ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Συστήματα Υποστήριξης Χρηματοοικονομικών Αποφάσεων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ηλίας Γ. Πανταζέλος

Επιβλέπων: Ιωάννης Ψαρράς
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2015

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Συστήματα Υποστήριξης Χρηματοοικονομικών Αποφάσεων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ηλίας Γ. Πανταζέλος

Επιβλέπων: Ιωάννης Ψαρράς
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 14η Οκτωβρίου 2015

....	....	....
Ψαρράς Ι.	Ασκούνης Δ.	Δούκας Χ.
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2015

....

Ηλίας Γ. Πανταζέλος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικών Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Η παγκοσμιοποίηση των αγορών και η απελευθέρωση των χρηματιστηριακών αγορών κατά τη διάρκεια των τελευταίων ετών είχε σαν συνέπεια τις ραγδαίες εξελίξεις στο διεθνές οικονομικό περιβάλλον. Κρίνεται λοιπόν αναγκαία η αξιοποίηση της τεχνολογίας στον τομέα της πληροφορικής για την αποτελεσματική αντιμετώπιση των κινδύνων που εγείρει η συμμετοχή στα οικονομικά δρώμενα.

Η παρούσα εργασία εστιάζει στο αντικείμενο της χρηματοοικονομικής προτυποποίησης (financial modeling), η οποία έχει ως στόχο την υποστήριξη του επενδυτή στο πρόβλημα της δημιουργίας αποδοτικών επενδυτικών χαρτοφυλακίων. Πιο συγκεκριμένα, αξιοποιώντας το πρόγραμμα Microsoft Excel και την προγραμματιστική γλώσσα VBA (Visual Basic in Applications), υλοποιήθηκαν μια σειρά από συναρτήσεις και υπορουτίνες οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή διάφορων χρηματοοικονομικών μοντέλων.

Ο τρόπος υλοποίησης των μοντέλων αυτών παρουσιάζεται μέσα από παραδείγματα στο 4ο κεφάλαιο, αφού έχει προηγηθεί αναλυτική θεωρία στο 2ο κεφάλαιο.

Λέξεις Κλειδιά: Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου, Χαρτοφυλάκια Ελαχίστου Κινδύνου, Απόδοση και Κίνδυνος, Αξία στον Κίνδυνο, Μοντέλο Markowitz, Ομόλογα, Excel, VBA

Abstract

The globalization of markets and the liberalization of financial markets during the past few years has resulted in rapid developments in the international economic environment. It is therefore necessary to make use of the information technology to effectively address the risks raised by the participation in economic activities.

This paper deals with the subject of financial modeling, which aims to support the investor's problem of creating efficient investment portfolios. More specifically, utilizing the Microsoft Excel program and the programming language VBA (Visual Basic in Applications), a series of functions and subroutines were implemented and then used in the manufacture of various financial models.

The manner of implementation of these models is presented through examples in the 4th chapter, preceded by analytical theory in the 2nd chapter.

Keywords: Modern Portfolio Theory, Minimum Variance Portfolios, Performance and Risk, Value at Risk, Markowitz Model, Bonds, Excel, VBA

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της συγγραφής της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ι. Ψαρρά για την ανάθεση αυτής και την ευκαιρία που μου δόθηκε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα.

Επίσης, ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω και στον υπεύθυνο της διπλωματικής μου Δρ. Παναγιώτη Ξυδώνα, Αναπληρωτή Καθηγητή Χρηματοοικονομικής στην ESSCA Grande École.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Δ. Ασκούνη και τον επίκουρο κ. Χ. Δούκα για τη συμμετοχή τους στην επιτροπή εξέτασης της διπλωματικής μου εργασίας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Στο σημερινό περιβάλλον της παγκοσμιοποίησης, του έντονου ανταγωνισμού, των συνεχόμενων οικονομικών αλλαγών και της αδιάλειπτης ρευστότητας σε εθνικό και διεθνές επίπεδο, ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα που έχει να αντιμετωπίσει κάποιος που ασχολείται με τα οικονομικά δρώμενα, είναι η κατασκευή και διατήρηση ενός αποδοτικού επενδυτικού χαρτοφυλακίου. Με τον όρο επενδυτικό χαρτοφυλάκιο εννοούμε μια συλλογή από περιουσιακά στοιχεία που έχουν ως στόχο την απόδοση κερδών στον επενδυτή και που έχουν αποκτηθεί με βάση ένα συγκεκριμένο οικονομικό στόχο.

Ο θεμελιώδης στόχος της θεωρίας βέλτιστου επενδυτικού χαρτοφυλακίου είναι η εύρεση της αποδοτικότερης κατανομής του επενδυόμενου κεφαλαίου στα διαθέσιμα χρεόγραφα με στόχο την ελαχιστοποίηση του κινδύνου αλλά και τη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης απόδοσης. Για την υλοποίηση των παραπάνω, αναγκαία είναι η χρήση τεχνικών μαθηματικού προγραμματισμού. Η διαδικασία αυτή, σύμφωνα με τους Jacobs & Levy (1995), ονομάζεται μηχανική χαρτοφυλακίου (portfolio engineering).

Σημαντικότατη επιρροή στο αντικείμενο της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου έφερε η εργασία του Harry Markowitz με τίτλο ‘Portfolio Selection’ (1952) στην οποία εισήγαγε με μαθηματικές έννοιες την σχέση που έχει ο κίνδυνος ενός χρεογράφου με την αντίστοιχη απόδοση. Το έργο αυτό πυροδότησε νέες έρευνες πάνω στο αντικείμενο, με μια από τις βασικές συνέπειες των ερευνών αυτών να είναι η αποδοχής της θεώρησης ότι η διαφοροποίηση (diversification) ενός χαρτοφυλακίου μειώνει το επενδυτικό ρίσκο.

Σήμερα, έπειτα από περισσότερο από 60 χρόνια μετά την εργασία του Markowitz, η διαδικασία της δημιουργίας και διαχείρισης χαρτοφυλακίων χρεογράφων έχει πλέον αναλυθεί σημαντικά, ωστόσο το πρόβλημα της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων συνεχίζει να υπάρχει. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι διεθνείς και μη αγορές χαρακτηρίζονται από χαώδη αλλά και απρόβλεπτη πολλές φορές συμπεριφορά. Έτσι είναι πρακτικά αδύνατη η δημιουργία ενός μοντέλου που θα προβλέπει απόλυτα τη πορεία της οικονομικής δραστηριότητας. Επιπλέον, οι μετοχικοί τίτλοι είναι οι πλέον ευάλωτοι στις διακυμάνσεις της αγοράς γεγονός που αυξάνει τη δυσκολία της δημιουργίας μοντέλων για την πρόβλεψη της πορείας που θα ακολουθήσουν.

Η κατοχή μετοχικών χαρτοφυλακίων αποτελεί την πλέον επικίνδυνη επένδυση, τόσο λόγω της υψηλής μεταβλητότητας της συμπεριφοράς των μετοχικών τίτλων όσο και λόγω της απουσίας της δυνατότητας διαφοροποίησης μέρους του αναλαμβανόμενου κινδύνου, μέσω της επένδυσης σε χρεόγραφα σταθερού εισοδήματος, καταθετικά ή παράγωγα προϊόντα. Επιπλέον, ο πολύ μεγάλος αριθμός μετοχικών τίτλων σε σχέση με άλλες κλάσεις χρεογράφων που διαπραγματεύεται στις χρηματιστηριακές αγορές, καθιστά εξαιρετικά δύσκολη τη διαδικασία διαχείρισης ενός μετοχικού χαρτοφυλακίου, αφού απαιτείται η ταυτόχρονη διερεύνηση και αξιολόγηση εκατοντάδων ή και χιλιάδων χρεογράφων που είναι διαθέσιμα ως επενδυτικές επιλογές.

Η διαχείριση μετοχικών χαρτοφυλακίων εστιάζει διαδοχικά σε τρία διαφορετικά μεταξύ τους επίπεδα αποφάσεων:

- Στην επιλογή των μετοχικών τίτλων που συγκεντρώνουν τις καλύτερες επενδυτικές προοπτικές.
- Στην κατανομή των διαθέσιμων κεφαλαίων με στόχο την άριστη σύνθεση χαρτοφυλακίων.
- Στη συγκριτική αξιολόγηση των χαρτοφυλακίων που έχουν κατασκευαστεί.

Η πολυπλοκότητα όμως του προβλήματος της διαχείρισης μετοχικών χαρτοφυλακίων, συνδέεται με άλλες τρεις θεμελιώδεις παραμέτρους οι οποίες επηρεάζουν κάθε διαδικασία λήψης απόφασης:

- Την παράμετρο της αβεβαιότητας (uncertainty).
- Την ύπαρξη πολλαπλών κριτηρίων (multiple criteria).
- Τις προτιμήσεις (preferences) του αποφασίζοντος.

Τέλος, μια ακόμα κρίσιμη παράμετρος που συμβάλλει στην αύξηση της πολυπλοκότητας που συνδέεται με την προβληματική της διαχείρισης μετοχικών χαρτοφυλακίων, είναι η ύπαρξη πολλών εμπλεκόμενων φορέων. Οι τέσσερις κατηγορίες στις οποίες μπορούν να ομαδοποιηθούν αυτοί οι φορείς είναι:

- Τους φορείς που συνδέονται με την οργάνωση και την εποπτεία της αγοράς
- Τις εισηγμένες στη χρηματιστηριακή αγορά εταιρείες.
- Τους θεσμικούς και ιδιώτες επενδυτές.
- Τους παρόχους επενδυτικών υπηρεσιών.

Από τα παραπάνω, είναι φανερό ότι είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και δύσκολη η λήψη χρηματοοικονομικών αποφάσεων. Έτσι είναι αναγκαία η ύπαρξη σύγχρονων μεθόδων και εργαλείων ώστε να είναι όσο το δυνατόν καλύτερη η διαχείριση των χρηματοοικονομικών κινδύνων στους οποίους εκτίθενται οι επενδυτές κατά την κάλυψη των χρηματοδοτικών και επενδυτικών τους αναγκών.

1.1 Ο Στόχος και το Αντικείμενο της Διπλωματικής

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με την χρηματοοικονομική προτυποποίηση (financial modeling), η οποία έχει ως στόχο την υποστήριξη του επενδυτή στο πρόβλημα της δημιουργίας αποδοτικών επενδυτικών χαρτοφυλακίων.

Πιο συγκεκριμένα, αξιοποιώντας το πρόγραμμα Microsoft Excel και την προγραμματιστική γλώσσα VBA (Visual Basic in Applications), υλοποιήθηκαν μια σειρά από συναρτήσεις και υπορουτίνες οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή διάφορων χρηματοοικονομικών μοντέλων, τα οποία αφορούν την σύνθεση ενός αποδοτικού επενδυτικού χαρτοφυλακίου.

Τα βήματα που ακολουθήθηκαν για την υλοποίηση της διπλωματικής, ήταν αρχικά η κατασκευή των χρηματοοικονομικών μοντέλων με τη χρήση μόνο των δυνατοτήτων του Excel και στη συνέχεια η κατασκευή με τη χρήση VBA, συναρτήσεων αλλά και υπορουτίνων οι οποίες βασίζονται στα προηγούμενα και που απλοποιούν κατά πολύ την υλοποίησή τους.

1.2 Η Συμβολή της Διπλωματικής

Η μελέτη των σύγχρονων χρηματοοικονομικών μοντέλων σύνθεσης χαρτοφυλακίου είναι ένα από πλέον απαιτητικά επιστημονικά πεδία αφού απαιτεί χρήση ανώτερων μαθηματικών. Ωστόσο δε διαθέτουν όλοι οι επενδυτές το κατάλληλο μαθηματικό υπόβαθρο ώστε να υλοποιήσουν μόνοι τους τα μαθηματικά μοντέλα τα οποία είναι απαραίτητα για τη δημιουργία αλλά και διαχείριση μετοχικών χαρτοφυλακίων.

Στηριζόμενοι λοιπόν σε αυτή την αναγκαιότητα, υλοποιήσαμε μια σειρά συναρτήσεων και υπορουτίνων οι οποίες απλοποιούν κατά πολύ τη διαδικασία της χρηματοοικονομικής προτυποποίησης και επιτρέπουν ακόμα και σε άτομα χωρίς το κατάλληλο θεωρητικό υπόβαθρο να υλοποιήσουν και χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά μοντέλα τα οποία είναι απαραίτητα για τη δημιουργία αλλά και διαχείριση μετοχικών χαρτοφυλακίων. Μάλιστα κατά τη διάρκεια της διπλωματικής υλοποιήθηκαν διάφορα μοντέλα, ο τρόπος υλοποίησης των οποίων περιγράφεται αναλυτικά στο 4ο κεφάλαιο.

1.3 Η Δομή της Διπλωματικής

Η εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια και ένα παράρτημα. Ακολουθεί μια σύντομη περιγραφή των περιεχομένων του κάθε κεφαλαίου.

Κεφάλαιο 1: Πρόκειται για το παρών κεφάλαιο στο οποίο πραγματοποιήθηκε μια σύντομη εισαγωγή στο θέμα και τον σκοπό της διπλωματικής και γίνεται και η παρουσίαση της δομής και των περιεχομένων κάθε κεφαλαίου.

Κεφάλαιο 2: Γίνεται μια αναλυτική προσέγγιση στη σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου και παρουσιάζεται αναλυτικά η διαδικασία δημιουργίας και διαχείρισης αυτών. Επίσης παρέχονται ορισμοί για βασικά μεγέθη της οικονομικής θεωρίας όπως η αριθμητική/γεωμετρική απόδοση, ο κίνδυνος κ.α. και αναλύεται η αρχή της διαφοροποίησης. Τέλος παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων (ιδιαίτερα στην περίπτωση εισαγωγής ακίνδυνου χρεογράφου στο χαρτοφυλάκιο), η έννοια και μια αναλυτική προσέγγιση της αξίας στον κίνδυνο (Value at Risk ή VaR), καθώς και διάφορα χρηματοοικονομικά μοντέλα.

Κεφάλαιο 3: Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται και αξιολογούνται διάφορα ξενόγλωσσα βιβλία τα οποία ασχολούνται με το αντικείμενο της χρηματοοικονομικής προτυποποίησης με τη βοήθεια του Microsoft Excel και της προγραμματιστικής γλώσσας VBA.

Κεφάλαιο 4: Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα διάφορα μοντέλα τα οποία υλοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια της εργασίας. Η παρουσίαση γίνεται μέσα από εικόνες οι οποίες δείχνουν τη μορφή των μοντέλων αυτών στο Microsoft Excel καθώς και αναλυτική εξήγηση της διαδικασίας υλοποίησης του μοντέλου.

Κεφάλαιο 5: Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα διάφορα συμπεράσματα τα οποία προέκυψαν κατά την υλοποίηση της διπλωματικής εργασίας καθώς και οι μελλοντικές προοπτικές των όσων υλοποιήθηκαν.

Παράρτημα Ι: Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται όλοι οι κώδικες σε VBA που υλοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια της διπλωματικής, μαζί με σύντομα σχόλια για το τι κάθε η κάθε συνάρτηση/υπορουτίνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου

2.1 Η έννοια της απόδοσης

Σύμφωνα με τον Μ. Δούμπο, η έννοια της απόδοσης (return) ορίζεται ως η ποσοστιαία μεταβολή της αξίας της επένδυσης κατά τη διάρκεια ενός δεδομένου χρονικού διαστήματος.

Θεωρώντας ότι η αξία κτήσης ενός χρεογράφου τη χρονική στιγμή t είναι S_t και η αξία του σε μία προηγούμενη χρονική στιγμή $t-1$ είναι S_{t-1}, τότε η απόδοση της επένδυσης στο χρεόγραφο είναι:

$$r = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

Η απόδοση που υπολογίζεται κατά τον τρόπο αυτό αναφέρεται ως αριθμητική απόδοση (arithmetic return). Δεδομένων των αποδόσεων $r_1, r_2, \dots, r_T$ για μια σειρά T περιόδων, η συνολική απόδοση R μπορεί εύκολα να υπολογιστεί ως:

$$R = \prod_{t=1}^{T}(1 + r_t) - 1$$

ενώ η αναμενόμενη (μέση) αριθμητική απόδοση είναι:

$$E(r) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$$

Η μέση αριθμητική απόδοση παρέχει μια εκτίμηση για την απόδοση στην αμέσως επόμενη χρονική περίοδο. Η χρήση της για πολλαπλές χρονικές περιόδους υποθέτει ότι το επενδυμένο κεφάλαιο παραμένει σταθερό.

Εναλλακτικά της αριθμητικής απόδοσης, ορίζεται η γεωμετρική (ή λογαριθμική) απόδοση:

$$r^G = \ln\frac{S_t}{S_{t-1}}$$

Οι αριθμητικές και γεωμετρικές αποδόσεις συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$r^G = \ln(1 + r)$$

Δεδομένων των γεωμετρικών αποδόσεων $r_1^G, r_2^G, \dots, r_T^G$ για μια σειρά T περιόδων, η συνολική γεωμετρική απόδοση R^G μπορεί να υπολογιστεί εύκολα αθροίζοντας τις επιμέρους γεωμετρικές αποδόσεις:

$$R^G = \ln\frac{S_T}{S_1} = \ln\left(\frac{S_T}{S_{T-1}}\frac{S_{T-1}}{S_{T-2}}\dots\frac{S_2}{S_1}\right) = \sum_{t=1}^{T} r_t^G$$

η οποία εναλλακτικά μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{1}{T}R^G = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\ln(1 + r_t) \Rightarrow \exp\left(\frac{1}{T}R^G\right) - 1 = \left[\prod_{t=1}^{T}(1 + r_t)\right]^{1/T} - 1$$

Το δεξιό μέλος της εξίσωσης αυτής αναφέρεται ως γεωμετρική μέση απόδοση (geometric mean return):

$$E_G(r) = \left[\prod_{t=1}^{T}(1 + r_t)\right]^{1/T} - 1$$

και αντιπροσωπεύει το μέσο ρυθμό αύξησης της αξίας επένδυσης σε T χρονικές περιόδους. Αυτό είναι εμφανές γράφοντας την προηγούμενη σχέση ως εξής:

$$\prod_{t=1}^{T}(1 + r_t) = [1 + E_G(r)]^T \Rightarrow R = [1 + E_G(r)]^T - 1$$

Επιπλέον από τις παραπάνω σχέσεις, είναι εμφανές ότι η συνολική γεωμετρική απόδοση για μια σειρά T περιόδων προκύπτει από την αντίστοιχη γεωμετρική απόδοση ως εξής:

$$R^G = T\ln[1 + E_G(r)]$$

Γενικά οι διαφορές μεταξύ των αριθμητικών και γεωμετρικών αποδόσεων είναι μικρές όταν η ανάλυση γίνεται για μικρά χρονικά διαστήματα (για παράδειγμα ημερήσια στοιχεία). Σε περίπτωση όμως όπου τα χρονικά διαστήματα είναι μεγαλύτερα (μήνες, έτη κτλ.) οι μεταβολές στην αξία μιας επένδυσης μεγαλώνουν και παρουσιάζονται διαφοροποιήσεις μεταξύ της αριθμητικής και γεωμετρικής απόδοσης.

2.2 Η έννοια του κινδύνου

Σύμφωνα με τον πλέον διαδεδομένο ορισμό, ως κίνδυνος θεωρείται κάθε απόκλιση από το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Άρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί το γνωστό κριτήριο της διασποράς. Δεδομένων λοιπόν των αποδόσεων μίας επένδυσης σε μία σειρά T περιόδων, η διασπορά των αποδόσεων ορίζεται ως:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[r_t - E(r)]^2$$

Προφανώς όσο υψηλότερη η διασπορά, τόσο υψηλότερος είναι ο κίνδυνος. Εναλλακτικά της διασποράς έχουν αναπτυχθεί και άλλα κριτήρια κινδύνου τα οποία δίνουν έμφαση στην εκτίμηση των πιθανών ζημιών από μια επενδυτική θέση. Ένα τέτοιο κριτήριο είναι η αξία σε κίνδυνο (Value at Risk) η οποία θα αναλυθεί παρακάτω.

2.3 Χαρτοφυλάκια Χρεογράφων

Τα κριτήρια της απόδοσης και του κινδύνου μπορούν να οριστούν για χαρτοφυλάκια χρεογράφων. Με τον όρο χαρτοφυλάκιο εννοείται ένα σύνολο χρεογράφων κάθε ένα από τα οποία συμμετέχει στο χαρτοφυλάκιο με κάποια αναλογία. Η αναλογία αυτή προσδιορίζεται βάσει της αξίας του κάθε χρεογράφου σε σχέση με τη συνολική αξία του χαρτοφυλακίου.

Έστω αρχικά ότι εξετάζεται η περίπτωση δύο χρεογράφων με αναμενόμενες αποδόσεις $E(r_1), E(r_2)$ και διασπορές σ_1^2 και σ_2^2. Συμβολίζοντας ως w_1 και w_2 το ποσοστό του διαθέσιμου κεφαλαίου που επενδύεται σε κάθε χρεόγραφο (με $w_1 + w_2 = 1$), η απόδοση και ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου που διαμορφώνεται είναι:

$$E(w_1 r_1 + w_2 r_2) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2)$$
$$\sigma^2(w_1 r_1 + w_2 r_2) = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 COV(r_1, r_2)$$

όπου $COV(r_1, r_2)$ είναι η συνδιακύμανση των αποδόσεων των δύο χρεογράφων:

$$COV(r_1, r_2) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[r_{1t} - E(r_1)][r_{2t} - E(r_2)]$$

Η συνδιακύμανση $COV(r_i, r_j)$ συμβολίζεται και ως σ_{ij}. Η συνδιακύμανση σχετίζεται με τις τυπικές αποκλίσεις των αποδόσεων των χρεογράφων βάσει της σχέσης $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, όπου ως ρ_{ij} συμβολίζεται ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων των χρεογράφων. Ο συντελεστής συσχέτισης μετρά τη συσχέτιση των αποδόσεων των χρεογράφων σε μία κλίμακα από το -1 έως το $+1$. Εάν ο συντελεστής συσχέτισης είναι -1, τότε οι αποδόσεις των δύο χρεογράφων είναι γραμμικά συσχετισμένες αλλά μεταβάλλονται προς τις αντίθετες κατευθύνσεις. Εάν, αντίθετα ο συντελεστής συσχέτισης είναι $+1$, τότε οι αποδόσεις των δύο χρεογράφων είναι γραμμικά συσχετισμένες και μεταβάλλονται προς την ίδια κατεύθυνση. Όπως θα παρουσιαστεί στη συνέχεια, ο συντελεστής συσχέτισης είναι ένα στοιχείο ιδιαίτερης σημασίας στην κατασκευή χαρτοφυλακίων χρεογράφων.

Γενικεύοντας στην περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου P αποτελούμενου από m χρεόγραφα, ο υπολογισμός της αναμενόμενης απόδοσης και του κινδύνου του χαρτοφυλακίου πραγματοποιείται ως εξής:

$$E(r_P) = \sum_{i=1}^{m} w_i E(r_i)$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{m} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1, j\neq i}^{m} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Σε μορφή πινάκων οι παραπάνω δύο σχέσεις μπορούν να αποδοθούν πιο απλά ως εξής:

$$E(r_P) = \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{w}$$
$$\sigma_P^2 = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{w}$$

όπου:

- $\boldsymbol{r}$ είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων $m \times 1$ με τις αναμενόμενες αποδόσεις των χρεογράφων και $\boldsymbol{r}^T$ το αντίστοιχο ανάστροφο διάνυσμα,
- $\boldsymbol{w}$ είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων $m \times 1$ με τα ποσοστά συμμετοχής χρεογράφων στο χαρτοφυλάκιο,
- $\boldsymbol{V}$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας διαστάσεων $m \times m$ ο οποίος ονομάζεται πίνακας διακύμανσης/συνδιακύμανσης. Τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα αυτού αντιστοιχούν στη διακύμανση (διασπορά) των αποδόσεων των χρεογράφων, ενώ τα στοιχεία εκτός της διαγωνίου αντιστοιχούν στις συνδιακυμάνσεις.

2.4 Η Αρχή της Διαφοροποίησης

Από τις σχέσεις που παρουσιάστηκαν είναι προφανές ότι η αναμενόμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου είναι μια γραμμική συνάρτηση των αποδόσεων των επιμέρους χρεογράφων που το αποτελούν. Άρα θεωρώντας ότι $\boldsymbol{w} \geq \mathbf{0}$, το χαρτοφυλάκιο μέγιστης απόδοσης βρίσκεται εύκολα θέτοντας w_{i^*} όπου ι^* είναι το χρεόγραφο με τη μεγαλύτερη απόδοση και $w_j = 0$ για κάθε άλλο χρεόγραφο $j \neq i^*$.

Σε αντίθεση όμως με την απόδοση, ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου είναι μη γραμμική συνάρτηση των ποσοστών συμμετοχής των χρεογράφων στο χαρτοφυλάκιο. Συνεπώς, είναι ενδιαφέρον να εξεταστεί η συμπεριφορά του κινδύνου του χαρτοφυλακίου.

Αρχικά εξετάζεται η περίπτωση όπου οι αποδόσεις των χρεογράφων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, δηλαδή $\sigma_{ij} = 0$ για κάθε ζεύγος χρεογράφων i και j. Στην περίπτωση αυτή ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου το οποίο αποτελείται από m χρεόγραφα είναι:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{m} w_i^2 \sigma_i^2$$

Ο πλέον αφελής τρόπος να κατανείμει ο επενδυτής το κεφάλαιό του στα χρεόγραφα του χαρτοφυλακίου είναι να ισοκατανείμει το κεφάλαιο στα χρεόγραφα, δηλαδή $w_i = {}^1\!/_m$, για κάθε $i = 1,2,\ldots,m$. Στην περίπτωση αυτή ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου είναι:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{m}\right)^2 \sigma_i^2 = \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_i^2}{m}\right)$$

Ο όρος εντός των παρενθέσεων είναι μια μέση τιμή και συγκεκριμένα αναπαριστά τη μέση διασπορά των αποδόσεων των χρεογράφων στο χαρτοφυλάκιο. Συμβολίζοντας αυτή τη μέση διασπορά ως $\bar{\sigma}^2$, η παραπάνω σχέση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{m}\bar{\sigma}^2$$

Από τη σχέση αυτή είναι εμφανές ότι καθώς το m τείνει στο άπειρο, ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου τείνει στο μηδέν. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι αν ο επενδυτής είχε τη δυνατότητα να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από άπειρο αριθμό ανεξαρτήτων χρεογράφων, τότε ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου είναι μηδέν. Άρα ο επενδυτής θα είχε τη δυνατότητα να απολάβει μια σίγουρη απόδοση $E(r_P)$.

Στην πράξη βέβαια δεν υπάρχει ένας αυθαίρετα μεγάλος αριθμός χρεογράφων με ανεξάρτητες αποδόσεις. Έστω λοιπόν η πιο γενική και ρεαλιστική περίπτωση όπου $\sigma_{ij} \neq 0$. Ακολουθώντας και στην περίπτωση αυτή την αφελή τακτική της ισοκατανομής του κεφαλαίου στα διαθέσιμα χρεόγραφα, ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου είναι ο ακόλουθος:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{m}\right)^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1, j\neq i}^{m} \left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m}\right)\sigma_{ij}$$

$$= \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_i^2}{m}\right) + \frac{m-1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1, j\neq i}^{m} \frac{\sigma_{ij}}{m(m-1)}\right)$$

Όπως ήδη αναφέρθηκε ο πρώτος όρος μέσα στις παρενθέσεις είναι η μέση διασπορά των αποδόσεων των χρεογράφων του χαρτοφυλακίου. Αντίστοιχα, και ο δεύτερος σε αγκύλες είναι και αυτός μια μέση τιμή. Αυτό γίνεται εμφανές αν ληφθεί υπόψη ότι το πλήθος των όρων που αφορούν τη συνδιακύμανση είναι $m(m-1)$. Άρα λοιπόν ο δεύτερος όρος σε αγκύλες στην παραπάνω σχέση αναπαριστά τη μέση συνδιακύμανση $\bar{\sigma}_{ij}$ των αποδόσεων των χρεογράφων που εντάσσονται στο χαρτοφυλάκιο. Άρα λοιπόν ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου μπορεί να εκφραστεί πιο απλά ως εξής:

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{m}\bar{\sigma}^2 + \frac{m-1}{m}\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{m}\bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}_{ij} - \frac{1}{m}\bar{\sigma}_{ij}$$

Δηλαδή:

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_P^2 = \bar{\sigma}_{ij}$$

Το αποτέλεσμα αυτό οδηγεί στο ακόλουθο σημαντικό συμπέρασμα. Εάν ο επενδυτής έχει τη δυνατότητα να συνθέσει ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από έναν αυθαίρετα μεγάλο αριθμό χρεογράφων, τότε ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου προσδιορίζεται μόνο από τις συνδιακυμάνσεις των χρεογράφων που το αποτελούν. Ο κίνδυνος που προέρχεται από το κάθε ανεξάρτητο χρεόγραφο εξαλείφεται.

Το παραπάνω σημαντικό συμπέρασμα αποτελεί το βασικό αποτέλεσμα της αρχής της διαφοροποίησης (diversification) σύμφωνα με την οποία ο επενδυτής πρέπει να συνθέτει χαρτοφυλάκια με επαρκή διασπορά όσον αφορά τα χρεόγραφα που περιλαμβάνουν με στόχο την μείωση του επενδυτικού κινδύνου.

Συμπερασματικά, η παραπάνω ανάλυση δείχνει ότι ο ολικός κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου περιλαμβάνει δύο μέρη:

- Ένα μέρος το οποίο μπορεί να εξαλειφθεί εφαρμόζοντας μια κατάλληλη στρατηγική διαφοροποίησης. Αυτό το τμήμα του κινδύνου ονομάζεται μη συστηματικός κίνδυνος (non-systematic risk). Ο μη συστηματικός κίνδυνος αφορά αποκλειστικά το κάθε χρεόγραφο του χαρτοφυλακίου και δεν επηρεάζεται από τη συμπεριφορά των υπόλοιπων χρεογράφων.

- Ένα μέρος το οποίο δεν μπορεί να εξαλειφθεί μέσω της διαφοροποίησης, δηλαδή μέσω της επένδυσης σε πολλά χρεόγραφα της ίδιας μορφής. Αυτό το τμήμα του κινδύνου αναπαριστά τον συστηματικό κίνδυνο (systematic risk). Για τη μέτρηση του συστηματικού κινδύνου χρησιμοποιείται ως συντελεστής β_P ο οποίος ορίζεται ως ο λόγος της συνδιακύμανσης σ_{PM} των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου P σε σχέση με τις αποδόσεις της αγοράς M (γενικός δείκτης του χρηματιστηρίου) προς τη διασπορά των αποδόσεων της αγοράς:

$$\beta_P = \frac{\sigma_{PM}}{\sigma_M^2}$$

Γενικά χαρτοφυλάκια ή χρεόγραφα με συστηματικό κίνδυνο (σε απόλυτη τιμή) υψηλότερο από τη μονάδα αναμένεται να παρουσιάζουν υψηλότερες μεταβολές σε σχέση με την αγορά. Επιπλέον, δεδομένου ότι εμπεριέχουν υψηλότερο κίνδυνο από την αγορά (ο συστηματικός κίνδυνος της αγοράς είναι εξ 'ορισμού ίσος με τη μονάδα) θα πρέπει να έχουν και μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση. Αντίθετα, χαρτοφυλάκια ή χρεόγραφα, με συστηματικό κίνδυνο (σε απόλυτη τιμή) μικρότερο από τη μονάδα αναμένεται να παρουσιάζουν μικρότερες μεταβολές σε σχέση με την αγορά. Επιπλέον, δεδομένου ότι εμπεριέχουν μικρότερο κίνδυνο από την αγορά θα πρέπει να έχουν και χαμηλότερη αναμενόμενη απόδοση. Χαρτοφυλάκια ή χρεόγραφα με συστηματικό κίνδυνο μηδέν είναι ακίνδυνα, καθώς δεν επηρεάζονται από τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η αγορά.

Η έννοια του συστηματικού κινδύνου αποτελεί τη βασική έννοια του μοντέλου αποτίμησης κεφαλαιουχικών περιουσιακών στοιχείων (capital asset pricing model) το οποίο προτάθηκε από τον Νομπελίστα William Sharpe το έτος 1964 ως μια προσέγγιση για την αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων και χρεογράφων.

2.5 Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίων

Η παραπάνω ανάλυση έδειξε ότι είναι δυνατή η μείωση του επενδυτικού κινδύνου ακολουθώντας μια κατάλληλα σχεδιασμένη στρατηγική διαφοροποίησης. Ο σχεδιασμός μιας τέτοιας στρατηγικής απαιτεί τον προσδιορισμό της κατάλληλης σύνθεσης ενός χαρτοφυλακίου πολλαπλών χρεογράφων με στόχο την ελαχιστοποίηση του κινδύνου. Οι βάσεις για την ανάπτυξη ενός μεθοδολογικού πλαισίου για την αντιμετώπιση του θέματος αυτού τέθηκαν από τον Νομπελίστα Harry Markowitz στη δεκαετία του 1950 (βλ. Markowitz, 1952, 1991).

Η κύρια έννοια του μεθοδολογικού πλαισίου που ανέπτυξε ο Markowitz αυτή του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου (efficient portfolio). Θεωρώντας πάντα ότι η ανάλυση βασίζεται στα κριτήρια της αναμενόμενης απόδοσης και του κινδύνου, ένα χαρτοφυλάκιο P ονομάζεται αποτελεσματικό εάν και μόνο εάν δεν υπάρχει κανένα άλλο χαρτοφυλάκιο P' τέτοιο ώστε $E(r_{P'}) \geq E(r_P)$ και $\sigma_{P'} \leq \sigma_P$, με μία τουλάχιστον από τις δύο ανισότητες να είναι αυστηρή. Δηλαδή το χαρτοφυλάκιο P είναι αποτελεσματικό εάν δεν υπάρχει ένα άλλο χαρτοφυλάκιο το οποίο να υπερτερεί έναντι του P όσον αφορά την απόδοση και τον κίνδυνο. Το σύνολο των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων ονομάζεται απλά αποτελεσματικό μέτωπο.

2.5.1 Βέλτιστα Χαρτοφυλάκια υπό Καθεστώς Ανοιχτών Πωλήσεων

Μέσα στο πλαίσιο που αναλύθηκε στα προηγούμενα, στόχος της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων ελαχίστου κινδύνου είναι ο εντοπισμός των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων. Στην πιο απλή περίπτωση θεωρείται ότι επιτρέπονται ανοιχτές πωλήσεις, οπότε ο μόνος περιορισμός για τα ποσοστά συμμετοχής των χρεογράφων είναι ότι $w_1 + w_2 + \cdots + w_m = 1$. Παρακάτω εξετάζεται η γενική περίπτωση κατά την οποία το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από m χρεόγραφα. Σκοπός της ανάλυσης είναι η κατασκευή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου κινδύνου δεδομένου ότι η επιθυμητή αναμενόμενη απόδοση είναι R. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
&min \quad \sigma_P^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{w} \\
&Υπό\text{:} \quad \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{w} = 1 \\
&\qquad\quad\ \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{w} = R \\
&\qquad\quad\ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

όπου $\boldsymbol{e}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα-στήλη: $\boldsymbol{e} = (1,1,\ldots,1)^T$. Ο πίνακας $\boldsymbol{V}$ θεωρείται ότι είναι θετικά ορισμένος. Η υπόθεση αυτή σημαίνει ότι όλα τα χρεόγραφα (και συνδυασμοί τους) εμπεριέχουν κάποιο κίνδυνο. Ως αποτέλεσμα της υπόθεσης αυτής, η συνάρτηση κινδύνου είναι αυστηρά κυρτή.

Συμβολίζοντας ως λ_1 και λ_2 τους πολλαπλασιαστές Lagrange των δύο περιορισμών, διαμορφώνεται η ακόλουθη συνάρτηση:

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{w} + \lambda_1(1 - \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{w}) + \lambda_2(R - \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{w})
$$

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση αυτή προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{w}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{V}\boldsymbol{w} - \lambda_1\boldsymbol{e} - \lambda_2\boldsymbol{r} = 0
$$

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda_1} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{w} = 1
$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{w} = R$$

Από τη πρώτη σχέση προκύπτει ότι:

$$\boldsymbol{w} = \lambda_1 \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{e} + \lambda_2 \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{r}$$

Αντικαθιστώντας τώρα το $\boldsymbol{w}$ στις δύο επόμενες εξισώσεις διαμορφώνεται το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{e} + \lambda_2 \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{r} = 1 \\ \lambda_1 \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{e} + \lambda_2 \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{r} = R \end{aligned}\right\}$$

Δεδομένου ότι ο πίνακας $\boldsymbol{V}^{-1}$ είναι συμμετρικός, ισχύει ότι $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{e}$, οπότε θέτοντας $a = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{e}, b = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{r}$ και $c = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{r}$ το παραπάνω σύστημα παίρνει την ακόλουθη απλή μορφή:

$$\left.\begin{aligned} a\lambda_1 + b\lambda_2 = 1 \\ b\lambda_1 + c\lambda_2 = R \end{aligned}\right\}$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος δίνεται από τις σχέσεις:

$$\lambda_1 = \frac{c - bR}{ac - b^2} \quad και \quad \lambda_2 = \frac{aR - b}{ac - b^2}$$

Έχοντας υπολογίσει τα λ_1, λ_2 μπορούν τώρα να υπολογιστούν τα $\boldsymbol{w}$ και συνεπώς να προσδιοριστεί η σύνθεση του βέλτιστου χαρτοφυλακίου. Ο κίνδυνος αυτού μπορεί εύκολα να υπολογιστεί ως εξής:

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{w} - \lambda_1 \boldsymbol{e} - \lambda_2 \boldsymbol{r} = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{V}\boldsymbol{w} - \lambda_1 \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{e} - \lambda_2 \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{r} = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma_P^2 - \lambda_1 - \lambda_2 R = 0 \Rightarrow$$
$$\sigma_P^2 = \frac{aR^2 - 2bR + c}{ac - b^2}$$

Υπολογίζοντας τα $a, b\ και\ c$ (τα οποία δεν εξαρτώνται από το επιθυμητό επίπεδο απόδοσης R του χαρτοφυλακίου), η παραπάνω διαδικασία μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό της σύνθεσης και του κινδύνου του βέλτιστου χαρτοφυλακίου το οποίο ανταποκρίνεται στην επιθυμητή απόδοση. Το χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου υπολογίζεται εάν στην παραπάνω ανάλυση δεν ληφθεί υπόψη ο περιορισμός που αφορά το επίπεδο της επιθυμητής απόδοσης. Στην περίπτωση αυτή τίθεται $\lambda_2 = 0 \Rightarrow R = {}^{b}/_{a}$. Οπότε $\lambda_1 = {}^{1}/_{a}$. Έτσι η σύνθεση και ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου ελάχιστου κινδύνου υπολογίζονται ως εξής:

$$\boldsymbol{w} = \lambda_1 \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{e} + \lambda_2 \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{r} = \frac{1}{a}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{e}}$$

$$\sigma_P^2 = \lambda_1 + \lambda_2 R = \frac{1}{a}$$

Όλη η παραπάνω διαδικασία υποθέτει ότι υπάρχει δυνατότητα πραγματοποίησης ανοιχτών πωλήσεων. Πράγματι η επίλυση του παραπάνω προβλήματος βελτιστοποίησης δεν διασφαλίζει ότι $\boldsymbol{w} \geq 0$. Επιπλέον, έμμεσα θεωρείται ότι όλα τα εξεταζόμενα χρεόγραφα εμπεριέχουν κάποιο βαθμό κινδύνου.

Παρακάτω αναλύονται προεκτάσεις του παραπάνω μεθοδολογικού πλαισίου στην περίπτωση που αυτές οι δύο υποθέσεις δεν ισχύουν. Η ανάλυση ξεκινά από την περίπτωση ύπαρξης ενός ακίνδυνου χρεογράφου.

Εισαγωγή ακίνδυνου χρεογράφου

Ως ακίνδυνο χρεόγραφο (risk free security) μπορεί να θεωρηθεί ένα χρεόγραφο η απόδοση του οποίου δεν εμπεριέχει καμία αβεβαιότητα. Συνήθως ως ακίνδυνο χρεόγραφο θεωρείται ένα έντοκο γραμμάτιο του δημοσίου. Ο επενδυτής μπορεί να επενδύσει στο ακίνδυνο χρεόγραφο και να απολάβει μια βέβαιη απόδοση r_F ή να δανειστεί με επιτόκιο r_F.

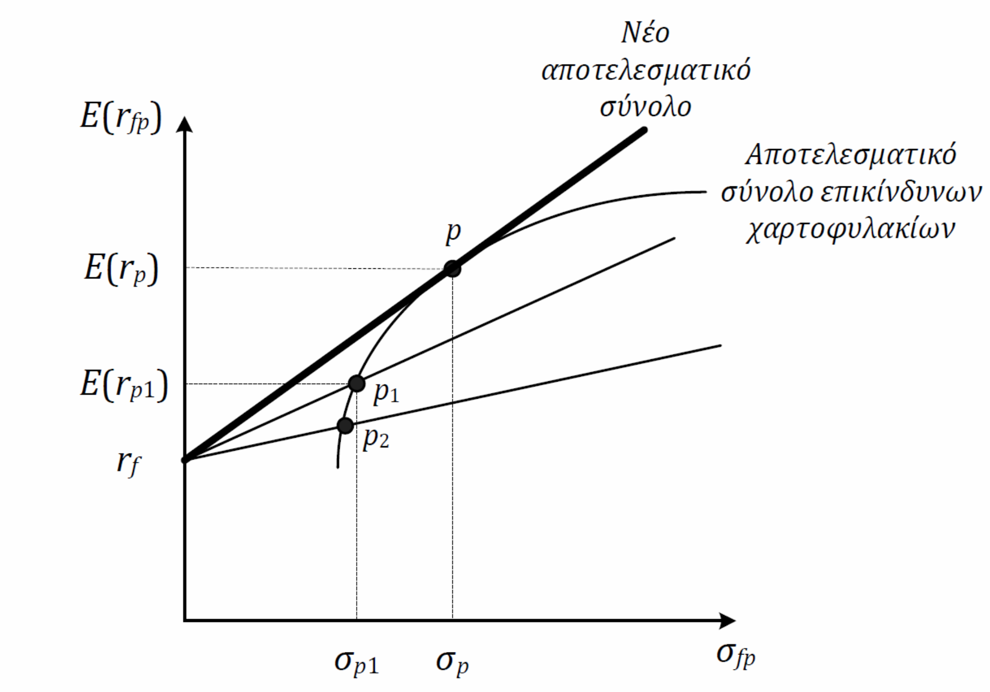
Θεωρώντας ότι υπάρχει ένα τέτοιο χρεόγραφο, ο επενδυτής ενδιαφέρεται να συνθέσει ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από το ακίνδυνο χρεόγραφο και ένα σύνολο επικίνδυνων χρεογράφων P (επικίνδυνο χαρτοφυλάκιο). Η αναμενόμενη απόδοση του επικίνδυνου χαρτοφυλακίου είναι $E(r_P)$ και ο κίνδυνος σ_P^2. Εξ 'ορισμού ο κίνδυνος του ακίνδυνου χρεογράφου είναι $\sigma_F^2 = 0$ και η συσχέτισή του με το επικίνδυνο χαρτοφυλάκιο είναι $\rho_{FP} = 0$. Βάσει αυτών των δεδομένων θεωρείται ότι ο επενδυτής επιθυμεί να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο FP επενδύοντας ένα ποσοστό w_P του διαθέσιμου κεφαλαίου στο επικίνδυνο χαρτοφυλάκιο και το υπόλοιπο $1 - w_P$ στο ακίνδυνο χρεόγραφο. Ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου FP δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma_{FP}^2 = (1 - w_P)^2\sigma_F^2 + w_P^2\sigma_P^2 + 2w_P(1 - w_P)\rho_{FP}\sigma_P\sigma_F = w_P^2\sigma_P^2$$

Άρα όπως είναι φυσικό ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου προσδιορίζεται αποκλειστικά και μόνο από τον κίνδυνο του επικίνδυνου χαρτοφυλακίου, σε συνδυασμό με το ποσοστό συμμετοχής του στο χαρτοφυλάκιο FP . Από την παραπάνω σχέση εύκολα διαπιστώνεται ότι $w_P = {}^{\sigma_{FP}}/_{\sigma_P}$. Συνεπώς η απόδοση του χαρτοφυλακίου FP μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\begin{aligned} E(r_{FP}) &= (1 - w_P)r_F + w_P E(r_P) \\ &= \left(1 - \frac{\sigma_{FP}}{\sigma_P}\right) r_F + \frac{\sigma_{FP}}{\sigma_P} E(r_P) \\ &= r_F + \frac{E(r_P) - r_F}{\sigma_P} \sigma_{FP} \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι μια γραμμική συνάρτηση του κινδύνου και συνεπώς σε ένα διάγραμμα απόδοσης/κινδύνου αναπαρίσταται με μια γραμμή η οποίο τέμνει τον κάθετο άξονα της απόδοσης στο σημείο r_F , όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα. Στο σχήμα αυτό, εκτός της γραμμής που αντιστοιχεί στην παραπάνω σχέση, παρουσιάζεται και μια καμπύλη η οποία αναπαριστά το σύνολο των αποτελεσματικών επικίνδυνων χαρτοφυλακίων (προφανώς το επικίνδυνο χαρτοφυλάκιο που θα συμμετέχει στο χαρτοφυλάκιο FP θα πρέπει να είναι αποτελεσματικό).



