Διπλωματική εργασία

“Ολική σταθεροποίηση μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων αντίδρασης–διάχυσης με χρήση συνοριακού ελέγχου”

Όνομα : Φίλιππος

Επώνυμο : Βώκος

ΔΠΜΣ : Συστήματα Αυτοματισμού

Αριθμός μητρώου : 02119203

Επιβλέπων καθηγητής : Ιάσων Καραφύλλης

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία αποτελεί μία ανάλυση και περιγραφή της δημοσίευσης [3]. Κύριο αντικείμενο επεξεργασίας αποτελεί η σταθεροποίηση μονοδιάστατων μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων αντίδρασης-διάχυσης με χρήση συνοριακής ανάδρασης. Ένα σημαντικό και σύνηθες πρόβλημα που παρουσιάζεται στη μελέτη ασταθών μη γραμμικών παραβολικών εξισώσεων είναι το γεγονός ότι σε πολλές περιπτώσεις τα αποτελέσματα ευστάθειας είναι τοπικά.

Στην εργασία αυτή αποδεικνύεται η ολική εκθετική ευστάθεια συστημάτων μονοδιάστατων μη γραμμικών παραβολικών εξισώσεων αντίδρασης-διάχυσης με συγκεκριμένου τύπου μη γραμμικότητες (superlinear growth), υπό την έννοια της νόρμας του χώρου L^2, η ολική ασυμπτωτική ευστάθεια υπό την έννοια της νόρμας του χώρου Sobolev H^1, και επιπλέον αποδεικνύεται η ολική εκθετική σύγκλιση με χρήση της νόρμας supremum. Οι συγκεκριμένες μη γραμμικότητες έχουν το χαρακτηριστικό ότι λειτουργούν ως σταθεροποιητικοί παράγοντες όταν η νόρμα της κατάστασης του συστήματος λαμβάνει πολύ μεγάλες τιμές. Η μεθοδολογία που ακολουθείται περιλαμβάνει την κατασκευή κατάλληλων συναρτησιακών Lyapunov τα οποία εγγυώνται εκθετική ευστάθεια υπό την έννοια της νόρμας του χώρου L^2. Σε αντίθεση με την περίπτωση μη γραμμικών συστημάτων πεπερασμένης διάστασης στα απειροδιάστατα μη γραμμικά συστήματα ένα συναρτησιακό ελέγχου Lyapunov δεν αποτελεί πάντοτε εγγύηση για την ύπαρξη λύσεων για όλους τους χρόνους και κατά συνέπεια για την εξαγωγή συμπερασμάτων ολικής σταθεροποίησης.

Introduction

The present work is a technical analysis and description of [3], and focuses on the global stabilization of one dimensional nonlinear reaction-diffusion parabolic PDE's by means of boundary feedback. An important problem that appears in design methodologies for nonlinear unstable PDE's is that in many cases the stabilization results are local.

This work provides global exponential stabilization results for one dimensional reaction-diffusion PDE's with nonlinearities of superlinear growth in the L^2 spatial norm, global asymptotic stabilization results in the H^1 norm as well as global exponential convergence in the spatial supremum norm. The nonlinear terms of this specific class of PDE's provide "damping" when the norm of the state is large. The followed methodology includes the construction of Control-Lyapunov Functionals which provide exponential stability estimates in the L^2 spatial norm. A sharp contrast with the nonlinear finite dimensional case is that in the nonlinear infinite dimensional case a Control-Lyapunov Functional may not be sufficient for establishing existence of solutions for all times and consequently may not allow a valid derivation of stability properties.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, τους γονείς μου και την αδερφή μου για την πολύτιμη στήριξή τους και την πίστη τους σε μένα. Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα το μέντορά μου Ιάσωνα Καραφύλλη για την επίβλεψη αυτής της εργασίας και την τιμή που μου έκανε να με επιλέξει ως διδακτορικό του φοιτητή.

2 Διατύπωση του προβλήματος

2.1 Σύστημα Ελέγχου

Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα ελέγχου το οποίο μοντελοποιείται από μία μονοδιάστατη ημιγραμμική μερική διαφορική εξίσωση αντίδρασης-διάχυσης

$$u_t = p u_{xx} + F(u) \tag{1}$$

όπου $x \in [0,1]$, $u(t,x) \in \mathbb{R}$ και $p > 0$ μία σταθερά, με Dirichlet συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} u(t,0) &= 0, \\ u(t,1) &= U(t), \end{aligned} \tag{2}$$

όπου $U(t) \in \mathbb{R}$ είναι ο συνοριακός έλεγχος του συστήματος. Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $F : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(F(u))(x) = f(x, u(x))$$

για $x \in [0,1]$ και $u \in C^0([0,1])$, όπου η $f \in C^0([0,1] \times \mathbb{R})$ είναι μία τοπικά Lipschitz συνάρτηση η οποία, για ορισμένες σταθερές $q \in \mathbb{R}$, γ, δ, $B \geq 0$ και $b \geq 2$, ικανοποιεί τις συνθήκες

$$u\left(f(x,u) - qu\right) \leq \gamma u^2 - B|u|^b$$

και

$$|f(x,u) - qu| \leq \gamma |u| + \delta |u|^{b-1}$$

για όλα τα $u \in \mathbb{R}$ και $x \in [0,1]$. Οι παραπάνω συνθήκες μελετώνται συστηματικά στο [5] για παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις που δεν έχουν εισόδους. Ο μη γραμμικός όρος $F(u)$ περιλαμβάνει τους όρους αντίδρασης (reaction terms) και όπως θα αναλυθεί παρακάτω συνεισφέρει στη σταθεροποίηση του παραπάνω συστήματος. Μία περίπτωση μη γραμμικού όρου αντίδρασης αποτελούν όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις της μορφής

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \alpha_k(x) u^k$$

με $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_{2n+1}(x) < 0$ για όλα τα $x \in [0,1]$.

2.2 Νόμος Ελέγχου

Στην παρούσα εργασία μελετάται η ύπαρξη και ο σχεδιασμός ενός γραμμικού συνοριακού ελέγχου της μορφής

$$U(t) = -r\langle k, u[t] \rangle \tag{3}$$

όπου $k \in C^2([0,1])$ και $r \in \mathbb{R}$, με χρήση του οποίου να επιτυγχάνεται ολική ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος (1), (2) στις νόρμες L^2 και H^1, καθώς επίσης και ολική εκθετική σύγκλιση της κατάστασης u στο 0 υπο την έννοια της νόρμας του χώρου L^∞. Η επιλογή ενός γραμμικού συνοριακού νόμου ελέγχου πραγματοποιείται για δύο βασικούς λόγους. Πρώτον, ένας μη γραμμικός έλεγχος πιθανότατα θα έκανε την ανάλυση του συστήματος κλειστού βρόγχου αρκετά περίπλοκη έως και αδύνατη, καθώς θα μπορούσαν να δημιουργηθούν προβλήματα όπως η απουσία πραγωγισιμότητας της δράσης του ελέγχου. Δεύτερον, στην περίπτωση προβλημάτων όπου ο μη γραμμικός όρος είναι της μορφής

$$f(x,u) = qu - B\mathrm{sgn}(u)|u|^{b-1} \tag{4}$$

για σταθερές $q \in \mathbb{R}$, $B > 0$ και $B > 2$, ο παραπάνω νόμος ελέγχου επιτυγχάνει εύρωστη σταθεροποίηση του συστήματος για όλες τις τιμές της σταθεράς $B > 0$, και επομένως δεν είναι απαραίτητη η γνώση της τιμής της. Το θεώρημα που ακολουθεί και το οποίο καλούμαστε να αποδείξουμε και να επεξεργαστούμε στην εργασία αυτή αποδεικνύει ότι ένας τέτοιος νόμος ελέγχου πράγματι υπάρχει και εξασφαλίζει την ολική εκθετική ευστάθεια στην νόρμα L^2 και την ολική εκθετική σύγκλιση στου συστήματος στο 0 στη νόρμα L^∞.

3 Βασικό Θεώρημα Ευστάθειας

Θεώρημα 1. *Έστω το σύστημα ελέγχου*

$$u_t[t] = pu_{xx}[t] + F(u[t]), \tag{5}$$

όπου $x \in [0,1]$, $u(t,x) \in \mathbb{R}$, $p > 0$ με συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} u(t,0) &= 0, \\ u(t,1) &= U(t), \end{aligned} \tag{6}$$

όπου $U(t) \in \mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου του συστήματος και $F : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ απεικόνιση η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$(F(u))(x) = f(x, u(x)) \quad \text{για } x \in [0,1] \text{ και } u \in C^0([0,1]), \tag{7}$$

όπου $f \in C^0([0,1] \times \mathbb{R})$ μία τοπικά Lipschitz συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες

$$u(f(x,u) - qu) \le \gamma u^2 - B|u|^b \quad \text{για όλα τα } x \in [0,1] \text{ και } u \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$|f(x,u) - qu| \le \gamma|u| + \delta|u|^{b-1} \quad \text{για όλα τα } u \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

όπου $q \in \mathbb{R}$, γ, δ, $B \geq 0$ *και* $b \geq 2$ *με*

$$B \geq \delta |r| \, \|k\|_b \, \|k\|_{\frac{b}{b-1}} \, .$$

Έστω ότι ο συνοριακός έλεγχος U *δίνεται από τη σχέση*

$$U(t) = -r\langle k, u(t)\rangle, \tag{10}$$

όπου $k \in C^2([0,1])$ *μία συνάρτηση με* $k(0) = 0$, $k(1) = 1$, *η οποία ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση*

$$k''(x) = \mu k(x) \tag{11}$$

για $x \in [0,1]$ *και για κάποια σταθερά* $\mu \in \mathbb{R}$, *και* $r \in \mathbb{R}$ *σταθερά τέτοια ώστε*

$$1 + \|k\|_2^2 \, r > 0. \tag{12}$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει μία σταθερά $\varepsilon \geq 0$ *ούτως ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ανισότητα*

$$\begin{aligned} &\max\left(0, r^2\left(\left\|k'\right\|_2^2 + (3\varepsilon - 1)\pi^2 \|k\|_2^2 - k'(1)\right) + rg + \frac{3\pi^2\varepsilon(\varepsilon+1)}{(1+\varepsilon)\|k\|_2^2 - k_1^2}\right) \\ &\qquad < \frac{(1+\varepsilon)\|k\|_2^2 + (3\varepsilon - 1)k_1^2}{\left((1+\varepsilon)\|k\|_2^2 - k_1^2\right)\|k\|_2^2}\pi^2 - \frac{q + \gamma\left(1 + |r|\,\|k\|_2^2\right)}{p\,\|k\|_2^2}, \end{aligned} \tag{13}$$

όπου

$$g = 2(3\varepsilon - 1)\pi^2 + \frac{q}{p} - \mu$$

και

$$k_1 = \sqrt{2}\int_0^1 k(x) sin(\pi x) dx.$$

Στην περίπτωση που $q > 0$, *θεωρούμε* $B > 0$ *και* $b > 2$. *Τότε για κάθε* $u_0 \in H^2(0,1)$ *με* $u_0(0) = 0$, $u_0(1) = -r\langle k, u_0\rangle$, *υπάρχει μοναδική απεικόνιση* $u \in C^0(\mathbb{R} \times [0,1]) \cap C^1((0,+\infty); L^2(0,1))$ *με* $u[0] = u_0$, $u[t] \in H^2(0,1)$ *για όλους τους χρόνους* $t \geq 0$ *η οποία ικανοποιεί την (5) για όλους τους χρόνους* $t > 0$ *και τις συνοριακές συνθήκες (6) με το νόμο ελέγχου (10) για όλους τους χρόνους* $t \geq 0$. *Επιπλέον υπάρχουν σταθερές* G, $\sigma > 0$ *και μία αύξουσα συνάρτηση* $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *ούτως ώστε*

$$\|u[t]\|_2 \leq G\exp(-\sigma t)\,\|u[0]\|_2\,, \tag{14}$$

$$\|u[t]\|_\infty \leq \sqrt{2G}\exp(-\sigma t)\sqrt{\|u_0\|_2\left(\|u_0'\|_2 + \psi(M)\,\|u_0\|_2\right)}, \tag{15}$$

$$\|u_x[t]\|_2 \leq \exp(-\sigma t)(\left\|u_0'\right\|_2 + \psi(M)\,\|u_0\|_2), \tag{16}$$

για όλους τους χρόνους $t \geq 0$, *όπου*

$$M := \max\{\overline{K}, \|u_0\|_\infty\,, G|r|\,\|k\|_2\,\|u_0\|_2\}$$

και

$$\overline{K} := \begin{cases} (B^{-1}q)^{1/(b-2)} & \text{για} \quad q > 0 \\ 0 & \text{για} \quad q \leq 0 \end{cases}. \tag{17}$$

.

Το παραπάνω πολύ σημαντικό αποτέλεσμα το οποίο θα αποδειχτεί στη συνέχεια μας οδηγεί στα ακόλουθα συμπεράσματα.

- Ο χώρος κατάστασης του συστήματος κλειστού βρόγχου (5), (6) με νόμο ελέγχου (10) είναι το σύνολο

$$X = \{u \in H^2(0,1) : u(0) = u(1) + r\langle k, u\rangle = 0\}. \tag{18}$$

Παρατηρούμε ότι αν $u[0] = u_0 \in X$, τότε $u[t] \in X$ για κάθε $t \geq 0$.

- Οι εκτιμήσεις (14) και (16) σε συνδυασμό με τις ανισότητες

$$\|u\|_\infty \leq \|u_x[t]\|_2\,, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} M &\leq \overline{K} + \|u_0\|_\infty + G|r|\,\|k\|_2\,\|u_0\|_2 \\ &\leq \overline{K} + (1 + G|r|\,\|k\|_2)\left(\|u_0\|_2 + \left\|u_0'\right\|_2\right) \end{aligned}$$

και το γεγονός ότι η απεικόνιση $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση οδηγούν στο ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\|u_x[t]\|_2 + \|u[t]\|_2 \leq \exp(-\sigma t)\left(\|u_0\|_2 + \left\|u_0'\right\|_2\right)\left(1 + G + \psi\left(\overline{K} + (1 + G|r|\,\|k\|_2)\left(\|u_0\|_2 + \left\|u_0'\right\|_2\right)\right)\right), \tag{20}$$

το οποίο εξασφαλίζει ολική ασυμπτωτική ευστάθεια υπό την έννοια της νόρμας του χώρου H^1.

- Η εκτίμηση (15) εξασφαλίζει ολική εκθετική σύγκλιση της κατάστασης u στη νόρμα L^∞ αλλά όχι απαραίτητα ολική ασυμπτωτική ευστάθεια, διότι δεν εμπεριέχει κάποιο φράγμα που να είναι συνάρτηση της νόρμας L^∞ της αρχικής συνθήκης u_0. Επιπλέον αν θεωρήσουμε την απεικόνιση εξόδου

$$X \ni u \to y = u \in L^\infty(0,1)$$

η εκτίμηση (15) εξασφαλίζει ολική ασυμπτωτική ευστάθεια εξόδου.

- Τα παραπάνω αποτελέσματα ευστάθειας όπως θα δούμε και παρακάτω, εξασφαλίζονται με τη θεώρηση ενός συναρτησιακού ελέγχου Lyapunov της μορφής

$$V(u) := \frac{1}{2}\|u\|_2^2 + \frac{r}{2}\langle k, u\rangle^2$$

για όλες τις συναρτήσεις $u \in L^2(0,1)$.

- Στην περίπτωση που $r = 0$ και $\varepsilon = 0$ η ανισότητα (13) μας δίνει τη σχέση

$$q < p\pi^2$$

η οποία αποτελεί τη συνθήκη που εγγυάται την ολική εκθετική ευστάθεια του συστήματος που προκύπτει από τη γραμμικοποίηση των (5), (6) και (10) γυρω από το 0.

- Η γραμμικοποίηση του συστήματος (5), (6) με νόμο ελέγχου (10) έχει το πολύ μία ασταθή ιδιοτιμή. Αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό παρατηρώντας ότι

$$\frac{(1+\varepsilon)\|k\|_2^2 + (3\varepsilon - 1)k_1^2}{(1+\varepsilon)\|k\|_2^2 - k_1^2} < 4$$

για κάθε μη μηδενικό $k \in L^2(0,1)$ και για κάθε $\varepsilon \geq 0$, από το οποίο σε συνδυασμό με την ανισότητα (13) και το γεγονός ότι $\gamma \geq 0$ προκύπτει ότι

$$q < 4p\pi^2.$$

- Οι συναρτήσεις $k \in C^2([0,1])$ με $k(0) = 0$, $k(1) = 1$ οι οποίες ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$k''(x) = \mu k(x) \tag{21}$$

για $x \in [0,1]$ και $\mu \in \mathbb{R}$, ανάλογα με την τιμή της σταθεράς μ είναι οι ακόλουθες

1. $k(x) = 0$ αν $\mu = 0$,
2. $k(x) = \dfrac{sinh(cx)}{sinh(c)}$ αν $\mu = c^2$, $c > 0$,
3. $k(x) = \dfrac{sin(\omega x)}{sinh(\omega)}$ αν $\mu = -\omega^2$, $\omega > 0$ και $\omega \neq n\pi$ για $n \in \mathbb{N}$.

Κάθε μία από τις παραπάνω συναρτήσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν πυρήνας της συνοριακής ανάδρασης

$$u(t,1) = -r\langle k, u[t]\rangle.$$

Από το παραπάνω διαπιστώνουμε ότι για μία δοσμένη τοπικά Lipschitz $f \in C^0([0,1] \times \mathbb{R})$ απεικόνιση που ικανοποιεί τις συνθήκες (8), (9) οι παράμετροι $\mu \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon \geq 0$ πρέπει να επιλεγούν κατάλληλα έτσι ώστε οι σχέσεις

$$1 + \|k\|_2^2 r > 0, \quad B \geq \delta|r|\,\|k\|_b\,\|k\|_{\frac{b}{b-1}}$$

και η σχέση (13) να ικανοποιούνται.

Η σημασία και η πρακτικότητα του παραπάνω θεωρήματος μπορεί να γίνει αντιληπτή από το ακόλουθο παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα:</u> Θεωρούμε σύστημα ελέγχου που μοντελοποιείται από την ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση αντίδρασης-διάχυσης

$$u_t = pu_{xx} + qu - Bu^3 \tag{22}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} u(t,0) &= 0, \\ u(t,1) &= U(t), \end{aligned}$$

για $(t,x) \in (0,+\infty) \times (0,1)$ και σταθερές $p > 0$, q, $B \in \mathbb{R}$. Κάνοντας χρήση του συνοριακού ελέγχου

$$U(t) = -r\int_0^1 xu(t,x)dx, \tag{23}$$

θα δείξουμε ότι η ολική σταθεροποίηση του συστήματος (22) επιτυγχάνεται αν υποθέσουμε ότι

$$B > 0 \quad \text{και} \quad \frac{q}{p\pi^2} < (1-g)(1+s) \approx 1.34, \tag{24}$$

όπου

$$s = \frac{7\pi^2 - 18 - \sqrt{(7\pi^2-18)^2 - 72\pi^2}}{2\pi^2} \approx 0.38, \tag{25}$$

$$r = 5^{1/4}\left(\frac{7}{3}\right)^{3/4} \approx 2.823 \tag{26}$$

και

$$g = \frac{3-r}{6} \approx 0.03. \tag{27}$$

Πράγματι ο μη γραμμικός όρος του παραπάνω συστήματος που ορίζεται από την απεικόνιση f με τύπο

$$f(x,u) = qu - Bu^3 \tag{28}$$

ικανοποιεί τις συνθήκες (8) και (9) με σταθερές $\gamma = 0$, $b = 4$ και $\delta = B$, αφού

$$u\left(f(x,u) - qu\right) = -B|u|^4$$

και

$$|f(x,u) - qu| = B|u|^3.$$

Επιπλέον λόγω της επιλογής $k(x) = x$ στο νόμο ελέγχου (23), άμεσα προκύπτει ότι

$$k_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}, \quad \|k\|_2^2 = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \left\|k'\right\|_2^2 = 1. \tag{29}$$

Με βάση τα παραπάνω και τη σχέση (13) λαμβάνουμε την ακόλουθη ανισότητα

$$\frac{3q}{p\pi^2} + \max\left(0, (3\varepsilon-1)\frac{r^2}{3} + 2(3\varepsilon-1)r + \frac{q}{p\pi^2}r + \frac{9\pi^2\varepsilon(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)\pi^2-6}\right) < 3\frac{(1+\varepsilon)\pi^2+6(3\varepsilon-1)}{(1+\varepsilon)\pi^2-6}. \tag{30}$$

Θέτοντας

$$\varepsilon = \frac{1-s}{6} \tag{31}$$

και κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι

$$\frac{18(1-s)}{(7-s)\pi^2-36} = s, \tag{32}$$

το οποίο είναι αληθές λόγω της υπόθεσης (25), καταλήγουμε στη συνθήκη

$$\frac{q}{p\pi^2(1+s)} + \frac{1}{6}\max\left(0, -\frac{r^2}{3} - 2\frac{p\pi^2(1+s)-q}{p\pi^2(1+s)}r + 3\right) < 1. \tag{33}$$

Λόγω του γεγονότος ότι

$$\frac{1}{6}\max\left(0, -\frac{r^2}{3} - 2gr + 3\right) \leq g, \tag{34}$$

το οποίο ισχύει λόγω των (26) και (27), και των ανισοτήτων (24) τελικά προκύπτει ότι η σχέση (33) είναι αληθής. Τέλος με βάση τη (26) ικανοποιούνται οι ακόλουθες ανισότητες

$$1 + \|k\|_2^2\, r > 0$$

και

$$B \geq \delta|r|\, \|k\|_b\, \|k\|_{\frac{b}{b-1}},$$

για $b = 4$ και $\delta = B$. Η τελευταία είναι αληθής ως ισοδύναμη της ανισότητας

$$r \leq 5^{1/4}\left(\frac{7}{3}\right)^{3/4}. \tag{35}$$

Επομένως για το σύστημα (22) το Θεώρημα 1 εφαρμόζεται εξασφαλίζοντας ολική ασυμπτωτική ευστάθεια.

