν υπερβαίνουν τα όρια που αναφέρθηκαν στις προηγούμενες επιλύσεις. Τα αποτελέσματα για την περίπτωση κοινής σταθεράς μηχανής εμφανίζονται στους Πίνακες 7.14 και 7.15.

Ζεύγος	B_y	B_z	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$	c (pixel)	σ_o (pixel)
1 $C_{data} = 1165$	-0.0219 ± 0.0006	-0.3096 ± 0.0012	1.1114 ± 0.0098	13.4701 ± 0.1972	-0.3603 ± 0.0061	1168 ± 15.5	0.16
2 $C_{data} = 1140$	0.1844 ± 0.0009	1.2783 ± 0.0035	0.8881 ± 0.0121	-3.3289 ± 0.0141	-0.6532 ± 0.0034	1122 ± 19.3	0.13
3 $C_{data} = 920$	-0.0186 ± 0.0006	-0.0774 ± 0.0036	1.1163 ± 0.0010	19.8424 ± 0.2470	-0.7799 ± 0.0045	862 ± 8.5	0.13

Πίνακας 7.14: Επίλυση συνθήκης συνεπιπεδότητας με μερική αυτοβαθμονόμηση για κοινή σταθερά.

Ζεύγος	B_y	B_z	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$	c (pixel)	σ_o (pixel)
1 $C_{data} = 1165$	-0.0167 ± 0.0006	-0.3067 ± 0.0011	0.9298 ± 0.0109	13.8635 ± 0.1785	-0.3548 ± 0.0039	1172 ± 10.0	0.14
2 $C_{data} = 1140$	0.1887 ± 0.0009	1.2636 ± 0.0038	0.9112 ± 0.0041	-3.3467 ± 0.0097	-0.6928 ± 0.0056	1094 ± 8.6	0.13
3 $C_{data} = 920$	-0.0180 ± 0.0005	-0.0904 ± 0.0041	1.0884 ± 0.0150	21.0700 ± 0.3254	-0.7766 ± 0.0064	922 ± 7.8	0.12

Πίνακας 7.15: Επίλυση δέσμης με μερική αυτοβαθμονόμηση για κοινή σταθερά.

Οι τιμές αυτές δείχνουν πως προφανώς οι αυστηρές μη γραμμικές επιλύσεις βελτιώνουν σημαντικά την ορθότητα των αποτελεσμάτων των μη γραμμικών αλγορίθμων, προσφέροντας λύσεις ισχυρότερες και λιγότερο ευαίσθητες στον θόρυβο των δεδομένων. Πλεονέκτημά τους συνιστά, επιπλέον, η εκτίμηση της σταθεράς της μηχανής με ταυτόχρονο προσδιορισμό του σχετικού προσανατολισμού. Τα αποτελέσματα για τον σχετικό προσανατολισμό είναι ουσιαστικά ίδια με τα αντίστοιχα των Πινάκων 7.5-7.9 που προκύπτουν με γνωστό εσωτερικό προσανατολισμό, αν και τα τυπικά σφάλματα των γωνιών είναι μεγαλύτερα (οι τιμές τους είναι εδώ συσχετισμένες και με την τιμή της σταθεράς της μηχανής). Όσον αφορά την σταθερά της μηχανής, η συνθήκη συνεπιπεδότητας δίνει αποτελέσματα με ελαφρώς μεγαλύτερες αβεβαιότητες σε σχέση με την επίλυση δέσμης. Σε δύο πάντως από τις περιπτώσεις η μία ή και οι δύο μέθοδοι δίνουν αποτελέσματα που διαφέρουν αρκετές δεκάδες pixel από τις αρχικές εκτιμήσεις που θεωρούνται σωστές. Υπενθυμίζεται ωστόσο ότι οι εκτιμήσεις αυτές αναφοράς βασίζονται στην υπόθεση γνωστού πρωτεύοντος σημείου (και απουσίας διαστροφών του φακού), πράγμα που δεν ισχύει.

Αν και οι δύο εικόνες κάθε ζεύγους που χρησιμοποιήθηκε εδώ προέρχονταν από την ίδια μηχανή, εφαρμόστηκε ενδεικτικά ο αλγόριθμος μερικής αυτοβαθμονόμησης για δύο διαφορετικές σταθερές μηχανής με συνόρθωση δέσμης. Τα αποτελέσματα έχουν συγκεντρωθεί στον Πίνακα 7.16.

Ζεύγος	B_y	B_z	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$	c_1 (pixel)	c_2 (pixel)	σ_o (pixel)
1 $C_{data} = 1165$	-0.0013 ± 0.0005	-0.3455 ± 0.0197	0.9530 ± 0.0309	13.4790 ± 0.7316	-0.3492 ± 0.0047	1186 ± 34	1175 ± 30	0.14
2 $C_{data} = 1140$	-	-	-	-	-	-	-	-
3 $C_{data} = 920$	-0.0173 ± 0.0006	-0.0959 ± 0.0056	1.0767 ± 0.0144	20.9515 ± 0.6671	-0.7827 ± 0.0074	920 ± 14	918 ± 15	0.12

Πίνακας 7.16: Αποτελέσματα επίλυσης δέσμης με μερική αυτοβαθμονόμηση για διαφορετική σταθερά.

Αν και στην περίπτωση διαφορετικής σταθεράς μηχανών οι εκτιμήσεις των τιμών των παραμέτρων είναι αρκετά κοντά σε εκείνες από τις προηγούμενες επιλύσεις, τα αποτελέσματα για τις παραμέτρους του σχετικού προσανατολισμού (ιδιαίτερα δε την γωνία σύγκλισης φ) όσο και τις δύο σταθερές εμφανίζουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα από την περίπτωση κοινής σταθεράς των λήψεων. Και εδώ, όπως και στον αντίστοιχο γραμμικό αλγόριθμο (Πίνακας 7.12), η σύγκλιση ήταν αδύνατη στο δεύτερο ζεύγος, πράγμα που αποδίδεται στην προαναφερθείσα δυσμενή γεωμετρία του. Μπορεί κανείς, βάσει αυτών, να υποθέσει πως η μερική αυτοβαθμονόμηση στερεοζεύγους με διαφορετικές σταθερές μηχανής είναι η πιο ευαίσθητη περίπτωση, από όσες εξετάστηκαν, σε θέματα θορύβου και γεωμετρίας.

7.5 3D ανακατασκευή

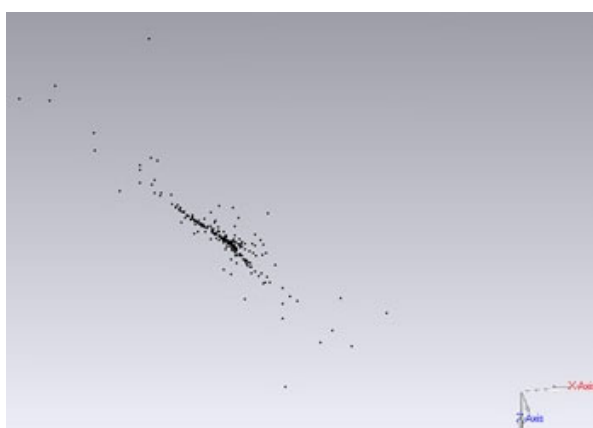
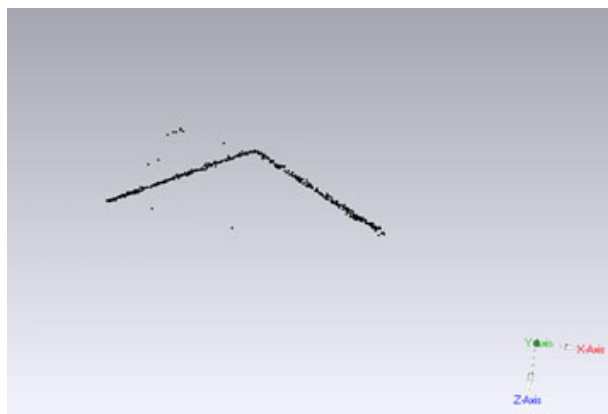
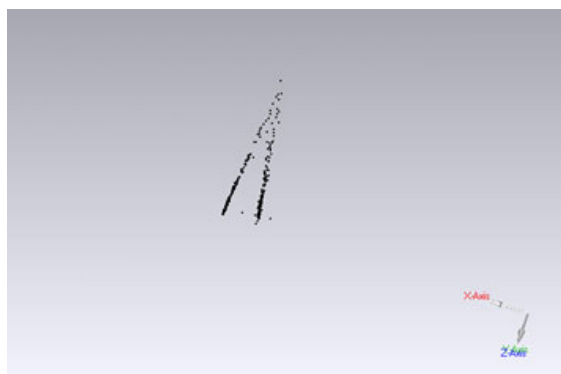
Στην περίπτωση ζεύγους εικόνων είναι δυνατή η τρισδιάστατη ανακατασκευή του απεικονιζόμενου αντικειμένου. Στις ενότητες 3.5 και 4.5 αναφέρονται και επεξηγούνται τα διάφορα είδη ανακατασκευών που προκύπτουν, ανάλογα με το αν υπάρχει γνώση του εσωτερικού προσανατολισμού ή όχι. Στα επόμενα αναλύονται και παρουσιάζονται τρία παραδείγματα ανακατασκευών. Το αρχικό παράδειγμα αφορά το πρώτο στερεοζεύγος των προηγούμενων εφαρμογών, ενώ το δεύτερο (ζεύγος εικόνων που απεικονίζουν έναν κύβο) και το τρίτο (που απεικονίζει ένα τραπέζι) ελήφθησαν ειδικά για τις ανάγκες αυτής της ενότητας, ώστε στα κανονικά αυτά αντικείμενα να φανούν καλύτερα οι διαφορές των προβολικών ανακατασκευών από την μετρική.