Σχήμα 2.1: Αποτελεσματικό σύνολο όταν υπάρχει ένα ακίνδυνο χρεόγραφο

Τα χαρτοφυλάκια που μπορεί να κατασκευάσει ο επενδυτής βρίσκονται πάντα πάνω σε κάποια από τις γραμμές που τέμνουν τον κάθετο άξονα της απόδοσης στο σημείο r_F.

Καθώς το χαρτοφυλάκιο FP προκύπτει ως συνδυασμός του ακίνδυνου χρεογράφου και κάποιου επικίνδυνου αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου, είναι δυνατόν να επιλεχθούν διαφορετικά επικίνδυνα αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια για την κατασκευή του χαρτοφυλακίου FP. Στην πραγματικότητα όμως ο επενδυτής έχει μόνο μια λογική επιλογή: το επικίνδυνο αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο P, το οποίο προσδιορίζεται από το σημείο στο οποίο η συνάρτηση $E(r_{FP}) = r_F + \frac{E(r_P)-r_F}{\sigma_P}\sigma_{FP}$ εφάπτεται του αποτελεσματικού συνόλου των επικίνδυνων χαρτοφυλακίων. Για παράδειγμα, κανένας λογικός επενδυτής δεν θα επέλεγε να συνθέσει ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από το ακίνδυνο χρεόγραφο και το επικίνδυνο χαρτοφυλάκιο P_1. Η απόδοση ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου βρίσκεται πάνω στο γραμμικό τμήμα $r_F - P_1$ και προφανώς υπολείπεται της απόδοσης του χαρτοφυλακίου που περιλαμβάνει το ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο και το επικίνδυνο χαρτοφυλάκιο P η οποία βρίσκεται πάνω στο γραμμικό τμήμα $r_F - P$. Επιπλέον ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου που περιλαμβάνει το ακίνδυνο χρεόγραφο και το επικίνδυνο χαρτοφυλάκιο P_1 είναι αντίστοιχος με τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου που κατασκευάζεται από το ακίνδυνο χρεόγραφο και το επικίνδυνο χαρτοφυλάκιο P. Συνεπώς, με την εισαγωγή στην ανάλυση του ακίνδυνου χρεογράφου, το νέο αποτελεσματικό σύνολο είναι η γραμμή η οποία τέμνει τον κάθετο άξονα της απόδοσης στο σημείο r_F και εφάπτεται του αποτελεσματικού συνόλου των επικίνδυνων χαρτοφυλακίων.

Το χαρτοφυλάκιο P περιλαμβάνει m επικίνδυνα χρεόγραφα καθένα από τα οποία συμμετέχει σε ποσοστό $w_1, w_2, \dots, w_m$, έτσι ώστε $w_F + w_1 + \cdots + w_m = 1$, όπου ως w_F συμβολίζεται το ποσοστό συμμετοχής του ακίνδυνου χρεογράφου στο χαρτοφυλάκιο FP. Για να προσδιοριστεί λοιπόν το χαρτοφυλάκιο P θα πρέπει να προσδιοριστούν τα $w_1, w_2, \dots, w_m$. Επιπλέον δεδομένου ότι το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο FP είναι συνδυασμός του χαρτοφυλακίου P με το ακίνδυνο χρεόγραφο F, θα πρέπει να προσδιοριστεί και το ποσοστό συμμετοχής w_F του ακίνδυνου χρεογράφου στο τελικό χαρτοφυλάκιο. Η απόδοση και ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου FP προσδιορίζεται ως εξής:

$$E(r_{FP}) = w_F r_F + \sum_{i=1}^{m} w_i E(r_i)$$

$$= \left(1 - \sum_{i=1}^{m} w_i\right) r_F + \sum_{i=1}^{m} w_i E(r_i)$$

$$= r_F + \sum_{i=1}^{m} w_i [E(r_i) - r_F]$$

$$\sigma_{FP} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} w_i w_j \sigma_{ij}$$

ή πιο απλά σε διανυσματική μορφή:

$$E(r_{FP}) = r_F + (\boldsymbol{r} - r_F\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{w}$$

$$\sigma_{FP} = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{w}$$

Ο καθορισμός του διανύσματος $\boldsymbol{w}$ για ένα επιθυμητό επίπεδο απόδοσης R ανάγεται πλέον στο ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} &min \quad \sigma_{FP}^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{w} \\ &\Upsilon\pi\acute{o}\text{:} \quad r_F + (\boldsymbol{r} - r_F\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{w} = R \\ &\qquad\quad \boldsymbol{w} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Όπως και προηγουμένως, χρησιμοποιείται η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange οπότε διαμορφώνεται η ακόλουθη συνάρτηση:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{w} + \lambda[R - r_F - (\boldsymbol{r} - r_F\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{w}]$$

Για τη βελτιστοποίηση της συνάρτησης αυτής διαμορφώνονται οι μερικές παράγωγοι ως προς $\boldsymbol{w}$ και λ και τίθενται ίσες με το μηδέν:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{w}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{V}\boldsymbol{w} - \lambda(\boldsymbol{r} - r_F\boldsymbol{e}) = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = 0 \Rightarrow R - r_F - (\boldsymbol{r} - r_F\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{w} = 0$$

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς $\boldsymbol{w}$ βρίσκεται ότι:

$$\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{r} - r_F\boldsymbol{e})$$

οπότε αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση προκύπτει:

$$R - r_F = \lambda(\boldsymbol{r} - r_F\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{r} - r_F\boldsymbol{e}) \Leftrightarrow \lambda = \frac{R - r_F}{(\boldsymbol{r} - r_F\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{r} - r_F\boldsymbol{e})} = \frac{R - r_F}{d}$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην $\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{r} - r_F \boldsymbol{e})$ υπολογίζεται το διάνυσμα $\boldsymbol{w}$ για το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο FP ως εξής:

$$\boldsymbol{w} = \frac{R - r_F}{d} \boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{r} - r_F \boldsymbol{e})$$

Το διάνυσμα $\boldsymbol{w}$ που προκύπτει από τη σχέση αυτή προσδιορίζει τη σύνθεση του επικίνδυνου χαρτοφυλακίου P. Το ποσοστό συμμετοχής w_F του ακίνδυνου χρεογράφου στο χαρτοφυλάκιο FP υπολογίζεται ως $w_F = 1 - \sum_{i=1}^{m} w_i$.

Ο κίνδυνος του βέλτιστου χαρτοφυλακίου μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί από τη σχέση:

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{w} - \lambda(\boldsymbol{r} - r_F \boldsymbol{e}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{w} - \lambda \boldsymbol{w}^T(\boldsymbol{r} - r_F \boldsymbol{e}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma_{FP}^2 - \lambda[R - r_F] = 0 \Leftrightarrow \sigma_{FP}^2 = \frac{(R - r_F)^2}{d}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

$$R = r_F + \sigma_{FP}\sqrt{d}$$

Δηλαδή, η απόδοση R του βέλτιστου χαρτοφυλακίου που συνδυάζει ένα ακίνδυνο χρεόγραφο και ένα χαρτοφυλάκιο επικίνδυνων χρεογράφων είναι γραμμική συνάρτηση του κινδύνου, στοιχείο το οποίο συμφωνεί με τη γραφική αναπαράσταση του σχήματος 2.1.

2.5.2 Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίων Χωρίς Ανοιχτές Πωλήσεις

Όπως προαναφέρθηκε σε όλες τις μέχρι τώρα αναλύσεις ο μόνος περιορισμός που χρησιμοποιήθηκε για τη σύνθεση χαρτοφυλακίων ήταν ότι το άθροισμα των ποσοστών συμμετοχής στο χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα. Αυτός ο περιορισμός δεν διασφαλίζει ότι τα ποσοστά συμμετοχής θα είναι μη αρνητικά. Έτσι χρεόγραφα με αρνητικά ποσοστά συμμετοχής πρέπει να πωληθούν ανοιχτά. Εάν δεν υπάρχει δυνατότητα πραγματοποίησης ανοιχτών πωλήσεων, τότε αυτό συνεπάγεται ότι όλα τα ποσοστά συμμετοχής θα πρέπει να είναι μη αρνητικά. Θεωρώντας επιπλέον ότι δεν υπάρχει κάποιο ακίνδυνο χρεόγραφο, τότε το πρόβλημα βελτιστοποίησης για την κατασκευή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου διαμορφώνεται υπό τη μορφή του ακόλουθου τετραγωνικού προγράμματος:

$$min \quad \sigma_P^2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{w}$$

$$\begin{aligned} \text{Υπό:} \quad & \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{w} = 1 \\ & \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{w} = R \\ & \boldsymbol{w} \geq 0 \end{aligned}$$

Λόγω των περιορισμών μη αρνητικότητας, η διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε προηγούμενα υπό την υπόθεση των ανοιχτών πωλήσεων δεν μπορεί πλέον να εφαρμοστεί ώστε να βρεθεί η σύνθεση του χαρτοφυλακίου αναλυτικά. Η λύση πλέον βρίσκεται χρησιμοποιώντας διαδικασίες τετραγωνικού προγραμματισμού.

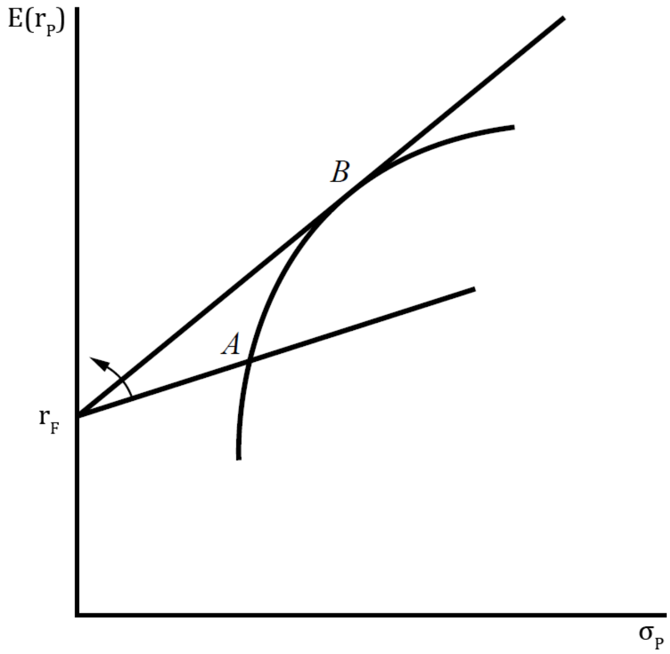
2.6 Τεχνικές Προσδιορισμού Αποτελεσματικού Μετώπου

Στα προηγούμενα μελετήσαμε τη σχέση απόδοσης-κινδύνου για ένα χαρτοφυλάκιο m χρεογράφων. Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τεχνικές για τον προσδιορισμό του αποτελεσματικού μετώπου κατά τις περιπτώσεις όπου:

1. Επιτρέπονται οι ανοιχτές πωλήσεις και υπάρχει η δυνατότητα επένδυσης στο ακίνδυνο χρεόγραφο
2. Επιτρέπονται οι ανοιχτές πωλήσεις και δεν υπάρχει η δυνατότητα επένδυσης στο ακίνδυνο χρεόγραφο
3. Δεν επιτρέπονται οι ανοιχτές πωλήσεις και υπάρχει η δυνατότητα επένδυσης στο ακίνδυνο χρεόγραφο
4. Δεν επιτρέπονται οι ανοιχτές πωλήσεις και δεν υπάρχει η δυνατότητα επένδυσης στο ακίνδυνο χρεόγραφο

Μη απαγόρευση ανοιχτών πωλήσεων – Ύπαρξη ακίνδυνου χρεογράφου

Όπως έχει αναφερθεί, η εισαγωγή του ακίνδυνου χρεογράφου συνεπάγεται την ύπαρξη ενός χαρτοφυλακίου επικίνδυνων χρεογράφων το οποίο θα προτιμάται έναντι όλων των άλλων. Στην περίπτωση όπου επιτρέπονται οι ανοικτές πωλήσεις και υπάρχει η δυνατότητα επένδυσης στο ακίνδυνο χρεόγραφο, ο προσδιορισμός του αποτελεσματικού μετώπου βασίζεται στην διαπίστωση ότι η ευθεία που συνδέει το ακίνδυνο χρεόγραφο με το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο επικίνδυνων χρεογράφων, είναι αυτή με τη μέγιστη κλίση.



Σχήμα 2.2: Αποτελεσματικό μέτωπο όταν επιτρέπονται ανοικτές πωλήσεις και υπάρχει δυνατότητα επένδυσης στο ακίνδυνο χρεόγραφο

Η κλίση της ευθείας που συνδέει το ακίνδυνο χρεόγραφο με ένα χαρτοφυλάκιο επικίνδυνων χρεογράφων ισούται με το λόγο τη επιπρόσθετης αξίας (excess return) του χαρτοφυλακίου (δηλαδή της διαφοράς μεταξύ της αναμενόμενης απόδοσης του χαρτοφυλακίου και της απόδοσης του ακίνδυνου χρεογράφου) προς την τυπική απόκλιση. Βασιζόμενοι στα παραπάνω, η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος για τον προσδιορισμό του αποτελεσματικού μετώπου έχεις ως εξής:

$$Max \quad \theta = \frac{E(r_P) - r_F}{\sigma_P}$$

$$\Upsilon\pi\acute{o} \quad \sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

Για το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες τεχνικές, όπως η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange. Εναλλακτικά, ο περιορισμός του προβλήματος είναι δυνατόν να ενσωματωθεί στην αντικειμενική συνάρτηση και αυτή με τη σειρά της να μεγιστοποιηθεί ακριβώς όπως στην περίπτωση ενός προβλήματος χωρίς περιορισμούς.

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι:

$$r_F = 1r_F = \left(\sum_{i=1}^{m} w_i\right) r_F = \sum_{i=1}^{m} (w_i r_F)$$

η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i (E(r_i) - r_F)}{\left[\sum_{i=1}^{m} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1, j\neq i}^{m} w_i w_j \sigma_{ij}\right]^{1/2}}$$

Τα ποσοστά w_k του κεφαλαίου που επενδύεται σε κάθε χρεόγραφο και για τα οποία μεγιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση θ είναι δυνατόν να προσδιοριστούν με επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτει αν ληφθούν υπόψη όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial \theta}{\partial w_k}$ και τεθούν ίσες με μηδέν:

$$\frac{\partial \theta}{\partial w_k} = 0 \Rightarrow$$

$$(E(r_k) - r_F)\left(\sum_{i=1}^{m} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1, j\neq i}^{m} w_i w_j \sigma_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}} +$$

$$\left[\sum_{i=1}^{m} w_i (E(r_i) - r_F)\right]\left[\begin{matrix}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^{m} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1, j\neq i}^{m} w_i w_j \sigma_{ij}\right)^{-3/2} \\ \left(2 w_k \sigma_k^2 + 2\sum_{j=1, j\neq i}^{m} w_j \sigma_{kj}\right)\end{matrix}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$(E(r_k) - r_F) - \left[\frac{\sum_{i=1}^{m} w_i (E(r_i) - r_F)}{\sum_{i=1}^{m} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1, j\neq i}^{m} w_i w_j \sigma_{ij}}\right]\left(w_k \sigma_k^2 + \sum_{j=1, j\neq k}^{m} w_j \sigma_{kj}\right) = 0$$

Θέτοντας:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i (E(r_i) - r_F)}{\sum_{i=1}^{m} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1, j\neq i}^{m} w_i w_j \sigma_{ij}}$$

προκύπτει:

$$(E(r_k) - r_F) - \lambda\left(w_k\sigma_k^2 + \sum_{j=1, j\neq k}^{m} w_j\sigma_{kj}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$E(r_k) - r_F = \lambda w_k\sigma_k^2 + \sum_{j=1, j\neq k}^{m} \lambda w_j\sigma_{kj}$$

Ορίζοντας νέα μεταβλητή $Z_k = \lambda w_k$ από την προηγούμενη έκφραση προκύπτει:

$$E(r_i) - r_f = Z_1\sigma_{1i} + Z_2\sigma_{2i} + \cdots + Z_i\sigma_i^2 + \cdots + Z_{N-1}\sigma_{N-1i} + Z_N\sigma_{Ni}$$

Πιο αναλυτικά:

$$E(r_1) - r_F = Z_1\sigma_1^2 + Z_2\sigma_{12} + Z_3\sigma_{13} + \cdots + Z_N\sigma_{1N}$$

$$E(r_2) - r_F = Z_1\sigma_{12} + Z_2\sigma_2^2 + Z_3\sigma_{23} + \cdots + Z_N\sigma_{2N}$$

$$E(r_3) - r_F = Z_1\sigma_{13} + Z_2\sigma_{23} + Z_3\sigma_3^2 + \cdots + Z_N\sigma_{3N}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$E(r_N) - r_F = Z_1\sigma_{1N} + Z_2\sigma_{1N} + Z_3\sigma_{1N} + \cdots + Z_N\sigma_N^2$$

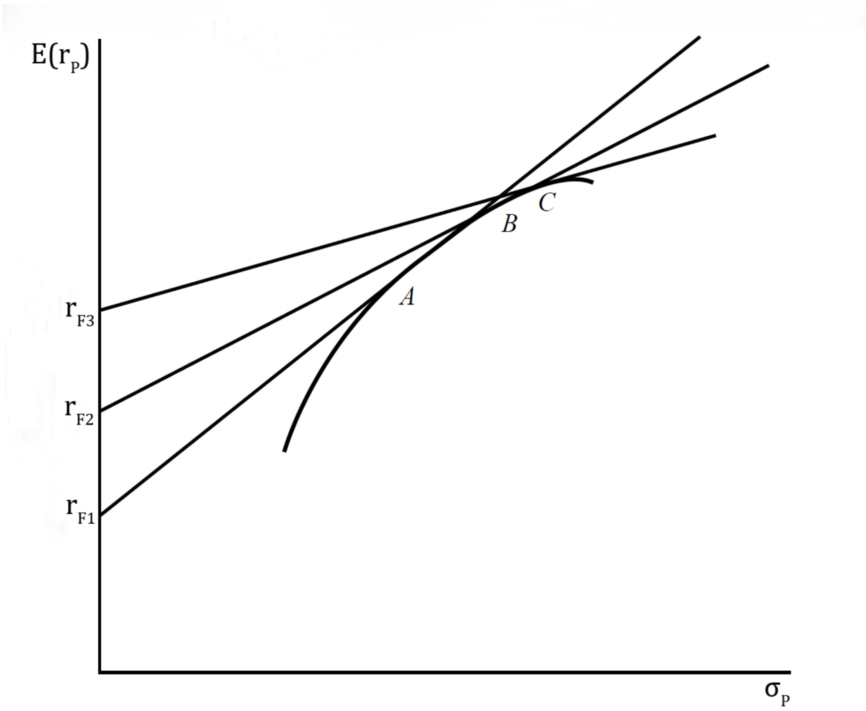
Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα για τις τιμές $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$ και κάνοντας χρήση της εξίσωσης:

$$w_k = {Z_k}\Big/{\sum_{i=1}^{m} Z_i}$$

βρίσκουμε τα ποσοστά w_k του που επενδύεται σε κάθε χρεόγραφο.

Μη απαγόρευση ανοιχτών πωλήσεων – Μη ύπαρξη ακίνδυνου χρεογράφου

Στην περίπτωση αυτή όπου επιτρέπονται οι ανοιχτές πωλήσεις και δεν υπάρχει η δυνατότητα επένδυσης στο ακίνδυνο χρεόγραφο, το αποτελεσματικό μέτωπο προσδιορίζεται και πάλι με εφαρμογή της μεθοδολογίας που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη περίπτωση. Για διάφορες τιμές της απόδοσης του ακίνδυνου χρεογράφου, το οποίο υποθετικά θεωρείται ότι υπάρχει, υπολογίζονται τα αντίστοιχα βέλτιστα χαρτοφυλάκια μέχρι να σαρωθεί όλο το αποτελεσματικό μέτωπο (σχήμα 2.3).



Σχήμα 2.3: Προσδιορισμός αποτελεσματικού μετώπου όταν επιτρέπονται οι ανοικτές πωλήσεις και δεν υπάρχει η δυνατότητα επένδυσης στο ακίνδυνο χρεόγραφο

Απαγόρευση ανοιχτών πωλήσεων – Ύπαρξη ακίνδυνου χρεογράφου

Στην περίπτωση που δεν επιτρέπονται οι ανοικτές πωλήσεις και υπάρχει η δυνατότητα επένδυσης στο ακίνδυνο χρεόγραφο, το πρόβλημα είναι ίδιο με αυτό της πρώτης περίπτωσης με τη διαφορά ότι ένας νέος περιορισμός ενσωματώνεται στο πρόβλημα, καθώς πλέον δεν είναι δυνατόν να διατηρούνται αρνητικά ποσοστά επένδυσης σε κάποιο χρεόγραφο.

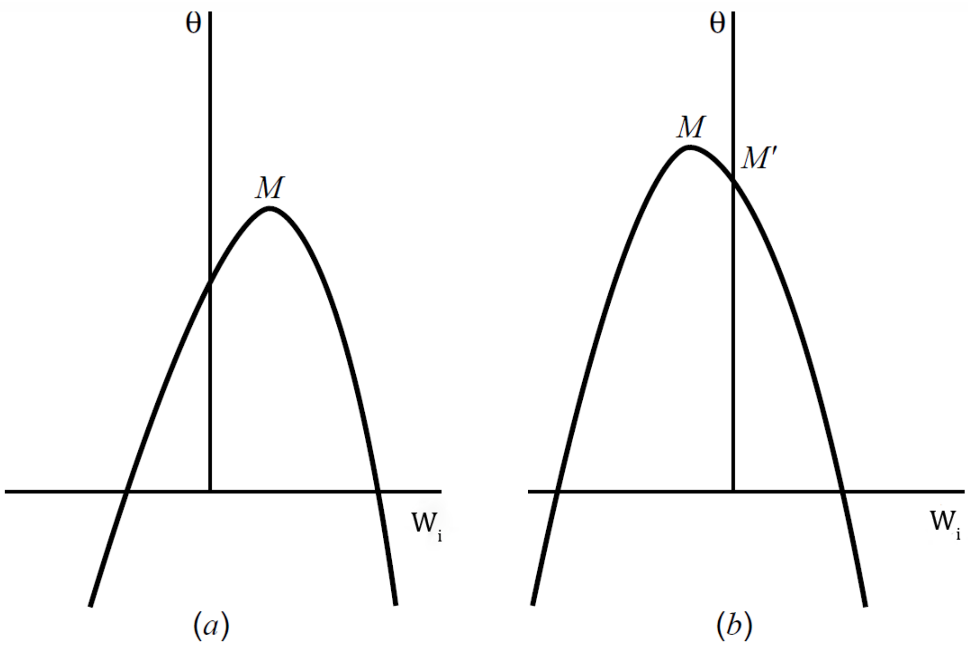
Το πρόβλημα διατυπώνεται μαθηματικά ως εξής:

$$Max \quad \theta = \frac{E(r_P) - r_F}{\sigma_P}$$

$$Υπό \quad \sum_{i=1}^{m} w_i = 1 \quad και \quad w_i \geq 0$$

Το παραπάνω πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού αφού οι περιορισμοί είναι γραμμικοί, αλλά η αντικειμενική συνάρτηση περιέχει τους όρους δευτέρας τάξης $w_i^2 \; και \; w_i w_j$. Για την επίλυση αυτού του είδους των προβλημάτων χρησιμοποιούνται αλγόριθμοι βασιζόμενοι στις συνθήκες Kuhn-Tucker, με την υπόθεση ότι αν μία λύση τις ικανοποιεί τότε η λύση αυτή ανήκει στο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο.

Στην αρχική περίπτωση κατά την οποία επιτρέπονται οι ανοικτές πωλήσεις και υπάρχει η δυνατότητα επένδυσης στο ακίνδυνο χρεόγραφο, η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θ προκύπτει αν ληφθούν οι μερικές παράγωγοι ${}^{\partial\theta}/_{\partial w_i}$ και τεθούν ίσες με μηδέν. Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θ αναπαρίσταται στο σχήμα 2.4α με το σημείο M. Στην περίπτωση όπου δεν επιτρέπονται οι ανοιχτές πωλήσεις ($w_i \geq 0$), το πρόβλημα που προκύπτει έχει να κάνει με το ότι η αντικειμενική συνάρτηση θ μπορεί να λάβει τη μέγιστη τιμή της για τιμές w_i που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της (δηλαδή για $w_i < 0$). Όπως φαίνεται και από το σχήμα 2.4β, η μέγιστη τιμή που δύναται να λάβει η αντικειμενική συνάρτηση θ, ικανοποιώντας συγχρόνως τη συνθήκη περί απαγόρευσης των ανοικτών πωλήσεων, αναπαρίσταται από το σημείο M'.



Σχήμα 2.4: Μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης θ για τις διάφορες τιμές του ποσοστού w_i του κεφαλαίου που επενδύεται σε κάθε χρεόγραφο

Συνεπώς, όταν η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θ παρατηρείται για $w_i = 0$, τότε θα ισχύει ${}^{\partial\theta}/_{\partial w_i} < 0$, ενώ όταν η μέγιστη τιμή παρατηρείται για $w_i > 0$ τότε θα ισχύει ${}^{\partial\theta}/_{\partial w_i} = 0$. Γενικεύοντας, όταν δεν υπάρχουν ανοικτές πωλήσεις θα ισχύει:

$$\frac{\partial\theta}{\partial w_i} \leq 0 \quad \gamma\iota\alpha \;\; w_i \geq 0$$

Η παραπάνω ισότητα μπορεί εναλλακτικά να γραφεί ως εξής:

$$\frac{\partial\theta}{\partial w_i} + U_i = 0$$

Η συνθήκη αυτή αποτελεί την πρώτη συνθήκη Kuhn-Tucker.

Από την συνθήκη αυτή προκύπτει:

$$w_i > 0 \Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial w_i} \leq 0 \Rightarrow U_i = 0$$

$$w_i = 0 \Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial w_i} < 0 \Rightarrow U_i > 0$$

Οι σχέσεις αυτές αποτελούν τη δεύτερη συνθήκη Kuhn-Tucker και μπορούν να γραφούν σε ενοποιημένη μορφή ως εξής:

$$\begin{gathered} w_i U_i = 0 \\ w_i \geq 0 \\ U_i \geq 0 \end{gathered}$$

Άρα συνοψίζοντας για τις συνθήκες Kuhn-Tucker έχουμε:

$$\begin{gathered} \frac{\partial\theta}{\partial w_i} + U_i = 0 \\ w_i U_i = 0 \\ w_i \geq 0 \\ U_i \geq 0 \end{gathered}$$

Αν μια λύση ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες θα αντιστοιχεί σε βέλτιστο χαρτοφυλάκιο του αποτελεσματικού μετώπου.

Απαγόρευση ανοικτών πωλήσεων – Μη ύπαρξη ακίνδυνου χρεογράφου

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που δεν επιτρέπονται οι ανοικτές πωλήσεις και δεν υπάρχει η δυνατότητα επένδυσης στο ακίνδυνο χρεόγραφο. Στην περίπτωση αυτή το αποτελεσματικό μέτωπο προσδιορίζεται με ελαχιστοποίηση του κινδύνου για διάφορες τιμές της απόδοσης, ενώ παράλληλα λαμβάνεται υπόψη ότι δεν είναι δυνατόν να διατηρούνται αρνητικά ποσοστά επένδυσης σε κάποιο χρεόγραφο και ότι το άθροισμά των ποσοστών αυτών ισούται με τη μονάδα.

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος έχει ως εξής:

$$min \;\; \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{m} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1, j\neq i}^{m} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$\Upsilon\pi\acute{o}\text{:} \;\; \sum_{i=1}^{m} w_i = 1, \;\; \sum_{i=1}^{m} (w_i E(r_P)) = E(r_P) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; w_i \geq 0$$

Το πρόβλημα όπως διατυπώθηκε παραπάνω αντιστοιχεί στην αυθεντική έκφραση του υποδείγματος μέσου-διακύμανσης, όπως αυτή προτάθηκε από τον Markowitz (1952). Το πρόβλημα αυτό είναι και σε αυτή την περίπτωση ένα πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού. Μεταβάλλοντας την αναμενόμενη απόδοση $E(r_P)$ μεταξύ των τιμών των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου ελαχίστου κινδύνου και του χαρτοφυλακίου μέγιστης απόδοσης, προσδιορίζονται διάφορα σημεία πάνω στο αποτελεσματικό μέτωπο, μέχρι αυτό να σαρωθεί πλήρως.

2.7 MAD/Semi-MAD

Η διαδικασία μέσου-διακύμανσης υποθέτει ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή, ενώ επιπλέον οι διαστάσεις του τετραγωνικού προγράμματος αυξάνονται σημαντικά για μεγάλο πλήθος χρεογράφων κάτι που οδηγεί σε υπολογιστικά προβλήματα. Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν υποδείγματα γραμμικού προγραμματισμού, η επίλυση των οποίων απαιτεί σημαντικά μικρότερο χρόνο έναντι των προβλημάτων τετραγωνικού προγραμματισμού.

Ωστόσο για να υιοθετήσουμε αυτή τη προσέγγιση χρειάζεται ένας νέος τρόπος προσδιορισμού του κινδύνου, ο οποίος πλέον θα ορίζεται ως η μέση απόλυτη απόκλιση από την αναμενόμενη απόδοση (mean absolute deviation ή MAD). Η ελαχιστοποίηση της μέσης απόλυτης απόκλισης αντιστοιχεί ουσιαστικά στην ελαχιστοποίηση των αποκλίσεων από τη διάμεσο της απόδοσης. Με τον τρόπο αυτό παρακάμπτεται η υπόθεση ότι οι αποδόσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Θεωρώντας ένα σύνολο ιστορικών δεδομένων για τις αποδόσεις $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{iT}$ ενός χρεογράφου i, ο κίνδυνος αυτού του χρεογράφου προσδιορίζεται ως εξής:

$$MAD_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|r_{it} - E(r_i)|$$

Ο κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου P αποτελούμενου από m χρεόγραφα, προσδιορίζεται κατά αντίστοιχο τρόπο ως εξής:

$$\begin{aligned} MAD_P &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|r_{pt} - E(r_p)\right| \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{m} w_i r_{it} - \sum_{i=1}^{m} w_i E(r_i)\right| \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{m} w_i [r_{it} - E(r_i)]\right| \end{aligned}$$

Η ελαχιστοποίηση του κινδύνου MAD_P του χαρτοφυλακίου δεδομένης μιας ελάχιστης επιθυμητής απόδοσης R μπορεί να επιτευχθεί μέσω του ακόλουθου προβλήματος:

$$min \quad MAD_P = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{m} w_i [r_{it} - E(r_i)]\right|$$

$$\text{Υπό:} \quad \sum_{i=1}^{m} w_i E(r_i) \geq R$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0$$

2.8 Εξελικτική Βελτιστοποίηση με Γενετικούς Αλγόριθμους

Οι Γενετικοί Αλγόριθμοι αποτελούν μια μέθοδο αναζήτησης βέλτιστων λύσεων σε συστήματα που μπορούν να περιγραφούν ως μαθηματικό πρόβλημα. Επινοήθηκαν τη δεκαετία του ’60 και συχνά ταυτίζονται με τη θεωρία του εξελικτικού προγραμματισμού (evolutionary programming). Χρησιμοποιούνται κυρίως σε προβλήματα που περιέχουν πολλές διαστάσεις/παραμέτρους, όπως το πρόβλημα της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων χρεογράφων και όπου δεν υπάρχει αναλυτική μέθοδος που να μπορεί να βρει το βέλτιστο συνδυασμό τιμών για τις μεταβλητές, ώστε το σύστημα που είναι υπό εξέταση να αντιδρά όσο το δυνατόν με τον επιθυμητό τρόπο.

Ο τρόπος που λειτουργούν οι Γενετικοί Αλγόριθμοι έχει εμπνευστεί από τη βιολογία και μιμείται τη διαδικασία της φυσικής επιλογής. Στην πράξη ο αλγόριθμος ξεκινάει με ένα σύνολο από πιθανές λύσεις οι οποίες συνιστούν τον πληθυσμό και που συνεχίζουν να εξελίσσονται διαρκώς προς όλο και πιο ικανές λύσεις μέχρις ότου να ‘επιβιώσουν’ οι καλύτερες από αυτές.

Η υλοποίηση των Γενετικών Αλγορίθμων συνοπτικά μπορεί να περιγραφεί ως εξής. Οι τιμές για τις παραμέτρους του συστήματος κωδικοποιούνται με τέτοιο τρόπο ώστε να αναπαρασταθούν από μια μεταβλητή που περιέχει μια σειρά χαρακτήρων ή δυαδικών ψηφίων 0 και 1. Αυτή η μεταβλητή ουσιαστικά μιμείται το γενετικό κώδικα που υπάρχει στους ζωντανούς οργανισμούς. Η διαδικασία ξεκινάει από έναν πληθυσμό λύσεων οι οποίες δημιουργούνται από πολλαπλά αντίγραφα της μεταβλητής/γενετικού κώδικα (με τυχαίες τιμές) τα οποία παράγονται από τον Γενετικό Αλγόριθμο. Κάθε λύση δοκιμάζεται για το κατά πόσο κοντά φέρνει την αντίδραση του συστήματος στην επιθυμητή, μέσω μια συνάρτησης που ονομάζεται συνάρτηση ικανότητας (fitness function) και η οποία δίνει το μέτρο ικανότητας της λύσης.

Οι λύσεις που βρίσκονται πιο κοντά στην επιθυμητή σύμφωνα με τη συνάρτηση ικανότητας, αναπαράγονται στην επόμενη γενιά λύσεων και λαμβάνουν μια τυχαία μετάλλαξη (mutation). Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία για αρκετές γενιές τελικά λαμβάνουμε ένα γονίδιο/λύση που περιέχει τιμές για τις παραμέτρους που ικανοποιούν όσο καλύτερα γίνεται την συνάρτηση ικανότητας.

2.9 Index Tracking

Πρόκειται για μια παθητική στρατηγική βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων που έχει σαν στόχο να ακολουθήσει το χαρτοφυλάκιό μας όσο καλύτερα γίνεται το δείκτη (πχ το δείκτη FTSE-100).

Διατυπώνοντας μαθηματικά το πρόβλημα, υποθέτουμε αρχικά ότι σε χρονική διάρκεια T έχει παρατηρηθεί η αξία N μετοχών καθώς και η αξία του δείκτη που θέλουμε να ακολουθήσουμε. Η απόφαση που θα πρέπει να παρθεί είναι, ποιο είναι το βέλτιστο σύνολο K μετοχών το οποίο θα πρέπει να κρατήσουμε (με K<N), καθώς και τις ακριβείς ποσότητές τους, ώστε να ακολουθήσουμε καλύτερα το δείκτη στο μέλλον.

Οι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι παρακάτω:

r_t	Η απόδοση του χαρτοφυλακίου TP
R_t	Η απόδοση του δείκτη
T	Το σύνολο των περιόδων
z_i	Δυαδικές Μεταβλητές (1 αν η μετοχή i συμμετέχει στο νέο χαρτοφυλάκιο, 0 διαφορετικά)
K	Ο αριθμός των μετοχών που θέλουμε να συμπεριλάβουμε στο χαρτοφυλάκιο TP
V_{iT}	Η αξία της μετοχής i κατά τη χρονική περίοδο T
x_i	Ο αριθμός των κομματιών της μετοχής i που θα κρατήσουμε στο νέο χαρτοφυλάκιο TP
X_i	Ο αρχικός αριθμών κομματιών της μετοχής i
C	Η συνολική αξία του παρόντος χαρτοφυλακίου TP

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης που έχουμε να αντιμετωπίσουμε, μπορεί να εκφραστεί με μαθηματικούς όρους ως εξής:

$$min \quad \sum_{t=1}^{T} \frac{(r_t - R_t)^2}{T}$$

$$\Upsilon\pi\acute{o}\text{:} \quad \sum_{i=1}^{N} z_i = K$$

$$\frac{V_{iT} x_i}{C} \leq z_i \qquad\qquad i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^{N} V_{iT} x_i = C$$

$$x_i \geq 0 \qquad\qquad i = 1, \dots., N$$

$$z_i \in [0,1] \qquad\qquad i = 1, \dots, N$$

2.10 Διαχείριση Ομολόγων

Τα ομόλογα είναι μια ειδική μορφή χρεογράφων μακροπρόθεσμης διάρκειας και αποτελούν ένα είδος μακροπρόθεσμου δανεισμού για την επιχείρηση ή το κράτος που τα εκδίδει. Σε αντίθεση με τις μετοχές, ο αγοραστής του ομολόγου δεν αποκτά κάποιο τμήμα της περιουσίας της επιχείρησης, αλλά απλά δανείζουν στον εκδότη του ομολόγου ένα κεφάλαιο ίσο με την αξία των ομολόγων που αγοράζουν. Ο εκδότης από την πλευρά του δεσμεύεται να αποδίδει στον αγοραστή ένα συγκεκριμένο χρηματικό ποσό (τοκομερίδιο, coupon) σε τακτικά χρονικά διαστήματα μέχρι τη λήξη του ομολόγου και κατά τη λήξη του ομολόγου να αποδώσει ένα επιπλέον ποσό, το οποίο αναπαριστά την ονομαστική αξία του ομολόγου (face value). Το ποσό που αντιστοιχεί στην ονομαστική αξία καταβάλλεται σε κάθε ομολογία. Ωστόσο υπάρχουν και ομόλογα τα οποία δεν αποδίδουν τοκομερίδιο. Τέτοια ομόλογα ονομάζονται zero coupon bonds ή pure discount bonds και εμφανίστηκαν τη δεκαετία του 1980.

2.10.1 Η Χρονική Αξία του Χρήματος

Σημαντικό ρόλο διαδραματίζει το ύψος των επιτοκίων, τα οποία προσδιορίζουν τον τρόπο που μεταβάλλεται η αξία του κεφαλαίου μέσα στο χρόνο. Για παράδειγμα αν έχουμε ένα κεφάλαιο €1000 το οποίο κατατίθεται σε ένα τραπεζικό λογαριασμό με επιτόκιο 5%, μετά από T περιόδους το αρχικό κεφάλαιο θα έχει αξία $1000(1 + 0.05)^T$. Η αξία αυτή αναφέρεται ως τελική αξία (future value).

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι μια νομισματική μονάδα σήμερα δεν έχει την ίδια αξία στο μέλλον, λόγω της ύπαρξης των επιτοκίων. Στο παραπάνω παράδειγμα το επιτόκιο χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό της τελικής αξίας ενός επενδυόμενου κεφαλαίου. Όμως σε κάθε διαδικασία αποτίμησης αυτό που ενδιαφέρει είναι να υπολογιστεί η σημερινή θεωρητική αξίας της επένδυσης σε κάποιο συγκεκριμένο χρεόγραφο. Η αξία αυτή αναφέρεται ως παρούσα αξία (present value).

2.10.2 Απόδοση στη Λήξη

Η απόδοση στη λήξη (yield to maturity) αποτελεί το καθιερωμένο μέτρο προσδιορισμού της απόδοσης των ομολόγων και αποτελεί τη βάση για τον υπολογισμό τους.

Θεωρώντας ένα ομόλογο ονομαστικής αξίας c που αποδίδει ετήσιο τοκομερίδιο C για μια περίοδο T ετών, η αξία του υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+i)^t} + \frac{c}{(1+i)^T}$$

όπου i είναι η ετήσια απόδοση στη λήξη.

Εάν τα τοκομερίδια αποδίδονται σε εξαμηνιαία βάση, τότε η σχέση αυτή προσαρμόζεται ως εξής:

$$P = \sum_{t=1}^{2T} \frac{C}{(1+\frac{i}{2})^t} + \frac{c}{(1+\frac{i}{2})^{2T}}$$

Η απόδοση στη λήξη προσδιορίζει την πραγματική ετήσια απόδοση του ομολόγου εάν τα τοκομερίδια επενδύονται με απόδοση ίση με την απόδοση στη λήξη. Δεδομένου, όμως ότι το ύψος των επιτοκίων μεταβάλλεται, καθιστά την απόδοση στη λήξη ενός ομολόγου ένα μέγεθος που εμπεριέχει κάποια αβεβαιότητα.

2.10.3 Μέση Σταθμική Διάρκεια

Η απόδοση κάθε ομολόγου είναι συνιστώσα των τοκομεριδίων του και των κερδών που προκύπτουν από τη μεταβολή της τιμής με την πάροδο του χρόνου. Δεδομένου ότι η τιμή του ομολόγου προσδιορίζεται από τα επιτόκια, μεταβολές σε αυτά θα οδηγήσουν σε μεταβολές στην τιμή/αξία του ομολόγου. Αυτός είναι ένα από τους σημαντικότερους παράγοντες κινδύνου για τις επενδύσεις σε ομόλογα.

Η μέτρηση του κινδύνου αυτού γίνεται με τον υπολογισμό του μεγέθους που ονομάζεται μέση σταθμική διάρκεια (duration). Η μέση σταθμική διάρκεια D αναπαριστά το μέσο χρονικό διάστημα για το οποίο το κεφάλαιο παραμένει δεσμευμένο στο ομόλογο:

$$D = \sum_{t=1}^{T} w_t t$$

όπου T είναι η διάρκεια του ομολόγου και w_t είναι συντελεστές στάθμισης των χρονικών στιγμών στις οποίες καταβάλλονται τα τοκομερίδια ($w_1 + w_2 + \cdots + w_T = 1$). Για ένα zero coupon bond είναι $w_1 = w_2 = \cdots = w_{T-1} = 0$ και $w_T = 1$, οπότε $D = T$.

Η κύρια χρήση της μέσης σταθμικής διάρκειας αφορά τον προσδιορισμό της ευαισθησίας (μεταβολή) της τιμής του ομολόγου σε μεταβολές των επιτοκίων (της απόδοσης στη λήξη). Η ευαισθησία αυτή εξαρτάται από το χρόνο για τον οποίο το κεφάλαιο είναι δεσμευμένο στην επένδυση. Όσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια του ομολόγου τόσο αυξάνεται η ευαισθησία του σε μεταβολές των επιτοκίων.

Για τον προσδιορισμό της ευαισθησίας της τιμής του ομολόγου σε μεταβολές της απόδοσης της λήξης θα πρέπει να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης P που αποδίδει την αξία του ομολόγου συναρτήσει της απόδοσης στη λήξη i. Έστω ότι αρχικά εξετάζεται ένα zero coupon bond. Στην περίπτωση αυτή, όπως έχει ήδη αναφερθεί, η αξία του ομολόγου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$P = \frac{c}{(1+i)^T}$$

Διαμορφώνοντας την παράγωγο της συνάρτησης αυτής ως προς i, προκύπτει ότι:

$$\frac{dP}{di} = -Tc\frac{1}{(1+i)^{T+1}} = -\left[\frac{c}{(1+i)^T}\right]T\frac{1}{(1+i)} \Rightarrow dP = -\left[\frac{c}{(1+i)^T}\right]T\frac{di}{1+i}$$

Ο παράγοντας μέσα στην αγκύλη είναι η αξία P του ομολόγου. Συνεπώς:

$$dP = -PT\frac{di}{1+i} \Rightarrow \frac{dP}{P} = -T\frac{di}{1+i}$$

Η σχέση αυτή συνδέει τη μεταβολή στην αξία του ομολόγου ($r = dP\ /\ P$) με μια οριακή μεταβολή di της απόδοσης στη λήξη. Όπως όμως προαναφέρθηκε η μέση σταθμική διάρκεια D ενός zero bound είναι $D = T$, οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$r = -D\frac{di}{1+i}$$

Προφανώς αυτή η σχέση προσδιορίζει τη μεταβολή στην αξία του ομολόγου ως μια φθίνουσα γραμμική συνάρτηση της μεταβολής της απόδοσης στη λήξη και ισχύει μόνο στην περίπτωση όπου οι μεταβολές της απόδοσης στη λήξη είναι μικρές.