<u>Σχόλιο:</u> Στο παραπάνω παράδειγμα αξίζει να τονιστεί ότι η ολική ασυμπτωτική ευστάθεια εξασφαλίζεται χωρίς να είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τις τιμές των B, q και p, παρά μόνω του λόγου q/p. Επιπλέον το παραπάνω αποτέλεσμα περιλαμβάνει και την περίπτωση όπου $q > p\pi^2$ κατά την οποία η γραμμικοποίηση του (22) γύρω από το 0 εμφανίζει αστάθεια.

4 Ύπαρξη και Μοναδικότητα

Θεώρημα 2. *Έστω $p>0$ μία θετική σταθερά, και $\overline{F}: C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ συνεχής απεικόνιση με $\overline{F}(0)=0$, για την οποία υπάρχει μία αύξουσα συνάρτηση $L:\mathbb{R}_+ \to (0,+\infty)$ τέτοια ώστε*

$$\left\|\overline{F}(u)-\overline{F}(v)\right\|_\infty \le L(\max(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty))\,\|u-v\|_\infty \tag{36}$$

για όλες τις συναρτήσεις $u,v\in C^0([0,1])$. Έστω επιπλέον μία συνάρτηση $\overline{k}\in C^2([0,1])$ με $\overline{k}(0)=0$. Τότε για κάθε $u_0\in H^2(0,1)$ με $u_0(0)=0$, $u_0(1)=\langle \overline{k}, u_0\rangle$, υπάρχει χρόνος $t_{max}(u_0)\in(0,+\infty]$ και μοναδική απεικόνιση $u\in C^0([0,t_{max}(u_0))\times[0,1])\cap C^1((0,t_{max}(u_0));L^2(0,1))$ με $u[0]=u_0$, $u[t]\in H^2(0,1)$ για όλους τους χρόνους $t\in[0,t_{max}(u_0))$, για την οποία η απεικόνιση $t\to\left\|u_x[t]-\overline{k}u[t]\right\|_2^2$ είναι κλάσεως C^1 στο διάστημα $[0,t_{max}(u_0))$ και για την οποία ικανοποιούνται τα ακόλουθα

$$u_t[t]=pu_{xx}[t]+\overline{F}(u[t]), \quad \text{για } t\in(0,t_{max}(u_0)), \tag{37}$$

$$\begin{aligned} u(t,0) &= 0,\\ u(t,1) &= \langle \overline{k}, u[t]\rangle, \quad \text{για } t\in[0,t_{max}(u_0)), \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\|u_x[t]-\overline{k}u[t]\right\|_2^2 &= -2p\left\|u_{xx}[t]-\overline{k}u_x[t]-\overline{k}'u[t]\right\|_2^2\\ &\quad -2\langle K\overline{F}(u[t])+pGu[t], u_{xx}[t]-\overline{k}u_x[t]-\overline{k}'u[t]\rangle \end{aligned} \tag{39}$$

για $t\in[0,t_{max}(u_0))$, όπου $K,G:L^2(0,1)\to L^2(0,1)$ συνεχείς γραμμικοί τελεστές οι οποίοι ορίζονται από τις σχέσεις

$$(Ku)(x)=u(x)-\int_0^x \overline{k}(s)u(s)ds, \tag{40}$$

$$(Gu)(x)=2\overline{k}'(x)u(x)-\int_0^x \overline{k}''(s)u(s)ds \tag{41}$$

για όλες τις συναρτήσεις $u\in L^2(0,1)$ και για όλα τα $x\in[0,1]$. Επιπλέον αν $t_{max}(u_0)<+\infty$, τότε

$$\lim_{t\to t_{max}^-}(\|u[t]\|_\infty)=+\infty.$$

5 Προκαταρκτικά λήμματα

Πρωτού προβόυμε στην απόδειξη των Θεωρημάτων 1 και 2, θα αποδείξουμε μία σειρά από λήμματα και προτάσεις που θα αποτελέσουν θεμέλια για την απόδειξη των βασικών αποτελεσμάτων μας.

Λήμμα 1. *Έστω $p > 0$ μία θετική σταθερά, και $\overline{F} : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ μία συνεχής απεικόνιση με $\overline{F}(0) = 0$, για την οποία υπάρχει μία αύξουσα συνάρτηση $L : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ τέτοια ώστε*

$$\left\|\overline{F}(u) - \overline{F}(v)\right\|_\infty \leq L(\max(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty)) \|u - v\|_\infty$$

για όλες τις συναρτήσεις $u, v \in C^0([0,1])$. Τότε για κάθε $w_0 \in H_0^2(0,1)$, $M > 0$ και για κάθε χρόνο $T > 0$ με

$$T \leq \frac{9p^2\pi^4}{4} \left(\sqrt{2}L(\sqrt{2}\|w_0\|_\infty + M) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4/3}(\max(2, (\sqrt{2}\|w_0\|_\infty + M)M^{-1}))\right)^{-3} \tag{42}$$

υπάρχει μοναδική απεικόνιση $w \in S$, όπου

$$S := \left\{ u \in C^0([0,T] \times [0,1]) : \max_{0 \leq t \leq T}(\|u[t]\|_\infty) \leq \sqrt{2}\|w_0\| + M \right\}$$

ούτως ώστε

$$\begin{aligned} w(t,x) = \quad & 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp(-pn^2\pi^2 t)\int_0^1 w_0(s)\sin(n\pi s)ds\right]\sin(n\pi x) \\ & + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left(\int_0^1 (\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)ds\right)d\tau\right]\sin(n\pi x) \end{aligned} \tag{43}$$

για όλα τα ζεύγη $(t,x) \in [0,T] \times [0,1]$.

Απόδειξη. Έστω $w_0 \in H^2(0,1)$, $M > 0$ και χρόνος $T > 0$ ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση (42). Για δεδομένο $w_0 \in H^2(0,1)$ θεωρούμε τον τελεστή $P : C^0([0,T] \times [0,1]) \to C^0([0,T] \times [0,1])$ ο οποίος ορίζεται από την εξίσωση

$$(Pw)(t,x) = \overline{w}(t,x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp(-pn^2\pi^2(t-\tau)\left(\int_0^1 (\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)ds\right))d\tau\right]\sin(n\pi x), \tag{44}$$

όπου

$$\overline{w}(t,x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp(-pn^2\pi^2 t)\int_0^1 w_0(s)\sin(n\pi s)ds\right]\sin(n\pi x). \tag{45}$$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $w \in S$ τέτοιο ώστε $w = Pw$. Αρχικά για την απεικόνιση $\overline{w}$ θα δείξουμε τα ακόλουθα

1. $\overline{w} \in C^0([0,T] \times [0,1]) \cap C^1((0,T] \times [0,1])$ με $\overline{w}[t] \in C^2([0,1])$.

2. Η $\overline{w}$ είναι η λύση της εξίσωσης θερμότητας $\overline{w}_t[t] = p\overline{w}_{xx}[t]$ με Dirichlet συνοριακές συνθήκες και αρχική συνθήκη $\overline{w}[0] = w_0$.

Με χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσης και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $w_0(0) = w_0(1) = 0$ παρατηρούμε ότι

$$\langle w_0, \phi_n \rangle = \frac{1}{n\pi} \langle w_0', \psi_n \rangle = -\frac{1}{n^2\pi^2} \langle w_0'', \phi_n \rangle, \tag{46}$$

όπου $\psi_n = \sqrt{2}\cos(n\pi x)$ και $\phi_n = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$. Από την παραπάνω σχέση, η (45) γράφεται ισοδύναμα

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \exp(-pn^2\pi^2 t) \langle w_0'', \phi_n \rangle \phi_n. \tag{47}$$

Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz ισχύει ότι

$$\frac{1}{n^2\pi^2} \exp(-pn^2\pi^2 t) |\langle w_0'', \phi_n \rangle| |\phi_n| \leq \frac{\sqrt{2}\, \|w_0''\|_2}{n^2\pi^2}. \tag{48}$$

Λόγω του ότι η σειρά

$$\frac{\sqrt{2}\, \|w_0''\|}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{49}$$

συγκλίνει ως p-αρμονική με $p = 2 > 1$, από το κριτήριο Weierstrass (Θεώρημα 10.5 Παράρτημα) έπεται ότι η (45) συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση $\overline{w}$. Λόγω του ότι οι απεικονίσεις

$$(t, x) \to \exp(-pn^2\pi^2 t) \langle w_0, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

είναι συνεχείς στο $[0,T] \times [0,1]$ και επιπλέον η σύγκλιση της (45) ομοιόμορφη, από το θεώρημα συνέχειας σειράς έπεται ότι $\overline{w} \in C^0([0,T] \times [0,1])$. Στη συνέχεια εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της $\overline{w}$ ως προς το χρόνο t και ως προς τη μεταβλητή x. Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[-pn^2\pi^2 \exp(-pn^2\pi^2 t) \langle w_0, \phi_n \rangle \right] \phi_n(x). \tag{50}$$

Θα αποδείξουμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα σε ένα διάστημα $[0, t_0]$, όπου $t_0 > 0$. Η σειρά (50) γράφεται ισοδύναμα

$$p \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp(-pn^2\pi^2 t) \langle w_0'', \phi_n \rangle \right] \phi_n(x). \tag{51}$$

Κάνοντας χρήση της ανισότητας

$$pn^2\pi^2 t \exp(-pn^2\pi^2 t) \leq e^{-1} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και για κάθε } t \geq 0, \tag{52}$$

και της ανισότητας Cauchy-Schwarz

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2 \quad \text{για } f, g \in L^2(0,1), \tag{53}$$

προκύπτει

$$p \exp(-pn^2\pi^2 t)|\langle w_0'', \phi_n\rangle||\phi_n(x)| \leq \frac{\sqrt{2}pe^{-1}\left\|w_0''\right\|}{t_0\pi^2 n^2} \quad \text{για κάθε } (t,x) \in [t_0, T] \times [0,1], \tag{54}$$

αφού

$$\|\phi_n\|_2 = \left(\int_0^1 2\sin^2(n\pi x)dx\right)^{1/2} = 1.$$

Δεδομένου ότι η σειρά

$$\frac{\sqrt{2}pe^{-1}\left\|w_0''\right\|}{t_0\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \tag{55}$$

συγκλίνει ως p-αρμονική με $p = 2 > 1$, από το κριτήριο Weierstrass (Θεώρημα 10.5 Παράρτημα) έπεται ότι η σειρά (50) συγκλίνει ομοιόμορφα και επομένως από το θεώρημα παραγώγισης σειράς (Θεώρημα 10.7 Παράρτημα) ισχύει ότι

$$\overline{w}_t(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-pn^2\pi^2\exp(-pn^2\pi^2 t)\langle w_0, \phi_n\rangle\right]\phi_n(x). \tag{56}$$

για κάθε $(t,x) \in (0,T] \times [0,1]$. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε την ακόλουθη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\pi \exp(-pn^2\pi^2 t)\langle w_0, \phi_n\rangle\psi_n(x), \tag{57}$$

για κάθε $(t,x) \in [t_0, T] \times [0,1]$, όπου $t_0 > 0$. Η παραπάνω σειρά με χρήση της σχέσης (46) ισοδύναμα γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-pn^2\pi^2 t)\langle w_0', \psi_n\rangle\psi_n(x). \tag{58}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\exp(-pn^2\pi^2 t)|\langle w_0', \psi_n\rangle||\psi_n(x)| \leq \frac{\sqrt{2}e^{-1}\left\|w_0'\right\|_2}{pn^2\pi^2 t_0} \tag{59}$$

όπου η σειρά

$$\frac{\sqrt{2}e^{-1}\left\|w_0'\right\|_2}{pn^2\pi^2 t_0} \tag{60}$$

συγκλίνει ως $p-$αρμονική με $p = 2 > 1$. Από το κριτήριο Weierstrass (Θεώρημα 10.5 Παράρτημα) η σειρά (57) συγκλίνει ομοιόμορφα. Επομένως από το θεώρημα παραγώγισης σειράς προκύπτει

$$\overline{w}_x(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\exp(-pn^2\pi^2 t)\langle w_0, \phi_n\rangle\psi_n(x). \tag{61}$$

για κάθε $(t,x) \in (0,T] \times [0,1]$. Τέλος, θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-n^2\pi^2)\exp(-pn^2\pi^2 t)\langle w_0, \phi_n\rangle\phi_n(x) \tag{62}$$

η οποία λόγω της (46) ισοδύναμα γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-pn^2\pi^2 t)\langle w_0'', \phi_n\rangle \phi_n(x) \tag{63}$$

και για την οποία με αντίστοιχη επιχειρηματολογία με αυτήν που χρησιμοποιήθηκε για τη σχέση (51) συμπεραίνουμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα και επομένως ισχύει ότι

$$\overline{w}_{xx}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-pn^2\pi^2 t)\langle w_0'', \phi_n\rangle \phi_n(x). \tag{64}$$

για κάθε $(t,x) \in (0,T] \times [0,1]$. Μέσω των σχέσεων (56) και (63) διαπιστώνουμε ότι η απεικόνιση $\overline{w}$ ικανοποιεί την εξίσωση $\overline{w}_t = p\overline{w}_{xx}$ με Dirichlet συνοριακές συνθήκες $\overline{w}(t,0) = \overline{w}(t,1) = 0$. Επομένως λόγω των παραπάνω έπεται (Θεώρημα 10.9 Παράρτημα) ότι για όλους τους χρόνους $t \geq 0$ η $\overline{w}$ ικανοποιεί την εκτίμηση

$$\max_{0\leq x\leq 1}(|\overline{w}(t,x)|) \leq \sqrt{2}\exp\left(-\frac{p\pi^2 t}{4}\right)\max_{0\leq x\leq 1}(|\overline{w}(0,x)|).$$

Επομένως

$$\max_{0\leq t\leq T}(\|\overline{w}[t]\|_\infty) \leq \sqrt{2}\,\|w_0\|_\infty\,. \tag{65}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο τελεστής $P : C^0([0,T]\times[0,1]) \to C^0([0,T]\times[0,1])$ που ορίστηκε από τη σχέση (44) είναι καλά ορισμένος. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&\left|2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left(\int_0^1 (\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)ds\right)d\tau\right| \\
&\leq 2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left(\int_0^1 |(\overline{F}(w[\tau]))(s)||\sin(n\pi s)|ds\right)d\tau \\
&\leq 2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))d\tau\left\|\overline{F}(w[\tau])\right\|_\infty d\tau\left(\int_0^1 |\sin(n\pi s)|ds\right) \\
&\leq 2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left\|\overline{F}(w[\tau])\right\|_\infty d\tau\left(\int_0^1 \sin^2(n\pi s)ds\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

όπου η ανισότητα

$$\int_0^1 |\sin(n\pi s)|\,ds \leq \left(\int_0^1 \sin^2(n\pi s)ds\right)^{1/2}$$

προκύπτει άμεσα με εφαρμογή της ανισότητας Cauchy–Schwarz. Με χρήση της υπόθεσης (36) για την απεικόνιση $\overline{F} : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ για δεδομένη αύξουσα συνάρτηση $L : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ έπεται ότι

$$\left|2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left(\int_0^1 (\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)ds\right)d\tau\right|$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{pn^2\pi^2} \max_{0\leq t\leq T} \|w[t]\|_\infty L(\max_{0\leq t\leq T}(\|w[t]\|_\infty)) \left(1-\exp(-pn^2\pi^2 t)\right)$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{pn^2\pi^2} \max_{0\leq t\leq T}(\|w[t]\|_\infty) L(\max_{0\leq t\leq T}(\|w[t]\|_\infty)) \tag{66}$$

για όλους τους χρόνους $t \in [0,T]$ και $n \in \mathbb{N}$, αφού

$$\left\|\overline{F}(w(\tau))\right\|_\infty \leq L(\|w[\tau]\|_\infty) \|w[\tau]\|_\infty \leq L(\max_{0\leq \tau\leq T}(\|w[\tau]\|)) \max_{0\leq \tau\leq T}(\|w[\tau]\|),$$

$$2\int_0^1 \sin^2(n\pi s)ds = 1$$

και

$$\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))d\tau = \frac{1}{pn^2\pi^2}\left(1-\exp(-pn^2\pi^2 t)\right).$$

Η σειρά

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{C}{n^2} \tag{67}$$

με

$$C = \frac{\sqrt{2}}{p\pi^2} \max_{0\leq t\leq T}(\|w[t]\|_\infty) L(\max_{0\leq t\leq T}(\|w[t]\|_\infty))$$

συγκλίνει ως $p-$αρμονική με $p = 2 > 1$, κάτι το οποίο σε συνδυασμό με το θεώρημα συνέχειας σειράς εξασφαλίζει την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς

$$2\sum_{n=1}^\infty \left[\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau)\left(\int_0^1 (\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)ds\right))d\tau\right]\sin(n\pi x) \tag{68}$$

σε μία συνεχή συνάρτηση $\overline{\overline{w}} \in C^0([0,T]\times[0,1])$. Επομένως ο τελεστής P είναι καλά ορισμένος. Στη συνέχεια για σταθερά $M > 0$ θεωρούμε το σύνολο

$$S := \{w \in C^0([0,T]\times[0,1]) : \max_{0\leq t\leq T}(\|w[t]\|_\infty) \leq g\},$$

όπου $g = \sqrt{2}\|w_0\|_\infty + M$. Θα αποδείξουμε ότι αν $w \in S$ τότε $Pw \in S$, δηλαδή ότι ο τελεστής P απεικονίζει το σύνολο S στο σύνολο S. Παρατηρούμε ότι

$$\left|2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau)\left(\int_0^1 (\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)ds\right))d\tau\right|$$

$$\leq 2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left\|\overline{F}(w[\tau])\right\|_\infty d\tau \left(\int_0^1 \sin^2(n\pi s)ds\right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{2}\max_{0\leq t\leq T}(\|w[t]\|_\infty) L(\max_{0\leq t\leq T}(\|w[t]\|_\infty)) \exp(-pn^2\pi^2 t)\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2\tau)d\tau$$

Με χρήση της ανισότητας Hölder για $p = 3$ και $q = 3/2$ έχουμε ότι

$$\int_0^t \exp(pn^2\pi^2\tau)d\tau \leq \left(\int_0^t 1^3 d\tau\right)^{1/3} \left(\int_0^t \exp(3pn^2\pi^2\tau/2)d\tau\right)^{2/3}$$

$$= t^{1/3}\left(\frac{2}{3pn^2\pi^2}\left(\exp(3pn^2\pi^2 t/2) - 1\right)\right)^{2/3} \tag{69}$$

και επομένως

$$\left|2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left(\int_0^1 (\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)ds\right))d\tau\right|$$

$$\leq \sqrt{2}\max_{0\leq t\leq T}(\|w[t]\|_\infty)L(\max_{0\leq t\leq T}(\|w[t]\|_\infty))\exp(-pn^2\pi^2 t)t^{1/3}\left(\frac{2\exp(3pn^2\pi^2 t/2)}{3pn^2\pi^2}\right)^{2/3}$$

$$\leq \sqrt{2}gL(g)T^{1/3}\left(\frac{2}{3p\pi^2}\right)^{2/3} n^{-4/3} \tag{70}$$

για όλους τους χρόνους $t \in [0, T]$ και για όλους τους φυσικούς αριθμούς $n \in \mathbb{N}$, αφού για κάθε $w \in S$ ισχύει ότι

$$\max_{0\leq t\leq T}(\|w[t]\|_\infty) \leq g.$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανισότητα (70) σε συνδυασμό με τη χρονική συνθήκη

$$T^{1/3} \leq \left(\frac{3p\pi^2}{2}\right)^{2/3}\left(\sqrt{2}L(g)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4/3}\right)\max(2, gM^{-1})\right)^{-1} \tag{71}$$

παίρνουμε την ακόλουθη εκτίμηση

$$\left|2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left(\int_0^1 (\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)ds\right))d\tau\right|$$

$$\leq \frac{gn^{-4/3}}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4/3}\right)\max(2, gM^{-1})}. \tag{72}$$

Με βάση τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{gn^{-4/3}}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4/3}\right)\max(2, gM^{-1})} = \frac{g}{\max(2, gM^{-1})}$$

$$= \begin{cases} \frac{g}{2} & \text{για} \quad M \geq \frac{g}{2} \\ M & \text{για} \quad M \leq \frac{g}{2} \end{cases}. \tag{73}$$

και την εκτίμηση (65) συμπεραίνουμε τελικά σε κάθε περίπτωση ότι

$$\max_{0\le t\le T}(\|(Pw)[t]\|_\infty) \le \sqrt{2}\,\|w_0\|_\infty + M \tag{74}$$

από το οποίο έπεται ότι $Pw \in S$. Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη δείχνοντας ότι η συνάρτηση $P : S \to S$ είναι συστολή υπό την έννοια της μετρικής

$$d(w,u) = \max_{0\le t\le T}\|w[t]-u[t]\|_\infty$$

για $w, u \in S$. Έστω δύο συναρτήσεις $w, u \in S$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&\left|2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left(\int_0^1(\overline{F}(w[\tau])-\overline{F}(u[\tau]))(s)\sin(n\pi s)ds\right)d\tau\right| \\
&\le 2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left(\int_0^1\left|(\overline{F}(w[\tau])-\overline{F}(u[\tau]))(s)\right||\sin(n\pi s)|\,ds\right)d\tau \\
&\le 2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left\|\overline{F}(w[\tau])-\overline{F}(u[\tau])\right\|_\infty d\tau\left(\int_0^1|\sin(n\pi s)|\,ds\right) \\
&\le 2\left(\int_0^1\sin^2(n\pi s)ds\right)^{1/2}\int_0^t L\left(\max(\|w[\tau]\|_\infty,\|u[\tau]\|_\infty)\right)\|w[\tau]-u[\tau]\|_\infty\exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))d\tau
\end{aligned}$$

Εφόσον υποθέσαμε ότι $w, u \in S$, για κάθε χρόνο $\tau \in [0, t]$ με $t \le T$ ισχύει ότι

$$\max(\|w[\tau]\|_\infty,\|u[\tau]\|_\infty) \le g. \tag{75}$$

Με βάση το παραπάνω και με χρήση της ανισότητας Hölder προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&\left|2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left(\int_0^1(\overline{F}(w[\tau])-\overline{F}(u[\tau]))(s)\sin(n\pi s)ds\right)d\tau\right| \\
&\le \sqrt{2}L(g)\max_{0\le\tau\le T}(\|w[\tau]-u[\tau]\|_\infty)\exp(-pn^2\pi^2t)t^{1/3}\left(\frac{2\exp(3pn^2\pi^2t/2)}{3pn^2\pi^2}\right)^{2/3} \\
&\le \sqrt{2}L(g)\left(\frac{2}{3p\pi^2}\right)^{2/3}T^{1/3}n^{-4/3}\max_{0\le t\le T}(\|w[t]-u[t]\|_\infty).
\end{aligned} \tag{76}$$