7.5.1 Παράδειγμα 1

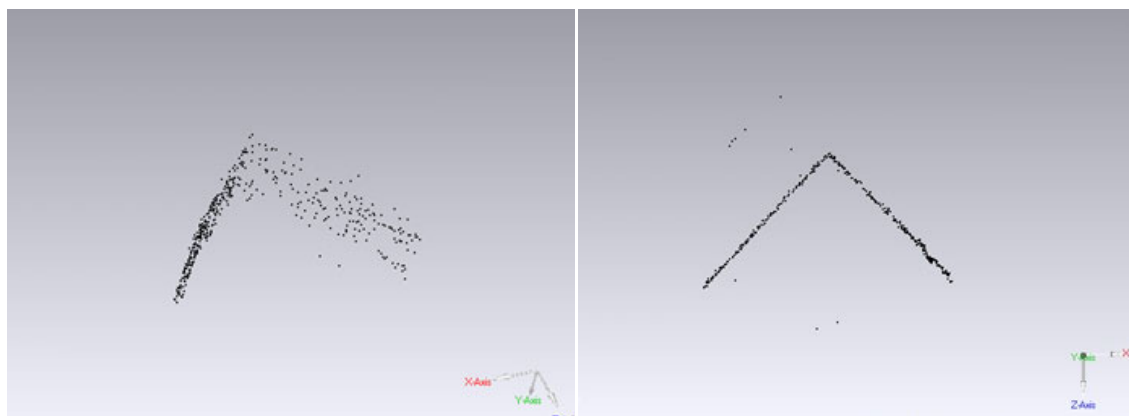
Το πρώτο στερεοζεύγος απεικονίζει το κτίριο Merton του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης. Εάν τα στοιχεία που περιγράφουν τη γεωμετρία της μηχανής δεν είναι γνωστά, η ανακατασκευή που προκύπτει είναι προβολική (βλ. ενότητα. 4.5). Πιο συγκεκριμένα, θεωρήθηκαν προβολικοί πίνακες μηχανής \mathbf{P}_1 και \mathbf{P}_2 συμβατοί με τον επιπολικό πίνακα του ζεύγους και υπολογίστηκαν με εμπροσθοτομία οι 3D συντεταγμένες του εικονιζόμενου αντικειμένου. Κάθε ζεύγος προβολικών πινάκων μηχανής οδηγεί βέβαια σε διαφορετική προβολική ανακατασκευή. Πραγματοποιήθηκαν και παρουσιάζονται εδώ τρεις τέτοιες ανακατασκευές. Τα σημεία από το προγραμματιστικό περιβάλλον του Matlab εισήχθησαν ως αρχείο ASCII στο λογισμικό Geomagic Studio για καλύτερη οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων. Στα επόμενα παραδείγματα του Σχ. 7.15 είναι εμφανής η αλλοίωση της γωνίας που σχηματίζουν οι δύο όψεις του κτιρίου, όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο.

Κατά την ενότητα 4.5.4, η προβολική αβεβαιότητα μπορεί να αρθεί βάσει 5 σημείων με γνωστές συντεταγμένες στο σύστημα του χώρου. Μέσω αυτών καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός των 15 παραμέτρων ενός τρισδιάστατου προβολικού μετασχηματισμού, που αναβαθμίζει άμεσα την ανακατασκευή σε μετρική. Την ανάγκη για τα σημεία αυτά εξυπηρέτησαν στην προκειμένη περίπτωση οι 3D συντεταγμένες σημείων σύνδεσης, όπως αυτές υπολογίστηκαν από την επίλυση δέσμης. Με εφαρμογή του μετασχηματισμού που προγραμματίστηκε εδώ στο σύνολο των σημείων προκύπτει η ευκλείδεια ανακατασκευή που παρουσιάζεται στο Σχ. 7.16. Στην ανακατασκευή αυτή η ορθή γωνία μεταξύ των δύο όψεων απεικονίζεται πλέον σωστά.

7. Πειραματικές εφαρμογές και αξιολόγηση



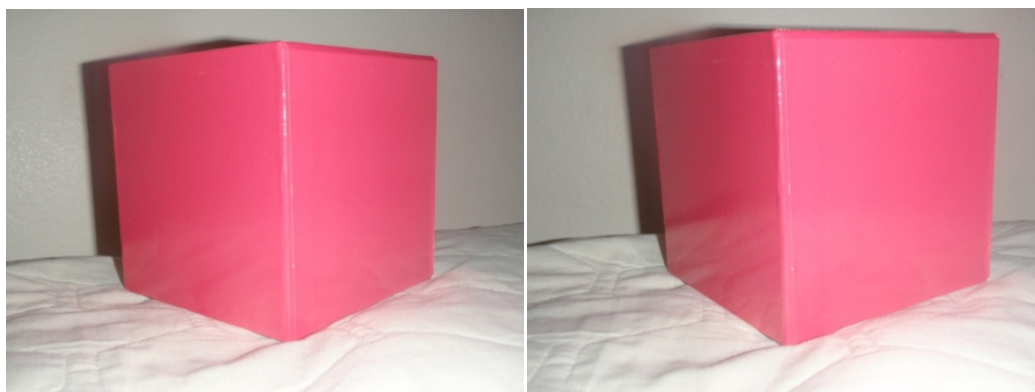
Σχήμα 7.15: Ενδεικτικές προβολικές ανακατασκευές.



Σχήμα 7.16: Διαφορετικές όψεις ευκλείδειας ανακατασκευής.

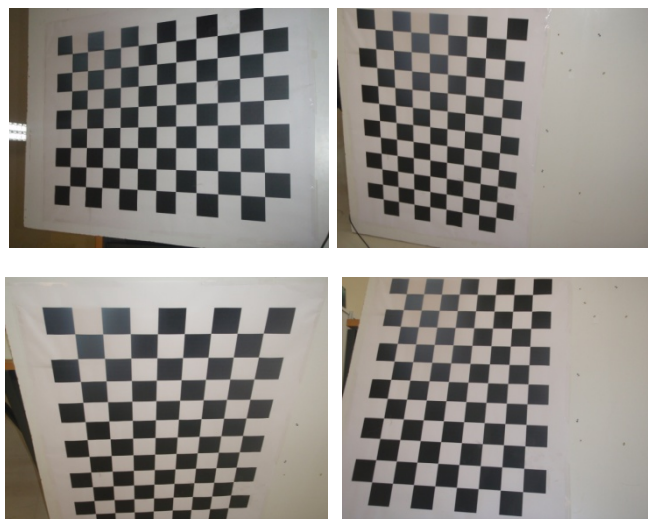
7.5.2 Παράδειγμα 2

Για τις ανάγκες του παραδείγματος ελήφθησαν οι εικόνες κύβου του Σχ. 7.17.



Σχήμα 7.17: Οι εικόνες του κύβου.

Η ψηφιακή μηχανή που χρησιμοποιήθηκε βαθμονομήθηκε αυτόματα με το πρόγραμμα *Faucal* (Douskos et al., 2009), το οποίο βασίζεται στη διπλωματική εργασία του Β. Ντούσκου. Το πρόγραμμα δέχεται εικόνες σκακιέρας που έχουν ληφθεί υπό διαφορετικές γωνίες, αναγνωρίζει και ταξινομεί τους κόμβους της και, τέλος, προσδιορίζει την γεωμετρία της μηχανής με συνόρθωση δέσμης με αυτοβαθμονόμηση. Ορισμένες από τις 15 εικόνες που χρησιμοποιήθηκαν για τον σκοπό αυτό φαίνονται ενδεικτικά στο Σχ. 7.18. Τα αποτελέσματα της βαθμονόμησης βρίσκονται στον Πίνακα 7.17.



Σχήμα 7.18: Εικόνες που χρησιμοποιήθηκαν στην αυτοβαθμονόμηση.

c (pixel)	1486.505 ± 0.742
x_0 (pixel)	-4.642 ± 0.535
y_0 (pixel)	-1.576 ± 0.419
k_1	$3.042 \times 10^{-8} \pm 1.30 \times 10^{-9}$
k_2	$-2.925 \times 10^{-14} \pm 3.12 \times 10^{-15}$
σ_0 (pixel)	± 0.4

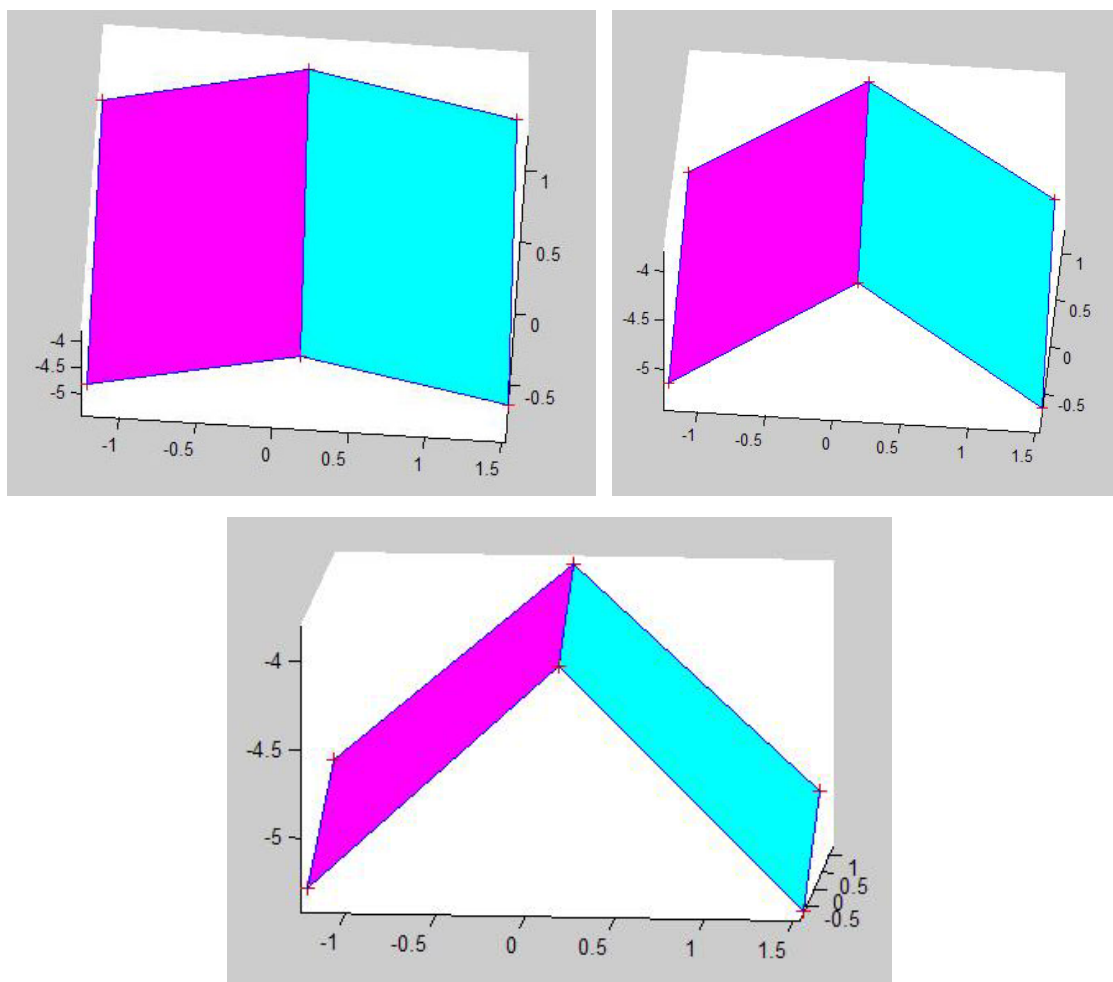
Πίνακας 7.17: Στοιχεία εσωτερικού προσανατολισμού.