Στην περίπτωση ομολόγων που πληρώνουν τοκομερίδια, η μέση σταθμική διάρκεια μπορεί να υπολογιστεί θεωρώντας ότι κάθε τέτοιο ομόλογο μπορεί να προκύψει ως συνδυασμός κάποιων zero coupon bonds.

Στη γενική περίπτωση, η μέση σταθμική διάρκεια για μια σειρά ετήσιων ταμειακών ροών $C_1, C_2, \dots, C_T$ είναι:

$$\begin{aligned} D &= 1\frac{P_1}{P} + 2\frac{P_2}{P} + \cdots + T\frac{P_T}{P} \\ &= 1\frac{C_1(1+i)^{-1}}{P} + 2\frac{C_2(1+i)^{-2}}{P} + \cdots + T\frac{C_T(1+i)^{-T}}{P} \\ &= \frac{1}{P}\sum_{t=1}^{T} t\frac{C_t}{(1+i)^t} \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η μέση σταθμική διάρκεια ενός οποιουδήποτε ομολόγου είναι ουσιαστικά ένας σταθμισμένος μέσος όρος των χρονικών στιγμών στις οποίες καταβάλλονται τα τοκομερίδια. Κάθε χρονική στιγμή σταθμίζεται με το ποσοστό συμμετοχής του κάθε τοκομεριδίου στον προσδιορισμό της παρούσας αξίας του ομολόγου. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι η μέση σταθμική διάρκεια ενός ομολόγου που πληρώνει τοκομερίδια είναι πάντα μικρότερη από τη λήξη του ομολόγου.

Στην περίπτωση όπου οι ταμειακές ροές είναι εξαμηνιαίες, ο υπολογισμός της μέσης σταθμικής διάρκειας προσαρμόζεται ως εξής:

$$D = \frac{1}{2P}\sum_{t=1}^{2T} t\,\frac{C_t}{(1+\frac{i}{2})^t}$$

2.10.4 Κυρτότητα

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα ο υπολογισμός της μέσης σταθμικής διάρκειας υποθέτει ότι η σχέση μεταξύ της μεταβολής της τιμής ενός ομολόγου και της μεταβολής των επιτοκίων είναι γραμμική. Η υπόθεση αυτή ανταποκρίνεται ικανοποιητικά στην πραγματικότητα όταν οι μεταβολές των επιτοκίων είναι περιορισμένες. Για μεγαλύτερες όμως μεταβολές μπορεί να οδηγήσει σε παραπλανητικά αποτελέσματα.

Η αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού μπορεί να πραγματοποιηθεί συνδυάζοντας τη μέση σταθμική διάρκεια με ένα επιπλέον μέτρο κινδύνου, την κυρτότητα (convexity). Ο όρος κυρτότητα προκύπτει από τη διαπίστωση ότι η μεταβολή της τιμής ενός ομολόγου δεν είναι γραμμική συνάρτηση της μεταβολής των επιτοκίων (όπως υποθέτει ο υπολογισμός της μέσης σταθμικής διάρκειας), αλλά προσεγγίζει μια κυρτή συνάρτηση. Για τον εντοπισμό της συνάρτησης αυτής, η συνάρτηση που αποδίδει την αξία του ομολόγου προσεγγίζεται μέσω μιας σειράς Taylor γύρω από μια τιμή P_0:

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_0 + \frac{dP}{di}(i_1 - i_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{di^2}(i_1 - i_0)^2 + \cdots && \Rightarrow \\
P_1 - P_0 &\approx \frac{dP}{di}(i_1 - i_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{di^2}(i_1 - i_0)^2 && \Rightarrow \\
\Delta P &\approx \frac{dP}{di}\Delta i + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{di^2}(\Delta i)^2 && \Rightarrow \\
\frac{\Delta P}{P} &\approx \frac{dP}{di}\frac{1}{P}\Delta i + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{di^2}\frac{1}{P}(\Delta i)^2
\end{aligned}$$

Όπως όμως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα ο λόγος μεταβολής της τιμής του ομολόγου για μικρές μεταβολές της απόδοσης στη λήξη σε σχέση με την τιμή του ομολόγου είναι:

$$\frac{\Delta P}{P} = -D\frac{di}{1+i} \Rightarrow \frac{dP}{di}\frac{1}{P} = -D\frac{1}{1+i}$$

Συνεπώς έχω ότι:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D\frac{\Delta i}{1+i} + \frac{1}{2}\frac{d^2 P}{di^2}\frac{1}{P}(\Delta i)^2$$

Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης P που αποδίδει την αξία του ομολόγου είναι:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 P}{di^2} &= \frac{d\left[-\frac{C_1}{(1+i)^2} - 2\frac{C_2}{(1+i)^3} - \cdots - T\frac{C_T}{(1+i)^{T+1}}\right]}{di} \\ &= 2\frac{C_1}{(1+i)^3} + 6\frac{C_2}{(1+i)^4} + \cdots + T(T+1)\frac{C_T}{(1+i)^{T+2}} \\ &= \frac{1}{(1+i)^2}\sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)C_t}{(1+i)^t}\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση έχω:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta P}{P} &\approx -D\frac{\Delta i}{1+i} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+i)^2}\sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)C_t}{(1+i)^t}\frac{1}{P}(\Delta i)^2 \\ &\approx -D\frac{\Delta i}{1+i} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{P}\sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)C_t}{(1+i)^t}\right]\left(\frac{\Delta i}{1+i}\right)^2\end{aligned}$$

Ο όρος μέσα στις αγκύλες αναπαριστά την κυρτότητα του ομολόγου και συμβολίζεται ως V:

$$V = \frac{1}{P}\sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)C_t}{(1+i)^t}$$

2.10.5 Αντιστοίχιση

Με τον όρο αντιστοίχιση (matching) εννοείται η κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων με το ελάχιστο κόστος έτσι ώστε οι εισροές από την επένδυση στο χαρτοφυλάκιο να καλύπτουν τις ταμειακές ανάγκες (πληρωμή υποχρεώσεων) του εκδότη κατά τη χρονική στιγμή που αυτές πρέπει να διεκπεραιωθούν.

Γενικά η χρησιμοποίηση τεχνικών αντιστοίχισης είναι μια παθητική στρατηγική διαχείρισης χαρτοφυλακίων ομολόγων. Ο επενδυτής συνθέτει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο μπορεί να ικανοποιήσει τις ανάγκες του ανεξάρτητα από τις όποιες μεταβολές στην καμπύλη απόδοσης. Παρόλα αυτά θα πρέπει να τονιστούν και οι κίνδυνοι μια τέτοιας πολιτικής, οι σημαντικότεροι των οποίων είναι οι ακόλουθοι δύο:

1. Να μην πραγματοποιηθεί κάποια πληρωμή από το χαρτοφυλάκιο λόγω ανάκλησης ή ασυνέπειας.
2. Στην περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου που αποφέρει μεγάλες πληρωμές οι οποίες υπερκαλύπτουν τις ανάγκες της επιχείρησης σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, είναι πιθανό οι εισροές που πλεονάζουν να μην είναι δυνατόν να επενδυθούν με αποδόσεις τέτοιες ώστε να είναι δυνατή η κάλυψη των μελλοντικών υποχρεώσεων.

Η κατασκευή χαρτοφυλακίων ομολόγων σύμφωνα με την στρατηγική της αντιστοίχισης μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού. Ειδικότερα, η λογική της αντιστοίχισης μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα γραμμικό πρόβλημα της ακόλουθης μορφής:

$$\min \quad F_0 + \sum_{i=1}^{m} N_i P_i$$

$$\text{Υπό:} \quad \sum_{i=1}^{m} N_i C_{it} + F_{t-1}(1+r) - F_t = L_t, \quad \forall | t = 1,2,\dots,T$$

$$N_i, F_t \geq 0$$

Όπου m είναι το πλήθος των ομολόγων που εξετάζονται, L_t είναι το ύψος των υποχρεώσεων που πρέπει να καλυφθούν τη χρονική στιγμή t, C_{it} είναι η εισροή κεφαλαίων την στιγμή t από το ομόλογο i, P_i η τιμή του ομολόγου i και r επιτόκιο με το οποίο επενδύονται τα ρευστά διαθέσιμα.

Οι μεταβλητές απόφασης του παραπάνω γραμμικού προγράμματος περιλαμβάνουν:

- Το πλήθος τεμαχίων του ομολόγου i στο υπό διαμόρφωση χαρτοφυλάκιο (N_i).
- Τα αρχικά ρευστά διαθέσιμα που χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα με την αγορά των ομολόγων (F_0).
- Τα ρευστά διαθέσιμα στο τέλος της περιόδου t μετά την αποπληρωμή των αντίστοιχων υποχρεώσεων (F_t).

Η αντικειμενική συνάρτηση αφορά την ελαχιστοποίηση του συνολικού κεφαλαίου που θα επενδυθεί για την κάλυψη των μελλοντικών υποχρεώσεων. Ο περιορισμός που δόθηκε παραπάνω περιγράφει τη σχέση μεταξύ των εισροών, εκροών και ρευστών διαθεσίμων στο τέλος κάθε περιόδου t. Σε κάθε χρονική στιγμή t τα ρευστά διαθέσιμα F_t είναι ίσα με τις εισροές των ομολόγων ($N_1C_{1t} + N_2C_{2t} + \cdots + N_mC_{mt}$) συν τα διαθέσιμα της προηγούμενης περιόδου τα οποία έχουν επενδυθεί με απόδοση $r\big(F_{t-1}(1+r)\big)$, μείον το ύψος των υποχρεώσεων που θα πρέπει να αποπληρωθούν (L_t).

2.11 Value at Risk

Η πολυπλοκότητα του σύγχρονου χρηματοοικονομικού περιβάλλοντος και το πλήθος των διαθέσιμων επενδυτικών επιλογών (παράγωγα, μετοχές, ομόλογα, κτλ.) καθιστούν ιδιαίτερα δύσκολη τη μέτρηση του επενδυτικού κινδύνου. Είναι λοιπόν προφανές ότι κάθε επενδυτής θα πρέπει να είναι σε θέση να εκτιμήσει σε σαφείς ποσοτικούς όρους τους κινδύνους που αναλαμβάνει σε καθημερινή βάση.

Ένας από τους πλέον σαφείς τρόπους με τον οποίον μπορεί να αντιμετωπιστεί το βασικό αυτό θέμα, είναι να προσδιοριστεί η μέγιστη ζημία που μπορεί να έχει ο επενδυτής σε δεδομένο χρονικό διάστημα και σε ένα καθορισμένο βαθμό βεβαιότητας (βαθμός εμπιστοσύνης). Αυτή την πληροφορία παρέχει ο υπολογισμός της αξίας στον κίνδυνο (Value at Risk). Η έννοια της VaR απαντά με άμεσο τρόπο στο πρόβλημα της εκτίμησης του επενδυτικού κινδύνου, βοηθώντας τον αναλυτή να προσδιορίσει τη μέγιστη ζημία που μπορεί να υποστεί σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα με κάποιο βαθμό εμπιστοσύνης το οποίο συνήθως ορίζεται στα επίπεδα του 95% ή 99%.

Για παράδειγμα, εάν η VaR μιας επένδυσης σε μετοχές είναι €10000 για χρονικό διάστημα μιας ημέρας με επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μονάχα 5% πιθανότητα η ημερήσια ζημία από την επένδυση να υπερβεί το ποσό των €10000. Είναι προφανές λοιπόν ότι αυτή η πληροφορία προσδιορίζει με άμεσο και κατανοητό τρόπο τον κίνδυνο που αναλαμβάνει ο επενδυτής.

Η προσέγγιση της VaR έχει γνωρίσει σημαντική διάδοση κατά τη τελευταία δεκαετία, τόσο μεταξύ των ερευνητικών/ακαδημαϊκών, όσο και μεταξύ των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων και των αναλυτών. Η διάδοση της ξεκίνησε με την ανάπτυξη του συστήματος RiskMetrics από την Αμερικάνικη επενδυτική τράπεζα JP Morgan (JP Morgan, 1995), η οποία (ανάπτυξη του συστήματος) αποσκοπούσε στην ανάπτυξη και εφαρμογή ενός εργαλείου για τη μέτρηση και παρακολούθηση των καθημερινών αναμενόμενων ζημιών της τράπεζας από όλες τις επενδυτικές θέσεις που είχε αναλάβει.

Αναλυτική Προσέγγιση

2.11.1 Βασικοί υπολογισμοί

Όπως αναφέρθηκε η VaR είναι η μέγιστη αναμενόμενη ζημία που μπορεί να υποστεί ένας επενδυτής σε δεδομένο χρονικό διάστημα για ένα επιλεγόμενο επίπεδο βεβαιότητας.

Αναλυτικότερα, έστω ότι η παρούσα αξία ενός χαρτοφυλακίου είναι S_0. Ο υπολογισμός της VaR απαιτεί τον καθορισμό της μέγιστης μεταβολής $\Delta S^* = S_0 - S_t^*$ που μπορεί να εμφανιστεί σε ένα χρονικό διάστημα t, επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - a$. Δηλαδή, πρέπει $\Pr(\Delta S > \Delta S^*) = a$.

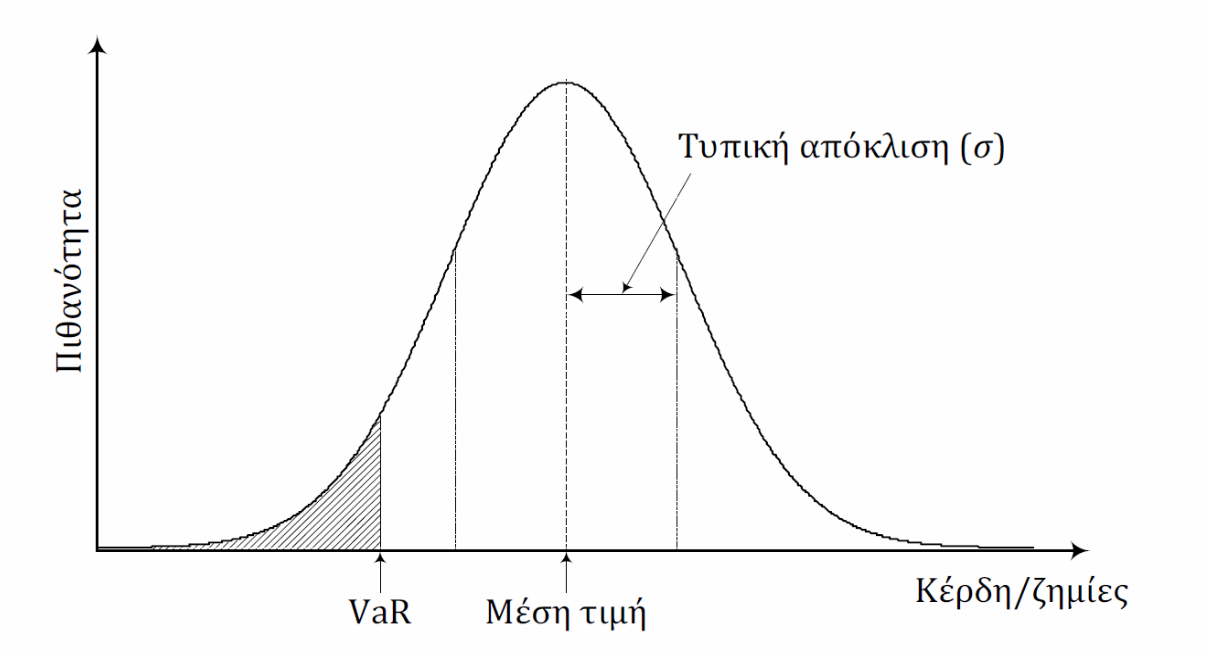
Όπως έχει ήδη παρουσιαστεί στα προηγούμενα, κάθε μεταβολή ΔS στην αξία ενός χαρτοφυλακίου σε μία δεδομένη χρονική περίοδο t, μπορεί να εκφραστεί με την απόδοση r και την αρχική αξία S_0 του χαρτοφυλακίου ως εξής:

$$r = \frac{S_t - S_0}{S_0} = -\frac{\Delta S}{S_0} \Rightarrow \Delta S = -rS_0$$

Συνεπώς, ο υπολογισμός της VaR ανάγεται στον προσδιορισμό της οριακής απόδοσης r^*, έτσι ώστε:

$$\Pr(-rS_0 > -r^*S_0) = \Pr(r < r^*) = a$$

Για να προσδιοριστεί η οριακή απόδοση r^* απαιτείται η γνώση της κατανομής πιθανότητας των αποδόσεων. Η ανάλυση μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά θεωρώντας ότι η απόδοση ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ, όπως παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5: Σχηματική απεικόνιση της έννοιας της VaR

Υποθέτοντας λοιπόν, ότι η απόδοση ακολουθεί την κανονική κατανομή, η πιθανότητα $\Pr(r < r^*)$ μπορεί να προσδιοριστεί ως εξής:

$$\Pr(r < r^*) = a \Rightarrow Pr\left(Z < Z^* = \frac{r^* - \mu}{\sigma}\right) = a$$

Από τους πίνακες της κανονικής κατανομής μπορεί εύκολα να βρεθεί το Z^* για δεδομένο a. Για παράδειγμα, σε επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - a = 95\%$ βρίσκεται ότι $Z^* = -1.645$.

Έχοντας υπολογίσει κατά τον τρόπο αυτό το Z^*, το r^* μπορεί πλέον εύκολα να υπολογιστεί ως $r^* = \mu + Z^*\sigma$. Συνεπώς η VaR υπολογίζεται ως εξής:

$$VaR = S_0 - S_t^* = S_0 - (1 + r^*)S_0 = -r^*S_0 = -(\mu + Z^*\sigma)S_0$$

Υπολογιζόμενη κατά αυτόν τον τρόπο, η VaR υποδηλώνει τη μεταβολή σε σχέση με την αρχική αξία της επένδυσης (απόλυτη VaR, absolute VaR). Ένας εναλλακτικός τρόπος θεώρησης είναι να προσδιοριστεί η μεταβολή σε σχέση με το αναμενόμενο αποτέλεσμα της επένδυσης (σχετική VaR, relative VaR):

$$VaR = E(S_t) - S_t^* = (1 + \mu)S_0 - (1 + r^*)S_0 = (\mu - r^*)S_0 = -Z^*\sigma S_0$$

Σε ένα βραχυπρόθεσμο χρονικό ορίζοντα οι δύο αυτοί υπολογισμοί δίνουν παρόμοια αποτελέσματα, δεδομένου ότι για μικρά χρονικά διαστήματα η αναμενόμενη απόδοση είναι περιορισμένη. Γενικά, συνήθως προτιμάται η σχετική VaR καθώς συμβαδίζει περισσότερο με την κλασσική έννοια του κινδύνου ως απόκλιση από ένα αναμενόμενο αποτέλεσμα. Σημειώνεται ότι η σχετική VaR είναι πάντα θετική γιατί $E(S_t) > S_t^*$, ενώ αντίθετα η απόλυτη VaR μπορεί να είναι θετική στην περίπτωση ζημίας ($S_0 > S_t^*$) ή αρνητική στην περίπτωση κερδών ($S_0 < S_t^*$). Επιπλέον, η σχετική VaR είναι υψηλότερη από την απόλυτη VaR εάν το αναμενόμενο αποτέλεσμα της επένδυσης είναι θετικό, διαφορετικά η σχετική VaR είναι μικρότερη από την απόλυτη VaR.

Η χρησιμοποίηση της παραπάνω αναλυτικής προσέγγισης για τον υπολογισμό της VaR μπορεί εύκολα να επεκταθεί σε χαρτοφυλάκια χρεογράφων. Για παράδειγμα, έστω αρχικά η περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου P το οποίο αποτελείται από δύο χρεόγραφα. Τα χρεόγραφα έχουν τυπική απόκλιση σ_1 *και* σ_2, συμμετέχουν στο χαρτοφυλάκιο σε ποσοστά w_1 *και* w_2, ενώ οι αντίστοιχες VaR είναι VaR_1 *και* VaR_2. Η τυπική απόκλιση ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου είναι:

$$\sigma_P = (w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)^{1/2}$$

Επομένως η VaR του χαρτοφυλακίου (σχετική VaR) μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$VaR_P = -Z^*\sigma_P S_0 = -Z^*(w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)^{1/2}S_0$$

$$= (VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\rho_{12}VaR_1VaR_2)^{1/2}$$

Ανάλογα με την τιμή του συντελεστή συσχέτισης προκύπτουν τα ακόλουθα:

- $\rho_{12} = 1$: Στην περίπτωση αυτή υπάρχει πλήρης θετική συσχέτιση μεταξύ των δύο χρεογράφων και η VaR του χαρτοφυλακίου φτάνει στη μέγιστη τιμής της $VaR_1 + VaR_2$.
- $\rho_{12} = 0$: Στην περίπτωση αυτή οι αποδόσεις των δύο χρεογράφων είναι ανεξάρτητες και η VaR του χαρτοφυλακίου είναι $(VaR_1 + VaR_2)^{1/2}$.
- $\rho_{12} = -1$: Στην περίπτωση αυτή οι αποδόσεις των δύο χρεογράφων είναι απόλυτα αρνητικά συσχετισμένες και η VaR του χαρτοφυλακίου παίρνει την ελάχιστη τιμή της $|VaR_1 - VaR_2|$.

Η ανάλυση αυτή δείχνει ότι όσο μειώνεται η συσχέτιση μεταξύ των δύο χρεογράφων, τόσο μειώνεται η VaR του χαρτοφυλακίου. Επιπλέον, εκτός της εξαιρετικής περίπτωσης όπου $\rho_{12} = 1$, η VaR του χαρτοφυλακίου είναι μικρότερη από το άθροισμα των VaR των επιμέρους χρεογράφων που το αποτελούν.

Στη γενική περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου πολλαπλών χρεογράφων, η VaR του χαρτοφυλακίου υπολογίζεται ως εξής:

$$VaR_P = (\boldsymbol{V}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{V})^{1/2}$$

όπου $\boldsymbol{V}$ είναι το διάνυσμα με τις VaR των επιμέρους χρεογράφων και $\boldsymbol{C}$ είναι ο πίνακας συσχετίσεων των αποδόσεων των χρεογράφων.

2.12 Εναλλακτικές διαδικασίες υπολογισμού

Η χρησιμοποίηση της παραπάνω αναλυτικής προσέγγισης για τον υπολογισμό της VaR είναι ιδιαίτερα απλή, αλλά θα πρέπει να τονιστεί ότι βασίζεται στην υπόθεση ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή, υπόθεση η οποία δεν ανταποκρίνεται πάντα στην πραγματικότητα. Για την αντιμετώπιση αυτού του περιορισμού έχουν προταθεί εναλλακτικοί τρόποι προσδιορισμού της VaR, δύο από τους οποίους αναλύονται συνοπτικά παρακάτω.

2.12.1 Ιστορική προσομοίωση

Η πλέον απλή από τις εναλλακτικές υπολογισμού είναι η ιστορική προσομοίωση (historical simulation). Όπως και στην αναλυτική προσέγγιση, η χρησιμοποίηση της ιστορικής προσομοίωσης απαιτεί τη συλλογή επαρκών ιστορικών στοιχείων για τις αξίες των χρεογράφων-χαρτοφυλακίων για μια σειρά $T + 1$ χρονικών στιγμών (ημέρες, εβδομάδες, κλπ). Βάσει των στοιχείων αυτών υπολογίζεται η απόδοση r_t για κάθε χρονική περίοδο $t = 1, 2, \ldots, T$. Οι αποδόσεις κατατάσσονται από τη χαμηλότερη προς την υψηλότερη. Για επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - a$ η VaR μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από την απόδοση r^* για την οποία το πλήθος n των περιπτώσεων με $r < r^*$ είναι $n = aT$ (εάν το n δεν είναι ακέραιος αριθμός, θα πρέπει να γίνει παρεμβολή). Συγκεκριμένα, η απόλυτη VaR είναι ίση με $-r^* S_0$ και η σχετική VaR είναι ίση με $(\mu - r^*)S_0$, όπου S_0 είναι η αξία της επένδυσης και μ η αναμενόμενη απόδοση.

Εκτός από την απλότητά της, η ιστορική προσομοίωση παρουσιάζει και μια σειρά άλλων πλεονεκτημάτων:

1. Δεν πραγματοποιείται καμία υπόθεση όσον αφορά την στατιστική κατανομή των αποδόσεων.
2. Δεν απαιτεί τον υπολογισμό καμίας παραμέτρου. Έτσι, αποφεύγονται περίπλοκοι υπολογισμοί παραμέτρων όπως οι τυπικές αποκλίσεις, οι συσχετίσεις, κτλ.
3. Είναι άμεσα εφαρμόσιμη σε κάθε χρεόγραφο ή χαρτοφυλάκιο χρεογράφων.
4. Βοηθά στην καλύτερη κατανόηση των στατιστικών ιδιοτήτων που παρουσιάζουν τα κέρδη/ζημίες και οι αποδόσεις μιας επενδυτικής θέσης (πχ έλεγχος κανονικότητας).

2.12.2 Bootstrap

Πολλά από τα προβλήματα της ιστορικής προσομοίωσης (κυρίως αυτά που αφορούν το πλήθος των δεδομένων και τον προσδιορισμό της VaR διαφορετικών περιόδων) αντιμετωπίζονται μέσω μιας στατιστικής διαδικασίας δειγματοληψίας η οποία είναι γνωστή ως bootstrap (Elfron και Tibshirani, 1993). Με τον όρο bootstrapping εννοείται η πραγματοποίηση μιας επαναληπτικής τυχαίας δειγματοληψίας με επανατοποθέτηση (resampling with replacement), η οποία έχει αποδειχθεί μια ιδιαίτερα αποτελεσματική διαδικασία για την πραγματοποίηση στατιστικών εκτιμήσεων από προκαθορισμένα σύνολα δεδομένων με υψηλή ακρίβεια.

Στα πλαίσια του υπολογισμού της VaR, η χρησιμοποίηση του bootstrap πραγματοποιείται κατά τον ακόλουθο τρόπο. Έστω ότι διαθέτουμε 100 παρατηρήσεις σχετικά με τις ημερήσιες (αριθμητικές) αποδόσεις $r_1, r_2, \ldots, r_{100}$ ενός χρεογράφου και πρέπει να υπολογιστεί η μηναία VaR (30 ημερών).

1. Κατασκευάζονται τυχαία και με επανατοποθέτηση B δείγματα bootstrap ($b_1, b_2, \ldots, b_B$) μεγέθους 30. Κάθε δείγμα bootstrap b_k περιλαμβάνει 30 παρατηρήσεις $x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{30}^k$, όπου $x_i^k \in \{r_1, r_2, \ldots, r_{100}\}$.
2. Από τις 30 παρατηρήσεις κάθε δείγματος bootstrap b_k υπολογίζεται η συνολική μηνιαία απόδοση του χρεογράφου ως $R_k = \left(1 + x_1^k\right)\left(1 + x_2^k\right) \ldots \left(1 + x_{30}^k\right)$ ή $R_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_{30}^k$, για αριθμητικές και λογαριθμικές αποδόσεις αντίστοιχα.
3. Στο σύνολο των μηνιαίων αποδόσεων $R_1, R_2, \ldots, R_B$ που διαμορφώθηκαν στο προηγούμενο στάδιο, εφαρμόζεται η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης για τον υπολογισμό της μηνιαίας VaR (απόλυτης ή σχετικής).

Η ίδια διαδικασία μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση χαρτοφυλακίων χρεογράφων. Σε αυτή την περίπτωση κάθε δείγμα bootstrap b_k περιλαμβάνει παρατηρήσεις x_1^k, x_2^k, ..., κάθε μία από τις οποίες είναι ένα διάνυσμα με τις αποδόσεις των επιμέρους m χρεογράφων του χαρτοφυλακίου.

Η διαδικασία bootstrap έχει τα ίδια πλεονεκτήματα με τη μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης, ενώ παράλληλα απαλλάσσει τον αναλυτή από την ανάγκη συλλογής μεγάλου πλήθους ιστορικών δεδομένων, καθώς μέσω της παραπάνω διαδικασίας επαναληπτικής δειγματοληψίας μπορούν να κατασκευαστούν αυθαίρετα μεγάλα σύνολα τεχνητών ιστορικών δεδομένων. Το βασικό της μειονέκτημα είναι το γεγονός ότι η τυχαία δειγματοληψία ουσιαστικά υποθέτει ότι οι αποδόσεις δεν εξαρτώνται από το χρόνο, ότι δηλαδή τα κέρδη/ζημίες μιας χρονικής περιόδου δεν επηρεάζουν τα κέρδη/ζημίες των προηγούμενων περιόδων.

2.13 Σύγχρονα Μοντέλα Πρόβλεψης της Μεταβλητότητας

Τέλος θα αναφερθούμε σε δύο μοντέρνες τεχνικές πρόβλεψης της μεταβλητότητας (τυπικής απόκλισης) οι οποίες δίνουν βάρος στην πιο πρόσφατη πληροφορία, τη GARCH(1,1) και την EWMA.

2.13.1 GARCH(1,1)

Το GARCH(p,q) είναι ένα γενικευμένο αυτοπαλίνδρομο υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικό μοντέλο (generalized autoregressive conditional heteroscedasticity). Τα κύρια χαρακτηριστικά του περιλαμβάνουν:

- Autoregressive (AR): η αυριανή διακύμανση (ή μεταβλητότητα) είναι μια παλινδρομημένη συνάρτηση της σημερινής διακύμανσης – παλινδρομεί στον εαυτό της.
- Conditional (C): η αυριανή διακύμανση εξαρτάται από τη πιο πρόσφατη διακύμανση. Μια χωρίς συνθήκες διακύμανση δε θα εξαρτιόταν από τη σημερινή διακύμανση.
- Heteroskedastic (H): οι διακυμάνσεις δεν είναι σταθερές, αλλά αλλάζουν με το χρόνο.

Το GARCH παλινδρομεί πάνω σε ιστορικά δεδομένα τα οποία είναι είτε η διακύμανση ή αποδόσεις υψωμένες στο τετράγωνο. Το γενικό μοντέλο GARCH(p,q) παλινδρομεί σε p τετραγωνισμένες αποδόσεις και q διακυμάνσεις. Αυτό συνεπάγεται ότι το GARCH(1,1) παλινδρομεί στη τετραγωνισμένη απόδοση και τη διακύμανση της τελευταίας περιόδου.

Συμβολίζοντας με r_{t-1}^2 την τετραγωνισμένη απόδοση της προηγούμενης περιόδου, με σ_{t-1}^2 τη διακύμανση και με V_L μια μακροπρόθεσμη μέση διακύμανση, το GARCH(1,1) θα δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\sigma_t^2 = \gamma V_L + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$
$$\omega = \gamma V_L$$

Όπου όλοι οι συντελεστές βάρους είναι μεγαλύτεροι του μηδενός. Επειδή το συνολικό βάρος πρέπει να αθροίζει στη μονάδα συνεπάγεται ότι $\gamma = 1 - \alpha - \beta$.

2.13.2 EWMA

Το EWMA (exponential weighted moving average model) αποτελεί μια ειδική περίπτωση του GARCH(1,1). Η διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι το GARCH περιλαμβάνει έναν πρόσθετο όρο για την επαναφορά στον μέσο (mean reversion), ενώ το EWMA στερείται της επαναφοράς στο μέσο.

Από την εξίσωση για τον υπολογισμό του GARCH(1,1) που δόθηκε παραπάνω, θέτοντας $\omega = 0$ και $(\alpha + \beta) = 1$ παίρνουμε την εξίσωση:

$$\sigma_t^2 = \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_t^2 = \alpha r_{t-1}^2 + (1 - \alpha)\sigma_{t-1}^2 \Rightarrow$$

$$\text{EWMA} = \sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2$$

Ο συντελεστής λ προσδιορίζει την "αποσύνθεση" (decay), με ένα λ κοντά στη μονάδα να δηλώνει αργεί αποσύνθεση. Με τον όρο αποσύνθεση εννοούμε ότι τα παλιά δεδομένα έχουν συστηματικά όλο και μικρότερο βάρος.

Στην πράξη οι διακυμάνσεις τείνουν να επανέρχονται σε μια μέση τιμή (mean reverting), γι' αυτό το μοντέλο GARCH(1,1) θεωρητικά είναι ανώτερο σε σχέση με το μοντέλο EWMA το οποίο σε αντίθεση με το GARCH δε περιλαμβάνει μια παράμετρο για τη μακροπρόθεσμη μέση διακύμανση. Ωστόσο σε περιπτώσεις όπου η πρώτη παράμετρος του μοντέλου είναι αρνητική (δηλαδή είναι $(\alpha + \beta) > 1$) τότε το GARCH(1,1) θεωρείται ασταθές και προτιμάται το EWMA.

Βιβλιογραφία

Δούμπος, Μ., 2010, *Μαθηματικός Χρηματοοικονομικός Λογισμός*, Πολυτεχνείο Κρήτης, Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, Χανιά

Ξυδώνας, Π., Ψαρράς, Ι., Ζοπουνίδης, Κ., 2010, *Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου*, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Χρηματοοικονομική Προτυποποίηση

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε και θα αξιολογήσουμε ξενόγλωσσα βιβλία τα οποία ασχολούνται με το αντικείμενο της χρηματοοικονομικής προτυποποίησης και μπορούν να φανούν ιδιαιτέρως χρήσιμα σε οποιονδήποτε θέλει να ασχοληθεί με το αντικείμενο αυτό.

Beninga, S., 2010, *Principles of Finance with Excel*, Oxford University Press

Στο βιβλίο αυτό ο Simon Beninga κατορθώνει να παρουσιάσει με απλό και φιλικό προς τον αναγνώστη τρόπο τις βασικές και όχι μόνο αρχές της οικονομικής θεωρίας καθώς και τρόπους υπολογισμού των διάφορων εννοιών ή μοντέλων.

Είναι γεμάτο από παραδείγματα καθαρά δοσμένα τόσο μέσα από κείμενο όπου εξηγεί τη θεωρία και τον τρόπο κατασκευής του μοντέλου στο Excel, αλλά και εικόνες από υπολογιστικά φύλλα του Excel στα οποία έχει υλοποιήσει το μοντέλο. Δίνονται δε σαφείς οδηγίες για τον τρόπο χρήσης των σχετικών με το παράδειγμα χαρακτηριστικών του Excel ώστε ακόμα και κάποιος με λίγη εμπειρία στο Excel να μπορεί εύκολα να τα υλοποιήσει. Επίσης συνήθως τα παραδείγματα βασίζονται σε προηγούμενα παραδείγματα του κεφαλαίου χτίζοντας έτσι ένα όλο και πιο πολύπλοκο μοντέλο.

Πρόκειται για ένα εξαιρετικά περιεκτικό βιβλίο καθώς ξεκινά με τις βασικές έννοιες (ανάλυση NPV και IRR) και συνεχίζει με έννοιες όπως ο προϋπολογισμός του κεφαλαίου (capital budgeting), διαχείριση χαρτοφυλακίου (CAPM, SML, αποτελεσματικό μέτωπο κτλ.), αξιολόγηση ομολόγων και μετοχών, δικαιωμάτων προαίρεσης κτλ. Φυσικά όλα αυτά αναλυτικά και καθαρά δοσμένα μέσα από πραγματικά παραδείγματα και υλοποιημένα σε Excel.

Κλείνοντας το βιβλίο κάνει και μια σύντομη αλλά αρκετά αναλυτική εισαγωγή στο Excel όπου παρουσιάζει πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι διάφορες λειτουργίες του όπως για παράδειγμα τα γραφήματά του, οι ενσωματωμένες εξισώσεις του, οι πίνακες δεδομένων (data tables) κτλ.

Beninga, S., 2014, *Financial Modeling*, The MIT Press

Ακόμα ένα βιβλίο από το Simon Beninga το οποίο ασχολείται με το αντικείμενο της χρηματοοικονομικής προτυποποίησης. Όπως και το Principles of Finance with Excel, πρόκειται για ένα καλογραμμένο, λεπτομερέστατο και προσιτό προς τον αναγνώστη βιβλίο.

Ακολουθεί τη συνταγή του άλλου του βιβλίου παρουσιάζοντας τις διάφορες έννοιες ή μοντέλα μέσα από πραγματικά παραδείγματα αναφέροντας αρχικά τη θεωρία και προχωρώντας στη συνέχεια στην υλοποίηση της στο Excel. Ωστόσο σε αυτό το βιβλίο επικαλείται και τη βοήθεια της VBA, την οποία και χρησιμοποιεί για να φτιάξει δικές του συναρτήσεις οι οποίες απλοποιούν σε αρκετές περιπτώσεις την κατασκευή των μοντέλων. Ο κώδικας που χρησιμοποιεί για την υλοποίηση αυτών των συναρτήσεων παρουσιάζεται μετά από το παράδειγμα στο οποίο χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση.

Σχετικά με τα θέματα που πραγματεύεται το βιβλίο, ξεκινάει με το τομέα της εταιρικής χρηματοδότησης και αξιολόγησης αναφέροντας έννοιες και παραδείγματα όπως ο υπολογισμός της αξίας μια επιχείρησης, ο υπολογισμός του βεβαρημένου μέσου κόστους του κεφαλαίου (weighted average cost of capital – WACC), η χρηματοδοτική μίσθωση κτλ. Συνεχίζοντας δίνει μεγάλη βαρύτητα στην ανάλυση χαρτοφυλακίου δίνοντας όλα τα βασικά εργαλεία τα οποία χρειάζεται κάποιος όπως ο υπολογισμός του αποτελεσματικού μετώπου, της μήτρας Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης κτλ.

Βαρύτητα δίνεται επίσης στην ανάλυση των δικαιωμάτων προαίρεσης με αναφορές στο διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης και στο μοντέλο Black-Scholes καθώς και στον τομέα των ομολόγων με ανάλυση της έννοιας της μέσης σταθμικής διάρκειας, της ανοσοποίησης κτλ. Προτού κλείσει το βιβλίο, μας εισάγει στις μεθόδους Monte Carlo τις οποίες χρησιμοποιεί για εξομοίωση τιμών μετοχών, τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης αλλά και στρατηγικών σχετικά με δικαιώματα προαίρεσης και επενδύσεις.

Κλείνοντας το βιβλίο μας παραθέτει μια σύντομη αλλά περιεκτική εισαγωγή σε τεχνικές του Excel αλλά και στον τρόπο χρήσης της VBA.

Jackson, M., Staunton, M., 2001, *Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA*, Wiley

Αν και δεν έχει υπάρχει κάποια πρόσφατη έκδοση του βιβλίου, με την μοναδική να έχει κυκλοφορήσει το 2001, κατά τη γνώμη του γράφοντος αποτελεί ένα αξιόλογο βιβλίο σχετικά με το αντικείμενο της χρηματοοικονομικής προτυποποίησης με χρήση Excel και VBA.

Ακολουθώντας τα χνάρια του Financial Modeling του Simon Beninga, σε κάθε κεφάλαιο παρουσιάζεται η βασική θεωρία του μοντέλου και στη συνέχεια αναλύεται ο τρόπος κατασκευής του στο Excel μέσα από εικόνες και κείμενο που εξηγεί αναλυτικά τα όσο έχουν υλοποιηθεί. Ωστόσο το πλήθος των εικόνων και η πληροφορία που παρουσιάζει στις εικόνες υστερεί σε σχέση με το Financial Modeling.

Γενικά σαν βιβλίο είναι λιγότερο λεπτομερές και καλύπτει λιγότερα θέματα σε σχέση με το Financial Modeling το οποίο έχει 4πλασιο αριθμό σελίδων. Ωστόσο υπερτερεί στο τομέα της VBA, αφού ο συγγραφέας σε κάθε κεφάλαιο χρησιμοποιεί μια πληθώρα από user-defined συναρτήσεις τον κώδικα των οποίων παρουσιάζει πριν από το τέλος κάθε κεφαλαίου.

Το βιβλίο ξεκινάει με μια πολύ αναλυτική εισαγωγή στη χρήση του Excel όπου παρουσιάζονται όλες οι λειτουργίες του που μπορούν να φανούν χρήσιμες στο χρήστη. Στη συνέχεια κάνει και μια εισαγωγή στη VBA όπου αφού αναφέρει τις βασικές λειτουργίες της, μας παρέχει παραδείγματα για το πώς μπορεί κάποιος να γράψει δικές του συναρτήσεις.

Μετά από την εισαγωγή στο Excel και τη VBA, μπαίνει στο κομμάτι της χρηματοοικονομικής προτυποποίησης αρχίζοντας από το αντικείμενο της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου. Εκεί μας δίνει τρόπους υπολογισμού του αποτελεσματικού μετώπου, χαρτοφυλακίων με ακίνδυνα χρεόγραφα κτλ. Πριν κλείσει κεφάλαιο αναφέρεται και στο αντικείμενο της αποτίμησης (asset pricing) παρουσιάζοντας τρόπους υπολογισμούς της VaR, της μήτρας Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης κτλ.

Αναφορά γίνεται φυσικά και στην ανάλυση των δικαιωμάτων προαίρεσης με αναφορές στο διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης και στο μοντέλο Black-Scholes καθώς και στον τομέα των ομολόγων όπου ασχολείται με τα δικαιώματα προαίρεσης σε ομόλογα και με μοντέλα επιτοκίων (interest rate models).

Humphrey, T., Lai, D., Wong, M., 2010, *Professional Financial Computing Using Excel and VBA*, Wiley

Πρόκειται για ένα πολύ αξιόλογο βιβλίο πάνω στο αντικείμενο της χρηματοοικονομικής προτυποποίησης με χρήση Excel και VBA ωστόσο κατά τη γνώμη του γράφοντος δεν προτείνεται για αρχάριους αφού ο τρόπος γραφής του δεν είναι τόσο καθαρός και παρέχει πολύ πυκνογραμμένη πληροφορία. Σε αυτό συμβάλει και το γεγονός ότι δίνεται μικρό πλήθος από εικόνες όταν αναλύονται τα μοντέλα κάτι που οδηγεί σε μεγάλα κομμάτια από κείμενο που δυσκολεύουν την ανάγνωση.

Στον αντίποδα, η θεωρία κάθε κεφαλαίου παρουσιάζεται εξονυχιστικά, καθιστώντας όμως έτσι αναγκαίο το καλό μαθηματικό υπόβαθρο του αναγνώστη. Τη θεωρία ακολουθεί η υλοποίηση του μοντέλου στο Excel χωρίς όμως χρήση της VBA όπου αναλύεται εις βάθος ο ακριβής τρόπος υλοποίησης του μοντέλου. Στη συνέχεια δίνεται η υλοποίηση του μοντέλου αλλά αυτή τη φορά με τη βοήθεια συναρτήσεων/υπορουτίνων γραμμένων σε VBA. Προτού δοθεί κάθε κώδικας, ο συγγραφέας μας δίνει ένα ψευδοκώδικα της συνάρτησης/υπορουτίνας όπου φαίνεται ο τρόπος λειτουργίας κάνοντας έτσι την κατανόηση λίγο ευκολότερη. Ωστόσο οι κώδικες του βιβλίου είναι συνήθως μεγάλοι σε μέγεθος και αρκετά πολύπλοκοι γεγονός που καθιστά αναγκαία την αρκετή εξοικείωση του χρήστη με τη προγραμματιστική γλώσσα VBA.

Όσον αφορά τη δομή του βιβλίου, αποτελείται από 13 κεφάλαια κάθε ένα από τα οποία αναλύει ένα μοντέλο. Ενδεικτικά, ξεκινάει από μια εισαγωγή του αντικειμένου και συνεχίζει δίνοντας μας το μοντέλο GARCH(1,1), τον τρόπο διαχείρισης ενός χαρτοφυλακίου με το υπόδειγμα μέσου-διακύμανσης, τη μέθοδο Newton-Raphson, τη τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης με χρήση του διωνυμικού μοντέλου και της μεθόδου Monte Carlo, υπολογισμό VaR κτλ.

