



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ & ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΘΕΣΗΣ ΣΕ
ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΜΕ
ΜΗΧΑΝΕΣ ΕΠΙΒΛΕΠΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ
ΓΙΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΛΟΗΓΗΣΗΣ ΚΑΙ
ΚΑΘΟΔΗΓΗΣΗΣ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΚΥΡΙΑΚΟΥ Σ. ΦΡΑΓΚΟΥ

Διπλωματούχου Αγρονόμου & Τοπογράφου Μηχανικού Ε.Μ.Π.

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ :

Β. ΓΚΙΚΑΣ

Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Μάρτιος 2016



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ & ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΘΕΣΗΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΜΕ ΜΗΧΑΝΕΣ ΕΠΙΒΛΕΠΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΓΙΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΛΟΗΓΗΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΘΟΔΗΓΗΣΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΚΥΡΙΑΚΟΥ Σ. ΦΡΑΓΚΟΥ

Διπλωματούχου Αγρονόμου & Τοπογράφου Μηχανικού Ε.Μ.Π.

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1. Β. ΓΚΙΚΑΣ, Αν. Καθ. Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)
2. Δ. ΠΑΡΑΔΕΙΣΗΣ Καθ. Ε.Μ.Π.
3. Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Καθ. Ε.Μ.Π.

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

4. 1. Β. ΓΚΙΚΑΣ, Αν. Καθ. Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)
5. 2. Δ. ΠΑΡΑΔΕΙΣΗΣ, Καθ. Ε.Μ.Π.
6. 3. Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, Καθ. Ε.Μ.Π.
7. 4. Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, Αν. Καθ. Ε.Μ.Π.
8. 5. Α. ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟΣ, Επικ. Καθ. Ε.Μ.Π.
9. 6. Δ. ΣΤΑΘΑΣ, Καθ. Ε.Μ.Π.
7. Δ. ΡΩΣΣΙΚΟΠΟΥΛΟΣ, Καθ. Α.Π.Θ.

ΑΘΗΝΑ, Μάρτιος 2016

**Ταξινόμηση Κατάστασης Θέσης σε
Γραμμικά Γεωμετρικά Πρότυπα με
Μηχανές Επιβλεπόμενης Μάθησης**

**για Ζητήματα Πλοήγησης και
Καθοδήγησης**

ΒΡΥΞΕΛΛΕΣ, 2015

Τα πάντα ρεί

Ηράκλειτος

*Αν γνωρίζαμε τις δυναμικές
ποιός θα χρειαζόταν μετρήσεις;
Λύσετε τη Φυσική
και
όλα τα άλλα είναι απλώς, Μαθηματικά...*

Rudolf E. Kalman

*Αν κάθε όργανο μπορούσε να φτιάξει
το δικό του έργο,
υπακούοντας ή προσμένοντας τη βούληση των άλλων...
Αν το χτένι ύφαινε και
η πένα έπαιζε στη λύρα, χωρίς το χέρι να οδηγεί,
τ' αφεντικά δε θα 'χανε εργάτες, ούτε
κι οι αφέντες υπηρέτες...*

Αριστοτέλης

*Κράτα το απλό,
όσο απλό είναι δυνατόν.
Αλλά όχι απλότερο...*

Albert Einstein

στη Λούνα μου

Προσωπικό Σημείωμα

Όντας πια στο τέλος της συγγραφής της διατριβής μου έχω την έντονη αίσθηση ότι αυτό ήταν αποτέλεσμα ενός επίπονου προσωπικού αγώνα' το παραδέχομαι. Γνωρίζω όμως, ότι δίχως την παρουσία και την υποστήριξη κάποιων ανθρώπων η ολοκλήρωση αυτού του εγχειρήματος θα ήταν αδύνατη. Νιώθω την ανάγκη και την υποχρέωση λοιπόν, να απευθύνω σε όλους ένα βαθύ και ολόψυχο ευχαριστώ. Ο καθένας με τον τρόπο του συνέβαλλε στη προσπάθεια μου και του είμαι ειλικρινά ευγνώμων.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα της εργασίας Αναπληρωτή Καθηγητή ΕΜΠ Βασίλη Γκίκα. Με την παρότρυνση και την αρωγή του είχα την ευκαιρία να εκθέσω έξω, μακριά από τα όρια του σχολείου μας την ερευνητική μου κατατομή, τις σκέψεις και τις προσωπικές μου απόψεις στα ακαδημαϊκά πράγματα' εμπειρία ανεκτίμητη, οδηγό για την υπόλοιπη ζωή μου, η οποία με γέμισε κουράγιο και αυτοπεποίθηση και με βελτίωσε ως ερευνητή αλλά κυρίως ως άνθρωπο. Από τα στοιχεία που χαρακτηρίζουν το έργο ενός επιβλέποντα, εκείνος έδωσε μεγαλύτερο βάρος σε αυτό που τελικά άλλαξε και διαφώτισε τον τρόπο σκέψης μου στο μεγαλύτερο βαθμό.

Ιδιαίτερα επίσης, ευχαριστώ τον Καθηγητή ΕΜΠ Δημήτρη Παραδείση, ο οποίος πριν από χρόνια μου εμπιστεύτηκε μια θέση στην ομάδα του, με καθοδήγησε στις πρώτες ερευνητικές μου προσπάθειες και βεβαίως είναι αυτός που πρωτίστως μου έδωσε την ευκαιρία μιας διδακτορικής υποψηφιότητας. Η μετάδοση της ευρείας γνώσης του σε σχετικά θέματα θα αποτελεί μεγάλη αξία για μένα.

Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω και προς το τρίτο μέλος της επιβλέπουσας επιτροπής, Καθηγητή ΕΜΠ Κώστα Κυριακόπουλο, για την διακριτική του στήριξη και κάποιες σημαντικές συμβουλές κατά την τελευταία φάση της συγγραφής.

Είναι παράλειψη που τελικά επιλέγω να μην ονομάσω σε τούτο το σημείωμα έναν προς έναν ανθρώπους που γνωρίζω ότι η παρουσία και βοήθειά τους κατά την διάρκεια αυτής της διαδρομής είχε όχι μόνο ακαδημαϊκό χαρακτήρα αλλά αποτέλεσε και σημαντική προσωπική στήριξη. Τους τόσοι φίλους συναδέλφους που απέκτησα τα τελευταία 15 χρόνια ως μέλος του Κέντρου Δορυφόρων Διονύσου ΕΜΠ που το λιγότερο που οφείλω να κάνω είναι να τους ευχαριστώ. Το γεγονός ότι γνωρίζουν σε ποιους συγκεκριμένα αναφέρομαι και την εκτίμηση που τρέφω για τον καθένα χωριστά με απενοχοποιεί λιγάκι που δεν τους σημειώνω ρητά. Ας μου επιτραπεί μια μόνον εξαίρεση, αν και δεν θα βρω τα σωστά λόγια για να τον ευχαριστήσω όπως πρέπει. Τον φίλο Βαγγέλη Ζαχαρή, που υπήρξε πραγματικός μέντορας.

Όμως το πιο μεγάλο ευχαριστώ το οφείλω δικαιοματικά στην οικογενιά μου, η οποία δέχτηκε με μεγάλη χαρά και στήριξε την επιθυμία μου να συνεχίσω τις σπουδές μου' το οφείλω για την ηθική και την οικονομική στήριξη που παρείχαν στη ζωή μου, την αγάπη και την συμπαράσταση τους. Γιώργη, χωρίς εσένα τίποτα δεν θα είχε γραφτεί..

Το οφείλω στη σύντροφό μου και στο μεγαλύτερο δώρο της ζωής μου. Τη Λούνα μου..

Περιεχόμενα

Προσωπικό Σημείωμα.....	v
Περίληψη.....	xiii
Abstract.....	xv
Πρόλογος.....	xvii
ΜΕΡΟΣ Α.....	xix
Θεωρητικό Υπόβαθρο.....	xix
Κεφάλαιο 1^ο	1
Εισαγωγή.....	1
1.1 Ορισμός του προβλήματος.....	1
1.2 Οι διεπιστημονικές διαστάσεις του προβλήματος.....	2
1.3 Συμβολή.....	2
1.4. Δομή του κειμένου.....	3
Κεφάλαιο 2ο	5
Κίνηση, Κινηματική και Πλοήγηση.....	5
2.1 Κίνηση και Κινηματική.....	5
2.2. Συστήματα Αναφοράς.....	6
2.3 Κίνηση Στερεού Σώματος.....	9
2.4 Πλοήγηση, Καθοδήγηση και Εντοπισμός.....	10
Κεφάλαιο 3^ο	17
Βελτιστοποίηση, Βέλτιστη Εκτίμηση Κατάστασης.....	17
3.1 Βασικές Έννοιες.....	17
3.2 Μαθηματικός Προγραμματισμός.....	17
3.3 Προτυποποίηση Δυναμικών Συστημάτων.....	21
3.4 Θεωρία Βέλτιστης Εκτίμησης Κατάστασης.....	24
Κεφάλαιο 4^ο	35
Επιβλεπόμενη Μηχανική Μάθηση.....	35
4.1 Μηχανική Μάθηση.....	35
4.2 Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα.....	38
4.3 Μηχανές Διανυσμάτων Υποστήριξης.....	42
ΜΕΡΟΣ Β.....	55
Τεχνική Ανάλυση.....	55
Κεφάλαιο 5^ο	57
Ταξινόμηση Κατάστασης Θέσης σε Γραμμικά Πρότυπα.....	57
5.1 Περιγραφή.....	57
5.2 Στοιχεία Καινοτομίας.....	57
5.3 Αξίωμα Ταξινόμησης Σημειακής Οντότητας σε Γραμμικά Πρότυπα.....	58
5.4 Ταυτοποίηση της Γεωμετρίας της Τροχιάς σε Πραγματικό Χρόνο.....	59
5.5 Γεωμετρική Εξομάλυνση Κατάστασης Θέσης σε Πραγματικό Χρόνο.....	60
Κεφάλαιο 6^ο	67

Πειραματικές Διατάξεις και Δεδομένα	67
6.1 Προκαταρκτικός Σχεδιασμός.....	67
6.2 Πείραμα Καταγραφής Κινηματικών Δεδομένων σε Σιδηρόδρομο	67
Κεφάλαιο 7^ο	79
Εκπαίδευση - Υλοποίηση Μηχανής Μάθησης	79
7.1 Δεδομένα Εκπαίδευσης.....	79
7.2 Σχεδιασμός Μοντέλου Ταξινόμησης	80
7.3 Υλοποίηση Μηχανής Μάθησης	81
7.4 Μοντέλα Αναγνώρισης Γραμμικού Προτύπου Τροχιάς.....	81
Κεφάλαιο 8^ο	93
Αξιολόγηση Απόδοση Γενίκευσης.....	93
8.1 Έλεγχος Σφάλματος Ταξινόμησης.....	93
8.2 Απόδοση Γενίκευσης	97
Κεφάλαιο 9^ο	123
Τεχνικές Εφαρμογές και Ενδεικτικά Αποτελέσματα	123
9.1 Εφαρμογή Εξομάλυνσης Κατάστασης Θέσης σε Πραγματικό Χρόνο	123
9.2 Εξαγωγή Γεωμετρίας Στοιχείων Χάραξης Οδού	128
Κεφάλαιο 10^ο.....	131
Αποτίμηση	131
Βιβλιογραφία	133
Σύντομο Βιογραφικό Σημείωμα.....	141
Κυριάκος Σ. Φράγκος	141

Ευρετήριο Σχημάτων – Πινάκων

Κεφάλαιο 5^ο

Σχήμα 5.1 Εκχώρηση ετικέτας γραμμικού προτύπου σε διαδοχικές καταστάσεις θέσης	60
Σχήμα 5.2 Γεωμετρική Εξομάλυνση Κατάστασης Θέσης σε Πραγματικό Χρόνο: Διάγραμμα Ροής.....	61
Σχήμα 5.3 Αρχική Εκτίμηση Βέλτιστης Ευθείας	63
Σχήμα 5.4 Εισαγωγή 3ου σημείου ευθεία και πρώτη Αναπροσαρμογή Βέλτιστης Ευθείας	64
Σχήμα 5.5 Εισαγωγή 4ου σημείου ευθεία και δεύτερη Αναπροσαρμογή Βέλτιστης Ευθείας	64
Σχήμα 5.6 Εισαγωγή 5ου σημείου ευθεία και τρίτη Αναπροσαρμογή Βέλτιστης Ευθείας	64
Σχήμα 5.8 Απόλυτες Διαφορές Τεταγμένης μεταξύ Εξομάλυνσης πραγματικού χρόνου και Εκτίμησης Θέσης Σημείου Ταξινόμησης.....	65

Κεφάλαιο 6^ο

Σχήμα 6.1 Σιδηροδρομικό όχημα καταγραφής (δρεζίνα): Εξωτερική όψη.....	68
Σχήμα 6.2 Τοποθέτηση αδρανειακής μονάδας	69
Σχήμα 6.3 Εφαρμογή ψηφιακού οδομέτρου.....	69
Σχήμα 6.4 Διάταξη καταγραφής σήματος GNSS	70
Σχήμα 6.5 Μετρήσεις lever-arms	71
Πίνακας 6.1 Στοχαστικό μοντέλο σχεδιασμού Kalman	72
Σχήμα 6.6 Αποτύπωση της τροχιάς κίνησης σε οριζοντιογραφία	73
Σχήμα 6.7 Χρονοσειρές τυπικής απόκλισης παραμέτρων θέσης.....	73
Πίνακας 6.2 Ακρίβεια εκτίμησης εντοπισμού θέσης.....	74
Σχήμα 6.8 Χρονοσειρές εκτιμήσεων συνιστωσών ταχύτητας.....	74
Σχήμα 6.9 Χρονοσειρές τυπικής απόκλισης συνιστωσών ταχύτητας	75
Πίνακας 6.3 Ακρίβεια εκτίμησης συνιστωσών ταχύτητας	75
Σχήμα 6.10 Χρονοσειρές τυπικής απόκλισης συνιστωσών γωνιακής παρέκκλισης.....	76
Πίνακας 6.4 Ακρίβεια εκτίμησης γωνιακής παρέκκλισης	77

Κεφάλαιο 7^ο

Σχήμα 7. 1 Χρονοσειρές Εκπαίδευσης Μεγάλου Μήκους (25km).....	79
Σχήμα 7.2 Χρονοσειρές Εκπαίδευσης Μικρού Μήκους (15km).....	80
Σχήμα 7.3 Συνάρτηση Ταξινόμησης: Ευθεία – Καμπύλη. Εκπαίδευση Μεγάλου Μήκους Τροχιάς	82
Σχήμα 7.4 Συνάρτηση Ταξινόμησης: Κυκλικό Τόξο - Καμπύλη Σύνθετου Τύπου. Εκπαίδευση Μεγάλου Μήκους Τροχιάς	83
Σχήμα 7.5 Συνάρτηση Ταξινόμησης: Ευθεία – Καμπύλη. Εκπαίδευση Μικρού Μήκους Τροχιάς.....	84
Σχήμα 7.6 Συνάρτηση Ταξινόμησης: Κυκλικό Τόξο - Καμπύλη Σύνθετου Τύπου. Εκπαίδευση Μικρού Μήκους Τροχιάς	85
Σχήμα 7.7 Διαφοροποίηση της Συνάρτησης Απόφασης ως προς το Εύρος Επιρροής Πυρήνα σ^2 σε Ταξινόμησης Ευθείας – Καμπύλης από Εκπαίδευση Μεγάλου Μήκους Τροχιάς.....	87
Σχήμα 7.8 Διαφοροποίηση της Συνάρτησης Απόφασης ως προς την Παράμετρο Ομαλοποίησης γ σε Ταξινόμηση Κυκλικού Τόξου - Καμπύλης Σύνθετου Τύπου από Εκπαίδευση Μεγάλου Μήκους Τροχιάς.....	88

Κεφάλαιο 8^ο

Σχήμα 8. 1 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου Άγνωστης Τροχιάς 15km σε 3 Κλάσεις Μηχανής Μεγάλου Μήκους Εκπαίδευσης (ΜΜΜΕ)	94
Σχήμα 8.2 Σημεία Άγνωστης Τροχιάς 15km Λανθασμένης Ταξινόμησης Μηχανής Μεγάλου Μήκους Εκπαίδευσης (ΜΜΜΕ)	94
Πίνακας 8. 1 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ	95
Σχήμα 8.3 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου Άγνωστης Τροχιάς 25km σε 3 Κλάσεις Μηχανής μικρού Μήκους Εκπαίδευσης (ΜμΜΕ).....	96
Σχήμα 8.4 Σημεία Άγνωστης Τροχιάς 25km Λανθασμένης Ταξινόμησης Μηχανής μικρού Μήκους Εκπαίδευσης (ΜμΜΕ).....	96
Πίνακας 8.2 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ.....	97
Σχήμα 8.5 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις 1ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης	98
Σχήμα 8.6 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης 1ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης	99
Πίνακας 8.3 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 1ο.....	100
Πίνακας 8.4 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 1ο.....	100
Σχήμα 8.7 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις 2ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης	101
Σχήμα 8.8 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης 2ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης	102

Πίνακας 8.5 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 2ο.....	103
Πίνακας 8.6 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 2ο.....	103
Σχήμα 8.9 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις 3ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης	104
Σχήμα 8.10 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης 3ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης	105
Πίνακας 8.7 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 3ο.....	106
Πίνακας 8.8 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 3ο.....	106
Σχήμα 8.11 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις 4ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης.....	107
Σχήμα 8.12 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης 4ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης	108
Πίνακας 8.9 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 4ο.....	109
Πίνακας 8.10 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 4ο	109
Σχήμα 8.13 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις 5ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης.....	110
Σχήμα 8.14 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης 5ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης	111
Πίνακας 8.11 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 5ο.....	112
Πίνακας 8.12 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 5ο	112
Σχήμα 8.15 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις 6ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης.....	113
Σχήμα 8.16 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης 6ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης	114
Πίνακας 8.13 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 6ο.....	115
Πίνακας 8.14 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 6ο	115
Σχήμα 8.17 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις 7ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης.....	116
Σχήμα 8.18 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης 7ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης	117
Πίνακας 8.15 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 7ο.....	118
Πίνακας 8.16 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 7ο	118
Σχήμα 8.19 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις 8ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης.....	119
Σχήμα 8.20 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης 8ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης	120
Πίνακας 8.17 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 8ο.....	121
Πίνακας 8.18 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 8ο	121

Κεφάλαιο 9^ο

Σχήμα 9. 1 Αποτύπωση Σημείων Θέσης Φιλτραρίσματος και Σημείων Εξομάλυνσης Θέσης Πραγματικού Χρόνου σε Συνθήκες Κακής Λήψης Δορυφορικού Σήματος.....	124
Σχήμα 9.4 Αποτύπωση Σημείων Θέσης Φιλτραρίσματος και Σημείων Εξομάλυνσης Θέσης Πραγματικού Χρόνου σε Συνθήκες Απώλειας Δορυφορικού Σήματος	126
Πίνακας 9. 1 Ποσοστά επιτυχίας καθορισμού ελάχιστου εύρους εντοπισμού	130

Περίληψη

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται το διεπιστημονικό ζήτημα του ελέγχου ενός δυναμικού συστήματος, όπως αυτό εμφανίζεται κατά την κίνηση επίγειου οχήματος.

Αναπτύσσεται αλγόριθμος που συνθέτει μεθόδους επιβλεπόμενης μηχανικής μάθησης και βελτιστοποίησης της εκτίμησης κατάστασης συστήματος, για την πλοήγηση οχήματος σε κατάσταση καθοδήγησης. Συγκεκριμένα, προτείνεται πρωτότυπη μεθοδολογία ταξινόμησης της θέσης εντοπισμού σε γραμμικά γεωμετρικά πρότυπα, όπου με την εφαρμογή- κατά την εξέλιξη της κίνησης- ενός LS SVM μοντέλου για αναγνώριση προτύπου (pattern recognition), ταυτοποιείται το γεωμετρικό προφίλ του ίχνους της τροχιάς του οχήματος, σε πραγματικό χρόνο.

Με βάση μια σειρά αξιωματών κατηγοριοποίησης, η προτεινόμενη μηχανή εφαρμόζει ένα σχέδιο ταξινόμησης επί των παρεχόμενων εκτιμήσεων των παραμέτρων της περιστροφικής συμπεριφοράς του σώματος του οχήματος. Αυτές προκύπτουν από βελτιστοποίηση μετρήσεων αδρανειακής μονάδας τακτικού βαθμού, σε σχεδιασμό αυστηρής ολοκλήρωσης συστήματος GNSS/INS (tightly coupled integration). Το αποτέλεσμα είναι η ταξινόμηση των διαδοχικών σημείων-εκτίμηση θέσης που συνθέτουν το ίχνος της τροχιάς, σε κατάλληλα γεωμετρικά πρότυπα. Αυτά είναι γραμμικά στοιχεία όπως ευθείες γραμμές, κυκλικά τόξα και καμπύλες σύνθετου τύπου. Η επιτυχία της μεθοδολογίας έγκειται στην αξιοποίηση των ιδιοτήτων που προκύπτουν από το συνδυασμό των εκτιμήσεων θέσης και γωνιακής συμπεριφοράς. Βασικό αξίωμα κατηγοριοποίησης είναι ο ρυθμός αλλαγής της καμπυλότητας της τροχιάς, της οποίας η τιμή είναι άγνωστη κατά τη διάρκεια της κίνησης. Η μεθοδολογία αξιολογήθηκε με χρήση πραγματικών δεδομένων, που προέκυψαν από πείραμα κατά μήκος της σιδηροδρομικής γραμμής Αθήνα-Κιάτο. Με βάση τα πειραματικά αποτελέσματα, η προτεινόμενη μηχανή παρουσίασε πολύ υψηλά επίπεδα γενικευμένης απόδοσης κατά την εφαρμογή της σε άγνωστη διαδρομή, αναγνωρίζοντας το γραμμικό πρότυπο της τροχιάς σε επίπεδο 95% επί του συνόλου των σημείων-εκτίμηση θέσης που ταξινομήθηκαν σε κάποια γραμμική κλάση.

Από την πρωτοτυπία της ταξινόμησης της θέσης εντοπισμού σε γραμμικά γεωμετρικά πρότυπα, προκύπτουν επιπλέον δυνατότητες καινοτομίας.

Καθώς η μηχανή ταξινομεί τα σημεία εντοπισμού θέσης σε γραμμές γνωστής γεωμετρίας, ο αναδρομικός υπολογισμός της αναλυτικής έκφρασης του ίχνους της τροχιάς προσφέρει εκτιμήσεις *γεωμετρικής εξομάλυνσης θέσης* (position estimation smoothing) σε πραγματικό χρόνο. Ως *εξομάλυνση θέσης πραγματικού χρόνου*, προτείνεται ο προσδιορισμός του σημείου επί της τρέχουσας γραμμής ταξινόμησης που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αντίστοιχη εκτίμηση θέσης. Η εφαρμογή αυτής της καινοτομίας κάτω από συνθήκες με μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον για την περιοχή της Πλοήγησης, όπως κακής λήψης δορυφορικού σήματος ή/και ολικής απώλειάς του, έδωσε κάποια πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα, ως προς τις διορθώσεις που παρείχε στις εκτιμήσεις θέσης σε πραγματικό χρόνο.

Τέλος, η προτεινόμενη μεθοδολογία βρήκε ουσιαστική εφαρμογή και στην αυτόματη εξαγωγή as-built γεωμετρικών στοιχείων χάραξης οδοποιίας, σε πραγματικό χρόνο, με ακριβή προσδιορισμό των σημείων εναλλαγής τους. Με βάση την εκπαίδευσή της, η μηχανή απέδωσε το ελάχιστο εύρος εντοπισμού του - υλοποιημένου στο έδαφος - σημείου συνένωσης δύο διαδοχικών στοιχείων χάραξης σε ποσοστό 60%.

Abstract

Concretely, *guidance* entails not navigation alone, but mainly the utilisation of the navigation solution for the maintenance of a moving vehicle course from one location to another. Technically, it depends heavily on the trajectory determination in 3D space which in effect, it concerns with two aspects; firstly, location information expressed at a suitable coordinate system and secondly, geometric information that shapes the path of the moving vehicle in a formation of a sequence of mathematical curves. Location information results directly from the navigation solution in a form of individual, consecutively distributed point fixes (position estimates), whereas geometric information can be extracted using various modelling approaches. Notwithstanding position estimation can be performed in real time, trajectory geometry is essentially determined *post-hoc*, as a real time procedure would infer trajectory geometry *identification* requiring *prior knowledge* of the *curvature* along the path nonetheless. In this frame, the following research venture discusses questions upon guidance, an interdisciplinary subject also known as *the art of navigation*.

More specifically, it proposes a methodology to perform geometry identification of a vehicle trajectory in real time. It is a work of synthesis of supervised machine learning and optimal state estimation for the real time classification of point fixes into appropriate geometric classes. On the basis of a categorisation axiom derived from attitude estimation, a Least Squares Support Vector Machine (LS-SVM) for pattern recognition classifies sequential position estimates into linear elements (such as straight lines, simple circular curves or lines of a curvature variation). Thus, the geometrical profile of the trajectory path is being identified while an Extended Kalman filter aboard a tightly coupled GNSS/INS system estimates vehicle kinematics. The elemental outcome from the application of the proposed methodology is the statistical estimation with which consecutive point fixes are constrained to belong to the same class of a linear pattern *beforehand*. Thence, the parametric equation of such a *geometrically recognised* line is simultaneously updated, as its fitting parameters are being recalculated after the classification of a successive point fix at the same class.

The training scheme is designed on learning features created from the *position-to-position* time-series of attitude delta values. Given that the value of the trajectory curvature is *a priori* unknown, the conception of this simple trick offers an implicit quantification of the curvature rate of change, delivering an intuitive solution to tackle this point at issue. Inherently, a great single asset of the proposed methodology is centred upon the learning features the classifier is trained on; thus classification prediction is less influenced by the quality of the navigation solution. Furthermore, prior knowledge of the geometric formation of a vehicle path implies knowledge of its trajectory smooth analytical expression; it implies a *real time positioning smoothing*, in other words.

In order to verify generalisation performance potentialities for the learning algorithm, a point classification application was implemented using real-world navigational data collected along a 120 km suburban railway track connecting Athens with Kiato at the north of Peloponnesus (Greece). According to the experimental results, two classifiers of different training length have both carried out a fine generalisation performance along unknown routes, recognising the linear pattern on any of the unseen point fixes at a level of 95%. Moreover, the implementation of the “real time positioning smoothing” in conditions of bad perception/outage of satellite signal delivered some significant corrections with regard to a post processed reference trajectory.

Πρόλογος

Σε πολλές φυσικές επιστήμες, εμπειρικά δεδομένα χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της φυσικής πραγματικότητας. Για την ακρίβεια, οι επιστήμες της *Μηχανικής* χρησιμοποιούν εμπειρικά δεδομένα (*μετρήσεις* ή *παρατηρήσεις*) για να περιγράψουν τη *μετρούμενη* πραγματικότητα. Η *ακρίβεια* στη περιγραφή της μετρούμενης πραγματικότητας εξαρτάται από τη ποιότητα και τη ποσότητα των διαθέσιμων μετρήσεων. Με εφαρμογή κατάλληλων μαθηματικών προτύπων η φυσική πραγματικότητα περιγράφεται ως *γενίκευση* της μετρούμενης. Η πληρότητα της περιγραφής της φυσικής πραγματικότητας εξαρτάται σημαντικά από το βαθμό που το επιλεγμένο μαθηματικό πρότυπο προσεγγίζει το φυσικό φαινόμενο.

Εννοιολογικά, η *Πλοήγηση* σχετίζεται με την πιστή περιγραφή της *κινηματικής* ή/και της δυναμικής κατάστασης ενός κινούμενου οχήματος και, είναι αδιαμφισβήτητα ένα από τα πλέον εφαρμοσμένα αντικείμενα της *Μηχανικής*. Τεχνικά, είναι το αποτέλεσμα μιας αναλυτικής διαδικασίας αξιοποίησης διαδοχικών παρατηρήσεων χρονικά μεταβαλλόμενων μεταβλητών που περιγράφουν τη κινηματική κατάσταση του οχήματος, με ουσιαστικό στόχο τον *έλεγχο της κίνησης* του. Τέτοιες μεταβλητές μεταξύ άλλων είναι η *θέση*, η *ταχύτητα* και η *επιτάχυνση*.

Η κίνηση στη γενική της μορφή είναι πολύπλοκο δυναμικό φαινόμενο. Ο έλεγχος της αφορά κατά βάση τη συνεχή και σε πραγματικό χρόνο εκτίμηση των μεταβλητών που τη περιγράφουν. Βασικοί αλγόριθμοι πλοήγησης συνδυάζουν μετρήσεις αυτών των παραμέτρων, με την εφαρμογή ενός μαθηματικού προτύπου που περιγράφει ικανοποιητικά την χρονική εξέλιξη της κίνησης ώστε τελικά, να προκύπτει η βέλτιστη εκτίμηση των τιμών τους. Η επιτυχημένη εφαρμογή τέτοιων αλγορίθμων εξαρτάται σημαντικά από την επιλογή αυτού του προτύπου, το οποίο θεωρητικά οφείλει να προσεγγίζει ουσιαστικά την πολυπλοκότητα της *πραγματικής* κινηματικής κατάστασης. Με μαθηματικούς όρους αυτό συνήθως εκφράζεται άλλοτε με γραμμικές και άλλοτε με μη γραμμικές εξισώσεις.

Σε πολλές περιπτώσεις, η έννοια της πλοήγησης εμπεριέχει και την έννοια της καθοδήγησης προς ορισμένη κατεύθυνση και συνεπώς, η αναγνώριση και ταυτοποίηση της γεωμετρίας της τροχιάς ενός οχήματος, σε πραγματικό μάλιστα χρόνο, είναι κρίσιμο στοιχείο ελέγχου της κίνησης για πληθώρα εφαρμογών.

Η Πλοήγηση ως διεπιστημονικό αντικείμενο της *Μηχανικής*, έχει προεκτάσεις τόσο στους χώρους της Γεωδαισίας και της Γεωπληροφορικής όσο και σε περιοχές της Σύγχρονης Θεωρίας Ελέγχου Συστήματος. Εδώ, βρίσκεται κι η ουσία αυτής της ερευνητικής προσπάθειας. Οι εναλλακτικές μεθοδολογίες που προτείνει για την αντιμετώπιση ζητημάτων πλοήγησης και καθοδήγησης, βασίζονται στη *σύνθεση* εργαλείων και θεωριών από διαφορετικά, από μη συγγενή επιστημονικά πεδία. Επιχειρεί με την εφαρμογή της απλούστερης το δυνατόν τακτικής σύνθεσης να συνεισφέρει ουσιαστικά στην αντιμετώπιση ζητημάτων ελέγχου κινούμενων συστημάτων.

ΜΕΡΟΣ Α

Θεωρητικό Υπόβαθρο

Κεφάλαιο 1^ο

Εισαγωγή

1.1 Ορισμός του προβλήματος

Η ασφαλής πλοήγηση ενός οχήματος εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ακρίβεια περιγραφής της κινηματικής του κατάστασης. Αυτό είναι συνάρτηση τόσο των τεχνικών χαρακτηριστικών των αισθητήρων που συνιστούν το σύστημα εντοπισμού, όσο και της καλής γνώσης του φυσικού συστήματος της κίνησης, το οποίο συνήθως περιγράφεται από προκαθορισμένα μαθηματικά πρότυπα.

Ο έλεγχος της κίνησης ενός οχήματος αφορά κατά βάση την μελέτη ενός δυναμικού συστήματος. Η μαθηματική μορφοποίηση του προβλήματος είναι πολύπλοκη διαδικασία καθώς, η κίνηση είναι γενικώς πολύπλοκο φυσικό φαινόμενο, και ως εκ τούτου, η *εκ των προτέρων* γνώση της *πραγματικής* κινηματικής δεν είναι διαθέσιμη. Λόγω αυτής της πολυπλοκότητας, είναι δύσκολο και υπολογιστικά ασύμφορο να προσεγγιστεί πιστά το αναλυτικό της μοντέλο με μαθηματικές εξισώσεις. Μια πρακτική προσέγγιση είναι η εφαρμογή ενός *γραμμικού* δυναμικού μοντέλου και με βάση αυτό, η εκτίμηση των κινηματικών μεταβλητών πραγματοποιείται με μια μεθοδολογία βελτιστοποίησης μετρήσεων τους. Όταν ο χρόνος των υπολογισμών συμπίπτει με το χρόνο της τελευταίας μέτρησης, η διαδικασία καλείται *φιλτράρισμα*. Ο πιο διάσημος αλγόριθμος βέλτιστης εκτίμησης είναι το *φίλτρο Kalman*, που σε σύλληψη και ουσιαστική εφαρμογή είναι μία γραμμική διαδικασία βελτιστοποίησης [63, 64, 59, 61]. Η εξαιρετικά επιτυχημένη εφαρμογή του απαντάται σε πληθώρα ζητημάτων πλοήγησης. Για την εφαρμογή του φίλτρου σε μη γραμμικές κινήσεις αναπτύχθηκαν διάφορες παραλλαγές του και πολλές εφαρμογές επωφελήθηκαν από αυτές. Ωστόσο, το ζήτημα σχεδιασμού ενός μη γραμμικού αλγόριθμου πλοήγησης είναι στη γενικότητά του ανοιχτό.

Η καθοδήγηση ενός οχήματος προς μια κατεύθυνση γίνεται ασφαλής καθόσον, σημαντικές πληροφορίες για την κινηματική του κατάσταση γίνονται διαθέσιμες μέσω της λύσης πλοήγησης. Πολλές εφαρμογές καθοδήγησης απαιτούν επιπλέον πληροφορία που συνήθως προκύπτει από τον έλεγχο της τροχιάς του. Ένα παράδειγμα είναι αποστολές (επανδρωμένων ή και μη) σκαφών προκαθορισμένης τροχιάς. Ο προσδιορισμός της τροχιάς κίνησης αφορά κατά κύριο λόγο δύο στοιχεία· πληροφορία θέσης, που προκύπτει απευθείας από τη λύση πλοήγησης, και γεωμετρική πληροφορία σε μια σειρά μαθηματικών καμπυλών που διαμορφώνει το ίχνος του περάσματος του κινούμενου οχήματος. Η γεωγραφική θέση όμως είναι σημειακή οντότητα ενώ το ίχνος είναι γραμμική. Ο έλεγχος της τροχιάς σε πραγματικό χρόνο συνεπώς, συνδέεται και με την δυνατότητα εκχώρησης της γεωγραφικής θέσης (ταξινόμηση) σε κατάλληλα γραμμικά γεωμετρικά στοιχεία.

Η εργασία που ακολουθεί επιχειρεί να αντιμετωπίσει αυτά τα ζητήματα, συνθέτοντας μεθόδους επιβλεπόμενης μηχανικής μάθησης και τεχνικές μαθηματικού προγραμματισμού.

1.2 Οι διεπιστημονικές διαστάσεις του προβλήματος

Η Μηχανική είναι η επιδεξιότητα και η *τέχνη* της εφαρμογής επιστημονικής γνώσης από τις περιοχές της φυσικής και των μαθηματικών για τον σχεδιασμό κατάλληλων *δομών*, ως λύση ενός τεχνικού προβλήματος. Ο σχεδιασμός τέτοιων δομών απαιτεί *σύνθεση* γνώσης, που σε πολλές περιπτώσεις προέρχεται από διαφορετικά επιστημονικά πεδία. Η σύνθεση είναι θεμελιώδης αρχή για όλες τις επιστήμες της μηχανικής.

Έλεγχος κινούμενου συστήματος και πλοήγηση είναι ταυτιζόμενα ζητήματα. Συνεπώς, η μελέτη των υποκείμενων φυσικών νόμων της κίνησης, είναι πολύ μεγάλης σημασίας για την θεωρητική θεμελίωση της προτεινόμενης λύσης. Η κίνηση είναι *δυναμικό φυσικό φαινόμενο* και ως εκ τούτου, ο έλεγχος ενός κινούμενου οχήματος αφορά τη μελέτη ενός *δυναμικού συστήματος* [28, 100]. Η κατάσταση ενός δυναμικού συστήματος μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο, και με μαθηματικούς όρους ένα δυναμικό σύστημα ορίζεται όταν ένα ντετερμινιστικό μοντέλο περιγράφει με πληρότητα την χρονική εξέλιξη της παρούσας κατάστασης με την αμέσως μελλοντική. Ο βαθμός προσέγγισης της πραγματικότητας από το δυναμικό μοντέλο είναι πολύ μεγάλης σημασίας για την απόδοση του σχεδιασμού ελέγχου. Σχετικά προσφάτως, επιχειρείται η διαχείριση πολύπλοκων δυναμικών συστημάτων με μεθόδους από την περιοχή της Τεχνητής Νοημοσύνης. Αλγόριθμοι *επιβλεπόμενης μηχανικής μάθησης* επιχειρούν να *συλλάβουν* τις ιδιαιτερότητες ενός τέτοιου συστήματος, ώστε να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν με αναλυτικό τρόπο τη συμπεριφορά του.

Ο διαρκής επαναπροσδιορισμός της εκτίμησης της κινηματικής κατάστασης ως λύση πλοήγησης, προϋποθέτει την διαθεσιμότητα πλεονασματικών μετρήσεων παραμέτρων της κινηματικής, οι οποίες συνήθως δεν είναι απολύτως συμβατές μεταξύ τους. Για να επιτευχθεί η μοναδικότητα της λύσης εφαρμόζεται μια διαδικασία διόρθωσης, που στη Γεωδαισία είναι γνωστή ως *Συνόρθωση*. Αντικείμενο της συνόρθωσης είναι ο βέλτιστος συνδυασμός των παρατηρήσεων με τις εκτιμήσεις των παραμέτρων. Είναι δηλαδή μια διεργασία *βελτιστοποίησης* και ανήκει σε μία ομάδα παρόμοιων διαδικασιών που είναι γνωστή ως *Μαθηματικός Προγραμματισμός* [123, 132]. Σύγχρονοι αλγόριθμοι βέλτιστης εκτίμησης της κατάστασης ενός κινούμενου συστήματος αναγνωρίζουν την τυχαία συμπεριφορά του και θέτουν κάποιες στοχαστικές υποθέσεις για τις ιδιότητες τόσο του δυναμικού, όσο και του συναρτησιακού μοντέλου που συνδέει τις παραμέτρους της κινηματικής με τις μετρήσεις τους. Ο έλεγχος συστήματος με αυτή την αντίληψη απαντάται στη πλειοψηφία των θεμάτων πλοήγησης με την εφαρμογή του *φίλτρου Kalman*.

1.3 Συμβολή

Η κύρια συμβολή της εργασίας στο ζήτημα ελέγχου κινούμενου συστήματος εντοπίζεται στην προτεινόμενη εναλλακτική αλγοριθμική προσέγγιση ως προς την εξομάλυνση του διανύσματος κατάστασης σε πραγματικό χρόνο. Αυτό επιτυγχάνεται συμπεριλαμβάνοντας στη συνολική διαδικασία ελέγχου την αναγνώριση και ταυτοποίηση της γεωμετρίας της τροχιάς κίνησης, μέσω της εφαρμογής ενός ιδιαίτερα ενδιαφέροντος αλγόριθμου επιβλεπόμενης μηχανικής μάθησης' τις *Μηχανές Διανυσμάτων Υποστήριξης* (Support Vector Machines, SVM) [137, 104, 109].

Οι επικρατούσες αλγοριθμικές τάσεις εκτίμησης της κατάστασης πλοήγησης ως και σήμερα, είναι συγκεντρωμένες γύρω από την διαδικασία φιλτραρίσματος Kalman' μια διαδικασία που για την Πλοήγηση νοείται ως διαδικασία βελτιστοποίησης πραγματικού χρόνου και μόνον. Αντιθέτως, για

την θεωρία Kalman η αντίληψη “εξομάλυνση” νοείται ως διαδικασία βελτιστοποίησης εκ των υστέρων. Με αυτό ως δεδομένο, η εργασία αποτελεί ουσιαστική μελέτη πάνω στους τεχνικούς περιορισμούς της θεωρίας φιλτραρίσματος.

Μεταξύ άλλων, οι Μηχανές Διανυσμάτων Υποστήριξης παρουσιάζουν ξεχωριστό ενδιαφέρον, λόγω των εμφανών πλεονεκτημάτων τους σε σχέση με άλλους αλγόριθμους επιβλεπόμενης μηχανικής μάθησης. Σε εφαρμογές πλοήγησης κατά το πρόσφατο παρελθόν, οι Μηχανές Διανυσμάτων Υποστήριξης έχουν χρησιμοποιηθεί μόνον σε εργασίες ανέλιξης (regression) για τη προτυποποίηση ολισθήσεων αδρανειακών αισθητήρων [145, 45, 44, 125, 146].

Με την εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογία, το πρόβλημα της αναγνώρισης της γεωμετρίας της τροχιάς κίνησης “σημείο θέσης προς σημείο θέσης” σε πραγματικό χρόνο, συνδέεται με την δυνατότητα ταξινόμησης της γεωγραφικής θέσης σε κατάλληλα γραμμικά γεωμετρικά στοιχεία. Πρόκειται ουσιαστικά για πρόβλημα αναγνώρισης προτύπου (pattern recognition). Μέθοδοι μηχανικής μάθησης για εργασίες αναγνώρισης προτύπου (ταξινόμηση) στην περιοχή της Γεωπληροφορικής, χρησιμοποιήθηκαν κυρίως στη Τηλεπισκόπηση και στη Φωτογραμμετρία. Παραδείγματα είναι η *όραση υπολογιστών* [102, 31, 144, 92] και η *αναγνώριση ακμών* σε ψηφιακές φωτογραφικές απεικονίσεις [40, 69, 20], αντιστοίχως. Η προτεινόμενη λύση αφορά την ταξινόμηση κάθε νέας γεωγραφικής θέσης (σημειακή οντότητα) σε κλάσεις (κατηγορίες) γεωμετρικών καμπυλών (γραμμική οντότητα). Καθώς, η χρήση μοντέλων αναγνώρισης προτύπου, στους χώρους της Γεωδαισίας, αφορούν κυρίως φωτογραμμετρικές εφαρμογές και εφαρμογές τηλεπισκόπησης, η προτεινόμενη προσέγγιση ταξινόμησης μπορεί να θεωρηθεί πρωτοποριακή για τη περιοχή της Πλοήγησης.

Τέλος, η μεθοδολογία της σημειακής ταξινόμησης βρίσκει εφαρμογή στην αυτόματη εξαγωγή των υλοποιημένων στο έδαφος γεωμετρικών στοιχείων χάραξης Οδοποιίας (σε πραγματικό χρόνο)´ ένα πρόβλημα το οποίο συγκεντρώνει μεγάλο τεχνικό ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια [65, 129, 114, 115].

1.4. Δομή του κειμένου

Το κείμενο αναπτύσσεται σε δυο μέρη. Το πρώτο μέρος περιέχει το μαθηματικό υπόβαθρο όλων των μεθόδων και των τεχνικών που εφαρμόστηκαν για την ανάπτυξη των προτεινόμενων αλγορίθμων. Το δεύτερο, περιέχει με λεπτομέρειες τους πειραματικούς σχεδιασμούς, την ανάλυση των παρεχόμενων δεδομένων, την στρατηγική ανάπτυξης των αλγορίθμων, αποτελέσματα και τελικά, συμπεράσματα για την προτεινόμενη μεθοδολογία, ως προς την αντιμετώπιση καίριων προβλημάτων πλοήγησης και καθοδήγησης.

Στο πρώτο μέρος, το εισαγωγικό πρώτο κεφάλαιο ακολουθούν ενότητες που περιγράφουν με ουσιαστικές λεπτομέρειες το θεωρητικό υπόβαθρο που διέπει τις επιμέρους μεθόδους που τέθηκαν σε εφαρμογή κατά τον σχεδιασμό της προτεινόμενης προσέγγισης. Πιο συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 2 γίνεται αναφορά στον ορισμό της κίνησης ως φυσικό φαινόμενο´ στην μαθηματική έννοια της κινηματικής κατάστασης υλικού σημείου, καθώς επίσης και στους βασικούς ορισμούς των εννοιών πλοήγησης, καθοδήγησης και των θεωρητικών υποβάθρων τους. Το Κεφάλαιο 3 περιέχει το μαθηματικό υπόβαθρο της έννοιας της βελτιστοποίησης και τα βασικά περιεχόμενα από τις Θεωρίες Βέλτιστης Εκτίμησης Κατάστασης και Βέλτιστου Στοχαστικού Ελέγχου. Τέλος, το Κεφάλαιο 4 περιγράφει τα μαθηματικά πρότυπα της μεθοδολογίας επιβλεπόμενης μηχανικής μάθησης που εφαρμόστηκε.

Στο δεύτερο μέρος ακολουθούν οι τεχνικές λεπτομέρειες της προτεινόμενης προσέγγισης. Συγκεκριμένα, το Κεφάλαιο 5 περιέχει σε πλήρη ανάπτυξη την ερευνητική ιδέα της παρούσας εργασίας και παρουσιάζει με λεπτομέρειες τα δομικά στοιχεία της σύστασής της. Το Κεφάλαιο 6 περιέχει την πλήρη περιγραφή της πειραματικής διάταξης συλλογής κινηματικών δεδομένων. Περιέχει επίσης και την ανάλυση των εκτιμήσεων των κινηματικών παραμέτρων, η ποιότητα των οποίων είναι κρίσιμο στοιχείο για την εφαρμογή του σχεδίου της σημειακής ταξινόμησης. Το Κεφάλαιο 7 περιέχει την αλγοριθμική υλοποίηση της προτεινόμενης μεθοδολογίας. Κυρίως όμως, εμβαθύνει στη διαδικασία εκπαίδευσης της μηχανής απόφασης ταξινόμησης της τρέχουσας εκτίμησης θέσης σε κάποιο γραμμικό πρότυπο επιχειρώντας να σημειώσει την κρισιμότητα της εκπαίδευσης και τον ουσιαστικό ρόλο της στην απόδοση της μηχανής. Στο Κεφάλαιο 8 επιχειρείται μια αξιολόγηση της ουσιαστικής εφαρμογής της προτεινόμενης μεθοδολογίας σε πραγματικές συνθήκες, μέσα από την παρουσίαση των αποτελεσμάτων ταξινόμησης που επιτυγχάνουν δύο διαφορετικές ως προς την έκταση της εκπαίδευσής τους μηχανές. Η εφαρμοσιμότητα των υλοποιημένων μηχανών ελέγχεται από την απόδοση γενίκευσης που επιτυγχάνουν, δηλαδή από την απόδοση ταξινόμησης πάνω σε δεδομένα εκτίμησης θέσης από τροχιές οι οποίες δεν ήταν μέρος της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Στη συνέχεια, το Κεφάλαιο 9 παρουσιάζει μια σειρά ενδεικτικών αποτελεσμάτων της εφαρμογής της ταξινόμησης σημείων εκτίμησης θέσης σε γραμμικά πρότυπα πάνω σε βασικά τεχνικά ζητήματα πλοήγησης και καθοδήγησης. Τέλος, στο Κεφάλαιο 10 επιχειρείται μια ουσιαστική αποτίμηση αυτής της ερευνητικής προσπάθειας και η συνολική αξιολόγηση της προτεινόμενης μεθοδολογίας και των επιμέρους δομικών συστατικών της.

Κεφάλαιο 2ο

Κίνηση, Κινηματική και Πλοήγηση

2.1 Κίνηση και Κινηματική

Η κίνηση περιγράφεται ως η αλλαγή της θέσης σε σχέση με το χρόνο. Ένα υλικό σημείο κινείται όταν αλλάζει θέση ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων, το οποίο θεωρείται ακίνητο. Όλες οι κινήσεις είναι σχετικές και κίνηση για την οποία δεν αναφέρεται το σύστημα αναφοράς δεν έχει έννοια για τη Φυσική επιστήμη. Η κίνηση είναι αλληλουχία συμβάντων, δηλαδή σημείων χρονοσειράς διανυσμάτων θέσης $\{\vec{r}, t\}$ σε ένα χώρο τεσσάρων διαστάσεων. Οι έννοιες του χώρου και του χρόνου είναι θεμελιώδεις αλλά ο πλήρης ορισμός τους επιχειρείται μόνο σε φιλοσοφικό επίπεδο. Ο χώρος και ο χρόνος θεωρούνται ομογενείς.

Η κινηματική (kinematics) εξετάζει τις κινήσεις ενός υλικού σημείου στο χώρο, χωρίς να εξετάζει το αίτιο που τις προκαλεί. Σε αντίθεση, η δυναμική (dynamics) εξετάζει και το φυσικό αίτιο που προκαλεί τη κίνηση, δηλαδή τις δυνάμεις που επενεργούν στο υλικό σημείο [100, 28].

Ουσιαστικά, η κινηματική περιγράφει τη γεωμετρία της κίνησης καθώς η θέση ενός υλικού σημείου στο χώρο καθορίζεται για κάθε χρονική στιγμή από το διάνυσμα θέσης \vec{r} . Οι παραμετρικές συνιστώσες του διανύσματος θέσης σε καρτεσιανό σύστημα αναφοράς με παράμετρο τον χρόνο, είναι

$$r_x(t), \quad r_y(t), \quad r_z(t).$$

Αυτές μπορεί να έχουν την μορφή συναρτήσεων. Σε αυτή τη περίπτωση αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς κίνησης. Όταν οριστούν, μια κίνηση τριών βαθμών ελευθερίας είναι δεδομένη. Αν το υλικό σημείο από θέση με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ τη χρονική στιγμή t , μετακινείται μετά από χρόνο dt στη θέση με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t + dt)$, τότε παρατηρείται μεταβολή του διανύσματος θέσης κατά

$$d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t).$$

Το διάνυσμα $\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ορίζει την ταχύτητα του υλικού σημείου σε κίνηση τριών βαθμών ελευθερίας, που σε μορφή παραμετρικών εξισώσεων είναι

$$\frac{d r_x(t)}{dt}, \quad \frac{d r_y(t)}{dt}, \quad \frac{d r_z(t)}{dt}.$$

Ένα υλικό σημείο είναι δυνατόν να υπόκειται σε κάποιους δεσμούς και έτσι να έχει δύο ή και ένα βαθμό ελευθερίας. Ένα βαθμός ελευθερίας, δηλαδή μεταβολή θέσης προς μία κατεύθυνση είναι η ελάχιστη απαίτηση για να οριστεί μια κίνηση.

Η ποσότητα \vec{r} έχει μέτρο καθώς και διεύθυνση. Η διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας συμπίπτει με τη διεύθυνση του $d\vec{r}$. Στο όριο $dt \rightarrow 0$ το σημείο με διάνυσμα θέσης \vec{r} τείνει να συμπίπτει στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t + dt)$ και συνεπώς, το διάνυσμα της ταχύτητας είναι εφαπτόμενο της τροχιάς στο σημείο με διάνυσμα θέσης \vec{r} . Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο διαφορικός ορισμός της ταχύτητας θεωρείται η βασική περιγραφή του φαινομένου της κίνησης. Ως εκ τούτου, η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$dr(t) = \dot{r}(t)dt$$

δίδει και τη μεταβολή της θέσης του υλικού σημείου σε χρόνο dt . Αν είναι εκ των προτέρων γνωστή η μαθηματική έκφραση του $\dot{r}(t)$, όπως επίσης και οι συνθήκες αρχικοποίησης, δηλαδή η θέση αρχής r_0 στον χρόνο t_0 , τότε με ολοκλήρωση στα δύο μέρη της εξίσωσης η μεταβολή της θέσης είναι

$$r(t) = \int_{t_0}^t \dot{r} dt.$$

Επίσης, αν στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t + dt)$ η ταχύτητα έχει μεταβληθεί κατά

$$d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r},$$

το διάνυσμα $\vec{\dot{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ορίζει την επιτάχυνση του υλικού σημείου σε χρόνο dt και η μεταβολή της ταχύτητας προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης

$$\dot{r}(t) = \int_{t_0}^t \ddot{r} dt.$$

Αν το υλικό σημείο κινείται σε καμπύλη τροχιά από θέση με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ τη χρονική στιγμή t , μετακινείται μετά από χρόνο dt στη θέση με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t + dt)$ και η ακτίνα του διαγράφει γωνία $d\varphi$. Η γωνιακή ταχύτητα ενός υλικού σημείου ορίζεται από το διάνυσμα $\vec{\omega}$ με μέτρο

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Είναι αξονικό διάνυσμα και η διεύθυνσή του είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς. Αντίστοιχα, η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\dot{\omega}}$ ορίζεται από το διάνυσμα $\vec{\dot{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$.

Τα παραμετρικά μεγέθη της θέσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης (σε αρκετές περιπτώσεις και η γωνιακή ταχύτητα ή/και η γωνιακή επιτάχυνση) συγκροτούν την γενική περιγραφή της κινηματικής κατάστασης ενός συστήματος με τη μορφή ενός διανύσματος κατάστασης $x(t)$, δηλαδή

$$x(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \\ \ddot{r}(t) \end{bmatrix}.$$

Ο έλεγχος ενός τέτοιου συστήματος πραγματοποιείται με την σε πραγματικό, ή σχεδόν πραγματικό χρόνο, εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης.

Η μαθηματική προτυποποίηση της κινηματικής προϋποθέτει την *εκ των προτέρων γνώση* της αναλυτικής έκφρασης της ταχύτητας ή/και της επιτάχυνσης, καθώς και των συνθηκών αρχικοποίησης τους [124, 28, 27]. Αν είναι γνωστό ότι τα διανύσματά τους έχουν σταθερό ή γραμμικά μεταβαλλόμενο μέτρο κατά τη διάρκεια όλης της κίνησης τότε οι εξισώσεις κίνησης είναι πρωτοβάθμιες διαφορικές εξισώσεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας κίνησης στη φύση είναι η ελεύθερη πτώση από ορισμένο ύψος, καθώς η μοναδική δύναμη που ουσιαστικά ενεργεί στο κινούμενο σύστημα (αν αγνοηθούν δυνάμεις όπως η αντίσταση του αέρα) είναι η βαρυτική. Όμως, η γραμμικότητα στα φαινόμενα κίνησης απαντάται μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, διότι οι δυνάμεις που συνολικά επενεργούν σε ένα κινούμενο σώμα είναι γενικά άγνωστες.

2.2. Συστήματα Αναφοράς

Για τη μελέτη και περιγραφή ενός φαινομένου κίνησης προϋποτίθεται ένα δεξιόστροφο τρισσορθογώνιο *σύστημα αναφοράς συντεταγμένων* (coordinate reference system). Στη πράξη, υλοποιείται ορίζοντας το σημείο αρχής και τον προσανατολισμό (με τον κανόνα του δεξιού χεριού) των τριών αξόνων, δημιουργώντας το *πλαίσιο* (frame) στο οποίο μπορεί να περιγραφεί η κίνηση.

Αυτό αρκεί ώστε να προσδιορίζονται η θέση και ο προσανατολισμός κάθε αντικειμένου, όσο η κίνησή του εξελίσσεται. Σύμφωνα με το *αξίωμα της σχετικότητας* όλοι οι φυσικοί νόμοι έχουν την ίδια ισχύ για όλους τους παρατηρητές.

Η Πλοήγηση είναι και πρόβλημα πολλαπλών μετασχηματισμών μεταξύ διαφορετικών συστημάτων αναφοράς, καθώς οι διάφοροι αισθητήρες που παρέχουν τις απαραίτητες μετρήσεις για τις παραμέτρους κίνησης αναφέρονται σε διαφορετικά συστήματα. Ωστόσο, ο χρήστης ζητά να γνωρίζει τη θέση ή/και την ταχύτητά του ως προς τη Γη και συνεπώς, η σχέση μεταξύ των διαφορετικών συστημάτων συντεταγμένων πρέπει να είναι καταλλήλως ορισμένη.

Κάθε πρόβλημα πλοήγησης εμπλέκει τουλάχιστον δύο συστήματα συντεταγμένων: το σύστημα του κινούμενου αντικειμένου και το σύστημα που αναφέρεται η κίνησή του. Το *πλαίσιο αντικειμένου* (objective frame) περιγράφει μετρητικά το σώμα του αντικειμένου του οποίου η θέση ή/και ο προσανατολισμός ζητείται· το *πλαίσιο αναφοράς της κίνησης* (motion reference frame) περιγράφει έναν πρότυπο γεωμετρικό σχηματισμό, όπως ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής ή ένα επίπεδο, σε σχέση με τον οποίο είναι επιθυμητός ο προσδιορισμός της θέσης ή/και του προσανατολισμού του αντικειμένου [16, 107, 7, 110].

2.2.1 Αδρανειακά Συστήματα Συντεταγμένων

Σύμφωνα με το πρώτο αξίωμα της Μηχανικής, το σύστημα αναφοράς για το οποίο ισχύει το *αξίωμα της αδράνειας* ονομάζεται *αδρανειακό* ή *νευτώνειο* σύστημα [53, 71, 112]. Στα αδρανειακά συστήματα όταν ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα και δεν επιδράσει επάνω του καμία δύναμη θα εξακολουθεί να εκτελεί την ίδια κίνηση. Το *αξίωμα της σχετικότητας* ισχύει και για τα αδρανειακά συστήματα. Συνήθως, χρησιμοποιείται σύστημα αναφοράς σταθερά συνδεδεμένο με τη Γη, παρόλο που ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι ακριβώς αδρανειακό. Πρακτικά όμως, χρησιμοποιείται ως αδρανειακό, καθώς πρόκειται για μια ικανοποιητική προσέγγιση για εφαρμογές πλοήγησης. Αυτή η ειδική περίπτωση αδρανειακού συστήματος είναι γνωστή ως *Γεωκεντρικό Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς* (Earth-Centred Inertial frame, ECI), με την αρχή του τρισσορθογώνιου συστήματος τοποθετημένη στο κέντρο μάζας της Γης και προσανατολισμό σύμφωνα με τον άξονα περιστροφής της. Ο άξονας z συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής και διέρχεται από τον πραγματικό Βόρειο Πόλο (όχι τον μαγνητικό). Οι άξονες x και y βρίσκονται πάνω στο ισημερινό επίπεδο σε γωνία 90 μοιρών, δεν περιστρέφονται με τη Γη ενώ ο άξονας y προηγείται πάντα του άξονα x κατά την διεύθυνση της περιστροφής. Για απλά προβλήματα Μηχανικής η κίνηση μοντελοποιείται σε σχέση με τη Γη, όσο ισχύει η υπόθεση ότι το ECI μπορεί να θεωρηθεί αδρανειακό σύστημα αναφοράς, αγνοώντας την περιστροφή της. Για κάποιες εφαρμογές πλοήγησης όμως, αυτό δεν είναι αρκετό δεδομένου ότι η περιστροφή της Γης έχει σημαντική επίπτωση στους υπολογισμούς της λύσης.

2.2.2 Γεωκεντρικό Γεωσταθερό Σύστημα Αναφοράς

Το *Γεωκεντρικό Γεωσταθερό* σύστημα συντεταγμένων (Earth-Centered Earth-Fixed frame, ECEF) [128, 71, 7], συνήθως συντεταγμένο ως *Σύστημα Συντεταγμένων της Γης* (Earth frame), είναι παρόμοιο με το ECI με την διαφορά ότι οι τρεις άξονες παραμένουν σταθερά προσανατολισμένοι σε σχέση με τη γεωμετρία της Γης. Η αρχή των αξόνων τοποθετείται στο κέντρο του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής που προτυποποιεί την επιφάνεια της Γης και που κατά προσέγγιση βρίσκεται στο κέντρο μάζας της.

Ο άξονας z συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής και διέρχεται από την αρχή των αξόνων προς τον πραγματικό Βόρειο Πόλο. Ο άξονας x άγεται από την αρχή των αξόνων προς το σημείο τομής του ισημερινού με τον *Μεσημβρινό Αναφοράς* (International Reference Meridian – IRM), ο οποίος διατηρείται από την *Διεθνή Υπηρεσία IERS* (International Earth Rotation and Reference System Service) και προσδιορίζει την καμπύλη μηδενικού γεωγραφικού μήκους. Ο άξονας y απλώς συμπληρώνει το δεξιόστροφο τρισσορθογώνιο σύστημα προς την ανατολή. Το ECEF που ορίζεται από τον *Συμβατικό Γήινο Πόλο* (Conventional Terrestrial Pole - CTP) και τον *Μεσημβρινό Αναφοράς* είναι γνωστό ως *Συμβατικό Γήινο Σύστημα Αναφοράς* (Conventional Terrestrial Reference System – CTRS). Το συμβατικό γήινο πλαίσιο αναφοράς που υλοποιήθηκε και διατηρείται από την Υπηρεσία IERS και χρησιμοποιείται σήμερα σχεδόν αποκλειστικά για επιστημονικούς, αλλά και για πρακτικούς σκοπούς, είναι το *Διεθνές Γήινο Πλαίσιο Αναφοράς* (International Terrestrial Reference Frame – ITRF) [19]. Διάφορα βασικά συστήματα αναφοράς που χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές πλοήγησης με αξιοποίηση δεδομένων *Παγκόσμιων Δορυφορικών Συστημάτων Πλοήγησης* (Global Navigation Satellite Systems – GNSS), υλοποιούνται σύμφωνα με το ITRF (WGS84, GTRF κ.α.) [75].

2.2.3 Τοποκεντρικά Συστήματα Συντεταγμένων

Ένα *Τοποκεντρικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς* (Local Geodetic System) έχει σημείο αρχής κάποιο σταθερό σημείο της Γης. Όταν αυτό ανήκει στην επιφάνειά της, ορίζεται ένα εφαπτόμενο (στο ελλειψοειδές αναφοράς) *οριζόντιο* επίπεδο, πάνω στο οποίο διαγράφονται οι άξονες του πλαισίου. Ο άξονας z ή άξονας- D (Down axis) διέρχεται από το σημείο αρχής και χονδρικά κατευθύνεται προς το κέντρο μάζας της Γης κάθετα στο ελλειψοειδές αναφοράς και προς την κατεύθυνση του διανύσματος της βαρύτητας. Αυτό ισχύει εφαρμόζοντας απλά βαρυτικά μοντέλα καθώς η πραγματική βαρύτητα αποκλίνει κατά τόπους ελαφρώς, λόγω διάφορων παρατηρούμενων ανωμαλιών. Ο άξονας x ή άξονας- N (North axis) ορίζεται από την προβολή του μεσημβρινού που διέρχεται από την αφετηρία του συστήματος. Ο άξονας y συμπληρώνει το δεξιόστροφο τρισσορθογώνιο σύστημα προς την ανατολή και είναι γνωστός ως άξονας- E (East axis). Ένα τοποκεντρικό σύστημα αξόνων- NED είναι η πιο συνηθισμένη μορφή τοπικού συστήματος, όμως είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν και άλλες μορφές τέτοιων συστημάτων όπως άξονες- ENU (east-north-up) ή άξονες- SWD (south-west-down). Τα τοπικά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς χρησιμοποιούνται ευρέως για εφαρμογές πλοήγησης που εκτείνονται σε μικρής έκτασης περιοχές [52, 53].

2.2.4 Σύστημα Συντεταγμένων Σώματος

Το πλαίσιο που συνήθως χρησιμοποιείται και περιλαμβάνει την αφετηρία και τον προσανατολισμό του αντικειμένου για το οποίο αναζητείται λύση πλοήγησης, είναι γνωστό ως *σύστημα συντεταγμένων σώματος* (body frame) [17, 127, 21]. Έχει αρχή κάποιο σημείο για το οποίο αναζητείται λύση πλοήγησης, όπως για παράδειγμα κάποιο σημείο ενός αισθητήρα εντοπισμού ή το κέντρο μάζας του κινούμενου οχήματος που φέρει τον αισθητήρα, ωστόσο οι άξονες του παραμένουν σταθερά προσαρμοσμένοι σε σχέση με το σώμα του κινούμενου οχήματος. Ο άξονας x ορίζεται ως x -forward (εμπρός), συνήθως κατά την κατεύθυνση της κίνησης, ο άξονας z ορίζεται ως z -down (κάτω) στην κατεύθυνση της βαρύτητας και ο άξονας y ως y -right (δεξιά), συμπληρώνοντας ένα δεξιόστροφο τρισσορθογώνιο σύστημα. Για την *περιστροφική συμπεριφορά* (attitude) του σώματος, δηλαδή τις

γωνιακές του παρεκκλίσεις, ο άξονας x είναι ο άξονας διατοιχισμού (roll axis), ο άξονας y είναι ο άξονας προνευστασμού (pitch axis) και ο άξονας z ο άξονας εκτροπής (yaw axis). Στο μεγαλύτερο μέρος της σχετικής βιβλιογραφίας οι άξονες του πλαισίου αναφοράς σώματος σε κίνηση είναι γνωστοί ως άξονες-*roll-pitch-yaw*. Τα πλαίσια σώματος οχημάτων σε κίνηση είναι στοιχειώδη για την επιστήμη της Πλοήγησης, καθώς επιτρέπουν την γεωμετρική περιγραφή της κίνησης του οχήματος που πλοηγείται. Άλλωστε, όλοι οι προσδεμένοι στο σώμα του οργάνου αισθητήρες αδρανειακού εντοπισμού (strapdown inertial sensors) μετρούν μεγέθη που περιγράφουν τις κινήσεις του σώματος του οχήματος που επιβαίνουν, σε σχέση με κάποιο γενικό αδρανειακό πλαίσιο αναφοράς.

2.3 Κίνηση Στερεού Σώματος

Οι σχέσεις που περιγράφουν την κίνηση υλικού σημείου εφαρμόζονται και για τη μελέτη της κίνησης ενός στερεού σώματος. Αυτό μπορεί να συμβεί αν θεωρηθεί ότι ένα σώμα αποτελείται από νιοστό αριθμών σωματιδίων των οποίων οι αποστάσεις μεταξύ τους δεν μεταβάλλεται.

Για τη μελέτη κίνησης στερεού σώματος χρησιμοποιείται ένα ακίνητο σύστημα συντεταγμένων (τοπικό γεωδαιτικό, συμβατικό γήινο κ.ο.κ) και ένα κινούμενο, που είναι σταθερά συνδεδεμένο με το στερεό σώμα (body frame) και ως εκ τούτου συμμετέχει στη κίνησή του. Για την απλοποίηση του προβλήματος η αρχή του κινούμενου συστήματος συντεταγμένων βρίσκεται στο κέντρο μάζας του σώματος.

Η θέση του κέντρου μάζας του σώματος ως προς το ακίνητο σύστημα συντεταγμένων προσδιορίζεται από ένα διάνυσμα θέσης τριών συνιστωσών. Ο προσανατολισμός του κινούμενου συστήματος συντεταγμένων ως προς το ακίνητο προσδιορίζεται από τρεις ανεξάρτητες γωνίες. Συνεπώς ένα στερεό σώμα είναι ένα κινούμενο σύστημα έξι βαθμών ελευθερίας όπου η περιστροφική του συμπεριφορά περιγράφει τον προσανατολισμό του συστήματος του σώματος ως προς το σύστημα αναφοράς. Παράλληλα, η απεικόνιση της περιστροφικής συμπεριφοράς του σώματος παρέχει το βασικό εργαλείο μετασχηματισμού του διανύσματος κινηματικής κατάστασης από το ένα σύστημα στο άλλο. Ο πλέον εύληπτος τρόπος απεικόνισης της περιστροφικής συμπεριφοράς του πλαισίου του σώματος ως προς το πλαίσιο αναφοράς δίδεται με την περιγραφή των γωνιών *Euler*.

Η μητρώο μετασχηματισμού Euler επιμερίζεται σε τρεις διαδοχικές περιστροφές. Αυτό μπορεί να απεικονιστεί με τον μετασχηματισμό του διανύσματος συντεταγμένων θέσης $x_b^T = [x^b, y^b, z^b]$ από το πλαίσιο του σώματος b , στο διάνυσμα $x_n^T = [x^n, y^n, z^n]$ στο ακίνητο σύστημα αναφοράς n . Η πρώτη περιστροφή διαγράφει περί τον άξονα z -down την γωνία κατεύθυνσης του σώματος (*αζιμούθιο*), με συμβολισμό ψ_{nb} . Ο πρώτος μετασχηματισμός που πραγματοποιείται στο διάνυσμα θέσης είναι

$$\begin{bmatrix} x^\psi \\ y^\psi \\ z^\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^b \cos \psi_{nb} + y^b \sin \psi_{nb} \\ -x^b \sin \psi_{nb} + y^b \cos \psi_{nb} \\ z^b \end{bmatrix},$$

ο οποίος μεταβάλλει τις τιμές των συνιστωσών x και y , όμως αφήνει τη συνιστώσα z αμετάβλητη.

Στη συνέχεια πραγματοποιείται ο μετασχηματισμός που εμπλέκει την περιστροφή περί τον άξονα y -right, κατά την οποία διαγράφεται η γωνία *ανύψωσης* (προνευστασμός), με συμβολισμό θ_{nb} , είναι

$$\begin{bmatrix} x^\theta \\ y^\theta \\ z^\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^\psi \cos \theta_{nb} - z^\psi \sin \theta_{nb} \\ y^\psi \\ x^\psi \sin \theta_{nb} + z^\psi \cos \theta_{nb} \end{bmatrix},$$

και ο οποίος μεταβάλλει τις τιμές των συνιστωσών x και z .