Λόγω της χρονικής συνθήκης (71) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\left|2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left(\int_0^1(\overline{F}(w[\tau])-\overline{F}(u[\tau]))(s)\sin(n\pi s)ds\right)d\tau\right| \\
&\le \frac{n^{-4/3}}{\max(2,gM^{-1})\sum_{n=1}^\infty n^{-4/3}} \le \frac{n^{-4/3}}{2\sum_{n=1}^\infty n^{-4/3}}.
\end{aligned} \tag{77}$$

Δεδομένου ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-4/3}}{2\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4/3}} = \frac{1}{2} \tag{78}$$

και επιπλέον $w(0,x) = u(0,x) = w_0$ (αφού $w, u \in S$), τελικά καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|(Pw)[t] - (Pu)[t]\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq t \leq T} \|w[t] - u[t]\|_{\infty}. \tag{79}$$

Το παραπάνω αποδεικνύει ότι η απεικόνιση $P : S \to S$ είναι συστολή με σταθερά $k = 2$ και επομένως, με βάση το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach (Θεώρημα 10.3 Παράρτημα), υπάρχει μοναδική απεικόνιση $\tilde{w} \in S$ τέτοια ώστε

$$\tilde{w} = P\tilde{w}.$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Λήμμα 2. *Έστω $p > 0$ μία θετική σταθερά, και $\overline{F} : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ μία συνεχής απεικόνιση με $\overline{F}(0) = 0$, για την οποία υπάρχει μία αύξουσα συνάρτηση $L : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ τέτοια ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη (36) για όλες τις συναρτήσεις $u, v \in C^0([0,1])$. Υποθέτουμε ότι $w_0 \in H^2(0,1)$ και ότι $w \in C^0([0,T] \times [0,1])$ είναι μία λύση της εξίσωσης (43) για δεδομένο χρόνο $T > 0$. Τότε $w \in C^1((0,T]; L^2(0,1))$ με $w[t] \in H_0^2(0,1)$ για όλους τους χρόνους $t \in [0,T]$. Επιπλέον η απεικόνιση $t \to \|w_x[t]\|_2^2$ είναι κλάσεως C^1 στο διάστημα $[0,T]$ και ικανοποιούνται οι ακόλουθες εξισώσεις*

$$w_t[t] = p w_{xx}[t] + \overline{F}(w[t]) \quad \text{για } t \in (0,T], \tag{80}$$

$$\frac{d}{dt} \|w_x[t]\|_2^2 = -2p \|w_{xx}[t]\|_2^2 - 2\langle \overline{F}(w[t]), w_{xx}[t] \rangle \quad \text{για } t \in [0,T].$$

Απόδειξη. Έστω $w \in C^0([0,T] \times [0,1])$ μία λύση της εξίσωσης (43). Με χρήση του θεμελιώδους θεωρήματος ολοκληρωτικού λογισμού για την απεικόνιση $t \to \exp(-pn^2\pi^2 t)$ στο διάστημα $[t_0, t]$ με $t_0 \geq 0$ παρατηρούμε ότι

$$\left|\exp(-pn^2\pi^2 t) - \exp(-pn^2\pi^2 t_0)\right| = \left|\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}(\exp(-pn^2\pi^2 s)) ds\right|$$

$$\int_{t_0}^{t} \left|\frac{d}{ds}(\exp(-pn^2\pi^2 s))\right| ds = \int_{t_0}^{t} pn^2\pi^2 \exp(-pn^2\pi^2 s) ds. \tag{81}$$

Κάνοντας χρήση της ανισότητας Hölder για $p = r$ και $q = r/(r-1)$ με $r > 1$ προκύπτει ότι

$$\int_{t_0}^{t} pn^2\pi^2 \exp(-pn^2\pi^2 s) ds \leq \left(\int_{t_0}^{t} \left(pn^2\pi^2\right)^r ds\right)^{1/r} \left(\int_{t_0}^{t} \left(\exp(-pn^2\pi^2 s)\right)^{r/(r-1)} ds\right)^{(r-1)/r} \tag{82}$$

όπου

$$\left(\int_{t_0}^{t} \left(pn^2\pi^2\right)^r ds\right)^{1/r} = \left(pn^2\pi^2\right)^r (t - t_0)^{1/r} \tag{83}$$

και

$$\left(\int_{t_0}^{t} \left(\exp(-pn^2\pi^2 s)\right)^{r/(r-1)} ds\right)^{(r-1)/r}$$

$$= \left(pn^2\pi^2\right)^{-(r-1)/r} \left(\frac{r-1}{r}\right)^{(r-1)/r} \left(\left(\exp(-pn^2\pi^2 t_0)\right)^{r/(r-1)} - \left(\exp(-pn^2\pi^2 t)\right)^{r/(r-1)}\right)^{(r-1)/r}$$

$$\leq \left(pn^2\pi^2\right)^{-(r-1)/r} \left(\frac{r-1}{r}\right)^{(r-1)/r} \exp(-pn^2\pi^2 t_0). \tag{84}$$

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned}&\left|\exp(-pn^2\pi^2 t) - \exp(-pn^2\pi^2 t_0)\right| \\ &\leq \left(pn^2\pi^2\right)^{1/r}\left(\frac{r-1}{r}\right)^{(r-1)/r}\exp(-pn^2\pi^2 t_0)(t-t_0)^{1/r}\end{aligned} \tag{85}$$

για όλους τους χρόνους $t > t_0$ και για όλους τους αριθμούς $r > 1$ και $n \in \mathbb{N}$. Αρχικά με βάση την εκτίμηση (85) θα αποδείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $K > 0$ τέτοια ώστε

$$\|w[t] - w[t_0]\|_\infty \leq K|t-t_0|^{1/r} \tag{86}$$

όπου

$$\begin{aligned}w(t,x) - w(t_0,x) &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\exp(-pn^2\pi^2 t) - \exp(-pn^2\pi^2 t_0)\right)\int_0^1 w_0(s)\sin(n\pi s)ds\right]\sin(n\pi x) \\ &+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{t_0}^{t}\exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\int_0^1(\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)dsd\tau\right]\sin(n\pi x) \\ &+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\exp(-pn^2\pi^2 t) - \exp(-pn^2\pi^2 t_0)\right)\int_0^{t_0}\exp(pn^2\pi^2\tau)\int_0^1(\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)dsd\tau\right]\sin(n\pi x).\end{aligned} \tag{87}$$

Έστω $r > 2$ και $t, t_0 \in [0, T]$ με $t > t_0$. Παρατηρούμε ότι, αφού $w_0 \in H_0^2(0,1)$, τότε

$$\int_0^1 w_0(s)\sin(n\pi s)ds = -\frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^1 w_0''(s)\sin(n\pi s)ds \tag{88}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο προκύπτει εφαρμόζοντας δύο φορές παραγοντική ολοκλήρωση. Με βάση τη συνθήκη (88) η σχέση (87) ισοδύναμα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}w(t,x) - w(t_0,x) &= -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi^2}\left[\left(\exp(-pn^2\pi^2 t) - \exp(-pn^2\pi^2 t_0)\right)\int_0^1 w_0''(s)\sin(n\pi s)ds\right]\sin(n\pi x) \\ &+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{t_0}^{t}\exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\int_0^1(\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)dsd\tau\right]\sin(n\pi x) \\ &+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\exp(-pn^2\pi^2 t) - \exp(-pn^2\pi^2 t_0)\right)\int_0^{t_0}\exp(pn^2\pi^2\tau)\int_0^1(\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)dsd\tau\right]\sin(n\pi x).\end{aligned} \tag{89}$$

Με βάση την (89) έχουμε

$$\begin{aligned}&|w(t,x) - w(t_0,x)| \\ &\leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\left[\left|\exp(-pn^2\pi^2 t) - \exp(-pn^2\pi^2 t_0)\right|\int_0^1\left|w_0''(s)\sin(n\pi s)\right|ds\right]\end{aligned}$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{t_0}^{t}\exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\int_0^1\left|(\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)\right|dsd\tau\right]$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left|\exp(-pn^2\pi^2t)-\exp(-pn^2\pi^2t_0)\right|\int_0^{t_0}\exp(pn^2\pi^2\tau)\int_0^1\left|(\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)\right|dsd\tau\right]. \tag{90}$$

Με χρήση της ανισότητας Cauchy–Schwarz, της ανισότητας (85) και του αποτελέσματος

$$\int_0^{t_0}\exp(pn^2\pi^2\tau)d\tau\leq\frac{\exp(pn^2\pi^2t_0)}{pn^2\pi^2} \tag{91}$$

ισχύουν τα ακόλουθα

$$\int_0^1\left|w_0''(s)\right||\sin(n\pi s)|\leq\left(\int_0^1(w_0''(s))^2ds\right)^{1/2}\left(\int_0^1\sin^2(n\pi s)ds\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\|w_0''\right\|_2, \tag{92}$$

$$\int_0^1\left|(\overline{F}(w[\tau]))(s)\right||\sin(n\pi s)|\leq\left(\int_0^1\left((\overline{F}(w[\tau]))(s)\right)^2ds\right)^{1/2}\left(\int_0^1\sin^2(n\pi s)ds\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\|\overline{F}(w[\tau])\right\|_2, \tag{93}$$

$$\frac{2}{n^2\pi^2}\left[\left|\exp(-pn^2\pi^2t)-\exp(-pn^2\pi^2t_0)\right|\int_0^1\left|w_0''(s)\sin(n\pi s)\right|ds\right]$$
$$\leq\frac{\sqrt{2}}{n^2\pi^2}\left\|w_0\right\|_2\left(pn^2\pi^2\right)^{1/r}\left(\frac{r-1}{r}\right)^{(r-1)/r}\exp(-pn^2\pi^2t_0)(t-t_0)^{1/r}$$
$$\leq\sqrt{2}\left(\frac{r-1}{pr\pi^2}\right)^{(r-1)/r}p\left\|w_0\right\|_2n^{-2(r-1)/r}(t-t_0)^{1/r}, \tag{94}$$

$$\exp(-pn^2\pi^2t)\int_{t_0}^{t}\exp(pn^2\pi^2\tau)\int_0^1\left|(\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)\right|dsd\tau$$
$$\leq\frac{\sqrt{2}}{pn^2\pi^2}\left\|\overline{F}(w[\tau])\right\|_2\left(\exp(pn^2\pi^2t)-\exp(pn^2\pi^2t_0)\right)$$
$$\leq\frac{\sqrt{2}}{pn^2\pi^2}\left\|\overline{F}(w[\tau])\right\|_2\left(pn^2\pi^2\right)^{1/r}\left(\frac{r-1}{r}\right)^{(r-1)/r}\exp(-pn^2\pi^2t_0)(t-t_0)^{1/r}$$
$$\leq\sqrt{2}\left\|\overline{F}(w[\tau])\right\|_2\left(\frac{r-1}{pr\pi^2}\right)^{(r-1)/r}n^{-2(r-1)/r}(t-t_0)^{1/r} \tag{95}$$

και

$$2\left[\left|\exp(-pn^2\pi^2t)-\exp(-pn^2\pi^2t_0)\right|\int_0^{t_0}\exp(pn^2\pi^2\tau)\int_0^1\left|(\overline{F}(w[\tau]))(s)\sin(n\pi s)\right|dsd\tau\right]$$
$$\leq\sqrt{2}\left\|\overline{F}(w[\tau])\right\|_2\left(\frac{r-1}{pr\pi^2}\right)^{(r-1)/r}n^{-2(r-1)/r}(t-t_0)^{1/r}. \tag{96}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\left\|w[t]-w[t_0]\right\|_\infty\leq K(T,r,p,w)\,(t-t_0)^{1/r} \tag{97}$$

με

$$K(T,r,p,w) := \sqrt{2}\left(\frac{r-1}{pr\pi^2}\right)^{(r-1)/r}\left(p\left\|w_0''\right\|_2 + 2\max_{0\leq t\leq T}\left(\left\|\overline{F}(w[t])\right\|_2\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2(r-1)/r} \tag{98}$$

για όλους τους αριθμούς $r > 2$ και για όλους τους χρόνους $t, t_0 \in [0,T]$. Τονίζουμε ότι η K είναι καλά ορισμένη αφού η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2(r-1)/r}$$

συγκλίνει ως $p-$αρμονική με $p = 2(r-1)/r > 1$ για κάθε $r > 2$. Παρατηρούμε ότι η σχέση (43) γράφεται ισοδύναμα ως ακολούθως

$$w[t] = \sum_{n=1}^{\infty}\exp(-pn^2\pi^2 t)\langle w_0, \phi_n\rangle\phi_n + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\langle\overline{F}(w[\tau]), \phi_n\rangle\phi_n d\tau \tag{99}$$

όπου $\phi_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$ με $n \in \mathbb{N}$. Λόγω της παραπάνω σχέσης, της ορθογωνιότητας των συναρτήσεων ϕ_n και της συνέχειας του εσωτερικού γινομένου έχουμε ότι

$$\langle w[t], \phi_n\rangle = \exp(-pn^2\pi^2 t)\langle w_0, \phi_n\rangle + \int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\langle\overline{F}(w[\tau]), \phi_n\rangle d\tau \tag{100}$$

από το οποίο ισοδύναμα με χρήση της σχέσης (88) προκύπτει

$$\begin{aligned} n^2\pi^2\langle w[t], \phi_n\rangle &= p^{-1}(1-\exp(-pn^2\pi^2 t))\langle\overline{F}(w[t]), \phi_n\rangle - \exp(-pn^2\pi^2 t)\langle w_0'', \phi_n\rangle \\ &+ n^2\pi^2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\langle\overline{F}(w[\tau]) - \overline{F}(w[t]), \phi_n\rangle d\tau. \end{aligned} \tag{101}$$

Με χρήση των σχέσεων (97), (101) και της συνθήκης (36) για δεδομένη αύξουσα συνάρτηση $L : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} n^2\pi^2|\langle w[t], \phi_n\rangle| &\leq p^{-1}(1-\exp(-pn^2\pi^2 t))\left|\langle\overline{F}(w[t]), \phi_n\rangle\right| + \exp(-pn^2\pi^2 t)\left|\langle w_0'', \phi_n\rangle\right| \\ &+ n^2\pi^2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left|\langle\overline{F}(w[\tau]) - \overline{F}(w[t]), \phi_n\rangle\right| d\tau \\ &\leq p^{-1}\left|\langle\overline{F}(w[t]), \phi_n\rangle\right| + \left|\langle w_0'', \phi_n\rangle\right| \\ &+ n^2\pi^2 L\left(\max_{0\leq\tau\leq t}(\|w[\tau]\|)\right)\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left\|w[\tau] - w[t]\right\|_\infty d\tau \\ &\leq p^{-1}\left|\langle\overline{F}(w[t]), \phi_n\rangle\right| + \left|\langle w_0'', \phi_n\rangle\right| \\ &+ n^2\pi^2 L\left(\max_{0\leq\tau\leq t}(\|w[\tau]\|)\right)K(T,r,p,w)\int_0^t (t-\tau)^{1/r}\exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))d\tau. \end{aligned} \tag{102}$$

Στο σημείο αυτό για $n \in \mathbb{N}$, $r \in (2,4)$, $\alpha \in (\frac{r}{2}, 2)$ και $t \in [0,T]$ παρατηρούμε ότι

$$\int_{\max(0,t-n^{-\alpha})}^{t} (t-\tau)^{1/r} \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))d\tau \leq \frac{n^{-\alpha/r}}{pn^2\pi^2} \left(1 - \exp(\max(0, t-n^{-\alpha}) - t)\right) \leq \frac{n^{-\alpha/r}}{pn^2\pi^2} \tag{103}$$

και

$$\int_{0}^{\max(0,t-n^{-\alpha})} (t-\tau)^{1/r} \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))d\tau$$

$$= \int_{0}^{t-n^{-\alpha}} (t-\tau)^{1/r} \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))d\tau + \int_{t-n^{-\alpha}}^{\max(0,t-n^{-\alpha})} (t-\tau)^{1/r} \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))d\tau. \tag{104}$$

Ισχύουν τα ακόλουθα

$$\int_{0}^{\max(0,t-n^{-\alpha})} (t-\tau)^{1/r} \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))d\tau$$

$$\leq \frac{T^{1/r}}{pn^2\pi^2} \left(\exp(-pn^{2-\alpha}\pi^2) - \exp(-pn^2\pi^2 t)\right) \leq T^{1/r} \frac{\exp(-pn^{2-\alpha}\pi^2)}{pn^2\pi^2}, \tag{105}$$

$$\int_{t-n^{-\alpha}}^{\max(0,t-n^{-\alpha})} (t-\tau)^{1/r} \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))d\tau$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{αν} \quad \max(0, t-n^{-\alpha}) = t-n^{-\alpha} \\ \\ -\int_0^{t-n^{-\alpha}} (t-\tau)^{1/r} \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))d\tau \leq 0 \quad \text{αν} \quad \max(0, t-n^{-\alpha}) = 0 \end{cases} \tag{106}$$

και επομένως

$$\int_0^t (t-\tau)^{1/r} \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))d\tau \leq \frac{n^{-\alpha/r}}{pn^2\pi^2} + T^{1/r} \frac{\exp(-pn^{2-\alpha}\pi^2)}{pn^2\pi^2}. \tag{107}$$

Από το γεγονός ότι

$$n \exp(-pn^{2-\alpha}\pi^2) \leq \left(\frac{1}{pe(2-\alpha)\pi^2}\right)^{1/(2-\alpha)} \tag{108}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (\frac{r}{2}, 2)$, $r \in (2,4)$, το οποίο προκύπτει άμεσα από την ανισότητα $\exp(u) \geq eu$ με επιλογή $u = pn^{2-\alpha}\pi^2(2-\alpha)$, και τη σχέση (107) προκύπτει

$$\int_0^t (t-\tau)^{1/r} \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))d\tau \leq \frac{n^{-\alpha/r}}{pn^2\pi^2} \left(1 + T^{1/r} \left(\frac{1}{p\pi^2 e(2-\alpha)}\right)^{1/(2-\alpha)}\right). \tag{109}$$

Μέσω των σχέσεων (102) και (109) καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα

$$n^2\pi^2|\langle w[t],\phi_n\rangle| \le p^{-1}|\langle \overline{F}(w[t]),\phi_n\rangle| + |\langle w_0'',\phi_n\rangle|$$
$$+n^{-\alpha/r}p^{-1}L\left(\max_{0\le t\le T}(\|w[t]\|_\infty)\right)K(T,r,p,w)\left(1+T^{1/r}\left(\frac{1}{p\pi^2 e(2-\alpha)}\right)^{1/(2-\alpha)}\right). \tag{110}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση θα αποδείξουμε ότι $w[t]\in H_0^2(0,1)$ για όλους τους χρόνους $t\in[0,T]$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι μερικές παράγωγοι w_x, w_{xx} υπάρχουν και επιπλέον ότι w_x, $w_{xx}\in L^2(0,1)$. Κάνοντας χρήση της σχέσης (110) και της ανισότητας Cauchy-Schwarz προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα

$$n^2\pi^2|\langle w[t],\phi_n\rangle|^2 \le n^4\pi^4|\langle w[t],\phi_n\rangle|^2 \le \left(p^{-2}+1+\tilde{K}^2\right)\left(|\langle \overline{F}(w[t]),\phi_n\rangle|^2+|\langle w_0'',\phi_n\rangle|^2+n^{-2\alpha/r}\right), \tag{111}$$

όπου

$$\tilde{K} := p^{-1}L\left(\max_{0\le t\le T}(\|w[t]\|_\infty)\right)K(T,r,p,w)\left(1+T^{1/r}\left(\frac{1}{p\pi^2 e(2-\alpha)}\right)^{1/(2-\alpha)}\right). \tag{112}$$

Από την παραπάνω σχέση και λόγω του ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha/r} = l\in\mathbb{R},\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\langle w_0'',\phi_n\rangle|^2 = \left\|w_0''\right\|_2^2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\langle \overline{F}(w[t]),\phi_n\rangle|^2 = \left\|\overline{F}(w[t])\right\|_2^2, \tag{113}$$

τα οποία ισχύουν αφού $w_0''\in L^2(0,1)$, $\frac{2\alpha}{r}>1$ και $\overline{F}(w[t])\in L^2(0,1)$, συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4\pi^4|\langle w[t],\phi_n\rangle|^2 < +\infty. \tag{114}$$

Επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\pi\langle w[t],\phi_n\rangle\psi_n = w_x[t] \tag{115}$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-n^2\pi^2\langle w[t],\phi_n\rangle\right)\phi_n = w_{xx}[t], \tag{116}$$

υπό την έννοια της σύγκλισης στο χώρο $L^2(0,1)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $w[t]\in H_0^2(0,1)$ για όλους τους χρόνους $t\in[0,T]$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $w\in C^1((0,T];L^2(0,1))$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$\alpha_n(t) := p\exp(-pn^2\pi^2 t)\langle w_0'',\phi_n\rangle + \langle \overline{F}(w[t]),\phi_n\rangle - pn^2\pi^2\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\langle \overline{F}(w[\tau]),\phi_n\rangle d\tau \tag{117}$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$\alpha_n(t) := \exp(-pn^2\pi^2 t)\langle w_0'',\phi_n\rangle + \exp(-pn^2\pi^2 t)\langle \overline{F}(w[t]),\phi_n\rangle$$

$$-pn^2\pi^2 \int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\langle \overline{F}(w[\tau]) - \overline{F}(w[t]), \phi_n\rangle d\tau. \tag{118}$$

