



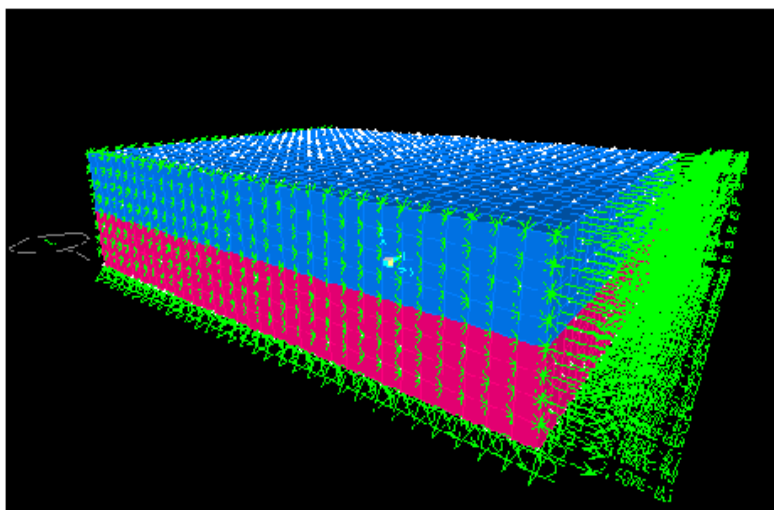
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ: *«Διεπιφανειακή εντατική κατάσταση διαστρωματώσεων από σύνθετα υλικά με αριθμητικές μεθόδους.»*



ΓΑΛΗΝΑΚΗ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ-ΜΑΡΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΡΑΥΤΟΓΙΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ 2011

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της μεταπτυχιακής μου εργασίας κύριο Ιωάννη Ραυτογιάννη για την πολύτιμη βοήθειά του. Η υποστήριξή του ήταν καταλυτική σε όλα τα στάδια της εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την βοήθεια και την στήριξη που μου προσέφερε σε όλο το διάστημα των σπουδών μου.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

---

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1**

### **ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ – ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ**

#### **1. ΓΕΝΙΚΑ**

Ο όρος σύνθετα υλικά σημαίνει συνδυασμός δύο ή περισσότερων υλικών υπό διακριτή μορφή τα οποία συνεργάζονται και δημιουργούν ένα νέο υλικό με βελτιωμένες ιδιότητες. Για παράδειγμα τα σκύρα ενώνονται με το τσιμέντο για να δημιουργηθεί το σκυροδέμα, το οποίο έχει μεγάλη αντοχή, αλλά παράλληλα μπορεί να διαμορφωθεί σχηματικά αρκετά εύκολα με κατάλληλα καλούπια. Ενώ οι αυξημένες ιδιότητες του σκυροδέματος είναι η αντοχή και η ευκολία της κατασκευής, οι περισσότερες από τις φυσικές και χημικές ιδιότητες μπορούν να βελτιστοποιηθούν με κατάλληλους συνδυασμούς υλικών. Τα πλέον συνήθη σύνθετα υλικά είναι αυτά που γίνονται με ισχυρές ίνες που συγκρατούνται με ένα σύνθετο υλικό. Μόρια ή νιφάδες (particles ή flakes) χρησιμοποιούνται επίσης ως ενισχύσεις, αλλά δεν είναι τόσο αποτελεσματικές όσο οι ίνες.

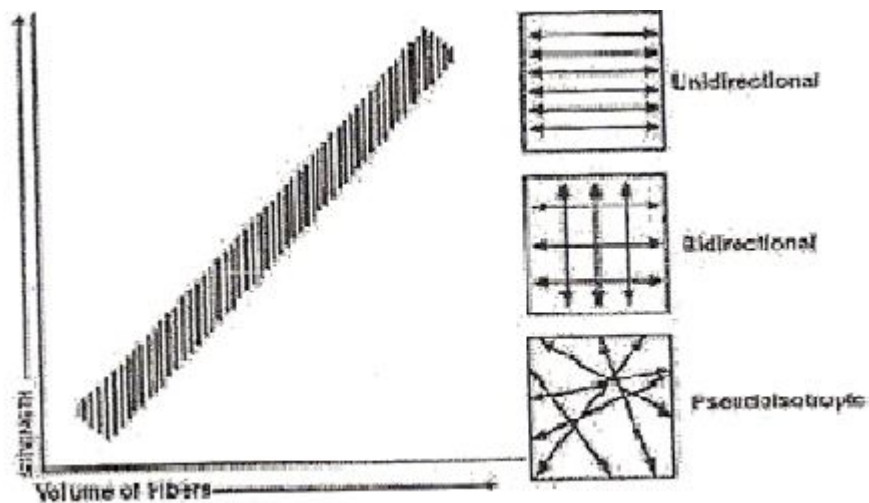
Τα παλαιότερα σύνθετα υλικά είναι φυσικά: το ξύλο περιέχει ίνες κυτταρίνης (cellulose) σε ένα συνδετικό υλικό από ξύλο (lignin). Οι ανθρώπινες κατασκευές σύνθετων υλικών πάνε πίσω χρονικά στη χρήση αργίλου ενισχυμένης με άχυρο για τούβλο καθώς και κεραμικά είδη. Στα σύγχρονα σύνθετα υλικά χρησιμοποιούνται μέταλλα, κεραμικά ή πολυμερή συνδετικά υλικά, οπλισμένα με διάφορες ίνες ή σωματίδια. Σε μερικές περιπτώσεις τα σύνθετα υλικά αποτελούνται από περισσότερα από δύο επιμέρους υλικά και ονομάζονται υβριδικά (hybrids). Σε άλλες περιπτώσεις διατάσσονται διαφορετικά υλικά σε στρώσεις έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα τελικό προϊόν με αυξημένες ιδιότητες, όπως στην περίπτωση της κατασκευής sandwich, όπου ένας ασθενής πυρήνας υλικού περικλείεται μεταξύ δύο στρώσεων ισχυρών και δύσκαμπτων υλικών.

Τα σύνθετα υλικά μπορούν να κατηγοριοποιηθούν με διάφορους τρόπους, έχοντας ως κύριες παραμέτρους τις ακόλουθες:

#### **1. Ενισχύσεις:**

- Συνεχείς επιμήκης ίνες
  - Ίνες ενιαίου προσανατολισμού
  - Ίνες διπλού προσανατολισμού (για παράδειγμα πλεκτές –wooven-, stitched mat και άλλα)

- Τυχαίου προσανατολισμού (συνεχείς δέσμες ινών continuous strand mat – CSM)
- Ασυνεχείς ίνες
  - Τυχαίου προσανατολισμού (για παράδειγμα κοντές δέσμες ινών – chopped strand mat - )
  - Συγκεκριμένου προσανατολισμού (για παράδειγμα oriented strand mat)
- Κοντές ίνες και σωματίδια
  - Τυχαίου προσανατολισμού
  - Συγκεκριμένου προσανατολισμού



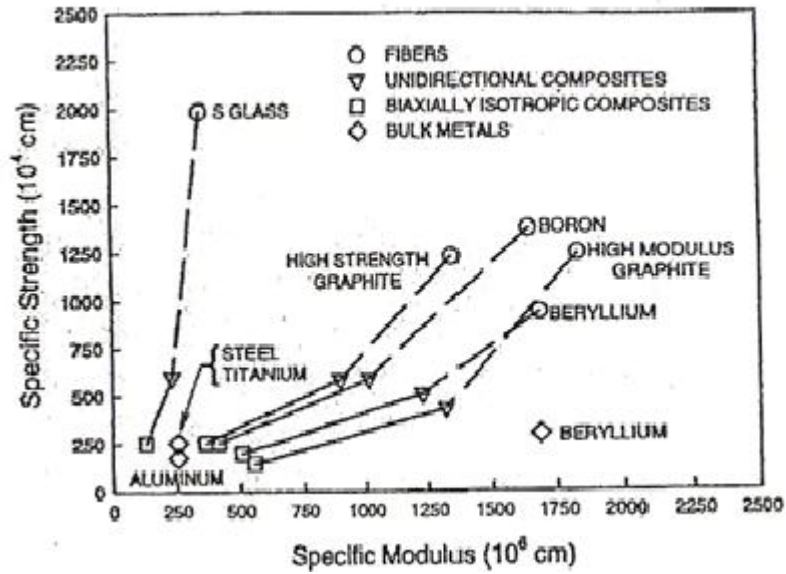
Σχ. 1.1: Σχέση αντοχής και προσανατολισμού των ινών

## 2. Διαμόρφωση διαστρωμάτωσης:

- Ενιαίου προσανατολισμού, συμπεριλαμβανομένων πολλών στρώσεων, με το ίδιο υλικό και προσανατολισμό σε όλες τις στρώσεις,
- Συνήθης διαστρωμάτωση, όπου τουλάχιστον κάποιες στρώσεις έχουν διαφορετικό προσανατολισμό ή υλικό.

## 3. Υβριδική κατασκευή:

- Διαφορετικά υλικά σε διάφορες στρώσεις (για παράδειγμα διμεταλλικά)
- Διαφορετική ενίσχυση στη στρώση (για παράδειγμα ίνες βορίου και άνθρακα – intermingled boron and carbon).



Σχ. 1.2: Σύγκριση αντοχών και δυσκαμψιών σύνθετων υλικών και μετάλλων

Οι ίνες προτιμώνται ως οπλισμός επειδή τα περισσότερα υλικά είναι περισσότερο ανθεκτικά υπό μορφή ινών παρά στην συμπαγή μορφή τους. Στην περίπτωση του γυαλιού, αυτό αποδίδεται στην οξύτατη μείωση του αριθμού των ελαττωμάτων κατά την διαμόρφωση των ινών σε σύγκριση με αυτά στον συμπαγή όγκο γυαλιού.

Τα βασικά πλεονεκτήματα των σύνθετων υλικών είναι:

1. Μείωση του βάρους,
2. Αυξημένη αντοχή,
3. Βελτιωμένη αντοχή σε διάβρωση
4. Ηλεκτρομαγνητική διαφάνεια,
5. Αντοχή σε φθορές,
6. Αυξημένη αντοχή έναντι κόπωσης,
7. Θερμική – ακουστική μόνωση,
8. Χαμηλή θερμική διαστολή,
9. Χαμηλή ή υψηλή μετάδοση της θερμότητας ανά περίπτωση.

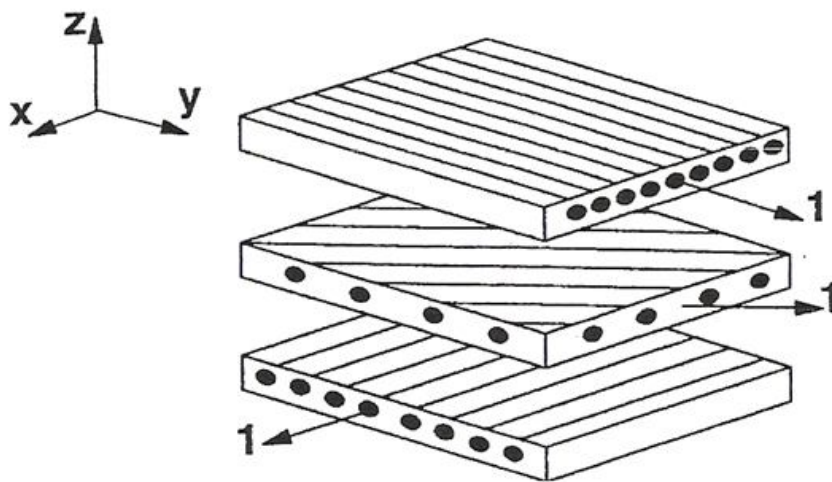
Τα σύνθετα υλικά είναι ελαφρότερα από τα συμβατικά, επειδή τόσο οι ίνες και τα πολυμερή που χρησιμοποιούνται ως συνδετικά υλικά έχουν χαμηλό ειδικό βάρος

Λεπτομερέστερα, οι ίνες έχουν υψηλότερες τιμές στους λόγους αντοχής – βάρους και δυσκαμψίας – βάρους από τα περισσότερα υλικά.

Πάντως, ισχυρές ίνες δεν χρησιμοποιούνται μόνες τους (εκτός της περίπτωσης των καλωδίων) επειδή δεν αντέχουν σε θλιπτικά ή εγκάρσια φορτία. Απαιτείται λοιπόν ένα

συνδετικό υλικό για να συγκρατεί τις ίνες στην προβλεπόμενη θέση τους. Επίσης, το συνδετικό υλικό προστατεύει τις ίνες από τις περιβαλλοντικές επιδράσεις. Το συνδετικό υλικό είναι κρίσιμα καθοριστικό για την αντοχή σε διάβρωση του σύνθετου υλικού. Εξ' αιτίας της εξαιρετικής αντοχής σε περιβαλλοντικές και χημικές επιδράσεις των πολυμερών συνδετικών υλικών, τα ινοπλισμένα πολυμερή έχουν κατακτήσει τις μεγάλες αγορές στις χημικές βιομηχανίες έναντι των συμβατικών υλικών, όπως ο χάλυβας, το οπλισμένο σκυρόδεμα και το αλουμίνιο. Αυτή η τάση εξάπλωσης των σύνθετων υλικών στην κατασκευή έργων υποδομής (infrastructure construction) και κυρίως στις επισκευές και τις ενισχύσεις οφείλεται στην αυξημένη αντοχή τους έναντι περιβαλλοντικής αποδιοργάνωσης (environmental degradation).

Εφόσον τα πολυμερή μπορούν να μορφοποιηθούν σε πολύπλοκα σχήματα, ένα τμήμα του σύνθετου υλικού μπορεί να αντικαταστήσει πολλά μεταλλικά τμήματα, τα οποία έτσι και αλλιώς θα απαιτούνταν για να πετύχουν την ίδια λειτουργία. Η μείωση των απαιτούμενων τμημάτων (part-count reduction) συχνά μεταφράζεται σε βελτιστοποιημένη παραγωγή, η οποία αντισταθμίζει με το παραπάνω το υψηλότερο κόστος από τη χρήση σύνθετων υλικών.



Σχ. 1.3: Επαλληλία τριών στρώσεων για τη δημιουργία διαστρωμάτωσης

Εφόσον οι ίνες δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν από μόνες τους και η αντοχή και δυσκαμψία του πολυμερούς είναι ασήμαντες με αυτές των ινών, οι μηχανικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών είναι κάπως χαμηλότερες από αυτές των ινών. Ακόμη τα σύνθετα υλικά είναι περισσότερο δύσκαμπτα και ισχυρά από τα περισσότερα από τα συμβατικά υλικά όταν συγκρίνονται ανά μονάδα βάρους, όπως φαίνεται στο σχ. 1.2, σύμφωνα με τα δεδομένα των σύνθετων υλικών ενιαίου προσανατολισμού. Η μείωση των μηχανικών ιδιοτήτων με βάση

αναφοράς τις ίνες προς το τελικό προϊόν (το σύνθετο υλικό) είναι ανάλογη της ποσότητας του συνδετικού υλικού που χρησιμοποιείται.

Αφού οι ίνες δεν συνεισφέρουν στην αντοχή κατά την εγκάρσια στην διεύθυνση των ινών έννοια, και με δεδομένο ότι η αντοχή του συνδετικού υλικού είναι πολύ μικρή, καθίσταται αναγκαίο να προστεθούν στρώσεις με διάφορους προσανατολισμούς ώστε να παραλαμβάνονται τα επιβαλλόμενα φορτία. Ένας τρόπος να επιτευχθεί αυτό είναι να δημιουργηθεί μία διαστρωμάτωση με αλληλουχία στρώσεων με διάφορους προσανατολισμούς (σχήμα 1.3.) Παρόλο που τέτοια διαστρωμάτωση μπορεί να παραλάβει φορτία επίπεδης έντασης, η αντοχή και η δυσκαμψία της ανά μονάδα βάρους για δεδομένη διεύθυνση είναι μικρότερη από τις αντίστοιχες τιμές μιας μεμονωμένης στρώσης.

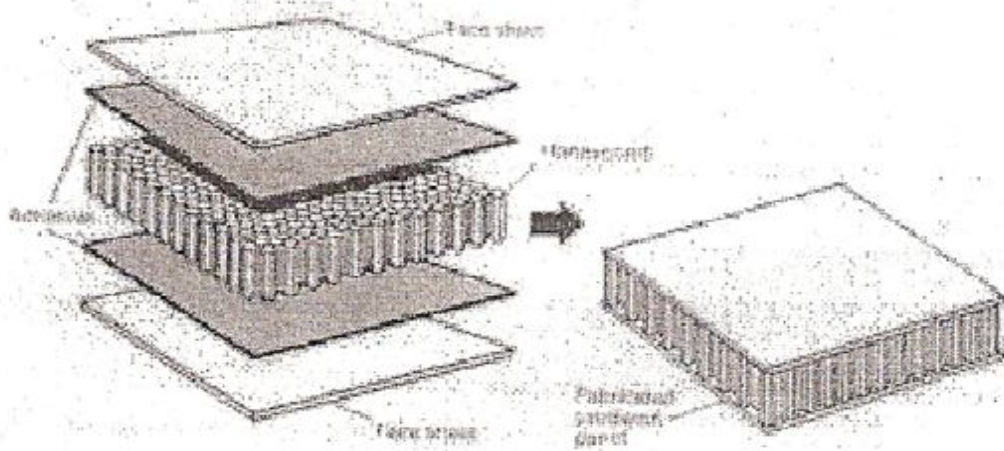
Άλλη λύση για την ανάληψη φορτίων επίπεδης έντασης είναι να συνεργάζονται οι ενισχύσεις δύο διευθύνσεων σε κάθε στρώση, όπως για παράδειγμα στο ύφασμα με πλέξη. Το συνδετικό υλικό μπορεί ακόμα να ενισχυθεί με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οι ιδιότητές του να είναι ίδιες σε κάθε διεύθυνση. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας ίνες τυχαίου προσανατολισμού όπως συνεχείς ή κοντές δέσμες ινών, ή χρησιμοποιώντας κοντές ίνες διασκορπισμένες μέσα στο συνδετικό υλικό. Αυτοί οι τύποι οπλισμού χρησιμοποιούνται για τη μείωση του κόστους, όμως οι ιδιότητες τέτοιων σύνθετων υλικών είναι αρκετά μικρότερες από αυτές των σύνθετων υλικών με τις συνεχείς ίνες.

Συχνά, τα υλικά πληρώσεως (filler) όπως το ανθρακούχο ασβέστιο (calcium carbonate) χρησιμοποιούνται αναμειγμένα με το συνδετικό υλικό για τη μείωση του βάρους και του κόστους, για αυξημένη πυραντοχή και μείωση των προϊόντων καύσης, για τη μείωση της αποδιοργάνωσης του πολυμερούς από υπεριώδεις ακτινοβολίες (UV) λόγω έκθεσης στον ήλιο κλπ. Πάντως τα υλικά πληρώσεως (filler) δεν θεωρούνται ως ενισχύσεις, η επιρροή τους όμως συνυπολογίζεται στην τροποποίηση των ιδιοτήτων του συνδετικού υλικού.

Υβριδικά σύνθετα υλικά (hybrids) χρησιμοποιούνται όταν υπάρχουν ειδικές απαιτήσεις. Για παράδειγμα, στην εξωτερική επιφάνεια μιας διαστρωμάτωσης οπλισμένης με ίνες άνθρακα τοποθετούνται στρώσεις οπλισμένες με γυαλί ή αραμίδιο (aramid) για λόγους προστασίας. Οι ίνες άνθρακα παρέχουν δυσκαμψία και αντοχή, ενώ οι ίνες γυαλιού προσδίδουν προστασία έναντι πρόσκρουσης αντικειμένων ή βλημάτων. Ένα άλλο παράδειγμα αποτελούν στρώσεις, ενισχυμένες με βόριο, ανάμεσα σε άλλες στρώσεις ενισχυμένες με ίνες άνθρακα (sandwich). Οι ίνες βορίου παρέχουν υψηλή αντοχή σε θλίψη, αλλά είναι πολύ ακριβές και δύσκολες στον χειρισμό. Παρόλα αυτά οι επιφάνειες με



ενισχύσεις άνθρακα παρέχουν υψηλή αντοχή σε εφελκυσμό και απλοποίηση της κατασκευής ενώ μειώνουν το ολικό κόστος. Τελικά, το πιο κοινό υβριδικό σύνθετο υλικό είναι η κατασκευή sandwich (σχήμα 1.4). Ένας ασθενής πυρήνας από στερεοποιημένο αφρό ή με κυψελωτή διάταξη διαστρωματώσεων παίζει το ρόλο μοχλοβραχίονα αυξάνοντας την ροπή αδρανείας των δύο επιμέρους διαστρωματώσεων, υπό την προϋπόθεση ότι εξασφαλίζεται η μεταξύ τους συνεργασία, και τελικώς καταλήγει σε αυξημένη καμπτική δυσκαμψία (bending stiffness) του όλου συστήματος με πολύ μικρή επιβάρυνση στο βάρος και το κόστος του τελικού προϊόντος.



Σχ. 1.4 Κατασκευή διαστρωμάτωσης με πυρήνα

## 2. ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα σύνθετα υλικά σχηματίζονται από τον συνδυασμό δύο ή περισσότερων επιμέρους υλικών με σκοπό το τελικό προϊόν να διαθέτει βελτιωμένες ιδιότητες (φυσικές, χημικές κλπ.) από αυτές των επιμέρους υλικών. Τα κύρια συστατικά των σύνθετων υλικών είναι οι ίνες και το συνδετικό υλικό. Οι ίνες παρέχουν την δυσκαμψία και αντοχή ενώ το συνδετικό υλικό δεσμεύει τις ίνες και τις αναγκάζει να συνεργάζονται εξασφαλίζοντας την μεταφορά φορτίων εντός του σύνθετου υλικού.

Ο σχεδιασμός ενός δομικού στοιχείου από σύνθετα υλικά περιλαμβάνει ταυτόχρονα τον σχεδιασμό του υλικού και της κατασκευής. Σε αντίθεση με τα συμβατικά υλικά (για παράδειγμα χάλυβας), οι ιδιότητες του σύνθετου υλικού μπορούν να σχεδιαστούν ταυτόχρονα

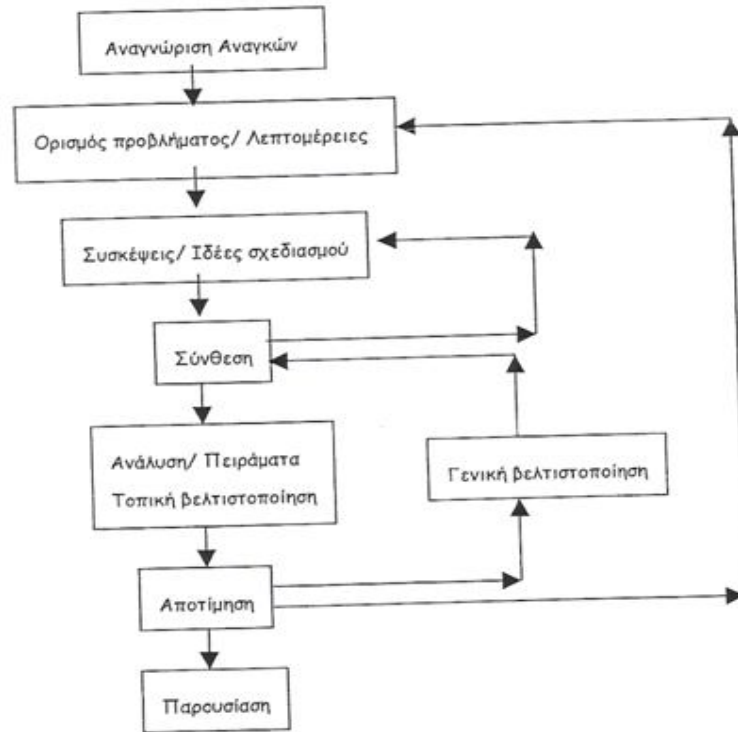
με τις φάσεις κατασκευής. Οι ιδιότητες των σύνθετων υλικών (δυσκαμψία, θερμική διαστολή κλπ.) μπορούν να ποικίλουν μέσα σε ένα ευρύ φάσμα τιμών κατά την κρίση του σχεδιαστή.

Οι ιδιότητες των ινών και του συνδετικού υλικού μπορούν να συνδυαστούν, χρησιμοποιώντας μικρομηχανική θεώρηση για να προκύψουν βελτιωμένες ιδιότητες για κάθε συνδυασμό αυτών. Παρόλο που η μικρομηχανική θεώρηση μπορεί να προβλέψει πολύ καλά την δυσκαμψία ενός υλικού, δεν είναι τόσο ακριβής στην πρόβλεψη της αντοχής. Παρόλα αυτά πειραματικά δεδομένα για την αντοχή είναι πολύ σημαντικά στον σχεδιασμό. Για το λόγο αυτό, κατασκευαστές και εγχειρίδια στον χώρο των σύνθετων υλικών φροντίζουν να παραθέτουν τις ιδιότητες των σύνθετων υλικών, τόσο από πλευράς των ινών όσο των συνδετικών υλικών. Το κύριο πρόβλημα είναι ότι οι δεδομένες, γνωστές ιδιότητες ανταποκρίνονται σε αναρίθμητες διαφορετικές ενισχύσεις και ολοένα νεώτερες τεχνικές, οι οποίες κάνουν την σύγκριση μεταξύ των δύο προϊόντων πολύ δύσκολη.

Ο σχεδιασμός των σύνθετων υλικών μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας ιδιότητες από πειραματικά δεδομένα και είναι διαθέσιμα για τους περισσότερους τύπους των ινών – συνδετικών υλικών, και συνδυασμούς που χρησιμοποιούνται σε μια διαστρωμάτωση. Εάν χρησιμοποιούνται ιδιότητες από πειραματικά αποτελέσματα για τα σύνθετα υλικά, δεν απαιτείται η καταφυγή σε μοντέλα μικρομηχανικής. Επίσης, η αλλαγή ενός συνδετικού υλικού κατά την πορεία σχεδιασμού ακυρώνει όλα τα βασικά δεδομένα των υλικών που χρησιμοποιήθηκαν και απαιτεί ένα νέο πειραματικό πρόγραμμα για το νέο συνδετικό υλικό. Συνήθως δεν είναι διαθέσιμες επαρκείς πειραματικές ιδιότητες των υλικών και του συνδυασμού ινών και συνδετικού υλικού που εξετάζονται. Στη συνέχεια η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της μικρομηχανικής μπορεί να αξιολογηθεί κάνοντας μερικά επιλεγμένα πειράματα. Ο αριθμός των πειραμάτων καθορίζεται από το μέγεθος του έργου και την διαθεσιμότητα των πηγών οι οποίες σε κάποιες περιπτώσεις μπορούν να παραταθούν μέχρι την τελική φάση.

Εφόσον οι ιδιότητες μιας μεμονωμένης στρώσης είναι γνωστές, οι ιδιότητες μιας διαστρωμάτωσης μπορούν αν υπολογιστούν από τον συνδυασμό των ιδιοτήτων των στρώσεων που σχηματίζουν τη διαστρωμάτωση. Ο σχεδιασμός μπορεί να ξεκινήσει απ' ευθείας με τις πειραματικές τιμές των ιδιοτήτων της διαστρωμάτωσης. Οι ιδιότητες της διαστρωμάτωσης μπορούν πάντοτε να χρησιμοποιούνται σε έναν αρχικό σχεδιασμό της κατασκευής. Σημειώνεται πάντως. Ότι η επιρροή της αλλαγής του συνδετικού υλικού ή της κατασκευαστικής πορείας είναι άγνωστη και κάθε τέτοια αλλαγή απαιτεί επανάληψη εξ' αρχής του πειραματικού προγράμματος. Όταν οι ιδιότητες δεν είναι διαθέσιμες από

πειράματα μπορούν να εκτιμηθούν χρησιμοποιώντας την μικρομηχανική και μακρομηχανική θεώρηση.



Σχ. 1.5: Διάγραμμα της διαδικασίας σχεδιασμού

### 3. ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΥΛΙΚΑ

#### 3.1 ΙΝΕΣ

Οι ίνες χρησιμοποιούνται στα σύνθετα υλικά γιατί έχουν μικρό βάρος, είναι πιο δύσκαμπτες και έχουν μεγάλη αντοχή. Οι ίνες είναι πιο ισχυρές από το συμπαγές ακατέργαστο υλικό απ' το οποίο αποτελούνται. Αυτό οφείλεται στην προνομιακή κατεύθυνση των μορίων κατά μήκος της διεύθυνσης των ινών και λόγω του μειωμένου πλήθους ατελειών που παρουσιάζονται σε μία ίνα, πράγμα αντίθετο με αυτό που συμβαίνει στο ακατέργαστο υλικό. Ενώ η εφελκυστική αντοχή του ακατέργαστου E-glass είναι σχετικά μικρή (1,5 – 5,8 GPa), το ίδιο υλικό φτάνει ως και τα 72,3 GPa υπό μορφή ίνας, κυρίως γιατί υπάρχει μείωση στον αριθμό, το μέγεθος και την επιφάνεια των ατελειών.

Οι ίνες χρησιμοποιούνται ως οπλισμός στα σύνθετα υλικά με ενιαίο προσανατολισμό, όπου ένας μεγάλος αριθμός ινών ευθυγραμμίζονται μέσα στο μικρό πάχος ενός μικρού κελύφους ή πλάκας που ονομάζεται στρώση ή φύλλο. Μία στρώση με ίνες ενιαίου προσανατολισμού έχει τη μέγιστη αντοχή και δυσκαμψία κατά τη διεύθυνση των ινών και την ελάχιστη για διεύθυνση κάθετη στις ίνες. Όταν είναι επιθυμητές ίδιες ιδιότητες σε κάθε διεύθυνση του επιπέδου της στρώσης χρησιμοποιούνται ίνες με τυχαίο προσανατολισμό. Μια διαστρωμάτωση αποτελείται από δύο ή περισσότερες επάλληλες στρώσεις συνεργαζόμενες μεταξύ τους. Το τελικό προϊόν έχει τις διαφορετικές ιδιότητες σε κάθε διεύθυνση στο επίπεδο της στρώσης.

Οι ιδιότητες ερπυσμού των σύνθετων υλικών οφείλονται κυρίως στο συνδετικό υλικό. Τα σύνθετα υλικά που ενισχύονται με κοντές ίνες (chopped fibers, whisks) ή σωματίδια μπορούν να υποστούν μεγάλες παραμορφώσεις ακόμα και σε κανονικές συνθήκες θερμοκρασίας. Αυτός είναι ο κύριος λόγος της χρήσης των συνεχών ινών στις εφαρμογές των κατασκευών. Επιλέγοντας ίνες (από άνθρακα ή γυαλί), με πολύ μικρές παραμορφώσεις λόγω ερπυσμού, τα σύνθετα υλικά με πολυμερή συνδετικά (PMC) μπορούν να καταστούν αρκετά ανθεκτικά έναντι ερπυσμού.

### 3.1.1 ΤΥΠΟΙ ΙΝΩΝ

Οι πλέον συνήθεις ίνες που χρησιμοποιούνται στα σύνθετα υλικά είναι από γυαλί, άνθρακα, οργανικές (*Kevlar*), βόριο, Silicon Carbide (SiC), αλουμίνιο και άλλα υλικά σε πλέον εξειδικευμένες εφαρμογές. Η επιλογή του τύπου της ίνας που θα χρησιμοποιηθεί εξαρτάται από τις επιθυμητές μηχανικές και περιβαλλοντικές ιδιότητες καθώς και το κόστος αυτής.

*ΙΝΕΣ ΓΥΑΛΙΟΥ:* οι ίνες γυαλιού παρουσιάζουν τις τυπικές ιδιότητες του γυαλιού, όπως σκληρότητα και αντοχή σε διάβρωση. Επίσης, είναι εύκαμπτες, ελαφρές και σχετικά φθηνές. Αυτές οι ιδιότητες καθιστούν τις ίνες γυαλιού τον πλέον συνήθη τύπο ινών που χρησιμοποιούνται σε βιομηχανικές εφαρμογές μικρού κόστους. Η υψηλή αντοχή των ινών γυαλιού αποδίδεται στον μικρό αριθμό και το μικρό μέγεθος των ατελειών στην επιφάνεια τους. Όλες οι ίνες γυαλιού έχουν παρόμοιες δυσκαμψίες αλλά διαφορετικές τιμές αντοχής και διαφορετική αντοχή σε περιβαλλοντικές επιδράσεις. Οι ίνες E-glass (E=electrical=Ηλεκτρικές) χρησιμοποιούνται όταν υπάρχουν ιδιαίτερες απαιτήσεις για υψηλή εφελκυστική τάση και καλή χημική αντοχή. Οι ίνες E-glass είναι το είδος ενίσχυσης που προτιμάται επειδή συνδυάζει μηχανική απόδοση, αντοχή στη διάβρωση και μικρό κόστος (περίπου \$16/Kg). Οι ίνες S-glass και S-2-glass (S=strength=Αντοχή) έχουν υψηλότερη αντοχή, αλλά είναι περιορισμένης εφαρμογής επειδή κοστίζουν 3 έως 4 φορές περισσότερο από τις ίνες E-glass. Για το λόγο αυτό, ορισμένες ίνες άνθρακα (ανθρακονήματα) χαμηλού κόστους θεωρούνται εναλλακτική λύση στις ίνες S-glass και S-2-glass. Οι ίνες C-glass (C=corrosion=διάβρωση) χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές με ιδιαίτερες απαιτήσεις για αντοχή σε διάβρωση. Οι ίνες D-glass (D=dielectric=δηλεκτρικό) χρησιμοποιούνται σε ηλεκτρικές εφαρμογές, όπως για ενισχύσεις καλωδίων σε υψηλής τάσης μονωτικά και κεραμικά. Οι ίνες A-glass και AR-glass (Alkaline Resistant=Αλκαλική αντοχή) χρησιμοποιούνται σε επιφάνειες μεμβρανών ή συνδετικών υλικών με μικρό βάρος και οι ίνες R-glass χρησιμοποιούνται μερικές φορές στις διαδικασίες περιέλιξης (filament winding) και sheet molding compounds .

Η μέγιστη αντοχή που έχει μετρηθεί σε δοκιμές μίας ίνας (κατά ASTM D3379) μπορεί να φθάσει έως 3,5 GPa για ίνες E-glass και 4,8 GPa για ίνες S-glass, αλλά οι τιμές αυτές δεν μπορούν να επιτευχθούν σε ένα σύνθετο υλικό. Οι φθορές που επέρχονται κατά την πορεία των διαφόρων φάσεων παραγωγής μειώνει τη αντοχή της ίνας περίπου στα 1,75 GPa για ίνες E-glass και 2,1 GPa για ίνες S-glass (σχεδόν 50% μείωση, η οποία οφείλεται κυρίως στις

συνθήκες και το είδος των φορτίων). Η μείωση της αντοχής των ινών στο σύνθετο υλικό οφείλεται μεταξύ άλλων και σε παραμένουσες τάσεις καθώς και σε δευτερογενή φορτία (διατμητικά και εγκάρσια στην διεύθυνση των ινών).

Η αντοχή των ινών σε διάβρωση εξαρτάται από τη σύνθεση της ίνας, το διαβρωτικό διάλυμα και τον χρόνο έκθεσης. Η εφελκυστική αντοχή των ινών γυαλιού, μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας αλλά μπορεί να θεωρηθεί σταθερή για ένα εύρος τιμών θερμοκρασιών όπου τα πολυμερή συνδετικά υλικά μπορούν να εκτεθούν (έως 275°C ανάλογα με το είδος του συνδετικού υλικού). Η εφελκυστική αντοχή μειώνεται επίσης με τη δράση δυναμικών φορτίων. Το αποτέλεσμα αυτό ονομάζεται στατική κόπωση ή τάση αποδυνάμωσης (static fatigue ή stress corrosion). Στο σχεδιασμό σύνθετων υλικών με ενισχύσεις από γυαλί χρησιμοποιείται ένας λόγος τάσεων (παρόμοιος με τον συντελεστή ασφαλείας) με τιμή περίπου 3,5 σε συσκευή πίεσης υπό σταθερό φορτίο. Οι διαμέτροι των ινών γυαλιού κυμαίνονται μεταξύ 9,5 - 24,77 microns και διακρίνονται με ένα κωδικό γρ



(a) Μικροσωματίδια γυαλιού



(b) Κοντές ίνες γυαλιού 1/4"



(c) Κοντές ίνες γυαλιού 1/32"



(α) Κοντές ίνες γυαλιού 1/16"



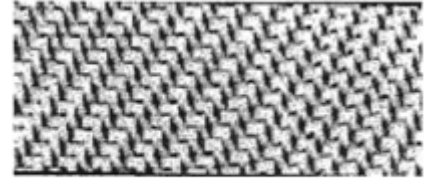
(e) E-Glass τύπος 7781



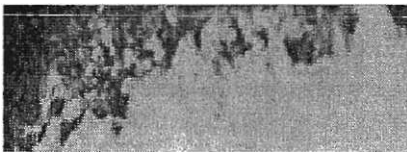
(f) E-Glass τύπος 120



(g) Ίνες E-Glass ενιαίου προσανατολισμού



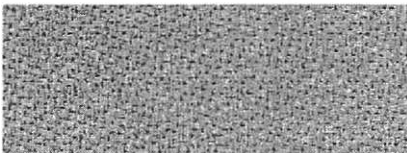
(li) Ίνες E-Glass σταυροειδούς πλέξης



(c) Κοντές ίνες γυαλιού 1/32"



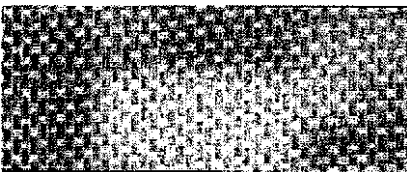
(α) Κοντές ίνες γυαλιού 1/16"



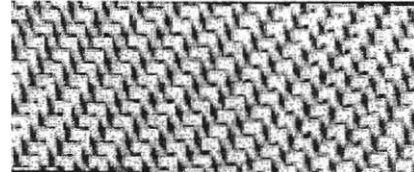
(e) E-Glass τύπος 7781



(f) E-Glass τύπος 120



(g) Ίνες E-Glass ενιαίου προσανατολισμού



(li) Ίνες E-Glass σταυροειδούς πλέξης

ΙΝΕΣ ΑΝΘΡΑΚΑ: οι ίνες άνθρακα (επίσης ονομαζόμενες ανθρακονήματα ή ίνες γραφίτη) έχουν μικρό βάρος και είναι ισχυρές, με εξαιρετική χημική αντοχή. Επικρατούν στο χώρο της αεροδιαστημικής. Σε αντίθεση με τις ίνες γυαλιού, οι ίνες άνθρακα είναι διαθέσιμες σε ένα μεγάλο εύρος τιμών δυσκαμψίας (Πιν 2.1). Οι ιδιότητες τους εξαρτώνται από το ακατέργαστο υλικό και την πορεία που χρησιμοποιείται για την κατασκευή τους. Δύο βασικές πρώτες ύλες που χρησιμοποιούνται είναι τα polyacrylonitrile (PAN) και pitch (πίσσα). Οι ίνες πίσσας είναι λιγότερο ακριβές αλλά έχουν μικρότερη αντοχή από τις ίνες PAN. Οι ίνες PAN επικρατούν, με υψηλή απόδοση, στις αεροδιαστημικές εφαρμογές γιατί μπορούν να κατασκευάζονται με ποικίλες τιμές δυσκαμψίας και αντοχής, όπως φαίνεται στον Πιν. 2.1.

Η ταξινόμηση των ινών άνθρακα γίνεται συνήθως βάσει της δυσκαμψίας και της αντοχής τους, αλλά κατασκευαστικά είναι δυνατόν να δημιουργηθεί οποιοδήποτε συνδυασμός



δυσκαμψίας και αντοχής. Σύμφωνα με τον Πιν. 2.1, οι ίνες T300, AS2 και AS4D θεωρούνται υψηλής δυσκαμψίας (HS=High Stiffness) ίνες, οι IM6 είναι μεσαίου μέτρου ελαστικότητας (IM=Intermediate Modulus), οι HMS4 είναι υψηλού μέτρου ελαστικότητας (HM=High Modulus) και οι M50 είναι πολύ υψηλού μέτρου ελαστικότητας (UHM=Ultra High Modulus), παρόλο που οι αντίστοιχες ίνες με βάση την πίσσα P100 έχουν ακόμα υψηλότερο μέτρο ελαστικότητας. Ένα πλεονέκτημα για την χρήση των ινών HM είναι η κατασκευή σύνθετων υλικών που μοιάζουν με χάλυβα ή αλουμίνιο, έτσι ώστε ένα μεταλλικό τμήμα μιας κατασκευής να μπορεί να αντικατασταθεί από ένα τμήμα σύνθετου υλικού με μικρότερο βάρος. Π.χ. ένα σύνθετο υλικό M50 με λόγο όγκου ινών 50% θα έχει περίπου την ίδια δυσκαμψία με τον χάλυβα αλλά το 1/4 του βάρους. Πάντως, αντικατάσταση από σύνθετα υλικά μιας κατασκευής η οποία είχε αρχικά σχεδιαστεί μεταλλική οδηγεί σχεδόν πάντα σε ανεπαρκή σχεδιασμό του τμήματος του σύνθετου υλικού. Ένα πιο αποτελεσματικό κίνητρο για τη χρήση HM ινών είναι να αυξηθεί ο λόγος ακαμψίας προς το βάρος κατασκευής όπως στα τηλεσκόπια του διαστήματος, όπου τόσο το βάρος όσο και οι παραμορφώσεις είναι κρίσιμα στο σχεδιασμό.

Η μεγαλύτερη θερμοκρασία χειρισμού των ινών άνθρακα κυμαίνεται μεταξύ 315-537°C, αλλά μπορεί να περιοριστεί περαιτέρω από τη θερμοκρασία χειρισμού του συνδετικού υλικού, όπως στη περίπτωση των PMC. Οι ίνες άνθρακα όντας πιο άκαμπτες από τις ίνες γυαλιού, παρέχουν καλύτερα χαρακτηριστικά κόπωσης στο σύνθετο υλικό μειώνοντας την παραμόρφωση στο πολυμερές συνδετικό υλικό για δεδομένο φορτίο. Επίσης, το φαινόμενο της στατικής κόπωσης παρατηρείται σπανιότερα στις ίνες άνθρακα. Αυτός είναι ο κύριος λόγος για τη χρήση μικρότερου λόγου τάσεων από ότι στο γυαλί (2,25 έναντι 3,5) στο σχεδιασμό των δοκιμίων που υφίστανται πίεση υπό μόνιμη φόρτιση. Οι ίνες αυτές είναι καλοί αγωγοί ρεύματος, γι' αυτό και προκαλείται διάβρωση (τύπου γαλβανισμού) εάν σύνθετα υλικά με ίνες άνθρακα έρθουν σε επαφή με μέταλλα. Για το λόγο αυτό, πρέπει να τεθεί ένα μονωτικό υλικό (insulating barrier) μεταξύ των σύνθετων υλικών με ίνες άνθρακα και των μεταλλικών τμημάτων όταν αυτά βρίσκονται στην ίδια κατασκευή. Αυτό συνήθως κατορθώνεται προσθέτοντας μία στρώση (πάχους περίπου 0,5mm) από συνδετικό υλικό με ίνες γυαλιού.

Ο σημαντικότερος περιορισμός στη χρήση των ινών άνθρακα είναι το κόστος. Γενικά, το κόστος των ινών άνθρακα HS (πάνω από \$20/Kg) μπορεί να δικαιολογηθεί καθώς η οικονομία σε βάρος προσφέρει μεγάλη απόδοση, όπως στις εφαρμογές της αεροδιαστημικής, ή όταν απαιτείται υψηλή θερμοκρασιακή μόνωση, αντοχή σε διάβρωση και βελτιωμένο όριο



διαρροής ή εάν μεγάλο χρονικό διάστημα διατήρησης της αντοχής είναι καθοριστικό για την προκείμενη εφαρμογή. Οι ίνες άνθρακα είναι ελαφρύτερες και πιο άκαμπτες από τις ίνες γυαλιού, αλλά δεν έχουν το οικονομικό πλεονέκτημα όταν τα σύνθετα υλικά με ίνες άνθρακα χρησιμοποιούνται για να υποκαταστήσουν ένα συμβατικό υλικό όπως ο χάλυβας στις κατασκευές όπου το βάρος δεν είναι κρίσιμο. Περαιτέρω μείωση του κόστους επιτυγχάνεται με ένωση τμημάτων και μείωση συναρμογών, αλλά αυτά είναι συνήθως ανεξάρτητα από τον τύπο των ινών. Το υψηλό κόστος των ινών άνθρακα δικαιολογείται καλύτερα από το ότι το υλικό χρησιμοποιείται σαν ενισχυτικό υλικό παρά σαν υποκατάστατο υλικό. Το ενισχυτικό υλικό επιτρέπει στην κατασκευή να επιτευχθεί η αποστολή που δεν είναι δυνατή με άλλα υλικά. Πάντως στο σύνολο των εφαρμογών είναι πιο πιθανό να χρησιμοποιηθεί ως εφαρμογή υποκατάστασης, όπου ο σχεδιαστής προτείνει να χρησιμοποιήσει σύνθετα υλικά για να πετύχει βασικά την ίδια αποστολή, η οποία στην παρούσα φάση επιτυγχάνεται με συμβατικά υλικά. Στην τελευταία περίπτωση, το τελικό κόστος του προϊόντος γίνεται υψίστης σημασίας.