Ο μετασχηματισμός του διανύσματος θέσης ολοκληρώνεται με την περιστροφή περί του άξονα x -

forward κατά την οποία διαγράφεται η γωνία διατοιχισμού, με συμβολισμό φ_{nb} , και ο οποίος είναι

$$\begin{bmatrix} x^n \\ y^n \\ z^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^\theta \\ y^\theta \cos\varphi_{nb} + z^\theta \sin\varphi_{nb} \\ -y^\theta \sin\varphi_{nb} + z^\theta \cos\varphi_{nb} \end{bmatrix}.$$

Στη πράξη, ο μετασχηματισμός του διανύσματος θέσης (ή κάθε διανύσματος κινηματικής κατάστασης) από το πλαίσιο του οχήματος στο πλαίσιο αναφοράς πραγματοποιείται με την εφαρμογή του *μητρώου συννημίτων κατεύθυνσης* ή *μητρώου μετασχηματισμού*, (coordinate transformation matrix) που συνήθως εμφανίζεται με τον συμβολισμό C ή R ή T . Ως εκ τούτου,

$$x^n = C_b^n x^b$$

όπου μετά τις πράξεις

$$C_b^n = \begin{bmatrix} \cos\theta_{nb}\cos\psi_{nb} & \cos\theta_{nb}\sin\psi_{nb} & -\sin\theta_{nb} \\ -\cos\varphi_{nb}\sin\psi_{nb} + \sin\varphi_{nb}\sin\theta_{nb}\cos\psi_{nb} & \cos\varphi_{nb}\cos\psi_{nb} + \sin\varphi_{nb}\sin\theta_{nb}\sin\psi_{nb} & \sin\varphi_{nb}\cos\theta_{nb} \\ \sin\varphi_{nb}\sin\psi_{nb} + \cos\varphi_{nb}\sin\theta_{nb}\cos\psi_{nb} & -\sin\varphi_{nb}\cos\psi_{nb} + \cos\varphi_{nb}\sin\theta_{nb}\sin\psi_{nb} & \cos\varphi_{nb}\cos\theta_{nb} \end{bmatrix}.$$

Η απεικόνιση της περιστροφικής συμπεριφοράς πραγματοποιείται και με άλλους τρόπους, όπως αναφορικά, με την χρήση ενός *τετραδικού αριθμού* (quaternion number) της μορφής $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$. Η ποσότητα q_0 συμβολίζει το μέγεθος της περιστροφής (rotation magnitude) και οι υπόλοιπες τρεις συνιστώσες αναπαριστούν τους άξονες περί των οποίων πραγματοποιείται η περιστροφή. Με μόνο τέσσερις μαθηματικές οντότητες να λαμβάνουν μέρος στους υπολογισμούς, η τετραδική απεικόνιση της περιστροφικής συμπεριφοράς παρέχει υπολογιστική ευελιξία. Ωστόσο, ο χειρισμός τετραδικών αριθμών δεν είναι ιδιαίτερα εύληπτος οπότε η χρήση τους αντί του πίνακα μετασχηματισμού δημιουργεί πολύπλοκες εξισώσεις πλοήγησης, αυξάνοντας την πιθανότητα λάθους. Ένας επίσης όχι τόσο εύληπτος τρόπος απεικόνισης της περιστροφικής συμπεριφοράς είναι με τη χρήση *διανυσμάτων περιστροφής* (rotation vectors) [53, 71, 21]. Αυτά είναι διανύσματα τριών συνιστωσών, διανυσματικών επίσης μεγεθών, η κατεύθυνση των οποίων προσδίδει τον προσανατολισμό των αξόνων περιστροφής και το μέγεθός τους την γωνία περιστροφής. Τόσο όμως οι τετραδικοί αριθμοί όσο και τα διανύσματα περιστροφής μπορούν να τροποποιηθούν σε πίνακες μετασχηματισμού. Τελικά, και για τη συντριπτική πλειοψηφία των εφαρμογών, ο μετασχηματισμός ενός διανύσματος κινηματικής κατάστασης οχήματος από το πλαίσιο του σώματός του στο πλαίσιο αναφοράς πραγματοποιείται με την χρήση του μητρώου μετασχηματισμού.

2.4 Πλοήγηση, Καθοδήγηση και Εντοπισμός

2.4.1 Βασικοί ορισμοί

Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν διάφοροι ορισμοί για την έννοια της πλοήγησης χωρίς ωστόσο, να έχει επισήμως διαμορφωθεί ένας καθολικός και γενικός ορισμός [53]. Αυτό συμβαίνει διότι στην έννοια της πλοήγησης συμπεριλαμβάνονται διάφορες αντιλήψεις. Με την υπόθεση ότι η διατύπωση “κάθε μέθοδος προσδιορισμού των κινηματικών χαρακτηριστικών (θέσης, ταχύτητας, προσανατολισμός) ή/και μέθοδος σχεδιασμού της πορείας ενός οχήματος (πλοίου, αεροπλάνου, αυτοκινήτου κτλ.) με εφαρμογή μεθοδολογιών από τους χώρους της Γεωμετρίας, της Αστρονομίας, των ραδιοσημάτων, κτλ” [1], αποτελεί τον καταλληλότερο ορισμό για την έννοια της πλοήγησης, τότε δύο σχετικές αντιλήψεις περικλείονται. Η πρώτη είναι ο υπολογισμός και προσδιορισμός της θέσης και

της ταχύτητας ενός κινούμενου αντικειμένου ως προς έναν γνωστό γεωμετρικό σχηματισμό αναφοράς (πλαίσιο αναφοράς). Αυτή η αντίληψη είναι γνωστή και ως η *επιστήμη της Πλοήγησης* (Navigation). Η δεύτερη αντίληψη είναι ο σχεδιασμός και η διατήρηση μιας πορείας από μία τοποθεσία σε μιαν άλλη, αποφεύγοντας εμπόδια και συγκρούσεις. Αυτή είναι γνωστή ως *καθοδήγηση* (guidance) ή *πιλοτάρισμα* (pilotage) ή *χάραξη πορείας* ανάλογα με το κινούμενο όχημα (routing), ή διαφορετικά ως η *τέχνη της Πλοήγησης*.

Εντοπισμός (positioning) είναι ο προσδιορισμός της θέσης ενός οχήματος σε κάποιο πλαίσιο αναφοράς, αλλά όχι της ταχύτητας ή της περιστροφικής συμπεριφοράς. Ωστόσο, ένα σημαντικό μέρος των τεχνολογιών πλοήγησης, παρόλο που σχεδιαστικά είναι αμιγώς τεχνολογίες εντοπισμού, εκτελούν μετρήσεις σε υψηλό ρυθμό, και με αυτόν τον τρόπο παρέχουν αξιόπιστους υπολογισμούς ταχύτητας από τον ρυθμό μεταβολής της θέσης. Ο εντοπισμός οχήματος με την έννοια της *παρακολούθησης θέσης* (tracking) διαφέρει από την αυστηρή έννοια της πλοήγησης, στο ότι η θέση και η ταχύτητα προσδιορίζεται από τρίτο μέρος χωρίς απαραίτητα αυτό να χρησιμοποιεί εξοπλισμό υπολογισμών στο όχημα που παρακολουθείται. Όμως, ένα σύστημα παρακολούθησης θέσης είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για εφαρμογές πλοήγησης, απλώς με το να μεταδίδει τις μετρήσεις θέσης και ταχύτητας στο κινούμενο όχημα. Ομοίως, ένα σύστημα πλοήγησης μπορεί να αξιοποιηθεί για εφαρμογές παρακολούθησης θέσης, μεταδίδοντας την λύση πλοήγησης σε ένα σταθμό παρακολούθησης [9, 8].

2.4.2 Βασικές Μέθοδοι Πλοήγησης

Μέθοδος πλοήγησης είναι ο συνδυασμός τεχνικών που αποσκοπεί στον προσδιορισμό της θέσης και της ταχύτητας ενός οχήματος είτε χειροκίνητα (πχ γραφικά), είτε με αυτοματοποίηση διάφορων αναλογικών ή ψηφιακών εργασιών. Οι περισσότερες τεχνικές πλοήγησης προκύπτουν από τους χώρους της Γεωδαισίας και βασίζονται σε δυο θεμελιώδεις μεθόδους: τον *προσδιορισμό σταθερού στίγματος* (position fixing) και την *εντοπισμό εξ' αναμετρήσεως* (dead reckoning) [7, 21, 39, 52]. Τα όρια ακρίβειας και για τις δύο μεθόδους εκφράζονται γεωμετρικά από τις ελλείψεις σφάλματος.

α. Προσδιορισμός Σταθερού Στίγματος

Ουσιαστικά πρόκειται για εντοπισμό θέσης. Η συσχέτιση φυσικών χαρακτηριστικών για παράδειγμα, είναι μια απλή μέθοδος, που εύκολα πραγματοποιείται από τον χρήστη, απλώς συγκρίνοντας γεωγραφικά χαρακτηριστικά στη ζητούμενη τοποθεσία (τοπωνύμια, υψόμετρα εδάφους κ.α.) με τα αντίστοιχα σε διαθέσιμους χάρτες, για τον κατά προσέγγιση προσδιορισμό της τρέχουσας θέσης. Τεχνικά, το φιξάρισμα θέσης πραγματοποιείται με μετρήσεις απόστασης εμβέλειας (range) ή/και διοπτύσεις (bearing) προς γνωστά σημεία. Ο υπολογισμός θέσης μπορεί συνεπώς να πραγματοποιηθεί με διοπτύσεις (μετρήσεις διεύθυνσης ως προς τον μαγνητικό ή τον πραγματικό Βορρά) προς δύο γνωστά σημεία αναφοράς, και με επιπλέον μέτρηση της γωνίας ανύψωσης (ως προς το οριζόντιο επίπεδο) ενός από τα σημεία αναφοράς. Ο χρήστης τότε βρίσκεται στη τομή των κατευθύνσεων από τα σημεία αναφοράς στην διεύθυνση κάθε διόπτευσης. Για δεδομένη ακρίβεια γωνιακής μέτρησης, η ακρίβεια προσδιορισμού της τρέχουσας θέσης υποβαθμίζεται σε σχέση με την απόσταση από τα σημεία αναφοράς. Ομοίως, η τρέχουσα θέση μπορεί να προσδιοριστεί στη τομή των τριών σφαιρών που προκύπτουν στο πεδίο εμβέλειας του χρήστη, πραγματοποιώντας μετρήσεις απόστασης προς τρία γνωστά σημεία. Αν η ακρίβεια στις μετρήσεις απόστασης είναι σταθερή, η

ακρίβεια υπολογισμού της τρέχουσας θέσης δεν επηρεάζεται από την απόσταση από τα σημεία αναφοράς. Αν πραγματοποιείται και μέτρηση διόπτρευσης και μέτρηση απόστασης εμβέλειας, μόνο ένα σημείο αναφοράς είναι απαραίτητο για τον υπολογισμό της τρέχουσας θέσης.

β. Εντοπισμός εξ' Αναμετρήσεως

Η έκφραση *dead reckoning* πιθανολογείται ότι προέκυψε από την φράση *deduced reckoning*, και περιφραστικά μπορεί να αποδοθεί ως ο *υπολογισμός πρόβλεψης* (νέας θέσης). Ουσιαστικά, είναι η διεργασία υπολογισμού της τρέχουσας θέσης χρησιμοποιώντας εκτιμήσεις της ταχύτητας και της διεύθυνσης πορείας (περιστροφή) κατά την μετάβαση από την προηγούμενη θέση (αναμέτρηση). Ο υπολογισμός ξεκινά από σταθερή θέση. Το μέτρο της ταχύτητας (*speed*) ή η απόσταση που διανύθηκε μετρώνται στο πλαίσιο του σώματος του οχήματος (*body frame*), ενώ μία ανεξάρτητη μέτρηση στη περιστροφική συμπεριφορά αρκεί για τον προσδιορισμό της διεύθυνσης στο πλαίσιο αναφοράς της κίνησης (*navigation frame*). Για εφαρμογές στις δύο διαστάσεις (πχ πλοήγηση στη θάλασσα) η μέτρηση στο αζιμούθιο και μόνον, είναι αρκετή. Εκεί που οι γωνιακές κλίσεις μεταβάλλονται, όσο μικρότερο είναι το *βήμα* στον υπολογισμό της θέσης, τόσο πιο ακριβής είναι κι η λύση πλοήγησης.

2.4.3 Βασικά Συστήματα Πλοήγησης

Σύστημα πλοήγησης είναι κάθε συσκευή που εκτελεί μετρήσεις και προσδιορίζει την θέση και την ταχύτητα με χειρονακτικό ή αυτοματοποιημένο τρόπο. Απλές τεχνολογίες όπως θεοδόλχοι και μαγνητικές πυξίδες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εφαρμογή και των δύο βασικών μεθόδων πλοήγησης. Επίγεια τοπωνύμια και αστέρια μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως θέσεις αναφοράς. Στη σύγχρονη εποχή ωστόσο, με την ανάπτυξη των συστημάτων ραδιοσημάτων, των τεχνολογιών *laser* και *radar*, και με την ανάπτυξη των *αδρανειακών συστημάτων πλοήγησης* (*Inertial Navigation Systems, INS*), η συντριπτική πλειοψηφία των εφαρμογών πλοήγησης εκτελούνται είτε με χρήση συστημάτων δορυφορικού εντοπισμού (εκτενώς μετά την δεκαετία του 1990 στη πραγματικότητα), είτε με χρήση αδρανειακών συστημάτων πλοήγησης, ή με συνδυασμό αυτών.

α. Συστήματα Δορυφορικού Εντοπισμού (GNSS)

Η αρχή λειτουργίας τους βασίζεται στη μέτρηση του χρόνου μετάδοσης του δορυφορικού σήματος (*Time of Arrival, ToA*). Πρόκειται για *παθητικά* συστήματα (δέκτες) προσδιορισμού σταθερής θέσης, με μετρήσεις αποστάσεων εμβέλειας προς διαθέσιμους (ορατούς) δορυφόρους. Υπάρχουν δορυφορικά συστήματα πλοήγησης που προσφέρουν παγκόσμια κάλυψη λειτουργίας: πιο γνωστά είναι το *GPS* (*Global Positioning System*) που υλοποιήθηκε και διατηρείται από την κυβέρνηση των ΗΠΑ καθώς και το ρωσικό *GLONASS*. Το υπό ανάπτυξη ευρωπαϊκό *Galileo* αναμένεται να τα ανταγωνιστεί, στο βραχύ μέλλον, σε επιχειρησιακό επίπεδο. Ο εντοπισμός θέσης πραγματοποιείται μετά από τη μετάδοση του μηνύματος *ναυσιπλοΐας* (εδώ ο όρος είναι γενικός και δεν περιορίζεται στην αντίληψη της θαλάσσιας πλοήγησης), ενός συνόλου παραμέτρων που περιγράφουν τις δορυφορικές *εφημερίδες* (*ephemeris*) δηλαδή, και που πρακτικά περιέχουν τροχιακά στοιχεία. Ο πομπός (δορυφόρος καθορισμένης ελλειπτικής τροχιάς) μεταδίδει ένα *χρονικά προσδιορισμένο* ραδιοσήμα, και με την μέτρηση του χρόνου άφιξης ο δέκτης (χρήστης) υπολογίζει την απόσταση εμβέλειας από τον πομπό. Αυτό προϋποθέτει τόσο το χρονόμετρο του πομπού, όσο και του δέκτη, να είναι συγχρονισμένα στο καλύτερο δυνατό επίπεδο, καθώς τα σφάλματα των χρονομέτρων τους

υποβαθμίζουν την ακρίβεια μέτρησης (*ψευδοαποστάσεις*). Στη πράξη ωστόσο, ο συγχρονισμός επιτυγχάνεται με την παρακολούθηση τουλάχιστον ενός επιπλέον σήματος. Για τρισδιάστατο υπολογισμό απαιτούνται συνεπώς, τουλάχιστον τέσσερις διαφορετικοί δορυφόροι, εκτός αν η λύση εντοπισμού υπόκειται σε κάποιες χωρικές δεσμεύσεις. Η πλοήγηση στο (συμβατικό) επίπεδο της θάλασσας απαιτεί τρεις τουλάχιστον δορυφόρους, για παράδειγμα. Στις πηγές των σφαλμάτων της λύσης GNSS (Global Navigation Satellite Systems / Συστήματα Παγκόσμιου Εντοπισμού) συμπεριλαμβάνονται οι διαφορές μεταξύ των πραγματικών και των εκπεμπόμενων εφημερίδων, οι καθυστερήσεις που προκαλούνται στη μετάδοση του σήματος μέσα στη γήινη ατμόσφαιρα (ιονόσφαιρα, τροπόσφαιρα), στα σφάλματα που οφείλονται στις αδυναμίες του δέκτη να ανταποκριθεί με επάρκεια σε απότομες δυναμικές μεταλλαγές, σε θόρυβο (receiver noise), σε παρεμβολές στη ραδιοσυχνότητα (RF interferences) και στο φαινόμενο της πολλαπλής διαδρομής του σήματος (multipath), λόγω ανακλάσεων (σε μεταλλικά κυρίως αντικείμενα). Ο GNSS *κινηματικός* εντοπισμός θέσης έχει τυπική ακρίβεια μερικά μέτρα, με την απόδοση του συστήματος να εξαρτάται και από ποια δορυφορικά σήματα έχουν χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της λύσης (γεωμετρία σήματος). Η ακρίβεια εντοπισμού βελτιώνεται θεματικά χρησιμοποιώντας ένα ή και περισσότερα σημεία γνωστής θέσης (*σχετικός εντοπισμός* από σταθμούς αναφοράς – differential positioning) από τα οποία υπολογίζονται διορθώσεις για τα σφάλματα που επηρεάζουν τη λύση, συνολικά (έως λίγα εκατοστόμετρα με τεχνικές παρακολούθησης της φάσης του φέροντος σήματος). Η ακρίβεια του *απόλυτου* εντοπισμού (stand-alone positioning) μπορεί να βελτιωθεί στα επίπεδα κάποιων δεκατόμετρων με βαθμονόμηση κάθε πηγής σφάλματος χωριστά, και αξιοποίηση επιπλέον πληροφορίας (παρέχεται από την Διεθνή Υπηρεσία GNSS) για τα σφάλματα των χρονομέτρων των δορυφόρων και των εκπεμπόμενων εφημερίδων τους (Precise Point Positioning, PPP) [37, 95, 130, 55, 83].

β. Αδρανειακά Συστήματα Πλοήγησης

Τα αδρανειακά συστήματα πλοήγησης (INS) είναι dead reckoning συστήματα, αποτελούμενα από τη μονάδα αδρανειακών μετρήσεων (Inertial Measurement Unit, IMU) και τον επεξεργαστή λύσης πλοήγησης (navigation processor). Τα IMU ενσωματώνουν ένα σύνολο επιταχυνσιόμετρων και γυροσκοπίων (αισθητήρες αδράνειας) σε μια θεωρητική τριαξονική διάταξη. Οι αισθητήρες της μονάδας μετρούν τις αντίστοιχες αξονικές δυνάμεις (επιταχύνσεις λόγω των δυνάμεων που επενεργούν στη κίνηση, όλων εκτός από τη βαρύτητα) και γωνιακές ταχύτητες (ρυθμό μεταβολής των γωνιών παρέκκλισης) στο πλαίσιο του σώματος, αυτόνομα και χωρίς κάποια εξωτερική παρέμβαση. Ο επεξεργαστής του συστήματος ολοκληρώνει τις μετρήσεις των τριών γραμμικών επιταχύνσεων και γωνιακών ταχυτήτων δίνοντας θέση, ταχύτητα και περιστροφή, με αποτέλεσμα διαδοχικούς υπολογισμούς τρισδιάστατης λύσης με αναμέτρηση της αμέσως προηγούμενης. Τα αδρανειακά συστήματα διακρίνονται στις *πλατφόρμες σταθερού προσανατολισμού* (platform INS) και στα *προσκολλημένα συστήματα* στο σώμα του φορέα (strapdown INS). Στα συστήματα πλατφόρμας τα επιταχυνσιόμετρα αναρτώνται σε τρία ή τέσσερα μηχανικά πλαίσια *ρυθμιστών περιστροφής* (gimbals), τα οποία ισορροπώντας διατηρούν τον αρχικό προσανατολισμό του συστήματος παρά τις όποιες παρεκκλίσεις του οχήματος. Με αυτόν τον τρόπο το πλαίσιο του σώματος διατηρείται ευθυγραμμισμένο με το πλαίσιο αναφοράς της κίνησης και οι λύσεις ταχύτητας και θέσης προκύπτουν από την ολοκλήρωση των επιταχύνσεων και μόνον, χωρίς να είναι απαραίτητος ο επαναπροσδιορισμός της περιστροφής με αναγωγές στο πλαίσιο της κίνησης (μετασχηματισμός συνημίτονων κατεύθυνσης). Τα γυροσκοπία απλώς καθοδηγούν τα πλαίσια των ισορροπιστών ώστε

να διατηρείται ο προσανατολισμός της πλατφόρμας στο πλαίσιο της κίνησης. Τα περισσότερα αδρανειακά συστήματα σταθερού προσανατολισμού δεν αποδίδουν γωνιακές ταχύτητες. Παρόλα τα εμφανή σε επίπεδο υπολογισμών πλεονεκτήματα των πλατφόρμων σταθερού προσανατολισμού, η σχετικά βαριά κατασκευή των μηχανισμών τους, το αυξημένο κόστος παραγωγής και το γεγονός ότι σήμερα ο φόρτος επεξεργασίας δεν είναι πραγματικό πρόβλημα ευνόησαν την ανάπτυξη των strapdown αδρανειακών συστημάτων. Στη σημερινή τους εξέλιξη είναι μικρότερα, πολύ ελαφρύτερα, μηχανικά απλά και με περιορισμένο κόστος κατασκευής. Τελικά κυρίευσαν στην σχετική αγορά, αν και η απόδοση ακρίβειας που επιτυγχάνουν είναι συνήθως κατώτερης τάξης. Τα επιταχυνσιόμετρα είναι σταθερά προσαρμοσμένα κατά την διεύθυνση των αξόνων του πλαισίου του κινούμενου στερεού σώματος και συνεπώς, ο προσδιορισμός της περιστροφικής συμπεριφοράς (με την ολοκλήρωση των μετρήσεων των γυροσκοπίων) συντελεί στη μετάβαση των μετρούμενων αξονικών δυνάμεων που συμμετέχουν στη κίνηση στο πλαίσιο αναφοράς της κίνησης (μετασχηματισμός συνημίτονων κατεύθυνσης). Για κάθε είδους αδρανειακό σύστημα η αρχική θέση και ταχύτητα προσδιορίζεται εκ των προτέρων και πριν ο επεξεργαστής της λύσης πλοήγησης εκτελέσει νέους υπολογισμούς. Για τα συστήματα χαμηλού κόστους ο προσδιορισμός του αρχικού αζιμούθιου είναι επίσης απαραίτητος. Το σφάλμα προσδιορισμού της λύσης πλοήγησης *πολλαπλασιάζεται* σε συνάρτηση με τον χρόνο, καθώς διαδοχικά σφάλματα των μετρήσεων των επιταχυνσιόμετρων και των γυροσκοπίων συσσωρεύονται και μεταδίδονται. Συνολικά, η απόδοση των αδρανειακών συστημάτων ποικίλει και αυτό στο μεγαλύτερο βαθμό εξαρτάται από την ποιότητα (άρα και το κόστος) των αδρανειακών αισθητήρων. Το πρωταρχικό τους πλεονέκτημα ωστόσο, έγκειται στη συνεχόμενη λειτουργία τους (αυτόνομα ενεργητικά συστήματα) και στο υπέρ-υψηλό φάσμα παρεχόμενων μετρήσεων (τουλάχιστον 50 Hz). Τα αδρανειακά συστήματα ωστόσο, σπάνια λειτουργούν μόνα τους και χωρίς επαναρχικοποίηση (update initialization). Έτσι βρίσκονται συνήθως σε συνδυασμούς με άλλα συστήματα (GNSS, πυξίδες, οδόμετρα κα.) συντελώντας στη δημιουργία των *ολοκληρωμένων συστημάτων πλοήγησης* (integrated navigation systems) [21, 52, 53, 71, 127].

γ. Ολοκληρωμένα Συστήματα Πλοήγησης

Οι διάφορες εφαρμογές πλοήγησης έχουν και διαφορετικές απαιτήσεις ως προς την απόδοση ακρίβειας, τον ρυθμό επαναπροσδιορισμού (update rate), την αξιοπιστία, τον προϋπολογισμό, ακόμα και το μέγεθος των αισθητήρων και το κατά πόσο είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός της περιστροφικής συμπεριφοράς, εκτός της θέσης και της ταχύτητας. Εφαρμόζοντας μια μεθοδολογία dead reckoning, η λύση πλοήγησης ουσιαστικά προκύπτει από τη συνάθροιση μιας σειράς μετρήσεων *σχετικής* θέσης κι αυτό, οδηγεί σε συσσώρευση σφάλματος υπολογισμού όσο ο χρόνος εξελίσσεται. Αντίθετα, όταν εφαρμοστεί μια μεθοδολογία προσδιορισμού σταθερής θέσης το σφάλμα υπολογισμού δεν εξαρτάται από τον χρόνο, αλλά από εξωτερικούς παράγοντες που γενικά δεν είναι συνεχώς γνωστοί. Επιπλέον, ο υπολογισμός dead reckoning χρειάζεται απαραίτητα μια αρχική γνωστή θέση· έκτοτε, είναι σε θέση να παρέχει λύσεις αδιάκοπτα. Ουσιαστικά, τα χαρακτηριστικά των δύο μεθοδολογιών είναι σε μεγάλο βαθμό συμπληρωματικά. Μια τεχνική dead reckoning μπορεί να συνδυαστεί με μια ή περισσότερες τεχνικές positioning fixing σχηματίζοντας ένα ολοκληρωμένο σύστημα πλοήγησης, και ο χρήστης να εκμεταλλεύεται τα οφέλη και των δυο μεθοδολογιών. Τελικά, τα ολοκληρωμένα συστήματα πλοήγησης αποτελούνται κατά βάση από GNSS δέκτες και μονάδες INS (σε κάποιες περιπτώσεις και από άλλα συστήματα, σε σχήματα *ενσωμάτωσης πολλαπλών αισθητήρων*). Οι ολοκληρώσεις των αδρανειακών μετρήσεων προσφέρουν λύσεις πλοήγησης σε

συνεχή λειτουργία καθόσον οι εκτιμήσεις θέσης GNSS, που ενσωματώνονται στον ίδιο αλγόριθμο εκτίμησης κατάστασης (βασίζεται στο φίλτρο Kalman, συνήθως), εφαρμόζουν διορθώσεις για την εκτίμηση dead reckoning [97, 53, 52].

Κεφάλαιο 3^ο

Βελτιστοποίηση, Βέλτιστη Εκτίμηση Κατάστασης

3.1 Βασικές Έννοιες

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, ή *μαθηματικού προγραμματισμού*, συνίσταται από την ελαχιστοποίηση ή την μεγιστοποίηση μιας πραγματικής συνάρτησης, η οποία συνήθως αναφέρεται ως *συνάρτηση αντικειμένου* (objective function). Για τις περισσότερες εφαρμογές ελέγχου, ο σχεδιασμός περιστρέφεται γύρω από την ελαχιστοποίηση ενός *κριτηρίου κόστους* (cost function). Η βελτιστοποίηση ως γεωδαιτική αντίληψη συνδέεται με τον όρο *συνόρθωση* (adjustment), ο οποίος ουσιαστικά εννοεί την ελαχιστοποίηση μετρητικών σφαλμάτων.

Η συνόρθωση έχει εκτενή εφαρμογή στον έλεγχο δυναμικών συστημάτων, για τα οποία είναι δυνατόν να πραγματοποιούνται μετρήσεις στις μεταβλητές που περιγράφουν την κατάστασή τους. Σε αυτή τη περίπτωση, η εκτίμηση κατάστασης είναι *αλληλοδιάδοχη* (ή *αναδρομική*, recursive) και είναι σε σχεδιασμό *κλειστού βρόγχου* (closed-loop system), δηλαδή, υλοποιείται με *ανατροφοδότηση* (ή *ανάδραση*, feedback) της τελευταίας εκτίμησης πριν πραγματοποιηθούν οι επόμενες μετρήσεις. Αυτή η διαδικασία διαμορφώνει και την έννοια του *βέλτιστου στοχαστικού ελέγχου* (stochastic optimal control), αν αναγνωριστεί η τυχαία συμπεριφορά (random behavior) του συστήματος και τεθούν απαραίτητες υποθέσεις για τον στατιστικό χαρακτήρα των σφαλμάτων των διαθέσιμων μετρήσεων και των διαταραχών της δυναμικής.

Περί τα 1960, ο Ούγγρο-Αμερικανός μηχανικός Rudolf Kalman με τις εργασίες του πάνω σε προβλήματα ελέγχου ανέπτυξε έναν εύρωστο, στοχαστικού χαρακτήρα, αναδρομικό αλγόριθμο βέλτιστης εκτίμησης κατάστασης *γραμμικών* δυναμικών συστημάτων. Το διάσημο *φίλτρο* Kalman και ένα πλήθος παραλλαγών του εφαρμόζεται με επιτυχία και σε αρκετές κατηγορίες συστημάτων μη γραμμικού χαρακτήρα. Έχει πολυάριθμες τεχνικές εφαρμογές, ενώ σε ζητήματα πλοήγησης και ελέγχου κίνησης έχει σχεδόν καθολική εφαρμογή ως και σήμερα, παρά όποια αναγνωρισμένα μειονεκτήματά του (και τα πενήντα και πλέον χρόνια της ύπαρξής του).

3.2 Μαθηματικός Προγραμματισμός

3.2.1 Βασικός Ορισμός

Πρόκειται για την εύρεση των ελαχίστων ή των μεγίστων τιμών μιας πραγματικής συνάρτησης f , ορισμένης σε κάποιο πεδίο τιμών. Γενικά, είναι πιθανόν να υπάρχουν περισσότερα του ενός σημεία τοπικών ακρότατων. Σύμφωνα με το θεώρημα του Γάλλου Pierre de Fermat, πρωτοπόρου ερασιτέχνη και αυτοδίδαχτου μαθηματικού του 17^{ου} αιώνα, η πρώτη απαραίτητη συνθήκη ύπαρξης *βέλτιστου σημείου* (τοπικού ακρότατου) είναι η ύπαρξη πρώτης παραγώγου για την συνάρτηση

αντικειμένου. Αυτά βρίσκονται μεταξύ των *στατικών σημείων*, δηλαδή των σημείων για τα οποία η πρώτη παράγωγός της (ή η αναδέλτα της, ∇f) μηδενίζεται.

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης ενδέχεται να περιλαμβάνουν και συνθήκες δεσμεύσεων ισότητας ή/και ανισότητας. Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι της γενικής μορφής:

$$\min_x f(x) \text{ ή } \max_x f(x), f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ και } x \in \mathbb{R}^n$$

με την προϋπόθεση ότι

$$h(x) = 0$$

$$\text{ή/και } g(x) \leq 0.$$

Όταν η συνάρτηση αντικειμένου f καθώς, και οι δεσμεύσεις για την εύρεση βέλτιστου είναι γραμμικές ποσότητες, τότε το πρόβλημα απλοποιείται και ανάγεται σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Συνήθως για τη λύση τέτοιων προβλημάτων, εφαρμόζονται διάφορες μέθοδοι *εσωτερικού σημείου* (interior point methods) [131, 94, 85].

Σύμφωνα με την *αρχή της δυϊκότητας* (principle of duality), ένα πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού μπορεί να αντιμετωπιστεί από δύο προοπτικές. Τότε, το *πρωταρχικό* πρόβλημα (primal problem) μπορεί να μετασχηματιστεί σε πρόβλημα *δυϊκού* προγραμματισμού (dual problem). Η λύση του δυϊκού προβλήματος παρέχει τα ακραία όρια της βέλτιστης τιμής στο πρωταρχικό πρόβλημα [51, 142, 57, 113].

3.2.2 Μη Γραμμικός Προγραμματισμός

Ο μη γραμμικός προγραμματισμός είναι πρόβλημα βελτιστοποίησης για το οποίο κάποιες από τις δεσμεύσεις ή/και η συνάρτηση αντικειμένου είναι μη γραμμικές μαθηματικές ποσότητες. Όταν η συνάρτηση αντικειμένου είναι κυρτή και το σύστημα των δεσμεύσεων περιέχει κυρτές ποσότητες τότε πρόκειται για πρόβλημα *βελτιστοποίησης κυρτότητας* (convex optimization) και η λύση είναι καθολική.

α. Βελτιστοποίηση Κυρτότητας

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης κυρτότητας περιλαμβάνει δεσμεύσεις ανισότητας και ισότητας και στη γενική του μορφή περιγράφεται ως εξής:

Για $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\min_x f(x)$$

με την προϋπόθεση ότι

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Η συνάρτηση αντικειμένου και οι δεσμεύσεις ανισότητας είναι κυρτές, ενώ οι δεσμεύσεις ισότητας είναι γραμμικές. Η ακρίβεια στη λύση βελτιστοποίησης κυρτότητας εξαρτάται από τον βαθμό πολυπλοκότητας του προβλήματος και διάφορες μέθοδοι εσωτερικού σημείου προσφέρουν και εδώ ικανοποιητικές λύσεις [12, 43, 74].

Στη σύγχρονη εποχή, πολλές εφαρμογές ελέγχου προσεγγίζονται ικανοποιητικά με τη λύση προβλημάτων βελτιστοποίησης κυρτότητας, τα οποία εμπλέκουν δεσμεύσεις ισότητας και μόνον. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το ελάχιστο της συνάρτησης κόστους υπολογίζεται κατά βάση με την μέθοδο των *πολλαπλασιαστών Lagrange* [76, 13, 85]. Η μέθοδος προέκυψε από εργασίες του Ιταλού μαθηματικού Joseph Louis Lagrange στα τέλη του 18^{ου} αιώνα, και σύμφωνα με αυτή, η λύση του

πρωταρχικού προβλήματος ισοδυναμεί με τη βελτιστοποίηση μιας νέας συνάρτησης, της *Λαγκρανσιανής* \mathcal{L} (Lagrangian). Δεδομένου ότι υπάρχουν πρώτες συνεχείς μερικές παράγωγοι των f και h_j , η Λαγκρανσιανή ορίζεται με την εισαγωγή μιας νέας μεταβλητής λ (πολλαπλασιαστής Lagrange) ως

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda_j h_j(x).$$

Ικανοποιώντας τη συνθήκη $\nabla \mathcal{L} = 0$, δηλαδή

$$\nabla f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla (h_j(x)) = 0,$$

το ζητούμενο ελάχιστο προκύπτει με τον υπολογισμό των κρίσιμων τιμών των πολλαπλασιαστών Lagrange λ_j .

Σε ζητήματα βελτιστοποίησης κυρτότητας η λύση του πρωταρχικού προβλήματος προκύπτει κατά βάση από το σχηματισμό του δυϊκού προβλήματος. Συνήθως, ο σχηματισμός του αναφέρεται και ως *Λαγκρανσιανή δυϊκότητα*, ο ρόλος της οποίας είναι κεντρικός στη βελτιστοποίηση κυρτότητας. Ως εκ τούτου, η λύση του προβλήματος προκύπτει από το σχηματισμό της αντίστοιχης Λαγκρανσιανής συνάρτησης και το ελάχιστο του πρωταρχικού προβλήματος είναι πλέον συνάρτηση των πολλαπλασιαστών Lagrange. Ο στόχος τώρα, είναι η μεγιστοποίηση της νέας συνάρτησης αντικειμένου στον *δυϊκό χώρο* (dual space), υπό τις προϋποθέσεις που θέτουν οι δεσμεύσεις του προβλήματος.

Η εφαρμογή της μεθόδου Lagrange επεκτείνεται και σε γενικής μορφής προβλήματα προγραμματισμού κυρτότητας, ικανοποιώντας τις συνθήκες *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT conditions) [66, 67, 13]. Οι KKT είναι οι πρώτου βαθμού απαραίτητες συνθήκες ύπαρξης βέλτιστης λύσης σε προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού και καθώς επιτρέπουν και συνθήκες ανισότητας, η KKT προσέγγιση ουσιαστικά γενικεύει τη μέθοδο Lagrange. Σύμφωνα με αυτή, οι πολλαπλασιαστές που αντιστοιχούν στις δεσμεύσεις ανισοτήτων οφείλουν να είναι *μη θετικοί* (nonpositive) στα άνω όρια του συνόλου των συμμετεχόντων ανισώσεων, *μηδενικοί* για τις δεσμεύσεις που ικανοποιούνται αυστηρά και *μη αρνητικοί* (nonnegative) στα κάτω όρια του συνόλου. Η μέθοδος προσδιορίζει την *κατεύθυνση της βέλτιστης λύσης* και προέκυψε στις αρχές της δεκαετίας του 1950 από τις εργασίες των μαθηματικών *Harold Kuhn* και *Albert Tucker*, πάνω στην μεταπτυχιακή εργασία του *William Karush* περί απαραίτητων συνθηκών βέλτιστου για προβλήματα προγραμματισμού με δεσμεύσεις ανισότητας. Για κάθε πρόβλημα προγραμματισμού κυρτότητας της γενικής μορφής η Λαγκρανσιανή συνάρτηση κόστους στον *πρωταρχικό χώρο* (primal space) διαμορφώνεται ως

P:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \nu) = f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^m \nu_j h_j(x),$$

όπου τα διανύσματα λ, ν περιέχουν τις νέες μεταβλητές.

Τότε σχηματίζεται η δυϊκή Λαγκρανσιανή

$$\ell(\lambda, \nu) = \inf \mathcal{L}(x, \lambda, \nu),$$

ενώ, το πρόβλημα στον δυϊκό χώρο διαμορφώνεται ως

D:

$$\max_{\lambda, \nu} \ell(\lambda, \nu)$$

με την προϋπόθεση

$$\lambda \geq 0.$$

Η δυϊκή συνάρτηση είναι κοίλη ακόμα και όταν το αρχικό πρόβλημα δεν είναι κυρτό, και οδηγεί τη

βέλτιστη λύση του στα κατώτερα όριά της (infimum). Αν το ελάχιστο του πρωταρχικού προβλήματος είναι το σημείο x_α , τότε για κάθε $\lambda \geq 0$ και κάθε ν ισχύει

$$\ell(\lambda, \nu) \leq x_\alpha.$$

Βασικό στοιχείο της μεθόδου συνεπώς, είναι ότι η εφαρμογή της δεν απαιτεί προϋποθέσεις κυρτότητας για το πρωταρχικό πρόβλημα. Τελικά, δεδομένου ότι υπάρχουν πρώτες συνεχείς μερικές παράγωγοι των f , g_i και h_j και υποθέτοντας ότι τα σημεία x_α και (λ_p, ν) είναι κάθε βέλτιστη λύση του πρωταρχικού ή του δυικού προβλήματος, η αναδέλτα της Λαγκρανσιανής μηδενίζεται στο x_α , δηλαδή

$$\nabla f(x_\alpha) + \sum_{i=1}^n \lambda_p \nabla g_i(x_\alpha) + \sum_{j=1}^m \nu_j \nabla h_j(x_\alpha) = 0,$$

και παράλληλα ισχύουν οι συνθήκες *Karush-Kuhn-Tucker*, δηλαδή

$$g_i(x_\alpha) \leq 0$$

$$h_j(x_\alpha) = 0$$

$$\lambda_p \geq 0$$

$$\lambda_p g_i(x_\alpha) = 0.$$

β. Τετραγωνικός Προγραμματισμός

Κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης κυρτότητας για το οποίο η συνάρτηση κόστους είναι *δευτεροβάθμια* (ή *τετραγωνική*, quadratic) και οι δεσμεύσεις ανισότητας και ισότητας είναι γραμμικές, καλείται τετραγωνικός προγραμματισμός (Quadratic Programming, QP) [12, 13, 74, 76]. Στη γενική του μορφή το πρόβλημα περιγράφεται ως εξής:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και συνάρτηση κόστους

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + q^T x + r,$$

ζητείται

$$\min_x f(x)$$

με την προϋπόθεση ότι

$$A x \leq b$$

$$B x = c.$$

Ο πίνακας Q είναι συμμετρικός και το διάνυσμα στήλη $q \in \mathbb{R}^n$. Αν τα διανύσματα b και c είναι διαστάσεων $m \times 1$ και $p \times 1$ αντίστοιχα, οι διαστάσεις των πινάκων σχεδιασμού στις εξισώσεις των δεσμεύσεων είναι $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Όταν το πρόβλημα εμπλέκει δεσμεύσεις ισότητας και μόνον, απλοποιείται η λύση του προκύπτει από τον σχηματισμό του *KKT συστήματος*, εφαρμόζοντας τις συνθήκες ύπαρξης βέλτιστου.

Τότε είναι

$$Q x + q + B^T \lambda = 0$$

$$B x = c$$

και το *KKT* σύστημα

$$\begin{bmatrix} Q & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q \\ c \end{bmatrix}$$

που προκύπτει, είναι $n + p$ γραμμικών εξισώσεων $n + p$ αγνώστων. Όμως, η λύση ενός *KKT* συστήματος ενδέχεται να μην είναι απλή υπόθεση. Ωστόσο, σε λιγότερο πολύπλοκα προβλήματα η απευθείας λύση (πχ με παραγοντοποίηση) έχει πρακτικά αποτελέσματα.

Όταν το πρόβλημα εμπλέκει δεσμεύσεις ανισότητας, η λύση προκύπτει από τον σχηματισμό του

σχετικού KKT συστήματος στο χώρο των πιθανών λύσεων (feasible region) που ικανοποιούν τις ανισότητες. Σε αυτόν τον χώρο υπάρχει ένα ενεργό σύνολο \mathcal{A} , που για την πιθανή λύση x_a κάποιες από τις δεσμεύσεις ανισότητας ικανοποιούνται ως ισότητες (ενεργές δεσμεύσεις) και ως εκ τούτου η λύση προκύπτει από το KKT σύστημα. Για τις δεσμεύσεις που ικανοποιούνται αυστηρά από τις ανισότητες και μόνον, το κριτήριο επιλογής για το αν ανήκουν στο ενεργό πεδίο τιμών είναι το πρόσημο στις τιμές των πολλαπλασιαστών Lagrange. Όσες πληρούν το κριτήριο προστίθενται στο σύνολο \mathcal{A} , όμως για κάθε αλλαγή του \mathcal{A} σχηματίζεται νέο KKT σύστημα καθώς, μεταβάλλεται ο πίνακας σχεδιασμού των ανισοτήτων. Σε κάποιες περιπτώσεις ωστόσο, αυτό ενδέχεται να οδηγήσει σε αριθμητική αστάθεια και κατά συνέπεια, το αλγεβρικό υπολογιστικό κόστος της λύσης εξαρτάται από την πολυπλοκότητα του προγραμματισμού· ουσιαστικά, η λύση είναι αριθμητικά προσεγγιστική. Ο τετραγωνικός προγραμματισμός κυρτότητας έχει εφαρμογή σε μεγάλη ποικιλία προβλημάτων ελέγχου δυναμικών συστημάτων [36, 11, 72, 60, 62, 10]. Σε ένα πολύ σημαντικό μέρος αυτών των εφαρμογών το ουσιαστικό αντικείμενο είναι η ελαχιστοποίηση της κυρτής δευτεροβάθμιας συνάρτησης $\|Ax - b\|_2^2$ το οποία συνήθως αναφέρεται και ως προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων (least-squares approximation).

3.3 Προτυποποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Ένα σύνολο συσχετιζόμενων οντοτήτων που ενεργούν συντεταγμένα και αποδίδουν έργο ως προς κάποια λειτουργία (κίνηση σώματος, χημική αντίδραση, κτλ), καλείται φυσικό σύστημα. Δυναμικό σύστημα καλείται κάθε φυσικό σύστημα του οποίου η κατάσταση μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο.

Από τα τέλη της δεκαετίας του 1950 και με την ραγδαία ανάπτυξη των ψηφιακών υπολογιστών, αναπτύχθηκε η Σύγχρονη Θεωρία Ελέγχου (Modern Control Theory) [22, 62, 79, 10]. Εφαρμόζεται στα περισσότερα είδη δυναμικών συστημάτων και θεμελιώνει την περιγραφή τους στο χώρο κατάστασης.

3.3.1 Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

Για τη προτυποποίηση των δυναμικών συστημάτων σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές, η αναλογική αναπαράσταση του μοντέλου με τη μορφή συναρτήσεων συνεχούς χρόνου τροποποιείται σε ψηφιακή, δηλαδή έχει τη μορφή συναρτήσεων που ορίζονται σε διακριτούς χρόνους. Ένα τέτοιο δυναμικό σύστημα καλείται διακριτό, ο χρόνος λαμβάνει ακέραιες τιμές και η έκφραση “μόλις πριν τον χρόνο t ” αναφέρεται στον χρόνο $t - 1$.

Κατά τον γενικό μαθηματικό ορισμό, ένα διακριτό δυναμικό σύστημα είναι ένα διατεταγμένο σύνολο της μορφής $\langle T, M, f \rangle$, όπου T είναι οι ακέραιες τιμές του χρόνου t , M η τετραδιάστατη πολλαπλότητα (manifold) του χωροχρόνου και f οι συναρτήσεις διεργασίας εξέλιξης (process). Οι συναρτήσεις διεργασίας εξέλιξης συσχετίζουν κάθε σημείο του χώρου κατάστασης (space state) σε μια και μοναδική εικόνα, η οποία εξαρτάται από τη μεταβλητή t .

Τα διακριτά δυναμικά συστήματα περιγράφουν την μεταβολή του διανύσματος κατάστασης (state vector) για διακριτές τιμές του χρόνου. Αν $x(t)$ ή x_t είναι το διάνυσμα κατάστασης ενός διακριτού δυναμικού συστήματος και f η συνάρτηση διεργασίας εξέλιξης, τότε η εξίσωση

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

περιγράφει την μετάβαση του διανύσματος κατάστασης από τον χρόνο t στο χρόνο $t + 1$. Καθώς ο

χρόνος λαμβάνει ακέραιες τιμές, η εξίσωση μετάβασης είναι εξίσωση διαφορών (difference equation) και όχι διαφορική εξίσωση (differential equation). Στη σχετική βιβλιογραφία απαντάται και ως εξίσωση αναδρομικότητας (recurrence equation) ή σχέση αναδρομικότητας, όπως και ως εξίσωση απεικόνισης (mapping equation), καθώς είναι η αναλυτική έκφραση που απεικονίζει τη μετάβαση της κατάστασης του συστήματος τη χρονική στιγμή t , στη κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή $t + 1$. Ο χρόνος t είναι ανεξάρτητη μεταβλητή καθώς οι τιμές που λαμβάνει δεν εξαρτώνται από κάποια άλλη μεταβλητή, ενώ οι συνιστώσες του διανύσματος κατάστασης x_t είναι οι εξαρτημένες μεταβλητές [88, 90, 79].

3.3.2 Μη Γραμμικότητα σε Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

Στη πραγματικότητα όλα τα φυσικά δυναμικά συστήματα είναι μη γραμμικά. Όπως και κάθε κίνηση στη γήινη πραγματικότητα. Μπορούν να εξαιρεθούν οι περιπτώσεις δυναμικών συστημάτων που για πρακτικούς λόγους θεωρούνται γραμμικά καθώς, τα γραμμικά μοντέλα που τα περιγράφουν παρουσιάζουν τελικά ικανοποιητική απόδοση. Υπάρχουν ωστόσο συστήματα που η μη γραμμική συμπεριφορά τους είναι ιδιαίτερα έντονη, και συνεπώς τα γραμμικά μοντέλα δεν μπορούν να τα περιγράψουν επαρκώς.

Τα δυναμικά χαρακτηριστικά των μη γραμμικών συστημάτων σε κάποιες περιπτώσεις είναι δυνατόν να περιγραφούν από απλές μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (ή εξισώσεις διαφορών). Ο έλεγχος τέτοιων συστημάτων πρακτικά γίνεται από γραμμικοποιήσεις και τα μοντέλα τους προκύπτουν από αναλυτικές κυρίως μεθόδους. Στις συνήθεις μεθόδους γραμμικοποίησης αναζητείται ένα γραμμικό σύστημα προσεγγιστικά ισοδύναμο με το μη γραμμικό και η γραμμικοποίηση πραγματοποιείται στα όρια μικρών διαταραξεων ενός εικονικού σημείου \bar{x} . Αν x_t είναι η κατάσταση ενός μη γραμμικού συστήματος και η εξίσωση απεικόνισης του είναι

$$x_t = \varphi(x_{t-1})$$

όπου η μη γραμμική συνάρτηση φ είναι συνεχώς διαφορίσιμη, τότε η επιρροή των διαταραχών

$$\delta_{x_t} = x_t - \bar{x}_t$$

γύρω από το σημείο γραμμικοποίησης \bar{x}_t , εκφράζονται από την ανάπτυξη της σειράς Taylor

$$\varphi(x_t) = \varphi(\bar{x}_t) + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\bar{x}} \delta_{x_t} + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{\bar{x}} \delta_{x_t}^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right|_{\bar{x}} \delta_{x_t}^3 + \dots$$

Αν αυτές οι διαταραχές θεωρηθούν επαρκώς μικρές σε σχέση με τους υψηλότερου βαθμού συντελεστές της ανάπτυξης, τότε αυτοί αγνοούνται και η μη γραμμικότητα προσεγγίζεται ικανοποιητικά από το γραμμικό σύστημα

$$\varphi(x_t) = \varphi(\bar{x}_t) + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\bar{x}} \delta_{x_t}.$$

Ως εκ τούτου, η εξίσωση απεικόνισης γίνεται

$$x_t = \varphi(\bar{x}_{t-1}) + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\bar{x}} \delta_{x_{t-1}}.$$

Κάποια δυναμικά συστήματα περιγράφονται επαρκώς από σύνολα μη γραμμικών εξισώσεων ανωτέρου βαθμού. Ένα απλό παράδειγμα είναι το σύστημα κίνησης ενός εκκρεμούς. Σε αυτή τη περίπτωση, η δευτέρου βαθμού διαφορική εξίσωση που περιγράφει το μοντέλο της κίνησης μπορεί να αντικατασταθεί από δύο πρώτου βαθμού διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες περιγράφουν την κινηματική επαρκώς. Αυτό μπορεί να ισχύει και σε άλλα δυναμικά συστήματα, τα οποία περιέχουν και γραμμικά και μη γραμμικά στοιχεία [91, 27, 35]. Γενικά όμως, η μελέτη της σταθερότητας

δυναμικών συστημάτων που παρουσιάζουν έντονα μη γραμμικά χαρακτηριστικά είναι μια περισσότερο πολύπλοκη υπόθεση.

3.3.3 Μαθηματική Προτυποποίηση στον Χώρο Κατάστασης

Το μαθηματικό μοντέλο ενός δυναμικού συστήματος ορίζεται από ένα σύνολο εξισώσεων που αντιπροσωπεύει και περιγράφει τη δυναμική του κατάστασης στον καλύτερο δυνατό βαθμό. Πολλά δυναμικά συστήματα δύνανται να περιγραφούν από ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων (ή εξισώσεων διαφορών για τα συστήματα διακριτού χρόνου), το οποίο συνήθως προκύπτει από την εφαρμογή υποκείμενων φυσικών νόμων (πχ των Νευτώνειων νόμων).

Η επιλογή του μαθηματικού προτύπου είναι το σημαντικότερο στοιχείο όλης της αναλυτικής διαδικασίας ελέγχου. Κατά την επιλογή, οφείλεται να ληφθεί υπόψη ένας πρακτικός συμβιβασμός μεταξύ της πολυπλοκότητας της μαθηματικής έκφρασης του προτύπου και της ζητούμενης ακρίβειας στα αποτελέσματα ανάλυσης. Αυτό συχνά οδηγεί στην αγνόηση κάποιων εγγενών φυσικών ιδιοτήτων του συστήματος· ωστόσο, αν τέτοιες απλοποιήσεις έχουν μικρή επιρροή στις ανταποκρίσεις του συστήματος κατά την προτυποποίηση, η επιθυμητή σύγκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων της και της πειραματικής (μετρητικής) προσέγγισης, συνήθως επιτυγχάνεται. Στις περισσότερες περιπτώσεις εφαρμόζονται γραμμικά μοντέλα, δηλαδή συνήθεις πρωτοβάθμιες διαφορικές εξισώσεις, αγνοώντας έτσι τη μη-γραμμικότητα της πραγματικότητας.

Σε ζητήματα βέλτιστου ελέγχου η πλέον συνήθης λογική προτυποποίησης βασίζεται στην περιγραφή του συστήματος στον χώρο κατάστασης, η διάσταση του οποίου ισούται με την διάσταση του διανύσματος κατάστασης [90, 73, 72]. Η γενική (ντετερμινιστική) περιγραφή ενός δυναμικού συστήματος πραγματοποιείται με τον καθορισμό της (διαφορικής) *εξίσωσης κατάστασης*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

ή αν πρόκειται για γραμμικά φαινόμενα

$$\frac{d}{dt}x(t) = F x(t) + B u(t).$$

Ο άγνωστος $x(t)$ είναι το διάνυσμα κατάστασης, ο πίνακας F καλείται *δυναμικός πίνακας*, $u(t)$ είναι το (γνωστό) *διάνυσμα εισόδου* (input vector) που λειτουργεί ως η μεταβλητή ελέγχου, και ο πίνακας B συνήθως καλείται *πίνακας εισόδου* (input matrix).

Στις περιπτώσεις των διακριτών δυναμικών συστημάτων η εξίσωση κατάστασης δίδεται γενικά από την εξίσωση διαφορών

$$x_{k+1} - x_k = f(x_k, u_k),$$

ή

$$x_{k+1} = F x_k + B u_k,$$

και ουσιαστικά πρόκειται για την εξίσωση απεικόνισης της διεργασίας εξέλιξης (process model). Ο πίνακας F καλείται *πίνακας μετάβασης* (transition matrix).

Η εξίσωση που περιγράφει την μαθηματική σχέση του *διανύσματος εξόδου* z (output vector) με το διάνυσμα κατάστασης και το διάνυσμα εισόδου

$$z = h(x(t), u(t))$$

καλείται *εξίσωση εξόδου ή παρατήρησης* (output equation), συνοδεύει την εξίσωση απεικόνισης και ολοκληρώνει την μαθηματική περιγραφή του συστήματος στο χώρο κατάστασης. Ως εκ τούτου, η γενική περιγραφή υλοποιείται με το *πρότυπο χώρου κατάστασης* (state-space model) όπου τελικά, για

τα διακριτά γραμμικά δυναμικά συστήματα σχηματίζεται ως

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= F x_k + B u_k \\z_k &= H x_k + D u_k.\end{aligned}$$

Ο πίνακας H καλείται *πίνακας σχεδιασμού* (ή *εξόδου*, output design matrix) και ο πίνακας D είναι ο αντίστοιχος πίνακας εισόδου για την εξίσωση παρατήρησης.

3.4 Θεωρία Βέλτιστης Εκτίμησης Κατάστασης

Η εξέλιξη των μεθόδων επεξεργασίας μετρητικών δεδομένων ως *τυχαίες μεταβλητές* (random variables) εμφανίζεται, ήδη από τις αρχές του 19^{ου} αιώνα, μέσα από τις εργασίες του ιδιοφυή Γερμανού μαθηματικού και πρωτοπόρου γεωδαίτη Johann Carl Friedrich Gauss, ο οποίος εισήγαγε (και πρακτικά εφάρμοσε σε προβλήματα τροχιακών πλανητικών παρατηρήσεων) τη τεχνική των *ελαχίστων τετραγώνων*. Νέες σημαντικές εξελίξεις της προσέγγισης Gauss προέκυψαν όχι λιγότερο από 150 χρόνια αργότερα, με την εφαρμογή μεθόδων της *θεωρίας τυχαίων διαδικασιών* (random process theory) από τις εργασίες των μαθηματικών Wiener και Kolmogorov αρχικά, και του Rudolf Kalman (αλλά και άλλων) στη συνέχεια [47, 48, 63, 78, 77, 105, 61].

3.4.1 Στοιχεία Θεωρίας Τυχαίων Διαδικασιών

α. Βασικοί Ορισμοί

Μια *τυχαία μεταβλητή* X ορίζεται ως η συναρτησιακή απεικόνιση ενός συνόλου πιθανών (ή πειραματικών) αποτελεσμάτων σε ένα σύνολο πραγματικών αριθμών. Η ρήψη ενός ζαριού για παράδειγμα μπορεί να εξεταστεί ως διακριτή τυχαία μεταβλητή, ωστόσο, κάθε (τυχαίο) αποτέλεσμα μίας ρήψης δεν είναι τυχαία μεταβλητή αλλά πραγματική, με δεδομένη *πιθανότητα* εμφάνισης P . Η προδιαγραφή της πιθανότητας εμφάνισης μιας τιμής x κάθε τυχαίας μεταβλητής X πραγματοποιείται από τον προσδιορισμό της *συνάρτησης κατανομής πιθανότητας* (probability distribution function)

$$F(x) = P(X \leq x)$$

ή από τον προσδιορισμό της *συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας* (probability density function)

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Η *αναμενόμενη τιμή* (expectation) μιας τυχαίας μεταβλητής $E\{X\}$ ή \bar{x} ,

$$E\{X\} = \int x f(x) dx,$$

ορίζεται από το άθροισμα όλων των τιμών που μπορεί να λάβει, *σταθμισμένων* (weighted) από την πιθανότητα εμφάνισής τους. Συνήθως, αναφέρεται ως *μέση τιμή* (mean value) και ουσιαστικά πρόκειται για την τιμή στην οποία τείνει ο μέσος όρος ενός συνόλου πιθανών εμφανίσεων, όσο το σύνολο αυτό αυξάνεται.

Η *ρίζα της μέσης τετραγωνικής τιμής rms* (root-mean-squared value) ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα της αναμενόμενης τιμής του τετραγώνου των εμφανίσεων μιας τυχαίας μεταβλητής ενώ, ως *μεταβλητότητα* $D\{X\}$ ή σ^2 (variance)

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E\{(X - \bar{x})^2\} \\ &= D\{X\},\end{aligned}$$

ορίζεται η μέση τετραγωνική απόκλιση της από την αναμενόμενη τιμή (*διασπορά*, dispersion) [34, 69].

Η τετραγωνική ρίζα της μεταβλητότητας αναφέρεται ως *τυπική απόκλιση* σ , η τιμή της οποίας ισούται με την *rms* μόνον σε τυχαίες μεταβλητές μηδενικής αναμενόμενης τιμής (zero-mean).

Ως *συμμεταβλητότητα* σ_{XY} (covariance) δύο τυχαίων μεταβλητών (X, Y) ορίζεται η αναμενόμενη τιμή του γινομένου της απόκλισής τους από τις μέσες τιμές τους, και δείχνει τον βαθμό *συσχέτισης* (correlation) μεταξύ τους. Συνήθως περιγράφεται από τον *συντελεστή συσχέτισης* (covariance correlation), ο οποίος δείχνει το βαθμό της γραμμικής τους εξάρτησης. Αν δύο τυχαίες μεταβλητές είναι *ανεξάρτητες* (independent) ο συντελεστής συσχέτισης είναι μηδενικός [34, 70].

Μια τυχαία μεταβλητή καλείται *κανονική* (normal) ή *Γκαουσιανή* (Gaussian) όταν η πιθανότητα εμφάνισης μιας τιμής της προδιαγράφεται από την κανονική ή Γκαουσιανή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

όπου οι δυο παράμετροι που ορίζουν την κατανομή είναι η αναμενόμενη τιμή και η τυπική απόκλιση.

Η πιθανότητα εμφάνισης μιας τιμής της κανονικής μεταβλητής στα όρια $\pm 1\sigma$ γύρω από τη μέση τιμή της είναι 0.68, ενώ στα όρια $\pm 2\sigma$ είναι 0.95.

β. Στοχαστικές Διαδικασίες

Μια τυχαία ή *στοχαστική* διαδικασία ορίζεται όταν μια τυχαία μεταβλητή μεταβάλλεται με τον χρόνο. Συνεπώς, οι αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας είναι επίσης συναρτήσεις του χρόνου. Καθώς, μια στοχαστική διαδικασία αφορά δυο διαφορετικές τυχαίες μεταβλητές σε δυο διαφορετικές χρονικές στιγμές, γίνεται λόγος για συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας *από κοινού* (ή δευτέρου βαθμού, joint)

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2],$$

$$f(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Για κάποιες στοχαστικές διαδικασίες η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο. Σε αυτή τη περίπτωση η διαδικασία καλείται *στάσιμη* (stationary) και η αναμενόμενη τιμή της είναι σταθερή. Η συσχέτιση μεταξύ δυο τυχαίων μεταβλητών μιας στοχαστικής διαδικασίας καλείται *αυτοσυσχέτιση* (autocorrelation) [34, 69]. Αν αυτές είναι ανεξάρτητες, πρόκειται για στοχαστική διαδικασία *λευκού θορύβου* (white noise process), η οποία όταν χαρακτηρίζεται από ιδιότητες κανονικών από κοινού συναρτήσεων κατανομής καλείται *γκαουσιανή διαδικασία* [34, 58, 91, 99].

Η διαδικασία Gauss-Markov αποτελεί μια ειδική κατηγορία στοχαστικής διαδικασίας η οποία παράγεται με την εισαγωγή λευκού θορύβου. Τότε η κατανομή πιθανότητας σε κάποια χρονική στιγμή εξαρτάται μόνον από την τιμή που εμφανίζει η τυχαία μεταβλητή την αμέσως προηγούμενη στιγμή. Αν μία συνεχής στοχαστική διαδικασία είναι διαδικασία *Markov πρώτου βαθμού*, ο λευκός θόρυβος w συσχετίζεται με την διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} + \alpha(t)x = w,$$

ενώ, όταν είναι διαδικασία Markov δευτέρου βαθμού από την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta(t)\frac{dx}{dt} + \beta^2(t)x = w.$$

Όταν ο λευκός θόρυβος έχει γκαουσιανή συνάρτηση πυκνότητας, πρόκειται για διαδικασία Gauss-Markov δευτέρου βαθμού [86, 126].

3.4.2 Θεωρία Ελαχίστων Τετραγώνων

Ως συνέπεια της όποιας αβεβαιότητας κάθε μέτρησης, τα (συνήθως πλεονασματικά) μετρητικά δεδομένα μιας μεταβλητής αποκλίνουν μεταξύ τους. Για τον υπολογισμό μίας εκτίμησής της, και αξιοποιώντας το σύνολο των μετρήσεων, απαιτούνται διορθώσεις για την αποκατάσταση (κάποιας) συνοχής. Στην επιστήμη της Γεωδαισίας μια τέτοια διεργασία καλείται *Συνόρθωση* (Adjustment) [16, 123]. Είναι τυπικά η διαδικασία με την οποία οι πάντα επηρεασμένες από σφάλματα μετρήσεις αξιοποιούνται για την βέλτιστη εκτίμηση των πραγματικών τιμών των μετρημένων μεταβλητών, ελαχιστοποιώντας την επίδραση των σφαλμάτων. Το μαθηματικό εργαλείο που συντριπτικά αξιοποιείται για τη συνόρθωση μετρήσεων είναι η μέθοδος των *ελαχίστων τετραγώνων*.

α. Στοχαστικό Μοντέλο Παρατηρήσεων

Η ποιοτική εκτίμηση της συνόρθωσης προκύπτει από την ποιοτική περιγραφή του συνόλου των μετρήσεων που, με όρους μαθηματικών ορίζεται από το *διάνυσμα των παρατηρήσεων* (observation vector). Η ποιοτική περιγραφή του διανύσματος των παρατηρήσεων είναι πιθανολογικής φύσης καθώς η *διακύμανση* (variability) στα αποτελέσματα των μετρήσεων (όταν πραγματοποιούνται υπό τις ίδιες συνθήκες) μπορεί να περιγραφεί (σε ικανοποιητικό βαθμό) από στοχαστικές μεταβλητές. Αν το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας συνόρθωσης είναι η εκτίμηση της παραμέτρου x με την αξιοποίηση ενός συνόλου μετρήσεων y τυχαίων σφαλμάτων e , και υπάρχει η γραμμική συσχέτιση

$$y = H x + e,$$

τότε, το (στοχαστικό) διάνυσμα των σφαλμάτων μοντελοποιεί την μεταβλητικότητα των μετρήσεων, με την υπόθεση ότι η αυτή έχει μηδενική αναμενόμενη τιμή ($E\{e\} = 0$) και περιγράφεται από τον *πίνακα μεταβλητότητας* (variance matrix, $D\{e\} = Q_y$). Τελικά, με την εφαρμογή του νόμου μετάδοσης σφάλματος του μέσου και της μεταβλητότητας, το στοχαστικό μοντέλο των παρατηρήσεων είναι

$$E\{y\} = H x$$

$$D\{y\} = Q_y .$$

β. Η Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων

“Η πιθανότερη τιμή μιας άγνωστης ποσότητας είναι αυτή, για την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των σταθμισμένων ως προς την ακρίβεια διαφορών, μεταξύ των μετρημένων και υπολογισμένων τιμών της, είναι ελάχιστο” [46, 47].

Αν \hat{x} είναι η εκτίμηση της καλύτερης τιμής της παραμέτρου x αξιοποιώντας ένα σύνολο γραμμικά εξαρτημένων παρατηρήσεων y τότε, ως *διάνυσμα υπολοίπων* v (measurement residuals) ορίζεται η διανυσματική διαφορά

$$v = y - H \hat{x} .$$

Με βάση τον ορισμό του Gauss συνεπώς, η λύση του προβλήματος προκύπτει από την βελτιστοποίηση της κυρτής τετραγωνικής συνάρτησης κόστους J , δηλαδή

$$\min_{\hat{x}} J(\hat{x}) = (y - H \hat{x})^T (y - H \hat{x}) .$$

Με την υπόθεση ότι κάθε μέτρηση εμπεριέχει ανεξάρτητο και μηδενικού μέσου στοχαστικό θόρυβο, η συνάρτηση κόστους σταθμίζεται από τον διαγώνιο και αντιστρέψιμο πίνακα *μεταβλητότητας-συμεταβλητότητας* Q . Τότε, το πρόβλημα των ελαχίστων τετραγώνων μετασχηματίζεται ως

$$\min_{\hat{x}} J(\hat{x}) = (y - H \hat{x})^T Q_y^{-1} (y - H \hat{x}) ,$$

με λύση

$$\hat{x} = (H^T Q_y^{-1} H)^{-1} H^T Q_y^{-1} y,$$

$$Q_{\hat{x}} = (H^T Q_y^{-1} H)^{-1}.$$

Μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές της μεθόδου είναι η προσέγγιση συνάρτησης βάσει εμπειρικών δεδομένων, μια διαδικασία που στη διεθνή βιβλιογραφία εντοπίζεται και ως *ανέλιξη ή παλινδρόμηση* (regression) [38, 49, 140]. Η εφαρμογή της μεθόδου σε αυτή τη μορφή προϋποθέτει την διαθεσιμότητα του συνόλου των μετρήσεων συνεπώς, η λύση προκύπτει με *ομαδική* επεξεργασία (batch processing) [107, 123, 128].

γ. Αναδρομικά Ελάχιστα Τετράγωνα

Η εκτίμηση της βέλτιστης τιμής μιας παραμέτρου με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων είναι δυνατόν να *επαναπροσδιορίζεται συνεχώς* (sequential processing), όσο νέες μετρήσεις της παραμέτρου είναι διαθέσιμες, και χωρίς να υπάρχει η ανάγκη να αποθηκεύονται όλες οι προηγούμενες για να επιλυθούν τελικά, ομαδικά. Τα *Αναδρομικά Ελάχιστα Τετράγωνα* (Recursive Least Squares, RLS) είναι μεθοδολογία με πολύ σημαντική πρακτική εφαρμογή σε προβλήματα εκτίμησης χρονικά -ή και μη- μεταβαλλόμενων μεταβλητών καθώς προσφέρει υπολογιστική αποτελεσματικότητα και διαχειριστική ευελιξία.

Αν το στοχαστικό μοντέλο n ανεξάρτητων παρατηρήσεων μιας μεταβλητής x μπορεί να περιγραφεί επιμεριστικά για κάθε μέτρηση y_k σε διακριτές χρονικές στιγμές $t = \{k, k + 1, \dots, k + \nu\}$ ως

$$E\{y_k\} = H_k x ; D\{y_k\} = Q_k,$$

η εκτίμηση \hat{x}_k την χρονική στιγμή k υπολογίζεται από τα ελάχιστα τετράγωνα με λύση

$$\hat{x}_k = \left(\sum_{i=0}^k (H_i^T Q_i^{-1} H_i) \right)^{-1} \left(\sum_{i=0}^k H_i^T Q_i^{-1} y_i \right),$$

$$Q_{\hat{x}_k} = \left(\sum_{i=0}^k (H_i^T Q_i^{-1} H_i) \right)^{-1}.$$

Την χρονική στιγμή $k + 1$ και με την εισαγωγή μιας νέας μέτρησης y_{k+1} , η εκτίμηση \hat{x}_{k+1} υπολογίζεται ως

$$\hat{x}_{k+1} = (Q_{\hat{x}_k}^{-1} + H_{k+1}^T Q_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} (Q_{\hat{x}_k}^{-1} \hat{x}_k + H_{k+1}^T Q_{k+1}^{-1} y_{k+1}),$$

$$Q_{\hat{x}_{k+1}} = (Q_{\hat{x}_k}^{-1} + H_{k+1}^T Q_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1}$$

δηλαδή προκύπτει απευθείας από την αμέσως προηγούμενη εκτίμηση με την παρουσία μιας νέας παρατήρησης.

Η αναδρομική διαδικασία επίλυσης αρχικοποιείται με τον υπολογισμό της αρχικής εκτίμησης, με αρχική μεταβλητότητα γνωστή εκ των προτέρων και πριν πραγματοποιηθούν μετρήσεις. Μετά από πράξεις οι εξισώσεις *επαναπροσδιορισμού εκτίμησης* (measurement update) και *επαναπροσδιορισμού μεταβλητότητας* (variance update) είναι

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k v_k,$$

$$K_k = Q_{\hat{x}_k} H_k^T Q_k^{-1}$$

$$v_k = y_k - H_k \hat{x}_{k-1}$$

και

$$Q_{\hat{x}_k} = (Q_{\hat{x}_{k-1}}^{-1} + H_k^T Q_k^{-1} H_k)^{-1},$$

αντιστοίχως.

Από την εξίσωση επαναπροσδιορισμού εκτίμησης φαίνεται ότι η τελευταία εκτίμηση προκύπτει από

την προσαύξηση (ή διόρθωση) της προηγούμενης με την διανυσματική ποσότητα $K_k v_k$. Ο πίνακας K_k καλείται *πίνακας κέρδους* (gain matrix) ενώ το διάνυσμα v_k , καθώς διατηρείται η στοχαστική υπόθεση ότι η τελευταία εκτίμηση δεν παρουσιάζει στατιστικές παραμορφώσεις (unbiased) και ισχύει $E\{y_k\} = H_k x$ -άρα κι η διανυσματική ποσότητα $H_k \hat{x}_{k-1}$ μπορεί να θεωρηθεί μια πρόβλεψη της παρατήρησης y_k - καλείται *προβλεπόμενο υπόλοιπο* (predicted residual). Το ζητούμενο στην εφαρμογή της μεθόδου, ανεξαρτήτως των τιμών του πίνακα κέρδους, είναι η σύγκλιση της λύσης εκτίμησης (καθώς ισχύει $E\{x\} = \hat{x}$) και αυτό επιτυγχάνεται εφόσον τα προβλεπόμενα υπόλοιπα λαμβάνουν μετά από κάθε νέα μέτρηση συνεχώς μικρότερες τιμές [124, 111, 38, 143, 29].