Παρατηρούμε ότι με χρήση της ανισότητας

$$pn^2\pi^2 t \exp(-pn^2\pi^2 t) \leq e^{-1}$$

αληθεύουν τα ακόλουθα

$$p\exp(-pn^2\pi^2 t)|\langle w_0'', \phi_n\rangle| \leq p|\langle w_0'', \phi_n\rangle|, \tag{119}$$

$$\exp(-pn^2\pi^2 t)|\langle \overline{F}(w[t]), \phi_n\rangle| \leq \frac{e^{-1}}{pn^2\pi^2 t_0}\left\|\overline{F}(w[t])\right\|_2 \|\phi_n\|_2 \leq \frac{e^{-1}}{pn^2\pi^2 t_0}\left\|\overline{F}(w[\tau_\xi])\right\|_2 \tag{120}$$

όπου $\tau_\xi \in [t_0, T]$ τέτοιο ώστε

$$\left\|\overline{F}(w[\tau_\xi])\right\|_2 = \max_{t_0 \leq t \leq T}\left(\left\|\overline{F}(w[t])\right\|_2\right),$$

και

$$\begin{aligned}
&pn^2\pi^2 \int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left|\langle \overline{F}(w[\tau]) - \overline{F}(w[t]), \phi_n\rangle\right| d\tau \\
&\leq pn^2\pi^2 \|\phi_n\|_2 \int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left\|\overline{F}(w[\tau]) - \overline{F}(w[t])\right\|_2 d\tau. \\
&\leq pn^2\pi^2 \int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\left\|\overline{F}(w[\tau]) - \overline{F}(w[t])\right\|_\infty d\tau \\
&\leq pn^2\pi^2 L\left(\max_{t_0\leq\tau\leq t}\|w[\tau]\|_\infty\right)\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\|w[\tau]-w[t]\|_\infty d\tau \\
&\leq pn^2\pi^2 L\left(\max_{t_0\leq\tau\leq t}\|w[\tau]\|_\infty\right)K(T,r,p,w)\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))|\tau-t|^{1/r} d\tau \\
&\leq n^{-\alpha/r}\overline{M}
\end{aligned} \tag{121}$$

με

$$\overline{M} = L\left(\max_{t_0\leq\tau\leq T}\|w[\tau]\|_\infty\right)K(T,r,p,w)\left(1 + T^{1/r}\left(\frac{1}{p\pi^2 e(2-\alpha)}\right)^{1/(2-\alpha)}\right)$$

όπου στην παραπάνω εκτίμηση έγινε χρήση των σχέσεων (36) και (109). Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι η ακόλουθη ανισότητα είναι αληθής

$$|\alpha_n(t)| \leq p|\langle w_0'', \phi_n\rangle| + \frac{e^{-1}}{pn^2\pi^2 t_0}\left\|\overline{F}(w[\tau_\xi])\right\|_2 + n^{-\alpha/r}\overline{M} \tag{122}$$

από την οποία έπεται ότι

$$|\alpha_n(t)|^2 \leq \left(p^2 + \left\|\overline{F}(w[\tau_\xi])\right\|_2^2 + \overline{M}^2\right)\left(|\langle w_0'', \phi_n\rangle|^2 + \frac{e^{-2}}{p^2n^4\pi^4 t_0^2} + n^{-2\alpha/r}\right). \tag{123}$$

Λόγω του ότι w_0'', $\overline{F}(w[\tau_\xi]) \in L^2(0,1)$ και $\frac{2\alpha}{r} > 1$ από την παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n(t)|^2 < +\infty. \tag{124}$$

Επομένως, με όμοια επιχειρήματα όπως στην περίπτωση των w_x και w_{xx}, η παράγωγος w_t υπάρχει και δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} w_t[t] = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[& p\exp(-pn^2\pi^2 t)\langle w_0'', \phi_n\rangle + \exp(-pn^2\pi^2 t)\langle \overline{F}(w[t]), \phi_n\rangle \\ & -pn^2\pi^2 \int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau))\langle \overline{F}(w[\tau]) - \overline{F}(w[t]), \phi_n\rangle d\tau \Big] \phi_n \end{aligned} \tag{125}$$

για όλους τους χρόνους $t \in [0,T]$ υπό την έννοια της σύγκλισης στο χώρο $L^2(0,1)$. Λόγω των σχέσεων (116) και (125) είναι άμεσο ότι η εξίσωση

$$w_t[t] = pw_{xx}[t] + \overline{F}(w[t]) \tag{126}$$

ικανοποιείται για $t \in (0,T]$. Μένει να αποδείξουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\|w_x[t]\|_2^2 = -2p\|w_{xx}[t]\|_2^2 - 2\langle \overline{F}(w[t]), w_{xx}[t]\rangle \tag{127}$$

για $t \in [0,T]$. Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt}|\langle w_x[t], \phi_n\rangle|^2 = -2p\sum_{n=1}^{\infty} n^4\pi^4 |\langle w[t], \phi_n\rangle|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2 \langle \overline{F}(w[t]), \phi_n\rangle\langle w[t], \phi_n\rangle. \tag{128}$$

Μέσω της (126) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle w_x[t], \phi_n\rangle^2 &= n^2\pi^2 \frac{d}{dt}\langle w[t], \phi_n\rangle^2 = 2n^2\pi^2\langle w[t], \phi_n\rangle\langle w_t[t], \phi_n\rangle \\ &= 2pn^2\pi^2\langle w[t], \phi_n\rangle\langle w_{xx}[t], \phi_n\rangle + 2n^2\pi^2\langle w[t], \phi_n\rangle\langle \overline{F}(w[t]), \phi_n\rangle \\ &= -2pn^4\pi^4\langle w[t], \phi_n\rangle^2 + 2n^2\pi^2\langle w[t], \phi_n\rangle\langle \overline{F}(w[t]), \phi_n\rangle \end{aligned} \tag{129}$$

όπου παραπάνω έγινε χρήση της σχέσης

$$\langle w_{xx}[t], \phi_n\rangle = -n^2\pi^2\langle w[t], \phi_n\rangle$$

και του κανόνα του Leibniz (Θεώρημα 10.1 Παράρτημα) για τη σχέση

$$\frac{d}{dt}\langle w[t], \phi_n\rangle = \frac{d}{dt}\int_0^1 w(t,x)\phi_n(x)dx = \int_0^1 w_t(t,x)\phi_n(x)dx = \langle w_t[t], \phi_n\rangle. \tag{130}$$

Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη δείχνοντας ότι η σειρά (128) ομοιόμορφα. Λόγω της σχέσης (110) ισχύουν τα ακόλουθα

$$2pn^4\pi^4\langle w[t], \phi_n\rangle^2 \le 2p\left(p^{-2} + 1 + \tilde{K}^2\right)\left(\left|\langle \overline{F}(w[\tau_\xi]), \phi_n\rangle\right|^2 + |\langle w_0'', \phi_n\rangle|^2 + n^{-2\alpha/r}\right) \tag{131}$$

και

$$2n^2\pi^2\langle w[t],\phi_n\rangle\langle\overline{F}(w[t]),\phi_n\rangle \leq n^4\pi^4\langle w[t],\phi_n\rangle^2+\langle\overline{F}(w[t]),\phi_n\rangle^2$$
$$\leq \left(p^{-2}+1+\tilde{K}^2\right)\left(\left|\langle\overline{F}(w[\tau_\xi]),\phi_n\rangle\right|^2+|\langle\, w_0'',\phi_n\rangle|^2+n^{-2\alpha/r}\right)+\left|\langle\overline{F}(w[\tau_\xi]),\phi_n\rangle\right|^2 \tag{132}$$

όπου $\tau_\xi\in[0,T]$ τέτοιο ώστε

$$\left|\langle\overline{F}(w[\tau_\xi]),\phi_n\rangle\right| = \max_{0\leq t\leq T}\left|\langle\overline{F}(w[t]),\phi_n\rangle\right|.$$

Λόγω του ότι w_0'', $\overline{F}(w[t])\in L^2(0,1)$ οι παραπάνω ανισότητες εξασφαλίζουν με εφαρμογή του κριτηρίου του Weierstrass την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς (128). Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Λήμμα 3. *Έστω $p > 0$ μία θετική σταθερά, και $\overline{F} : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ μία συνεχής απεικόνιση με $\overline{F}(0) = 0$, για την οποία υπάρχει μία αύξουσα συνάρτηση $L : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ τέτοια ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη (36) για όλες τις συναρτήσεις $u, v \in C^0([0,1])$. Τότε για κάθε $w_0 \in H_0^2(0,1)$ υπάρχει χρόνος $t_{max}(w_0) \in (0, +\infty]$ και μία απεικόνιση $w \in C^0([0, t_{max}(w_0)) \times [0,1])$ τέτοια ώστε η εξίσωση (43) να ικανοποιείται για όλα τα ζεύγη $(t,x) \in [0, t_{max}(w_0)) \times [0,1]$. Επιπλέον, αν $t_{max}(w_0) < +\infty$, τότε*

$$\lim_{t \to t_{max}^-(w_0)} (\|w[t]\|_\infty) = +\infty. \tag{133}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$\Lambda = \left\{ T > 0 : \exists w \in C^0([0,T] \times [0,1]) \text{ με } w(t,0) = 0 \text{ και } w(t,1) = \langle \overline{k}, w[t] \rangle \text{ που ικανοποιεί την (43)} \right\}.$$

Λόγω του Λήμματος 1 για $w_0 \in H_0^2(0,1)$, $M > 0$ και χρόνο $T > 0$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (42) υπάρχει μία απεικόνιση $w \in C^0([0,T] \times [0,1])$ τέτοια ώστε

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-pn^2\pi^2 t)\langle w_0, \phi_n \rangle \phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau)) \langle \overline{F}(w[\tau]), \phi_n \rangle d\tau \right) \phi_n(x)$$

με $\phi_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$, $n \in \mathbb{N}$. Από την παραπάνω σχέση είναι άμεσο ότι

$$w(t,0) = w(t,1) = 0$$

και επομένως το σύνολο Λ είναι μη κενό. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε $t_{max}(w_0) = \sup \Lambda$. Υποθέτουμε ότι $t_{max}(w_0) < +\infty$. Λόγω του ορισμού του χρόνου $t_{max}(w_0)$ και του Λήμματος 1 για κάθε χρόνο $T \in (0, t_{max}(w_0))$ υπάρχει $w \in C^0([0,T] \times [0,1])$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση (43). Έστω $u \in C^0([0,T^{'}] \times [0,1])$ μία λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} u(t,x) = \; & 2\sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp(-pn^2\pi^2 t) \int_0^1 u_0(s)\sin(n\pi s) ds \right] \sin(n\pi x) \\ & + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-\tau)) \left(\int_0^1 (\overline{F}(u[\tau]))(s) \sin(n\pi s) ds \right) d\tau \right] \sin(n\pi x) \end{aligned} \tag{134}$$

με $u_0 = w[T]$. Λόγω του Λήμματος 2 ισχύει ότι $w[T] \in H_0^2(0,1)$ δεδομένου ότι για κάθε λύση $w \in C^0([0,T] \times [0,1])$ της εξίσωσης (43) με $w_0 \in H_0^2(0,1)$ ισχύει ότι $w[t] \in H_0^2(0,1)$ για κάθε χρόνο $t \in [0,T]$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι ο χρόνος $T^{'} > 0$ ικανοποιεί τη χρονική συνθήκη

$$T^{'} \leq \frac{9p^2\pi^4}{8\sqrt{2}} \left(\left(\max(2, \sqrt{2}\,\|w[T]\|_\infty + 1) \right) L \left(\sqrt{2}\,\|w[T]\|_\infty + 1 \right) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4/3} \right)^{-3} \tag{135}$$

η οποία λόγω του λήμματος 1 εξασφαλίζει την ύπαρξης της λύσης $u \in C^0([0,T^{'}] \times [0,1])$. Ορίζουμε την ακόλουθη απεικόνιση

$$\tilde{w}[t] := \begin{cases} w[t] & \text{αν} \quad t \in [0,T] \\ u[t-T] & \text{αν} \quad t \in (T, T+T^{'}] \end{cases}. \tag{136}$$

Ισχύει ότι

$$\lim_{t\to T^-} w[t] = w[T] = u_0 = \lim_{s\to 0^+} u[s] = \lim_{t\to T^+} u[t-T] \tag{137}$$

αφού $w \in C^0([0,T]\times[0,1])$ και $u \in C^0([0,T^{'}]\times[0,1])$, γεγονός που εξασφαλίζει ότι $\tilde{w} \in C^0([0,T+T^{'}]\times[0,1])$. Επιπλέον η $\tilde{w}$ είναι λύση της (43) δεδομένου ότι οι w, u είναι λύσεις της (43) στα διαστήματα $[0,T]$ και $[0,T^{'}]$ αντίστοιχα. Από το παραπάνω συμπέρασμα και τον ορισμό του χρόνου $t_{max}(w_0)$ έπεται ότι

$$T + T^{'} \le t_{max}(w_0) \tag{138}$$

για κάθε χρόνο $T^{'}$ που ικανοποιεί τη χρονική συνθήκη (135). Επομένως

$$T + \frac{9p^2\pi^4}{8\sqrt{2}}\left(\left(\max(2,\sqrt{2}\,\|w[T]\|_\infty + 1)\right) L\left(\sqrt{2}\,\|w[T]\|_\infty + 1\right)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4/3}\right)^{-3} \le t_{max}(w_0). \tag{139}$$

Από την παραπάνω σχέση ισοδύναμα έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{l}\sqrt[3]{\frac{m}{t_{max}(w_0)-T}} &\le \max\left(2,\sqrt{2}\,\|w[T]\|_\infty + 1\right) L\left(\sqrt{2}\,\|w[T]\|_\infty + 1\right)\\ &\le \left(2+\left(\sqrt{2}\,\|w[T]\|_\infty + 1\right)\right) L\left(\sqrt{2}\,\|w[T]\|_\infty + 1\right)\end{aligned} \tag{140}$$

με $l = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4/3}$ και $m = \frac{9p^2\pi^4}{8\sqrt{2}}$, όπου παραπάνω έγινε χρήση της ανισότητας $\max(a,b) \le a+b$ για $a=2$ και $b = \sqrt{2}\,\|w[T]\|_\infty + 1$. Εφόσον

$$\lim_{T\to t_{max}^-(w_0)}\left(\frac{1}{l}\sqrt[3]{\frac{m}{t_{max}(w_0)-T}}\right) = +\infty \tag{141}$$

έπεται ότι

$$\lim_{T\to t_{max}^-(w_0)}\left(\tilde{L}\left(\sqrt{2}\,\|w[T]\|_\infty + 1\right)\right) = +\infty \tag{142}$$

όπου $\tilde{L}(u) = (2+u)L(u)$, $u \ge 0$. Λόγω του ότι η συνάρτηση $\tilde{L} : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ είναι γνήσια αύξουσα και παίρνει τιμές στο μη φραγμένο σύνολο $(0,+\infty)$ από τη σχέση (142) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{T\to t_{max}^-(w_0)}\left(\sqrt{2}\,\|w[T]\|_\infty + 1\right) = +\infty \tag{143}$$

και επομένως

$$\lim_{T\to t_{max}^-(w_0)}\left(\|w[T]\|_\infty\right) = +\infty$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξή μας. □

Θεώρημα 3. *Έστω $p > 0$ μία θετική σταθερά, και $\overline{F} : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ μία συνεχής απεικόνιση με $\overline{F}(0) = 0$, για την οποία υπάρχει μία αύξουσα συνάρτηση $L : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ τέτοια ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη (36) για όλες τις συναρτήσεις $u, v \in C^0([0,1])$. Τότε για κάθε $w_0 \in H_0^2(0,1)$ υπάρχει χρόνος $t_{max}(w_0) \in (0, +\infty]$ και μία μοναδική απεικόνιση $w \in C^0([0, t_{max}(w_0)) \times [0,1]) \cap C^1((0, t_{max}(w_0)); L^2(0,1))$ με $w[0] = w_0$, $w[t] \in H_0^2(0,1)$ για όλους τους χρόνους $t \in [0, t_{max}(w_0))$, για την οποία η απεικόνιση $t \to \|w_x[t]\|_2^2$ είναι κλάσεως C^1 στο διάστημα $[0, t_{max}(w_0))$ και για την οποία ικανοποιούνται οι ακόλουθες εξισώσεις*

$$w_t[t] = pw_{xx}[t] + \overline{F}(w[t]) \quad \text{για } t \in (0, t_{max}(w_0)), \tag{144}$$

$$\frac{d}{dt} \|w_x[t]\|_2^2 = -2p \|w_{xx}[t]\|_2^2 - 2\langle \overline{F}(w[t]), w_{xx}[t] \rangle \quad \text{για } t \in [0, t_{max}(w_0)). \tag{145}$$

Επιπλέον, αν $t_{max}(w_0) < +\infty$, τότε

$$\lim_{t \to t_{max}^-(w_0)} (\|w[t]\|_\infty) = +\infty.$$

Απόδειξη. Έστω $w_0 \in H_0^2(0,1)$. Με βάση το Λήμμα 3 υπάρχει χρόνος $t_{max}(w_0) \in (0, +\infty]$ και μία απεικόνιση $w \in C^0([0, t_{max}(w_0)) \times [0,1])$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση (43) για όλα τα ζεύγη $(t, x) \in [0, t_{max}(w_0)) \times [0,1]$ και για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{t \to t_{max}^-(w_0)} (\|w[t]\|_\infty) = +\infty.$$

στην περίπτωση που $t_{max}(w_0) < +\infty$. Λόγω του Λήμματος 2 για την παραπάνω απεικόνιση θα ισχύει ότι $w \in C^1((0, t_{max}(w_0)); L^2(0,1))$ με $w[t] \in H_0^2(0,1)$ για $t \in [0, t_{max}(w_0))$ και επιπλέον η w θα ικανοποιεί τις σχέσεις (144) και (145) με την απεικόνιση $t \to \|w_x[t]\|_2^2$ να είναι κλάσεως C^1 στο διάστημα $[0, t_{max}(w_0))$. Θα αποδείξουμε ότι η w είναι μοναδική. Για δεδομένο χρόνο $T > 0$ υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο λύσεις w, $u \in C^0([0,T] \times [0,1]) \cap C^1((0,T]; L^2(0,1))$ με $w[0] = u[0] = w_0$, $w[t]$, $u[t] \in H_0^2(0,1)$ για όλους τους χρόνους $t \in [0,T]$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις

$$w_t[t] = pw_{xx}[t] + \overline{F}(w[t]) \tag{146}$$

και

$$u_t[t] = pu_{xx}[t] + \overline{F}(u[t]) \tag{147}$$

για $t \in [0,T]$. Λόγω των υποθέσεων μας οι απεικονίσεις w, u ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} w(t,x) = \; & 2\sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp(-pn^2\pi^2(t-t_0)) \int_0^1 (w[t_0])(s) \sin(n\pi s) ds \right] \sin(n\pi x) \\ & + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{t-t_0} \exp(-pn^2\pi^2(t-t_0-\tau)) \left(\int_0^1 (\overline{F}(w[t_0+\tau]))(s) \sin(n\pi s) ds \right) d\tau \right] \sin(n\pi x) \end{aligned} \tag{148}$$

και

$$u(t,x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp(-pn^2\pi^2(t-t_0))\int_0^1 (u[t_0])(s)\sin(n\pi s)ds\right]\sin(n\pi x)$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{t-t_0}\exp(-pn^2\pi^2(t-t_0-\tau))\left(\int_0^1(\overline{F}(u[t_0+\tau]))(s)\sin(n\pi s)ds\right)d\tau\right]\sin(n\pi x) \tag{149}$$

για όλα τα ζεύγη $(t_0,x)\in[0,T]\times[0,1]$ και $t\in[t_0,T]$. Στο σημείο αυτό ορίζουμε

$$M := \max\left(\max_{0\leq t\leq T}(\|w[t]\|_\infty), \max_{0\leq t\leq T}(\|u[t]\|_\infty)\right) \tag{150}$$

και

$$r = \frac{9p^2\pi^4}{4}\left(\sqrt{2}L\left((1+\sqrt{2})M\right)\sum_{n=1}^{\infty}n^{-4/3}\left(\max\left(2,\left(\left(1+\sqrt{2}\right)M\right)M^{-1}\right)\right)\right)^{-3}. \tag{151}$$

Από την υπόθεση ότι $w[0]=u[0]=w_0$ έπεται μέσω του Λήμματος 1 ότι $w[t]=u[t]$ στο διάστημα $[0,\min(r,T)]$. Αν $r\geq T$ τότε $\min(r,T)=T$ και επομένως $w[t]=u[t]$ για κάθε $t\in[0,T]$. Αν $r<T$ τότε $\min(r,T)=r$ και επομένως $w[t]=u[t]$ για κάθε $t\in[0,r]$. Στην περίπτωση αυτή δεδομένου ότι $w[r]=u[r]$ εφαρμόζοντας το Λήμμα 1 στις σχέσεις (148) και (149) για $t_0=r$ προκύπτει ότι $w[t]=u[t]$ για κάθε $t\in[0,\min(2r,T)]$. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $w[t]=u[t]$ για κάθε $t\in[0,\min(nr,T)]$ με $n\in\mathbb{N}$. Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη δείχνοντας ότι υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $T\leq n_0 r$. Έστω ότι $T>nr$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε ισχύει ότι

$$n<\frac{T}{r} \tag{152}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$ το οποίο είναι άτοπο αφού το σύνολο $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $w[t]=u[t]$ για κάθε $t\in[0,T]$. Με βάση τα παραπάνω και από το γεγονός ότι χρόνος $T>0$ είναι αυθαίρετος καταλήγουμε ότι η απεικόνιση $w\in C^0([0,t_{max}(w_0))\times[0,1])\cap C^1((0,t_{max}(w_0));L^2(0,1))$ με $w[0]=w_0$, $w[t]\in H_0^2(0,1)$ για $t\in[0,t_{max}(w_0)$ η οποία ικανοποιεί την (144) είναι μοναδική. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Στο σημείο αυτό είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2 το οποίο θα εξασφαλίσει τοπικά την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λυσης του συστήματος (23), (24).