(a) Graphite veil



(b) Weave Graphite Fabric (6K, 5HS)



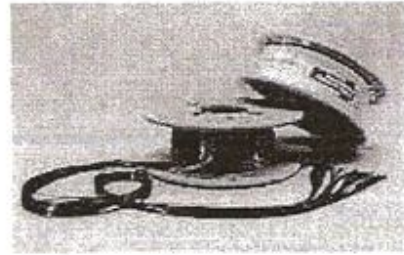
(c) Plain Weave Graphite Fabric (3K)



(d) Twill Weave Graphite Fabric (3K, 2x2)



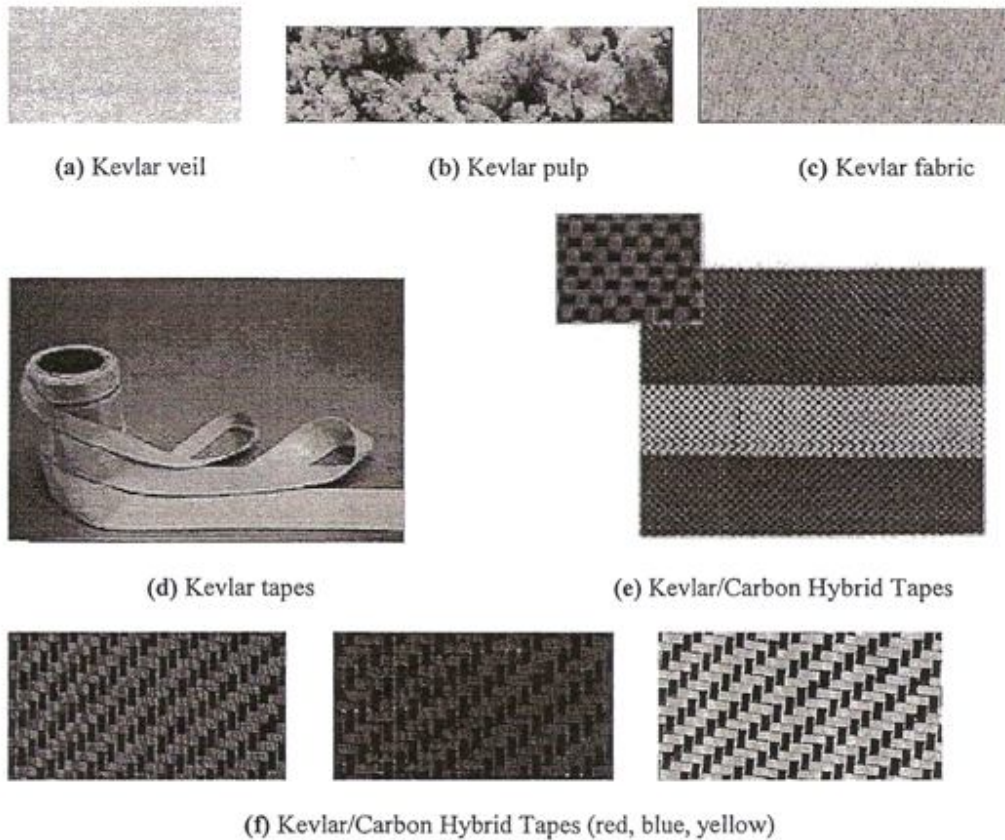
(e) Ταινίες γραφίτη



(f) Ίνες γραφίτη

**ΟΡΓΑΝΙΚΕΣ ΙΝΕΣ:** οι πιο γνωστές απ' τις οργανικές είναι οι ίνες αραμιδίου (aramid), που παράγονται από τις DuPont, Teijin, Akzo Nobel υπό τις εμπορικές ονομασίες Kevlar, Technora και Twaron. Οι ίνες αραμιδίου (aramid) έχουν υψηλή απορροφητικότητα ενέργειας κατά την αστοχία, το οποίο τις κάνει ιδανικές για την προστασία έναντι πρόσκρουσης και βαλλιστικών ενεργειών. Λόγω της μικρής πυκνότητάς τους, δίνουν υψηλό λόγο εφελκυστικής αντοχής ως προς το βάρος και υψηλό λόγο μέτρου ελαστικότητας ως προς το βάρος, τα οποία τις κάνουν πολύ ελκυστικές για χρήση σε αεροσκάφη και θωρακίσεις των σκελετών τους. Επειδή οι ίνες αραμιδίου (aramid) είναι φτιαγμένες από πολυμερές υλικό, έχουν παρόμοια χαρακτηριστικά με τα πολυμερή συνδετικά υλικά. Έχουν μικρή θλιπτική αντοχή, υφίστανται ερπυσμό, απορροφούν υγρασία και είναι ευαίσθητες στην ηλιακή ακτινοβολία (UV). Επίσης, οι μηχανικές ιδιότητες ποικίλουν με τη θερμοκρασία, με την εφελκυστική αντοχή σε θερμοκρασία 177°C να μειώνεται στο 75-80% της τιμής αυτής σε κανονικές συνθήκες. Διάφοροι τύποι τέτοιων ινών έχουν και διαφορετικές ιδιότητες, με το Kevlar 49 να είναι το πιο σύνηθες.

Οι ίνες πολυεθυλενίου (polyethylene) έχουν μικρότερη απορροφητικότητα σε υγρασία και μικρότερη πυκνότητα από το Kevlar49 αλλά και μικρότερη μέγιστη θερμοκρασίας χειρισμού (120°C). Είναι πλέον ελκυστικές στην κατασκευή πλαστικών επικαλυμμάτων ραντάρ αεροσκαφών διότι είναι πολύ διαπερατές σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Τυχόν λανθασμένη εφαρμογή σε τμήματα κατασκευών είναι περιορισμένη λόγω της χαμηλής τιμής μέγιστης θερμοκρασίας χειρισμού τους.

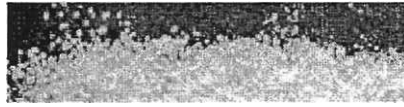


**ΛΟΙΠΕΣ ΙΝΕΣ:** η υψηλή ακαμψία, η υψηλή αντοχή και η μικρή πυκνότητα χαρακτηρίζουν τις ίνες βορίου (boron). Είναι αξιοσημείωτη η χρήση τους ως ενισχύσεις στην αεροδιαστημική και σε αθλητικά είδη. Λόγω του μικρού ρυθμού παραγωγής οι ίνες βορίου είναι ανάμεσα στις πλέον ασύμφορες οικονομικά ίνες που φτιάχνονται σήμερα (κοστίζουν περίπου \$2.000/Kg ανάλογα τον τύπο, την ποσότητα των ινών και άλλους παράγοντες).

Οι ίνες από Silicon Carbide (SiC) παράγονται όπως οι ίνες βορίου σε αντικατάσταση του άνθρακα. Οι ίνες SiC έχουν καλύτερη εφαρμογή ως ενισχύσεις μεταλλικών συνδετικών υλικών όπως το τιτάνιο, αλλά χρησιμοποιούνται επίσης σε συνδυασμό με ρητίνες πολυμερών. Όπως οι ίνες βορίου, οι ίνες SiC χαρακτηρίζονται από υψηλή ακαμψία και αντοχή αλλά παρουσιάζουν υψηλότερη θερμοκρασιακή μόνωση. Λόγω της περιορισμένης χρήσης και των μικρών ποσοτήτων παραγωγής, το κόστος τους είναι αρκετά υψηλό.

Οι κεραμικές ίνες βασίζονται σε οξειδία μετάλλων, όπως του αλουμινίου ( $Al_2O_3$ ), alumina silicate και alumina silica. Οι ίνες αλουμινίου έχουν υψηλό όγκο διαθεσιμότητας και σχετικά μικρό κόστος (\$200/Kg έως \$1.100/Kg ανάλογα με τον τύπο των ινών, το μέγεθος της κοντής ίνας  $\{tow\}$  και την ποσότητα). Οι κεραμικές ίνες συνεισφέρουν στο να κρατηθεί η

αντοχή των μεταλλικών συνδετικών υλικών στα σύνθετα υλικά σε υψηλά επίπεδα για υψηλές θερμοκρασίες, όπου προκύπτουν αλλοιώσεις στις ιδιότητες των μετάλλων. Αρχικά χρησιμοποιήθηκαν στην ενίσχυση εμβόλων πετρελαίου.



Thixotropic Silica

Διαρκώς προκύπτουν ή βελτιώνονται διάφορες νέες ποικιλίες ινών. Η διάδοση των νέων προϊόντων ινών στην αγορά των κατασκευαστικών εφαρμογών είναι αργή λόγω του μεγάλου αριθμού των δοκιμών χαρακτηρισμού που απαιτούνται για τη εξασφάλιση της ασφάλειας και τις επιδράσεις της εφαρμογής υπό διάφορες συνθήκες. Ενώ οι υψηλοί λόγοι τάσης προς βάρος και ακαμψίας προς βάρος, είναι πλεονεκτήματα για εφαρμογές αεροδιαστημικής, άλλα χαρακτηριστικά των σύνθετων υλικών που μπορούν να παραχθούν μ' αυτές τις ίνες είναι πιθανόν να περιορίζουν την εφαρμογή τους. Περιβαλλοντικές επιπτώσεις, υψηλή θερμοκρασία χειρισμού και η εγκάρσια και διατμητική αντοχή, είναι κάποιοι από τους περιοριστικούς παράγοντες που πρέπει να εξεταστούν για κάθε νέο υλικό ινών.

**ΣΥΜΒΑΤΟΤΗΤΑ ΙΝΩΝ - ΣΥΝΔΕΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ:** οι περισσότερες ίνες καλύπτονται με ένα υλικό που ονομάζεται *sizing*. Οι ίνες υφίστανται αξιοσημείωτη ζημιά κατά τη διάρκεια της διαδικασίας παραγωγής (τριβή μεταξύ τους και με τον εξοπλισμό). Το *sizing* βοηθά στην προστασία της ίνας λειτουργώντας ως λιπαντικό - αντιστατικό μέσο και βοηθά ένα σύνολο (*bundle*) από ίνες να ενωθούν ως μία μονάδα. Επιπλέον, το *sizing* συνεργάζεται με ένα μέσο σύνδεσης (*coupling agent*) που το αποτρέπει να ενωθεί με το συνδετικό υλικό. Παρόλα αυτά, η ίδια ίνα μπορεί να απαιτεί διαφορετικό *sizing*, που εξαρτάται από τον τύπο του πολυμερούς που χρησιμοποιείται ως συνδετικό μέσο. Η ενδοστρωματική αντοχή του σύνθετου υλικού παρέχει μια ένδειξη της ποιότητας της συνάφειας της ίνας με το συνδετικό υλικό. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται στη βιομηχανία οι δοκιμές ενδοστρωματικής διατμητικής αντοχής κατά ASTM D2344, D2344, D4475 και D3914 για την αποτίμηση της συμβατότητας μεταξύ των ινών και του συνδετικού υλικού, που εξαρτάται περισσότερο από το *sizing* της ίνας. Το *sizing* επίσης επιτρέπει την προστασία της ίνας από την προσβολή υγρασίας κατά τη διάρκεια ζωής (*service life*) του σύνθετου υλικού. Όταν η υγρασία έρθει σε επαφή με την επιφάνεια των ινών γυαλιού μπορεί να διηθηθεί σε μερικά από τα χημικά συστατικά του γυαλιού, αφήνοντας μία επιφάνεια με πόρους. Οι πόροι στη συνέχεια αποτελούν αίτιο δραστηκής μείωσης της αντοχής των ινών.

### 3.1.2. ΜΟΡΦΕΣ ΙΝΩΝ

Οι περισσότερες ίνες μπορούν να διατεθούν υπό μορφή προκατασκευασμένης ταινίας *prepreg*, όπου οι ίνες συγκρατούνται μαζί από εποξειδική ρητίνη και fiberglass backing. Επειδή η δημιουργία της ταινίας *prepreg* συνιστά πρόσθετο κόπο, το κόστος της είναι συνήθως 75-100% υψηλότερο από το κόστος της ίνας. Στο επόμενο κεφάλαιο, οι κατασκευαστικές μέθοδοι που χρησιμοποιούν ταινία *prepreg* είναι αργές και απαιτούν λεπτεπίλεπτη εργασία. Παρόλα αυτά, οι περισσότερες νέες εφαρμογές των σύνθετων υλικών χρησιμοποιούν ίνες στις πλέον απλές αλλά δυσεύρετες μορφές τους. Π.χ. η διαδικασία περιέλιξης και η διαδικασία παραγωγής με έλξη, χρησιμοποιούν δέσμες ινών (*roving*, *tow*) και ρητίνες για την παραγωγή του τελικού προϊόντος χωρίς ενδιάμεσους χειρισμούς. Τα Woven stitched fabrics διευκολύνουν την κατασκευή των διαστρωμάτων με Resin Transfer Molding (RTM) και άλλες διαδικασίες, ενώ αυξάνουν το κόστος της ενίσχυσης μόνο κατά 20-40%.

**ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΙ ΑΣΥΝΕΧΕΙΣ ΙΝΕΣ:** τα σύνθετα υλικά είναι οπλισμένα είτε με συνεχείς ή με ασυνεχείς ίνες ή σωματίδια. Οι συνεχείς είναι επιμήκεις ίνες, οι οποίες συνήθως επιτυγχάνουν υψηλές τιμές των ιδιοτήτων όπως της αντοχής και της ακαμψίας λόγω της ελεγχόμενης ανισοτροπίας και του μικρού αριθμού - μεγέθους της επιφάνειας των ατελειών. Στα σύνθετα υλικά με ενισχύσεις από συνεχείς ίνες, το φορτίο θεωρείται ότι παραλαμβάνεται κυρίως από τις ίνες των οποίων η διεύθυνση είναι παράλληλη με αυτή του φορτίου. Οι συνεχείς ίνες έρχονται συσκευασμένες σε διάφορες μορφές που θα αναλυθούν στη συνέχεια.

Οι ασυνεχείς ίνες είναι κοντές, και προκύπτουν από συνεχείς ίνες με κοπή ή κατασκευάζονται απ' ευθείας κοντές με σκοπό τη μείωση του κόστους. Στις λοιπές μορφές κοντών ινών συμπεριλαμβάνονται τα *whiskers* και οι ίνες *milled*. Τα *whiskers* είναι επιμήκεις μονοί κρύσταλλοι με πολύ μεγάλη αντοχή. Ο λόγος διαστάσεων τους (*aspect ratio*) μήκος προς διάμετρο  $L/D$  επηρεάζει σημαντικά τις ιδιότητες των σύνθετων υλικών. Ο προσανατολισμός των κοντών ινών δεν μπορεί να διαχειριστεί εύκολα και βασικά υποτίθεται ότι είναι τυχαίος, εκτός αν έχουν γίνει ειδικές προβλέψεις για το χειρισμό του προσανατολισμού της ίνας. Τα σύνθετα υλικά με κοντές ίνες τυχαίου προσανατολισμού έχουν περίπου ισότροπες ιδιότητες στο επίπεδο της διαστρωμάτωσης. Τα κύρια μειονεκτήματα σε κατασκευαστικές εφαρμογές είναι ότι τα σύνθετα υλικά με κοντές ίνες δεν ελαττώνουν την παραμόρφωση των πολυμερών συνδετικών υλικών τόσο αποτελεσματικά

όσο οι συνεχείς ίνες. Επιπλέον, τα σύνθετα υλικά με κοντές ίνες έχουν συνήθως μικρότερη αντοχή από αυτά με τις συνεχείς.

**ΔΕΣΜΕΣ ΙΝΩΝ (Strand, tow, end, yarn και rovins):** μία δέσμη ινών όπως *strand, tow, end*, είναι ένα σύνολο μη πλεγμένων / περιτυλιγμένων συνεχών ινών (*untwisted bundle of continuous filaments*) που θεωρείται ως ενιαίο. Όλες οι ίνες στη δέσμη παράγονται ταυτόχρονα, από ένα μόνο κλίβανο (furnace) και κλώθονται μαζί. Το *yarn* είναι μία δέσμη πλεγμένων ινών. Το *roving* είναι μία δέσμη από παράλληλες συνεχείς δέσμες. Τα *rovings* παράγονται με την περιέλιξη ενός αριθμού μεμονωμένων δεσμών ινών απαιτούνται για να επιτευχθεί το επιθυμητό *yield*. Το *yield* είναι το μήκος της δέσμης ινών αναφορικά με μία μονάδα βάρους συσκευασίας. Η πιο συνήθης μονάδα μέτρησης του *yield* είναι γιάρδες ανά λίμπρα (yd/lb). Η μονάδα μέτρησης ονομάζεται TEX και δίνεται σε g/Km. Το TEX είναι το βάρος σε γραμμάρια ανά 1000 μέτρα δέσμης. Για το λόγο αυτό το TEX είναι αντιστρόφως ανάλογο του *yield* δηλ.

$$\text{TEX [g/Km]} = 496,238/\text{YIELD[yd/lb]} \quad (3.1)$$

Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή TEX μίας δέσμης *roving* τόσο μεγαλύτερη είναι η διατομή (*cross-sectional area*) που καλύπτουν οι ίνες. Αυτό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A [\text{cm}^2] = 10r^5 * \text{TEX [g/Km]} / \rho_f [\text{g/cm}^3] \quad (3.2)$$

όπου  $\rho_f$  είναι η πυκνότητα των ινών. Το εμβαδόν της επιφάνειας της δέσμης *roving* είναι χρήσιμο για τον υπολογισμό του κλάσματος όγκου ινών των σύνθετων υλικών.

Μια *direct-draw roving* περιτυλίγεται γύρω από ένα καρούλι (spool) απευθείας από την κάμινο με τον επιθυμητό αριθμό strands ώστε να επιτευχθεί ο επιθυμητός αριθμός *yield*. Μια *indirect-draw roving* αποκτά μορφή με έναν δευτερογενή χειρισμό για την αύξηση του *yield* περιτυλίγοντας αρκετές *direct-draw rovings* σε μία. Σε κάθε *roving* οι ίνες που είναι περιτυλιγμένες στο εξωτερικό ενός καρουλιού είναι πιο μακριές από αυτές στο εσωτερικό. Όταν η *roving* ξετυλίγεται για την κατασκευή του σύνθετου υλικού, δεν έχουν όλες οι ίνες το ίδιο μήκος. Οι *rovings* χρησιμοποιούνται απευθείας στις διαδικασίες περιέλιξης και παραγωγής με έλξη χωρίς ενδιάμεσους χειρισμούς, επιπλέον μειώνουν το κόστος του τελικού τμήματος. Οι κοινές fiberglass rovings έχουν τιμές yields μεταξύ 56 και 250 yd/lb (TEX μεταξύ 8861 και 1985 g/km). Οι ίνες άνθρακα συνήθως συσκευάζονται σε δέσμες των 3K έως 36K (TEX 198 έως 2290).

**ΔΕΣΜΕΣ ΙΝΩΝ (mat, fabric και veil):** Το mat σχηματίζεται από τυχαίου προσανατολισμού κοντές ίνες (chopped strand mat), ή swirled filaments (continuous strand mat, CSM) χαλαρά συγκρατημένες με ένα μικρό ποσό συγκολλητικού (binder). Το veil είναι λεπτό mat που χρησιμοποιείται σαν μία επιφανειακή στρώση για τη βελτίωση της αντοχής σε διάβρωση του σύνθετου υλικού. Τα veils και mats έχουν τυχαία προσανατολισμένες ίνες σε κάθε διεύθυνση, που οδηγεί σε ισότροπες ιδιότητες στο σύνθετο υλικό.

Ενώ τα rovings και tows παρέχουν ενίσχυση σε μία διεύθυνση, το ύφασμα (fabric) παρέχει ενίσχυση σε δύο διευθύνσεις. Τα πλεκτά υφάσματα (woven fabric) φτιάχνονται με παρέμβαση (interloping/ knitting) αλλά κυρίως με συνύφανση (interlacing weaving) των yarns. Οι ίνες στα μη πλεκτά υφάσματα (nonwoven fabrics) φτιάχνονται απ' ευθείας από δέσμες ινών *strands* χωρίς την ενδιάμεση μετατροπή τους σε yarns. Για το λόγο αυτό τίθεται ένα θέμα εάν τα πλεκτά υφάσματα (woven fabrics) υφίστανται μεγαλύτερη ζημιά στις ίνες λόγω της μεγαλύτερης επεξεργασίας αυτών. Τα μη πλεκτά υφάσματα (nonwoven fabrics) πρέπει να ενώνονται με ένα συγκολλητικό (binder) ή να κολλιούνται σε ένα mat ως υποστήριξη (*backing*) ή μεταξύ τους χωρίς υποστήριξη (*backing*). Κοντές ίνες (chopped strand mats) λιγότερο ακριβών ινών χρησιμοποιούνται συνήθως ως υλικά υποστήριξης (π.χ. ίνες άνθρακα κολλούνται σε κοντές ίνες fiberglass) αλλά κάθε συνδυασμός backing και μη πλεκτά υφάσματα (nonwoven fabrics), που παρέχει τον επιθυμητό συμβιβασμό μεταξύ κόστους και απόδοσης είναι πιθανός. Stitched nonwoven fabrics μπορούν να μετατραπούν σε πολύ βαριά υφάσματα (fabrics), επιπλέον μειώνουν το χρόνο και το κόστος της διαδικασίας των σύνθετων υλικών και μπορούν επαρκώς να εμποτιστούν με ρητίνη. Υφάσματα με ισορροπία (balanced) μεταξύ των στρώσεων με διάφορο προσανατολισμό κατά μήκος «off-axis» (π.χ.  $\pm\theta$ , δηλ. δέσμες με ίσες ποσότητες  $+\theta$  και  $-\theta$ ), είναι οι πλέον συνήθεις περιπτώσεις. Έτσι παράγονται ιδιαίτερα ορθότροπα σύνθετα υλικά που έχουν πολλά πλεονεκτήματα στην κατασκευή, το σχεδιασμό και την απόδοση τους. Τα mat, fabric και veil περιγράφονται από το βάρος τους ανά μονάδα επιφάνειας σε  $[gr/m^2]$  και την διάταξη των ινών τους. Η διάταξη των ινών καθορίζει στον σχεδιαστή τον προσανατολισμό και το βάρος κάθε συνιστώσας του υφάσματος.



#### 4. ΣΥΝΔΕΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

Το συνδετικό υλικό συγκρατεί τις ίνες μαζί και επιπλέον μεταφέρει το φορτίο μεταξύ των ινών, του συνδετικού υλικού και των στηρίξεων. Επίσης προστατεύει τις ίνες από το περιβάλλον και τις μηχανικές τριβές και παραλαμβάνει μέρος του φορτίου, κυρίως τις εγκάρσιες τάσεις και την ενδοστρωματική (εντός του επιπέδου) διατμητική τάση. Μερικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών, όπως η εγκάρσια ακαμψία και η αντοχή εξαρτώνται κυρίως από το συνδετικό υλικό. Αυτές επηρεάζουν την επιλογή του συνδετικού υλικού περισσότερο από ότι οι ίνες. Περαιτέρω βασική παράμετρος εκλογής του συνδετικού υλικού είναι και η θερμοκρασία χειρισμού.

Τα συνδετικά υλικά μπορούν να είναι πολυμερή, μεταλλικά ή κεραμικά. Τα πολυμερή συνδετικά υλικά είναι τα πλέον συνήθη επειδή προσδίδουν ένα βασικό πλεονέκτημα στα σύνθετα υλικά, το οποίο είναι η ευκολία της κατασκευής πολύπλοκων τμημάτων με μικρό κόστος σε εργαλεία (*tooling cost*) και μικρή επένδυση κεφαλαίου. Στην πραγματικότητα, τα σύνθετα υλικά που παράγονται από τον άνθρωπο έχουν τις ρίζες τους στα ινοπλισμένα πλαστικά. Μη ενισχυμένα πλαστικά παρέχουν οικονομία στο κόστος εργαλείων (*tooling cost*) και ενοποίηση τμημάτων (*part integration*), καθώς και απεριόριστη ελευθερία αισθητικού σχεδιασμού, αλλά πάσχουν από προβλήματα ερπυσμού. Ενισχύοντας τα πλαστικά με ίνες εξαλείφεται το πρόβλημα του ερπυσμού και ανοίγει μία άλλη διάσταση στα υλικά, παράλληλα με το σχεδιασμό και την κατασκευή, που είναι η απεριόριστη ποικιλία των μηχανικών ιδιοτήτων υπό τον έλεγχο του σχεδιαστή. Τα σύνθετα υλικά με πολυμερές συνδετικό υλικό (PMC's) είναι ο πλέον συνήθης χρησιμοποιούμενος τύπος. Εδώ γίνεται περιληπτική αναφορά σε όλους τους τύπους σύνθετων υλικών.

Το συνδετικό υλικό στα PMC's είναι πολυμερές και είναι είτε θερμικής διαμόρφωσης (*thermoset*) ή θερμοπλαστικό (*thermoplastic*). Πολλοί όροι που αναφέρονται στα PMC's παρουσιάζονται στην αγορά. Βελτιωμένα σύνθετα υλικά (ACM's) συνήθως αναφέρονται ως πιο ακριβά και υψηλής απόδοσης σύνθετα υλικά με εφαρμογές στην αεροναυπηγική, και είναι κυρίως συστήματα *carbon-epoxy* και *carbon - thermoplastic*. Τα FRP's συνήθως αναφέρονται ως λιγότερο ακριβά υλικά, στοχεύουν τα καταναλωτικά αγαθά και τις μαζικές αγορές, συμπεριλαμβανομένων των συστημάτων *fiberglass-polyester*. Πάντως η διάκριση αυτή δεν είναι πλήρως οριοθετημένη καθώς πολλά νέα υλικά έχουν βγει στην αγορά σαν συστήματα FRP, τα οποία έχουν υψηλή απόδοση και συγκεκριμένα ο λόγος απόδοσης προς κόστος υπερβαίνει εκείνον των λεγόμενων ACM's. Διάφορες ενδείξεις τείνουν να



διαφοροποιήσουν του τύπους των ινών που χρησιμοποιούνται. Π.χ. τα GRP και τα GFRP αναφέρονται σαν πλαστικά με ενισχύσεις ινών γυαλιού και το CFRP σε πλαστικά με ενισχύσεις άνθρακα. Μερικές φορές ο όρος RP (ενισχυμένο πλαστικό) χρησιμοποιείται όταν ο όρος σύνθετο υλικό μας μπερδεύει. Αυτή η περίπτωση, στην περιοχή δράσης των πολιτικών μηχανικών, όπου κατασκευή από σύνθετα υλικά σημαίνει και κατασκευές από χάλυβα και οπλισμένο σκυρόδεμα (σύμμικτες), κυρίως σε κατασκευές γεφυρών. Ο όρος *σύνθετο υλικό* που χρησιμοποιείται εδώ, αναφέρεται σε όλους τους τύπους των υλικών που είναι ενισχυμένα με ίνες.

Τα πρώτα βήματα στην πορεία σχεδιασμού των σύνθετων υλικών είναι η επιλογή μερικών συνδετικών υλικών και μεθόδων παραγωγής. Η επιλογή του συνδετικού υλικού γίνεται με βάση τις μηχανικές ιδιότητες, την αντοχή σε διάβρωση και την πυραντοχή του πολυμερούς συνδετικού υλικού μέσα στο σύνθετο υλικό. Η αντοχή σε διάβρωση του τελικού προϊόντος εξαρτάται κυρίως από το συνδετικό υλικό. Παρόλο που οι ίνες άνθρακα είναι χημικά αδρανείς, αν αλλοιωθεί το συνδετικό υλικό, η ακεραιότητα του σύνθετου υλικού τίθεται σε αμφιβολία. Πάντως, η κατάλληλη επιλογή ρητίνης, πρέπει να γίνει στην αρχή της πορείας σχεδιασμού. Ορισμένες ιδιότητες όπως η εγκάρσια ακαμψία και αντοχή επηρεάζονται βασικά από το συνδετικό υλικό, με τις ίνες να έχουν πολύ μικρή επιρροή. Για το λόγο αυτό, οποιαδήποτε ρητίνη δεν μπορεί να συνδυαστεί με οποιαδήποτε ίνα.

Η επιλογή της μεθόδου παραγωγής πρέπει να γίνει στην αρχή της πορείας σχεδιασμού για διάφορους λόγους. Πρώτον, οι μέθοδοι παραγωγής επιβάλλουν εμπόδια στην πορεία σχεδιασμού με περιοριστικές παραμέτρους όπως ο λόγος όγκου ινών και η διεύθυνση αυτών. Δεύτερον, η μέθοδος παραγωγής και το κόστος ελέγχονται με δοκιμές στην πορεία παραγωγής του τελικού προϊόντος. Τρίτον, κάθε μέθοδος παραγωγής επιβάλλει ένα όριο στο μέγεθος του τμήματος και την πολυπλοκότητα του σχήματος, που ακολούθως έχει σχέση με το σύστημα των ρητινών που χρησιμοποιούνται: όσο χαμηλότερο είναι το ιξώδες (*viscosity*) της ρητίνης, τόσο μεγαλύτερο και πιο πυκνό μπορεί να είναι ένα τμήμα.

Συμπερασματικά, ο σχεδιαστής θα πρέπει να επιλέξει μερικά συστήματα ρητινών, που θα συνακολουθούν τις απαιτήσεις της διαδικασίας, τις μηχανικές απαιτήσεις διάβρωσης και της πυραντοχής με το μικρότερο πιθανό κόστος.

#### 4.1. ΣΥΝΔΕΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ (*THERMOSET*).

Το συνδετικό υλικό θερμικής διαμόρφωσης (*thermoset*) δημιουργείται από ένα μη αναστρέψιμο χημικό μετασχηματισμό του συστήματος ρητίνης σε ένα άμορφο πολυμερές

συνδεδετικό υλικό. Γενικά, το πολυμερές ονομάζεται *σύστημα ρητίνης (resin system)* κατά τη διαδικασία και *συνδεδετικό υλικό (matrix)* αφού το πολυμερές έχει στερεοποιηθεί. Οι θερμικής διαμόρφωσης ρητίνες (*thermoset*) έχουν χαμηλό ιξώδες, το οποίο επιτρέπει τον εμποτισμό (*impregnation*) των ινών με μεγάλες ταχύτητες κατά τη διαδικασία. Τα *thermoset* είναι τα πιο κοινά συστήματα ρητινών που χρησιμοποιούνται λόγω της εύκολης χρήσης και του χαμηλού κόστους. *Shelf life* του προϊόντος ονομάζεται ο χρόνος που μπορεί η ακατέργαστη ρητίνη να αποθηκευτεί χωρίς να αποδιοργανωθεί (*degradation*). Συνήθως συνιστάται η αποθήκευση εν ψύξη ώστε να είναι δυνατή η επίτευξη της ονομαστικής *Shelf life* του προϊόντος. *Pot life* ή *gel time* είναι ο χρόνος όπου η αναμειγνυόμενη ρητίνη μπορεί να χειριστεί μέχρι το ιξώδες φθάσει σε σημείο που η επεξεργασία δεν είναι πλέον δυνατή. Ο χρόνος *gel time* καθορίζεται κατά το ASTM D2471 για τις ρητίνες και το ASTM D3532 για τα *carbon-epoxy prepreg*.

Οι κύκλοι στερεοποίησης (*cure*) μπορούν να κυμαίνονται από μερικά λεπτά έως ώρες, και μπορούν να γίνουν σε κανονικές συνθήκες θερμοκρασίας ή σε υψηλότερες θερμοκρασίες. Αυτό εξαρτάται από την επιλογή του καταλύτη και τη δυνατότητα άμεσης αντίδρασης της ρητίνης. Οι αντιδράσεις είναι εξωθερμικές και η διαδικασία πήξης/ζελατινοποίηση (*gelation*) είναι αστραπιαία. Η διαδικασία αυτή λαμβάνει χώρα όταν το ιξώδες της ρητίνης έχει αυξηθεί τόσο ώστε να είναι σχεδόν ακίνητη όταν σκαλιστεί (*probed*) με αιχμηρό αντικείμενο (ASTM D2471). Τα συστήματα στερεοποίησης (*cure*) δεν επηρεάζουν σημαντικά τις τελικές ιδιότητες των ρητινών αλλά επηρεάζουν τη διάρκεια αποθήκευσης (*storage life*) και τις συνθήκες της διαδικασίας. Εφόσον αρχίσει η διαδικασία, το μίγμα πήζει, εκλύεται θερμότητα, στερεοποιείται και συρρικνώνεται. Η ογκομετρική συρρίκνωση μετά την στερεοποίηση κυμαίνεται μεταξύ 4% για *epoxy* έως 8% για πολυεστέρες. Εφόσον οι ίνες ενίσχυσης δεν συρρικνώνονται, η προκαλούμενη εσωτερική τάση προκαλεί ρηγμάτωση, μη ευθυγράμμιση των ινών, καθώς και απόκλιση τελικών διαστάσεων και επιφανειακή τραχύτητα. Μερικές φορές προστίθεται ένα είδος βαφής (*pigments*) ως χρώμα με σκοπό την απορρόφηση των ακτινοβολιών UV.

Οι πιο συνήθεις από τις θερμικής διαμόρφωσης ρητίνες (*thermoset*) είναι: *polyesters*, *vinylester*, *epoxy* και *phenolics*. Όλες οι ρητίνες παρέχουν υψηλότερη θερμική μόνωση από τα συνήθη υλικά των κατασκευών. Οι *vinylesters* έχουν μεγάλη αντοχή ενώ οι πολυεστερικές (*polyesters*) μέτρια. Οι εποξικές ρητίνες (*epoxy*) θεωρούνται υψηλής απόδοσης με την έννοια ότι η αντοχή τους είναι υψηλότερη των άλλων θερμικά διαμορφούμενων ρητινών (*thermoset*).

**ΠΟΛΥΕΣΤΕΡΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ (POLYESTER RESINS):** οι ρητίνες αυτές έχουν μικρό ιξώδες, είναι διαυγή υγρά με βάση ακόρεστους (*unsaturated*) πολυεστέρες, τα οποία διαλύονται σε ένα ενεργό μονομερές (*reactive monomers*), όπως το (*styrene*) στυρένιο. Η θερμότητα και η προσθήκη ελευθέρων ριζών (*free radical initiator*), όπως οργανικό υπεροξείδιο, καταλήγει σε μία αντίδραση *cross-linking* μεταξύ των ακόρεστων πολυμερών και των ακόρεστων μονομερών, μετατρέποντας το διάλυμα με χαμηλό ιξώδες σε ένα τρισδιάστατο (*three-dimensional*) θερμικά διαμορφούμενο (*thermoset*) πλαστικό. Ο λόγος των κορεσμένων προς τα ακόρεστα συστατικά ελέγχει το βαθμό της αντίδρασης και επιπλέον καθορίζει την ακαμψία του τελικού προϊόντος. Η αντίδραση μπορεί επίσης να πραγματοποιηθεί σε θερμοκρασία δωματίου με τη χρήση υπεροξειδίων και κατάλληλων ενεργοποιητών (*activators*). Ο τύπος του μονομερούς παίζει σημαντικό ρόλο στην θερμική απόδοση της πολυεστερικής ρητίνης (*polyester*). Μία πολυεστερική ρητίνη (*polyester*) σε vinyl toluene, έχει μεγαλύτερη θερμική απόδοση συγκρινόμενη με την ίδια ρητίνη σε (*styrene*) στυρένιο.



Ρητίνη Polyester Molding

Οι πολυεστερικές ρητίνες (*polyester*) μπορούν να μορφωθούν έτσι ώστε να έχουν καλή αντοχή στις ακτινοβολίες UV και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πολλές εξωτερικές εφαρμογές. Αντέχουν στην έκθεση των στοιχείων σε περιόδους που υπερβαίνουν τα τριάντα (30) χρόνια, παρόλο που μπορεί να προκύψει κάποια δυσχρωμία ή μικρή απώλεια αντοχής. Η αρχή της επιφανειακής αλλοίωσης σηματοδοτείται από ένα κίτρινο αποχρωματισμό που γίνεται προοδευτικά πιο σκούρος καθώς προχωρεί η διάβρωση. Σε ημιδιαφανή συστήματα, η ηλιακή ακτινοβολία UV προκαλεί κιτρίνισμα στο σύνολο του σύνθετου υλικού, παρόλο που το χρώμα είναι συνήθως πιο έντονο στην επιφάνεια. Υψηλότερη αντοχή, διατήρηση του χρώματος και αυξημένη αντοχή στη διάβρωση των ινών, μπορεί να επιτευχθεί όταν το (*styrene*) στυρένιο συμπληρωθεί με *methyl methacrylate* (MMA) αυξημένης αντοχής. Η διατήρηση της απόχρωσης του μονομερούς μίγματος *Styrene-MMA* είναι καλύτερη από αυτή του κάθε μονομερούς μεμονωμένου. Ο διαθλαστικός δείκτης (*refractive index*) του MMA είναι χαμηλότερος από του στυρενίου, επιτρέποντας την μορφοποίηση ρητινών *polyester* με

διαθλαστικό δείκτη που ταιριάζει με αυτόν των ινών γυαλιού. Αυτό, συνδυαζόμενο με τη βελτίωση της αντοχής στις ακτινοβολίες UV, καταλήγει στη χρήση των *MMA polyesters* για τη δημιουργία ενισχυμένων με γυαλί, διάφανων δομικών πανέλων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε θερμοκήπια, υψηλά κτίρια και άλλες εφαρμογές.

Σε πολλές εφαρμογές, οι ρητίνες *polyester* απαιτείται να έχουν πυραντοχή, πράγμα το οποίο μπορεί να κατορθωθεί χρησιμοποιώντας είτε κάποιο υλικό πληρώσεως (*filler*) ή μια ειδικής μορφής, επιβραδυντική στη φωτιά πολυεστερική ρητίνη (*polyester*), που εξαρτάται από τον απαιτούμενο βαθμό πυραντοχής. Έχει βρεθεί ότι ένας δραστικός τρόπος για τη βελτίωση της πυραντοχής είναι η ενσωμάτωση αλογόνων (*halogens*) στις ρητίνες *polyester*.

Οι ρητίνες *polyester* χρησιμοποιούνται επίσης σε εφαρμογές που απαιτούν υψηλή αντοχή σε χημική διάβρωση. Πολυάριθμες εφαρμογές με δεξαμενές που αντέχουν στη διάβρωση, σωλήνες, αγωγοί και αεροσκάφη, μπορούν να βρεθούν στη χημική βιομηχανία και τις βιομηχανίες χάρτου. Διαφορετική ταξινόμηση των ρητινών *polyester* χρησιμοποιείται στις εφαρμογές με αντοχή σε διάβρωση που εξαρτώνται από το χημικό περιβάλλον. Οι ρητίνες με βάση το χλώριο (*chlорendic*) συνιστώνται σε πολύ όξινο περιβάλλον, ειδικά σε υψηλές θερμοκρασίες, ενώ το αέριο *bisphenol-A (BPA) fumarate* είναι καλύτερο σε δυνατό βασικό διάλυμα. Η χρήση των ινών από γυαλί δεν βελτιώνει αλλά αντίθετα μπορεί να μειώσει την αντοχή σε διάβρωση των ρητινών *polyester*. Αυτό ισχύει σε οξύ *hydrofluoric* ή σε δυνατό καυστικό περιβάλλον, γιατί αυτά τα χημικά μπορούν να προσβάλλουν και να διαλύσουν τις ίνες γυαλιού.

Αντιπροσωπευτικά δεδομένα των μηχανικών ιδιοτήτων των ρητινών δίνονται στον Πιν. 2.4. Αυτές οι ιδιότητες ανταποκρίνονται σε μη ενισχυμένα δείγματα καλουπιών ρητινών, που επίσης ονομάζονται "*clear castings ή neat resin samples*". Οι ισοφθαλικές (*isophthalic*) ρητίνες έχουν μεγαλύτερες εφελκυστικές και καμπτικές ιδιότητες από τις ορθοφθαλικές (*orthophthalic*). Το *BPA fumarate* και η ρητίνη με βάση το χλώριο (*chlорendic*) είναι περισσότερο άκαμπτες και αυτό συνιστά γενικώς ασταθή συμπεριφορά. Η εφαρμογή οποιασδήποτε ενίσχυσης με ίνες βελτιώνει τις μηχανικές ιδιότητες όλων των ρητινών.

Οι ισοφθαλικές (*isophthalic*) ρητίνες έχουν μέτρια αντοχή σε διάβρωση σε θερμοκρασίες μικρότερες των 82°C. Είναι ευλύγιστες ή άκαμπτες, οι άκαμπτες έχουν μεγαλύτερη χημική αντοχή λόγω του υψηλού μοριακού τους βάρους. Έχουν μεγάλη αντοχή σε διάβρωση στο νερό και καλή αντοχή σε βενζίνη, λάδια, ασθενή οξέα, αλκάλιο και χαμηλή αντοχή σε υπεροξειδία και υποχλωρίδια (*peroxides και hypochlorites*). Επιφάνειες πλούσιες σε ίνες μπορούν να παρέχουν σημαντική επιβράδυνση της φωτιάς. Συνθέσεις των ισοφθαλικών

ρητινών (*isophthalic*) με βρώμιο (*brominated versions*) είναι διαθέσιμες για την επιβράδυνση της φωτιάς. Τυπικές ιδιότητες για τις ρητίνες αυτές δίνονται στον Πιν. 2.4. Οι ορθοφθαλικές ρητίνες (*orthophthalic*), ονομάζονται πολυεστέρες (*polyesters*) γενικής χρήσης και δεν χρησιμοποιούνται σε κατασκευαστικές εφαρμογές επειδή έχουν χαμηλή αντοχή σε διάβρωση και μικρή μηχανική αντοχή.

Οι ρητίνες με βάση το χλώριο (*chlorotic*) χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές με υψηλές θερμοκρασίες έως 176 °C. Έχουν υψηλή αντοχή στα οξέα, σε υπεροξειδία και υποχλωρίδια (*peroxides και hypochlorites*). Έχουν καλή αντοχή σε διαλυτικά μέσα αλλά χαμηλή σε αλκαλικό περιβάλλον. Η αντοχή τους είναι μέτρια και η πυραντοχή τους είναι μεγάλη, έως τη τάξη I για ειδικές μορφές.

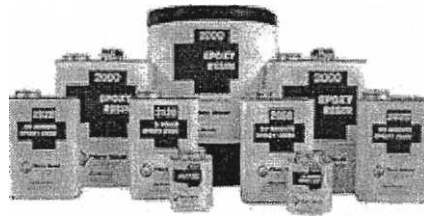
Τα BPA fumarate είναι καλύτερα των ισοφθαλικών (*isophthalic*) σε δυνατά οξέα και αλκαλικό περιβάλλον έως τους 12ΓΟ. Έχουν χαμηλή αντοχή σε φωτιά και μέτρια αντοχή σε διαλυτικά μέσα, σε υπεροξειδία και υποχλωρίδια (*peroxides και hypochlorites*).

Οι πολυεστερικές (*polyesters*) ρητίνες θεωρούνται χαμηλού κόστους. Κύριες ποικιλίες όπως οι γενικών χρήσεων ρητίνες, μπορούν να είναι έως 1,43 \$/Kg φθηνές. Άλλες, όπως αυτές για εφαρμογές πυροπροστασίας είναι ελαφρώς πιο ακριβές (2,22 \$/Kg).

**PHTINEΣ VINYLESTER:** Οι ρητίνες *vinylester* έχουν υψηλότερες μηχανικές ιδιότητες από τις πολυεστερικές (*polyesters*) και κοστίζουν όσο οι υψηλής απόδοσης εποξικές (*epoxy*) ρητίνες. Υπάρχει μεγάλη ποικιλία τους που διατίθεται για εφαρμογές σε θερμοκρασίες έως 121 °C. Έχουν μεγάλη αντοχή σε οξέα, βάσεις, διαλυτικά μέσα, σε υπεροξειδία και υποχλωρίδια (*peroxides και hypochlorites*). Αυτές με το βρώμιο (*brominated versions*) έχουν μεγαλύτερη πυραντοχή. Τυπικές ιδιότητες δίνονται στον Πιν. 2.4. Το κόστος τους είναι μεταξύ αυτών των πολυεστερικών (*polyesters*) και εποξικών (*epoxy*), μικρότερο από 4,0 \$/Kg.

**ΕΠΟΞΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ (EPOXY):** χρησιμοποιούνται ευρύτατα λόγω της μεγάλης τους ικανότητας προσαρμογής, έχουν υψηλές μηχανικές ιδιότητες και μεγάλη αντοχή σε διάβρωση. Οι εποξικές (*epoxy*) συρρικνώνονται λιγότερο από ότι άλλα υλικά (1,2 έως 4 % του όγκου), πράγμα το οποίο βοηθά στο να εξηγηθούν τα εξαιρετικά χαρακτηριστικά δεσμού όταν χρησιμοποιούνται σαν συγκολλητικά (*adhesives*). Επηρεάζονται λιγότερο από την υγρασία και τη θερμοκρασία σε σχέση με άλλα πολυμερή συνδετικά. Προτιμώνται επίσης για την απλή διαδικασία στερεοποίησης που μπορεί να γίνει σε θερμοκρασίες μεταξύ 5° και 150°C.

Ένα από τα σημαντικότερα πεδία εφαρμογής των εποξικών ρητινών (*epoxy*) είναι η βιομηχανία των αεροσκαφών. Χρησιμοποιούνται σαν συγκολλητικό μέσο (*adhesives*) σε κατασκευές κυψελών για αεροσκάφη (*aircraft honeycomb*) και σαν διαστρωματικές ρητίνες στο σκελετό αεροσκαφών και σε εφαρμογές πυραύλων, σε κατασκευές με τη διαδικασία της περιέλιξης και για εργαλεία (*tooling*). Είναι πολύ χρήσιμες ως συστατικά στεγανοποίησης για την κατασκευή και επισκευή πλαστικών ή μεταλλικών σκαφών και αυτοκινήτων. Σε κτιριακά έργα και στην κατασκευή αυτοκινητοδρόμων χρησιμοποιούνται ως στεγανοποιητικά μέσα (όταν είναι επιθυμητή υψηλή αντοχή σε χημική διάβρωση) και ως μέσο επικάλυψης του σκυροδέματος.



Σύστημα ρητίνης 2000

Epoxy

Χρησιμοποιούνται επίσης ως συστατικό έγχυσης (*casting compounds*) περιορισμένης χρήσης σε κατασκευές και πρωτότυπων καλουπιών, βαφές σφραγίδων και εργαλείων. Τελικά, έχουν ένα μεγάλο εύρος χρήσης στο τομέα των ηλεκτρικών λόγω της εξαιρετικής ηλεκτρικής μόνωσης που προσφέρουν. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν *potting* και συστατικό συμπίκνωσης, εμποτισμένες (*impregnating*) ρητίνες και βερνίκια σε ηλεκτρικούς και ηλεκτρονικούς εξοπλισμούς. Το κόστος των εποξικών ρητινών (*epoxy*) είναι ανάλογο των εφαρμογών των ρητινών, το οποίο ποικίλει σε ένα ευρύ φάσμα, αλλά είναι συνήθως πιο ακριβές από τις ρητίνες *vinylester*.

Οι τυπικές μηχανικές ιδιότητες κάποιων εποξικών ρητινών (μη ενισχυμένων) δίνονται στον Πιν. 2.4. Το σύστημα EPON 9310/9360 χρησιμοποιείται στη διαδικασία παραγωγής με έλξη. Το σύστημα ρητινών EPON 9310 έχει προκύψει με 33 phr (*phr= parts per hundred in weight=τιμήματα επί τοις εκατό ανά βάρος*) του βοηθητικού μέσου 9360. Σημειώνεται εδώ η επιβλαβής επιρροή της θερμοκρασίας στο μέτρο ελαστικότητας και την αντοχή, το οποίο συμβαίνει στα πολυμερή γενικά. Το σύστημα EPON 9420/9470 χρησιμοποιείται στις διαδικασίες *Resin Transfer Molding (RTM=Καloom ρητινεδέσεως)*, περιέλιξης (*filament winding*), παραγωγής με έλξη (*pultrusiori*) και με προκατασκευασμένες στρώσεις (*prepregs*). Το σύστημα ρητινών 9420 προκύπτει από (A) 24,4 phr και (B) 32,4 phr του βοηθητικού μέσου 9470. Σημειώνεται στον Πιν. 2.4. ότι η υψηλότερη θερμοκρασία μετάβασης του γυαλιού  $T_g$  (*glass transition temperature*) από παραμορφώσιμο στερεό σε υλικό τύπου «μαστίχα» οδηγεί σε ένα πιο ψαθυρό συνδετικό υλικό με μικρότερες επιμηκύνσεις και μηχανικές ιδιότητες. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει πάντα μία σχέση ανταλλαγής μεταξύ των υψηλών θερμοκρασιών εφαρμογής και των

Εποξικά συνδετικά υλικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε θερμοκρασίες λειτουργίας (*service*) μεταξύ 125°C και 175°C. Για να αυξηθεί η σκληρότητα της ρητίνης και του σύνθετου υλικού, αυτό γίνεται με πρόσθετα στις βασικές εποξικές ρητίνες θερμικής διαμόρφωσης (*thermoset*), συμπεριλαμβανομένης και της προσθήκης θερμοπλαστικών (*thermoplastics*). Οι θερμοκρασίες λειτουργίας για τις σκληρυμένες ρητίνες είναι πάντα χαμηλότερες από τις θερμοκρασίες μετάβασης του γυαλιού, που είναι υψηλές για εύθραυστα εποξικά (*brittle epoxies*) (έως 247°C) και χαμηλές για σκληρυμένα εποξικά (*toughened epoxies*) (μεταξύ 76 και 185°C).