3.4.3 Βέλτιστη Εκτίμηση Κατάστασης Δυναμικών Συστημάτων

Η βέλτιστη εκτίμηση χρονικά μεταβαλλόμενων μεταβλητών, ειδικά αν απαιτείται σε πραγματικό χρόνο (εγγύς πραγματικό για την ακρίβεια), συνήθως πραγματοποιείται με την εφαρμογή μιας αναδρομικής τεχνικής βελτιστοποίησης. Κατά τη πλοήγηση ενός κινούμενου οχήματος πχ, δεν νοείται προσδιορισμός θέσης με σημαντική χρονική καθυστέρηση' είναι διαδικασία πραγματικού χρόνου. Ένας αλγόριθμος βέλτιστης εκτίμησης *δυναμικών παραμέτρων* είναι το υπολογιστικό εργαλείο, που επεξεργάζεται διαδοχικές μετρήσεις και συνάγει την ελαχίστως εσφαλμένη εκτίμησή τους. Η διαδικασία επεξεργασίας είναι δύο φάσεων και προϋποθέτει *την εκ των προτέρων γνώση* της δυναμικής εξέλιξης του φαινομένου, των στατιστικών νόμων που διέπουν τις διαταραχές της δυναμικής και των μετρητικών σφαλμάτων, καθώς και γνώση των συνθηκών αρχικοποίησης. Πριν την πραγματοποίηση μετρήσεων και στη φάση *πρόβλεψης*, το δυναμικό μοντέλο παρέχει με την εξίσωση *μετάβασης* (transition) μια πρόβλεψη της εκτιμώμενης κατάστασης. Κατόπιν και με την παρουσία μετρήσεων, η λύση βελτιστοποίησης παρέχει *επανεκτίμηση* (update) της κατάστασης στη φάση του *φιλτραρίσματος*. Ο σημαντικότερος αλγόριθμος βέλτιστης εκτίμησης κατάστασης δυναμικών συστημάτων είναι το *φίλτρο Kalman*.

α. Βέλτιστη Εκτίμηση Δυναμικών Παραμέτρων

Τα αναδρομικά ελάχιστα τετράγωνα είναι η βασική μεθοδολογία βέλτιστης εκτίμησης και για χρονικά μεταβαλλόμενες μεταβλητές (δυναμικές παράμετροι). Η θέση ή/και η ταχύτητα πχ, περιγράφονται ως συναρτήσεις του χρόνου. Σε αυτή τη περίπτωση το γραμμικό μοντέλο των παρατηρήσεων δεν είναι αρκετό για τη βέλτιστη εκτίμηση της συνάρτησης $x(t)$, καθώς ο ρόλος του είναι η εκτίμηση της βέλτιστης τιμής στους χρόνους που υπάρχουν μετρήσεις. Αυτό σημαίνει ότι χρειάζεται, επιπρόσθετα, η πληροφορία μετάβασης από κάποιο χρόνο στον επόμενο και πριν την πραγματοποίηση της τρέχουσας μέτρησης. Αυτή η πληροφορία παρέχεται *μόνον* αν είναι εκ των προτέρων γνωστή η εξίσωση μετάβασης' καθώς αυτό δεν είναι ρεαλιστικό, τίθενται υποθέσεις που οφείλουν να πλησιάζουν την πραγματικότητα σε όσο το δυνατόν ικανοποιητικό βαθμό. Ο σχηματισμός της γραμμικής εξίσωσης μετάβασης

$$x_k = \Phi x_{k-1}$$

με πίνακα μετάβασης Φ που προκύπτει από τη νευτώνεια προτυποποίηση της δυναμικής είναι η πιο απλή υπόθεση, η οποία σε μια σημαντική ομάδα προβλημάτων πλοήγησης έχει πολύ ικανοποιητική εφαρμογή.

Το ζητούμενο είναι η δυνατότητα εκτίμησης \hat{x}_k^+ στο χρόνο εμφάνισης της τρέχουσας μέτρησης y_k , με βάση την εκτίμηση μετάβασης \hat{x}_k^- στον τρέχοντα χρόνο και πριν την πραγματοποίηση μέτρησης. Αν

διατηρείται η γραμμική σχέση στην εξίσωση παρατήρησης τότε, το στοχαστικό μοντέλο σχεδιασμού μετατρέπεται ως

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1}^+ \\ y_k \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \Phi \\ H_k \end{bmatrix} x_k ; D \left\{ \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1}^+ \\ y_k \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{x}_{k-1}^+} & 0 \\ 0 & Q_k \end{bmatrix},$$

η λύση του οποίου προκύπτει σε δυο βήματα. Από το πρώτο βήμα λαμβάνεται η πρόβλεψη εκτίμησης και η μεταβλητότητά της

$$\hat{x}_k^- = \Phi \hat{x}_{k-1}^+ \\ Q_{\hat{x}_k^-} = \Phi Q_{\hat{x}_{k-1}^+} \Phi^T,$$

ενώ στο δεύτερο πραγματοποιείται φιλτράρισμα, με λύση εκτίμησης

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k v_k$$

και μεταβλητότητα

$$Q_{\hat{x}_k^+} = (Q_{\hat{x}_k^-}^{-1} + H_k^T Q_k^{-1} H_k)^{-1},$$

όπου το προβλεπόμενο υπόλοιπο και ο πίνακας κέρδους είναι

$$v_k = y_k - H_k \hat{x}_k^-, \\ K_k = Q_{\hat{x}_k^+} H_k^T Q_k^{-1}.$$

Σε αντίθεση με την εφαρμογή των αναδρομικών ελαχίστων τετραγώνων σε χρονικά μη μεταβαλλόμενες μεταβλητές, οι εξισώσεις φιλτραρίσματος σε αυτή τη περίπτωση δεν είναι αναδρομικού χαρακτήρα. Ο συνδυασμός τους όμως με τις εξισώσεις πρόβλεψης σε σχεδιασμό κλειστού βρόγχου, διαμορφώνει έναν αναδρομικό αλγόριθμο βελτιστοποίησης ο οποίος αρχικοποιείται με τον ίδιο τρόπο, προϋποθέτοντας γνώση της αρχικής μεταβλητότητας [124, 143, 99].

β. Φίλτρο Kalman

Η ευρύτερα γνωστή εφαρμογή της βελτιστοποίησης δυναμικών παραμέτρων με τη μέθοδο των αναδρομικών ελαχίστων τετραγώνων εμφανίστηκε μέσα από τις εργασίες του Ούγγρου-Αμερικανού μαθηματικού και μηχανικού Rudolf E Kalman περί τα 1960. Ο Kalman εφάρμοσε τη μεθοδολογία προτυποποιώντας δυναμικά συστήματα στο χώρο κατάστασης και από θεωρητική σκοπιά, οι βασικές υποθέσεις που εξασφαλίζουν την εφαρμογή του *φίλτρου Kalman* είναι ότι το υποκείμενο σύστημα είναι γραμμικό (διαφορικές εξισώσεις πρώτου βαθμού για το μοντέλο της δυναμικής) και ότι κάθε όρος σφάλματος που συμμετέχει στον σχεδιασμό προκύπτει από στοχαστική διαδικασία λευκού θορύβου κανονικής κατανομής πιθανότητας [63, 59, 48, 78, 77].

Στη βασική μορφή του, ο αλγόριθμος προσδιορίζει την βέλτιστη εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης ενός διακριτού δυναμικού συστήματος ($x \in \mathbb{R}^n$), με διεργασία μετάβασης που απεικονίζεται από την γραμμική στοχαστική εξίσωση διαφορών

$$x_k = \Phi x_{k-1} + w_{k-1}$$

και με την αξιοποίηση της γραμμικοποιημένης διατύπωσης του (γραμμικού στοχαστικού) διανύσματος παρατήρησης $z \in \mathbb{R}^m$

$$z_k = H x_k + v_k.$$

Οι τυχαίες μεταβλητές w_k και v_k αντιπροσωπεύουν τις διαταραχές της δυναμικής και τον θόρυβο των μετρήσεων, αντιστοίχως, και σύμφωνα με τις υποθέσεις του στοχαστικού μοντέλου είναι ανεξάρτητες, έχουν μηδενική αναμενόμενη τιμή και πίνακες μεταβλητότητας Q και R .

Ορίζοντας την εκτίμηση μετάβασης ως \hat{x}_k^- η a priori εκτίμηση σφάλματος είναι

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^-$$

και η a priori μεταβλητότητα

$$P_k^- = D\{e_k^-\}.$$

Με την εφαρμογή της μεθοδολογίας των αναδρομικών ελαχίστων τετραγώνων, το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της a posteriori εκτίμησης κατάστασης \hat{x}_k^+ και της μεταβλητότητάς της P_k^+ ως γραμμικό συνδυασμό της a priori εκτίμησης και της ποσότητας κέρδους, δηλαδή

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H_k \hat{x}_k^-).$$

Η αναδρομική λύση του φίλτρου είναι επίσης το αποτέλεσμα του συνδυασμού δύο φάσεων: (α) της φάσης μετάβασης ή του χρονικού επαναπροσδιορισμού, και (β) της φάσης του επαναπροσδιορισμού εκτίμησης. Έχοντας ως δεδομένο την αρχική a posteriori μεταβλητότητα, η φάση μετάβασης προσδιορίζει την a priori εκτίμηση κατάστασης και τη μεταβλητότητά της στο τρέχον χρονικό βήμα

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= \Phi \hat{x}_{k-1}^+ \\ P_k^- &= \Phi P_{k-1}^+ \Phi^T + Q. \end{aligned}$$

Στη φάση επαναπροσδιορισμού εκτίμησης και με την είσοδο της τρέχουσας μέτρησης υπολογίζονται ο πίνακας κέρδους και η a posteriori εκτίμηση με την μεταβλητότητά της

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \\ \hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H_k \hat{x}_k^-) \\ P_k^+ &= (I - K_k H) P_k^-. \end{aligned}$$

γ. Extended Kalman Filter

Το φίλτρο Kalman είναι σε σύλληψη (και πρακτική εφαρμογή) μια γραμμική διαδικασία βέλτιστης εκτίμησης. Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις με (σχετικά) ήπια μη γραμμικά χαρακτηριστικά για τις οποίες είναι εφικτή μια προέκταση της εφαρμογής του βασικού αλγόριθμου, με προσαρμογές για τις μη γραμμικότητες. Ο βασικός (μη γραμμικός) αλγόριθμος που έχει τη δυνατότητα να γραμμικοποιείται γύρω από την τρέχουσα αναμενόμενη τιμή και μεταβλητότητα αναγνωρίζεται ως *εκτεταμένο φίλτρο Kalman* (Extended Kalman Filter, EKF) [23, 24, 58, 48, 107]. Η μη γραμμικότητα μπορεί να εντοπίζεται είτε στη δυναμική κατάσταση, είτε στο μοντέλο σχεδιασμού των παρατηρήσεων, είτε και στα δυο, οπότε το μοντέλο στο χώρο κατάστασης στη γενική μη γραμμική μορφή διαμορφώνεται ως

$$\begin{aligned} x_k &= \varphi(x_{k-1}, w_{k-1}), \\ z_k &= h(x_k, v_k). \end{aligned}$$

Καθώς στη πράξη οι τρέχουσες τιμές των θορύβων είναι άγνωστες, μια προσέγγιση της τρέχουσας εκτίμησης \tilde{x}_k λαμβάνεται από τη μετάβαση χωρίς την παρουσία θορύβου. Ομοίως λαμβάνεται και μια προσέγγιση του διανύσματος παρατήρησης \tilde{z}_k .

Η γραμμικοποίηση πραγματοποιείται με την εφαρμογή της μεθόδου Taylor και τον σχηματισμό των *Ιακοβιανών* (Jacobian) πινάκων α) των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων της δυναμικής και των παρατηρήσεων \mathcal{R} και \mathcal{H} ως προς το διάνυσμα κατάστασης και β) των W και V ως προς τους θορύβους τους. Τότε, οι εξισώσεις κατάστασης διαμορφώνονται ως

$$\begin{aligned} x_k &\approx \tilde{x}_k + \mathcal{R}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + W w_{k-1}, \\ z_k &\approx \tilde{z}_k + \mathcal{H}(x_k - \hat{x}_k) + V v_k, \end{aligned}$$

όπου x_k και z_k είναι οι πραγματικές τιμές των διανυσμάτων κατάστασης και παρατήρησης, αντίστοιχα. Ωστόσο, το ζητούμενο είναι η εκτίμηση των τιμών αυτών, και καθώς η a priori εκτίμηση σφάλματος

$$\tilde{e}_k \equiv x_k - \tilde{x}_k$$

είναι άγνωστη ποσότητα, έχοντας πρόσβαση μόνο στην εκτίμηση σφάλματος της παρατήρησης

$$\tilde{\epsilon}_k \equiv z_k - \tilde{z}_k ,$$

οι εξισώσεις κατάστασης διαμορφώνονται ως προς τα σφάλματα μετάβασης και παρατήρησης. Τελικά είναι

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_k &\approx \mathcal{R}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + r_k , \\ \tilde{\epsilon}_k &\approx \mathcal{H} \tilde{\epsilon}_k + \tilde{h}_k . \end{aligned}$$

Οι όροι σφάλματος r_k και \tilde{h}_k είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, μηδενικής αναμενόμενης τιμής και με μεταβλητότητες WQW^T και VQV^T , αντιστοίχως. Θέτοντας τις απαραίτητες υποθέσεις για τις κατανομές πιθανότητας των $\tilde{\epsilon}_k$, r_k και \tilde{h}_k η λύση εκτίμησης

$$\hat{\epsilon}_k = K_k \tilde{\epsilon}_k$$

παρέχει διόρθωση της προσέγγισης εκτίμησης \tilde{x}_k και τελικά, η a posteriori εκτίμηση κατάστασης υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} P_k^- &= \mathcal{R} P_{k-1}^+ \mathcal{R}^T + W_k Q_{k-1} W_k^T , \\ K_k &= P_k^- \mathcal{H}_k^T (\mathcal{H}_k P_k^- \mathcal{H}_k^T + V_k R_k V_k^T)^{-1} \\ \hat{x}_k &= \tilde{x}_k + K_k (z_k - \tilde{z}_k) \\ P_k^+ &= (I - K_k \mathcal{H}_k) P_k^- . \end{aligned}$$

Το KF και το EKF είναι ίσως οι ευρύτερα εφαρμοσμένοι αλγόριθμοι πλοήγησης παρά τα ήδη πενήντα και πλέον χρόνια της ύπαρξής τους. Όμως έχουν σχεδιαστεί και εφαρμοστεί (βασικά στο διαστημικό πρόγραμμα Apollo, NASA) με βάση τις ανάγκες ενός γραμμικού προβλήματος, κι η εφαρμογή τους σε ζητήματα όπου οι μη γραμμικότητες δεν αντιμετωπίζονται επαρκώς από τη μέθοδό τους, έχει ως αποτέλεσμα σημαντικές αποκλίσεις στις εκτιμήσεις κατάστασης. Λόγω της γραμμικοποίησης η μεταβλητότητα μεταδίδεται και οι επόμενες εκτιμήσεις της υποτιμούν σημαντικά τις πραγματικές τιμές ενώ, με λανθασμένη αρχική εκτίμηση κατάστασης και φτωχή προτυποποίηση της δυναμικής, οι αποκλίσεις στη λύση εκτίμησης συνήθως εμφανίζονται γρηγορότερα [42, 48].

Μία επίσης ευρέως εφαρμοσμένη μεθοδολογία φιλτραρίσματος (με καλύτερα μάλιστα αποτελέσματα σε σχέση με αποτελέσματα της εφαρμογής ενός EKF, για κάποιες περιπτώσεις), μάλιστα απαλλαγμένη από τον υπολογιστικών φόρτο των Ιακοβιανών πινάκων, είναι γνωστή ως *Unscented Kalman Filter* (UKF) [107]. Η μεθοδολογία UKF είναι προσανατολισμένη προς την καλύτερη προσέγγιση των πραγματικών τιμών της αναμενόμενης τιμής και της μεταβλητότητας, μέσω μιας ντετερμινιστικής τεχνικής δειγματοληψίας μεταξύ τιμών κοντά στην αναμενόμενη τιμή (*σημεία σίγμα*, sigma points). Με βάση αυτές τις κρίσιμες τιμές, ένας μη γραμμικός μετασχηματισμός προσεγγίζει εκτιμήσεις μεταβλητότητας. Παρά τα αναγνωρισμένα πλεονεκτήματά του, το UKF εφαρμόζεται σχετικά δύσκολα (όπως κάθε EKF) καθώς δεν αποφεύγεται η γραμμικοποίηση, ούτε τα θέματα αριθμητικής σταθερότητας που την ακολουθούν.

8. Ρυθμίσεις κατά την εφαρμογή της μεθοδολογίας Kalman

Κατά την πρακτική εφαρμογή της μεθοδολογίας Kalman, η μεταβλητότητα του θορύβου των μετρήσεων συνήθως εκτιμάται πριν τη λειτουργία της διαδικασίας φιλτραρίσματος. Η εκτίμησή της είναι πρακτικά απλή υπόθεση, καθώς, είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν μετρήσεις off-line και από το δείγμα τους να υπολογιστεί με ακρίβεια.

Ο προσδιορισμός της μεταβλητότητας της διαταραχής της δυναμικής κατάστασης ωστόσο, είναι δυσκολότερη υπόθεση καθώς γενικά, δεν υπάρχει η δυνατότητα απευθείας παρατήρησης της διεργασίας εξέλιξης· στη πραγματικότητα, γίνεται προσπάθεια εκτίμησής της ευθύς εξαρχής. Σε

κάποιες περιπτώσεις, μια σχετικά φτωχή (απλή) προτυποποίηση της διεργασίας εξέλιξης μπορεί να αποδώσει ικανοποιητικά κατά τη πρόβλεψη, με τον σχηματισμό του κατάλληλου πίνακα μεταβλητότητας κι αν *χορηγηθεί* αρκετή ποσότητα αβεβαιότητας στη σύγκλιση της πραγματικής δυναμικής με το πρότυπό της. Η επιλογή της κατάλληλης *ρυθμιστικής τιμής* (tuning) του θορύβου του δυναμικού μοντέλου είναι σημαντικό θέμα για την πρακτική εφαρμογή της μεθοδολογίας Kalman καθώς, πολλές φορές πραγματοποιείται εμπειρικά και χωρίς κάποια αναγνωρισμένη μέθοδο. Το πρόβλημα είναι πολύ ουσιαστικό και τροχοπέδη για την άμεση εφαρμογή του φίλτρου σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου.

Μεταξύ διάφορων πειραματικών προσεγγίσεων, μία μέθοδος ρύθμισης του φίλτρου είναι η εναλλαγή μεταξύ εναλλακτικών μοντέλων, όπως επίσης, η τεχνική *Expectation Maximization* (EM) βασιζόμενη σε μεθόδους μάθησης από εμπειρικά δεδομένα. Σε κάθε περίπτωση και ανεξάρτητα αν υπάρχει κάποια λογική βάση για την επιλογή των παραμέτρων θορύβου, οι τιμές του ενδέχεται να αποκτηθούν εφαρμόζοντας (σε ένα σετ αντιπροσωπευτικών δεδομένων) τον αλγόριθμο Kalman για εκτίμηση παραμέτρων θορύβου. Μια τέτοια διαδικασία ρύθμισης συνήθως αναφέρεται ως *αναγνώριση συστήματος* (system identification).

Σε συνθήκες κατά τις οποίες οι πίνακες μεταβλητότητας της διαταραχής της δυναμικής και του θορύβου των μετρήσεων είναι σταθεροί, στην εξέλιξη της διαδικασίας φιλτραρίσματος τόσο η *a posteriori* εκτίμηση της μεταβλητότητας, όσο και οι τιμές κέρδους γρήγορα σταθεροποιούνται και έκτοτε παραμένουν σταθερές. Τότε, οι τιμές της δυναμικής διαταραχής και του μετρητικού θορύβου μπορούν να προϋπολογιστούν εκτελώντας την διαδικασία αναγνώρισης συστήματος και υπολογίζοντας την τιμή της *σταθεροποιημένης κατάστασης* (steady-state) της *a posteriori* μεταβλητότητας [107, 48, 23].

ε. Εξομάλυνση Kalman

Έχει ειπωθεί επανειλημμένως, ότι το φίλτρο Kalman έχει σχεδιαστεί για εφαρμογή σε πραγματικό χρόνο. Ωστόσο, για κάποιες εφαρμογές όπως η παρακολούθηση (surveillance) ή για ποιοτικό έλεγχο της απόδοσης του βασικού αλγόριθμου σε πραγματικό χρόνο, οι ιδιότητες ενός δυναμικού συστήματος ζητούνται και *εκ των υστέρων*. Η εξομάλυνση Kalman είναι προέκταση του βασικού αλγόριθμου και αξιοποιεί πληροφορία μέτρησης τόσο πριν, όσο και μετά τον χρόνο του συμβάντος ενδιαφέροντος. Αυτό οδηγεί σε περισσότερο ακριβείς εκτιμήσεις κατάστασης για εφαρμογές μη-πραγματικού χρόνου. Οι βασικές μέθοδοι εφαρμογής της εξομάλυνσης Kalman είναι το φίλτρο *πρόσθιας-οπίσθιας* μετάδοσης (forward-backward filter) και η μέθοδος *Rauch-Tung-Striebel* (RTS) [93, 107, 48, 23].

Το φίλτρο *πρόσθιας-οπίσθιας* μετάδοσης συνιστάται από δύο βασικά φίλτρα τα οποία όμως αντιμετωπίζονται ανεξάρτητα. Απλώς, το φίλτρο *οπίσθιας* μετάδοσης μεταδίδεται από το τέλος του συμβάντος προς την αρχή καταγραφής των μετρήσεων, χωρίς να αρχικοποιηθεί από την τελευταία εκτίμηση κατάστασης που προέκυψε από το φίλτρο *πρόσθιας* μετάδοσης. Οι εκτιμήσεις εξομάλυνσης προκύπτουν από τον συνδυασμό των εκτιμήσεων των δύο φίλτρων, σταθμισμένες αναλογικά με τη συμμεταβλητότητα σφαλμάτων τους.

Στη μέθοδο εξομάλυνσης RTS, επίσης εφαρμόζεται ένα συμβατικό φίλτρο Kalman, ωστόσο μετά από κάθε επαναπροσδιορισμό εκτίμησης αποθηκεύονται το διάνυσμα κατάστασης \hat{x}_k , οι πίνακες συμμεταβλητότητας σφάλματος P_k^+ και ο πίνακας μετάβασης Φ_k . Με το πέρας του γεγονότος η εξομάλυνση ξεκινά από το τέλος των μετρήσεων κατευθυνόμενη προς την αρχή. Ο πίνακας κέρδους εξομάλυνσης δίνεται από

$$A_k = P_k^+ \Phi_k^T (P_{k-1}^-)^{-1},$$

ενώ, η εκτίμηση εξομάλυνσης και η συμμεταβλητότητα σφάλματος εξομάλυνσης δίνονται από

$$\hat{x}_k^s = \hat{x}_k + A_k (\hat{x}_{k+1}^s - \hat{x}_{k+1}^-)$$

$$P_k^s = P_k^+ + A_k (P_{k+1}^s - P_{k+1}^-) A_k^T .$$

Όταν ζητείται εκτίμηση εξομάλυνσης για όλα τα σημεία της εφαρμογής, ενδείκνυται η μέθοδος RTS. Σε περιπτώσεις που απλώς ζητείται εξομάλυνση κατάστασης σε ένα σημείο της εφαρμογής η μέθοδος πρόσθιας-οπίσθιας μετάδοσης είναι αρκετή.

Κεφάλαιο 4^ο

Επιβλεπόμενη Μηχανική Μάθηση

4.1 Μηχανική Μάθηση

Σε αντίθεση με τις αναλυτικές μεθόδους, ο ήπιος υπολογισμός μιμείται την ανθρώπινη μεθοδολογία για την διαμόρφωση *επίγνωσης* (cognition), και με σχεδιασμό αρχιτεκτονικών παράλληλου υπολογισμού προσομοιώνει την βιολογική λειτουργία. Η *μηχανική μάθηση* (machine learning) είναι μια τέτοια μεθοδολογία: είναι αλγόριθμοι παράλληλου υπολογισμού, οι οποίοι μπορούν να διδαχθούν από εμπειρική γνώση αποδίδοντας έτσι, σχέσεις αντιστοίχισης εισόδου-εξόδου γρηγορότερα από τις αναλυτικές σειριακές αναπαραστάσεις. Πρόκειται για μια προσέγγιση *στατιστικού συμπερασμού* (statistical inference) ενώ στη σχετική βιβλιογραφία απαντάται και ως *στατιστική μάθηση* (statistical learning).

Η μέθοδος που ορίζει την εκπαίδευση μιας μηχανής (ενός λογισμικού στη πραγματικότητα) είναι ιδιαίτερης σημαντικότητας για την απόδοσή της και παρέχει τον βαθμό της ευρωστίας της. Μεταξύ διάφορων προσεγγίσεων εκπαίδευσης, οι πλέον εφαρμοσμένες είναι η *επιβλεπόμενη μηχανική μάθηση* (supervised machine learning) και η *μη-επιβλεπόμενη μηχανική μάθηση* (unsupervised machine learning). Στην επιβλεπόμενη μάθηση η μηχανή βασίζει την “διδασχά” της σε “εξωτερικούς σχηματισμούς” όπως ομάδες *εμπειρικών* δεδομένων (πειραματικές μετρήσεις, καταγραφές, κτλ) ή τύπους δομημένης γνώσης (συνήθως της μορφής AN-TOTE). Στην μη-επιβλεπόμενη μάθηση, η μηχανή πρέπει να αυτό-οργανωθεί βασιζόμενη σε “εσωτερικά κριτήρια” και πληροφορία που προκύπτει τοπικά και κατά την διάρκεια της αυτό-εκπαίδευσης [4, 5, 14, 30, 54, 104].

Οι αλγόριθμοι μηχανικής μάθησης έχουν χρησιμοποιηθεί σε διάφορες εφαρμογές της Μηχανικής καθώς, αποδείχτηκε ότι προσεγγίζουν αποτελεσματικά σύνθετες μαθηματικές συναρτήσεις. Παραδείγματα είναι ο έλεγχος πολύπλοκων δυναμικών συστημάτων, οι εφαρμογές αναγνώρισης προτύπου, οι εφαρμογές όρασης υπολογιστών κ.α. Πολύ συχνά χαρακτηρίζονται ως *ευφυείς μηχανές* αν και τελικά, αυτός ο χαρακτηρισμός θα μπορούσε να θεωρηθεί καταχρηστικός. Παρόλο που οι μηχανές μάθησης είναι σε θέση να εκθέσουν ένα σύνολο από λειτουργίες προσομοιώνοντας την ανθρώπινη ευχέρεια για μάθηση, γενίκευση, απομνημόνευση και πρόβλεψη, η Επιστήμη στη πραγματικότητα, βρίσκεται ακόμα πολύ μακριά στο να επιτύχει οτιδήποτε παρόμοιο της ανθρώπινης ευφυΐας.

4.1.1 Στατιστικός Συμπερασμός και Μηχανική Μάθηση

Οι κλασικές τεχνικές στατιστικής ανέλιξης (παλινδρόμηση) και *Μπεϋσιανής* (Bayesian) ταξινόμησης κλάσεων βασίζονται σε μια πολύ αυστηρή υπόθεση: η κατανομή πιθανότητας και οι από κοινού συναρτήσεις πυκνότητας-πιθανότητας είναι δεδομένες. Ως εκ τούτου, ο κλασικός στατιστικός συμπερασμός βασίζεται σε τρεις θεμελιώδεις υποθέσεις. Πρώτον, τα πειραματικά δεδομένα είναι

κατάλληλα ώστε να παρέχουν ένα αναλυτικό μοντέλο, το οποίο συντίθεται από ένα σύστημα γραμμικά παραμετροποιημένων συναρτήσεων. Αυτό αποτελεί και την θεμέλια βάση της *παραμετρικής κανονικοποίησης* (parametric regularisation) από δεδομένα. Δεύτερον, για τα περισσότερα *πραγματικά προβλήματα* (real-life problems) η στοχαστική συνισταμένη των παρεχόμενων δεδομένων είναι ότι αυτά υπόκεινται σε νόμους κατανομής πιθανότητας Gauss. Και τρίτον, με βάση την δεύτερη υπόθεση συνεπάγεται ότι το υπόδειγμα για την εκτίμηση των παραμέτρων είναι η μέθοδος της *μέγιστης πιθανοφάνειας* (maximum likelihood), η οποία για τις περισσότερες εφαρμογές μηχανικής “καλύπτεται” από την ελαχιστοποίηση συναρτήσεων κόστους του αθροίσματος των τετραγωνικών σφαλμάτων [81, 80, 84, 141].

Ωστόσο, αποφαίνεται ότι αυτές οι τρεις υποθέσεις (στις οποίες βασίζονται όλα τα υποδείγματα κλασικού στατιστικού συμπερασμού) δεν επιβεβαιώνονται για πολλά σύγχρονα προβλήματα της Μηχανικής και αυτό λόγω δυο ενστάσεων. Τα σύγχρονα προβλήματα είναι προβλήματα υψηλής διάστασης. Συνεπώς, αν η γραμμικά παραμετροποιημένη απεικόνιση δεν είναι *ομαλή* (smooth), απαιτείται εκθετική αύξηση στον αριθμό των όρων της ανάπτυξης, με αποτέλεσμα την αντίστοιχη αύξηση στη διάσταση του χώρου εισόδου. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αυξάνονται οι ανεξάρτητες μεταβλητές της ανάπτυξης, δημιουργώντας την γνωστή “*κατάρρα της διαστατικότητας*” (curse of dimensionality) [14, 54, 136]. Επίσης, οι υποκείμενοι στατιστικοί νόμοι που διέπουν τις πειραματικές διαδικασίες “γένεσης” πραγματικών δεδομένων μπορεί, τυπικά, να διαφέρουν σημαντικά από αυτούς της κανονικής κατανομής. Για να δομηθεί ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος στατιστικού συμπερασμού, αυτή η διαφορά πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά τον σχεδιασμό του στατιστικού μοντέλου. Από τις δυο ενστάσεις στις βασικές υποθέσεις του στατιστικού συμπερασμού, συνεπάγεται ότι ένας εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας πρέπει να αντικατασταθεί από ένα νέο υπόδειγμα σχεδιασμού, το οποίο να είναι κατάλληλο για την προτυποποίηση μη Γκαουσιανών κατανομών και άγνωστων συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας.

Το βασικό χαρακτηριστικό όλων των σύγχρονων προβλημάτων παλινδρόμησης ή/και ταξινόμησης από δεδομένα άγνωστης κατανομής είναι η μη γραμμική συναρτησιακή απεικόνιση μεταξύ χώρων υψηλής διάστασης. Και η σύγχρονη προσέγγιση σχεδιασμού βρίσκεται στις μεθοδολογίες (στατιστικής) μηχανικής μάθησης από πειραματικά δεδομένα. Οι μηχανές στατιστικής μάθησης προσφέρουν μη γραμμικά και μη παραμετρικά μοντέλα υπό τις εξής έννοιες: Μη γραμμικότητα σημαίνει ότι το μοντέλο δεν περιορίζεται σε γραμμικές σχέσεις αντιστοίχισης εισόδου-εξόδου, και ότι η συνάρτηση κόστους είναι μη γραμμική σε σχέση με τις άγνωστες παραμέτρους. Επίσης, μη παραμετρικό μοντέλο δεν σημαίνει ότι αυτό δεν έχει καθόλου παραμέτρους· αντιθέτως. Ο προσδιορισμός τους (εκτίμηση και προσαρμογή-tuning), είναι μεγάλης σημασίας για την καταλληλότητα του μοντέλου. Ωστόσο, και σε αντίθεση με τις μεθόδους του κλασικού στατιστικού συμπερασμού, δεν είναι προκαθορισμένες, αλλά ο αριθμός τους εξαρτάται από τον όγκο των *εμπειρικών δεδομένων εκπαίδευσης* (empirical training data). Με άλλα λόγια, οι παράμετροι που ορίζουν την καταλληλότητα του μοντέλου προκύπτουν από πειραματικά δεδομένα, με τρόπο που να προσαρμόζουν την “χωρητικότητα” του μοντέλου στη πολυπλοκότητά αυτών των δεδομένων.

4.1.2 Επιβλεπόμενη Μηχανική Μάθηση με Πειραματικά Δεδομένα

Η ιδέα της ενσωμάτωσης πρότερης ανθρώπινης εμπειρίας σε διαχειριστικούς αλγόριθμους, ενέπνευσε την ανάπτυξη μεθοδολογιών μάθησης, όπως η *Ασαφής Λογική* (Fuzzy Logic). Σε πολλές περιπτώσεις

ωστόσο, τέτοιου είδους γνώση δεν διατίθεται. Ενδέχεται όμως, να υπάρχουν πειραματικά δεδομένα, βάση των οποίων θα μπορούσε να σχηματιστεί μια μορφή επίγνωσης της κατάστασης που περιγράφουν, μέσω υπολογισμών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών και μη γραμμική βελτιστοποίηση (προσαρμογή καμπύλης ή επιφάνειας στα πειραματικά δεδομένα).

Με την επιβλεπόμενη μηχανική μάθηση ένας κατάλληλα δομημένος αλγόριθμος ενσωματώνει αυτές τις πληροφορίες σε μια συναρτησιακή οντότητα, προσομοιώνοντας έτσι την επίγνωση που προκύπτει από τα δεδομένα εκπαίδευσης. Είναι μια διαδικασία βελτιστοποίησης, που εκμεταλλεύεται τις πληροφορίες που παρέχει ένα χαρακτηριστικό σύνολο εμπειρικών δεδομένων (εκπαίδευσης) της μορφής ζευγών *κατάσταση εισόδου/κατάσταση επιθυμητής εξόδου* (training input/desired output). Ο στόχος είναι η *συναρτησιακή απεικόνιση* (mapping) του συνόλου των παραδειγμάτων εισόδου στα επιθυμητά παραδείγματα εξόδου. Αυτό επιτυγχάνεται με την βέλτιστη προσαρμογή των τιμών ενός διανύσματος βαρών που συνάπτει την διαβαθμισμένη σχέση της εισόδου με την επιθυμητή έξοδο, σύμφωνα με τα διαθέσιμα δείγματα. Όταν η μηχανή ορίσει την συναρτησιακή απεικόνιση των δεδομένων εισόδου με κάποιο προκαθορισμένο ελάχιστο σφάλμα, η εκπαιδευτική διαδικασία τελειώνει. Στη συνέχεια είναι σε θέση να επιτύχει σωστές προβλέψεις στην έξοδο (ικανοποιητικές προσεγγίσεις), να υπολογίζει δηλαδή εξόδους μη γνωστών από την εκπαίδευση δεδομένων εισόδου· ο βαθμός επιτυχίας των υπολογισμών εξόδου υποδηλώνει ικανότητα *γενίκευσης* (generalisation) [118, 138].

Η προετοιμασία των αρχείων των δεδομένων εκπαίδευσης είναι μεγάλης σημασίας για την επίτευξη γενικευμένης απόδοσης και απαιτείται να είναι ευνόητη και χαρακτηριστική, καλύπτοντας όλες τις πρακτικές λειτουργίες της εφαρμογής ή όσες είναι δυνατόν. Όμως είναι εξίσου απαραίτητο τα δεδομένα εκπαίδευσης να μην είναι ασφυκτικά προσαρμοσμένα σε κάποιες από αυτές τις λειτουργίες. Σε αυτή τη περίπτωση, εμφανίζεται η κατάσταση της *υπέρ-προσαρμογής* (over-fitting) και η μηχανή αδυνατεί να αποδώσει ικανοποιητικές εξόδους σε δεδομένα εισόδου που δεν είναι μέρος του συνόλου των δεδομένων εκπαίδευσης. Αυτό συνήθως συμβαίνει όταν η συνάρτηση κόστους για την προσαρμογή του διανύσματος των *βαρών συναψης* (synaptic weights) βελτιστοποιείται ως το οριακό σημείο του τοπικού ακρότατου. Για την αποφυγή της υπέρ-προσαρμογής, μια κοινή πρακτική είναι η απομόνωση ενός μέρους από το σύνολο των δεδομένων εκπαίδευσης, το οποίο χρησιμοποιείται ως *δεδομένα επικύρωσης* (validation set) και θέτει το επιθυμητό σημείο ολοκλήρωσης της φάσης εκπαίδευσης [96, 101, 109, 122, 137, 139].

4.1.3 Αρχιτεκτονικές Επιβλεπόμενης Μηχανικής Μάθησης από Εμπειρικά Δεδομένα

Η μη γραμμικότητα δημιούργησε κίνητρο για μοντελοποίηση με μαθηματική απεικόνιση πειραματικών δεδομένων εισόδου σε επιθυμητά δεδομένα εξόδου, το οποίο στη συνέχεια, οδήγησε στον σχεδιασμό αλγορίθμων στατιστικής μάθησης. Οι αρχιτεκτονικές των *τεχνητών νευρωνικών δικτύων* (artificial neural networks, ANN) και των *μηχανών διανυσμάτων υποστήριξης* (support vector machines, SVM) είναι η υλοποίησή τους. Καθώς η εκπαίδευσή τους δεν προκύπτει από καθορισμένη πρότερη γνώση, χαρακτηρίζονται ως μέθοδοι *προτυποποίησης μαύρου κουτιού* (black box modelling) [118, 132, 4, 14]. Τόσο τα ANN όσο και τα SVM είναι στην ουσία μια γραφική αναπαράσταση της συναρτησιακής διαδικασίας κάθε εφαρμογής ανέλιξης ή προσδιορισμού ορίου ταξινόμησης (καμπύλη ή επιφάνεια), και γραφικά σε ότι αφορά τον σχεδιασμό είναι πανομοιότυπες αρχιτεκτονικές. Ωστόσο, παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές στην ανάπτυξη των δομών τους, στη μεθοδολογία

παραμετροποίησης και το σημαντικότερο στην αλγοριθμική προσέγγιση της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Συνεπώς, θεωρούνται διαφορετικές αρχιτεκτονικές μάθησης.

Οι κατηγορίες νευρωνικών δικτύων ταξινομούνται σύμφωνα με την αναλυτική τους λειτουργία ή/και την αρχιτεκτονική δόμησης. Η λειτουργία τους χαρακτηρίζεται είτε ως *εμπρόσθια μετάδοση* (feedforward), είτε ως *οπίσθια* (feedback) και υποδηλώνει τον τρόπο τροφοδότησης των συναρτησιακών σχηματισμών που δομούν τα δίκτυα, από τον χώρο εισόδου ως την έξοδο. Στα δίκτυα εμπρόσθιας τροφοδότησης εντοπίζονται σημαντικές διαφοροποιήσεις και ως προς την αλγοριθμική προσέγγιση εκπαίδευσης. Ο αλγόριθμος *error back propagation* και διάφορες παραλλαγές του και η προσέγγιση εκπαίδευσης με *συναρτήσεις ακτινικής βάσης* (Radial Basis Functions, RBF) είναι οι πιο χαρακτηριστικές. Παραλλαγές εντοπίζονται και κατά την εκπαίδευση μηχανών διανυσμάτων υποστήριξης. Μάλιστα η πιο πρόσφατη, οι *μηχανές διανυσμάτων υποστήριξης ελαχίστων τετραγώνων* (Least Squares SVM, LS-SVM) έχει σημαντική απήχηση τα τελευταία χρόνια.

4.2 Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα

Ως γενική θεώρηση, ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο βασίζεται στον σχεδιασμό ενός μαθηματικού *μηχανισμού* που προσομοιώνει την λειτουργία των βιολογικών νευρώνων και τα συστήματα διασύνδεσής τους. Για κάθε εφαρμογή το κατάλληλο δίκτυο δομείται από ένα διατεταγμένο σύνολο *τεχνητών νευρώνων* (neurons), απλών στην ουσία *συναρτησιακών μονάδων* υπολογισμού, διατεταγμένων σε *υπολογιστικά επίπεδα* (computational layers), οι οποίοι εκτελούν τους υπολογισμούς τους *παράλληλα* (parallel processing) [41, 98, 87, 135, 133, 33].

Τα *πολυεπίπεδα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα εμπρόσθιας τροφοδότησης* (feedforward multilayer perceptrons, MLP) είναι η δημοφιλέστερη αρχιτεκτονική σχεδιασμού ANN, κατά την οποία οι νευρώνες προωθούν τις *τοπικές αποκρίσεις* (local outputs) των παράλληλων υπολογισμών από το *επίπεδο εισόδου* (input layer) στα επόμενα επίπεδα (*κρυφά επίπεδα*, hidden layers), επαναλαμβάνοντας την διαδικασία ως το επίπεδο εξόδου (output layer). Τα αθροιζόμενα ερεθίσματα στο τελευταίο κρυφό επίπεδο πυροδοτούν την *συνάρτηση εξόδου*, αποδίδοντας τελικά την συναρτησιακή απεικόνιση των δεδομένων εισόδου στην έξοδο.

Για τη δομή του δικτύου και την επιλογή του βέλτιστου αριθμού των κρυφών υπολογιστικών επιπέδων, δεν ακολουθείται κάποια δεδομένη μαθηματική προσέγγιση. Η επιλογή εξαρτάται καταρχήν από την εφαρμογή και κατ' επέκταση από την εμπειρία του σχεδιαστή. Μπορεί επίσης να βασιστεί και στη σύγκλιση που επιτυγχάνει η εκπαίδευση του δικτύου, ώστε μετά από δοκιμές και εφαρμόζοντας διαφορετικές συνθέσεις σχηματισμού, να επιλεγεί η αρχιτεκτονική με την οποία επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή rms από τον σχηματισμό με τα λιγότερα κρυφά επίπεδα και συνολικό αριθμό κόμβων.

4.2.1 Δίκτυα Εμπρόσθιας Τροφοδότησης Ταξινόμησης Προτύπου

Τα πολυεπίπεδα νευρωνικά δίκτυα εμπρόσθιας τροφοδότησης έχουν ευρεία εφαρμογή σε εργασίες *ταξινόμησης* (classification). Η *αναγνώριση προτύπου* (pattern recognition) είναι χαρακτηριστική περίπτωση τέτοιας εφαρμογής, κατά την οποία το δίκτυο συνήθως σχεδιάζεται με ένα κρυφό επίπεδο και μη γραμμική συνάρτηση ενεργοποίησης, ενώ στο επίπεδο εξόδου η συνάρτηση ενεργοποίησης μπορεί να έχει τόσο γραμμικά, όσο και μη γραμμικά χαρακτηριστικά.

Κάθε τεχνητός νευρώνας προσομοιώνει μαθηματικά έναν βιολογικό, έχοντας δεδομένες τρεις βασικές συνιστώσες ποσότητες: τα *συναπτικά βάρη* w_i (synaptic weights), τη τιμή για το *κατώφλι πυροδότησης* θ (threshold) και την μορφή της *συνάρτησης ενεργοποίησης* $\varphi(\cdot)$ (activation function). Ο νευρώνας δύναται να λαμβάνει περισσότερα του ενός ερεθίσματα x_i (inputs), η βαρύτητα των οποίων διαμορφώνεται από τη τιμή του αντίστοιχου βάρους. Τα διαβαθμισμένα ερεθίσματα αθροίζονται στον κόμβο διασύνδεσης (node), η τιμή του αθροίσματος συγκρίνεται με το κατώφλι και η συνάρτηση ενεργοποίησης πυροδοτεί την έξοδο. Στο άθροισμα, συνήθως περιλαμβάνεται και μια μοναδιαία είσοδος, το βάρος της οποίας διαμορφώνει ένα όρο bias b . Ανάλογα με την μορφή της, η συνάρτηση ενεργοποίησης διεγείρει τον νευρώνα στα θετικά αθροίσματα και αναστέλλει την ενεργοποίηση στα αρνητικά.

Με μαθηματικούς όρους, το πρότυπο ενός τεχνητού νευρώνα διαμορφώνεται από το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος δεδομένων εισόδου με το διάνυσμα των αντίστοιχων συναπτικών βαρών ως

$$y = \varphi \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^T w_i + b \right) - \theta \right).$$

Η πολυπλοκότητα της συνάρτησης ενεργοποίησης $y = \varphi(u)$ εξαρτάται από το τύπο του προβλήματος. Για μη γραμμικά προβλήματα, συνήθως χρησιμοποιούνται τυπικές μορφές όπως η σιγμοειδής μη γραμμική συνάρτηση

$$\varphi(u) = \frac{1}{1 + e^{-wu}}, \quad 0 \leq \varphi(u) \leq 1$$

ως ο βασικός τύπος ενεργοποίησης ενός τεχνητού νευρώνα και η μη γραμμική εφαπτόμενη υπερβολική συνάρτηση

$$\varphi(u) = \frac{e^{wu} - e^{-wu}}{e^{wu} + e^{-wu}}, \quad -1 \leq \varphi(u) \leq 1.$$

Για τις περιπτώσεις ταξινόμησης το δίκτυο εκπαιδεύεται πάνω στο μοντέλο παράλληλα διατεταγμένων νευρώνων $y = \varphi(\cdot)$ όπου ο αλγόριθμος ταξινόμησης εκτιμάται ως

$$y = \text{sing} [\varphi(\cdot)],$$

με την έξοδο να λαμβάνει διακριτές τιμές. Σε προβλήματα ταξινόμησης δυο κλάσεων (binary classification) οι διακριτές τιμές στην έξοδο συνήθως εκχωρούνται ως $y_k \in \{-1, +1\}$. Για την ταξινόμηση περισσότερων κλάσεων είναι προφανές ότι απαιτούνται περισσότερες διακριτές τιμές απεικόνισης για κάθε κλάση. Από την κατάλληλη μορφή κωδικοποίησης-αποκωδικοποίησης μέσα από τα δεδομένα εκπαίδευσης, εκτιμάται η αποτελεσματικότητα της στρατηγικής σχεδιασμού και εν γένει, η επιτυχία της σωστής ταξινόμησης.

4.2.2 Εκπαίδευση Οπίσθιας Μετάδοσης Σφάλματος

Ο αλγόριθμος εκπαίδευσης *οπίσθιας μετάδοσης σφάλματος* (Error Back Propagation, EBP) οφείλει την επιτυχημένη “εφαρμοσιμότητα” του στην απλότητα που χαρακτηρίζει την μαθηματική εφαρμογή του. Στην πρώτη φάση της διαδικασίας τα συναπτικά βάρη του δικτύου λαμβάνουν τιμές αρχικοποίησης (initialisation). Η εμπρόσθια μετάδοση των υπολογισμών από κάθε επίπεδο του δικτύου καταλήγει στον υπολογισμό της τιμής εξόδου, η οποία στη συνέχεια συγκρίνεται με την τιμή της επιθυμητής εξόδου. Το σφάλμα μεταξύ της εξόδου και της επιθυμητής της τιμής ωθείται προς τα προηγούμενα επίπεδα και με βάση αυτό προσαρμόζονται οι νέες τιμές των συναπτικών τους βαρών. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται προωθώντας μια νέα τιμή εισόδου από το αρχείο εκπαίδευσης και υπολογίζοντας

μια νέα έξοδο, έως ότου το σφάλμα στην έξοδο συγκλίνει στα επιθυμητά επίπεδα, ολοκληρώνοντας έτσι την εκπαίδευση. Με μαθηματικούς όρους (στην περίπτωση της ομαδικής επεξεργασίας) πρόκειται για την ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης κόστους της μορφής

$$\min_{w \in \mathbb{R}^p} J_{train}(w) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \|y_k - \varphi(x_k; w)\|_2^2,$$

N δεδομένων εισόδου/επιθυμητής εξόδου $\{x_k, y_k\}_{k=1}^N$, όπου $w \in \mathbb{R}^p$ είναι διάνυσμα p αγνώστων και περιέχει τις τιμές των συναπτικών βαρών και του όρου bias.

Με τους ίδιους όρους, ο βασικός αλγόριθμος back propagation είναι μια “κομψή” μέθοδος προσδιορισμού της αναλυτικής έκφρασης της κλίσης της συνάρτησης κόστους. Η οπίσθια μετάδοση ουσιαστικά υλοποιείται με τον υπολογισμό των μεταβλητών *delta* (delta rule training), βάση των οποίων τροποποιούνται οι τιμές των διασυνδεδεμένων βαρών. Στη πράξη, είναι πρόβλημα βελτιστοποίησης ελαχίστων τετραγώνων χωρίς δεσμεύσεις, για το οποίο μόνο ένα τοπικό ακρότατο μπορεί να υπολογιστεί με επαναλήψεις Least Mean Squares (LMS) κατά την διαδικασία της εκπαίδευσης. Έτσι, ο αλγόριθμος μάθησης back propagation θα μπορούσε κάλλιστα να θεωρείται επέκταση του αναδρομικού αλγόριθμου του ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος, ο οποίος έχει ευρεία εφαρμογή στη θεωρία επεξεργασίας σήματος. Κάποιες βελτιωμένες παραλλαγές του βασικού αλγόριθμου περιλαμβάνουν ένα όρο ορμής (momentum term) η , ο οποίος ουσιαστικά δείχνει τον ρυθμό της προσαρμοστικότητας κατά τα επαναληπτικά βήματα της διαδικασίας εκπαίδευσης. Με εφαρμογή της τεχνικής της φθίνουσας κλίσης (gradient descent) στη συνάρτηση κόστους, κάθε αλλαγή της τιμής των βαρών προς την τελική προσαρμογή τους είναι στην κατεύθυνση αρνητικών κλίσεων, με τα βήματα επανάληψης να υπολογίζονται ως

$$\Delta w_{kj} = -\eta \frac{\partial J}{\partial w_{kj}}.$$

Ως διαδικασία LMS, η κλίση της συνάρτησης κόστους είναι ανάλογη του σφάλματος εξόδου δ_k

$$\frac{\partial J}{\partial w_{kj}} = -\delta_k y_j$$

οπότε, η προσαρμογή της τιμής του βάρους επί του σφάλματος στην έξοδο ορίζεται ως

$$w_{kj} = w_{kj} + \Delta w_{kj}$$

ή τελικά,

$$w_{kj} = w_{kj} + \eta \delta_k y_j.$$

Σε αυτό το πλαίσιο, μια σημαντική ιδέα ήταν η προσθήκη στην έκφραση της συνάρτησης κόστους ενός όρου που θα επέτρεπε να διατηρηθούν μικρές οι τιμές των βαρών (weight decay term) και να επιτευχθεί ικανοποιητική προσαρμογή στα δεδομένα εκπαίδευσης. Η συνάρτηση κόστους τότε, διαμορφώνεται ως

$$\min_{w \in \mathbb{R}^p} J_{reg}(w) = \nu \frac{1}{2} w^T w + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \|y_k - \varphi(x_k; w)\|_2^2,$$

όπου ν είναι μια σταθερά κανονικοποίησης. Η παραμετρική κανονικοποίηση είναι ιδιαίτερης σημασίας για την αξιοπιστία της εκπαίδευσης ενός πολυστρωματικού δικτύου τεχνητών νευρώνων. Χάρης σε αυτόν τον μηχανισμό είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ένας αποτελεσματικός αριθμός παραμέτρων, μικρότερος από το σύνολο των βαρών, δεδομένης της κατάλληλης επιλογής της σταθεράς κανονικοποίησης. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ακόμα και αν το δίκτυο είναι πολύπλοκο και ο αριθμός των διασυνδεδεμένων νευρώνων μεγάλος, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν λιγότεροι παράμετροι και εν τούτοις, το δίκτυο να επιτυγχάνει απόδοση ικανοποιητικής γενίκευσης.

Παρά την ευρεία εφαρμοσιμότητά του, ο αλγόριθμος έχει κάποια βασικά μειονεκτήματα. Ενόσω η

βελτιστοποίηση των παραμέτρων ορμής και ρυθμού μάθησης (learning rate) αποφέρει συνολικές βελτιώσεις στην απόδοση του δικτύου, η μεθοδολογία υποφέρει από αργή σύγκλιση για την προσαρμογή των επιθυμητών τιμών των συναπτικών βαρών. Για (πολλές) εφαρμογές στις οποίες η εκπαίδευση πραγματοποιείται σε πραγματικό χρόνο, η back propagation διαδικασία είναι χρονοβόρα και ίσως αναποτελεσματική [14, 54, 96].

4.2.3 Δίκτυα Συναρτήσεων Ακτινικής Βάσης

Τα δίκτυα συναρτήσεων ακτινικής βάσης (Radial Basis Function networks, RBF), είναι μια άλλη δημοφιλή κατηγορία νευρωνικών δικτύων, για τα οποία η βέλτιστη απόδοση τους γίνεται κατανοητή με όρους μη-παραμετρικής κανονικοποίησης (non-parametric regularisation).

Τα δίκτυα RBF παρέχουν μια ελκυστική εναλλακτική πρόταση εκπαίδευσης καθώς, δεν παρουσιάζουν καμία από τις παθογένειες της back propagation μεθοδολογίας (τοπικά ακρότατα και υπέρ-προσαρμογή), αν και δεν είναι πράγματι απίθανο να εμφανίζουν αργή “απόκριση” σε κάποιες αρχιτεκτονικές σχεδιασμού πολλών νευρώνων στο κρυφό επίπεδο. Κατά βάση ωστόσο, και κυρίως σε εφαρμογές ανέλιξης, αποδίδουν εξαιρετικές προσεγγίσεις και εκπαιδεύονται γρήγορα και (μαθηματικά) εύκολα.

Για ένα σύνολο δεδομένων εκπαίδευσης $\{x_k, y_k\}_{k=1}^N$, το μαθηματικό πρόβλημα στα δίκτυα RBF είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους

$$\min_{\varphi} J_{train}(\varphi) = \sum_{k=1}^N (y_k - \varphi(x_k))^2 + \nu \|P\varphi\|_2^2,$$

όπου $\nu > 0$ είναι παράμετρος κανονικοποίησης και P είναι ένας διαφορικός τελεστής (differential operator). Με συγκεκριμένη επιλογή P προκύπτει μοντέλο RBF της μορφής

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N w_k G\|x - x_k\|,$$

όπου $G(\cdot)$ η Γκαουσιανή συνάρτηση πυροδότησης, η οποία κεντρώνεται σε κάθε ένα από τα σημεία του σετ των δεδομένων εκπαίδευσης. Οι τιμές των συντελεστών των βαρών προκύπτουν τελικά από την λύση ενός γραμμικού συστήματος του οποίου η διάσταση μεγαλώνει, όσο περισσότερα είναι τα δεδομένα εκπαίδευσης [50, 104, 106].

Οι απεικονίσεις του διανύσματος εισόδου σε χώρο υψηλότερης διάστασης βασίζονται στη μαθηματική αντίληψη των *συναρτησιακών πυρήνων* (kernels). Οι συναρτήσεις πυρήνα ορίζονται σε κάθε κόμβο j ως

$$K_j \left(\frac{\|x - c_j\|}{\sigma_j} \right), \quad K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

με κέντρο $c_j \in \mathbb{R}^n$, όπου η παράμετρος σ_j προσδιορίζει την επιρροή του πυρήνα γύρω του. Συχνά, οι συναρτήσεις $\varphi(\|\cdot\|)$ είναι ακτινικά συμμετρικές με μοναδικό μέγιστο στο σημείο του κέντρου και πείπτουν σε μηδενικές τιμές σε μεγάλες ακτίνες από αυτό. Για κάθε διάνυσμα εισόδου $x \in \mathbb{R}^n$ μόνο το μικρό κλάσμα των μονάδων επεξεργασίας (κόμβοι) που βρίσκονται περί του κέντρου του συμμετέχει με μη μηδενικές πυροδοτήσεις ενεργοποίησης.

Με την κατάλληλη επιλογή συνάρτησης πυρήνα, η μορφή του δικτύου σχετίζεται με μεθόδους μη παραμετρικού στατιστικού συμπερασμού ενώ, με προσεκτική επιλογή του εύρους της, δεν χρειάζεται να προσδιοριστούν άλλες παράμετροι. Τότε, η παραμετροποίηση ενός RBF μοντέλου είναι της μορφής

$$\varphi(x; w_i, c_i) = \sum_{i=1}^{n_h} w_i G(\|x - c_i\|),$$

όπου n_h είναι ο αριθμός των κρυφών επιπέδων. Οι άγνωστες παράμετροι είναι οι $w_i \in \mathbb{R}$ και $c_i \in \mathbb{R}^n$ για $i = 1, 2, \dots, n_h$. Όπως είναι προφανές, εδώ ο αριθμός των παραμέτρων προς εκτίμηση είναι σταθερά καθορισμένος και ανεξάρτητος του μεγέθους του σετ των δεδομένων εκπαίδευσης. Ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$\min_{w_i, c_i} J_{train}(x; w_i, c_i) = \sum_{k=1}^N (y_k - \varphi(x; w_i, c_i))^2 + \nu \|P \varphi(x; w_i, c_i)\|_2^2.$$

Σε σχέση με την μέθοδο back propagation, η ουσιαστική διαφορά είναι ο όρος κανονικοποίησης, ο οποίος με κατάλληλη επιλογή P , εξομαλύνει την προσαρμογή του μοντέλου στα παρεχόμενα δεδομένα εκπαίδευσης. Ο υπολογισμός των συναπτικών βαρών τότε, προκύπτει από την λύση του γραμμικού συστήματος

$$w = (G(\cdot) + \nu I)^{-1} y,$$

διαμορφώνοντας την μη παραμετρική προσέγγιση της μεθοδολογίας.

4.3 Μηχανές Διανυσμάτων Υποστήριξης

Μοντέλα νευρωνικών δικτύων ενός κρυφού επιπέδου θεωρούνται καθολικοί ταξινομητές κλάσεων, υπό την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχουν πανομοιότυπα δεδομένα σε διαφορετικές κλάσεις. Παρόλο που με τα MLP το όριο απόφασης (decision boundary) προκύπτει από την διαδικασία μάθησης, η ικανότητα γενίκευσης του μοντέλου (ταξινόμηση άγνωστων δεδομένων) εξαρτάται κατά βάση από την μεθοδολογία εκπαίδευσης. Η ικανότητα γενικευμένης απόδοσης των MLP μάλιστα, υποβαθμίζεται σημαντικά, όταν δεν υπάρχουν αρκετά δεδομένα εκπαίδευσης και επικαλύψεις μεταξύ κλάσεων.

Η στρατηγική μάθησης που ορίζει ευθέως το όριο απόφασης μέσα από τα δεδομένα εκπαίδευσης, προέκυψε από την θεωρία στατιστικής μάθησης, που ήδη ανέπτυσαν από τις αρχές τις δεκαετίας των 1960 οι *V. Vapnik* και *A. Chervonenkis* και ολοκλήρωσε στα μέσα της δεκαετίας των 1990 ο *V. Vapnik*, με τις εργασίες του στη *φύση της θεωρίας της στατιστικής μάθησης* [133, 137]. Οι *μηχανές διανυσμάτων υποστήριξης* (support, vector machines, SVM), όπως είναι γνωστή η μεθοδολογία, ορίζουν το όριο απόφασης ώστε τα περιθώρια διαχωρισμού μεταξύ των κλάσεων να μεγιστοποιούνται σε χώρο υψηλής διάστασης, ο οποίος καλείται *χώρος χαρακτηριστικών* (feature space). Αν και η εξέλιξη των SVM βασίστηκε στην επίλυση προβλημάτων ταξινόμησης προτύπου, η βασική μέθοδος τροποποιήθηκε και αναπτύχθηκε και για προβλήματα προσέγγισης συνάρτησης, εξίσου. Στις αρχές της δεκαετίας 2000, ο *J.A.K. Suykens* και η ομάδα του ανέπτυξαν την απλοποιημένη μεθοδολογία εκπαίδευσης SVM *ελαχίστων τετραγώνων* (Least Squares SVM, LS SVM), αναδεικνύοντας ακόμα περισσότερο τα συγκριτικά πλεονεκτήματα της βασικής μεθόδου έναντι των πολυστρωματικών νευρωνικών δικτύων, και επιδεικνύοντας επιτυχημένες εφαρμογές σε πολλά προβλήματα ταξινόμησης και ανάλυσης τα τελευταία χρόνια [116, 117, 120].

4.3.1 SVM Μοντέλα Ταξινόμησης Προτύπου

Για κάθε πρόβλημα ταξινόμησης δύο κλάσεων, είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερα του ενός *υπέρ-επίπεδα* (hyperplanes) διαχωρισμού. Για τον ορισμό του βέλτιστου ωστόσο, η προσέγγιση Vapnik επαναδιατυπώνει το πρόβλημα ώστε τα σημεία κάθε κλάσης που βρίσκονται πλησιέστερα στο υπέρ-επίπεδο διαχωρισμού, να ικανοποιούν την ισότητα

$$|w^T x_k + b| = 1.$$

Τότε, ο κανόνας ορίζει ότι για κάθε υπέρ-επίπεδο (w, b) ισχύει

$$y_k (w^T x_k + b) \geq 1,$$

που σημαίνει ότι το *περιθώριο* (margin) μεταξύ του υπέρ-επιπέδου διαχωρισμού και των x_k πλησιέστερων σημείων των δύο κλάσεων, βρίσκεται σε απόσταση

$$d_{margin} = \frac{|w^T x_k + b|}{\|w\|}$$

δηλαδή σε απόσταση

$$d_{margin} = \frac{1}{\|w\|}$$

εκατέρωθεν του υπέρ-επιπέδου διαχωρισμού.

Το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση του περιθωρίου d_{margin} με μαθηματικούς όρους, αυτό τελικά αντιστοιχεί στην ελαχιστοποίηση της νόρμας $\|w\|$.

Αν είναι γνωστό ότι κάθε σημείο των δύο κλάσεων ταξινομείται σωστά, δηλαδή υπάρχει σαφές όριο διαχωρισμού, και αυτό προϋποθέτει ότι τα δεδομένα εισόδου είναι απολύτως αξιόπιστα και χωρίς θόρυβο, τότε, το ερώτημα είναι αν αυτό το όριο περιγράφεται από γραμμική ή μη-γραμμική συνάρτηση. Ωστόσο, τα περισσότερα πραγματικά προβλήματα ταξινόμησης είναι *μη απολύτως διαχωρίσιμα* (non-separable), ακόμα και στις περιπτώσεις που το υπέρ-επίπεδο διαχωρισμού είναι γραμμική μαθηματική οντότητα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, που σύμφωνα με την Μπεύσιανή θεωρία το βέλτιστο όριο απόφασης είναι πράγματι ένα γραμμικό υπέρ-επίπεδο (τα δεδομένα εισόδου παράγονται συνήθως, από Γκαουσιανές συναρτήσεις πυκνότητας και με κοινή συμεταβλητότητα και για τις δυο κλάσεις), είναι απαραίτητο να επιτρέπεται κάποιο σφάλμα ταξινόμησης (misclassifications).

Αν το όριο διαχωρισμού περιγράφεται από μη-γραμμική συναρτησιακή οντότητα $\varphi(\cdot)$ (μια όχι και τόσο σπάνια περίπτωση, στη πραγματικότητα), για κάθε υπέρ-επίπεδο (w, b) ισχύει

$$y_k [w^T \varphi(x_k) + b] \geq 1.$$

Η συνάρτηση $\varphi(\cdot)$ μπορεί να είναι *άπειρης διάστασης* (infinite dimensional), κατά συνέπεια και το διάνυσμα w επίσης, και τότε ο SVM σχηματισμός είναι μια περισσότερο πολύπλοκη διαδικασία.

α. SVM Γραμμικά Διαχωρίσιμων Κλάσεων

Για ένα σετ N δεδομένων εκπαίδευσης $\{x_k, y_k\}_{k=1}^N$, με δεδομένα εισόδου $x_k \in \mathbb{R}^n$ και επιθυμητά δεδομένα εξόδου με *επιγράμματα* (labels) διαφοροποίησης μεταξύ των κλάσεων $y_k \in \{-1, +1\}$, η γραμμική συνάρτηση δυαδικής ταξινόμησης ορίζεται ως

$$y(x) = \text{sign} [w^T x + b]$$

και ισχύει

$$\begin{cases} w^T x_k + b \geq +1, & \text{αν } y_k = +1 \\ w^T x_k + b \leq -1, & \text{αν } y_k = -1. \end{cases}$$

Ο σχηματισμός ενός SVM πραγματοποιείται στα πλαίσια της θεωρίας βελτιστοποίησης κυρτότητας,

με τις παραπάνω ανισότητες να συνδυάζονται ως

$$y_k (w^T x_k + b) \geq 1 .$$

Συνεπώς, το πρόβλημα σχηματίζεται αρχικώς στον *πρωταρχικό χώρο των συναπτικών βαρών* (primal weight space), ορίζοντας την Λαγκρανσιανή και θέτοντας τις συνθήκες βέλτιστου. Συνήθως όμως, επιλύεται στον *δυικό χώρο* με τον υπολογισμό των πολλαπλασιαστών Lagrange, οι οποίοι εδώ, καλούνται *τιμές υποστήριξης* (support values) [30, 96, 104, 103, 122, 137]. Καθώς το πρόβλημα αφορά την μεγιστοποίηση του περιθωρίου (ώστε όλα τα δεδομένα εκπαίδευσης να ταξινομούνται σωστά), το πρωταρχικό πρόβλημα κυρτότητας ορίζεται ως

$$\boxed{P} : \min_{w,b} J_P(w) = \frac{1}{2} w^T w$$

$$\text{έτσι ώστε } y_k (w^T x_k + b) \geq 1, \quad k = 1, \dots, N .$$

Αν δεν είναι απολύτως βέβαιο ότι οι κλάσεις διαχωρίζονται πλήρως, η ανοχή λανθασμένης ταξινόμησης προβλέπεται στο πρωταρχικό πρόβλημα με την εισαγωγή μιας μεταβλητής *χαλαρότητας* (slack variable) $\xi_k > 0$, και οι ανισότητες του προβλήματος κυρτότητας διαμορφώνονται ως

$$y_k (w^T x_k + b) \geq 1 - \xi_k .$$

Αντίστοιχα, το πρωταρχικό πρόβλημα ορίζεται ως

$$\boxed{P} : \min_{w,b,\xi} J_P(w, \xi) = \frac{1}{2} w^T w + c \sum_{k=1}^N \xi_k$$

$$\text{έτσι ώστε } y_k (w^T x_k + b) \geq 1 - \xi_k$$

$$\text{και } \xi_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, N .$$

Για κάθε $c \in \mathbb{R}^+$, η Λαγκρανσιανή διαμορφώνεται ως

$$\mathcal{L}(w, b, \xi; a, v) = J_P(w, \xi) - \sum_{k=1}^N a_k (y_k [w^T x_k + b] - 1 + \xi_k) - \sum_{k=1}^N v_k \xi_k ,$$

με πολλαπλασιαστές Lagrange $a_k \geq 0$ για τις τιμές υποστήριξης και $v_k \geq 0$ για τις επιπλέον μεταβλητές χαλαρότητας. Η λύση δίδεται από τον υπολογισμό του σημείου σέλας (saddle point) της Λαγκρανσιανής

$$\max_{a,v} \min_{w,b,\xi} \mathcal{L}(w, b, \xi; a, v) .$$

Από τις συνθήκες βέλτιστου και με αντικατάσταση στην έκφραση της Λαγκρανσιανής προκύπτει το *δυικό πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού* (quadratic programming, QP)

$$\boxed{D} : \max_a J_D(a) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N y_k y_l x_k^T x_l a_k a_l + \sum_{k=1}^N a_k$$

$$\text{έτσι ώστε } \sum_{k=1}^N a_k y_k = 0$$

$$\text{και } 0 \leq a_k \leq c, \quad k = 1, \dots, N .$$

Το *δυικό πρόβλημα* επιλύεται ως προς a_k , και όχι ως προς w , δίνοντας τελικά τη συνάρτηση ταξινόμησης

$$y(x) = \text{sign} \left[\sum_{k=1}^N a_k y_k x_k^T x + b \right] .$$

Αν δεν τεθούν περιθώρια χαλαρότητας ξ_k , το πρόβλημα έχει λιγότερες συνθήκες δέσμευσης και το πρόβλημα λύνεται με τον υπολογισμό του σημείου σέλας για τις τιμές υποστήριξης a_k , χωρίς να είναι απαραίτητο να υπολογιστούν οι επιπλέον πολλαπλασιαστές Lagrange v_k .

Είναι προφανές, ότι το ζητούμενο διάνυσμα a αναπτύσσεται σε μέγεθος, όσο αναπτύσσεται ο όγκος των δεδομένων εκπαίδευσης N . Αυτό σημαίνει ότι το *δυικό πρόβλημα* αντιστοιχεί σε μη-παραμετρική

προσέγγιση, καθώς στο πρωταρχικό πρόβλημα, το μέγεθος του διανύσματος βαρών w είναι σταθερό και ανεξάρτητο του N . Συνεπώς, αν ο χώρος εισόδου είναι υψηλής διάστασης είναι προτιμότερο να επιλύεται το δυϊκό πρόβλημα καθώς το μέγεθος του διανύσματος των τιμών υποστήριξης είναι ανεξάρτητο της διάστασης του χώρου εισόδου.

Η λύση προκύπτει από την επίλυση του QP προβλήματος ως προς a , καθώς ο πίνακας που σχετίζεται με τον τετραγωνικό όρο $a_k a_l$ είναι (τουλάχιστον) *θετικά ημιορισμένος* (positive semidefinite, θετικές αλλά και πιθανόν μηδενικές ιδιοτιμές). Αν είναι *θετικά ορισμένος* (positive definite, μόνο θετικές ιδιοτιμές), τότε η λύση είναι και μοναδική.

Πολλές τιμές a_k είναι ενδεχομένως μηδενικές. Λόγω της *σποραδικότητας* (sparseness) του διανύσματος a , το άθροισμα στον τελικό ταξινομητή λαμβάνεται στο σύνολο των μη-μηδενικών τιμών αντί του συνόλου των σημείων εκπαίδευσης. Οι μη-μηδενικές τιμές a_k ορίζουν και τα *διανύσματα υποστήριξης* (support vectors). Ως προς την γεωμετρική τους ερμηνεία, τα διανύσματα υποστήριξης είναι τα σημεία που τοποθετούν το (βέλτιστο) περιθώριο από το όριο διαχωρισμού, εξασφαλίζοντας σωστή ταξινόμηση.

β. SVM Μη Γραμμικής Ταξινόμησης Προτύπου

Η σημαντικότερη πρόοδος στη θεωρία των SVM επιτελέστηκε όταν, η εγκαθιδρυμένη γραμμική μεθοδολογία επεκτάθηκε για μη γραμμικά προβλήματα, με την τεχνική που πρότεινε ο Vapnik το 1995. Βάση αυτής, ο μη γραμμικός διαχωρισμός επιτυγχάνεται αν απεικονιστούν τα δεδομένα εισόδου στον υψηλής διάστασης *χώρο των χαρακτηριστικών* (δηλαδή σε κρυφό επίπεδο υψηλής διάστασης, κατά την ορολογία των πολυστρωματικών νευρωνικών δικτύων), όπου εκεί, η μη γραμμική απεικόνιση δίνει την δυνατότητα υπολογισμού γραμμικού υπέρ-επιπέδου διαχωρισμού.