6 Απόδειξη Θεωρήματος Ύπαρξης και Μοναδικότητας

Απόδειξη του Θεωρήματος 2. Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό τελεστή Volterra $K : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ ο οποίος ορίζεται από τη σχέση

$$(Ku)(x) = u(x) - \int_0^x \overline{k}(s)u(s)ds$$

για όλα τα $u \in L^2(0,1)$ και για συνάρτηση $\overline{k} \in C^2([0,1])$ με $\overline{k}(0) = 0$. Θα αποδείξουμε ότι ο παραπάνω τελεστής είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τελεστή $K^{-1} : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\left(K^{-1}w\right)(x) = w(x) + \int_0^x \overline{k}(\tau) \exp\left(\int_\tau^x \overline{k}(s)ds\right) w(\tau)d\tau \tag{153}$$

για $w \in L^2(0,1)$ και $x \in [0,1]$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\left(KK^{-1}w\right)(x) = w(x)$ για κάθε $w \in L^2(0,1)$ και $\left(K^{-1}Ku\right)(x) = u(x)$ για κάθε $u \in L^2(0,1)$. Με βάση τις σχέσεις (40) και (153) έχουμε ότι

$$\left(KK^{-1}w\right)(x) = \left(K^{-1}w\right)(x) - \int_0^x \overline{k}(s)\left(K^{-1}w\right)(s)ds$$

$$= w(x) + \int_0^x \overline{k}(\tau) \exp\left(\int_\tau^x \overline{k}(s)ds\right) w(\tau)d\tau - \int_0^x \overline{k}(s)\left[w(s) + \int_0^s \overline{k}(\tau)\exp\left(\int_\tau^s \overline{k}(\alpha)d\alpha\right) w(\tau)d\tau\right] ds. \tag{154}$$

Ορίζουμε την απεικόνιση $s \to \tilde{k}(s)$ με

$$\tilde{k}(s) := \int_0^s \overline{k}(\tau)\exp\left(\int_\tau^s \overline{k}(\alpha)d\alpha\right) w(\tau)d\tau \tag{155}$$

για $s \in [0,x]$. Με χρήση του κανόνα του Leibniz (Θεώρημα 10.1 Παράρτημα) έπεται ότι

$$\frac{d\tilde{k}}{ds} = \overline{k}(s)w(s) + \overline{k}(s)\int_0^s \overline{k}(\tau)\exp\left(\int_\tau^s \overline{k}(\alpha)d\alpha\right) w(\tau)d\tau \tag{156}$$

με βάση το οποίο προκύπτει

$$\left(KK^{-1}w\right)(x) = w(x) + \tilde{k}(x) - \int_0^x \frac{d\tilde{k}}{ds}ds = w(x). \tag{157}$$

Επιπλέον

$$\left(K^{-1}Ku\right)(x) = (Ku)(x) + \int_0^x \overline{k}(\tau)\exp\left(\int_\tau^x \overline{k}(s)ds\right)(Ku)(\tau)d\tau$$

$$= u(x) - \int_0^x \overline{k}(s)u(s)ds + \int_0^x \overline{k}(\tau)\exp\left(\int_\tau^x \overline{k}(\alpha)d\alpha\right)\left[u(\tau) - \int_0^\tau \overline{k}(s)u(s)ds\right]d\tau \tag{158}$$

Ορίζουμε την απεικόνιση $\tau \to \tilde{h}(\tau)$ με

$$\tilde{h}(\tau) = \int_0^\tau \overline{k}(s)u(s)ds \tag{159}$$

για $\tau \in [0,x]$ και έχουμε

$$\left(K^{-1}Ku\right)(x) = u(x) - \tilde{h}(x) + \int_0^x \frac{d}{d\tau}\left(\tilde{h}(\tau)\exp\left(\int_\tau^x \overline{k}(\alpha)d\alpha\right)\right)d\tau = u(x). \tag{160}$$

Επομένως ο $K : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ είναι αντιστρέψιμος. Θεωρούμε επιπλέον το τελεστή $G : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$

$$(Gu)(x) = 2\overline{k}'(x)u(x) - \int_0^x \overline{k}''(s)u(s)ds$$

για $u \in L^2(0,1)$ και $\overline{k} \in C^2([0,1])$ με $\overline{k}(0) = 0$. Θα αποδείξουμε ότι ο μετασχηματισμός $w[t] = Ku[t]$ απεικονίζει τις λύσεις του συστήματος

$$u_t[t] = pu_{xx}[t] + \overline{F}(u[t]), \quad \text{για } t \in (0, t_{max}(u_0)),$$

με

$$\begin{aligned} u(t,0) &= 0, \\ u(t,1) &= \langle \overline{k}, u[t]\rangle, \quad \text{για } t \in [0, t_{max}(u_0)), \end{aligned}$$

και αρχική συνθήκη $u[0] = u_0$ στις λύσεις του συστήματος

$$w_t[t] = pw_{xx}[t] + pGK^{-1}w[t] + K\overline{F}(K^{-1}w[t]), \tag{161}$$

$$w(t,0) = w(t,1) = 0. \tag{162}$$

Με χρήση των ορισμών των τελεστών K, K^{-1}, G και του μετασχηματισμού $w[t] = Ku[t]$ έχουμε ότι

$$pw_{xx}[t] + pGK^{-1}w[t] + K\overline{F}(K^{-1}w[t])$$

$$= pu_{xx}[t] - p\overline{k}'(x)u(x) - p\overline{k}(x)u'(x) + p(Gu)(x) + (K\overline{F}u)(x)$$

$$= pu_{xx}[t] + p\overline{k}'(x)u(x) - p\overline{k}(x)u'(x) - p\int_0^x \overline{k}''(s)u(s)ds + \left(\overline{F}(u)\right)(x) - \int_0^x \overline{k}(s)\left(\overline{F}(u)\right)(s)ds$$

$$= u_t[t] - p\overline{k}(x)u'(x) + p\int_0^x \overline{k}'(s)u'(s)ds - \int_0^x \overline{k}(s)\left(\overline{F}(u)\right)(s)ds$$

$$= u_t[t] - \int_0^x \overline{k}(s)\left[pu''(s) + \left(\overline{F}(u)\right)(s)\right]ds = u_t[t] - \int_0^x \overline{k}(s)u_t(s)ds = Ku_t[t] = w_t[t] \tag{163}$$

με

$$w(t,0) = (Ku[t])(0) = u(0) = 0,$$

$$w(t,1) = u(1) - \int_0^1 \overline{k}(s)u(s)ds = 0.$$

και αρχική συνθήκη $w[0] = Ku_0$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός $u[t] = K^{-1}w[t]$ απεικονίζει τις λύσεις του συστήματος (161), (162) στις λύσεις του συστήματος (37), (38). Με χρήση του κανόνα του Leibniz ισχύουν τα ακόλουθα

$$u_t(x) = w_t(x) + \int_0^x \overline{k}(\tau) \exp\left(\int_\tau^x \overline{k}(s)ds\right) w_t(\tau)d\tau, \tag{164}$$

$$\begin{aligned} u'(x) &= w'(x) + \overline{k}(x)\left(w(x) + \int_0^x \overline{k}(\tau)\exp\left(\int_\tau^x \overline{k}(s)ds\right) w_t(\tau)d\tau\right) \\ &= w'(x) + \overline{k}(x)u(x), \end{aligned} \tag{165}$$

$$u''(x) = w''(x) + \overline{k}'(x)u(x) + \overline{k}(x)u'(x) \tag{166}$$

$$\begin{aligned} pu''(x) + (\overline{F}(u))(x) &= pw''(x) + p\overline{k}'(x)u(x) + p\overline{k}(x)u'(x) + (\overline{F}(u))(x) \\ &= w_t(x) - p(Gu)(x) - (K\overline{F}(u))(x) + p\overline{k}'(x)u(x) + p\overline{k}(x)u'(x) + (\overline{F}(u))(x) \\ &= w_t(x) - p\overline{k}'(x)u(x) + p\int_0^x \overline{k}''(s)u(s)ds + \int_0^x \overline{k}(s)(\overline{F}(u))(s)ds + p\overline{k}(x)u'(x) \\ &= w_t(x) + p\int_0^x \overline{k}(s)\left(u''(s) + (\overline{F}(u))(s)\right)ds = w_t(x) + p\int_0^x \overline{k}(s)u_t(s)ds. \end{aligned} \tag{167}$$

Λόγω της αντιστρεψιμότητας του τελεστή K με χρήση της σχέσης (40) και του μετασχηματισμού $u = K^{-1}w$ παρατηρούμε ότι

$$w(x) = (KK^{-1}w)(x) = (Ku)(x) = u(x) - \int_0^x \overline{k}(s)u(s)ds \tag{168}$$

από την οποία με παραγώγιση ως προς το χρόνο t λαμβάνουμε

$$u_t(x) = w_t(x) + \int_0^x \overline{k}(s)u_t(s)ds. \tag{169}$$

Επιπλέον $u(0) = w(0) = 0$ και $u(1) = \langle \overline{k}, u\rangle$. Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι πράγματι η απεικόνιση u ικανοποιεί το σύστημα (37), (38). Στο σημείο αυτό ορίζουμε τον μη γραμμικό τελεστή $\tilde{F} : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ με

$$\tilde{F}(w) = pGK^{-1}w + K\overline{F}(K^{-1}w) \tag{170}$$

για όλες τις συναρτήσεις $w \in C^0[0,1]$. Θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $\tilde{F}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (36). Έστω w_1, $w_2 \in C^0[0,1]$. Έχουμε ότι

$$\left|(\tilde{F}(w_1))(x) - (\tilde{F}(w_2))(x)\right| \leq \left|pGK^{-1}w_1 - pGK^{-1}w_2\right| + \left|K\overline{F}(K^{-1}w_1) - K\overline{F}(K^{-1}w_2)\right|. \tag{171}$$

Λόγω της συνέχειας των τελεστών K, K^{-1} και G ισχύουν τα ακόλουθα

$$p\left\|GK^{-1}w_1 - GK^{-1}w_2\right\|_\infty \leq p\left\|G\right\|_\infty \left\|K^{-1}w_1 - K^{-1}w_2\right\|_\infty$$

$$\leq p \|G\|_\infty \left\|K^{-1}\right\|_\infty \|w_1 - w_2\|_\infty , \tag{172}$$

$$\begin{aligned} \left\|K\overline{F}(K^{-1}w_1) - K\overline{F}(K^{-1}w_2)\right\|_\infty &\leq \|K\|_\infty \left\|\overline{F}(K^{-1}w_1) - \overline{F}(K^{-1}w_2)\right\|_\infty \\ &\leq \|K\|_\infty L\left(\max\left(\left\|K^{-1}w_1\right\|_\infty, \left\|K^{-1}w_2\right\|_\infty\right)\right) \left\|K^{-1}w_1 - K^{-1}w_2\right\|_\infty \\ &\leq \|K\|_\infty L\left(\max\left(\left\|K^{-1}w_1\right\|_\infty, \left\|K^{-1}w_2\right\|_\infty\right)\right) \left\|K^{-1}\right\|_\infty \|w_1 - w_2\|_\infty . \end{aligned} \tag{173}$$

όπου

$$\|G\|_\infty = \sup\{\|Gv\|_\infty : v \in L^2(0,1), \|v\|_\infty = 1\},$$
$$\|K\|_\infty = \sup\{\|Kv\|_\infty : v \in L^2(0,1), \|v\|_\infty = 1\}$$

και

$$\left\|K^{-1}\right\|_\infty = \sup\{\left\|K^{-1}v\right\|_\infty : v \in L^2(0,1), \|v\|_\infty = 1\}.$$

Επομένως

$$\left\|\tilde{F}(w_1) - \tilde{F}(w_2)\right\|_\infty \leq \tilde{L}\left(\|K\|_\infty, \left\|K^{-1}\right\|_\infty, \|G\|_\infty, L\left(\max\left(\left\|K^{-1}w_1\right\|_\infty, \left\|K^{-1}w_2\right\|_\infty\right)\right)\right) \|w_1 - w_2\|_\infty \tag{174}$$

με

$$\tilde{L} = p \|G\|_\infty \left\|K^{-1}\right\|_\infty + \|K\|_\infty \left\|K^{-1}\right\|_\infty L\left(\max\left(\left\|K^{-1}w_1\right\|_\infty, \left\|K^{-1}w_2\right\|_\infty\right)\right). \tag{175}$$

Είναι άμεσο ότι η απεικόνιση $\tilde{L} : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ είναι αύξουσα λόγω του ότι η $L : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ είναι αύξουσα. Λόγω του ότι η $\tilde{F}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδική απεικόνιση $w \in C^0([0, t_{max}(w_0)) \times [0,1]) \cap C^1((0, t_{max}(w_0)); L^2(0,1))$ που να ικανοποιεί το σύστημα (161) και (162) με $t_{max}(w_0) \in (0, +\infty]$. Θα δείξουμε ότι το σύστημα (37), (38) με αρχική συνθήκη $u[0] = u_0$ έχει μοναδική λύση. Υποθέτουμε ότι u_1 και u_2 είναι δύο λύσεις του συστήματος (37), (38) με $u_1 \neq u_2$. Τότε οι απεικονίσεις $w_1 = Ku_1$ και $w_2 = Ku_2$ θα είναι λύσεις του συστήματος (161), (162). Αναγκαστικά θα ισχύει $w_1 = w_2$ αφού το σύστημα (37), (38) έχει μοναδική λύση. Όμως λόγω του ότι ο τελεστής K είναι αντιστρέψιμος θα ισχύει

$$u_1 = K^{-1}Ku_1 = K^{-1}Ku_2 = u_2 \tag{176}$$

το οποίο οδηγεί σε αντίφαση. Επομένως υπάρχει μοναδική λύση u του (37), (38) η οποία ορίζεται τοπικά. Τέλος λόγω του ότι ο τελεστής $\tilde{F}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (36) με σταθερά $\tilde{L}$ που ορίζεται από τη σχέση (175) με βάση το θεώρημα 3 έπεται ότι

$$\frac{d}{dt} \|w_x[t]\|_2^2 = -2p \|w_{xx}[t]\|_2^2 - 2\langle \tilde{F}(w[t]), w_{xx}[t] \rangle \quad \text{για } t \in [0, t_{max}(w_0)).$$

από την οποία με βάση τις σχέσεις $w = Ku$, (40) και τον ορισμό (170) του τελεστή $\tilde{F}$ έπεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\|u_x[t] - \overline{k}u[t]\right\|_2^2 &= -2p\left\|u_{xx}[t] - \overline{k}u_x[t] - \overline{k}'u[t]\right\|_2^2 \\ &\quad - 2\langle K\overline{F}(u[t]) + pGu[t], u_{xx}[t] - \overline{k}u_x[t] - \overline{k}'u[t]\rangle \end{aligned} \tag{177}$$

για $t \in [0, t_{max}(u_0))$. $\square$

7 Προκαταρκτικές προτάσεις

Πρόταση 1. (Επέκταση της ανισότητας Wirtinger) *Για κάθε $u \in H_0^1(0,1)$ και για κάθε μη μηδενική συνάρτηση $k \in L^2(0,1)$ η ακόλουθη ανισότητα ικανοποιείται για κάθε $\varepsilon \geq 0$*

$$\left(4 - \frac{3(1+\varepsilon)\left(\|k\|_2^2 - k_1^2\right)}{(1+\varepsilon)\|k\|_2^2 - k_1^2}\right)\pi^2 \|u\|_2^2 \leq \|u'\|_2^2 + \frac{3\pi^2\varepsilon(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)\|k\|_2^2 - k_1^2}\langle k, u\rangle^2 \tag{178}$$

όπου

$$k_1 = \sqrt{2}\int_0^1 k(x)sin(\pi x)dx.$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι για $k_1 = 0$ η ανισότητα (178) παίρνει τη μορφή

$$\pi^2 \|u\|_2^2 \leq \|u'\|_2^2 + \frac{3\pi^2\varepsilon}{\|k\|_2^2}\langle k, u\rangle^2 \tag{179}$$

η οποία ικανοποιείται για όλα τα $u \in H_0^2(0,1)$ και για όλα τα $\varepsilon \geq 0$ αφού για κάθε $u \in H_0^2(0,1)$ ισχύει ότι

$$\pi^2 \|u\|_2^2 \leq \|u'\|_2^2. \tag{180}$$

λόγω της ανισότητας Wirtinger. Θα αποδείξουμε την πιο γενική σχέση (178) για κάθε $\varepsilon > 0$. Υποθέτουμε ότι $k_1 \neq 0$. Θεωρούμε τις ορθοκανονικές βάσεις του χώρου $L^2(0,1)$ $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ με $\phi_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$ και $\psi_n(x) = \sqrt{2}\cos(n\pi x)$. Τότε για συνάρτηση $u \in H_0^1(0,1)$ έπεται ότι (Θεώρημα 10.4 Παράρτημα)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}\langle u, \phi_n\rangle\phi_n \tag{181}$$

και

$$u' = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\langle u, \phi_n\rangle\psi_n. \tag{182}$$

Θεωρούμε μη μηδενική συνάρτηση $k \in L^2(0,1)$ για την οποία λόγω της σχέσης (181) και της συνέχειας του εσωτερικού γινομένου ισχύει ότι

$$\langle k, u\rangle = \langle k, \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle u, \phi_n\rangle\phi_n\rangle = \lim_{N\to\infty}\langle k, \sum_{n=1}^{N}\langle u, \phi_n\rangle\phi_n\rangle$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle k, \langle u, \phi_n\rangle\phi_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle k, \phi_n\rangle\langle u, \phi_n\rangle = k_1\langle u, \phi_1\rangle + \sum_{n=2}^{\infty}\langle k, \phi_n\rangle\langle u, \phi_n\rangle \tag{183}$$

αφού

$$\langle k, \langle u, \phi_1\rangle\phi_1\rangle = \langle k, \phi_1\rangle\langle u, \phi_1\rangle = k_1\langle u, \phi_1\rangle.$$

Επιπλέον αφού οι u, u', $k \in L^2(0,1)$ και οι $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ με $\psi_0(x) = 1$ είναι ορθοκανονικές βάσεις του $L^2(0,1)$ με χρήση της ταυτότητας Parseval (Θεώρημα 10.4 Παράρτημα) ισχύουν τα ακόλουθα

$$\|u\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle^2, \quad \|k\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle k, \phi_n \rangle^2$$

και

$$\left\|u'\right\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u', \psi_n \rangle^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi^2 \langle u', \phi_n \rangle^2. \tag{184}$$

Μέσω της σχέσης (183) παρατηρούμε ότι

$$\langle u, \phi_1 \rangle - k_1^{-1} \langle k, u \rangle = -k_1^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} \langle k, \phi_n \rangle \langle u, \phi_n \rangle \tag{185}$$

από την οποία με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz για αθροίσματα έχουμε

$$|\langle u, \phi_1 \rangle - k_1^{-1} \langle k, u \rangle| \leq |k_1|^{-1} \left| \sum_{n=2}^{\infty} \langle k, \phi_n \rangle \langle u, \phi_n \rangle \right| \leq |k_1|^{-1} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \langle k, \phi_n \rangle^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle^2 \right)^{1/2}. \tag{186}$$

Μέσω των (184) η παραπάνω γράφεται ισοδύναμα

$$|\langle u, \phi_1 \rangle - k_1^{-1} \langle k, u \rangle| \leq |k_1|^{-1} \left(\|k\|_2^2 - k_1^2 \right)^{1/2} \left(\|u\|_2^2 - \langle u, \phi_n \rangle^2 \right)^{1/2} \tag{187}$$

αφού

$$\sum_{n=2}^{\infty} \langle k, \phi_n \rangle^2 = \|k\|_2^2 - k_1^2$$

και

$$\sum_{n=2}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle^2 = \|u\|_2^2 - \langle u, \phi_n \rangle^2.$$

Λόγω τριγωνικής ανισότητας ισχύει ότι

$$|\langle u, \phi_1 \rangle| \leq |\langle u, \phi_1 \rangle - k_1^{-1} \langle k, u \rangle| + |k_1|^{-1} |\langle k, u \rangle|. \tag{188}$$

Υψώνοντας την παραπάνω σχέση στο τετράγωνο έπεται ότι

$$|\langle u, \phi_n \rangle|^2 \leq |\langle u, \phi_1 \rangle - k_1^{-1} \langle k, u \rangle|^2 + |k_1|^{-2} |\langle k, u \rangle|^2 + 2 |\langle u, \phi_1 \rangle - k_1^{-1} \langle k, u \rangle| |k_1|^{-1} |\langle k, u \rangle|.$$

Με εφαρμογή της ανισότητας Young

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2 \tag{189}$$

για $a = |k_1|^{-1} |\langle k, u \rangle|$ και $b = |\langle u, \phi_1 \rangle - k_1^{-1} \langle k, u \rangle|$ προκύπτει ότι

$$|\langle u, \phi_1 \rangle|^2 \leq (1 + \varepsilon^{-1}) |\langle u, \phi_1 \rangle - k_1^{-1} \langle k, u \rangle|^2 + (1 + \varepsilon) |k_1|^{-2} |\langle k, u \rangle|^2. \tag{190}$$

Συνδυάζοντας τις ανισότητες (187) και (190) καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα

$$|\langle u, \phi_1 \rangle|^2 \leq \tilde{A}(\varepsilon) \left\| u \right\|_2^2 + \tilde{B}(\varepsilon) |\langle k, u \rangle|^2 \tag{191}$$

όπου

$$\tilde{A}(\varepsilon) := \frac{(1+\varepsilon)\left(\|k\|_2^2 - k_1^2 \right)}{(1+\varepsilon) \|k\|_2^2 - k_1^2} \tag{192}$$

και

$$\tilde{B}(\varepsilon) := \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon) \|k\|_2^2 - k_1^2}. \tag{193}$$

Επιπλέον μέσω των σχέσεων (184) αληθεύει ότι

$$\left\| u' \right\|_2^2 = \pi^2 |\langle u, \phi_1 \rangle|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \pi^2 \langle u, \phi_n \rangle^2 \geq \pi^2 |\langle u, \phi_1 \rangle|^2 + 4\pi^2 \sum_{n=2}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle^2. \tag{194}$$

Δεδομένου ότι

$$\sum_{n=2}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle^2 = \|u\|_2^2 - |\langle u, \phi_1 \rangle|^2$$

τελικά προκύπτει η ανισότητα

$$4\pi^2 \left\| u \right\|_2^2 \leq \left\| u' \right\|_2^2 + 3\pi^2 |\langle u, \phi_1 \rangle|^2. \tag{195}$$

Μέσω των ανισοτήτων (191) και (195) συμπεραίνουμε ότι

$$\left(4 - 3\tilde{A}(\varepsilon) \right) \pi^2 \left\| u \right\|_2^2 \leq \left\| u' \right\|_2^2 + 3\pi^2 \tilde{B}(\varepsilon) \langle k, u \rangle^2. \tag{196}$$