Με χειροκίνητη μέτρηση 6 ομόλογων σημείων και στις δύο εικόνες, υπολογίστηκε ο σχετικός τους προσανατολισμός που φαίνεται στον Πίνακα 7.18.

b_y	0.2533 ± 0.0167
b_z	-0.3264 ± 0.0108
$\omega(^{\circ})$	-4.0194 ± 0.0055
$\varphi(^{\circ})$	13.0511 ± 0.0115
$\kappa(^{\circ})$	2.5337 ± 0.0028
σ_o (pixel)	± 1.32

Πίνακας 7.18: Παράμετροι σχετικού προσανατολισμού.

Με γνωστό τον εσωτερικό προσανατολισμό της μηχανής λήψης είναι δυνατή η τρισδιάστατη μετρική ανακατασκευή του κύβου. Υπολογίζονται οι 3D συντεταγμένες των 6 κορυφών που εμφανίζονται στις εικόνες, ώστε τελικά να προκύψει η ακόλουθη μετρική ανακατασκευή του Σχ. 7.19, που αναπαριστά τις δύο όψεις του κύβου.

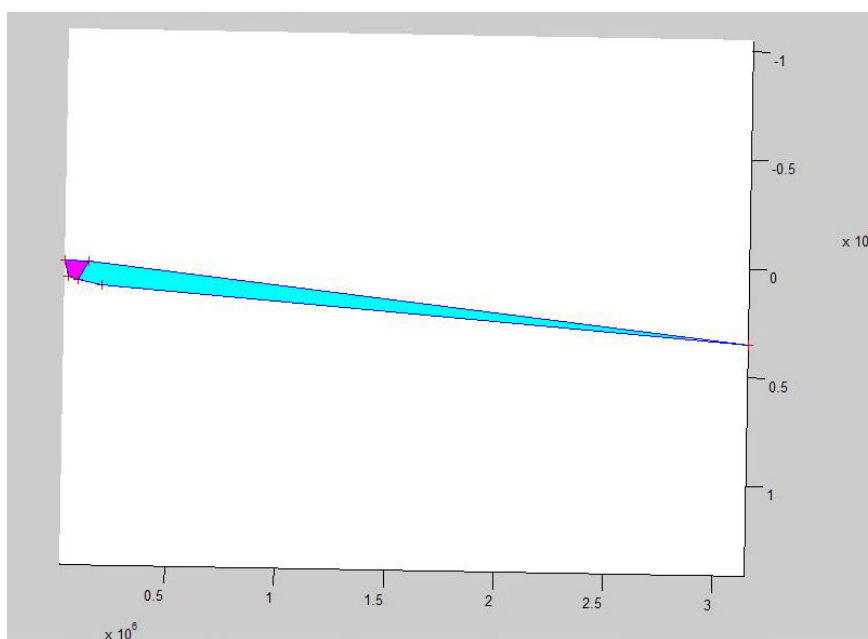
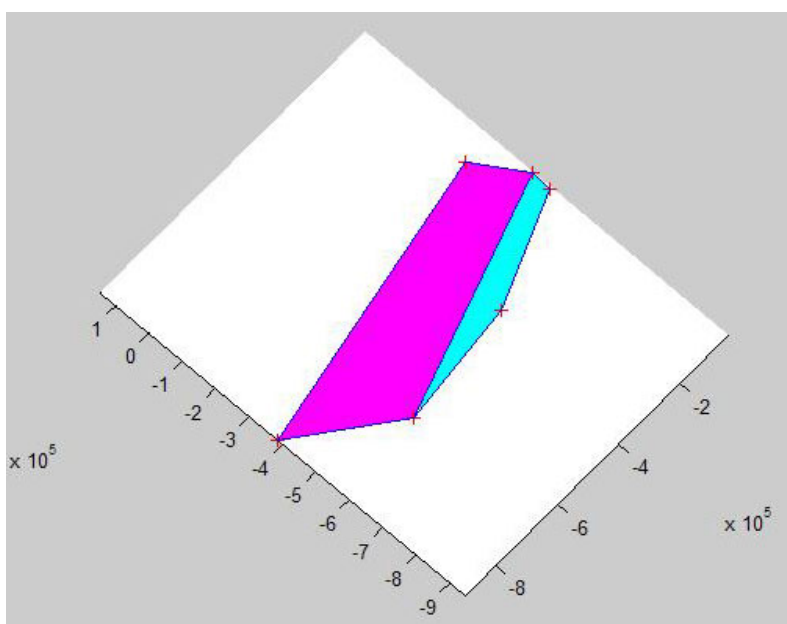
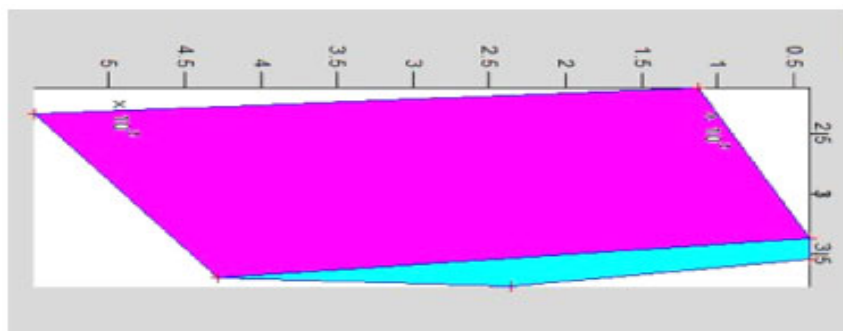


Σχήμα 7.19: Η μετρική ανακατασκευή του κύβου από διαφορετικές οπτικές γωνίες.

Στην περίπτωση όπου ο εσωτερικός προσανατολισμός των εικόνων είναι άγνωστος, η μοναδική δυνατή ανακατασκευή που προκύπτει είναι προβολική. Με την ίδια διαδικασία που αναφέρθηκε στο Παράδειγμα 1 προέκυψαν οι ακόλουθες προβολικές ανα-

7. Πειραματικές εφαρμογές και αξιολόγηση

κατασκευές του Σχ. 7.19, όπου είναι εμφανείς οι έντονες προβολικές παραμορφώσεις του σχήματος του αντικειμένου.



Σχήμα 7.20: Ενδεικτικές προβολικές ανακατασκευές του κύβου.

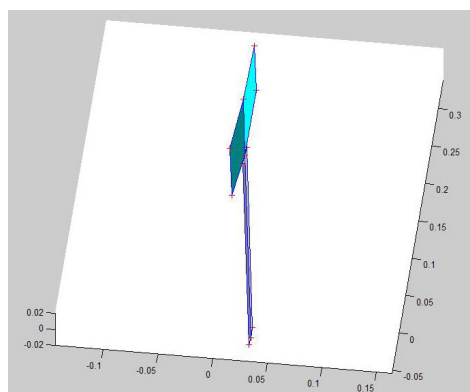
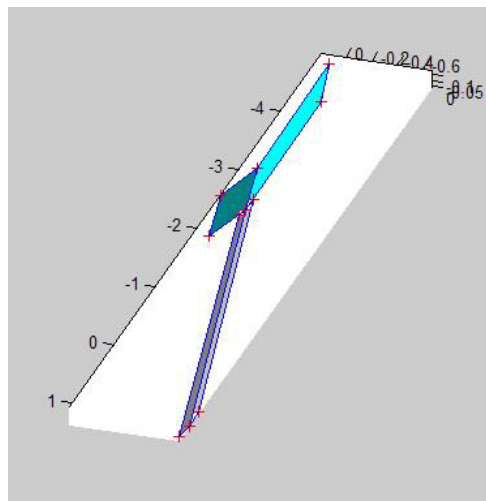
7.5.3 Παράδειγμα 3

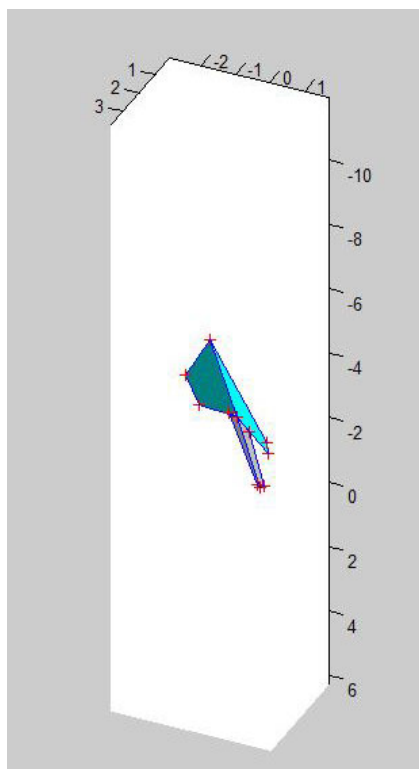
Για τις ανάγκες του τρίτου παραδείγματος ελήφθησαν με μηχανή γεωμετρίας δύο εικόνες ενός τραπεζιού. Το ζεύγος των εικόνων, στο οποίο έχει σημειωθεί με κόκκινο χρώμα το τμήμα που πρόκειται να ανακατασκευαστεί, φαίνεται στο Σχ. 7.21.