Το βασικότερο στοιχείο στην ιδέα του Vapnik ωστόσο, είναι ότι δεν είναι απαραίτητος ο ρητά σαφής ορισμός της ζητούμενης μη γραμμικής απεικόνισης. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $K(x, z)$, $x, z \in \mathbb{R}^n$ για την οποία ισχύει η *συνθήκη Mercer* (Mercer's condition) [82, 103], υπάρχει *χώρος Hilbert* \mathcal{H} διάστασης $n_{\mathcal{H}}$ [32, 137], θετικές μεταβλητές λ_i και απεικόνιση $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{H}$, για την οποία το εσωτερικό γινόμενο

$$K(x, z) = \varphi(x)^T \varphi(z)$$

εκφράζει θετικά ορισμένο διαχωρίσιμο πυρήνα [33, 107, 103]. Αυτή η εφαρμογή είναι γνωστή ως το *τέχνασμα συνάρτησης πυρήνα* (the kernel trick) και επιτρέπει πρόσβαση σε χώρους χαρακτηριστικών τεραστίων διαστάσεων, χωρίς να είναι απαραίτητος κάποιος ρητός υπολογισμός σε αυτούς τους χώρους. Για το μη γραμμικό πρόβλημα δυαδικής ταξινόμησης

$$y(x) = \text{sign} [w^T \varphi(x) + b]$$

ενός αντίστοιχου σετ N δεδομένων εκπαίδευσης $\{x_k, y_k\}_{k=1}^N$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $y_k \in \{-1, +1\}$ η διάσταση της απεικόνισης $\varphi(\cdot)$ μπορεί να είναι άπειρη και κατά συνέπεια, άπειρης διάστασης είναι και το αντίστοιχο διάνυσμα w . Αν για μικρούς χώρους εισόδου, το γραμμικό πρόβλημα ίσως και να συμφέρει να λυθεί ακόμα και στον πρωταρχικό χώρο, για το μη γραμμικό πρόβλημα αυτό είναι πρακτικά αδύνατο. Η λύση SVM επιτυγχάνεται αποκλειστικά στον δυαδικό χώρο, μετά την διαμόρφωση του πρωταρχικού προβλήματος, τον σχηματισμό της Λαγκρανσιανής και την εφαρμογή του τεχνάσματος πυρήνα. Με αυτόν τον τρόπο σχηματίζεται άρρητα ο χώρος του κρυμμένου επιπέδου (χώρος χαρακτηριστικών), χωρίς μάλιστα να εκτελείται κάποιος υπολογισμός εκεί.

Το μη γραμμικό πρωταρχικό πρόβλημα διαμορφώνεται τότε ως

$$\boxed{P}: \min_{w,b,\xi} J_P(w, \xi) = \frac{1}{2} w^T w + c \sum_{k=1}^N \xi_k$$

$$\begin{aligned} \text{έτσι ώστε} \quad & y_k (w^T \varphi(x_k) + b) \geq 1 - \xi_k \\ \text{και} \quad & \xi_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

και η λύση προκύπτει από τον υπολογισμό του σημείου σέλας της Λαγκρανσιανής. Λαμβάνοντας τις σχέσεις από τις συνθήκες βέλτιστου το δυαδικό πρόβλημα διαμορφώνεται ως

$$\boxed{D}: \max_a J_D(a) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N y_k y_l K(x_k, x_l) a_k a_l + \sum_{k=1}^N a_k$$

$$\text{έτσι ώστε} \quad \sum_{k=1}^N a_k y_k = 0$$

$$\text{και} \quad 0 \leq a_k \leq c, \quad k = 1, \dots, N$$

και με την εφαρμογή του τεχνάσματος πυρήνα

$$K(x_k, x_l) = \varphi(x_k)^T \varphi(x_l),$$

η μη γραμμική συνάρτηση ταξινόμησης διαμορφώνεται ως

$$y(x) = \text{sign} \left[\sum_{k=1}^N a_k y_k K(x, x_k) + b \right].$$

Οι τιμές υποστήριξης a_k υπολογίζονται από την λύση του QP προβλήματος, όμως από αυτή, δεν προκύπτει και η τιμή του bias όρου b . Για τον υπολογισμό του λαμβάνονται οι σχέσεις των συνθηκών Karush-Kuhn-Tucker και από τον σχηματισμό του νέου συστήματος, για κάθε $0 < a_k < c$ προκύπτει η ζητούμενη τιμή [136, 67, 66].

Προφανώς, η επιλογή της συνάρτησης πυρήνα είναι πολύ σημαντική για την διαμόρφωση ενός επιτυχημένου μη γραμμικού ταξινομητή. Μεταξύ των επιλογών, οι πλέον συνηθισμένες είναι ο πυρήνας πολυώνυμων, πυρήνες MPL με εφαπτόμενη υπερβολική συνάρτηση πυροδότησης (*tanh*) και ο πυρήνας συνάρτησης ακτινικής (RBF), ο οποίος έχει αναλυτική έκφραση

$$K(x, x_k) = e^{-\frac{\|x-x_k\|}{\sigma^2}}$$

και για τον οποίο η συνθήκη Mercer διατηρείται για κάθε τιμή σ . Η χρήση του γραμμικού πυρήνα

$$K(x, x_k) = x_k^T x$$

οδηγεί σε σχεδιασμό ταξινομητή SVM γραμμικά διαχωρίσιμων κλάσεων.

Κατά αναλογία με τα γραμμικά SVM και κατάλληλη επιλογή θετικά ορισμένου ή ημι-ορισμένου πυρήνα, η λύση του δυικού τετραγωνικού προβλήματος είναι ολική και (πολύ πιθανόν) μοναδική, αποδίδοντας μη παραμετρική προσέγγιση, ανεξάρτητη της διάστασης του χώρου εισόδου. Καθώς η ιδιότητα της σποραδικότητας ισχύει και εδώ, το άθροισμα στην συνάρτηση ταξινόμησης λαμβάνεται μόνον από τις μη-μηδενικές τιμές υποστήριξης, οι οποίες ουσιαστικά αντιστοιχούν στον αριθμό των νευρώνων του κρυφού επιπέδου.

Σε σύγκριση με τα παραδοσιακά MLP νευρωνικά δίκτυα, η εκπαίδευση των οποίων υποφέρει από την ύπαρξη λύσης πολλών τοπικών ακρότατων, η κυρτότητα στην εκπαίδευση των μη γραμμικών SVM είναι σημαντική και ενδιαφέρουσα ιδιότητά, καθώς αντιμετωπίζει τις καταστάσεις υπέρ-προσαρμογής. Παράλληλα, ένα επίσης σημαντικό στοιχείο της μεθοδολογίας SVM είναι η δυναμική που παρουσιάζουν κατά την γραφική αλλά και μαθηματική τους αναπαράσταση. Με την επιλογή ενός RBF πυρήνα μάλιστα, σχεδόν όλες οι άγνωστες ποσότητες υπολογίζονται από την λύση του τετραγωνικού προβλήματος, κάτι που δεν ισχύει για τα MLP.

Επιπλέον, ο σχεδιασμός ενός MLP απαιτεί εκ των προτέρων επιλογή για τον αριθμό των νευρώνων στο κρυφό επίπεδο, διεργασία που δεν ακολουθεί κάποια συγκεκριμένη συνταγή και υπόκειται στην

εμπειρία του σχεδιαστή και μια διαδικασία δοκιμών. Αντίθετα, στα μη γραμμικά SVM ο αριθμός των νευρώνων του κρυφού επιπέδου προκύπτει απευθείας από το QP πρόβλημα, ως ο αριθμός των τιμών υποστήριξης.

4.3.2 Ταξινόμηση Προτύπου με Μοντέλα LS SVM

Αν και η λύση του κυρτού τετραγωνικού προβλήματος είναι το στοιχείο που προσφέρει τα βασικά πλεονεκτήματα των SVM, για κάποιες εφαρμογές ο όγκος των πράξεων κατά την εκτέλεση της επίλυσης QP, μπορεί να προβεί τροχοπέδη για την εξέλιξη του σχεδιασμού τους. Πάνω σε αυτό, ο Suykens πρότεινε το 1999 μια τροποποίηση για το κατά Vapnik βασικό QP μοντέλο, η οποία οδηγεί σε επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, απλοποιώντας την διαδικασία εκπαίδευσης και κερδίζοντας την προσοχή της επιστημονικής κοινότητας [116].

Σύμφωνα με την Least Squares SVM τροποποίηση, για ένα σετ N δεδομένων εκπαίδευσης $\{x_k, y_k\}_{k=1}^N$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $y_k \in \{-1, +1\}$ και $k = 1, \dots, N$ το πρόβλημα βελτιστοποίησης που αφορά τους μη γραμμικούς δυαδικούς ταξινομητές

$$y(x) = \text{sign} [w^T \varphi(x) + b]$$

διαμορφώνεται στον πρωταρχικό χώρο ως

$$[P]: \min_{w, b, e} J_P(w, e) = \frac{1}{2} w^T w + \gamma \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N e_k^2$$

$$\text{έτσι ώστε } y_k (w^T \varphi(x_k) + b) = 1 - e_k,$$

όπου $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_h}$, ορίζεται η μη γραμμική απεικόνιση του χώρου εισόδου στον χώρο χαρακτηριστικών άγνωστης διάστασης n_h και γ είναι μια παράμετρος ομαλοποίησης. Όπως είναι προφανές, η μεθοδολογία LS SVM εμπλέκει δεσμεύσεις ισότητας και μόνον, και η τιμή 1 δεν αντιμετωπίζεται πλέον ως το κατώφλι ταξινόμησης, αλλά περισσότερο ως στόχος. Προς την επίτευξη αυτού του στόχου, επιτρέπεται σφάλμα e_k , ώστε για την περίπτωση επικαλυπτόμενων κατανομών πιθανότητας να υπάρχει ανοχή σε τυχόν λανθασμένη ταξινόμηση. Επιπλέον, στη συνάρτηση κόστους ενσωματώνεται και το τετραγωνικό κόστος της μεταβλητής του σφάλματος ανοχής. Η Λαγκρανσιανή τότε είναι

$$\mathcal{L}(w, b, e; a) = J_P(w, e) - \sum_{k=1}^N a_k (y_k [w^T \varphi(x_k) + b] - 1 + e_k),$$

για την οποία οι τιμές των πολλαπλασιαστών Lagrange a_k μπορούν λόγω των δεσμεύσεων ισότητας να λάβουν είτε θετικές, είτε και αρνητικές τιμές. Σχηματίζοντας τις συνθήκες βέλτιστου, προκύπτουν αναλυτικές εκφράσεις που απαλείφουν τους όρους w και e , και από τον σχηματισμό του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος KKT

[D]:

$$\begin{bmatrix} 0 & y^T \\ y & \Omega + I/\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

επιλύονται οι τιμές a και b στο δυικό χώρο, ενώ $\Omega = Z^T Z$ είναι ο πίνακας στον οποίο εφαρμόζεται το τέχνασμα πυρήνα και $Z^T = [\varphi(x_1)^T y_1; \dots; \varphi(x_N)^T y_N]$. Τελικά, ο ταξινομητής που προκύπτει στο δυικό χώρο είναι της ίδιας μορφής με το βασικό μη γραμμικό SVM μοντέλο

$$y(x) = \text{sign} \left[\sum_{k=1}^N a_k y_k K(x, x_k) + b \right].$$

Η επιλογή κατάλληλης συνάρτησης πυρήνα και εδώ είναι μείζονος σημασίας καθώς, ο πυρήνας πρέπει

να είναι θετικά ορισμένος και να ικανοποιεί τη συνθήκη Mercer. Οι RBF πυρήνες είναι γενικά ασφαλής επιλογή για σύνθετα μη γραμμικά προβλήματα.

Κεντρικό ζήτημα στη μεθοδολογία LS SVM είναι η επίλυση του KKT συστήματος στον δυικό χώρο. Αυτό είναι και το στοιχείο που απλοποιεί το πρόβλημα, δίνοντας στη μεθοδολογία τη μεγάλη απήχηση που έλαβε τα τελευταία χρόνια. Η επίλυση συστημάτων KKT είναι ούτως ή άλλως θεμελιώδες ζήτημα για τα μη γραμμικά προβλήματα προγραμματισμού με δεσμεύσεις. Η βασική μέθοδος για την επίλυση κάθε προβλήματος προγραμματισμού κυρτότητας είναι η μέθοδος εσωτερικού σημείου, η οποία τελικά, οδηγεί στην επίλυση επαναληπτικών συστημάτων KKT, της ίδιας μορφής με το KKT σύστημα που προκύπτει στον δυικό χώρο, κατά τον LS SVM σχηματισμό. Αυτό σημαίνει, ότι η λύση ενός QP SVM προβλήματος ισοδυναμεί ουσιαστικά με την επίλυση πολλών προβλημάτων LS SVM.

Καθώς, το γραμμικό KKT σύστημα στο δυικό χώρο είναι τετραγωνικό με μοναδική λύση, ο σχηματισμός LS SVM αντιμετωπίζει με την ίδια επιτυχία την υπέρ-προσαρμογή κατά την εκπαίδευση, διατηρώντας έτσι το πλεονέκτημα της βασικής SVM μεθοδολογίας για ικανοποιητική απόδοση γενίκευσης, έναντι των παραδοσιακών MLP νευρωνικών δικτύων.

Ωστόσο, η απλοποίηση που επιτυγχάνει η τροποποίηση LS SVM επιφέρει και ένα σημαντικό μειονέκτημα. Κατά τον σχηματισμό των συνθηκών βέλτιστου προκύπτει ότι $a_k = \gamma e_k$, που σημαίνει ότι καμία από τις τιμές υποστήριξης δεν είναι ακριβώς μηδέν. Κατά συνέπεια, χάνεται η σποραδικότητα και όλα τα σημεία εκπαίδευσης λειτουργούν ως διανύσματα υποστήριξης. Το αποτέλεσμα είναι ότι στην διαμόρφωση του μοντέλου συμμετέχουν όλα τα σημεία εκπαίδευσης· ωστόσο, ορισμένα θεωρούνται σημαντικότερα από τα υπόλοιπα. Τα σημεία με μεγάλες απόλυτες τιμές $|a_k|$ τοποθετούνται αντίστοιχα πλησίον και μακριά του ορίου διαχωρισμού. Ο τρόπος να αντιμετωπιστεί επιτυχώς το μειονέκτημα της μη σποραδικότητας είναι η προσεκτική προετοιμασία του σετ των δεδομένων εκπαίδευσης, μέσα στο οποίο κάθε ζεύγος σημείων πρέπει να είναι εξίσου σημαντικό για την διαμόρφωση του μοντέλου του ταξινομητή.

Οι ταξινομητές LS SVM έχουν την ίδια αναπαράσταση νευρώνων στο πρωταρχικό και τον δυικό χώρο με τα QP μοντέλα. Στον πρωταρχικό χώρο, η προσέγγιση στο πρόβλημα είναι παραμετρική με διάνυσμα συναπτικών βαρών $w \in \mathbb{R}^{n_h}$ σταθερού μεγέθους και n_h αριθμό νευρώνων στο κρυφό επίπεδο. Στο δυικό χώρο η προσέγγιση είναι μη παραμετρική καθώς, το μέγεθος του διανύσματος των τιμών υποστήριξης $a \in \mathbb{R}^N$ αναπτύσσεται με τον αριθμό N των σημείων εκπαίδευσης, ο οποίος ορίζει και την διάσταση του KKT συστήματος.

Η επίλυση ως προς a και b στο δυικό χώρο, προϋποθέτει την εκ των προτέρων γνώση της παραμέτρου γ . Αν μάλιστα επιλεγεί RBF συνάρτηση πυρήνα, προστίθεται ως επιπλέον άγνωστος και η παράμετρος *επιρροής* σ . Μεταξύ διάφορων τεχνικών προσδιορισμού αυτών των παραμέτρων, η πιο απλή είναι η προετοιμασία ενός σετ *δεδομένων επιβεβαίωσης* (validation set) και από την έρευνα ενός ευνόητου πλέγματος πιθανών συνδυασμών (γ, σ) , επιλέγεται αυτός που αποδίδει καλύτερά στο σετ επιβεβαίωσης. Από στατιστικής άποψης ωστόσο, είναι προτιμότερο να εφαρμοστεί μια επαναληπτική διαδικασία *νι-πτυχης διεπιβεβαίωσης* (n-fold cross-validation), αγνοώντας το επιπλέον υπολογιστικό κόστος που επιφέρει.

α. Αλγόριθμος Επίλυσης Γραμμικού Συστήματος KKT

Ο σχηματισμός LS SVM χαρακτηρίζεται από την λύση ενός τετραγωνικού συστήματος γραμμικών εξισώσεων, με το μέγεθος του τετραγωνικού πίνακα να αυξάνεται με τον αριθμό των ζευγών εκπαίδευσης. Αν το μέγεθος των σημείων εκπαίδευσης είναι σχετικά μικρό (έναν τυπικός περιορισμός ανέρχεται στα $N = 2000$ σημεία), η μέθοδος της απαλοιφής εφαρμόζεται με επιτυχία, με την

προϋπόθεση ότι οι διαθέσιμες υπολογιστικές δυνατότητες είναι σε θέση να αποθηκεύσουν το σύνολο του πίνακα. Για μεγαλύτερα σετ δεδομένων εκπαίδευσης προτείνονται επαναληπτικές μέθοδοι, με την μέθοδο της *συζυγούς κλίσης* (conjugate gradient, CG) να έχει την ευρύτερη εφαρμογή. Προκειμένου να εφαρμοστεί η μέθοδος CG, πρέπει ο πίνακας του συστήματος να είναι θετικά ορισμένος. Ανεξάρτητα από το γεγονός ότι τα συστήματα KKT που προκύπτουν από την διαμόρφωση προβλημάτων βελτιστοποίησης με δεσμεύσεις είναι γενικώς αόριστα, η παρουσία του όρου b στο LS SVM μοντέλο οδηγεί σε πίνακα που δεν είναι θετικά ορισμένος. Ωστόσο, με την εφαρμογή απλών τρόπων μετασχηματισμού, η μετατροπή του πίνακα του συστήματος στην κατάλληλη μορφή δεν είναι τόσο δύσκολη υπόθεση [122, 104, 103].

Από τον μετασχηματισμό προκύπτει σύστημα της μορφής $Ax = B$ με $A = A^T > 0$ και ο βασικός, κατά *Hestenes-Stiefel* [56], επαναληπτικός CG αλγόριθμος αναπτύσσεται ως εξής:

Αρχικοποίηση

$$i = 0 ; x_0 = 0 ; r_0 = B$$

Βρόγχος Επανάληψης

καθόσον $r_i \neq 0$

$$i = i + 1$$

αν $i = 1$

$$p_1 = r_0$$

αλλιώς

$$\beta_i = r^T_{i-1} r_{i-1} / r^T_{i-2} r_{i-2}$$

$$p_i = r_{i-1} + \beta_i p_{i-1}$$

τέλος

Πράξεις

$$\lambda_i = r^T_{i-1} r_{i-1} / p^T_i A p_i$$

$$x_i = x_{i-1} + \lambda_i p_i$$

$$r_i = r_{i-1} - \lambda_i A p_i$$

Τέλος

$$x = x_i$$

Η υποκείμενη συνάρτηση κόστους που βελτιστοποιείται από τον CG αλγόριθμο είναι τετραγωνικής μορφής. Καθώς φθίνει μονοτονικά, το κριτήριο τερματισμού των επαναλήψεων είναι ένα μέτρο για την διαφορά μεταξύ τιμών της συνάρτησης σε δυο διαδοχικά βήματα. Όταν κατά τον σχηματισμό του LS SVM μοντέλου εφαρμοστεί πυρήνας συνάρτησης RBF, ο πίνακας A εξαρτάται από τις ρυθμιστικές παραμέτρους (γ, σ), επηρεάζοντας σε κάποιες περιπτώσεις την ταχύτητα σύγκλισης.

Η έρευνα στην περιοχή της μηχανικής μάθησης με συναρτήσεις πυρήνα έχει δείξει ότι η μέθοδος της συζυγούς κλίσης επιτυγχάνει ταχείς συγκλίσεις. Έτσι, ο βασικός αλγόριθμος εφαρμόζεται ευρέως καθώς, αποδίδει επαρκώς καλά, και με ταχύτητα, σε μεγάλη ποικιλία προβλημάτων. Υπολογιστικά, για την υλοποίηση του αλγόριθμου δεν είναι απαραίτητο να αποθηκευτεί το σύνολο του πίνακα. Τα στοιχεία του επαναυπολογίζονται σε κάθε βήμα επανάληψης.

β. Επιλογή Ρυθμιστικών Παραμέτρων

Δεδομένου ότι για την αντιμετώπιση σύνθετων μη γραμμικών προβλημάτων ταξινόμησης προτύπου με την μεθοδολογία LS SVM, συνήθως επιλέγεται RBF συνάρτηση πυρήνα, η πιο απλή και παράλληλα στατιστικά εύρωστη τεχνική υπολογισμού της LS SVM *υπέρ-παραμέτρου* (hyper-parameter) γ και της

RBF παραμέτρου σ βασίζεται στη μέθοδο 10-fold cross-validation [139, 101, 122]. Για την υλοποίησή της εφαρμόζεται αλγόριθμος που συρρικνώνει τις πιθανές επιλογές μέσα από αναζήτηση σε ένα πλέγμα ευνόητων ζευγών (γ, σ) . Η τεχνική είναι κατάλληλη και για τον έλεγχο απόδοσης του μοντέλου συνεπώς, ένα σετ N δεδομένων εκπαίδευσης μοιράζεται σε δυο μέρη, με το πρώτο να περιέχει τα $2/3$ των σημείων για εκπαίδευση και επιβεβαίωση σύγκλισης και το τελευταίο τρίτο να χρησιμοποιείται ως αρχείο δεδομένων ελέγχου. Το αρχείο εκπαίδευσης διαιρείται εκ νέου σε δέκα ίσα μέρη (πτυχές). Κατόπιν το μοντέλο εκπαιδεύεται χρησιμοποιώντας τα εννιά μέρη και η απόδοσή του ελέγχεται ως προς το μέρος που δεν έχει χρησιμοποιηθεί στην εκπαίδευση, προσδιορίζοντας έτσι κάποιο μέτρο απόδοσης. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται δέκα φορές, αφήνοντας εκτός διαφορετική πτυχή για επιβεβαίωση και τελικά υπολογίζεται η μέση απόδοση. Ο αλγόριθμος αναπτύσσεται ως εξής

Ορισμός πλέγματος

$$n = \sqrt{N}$$

Αρχικοποίηση

$$i = 0$$

$$\sigma_0 = \{', \dots, '\} \text{ (στοιχεία } \times n \text{)}$$

$$\gamma_0 = \{', \dots, '\}$$

$$i_{max};$$

$$m_i^{LS SVM} = \{\blacksquare\} \text{ (μοντέλο LS SVM)}$$

Βρόγχος επανάληψης

Βρόγχος 10-fold Cross-Validation

επιλογή σ_i, γ_i

έλεγχος $m_i^{LS SVM}$

$e_{CV}(\gamma, \sigma)$

αν $i = i_{max}$

τέλος

αλλιώς $i = i + 1$

$$m_i^{LS SVM} = m_i^{LS SVM} \{ \min e_{CV}(\gamma, \sigma) \}$$

Τέλος

Αν και η τεχνική έχει ευρύτατη εφαρμογή, σε κάποιες εφαρμογές επιλέγονται εναλλακτικές μεθοδολογίες οι οποίες βασίζονται στην κατά Bayes θεωρία συμπερασμού (Bayesian inference). Τέλος, υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες εφαρμόζεται η μέθοδος προσέγγισης στα όρια Vapnik-Chervonenkis (VC bounds, θεμελιώδης για την θεωρία των SVM), η οποία έχει και το πλεονέκτημα ότι δεν απαιτεί κάποια υπόθεση για την υποκείμενη συνάρτηση πυκνότητας των δεδομένων· προϋποθέτει ωστόσο ότι τα δεδομένα ακολουθούν ανεξάρτητη κατανομή ομοίως (independently identically distributed data, i.i.d) [109, 104, 30].

4.3.5 Θεωρία Ορίων Vapnik-Chervonenkis

Είναι απαραίτητο να σημειωθεί ότι παρόλο που οι σχηματισμοί SVM αναπτύχθηκαν στο ευρύτερο πλαίσιο της θεωρίας της στατιστικής μάθησης, η ουσιαστική τους θεμελίωση βασίστηκε στην θεωρητική προσέγγιση των ορίων Vapnik-Chervonenkis (VC bounds), περί ελαχιστοποίησης του κίνδυνου του δομικού σφάλματος (structural risk minimisation, SRM) [136, 137]. Ενόσω τα μοντέλα

κλασσικών νευρωνικών δικτύων βασίζονται στην ελαχιστοποίηση του κινδύνου του εμπειρικού σφάλματος R_{emp} (σφάλμα εκπαίδευσης) διατηρώντας σταθερά όρια για τα επίπεδα εμπιστοσύνης ως προς την απόδοση γενίκευσης, τα μοντέλα SVM επιχειρούν να ελαχιστοποιήσουν τα όρια εμπιστοσύνης, διατηρώντας μια δεδομένη τιμή για το εμπειρικό σφάλμα. Με άλλα λόγια, η θεωρία *Vapnik-Chervonenkis* (VC theory) χαρακτηρίζει το σφάλμα γενίκευσης και όχι το σφάλμα που προκύπτει από την χρήση συγκεκριμένων σετ δεδομένων εκπαίδευσης.

α. Αρχή Ελαχιστοποίησης Κινδύνου Εμπειρικού Σφάλματος

Σε κάθε περίπτωση, ο στόχος είναι η βέλτιστη προσαρμογή της *μαθησιακής χωρητικότητας της μηχανής* (learning capacity) στη πολυπλοκότητα των διαθέσιμων δεδομένων εκπαίδευσης. Με μαθηματικούς όρους, η μαθησιακή χωρητικότητα μπορεί να περιγραφεί από το σφάλμα γενίκευσης, ορίζοντας ένα μέτρο (σφάλματος) για όλα τα υποδείγματα εισόδου/επιθυμητής εξόδου. Καθώς αυτά χαρακτηρίζονται από κάποια κατανομή πιθανότητας $p(x, y)$, το σφάλμα γενίκευσης (ή αναμενόμενο σφάλμα) ορίζεται ως

$$R_{gen} = \int J_{f(x;w)} p(x, y) dx dy,$$

όπου $J_{f(x;w)}$ η συνάρτηση κόστους. Όμως, η κατανομή πιθανότητας είναι πρακτικά άγνωστη και άρα η τιμή R_{gen} δεν μπορεί να υπολογιστεί. Ωστόσο, σύμφωνα με την θεωρία των ορίων VC, είναι δυνατόν να προσδιοριστεί ένα όριο προσέγγισης για την ανώτερη τιμή του σφάλματος γενίκευσης. Καθώς η μόνη πηγή πληροφορίας είναι τα δεδομένα εκπαίδευσης, σύμφωνα με την αρχή της *ελαχιστοποίησης του κινδύνου του εμπειρικού σφάλματος* (principle of empirical risk minimization, ERM) [136, 137, 122], ο κίνδυνος εμπειρικού σφάλματος συγκλίνει στον αναμενόμενο κίνδυνο σφάλματος

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (|R_{gen} - R_{emp}|) = 0$$

όταν ο αριθμός των δεδομένων εκπαίδευσης τείνει στο άπειρο. Η αρχή ERM αποτελεί πρωταρχική θεωρητική βάση της ευρείας εφαρμογής και επιτυχίας των προσεγγίσεων εκτίμησης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Στη προκειμένη περίπτωση, η διαδικασία μάθησης αφορά την εκτίμηση των συναπτικών βαρών οπότε, η *ασυμπτωτική συμβιβαστότητα* (asymptotic consistency) για τη συνάρτηση εκτίμησης $f(x; w)$ ικανοποιείται όταν και αν ο κίνδυνος εμπειρικού σφάλματος συγκλίνει ομοιόμορφα (uniform convergence) στον κίνδυνο του αναμενόμενου σφάλματος με πιθανολογική έκφραση

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p[\{\sup |R_{gen}(w) - R_{emp}(w)| > \varepsilon\}] = 0$$

για κάθε $\varepsilon > 0$, όπου p είναι η πιθανότητα σύγκλισης στο ελάχιστο άνω φράγμα (sup), όταν ο αριθμός των δεδομένων εκπαίδευσης τείνει στο άπειρο. Βάση της αρχής της συμβιβαστότητας ERM, η θεωρία VC επιβεβαιώνει ότι, μέσα από ένα σύνολο εκτιμητών, η συνάρτηση που παρέχει το μεγαλύτερο σφάλμα μεταξύ του εμπειρικού κινδύνου και του πραγματικού (αναμενόμενου) ορίζει συμβιβαστότητα.

β. Ελαχιστοποίηση του Κινδύνου του Δομικού Σφάλματος (SRM)

Διορατικά, η προκύπτουσα σημαντική γνώση από την αρχή της συμβιβαστότητας ERM, είναι ότι η υποκειμένη θεωρία VC παρέχει βασικά όρια για την επίτευξη ικανοποιητικής απόδοσης γενίκευσης, τα οποία εκφράζονται με βάση το μέγεθος του σετ των δεδομένων εκπαίδευσης και της *διάστασης VC* h (VC dimension), της μεταβλητής που χαρακτηρίζει την μαθησιακή χωρητικότητα της μηχανής.

Μεταξύ ενός συνόλου μηχανών μάθησης που παρεμβάλλονται στα σημεία εκπαίδευσης, κάποιες πολύ

πιθανόν, μηδενίζουν το εμπειρικό σφάλμα· δεν σημαίνει όμως, ότι ελαχιστοποιούν και το σφάλμα γενίκευσης. Αντίθετα, είναι πιθανόν να παρέχουν πολύ φτωχό μοντέλο για την υποκείμενη σχέση εισόδου x / εξόδου y , και αυτό γιατί εκπαιδεύονται βάσει ενός συγκεκριμένου δείγματος της πραγματικής υποκείμενης συνάρτησης (σετ δεδομένων εκπαίδευσης). Καθώς, το σύνολο των συναρτήσεων προσέγγισης ανήκει σε χώρο υπόθεσης \mathcal{H} πιθανών συναρτήσεων, η λύση που προσφέρει σε αυτό το πρόβλημα η θεωρία της στατιστικής μάθησης είναι ο περιορισμός του αρχικού χώρου σε μικρότερους χώρους υπόθεσης, ελέγχοντας παράλληλα την ευελιξία (με όρους πολυπλοκότητας) των συναρτήσεων που μένουν. Αυτές, παραμετροποιούνται, και με αύξοντα αριθμό παραμέτρων σχηματίζουν εμφωλευμένη δομή (nested structure) της μορφής

$$\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \dots \subset \mathcal{H}_{i-1} \subset \mathcal{H}_i \subset \mathcal{H},$$

ώστε από την συνάρτηση της περισσότερο πολύπλοκης έκφρασης κάθε επόμενη εμπεριέχει την αμέσως πιο απλή. Ο στόχος της μάθησης είναι ο περιορισμός της δομής στο υποσύνολο

$$\mathcal{H}_i = \{w^T \varphi(x) + b : \|w\|_2^2 \leq c_i\}, \quad c_1 < c_2 < \dots < c_i < c_{i+1}$$

που ταιριάζει καλύτερα την πολυπλοκότητα των δεδομένων εκπαίδευσης στη μαθησιακή χωρητικότητα της μηχανής. Η βέλτιστη, ως προς τη μαθησιακή χωρητικότητα, επιλογή του κατάλληλου μοντέλου επιβεβαιώνεται από την ελαχιστοποίηση των ορίων του αναμενόμενου κινδύνου σφάλματος. Η ελαχιστοποίηση αυτών των ορίων είναι και η ουσία της έννοιας SRM.

Σε μια εφαρμογή ταξινόμησης N δεδομένων εκπαίδευσης σε δύο κλάσεις, όλοι οι πιθανοί τρόποι καταχώρησης επιγράμματος για κάθε σημείο είναι 2^N ενώ, για κάθε επιγραφή (labelling) μπορεί να βρεθεί ένα σύνολο ενδεικτικών συναρτήσεων (που ανήκουν το σετ των πιθανών συναρτήσεων για την συγκεκριμένη μηχανή), το οποίο καταχωρεί σωστά αυτά τα επιγράμματα. Η διάσταση VC ενός συνόλου τέτοιων ενδεικτικών συναρτήσεων ορίζεται ως ο μέγιστος αριθμός h των σημείων που δύναται να διαχωριστούν σε όλους τους δυνατούς τρόπους. Η διάσταση VC χαρακτηρίζει την μαθησιακή χωρητικότητα, όντας παράμετρος ελέγχου για την ελαχιστοποίηση του ορίου γενίκευσης. Ο Vapnik έδειξε ότι για επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - \eta$, το όριο γενίκευσης για όλες τις πιθανές συναρτήσεις προσέγγισης που ελαχιστοποιούν τον κίνδυνο του εμπειρικού σφάλματος σχετίζεται με την διάσταση VC και τον αριθμό των υποδειγμάτων εκπαίδευσης σύμφωνα με την έκφραση

$$R_{gen}(w) \leq R_{emp}(w) + \sqrt{\frac{h (\ln(2N/h) + 1) - \ln(\eta/4)}{N}}.$$

Ο δεύτερος όρος του δεξιού μέρους της έκφρασης του ορίου γενίκευσης καλείται *διάστημα εμπιστοσύνης VC* (VC confidence interval) [136, 137].

Για γραμμικά υπέρ-επίπεδα διαχωρισμού \mathbb{R}^n χώρου εισόδου αποδεικνύεται ότι η διάσταση VC ισούται με $h = n + 1$. Για τα μη γραμμικά ωστόσο, δεν υπάρχει ακριβής μαθηματική έκφραση· σε αυτή την περίπτωση, αναζητείται κάποιο άνω όριο για την τιμή h . Εδώ ο Vapnik, έδειξε ότι τα υπέρ-επίπεδα εμφωλευμένης δομής $\mathcal{H}_1 \subset \dots \subset \mathcal{H}_n$ για τα οποία $\|w\|_2 < a$, για διαφορετικές τιμές $\|w\|_2$ κείνται από κάθε σημείο εκπαίδευσης σε απόσταση $1/a$, τουλάχιστον, και έχουν VC διάσταση

$$h \leq \min\{[(r^2 a^2), n] + 1\},$$

όπου r είναι η ακτίνα της μικρότερης σφαίρας στον υψηλής διάστασης χώρο των χαρακτηριστικών, μέσα στην οποία περιέχονται όλα τα $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_N)$ σημεία. Με άλλα λόγια, η μεγιστοποίηση του περιθωρίου του βέλτιστου υπέρ-επιπέδου διαχωρισμού από κάθε σημείο κατά την εκπαίδευση SVM, συγχρόνως ελαχιστοποιεί και την διάσταση VC, θεμελιώνοντας τον σχηματισμό των SVM στα πλαίσια του SRM.

Οι SVM παράμετροι που δεν προκύπτουν από την λύση του QP προβλήματος, όπως η τιμή σ ενός RBF πυρήνα, συχνά επιλέγονται έτσι ώστε το άνω όριο της διάστασης VC να είναι ελάχιστο. Τότε,

σχηματίζεται αντίστοιχο QP πρόβλημα ως προς α , σε σχέση με το όριο της διάστασης VC, δεσμεύοντας όλα τα σημεία να ανήκουν στη σφαίρα ακτίνας r .

ΜΕΡΟΣ Β

Τεχνική Ανάλυση

Κεφάλαιο 5^ο

Ταξινόμηση Κατάστασης Θέσης σε Γραμμικά Πρότυπα

5.1 Περιγραφή

Σε αυτή την εργασία διερευνήθηκε η εφαρμογή μεθοδολογίας επιβλεπόμενης μηχανικής μάθησης για την αναγνώριση γραμμικών γεωμετρικών προτύπων κατά μήκος της τροχιάς επίγειου οχήματος. Ουσιαστικά πρόκειται για την αυτόματη και σε πραγματικό χρόνο εξαγωγή πληροφορίας της πλήρους γεωμετρικής ταυτότητας της κίνησης και κατ' επέκταση της αναλυτικής έκφρασης του ίχνους της τροχιάς.

Κατά την τελευταία δεκαετία, η εφαρμογή μεθόδων μηχανικής μάθησης αναγνώρισης προτύπου (pattern recognition) στη Γεωδαισία και τη Γεωπληροφορική, αφορούσε κυρίως ζητήματα Φωτογραμμετρίας και Τηλεπισκόπησης. Παραδείγματα είναι η Όραση Υπολογιστών (Computer Vision) και η αυτόματη αναγνώριση ακμών (γραμμική οριοθέτηση επιφανειακών οντοτήτων) σε ψηφιακές φωτογραφικές απεικονίσεις. Δεν εντοπίζεται σε εφαρμογές κινηματικού εντοπισμού και εκτίμησης θέσης. Από αυτή τη σκοπιά, η παρούσα εργασία αποτελεί την πρώτη (διεθνώς) εφαρμογή ταξινόμησης προτύπου στο πεδίο της Πλοήγησης.

Συγκεκριμένα, προτείνεται LS-SVM αλγόριθμος αναγνώρισης προτύπου για την ταξινόμηση της τρέχουσας κατάστασης θέσης (position estimation) σε κλάσεις γεωμετρικών καμπυλών (curve classes' labels). Κάθε εκτίμηση θέσης του κινούμενου οχήματος (σημειακή οντότητα) αναγνωρίζεται και εκχωρείται σε κατάλληλο γεωμετρικό πρότυπο, όπως ευθείες γραμμές, κυκλικά τόξα και καμπύλες με σύνθετο μαθηματικό ορισμό (ή διακύμανση στη τιμή της καμπυλότητάς τους). Η αλληλουχία σημείων με καταχώρηση στην ίδια κλάση διαμορφώνει μια γεωμετρική γραμμική οντότητα.

Το αποτέλεσμα της εφαρμογής της μεθόδου είναι η εκτίμηση με την οποία διαδοχικά σημεία θέσης δεσμεύονται *-εκ των προτέρων-* να ανήκουν στην ίδια κλάση ταξινόμησης, αποδίδοντας με αυτό τον τρόπο την γεωμετρία της πραγματικής τροχιάς. Η παραμετρική έκφραση κάθε τέτοιας *αναγνωρισμένης γραμμής* επαναυπολογίζεται σε πραγματικό χρόνο μετά από κάθε νέα ταυτοποίηση διαδοχικού σημείου στην ίδια κλάση, απλώς εφαρμόζοντας ανέλιξη ελαχίστων τετραγώνων (least squares regression).

Η μέθοδος εφαρμόστηκε σε δυο σενάρια εκπαίδευσης ταξινόμησης ώστε να πραγματοποιηθούν οι απαραίτητοι έλεγχοι της απόδοσης της μηχανής σε γενίκευση. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής της, αποδεικνύουν πως η μεθοδολογία επιτυγχάνει εξαιρετικά ποσοστά σωστής ταξινόμησης της εκτίμησης θέσης στις διαδοχικές γραμμικές οντότητες που συνθέτουν την τροχιά.

5.2 Στοιχεία Καινοτομίας

Η επιτυχία της μεθόδου έγκειται στην αξιοποίηση μιας σειράς *έμμεσων* ιδιοτήτων οι οποίες

διαμορφώνονται από τη περιστροφική συμπεριφορά του σώματος του οχήματος και ανάγονται στις διαδοχικές εκτιμήσεις κατάστασης θέσης. Το βασικό αξίωμα κατηγοριοποίησης κάθε κατάστασης θέσης σε γραμμές είναι η μεταβολή της καμπυλότητας της τροχιάς από την τελευταία θέση στη τρέχουσα θέση· σημειώνεται ότι η τιμή της καμπυλότητας της τροχιάς είναι άγνωστη κατά τη διάρκεια της κίνησης σε πραγματικό χρόνο.

Εδώ εντοπίζεται κι η ουσιαστική διαφοροποίηση της παρούσας διατριβής σε σχέση με τις επικρατούσες ερευνητικές τάσεις στην περιοχή της Πλοήγησης.

Η κατεύθυνση αυτών των τάσεων είναι προς την ανάπτυξη εναλλακτικών μεθοδολογιών βέλτιστης εκτίμησης της κατάστασης της κίνησης, έχοντας ως βασικό αντικείμενο τη μελέτη προβλημάτων μη γραμμικότητας που δεν αντιμετωπίζονται επαρκώς από τη βασική μεθοδολογία Kalman. Ωστόσο, για την υλοποίηση των ολοκληρωμένων συστημάτων με σύζευξη αισθητήρων πλοήγησης, το KF -και το EKF- είναι οι μόνοι πραγματικά επιχειρησιακοί αλγόριθμοι πλοήγησης. Σε αυτούς οφείλεται η καθολική εφαρμογή των συστημάτων σύζευξης GNSS/INS.

Αντίθετα, η παρούσα εργασία εκμεταλλεύεται την καθολικότητα των επιχειρησιακών KF και EKF, και προτείνει την περαιτέρω αξιοποίηση των παρεχόμενων -από αυτά- εκτιμήσεων κατάστασης πλοήγησης. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της αξιοποίησης έμμεσων ιδιοτήτων, οι οποίες προκύπτουν από συνδυασμούς μεταξύ των καταστάσεων περιστροφής σε κάθε κατάστασης θέσης. Με βάση αυτές τις ιδιότητες διαμορφώνεται το αξίωμα ταξινόμησης σημειακής οντότητας σε γραμμικά πρότυπα, σύμφωνα με το οποίο εκπαιδεύεται η προτεινόμενη μηχανή μάθησης. Από αυτή τη προσέγγιση προκύπτει και μια ενδιαφέρουσα δυνατότητα. Η *(γεωμετρική) εξομάλυνση της κατάστασης θέσης σε πραγματικό χρόνο*.

5.3 Αξίωμα Ταξινόμησης Σημειακής Οντότητας σε Γραμμικά Πρότυπα

Αν ήταν γνωστή *εκ των προτέρων* η τιμή της καμπυλότητας της τροχιάς σε κάθε θέση, η ταξινόμηση θέσης σε γραμμή με προκαθορισμένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά δεν θα είχε λόγο εφαρμογής. Κατά τη κίνηση σε ευθύγραμμο τμήμα η καμπυλότητα δεν ορίζεται (δηλαδή έχει μηδενική τιμή), κατά την κίνηση σε κυκλικό τόξο έχει σταθερή τιμή $\kappa^s = 1/R$, ενώ σε κάθε άλλη παραμετρική καμπύλη σύνθετου τύπου η τιμή της καμπυλότητας μεταβάλλεται. Ωστόσο, η τιμή της καμπυλότητας της τροχιάς είναι άγνωστη για κάθε εκτίμηση θέσης σε πραγματικό χρόνο. Μια λύση στο πρόβλημα θα μπορούσε να δώσει η μέτρηση της μεταβολής της τιμής της καμπυλότητας της τροχιάς $\kappa(s)$ από την τελευταία στην τρέχουσα κατάσταση θέσης, εφόσον αυτό είναι δυνατό. Αυτό που στη πραγματικότητα μπορεί να επιτευχθεί (καθώς η μόνη πηγή δεδομένων είναι οι εκτιμήσεις κατάστασης πλοήγησης) είναι ο προσδιορισμός μιας *έμμεσης παρατήρησης* στη μεταβολή της τιμής της καμπυλότητας από θέση σε θέση, αξιοποιώντας παραμέτρους από τους οποίους δύναται να εξαχθεί μια μορφή γεωμετρικής πληροφορίας.

Με βάση τα διαθέσιμα δεδομένα, το σχέδιο ταξινόμησης με το οποίο πραγματοποιήθηκε η εκπαίδευση, βασίζεται στη μεταβολή των παραμέτρων γωνιακής παρέκκλισης του σώματος του οχήματος στο πέρασμα του χρόνου. Τελικά, το αξίωμα ταξινόμησης σημειακής οντότητας σε γραμμικά πρότυπα διατυπώνεται ως εξής:

“(Διαδοχικά) σημεία με μηδενικές τιμές σε (έμμεσες) παρατηρήσεις στη μεταβολή της τιμής της καμπυλότητας από θέση σε θέση ταξινομούνται σε πρότυπο ίχνους τροχιάς (αναλυτικού τύπου) ευθυγραμμίας. Κάθε άλλη περίπτωση, ταξινομείται σε πρότυπο ίχνους τροχιάς (αναλυτικού τύπου) καμπύλης.”

Η σύλληψη αυτού του απλού τεχνάσματος έδωσε διορατικά λύση στο πρόβλημα.

Έχοντας ως δεδομένο ότι στη γενική περίπτωση η τιμή της καμπυλότητας της τροχιάς οχήματος στο χώρο είναι άγνωστη για κάθε εκτίμηση θέσης σε πραγματικό χρόνο, τα σημεία εκπαίδευσης για δυαδική ταξινόμηση σημείου θέσης δημιουργούνται από τον συνδυασμό της μεταβολής των καταστάσεων εκτροπής και προνευστασμού στον χρόνο της κίνησης. Τότε, σύμφωνα με το αξίωμα, (διαδοχικά) σημεία με μηδενικές τιμές Διαφοράς κατάστασης Εκτροπής KAI Διαφοράς κατάστασης Προνευστασμού από θέση σε θέση ταξινομούνται σε πρότυπο ίχνους τροχιάς (αναλυτικού τύπου) ευθυγραμμίας. Αντιθέτως, (διαδοχικά) σημεία με μη μηδενικές τιμές Διαφοράς κατάστασης Εκτροπής H/KAI Διαφοράς κατάστασης Προνευστασμού ταξινομούνται σε πρότυπο ίχνους τροχιάς (αναλυτικού τύπου) καμπύλης.

Στη παρούσα εργασία, για λόγους μόνον πρακτικούς και μετά από βάσιμες παραδοχές που απλοποιούν το πρόβλημα σε κίνηση σε επίπεδο χωρίς να επηρεάζουν την γενικότητα της εφαρμογής της, η μεθοδολογία εφαρμόζεται και αξιολογείται για κίνηση επίγειου οχήματος σε ακλινές επίπεδο που πραγματοποιείται κατά μήκους τροχιάς με τυπική γεωμετρία χάραξης οδοποιίας. Με αξιοποίηση της παραπάνω *a priori*- γνώσης για τη διαφοροποίηση της τιμής καμπυλότητας από θέση σε θέση, τα σημεία εκπαίδευσης σε αυτή τη περίπτωση δημιουργούνται από τον κατάλληλο συνδυασμό της μεταβολής των καταστάσεων εκτροπής και διατοιχισμού ως προς τον χρόνο της κίνησης. Ουσιαστικά, πρόκειται για τις χρονοσειρές της διαφοράς κατάστασης εκτροπής (Delta Heading, DH) και της διαφοράς κατάστασης διατοιχισμού (Delta Roll, DR) από σημείο σε σημείο, όπως εκτιμώνται σε πραγματικό χρόνο από την υλοποίηση της σύζευξης GNSS/INS με ένα φίλτρο Kalman.

Σημαντικό στοιχείο του τεχνάσματος σχηματισμών των αναγκαίων (υποκείμενων) δεσμεύσεων πάνω στις οποίες εκπαιδεύεται ο αλγόριθμος, αποτελεί το γεγονός ότι η εκτίμηση ταξινόμησης της κατάστασης θέσης δεν επηρεάζεται από την ποιότητα της λύσης του εντοπισμού.

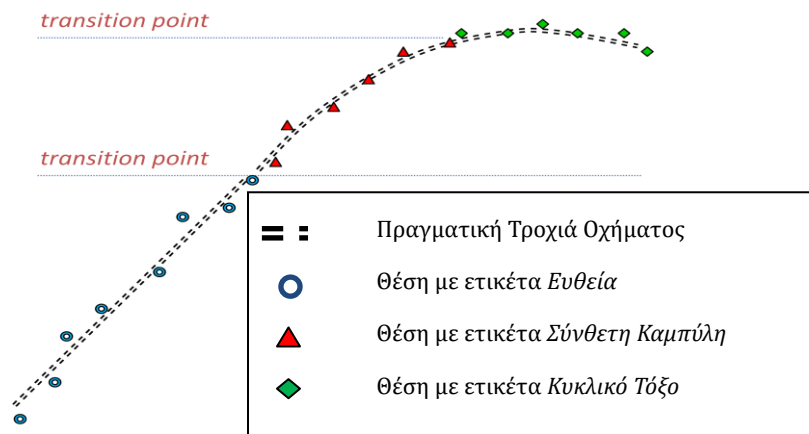
5.4 Ταυτοποίηση της Γεωμετρίας της Τροχιάς σε Πραγματικό Χρόνο

Για κάθε σύνολο N δεδομένων εκπαίδευσης $\{x_k, y_k\}_{k=1}^N$ με δεδομένα εισόδου $x_k \in \mathbb{R}^2$, $x_k = \{DH_k, DR_k\}_{k=1}^N$, και δεδομένα εξόδου $y_k \in \mathbb{R}$ με ετικέτες κλάσεων $y_k \in \{-1, +1\}$, η τελική μορφή της μη γραμμικής συνάρτησης ταξινόμησης (όρια απόφασης διαχωρισμού κλάσεων) είναι:

$$y(x) = \text{sign} \left[\sum_{k=1}^{\#SV} \alpha_k y_k K(x, x_k) + b \right].$$

Η συνάρτηση πυρήνα RBF είναι μια τυπική επιλογή για μη γραμμικό διαχωρισμό κλάσεων.

Σκοπός της συνάρτησης ταξινόμησης είναι η εκχώρηση (σε κάθε εκτίμηση θέσης) της ετικέτας $\{-1, +1\}$ που αντιστοιχεί σε μία από τις κλάσεις γεωμετρικού προτύπου (Σχ. 5.1).



Σχήμα 5. 1 Εκχώρηση ετικέτας γραμμικού προτύπου σε διαδοχικές καταστάσεις θέσης

Όπως εικονογραφεί το σχεδιάγραμμα του Σχ. 5.1, με την εφαρμογή του παραπάνω μη γραμμικού LS-SVM εργαλείου κάθε διαδοχική εκτίμηση θέσης ταξινομείται σε μια από τις τρεις κλάσεις: *Ευθεία*, *Σύνθετη Καμπύλη*, *Κυκλικό Τόξο*. Η αλληλουχία θέσεων με καταχώρηση στην ίδια κλάση διαμορφώνει την αντίστοιχη γραμμική οντότητα. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση σημειακής ταξινόμησης ταυτοποιεί τις γραμμικές οντότητες που συνθέτουν την τροχιά οχήματος.

Στόχος της προτεινόμενης μεθοδολογίας είναι ο έλεγχος της καθοδήγησης οχήματος σε προκαθορισμένη πορεία (κι όχι απαραίτητα οχήματος προκαθορισμένης τροχιάς), έχοντας ως βασικό εργαλείο την δυνατότητα ταυτοποίησης της υφιστάμενης γεωμετρίας της τροχιάς, κατά την εξέλιξη της κίνησης. Αν αυτή η δυνατότητα είναι επαρκής, ο έλεγχος πραγματοποιείται με την απευθείας σύγκριση της γεωμετρίας του ίχνους της υφιστάμενης τροχιάς με την γεωμετρία της πορείας σχεδιασμού.

Το τελικό προϊόν είναι η αυτόματη - *ευφυής*- εξαγωγή της γεωμετρίας της τροχιάς, με τη μορφή παραμετρικών καμπυλών. Από αυτή την πρωτοτυπία προκύπτει ωστόσο και η ενδιαφέρουσα δυνατότητα που περιγράφεται στην επόμενη ενότητα.

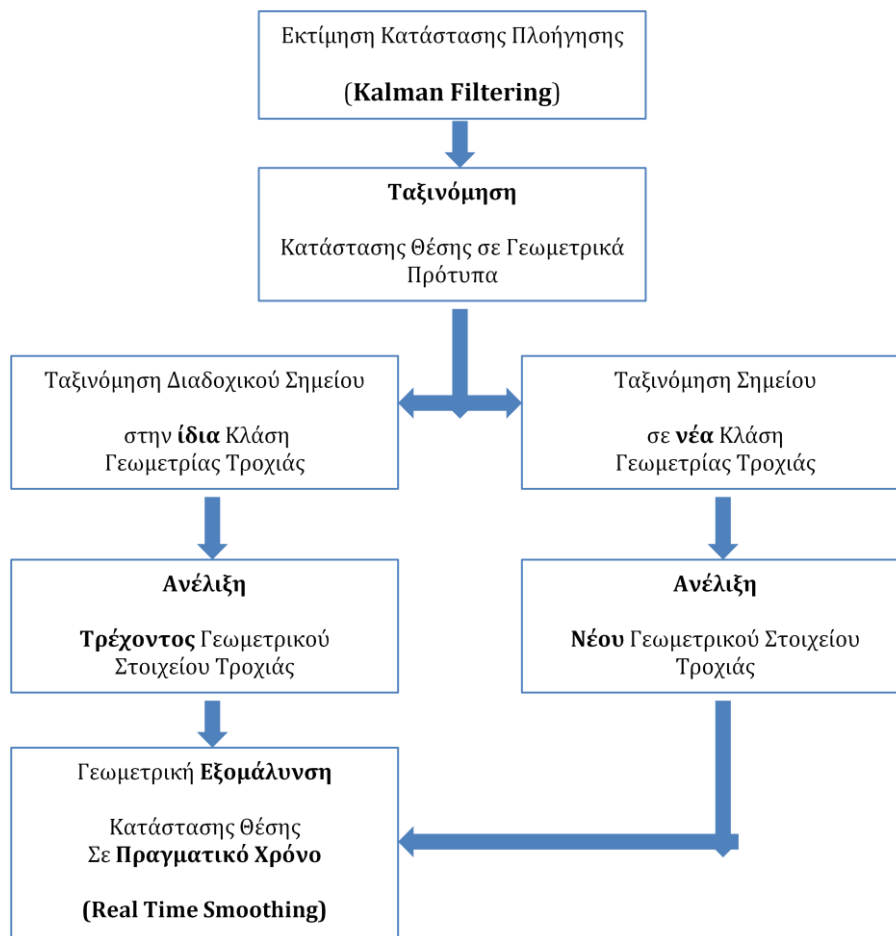
5.5 Γεωμετρική Εξομάλυνση Κατάστασης Θέσης σε Πραγματικό Χρόνο

Ο όρος *εξομάλυνση* στη γενικότητά του, αναφέρεται στη διαδικασία υπολογισμού μιας προσεγγιστικής συνάρτησης που αποσκοπεί στο να περιγράψει μια σειρά δεδομένων αναδεικνύοντας την πληροφορία που περιέχει, παραμερίζοντας θόρυβο ή άλλα χαρακτηριστικά μακροσκοπικής κλίμακας. Η ταξινόμηση της γεωμετρίας της κίνησης αποδίδει ουσιαστικά, μια τέτοια συνάρτηση.

Καθώς η *εκπαιδευμένη* μηχανή ταξινομεί τη λύση του κινηματικού εντοπισμού σε γραμμές γνωστής γεωμετρίας, ο υπολογισμός της αναλυτικής έκφρασης του ίχνους της τροχιάς δημιουργεί τις προϋποθέσεις και για τον υπολογισμό της εκτίμησης της θέσης εξομάλυνσης (*smoothing*) σε πραγματικό χρόνο. Στη παρούσα εργασία προτείνεται, τελικά, ως εξομάλυνση θέσης πραγματικού χρόνου, ο γεωμετρικός υπολογισμός του ποδός των σημείων θέσης του οχήματος επί της τρέχουσας γεωμετρίας της τροχιάς (ταξινομημένη γραμμή). Με όρους μαθηματικής ανάλυσης πρόκειται για τα σημεία της τρέχουσας ταυτοποιημένης γραμμής (με ανεπιλεγμένη παραμετρική εξίσωση) που απέχουν την ελάχιστη απόσταση από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις θέσης.

5.5.1 Εκτίμηση Γεωμετρικής Εξομάλυνσης Κατάστασης Θέσης

Με αφετηρία ένα σημείο που δεν ταξινομείται στην ίδια κλάση με τα αμέσως προηγούμενα και με την εισαγωγή κάθε επόμενου διαδοχικού με ετικέτα ίδιας γραμμής (νέα πληροφορία "ίδιας γεωμετρίας"), ένας αλγόριθμος υλοποιεί μια *αναδρομική ανέλιξη ελαχίστων τετραγώνων* (recurrent least squares regression) η οποία προσεγγίζει με βάση τα αναλυτικά της χαρακτηριστικά (συνάρτηση πρώτου ή δευτέρου βαθμού, κτλ) την παραμετρική έκφραση της γραμμής, στην οποία έχουν ταξινομηθεί τα (διαδοχικά) σημεία. Με το πέρας της παρούσας ανέλιξης, και πριν τον, σε πραγματικό χρόνο, αναδρομικό επαναπροσδιορισμό της παραμετρικής έκφρασης της γραμμής (μετά από κάθε νέα ταυτοποίηση διαδοχικού σημείου στην ίδια κλάση), μια νέα διαδικασία βελτιστοποίησης ελαχίστων τετραγώνων εντοπίζει τα σημεία επί της γραμμής, από τα οποία κάθε εκτίμηση θέσης (κατά αντιστοιχία) απέχει την ελάχιστη απόσταση. Με όρους γεωμετρίας, πρόκειται για τον υπολογισμό του ποδός των σημείων-εκτίμηση θέσης του οχήματος επί της τρέχουσας γεωμετρίας του ίχνους της τροχιάς του. Με την εισαγωγή κάθε νέου σημείου με ταξινόμηση στην ίδια γραμμική κλάση (νέα γεωμετρική πληροφορία), η παραμετρική εξίσωση της γραμμής ανελίσσεται εκ νέου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον επαναπροσδιορισμό της θέσης εξομάλυνσης για όλα τα σημεία που εκχωρήθηκαν στη γραμμή της. Στο Σχ. 5.2 παρατίθεται το διάγραμμα ροής για τον υπολογισμό της γεωμετρικής εξομάλυνσης κατάστασης θέσης σε πραγματικό χρόνο.



Σχήμα 5.2 Γεωμετρική Εξομάλυνση Κατάστασης Θέσης σε Πραγματικό Χρόνο: Διάγραμμα Ροής

Η μεταβλητότητα της γεωμετρικής εξομάλυνσης εξαρτάται από την βέλτιστη εκτίμηση της μεταβλητότητας της κατάστασης θέσης (φιλτράρισμα), και προκύπτει με εφαρμογή του νόμου μετάδοσης σφαλμάτων.

Έχοντας ως δεδομένο, ότι για τη επιστημονική περιοχή της *Βέλτιστης Εκτίμησης Κατάστασης* η εκτίμηση εξομάλυνσης είναι βασικά μια εκ των υστέρων διαδικασία (post-processed) υπολογισμών, η αξιοποίηση της διαθέσιμης γεωμετρικής πληροφορίας για υπολογισμούς εξομάλυνσης πραγματικού χρόνου φαίνεται ενδιαφέρουσα ως αντίληψη.

5.5.2 Αλγόριθμος Εξομάλυνσης Σημείων-Εκτίμησης Θέσης

Πρόκειται για απλή ρουτίνα *δέσμης εντολών γραμμικής εκτέλεσης* (script) η οποία ενεργοποιείται μετά από κάθε ταξινόμηση. Περιλαμβάνει μόνον δομές ελέγχου και βρόγχους επανάληψης, ενώ οι απαραίτητες εργασίες μαθηματικού προγραμματισμού εκτελούνται από υπολογιστικές συναρτήσεις βιβλιοθηκών ελεύθερου λογισμικού σε υπορουτίνες. Ο κώδικας παρατίθεται σε σχεδιασμό *ψευδογλώσσας* προγραμματισμού.

Εισαγωγή στοιχείο: σημείο ταξινόμησης i

Αρχικοποίηση

Μεταβλητή k : ετικέτα

Μεταβλητή n : γεωμετρία

Ανάθεση $\rightarrow k$

Ανάθεση $\rightarrow n$

Αρχικοποίηση στοιχείο: καμπύλη

Έλεγχος ετικέτας

Αν ετικέτα == k

Προσάρτηση στοιχείο: καμπύλη

γεωμετρία $\rightarrow n$

Βρόγχος Επανάληψης

Για κάθε σημείο $i \in$ στοιχείο: καμπύλη

Υπορουτίνα: προσαρμογή βέλτιστης καμπύλης

Βρόγχος Επανάληψης

Για κάθε σημείο $j \in$ στοιχείο: καμπύλη

Υπορουτίνα: ελάχιστη απόσταση από στοιχείο: καμπύλη

Τέλος

Τέλος

Μετάβαση \rightarrow *Εισαγωγή* στοιχείο: σημείο ταξινόμησης $i+1$

Αλλιώς

Αποθήκευση στοιχείο: καμπύλη

Μετάβαση \rightarrow *Εισαγωγή* στοιχείο: σημείο ταξινόμησης $i+1$

5.5.3 Εφαρμογή Προσομοίωσης και Έλεγχος Ποιότητας

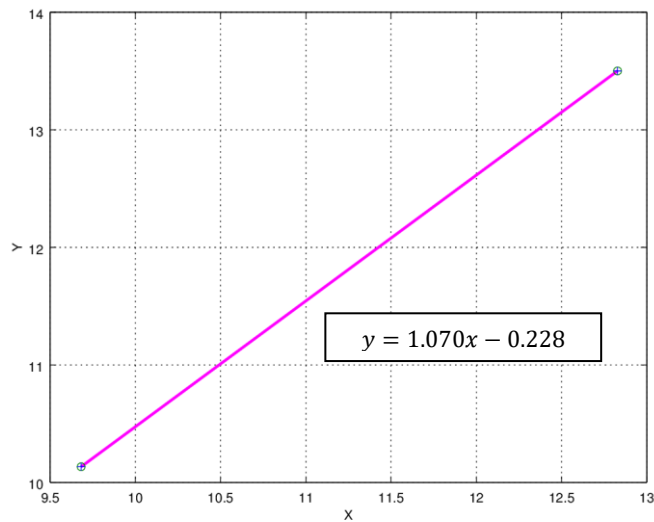
Κατά την υλοποίηση του αλγορίθμου, η προτυποποίηση της τροχιάς επιτυγχάνεται με την προσαρμογή της βέλτιστης καμπύλης, όταν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και ο αναλυτικός της τύπος έχουν καθοριστεί από την τρέχουσα κλάση ταξινόμησης. Τελικά, οι παράμετροι της βέλτιστης γεωμετρικής προσαρμογής επαναπροσδιορίζονται με δυναμικό τρόπο.

Σε πρώτη φάση, ο προκαταρκτικός έλεγχος βασίζεται σε ενδεικτικά αποτελέσματα που προέκυψαν με χρήση κατάλληλων δεδομένων προσομοίωσης (simulation data). Τα σχετικά δεδομένα, στα οποία έχει προστεθεί θόρυβος προσομοίωσης (white noise), υλοποιούν μια απλή ευθεία γραμμή στο επίπεδο. Ο έλεγχος ποιότητας προκύπτει από την σύγκριση της απόστασης μεταξύ των εκτιμήσεων εξομάλυνσης *πραγματικού χρόνου* και τις πραγματικές τιμές, σε σχέση με τις αντίστοιχες αποστάσεις μεταξύ των προσομοιωμένων εκτιμήσεων εισόδου και τις πραγματικές τιμές.

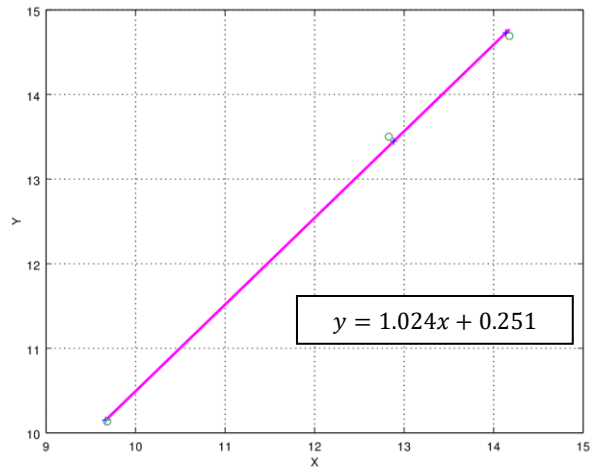
Τα δεδομένα προσομοιώνουν ρεαλιστικές εκτιμήσεις θέσης σε κάποιο σύστημα επίπεδων συντεταγμένων. Αν δεν έφεραν τον θόρυβο προσομοίωσης θα αφορούσαν σημεία θέσης που κείνται στην ευθεία αναλυτικού τύπου

$$y = x.$$

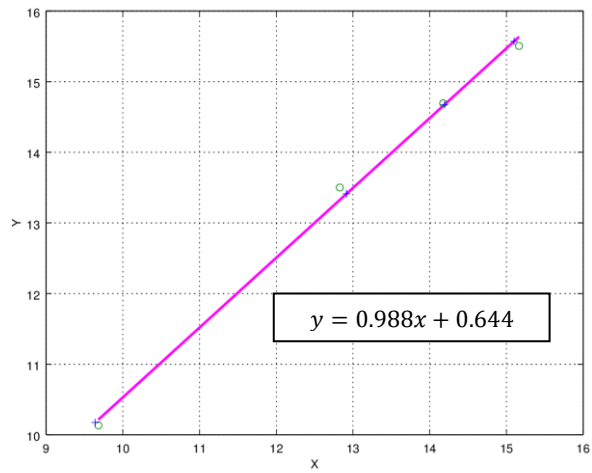
Η προσομοίωση αφορά εφαρμογή πλοήγησης/ελέγχου καθοδήγησης οχήματος επί προσχεδιασμένης πορείας. Ο προκαταρκτικός έλεγχος πραγματοποιείται με την αναπροσαρμογή της βέλτιστης ευθείας καθοδήγησης σε ακολουθία πέντε σημείων (τα οποία υποθετικά είναι προϊόντα εκτίμησης θέσης από αλγόριθμο βελτιστοποίησης σε πραγματικό χρόνο) και εκτελείται με βάση την υπόθεση ότι αυτά τα σημεία έχουν ταξινομηθεί από την προτεινόμενη μεθοδολογία στην κλάση *ευθεία*. Τα σχήματα που ακολουθούν εικονογραφούν την διαδικασία αναπροσαρμογής.



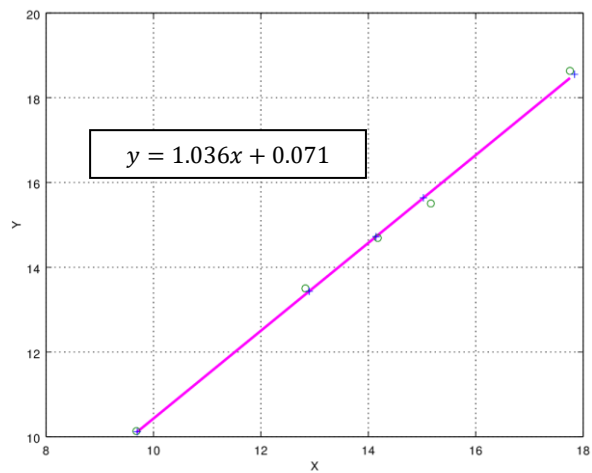
Σχήμα 5.3 Αρχική Εκτίμηση Βέλτιστης Ευθείας



Σχήμα 5.4 Εισαγωγή 3ου σημείου ευθείας και πρώτη Αναπροσαρμογή Βέλτιστης Ευθείας

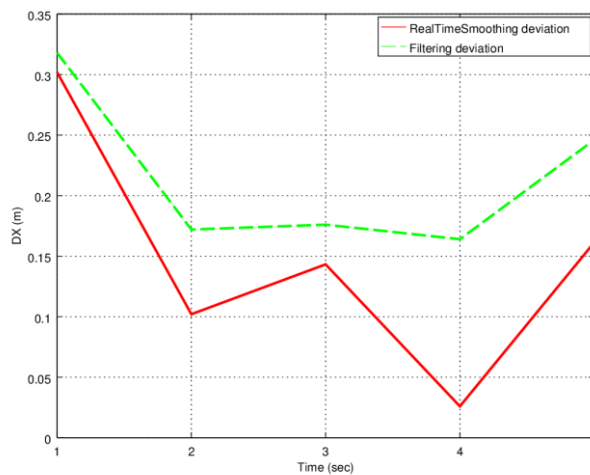


Σχήμα 5.5 Εισαγωγή 4ου σημείου ευθείας και δεύτερη Αναπροσαρμογή Βέλτιστης Ευθείας

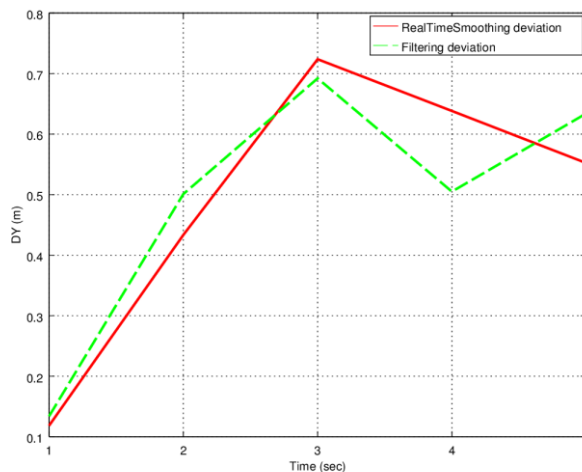


Σχήμα 5.6 Εισαγωγή 5ου σημείου ευθείας και τρίτη Αναπροσαρμογή Βέλτιστης Ευθείας

Μετά την εισαγωγή του πρώτου διαδοχικού σημείου-εκτίμηση θέσης με ταξινόμηση *ευθεία*, η πρώτη προσαρμογή της βέλτιστης ευθείας οφείλει να διέρχεται από τα δύο σημεία και με βάση τα δεδομένα έχει τον αναλυτικό τύπο όπως ορίζεται στο Σχ. 5.3. Με την εισαγωγή της τρίτη διαδοχικής ταξινόμησης στην ίδια κλάση ο αλγόριθμος πραγματοποιεί την πρώτη αναπροσαρμογή. Ο αναλυτικός τύπος της νέας εκτίμησης της βέλτιστης ευθείας φαίνεται στο Σχ. 5.4. Ομοίως, τα Σχ. 5.5 και 5.6 αποδίδουν τις αναπροσαρμογές της γεωμετρίας της βέλτιστης τροχιάς καθοδήγησης, με την εισαγωγή δύο ακόμα διαδοχικών σημείων με ταξινόμηση *ευθεία*. Στα παραπάνω σχήματα, τα σημεία *κύκλος* απεικονίζουν τις εκτιμήσεις θέσης στην έξοδο του αλγόριθμου πλοήγησης και τα σημεία *σταυρός* τις εκτιμήσεις εξομάλυνσης *πραγματικού χρόνου*. Με βάση την τελευταία προσαρμογή, οι τιμές της *γεωμετρικής* εξομάλυνσης συγκρίθηκαν με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις θέσης των σημείων ταξινόμησης, σε σχέση με τις πραγματικές θέσεις του οχήματος. Τα Σχ. 5.7 και 5.8 απεικονίζουν τις συγκρίσεις σε απόλυτες διαφορές τετμημένης και τεταγμένης, αντιστοίχως.



Σχήμα 5.7 Απόλυτες Διαφορές Τετμημένης μεταξύ Εξομάλυνσης πραγματικού χρόνου και Εκτίμησης Θέσης Σημείου Ταξινόμησης



Σχήμα 5.8 Απόλυτες Διαφορές Τεταγμένης μεταξύ Εξομάλυνσης πραγματικού χρόνου και Εκτίμησης Θέσης Σημείου Ταξινόμησης

Όπως ήταν αναμενόμενο, οι θέσεις εξομάλυνσης απέχουν, σε μεγάλο ποσοστό, μικρότερες αποστάσεις από τις πραγματικές θέσεις του οχήματος σε σχέση με τις αντίστοιχες αποστάσεις των εκτιμήσεων προσομοίωσης. Από τον έλεγχο πάνω σε δεδομένα προσομοίωσης εξάγεται το συμπέρασμα ότι η προτεινόμενη προσέγγιση πράγματι αποδίδει εκτιμήσεις εξομάλυνσης κατάστασης θέσης σε πραγματικό χρόνο. Με βάση τα παραπάνω, η μεθοδολογία ελέγχθηκε και σε πραγματικές συνθήκες. Ενδεικτικά αποτελέσματα της εφαρμογής της παρατίθενται στο Κεφάλαιο 7.