Κλείνοντας το βιβλίο, αφιερώνει ένα μεγάλο κομμάτι του για να μας εισάγει σε βασικές αλλά και ιδιαίτερα προχωρημένες λειτουργίες και χαρακτηριστικά της VBA. Το κομμάτι αυτό κρίνεται υπέρπληρες και αποτελεί και ένα καλό εγχειρίδιο χρήσης ακόμα και για προχωρημένους χρήστες αφού απαριθμεί όλες τις ενσωματωμένες συναρτήσεις, τελεστές και δηλώσεις της VBA.

Holden, C., 2002, *Spreadsheet Modeling in Corporate Finance*, Prentice Hall

Σε αντίθεση με τα βιβλία που έχουν παρουσιαστεί μέχρι τώρα, το Spreadsheet Modeling in Corporate Finance εστιάζει αποκλειστικά στο τομέα της εταιρικής χρηματοδότησης. Επίσης από επιλογή του συγγραφέα, δεν έχει χρησιμοποιηθεί καθόλου η προγραμματιστική γλώσσα VBA ώστε να είναι πιο προσιτό το βιβλίο σε μεγαλύτερο κοινό. Ακόμα το βιβλίο υποθέτει ότι ο χρήστης γνωρίζει μονάχα τα βασικά του Excel και μέσα από τα παραδείγματα του εξηγεί πιο προχωρημένες έννοιες χωρίς όμως να αφιερώνει κάποιο κεφάλαιο μονάχα στην εισαγωγή στο Excel.

Κάθε κεφάλαιο ξεκινάει θέτοντας ένα πρόβλημα του οποίου τη στρατηγική της λύσης του παρουσιάζει αμέσως μετά. Δεν παρέχεται η θεωρία πίσω από τις έννοιες αλλά αντίθετα δίνεται μονάχα ο τρόπος κατασκευής του μοντέλου στο Excel μέσα από εικόνες όπου δείχνουν το μοντέλο υλοποιημένο αλλά και κείμενο όπου αναλύονται όσα έχουν πραχθεί. Για ευκολότερη κατανόηση χρησιμοποιείται και διαφορετικός χρωματισμός για κάθε είδος δεδομένου (δεδομένου εισόδου, τελικό αποτέλεσμα κτλ.). Όσο προχωράει το βιβλίο, βασίζει τα νέα του παραδείγματα στα παλιά χτίζοντας έτσι ένα όλο και πιο πολύπλοκο και ρεαλιστικό παράδειγμα.

Μερικά από τα θέματα που πραγματεύεται το βιβλίο είναι η χρονική αξία του χρήματος (ενιαίες ταμειακές ροές, ετήσιο εισόδημα, καθαρή παρούσα αξία κτλ.), η εκτίμηση ομολόγων και μετοχών, ο προϋπολογισμός του κεφαλαίου, ο οικονομικός σχεδιασμός, τα δικαιώματα προαίρεσης κ.α.

Sengupta, C., 2009, *Financial Modeling using Excel and VBA*, Wiley

Στο βιβλίο αυτό ο Chandan Sengupta μας εισάγει αρκετά επιτυχημένα στο αντικείμενο της χρηματοοικονομικής προτυποποίησης με τη βοήθεια του Excel και της προγραμματιστικής του γλώσσας VBA.

Το βιβλίο χωρίζεται ουσιαστικά σε δυο μέρη, στο πρώτο το οποίο μας εισάγει στο Excel και στη κατασκευή μοντέλων μόνο με τις ενσωματωμένες δυνατότητες του και στο δεύτερο το οποίο μας εισάγει στη VBA και μας δίνει τα ίδια μοντέλα χρησιμοποιώντας τις δυνατότητες που αυτή προσφέρει.

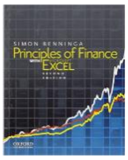
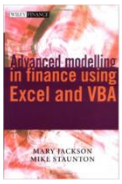
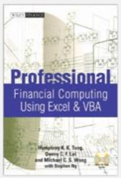
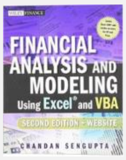
Σε κάθε κεφάλαιο μετά την εισαγωγή του, κάνει μια ανασκόπηση στη θεωρία και τις έννοιες που πραγματεύεται χωρίς όμως να αναλύει σε βάθος το μαθηματικό υπόβαθρο, κρατώντας έτσι προσιτή τη θεωρία. Μετά την ανασκόπηση προχωράει στην πράξη, παρουσιάζοντας παραδείγματα υλοποίησης διάφορων μοντέλων σχετικών με τα όσα προηγήθηκαν.

Αρχικά αναφέρει κάποιο προς λύση πρόβλημα και προχωράει στην υλοποίηση του μοντέλου που λύνει το πρόβλημα. Αυτό επιτυγχάνεται δίνοντας μας συνήθως μια εικόνα όπου φαίνεται το μοντέλο υλοποιημένο ύστερα από την οποία αναλύει τον τρόπο κατασκευής του. Πριν κλείσει το παράδειγμα αναφέρει πιθανές χρήσεις του μοντέλου καθώς και τους όποιους περιορισμούς μπορεί να έχει κατά την εφαρμογή του.

Στην περίπτωση της υλοποίησης των μοντέλων με VBA, η θεωρία δεν επαναλαμβάνεται αφού έχει ήδη δοθεί αλλά περνάμε απευθείας στην υλοποίηση του μοντέλου. Έτσι αφού διατυπωθεί όπως και πριν ένα πρόβλημα, μας παρέχεται η στρατηγική μοντελοποίησης όπου περιγράφεται συνοπτικά η διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουμε. Στη συνέχεια μας δίνεται ο κώδικας σε VBA που χρησιμοποιήθηκε (ο οποίος διαθέτει και σχόλια) και ακριβώς από κάτω του, μια ανάλυση του κώδικα σχετικά με το τι λειτουργία επιτελεί σε κάθε κομμάτι του. Αντίστοιχα με πριν παρέχονται πιθανές χρήσεις του μοντέλου καθώς και τους όποιους περιορισμούς μπορεί να έχει κατά την εφαρμογή του.

Σχετικά με τα θέματα που πραγματεύεται το βιβλίο, έχουν να κάνουν με την πρόβλεψη οικονομικών καταστάσεων, τη χρονική αξία του χρήματος, την τιμολόγηση ομολόγων, την προσομοίωση τιμών μετοχών, δικαιώματα προαίρεσης και το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησής τους κ.α.

Παρακάτω παρουσιάζεται ένας πίνακας με συνοπτικές πληροφορίες για κάθε ένα από τα παραπάνω βιβλία.

Εξώφυλλο	Τίτλος	Συγγραφείς	Εκδοτικός Οίκος	Αριθμός Έκδοσης	Ημερομηνία Έκδοσης
	*Principles of Finance with Excel*	*Simon Beninga*	*Oxford University Press*	*2η*	*24 Σεπτέμβρη, 2010*
	*Financial Modeling*	*Simon Beninga*	*The MIT Press*	*4η*	*18 Απρίλη, 2014*
	*Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA*	*Mary Jackson, Mike Staunton*	*Wiley*	*1η*	*30 Μαΐου, 2001*
	*Professional Financial Computing Using Excel and VBA*	*Humphrey Tung, Donny Lai, Michael Wong*	*Wiley*	*1η*	*15 Ιούνη, 2010*
	*Spreadsheet Modeling in Corporate Finance*	*Craig Holden*	*Prentice Hall*	*1η*	*15 Μαΐου, 2002*
	*Financial Modeling using Excel and VBA*	*Chandan Sengupta*	*Wiley*	*2η*	*9 Νοέμβρη, 2009*

Πίνακας 3.1: Συγκριτικός πίνακας βιβλίων χρηματοοικονομικής προτυποποίησης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ανάπτυξη Χρηματοοικονομικών Υποδειγμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτυχθούν τα χρηματοοικονομικά υποδείγματα που υλοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια αυτής της εργασίας. Η παρουσίασή τους θα γίνει μέσα από εικόνες από το Microsoft Excel, σύντομη παραβολή θεωρίας όπου αυτό κρίνεται απαραίτητο καθώς και αναλυτική εξήγηση του τρόπου κατασκευής τους. Θα χρησιμοποιηθούν όπου είναι δυνατό οι συναρτήσεις οι οποίες αναπτύχθηκαν σε VBA κατά τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας, ωστόσο όπου κρίνεται απαραίτητο θα γίνεται αναφορά και στον τρόπο με τον οποίο μπορούν να κατασκευαστούν τα μοντέλα μόνο με χρήση Excel.

4.1 Βασικοί Υπολογισμοί

Ας ξεκινήσουμε δείχνοντας κάποιους απαραίτητους βασικούς υπολογισμούς. Οι τρόποι υπολογισμού των αποδόσεων έχουν ήδη αναφερθεί στο δεύτερο κεφάλαιο. Για υπενθύμιση αναφέρουμε ότι η αριθμητική απόδοση υπολογίζεται από τον τύπο

$$r = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

και η γεωμετρική απόδοση από τον τύπο

$$r^G = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

Τα παραπάνω μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια του Excel όπως φαίνεται στην εικόνα που ακολουθεί:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Time	Price	Arithmetic return		Geometric return	
3							
4		1	100 €				
5		2	107 €	7,00%	<-- =(C5-C4)/C4	6,77%	<-- =LN(C5/C4)
6		3	96 €	-10,28%		-10,85%	
7		4	113 €	17,71%		16,30%	
8							
9			Total	13,00%	<-- =(1+D5)*(1+D6)*(1+D7)-1	12,22%	<-- =SUM(F5:F7)
10			Average	4,81%	<-- =AVERAGE(D5:D7)	3,45%	<-- =((1+F5)*(1+F6)*(1+F7))^(1/3)-1
11							
12							
13		Time	Price	Arithmetic return		Geometric return	
14							
15		1	100 €				
16		2	107 €	7,0%	<-- {=AReturn(C4:C7)}	6,77%	<-- {=GReturn(C4:C7)}
17		3	96 €	-10,3%		-10,85%	
18		4	113 €	17,7%		16,30%	
19							
20			Total	13,0%	<-- =TotAReturn(D5:D7)	12,22%	<-- =TotGReturn(F5:F7)
21			Average	4,8%	<-- =AvAReturn(D5:D7)	3,45%	<-- =AvGReturn(F5:F7)

Εικόνα 4.1: Υπολογισμός αποδόσεων με χρήση Excel

Έχοντας διαθέσιμες τις τιμές μια μετοχής για *t* περιόδους (κελιά C4:C7) μπορούμε να υπολογίσουμε τις αριθμητικές αποδόσεις (D5:D7) για κάθε χρονική περίοδο χρησιμοποιώντας τον τύπο (C5-C4)/C4 για τη πρώτη περίοδο, (C6-C5)/C5 για τη δεύτερη κτλ. Αντίστοιχα για τον υπολογισμό των γεωμετρικών αποδόσεων χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση LN(C5/C4) για τη πρώτη περίοδο, LN(C6/C5) για τη δεύτερη κτλ. Οι συναρτήσεις αυτές έρχονται σε πλήρη συμφωνία με τους μαθηματικούς τύπους για τον υπολογισμό της αριθμητικής και γεωμετρικής απόδοσης που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Για τον υπολογισμό των μέσων αριθμητικών και γεωμετρικών αποδόσεων, χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις AVERAGE(D5:D7) και ((1+F5)*(1+F6)*(1+F7))^(1/3)-1 αντίστοιχα. Οι ολικές αποδόσεις μπορούν να υπολογιστούν από τους τύπους (1+D5)*(1+D6)*(1+D7)-1 στην περίπτωση της αριθμητικής απόδοσης και SUM(F5:F7) στην περίπτωση της γεωμετρικής απόδοσης. Τα παραπάνω φαίνονται ξεκάθαρα στην Εικόνα 4.1 όπου δίπλα από τα δεδομένα δίνονται οι συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν για να υπολογιστούν.

Όπως φαίνεται και στην εικόνα κάτω από τους υπολογισμούς των αποδόσεων (από τη σειρά 13 και κάτω), υπολογίζουμε ξανά ότι και προηγουμένως, χρησιμοποιώντας όμως τις user-defined συναρτήσεις οι οποίες υλοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια αυτής της εργασίας. Έτσι για τις αριθμητικές αποδόσεις χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση AReturn(C4:C7) και για τις γεωμετρικές αποδόσεις την συνάρτηση GReturn(C4:C7). Οι συναρτήσεις αυτές βρίσκονται μέσα σε αγκύλες αφού έχουν εισαχθεί με τη χρήση του Ctrl+Shift+Enter (πρόκειται δηλαδή για array formulas, συναρτήσεις που δεν επιστρέφουν μονάχα μια τιμή αλλά ένα πίνακα από τιμές).

Αντίστοιχα, όπως και πριν, υπολογίζονται και οι ολικές και μέσες αποδόσεις με χρήση user-defined συναρτήσεων όμως σε αυτή τη περίπτωση, οι οποίες λαμβάνουν ως ορίσματα τις αριθμητικές και γεωμετρικές αποδόσεις οι οποίες υπολογίστηκαν προηγουμένως.

Ας δούμε τώρα πως υπολογίζουμε την αναμενόμενη απόδοση και τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο δεύτερο κεφάλαιο, οι τύποι που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό της αναμενόμενης απόδοσης και του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου είναι οι εξής:

$$E(r_P) = \sum_{i=1}^{m} w_i E(r_i)$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{m} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1, j\neq i}^{m} w_i w_j \sigma_{ij}$$

και σε μορφή πίνακα ως εξής:

$$E(r_P) = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{w}$$
$$\sigma_P^2 = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{w}$$

Τα παραπάνω μπορούν να γραφούν στο Excel με τη βοήθεια των συναρτήσεων πίνακα (array function) MMULT(w,TRANSPOSE(r)) και MMULT(MMULT(w,V),TRANSPOSE(w)) για την αναμενόμενη απόδοση και κίνδυνο αντίστοιχα. Προσοχή πρέπει να δοθεί στο γεγονός ότι η MMULT είναι array formula και πρέπει να εισαχθεί με τον συνδυασμό πλήκτρων Ctrl+Shift+Enter.

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις user-defined συναρτήσεις ExpRet και PortVar όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		VCV				
3			Stock 1	Stock 2	Stock 3	
4		Stock 1	0,000844	0,000453	0,000428	
5		Stock 2	0,000453	0,000732	0,000336	
6		Stock 3	0,000428	0,000336	0,000634	
7						
8			Stock 1	Stock 2	Stock 3	
9		Averages	0,05%	0,032%	0,031%	
10						
11			Stock 1	Stock 2	Stock 3	Sum
12		Weights	14,3%	36,3%	49,4%	100%
13						
14		Exp Ret	0,00034	<-- =ExpRet(C12:E12,C9:E9)		
15						
16		Port Var	0,0005	<-- =PortVar(C12:E12,C4:E6)		

Εικόνα 4.2: Υπολογισμός αναμενόμενης απόδοσης και κινδύνου

Στα κελιά C4:E6 έχουμε τον πίνακα Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης του χαρτοφυλακίου, στα κελιά C9:E9 τις μέσες αποδόσεις των χρεογράφων και στα κελιά C12:E12 το βάρος (ποσοστό συμμετοχής) κάθε χρεογράφου στο χαρτοφυλάκιο. Από τα παραπάνω δεδομένα, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την αναμενόμενη απόδοση δίνοντας ως ορίσματα στη συνάρτηση ExpRet τα βάρη (C12:E12) και τις μέσες αποδόσεις (C9:E9) των χρεογράφων. Αντίστοιχα ο υπολογισμός του κινδύνου γίνεται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση PortVar(C12:E12;C4:E6).

Σε περίπτωση που υπάρχει και ακίνδυνο χρεόγραφο, για τον υπολογισμό της αναμενόμενης απόδοσης χρησιμοποιούμε την συνάρτηση πίνακα (array function) $r_F +$ MMULT(w,TRANSPOSE(r − r_F)) ή εναλλακτικά την user-defined συνάρτηση ExpReturnRF. Ο υπολογισμό του κινδύνου παραμένει ίδιος με πριν.

Τα παραπάνω φαίνονται στην παρακάτω εικόνα:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		VCV					
3			Stock 1	Stock 2	Stock 3	RF	
4		Stock 1	0,000844	0,000453	0,000428	0,000000	
5		Stock 2	0,000453	0,000732	0,000336	0,000000	
6		Stock 3	0,000428	0,000336	0,000634	0,000000	
7		RF	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	
8							
9			Stock 1	Stock 2	Stock 3	RF	
10		Averages	0,05%	0,032%	0,031%	0,01%	
11							
12			Stock 1	Stock 2	Stock 3	RF	
13		Excess	0,0004	0,00022	0,00021	0	
14							
15			Stock 1	Stock 2	Stock 3	RF	Sum
16		Weights	87,7%	1,3%	3%	8%	100%
17							
18		Exp Ret	0,046%	<-- =ExpRetRF(C16:F16,C13:F13,F10)			
19		Port Var	0,068%	<-- =PortVar(C16:F16,C4:F7)			

Εικόνα 4.3: Υπολογισμός αναμενόμενης απόδοσης και κινδύνου υπό την ύπαρξη ακίνδυνου χρεογράφου

Ουσιαστικά ακολουθούμε τη διαδικασία που περιεγράφηκε στην περίπτωση όπου δεν υπήρχε ακίνδυνο χρεόγραφο, με την εξαίρεση ότι η συνάρτηση ExpRetRF λαμβάνει υπόψιν της και το βάρος του ακίνδυνου χρεογράφου καθώς και την απόδοση του (κελί F10). Προσοχή επίσης πρέπει να δοθεί στο γεγονός ότι στη συνάρτηση ExpRetRF δε χρησιμοποιούμε τις μέσες αποδόσεις των χρεογράφων, αλλά τις επιπρόσθετες αξίες (excess returns) οι οποίες βρίσκονται στα κελιά C13:F13 και υπολογίζονται αν από τις μέσες αποδόσεις αφαιρέσουμε την απόδοση του ακίνδυνου χρεογράφου. Ο υπολογισμός του κινδύνου υλοποιείται από την συνάρτηση PortVar(C16:F16;C4:F7).

Κλείνοντας την ενότητα των βασικών υπολογισμών ας δούμε πως υπολογίζεται η μήτρα Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης (Variance Covariance Matrix ή VCV) του χαρτοφυλακίου. Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την ήδη ορισμένη από το Excel συνάρτηση Covar ή πιο εύκολα με τη χρήση της user-defined VCmatrix όπως φαίνεται παρακάτω.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Time	Stock 1	Stock 2	Stock 3		
3		1	11,2%	8,0%	10,9%		
4		2	10,8%	9,2%	22,0%		
5		3	11,6%	6,6%	37,9%		
6		4	-1,6%	18,5%	-11,8%		
7		5	-4,1%	7,4%	12,9%		
8		6	8,6%	13,0%	-7,5%		
9		7	6,8%	22,0%	9,3%		
10		8	11,9%	14,0%	48,7%		
11		9	12,0%	20,5%	-1,9%		
12		10	8,3%	14,0%	19,1%		
13		11	6,0%	19,0%	-3,4%		
14		12	10,2%	9,0%	43,0%		
15							
16		VCV					
17			Stock 1	Stock 2	Stock 3		
18		Stock 1	0,00258	-0,00025	0,00440	<-- {=VCmatrix(C3:E14)}	
19		Stock 2	-0,00025	0,00276	-0,00542		
20		Stock 3	0,00440	-0,00542	0,03677		

Εικόνα 4.4: Υπολογισμός μήτρας Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης

Έχοντας λάβει τις αποδόσεις των μετοχών για κάποιες χρονικές στιγμές, η μήτρα Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση VCmatrix η οποία δέχεται σαν όρισμα τις αποδόσεις των χρεογράφων, δηλαδή VCmatrix(C3:E14) στην προκειμένη περίπτωση. Από τη στιγμή που δεν επιστρέφεται μονάχα μια τιμή, αλλά ένας πίνακας τιμών, η συνάρτηση θα πρέπει να εισαχθεί με Ctrl+Shift+Enter.

4.2 Minimum Portfolio Variance

Η μέθοδος minimum portfolio variance υπολογίζει για ένα σύνολο χρεογράφων τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να γίνει η κατανομή του επενδυόμενου κεφαλαίου ώστε να προκύψει ένα χαρτοφυλάκιο με τη μικρότερη δυνατή διακύμανση.

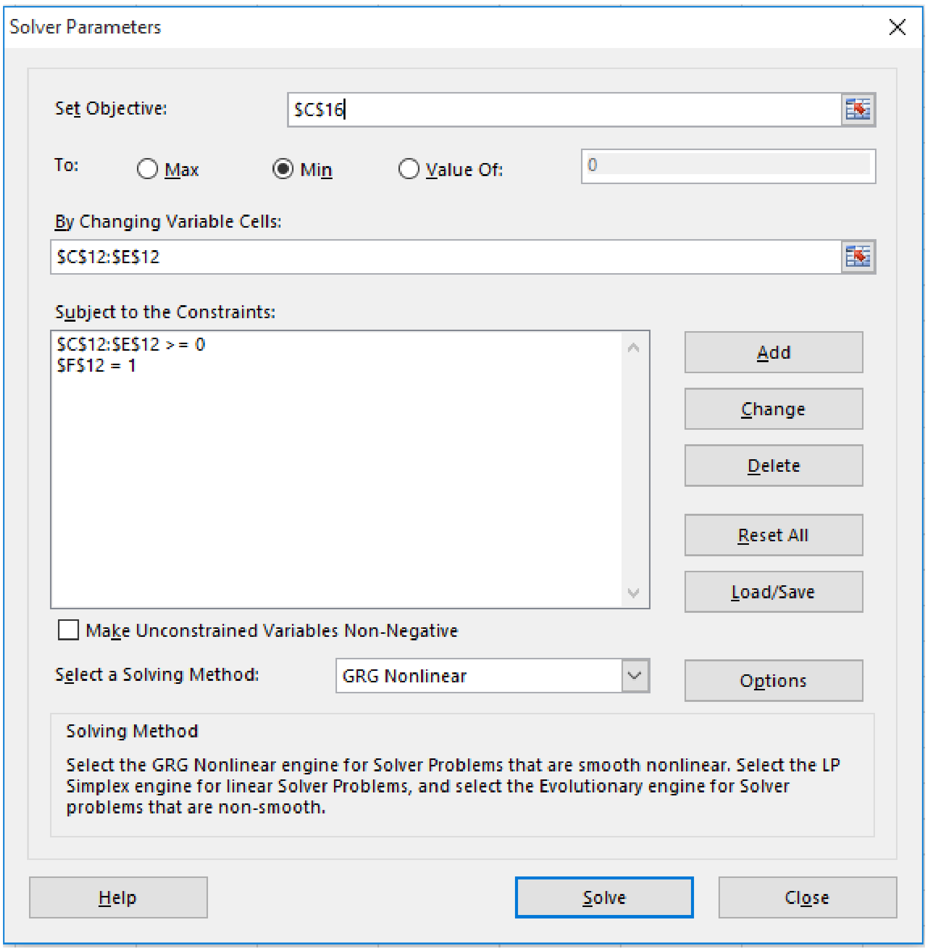
Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

$$min \quad \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{w}$$

$$Υπό \quad \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{w}_i = 1$$

$$\boldsymbol{w}_i \geq 0$$

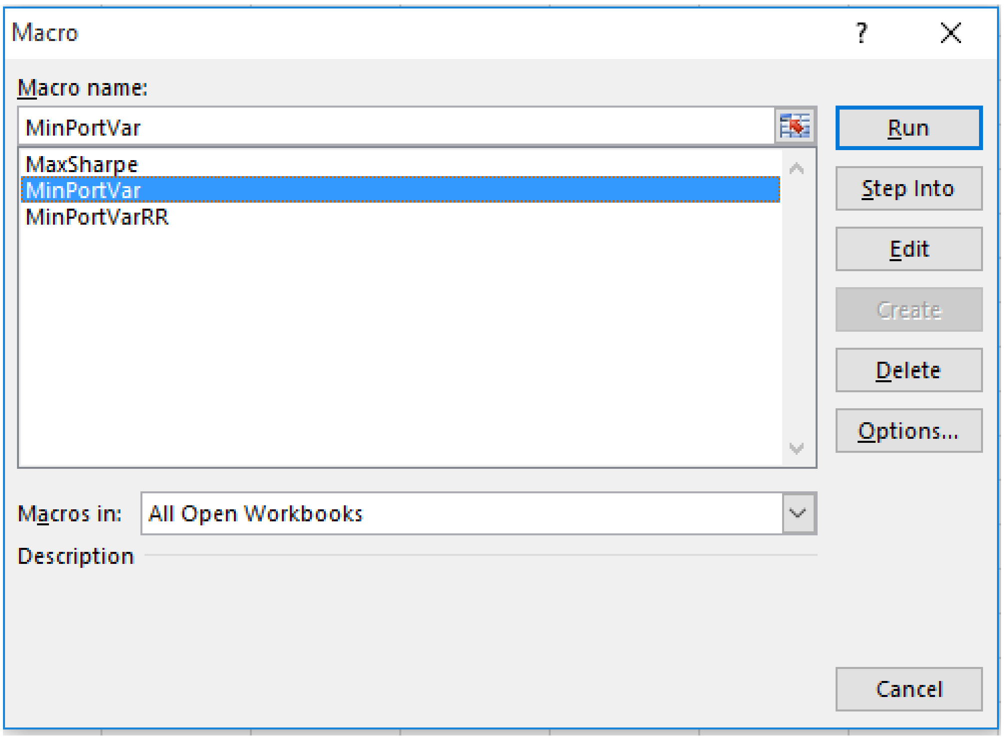
Για τη λύση του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε τον Solver του Excel. Για την περίπτωση της Εικόνας 4.2, η διατύπωση του προβλήματος σε Solver είναι η παρακάτω:



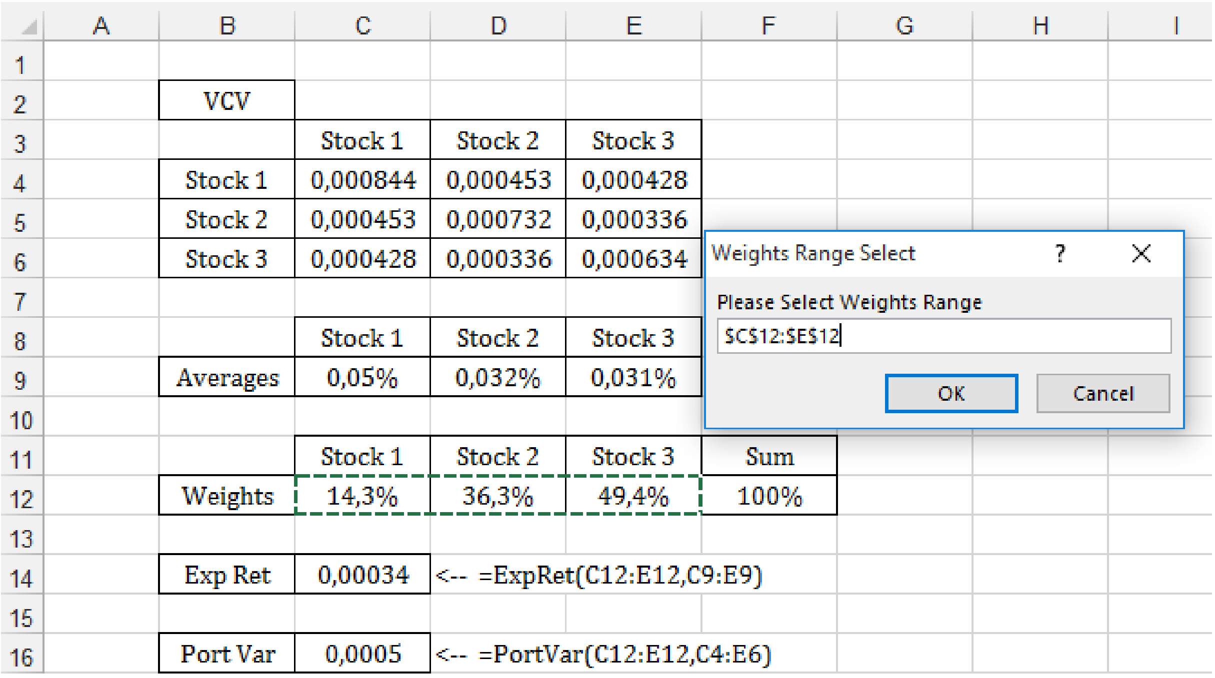
Εικόνα 4.5: Solver για την εύρεση χαρτοφυλακίου ελαχίστου κινδύνου

Στο κουτί set Objective έχουμε θέσει το κελί C16 το οποίο περιλαμβάνει τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου την οποία ζητάμε να ελαχιστοποιήσουμε (διαλέγουμε την επιλογή Min). Η ελαχιστοποίηση πραγματοποιείται αλλάζοντας (κουτί By Changing Variable Cells) τα κελιά C12:E12 τα οποία περιλαμβάνουν το βάρος (ποσοστό συμμετοχής) κάθε χρεογράφου στο χαρτοφυλάκιο. Οι περιορισμοί που εκφράσαμε παραπάνω για το πρόβλημα μας εισάγονται στο Solver στην περιοχή Subject to the Constraints πατώντας το κουμπί Add και είναι οι C12:E12>=0 και F12=1, δηλαδή θέλουμε θετικά ή μηδενικά βάρη και με άθροισμα ίσο με τη μονάδα. Σαν μέθοδο επίλυσης διαλέγουμε GRG Nonlinear αφού το πρόβλημα μας δεν είναι γραμμικό και τέλος πατάμε την επιλογή Solve ώστε να αρχίσει η επίλυση του προβλήματος.

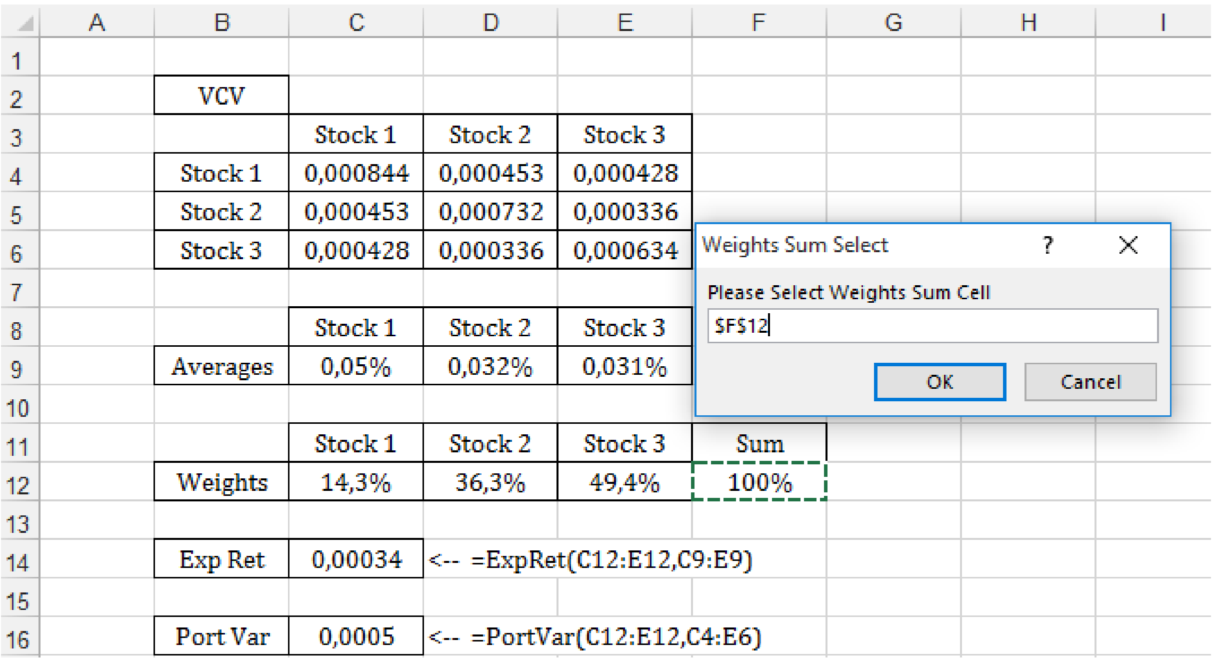
Τον παραπάνω Solver μπορούμε να υλοποιήσουμε και με την υπορουτίνα MinPortVar η οποία δημιουργήθηκε κατά την διάρκεια αυτής της εργασίας. Η κλήση της υπορουτίνας γίνεται πατώντας το συνδυασμό πλήκτρων Alt+F8 και επιλέγοντας από το παράθυρο διαλόγου που εμφανίζεται την υπορουτίνα MinPortVar. Στην περίπτωση αυτή, αφού κληθεί η υπορουτίνα, εμφανίζονται παράθυρα διαλόγου (dialog boxes) τα οποία ζητάνε τα δεδομένα τα οποία είναι απαραίτητα για την επίλυση του προβλήματος μας και αφού αυτά δοθούν, αρχίζει αυτόματα η επίλυση. Η παραπάνω διαδικασία φαίνεται στις εικόνες που ακολουθούν.



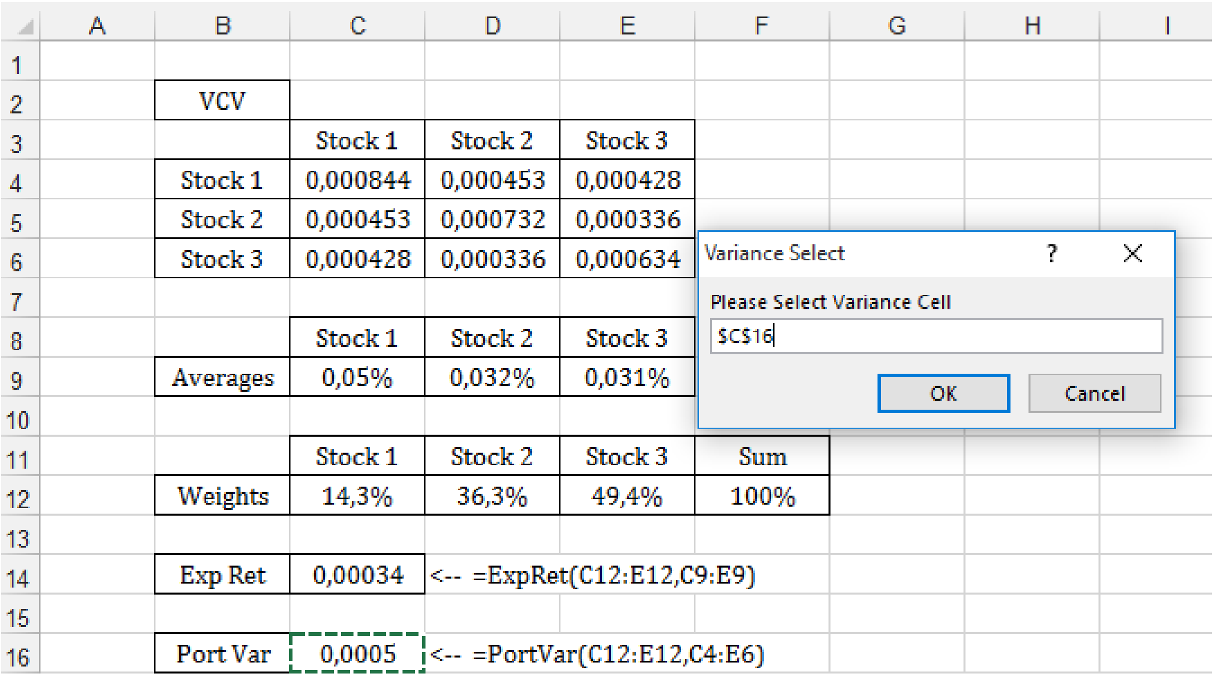
Εικόνα 4.6: Παράθυρο διαλόγου για την επιλογή υπορουτίνας



Εικόνα 4.7: Επιλογή του εύρους που περιέχει τα βάρη των χρεογράφων



Εικόνα 4.8: Επιλογή του κελιού που περιέχει το άθροισμα των βαρών των χρεογράφων



Εικόνα 4.9: Επιλογή κελιού που περιέχει την διακύμανση

4.3 Sharpe Ratio

Στην μέθοδο αυτή, η εύρεση του βέλτιστου χαρτοφυλακίου πραγματοποιείται μέσω της μεγιστοποίησης του δείκτη Sharpe Ratio ο οποίος στην περίπτωση που υπάρχει και ακίνδυνο χρεόγραφο μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$SharpeRatio = \frac{PortReturn - r_F}{\sqrt{PortVar}}$$

όπου PortReturn η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου, r_F η απόδοση του ακίνδυνου χρεογράφου και PortVar η διακύμανση του χαρτοφυλακίου.

Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$max \;\; SharpeRatio = \; max \;\; \frac{PortReturn - r_F}{\sqrt{PortVar}}$$

$$Υπό \;\; \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{w_i} = 1$$

$$\boldsymbol{w_i} \geq 0$$

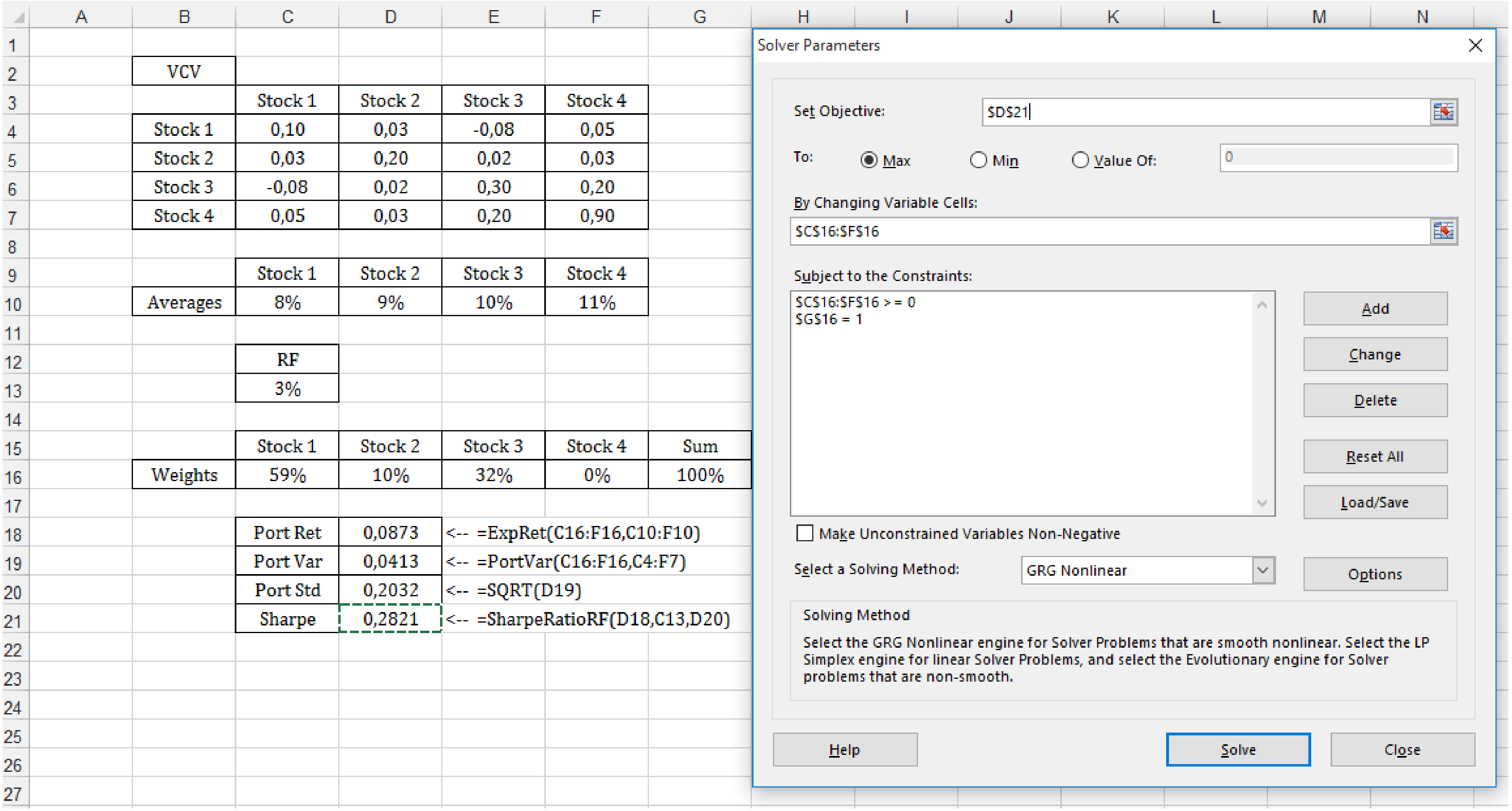
Για την επίλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιηθεί και πάλι ο Solver του Microsoft Excel όπως φαίνεται στην Εικόνα. 4.10.

Για τον υπολογισμό του δείκτη Sharpe αρχικά θα πρέπει να υπολογίσουμε την αναμενόμενη απόδοση και κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, ο τρόπος υπολογισμού των οποίων είναι γνωστός από την ενότητα 4.1. Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης παίρνουμε τη ρίζα της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου (κελί D19), δηλαδή βρίσκεται από τον τύπο SQRT(D19). Μπορούμε λοιπόν τώρα να υπολογίσουμε τον δείκτη Sharpe ο οποίος βρίσκεται χρησιμοποιώντας την user-defined συνάρτηση SharpeRatioRF(D18,C13,D20), παίρνει δηλαδή ως ορίσματα την αναμενόμενη απόδοση, τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου. Αυτό ήταν αναμενόμενο από την θεωρία που παρατέθηκε παραπάνω.

Μετά από αυτές τις ετοιμασίες, μπορούμε να υλοποιήσουμε και τρέξουμε τον Solver για να επιλύσουμε το πρόβλημα. Για την υλοποίησή του μπορεί να χρησιμοποιηθεί η υπορουτίνα MaxSharpe η οποία δουλεύει με τρόπο παρόμοιο με την MinPortVar η χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Πιο αναλυτικά θέτουμε σαν στόχο το κελί D21 το οποίο περιέχει το δείκτη Sharpe, επιλέγουμε την επιλογή Max αφού θέλουμε να το μεγιστοποιήσουμε και σαν περιορισμούς θέτουμε όπως και πριν να είναι τα βάρη μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός και με άθροισμα μονάδα (C16:F16>=0 και G16=1) . Για να βρεθεί ιδανική λύση, θα πρέπει να αλλάζουμε συνεχώς την αναλογία των βαρών των χρεογράφων στο χαρτοφυλάκιο μέχρι να βρεθεί ο ιδανικός συνδυασμός, άρα εισάγουμε στο κουτί By Changing Variable Cells το εύρος C16:F16 που περιλαμβάνει τα προς αλλαγή βάρη.

Όπως γίνεται εμφανές, η μέθοδος Sharpe Ratio είναι παρόμοια με την μέθοδο βελτιστοποίησης Minimum Portfolio Variance με τη διαφορά ότι προσπαθούμε να μεγιστοποιήσουμε μια μεταβλητή (τον δείκτη Sharpe) και όχι να ελαχιστοποιήσουμε (τη διακύμανση) όπως η Minimum Portfolio Variance.



Εικόνα 4.10: Μοντελοποίηση Sharpe Ratio στο Excel και Solver επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης

4.4 Mixed Integer Quadratic Programming (MIQP)

Η μέθοδος MIQP υλοποιεί ελαχιστοποίηση της διακύμανσης του δοθέντος χαρτοφυλακίου, όταν τα βάρη επιτρέπεται να λαμβάνουν τιμές ανάμεσα σε μια ελάχιστη και μέγιστη επιτρεπτή τιμή. Επίσης θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και ένα δυαδικό διάνυσμα το οποίο υποδεικνύει ποια χρεόγραφα θα συμμετέχουν στο επενδυτικό χαρτοφυλάκιο κάτω από τους δοθέντες περιορισμούς.

Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$min \quad \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{w}$$

$$\Upsilon\pi\acute{o} \quad \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{w_i} = 1$$

$$\boldsymbol{w_i} \geq 0$$

$$Low \leq \boldsymbol{w_i} \leq High$$

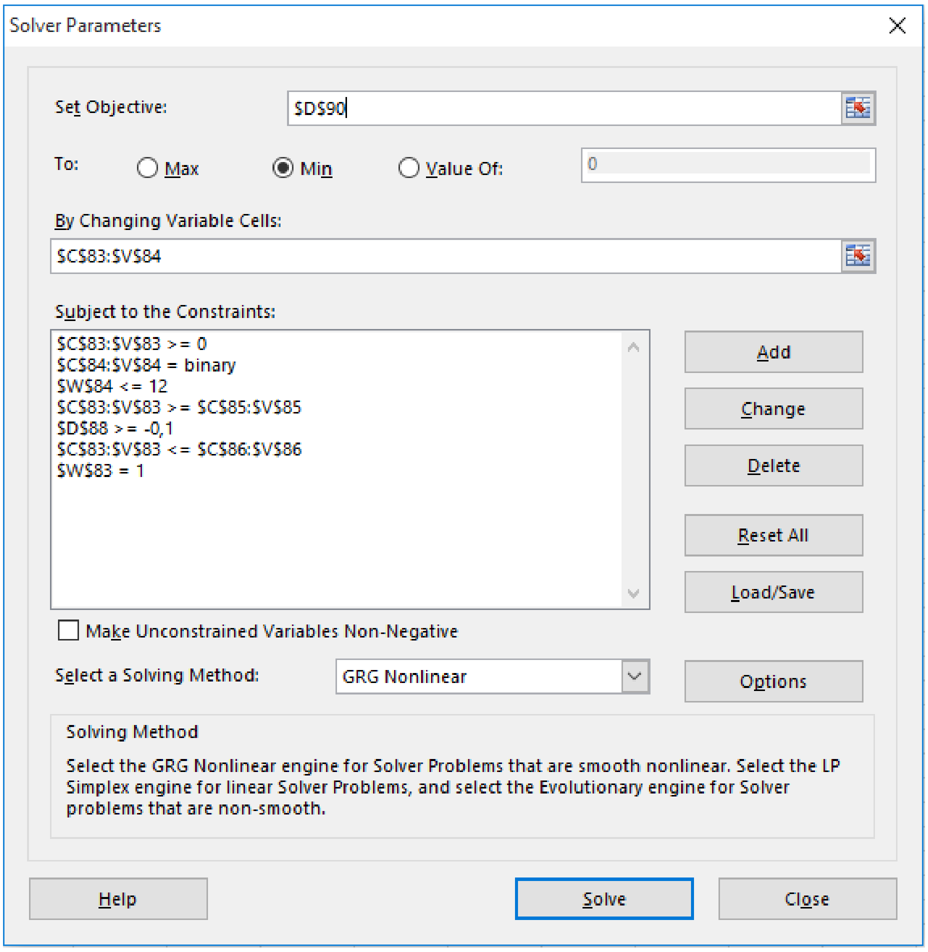
Για την κατασκευή του μοντέλου στο Excel, παίρνουμε αρχικά τις αποδόσεις των χρεογράφων για κάποια περίοδο και υπολογίζουμε τη μέση τιμή τους (κελιά C3:V54 και C56:V56 αντίστοιχα στην Εικόνα 4.11). Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μήτρα Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση VCmatrix(C3:V54) και στήνουμε τους περιορισμούς του προβλήματος. Στη σειρά 83 έχουμε τα βάρη των χρεογράφων στο χαρτοφυλάκιο, τα οποία όπως φαίνεται και από την μαθηματική διατύπωση του προβλήματος πρέπει να είναι ανάμεσα σε μια ελάχιστη και μέγιστη τιμή οι οποίες δίνονται στις σειρές 85 και 86 αντίστοιχα. Το αν θα συμμετάσχει το χρεόγραφο στο χαρτοφυλάκιο κρίνεται από τη σειρά 84 η οποία περιέχει τα δυαδικά διανύσματα (integers). Τέλος υπολογίζουμε την αναμενόμενη απόδοση και κίνδυνο του χαρτοφυλακίου (κελιά C88 και C90) και τα πολλαπλασιάζουμε με τον αριθμό 52 για να πάρουμε την ετήσια αναμενόμενη απόδοση και κίνδυνο (αφού οι αποδόσεις που μας έχουν δοθεί είναι εβδομαδιαίες).

Τα παραπάνω φαίνονται στην Εικόνα 4.11 που ακολουθεί στην επόμενη σελίδα.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
1			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
2			FP	SIE	TEF	SANB	ENI	UNA	SANS	ABI	GSZ	BNP	BAS	MC	DAI	SAP	OR	DTE	BAYN	ALV	EOAN	ENEL		
3		11/01/08	-0,00297	-0,05924	0,04297	-0,03722	-0,00556	-0,08083	0,07152	-0,06805	-0,01475	0,00387	-0,02281	-0,07509	-0,02113	-0,03839	-0,08608	0,02133	0,02851	-0,01358	0,00101	-0,01518		
4		18/01/08	-0,06628	-0,05330	-0,03583	-0,09263	-0,07151	-0,00044	-0,06568	-0,09091	-0,03239	-0,04527	-0,07903	-0,04182	-0,07890	0,02682	-0,02496	-0,01697	-0,06557	-0,04966	-0,01486	0,00250		
5		25/01/08	-0,06160	-0,08848	-0,08732	-0,02814	-0,05508	-0,03492	-0,09269	0,01506	-0,08293	-0,05606	-0,08363	-0,00471	-0,03693	-0,06738	-0,02229	-0,09827	-0,10783	-0,08687	-0,12763	-0,07527		
6		01/02/08	-0,01061	0,06594	0,00662	-0,00165	-0,00911	0,02245	-0,02523	0,12957	0,02130	-0,00336	0,04356	0,01992	0,04204	0,02642	0,00676	-0,00147	0,02634	-0,00321	-0,00741	0,01042		
7		08/02/08	-0,02690	-0,04262	-0,02427	-0,03645	-0,02160	-0,04256	-0,04455	-0,05079	-0,02735	-0,09497	-0,04526	-0,03175	-0,04669	0,01674	-0,03020	-0,02434	-0,00546	-0,04562	0,01079	-0,01005		
8		15/02/08	0,02162	0,02337	-0,02332	-0,00087	0,05261	-0,03322	0,00503	0,02085	0,02784	0,00051	0,01894	0,00131	0,05819	-0,00976	0,02261	-0,01512	0,01867	-0,02273	0,01213	-0,00365		
9		22/02/08	0,01526	0,00091	0,00796	0,00861	0,01294	-0,00048	-0,00558	-0,02078	-0,02790	0,03536	-0,01181	0,01957	0,02018	0,00123	-0,03021	-0,02609	-0,05677	0,02733	-0,01586	-0,01288		
51		12/12/08	0,11611	0,05759	0,03299	0,07213	0,15595	0,01999	0,02017	0,11660	0,07709	0,12020	0,10880	0,12542	0,07245	-0,01162	0,01832	-0,02326	0,07317	0,10461	0,12511	0,03843		
52		19/12/08	-0,00553	0,09751	0,00814	0,04740	-0,06689	0,02161	0,06960	0,03575	0,12110	-0,30662	0,05425	0,00772	0,08293	0,00020	0,03696	-0,01832	0,00758	-0,03515	0,01210	0,05167		
53		26/12/08	-0,03879	-0,02250	-0,01988	-0,02482	-0,02349	-0,02962	-0,06719	0,09979	-0,00802	-0,02865	-0,01627	-0,02169	-0,04376	-0,03984	-0,02035	-0,00700	-0,01629	0,04658	-0,01121	-0,01062		
54		02/01/09	0,07781	0,09187	0,03232	0,04790	0,07650	0,04593	0,05753	0,10876	0,07732	0,10848	0,07308	0,05217	0,11401	0,07552	0,04717	0,03523	0,09121	0,05324	0,12358	0,04968		
55																								
56		Average	-0,00442	-0,00946	-0,00389	-0,00901	-0,00449	-0,00487	-0,00267	-0,01071	0,00002	-0,01138	-0,00945	-0,00763	-0,01072	-0,00325	-0,00643	-0,00393	-0,00566	-0,00769	-0,00697	-0,00907	<-- =AVERAGE(V3:V54)	
57																								
58		VCV	0,00384	0,00301	0,00219	0,00339	0,00417	0,00142	0,00301	0,00217	0,00333	0,00238	0,00323	0,00240	0,00375	0,00247	0,00099	0,00231	0,00238	0,00301	0,00377	0,00230	<-- {=VCmatrix(C3:V54)	
59			0,00301	0,00469	0,00235	0,00377	0,00316	0,00135	0,00258	0,00266	0,00275	0,00199	0,00340	0,00298	0,00440	0,00294	0,00127	0,00197	0,00237	0,00381	0,00302	0,00183		
60			0,00219	0,00235	0,00258	0,00292	0,00252	0,00138	0,00251	0,00125	0,00244	0,00170	0,00212	0,00180	0,00303	0,00218	0,00111	0,00249	0,00159	0,00320	0,00253	0,00168		
61			0,00339	0,00377	0,00292	0,00617	0,00367	0,00197	0,00353	0,00339	0,00299	0,00382	0,00408	0,00376	0,00502	0,00286	0,00129	0,00261	0,00250	0,00560	0,00405	0,00204		
62			0,00417	0,00316	0,00252	0,00367	0,00496	0,00179	0,00346	0,00262	0,00376	0,00287	0,00356	0,00275	0,00446	0,00279	0,00122	0,00287	0,00247	0,00341	0,00417	0,00255		
63			0,00142	0,00135	0,00138	0,00197	0,00179	0,00220	0,00197	0,00136	0,00237	0,00146	0,00158	0,00165	0,00255	0,00153	0,00133	0,00180	0,00116	0,00189	0,00197	0,00169		
64			0,00301	0,00258	0,00251	0,00353	0,00346	0,00197	0,00477	0,00207	0,00342	0,00253	0,00288	0,00206	0,00387	0,00268	0,00132	0,00354	0,00219	0,00337	0,00346	0,00222		
65			0,00217	0,00266	0,00125	0,00339	0,00262	0,00136	0,00207	0,00588	0,00212	0,00237	0,00315	0,00203	0,00337	0,00188	0,00107	0,00130	0,00202	0,00289	0,00248	0,00150		
66			0,00333	0,00275	0,00244	0,00299	0,00376	0,00237	0,00342	0,00212	0,00555	0,00169	0,00308	0,00229	0,00399	0,00297	0,00149	0,00305	0,00246	0,00271	0,00398	0,00312		
67			0,00238	0,00199	0,00170	0,00382	0,00287	0,00146	0,00253	0,00237	0,00169	0,00703	0,00271	0,00282	0,00303	0,00243	0,00112	0,00157	0,00253	0,00481	0,00298	0,00131		
68			0,00323	0,00340	0,00212	0,00408	0,00356	0,00158	0,00288	0,00315	0,00308	0,00271	0,00410	0,00261	0,00420	0,00271	0,00111	0,00174	0,00237	0,00399	0,00371	0,00200		
69			0,00240	0,00298	0,00180	0,00376	0,00275	0,00165	0,00206	0,00203	0,00229	0,00282	0,00261	0,00350	0,00385	0,00217	0,00121	0,00151	0,00189	0,00372	0,00278	0,00173		
70			0,00375	0,00440	0,00303	0,00502	0,00446	0,00255	0,00387	0,00337	0,00399	0,00303	0,00420	0,00385	0,00726	0,00371	0,00204	0,00280	0,00253	0,00507	0,00422	0,00265		
71			0,00247	0,00294	0,00218	0,00286	0,00279	0,00153	0,00268	0,00188	0,00297	0,00243	0,00271	0,00217	0,00371	0,00370	0,00153	0,00213	0,00208	0,00333	0,00315	0,00206		
72			0,00099	0,00127	0,00111	0,00129	0,00122	0,00133	0,00132	0,00107	0,00149	0,00112	0,00111	0,00121	0,00204	0,00153	0,00168	0,00110	0,00114	0,00187	0,00140	0,00132		
73			0,00231	0,00197	0,00249	0,00261	0,00287	0,00180	0,00354	0,00130	0,00305	0,00157	0,00174	0,00151	0,00280	0,00213	0,00110	0,00397	0,00145	0,00285	0,00291	0,00205		
74			0,00238	0,00237	0,00159	0,00250	0,00247	0,00116	0,00219	0,00202	0,00246	0,00253	0,00237	0,00189	0,00253	0,00208	0,00114	0,00145	0,00299	0,00275	0,00278	0,00160		
75			0,00301	0,00381	0,00320	0,00560	0,00341	0,00189	0,00337	0,00289	0,00271	0,00481	0,00399	0,00372	0,00507	0,00333	0,00187	0,00285	0,00275	0,00815	0,00452	0,00211		
76			0,00377	0,00302	0,00253	0,00405	0,00417	0,00197	0,00346	0,00248	0,00398	0,00298	0,00371	0,00278	0,00422	0,00315	0,00140	0,00291	0,00278	0,00452	0,00506	0,00293		
77			0,00230	0,00183	0,00168	0,00204	0,00255	0,00169	0,00222	0,00150	0,00312	0,00131	0,00200	0,00173	0,00265	0,00206	0,00132	0,00205	0,00160	0,00211	0,00293	0,00287		
78																								
79		Average	-0,00442	-0,00946	-0,00389	-0,00901	-0,00449	-0,00487	-0,00267	-0,01071	0,00002	-0,01138	-0,00945	-0,00763	-0,01072	-0,00325	-0,00643	-0,00393	-0,00566	-0,00769	-0,00697	-0,00907		
80																								
81			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
82			FP	SIE	TEF	SANB	ENI	UNA	SANS	ABI	GSZ	BNP	BAS	MC	DAI	SAP	OR	DTE	BAYN	ALV	EOAN	ENEL		
83		Weights	0,00%	0,00%	33,63%	0,00%	0,00%	5,87%	0,00%	0,00%	50,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	10,50%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	
84		Integers	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4	
85		Lower bound	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	<-- =0.01*V84	
86		Upper bound	0	0	0,5	0	0	0,5	0	0	0,5	0	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0	<-- =0.5*V84	
87																								
88		Return	-0,00192	-10,00%	<-- =C88*52																			
89																								
90		Variance	0,00323	2,33%	<-- =C90*SQRT(52)																			

Εικόνα 4.11: Μοντελοποίηση Mixed Integer Quadratic Programming στο Excel

Αφού έχουμε κατασκευάσει το μοντέλο, είμαστε έτοιμοι να υλοποιήσουμε τον Solver ο οποίος θα επιλύσει το πρόβλημά μας. Η υλοποίηση του μπορεί να γίνει εύκολα καλώντας την υπορουτίνα (πατώντας Alt+F8 και επιλέγοντας την από το παράθυρο διαλόγου που εμφανίζεται) MIQPsolve η οποία όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, αφού κληθεί εμφανίζει παράθυρα διαλόγου στα οποία ζητείται να επιλέξει ο χρήστης τα δεδομένα του προβλήματος και στη συνέχεια, αφού αυτά δοθούν, τρέχει τον Solver. Μια υλοποίηση του Solver δίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 4.12: Solver για την ελαχιστοποίηση της διακύμανσης σε μοντέλο MIQP

Σαν στόχο θέτουμε το κελί D90 το οποίο περιέχει τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου, την οποία ζητάμε να ελαχιστοποιήσουμε (επιλογή Min). Αυτό καθίσταται δυνατό αλλάζοντας το περιεχόμενο των κελιών που περιέχονται στο εύρος C83:V84, δηλαδή τα βάρη και τα δυαδικά διανύσματα του μοντέλου. Σαν περιορισμούς πέρα από τους ήδη γνωστούς που έχουν αναφερθεί στη θεωρία, ζητάμε το αναμενόμενο κέρδος να μην πέφτει κάτω από το -10% (περιορισμός D88>=-0.1), τα δυαδικά διανύσματα να παίρνουν προφανώς τιμές μονάχα 0 ή 1 (C84:V84) και τέλος να συμμετέχουν το πολύ δώδεκα χρεόγραφα στο χαρτοφυλάκιο (W84<=12).

4.5 MAD/Semi-MAD

Όπως αναφέρθηκε αναλυτικά στο δεύτερο κεφάλαιο, η μέση απόλυτη απόκλιση από την αναμενόμενη απόδοση (mean absolute deviation ή MAD) είναι ένας νέος τρόπος υπολογισμού του κινδύνου ο οποίος είναι απαραίτητος στην υλοποίηση υποδειγμάτων γραμμικού προγραμματισμού. Η ελαχιστοποίηση της μέσης απόλυτης απόκλισης αντιστοιχεί ουσιαστικά στην ελαχιστοποίηση των αποκλίσεων από τη διάμεσο της απόδοσης. Με τον τρόπο αυτό παρακάμπτεται η υπόθεση ότι οι αποδόσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Για υπενθύμιση αναφέρουμε ότι η ελαχιστοποίηση του κινδύνου MAD_P του χαρτοφυλακίου δεδομένης μιας ελάχιστης επιθυμητής απόδοσης R μπορεί να επιτευχθεί μέσω του ακόλουθου προβλήματος:

$$min \quad MAD_P = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{m} w_i[r_{it} - E(r_i)]\right|$$

$$\text{Υπό:} \quad \sum_{i=1}^{m} w_i E(r_i) \geq R$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0$$

Ας συνεχίσουμε παρουσιάζοντας τον τρόπο που μπορούν να προσδιοριστούν στο Excel οι μεταβλητές MAD_P και $Semi\text{-}MAD_P$, με χρήση των user-defined συναρτήσεων MAD και Semi_MAD οι οποίες απλοποιούν σε πολύ μεγάλο βαθμό την όλη διαδικασία.

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.13, το μόνο που μας χρειάζεται είναι τα βάρη (ποσοστά συμμετοχής) των χρεογράφων στο χαρτοφυλάκιο καθώς και οι αποδόσεις των χρεογράφων, από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη απόδοση. Έχοντας αυτά τα δεδομένα, τα χρησιμοποιούμε σαν ορίσματα στις συναρτήσεις MAD(C3:E14;C17:E17;C21:E21) και Semi_MAD(C3:E14;C17:E17;C21:E21) λαμβάνοντας έτσι τα επιθυμητά αποτελέσματα (όπου C3:E14 οι αποδόσεις των χρεογράφων, C17:E17 οι αναμενόμενες αποδόσεις και C21:E21 τα βάρη).

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να αναφερθεί ότι πατώντας το συνδυασμό πλήκτρων Ctrl+Shift+A εμφανίζονται τα ονόματα των ορισμάτων των user-defined συναρτήσεων, λειτουργία ιδιαίτερα χρήσιμη αν δεν είναι γνωστά από πριν στον χρήστη.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		Time	Stock A	Stock B	Stock C		MADp			
3		1	12,05	25,20	31,67		5,90	<-- =Mad(C3:E14,C17:E17,C21:E21)		
4		2	15,27	2,86	15,82					
5		3	-4,12	5,45	10,58					
6		4	1,57	4,56	-14,43		Semi-MADp			
7		5	3,16	3,72	31,98		2,95	<-- =Semi_Mad(C3:E14,C17:E17,C21:E21)		
8		6	-2,79	10,79	-0,72					
9		7	-8,97	5,38	-19,64					
10		8	-1,18	-2,97	-10,00					
11		9	1,07	1,52	-11,51					
12		10	12,75	10,75	5,63					
13		11	7,48	3,79	-4,67					
14		12	-0,94	1,32	7,94					
15										
16			Returns							
17			2,95	6,03	3,55					
18										
19										
20			Weights							
21			50%	30%	20%					

Εικόνα 4.13: Υπολογισμός MAD_P και $Semi\text{-}MAD_P$

Σε αυτό το σημείο, για την καλύτερη κατανόηση του τρόπου υπολογισμού των MAD_P και $Semi\text{-}MAD_P$ θα αναφερθεί συνοπτικά η διαδικασία που ακολουθείται και η οποία φαίνεται στην Εικόνα 4.14, όπου δεν έχουν χρησιμοποιηθεί οι user-defined συναρτήσεις που αναφέρθηκαν πριν (την οποία όμως ουσιαστικά υλοποιούν για να υπολογίσουν τα ζητούμενα).

Μετά τον υπολογισμό των αναμενόμενων αποδόσεων (κελιά C17:E17), υπολογίζουμε τις αποκλίσεις (κελιά G3:I14) και τις βεβαρημένες αποκλίσεις (K3:K14). Οι πρώτες υπολογίζονται αφαιρώντας από κάθε απόδοση την αναμενόμενη απόδοση και οι δεύτερες χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση SUMPRODUCT, η οποία δέχεται σαν πρώτο όρισμα τα βάρη των χρεογράφων στο χαρτοφυλάκιο ($C$23:$E$23) και σαν δεύτερο όρισμα τις αποκλίσεις κάθε χρονικής περιόδου, πχ G3:I3 για την πρώτη περίοδο, G4:I4 για τη δεύτερη κτλ. Έχοντας τώρα τις βεβαρημένες αποκλίσεις, παίρνουμε την απόλυτη τιμή τους με τη βοήθεια της συνάρτησης ABS και βρίσκουμε τελικά την MAD_Pμε χρήση της συνάρτησης AVERAGE(H19:H30). Για την $Semi\text{-}MAD_P$ χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση IF η οποία μηδενίζει τις θετικές βεβαρημένες αποκλίσεις και κάνει θετικές τις αρνητικές. Ύστερα παίρνουμε όπως και πριν το μέσο όρο τους με χρήση της συνάρτησης AVERAGE(K19:K30) οπότε και λαμβάνουμε τελικά το $Semi\text{-}MAD_P$.

Όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς, η διαφορά ανάμεσα σε MAD_P και $Semi\text{-}MAD_P$ έγκειται στο γεγονός ότι η $Semi\text{-}MAD_P$ λαμβάνει μονάχα υπόψιν της τις βεβαρημένες αποκλίσεις (weighted deviations) οι οποίες είναι μεγαλύτερες ή ίσες του μηδέν, δηλαδή μονάχα τα $\sum_{i=1}^{m} w_i[r_{it} - E(r_i)] \geq 0$.

Στο σημείο αυτό τονίζεται ότι η επίλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης της MAD_P μπορεί να πραγματοποιηθεί με χρήση του Solver του Excel, ωστόσο δεν θα παρουσιαστεί σε αυτή την εργασία ο τρόπος κατασκευής του.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2		Time	Stock A	Stock B	Stock C		Deviations				Weighted deviations			
3		1	12,05	25,20	31,67		9,10	19,17	28,12	<-- =E3-$E$17	15,93	<-- =SUMPRODUCT($C$23:$E$23,G3:I3)		
4		2	15,27	2,86	15,82		12,32	-3,17	12,27		7,66			
5		3	-4,12	5,45	10,58		-7,07	-0,58	7,03		-2,30			
6		4	1,57	4,56	-14,43		-1,38	-1,47	-17,98		-4,73			
7		5	3,16	3,72	31,98		0,21	-2,31	28,43		5,10			
8		6	-2,79	10,79	-0,72		-5,74	4,76	-4,27		-2,30			
9		7	-8,97	5,38	-19,64		-11,92	-0,65	-23,19		-10,79			
10		8	-1,18	-2,97	-10,00		-4,13	-9,00	-13,55		-7,47			
11		9	1,07	1,52	-11,51		-1,88	-4,51	-15,06		-5,30			
12		10	12,75	10,75	5,63		9,80	4,72	2,08		6,73			
13		11	7,48	3,79	-4,67		4,53	-2,24	-8,22		-0,05			
14		12	-0,94	1,32	7,94		-3,89	-4,71	4,39		-2,48			
15														
16			Returns											
17			2,95	6,03	3,55	<-- =AVERAGE(E3:E14)								
18								Abs			If			
19			MADi					15,93	<-- =ABS(K3)		0,00	<-- =IF(K3<0,-K3,0)		
20			6,00	4,77	13,72	<-- =AVEDEV(E3:E14)		7,66			0,00			
21								2,30			2,30			
22			Weights					4,73			4,73			
23			50%	30%	20%			5,10			0,00			
24								2,30			2,30			
25								10,79			10,79			
26								7,47			7,47			
27								5,30			5,30			
28								6,73			0,00			
29								0,05			0,05			
30								2,48			2,48			
31														
32								MADp			Semi-MADp			
33								5,90	<-- =AVERAGE(H19:H30)		2,95	<-- =AVERAGE(K19:K30)		

Εικόνα 4.14: Αναλυτικός υπολογισμός MAD_P και $Semi\text{-}MAD_P$

4.6 Εξελικτική Βελτιστοποίηση με Γενετικούς Αλγόριθμους

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο δεύτερο κεφάλαιο, οι Γενετικοί Αλγόριθμοι αποτελούν μια μέθοδο αναζήτησης βέλτιστων λύσεων σε συστήματα που μπορούν να περιγραφούν ως μαθηματικό πρόβλημα. Χρησιμοποιούνται κυρίως σε προβλήματα που περιέχουν πολλές διαστάσεις/παραμέτρους, όπως το πρόβλημα της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων χρεογράφων και όπου δεν υπάρχει αναλυτική μέθοδος που να μπορεί να βρει το βέλτιστο συνδυασμό τιμών για τις μεταβλητές, ώστε το σύστημα που είναι υπό εξέταση να αντιδρά όσο το δυνατόν με τον επιθυμητό τρόπο.

Η διαδικασία υλοποίησής τους έχει ήδη αναλυθεί στο δεύτερο κεφάλαιο, οπότε προχωράμε δείχνοντας την υλοποίηση του μοντέλου στην περίπτωση της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων με χρήση του Excel και του Solver του.

Αρχικά αναφέρουμε ότι το πρόβλημα της βελτιστοποίησης μπορεί να οριστεί ως εξής:

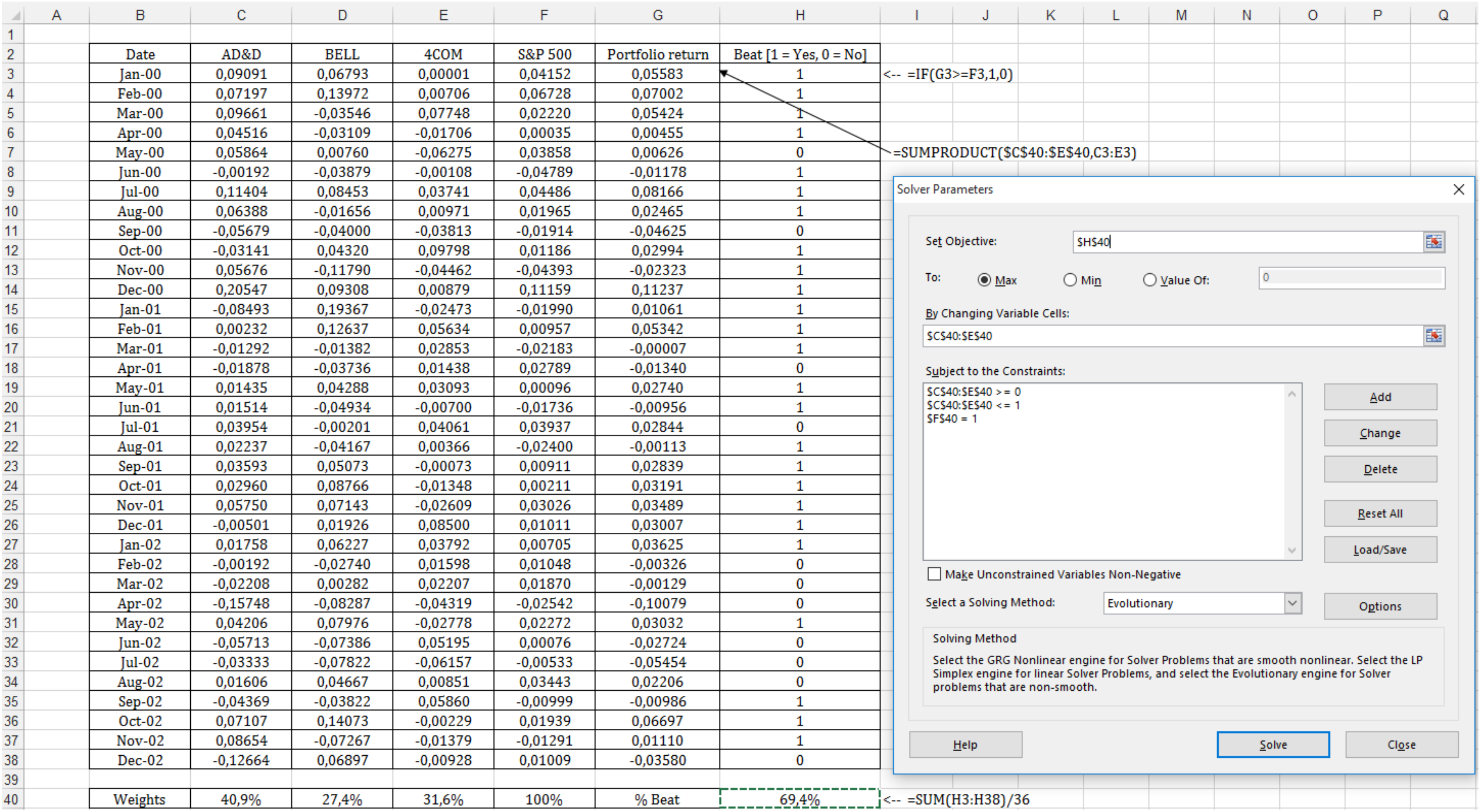
$$\begin{aligned} max \quad & Beat\% \\ Υπό \quad & \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{w_i} = 1 \\ & \boldsymbol{w_i} \geq 0 \end{aligned}$$

Όπου με τον όρο Beat% εννοούμε το ποσοστό των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου που είναι ίσες ή μεγαλύτερες του δείκτη (περισσότερα για αυτό το θέμα παρακάτω)

Όπως μπορεί να διακρίνει κάποιος στην Εικόνα 4.15, η υλοποίηση του μοντέλου είναι αρκετά απλή. Αρχικά λαμβάνουμε σαν δεδομένα τις αποδόσεις των χρεογράφων για κάποιες περιόδους (μηνιαίες στο συγκεκριμένο παράδειγμα) καθώς και την απόδοση του δείκτη (S&P 500 στο παράδειγμά μας) για την αντίστοιχη περίοδο. Επίσης σαν δεδομένα λαμβάνουμε και τα ποσοστά συμμετοχής κάθε χρεογράφου στο χαρτοφυλάκιο.

Έχοντας τα παραπάνω, μπορούμε να υπολογίσουμε την απόδοση του χαρτοφυλακίου για τη κάθε χρονική περίοδο χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση SUMPRODUCT (ή εναλλακτικά τη user-defined συνάρτηση ExpRet) η οποία λαμβάνει σαν πρώτο όρισμα τα βάρη των χρεογράφων στο χαρτοφυλάκιο ($C$40:$E$40) και σαν δεύτερο όρισμα τις αποδόσεις κάθε χρονικής περιόδου (C3:E3 για την πρώτη, C4:E4 για τη δεύτερη κτλ.). Επίσης εισάγουμε και την στήλη H2:H38 με επικεφαλίδα Beat, της οποίας κάθε κελί παίρνει τιμή ίση με 1 αν η απόδοση του χαρτοφυλακίου τη συγκεκριμένη περίοδο είναι μεγαλύτερη ή ίση του δείκτη και 0 σε αντίθετη περίπτωση.

Είμαστε λοιπόν έτοιμοι τώρα να κατασκευάσουμε τον Solver που θα επιλύσει το πρόβλημα της βελτιστοποίησης και όπως και πριν θα χρησιμοποιήσουμε μια υπορουτίνα γραμμένη σε VBA. Πατώντας λοιπόν Alt+F8, διαλέγουμε από το παράθυρο διαλόγου που εμφανίζεται την υπορουτίνα Evolutionary και ύστερα την επιλογή Run για να την εκτελέσουμε.



Date	AD&D	BELL	4COM	S&P 500	Portfolio return	Beat [1 = Yes, 0 = No]
Jan-00	0,09091	0,06793	0,00001	0,04152	0,05583	1
Feb-00	0,07197	0,13972	0,00706	0,06728	0,07002	1
Mar-00	0,09661	-0,03546	0,07748	0,02220	0,05424	1
Apr-00	0,04516	-0,03109	-0,01706	0,00035	0,00455	1
May-00	0,05864	0,00760	-0,06275	0,03858	0,00626	0
Jun-00	-0,00192	-0,03879	-0,00108	-0,04789	-0,01178	1
Jul-00	0,11404	0,08453	0,03741	0,04486	0,08166	1
Aug-00	0,06388	-0,01656	0,00971	0,01965	0,02465	1
Sep-00	-0,05679	-0,04000	-0,03813	-0,01914	-0,04625	0
Oct-00	-0,03141	0,04320	0,09798	0,01186	0,02994	1
Nov-00	0,05676	-0,11790	-0,04462	-0,04393	-0,02323	1
Dec-00	0,20547	0,09308	0,00879	0,11159	0,11237	1
Jan-01	-0,08493	0,19367	-0,02473	-0,01990	0,01061	1
Feb-01	0,00232	0,12637	0,05634	0,00957	0,05342	1
Mar-01	-0,01292	-0,01382	0,02853	-0,02183	-0,00007	1
Apr-01	-0,01878	-0,03736	0,01438	0,02789	-0,01340	0
May-01	0,01435	0,04288	0,03093	0,00096	0,02740	1
Jun-01	0,01514	-0,04934	-0,00700	-0,01736	-0,00956	1
Jul-01	0,03954	-0,00201	0,04061	0,03937	0,02844	0
Aug-01	0,02237	-0,04167	0,00366	-0,02400	-0,00113	1
Sep-01	0,03593	0,05073	-0,00073	0,00911	0,02839	1
Oct-01	0,02960	0,08766	-0,01348	0,00211	0,03191	1
Nov-01	0,05750	0,07143	-0,02609	0,03026	0,03489	1
Dec-01	-0,00501	0,01926	0,08500	0,01011	0,03007	1
Jan-02	0,01758	0,06227	0,03792	0,00705	0,03625	1
Feb-02	-0,00192	-0,02740	0,01598	0,01048	-0,00326	0
Mar-02	-0,02208	0,00282	0,02207	0,01870	-0,00129	0
Apr-02	-0,15748	-0,08287	-0,04319	-0,02542	-0,10079	0
May-02	0,04206	0,07976	-0,02778	0,02272	0,03032	1
Jun-02	-0,05713	-0,07386	0,05195	0,00076	-0,02724	0
Jul-02	-0,03333	-0,07822	-0,06157	-0,00533	-0,05454	0
Aug-02	0,01606	0,04667	0,00851	0,03443	0,02206	0
Sep-02	-0,04369	-0,03822	0,05860	-0,00999	-0,00986	1
Oct-02	0,07107	0,14073	-0,00229	0,01939	0,06697	1
Nov-02	0,08654	-0,07267	-0,01379	-0,01291	0,01110	1
Dec-02	-0,12664	0,06897	-0,00928	0,01009	-0,03580	0
Weights	40,9%	27,4%	31,6%	100%	% Beat	69,4%

Εικόνα 4.15: Μοντελοποίηση εξελικτικής βελτιστοποίησης με γενετικούς αλγορίθμους και Solver επίλυσης της

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, μας εμφανίζονται παράθυρα διαλόγου τα οποία ζητάνε τα δεδομένα που είναι απαραίτητα για την κατασκευή του Solver. Στη συγκεκριμένη περίπτωση μας ζητούνται με τη σειρά που εμφανίζονται, τα βάρη των χρεογράφων στο χαρτοφυλάκιο, το κελί που περιέχει το άθροισμά τους (F40) και το κελί που περιέχει το ποσοστό των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου που 'νίκησαν' τον δείκτη (κελί H40). Η μεγιστοποίηση του κελιού H40 είναι και το ζητούμενο της βελτιστοποίησής μας όπως ήδη αναφέρθηκε στη διατύπωση του προβλήματος.

Στην Εικόνα 4.15 φαίνεται η υλοποίηση του Solver. Σαν στόχο έχουμε θέσει προφανώς το κελί H40 το οποίο και ζητείται να μεγιστοποιηθεί. Αυτό γίνεται αλλάζοντας τα περιεχόμενα των κελιών C40:E40 που περιέχουν τα βάρη των χρεογράφων στο χαρτοφυλάκιο και σαν περιορισμούς θέλουμε το άθροισμα των βαρών να είναι ίσο με τη μονάδα (F40=1) και τα βάρη να είναι ανάμεσα στο μηδέν και ένα.

Τέλος προσοχή πρέπει να δοθεί στο γεγονός ότι σαν μέθοδο επίλυσης, σε αντίθεση με τις προηγούμενες περιπτώσεις, επιλέγουμε την μέθοδο Evolutionary.

4.7 Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου με Σενάρια

Πρόκειται για μέθοδο παρόμοια με τη minimum portfolio variance που περιεγράφηκε στην ενότητα 4.1. Η διαφορά της με τη minimum portfolio variance έγκειται στο γεγονός ότι στην περίπτωση αυτή, υπάρχουν πολλαπλά σενάρια σχετικά με το ποιες θα είναι οι αποδόσεις των χρεογράφων τις οποίες θα λάβουμε υπόψη για τους υπολογισμούς μας. Κάθε σενάριο έχει και διαφορετική πιθανότητα να πραγματοποιηθεί. Την τελική απόδοση και διακύμανση του χαρτοφυλακίου μπορούμε να λάβουμε ως εξής:

$$Portfolio\ Return\ = \sum_{i=1}^{n} p_i \times v_i$$

$$Portfolio\ Variance\ = \sum_{i=1}^{n} p_i \times (v_i - PR)^2$$

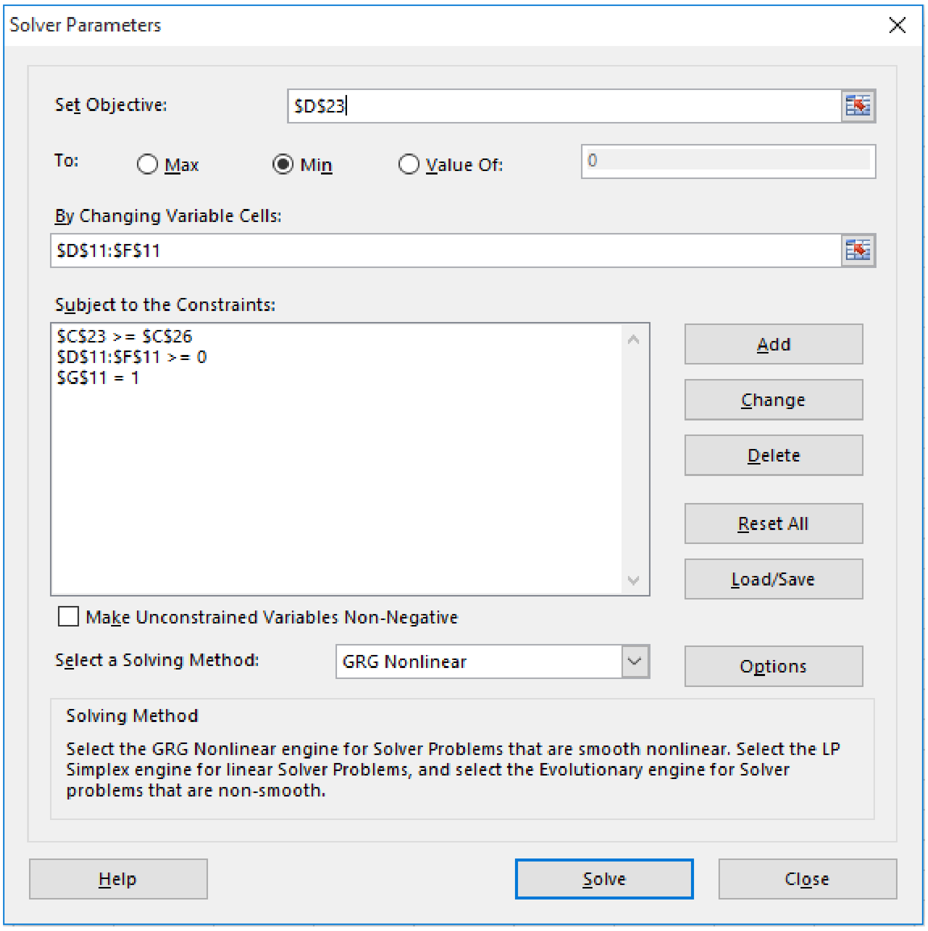
Όπου με p_i συμβολίζουμε την πιθανότητα πραγματοποίησης του κάθε σεναρίου, με v_i την απόδοση του χαρτοφυλακίου για τη δεδομένη πιθανότητα και σαν PR την τελική απόδοση του χαρτοφυλακίου (δηλαδή PR = Portfolio Return).

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.16, έχοντας σαν δεδομένα την πιθανότητα που έχει να συμβεί κάθε σενάριο (κελιά C1:C7) μαζί με τις αντίστοιχες αποδόσεις τους (D1:F9) και τα βάρη των χρεογράφων (κελιά D11:F11), μπορούμε μέσω της συνάρτησης ExpRet να υπολογίσουμε την αναμενόμενη απόδοση του κάθε σεναρίου (ExpRet($D$11:$F$11;D3:F3) για το πρώτο σενάριο, ExpRet($D$11:$F$11;D4:F4) για το δεύτερο κτλ.). Έχοντας υπολογίσει τις αναμενόμενες αποδόσεις (κελιά C14:C20), μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την τελική αναμενόμενη απόδοση με τη συνάρτηση SUMPRODUCT(C3:C9;C14:C20) και στην συνέχεια τον όρο $(v_i - PR)^2$ αφαιρώντας από την αναμενόμενη απόδοση κάθε σεναρίου την τελική αναμενόμενη απόδοση. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας τον τύπο (C14-$C$23)^2 για το πρώτο σενάριο, (C14-$C$23)^2 για το δεύτερο, κτλ. Αφού υπολογιστούν όλες οι τετραγωνικές αποκλίσεις (squared deviations), μπορούμε χρησιμοποιώντας και πάλι τη συνάρτηση SUMPRODUCT(C3:C9;D14:D20) να υπολογίσουμε την τελική διακύμανση του χαρτοφυλακίου την οποία και ζητάμε να ελαχιστοποιήσουμε.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Scenario	Probability	Stock 1	Stock 2	Stock 3	
3		1	14,3%	-7,1%	14,4%	16,9%	
4		2	14,3%	5,6%	10,7%	-3,5%	
5		3	14,3%	3,8%	32,1%	13,3%	
6		4	14,3%	8,9%	30,5%	73,2%	
7		5	14,3%	9,0%	19,5%	2,1%	
8		6	14,3%	8,3%	39,0%	13,1%	
9		7	14,3%	3,5%	-7,2%	0,6%	
10							
11			Weights	44,5%	53,8%	1,7%	100%
12							
13		Scenario	Returns	Squared deviations			
14		1	4,9%	0,00660	<-- =(C14-$C$23)^2		
15		2	8,2%	0,00232			
16		3	19,2%	0,00383			
17		4	21,6%	0,00744	=ExpRet($D$11:$F$11,D3:F3)		
18		5	14,5%	0,00023			
19		6	24,9%	0,01415			
20		7	-2,3%	0,02343			
21							
22			Portfolio return	Portfolio variance			
23			13,0%	0,00829	<-- =SUMPRODUCT(C3:C9,D14:D20)		
24							
25			Required return		=SUMPRODUCT(C3:C9,C14:C20)		
26			13,0%				

Εικόνα 4.16: Μοντελοποίηση της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου με σενάρια

Η ελαχιστοποίηση γίνεται με τη χρήση του Solver ο οποίος μπορεί να υλοποιηθεί τρέχοντας την υπορουτίνα MinPortVarRR η οποία είναι παρόμοια με την MinPortVar που έχει αναλυθεί στην ενότητα 4.2 με την προσθήκη ενός επιπλέον περιορισμού, ότι η αναμενόμενη απόδοση είναι πάνω από κάποιο κατώφλι (περιορισμός C3 >= C26 στην Εικόνα 4.17). Οι υπόλοιποι περιορισμοί, ο στόχος και τα προς αλλαγή κελιά παραμένουν ίδια με την περίπτωση της υπορουτίνας MinPortVar.