Σχήμα 7.21: Το ζεύγος εικόνων του τραπεζιού.

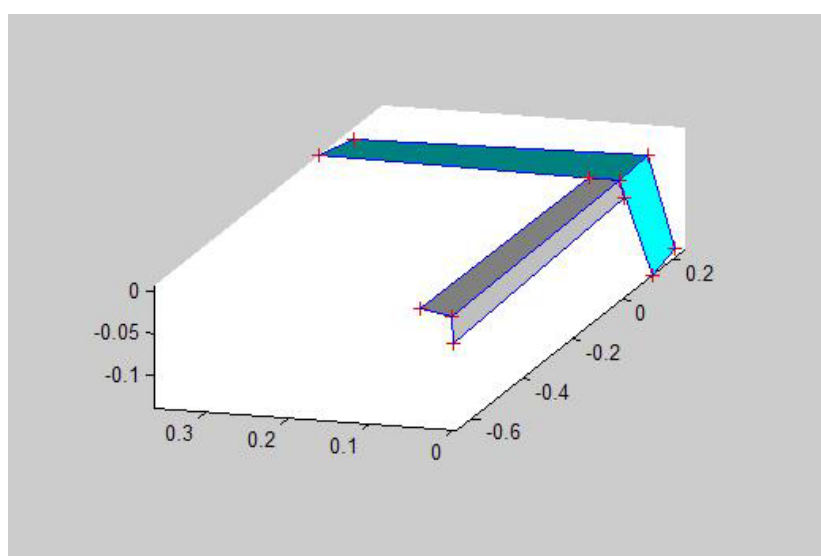
Δεδομένου πως εδώ ο εσωτερικός προσανατολισμός της μηχανής δεν είναι γνωστός, η προκύπτουσα ανακατασκευή είναι προβολική. Στις αρχικές εικόνες μετρήθηκαν χειροκίνητα 11 σημεία, τα οποία απεικονίζονται στις ανακατασκευές του Σχ. 7.22 με κόκκινο σταυρό. Οι συντεταγμένες τους υπολογίστηκαν εμπροσθοτομικά, με αυθαίρετη θεώρηση δύο προβολικών πινάκων μηχανής συμβατών με τον επιπολικό πίνακα. Πραγματοποιήθηκαν συνολικά 3 ανακατασκευές (Σχ. 7.22).





Σχήμα 7.22: Ενδεικτικές προβολικές ανακατασκευές του τραπέζιού.

Δεδομένου του άγνωστου εσωτερικού προσανατολισμού, η μετρική ανακατασκευή έγινε εδώ με διαφορετικό τρόπο. Όπως έχει επισημανθεί, η προβολική ανακατασκευή αναβαθμίζεται άμεσα σε ευκλείδεια αν υπάρχουν 5 κατ' ελάχιστον σημεία με γνωστές συντεταγμένες στον χώρο. Ως εκ τούτου, μετρήθηκαν 7 σημεία σε τοπικό σύστημα αναφοράς και προσδιορίστηκαν οι 15 παράμετροι για την αναβάθμιση της ανακατασκευής. Το a posteriori τυπικό σφάλμα για αυτόν τον 3D προβολικό μετασχηματισμό υπολογίστηκε ίσο με $\sigma_0 = \pm 7$ mm, και τα αποτελέσματα εφαρμογής του φαίνονται στο Σχ. 7.23.



8

Συμπεράσματα

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν η μελέτη ζεύγους εικόνων, τόσο στην περίπτωση όπου τα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού είναι γνωστά όσο και στην περίπτωση όπου είναι άγνωστα. Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο συνοψίζονται και σχολιάζονται οι μέθοδοι και τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά την εκπόνηση της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας, ενώ ακόμα εκτίθενται ορισμένες ιδέες και προτάσεις για περαιτέρω μελλοντική έρευνα.

8.1 Σχόλια και παρατηρήσεις

Η έρευνα στο ταχύτατα αναπτυσσόμενο πεδίο της όρασης υπολογιστών έχει οδηγήσει στη διατύπωση νέων εννοιών και τη δημιουργία πρωτοποριακών αλγορίθμων. Η παρούσα εργασία μελέτησε έννοιες, προερχόμενες από τα πεδία της φωτογραμμετρίας όσο και της όρασης υπολογιστών, στην περίπτωση του ζεύγους εικόνων. Η μελέτη των εννοιών αυτών, αλλά και η παρατήρηση και σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν, έδειξαν ότι υπάρχει σειρά εναλλακτικών διαδικασιών που είναι δυνατό να εφαρμοστούν ακόμα και εάν δεν υπάρχουν στοιχεία για τον εσωτερικό προσανατολισμό της μηχανής ή των μηχανών. Ακόμα, αναφέρθηκαν διαδικασίες (μερικής) αυτοβαθμονόμησης από στερεοζεύγος για τον προσδιορισμό των στοιχείων που περιγράφουν τη γεωμετρία της μηχανής με μοναδικό δεδομένο ομολογίες εικονοσημείων.

Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση ζεύγους εικόνων με άγνωστο εσωτερικό προσανατολισμό είναι δυνατός ο υπολογισμός της κοινής σταθεράς c των μηχανών, ή και των δύο σταθερών c_1 και c_2 , εάν το πρωτεύον σημείο θεωρηθεί γνωστό ή υποτεθεί στο κέντρο της εικόνας, και παράλληλα αγνοηθεί το πολυώνυμο της ακτινικής διαστροφής του φακού. Παρενθετικά σημειώνεται πάντως ότι η ακτινική διαστροφή μπορεί να εκτιμηθεί με ανεξάρτητες μεθόδους, πχ. από την καμπύλωση ευθειών στην εικόνα (βλ. ενδεικτικά Μουντράκης, 1998). Στη συνέχεια, με χρήση των γραμμικών αλγορίθμων του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα ή του αλγορίθμου RLT μπορούν να εκτιμηθούν οι 5 παράμετροι του σχετικού προσανατολισμού. Εισαγωγή των αποτελεσμάτων από τους προαναφερθέντες αλγορίθμους ως αρχικών τιμών σε αυστηρούς

(μη γραμμικούς) αλγόριθμους προφανώς βελτιώνει την ακρίβεια τους. Συνεπώς ακόμα και σε στερεοζεύγος με άγνωστα τα στοιχεία που περιγράφουν τη γεωμετρία της μηχανής, ο υπολογισμός του σχετικού προσανατολισμού μπορεί υπό προϋποθέσεις να καταστεί δυνατός με ικανοποιητική ακρίβεια εάν αναλογιστεί κανείς ότι παρακάμπτεται η χρονοβόρα διαδικασία της βαθμονόμησης ή η χρήση ακριβών μετρητικών μηχανών.

Επίσης, με τη διατύπωση της έννοιας του επιπολικού πίνακα F , ο οποίος περιγράφει τη δισδιάστατη επιπολική γεωμετρία σε ζεύγος εικόνων, μπορεί από μη βαθμονομημένες εικόνες να υπολογιστούν οι θέσεις των πόλων στις εικόνες, και μέσω αυτού οι ομόλογες επιπολικές ευθείες, και να γίνει επιπολική επανασύσταση εικόνων αλλά και 3D ανακατασκευή του απεικονιζόμενου αντικειμένου, η οποία θα χαρακτηρίζεται από προβολική αβεβαιότητα (που αίρεται με γνώση ≥ 5 σημείων γνωστών συντεταγμένων χώρου). Ο προσδιορισμός των πόλων, που μέχρι πρότινος δεν ήταν μείζονος σημασίας θέμα στην φωτογραμμετρία, διαδραματίζει πλέον κεντρικό ρόλο στις νέες αυτές προσεγγίσεις.

Συν τοις άλλοις, εξετάστηκαν και εφαρμόστηκαν διαδικασίες ψηφιακής συνταύτισης, που επικεντρώνονται στη αυτόματη εξαγωγή και συνταύτιση χαρακτηριστικών με τον αλγόριθμο SIFT που (προερχόμενος από το πεδίο της όρασης υπολογιστών) εντοπίζει ομόλογα σημεία, ακόμα και μεταξύ λήψεων με έντονες στροφές, προοπτικές παραμορφώσεις, μεταβολές στην κλίμακα και τη φωτεινότητα.

Όλα τα παραπάνω υλοποιήθηκαν και εφαρμόστηκαν με επιτυχία στο πλαίσιο της διπλωματικής αυτής εργασίας. Οι διαδικασίες προσανατολισμού βασίστηκαν, μάλιστα, στην αυτόματη αποκατάσταση ομολογιών μεταξύ εικονοσημείων, οι οποίες, συνδυαζόμενες με γραμμικούς αλγόριθμους, επιτρέπουν να αυτοματοποιηθεί πλήρως η διαδικασία προσανατολισμού και βαθμονόμησης. Γενικά, βέβαια, κάθε προσέγγιση έχει φυσικά το δικό της πεδίο εφαρμογής, επομένως και τους δικούς της περιορισμούς που πρέπει να αξιολογούνται κατά περίπτωση. Η περιορισμένη απαίτηση σε *a priori* δεδομένα, για παράδειγμα, έχει το κόστος της περιορισμένης ακρίβειας ή της ευαισθησίας στον θόρυβο, επομένως τα αποτελέσματά σκόπιμο είναι, όπου αυτό είναι δυνατόν, να αποτελούν το πρώτο βήμα για την αυτοματοποίηση βάσει των ακριβέστερων μη γραμμικών αλγορίθμων.