Επιπλέον, η προτεινόμενη μεθοδολογία ταυτοποίησης και ανέλιξης της γεωμετρίας της τροχιάς βρίσκει ουσιαστική εφαρμογή και στην αυτόματη εξαγωγή as-built γεωμετρικών στοιχείων χάραξης οδοποιίας, με ακριβή προσδιορισμό των σημείων εναλλαγής τους· πρόκειται για ένα δημοφιλές τεχνικό πρόβλημα της Οδοποιίας. Σε κάθε νέο σημείο που δεν ταξινομείται στην ίδια κλάση με τα αμέσως προηγούμενά του (και δεν τυγχάνει να είναι σημείο λανθασμένης ταξινόμησης - misclassification), δημιουργείται νέα διαδικασία αναδρομικής ανέλιξης μιας νέας γραμμής. Ο τελικός υπολογισμός της εξίσωσης της προηγούμενης γραμμής ολοκληρώνεται μετά με την τελευταία διαδοχική εκχώρηση κάποιου σημείου στην ίδια κλάση. Πλέον, είναι εύκολο η οριστική παραμετρική μορφή της γραμμής να αναχθεί σε στοιχείο της γεωμετρίας χάραξης του άξονα του δρόμου και μάλιστα σε σχεδόν πραγματικό χρόνο. Μια λεπτομερής ανάλυση των αποτελεσμάτων εξαγωγής as-built γεωμετρικών στοιχείων χάραξης οδοποιίας, με εφαρμογή σημειακής ταξινόμησης της κατάστασης θέσης παρατίθενται στο Κεφάλαιο 7, επίσης.

Κεφάλαιο 6^ο

Πειραματικές Διατάξεις και Δεδομένα

6.1 Προκαταρκτικός Σχεδιασμός

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την ανάπτυξη μεθοδολογίας για τον γεωμετρικό έλεγχο προκαθορισμένης πορείας σε πραγματικό χρόνο, κατά την καθοδήγηση ενός οχήματος προς έναν τόπο. Η λύση ενός τέτοιου προβλήματος αναζητήθηκε μέσα από την ανάλυση πραγματικών δεδομένων πάνω στη περιστροφική συμπεριφορά ενός σώματος κατά την κίνησή του σε προκαθορισμένη τροχιά. Για την περιγραφή του κινηματικού φαινομένου απαιτήθηκε συλλογή πραγματικών δεδομένων πλοήγησης.

Ο γεωμετρικός έλεγχος της τροχιάς της κίνησης βασίζεται κατά κύριο λόγο στην διαχείριση και στην αξιοποίηση κινηματικών παραμέτρων που σε διακριτούς χρόνους δύναται να αναχθούν σε γεωμετρική πληροφορία. Συνεπώς, απαιτείται πειραματική προσέγγιση προσαρμοσμένη στη γεωμετρία της κίνησης. Ο σχεδιασμός του πειράματος συλλογής δεδομένων και η επιλογή των συνθηκών στις οποίες έλαβε χώρα υπήρξαν από τα κρισιμότερα στοιχεία της εργασίας.

Για να εξασφαλιστεί προκαθορισμένη πορεία μια πρακτική εφαρμογή είναι η κινηματική καταγραφή οχήματος σταθερής τροχιάς (καταγραφή κίνησης σε σιδηρόδρομο). Μια κίνηση μεγάλης απόστασης με γραμμικά χαρακτηριστικά υψηλής δυναμικής κρίθηκε η καταλληλότερη για τη συλλογή χαρακτηριστικών πειραματικών δεδομένων, καθώς ήταν εξ αρχής προφανές ότι η ποιότητα τους θα βασίζονταν στην βέλτιστη απόδοση κατάλληλα επιλεγμένων αδρανειακών αισθητήρων. Ως πεδίο συλλογής κινηματικών δεδομένων επιλέχθηκε ο προαστιακός σιδηρόδρομος Αθήνα – Κιάτο Κορινθίας συνολικού μήκους περίπου 100 km, ο σχεδιασμός του οποίου επιτρέπει κινήσεις αμαξοστοιχίας σε υψηλές ταχύτητες. Σε συνεννόηση με τις τεχνικές υπηρεσίες του Οργανισμού Σιδηροδρόμων Ελλάδος (ΟΣΕ) χρησιμοποιήθηκε σιδηροδρομικό όχημα (δρεζίνα) η οποία διαμορφώθηκε σε πλατφόρμα συλλογής κινηματικών δεδομένων. Απαιτήθηκε εφαρμογή αισθητήρων πλοήγησης υψηλής ακρίβειας, η διάταξη, η τοποθέτηση και η γεωμετρική συσχέτιση των οποίων σχεδιάστηκε και πραγματοποιήθηκε μέσα από την στενή συνεργασία των εργαστηρίων Ανώτερης και Γενικής Γεωδαισίας του ΕΜΠ. Το πείραμα περιέλαβε καταγραφή κινηματικών δεδομένων από τον κεντρικό σιδηροδρομικό σταθμό Αθηνών ως τον σταθμό του προαστιακού σιδηρόδρομου στο Κιάτο σε μετάβαση με κίνηση μέσης δυναμικής και επιστροφή με κίνηση υψηλής δυναμικής.

6.2 Πείραμα Καταγραφής Κινηματικών Δεδομένων σε Σιδηρόδρομο

Από τον προκαταρκτικό σχεδιασμό του πειράματος, ήταν ήδη γνωστό ότι, λόγω της φύσης της εφαρμογής, η μεταβλητικότητα της κινηματικής κατάστασης του σιδηροδρομικού οχήματος στο οποίο προσαρτήθηκε η πλατφόρμα συλλογής δεδομένων (ως προς την δυναμική της κίνησης) δεν θα μπορούσε να είναι έντονη. Οι ταχυδυναμικές δυνατότητες του οχήματος επέβαλλαν περιορισμούς

ασφαλείας. Η δρεζίνα (Σχ. 6.1) είναι ένα μικρό τετράτροχο σιδηροδρομικό όχημα διαστάσεων μήκους 11.5m / πλάτους 3m / ύψους 4m, μεταφέρει ως 20 καθήμενους επιβάτες και έχει κίνηση και προς τις δυο κατευθύνσεις της σιδηροτροχιάς με μέγιστη ταχύτητα τα 100km/h. Χρησιμοποιείται κυρίως για τεχνικές επισκοπήσεις της γραμμής και μεταφορά του προσωπικού του οργανισμού.



Σχήμα 6. 1 Σιδηροδρομικό όχημα καταγραφής (δρεζίνα): Εξωτερική όψη

6.2.1 Σχεδιασμός Πειραματικής Διάταξης - Όργανα

Οι μετρήσεις των κινηματικών δεδομένων κατά την υλοποίηση του πειράματος καταγράφηκαν από όργανα πλοήγησης, τα οποία σε σύζευξη αποτελούν το ολοκληρωμένο σύστημα εντοπισμού SPAN (Novatel). Αυτό αποτελείται από:

- έναν δέκτη GNSS DV-L3, Novatel γεωδαιτικής ακρίβειας (παρατηρήσεις στη φάση του φέροντος δορυφορικού σήματος GPS L1-L2, rms οριζοντιογραφικής ακρίβειας σε απόλυτο εντοπισμό στη L2 1.5m, rms ακρίβειας μετρήσεων φάσης 0.5mm και συχνότητα καταγραφής ως 20Hz),
- μια αδρανειακή μονάδα IMU-FSAS, iMAR ακρίβειας τακτικού βαθμού (εύρος μέτρησης γυροσκοπίων $\pm 500 \text{ deg/s}$ αβεβαιότητας 0.75 deg/hr , εύρος μέτρησης επιταχυνσιομέτρων $\pm 5 \text{ g}$ αβεβαιότητας 1.0 mg , rms επιτάχυνσης 0.3 m/s^2 , ακρίβεια προσδιορισμού περιστροφικής συμπεριφοράς 0.015° [pitch-roll] - 0.041° [yaw] και συχνότητα καταγραφής ως 200Hz)
- και ενός ψηφιακού οδομέτρου WPT-M12, Corrsys-Datron υψηλής ακρίβειας (καταγραφή 1000 παλμών ανά πλήρη περιστροφή τροχού).

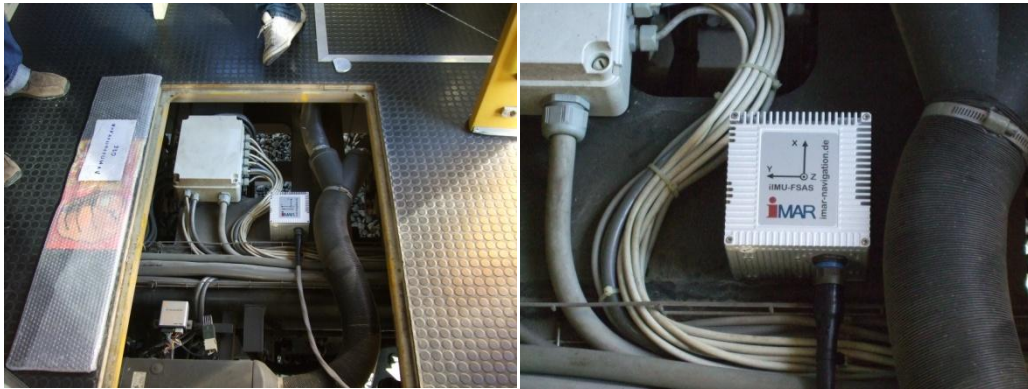
Το σύστημα SPAN συνοδεύεται από λογισμικό ελέγχου λειτουργίας (CDU, Novatel) και λογισμικό επεξεργασίας δεδομένων (εκ των υστέρων) (Inertial Explorer 8.10, Waypoint-Novatel).

Ο βασικός στόχος του πειράματος είναι η συλλογή κινηματικών δεδομένων τα οποία να είναι σε θέση να περιγράψουν σε χρονοσειρές την περιστροφική συμπεριφορά (γωνιακές παρεκκλίσεις) του οχήματος, με αξιοπιστία. Για να επιτευχθεί ο στόχος, η σταθερή τοποθέτηση των αισθητήρων πάνω στο όχημα (κατάλληλη ως προς την διαστασιολόγηση της πειραματικής διάταξης στο χώρο) και η γεωμετρική τους συσχέτιση είναι μεγάλης σημασίας. Η απόδοση της συγκεκριμένης αδρανειακής μονάδας είναι συνάρτηση τόσο των συνθηκών κίνησης (οι υψηλές δυναμικές ευνοούν τον περιορισμό της ολίσθησης των αδρανειακών αισθητήρων επιτάχυνσης, όπως επίσης τον περιορισμό του θορύβου λόγω ταλαντώσεων στους αποσβεστήρες του οχήματος στις -κατά τα άλλα πολύ ακριβείς- μετρήσεις των γυροσκοπίων), όσο και της ακριβούς ευθυγράμμισης του τρισσορθογώνιου συστήματος αναφοράς

του οργάνου με το σύστημα της κίνησης του οχήματος (body frame). Τα σφάλματα ευθυγράμμισης επηρεάζουν σημαντικά τις μετρήσεις και κατά συνέπεια την αξιοπιστία στη περιγραφή της κινηματικής-περιστροφικής συμπεριφοράς της διάταξης.

α. Πάκτωση αδρανειακής μονάδας στο πλαίσιο του οχήματος

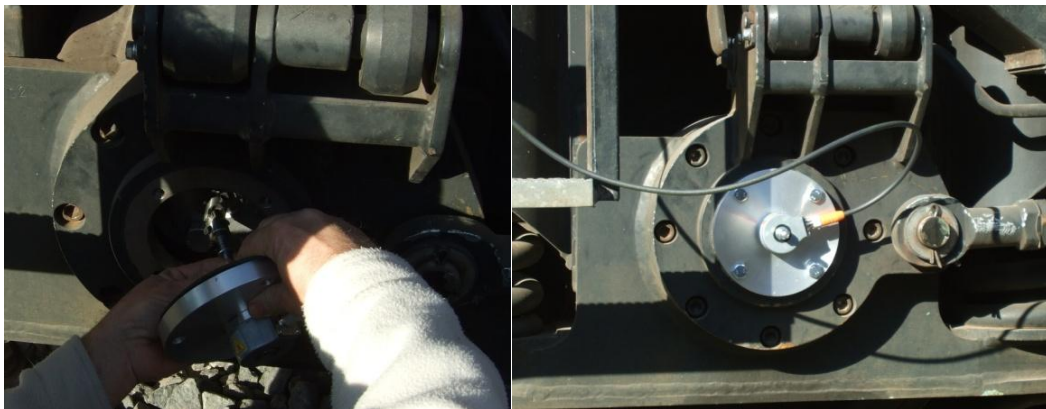
Η αδρανειακή μονάδα στερεώθηκε με κοχλίωση σε δοκό στο πλαίσιο του οχήματος (Σχ. 6.2). Τοποθετήθηκε στο μέσο του ανοίγματος του μεταξονίου και προσανατολίστηκε κατά μήκος της κίνησης του οχήματος με βάση τα μηχανολογικά χαρακτηριστικά διαστασιολόγησης του πλαισίου, ώστε ο άξονας-εμπρός του συστήματος του οργάνου (x-axis forward, άξονας κατά μήκος της κίνησης) να συμπίπτει με την μηκοτομή της σιδηροτροχιάς. Η πάκτωση του οργάνου στον σκελετό της δρεζίνας εξασφάλισε απόσβεση θορύβου στις μετρήσεις λόγω κραδασμών στη συσκευή.



Σχήμα 6.2 Τοποθέτηση αδρανειακής μονάδας

β. Εφαρμογή οδομέτρου

Για να τοποθετηθεί σωστά το ψηφιακό οδόμετρο κρίθηκε αναγκαία μια επέκταση του άξονα κίνησης προς τα έξω, δημιουργώντας διαμπερή οπή με σπείρωμα στην εξωτερική επιφάνεια του τροχού και τοποθετώντας κοχλία. Η σύνδεση του αισθητήρα με τον κοχλία πραγματοποιήθηκε με χρήση αποστάτη, στερεώνοντας καταρχάς τον κοχλία σε σταυρό, ώστε να εξαλειφθεί τυχούσα εκκεντρότητα ως προς τον άξονα της κίνησης. Το οδόμετρο προσαρμόστηκε στον αποστάτη και στερεώθηκε στην εξωτερική επιφάνεια του τροχού πάνω σε κατάλληλο υποδοχέα, ο οποίος διαστασιολογήθηκε και κατασκευάστηκε αποκλειστικά για τις ανάγκες του πειράματος (Σχ. 6.3). Με αυτή την τροποποίηση, ο υποδοχέας δεν περιστρέφεται κατά την περιστροφή του τροχού, επιτυγχάνοντας την μετάδοση της κίνησης από τον τροχό στον αισθητήρα σωστά και με ασφάλεια για το όργανο.

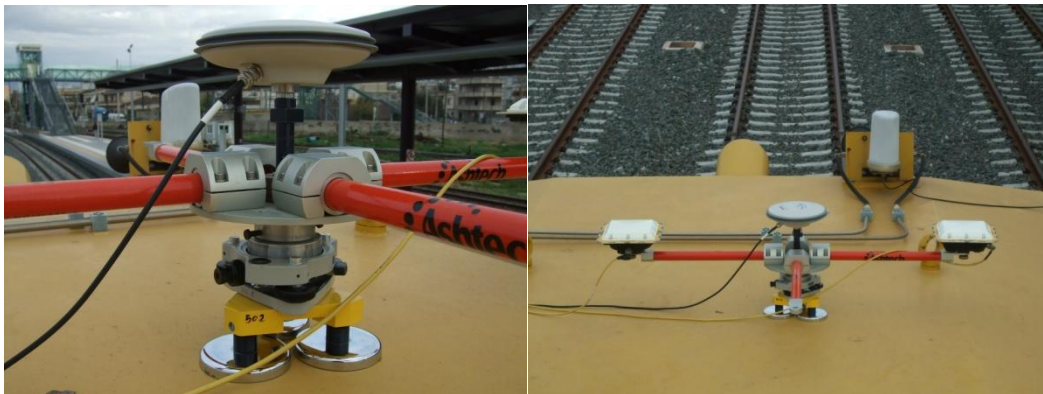


Σχήμα 6.3 Εφαρμογή ψηφιακού οδομέτρου

γ. Διάταξη καταγραφής σήματος GNSS

Η καταγραφή κινηματικών δεδομένων με λήψη σήματος GNSS πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας

δύο επιπλέον δέκτες γεωδαιτικής ακρίβειας, οι κεραίες των οποίων διατάχθηκαν σε ευθεία κάθετη ως προς τη μηκοτομή της σιδηροτροχιάς (ευθεία παράλληλη στον y-axis του body frame) στην οροφή του οχήματος. Είναι δέκτες Trimble 4700 παρατήρησης στη φάση του φέροντος δορυφορικού σήματος, προδιαγραφών ακρίβειας $\pm 1\text{cm} + 1\text{ppm}$ οριζοντιογραφικά και $\pm 2\text{cm} + 1\text{ppm}$ υψομετρικά (post processed), σε λειτουργία συνεχούς κινηματικής καταγραφής και συχνότητα 1Hz. Οι κεραίες τοποθετήθηκαν σε άνοιγμα απόστασης 1m σε ειδική σταυροειδή διάταξη, η οποία χρησιμοποιείται σε εφαρμογές πλοήγησης για υπολογισμούς στην περιστροφική συμπεριφορά κινούμενου οχήματος με μετρήσεις GNSS, και έχει τη δυνατότητα να φέρει ως και πέντε κεραίες. Οι μετρήσεις από τους πλεονάζοντες δέκτες εξυπηρέτησαν έλεγχο στις εκτιμήσεις της παραμέτρου διατοιχισμού (roll) από το σύστημα SPAN, καθώς συχνά, έντονες εγκάρσιες ταλαντώσεις του οχήματος κατά την κίνηση του πάνω στην σιδηροτροχιά προσέθεταν θόρυβο στις μετρήσεις των γυροσκοπίων. Η διάταξη στερεώθηκε σε μαγνητική βάση με τρικόχλιο οριζοντίωσης και προσκολλήθηκε σε τυχαίο σημείο στην οροφή της δρεζίνας. Η κεραία του δέκτη του συστήματος SPAN τοποθετήθηκε στο σημείο κέντρωσης της διάταξης (Σχ. 6.4).



Σχήμα 6.4 Διάταξη καταγραφής σήματος GNSS

Η ευθυγράμμιση της διάταξης σε επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση της κίνησης πραγματοποιήθηκε με γεωδαιτικές μεθόδους χάραξης, μόλις υπολογίστηκαν ως προς το body frame οι συντεταγμένες των κέντρων μέτρησης όλων των αισθητήρων της πλατφόρμας συλλογής (Σχ. 6.5).

δ. Γεωμετρική συσχέτιση αισθητήρων πλοήγησης

Σφάλματα κατά τον υπολογισμό των εκκεντροτήτων μεταξύ των κέντρων μετρήσεων των αισθητήρων (lever-arm offsets) ως προς το σύστημα αναφοράς του σώματος του οχήματος επηρεάζουν σημαντικά την ακριβή εκτίμηση των κινηματικών παραμέτρων. Κατά συνέπεια, οι μετρήσεις για την γεωμετρική συσχέτιση των αισθητήρων είναι μια προσεκτική και σχολαστική εργασία. Οι εκκεντρότητες υπολογίστηκαν στο body frame από το διάνυσμα θέσης του σημείου μέτρησης κάθε αισθητήρα, ως προς το σημείο αναφοράς των αδρανειακών μετρήσεων (αρχικό σημείο αξόνων).

Ως μέθοδος μέτρησης για την οριζοντιογραφία επιλέχθηκε η πολλαπλή εμπροσθοτομία, ενώ υψομετρικά εφαρμόστηκε γεωμετρική χωροστάθμιση και τριγωνομετρική υψομετρία. Για τις μετρήσεις χρησιμοποιήθηκαν ένας υψηλής ακρίβειας ολοκληρωμένος γεωδαιτικός σταθμός (Total Station) Leica TCA 1201M προδιαγραφών απόδοσης $\pm 2\text{mm} + 2\text{ppm}$ σε μετρήσεις απόστασης και $2''$ σε γωνιακές μετρήσεις και ένας χωροβάτης υψηλής ακρίβειας Topcon DL-102.

Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν στο χώρο του σταθμού «Αγ. Ιωάννης Ρέντης» του προαστιακού σιδηρόδρομου, με το όχημα σταθμευμένο απέναντι από την αποβάθρα επιβίβασης-αποβίβασης σε θέση μηδενικής επίκλισης και κατά μήκος κλίσης (Σχ. 6.5). Για τον υπολογισμό υλοποιήθηκε

τοποκεντρικό σύστημα αναφοράς δύο σημείων στάσης με ορισμό αυθαίρετων συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις. Μετρήθηκαν οριζόντιες αποστάσεις, οριζόντιες και κατακόρυφες γωνίες προς όλα τα σημεία ενδιαφέροντος και υπολογίστηκαν οι συντεταγμένες των σημείων αναφοράς μετρήσεων για κάθε αισθητήρα. Υπολογίστηκαν επίσης και οι συντεταγμένες επιλεγμένων σημείων κατά μήκος της σιδηροτροχιάς (έμπροσθεν και όπισθεν της δρεζίνας) για να ελεγχθεί η οριζοντίωση της πλατφόρμας και να υπολογιστούν τα ορίσματα μετασχηματισμού στο σύστημα αναφοράς του σώματος.



Σχήμα 6.5 Μετρήσεις lever-arms

6.2.2 Δεδομένα Πλοήγησης

Το πείραμα περιέλαβε καταγραφή δεδομένων πλοήγησης σε μετάβαση προς το Κιάτο με κίνηση χαμηλής/μέσης δυναμικής και επιστροφή προς την Αθήνα με κίνηση υψηλής δυναμικής. Σύμφωνα με τις σε πραγματικό χρόνο εκτιμήσεις των παραμέτρων κίνησης, κατά την διάρκεια του πειράματος δοκιμάστηκαν καταγραφές με διαφορετικές ιδιότητες ως προς την ταχύτητα κίνησης και τις συνθήκες λήψης του δορυφορικού σήματος. Ο στόχος ήταν ένα τουλάχιστον μέρος του συνόλου των δεδομένων να μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλο για την πειραματική πιστοποίηση της προτεινόμενης προσέγγισης (γεωμετρική ταυτοποίηση της πραγματικής τροχιάς ως προς την προκαθορισμένη πορεία). Μετά από διαδοχικές βελτιώσεις και με βάση κινηματικά κριτήρια που εξυπηρετούσαν την ανάλυση εκτίμησης κατάστασης για την συγκεκριμένη εφαρμογή, από τα συνολικά 200 και πλέον

χιλιόμετρα καταγραφής, η ανάλυση επικεντρώθηκε στο τελευταίο τμήμα της επιστροφή προς τον σταθμό Λιοσίων, συνολικού μήκους 40 περίπου χιλιομέτρων.

α. Ανάλυση Εκτίμησης Κατάστασης

Σε αυτό το τμήμα, η κίνηση της πλατφόρμας πλοήγησης παρουσιάζει μικρές δυναμικές διαφοροποιήσεις και χαρακτηρίζεται ως ήπια μη γραμμική. Σύμφωνα με τις σε πραγματικό χρόνο εκτιμώμενες ταχύτητες στην οριζοντιογραφία, πρόκειται για κίνηση υψηλής δυναμικής (τιμές οριζόντιας ταχύτητας στο εύρος 16-20m/s και $\approx 17.5m/s$ μέση ταχύτητα επί του εδάφους). Με βάση αυτά τα χαρακτηριστικά, τα κινηματικά δεδομένα από το συγκεκριμένο τμήμα εκτιμήθηκαν με την εφαρμογή αλγόριθμου EKF σε σχεδιασμό εκτίμησης κατάστασης εκ των υστέρων (εξομάλυνση εκτίμησης με χρήση του συνόλου των δεδομένων στις δυο κατευθύνσεις, αλγόριθμος RTS). Επιλέχθηκε η εφαρμογή αυστηρής σύζευξης αισθητήρων (tightly-coupled integration) και διάνυσμα κατάστασης 12 παραμέτρων. Για το σχεδιασμό του φίλτρου το στοχαστικό μοντέλο του διανύσματος κατάστασης διαμορφώθηκε με τυπικές αποκλίσεις αρχικοποίησης, όπως σημειώνονται στον Πίνακα 6.1

Παράμετροι κατάστασης	x/roll	y/pitch	z/yaw
Ευθυγράμμιση body frame (deg)	0.50	0.50	1.00
Μετατόπιση Επιτάχυνσης (m/s^2)	2.0×10^{-2}	2.0×10^{-2}	5.0×10^{-2}
Ολίσθηση Γυροσκοπίων (deg/s)	9.0×10^{-5}	9.0×10^{-5}	9.0×10^{-5}
Απόκλιση θέσης GPS (m)	5.0×10^{-2}	5.0×10^{-2}	5.0×10^{-2}

Πίνακας 6. 1 Στοχαστικό μοντέλο σχεδιασμού Kalman

Οι όροι ευθυγράμμισης άπτονται στη απόκλιση των υπολογισμένων συνημίτονων κατεύθυνσης που σχετίζουν το πλαίσιο αναφοράς της κίνησης (body frame) με το πλαίσιο αναφοράς των υπολογισμών πλοήγησης (ECEF). Οι τιμές (Πιν. 6.1) αναπαριστούν την καλύτερη δυνατή εκτίμηση της ικανότητας του αδρανειακού αισθητήρα της πλατφόρμας να υπολογίσει χονδρικά τις αρχικές τιμές περιστροφής. Οι ακρίβειες ως προς τους υπολογισμούς των roll/pitch είναι τυπικά μιας τάξης μεγέθους μεγαλύτερες από την ακρίβεια χονδρικής εκτίμησης yaw, καθώς εκτιμώνται απευθείας από τις παρατηρούμενες (ανιχνευμένες) συνιστώσες του διανύσματος βαρύτητας στα επιταχυνσιόμετρα x και y (άξονες body frame). Οι τιμές των μετατοπίσεων στις ενδείξεις επιτάχυνσης (acceleration biases) αποδίδουν τις αρχικές αβεβαιότητες ως προς την a priori γνώση κάποιου συστηματικού σφάλματος στα επιταχυνσιόμετρα. Ομοίως, οι ολισθήσεις (gyro drifts) στις ενδείξεις γωνιών περιστροφής αποδίδουν τις αρχικές αβεβαιότητες ως προς την a priori γνώση κάποιου συστηματικού σφάλματος στις μετρήσεις των γυροσκοπίων. Τέλος, οι τυπικές αποκλίσεις στους υπολογισμούς θέσης από τους δέκτες GNSS διαμορφώθηκαν σε τάξη μεγέθους 2σ από τις κατ' εικόνα ιδανικές σε λειτουργία κινηματικού εντοπισμού πραγματικού χρόνου (RTK).

Τα αποτελέσματα εξόδου (output) του EKF αλγόριθμου αξιολογήθηκαν ως προς την καταλληλότητά τους, σε σχέση με τις ιδιαιτερότητες της προσέγγισης για γεωμετρική ταυτοποίηση τροχιάς.

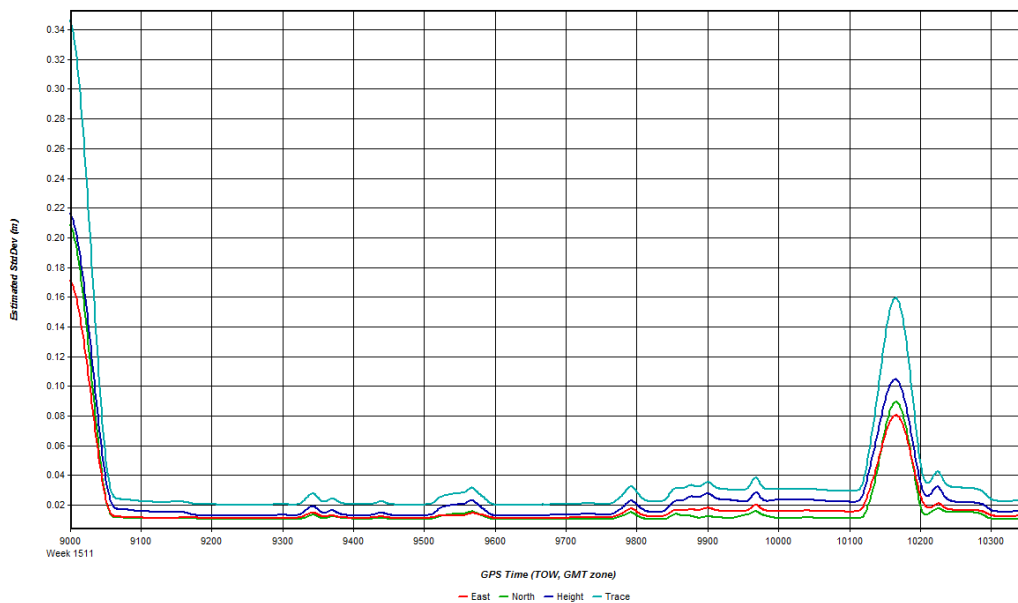
β. Οριζοντιογραφία

Στο Σχ.6.6 αποτυπώνονται σε οριζοντιογραφία οι εκτιμήσεις θέσης σε μέση κλίμακα 1:160000 περίπου (μεταξύ μεσημβρινών 23° 30' και 23° 40' Ανατολικά και παραλλήλων 38° 02' και 23° 06' Βόρεια).



Σχήμα 6.6 Αποτύπωση της τροχιάς κίνησης σε οριζοντιογραφία

Οι χρονοσειρές διακύμανσης των τυπικών αποκλίσεων θέσης (std dev σε m – κατακόρυφος άξονας) σε κάθε εποχή καταγραφής (GPS time σε s – οριζόντιος άξονας) απεικονίζονται στο Σχ. 6.7.



Σχήμα 6.7 Χρονοσειρές τυπικής απόκλισης παραμέτρων θέσης

Στο διάγραμμα του Σχ. 6.7 το κόκκινο ίχνος απεικονίζει την χρονοσειρά της τυπικής απόκλισης κατά East, το πράσινο ίχνος την χρονοσειρά της τυπικής απόκλισης κατά North και το μπλε την χρονοσειρά της τυπικής απόκλισης κατά την εκτίμηση του υψομέτρου. Με γαλάζιο χρώμα (ίχνος τροχιάς) αποτυπώνεται η χρονοσειρά της τυπικής απόκλισης θέσης στο χώρο, από την μετάδοση σφάλματος. Ο Πιν. 6.2 αποδίδει τα βασικά στατιστικά στοιχεία των ακριβειών κατά την εκτίμηση των παραμέτρων θέσης, όπως υπολογίστηκαν από τις παραπάνω χρονοσειρές.

Εκτίμηση ακρίβειας

rms

min

max

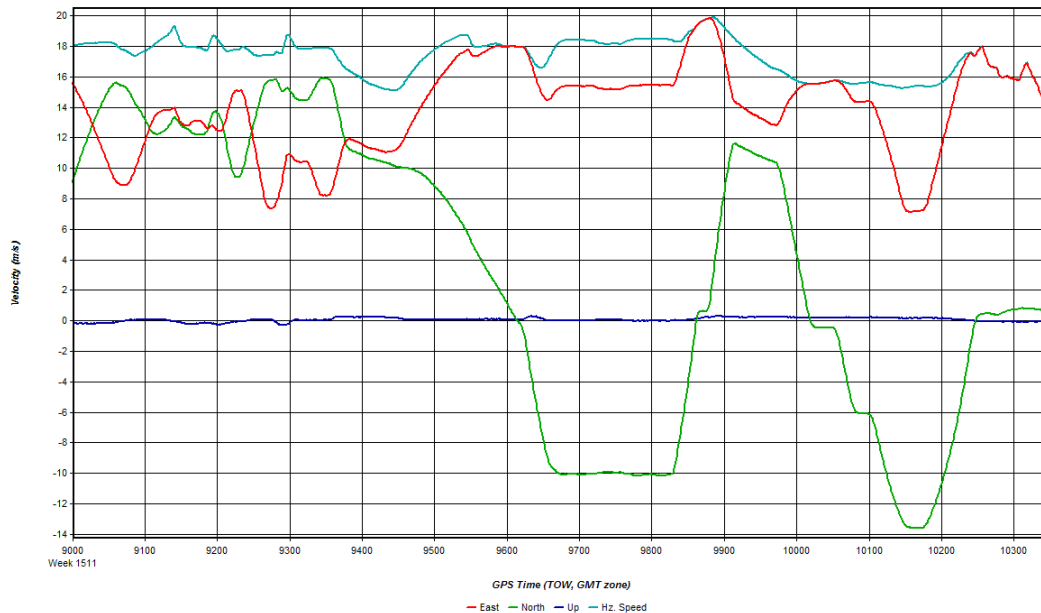
εντοπισμού θέσης
std dev(m)

East	2.99×10^{-2}	1.02×10^{-2}	1.72×10^{-2}
North	3.31×10^{-2}	1.05×10^{-2}	2.09×10^{-2}
Up	3.91×10^{-2}	1.30×10^{-2}	21.68×10^{-2}
Ίχνος τροχιάς	5.93×10^{-2}	2.02×10^{-2}	34.65×10^{-2}

Πίνακας 6.2 Ακρίβεια εκτίμησης εντοπισμού θέσης

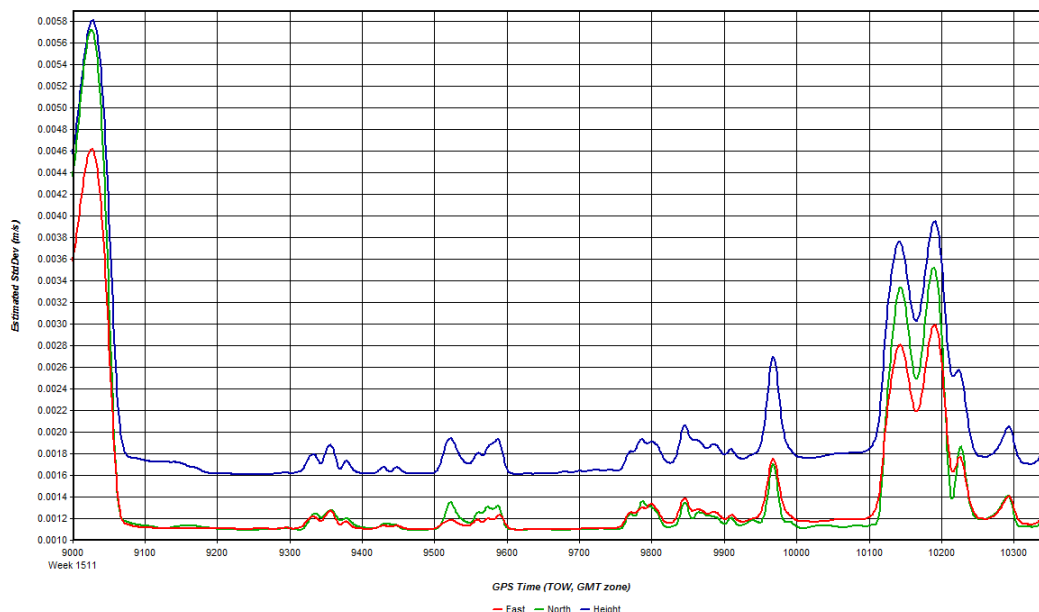
γ. Προφίλ ταχυτήτων

Στο Σχ. 6.8 αποδίδονται οι χρονοσειρές των εκτιμήσεων των συνιστωσών ταχύτητας κατά την κίνηση. Στο διάγραμμα το κόκκινο ίχνος απεικονίζει την χρονοσειρά της εκτίμησης ταχύτητας κατά East, το πράσινο ίχνος την χρονοσειρά της εκτίμησης ταχύτητας κατά North και το μπλε την χρονοσειρά της εκτίμησης ταχύτητας κατά Up. Με γαλάζιο χρώμα αποτυπώνεται η χρονοσειρά της εκτίμησης της οριζόντιας ταχύτητας (horizontal speed).



Σχήμα 6.8 Χρονοσειρές εκτιμήσεων συνιστωσών ταχύτητας

Το προφίλ των συνιστωσών ταχύτητας, καταδεικνύει κίνηση σχετικά υψηλής δυναμικής για κινηματική εφαρμογή σε σιδηρόδρομο (μέση οριζόντια ταχύτητα $\approx 65 \text{ km/h}$) ενώ καθώς, οι διακυμάνσεις στις τιμές των εκτιμήσεων δεν είναι έντονες, η κίνηση θεωρείται ήπια μη γραμμική. Με βάση αυτά, η ορθότητα της εφαρμογής EKF για τη δυναμική επεξεργασία των κινηματικών δεδομένων του πειράματος επιβεβαιώνεται. Η χρονοσειρά της συνιστώσας Up (Σχ. 6.8, μπλε ίχνος) καταδεικνύει κίνηση σε σχετικά ακλινές επίπεδο και ως εκ τούτου, μετά από ασφαλείς παραδοχές και χωρίς να επηρεάζεται η γενικότητα, η τροχιά της δρεζίνας θεωρείται ότι κείται σε οριζόντιο επίπεδο.



Σχήμα 6.9 Χρονοσειρές τυπικής απόκλισης συνιστωσών ταχύτητας

Εκτίμηση ακρίβειας συνιστωσών ταχύτητας std dev(m/s)	rms	min	max
East	1.54×10^{-3}	1.09×10^{-3}	4.62×10^{-3}
North	1.68×10^{-3}	1.09×10^{-3}	5.72×10^{-3}
Up	2.18×10^{-3}	1.61×10^{-3}	5.81×10^{-3}

Πίνακας 6.3 Ακρίβεια εκτίμησης συνιστωσών ταχύτητας

Το Σχ. 6.9 και ο Πιν. 6.3 αποδίδουν τις χρονοσειρές διακύμανσης των τυπικών αποκλίσεων συνιστωσών ταχύτητας (std dev σε m/s – κατακόρυφος άξονας) σε κάθε εποχή καταγραφής (GPS time σε s – οριζόντιος άξονας) και τα βασικά στατιστικά στοιχεία των ακριβειών κατά την εκτίμηση των συνιστωσών ταχύτητας, όπως υπολογίστηκαν από τις σχετικές χρονοσειρές, αντιστοίχως. Στο διάγραμμα του Σχ. 6.9 το κόκκινο ίχνος απεικονίζει την χρονοσειρά της τυπικής απόκλισης της συνιστώσας κατά East, το πράσινο ίχνος την χρονοσειρά της τυπικής απόκλισης της συνιστώσας κατά North και το μπλε την χρονοσειρά της τυπικής απόκλισης της συνιστώσας κατά Up.

Πρέπει ωστόσο να σημειωθεί, ότι η εφαρμογή γραμμικών δυναμικών μοντέλων στο σχεδιασμό του φίλτρου εκτίμησης για την συγκεκριμένη κίνηση δεν επρόκειτο να έδινε χειρότερα αποτελέσματα από τα όσα περιγράφονται εδώ. Το μέρος από το σύνολο των πειραματικών δεδομένων που επιλέχθηκε για ανάλυση μπορεί να προτυποποιηθεί ως προς την δυναμική της κίνησης και από γραμμικά δυναμικά μοντέλα, και είναι εμφανές στο διάγραμμα του Σχ. 6.8. Όμως, η ιδέα για πείραμα και συλλογή κινηματικών δεδομένων σε σιδηροδρομική γραμμή προέκυψε από τις ιδιαιτερότητες την προσέγγισης που αναπτύσσεται στη παρούσα διατριβή, και τις ανάγκες ως προς τα ειδικά χαρακτηριστικά που έθεσαν αυτές οι ιδιαιτερότητες και έπρεπε να διαθέτουν τα δεδομένα. Ως εκ τούτου και με βάση τα κινηματικά χαρακτηριστικά της εφαρμογής, θεωρήθηκε σωστό η ανάλυση να ακολουθήσει τον τυπικό δρόμο και την εφαρμογή μη γραμμικής δυναμικής επεξεργασίας των δεδομένων. Τα κινηματικά δεδομένα (οι καλύτερες δυνατές εκτιμήσεις τους στη πραγματικότητα)

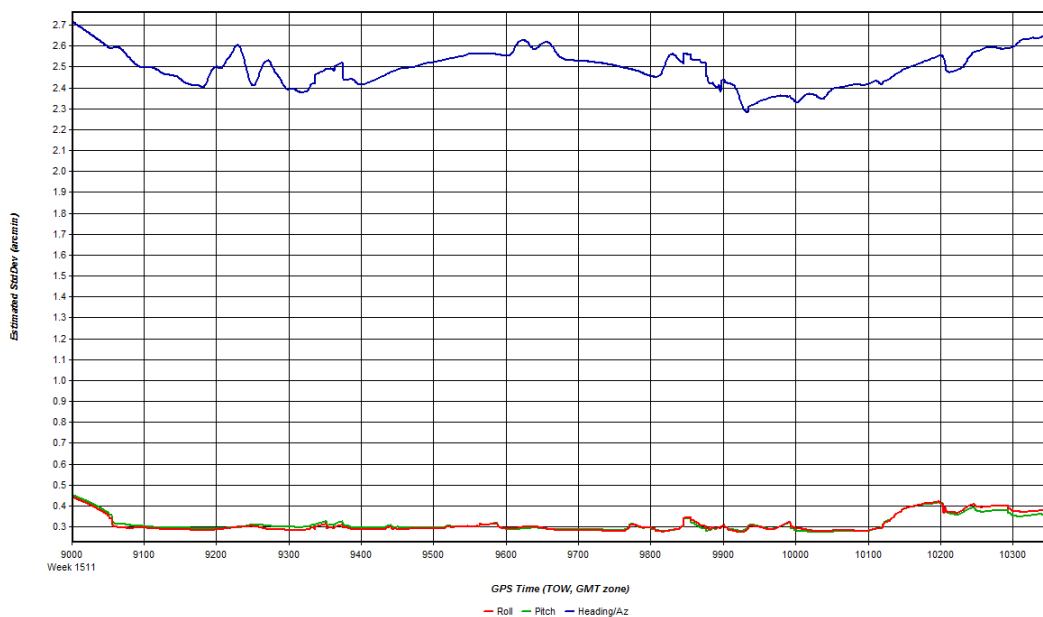
επρόκειτο να χρησιμοποιηθούν για την πιστοποίηση της προτεινόμενης προσέγγισης σε γενίκευση.

δ. Γωνιακές παρεκκλίσεις

Τελικά, η ιδέα για πείραμα σε σιδηροδρομική γραμμή προέκυψε από την ανάγκη ακριβούς καταγραφής της περιστροφικής κατά την κίνηση συμπεριφοράς ενός οχήματος (attitude, γωνιακές παρεκκλίσεις). Η πιστοποίηση της αξιοπιστίας αυτής της καταγραφής προκύπτει από τα κατασκευαστικά (as built) στοιχεία του σιδηρόδρομου.

Από το σύνολο των κινηματικών δεδομένων που προέκυψαν από την εκτέλεση του πειράματος, τα πιο σημαντικά για την αξιολόγηση της προτεινόμενης γεωμετρικής ταυτοποίησης της τροχιάς σε πραγματικό χρόνο, είναι ουσιαστικά, οι χρονοσειρές των εκτιμήσεων εκτροπής (heading, αζιμούθιο) και διατοιχισμού (roll, αξονική περιστροφή). Το προφίλ των εκτιμήσεων πρόνευσης (pitch, ανύψωση) επιβεβαιώνει ότι η απλούστευση με την παραδοχή κίνησης σε ακλινές επίπεδο, δεν επηρεάζει τους υπολογισμούς της μεθοδολογίας. Ο συνυπολογισμός των προνεύσεων, απλώς προσθέτει περισσότερες μεταβλητές και όχι επί της αρχής διαφορετική προσέγγιση. Ωστόσο, η εφαρμογή αισθητήρων πλοήγησης υψηλής ακρίβειας, η κατάλληλη προσαρμογή της δυναμικής της κίνησης κατά την καταγραφή και οι επιλογές κατά τον σχεδιασμό του αλγόριθμου εκτίμησης, συντέλεσαν μέγιστα στις αξιόπιστες εκτιμήσεις των σημαντικών παραμέτρων.

Το Σχ. 6.10 και ο Πιν. 6.4 αποδίδουν τις χρονοσειρές διακύμανσης των τυπικών αποκλίσεων των συνιστωσών των γωνιακών παρεκκλίσεων (std dev σε *arcmin* – κατακόρυφος άξονας) σε κάθε εποχή καταγραφής (GPS time σε *s* – οριζόντιος άξονας) και τα βασικά στατιστικά στοιχεία των ακριβειών κατά την εκτίμηση τους.



Σχήμα 6.10 Χρονοσειρές τυπικής απόκλισης συνιστωσών γωνιακής παρέκκλισης

Στο διάγραμμα του Σχ. 6.10 το κόκκινο ίχνος απεικονίζει την χρονοσειρά της τυπικής απόκλισης του διατοιχισμού, το πράσινο ίχνος την χρονοσειρά της τυπικής απόκλισης της πρόνευσης και το μπλε την χρονοσειρά της τυπικής απόκλισης της εκτροπής.

Εκτίμηση ακρίβειας
γωνιακής παρέκκλισης
std dev(*arcmin*)

	Rms	min	max
Heading	2.497	2.282	2.718
Roll	0.3155	0.2742	0.4424
Pitch	0.3165	0.2755	0.4515

Πίνακας 6.4 Ακρίβεια εκτίμησης γωνιακής παρέκκλισης

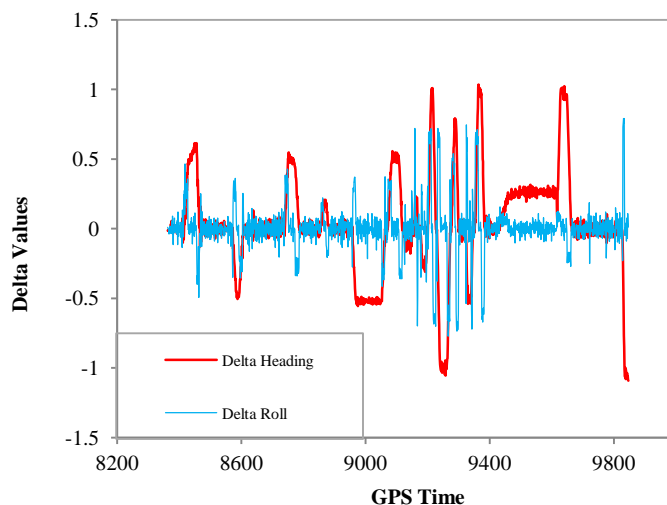
Κεφάλαιο 7^ο

Εκπαίδευση - Υλοποίηση Μηχανής Μάθησης

7.1 Δεδομένα Εκπαίδευσης

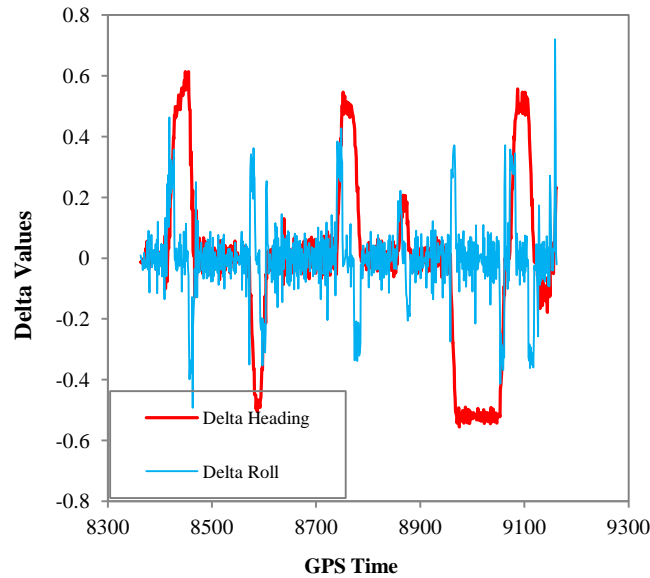
Η διαμόρφωση του κατάλληλου αρχείου εκπαίδευσης είναι η κρισιμότερη εργασία σε κάθε εφαρμογή επιβλεπόμενης μηχανικής μάθησης. Η γενικευμένη απόδοση του αλγόριθμου, πάνω σε δεδομένα άγνωστα σε σχέση με τα δεδομένα εκπαίδευσης, εξαρτάται στο μέγιστο βαθμό από αυτά. Τα δεδομένα εκπαίδευσης οφείλουν να περιγράφουν την εφαρμογή σε πληρότητα, καλύπτοντας τις περισσότερες λειτουργίες της, όμως είναι εξίσου απαραίτητο να μην προσαρμόζονται ασφυκτικά στη παραμικρή λεπτομέρεια· τότε το αποτέλεσμα είναι η κατάσταση *over-fitting* και ο αλγόριθμος αδυνατεί να αποδώσει ικανοποιητικές εξόδους σε δεδομένα εισόδου που δεν είναι μέρος του αρχείου των δεδομένων εκπαίδευσης. Το ζητούμενο είναι η γεωμετρική ταυτοποίηση της πραγματικής πορείας ενός οχήματος, συνεπώς τα αρχεία εκπαίδευσης προετοιμάστηκαν με βάση το αξίωμα ταξινόμησης από τα κινηματικά δεδομένα της (προκαθορισμένης) πορείας της δρεζίνας σε κίνηση υψηλής δυναμικής ήπιων μη γραμμικών χαρακτηριστικών.

Κατά τη διάρκεια των πειραμάτων παρατηρήθηκε μεγάλος βαθμός εγκάρσιας διαταραχής κατά μήκος του άξονα κίνησης, είτε λόγω προβληματικής κατασκευής της χάραξης, είτε λόγω του φτωχού συστήματος ανάρτησης του οχήματος καταγραφής. Το αποτέλεσμα αυτών των κραδασμών είναι επιπλέον θόρυβος στις μετρήσεις της περιστροφικής συμπεριφοράς. Για το λόγο αυτό, η εφαρμογή της μεθόδου έγινε σε συνολικό μήκος τροχιάς 40km κατά προσέγγιση, με δυο διακριτά σενάρια εκπαίδευσης. Για το πρώτο χρησιμοποιήθηκαν 7425 σημεία θέσεων και καταγραφή στα 5Hz, καλύπτοντας συνολικό μήκος εκπαίδευσης 25km. Το Σχ. 7.1 απεικονίζει τις χρονοσειρές Delta Heading και Delta Roll από σημείο σε σημείο, όπως εκτιμώνται από το φίλτρο Kalman.



Σχήμα 7. 1 Χρονοσειρές Εκπαίδευσης Μεγάλου Μήκους (25km)

Για να ελεγχθεί η γενικευμένη απόδοση του αλγόριθμου περαιτέρω, διαμορφώθηκε ένα δεύτερο σενάριο εκπαίδευσης μικρότερου μήκους τροχιάς. Σε αυτό χρησιμοποιήθηκαν 4000 σημεία της ίδιας τροχιάς, ίδιου ρυθμού καταγραφής, καλύπτοντας μήκος εκπαίδευσης 15km περίπου, και αφήνοντας με αυτό το τρόπο περισσότερο μήκος άγνωστης τροχιάς για τους ελέγχους γενίκευσης. Στο Σχ. 7.2 απεικονίζονται ουσιαστικά τα πρώτα 4000 από τα 7425 σημεία θέσεων εκπαίδευσης του πρώτου σεναρίου.



Σχήμα 7.2 Χρονοσειρές Εκπαίδευσης Μικρού Μήκους (15km)

7.2 Σχεδιασμός Μοντέλου Ταξινόμησης

Η επιλογή σχεδιασμού ενός μη γραμμικού LS-SVM μοντέλου για την συγκεκριμένη εφαρμογή βασίστηκε στο είδος και τον τύπο των δεδομένων εκπαίδευσης. Η ποιότητα εκτίμησης των γωνιακών ταχυτήτων του σώματος του οχήματος (κρίσιμες κινηματικές παράμετροι για την συγκεκριμένη διαδικασία εκπαίδευσης) επηρεάστηκε σημαντικά από μη συστηματικό και κατά βάση τυχαίο θόρυβο (λόγω της φτωχής απόδοσης των συστημάτων ανάρτησης). Αυτό είχε ως αποτέλεσμα την πρακτικά ασαφή αντιστοίχιση είσοδος - επιθυμητή έξοδος με βάση έναν ρητό μαθηματικό κανόνα. Μια τέτοια επιλογή για τον προσδιορισμό ορίων απόφασης θα επέτρεπε μεγαλύτερα περιθώρια λανθασμένης ταξινόμησης, όπως θα φανεί και στη πράξη. Ως εκ τούτου, ο σχεδιασμός ενός μη γραμμικού μοντέλου με εφαρμογή συνάρτησης πυρήνα *RBF* μπορεί να θεωρηθεί ασφαλέστερη επιλογή.

Η μεθοδολογία προτείνει ταξινόμηση των σημείων εκτίμησης θέσης σε τρεις κλάσεις γεωμετρικού προτύπου: *Κλάση 1*: ευθύγραμμα τμήματα· *Κλάση 2*: καμπύλες σύνθετου τύπου (καμπύλη συναρμογής)· *Κλάση 3*: απλά κυκλικά τόξα. Ωστόσο για κάθε σενάριο εκπαίδευσης, επιλέχθηκε η στρατηγική δυαδικής ταξινόμησης και συνεπώς η μεθοδολογία διαχωρισμού *one-against-all*.

Με δεδομένα εισόδου $x_k \in \mathbb{R}^2$ όπου $x_k = \{\Delta H_k, \Delta R_k\}_{k=1}^N$ (ΔH_k : Delta Heading και ΔR_k : Delta Roll μεταξύ θέσης $k-1$ και θέσης k) και δεδομένα εξόδου $y_k \in \mathbb{R}$ με επιθυμητές ετικέτες κλάσεων $y_k \in \{-1, +1\}$, ο αλγόριθμος αρχικά επιθέτει στα σημεία θέσης είτε επιθυμητή ετικέτα ευθύγραμμου τμήματος *Κλάση 1* $\{+1\}$, είτε επιθυμητή ετικέτα καμπύλης *Κλάσεις 2-3* $\{-1\}$. Στη συνέχεια, όλα τα σημεία που έχουν χαρακτηριστεί ως σημεία καμπύλης, ταξινομούνται είτε με επιθυμητές ετικέτες

σύνθετης καμπύλης *Κλάση 2* {+1}, είτε με επιθυμητές ετικέτες απλού κυκλικού τόξου *Κλάση 3* {-1}.

7.3 Υλοποίηση Μηχανής Μάθησης

Ο κώδικας που υλοποιεί την σύνθετη συναρτησιακή έκφραση των ορίων απόφασης ταξινόμησης, όπως κι ο κώδικας που υλοποιεί την συνάρτηση πυρήνα *RBF* έχουν γραφεί σε περιβάλλον MatLab.

Σύμφωνα με τον σχεδιασμό, ο κώδικας δημιουργεί τον πίνακα εισόδου οντοτήτων $X \in \mathbb{R}^{N \times 2}$ με τις τιμές των ΔH_k , ΔR_k σε στήλες, καθώς επίσης το διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ στο οποίο περιέχονται οι τιμές επιθυμητής ταξινόμησης. Με βάση την αναλυτική διαδικασία, το πρωταρχικό πρόβλημα διαμορφώνεται από υπορουτίνα του κώδικα καθώς σχηματίζεται η Λαγκρανσιανή και τίθενται οι συνθήκες βέλτιστου. Άλλη υπορουτίνα σχηματίζει και επιλύει το διάστασης N γραμμικό σύστημα *KKT* που προκύπτει υπολογίζοντας τις τιμές των διανυσμάτων υποστήριξης a_k και την παράμετρο b .

Η πρακτική εφαρμογή του *τεχνάσματος πυρήνα* (kernel trick) πραγματοποιείται με τον υπολογισμό των παραμέτρων ομαλοποίησης και εύρους επιρροής (γ, σ) από ρουτίνα υλοποίησης της *10-πτυχης διεπιβεβαίωσης* (10-fold cross-validation), επίσης σε περιβάλλον MatLab.

Καθώς επιλέχθηκε η στρατηγική δυαδικής ταξινόμησης με μεθοδολογία διαχωρισμού *one-against-all*, η διαδικασία εκπαίδευσης πρακτικά επαναλαμβάνεται, με αντίστοιχους πίνακες εισόδου και αντίστοιχα διανύσματα τιμών ταξινόμησης, για κάθε φάση διαδοχικά.

7.4 Μοντέλα Αναγνώρισης Γραμμικού Προτύπου Τροχιάς

Το προϊόν της διαδικασίας μάθησης είναι ο προσδιορισμός της μαθηματικής έκφρασης της συνάρτησης που υλοποιεί το μέγιστο περιθώριο διαχωρισμού μεταξύ των κλάσεων. Με βάση τις αντιστοιχίσεις εισόδου - επιθυμητής εξόδου κατά τον σχεδιασμό, η αναλυτική έκφραση της συνάρτησης απόφασης διαχωρισμού είναι διαφορετική για κάθε δυαδικό ταξινομητή. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό από τον σχεδιασμό του γραφήματος τους.

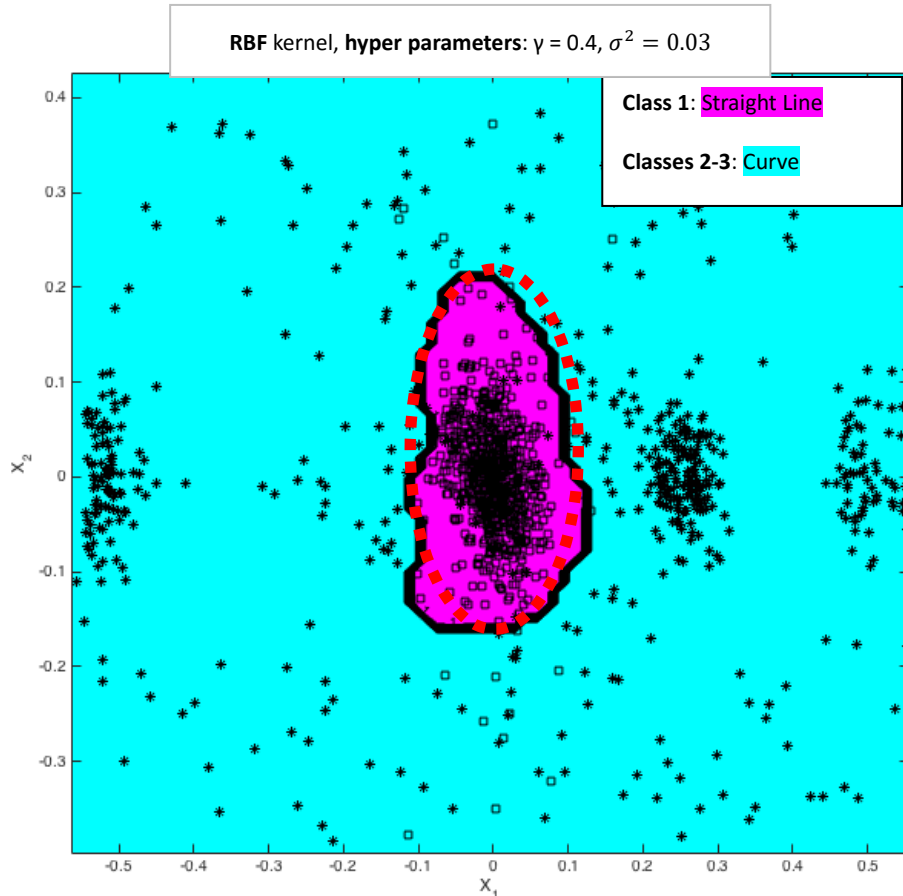
7.4.1. Όρια Απόφασης Ταξινόμησης από Εκπαίδευση Μεγάλου Μήκους Τροχιάς

Τα Σχ. 7.3 και 7.4 που ακολουθούν οπτικοποιούν γραφικά τα δυο μοντέλα, όπως προέκυψαν από το σενάριο εκπαίδευσης μεγάλου μήκους τροχιάς. Και στα δυο γραφήματα ο οριζόντιος άξονας οντοτήτων X_1 αντιπροσωπεύει την οντότητα διακύμανση της διαφοράς εκτροπής (αζιμούθιου) μεταξύ δύο διαδοχικών εκτιμήσεων κινηματικής κατάστασης και ο κάθετος άξονας οντοτήτων X_2 την οντότητα διακύμανση της διαφοράς διατοιχισμού.

Στο Σχ. 7.3 τα σημεία-τετράγωνο αντιπροσωπεύουν εκτιμήσεις θέσης που ανήκουν σε ευθύγραμμα τμήματα (class 1) και τα σημεία-αστέρι (classes 2-3) εκτιμήσεις θέσης που ανήκουν σε καμπύλες. Οι δύο κλειστές γραμμές που διαχωρίζουν τον κύριο όγκο των σημείων ευθείας από τα υπόλοιπα και εσωκλείουν τις περιοχές με χρώμα *magenta*, είναι το γράφημα της σύνθετης συναρτησιακής έκφρασης για τα όρια απόφασης ταξινόμησης *ευθεία/καμπύλη*. Προφανώς, η περιοχή χρώματος *κυανού* συγκεντρώνει σημεία κάποιας καμπύλης.

Μια παρατήρηση πάνω στο γράφημα είναι ότι, σχηματικά, αυτές οι δύο γραμμές θυμίζουν σε μεγάλο βαθμό ελλειπτικές γραμμές. Το ερώτημα εδώ, θα ήταν αν αυτές δύνανται να προσομοιωθούν με

κάποια ελλειπτική. Μια επιλογή θα ήταν να προσομοιωθούν μέσα από μια συναρτησιακή έκφραση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha < \beta$, όπως αυτή του γραφήματος της έλλειψης με κόκκινη διάστικτη γραμμή στο Σχ. 7.3. Μια άλλη, θα ήταν μέσα από κάποια σύνθετη συναρτησιακή έκφραση που θα περιελάμβανε ένα σύνολο από ελλείψεις και σαφή προσδιορισμό του πεδίου ορισμού της καθεμίας. Όμως, όποια από αυτές τις προσομοιώσεις ήταν το όριο απόφασης ταξινόμησης *ευθεία/καμπύλη* είναι προφανές, ότι τα περιθώρια λανθασμένης αναγνώρισης του γραμμικού προτύπου κατά την ταξινόμηση αυξάνονται.



Σχήμα 7.3 Συνάρτηση Ταξινόμησης: Ευθεία – Καμπύλη. Εκπαίδευση Μεγάλου Μήκους Τροχιάς

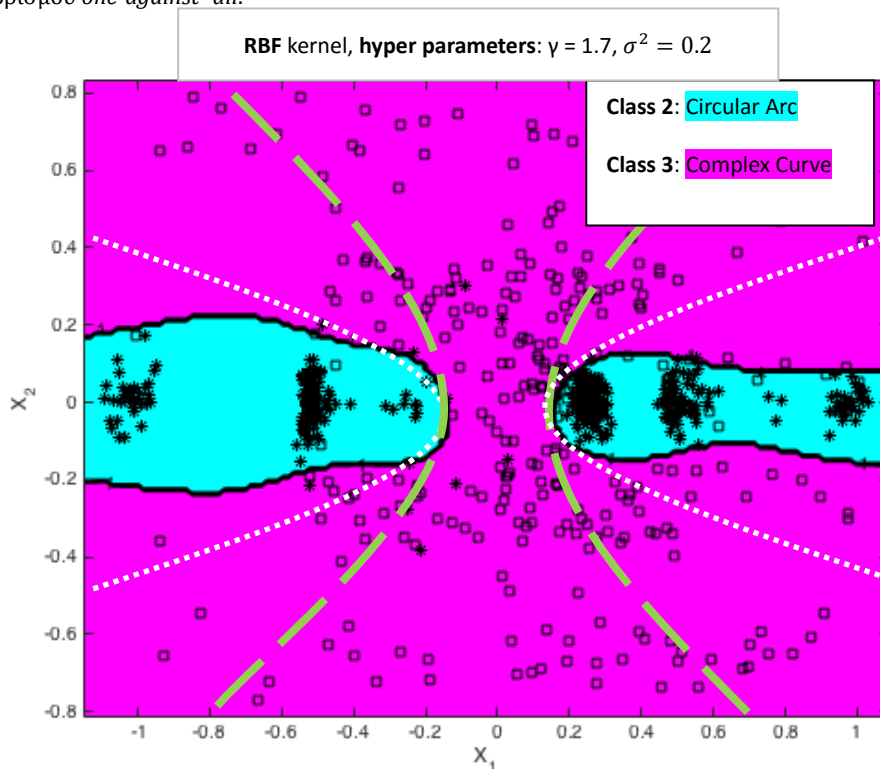
Ως εκ τούτου, ισχυροποιείται σημαντικά κι η επιλογή να εφαρμοστεί ένας μη γραμμικός αλγόριθμος μηχανικής μάθησης για τον υπολογισμό της συνάρτησης απόφασης, διότι τα επίπεδα της μη γραμμικότητας στις χρονοσειρές των εκτιμήσεων ΔH_k και ΔR_k δεν είναι εύκολο να αναγνωριστούν και (κατά επέκταση) να προσεγγιστούν με ρητά μαθηματικά· ο εξωγενής θόρυβος που υπεισέρχεται στις πρωτογενείς αδρανειακές μετρήσεις είναι μόνον τυχαίος.

Ανεξάρτητα όμως, ακόμα και αν η εφαρμογή επέτρεπε μεγαλύτερα περιθώρια λανθασμένης ταξινόμησης και ήταν εφικτό (ή/και υπολογιστικά φθηνότερο) να προσεγγιστεί η μη γραμμικότητα στον ορισμό της συνάρτησης απόφασης με παραμετρικές εξισώσεις κωνικών τομών (ή και με άλλα παρόμοια πρότυπα ήπιων μη γραμμικών χαρακτηριστικών), στατιστικά μια τέτοια επιλογή θα ήταν σχετικά αδύναμη σε σχέση με την προτεινόμενη επιλογή.

Το παραπάνω μοντέλο έχει διαμορφωθεί με τιμές ρυθμιστικών παραμέτρων $(\gamma, \sigma^2) = (0.4, 0.03)$. Η επιλογή τους (ο υπολογισμός τους, ουσιαστικά) είναι κρίσιμης σημασίας και εξετάζεται στη επόμενη

ενότητα. Όπως έχει αναφερθεί, με την εφαρμογή μιας Μηχανής Διανυσμάτων Υποστήριξης εξασφαλίζεται το μέγιστο περιθώριο διαχωρισμού μεταξύ των κλάσεων, ενισχύοντας έτσι την στατιστική ευρωστία της πρόβλεψης που επιτυγχάνει, με την επιλογή των ρυθμιστικών παραμέτρων να διαδραματίζει βασικό ρόλο. Αυτό είναι πράγματι φανερό στο Σχ. 7.3, ωστόσο, γίνεται ακόμα περισσότερο, στο Σχ. 7.4.

Όσα σημεία ταξινομήθηκαν από την παραπάνω διαδικασία εκπαίδευσης στην κλάση *καμπύλες* (classes 2-3) συγκεντρώνονται σε νέο πίνακα εισόδου οντοτήτων X , ο οποίος συνοδεύεται κι από το αντίστοιχο διάνυσμα επιθυμητών ετικετών ταξινόμησης y . Ο αλγόριθμος τρέχει εκ νέου την διαδικασία εκπαίδευσης ενός νέου μοντέλου, κατάλληλου για την ταξινόμηση *κυκλικό τόξο / καμπύλη σύνθετου παραμετρικού τύπου*. Οι τιμές των ρυθμιστικών παραμέτρων υπολογίζονται με $(\gamma, \sigma^2) = (1.7, 0.2)$. Με αυτόν τον αλυσιδωτό τρόπο υλοποιείται στην πράξη η μεθοδολογία διαχωρισμού *one-against-all*.



Σχήμα 7.4 Συνάρτηση Ταξινόμησης: Κυκλικό Τόξο - Καμπύλη Σύνθετου Τύπου. Εκπαίδευση Μεγάλου Μήκους Τροχιάς

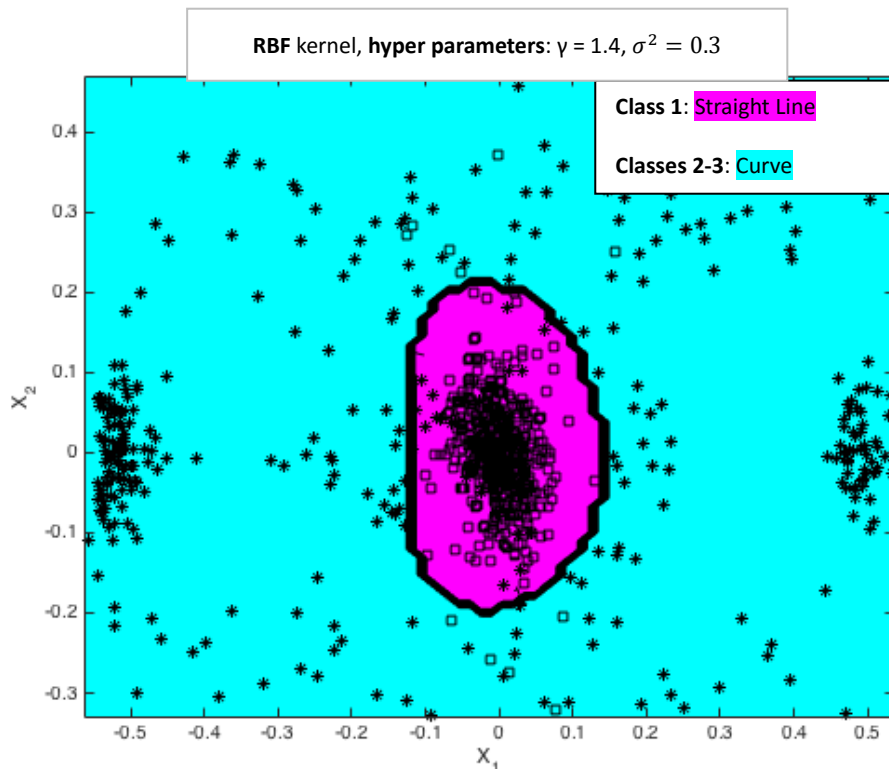
Αντιστοίχως, στο Σχ. 7.4 τα σημεία-αστέρι αντιπροσωπεύουν εκτιμήσεις θέσης που ανήκουν σε απλά κυκλικά τόξα (class 2) και τα σημεία-τετράγωνο εκτιμήσεις θέσης που ανήκουν σε καμπύλες σύνθετου παραμετρικού τύπου (class 3). Οι δύο γραμμές που διαχωρίζουν τα σημεία που δεσμεύονται να ανήκουν σε κυκλικό τόξο από τα υπόλοιπα και εσωκλείουν τις περιοχές με χρώμα *κυανό*, είναι το γράφημα της σύνθετης συναρτησιακής έκφρασης για τα όρια απόφασης ταξινόμησης *κυκλικό τόξο / καμπύλη σύνθετου παραμετρικού τύπου*. Η περιοχή χρώματος *magenta* συγκεντρώνει σημεία καμπύλης σύνθετης παραμετρικής εξίσωσης.