**ΡΗΤΙΝΕΣ ΦΑΙΝΟΛΗΣ (PHENOLIC):** οι ρητίνες αυτές έχουν μικρή πυραντοχή και μικρή παραγωγή καπνού, σε σύγκριση με άλλες ρητίνες μικρού κόστους. Επίσης, έχουν καλή σταθερότητα των διαστάσεων για αυξομείωση της θερμοκρασίας και αρκετά καλές συγκολλητικές ιδιότητες. Οι φαινόλες χρησιμοποιούνται σε αεροσκάφη, σε οχήματα μαζικής μεταφοράς και σε εσωτερικές κατασκευές όπου η έκλυση αερίων κατά τη διάρκεια φωτιάς πρέπει να είναι πολύ μικρή. Χρησιμοποιούνται στις διαδικασίες *Sheet Molded Compound (SMC)*, περιέλξης (*filament winding*) και παραγωγής με έλξη (*pultrusion*). Η διαδικασία εφαρμογής των ρητινών φαινόλης (*phenolic*) διαφέρει αρκετά από τις άλλες θερμικής διαμόρφωσης (*thermoset*), κυρίως τις πολυεστερικές (*polyester*) ρητίνες, αλλά πετυχημένες παραγωγές έχουν επιτευχθεί με καλές μηχανικές ιδιότητες. Το κόστος αυτών είναι ανταγωνιστικό των πολυεστερικών (*polyester*) περίπου \$1,32/Kg. Άλλες ρητίνες παρουσιάζουν χαμηλή πυραντοχή και τοξικότητα (*toxicity*) όπως οι *bismaleimide* και *polystyrylpyridine*. Δεδομένα για τις θερμοκρασίες της ρητίνης *bismaleimide*, του μίγματος 70/30 από *compimide 796* και TM-123 της Shell Chemical Co. φαίνονται στον Πιν. 2.4.

#### 4. 2 ΘΕΡΜΟΠΛΑΣΤΙΚΑ ΣΥΝΔΕΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ (*THERMOPLASTIC*).

Ένα θερμοπλαστικό (*thermoplastic*) πολυμερές δεν παθαίνει καμία χημική μεταμόρφωση κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας. Αντίθετα, το πολυμερές μαλακώνει από τη στερεή φάση που είναι, και επιστρέφει ξανά ως στερεό αφού ολοκληρωθεί η επεξεργασία. Τα θερμοπλαστικά (*thermoplastic*) έχουν υψηλή πυκνότητα για τις θερμοκρασίες επεξεργασίας, η οποία τα καθιστά δύσκολα στην επεξεργασία. Απαιτούνται υψηλές διατμητικές τάσεις ώστε να κάνουν τα θερμοπλαστικά (*thermoplastic*) να ρέουν διότι καταστροφή στις ίνες συνεπάγεται μείωση του μήκους των ινών από 10 έως και 100 φορές. Για το λόγο αυτό, ένας από τους βασικούς στόχους στην παραγωγή των θερμοπλαστικών (*thermoplastic*) και των επεξεργασιών αυτών είναι να μειωθούν οι κολλώδεις δράσεις (*viscous effects*) στην υγρή φάση. Καθώς ο εμποτισμός (*impregnation*) δυσκολεύει με την υψηλή πυκνότητα, πρέπει να ληφθεί ειδική μέριμνα ώστε να εξασφαλιστεί η επαφή μεταξύ ινών και πολυμερούς. Π.χ ανακατεμένες (*intermingled*) ίνες και *polymer strand* χρησιμοποιούνται για να σχηματίσουν μία δέσμη *tow*, και κατόπιν ολοκληρώνεται η επεξεργασία με το λιώσιμο του πολυμερούς με θερμότητα. Αυτοί οι ενδιάμεσοι χειρισμοί και πιο αργές πορείες επεξεργασίας προσθέτουν κόστος στο τελικό προϊόν. Τα θερμοπλαστικά (*thermoplastic*) δεν απαιτούν



αποθήκευση υπό ψύξη και έχουν εικονικά απεριόριστη διάρκεια αποθήκευσης. Επίσης τα θερμοπλαστικά (*thermoplastic*) σύνθετα υλικά μπορούν να επισκευαστούν διότι η μετάπτωση στο μαλακό στάδιο (*softened stage*) μπορεί να πραγματοποιηθεί πολλές φορές με την εφαρμογή θερμότητας.

Το *Poly-ether ether-ketone (PEEK)* είναι το πιο σύνηθες θερμοπλαστικό (*thermoplastic*) συνδετικό υλικό για εφαρμογές υψηλής απόδοσης. Έχει πολύ μεγάλη αντοχή θραύσης, το οποίο είναι σημαντικό για την ανοχή φθορών στα σύνθετα υλικά. Το *PEEK* είναι ημικρυσταλλικό θερμοπλαστικό (*thermoplastic*) με πολύ μικρή απορροφητικότητα σε νερό (περίπου 0,5% του βάρους) σε θερμοκρασία δωματίου, πολύ μικρότερη από τα περισσότερα εποξικά (*epoxies*).

Το *polyphenylene sulfide (PPS)* είναι ημικρυσταλλικό θερμοπλαστικό (*thermoplastic*) με εξαιρετική χημική αντοχή. Το *polysulfone (PSUL)* είναι ένα άμορφο θερμοπλαστικό με πολύ μεγάλη επιμήκυνση θραύσης και εξαιρετική σταθερότητα υπό θερμές και υγρές συνθήκες. Τα *polyetherimide (PEI)* *polyamide-imide (PAI)* είναι άμορφα θερμοπλαστικά με υψηλή θερμοκρασία μετάβασης του γυαλιού  $T_g$ . Τα δύο άλλα θερμοπλαστικά του Πιν.2.5, τα *K-III* και *LARC-TPI*, είναι προ-πολυμερή (*prepolymers*) σε διαλυτικό μέσο/διάλυμα (*solvent solution*) που χρησιμοποιούνται για την επικάλυψη των ινών. Οι επικαλύψεις (*coatings*) στερεοποιούνται στους 300°C και μετατρέπονται σε άμορφα πολυμερή με υψηλή θερμοκρασία μετάβασης του γυαλιού. Μετά την στερεοποίηση το πολυμερές μπορεί να θερμανθεί και να ανασχηματιστεί σαν ένα κανονικό θερμοπλαστικό (*thermoplastic*) με καλή υψηλή θερμοκρασία απόδοσης.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

#### 2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στη μηχανική του παραμορφώσιμου στερεού εξετάζονται τα ακόλουθα τέσσερα πεδία:

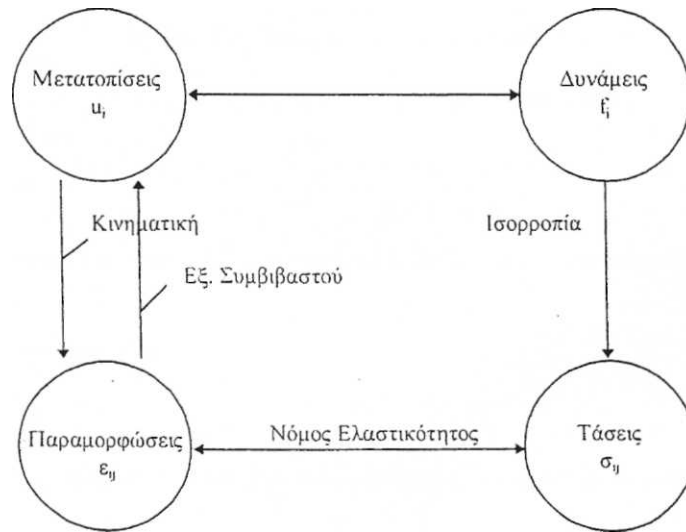
- το πεδίο μετατοπίσεων  $u$ ,
- το πεδίο παραμορφώσεων  $\epsilon$ ,
- το πεδίο τάσεων  $\sigma$ , και
- το πεδίο δυνάμεων  $f$ .

Ένα παραμορφώσιμο σώμα που υποβάλλεται σε δεδομένο πεδίο εξωτερικών δυνάμεων  $f$  θα αναπτύξει εσωτερικές τάσεις  $\sigma$  και παραμορφώσεις  $\epsilon$ , και θα μετατοπιστεί κατά  $u$ . Τα πεδία μετατοπίσεων, παραμορφώσεων, τάσεων και δυνάμεων εκφράζονται σε ένα τρισδιάστατο κύριο σύστημα 1-2-3 υπό διανυσματική μορφή ως ακολούθως:

- Μετατοπίσεις  $u_j$
- Παραμορφώσεις  $\epsilon_{ij}$
- Τάσεις  $\sigma_{ij}$
- Δυνάμεις  $f_i$

όπου οι δείκτες παίρνουν τιμές  $i, j = 1, 2, 3$ .

Τα τέσσερα αυτά πεδία συνδέονται μεταξύ τους με διάφορες σχέσεις οι οποίες είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλημάτων ελαστικότητας. Οι τάσεις συνδέονται με τις δυνάμεις μέσω των εξισώσεων ισορροπίας εξ.(2.1), οι παραμορφώσεις με τις τάσεις μέσω του νόμου ελαστικότητας εξ.(2.2), και οι μετατοπίσεις με τις παραμορφώσεις μέσω των κινηματικών σχέσεων εξ.(2.3) και των εξισώσεων συμβιβαστού εξ.(2.4). Στα συνήθη προβλήματα που απαντώνται στην πράξη, είναι γνωστό το πεδίο δυνάμεων και ζητείται το πεδίο μετατοπίσεων. Τούτο προϋποθέτει ενδιάμεσο υπολογισμό των τάσεων και παραμορφώσεων. Το διάγραμμα αντιμετώπισης ενός κλασσικού προβλήματος ελαστικότητας φαίνεται στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1 Τα τέσσερα πεδία της μηχανικής

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} * \epsilon_{kl} \quad (2.2)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \epsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \epsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} \quad (2.4)$$

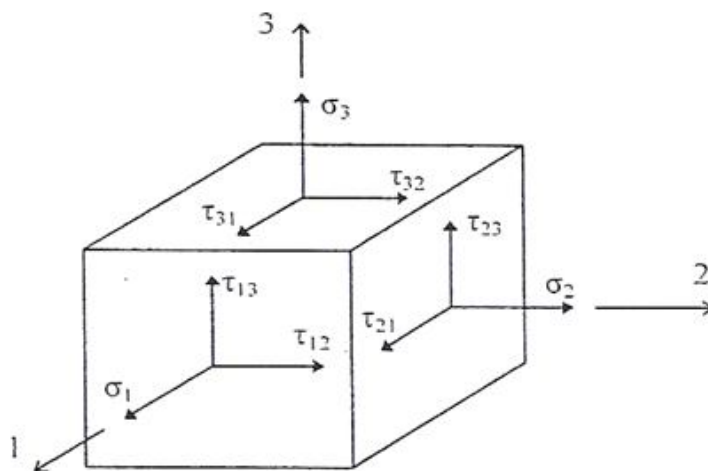
Όπου  $i,j,k,l = 1,2,3$ .

Με βάση την θεωρία μικρών παραμορφώσεων, η κινηματική σχέση (2.3) απλοποιείται στην ακόλουθη:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

## 2.2 ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Θεωρώντας το κύριο σύστημα αξόνων 1-2-3 (Σχ. 2.2) έχουμε:



Σχήμα 2.2 Τάσεις στο κύριο σύστημα 1-2-3

όπου  $\sigma_i$  είναι οι ορθές τάσεις και  $\tau_{ij}$  είναι οι διατμητικές τάσεις, για  $i,j=1,2,3$ . Οι τάσεις γράφονται υπό διανυσματική μορφή ως εξής:

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \tau_{23} \ \tau_{31} \ \tau_{12}\} \quad (2.6)$$

Ομοίως, οι αντίστοιχες παραμορφώσεις συμβολίζονται με  $\varepsilon_i$  (ορθές) και  $\gamma_{ij}$  (διατμητικές). Είναι δε

$$(2.7)$$

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

Το διάνυσμα των παραμορφώσεων είναι  $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \gamma_{23} \ \gamma_{31} \ \gamma_{12}\}$

$$(2.8)$$

Ακριβώς ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για ένα τυχόν σύστημα x-y-z, όπου οι δείκτες λαμβάνουν τιμές  $i,j = x,y,z$ .

### 2.3 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ HOOKE

Ο νόμος ελαστικότητας, όπως εκφράσθηκε προηγουμένως, συνδέει τάσεις και παραμορφώσεις με 81 ελαστικές σταθερές  $C_{ijkl}$  ( $i,j,k,l = 1,2,3$ ). Επειδή όμως οι τάσεις και οι παραμορφώσεις είναι συμμετρικές ( $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$  και  $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$ ), ο νόμος γίνεται:

$$\begin{array}{c|c|cccccc|c}
 \sigma_1 & & C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & \varepsilon_1 \\
 \sigma_2 & & C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & \varepsilon_2 \\
 \sigma_3 & = & C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} & \varepsilon_3 \\
 \tau_{23} & & C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} & \gamma_{23} \\
 \tau_{31} & & C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} & \gamma_{31} \\
 \tau_{12} & & C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} & \gamma_{12}
 \end{array} \quad (2.9)$$

Αυτή η έκφραση είναι η πλέον γενική για ένα ανισότροπο γραμμικώς ελαστικό υλικό. Οι 36 ελαστικές σταθερές όμως δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αν θεωρήσουμε την ενέργεια παραμορφώσεως  $W$ :

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.10)$$

και παραγωγίσουμε ως προς τις παραμορφώσεις, έχουμε:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ji}} = C_{ji} \varepsilon_{ji} = \sigma_{ji} \quad (2.11\beta)$$

Όμως είναι  $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ , άρα για τις ελαστικές σταθερές ισχύει  $C_{ij}=C_{ji}$ . Άρα, οι ανεξάρτητες σταθερές είναι 21. Το υλικό στην περίπτωση αυτή λέγεται επίσης τρικλινικό.

Αν υπάρχει ένα επίπεδο συμμετρίας (π.χ. το 1-2), τότε το υλικό λέγεται μονοκλινικό, και ο νόμος ελαστικότητας απλοποιείται σε:

$$\begin{array}{c|c|cccccc|c}
 \sigma_1 & & C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} & \varepsilon_1 \\
 \sigma_2 & & C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} & \varepsilon_2 \\
 \sigma_3 & = & C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} & \varepsilon_3 \\
 \tau_{23} & & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 & \gamma_{23} \\
 \tau_{31} & & 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 & \gamma_{31} \\
 \tau_{12} & & C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} & \gamma_{12}
 \end{array} \quad (2.12)$$

Οι ανεξάρτητες σταθερές στην περίπτωση αυτή είναι 13.

Αν υπάρχει συμμετρία ως προς 3 ορθογωνικά επίπεδα, το υλικό λέγεται ορθότροπο. Ο νόμος ελαστικότητας γίνεται:

$$\begin{array}{c|c|cccccc|c}
 \sigma_1 & & C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\
 \sigma_2 & & C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\
 \sigma_3 & = & C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\
 \tau_{23} & & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & \gamma_{23} \\
 \tau_{31} & & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & \gamma_{31} \\
 \tau_{12} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & \gamma_{12}
 \end{array} \quad (2.13)$$

και περιέχει 9 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές.

**Παρατήρηση:** Στα ορθότροπα υλικά και στο κύριο σύστημα αξόνων 1-2-3 δεν υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ κυρίων και διατμητικών τάσεων-παραμορφώσεων.



Μια ειδική περίπτωση ορθότροπου υλικού είναι αν το υλικό συμπεριφέρεται ισότροπα κατά μια διεύθυνση. Το υλικό αυτό λέγεται εγκαρσώς ισότροπο και περιγράφεται από τον ακόλουθο νομο ελαστικότητας:

$$\begin{array}{c|c|cccccc|c|c}
 \sigma_1 & & C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\
 \sigma_2 & & C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\
 \sigma_3 & = & C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\
 \tau_{23} & & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 & \gamma_{23} \\
 \tau_{31} & & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & \gamma_{31} \\
 \tau_{12} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & \gamma_{12}
 \end{array} \quad (2.14)$$

Οι ανεξάρτητες σταθερές μειώνονται τώρα σε 5, όπου:

$$C_{33} = C_{22}, C_{12} = C_{13}, C_{55} = C_{66}, C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \quad (2.15)$$

Τέλος στα ισότροπα υλικά έχουμε:

$$\begin{array}{c|c|cccccc|c|c}
 \sigma_1 & & C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\
 \sigma_2 & & C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\
 \sigma_3 & = & C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\
 \tau_{23} & & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 & \gamma_{23} \\
 \tau_{31} & & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & \gamma_{31} \\
 \tau_{12} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & \gamma_{12}
 \end{array} \quad (2.16)$$

Οι ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές είναι 2, όπου:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= C_{22} = C_{33} \\
 C_{12} &= C_{23} = C_{31} \\
 C_{44} &= C_{55} = C_{66} = \frac{1}{2} (C_{11}-C_{12})
 \end{aligned} \quad (2.17)$$

ΥΛΙΚΟ	ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ	1-2-3	x - y - z	ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ
ΤΡΙΚΛΙΝΙΚΟ	21	36	36	36
ΜΟΝΟΚΛΙΝΙΚΟ	13	20	36	36
ΟΡΘΟΤΡΟΠΟ	9	12	20	36
ΕΓΚ. ΙΣΟΤΡΟΠΟ	5	12	20	36
ΙΣΟΤΡΟΠΟ	2	12	12	12

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1 Ελαστικές σταθερές

Αντιστρέφοντας την σχέση τάσεων-παραμορφώσεων εξ. (2.9) έχουμε:

$$\begin{array}{c|c|cccccc|c}
 \varepsilon_1 & & S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} & \sigma_1 \\
 \varepsilon_2 & & & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} & \sigma_2 \\
 \varepsilon_3 & = & & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} & \sigma_3 \\
 \gamma_{23} & & & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} & \tau_{23} \\
 \gamma_{31} & & & & & & S_{55} & S_{56} & \tau_{31} \\
 \gamma_{12} & & & & & & & S_{66} & \tau_{12}
 \end{array} \quad (2.18)$$

Όπου  $S_{ij}$  είναι όροι ευκαμψίας.

## 2.4 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

Οι μηχανικές σταθερές (μέτρα ελαστικότητας) προσδιορίζονται με απλά πειράματα:

- Εφαρμόζοντας μονοαξονικά τάση  $\sigma_1$  όπου ( $\sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = \tau_{12} = 0$ ), έχουμε:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1}, \quad \varepsilon_2 = -\nu_{12}\varepsilon_1 = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_1, \quad \varepsilon_3 = -\nu_{13}\varepsilon_1 = \frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_1 \quad (2.19\alpha)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0$$

- Εφαρμόζοντας μονοαξονικά τάση  $\sigma_2$  όπου ( $\sigma_1 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = \tau_{12} = 0$ ), έχουμε:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2}, \quad \varepsilon_1 = -\nu_{21}\varepsilon_2 = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_2, \quad \varepsilon_3 = -\nu_{23}\varepsilon_2 = \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_2 \quad (2.19\beta)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0$$

- Εφαρμόζοντας μονοαξονικά τάση  $\sigma_3$  όπου ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \tau_{23} = \tau_{31} = \tau_{12} = 0$ ), έχουμε:

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_3}, \quad \varepsilon_1 = -\nu_{31}\varepsilon_3 = -\frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_3, \quad \varepsilon_2 = -\nu_{32}\varepsilon_3 = \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_3 \quad (2.19\gamma)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0$$

- Εφαρμόζοντας καθαρή διάτμηση  $\tau_{23}$  όπου ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{31} = \tau_{12} = 0$ ), έχουμε:

$$\gamma_{23} = \tau_{23} / G_{23} \quad (2.19\delta)$$

- Εφαρμόζοντας καθαρή διάτμηση  $\tau_{31}$  όπου ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{12} = 0$ ), έχουμε:

$$\gamma_{31} = \tau_{31} / G_{13} \quad (2.19\epsilon)$$

- Εφαρμόζοντας καθαρή διάτμηση  $\tau_{12}$  όπου ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$ ), έχουμε:

$$\gamma_{12} = \tau_{12} / G_{12} \quad (2.19\sigma\tau)$$

Έτσι για το αντίστροφο του νόμου ελαστικότητας συναρτήσει των μηχανικών σταθερών είναι:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
 \varepsilon_1 & & 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 \\
 \varepsilon_2 & & -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 \\
 \varepsilon_3 & = & -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3 \\
 \gamma_{23} & & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 & \tau_{23} \\
 \gamma_{31} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0 & \tau_{31} \\
 \gamma_{12} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & \tau_{12}
 \end{array} \quad (2.20)$$

Οι λόγοι Poisson ορίζονται ως εξής:  $\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$ , όπου  $i, j = 1, 2, 3$ .

Επειδή το μητρώο ελαστικότητας είναι συμμετρικό, θα ισχύει:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}$$

με  $i, j = 1, 2, 3$ .

Για εγκάρσια ισότροπα υλικά ισχύει:

$$G_{13} = G_{12}, E_2 = E_3, \nu_{21} = \nu_{31}, \nu_{23} = \nu_{32} \text{ και } G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{32})}$$

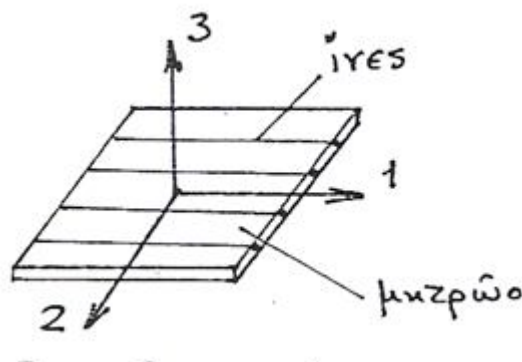
Για ισότροπα υλικά είναι:

$$G = G_{ij}, E = E_{ij}, \nu = \nu_{ij} \text{ και } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

2.5 ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΝΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Έστω ένα ορθότροπο υλικό σε επίπεδη εντατική κατάσταση δηλ.  $\sigma_3=\tau_{23}=\tau_{31}=0$ . Τότε η σχέση (2.20) απλοποιείται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$



Οι ανεξάρτητες σταθερές είναι πλέον τέσσερις, δηλ.  $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$  και ισχύει:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$$

Τετραγωνικώς Συμμετρικό Υλικό

Στην περίπτωση αυτή είναι  $E_1=E_2$  και κατ' επέκταση  $\nu_{12}=\nu_{21}$ . Η εξ.(2.22) απλοποιείται περαιτέρω στην ακόλουθη:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Το υλικό έχει τρεις ανεξάρτητες σταθερές  $E_1$ ,  $\nu_{12}$ ,  $G_{12}$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι στα τετραγωνικώς συμμετρικά υλικά είναι:

$$G_{12} \neq \frac{E_1}{2(1+\nu_{12})} \quad (2.25)$$

### Ισότροπο Υλικό

Η σχέση (2.25) γίνεται πλέον ισότητα, και είναι:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu_{12})/E_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{vmatrix} \quad (2.26)$$

με δύο ανεξάρτητες σταθερές  $E_1$ ,  $\nu_{12}$ .

Αντιστρέφοντας την σχέση τάσεων-παραμορφώσεων (2.22) έχουμε για την γενική περίπτωση ορθότροπου υλικού:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} \begin{vmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu_{12})/E_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{vmatrix} \quad (2.27)$$

και ορίζοντας τους όρους ακαμψίας  $Q_{ij}$  ως ακολούθως:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = Q_{21}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2.28)$$

έχουμε τη σχέση (2.27) υπό την ακόλουθη συμβολική μορφή:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{vmatrix} \quad (2.29)$$

Παρατήρηση: Στο κύριο σύστημα 1-2, οι όροι  $Q_{16} = Q_{26} = Q_{61} = Q_{62} = 0$ .

Χρησιμοποιώντας τους όρους ευκαμψίας  $S_{ij}$  η εξ. (2.26) γράφεται:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{vmatrix} \quad (2.30)$$

όπου:

$$S_{11} = 1/E_1, S_{22} = 1/E_2, S_{12} = S_{21} = -\nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2, S_{66} = 1/G_{12}$$

Εξαιρέσει ορισμένων περιπτώσεων όπου απαιτείται η χρήση τρισδιάστατης θεωρίας (3D), τα σύνθετα υλικά αντιμετωπίζονται συνήθως σαν δισδιάστατα (2D) ελαστικά υλικά. Ειδικότερα στα ινοπλισμένα σύνθετα υλικά με προσανατολισμένες ίνες, κάθε στρώση χαρακτηρίζεται από την κύρια διεύθυνση (1) που είναι παράλληλη στις ίνες, από την εγκάρσια διεύθυνση (2) κάθετη στις ίνες, και την εκτός του επιπέδου 1-2 διεύθυνση (3).

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**

---



### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

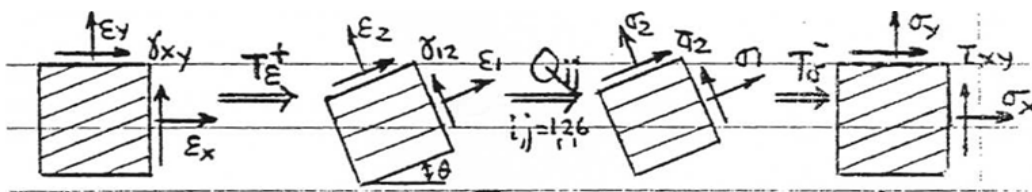
#### ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

##### 3.1 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΑΚΑΜΨΙΑΣ $Q_{ij}$

Στο σύστημα υλικού 1-2, η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων είναι:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Έστω ένα σύστημα x-y στραμμένο κατά γωνία  $\theta$  σε σχέση με το σύστημα υλικού. Ζητείται ο προσδιορισμός της σχέσης που συνδέει τις τάσεις  $\sigma_x, \sigma_y,$  και  $\tau_{xy}$  με τις παραμορφώσεις  $\epsilon_x, \epsilon_y,$  και  $\gamma_{xy}$  στο στραμμένο σύστημα x-y. Αυτό συνίσταται στο πως εκφράζονται οι όροι ακαμψίας  $Q_{ij}$  στο σύστημα x-y.



Σχήμα 3.1 Διάγραμμα μετασχηματισμού των όρων ακαμψίας [Q]

1<sup>ο</sup> βήμα: Εκφράζουμε τις παραμορφώσεις  $\epsilon_1, \epsilon_2,$  και  $\gamma_{12}$  ως προς τις παραμορφώσεις  $\epsilon_x, \epsilon_y,$  και  $\gamma_{xy}$  στο σύστημα x-y μέσω του θετικού μετασχηματισμού τάσεων  $[T_\epsilon^+]$ .

$$\epsilon_1 = c^2\epsilon_x + s^2\epsilon_y + cs\gamma_{xy}$$

$$\epsilon_2 = s^2\epsilon_x + c^2\epsilon_y - cs\gamma_{xy}$$

$$\gamma_{12} = -2cs\epsilon_x + 2cs\epsilon_y + (c^2 - s^2)\gamma_{xy}$$

2<sup>ο</sup> βήμα: Εκφράζουμε τις  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  ως προς τις  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ .

$$\sigma_1 = (c^2Q_{11} + s^2Q_{12}) \epsilon_x + (s^2Q_{11} + c^2Q_{12}) \epsilon_y + (Q_{11} - Q_{12})cs\gamma_{xy}$$

$$\sigma_2 = (c^2Q_{12} + s^2Q_{22}) \epsilon_x + (s^2Q_{12} + c^2Q_{22}) \epsilon_y + (Q_{12} - Q_{22})cs\gamma_{xy}$$

$$\tau_{12} = -2csQ_{66}\epsilon_x + 2csQ_{66}\epsilon_y + (c^2 - s^2)Q_{66} \gamma_{xy}$$

3<sup>ο</sup> βήμα: Εκφράζουμε τα  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  ως προς τις  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  (αρνητικό [  $T_y^-$  ])

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c^2\sigma_1 + s^2\sigma_2 - 2cst_{12} = \\ &= c^2[(c^2Q_{11} + s^2Q_{12})\varepsilon_x + (s^2Q_{11} + c^2Q_{12})\varepsilon_y + cs(Q_{11} - Q_{12})\gamma_{xy}] + \\ &\quad + s^2[(c^2Q_{12} + s^2Q_{22})\varepsilon_x + (s^2Q_{12} + c^2Q_{22})\varepsilon_y + cs(Q_{12} - Q_{22})\gamma_{xy}] - \\ &\quad - 2cs[-2csQ_{66}\varepsilon_x + 2csQ_{66}\varepsilon_y + (c^2 - s^2)Q_{66}\gamma_{xy}] \end{aligned}$$

και ανακατατάσσοντας έχουμε:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= [c^4Q_{11} + s^4Q_{22} + 2c^2s^2Q_{12} + 4c^2s^2Q_{66}]\varepsilon_x + \\ &\quad + [c^2s^2Q_{11} + c^2s^2Q_{22} + (c^4 + s^4)Q_{12} - 4c^2s^2Q_{66}]\varepsilon_y + \\ &\quad + [c^3sQ_{11} - cs^3Q_{22} + (cs^3 - c^3s)Q_{12} + 2(cs^3 - c^3s)Q_{66}]\gamma_{xy} = \\ &= \overline{Q_{11}}\varepsilon_x + \overline{Q_{12}}\varepsilon_y + \overline{Q_{16}}\gamma_{xy} \end{aligned}$$

Ομοίως, αναπτύσσουμε τα  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$  και προσδιορίζουμε τις εκφράσεις:

$$\sigma_y = \overline{Q_{12}}\varepsilon_x + \overline{Q_{22}}\varepsilon_y + \overline{Q_{26}}\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xy} = \overline{Q_{16}}\varepsilon_x + \overline{Q_{26}}\varepsilon_y + \overline{Q_{66}}\gamma_{xy}$$

Οι μετασχηματισμένοι όροι ακαμψίας  $\overline{Q_{ij}}$  υπολογίζονται συναρτήσει των  $Q_{ij}$  ως ακολούθως:

$$\begin{vmatrix} \overline{Q_{11}} \\ \overline{Q_{22}} \\ \overline{Q_{12}} \\ \overline{Q_{66}} \\ \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{26}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4 + s^4 & -4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 \\ c^3s & -cs^3 & cs^3 - c^3s & 2(cs^3 - c^3s) \\ cs^3 & -c^3s & c^3s - cs^3 & 2(c^3s - cs^3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

Η σχέση μετασχηματισμού των όρων ακαμψίας γράφεται υπό συμβολική μορφή:

$$\overline{Q_{ij}} = [T_Q]Q_{ij}, \text{ όπου το } [T_Q] \text{ είναι ένα μητρώο } 6 \times 4.$$

Παρατηρήσεις

1. Στο σύστημα 1-2 δεν υπάρχουν οι όροι  $Q_{16}$  και  $Q_{26}$  (είναι μηδενικοί).
2. Ο ανωτέρω μετασχηματισμός ισχύει μόνο για στροφή από τους άξονες υλικού 1-2 προς ένα τυχαίο σύστημα x-y.
3. Ο μετασχηματισμός ισχύει για την προσήμανση του σχήματος 4.1 (γωνία  $\theta$  θετική).  
Αν η  $\theta$  είναι αρνητική απαιτείται αλλαγή πρόσημων στη σχέση (4.2).
4. Θετικό ή αρνητικό πρόσημο στη γωνία  $\theta$  επηρεάζει μόνο το πρόσημο των όρων  $Q_{16}$ ,  $Q_{26}$ .

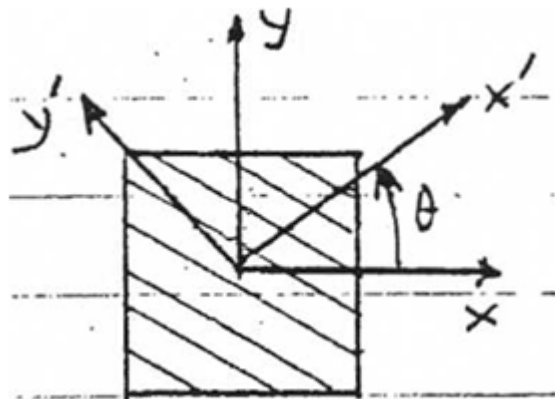
Τελικά, η σχέση (4.1) στο σύστημα 1-2 μετασχηματίζεται στην ακόλουθη σχέση τάσεων-παραμορφώσεων στο σύστημα x-y:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

Το μητρώο ακαμψίας  $[\bar{Q}]$  είναι συμμετρικό:  $\bar{Q}_{12}=\bar{Q}_{21}$ ,  $\bar{Q}_{16}=\bar{Q}_{61}$ ,  $\bar{Q}_{26}=\bar{Q}_{62}$ .

Σημείωση:

Στην περίπτωση που γνωρίζουμε τα  $Q_y$  σε ένα σύστημα  $x'-y'$  και θέλουμε να προσδιορίσουμε τα  $Q_y$  σε ένα άλλο σύστημα x-y, ισχύει η ακόλουθη σχέση μεταξύ των  $Q_y$  και  $Q_y$ .



όπου  $\theta$  η γωνία μεταξύ των x-y και x'-y'

$$\begin{array}{c}
 \overline{Q}_{11} \\
 \overline{Q}_{22} \\
 \overline{Q}_{12} \\
 \overline{Q}_{66} \\
 \overline{Q}_{16} \\
 \overline{Q}_{26}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccc}
 c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 & -4c^3s & -4cs^3 \\
 s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 & 4cs^3 & 4c^3s \\
 c^2s^2 & c^2s^2 & c^4 + s^4 & -4c^2s^2 & 2(c^3s - cs^3) & 2(cs^3 - c^3s) \\
 c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 & 2(c^3s - cs^3) & 2(cs^3 - c^3s) \\
 c^3s & -cs^3 & cs^3 - c^3s & 2(cs^3 - c^3s) & c^4 - 3c^2s^2 & 3c^2s^2 - s^4 \\
 cs^3 & -c^3s & c^3s - cs^3 & 2(c^3s - cs^3) & 3c^2s^2 - s^4 & c^4 - 3c^2s^2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \overline{Q}'_{11} \\
 \overline{Q}'_{22} \\
 \overline{Q}'_{12} \\
 \overline{Q}'_{66} \\
 \overline{Q}'_{16} \\
 \overline{Q}'_{26}
 \end{array}$$

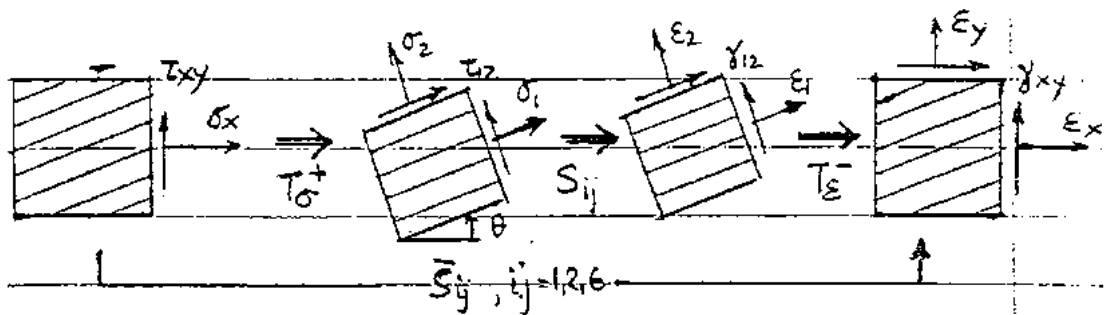
Η ανωτέρω σχέση αποδεικνύεται με τα ίδια 3 βήματα που παρουσιάστηκαν προηγουμένως, με μόνη διαφορά ότι το 2<sup>ο</sup> βήμα πρέπει αντί της σχέσης (3.1) να εισαχθεί η σχέση (3.3).

### 3.2 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΕΥΚΑΜΨΙΑΣ Si

Για τους άξονες υλικού 1-2, η σχέση είναι:

$$\begin{array}{c}
 \epsilon_1 \\
 \epsilon_2 \\
 \gamma_{12}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 S_{11} & S_{12} & 0 \\
 S_{21} & S_{22} & 0 \\
 0 & 0 & S_{66}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \sigma_1 \\
 \sigma_2 \\
 \tau_{12}
 \end{array}
 \quad (3.5)$$

Σε ένα σύστημα x-y θα έχουμε:



Σχήμα 3.3 Διάγραμμα μετασχηματισμού των όρων ευκαμψίας [S]

1<sup>ο</sup> βήμα: Εκφράζουμε τις τάσεις  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  ως προς τις  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  με θετικό  $T_\sigma$

$$\sigma_1 = c^2\sigma_x + s^2\sigma_y + 2cst_{xy}$$

$$\sigma_2 = s^2\sigma_x + c^2\sigma_y - 2cst_{xy}$$

$$\tau_{12} = -c s \sigma_x + c s \sigma_y + (c^2 - s^2) \tau_{xy}$$

2<sup>ο</sup> βήμα: Εκφράζουμε τις  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$  ως προς  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ .

$$\varepsilon_1 = S_{11}(c^2 \sigma_x + s^2 \sigma_y + 2cs \tau_{xy}) + S_{12}(s^2 \sigma_x + c^2 \sigma_y - 2cs \tau_{xy})$$

$$\varepsilon_2 = S_{12}(c^2 \sigma_x + s^2 \sigma_y + 2cs \tau_{xy}) + S_{22}(s^2 \sigma_x + c^2 \sigma_y - 2cs \tau_{xy})$$

$$\gamma_{12} = S_{66}(-cs \sigma_x + cs \sigma_y + (c^2 - s^2) \tau_{xy})$$

και αναδιατάσσοντας έχουμε:

$$\varepsilon_1 = (c^2 S_{11} + s^2 S_{12}) \sigma_x + (s^2 S_{11} + c^2 S_{12}) \sigma_y + 2cs(S_{11} - S_{12}) \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_2 = (c^2 S_{12} + s^2 S_{22}) \sigma_x + (s^2 S_{12} + c^2 S_{22}) \sigma_y + 2cs(S_{12} - S_{22}) \tau_{xy}$$

$$\gamma_{12} = -cs S_{66} \sigma_x + cs S_{66} \sigma_y + (c^2 - s^2) S_{66} \tau_{xy}$$

3<sup>ο</sup> βήμα: Εκφράζουμε τις  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  ως προς  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  με αρνητικό  $T_\varepsilon$  πχ. για την  $\varepsilon_x$  είναι

$$\varepsilon_x = c^2 \varepsilon_1 + s^2 \varepsilon_2 - cs \gamma_{12}$$

Αναπτύσσοντας και αναδιατάσσοντας τους όρους προκύπτει η ακόλουθη σχέση μετασχηματισμού για τους όρους ευκαμψίας:

$$\begin{vmatrix} \overline{S}_{11} \\ \overline{S}_{22} \\ \overline{S}_{12} \\ \overline{S}_{66} \\ \overline{S}_{16} \\ \overline{S}_{26} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2 s^2 & c^2 s^2 \\ s^4 & c^4 & 2c^2 s^2 & c^2 s^2 \\ c^2 s^2 & c^2 s^2 & c^4 + s^4 & -c^2 s^2 \\ 4c^2 s^2 & 4c^2 s^2 & -8c^2 s^2 & (c^2 - s^2)^2 \\ 2c^3 s & -2cs^3 & 2(cs^3 - c^3 s) & cs^3 - c^3 s \\ 2cs^3 & -2c^3 s & 2(c^3 s - cs^3) & c^3 s - cs^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{66} \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

ή υπό συμβολική μορφή  $\overline{S}_{ij} = [T_s] S_{ij}$ , όπου  $T_s$  είναι ένα μητρώο 6x4.

Οι παρατηρήσεις για τους όρους ακαμψίας  $\overline{Q}_{ij}$  ισχύουν επίσης και για τους όρους ευκαμψίας  $\overline{S}_{ij}$ . Οι διαφορές μεταξύ των μητρώων μετασχηματισμού  $[T_s]$  και  $[T_Q]$  οφείλονται στον

ορισμό της διατμητικής παραμόρφωσης  $\gamma_{ij}=2\varepsilon_{ij}$ . Τελικά, η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων με όρους ευκαμψίας γίνεται στο στραμμένο σύστημα x-y:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{S}_{11} & \overline{S}_{12} & \overline{S}_{16} \\ \overline{S}_{12} & \overline{S}_{22} & \overline{S}_{26} \\ \overline{S}_{16} & \overline{S}_{26} & \overline{S}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

### 3.3 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΥΛΙΚΟΥ

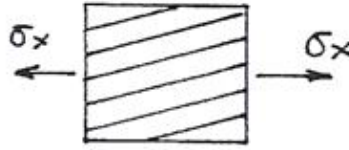
Για να έχουμε μια εικόνα της μηχανικής συμπεριφοράς ενός υλικού οι ίνες του οποίου σχηματίζουν γωνία  $\theta$  με το σύστημα x-y, είναι απαραίτητο να προσδιορίσουμε τα μέτρα ελαστικότητας, τους λόγους Poisson και το μέτρο διάτμησης που αντιστοιχούν στο στραμμένο σύστημα x-y. Οι ιδιότητες αυτές στο στραμμένο σύστημα x-y ονομάζονται μηχανικές σταθερές του υλικού και ορίζονται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \overline{S}_{11} & \overline{S}_{12} & \overline{S}_{16} \\ \overline{S}_{12} & \overline{S}_{22} & \overline{S}_{26} \\ \overline{S}_{16} & \overline{S}_{26} & \overline{S}_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_x & -\nu_{yx}/E_y & \nu_{sx}/G_{xy} \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & \nu_{sy}/G_{xy} \\ \nu_{xs}/E_x & \nu_{ys}/E_y & 1/G_{xy} \end{pmatrix}$$

Εμφανίζονται οι όροι  $\nu_{xs}$  και  $\nu_{ys}$  που εμπλέκουν κύριες και διατμητικές παραμορφώσεις. Οι όροι αυτοί δεν υπάρχουν στα ισότροπα υλικά. Επίσης αξίζει να παρατηρηθεί ότι το παραπάνω μητρώο είναι συμμετρικό, αλλά οι λόγοι του Poisson είναι διαφορετικοί.

Πειραματικά, οι μηχανικές σταθερές μπορούν να προσδιοριστούν ως εξής:

1. Μονοαξονικός εφελκυσμός κατά x



$$\varepsilon_x = \overline{S_{11}} \sigma_x$$

$$\varepsilon_y = \overline{S_{21}} \sigma_x$$

$$\gamma_{xy} = \overline{S_{61}} \sigma_x$$

Ορίζονται:

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{\overline{S_{21}}}{\overline{S_{11}}}$$

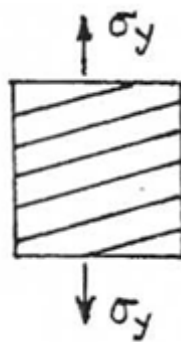
$$\nu_{xs} = -\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x} = \frac{\overline{S_{61}}}{\overline{S_{11}}}$$

Άρα:

$$\overline{S_{21}} = -\nu_{xy} \overline{S_{11}} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x}$$

$$\overline{S_{61}} = -\nu_{xs} \overline{S_{11}} = -\frac{\nu_{xs}}{E_x}$$

2. Μονοαξονικός εφελκυσμός κατά y



$$\varepsilon_x = \overline{S_{12}} \sigma_y$$

$$\varepsilon_y = \overline{S_{22}} \sigma_y$$

$$\gamma_{xy} = \overline{S_{62}} \sigma_y$$

Ορίζονται:

$$v_{yx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = \frac{\overline{S_{12}}}{\overline{S_{22}}}$$

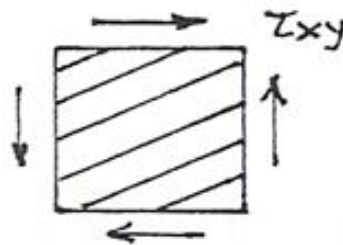
$$v_{ys} = -\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_y} = \frac{\overline{S_{62}}}{\overline{S_{22}}}$$

Άρα:

$$\overline{S_{12}} = -v_{yx} \overline{S_{22}} = -\frac{v_{yx}}{E_y}$$

$$\overline{S_{62}} = -v_{ys} \overline{S_{22}} = -\frac{v_{ys}}{E_y}$$

### 3. Καθαρή διάτμηση



$$\varepsilon_x = \overline{S_{16}} \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \overline{S_{26}} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = \overline{S_{66}} \tau_{xy}$$

Ορίζονται:

$$v_{sx} = -\frac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}} = \frac{\overline{S_{16}}}{\overline{S_{66}}}$$



$$v_{sy} = -\frac{\varepsilon_y}{\gamma_{xy}} = \frac{\overline{S_{26}}}{\overline{S_{66}}}$$

Άρα:

$$\overline{S_{16}} = -v_{sx}\overline{S_{66}} = -\frac{v_{sx}}{G_{xy}}$$

$$\overline{S_{26}} = -v_{sy}\overline{S_{66}} = -\frac{v_{sy}}{G_{xy}}$$

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**

---

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**

### ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ - ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗ ΣΤΡΩΣΕΩΝ

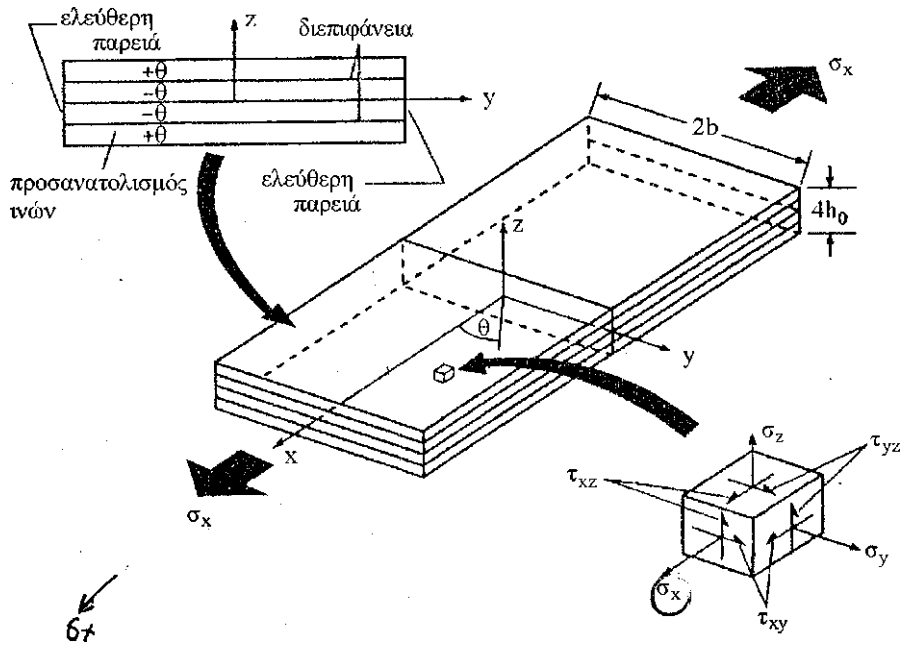
#### 4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια από τις σημαντικές απλοποιήσεις στις οποίες βασίζεται η Κλαστική Θεωρία Διαστρωμάτωσης CLT είναι ότι κάθε στρώση θεωρείται υπό επίπεδη εντατική κατάσταση στο επίπεδο  $x-y$  (βλ. Σχήμα 4.1) και ότι οι διεπιφανειακές τάσεις που σχετίζονται με την κατεύθυνση  $z$  είναι αμελητέες. Όμως, οι διεπιφανειακές αυτές τάσεις μπορούν να προκαλέσουν αποκόλληση στρώσεων, δηλαδή διαχωρισμό όμορων στρώσεων στο επίπεδο της μεταξύ τους διεπιφάνειας. Τούτο είναι ένας ειδικός τρόπος αστοχίας των διαστρωματώσεων από σύνθετα υλικά, ο οποίος δεν ελήφθη υπ' όψιν στην κλαστική ανάλυση αστοχίας. Στο παρόν κεφάλαιο προσδιορίζονται οι διεπιφανειακές τάσεις που αναπτύσσονται μεταξύ των στρώσεων κατά την έννοια του πάχους μιας διαστρωμάτωσης μέσω τρισδιάστατης ανάλυσης τάσεων, οι οποίες στη συνέχεια χρησιμοποιούνται για την ανάλυση αστοχίας των διαστρωματώσεων.