Όσα αναφέρθηκαν παραπάνω συμβάλλουν σήμερα, από την μεριά τους, και σε πλήθος ενδιαφερουσών διαδικασιών, όπως ο αυτόματος εντοπισμός αντικειμένων μεταξύ πολλαπλών λήψεων ή η δημιουργία τρισδιάστατων μοντέλων αντικειμένων, όπως ειδικότερα κτηρίων από πλήθος εικόνων του Διαδικτύου προερχόμενων από μη βαθμονομημένες μηχανές. Άλλες ενδιαφέρουσες διαδικασίες είναι, ενδεικτικά, η αυτόματη πλοήγηση robot, καθώς καθίσταται δυνατός ο εντοπισμός εμποδίων με τη βοήθεια της προβολικής ανακατασκευής αντικειμένων που περιέχονται σε εικόνες εισημμένες από μηχανή ενσωματωμένη στο robot, ή ο υπολογισμός του εσωτερικού και εξωτερικού προσανατολισμού μηχανών ώστε να επιτρέπεται η εισαγωγή γραφικών σε σκηνές κινηματογραφικών ταινιών. Τέλος, δεν πρέπει να υποτιμηθεί η συμβολή όσων αναφέρθηκαν στα προηγούμενα στην αυτοματοποίηση των φωτογραμμετρικών διαδικασιών, που αποτελεί ζωτική ανάγκη της ψηφιακής φωτογραμμετρίας.

Πράγματι, οι γραμμικοί-προβολικοί αλγόριθμοι άνοιξαν νέους ορίζοντες και για το πε-

δίο της φωτογραμμετρίας, επαναφέροντας στο προσκήνιο έννοιες που είχαν διατυπωθεί παλαιότερα, αλλά ποτέ στην συνέχεια δεν εξετάστηκαν ουσιαστικά. Η περαιτέρω έρευνα σχετικά με αυτές τις έννοιες, καθώς και η επανεξέταση εμπεδωμένων ιδεών της φωτογραμμετρίας, κρίνεται αναγκαία. Σημαντική συνδρομή στην προσπάθεια αυτή θα φέρει η συνεργασία ερευνητών από τα δύο αυτά πεδία.

8.2 Προτάσεις για το μέλλον

Όπως επισημάνθηκε, η εμβάθυνση της έρευνας σε ανάλογα θέματα θεωρείται ιδιαίτε- ρως κρίσιμη. Ολοκληρώνοντας την παρούσα διπλωματική εργασία, μπορεί να ανα- φερθεί κανείς εδώ σε ορισμένες ιδέες και ανοιχτά ζητήματα για περαιτέρω ενασχό- ληση, πχ. σε μελλοντικές διπλωματικές εργασίες.

Κατ' αρχάς, στο Κεφάλαιο 5 μελετήθηκαν περιπτώσεις μερικής αυτοβαθμονόμησης, δεδομένου ότι ο υπολογισμός όλων των παραμέτρων του εσωτερικού προσανατολι- σμού από ζεύγος εικόνων δεν είναι δυνατός. Θα ήταν χρήσιμη, έτσι, η έρευνα σχετικά με την πλήρη βαθμονόμηση, η οποία είναι δυνατή εάν είναι διαθέσιμες τρεις (ή βέ- βαια και περισσότερες εικόνες) από την ίδια μηχανή, και γενικότερα η μελέτη του “τρι- εστιακού τανυστή” (trifocal tensor) που υπό μια έννοια είναι η γενίκευση του επιπολι- κού πίνακα στις τρεις εικόνες.

Ακόμα, οι γραμμικοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν εδώ για τον υπολογισμό της σταθεράς της μηχανής εμφανίζονται ως ιδιαίτερα ευαίσθητοι στον θόρυβο και την υ- πόθεση σχετικά με τη θέση του πρωτεύοντος σημείου. Θα ήταν, λοιπόν, ενδιαφέρον να διεξαχθούν σειρά πειραμάτων που να συνδέουν το θόρυβο των παρατηρήσεων και την αβεβαιότητα, ή το σφάλμα, στον ορισμό της θέσης του πρωτεύοντος σημείου με την ποιότητα των αποτελεσμάτων που επιστρέφουν οι αλγόριθμοι. Χρήσιμος, στο πλαίσιο αυτό, θα ήταν επιπλέον και ο συνδυασμός των γραμμικών αλγορίθμων με α- νεξάρτητη εκτίμηση του πολυωνύμου που μοντελοποιεί την ακτινική διαστροφή του φακού, όσο βέβαια και η αναλυτικότερη διερεύνηση των κρίσιμων γεωμετριών όπου οι συγκεκριμένοι αλγόριθμοι δεν επιστρέφουν αποτελέσματα.

Άλλη μια ενδιαφέρουσα προοπτική για περαιτέρω ερευνητική ενασχόληση είναι ο υ- πολογισμός του επιπολικού πίνακα από ομολογίες γραμμών αντί για ομολογίες ση- μείων.

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε, συν τοις άλλοις, και άρση της προβολι- κής αβεβαιότητας με χρήση φωτοσταθερών σημείων. Η προβολική ανακατασκευή θα μπορούσε όμως να αναβαθμιστεί σε ευκλείδεια και με δεσμεύσεις επί του αντικειμέ- νου, όπως είναι για παράδειγμα η ύπαρξη παράλληλων και (κυρίως, αφού η παραλ- ληλία δεν αίρει την αφινική αβεβαιότητα) κάθετων διευθύνσεων. Η διατύπωση αλγο- ρίθμου που να ενσωματώνει το ενδεχόμενο αυτό θα ήταν πράγματι ενδιαφέρουσα.

Τέλος, όλα όσα έχουν αναφερθεί στο πλαίσιο της συγκεκριμένης εργασίας βασίζονται στην υπόθεση της μηχανής σημειακής οπής (*pin-hole camera*). Η χρήση διαφορετι- κού μοντέλου μηχανής, που ενσωματώνει αφινικές παραμέτρους (μη ορθογωνικότη- τα των αξόνων και διαφορετική κλίμακα κατά τις δύο διευθύνσεις) είναι ένα θέμα που και αυτό χρήζει επιπλέον διερεύνησης.

9

Βιβλιογραφία

Ackermann, F., 1984. Digital image correlation: performance and potential application in photogrammetry. *Photogrammetric Record*, 11(64), pp. 429-439.

Bougnoux, S., 1998. From projective to Euclidean space under any practical situation, a criticism of self-calibration. *International Conference of Computer Vision*, pp. 790-796.

Γεωργόπουλος, Α., 1998. *Ψηφιακή Φωτογραμμετρία*. Σπουδαστικές σημειώσεις ΕΜΠ.

Chang, B., 1986. The formulae of the relative orientation for non-metric camera. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, 26(5), pp. 14-22

Γραμματικόπουλος, Λ., 2007. *Γεωμετρική Πληροφορία από Μεμονωμένες Εικόνες στην Φωτογραμμετρία και την Όραση Υπολογιστών*. Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ.

Δερμάνης, Α., 1991. *Αναλυτική Φωτογραμμετρία*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη

Devernay, F., Faugeras, O., 1995. From Projective to Euclidean Reconstruction. *INRIA Technical Report RR-2725*.

Douskos, V., Grammatikopoulos, L., Kalisperakis, I., Karras, G., Petsa, E., 2009. FAUCCAL: An open source toolbox for fully automatic camera calibration. *XXII CIPA Symposium on Digital Documentation, Interpretation & Presentation of Cultural Heritage*, October 11-15, 2009, Kyoto, Japan.

Faugeras, O.D., 1992. 1992. What can be seen in three dimensions with an uncalibrated stereo-rig? *European Conference on Computer Vision*, Springer, pp. 563-578.

Faugeras, O.D., 1995. Stratification of 3D vision: projective, affine, and metric representations. *Journal of the Optical Society of America*, A12, pp. 465-484.

Faugeras, O.D., Maybank, S., 1990. Motion from point matches: multiplicity of solutions. *International Journal of Computer Vision*, 4(3), pp. 225-246.

Fischler, M., Bolles, R., 1981. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Communications of the Association for Computing Machinery*, 24(6), pp. 381-395.

- Förstner, W., 1982. On the geometric precision of digital correlation. *International Archives of Photogrammetry*, 24(3), pp. 176-189.
- Förstner, W., 1986. A feature-based correspondence algorithm for image matching and least squares matching. *International Archives of Photogrammetry*, 26(3/3), pp. 150-166.
- Grün, A., 1996. Least squares matching: a fundamental measurement algorithm. In: Atkinson K.B. (ed.), *Close Range Photogrammetry and Machine Vision*, Whittles Publishing, pp. 217-255.
- Haralick, R., Shapiro, L., 1993. *Computer and Robot Vision*. Addison-Wesley, N.Y.
- Harris, C., Stephens, M., 1988. A combined corner and edge detector. *Proc. 4th Alvey Vision Conference*, pp. 147-151.
- Hartley, R., 1992. Estimation of relative camera positions for uncalibrated cameras. *European Conference of Computer Vision*, Springer, pp. 579-587.
- Hartley, R., 1997a. In defence of the eight-point algorithm. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(6), pp. 580-593.
- Hartley, R., 1997b. Kruppa's equations derived from the fundamental matrix. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(2), pp. 133-135.
- Hartley, R., Sturm, P., 1997. Triangulation. *Computer Vision and Image Understanding*, 68(2), pp. 146-157.
- Hartley R., Zisserman A., 2003. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. 2nd edition, Cambridge University Press.
- Huang, T.S., Faugeras, O.D., 1989. Some properties of the E-matrix in two-view motion estimation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, 11(12), pp. 1310-1312.
- Θεοφάνους, Α., 2004. *Ανάπτυξη Προγράμματος για την Επιπολική Επανασύσταση Στερεοζεύγους*. Πτυχιακή εργασία, Τμήμα Τοπογραφίας ΤΕΙ Αθήνας.
- Καλησπεράκης, Η., 2010. *Η Επιπολική Γεωμετρία στον Προβολικό και τον Ευκλείδειο Χώρο*. Διδακτορική Διατριβή, ΣΑΤΜ ΕΜΠ.
- Kalisperakis, I., Karras, G., Petsa, E., 2005. Estimation of camera parameters from stereopairs with no external control information. *XX CIPA International Symposium*, Torino, pp. 390-394.
- Καλησπεράκης, Η., Τζάκος, Α., 2001. *Πολυεικονική Συνόρθωση με Αυτοβαθμονόμηση*. Διπλωματική εργασία, ΣΑΤΜ ΕΜΠ.
- Καλούση, Γ., 2006. *Σχετικός Προσανατολισμός Στερεοζεύγους και Μερική Αυτοβαθμονόμηση Μηχανής με Δεσμεύσεις επί του Αντικειμένου*. Διπλωματική εργασία, ΣΑΤΜ ΕΜΠ.
- Καρράς, Γ., 1998. *Γραμμικοί Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων στην Φωτογραμμετρία*. Σπουδαστικές σημειώσεις, ΣΑΤΜ ΕΜΠ.