Εικόνα 4.17: Solver για την ελαχιστοποίηση της διακύμανσης στην περίπτωση της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου με σενάρια

4.8 Εύρεση Βέλτιστου Χαρτοφυλακίου

Έχουν ήδη αναφερθεί στο δεύτερο κεφάλαιο οι τεχνικές προσδιορισμού του αποτελεσματικού μετώπου. Στην περίπτωση που ένας επενδυτής αναζητά το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο έχοντας απαιτήσεις που ορίζονται μονάχα από την μέση τιμή και τη τυπική απόκλιση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου, τότε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο θα είναι αυτό που εφάπτεται του αποτελεσματικού μετώπου των επικίνδυνων χαρτοφυλακίων. Για την εύρεση του μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τύπος:

$$x = \frac{S^{-1}\{E(r) - r_F\}}{Sum[S^{-1}\{E(r) - r_F\}]}$$

όπου συμβολίζουμε με S^{-1} τον αντίστροφο του πίνακα Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης (VCV matrix) και με x το βέλτιστο επενδυτικό χαρτοφυλάκιο (δηλαδή τον καταμερισμό των βαρών του).

Η παραπάνω σχέση μπορεί να εκφραστεί στο Excel με τη χρήση της συνάρτησης πίνακα (array function) MMULT(MINVERSE(S), $E(r) - r_F$)/SUM(MMULT(MINVERSE(S), $E(r) - r_F$)). Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η user-defined συνάρτηση MarkPort η οποία υλοποιεί τον παραπάνω τύπο και δέχεται σαν ορίσματα τη μήτρα Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης (κελιά C3:F6), τις αναμενόμενες αποδόσεις κάθε χρεογράφου (κελιά I3:I6) και το ακίνδυνο χρεόγραφο (κελί C8).

Έχοντας υπολογίσει το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο μπορούμε εύκολα με τη χρήση της συνάρτησης ExpRet(C19:C22;I3:I6) να υπολογίσουμε την αναμενόμενη απόδοσή του και με τη συνάρτηση SQRT(PortVar(C19:C22;C3:F6)) την τυπική του απόκλιση.

Τα παραπάνω φαίνονται στην εικόνα που ακολουθεί, όπου το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο έχει βρεθεί με τη χρήση και των δύο τρόπων που περιεγράφηκαν.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		VCV	Stock 1	Stock 2	Stock 3	Stock 4			Expected returns
3		Stock 1	0,40	0,03	0,02	0,00		Stock 1	6%
4		Stock 2	0,03	0,20	0,00	-0,06		Stock 2	5%
5		Stock 3	0,02	0,00	0,30	0,03		Stock 3	7%
6		Stock 4	0,00	-0,06	0,03	0,10		Stock 4	8%
7									
8		RF	5%						
9									
10		Market portfolio	Weights						
11		Stock 1	3,1%	<-- {=MMULT(MINVERSE(C3:F6),I3:I6-C8)/SUM(MMULT(MINVERSE(C3:F6),I3:I6-C8))}					
12		Stock 2	20,6%						
13		Stock 3	6,0%						
14		Stock 4	70,3%						
15			100%						
16									
17						Port return	7,3%	<-- =ExpRet(C19:C22,I3:I6)	
18		Market portfolio VBA	Weights			Port SD	21,2%	<-- =SQRT(PortVar(C19:C22,C3:F6))	
19		Stock 1	3,1%	<-- {=MarkPort(C3:F6,I3:I6,C8)}					
20		Stock 2	20,6%						
21		Stock 3	6,0%						
22		Stock 4	70,3%						
23			100%						

Εικόνα 4.18: Μοντελοποίηση εύρεσης βέλτιστου χαρτοφυλακίου

4.9 Index Tracking

Όπως ήδη έχει αναφερθεί στο δεύτερο κεφάλαιο, η μέθοδος Index Tracking είναι μια παθητική στρατηγική βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων που έχει σαν στόχο να ακολουθήσει το χαρτοφυλάκιό μας όσο καλύτερα γίνεται το δείκτη (πχ το δείκτη FTSE-100).

Για την υλοποίησή της υποθέτουμε αρχικά ότι σε χρονική διάρκεια T έχει παρατηρηθεί η αξία N μετοχών καθώς και η αξία του δείκτη που θέλουμε να ακολουθήσουμε. Η απόφαση που θα πρέπει να παρθεί είναι, ποιο είναι το βέλτιστο σύνολο K μετοχών το οποίο θα πρέπει να κρατήσουμε (με K<N), καθώς και τις ακριβείς ποσότητές τους, ώστε να ακολουθήσουμε καλύτερα το δείκτη στο μέλλον.

Υπενθυμίζουμε ότι το πρόβλημα της βελτιστοποίησης που έχουμε να αντιμετωπίσουμε, μπορεί να εκφραστεί με μαθηματικούς όρους ως εξής (η έννοια των συμβολισμών έχει δοθεί στο δεύτερο κεφάλαιο και δεν επαναλαμβάνεται εδώ):

$$min \quad \sum_{t=1}^{T} \frac{(r_t - R_t)^2}{T}$$

$$\Upsilon\pi\acute{o}: \quad \sum_{i=1}^{N} z_i = K$$

$$\frac{V_{iT} x_i}{C} \leq z_i \qquad\qquad i = 1, \dots, N$$

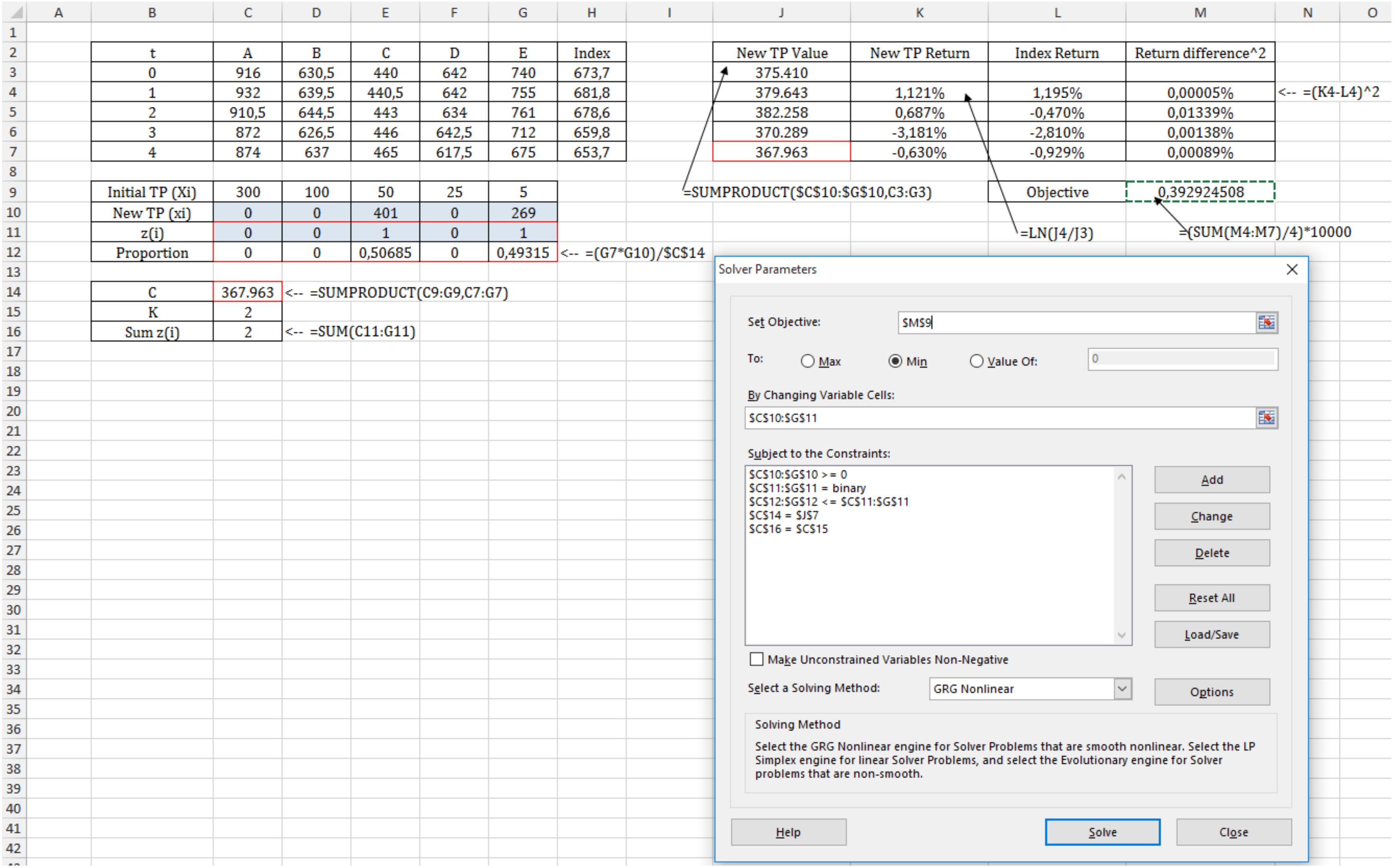
$$\sum_{i=1}^{N} V_{iT} x_i = C$$

$$x_i \geq 0 \qquad\qquad i = 1, \dots., N$$

$$z_i \in [0,1] \qquad\qquad i = 1, \dots, N$$

Έχοντας αναφέρει τη θεωρία, περνάμε τώρα στο κομμάτι της μοντελοποίησης σε Excel. Όπως βλέπουμε στην Εικόνα 4.19, στα κελιά C3:G4 έχουμε τις αξίες των μετοχών προς μελέτη για τις T χρονικές στιγμές που μας απασχολούν και στα κελιά H3:H7 την αντίστοιχη αξία του δείκτη. Επίσης στα κελιά C9:G9 περιέχεται ο αρχικός αριθμός των κομματιών κάθε μετοχής i που έχει το χαρτοφυλάκιό μας και στα κελιά C10:G10 ο αριθμός των κομματιών της κάθε μετοχής i που θα κρατήσουμε στο νέο χαρτοφυλάκιο TP. Ακριβώς στην από κάτω σειρά, στα κελιά C11:G11 έχουμε τις δυαδικές μεταβλητές οι οποίες έχουν τιμή 1 αν η μετοχή i συμμετέχει στο νέο χαρτοφυλάκιο και 0 αν όχι και στα κελιά C12:G12 την αναλογία του τελικού χαρτοφυλακίου TP.

Έχοντας κατασκευάσει τα παραπάνω, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνολική αξία του παρόντος χαρτοφυλακίου TP (κελί C14) χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση SUMPRODUCT(C9:G9;C7:G7) όπου C7:G7 οι αξίες των μετοχών κατά την πιο πρόσφατη περίοδο που εξετάζεται. Κάτω από το κελί C14 έχουμε τα κελιά C15 και C16 στα οποία περιέχονται ο αριθμός των μετοχών που θέλουμε να συμπεριλάβουμε στο χαρτοφυλάκιο TP και το άθροισμα των δυαδικών μεταβλητών.



t	A	B	C	D	E	Index
0	916	630,5	440	642	740	673,7
1	932	639,5	440,5	642	755	681,8
2	910,5	644,5	443	634	761	678,6
3	872	626,5	446	642,5	712	659,8
4	874	637	465	617,5	675	653,7

Initial TP (Xi)	300	100	50	25	5
New TP (xi)	0	0	401	0	269
z(i)	0	0	1	0	1
Proportion	0	0	0,50685	0	0,49315

<-- =(G7*G10)/$C$14

C	367.963
K	2
Sum z(i)	2

<-- =SUMPRODUCT(C9:G9,C7:G7)

<-- =SUM(C11:G11)

New TP Value	New TP Return	Index Return	Return difference^2
375.410			
379.643	1,121%	1,195%	0,00005%
382.258	0,687%	-0,470%	0,01339%
370.289	-3,181%	-2,810%	0,00138%
367.963	-0,630%	-0,929%	0,00089%

<-- =(K4-L4)^2

=SUMPRODUCT($C$10:$G$10,C3:G3)

=LN(J4/J3)

Objective	0,392924508

=(SUM(M4:M7)/4)*10000

Εικόνα 4.19: Μοντελοποίηση Index Tracking και Solver επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης

Στα κελιά J3:J7 υπολογίζουμε χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση SUMPRODUCT την αξία του χαρτοφυλακίου TP που αντιστοιχεί σε κάθε περίοδο και στα διπλανά κελιά την αναμενόμενη απόδοση (K4:K7), την απόδοση του δείκτη (L4:L7) και τα τετράγωνα των διαφορών των αποδόσεων του δείκτη από το χαρτοφυλάκιο TP κάθε χρονικής περιόδου (κελιά M4:M7). Η ελαχιστοποίηση του κελιού M9 το οποίο υλοποιεί τον τύπο (SUM(M4:M7)/4)*10000 είναι και το ζητούμενο του προβλήματος μας.

O Solver που επιλύει το πρόβλημα βελτιστοποίησης φαίνεται στην Εικόνα 4.19 και έχει υλοποιηθεί με τη βοήθεια της υπορουτίνας IndexTrackSolve. Στη συγκεκριμένη περίπτωση τα δεδομένα τα οποία ζητάει η υπορουτίνα αφού εκτελεστεί είναι το εύρος που περιέχει τα x_i (κελιά C10:G10), τις δυαδικές μεταβλητές (C11:G11), την αναλογία του τελικού χαρτοφυλακίου (C12:G12), το κελί C16 που περιέχει το άθροισμα των δυαδικών μεταβλητών, το κελί C15 με τον αριθμό των μετοχών που θέλουμε να συμπεριλάβουμε στο χαρτοφυλάκιο TP, το κελί με τη συνολική αξία του παρόντος χαρτοφυλακίου TP (κελί C14), το κελί J7 με τη συνολική αξία του νέου χαρτοφυλακίου TP και τέλος το κελί M9 που περιέχει τον προς ελαχιστοποίηση στόχο. Αφού δοθούν τα παραπάνω, τρέχει αυτόματα ο Solver επιλύοντας το πρόβλημα της βελτιστοποίησης.

Προτού κλείσουμε την ενότητα, ας κάνουμε ένα σχολιασμό πάνω στην υλοποίηση του Solver. Όπως βλέπουμε στην Εικόνα 4.19, σαν στόχο έχει τεθεί το κελί M9 το οποίο ζητείται να ελαχιστοποιηθεί (επιλέγουμε το Min στα κουτάκια επιλογής). Η βέλτιστη λύση βρίσκεται μετά από αλλεπάλληλες αλλαγές των κελιών C11:G11 τα οποία περιέχουν τον αριθμό των μετοχών που θα συμπεριληφθούν στο τελικό χαρτοφυλάκιο και τον αριθμό των κομματιών κάθε μετοχής. Σαν περιορισμούς λαμβάνουμε αυτούς που αναφέρθηκαν στην μαθηματική διατύπωση του προβλήματος οι οποίοι είναι:

- Ο αριθμός των κομματιών κάθε μετοχής στο νέο χαρτοφυλάκιο να είναι μη αρνητικός (C10:G10 >= 0)
- Οι δυαδικές μεταβλητές προφανώς μονάχα 0 ή 1 (C11:G11 = binary)
- Τα ποσοστά κάθε μετοχής στο νέο χαρτοφυλάκιο μεταξύ 0% και 100% (C12:G12 <= C11:G11)
- Η συνολική αξία του παρόντος χαρτοφυλακίου TP ίση με του νέου (C14 =J7)
- Το άθροισμα των δυαδικών μεταβλητών ίσο με τον ζητούμενο αριθμό μετοχών στο χαρτοφυλάκιο TP (C16 = C15)

4.10 Διαχείριση Ομολόγων

Η ενότητα αυτή θα χωριστεί σε δύο υποενότητες. Στην πρώτη θα παρουσιάσουμε τρόπους υπολογισμού της μέσης σταθμικής διάρκειας και της κυρτότητας σε ομόλογα με ετήσια αλλά και εξαμηνιαία απόδοση τοκομεριδίων. Στη δεύτερη θα παρουσιάσουμε τον τρόπο υλοποίησης της μεθόδου της αντιστοίχισης με χρήση του Excel και του Solver του.

4.10.1 Μέση Σταθμική Διάρκεια και Κυρτότητα

Είναι γνωστό ότι η απόδοση κάθε ομολόγου είναι συνιστώσα των τοκομεριδίων του και των κερδών που προκύπτουν από τη μεταβολή της τιμής με την πάροδο του χρόνου.

Δεδομένου ότι η τιμή του ομολόγου προσδιορίζεται από τα επιτόκια, μεταβολές σε αυτά θα οδηγήσουν σε μεταβολές στην τιμή/αξία του ομολόγου. Αυτός είναι ένα από τους σημαντικότερους παράγοντες κινδύνου για τις επενδύσεις σε ομόλογα.

Η μέση σταθμική διάρκεια D αναπαριστά το μέσο χρονικό διάστημα για το οποίο το κεφάλαιο παραμένει δεσμευμένο στο ομόλογο και αποτελεί ένα μέτρο μέτρησης του παραπάνω κινδύνου. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο δεύτερο κεφάλαιο, η μέση σταθμική διάρκεια για μια σειρά ετήσιων ταμιακών ροών είναι:

$$D = \frac{1}{P}\sum_{t=1}^{T} t\frac{C_t}{(1+i)^t}$$

Και στην περίπτωση όπου οι ταμειακές ροές είναι εξαμηνιαίες:

$$D = \frac{1}{2P}\sum_{t=1}^{2T} t\frac{C_t}{(1+\frac{i}{2})^t}$$

Η σχέση μεταξύ της μεταβολής της τιμής ενός ομολόγου και της μεταβολής των επιτοκίων είναι γραμμική. Η υπόθεση αυτή ανταποκρίνεται ικανοποιητικά στην πραγματικότητα όταν οι μεταβολές των επιτοκίων είναι περιορισμένες. Για μεγαλύτερες όμως μεταβολές μπορεί να οδηγήσει σε παραπλανητικά αποτελέσματα.

Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται συνδυάζοντας τη μέση σταθμική διάρκεια με ένα επιπλέον μέτρο κινδύνου, την κυρτότητα (convexity). Ο όρος κυρτότητα προκύπτει από τη διαπίστωση ότι η μεταβολή της τιμής ενός ομολόγου δεν είναι γραμμική συνάρτηση της μεταβολής των επιτοκίων, αλλά προσεγγίζει μια κυρτή συνάρτηση.

Η κυρτότητα στην περίπτωση όπου οι ταμειακές ροές είναι ετήσιες υπολογίζεται ως εξής:

$$V = \frac{1}{P}\sum_{t=1}^{T} \frac{t(t+1)C_t}{(1+i)^t}$$

Έχοντας κάνει μια ανακεφαλαίωση στη θεωρία ας περάσουμε στον τρόπο υπολογισμού των παραπάνω με τη βοήθεια του Excel.

Στην Εικόνα 4.20 που παρατίθεται παρακάτω βλέπουμε πως υπολογίζεται η μέση σταθμική διάρκεια τόσο στη περίπτωση της ετήσιας (κελί D9) όσο και της εξαμηνιαίας (κελί D27) απόδοσης τοκομεριδίων. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε χρησιμοποιήσει τις user-defined συναρτήσεις Duration_A και Duration_B (για ετήσια και εξαμηνιαία απόδοση αντίστοιχα) οι οποίες λαμβάνουν σαν ορίσματα την απόδοση στη λήξη (YTM), το εύρος που περιέχει το πλήθος των περιόδων (κελιά B9:B18 στην περίπτωση της ετήσιας απόδοσης τοκομεριδίων) και τις ταμειακές ροές κάθε περιόδου.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Time	10 yrs					
3		Face value	1.000					
4		Coupon	4%					
5		Paid	Annualy					
6		YTM	8%					
7								
8		Period	Cash flow	Duration				
9		1	40	8,12	<-- =Duration_A(C6,B9:B18,C9:C18)			
10		2	40					
11		3	40					
12		4	40					
13		5	40					
14		6	40					
15		7	40					
16		8	40					
17		9	40					
18		10	1.040					
19								
20		Time	5 yrs					
21		Face value	1.000					
22		Coupon	8%					
23		Paid	Semiannualy					
24		YTM	8%					
25								
26		Period	Cash flow	Duration				
27		1	40	4,22	<-- =Duration_B(C24,B27:B36,C27:C36)			
28		2	40					
29		3	40					
30		4	40					
31		5	40					
32		6	40					
33		7	40					
34		8	40					
35		9	40					
36		10	1.040					

Εικόνα 4.20: Υπολογισμός μέσης σταθμικής διάρκειας με χρήση των συναρτήσεων Duration_A και Duration_B

Με αντίστοιχο τρόπο μπορεί να γίνει και ο υπολογισμός της κυρτότητας, χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις Convexity_A και Convexity_B για ετήσια και εξαμηνιαία απόδοση τοκομεριδίων αντίστοιχα. Τα ορίσματα σε αυτή την περίπτωση είναι τα ίδια όπως πριν, δηλαδή η απόδοση στη λήξη, το εύρος που περιέχει τις περιόδους και οι ταμειακές ροές. Στην Εικόνα 4.21 παρουσιάζεται η εφαρμογή των παραπάνω στην περίπτωση της ετήσιας απόδοσης τοκομεριδίων με διάρκεια ομολόγου 3 χρόνια και στην περίπτωση της εξαμηνιαίας απόδοσης τοκομεριδίων με διάρκεια ομολόγου 5 χρόνια.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τον τρόπο λειτουργίας των Duration_A/Duration_B και Convexity_A/Convexity_B ας αναφέρουμε τη μεθοδολογία που ουσιαστικά ακολουθούν για να κάνουν τους υπολογισμούς τους αφού τους δοθούν τα ορίσματά τους.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Time	3 yrs					
3		Face value	1.000					
4		Coupon	12%					
5		Paid	Annualy					
6		YTM	9%					
7								
8		Period	Cash flow	Convexity				
9		1	120	8,76	<-- =Convexity_A(C6,B9:B11,C9:C11)			
10		2	120					
11		3	1120					
12								
13								
14		Time	5 yrs					
15		Face value	1.000					
16		Coupon	8%					
17		Paid	Semiannualy					
18		YTM	6%					
19								
20		Period	Cash flow	Convexity				
21		1	40	20,82	<-- =Convexity_B(C18,B21:B30,C21:C30)			
22		2	40					
23		3	40					
24		4	40					
25		5	40					
26		6	40					
27		7	40					
28		8	40					
29		9	40					
30		10	1.040					

Εικόνα 4.21: Υπολογισμός κυρτότητας με χρήση των συναρτήσεων Duration_A και Duration_B

Έχοντας λοιπόν τα ίδια δεδομένα με πριν, για την περίπτωση της ετήσιας απόδοσης τοκομεριδίων, αρχικά υπολογίζουμε το συντελεστή προεξόφλησης (Discount Factor) χρησιμοποιώντας τον τύπο 1/(1+$C$6)^B9, για την πρώτη περίοδο, 1/(1+$C$6)^B10 για τη δεύτερη κτλ. Συνεχίζοντας υπολογίζουμε την παρούσα αξία κάθε τοκομεριδίου πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά τις ταμειακές ροές με τον αντίστοιχο συντελεστή προεξόφλησης και αθροίζοντας τις παρούσες αξίες βρίσκουμε την τιμή του ομολόγου. Το μόνο που μένει τώρα είναι να αθροίσουμε το λόγο της κάθε παρούσας αξίας προς την τιμή του ομολόγου επί τον αριθμό της περιόδου *t* ώστε να βρούμε τελικά τη μέση σταθμική διάρκεια (κελί G19 που προκύπτει από τη συνάρτηση SUM(G9:G18)).

Ακριβώς την ίδια διαδικασία ακολουθούμε και στην περίπτωση της εξαμηνιαίας απόδοσης τοκομεριδίων, με τη διαφορά ότι στον υπολογισμό του συντελεστή προεξόφλησης διαιρούμε κάθε φορά την απόδοση στη λήξη με δύο όπως με δυο διαιρείται και το τελικό αποτέλεσμα. Ο αναλυτικός τρόπος υπολογισμού της μέσης σταθμικής διάρκειας παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.22.

Time	10 yrs
Face value	1.000
Coupon	4%
Paid	Annualy
YTM	8%

=C9*D9 =E9/$E$19

Period	Cash flow	Discount factor	Present value	Present value / Price	(Present value / Price) x Period	
1	40	0,9259	37,04	0,0506	0,05	<-- =F9*B9
2	40	0,8573	34,29	0,0469	0,09	
3	40	0,7938	31,75	0,0434	0,13	
4	40	0,7350	29,40	0,0402	0,16	
5	40	0,6806	27,22	0,0372	0,19	
6	40	0,6302	25,21	0,0345	0,21	
7	40	0,5835	23,34	0,0319	0,22	
8	40	0,5403	21,61	0,0295	0,24	
9	40	0,5002	20,01	0,0274	0,25	
10	1.040	0,4632	481,72	0,6585	6,58	
			731,60	1	8,12	<-- =SUM(G9:G18)

=1/(1+$C$6)^B9 =SUM(E9:E18) =SUM(F9:F18)

Time	5 yrs
Face value	1.000
Coupon	8%
Paid	Semiannualy
YTM	8%

Period	Cash flow	Discount factor	Present value	Present value / Price	(Present value / Price) x Period	
1	40	0,9615	38,46	0,0385	0,04	
2	40	0,9246	36,98	0,0370	0,07	
3	40	0,8890	35,56	0,0356	0,11	
4	40	0,8548	34,19	0,0342	0,14	
5	40	0,8219	32,88	0,0329	0,16	
6	40	0,7903	31,61	0,0316	0,19	
7	40	0,7599	30,40	0,0304	0,21	
8	40	0,7307	29,23	0,0292	0,23	
9	40	0,7026	28,10	0,0281	0,25	
10	1.040	0,6756	702,59	0,7026	7,03	
			1.000,00	1	4,22	<-- =SUM(G32:G41)/2

=1/(1+$C$29/2)^B32

Εικόνα 4.22: Αναλυτικός υπολογισμός μέσης σταθμικής διάρκειας

Παρόμοια στάδια ακολουθούμε και στον αναλυτικό υπολογισμό της κυρτότητας, ωστόσο στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν πολλαπλασιάζουμε το λόγο της κάθε παρούσας αξίας προς την τιμή του ομολόγου επί τον αριθμό της περιόδου t, αλλά με τον τύπο $(t^2 + t)$. Επίσης χρειάζεται να υπολογίσουμε τον όρο 1(1+YTM)^2 τον οποίο και πολλαπλασιάζουμε με το άθροισμα του λόγου της κάθε παρούσας αξίας προς την τιμή του ομολόγου επί το $(t^2 + t)$ για να βρούμε τελικά την κυρτότητα. Στην Εικόνα 4.23 παρουσιάζονται τα παραπάνω τόσο στην περίπτωση της ετήσιας όσο και της εξαμηνιαίας απόδοσης τοκομεριδίων.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Time	3 yrs						
3		Face value	1.000						
4		Coupon	12%						
5		Paid	Annualy						
6		YTM	9%			=C9*D9	=E9/$E$12	=B9+B9^2	
7									
8		Period	Cash flow	Discount factor	Present value	Present value / Price	t ^ 2 + t	(Present value / Price) x (t ^ 2 + t)	
9		1	120	0,9174	110,09	0,10	2	0,20	<-- =F9*G9
10		2	120	0,8417	101,00	0,09	6	0,56	
11		3	1120	0,7722	864,85	0,80	12	9,65	
12					1.075,94	1		10,41	<-- =SUM(H9:H11)
13									
14					=1/(1+$C$6)^B9	=SUM(E9:E11)	1 / (1+YTM) ^ 2	0,8417	<-- =1/(1+C6)^2
15									
16							Convexity	8,76	<-- =H14*H12
17									
18									
19									
20		Time	5 yrs						
21		Face value	1.000						
22		Coupon	8%						
23		Paid	Semiannualy						
24		YTM	6%						
25									
26		Period	Cash flow	Discount factor	Present value	Present value / Price	t ^ 2 + t	(Present value / Price) x (t ^ 2 + t)	
27		1	40	0,9709	38,83	0,04	2	0,07	
28		2	40	0,9426	37,70	0,03	6	0,21	
29		3	40	0,9151	36,61	0,03	12	0,40	
30		4	40	0,8885	35,54	0,03	20	0,65	
31		5	40	0,8626	34,50	0,03	30	0,95	
32		6	40	0,8375	33,50	0,03	42	1,30	
33		7	40	0,8131	32,52	0,03	56	1,68	
34		8	40	0,7894	31,58	0,03	72	2,09	
35		9	40	0,7664	30,66	0,03	90	2,54	
36		10	1.040	0,7441	773,86	0,71	110	78,43	
37					1.085,30	1,00		88,34	
38									
39					=1/(1+$C$24/2)^B27		1 / (1+YTM/2) ^ 2	0,9426	<-- =1/(1+C24/2)^2
40									
41							Convexity	20,82	<-- =(H39*H37)/2^2

Εικόνα 4.23: Αναλυτικός υπολογισμός κυρτότητας

4.10.2 Αντιστοίχιση

Ανακεφαλαιώνοντας από το δεύτερο κεφάλαιο, υπενθυμίζουμε ότι με τον όρο αντιστοίχιση (matching) εννοείται η κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων με το ελάχιστο κόστος έτσι ώστε οι εισροές από την επένδυση στο χαρτοφυλάκιο να καλύπτουν τις ταμειακές ανάγκες (πληρωμή υποχρεώσεων) του εκδότη κατά τη χρονική στιγμή που αυτές πρέπει να διεκπεραιωθούν.

Η κατασκευή χαρτοφυλακίων ομολόγων σύμφωνα με την στρατηγική της αντιστοίχισης μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού και μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα γραμμικό πρόβλημα της ακόλουθης μορφής:

$$\min \quad F_0 + \sum_{i=1}^{m} N_i P_i$$

$$\text{Υπό:} \quad \sum_{i=1}^{m} N_i C_{it} + F_{t-1}(1+r) - F_t = L_t, \quad \forall | t = 1,2,\dots,T$$

$$N_i, F_t \geq 0$$

Όπου οι ερμηνεία των παραπάνω όρων έχει διατυπωθεί στο δεύτερο κεφαλαίο.

Περνώντας στο κομμάτι της υλοποίησης του προβλήματος στο Excel, πριν κατασκευάσουμε τον Solver θα αναφέρουμε πως το θα πρέπει να στηθούν τα δεδομένα του προβλήματος. Έτσι όπως βλέπουμε στην Εικόνα 4.24, έχουμε στο παράδειγμά μας ένα χαρτοφυλάκιο με τρία ομόλογα για τα οποία είναι διαθέσιμα η ονομαστική τους απόδοση (κελιά E3:G3), η διάρκεια σε έτη (E4:G4), η αξία τους (E5:G5) και πόσα τεμάχια έχουμε από κάθε ομόλογο (E6:G6).

Ακριβώς αποκάτω έχουμε στο εύρος B10:G24 τον αριθμό των ετών t (B10:B24), τις υποχρεώσεις (C11:C24), τα ρευστά διαθέσιμα F_t (D10:D24) καθώς και της εισροές κάθε περιόδου από το κάθε ομόλογο (κελιά E11:E15 για το πρώτο, F11:F21 για το δεύτερο, G11:G24 για το τρίτο). Στα κελιά E27:G27 αποτυπώνεται η συνολική αξία του κάθε ομολόγου πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό των τεμαχίων τους με την αξία κάθε τεμαχίου.

Στο κελί I27 έχουμε το συνολικό κεφάλαιο το θα επενδυθεί και υπολογίζεται χρησιμοποιώντας της συνάρτηση SUM(E27:G27)+D10, δηλαδή είναι ίσο με το άθροισμα της συνολικής αξία των ομολόγων με τα αρχικά ρευστά διαθέσιμα. Ακριβώς από πάνω, στα κελιά I11:I24, έχουμε κάποιους περιορισμούς του προβλήματος οι οποίοι θα χρειαστούν στη κατασκευή του Solver και υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση SUMPRODUCT($E$6:$G$6;E11:G11)+(1+$I$3)*D10-D11 για τον πρώτο περιορισμό, SUMPRODUCT($E$6:$G$6;E12:G12)+(1+$I$3)*D11-D12 για το δεύτερο κτλ.

Τέλος στα κελιά I3 και I6 έχουμε το επιτόκιο επανεπένδυσης και το στόχο της βελτιστοποίησής μας που είναι η ελαχιστοποίηση του κεφαλαίου που θα διαθέσουμε το οποίο υπολογίζεται με τη συνάρτηση SUMPRODUCT(E6:G6;E7:G7) +D10.

Έχοντας σχεδιάσει το μοντέλο μας, μπορούμε να περάσουμε τώρα στην υλοποίηση του Solver. Θα χρησιμοποιήσουμε την υπορουτίνα με το όνομα Matching για την εύκολη και γρήγορη υλοποίησή. Καλώντας την με το γνωστό τρόπο (Alt+F8 και επιλογή από το μενού), συμπληρώνουμε τα παράθυρα διαλόγου τα οποία με τη σειρά εμφάνισης τους ζητάνε, τον αριθμό των τεμαχίων (κελιά E6:G6), το κελί που περιλαμβάνει το στόχο μας ο οποίος είναι η ελαχιστοποίηση του προς διάθεση κεφαλαίου (κελί I6), τα ρευστά διαθέσιμα (D10:D24), οι υποχρεώσεις (C11:C24) και τέλος οι περιορισμοί που βρίσκονται στα κελιά I11:I24.

Δοθέντων των παραπάνω, υλοποιείται ο Solver της Εικόνας 4.25 που όπως βλέπουμε έχει στο κουτί του στόχου το κελί I6, το οποίο βελτιστοποιείται αλλάζοντας τα περιεχόμενα των κελιών E6:G6 και D10:D24 που περιέχουν των αριθμό των τεμαχίων κάθε ομολόγου και τα ρευστά διαθέσιμα. Οι περιορισμοί μας είναι να είναι μη αρνητικά ο αριθμός των τεμαχίων και τα ρευστά διαθέσιμα καθώς και οι υποχρεώσεις μας να είναι ίσες με τη στήλη των περιορισμών που έχουμε θέσει στα κελιά I11:I24.

Προσοχή πρέπει να δοθεί στο γεγονός ότι σαν μέθοδος επίλυσης έχει επιλεχθεί η Simplex LP αφού όπως έχουμε πει η μέθοδος της αντιστοίχισης αποτελεί γραμμικό πρόβλημα.

	Ομόλογο 1	Ομόλογο 2	Ομόλογο 3
Ονομαστική απόδοση	6%	6,5%	7,5%
Διάρκεια σε έτη	5	11	14
Αξία (P)	98	97	105
N (τεμάχια)	737	772	288

Επιτόκιο επανεπένδυσης
4%

Ελαχιστοποίηση κεφαλαίου	
186.768	<-- =SUMPRODUCT(E6:G6,E5:G5)+D10

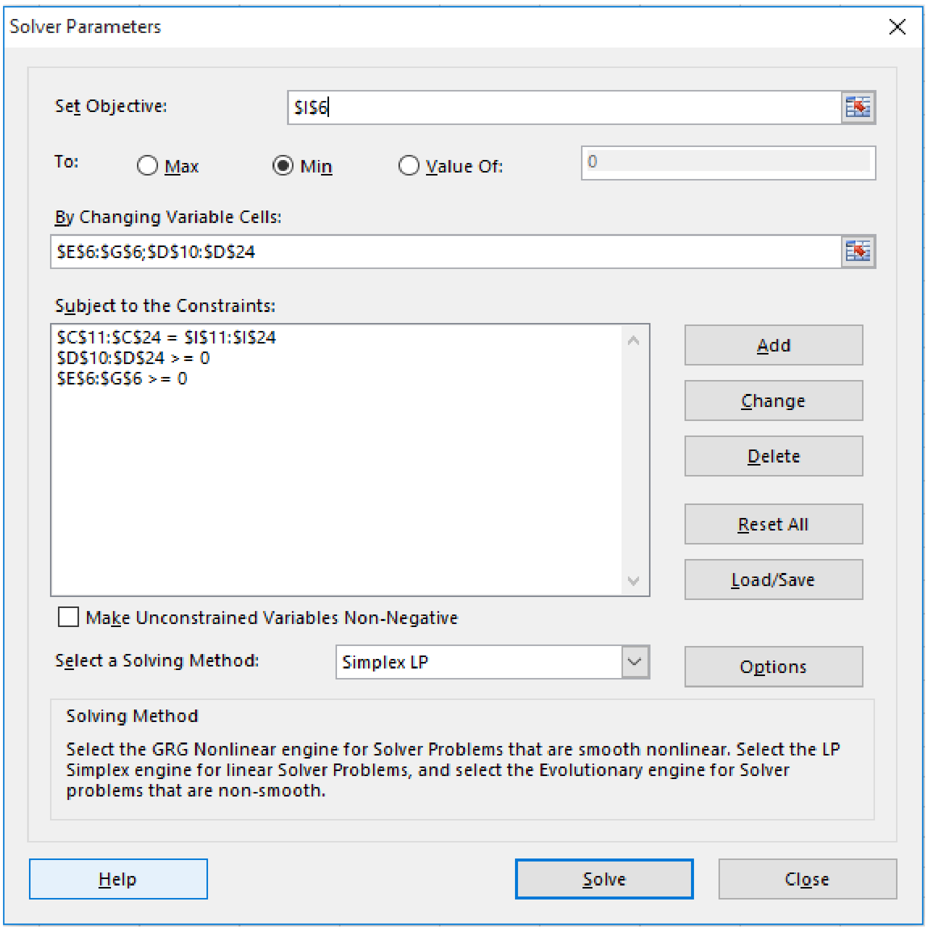
=SUMPRODUCT($E$6:$G$6,E11:G11)+(1+$I$3)*D10-D11

			Εισροές			
Έτη (t)	Υποχρεώσεις (L)	Ρευστά διαθέσιμα (F)	Ομόλογο 1	Ομόλογο 2	Ομόλογο 3	Περιορισμοί
0		9.376				
1	12.000	9.354	6	6,5	7,5	12.000
2	14.000	7.332	6	6,5	7,5	14.000
3	15.000	4.228	6	6,5	7,5	15.000
4	16.000	0	6	6,5	7,5	16.000
5	18.000	67.298	106	6,5	7,5	18.000
6	20.000	57.171		6,5	7,5	20.000
7	21.000	45.639		6,5	7,5	21.000
8	22.000	32.646		6,5	7,5	22.000
9	24.000	17.133		6,5	7,5	24.000
10	25.000	0		6,5	7,5	25.000
11	30.000	54.390		106,5	7,5	30.000
12	31.000	27.728			7,5	31.000
13	31.000	0			7,5	31.000
14	31.000	0			107,5	31.000
		Συνολική αξία	72.221	74.892	30.279	

=E6*E5

Συνολικό κεφάλαιο	
186.768	<-- =SUM(E27:G27)+D10

Εικόνα 4.24: Μοντελοποίηση αντιστοίχισης για χαρτοφυλάκιο με τρία ομόλογα



Εικόνα 4.25: Solver για την κατασκευή χαρτοφυλακίου ομολόγων σύμφωνα με την στρατηγική της αντιστοίχισης

4.11 Value at Risk

Η αξία στον κίνδυνο προσδιορίζει τη μέγιστη ζημία που μπορεί να έχει ο επενδυτής σε δεδομένο χρονικό διάστημα και σε ένα καθορισμένο βαθμό εμπιστοσύνης.

Στην περίπτωση που θεωρούμε ότι ακολουθεί κανονική κατανομή, η VaR μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$VaR = -(\mu + Z^{*}\sigma)S_0$$

Όπου S_0 η παρούσα αξία του χαρτοφυλακίου, μ η αναμενόμενη (μέση) απόδοση, σ η τυπική απόκλιση και η Z^{*} υπολογίζεται από τους πίνακες της κανονικής κατανομής. Η VaR αυτή υποδηλώνει τη μεταβολή σε σχέση με την αρχική αξία της επένδυσης.

Ας υποθέσουμε τώρα ένα χαρτοφυλάκιο με αξία 100.000€. Στην περίπτωση που η απόδοση του χαρτοφυλακίου ακολουθεί κανονική κατανομή με αναμενόμενη απόδοση 20% και τυπική απόκλιση 30%, θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα στο τέλος του χρόνου να έχουμε χασούρα μεγαλύτερη από 20.000€ (δηλαδή ποια είναι η πιθανότητα στο τέλος του χρόνου η αξία μας να είναι μικρότερη από 80.000€).

Η πιθανότητα αυτή είναι 9.12% και υπολογίζεται με τη χρήση της user-defined συνάρτησης ProbCutoff η οποία λαμβάνει σαν ορίσματα την αρχική αξία της επένδυσης (κελί C2 στην Εικόνα 4.26), την μέση απόδοση και τυπική της απόκλιση (κελιά C3 και C4) καθώς και το cutoff (ελάχιστη αξία κάτω από την οποία εξετάζουμε αν θα είμαστε στο τέλος της περιόδου) το οποίο βρίσκεται στο κελί C5.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Initial investment	100.000 €			
3		Mean	20%			
4		Sigma	30%			
5		Cutoff	80.000 €			
6		Prob that portfolio worth less than cutoff	9,12%	<-- =ProbCutoff(C2,C3,C4,C5)		

Εικόνα 4.26: Υπολογισμός της πιθανότητας να είναι η αξία του χαρτοφυλακίου μας κάτω από ένα κατώφλι στο τέλος του χρόνου

Προχωράμε δείχνοντας τον τρόπο υπολογισμού του cutoff και της αξίας στο κίνδυνο για ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης το οποίο ορίζουμε εμείς. Έτσι για ένα χαρτοφυλάκιο με χαρακτηριστικά ίδια με πριν, μπορούμε να προσδιορίσουμε με πιθανότητα 1% (επίπεδο εμπιστοσύνης 99%) ότι η αξία του χαρτοφυλακίου στο τέλος του χρόνου θα είναι λιγότερη από 50.210€. Έτσι η VaR 99% θα είναι ίση με 100.000 – 50.210 = 49.790€.

Τα παραπάνω υπολογίζονται με χρήση των συναρτήσεων NormCutoff και Norm_Var, όπου το πρόθεμα Norm έχει χρησιμοποιηθεί για να υποδηλώσει ότι έχουμε κανονική κατανομή. Και οι δύο αυτές συναρτήσεις λαμβάνουν ως ορίσματα την πιθανότητα που ζητάμε (1% στην προκειμένη περίπτωση), την αρχική αξία της επένδυσης, τη μέση απόδοση και την τυπική της απόκλισης. Εναλλακτικά η VaR μπορεί να υπολογιστεί με χρήση του μαθηματικού τύπου που αναφέρθηκε παραπάνω και ο οποίος στο παράδειγμα μας παίρνει τη μορφή -(C3-2,33*C4)*C2 όπου ο αριθμός -2,33 προκύπτει από τους πίνακες της κανονικής κατανομής.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Initial investment	100.000 €			
3		Mean	20%			
4		Sigma	30%			
5		Cutoff	50.210 €	<-- =NormCutoff(0.01,C2,C3,C4)		
6		VaR 99%	49.790 €	49.900 €	<-- =-(C3-2.33*C4)*C2	
7						
8				=Norm_VaR(0.01,C2,C3,C4)		

Εικόνα 4.27: Υπολογισμός cutoff και VaR σε κανονική κατανομή

Εκτός της κανονικής κατανομής, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι αποδόσεις και οι τιμές ακολουθούν λογαριθμοκανονική κατανομή (lognormal distribution). Υποθέτουμε ότι η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι κανονικά κατανεμημένη με ετήσια μέση τιμή μ και ετήσια τυπική απόκλιση σ. Επίσης συμβολίζουμε την παρούσα αξία του χαρτοφυλακίου με V_0. Τότε ο λογάριθμος της αξίας του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή T, V_T, θα είναι κανονικά κατανεμημένος, δηλαδή:

$$\ln(V_T) \sim Normal\left[\ln(V_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right]$$

Περνώντας τώρα σε ένα παράδειγμα, υποθέτουμε ένα χαρτοφυλάκιο με αρχική αξία 100.000€, μέση απόδοση 10% και τυπική απόκλιση 30%. Για χρονική περίοδο ενός έτους μπορούμε να υπολογίσουμε το cutoff και τη VaR με χρήση των συναρτήσεων LogCutoff και Log_VaR με ορίσματα ίδια όπως και στην περίπτωση της κανονικής κατανομής, τη διαφορά ότι χρειαζόμαστε και το μέγεθος της χρονικής περιόδου που εξετάζουμε (κελί C5 στο παράδειγμά μας).