#### 4.2 ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ

Η θεώρηση επίπεδης εντατικής κατάστασης σε μια στρώση εντός μιας διαστρωμάτωσης είναι πράγματι ορθή σε ζώνες που απέχουν ικανή απόσταση από γεωμετρικές ασυνέχειες, όπως οι συνθήκες ελεύθερων άκρων. Από αναλύσεις όμως που διεξήγαγαν οι Pipes & Pagano με βάση την τρισδιάστατη θεωρία ελαστικότητας καταδείχτηκε ότι ακόμα και σε μια διαστρωμάτωση υπό μονοαξονική ένταση υπάρχει μια οριακή ζώνη κατά μήκος των ελεύθερων παρειών όπου αναπτύσσεται τρισδιάστατη εντατική κατάσταση, το δε πλάτος της ζώνης αυτής είναι περίπου ίσο με το πάχος της διαστρωμάτωσης.

Η επιρροή των διεπιφανειακών τάσεων κοντά σε μια ελεύθερη παρειά μιας διαστρωμάτωσης προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας τις τρεις βασικές εξισώσεις ισορροπίας από την θεωρία ελαστικότητας:



**Σχήμα 4.1** Μοντέλο ανάλυσης διεπιφανειακών τάσεων σε διαστρωμάτωση υπό μονοαξονικό εφελκυσμό

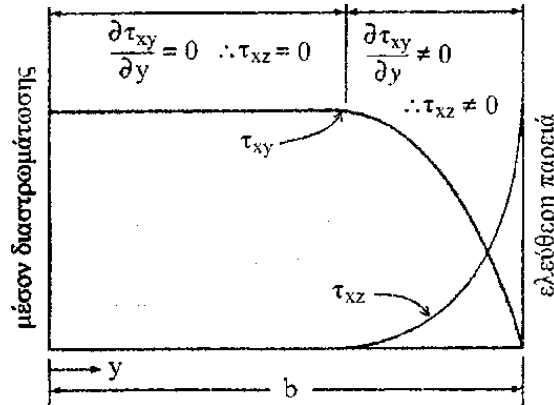
$$\begin{aligned} \frac{\theta \sigma_x}{\theta x} + \frac{\theta \tau_{xy}}{\theta y} + \frac{\theta \tau_{xz}}{\theta z} &= 0 \\ \frac{\theta \tau_{yx}}{\theta x} + \frac{\theta \sigma_y}{\theta y} + \frac{\theta \tau_{yz}}{\theta z} &= 0 \\ \frac{\theta \tau_{zx}}{\theta x} + \frac{\theta \tau_{zy}}{\theta y} + \frac{\theta \sigma_z}{\theta z} &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Για την διαστρωμάτωση του Σχήματος 4.1 υπό μονοαξονικό εφελκυσμό θεωρούμε μια περιοχή κοντά στις ελεύθερες παρειές όπου  $y = \pm b$ , και υποθέτουμε ότι οι τάσεις είναι σταθερές κατά την διαμήκη έννοια  $x$  (διεύθυνση φόρτισης). Εξ' αυτού προκύπτει ότι  $\theta \sigma_x / \theta x = 0$ , και από την σχέση (4.1α) παίρνουμε την διεπιφανειακή τάση  $\tau_{xz}(z)$  ως εξής:

$$\tau_{xz}(z) = - \int_{-h/2}^z \frac{\theta \tau_{xy}}{\theta y} dz \tag{4.2}$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η εντός του επιπέδου διατμητική τάση  $\tau_{xy}$ , που υπολογίζεται βάσει της Κλασικής Θεωρίας Διαστρωμάτωσης, είναι σταθερή στη μεσαία περιοχή της διαστρωμάτωσης. Καθώς όμως κινούμαστε κατά  $y$  και πλησιάζουμε κάποια ελεύθερη παρειά,

η τάση  $\tau_{xy}$  θα πρέπει να μειώνεται και ακριβώς στα όρια  $y=\pm b$  να τείνει στο μηδέν. Συνεπώς, καθώς συμβαίνει  $y \rightarrow \pm b$ , η τάση  $\tau_{xy}$  δεν μπορεί να παραμένει αμετάβλητη και άρα η μεταβολή  $\theta\tau_{xy} / \theta y$  θα πρέπει να αυξάνει. Με βάση τη σχέση (4.2) προκύπτει ότι η τάση θα πρέπει επίσης να αυξάνει από μηδενική που είναι στην εσωτερική ζώνη σε μια πολύ μεγάλη τιμή καθώς πλησιάζουμε μια ελεύθερη παρειά  $y \rightarrow \pm b$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2. Η περιοχή όπου λαμβάνει χώρα αυτή η μεγάλη μεταβολή καλείται οριακή ζώνη διεπιφανειακών τάσεων, όπως σημειώνεται στο Σχήμα 4.2.



**Σχήμα 4.2** Οριακή ζώνη μεταβολής των εντός του επιπέδου διατμητικών τάσεων  $\tau_{xz}$  και των διεπιφανειακών διατμητικών τάσεων  $\tau_{xy}$  στη διεπιφάνεια μιας διαστρωμάτωσης υπό μονοαξονικό εφελκυσμό.

Από τις σχέσεις (4.1 β) και (4.1 γ) προκύπτουν αντίστοιχα οι άλλες δύο διεπιφανειακές τάσεις:

$$\tau_{yz}(z) = - \int_{-h/2}^z \frac{\theta\sigma_y}{\theta y} dz \tag{4.3}$$

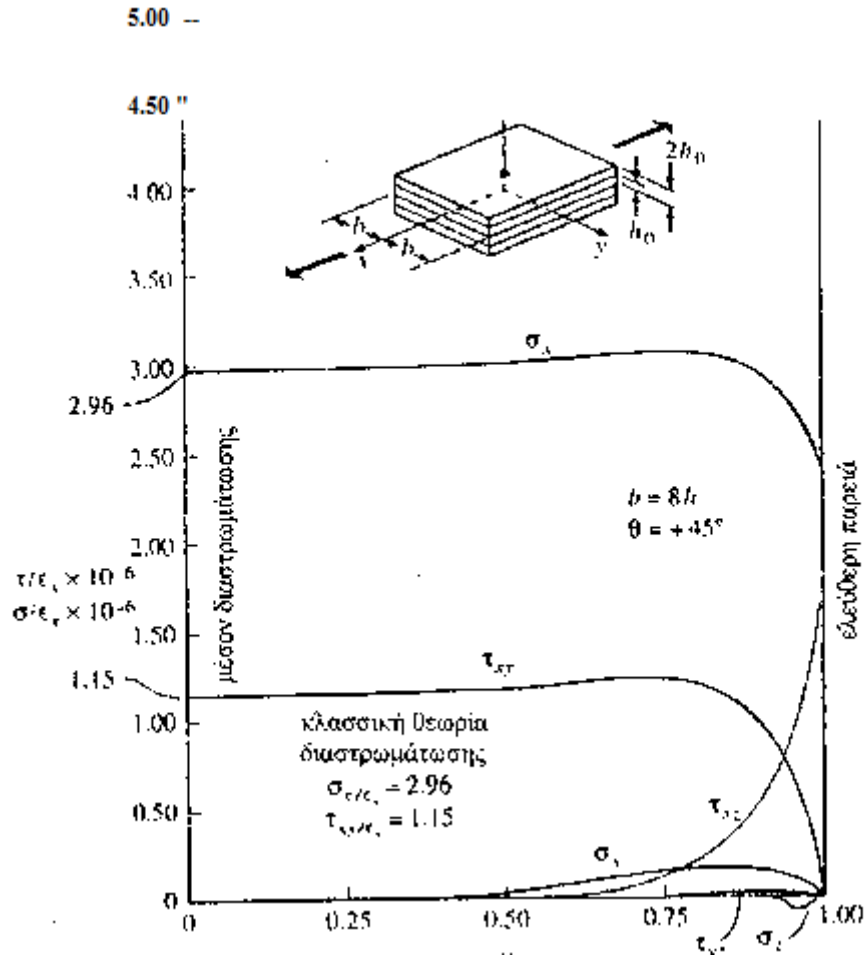
$$\sigma_z(z) = - \int_{-h/2}^z \frac{\theta\tau_{yz}}{\theta y} dz \tag{4.4}$$

Οι Pipes & Pagano χρησιμοποίησαν τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση του συστήματος των τριών διαφορικών εξισώσεων που διέπουν το παραπάνω πρόβλημα και οι οποίες προκύπτουν συνδυάζοντας τις τρεις τασικές εξισώσεις ισορροπίας, τις σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων της διαστρωμάτωσης

και τις κινηματικές σχέσεις του προβλήματος. Οι εξισώσεις αυτές επιλύθηκαν για μια διαστρωμάτωση με τέσσερις στρώσεις  $\pm 45^\circ$  από υλικό Graphite/Epoxy υπό μονοαξονική παραμόρφωση  $\epsilon_x$  και θεωρώντας ελεύθερες παρειές. Στο Σχήμα 4.3 φαίνονται τα όλα τα αποτελέσματα της ανάλυσης τάσεων των Pipes & Pagano. Είναι σημαντικό να επισημάνουμε εδώ ότι τα αποτελέσματα για τις εντός του επιπέδου τάσεις  $\sigma_x$  και  $\tau_{xy}$  συμφωνούν πλήρως με

τις προβλέψεις της κλασσικής θεωρίας διαστρωμάτωσης όσον αφορά την μεσαία ζώνη της διαστρωμάτωσης, αλλά καθώς πλησιάζουμε τις ελεύθερες παρειές (οριακή ζώνη) οι δύο τάσεις  $\sigma_x$  και  $\tau_{xy}$  μειώνονται απότομα. Αντίθετα, οι διεπιφανειακές τάσεις  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  και  $\tau_{yz}$  είναι όλες μηδέν στην κεντρική ζώνη της διαστρωμάτωσης αλλά μεταβάλλονται ραγδαία κοντά στις ελεύθερες παρειές. Η διατμητική τάση είναι η μεγαλύτερη από τις διεπιφανειακές τάσεις καθώς φαίνεται να αυξάνει χωρίς άνω όριο για  $y/b=1$ . Οι Pipes & Pagano διέκριναν ότι στη θέση αυτή του ελεύθερου άκρου υπάρχει ανωμαλία όσον αφορά την τάση  $\tau_{xz}$  αλλά τούτο δεν κατέστη δυνατό να αποδειχτεί μέσω της ανάλυσης που διεξήγαγαν. Μετέπειτα, οι Wang & Choi απέδειξαν με αναλυτικό τρόπο την ύπαρξη ανωμαλίας στην κατανομή της τάσεως ακριβώς πάνω στο όριο  $y/b=1$  (θέση ελεύθερου άκρου).

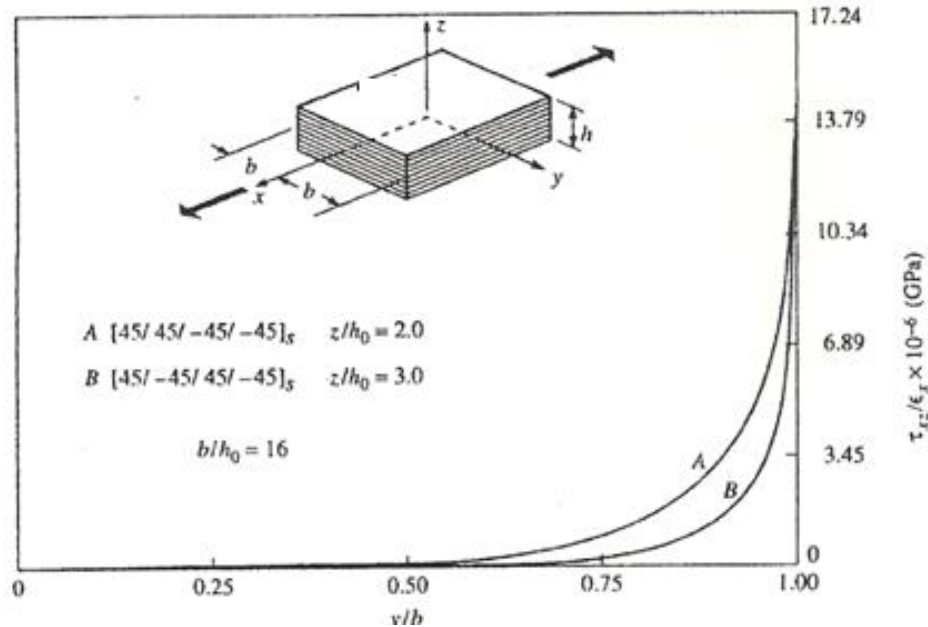
Τα αριθμητικά αποτελέσματα αναλύσεων των Pipes & Pagano για μια πληθώρα διαστρωματώσεων με διάφορους λόγους πλάτους προς πάχος κατέδειξαν ότι η οριακή ζώνη τρισδιάστατης εντατικής κατάστασης εκτείνεται από την ελεύθερη παρειά προς το εσωτερικό με πλάτος περίπου ίσο με το πάχος της διαστρωμάτωσης. Το συμπέρασμα αυτό επαληθεύτηκε αργότερα και πειραματικά από τους Pipes & Daniel με χρήση της τεχνικής Moiré για τη μέτρηση των μετατοπίσεων κατά την διεύθυνση  $x$  πάνω στην όψη της διαστρωμάτωσης. Οι παρατηρηθείσες κατανομές των μετατοπίσεων στην όψη της διαστρωμάτωσης, που επίσης κατέδειξαν την ύπαρξη οριακής ζώνης στις ελεύθερες παρειές, συμφωνούν πλήρως με τα προβλεπόμενα από τις αναλύσεις των Pipes & Pagano.



**Σχήμα 4.3** Κατανομή των εντός του επιπέδου τάσεων  $\sigma_x$  και  $\tau_{xy}$  και των διεπιφανειακών τάσεων  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  και  $\tau_{yz}$  από τις αναλύσεις των Pipes & Pagano

Έχει αποδειχθεί τόσο με πειραματικές όσο και αναλυτικές μεθόδους ότι η αλληλουχία διαστρωμάτωσης επηρεάζει σημαντικά τις διεπιφανειακές τάσεις και κατ' επέκταση την αποκόλληση στρώσεων. Οι Pipes & Pagano χρησιμοποίησαν μια προσεγγιστική λύση με βάση τη θεωρία ελαστικότητας για να μελετήσουν την επίδραση της αλληλουχίας των στρώσεων στις διατμητικές διεπιφανειακές τάσεις σε διαστρωματώσεις  $\pm 45^\circ$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.4. Είναι φανερό ότι όταν διατάσσονται μαζί στρώσεις που έχουν τον ίδιο προσανατολισμό ινών, η διεπιφανειακή διατμητική τάση  $\tau_{xz}$  είναι υψηλότερη απ' ότι στην περίπτωση όπου διατάσσονται μαζί στρώσεις με αντίθετο προσανατολισμό. Σε μια άλλη μελέτη, οι Pipes & Pagano έδειξαν ότι μια αλλαγή στην αλληλουχία των στρώσεων μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή πρόσημου της διεπιφανειακής τάσης  $\sigma_z$  από εφελκυστική σε θλιπτική. Καθώς οι εφελκυστικές διεπιφανειακές τάσεις  $\sigma_z$  τείνουν να διαχωρίσουν τις στρώσεις ενώ οι θλιπτικές διεπιφανειακές τάσεις  $\sigma_z$  τείνουν να κρατήσουν κολλημένες τις στρώσεις, οι αλληλουχίες διαστρωματώσεων που προκαλούν εφελκυστικές τάσεις  $\sigma_z$  θα

έχουν μειωμένη αντοχή σε σχέση με τις αλληλουχίες διαστρωματώσεων που προκαλούν θλιπτικές τάσεις  $\sigma_z$ . Πειραματικά αποτελέσματα όπως αυτά των Whitney & Browning και Whitney & Kim συμφωνούν με την πρόβλεψη αυτή. Επίσης, ο προσανατολισμός των στρώσεων έχει σημαντική επίδραση στις διεπιφανειακές τάσεις όπως απέδειξαν οι Pipes & Pagano.



**Σχήμα 4.4** Επίδραση της αλληλουχίας διαστρωμάτωσης στην κατανομή των διεπιφανειακών τάσεων

Μετά τη δημοσίευση της ανάλυσης των Pipes & Pagano, ένας μεγάλος αριθμός ερευνητών χρησιμοποίησε άλλες μεθόδους για την ανάλυση της επίδρασης συνθηκών ελεύθερου άκρου στις διεπιφανειακές τάσεις διαστρωματώσεων. Συγκεκριμένα, οι Rybicki, Wang & Crossman, Herakovich και Hwang & Gibson χρησιμοποίησαν όλοι τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για τη διεξαγωγή τρισδιάστατων αναλύσεων με σκοπό τη διερεύνηση της κατανομής των διεπιφανειακών τάσεων.

Ο Whitney πρότεινε την ακόλουθη κατανομή για τις τάσεις  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$  στην περιοχή του ελεύθερου άκρου  $0 < y < h$ :

$$\sigma_y = \frac{\sigma_y(z)}{c} [1 - e^{-k\pi\bar{y}} \frac{k}{n} (\sin n\pi\bar{y} + \cos n\pi\bar{y})] \tag{4.5\alpha}$$



$$\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}(z)}{c} [1 - e^{-k\pi\bar{y}} \cos n\pi\bar{y}] \quad (4.5\beta)$$

με

$$c = [1 - (-1)^n e^{-k\pi}]$$

$$\bar{y} = \frac{y}{h}, \quad k > 0$$

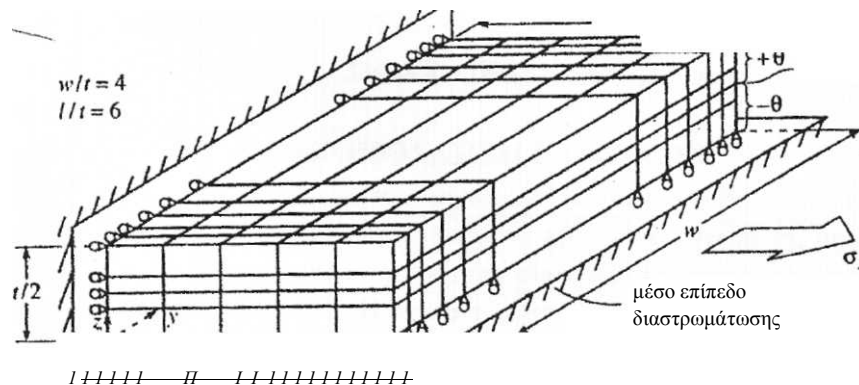
όπου  $n$  είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, και οι τάσεις  $\sigma_y(z)$  και  $\tau_{xy}(z)$  υπολογίζονται από την κλασσική θεωρία διαστρωμάτωσης. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (4.5) στις (4.2), (4.3) και (4.4) παίρνουμε:

$$\tau_{xz} = \frac{\pi\tau_{xz}(z)e^{-k\bar{y}}}{nc} (n \sin n\bar{y} + k \cos n\bar{y})$$

$$\tau_{yz} = \frac{\pi\tau_{yz}(z)(n^2 + k^2)}{nc} e^{-k\pi\bar{y}} \sin n\pi\bar{y}$$

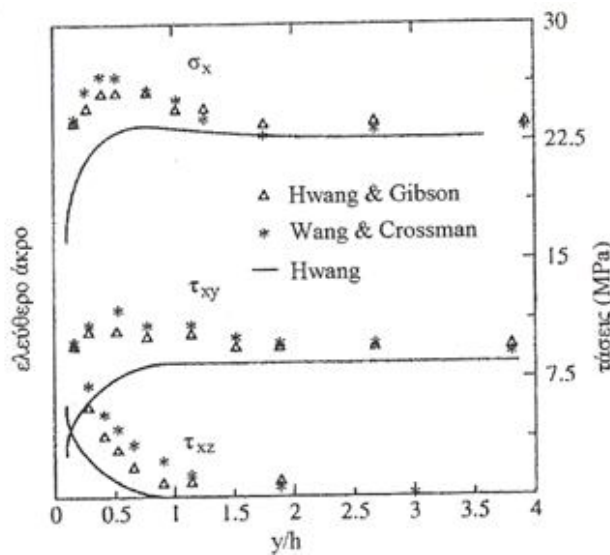
$$\sigma_z = \frac{\pi^2\sigma_z(z)(n^2+k^2)e^{-k\bar{y}}}{nc} (n \cos n\bar{y} - k \sin n\bar{y})$$

Στο Σχήμα 8.5 φαίνεται το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων των Hwang & Gibson που χρησιμοποιήθηκε για την επαλήθευση του αναλυτικού μοντέλου των Pipes & Pagano. Κατανομές τάσεων κοντά στο ελεύθερο άκρο από μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων των Wang & Crossman και των Hwang & Gibson συγκρίνονται με αντίστοιχα αποτελέσματα του Hwang βάσει εμπειρικής αναλύσεως από τη θεωρία ελαστικότητας.



**Σχήμα 4.5** Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων των Hwang & Gibson για την επαλήθευση του προβλήματος των Pipes & Pagano

Η εμπειρική ελαστική ανάλυση του Hwang βασίζεται σε μια παρόμοια ανάλυση από τον Whitney, ο οποίος προσπάθησε να ταιριάξει τα αποτελέσματα της ανάλυσης βάσει πεπερασμένων διαφορών των Pipes & Pagano μέσω σχετικά απλών εμπειρικών σχέσεων οι οποίες ικανοποιούσαν τις τασικές εξισώσεις ισορροπίας και τις συνθήκες ελεύθερων άκρων. Έτσι, τα αποτελέσματα της εμπειρικής προσέγγισης που φαίνονται στο Σχήμα 4.6 με συνεχή γραμμή είναι αρκετά κοντά στα αντίστοιχα αποτελέσματα της ανάλυσης των Pipes & Pagano. Παρόλο που οι κατανομές των τάσεων από τις αναλύσεις με πεπερασμένα στοιχεία είναι αρκετά κοντά η μία με την άλλη, δίδουν και οι δύο υψηλότερες τιμές απ' ότι η εμπειρική ανάλυση κοντά στο ελεύθερο άκρο.



**Σχήμα 4.6** Σύγκριση κατανομών τάσεων κοντά σε ελεύθερο άκρο

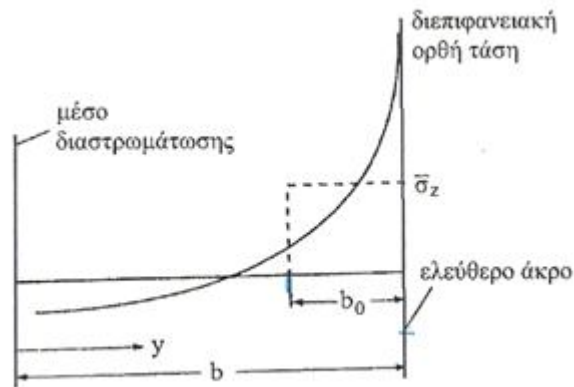
### 4.3 ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗ ΣΤΡΩΣΕΩΝ

Η αποκόλληση στρώσεων λόγω ανάπτυξης διεπιφανειακών τάσεων σε μια διαστρωμάτωση μπορεί να προκαλέσει μείωση της αντοχής μεγαλύτερη από την προβλεπόμενη μέσω των κλασικών κριτηρίων αστοχίας στρώσεων που έχουν ήδη συζητηθεί. Η έννοια της αστοχίας λόγω αποκόλλησης στρώσεων δεν έχει το ίδιο περιεχόμενο με την έννοια της έναρξης αποκόλλησης στρώσεων, δηλ. την δημιουργία εγκάρσιας ρωγμής. Παρόλα αυτά, η έναρξη αποκόλλησης στρώσεων συνοδεύεται αρχικά από ευσταθή ρωγμή που στη συνέχεια καθίσταται ασταθής και διαδίδεται οδηγώντας σε πλήρη αστοχία της διαστρωμάτωσης. Η έναρξη αποκόλλησης στρώσεων μπορεί να εκτιμηθεί είτε μέσω της αντοχής των υλικών ή μέσω της θεωρίας θραύσεως. Η θεωρία θραύσεως προσφέρει αναλυτική αντιμετώπιση για

την πρόοδο της αποκόλλησης και για την αστοχία. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η αναλυτική αντιμετώπιση μέσω της αντοχής των υλικών για την πρόβλεψη της έναρξης της αποκόλλησης στρώσεων, ενώ η αντιμετώπιση μέσω της θεωρίας θραύσεως παρουσιάζεται χωριστά σε άλλο κεφάλαιο.

Το κριτήριο μέσης τάσης των Kim & Soni αποτέλεσε την πρώτη τεχνική πρόβλεψης της έναρξης αποκόλλησης στρώσεων με βάση την αντοχή των υλικών. Το κριτήριο αυτό βασίζεται στην υπόθεση ότι η αποκόλληση θα ξεκινήσει όταν η μέση τιμή της ορθής διεπιφανειακής τάσης  $\sigma_z$  κοντά σε μια ελεύθερη παρειά φθάσει την αντίστοιχη τιμή της διεπιφανειακής εφελκυστικής αντοχής  $Z$ . Ένα παρόμοιο κριτήριο αστοχίας διαστρωματώσεων με οπές διατυπώθηκε επίσης από τους Whitney & Nuismer. Στο κριτήριο Kim-Soni, η μέση τιμή λαμβάνεται με βάση ένα ορισμένο κρίσιμο μήκος  $b_0$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.7 και την εξ(4.7)

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{b_0} \int_{b-b_0}^b \sigma_z(y, 0) dy = Z \quad (4.7)$$



**Σχήμα 4.7** Μέση τιμή της ορθής διεπιφανειακής τάσης  $\sigma_z$  κοντά σε ελεύθερο άκρο

Η απόσταση  $b$  είναι το ήμισυ του πλάτους της διαστρωμάτωσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1, και το κρίσιμο μήκος  $b_0$  λαμβάνεται ίσο με το πάχος μιας στρώσης. Λόγω της δυσκολίας πειραματικής μέτρησης της εφελκυστικής αντοχής  $Z$ , οι Kim & Soni υπέθεσαν ότι η εφελκυστική αντοχή  $Z$  είναι ίση κατ' απόλυτο τιμή με την θλιπτική αντοχή  $Z'$ . Παρόλο που το κριτήριο αυτό προβλέπει με ικανοποιητική ακρίβεια την έναρξη αποκόλλησης σε

διαστρωματώσεις όπου η ορθή τάση  $\sigma_z$  είναι η κυρίαρχη διεπιφανειακή τάση, προέκυψε η ανάγκη διατύπωσης ενός γενικότερου κριτηρίου για διαστρωματώσεις όπου η αποκόλληση λαμβάνει χώρα και λόγω των διατμητικών διεπιφανειακών τάσεων  $\tau_{xz}$  και  $\tau_{yz}$ .

Την ανάγκη διατύπωσης ενός γενικού κριτηρίου αστοχίας λόγω αποκόλλησης στρώσεων διαπίστωσαν πρώτοι οι Brewer & Lagace, οι οποίοι πρότειναν το ακόλουθο τετραγωνικό κριτήριο αστοχίας αποκόλλησης

$$\left(\frac{\bar{\tau}_{xz}}{S_{xz}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\tau}_{yz}}{S_{yz}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_z^+}{Z}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_z^-}{Z'}\right)^2 \leq 1 \quad (4.8)$$

όπου  $\bar{\tau}_{xz}$ ,  $\bar{\tau}_{yz}$  είναι οι μέσες διεπιφανειακές διατμητικές τάσεις,  $\bar{\sigma}_z^+$ ,  $\bar{\sigma}_z^-$  είναι η μέση ορθή εφελκυστική και θλιπτική τάση αντίστοιχα,  $S_{xz}$ ,  $S_{yz}$  είναι οι διεπιφανειακές διατμητικές τάσεις αστοχίας, και  $Z$ ,  $Z'$  είναι η εφελκυστική και θλιπτική ορθή τάση αστοχίας αντίστοιχα. Κάθε μια από τις μέσες τάσεις ορίζεται ως εξής:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{\delta_{av}} \int_0^{\delta_{av}} \sigma_{ij} d\delta \quad (4.9)$$

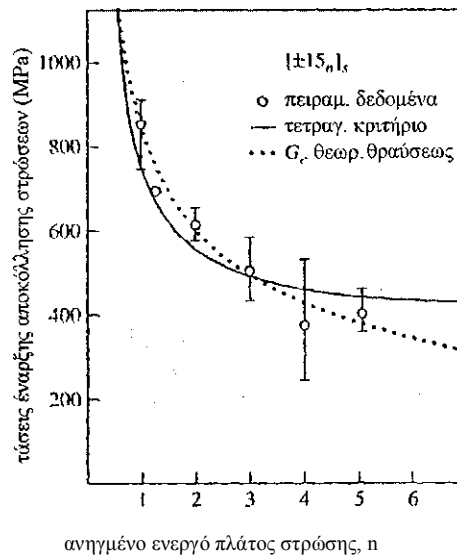
όπου  $\delta$  είναι η απόσταση από κάποιο σημείο αναφοράς (πχ. το ελεύθερο άκρο),  $\delta_{av}$  είναι μια μέση απόσταση και  $\sigma_{ij}$  είναι οι τάσεις ενώ με γραμμή συμβολίζονται οι μέσες τους τιμές.

Οι Brewer & Lagace διαπίστωσαν πειραματικά ότι σε διαστρωματώσεις από υλικό AS1/3501-6 Graphite/Epoxy με κώδικες αλληλουχίας  $[\pm 15_n]_s$ ,  $[\pm 15_n/0_n]_s$  και  $[0_n/\pm 15_n]_s$ , ο δεύτερος και ο τέταρτος όρος στην εξ(4.8) είναι αμελητέοι, και πρότειναν επίσης μια απλοποιημένη μορφή του τετραγωνικού κριτηρίου ως εξής:

$$\left(\frac{\bar{\tau}_{xz}}{S_{xz}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_z^+}{Z}\right)^2 \leq 1 \quad (4.10)$$

Θεωρήθηκε επίσης ότι το υλικό είναι εγκάρσια ισότροπο με  $Z=X=53.9$  MPa. Οι παράμετροι  $\delta_{av}$  και  $S_{xz}$  χρησιμοποιήθηκαν ως παράμετροι προσαρμογής για να ταιριάξουν με τα πειραματικά αποτελέσματα. Στα πειράματα που διεξήχθησαν, δοκιμάστηκαν διαστρωματώσεις με ελεγχόμενα επιβαλλόμενη παραμόρφωση και παρατηρήθηκε μια ξαφνική πτώση στο εφελκυστικό φορτίο τη στιγμή της αποκόλλησης. Οι παράμετροι βέλτιστης προσαρμογής προσδιορίστηκαν σε  $\delta_{av} = 0.178\text{mm}$  και  $S_{xz} = 105$  MPa. Περαιτέρω επιβεβαίωση της ισχύος του τετραγωνικού κριτηρίου αποκόλλησης στρώσεων έγινε με βάση

παρατηρήσεις ότι η τιμή της  $S_{xz}$  είναι ίδια με αυτή της εντός του επιπέδου διατμητικής αντοχής  $S$  του υλικού.



**Σχήμα 4.8** Αναλυτικές και πειραματικές τάσεις έναρξης αποκόλλησης στρώσεων σε διαστρωματώσεις  $[\pm 15_n]_s$

Παρόλο που η τιμή της  $\delta_{av}$  δεν θεωρήθηκε ίση με το πάχος στρώσης όπως στην ανάλυση των Kim-Soni, η τιμή προσαρμογής των 0.178mm ήταν της αυτής τάξεως με το πάχος στρώσης. Μια σύγκριση των αναλυτικών και των πειραματικών τάσεων έναρξης αποκόλλησης στρώσεων για διάφορες τιμές ανηγμένου ενεργού πλάτους ως προς το πάχος κάθε στρώσης φαίνεται στο Σχήμα 4.8 για μια διαστρωμάτωση με κώδικα  $[\pm 15_n]_s$ . Τα δοκίμια κατασκευάστηκαν βάζοντας μαζί στρώσεις ώστε να σχηματιστεί η διαστρωμάτωση και μετά διαιρούμε με το πάχος κάθε στρώσης. Στο Σχήμα 4.8 φαίνεται επίσης η καμπύλη που προκύπτει με βάση τη θεωρία θραύσεως που αναπτύσσεται σε άλλο κεφάλαιο.

Η περίπτωση καταστροφικής αστοχίας διαστρωματώσεων λόγω αποκόλλησης στρώσεων δεν είναι ο μόνος τρόπος αστοχίας που μας ενδιαφέρει. Η μείωση της δυσκαμψίας μιας διαστρωμάτωσης κατά την πρόοδο της αποκόλλησης ενδέχεται να την καταστήσει ανασφαλής ακόμα κι εάν δεν συμβεί θραύση. Σε αντιδιαστολή, η μείωση της δυσκαμψίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση προόδου της αποκόλλησης. Συνεπώς, απαιτούνται αναλυτικά μοντέλα για την εκτίμηση μείωσης της δυσκαμψίας κατά τη διάρκεια προόδου της αποκόλλησης.

Ο O'Brien διατύπωσε μια ανάλυση για την μείωση της δυσκαμψίας σε συμμετρικές διαστρωματώσεις κατά τη διάρκεια προόδου της αποκόλλησης βασισμένη σε ένα απλό "νόμο

σύνθεσης" και την Κλασική Θεωρία Διαστρωμάτωσης. Δεδομένου ότι το ενεργό μέτρο ελαστικότητας κατά τη διαμήκη έννοια δίδεται από τη σχέση

$$E_x = \frac{1}{\alpha_{11}h} \quad (4.11)$$

ο O'Brien χρησιμοποίησε τη σχέση αυτή για την προσομοίωση της δυσκαμψίας της διαστρωμάτωσης χωρίς αποκόλληση στρώσεων. Η αντίστοιχη δυσκαμψία μιας διαστρωμάτωσης που έχει υποστεί πλήρη αποκόλληση στρώσεων σε μια διεπιφάνεια, αλλά που τα τμήματα της διαστρωμάτωσης έχουν την ίδια διαμήκη παραμόρφωση, δίδεται από μια σχέση νόμου σύνθεσης

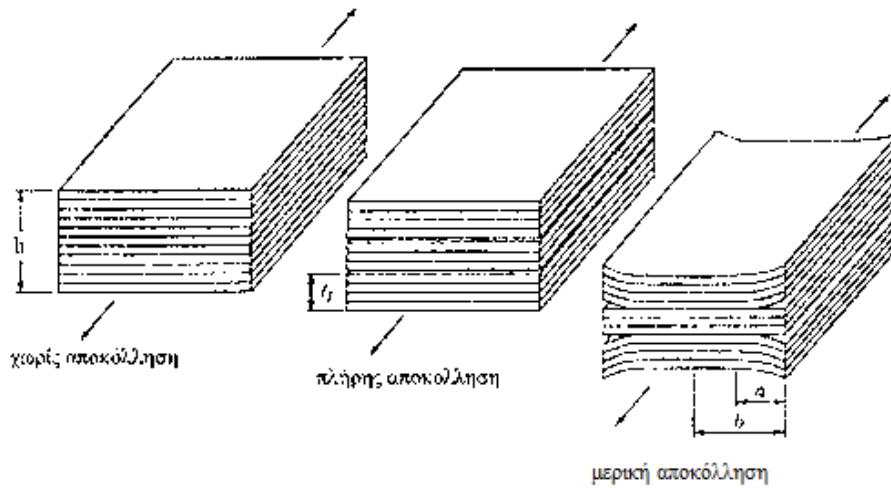
$$E_{td} = \frac{\sum_{i=1}^m E_{xi}t_i}{h} \quad (4.12)$$

όπου  $E_{td}$  = το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας μιας διαστρωμάτωσης με πλήρη αποκόλληση στρώσεων σε μια διεπιφάνεια,  $E_{xi}$  = το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας του τμήματος  $i$  μιας διαστρωμάτωσης,  $t_i$  = το πάχος του τμήματος  $i$ ,  $m$  = ο αριθμός των τμημάτων που σχηματίζονται λόγω αποκόλλησης.

Το διάμηκες ενεργό μέτρο ελαστικότητας μιας διαστρωμάτωσης που έχει υποστεί μερική αποκόλληση στρώσεων κατά μήκος των διεπιφανειών του δίδεται πάλι με βάση το νόμο σύνθεσης από τη σχέση

$$E = (E_{td} - E_x) \frac{a}{b} + E_x \quad (4.13)$$

όπου  $E$  = το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας μιας διαστρωμάτωσης με μερική αποκόλληση στρώσεων κατά μήκος μιας ή περισσότερων διεπιφανειών,  $a$  = ζώνη έκτασης της αποκόλλησης από το ελεύθερο άκρο και  $b$  = το μισό του πλάτους της διαστρωμάτωσης.

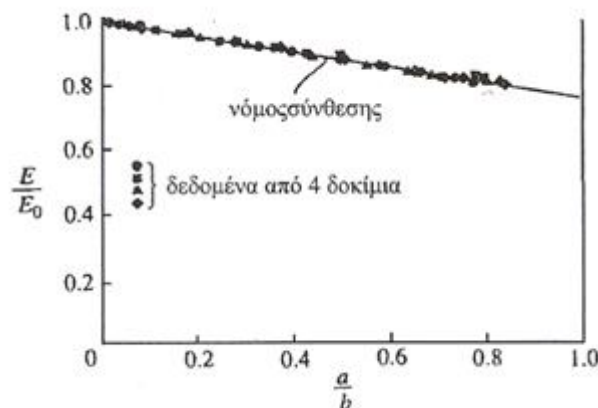


**Σχήμα 4.9** Ανάλυση της μείωσης δυσκαμψίας διαστρωματώσεων λόγω αποκόλλησης με το νόμο σύνθεσης

Μια πιο γενική έκφραση της εξ(4.13) είναι η ακόλουθη

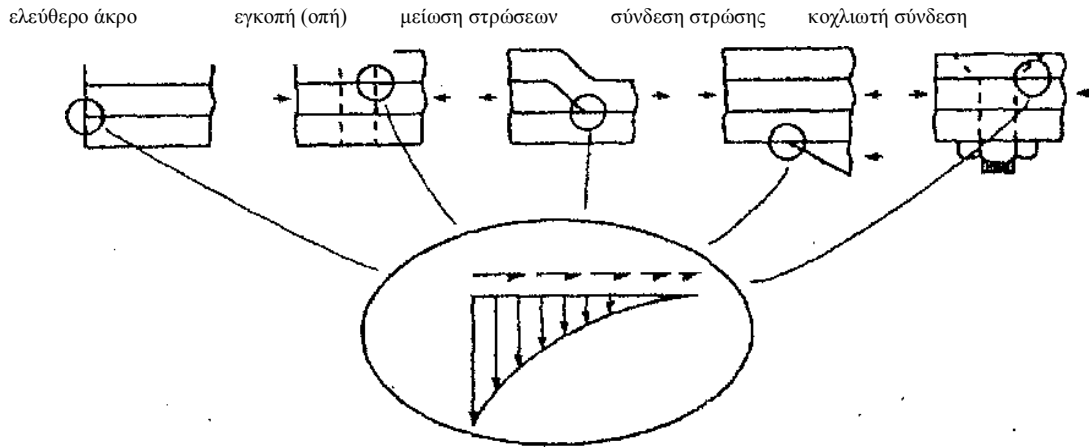
$$E = (E_{td} - E_x) \frac{A_d}{A_t} + E_x \tag{4.14}$$

όπου  $A_d$  = η αποκολλημένη διεπιφάνεια και  $A_t$  = η συνολική διεπιφάνεια. Στο Σχήμα 4.10 φαίνονται οι τιμές του  $E$  ανηγμένες ως προς το αρχικό  $E_0$  για διάφορα μεγέθη αποκόλλησης σε διαστρωματώσεις από Graphite/Epoxy με κώδικα  $[\pm 30/\pm 30/90/90]_3$  και η συμφωνία πειραματικών αποτελεσμάτων και αναλυτικών προβλέψεων είναι άριστη. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.10, η πλήρης αποκόλληση θα επιφέρει 25.8% μείωση της δυσκαμψίας της διαστρωμάτωσης. Μια τέτοια μείωση θα οδηγήσει σε μια ανεπιθύμητη αύξηση της παραμόρφωσης του φορτιζόμενου φορέα.



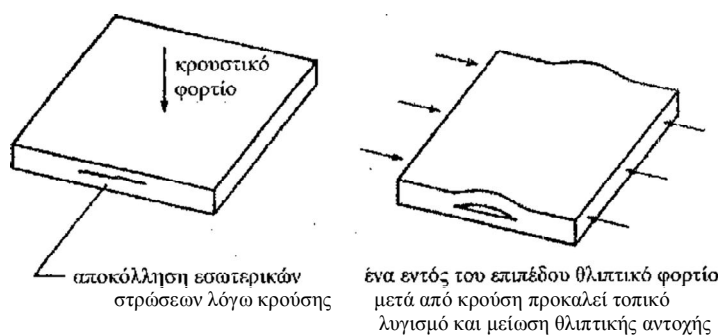
**Σχήμα 4.10** Πειραματικά και αναλυτικά αποτελέσματα μείωσης δυσκαμψίας διαστρωματώσεων συναρτήσει του μεγέθους αποκόλλησης

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύθηκαν οι περιπτώσεις αποκόλλησης στρώσεων κοντά σε ελεύθερα άκρα, διεπιφανειακές τάσεις και αποκόλληση στρώσεων μπορούν όμως να αναπτυχθούν και σε άλλου τύπου ασυνέχειες όπως οπές, θέσεις μείωσης αριθμού στρώσεων και θέσεις συνδέσεων (βλ. Σχήμα 4.11).



**Σχήμα 4.11** Ανάπτυξη διεπιφανειακών τάσεων εντός διαστρωματώσεων σε θέσεις ασυνέχειας

Επίσης, η κρούση με χαμηλή ταχύτητα, όπως πχ. λόγω πτώσης αντικειμένου πάνω σε μια διαστρωμάτωση, μπορεί να προκαλέσει εσωτερική αποκόλληση στρώσεων που ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση της εντός του επιπέδου θλιπτικής αντοχής (βλ. Σχήμα 4.12).



**Σχήμα 4.12** Μείωση της εντός του επιπέδου θλιπτικής αντοχής μιας διαστρωμάτωσης λόγω αποκόλλησης εσωτερικών στρώσεων



## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5**

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

#### 5.1 ΓΕΝΙΚΑ

Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση είναι το SAP2000 14. Είναι ένα ευέλικτο πρόγραμμα που παρέχει σε κάθε χρήστη τη δυνατότητα εύρεσης μιας γρήγορης και αποτελεσματικής λύσης για δεδομένη κατασκευή. Οι δυνατότητές του για ένα εξειδικευμένο, έμπειρο χρήστη είναι πρακτικά απεριόριστες.

#### 5.2 ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

Σκοπός της εργασίας είναι η επαλήθευση του αναλυτικού μοντέλου των Pipes & Pagano, οι οποίοι με βάση την τρισδιάστατη θεωρία ελαστικότητας προσδιόρισαν τις διεπιφανειακές τάσεις που αναπτύσσονται μεταξύ των στρώσεων κατά την έννοια του πάχους μιας διαστρωμάτωσης στα σύνθετα υλικά.

#### 5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ:

Για την επαλήθευση του προβλήματος των Pipes & Pagano χρησιμοποιούμε το ίδιο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων με τους Hwang & Gibson που χρησιμοποίησαν για τον ίδιο σκοπό. Τα αποτελέσματα των Pipes Pagano είναι βάσει πεπερασμένων διαφορών μέσω σχετικά απλών εμπειρικών σχέσεων οι οποίες ικανοποιούσαν τις τασικές εξισώσεις ισορροπίας και τις συνθήκες ελευθέρων άκρων.

Στην παρούσα εργασία εξετάσαμε 4 γεωμετρικά μοντέλα αποτελούμενα από τις στρώσεις:

A)  $0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ$

B)  $+45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, +45^\circ$

Γ)  $+30^\circ, -30^\circ, -30^\circ, +30^\circ$

Δ)  $+60^\circ, -60^\circ, -60^\circ, +60^\circ$

Λόγω συμμετρίας χρησιμοποιήσαμε τις 2 από τις 4 στρώσεις.