Στην περίπτωση όπου $\varepsilon = 0$ η παραπάνω ανισότητα παίρνει τη συνήθη μορφή της ανισότητας Wirtinger. Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Πρόταση 2. *Υποθέτουμε ότι* $u \in H^1(0,1)$ *με* $u(0)=0$. *Τότε για κάθε* $k \in H^1(0,1)$ *με* $k(0)=0$ *και* $k(1)=1$ *η ακόλουθη ανισότητα ικανοποιείται για κάθε* $\varepsilon \geq 0$

$$\frac{(1+\varepsilon)\|k\|_2^2+(3\varepsilon-1)k_1^2}{(1+\varepsilon)\|k\|_2^2-k_1^2}\pi^2\|u\|_2^2 \leq \left\|u'\right\|_2^2+\frac{3\pi^2\varepsilon(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)\|k\|_2^2-k_1^2}\langle k,u\rangle^2$$

$$+u^2(1)\left(\left\|k'\right\|_2^2+(3\varepsilon-1)\pi^2\|k\|_2^2\right)-2u(1)\left((3\varepsilon-1)\pi^2\langle k,u\rangle+\langle k',u'\rangle\right), \tag{197}$$

όπου

$$k_1=\sqrt{2}\int_0^1 k(x)sin(\pi x)dx.$$

Απόδειξη. Έστω u, $k \in H^1(0,1)$ με $k(0)=0$ και $k(1)=1$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$w := u-u(1)k. \tag{198}$$

Από τον παραπάνω ορισμό είναι άμεσο ότι $w \in H_0^1(0,1)$ αφού $w(0)=w(1)=0$. Επιπλέον $k \in L^2(0,1)$. Ως εκ τούτου οι προϋποθέσεις της Πρότασης 1 ικανοποιούνται και η απεικόνιση w ικανοποιεί την ανισότητα

$$\left(4-3\tilde{A}(\varepsilon)\right)\pi^2\|w\|_2^2 \leq \left\|w'\right\|_2^2+3\pi^2\tilde{B}(\varepsilon)\langle k,w\rangle^2. \tag{199}$$

για κάθε $\varepsilon \geq 0$, όπου οι ποσότητες $\tilde{A}(\varepsilon)$ και $\tilde{B}(\varepsilon)$ δίνονται από τις σχέσεις (192) και (193) αντίστοιχα. Με βάση τον ορισμό (198) της απεικόνισης w ισχύουν τα ακόλουθα

$$\langle k,w\rangle=\langle k,u\rangle-u(1)\langle k,k\rangle=\langle k,u\rangle-u(1)\|k\|_2^2, \tag{200}$$

$$\|w\|_2^2=\int_0^1 w^2(x)dx=\int_0^1 (u(x)-u(1)k(x))^2\,dx$$

$$=\int_0^1 u^2(x)dx+u^2(1)\int_0^1 k^2(x)dx-2u(1)\int_0^1 u(x)k(x)dx$$

$$=\|u\|_2^2+u^2(1)\|k\|_2^2-2u(1)\langle k,u\rangle \tag{201}$$

και

$$\left\|w'\right\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi^2\langle w,\phi_n\rangle^2=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi^2\langle u-u(1)k,\phi_n\rangle^2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi^2\langle u,\phi_n\rangle^2+u^2(1)\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi^2\langle k,\phi_n\rangle^2-2u(1)\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi^2\langle u,\phi_n\rangle\langle k,\phi_n\rangle$$

Παρατηρούμε ότι

$$\langle k',u'\rangle=\langle\sum_{n=1}^{\infty}n\pi\langle k,\phi_n\rangle\psi_n,\sum_{n=1}^{\infty}m\pi\langle u,\phi_m\rangle\psi_m\rangle$$

$$=\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\langle\sum_{n=1}^{N}n\pi\langle k,\phi_n\rangle\psi_n,\sum_{n=1}^{M}m\pi\langle u,\phi_m\rangle\psi_m\rangle$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} \sum_{n=1}^{\min\{N,M\}} n^2\pi^2 \langle k, \phi_n\rangle, \langle u, \phi_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2 \langle k, \phi_n\rangle, \langle u, \phi_n\rangle \tag{202}$$

αποτέλεσμα το οποίο είναι συνέπεια της συνέχειας του εσωτερικού γινομένου και της ορθογωνιότητας των συναρτήσεων $\psi_n(x) = \sqrt{2}\cos(n\pi x)$. Συνεπώς

$$\left\|w'\right\|_2^2 = \left\|u'\right\|_2^2 + u^2(1)\left\|k'\right\|_2^2 - 2u(1)\langle k', u'\rangle. \tag{203}$$

Με βάση την (199) σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα (200), (201) και (203) η ανισότητα (2) αποδεικνύεται άμεσα. $\square$

Πρόταση 3. *Έστω χρόνος $t_{max} \in (0,+\infty]$ και $u \in C^0([0,t_{max}) \times [0,1])$ μία συνάρτηση κλάσης $C^1((0,t_{max});L^2(0,1))$ με $u[t] \in H^2(0,1)$ για όλα τα $t \in [0,t_{max})$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση (5) για $t \in (0,t_{max})$ και τις συνοριακές συνθήκες (6) με το νόμο ελέγχου (10) για $t \in [0,t_{max})$, όπου $k \in C^2([0,1])$ μία συνάρτηση με $k(0)=0$, $k(1)=1$, η οποία ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (11) για $x \in [0,1]$ και για κάποια σταθερά $\mu \in \mathbb{R}$, και $r \in \mathbb{R}$ σταθερά τέτοια ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα (12). Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $F : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ ορίζεται από τη σχέση (7) για μία τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f \in C^0([0,1] \times \mathbb{R})$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (8), (9) για σταθερές $q \in \mathbb{R}$, γ, δ, $B \geq 0$ και $b \geq 2$ με*

$$B \geq \delta |r| \, \|k\|_b \, \|k\|_{\frac{b}{b-1}} \,.$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει σταθερά $\varepsilon \geq 0$ ούτως ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα (13). Τότε υπάρχουν σταθερές G, $\sigma > 0$ (ανεξάρτητες της συνάρτησης u και του χρόνου $t_{max} \in (0,+\infty]$) τέτοιες ώστε η εκτίμηση

$$\|u[t]\|_2 \leq G \exp(-\sigma t) \, \|u[0]\|_2$$

να ικανοποιείται για όλους τους χρόνους $t \in [0,t_{max})$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το συναρτησιακό Lyapunov $V : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ με

$$V(u) := \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \frac{r}{2} \langle k,u \rangle^2, \quad r \in \mathbb{R} \tag{204}$$

για $u \in L^2(0,1)$. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η ανισότητα

$$\frac{1}{2}\left(1 + \min(0,r) \|k\|_2^2\right) \|u\|_2^2 \leq V(u) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \max(0,r) \|k\|_2^2\right) \|u\|_2^2 \tag{205}$$

ικανοποιείται για όλες τις συναρτήσεις $u \in L^2(0,1)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\min(0,r) \|k\|_2^2 \|u\|_2^2 \leq r \langle k,u \rangle^2 \leq \max(0,r) \|k\|_2^2 \|u\|_2^2 \,. \tag{206}$$

Θα εξετάσουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις ($r=0$, $r>0$ και $r<0$).

Περίπτωση 1: Για $r=0$ ισχύει ότι

$$\min(0,r) = \max(0,r) = 0$$

και επομένως η (206) ισχύει ως ισότητα.

Περίπτωση 2: Για $r>0$ ισχύει ότι

$$\min(0,r) = 0 \quad \text{και} \quad \max(0,r) = r.$$

Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz για τις συναρτήσεις $k,\, u \in L^2(0,1)$ αληθεύει ότι

$$\min(0,r)\,\|k\|_2^2\,\|u\|_2^2 = 0 \le r\langle k,u\rangle^2 \le r\,\|k\|_2^2\,\|u\|_2^2 = \max(0,r)\,\|k\|_2^2\,\|u\|_2^2\,. \tag{207}$$

<u>Περίπτωση 3</u>: Για $r<0$ ισχύει ότι

$$\min(0,r) = r \quad \text{και} \quad \max(0,r) = 0.$$

Λόγω του ότι $r<0$ και της ανισότητας Cauchy-Schwarz αληθεύει ότι

$$\max(0,r)\,\|k\|_2^2\,\|u\|_2^2 = 0 \ge r\langle k,u\rangle^2 \ge r\,\|k\|_2^2\,\|u\|_2^2 = \min(0,r)\,\|k\|_2^2\,\|u\|_2^2\,. \tag{208}$$

Συνεπώς σε καθε περίπτωση η ανισότητα (206) ικανοποιείται για όλες τις $u \in L^2(0,1)$ και επομένως και η ανισότητα (205). Παρατηρούμε ότι

$$1+\min(0,r)\,\|k\|_2^2 = \begin{cases} 1>0 & \text{για} \quad r\ge 0 \\ 1+r\,\|k\|_2^2>0 & \text{για} \quad r<0 \end{cases} \tag{209}$$

και

$$1+\max(0,r)\,\|k\|_2^2 = \begin{cases} 1+r\,\|k\|_2^2>0 & \text{για} \quad r>0 \\ 1>0 & \text{για} \quad r\le 0 \end{cases} \tag{210}$$

έφοσον η σταθερά $r \in \mathbb{R}$ είναι επιλεγμένη έτσι ώστε $1+r\,\|k\|_2^2>0$ λόγω υπόθεσης. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν c_1 και c_2 με $c_2 \ge c_1 > 0$ ούτως ώστε

$$c_1\,\|u\|_2^2 \le V(u) \le c_2\,\|u\|_2^2 \tag{211}$$

για όλες τις $u \in L^2(0,1)$. Στο σημείο αυτό θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $F: C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ που ορίζεται από τη σχέση (7) ικανοποιεί τη συνθήκη (36). Έστω $u,\, v \in C^0([0,1])$ και $S \subset \mathbb{R}$ ένα συμπαγές σύνολο. Λόγω του ότι η $f \in C^0([0,1]\times\mathbb{R})$ είναι μία τοπικά Lipschitz συνάρτηση έπεται ότι θα υπάρχει σταθερά $L(S)>0$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} |(F(u))(x)-(F(v))(x)| &= |f(x,u(x))-f(x,v(x))| \\ &\le L(S)|u(x)-v(x)| \end{aligned} \tag{212}$$

για όλα τα $x \in [0,1]$ και $u,\, v \in S$. Από το παραπάνω είναι άμεσο ότι

$$\|F(u)-F(v)\|_\infty \le L(S)\,\|u-v\|_\infty \tag{213}$$

όπου

$$L(S) = \sup_{\substack{w,z\in S \\ w\neq z}} \frac{|f(x,w)-f(x,z)|}{|w-z|}. \tag{214}$$

Με βάση τον παραπάνω ορισμό (214), για δύο σύνολα S_1 και S_2 με $S_1 \subseteq S_2$ θα δείξουμε ότι $L(S_1) \leq L(S_2)$. Υποθέτουμε ότι w, $z \in S_1$ με $w \neq z$. Τότε w, $z \in S_2$ αφού $S_1 \subseteq S_2$ και επιπλέον

$$\frac{|f(x,w)-f(x,z)|}{|w-z|} \leq \sup_{\substack{w,z\in S_2 \\ w\neq z}} \frac{|f(x,w)-f(x,z)|}{|w-z|}. \tag{215}$$

για όλα τα w, $z \in S_2$ με $w \neq z$. Αφού όμως η παραπάνω ανισότητα ικανοποιείται και για τα στοιχεία w, $z \in S_1$ με $w \neq z$ έπεται ότι

$$\sup_{\substack{w,z\in S_1 \\ w\neq z}} \frac{|f(x,w)-f(x,z)|}{|w-z|} \leq \sup_{\substack{w,z\in S_2 \\ w\neq z}} \frac{|f(x,w)-f(x,z)|}{|w-z|} \tag{216}$$

το οποίο υποδηλώνει ότι $L(S_1) \leq L(S_2)$. Στο σημείο αυτό ορίζουμε

$$R := \max(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty) \tag{217}$$

και επιλέγουμε

$$S = \overline{B_R(0)} = \{w(x) \in \mathbb{R} : \|w\|_\infty \leq R\}. \tag{218}$$

Προφανώς λόγω του ορισμού (217) του r οι u, $v \in \overline{B_R(0)}$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\overline{L} : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ με

$$\overline{L}(R) = L(\overline{B_R(0)}) \tag{219}$$

η οποία είναι αύξουσα αφού για κάθε $R_1 < R_2$ (δηλαδή για $\overline{B_{R_1}(0)} \subset \overline{B_{R_2}(0)}$) έπεται ότι $L(\overline{B_{R_1}(0)}) \leq L(\overline{B_{R_2}(0)})$. Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η απεικόνιση $F : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\|F(u) - F(v)\|_\infty \leq \overline{L}(R)\, \|u - v\|_\infty \tag{220}$$

για μία αύξουσα συνάρτηση $\overline{L} : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ και για όλες τις συναρτήσεις u, $v \in C^0([0,1])$ και συνεπώς λόγω του Θεωρήματος 2 έπεται ότι $u \in C^0([0, t_{max}(u_0)) \times [0,1]) \cap C^1((0, t_{max}(u_0)); L^2(0,1))$. Το συμπέρασμα αυτό σε συνδυασμό με τον ορισμό (204) εξασφαλίζει (Θεώρημα 10.1 Παράρτημα) ότι η απεικόνιση $(0, t_{max}(u_0)) \ni t \to V(u[t]) \in \mathbb{R}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη με τη $V(u[t])$ να είναι συνεχής στο σημείο $t = 0$ και επιπλέον να ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(u[t]) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\vartheta}{\vartheta t}(u^2(t,x))dx + r\left(\int_0^1 k(x)u(t,x)dx\right)\left(\int_0^1 k(x)u_t(t,x)dx\right) \\ &= \int_0^1 u(t,x)u_t(t,x)dx + r\left(\int_0^1 k(x)u(t,x)dx\right)\left(\int_0^1 k(x)u_t(t,x)dx\right) \end{aligned}$$

$$= \langle u[t], u_t[t]\rangle + r\langle k, u[t]\rangle\langle k, u_t[t]\rangle \tag{221}$$

για όλους τους χρόνους $t \in (0, t_{max}(u_0))$. Δεδομένου ότι η u ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (5) και τις συνοριακές συνθήκες (6) με το νόμο ελέγχου (10) κάνοντας χρήση της συνθήκης (8), της σχέσης

$$B \geq \delta |r| \left\|k\right\|_b \left\|k\right\|_{\frac{b}{b-1}}$$

και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες ισχύουν τα ακόλουθα

$$\int_0^1 u(t,x)u_t(t,x)dx = p\int_0^1 u(t,x)u_{xx}(t,x)dx + \int_0^1 u(t,x)f(x,u(t,x))dx$$

$$\leq pu(t,1)u_x(t,1) - p\int_0^1 u_x^2(t,x)dx + (q+\gamma)\int_0^1 u^2(t,x)dx - B\int_0^1 |u(t,x)|^b dx$$

$$\leq pu(t,1)u_x(t,1) - p\left\|u_x[t]\right\|_2^2 + (q+\gamma)\left\|u[t]\right\|_2^2 - \delta|r|\left\|k\right\|_b \left\|k\right\|_{\frac{b}{b-1}} \left\|u[t]\right\|_b^b, \tag{222}$$

και

$$r\langle k, u[t]\rangle\langle k, u_t[t]\rangle = r\langle k, u[t]\rangle\left(p\langle k, u_{xx}[t]\rangle + \langle k, F(u[t])\rangle\right)$$

$$= rpk(1)u_x(t,1)\langle k, u[t]\rangle - rp\langle k, u[t]\rangle\langle k', u[t]\rangle + rq\langle k, u[t]\rangle^2 + r\langle k, u[t]\rangle\langle k, F(u[t]) - qu[t]\rangle. \tag{223}$$

Συνεπώς

$$\frac{d}{dt}V(u[t]) \leq pu(t,1)u_x(t,1) - p\left\|u_x[t]\right\|_2^2 + (q+\gamma)\left\|u[t]\right\|_2^2 - \delta|r|\left\|k\right\|_b\left\|k\right\|_{\frac{b}{b-1}}\left\|u[t]\right\|_b^b$$

$$+rpu_x(t,1)\langle k, u[t]\rangle - rp\langle k, u[t]\rangle\langle k', u[t]\rangle + rq\langle k, u[t]\rangle^2 + |r||\langle k, u[t]\rangle||\langle k, F(u[t]) - qu[t]\rangle|. \tag{224}$$

Λόγω της συνθήκης (9) αληθεύει ότι

$$|\langle k, F(u[t]) - qu[t]\rangle| \leq \int_0^1 |k(x)||f(x,u(t,x)) - qu(t,x)|dx$$

$$\leq \gamma\int_0^1 |k(x)||u(x)|dx + \delta\int_0^1 |k(x)||u(x)|^{b-1}dx.$$

Με χρήση των ανισοτήτων Cauchy-Schwarz και Hölder ισχύουν τα εξής

$$\int_0^1 |k(x)||u(x)|dx \leq \left(\int_0^1 k^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 u^2(t,x)dx\right)^{1/2} = \left\|k\right\|_2\left\|u\right\|_2 \tag{225}$$

και

$$\int_0^1 |k(x)||u(x)|^{b-1}dx \leq \left(\int_0^1 |k(x)|^b dx\right)^{\frac{1}{b}}\left(\int_0^1 |u(t,x)|^b dx\right)^{\frac{b-1}{b}} = \left\|k\right\|_b\left\|u\right\|_b^{b-1}. \tag{226}$$

Με βάση τις (225) και (226) λαμβάνουμε

$$|\langle k, F(u[t]) - qu[t]\rangle| \leq \gamma\left\|k\right\|_2\left\|u\right\|_2 + \delta\left\|k\right\|_b\left\|u\right\|_b^{b-1}. \tag{227}$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω με τα αποτελέσματα

$$-rp\langle k,u[t]\rangle\langle k',u_x[t]\rangle = -rp\langle k,u[t]\rangle k'(1)u(t,1) + rp\langle k,u[t]\rangle\langle k'',u[t]\rangle$$

$$= r^2pk'(1)\langle k,u[t]\rangle^2 + rp\mu\langle k,u[t]\rangle^2, \tag{228}$$

και

$$p\left(u(t,1) + r\langle k,u[t]\rangle\right) = 0, \tag{229}$$

απόρροια των (10) και (11), έχουμε ότι

$$\frac{d}{dt}V(u[t]) \leq -p\left\|u_x[t]\right\|_2^2 + (q+\gamma)\left\|u[t]\right\|_2^2 + \left(r^2pk'(1) + rp\mu + rq\right)\langle k,u[t]\rangle^2$$

$$+\gamma|r||\langle k,u[t]\rangle|\left\|k\right\|_2\left\|u[t]\right\|_2 + \delta|r|\left(|\langle k,u[t]\rangle|\left\|u\right\|_b^{b-1} - \left\|k\right\|_{\frac{b}{b-1}}\left\|u[t]\right\|_b^b\right)\left\|k\right\|_b. \tag{230}$$

Με εφαρμογή των ανισοτήτων Cauchy-Schwarz και Hölder αληθεύουν τα ακόλουθα

$$|\langle k,u[t]\rangle| \leq \left\|k\right\|_2\left\|u[t]\right\|_2, \tag{231}$$

$$|\langle k,u[t]\rangle| \leq \left\|k\right\|_{\frac{b}{b-1}}\left\|u[t]\right\|_b \tag{232}$$

και επομένως

$$\frac{d}{dt}V(u[t]) \leq -p\left\|u_x[t]\right\|_2^2 + (q+\gamma(1+|r|\left\|k\right\|_2^2))\left\|u[t]\right\|_2^2 + \left(r^2pk'(1) + rp\mu + rq\right)\langle k,u[t]\rangle^2$$

για όλους τους χρόνους $t \in (0, t_{max}(u_0))$. Παρατηρούμε ότι

$$-\left\|u_x[t]\right\|_2^2 \leq -\left(4 - 3\tilde{A}(\varepsilon)\right)\pi^2\left\|u[t]\right\|_2^2 + 3\pi^2\tilde{B}(\varepsilon)\langle k,u\rangle^2$$

$$+u^2(t,1)\left(\left\|k'\right\|_2^2 + (3\varepsilon-1)\pi^2\left\|k\right\|_2^2\right) - 2u(t,1)\left((3\varepsilon-1)\pi^2\langle k,u\rangle + \langle k',u_x[t]\rangle\right), \tag{233}$$

το οποίο είναι συνέπεια της Πρότασης 2 αφού $u_x \in L^2(0,1)$, και λαμβάνουμε

$$\frac{d}{dt}V(u[t]) \leq +\left(q + \gamma(1+|r|\left\|k\right\|_2^2) - p\tilde{\tilde{A}}(\varepsilon)\pi^2\right)\left\|u[t]\right\|_2^2$$

$$+\left(3p\pi^2\tilde{B}(\varepsilon) + pr^2k'(1) + rp\mu + rq\right)\langle k,u[t]\rangle^2$$

$$+pu^2(t,1)\left(\left\|k'\right\|_2^2 + (3\varepsilon-1)\pi^2\left\|k\right\|_2^2\right) - 2pu(t,1)\left((3\varepsilon-1)\pi^2\langle k,u\rangle + \langle k',u_x[t]\rangle\right) \tag{234}$$

με $\tilde{\tilde{A}}(\varepsilon) = 4 - 3\tilde{A}(\varepsilon)$, για όλα τα $\varepsilon \geq 0$ και για όλους τους χρόνους $t \in (0, t_{max}(u_0))$. Με χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσης, του νόμου ελέγχου (10) καθώς και της σχέσης (11) καταλήγουμε στην ακόλουθη ανισότητα για κάθε $\varepsilon \geq 0$ και $t \in (0, t_{max}(u_0))$

$$\frac{d}{dt}V(u[t]) \leq +\left(q + \gamma(1+|r|\left\|k\right\|_2^2) - p\tilde{\tilde{A}}(\varepsilon)\pi^2\right)\left\|u[t]\right\|_2^2$$

$$+p\left(r^2\left(\left\|k'\right\|_2^2+(3\varepsilon-1)\pi^2\left\|k\right\|_2^2-k'(1)\right)+rg+3\pi^2\tilde{B}(\varepsilon)\right)\langle k,u[t]\rangle^2 \tag{235}$$