- Καρφής, Α., 2009. *Διερεύνηση Φωτογραμμετρικών Αυτοματισμών με Χρήση της Επιπολικής Γεωμετρίας*. Διπλωματική Εργασία, ΣΑΤΜ ΕΜΠ.
- Khlebnikova, T.A., 1983. Determining relative orientation angles of oblique aerial photographs. *Mapping Science and Remote Sensing*, 21(1), pp. 95-100.
- Kraus, K., 2003. *Φωτογραμμετρία*. Τόμος 1, Εκδόσεις ΤΕΕ.
- Κυπαρρίση, Β., 2011. *Συνένωση Νεφών Σημείων από Ομολογίες Εικόνων*. Διπλωματική Εργασία, ΣΑΤΜ ΕΜΠ.
- Longuet-Higgins, H.C., 1981. A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections. *Nature*, 293, pp. 133-135.
- Lowe, D., 2004. Distinctive image features from scale invariant keypoints. *The International Journal of Computer Vision*, 2(60), pp.91-110.
- Luong, Q.T., Deriche, R., Faugeras, O., Papadopoulou, T., 1993. *On Determining the Fundamental Matrix: Analysis of Different Methods and Experimental Results*. INRIA Technical Report RR-1894.
- Luong, Q.T., Faugeras, O.D., 1996. The fundamental matrix: theory algorithms and stability analysis. *The International Journal of Computer Vision*, 17(1), pp. 43-75.
- Mallon, J., Whelan, P.F., 2005. Projective rectification from the fundamental matrix. *Image and Vision Computing*, 23(7), pp. 643-650.
- Maybank, S.J., Faugeras, O.D., 1992. A theory of self-calibration of a moving camera. *International Journal of Computer Vision*, 8(2), pp. 123-151.
- Moravec, H.P., 1979. Visual mapping by robot rover. *Proc. 6th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 598-600
- Μπουτσικάκης, Δ., 2003. *Προγραμματισμός & Έλεγχος Γραμμικού Αλγορίθμου Σχετικού Προσανατολισμού με Εφαρμογή του στην Αυτόματη Εύρεση Προσεγγιστικών Τιμών σε Πολυεικονικές Συνορθώσεις*. Διπλωματική εργασία, ΣΑΤΜ ΕΜΠ.
- Μουντράκης, Γ., 1998. *Προσδιορισμός και Διόρθωση της Ακτινικής Διαστροφής Υπερευρυγώνιων Φακών από Λήψεις Ευθειογενών Αντικειμένων*. Διπλωματική εργασία, ΤΑΤΜ ΕΜΠ.
- Newsam, G.N., Huynh, D.Q., Brooks M.J., Pan H.P., 1996. Recovering unknown focal lengths in self-calibration: an essentially linear algorithm and degenerate configurations. *International Archives of Photogrammetry & Remote Sensing*, 31(3), pp. 575-580.
- Πατιάς, Π., 1991. *Εισαγωγή στη Φωτογραμμετρία*. Ζήτη, Θεσσαλονίκη
- Πέτσα, Ε., 2000. *Θεμελιώδεις Έννοιες και Θεμελιώδη Προβλήματα της Φωτογραμμετρίας*. Σπουδαστικές σημειώσεις, Τμήμα Τοπογραφίας ΤΕΙ Αθήνας.
- Pollefeys, M., Koch, R., van Gool, L.J., 1999. A simple and efficient rectification method for general motion. *International Conference on Computer Vision*, vol. 1, pp. 496-501.

Πρόκος, Α., Καρράς, Γ., 2008. *Εισαγωγή στην Συνταύτιση Εικόνων*. Σπουδαστικές σημειώσεις, ΣΑΤΜ ΕΜΠ.

Remondino, F., 2006. Detectors and descriptors for photogrammetric applications. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, ISPRS Commission III Symposium, Bonn, Germany.

Shih, T.Y., 1994. RLT: A closed form solution for relative orientation. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, 30(5), pp. 357-363.

Stefanovic, P., 1973. Relative orientation – a new approach. *ITC Journal*, 3/1973, pp. 417-448.

Στεντούμης, Χ., 2007. *Ελαχιστοτετραγωνική Συνταύτιση Εικόνας. Σύνταξη Προγράμματος και Εφαρμογή στον Αυτόματο Σχετικό Προσανατολισμό Αεροφωτογραφιών*. Διπλωματική Εργασία, ΣΑΤΜ ΕΜΠ.

Sturm, P., 2000. A case against Kruppa's equations for camera self-calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(10), pp. 1199-1204.

Sturm, P., 1997. Critical motion sequences for monocular self-calibration and uncalibrated Euclidean reconstruction. *Proc. IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 1100-1105.

Sturm, P., 2001. On focal length calibration from two views. *International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 145-150.

Sturm, P., Cheng, Z.L., Chen, P.C.Y., Poo A.N., 2005. Focal length calibration from two views: method and analysis of singular cases. *Computer Vision and Image Understanding*, 99(1), pp. 58-95.

Sturm, P., Triggs, B., 1996. A factorization based algorithm for multi-image projective structure and motion. *Proc. 4th European Conference on Computer Vision*, Volume II, pp. 709-720.

Szeliski, R., 2010. *Computer Vision: Algorithms and Applications*. Springer.

Thompson, E.H., 1959. A rational algebraic formulation of the problem of relative orientation. *The Photogrammetric Record*, 3(14), pp. 152-159.

Torr, P.H.S., Murray, D., 1997. The development and comparison of robust methods for estimating the fundamental matrix. *The International Journal of Computer Vision*, 24(3), pp. 271-300.

Torr, P.H.S., Murray, D., 1993. Outlier detection and motion segmentation. *Sensor Fusion VI*, Proc. SPIE, vol. 2059, pp. 432-443.

Τσερνοτόπουλος Ν., 2006. *Ανάπτυξη και Εφαρμογή Αλγορίθμου για την Επιπολική Επανασύσταση Στερεοζεύγους*. Διπλωματική εργασία, ΣΑΤΜ ΕΜΠ.

Tuytelaars, T., van Gool, L., 2004. Matching widely separated views based on affine invariant regions. *International Journal of Computer Vision*, 59 (1), pp. 61-85.

Ψάλτης, Χ., 2005. *Αυτόματος Εντοπισμός και Αναγνώριση Στόχων με τη Στρατηγική Συνταύτισης Προτύπων*. Διπλωματική εργασία, ΣΑΤΜ ΕΜΠ.

Διαδικτυακοί Τόποι

<http://www.aishack.in/2010/05/sift-scale-invariant-feature-transform/>

<http://cvlab.epfl.ch/~strecha/multiview/denseMVS.html>

<http://www.cs.ubc.ca/~lowe/keypoints/>

<http://www.csse.uwa.edu.au/~du/Software/Welcome.html>

<http://www.csse.uwa.edu.au/~pk/research/matlabfns/>

https://docs.google.com/viewer?url=http%3A%2F%2Fwww.cse.lehigh.edu%2F~spletzer%2Fcse397_Fall05%2Fmike.ppt

http://www.eecs.umich.edu/~silvio/teaching/EECS598/lectures/lecture10_1.pdf

http://rosset.org/graphix/anaglyph/zanag_en.htm

<http://www.scribd.com/doc/50814075/50/%CE%86%C2%B5%CE%B5%CF%83%CE%BF%CF%82%CE%B3%CF%81%CE%B1%C2%B5%C2%B5%CE%B9%CE%BA%CF%8C%CF%82%C2%B5%CE%B5%CF%84%CE%B1%CF%83%CF%87%CE%B7%C2%B5%CE%B1%CF%84%CE%B9%CF%83%C2%B5%CF%8C%CF%82-DLT>

<http://www.slideshare.net/wolf/michal-erels-sift-presentation>

Παράρτημα

Σημεία στον προβολικό χώρο

Τα σημεία του προβολικού χώρου P^n αναπαριστώνται μέσω $(n+1)$ συντεταγμένων $x = [x_1 \dots x_{n+1}]^T$, σε αντίθεση με τα σημεία του ευκλείδειου χώρου R^n , που αναπαριστώνται με n συντεταγμένες, ως $x = [x_1 \dots x_n]^T$. Δύο σημεία x, x' του R^{n+1} αντιστοιχίζονται στο ίδιο σημείο του P^n , εάν υπάρχει λ ώστε $x' = \lambda x = \lambda[x_1 \dots x_n]^T$. Άρα το σύμβολο της ισότητας όταν αφορά εικονοσυντεταγμένες εμπεριέχει και τον πολλαπλασιασμό με στοιχείο λ . Σημείο του R^n οριζόμενο από το διάνυσμα $\tilde{x} = [\tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_n]^T$ ορίζεται στον P^n ως το ομογενές διάνυσμα $\tilde{x} = [\tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_n \ 1]^T$. Ένα σημείο x με ομογενείς συντεταγμένες $x = [x_1 \dots x_{n+1}]^T$ ορίζεται από μη ομογενείς συντεταγμένες ως $x = [x_1/x_{n+1} \dots x_n/x_{n+1}]^T$, συνεπώς σημεία του P^n με $x_{n+1} = 0$ δεν μπορούν να αποδοθούν και αποτελούν σημεία του απείρου.