### 5.3.1. ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Το γεωμετρικό μοντέλο αποτελείται από μία πλάκα 2 στρώσεων διαστάσεων:

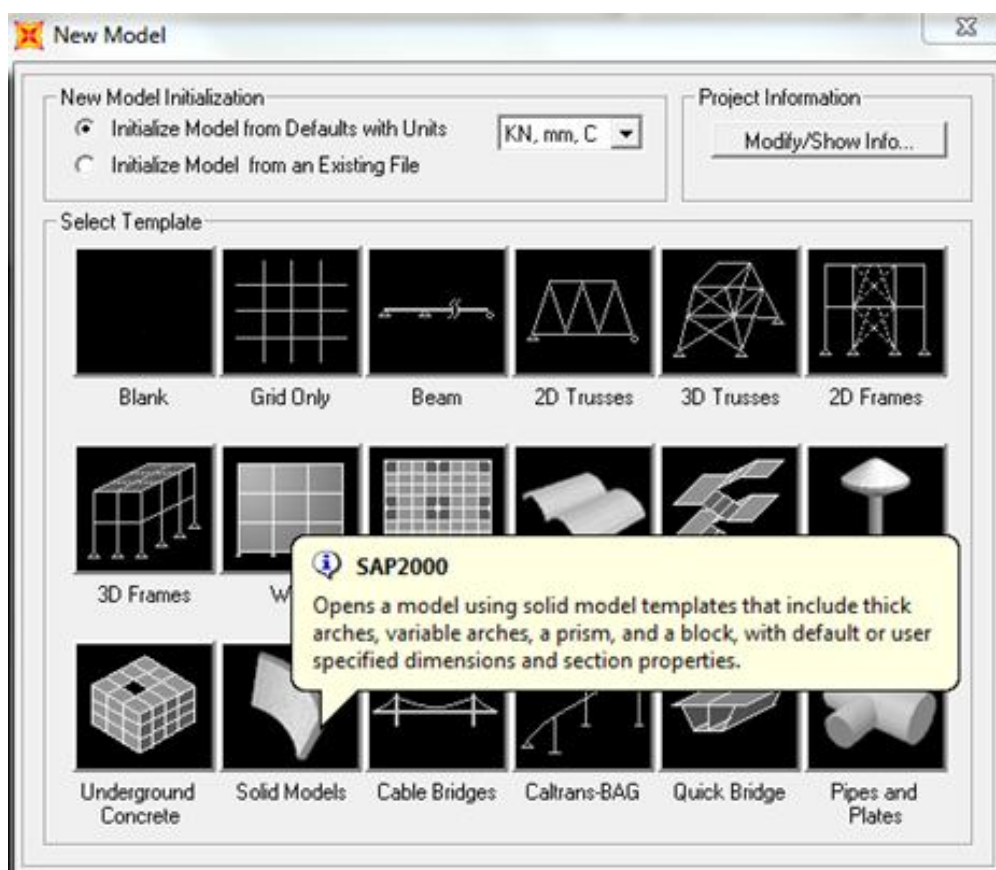
Διάσταση κατά τον άξονα x: 160mm

Διάσταση κατά τον άξονα y: 120mm

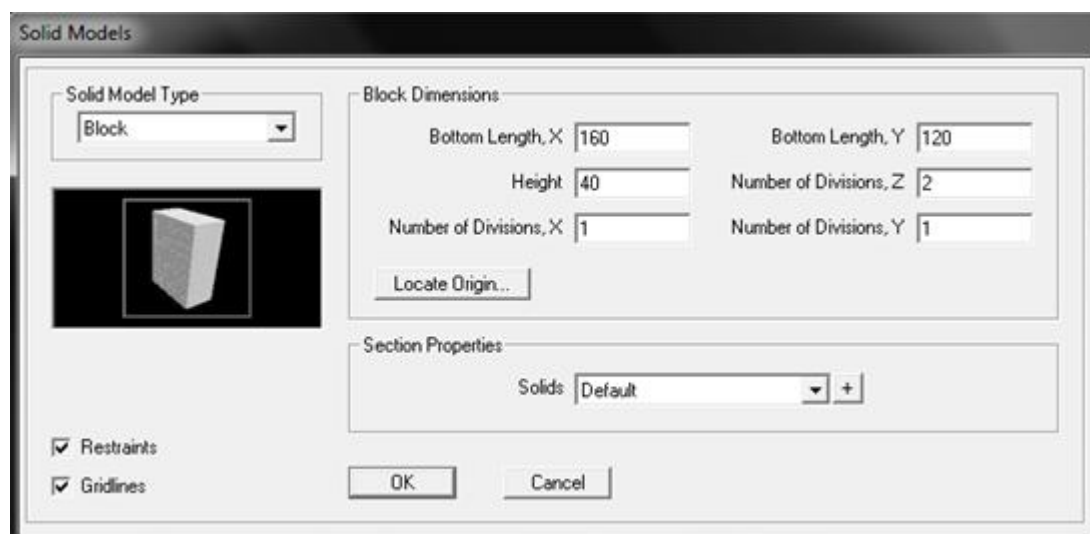
Πάχος κάθε στρώσης t: 20mm

Για να ορίσουμε τις παραπάνω διαστάσεις στο SAP ακολουθήσαμε τα παρακάτω βήματα:

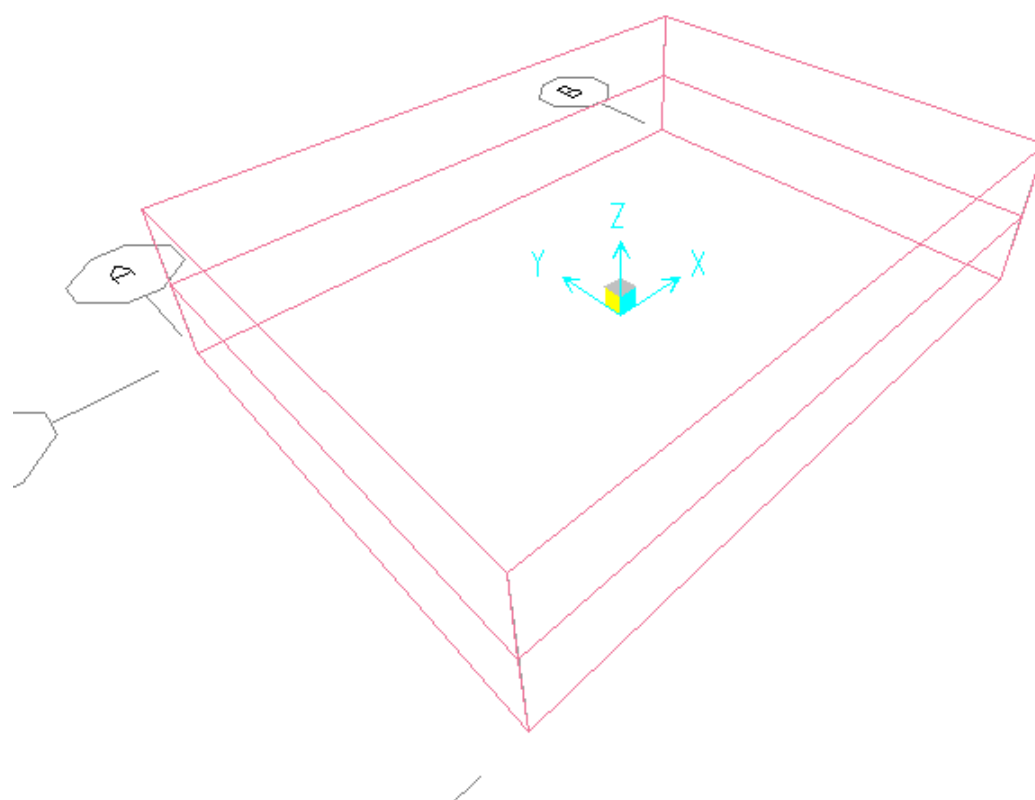
- Δημιουργία νέου μοντέλου.
- Ορίσαμε μονάδες σε KN, mm, C
- Επιλέξαμε στερεά μοντέλα (solid models)



Εν συνεχεία συμπληρώσαμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά στο παρακάτω παράθυρο:



Κι έτσι ορίσαμε την γεωμετρία του μοντέλου:



### 5.3.2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΥΛΙΚΩΝ

Τα υλικά που ορίσαμε είναι των ίδιων ελαστικών σταθερών με το μοντέλο των Pipes Pagano:

Μέτρα ελαστικότητας (για γωνία 0°):

$$E_1=137,88\text{GPa}$$

$$E_2=14,48\text{GPa}$$

$$E_3=14,48\text{GPa}$$

Λόγοι Poisson (για γωνία 0°):

$$\nu_{12}=0,21$$

$$\nu_{13}=0,21$$

$$\nu_{23}=0,20$$

Μέτρα διάτμησης (για γωνία 0°):

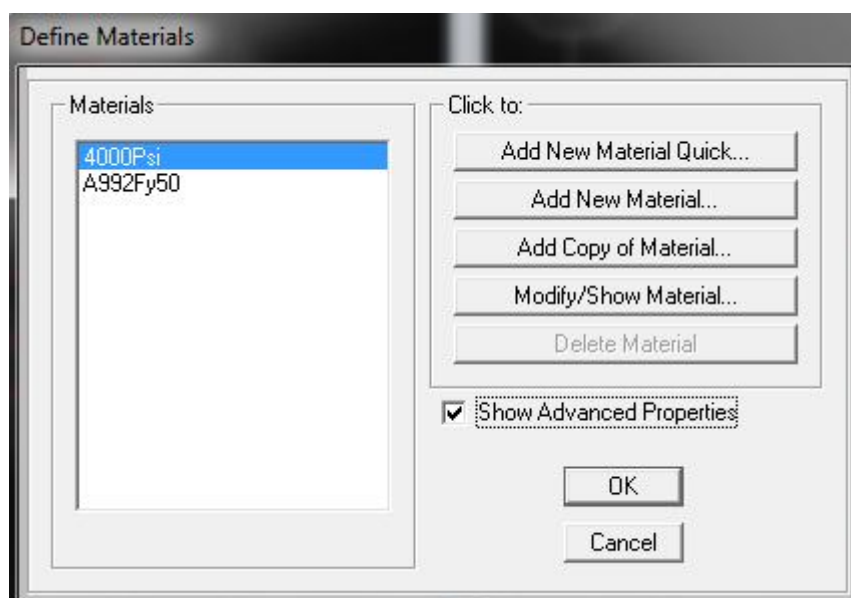
$$G_{11}=5,86\text{GPa}$$

$$G_{13}=5,86\text{GPa}$$

$$G_{23}=5,86\text{GPa}$$

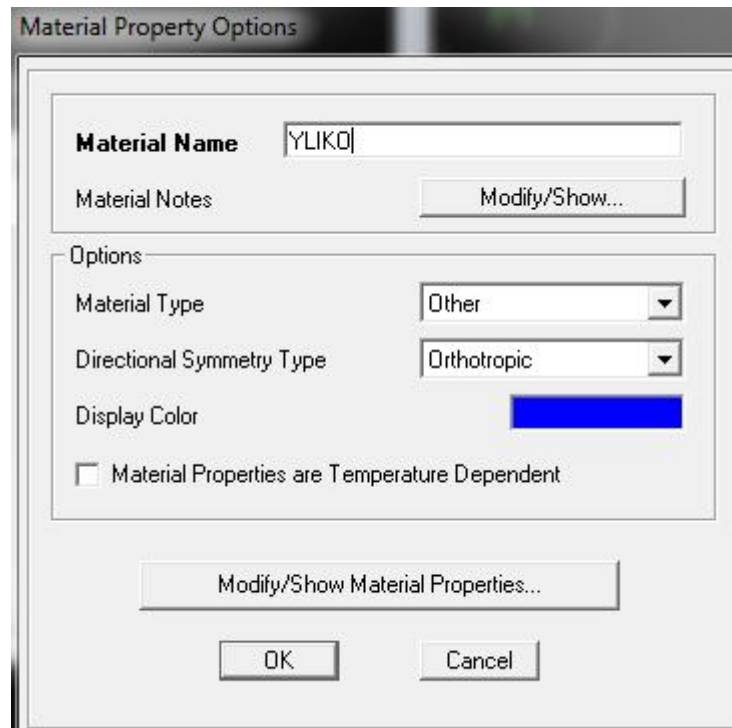
Για τον ορισμό των υλικών ακολουθήσαμε τα παρακάτω βήματα:

Define => Materials



Στην συνέχεια επιλέγουμε:

Add New Material => Material type: Other => Directional Symmetry Type: Orthotropic



Πατώντας Modify/Show material properties εμφανίζεται ένα παράθυρο στο οποίο μπορούμε να συμπληρώσουμε τις ελαστικές σταθερές ανάλογα με την γωνία  $\theta$  του κάθε στρώματος. Ακολουθούν οι υπολογισμοί των ελαστικών σταθερών ανάλογα με την γωνία του κάθε στρώματος:

Για τον υπολογισμό των ελαστικών σταθερών αρχικά υπολογίζουμε τους όρους ευκαμψίας:

$$S_{11} = 1/E_1 = 1/137,88 = 0,0073$$

$$S_{22} = 1/E_2 = 1/14,48 = 0,069$$

$$S_{12} = -\nu_{12}/E_1 = -0,21/137,88 = -0,0015$$

$$S_{66} = 1/G_{12} = 1/5,86 = 0,17$$

Στην συνέχεια μετασχηματίζουμε τους όρους ευκαμψίας με την ακόλουθη σχέση μετασχηματισμού:

$$\begin{array}{c|c|cccc|c}
 \bar{S}_{11} & & c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & c^2s^2 & \\
 \bar{S}_{22} & & s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & c^2s^2 & S_{11} \\
 \bar{S}_{12} & = & c^2s^2 & c^2s^2 & c^4 + s^4 & -c^2s^2 & S_{22} \\
 \bar{S}_{66} & & 4c^2s^2 & 4c^2s^2 & -8c^2s^2 & (c^2-s^2)^2 & S_{12} \\
 \bar{S}_{16} & & 2c^3s & -2cs^3 & 2(cs^3 - c^3s) & cs^3 - c^3s & S_{66} \\
 \bar{S}_{26} & & 2cs^3 & -2c^3s & 2(c^3s - cs^3) & c^3s - cs^3 & \\
 \end{array}$$

Με την βοήθεια της παραπάνω σχέσης προκύπτει:

Για  $\varphi = 90^\circ \Rightarrow \cos 90^\circ = 0$

$\Rightarrow \sin 90^\circ = 1$

$$\begin{array}{c|c|cccc|c}
 \bar{S}_{11} & & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
 \bar{S}_{22} & & 1 & 0 & 0 & 0 & S_{11} \\
 \bar{S}_{12} & = & 0 & 0 & 1 & 0 & S_{22} \\
 \bar{S}_{66} & & 0 & 0 & 0 & 1 & S_{12} \\
 \bar{S}_{16} & & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \\
 \bar{S}_{26} & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 \end{array}$$

$\Rightarrow \bar{S}_{11} = 0,069$

$\Rightarrow \bar{S}_{22} = 0,0073$

$\Rightarrow \bar{S}_{12} = -0,0015$

$\Rightarrow \bar{S}_{66} = 0,17$

Άρα:

$\bar{S}_{11} = 1/E_x \Rightarrow E_x = 1/0,069 = 14,49 \text{ GPa}$

$\bar{S}_{22} = 1/E_y \Rightarrow E_y = 136,99 \text{ GPa}$

$\bar{S}_{66} = 1/G_{xy} \Rightarrow G_{xy} = 5,88 \text{ GPa}$

$\nu_{12} = \bar{S}_{21}/\bar{S}_{11} = 0,022$

Όμοια προκύπτει:

- Για  $\varphi = +45^\circ \Rightarrow \cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0,707$  κι επομένως:

$$\begin{array}{c|c|cccc|c} \bar{S}_{11} & & 0,25 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & \\ \bar{S}_{22} & & 0,25 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0,0073 \\ \bar{S}_{12} & = & 0,25 & 0,25 & 0,5 & -0,25 & 0,069 \\ \bar{S}_{66} & & 1 & 1 & -2 & 0 & 0,0015 \\ \bar{S}_{16} & & 0,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0,17 \\ \bar{S}_{26} & & 0,5 & -0,5 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \bar{S}_{11} = \bar{S}_{22} = 0,061$$

$$\Rightarrow \bar{S}_{12} = -0,025$$

$$\Rightarrow \bar{S}_{66} = 0,11$$

Άρα:

$$\bar{S}_{11} = 1/E_x \Rightarrow E_x = 1/0,061 = 16,39 \text{ GPa}$$

$$\bar{S}_{22} = 1/E_y \Rightarrow E_y = 16,39 \text{ GPa}$$

$$\bar{S}_{66} = 1/G_{xy} \Rightarrow G_{xy} = 9,09 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = \bar{S}_{21}/\bar{S}_{11} = -0,025/0,061 = 0,41$$

- Για  $\varphi = -45^\circ \Rightarrow \cos (-45^\circ) = 0,707$   
 $\Rightarrow \sin (-45^\circ) = 0,707$



Άρα το μητρώο μετασχηματισμού γίνεται:

$$\begin{array}{c|c|cccc|c}
 \bar{S}_{11} & & 0,25 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & \\
 \bar{S}_{22} & & 0,25 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0,0073 \\
 \bar{S}_{12} & = & 0,25 & 0,25 & 0,5 & -0,25 & 0,069 \\
 \bar{S}_{66} & & 1 & 1 & -2 & 0 & -0,0015 \\
 \bar{S}_{16} & & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0,17 \\
 \bar{S}_{26} & & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 & \\
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \bar{S}_{11} = \bar{S}_{22} = 0,061$$

$$\Rightarrow \bar{S}_{12} = -0,025$$

$$\Rightarrow \bar{S}_{66} = 0,11$$

Άρα τα αποτελέσματα είναι ίδια με  $\varphi = +45^\circ$

$$\bar{S}_{11} = 1/E_x \Rightarrow E_x = 1/0,061 = 16,39 \text{ GPa}$$

$$\bar{S}_{22} = 1/E_y \Rightarrow E_y = 16,39 \text{ GPa}$$

$$\bar{S}_{66} = 1/G_{xy} \Rightarrow G_{xy} = 9,09 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = \bar{S}_{21}/\bar{S}_{11} = -0,025/0,061 = 0,41$$

- Αντιστοίχως υπολογίζονται τα αποτελέσματα για  $\varphi = \pm 30^\circ$  και είναι:

$$\bar{S}_{11} = 0,04$$

$$\bar{S}_{22} = 0,071$$

$$\bar{S}_{12} = -0,015$$

$$\bar{S}_{66} = 0,115$$

Άρα:

$$\bar{S}_{11} = 1/E_x \Rightarrow E_x = 25,00 \text{ GPa}$$

$$\bar{S}_{22} = 1/E_y \Rightarrow E_y = 14,08 \text{ GPa}$$

$$\bar{S}_{66} = 1/G_{xy} \Rightarrow G_{xy} = 8,70 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = \bar{S}_{21}/\bar{S}_{11} = 0,375$$

- Και τα αποτελέσματα για  $\varphi = \pm 60^\circ$

$$\bar{S}_{11} = 0,071$$

$$\bar{S}_{22} = 0,04$$

$$\bar{S}_{12} = -0,019$$

$$\bar{S}_{66} = 0,103$$

Άρα:

$$\bar{S}_{11} = 1/E_x \Rightarrow E_x = 14,08 \text{ GPa}$$

$$\bar{S}_{22} = 1/E_y \Rightarrow E_y = 25,00 \text{ GPa}$$

$$\bar{S}_{66} = 1/G_{xy} \Rightarrow G_{xy} = 9,71 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = \bar{S}_{21}/\bar{S}_{11} = 0,27$$

Οι παραπάνω ελαστικές σταθερές συμπληρώνονται στο παρακάτω παράθυρο:

Material Property Data

Material Name: ΥΛΙΚΟ

Material Type: Other

Symmetry Type: Orthotropic

Modulus of Elasticity:

E1: 199,948

E2: 199,948

E3: 199,948

Poisson's Ratio:

U12: 0,3

U13: 0,3

U23: 0,3

Coeff of Thermal Expansion:

A1: 1,170E-05

A2: 1,170E-05

A3: 1,170E-05

Shear Modulus:

G12: 76,9031

G13: 76,9031

G23: 76,9031

Weight and Mass:

Weight per Unit Volume: 7,697E-08

Mass per Unit Volume: 7,849E-12

Units: KN, mm, C

Advanced Material Property Data:

Nonlinear Material Data...

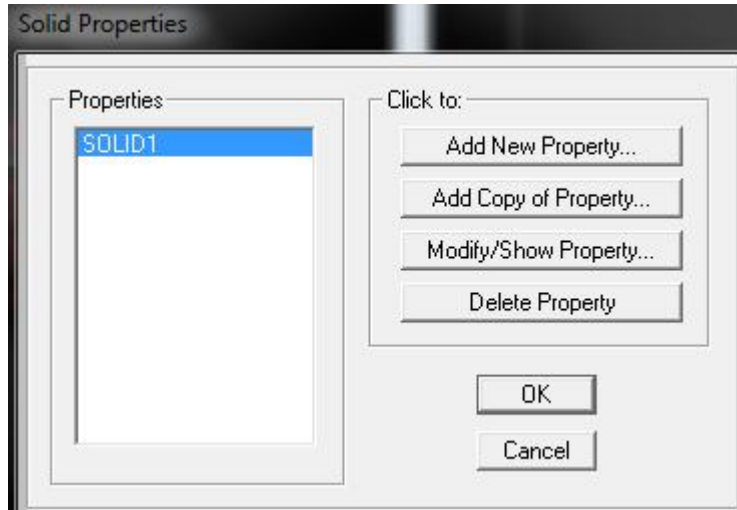
Material Damping Properties...

Time Dependent Properties...

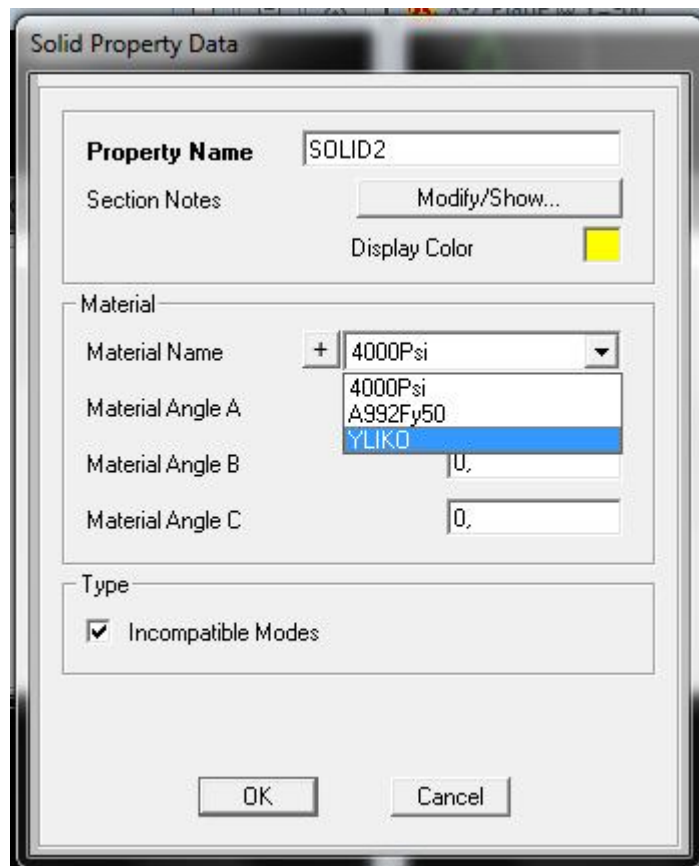
Thermal Properties...

OK Cancel

Εν συνεχεία σε κάθε επίπεδο ορίζουμε το υλικό από το οποίο αποτελείται. Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας το επίπεδο και στην συνέχεια επιλέγουμε Define => Section properties => Solid properties => και εμφανίζεται το ακόλουθο παράθυρο στο οποίο επιλέγουμε Add new property

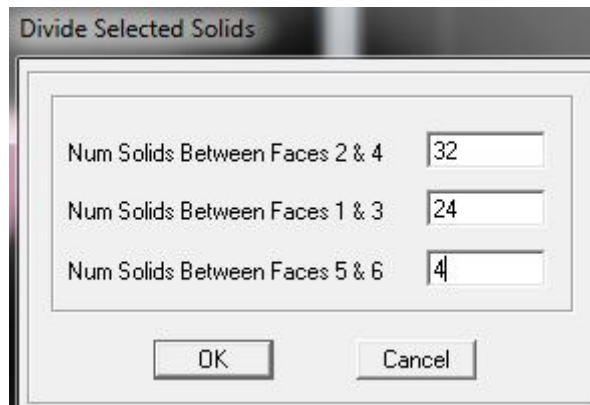


Τέλος στον πίνακα που ακολουθεί επιλέγουμε το υλικό από το οποίο θέλουμε να αποτελείται το επίπεδο και το επίπεδο παίρνει τις αντίστοιχες ιδιότητες.



### 5.3.3. ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Αφού επιλέξουμε το υλικό από το οποίο αποτελείται κάθε στερεό χωρίζουμε σε πεπερασμένα στοιχεία κάθε στερεό επιλέγοντας πρώτα το στερεό και εν συνεχεία Edit => Divide solids και στο παράθυρο που ακολουθεί ορίζουμε σε πόσα κομμάτια θέλουμε να διαιρέσουμε το στερεό:



### 5.3.3. ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΑ

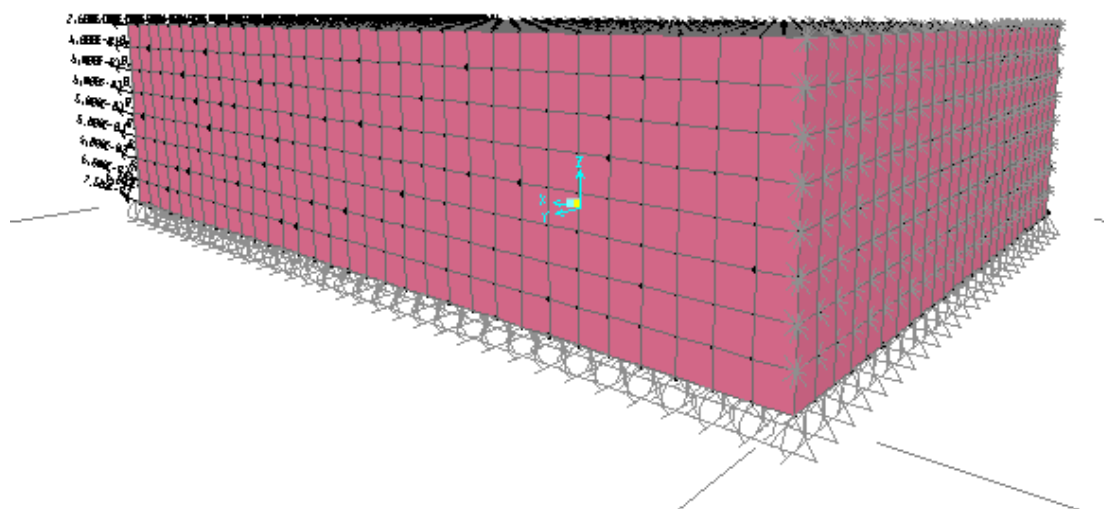
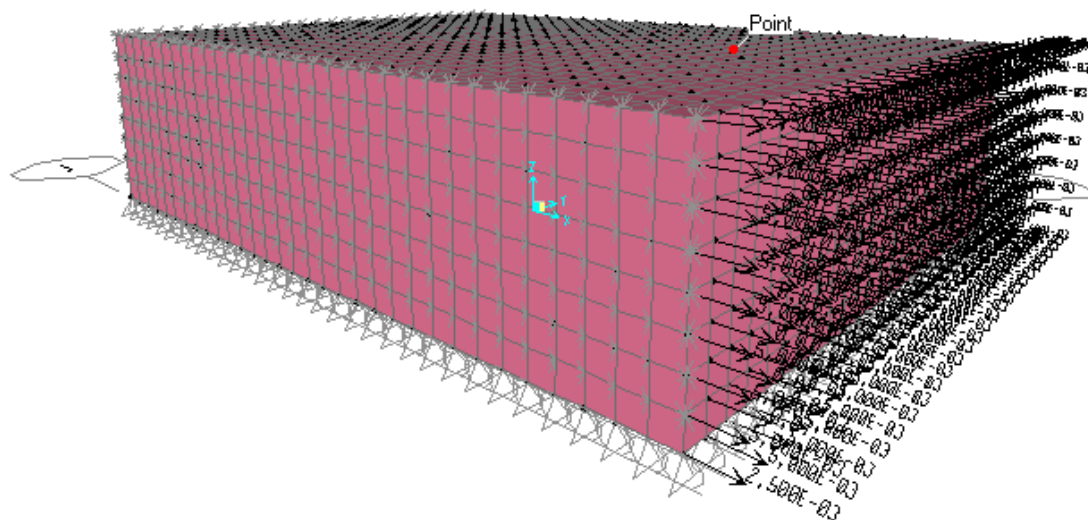
Όσον αφορά τις στηρίξεις:

- η επιφάνεια ABΓΔ η οποία είναι επιφάνεια συμμετρίας δεσμεύεται κατά τον άξονα z.
- η επιφάνεια ΒΓΗΖ δεσμεύεται κατά τον άξονα y.
- η επιφάνεια ABZE δεσμεύεται κατά τον άξονα x.

Όσον αφορά τα φορτία:

Πρόκειται για εφελκυστικό φορτίο κατά μήκος του άξονα x που κατανέμεται ομοιόμορφα σε κάθε κόμβο της ελεύθερης επιφάνειας.

Τελική μορφή μοντέλου:



## 5.4 ΑΝΑΛΥΣΗ – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Μετά από γραμμική ανάλυση και με επεξεργασία των αποτελεσμάτων στο excel προέκυψαν τα αποτελέσματα:

Για την διαστρωμάτωση  $0^{\circ}$ - $90^{\circ}$ :

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για την κατανομή της τάσης  $\sigma_z$  για  $z=h$  είναι τα παρακάτω:

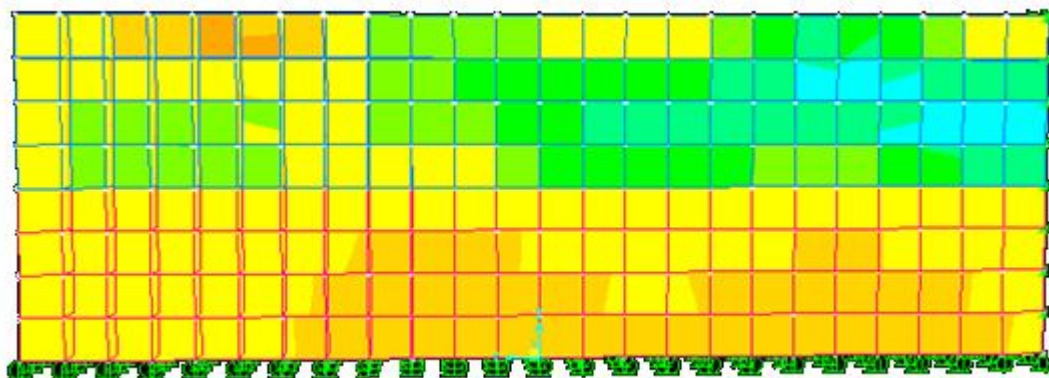
Joint	dist	S33(KN/mm <sup>2</sup> )	Y/b	MO
2073	0	0,000755	0	17,38679
		0,000761		
		0,000633		
		0,000846		
		21,16794		
		19,68032		
		62,96312		
		35,27994		
2068	5	0,001033	0,083333	24,59876
		0,001066		
		0,000995		
		0,001004		
		35,25519		
		21,43832		
		76,61343		
		63,47908		
2063	10	0,001097	0,166667	30,00451
		0,001084		
		0,001008		
		0,00103		
		43,98884		
		34,78848		
		84,94569		
		76,30884		
2058	15	0,00116	0,25	32,03485
		0,001211		
		0,001133		
		0,001167		
		45,42782		
		43,99019		
		81,93064		
		84,92549		

2053	20	0,00122	0,333333	30,41614
		0,001277		
		0,001224		
		0,001198		
		45,91715		
		46,65646		
		67,92618		
		82,82445		
2048	25	0,00138	0,416667	26,55244
		0,001284		
		0,00135		
		0,00129		
		39,34323		
		46,82529		
		57,8088		
		68,43687		
2043	30	0,001117	0,5	22,25225
		0,001043		
		0,001192		
		0,000998		
		39,0571		
		38,38952		
		43,89767		
		56,66935		
2038	35	0,001033	0,583333	21,56813
		0,00109		
		0,001022		
		0,001101		
		41,78863		
		37,41008		
		50,94502		
		42,39709		
2033	40	0,001221	0,666667	25,96821
		0,001249		
		0,001211		
		0,001287		
		47,09009		
		41,34775		
		68,55807		
		50,74483		

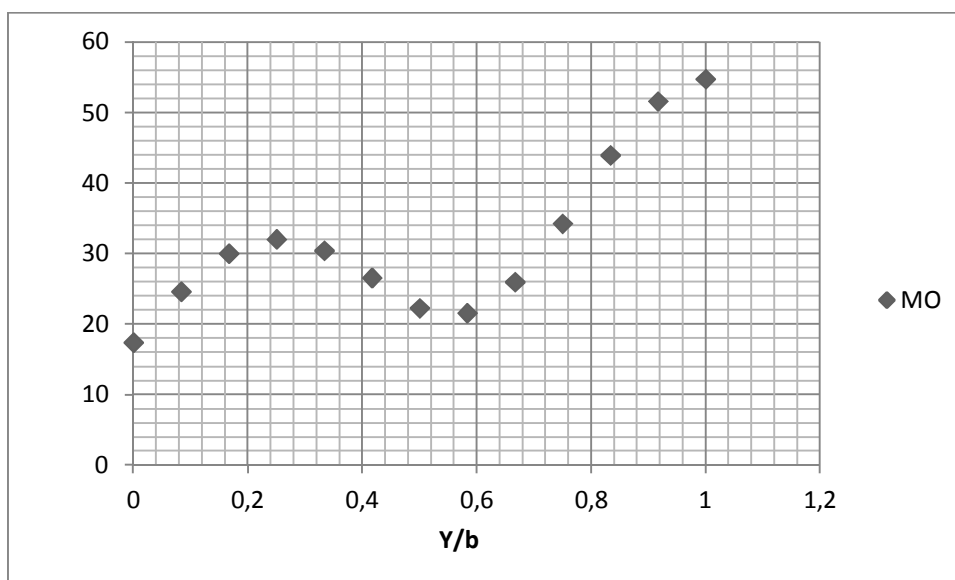
2028	45	0,001412	0,75	34,24683
		0,001508		
		0,001434		
		0,001459		
		69,21539		
		47,9933		
		87,2452		
		69,51495		
2023	50	0,001662	0,833333	43,94451
		0,001679		
		0,001619		
		0,001701		
		87,10907		
		70,06625		
		106,4594		
		87,91467		
2018	55	0,001669	0,916667	51,58863
		0,001809		
		0,001708		
		0,001789		
		106,7976		
		87,2251		
		112,3784		
		106,301		
2017	60	0,001907	1	54,73095
		0,001896		
		106,7316		
		112,1884		



Σχηματικά οι τάσεις κατανέμονται στο μοντέλο όπως παρακάτω:



Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση αυτής της εργασίας είναι τα ακόλουθα:



Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση του μοντέλου των Pipes & Pagano είναι το ακόλουθο:

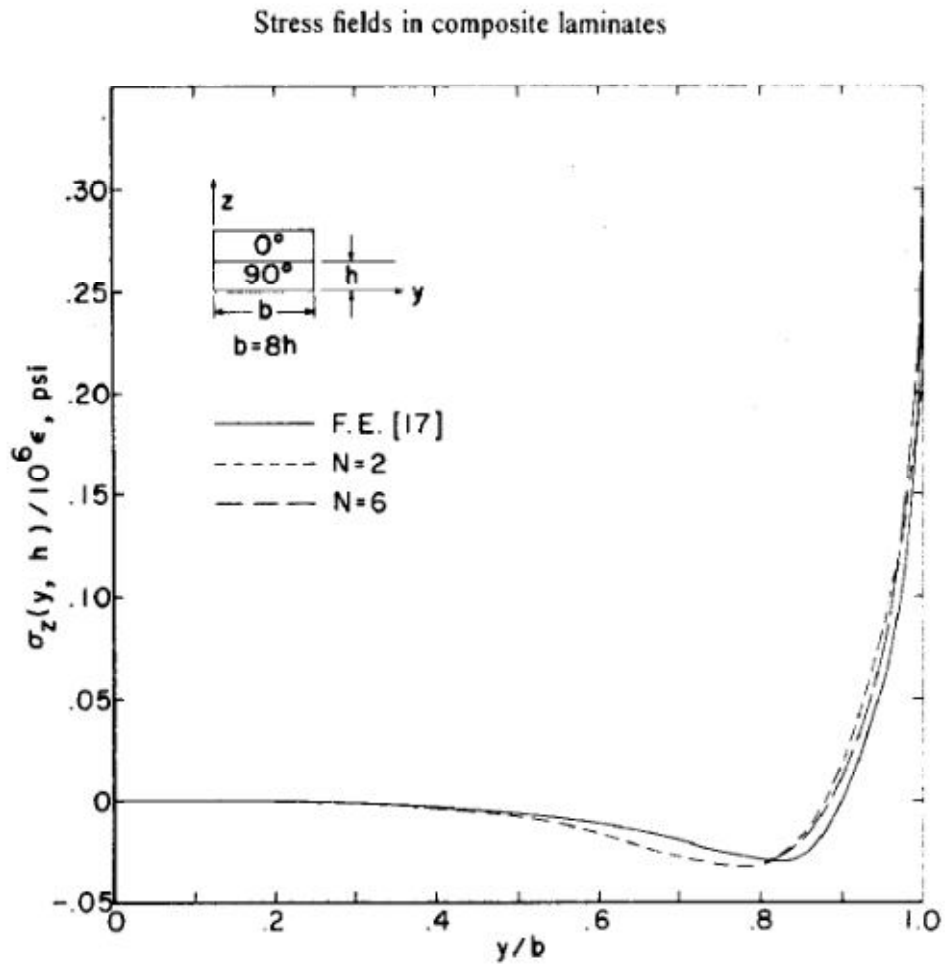


Fig. 7. Distribution of  $\sigma_z$  along 0/90 interface ( $z = h$ ).

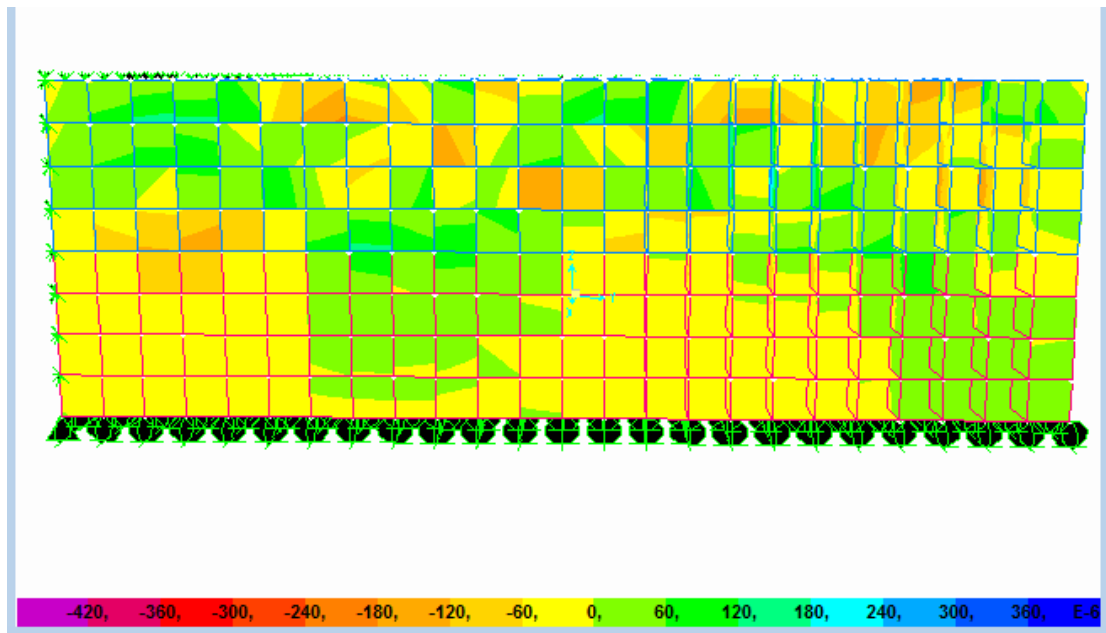
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για την κατανομή της τάσης  $\tau_{yz}$  για  $z=h$  είναι τα παρακάτω:

Joint	dist	S23	Y/b	MO (KN/mm )
3823	0	0,000029	0	1,61373E-05
		-2,3E-06		
		0,000036		
		9,36E-06		
		4,04E-06		
		-3,4E-05		
		0,000053		
		0,000034		
3828	5	-6,5E-06	0,083333	-3,28739E-05
		-5,9E-05		
		-2,5E-06		
		-6,4E-05		
		-3,4E-05		
		-8,1E-05		
		0,000036		
		-5,2E-05		
3833	10	-5,9E-05	0,166667	-4,23625E-05
		3,56E-06		
		-6,4E-05		
		-4,5E-06		
		-9,2E-05		
		-3,1E-05		
		-5,2E-05		
		-0,00004		
3838	15	4,13E-06	0,25	-2,94235E-05
		-1,7E-05		
		4,83E-07		
		-3,2E-05		
		-3,5E-05		
		-2,1E-05		
		-4,2E-05		
		-9,3E-05		
3843	20	-1,4E-05	0,333333	0,00001375
		0,000029		
		-0,00003		
		0,000011		
		-1,8E-05		
		0,000049		
		-0,00008		
		-5,7E-05		

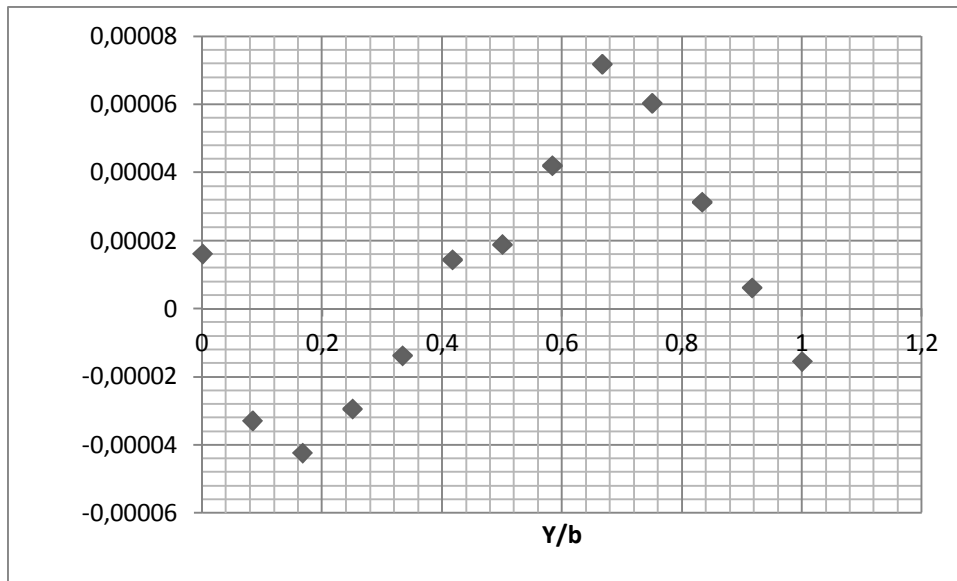
3848	25	0,000036	0,416667	1,43921E-05
		0,000017		
		0,000015		
		1,37E-07		
		0,000047		
		0,000066		
		-3,8E-05		
		-2,8E-05		
3853	30	0,00002	0,5	1,88934E-05
		0,000017		
		-1,8E-06		
		-5E-06		
		0,000071		
		0,000056		
		-1,3E-05		
		6,94E-06		
3858	35	0,000021	0,583333	4,20382E-05
		0,000064		
		3,06E-07		
		0,000057		
		0,000071		
		0,000064		
		-1,3E-05		
		0,000072		
3863	40	0,000064	0,666667	0,000071875
		0,000086		
		0,000064		
		0,000096		
		0,000086		
		0,00005		
		0,000047		
		0,000082		
3868	45	0,000082	0,75	0,000060375
		0,000036		
		0,000095		
		0,000054		
		0,000054		
		0,000013		
		0,000094		
		0,000055		

3873	50	0,000037	0,833333	0,00003133
		0,000013		
		0,000051		
		0,000026		
		-1,6E-05		
		6,64E-06		
		0,000074		
		0,000059		
3878	55	0,000012	0,916667	6,15963E-06
		-2,5E-05		
		0,000018		
		-0,00002		
		-9,7E-06		
		-1,1E-05		
		0,000059		
		0,000026		
3883	60	-2,5E-05	1	-1,54558E-05
		-2,3E-05		
		-5,6E-06		
		-8,2E-06		

Σχηματικά οι τάσεις κατανέμονται στο μοντέλο όπως παρακάτω:



Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση αυτής της εργασίας είναι τα ακόλουθα:



Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση του μοντέλου των Pipes & Pagano είναι το ακόλουθο:

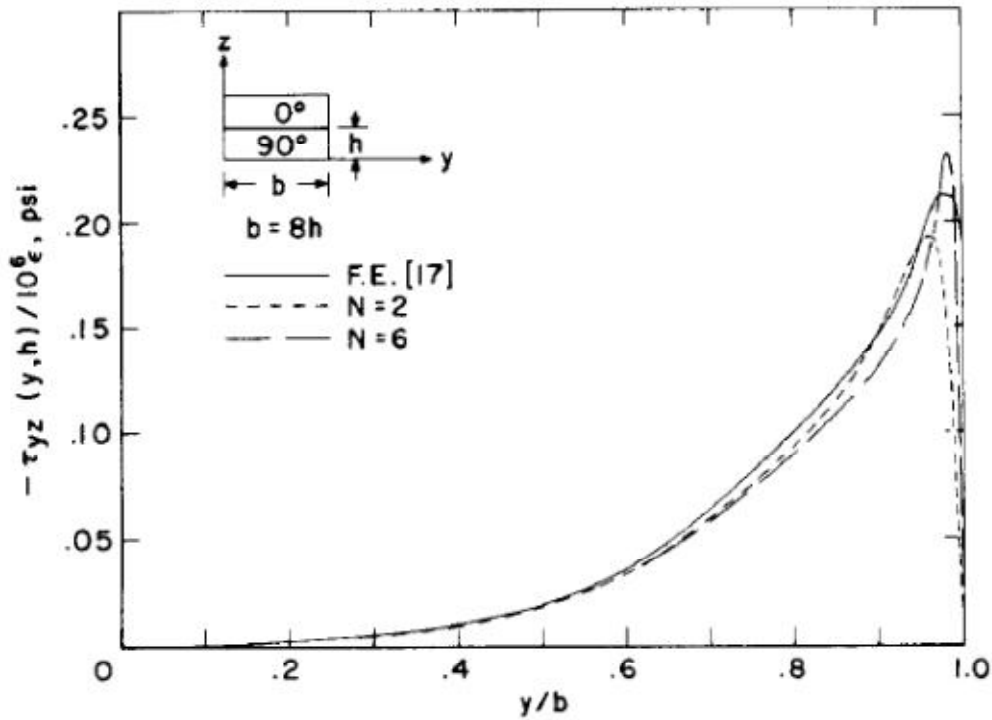


Fig. 8. Distribution of  $\tau_{yz}$  along  $0/90$  interface ( $z = h$ ).

Ποιοτικά τα αποτελέσματα προσομοιάζουν με τα αποτελέσματα των Pipes and Pagano. Παρατηρούμε ότι όντως υπάρχει μία οριακή ζώνη κατά μήκος των ελεύθερων παρειών στην οποία αναπτύσσεται τρισδιάστατη εντατική κατάσταση, όπως και οι Pipes & Pagano συμπεράναν. Η ουσιώδης διαφορά που παρατηρούμε είναι μια ανωμαλία της  $\sigma_y$  και της  $\tau_{yz}$  που παρουσιάζεται στο μέσο του πλάτους της στρώσης γεγονός που θα μπορούσαμε να το αποδώσουμε στην διαφορά του πλάτους των μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν, λόγω της διαφορετικής αλληλεπίδρασης των διαστρωμάτων.