με

$$g=2(3\varepsilon-1)\pi^2+\frac{q}{p}-\mu. \tag{236}$$

Ορίζουμε τη σταθερά

$$\phi:=-q-\gamma\left(1+|r|\left\|k\right\|_2^2\right)+p\pi^2\tilde{\tilde{A}}(\varepsilon)$$
$$-p\left\|k\right\|_2^2\max\left(0,r^2\left(\left\|k'\right\|_2^2+(3\varepsilon-1)\pi^2\left\|k\right\|_2^2-k'(1)\right)+rg+3\pi^2\tilde{B}(\varepsilon)\right) \tag{237}$$

η οποία είναι θετική λόγω της σχέσης (13). Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz

$$\langle k,u[t]\rangle\le\left\|k\right\|_2\left\|u\right\|_2 \tag{238}$$

διαπιστώνουμε τελικά ότι

$$\frac{d}{dt}V(u[t])\le-\phi\left\|u[t]\right\|_2^2\le-\frac{\phi}{c_2}V(u) \tag{239}$$

ως συνέπεια της ανισότητας (211). Από το παραπάνω είναι άμεσο ότι

$$V(u[t])\le\exp(-2\sigma(t-t_0))V(u[t_0]) \tag{240}$$

με $\sigma:=\frac{\phi}{2c_2}$, για όλους τους χρόνους $t_0\in(0,t_{max}(u_0))$ και $t\in[t_0,t_{max}(u_0))$. Παίρνοντας το όριο $t_0\to 0^+$ στην παραπάνω σχέση, λόγω συνέχειας της απεικόνισης $t\to V(u[t])$ στο σημείο $t=0$, προκύπτει ότι

$$V(u[t])\le\exp(-2\sigma(t-t_0))V(u[0]) \tag{241}$$

Με βάση την παραπάνω ανισότητα σε συνδυασμό με την ανισότητα (211), καταλήγουμε στην εκτίμηση

$$\left\|u[t]\right\|_2\le G\exp(-\sigma(t-t_0))\left\|u[0]\right\|_2 \tag{242}$$

με σταθερά $G:=\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$ για όλους τους χρόνους $t\in[t_0,t_{max}(u_0))$, γεγονός το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξή μας. □

Πρόταση 4. *Έστω χρόνος $t_{max} \in (0,+\infty]$ και $u \in C^0([0,t_{max}) \times [0,1])$ μία συνάρτηση κλάσης $C^1((0,t_{max}); L^2(0,1))$ με $u[t] \in H^2(0,1)$ για όλα τα $t \in [0,t_{max})$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση (5) για $t \in (0,t_{max})$ και τις συνοριακές συνθήκες (6) με το νόμο ελέγχου (10) για $t \in [0,t_{max})$, όπου $k \in C^2([0,1])$ μία συνάρτηση με $k(0)=0$, $k(1)=1$, η οποία ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (11) για $x \in [0,1]$ και για κάποια σταθερά $\mu \in \mathbb{R}$, και $r \in \mathbb{R}$ σταθερά τέτοια ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα (12). Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $F : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ ορίζεται από τη σχέση (7) για μία τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f \in C^0([0,1] \times \mathbb{R})$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (8), (9) για σταθερές $q \in \mathbb{R}$, γ, δ, $B \geq 0$ και $b \geq 2$ με*

$$B \geq \delta |r| \left\| k \right\|_b \left\| k \right\|_{\frac{b}{b-1}}.$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει σταθερά $\varepsilon \geq 0$ ούτως ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα (13). Στην περίπτωση που $q > 0$, θεωρούμε $B > 0$ και $b > 2$. Τότε για όλους τους χρόνους $t \in [0,t_{max}(u_0))$ ικανοποιείται η ακόλουθη εκτίμηση

$$\left\| u[t] \right\|_\infty \leq \max(\overline{K}, \left\| u_0 \right\|_\infty, G|r| \left\| k \right\|_2 \left\| u_0 \right\|_2) \tag{243}$$

όπου

$$\overline{K} := \begin{cases} (B^{-1}q)^{1/(b-2)} & \text{για} \quad q > 0 \\ 0 & \text{για} \quad q \leq 0 \end{cases}.$$

και $G > 0$ μία θετική σταθερά.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο αποκοπών του Stampacchia καθώς επίσης και το γεγονός ότι για κάθε συνάρτηση $u \in C^0([0,t_{max}(u_0)) \times [0,1]) \cap C^1((0,t_{max}(u_0)); L^2(0,1))$ και για κάθε ολικά Lipschitz συνάρτηση $g \in C^1(\mathbb{R})$ με ολικά Lipschitz παράγωγο $g' \in C^0(\mathbb{R})$, όπου $g' = \dfrac{dg}{du}$, η απεικόνιση h με τύπο

$$h(t) := \int_0^1 g(u(t,x))dx \tag{244}$$

είναι κλάσης $C^0([0,t_{max}(u_0))) \cap C^1((0,t_{max}(u_0)))$ με

$$\dot{h}(t) = \int_0^1 g'(u(t,x))u_t(t,x)dx \tag{245}$$

για $t \in (0,t_{max}(u_0))$. Έστω χρόνος $t_{max} \in (0,+\infty]$ και $u \in C^0([0,t_{max}(u_0)) \times [0,1]) \cap C^1((0,t_{max}(u_0)); L^2(0,1))$ με $u[t] \in H^2(0,1)$ για όλους τους χρόνους $t \in [0,t_{max}(u_0))$, μία απεικόνιση που ικανοποιεί την εξίσωση (5) και τις συνοριακές συνθήκες (6) με το νόμο ελέγχου (10). Ορίζουμε τα ακόλουθα

$$M := \max\{\overline{K}, \left\| u[0] \right\|_\infty, G|r| \left\| k \right\|_2, \left\| u[0] \right\|_2\}, \tag{246}$$

$$T := \sup\left\{ t \in [0,t_{max}(u_0)) : \max_{(s,x)\in[0,t]\times[0,1]}(u(s,x)) < 1 + M \right\}, \tag{247}$$

$$g(s) := \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad s \leq M \\ (s-M)^3 & \text{αν} \quad s \in (M, M+1) \\ 3(s-M)-2 & \text{αν} \quad s \geq M+1 \end{cases} \tag{248}$$

και

$$h(t) := \int_0^1 g(u(t,x))dx. \tag{249}$$

Είναι άμεσο ότι η συνάρτηση $g \in C^1(\mathbb{R})$ με

$$g'(s) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad s \leq M \\ 3(s-M)^2 & \text{αν} \quad s \in (M, M+1) \\ 3 & \text{αν} \quad s \geq M+1 \end{cases} \tag{250}$$

με βάση τον ορισμό (248). Με βάση τη (250) παρατηρούμε ότι για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|g'(s)| \leq 3$ και επομένως η g είναι ολικά Lipschitz. Θα αποδείξουμε τώρα ότι η g' είναι ολικά Lipschitz. Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: Έστω $s_1, s_2 \in (-\infty, M]$. Τότε λόγω της (250) έχουμε ότι

$$|g'(s_1) - g'(s_2)| = 0 \leq 6|s_1 - s_2| \tag{251}$$

Το συμπέρασμα αυτό ισχύει και για κάθε $s_1, s_2 \in [M+1, +\infty)$.

Περίπτωση 2: Έστω $s_1, s_2 \in (M, M+1)$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} |g'(s_1) - g'(s_2)| &= 3\left[(s_1-M)^2 + (s_2-M)^2\right] \\ &= 3\,(s_1-s_2)\,(s_1+s_2-2M) \leq 6|s_1-s_2|. \end{aligned} \tag{252}$$

Περίπτωση 3: Έστω $s_1 \in (-\infty, M]$ και $s_2 \in (M, M+1)$. Τότε

$$\begin{aligned} |g'(s_1) - g'(s_2)| &= 3|s_2 - M|^2 \\ &\leq 3(s_2-s_1)(s_2-M) \leq 3(s_2-s_1) \leq 6|s_1-s_2|. \end{aligned} \tag{253}$$

Περίπτωση 4: Έστω $s_1 \in (M, M+1)$ και $s_2 \in [M+1, +\infty)$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} |g'(s_1) - g'(s_2)| &= 3|(s_1-M)^2 - 1| \\ &= 3|s_1 - M + 1||s_1 - M - 1| \end{aligned}$$

$$\le 3\left(|s_1 - M| + 1\right)\left(M + 1 - s_1\right)$$

$$\le 6(s_2 - s_1) = 6|s_1 - s_2|. \tag{254}$$

Σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι για κάθε $s_1,\, s_2 \in \mathbb{R}$ ότι

$$|g'(s_1) - g'(s_2)| \le= 6|s_1 - s_2| \tag{255}$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι η g' είναι ολικά Lipschitz. Επομένως η απεικόνιση $h \in C^0([0, t_{max}(u_0))) \cap C^1((0, t_{max}(u_0)))$ με παράγωγο που δίνεται από τη σχέση (245). Θεωρούμε το σύνολο

$$\Lambda = \left\{ t \in [0, t_{max}(u_0)) : \max_{(s,x)\in[0,t]\times[0,1]} (u(s,x)) < 1 + M \right\}. \tag{256}$$

Δεδομένου ότι η $u \in C^0([0, t_{max}(u_0)) \times [0,1])$ έπεται ότι θα είναι συνεχής σε κάθε συμπαγές σύνολο $[0,t] \times [0,1])$ όπου $t \in [0, t_{max}(u_0))$ και θα λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της σε αυτό. Συνεπώς η συνάρτηση

$$\phi(t) := \max_{(s,x)\in[0,t]\in[0,1]} (u(s,x)) \tag{257}$$

είναι καλά ορισμένη και συνεχής για κάθε $t \in [0, t_{max}(u_0))$. Λόγω του ότι

$$\max_{x\in[0,1]} ((u[0])(x)) \le \|u[0]\|_\infty \le M < M + 1 \tag{258}$$

το σύνολο (256) είναι μη κενό. Αφού επιπλέον το Λ είναι και άνω φραγμένο έπεται ότι ο χρόνος (247) είναι καλά ορισμένος. Δεδομένου ότι $\Lambda \subseteq [0, t_{max}(u_0))$, ισχύει ότι

$$\sup \Lambda \le t_{max}(u_0) \tag{259}$$

και επομένως $T \in (0, t_{max}(u_0)]$. Λόγω του ορισμού (247) του χρόνου T ισχύει ακόμη ότι

$$u(s,x) < 1 + M \tag{260}$$

για κάθε $(s,x) \in [0,T) \times [0,1]$. Στην περίπτωση που $T < t_{max}(u_0)$ ισχύουν τα ακόλουθα.

<u>Περίπτωση 1</u>: Αν $t \in [0,T)$ τότε λόγω συνέχειας της u έχουμε ότι

$$u(T,x) = \lim_{t\to T^-} u(t,x) \le 1 + M \tag{261}$$

για κάθε $x \in [0,1]$ και επομένως

$$\max_{x\in[0,1]} (u(T,x)) \le 1 + M. \tag{262}$$

<u>Περίπτωση 2</u>: Αν $t \in (T, t_{max}(u_0))$ τότε

$$\max_{(s,x)\in[T,t]\times[0,1]} (u(s,x)) \ge 1 + M, \tag{263}$$

για κάθε $x \in [0,1]$, από το οποίο λόγω συνέχειας της u έπεται ότι

$$\max_{x\in[0,1]}(u(T,x)) = \lim_{t\to T^+}\left(\max_{(s,x)\in[T,t]\times[0,1]}(u(s,x))\right) \geq 1+M \tag{264}$$

Επομένως αν $T < t_{max}(u_0)$ τότε

$$\max_{x\in[0,1]}(u(T,x)) = 1+M. \tag{265}$$

Στο σημείο αυτό θα αποδείξουμε ότι $T = t_{max}(u_0)$. Δείξαμε ότι η απεικόνιση $h \in C^0([0,t_{max}(u_0)))\cap C^1((0,t_{max}(u_0)))$ όπως ορίστηκε από τη σχέση (249). Με βάση τις σχέσεις (5), (7) και (245) η παράγωγος της h στο διάστημα $(0,T)$ δίνεται από τη σχέση

$$\dot{h}(t) = p\int_0^1 g'(u(t,x))u_{xx}(t,x)dx + \int_0^1 g'(u(t,x))f(x,u(t,x))dx \tag{266}$$

για $t \in (0,T)$. Αφού η απεικόνιση u ικανοποιεί την εκτίμηση (14) λόγω της Πρότασης 3, με χρήση του νόμου ελέγχου (10) και του ορισμού (1) της σταθεράς M ισχύει ότι

$$\begin{aligned} u(t,1) &\leq |r||\langle k,u[t]\rangle| \leq |r|\,\|k\|_2\,\|u[t]\|_2 \\ &\leq G|r|\,\|k\|_2\,\|u[0]\|_2\exp(-\sigma t) \leq M \end{aligned} \tag{267}$$

για όλους τους χρόνους $t \in (0,T)$. Από την παραπάνω ανισότητα και τη σχέση (250) αληθεύει ότι

$$g'(u(t,0)) = g'(u(t,1)) = 0 \tag{268}$$

αφού $g'(s) = 0$ για κάθε $s \in (-\infty,M]$ και $0,\ u(t,1) \in (-\infty,M]$. Είναι άμεσο ότι ο περιορισμός της συνάρτησης g στο διάστημα $(-\infty,M+1)$ είναι κλάσεως C^2 με

$$g''(s) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad s \leq M \\ 6(s-M) & \text{αν} \quad s \in (M,M+1) \end{cases} \tag{269}$$

Επιπλέον λόγω του ότι $u(t,x) \in (-\infty,M+1)$ για κάθε $(t,x) \in [0,T)\times[0,1]$ και του γεγονότος ότι η απεικόνιση $u[t] \in H^2(0,1)$ για όλους τους χρόνους $t \in [0,t_{max}(u_0))$ είναι δυνατή η εφαρμογή παραγοντικής ολοκλήρωσης στη σχέση (266). Συνεπώς έχουμε ότι

$$\dot{h}(t) = -p\int_0^1 g''(u(t,x))(u_x(t,x))^2dx + \int_0^1 g'(u(t,x))f(x,u(t,x))dx \tag{270}$$

για $t \in (0,T)$. Δεδομένου ότι $g''(s) \geq 0$ για κάθε $s \in (-\infty,M+1)$ και αφού $u(t,x) \in (-\infty,M+1)$ για όλα τα ζεύγη $(t,x) \in [0,T)\times[0,1]$, αληθεύει ότι

$$\int_0^1 g''(s)(u_x(t,x))^2 \geq 0 \quad \text{για} \quad t \in (0,T) \tag{271}$$

και κατά συνέπεια

$$\dot{h}(t) \leq \int_0^1 g'(u(t,x))f(x,u(t,x))dx \tag{272}$$

με $t \in (0,T)$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\dot{h}(t) \leq 0 \tag{273}$$

για κάθε $t \in (0,T)$. Γνωρίζουμε ότι $u(t,x) \in (-\infty, M+1)$ για όλα τα ζεύγη $(t,x) \in [0,T) \times [0,1]$. Παρατηρούμε ότι για όλα τα ζεύγη $(t,x) \in [0,T) \times [0,1]$ για τα οποία $u(t,x) \in (-\infty, M]$, ισχύει ότι

$$g'(u(t,x)) = 0 \tag{274}$$

λόγω της (250) και συνεπώς η (273) ισχύει. Θα αποδείξουμε το αποτέλεσμα αυτό και για τα $(t,x) \in [0,T) \times [0,1]$ για τα οποία $u(t,x) \in (M, M+1)$. Αρχικά για κάθε $u(t,x) \in (M, M+1)$ είναι άμεσο ότι

$$g'(u(t,x)) > 0 \tag{275}$$

λόγω της (250). Θα δείξουμε ότι

$$f(x, u(t,x)) \leq 0 \tag{276}$$

για όλα τα $(t,x) \in [0,T) \times [0,1]$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $(t',x') \in [0,T) \times [0,1]$ με $u(t',x') \in (M, M+1))$ ούτως ώστε

$$f(x', u(t',x')) > 0. \tag{277}$$

Λόγω υπόθεσης υπάρχουν σταθερές $q \in \mathbb{R}$, γ, δ, $B \geq 0$ και $b \geq 2$ τέτοιες ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα

$$u(f(x', u(t',x')) - qu(t',x')) \leq \gamma u^2(t',x') - B|u(t',x')|^b. \tag{278}$$

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση όπου $q > 0$. Με βάση την παραπάνω ανισότητα και λόγω του ότι $f(t',x') > 0$ ισχύει ότι

$$-qu^2(t',x')) \leq \gamma u^2(t',x') - B|u(t',x')|^b \tag{279}$$

από την οποία με βάση τον ορισμό των σταθερών $\overline{K}$, M και του γεγονότος ότι $u(t',x') > 0$ είναι άμεσο ότι

$$B^{-1}q \geq u^{b-2}(t',x') - B^{-1}\gamma \geq u^{b-2}(t',x') \tag{280}$$

και συνεπώς

$$u(t',x') \leq \overline{K} \leq M \tag{281}$$

το οποίο είναι αντίφαση, αφού $u(t',x') \in (M, M+1)$. Στην περίπτωση όπου $q \leq 0$ έχουμε ότι

$$0 \geq qu^2(t',x') \geq Bu^b(t',x') - \gamma u^2(t',x') \geq Bu^b(t',x') \tag{282}$$

το οποίο οδηγεί σε αντίφαση, αφού $u(t',x') > 0$ (και συνεπώς $u^b(t',x') > 0$). Σε κάθε περίπτωση λοιπόν η σχέση (273) ικανοποιείται. Λόγω του ότι η απεικόνιση h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,T)$ και συνεχής στο $[0, t_{max}(u_0))$ ολοκληρώνοντας κατά μέλη τη (273) προκύπτει ότι

$$h(t) \leq h(0) \tag{283}$$

με

$$h(0) = \int_0^1 g(u(0,x))dx = 0 \tag{284}$$

αφού

$$u(0,x) \leq |u(0,x)| \leq \|u[0]\|_\infty \leq M. \tag{285}$$

Η σχέση (283) συνδυασμό με τις σχέσεις (284), (249) και (248) εγγυάται ότι

$$u(t,x) \leq M \tag{286}$$

για όλα τα ζεύγη $(t,x) \in [0,T) \times [0,1]$. Διότι αν υπήρχε κάποιο ζεύγος $(t_\xi, x_\xi) \in [0,T) \times [0,1]$ με $u(t_\xi, x_\xi) \in (M, M+1)$ τότε με βάση τη σχέση (250) θα είχαμε ότι

$$\int_0^1 (u(t_\xi, x_\xi) - M)^3 dx > 0 \tag{287}$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με τις (283) και (284). Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω στην περίπτωση που ισχύει ότι $T < t_{max}(u_0)$ ισχύει ότι

$$\max_{x\in[0,1]}(u(T,x)) = 1 + M.$$

Λόγω της σχέσης (286) και της συνέχειας της απεικόνισης u ισχύει ότι

$$u(T,x) = \lim_{t\to T^-}(u(t,x)) \leq M \tag{288}$$

για κάθε $x \in [0,1]$, από το οποίο έπεται ότι

$$1 + M = \max_{x\in[0,1]}(u(T,x)) \leq M \tag{289}$$

κάτι άτοπο. Συνεπώς $T = t_{max}(u_0)$ και $u(t,x) \leq M$ για όλα τα $(t,x) \in [0, t_{max}(u_0)) \times [0,1]$. Με παρόμοια ανάλυση μπορεί να αποδειχτεί ότι $u(t,x) > -M$ για όλα τα $(t,x) \in [0, t_{max}(u_0)) \times [0,1]$. Αφού $|u(t,x)| \leq M$ τελικά

$$\|u[t]\|_\infty \leq M \tag{290}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξή μας. □

Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 3 και 4 καθώς και το Θεώρημα 2 διατυπώνουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4. *Θεωρούμε το σύστημα κλειστού βρόγχου (5), (6), με νόμο ελέγχου (10), όπου* $k \in C^2([0,1])$ *μία συνάρτηση με* $k(0) = 0$, $k(1) = 1$ *η οποία ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση*

$$k''(x) = \mu k(x)$$

για $x \in [0,1]$ *και για κάποια σταθερά* $\mu \in \mathbb{R}$. *Οι σταθερές* $p > 0$, $r \in \mathbb{R}$ *είναι τέτοιες ώστε*

$$1 + \|k\|_2^2 r > 0,$$

και η απεικόνιση $F : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ *ορίζεται από τη σχέση (7) για μία τοπικά Lipschitz συνάρτηση* $f \in C^0([0,1] \times \mathbb{R})$ *η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (8), (9) για σταθερές* $q \in \mathbb{R}$, γ, δ, $B \geq 0$ *και* $b \geq 2$ *με*

$$B \geq \delta |r| \, \|k\|_b \, \|k\|_{\frac{b}{b-1}} \,. \tag{291}$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει μία σταθερά $\varepsilon \geq 0$ *ούτως ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα (12). Στην περίπτωση που ισχύει ότι* $q > 0$ *θεωρούμε ότι* $B > 0$ *και* $b > 2$. *Τότε για κάθε* $u_0 \in H^2(0,1)$ *με* $u_0(0) = 0$ *και* $u_0(1) = -r\langle k, u_0 \rangle$, *υπάρχει μοναδική απεικόνιση* $u \in C^0(\mathbb{R}_+ \times [0,1]) \cap C^1((0,+\infty); L^2(0,1))$ *με* $u[0] = u_0$, $u[t] \in H^2(0,1)$ *για όλους τους χρόνους* $t \geq 0$, *η οποία ικανοποιεί την εξίσωση (5) για όλους τους χρόνους* $t > 0$ *και τις σχέσεις (6), (10) για όλους τους χρόνους* $t \geq 0$. *Επιπλέον υπάρχουν σταθερές* G, $\sigma > 0$ *τέτοιες ώστε οι εκτιμήσεις*

$$\|u[t]\|_2 \leq G \exp(-\sigma t) \, \|u[0]\|_2 \,,$$

και

$$\|u[t]\|_\infty \leq \max\{\overline{K}, \|u_0\|_\infty, G|r| \, \|k\|_2 \, \|u_0\|_2\}$$

να ισχύουν για όλους τους χρόνους $t \geq 0$, *με τη σταθερά* $\overline{K}$ *να ορίζεται από τη σχέση (17). Τέλος, η απεικόνιση* $t \to \|u_x[t] + rku[t]\|_2^2$ *είναι κλάσεως* C^1 *στο* $\mathbb{R}_+$ *και η ακόλουθη εξίσωση ικανοποιείται για όλους τους χρόνους* $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u_x[t] + rku[t]\|_2^2 &= -2p \left\| u_{xx}[t] + rku_x[t] + rk'u[t] \right\|_2^2 \\ &\quad - 2\langle K\overline{F}(u[t]) + pGu[t], u_{xx}[t] + rku_x[t] + rk'u[t] \rangle \end{aligned} \tag{292}$$

όπου οι $K, G : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ *είναι συνεχείς γραμμικοί τελεστές οι οποίοι ορίζονται από τις σχέσεις*

$$(Ku)(x) = u(x) + r \int_0^x k(s)u(s)ds, \tag{293}$$

$$(Gu)(x) = -2rk'u(x) + r \int_0^x k''(s)u(s)ds \tag{294}$$

για όλες τις συναρτήσεις $u \in L^2(0,1)$ *και για όλα τα* $x \in [0,1]$.