Για προβολικούς χώρους συγκεκριμένων διαστάσεων προκύπτει:

σημείο προβολικής ευθείας, δηλαδή του μονοδιάστατου προβολικού χώρου P^1 , ορίζεται σε ομογενείς συντεταγμένες ως:

$$x \in P^1 \Leftrightarrow x = [x_1 \ x_2]^T, \ x_1, x_2 \in R \quad (1)$$

Αντίστοιχα, σημείο επιπέδου, δηλαδή του δισδιάστατου προβολικού χώρου P^2 , ως:

$$x \in P^2 \Leftrightarrow x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T, \ x_1, x_2, x_3 \in R \quad (2)$$

Και σημείο του 3D προβολικού χώρου ως:

$$x \in P^3 \Leftrightarrow x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T, \ x_1, x_2, x_3, x_4 \in R \quad (3)$$

Ευθείες στο προβολικό επίπεδο

Η ευθεία στον προβολικό χώρο P^2 αναπαριστάται ως εξής:

$$l = [a \ b \ c]^T \quad (4)$$

Σημείο $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ ανήκει στην ευθεία εάν ικανοποιείται η σχέση

$$x^T l = 0 \quad (5)$$

Το σημείο τομής δύο ευθειών προκύπτει ως το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων τους, ώστε:

$$x = l \times l' \quad (6)$$

Ενώ ευθεία που διέρχεται από 2 σημεία x, x' ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων των ομογενών συντεταγμένων τους:

$$l = x \times x' \quad (7)$$

Το παραπάνω εξωτερικό γινόμενο μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του αντισυμμετρικού πίνακα (του εξωτερικού γινομένου $[\mathbf{x}]\mathbf{x}$) σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{x}' = [\mathbf{x}]_{\times} \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Επίπεδα στον 3D προβολικό χώρο

Κάθε επίπεδο του τρισδιάστατου προβολικού χώρου ορίζεται ως:

$$\mathbf{\Pi} = [\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4]^T \quad (9)$$

Για να ανήκει σημείο $\mathbf{x} = [x_1 x_2 x_3 x_4]$ στο επίπεδο αυτό θα πρέπει να ισχύει:

$$\mathbf{\Pi}^T \mathbf{x} = 0 \quad (10)$$

Επιφάνειες 2^{ου} βαθμού στον 3D προβολικό χώρο

Μία επιφάνεια 2^{ου} βαθμού στον τρισδιάστατο προβολικό χώρο P^3 ορίζεται αλγεβρικά από συμμετρικό ομογενή πίνακα διαστάσεων 4×4 με 9 βαθμούς ελευθερίας, συνεπώς 9 σημεία αρκούν πλήρως για τον ορισμό της. Σημείο $\mathbf{x} = [x_1 x_2 x_3 x_4]^T$ ανήκει σε αυτήν εάν ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = 0 \quad (11)$$

Κωνικές τομές στο επίπεδο

Μια κωνική τομή \mathbf{C} στο προβολικό επίπεδο και ορίζεται αλγεβρικά μέσω ενός συμμετρικού πίνακα 3×3 :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \quad (12)$$

Εμφανίζει 5 βαθμούς ελευθερίας, καθώς μόνο οι λόγοι των 6 παραμέτρων έχουν σημασία. Η κωνική τομή αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής δύο επίπεδων κεντρικών δεσμών ευθειών που βρίσκονται σε προβολική αντιστοιχία.

Με 5 ομολογίες σημείων μπορεί να οριστεί πλήρως η κωνική, με βάση την ακόλουθη σχέση που οφείλουν να πληρούν τα σημεία του P^2 $\mathbf{x} = [x_1 x_2 x_3]^T$ που ανήκουν σε αυτή:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = 0 \quad (13)$$

Προβολικοί μετασχηματισμοί

Οποιοσδήποτε αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός του P^n , σε ομογενείς συν-

τεταγμένες μεταξύ ομώνυμων στοιχείων, καλείται ομογραφία. Κάθε αντίστροφη ομογραφία, καθώς και ο συνδυασμός δύο ή περισσότερων ομογραφιών, συνιστούν επίσης ομογραφία.

Ο μετασχηματισμός αυτός περιγράφεται από πίνακα \mathbf{H} διαστάσεων $(n+1) \times (n+1)$ (πολλαπλασιασμός του πίνακα με σταθερά λ περιγράφει τον ίδιο μετασχηματισμό).

Τα σημεία μετασχηματίζονται με βάση τη σχέση:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (14)$$

ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός προκύπτει από την εξίσωση:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{x}' \quad (15)$$

Τέλος, η επιφάνεια $2^{\text{ου}}$ βαθμού αντιστοιχεί στην εξής:

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{H}^{-T}\mathbf{Q}\mathbf{H}^{-1} \quad (16)$$

Προβολικοί μετασχηματισμοί στον P^1

Η ομογραφία στον μονοδιάστατο προβολικό χώρο εκφράζεται μέσω ενός αντιστρέψιμου πίνακα \mathbf{H} διαστάσεων 2×2 με 3 βαθμούς ελευθερίας και 3 ομολογίες αρκούν για τον πλήρη ορισμό του. Το σημείο ομογενών συντεταγμένων $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$ μετασχηματίζεται στο $\mathbf{x}' = [x_1' \ x_2']^T$. Αναλλοίωτη ιδιότητα του μετασχηματισμού αυτού αποτελεί ο διπλός λόγος, όπως αυτός αναφέρθηκε στην ενότητα 4.5.1.

Μέχρι στιγμής ο μονοδιάστατος προβολικός χώρος P^1 έχει οριστεί ως το σύνολο των σημείων που απαρτίζουν μια ευθεία. Είναι δυνατόν όμως να οριστεί επίσης και ως μια επίπεδη δέσμη ακτίνων (δηλαδή ως το σύνολο των ευθειών επιπέδου που διέρχονται από σημείο). Τότε οι ομογενείς συντεταγμένες εκφράζουν την κλίση των ευθειών της δέσμης.

Προβολικοί μετασχηματισμοί στον P^2

Ο μετασχηματισμός αυτός ορίζεται από έναν ομογενή αντιστρέψιμο πίνακα \mathbf{H} διαστάσεων 3×3 . Έχει 8 βαθμούς ελευθερίας και μετασχηματίζει το σημείο $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ στο $\mathbf{x}' = [x_1' \ x_2' \ x_3']^T$ μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}\mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Για να οριστεί πλήρως απαιτεί τη γνώση τεσσάρων σημείων.

Κατά τον μετασχηματισμό αυτό οι ευθείες μετασχηματίζονται σε ευθείες και τα σημεία τομής τους δεν αλλοιώνονται. Το ίδιο συμβαίνει για την κωνική τομή, η οποία βέβαια δεν διατηρεί κατ' ανάγκην το είδος της (έλλειψη, υπερβολή κ.λπ.), καθώς και για τον

διπλό λόγο.

Η ομογραφία αυτή περιγράφει την κεντρική προβολή επίπεδου αντικειμένου και σε αυτήν στηρίζεται η διαδικασία της φωτογραμμετρικής αναγωγής, που αποκαθιστά της μετρικές ιδιότητες εικόνας επίπεδου αντικείμενου, αίροντας τις προοπτικές παραμορφώσεις. Συνδέει επίσης εικονοσημεία λήψεων του ίδιου δισδιάστατου αντικειμένου, αλλά και εικονοσημεία 3D αντικειμένου σε λήψεις που διαφέρουν μόνο κατά στροφή.

Προβολικοί μετασχηματισμοί στον P^3

Στον τρισδιάστατο προβολικό χώρο το σημείο \mathbf{x} αντιστοιχίζεται στο \mathbf{x}' με βάση την εξής σχέση:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}\mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Ο μετασχηματισμός \mathbf{H} εκφράζεται μέσω του ομογενούς αντιστρέψιμου πίνακα διαστάσεων 4×4 , ο οποίος εμφανίζει 15 βαθμούς ελευθερίας, και 5 αντιστοιχίες σημείων αρκούν πλήρως για τον ορισμό του.

Αφινικοί μετασχηματισμοί

Αφινικοί μετασχηματισμοί στον P^2

Ο γραμμικός μετασχηματισμός στο προβολικό επίπεδο, ο οποίος διατηρεί αναλλοίωτη την ευθεία του απείρου $l_\infty = [0 \ 0 \ 1]^T$ ονομάζεται αφινικός ή ομοπαράλληλος. Σημείο τομής αυτής της ευθείας με την $l = [a \ b \ c]^T$ είναι (μέσω του εξωτερικού γινομένου) το $x = [b - a \ 0]^T$, το οποίο αποτελεί το σημείο φυγής της και ο λόγος των μη μηδενικών συντεταγμένων του εκφράζει την κλίση της ευθείας. Κάθε ευθεία παράλληλη στην l , τέμνει την l_∞ στο ίδιο σημείο φυγής, ενώ το σημείο τομής δύο παράλληλων ευθειών ανήκει στην l_∞ .

Μέσω αυτού, το σημείο \mathbf{x} μετασχηματίζεται στο \mathbf{x}' με βάση τη σχέση:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}\mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Ο \mathbf{H} έχει 6 βαθμούς ελευθερίας, υπολείπεται δηλαδή της ομογραφίας κατά 2 βαθμούς ελευθερίας, που απαιτούνται για τον ορισμό της l_∞ . Για τον πλήρη ορισμό τους αρκούν 3 ομολογίες σημείων (βλ. αναλυτικά ενότητα 2.2). Ο μετασχηματισμός αυτός διατηρεί αναλλοίωτους τους λόγους των μηκών σε κάθε διεύθυνση και των εμβαδών.

Αφινικός μετασχηματισμός στον P^3

Ο αφινικός μετασχηματισμός του τρισδιάστατου χώρου είναι γραμμικός και δεν μετα-

βάλλει τη θέση του $\Pi_\infty = [0\ 0\ 0\ 1]^T$. Αντιστοιχίζει το σημείο \mathbf{x} στο \mathbf{x}' μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}\mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Εμφανίζει 12 βαθμούς ελευθερίας, 3 δηλαδή λιγότερους από την ομογραφία, οι οποίοι ουσιαστικά απαιτούνται για να οριστεί η θέση του απείρου. Για τον πλήρη ορισμό του απαιτούνται κατ' ελάχιστον 4 ομολογίες σημείων. Βασικές αναλλοίωτες ιδιότητές του αποτελούν η παραλληλία και ο λόγος των όγκων.

Δύο επίπεδα του τρισδιάστατου χώρου είναι παράλληλα εάν και μόνο εάν η ευθεία τομής τους ανήκει στο επίπεδο του απείρου, ενώ ένα επίπεδο π είναι παράλληλο με ευθεία εάν το σημείο τομής τους ανήκει στο Π_∞ .

Μετασχηματισμοί ομοιότητας

Ο μετασχηματισμός ομοιότητας μπορεί να οριστεί μέσω μιας συγκεκριμένης εκφυλισμένης επιφάνειας $2^{\text{ου}}$ βαθμού, η οποία ανήκει στο Π_∞ και καλείται απόλυτη επιφάνεια $2^{\text{ου}}$ βαθμού Ω_∞ (*absolute quadric*).