Από αυτό το γράφημα φαίνεται ότι, σχηματικά, οι γραμμές διαχωρισμού θυμίζουν και πάλι καμπύλες κωνικών τομών. Εδώ, μια επιλογή θα ήταν να προσομοιωθούν μέσα από μια συναρτησιακή έκφραση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπως αυτή του γραφήματος της υπερβολής με πράσινη διάστικτη γραμμή στο Σχ. 7.4. Μια άλλη, ενδεχομένως καλύτερη, θα ήταν να προσομοιωθούν μέσα από κάποια σύνθετη

συναρτησιακή έκφραση που θα περιελάμβανε τις δύο παραβολές με την λευκή διάστικτη γραμμή στο Σχ. 7.4 και παραμετρικού τύπου $y = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$, $y = \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2$ στα αντίστοιχα πεδία ορισμού. Και εδώ, όποια από αυτές τις προσομοιώσεις ήταν το όριο απόφασης ταξινόμησης, είναι πραγματικά προφανές, ότι το μοντέλο που θα την αντιπροσώπευε δεν θα ήταν σε θέση να αποδώσει επιτυχείς προβλέψεις κατηγοριοποίησης, για μια σημαντικής έκτασης περιοχή σημείων που ανήκουν σε καμπύλες σύνθετου τύπου.

7.4.2. Όρια Απόφασης Ταξινόμησης από Εκπαίδευση Μικρού Μήκους Τροχιάς

Κατά αναλογία, τα Σχ. 7.5 και 7.6 οπτικοποιούν γραφικά τα μοντέλα απόφασης ταξινόμησης, όπως προέκυψαν από το σενάριο εκπαίδευσης μικρού μήκους τροχιάς. Στο Σχ. 7.5 τα σημεία-τετράγωνο αντιπροσωπεύουν εκτιμήσεις θέσης που ανήκουν σε καμπύλες (class 1) και τα σημεία-αστέρι (class 2-3) εκτιμήσεις θέσης που ανήκουν σε ευθύγραμμα τμήματα.

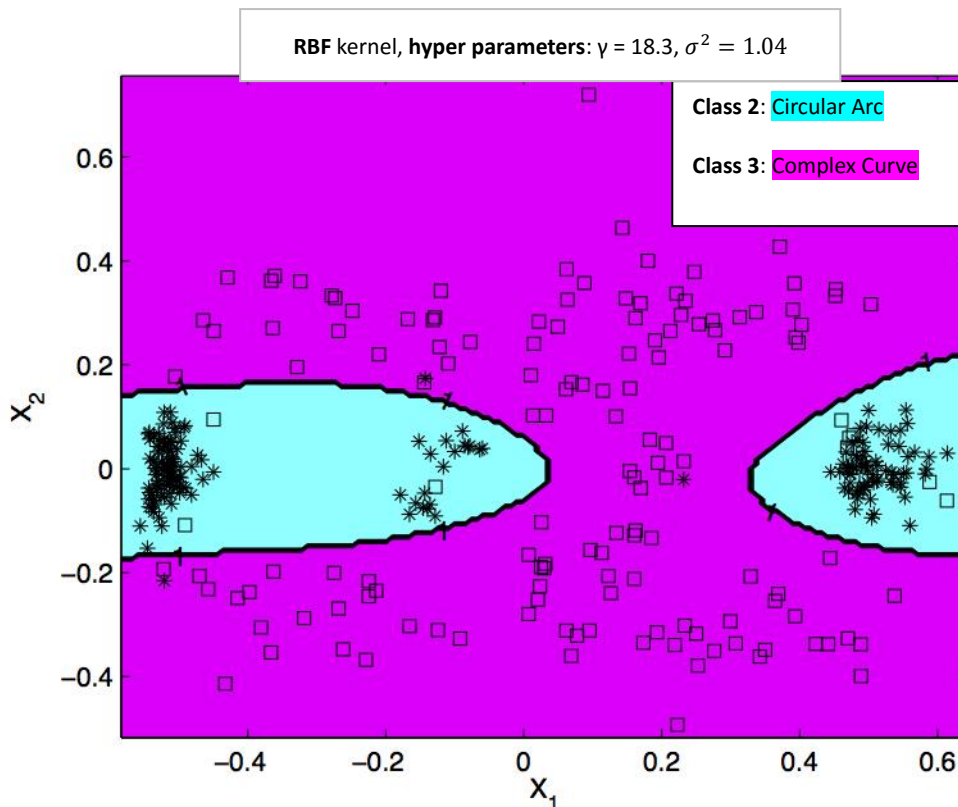


Σχήμα 7.5 Συνάρτηση Ταξινόμησης: Ευθεία – Καμπύλη. Εκπαίδευση Μικρού Μήκους Τροχιάς

Το μοντέλο διαμορφώνεται με τιμές ρυθμιστικών παραμέτρων $(\gamma, \sigma^2) = (1.4, 0.3)$.

Στο Σχ. 7.6 τα σημεία-αστέρι αντιπροσωπεύουν εκτιμήσεις θέσης που ανήκουν σε απλά κυκλικά τόξα (class 2) και τα σημεία-τετράγωνο εκτιμήσεις θέσης που ανήκουν σε καμπύλες σύνθετου παραμετρικού τύπου (class 3). Αυτό το μοντέλο διαμορφώνεται με τιμές ρυθμιστικών παραμέτρων $(\gamma, \sigma^2) = (18.3, 1.04)$.

Μια γενική παρατήρηση είναι ότι τα γραφήματά τους μοιάζουν με τα αντίστοιχα στα Σχ. 7.3 και 7.4. Για να ισχυροποιηθεί όμως τόσο η ορθότητα της επιλογής σχεδιασμού μιας μηχανής επιβλεπόμενης μηχανικής μάθησης για αυτήν την εφαρμογή, όσο και η καταλληλότητα του τεχνάσματος για τις δεσμεύσεις κατηγοριοποίησης με βάση το αξίωμα ταξινόμησης, αυτό θα έπρεπε να είναι αναμενόμενο.



Σχήμα 7.6 Συνάρτηση Ταξινόμησης: Κυκλικό Τόξο - Καμπύλη Σύνθετου Τύπου. Εκπαίδευση Μικρού Μήκους Τροχιάς

Μια πιο σημαντική παρατήρηση ωστόσο, εντοπίζεται στο Σχ. 7.5. Παρόλο που ο κύριος όγκος των σημείων- τετράγωνο εσωκλείονται από τα όρια απόφασης στην περιοχή της κλάσης 1: ευθεία, ένας αριθμός σημείων (που έχουν χαρακτηριστεί από τα δεδομένα εκπαίδευσης ως σημεία ευθειών) δεν υπολογίζονται στα σημεία που διαμορφώνουν τα διανύσματα υποστήριξης. Αν υπολογίζονταν, η συνάρτηση απόφασης ταξινόμησης θα είχε διαφορετική μορφή· θα ήταν εντονότερα μη γραμμική και το γράφημά της θα έμοιαζε περισσότερο στο γράφημα του μοντέλου που αποτυπώνεται στο Σχ. 7.3. Με δεδομένο ότι τα περισσότερα από αυτά τα σημεία περιλαμβάνονται στη κλάση ευθεία από το μοντέλο εκπαίδευσης μεγάλου μήκους τροχιάς, εδώ η απόρριψή τους οπτικοποιεί ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των Μηχανών Διανυσμάτων Υποστήριξης (αντιμετώπιση της κατάστασης *over-fitting*) έναντι άλλων δημοφιλών αλγορίθμων επιβλεπόμενης μηχανικής μάθησης (πχ. πολυστρωματικά τεχνητά νευρωνικά δίκτυα εμπρόσθιας τροφοδότησης).

Αυτό που έχει ενδιαφέρον πλέον, είναι να αποδειχτεί κατά πόσο ο σχηματισμός των δυο νέων μοντέλων μετά από εκπαίδευση μικρότερου μήκους τροχιάς είναι σε θέση να αποδώσει στα ίδια επίπεδα επιτυχίας πρόβλεψης ταξινόμησης, με αυτά που προέκυψαν μετά από εκπαίδευση μεγάλου μήκους τροχιάς.

7.4.3 Ρυθμιστικές Παράμετροι Συνάρτησης Απόφασης

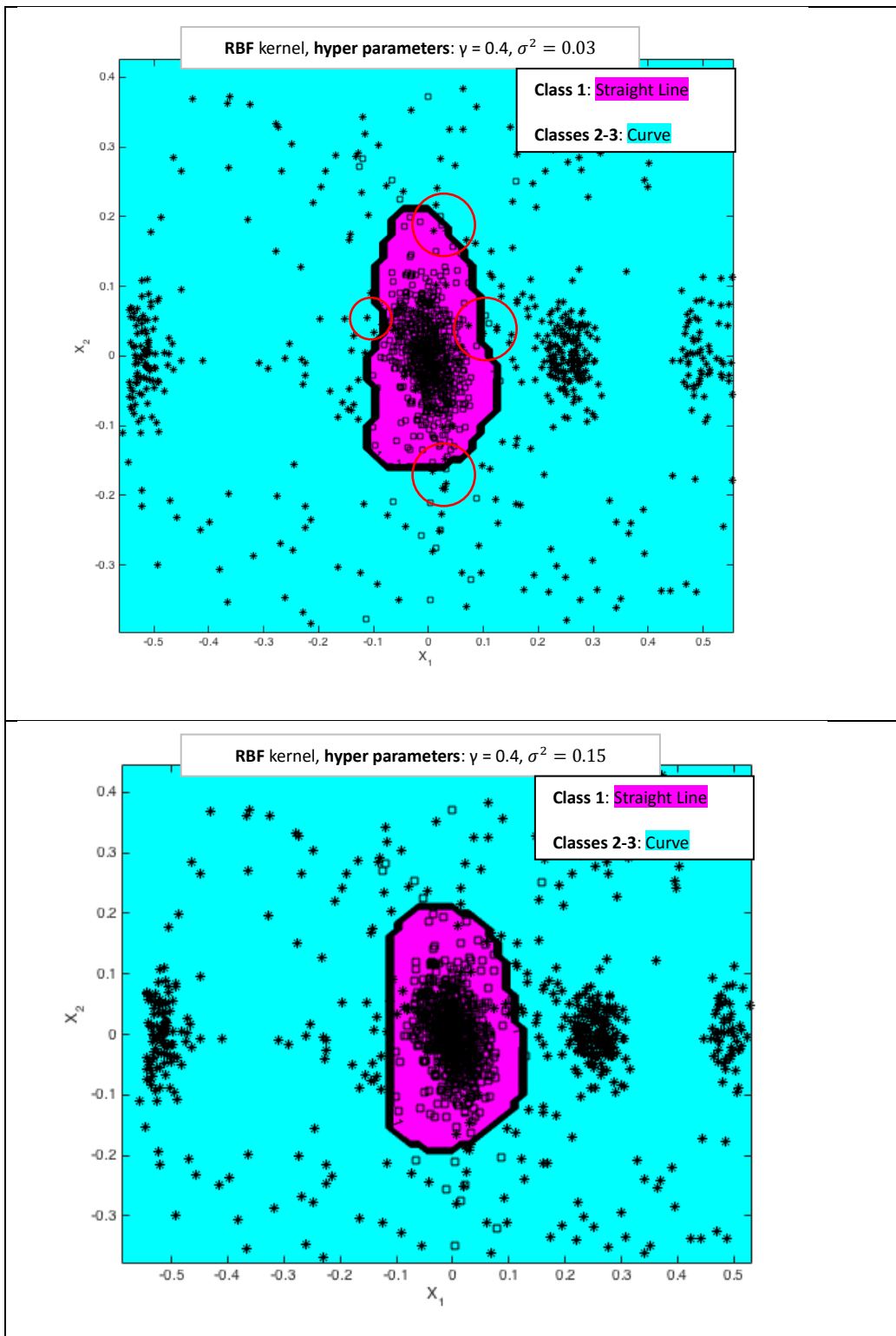
Πράγματι, η επιλογή των ρυθμιστικών παραμέτρων του μοντέλου είναι κρίσιμη για την απόδοσή μιας μηχανής αναγνώρισης προτύπου. Εφόσον γίνεται λόγος για μηχανές με εφαρμογή συνάρτησης πυρήνα *RBF*, πρόκειται για την ρύθμιση των παραμέτρων ομαλοποίησης και εύρους επιρροής (γ, σ^2). Η παράμετρος ομαλοποίησης γ ελέγχει τον βέλτιστο συμβιβασμό μεταξύ της ελαχιστοποίησης του

σφάλματος εκπαίδευσης και την μεγιστοποίηση του περιθωρίου διαχωρισμού, ενώ η παράμετρος εύρους επιρροής σ^2 ορίζει ρητά την συνάρτηση *RBF*. Διαφορετικές τιμές, προφανώς και δίνουν διαφορετικές συναρτήσεις ορίου απόφασης. Ωστόσο, αυτό που έχει σημασία να ελεγχθεί είναι σε ποιο βαθμό –με βάση τα παρεχόμενα δεδομένα εκπαίδευσης και την όποια διάραση υπάρχει σε σχέση με τη φύση της εφαρμογής ταξινόμησης- η επιλογή των ρυθμιστικών παραμέτρων συμβάλλει στην ελαχιστοποίηση της αναμονής σφάλματος ελέγχου (test error expectation).

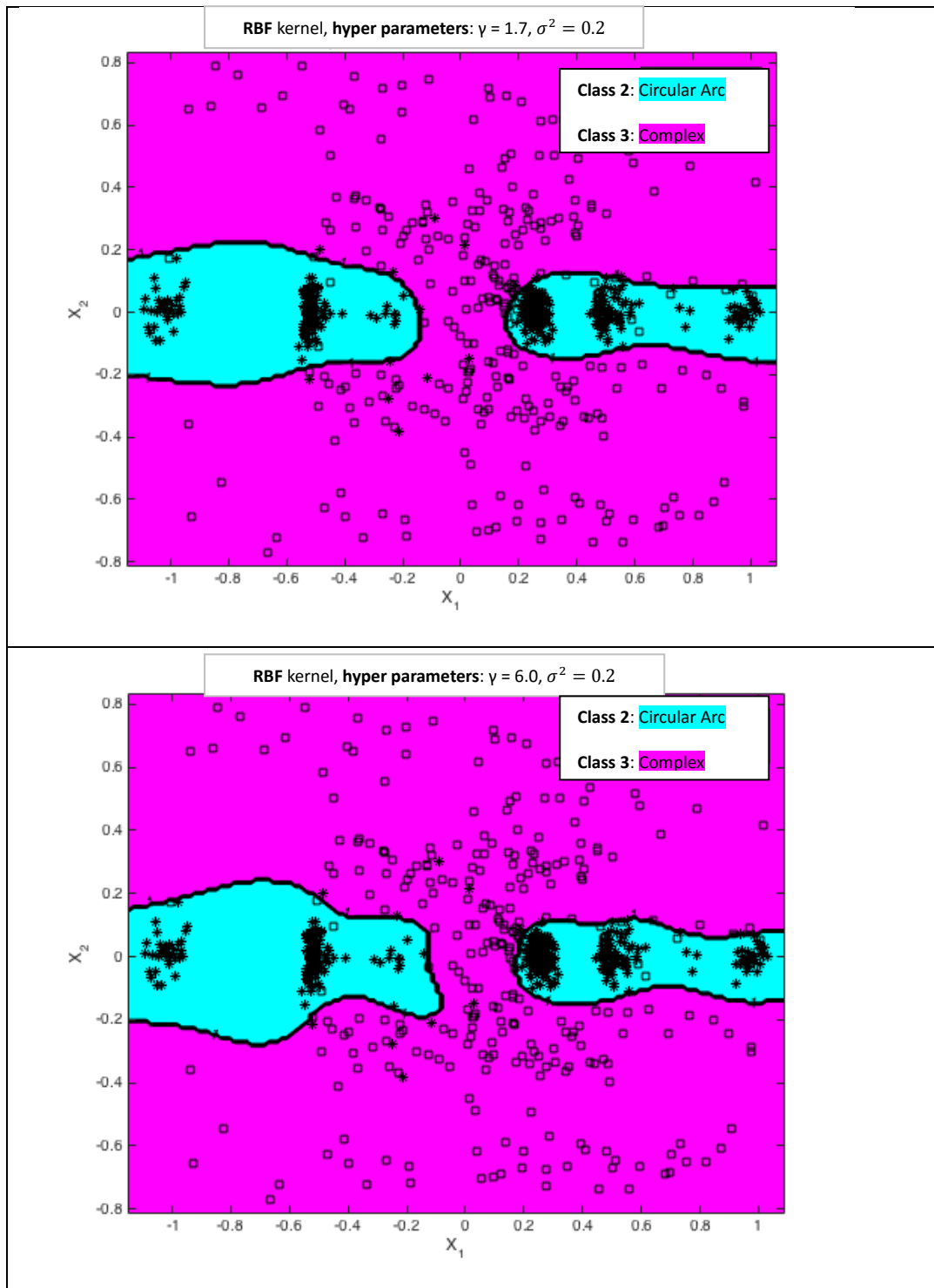
Οι τιμές των ρυθμιστικών παραμέτρων προκύπτουν (σε συνδυασμό) από την υλοποίηση *n*-πτυχης διεπιβεβαίωσης (cross-validation), και με βάση αυτές το μοντέλο απόφασης ταξινόμησης ελέγχεται με νέα δεδομένα ώστε να εκτιμηθεί το σφάλμα γενίκευσης. Ωστόσο, από τον υπολογισμό διαφορετικών τιμών για τις ρυθμιστικές παραμέτρους, η απόδοση γενίκευσης επηρεάζεται σε πρακτικό επίπεδο μόνον σχετικά.

Για κάποιες εφαρμογές ταξινόμησης με μηχανές LS-SVM η απόδοση γενίκευσης επηρεάζεται περισσότερο από διαφοροποιήσεις που επεμβαίνουν στις ιδιαιτερότητες της φύσης της ίδιας της εφαρμογής. Η επιτυχία της ταξινόμησης εκτίμησης κατάστασης θέσης σε γραμμικά γεωμετρικά πρότυπα συγκεκριμένα, βασίζεται σε μεγαλύτερο βαθμό στη κατάρτιση της κατάλληλης ομάδας δεδομένων εκπαίδευσης παρά από τη ρητή επιλογή του βέλτιστου ζεύγους (γ, σ^2) . Αυτό σημαίνει πως ακόμα και με διαφορετικά (ως προς τον μαθηματικό τους ορισμό) μοντέλα απόφασης η απόδοση γενίκευσης αναμένεται να κυμαίνεται στα ίδια επίπεδα. Δεν σημαίνει όμως ότι διαφορετικές επιλογές τιμών για το ζεύγος (γ, σ^2) αφήνει εντελώς ανεπηρέαστο τον σχηματισμό του μοντέλου.

Αλλαγές στις τιμές των ρυθμιστικών παραμέτρων για το μοντέλο ταξινόμησης μετά από εκπαίδευση μεγάλου μήκους, αποτυπώνονται γραφικά από νέες συναρτήσεις απόφασης στα σχήματα που ακολουθούν. Στο Σχ. 7.7 (πάνω), το διάγραμμα της συνάρτησης απόφασης ταξινόμησης ευθεία - καμπύλη, αποτυπώνει τα όρια ταξινόμησης που έχουν προκύψει από τον υπολογισμό του βέλτιστου ζεύγους τιμών $(\gamma, \sigma^2) = (0.4, 0.03)$ με βάση τα δεδομένα εκπαίδευσης (Σχ. 7.1) και ύστερα από υλοποίηση 10-πτυχης διεπιβεβαίωσης. Πρόκειται για το διάγραμμα του Σχ. 7.3. Επιπλέον, στο Σχ. 7.7 (κάτω), αποτυπώνεται η συνάρτηση απόφασης ταξινόμησης που έχει προκύψει από τα ίδια δεδομένα εκπαίδευσης, χωρίς ωστόσο να υλοποιηθεί 10-πτυχη διεπιβεβαίωση για τον υπολογισμό των ρυθμιστικών παραμέτρων. Ο ορισμός της νέας αυτής συνάρτησης προέκυψε διατηρώντας την ίδια τιμή για την παράμετρο ομαλοποίησης και αυξάνοντας την τιμή του εύρους επιρροής πυρήνα. Η βασική εντύπωση που προκύπτει μετά από οπτική σύγκριση είναι καταρχήν ότι τα όρια της νέας συνάρτησης απόφασης έχουν διευρυνθεί. Διατηρώντας την τιμή της παραμέτρου ομαλοποίησης, η νέα συνάρτηση απόφασης $[(\gamma, \sigma^2) = (0.4, 0.15)]$ θεωρητικά τείνει να διατηρήσει την μεγιστοποίηση του περιθωρίου διαχωρισμού σε σχέση με την ελαχιστοποίηση του σφάλματος εκπαίδευσης. Ωστόσο, η αύξηση στη τιμή της επιρροής πυρήνα επιφέρει κατά βάση μια χαλάρωση προσαρμογής για τα όρια απόφασης ταξινόμησης. Αυτή η διαφοροποίηση αποτυπώνεται στο διάγραμμα του Σχ.7.7 (πάνω) με κόκκινους κύκλους οι οποίοι σημειώνουν ενδεικτικά μερικά από τα δεδομένα εκπαίδευσης που ταξινομούνται σε άλλη κλάση ή μετατρέπονται σε διανύσματα υποστήριξης.



Σχήμα 7.7 Διαφοροποίηση της Συνάρτησης Απόφασης ως προς το Εύρος Επιρροής Πυρήνα σ^2 σε Ταξινόμησης Ευθείας – Καμπύλης από Εκπαίδευση Μεγάλου Μήκους Τροχιάς



Σχήμα 7.8 Διαφοροποίηση της Συνάρτησης Απόφασης ως προς την Παράμετρο Ομαλοποίησης γ σε Ταξινόμηση Κυκλικού Τόξου - Καμπύλης Σύνθετου Τύπου από Εκπαίδευση Μεγάλου Μήκους Τροχιάς

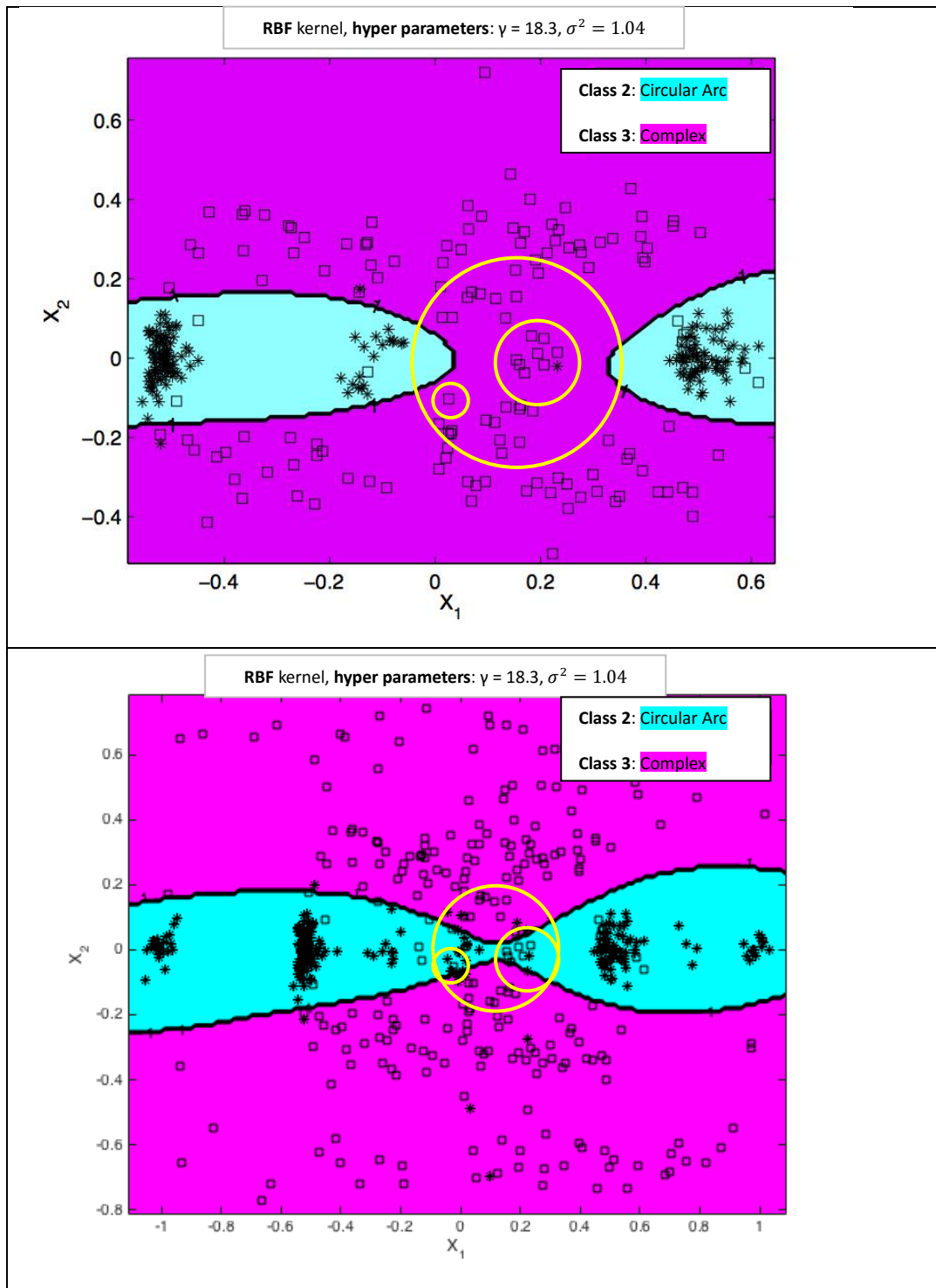
Αν ο ορισμός της συνάρτησης ταξινόμησης προκύψει αυξάνοντας την τιμή για την παράμετρο ομαλοποίησης και διατηρώντας την ίδια τιμή για το εύρος επιρροής πυρήνα αναμένεται χαλάρωση προσαρμογής στα όρια απόφασης μεταξύ των κλάσεων επίσης, όμως τότε, και με βάση τα δεδομένα εκπαίδευσης, το μοντέλο υιοθετεί μαθηματικές εκφράσεις έντονης μη γραμμικότητας ώστε ο βέλτιστος συμβιβασμός μεταξύ της ελαχιστοποίησης του σφάλματος εκπαίδευσης και της μεγιστοποίησης του περιθωρίου διαχωρισμού να διατηρηθεί. Αυτό γίνεται περισσότερο φανερό από το Σχ. 7.8. Το διάγραμμα του Σχ. 7.8 (πάνω) αποτυπώνει τα όρια απόφασης ταξινόμησης κυκλικού

τόξου – καμπύλης σύνθετου τύπου που έχουν προκύψει από τον υπολογισμό του βέλτιστου ζεύγους τιμών $(\gamma, \sigma^2) = (1.7, 0.2)$ με βάση τα δεδομένα εκπαίδευσης μεγάλου μήκους τροχιάς (Σχ. 7.1) και ύστερα από υλοποίηση 10-πτυχης διεπιβεβαίωσης. Εδώ αντιστοίχως πρόκειται για το διάγραμμα του Σχ. 7.4. Στο Σχ. 7.8 (κάτω), αποτυπώνεται η συνάρτηση απόφασης ταξινόμησης που έχει προκύψει από τα ίδια δεδομένα εκπαίδευσης, για την οποία ο ρητός ορισμός της προέκυψε αυξάνοντας την τιμή της παραμέτρου ομαλοποίησης και διατηρώντας την ίδια τιμή για το εύρος επιρροής πυρήνα $(\gamma, \sigma^2) = (6.0, 0.2)$. Η οπτική σύγκριση των δυο διαγραμμάτων δημιουργεί την εντύπωση ότι παρόλο που τα όρια συνάρτησης απόφασης του διαγράμματος του Σχ. 7.8 (κάτω) διευρύνουν τον χώρο ταξινόμησης σημείων εκτίμησης θέσης στη κλάση Κυκλικό Τόξο, στην ουσία δεν διαφοροποιούν την μηχανή ως προς την αναμενόμενη απόδοση γενίκευσης, καθώς δεν υπάρχουν δεδομένα που έχουν ταξινομηθεί σε άλλη κλάση και δεν υπάρχουν δεδομένα που έχουν γίνει διανύσματα υποστήριξης ή το αντίστροφο. Αυτό που βασικά διαφοροποιείται είναι ο βαθμός της μη γραμμικότητας που χαρακτηρίζει την συνάρτηση απόφασης. Αντιστρόφως, αν επιλέγονταν μείωση στην τιμή επιρροής πυρήνα (και όχι αύξηση της τιμής της όπως στο μοντέλο ταξινόμησης ευθείας – καμπύλης) θα δημιουργείτο τάση σύσφιξης της προσαρμογής των ορίων απόφασης με όριο υπέρ-προσαρμογής -για την συγκεκριμένη εφαρμογή και το μοντέλο που προκύπτει από τα παρεχόμενα δεδομένα εκπαίδευσης- την τιμή $\sigma^2 = 0.7$.

Το γενικό συμπέρασμα είναι ότι η αύξησης στη τιμή της παραμέτρου ομαλοποίησης γ τείνει προς διεύρυνση των ορίων απόφασης, δηλαδή χαλάρωση προσαρμογής στα δεδομένα εκπαίδευσης, η οποία ορίζεται από την επιλογή των σημείων που θα χαρακτηριστούν διανύσματα υποστήριξης (και που τελικά θα διαμορφώσουν το μοντέλο ταξινόμησης). Αντιστρόφως, η μείωση στην τιμή επιρροής πυρήνα σ^2 δημιουργεί τάση υπέρ-προσαρμογής.

7.4.4 Επιρροή Εκπαίδευσης στη Σημειακή Ταξινόμηση

Όπως αναφέρθηκε, η απόδοση γενίκευσης μιας μηχανής ταξινόμησης της εκτίμησης κατάστασης θέσης σε γραμμικά γεωμετρικά πρότυπα βασίζεται σε μεγαλύτερο βαθμό στη κατάρτιση της κατάλληλης ομάδας δεδομένων εκπαίδευσης παρά στην επιλογή του «αυστηρά» βέλτιστου ζεύγους τιμών των ρυθμιστικών παραμέτρων του μοντέλου. Ακόμα και μικρές διαφοροποιήσεις στα δεδομένα εκπαίδευσης προκαλούν σημαντικές αλλαγές στη διαμόρφωση των συναρτήσεων απόφασης ταξινόμησης, οι οποίες συνήθως έχουν σημαντικές επιπτώσεις στην απόδοση γενίκευσης της μηχανής. Σύμφωνα με το σταθερά θεμελιωμένο αξίωμα ταξινόμησης σημειακής οντότητας σε γραμμικά πρότυπα, η εκτίμηση της μεταβολής της καμπυλότητας της τροχιάς από σημείο θέσης σε σημείο θέσης προκύπτει από τις αντίστοιχες μεταβολές των εκτιμήσεων κατάστασης εκτροπής και διατοιχισμού. Η εκπαίδευση του μοντέλου πραγματοποιείται με την αξιοποίηση της *a priori* γνώσης της μορφής των δεδομένων εισόδου $x_k = \{\Delta H_k, \Delta R_k\}_{k=1}^N$, δηλαδή τις αναμενόμενες τιμές για τις μεταβολές εκτροπής και διατοιχισμού κατά την εξέλιξη της κίνησης και την αξιοποίηση της δυνατότητας ακριβούς προσδιορισμού του διανύσματος επιθυμητής εξόδου $y_k \in \{-1, +1\}$ από τα κατασκευαστικά στοιχεία της σιδηροτροχιάς. Με βάση αυτά έχει προκύψει και το διάγραμμα του Σχ. 7.9 (πάνω) το οποίο περιγράφει το μοντέλο απόφασης ταξινόμησης κυκλικού τόξου – καμπύλης σύνθετου από εκπαίδευση μεγάλου μήκους τροχιάς – πρόκειται για το διάγραμμα του Σχ. 7.6.



Σχήμα 7.9 Επιρροή της Διαδικασίας Εκπαίδευσης στον Υπολογισμό της Συνάρτησης Απόφασης για Σημειακή Ταξινόμηση σε Γραμμικά Πρότυπα

Ωστόσο, το διάγραμμα των ορίων απόφασης του Σχ. 7.9 (κάτω) έχει προκύψει μετά από εκπαίδευση κατά την οποία δεν τηρήθηκε αυτή τη μεθοδολογία σχολαστικά.

Το μεγάλο πλεονέκτημα της εφαρμογής της σημειακής ταξινόμησης σε γραμμικά πρότυπα σε σιδηροτροχιά είναι η βεβαιότητα της ύπαρξης του κατάλληλου διανύσματος επιθυμητής εξόδου. Αυτός άλλωστε είναι ο βασικός λόγος που επιλέχθηκαν κινηματικά δεδομένα προκαθορισμένης πορείας. Διότι με αυτό το τρόπο -ανεξάρτητα από το θόρυβο στις εκτιμήσεις των αδρανειακών μεγεθών λόγω κατασκευαστικών ατελειών ή φτωχής απόδοσης των συστημάτων ανάρτησης του

οχήματος καταγραφής- η κατάρτιση των δεδομένων εκπαίδευσης γίνεται ιδανικά. Καθώς η ταξινόμηση κατάστασης θέσης σε κλάση ευθεία ή καμπύλη βασίζεται κατά βάση στις τιμές της μεταβολής της κατάστασης εκτροπής, η κατασκευαστικά προκαθορισμένη σε ευθεία τροχιά δεν επιτρέπει σοβαρές διαταραχές στο μέγεθος της εκτροπής (θόρυβο στις μετρήσεις του αντίστοιχου γυροσκοπίου). Ούτως ή άλλως, η κίνηση σε υψηλές δυναμικές μειώνει την πιθανότητα θορύβου στις μετρήσεις των αδρανειακών αισθητήρων. Συνεπώς, ακόμα και αν η συγκεκριμένη μεθοδολογία εκπαίδευσης δεν τηρηθεί με ακρίβεια, τα όρια απόφασης ταξινόμησης σε ευθεία ή καμπύλη για την συγκεκριμένη εφαρμογή δεν θα διαφοροποιηθούν σε βαθμό που ίσως να επηρεαστεί η απόδοση γενίκευσης της μηχανής.

Κι αν για την συγκεκριμένη εφαρμογή και για το μοντέλο ταξινόμησης ευθεία – καμπύλη δεν φαίνεται να υπάρχει πολύς χώρος για κακή εκπαίδευση, για το μοντέλο ταξινόμησης κυκλικό τόξο – καμπύλη σύνθετου τύπου υπάρχει, στη πραγματικότητα. Το γυροσκόπιο της αδρανειακής μονάδας που είναι προσανατολισμένο παράλληλα στον άξονα της κίνησης επηρεάζεται τόσο από τις κατασκευαστικές ατελείς της σιδηροτροχιάς (ακόμα και από τις μικρές ατέλειες διατήρησης της επίκλισης της οδού σε ευθεία χάραξη) όσο και από την απόδοση του συστήματος ανάρτησης της δρεζίνας.

Για τα δεδομένα εκπαίδευσης του μοντέλου ταξινόμησης κυκλικό τόξο – καμπύλη σύνθετου τύπου αγνοήθηκε η πραγματική επιθυμητή έξοδο για κάποιες τιμές μεταβολής της κατάστασης διατοιχισμού και σε αυτά τα σημεία εκπαίδευσης δόθηκε η ετικέτα της κλάσης που (σύμφωνα με τη τιμή) θα ήταν λογικό να επικοληθεί. Για αυτά τα σημεία, ουσιαστικά δεν λαμβάνεται υπόψη ο τυχαίος θόρυβος στις μετρήσεις του γυροσκοπίου. Με τα νέα δεδομένα εκπαίδευσης, το μοντέλο προσδιορίζεται από νέα διανύσματα υποστήριξης στα οποία περιλαμβάνονται και σημεία που δεν είχαν χαρακτηριστεί ως τέτοια για τη συνάρτηση απόφασης του Σχ. 7.9 (πάνω). Τελικά, το μοντέλο ορίζεται μαθηματικά χρησιμοποιώντας το ίδιο ζεύγος τιμών $(\gamma, \sigma^2) = (18.3, 1.04)$ χωρίς να εφαρμοστεί η διαδικασία της διεπιβεβαίωσης, απλώς για να αναδειχτεί η επιρροή της διαδικασίας εκπαίδευσης στην εφαρμογή της σημειακής ταξινόμησης σε γραμμικά πρότυπα, ανεξάρτητα από την επιλογή του βέλτιστου ζεύγους για τις τιμές των ρυθμιστικών παραμέτρων. Το διάγραμμα των ορίων απόφασης του Σχ. 7.9 (κάτω) περιγράφει αυτό το μοντέλο.

Όπως είναι προφανές, οι μικρές αλλαγές στα σημεία εκπαίδευσης, οι οποίες εντοπίζονται κυρίως στις περιοχές που περιέχονται στους εξωτερικούς κίτρινους κύκλους στα διαγράμματα του Σχ. 7.9, έχουν προκαλέσει τον υπολογισμό μιας πολύ διαφορετικής συνάρτησης απόφασης, ακριβώς γιατί σημεία όπως αυτά που σημειώνονται με τους εσωτερικούς κίτρινους κύκλους χαρακτηρίζονται ως διανύσματα υποστήριξης με αποτέλεσμα τα όρια απόφασης ταξινόμησης να διευρύνονται σημαντικά για την κλάση κυκλικό τόξο. Αυτή η διεύρυνση δύναται να προκαλέσει αυξημένα ποσοστά λανθασμένης ταξινόμησης και πιθανόν φτωχή απόδοση γενίκευσης για το συγκεκριμένο μοντέλο.

Καθώς το πλεονέκτημα της (βέβαιης) ύπαρξης ακριβούς διανύσματος επιθυμητής εξόδου για την συγκεκριμένη εφαρμογή διατηρείται και για την διαδικασία ελέγχου του σφάλματος εκπαίδευσης, μια ολοκληρωμένη αντίληψη για το κατά πόσο η σημειακή ταξινόμηση σε γραμμικά πρότυπα μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε είδος κινηματικής εφαρμογής προκύπτει μόνον από εκτίμηση της απόδοσης γενίκευσης των μοντέλων απόφασης ταξινόμησης με δεδομένα ελέγχου που δεν ήταν μέρος των δεδομένων εκπαίδευσης.

Κεφάλαιο 8^ο

Αξιολόγηση Απόδοση Γενίκευσης

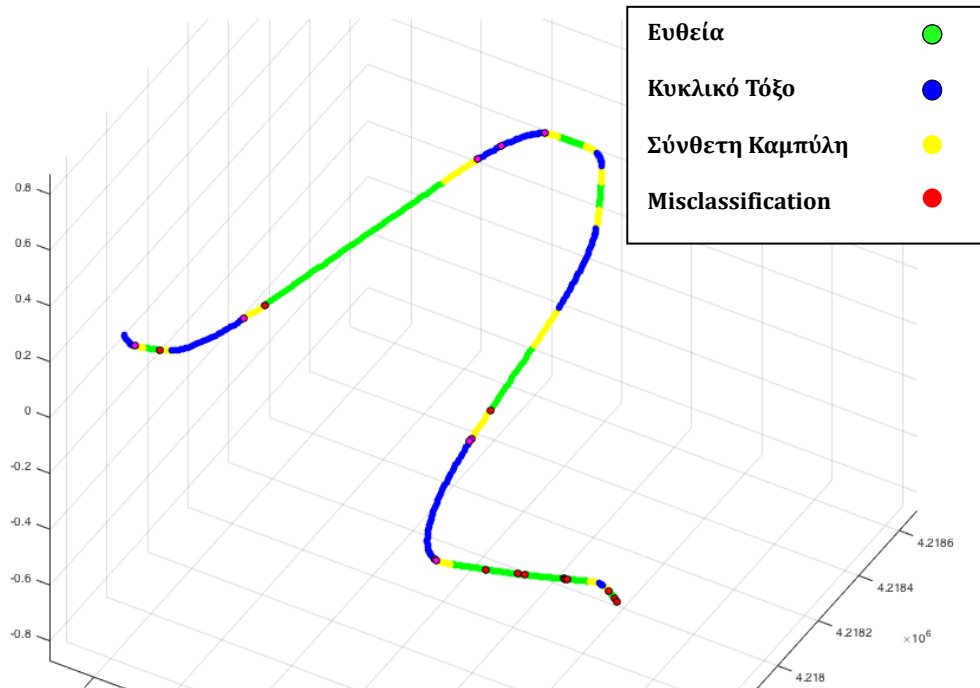
8.1 Έλεγχος Σφάλματος Ταξινόμησης

Εννοιολογικά, αντικείμενο κάθε μηχανής επιβλεπόμενης μάθησης, είναι η απόκτηση “γνώσης” των ιδιαιτεροτήτων της εφαρμογής για την οποία υλοποιούνται. Στη συνέχεια, και όσο η εφαρμογή εξελίσσεται, καλείται να λειτουργεί “ευφυώς” λαμβάνοντας αποφάσεις εντός συγκεκριμένων πιθανολογικών πλαισίων. Το ζήτημα ωστόσο, είναι πότε η εκπαίδευση μπορεί να θεωρηθεί επαρκής, ώστε η μηχανή να είναι σε θέση να λειτουργεί αποδίδοντας ικανοποιητικές προβλέψεις. Η απάντηση δεν είναι συγκεκριμένη καθώς δεν υπάρχει βασικός κανόνας για την διαμόρφωση των κατάλληλων δεδομένων εκπαίδευσης. Η προσέγγιση είναι κατά κάποιο τρόπο *ενορατική*. Ουσιαστικά, η υλοποίηση διαφορετικών σεναρίων εκπαίδευσης με βάση το μήκος τροχιάς εκπαίδευσης, γίνεται για εύρωστη εκτίμηση της απόδοσης γενίκευσης.

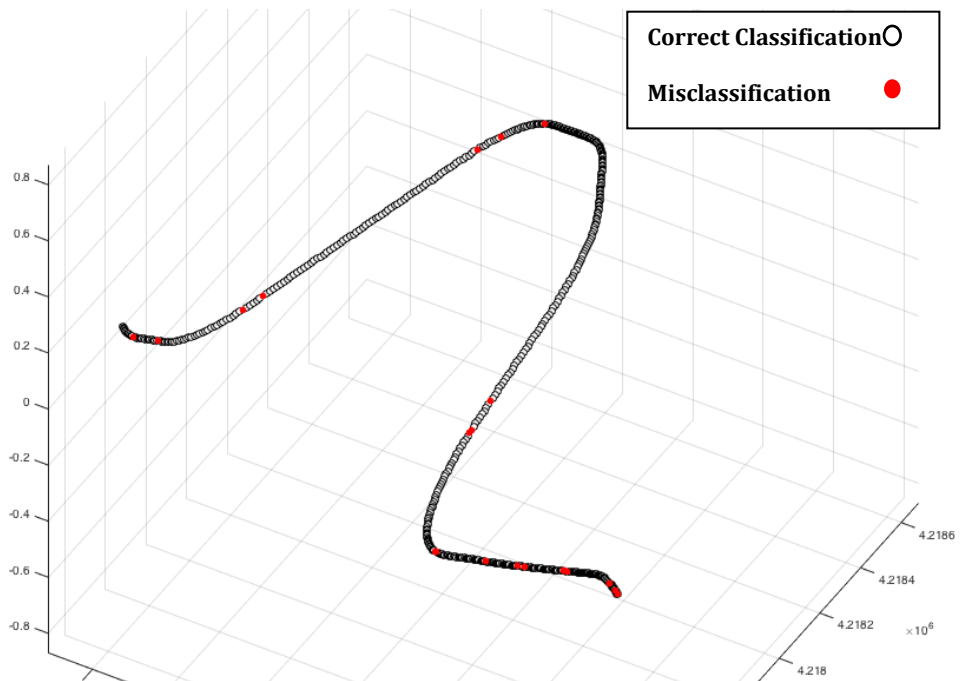
Ο βασικός τρόπος για να ελεγχθεί η επάρκεια εκπαίδευσης είναι η αξιολόγηση της απόδοσης της μηχανής πάνω σε δεδομένα εισόδου που δεν είναι μεταξύ των παραδειγμάτων εκπαίδευσης. Η μηχανή εκπαιδεύεται κατά μήκος τροχιάς που θεωρείται επαρκής για την απόκτηση της απαραίτητης “γνώσης” και στη εξέλιξη της κίνησης επιθέτει τις ετικέτες των κλάσεων ταξινόμησης στις διαδοχικές εκτιμήσεις σημείου θέσης του οχήματος για το υπόλοιπο της τροχιάς ή έως ότου τερματιστεί η εφαρμογή. Τα αθέατα (unseen) δεδομένα εισόδου στο μήκος του υπόλοιπου της τροχιάς σε συνδυασμό με το αντίστοιχο διάνυσμα επιθυμητής εξόδου αποτελούν τα δεδομένα ελέγχου του σφάλματος ταξινόμησης. Οι έξοδοι της μηχανής, δηλαδή οι προβλέψεις ταξινόμησης σε άγνωστη διαδρομή, συγκρίνονται με τις αντίστοιχες επιθυμητές εξόδους ώστε να εκτιμηθεί συνολικά το σφάλμα ταξινόμησης. Το μέγεθος του συνολικού σφάλματος ταξινόμησης είναι μια εκτίμηση της απόδοσης γενίκευσης της μηχανής.

8.1.1 Έλεγχος Απόδοση Μηχανής Εκπαίδευσης Μεγάλου Μήκους Τροχιάς

Τα διαθέσιμα δεδομένα εκπαίδευσης και ελέγχου μαζί, καλύπτουν συνολικό μήκος τροχιάς καθοδήγησης περίπου 40km. Για την εκπαίδευση των μοντέλων ταξινόμησης της Μηχανής Μεγάλου Μήκους Εκπαίδευσης (MMME) χρησιμοποιούνται τα πρώτα 25km περίπου και για τον έλεγχο του σφάλματος ταξινόμησης χρησιμοποιούνται τα υπόλοιπα 15km, σε καταγραφή 1Hz. Αυτά αποτυπώνονται στα Σχ. 8.1 και Σχ. 8.2 όπου οπτικοποιούνται οι ταξινομήσεις 570 σημείων-εκτίμησης θέσης (ΕΓΣΑ 87) άγνωστης διαδρομής στις τρεις γραμμικές γεωμετρικές κλάσεις. Στο Σχ. 8.1, τα πράσινα στίγματα αντιπροσωπεύουν σημεία που έχουν αναγνωρισθεί ως σημεία ευθύγραμμου τμήματος· τα κίτρινα στίγματα, σημεία που έχουν ταξινομηθεί με ετικέτα σύνθετης καμπύλης· και τα μπλε στίγματα, σημεία που έχουν ταξινομηθεί με ετικέτα απλού κυκλικού τόξου· τα κόκκινα στίγματα (Σχ. 8.1 και Σχ. 8.2) απεικονίζουν σημεία που έχουν ταξινομηθεί λανθασμένα.



Σχήμα 8.1 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου Άγνωστης Τροχιάς 15km σε 3 Κλάσεις Μηχανής Μεγάλου Μήκους Εκπαίδευσης (MMME)



Σχήμα 8.2 Σημεία Άγνωστης Τροχιάς 15km Λανθασμένης Ταξινόμησης Μηχανής Μεγάλου Μήκους Εκπαίδευσης (MMME)

Τα αναλυτικά αποτελέσματα του ελέγχου σφάλματος ταξινόμησης της MMME συγκεντρώνονται στον Πιν. 8.1.

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης Μεγάλου Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	248	126	174
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	13	8	1
Επιτυχία %	95%	94%	≈100%

Πίνακας 8. 1 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ

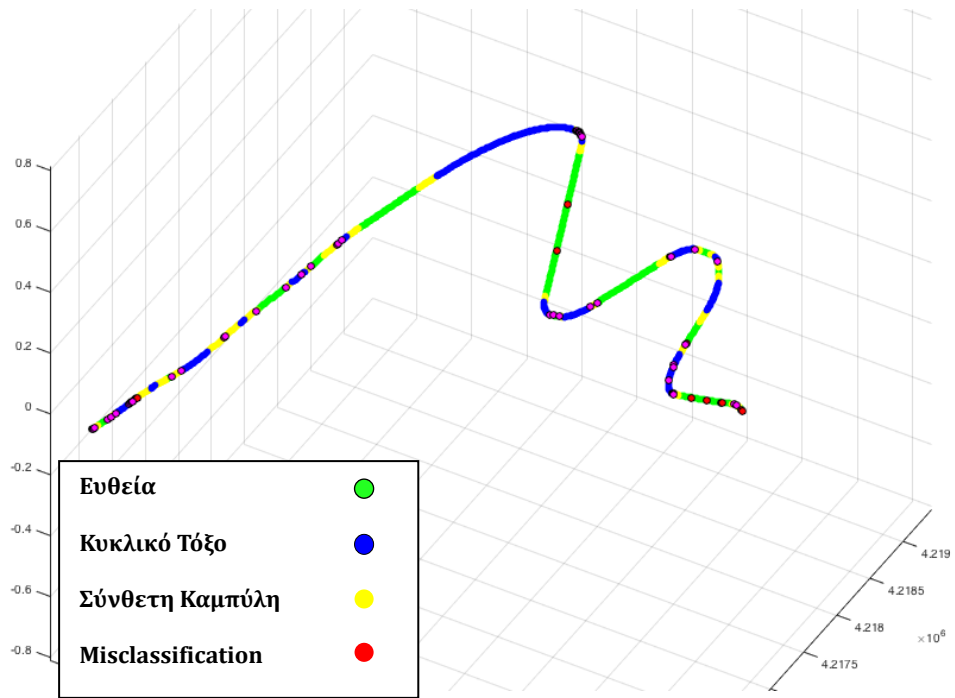
Από τα 570 διαδοχικά σημεία ελέγχου (Σχ. 8.2), μόνον 22 ταξινομήθηκαν λανθασμένα από τη μακράς εκπαίδευσης μηχανή αναγνώρισης του γραμμικού προτύπου της τροχιάς, προσφέροντας συνολική επιτυχία ταξινόμηση σε επίπεδο 96%.

Για την ΜΜΜΕ εντοπίζονται 9 σημεία ταξινομημένα λανθασμένα, ενώ κείνται μεταξύ προηγούμενων και επόμενων διαδοχικών σημείων με επιτυχείς ταξινομήσεις. Από αυτά, τα 8 είναι σημεία ευθύγραμμου τμήματος και 1 σημείο κυκλικού τόξου. Το γεγονός ότι κείνται μεταξύ προηγούμενων και επόμενων διαδοχικών σημείων με επιτυχείς ταξινομήσεις, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η αυξημένη πιθανότητα λανθασμένης ταξινόμησης για αυτά τα σημεία θεωρητικά προέρχεται από τη συσσώρευση περισσότερου τυχαίου θορύβου στις μετρήσεις των γυροσκοπίων της αδρανειακής μονάδας (κατά πάσα πιθανότητα λόγω φτωχής απόσβεσης βίαιων κραδασμών στις αναρτήσεις του οχήματος). Σε τέτοια περίπτωση, ο υπολογισμός της εκτίμησης κατάστασης περιστροφής του οχήματος επηρεάζεται σε βαθμό που υπερβαίνει τα όρια γενίκευσης της μηχανής αναγνώρισης του γραμμικού προτύπου της τροχιάς, άρα τα άστοχα αποτελέσματα ταξινόμησης για αυτά τα σημεία δικαιολογούνται.

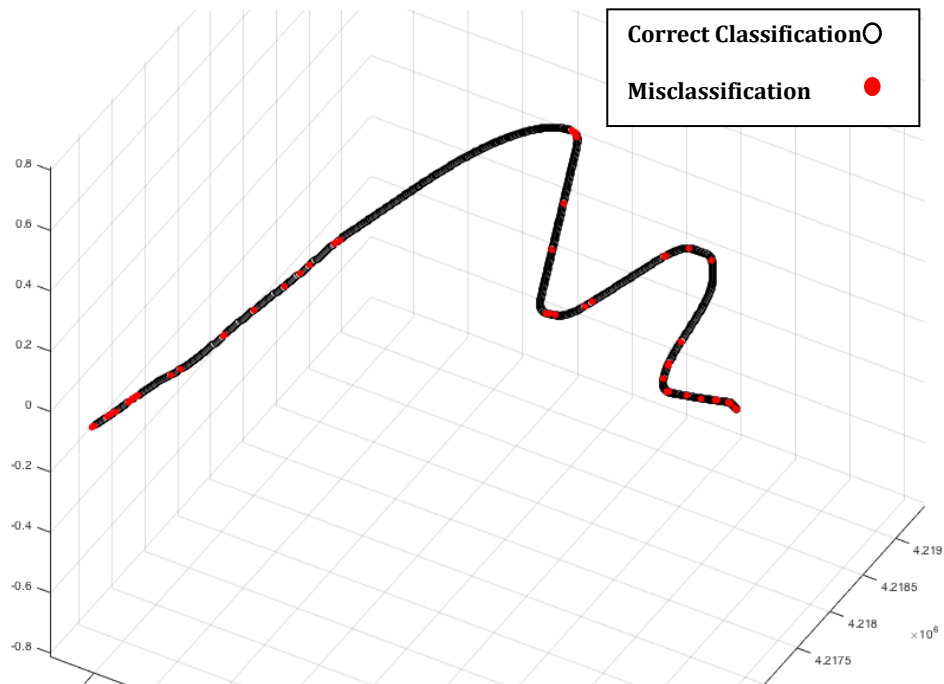
8.1.2 Έλεγχος Απόδοσης Μηχανής Εκπαίδευσης μικρού Μήκους Τροχιάς

Αντιστοίχως, καθώς τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για εκπαίδευση μικρού μήκους τροχιάς αποτελούνται από τα πρώτα 15km της πορείας καθοδήγησης του οχήματος, για τον έλεγχο της απόδοσης των μοντέλων της Μηχανής μικρού Μήκους Εκπαίδευσης (ΜμΜΕ) χρησιμοποιούνται τα υπόλοιπα 25km. Αυτά αποτυπώνονται στα Σχ. 8.3 και Σχ. 8.4 με την απόδοση της ταξινόμησης 1256 σημείων-εκτίμησης θέσης άγνωστης διαδρομής.

Από τα 1256 διαδοχικά σημεία ελέγχου αναγνώρισης του γραμμικού προτύπου της τροχιάς με τη ΜμΜΕ (Σχ. 8.3 και Σχ. 8.4), μόνον τα 67 ταξινομήθηκαν λανθασμένα, προσφέροντας συνολική επιτυχία ταξινόμηση σε επίπεδο 95%. Συνεπώς, από την ποσοστιαία επιτυχία σωστής ταξινόμησης και των δυο μηχανών, υπάρχει η εκτίμηση ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος πράγματι παρουσιάζει πολύ υψηλά επίπεδα γενικευμένης απόδοσης κατά την εφαρμογή του σε άγνωστη διαδρομή.



Σχήμα 8.3 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου Άγνωστης Τροχιάς 25km σε 3 Κλάσεις Μηχανής μικρού Μήκους Εκπαίδευσης (ΜμΜΕ)



Σχήμα 8.4 Σημεία Άγνωστης Τροχιάς 25km Λανθασμένης Ταξινόμησης Μηχανής μικρού Μήκους Εκπαίδευσης (ΜμΜΕ)

Τα αναλυτικά αποτελέσματα του ελέγχου σφάλματος ταξινόμησης της ΜμΜΕ συγκεντρώνονται στον Πιν. 8.1.

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης μικρού Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	511	262	416
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	16	29	22
Επιτυχία %	97%	90%	95%

Πίνακας 8.2 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ

Από τις κατά αντιστοιχία γενικές συγκρίσεις μεταξύ των Πιν. 8.1 και Πιν. 8.2, σημειώνεται ότι για την ΜμΜΕ παρατηρείται μικρή βελτίωση της απόδοσης ταξινόμησης σημείων-εκτίμησης θέσης σε ευθύγραμμα τμήματα, και μικρή μείωση της απόδοσης ταξινόμησης στις καμπύλες συναρμογής και τα κυκλικά τόξα, σε σχέση με την ΜΜΜΕ. Βασική εξήγηση δεν είναι ορατή, ωστόσο, μερικά στοιχεία που δύνανται να αποδώσουν χρήσιμα συμπεράσματα, εμφανίζονται με τις κατανομές των λανθασμένων ταξινομήσεων, οι οποίες δεν αντιστοιχούν σε σημεία-εκτίμησης θέσης κοντά στα υλοποιημένα σημεία αλλαγής της γεωμετρίας χάραξης της σιδηροδρομικής γραμμής.

Επιπλέον, για την ΜμΜΕ εντοπίζονται 22 παρόμοιες καταστάσεις, εκ των οποίων 9 θα έπρεπε να ταξινομηθούν ως σημεία ευθείας, 4 ως σημεία καμπύλης συναρμογής και 9 ως σημεία κυκλικού τόξου. Στην σύγκριση των ίδιων σημείων ελέγχου ευθείας, μόνον το 1 έχει διορθωθεί ως ταξινομημένο σημείο ευθείας από την ΜΜΜΕ. Η ΜΜΜΕ ταξινομεί σωστά και το μόνο σημείο ελέγχου κυκλικού τόξου που ταξινομήθηκε λανθασμένα από την ΜμΜΕ, όπως επίσης και τα 4 σημεία ελέγχου κάποιας καμπύλης συναρμογής. Με τα παραπάνω ως δεδομένο, η αστοχία ταξινόμησης για σημεία που δεν αντιστοιχούν σε σημεία αλλαγής της γεωμετρίας του ίχνους της τροχιάς οφείλεται σαφώς σε κακή εκτίμηση των παραμέτρων περιστροφής του οχήματος.

Για αυτά που αντιστοιχούν σε πιθανά σημεία μετάβασης υπάρχει ξεχωριστό ενδιαφέρον.

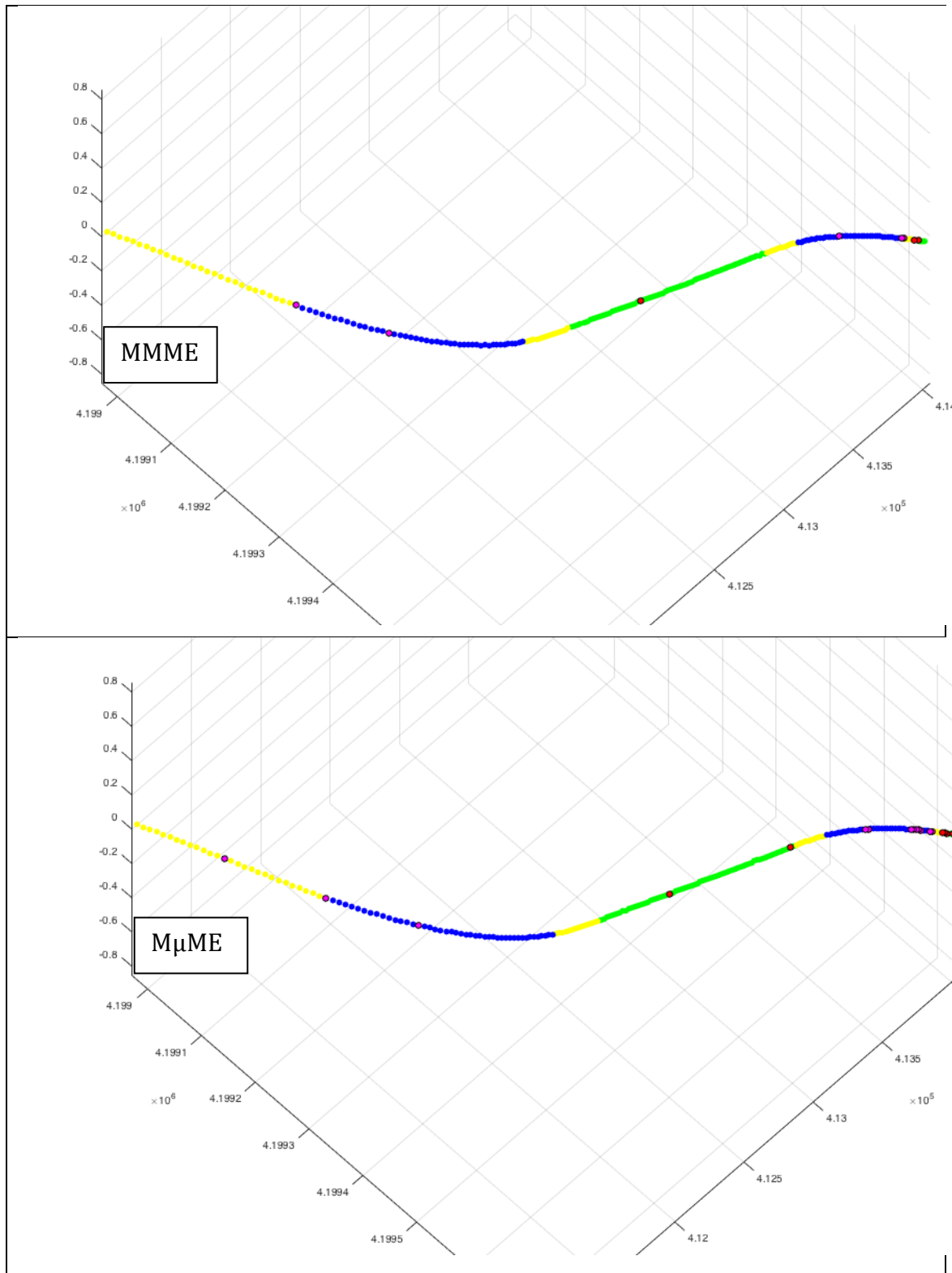
8.2 Απόδοση Γενίκευσης

Για τον γεωμετρικό έλεγχο της τροχιάς του (επίγειου) οχήματος, η αναγνώριση του γραμμικού της προτύπου μπορεί να εκτελεστεί στο χρόνο της κίνησης (on-the-fly) καθώς η φάση της εκπαίδευσης και ρύθμισης (ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου σφάλματος ταξινόμησης) ακολουθείται από τον έλεγχο απόδοσης γενίκευσης κατά την εξέλιξη της κίνησης, όπως είναι λογικό. Ωστόσο, η απόδοση γενίκευσης της ίδιας μηχανής μπορεί να ελεγχθεί και κάτω από διαφορετικές συνθήκες κίνησης (δυναμικές), αρκεί τα δεδομένα εισόδου να είναι της φύσης των δεδομένων εκπαίδευσης.

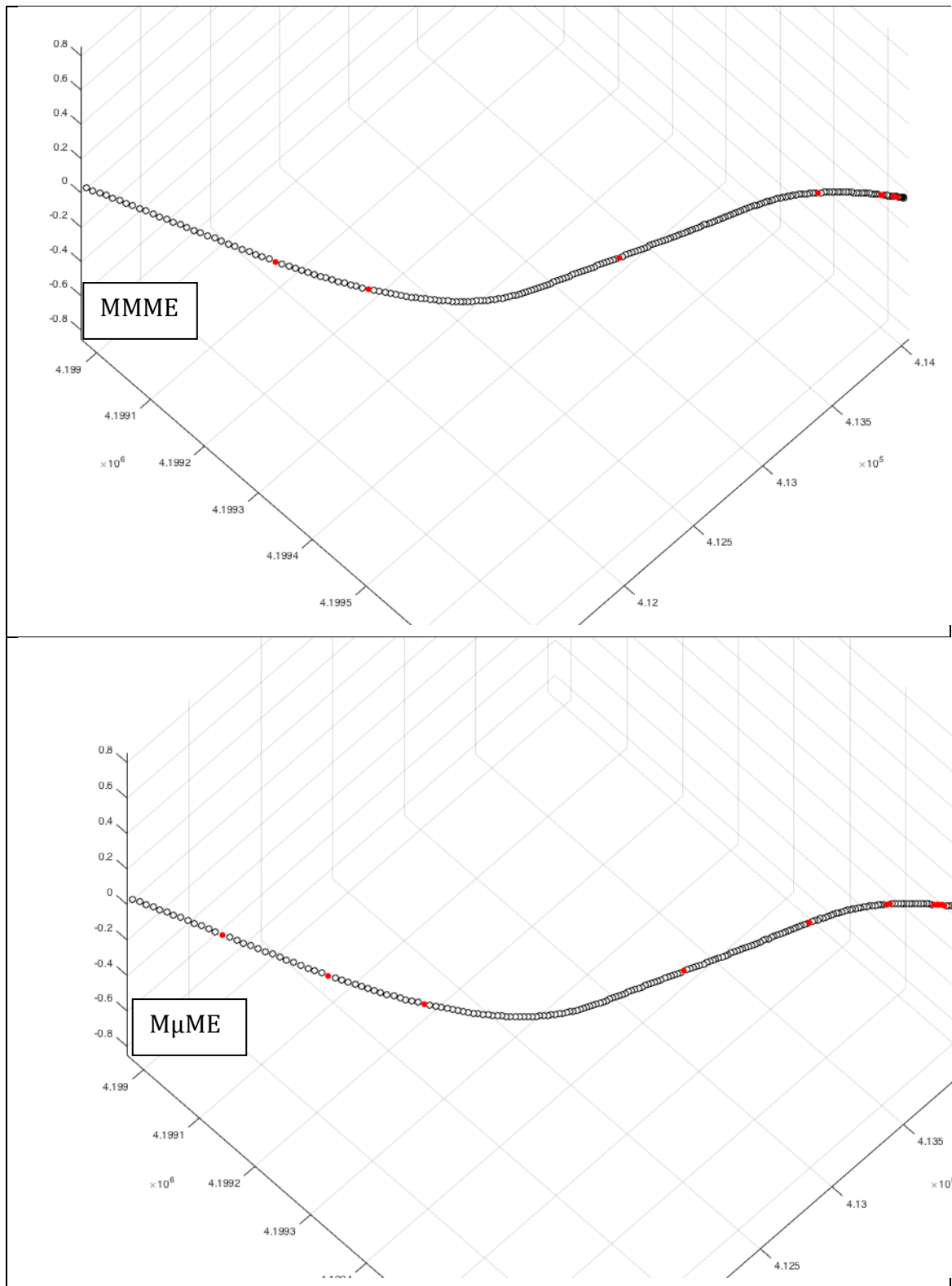
Για λόγους πληρότητας της πειραματικής πιστοποίησης της μεθοδολογίας, η απόδοση γενίκευσης για τα μοντέλα ταξινόμησης των ΜΜΜΕ και ΜμΜΕ ελέγχθηκε σε διαδρομή συνολικά 40km, κατά τη μετάβαση του οχήματος καταγραφής στο Κιάτο και ως το σταθμό της πόλης. Όπως έχει αναφερθεί, η κίνηση κατά τη μετάβαση είναι ηπιότερων δυναμικών χαρακτηριστικών αλλά και περισσότερων δυναμικών διαφοροποιήσεων σε σχέση με την επιστροφή που είναι κίνηση υψηλών ταχυτήτων. Κατά συνέπεια, τα δεδομένα εισόδου διαταράσσονται με περισσότερο τυχαίο θόρυβο λόγω κραδασμών. Για καθαρότερη οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων απόδοσης γενίκευσης η απεικόνιση των ταξινομήσεων αποδίδεται σε οκτώ σκέλη άγνωστης διαδρομής 5km περίπου το καθένα.

8.2.1 Αξιολόγηση Γενίκευσης

Τροχιά Αξιολόγησης - Σκέλος 1^ο



Σχήμα 8.5 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις 1ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης



Σχήμα 8.6 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης 1ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης

Τα Σχ. 8.5 και Σχ. 8.6 απεικονίζουν τις ταξινομήσεις των MMME (διαγράμματα πάνω) και MμME (διαγράμματα κάτω) και τα αναλυτικά αποτελέσματα του ελέγχου σφάλματος ταξινόμησης των μηχανών συγκεντρώνονται στους Πιν. 8.3 και Πιν 8.4.