Με βάση όλα τα παραπάνω είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της εργασίας.

8 Απόδειξη βασικού θεωρήματος ευστάθειας

Απόδειξη του θεωρήματος 1. Με χρήση της τριγωνικής ανισότητας και της συνέχειας των τελεστών $K, G : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ που δίνονται από τις σχέσεις (293) και (294) για όλες τις συναρτήσεις $w \in C^0([0,1])$ έχουμε ότι

$$\|KF(u) + pGu\|_2 \leq \|K\|_2 \|F(u)\|_2 + p \|G\|_2 \|u\|_2 \tag{295}$$

όπου

$$\|G\|_2 = \sup\{\|Gv\|_2 : v \in L^2(0,1), \|v\|_2 = 1\}$$

και

$$\|K\|_2 = \sup\{\|Kv\|_2 : v \in L^2(0,1), \|v\|_2 = 1\}.$$

Λόγω του ότι η απεικόνιση f ικανοποιεί τη συνθήκη (9) παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_2^2 &= \int_0^1 |f(x,u)|^2 dx \leq \int_0^1 (|f(x,u) - qu| + |q||u|)^2 dx \\ &\leq \int_0^1 \left(|q| + \gamma + \delta |u|^{b-2}\right)^2 u^2(x) dx \leq \left(|q| + \gamma + \delta \|u\|_\infty^{b-2}\right)^2 \|u\|_2^2 \end{aligned} \tag{296}$$

και συνεπώς

$$\|KF(u) + pGu\|_2 \leq \left(p \|G\|_2 + \|K\|_2 \left(|q| + \gamma + \delta \|u\|_\infty^{b-2}\right)\right) \|u\|_2 \tag{297}$$

για όλες τις $w \in C^0([0,1])$. Ορίζουμε την απεικόνιση $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ με τύπο

$$g(s) := p \|G\|_2 + \|K\|_2 \left(|q| + \gamma + \delta s^{b-2}\right) \tag{298}$$

η οποία είναι αύξουσα αφού

$$g'(s) = (b-2)\delta \|K\|_2 s^{b-3} \geq 0. \tag{299}$$

Θεωρούμε επιπλέον $u_0 \in H^2(0,1)$ με $u_0(0) = 0$, $u_0(1) = -r\langle k, u_0\rangle$ και τη μοναδική απεικόνιση $u \in C^0(\mathbb{R}_+ \times [0,1]) \cap C^1((0,+\infty); L^2(0,1))$ με u_0, $u[t] \in H^2(0,1)$ για όλους τους χρόνους $t \geq 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση (5) για $t > 0$ και τις συνοριακές συνθήκες (6) με νόμο ελέγχου (10) για $t \geq 0$. Η απεικόνιση αυτή πράγματι υπάρχει και είναι μοναδική λόγω του Θεωρήματος 4. Κάνοντας χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz μέσω των σχέσεων (292), (297) και (299) παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \|u_x[t] + rku[t]\|_2^2 \leq -2p \left\|u_{xx}[t] + rku_x[t] + rk'u[t]\right\|_2^2 \\ &+ 2 \left\|K\overline{F}(u[t]) + pGu[t]\right\|_2 \left\|u_{xx}[t] + rku_x[t] + rk'u[t]\right\|_2 \\ &\leq -2p \left\|u_{xx}[t] + rku_x[t] + rk'u[t]\right\|_2^2 \\ &+ 2g(\|u[t]\|_\infty) \left\|u_{xx}[t] + rku_x[t] + rk'u[t]\right\|_2 \|u[t]\|_2 . \end{aligned} \tag{300}$$

Με εφαρμογή της ανισότητας Young παρατηρούμε ότι

$$2g(\|u[t]\|_\infty)\left\|u_{xx}[t]+rku_x[t]+rk'u[t]\right\|_2\|u[t]\|_2 \leq$$
$$p\left\|u_{xx}[t]+rku_x[t]+rk'u[t]\right\|_2^2+\frac{1}{p}\left(g(\|u[t]\|_\infty)\right)^2\|u[t]\|_2^2 \tag{301}$$

και επομένως

$$\frac{d}{dt}\|u_x[t]+rku[t]\|_2^2 \leq -p\left\|u_{xx}[t]+rku_x[t]+rk'u[t]\right\|_2^2+\overline{g}(\|u[t]\|_\infty)\|u[t]\|_2^2, \tag{302}$$

όπου $\overline{g}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ είναι μία απεικόνιση με τύπο

$$\overline{g}(s)=\frac{1}{p}(g(s))^2 \tag{303}$$

για $s\geq 0$. Η $\overline{g}$ είναι μία άυξουσα συνάρτηση λόγω του ότι η g είναι αύξουσα όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Στο σημείο αυτό ορίζουμε την απεικόνιση

$$\phi(x):=u_x(t,x)+rk(x)u(t,x) \tag{304}$$

για $t\geq 0$ και $x\in[0,1]$. Λόγω του ότι $u\in H^2(0,1)$ και $k\in C^2([0,1])$ με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz για αθροίσματα αληθεύουν τα ακόλουθα

$$\int_0^1\phi^2(x)dx=\int_0^1\left(u_x(t,x)+rk(x)u(t,x)\right)^2dx$$
$$\leq\int_0^1\left(1+r^2k^2(x)\right)\left(u_x^2(t,x)+u^2(t,x)\right)dx\leq\left(1+r^2M_k^2\right)\left(\int_0^1u_x^2(t,x)dx+\int_0^1u^2(t,x)dx\right)<+\infty \tag{305}$$

και

$$\int_0^1\phi_x^2(x)dx=\int_0^1\left(u_{xx}(t,x)+rk'(x)u(t,x)+rk(x)u_x(t,x)\right)^2dx$$
$$\leq\int_0^1\left(1+r^2(k'(x))^2+r^2k^2(x)\right)\left(u_{xx}^2(t,x)+u^2(t,x)+u_x^2(t,x)\right)dx$$
$$\leq\left(1+r^2M_{k'}^2+r^2M_k^2(x)\right)\left(\int_0^1u_{xx}^2(t,x)dx+\int_0^1u^2(t,x)dx+\int_0^1u_x^2(t,x)dx\right)<+\infty, \tag{306}$$

όπου

$$M_k:=\max_{x\in[0,1]}\left(|k(x)|\right) \tag{307}$$

και

$$M_{k'}:=\max_{x\in[0,1]}\left(|k'(x)|\right). \tag{308}$$

Το παραπάνω αποδεικνύει ότι $\phi\in H^1(0,1)$. Επιπλέον λόγω των σχέσεων (6) με νόμο ελέγχου (10) ισχύει ότι

$$\int_0^1\phi(x)dx=\int_0^1u_x(t,x)dx+r\int_0^1k(x)u(t,x)dx$$

$$= u(t,1) - u(t,0) + r\langle k, u[t]\rangle = 0. \tag{309}$$

Με βάση τα παραπάνω αν ορίσουμε την απεικόνιση

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(\frac{x}{2\pi}) \tag{310}$$

για κάθε $x \in [0, 2\pi]$, παρατηρούμε ότι η $\tilde{\phi}$ είναι 2π-περιοδική με

$$\tilde{\phi}'(x) = \frac{1}{2\pi}\phi'(\frac{x}{2\pi}) \in L^2(0, 2\pi) \tag{311}$$

και επομένως (Θεώρημα 10.8 Παράρτημα) ικανοποιείται η ακόλουθη ανισότητα

$$\int_0^{2\pi} \tilde{\phi}^2(x)dx \leq \int_0^{2\pi} (\tilde{\phi}'(x))^2 dx \tag{312}$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$\int_0^{2\pi} (\phi'(\frac{x}{2\pi}))^2 dx \geq 4\pi^2 \int_0^{2\pi} \phi^2(\frac{x}{2\pi})dx. \tag{313}$$

Από την παραπάνω σχέση εφαρμόζοντας την αλλαγή μεταβητής

$$\frac{x}{2\pi} \to x$$

άμεσα προκύπτει ότι

$$\left\|\phi'\right\|_2^2 \geq 4\pi^2 \left\|\phi\right\|_2^2. \tag{314}$$

Λόγω των σχέσεων (302) και (314) ισχύει ότι

$$\frac{d}{dt}\left\|u_x[t] + rku[t]\right\|_2^2 \leq -4p\pi^2 \left\|u_x[t] + rku[t]\right\|_2^2 + \overline{g}(\left\|u[t]\right\|_\infty)\left\|u[t]\right\|_2^2 \tag{315}$$

για $t \geq 0$. Η παραπάνω σχέση σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα

$$\left\|u[t]\right\|_\infty \leq M \quad \text{και} \quad \left\|u[t]\right\|_2 \leq G\exp(-\sigma t)\left\|u[0]\right\|_2$$

μας οδηγεί στην ακόλουθη ανισότητα

$$\frac{d}{dt}\left\|u_x[t] + rku[t]\right\|_2^2 \leq -4p\pi^2 \left\|u_x[t] + rku[t]\right\|_2^2 + G^2\overline{g}(M)\exp(-2\sigma t)\left\|u[0]\right\|_2^2 \tag{316}$$

για $t \geq 0$, όπου M η σταθερά που ορίζεται από τη σχέση (246). Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\sigma < 2\pi^2 p$. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα

$$\frac{d}{dt}\left(\exp(4p\pi^2 t)\left\|u_x[t] + rku[t]\right\|_2^2\right) \leq G^2\overline{g}(M)\exp(2(2\pi^2 p - \sigma)t)\left\|u[0]\right\|_2^2. \tag{317}$$

από την οποία έπεται ότι

$$\left\|u_x[t] + rku[t]\right\|_2^2 \leq \left\|u_x[0] + rku[0]\right\|_2^2 \exp(-4p\pi^2 t) + G^2\overline{g}(M)\left(\frac{\exp(-2\sigma t) - \exp(-4p\pi^2 t)}{2(2\pi^2 p - \sigma)}\right)\left\|u[0]\right\|_2^2$$

$$\leq \exp(-2\sigma t)\left(\|u_x[0]+rku[0]\|_2^2+\frac{G^2\overline{g}(M))}{2(2\pi^2 p-\sigma)}\|u[0]\|_2^2\right). \tag{318}$$

Κάνοντας χρήση της ανισότητας

$$\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b},\quad a,b\geq 0 \tag{319}$$

με

$$a=\|u_x[0]+rku[0]\|_2^2\quad \text{και}\quad b=\frac{G^2\overline{g}(M))}{2(2\pi^2 p-\sigma)}\|u[0]\|_2^2$$

λαμβάνουμε

$$\|u_x[t]+rku[t]\|_2\leq\exp(-\sigma t)\left(\|u_x[0]+rku[0]\|_2+\tilde{g}(M)\|u[0]\|_2\right) \tag{320}$$

όπου η απεικόνιση $\tilde{g}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ με τύπο

$$\tilde{g}(s):=G\sqrt{\frac{\overline{g}(s))}{2(2\pi^2 p-\sigma)}} \tag{321}$$

για $s\geq 0$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση. Με χρήση τριγωνικής ανισότητας και της συνέχειας της απεικόνισης $k\in C^2([0,1])$ έχουμε ότι

$$\|u_x[t]\|_2\leq\|u_x[t]+rku[t]\|_2+|r|\,\|k\|_\infty\|u[t]\|_2\,, \tag{322}$$

$$\|u_x[0]+rku[0]\|_2\leq\|u_x[0]\|_2+|r|\,\|k\|_\infty\|u[0]\|_2 \tag{323}$$

τα οποία σε συνδυασμό με τη σχέση (320) οδηγούν τελικά στο αποτέλεσμα

$$\|u_x[t]\|_2\leq\exp(-\sigma t)\left(\|u_x[0]\|_2+\psi(M)\|u[0]\|_2\right)\quad \text{για}\quad t\geq 0,$$

όπου η απεικόνιση $\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ με τύπο

$$\psi(s):=\tilde{g}(s)+(1+G)|r|\,\|k\|_\infty \tag{324}$$

για $s\geq 0$, είναι μία αύξουσα συνάρτηση. Τέλος λόγω της ανισότητας Agmon

$$\|u[t]\|_\infty\leq\sqrt{2}\sqrt{\|u[t]\|_2\,\|u_x[t]\|_2} \tag{325}$$

για κάθε $u\in H^1(0,1)$ με $u(t,0)=0$, και των εκτιμήσεων

$$\|u[t]\|_2\leq G\exp(-\sigma t)\|u[0]\|_2\quad \text{και}\quad \|u_x[t]\|_2\leq\exp(-\sigma t)\left(\|u_x[0]\|_2+\psi(M)\|u[0]\|_2\right)$$

καταλήγουμε στην εκτίμηση

$$\|u[t]\|_\infty\leq\sqrt{2G}\exp(-\sigma t)\sqrt{\|u[0]\|_2\left(\|u_x[0]\|_2+\psi(M)\|u[0]\|_2\right)}$$

για όλους τους χρόνους $t\geq 0$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

9 Επίλογος

Στην εργασία αυτή προτάθηκε ένας γραμμικός συνοριακός νόμος ελέγχου ο οποίος αποδεικνύει ολικά αποτελέσματα ευστάθειας για μία συγκεκριμένη κατηγορία συστημάτων και για συγκεκριμένες νόρμες, τα οποία μοντελοποιούνται από παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις αντίδρασης-διάχυσης. Από την πολυπλοκότητα της ανάλυσης έγινε αντιληπτό ότι σε αντίθεση με τις περιπτώσεις συστημάτων ελέγχου πεπερασμένης διάστασης, στα απειροδιάστατα συστήματα δεν είναι πάντοτε δυνατός ο σχεδιασμός ενός συναρτησιακού ελέγχου Lyapunov το οποίο να εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσεων για όλους τους χρόνους καθώς επίσης και ολικά αποτελέσματα ευστάθειας. Σε πολλές περιπτώσεις είναι απαραίτητη περαιτέρω ανάλυση για την εύρεση κατάλληλων φραγμάτων που να εγγυώνται την ύπαρξη της λύσεως του συστήματος ελέγχου για όλους τους χρόνους καθώς επίσης και τη σημειακή σύγκλιση της λύσης σε ένα επιθυμητό σημείο ισορροπίας.

10 Παράρτημα

Θεώρημα 10.1 (Κανόνας Leibniz). *Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις με τύπους $f(x,t)$ και $\frac{\vartheta f}{\vartheta t}(x,t)$ είναι συνεχείς στο ορθογώνιο $[a,b] \times [c,d]$. Έστω $x_1(t)$ και $x_2(t)$ παραγωγίσμες συναρτήσεις στο $[c,d]$ με τιμές στο $[a,b]$. Τότε η συνάρτηση F με τύπο*

$$F(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x,t)dx$$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[c,d]$ και ισχύει

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\vartheta f}{\vartheta t}(x,t)dx + f(x_2(t),t)\frac{dx_2(t)}{dt} - f(x_1(t),t)\frac{dx_1(t)}{dt}.$$

Θεώρημα 10.2 (Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$ με $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \tag{326}$$

Θεώρημα 10.3 (Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach). *Έστω X ένας πλήρης μετρικός χώρος και $S : X \to X$ τέτοια ώστε*

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq kd(v_1,v_2) \quad \text{για κάθε } v_1,\, v_2 \in X \text{ με } k < 1. \tag{327}$$

Τότε η S έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $u = Su$.

Θεώρημα 10.4. *Έστω H χώρος Hilbert και (ϕ_n) μία ορθοκανονική ακολουθία του H. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*

(i) Η ακολουθία (ϕ_n) είναι ορθοκανονική βάση.

(ii) Αν $\langle u, \phi_n\rangle = 0$ για κάθε $n = 1,2,...$ τότε $u = 0$.

(iii) $u = \sum_{n=1}^{\infty}\langle u, \phi_n\rangle\phi_n$ για κάθε $u \in H$.

(iv) $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, \phi_n\rangle|^2$ για κάθε $u \in H$.

Θεώρημα 10.5 (Κριτήριο Weierstrass (Weierstrass M-test)). *Έστω μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει θετικός αριθμός M_n τέτοιος ώστε*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in D$$

Αν η αριθμητική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα και απολύτως στο σύνολο D.

Θεώρημα 10.6 (Θεώρημα Συνέχειας συνάρτησης). *Έστω $f_n : D \to \mathbb{R}$ ακολουθίες συνεχών συναρτήσεων στο σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση f, η f είναι συνεχής στο D.*

Θεώρημα 10.7 (Θεώρημα Παραγώγισης Σειράς). *Έστω $f_n : I \to \mathbb{R}$ ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε ένα διάστημα I το οποίο περιέχει το διάστημα $[a,b]$ τέτοια ώστε*
(i) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ συγκλίνει για κάποιο $x_0 \in [a,b]$ και
(ii) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση $h(x)$ στο διάστημα $[a,b]$.
Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.
(1) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $[a,b]$ και
(2) $f'(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Θεώρημα 10.8. *Έστω ϕ μία 2π-περιοδική συνάρτηση με $\phi' \in L^2(0,2\pi)$ για την οποία ισχύει ότι*

$$\int_0^1 \phi(x)dx = 0. \tag{328}$$

Τότε αληθεύει η ακόλουθη ανισότητα

$$\int_0^{2\pi} \phi^2(x)dx < \int_0^{2\pi} (\phi'(x))^2 dx \tag{329}$$

με εξαίρεση την περίπτωση όπου η ϕ είναι της μορφής

$$\phi(x) = A\cos(x) + B\sin(x). \tag{330}$$

Το ακόλουθο θεώρημα διατυπώνεται στο [4].

Θεώρημα 10.9. *Έστω $p > 0$ μία θετική σταθερά. Για κάθε $w_0 \in C^2([0,1])$, ορίζουμε το σύνολο $\Phi(w_0) \subseteq C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ να είναι το μη κενό σύνολο για το οποίο η εξίσωση*

$$w_t = pw_{xx} \tag{331}$$

όπου $(t,x) \in (0,+\infty) \times (0,1)$, με συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} w(t,0) &= d_0(t), \\ w(t,1) &= d_1(t), \end{aligned} \tag{332}$$

όπου $(d_0,d_1) \in \Phi(w_0)$, και αρχική συνθήκη $w_0 \in C^2([0,1])$ έχει μία μοναδική λύση $w \in C^0(\mathbb{R}_+ \times [0,1]) \cap C^1((0,+\infty) \times [0,1])$ με $w[t] \in C^2([0,1])$ για όλους τους χρόνους $t \geq 0$ και $w(0,x) = w_0(x)$ για όλα τα $x \in [0,1]$. Τότε για κάθε $w_0 \in C^2([0,1])$ και $(d_0,d_1) \in \Phi(w_0)$, η μοναδική λύση $w \in C^0(\mathbb{R}_+ \times [0,1]) \cap C^1((0,+\infty) \times [0,1])$ της εξίσωσης (331) με τις συνοριακές συνθήκες (332) και αρχική συνθήκη $w_0 \in C^2([0,1])$ ικανοποιεί την ακόλουθη εκτίμηση για όλους τους χρόνους $t \geq 0$ και για όλα τα $\sigma \in (0, \alpha\pi^2)$, $\theta \in (0, \pi - \phi)$ με $\phi := \sqrt{\frac{\sigma}{\alpha}}$

$$\max_{0 \leq z \leq 1} \left(\frac{\sin(\theta + \phi)|w(t,x)|}{\sin(\theta + x\phi)} \right)$$

$$\leq \max\left(\exp(-\sigma t)\max_{0\leq z\leq 1}\left(\frac{\sin(\theta+\phi)|w(0,x)|}{\sin(\theta+x\phi)}\right), \frac{\sin(\theta+\phi)}{\sin(\theta)}\max_{0\leq s\leq t}(|d_0(s)|), \max_{0\leq s\leq t}(|d_1(s)|)\right). \quad (333)$$

Ειδικότερα, αν επιλέξουμε $\sigma = \alpha(\pi - 2\theta)^2$ *και* $\theta = \pi/4$ *λαμβάνουμε την εκτίμηση*

$$\max_{0\leq x\leq 1}(|w(t,x)|) \leq \sqrt{2}\max\left(\exp\left(-\frac{p\pi^2 t}{4}\right)\max_{0\leq x\leq 1}(|w(0,x)|), \max_{0\leq s\leq t}(|d_0(s)|), \max_{0\leq s\leq t}(|d_1(s)|)\right). \quad (334)$$

Αναφορές

[1] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[3] I.Karafyllis and M.Krstic, "Global stabilization of a class of nonlinear reaction-diffusion partial differential equations by boundary feedback", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 57, 2019, pp. 3723-3748.

[4] I.Karafyllis and M.Krstic, "ISS in different norms for 1-D parabolic PDEs with boundary disturbances", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 55, 2017, pp. 1716-3748.

[5] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2nd edition, Springer, 1997.

[6] Θεμιστοκλής Ρασσιάς, *Μαθηματική Ανάλυση Ι*, Εκδόσεις Συμεών.

[7] Θεμιστοκλής Ρασσιάς, *Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ*, Εκδόσεις Συμεών.