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Initial investment	100.000 €			
3		Mean	10%			
4		Sigma	30%			
5		Time period	1			
6		Mean	11,57	<-- =LN(C2)+(C3-C4^2/2)*C5		
7		Sigma	0,30	<-- =C4*SQRT(C5)		
8		Cutoff	52.576 €	<-- =LogCutoff(0.01,C2,C3,C4,C5)		
9		VaR 99%	47.424 €	<-- =Log_VaR(0.01,C2,C3,C4,C5)		

Εικόνα 4.28: Υπολογισμός cutoff και VaR σε λογαριθμοκανονική κατανομή

Επειδή συνήθως οι υπολογισμοί της VaR δεν αφορούν την ετήσια VaR αλλά πολύ πιο σύντομα χρονικά διαστήματα, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ημερήσια VaR χρησιμοποιώντας σαν χρονικό διάστημα τον όρο $T = 1/250$ (υποθέτοντας ότι έχουμε 250 εργάσιμες ημέρες το χρόνο).

4.12 Bootstrapping και Ιστορική Προσομοίωση

Στο δεύτερο κεφάλαιο μιλήσαμε για εναλλακτικούς τρόπους υπολογισμού της VaR σε περίπτωση που οι αποδόσεις δεν ακολουθούν κανονική κατανομή. Οι τρόποι αυτοί είναι η ιστορική προσομοίωση και η μέθοδος bootstrap η οποία εφαρμόζει στο τελικό της στάδιο την ιστορική προσομοίωση ώστε να λάβει τη VaR.

Εφαρμόζοντας λοιπόν στην πράξη τη θεωρία που αναφέρθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο, από τις 100 παρατηρήσεις που έχουμε λάβει σχετικά με τις ημερήσιες αποδόσεις ενός χρεογράφου (κελιά B2:B101 στην Εικόνα 4.29), θα κατασκευάσουμε 30 τυχαία δείγματα bootstrap κάθε ένα από τα οποία θα περιλαμβάνει 30 παρατηρήσεις.

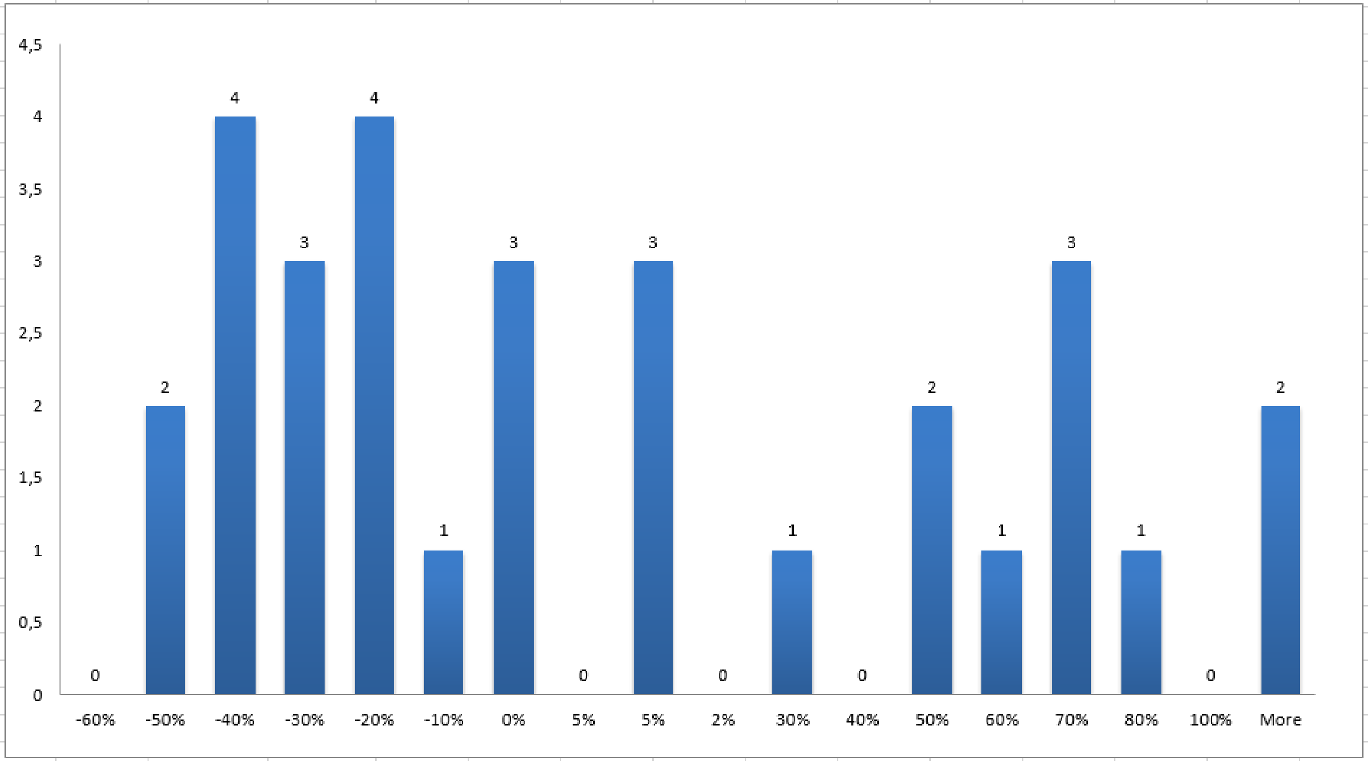
Για τη δημιουργία του δείγματος αυτού θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση Bootstrapping η οποία με όρισμα τις αποδόσεις που μας δίνονται, επιστρέφει κάθε φορά μια τυχαία παρατήρηση. Αφού δημιουργήσουμε τα δείγματά μας, μπορούμε από τις 30 παρατηρήσεις κάθε δείγματος χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση TotAReturn η οποία ορίστηκε στην ενότητα 4.1, να πάρουμε τη συνολική μηνιαία απόδοση του χρεογράφου για κάθε δείγμα (κελιά E33:AH33). Έχοντας τις μηνιαίες αποδόσεις μπορούμε να εφαρμόσουμε πάνω τους τη μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης για να υπολογίσουμε τη μηνιαία VaR.

Αρχικά ταξινομούμε τις αποδόσεις από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη χρησιμοποιώντας την επιλογή Sort (DATA|Sort & Filter|Sort A to Z) και στη συνέχεια με τη συνάρτηση PERCENTILE(A2:A31,0.01) υπολογίζουμε την VaR 99%. Αντίστοιχα για την VaR 95% χρησιμοποιούμε την PERCENTILE(A2:A31,0.05). Η τιμή -58,48% που μας δίνεται στη πρώτη περίπτωση σημαίνει ότι το 1% των αποδόσεων έχουν τιμή μικρότερη ή ίση του -58,48%. Αντίστοιχα στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι το 5% των αποδόσεων είναι μικρότερο ή ίσο του -52,48%. Η εφαρμογή των παραπάνω δίνεται στην Εικόνα 4.30.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	AG	AH	AI	AJ	AK	AL
1		Return			Bootstrap 1	Bootstrap 2	Bootstrap 3	Bootstrap 4	Bootstrap 5	Bootstrap 6	Bootstrap 29	Bootstrap 30				
2	1	3,20%		1	-6,93%	0,72%	-3,74%	7,93%	-15,48%	-9,44%	3,65%	4,82%	<-- =Bootstrapping($B$2:$B$101)			
3	2	-6,74%		2	-1,61%	28,97%	-42,23%	-15,92%	-1,87%	20,12%	-4,20%	-6,33%				
4	3	10,17%		3	7,93%	-4,83%	10,17%	13,33%	10,17%	4,15%	-9,85%	-10,24%				
5	4	13,33%		4	-42,23%	22,45%	-6,66%	-1,61%	-10,14%	-11,11%	2,74%	0,30%				
6	5	-7,87%		5	-42,23%	0,99%	9,19%	-9,39%	2,69%	-1,61%	19,00%	2,94%				
7	6	-10,51%		6	8,96%	-8,05%	-2,80%	-7,02%	0,72%	-2,80%	-9,30%	22,45%				
8	7	9,44%		7	-6,18%	2,13%	-6,04%	-2,80%	-8,64%	2,79%	-6,18%	24,61%				
9	8	0,30%		8	-4,92%	-5,54%	-9,30%	8,61%	8,11%	0,99%	-7,02%	-10,51%				
10	9	-2,80%		9	-0,43%	-2,80%	-15,88%	9,19%	-4,92%	-8,05%	2,69%	2,15%				
11	10	-0,93%		10	0,86%	-6,74%	0,72%	-4,20%	14,94%	-5,19%	10,07%	3,65%				
12	11	-2,28%		11	-6,74%	8,71%	-2,80%	-9,74%	2,67%	-0,78%	13,33%	4,15%				
13	12	-4,14%		12	0,99%	16,54%	10,17%	4,06%	3,20%	-7,87%	0,55%	-0,81%				
14	13	24,61%		13	-1,61%	-6,66%	5,47%	-7,87%	-8,05%	10,17%	34,72%	2,13%				
15	14	-10,14%		14	20,12%	16,03%	-42,23%	2,94%	10,07%	-0,43%	-6,13%	-6,93%				
16	15	1,88%		15	-3,74%	-4,92%	-0,81%	2,15%	-9,44%	-15,92%	9,44%	28,97%				
17	16	-0,68%		16	2,79%	10,63%	8,61%	-8,05%	-3,53%	-11,11%	-6,09%	16,03%				
18	17	-0,78%		17	-9,85%	8,71%	0,30%	-6,33%	10,63%	-4,20%	0,55%	-0,68%				
19	18	3,65%		18	-3,53%	-11,11%	8,61%	-6,13%	-6,09%	8,71%	6,25%	-0,93%				
20	19	-6,18%		19	4,15%	3,65%	8,43%	10,63%	-3,53%	-0,78%	-6,04%	13,33%				
21	20	4,06%		20	-9,74%	6,25%	-3,74%	19,00%	-6,09%	14,94%	0,86%	2,74%				
22	21	-1,17%		21	2,13%	2,94%	16,54%	-4,14%	10,63%	-3,53%	-6,74%	3,20%				
23	22	10,45%		22	-9,39%	-0,81%	16,54%	-0,31%	-7,87%	2,67%	-6,13%	-15,92%				
24	23	-5,54%		23	-0,43%	-4,83%	8,61%	-0,78%	8,96%	-15,92%	7,93%	-10,14%				
25	24	-1,61%		24	8,96%	2,94%	-7,02%	10,63%	-6,09%	0,72%	3,20%	7,93%				
26	25	-5,19%		25	8,11%	-6,66%	8,61%	-3,74%	-9,44%	-0,81%	10,45%	-6,93%				
27	26	2,13%		26	10,63%	4,93%	-13,39%	-4,20%	-8,64%	-0,81%	-10,14%	-4,83%				
28	27	0,99%		27	2,15%	-9,44%	-6,74%	-9,30%	-1,61%	28,97%	-9,30%	10,45%				
29	28	1,87%		28	2,94%	0,72%	-0,93%	-8,64%	-3,74%	1,87%	10,63%	2,13%				
30	29	4,15%		29	6,01%	1,88%	12,96%	8,71%	-2,21%	-1,17%	-6,13%	-5,27%				
31	30	-9,44%		30	3,20%	-2,21%	20,12%	28,97%	-3,93%	9,44%	-7,02%	-11,11%				
32	31	0,72%														
33	32	8,43%		Total return	-59,94%	68,09%	-43,34%	2,46%	-37,95%	-9,03%	24,40%	56,82%	<-- =TotAReturn(AH2:AH31)			
101	100	2,80%														

Εικόνα 4.29: Υλοποίηση Bootstrapping

	A	B	C	D	E
1	Total return		VaR 99% HS	-58,48%	<-- =PERCENTILE(A2:A31,0.01)
2	-59,94%		VaR 95% HS	-52,48%	<-- =PERCENTILE(A2:A31,0.05)
3	-54,91%				
4	-49,51%		Bin	Frequency	
5	-47,86%		-60%	0	
6	-47,03%		-50%	2	
7	-43,34%		-40%	4	
8	-37,95%		-30%	3	
9	-32,67%		-20%	4	
10	-31,36%		-10%	1	
11	-28,85%		0%	3	
12	-23,76%		5%	0	
13	-22,73%		5%	3	
14	-22,14%		2%	0	
15	-14,61%		30%	1	
16	-9,03%		40%	0	
17	-3,80%		50%	2	
18	-1,82%		60%	1	
19	2,46%		70%	3	
20	2,48%		80%	1	
21	4,89%		100%	0	
22	24,40%		More	2	
23	41,13%				
24	46,13%				
25	56,82%				
26	68,09%				
27	68,29%				
28	68,72%				
29	78,53%				
30	105,27%				
31	124,73%				



Εικόνα 4.30: Ιστορική Προσομοίωση και ιστόγραμμα των αποδόσεων

4.13 Σύγχρονα Μοντέλα Πρόβλεψης της Μεταβλητότητας

Ο υπολογισμός της διακύμανσης και της μήτρας Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης ενός χαρτοφυλακίου χρεογράφων με τον παραδοσιακό τρόπο έχει το ελάττωμα ότι δίνει ίση βαρύτητα στα δεδομένα (αποδόσεις και διακυμάνσεις). Για την αντιμετώπιση αυτού του γεγονότος έχουν αναπτυχθεί δύο μοντέρνες τεχνικές πρόβλεψης της μεταβλητότητας (τυπικής απόκλισης) οι οποίες δίνουν βάρος στην πιο πρόσφατη πληροφορία, η GARCH(1,1) και η EWMA.

Υπενθυμίζουμε ότι η διακύμανση στο μοντέλο GARCH(1,1) μπορεί να υπολογιστεί με την εξίσωση:

$$\sigma_t^2 = \gamma V_L + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$
$$\omega = \gamma V_L$$

Και στο μοντέλο EWMA με την εξίσωση:

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) r_{t-1}^2$$

Για τον υπολογισμό των συνδιακυμάνσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τύπος:

$$cov_t = \omega + \alpha x_{t-1} y_{t-1} + \beta cov_{t-1}$$

Στην περίπτωση του GARCH(1,1) και στην περίπτωση του μοντέλου EWMA ο τύπος:

$$cov_t = \lambda cov_{t-1} + (1-\lambda) x_{t-1} y_{t-1}$$

Έχοντας αναφέρει τη θεωρία, περνάμε σε ένα παράδειγμα υλοποίησης του μοντέλου EWMA στο Excel. Αφού λάβουμε αρχικά τις τιμές 4 δεικτών (DJIA, FTSE 100, CAC 40, Nikkei 225) για διάστημα 500 ημερών και υπολογίσουμε τις αποδόσεις για κάθε περίοδο, υπολογίζουμε στη συνέχεια τη μήτρα Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης με βάσει το μοντέλο EWMA. Τέλος έχοντας τη θέση μας για κάθε δείκτη μπορούμε να υπολογίσουμε τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου μας και τη VaR 99% για περίοδο μιας ημέρας.

Πιο αναλυτικά, από τις τιμές των δεικτών στο εύρος C2:F500, υπολογίζουμε με χρήση της συνάρτησης AReturn τις αποδόσεις κάθε δείκτη. Έτσι για τον πρώτο δείκτη θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο AReturn(C2:C502), για τον FTSE 100 τον AReturn(D2:D502) κτλ. Υπενθυμίζουμε ότι εισάγουμε το τύπο με το συνδυασμό πλήκτρων Ctrl+Shift+Enter αφού επιστρέφει ένα πίνακα από τιμές.

Έχοντας τις αποδόσεις μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τη μήτρα Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης με χρήση της user-defined συνάρτησης VCV_EWMA η οποία λαμβάνει ως ορίσματα το εύρος με τις αποδόσεις H3:K502 και το συντελεστή λ (κελί M2) ο οποίος ισούται με 0,94 για καθημερινά δεδομένα. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου με χρήση της γνωστής συνάρτησης PortVar με ορίσματα τη μήτρα που βρέθηκε παραπάνω και τη θέση του χαρτοφυλακίου μας ως προς κάθε δείκτη που δίνεται στο εύρος C505:F508. Τέλος υπολογίζουμε την ημερήσια VaR 99% πολλαπλασιάζοντας το επίπεδο εμπιστοσύνης με τη τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου.

Για σύγκριση με την περίπτωση χρήσης του απλού τρόπου υπολογισμού (με ίσα βάρη για τα δεδομένα κάθε περιόδου) της μήτρας Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης τα παραπάνω έχουν υπολογιστεί ξανά και φαίνονται στο εύρος I505:M517. Είναι φανερό ότι οι διαφορές ανάμεσα στις δύο μεθόδους είναι μεγάλες κάτι που οφείλεται στο ότι η EWMA δίνει μεγαλύτερο βάρος στα νεότερα δεδομένα. Όλα τα παραπάνω φαίνονται στην Εικόνα 4.31.

Τέλος να αναφέρουμε ότι η παραπάνω διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί και στη περίπτωση του GARCH(1,1) όπου η μόνη διαφορά είναι ότι χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό της μήτρας Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης τη συνάρτηση VCV_GARCH η οποία λαμβάνει σαν ορίσματα τις αποδόσεις και τους συντελεστές ω, α, β.

Πριν κλείσουμε την ενότητα αυτή, ας παρουσιάσουμε τον αναλυτικό τρόπο υπολογισμού της μήτρας Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης με χρήση του μοντέλου EWMA και χωρίς τη συνάρτηση VCV_EWMA.

Υπολογίζουμε λοιπόν τις αποδόσεις όπως στη προηγούμενη μεθοδολογία και στη συνέχεια υπολογίζουμε τη διακύμανση κάθε δείκτη με χρήση της συνάρτησης VARP η οποία λαμβάνει σαν όρισμα το εύρος με τις αποδόσεις κάθε δείκτη. Συνεχίζοντας, υπολογίζουμε για κάθε περίοδο τη διακύμανση με χρήση της συνάρτησης EWMA_VAR (με ορίσματα το συντελεστή λ, την απόδοση και τη διακύμανση της προηγούμενης περιόδου) η οποία υλοποιεί τον τύπο $\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2$.

Έχοντας τις διακυμάνσεις προχωράμε υπολογίζοντας τις συνδιακυμάνσεις. Με χρήση της συνάρτησης COVAR υπολογίζουμε την αρχική συνδιακύμανση μεταξύ κάθε δείκτη και στη συνέχεια με τη συνάρτηση Cov_EWMA η οποία υλοποιεί τον τύπο $cov_t = \lambda cov_{t-1} + (1-\lambda)x_{t-1}y_{t-1}$ υπολογίζουμε τις συνδιακυμάνσεις μεταξύ των δεικτών για κάθε περίοδο.

Τελικά, έχοντας υπολογίσει τις τελικές συνδιακυμάνσεις (εύρος B1007:G1007 στην Εικόνα 4.32) μπορούμε πια να κατασκευάσουμε τη μήτρα Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης τοποθετώντας σε κατάλληλη θέση τις διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις που βρήκαμε προηγουμένως.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Day	Date	DJIA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225		DJIA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225		λ		
2	0	7/8/2006	11219,38	11131,84	6373,89	131,77							0,94		
3	1	8/8/2006	11173,59	11096,28	6378,16	134,38		-0,004081331	-0,003194612	0,00066952	0,019786741	<-- {=AReturn(F2:F502)}			
4	2	9/8/2006	11076,18	11185,35	6474,04	135,94		-0,008717878	0,008027012	0,01503234	0,011619725				
5	3	10/8/2006	11124,37	11016,71	6357,49	135,44		0,004350778	-0,015077058	-0,01800332	-0,003716336				
6	4	11/8/2006	11088,02	11040,73	6364,76	134,10		-0,003267601	0,002180468	0,00114487	-0,00987762				
7	5	14/8/2006	11097,87	11109,50	6431,67	136,17		0,000888346	0,006229151	0,01051157	0,015441357				
8	6	15/8/2006	11230,26	11179,47	6540,95	136,32		0,011929316	0,006297795	0,01699064	0,001116147				
9	7	16/8/2006	11327,12	11203,54	6603,23	138,81		0,008624912	0,002153103	0,00952155	0,018239808				
10	8	17/8/2006	11334,96	11170,05	6617,16	138,67		0,000692144	-0,00298948	0,00210978	-0,000986342				
11	9	18/8/2006	11381,47	11096,03	6584,22	139,16		0,004103235	-0,006626346	-0,00497791	0,003490274				
12	10	21/8/2006	11345,04	11221,13	6594,30	137,83		-0,003200817	0,011274641	0,00153171	-0,009529359				
13	11	22/8/2006	11339,84	11147,06	6571,41	138,94		-0,00045835	-0,00660132	-0,00347132	0,008063408				
14	12	23/8/2006	11297,90	11097,08	6502,98	138,70		-0,003698465	-0,004483523	-0,01041344	-0,001721086				
15	13	24/8/2006	11304,46	11100,82	6541,52	137,21		0,000580639	0,000336[illegible]61	0,00592595	-0,010740267				
16	14	25/8/2006	11284,05	11088,22	6515,14	135,88		-0,001805482	-0,00113509	-0,00403179	-0,009719038				
17	15	29/8/2006	11369,94	11145,96	6583,72	135,91		0,007611629	0,005208029	0,01052577	0,000222458				
18	16	30/8/2006	11382,91	11300,65	6651,42	135,60		0,001140727	0,013878549	0,01028358	-0,002276071				
19	17	31/8/2006	11381,15	11232,22	6610,83	137,60		-0,000154618	-0,00605557	-0,00610342	0,014764309				
20	18	1/9/2006	11464,15	11323,52	6636,94	137,52		0,00729276	0,008128042	0,00394984	-0,000573732				
21	19	5/9/2006	11469,28	11320,97	6625,06	141,14		0,000447482	-0,000225329	-0,00178935	0,026273094				
22	20	6/9/2006	11406,20	11150,64	6541,59	139,62		-0,005499909	-0,015044993	-0,01260039	-0,010732942		{=AReturn(D2:D502)}		
501	499	24/9/2008	10825,17	9438,58	6033,93	114,26		-0,017295331	-0,022542986	-0,02394356	0,009109175				
502	500	25/9/2008	11022,06	9599,90	6200,40	112,82		0,018188167	0,017091397	0,02758755	-0,012587722				
503															
504															
505		VCV EWMA	0,0004801	0,0004303	0,0004257	-0,0000396	<-- {=VCV_EWMA(H3:K502,M2)}		VCV	0,0001227	0,0000768	0,0000767	-0,0000095	<-- {=VCmatrix(H3:K502)}	
506			0,0004303	0,0010314	0,0009630	0,0002095				0,0000768	0,0002010	0,0001817	0,0000394		
507			0,0004257	0,0009630	0,0009535	0,0001681				0,0000767	0,0001817	0,0001950	0,0000407		
508			-0,0000396	0,0002095	0,0001681	0,0002541				-0,0000095	0,0000394	0,0000407	0,0001909		
509															
510		Position	4000	3000	1000	2000			Position	4000	3000	1000	2000		
511															
512		Portfolio Variance	40995,76471	<-- =PortVar(C510:F510,C505:F508)					Portfolio Variance	8761,83289	<-- =PortVar(J510:M510,J505:M508)				
513		Portfolio SD	202,474						Portfolio SD	93,605					
514		Confidence level	2,326	<-- =NORMSINV(0.99)					Confidence level	2,326	<-- =NORMSINV(0.99)				
515		1-day 99% VaR	471,025	<-- =C514*C513					1-day 99% VaR	217,757	<-- =J514*J513				
516															
517		SD	0,021910662	0,03211506	0,0308795	0,015940788	<-- =SQRT(F508)		SD	0,0110773	0,014177255	0,0139628	0,0138178	<-- =SQRT(M508)	

Εικόνα 4.31: Υλοποίηση μοντέλου EWMA

	A	B	C	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	R
1	Day	Date	DJIA	Nikkei 225		DJIA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225		λ		DJIA	Nikkei 225
2	0	7/8/2006	11219,38	131,77							0,94			
3	1	8/8/2006	11173,59	134,38		-0,004081331	-0,00319461	0,00066952	0,019786741	<-- {=AReturn(F2:F502)}			0,0001227	0,00019093
4	2	9/8/2006	11076,18	135,94		-0,008717878	0,00802701	0,01503234	0,011619725				0,0001163	0,00020297
5	3	10/8/2006	11124,37	135,44		0,004350778	-0,01507706	-0,01800332	-0,003716336				0,0001139	0,00019889
6	4	11/8/2006	11088,02	134,10		-0,003267601	0,00218047	0,00114487	-0,00987762		=VARP(H3:H502)		0,0001082	0,00018778
7	5	14/8/2006	11097,87	136,17		0,000888346	0,00622915	0,01051157	0,015441357				0,0001024	0,00018237
8	6	15/8/2006	11230,26	136,32		0,011929316	0,0062978	0,01699064	0,001116147				9,628E-05	0,00018573
9	7	16/8/2006	11327,12	138,81		0,008624912	0,0021531	0,00952155	0,018239808				9,904E-05	0,00017467
10	8	17/8/2006	11334,96	138,67		0,000692144	-0,00298948	0,00210978	-0,000986342				9,756E-05	0,00018415
11	9	18/8/2006	11381,47	139,16		0,004103235	-0,00662635	-0,00497791	0,003490274				9,173E-05	0,00017316
12	10	21/8/2006	11345,04	137,83		-0,003200817	0,01127464	0,00153171	-0,009529359				8,724E-05	0,0001635
13	11	22/8/2006	11339,84	138,94		-0,00045835	-0,00660132	-0,00347132	0,008063408				8,262E-05	0,00015914
14	12	23/8/2006	11297,90	138,70		-0,003698465	-0,00448352	-0,01041344	-0,001721086	=EWMA_Var($M$2,H8,O8)			7,768E-05	0,00015349
15	13	24/8/2006	11304,46	137,21		0,000580639	0,00033646	0,00592595	-0,010740267				7,384E-05	0,00014446
16	14	25/8/2006	11284,05	135,88		-0,001805482	-0,00113509	-0,00403179	-0,009719038				6,943E-05	0,00014271
17	15	29/8/2006	11369,94	135,91		0,007611629	0,00520803	0,01052577	0,000222458				6,546E-05	0,00013982
18	16	30/8/2006	11382,91	135,60		0,001140727	0,01387855	0,01028358	-0,002276071				6,5E-05	0,00013143
19	17	31/8/2006	11381,15	137,60		-0,000154618	-0,00605557	-0,00610342	0,014764309				6,118E-05	0,00012386
20	18	1/9/2006	11464,15	137,52		0,00729276	0,00812804	0,00394984	-0,000573732				5,751E-05	0,0001295
21	19	5/9/2006	11469,28	141,14		0,000447482	-0,00022533	-0,00178935	0,026273094				5,725E-05	0,00012175
22	20	6/9/2006	11406,20	139,62		-0,005499909	-0,01504499	-0,01260039	-0,010732942	{=AReturn(D2:D502)}			5,383E-05	0,00015586
501	499	24/9/2008	10825,17	114,26		-0,017295331	-0,02254299	-0,02394356	0,009109175				0,0005018	0,00027153
502	500	25/9/2008	11022,06	112,82		0,018188167	0,0170914	0,02758755	-0,012587722				0,0004896	0,00026021
503													0,0004801	0,00025411
504														
505		DJIA/FTSE 100	DJIA/CAC 40	FTSE 100/Nikkei 225	CAC 40/Nikkei 225									
506									VCV	0,0004801	0,0004303	0,0004257	-0,0000396	<-- =D1007
507		0,000076812	0,000076671	0,000039364	0,000040700	<-- =COVAR(J3:J502,K3:K502)				0,0004303	0,0010314	0,0009630	0,0002095	<-- =F1007
508		0,000072986	0,000071907	0,000033210	0,000039053	<-- =Cov_EWMA($M$2,G507,$J3,K3)				0,0004257	0,0009630	0,0009535	0,0001681	<-- =G1007
509		0,000064408	0,000059730	0,000036813	0,000047190					-0,0000396	0,0002095	0,0001681	0,0002541	<-- =R503
510		0,000056607	0,000051446	0,000037966	0,000048373									
511		0,000052783	0,000048135	0,000034396	0,000044792				Position	4000	3000	1000	2000	
512		0,000049948	0,000045807	0,000038104	0,000051843									
513		0,000051459	0,000055220	0,000036239	0,000049870				Portfolio Variance	40995,765	<-- =PortVar(L511:O511,L506:O509)			
514		0,000049486	0,000056834	0,000036421	0,000057298				Portfolio SD	202,474				
515		0,000046393	0,000053512	0,000034413	0,000053736				Confidence level	2,326				
516		0,000041978	0,000049075	0,000030960	0,000049469				1-day 99% VaR	471,025				
517		0,000037294	0,000045837	0,000022656	0,000045625	=Cov_EWMA($M$2,B509,$H5,I5)								
518		0,000035238	0,000043182	0,000018103	0,000041208				SD	0,0219107	0,0321151	0,0308795	0,0159408	<-- =SQRT(O509)
519		0,000034118	0,000042902	0,000017480	0,000039811									
1007		0,000430251	0,000425660	0,000209533	0,000168118									

Εικόνα 4.32: Αναλυτική Υλοποίηση μοντέλου EWMA

Επίλογος

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε τη θεωρία και τον τρόπο κατασκευής διάφορων χρηματοοικονομικών υποδειγμάτων στο Microsoft Excel. Σημαντική βοήθεια στη διαδικασία αυτή προσέφεραν οι συναρτήσεις τις οποίες υλοποιήσαμε με την προγραμματιστική γλώσσα VBA.

Είναι προφανές από τα συγκριτικά παραδείγματα που παρουσιάστηκαν, ότι οι ορισμένες από τον χρήστη συναρτήσεις (user-defined functions) απλοποιούν και επιταχύνουν τη διαδικασία της κατασκευής των υποδειγμάτων. Κρίνεται έτσι σημαντική η αξιοποίησή τους από όποιον χρήστη θέλει να ασχοληθεί με την κατασκευή αποδοτικών επενδυτικών χαρτοφυλακίων.

Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι η μοντελοποίηση χρηματοοικονομικών υποδειγμάτων στο Microsoft Excel είναι ένα project το οποίο έχει ξεκινήσει από το Πανεπιστήμιο Αιγαίου και το Εργαστήριο Συστημάτων Αποφάσεων και Διοίκησης του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Βιβλιογραφία

Βιβλία

Ξυδώνας, Π., Ψαρράς, Ι., Ζοπουνίδης, Κ., 2010, *Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου*, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα

Σημειώσεις

Ξυδώνας, Π., 2014, *Ανάλυση / Διαχείριση Χρηματοοικονομικών Κινδύνων,* Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μηχανικών Οικονομίας και Διοίκησης, Χίος

Ξυδώνας, Π., 2014, *Διαχείριση Χαρτοφυλακίου,,* Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μηχανικών Οικονομίας και Διοίκησης, Χίος

Ξυδώνας, Π., 2014, *Παράγωγα και Νέα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα,* Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μηχανικών Οικονομίας και Διοίκησης, Χίος

Ξυδώνας, Π., 2014, *Χρηματοοικονομική Οικονομετρία,* Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μηχανικών Οικονομίας και Διοίκησης, Χίος

Σεμινάρια

Ξυδώνας, Π., 11 Φεβρουαρίου 2015, *Applied Portfolio Engineering*, KPMG, Αθήνα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συμπεράσματα

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η μεταβλητότητα που χαρακτηρίζει τις τιμές των μετοχικών τίτλων ενισχύει την αβεβαιότητα η οποία είναι έμφυτη στη διαδικασία διαχείρισης μετοχικών χαρτοφυλακίων. Ταυτόχρονα, η αντιμετώπιση των περισσότερων σύνθετων προβλημάτων απόφασης απαιτεί τη σύνθεση πολλαπλών κριτηρίων. Ως αποτέλεσμα, η βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων είναι μια διαδικασία που απαιτεί τη συμμετοχή και τον συνεχή έλεγχο του επενδυτή ώστε να αποφευχθούν τα όποια σφάλματα στους στόχους που έχουν τεθεί.

Στην παρούσα διπλωματική, υλοποιήθηκαν σε περιβάλλον Excel ορισμένα ευρέως διαδεδομένα χρηματοοικονομικά μοντέλα εύρεσης βέλτιστου χαρτοφυλακίου, διαχείρισης ομολόγων και επενδυτικού κινδύνου. Τα μοντέλα αυτά παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο και καλύπτουν σε μεγάλο βαθμό τις ανάγκες ενός επενδυτή ο οποίος θέλει να ασχοληθεί με το αντικείμενο της αποδοτικής διαχείρισης επενδυτικών χαρτοφυλακίων.

Σημαντική βοήθεια στην υλοποίηση των μοντέλων προσέφεραν οι συναρτήσεις και υπορουτίνες οι οποίες υλοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια αυτής της εργασίας με χρήση της προγραμματιστικής γλώσσας VBA. Οι πλήρεις κώδικες τους παρουσιάζονται στο παράρτημα αμέσως μετά από το κεφάλαιο αυτό.

5.1 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα ανάπτυξης συναρτήσεων σε VBA

Έχοντας δώσει κατά τη διάρκεια αυτής της διπλωματικής μεγάλη έμφαση στην ανάπτυξη συναρτήσεων για υπολογισμούς σε υπολογιστικά φύλλα, σκεπτόμενοι τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα αυτής της διαδικασίας, ορισμένα σημεία που αξίζουν να αναφερθούν είναι τα παρακάτω:

Πλεονεκτήματα

- Σε σύγκριση με τη χρήση πολλαπλών υπολογισμών σε υπολογιστικά φύλλα και πολύπλοκων τύπων στα κελιά, οι συναρτήσεις έχουν το πλεονέκτημα της συμπίεσης εκτεταμένων υπολογισμών σε ένα μόνο κελί. Υπό την προϋπόθεση ότι έχει προγραμματιστεί με ακρίβεια και κατανοητό όνομα, μια ορισμένη από το χρήστη (user-defined) συνάρτηση μπορεί να συγκεντρώσει σημαντική υπολογιστική δύναμη σε ένα μονάχα κελί. Επίσης η χρήση συναρτήσεων είναι λιγότερο επιρρεπής σε σφάλματα από την είσοδο πολύπλοκων τύπων κελιών. Εάν οι συναρτήσεις και τα ορίσματά τους έχουν οριστεί σαφώς και λογικά, είναι ευκολότερο για έναν χρήστη χωρίς εξειδικευμένες γνώσεις να τις χρησιμοποιήσει και κατανοήσει τη λειτουργία τους. Αντίθετα οι πολύπλοκοι τύποι μπορούν να μπερδέψουν ένα χρήστη ο οποίος δεν έχει το κατάλληλο θεωρητικό υπόβαθρο.

- Οι συναρτήσεις έχουν επίσης το πλεονέκτημα της δυνατότητας μεταφοράς (portability), δεδομένου ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε οποιοδήποτε βιβλίο εργασίας (workbook) υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει πρόσβαση στο VBA κώδικά τους. Ο ευκολότερος τρόπος να γίνει διαθέσιμος ο κώδικας μιας συνάρτησης σε ένα άλλο βιβλίο εργασίας είναι να αντιγράψουμε το κώδικα από το module του ενός workbook σε ένα module του άλλου βιβλίου εργασίας.
- Οι συναρτήσεις είναι επεκτάσιμες. Για παράδειγμα μια συνάρτηση η οποία ισχύει για ένα χαρτοφυλάκιο με τρία χρεόγραφα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιοδήποτε αριθμό χρεογράφων.
- Μερικές φορές η ύπαρξη μιας συνάρτησης σημαίνει ότι δε χρειάζεται να κατασκευαστούν περίπλοκες δομές στο υπολογιστικό φύλλο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ο υπολογισμός των MAD_P και $Semi\text{-}MAD_P$ που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο

Μειονεκτήματα

- Θα μπορούσε να αναφερθεί ως μειονέκτημα της χρήσης ορισμένων από το χρήστη συναρτήσεων η ανάγκη να καταπιαστεί κάποιος με τη VBA. Ωστόσο, θα πρέπει να τονιστεί ότι είναι απαραίτητη η εξοικείωση με ένα μόνο μικρό υποσύνολο της VBA για το προγραμματισμό των συναρτήσεων (ανάλογα βέβαια και τις απαιτήσεις του χρήστη). Γενικά για κάποιον με βασικές γνώσεις προγραμματισμού είναι αρκετά απλό να δημιουργήσει συναρτήσεις σε VBA.

5.2 Ανακύπτοντα προβλήματα και λύσεις

Κατά την ανάπτυξη των συναρτήσεων και υπορουτίνων σε VBA παρουσιάστηκαν διάφορες δυσκολίες μερικές από τις οποίες παρουσιάζονται παρακάτω μαζί με τον τρόπο που επιλέχθηκε να αντιμετωπιστούν:

- Ένα από τα προβλήματα αφορούσε τα δεδομένα εισόδου των συναρτήσεων και υπορουτινών. Συγκεκριμένα αν και παρουσιάσαμε αναλυτικά την υλοποίηση των διάφορων χρηματοοικονομικών μοντέλων, οι συναρτήσεις και υπορουτίνες είναι ανεξάρτητες από αυτά και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πληθώρα περιπτώσεων ή στα ίδια μοντέλα τα οποία όμως έχουν διαφορετική μορφοποίηση στα δεδομένα τους, πχ οι αποδόσεις είναι διατεταγμένες σε γραμμές και όχι σε στήλες. Έτσι, για να αντιμετωπίσουμε αυτές τις περιπτώσεις, κατά την υλοποίηση του κώδικα λάβαμε υπόψιν όλες τις πιθανές περιπτώσεις κάτι που σε ορισμένες περιπτώσεις οδήγησε σε μεγαλύτερους κώδικες.
- Ακόμα ένα πρόβλημα το οποίο εμφανίζεται είναι η μη δυνατότητα αναίρεσης των όσων υλοποιούν οι υπορουτίνες. Αυτό οφείλεται στο τρόπο κατασκευής του Excel και ο μόνος τρόπος αποφυγής του προβλήματος αυτού είναι η αποθήκευση των δεδομένων προτού αυτά αλλάξουν. Ωστόσο επειδή οι υπορουτίνες που

αναπτύχθηκαν αφορούν κυρίως στην υλοποίηση του Solver του εκάστοτε μοντέλου δε κρίθηκε απαραίτητο να προβούμε σε αυτή τη διαδικασία.

- Ο χρήστης θα πρέπει να ξέρει εκ των προτέρων το μέγεθος της μήτρας Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης ώστε να επιλέξει το εύρος το οποίο θα καταλαμβάνει. Για αυτό το λόγο δημιουργήθηκε η υπορουτίνα CreateVCV η οποία υπολογίζει το εύρος το οποίο χρειάζεται και δημιουργεί αυτόματα τον πίνακα. Αντίστοιχα και για την περίπτωση του πίνακα Συσχετίσεων.
- Οι υπορουτίνες CreateVCV και CreateCorrel χρησιμοποιούνται για την κατασκευή ενός πίνακα με τα ονόματα των χρεογράφων στη πρώτη γραμμή και στήλη και τη μήτρα Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης ή τη μήτρα Συσχετίσεων στο υπόλοιπο εύρος του πίνακα. Ωστόσο σε περίπτωση που κάποιος επιθυμεί να λάβει τη μήτρα Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης για συγκεκριμένες περιόδους και όχι όλες τις δοθείσες τότε αυτό οδηγεί σε λάθος εμφάνιση των ονομάτων των χρεογράφων. Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση VCmatrix και CorrelMatrix αντίστοιχα.

5.3 Μελλοντικές προοπτικές

Στην διπλωματική εργασία που εκπονήθηκε, αναπτύξαμε ένα σύνολο συναρτήσεων και υπορουτινών σε περιβάλλον VBA, ώστε να υλοποιήσουμε τα μοντέλα που παρουσιάστηκαν. Μπορεί κανείς να επεκταθεί πάνω στη δουλειά που έχει γίνει εντάσσοντας τα μοντέλα σε μια επέκταση (add-on) του Excel δημιουργώντας έτσι ένα αρκετά ολοκληρωμένο πληροφοριακό σύστημα διαχείρισης χαρτοφυλακίων. Φυσικά το σύστημα αυτό θα μπορούσε να επεκταθεί περαιτέρω με προσθήκη νέων συναρτήσεων ή μοντέλων καθώς και με τη προσθήκη βοηθητικών λειτουργιών όπως η παροχή περιγραφής για τη κάθε συνάρτηση κτλ.

Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι υπάρχει η δυνατότητα επέκτασης όσων υλοποιήθηκαν, σε μεθόδους που χρησιμοποιούν την ίδια μοντελοποίηση με διαφορετικά αντικείμενα βελτιστοποίησης. Μπορούν επίσης να υλοποιηθούν επιπρόσθετοι περιορισμοί, όπως για παράδειγμα η δημιουργία ορίων για το ποσοστό συμμετοχής συγκεκριμένων υποσυνόλων μετοχών ενός δείκτη στο χαρτοφυλάκιο. Οι αλλαγές που θα χρειαστεί να γίνουν για την πραγματοποίηση τέτοιων επεκτάσεων είναι σχετικά περιορισμένες, οπότε ένας χρήστης, ο οποίος είναι εξοικειωμένος με το Excel και το προγραμματιστικό περιβάλλον VBA, δεν θα έχει σημαντικό πρόβλημα σε περίπτωση που επιχειρήσει μία τέτοια διαδικασία.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παρουσίαση Κώδικα

Στο κεφάλαιο αυτό θα παραθέσουμε πλήρεις προγραμματιστικούς κώδικες σε VBA. Κάθε κώδικας θα συνοδεύεται από σχόλια για την συνοπτική επεξήγηση της λειτουργίας του.