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης Μεγάλου Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	109	59	82
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	3	1	4
Επιτυχία %	97%	98%	95%

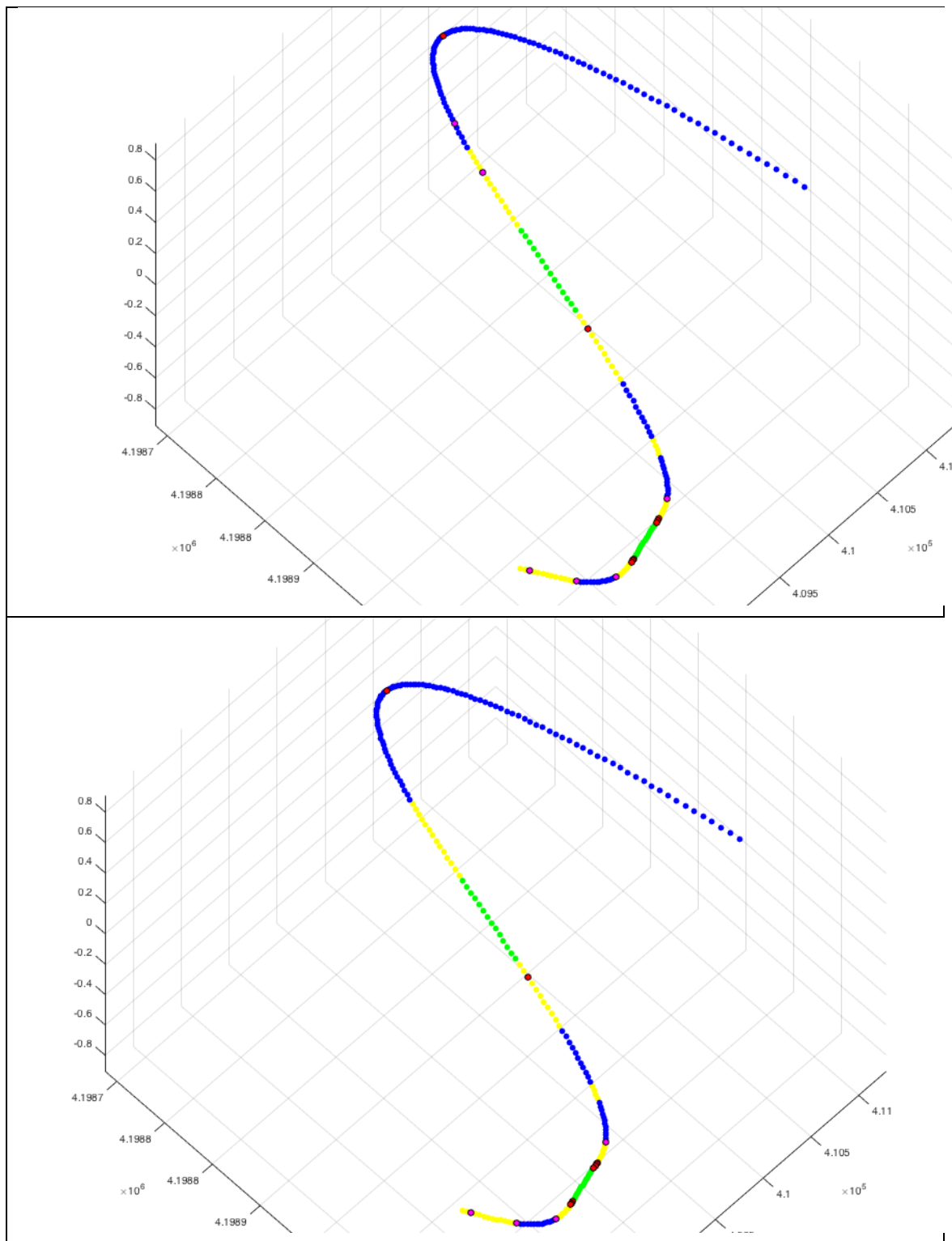
Πίνακας 8.3 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 1ο

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης μικρού Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	106	58	82
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	6	2	4
Επιτυχία %	95%	97%	95%

Πίνακας 8.4 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 1ο

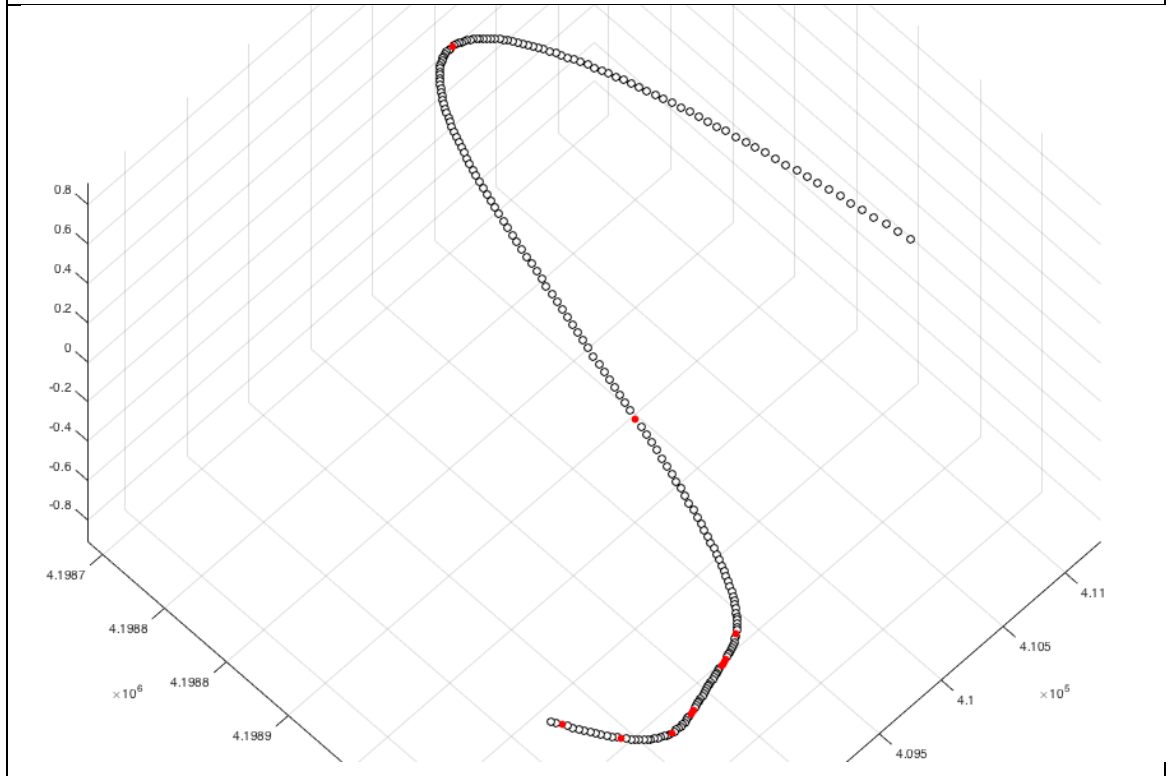
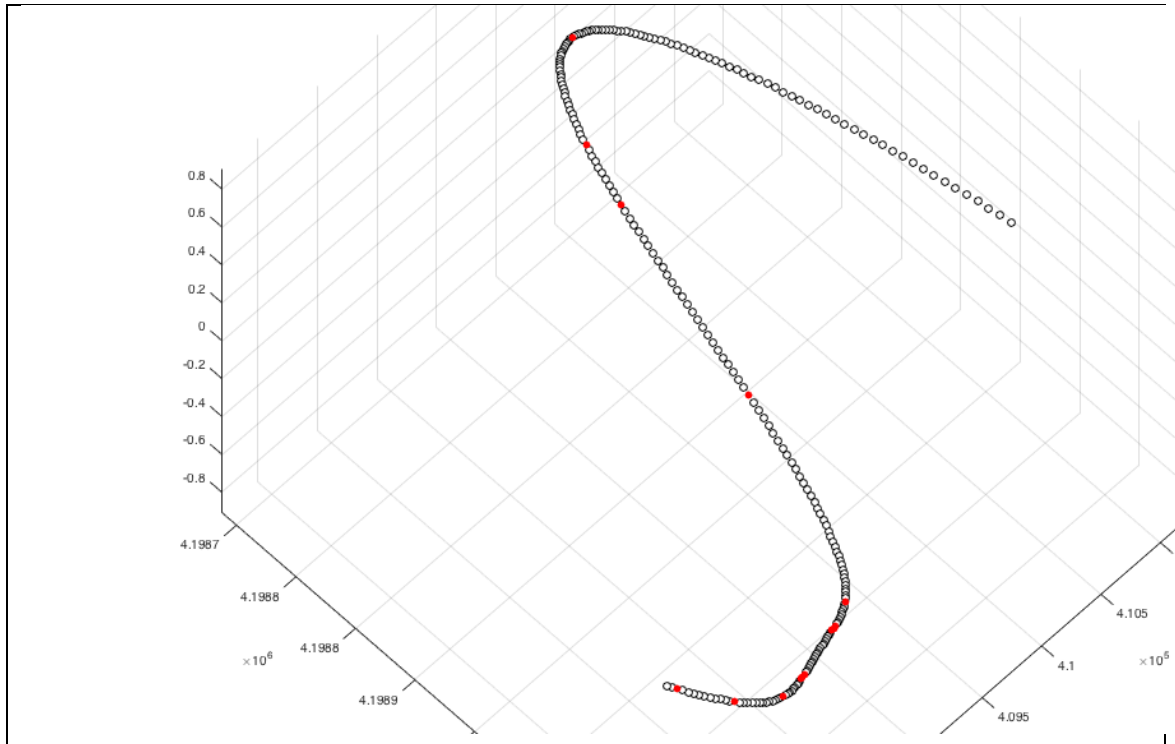
Από τα 250 σημεία θέσης του οχήματος καταγραφής στο πρώτο σκέλος της τροχιάς ελέγχου, η ΜΜΜΕ ταξινομεί σωστά 242 σημεία σημειώνοντας 97% επιτυχία ταξινόμησης και η ΜμΜΕ ταξινομεί σωστά 238 σημεία σημειώνοντας 95% επιτυχία ταξινόμησης. Οι μηχανές αποδίδουν εξαιρετικά σε γενίκευση για το πρώτο σκέλος. Η επιτυχία ταξινόμησης σε κάθε τάξη αποδίδεται αναλυτικά στους Πιν.8.3 και Πιν. 8.4.

Τροχιά Αξιολόγησης - Σκέλος 2^ο



Σχήμα 8.7 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις 2ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης

Τα Σχ. 8.7 και Σχ. 8.8 απεικονίζουν τις ταξινομήσεις των ΜΜΜΕ (διαγράμματα πάνω) και ΜμΜΕ (διαγράμματα κάτω) και τα αναλυτικά αποτελέσματα του ελέγχου σφάλματος ταξινόμησης των μηχανών συγκεντρώνονται στους Πιν. 8.5 και Πιν 8.6.



Σχήμα 8.8 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης 2ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης Μεγάλου Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	33	57	137
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	8	6	2
Επιτυχία %	80%	90%	99%

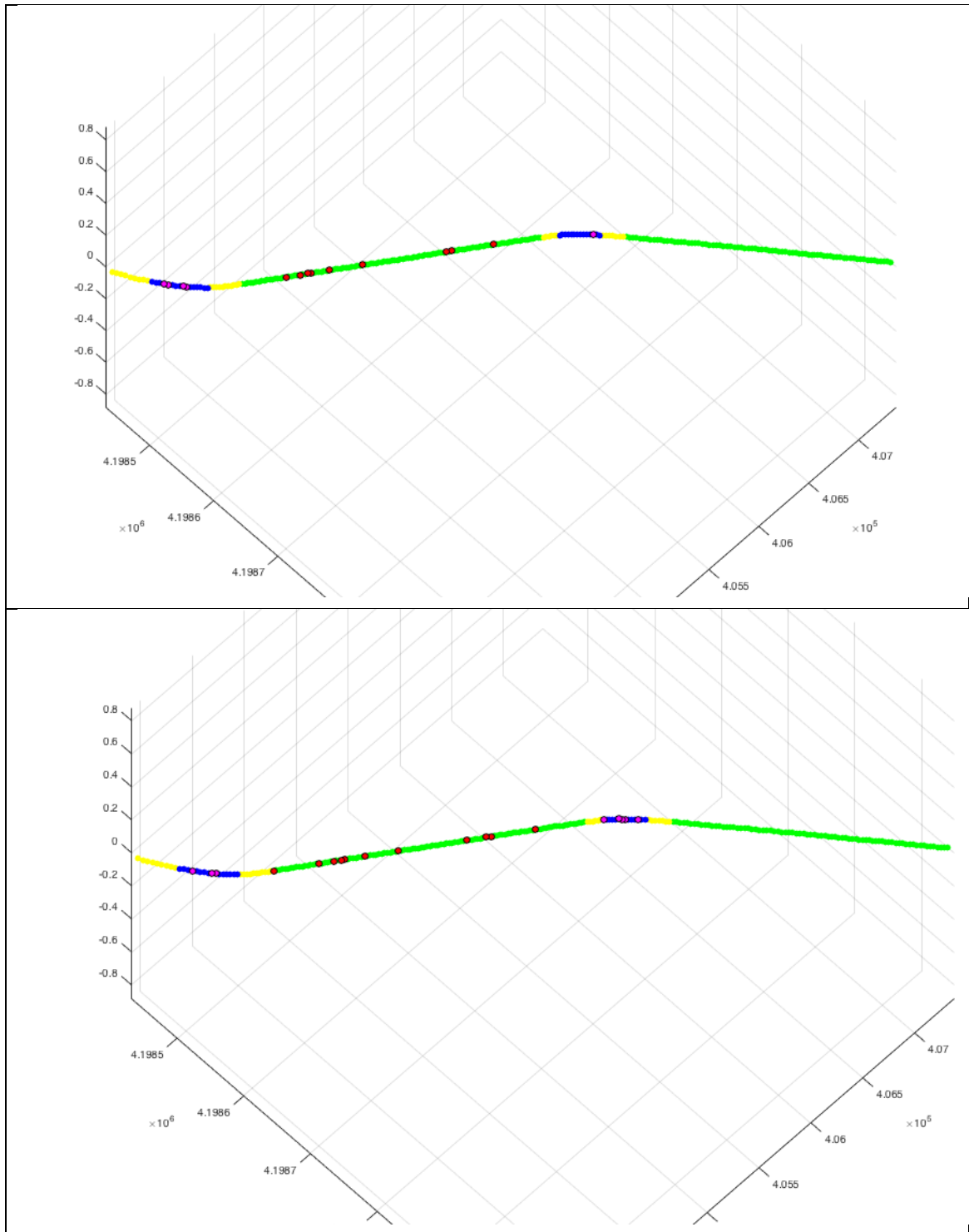
Πίνακας 8.5 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 2ο

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης μικρού Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	32	58	138
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	9	5	1
Επιτυχία %	78%	92%	99%

Πίνακας 8.6 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 2ο

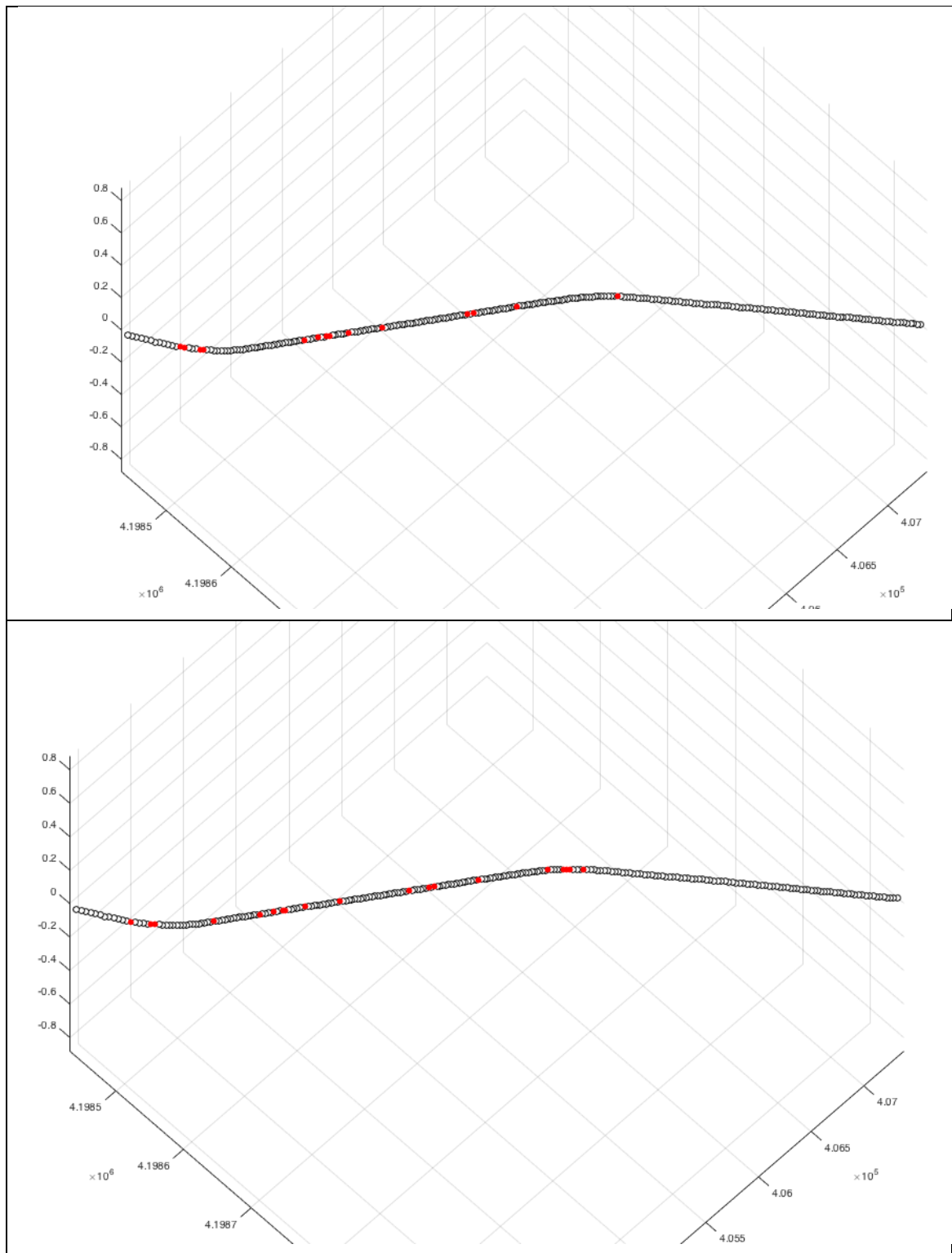
Από τα 243 σημεία θέσης του οχήματος καταγραφής στο δεύτερο σκέλος της τροχιάς ελέγχου, η ΜΜΜΕ ταξινομεί σωστά 227 σημεία σημειώνοντας 93% επιτυχία ταξινόμησης και η ΜμΜΕ ταξινομεί σωστά 228 σημεία σημειώνοντας 94% επιτυχία ταξινόμησης. Οι μηχανές αποδίδουν εξαιρετικά σε γενίκευση και για το δεύτερο σκέλος στο οποίο λαμβάνουν χώρα σχετικά έντονες δυναμικές διαφοροποιήσεις. Η επιτυχία ταξινόμησης σε κάθε τάξη αποδίδεται αναλυτικά στους Πιν.8.5 και Πιν. 8.6.

Τροχιά Αξιολόγησης - Σκέλος 3^ο



Σχήμα 8.9 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις 3ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης

Τα Σχ. 8.9 και Σχ. 8.10 απεικονίζουν τις ταξινομήσεις των ΜΜΜΕ (διαγράμματα πάνω) και ΜμΜΕ (διαγράμματα κάτω) και τα αναλυτικά αποτελέσματα του ελέγχου σφάλματος ταξινόμησης των μηχανών συγκεντρώνονται στους Πιν. 8.7 και Πιν 8.8.



Σχήμα 8.10 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης Ζου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης Μεγάλου Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	182	33	25
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	9	-	5
Επιτυχία %	95%	100%	83%

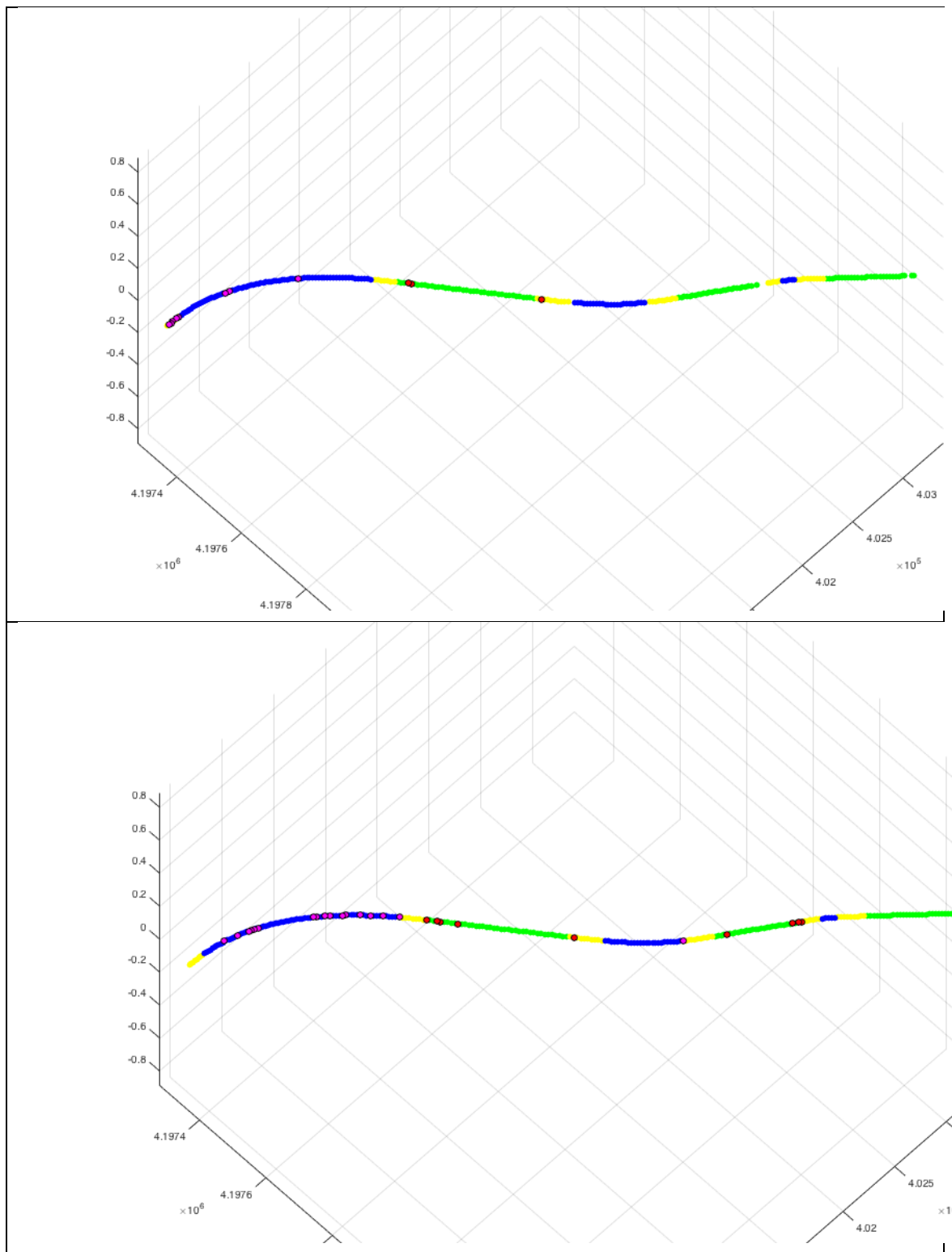
Πίνακας 8.7 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 3ο

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης μικρού Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	180	33	22
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	11	-	8
Επιτυχία %	94%	100%	73%

Πίνακας 8.8 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 3ο

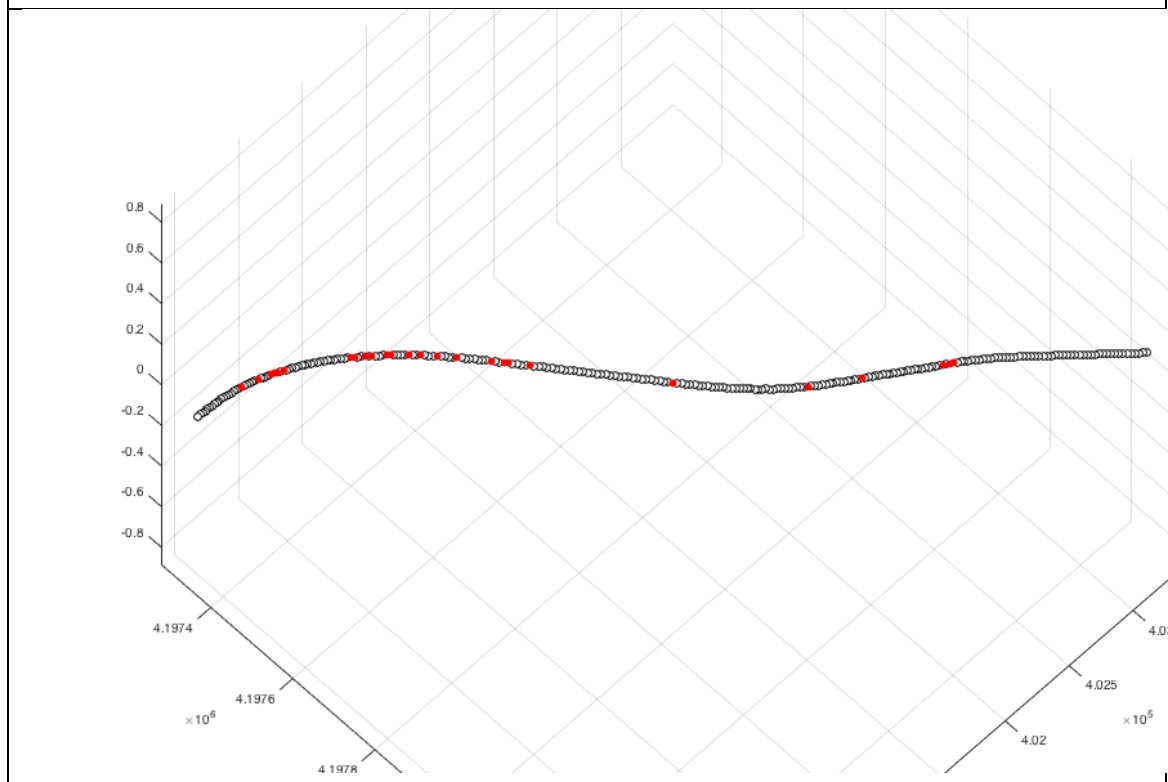
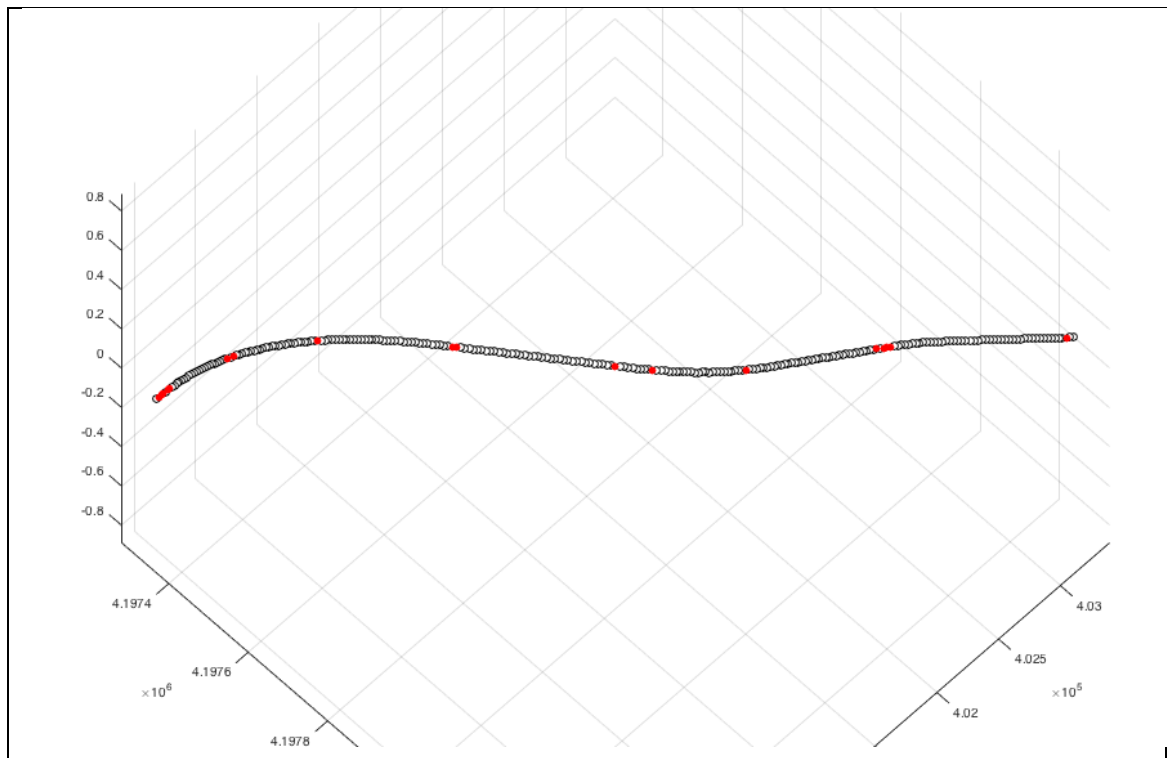
Από τα 254 σημεία θέσης του οχήματος καταγραφής στο τρίτο σκέλος της τροχιάς ελέγχου, η ΜΜΜΕ ταξινομεί σωστά 240 σημεία σημειώνοντας 94% επιτυχία ταξινόμησης και η ΜμΜΕ ταξινομεί σωστά 235 σημεία σημειώνοντας 92% επιτυχία ταξινόμησης. Οι μηχανές αποδίδουν εξαιρετικά σε γενίκευση και για το τρίτο σκέλος. Η επιτυχία ταξινόμησης σε κάθε τάξη αποδίδεται αναλυτικά στους Πιν.8.7 και Πιν. 8.8.

Τροχιά Αξιολόγησης - Σκέλος 4^ο



Σχήμα 8.11 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις 4ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης

Τα Σχ. 8.11 και Σχ. 8.12 απεικονίζουν τις ταξινομήσεις των ΜΜΜΕ (διαγράμματα πάνω) και ΜμΜΕ (διαγράμματα κάτω) και τα αναλυτικά αποτελέσματα του ελέγχου σφάλματος ταξινόμησης των μηχανών συγκεντρώνονται στους Πιν. 8.9 και Πιν 8.10.



Σχήμα 8.12 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης 4ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης Μεγάλου Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	97	43	101
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	4	8	4
Επιτυχία %	97%	84%	96%

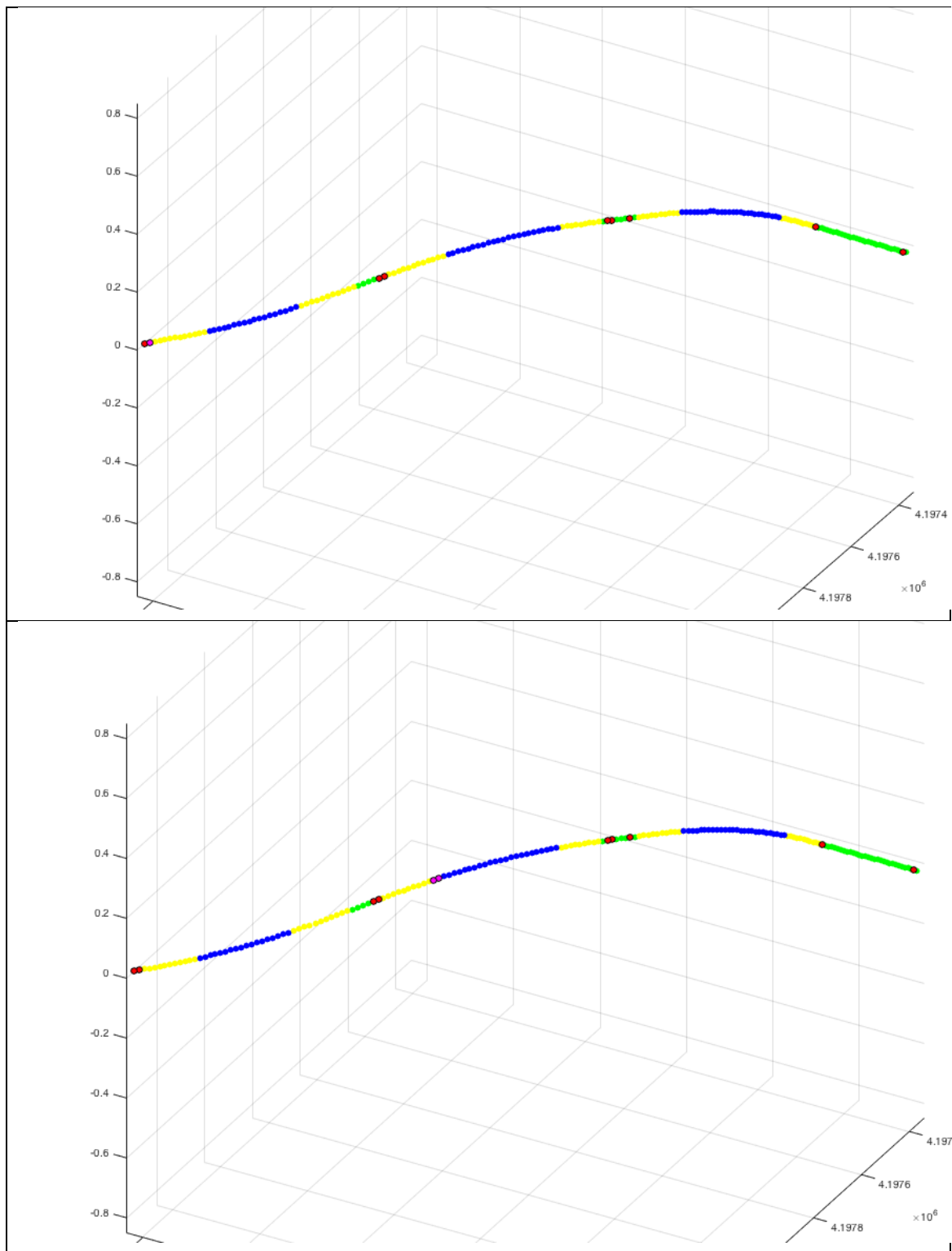
Πίνακας 8.9 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 4ο

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης μικρού Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	92	49	89
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	9	2	16
Επιτυχία %	94%	100%	73%

Πίνακας 8.10 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 4ο

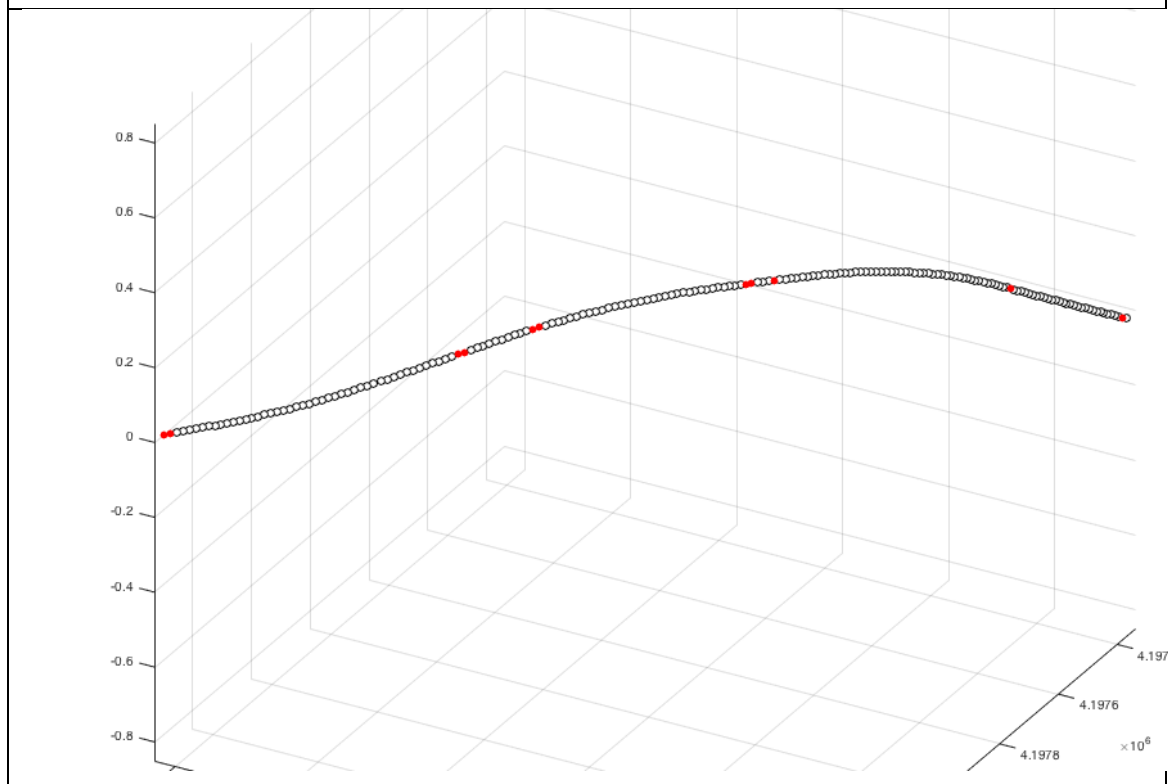
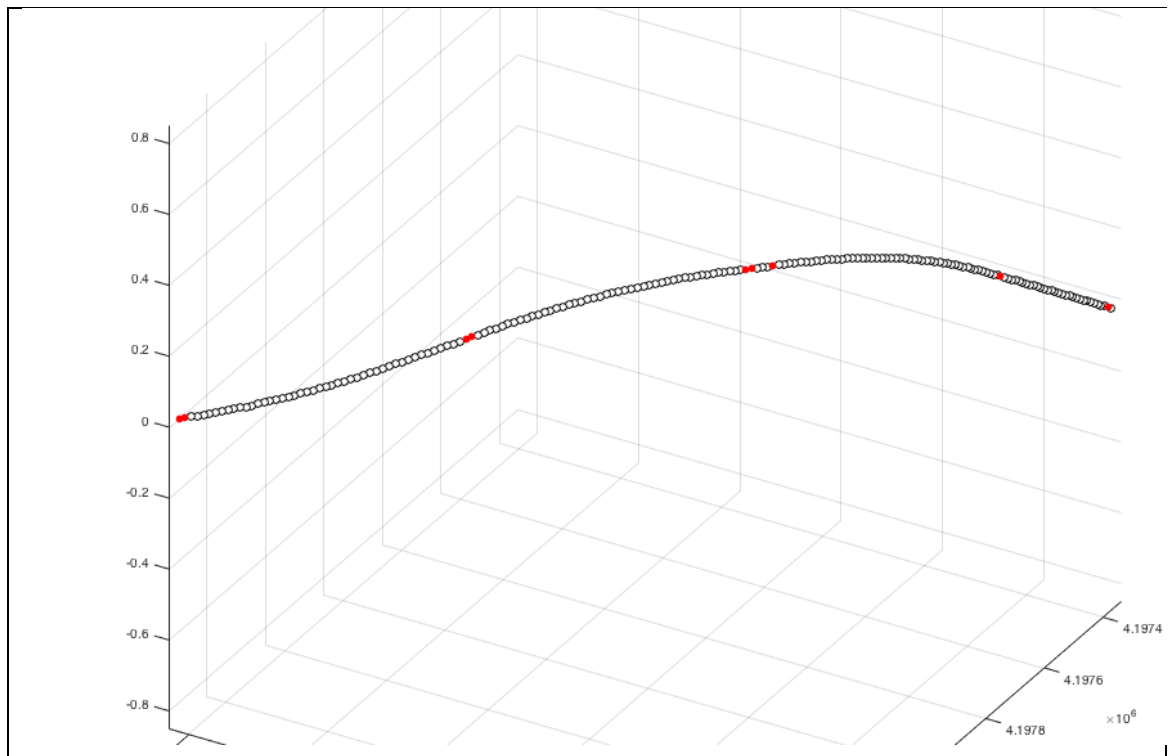
Από τα 257 σημεία θέσης του οχήματος καταγραφής στο τέταρτο σκέλος της τροχιάς ελέγχου, η ΜΜΜΕ ταξινομεί σωστά 241 σημεία σημειώνοντας 94% επιτυχία ταξινόμησης και η ΜμΜΕ ταξινομεί σωστά 230 σημεία σημειώνοντας 89% επιτυχία ταξινόμησης. Οι μηχανές αποδίδουν εξαιρετικά σε γενίκευση και για το τέταρτο σκέλος. Η επιτυχία ταξινόμησης σε κάθε τάξη αποδίδεται αναλυτικά στους Πιν.8.9 και Πιν. 8.10.

Τροχιά Αξιολόγησης - Σκέλος 5^ο



Σχήμα 8.13 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις 5ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης

Τα Σχ. 8.13 και Σχ. 8.14 απεικονίζουν τις ταξινομήσεις των ΜΜΜΕ (διαγράμματα πάνω) και ΜμΜΕ (διαγράμματα κάτω) και τα αναλυτικά αποτελέσματα του ελέγχου σφάλματος ταξινόμησης των μηχανών συγκεντρώνονται στους Πιν. 8.11 και Πιν 8.12.



Σχήμα 8.14 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης 5ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης Μεγάλου Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	39	64	68
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	6	3	-
Επιτυχία %	87%	96%	100%

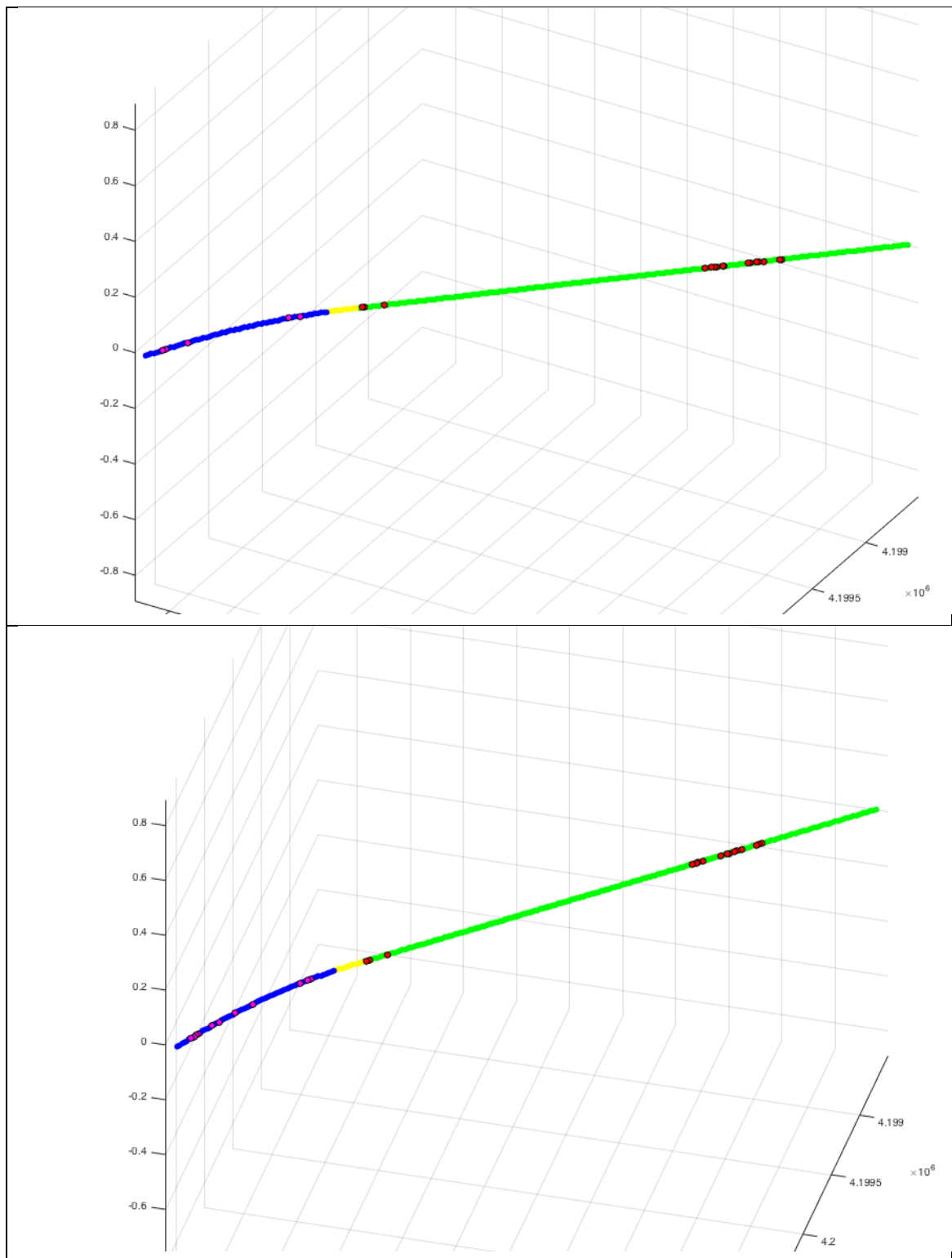
Πίνακας 8.11 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 5ο

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης μικρού Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	39	62	68
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	6	5	-
Επιτυχία %	87%	93%	100%

Πίνακας 8.12 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 5ο

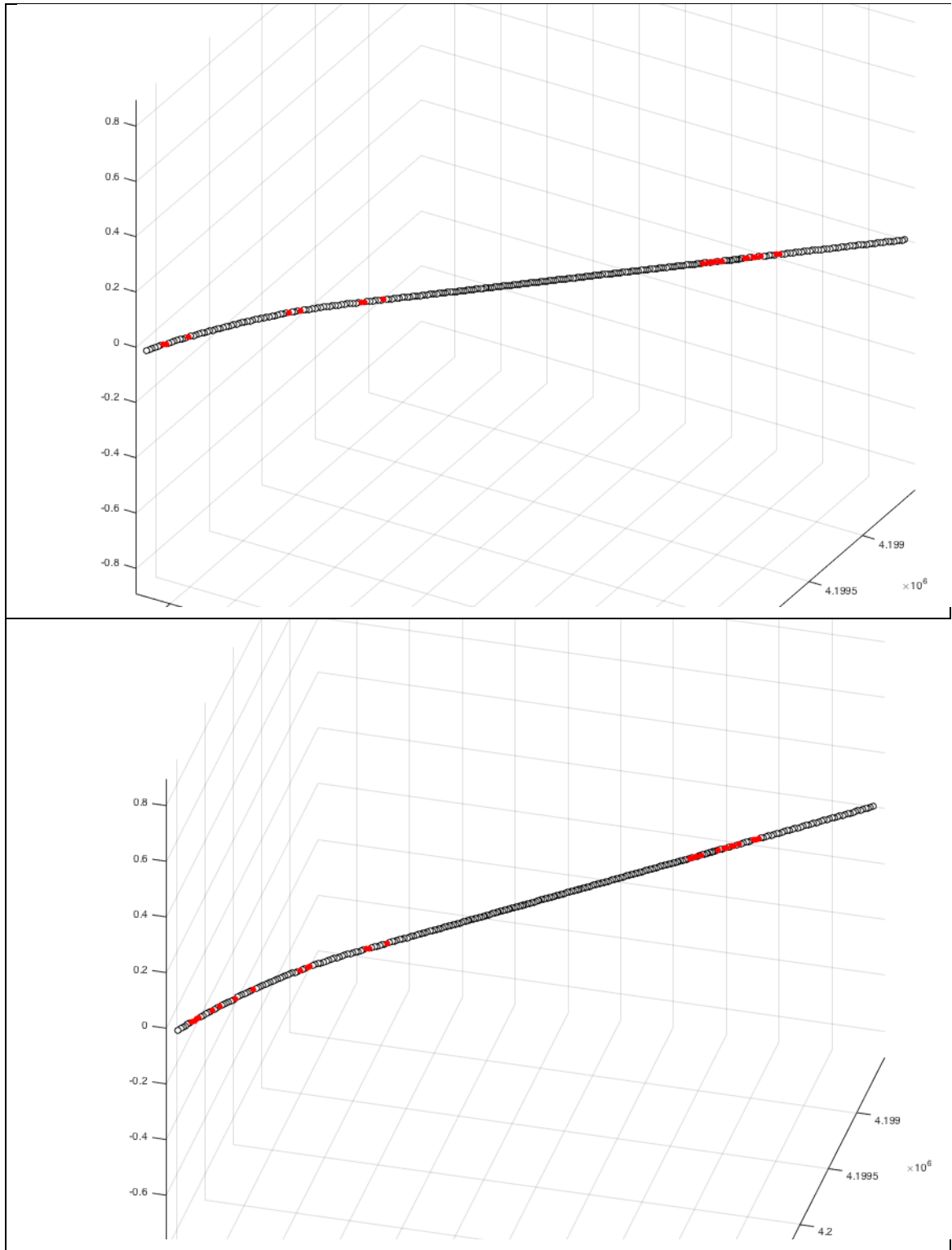
Από τα 180 σημεία θέσης του οχήματος καταγραφής στο δεύτερο σκέλος της τροχιάς ελέγχου, η ΜΜΜΕ ταξινομεί σωστά 171 σημεία σημειώνοντας 95% επιτυχία ταξινόμησης και η ΜμΜΕ ταξινομεί σωστά 169 σημεία σημειώνοντας 94% επιτυχία ταξινόμησης. Οι μηχανές αποδίδουν εξαιρετικά σε γενίκευση και στο πέμπτο σκέλος. Η επιτυχία ταξινόμησης σε κάθε τάξη αποδίδεται αναλυτικά στους Πιν.8.11 και Πιν. 8.12.

Τροχιά Αξιολόγησης - Σκέλος 6°



Σχήμα 8.15 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις βου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης

Τα Σχ. 8.15 και Σχ. 8.16 απεικονίζουν τις ταξινομήσεις των ΜΜΜΕ (διαγράμματα πάνω) και ΜμΜΕ (διαγράμματα κάτω) και τα αναλυτικά αποτελέσματα του ελέγχου σφάλματος ταξινόμησης των μηχανών συγκεντρώνονται στους Πιν. 8.13 και Πιν 8.14.



Σχήμα 8.16 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης βου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης Μεγάλου Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	219	10	61
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	16	-	5
Επιτυχία %	93%	100%	92%

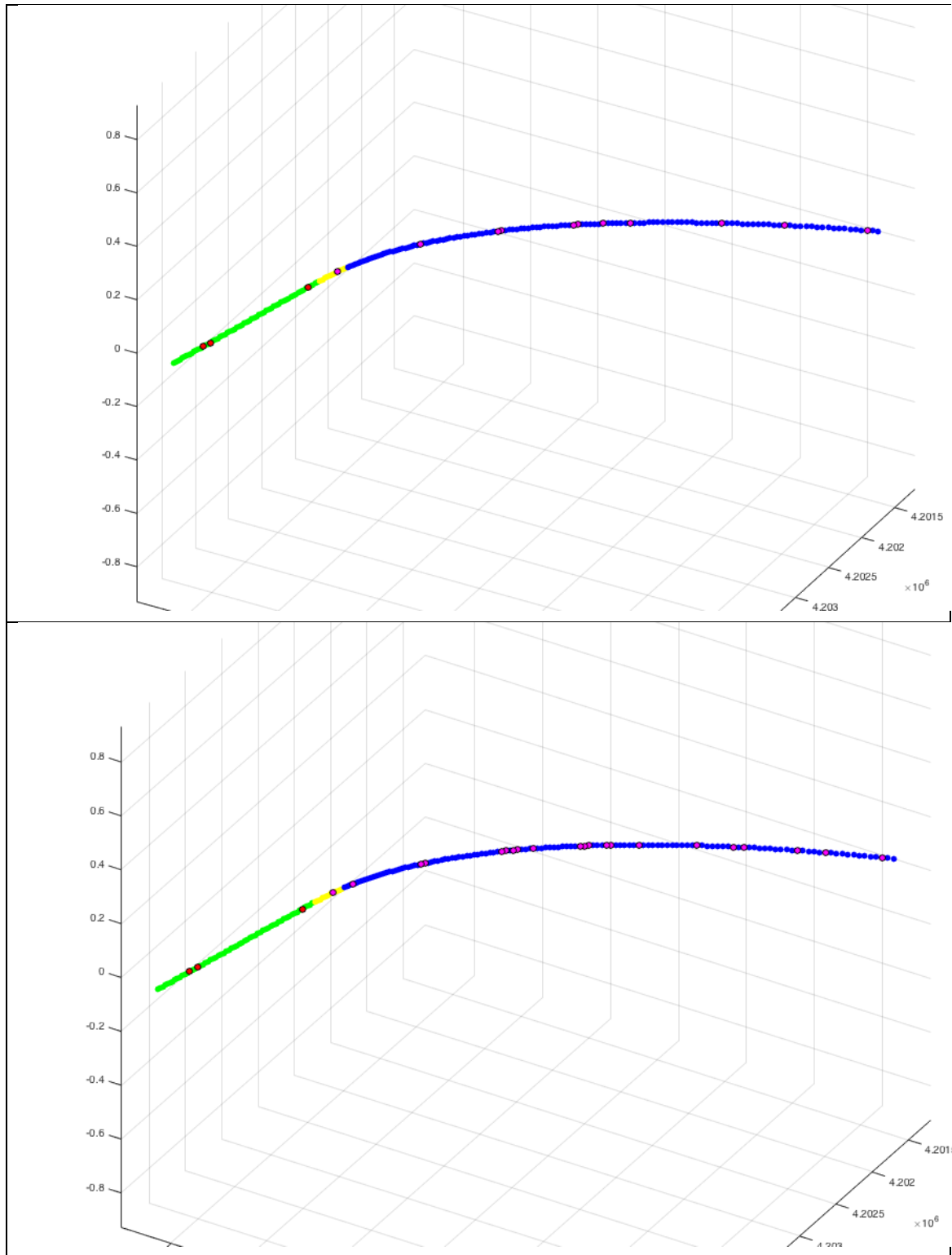
Πίνακας 8.13 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 6ο

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης μικρού Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	219	10	55
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	16	-	11
Επιτυχία %	93%	100%	83%

Πίνακας 8.14 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 6ο

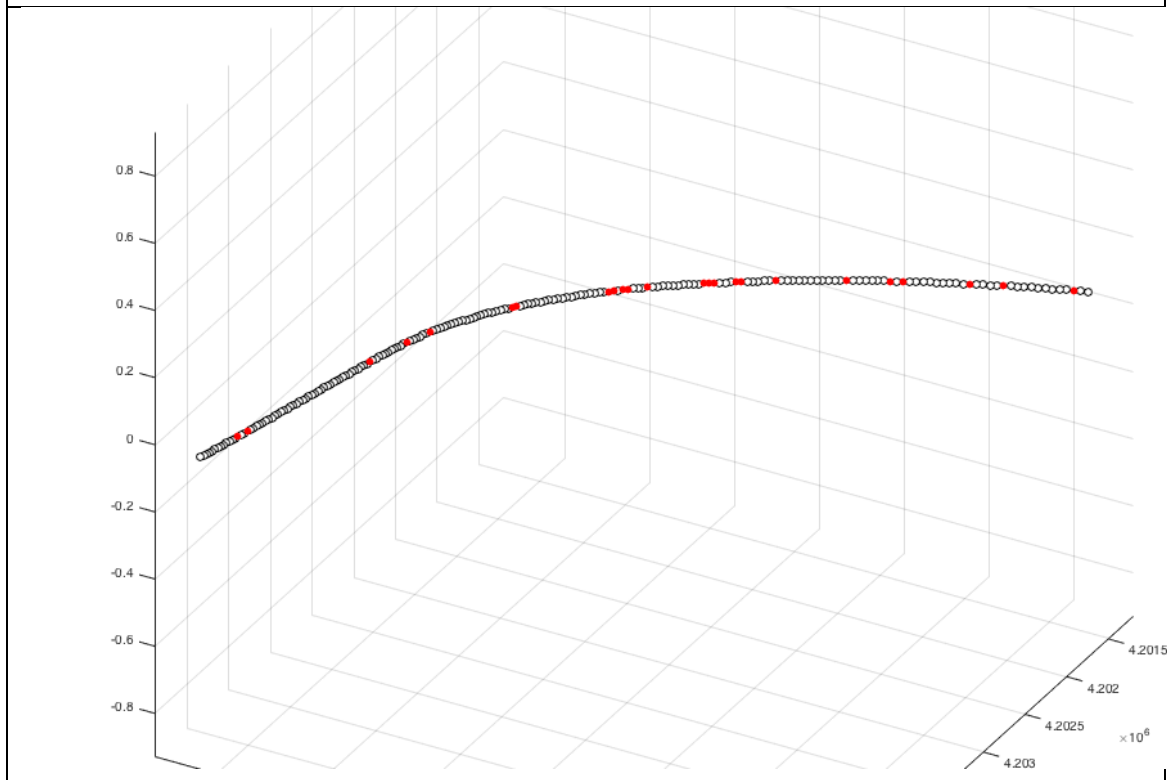
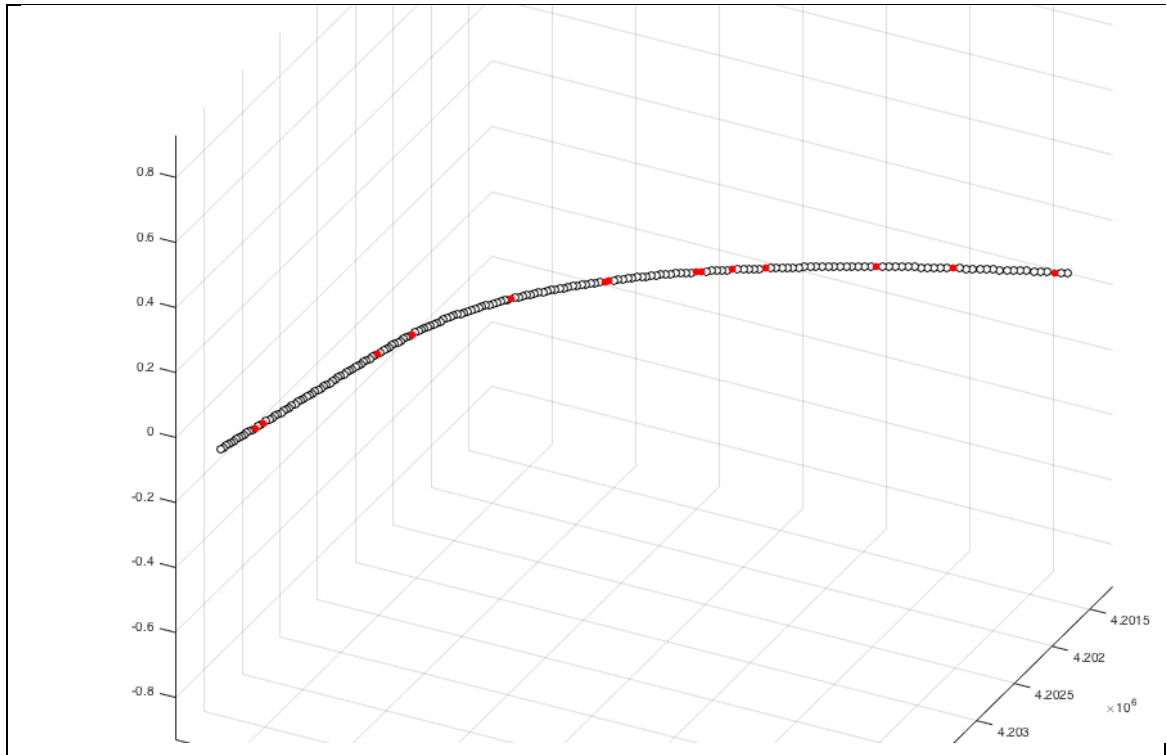
Από τα 311 σημεία θέσης του οχήματος καταγραφής στο έκτο σκέλος της τροχιάς ελέγχου, η ΜΜΜΕ ταξινομεί σωστά 290 σημεία σημειώνοντας 93% επιτυχία ταξινόμησης και η ΜμΜΕ ταξινομεί σωστά 283 σημεία σημειώνοντας 91% επιτυχία ταξινόμησης. Οι μηχανές αποδίδουν εξαιρετικά σε γενίκευση και στο έκτο σκέλος. Η επιτυχία ταξινόμησης σε κάθε τάξη αποδίδεται αναλυτικά στους Πιν.8.13 και Πιν. 8.14.

Τροχιά Αξιολόγησης - Σκέλος 7ο



Σχήμα 8.17 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις 7ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης

Τα Σχ. 8.17 και Σχ. 8.18 απεικονίζουν τις ταξινομήσεις των ΜΜΜΕ (διαγράμματα πάνω) και ΜμΜΕ (διαγράμματα κάτω) και τα αναλυτικά αποτελέσματα του ελέγχου σφάλματος ταξινόμησης των μηχανών συγκεντρώνονται στους Πιν. 8.15 και Πιν 8.16.



Σχήμα 8.18 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης 7ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης Μεγάλου Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	58	10	118
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	3	1	10
Επιτυχία %	95%	91%	92%

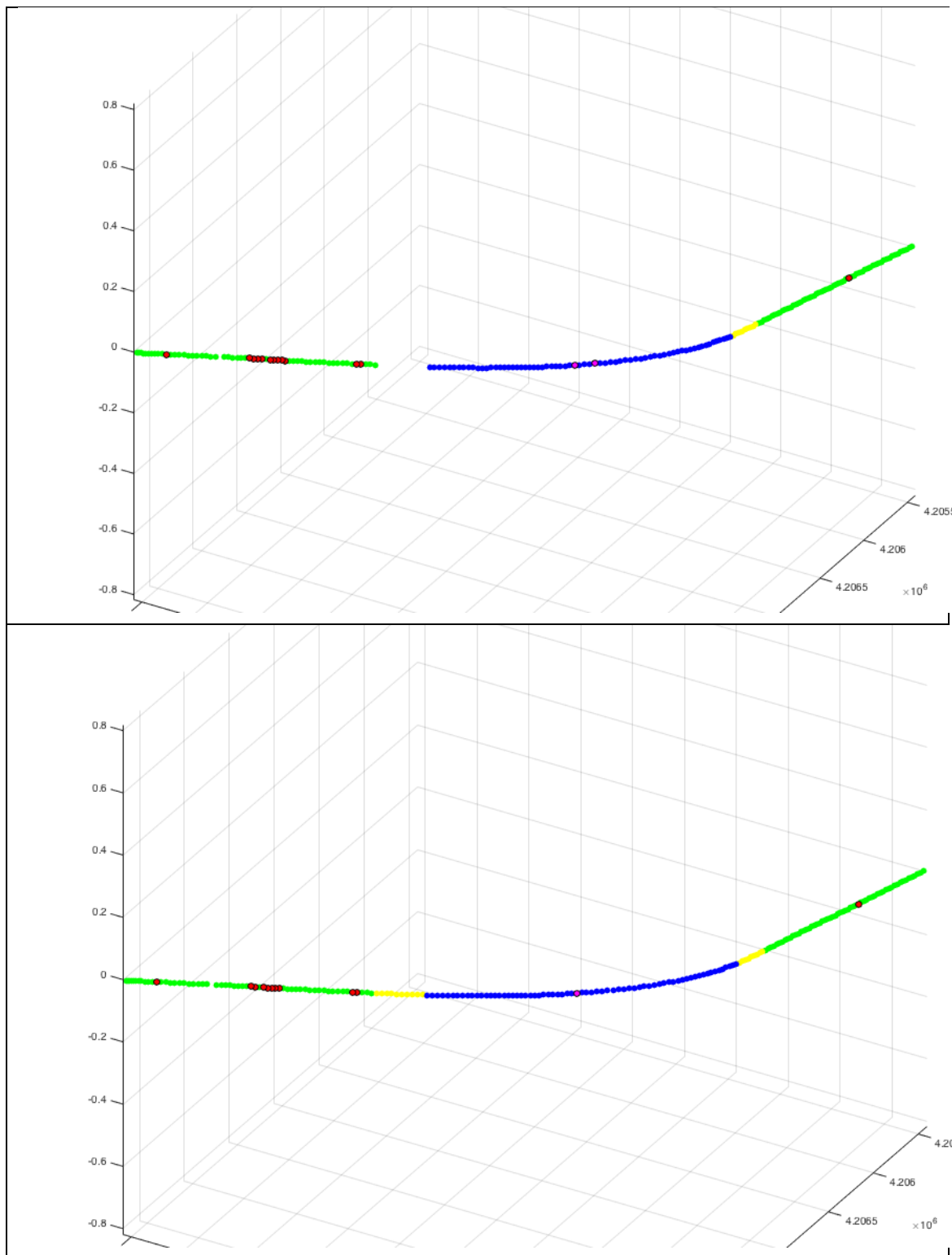
Πίνακας 8.15 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 7ο

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης μικρού Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	58	10	108
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	3	1	20
Επιτυχία %	95%	91%	84%

Πίνακας 8.16 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 7ο

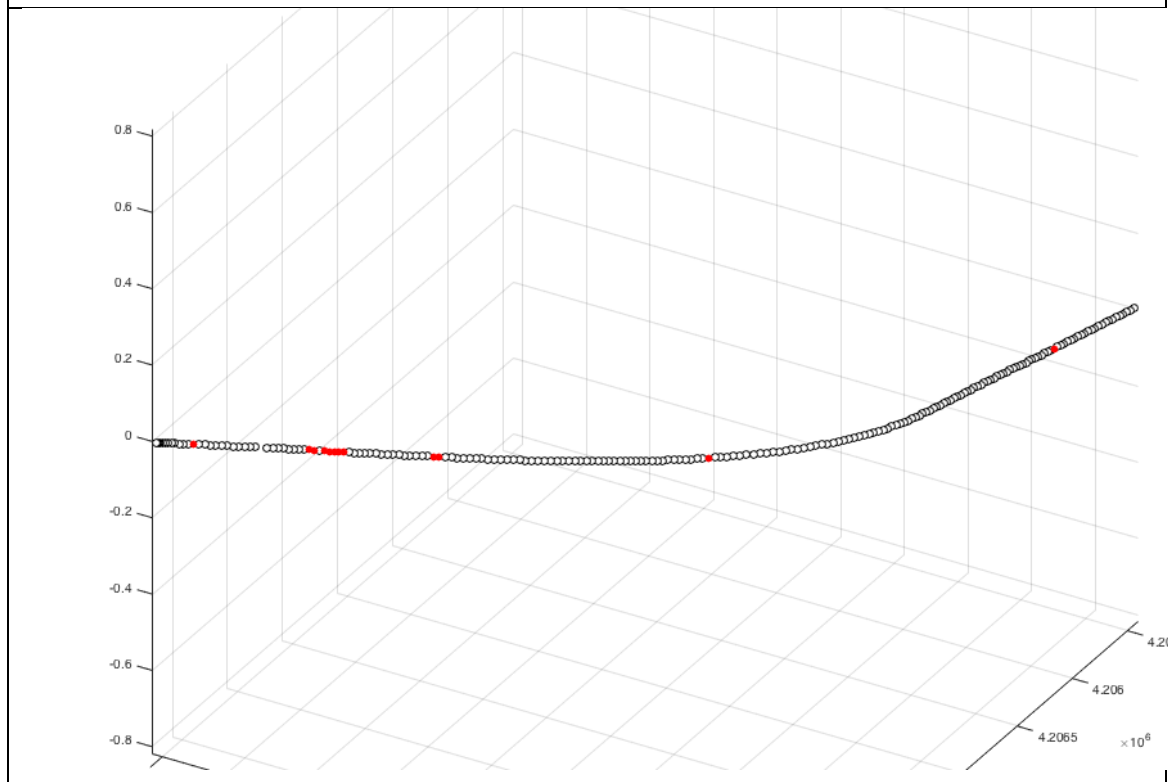
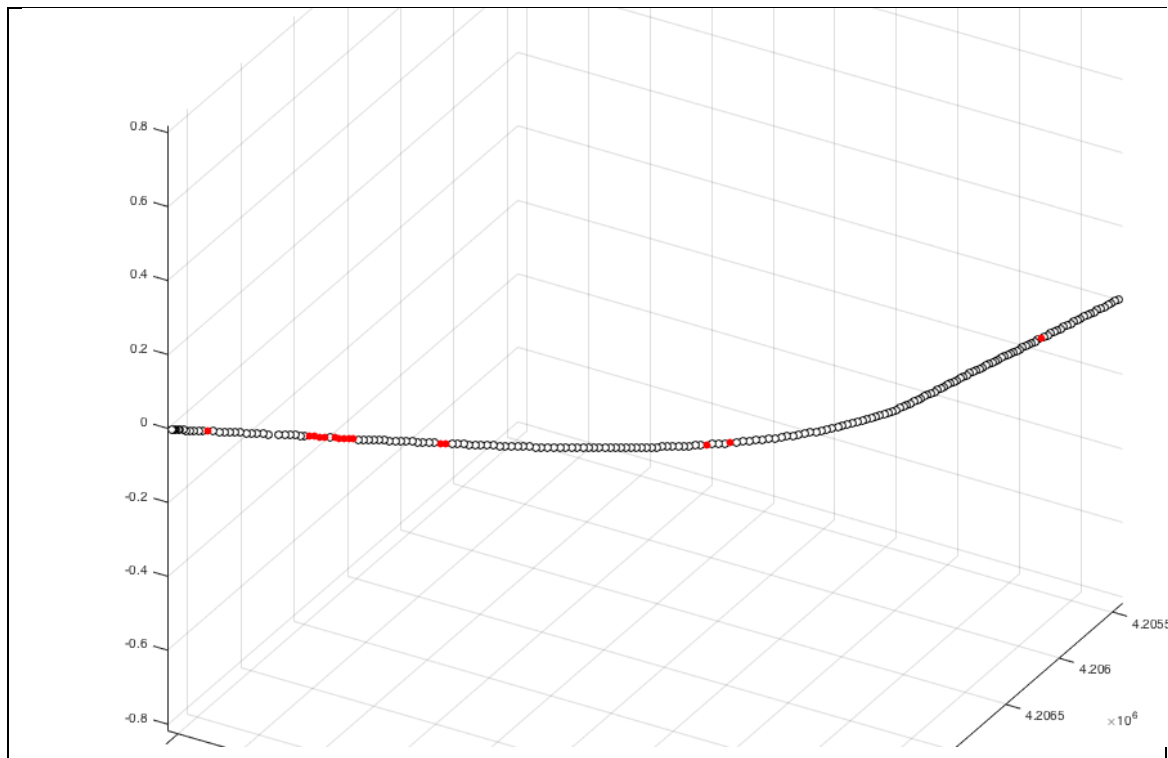
Από τα 200 σημεία θέσης του οχήματος καταγραφής στο έβδομο σκέλος της τροχιάς ελέγχου, η ΜΜΜΕ ταξινομεί σωστά 186 σημεία σημειώνοντας 93% επιτυχία ταξινόμησης και η ΜμΜΕ ταξινομεί σωστά 283 σημεία σημειώνοντας 91% επιτυχία ταξινόμησης. Οι μηχανές αποδίδουν εξαιρετικά σε γενίκευση και στο έβδομο σκέλος. Η επιτυχία ταξινόμησης σε κάθε τάξη αποδίδεται αναλυτικά στους Πιν.8.15 και Πιν. 8.16.

Τροχιά Αξιολόγησης - Σκέλος 8^ο



Σχήμα 8.19 Αναγνώριση Γραμμικού Προτύπου σε 3 Κλάσεις του Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης

Τα Σχ. 8.19 και Σχ. 8.20 απεικονίζουν τις ταξινομήσεις των ΜΜΜΕ (διαγράμματα πάνω) και ΜμΜΕ (διαγράμματα κάτω) και τα αναλυτικά αποτελέσματα του ελέγχου σφάλματος ταξινόμησης των μηχανών συγκεντρώνονται στους Πιν. 8.17 και Πιν 8.18.



Σχήμα 8.20 Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης 8ου Σκέλους Τροχιάς Αξιολόγησης

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης Μεγάλου Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
	Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	130	19
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	13	-	2
Επιτυχία %	91%	100%	97%

Πίνακας 8.17 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜΜΜΕ - Σκέλος 8ο

Μηχανή Ταξινόμησης Σημείου-Εκτίμηση Θέσης μικρού Μήκους Εκπαίδευσης	Ευθεία	Καμπύλη Συναρμογής	Κυκλικό Τόξο
	Σημεία Επιτυχούς Ταξινόμησης	132	19
Σημεία Λανθασμένης Ταξινόμησης	11	-	1
Επιτυχία %	92%	100%	98%

Πίνακας 8.18 Αναλυτικά Αποτελέσματα Απόδοσης ΜμΜΕ - Σκέλος 8ο

Από τα 230 σημεία θέσης του οχήματος καταγραφής στο όγδοο σκέλος και τελευταίο της τροχιάς ελέγχου, η ΜΜΜΕ ταξινομεί σωστά 215 σημεία σημειώνοντας 93% επιτυχία ταξινόμησης και η ΜμΜΕ ταξινομεί σωστά 217 σημεία σημειώνοντας 94% επιτυχία ταξινόμησης. Οι μηχανές αποδίδουν εξαιρετικά σε γενίκευση και στο όγδοο σκέλος. Η επιτυχία ταξινόμησης σε κάθε τάξη αποδίδεται αναλυτικά στους Πιν.8.17 και Πιν. 8.18.

Συνολικά, από τα 1930 σημεία εκτίμησης θέσης της άγνωστης τροχιάς ελέγχου η ΜΜΜΕ ταξινομεί σωστά τα 1817 σημειώνοντας επιτυχία ταξινόμησης 94% όταν η ΜμΜΕ ταξινομεί σωστά 1782 σημεία σημειώνοντας επιτυχία ταξινόμησης 92%.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι η ταξινόμησης σημειακής οντότητας σε γραμμικά πρότυπα τροχιάς -με βάση τη μεθοδολογία εκπαίδευσης και το αξίωμα κατηγοριοποίησης- αποδίδει σε εξαιρετικά επίπεδα απόδοσης γενίκευσης σε άγνωστη διαδρομή κι αποτελεί μια επιβεβαιωμένη τελικά προσέγγιση για τον έλεγχο της τρέχουσας τροχιάς οχήματος σε (καθορισμένη) πορεία καθοδήγησης.