Έστω σημείο $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n \ 1]^T$ στο Π_∞ το οποίο ανήκει στην απόλυτη κωνική εάν:

$$\mathbf{x}^T \Omega \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \\ x_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Για να αναβαθμιστεί ο προβολικός χώρος σε ευκλείδειο αρκεί ο εντοπισμός της θέσης της Ω_∞ . Αυστηρά μιλώντας, βέβαια, διαπιστώνει κανείς ότι η Ω_∞ επιτρέπει να οριστεί η γεωμετρία ομοιότητας και όχι η ευκλείδεια, δεδομένου πως ως ευκλείδειος ορίζεται ο μετασχηματισμός εκείνος που διατηρεί την θέση της Ω_∞ αλλά επιπλέον έχει και μοναδιαία ορίζουσα.

Μετασχηματισμός ομοιότητας στον P^2

Σημείο $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ του δισδιάστατου προβολικού χώρου ανήκει στην Ω_∞ εάν πληρούται η ακόλουθη δέσμευση:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Σημεία που ικανοποιούν αυτή τη σχέση είναι τα $\mathbf{I} = [1 \ i \ 0]^T$ και $\mathbf{J} = [1 \ -i \ 0]^T$, τα οποία ονομάζονται κυκλικά σημεία. Ανήκουν στην ευθεία του απείρου καθώς η τρίτη συντεταγμένη τους είναι μηδενική και ικανοποιούν κάθε εξίσωση κύκλου, άρα μπορούν να οριστούν ως τα σημεία τομής όλων των κύκλων με την l_∞ .

Ο μετασχηματισμός ομοιότητας αντιστοιχίζει σημεία μέσω της σχέσης:

$$x' = Hx \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cos(\theta) & -\lambda \sin(\theta) & t_x \\ \lambda \sin(\theta) & \lambda \cos(\theta) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Εμφανίζει 4 ανεξάρτητες παραμέτρους, οι οποίες μπορούν να ερμηνευτούν γεωμετρικά από δύο μεταθέσεις, μία στροφή και μία αλλαγή κλίμακας, για τον προσδιορισμό των οποίων απαιτούνται 2 κατ' ελάχιστον ομοιογένες σημείων. Οι μετασχηματισμοί που εμφανίζουν μοναδιαία αλλαγή κλίμακας ονομάζονται ισομετρικοί ή ευκλείδειοι. Ο μετασχηματισμός ομοιότητας διατηρεί αναλλοίωτο το σχήμα, ενώ ο ισομετρικός διατηρεί επίσης τα μήκη και τα εμβαδά.

Μετασχηματισμός ομοιότητας στον P^3

Στον τρισδιάστατο χώρο η Ω_∞ ανήκει στο Π_∞ και είναι στην πραγματικότητα μία κωνική τομή, η οποία ονομάζεται απόλυτη κωνική C_∞ . Ένα σημείο x για να ανήκει σε αυτή θα πρέπει:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Επίπεδο του χώρου Π τέμνει το Π_∞ κατά την ευθεία του απείρου του συγκεκριμένου επιπέδου, η οποία τέμνει την απόλυτη κωνική σε δύο σημεία, τα κυκλικά σημεία του Π . Οποιαδήποτε σφαίρα του χώρου τέμνει το Π_∞ κατά την C_∞ .

Ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός χαρακτηρίζεται από 7 βαθμούς ελευθερίας, 3 μεταθέσεις, 3 στροφές και μία αλλαγή κλίμακας, και χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο για τον απόλυτο προσανατολισμό του στερεοζεύγους.

Ετερογραφίες

Ο προβολικός μετασχηματισμός του P^n που ορίζεται από τον πίνακα H διαστάσεων $(n+1) \times (n+1)$ και περιγράφει την προβολική σχέση μεταξύ ετερώνυμων στοιχείων ονομάζεται ετερογραφία. Εάν ο H είναι αντιστρέψιμος, ορίζεται και ο αντίστροφος μετασχηματισμός μέσω του H^{-1} , ο οποίος συνιστά επίσης ετερογραφία. Οι ετερογραφίες, σε αντίθεση με τις ομογραφίες, δεν συνιστούν ομάδα μετασχηματισμού καθώς η σύνθεση δύο ετερογραφιών οδηγεί σε ομογραφία.

Οι μη αντιστρέψιμες ετερογραφίες του προβολικού επιπέδου P^2 αναπαρίστανται από πίνακα H (3×3) μηδενικής ορίζουσας και αντιστοιχίζουν σημεία με ευθείες διερχόμενες από σημείο (αποτελούν δηλαδή επίπεδη δέσμη ακτίνων). Πιο συγκεκριμένα, το μαθηματικό μοντέλο του επιπολικού πίνακα περιγράφει μία δισδιάστατη, μη αντιστρέψιμη ετερογραφία, η οποία συνδέει σημεία της μίας εικόνας με τη διερχόμενη δια το πόλου δέσμη των επιπολικών ευθειών της άλλης εικόνας. Τα ομόλογα σημεία οφείλουν να είναι συζυγή ως προς τον επιπολικό πίνακα, συνεπώς να ισχύει η σχέση:

$$x'Fx = 0 \quad (25)$$

Προβολικός πίνακας μηχανής

Ο τρισδιάστατος προβολικός χώρος προβάλλεται στο επίπεδο της εικόνας δια μέ-

σου σημείου, εκτός του επιπέδου αυτού, μέσω του πίνακα \mathbf{P} . Πιο συγκεκριμένα σημείο $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4]$ του \mathbb{P}^3 αντιστοιχίζεται στο σημείο $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ με βάση τη σχέση:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Ο \mathbf{P} ονομάζεται προβολικός πίνακας μηχανής και συνιστά το μαθηματικό μοντέλο, το οποίο περιγράφει τον γεωμετρικό μετασχηματισμό της εικόνας μέσω κεντρικής προβολής. Εάν το \mathbf{x} εκφραστεί σε μη ομογενείς συντεταγμένες, τότε η Εξ. (23) εκφράζει τον Άμεσο Γραμμικό Μετασχηματισμό, όπως αυτός αναφέρθηκε στην ενότητα 2.6.

Ο \mathbf{P} χαρακτηρίζεται από 11 βαθμούς ελευθερίας, εάν όμως πρόκειται για μηχανή σημειακής οπής επιβάλλονται δύο επιπλέον δεσμεύσεις (τετραγωνική εικονοψηφίδα), ώστε να απομένουν 9 ανεξάρτητες παράμετροι που προκύπτουν από τα στοιχεία του εσωτερικού και του εξωτερικού προσανατολισμού της μηχανής λήψης. Έτσι, κάθε ομογενής πίνακας \mathbf{P} του οποίου το αριστερό τμήμα 3×3 είναι αντιστρέψιμο μπορεί να αναλυθεί στους υποπίνακες:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{R}[\mathbf{I}|\mathbf{-C}] \quad (27)$$

όπου \mathbf{C} οι μη ομογενείς συντεταγμένες του σημείου λήψης, \mathbf{R} ο πίνακας στροφής και \mathbf{K} ο πίνακας μηχανής, διαστάσεων 3×3 :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -ac & s & x_0 \\ 0 & -c & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Στον πίνακα αυτό περιλαμβάνονται οι παράμετροι του εσωτερικού προσανατολισμού. Για μηχανή σημειακής οπής, όπως προαναφέρθηκε, ισχύει aspect ratio = 1 και skewness = 0, ενώ οι παράμετροι c , x_0 , y_0 αναφέρονται στη σταθερά της μηχανής και τη θέση του πρωτεύοντος σημείου, αντίστοιχα.

Μέσω του πίνακα \mathbf{P} σημείο του τρισδιάστατου προβολικού χώρου αντιστοιχίζεται σε μοναδικό σημείο του επιπέδου της εικόνας, ωστόσο εικονοσημείο δεν μπορεί να αντιστοιχηθεί μονοσήμαντα σε σημείο χώρου καθώς υπάρχει απειρία εικονοσημείων κείμενων επ' ευθείας διά του προβολικού κέντρου. Όλα αυτά τα σημεία υπακούουν στην ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{P}^+\mathbf{x} + \lambda\mathbf{C} \quad (29)$$

όπου \mathbf{C} η λύση του συστήματος $\mathbf{P}\mathbf{C} = \mathbf{0}$ και $\mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^T(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)^{-1}$

Η εικόνα της απόλυτης κωνικής

Στην εικόνα παράλληλες ευθείες του χώρου εμφανίζονται να συγκλίνουν σε συγκεκριμένο σημείο, καθώς η κεντρική προβολή χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα απεικόνισης σημείων του απείρου. Πράγματι τα σημεία $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ 0] = [\mathbf{d} \ 0]$ που ανή-

κουν στο επίπεδο του απείρου Π_∞ μετασχηματίζονται με βάση τη σχέση:

$$x = PX \Leftrightarrow x = KR[I|-C] \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} = KRd \quad (30)$$

Η Εξ. (30) αναπαριστά στην πραγματικότητα την ομογραφία $H = KR$, η οποία μετασχηματίζει το επίπεδο του απείρου και εξαρτάται αποκλειστικά από τις παραμέτρους του εσωτερικού προσανατολισμού και τις στροφές της εικόνας.

Σύμφωνα με τη Εξ. (16) και με βάση την παραπάνω ομογραφία, η απόλυτη κωνική C_∞ μετασχηματίζεται σε:

$$\omega = H^{-T} C_\infty H^{-1} = (KR)^{-T} C_\infty (KR)^{-1} = K^{-T} R R^{-1} K^{-1} = K^{-T} K^{-1} \quad (31)$$

καθώς για την απόλυτη κωνική στο Π_∞ ισχύει $C_\infty = I$.

Η ω ονομάζεται εικόνα της απόλυτης κωνικής και εξαρτάται αποκλειστικά από τα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού. Συνεπώς, ο εντοπισμός της θέσης της εικόνας της απόλυτης κωνικής σε κάθε λήψη ισοδυναμεί με γνώση των 5 παραμέτρων που ορίζουν πλήρως τη γεωμετρία της μηχανής.