Όνομα:	AReturn
Στόχος:	Υπολογισμός αριθμητικής απόδοσης
Ορίσματα:	Το εύρος των τιμών του χρεογράφου για τις περιόδους που μας δίνονται
Κώδικας:	```Function AReturn(Prices As Range) As Variant Dim i As Integer, numrows As Integer, numcols As Integer numrows = Prices.Rows.Count numcols = Prices.Columns.Count Dim matrix() As Double If numrows > 1 Then ReDim matrix(numrows - 1) For i = 2 To numrows matrix(i - 2) = (Prices(i) - Prices(i - 1)) / Prices(i - 1) Next i AReturn = WorksheetFunction.Transpose(matrix) Else ReDim matrix(numcols - 1) For i = 2 To numcols matrix(i - 2) = (Prices(1, i) - Prices(1, i - 1)) / Prices(1, i - 1) Next i AReturn = matrix End If End Function```

Όνομα:	GReturn
Στόχος:	Υπολογισμός γεωμετρικής απόδοσης
Ορίσματα:	Το εύρος των τιμών του χρεογράφου για τις περιόδους που μας δίνονται
Κώδικας:	Function GReturn(Prices As Range) As Variant

	`` Dim i As Integer, numrows As Integer, numcols As Integer numrows = Prices.Rows.Count numcols = Prices.Columns.Count Dim matrix() As Double If numrows > 1 Then ReDim matrix(numrows - 1) For i = 2 To numrows matrix(i - 2) = WorksheetFunction.Ln(Prices(i) / Prices(i - 1)) Next i GReturn = WorksheetFunction.Transpose(matrix) Else ReDim matrix(numcols - 1) For i = 2 To numcols matrix(i - 2) = WorksheetFunction.Ln(Prices(1, i) / Prices(1, i - 1)) Next i GReturn = matrix End If End Function ```

Όνομα:	TotAReturn
Στόχος:	Υπολογισμός συνολικής αριθμητικής απόδοσης
Ορίσματα:	Το εύρος των αριθμητικών αποδόσεων του χρεογράφου για τις περιόδους που μας δίνονται
Κώδικας:	``` Function TotAReturn(Areturns As Range) As Double Dim i As Integer, numrows As Integer, numcols As Integer numrows = Areturns.Rows.Count numcols = Areturns.Columns.Count Dim tvalue As Double tvalue = Areturns(1) + 1 If numrows > 1 Then For i = 2 To numrows tvalue = tvalue * (1 + Areturns(i)) Next i tvalue = tvalue - 1 TotAReturn = tvalue Else For i = 2 To numcols tvalue = tvalue * (1 + Areturns(i)) Next i tvalue = tvalue - 1 TotAReturn = tvalue End If End Function ```

Όνομα:	TotGReturn
Στόχος:	Υπολογισμός συνολικής γεωμετρικής απόδοσης
Ορίσματα:	Το εύρος των γεωμετρικών αποδόσεων του χρεογράφου για τις περιόδους που μας δίνονται
Κώδικας:	`Function TotGReturn(Greturns As Range) As Double` `   TotGReturn = WorksheetFunction.Sum(Greturns)` `End Function`

Όνομα:	AvAReturn
Στόχος:	Υπολογισμός μέσης αριθμητικής απόδοσης
Ορίσματα:	Το εύρος των αριθμητικών αποδόσεων του χρεογράφου για τις περιόδους που μας δίνονται
Κώδικας:	`Function AvAReturn(Areturns As Range) As Double` `   AvAReturn = WorksheetFunction.Average(Areturns)` `End Function`

Όνομα:	AvGReturn
Στόχος:	Υπολογισμός μέσης γεωμετρικής απόδοσης
Ορίσματα:	Το εύρος των γεωμετρικών αποδόσεων του χρεογράφου για τις περιόδους που μας δίνονται
Κώδικας:	`Function AvGReturn(Greturns As Range) As Double` `   Dim i As Integer, numrows As Integer, numcols As Integer` `   numrows = Greturns.Rows.Count` `   numcols = Greturns.Columns.Count` `   Dim tvalue As Double` `   tvalue = Greturns(1) + 1` `   If numrows > 1 Then` `      For i = 2 To numrows` `         tvalue = tvalue * (1 + Greturns(i))` `      Next i` `      tvalue = tvalue ^ (1 / numrows) - 1` `      AvGReturn = tvalue` `    Else` `      For i = 2 To numcols` `         tvalue = tvalue * (1 + Greturns(i))` `      Next i`

	`` tvalue = tvalue ^ (1 / numcols) - 1 AvGReturn = tvalue End If End Function ```

Όνομα:	ExpRet
Στόχος:	Υπολογισμός αναμενόμενης απόδοσης
Ορίσματα:	Το εύρος των βαρών του χαρτοφυλακίου και των μέσων αποδόσεων κάθε χρεογράφου
Κώδικας:	(see code below)

```
Function ExpRet(Weights As Range, Averages As Range) As Variant
  Dim wcols As Integer, acols As Integer
  wcols = Weights.Columns.Count
  acols = Averages.Columns.Count
  With Application.WorksheetFunction
    If wcols > 1 And acols > 1 Then
      ExpRet = .MMult(Weights, .Transpose(Averages))
    ElseIf wcols > 1 And acols = 1 Then
      ExpRet = .MMult(Weights, Averages)
    ElseIf wcols = 1 And acols > 1 Then
      ExpRet = .MMult(Averages, Weights)
    Else
      ExpRet = .MMult(.Transpose(Weights), Averages)
    End If
  End With
End Function
```

Όνομα:	PortVar
Στόχος:	Υπολογισμός διακύμανσης του χαρτοφυλακίου
Ορίσματα:	Το εύρος των βαρών του χαρτοφυλακίου και τη μήτρα Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης
Κώδικας:	(see code below)

```
Function PortVar(Weights As Range, VCVmatrix As Range) As Variant
  Dim wcols As Integer
  wcols = Weights.Columns.Count
  With Application.WorksheetFunction
    If wcols > 1 Then
      PortVar = .MMult(.MMult(Weights, VCVmatrix),
.Transpose(Weights))
    Else
      PortVar = .MMult(.MMult(.Transpose(Weights), VCVmatrix),
Weights)
```

	`` End If End With End Function```

Όνομα:	ExpRetRF
Στόχος:	Υπολογισμός αναμενόμενης απόδοσης υπό την ύπαρξη ακίνδυνου χρεογράφου
Ορίσματα:	Το εύρος των βαρών του χαρτοφυλακίου, των επιπρόσθετων αξιών (μέση απόδοση κάθε χρεογράφου πλην την απόδοση του ακίνδυνου χρεογράφου) των χρεογράφων και την απόδοση του ακίνδυνου χρεογράφου
Κώδικας:	see code below

```
Function ExpRetRF(Weights As Range, Excess As Range, Rfree As Double) As Double

  Dim wcols As Integer, ecols As Integer
   wcols = Weights.Columns.Count
   ecols = Excess.Columns.Count
   With Application.WorksheetFunction
      If wcols > 1 And ecols > 1 Then
         ExpRetRF = .Sum(Rfree, .MMult(Weights, .Transpose(Excess)))
      ElseIf wcols > 1 And ecols = 1 Then
         ExpRetRF = .Sum(Rfree, .MMult(Weights, Excess))
      ElseIf wcols = 1 And ecols > 1 Then
         ExpRetRF = .Sum(Rfree, .MMult(Excess, Weights))
      Else
         ExpRetRF = .Sum(Rfree, .MMult(.Transpose(Weights), Excess))
      End If
   End With
End Function
```

Όνομα:	SharpeRatioRF
Στόχος:	Υπολογισμός δείκτη Sharpe υπό την ύπαρξη ακίνδυνου χρεογράφου
Ορίσματα:	Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου, η απόδοση του ακίνδυνου χρεογράφου και η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου
Κώδικας:	see code below

```
Function SharpeRatioRF(PortReturn As Double, Rfree As Double, PortStd As Double) As Double

   SharpeRatioRF = (PortReturn - Rfree) / PortStd
End Function
```

Όνομα:	MinPortVar
Στόχος:	Κατασκευή Solver για την εύρεση του χαρτοφυλακίου ελάχιστης διακύμανσης
Ορίσματα:	Το εύρος των βαρών του χαρτοφυλακίου, το κελί με το άθροισμα των βαρών και το κελί με τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου
Κώδικας:	Sub MinPortVar() On Error GoTo ErrHandler: SolverReSet Dim Weights As Range, wsum As Range, var As Range Set Weights = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Weights Range", Title:="Weights Range Select", Type:=8) Set wsum = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Weights Sum Cell", Title:="Weights Sum Select", Type:=8) Set var = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Variance Cell", Title:="Variance Select", Type:=8) SolverOK Setcell:=var.Address, MaxMInVal:=2, ByChange:=Weights.Address, EngineDesc:="GRG Nonlinear" SolverAdd Cellref:=Weights.Address, relation:=3, Formulatext:=0 SolverAdd Cellref:=wsum.Address, relation:=2, Formulatext:=1 SolverOptions Assumenonneg:=False SolverSolve userFinish:=True ErrHandler: Exit Sub Resume End Sub

Όνομα:	MinPortVarRR
Στόχος:	Κατασκευή Solver για την εύρεση του χαρτοφυλακίου ελάχιστης διακύμανσης υπό τον περιορισμό να έχουμε αναμενόμενη απόδοση πάνω από ένα ζητούμενο κατώφλι
Ορίσματα:	Το εύρος των βαρών του χαρτοφυλακίου, το κελί με το άθροισμα των βαρών, την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου, τη ζητούμενη ελάχιστη αναμενόμενη απόδοση και το κελί με τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου
Κώδικας:	Sub MinPortVarRR() On Error GoTo ErrHandler: SolverReSet Dim Weights As Range, wsum As Range, var As Range, ExpRet As Range, reqret As Range Set Weights = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Weights Range", Title:="Weights Range Select", Type:=8)

<table>
<tr><td></td><td><pre>
  Set wsum = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Weights Sum Cell", Title:="Weights Sum Select", Type:=8)
  Set ExpRet = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Expected Return Cell", Title:="Expected Return Cell Select", Type:=8)
  Set reqret = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Requested Return Cell", Title:="Requested Return Cell Select", Type:=8)
  Set var = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Variance Cell", Title:="Variance Select", Type:=8)
  SolverOK Setcell:=var.Address, MaxMInVal:=2, ByChange:=Weights.Address, EngineDesc:="GRG Nonlinear"
  SolverAdd Cellref:=Weights.Address, relation:=3, Formulatext:=0
  SolverAdd Cellref:=wsum.Address, relation:=2, Formulatext:=1
  SolverAdd Cellref:=ExpRet.Address, relation:=3, Formulatext:=reqret.Address
  SolverOptions Assumenonneg:=False
  SolverSolve userFinish:=True
ErrHandler:
    Exit Sub
  Resume
End Sub
</pre></td></tr>
</table>

Όνομα:	MaxSharpe
Στόχος:	Κατασκευή Solver για την μεγιστοποίηση του δείκτη Sharpe
Ορίσματα:	Το εύρος των βαρών του χαρτοφυλακίου, το κελί με το άθροισμα των βαρών και το κελί με τον δείκτη Sharpe
Κώδικας:	(see code below)

```
Sub MaxSharpe()

  On Error GoTo ErrHandler:
  SolverReSet
  Dim Weights As Range, wsum As Range, sharpe As Range
  Set Weights = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Weights Range", Title:="Weights Range Select", Type:=8)
  Set wsum = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Weights Sum Cell", Title:="Weights Sum Select", Type:=8)
  Set sharpe = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Sharpe Cell", Title:="Sharpe Select", Type:=8)
  SolverOK Setcell:=sharpe.Address, MaxMInVal:=1, ByChange:=Weights.Address, EngineDesc:="GRG Nonlinear"
  SolverAdd Cellref:=Weights.Address, relation:=3, Formulatext:=0
  SolverAdd Cellref:=wsum.Address, relation:=2, Formulatext:=1
  SolverOptions Assumenonneg:=False
  SolverSolve userFinish:=True
ErrHandler:
    Exit Sub
  Resume
```

	End Sub

Όνομα:	VCmatrix
Στόχος:	Υπολογισμός μήτρας Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης
Ορίσματα:	Το εύρος των αποδόσεων των χρεογράφων
Κώδικας:	Function VCmatrix(Returns As Range) As Variant Dim i As Integer, j As Integer, numcols As Integer numcols = Returns.Columns.Count Dim matrix() As Double ReDim matrix(numcols - 1, numcols - 1) For i = 1 To numcols For j = 1 To numcols matrix(i - 1, j - 1) = Application.WorksheetFunction.Covar(Returns.Columns(i), Returns.Columns(j)) Next j Next i VCmatrix = matrix End Function

Όνομα:	Correlmatrix
Στόχος:	Υπολογισμός του πίνακα Συσχετίσεων
Ορίσματα:	Το εύρος των αποδόσεων των χρεογράφων
Κώδικας:	Function Correlmatrix(Returns As Range) As Variant Dim i As Integer, j As Integer, numcols As Integer numcols = Returns.Columns.Count Dim matrix() As Double ReDim matrix(numcols - 1, numcols - 1) For i = 1 To numcols For j = 1 To numcols matrix(i - 1, j - 1) = Application.WorksheetFunction.Correl(Returns.Columns(i), Returns.Columns(j)) Next j Next i Correlmatrix = matrix End Function

Όνομα:	CreateVCV
Στόχος:	Υπολογισμός μήτρας Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης και κατασκευή πίνακα με τα ονόματα των χρεογράφων στην πρώτη γραμμή και στήλη
Ορίσματα:	Το εύρος των αποδόσεων των χρεογράφων
Κώδικας:	```Sub CreateVCV() On Error Resume Next Dim rng As Range Set rng = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Range", Title:="Range Select", Type:=8) If rng Is Nothing Then Exit Sub End If Dim numcols As Integer numcols = rng.Columns.Count Dim newRange As Range Set newRange = Range(ActiveCell, ActiveCell.OffSet(numcols - 1, numcols - 1)) newRange.Select newRange.NumberFormat = "0.00000" Call stocknames(rng) newRange.FormulaArray = "=VCmatrix('" & rng.Parent.Name & "'!" & rng.Address & ")" End Sub```

Όνομα:	CreateCorrel
Στόχος:	Υπολογισμός πίνακα Συσχετίσεων και κατασκευή πίνακα με τα ονόματα των χρεογράφων στην πρώτη γραμμή και στήλη
Ορίσματα:	Το εύρος των αποδόσεων των χρεογράφων
Κώδικας:	```Sub CreateCorrel() On Error Resume Next Dim rng As Range Set rng = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Range", Title:="Range Select", Type:=8) If rng Is Nothing Then Exit Sub End If Dim numcols As Integer numcols = rng.Columns.Count Dim newRange As Range Set newRange = Range(ActiveCell, ActiveCell.OffSet(numcols - 1, numcols - 1))```

	newRange.Select newRange.NumberFormat = "0.00000" Call stocknames(rng) newRange.FormulaArray = "=Correlmatrix('" & rng.Parent.Name & "'!" & rng.Address & ")" End Sub

Όνομα:	stocknames
Στόχος:	Βοηθητική υπορουτίνα για τις υπορουτίνες CreateVCV και CreateCorrel
Ορίσματα:	Το εύρος των αποδόσεων των χρεογράφων
Κώδικας:	Sub stocknames(rng As Range) Dim numcols As Integer numcols = rng.Columns.Count Dim newRange As Range Dim newRange2 As Range Set newRange = Range(ActiveCell.OffSet(-1, 0), ActiveCell.OffSet(-1, numcols - 1)) Set newRange2 = Range(ActiveCell.OffSet(0, -1), ActiveCell.OffSet(numcols - 1, -1)) newRange.Value = rng.OffSet(-1, 0).Value newRange2.Value = Application.WorksheetFunction.Transpose(rng.OffSet(-1, 0).Value) End Sub

Όνομα:	MIQPsolve
Στόχος:	Κατασκευή Solver για την ελαχιστοποίηση της διακύμανσης σε μοντέλο MIQP
Ορίσματα:	Το εύρος των βαρών του χαρτοφυλακίου, το κελί με το άθροισμα των βαρών, το εύρος των ακέραιων μεταβλητών, το κελί με το άθροισμα των ακέραιων μεταβλητών, το ζητούμενο κάτω και άνω εύρος τιμών, την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου και το κελί με τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου
Κώδικας:	Sub MIQPsolve() On Error GoTo ErrHandler: SolverReSet Dim Weights As Range, wsum As Range, var As Range, Integ As Range, Intsum As Range, lobound As Range, upbound As Range, ExpRet As Range Set Weights = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Weights Range", Title:="Weights Range Select", Type:=8)

| | ```
   Set wsum = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Weights Sum Cell", Title:="Weights Sum Select", Type:=8)
   Set Integ = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Integers Range", Title:="Integers Range Select", Type:=8)
   Set Intsum = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Integer Sum Cell", Title:="Integer Sum Select", Type:=8)
   Set lobound = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Lower Bound Range", Title:="Lower Bound Range Select", Type:=8)
   Set upbound = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Upper Bound Range", Title:="Upper Bound Select", Type:=8)
   Set ExpRet = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Expected Return Cell", Title:="Expected Return Cell Select", Type:=8)
   Set var = Application.InputBox(Prompt:="Please Variance Cell", Title:="Variance Select", Type:=8)
   SolverOK Setcell:=var.Address, MaxMInVal:=2, ByChange:=Union(Weights, Integ).Address, EngineDesc:="GRG Nonlinear"
   SolverAdd Cellref:=Weights.Address, relation:=3, Formulatext:=0
   SolverAdd Cellref:=wsum.Address, relation:=2, Formulatext:=1
   SolverAdd Cellref:=ExpRet.Address, relation:=3, Formulatext:="=-0.1"
   SolverAdd Cellref:=Weights.Address, relation:=3, Formulatext:=lobound.Address
   SolverAdd Cellref:=Weights.Address, relation:=1, Formulatext:=upbound.Address
   SolverAdd Cellref:=Intsum.Address, relation:=1, Formulatext:=12
   SolverAdd Cellref:=Integ.Address, relation:=5, Formulatext:="binary"
   SolverOptions Assumenonneg:=False
   SolverSolve userFinish:=True
ErrHandler:
      Exit Sub
   Resume
End Sub
``` |

Όνομα:	MAD
Στόχος:	Υπολογισμός του κινδύνου MAD
Ορίσματα:	Το εύρος των αποδόσεων των χρεογράφων, το εύρος με τη μέση απόδοση κάθε χρεογράφου και το εύρος με τα βάρη του χαρτοφυλακίου
| Κώδικας: | ```
Function MAD(Returns As Range, Averages As Range, Weights As Range) As Double

   Dim i As Integer, j As Integer, numrows As Integer, numcols As Integer
   'calculate Deviations Matrix
   Dim Devs() As Double
   numcols = Returns.Columns.Count
   numrows = Returns.Rows.Count
``` |

	<pre> ReDim Devs(numrows - 1, numcols - 1) For i = 1 To numrows For j = 1 To numcols Devs(i - 1, j - 1) = Returns(i, j) - Averages(1, j) Next j Next i 'Calculate Weighted Deviations Matrix Dim Devs2() As Double ReDim Devs2(numrows - 1, 0) For i = 1 To numrows For j = 1 To numcols Devs2(i - 1, 0) = Devs2(i - 1, 0) + Weights(1, j) * Devs(i - 1, j - 1) Next j Next i 'Calculate Absolutes Dim absmatr() As Double ReDim absmatr(numrows - 1, 0) For i = 1 To numrows absmatr(i - 1, 0) = Abs(Devs2(i - 1, 0)) Next i 'Calculate MAD MAD = Application.WorksheetFunction.Average(absmatr) End Function</pre>

Όνομα:	Semi_MAD
Στόχος:	Υπολογισμός του κινδύνου Semi-MAD
Ορίσματα:	Το εύρος των αποδόσεων των χρεογράφων, το εύρος με τη μέση απόδοση κάθε χρεογράφου και το εύρος με τα βάρη του χαρτοφυλακίου
Κώδικας:	<pre>Function Semi_MAD(Returns As Range, Averages As Range, Weights As Range) As Double Dim i As Integer, j As Integer, numrows As Integer, numcols As Integer 'calculate Deviations Matrix Dim Devs() As Double numcols = Returns.Columns.Count numrows = Returns.Rows.Count ReDim Devs(numrows - 1, numcols - 1) For i = 1 To numrows For j = 1 To numcols Devs(i - 1, j - 1) = Returns(i, j) - Averages(1, j) Next j Next i 'Calculate Weighted Deviations Matrix Dim Devs2() As Double ReDim Devs2(numrows - 1, 0)</pre>

	`` For i = 1 To numrows For j = 1 To numcols Devs2(i - 1, 0) = Devs2(i - 1, 0) + Weights(1, j) * Devs(i - 1, j - 1) Next j Next i 'Calculate Ifs Dim Ifmatr() As Double ReDim Ifmatr(numrows - 1, 0) For i = 1 To numrows If Devs2(i - 1, 0) < 0 Then Ifmatr(i - 1, 0) = Abs(Devs2(i - 1, 0)) Else Ifmatr(i - 1, 0) = 0 End If Next i 'Calculate Semi-MAD Semi_MAD = Application.WorksheetFunction.Average(Ifmatr) End Function ```

Όνομα:	Evolutionary
Στόχος:	Κατασκευή Solver για την επίλυση του προβλήματος της εξελικτικής βελτιστοποίησης με γενετικούς αλγορίθμους
Ορίσματα:	Το εύρος των βαρών του χαρτοφυλακίου, το κελί με το άθροισμα των βαρών και το κελί με το ποσοστό των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου που 'νίκησαν' τον δείκτη
Κώδικας:	``` Sub Evolutionary() On Error GoTo ErrHandler: SolverReSet Dim Weights As Range, wsum As Range, beat As Range Set Weights = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Weights Range", Title:="Weights Range Select", Type:=8) Set wsum = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Weights Sum Cell", Title:="Weights Sum Select", Type:=8) Set beat = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Beat Percent Cell", Title:="Beat Percent Select", Type:=8) SolverOK Setcell:=beat.Address, MaxMInVal:=1, ByChange:=Weights.Address, EngineDesc:="Evolutionary" SolverAdd Cellref:=Weights.Address, relation:=3, Formulatext:=0 SolverAdd Cellref:=Weights.Address, relation:=1, Formulatext:=1 SolverAdd Cellref:=wsum.Address, relation:=2, Formulatext:=1 SolverOptions Assumenonneg:=False SolverSolve userFinish:=True ErrHandler: Exit Sub ```

	`` Resume``` ```End Sub```

<table>
<tr><td>Όνομα:</td><td>MarkPort</td></tr>
<tr><td>Στόχος:</td><td>Υπολογισμός βέλτιστου χαρτοφυλακίου</td></tr>
<tr><td>Ορίσματα:</td><td>Η μήτρα Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης, το εύρος με την αναμενόμενη απόδοση κάθε χρεογράφου και η απόδοση του ακίνδυνου χρεογράφου</td></tr>
<tr><td>Κώδικας:</td><td>

```
Function MarkPort(VCmatrix As Range, ExpRet As Range, Rfasset As Double) As Variant
   Dim i As Integer, j As Integer, numrows As Integer, numcols As Integer
   Dim divres As Double, subres() As Double, matrix As Variant
   numrows = ExpRet.Rows.Count
   numcols = ExpRet.Columns.Count
   If numrows > 1 Then
      ReDim subres(numrows - 1)
      For i = 1 To numrows
         subres(i - 1) = ExpRet(i) - Rfasset
      Next i
      With Application.WorksheetFunction
      matrix = .MMult(.MInverse(VCmatrix), .Transpose(subres))
      divres = .Sum(.MMult(.MInverse(VCmatrix), .Transpose(subres)))
      End With
      For i = 1 To numrows
         matrix(i, 1) = matrix(i, 1) / divres
      Next i
      MarkPort = matrix
   Else
      ReDim subres(numcols - 1)
      For i = 1 To numcols
         subres(i - 1) = ExpRet(1, i) - Rfasset
      Next i
      With Application.WorksheetFunction
      matrix = .MMult(.MInverse(VCmatrix), .Transpose(subres))
      divres = .Sum(.MMult(.MInverse(VCmatrix), .Transpose(subres)))
      End With
      For i = 1 To numcols
         matrix(i, 1) = matrix(i, 1) / divres
      Next i
      MarkPort = matrix
   End If
End Function
```

</td></tr>
</table>

Όνομα:	IndexTrackSolve
Στόχος:	Κατασκευή Solver για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης του μοντέλου index Tracking
Ορίσματα:	Το εύρος που περιέχει τα x_i, τις δυαδικές μεταβλητές, την αναλογία του τελικού χαρτοφυλακίου, το κελί που περιέχει το άθροισμα των δυαδικών μεταβλητών, το κελί με τον αριθμό των μετοχών που θέλουμε να συμπεριλάβουμε στο χαρτοφυλάκιο TP, το κελί με τη συνολική αξία του παρόντος χαρτοφυλακίου TP, το κελί με τη συνολική αξία του νέου χαρτοφυλακίου TP και τέλος το κελί που περιέχει τον προς ελαχιστοποίηση στόχο
Κώδικας:	(see code below)

```
Sub IndexTrackSolve()
   On Error GoTo ErrHandler:
   SolverReSet
   Dim units As Range, prop As Range, object As Range, Integ As Range,
Intsum As Range, Intreq As Range, totval As Range, ntotval As Range
   Set units = Application.InputBox(Prompt:="Please Select x(i) Range",
Title:="x(i) Range Select", Type:=8)
   Set Integ = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Binary
Variables Range", Title:="Binary Variables Range Select", Type:=8)
   Set prop = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Proportion
Range", Title:="Proportion Range Select", Type:=8)
   Set Intsum = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Binary
Variables Sum Cell", Title:="Binary Variables Sum Select", Type:=8)
   Set Intreq = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Desired
Number of Stocks Cell", Title:="Desired Number of Stocks Cell Select",
Type:=8)
   Set totval = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Total TP
Value Cell", Title:="Total TP Value Cell Select", Type:=8)
   Set ntotval = Application.InputBox(Prompt:="Please Select New Total
TP Value Cell", Title:="New Total TP Value Cell Select", Type:=8)
   Set objec = Application.InputBox(Prompt:="Please Objective Cell",
Title:="Objective Select", Type:=8)
   SolverOK Setcell:=objec.Address, MaxMInVal:=2,
ByChange:=Union(units, Integ).Address, EngineDesc:="GRG Nonlinear"
   SolverAdd Cellref:=units.Address, relation:=3, Formulatext:=0
   SolverAdd Cellref:=prop.Address, relation:=1,
Formulatext:=Integ.Address
   SolverAdd Cellref:=Totval.Address, relation:=2,
Formulatext:=nTotval.Address
   SolverAdd Cellref:=Intsum.Address, relation:=2,
Formulatext:=Intreq.Address
   SolverAdd Cellref:=Integ.Address, relation:=5, Formulatext:="binary"
   SolverOptions Assumenonneg:=False
   SolverSolve userFinish:=True
ErrHandler:
```

	`` Exit Sub Resume End Sub ```

Όνομα:	Duration_A
Στόχος:	Υπολογισμός μέσης σταθμικής διάρκειας σε ομόλογα με ετήσια απόδοση τοκομεριδίων
Ορίσματα:	Το κελί που περιέχει την απόδοση στη λήξη (YTM), το εύρος με το πλήθος των περιόδων και το εύρος με τις ταμειακές ροές κάθε περιόδου
Κώδικας:	(see code below)

```
Function Duration_A(YTM As Double, Period As Range, CashFlow As
Range) As Double
   Dim i As Integer, j As Integer, numrows As Integer, Price As Double,
DurA As Double
   numrows = Period.Rows.Count
   Dim DisFactor() As Double, PresValue() As Double, PVPP() As Double
   ReDim DisFactor(numrows - 1, 0)
   ReDim PresValue(numrows - 1, 0)
   ReDim PVPP(numrows - 1, 0)
   For i = 1 To numrows
      DisFactor(i - 1, 0) = 1 / ((1 + YTM) ^ Period(i).Value)
      PresValue(i - 1, 0) = DisFactor(i - 1, 0) * CashFlow(i).Value
   Next i
   Price = Application.WorksheetFunction.Sum(PresValue)
   For i = 1 To numrows
      PVPP(i - 1, 0) = (PresValue(i - 1, 0) / Price) * Period(i).Value
   Next i
   DurA = Application.WorksheetFunction.Sum(PVPP)
   Duration_A = DurA
End Function
```

Όνομα:	Duration_B
Στόχος:	Υπολογισμός μέσης σταθμικής διάρκειας σε ομόλογα με εξαμηνιαία απόδοση τοκομεριδίων
Ορίσματα:	Το κελί που περιέχει την απόδοση στη λήξη (YTM), το εύρος με το πλήθος των περιόδων και το εύρος με τις ταμειακές ροές κάθε περιόδου
Κώδικας:	(see code below)

```
Function Duration_B(YTM As Double, Period As Range, CashFlow As
Range) As Double
   Dim i As Integer, j As Integer, numrows As Integer, Price As Double,
DurB As Double
```

	numrows = Period.Rows.Count Dim DisFactor() As Double, PresValue() As Double, PVPP() As Double ReDim DisFactor(numrows - 1, 0) ReDim PresValue(numrows - 1, 0) ReDim PVPP(numrows - 1, 0) For i = 1 To numrows DisFactor(i - 1, 0) = 1 / ((1 + YTM / 2) ^ Period(i).Value) PresValue(i - 1, 0) = DisFactor(i - 1, 0) * CashFlow(i).Value Next i Price = Application.WorksheetFunction.Sum(PresValue) For i = 1 To numrows PVPP(i - 1, 0) = (PresValue(i - 1, 0) / Price) * Period(i).Value Next i DurB = Application.WorksheetFunction.Sum(PVPP) / 2 Duration_B = DurB End Function

Όνομα:	Convexity_A
Στόχος:	Υπολογισμός κυρτότητας σε ομόλογα με ετήσια απόδοση τοκομεριδίων
Ορίσματα:	Το κελί που περιέχει την απόδοση στη λήξη (YTM), το εύρος με το πλήθος των περιόδων και το εύρος με τις ταμειακές ροές κάθε περιόδου
Κώδικας:	Function Convexity_A(YTM As Double, Period As Range, CashFlow As Range) As Double Dim i As Integer, j As Integer, numrows As Integer, Price As Double, ConvA As Double numrows = Period.Rows.Count Dim DisFactor() As Double, PresValue() As Double, PVPP() As Double ReDim DisFactor(numrows - 1, 0) ReDim PresValue(numrows - 1, 0) ReDim PVPP(numrows - 1, 0) For i = 1 To numrows DisFactor(i - 1, 0) = 1 / ((1 + YTM) ^ Period(i).Value) PresValue(i - 1, 0) = DisFactor(i - 1, 0) * CashFlow(i).Value Next i Price = Application.WorksheetFunction.Sum(PresValue) For i = 1 To numrows PVPP(i - 1, 0) = (PresValue(i - 1, 0) / Price) * (Period(i).Value ^ 2 + Period(i).Value) Next i ConvA = Application.WorksheetFunction.Sum(PVPP) * (1 / ((1 + YTM) ^ 2)) Convexity_A = ConvA End Function

Όνομα:	Convexity_B
Στόχος:	Υπολογισμός κυρτότητας σε ομόλογα με εξαμηνιαία απόδοση τοκομεριδίων
Ορίσματα:	Το κελί που περιέχει την απόδοση στη λήξη (YTM), το εύρος με το πλήθος των περιόδων και το εύρος με τις ταμειακές ροές κάθε περιόδου
Κώδικας:	(see code below)

```
Function Convexity_B(YTM As Double, Period As Range, CashFlow As
Range) As Double

   Dim i As Integer, j As Integer, numrows As Integer, Price As Double,
ConvB As Double
   numrows = Period.Rows.Count
   Dim DisFactor() As Double, PresValue() As Double, PVPP() As Double
   ReDim DisFactor(numrows - 1, 0)
   ReDim PresValue(numrows - 1, 0)
   ReDim PVPP(numrows - 1, 0)
   For i = 1 To numrows
      DisFactor(i - 1, 0) = 1 / ((1 + YTM / 2) ^ Period(i).Value)
      PresValue(i - 1, 0) = DisFactor(i - 1, 0) * CashFlow(i).Value
   Next i
   Price = Application.WorksheetFunction.Sum(PresValue)
   For i = 1 To numrows
      PVPP(i - 1, 0) = (PresValue(i - 1, 0) / Price) * (Period(i).Value ^ 2 +
Period(i).Value)
   Next i
   ConvB = (Application.WorksheetFunction.Sum(PVPP) * (1 / ((1 + YTM
/ 2) ^ 2))) / 4
   Convexity_B = ConvB
End Function
```

Όνομα:	Matching
Στόχος:	Κατασκευή Solver ο οποίος υλοποιεί ένα χαρτοφυλάκιο ομολόγων σύμφωνα με την στρατηγική της αντιστοίχισης
Ορίσματα:	Τον αριθμό των τεμαχίων κάθε ομολόγου, το κελί που περιλαμβάνει το στόχο μας ο οποίος είναι η ελαχιστοποίηση του προς διάθεση κεφαλαίου, τα ρευστά διαθέσιμα, οι υποχρεώσεις και τέλος οι περιορισμοί του προβλήματος
Κώδικας:	(see code below)

```
Sub Matching()

   On Error GoTo ErrHandler:
   SolverReset
   Dim items As Range, capital As Range, cash As Range, liab As Range,
restr As Range
```

	Set items = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Items Range", Title:="items Range Select", Type:=8) Set capital = Application.InputBox(Prompt:=" Please Select Min Capital Cell", Title:="Min Capital Select", Type:=8) Set cash = Application.InputBox(Prompt:=" Please Select Cash Flow Range", Title:="Cash Flow Range Select", Type:=8) Set liab = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Liabilities Range", Title:="Liabilities Range Select", Type:=8) Set restr = Application.InputBox(Prompt:="Please Select Restrictions Range", Title:="Restrictions Range Select", Type:=8) SolverOK Setcell:=capital.Address, MaxMInVal:=2, ByChange:=Union(items, cash).Address, EngineDesc:="Simplex LP" SolverAdd Cellref:=items.Address, relation:=3, Formulatext:=0 SolverAdd Cellref:=cash.Address, relation:=3, Formulatext:=0 SolverAdd Cellref:=liab.Address, relation:=2, Formulatext:=restr.Address SolverOptions Assumenonneg:=False SolverSolve userFinish:=True ErrHandler: Exit Sub Resume End Sub

Όνομα:	NormCutoff
Στόχος:	Υπολογισμός cutoff σε κανονική κατανομή
Ορίσματα:	Το κελί με πιθανότητα που ζητάμε, την αρχική αξία της επένδυσης, τη μέση απόδοση και την τυπική της απόκλισης
Κώδικας:	Function NormCutoff(Percent As Double, Investment As Double, Mean As Double, Sigma As Double) As Double NormCutoff = Application.WorksheetFunction.NormInv(Percent, (1 + Mean) * Investment, Investment * Sigma) End Function

Όνομα:	ProbCutoff
Στόχος:	Υπολογισμός της πιθανότητας να είναι η αξία του χαρτοφυλακίου μας κάτω από ένα κατώφλι στο τέλος του χρόνου
Ορίσματα:	Το κελί με την αρχική αξία της επένδυσης, την μέση απόδοση και τυπική της απόκλιση καθώς και το cutoff (ελάχιστη αξία κάτω από την οποία εξετάζουμε αν θα είμαστε στο τέλος της περιόδου)

Κώδικας:	Function ProbCutoff(Investment As Double, Mean As Double, Sigma As Double, Cutoff As Double) As Double ProbCutoff = Application.WorksheetFunction.NormDist(Cutoff, (1 + Mean) * Investment, Investment * Sigma, True) End Function

Όνομα:	LogCutoff
Στόχος:	Υπολογισμός cutoff σε λογαριθμοκανονική κατανομή
Ορίσματα:	Το κελί με πιθανότητα που ζητάμε, την αρχική αξία της επένδυσης, τη μέση απόδοση και την τυπική της απόκλισης καθώς και το μέγεθος της χρονικής περιόδου που εξετάζουμε
Κώδικας:	Function LogCutoff(Percent As Double, Investment As Double, Mean As Double, Sigma As Double, Period As Double) As Double Dim Tmean As Double, Tsigma As Double Tmean = Application.WorksheetFunction.Ln(Investment) + (Mean - Sigma ^ 2 / 2) * Period Tsigma = Sigma * Sqr(Period) LogCutoff = Application.WorksheetFunction.LogInv(Percent, Tmean, Tsigma) End Function

Όνομα:	Norm_VaR
Στόχος:	Υπολογισμός VaR σε κανονική κατανομή
Ορίσματα:	Το κελί με πιθανότητα που ζητάμε, την αρχική αξία της επένδυσης, τη μέση απόδοση και την τυπική της απόκλισης
Κώδικας:	Function Norm_VaR(Percent As Double, Investment As Double, Mean As Double, Sigma As Double) As Double Dim Cutoff As Double Cutoff = Application.WorksheetFunction.NormInv(Percent, (1 + Mean) * Investment, Investment * Sigma) Norm_VaR = Investment - Cutoff End Function

Όνομα:	Log_VaR
Στόχος:	Υπολογισμός VaR σε λογαριθμοκανονική κατανομή

Ορίσματα:	Το κελί με πιθανότητα που ζητάμε, την αρχική αξία της επένδυσης, τη μέση απόδοση και την τυπική της απόκλισης καθώς και το μέγεθος της χρονικής περιόδου που εξετάζουμε
Κώδικας:	Function Log_VaR(Percent As Double, Investment As Double, Mean As Double, Sigma As Double, Period As Double) As Double Dim Cutoff As Double, Tmean As Double, Tsigma As Double Tmean = Application.WorksheetFunction.Ln(Investment) + (Mean - Sigma ^ 2 / 2) * Period Tsigma = Sigma * Sqr(Period) Cutoff = Application.WorksheetFunction.LogInv(Percent, Tmean, Tsigma) Log_VaR = Investment - Cutoff End Function

Όνομα:	Bootstrapping
Στόχος:	Κατασκευή τυχαίων δειγμάτων bootstrap
Ορίσματα:	Το εύρος με τις αποδόσεις του χρεογράφου
Κώδικας:	Function Bootstrapping(Returns As Range) As Double Dim LRandomNumber As Integer, numrows As Integer, numcols As Integer numrows = Returns.Rows.Count numcols = Returns.Columns.Count If numrows > 1 Then Randomize LRandomNumber = Int((numrows - 1) * Rnd + 1) Bootstrapping = Returns(LRandomNumber) Else Randomize LRandomNumber = Int((numcols - 1) * Rnd + 1) Bootstrapping = Returns(LRandomNumber) End If End Function

Όνομα:	EWMA_Var
Στόχος:	Υπολογισμός των διακυμάνσεων στο μοντέλο EWMA
Ορίσματα:	Το κελί με το συντελεστή λάμδα, την απόδοση της προηγούμενης περιόδου και τη διακύμανση της προηγούμενης περιόδου

Κώδικας:	Function EWMA_Var(lamda As Double, Ret As Double, Variance As Double) As Double EWMA_Var = lamda * Variance + (1 - lamda) * (Ret ^ 2) End Function

Όνομα:	Cov_EWMA
Στόχος:	Υπολογισμός των συνδιακυμάνσεων στο μοντέλο EWMA
Ορίσματα:	Το κελί με το συντελεστή λάμδα, τη συνδιακύμανση των δύο χρεογράφων την προηγούμενη περίοδο και τις αποδόσεις τους κατά την προηγούμενη περίοδο
Κώδικας:	Function Cov_EWMA(lamda As Double, Covar As Double, ReturnX As Double, ReturnY As Double) As Double Cov_EWMA = lamda * Covar + ReturnX * ReturnY * (1 - lamda) End Function

Όνομα:	GARCH_Var
Στόχος:	Υπολογισμός των διακυμάνσεων στο μοντέλο GARCH
Ορίσματα:	Τους συντελεστές ωμέγα, άλφα, βήτα, το κελί με την απόδοση της προηγούμενης περιόδου και τη διακύμανση της προηγούμενης περιόδου
Κώδικας:	Function GARCH_Var(omega As Double, alpha As Double, beta As Double, Ret As Double, Variance As Double) As Double GARCH_Var = omega + alpha * (Ret ^ 2) + beta * Variance End Function

Όνομα:	Cov_GARCH
Στόχος:	Υπολογισμός των συνδιακυμάνσεων στο μοντέλο GARCH
Ορίσματα:	Τα κελιά με τους συντελεστές ωμέγα, άλφα, βήτα , τη συνδιακύμανση των δύο χρεογράφων την προηγούμενη περίοδο και τις αποδόσεις τους κατά την προηγούμενη περίοδο
Κώδικας:	Function Cov_GARCH(omega As Double, alpha As Double, beta As Double, Covar As Double, ReturnX As Double, ReturnY As Double) As Double Cov_GARCH = omega + alpha * ReturnX * ReturnY + beta * Covar End Function

Όνομα:	VCV_EWMA
Στόχος:	Υπολογισμός μήτρας Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης με χρήση του μοντέλου EWMA
Ορίσματα:	Το εύρος με τις αποδόσεις των χρεογράφων και το κελί με τον συντελεστή λάμδα
Κώδικας:	Function VCV_EWMA(Returns As Range, lamda As Double) As Variant Dim i As Integer, j As Integer, z As Integer, numrows As Integer, numcols As Integer, counter1 As Integer, counter2 As Integer _ , temp As Integer, colcount As Integer numrows = Returns.Rows.Count numcols = Returns.Columns.Count Dim varps() As Double, matrix() As Double, matrix2() As Double, Cmatr() As Double, Vmatrix() As Double ReDim varps(numcols - 1, 0) ReDim matrix(numcols - 1, 0) temp = Binomial(numcols) ReDim Cmatr(temp - 1, 0) ReDim matrix2(temp - 1, 0) ReDim Vmatrix(numcols - 1, numcols - 1) For i = 1 To numcols varps(i - 1, 0) = Application.WorksheetFunction.VarP(Returns.Columns(i)) Next i For i = 1 To numcols For j = 1 To numrows matrix(i - 1, 0) = lamda * varps(i - 1, 0) + (1 - lamda) * (Returns(j, i) ^ 2) varps(i - 1, 0) = matrix(i - 1, 0) Next j Next i counter1 = 1 counter2 = numcols - 1 For j = 1 To numcols - 1 For i = 1 To counter2 Cmatr(counter1 - 1, 0) = Application.WorksheetFunction.Covar(Returns.Columns(j), Returns.Columns(i + j)) counter1 = counter1 + 1 Next i counter2 = counter2 - 1 Next j colcount = 1 counter1 = 1 temp = numcols - 1 For z = 1 To numcols - 1

```
      For i = 1 To temp
        For j = 1 To numrows
          matrix2(counter1 - 1, 0) = lamda * Cmatr(counter1 - 1, 0) + (1 - lamda) * Returns(j, colcount) * Returns(j, i + colcount)
          Cmatr(counter1 - 1, 0) = matrix2(counter1 - 1, 0)
        Next j
        counter1 = counter1 + 1
      Next i
      colcount = colcount + 1
      If temp <> 1 Then
        temp = numcols - colcount
      End If
    Next z
    counter1 = 1
    For i = 1 To numcols
      For j = 1 To numcols
        If i = j Then
          Vmatrix(i - 1, j - 1) = matrix(i - 1, 0)
        ElseIf j > i Then
          Vmatrix(i - 1, j - 1) = matrix2(counter1 - 1, 0)
          counter1 = counter1 + 1
        End If
      Next j
    Next i
    For i = 1 To numcols
      For j = 1 To numcols
        Vmatrix(j - 1, i - 1) = Vmatrix(i - 1, j - 1)
      Next j
    Next i
    VCV_EWMA = Vmatrix
End Function
```

Όνομα:	VCV_GARCH
Στόχος:	Υπολογισμός μήτρας Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης με χρήση του μοντέλου GARCH
Ορίσματα:	Το εύρος με τις αποδόσεις των χρεογράφων και οι συντελεστές ωμέγα, άλφα και βήτα

Κώδικας:

```
Function VCV_GARCH(Returns As Range, omega As Double, alpha As Double, beta As Double) As Variant

    Dim i As Integer, j As Integer, z As Integer, numrows As Integer, numcols As Integer, counter1 As Integer, counter2 As Integer _
    , temp As Integer, colcount As Integer
    numrows = Returns.Rows.Count
    numcols = Returns.Columns.Count
```

```
   Dim varps() As Double, matrix() As Double, matrix2() As Double,
Cmatr() As Double, Vmatrix() As Double
   ReDim varps(numcols - 1, 0)
   ReDim matrix(numcols - 1, 0)
   temp = Binomial(numcols)
   ReDim Cmatr(temp - 1, 0)
   ReDim matrix2(temp - 1, 0)
   ReDim Vmatrix(numcols - 1, numcols - 1)
   For i = 1 To numcols
      varps(i - 1, 0) =
Application.WorksheetFunction.VarP(Returns.Columns(i))
   Next i
   For i = 1 To numcols
      For j = 1 To numrows
         matrix(i - 1, 0) = omega + alpha * (Returns(j, i) ^ 2) + beta * varps(i
- 1, 0)
         varps(i - 1, 0) = matrix(i - 1, 0)
      Next j
   Next i
   counter1 = 1
   counter2 = numcols - 1
   For j = 1 To numcols - 1
      For i = 1 To counter2
         Cmatr(counter1 - 1, 0) =
Application.WorksheetFunction.Covar(Returns.Columns(j),
Returns.Columns(i + j))
         counter1 = counter1 + 1
      Next i
      counter2 = counter2 - 1
   Next j
   colcount = 1
   counter1 = 1
   temp = numcols - 1
   For z = 1 To numcols - 1
      For i = 1 To temp
         For j = 1 To numrows
            matrix2(counter1 - 1, 0) = omega + alpha * Returns(j, colcount) *
Returns(j, i + colcount) + beta * Cmatr(counter1 - 1, 0)
            Cmatr(counter1 - 1, 0) = matrix2(counter1 - 1, 0)
         Next j
         counter1 = counter1 + 1
      Next i
      colcount = colcount + 1
      If temp <> 1 Then
         temp = numcols - colcount
      End If
   Next z
   counter1 = 1
```

	`` For i = 1 To numcols For j = 1 To numcols If i = j Then Vmatrix(i - 1, j - 1) = matrix(i - 1, 0) ElseIf j > i Then Vmatrix(i - 1, j - 1) = matrix2(counter1 - 1, 0) counter1 = counter1 + 1 End If Next j Next i For i = 1 To numcols For j = 1 To numcols Vmatrix(j - 1, i - 1) = Vmatrix(i - 1, j - 1) Next j Next i VCV_GARCH = Vmatrix End Function ```

Όνομα:	Binomial
Στόχος:	Βοηθητική συνάρτηση που υπολογίζει τον διωνυμικό συντελεστή
Ορίσματα:	Ο αριθμός των χρεογράφων του χαρτοφυλακίου
Κώδικας:	``` Function Binomial(n As Integer) As Integer Dim i As Integer, fact As Integer, fact2 As Integer fact = 1 fact2 = 1 For i = 1 To n fact = fact * i Next i For i = 1 To n - 2 fact2 = fact2 * i Next i Binomial = fact / (2 * fact2) End Function ```