Η αναγνώριση της γεωμετρίας της τρέχουσας τροχιάς αποτελεί μια εναλλακτική πρόταση για τον έλεγχο της πορείας καθοδήγησης και δημιουργεί ενδιαφέρον για περαιτέρω μελέτη της σε τεχνικό επίπεδο εφαρμογής για ζητήματα πλοήγησης και καθοδήγησης οχήματος κάθε τύπου. Ενδεικτικά αποτελέσματα από την εφαρμογή της ταξινόμησης σημείου σε γραμμικά πρότυπα στο ζήτημα της εξομάλυνσης κατάστασης θέσης σε πραγματικό χρόνο και στο ζήτημα της αυτόματης εξαγωγής της γεωμετρίας χάραξης οδού περιγράφονται στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 9^ο

Τεχνικές Εφαρμογές και Ενδεικτικά Αποτελέσματα

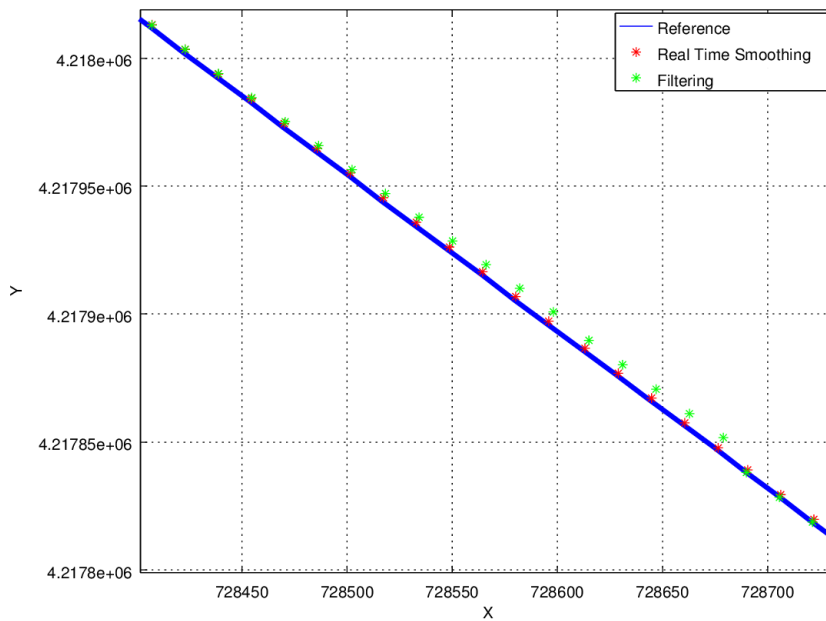
9.1 Εφαρμογή Εξομάλυνσης Κατάστασης Θέσης σε Πραγματικό Χρόνο

Ο ουσιαστικός ρόλος της μηχανής αναγνώρισης του γραμμικού προτύπου της τροχιάς ολοκληρώνεται με την ταξινόμηση της λύσης του κινηματικού εντοπισμού θέσης σε μία από τις γνωστές γεωμετρίας γραμμές-κλάσεις. Το αποτέλεσμα είναι η εκτίμηση με την οποία διαδοχικά σημεία θέσης δεσμεύονται να ανήκουν στην ίδια κλάση. Με την ταξινόμηση κάθε σημείου, λαμβάνει χώρα η προτεινόμενη γεωμετρική εξομάλυνση της κατάστασης θέσης σε πραγματικό χρόνο.

Η απόδοση της μεθοδολογία ελέγχεται σε γενίκευση, με χρήση πραγματικών εκτιμήσεων θέσης σημειακής ταξινόμησης σε περιοχές κακής λήψης δορυφορικού σήματος (φυλλωσιές, ψηλά κτήρια, κτλ) και σε περιοχές ολικής απώλειας σήματος (σήραγγες, κτλ). Εδώ, η τροχιά αναφοράς ορίζεται ως η εκ των υστέρων εξομάλυνση της εκτίμησης θέσης, με εφαρμογή φίλτρου εξομάλυνσης RTS και χρήση όλων των εκτιμήσεων κατάστασης, όπως αυτές προέκυψαν από την υλοποίηση του φίλτρου Kalman σε πραγματικό χρόνο.

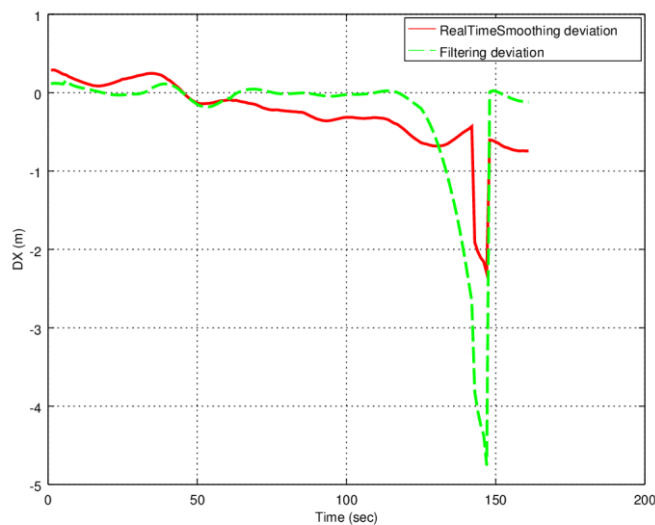
9.1.1 Έλεγχος Απόδοσης σε Συνθήκες Κακής Λήψης Δορυφορικού Σήματος

Στο Σχ. 8.3 σε κάποιο σημείο, φαίνεται η απόδοση ταξινόμησης της ΜμΜΕ σε ευθεία 165 σημείων-εκτίμηση θέσης στο οποίο για λόγους που ενδεχομένως αφορούν κραδασμούς στις αναρτήσεις της δρεζίνας, δύο από τα 165 σημεία ταξινομούνται λανθασμένα. Το αποτέλεσμα είναι η προσαρμογή τριών χωριστών ευθύγραμμων στοιχείων στη γεωμετρία της τροχιάς καθοδήγησης, με πολύ κοντινούς αναλυτικούς τύπους. Κατά την διαδικασία προσαρμογής του τρίτου στοιχείου ευθείας, στο συγκεκριμένο κομμάτι της τροχιάς, η δρεζίνα διέρχεται από περιοχή κακής λήψης δορυφορικού σήματος (διέλευση από σταθμό αποβίβασης/επιβίβασης). Αυτές οι εκτιμήσεις κατάστασης πλοήγησης, υπολογισμένες σε πραγματικό χρόνο, φέρουν σημαντικές αποκλίσεις (Σχ. 9.1). Μια τέτοια περίπτωση κρίθηκε πολύ ενδιαφέρουσα για την αξιολόγηση του αλγόριθμου εξομάλυνσης κατάστασης θέσης σε πραγματικό χρόνο. Περισσότερο από ότι η εφαρμογή του στο μήκος του συνόλου της τροχιάς διότι ούτως ή άλλως αυτός δεν θα μπορούσε να δώσει περισσότερα συμπεράσματα για την απόδοση της μεθοδολογίας. Ο λόγος είναι ότι η εφαρμογή είναι δυναμική, και συνεπώς ακριβή σημεία ελέγχου δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστούν. Για αυτό το λόγο, επιλέχθηκε ως τροχιά αναφοράς η τροχιά που απαρτίζεται από τις εκ των υστέρων εκτιμήσεις εξομάλυνσης της κατάστασης θέσης, με εφαρμογή φιλτραρίσματος οπίσθιας κατεύθυνσης στο σύνολο των υπολογισμένων εκτιμήσεων κατάστασης. Σε κάθε περίπτωση, η εκτίμηση εξομάλυνσης εκ των υστέρων, θεωρείται καλύτερη σε σχέση με την σε πραγματικό χρόνο βέλτιστη εκτίμηση κατάστασης και ως εκ τούτου, με βάση τη λογική, υφίστανται κι οι αντίστοιχες συγκρίσεις με τις εκτιμήσεις της προτεινόμενης προσέγγισης.

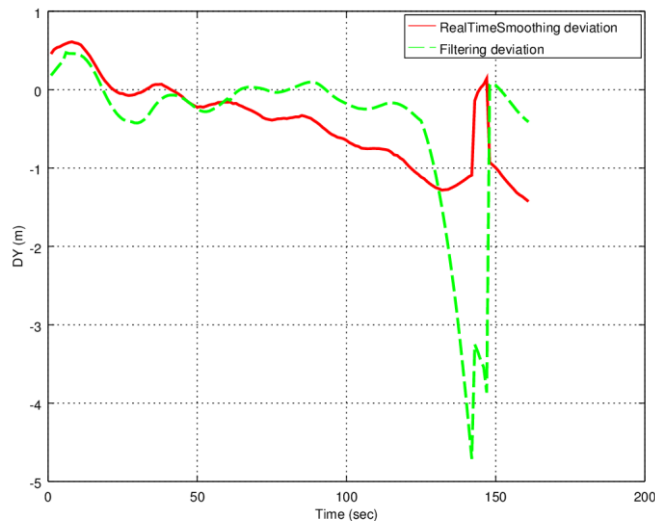


Σχήμα 9.1 Αποτύπωση Σημείων Θέσης Φιλτραρίσματος και Σημείων Εξομάλυνσης Θέσης Πραγματικού Χρόνου σε Συνθήκες Κακής Λήψης Δορυφορικού Σήματος

Στο Σχ. 9.1 τα πράσινα στίγματα αντιστοιχούν στις εκτιμήσεις θέσης από τον υπολογισμό της βέλτιστης κατάστασης πλοήγησης σε πραγματικό χρόνο, τα κόκκινα στίγματα στις εκτιμήσεις εξομάλυνσης θέσης σε πραγματικό χρόνο, όταν η μπλε συμπαγής γραμμή αποτυπώνει την τροχιά αναφοράς. Από το Σχ. 9.1 είναι φανερό, ότι η προτεινόμενη μεθοδολογία παρέχει σημαντικές διορθώσεις στις εκτιμήσεις θέσης πλοήγησης/καθοδήγησης σε σχέση με τις εκτιμήσεις αναφοράς. Αυτές οι διορθώσεις γίνονται περισσότερο φανερές στα Σχ. 9.2 και 9.3 όπου οι τιμές της γεωμετρικής εξομάλυνσης συγκρίθηκαν με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις θέσης των σημείων ταξινόμησης. Τα Σχ. 9.2 και 9.3 απεικονίζουν τις διαφορές τετμημένης και τεταγμένης, αντιστοίχως.



Σχήμα 9.2 Διαφορές Τετμημένης μεταξύ Εξομάλυνσης πραγματικού χρόνου και Εκτίμησης Θέσης Σημείου Ταξινόμησης σε περιοχή Κακής Λήψης Δορυφορικού Σήματος

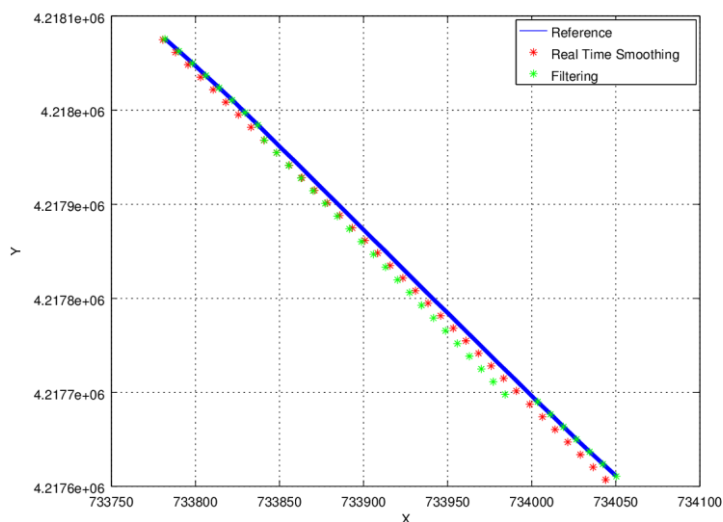


Σχήμα 9.3 Διαφορές Τεταγμένης μεταξύ Εξομάλυνσης πραγματικού χρόνου και Εκτίμησης Θέσης Σημείου Ταξινόμησης σε περιοχή Κακής Λήψης Δορυφορικού Σήματος

Όπως αναφέρθηκε, από τα Σχ. Σχ. 9.2 και 9.3 λείπουν οι διαφορές τετμημένης και τεταγμένης της τροχιάς αναφοράς από την πραγματική τροχιά. Αν η πραγματική τροχιά ήταν διαθέσιμη, θα ήταν δυνατή η εξαγωγή περισσότερων συμπερασμάτων για την πραγματική απόδοση της προτεινόμενης μεθοδολογίας, διότι θα ήταν ορατές πάνω στα διαγράμματα οι πραγματικές τοποθετήσεις των γραμμών απόκλισης των τροχιών εξομάλυνσης εκ των υστέρων. Η σύγκριση τότε, θα γινόταν σε σχέση με τις πραγματικές τιμές. Ωστόσο, στην κρίσιμη περιοχή, είναι απολύτως φανερό πως η προτεινόμενη μεθοδολογία επιφέρει διορθώσεις της τάξης των τριών και πλέον μέτρων (3+m) στην εκτίμηση θέσης, τόσο κατά X όσο και κατά Y.

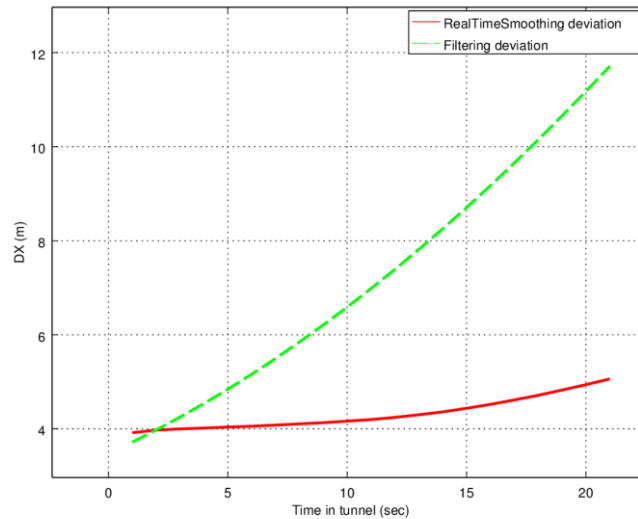
9.1.2 Έλεγχος Απόδοσης σε Συνθήκες Απώλειας Δορυφορικού Σήματος

Μια ακόμα περίπτωση, που κρίθηκε ενδιαφέρουσα ως προς την αξιολόγηση του αλγόριθμου, εμφανίζεται με την είσοδο του οχήματος καταγραφής σε σήραγγα, από την οποία εξήλθε μετά από περίπου 20 δευτερόλεπτα, με ταχύτητες κίνησης περί τα 16m/s. Όπως ήταν αναμενόμενο, παρατηρείται σημαντική ολίσθηση στις τιμές εκτίμησης κατάστασης κίνησης εντός τις σήραγγας, καθώς, το διάνυσμα των παρατηρήσεων δεν περιέχει μετρήσεις GNSS και η εκτίμηση κατάστασης προκύπτει από τις μετρήσεις της αδρανειακής μονάδας, με τις γνωστές επιπτώσεις. Ωστόσο, οι σοβαρές ολισθήσεις παρατηρούνται στις μετρήσεις των επιταχυνσιόμετρων, κυρίως. Η απόδοση των γυροσκοπίων μιας αδρανειακής μονάδας τακτικού βαθμού επηρεάζεται λιγότερο σε χρονικά διαστήματα της τάξης των μερικών λεπτών. Καθώς ο ρυθμός ολίσθησής τους είναι ομαλός, οι διαδοχικοί υπολογισμοί εκτροπής και διατοιχισμού φαίνεται να αποφέρουν διαφορές από θέση σε θέση, σχεδόν σε αναλογία με την απόδοση του ολοκληρωμένου συστήματος πλοήγησης υπό κανονικές συνθήκες. Η μεθοδολογία της σημειακής ταξινόμησης σε αυτήν την περίπτωση, προφανώς πλεονεκτεί.

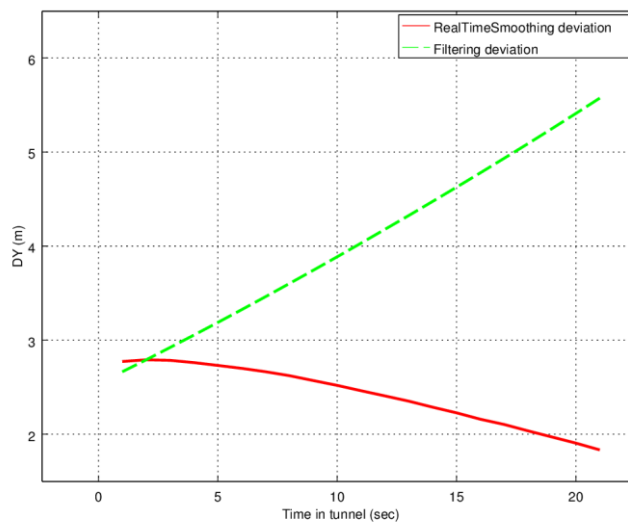


Σχήμα 9.4 Αποτύπωση Σημείων Θέσης Φιλτραρίσματος και Σημείων Εξομάλυνσης Θέσης Πραγματικού Χρόνου σε Συνθήκες Απώλειας Δορυφορικού Σήματος

Στο Σχ. 9.4 αντιστοίχως, με πράσινα στίγματα αποτυπώνονται οι εκτιμήσεις θέσης από τον υπολογισμό της βέλτιστης κατάστασης πλοήγησης σε πραγματικό χρόνο, με κόκκινα στίγματα αποτυπώνονται οι εκτιμήσεις εξομάλυνσης θέσης σε πραγματικό χρόνο και με μπλε συμπαγή γραμμή αποτυπώνεται η τροχιά αναφοράς. Εδώ, γίνεται αντιληπτή η επίπτωση που μπορεί να αποφέρει στον υπολογισμό της γεωμετρικής εξομάλυνσης θέσης σε πραγματικό χρόνο, ο επαναπροσδιορισμός της βέλτιστης καμπύλης από ένα σύνολο σημείων, στο οποίο έχουν συμπεριληφθεί αρκετά σημεία με σημαντικές αποκλίσεις από τις πραγματικές τιμές. Σε τέτοια περίπτωση, το μειονέκτημα της προτεινόμενης μεθοδολογίας είναι ότι η γεωμετρική εξομάλυνση οφείλει να κουβαλήσει την γεωμετρική πληροφορία κάθε σημείου ταξινόμησης, επωμιζόμενη και τις επιπτώσεις των αποκλίσεων τους, ενώ αντιθέτως, με την επαναφορά της διαθεσιμότητας παρακολούθησης του δορυφορικού σήματος, οι εκτιμήσεις κατάστασης διορθώνονται σε επίπεδα απόδοσης GNSS. Η ευνοϊκή περίπτωση για την προτεινόμενη μεθοδολογία θα ήταν μια μακρά σειρά σημείων με ταξινομήσεις στην ίδια κλάση πριν την είσοδο του οχήματος σε συνθήκες ολικής απώλειας δορυφορικού σήματος, η οποία ιδανικά θα ακολουθείτο από άλλη μια μακρά σειρά σημείων με ταξινομήσεις στην ίδια κλάση, ώστε τελικά οι επιπτώσεις που επιφέρουν στην γεωμετρική εξομάλυνση των σημείων θέσης οι αποκλίσεις κατά την διάρκεια κίνησης σε συνθήκες ολικής απώλειας δορυφορικού σήματος, να μετριάζονται.



Σχήμα 9.5 Διαφορές Τετμημένης μεταξύ Εξομάλυνσης πραγματικού χρόνου και Εκτίμησης Θέσης Σημείου Ταξινόμησης σε περιοχή Ολικής Απώλειας Δορυφορικού Σήματος



Σχήμα 9.6 Διαφορές Τεταγμένης μεταξύ Εξομάλυνσης πραγματικού χρόνου και Εκτίμησης Θέσης Σημείου Ταξινόμησης σε περιοχή Κακής Λήψης Δορυφορικού Σήματος

Εντός όμως του κρίσιμου διαστήματος, η προτεινόμενη μεθοδολογία επιφέρει σημαντικές διορθώσεις σε πραγματικό χρόνο στις εκτιμήσεις θέσεις κατά την πλοήγηση/καθοδήγηση του οχήματος. Τα Σχ. 9.5 και 9.6 αποτυπώνουν την απόδοση κατά X και Y , της γεωμετρικής εξομάλυνσης σημείων ίδιας ταξινόμησης σε σχέση με την απόδοση του φίλτρου βέλτιστης εκτίμησης θέσης σε πραγματικό χρόνο, όταν η δρεζίνα κινείται εντός της σήραγγας. Τα αποτελέσματα είναι εντυπωσιακά. Στην κρίσιμη περιοχή, η προτεινόμενη μεθοδολογία επιφέρει διορθώσεις της τάξης των επτά και πλέον μέτρων ($7+m$) στην εκτίμηση θέσης κατά X και διορθώσεις της τάξης των τεσσάρων μέτρων ($4m$) στην εκτίμηση θέσης κατά Y .

9.2 Εξαγωγή Γεωμετρίας Στοιχείων Χάραξης Οδού

Η ακριβής καταγραφή της υλοποίησης (as-built) της χάραξης ενός έργου οδοποιίας και ο ακριβέστερος, το δυνατόν, εντοπισμός των σημείων εναλλαγής των γεωμετρικών της στοιχείων της, είναι τεχνικό πρόβλημα στο οποίο η προτεινόμενη μεθοδολογία βρίσκει ουσιαστική εφαρμογή. Κι αν η ταχεία και ακριβής τοπογραφία της υφιστάμενης κατασκευής ενός έργου οδοποιίας είναι λυμένο τεχνικό θέμα, ο ακριβής προσδιορισμός της χιλιομετρικής θέσης της αλλαγής των γεωμετρικών στοιχείων της χάραξης, με εφαρμογή μεθοδολογίας κινηματικού εντοπισμού, είναι ακόμα ανοιχτό ζήτημα για την επιστημονική περιοχή της *κινητής χαρτογράφησης* (mobile mapping). Καθώς η υλοποίηση της κατασκευής, πολύ συχνά (και φυσιολογικά), παρουσιάζει διαφορές από την μελέτη χάραξης, το ζήτημα μπορεί να αναχθεί στον εντοπισμό ενός εύρους πιθανών σημείων μετάβασης.

Η μελέτη της εφαρμογής πραγματοποιείται πάνω στη χάραξη της σιδηροτροχιάς αμέσως μετά την εκπαίδευση των μηχανών ταξινόμησης. Είναι προφανές ότι τα Σχ. 8.1 και Σχ. 8.3 εικονογραφούν ουσιαστικά, και την εξαγωγή της γεωμετρίας χάραξης της σιδηροδρομικής οδού. Διαδοχικά σημεία ταξινόμησης στο ίδιο γραμμικό πρότυπο δημιουργούν γραμμή γνωστών γεωμετρικών και παραμετρικών χαρακτηριστικών (γραμμή πρώτου ή δεύτερου βαθμού κτλ), η αναλυτική εξίσωση της οποίας υπολογίζεται με απλή αναδρομική ανέλιξης ελαχίστων τετραγώνων. Στη συνέχεια, η οριστική παραμετρική μορφή της γραμμής ανάγεται σε στοιχείο της γεωμετρίας χάραξης του άξονα του δρόμου και μάλιστα σε (σχεδόν) πραγματικό χρόνο. Με αφετηρία ένα σημείο που δεν ταξινομείται στην ίδια κλάση με τα αμέσως προηγούμενά του (και δεν τυγχάνει να είναι σημείο λανθασμένης ταξινόμησης), δημιουργείται νέα διαδικασία αναδρομικής ανέλιξης. Η τυπική αλληλουχία στην γεωμετρία χάραξης ενός έργου οδοποιίας είναι καμπύλη συναρμογής μεταξύ κάθε μετάβασης από ευθεία σε κυκλικό τόξο και το αντίστροφο. Η καμπύλη συναρμογής είναι συνήθως γραμμική μεταβαλλόμενης καμπυλότητας.

9.2.1 Εντοπισμός Σημείων Συνένωσης Στοιχείων Χάραξης

Το ζήτημα σε αυτό το σημείο, είναι αν η εκτίμηση θέσης που κείται κοντά στα πιθανά υλοποιημένα σημεία αλλαγής της γεωμετρίας χάραξης έχει ταξινομηθεί σωστά. Αν έχει ταξινομηθεί σωστά, τότε, το εύρος εντοπισμού του υλοποιημένου σημείου συνένωσης δύο διαδοχικών στοιχείων χάραξης εξαρτάται μόνον από τον ρυθμό καταγραφής των κινηματικών δεδομένων και από την δυναμική της κίνησης. Και αυτό είναι ένα στοιχείο διαφοροποίησης που εισάγει στην εφαρμογή της *αυτόματης εξαγωγής της as-built γεωμετρίας χάραξης οδοποιίας* η προτεινόμενη μεθοδολογία. Με βάση τις εκτιμήσεις ταχύτητας σε κάθε θέση $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{east} \\ \hat{x}_{north} \end{bmatrix}$ και τον ρυθμό καταγραφής log_{rate} Hz το ελάχιστο εύρος εντοπισμού πιθανού σημείου μετάβασης στη γεωμετρία της χάραξης σε m , υπολογίζεται ως

$$transition_{width} = \frac{\hat{x}}{2 log_{rate}}.$$

Είναι προφανές ότι το ελάχιστο εύρος εντοπισμού μειώνεται όσο σημειώνονται μεγάλοι ρυθμοί καταγραφής κινηματικών δεδομένων σε χαμηλές ταχύτητες κίνησης. Διαισθητικά ωστόσο, προτείνεται κατά τον σχεδιασμό ένας ορθολογισμός στις επιλογές των παραμέτρων ταχύτητας κίνησης και ρυθμού καταγραφής στα πλαίσια των απαιτήσεων της εφαρμογής. Άλλωστε, η επιτυχία σωστής ταξινόμησης έγκειται στην εκπαίδευση της μηχανής και ως εκ τούτου, τα νέα δεδομένα εισόδου οφείλουν να βρίσκονται μέσα στα όρια γενίκευσης που μπορεί να επιτύχει. Οι πολύ χαμηλές

ταχύτητες, τουλάχιστον για τις εφαρμογές πλοήγησης σιδηροδρόμου, προκαλούν συνήθως εντονότερους κραδασμούς, συσσωρεύοντας περισσότερο τυχαίο θόρυβο στις μετρήσεις των γυροσκοπίων της αδρανειακής μονάδας.

9.2.2 Αποτελέσματα Ταξινόμησης Πιθανών Σημείων Συνένωσης

Ο έλεγχος της ΜΜΜΕ πραγματοποιήθηκε σε ίχνος τροχιάς 26 εναλλαγών γεωμετρικών στοιχείων χάραξης, με εκτίμηση μέσης ταχύτητας επί του εδάφους (Σχ. 6.8) περί τα 16m/s. Αυτό σημαίνει, ότι με σωστές ταξινομήσεις στα πιθανά σημεία μετάβασης μετά από καταγραφή 1Hz, η μηχανή εντοπίζει το υλοποιημένο σημείο μετάβασης στο έδαφος σε εύρος περίπου 8m επί της κατασκευής. Με βάση τα αποτελέσματα της εφαρμογής της, η μηχανή επιτυγχάνει 16 σωστές ταξινομήσεις επί των πιθανών σημείων μετάβασης και αστοχεί σε 10, εκ των οποίων οι 7 αφορούν λανθασμένη ταξινόμηση ενός σημείου από τα πιθανά σημεία μετάβασης αυξάνοντας το εύρος εντοπισμού στα περίπου 16m, και τρεις αφορούν λανθασμένη ταξινόμηση δύο διαδοχικών σημείων από τα πιθανά σημεία μετάβασης αυξάνοντας το εύρος εντοπισμού στα περίπου 24m.

Αντιστοίχως, ο έλεγχος της ΜμΜΕ πραγματοποιήθηκε σε ίχνος τροχιάς 56 εναλλαγών γεωμετρικών στοιχείων χάραξης. Με βάση τα αποτελέσματα της, η μηχανή επιτυγχάνει 34 σωστές ταξινομήσεις επί των πιθανών σημείων μετάβασης και αστοχεί σε 22. Από αυτές οι 15 αφορούν λανθασμένη ταξινόμηση ενός σημείου από τα πιθανά σημεία μετάβασης, τρεις αφορούν λανθασμένη ταξινόμηση δύο διαδοχικών σημείων από τα πιθανά σημεία μετάβασης, και 4 λανθασμένη ταξινόμηση τριών ή και περισσότερων διαδοχικών σημείων σε περιοχές εναλλαγής της γεωμετρίας χάραξης.

Σε μία από αυτές τις 4 περιπτώσεις, παρατηρείται αστοχία ταξινόμησης 11 διαδοχικών σημείων σε περιοχή μετάβασης από καμπύλη συναρμογής σε κυκλικό τόξο (Σχ. 8.3). Ωστόσο αυτή είναι μια σπάνια περίπτωση οριστικής χάραξης γεωμετρίας στη *μοντέρνα* οδοποιία καθώς, προβλέπει μετάβαση από κυκλικό τόξο καμπυλότητας κ_1^s σε ομόρροπης κυρτότητας κυκλικό τόξο και καμπυλότητας $\kappa_2^s < \kappa_1^s$, οξύνοντας την καμπύλη κατεύθυνσης. Ακόμα κι αν η υλοποίηση μιας τέτοιας χάραξης στο έδαφος δεν υποφέρει από (φυσιολογικούς) κατασκευαστικούς περιορισμούς, μεταξύ των παραδειγμάτων εκπαίδευσης για την ΜμΜΕ δεν περιλαμβάνεται τέτοια περίπτωση. Η αστοχία ενδεχομένως έρχεται φυσιολογικά. Κι εδώ, θα μπορούσε να τεθεί θέμα μη γενικευμένης απόδοσης της μηχανής. Ωστόσο, από τα 11 διαδοχικά σημεία-εκτίμηση θέσης που η ΜμΜΕ ταξινομεί λανθασμένα, τα 9 είναι σημεία που θα έπρεπε να έχουν ταξινομηθεί ως σημεία της καμπύλης συναρμογής ενώ τα δυο τελευταία ως σημεία του κυκλικού τόξου καμπυλότητας κ_2^s . Επιπλέον, η ΜμΜΕ ταξινομεί λανθασμένα και μερικά ενδιάμεσα σημεία του ίδιου τόξου, όταν σε 5 διαδοχικές εναλλαγές πριν, και σε 4 διαδοχικές εναλλαγές στοιχείων χάραξης μετά από την συγκεκριμένη περιοχή, σημειώνει απόλυτη επιτυχία ταξινόμησης (όλα τα σημεία). Επομένως, η κατασκευαστική αστοχία στην υλοποίηση της συγκεκριμένης σιδηροδρομικής χάραξης, δεν μπορεί να αποκλειστεί.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί επίσης, ότι σε κάθε περίπτωση εναλλαγής κυκλικών τόξων αντίρροπης καμπυλότητας στη χάραξη της τροχιάς ελέγχου (σχεδιασμός S), η ΜμΜΕ σημειώνει πολύ καλά αποτελέσματα.

Ο Πιν. 9.1 συγκεντρώνει τα ποσοστά επιτυχίας προσδιορισμού του ελάχιστου εύρους εντοπισμού για κάθε μηχανή.

Επιτυχία (%) ελάχιστου εύρους εντοπισμού σημείου συναρμογής	$transition_{width}$ (8m)	$2 transition_{width}$ (16m)	$> 2 transition_{width}$ (>16m)
Μηχανή μικρού Μήκους Εκπαίδευσης	34/56 (61%)	15/56 (27%)	7/56 (11%)
Μηχανή Μεγάλου Μήκους Εκπαίδευσης	16/26 (61%)	7/26 (27%)	3/26 (11%)

Πίνακας 9. 1 Ποσοστά επιτυχίας καθορισμού ελάχιστου εύρους εντοπισμού

Ενδιαφέρον στοιχείο, αποτελεί το γεγονός ότι στη σύγκριση της επιτυχίας ταξινόμησης πάνω στην κοινή τροχιά ελέγχου για τις δυο μηχανές, η MMME διορθώνει στο ελάχιστο εύρος εντοπισμού μόλις 2 περιοχές εναλλαγής που σημεία τους ταξινομήθηκαν λανθασμένα από την ΜμΜΕ. Παρατηρείται δε, ότι υπάρχουν και 2 περιοχές εναλλαγής οι οποίες διορθώνονται στο ελάχιστο εύρος μετάβασης από την ΜμΜΕ, όταν η MMME είχε ταξινομήσει λανθασμένα δύο διαδοχικά σημεία από τα πιθανά σημεία μετάβασης και στις δύο αυτές περιοχές.

Τελικά, η ταυτοποίηση των στοιχείων του Πιν. 9.1 υποδηλώνει την αποτελεσματικότητα της εφαρμογής της μεθοδολογίας σε εφαρμογές *αυτόματης εξαγωγής as-built γεωμετρίας χάραξης*: ακόμα και σε σχέση με μεθοδολογίες που έχουν εφαρμοστεί κατά το πρόσφατο παρελθόν. Άλλωστε, η δυνατότητα εφαρμογής της προτεινόμενης μεθοδολογίας σε πραγματικό χρόνο, αποτελεί από μόνη της στοιχείο καινοτομίας για την σχετική επιστημονική περιοχή. Η βασική διαφοροποίηση της προτεινόμενης μεθοδολογίας είναι ότι ενώ στις υπόλοιπες σχετικές μεθοδολογίες κάθε σημείο-εκτίμηση θέσης της τροχιάς ελέγχεται εκ των υστέρων –κι ενώ είναι διαθέσιμο το σύνολο των επόμενων εκτιμήσεων θέσης- αν ανήκει ή όχι σε ομάδα σημείων με κοινά αναλυτικά χαρακτηριστικά (moving window, *κινούμενο παράθυρο* κατά μήκος του συνόλου των σημείων-εκτίμησης θέσης της τροχιάς), η προτεινόμενη μεθοδολογία δεσμεύει κάθε νέα εκτίμηση θέσης να ανήκει εκ των προτέρων σε ομάδα σημείων με κοινές γεωμετρικές ιδιότητες.

Κεφάλαιο 10^ο

Αποτίμηση

Η παρούσα εργασία διερευνά την εφαρμογή μοντέλων LS-SVM για την αναγνώριση των γραμμικών γεωμετρικών προτύπων της τροχιάς ενός οχήματος σε κατάσταση καθοδήγησης.

Στην πρόσφατη βιβλιογραφία δεν εντοπίζεται εφαρμογή μεθοδολογίας αναγνώρισης προτύπου σε γεωδαιτικές εφαρμογές κινηματικού εντοπισμού. Υπό αυτή τη σκοπιά, η παρούσα εργασία αποτελεί την πρώτη εφαρμογή ταξινόμησης προτύπου για ζητήματα Πλοήγησης/Καθοδήγησης διεθνώς.

Συγκεκριμένα, η παρούσα εργασία παρουσιάζει στοιχεία καινοτομίας στα εξής σημεία:

Πρώτον: εφαρμόζει σε σημειακές οντότητες θέσης ένα μη γραμμικό μοντέλο απόφασης διαχωρισμού, με σκοπό την ταυτοποίηση των γραμμικών οντοτήτων που συνθέτουν το ίχνος της τροχιάς, σε πραγματικό χρόνο.

Δεύτερον: επιτυγχάνει αυτόματη/ευφυή εξαγωγή της γεωμετρίας της τροχιάς με τη μορφή καμπυλών γνωστών γεωμετρικών χαρακτηριστικών. Η βασική διαφοροποίηση της προτεινόμενης προσέγγισης από αντίστοιχες μεθοδολογίες είναι ότι δεσμεύει κάθε νέα εκτίμηση θέσης να ανήκει σε ομάδα/ακολουθία σημείων με κοινές γεωμετρικές ιδιότητες *εκ των προτέρων*. Δεν είναι διεργασία υπολογισμών *εκ των υστέρων*.

Τρίτον: εκμεταλλεύεται την *επίγνωση* της τρέχουσας γεωμετρίας της κίνησης και με βάση την επιτυχία της σημειακής ταξινόμησης, αποδίδει εκτιμήσεις *γεωμετρικής* εξομάλυνσης της κατάστασης θέσης σε πραγματικό χρόνο. Δεν είναι διεργασία υπολογισμών *εκ των υστέρων*. Η αξιοποίηση γεωμετρικής πληροφορίας για την εκτίμηση εξομάλυνσης θέσης σε πραγματικό χρόνο είναι μια νέα αντίληψη η οποία παρουσιάζει ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά.

Η επιτυχία της προτεινόμενης μεθοδολογίας έγκειται στην καταλληλότητα του αξιώματος κατηγοριοποίησης. Η σύλληψη του απλού τεχνάσματος εφαρμογής συνδυασμών της διαφοράς εκτροπής και της διαφοράς διατοιχισμού από θέση σε θέση ως δεδομένα εκπαίδευσης παρακάμπτει το πρόβλημα της άγνωστης τιμής της καμπυλότητας κατά την εξέλιξη της κίνησης.

Πολύ σημαντικό στοιχείο της μεθοδολογίας είναι ότι, ακριβώς λόγω της αξιοποίησης των υποκειμένων δεσμεύσεων πάνω στις οποίες εκπαιδεύεται ο αλγόριθμος, η απόδοση ταξινόμησης δεν επηρεάζεται από την ποιότητα της λύσης εντοπισμού.

Η απόδοση της μηχανής είναι ολοκληρωτικά θέμα εκπαίδευσης. Η προσέγγιση ως προς τον σχεδιασμό της είναι κατά κάποιο τρόπο *ενορατική* καθώς, δεν υπάρχει βασικός κανόνας για την διαμόρφωση των κατάλληλων δεδομένων εκπαίδευσης. Η επάρκεια της εκπαίδευσης ελέγχεται, ουσιαστικά, από την αξιολόγηση της γενικευμένης απόδοσης της μηχανής, πάνω σε δεδομένα εισόδου που δεν είναι μεταξύ των παραδειγμάτων μάθησης.

Με βάση τα πειραματικά αποτελέσματα, η προτεινόμενη μεθοδολογία παρουσίασε πολύ υψηλά επίπεδα γενικευμένης απόδοσης κατά την εφαρμογή της σε άγνωστη διαδρομή, ισχυροποιώντας την καταλληλότητα του αξιώματος ταξινόμησης. Πράγματι, το γραμμικό πρότυπο της τροχιάς αναγνωρίστηκε σε επίπεδο 95% επί του συνόλου των σημείων-εκτίμηση θέσης που ταξινομήθηκαν σε κάποια γραμμική κλάση. Η συσσώρευση τυχαίου θορύβου στις μετρήσεις των γυροσκοπίων, σε βαθμό που υπερβαίνει τα όρια γενίκευσης της μηχανής, δικαιολογημένα επιφέρει άστοχα

αποτελέσματα ταξινόμησης.

Η μεθοδολογία της σημειακής ταξινόμησης σε γραμμικά πρότυπα βρίσκει ουσιαστική εφαρμογή στην αυτόματη εξαγωγή as-built γεωμετρικών στοιχείων χάραξης οδοποιίας. Με την εφαρμογή της, το εύρος εντοπισμού του υλοποιημένου (στο έδαφος) σημείου συνένωσης δύο διαδοχικών στοιχείων χάραξης εξαρτάται μόνον από τον ρυθμό καταγραφής των κινηματικών δεδομένων και από την δυναμική της κίνησης. Με βάση την εκπαίδευσή της, η μηχανή απέδωσε το ελάχιστο εύρος εντοπισμού σε ποσοστό 60%.

Η σημειακή ταξινόμηση σε γραμμικά πρότυπα εξετάστηκε και κάτω από συνθήκες κρίσιμου ερευνητικού ενδιαφέροντος για την περιοχή της Πλοήγησης/Καθοδήγησης. Σε περιοχές κακής λήψης δορυφορικού σήματος η συγκεκριμένη εφαρμογή της μεθοδολογίας παρείχε στις, υπολογισμένες σε πραγματικό χρόνο, εκτιμήσεις θέσης πλοήγησης, διορθώσεις της τάξης των $3+ m$ κατά τετμημένη και τεταγμένη, ως προς την θέση αναφοράς. Σε συνθήκες ολικής απώλειας δορυφορικού σήματος η γεωμετρική εξομάλυνση κατάστασης θέσης έδωσε διορθώσεις ως και $7+ m$ κατά τετμημένη και $4m$ κατά τεταγμένη. Το μειονέκτημα της μεθοδολογίας σε αυτό το σημείο, είναι ότι η γεωμετρική εξομάλυνση φέρει τη πληροφορία θέσης κάθε ταξινομημένου σημείου στην ίδια γραμμή, επωμιζόμενη και τις επιπτώσεις των αποκλίσεων τους.

Κλείνοντας, θα ήταν σκόπιμο να επιχειρηθεί μια αξιολόγηση της προτεινόμενης μεθοδολογίας σε ευρύτερο πλαίσιο.

Η παρούσα εργασία είναι βασικά ένα απλό παράδειγμα σύνθεσης μεθόδων από μη συγγενείς επιστημονικές περιοχές. Η μελέτη για τους τρόπους εφαρμογής μιας μεθόδου επιβλεπόμενης μηχανικής μάθησης σε ζητήματα πλοήγησης εξήγαγε χρήσιμα συμπεράσματα για τις δυνατότητες που μπορεί να προσφέρει η υπολογιστική της ισχύς. Ανέδειξε όμως, κι ότι απαιτείται μεγάλη προσοχή στους θεωρητικούς περιορισμούς που επιβάλλουν τα δομικά συστατικά της προτεινόμενης σύνθεσης. Η επιβλεπόμενη μηχανική μάθηση βρίσκει έδαφος εφαρμογής στη περιοχή της Πλοήγησης. Όχι όμως ως το “μαύρο κουτί” που παρέχει “μαγικές” λύσεις. Παράδειγμα είναι οι προσεγγίσεις προτυποποίησης των ολισθήσεων αδρανειακών αισθητήρων, μέσω της υλοποίησης διάφορων μεθόδων μηχανικής μάθησης. Η ευρύτητα των εφαρμογών της βασίζεται ακριβώς στο ότι επιτρέπει μεγαλύτερη ευελιξία, ως προς τις προτυποποιήσεις που τα κλασικά μαθηματικά δυσκολεύονται να χειριστούν· θα μπορούσαν όμως να καλύψουν, εάν η κινηματική εφαρμογή επέτρεπε μεγαλύτερη ανοχή ως προς την απόδοση γενίκευσης.

Σε θεμελιακό επίπεδο, η επιτυχία της προτεινόμενης μεθοδολογίας έγκειται στην εύρωστη απόδοση του συστήματος πλοήγησης και του υλοποιημένου αλγόριθμου βέλτιστης εκτίμησης της κινηματικής κατάστασης. Η κίνηση στη γενική της μορφή είναι πολύπλοκο δυναμικό φαινόμενο και, η επιτυχία ενός τέτοιου αλγόριθμου εξαρτάται σημαντικά από την επιλογή του μαθηματικού προτύπου που προσεγγίζει ουσιαστικά την *πραγματική* δυναμική της κίνησης.

Βιβλιογραφία

1. **"The Concise Oxford Dictionary** (9th Edition)", Oxford University Press, Oxford, UK, 1995.
2. Aizerman M. A., Braverman È. M. and Rozonoér L. I., **"Theoretical foundation of the potential function method in pattern recognition learning"**, *Automation and Remote Control*, Vol. 25, pp. 821-837, 1964.
3. Anguita D., Boni A. and Ridella S., **"Evaluating the generalisation ability of support vector machines through bootstrap"**, *Neural Processing Letters*, Vol. 11, No. 1, pp. 51-58, 2000.
4. Anthony M., Bartlett P., **"Neural Network Learning: Theoretical Foundation"**, Cambridge University Press, NY, New York US, 1999.
5. Arbib M. A., **"The Handbook of Brain Theory and Neural Networks"**, MIT Press, Cambridge, Massachusetts US, 1995.
6. Aronszajn N., **"Theory of reproducing kernels"**, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 68, pp. 337-404, 1950.
7. Ashkenazi V., **"Coordinate Systems: How to Get Your Position Very Precise and Completely Wrong"**, *The Royal Institute of Navigation, Journal of Navigation*, Vol. 39, No. 2, pp. 269-278, 1986.
8. Bar-Shalom Y., and Fortmann T. E., **"Tracking and Data Association"**, Academic Press, NY, New York US, 1988.
9. Bar-Shalom Y., Li X. R. and Kirubarajan T., **"Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms and Software"**, Wiley, NY, New York US, 2001.
10. Bellman R., **"Dynamic Programming"**, Princeton University Press, New Jersey US, 1957.
11. Bennet S., **"A history of control engineering 1800-1930"**, IEE Control Engineering Series 8, Peter Perigrinus Ltd., London, UK, 1979.
12. Bertsekas D. P., **"Constrained Optimisation and Lagrange Multipliers Methods"**, Academic Press, NY, New York US, 1982.
13. Bertsekas D. P., **"Nonlinear Programming"**, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts US, 1995.
14. Bishop C. M., **"Neural Networks for Pattern Recognition"**, Clarendon Press, Oxford, UK, 1996.
15. Bode H. W. and Shannon C. E., **"A simplified derivation of linear least-squares smoothing and prediction"**, *Proceedings of the Institute of Radio Engineers – IRE*, Vol.48, pp. 417-425, 1950.
16. Bomford G., **"Geodesy** (4th Edition)", Charleston Press, London, UK, 1980.
17. Bortz J. E., **"A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation"**, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES 07, No. 1, pp. 61-66, 1971.
18. Boser B. E., Guyon I. M. and Vapnik V., **"A training algorithm for optimal margin classifiers"**, *Proceedings of the 5th Annual ACM Workshop on Computational Learning Theory*, pp. 144-152, ACM Press, Pittsburgh, Philadelphia US, July 1992.
19. Boucher C. et al., **"The ITRF 2000"**, *International Earth Rotation and Reference Systems Service Technical Note*, No. 31, 2004.
20. Brilakis I., German S. and Zhu Z., **"Visual Pattern Recognition Models for Remote Sensing of Civil Infrastructure"**, *Journal of Computing in Civil Engineering*, Vol. 25, Issue 05, pp. 388-393, 2011.
21. Britting K. R., **"Inertial Navigation Systems Analysis"**, Wiley, NY, New York US, 1971.
22. Brogan W. L., **"Modern Control Theory"**, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey US, 1985.

23. Brown R. G. and Hwhang P. Y., "**Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering: With MATLAB Exercises and Solutions** (3rd Edition)", Wiley, NY, New York US, 1997.
24. Bucy R. C., "**Nonlinear filtering theory**", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-10, pp. 198-206, 1965.
25. Bucy R. S. and Joseph P. D., "**Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance**", Wiley, NY, New York US, 1968.
26. Burges C. J. C., "**A tutorial on support vector machines for pattern recognition**", *Data Mining and Knowledge Discovery*, Vol. 2, No. 2, pp. 67-121, 1998.
27. Cambell D. P., "**Process Dynamics**", John Wiley & Sons NY, New York US, 1958.
28. Cannon R., "**Dynamics of Physical Systems**", McGraw-Hill Book Company, NY, New York US, 1967.
29. Chen H. F., "**Recursive Estimation and Control of Stochastic Systems**", Wiley, NY, New York US, 1985.
30. Christianini N. and Shawe-Taylor J., "**An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-Based Learning Methods**", Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
31. Cosido O. et al., "**Hybridisation of Convergent Photogrammetry, Computer Vision and Artificial Intelligence for Digital Documentation of Cultural Heritage – A case study: The Magdalena Palace**", *Proceedings of the IEEE International Conference on Cyberworlds*, Santander, Spain, Oct. 6-8, 2014.
32. Courant R. and Hilbert D., "**Methods of Mathematical Physics**", Interscience Publishers, NY, New York US, 1950.
33. Cover T. M., "**Geometrical and statistical properties of systems of linear inequalities with applications in pattern recognition**", *IEEE Transactions on Electronic Computers*, Vol. 14, pp. 326-334, 1965.
34. Cox D. R. and Miller H. D., "**The Theory of Stochastic Processes**", Chapman and Hall, London, UK, 1965.
35. Cunningham W. J., "**Introduction to Nonlinear Analysis**", McGraw-Hill, NY, New York US, 1958.
36. Dorf R. C. and Bishop R. H., "**Modern Control Systems** (9th Edition)", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey US, 2001.
37. El-Rabbany A., "**Introduction to GPS: The Global Positioning System** (2nd Edition)", Artech House, Norwood, Massachusetts US, 2006.
38. Fagin S. L., "**Recursive Linear Regression Theory, Optimal Filter Theory and Error Analysis of Optimal Systems**", *IEEE Intern. Conv. Record*, Vol. 12, pp. 216-240, 1964.
39. Farrel J. A. and Barth M., "**The Global Positioning System and Inertial Navigation**", McGraw-Hill, NY, New York US, 1999.
40. Fauvel M., Chanussot J. and Benediktsson J. A., "**A spatial-spectral kernel-based approach for the classification of remote sensing images**", *Journal of Pattern Recognition*, Vol. 45, Issue 01, pp. 381-392, 2012.
41. Fischer R. A., "**The use of multiple measurements in taxonomic problems**", *Annual of Eugenics*, Vol. 7, pp. 179-188, 1936.
42. Fitzgerald R. J., "**Divergence of the Kalman filter**", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. AC-16, pp. 736-743, 1971.
43. Fletcher R., "**Practical Methods of Optimisation**", John Wiley & Sons, NY, New York US, 1987.
44. Frangos K., "**Process Learning Regression for the Performance Enhancement of a Hybrid Filtering Concept in Land-based Navigation Applications**", *Proceedings of the Institute Of Navigation Conference ION-GNSS*, Portland, Oregon US, Sep 19-23, 2011.

45. Frangos K., Kealy A., Gikas V. and Rabiain A., "**Dynamic Modelling for Land Mobile Navigation Using Low-Cost Inertial Sensors and Least Squares Support Vector Machine Learning**", *Proceedings of the Institute Of Navigation Conference ION-GNSS*, Portland, Oregon US, Sept. 21-24, 2010.
46. Gauss K. F., "**Theoria Motus**", 1809.
47. Gauss K. F., "**Theory of the Motion of the Heavenly Bodies About the Sun in Conic Sections: A Translation of Theoria Motus**", Dover Publications Inc., NY, New York US, 2004.
48. Gelb A., Kasper J. F. Jr., Nash R. A. Jr., Price C. F. and Sutherland A. A. Jr., "**Applied Optimal Estimation**", MIT Press, Cambridge, Massachusetts US, 1974.
49. Gibbs M., "**Bayesian Gaussian Methods for Regression and Classification**", PhD. Thesis, Cambridge University, Cambridge, UK, 1997.
50. Girosi F., "**On some extensions of radial basis functions and their applications in artificial intelligence**", *Computers Math. Applications*, Vol. 24, No. 12, pp. 61-80, 1992.
51. Golub G. H. and Van Loan C. F., "**Matrix Computations (3rd Edition)**", John Hopkins University Press, Baltimore, Maryland US, 1996.
52. Grewal M. S., Weil L. R. and Andrews A. P., "**Global Positioning Systems, Inertial Navigation and Integration**", Wiley, NY, New York US, 2001.
53. Groves P. D., "**Principles of Integrated Navigation**", Course Notes, QinetiQ Ltd., University College of London, UK, 2002.
54. Haykin S., "**Neural Networks: A Comprehensive Foundation (2nd Edition)**", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey US, 1999.
55. Hein G. W. et al., "**Performance of Galileo L1 Signal Candidates**", *Proceedings of the European Navigation Conference ENC-GNSS*, Rotterdam, the Netherlands, May 2004.
56. Hestenes M. R. and Stiefel E., "**Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems**", *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol. 49, No. 6, 1952.
57. Horn R. A. and Johnson C. R., "**Matrix Analysis**", Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.
58. Jazwinski A. H., "**Stochastic Processes and Filtering Theory**", Academic Press, NY, New York US, 1970.
59. Kalman R. E. and Bucy R. S., "**New results in linear filtering and prediction theory**", *ASME Journal of Basic Engineering*, Series D, Vol. 83, pp. 95-108, 1961.
60. Kalman R. E., "**Contributions to the theory of optimal control**", *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, Vol. 5, pp. 102-119, 1960.
61. Kalman R. E., "**New methods in Wiener filtering**", *Proceedings of the First Symposium on Engineering Applications of Random Function Theory and Probability*, Wiley, NY, New York US, 1963.
62. Kalman R. E., Falb P. and Arbib M., "**Topics in mathematical system theory**", McGraw-Hill, NY, New York US, 1969.
63. Kalman, R. E., "**A new approach to linear filtering and prediction problems**", *The American Society of Mechanical Engineers – ASME, Journal of Basic Engineering*, Vol. 82 pp. 34-45, 1960.
64. Kalman, R. E., "**New methods and results in linear prediction and filtering theory**", *Proceedings of the Symposium on Engineering Applications of Random Function Theory and Probability*, Wiley, NY, New York US, 1961.
65. Karamanou A., Papazisi K., Paradissis D. and Psiarianos B., "**Precise Estimation of Road Horizontal and Vertical Geometric Features Using Mobile Mapping Techniques**", *Proceedings of the 6th Symposium on Mobile Mapping Technology*, Sao Paolo, Brazil, Jul. 21-24, 2009.

66. Karush W., "**Minima of functions of several variables with inequalities as side constraints**", Master's Thesis, Dept. of Mathematics – University of Chicago, Illinois US, 1939.
67. Khun H. W. and Tucker A. W., "**Nonlinear Programming**", *Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probabilistics*, pp. 481-492, University of California Press, Berkeley, California US, 1951.
68. Kolmogorov A. A., "**Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitrechnung**", *Mathematische Annalen*, Vol. 104, pp.415-458, 1931.
69. Krutz C., Passat N., Gançarski P. and Puissant A., "**Extraction of complex patterns from multiresolution remote sensing images: A hierarchical top-down methodology**", *Journal of Pattern Recognition*, Vol. 45, Issue 02, pp. 685-706, 2012.
70. Lawler G. F., "**Introduction to Stochastic Processes**", Chapman and Hall, London, UK, 1995.
71. Lawrence A., "**Modern Inertial Technology** (2nd Edition)", Springer-Verlag, New York, NY US, 2001.
72. Levin W. S., "**Control System Fundamentals**", CRC Press, Boca Raton, Florida US, 2000.
73. Levin W. S., "**The Control Handbook**", CRC Press, Boca Raton, Florida US, 1996.
74. Luenberger D. G., "**Introduction to Linear and Nonlinear Programming**", Addison-Wesley, Reading, Massachusetts US, 1973.
75. Malys S. et al., "**Refinements to the World Geodetic System 1984**", *Proceedings of the Institute Of Navigation Conference ION-GPS*, Kansas City, Missouri US, pp. 915-920, Sept. 1997.
76. Mangasarian O. L., "**Nonlinear Programming**", *Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM Classics in Applied Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1994.
77. Maybeck P. S., "**Stochastic Models, Estimation and Control**", Vol. 1, Academic Press, NY, New York US, 1979.
78. Maybeck P. S., "**Stochastic Models, Estimation and Control**", Vol. 2, Academic Press, NY, New York US, 1982.
79. Mayr O., "**The origins of feedback control**", MIT Press, Cambridge, Massachusetts US, 1970.
80. McKay D. J. C., "**Bayesian interpolation**", *Neural Computation*, Vol. 4, pp. 415-447, 1992.
81. McKay D. J. C., "**Probable networks and plausible predictions – a review of practical Bayesian methods for supervised neural networks**", *Network: Computations in Neural Systems*, Vol. 6, pp. 469-505, 1995.
82. Mercer J., "**Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations**", *Philosophical Transactions, The Royal Society of London*, Vol. 209, pp. 415-446, 1909.
83. Misra P. and Enge P., "**Global Positioning System Signals, Measurements and Performance**", Ganga-Jamuna Press, Lincoln, Massachusetts US, 2011.
84. Neal R. M., "**Bayesian Learning for Neural Networks**", *Lecture Notes in Statistics*, Vol. 118, Springer, NY, New York US, 1996.
85. Nocedal J. and Wright S. J., "**Numerical Optimisation**", Springer-Verlag, NY, New York US, 1999. 3-54 3-63
86. Norris J. R., "**Markov Chains**", Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.
87. Novikoff A. B. J., "**On convergence proofs on perceptrons**", *Proceedings of the Symposium on the Mathematical Theory of Automata*, Vol. 12, pp. 615-622, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1962.
88. Ogata K., "**Discrete-Time Control Systems** (2nd Edition)", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey US, 1995.

89. Ogata K., "**Modern Control Engineering** (5th Edition)", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey US, 2010.
90. Ogata K., "**State Space Analysis of Control Systems**", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey US, 1967.
91. Ogata K., "**System Dynamics** (4th Edition)", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey US, 2004.
92. Pasquale N., Perona P., Wombacher A. and Burlando P., "**Hydrodynamic model calibration from pattern recognition of non-orthorectified terrestrial photographs**", *Computers and Geosciences*, Vol. 62, pp.160-167, 2014.
93. Rauch H. E., Tung F. and Striebel C. T., "**Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems**", *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics – AIAA*, Vol. 3, pp.1445-1450, 1965.
94. Renegar J., "**A Mathematical View of Interior Point Methods in Convex Optimisation**", *Mathematical Programming Society / Society for Industrial and Applied Mathematics MPS/SIAM Series on Optimisation 3*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
95. Revniviykh S. et al., "**GLONASS Status Performance and Perspectives**", *Proceedings of the Institute Of Navigation Conference ION-GNSS*, Long Beach, California US, Sept. 2005.
96. Ripley B. D., "**Pattern Recognition and Neural Networks**", Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996.
97. Rogers R. M., "**Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems**", *The American Institute of Aeronautics and Astronautics – AIAA*, Reston, Virginia US, 2000.
98. Rosenblatt F., "**The perceptron: A probabilistic model for information storage and organisation in the brain**", *Psychological Review*, Vol. 64, pp. 386-408, 1958.
99. Ross S. M., "**Stochastic Models** (7th Edition)", Academic Press, NY, New York US, 1997.
100. Rowell G. and Wormley D., "**System Dynamics**", Prentice Hall, New Jersey US, 1997.
101. Saadi G., Cawley C. and Talbot L. C., "**Fast exact leave-one-out cross-validation of least-squares support vector machines**", *Proceedings of the 10th European Symposium on Artificial Neural Networks – ESANN 2002*, pp. 149-154, Bruges, Belgium, 2002.
102. Salleh S. A., Abd Latif Z., Wan Mohd W. M. N. and Chan A., "**Albedo Pattern Recognition and Time-series Analysis in Malaysia**", *Proceedings of the International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spacial Information Sciences – ISPRS Congress*, Vol. 34 B7, pp. 235-240, Melbourne, Australia, Aug. 25 – Sept. 1, 2012.
103. Schölkopf B. and Smola A. J., "**Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularisation, Optimisation and Beyond**", MIT Press, Cambridge, Massachusetts US, 2002.
104. Schölkopf B., Burges C. J. C. and Smola A. J., "**Advances in Kernel Methods – Support Vector Learning**", MIT Press, Cambridge, Massachusetts US, 1999.
105. Schölkopf B., Sung K., Burges C. J. C., Girosi F., Niyogi P., Poggio T. and Vapnik V., "**Comparing support vector machines with Gaussian kernels to radial basis function classifiers**", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 45, pp. 2758-2765, 1997.
106. Seber G. F. A., "**Linear Regression Analysis**", John Wiley & Sons, NY, New York US, 1977.
107. Simon D., "**Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ and Nonlinear Approaches**", John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey US, 2006.
108. Smith J. R., "**Introduction to Geodesy: The History and Concepts of Modern Geodesy**", Wiley, NY, New York US, 1997.
109. Smola A. J., "**Learning with kernels**", PhD Thesis, Technische Universität Berlin, Germany, 1998.
110. Sobel D., "**Longtitude**", Forth Estate, London, UK, 1996.

111. Sorenson H. W., "**Least Squares Estimation: From Gauss to Kalman**", *IEEE Spectrum*, Vol. 7, No. 7, pp. 63-68, July 1970.
112. Sorg H. W., "**From Sensor to Draper – Two Centuries of Gyroscopic Development**", *Journal of the Institute Of Navigation JION*, Vol. 23, No. 4, pp.313-323, 1976.
113. Stoer J. and Burlisch R., "**Introduction to Numerical Analysis (2nd Edition)**", Springer-Verlag, NY, New York US, 1993.
114. Stratakos J., Gikas V. and Frangos K., "**A Multi-scale Curve Matching Technique for the Assessment of Road Alignment Using GPS/INS Data**", *Proceedings of the 6th Symposium on Mobile Mapping Technology*, Sao Paolo, Brazil, Jul. 21-24, 2009.
115. Stratakos J., Gikas V. and Frangos K., "**A Rigorous Algorithm for Automatic Centreline Geometry Extraction Using Multisensor Navigational Data**", *Proceeding of the 9th Conference on Optical 3D Measurement Techniques*, Vienna, Austria, Jul. 1-3, 2009.
116. Suykens J. A. K and Vanderwalle J., "**Least squares support vector machine classifiers**", *Neural Processing Letters*, Vol. 9, pp. 299-300, 1999.
117. Suykens J. A. K and Vanderwalle J., "**Multiclass least squares support vector machines**", *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks - IJCNN'99*, Vol. 2, pp. 900-903, Washington DC, US, 1999.
118. Suykens J. A. K and Vanderwalle J., "**Nonlinear Modelling: Advanced Black-box Techniques**", Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts US, 1998.
119. Suykens J. A. K, Vanderwalle J. and De Moor B., "**Artificial Neural Networks for Modelling and Control of Nonlinear Systems**", Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts US, 1996.
120. Suykens J. A. K., "**Least squares support vector machines for classification and nonlinear modelling**", *Neural Network World*, Vol. 10, pp. 29-47, 2000.
121. Suykens J. A. K., Lukas L. and Vanderwalle J., "**Sparse least-squares support vector machine classifiers**", *Proceedings of the 8th European Symposium on Artificial Neural Networks – ESANN 2000*, pp. 37-42, Bruges, Belgium, 2000.
122. Suykens J. A. K., Van Gestel T., De Brabanter J., De Moor B. and Vanderwalle J., "**Least Squares Support Vector Machines**", World Scientific Publishing, Singapore, 2002.
123. Teunissen P. J. G., "**Adjustment Theory: an introduction**", Delft Academic Press, Delft, The Netherlands, 2000.
124. Teunissen P. J. G., "**Dynamic Data Processing: Recursive Least Squares**", VSSD Press, Delft, The Netherlands, 2001.
125. Tian Lai X., "**Seamless INS/GPS Integration Based on Support Vector Machines**", *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 336-338, pp. 277-280, 2013.
126. Tijms H. C., "**Stochastic Models – An Algorithmic Approach**", John Wiley, NY, New York US, 1994.
127. Titterton D.H. and Weston J. L., "**Strapdown Inertial Navigation Technology (2nd Edition)**" *IEE*, Stevenage, UK, 2004.
128. Torge W., "**Geodesy**", de Gruyter, Berlin, Germany, 2001.
129. Toth C.K. and Grejner Brzezinska D. A., "**Near Real Time Road Centreline Extraction**", *Proceedings of the ISPRS Congress – Photogrammetry and Computer Vision*, pp. 9-13, Gratz, Austria, 2002.
130. Tran M., "**Performance Evaluation of the New GPS L5 and L2 Civil (L2C) Signals**", *Journal of the Institute Of Navigation JION*, Vol. 51, No. 3, pp. 199-212, 2004.
131. Vanderbei R. J., "**Linear Programming: Foundations and Extensions**", Kluwer Academic Publishers, Hingham, Massachusetts US, 1997.

132. Vanicec P., **"Introduction to Adjustment Calculus"**, *Lecture Notes*, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Canada, 1980.
133. Vapnik V. and Chervonenkis A., **"A note on one class of perceptrons"**, *Automation and Remote Control*, Vol. 25, 1964.
134. Vapnik V. and Chervonenkis A., **"Ordered risk minimisation"**, *Automation and Remote Control*, Vol. 35, pp. 1226-1235, 1403-1412, 1974.
135. Vapnik V. and Lerner A., **"Pattern recognition using generalised portrait method"**, *Automation and Remote Control*, Vol. 24, pp. 774-780, 1963.
136. Vapnik V., **"Statistical Learning Theory"**, John Wiley & Sons, NY, New York US, 1998.
137. Vapnik V., **"The Nature of Statistical Learning Theory"**, Springer-Verlag, NY, New York US, 1995.
138. Vidyasagar M., **"A Theory of Learning and Generalisation"**, Springer-Verlag, NY, New York US, 1997.
139. Weston J., **"Leave-one-out support vector machines"**, *Proceedings of the 16th Joint Conference on Artificial Intelligence – IJCAI-99*, Vol. 2, pp. 727-733, Stockholm, Sweden, 1999.
140. Williams O K. I., **"Prediction with Gaussian processes: From linear regression to linear prediction and beyond"**, *Editor in Jordan M. I. "Learning and Inference in Graphical Models"*, Kluwer, 1998.
141. Williams O. K. I. And Barber D., **"Bayesian classification with Gaussian processes"**, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 20, pp. 1342-1351, 1998.
142. Wolfe P., **"A duality theorem for nonlinear programming"**, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 19, pp. 239-244, 1961.
143. Young P. C., **"Recursive Estimation and Time Series"**, Springer-Verlag, NY, New York US, 1984.
144. Zhang X., Ai T., Stoter J., Kraak M. -J. and Molenaar M., **"Building pattern recognition in topographic data: examples on collinear and curvilinear alignments"**, *Geoinformatica – International Journal on Advances of Computer Science for Geographic Information Systems*, Vol. 17, Issue 01, pp. 1-33, 2011.
145. Zhenkai X., Yong L., Rizos C. and Xiaosu X., **"Novel Hybrid of LS-SVM and Kalman Filter for GPS/INS Integration"**, *The Royal Institute of Navigation, Journal of Navigation*, Vol. 63, Issue 02, pp. 289-299, 2010.
146. Zhuqing J., Chonghua L., Gong Z., Yupeng W., Chengkai H. and Jiayi L., **"GPS/INS Integrated Navigation Based on UKF and Simulated Annealing Optimised SVM"**, *Proceedings of 78th IEEE Vehicular Technology Conference VTC (Fall)*, Las Vegas, Nevada US, Sep. 2-5, 2013.

Σύντομο Βιογραφικό Σημείωμα



Κυριάκος Σ. Φράγκος

Γεννηθείς στην Αθήνα το 1976, απέκτησε δίπλωμα Αγρονόμου & Τοπογράφου Μηχανικού από το ΕΜΠ το 2001, λαμβάνοντας από το Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδας το 1^ο βραβείο διπλωματικής εργασίας στο πεδίο της Γεωδαισίας εκείνης της χρονιάς. Κατά την διάρκεια των προπτυχιακών του σπουδών, συμμετέχει σε διαδοχικά ερευνητικά προγράμματα του Κέντρου Παρακολούθησης Τεχνητών Δορυφόρων Διονύσου, αναπτύσσοντας ευρεία τεχνογνωσία στην εφαρμογή μηχανικής από την Ανώτερη και Δορυφορική Γεωδαισία.

Η ερευνητική του δραστηριότητα συνεχίζεται και μετά την αποφοίτησή του, με συμμετοχή σε προγράμματα της ΣΑΤΜ με κρατικούς φορείς (ΥΠΕΧΩΔΕ, ΔΜΕΟ, ΕΥΔΑΠ, ΟΑΣΠ) και σε προγράμματα ενίσχυσης βασικής έρευνας (ΠΕΒΕ) του ΕΜΠ, ενώ παράλληλα, παρουσιάζει πολυετές επικουρικό διδακτικό έργο σε μαθήματα του κύκλου σπουδών της ΣΑΤΜ. Ως υποψήφιος διδάκτορας της Σχολής, η ερευνητική του παραγωγικότητα αντανακλάται από την δημοσίευση μιας σειράς εργασιών στα πρακτικά διεθνών επιστημονικών συνεδρίων όπως το ION-GNSS, Conference of the Institute of Navigation του 2010 και 2011, και το 6^ο και 7^ο MMT, (International Symposium in Mobile Mapping Technologies) του 2009 και 2011 αντιστοίχως, στα οποία και συμμετέχει ως ομιλητής. Ενδιάμεσως εγγράφεται ως επισκέπτης ερευνητής στο πανεπιστήμιο της Μελβούρνης το 2009 και γίνεται ιδρυτικό μέλος της διεθνούς ερευνητικής ομάδας εργασίας με τίτλο "Ubiquitous Navigation, Technologies and Techniques" με συμμετοχή επιφανών ειδικών από τα πανεπιστήμια The Ohio State University, University of Melbourne, University of New South Wales, Calgary University, University of Nottingham και ΕΜΠ. Ως ενεργό μέλος της ομάδας, συμμετέχει στο σχεδιασμό και την υλοποίηση των πειραματικών δραστηριοτήτων της και δραστηριοποιείται στην ανάπτυξη αλγορίθμων δυναμικής επεξεργασίας κινηματικών γεωδαιτικών δεδομένων και σύζευξης δεδομένων πολύ-αισθητήρων πλοήγησης, με εφαρμογή μεθοδολογιών βέλτιστης εκτίμησης κατάστασης συστήματος και φιλτραρίσματος κατά Kalman. Πλέον κατέχει τίτλο διδάκτορας από το ΕΜΠ, με έρευνα στη Μηχανική Μάθηση για την αξιοποίηση εκτιμήσεων κινηματικών παραμέτρων σε ζητήματα καθοδήγησης οχήματος. Ως επαγγελματίας μηχανικός επιδεικνύει εμπειρία σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών. Έχει εργαστεί ως επιβλέπων μηχανικός / επικεφαλής εργοταξίου κατασκευής λιμενικών έργων, ωστόσο δραστηριοποιείται βασικά ως επικεφαλής μηχανικός σε τεχνικές μελέτες για την αξιολόγηση της απόδοσης δορυφορικών συστημάτων πλοήγησης. Πρόσφατα διετέλεσε τεχνικός σύμβουλος του Υπουργείου Εθνικής Άμυνας και επικεφαλής της επιστημονικής ομάδας υπεράσπισης των ελληνικών θέσεων σε διαδικασία διαιτησίας για θέματα NATO/FORACS. Σήμερα, εργάζεται ως μηχανικός σχεδιασμού του συστήματος παρακολούθησης και ελέγχου της νέας γενιάς του δορυφορικού συστήματος πλοήγησης EGNOS, για λογαριασμό του Ευρωπαϊκού Οργανισμού Διαστήματος (ESA) στο Εθνικό Κέντρο Διαστημικών Σπουδών στη Τουλούζη (CNES).

_ ΤΕΛΟΣ _