Για το μοντέλο με διαστρωμάτωση +45°, -45°:

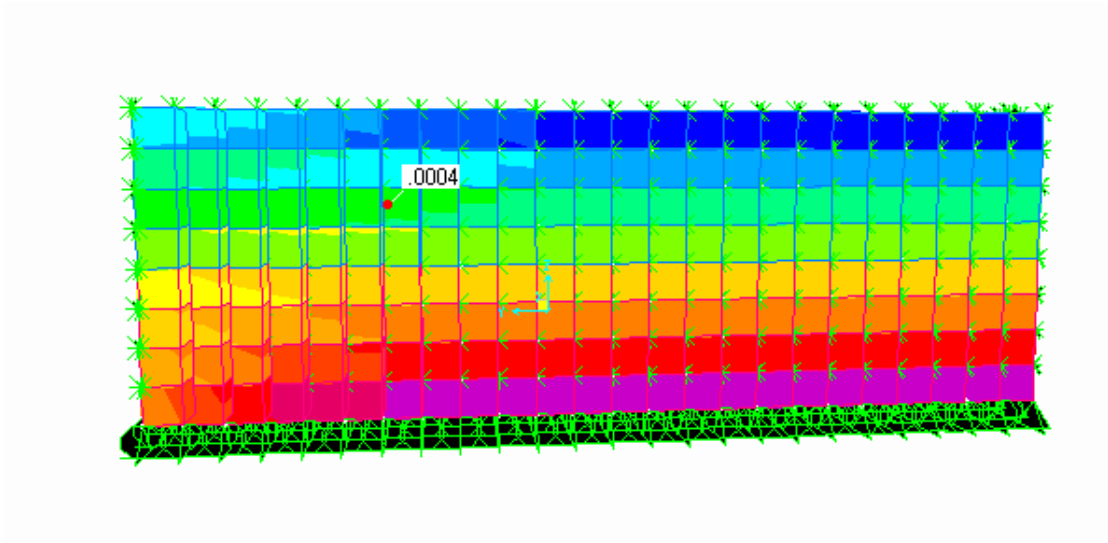
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για την κατανομή της τάσης  $\sigma_x$  για  $z=1.5h$  είναι τα παρακάτω:

joint	dist	S11	Y/b	MO
4227	0	0,0004	0	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4235	5	0,0004	0,083333	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4243	10	0,0004	0,166667	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4251	15	0,0004	0,25	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4259	20	0,0004	0,333333	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4267	25	0,0004	0,416667	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		

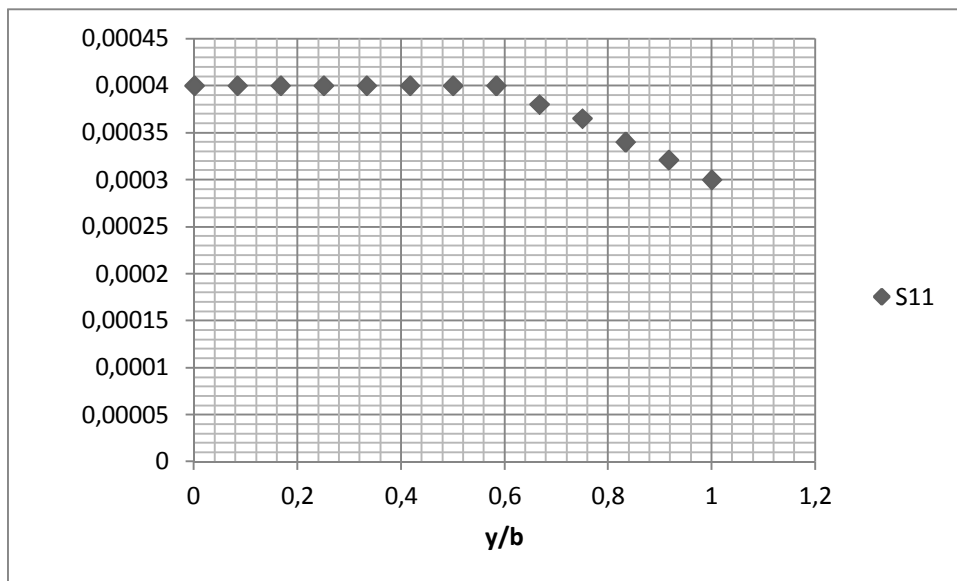
4275	30	0,0004	0,5	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4283	35	0,0004	0,583333	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4291	40	0,00038	0,666667	0,00038
		0,00038		
		0,00038		
		0,00038		
4299	45	0,000365	0,75	0,000365
		0,000365		
		0,000365		
		0,000365		
4307	50	0,00034	0,833333	0,00034
		0,00034		
		0,00034		
		0,00034		
4315	55	0,000321	0,916667	0,000321
		0,000321		
		0,000321		
		0,000321		
4323	60	0,0003	1	0,0003
		0,0003		



Σχηματικά οι τάσεις κατανέμονται στο μοντέλο όπως παρακάτω:



Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση αυτής της εργασίας είναι τα ακόλουθα:



Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση του μοντέλου των Pipes & Pagano είναι το ακόλουθο:

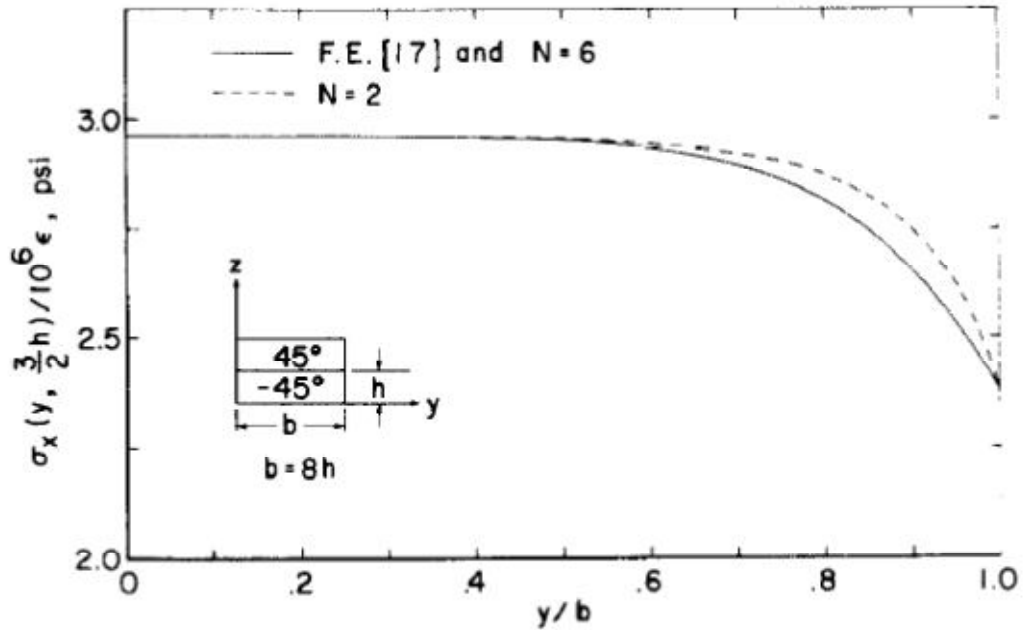


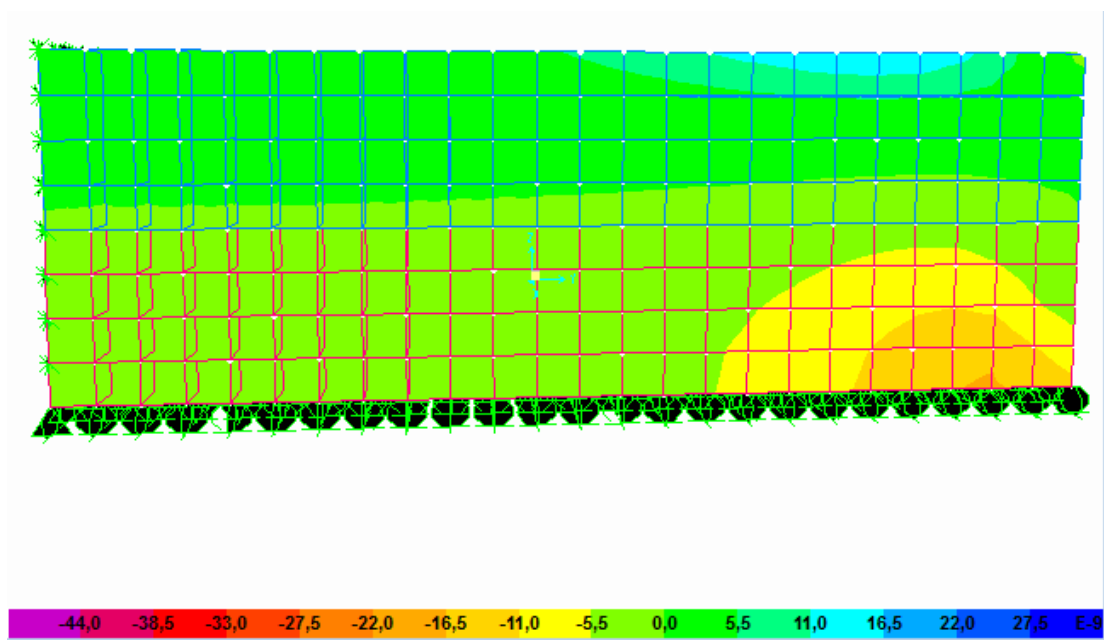
Fig. 2. Distribution of  $\sigma_x$  along center of top layer ( $z = (3/2) h$ ).

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για την κατανομή της τάσης  $\tau_{xy}$  για  $z=1.5h$  στην μεσαία διατομή είναι τα παρακάτω:

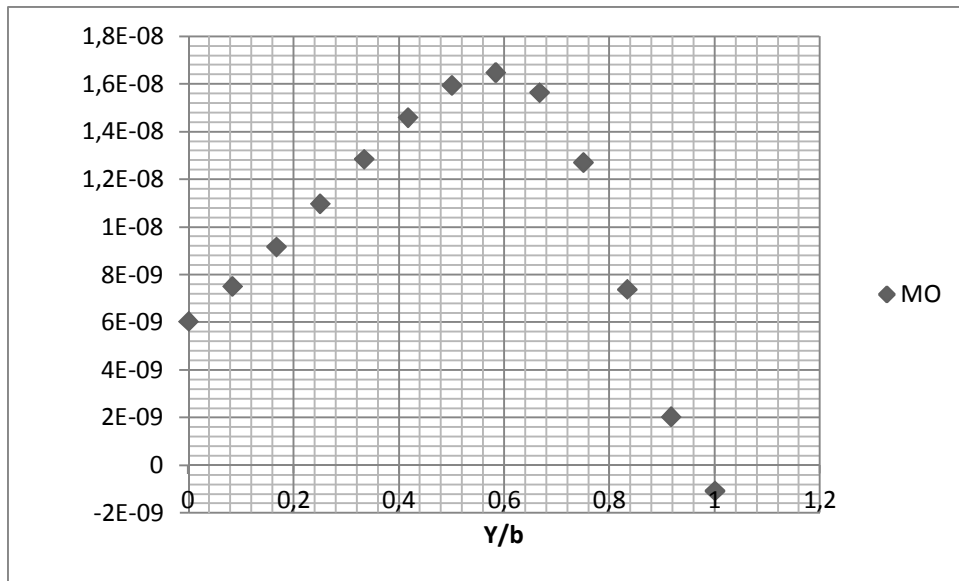
Joint	Dist	S12	y/b	MO (KN/mm <sup>2</sup> )
7378	0	5,3E-09	0	6,0455E-09
		6,79E-09		
7382	5	6,65E-09	0,083333333	7,5095E-09
		8,37E-09		
7386	10	8,21E-09	0,166666667	9,1695E-09
		1,01E-08		
7390	15	9,96E-09	0,25	1,0983E-08
		1,2E-08		
7394	20	1,18E-08	0,333333333	1,285E-08
		1,39E-08		
7398	25	1,37E-08	0,416666667	1,4595E-08
		1,55E-08		
7402	30	1,54E-08	0,5	1,5945E-08

		1,65E-08		
7406	35	1,65E-08	0,583333333	1,6485E-08
		1,65E-08		
7410	40	1,67E-08	0,666666667	1,5645E-08
		1,46E-08		
7414	45	1,51E-08	0,75	1,271E-08
		1,03E-08		
7418	50	1,11E-08	0,833333333	7,3885E-09
		3,72E-09		
7422	55	4,05E-09	0,916666667	2,0434E-09
		3,68E-11		
12	60	-1,1E-09	1	-1,07E-09

Σχηματικά οι τάσεις κατανέμονται στο μοντέλο όπως παρακάτω:



Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση αυτής της εργασίας είναι τα ακόλουθα:



Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση του μοντέλου των Pipes & Pagano είναι το ακόλουθο:

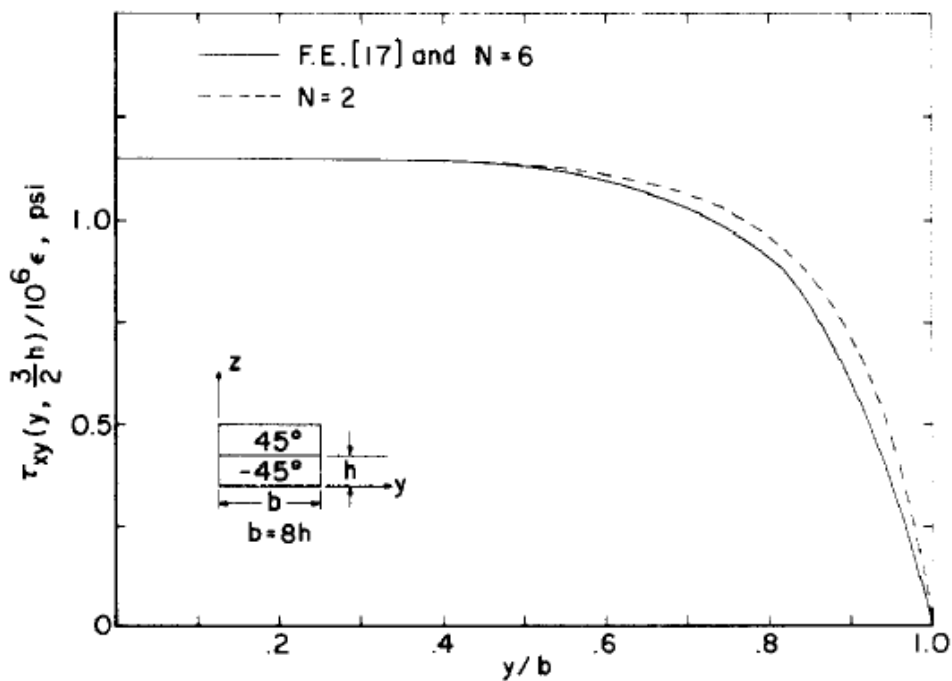


Fig. 3. Distribution of  $\tau_{xy}$  along center of top layer ( $z = (3/2) h$ ).

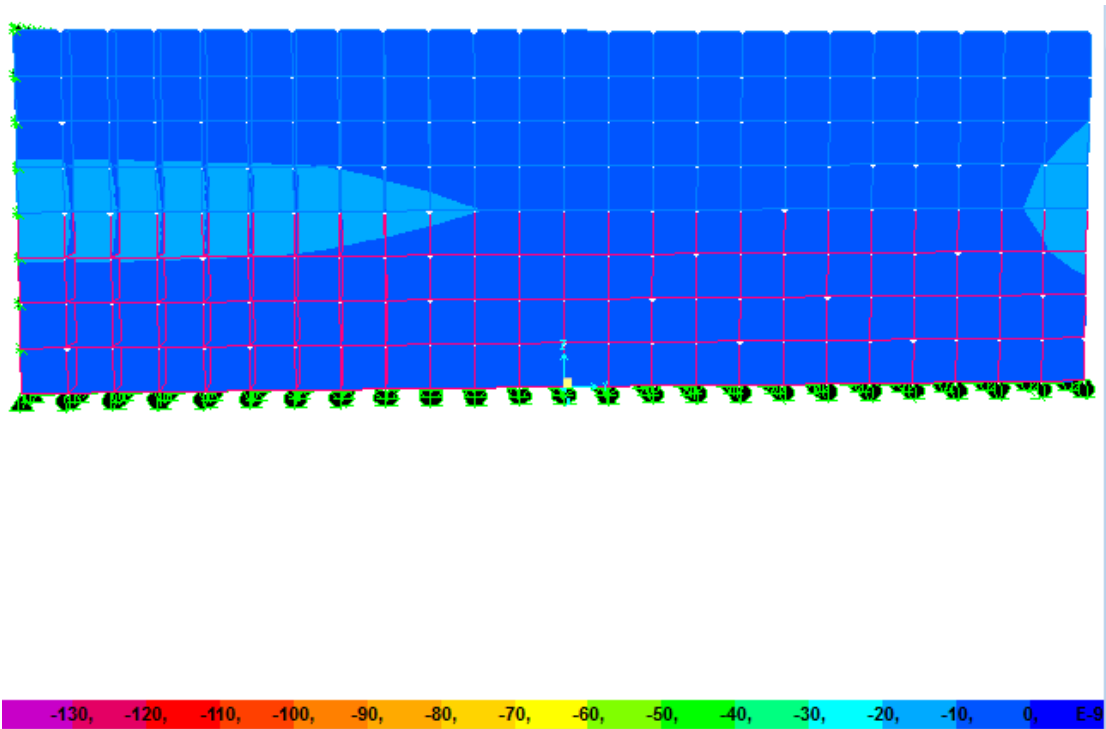
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για την κατανομή της τάσης  $\tau_{xz}$  για  $z=h$  είναι τα παρακάτω:

dist	S13	MO	DIST	ΑΠΟΛΥΤΟ MO
0	-9,4E-09	-1,11718E-08	0	1,11718E-08
	-9,4E-09			
	-1,3E-08			
	-1,3E-08			
	-9,5E-09			
	-9,5E-09			
	-1,3E-08			
	-1,3E-08			
5	-9,1E-09	-1,07738E-08	0,083333333	1,07738E-08
	-9,1E-09			
	-1,2E-08			
	-1,2E-08			
	-9,1E-09			
	-9,1E-09			
	-1,3E-08			
	-1,3E-08			

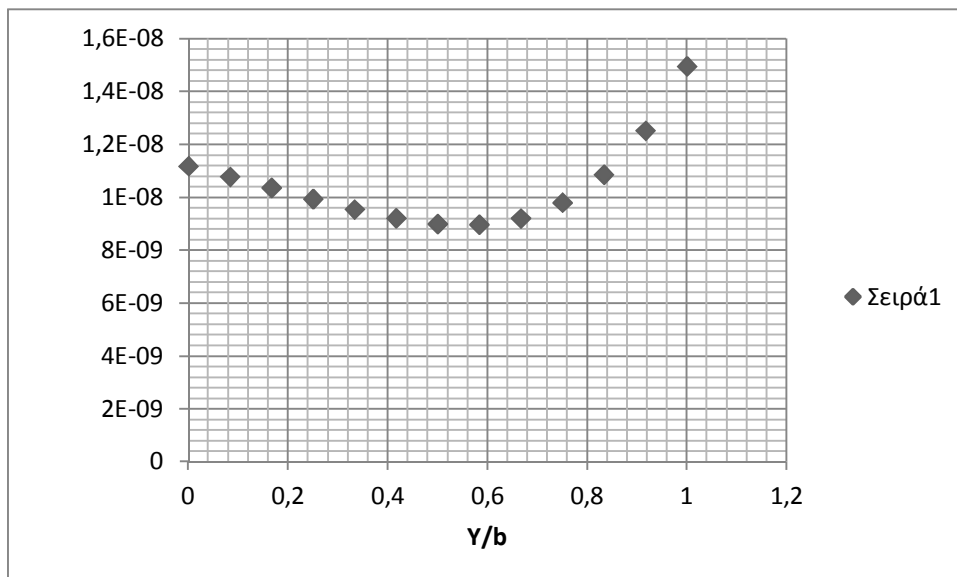
10	-8,7E-09	-1,03539E-08	0,166666667	1,03539E-08
	-8,8E-09			
	-1,2E-08			
	-1,2E-08			
	-8,7E-09			
	-8,7E-09			
	-1,2E-08			
	-1,2E-08			
15	-8,4E-09	-9,93225E-09	0,25	9,93225E-09
	-8,4E-09			
	-1,1E-08			
	-1,1E-08			
	-8,3E-09			
	-8,4E-09			
	-1,2E-08			
	-1,2E-08			
20	-8E-09	-9,53638E-09	0,333333333	9,53638E-09
	-8,1E-09			
	-1,1E-08			
	-1,1E-08			
	-8E-09			
	-8E-09			
	-1,1E-08			
	-1,1E-08			
25	-7,8E-09	-9,20513E-09	0,416666667	9,20513E-09
	-7,8E-09			
	-1,1E-08			
	-1,1E-08			
	-7,7E-09			
	-7,7E-09			
	-1,1E-08			
	-1,1E-08			
30	-7,6E-09	-8,99125E-09	0,5	8,99125E-09
	-7,6E-09			
	-1E-08			
	-1E-08			
	-7,5E-09			
	-7,5E-09			
	-1E-08			
	-1E-08			

35	-7,6E-09	-8,96263E-09	0,583333333	8,96263E-09
	-7,6E-09			
	-1E-08			
	-1E-08			
	-7,5E-09			
	-7,5E-09			
	-1E-08			
	-1E-08			
40	-7,9E-09	-9,19763E-09	0,666666667	9,19763E-09
	-7,8E-09			
	-1,1E-08			
	-1,1E-08			
	-7,8E-09			
	-7,8E-09			
	-1,1E-08			
	-1,1E-08			
45	-8,4E-09	-9,7925E-09	0,75	9,7925E-09
	-8,3E-09			
	-1,1E-08			
	-1,1E-08			
	-8,3E-09			
	-8,3E-09			
	-1,1E-08			
	-1,1E-08			
50	-9,3E-09	-1,08545E-08	0,833333333	1,08545E-08
	-9,2E-09			
	-1,2E-08			
	-1,2E-08			
	-9,3E-09			
	-9,3E-09			
	-1,2E-08			
	-1,3E-08			
55	-1,1E-08	-1,25138E-08	0,916666667	1,25138E-08
	-1,1E-08			
	-1,4E-08			
	-1,4E-08			
	-1,1E-08			
	-1,1E-08			
	-1,4E-08			
	-1,5E-08			
60	-1,3E-08	-1,49475E-08	1	1,49475E-08
	-1,7E-08			
	-1,3E-08			
	-1,7E-08			

Σχηματικά οι τάσεις κατανέμονται στο μοντέλο όπως παρακάτω:



Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση αυτής της εργασίας είναι τα ακόλουθα:





Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση του μοντέλου των Pipes & Pagano είναι το ακόλουθο:

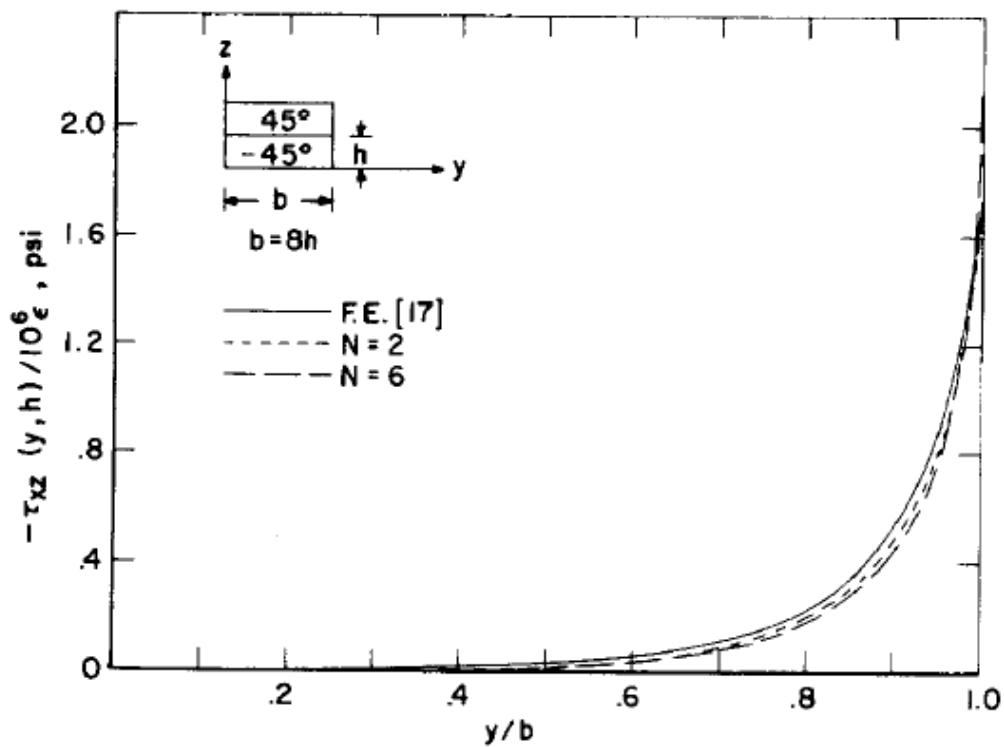


Fig. 4. Distribution of  $\tau_{xz}$  along  $\pm 45^\circ$  interface ( $z = h$ ).

Ποιοτικά τα αποτελέσματα προσομοιάζουν με τα αποτελέσματα των Pipes and Pagano. Παρατηρούμε ότι όντως υπάρχει μία οριακή ζώνη κατά μήκος των ελεύθερων παρειών στην οποία αναπτύσσεται τρισδιάστατη εντατική κατάσταση, όπως και οι Pipes & Pagano συμπέραναν. Η ουσιαστική διαφορά που παρατηρούμε είναι μια ανωμαλία της  $\sigma_{xy}$  και της  $\sigma_{xz}$  που παρουσιάζεται περίπου στο μέσο του πλάτους της στρώσης γεγονός που θα μπορούσαμε να το αποδώσουμε τόσο στην διαφορά του πλάτους των μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν, λόγω της διαφορετικής αλληλεπίδρασης των διαστρωματώσεων, όσο και στην πιθανότητα έλλειψης ακρίβειας λόγω διακριτοποίησης.

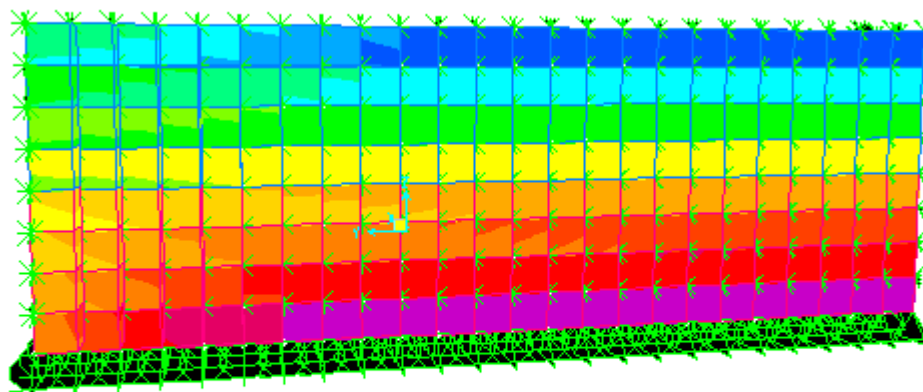
Για την διαστρωμάτωση  $+30^{\circ}, -30^{\circ}$ :

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για την κατανομή της τάσης  $\sigma_x$  για  $z=1,5h$  είναι τα παρακάτω:

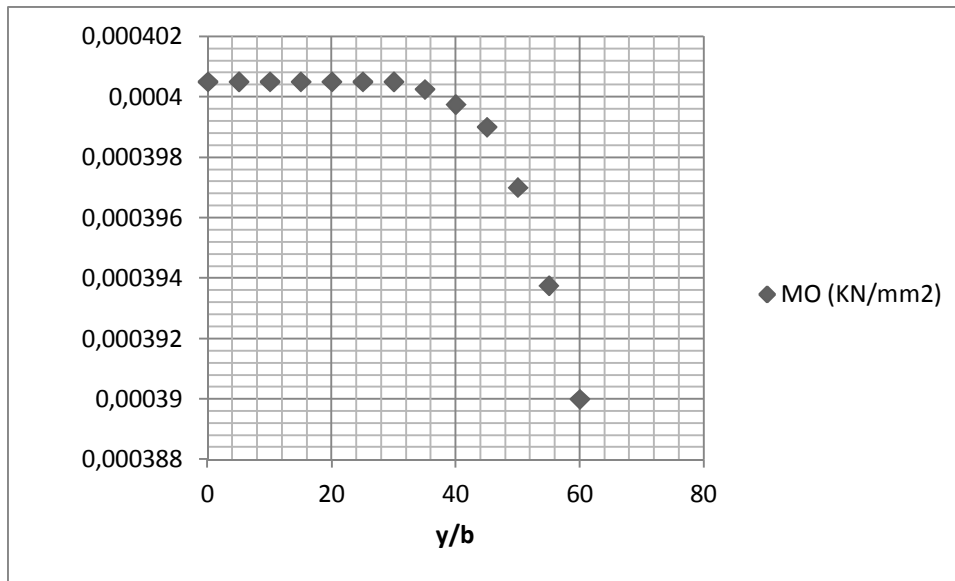
Joint	S11	y/b	MO (KN/mm2)
4227	0,0004	0	0,0004005
	0,000401		
	0,0004		
	0,000401		
4235	0,0004	5	0,0004005
	0,000401		
	0,0004		
	0,000401		
4243	0,0004	10	0,0004005
	0,000401		
	0,0004		
	0,000401		
4251	0,0004	15	0,0004005
	0,000401		
	0,0004		
	0,000401		
4259	0,0004	20	0,0004005
	0,000401		
	0,0004		
	0,000401		
4267	0,0004	25	0,0004005
	0,000401		
	0,0004		
	0,000401		
4275	0,0004	30	0,0004005
	0,000401		
	0,0004		
	0,000401		
4283	0,0004	35	0,00040025
	0,000401		
	0,0004		
	0,0004		
4291	0,0004	40	0,00039975
	0,000399		
	0,0004		
	0,0004		

4299	0,0004	45	0,000399
	0,000396		
	0,0004		
	0,0004		
4307	0,0004	50	0,000397
	0,000388		
	0,0004		
	0,0004		
4315	0,0004	55	0,00039375
	0,0004		
	0,000375		
	0,0004		
4323	0,0004	60	0,00039
	0,00038		

Σχηματικά οι τάσεις κατανέμονται στο μοντέλο όπως παρακάτω:



Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση αυτής της εργασίας είναι τα ακόλουθα:

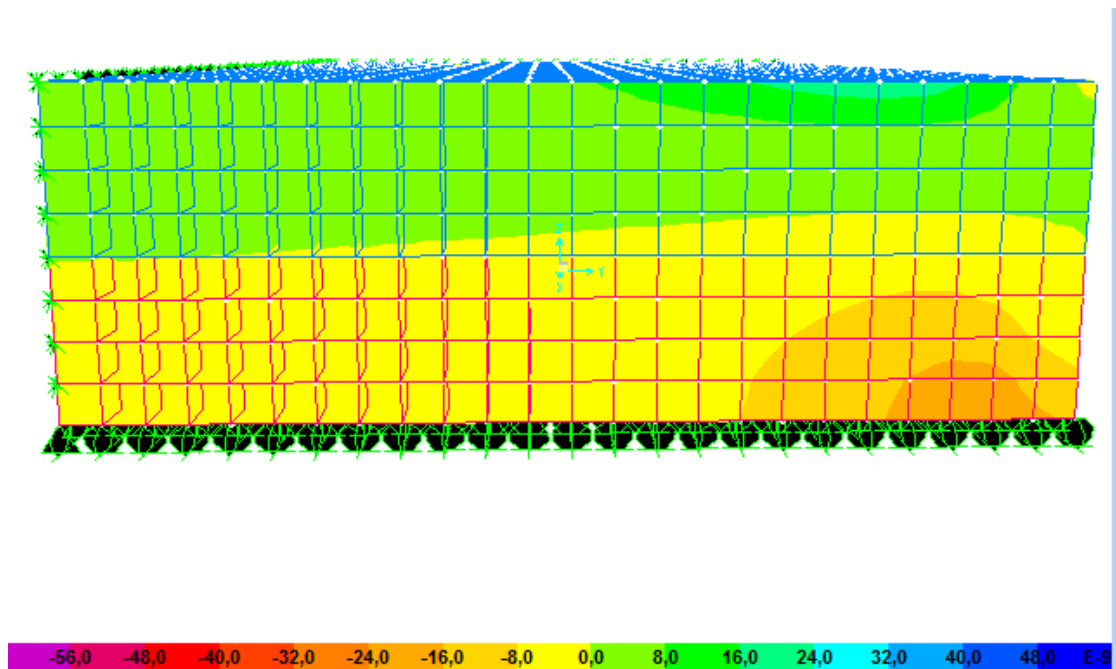


Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για την κατανομή της τάσης  $\tau_{xy}$  είναι τα παρακάτω:

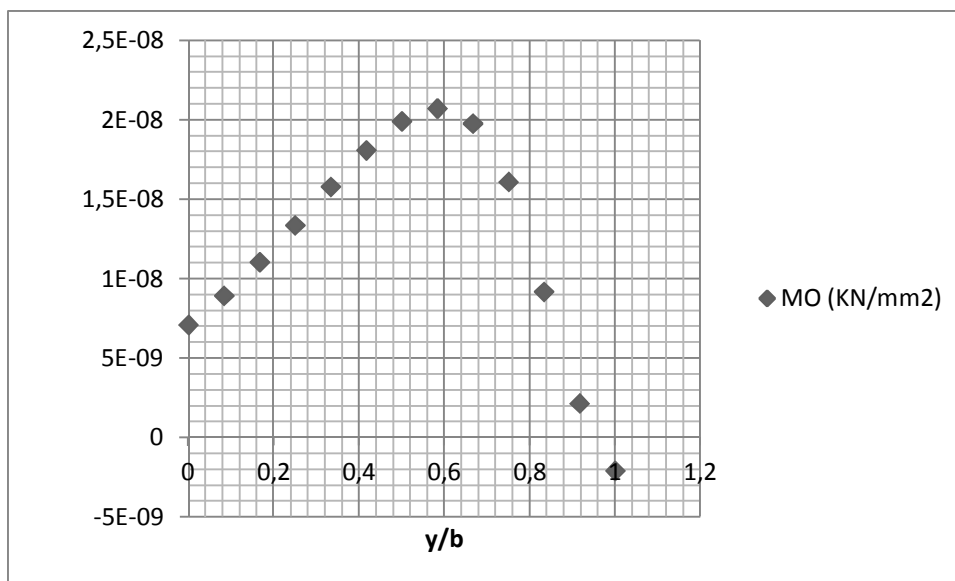
joint	DIST	S12	y/b	MO (KN/mm2)
7378	0	6,17E-09	0	7,089E-09
		8,01E-09		
7382	5	7,86E-09	0,083333	8,928E-09
		1E-08		
7386	10	9,83E-09	0,166667	1,1038E-08
		1,23E-08		
7390	15	1,21E-08	0,25	1,3365E-08
		1,47E-08		
7394	20	1,45E-08	0,333333	1,5785E-08
		1,71E-08		
7398	25	1,69E-08	0,416667	1,8085E-08
		1,93E-08		

7402	30	1,91E-08	0,5	1,991E-08
		2,07E-08		
7406	35	2,07E-08	0,583333	2,0715E-08
		2,07E-08		
7410	40	2,1E-08	0,666667	1,977E-08
		1,86E-08		
7414	45	1,91E-08	0,75	1,609E-08
		1,31E-08		
7418	50	1,4E-08	0,833333	9,176E-09
		4,39E-09		
7422	55	4,69E-09	0,916667	2,15335E-09
		-3,8E-10		
12	60	-2,1E-09	1	-2,09E-09

Σχηματικά οι τάσεις κατανέμονται στο μοντέλο όπως παρακάτω:



Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση αυτής της εργασίας είναι τα ακόλουθα:



Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για την κατανομή της τάσης  $\tau_{xz}$  είναι τα παρακάτω:

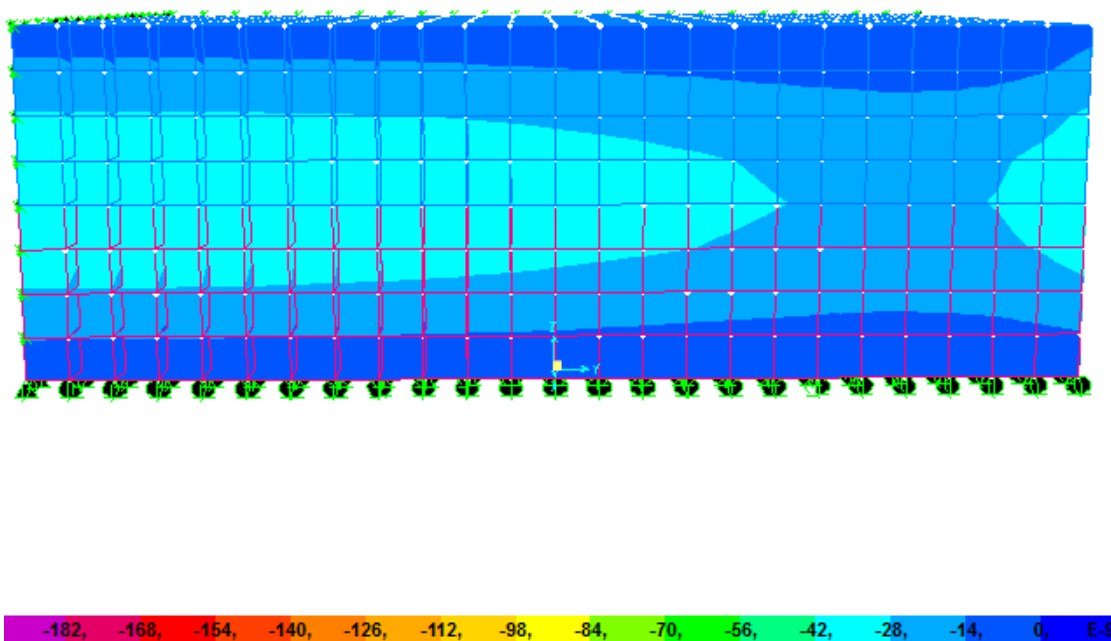
Joint	dist	S13	y/b	MO (KN/mm2)
2073	0	-2,8E-08	0	3,16663E-08
		-2,8E-08		
		-3,5E-08		
		-3,5E-08		
		-2,9E-08		
		-2,9E-08		
		-3,5E-08		
		-3,5E-08		
2078	5	-2,7E-08	0,083333	3,0605E-08
		-2,7E-08		
		-3,3E-08		
		-3,3E-08		
		-2,8E-08		
		-2,8E-08		
		-3,4E-08		
		-3,4E-08		

2083	10	-2,6E-08	0,166667	2,943E-08
		-2,6E-08		
		-3,2E-08		
		-3,2E-08		
		-2,7E-08		
		-2,7E-08		
		-3,3E-08		
		-3,3E-08		
2088	15	-2,5E-08	0,25	2,81675E-08
		-2,5E-08		
		-3,1E-08		
		-3,1E-08		
		-2,5E-08		
		-2,5E-08		
		-3,2E-08		
		-3,1E-08		
2093	20	-2,4E-08	0,333333	2,68725E-08
		-2,4E-08		
		-2,9E-08		
		-2,9E-08		
		-2,4E-08		
		-2,4E-08		
		-3E-08		
		-3E-08		
2098	25	-2,3E-08	0,416667	2,56275E-08
		-2,3E-08		
		-2,8E-08		
		-2,8E-08		
		-2,3E-08		
		-2,3E-08		
		-2,9E-08		
		-2,9E-08		
2103	30	-2,2E-08	0,5	2,45488E-08
		-2,2E-08		
		-2,7E-08		
		-2,7E-08		
		-2,2E-08		
		-2,2E-08		
		-2,7E-08		
		-2,7E-08		

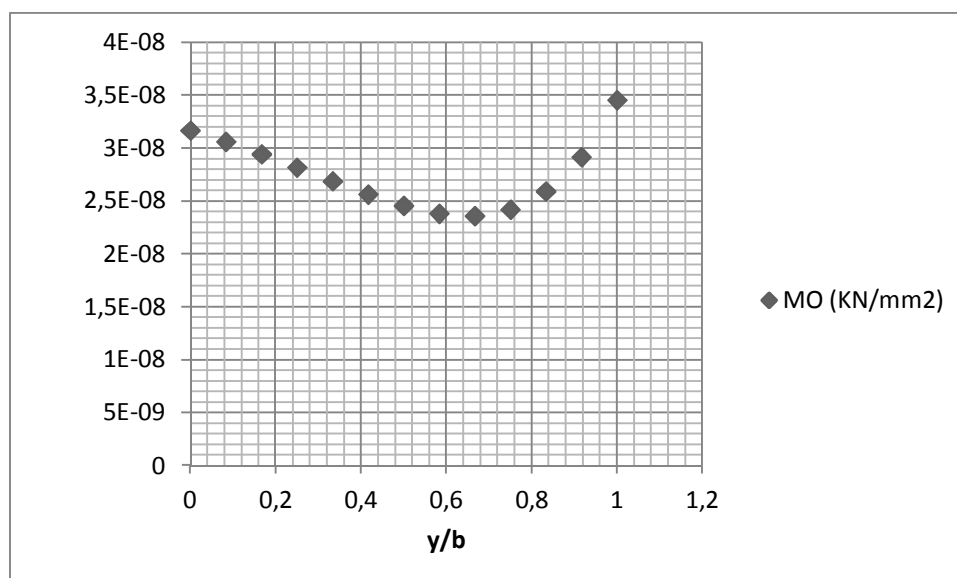
2108	35	-2,1E-08	0,583333	2,3805E-08
		-2,1E-08		
		-2,6E-08		
		-2,6E-08		
		-2,1E-08		
		-2,1E-08		
		-2,7E-08		
		-2,7E-08		
2113	40	-2,1E-08	0,666667	2,35938E-08
		-2,1E-08		
		-2,6E-08		
		-2,6E-08		
		-2,1E-08		
		-2,1E-08		
		-2,6E-08		
		-2,6E-08		
2118	45	-2,2E-08	0,75	2,41875E-08
		-2,2E-08		
		-2,7E-08		
		-2,6E-08		
		-2,2E-08		
		-2,2E-08		
		-2,7E-08		
		-2,7E-08		
2123	50	-2,3E-08	0,833333	2,59088E-08
		-2,3E-08		
		-2,8E-08		
		-2,8E-08		
		-2,3E-08		
		-2,3E-08		
		-2,9E-08		
		-2,9E-08		
2128	55	-2,6E-08	0,916667	2,91625E-08
		-2,6E-08		
		-3,2E-08		
		-3,2E-08		
		-2,7E-08		
		-2,7E-08		
		-3,2E-08		
		-3,3E-08		
2133	60	-3,1E-08	1	3,4545E-08
		-3,7E-08		
		-3,2E-08		
		-3,9E-08		



Σχηματικά οι τάσεις κατανέμονται στο μοντέλο όπως παρακάτω:



Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση αυτής της εργασίας είναι τα ακόλουθα:



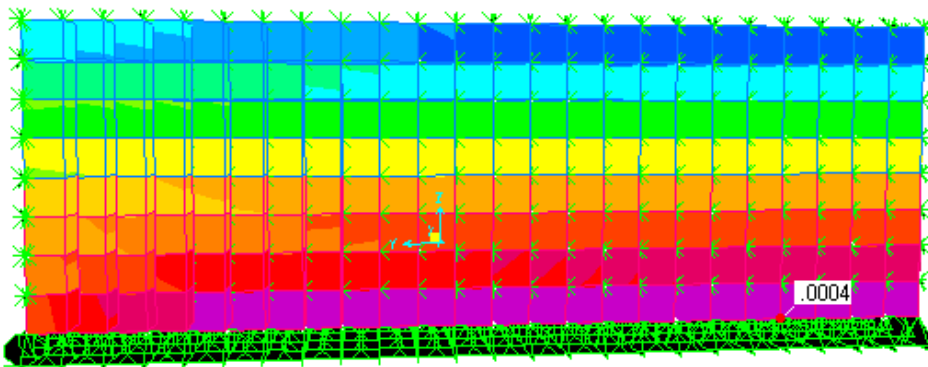
Για την διαστρωμάτωση  $+60^\circ, -60^\circ$ :

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για την κατανομή της τάσης  $\sigma_x$  για  $z=1,5h$  είναι τα παρακάτω:

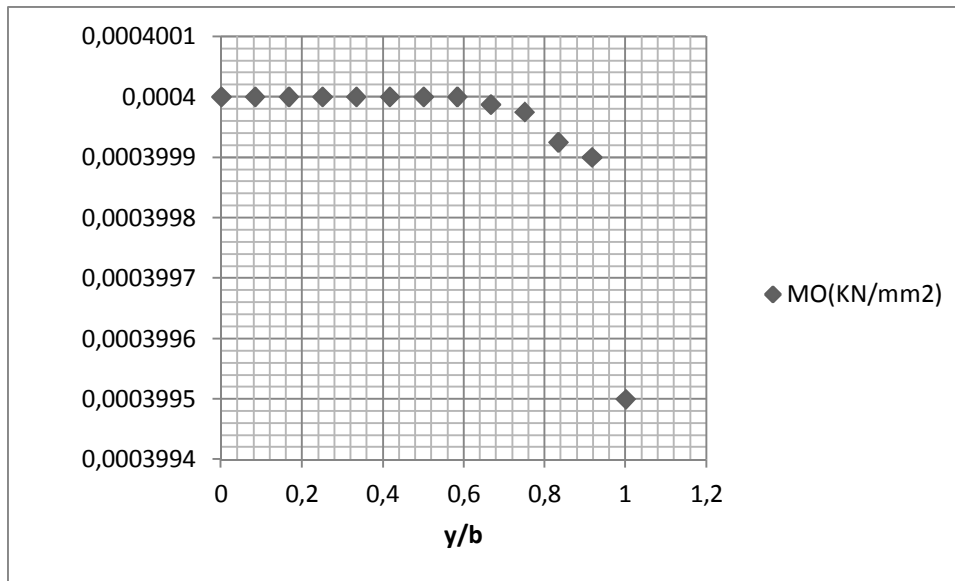
Joint	Dist	S11	Y/b	MO(KN/mm2)
4227	0	0,0004	0	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4235	5	0,0004	0,083333	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4243	10	0,0004	0,166667	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4251	15	0,0004	0,25	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4259	20	0,0004	0,333333	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4267	25	0,0004	0,416667	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4275	30	0,0004	0,5	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		

4283	35	0,0004	0,583333	0,0004
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4291	40	0,0004	0,666667	0,000399988
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4299	45	0,0004	0,75	0,000399975
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4307	50	0,0004	0,833333	0,000399925
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4315	55	0,0004	0,916667	0,0003999
		0,0004		
		0,0004		
		0,0004		
4323	60	0,0004	1	0,0003995
		0,000399		

Σχηματικά οι τάσεις κατανέμονται στο μοντέλο όπως παρακάτω:



Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση αυτής της εργασίας είναι τα ακόλουθα:

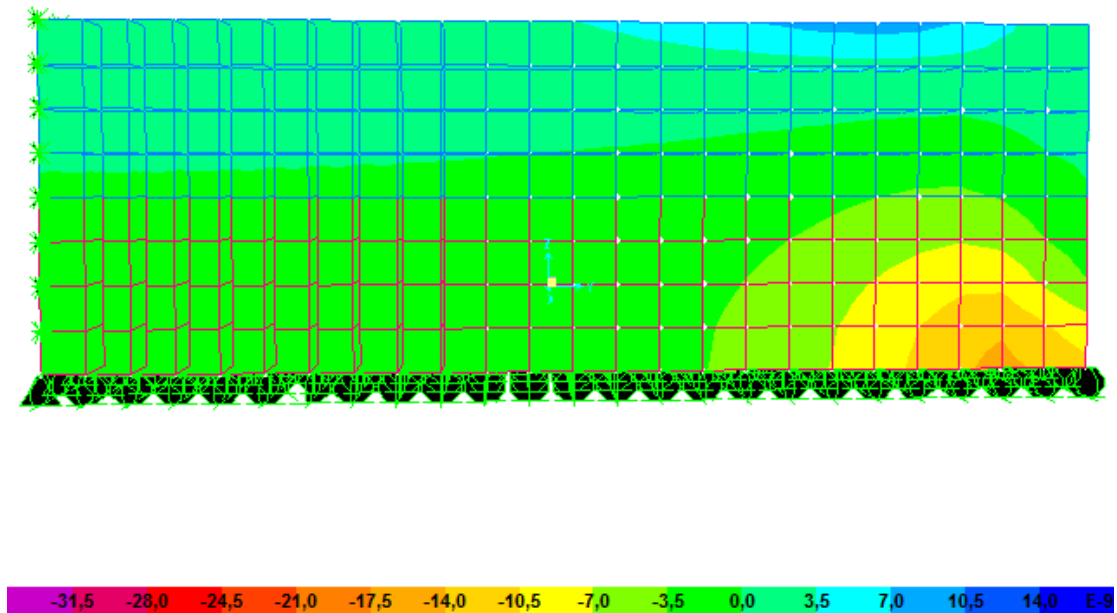


Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για την κατανομή της τάσης  $\tau_{xy}$  είναι τα παρακάτω:

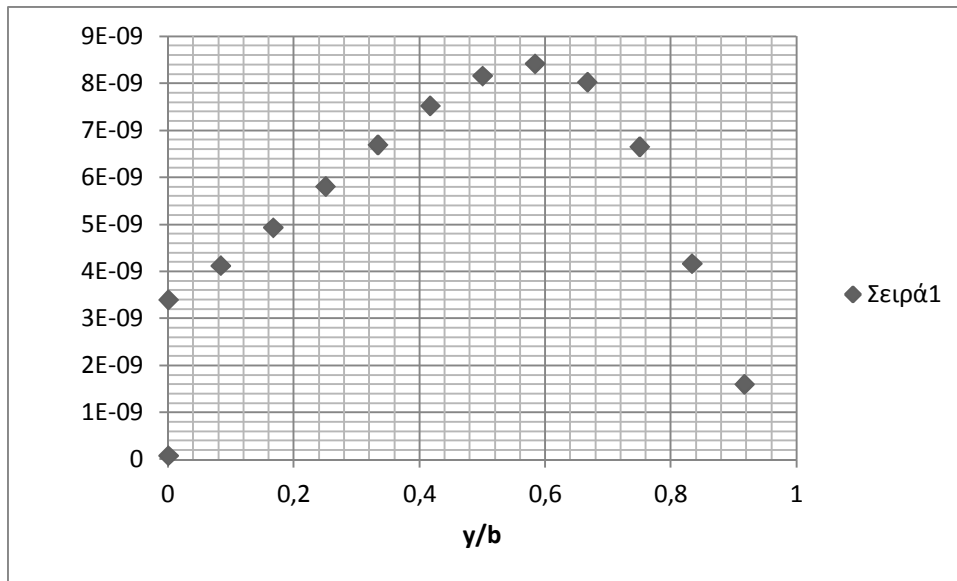
Joint	DIST	S12	y/b	S12
7378	0	3,02E-09	0	3,398E-09
7378		3,78E-09		
7382	5	3,69E-09	0,083333	4,124E-09
7382		4,56E-09		
7386	10	4,46E-09	0,166667	4,935E-09
7386		5,41E-09		
7390	15	5,3E-09	0,25	5,807E-09
7390		6,31E-09		
7394	20	6,2E-09	0,333333	6,696E-09
7394		7,2E-09		
7398	25	7,09E-09	0,416667	7,523E-09
7398		7,96E-09		
7402	30	7,88E-09	0,5	8,161E-09
7402		8,44E-09		

7406	35	8,43E-09	0,583333	8,418E-09
7406		8,41E-09		
7410	40	8,51E-09	0,666667	8,027E-09
7410		7,54E-09		
7414	45	7,83E-09	0,75	6,655E-09
7414		5,48E-09		
7418	50	5,95E-09	0,833333	4,17E-09
7418		2,39E-09		
7422	55	2,67E-09	0,916667	1,604E-09
7422		5,36E-10		
12	60	8,22E-11	0	8,223E-11

Σχηματικά οι τάσεις κατανέμονται στο μοντέλο όπως παρακάτω:



Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση αυτής της εργασίας είναι τα ακόλουθα:



Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για την κατανομή της τάσης  $\tau_{xz}$  είναι τα παρακάτω:

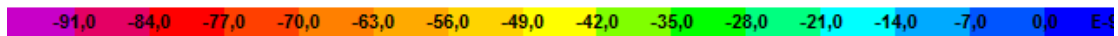
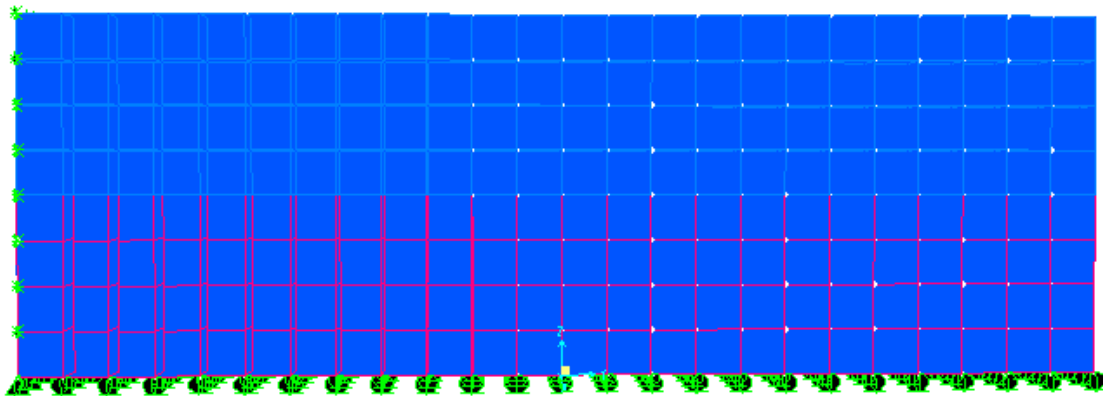
Joint	dist	S13	y/b	s13
2073	0	-4,2E-09	0	5,21975E-09
2073		-4,3E-09		
2073		-6,2E-09		
2073		-6,2E-09		
2073		-4,2E-09		
2073		-4,2E-09		
2073		-6,2E-09		
2073		-6,2E-09		
2078	5	-4,2E-09	0,083333	5,13888E-09
2078		-4,2E-09		
2078		-6,1E-09		
2078		-6,1E-09		
2078		-4,1E-09		
2078		-4,1E-09		
2078		-6,1E-09		
2078		-6,1E-09		

2083	10	-4,1E-09	0,166667	5,06175E-09
2083		-4,1E-09		
2083		-6E-09		
2083		-6E-09		
2083		-4,1E-09		
2083		-4,1E-09		
2083		-6E-09		
2083		-6E-09		
2088	15	-4,1E-09	0,25	4,995E-09
2088		-4,1E-09		
2088		-6E-09		
2088		-5,9E-09		
2088		-4E-09		
2088		-4E-09		
2088		-5,9E-09		
2088		-5,9E-09		
2093	20	-4E-09	0,333333	4,947E-09
2093		-4E-09		
2093		-5,9E-09		
2093		-5,9E-09		
2093		-4E-09		
2093		-4E-09		
2093		-5,9E-09		
2093		-5,9E-09		
2098	25	-4E-09	0,416667	4,92788E-09
2098		-4E-09		
2098		-5,9E-09		
2098		-5,9E-09		
2098		-4E-09		
2098		-4E-09		
2098		-5,8E-09		
2098		-5,8E-09		
2103	30	-4,1E-09	0,5	4,95038E-09
2103		-4,1E-09		
2103		-5,9E-09		
2103		-5,9E-09		
2103		-4E-09		
2103		-4E-09		
2103		-5,9E-09		
2103		-5,9E-09		

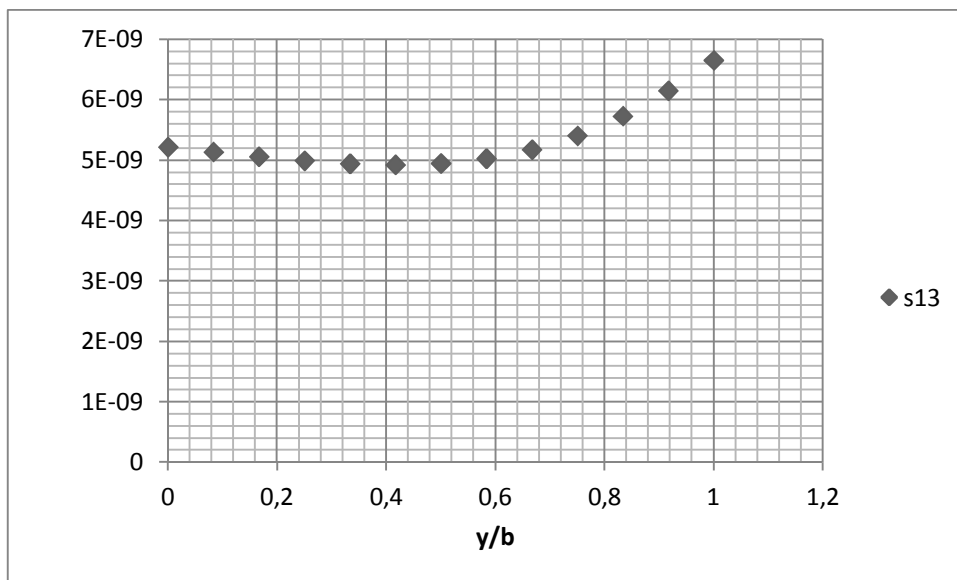
2108	35	-4,1E-09	0,583333	5,02838E-09
2108		-4,1E-09		
2108		-6E-09		
2108		-6E-09		
2108		-4,1E-09		
2108		-4,1E-09		
2108		-5,9E-09		
2108		-5,9E-09		
2113	40	-4,3E-09	0,666667	5,1765E-09
2113		-4,3E-09		
2113		-6,1E-09		
2113		-6,1E-09		
2113		-4,2E-09		
2113		-4,2E-09		
2113		-6,1E-09		
2113		-6,1E-09		
2118	45	-4,5E-09	0,75	5,40788E-09
2118		-4,5E-09		
2118		-6,4E-09		
2118		-6,4E-09		
2118		-4,4E-09		
2118		-4,4E-09		
2118		-6,4E-09		
2118		-6,4E-09		
2123	50	-4,8E-09	0,833333	5,73213E-09
2123		-4,7E-09		
2123		-6,7E-09		
2123		-6,7E-09		
2123		-4,7E-09		
2123		-4,7E-09		
2123		-6,7E-09		
2123		-6,8E-09		
2128	55	-5,1E-09	0,916667	6,15075E-09
2128		-5E-09		
2128		-7,2E-09		
2128		-7,2E-09		
2128		-5,1E-09		
2128		-5,1E-09		
2128		-7,2E-09		
2128		-7,3E-09		
2133	60	-5,5E-09	1	6,655E-09
2133		-7,7E-09		
2133		-5,5E-09		
2133		-7,9E-09		



Σχηματικά οι τάσεις κατανέμονται στο μοντέλο όπως παρακάτω:



Γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση αυτή της εργασίας είναι τα ακόλουθα:



Παρατηρούμε ότι ποιοτικά τα αποτελέσματα των τάσεων που αναπτύσσονται στα μοντέλα που αποτελούνται από τις στρώσεις +30,-30 και +60, -60 προσομοιάζουν με τα αποτελέσματα του μοντέλου με αλληλουχία στρώσεων +45,-45.

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ -ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Ποιοτικά τα αποτελέσματα προσομοιάζουν με τα αποτελέσματα των Pipes and Pagano. Παρατηρούμε ότι όντως υπάρχει μία οριακή ζώνη κατά μήκος των ελεύθερων παρειών στην οποία αναπτύσσεται τρισδιάστατη εντατική κατάσταση, όπως και οι Pipes & Pagano συμπεράναν.

Γενικότερα οι διαφορές που υπάρχουν μεταξύ του μοντέλου που χρησιμοποιήσαμε και του μοντέλου των Pipes & Pagano οφείλονται σε:

1. Στην χρήση διαφορετικού πλάτους στο μοντέλο που χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να ελέγξουμε πώς αλληλεπιδρούν οι στρώσεις μεταξύ τους και κατά πόσο επηρεάζεται η οριακή ζώνη κατά μήκος των ελεύθερων παρειών.
2. Στην διακριτοποίηση των στοιχείων.

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

---

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Σκοπός της εργασίας είναι η ανάπτυξη μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων για τον προσδιορισμό των διεπιφανειακών τάσεων που αναπτύσσονται μεταξύ των στρώσεων κατά την έννοια του πάχους μιας διαστρωμάτωσης σε σύνθετα υλικά και η επαλήθευση του αναλυτικού μοντέλου των Pipes & Pagano, που αναφέρεται στο πρόβλημα αυτό με βάση την τρισδιάστατη θεωρία ελαστικότητας.

Για την μοντελοποίηση χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα SAP2000 14, με την βοήθεια του οποίου κατασκευάσαμε 4 μοντέλα για τα πολυστρωματικά υλικά με τις παρακάτω διατάξεις στρώσεων:

A)  $0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ$

B)  $+45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, +45^\circ$

Γ)  $+30^\circ, -30^\circ, -30^\circ, +30^\circ$

Δ)  $+60^\circ, -60^\circ, -60^\circ, +60^\circ$

Καθένα από τα παραπάνω μοντέλα καταπονήθηκε υπό μονοαξονική ένταση και με γραμμική ανάλυση καταλήξαμε στο γεγονός ότι ακόμα και σε μια διαστρωμάτωση υπό μονοαξονική ένταση υπάρχει μια οριακή ζώνη κατά μήκος των ελεύθερων παρειών όπου αναπτύσσεται τρισδιάστατη εντατική κατάσταση, το δε πλάτος της ζώνης αυτής είναι περίπου ίσο με το πάχος της διαστρωμάτωσης.

## **SUMMARY OF WORK**

The purpose of this work is to compare the specific results given by the analytical model of Pipes & Pagano, who determined the stress field within the meaning of thickness in a multilayered composite laminate, according to the three-dimensional theory of elasticity.

To achieve this we used the program SAP2000 14 in which we constructed 4 models for laminates with the following orientations:

A)  $0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ$

B)  $+45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, +45^\circ$

Γ)  $+30^\circ, -30^\circ, -30^\circ, +30^\circ$

Δ)  $+60^\circ, -60^\circ, -60^\circ, +60^\circ$

Each of these models is under uniaxial tension and after linear analysis we concluded that even if a layer is under uniaxial tension there is a zone along the free edges which develops intense three-dimensional situation and the width of this zone is approximately equal to the thickness of the layer.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

---

## Πεδία τάσης σύνθετων πολυστρωματικών υλικών

### ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ Ν. J. PAGANO

#### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στη σύγχρονη τεχνολογία των σύνθετων δομικών υλικών, υπάρχουν σημαντικές ελλείψεις όσον αφορά την ικανότητά μας να καθορίσουμε το πεδίο των τάσεων μέσα σε ένα πολυστρωματικό σύνθετο υλικό. Στις περισσότερες περιπτώσεις, δεν έχει τεκμηριωθεί είτε επιφανειακά είτε ποιοτικά η φύση του τασικού πεδίου στις περιοχές απότομης κλίσης των τάσεων. Μια αξιοσημείωτη εξαίρεση είναι η προσεγγιστική λύση [1,2], του προβλήματος του ελεύθερου άκρου σε πολυστρωματικά υλικά [3,4], ωστόσο, παρόμοιες λύσεις δεν έχουν προχωρήσει σε άλλα προβλήματα συγκέντρωσης τάσεων σε πολυστρωματικά υλικά. Σε περίπτωση απουσίας ενός πρακτικού τρόπου ανάλυσης τάσεων σε διαστρωμένα υλικά, δεν είναι δυνατόν να γίνουν κατανοητοί οι διάφοροι τρόποι αστοχίας των πολυστρωματικών υλικών [2,5-8]. Στις τελευταίες αναφορές όλα τα έγγραφα που περιγράφουν την ανομοιογενή εξέλιξη της καταστροφής των πολυστρωματικών υλικών, η οποία ποικίλλει ανάλογα με το πάχος των στρώσεων, προτείνουν τη σημασία του προσδιορισμού του τασικού πεδίου μέσα σε κάθε στρώση, ιδιαίτερα σε περιοχές συγκέντρωσης τάσεων, όπου η κλασική θεωρία διαστρωμάτωσης [9, 10] αποτυγχάνει σε μεγάλο βαθμό [4, 11, 12]. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τις τελικές αστοχίες ορισμένων διαστρωματώσεων με την παρουσία τάσεων, το οποίο φαίνεται να εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες της διαστρωμάτωσης [13, 14], παρά από την σειρά των διαστρωματώσεων, αν και οι λεπτομέρειες της ανάπτυξης της αστοχίας στις διαστρωματώσεις είναι συνάρτηση των τάσεων στις μεμονωμένες στρώσεις [15].

Αν και η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιείται ευρέως στο σχεδιασμό των συγκεκριμένων σύνθετων δομικών στοιχείων, π.χ. [16], η εφαρμογή της περιορίζεται στον προσδιορισμό της δύναμης (ανά μονάδα μήκους), παρά στην διανομή των τάσεων. Αυτό επιτυγχάνεται με την υπόθεση ενός απλού πεδίου μετατόπισης – το οποίο θεωρείται κατά την κλασική θεωρία διαστρωμάτωσης. Αυτό επιτρέπει να οριστούν αποτελεσματικές ελαστικές ιδιότητες του διαστρωμένου υλικού στο σύνολό του, και να υπολογίσουμε την επίπεδη εντατική κατάσταση των στοιχείων σε όλο το πάχος του διαστρωμένου υλικού. Στην πραγματικότητα, όταν η δύναμη διανομής έχει οριστεί, οι τάσεις στην στρώση μπορούν να υπολογιστούν, ωστόσο, όπως προαναφέρθηκε, η διαδικασία αυτή δεν είναι γενικά αξιόπιστη. Προς το παρόν, ως εκ τούτου, προσδιορισμοί του φορτίου και του τρόπου αστοχίας στις πρακτικές σύνθετες κατασκευές βασίζονται πρωταρχικά σε πειράματα με πρότυπους φορείς.

Ο βασικός περιορισμός που επιβάλλεται από αριθμητικές λύσεις για το πρόβλημα ελαστικότητας των διαστρωματικών υλικών απεικονίζεται σε ένα πρόσφατο έγγραφο

των Wang και Crossman [17] στην έρευνα τους για την αντιμετώπιση του προβλήματος του ελεύθερου άκρου. Για να επιτευχθεί μια ρεαλιστική πρόβλεψη του τασικού πεδίου από χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, απαιτούνται δεκαέξι στοιχεία στην κατεύθυνση πάχους μέσα σε κάθε στρώση στην περιοχή απότομων κλίσεων. Ένα σύνολο 196 στοιχείων ανά στρώση χρησιμοποιήθηκαν. Για να φιλοξενηθεί ένα τόσο μεγάλο φάσμα, είναι αναγκαίο να χρησιμοποιηθεί έναν ειδικό πίνακα αποθήκευσης με σκοπό την μείωση χώρου και χρόνου λειτουργίας. Ομοίως, ο Pipes [18] απαίτησε μια μακρά διαδικασία προέκτασης σε συνδυασμό με την πεπερασμένη διαφορική μέθοδο προκειμένου να επιτευχθεί μια ικανοποιητική λύση για το πρόβλημα συνοριακών τιμών στο ελεύθερο άκρο δύο στρώσεων.

Μια άλλη προσέγγιση στο πρόβλημα της ανάλυσης τάσης σε πολυστρωματικά υλικά (π.χ. ο Rybicki [19]) χρησιμοποιεί μεγαλύτερα στοιχεία που περιέχουν συνθετότερο πεδίο τάσεων. Οι Stanton et al [20] χρησιμοποιούν κυβικό ισοπαραμετρικό διακριτό στοιχείο και ένα σύστημα για την αυτοματοποίηση της κατασκευής των μοντέλων των πεπερασμένων στοιχείων. Η προσέγγιση των τελευταίων επιτελεί μια αξιόλογη μείωση στις απαιτήσεις των εισαγόμενων δεδομένων. Αυτή η προστιθέμενη αποδοτικότητα φαίνεται να είναι το μεγάλο πλεονέκτημα του «μεγάλου στοιχείου», καθώς ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας είναι συγκρίσιμος με εκείνους που χρησιμοποιούνται στις πιο συνήθεις μεθόδους. Παρά τις βελτιώσεις, ωστόσο, τα υπολογιζόμενα πεδία τάσεων σε πολυστρωματικά υλικά δεν είναι διεθνώς ακριβή, όπως ένα άλλο χαρακτηριστικό της ελαστικής ανάλυσης των πολυστρωματικών υλικών (δηλαδή η παρουσία ιδιομορφιών τάσεων) είναι ένα σοβαρό εμπόδιο για την εκτέλεση των αριθμητικών λύσεων ελαστικότητας. Δυστυχώς, η σειρά αυτών των ιδιομορφιών δεν έχει καθοριστεί για ανισότροπα στρώματα, δηλαδή η επέκταση των εργασιών του Bogy σε ισότροπα τεταρτημόρια [21] δεν έχει ολοκληρωθεί.

Από την άλλη πλευρά, προσεγγιστικές θεωρίες έχουν προταθεί σε προσπάθειες να εξάγουν πραγματική τασική ανάλυση σε πολυστρωματικά υλικά. Η πιο δημοφιλής είναι η προαναφερόμενη κλασική θεωρία διαστρωμάτωσης (classical lamination theory – CLT) [9, 10]. Παρόλο που η θεωρία αυτή έχει αποδειχθεί ότι αποφέρει ικανοποιητική ακρίβεια στον υπολογισμό των τάσεων σε ορισμένες κατηγορίες προβλημάτων συνοριακών τιμών υπό ένα περιορισμένο φάσμα γεωμετρικών παραμέτρων [22-24], οι παραδοχές της είναι υπερβολικά περιοριστικές για γενική χρήση. Οι θεωρίες που ενσωματώνουν "διατμητική παραμόρφωση" [25,26] σε πολυστρωματικά υλικά οδηγούν σε ακριβείς αποκλίσεις σε καμπτικά προβλήματα, αλλά δεν προσφέρουν καμία ελπίδα για βελτίωση των υπολογισμών των τάσεων [26]. Η ανώτερης τάξης θεωρία πλακών που προέρχεται από τους Whitney και Sun [27] εφαρμόστηκε από τον Pagano [28] για να εξετάσει την κανονική κατανομή των τάσεων στο πρόβλημα συνοριακών τιμών του ελεύθερου άκρου, αλλά μόνο σε ένα επίπεδο συμμετρίας.



Το σημαντικό κοινό χαρακτηριστικό των θεωριών που συζητήθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο είναι ένα υποτιθέμενο πεδίο μετατόπισης το οποίο είναι συνεχόμενο κατά μήκος ολόκληρου του πάχους του υλικού. Οι θεωρίες διαφέρουν μόνο στην συγκεκριμένη επιλογή των υποτιθέμενων μετατοπίσεων. Αυτή η υπόθεση μετατόπισης, ωστόσο, εγγυάται ασυνεχείς τάσεις στις διεπιφάνειες μεταξύ των στρωμάτων διαφορετικών ελαστικών μοντέλων εκτός από στοιχειώδεις συνθήκες φόρτισης. Περαιτέρω, οι συνοριακές συνθήκες του άκρου που είναι κατάλληλες σε αυτή τη προσέγγιση είναι σε γενικές γραμμές ανεπαρκείς για να εξασφαλίσουν την ισορροπία των υπο-περιοχών που περιέχουν το όριο υπό γνωστές έλξεις [28]. Ως εκ τούτου, η χρήση αυτής της προσέγγισης της μετατόπισης και των πιθανών επεκτάσεων για να επιτρέπουν ακόμη μεγαλύτερης τάξης μεταβολές μέσα στο πάχος, είναι μη αποδεκτή για την ανάλυση του πεδίου τάσεων σε πολυστρωματικά υλικά.

Μια άλλη κατηγορία από προσεγγιστικές θεωρίες πολυστρωματικών υλικών αντιπροσωπεύουν τις προσπάθειες γενίκευσης των ανωτέρω και οι οποίες βασίζονται στην παραδοχή ότι οι συνιστώσες μετατόπισης είναι γραμμικές συναρτήσεις του  $z$ , της μεταβλητής του πάχους, μέσα σε κάθε στρώση. Σε αυτό το σχηματισμό, οι μετατοπίσεις είναι τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις. Ανάμεσα στις θεωρίες που βασίζονται σε αυτή την προσέγγιση είναι οι λεγόμενες αποτελεσματικές θεωρίες ακαμψίας πρωτοπόροι των οποίων ήταν οι Sun, Achenbach, και Herrmann [29,30]. Οι Sun και Whitney [31] αντιμετώπισαν διάφορες θεωρίες σε αυτή την κατηγορία και απέδειξαν ότι δεδομένης της συνέχειας μετατόπισης σε όλες τις διεπιφάνειες, ο αριθμός των εξισώσεων πεδίου εξαρτάται από τον αριθμό των στρώσεων  $N$  μόνο όταν αγνοηθεί η συνέχεια έλξης στις διεπιφάνειες. Σε αντίθετη περίπτωση ο αριθμός των εξισώσεων πεδίου εξαρτάται μόνο από τη γενικότητα της αρχικής υπόθεσης, δηλαδή αν ο γραμμικός όρος  $z$  για την εγκάρσια μετατόπιση  $w$  περιλαμβάνεται ή όχι. Ως εκ τούτου, ο αριθμός των εξισώσεων πεδίου είναι σταθερή για όλα τα υλικά. Από την στιγμή που η ίδια πρόταση μπορεί να γίνει σε σχέση με τον αριθμό των οριακών συνθηκών άκρου, η ανεπάρκεια των προαναφερθέντων θεωριών [9, 10,25-27] όσον αφορά την ισορροπία της υπο-περιοχής ισχύει και για την παρούσα τάξη. Οι τελευταίες θεωρίες, ωστόσο, αποφέρουν ένα πιο ρεαλιστικό καθορισμό της πραγματικής χαρακτηριστικής διασποράς των πολυστρωματικών υλικών, ο οποίος παρείχε το κίνητρο για την ανάπτυξή τους. Η υπόθεση των τμηματικά γραμμικών μετατοπίσεων, καθώς και  $w = w(x, y)$ , οδηγεί στην θεωρία του Srinivas [32], στην οποία ο αριθμός των εξισώσεων πεδίου και των συνοριακών συνθηκών άκρου εξαρτώνται από τον αριθμό των στρώσεων. Ως εκ τούτου, οι συνθήκες της συνέχειας έλξης στην διεπιφάνεια δεν μπορούν να ικανοποιηθούν [31]. Επιπλέον, σε αυτή τη θεωρία, η διεπιφανειακή ορθή τάση, η οποία έχει αποδειχθεί να είναι υπεύθυνη για την αστοχία σε αποκόλληση [2], έχει αμεληθεί. Παρά τα ακριβή αποτελέσματα που λαμβάνονται για τις συχνότητες δόνησης, εκτροπή, και αξονική τάση στα συγκεκριμένα κάμπτικα προβλήματα που αντιμετωπίζονται στο [32], η θεωρία δεν είναι γενικώς εφαρμόσιμη για την ανάλυση των τάσεων στα πολυστρωματικά υλικά.

Τέλος, μια προσέγγιση που πρότεινε ο Pagano [28], δηλαδή η θεώρηση του κάθε στρώματος ως μία πλάκα που υπακούει στην θεωρία Whitney-Sun [27], στερείται γενικότητας αφού μπορεί να αποδειχθεί ότι λιγότερο από 5N συνοριακές συνθήκες έλξης άκρων είναι διαθέσιμες σε αυτή την προσέγγιση. Επιπλέον, ως συνέπεια της συνέχειας μετατόπισης διεπιφάνειας, οι φυσιολογικές συνοριακές συνθήκες έλξης άκρου είναι συνδεδεμένες, δηλαδή περιλαμβάνουν συναρτήσεις των έλξεων που ενεργούν για δύο προσκείμενες στρώσεις. Έτσι, η επέκταση αυτής της προσέγγισης, επιτρέποντας υψηλότερες μετατοπίσεις δεν είναι σκόπιμη, δεδομένου ότι, όπως και στις προηγούμενες προσεγγίσεις, η σωστή ισορροπία της κάθε στρώσης υπό καθορισμένες έλξεις δεν μπορεί να επιβληθεί.

Η προηγούμενη συζήτηση έχει ορίσει μια σαφή ανάγκη για εξέταση νέων προσεγγίσεων για την ανάλυση τάσεων σε πολυστρωματικά υλικά. Όλες οι γνωστές προσεγγιστικές θεωρίες για τα πολυστρωματικά υλικά βασίζονται σε υποτιθέμενα πεδία, τα οποία όπως είδαμε, οδηγούν σε αποτελέσματα με έλλειψη αξιοπιστίας. Σε αυτή την εργασία επίσης, θα καθορίσουμε τους όρους που πρέπει να πληροί μια αποδεκτή θεωρία πεδίου πολυστρωματικών υλικών και να προβεί σε ανάπτυξη μιας θεωρίας σε συμφωνία με τις απαιτήσεις, οι οποίες είναι:

(α) και οι έξι παράμετροι τάσεων είναι μη μηδενικές.

(β) Οι συνθήκες συνέχειας έλξης και μετατόπισης στις διεπιφάνειες μεταξύ γειτονικών στρωμάτων ικανοποιούνται.

(γ) Εξετάστε το ενδεχόμενο η συγκεκριμένη περιοχή του υλικού να είναι αυθαίρετα τοποθετημένη εκτός του ότι οριοθετείται από οποιαδήποτε από τις δύο παράλληλες διεπιφάνειες του υλικού.

Θα απαιτηθεί το υπολογισμένο εντατικό πεδίο το οποίο δρα στις επιφάνειες των αυθαίρετων περιοχών σε συνδυασμό με τις προβλεπόμενες συνοριακές συνθήκες έλξης σε εκείνα τα τμήματα των εξωτερικών συνόρων του υλικού που βρίσκονται στην περιοχή, να πληρούν τις προϋποθέσεις μηδενισμού των συνισταμένων δυνάμεων και της ροπής με τον ίδιο τρόπο. Έτσι, κάθε στρώμα πρέπει να ικανοποιεί την απαίτηση αυτή, η οποία στο εξής θα αναφέρεται ως "ισορροπία στρώσης". Αυτό σημαίνει ότι οι κατάλληλες μεταβλητές δύναμης στην θεωρία πεδίου είναι οι συνισταμένες της δύναμης και της ροπής (ανά μονάδα μήκους) που ενεργεί για τις διατομές μιας στρώσης και των διεπιφανειακών τάσεων. Αν και οι υπο-περιοχές που δεν οριοθετούνται από επίπεδα διεπαφής δεν χρειάζεται να ικανοποιούν την ισορροπία στρώσεων, στην επίλυση του προβλήματος, επιπρόσθετες διεπιφάνειες μπορούν να εισάγονται εννοιολογικά για να βελτιώσουν της ακρίβειας λύση. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να δούμε τον σκοπό της παρούσας εργασίας, ως μία εξέταση της αποτελεσματικότητας των μαθηματικών μοντέλων των πολυστρωματικών υλικών, στην οποία η απάντηση ορίζεται από την άποψη των συνισταμένων δυνάμεων και ροπών και των διεπιφανειακών τάσεων.

Αν και οι ανωτέρω απαιτήσεις δεν καθορίζουν μια μοναδική θεωρία, εμείς θα πρέπει να θεωρήσουμε την απλούστερη θεωρία στην παρούσα εργασία. Η θεωρία βασίζεται σε ένα θεώρημα μεταβολών που προέρχεται από τον Reissner [33] και επιτρέπει την διόρθωση των ασυνεχών διεπαφών, δηλαδή διεπιφανειακές ρωγμές. Γνωστή λύσεις για το πρόβλημα συνοριακών τιμών του ελευθέρου άκρου στην ελαστικότητα πολυστρωματικών υλικών, όπου υπάρχουν σαφής κλίσεις τάσεων, θα χρησιμοποιηθούν για να εκτιμηθούν οι συνέπειες των παραπάνω έννοιών.

## ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΣΤΑ ΠΟΛΥΣΤΡΩΜΑΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

Το φυσικό πρόβλημα ενδιαφέροντος στην παρούσα εργασία είναι ότι τα πολυστρωματικά υλικά που είναι κατασκευασμένα από ανισότροπες ελαστικές στρώσεις ίσου πάχους και προβλέπεται να καταπονηθούν σε εφελκυσμό και / ή μετατοπίσεις στο όριό τους. Το σώμα οριοθετείται από μία κυλινδρική επιφάνεια και άνω και κάτω όψεις που είναι παράλληλες προς τα διεπιφανειακά επίπεδα. Δεδομένου ότι είναι απαραίτητο να λαμβάνονται υπόψη τόσο πρόσφυση και μετατόπιση, οι συνθήκες συνέχειας στις διάφορες διασυνδέσεις, είναι λογικό να εξεταστούν με το θεώρημα μεταβολών του Reissner [33] ως ένα μηχανισμό για την ανάπτυξη των κατάλληλων εξισώσεις πεδίου.

Ο Reissner έχει δείξει ότι οι εξισώσεις ελαστικότητας μπορεί να ληφθούν ως μια σειρά της εξίσωσης των μεταβολών:

$$\delta J = 0 \quad (1)$$

Όπου:

$$J = \int_V F dV - \int_S \bar{c}_i dS \quad (2)$$

και

$$F = \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) - W \quad (3)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις,  $W$  είναι η ενεργειακή πυκνότητα που εκφράζεται από την άποψη των τάσεων  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ),  $V$  είναι ο όγκος,  $S$  το σύνολο της επιφάνειας  $\tau_i$  των προβλεπόμενων τάσεων,  $u_i$  οι συνιστώσες μετατόπισης, και  $S'$  είναι το τμήμα των συνόρων στα οποία μία ή περισσότερες συνιστώσες έλξεων προβλέπονται. Στη συνέχεια, θα αφήσουμε  $S''$  να αντιπροσωπεύει το μέρος των ορίων για τα οποία ορίζονται μία ή περισσότερες συνιστώσες μετατόπισης. Το άθροισμα πάνω από το φάσμα των επαναλαμβανόμενων δεικτών θα είναι κατανοητό σε αυτή την εργασία. Είναι επίσης κατανοητό ότι και οι εντάσεις και οι μετατοπίσεις υπόκεινται σε μεταβολή κατά την εφαρμογή της εξίσωσης (1).

Θα εκφράσουμε τώρα τη μορφή της εξίσωσης (1) για το σώμα των πολυστρωματικών υλικών, το οποίο αποτελείται από  $N$  στρώσεις, οι όγκοι των οποίων εκπροσωπούνται από  $V_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Για την εννοιολογικούς σκοπούς, μπορούμε να αφήσουμε τα στρώματα να αριθμούνται διαδοχικά από το κάτω μέρος ( $k = 1$ ) στην κορυφή ( $k = N$ ). Έτσι θα έχουμε, εξ ορισμού:

$$J = \sum_{k=1}^N \int_{V_k} \left[ \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) - W \right]^{(k)} dV_k - \int_{S'} \bar{\tau}_i u_i dS \quad (4)$$

όπου ο εκθέτης ( $k$ ) συνδέεται με την αγκύλη που σημαίνει ότι κάθε μεταβλητή στην αγκύλη σχετίζεται με το  $k$ -στο στρώμα του. Θα περιλαμβάνει επίσης συνιστώσες παραμορφώσεων  $e_{ij}$  [34] που παράγονται σε περίπτωση απουσίας τάσεων, στην παρούσα θεωρία, έτσι ώστε να:

$$W = W(\sigma_{ij}, e_{ij}) \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στη (1), εφαρμόζοντας το θεώρημα των Green-Gauss έχουμε:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \int_{V_k} \left[ \left( \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} - \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} \right) \delta \sigma_{ij} - \sigma_{ij,j} \delta u_i \right]^{(k)} dV_k \\ & - \int_{S'} \bar{\tau}_i \delta u_i dS + \sum_{k=1}^N \int_{S_k} \tau_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} dS_k = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

όπου  $S_k$  είναι η επιφάνεια που περικλείει τον όγκο  $V_k$  και  $\tau_i^{(k)}$  είναι οι συνιστώσες των έλξεων που δρουν στο  $S_k$ . Εμείς θα πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι οι επιφάνειες  $S_k$  και  $S_{k+1}$  περιέχουν μια κοινή περιοχή, δηλαδή τη διασύνδεση μεταξύ των αντίστοιχων στρωμάτων. Ως εκ τούτου, θα πρέπει να ορίσουμε την επιφάνεια  $I_k$  ως

μέρος της  $S_k$  που περιέχει την κορυφή του  $k$ -στου στρώματος,  $I'_k$  και  $I''_k$  ως τις περιοχές  $I_k$ , που ανήκουν στην  $S'$  και  $S''$  αντίστοιχα, και  $I_k'''$  ως το τμήμα του  $I_k$ , που δεν ανήκει ούτε στο  $S'$  ούτε στο  $S''$ . Παρατηρώντας τις άκρες των στρωμάτων, καθώς και στην κορυφή του  $N$ -στού στρώματος και το κάτω μέρος του πρώτου στρώματος, όλα αυτά ανήκουν στο  $S$ , η εξίσωση (6) μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\sum_{k=1}^N \int_{V_k} \left[ \left( \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} - \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} \right) \delta \sigma_{ij} - \sigma_{ij} \delta u_i \right]^{(k)} dV_k + \int_{S'} (\tau_i - \bar{\tau}_i) \delta u_i dS + \int_{S''} \tau_i \delta u_i dS + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{I_k'''} (\tau_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} + \tau_i^{(k+1)} \delta u_i^{(k+1)}) dI_k = 0. \quad (7)$$

Προφανώς, η εξαφάνιση των ολοκληρωμάτων όγκου απαιτεί την ικανοποίηση των εξισώσεων ισορροπίας και συσχέτιση τάσης-μετατόπισης μέσα σε κάθε στρώμα. Η εξαφάνιση των ολοκληρωμάτων επιφάνεια  $S'$  και  $S''$  απαιτεί ότι ένας όρος καθενός από τα προϊόντα  $(\tau_1 u_1, \tau_2 u_2, \tau_3 u_3)$  μπορεί να οριστεί σε κάθε σημείο της  $S$  από την στιγμή που  $\delta u_i$  είναι αυθαίρετη για την  $S''$  και εξαφανίζεται στο  $S'''$ . Τέλος, τα ολοκληρώματα πάνω  $I''_k$  ( $k=1, 2, \dots, N-1$ ) εξαφανίζονται όταν οι έλξεις και οι μετατοπίσεις είναι συνεχείς σε αυτές τις περιοχές. Ως εκ τούτου, η εξίσωση (7), η οποία αντιπροσωπεύει την αποτύπωση του θεωρήματος μεταβολών του Reissner για πολυστρωματικούς φορείς, θα πρέπει να εφαρμόζεται στην ανάπτυξη της κατά προσέγγιση θεωρίας μας για πολυστρωματικούς φορείς στην επόμενη ενότητα.

## ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Εξετάζουμε μια ενιαία στρώση πάχους  $h$  σε ένα πολυστρωματικό υλικό. Έστω  $x$  και  $y$  οι συντεταγμένες στο μέσο επίπεδο του στρώματος, το οποίο ορίζεται από τα επίπεδα  $z = \pm h/2$  και τη κυλινδρική επιφάνεια της οποίας η τομή με το μέσο επίπεδο ονομάζεται  $L$ . Η περιοχή που περικλείεται από το  $L$  θα συμβολίζεται με  $R$ . Οι εσωτερικές τάσεις  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  και  $\tau_{yz}$ , στην κορυφή της στρώσης συμβολίζονται με  $p_2$ ,  $t_2$  και  $s_2$ , αντίστοιχα, ενώ οι αντίστοιχες τάσεις στο κάτω μέρος της

στρώσης χαρακτηρίζονται ως  $p_1$ ,  $t_1$  και  $s_1$ . Οι εκθέτες ( $k$ ), που προσδιορίζουν τα στρώματα, θα αφαιρεθούν αν χρειαστεί για λόγους σαφήνειας. Η πιο απλή υπόθεση σύμφωνα με ρεαλιστική ανάλυση τάσεων είναι ότι οι συνιστώσες των τάσεων στην επίπεδη ένταση είναι γραμμικές συναρτήσεις του  $z$ , δηλαδή,

$$\begin{aligned}\sigma_1 = \sigma_x &= \frac{N_x}{h} + \frac{12M_x z}{h^3} \\ \sigma_2 = \sigma_y &= \frac{N_y}{h} + \frac{12M_y z}{h^3} \\ \sigma_6 = \tau_{xy} &= \frac{N_{xy}}{h} + \frac{12M_{xy} z}{h^3}\end{aligned}\quad (8)$$

όπου  $N_x, \dots, M_{xy}$ , είναι συναρτήσεις των  $x$  και  $y$  μόνο. Προφανώς, αυτές οι συναρτήσεις αποτελούν τη συνήθεις συνισταμένες δύναμης και ροπής που προκύπτουν στη θεωρία πλακών. Έχουμε δηλώσει, επίσης, τα σύμβολα για την συνισταμένη των τάσεων σε συμβατική σημειογραφία από τη στιγμή που αυτό το σύστημα θα είναι βολικό για τις μελλοντικές εξελίξεις. Εμείς τώρα αντικαθιστούμε, μαζί με τις αξίες των εσωτερικών τάσεων στο  $z = +h/2$ , στις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας, η οποία οδηγεί στις ακόλουθες διανομές:

$$\begin{aligned}\sigma_3 = \sigma_z &= \frac{(p_1 + p_2)}{4} \left( \frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) + \frac{(p_2 - p_1)}{4} \left( \frac{40z^3}{h^3} - \frac{6z}{h} \right) + \frac{3N_z}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) + \frac{15M_z}{h^2} \left( \frac{2z}{h} - \frac{8z^3}{h^3} \right) \\ \sigma_4 = \tau_{yz} &= (s_2 - s_1) \frac{z}{h} + \frac{(s_1 + s_2)}{4} \left( 12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) + \frac{3V_y}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \\ \sigma_5 = \tau_{xz} &= (t_2 - t_1) \frac{z}{h} + \frac{(t_1 + t_2)}{4} \left( \frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) + \frac{3V_x}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)\end{aligned}\quad (9)$$

όπου η διατμητικές συνισταμένες  $V_x$ ,  $V_y$ , καθώς και οι συναρτήσεις  $N_z$ ,  $M_z$ , δίνονται από:

$$(N_z, M_z) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z(1, z) dz \quad (10)$$

Είναι συναρτήσεις των  $x$  και  $y$  και μόνο. Οι συναρτήσεις στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης (8) και (9) δεν είναι όλες ανεξάρτητες καθώς σχετίζονται με ισορροπία και εκτιμήσεις συνέχειας, αλλά αυτές οι σχέσεις θα αναπτυχθούν στη συνέχεια μέσω της Μεταβολικής εξίσωσης (7). Σε γενικές γραμμές, η ενεργειακή πυκνότητα ενός ελαστικού ανισότροπου σώματος δίνεται από τον τύπο:

$$W = \frac{1}{2} S_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sigma_i e_i \quad (i, j = 1, 2 \dots 6) \quad (11)$$

Όπου η συμβατική σημειογραφία όπου έχει χρησιμοποιηθεί, με το  $S_{ij}$  να παριστά το μητρώο ευκαμψίας και ει τις μηχανικές παραμορφώσεις των στοιχείων. Από την στιγμή που τα δομικά σύνθετα πολυστρωματικά υλικά είναι γενικά κατασκευασμένα έτσι ώστε κάθε στρώση να έχει ένα επίπεδο ελαστικής συμμετρίας παράλληλης στο  $xy$ , εμείς πρέπει να θεωρούμε αυτή την κατηγορία υλικού (μονοκλινές) στην εργασία παρόλο που γενικά ανισότροπες στρώσεις μπορούν να αντιμετωπιστούν και χωρίς δυσκολία. Για μονοκλινική συμμετρία σε σχέση με το επίπεδο  $xy$  το μητρώο συμμόρφωσης παίρνει τη μορφή:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & & & & & \\ S_{12} & S_{22} & & & & \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & \text{SYMM.} & & \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Ενώ,

$$\begin{aligned} e_4 &= 2e_{23} = 0 \\ e_5 &= 2e_{13} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Για μονοκλινική συμμετρία.

Αντικαθιστώντας τώρα τις ισότητες (8), (9) και (11), λαμβανομένων υπόψη των (12) και (13), στη διαφορική εξίσωση (7), γίνεται η ολοκλήρωση σε σχέση με το  $z$ . Οι αντίστοιχες εξισώσεις πεδίου και οι οριακές συνθήκες που καθορίζονται από τον ορισμό των συντελεστών των αυθαίρετων συναρτήσεων ισούται με μηδέν. Μόνο το τελικό αποτέλεσμα αυτής της χρονοβόρας διαδικασίας θα εμφανίζεται εδώ.

Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο [39], όπου παρουσιάζονται οι πλήρεις μαθηματικές λεπτομέρειες.

Κατά τον προσδιορισμό των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα, η ολοκλήρωση κατά  $z$  προκαλεί σταθμισμένες μετακινήσεις και μετατοπίσεις στις διεπαφές. Ως εκ τούτου, έχουμε:

$$(\bar{f}, f^*, \hat{f}) = \int_{-h/2}^{h/2} f\left(1, \frac{2z}{h}, \frac{4z^2}{h^2}\right) \frac{2 dz}{h} \quad (14)$$

όπου  $f$  μπορεί να αντιπροσωπεύει είτε  $u$ ,  $v$  ή  $w$ , τις  $x$ ,  $y$ ,  $z$  συνιστώσες της μετατόπισης, αντίστοιχα. Επίσης,  $u_2$ ,  $v_2$ ,  $w_2$  αντιπροσωπεύουν τις συνιστώσες

μετατόπισης στην κορυφή του στρώματος και  $u_1, v_1, w_1$  οι αντίστοιχες συναρτήσεις στο κάτω μέρος του στρώματος. Επιπλέον, για την εσωτερική συνοχή στη θεωρία, εκφράζουμε τις προβλεπόμενες έλξεις σχετικά με τα κατάλληλα τμήματα του ορίου, ως εξής:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_n &= \frac{1}{h} \left( \tilde{N}_n + \frac{12\tilde{M}_n z}{h^2} \right) \\
 \tilde{\tau}_{ns} &= \frac{1}{h} \left( \tilde{N}_{ns} + \frac{12\tilde{M}_{ns} z}{h^2} \right) \\
 \tilde{\tau}_{nz} &= (\tilde{\tau}_2 - \tilde{\tau}_1) \frac{z}{h} + \frac{(\tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_2)}{4} \left( \frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) + \frac{3\tilde{V}_n}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)
 \end{aligned} \tag{15}$$

όπου  $n$  και  $s$  είναι τοπικές συντεταγμένες, οι οποίες είναι αντίστοιχα κανονικές και εφάπτονται στο  $L$ . Σημειώνουμε ότι  $\bar{\tau}_1$  και  $\bar{\tau}_2$  καταγράφουν τις τιμές των διατμητικών τάσεων  $\bar{\tau}_{ns}$  στο κάτω μέρος και την κορυφή του στρώματος, αντίστοιχα. Δεν υπάρχουν περιορισμοί σχετικά με τη φύση των ορίων των τάσεων και / ή των μετατοπίσεων στο υπόλοιπο του ορίου του πολυστρωματικού υλικού. Τέλος, εισάγονται τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}
 Q_4 &= \frac{(4s_1 - s_2)h}{30} - \frac{V_y}{10} \\
 Q_5 &= \frac{(4t_1 - t_2)h}{30} - \frac{V_x}{10} \\
 T_4 &= \frac{(4s_2 - s_1)h}{30} - \frac{V_y}{10} \\
 T_5 &= \frac{(4t_2 - t_1)h}{30} - \frac{V_x}{10} \\
 \left. \begin{aligned} R_1 \\ R_2 \end{aligned} \right\} &= \frac{(6p_1 + p_2)h^2 - 7N_2 h \pm 30M_z}{70h} \\
 \left. \begin{aligned} \beta_4 \\ \alpha_4 \end{aligned} \right\} &= \frac{3}{8} h \hat{w}_{,y} - \frac{h}{8} \bar{w}_{,y} - \frac{3}{2} v^* \pm \left( \frac{h}{4} w^*_{,y} - \frac{\bar{v}}{2} \right) \\
 \left. \begin{aligned} \beta_5 \\ \alpha_5 \end{aligned} \right\} &= \frac{3}{8} h \hat{w}_{,x} - \frac{h}{8} \bar{w}_{,x} - \frac{3}{2} u^* \pm \left( \frac{h}{4} w^*_{,x} - \frac{\bar{u}}{2} \right) \\
 \left. \begin{aligned} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{aligned} \right\} &= -\frac{3}{2} w^* \pm \frac{3}{4} (5\hat{w} - \bar{w})
 \end{aligned} \tag{16}$$

Χρησιμοποιώντας τους ανωτέρω ορισμούς, και όπου  $e_x, e_y, e_z$  και  $e_{xy}$ , οι παραμορφωτούμε να καταγράφουμε πλέον τις εξισώσεις στην παρούσα θεωρία.



Οι εξισώσεις πεδίου, οι οποίες αποτελούνται από τις ελαστικές σχέσεις και τις διάφορες εξισώσεις ισορροπίας, πρέπει να πληρούνται σε κάθε στρώμα και δίνονται από:

*Constitutive equations*

$$\begin{aligned}
 h\left(\frac{\bar{u}_{,x}}{2} - e_x\right) &= S_{11}N_x + S_{12}N_y + S_{13}N_z + S_{16}N_{xy} \\
 h\left(\frac{\bar{v}_{,y}}{2} - e_y\right) &= S_{12}N_x + S_{22}N_y + S_{23}N_z + S_{26}N_{xy} \\
 3w^* - he_z &= S_{13}N_x + S_{23}N_y + \frac{6}{5}S_{33}N_z + S_{36}N_{xy} - \frac{S_{33}h}{10}(p_1 + p_2) \\
 h\left(\frac{\bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x}}{2} - e_{xy}\right) &= S_{16}N_x + S_{26}N_y + S_{36}N_z + S_{66}N_{xy} \\
 \frac{h^2}{4}u^*_{,x} &= S_{11}M_x + S_{12}M_y + S_{13}M_z + S_{16}M_{xy} \\
 \frac{h^2}{4}v^*_{,y} &= S_{12}M_x + S_{22}M_y + S_{23}M_z + S_{26}M_{xy} \\
 \frac{5h}{4}(3\hat{w} - \bar{w}) &= S_{13}M_x + S_{23}M_y + \frac{10}{7}S_{33}M_z + S_{36}M_{xy} + \frac{S_{33}h^2}{28}(p_1 - p_2) \\
 \frac{h^2}{4}(u^*_{,y} + v^*_{,x}) &= S_{16}M_x + S_{26}M_y + S_{36}M_z + S_{66}M_{xy} \\
 \frac{3}{4}\left(\bar{w}_{,y} - \hat{w}_{,y} + \frac{4v^*}{h}\right) &= \frac{6}{5h}(S_{44}V_y + S_{45}V_x) - \frac{S_{44}}{10}(s_1 + s_2) - \frac{S_{45}}{10}(t_1 + t_2) \\
 \frac{3}{4}\left(\bar{w}_{,x} - \hat{w}_{,x} + \frac{4u^*}{h}\right) &= \frac{6}{5h}(S_{45}V_y + S_{55}V_x) - \frac{S_{45}}{10}(s_1 + s_2) - \frac{S_{55}}{10}(t_1 + t_2).
 \end{aligned} \tag{17}$$

*Equilibrium equations*

$$\begin{aligned}
 N_{x,x} + N_{xy,y} + t_2 - t_1 &= 0 \\
 N_{xy,x} + N_{y,y} + s_2 - s_1 &= 0 \\
 V_{x,x} + V_{y,y} + \frac{20M_z}{h^2} + p_1 - p_2 - \frac{h}{6}(t_{1,x} + t_{2,x} + s_{1,y} + s_{2,y}) &= 0 \\
 M_{x,x} + M_{xy,y} - V_x + \frac{h}{2}(t_1 + t_2) &= 0 \\
 M_{xy,x} + M_{y,y} - V_y + \frac{h}{2}(s_1 + s_2) &= 0 \\
 N_z - \frac{(p_1 + p_2)h}{2} + \frac{h^2}{12}(t_{1,x} - t_{2,x} + s_{1,y} - s_{2,y}) &= 0 \\
 V_{x,x} + V_{y,y} + \frac{60M_z}{h^2} + 5(p_1 - p_2) - \frac{h}{2}(t_{1,x} + t_{2,x} + s_{1,y} + s_{2,y}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

**Interface conditions**

(a) Continuity ( $k = 1, 2, \dots, N - 1$ )

$$\begin{aligned}
 t_2 &= t_1 \\
 s_2 &= s_1 \\
 p_2 &= p_1 \\
 \beta_4 - S_{44} T_4 - S_{45} T_5 + \alpha_4 - S_{44} Q_4 - S_{45} Q_5 &= 0 \\
 \beta_5 - S_{45} T_4 - S_{55} T_5 + \alpha_5 - S_{45} Q_4 - S_{55} Q_5 &= 0 \\
 \gamma_2 - S_{33} R_2 + \gamma_1 - S_{33} R_1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{19}$$

(b) Prescribed Tractions and/or Displacements ( $k = 1, 2, \dots, N - 1$ )

$$\begin{aligned}
 t_2 &= \tilde{t}_2 \text{ οΓ} & \beta_5 - S_{45} T_4 - S_{55} T_5 &= -\tilde{u}_2 \\
 s_2 &= \tilde{s}_2 \text{ οΓ} & \beta_4 - S_{44} T_4 - S_{45} T_5 &= -\tilde{v}_2 \\
 p_2 &= \tilde{p}_2 \text{ οΓ} & \gamma_2 - S_{33} R_2 &= -\tilde{w} \\
 t_1 &= \tilde{t}_1 \text{ οΓ} & \alpha_5 - S_{45} Q_4 - S_{55} Q_5 &= \tilde{u}_1 \\
 s_1 &= \tilde{s}_1 \text{ οΓ} & \alpha_4 - S_{44} Q_4 - S_{45} Q_5 &= \tilde{v}_1 \\
 p_1 &= \tilde{p}_1 \text{ οΓ} & \gamma_1 - S_{33} R_1 &= \tilde{w}_1
 \end{aligned} \tag{20}$$

όπου οι εξισώσεις (20) πρέπει να νοούνται υπό την έννοια ότι, όλοι οι συνδυασμοί που περιλαμβάνουν μία εξίσωση από κάθε γραμμή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκπροσωπήσει τις συνοριακές συνθήκες σε κάθε περιοχή της διασύνδεσης για την οποία (19) δεν προβλέπονται. Τέλος, οι οριακές συνθήκες στις εξωτερικές επιφάνειες του σώματος δίνονται από:

Συνοριακές συνθήκες

(α) Επιφανειακή άκρη. Για την επιφάνεια άκρη, έναν όρο από κάθε ένα από τα

ακόλουθα προϊόντα πρέπει να πρέπει να προβλέπονται για κάθε στρώμα (εκθέτες  $k$  παραλείπονται):

$$N_n \bar{u}_n, N_{ns} \bar{u}_s, M_n u_n^*, M_{ns} u_s^*, \left( \frac{3V_n}{h} - \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \bar{w},$$

$$(\tau_2 - \tau_1) w^*, \left( \tau_1 + \tau_2 - \frac{2V_n}{h} \right) \hat{w}. \quad (21)$$

(β) Επάνω επιφάνεια. Οι οριακές συνθήκες για την επάνω επιφάνεια είναι οι ίδιες με τις 3 πρώτες γραμμές της εξίσωσης 20 με  $k = N$ .  
 (γ) Κάτω επιφάνεια. Οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια στο κάτω μέρος είναι το ίδιο με τις τελευταίες τρεις γραμμές της εξίσωσης (20) με  $k = 0$ . Αυτό ολοκληρώνει την ανάπτυξη της παρούσας θεωρίας. Παρατηρούμε ότι το οι εξισώσεις (17) - (20), καθώς και οι οριακές συνθήκες για τις επάνω και κάτω επιφάνειες, συνεχίζουν ένα σύστημα 23N εξισώσεων με όρους όπως ο αριθμός των αγνώστων. Το σύστημα μπορεί να μειωθεί σε 13N εξισώσεις με την επίλυση της (17) για τη συνισταμένη δύναμη και ροπή από την άποψη των σταθμισμένων συναρτήσεων μετατόπισης και των συνισταμένων εσωτερικών τάσεων και αντικαθιστώντας στις εναπομένουσες εξισώσεις. Παρατηρώντας τις εξισώσεις που καθορίζονται φαίνεται ότι οι διεπιφανειακές μετατοπίσεις θα εμφανίζονται με τη μορφή προβλεπόμενων συναρτήσεων και ως εκ τούτου δεν πρέπει να θεωρούνται ως εξαρτώμενες μεταβλητές στην παρούσα θεωρία. Από την εξίσωση (21), βλέπουμε τις 7N συνθήκες άκρης που απαιτούνται στην παρούσα θεωρία. Σε περίπτωση που ορίζονται μόνο έλξεις άκρης σε ένα δεδομένο πρόβλημα συνοριακών τιμών, οι 7N συναρτήσεις μπορεί να ληφθούν για να είναι 3N συνιστώσες δύναμης, 2N συνιστώσες ροπής και 2N εσωτερικές τάσεις διάτμησης στο επάνω και στο κάτω μέρος κάθε στρώματος.

Προφανώς, οι απαιτήσεις που καθορίζονται στην εισαγωγή ικανοποιούνται όλες από την σήμερα θεωρία, ιδίως, της αρχής της «ισορροπίας των στρωματώσεων». Επιπλέον, η γενικότητα από τις συνθήκες διεπαφής, (19) και (20), επιτρέπουν την παρουσία διεπιφανειακών ρωγμών στο αντιμετώπιση των συγκεκριμένων προβλημάτων συνοριακών τιμών. Τέλος, η συνήθης εξισώσεις ισορροπίας εκπροσωπούνται από την πρώτη, δεύτερη, τέταρτη και πέμπτη της (18), μαζί με γραμμικό συνδυασμό της τρίτης και της έβδομης της (18).

#### ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Στην ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε να συσχετίσουμε την απάντηση που προσδιορίζεται από την παρούσα θεωρία με την λύση που προκύπτει από αριθμητικές μεθόδους ελαστικότητας για διάφορα προβλήματα πρακτικού και θεωρητικού ενδιαφέροντος. Θα προσπαθήσουμε να εξετάσουμε το μέγεθος του προβλήματος των

συνοριακών τιμών που είναι γνωστό ως πρόβλημα ελευθέρου άκρου, κατά το οποίο ένα πολυστρωματικό υλικό πεπερασμένου πλάτους υπόκειται σε ενιαία αξονική δύναμη  $\varepsilon(x) = \varepsilon(4)$ . Η αρχή των συντεταγμένων τοποθετείται στο κέντρο του υλικού και κάθε στρώμα ενισχύεται από ένα σύστημα παράλληλων ινών προσανατολισμένο κατά γωνία  $\theta$  με τον άξονα  $x$ , όπως φαίνεται στο σχ. 1. Οι ίνες εξαπλώνονται στα διάφορα στρώματα σε επίπεδα παράλληλα προς το επίπεδο  $xy$  και το υλικό είναι συμμετρικό (για παράδειγμα  $\theta(z) = \theta(-z)$ ). Στην ανάλυση του εντατικού πεδίου, το οποίο είναι μόνο συνάρτηση των  $y$  και  $z$ , κάθε στρώση αντιμετωπίζεται ως ομοιογενές, ανισότροπο σώμα που αναπαρίσταται με αποτελεσματικά μοντέλα και οι εντάσεις θα δίνονται μέσω συναρτήσεων της μορφής  $f(y, z)$ .

Για την κατηγορία των προβλημάτων συνοριακών τιμών ελαστικότητας των πολυστρωματικών υλικών παρουσιάστηκαν πρόσφατα αποτελέσματα με βάση την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων από τους Wang και Crossman [L7]. Ως εκ τούτου, οι εργασίες που θα αναπτυχθούν παρακάτω θα συγκριθούν με τα συγκεκριμένα αποτελέσματα που έδωσε η παρούσα θεωρία.

Θα εξεταστούν δύο ιδιαίτερα πολυστρωματικά υλικά:

A)  $[0, 90]$ , στο οποίο οι τιμές στις γωνίες  $\theta$  στα αλληπάλληλα στρώματα καθορίζονται ως:

$$0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ$$

B)  $[\pm 45]$ , στο οποίο οι προσανατολισμοί είναι:

$$+45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, +45^\circ$$

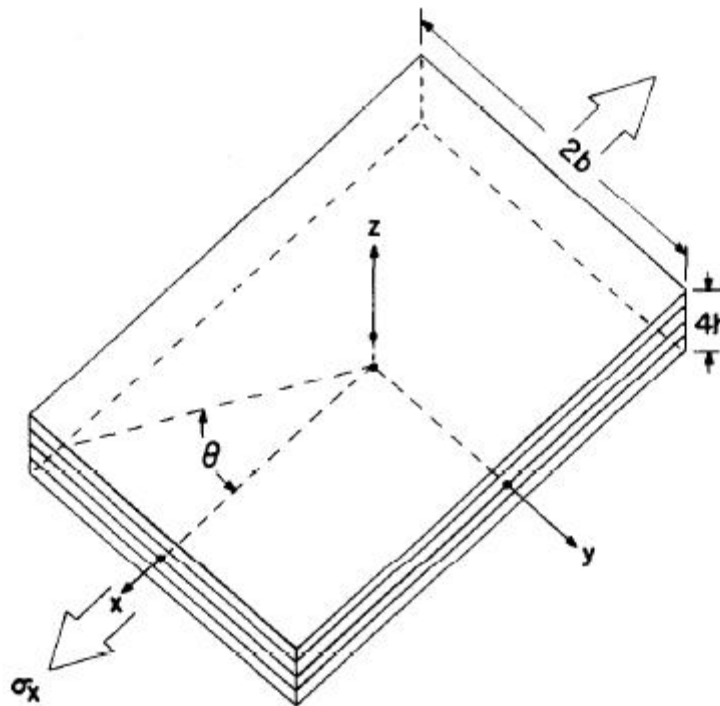


Fig. 1. Laminate geometry.

Τα στρώματα είναι ίσου πάχους  $h$ , το πλάτος του υλικού είναι  $2b = 16h$ , και το μοντέλο στα επίπεδα της ελαστικής συμμετρίας κάθε στρώματος δίνεται από:

$$E_{11} = 20 \times 10^6 \text{ psi}, \quad E_{22} = E_{33} = 2.1 \times 10^6 \text{ psi}, \quad G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.85 \times 10^6 \text{ psi}, \\ \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,21$$

όπου οι δείκτες 1, 2 και 3 αναφέρονται στη διεύθυνση των ινών, στην εγκάρσια διεύθυνση και στην διεύθυνση του πάχους αντίστοιχα. Έτσι  $\nu_{12}$  για παράδειγμα είναι ο λόγος του Poisson που προσδιορίζεται για καταπόνηση κατά την εγκάρσια κατεύθυνση λόγω μονοαξονικής έντασης κατά τη διεύθυνση της ίνας.

Στα σχήματα 2-5, συγκρίνουμε τα διάφορα χαρακτηριστικά για το υλικό  $[\pm 45]$ , όπως δίνεται από την παρούσα θεωρία [35] και τη λύση με πεπερασμένα στοιχεία [171]. Οι τιμές των  $N$  σε αυτά τα στοιχεία αντιστοιχούν στον αριθμό των υπο-στρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα θεωρία για το μοντέλο στο ήμισυ του. Έτσι,  $N = 6$  συνεπάγεται ότι κάθε φυσικό στρώμα πάχους  $h$  στο σώμα μοντελοποιείται από τρία υπο-στρώματα, καθένα πάχους  $h/3$ , ενώ  $N = 2$  σημαίνει ότι κάθε στρώση αντιμετωπίζεται ως μόνη της.

Στα Σχήματα. 2 και 3 παρουσιάζεται η κατανομή των  $\sigma_x$  και  $\tau_{xy}$  κατά μήκος του πλάτους του υλικού στην κορυφή της στρώσης. Οι συναρτήσεις που δίνονται στην παρούσα θεωρία υπολογίστηκαν μέσω εξισώσεων-(8). Τα αποτελέσματα για  $N = 6$  και η λύση των πεπερασμένων στοιχείων σχεδόν συμπίπτουν για όλες τις τιμές του  $y$ , ενώ τα αποτελέσματα για  $N = 2$  διαφέρουν μόνο κατά ένα μικρό ποσοστό στην περιοχή του άκρου της στρώσης.

Ακόμη και τα αποτελέσματα για  $N = 2$  συμφωνούν αρκετά καλά με αυτό της λύσης των πεπερασμένων στοιχείων για την κατανομή του  $\tau_{xz}$  στην διεπαφή του  $\pm 45$ . Ωστόσο, μια ιδιομορφία αναμένεται σε αυτό το επίπεδο στο ελεύθερο άκρο [4, 17].

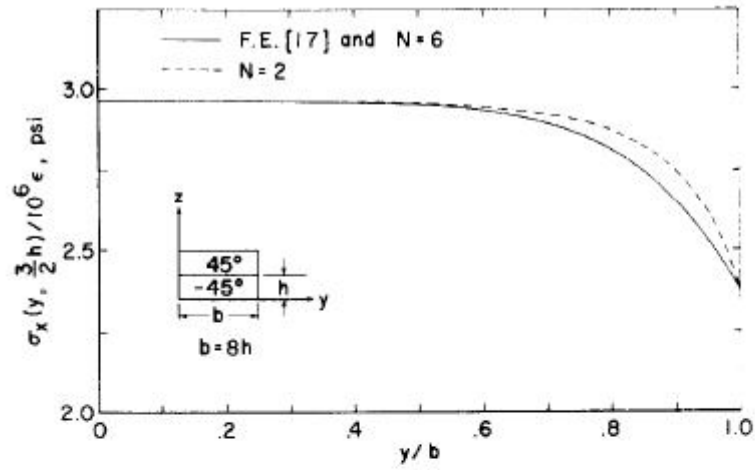


Fig. 2. Distribution of  $\sigma_x$  along center of top layer ( $z = (3/2) h$ ).

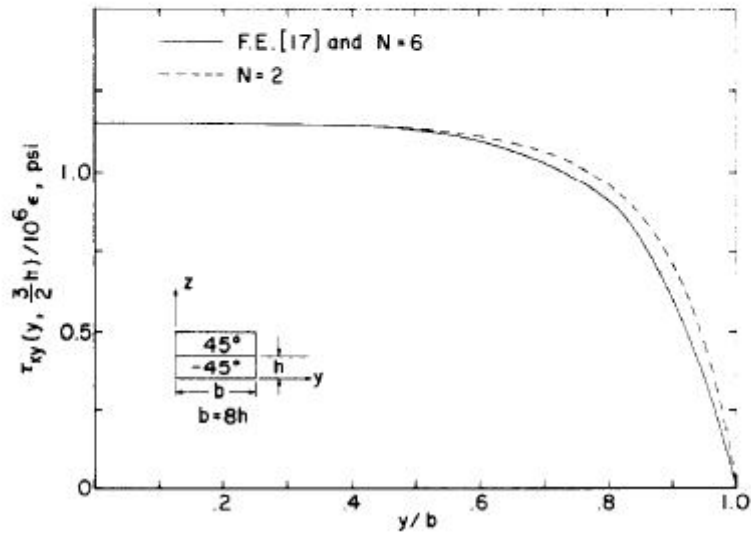


Fig. 3. Distribution of  $\tau_{xy}$  along center of top layer ( $z = (3/2) h$ ).

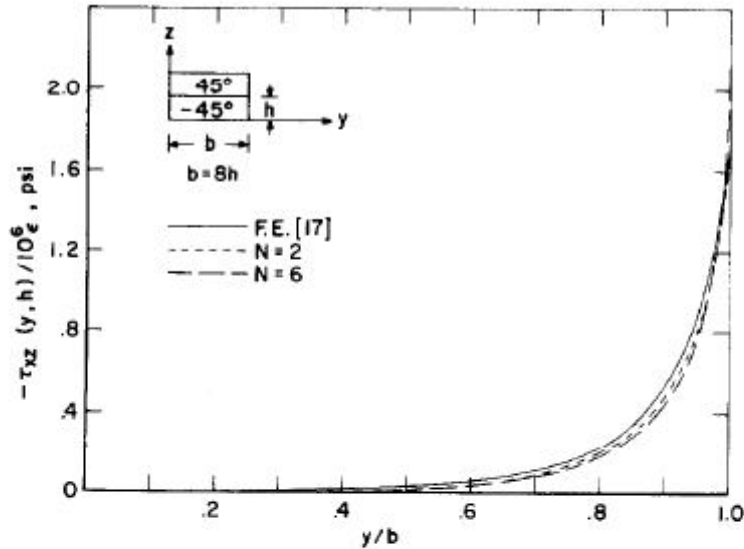


Fig. 4. Distribution of  $\tau_{xz}$  along  $\pm 45^\circ$  interface ( $z = h$ ).

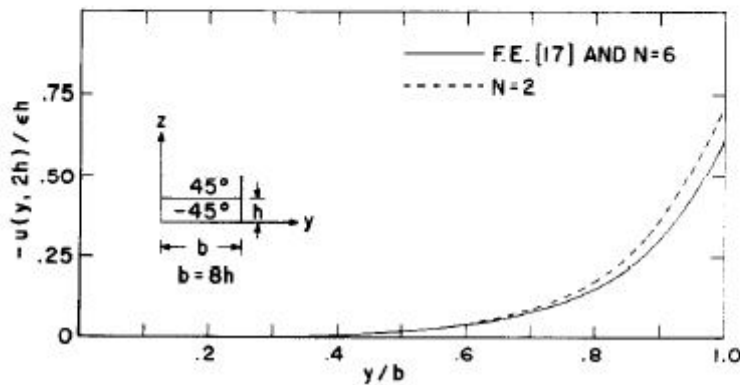


Fig. 5. Axial displacement across top surface ( $z = 2h$ ).

Η παρουσία αυτής της ιδιομορφίας εισάγει κάποια ασάφεια ως προς την λύση των πεπερασμένων στοιχείων, και γι' αυτό η καμπύλη που δίνεται εδώ περιλαμβάνει κάποια κριτική στην ερμηνεία των αριθμητικών αποτελεσμάτων. Από την άλλη πλευρά, η ιδιομορφία αυτή εκδηλώνεται με διαφορετικό τρόπο στην παρούσα θεωρία, δηλαδή η συνιστώσα τάσης  $\tau_{xz}$ , στο συγκεκριμένο σημείο μεγαλώνει με την αύξηση των τιμών του  $N$ . Το κατά πόσον ένα πεπερασμένο όριο προσεγγίζεται για τις μεγάλες τιμές του  $N$  δεν έχει τεκμηριωθεί. Αυτή η κατάσταση είναι παρόμοια με την αύξηση της μέσης τάσης του στοιχείου που γειτνιάζει με ιδιαίτερο σημείο, καθώς το μέγεθος του στοιχείου μειώνεται με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Ωστόσο, η παρούσα θεωρία δεν περιέχει ιδιαιτερότητα (βλ. [35]), και κατά συνέπεια η υπολογιζόμενη κατανομή των τάσεων είναι μια ακριβής λύση σε αυτή τη μοντελοποίηση. Η αύξηση της τάσης του στοιχείου  $\tau_{xz}(b,h)$  ανάλογα με το  $N$  φαίνεται στον Πίνακα 1. Το αποτέλεσμα για  $N = 3$  αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή που δόθηκε από την περίπτωση κατά την οποία το κατώτερο στρώμα αντιπροσωπεύεται από 2 υπο-στρώσεις και το ανώτερο στρώμα από μία, και αντιστρόφως, αν και τα δύο αποτελέσματα είναι σχεδόν πανομοιότυπα. Η ίδια ερμηνεία επικαλείται για  $N = 5$ . Δυστυχώς, λόγω των μεγεθών των αριθμών που περιέχονται στην προσέγγιστική

λύση που χρησιμοποιείται στο [35], οι τιμές του  $N$  μεγαλύτερες από 6 μπορούν να αγνοηθούν. Είναι προφανές ότι ο τρόπος με τον οποίο απεικονίζεται η συγκεκριμένη συμπεριφορά στην παρούσα θεωρία χρειάζεται περαιτέρω μελέτη. Συγκεκριμένα η προσέγγιση μέσω της οποίας τα αναλυτικά αποτελέσματα συσχετίζονται με τις δοκιμές αστοχίας αποκόλλησης πρέπει να ερευνηθεί.

Στο Σχήμα 6 παρουσιάζεται η κατανομή των τάσεων  $\sigma_z$  κατά μήκος της κατεύθυνσης του πλάτους στο κεντρικό επίπεδο ( $z = 0$ ) του  $[0, 90]$  υλικού. Σαφώς, η παρούσα θεωρία με  $N = 6$  συμφωνεί αρκετά καλά με το αποτέλεσμα των πεπερασμένων στοιχείων, ενώ για  $N = 2$  το αποτέλεσμα φαίνεται ακριβές, εκτός από μια περιοχή πολύ κοντά στο ελεύθερο άκρο. Στο σχήμα δεν εμφανίζεται το αποτέλεσμα για  $N = 4$ , το οποίο έχει μια πολύ μικρή καμπύλη κοντά στο ελεύθερο άκρο και επιτυγχάνει μια μέγιστη τιμή κοντά στο αντίστοιχο αποτέλεσμα του  $N = 6$ .

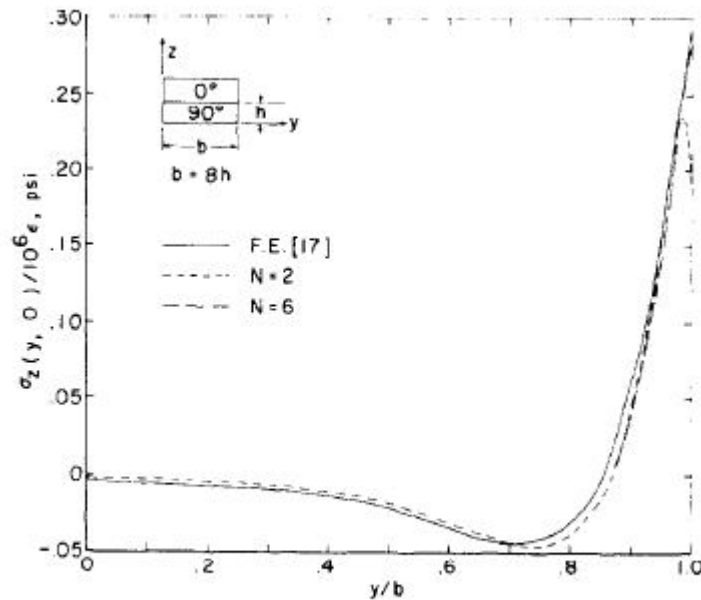


Fig. 6. Distribution of  $\sigma_z$  along central plane ( $z = 0$ ).



Stress fields in composite laminates

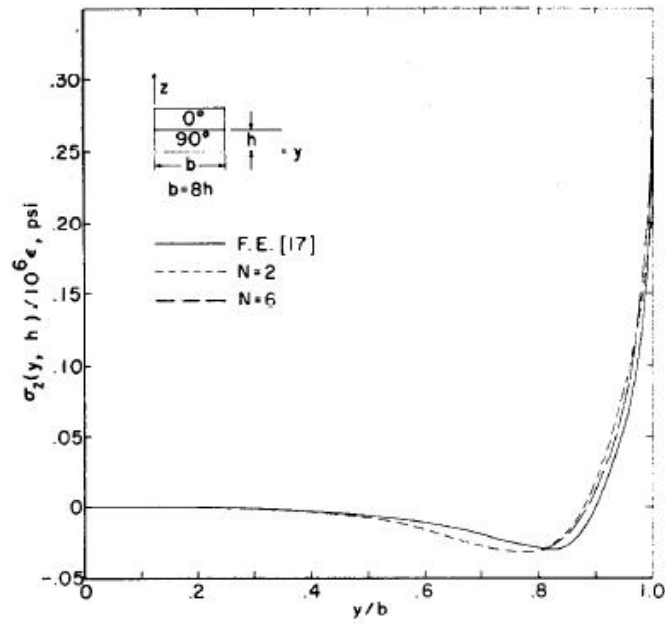


Fig. 7. Distribution of  $\sigma_z$  along 0/90 interface ( $z = h$ ).

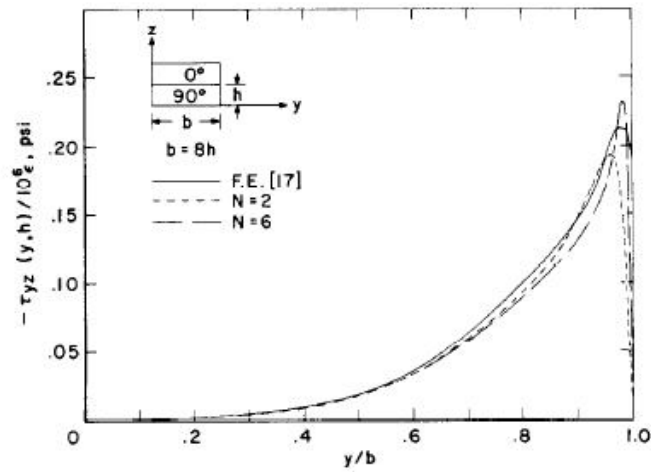


Fig. 8. Distribution of  $\tau_{yz}$  along 0/90 interface ( $z = h$ ).

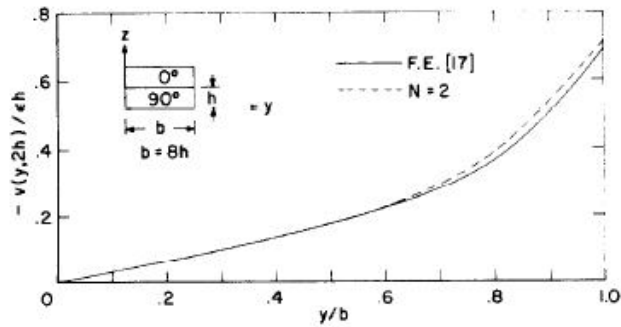


Fig. 9. Transverse displacement across top surface ( $z = 2h$ ).

Στο σχήμα 7 απεικονίζεται η συνάρτηση πλάτους – τάσης της  $\sigma_z$  στη διεπαφή μεταξύ των στρώσεων  $0^\circ$  και  $90^\circ$ , όπου σε αντίθεση με την εικόνα 6, αναμένεται μια ιδιομορφία στην ελεύθερη άκρη, λόγω της ασυνέχειας στις ελαστικές ιδιότητες. Η λύση με τα πεπερασμένα στοιχεία παρέχει ισχυρά αποδεικτικά στοιχεία της ιδιομορφίας από την στιγμή που συμβαίνει η ακραία μεταβολή κοντά στην περιοχή (b, h). Εξαιτίας αυτού, η επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία είναι αρκετά υποκειμενική στην περιοχή αυτή. Και πάλι, τα αποτελέσματα για  $N = 6$  είναι πιο κοντά στην καμπύλη που δίνει η επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία από αυτή για  $N = 2$ . Όπως και προηγουμένως (Εικ. 4), η παρούσα θεωρία αποφέρει μέγιστες πεπερασμένες τάσεις οι οποίες φαίνεται να αυξάνονται μονοτονικά με την αύξηση του  $N$  στο συγκεκριμένο σημείο. Τα συγκριτικά αποτελέσματα για την κατανομή του  $\tau_{yz}$ , στην διεπαφή  $0^\circ - 90^\circ$  φαίνονται στο σχήμα 8. Η παρούσα θεωρία ικανοποιεί την οριακή συνθήκη, ωστόσο, αν η επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία ή ακόμα και μια ακριβής επίλυση ελαστικότητας, πληρούν την προϋπόθεση αυτή (βλ. [36]) δεν είναι γνωστό. Παρ' όλα αυτά, μια εν γένει λογική συμφωνία μπορεί να παρατηρηθεί. Σύμφωνα με τη νέα θεωρία, φαίνεται ότι η συνάρτηση πλησιάζει μια μέγιστη πεπερασμένη τιμή, αν και δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι μέχρι να καθοριστεί η λύση για τις μεγαλύτερες τιμές του  $N$ .

Μια εξαιρετικά απότομη κλίση στην τάση σε μια (φαινομενική) ιδιαιτερότητα στο  $\sigma_z$  αναφέρθηκε από Rybicki και Pagano [37] για το πρόβλημα του ελευθέρου άκρου κατά την οποία ένα στρώμα ήταν ισότροπο. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο που δίνεται στο [37] και συγκρίνοντας τα αποτελέσματα που δίνονται για τις κατανομές του  $\sigma_z$  στην διεπιφάνεια (Σχ.10) και στο κεντρικό επίπεδο (Σχ.11), παρατηρούμε ότι συμφωνούν με τα αποτελέσματα που έχουν προηγηθεί.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Έχουμε προάγει μία προσεγγιστική θεωρία για την ανάλυση των τάσεων σε διαστρωμένους φορείς που επιλύει τις δυσκολίες που περιέχονται στις προηγούμενες θεωρίες που βασίζονται στα πεδία μετατόπισης. Αυτή η θεωρία βασίζεται στην αρχή των μεταβολών Reissner και θεωρεί τις εντός επιπέδου τάσεις ως γραμμικές συναρτήσεις του πάχους κατά μήκος του άξονα  $z$  σε κάθε στρώση. Αν και η εμφάνιση των εξισώσεων πεδίου και 7N συνθηκών άκρου μπορεί να φαίνεται υπερβολικό στο προς επίλυση πρόβλημα, αυτό το επίπεδο λεπτομέρειας είναι απαραίτητο για τον υπολογισμό του πραγματικού πεδίου τάσεων. Η παρούσα θεωρία εγγυάται την ικανοποίησή της «ισορροπίας στρώσεων» και επιτρέπει την προδιαγραφή των συνδυασμών των διεπιφανειακών έλξεων και μετατοπίσεων που επιτρέπουν την διαμόρφωση τέτοιων συνθηκών, όπως διεπιφανειακή συνέχεια ή ρωγμές. Συγκρίνοντας με τις υπάρχουσες λύσεις για την κατηγορία του ελευθέρου άκρου των πολυστρωματικών υλικών με τα προβλήματα συνοριακών τιμών, στα οποία εμφανίζονται πολύ απότομες κλίσεις τάσεων, έχουμε οδηγηθεί σε ενθαρρυντικά αποτελέσματα. Παρ' όλο που λεπτομέρειες τοπικού χαρακτήρα του εντατικού πεδίου

έχουν αμεληθεί όταν κάθε στρώμα μοντελοποιούταν ως μια ενιαία μονάδα, αυτή η προσέγγιση μπορεί να είναι επαρκής για τους σκοπούς της στατικής μελέτης. Αν αυτό δεν συμβαίνει, με βάση την παρούσα μελέτη, η εισαγωγή δύο ή τριών υπο-στρωμάτων θα παράγει σημαντικές βελτιώσεις στην ακρίβεια. Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να ενσωματώσει ανώτερης τάξης στους όρους  $z$  στην εξίσωση (8) για την ανάπτυξη ακριβέστερων θεωριών που πληρούν τις βασικές απαιτήσεις που διατυπώνονται εδώ. Τέτοιες θεωρίες μπορεί να εξαλείψουν την ανάγκη χρήσης των υπο-στρωμάτων, αλλά θα είναι προφανές ότι οδηγεί σε μεγαλύτερη πολυπλοκότητα στις λύσεις των συγκεκριμένων προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Η κατάσταση όσον αφορά τις ιδιομορφίες παραμένει κάπως ασαφής, καθότι η ακριβής φύση του μοναδικού εντατικού πεδίου στην περιοχή της διεπαφής ενός άκρου δεν έχει τεκμηριωθεί. Εμείς μπορούμε να δηλώσουμε, ωστόσο, ότι η λύση των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να είναι αρκετά εσφαλμένη από την παρουσία ασυνέχεια της ελαστικής τάσης, και ο προσδιορισμός του εντατικού πεδίου στην περιοχή τους μπορεί να γίνει αρκετά υποκειμενική. Από την άλλη πλευρά, η παρούσα θεωρία δεν περιέχει ιδιομορφίες άκρου, ένα πλεονέκτημα από την άποψη επίλυσης προβλημάτων, ωστόσο, παραδείγματα έδειξαν ότι η κλίση για την μέγιστη υπολογιζόμενη τάση αυξάνεται με τη μείωση του πάχους του υπο-στρώματος. Έτσι, η επίλυση προβλημάτων έχει γίνει απλούστερη, αλλά μια μέθοδος για να ερμηνεύσει τις προβλέψεις της τάσης χρειάζεται να αναπτυχθεί. Θα πρέπει να παρατηρήσετε, ωστόσο, ότι οι ασυνέχειες που δίνονται σε αποτελεσματικές θεωρίες μοντελοποίησης είναι μαθηματικά αντικείμενα στη μεταχείριση των ενισχυμένων με ίνες πολυστρωματικούς φορείς. Αυτό έχει συζητηθεί στο [37,38], όπου η στήριξη δόθηκε στη χρήση των ολοκληρωμένων τάσεων και όχι στο σημείο που οι τάσεις αποτυγχάνουν στην ανάλυση. Αυτό το σημείο, σε συνδυασμό με την αυτόματη ικανοποίηση της ισορροπίας του στρώματος, καθώς και την ικανότητα για αντικειμενικό προσδιορισμό των πεδίων τάσεων διαστρωμένων υλικών, χάρη στη χρήση της παρούσας θεωρίας πάνω σε προσεγγίσεις που βασίζονται αριθμητικές λύσεις των ελαστικών εξισώσεων. Δυστυχώς, αυτή η εργασία, μαζί με αυτή του [35] και [17], αποδεικνύουν τις ακραίες δυσκολίες που σχετίζονται με τις προσπάθειες για τον καθορισμό ρεαλιστικών εντατικών πεδίων σε διαστρωμένους φορείς που αποτελούνται από πάρα πολλά στρώματα.

## REFERENCES

1. N. J. Pagano and R. B. Pipes, The influence of stacking sequence on laminate strength. *J. Composite Mat.* **5**, 50 (1971).
2. N. J. Pagano and R. B. Pipes, Some observations on the interlaminar strength of composite laminates. *Int. Mech. Sci.* **15**, 679 (1973).
3. A. H. Puppo and H. A. Evensen, Interlaminar shear in laminated composites under generalized plane stress. *J. Composite Mat.* **4**, 204 (1970).
4. R. B. Pipes and N. J. Pagano, Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension. *J. Composite Mat.* **4**, 538 (1970).
5. L. B. Greszczuk, Failure mechanics of composites subjected to compressive loading. Air Force Materials Laboratory Report AFML-TR-72-107 (Aug. 1973).
6. I. M. Daniel, R. E. Rowlands and J. B. Whiteside, Effects of material and stacking sequence on behavior of composite plates with holes. *Exp. Mech.* **14**, 1 (1974).
7. S. V. Kulkarni, J. S. Rice and B. W. Rosen, An investigation of the compressive strength of kevlar 49/epoxy composites. *Composites* **6**, 217 (1975).
8. F. H. Chang, D. E. Gordon, B. T. Rodini and R. H. McDaniel, Real-time characterization of damage growth in graphite/epoxy laminates. *J. Composite Mat.* **10**, 182 (1976).
9. E. Reissner and Y. Stavsky, Bending and Stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates. *J. Appl. Mech.* **28**, 402 (1961).
10. S. B. Dong, K. S. Pister and R. L. Taylor, On the theory of laminated anisotropic shells and plates. *J. Aero. Sci.* **28**, 969 (1962).
11. N. J. Pagano, Exact moduli of anisotropic laminates. In *Composite Materials, Mechanics of Composite Materials* (Edited by G. P. Sendekj, Vol. 2, pp. 23-44. Academic Press, New York (1974).
12. N. J. Pagano and A. S. D. Wang, Further study of composite laminates under cylindrical bending. *J. Composite Mat.* **5**, 521 (1971).
13. M. E. Waddoups, J. R. Eisenmann and B. E. Kaminski, Macroscopic fracture mechanics of advanced composite materials. *J. Composite Mat.* **5**, 446 (1971).
14. J. M. Whitney and R. J. Nuismer, Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. *J. Composite Mat.* **8**, 253 (1974).
15. H. T. Hahn, Fracture behavior of composite laminates, In *Fracture Mechanics and Technology*, (Edited by G. C. Sih and C. L. Chow) Vol. 1, pp. 285-296. Noordhoff, Leyden (1977).
16. W. Ludwig, H. Erbacher and J. Visconti, B-1 composite horizontal stabilizer development. *J. Composite Mat.* **10**, 205 (1976).
17. A. S. D. Wang and F. W. Crossman, Some new results on edge effect in symmetric composite laminates. *J. Composite Mat.* **11**, 92 (1977).
18. R. B. Pipes, Solution of certain problems in the theory of elasticity for laminated anisotropic systems. Doctor's Thesis, University of Texas at Arlington, Arlington, Texas (1972).
19. E. F. Rybicki, Approximate three-dimensional solutions for symmetric laminates under inplane loading. *J. Composite Mat.* **5**, 354 (1971).
20. E. L. Stanton, L. M. Crain and T. F. Neu, A parametric cubic modelling system for general solids of composite material. *Int. J. Num. Meth. Engng* **11**, 653 (1977).
21. D. B. Bogy, Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. *J. Appl. Mech.* **35**, 460 (1968).
22. N. J. Pagano, Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *J. Composite Mat.* **4**, 20 (1970).
23. N. J. Pagano, Influence of shear coupling in cylindrical bending of anisotropic laminates. *J. Composite Mat.* **4**, 330 (1970).
24. S. Srinivas and A. K. Rao, Bending, vibration, and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *Int. J. Solids Structures*, **6**, 1463 (1970).
25. P. C. Yang, C. H. Norris and Y. Stavsky, Elastic wave propagation in heterogeneous plates. *Int. J. Solids Structures*, **2**, 665 (1966).
26. J. M. Whitney and N. J. Pagano, Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *J. Appl. Mech.* **37**, 1031 (1970).
27. J. M. Whitney and C. T. Sun, A higher order theory for extensional motion of laminated composites. *J. Sound Vibrat.* **30**, 85 (1973).
28. N. J. Pagano, On the calculation of interlaminar normal stress in composite laminates. *J. Composite Mat.* **8**, 65 (1974).
29. C. T. Sun, J. D. Achenbach and G. Herrmann, Continuum theory for a laminated medium. *J. Appl. Mech.* **35**, 467 (1968).
30. J. D. Achenbach, C. T. Sun and G. Herrmann, On the vibrations of a laminated body. *J. Appl. Mech.* **35**, 689 (1968).
31. C. T. Sun and J. M. Whitney, Theories for the dynamic response of laminated plates. *AIAA J.* **11**, 178 (1973).
32. S. Srinivas, A refined analysis of composite laminates. *J. Sound Vibrat.* **30**, 495 (1973).
33. E. Reissner, On a variational theorem in elasticity. *J. Math. Phys.*, **29**, 90 (1950).
34. J. C. Halpin and N. J. Pagano, Consequences of environmentally induced dilatation in solids. In *Recent Advances in Engineering Science*, (Edited by A. C. Eringen) pp. 33-46. Gordon & Breach, New York (1970).
35. N. J. Pagano, Free edge stress fields in composite laminates. *Int. J. Solids Structures* **14**, 401-406 (1978).
36. E. Reissner, Note on the theorem of the symmetry of the stress tensor. *J. Math. Phys.* **23**, 192 (1944).
37. E. F. Rybicki and N. J. Pagano, A study on the influence of microstructure on the modified effective modulus approach for composite laminates. *Proc. 1975 Int. Conf. Composite Mat.*, **2**, 149 (1976).
38. N. J. Pagano and E. F. Rybicki, On the significance of effective modulus solutions for fibrous composites. *J. Composite Mat.* **8**, 214 (1974).
39. N. J. Pagano, Stress Fields in Composite Laminates. Air Force Materials Laboratory Report AFML-TR-77-114 (Aug. 1977).

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. STRESS FIELDS IN COMPOSITE LAMINATES BY PIPES & PAGANO
2. ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑΣ: ΙΩΑΝΝΗΣ Γ. ΡΑΥΤΟΓΙΑΝΝΗΣ